

جامعة دمشق

كلية العلوم

قسم الرياضيات

دراسة لبعض التقريبات الطيفية العددية التي تعاني من
ظاهرة جبس

*A Study for Some Spectral Numerical
Approximations that suffer of Gibbs
phenomenon*

أطروحة أعدت لنيل درجة الماجستير في التحليل العددي

إشراف

د. د. برانت صبري مطيط

إعداد

م. رباب مروان عبد المعطي

جامعة دمشق
كلية العلوم
قسم الرياضيات

دراسة لبعض التقريبات الطيفية العددية التي تعاني من ظاهرة جيبس

*A Study for Some Spectral Numerical
Approximations t at suffer of Gibbs phenomenon*

أطروحة أعدت لنيل درجة الماجستير في التحليل العددي

بإشراف
د. برانت صبري مطيط

إعداد
م. رباب مروان عبد المعطي

١٤٣٣هـ - ٢٠١٢م

إهداء

إلى الكلمة الصادقة في قاموس وجودي
والدعوة المباركة التي أظلتني في مسيرتي
إلى من أدين لهما بالفضل ما حييت

والداي

إلى من اختلطت دمائي بدمائهم فشاركوني أفراحي وأحزاني
وعرفت بينهم سرّ سعادتي وهنائي

إخوتي

إلى من قلبت معهم صفحات كتي ودفاتري
وقضيت بصحبته أجمل أيام حياتي

صديقاتي

.. كلمة شكر ..

بدأت رسالتي بفضل من الله ورعايته، وخططت فصولها وحروفها بتوفيق منه وهدايته، فله الحمد تعالى حين البدء وفي

كل حال حتى النهاية

لا يسعني في هذه اللحظة وقد وفقني الله لإتمام هذا العمل إلا أن أرفع أسمى آيات الشكر والعرفان:

إلى من أغنتني بسعة علمها وتعهديني بوافر نصحتها وأعطتني جل وقتها . . .

إلى من أوقدت في داخلي روح العزيمة والإصرار . . .

الدكتورة: برلنت مطيط

إلى الذين يؤدون دوراً هاماً في نجاح هذا العمل . . .

إلى الذين شرفتهم أعضاء في لجنة التحكيم والمناقشة . . .

الدكتور

الأستاذ الدكتور:

خالد حلاوة

محمد صبح

إلى الروضة الغناء التي نرکت بأطيب العلوم وأحلاها، ففاضت بكل الخير والعطاء . . .

السادة أعضاء الهيئة التدريسية في قسم الرياضيات

الفهرس

iv	تمهيد
v	مخطط الأطروحة
	الفصل الأول: المقدمة
١	١-١. اكتشاف ظاهرة جيس
٢	٢-١. الجهود المبذولة للتخلص من ظاهرة جيس
	الفصل الثاني: دراسة مرجعية في التقريبات الطيفية العددية وظاهرة جيس
٤	١-٢. مبادئ أساسية
٤	١-١-٢. فضاء الجداء الداخلي وفضاء هيلبرت
٥	٢-١-٢. الفضاء $L^p_\omega[-1,1]$
٧	٣-١-٢. معدل التقارب
٨	٤-١-٢. التابع الغماوي
٩	٥-١-٢. توابع بسل
٩	٦-١-٢. الالتفاف
١٠	٧-١-٢. التكاملات العددية
١١	٨-١-٢. الحدوديات المتعامدة المنظمة
١٢	١-٨-١-٢. مسألة ليوفيل شتورم
٢٢	٩-١-٢. الحدوديات المثلثية و تقريب فورييه
٢٣	١-٩-١-٢. تقريب فورييه المستمر
٢٥	٢-٩-١-٢. تقارب متسلسلة فورييه
٣٤	٢-٢. التقريبات الطيفية العددية
٤١	٣-٢. ظاهرة جيس
٤١	١-٣-٢. تابع الإشارة
٤٦	٢-٣-٢. التفسير الرياضي لظاهرة جيس

	الفصل الثالث: اكتشاف حواف تابع
٥١	١-٣. تحديد مواقع نقاط انقطاع تابع باستخدام الطريقة التقليدية
٥٢	١-١-٣. تحليل تابع
٥٣	٢-١-٣. الطريقة التقليدية (تحويل هيلبرت)
٥٩	٢-٣. اكتشاف مواقع الانقطاع باستخدام نوى التمرکز
٦٢	١-٢-٣. أمثلة على نوى التمرکز
٦٢	١-١-٢-٣. نواة ديرخلية المرافقة
٦٣	٢-١-٢-٣. النوى المتذبذبة (معاملات التمرکز العامة)
	الفصل الرابع: طرائق التخلص من ظاهرة جيس
٦٨	١-٤. الترشيح الطيفي
	٢-٤. طرائق إعادة البناء الطيفي
٨٤	١-٢-٤. إعادة الإسقاط الطيفي (الطريقة المباشرة)
١٠٢	٢-٢-٤. إعادة البناء العكسي
١٠٣	١-٢-٢-٤. الطريقة العكسية لإعادة البناء الموضعي
	٣-٤. إعادة البناء الكسري
١٠٧	١-٣-٣. التقريبات الكسرية
١٠٧	٢-٣-٣. طرائق بادي لإعادة البناء الكسري
١٠٧	١-٢-٣-٣. تقريب بادي
١٠٨	٢-٢-٣-٣. المفهوم الكلاسيكي لتقريب بادي
١٠٩	٣-٢-٣-٣. تقريب بادي فورييه (PF)
١١١	٤-٢-٣-٣. تقريب بادي فورييه الشاذ (SPF)
١١٣	١-٤-٢-٣-٣. خوارزمية تقريب فورييه بادي الشاذ
١١٧	٥-٢-٣-٣. تقريب بادي تشيشف الشاذ (SPC)
	الفصل الخامس: جودة طرائق التخلص من ظاهرة جيس
١٢٢	١-٥. مقارنة
	٢-٥. الترشيح الطيفي

١٢٣	٥-٢-١. محاسن الترشيح الطيفي
١٢٣	٥-٢-٢. مساوئ الترشيح الطيفي
	٥-٣. إعادة الإسقاط الطيفي
١٢٧	٥-٣-١. الطريقة المباشرة
١٢٧	٥-٣-١-١. محاسن الطريقة المباشرة
١٢٨	٥-٣-١-٢. مساوئ الطريقة المباشرة
	٥-٣-٢. الطريقة العكسية
١٣٣	٥-٣-٢-١. محاسن الطريقة العكسية
١٣٤	٥-٣-٢-٢. مساوئ الطريقة العكسية
	٥-٤. إعادة البناء الكسري (طرائق بادی)
١٣٤	٥-٤-١. محاسن طرائق إعادة البناء
١٣٦	٥-٤-٢. مساوئ طرائق إعادة البناء
١٣٨	نتائج وتوصيات ومقترحات
١٣٩	ملحق (١) الخوارزميات
١٥١	ملحق (٢) دليل المصطلحات العلميّة
١٥٥	المراجع

تمهيد

تُعد التقريبات الطيفية العددية من المواضيع الهامة جداً في العلوم التطبيقية والهندسية وذلك للدقة الأسية التي تتمتع بها عند تقريب التوابع المستمرة ، إلا أنّ هذه الدقة تتغير وبشكل سلبي عند تقريب توابع مستمرة قطعياً، الأمر الذي عُرف باسم ظاهرة جيبس، وقد اعتُبر التخلص من الأثر السلبي لهذه الظاهرة واحداً من المواضيع التي نالت اهتماماً بالغاً من العلماء في نهاية القرن العشرين وبداية القرن الحادي والعشرين.

قمنا في أطروحتنا هذه بدراسة للتقريبات الطيفية العددية التي تعاني من ظاهرة جيبس، وأبرز صفوف الطرائق المستخدمة للتقليل أو التخلص من هذه الظاهرة ، كما قدمنا برمجة لهذه الظاهرة ولطريقة الترشيح وتقريب بادي تشيشف المستخدمين في التقليل من الأثر السلبي لهذه الظاهرة.

ونظراً لتعدد الطرائق المستخدمة للتخلص من ظاهرة جيبس فقد قمنا بتقديم دراسة لجودة هذه الطرائق بُغية تسهيل اختيار الطريقة المناسبة على المستخدم حيثُ بينّا محاسن ومساوئ كل طريقة من الطرق ووضحنا معظم المحاسن والمساوئ من خلال تطبيقها على التوابع العددية كما قمنا بعرض جدول قدمنا من خلاله مقارنة بين أساسيات ومتطلبات الطرائق المتبعة للتخلص أو التخفيف من الأثر السلبي لظاهرة جيبس.

بالإضافة إلى ذلك قمنا خلال عرضنا للطرائق المستخدمة في التخلص من الأثر السلبي وعند دراستنا لجودة هذه الطرائق بتقديم مقارنات بيانية لتوضيح الخوارزميات التي اتبعناها والدقة التي تتمتع بها كل منها.

مخطط الأطروحة

نخصص أطروحتنا هذه لدراسة التقريبات الطيفية العددية التي تعاني من ظاهرة جيس، وذلك لأن التخلص من ظاهرة جيس التي تعاني منها التوابع المستمرة قطعياً يؤدي إلى استعادة الدقة الطيفية لهذه التقريبات.

ونعرض دراستنا هذه وفق المخطط الآتي:

نعرض في الفصل الأول لمحة تاريخية موجزة عن اكتشاف ظاهرة جيس ، والجهود المبذولة حتى يومنا هذا للتخلص من هذه الظاهرة.

أما الفصل الثاني فيتضمن دراسة مرجعية تتضمن بعض المفاهيم الأساسية التي تتمحور في ثلاثة أقسام أساسية:

يتضمن القسم الأول دراسة لبعض المفاهيم الأساسية في التحليل الرياضي الحقيقي والدالي والعددي مثل فضاء هيلبرت، والحدوديات المتعامدة المنظمة، والحدوديات المثلثية وتقريب فورييه.

في حين نخصص القسم الثاني للحديث عن التقريبات الطيفية العددية المستخدمة في حل المعادلات التفاضلية الجزئية.

أما القسم الثالث فنقدم فيه دراسة رياضية لظاهرة جيس التي تبرز عند تقريب تابع مستمر قطعي بواحد من التقريبات الطيفية العددية.

نقوم في الفصل الثالث بشرح مفهوم اكتشاف حواف التابع الذي لابدّ منه عند التخلص من ظاهرة جيس وتقديم عدد من الخوارزميات اللازمة للقيام بذلك.

ومن ثم نعرض في الفصل الرابع، الذي يعتبر جوهر أطروحتنا، دراسة تحليلية عددية لأبرز صفوف الطرائق المستخدمة في التقليل أو التخلص من الأثر السلبي لظاهرة جيس التي تعاني منها التقريبات الطيفية للتوابع الملساء قطعياً والتي تتمحور حول ثلاثة صفوف:

الصف الأول: الترشيح الطيفي.

الصف الثاني: طرائق إعادة الإسقاط بنوعها إعادة الإسقاط المباشر وغير المباشر (العكسي) .

الصف الثالث: إعادة البناء الكسري (طرائق بادي لإعادة البناء).

أمّا الفصل الخامس والأخير فقد قمنا فيه بتقديم مقارنة بيانية وعددية بين صفوف الطرائق التي درسناها ، كما أوضحنا في هذا البحث من الأطروحة محاسن ومساوئ كل صف من هذه الصفوف بُغية التسهيل على المستخدم اختيار الطريقة التي تناسبه.

تجدر الإشارة إلى أنّ جميع الخطوط البيانية قد تمّ رسمها اعتماداً على برنامج الـ *Mathematica7.0*.

الفصل الأول

المقدمة



Michelson



Joseph Gibbs

١-١. اكتشاف ظاهرة جيبس [1, 2]:

تُعتبر ظاهرة جيبس واحدة من أبرز العيوب التي تعاني منها الخطوط البيانية للمجاميع الجزئية المنتهية الموافقة للمتسلسلات المستخدمة في التقريبات الطيفية للتتابع التي تعاني من انقطاع. لوحظت هذه الظاهرة لأول مرة عام ١٨٩٨م من قبل عالم الفيزياء الأمريكي *Michelson* وذلك عندما قام بتصميم آلة ميكانيكية، أطلق عليها اسم المحلل الهرموني، تمكننا من رسم الخطوط البيانية للتتابع لدى تخزين معاملات فورييه الموافقة لهذه التتابع في نوابض هذه الآلة وذلك بالاعتماد على قانون هوك (*Hook's law*) ثم بعد ذلك قام بنشر مقالة يصف من خلالها هذه الآلة وأرفق هذا الوصف بعدد من الخطوط البيانية للتتابع الناتجة عن هذه الآلة عند إدخال معاملات فورييه الموافقة لهذه التتابع إلا أنّ أحد التتابع التي اختارها *Michelson*، كمثال في مقالته، عانى من ظاهرة غريبة إذ كان للخط البياني الناتج نتوءات عند نقاط الانقطاع في حين أنّ هذه النتوءات لم تكن موجودة في الخط البياني الأصلي للتابع الأمر الذي سبّب الحيرة لـ *Michelson* واعتقد أنّ ذلك ناتج عن خطأ ميكانيكي فيزيائي مما دفعه لإرسال رسالة إلى صديقه العالم الفيزيائي الرياضي جوزيف جيبس لسؤاله عن رأيه في ما لاحظته. والجدير بالذكر أنّ *Michelson* لم يلاحظ هذه الظاهرة إلا بعد مرور عدة أشهر من نشره لمقالته فقام إثر ذلك بإرسال رسالة إلى المجلة البريطانية *Nature*، نُشرت في العدد الموافق لـ ٦ أكتوبر ١٨٩٨م، وضح فيها صعوبة بناء التابع $f(x) = x$ انطلاقاً من معرفة معاملات فورييه الموافقة له وأورد كذلك مناقشة رياضية بيّن فيها أنّ متتالية مجاميع فورييه الموافقة لهذا التابع، $f_N(x_N)$ ، حيث

$x_N = \pi \left(1 - \frac{k}{N}\right)$ ، تتقارب إلى قيم مختلفة باختلاف k والمثير للدهشة أنه في العدد التالي من المجلة (العدد الموافق لـ ٨ أكتوبر ١٨٩٨م) نشر العالم الرياضي *A.E.H. Love* رسالة هاجم فيها *Michelson* مشيراً إلى الضعف الرياضي الذي عانت منه مناقشته دون أن يُعير أي انتباه إلى الصعوبة التي واجهها *Michelson* في تفسير الظاهرة الغريبة التي تعاني منها آلتة. وبعد مضي عدة أشهر وتحديداً في ٢٩ ديسمبر عام ١٨٩٨م قام محرر مجلة *Nature* بنشر ثلاث رسائل:

الأولى كانت من *Michelson* أشار فيها أن التقارب من وجهة نظره يجب أن يكون منتظماً في جوار نقاط الانقطاع.

أما الرسالة الثانية فقد كانت من *Gibbs* وقدم فيها تفسيراً رياضياً لهذه الظاهرة على أنها ناتجة عن التقارب غير المنتظم لمتتالية المجاميع الجزئية لمتسلسلات فورييه في جوار نقاط الانقطاع وادّعى في هذه الرسالة أن هذه التذبذبات تسعى إلى الصفر عندما تكون N كبيرة جداً!! وأتت رسالة جيبس برسالة **ثالثة** من الرياضي *Love* شرح فيها مفهوم التقارب بانتظام وأشار إلى أن المسألة قد تكون كما أشار إليها *Michelson*، وتجدر الإشارة إلى أن هذا الجدل حول هذه المسألة لم ينته إلا في ٢٧ إبريل عام ١٨٩٩م وذلك عندما أرسل *Gibbs* إلى ذات المجلة معتذراً عن الخطأ الذي ارتكبه نتيجة الإهمال ووضح أن التذبذبات تسعى إلى قيمة ثابتة عندما تكون N كبيرة جداً.

أطلق على هذه الظاهرة اسم **ظاهرة جيبس** لأول مرة عام ١٩٠٦م من قبل العالم *Bocher* وذلك حين قام بدراسة وتعميم النتائج التي حصل عليها جيبس وذلك في كتابه:

"Introduction to the theory of Fourier series"

ونشير إلى أن ظاهرة جيبس قد درست في عشرينيات القرن الماضي من أجل العديد من التقريبات مثل التقريب باستخدام توابع بسل الذي درس من قبل العالمين *Cook & Wilton*.

١-٢. الجهود المبذولة للتخلص من الأثر السلبي لظاهرة جيبس:

من الجدير بالذكر أن محاولات العلماء للتخلص من الأثر السلبي لظاهرة جيبس لم تتأخر بالظهور فقد كانت المحاولة الأولى للعالم الهنغاري فيجر *Fejer* وذلك عام ١٩٠٠م.

إلا أن المحاولات الجدية برزت في نهاية القرن العشرين وذلك بظهور صفيين من الطرائق للتخفيف من أثر هذه الظاهرة، عُرف الصف الأول من هذه الطرائق باسم **تقنيات الترشيح الطيفي** *Spectral filtering* وتعتبر المقالات التي نشرها كل من العالمين (*Sarra, Vandeven*) هي أبرز ما قُدم في هذا الصف من الطرائق فقد نشر *Vandeven* عام ١٩٩١ بحثاً بعنوان:

"Family of spectral filters for discontinuous problems"

في حين نشر Sarra في عام ٢٠٠٦م مقالة بعنوان:

"Digital Total Variation filtering as Postprocessing for Chebyshev pseudospectral methods for conservation Laws"

أما الصف الآخر الذي تزامن ظهوره مع هذا الصف فقد أُطلق على مجموع طرائقه اسم طرائق

إعادة الإسقاط *Reprojection Methods* والجدير بالذكر أنّ هذه الطرائق تُقسم إلى قسمين:

القسم الأول: طرائق الإسقاط المباشر والتي تمّ اكتشافها وتطويرها على يد كل من العالمين

(Gottlieb, Shu) وذلك في المقالات التي نشرها في الأعوام ١٩٩٤، ١٩٩٥، ١٩٩٦، ١٩٩٧م

وقد كانت المقالة الأخيرة التي نشرت عام ١٩٩٧م بعنوان:

"On the Gibbs Phenomenon and its resolution"

أبرز ما نشر في هذا المجال.

القسم الثاني: طرائق الإسقاط غير المباشر التي اكتُشفت و طُوّرت من قبل العالمين

(Jung, Shizgal) وذلك في أبحاثهما المنشورة في الأعوام ٢٠٠٣، ٢٠٠٤، ٢٠٠٥م هذا وقد

كان البحث المنشور في عام ٢٠٠٥م بعنوان:

"Inverse polynomial Reconstruction of Two Dimensional Fourier Images"

من أهم الأبحاث في هذا القسم.

هذا وقد شهدت بدايات القرن الحادي والعشرين صفاءً ثالثاً من الطرائق المستخدمة في التقليل من

أثر ظاهرة جيبس أطلق على طرائقه اسم طرائق إعادة البناء الكسري وقد ابتدأت هذه الطرائق

بخوارزمية بادي التي نشرت عام ٢٠٠١م في البحث الذي كتبه العالمين (Fornberg, Driscoll)

والذي حمل عنوان:

"A Pade - based algorithm for overcoming the Gibbs phenomenon"

وتلا ذلك عدد من المقالات طورت هذا الصف من الطرق كتبت على يد العالمين

(Hesthaven, Kaber) وتُعتبر المقالة التي نُشرت في عام ٢٠٠٨م والتي كانت بعنوان:

"Pade - Jacobi approximants"

أشهر هذه المقالات.

الفصل الثاني

دراسة مرجعية في التقريبات الطيفية العددية وظاهرة جيس

لأبْدَ لنا قبل الحديث عن التقريبات الطيفية العددية التي تعاني من ظاهرة جيس من تقديم دراسة مرجعية تتضمن بعض المفاهيم الأساسية التي تتمحور في ثلاثة أقسام أساسية:

القسم الأول: يتضمن دراسة لبعض المفاهيم الأساسية في التحليل الرياضي الحقيقي والدالي والعددي مثل فضاء هيلبرت، والحدوديات المتعامدة المنظمة، والحدوديات المثلثية وتقريب فورييه.

القسم الثاني: نتحدث فيه عن التقريبات الطيفية العددية المستخدمة في حل المعادلات التفاضلية الجزئية.

القسم الثالث: نقدم فيه دراسة رياضية لظاهرة جيس التي تبرز عند تقريب تابع مستمر قطعياً بواحد من التقريبات الطيفية العددية.

٢-١. مبادئ أساسية:

نُقدم في هذا الجزء من بحثنا بعض التعاريف الأساسية التي لا غنى عنها قبل استعراض الطرائق الطيفية العددية.

٢-١-١. فضاء الجداء الداخلي وفضاء هيلبرت [3]:

تعريف (٢-١):

ليكن H فضاءً متجهياً فوق حقل الأعداد الحقيقية، عندئذٍ يُعرف الجداء الداخلي على H بأنه تطبيق

$$(\cdot, \cdot): H \times H \rightarrow \mathbb{R}$$

يحقق الشروط التالية أيّاً يكن $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ & $u, v, w \in H$

$$(u, u) \geq 0 \quad .1$$

$$(u, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0 \quad .2$$

$$(u, v) = (v, u) \quad .3$$

$$(\alpha u + \beta v, w) = \alpha(u, w) + \beta(v, w) \quad .4$$

تعريف (٢-٢):

يُقال عن العنصرين $u, v \in H$ أنهما متعامدان في H إذا تحققت العلاقة:

$$(u, v) = 0$$

يُحدّد الجداء الداخلي (.,.) نظيماً على H يُعرّف بالمساواة:

$$\|u\| = \sqrt{(u, u)} \quad \forall u \in H \quad \dots (٢-١)$$

وتُعرّف المسافة بين عنصرين $u, v \in H$ على أنّها العدد الموجب $\|u + v\|$ ، وهي تحقق متراجحة المثلث أي:

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| \quad \forall u, v \in H \quad \dots (٢-٢)$$

تعريف (٣-٢) (متتالية كوشي):

يُقال عن المتتالية $\{u_k\}_{k \geq 0}$ أنّها متتالية كوشي في H إذا تحقق:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon); \quad \|u_k - u_m\| \leq \varepsilon \quad \forall k, m \geq N$$

تعريف (٤-٢) (الفضاء التام):

يُقال عن فضاء الجداء الداخلي أنّه تام إذا كانت كل كوشية فيه متقاربة فيه.

تعريف (٥-٢):

يُقال عن المتتالية $\{u_k\}_{k \geq 0}$ في H أنّها متقاربة إلى $u \in H$ إذا تحقق:

$$\|u_k - u\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

تعريف (٦-٢):

ليكن H فضاءً متجهياً مزوداً بالجداء الداخلي (.,.)، عندئذٍ ندعو هذا الفضاء بفضاء هيلبرت إذا كان تاماً بالنسبة للنظيم $\|\cdot\|$.

كما وتتحقق في فضاء هيلبرت H متراجحة أساسية وواسعة الاستخدام في التحليل العددي تسمى متراجحة كوشي شفارتز (Cauchy Schwarz):

$$|(u, v)| \leq \|u\| \cdot \|v\| \quad \forall u, v \in H \quad \dots (٢-٣)$$

٢-١-٢. الفضاء $L^p_\omega[-1, 1]$ [4]:

تعريف (٧-٢) (قياس لوبيغ الخارجي):

يُعرّف قياس لوبيغ الخارجي على المجموعة $X = (a, b)$ على أنّه التابع

$$\mu: 2^X \rightarrow [0, +\infty]$$

$$\mu(A) = \inf \sum_{n=0}^N |I_n|$$

حيثُ:

2^X مجموعة أجزاء X ، $A \subseteq \bigcup_{n=0}^N I_n$ ، I_n مجال مفتوح، $|I_n|$ طول المجال I_n

تعريف (٢-٨) (المجموعة القابلة للقياس):

بفرض $A \subseteq (a, b)$ ولتكن $A^c = \{x \in (a, b); x \notin A\}$ متممة A بالنسبة إلى (a, b) ، عندئذٍ يُقال عن المجموعة A أنها قابلة للقياس إذا تحقق:

$$\mu(A) + \mu(A^c) = \mu((a, b)) = b - a$$

تعريف (٢-٩) (الدالة الدرجية):

يُقال عن الدالة $f: (a, b) \rightarrow [0, +\infty)$ أنها دالة درجة إذا كانت مجموعة قيمها منتهية وموجبة. بفرض f دالة درجة، يُقال عن هذه الدالة أنها قابلة للقياس إذا كانت كل مجموعة

$$A_i = \{x \in (a, b); f(x) = s_i\}$$

قابلة للقياس، حيث $\{s_0, s_1, \dots, s_n\}$ مجموعة قيم الدالة f .

تعريف (٢-١٠) (الدالة القابلة للقياس):

يُقال عن الدالة $u: (a, b) \rightarrow [0, +\infty)$ أنها قابلة للقياس إذا كانت نهاية لمتتالية من الدوال الدرجة القابلة للقياس.

وعندئذٍ فإننا نستطيع أن نقول عن أي دالة حقيقية $u: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ أنها قابلة للقياس إذا كان كل من جزئها الموجب $u^+ = \max\{u, 0\}$ والسالب $u^- = \max\{-u, 0\}$ قابلاً للقياس.

تعريف (٢-١١) (الفضاء $L^P_\omega[-1, 1]$):

يُرمز بـ $L^P_\omega[-1, 1]$ لفضاء التوابع

$$u: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$$

القابلة للقياس والتي تحقق $\int_a^b |u(x)|^P \omega(x) dx < \infty$ ، حيث $\omega(x)$ تابع وزن على المجال

$[-1, 1]$ أي أنه تابع مستمر وموجب تماماً وقابل للمكاملة على المجال $[-1, 1]$.

إنّ الفضاء $L^P_\omega[-1, 1]$ هو فضاء هيلبرت وذلك من أجل الجداء الداخلي المعرّف بالعلاقة:

$$(u, v) = \int_a^b u(x)v(x)\omega(x) dx$$

كما أنّه فضاء منتظم يُعرف التنظيم فيه بالمساواة:

$$\|u\|_{L^P_\omega(a, b)} = \left(\int_a^b |u(x)|^P \omega(x) dx \right)^{1/P}; 1 \leq P < \infty \quad \dots (٢-٤)$$

وبناءً عليه فإنّ الفضاء $L^P_\omega[-1, 1]$ هو فضاء هيلبرت وذلك من أجل الجداء الداخلي المعرّف بالعلاقة

$$(u, v) = \int_a^b u(x)v(x)\omega(x) dx$$

بالإضافة إلى أنه فضاء منتظم وفق النظيم:

$$\|u\|_{L^2_\omega(a,b)} = \left(\int_a^b |u(x)|^2 \omega(x) dx \right)^{1/2}$$

تعريف (٢-١٢) (الفضاء $L^\infty[-1,1]$):

يُعرّف الفضاء $L^\infty[-1,1]$ على أنه فضاء الدوال $u: (a,b) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ القابلة للقياس والمحدودة تقريباً في كل مكان في (a,b) ، (أي خارج مجموعة قياسها الصفر).

بفرض M أصغر عدد حقيقي يتحقق من أجله $|u| \leq M$ خارج مجموعة قياسها الصفر عندئذٍ يُعرّف النظيم على الفضاء $L^\infty[-1,1]$ بالعلاقة:

$$\|u\|_{L^\infty[-1,1]} = M \quad \dots (٢-٥)$$

ويُبرهن على أنه إذا كان التابع u مستمراً على المجال $[a,b]$ فإنّ النظيم في الفضاء $L^\infty[-1,1]$ يصبح بالشكل:

$$\|u\|_{L^\infty[-1,1]} = \max_{x \in (a,b)} |u(x)|$$

وفي الحالة الخاصة التي يكون فيها $P=2$ نحصل على فضاء الدوال القابلة للمكاملة تربيعياً وهو الفضاء الذي سنعتمده في معظم بحثنا هذا.

ترميزات:

يُرمز بـ

$C(a,b)$ لصف التتابع المستمرة على المجال (a,b) .

$C^P(a,b)$ لصف التتابع القابلة للمفاضلة باستمرار حتى المرتبة P على المجال (a,b) .

$C^\infty(a,b)$ لصف التتابع القابلة للمفاضلة باستمرار عدداً لا نهائياً من المرات.

٢-١-٣. معدل التقارب (Rate of Convergence): [5,6]

تعريف (٢-١٣):

بفرض لدينا المتتالية $\{\alpha_n\}_{n \geq 1}$ التي تتقارب إلى عدد ما وليكن x ، يُقال عن هذه المتتالية أنها

تتقارب إلى x بمعدل تقارب $O\left(\frac{1}{n^P}\right)$ حيث $P \geq 1$ إذا وجد عدد $K > 0$ بحيث يتحقق:

$$|\alpha_n - x| \leq K \left(\frac{1}{n^P} \right)$$

٢-١-٢-١. أنواع التقارب (Types of Convergence):

تعريف (٢-١٤) (الدليل الجبري للتقارب):

يُقال عن أكبر عدد k يحقق العلاقة

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| n^k < \infty$$

حيث a_n معاملات متسلسلة ما إنّه الدليل الجبري للتقارب.

تعريف (٢-١٥) (التقارب الأسّي أو الطيفي):

يُقال عن المتسلسلة التي يكون الدليل الجبري لتقاربها غير محدود أنّها تتمتع بخاصية التقارب الطيفي أو الأسّي (*Exponential or Spectral Convergence*).

من الواضح أنّه إذا كان الدليل الجبري غير محدود فإنّ معاملات المتسلسلة a_n تتناقص بسرعة أكبر من تناقص المتتالية $\left(\frac{1}{n}\right)^k$ وذلك من أجل كل k محددة (منتهية) وهذا بالضبط ما تعنيه خاصية التقارب الطيفي لمتسلسلة ما.

تُصنّف المتسلسلات التي معاملاتهما تتقارب أسياً (طيفياً) إلى ثلاثة أنواع وذلك وفقاً للعلاقة الآتية:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Log}(|a_n|)}{n} = \begin{cases} \infty & \text{Supergeometric} \\ \text{constant} & \text{geometric} \\ 0 & \text{Subgeometric} \end{cases}$$

٢-١-٤. التابع الغماوي (*Gamma Function*) [7]:

تعريف (٢-١٦):

يُعرف تابع غاما بالشكل:

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ : \Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

ويُبرهن على أنّ هذا التابع يتمتع بالخواص التالية:

$$\Gamma(x+1) = x \Gamma(x) \quad ; x > 0 \quad .1$$

$$\Gamma(n+1) = n! \quad ; n \in \mathbb{Z} \quad .2$$

$$\Gamma(x) \Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\text{Sin}(\pi x)} \quad ; 0 < x < 1 \quad .3$$

ومنّه نستنتج أنّ:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

$$\int_{-1}^1 (1+t)^{x-1} (1-t)^{y-1} dt = 2^{x+y-1} \frac{\Gamma(x) \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \quad ; x > 0, y > 0 \quad .4$$

$$\binom{x}{k} = \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(k+1) \Gamma(x-k+1)} \quad .5$$

٢-١-٥. توابع بسل (Bessel Functions) [8]:

إنَّ العالم دانييل برنولي أول من قدم مفهوم توابع بسل وذلك عام ١٩٣٢ إلا أنَّ أول من أطلق على هذه التوابع اسم توابع بسل كان فريدريك وليام.

يُطلق على المعادلة التفاضلية من المرتبة الثانية المعطاة بالشكل:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - \nu^2) y = 0$$

اسم معادلة بسل التفاضلية (Differential Bessel Equation).

ويعطى الحل العام لهذه المعادلة بالشكل:

$$y = A J_\nu(x) + B Y_\nu(x)$$

حيثُ:

A و B ثوابت اختيارية.

$J_\nu(x)$ تابع بسل من النوع الأول ومن المرتبة ν .

$Y_\nu(x)$ تابع بسل من النوع الثاني ومن المرتبة ν .

إنَّ تابع بسل من النوع الأول ومن المرتبة ν يمكن أن يُعبَّر عنه وفق متسلسلة قوى لانهائية كما بالشكل:

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{\nu+2k}}{k! \Gamma(\nu+k+1)}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} (x/2)^\nu \left\{ 1 - \frac{(x/2)^2}{1(\nu+1)} \left(1 - \frac{(x/2)^2}{2(2+\nu)} (1-\dots) \right) \right\}$$

وبالاعتماد على العلاقة :

$$\Gamma(\nu+k+1) = (\nu+k)!$$

يُمكن كتابة المجموع الأخير بالشكل:

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{\nu+2k}}{k! (\nu+k)!}$$

٢-١-٦. الالتفاف (Convolution) [9]:

بفرض لدينا التابعان الدوريان f و g بدور 2π والقابلان للمكاملة على $\mathbb{R}$ ، يُعرَّف الالتفاف $f * g$ على المجال $[-\pi, \pi]$ بالشكل:

$$(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) g(x-y) dy$$

وبما أنَّ التوابع دورية فإنَّنا نستطيع إجراء تغيير في المتحول بحيث نحصل على:

$$(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)g(y)dy$$

خواص الالتفاف الأساسية (Main Properties of Convolutions):

$$f * g = g * f \quad (١)$$

$$(f * g) * h = f * (g * h) \quad (٢)$$

$$C(f * g) = (Cf) * g = f * (Cg) \quad \forall C \in \mathcal{R} \quad (٣)$$

$$f * (g + h) = (f * g) + (f * h) \quad (٤)$$

٢-١-٧. التكاملات العددية [10]:

قد تواجهنا في بعض الأحيان تكاملات يكون من الصعوبة إيجادها تحليلياً الأمر الذي يدفعنا إلى مكاملتها عددياً باستخدام واحدة من تقنيات التكامل العددي.

سنعتمد في بحثنا هذا طريقتين لإجراء التكاملات العددية هما:

(١) قاعدة شبه المنحرف (Trapezoidal Rule):

بفرض f تابع قابل للمكاملة على المجال $[a, b]$ ، عندئذٍ تعطى حدودية الاستيفاء الخطي الموافقة لهذا التابع عند النقطتين $\{(a, f(a)), (b, f(b))\}$ بالعلاقة:

$$f(x) \approx P_1(x) = f(a) + \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right) (x - a)$$

وبناءً عليه ينتج لدينا أنَّ

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b P_1(x) dx = \left(\frac{b - a}{2} \right) (f(b) + f(a))$$

ويُمكن تعميم هذه الطريقة بتقسيم المجال $[a, b]$ إلى n مجال جزئي طول كل منها $h = \frac{b - a}{n}$

وبتطبيق الخطوتين السابقتين على كل مجال من هذه المجالات ومنه تنتج العلاقة:

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n \left(\frac{h}{2} (f(x_{i-1}) + f(x_i)) \right) = \frac{h}{2} \left(f(x_0) + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) \right)$$

(٢) صيغ غاوس التربيعية (Gaussian Quadrature formula):

بفرض f تابع قابل للمكاملة على المجال $[a, b]$ ، ولنعرف التابع الأملس g بالشكل:

$$g(x) = \frac{f(x)}{\omega(x)}$$

حيثُ ω تابع غير سالب وقابل للمكاملة عندئذٍ يتحقق:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) \omega(x) dx \quad (٦-٢) \dots$$

لتكن لدينا $n+1$ نقطة استيفاء للتابع g ، أي لتكن لدينا مجموعة النقاط $\{(x_i, g(x_i))\}$ ، حيث $0 \leq i \leq n$ ، التي تحقق:

$$g(x_i) = P_n(x_i)$$

عندئذ نجد وبالا اعتماد على استيفاء لاغرانج أن g يمكن التعبير عنه بالشكل:

$$g(x) \approx P_n(x) = \sum_{i=0}^n g(x_i) L_i(x) \quad (7-2) \dots$$

حيث $L_i(x)$ حدودية استيفاء لاغرانج

بتعويض العلاقة (7-2) في العلاقة (6-2) فإننا نجد

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_a^b g(x) \omega(x) dx \\ &\approx \int_a^b P_n(x) \omega(x) dx \\ &= \sum_{i=0}^n g(x_i) \int_a^b L_i(x) \omega(x) dx \\ &= \sum_{i=0}^n g(x_i) A_i \end{aligned}$$

$$A_i = \int_a^b L_i(x) \omega(x) dx \quad \text{حيث}$$

سندعو العلاقة

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^n g(x_i) A_i$$

بصيغة غاوس التربيعية ، ومن الواضح أن هذه الصيغة تعتمد على النقاط $\{(x_i, g(x_i))\}$ والتابع ω .

٢-١-٨. الحدوديات المتعامدة المنظمة (Orthogonal Polynomials) [11,12]:

تعتبر الحدوديات المتعامدة المنظمة حجر الأساس الذي تقوم عليه الطرائق الطيفية الأمر الذي يجعل من دراسة هذه الحدوديات أمراً في غاية الأهمية وبما أن هذه الحدوديات تبرز كل لمسألة ليوفيل شتورم فإننا سننطلق في دراسة هذه الحدوديات من دراسة هذه المسألة.

٢-١-٨-١. مسألة ليوفيل شتورم (Sturm-Liouville problem):

بفرض لدينا المجال المفتوح $I \subseteq \mathbb{R}$ ولتكن لدينا التوابع المستمرة الحقيقية:

$$a : \bar{I} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$b : I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$w : I \rightarrow \mathbb{R}$$

والتي تحقق

$$a \geq 0 \quad \text{in } \bar{I}$$

$$w \geq 0 \quad \text{in } I$$

والمطلوب إيجاد الحلول (λ, u) لمسألة القيم الذاتية الآتية:

$$L[u] = -(au')' + bu = \lambda wu \quad \text{in } I, \lambda \in \mathbb{R} \quad \dots (٢-٨)$$

ملاحظة (٢-١):

هنالك عدد كبير من الشروط الحدية الممكنة إضافتها للحصول على تابع قيمة ذاتية وحيد كحل لهذه المسألة.

من الضروري أن نميّز وجود نوعين لمسألة ليوفيل شتورم:

١. **مسألة نظامية:** وذلك إذا كان $a \geq 0 \quad \text{in } \bar{I}$.

٢. **مسألة شاذة:** وذلك إذا كان $a = 0$ من أجل نقطة واحدة على الأقل في $\bar{I}$.

إنّ حل مسألة ليوفيل شتورم أعطى العديد من أسر التوابع الذاتية التي تمت دراستها بتعمق إلا أنّ ما يهمنا هنا فقط هو الحصول على توابع ذاتية على شكل حدوديات. والجدير بالذكر أنّ أسر التوابع الذاتية الناتجة عن حل مسألة ليوفيل شتورم تشكل أساساً تاماً للفضاء $L^2_\omega[-1,1]$ بينما أسرة القيم الذاتية الوحيدة والموجبة الموافقة لكل أسرة من التوابع الذاتية تشكل متتالية غير محدودة بمعنى:

$$0 \leq \lambda_0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots$$

وبما أنّ المؤثر L مترافق ذاتياً فإنّ كل أسرة من أسر التوابع الذاتية لمسألة ليوفيل شتورم متعامدة بالنسبة لتابع الوزن w وذلك وفقاً للنظيم $\|\cdot\|_{L^2_\omega}$. أي:

$$(u_n, u_m)_{L^2_\omega[-1,1]} = (u_n, u_m)_\omega = \int_{-1}^{+1} u_n(x) u_m(x) \omega(x) dx = \gamma_n^2 \delta_{nm} \quad \dots (٢-٩)$$

حيث:

$$\gamma_n = \|u_n\|_{L^2_\omega} = \sqrt{(u_n, u_n)_{L^2_\omega[-1,1]}} = \left(\int_{-1}^{+1} |u_n(x)|^2 \omega(x) dx \right)^{1/2}$$

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 1 & ; n = m \\ 0 & ; n \neq m \end{cases}$$

ملاحظات (٢-٢):

١. بما أن كل أسرة $\{u_n(x)\}$ من أسر توابع القيم الذاتية التي تشكل حلاً لمسألة ليوفيل شتورم هي أساس للفضاء $L^2_\omega[-1,1]$ فإن أي تابع $u \in L^2_\omega[-1,1]$ يمكن تمثيله بالشكل

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{u}_n u_n(x) \quad (١٠-٢) \dots$$

حيث:

$$\hat{u}_n = \frac{1}{\gamma_n^2} (u, u_n)_{L^2_\omega[-1,1]} = \frac{1}{\gamma_n^2} \int_{-1}^{+1} u(x) u_n(x) \omega(x) dx \quad (١١-٢) \dots$$

٢. يُدعى التكامل الأخير إذا كان موافقاً لـ $u_n(x) = p_n(x)$ التحويل الحدودي للتابع u .

٣. إنَّ التقريب من الدرجة N ، حيث $N > 0$ ، للتابع u ينتج عن اقتطاع أول N حد من حدود المتسلسلة السابقة أي:

$$P_N u(x) = \sum_{n=0}^N \hat{u}_n u_n(x) \quad (١٢-٢) \dots$$

مبرهنة (١-٢):

بفرض P_N فضاء جميع الحدوديات من الدرجة $N \geq n$ أي:

$$P_N = \text{span} \{p_n ; n \leq N\}$$

ولتكن S أسرة من الحدوديات المتعامدة متنى متنى على المجال $(-1,1)$ بالنسبة لتابع الوزن ω وبفرض لدينا التابع $u \in L^2_\omega[-1,1]$ والذي يُعطى تقريبه من الدرجة N بدلالة حدوديات S وفق المجموع:

$$P_N u(x) = \sum_{n=0}^N \hat{u}_n p_n$$

عندئذٍ يتحقق:

$$(P_N u, v)_{L^2_\omega[-1,1]} = (u, v)_{L^2_\omega[-1,1]} \quad \forall v \in S$$

الإثبات:

بما أن $v \in S$ فإنّه يوجد $m \leq N$ بحيث $v = p_m$

$$(P_N u, v)_{L^2_\omega[-1,1]} = \left(\sum_{n=0}^N \hat{u}_n p_n, p_m \right)_{L^2_\omega[-1,1]} = \sum_{n=0}^N \hat{u}_n (p_n, p_m)$$

وبالاعتماد على العلاقة (٩-٢) و (١٢-٢) نجد:

$$(P_N u, p_m)_{L^2_\omega[-1,1]} = \hat{u}_m \gamma_m^2 = \int_{-1}^{+1} u(x) p_m(x) \omega(x) dx = (u, v)_{L^2_\omega[-1,1]}$$

وهو المطلوب.

ملاحظة (٢-٣):

يُدعى المجموع $P_N u$ الذي يحقق المبرهنة السابقة بالإسقاط القائم للتابع u على الفضاء P_N .
مبرهنة (٢-٢):

إذا كانت $\{u_n\}_{n \geq 0}$ متتالية من الحلول لـ (٢-٨) حيث u_n حدودية من الدرجة n عندئذٍ من الممكن إيجاد ثلاث متتاليات من الأعداد الحقيقية $\{\tau_n\}$ ، $\{\sigma_n\}$ ، $\{\rho_n\}$ ، حيث $n \geq 2$ ، تحقق أن:

$$u_n(x) = (\rho_n x + \sigma_n) u_{n-1}(x) + \tau_n u_{n-2}(x) \quad ; \begin{cases} \forall n \geq 2 \\ \forall x \in I \end{cases} \quad \dots (٢-١٣)$$

تُمكن هذه المبرهنة من إيجاد علاقة تراجعية لحدود المتتالية $\{u_n\}_{n \geq 0}$.

وبمفاضلة العلاقة (٢-١٣) فإنه يمكن الحصول على علاقة تراجعية أخرى تُعطى بالشكل:

$$u'_n(x) = (\rho_n x + \sigma_n) u'_{n-1}(x) + \rho_n u_{n-1}(x) + \tau_n u'_{n-2}(x) \quad ; \begin{cases} \forall n \geq 2 \\ \forall x \in I \end{cases}$$

فيما يأتي سنستعرض أبرز الحدوديات التي تشكل توابع ذاتية لمسألة ليوفيل شتورم الشاذة.

١. حدوديات جاكوبي (Jacobi Polynomials):

بفرض $I =]-1, 1[$ ولتكن لدينا التوابع الحقيقية المستمرة المعطاة بالشكل:

$$a(x) = (1-x)^{\alpha+1} (1+x)^{\beta+1} \quad \forall x \in \bar{I} = [-1, 1]$$

$$b(x) = 0$$

$$w(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta \quad \forall x \in I =]-1, 1[$$

حيث $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ، $\beta > -1$ ، $\alpha > -1$.

بالتعويض في مسألة ليوفيل شتورم الشاذة:

$$-\left((1-x)^{\alpha+1} (1+x)^{\beta+1} u'\right)' + 0 = \lambda (1-x)^\alpha (1+x)^\beta u$$

نجد أن:

$$\dots (٢-١٤) \quad -\left((1-x)^{\alpha+1} (1+x)^{\beta+1} u'\right)' + 0 = \lambda (1-x)^\alpha (1+x)^\beta u$$

تُعرف حدوديات يعقوبيان $P_n^{(\alpha, \beta)}$ على أن الحل الوحيد لـ (٢-١٤) الذي يحقق أحد شرطي التنظيم:

$$\dots (٢-١٥) \quad P_n^{(\alpha, \beta)}(1) = \binom{n+\alpha}{n} = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n! \Gamma(\alpha+1)} \quad ; n \in \mathbb{N}$$

أو:

$$\dots (٢-١٦) \quad P_n^{(\alpha, \beta)}(-1) = (-1)^n \binom{n+\alpha}{n}$$

مبرهنة (٢-٣):

إن حل مسألة القيم الذاتية الشاذة (٢-١٤) هو حدودية يعقوبيان من الدرجة n فقط عندما

$$\lambda_n = n(n+\alpha+\beta+1) \quad ; n \in \mathbb{N}$$

١.١ . خواص حدوديات يعقوبيان:

(١) صيغة رودريغز (Rodriguez formula)

$$(1-x)^\alpha (1+x)^\beta P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left[(1-x)^{n+\alpha} (1+x)^{n+\beta} \right] ; n \in \mathbb{N}$$

أي:

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = 2^{-n} \sum_{k=0}^n \binom{n+\alpha}{n} \binom{n+\alpha}{n-k} (x-1)^{n-k} (x+1)^k ; n \in \mathbb{N}$$

$$P_0^{(\alpha,\beta)}(x) = 1, \quad P_1^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + 2)x + \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = (-1)^n P_n^{(\alpha,\beta)}(-x) \quad (٢)$$

٢.١ . نشر يعقوبيان المستمر (Continuous Jacobi Expansion):

إنّ النشر المستمر لأي تابع $u \in L^2_\omega[-1,1]$ باستخدام حدوديات يعقوبيان $P_n^{(\alpha,\beta)}$ يُعطى بالشكل:

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{u}_n P_n^{(\alpha,\beta)}$$

حيثُ يمكن إيجاد معاملات النشر المستمر $\hat{u}_n$ من الجداء الداخلي بالنسبة لتابع الوزن ω .

$$\begin{aligned} \hat{u}_n &= \frac{1}{\gamma_n} (u, P_n^{(\alpha,\beta)}) \\ &= \frac{1}{\gamma_n} \int_{-1}^{+1} u(x) P_n^{(\alpha,\beta)}(x) (1-x)^\alpha (1+x)^\beta dx \end{aligned}$$

حيثُ:

$$\begin{aligned} \gamma_n &= \|P_n^{(\alpha,\beta)}\|_{L^2_\omega[-1,1]}^2 \\ &= \frac{2}{(2n + \alpha + \beta + 1)n!} \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)\Gamma(n + \beta + 1)}{\Gamma(n + \alpha + \beta + 1)} \end{aligned}$$

٢ . الحدوديات فوق الكروية (Ultra Spherical Polynomial):

تُعرّف الحدوديات فوق الكروية على أنّها حدوديات يعقوبيان عندما $\alpha = \beta$ ويرمز لها بالرمز

$$P_n^\alpha(x)$$

١.٢ . خواص الحدوديات فوق الكروية:

(١) صيغة رودريغز (Rodriguez formula)

$$(1-x^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} P_n^\alpha(x) = G(\lambda, n) \frac{d^n}{dx^n} \left[(1-x^2)^{n+\alpha-\frac{1}{2}} \right] ; n \in \mathbb{N}$$

حيثُ:

$$G(\lambda, n) = \frac{(-1)^n \Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \Gamma(n + 2\lambda)}{2^n n! \Gamma(2\lambda) \Gamma\left(n + \lambda + \frac{1}{2}\right)}$$

$$\frac{d}{dx} P_n^\alpha(x) = (2\alpha + 1) P_{n-1}^{\alpha+1}(x) \quad (2)$$

(3) تُعطى الصيغة الصريحة للحدوديات فوق الكروية بالعلاقة:

$$P_n^\alpha(x) = \frac{1}{\Gamma\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)} \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \frac{\Gamma\left(\alpha + \frac{1}{2} + n - k\right)}{k!(n-2k)!} (2x)^{n-2k}$$

حيثُ $[n/2]$ ترمز إلى الجزء الصحيح من الكسر.

$$P_n^\alpha(\mp 1) = (\mp 1)^n \binom{n+2\alpha}{n} \quad (4)$$

3. حدوديات Gegenbaure:

إن حدوديات Gegenbaure ما هي إلا الحدوديات فوق الكروية من الشكل:

$$C_n^\lambda(x) = P_n^{\lambda-\frac{1}{2}}(x)$$

إن هذه الحدوديات تتمتع بنفس الصفات التي تتمتع بها الحدوديات فوق الكروية إضافة إلى أنها تتمتع بالصفات التالية:

(1) إن حدوديات Gegenbaure تحقق العلاقات الثلاث الآتية:

$$C_n^\lambda(1) = \frac{\Gamma(n+2\lambda)}{n! \Gamma(2\lambda)}$$

$$|C_n^\lambda(x)| \leq C_n^\lambda(1) \quad ; -1 \leq x \leq +1$$

$$C_n^\lambda(x) = \frac{1}{2(n+\lambda)} \frac{d}{dx} [C_{n+1}^\lambda(x) - C_{n-1}^\lambda(x)]$$

(2) إن حدوديات Gegenbaure متعامدة بالنسبة لتابع الوزن $(1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}$ بمعنى

$$\int_{-1}^{+1} (1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} C_n^\lambda(x) C_k^\lambda(x) dx = \delta_{kn} h_n^\lambda$$

حيثُ:

$$h_n^\lambda = \sqrt{\pi} C_n^\lambda(1) \frac{\Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2\lambda) \Gamma(n+\lambda)}$$

$$\delta_{kn} = \begin{cases} 1 & ; n = k \\ 0 & ; n \neq k \end{cases}$$

(3) صيغة سترلينغ (Striling formula):

$$\sqrt{2\pi} x^{x+\frac{1}{2}} e^{-x} \leq \Gamma(x+1) \leq \sqrt{2\pi} x^{x+\frac{1}{2}} e^{-x} e^{\frac{1}{12x}} \quad ; x \geq 1$$

(٤) يوجد ثابت A مستقل عن λ و n بحيث:

$$A^{-1} \frac{\sqrt{\lambda}}{n+\lambda} C_n^\lambda(1) \leq \sqrt{2\pi} x^{x+\frac{1}{2}} e^{-x} \leq h_n^\lambda \leq A \frac{\sqrt{\lambda}}{n+\lambda} C_n^\lambda(1)$$

(٥)

$\forall \lambda \geq 1$:

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} C_n^\lambda(x) \right] = \frac{G(\lambda, n)}{G(\lambda-1, n+1)} (1-x^2)^{\lambda-\frac{3}{2}} C_{n+1}^\lambda(x)$$

إنَّ صف الحدوديات فوق الكروية يشمل العديد من الحدوديات المعروفة ونذكر منها:

أولاً: حدوديات ليجنדר (Legendre Polynomials):

تُعرَّف حدوديات ليجنדר على أنَّها حدوديات يعقوبيان فوق الكروية وذلك عندما $\alpha = \beta = 0$ وبُغية التبسيط سوف نرمز بـ $P_n^{(\alpha, \beta)}$ عندئذٍ تصبح مسألة ليوفيل شتورم (٢-٤) بالشكل:

$$(1-x^2) P_n'' - 2x P_n' + n(n+1) P_n = 0 \quad ; n \in \mathbb{N}$$

بما أنَّ حدوديات ليجنדר هي حدوديات يعقوبيان إذن فهي تحقق الشرط:

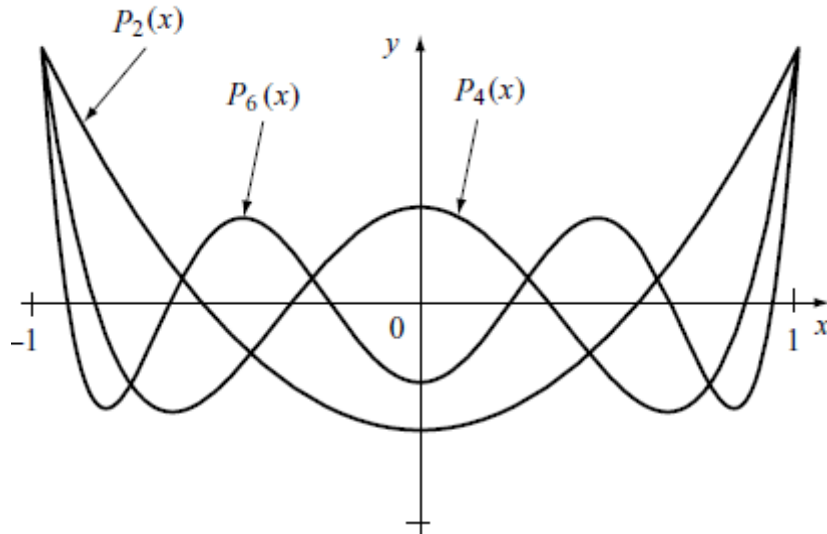
$$P_0^{(\alpha, \beta)}(1) = \binom{n+\alpha}{n} \quad or \quad P_0^{(\alpha, \beta)}(-1) = (-1)^n \binom{n+\alpha}{n} \quad ; n \in \mathbb{N}$$

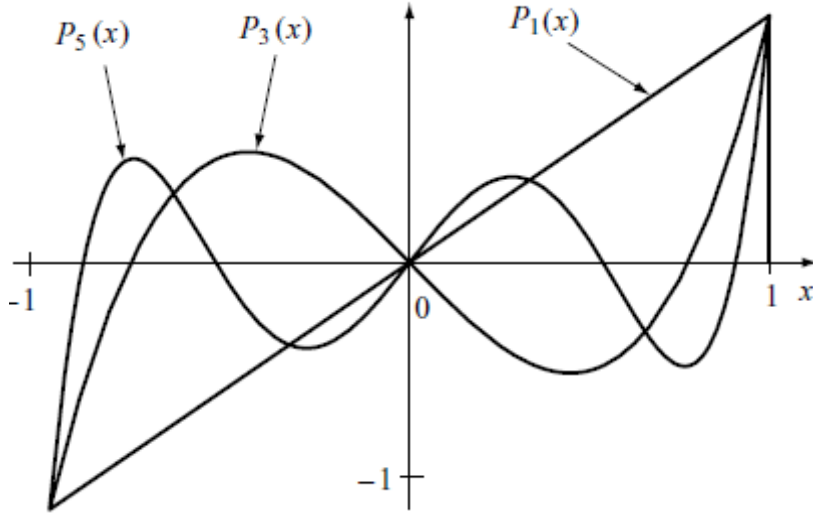
وعليه بما أنَّ $\alpha = \beta = 0$ في حدوديات ليجنדר نجد:

$$P_n(1) = P_0^{(0,0)}(1) = \binom{n}{n} = 1$$

or

$$P_n(-1) = P_0^{(0,0)}(-1) = (-1)^n \binom{n}{n} = (-1)^n \quad ; n \in \mathbb{N}$$





الشكل (٢-١) حدوديات ليجنדר الزوجية والفردية

إن حدوديات ليجنדר متعامدة في الفضاء $L^2_{\omega}[-1,1]$ بالنسبة لتابع الوزن $\omega(x)=1$ وذلك وفق العلاقة:

$$\int_{-1}^{+1} P_n(x) P_m(x) dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{nm}$$

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 1 & ; n = m \\ 0 & ; n \neq m \end{cases}$$

يُعطى نشر ليجنדר المستمر من الدرجة N لتابع $u \in L^2_{\omega}[-1,1]$ بالعلاقة:

$$u(x) = \sum_{n=0}^N \hat{u}_n P_n$$

حيثُ:

$$\hat{u}_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{+1} u(x) P_n(x) dx$$

ويحسب التكامل الأخير تحليلياً.

قد تواجهنا أحياناً صعوبات في إيجاد معاملات نشر ليجنדר تحليلياً ، الأمر الذي يدفعنا إلى حسابها عددياً من خلال صيغة غاوس التربيعية التالية:

$$\int_{-1}^{+1} u(x) P_n(x) dx \cong \sum_{i=0}^N A_i u(x_i) P_n(x_i)$$

حيثُ:

A_i أصفار حدودية ليجنדר أي: $x_i = \{x ; P_{N+1}(x) = 0\}$ حيثُ: $i \in \{0, \dots, N\}$

$$A_i = \frac{2}{(1-x_i^2)[P'_{N+1}(x_i)]^2}$$

وعندئذٍ تُعطى معاملات نشر ليجنדר بالشكل:

$$\hat{u}_n = \frac{2n+1}{2} \sum_{i=0}^N A_i u(x_i) P_n(x_i)$$

يُدعى نشر ليجندر الذي تحسب معاملاته وفق المجموع الأخير بنشر ليجندر المنقطع.

ثانياً: حدوديات تشيبيشيف (Tchebyshev Polynomials):

يشمل هذا الصف نوعين من الحدوديات

١. **حدوديات تشيبيشيف من النوع الأول:**

تُعرف حدوديات تشيبيشيف من النوع الأول على أنها حدوديات يعقوبيان فوق الكروية وذلك عندما

$$\alpha = \beta = -\frac{1}{2} \quad \text{ويرمز لها بالرمز } T_n.$$

ويمكن التعبير عن هذه الحدوديات بالشكل:

$$T_n = \delta_n P_n\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad ; n \in \mathbb{N}$$

حيثُ:

$$\delta_n = \frac{(n! 2^n)^2}{(2n)!} = \frac{n! \sqrt{\pi}}{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)} = \left[\binom{n - \frac{1}{2}}{n} \right]^{-1}$$

إن حدوديات تشيبيشيف من النوع الأول ما هي إلا حلول لمعادلة ليوفيل شتورم الشاذة

$$(1-x^2) T_n'' - x T_n' + n^2 T_n = 0 \quad ; n \in \mathbb{N}$$

والتي نحصل عليها بتعويض $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$ في معادلة ليوفيل شتورم المعطاة بالعلاقة (٢-٤١).

إن العلاقة التراجعية لحدوديات تشيبيشيف هي:

$$T_n(x) = 2x T_{n-1}(x) - T_{n-2}(x) \quad ; \begin{cases} x \in \bar{I} \\ n \geq 2 \end{cases}$$

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x$$

حيثُ

ويُبرهن على أن

$$T_n(\mp 1) = (\mp 1)^n \quad ; n \in \mathbb{N}$$

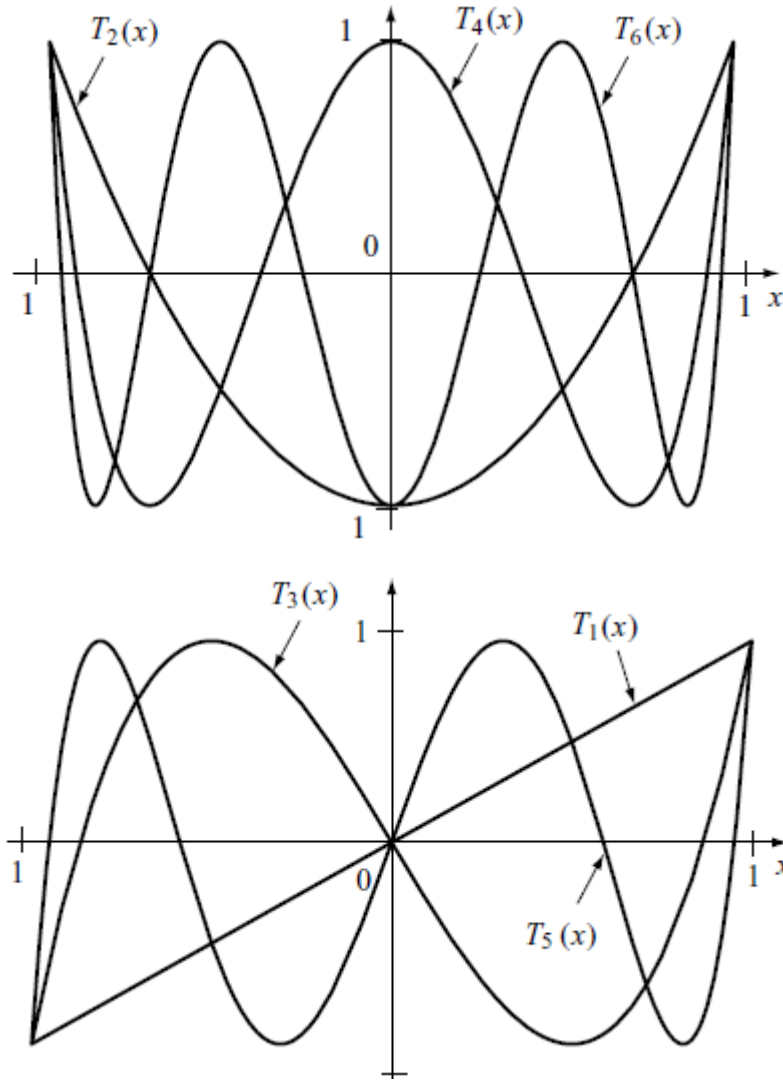
وكذلك يُبرهن أن:

$$T_n'(\mp 1) = -(\mp 1)^n n^2 \quad ; n \in \mathbb{N}$$

تُعتبر العلاقة الآتية من أكثر العلاقات المميزة لتتابع تشيبيشيف:

$$T_n(\cos \theta) = \cos n\theta \quad ; \begin{cases} n \in \mathbb{N} \\ \theta \in [0, \pi] \end{cases}$$

ولذلك لأنها تربط الحدوديات الجبرية بحدوديات مثلثية.



الشكل (٢-٢) (حدوديات تشبيشف من النوع الأول الزوجية والفردية)

إنّ حدوديات تشبيشف متعامدة في الفضاء $L^2_\omega[-1,1]$ بالنسبة لتابع الوزن $\omega(x) = \sqrt{1-x^2}$ وذلك وفق العلاقة:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} T_n(x) T_m(x) dx = \frac{\pi}{2} c_n \delta_{nm}$$

$$c_n = \begin{cases} 2 & ; n = 0 \\ 1 & ; n \neq 0 \end{cases}$$

يُعطى نشر تشبيشف المستمر من الدرجة N لتابع $u \in L^2_\omega[-1,1]$ بالعلاقة:

$$u(x) = \sum_{n=0}^N \hat{u}_n T_n$$

حيثُ:

$$\hat{u}_n = \frac{2}{\pi c_n} \int_{-1}^{+1} u(x) T_n(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

ويحسب التكامل الأخير تحليلياً.

قد تواجهنا أحياناً صعوبات في إيجاد معاملات نشر تشيشف تحليلياً ، الأمر الذي يدفعنا إلى حسابها عددياً من خلال صيغة غاوس التربيعية التالية:

$$\int_{-1}^{+1} u(x) T_n(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \cong \sum_{i=0}^N A_i u(x_i) T_n(x_i)$$

حيثُ:

$$A_i = \frac{\pi}{N+1} \quad \text{و} \quad x_i = -\cos\left(\frac{(2i+1)\pi}{2N+2}\right)$$

وذلك من أجل $i \in \{0, \dots, N\}$.

وعندئذ تُعطى معاملات نشر تشيشف بالشكل:

$$\hat{u}_n = \frac{2}{\pi c_n} \sum_{i=0}^N A_i u(x_i) T_n(x_i) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

يُدعى نشر تشيشف الذي تحسب معاملاته وفق المجموع الأخير بنشر تشيشف المنقطع.

(١) حدوديات تشيشف من النوع الثاني:

تُعرف حدوديات تشيشف من النوع الثاني على أنها

$$U_n = \frac{1}{n+1} T'_{n+1} \quad ; n \in \mathbb{N}$$

كما تُعرف على أنها حدوديات يعقوبيان فوق الكروية الموافقة لكون $\alpha = \beta = +\frac{1}{2}$ وهي تتمتع

بخواص مشابهة لحدوديات تشيشف من النوع الأول.

٤. حدوديات لاغير (Laguerre Polynomials):

بفرض $I =]0, \infty[$ وليكن لدينا التتابع المستمرة التي تُعطى بالشكل:

$$a(x) = x^{\alpha+1} e^{-x} \quad ; x \in \bar{I}$$

$$b(x) = 0 \quad ; x \in I$$

$$w(x) = x^\alpha e^{-x} \quad ; x \in I$$

حيثُ: $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha > -1$.

بالتعويض في مسألة ليوفيل شتورم نجد:

$$x u'' + (\alpha + 1 - x) u' + \lambda = 0$$

تُعرف حدوديات لاغير $L_n^{(\alpha)}$ من الدرجة n على أنها الحل الوحيد لمسألة ليوفيل شتورم الشاذة

$$x u'' + (\alpha + 1 - x) u' + \lambda = 0$$

الذي يُحقق الشرط

$$L_n^{(\alpha)}(0) = \begin{pmatrix} n + \alpha \\ n \end{pmatrix} \quad ; \begin{cases} n \in \mathbb{N} \\ \alpha > -1 \end{cases}$$

مبرهنة (٢-٤):

إنَّ حل مسألة ليوفيل شتورم السابقة هو حدودية من الدرجة n فقط عندما $\lambda = n$ حيث $n \in \mathbb{N}$.

١.٤. خواص حدوديات لاغير:

(١) صيغة رودريغز (Rodriguez formula)

$$e^{-x} x^\alpha L_n^\alpha(x) = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^{n+\alpha}) \quad ; \begin{cases} n \in \mathbb{N} \\ x \in I \end{cases}$$

أي:

$$L_n^\alpha(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n+\alpha}{n-k} \frac{(-1)^k}{n!} x^k \quad ; \begin{cases} n \in \mathbb{N} \\ x \in \bar{I} \end{cases}$$

(٢) إنَّ حدوديات لاغير تحقق العلاقة التراجعية التالية:

$$L_n^\alpha(x) = \frac{2n+\alpha-1-x}{n} L_{n-1}^{(\alpha)}(x) - \frac{n+\alpha-1}{n} L_{n-2}^{(\alpha)}(x) \quad ; \forall n \geq 2$$

حيثُ

$$L_0^{(\alpha)}(x) = 1 \quad \text{and} \quad L_1^{(\alpha)}(x) = 1 + \alpha - x$$

٢-١-٩. الحدوديات المثلثية وتقريب فورييه [2,7,11,12]:

سنقوم الآن بدراسة الحدوديات المثلثية والتي تبرز، كما سنرى لاحقاً، كتابع أساس للتقريبات الطيفية المستخدمة في حل المسائل الدورية.

تعريف (٢-١٧):

يُقال عن الحدودية من الشكل:

$$a_0 + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta))$$

حيثُ a_n, b_n أعداد عقدية ، إنها حدودية مثلثية من الدرجة N .

تعريف (٢-١٨):

يُقال عن التابع f المعروف على $D \subseteq \mathbb{R}$ إنه يقبل 2π دوراً إذا تحقق أنَّ

$$f(\theta + 2\pi) = f(\theta) \quad \forall \theta \in D$$

٢-١-٩-١. تقريب فورييه المستمر (Continuous Fourier approximation):

تعريف (٢-١٩):

تُعرّف متسلسلة (نشر) فورييه الموافقة لتابع $f \in L^2[0, 2\pi]$ دوري بدور 2π على أنها الحدودية المثلثية:

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)) \quad (١٧-٢) \dots$$

التي تُعطى معاملاتها a_n و b_n بالشكل:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cos(n\theta) d\theta \quad ; n \geq 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \sin(n\theta) d\theta \quad ; n \geq 1$$

(١٨-٢)...

ويمكن بالاستفادة من العلاقات:

$$\cos(n\theta) = \frac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{2}$$

$$\sin(n\theta) = \frac{e^{in\theta} - e^{-in\theta}}{2i}$$

للتعبير عن متسلسلة فورييه السابقة وفق الصيغة العقدية التالية:

$$f(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta} \quad (١٩-٢) \dots$$

حيثُ:

$$c_0 = \frac{1}{2}a_0$$

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n)$$

والتي يمكن التعبير عنها أيضاً بالشكل:

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) e^{in\theta} dx$$

تعريف (٢٠-٢):

يُعرف تقريب فورييه من الدرجة N ، حيثُ $N > 0$ ، للتابع f على أنه المجموع:

$$S_N^f(\theta) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{in\theta} \quad (٢٠-٢) \dots$$

أو

$$S_N^f(\theta) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta))$$

ملاحظات (٢-٤):

(١) ليس من الضروري أن تتم المكاملة على المجال $[-\pi, \pi]$ فمن الممكن إجراؤها على أي مجال طوله 2π وذلك بالاستفادة من التوطئة الآتية:

توطئة (٢-١):

إذا كان F تابعاً دورياً بدور P عندئذٍ $\int_a^{a+P} F(x) dx$ مستقل عن a .
(٢) إذا كان f تابعاً زوجياً فإن:

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\theta) \cos(n\theta) d\theta \quad ; n \geq 0$$

$$b_n = 0 \quad ; n \geq 1$$

أما إذا كان f تابعاً فردياً فإن:

$$a_n = 0 \quad ; n \geq 0$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\theta) \sin(n\theta) d\theta \quad ; n \geq 1$$

(٣) إنَّ تقريب فورييه من الدرجة N ما هو إلا الحد العام لمتتالية المجاميع الجزئية الموافقة لمتسلسلة فورييه.

مبرهنة (٢-٥):

إنَّ تقريب فورييه من الدرجة N لتابع $f \in L^2[-\pi, \pi]$

$$S_N^f(\theta) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{in\theta} \quad (٢٠-٢) \dots$$

هو الإسقاط القائم للتابع f على الفضاء المنتهي البعد

$$\hat{B}_{2N+1} = \text{Span}\{e^{in\theta} \quad ; -N \leq n \leq N\}$$

الإثبات:

لبرهان أن $S_N^f(\theta)$ هو الإسقاط القائم لـ f على الفضاء $\hat{B}_{2N+1}$ يجب أن نبرهن صحة العلاقة:

$$(S_N^f(\theta), v)_{L^2[-\pi, \pi]} = (f, v)_{L^2[-\pi, \pi]} \quad ; v \in \hat{B}_{2N+1}$$

بما أن $v \in \hat{B}_{2N+1}$ فإنه يوجد $m \leq 2N+1$ بحيث $v = e^{im\theta}$

$$(S_N^f(\theta), e^{im\theta})_{L^2[-\pi, \pi]} = \left(\sum_{n=-N}^N c_n e^{in\theta}, e^{im\theta} \right)_{L^2[-\pi, \pi]} = \sum_{n=0}^N c_n (e^{in\theta}, e^{im\theta})_{L^2[-\pi, \pi]}$$

وبالاعتماد على تعامد التوابع الأسية نجد:

$$(S_N^f(\theta), e^{im\theta})_{L^2[-\pi, \pi]} = 2\pi \hat{u}_n = \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) e^{im\theta} dx = (f, v)_{L^2[-\pi, \pi]}$$

٢-١-٩-٢. تقارب متسلسلة فورييه:

تعريف (٢-٢٠) (الاستمرار القطعي):

نقول عن التابع f المعروف على المجال المغلق $[a, b]$ ، حيث $-\infty < a, b < +\infty$ ، إنه مستمر قطعياً إذا تحقق:

(١) f مستمر على المجال $[a, b]$ باستثناء عدد منته من النقاط

(٢) أن تكون عند كل نقطة من نقط الانقطاع النهايتان

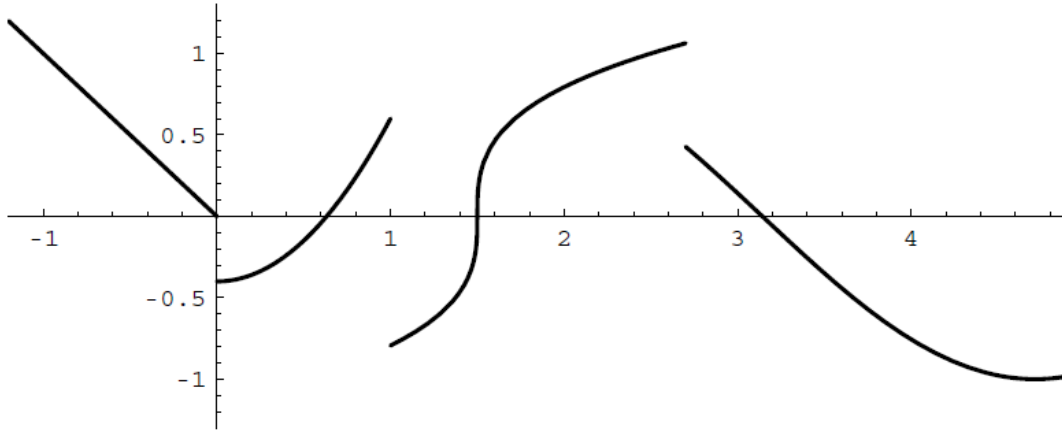
$$f(x_j^+) = \lim_{h \rightarrow 0} f(x_j + h) \quad ; h > 0$$

(٢-٢١)...

$$f(x_j^-) = \lim_{h \rightarrow 0} f(x_j - h) \quad ; h > 0$$

موجودتان.

وفيما يلي نعرض الخط البياني لتابع مستمر قطعياً بُغية توضيح هذه الفكرة.



الشكل (٢-٣) (تابع مستمر قطعياً)

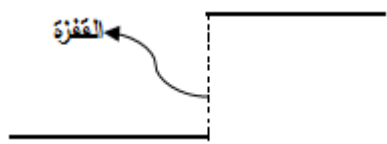
ملاحظات (٢-٥):

(١) يُدعى هذا النوع من الانقطاع بالانقطاع من النوع الأول.

(٢) يُمثل الانقطاع من النوع الأول بيانياً

على شكل فراغات (gaps) أو قفزات

(Jumps).



الشكل (٢-٤) (القفزة لتابع الإشارة)

ترميز:

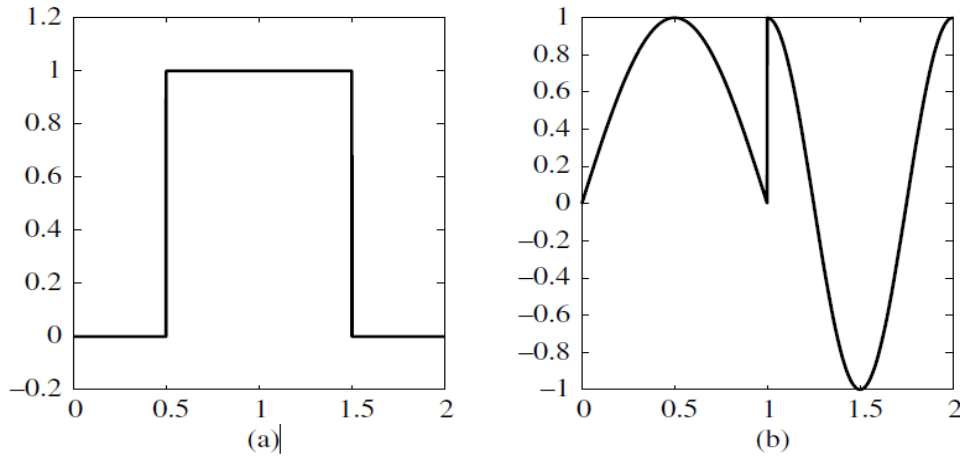
سنرمز لصف التتابع المستمرة قطعياً على المجال $[a, b]$ بـ $PC(a, b)$

تعريف (٢-٢١):

نقول عن تابع f أنه أملس قطعياً إذا تحقق أن التابع وجميع مشتقاته حتى المرتبة l من الصف

$PC(a, b)$

والشكل الآتي يعرض لنا الخطوط البيانية لتابعين كل منهما أملس قطعياً.



الشكل (٢-٥) (تتابع ملساء موضعياً)

ملاحظة (٢-٦):

إذا كانت $l = \infty$ في التعريف السابق فإننا نسمي التابع تحليلياً قطعياً.

مبرهنة (٢-٦):

ليكن $f \in L^2[-\pi, \pi]$ تابعاً دورياً بدور 2π وأملساً قطعياً على $\mathcal{R}$ عندئذٍ يُمكن التعبير عن تقريب فورييه $S_N^f(\theta)$ بالعلاقة:

$$S_N^f(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\theta - \xi) D_N(\xi) d\xi = (f * D_N)(\theta) \quad \dots (٢-٢٢)$$

حيثُ:

$$D_N(\xi) = \sum_{n=-N}^N e^{in\xi}$$

بالإضافة إلى ذلك فإنه يمكن التعبير عن $S_N^f(\theta)$ بالشكل:

$$S_N^f(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\theta - \xi) D_N(\xi) d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\theta + \xi) D_N(\xi) d\xi = (f * D_N)(\theta)$$

الإثبات:

وجدنا سابقاً أنَّ نشر فورييه لـ f يُعطى بالشكل:

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta}$$

حيثُ:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \cos(n\psi) d\psi \quad ; n \geq 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \sin(n\psi) d\psi \quad ; n \geq 1$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) e^{-in\psi} d\psi \quad ; n \in \mathbb{Z}$$

كما وجدنا أنَّ تقريب فورييه $S_N^f(\theta)$ يُعطى بالشكل:

$$S_N^f(\theta) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{in\theta}$$

$$S_N^f(\theta) = \sum_{n=0}^N a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{in\theta}$$

حيثُ تشير الفتحة إلى أنَّ الحد الصفري مضروب بـ 1/2.

بتعويض (٢٣-٢) في العلاقة الأخيرة نجد:

$$\begin{aligned} S_N^f(\theta) &= \sum_{n=0}^N \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) (\cos(n\psi) \cos(n\theta) + \sin(n\psi) \sin(n\theta)) d\psi \right] \\ &= \sum_{n=-N}^N \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) e^{in(\theta-\psi)} d\psi \right] \end{aligned}$$

بما أنَّ المجموع السابق منتهٍ فإنَّ تكامل المجموع يساوي مجموع التكاملات وعليه فإنَّ العلاقة السابقة تصبح بالشكل:

$$\begin{aligned} S_N^f(\theta) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \sum_{n=0}^N \cos n(\psi - \theta) d\psi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \sum_{n=-N}^N e^{in(\theta-\psi)} d\psi \\ \theta - \psi &= \xi \\ d\psi &= -d\xi \end{aligned}$$

وبفرض

تصبح $S_N^f(\theta)$ بالشكل:

$$\begin{aligned} S_N^f(\theta) &= \frac{1}{\pi} \int_{\theta-\pi}^{\theta+\pi} f(\theta - \xi) \sum_{n=0}^N \cos n\xi d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\theta-\pi}^{\theta+\pi} f(\theta - \xi) \sum_{n=-N}^N e^{in\xi} d\xi \end{aligned}$$

وبما أنَّ :

$$D_N(\xi) = 1 + 2 \sum_{n=1}^N \cos n\xi = \sum_{n=-N}^N e^{in\xi}$$

وبالاعتماد على التوطئة (٢-١) تصبح العلاقة (٢-٢٥) بالشكل:

$$S_N^f(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\theta - \xi) D_N(\xi) d\xi \quad (٢-٢٧) \dots$$

وبالاعتماد على دورية التابع f وتعريف الالتفاف فإننا نستطيع كتابة العلاقة (٢-٢٧):

$$\begin{aligned} S_N^f(\theta) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\theta - \xi) D_N(\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\theta + \xi) D_N(\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\xi) D_N(\xi - \theta) d\xi = (f * D_N)(\theta) \end{aligned}$$

وهو المطلوب.

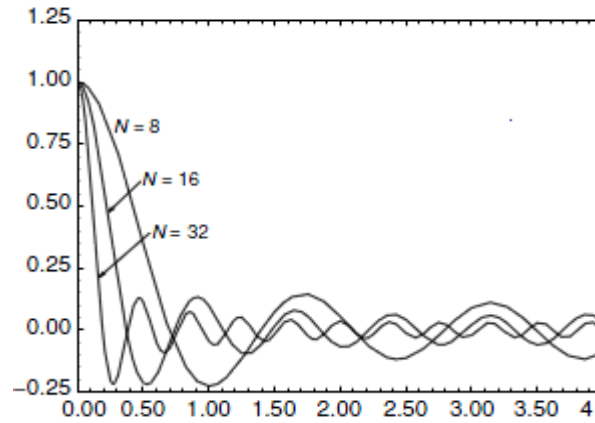
ملاحظة (٢-٧):

يُدعى التابع الوارد في العلاقة (٢-٢٦) أي:

$$D_N(\xi) = 1 + 2 \sum_{n=1}^N \cos n\xi = \sum_{n=-N}^N e^{in\xi}$$

بنواة دير خليه من الدرجة N .

وفيما يلي نعرض الرسوم البيانية الموافقة لهذه النواة وذلك من أجل $N = 8, 16, 32$ وتوضح لنا هذه الأشكال السلوك التذبذبي (*oscillatory behavior*) لهذه النواة في جوار الصفر.



الشكل (٢-٦) (نواة دير خليه)

توطئة (٢-٣):

إن نواة ديرخلية المعطاة بالعلاقة (٢-٢٦) تحقق:

$$D_N(\xi) = \frac{\sin\left(N + \frac{1}{2}\right)\xi}{\sin\left(\frac{\xi}{2}\right)} \quad (٢-٢٨) \dots$$

الإثبات:

لدينا من العلاقة (٢-٢٦):

$$\begin{aligned} D_N(\xi) &= \sum_{-N}^N e^{in\xi} = (e^{-iN\xi} + \dots + 1 + e^{i\xi} + \dots + e^{iN\xi}) \\ &= e^{-iN\xi} (1 + e^{i\xi} + \dots + e^{2iN\xi}) = e^{-iN\xi} \sum_{i=0}^{2N} e^{i\xi} \end{aligned}$$

$$\sum_0^k r^n = \frac{r^{k+1} - 1}{r - 1} \quad ; r \neq 1 \quad \text{بما أن}$$

$$D_N(\xi) = \frac{1}{2\pi} e^{-iN\xi} \frac{e^{i(2N+1)\xi} - 1}{e^{i\xi} - 1} \quad \text{فإن:}$$

نضرب البسط والمقام بـ $e^{-i\xi/2}$ فنجد:

$$\begin{aligned} D_N(\xi) &= \frac{e^{i(N+\frac{1}{2})\xi} - e^{-i(N+\frac{1}{2})\xi}}{e^{\frac{i\xi}{2}} - e^{-\frac{i\xi}{2}}} \\ &= \frac{\sin(N + \frac{1}{2})\xi}{\sin\left(\frac{\xi}{2}\right)} \end{aligned}$$

توطئة (٢-٤):

إن نواة ديرخلية المعطاة بالعلاقة (٢-٢٦) تحقق:

$$\int_{-\pi}^0 D_N(\theta) d\theta = \int_0^{\pi} D_N(\theta) d\theta = \frac{1}{2} \quad \forall N \quad (٢-٢٩) \dots$$

الإثبات : وجدنا أن

$$\begin{aligned} D_N(\theta) &= \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^N \cos n\theta \\ \int_0^{\pi} D_N(\theta) d\theta &= \left[\frac{\theta}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^N \frac{\sin n\theta}{n} \right]_0^{\pi} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

وبنفس الطريقة نجد

$$\int_{-\pi}^0 D_N(\theta) d\theta = \frac{1}{2}$$

مبرهنة (٢-٧):

إذا كان $f \in L^2[-\pi, +\pi]$ تابعاً دورياً بدور 2π وقابلاً للمكاملة وفق مفهوم ريمان على $[-\pi, \pi]$ وبفرض معاملات فورييه لهذا التابع تُعطى بالشكل:

$$C_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) e^{-in\xi} d\xi$$

عندئذٍ :

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |C_n|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\xi)|^2 d\xi$$

(٣٠-٢)...

تُدعى هذه المتراجحة بمتراجحة بسل.

الإثبات:

$$|Z|^2 = Z \bar{Z}$$

بما أنَّ

فإنَّ:

$$\begin{aligned} \left| f(\xi) - \sum_{-N}^N C_n e^{in\xi} \right|^2 &= \left(f(\xi) - \sum_{-N}^N C_n e^{in\xi} \right) \overline{\left(f(\xi) - \sum_{-N}^N C_n e^{in\xi} \right)} \\ &= \left(f(\xi) - \sum_{-N}^N C_n e^{in\xi} \right) \left(\overline{f(\xi)} - \sum_{-N}^N \overline{C_n} e^{-in\xi} \right) \\ &= |f(\xi)|^2 - \sum_{-N}^N [C_n \overline{f(\xi)} e^{in\xi} + \overline{C_n} f(\xi) e^{-in\xi}] \\ &\quad + \sum_{m, n=-N}^N C_m \overline{C_n} e^{i(m-n)\xi} \end{aligned}$$

نقسم كلا الطرفين على 2π ونكامل من $-\pi$ إلى π مع الأخذ بالحسبان العلاقات :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) e^{-in\xi} d\xi &= C_n \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)\xi} d\xi &= \begin{cases} 0 & ; m \neq n \\ 1 & ; m = n \end{cases} \end{aligned}$$

نجد:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(\xi) - \sum_{-N}^N C_n e^{in\xi} \right|^2 d\xi &= \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\xi)|^2 d\xi - \sum_{-N}^N [C_n \overline{C_n} + \overline{C_n} C_n] + \sum_{-N}^N C_n \overline{C_n} &= \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\xi)|^2 d\xi - \sum_{-N}^N |C_n|^2 & \end{aligned}$$

وبناءً عليه :

$$0 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(\xi) - \sum_{-N}^N C_n e^{in\xi} \right|^2 d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\xi)|^2 d\xi - \sum_{-N}^N |C_n|^2$$

ومنه:

$$\sum_{-N}^N |C_n|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\xi)|^2 d\xi$$

وعندما $N \rightarrow \infty$ نجد:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |C_n|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\xi)|^2 d\xi$$

وهو المطلوب.

مبرهنة (٢-٨):

ليكن $f \in L^2[-\pi, +\pi]$ تابعاً دورياً بدور 2π وأمساً قطعياً على $\mathfrak{R}$ عندئذٍ يتحقق أن:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N^f(\theta) = \frac{1}{2} [f(\theta^-) + f(\theta^+)] \quad (٣٢-٢) \dots$$

وذلك أياً يكن θ .

وبما أن $f(\theta^-) = f(\theta^+)$ عندما يكون f مستمراً عند θ فإن:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N^f(\theta) = f(\theta) \quad (٣٣-٢) \dots$$

عند النقاط التي يكون التابع مستمراً عندها.

الإثبات:

بالاعتماد على التوطئة السابقة:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} f(\theta^-) &= f(\theta^-) \int_{-\pi}^0 D_N(\xi) d\xi \\ \frac{1}{2} f(\theta^+) &= f(\theta^+) \int_0^{\pi} D_N(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (٣٤-٢) \dots$$

بالاعتماد على العلاقة (٢٢-٢) نجد

$$\begin{aligned} S_N^f(\theta) - \frac{1}{2} [f(\theta^-) + f(\theta^+)] &= \\ \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta + \xi) D_N(\xi) d\xi - \int_{-\pi}^0 f(\theta^-) D_N(\xi) d\xi - \int_0^{\pi} f(\theta^+) D_N(\xi) d\xi &= \\ \int_{-\pi}^0 [f(\theta + \xi) - f(\theta^-)] D_N(\xi) d\xi + \int_0^{\pi} [f(\theta + \xi) - f(\theta^+)] D_N(\xi) d\xi \end{aligned}$$

نعلم أن :

$$D_N(\xi) = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{e^{i(N+1)\xi} - e^{-iN\xi}}{e^{i\xi} - 1} \right]$$

(٣٥-٢)...

$$S_N^f(\theta) - \frac{1}{2}[f(\theta^-) + f(\theta^+)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\xi) (e^{i(N+1)\xi} - e^{-iN\xi}) d\xi$$

حيثُ :

$$g(\xi) = \begin{cases} \frac{f(\theta + \xi) - f(\theta^-)}{e^{i\xi} - 1} & ; -\pi < \xi < 0 \\ \frac{f(\theta + \xi) - f(\theta^+)}{e^{i\xi} - 1} & ; 0 < \xi < \pi \end{cases}$$

إنَّ g أمّلس على المجال $[-\pi, \pi]$ ، باستثناء $\xi = 0$ ، طالما f أمّلس.

عندما $\xi = 0$ تكون

$$\lim_{\xi \rightarrow 0^+} g(\xi) = \lim_{\xi \rightarrow 0^+} \frac{f(\theta + \xi) - f(\theta^+)}{e^{i\xi} - 1} = \frac{0}{0}$$

ومنه:

$$\lim_{\xi \rightarrow 0^+} g(\xi) = \lim_{\xi \rightarrow 0^+} \frac{f'(\theta + \xi)}{i e^{i\xi}} = \frac{f'(\theta^+)}{i}$$

وكذلك :

$$\lim_{\xi \rightarrow 0^-} g(\xi) = \lim_{\xi \rightarrow 0^-} \frac{f(\theta + \xi) - f(\theta^-)}{e^{i\xi} - 1} = \frac{0}{0}$$

ومنه:

$$\lim_{\xi \rightarrow 0^-} g(\xi) = \lim_{\xi \rightarrow 0^-} \frac{f'(\theta + \xi)}{i e^{i\xi}} = \frac{f'(\theta^-)}{i}$$

وبناءً عليه فإنَّ g مستمر قطعياً على $[-\pi, \pi]$ وبالاتتماد على متراجعة بسل فإنَّ معاملات فورييه للتابع g والتي تُعطى بالشكل:

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\xi) e^{-in\xi} d\xi$$

تسعى إلى الصفر عندما $n \rightarrow \pm\infty$ ، وبالعودة إلى المساواة (٣٥-٢) نجد أنَّ

$$S_N^f(\theta) - \frac{1}{2}[f(\theta^-) + f(\theta^+)] = c_{-(N+1)} - c_N$$

$$S_N^f(\theta) - \frac{1}{2}[f(\theta^-) + f(\theta^+)] \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$$

$$S_N^f(\theta) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2}[f(\theta^-) + f(\theta^+)]$$

وهو المطلوب.

أمّا الآن فإننا سنقدم النظرية التي توضح الدقة التي يُقرب بها نشر فورييه تابع ما من الفضاء

$$L^2[0, 2\pi]$$

مبرهنة (٢-٩):

ليكن $f \in L^2[0, 2\pi]$ وبفرض أن معاملات نشر فورييه لهذا التابع قابلة للجمع تربيعياً أي

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2 < \infty \quad \text{عندئذ يتقارب نشر فورييه من الدرجة } N \text{ وفق نظيم الفضاء } L^2 \text{ أي:}$$

$$\|f - S_N^f\|_{L^2[0, 2\pi]} \rightarrow 0 \quad \text{as } N \rightarrow \infty \quad (٣٦-٢)...$$

وإذا كانت معاملات نشر فورييه لهذا التابع تحقق أنها قابلة للجمع أي $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n| < \infty$ فإن نشر فورييه من الدرجة N سيتقارب بانتظام وفق نظيم L^2 أي:

$$\|f - S_N^f\|_{L^2[0, 2\pi]} \xrightarrow{U} 0 \quad \text{as } N \rightarrow \infty \quad (٣٧-٢)...$$

إن تقارب نشر فورييه من الدرجة N لتابع ما يؤدي إلى أن خطأ الاقتطاع المرتكب أثناء تقريب هذا التابع ماهو إلا الباقي النوني لمتسلسلة فورييه أي:

$$\|f - S_N^f\|_{L^2[0, 2\pi]}^2 = 2\pi \sum_{|n| > N/2} |C_n|^2 \quad (٣٨-٢)...$$

و

$$\|f - S_N^f\|_{L^\infty[0, 2\pi]} \leq \sum_{n > N/2} |C_n| \quad (٣٩-٢)...$$

وعليه فإن خطأ الاقتطاع الناتج عن استبدال التابع f بنشر فورييه من الدرجة N يعتمد فقط على معدل اضمحلال معاملات النشر والذي بدوره يتوقف على:

(١) درجة ملوسة (نظامية) التابع f في المجال $[0, 2\pi]$

(٢) دورية التابع f ومشتقاته.

٢-٢. التقريبات الطيفية العددية (Spectral numerical approximation) [9,10,11]:

تُعتبر التقريبات الطيفية واحدة من الطرائق الواسعة الاستخدام في حل المعادلات التفاضلية الجزئية (PDFs) وتبرز أهميتها في أنها ذات دقة أعلى من طرائق الفروق المقسومة من أجل التوابع الملساء وغير الملساء.

لتكن لدينا مسألة الشروط الحدية الابتدائية المعطاة بالشكل:

$$LU(x) = S(x) \quad ; x \in D \subseteq \mathbb{R}^d \quad (٤٠-٢)...$$

$$BU(y) = 0 \quad ; y \in \delta D \quad (٤١-٢)...$$

حيث L, B مؤثرات تفاضلية خطية.

إنّ الحل العددي (التقريبي) لـ (٢-٤٠) و (٢-٤١) هو التابع u الذي يحقق (٢-٤١) ويجعل الباقي

$$R = Lu - S$$

أصغر ما يمكن.

إنّ عملية البحث عن التابع u تتم في فضاء جزئي منته البعد F_N من فضاء هيلبرت H

$$u \in F_N \Rightarrow u(x) = \sum_{n=0}^N \hat{u}_n \phi_n(x)$$

حيث مجموعة التوابع $\{\phi_n ; n = 0, \dots, N\}$ تشكل أساس لـ F_N ونسمي هذه التوابع بتوابع النشر أو توابع الأثر وكما ويعتمد هذا النوع من التقريبات على صف آخر من التوابع تُسمى بتوابع الاختبار

$$\{\chi_n ; n = 0, \dots, N\}$$

والتي تقوم بإيجاد مدى صغر الباقي R وذلك بواسطة الجداء السلمي المعروف على فضاء هيلبرت أي:

$$\forall n \in \{0, \dots, N\} \quad (\chi_n, R) = 0$$

إنّ الطرائق العددية المستخدمة لحل المعادلات التفاضلية تختلف باختلاف توابع الأثر المستخدمة وهي بناء على هذا على ثلاثة أنواع:

١. طرائق الفروق المقسومة: وتكون توابع الأثر في هذه الطرق توابع تكرارية.
٢. طرائق العناصر المنتهية: يعتمد هذا الصف من الطرق على توابع ملساء موضعية.
٣. الطرائق الطيفية العددية: وتستخدم هذه الطرق التوابع الملساء الشاملة كتوابع أثر لها كما ويتم تقسيم هذا الصف من الطرق إلى ثلاث صفوف جزئية اعتماداً على توابع الاختبار:

١.٣. طرائق غالكرين (Galerkin): توابع الأثر = توابع الاختبار أي

$$\chi_n = \phi_n \quad ; n = 1, \dots, N$$

وكل تابع من التوابع ϕ_n يحقق الشرط الحدي أي:

$$B\phi_n(y) = 0 \quad ; n = 1, \dots, N \text{ \& } y \in \delta D$$

يشترط هذا الصف لتعيين معاملات النشر أن يكون الباقي عمودي على الفضاء المولد بتوابع الأثر ويُدعى هذا الشرط بشرط غالكرين وبناءً عليه:

$$\begin{aligned}
\forall n \in \{0, \dots, N\} \quad (\phi_n, R) = 0 &\Leftrightarrow (\phi_n, L\tilde{u} - S) = 0 \\
&\Leftrightarrow \left(\phi_n, L \left(\sum_{k=0}^N \hat{u}_k \phi_k \right) - S \right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \sum_{k=0}^N \hat{u}_k (\phi_n, L\phi_k) - (\phi_n, S) = 0 \\
&\text{لنرمز بـ } L_{nk} \text{ للمصفوفة } \{(\phi_n, L\phi_k)\}_{k=1}^{n=N} \text{ وعليه:}
\end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^N \hat{u}_k L_{nk} = (\phi_n, S)$$

إنّ حل جملة المعادلات الأخيرة يؤدي إلى حصولنا على المعاملات

$$\hat{u}_k \quad ; k = 0, \dots, N$$

٢.٣. طرائق تاو (Tau): توابع الأثر = توابع الاختبار أي

$$\chi_n = \phi_n \quad ; n = 1, \dots, N$$

ولكن أياً من التوابع ϕ_n لا تحقق الشرط الحدي بدايةً إلا أنّها تُجبر على تحقيقه وذلك بإضافة مجموعة من المعادلات أي

$$B\phi_n(y) \neq 0 \quad ; n = 1, \dots, N \text{ \& } y \in \partial U$$

بفرض $\partial U \subseteq \{g_t \quad ; t = 0, \dots, M\}$ أساس متعامد منظم بحيث $M < N$ ، ولنقم بنشر $B\phi_n(y)$ وفق هذا الأساس أي:

$$B\phi_n(y) = \sum_{t=0}^M b_{tn} g_t(y)$$

وعليه فإنّ الشرط الحدي (٢-٤٨) يصبح بالشكل:

$$B\phi_n(y) = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^N \sum_{t=0}^M \hat{u}_k b_{tn} g_t(y) = 0$$

وبذلك نحصل على $M + 1$ شرط بالشكل:

$$\sum_{k=0}^N \hat{u}_k b_{tn} = 0 \quad ; 0 \leq t \leq M$$

٣.٣. طرائق التجميع (Collocation): توابع الاختبار = توابع دلتا عند نقط محددة تُسمى هذه

النقط بنقاط التجميع $\{x_n \quad ; n = 0, \dots, N\}$ أي:

$$\chi_n = \delta(x - x_n) \quad ; n = 1, \dots, N$$

$$\begin{aligned}
\forall n \in \{0, \dots, N\} \quad (\chi_n, R) = 0 &\Leftrightarrow (\delta(x - x_n), R) = 0 \\
&\Leftrightarrow R(x_n) = 0 \\
&\Leftrightarrow Lu(x_n) = S(x_n) \\
&\Leftrightarrow \sum_{k=0}^N \hat{u}_k L\phi_k(x_n) = S(x_n)
\end{aligned}$$

أمّا بالنسبة للشرط الحدي في هذه الطريقة فإننا نتعامل معه كما في طرق تاو وبذلك نحصل على جمل المعادلات الآتية:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^N \hat{u}_k L\phi_k(x_n) &= S(x_n) \quad ; 0 \leq n \leq N - M - 1 \\
\sum_{k=0}^N \hat{u}_k b_{tk} &= S(x_n) \quad ; 0 \leq t \leq M
\end{aligned}$$

إنّ المناقشة السابقة للطرائق العددية الطيفية تجعلنا بحاجة إلى الإجابة عن السؤال التالي وهو كيف نختار توابع الأثر (النشر) التي سنستخدمها في الطرائق الطيفية الآتية الذكر؟ للإجابة عن هذا السؤال نميز هنا حالتين وذلك تبعاً لطبيعة المسائل التي قد تصادفنا:

- (١) مسائل دورية: تُختار ϕ_n كحدوديات مثلثية.
- (٢) مسائل غير دورية: تُختار ϕ_n كحدوديات متعامدة منظمة.

ملاحظة (٢-١٠):

في الحالة التي يكون فيها تابع الأثر حدودية مثلثية فإننا سنسمي الطرائق الطيفية الموافقة بطرائق فورييه الطيفية.

بينما عندما نختار توابع الأثر كحدوديات متعامدة منظمة فإننا عندئذٍ نسمي الطرائق الطيفية بطرائق الحدوديات الطيفية وأشهر طرق هذا الصف طرق *Gegenbaure* الطيفية والتي بدورها تحتوي على صفيين من الطرق الطيفية البارزة وهي طرائق ليجندر الطيفية وطرق تشيبيشيف الطيفية.

مسألة (٢-١):

بفرض لدينا مسألة القيم الابتدائية التالية:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = Lu(x, t) \quad ; x \in [0, 2\pi], \quad t \geq 0$$

$$u(x, 0) = g(x) \quad ; x \in [0, 2\pi], \quad t = 0$$

والمطلوب: حل هذه المسألة باستخدام تقريب فورييه غالكيرين الطيفي.

الحل:

نبحث عن حلول هذه المعادلة في الفضاء

$$\hat{B}_N = \text{Span}\{e^{inx}\}_{|n| \leq N/2}$$

أي أننا نبحث عن حلول من الشكل:

$$u_N(x, t) = \sum_{-N/2}^{N/2} a_n(t) e^{inx}$$

لتعيين المجاهيل $a_n(t)$ نقوم بتطبيق شرط فورييه غالكرين: مسقط الباقي على الفضاء $\hat{B}_N$ يساوي الصفر.

أي أننا نعين الباقي:

$$R_N(x, t) = \frac{\partial u_N(x, t)}{\partial t} - L u_N(x, t)$$

بحيث يكون عامودي على الفضاء $\hat{B}_N$

وبغية ذلك نقوم بتمثيل الباقي وفق متسلسلة فورييه أي:

$$R(x, t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \hat{R}_n(t) e^{inx}$$

حيثُ:

$$\hat{R}_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R_N(x, t) e^{-inx} dx = 0 \quad \forall |n| \leq \frac{N}{2}$$

إن التكامل الأخير ما هو إلا جملة $N+1$ معادلة تفاضلية العادية بـ $N+1$ مجهول $a_n(t)$.

كما أن الشروط الابتدائية الموافقة للجملة الأخيرة تُعطى بالشكل:

$$u_N(x, 0) = \sum_{-N/2}^{N/2} a_n(0) e^{inx}$$

$$a_n(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(x) e^{-inx} dx$$

أحياناً لا نتمكن من حل جملة المعادلات السابقة تحليلياً فنلجأ إلى الطرائق العددية لحلها وتحديد طرائق رانج كوتا التقليدية أو الصيغ التربيعية.

تطبيق (٢-١):

بفرض لدينا مسألة الشروط الابتدائية الزائدية الخطية ذات المعاملات الثابتة التالية:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$u(x, 0) = \sin(\pi \cos x)$$

والمطلوب: أوجد تقريب فورييه غالكرين الطيفي لهذه المسألة.

الحل:

لإيجاد الحل العددي نطبق شرط فورييه غالكرين وبناءً عليه نجد:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \right) \sum_{-N/2}^{N/2} a_k(t) e^{ikx} \right] e^{-inx} dx = 0 \quad \forall |n| \leq \frac{N}{2}$$

وبمفاضلة المجموع الجزئي تصبح العلاقة الأخيرة بالشكل:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{d a_n(t)}{dt} - i n a_n(t) \right) e^{-i n x} dx = 0 \quad \forall |n| \leq \frac{N}{2}$$

وبناءً عليه نجد:

$$\frac{d a_n(t)}{dt} - i n a_n(t) = 0 \quad \forall |n| \leq \frac{N}{2}$$

والشروط الابتدائية الموافقة لها:

$$a_n(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(\pi \cos(x)) e^{-i n x} dx$$

وبحل هذه الجملة نجد أنَّ الحل التقريبي يُعطى بالشكل:

$$u_N(x, t) = \sum_{-N/2}^{N/2} a_n(t) e^{i n x}$$

$$a_n(t) = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) J_n(\pi) e^{i n t}$$

حيثُ: $J_n(x)$ حدودية بسل من النوع الثاني ومن الرتبة n .

وبما أنَّ توابع بسل تحقق:

$$n^p J_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

وذلك أيًّا تكن $p \in \mathbb{Z}$ فإنَّ الحل التقريبي:

$$u_N(x, t) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} u(x, t)$$

حيثُ:

$$u_N(x, t) = \sum_{-N}^N a_k(t) e^{i k x}$$

$$a_k(t) = \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) J_k(\pi) e^{i k t}$$

مسألة (٢-٢):

بفرض لدينا مسألة القيم الابتدائية التالية:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = L u(x, t) \quad ; x \in [0, 2\pi], \quad t \geq 0$$

$$u(x, 0) = g(x) \quad ; x \in [0, 2\pi], \quad t = 0$$

والمطلوب: أوجد الحل الدوري $u(x, t) \in L^2[0, 2\pi]$ ، لهذه المسألة باستخدام طريقة فورييه

للتجميع الطيفي.

الحل:

لتكن لدينا مجموعة النقاط (نقاط التجميع) المعرفة بالشكل:

$$x_j = \frac{2\pi}{N} j, \quad j \in \{0, \dots, N-1\}$$

حيث N عدد صحيح زوجي.

في طريقة فورييه للتجميع الطيفي نقوم بالبحث عن الحلول في الفضاء

$$\tilde{B}_N \in \text{Span}\{(\cos(nx), 0 \leq n \leq N/2) \cup (\sin(nx), 0 \leq n \leq N/2 - 1)\}$$

من الشكل:

$$u_N(x, t) = \sum_{-N/2}^{N/2} a_n(t) e^{inx}$$

والتي يمكن التعبير عنها بالعلاقة:

$$u_N(x, t) = \sum_0^{N-1} u_N(x_j, t) g_j(x)$$

حيث: $g_j(x)$ حدودية استيفاء لاغرانج من أجل عدد زوجي من النقاط.

ولتعيين المعاملات $u_N(x_j, t)$ فإننا نطبق شرط فورييه للتجميع الطيفي الذي ينص على أن:

الباقى ينعدم من أجل جميع نقاط التجميع.

أي أننا نعين الباقي:

$$R_N(x, t) = \frac{\partial u_N(x, t)}{\partial t} - L u_N(x, t)$$

بحيث ينعدم من أجل جميع نقاط التجميع x_j .

من أجل ذلك لنضع:

$$R_N(x_j, t) = 0 \quad \forall j \in \{0, \dots, N-1\}$$

أي أننا نحصل على جملة المعادلات:

$$R_N(x_j, t) = \frac{\partial u_N(x_j, t)}{\partial t} - L u_N(x_j, t)$$

مسألة (٢-٣) (معادلة الحرارة الخطية)

بفرض لدينا مسألة الشروط الحدية الابتدائية الخطية ذات المعاملات الثابتة التالية:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

$$u(x, 0) = \sin(\pi x)$$

$$u(-1, t) = u(1, t) = 0 \quad ; t \in (-1, 1)$$

والمطلوب أوجد حل المسألة وفق طريقة تشيشف للتجميع الطيفي.

الحل:

نبحث عن حلول هذه المعادلة في الفضاء

$$\tilde{T}_N = \text{Span}\{T_n(x) = \cos(n \cos^{-1} x) \quad ; 0 \leq n \leq N\}$$

أي أننا نبحث عن حلول من الشكل:

$$u_N(x, t) = \sum_{n=0}^N a_n(t) T_n(x)$$

لنختار نقاط التجميع على أنها النقاط من الشكل:

$$x_j = \frac{2\pi}{N} j, \quad j \in \{0, \dots, N-1\}$$

بتطبيق شرط التجميع الطيفي تنتج لدينا جملة المعادلات التفاضلية:

$$\left. \frac{\partial u_N}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_N}{\partial x^2} \right|_{x=x_j} = 0 \quad j = 0, \dots, N-1$$

ذات الشروط الحدية

$$u_N(-1, t) = u_N(1, t) = 0$$

الشرط الابتدائي:

$$u(x_j, 0) = \sin(\pi x_j)$$

لحل هذه الجملة من المعادلات التفاضلية فإننا سنختار توابع ديراك دلتا المزاحة على أنها توابع

اختبار فنحصل بذلك على جملة المعادلات:

$$\int_{-1}^{+1} \left[\frac{\partial u_N}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_N}{\partial x^2} \right] \delta_j(x) dx = 0 \quad ; j = 0, \dots, N-1$$

وبملاحظة أن:

$$T_n(x_j) = \cos \frac{\pi j}{N}$$

وبإيجاد قيمة $\left. \frac{\partial u_N}{\partial t} \right|_{x=x_j}$ فإننا نحصل على الحل التقريبي للمسألة السابقة والذي يُعطى بالشكل:

$$u_N(x, t) = \sum_{n=0}^N a_n(t) e^{ink}$$

$$a_n(t) = \frac{2}{c_n} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) J_n(\pi) e^{-\pi^2 t}$$

$$c_n = \begin{cases} 2 & ; n = 0 \\ 1 & ; n \geq 1 \end{cases}$$

حيث: $J_n(x)$ حدودية بسل من النوع الثاني ومن الرتبة n .

٢-٣. ظاهرة جيبس (Gibbs Phenomenon) [2,9,10]:

تُعد ظاهرة جيبس واحدة من أبرز العيوب التي تعاني منها التقريبات الطيفية للمسائل التي تعاني من انقطاع من النوع الأول، وذلك لأنها تُفقد هذه التقريبات دقتها الأسية، ونظراً لأهمية الحصول على تقريبات تتمتع بهذا النوع من الدقة كان لابد من دراسة هذه الظاهرة بـغية توصيفها من أجل التلخيص منها.

تعريف (٢-٢٢) (ظاهرة جيبس):

تُعرف هذه الظاهرة

بيانياً: على أنها واحدة من العيوب التي تعاني منها الخطوط البيانية للمجاميع الجزئية المنتهية الموافقة للمتسلسلات المستخدمة في تقريب التوابع المستمرة قطعياً. تحليلياً: على أنها التقارب غير المنتظم لمتتالية المجاميع الجزئية الموافقة للمتسلسلات المستخدمة في تقريب التوابع المستمرة قطعياً.

٢-٣-١. تابع الإشارة (Sign function)

سنقدم بداية شرحاً لظاهرة جيبس التي يُعاني منها تقريب فورييه الطيفي لتابع الإشارة الأملس قطعياً.

ليكن لدينا تابع الإشارة المعرف بالعلاقة:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & ; -\pi \leq x \leq 0 \\ +1 & ; 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

من الواضح أن f دوري بدور 2π وأملس قطعياً على $[-\pi, \pi]$ وقابل للمكاملة ريمانياً، بالحساب نجد أن متسلسلة فورييه لهذا التابع تُعطى بالشكل:

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}$$

ومنه فإن متتالية المجاميع الجزئية الموافقة لهذه المتسلسلة:

$$S_n(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^n \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}$$

ما يهمنا اعتماداً على تعريف ظاهرة جيبس هو دراسة سلوك S_n ومقارنته مع سلوك التابع f بالقرب من نقاط الانقطاع ومن أجل ذلك سنوجد القيم الصغرى والعظمى محلياً لحدود متتالية المجاميع الجزئية ثم نقارن النتائج التي سنحصل عليها مع القيم الصغرى والعظمى محلياً لـ f . الآن:

$$S_0(x) = \frac{4}{\pi} \sin(x)$$

لإيجاد القيم الصغرى والعظمى محلياً سنقوم باشتقاق S_0 ثم نعددها

$$S'_0(x) = \frac{4}{\pi} \cos(x)$$

$$S'_0(x) = 0 \Rightarrow x = \mp \frac{\pi}{2}$$

$$S_0\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4}{\pi} = 1.27$$

$$S_0\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{4}{\pi} = -1.27$$

وعليه فإنّ النقاط التي يبلغ عندها S_0 الـ $\min, \max$ هي على الترتيب $x = -\frac{\pi}{2}$ و $x = +\frac{\pi}{2}$ ولكن الـ $\min, \max$ لـ f هي $x = -1$ و $x = +1$ على الترتيب وهذا يعني أنّ الـ $\max$ لـ S_0 يتجاوز الـ $\max$ لـ f بنسبة 27%.

بأسلوب مشابه لما سبق نجد أنّ S_1 يبلغ الـ $\max$ عند $x = \frac{\pi}{4}$ و $x = \frac{3\pi}{4}$

$$S_1\left(\frac{\pi}{4}\right) = S_1\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 1.20$$

ومنه فإنّ الـ $\max$ لـ S_1 تتجاوز الـ $\max$ لـ f بنسبة 20%. وإنّ S_1 يبلغ الـ $\min$ عند $x = \frac{\pi}{2}$ و

$$S_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.85$$

ومنه فإنّ الـ $\min$ لـ S_1 تتجاوز الـ $\min$ لـ f بنسبة 15%.

سنقوم فيما يلي بتعميم الدراسة السابقة وذلك بدراسة سلوك $S_n(x)$ في جوار نقاط الانقطاع وهي في هذه الحالة $x = 0$.

إنّ متتالية المجاميع الجزئية التي حدها العام:

$$S_n(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^n \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1} \quad (2-9)$$

تتقارب نحو f وذلك من أجل جميع نقاط مجموعة تعريف f باستثناء $x = 0$ التي تشكل نقطة انقطاع لـ f من النوع الأول.

ولتعيين قيم x التي تبلغ عندها متتالية المجاميع الجزئية الـ $\min, \max$ فإننا سنشتق العلاقة التي تعطي الحد العام لهذه المتتالية ثم نعدمها.

$$\begin{aligned}
S'_n(x) &= \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^n \cos(2k+1)x \\
&= \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^n \left[e^{i(2k+1)x} + e^{-i(2k+1)x} \right] \\
&= \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^n \left[e^{i(2k+1)x} + e^{-i(2k+1)x} \right] \\
&= \frac{2}{\pi} \left[e^{ix} \frac{1 - e^{2i(n+1)x}}{1 - e^{2ix}} + e^{-ix} \frac{1 - e^{-2i(n+1)x}}{1 - e^{-2ix}} \right] \\
&= \frac{2}{\pi} \left[e^{i(n+1)x} \frac{\sin(n+1)x}{\sin(x)} + e^{-i(n+1)x} \frac{\sin(n+1)x}{\sin(x)} \right] \\
&= \frac{2}{\pi} \frac{\sin(n+1)x}{\sin(x)} \left[e^{i(n+1)x} + e^{-i(n+1)x} \right] \\
&= \frac{2}{\pi} \frac{\sin(n+1)x}{\sin(x)} [2\cos(n+1)x] \\
S'_n(x) &= \frac{4}{\pi} \frac{\cos(n+1)x \sin(n+1)x}{\sin(x)} \\
S'_n(x) &= \frac{2}{\pi} \frac{\sin[2(n+1)x]}{\sin(x)} \\
S'_n(x) = 0 &\Rightarrow \frac{2}{\pi} \frac{\sin[2(n+1)x]}{\sin(x)} = 0 \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{cases} \sin(x) \neq 0 \\ \text{and} \\ \sin(2(n+1)x) = 0 \Rightarrow 2(n+1)x = \pi k \quad ; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

ومنه النقاط التي يبلغ عندها S_n قيماً عظمى و صغرى محلياً:

$$x_k = \frac{\pi k}{2(n+1)} \quad ; k=1, 2, \dots, 2n+1$$

وعليه فإن S_n لـ $2n+1$ نقطة محلية مختلفة في المجال $[0, \pi]$ والعلاقة السابقة تُعطينا مواضع هذه النقاط ، ومع ازدياد n فإن موضع أول نقطة يتحرك نحو اليسار مقترباً من الصفر وموضع آخر نقطة يتحرك نحو اليمين مقترباً من π أي أن أول قيمة على يمين الصفر يبلغ عندها الـ

$$x_1 = \frac{\pi}{2(n+1)} \quad \text{الـ } S_n \text{ الـ } \max \text{ هي}$$

ومنه:

$$S_n\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^n \left[\frac{\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}\right)}{2k+1} \right]$$

ليكن لدينا التابع

$$F(x) = \frac{\sin(x)}{x} \quad ; x \in [0, \pi]$$

وبفرض

$$\left\{ \frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)} \quad ; k \in [0, n] \right\}$$

تجزئة للمجال $[0, \pi]$ عندئذٍ وبالاغتماد على مجاميع ريمان نجد أن:

$$S_R = \frac{\pi}{n+1} \left[\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right)}{\frac{\pi}{2(n+1)}} + \frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2(n+1)}\right)}{\frac{3\pi}{2(n+1)}} + \dots + \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2(n+1)}\right)}{\frac{(2n+1)\pi}{2(n+1)}} \right]$$

والذي نستطيع كتابته بالشكل:

$$S_R = \frac{\pi}{(n+1)} \sum_{k=0}^n \left[\frac{\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}\right)}{\frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}} \right]$$

يتقارب نحو

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{x} dx$$

بالعودة إلى مجموع ريمان S_R نجد:

$$S_R = \frac{2(n+1)}{\pi} \times \frac{\pi}{(n+1)} \sum_{k=0}^n \left[\frac{\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}\right)}{(2k+1)} \right]$$

$$S_R = \frac{\pi}{2} S_n \left(\frac{\pi}{2(n+1)} \right)$$

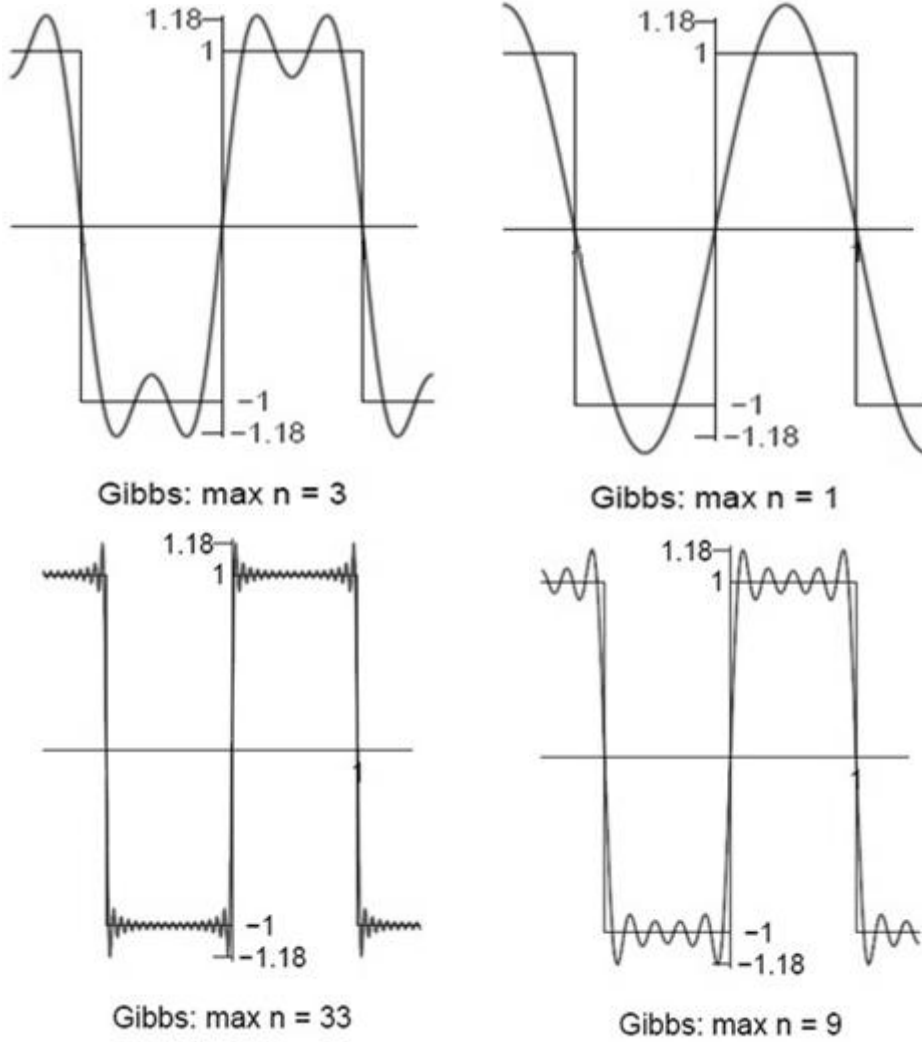
وعليه فإن

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n \left(\frac{\pi}{2(n+1)} \right) = \frac{2}{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} S_R = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{x} dx = 1.18$$

حيثُ وبلاستفادة من نشر تايلور:

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{x} dx = 2 - \frac{\pi^2}{9} + \frac{\pi^4}{300} - \frac{\pi^6}{17640} - \dots \approx 1.18$$

وهذا يعني أنَّ متتالية المجاميع الجزئية لمتسلسلة فورييه لهذا التابع تسلك بالقرب من نقطة الانقطاع سلوك موجة ترتفع عن الحد الأعلى للتابع بنسبة 0.18، وهذا الارتفاع لا يزول مع ازدياد درجة التقريب إنما يسعى إلى قيمة ثابتة. الأشكال البيانية التالية تبين لنا سلوك متتالية المجاميع الجزئية والتجاوزات التي تعاني منها هذه الخطوط



الشكل (٧-٢) (التمثيل البياني لظاهرة جيبس)

إنَّ هذه الظاهرة لا تقتصر على هذا التابع وإنما تتعداها إلى جميع متسلسلات النشر الطيفي التي تقرب توابع ملساء قطعياً.

٢-٣-٢. التفسير الرياضي لظاهرة جيبس:

سنقدم في هذا الجزء من بحثنا دراسة رياضية متعمقة لظاهرة جيبس التي يُعاني منها تقريب فورييه لتابع $f \in L^2[0, 2\pi]$ مستمر قطعياً.

من المعلوم لدينا أنه إذا كان $f \in L^2[0, 2\pi]$ تابعاً مستمر قطعياً و θ_0 نقطة انقطاع لـ f من النوع الأول عندئذٍ فإنَّ تقريب فورييه (الحد العام لمتتالية المجاميع الجزئية الموافقة لمتسلسلة فورييه) الذي يُقرب هذا التابع يُعطى بالشكل:

$$S_N^f(\theta) = \sum_{-N}^N c_n e^{in\theta}$$

حيث:

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-in\theta} d\theta \quad ; n \in \mathbb{Z}$$

وجدنا سابقاً أنَّ هذه المجاميع تتقارب نقطياً نحو f وذلك من أجل النقاط التي يكون التابع f عندها مستمراً بينما تتقارب نحو المتوسط $\frac{f(\theta^-) + f(\theta^+)}{2}$ من أجل نقاط الانقطاع.

لنبرهن الآن أنَّ:

تقريب فورييه المستمر الموافق لتابع مستمر قطعياً، $f \in L^2[0, 2\pi]$ ، يعاني من ظاهرة جيبس. بغية ذلك سنبرهن أنَّ تقارب نشر فورييه للتابع f في جوار نقطة الانقطاع θ_0 غير منتظم وبذلك نكون قد أثبتنا أنَّ f يعاني من ظاهرة جيبس حسب تعريف هذه الظاهرة.

بُغية ذلك سندرس سلوك S_N^f عند النقطة $\theta_0 + \frac{2\beta}{N+1}$ (حيثُ β وسيط ما موجب) الواقعة في جوار نقطة الانقطاع θ_0 .

بالاستفادة من المبرهنة (٢-٥) نستطيع أن نكتب:

$$\begin{aligned} S_N^f\left(\theta_0 + \frac{2\beta}{N+1}\right) &\approx \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} f\left(\theta_0 + \frac{2\beta}{N+1} - \xi\right) D_N(\xi) d\xi \\ &\approx \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} f\left(\theta_0 + \frac{2\beta}{N+1} - \xi\right) \frac{\sin\left(\frac{(N+1)\xi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\xi}{2}\right)} d\xi \end{aligned}$$

حيثُ $1 > \delta$ ، وبناءً عليه فإنَّ:

$$\sin\left(\frac{\xi}{2}\right) \approx \frac{\xi}{2}$$

وبما أنَّ التابع مستمر قطعياً فإننا نستطيع أن نفرض أنَّ:

$$f(\theta - \xi) = \begin{cases} f(\theta^-) & 0 \leq \xi \leq \delta \\ f(\theta^+) & -\delta \leq \xi \leq 0 \end{cases}$$

بإجراء تغيير في المتحول وبمراعاة ما ذكر سابقاً فإنَّ $S_N^f\left(\theta_0 + \frac{2\beta}{N+1}\right)$ تصبح بالشكل:

$$\begin{aligned} S_N^f\left(\theta_0 + \frac{2\beta}{N+1}\right) &\approx \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{(N+1)\delta}{2}}^{\frac{(N+1)\delta}{2}} f\left(\theta_0 + \frac{2\beta}{N+1} - \frac{2s}{N+1}\right) \frac{\sin(s)}{s} ds \\ &\approx \frac{f(\theta_0^+)}{\pi} \int_{-\frac{(N+1)\delta}{2}}^{\beta} \frac{\sin(s)}{s} ds + \frac{f(\theta_0^-)}{\pi} \int_{\beta}^{\frac{(N+1)\delta}{2}} \frac{\sin(s)}{s} ds \end{aligned}$$

بجعل $N \rightarrow \infty$ تصبح العلاقة السابقة بالشكل:

$$\begin{aligned} S_N^f\left(\theta_0 + \frac{2\beta}{N+1}\right) &\approx \frac{f(\theta_0^+)}{\pi} \int_{-\infty}^{\beta} \frac{\sin(s)}{s} ds + \frac{f(\theta_0^-)}{\pi} \int_{\beta}^{\infty} \frac{\sin(s)}{s} ds \\ &\approx \frac{f(\theta_0^+)}{\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{\sin(s)}{s} ds + \frac{f(\theta_0^+)}{\pi} \int_0^{\beta} \frac{\sin(s)}{s} ds \\ &\quad + \frac{f(\theta_0^-)}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin(s)}{s} ds - \frac{f(\theta_0^-)}{\pi} \int_0^{\beta} \frac{\sin(s)}{s} ds \end{aligned}$$

وبما أنَّ:

$$Si(z) = \int_0^z \frac{\sin(s)}{s} ds$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} Si(z) = \frac{\pi}{2}$$

فإنَّه ينتج:

$$\begin{aligned} S_N^f\left(\theta_0 + \frac{2\beta}{N+1}\right) &\approx \frac{f(\theta_0^+) + f(\theta_0^-)}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin(s)}{s} ds + \frac{f(\theta_0^+) - f(\theta_0^-)}{\pi} \int_0^{\beta} \frac{\sin(s)}{s} ds \\ &\approx \frac{f(\theta_0^+) + f(\theta_0^-)}{2} + \frac{f(\theta_0^+) - f(\theta_0^-)}{\pi} Si(\beta) \end{aligned}$$

(٥٠-٢)...

وعليه فإنَّ كل نقطة θ تقع في جوار نقطة الانقطاع θ_0 تحقق العلاقة:

$$S_N^f(\theta) \approx \frac{f(\theta_0^+) + f(\theta_0^-)}{2} + \alpha Si(\beta)$$

حيثُ:

$$\alpha = \frac{f(\theta_0^+) - f(\theta_0^-)}{\pi} = \text{const}$$

وهذا يعني أنَّه من أجل كل N إذا كانت النقطة θ تتقارب نحو النقطة θ_0 عندما $N \rightarrow \infty$ فإنَّ نشر فورييه للتابع f لا يتقارب نحو التابع f ويمكن التعبير عن ذلك رياضياً بقولنا أنَّه إذا تحقق من أجل كل N أنَّ:

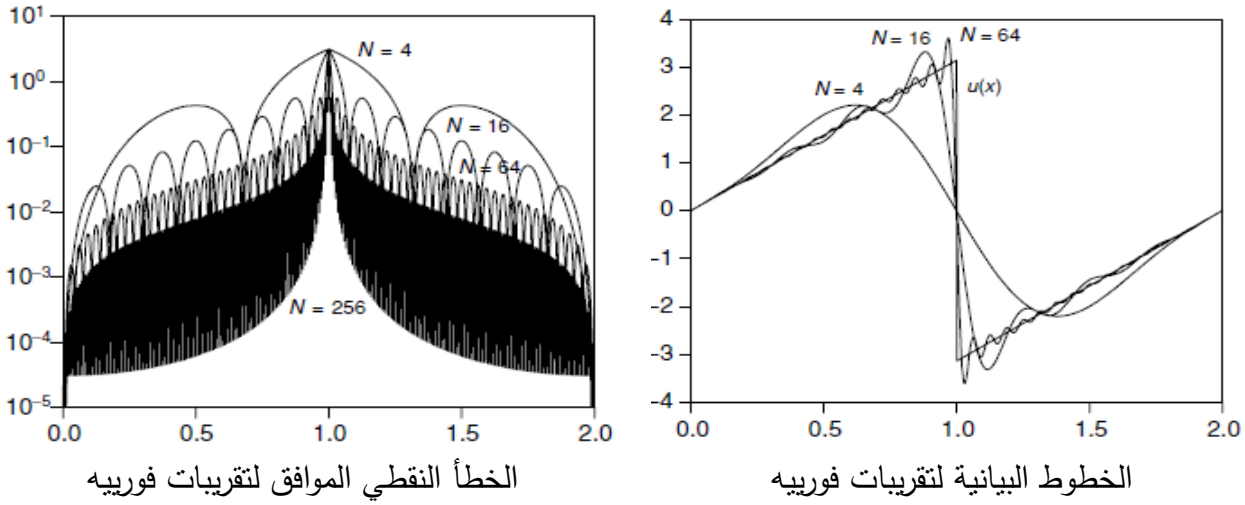
$$\theta - \theta_0 = O(1/N)$$

فإن التقريب يحقق

$$S_N^f(\theta) - \frac{(f(\theta_0^+) + f(\theta_0^-))}{2} = O(1) \quad (2-51) \dots$$

أي أنه على الرغم من أن نشر فورييه يتقارب نقطياً من أجل أي نقطة يكون التابع مستمراً عندها إلا أن هذا التقارب لا يكون منتظماً نتيجة وجود نقاط انقطاع أي أن تقارب نشر فورييه لتابع يعاني من انقطاع لا يكون منتظماً في جوار تلك النقطة وبناءً عليه فإن هذا النشر يعاني من ظاهرة جيبس اعتماداً على التعريف الذي أوردناه في بداية هذا الجزء من بحثنا.

ويمكن للشكل التالي أن يوضح لنا التقارب غير المنتظم لتقريب فورييه المستمر لتابع الإشارة



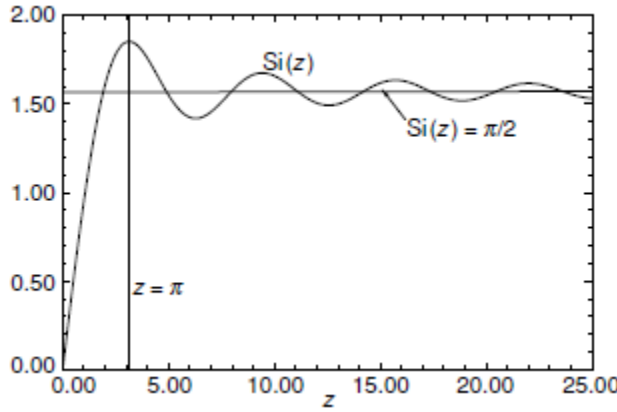
الشكل (2-8)

ويكون هذا التقارب غير المنتظم بيانياً على شكل نتوءات تتجاوز في ارتفاعها القيمة العظمى و القيمة الصغرى للتابع ، وهذه التجاوزات تضيق مع ازدياد درجة التقريب إلا أنها لا تزول وذلك لأنها مقدار ثابت لا يتعلق بدرجة التقريب N . وإن القيمة العظمى لهذا النتوء من أجل أي نشر فورييه لأي تابع تحصل عند $\beta = \pi$ وذلك لأنها القيمة التي يبلغ عندها Si (تكامل الجيب) قيمته العظمى وتعطى هذه القيمة عددياً بالشكل:

$$S_N^f(\theta) - f(\theta_0^-) \approx 1.08949 (f(\theta_0^+) - f(\theta_0^-)) \quad (2-52) \dots$$

حيثُ:

$$\frac{1}{\pi} Si(\pi) = 0.58949 \quad (2-53) \dots$$



يعرض الشكل المجاور الخط البياني لدالة تكامل الجيب $Si(z)$ ويوضح أنّ هذه الدالة تبلغ قيمتها العظمى عند π

الشكل (٢-٩) (الخط البياني لتكامل الجيب $Si(z)$)



يوضح الشكل المرسوم جانباً النتوء (التجاوز) الذي يعاني منه نشر فورييه لتابع مستمر قطعياً والذي أُطلق عليه اسم ظاهرة جيبس.

الشكل (٢-١٠) رسم توضيحي للنتوء الناتج عن ظاهرة

جيبس

فيما يأتي سنورد عدد من الأمثلة التي توضح هذا الجانب من ظاهرة جيبس.

مثال (٢-١): [Fornberg (1996)]:

بفرض لدينا التابع:

$$f(\theta) = \begin{cases} -\frac{1}{2} & ; -\pi \leq \theta \leq 0 \\ \frac{1}{2} & ; 0 \leq \theta \leq \pi \end{cases}$$

إنّ متسلسلة فورييه التي تقرب هذا التابع تُعطى بالشكل:

$$S_N^f(\theta) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)\theta}{2k+1}$$

وعليه فإنّه لإيجاد القيمة العظمى لمتتالية المجاميع الجزئية لهذه المتسلسلة فإننا نقوم باشتقاق متتالية المجاميع الجزئية كما بالشكل:

$$(S_N^f(\theta))' = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^N \cos(2k+1)\theta = \frac{\sin 2(N+1)\theta}{\pi \sin \theta}$$

ثمّ نوجد النقاط التي من أجلها ينعدم هذا المشتق والتي هي في هذه الحالة $\theta = \frac{\pi}{2(N+1)}$

وبعد ذلك نعوض القيم التي نحصل عليها في متتالية المجاميع الجزئية أي:

$$S_N^f\left(\frac{\pi}{2(N+1)}\right) = \frac{1}{\pi(N+1)} \sum_{k=0}^N \frac{\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2(N+1)}\right)}{\left(\frac{2k+1}{2(N+1)}\right)}$$

$$\approx \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{\sin \pi t}{t} dt = \frac{1}{\pi} \text{Si}(\pi) = 0.58949$$

$$\left| S_N^f(\theta) - f(0^+) \right| \approx 1.08949 \left| f(0^+) - f(0^-) \right| \approx 1.08949$$

ملاحظة (١١-٢):

(١) إنّ ظاهرة جيبس التي تمت دراستها آنفاً تبرز عند حل أي مسألة تعاني من انقطاع باستخدام تقريب طيفي ولا تقتصر على تقريبات فورييه الطيفية ذلك لأنّ الاختلاف بين هذه التقريبات يكمن فقط في توابع الأثر.

(٢) إنّ المناقشة الرياضية السابقة تُبرز لدينا وجود ثلاثة جوانب هامة لما يُسمى **ظاهرة جيبس**:
 (1) التقارب البطيء بعيداً عن نقاط الانقطاع وذلك نتيجة الطبيعة الشمولية لمعاملات النشر الطيفي إذ يتم تعيينها بالمكاملة أو الجمع على كامل المجال المراد تقريب التابع عليه وإن تضمن نقاط انقطاع، أي بفرض x_0 نقطة مثبتة من مجال تعريف التابع f وليست نقطة انقطاع عندئذ يكون:

$$\left| f(x) - f(x_0) \right| \sim O\left(\frac{1}{N}\right)$$

(2) وجود تجاوزات للقيمة العظمى والصغرى للتابع لاتزول مهما زدنا درجة التقريب أي:

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} \left| f(x) - S_N^f(x) \right|$$

لاتسعى إلى الصفر مهما زدنا N .

(3) التقارب غير المنتظم في جوار نقطة الانقطاع.

الفصل الثالث

اكتشاف حافة تابع

Edge Detection Function

إنَّ اكتشاف حواف تابع ما أو ما يُعرف باكتشاف انقطاع تابع يُعتبر أمراً بالغ الأهمية في العديد من المجالات، إذ أنَّ معالجة صورة على سبيل المثال يتطلب اكتشاف وتعيين حدود الوحدات التي تتكون منها هذه الصورة [12] ، وتكمن أهمية تحديد مواقع انقطاع تابع في بحثنا في أنَّ العديد من الإجراءات المستخدمة للتقليل أو التخلص من الأثر السلبي لظاهرة جيبس إن لم تُدمج مع خوارزمية ما لتحديد مواقع نقاط انقطاع التابع المراد بناؤه فإنَّ هذه الطريقة تعتبر فاشلة الأمر الذي دفعنا لتخصيص هذا الفصل من بحثنا من أجل مناقشة عدد من هذه الخوارزميات.

تعريف (١-٣) (اكتشاف حواف تابع) [13]:

يُطلق مصطلح اكتشاف حواف تابع على عملية اكتشاف أو تعيين مواقع نقاط انقطاع تابع وسعة (*Amplitude*) كلاً من هذه الانقطاعات وذلك انطلاقاً من المعاملات الطيفية لهذا التابع.

١-٣. تحديد مواقع نقاط انقطاع تابع باستخدام الطريقة التقليدية (تحويل هيلبرت) [14]:

سنقوم في البداية بتقديم ما يُعرف باسم الطريقة التقليدية لاكتشاف مواقع انقطاع تابع ما معتمدين حصراً على معاملات النشر الطيفي وتحديد معاملات فورييه.

تعريف (٢-٣) تابع الإزاحة لتابع ما:

بفرض f تابع دوري بدور T عندئذٍ يُعرّف تابع الإزاحة الموافق للتابع f على أنه التابع

$$g(t) = f(t - \tau) \quad (1-3) \dots$$

حيث τ مقدار ثابت.

من الواضح أنَّ تابع الإزاحة دوري بدور T وعليه فإنَّ معاملات فورييه الموافقة له تُعطى بالعلاقة:

$$d_n = \frac{1}{T} \int_x^{x+T} f(t - \tau) e^{-in\omega t} dt$$

حيث T دور التابع f ، $\omega = 2\pi/T$ ، x قيمة اختيارية.

$$d_n = \frac{1}{T} \int_{x-\tau}^{x-\tau+T} f(u) e^{-in\omega(\tau+u)} dt = e^{-in\omega\tau} C_n$$

وبذلك نكون قد عبرنا عن معاملات فورييه لتابع الإزاحة g بدلالة معاملات فورييه للتابع الأصلي f .

٣-١-١. تفريق تابع (Decomposing a Function) [15]:

يوجد العديد من الطرائق التي نستطيع من خلالها تقسيم أي تابع أملس قطعياً إلى جزأين أحدهما تابع مستمر والآخر تابع مستمر قطعياً وفيما يلي سنقدم واحدة من هذه الطرائق. بفرض f تابع أملس قطعياً يعاني من m انقطاع من النوع الأول وذلك عند النقاط الموافقة لـ $t_1, \dots, t_m$ عندئذٍ نستطيع بناء تابع بالشكل:

$$\omega(t) = f(t) - \sum_{j=1}^m h_j k(t-t_j) \quad \dots (٣-٢)$$

حيثُ:

$$\begin{aligned} h_j &= f(t_j^+) - f(t_j^-) \\ f(t_j^+) &= \lim_{h \rightarrow 0} f(t_j + \alpha) \quad ; \alpha > 0 \\ f(t_j^-) &= \lim_{h \rightarrow 0} f(t_j - \alpha) \quad ; \alpha > 0 \\ k(t) &= t - 1/2 \quad ; t \in [0, 1) \end{aligned} \quad \dots (٣-٣)$$

والتابع k قد تمّ تمديده دورياً على $\mathbb{R}$ بدور $T=1$.

من الواضح أنّ ω تابع مستمر (لا يعاني من أي انقطاع) وأملس قطعياً.

يمكن إعادة كتابة العلاقة (٣-٢) لتصبح بالشكل:

$$f(t) = \omega(t) + \sum_{j=1}^m h_j k(t-t_j) \quad \dots (٣-٤)$$

حيثُ: $\omega(t)$ تابع مستمر وأملس قطعياً و المجموع $\sum_{j=1}^m h_j k(t-t_j)$ تابع يعاني من انقطاع ومستمر قطعياً.

يُرمز لمعاملات فورييه العقدية الموافقة للتابع $\omega(t)$ بالرمز b_n والتي لابدّ أن تكون قابلة للجمع بالإطلاق وذلك نظراً لكون التابع مستمر وأملس قطعياً.

بالاستفادة من خطية معاملات فورييه نجد أنّ معاملات فورييه للمجموع $\sum_{j=1}^m h_j k(t-t_j)$

والتي يُرمز لها بـ a_n تُعطى بالعلاقة:

$$(٥-٣) \dots \quad a_n = \begin{cases} \sum_{j=1}^m h_j \frac{ie^{-i2\pi n t_j}}{2\pi n} & ; n \neq 0 \\ 0 & ; n = 0 \end{cases}$$

إنّ هذه المعاملات غير قابلة للجمع وذلك لأنّ التابع $\sum_{j=1}^m h_j k(t-t_j)$ غير مستمر.

بفرض f تابع أملس قطعياً، عندئذٍ نجد أنّ معاملات فورييه الموافقة له والتي يُرمز لها بـ C_n يمكن التعبير عنها بالشكل:

$$(٦-٣) \dots \quad C_n = a_n + b_n$$

وذلك لخطية هذه المعاملات.

٣-١-٢. الطريقة التقليدية (Classical Approach):

تقوم هذه الطريقة على إيجاد تحويل لمعاملات فورييه بحيث يزداد المجموع الجزئي لمتسلسلة فورييه فقط عند نقاط الانقطاع.

تعريف (٣-٤) (تحويل هيلبرت) (Hilbert Transform) [15]:

يُعرف تحويل هيلبرت الموافق للمتتالية (C_n) بالعلاقة:

$$(٧-٣) \dots \quad r_n = \begin{cases} -i C_n = -i a_n - i b_n & ; n \geq 1 \\ 0 & ; n = 0 \\ i C_n = i a_n + i b_n & ; n \leq -1 \end{cases}$$

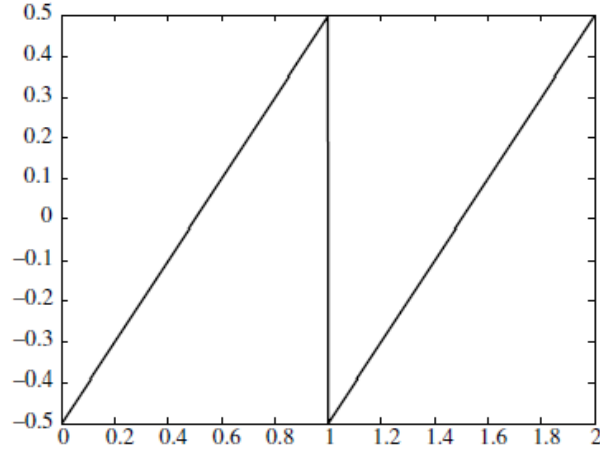
١. تحديد مواقع الانقطاع لتابع أسنان المنشار باستخدام تحويل هيلبرت:

ليكن لدينا تابع أسنان المنشار المعرف وفق العلاقة:

$$(٨-٣) \dots \quad k(t) = t - 1/2 \quad ; t \in [0,1)$$

لنمدد هذا التابع دورياً على $\Re$ وعليه فإننا نجد أنّ هذا التابع يعاني من انقطاع من أجل كل عدد صحيح .

يوضح الشكل التالي الرسم البياني لهذا التابع بعد أن تمّ تمديده ليصبح معرفاً على المجال $[0,2)$



الشكل (١-٣) (الخط البياني لتابع أسنان المنشار)

إن معاملات فورييه الموافقة لهذا التابع تُعطى:

$$C_n = \begin{cases} 0 & ; n = 0 \\ \frac{i}{2\pi n} & ; n \neq 0 \end{cases}$$

وعليه فإن متسلسلة فورييه الموافقة لهذا التابع تُعطى بالشكل:

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{i}{2\pi n} e^{2\pi n t i} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i}{2\pi n} e^{-2\pi n t i}$$

وعليه فإن متسلسلة فورييه المحولة وفق تحويل هيلبرت لتابع أسنان المنشار المزاح تُعطى بالشكل:

$$(٩-٣) \dots g(t) = \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{-1}{2\pi n} e^{2\pi n(t-\tau)i} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi n} e^{2\pi n(t-\tau)i} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi n(t-\tau))}{\pi n}$$

حيث: τ مقدار الانسحاب.

إن المتسلسلة الموافقة لـ $t = \tau + m$ حيث m عدد صحيح هي المتسلسلة المتجانسة

$$g(\tau + m) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi n}$$

ومن المعلوم أن هذه المتسلسلة متباعدة.

أما المتسلسلة الموافقة لـ $t = \tau + m/2$ حيث m عدد صحيح هي المتسلسلة المتناوبة:

$$g(\tau + m/2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\pi n}$$

وهذه المتسلسلة متقاربة شرطياً نحو $\frac{\ln 2}{\pi}$.

نفرض أن $\xi = t - \tau$ وعليه فإن العلاقة (٩-٣) تتحول إلى :

$$g(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi n \xi)}{\pi n}$$

وعليه فإن المجموع الجزئي من الدرجة N الموافق للمتسلسلة السابقة هو :

$$(١٠-٣) \dots \quad g_N(\xi) = \sum_{n=1}^N \frac{\cos(2\pi n \xi)}{\pi n}$$

إنَّ المجموع الأخير يمكن إعادة كتابته بالشكل:

$$(١١-٣) \dots \quad g_N(t) = \frac{\cos(2\pi \xi)}{\pi} + \sum_{n=2}^N \frac{D_n(\xi) - D_{n-1}(\xi)}{2\pi n}$$

حيثُ:

$$D_N(\xi) = \sum_{-N}^N e^{2i\pi n \xi} = 1 + 2 \sum_{n=1}^N \cos(2\pi n \xi) = \frac{\sin((2N+1)\pi \xi)}{\sin(\pi \xi)}$$

بتبسيط العلاقة (١١-٣) ينتج لدينا:

$$\begin{aligned} g_N(\xi) &= \frac{\cos(2\pi \xi)}{\pi} + \frac{D_N(\xi)}{2N\pi} - \frac{1}{2\pi} \sum_{n=2}^N D_{n-1}(\xi) \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1} \right) - \frac{D_1(\xi)}{2\pi} \\ &= \frac{D_N(\xi)}{2N\pi} + \frac{1}{2\pi} \sum_{n=2}^N D_{n-1}(\xi) \frac{1}{n(n-1)} - \frac{1}{2\pi} \end{aligned}$$

بما أنَّ نواة ديرخلية محدودة وفق العلاقة:

$$|D_N(\xi)| \leq \frac{1}{|\sin(\pi \xi)|}$$

فإنَّه ينتج أنَّ:

$$|g_N(\xi)| \leq \frac{1}{|\sin(\pi \xi)|} \left(\frac{1}{2N\pi} + \frac{1}{2\pi} \sum_{n=2}^N \frac{1}{n(n-1)} \right) + \frac{1}{2\pi}$$

وبملاحظة أنَّ

$$\sum_{n=2}^N \frac{1}{n(n-1)} = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n(n+1)} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

فإننا نجد:

$$(١٢-٣) \dots \quad |g_N(\xi)| \leq \frac{1}{|\sin(\pi \xi)|} \left(\frac{1}{2N\pi} + \frac{\pi}{12} \right) + \frac{1}{2\pi}$$

أي أنَّ $g_N(\xi)$ محدود وكلاً من حديه يعتمد على ξ الأمر الذي يجعلنا نميز حالتين:

الحالة الاولى: أن لا يكون ξ عدداً صحيحاً أي $m \in \mathbb{Z}$; $m \neq \xi$ أي $t \neq \tau + m$ عندئذٍ

تؤول العلاقة (١٢-٣) إلى:

$$|g_N(\xi)| \leq \alpha \quad ; \alpha = \left(\frac{1}{2N\pi} + \frac{\pi^2 + 6}{12\pi} \right)$$

ومنه نجد:

$$\frac{\pi}{\ln N} g_N(\xi) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$$

الحالة الثانية: أن يكون ξ عدداً صحيحاً أي $m \in \mathbb{Z}$; $\xi = m$ أي $t = \tau + m$ عندئذٍ يؤول المجموع الجزئي من الدرجة N الوارد في العلاقة (٣-٩) إلى المجموع

$$g_N(t) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}$$

من الواضح أن:

$$\int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{n} \leq \int_{n-1}^n \frac{1}{x} dx$$

$$1 + \int_2^{N+1} \frac{1}{x} dx \leq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \leq 1 + \int_1^N \frac{1}{x} dx$$

$$1 + \ln(N+1) - \ln(2) \leq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \leq 1 + \ln(N)$$

بتقسيم الأطراف الثلاثة الواردة في التراجع الأخير على $\ln(N)$ ينتج أن:

$$\frac{\sum_{n=1}^N \frac{1}{n}}{\ln N} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 1$$

وبذلك نكون قد أثبتنا أن

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\pi}{\ln N} g_N(\xi) = \begin{cases} 0 & ; \xi \notin \mathbb{Z} \\ 1 & ; \xi \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

أي أن تحويل هيلبرت الذي طبق على معاملات فورييه قد أوجد متتالية من التتابع:

$$(edge(\xi; N))_N = \left(\frac{\pi}{\ln N} g_N(\xi) \right)_N$$

ميزت النقاط التي يعاني عندها تابع المنشار من انقطاع عن تلك النقاط التي يكون عندها مستمراً.

يُسمى التابع $edge(\xi; N)$ بالتابع المحدد لنقاط الانقطاع الموافق لتقريب فورييه من الدرجة N أو اختصاراً التابع المحدد لنقاط الانقطاع من الدرجة N .

٢. تحديد مواقع الانقطاع لتابع أملس قطعياً باستخدام تحويل هيلبرت:

إن النتائج التي حصلنا عليها في الفقرة السابقة من خلال تطبيق تحويل هيلبرت على معاملات فورييه لتابع المنشار من الممكن تطبيقها على أي تابع أملس قطعياً. بفرض f تابع أملس قطعي ولتكن C_n معاملات فورييه الموافقة لهذا التابع عندئذٍ نستطيع تعريف التابع:

$$edge(t, N) \equiv \frac{\pi}{\ln(N)} \left(\sum_{n=-N}^{-1} i C_n e^{2\pi n t i} + \sum_{n=1}^N -i C_n e^{2\pi n t i} \right)$$

(٣-٣)...

والذي تمّ بناؤه انطلاقاً من معاملات فورييه بعد أن تمّ تحويلها وفق تحويل هيلبرت. فيما يلي نستعرض النظرية التي تضمن لنا أنّ متتالية التوابع التي يُعرّف حدها العام وفق العلاقة (٣-٣) تُميّز النقاط التي يعاني التابع عندها من انقطاع عن تلك التي يكون عندها مستمراً.

نظرية (٣-٤):

بفرض f تابع أملس قطعياً ولتكن C_n معاملات فورييه الموافقة لهذا التابع عندئذٍ تتحقق العلاقة:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \text{edge}_1(t, N) \equiv \begin{cases} h & \text{if } f(t^+) \neq f(t^-) \\ 0 & \text{if } f(t^+) = f(t^-) \end{cases}$$

(٣-٤)...

حيثُ:

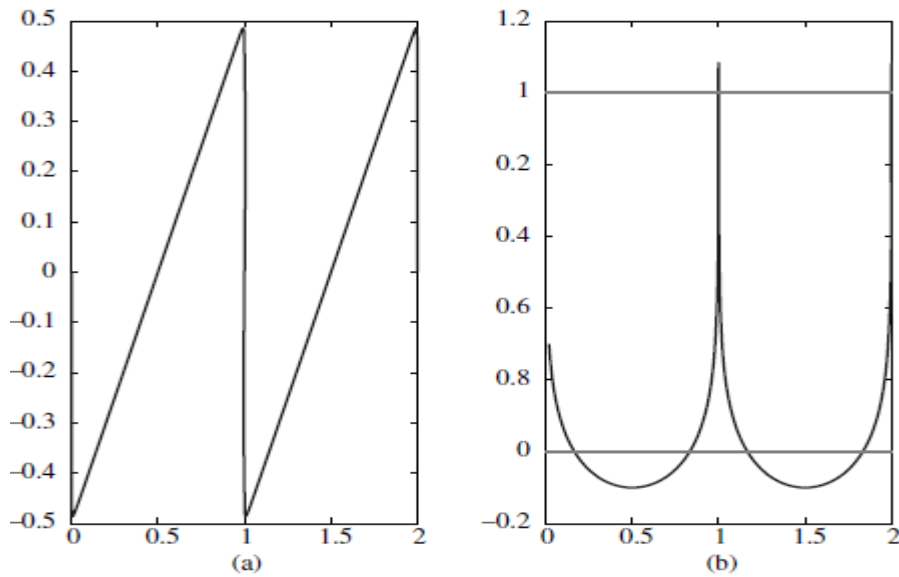
$$h = f(t^+) - f(t^-)$$

(٣-٥)...

$$f(t^+) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} f(t + \alpha) \quad ; \alpha > 0$$

$$f(t^-) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} f(t - \alpha) \quad ; \alpha > 0$$

الشكل البياني التالي يوضح الخطوط البيانية لكل مجموع فورييه الجزئي من الدرجة $N = 1000$ لتابع المنشار والتابع المحدد $\text{edge}(\xi; 1000)$.



الشكل (٣-٢) (a) تقريب فورييه من الدرجة $N = 1000$ ، (b) التابع المحدد $\text{edge}(\xi; 1000)$ (

يمكن من خلال الشكل (٣-٢) (b) ملاحظة أمرين:

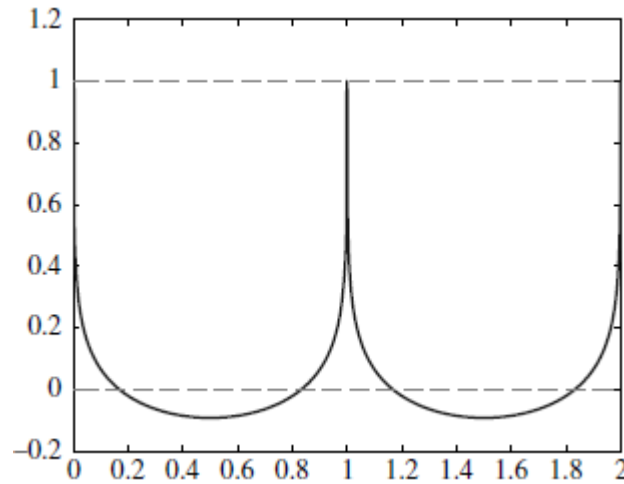
(١) قيمة التابع عند نقطتي الانقطاع تتجاوز الواحد وهي تحديداً 1.08.

(٢) على الرغم من اختيار $N = 1000$ ، كبيرة بشكل كافٍ ، فإنَّ النقاط البعيدة عن نقط الانقطاع لا تتقارب نحو الصفر بشكل كافٍ وذلك لأنه عند بناء متتالية التتابع $(edge(t; N))_N$ تمَّ التقسيم على $\log N$ والذي يعاني من بطء شديد في التقارب. ولتحسين هذه الطريقة، وتحديدًا للتخلص من العيب الأول، يمكن بناء متتالية جديدة من التتابع وذلك من خلال التقسيم على $\log N + \gamma$ ، حيث γ ثابت أولر^١ ، بدلاً من التقسيم على $\log N$ أي:

$$edge_1(t, N) \equiv \frac{\pi}{\ln(N) + \gamma} \left(\sum_{n=-N}^{-1} i C_n e^{-2\pi n t} + \sum_{n=1}^N -i C_n e^{-2\pi n t} \right)$$

$$= \frac{\ln(N)}{\ln(N) + \gamma} (edge(t, N))$$

يُوضح الشكل البياني التالي التحسن الذي يطرأ عند استخدام التابع $edge_1(t; 1000)$ فعلى الرغم من أنَّ التقارب يبقى بطيئاً إلا أنَّ قيمة التابع عند نقط الانقطاع ستصبح مساوية للواحد وبذلك نكون قد تخلصنا من إحدى المشكلتين السابقتين.



الشكل (٣-٣) (التابع $edge_1(t; 1000)$)

أمَّا بالنسبة لمشكلة التقارب البطيء فلا بدَّ للتخلص منها من إيجاد تحويل جديد ومن ثمَّ بناء متتالية من التتابع التي تساعدنا على تحديد مواقع نقط الانقطاع. بُغية ذلك لنعرف التحويل:

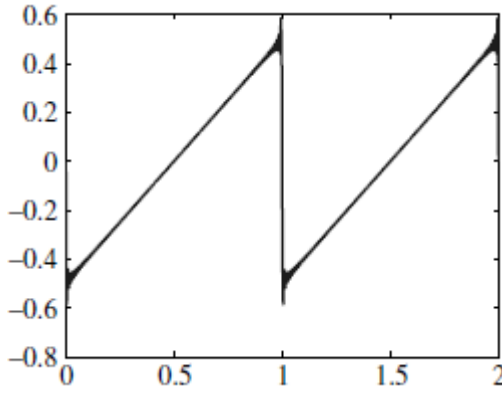
$$S_n = -i n C_n$$

بتطبيق هذا التحويل على معاملات فورييه لتابع أملس قطعي نستطيع بناء متتالية من التتابع يُعطى حدها العام بالمساواة:

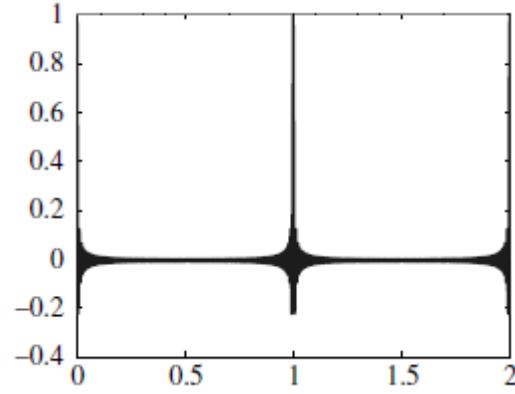
^١ يُعرف ثابت أولر بالشكل [7]: $\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/2 + 1/3 + \dots + 1/n - \ln n) \cong 0.577215$

$$(١٦-٣)...\quad edge_2(t, N) \equiv \frac{\pi}{N} \sum_{-N}^N S_n e^{2\pi n t i} = -\frac{\pi}{N} \sum_{-N}^N i n C_n e^{2\pi n t i}$$

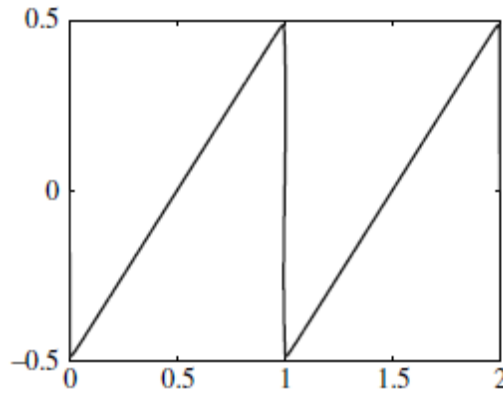
من أجل توضيح التحسن الذي يطرأ على التقارب بعيداً عن نقاط الانقطاع سنستعرض عدداً من الخطوط البيانية لمجموع فورييه الجزئي من الدرجة N الموافق لتابع أسنان المنشار بالإضافة إلى الخطوط البيانية للتابع $edge_2(t, N)$ الموافق لهذا المجموع.



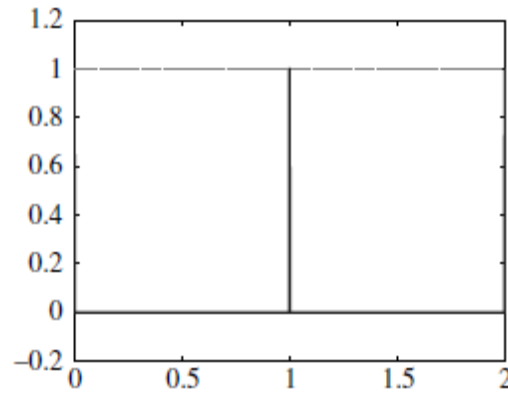
تقريب فورييه لتابع المنشار من أجل $N = 100$



الخط البياني للتابع المحدد $edge_2(t, 100)$



تقريب فورييه لتابع المنشار من أجل $N = 1000$



الخط البياني للتابع المحدد $edge_2(t, 1000)$

الشكل (٣-٤)

٣-٢. اكتشاف مواقع الانقطاع باستخدام نوى التمرکز:

استعرضنا في القسم الأول من هذا الفصل الطريقة التقليدية لتحديد مواقع نقاط انقطاع تابع ما وذلك انطلاقاً من معاملات تقريب فورييه الطيفي لهذا التابع أمّا الآن فإننا سنستعرض الطريقة الأكثر شيوعاً و الأكثر فعالية والتي تُعرف باسم نوى التمرکز [13,16,17].

بفرض f تابع أملس قطعياً معرف على المجال $(-\pi, \pi)$ عندئذٍ وبالاكتفاء على تعريف التابع المستمر قطعياً، فإن f يمتلك عدداً منتهياً من نقاط الانقطاع من النوع الأول أي:

$$(١٧-٣)...\quad \begin{aligned} f(x_j^+) &= \lim_{h \rightarrow 0} f(x_j + h) & ; h > 0 \\ f(x_j^-) &= \lim_{h \rightarrow 0} f(x_j - h) & ; h > 0 \end{aligned}$$

حيثُ $f(x_j^+) \neq f(x_j^-)$ وكل منهما ذو قيمة محددة.

تعريف (٣-٣): تابع القفزة الموضعي (Local jump function)

بفرض f تابع أملس قطعياً معرف على المجال $[-\pi, \pi]$ عندئذٍ يُعطى تابع القفزة الموضعي بالعلاقة:

$$[f](x) = f(x^+) - f(x^-) \quad ; x \in [-\pi, \pi]$$

تعريف (٤-٣): التغير الكلي لتابع (Total variation of function)

بفرض لدينا التابع الحقيقي

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

وبفرض $w = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ تجزئة للمجال $[a, b]$.

ولنعرف المقدارين:

$$V(w, f) = \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})|$$

$$V(f; a, b) = \sup_w V(w, f)$$

عندئذٍ ندعو المقدار $V(f; a, b)$ بالتغير الكلي للتابع f على المجال $[a, b]$.

تعريف (٥-٣): التابع ذو التغير المحدود (Bounded Variation function)

يُقال عن التابع الحقيقي f المعرف على المجال $[a, b]$ أنه ذو تغير محدود على هذا المجال إذا كان

$$V(f; a, b) < \infty$$

مثال (١-٣):

إنَّ أي تابع مطرد على المجال $[a, b]$ هو تابع ذو تغير محدود لأنَّه في هذه الحالة يتحقق:

$$V(f; a, b) = |f(a) - f(b)|$$

سنستعرض فيما يلي ثلاث نظريات نقدم من خلالها أبرز مميزات التوابع ذات التغير المحدود.

نظرية (١-٣):

إنَّ التابع f تابع ذو تغير محدود على المجال $[a, b]$ إذا وفقط إذا أمكن كتابته على شكل فرق

$$f = h - g \quad \text{أي: } h, g \text{ تابعين مطّردين}$$

نظرية (٢-٣):

إنَّ التابع f تابع ذو تغير محدود على المجال $[a, b]$ إذا وفقط إذا كان قابلاً للمفاضلة.

نظرية (٣-٣):

إذا كان f تابع ذو تغير محدود على المجال $[a, b]$ فهو يحقق:

$$1. \text{ موجودة } f(x^-) \text{ موجودة } f(x^+) \quad \forall x \in (a, b)$$

٢. موجودة $f(b^-)$ موجودة $f(a^+)$

٣. يمتلك على الأكثر عدد قابل للعد من نقاط الانقطاع.

ترميز:

يُرمز بـ $BV[a, b]$ لصف التتابع ذات التغير المحدود على المجال $[a, b]$ والمزودة بنصف النظيم

$$\|f\|_{BV[a, b]} = \int_a^b |f'| dx$$

تعريف (٣-٦): تابع التمليس القطعي (Piecewise smoothness function)

بفرض f تابع أملس قطعياً معرف على المجال $(-\pi, \pi)$ عندئذ يُعطى تابع التمليس القطعي بالعلاقة:

$$F_x(t) = \frac{f(x+t) - f(x-t) - [f](x)}{t} \in BV[0, \delta] \quad \forall x \in [-\pi, \pi] \quad (٣-١٩) \dots$$

إنّ مواقع نقاط الانقطاع لتابع أملس قطعي يُمكن أن تكتشف باستخدام نوى التمرکز الملساء، $K(t) = K_\varepsilon(t)$ ، التي تتمتع بالخاصة التالية والتي تسمى خاصة التمرکز:

$$K_\varepsilon * f(x) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} [f](x) \quad (٣-٢٠) \dots$$

حيث ε وسيط صغير يتناسب عكسياً مع N (عدد معاملات فورييه).

ومن العلاقة الأخيرة يُمكننا القول أنّ دعامة التابع $K_\varepsilon * f(x)$ تسعى إلى التمرکز بالقرب من نقاط انقطاع (حواف) التابع f ، وبذلك يتم تحديد مواقع نقط الانقطاع وسعة كل منها.

إنّ تابع النواة $K_\varepsilon(t)$ يجب أن يتمتع بالخواص التالية لضمان تمرّكه حول نقط الانقطاع:

$$(١) \quad K_\varepsilon(t) \text{ تابع فردي أي} \quad K_\varepsilon(t) = -K_\varepsilon(-t) \quad (٣-٢١) \dots$$

$$(٢) \quad K_\varepsilon(t) \text{ منتظم (Normalized) أي:} \quad \int_{t \geq 0} K_\varepsilon(t) dt = -1 + O(\varepsilon) \quad (٣-٢٢) \dots$$

(٣) خاصية القبول الأساسية (Main admissibility requirement):

$$(٣-٢٣) \dots \left| \int_t K_\varepsilon(t) \phi(t) dt \right| \leq \text{Const.} \varepsilon \|\phi\|_{BV}$$

ملاحظة (٣-١):

إذا كانت النواة متمركزة حول المبدأ عندئذ يتحقق:

^٢ تُعرف دعامة التابع f على أنها: $\{x; f(x) \neq 0\}$

$$(٢٤-٣) \dots \left| \int_t K_\varepsilon(t) dt \right| \leq \text{Const} \cdot \varepsilon$$

الأمر الذي يعني أن خاصية القبول محققة .

نظرية (١-٣):

بفرض لدينا نواة $K_\varepsilon(t)$ تحقق العلاقات (٢١-٣)، (٢٢-٣) و (٢٣-٣) عندئذٍ نتحقق خاصة التمرکز المعطاة بالعلاقة (٢٠-٣) من أجل أي تابع أملس قطعياً، ويمكن تقدير الحد الأعلى للخطأ المرتكب من خلال العلاقة

$$(٢٥-٣) \dots |K_\varepsilon * f(x) - [f](x)| \leq \text{Const} \cdot \varepsilon$$

الإثبات:

بما أن $K_\varepsilon(t)$ تابع فردي فإننا نجد :

$$(٢٦-٣) \dots \begin{aligned} K_\varepsilon * f(x) &= - \int_{t \geq 0} K_\varepsilon(t) (f(x+t) - f(x-t)) dt \\ &= - \int_{t \geq 0} t K_\varepsilon(t) \frac{f(x+t) - f(x-t) - [f](x)}{t} dt - [f](x) \int_{t \geq 0} K_\varepsilon(t) dt \end{aligned}$$

بتطبيق الخاصة (٢٢-٣) ينتج:

$$(٢٧-٣) \dots K_\varepsilon * f(x) - [f](x) = - \int_{t \geq 0} t K_\varepsilon(t) F_x(t) dt + O(\varepsilon)$$

وبما أن التابع $F_x(t)$ ذو تغير محدود فرضاً والنواة تحقق العلاقة (٢٣-٣) فإن العلاقة الأخيرة تصبح بالشكل:

$$(٢٨-٣) \dots |K_\varepsilon * f(x) - [f](x)| \leq \text{Const} \|F_x(t)\|_{BV} \cdot \varepsilon + O(\varepsilon) = O(\varepsilon)$$

وهو المطلوب.

حالة خاصة:

إذا كانت النواة الواردة في المبرهنة السابقة تحقق العلاقة (٢٤-٣) بدلاً من العلاقة (٢٣-٣) وبما أن كل تابع ذو تغير محدود هو تابع محدود فإن العلاقة الأخيرة (٢٧-٣) تصبح بالشكل:

$$(٢٩-٣) \dots |K_\varepsilon * f(x) - [f](x)| \leq \text{Const} \int |t K_\varepsilon(t)| dt + O(\varepsilon) = O(\varepsilon)$$

٣-٢-١. أمثلة على نوى التمرکز:

٣-٢-١-١. نواة ديرخلية المرافقة (The conjugate Dirichlet kernel):

تُعرف نواة ديرخلية المرافقة بالعلاقة:

$$(٣٠-٣)... \quad K_N(t) = -\frac{1}{\log N} \tilde{D}_N(t), \quad \tilde{D}_N(t) = \sum_{k=1}^N \sin kt$$

١. إنَّ التابع $K_N(t)$ فردي وذلك لأنَّ تابع الـ $\sin(kt)$ تابع فردي ومجموع عدد منته من التوابع الفردية هو تابع فردي.

$$٢. \quad \varepsilon \sim \frac{1}{\log N} \quad \text{إنَّ شرط التنظيم المعطى بالعلاقة (٢٢-٣) محقق من أجل}$$

$$\int_0^\pi K_N(t) dt = -\frac{2}{\log N} \sum_{\substack{k's \\ odd}} \frac{1}{k} = -1 + O(\varepsilon) \quad , \varepsilon = \frac{1}{\log N}$$

٣. وجدنا سابقاً أنَّ نواة ديرخلية تمثل بالشكل:

$$\tilde{D}_N(t) = \sum_{k=1}^N \sin(kt) = \frac{\cos(t/2) - \cos(N+1/2)t}{2\sin(t/2)}$$

وبناءً عليه نجد

$$\left| \int_{t=0}^\pi t K_N(t) dt \right| \leq \text{Const.} \varepsilon \quad , \varepsilon = \frac{1}{\log N}$$

ومنه فإنَّ الشرط المعطى بالعلاقة (٢٤-٣) محقق.

وبذلك يكون قد تحققت شروط النظرية (١-٤) وبناءً عليه فإنَّه ينتج لدينا:

$$(٣١-٣)... \quad -\frac{1}{\log N} \tilde{D}_N * f(x) = [f](x) + O\left(\frac{\varepsilon}{\log N}\right)$$

مما سبق وبالاغتماد على المبرهنة نجد أنَّ الخطأ المرتكب من رتبة لوغاريتمية.

٣-٢-١-٢. النوى المتذبذبة (معاملات التمرکز العامة)

لزيادة معدل التقارب البطيء لنواة ديرخلية المرافقة كان لابدَّ من دراسة الصيغة العامة لنوى التمرکز الفردية والتي تُعطى بالعلاقة:

$$(٣٢-٣)... \quad K_N^\tau(t) = -\sum_{k=1}^N \tau\left(\frac{k}{N}\right) \sin(kt); \quad \begin{cases} \frac{\tau(\xi)}{\xi} \in C^2[0,1] \\ \int_0^1 \frac{\tau(\xi)}{\xi} d\xi = 1 \end{cases}$$

إنَّ هذه النوى تعتمد على المعاملات $\tau\left(\frac{k}{N}\right)$ والتي يُطلق عليها اسم معاملات التمرکز

(Concentration factors) وسنقوم فيما يأتي بتعيين هذه المعاملات.

١. من الواضح أنَّ النواة $K_N^\tau(t)$ تابع فردي.

٢. بالاغتماد على تعريف مجموع ريمان والنوى المتذبذبة نستطيع أن نكتب:

$$\int_{t=0}^{\pi} K_N^{\tau}(t) dt = -2 \sum_{\substack{k \\ \text{odd}}} \frac{\tau(k/N)}{k} \sim -\int_0^1 \frac{\tau(x)}{x} dx$$

وبما أن $\frac{\tau(\xi)}{\xi} \in C^2[0,1]$ عندئذٍ تصبح العلاقة الأخيرة بالشكل:

$$(33-3) \dots \int_{t=0}^{\pi} K_N^{\tau}(t) = -2 \sum_{\substack{k \\ \text{odd}}} \frac{\tau(k/N)}{k} = -\int_0^1 \frac{\tau(\xi)}{\xi} dx + O\left(\frac{1}{N^2}\right) = -1 + O\left(\frac{1}{N^2}\right)$$

أي أن النواة المتذبذبة تحقق العلاقة (33-2) وذلك لكون معاملات التمرکز منظمة أي:

$$(34-3) \dots \int_0^1 \frac{\tau(\xi)}{\xi} dx = 1$$

٣. لنتحقق الآن من كون النوى المتذبذبة تحقق خاصة القبول الأساسية

نفرض بداية أن $\xi_k = \frac{k}{N}$ ، وباستخدام المساواة:

$$(35-3) \dots \begin{aligned} 2 \sin(t/2) K_N^{\tau}(t) &\equiv \sum_{k=1}^{N-2} (\tau(\xi_k) - 2\tau(\xi_{k+1}) + \tau(\xi_{k+2})) \frac{\sin(k+1)t}{2\sin(t/2)} \\ &\quad - (\tau(1) - \tau(\xi_{N-1})) \frac{\sin Nt}{2\sin(t/2)} + (\tau(\xi_2) - \tau(\xi_1)) \frac{\sin t}{2\sin(t/2)} \\ &\quad + \tau(\xi_1) \cos(t/2) - \tau(1) \cos(N+1/2)t \\ &= I_1(t) + I_2(t) + I_3(t) + I_4(t) - I_5(t) \end{aligned}$$

وبناءً عليه نكون قد حللنا النواة بالشكل:

$$K_N^{\tau}(t) = R_N^{\tau}(t) - \frac{\tau(1)}{2} \frac{\cos(N+1/2)t}{\sin(t/2)}$$

حيثُ:

$$R_N^{\tau}(t) = \sum_{j=1}^4 \frac{I_j(t)}{2\sin(t/2)}$$

يُبرهن [13,16] على أن كل حد من حدود R_N^{τ} يحقق العلاقة (34-2) ومنه تكون العلاقة

(33-2) محققة أي:

$$(36-3) \dots \left| \int_{t=0}^{\pi} t R_N^{\tau}(t) dt \right| \leq \text{Const.} \|\tau\|_{C^2[0,1]} \frac{\log N}{N}$$

بما أن $K_N^{\tau}(t)$ حدودية مثلثية من الدرجة N فإنه يمكن اكتشاف مواقع نقاط الانقطاع تابع أملس قطعي مباشرةً من خلال مسقطه الطيفي باستخدام العلاقة:

$$(37-3) \dots K_N^{\tau} * f \equiv K_N^{\tau} * S_N(f) = i\pi \sum_{k=-N}^N \text{sgn}(k) \tau\left(\frac{|k|}{N}\right) \hat{f}_k e^{ikx}$$

حيثُ:

$$S_N(f) = \sum_{k=-N}^N \hat{f}_k e^{ikx}$$

نتيجة (٣-١):

بفرض لدينا نواة التمركز الفردية المعطاة بالعلاقة (٣-٣٢)

$$K_N^\tau(t) = - \sum_{k=1}^N \tau\left(\frac{k}{N}\right) \sin(kt), \quad \frac{\tau(\xi)}{\xi} \in C^2[0,1]$$

وبفرض $\tau(\cdot)$ تابع منظم أي يحقق العلاقة (٣-٣٤)

$$\int_0^1 \frac{\tau(\xi)}{\xi} dx = 1$$

عندئذٍ تتحقق خاصية التمركز المعطاة بالعلاقة (٣-٣٠)

ويُعطى الخطأ المرتكب بالعلاقة:

$$|K_N^\tau * S_N(f) - [f](x)| \leq \text{Const.} \frac{\log N}{N} \quad (٣-٣٨) \dots$$

ترميز:

سنرمز لالتفاف النواة المتذبذبة مع الإسقاط الطيفي للتابع f بالرمز $S_N[f]$ أي:

$$S_N[f](x) \equiv K_N^\tau * S_N(f) = i\pi \sum_{k=-N}^N \text{sgn}(k) \tau\left(\frac{|k|}{N}\right) \hat{f}_k e^{ikx} \quad (٣-٣٩) \dots$$

يُبرهن أنه من أجل $\tau(\xi) = \xi$ يتحقق أن [18]:

$$S_N[f](x) = i\pi \sum_{k=-N}^N \text{sgn}(k) \tau\left(\frac{|k|}{N}\right) \hat{f}_k e^{ikx} \rightarrow \log N [f](x) \quad (٣-٤٠) \dots$$

أمثلة على معاملات التمركز للنوى المتذبذبة:

١. المعاملات المثلثية (Trigonometric factors):

تُعطى هذه المعاملات وفق العلاقة:

$$\tau(\xi) = \tau_\alpha(\xi) = \frac{\sin(\alpha \xi)}{\text{Si}(\alpha)} \quad (٣-٤١) \dots$$

حيثُ:

$$\text{Si}(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{\sin(\eta)}{\eta} d\eta$$

٢. المعاملات الحدودية (Polynomial factors)

إن الصيغة العامة لهذه المعاملات تُعطى بالعلاقة:

$$\tau(\xi) = \tau^p(\xi) = p \xi^p \quad (٣-٤٢) \dots$$

وبناءً عليه نجد أن التفاف النواة المتذبذبة K_N^τ مع التابع الأملس قطعياً f يُعطى بالعلاقة:

$$K_N^\tau * f = \begin{cases} (-1)^{[p/2]} p N^{-p} S_N^{(p)}(f) & ; p \text{ is odd} \\ (-1)^{[p/2]} p N^{-p} H * S_N^{(p)}(f) & ; p \text{ is even} \end{cases}$$

(٤٣-٣)...

حيثُ:

$$H(x) = i \sum \text{sgn}(k) e^{ikx}$$

لإيجاد الخطأ المرتكب نعوض في العلاقة (٢٢-٣) الواردة في النتيجة (١-٣) وعليه:

$$\left| \frac{i\pi}{N^p} \sum_{k=-N}^N \text{sgn}(k) |k|^p \hat{f}_k e^{ikx} - [f](x) \right| \leq \text{Const} \frac{\log N}{N}$$

أي أنّ الخطأ المرتكب عند استخدام المعاملات الحدودية من الرتبة الأولى.

٣. المعاملات الأسية (*Exponential factors*):

يُعطى هذا النوع من المعاملات بالعلاقة:

$$\tau^{\text{exp}}(\xi) = \tau_\alpha^e(\xi) = \text{Const} \cdot \xi e^{\frac{1}{\alpha \xi(\xi-1)}}, \text{Const} = \int e^{\frac{-1}{\alpha \eta(\eta-1)}} d\eta$$

حيثُ:

$$\int_0^1 (\tau^{\text{exp}}(\xi) / \xi) d\xi = 1$$

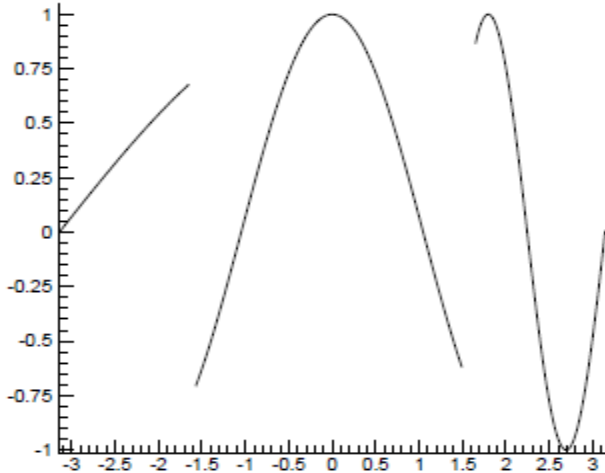
ولتوضيح هذه الطريقة في تحديد مواقع نقاط الانقطاع سنقارن الخط البياني للتابع المعرف بالعلاقة

$$f(x) = \begin{cases} \cos\left(x - \frac{x}{2} \text{sgn}\left(|x| - \frac{\pi}{2}\right)\right) & ; x < 0 \\ \cos\left(\frac{5}{2}x - x \text{sgn}\left(|x| - \frac{\pi}{2}\right)\right) & ; x > 0 \end{cases}$$

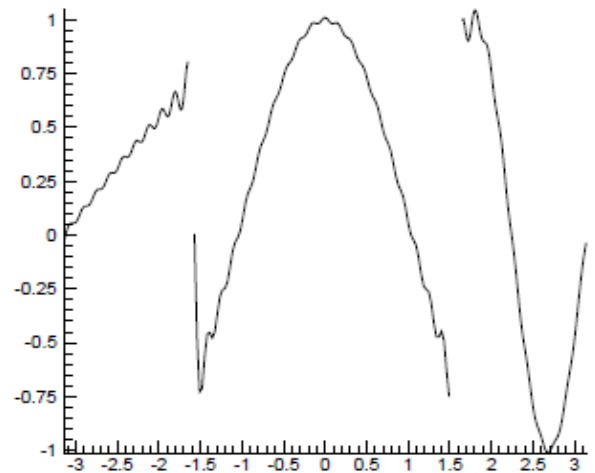
حيثُ

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & ; x < 0 \\ +1 & ; x > 0 \end{cases}$$

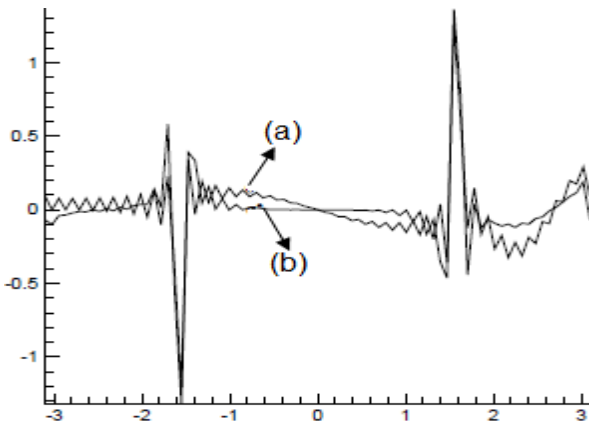
مع الخطوط البيانية لكل من مجموع فورييه الجزئي الذي يعاني من ظاهرة جيبس والخطوط البيانية للتابع بعد تطبيق طريقتي تحديد الحواف باستخدام المعاملات الأسية ومعاملات الحدوديات عليه.



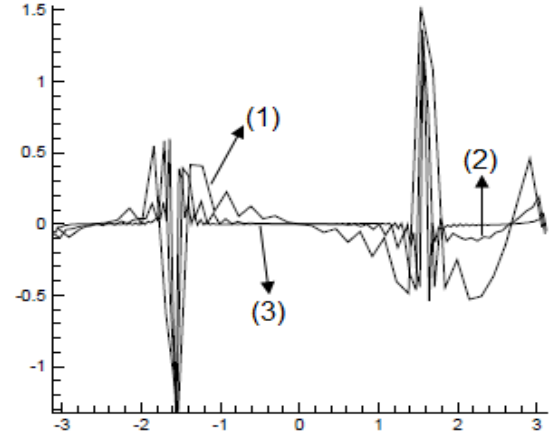
(A)



(B)



(C)



(D)

الشكل (٣-٥): (A) الخط البياني للتابع f ، (B) تقريب فورييه S_{40}^f ، (C) تحديد الحواف لـ S_{40}^f باستخدام

$S_{40}[f]$ في الحالتين الآتيتين: (a) باستخدام معاملات الحدودية الموافقة τ^1 (b) باستخدام المعاملات الأسية

τ_6^e ، (D) تحديد الحواف لـ S_N^f باستخدام $S_N[f]$ باستخدام معاملات أسية وذلك من أجل $N = 20, 40, 80$.

الفصل الرابع

طرائق التخلص من ظاهرة جبس

٤-١. مقدمة:

من المعلوم أنّ العديد من الظواهر الفيزيائية تُمثل بتتابع ملساء قطعياً فعلى سبيل المثال [1] هنالك العديد من المسائل المتعلقة بعلوم الطيران وهندسة الفضاء تعتمد على تدفق السوائل الأمر الذي يجعلها عرضة لأمواج مفاجئة بمعنى انقطاع في حقول الضغط. وكذلك تظهر هذه التتابع في التنبؤات الجوية حيثُ يجب أن يؤخذ بالحسبان سطح الأرض الذي يعاني من انحدارات شديدة في المناطق الجبلية.

ولعل ضغط البيانات يُعتبر من أبرز الأمثلة على نمذجة الظواهر الفيزيائية وفق تتابع تعاني من انقطاع إذ أنّه من الضروري أن يكون لدينا تمثيل جيد للبيانات حتّى نقرر كيف سيتم ضغط هذه البيانات أي أنّه من المهم أن نعلم فيما إذا كان تمثيل فورييه للبيانات يُعتبر تمثيلاً جيداً للإشارات التي تعاني من انقطاع.

نقدم في هذا الفصل من بحثنا دراسة لأبرز صفوف الطرائق المستخدمة في التقليل أو التخلص من الأثر السلبي لظاهرة جبس التي تعتبر من أبرز العيوب التي تعاني منها التقريبات الطيفية للتتابع الملساء قطعياً والتي تتمحور حول ثلاثة صفوف:

الصف الأول: الترشيح الطيفي (Spectral filtering).

الصف الثاني: طرائق إعادة الإسقاط (Reprojection methods) بنوعها إعادة الإسقاط المباشر وغير المباشر.

الصف الثالث: إعادة البناء الكسري (Rational Reconstruction).

٤-٢. الترشيح الطيفي (Spectral filtering) [1,9,10,16,19]:

تحدثنا في الفصل السابق عن وجود صفيين من التقريبات الطيفية وهي تقريبات فورييه الطيفية وتقريبات الحدوديات الطيفية وبيّنا أنّ المجاميع الجزئية الموافقة لهذه التقريبات تعاني من ظاهرة جبس.

إنّ التخلص من ظاهرة جبس يعني استعادة الدقة الأسية للتقريب الطيفي على كامل المجال المراد تقريب التابع عليه

يقوم الترشيح الطيفي الذي نحاول من خلاله التخلص من الأثر السلبي لظاهرة جبس على زيادة معدل اضمحلال معاملات النشر الطيفي دون انقاص دقة التقريب وذلك بضرب معاملات النشر الطيفي أيّاً كان نوعه بتابع $\sigma(\eta)$ ، سنورد تعريفه وخواصه بعد قليل، يُطلق عليه اسم المرشحة الطيفية فنحصل نتيجة لذلك على مجموع جديد يُبرهن على أنه يتقارب نحو التابع المقرب بسرعة أكبر من المجموع الأصلي وذلك بعيداً عن نقاط الانقطاع دون أن يؤثر ذلك على سلوك المجموع عند نقاط الانقطاع.

بناءً عليه فإنّ الترشيح الطيفي لتابع $f \in L^2_\omega[a, b]$ أمّلس قطعياً، علّمت معاملات النشر الطيفي الموافقة له، يُعطى في:

(١) حالة تقريبات فورييه المستمرة بالعلاقة:

$$f_N^\sigma(x) = \sum_{k=-N}^N \hat{f}_k \sigma\left(\frac{k}{N}\right) e^{ikx} \quad (١-٤) \dots$$

حيثُ:

$$\hat{f}_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx \quad (٢-٤) \dots$$

علماً أنّ f تابع دوري بدور 2π على المجال $[a, b] = [0, 2\pi]$.

(٢) حالة تقريبات الحدوديات المستمرة بالعلاقة:

$$f_N^\sigma(x) = \sum_{k=0}^N \hat{f}_k \sigma\left(\frac{k}{N}\right) \phi_k(x) \quad (٣-٤) \dots$$

حيثُ:

$$\hat{f}_k = \frac{1}{\gamma_k} \int_{\gamma_k}^1 f(x) \phi_k(x) \omega(x) dx \quad ; \quad \gamma_k = \left(\int_{-1}^{+1} |\phi_k(x)|^2 \omega(x) dx \right)^{1/2} \quad (٤-٤) \dots$$

علماً أنّ التابع معرّف على المجال $[a, b] = [-1, 1]$.

سنكتفي فيما يأتي بدراسة الترشيح الطيفي لتقريبات فورييه المستمرة مع الإشارة إلى أنّ ترشيح تقريبات الحدوديات المستمرة ينتج بأسلوب مشابه تماماً.

تعريف (١-٤) (المرشحة من المرتبة P) [19]:

يُقال عن التابع الحقيقي والزوجي $\sigma(\eta)$ أنّه مرشحة من المرتبة P (*Filter of Order P*) إذا تحققت الشروط التالية:

$$\sigma(0) = 1 \quad \sigma^{(l)}(0) = 0 \quad (١)$$

$$\sigma(\eta) = 0 \quad ; |\eta| \geq 1 \quad (٢)$$

$$\sigma(\eta) \in C^{P-1} \quad ; \eta \in (-\infty, \infty) \quad (٣)$$

ملاحظات (١-٤):

(١) إنَّ الشرط الثاني من تعريف المرشحة يُمكننا من تمديد المجموع المنتهي الموافق لترشيح فورييه الطيفي المعطى بالعلاقة (١-٤) إلى مجموع غير منتهٍ يُعطى بالعلاقة

$$f_N^\sigma(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}_k \sigma\left(\frac{k}{N}\right) e^{ikx} \quad ; 0 \leq x \leq 2\pi \quad (٥-٤) \dots$$

(٢) إنَّ المجموع الموافق لترشيح فورييه الطيفي المعطى بالعلاقة (١-٤) يُمكن أن يكتب بالشكل:

$$f_N^\sigma(x) = (S * f)(x) \quad ; x \in [0, 2\pi] \quad (٦-٤) \dots$$

حيثُ:

$$S(x) = \sum_{k=-N}^N \sigma\left(\frac{k}{N}\right) e^{ikx} \quad (٧-٤) \dots$$

يُطلق على التابع S اسم تابع الترشيح تمييزاً له عن تابع المرشحة σ .

الإثبات:

بتعويض العلاقة (٢-٤) في العلاقة (١-٤) نجد:

$$f_N^\sigma(x) = \sum_{k=-N}^N \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} dt \right) \sigma\left(\frac{k}{N}\right) e^{ikx}$$

وبما أنَّ المجموع منتهٍ فإننا نستطيع أن نكتب العلاقة السابقة بالشكل:

$$f_N^\sigma(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sum_{k=-N}^N \sigma\left(\frac{k}{N}\right) e^{ik(x-t)} dt \quad (٨-٤) \dots$$

$$S(x) = \sum_{k=-N}^N \sigma\left(\frac{k}{N}\right) e^{ikx}$$

بفرض

تصبح العلاقة (٨-٤) بالشكل:

$$f_N^\sigma(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) S(x-t) dt \quad ; x \in [0, 2\pi] \quad (٩-٤) \dots$$

وبالاعتماد على تعريف الالتفاف يُمكن كتابة العلاقة الأخيرة بالشكل:

$$f_N^\sigma(x) = (S * f)(x) \quad ; x \in [0, 2\pi]$$

من الضروري أن نقدم الآن مفهوم أسرة تابع الترشيح S أو ما يُعرف باسم تكاملات تابع الترشيح S والتي ستلعب كما سنرى دوراً في غاية الأهمية عند دراسة الترشيح الطيفي.

تعريف (٢-٤):

بفرض لدينا تابع الترشيح S المعرّف بالعلاقة (٧-٤) عندئذٍ يُقال عن أسرة التكاملات

$$S_l \quad ; l \geq 1$$

والتي تعطى وفق العلاقة التراجعية:

$$\begin{aligned}
(١٠-٤) \dots & S_0(x) = S(x) \\
(١١-٤) \dots & S'_l(x) = S_{l-1}(x) \\
(١٢-٤) \dots & \int_0^{2\pi} S_l(t) dt = 0 \quad ; l \geq 1
\end{aligned}$$

إنَّها أسرة تكاملات تابع الترشيح S .

ويمكن تمديد هذه التكاملات بشكل دوري خارج المجال $(0, 2\pi)$.

إنَّ العلاقة (٧-٤) تُعطي العديد من الصيغ المكافئة للصيغة التراجعية لـ $S_l(x)$ الأمر الذي ستوضحه التوطئة الآتية.

توطئة (١-٤):

لتكن لدينا المرشحة σ من المرتبة P ، وبفرض تابع الترشيح الموافق لهذه المرشحة يُعطى بالشكل:

$$(١٣-٤) \dots \quad S(x) = S_0(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sigma\left(\frac{k}{n}\right) e^{ikx} \quad ; 0 \leq x \leq 2\pi$$

عندئذٍ يكون لأسرة التكاملات $S_l(x)$ المعطاة بالتعريف (٢-٤) التمثيلات المكافئة الآتية:

$$(١٤-٤) \dots \quad S_l(x) = N^{-l} \sum_{k=-\infty}^{\infty} G_l(\eta) \frac{1}{i^l} e^{ikx} \quad ; 1 \leq l \leq P \quad (١)$$

حيث: $G_l(\eta) = \frac{\sigma(\eta) - 1}{\eta}$.

$$(١٥-٤) \dots \quad S_l(x) = N^{1-l} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iN(x+2k\pi)\eta} G_l(\eta) \frac{1}{i^l} d\eta \quad ; 1 \leq l \leq P \quad (٢)$$

$$l = 0: \quad S_0(x) = 1 + \sum_{\substack{|k| < \infty \\ k \neq 0}} \sigma\left(\frac{k}{n}\right) e^{ikx} \quad (٢)$$

$$(١٦-٤) \dots \quad l = 1: \quad S_1(x) = x - \pi + \sum_{\substack{|k| < \infty \\ k \neq 0}} \sigma\left(\frac{k}{N}\right) \frac{1}{ik} e^{ikx}$$

$$l \geq 2: \quad S_l(x) = B_l(x) + \sum_{\substack{|k| < \infty \\ k \neq 0}} \sigma\left(\frac{k}{N}\right) \frac{1}{(ik)^l} e^{ikx}$$

حيثُ $B_l(x)$ حدودية برنولي من الدرجة l .

إنَّ المبرهنة الآتية تبين أنَّ الفرق النقطي بين التابع f والمجموع المرشح f_N^σ يمكن أن يُعطى بدلالة تابع الترشيح.

مبرهنة (١-٤):

بفرض $f(x)$ تابع قطعي من الصف C^p ويعاني من انقطاع وحيد عند النقطة $\xi = x$. عندئذ:

$$f_N^\sigma(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{l=0}^{p-1} S_{l+1}(c) \left(f^{(l)}(\xi^+) - f^{(l)}(\xi^-) \right) \\ + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S_p(x-t) f^{(p)}(t) dt \\ c = \begin{cases} x - \xi & \text{if } x > \xi \\ 2\pi + x - \xi & \text{if } x < \xi \end{cases}$$

إن المبرهنة السابقة تُزودنا بتعبير رياضي دقيق عن الخطأ بين قيم التابع $f(x)$ وقيم المجموع الطيفي المرشح $f_N^\sigma(x)$ ، وفيما يأتي سنقوم بتقدير الحد الأعلى لكل من الحدين الواردين في الطرف الأيمن من العلاقة (١٧-٤).

ملاحظة (٢-٤):

إذا كان التابع f من الصف $C^{p-1}[0, 2\pi]$ فإن الحد الأول سينعدم وسيبقى الحد الثاني. وعليه إذا كان التابع المعطى أملكاً قطعياً فإن دراسة الحد الأعلى للخطأ تؤول إلى تقدير الحد الأعلى للحد الثاني من الطرف الأيمن للعلاقة (١٧-٤).

توطئة (٢-٤):

لتكن لدينا أسرة تكاملات تابع الترشيح $S_l(x)$ المُعطاة بالعلاقات الواردة في التعريف (٢-٤) عندئذ يتحقق:

$$\frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} S_p(x-t) f^{(p)}(t) dt \right| \leq C N^{\frac{1}{2}-p} \left(\int_0^{2\pi} |f^{(p)}(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

حيث C ثابت مستقل عن f و N

الإثبات:

بتطبيق كوشي شوارتز نجد:

$$\frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} S_p(x-t) f^{(p)}(t) dt \right| \leq \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} S_p^2(x-t) dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{2\pi} |f^{(p)}(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

بما أن S_p تابع دوري فإن العلاقة الأخيرة تُصبح بالشكل:

$$\frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} S_p(x-t) f^{(p)}(t) dt \right| \leq \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} S_p^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{2\pi} |f^{(p)}(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

بتعويض العلاقة (١٤-٤) من تمثيلات $S_l(x)$ في الحد الأول من الطرف الأيمن للعلاقة السابقة فإننا نجد:

$$(٢٠-٤) \dots \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S_p^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{N^p} \frac{\sigma\left(\frac{k}{N}\right)-1}{\left(\frac{k}{N}\right)^p} \frac{1}{i^p} e^{ikt} \right)^2 dt$$

وبالاعتماد على تعامد التوابع الأسية على المجال $[0, 2\pi]$ فإنَّ العلاقة الأخيرة تُصبح بالشكل:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S_p^2(t) dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sigma\left(\frac{k}{N}\right)-1}{k^p} \right)^2$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S_p^2(t) dt = N^{1-2p} \sum_{k=-N}^N \left(\frac{\sigma\left(\frac{k}{N}\right)-1}{\left(\frac{k}{N}\right)^p} \right)^2 \frac{1}{N} + \sum_{|k|>N} \frac{1}{k^{2p}}$$

إنَّ المتسلسلة الأولى من الطرف الأول من العلاقة السابقة ما هي إلا مجموع ريمان التكاملي أما المتسلسلة الثانية فهي متسلسلة هندسية أساسها $\frac{1}{k}$ واعتماداً على مجموع المتسلسلة الهندسية

ومحدودية مجموع ريمان بتكامله فإنَّ العلاقة الأخيرة تصبح بالشكل

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S_p^2(t) dt \leq \frac{N}{N^{2p}} \int_{-1}^1 G_p^2(\eta) d\eta + \frac{1}{N^{2p-1}} \quad ; G_p(\eta) = \frac{\sigma(\eta)-1}{\eta}$$

وعليه:

$$(٢١-٤) \dots \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S_p^2(t) dt \leq \frac{N}{N^{2p}} \left(\int_{-1}^1 G_p^2(\eta) d\eta + 1 \right) = C_1 \frac{N}{N^{2p}}$$

أي:

$$\int_0^{2\pi} S_p^2(t) dt \leq 2\pi C_1 \frac{N}{N^{2p}} \Rightarrow \left(\int_0^{2\pi} S_p^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{2\pi C_1} \frac{\sqrt{N}}{N^p}$$

$$C = \sqrt{\frac{C_1}{2\pi}}$$

بفرض

وبتعويض العلاقة الأخيرة في العلاقة (١٩-٤) نجد:

$$\frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} S_p(y-t) f^{(p)}(t) dt \right| \leq C N^{\frac{1}{2}-p} \left(\int_0^{2\pi} |f^{(p)}(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

وهو المطلوب.

يجدر بنا التنويه إلى أنَّ الحد الأول من الطرف الأيمن من العلاقة (١٧-٤) يجب مناقشته فيما لو لم يكن التابع أملس والشروط الواردة في التوطئة (١-٤) كافية لبرهان أنَّ الحد الأول يتناقص مع ازدياد N وذلك بعيداً عن نقطة الانقطاع.

مبرهنة (٢-٤):

لتكن لدينا أسرة تكاملات تابع الترشيح $S_l(x)$ المُعطاة بالعلاقات الواردة في التعريف (٢-٤) حيثُ:

$$S(x) = S_0(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sigma\left(\frac{k}{n}\right) e^{ikx}$$

عندئذٍ يتحقق من أجل $0 < x < 2\pi$:

$$|S_l(x)| \leq A \frac{1}{N^{P-1}} \left(\frac{1}{|x|^{P-1}} + \frac{1}{|2\pi-x|^{P-1}} \right) \int_{-1}^1 |G_P^{(P-l)}(\eta)| d\eta \quad 1 \leq l \leq P \quad (٢٢-٤) \dots$$

حيثُ:

$$G_P(\eta) = \frac{\sigma(\eta) - 1}{\eta^P}$$

الإثبات:

بمكاملة العلاقة (١٥-٤) من تمثيلات $S_l(x)$ بالتجزئة وبما أنَّ التابع $G_l(x)$ قابل للمكاملة $P-l$ مرة فإننا نجد:

$$S_l(x) = N^{1-l} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iN(x+2k\pi)\eta} G_l(\eta) i^{-l} d\eta \quad ; 1 \leq l \leq P \quad (٢٣-٤) \dots$$

بفرض:

$$dv = e^{iN(x+2k\pi)\eta} i^{-l} d\eta$$

$$v = \frac{i^{-l}}{iN(x+2k\pi)} e^{iN(x+2k\pi)\eta}$$

$$u = G_l(\eta)$$

$$du = G_l^{(1)}(\eta) d\eta$$

$$S_l(x) = N^{1-l} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[\underbrace{\frac{i^{-l} e^{iN(x+2k\pi)\eta}}{iN(x+2k\pi)} G_l(\eta)}_{\text{zero}} \right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iN(x+2k\pi)\eta}}{iN(x+2k\pi)} G_l^{(1)}(\eta) i^{-l} d\eta \quad ; 1 \leq l \leq P$$

بالمكاملة بنفس الطريقة $(P-l)$ ينتج:

$$S_l(x) = N^{1-l} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^{P-l} i^{-l}}{N^{P-l} i^{P-l}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iN(x+2k\pi)\eta}}{(x+2k\pi)^{P-l}} G_l^{(P-l)}(\eta) d\eta \quad ; 1 \leq l \leq P \quad (٢٤-٤) \dots$$

وبناءً عليه:

$$|S_l(x)| = N^{1-l} \left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{N^{P-l}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iN(x+2k\pi)\eta}}{(x+2k\pi)^{P-l}} G_l^{(P-l)}(\eta) d\eta \right| \quad ; 1 \leq l \leq P$$

$$|S_l(x)| \leq \frac{N^{1-l}}{N^{P-l}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{e^{iN(x+2k\pi)\eta}}{(x+2k\pi)^{P-l}} \right| |G_l^{(P-l)}(\eta)| d\eta$$

$$|S_l(x)| \leq \frac{A}{N^{P-1}} \left(\frac{1}{|x|^{P-l}} + \frac{1}{|x-2\pi|^{P-l}} \right) \int_{-\infty}^{+\infty} |G_l^{(P-l)}(\eta)| d\eta$$

$$|S_l(x)| \leq \frac{A}{N^{P-1}} \left(\frac{1}{|x|^{P-l}} + \frac{1}{|2\pi-x|^{P-l}} \right) \int_{-\infty}^{+\infty} |G_l^{(P-l)}(\eta)| d\eta$$

وهو المطلوب.

أمّا الآن فإننا نستطيع أن نورد المبرهنة التي تُمكننا من إيجاد الحد الأعلى للخطأ المرتكب عند تقريب تابع يُعاني من انقطاع وفق ترشيح فورييه الطيفي.

مبرهنة (٣-٤):

ليكن f تابع قطعي من الصف $C^P[0, 2\pi]$ ويعاني من انقطاع وحيد عند النقطة $x = \xi$ وبفرض $\sigma\left(\frac{k}{N}\right)$ مرشحة من المرتبة P .

وليكن:

$$f_N^\sigma(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}_k \sigma\left(\frac{k}{N}\right) e^{ikx} \quad ; 0 \leq x \leq 2\pi$$

وباعتماد الترميز:

$$d(x) = \min_{k=0,-1,1} |x - \xi + 2\pi k|$$

ينتج لدينا:

$$(٢٥-٤) \dots \quad |f(x) - f_N^\sigma(x)| \leq C_1 N^{1-P} d(x)^{1-P} K(f) + C N^{\frac{1}{2}-P} \|f^{(P)}\|_{L^2}$$

حيثُ:

$$(٢٦-٤) \dots \quad K(f) = \sum_{l=0}^{P-1} d(x)^l \left(f^{(l)}(\xi^+) - f^{(l)}(\xi^-) \right) \int_{-\infty}^{\infty} |G_l^{(P-l)}(\eta)| d\eta$$

الإثبات:

بالاعتماد على المبرهنة (١-٤) يُمكننا أن نكتب:

$$|f_N^\sigma(x) - f(x)| = \left| \frac{1}{2\pi} \sum_{l=0}^{P-1} S_{l+1}(c) \left(f^{(l)}(\xi^+) - f^{(l)}(\xi^-) \right) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S_P(x-t) f^{(P)}(t) dt \right|$$

وعليه فإن:

$$|f_N^\sigma(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2\pi} \sum_{l=0}^{P-1} |S_{l+1}(c)| \left| f^{(l)}(\xi^+) - f^{(l)}(\xi^-) \right| + \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} S_P(x-t) f^{(P)}(t) dt \right|$$

وبتطبيق التوطئة (٢-٤) على الحد الثاني من العلاقة الأخيرة فإنّ هذه العلاقة تؤول إلى:

$$\left| f_N^\sigma(x) - f(x) \right| \leq \frac{1}{2\pi} \sum_{l=0}^{P-1} |S_{l+1}(C)| \left| f^{(l)}(\xi^+) - f^{(l)}(\xi^-) \right| + C N^{\frac{1}{2}-P} \left(\int_0^{2\pi} |f^{(P)}(t)| dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

وبناءً على النظرية على (٢-٤) تصبح العلاقة الأخيرة:

$$\left| f_N^\sigma(x) - f(x) \right| \leq \frac{1}{2\pi} \sum_{l=0}^{P-1} \left(A \frac{1}{N^{P-1}} \left[\frac{1}{c^{P-l-1}} + \frac{1}{|2\pi - c|^{P-l-1}} \right] \int_{-\infty}^{\infty} |G_{l+1}^{P-l-1}(\eta)| d\eta \right) \left| f^{(l)}(\xi^+) - f^{(l)}(\xi^-) \right| + C N^{\frac{1}{2}-P} \left(\int_0^{2\pi} |f^{(P)}(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

وبما أنّ:

$$\|f^{(P)}\|_{L^2} = \left(\int_0^{2\pi} |f^{(P)}(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

فإنّ العلاقة الأخيرة تكتب بالشكل:

$$\left| f_N^\sigma(x) - f(x) \right| \leq \frac{1}{2\pi} \sum_{l=0}^{P-1} \left(\frac{A}{N^{P-1}} \left[\frac{1}{c^{P-l-1}} + \frac{1}{|2\pi - c|^{P-l-1}} \right] \int_{-\infty}^{+\infty} |G_{l+1}^{P-l-1}(\eta)| d\eta \right) \left| f^{(l)}(\xi^+) - f^{(l)}(\xi^-) \right| + C N^{\frac{1}{2}-P} \|f^{(P)}\|_{L^2}$$

وعليه:

$$\left| f_N^\sigma(x) - f(x) \right| \leq C_1 \sum_{l=0}^{P-1} \left(\frac{1}{N^{P-1}} \frac{2}{d(x)^{P-l-1}} \left| f^{(l)}(\xi^+) - f^{(l)}(\xi^-) \right| \int_{-\infty}^{+\infty} |G_{l+1}^{P-l-1}(\eta)| d\eta \right) + C N^{\frac{1}{2}-P} \|f^{(P)}\|_{L^2}$$

ومنه

$$\left| f_N^\sigma(x) - f(x) \right| \leq C N^{1-P} d(x)^{1-P} K(f) + C N^{\frac{1}{2}-P} \|f^{(P)}\|_{L^2}$$

حيثُ:

$$K(f) = \sum_{l=0}^{P-1} d(x)^l \int_{-\infty}^{+\infty} |G_{l+1}^{P-l-1}(\eta)| d\eta \left| f^{(l)}(\xi^+) - f^{(l)}(\xi^-) \right|$$

وهو المطلوب.

إنّ المبرهنة الأخيرة تُبين أنّ الترشيح يرفع معدل التقارب بعيداً عن نقطة الانقطاع ($d(x) > 0$).

ملاحظة (٤-٣):

(١) يمكن تعميم كل ما سبق على توابع تعاني من انقطاع عند أكثر من نقطة وذلك بأسلوب مشابه تماماً لما سبق.

(٢) من الضروري أن نقوم الآن بدراسة خطأ الاقتطاع للمجاميع المرشحة ذلك أن هذا النوع من الأخطاء يوضح التقارب الضعيف للتقريب الطيفي من الدرجة N نحو التابع، وكما أشرنا سابقاً فإننا سنكتفي بـغية التبسيط بتقريب فورييه الطيفي.

يُعرف خطأ الاقتطاع (*Truncation error*) الناتج عن ترشيح تابع ما بالعلاقة:

$$TE_N(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}_k \sigma\left(\frac{k}{N}\right) e^{ikx} - \sum_{k=-n}^n \hat{f}_k \sigma\left(\frac{k}{N}\right) e^{ikx}$$

ويمكن بسهولة ملاحظة أن هذا الخطأ معدوم وذلك بالاعتماد على الشرطين الثاني والثالث من تعريف المرشحة.

أمّا الآن فإننا سنستعرض بعض الأمثلة عن المرشحات التي شاع استخدامها خلال السنوات السابقة:

(١) مرشحة فيجر (*Fejer filter*):

قام فيجر عام ١٩٠٠م باستخدام المتوسط الحسابي للمجاميع الجزئية الموافقة لتقريب فورييه لتابع يعاني من انقطاع عوضاً عن المجاميع الأصلية ويُعتبر المجموع الذي اعتمده هذا العالم موافقاً للمرشحة من المرتبة الأولى المعطاة بالعلاقة:

$$\sigma_1(\eta) = 1 - \eta \quad \dots (٤-٢٧)$$

(٢) مرشحة لانكزوس (*Lanczos filter*):

وهي مرشحة من المرتبة الأولى تُعطى بالعلاقة:

$$\sigma_2(\eta) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi\eta)}{\pi\eta} & ; \eta \neq 0 \\ 1 & ; \eta = 0 \end{cases} \quad \dots (٤-٢٨)$$

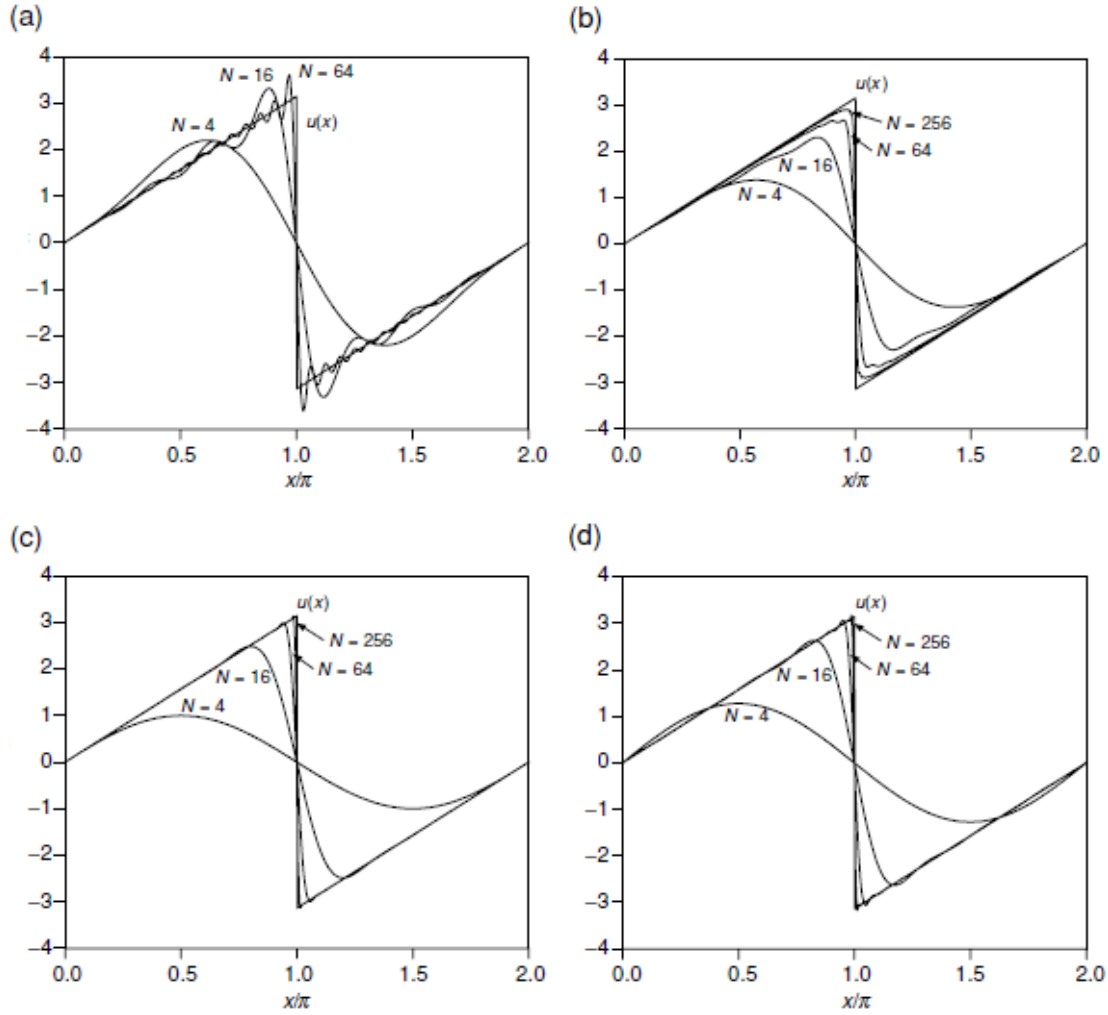
(٣) مرشحة التجيب (*filter Raised Cosine*):

وهي مرشحة من المرتبة الثانية تُعطى بالعلاقة:

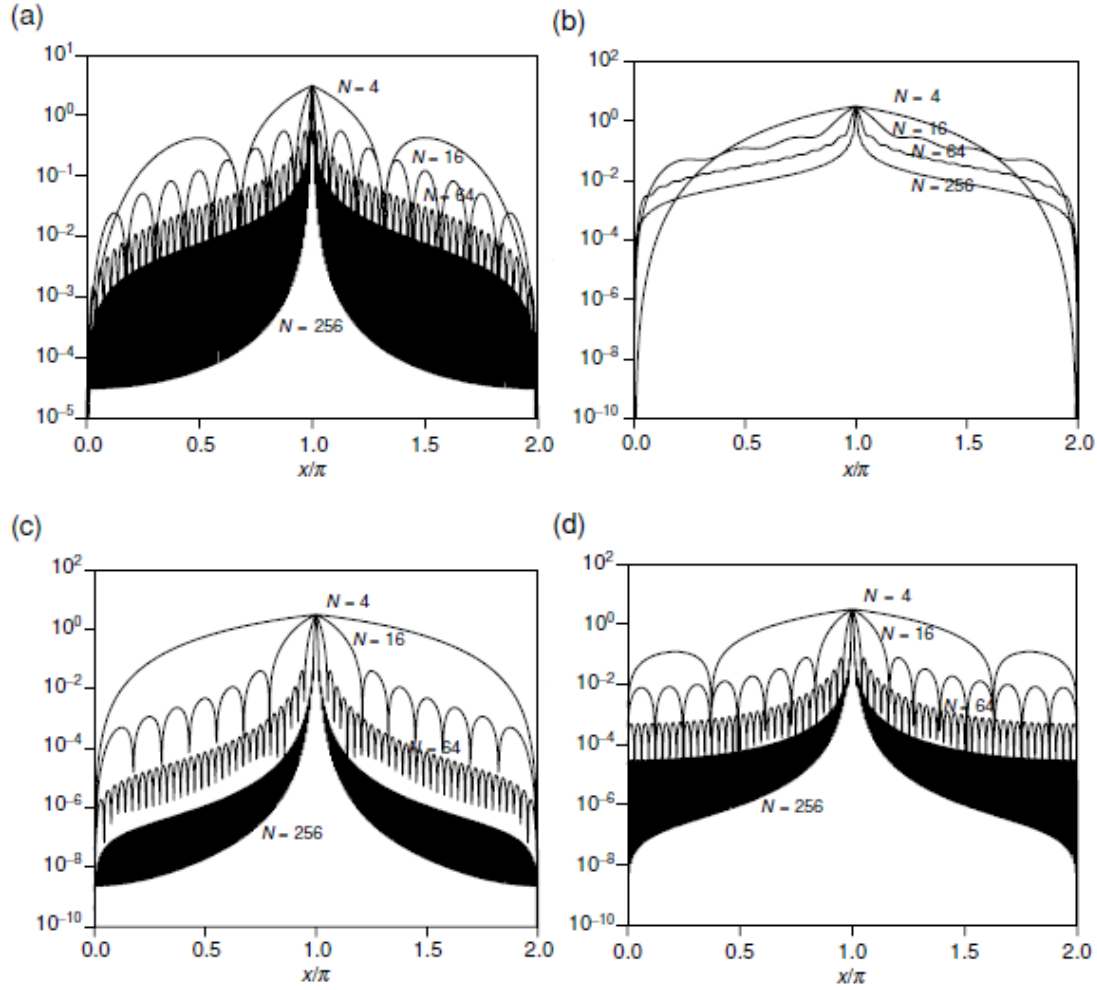
$$\sigma_3(\eta) = \frac{1}{2} (1 + \cos(\pi\eta)) \quad \dots (٤-٢٩)$$

وجدنا في الفصل السابق أن تابع المنشار يعاني من ظاهرة جبس وللتقليل من الأثر السلبي لهذه الظاهرة سنقوم بترشيح مجموع فورييه الموافق لهذا التابع باستخدام المرشحات الثلاثة السابقة والشكلين الآتيين يوضحان ذلك حيثُ قمنا في الشكل الأول بعرض مجموعة من الخطوط البيانية كل منها يوافق ترشيح فورييه باستخدام مرشحة من المرشحات السابقة.

أما الشكل الثاني فيعرض الخطأ النقطي المرتكب عند كل ترشيح من الترشيحات السابقة وذلك بُغية توضيح الدقة الموافقة.



ترشيح تابع المنشار: (a) تقريب فورييه غير المرشح ، (b) ترشيح فورييه باستخدام مرشحة Fejer ، (c) ترشيح فورييه باستخدام مرشحة التجيب ، (d) ترشيح فورييه باستخدام لانكزوس الشكل (٤-١)



الخطأ النقطي عند ترشيح تابع المنشار: (a) تقريب فورييه الغير مرشح ، (b) ترشيح فورييه باستخدام مرشحة Fejer، (c) ترشيح فورييه باستخدام مرشحة التجيب ، (d) ترشيح فورييه باستخدام لانكزوس

الشكل (٤-٢)

٤) المرشحة الأسية من الرتبة P (Exponential filter):

تُعطي هذه المرشحة من أجل P زوجي بالعلاقة:

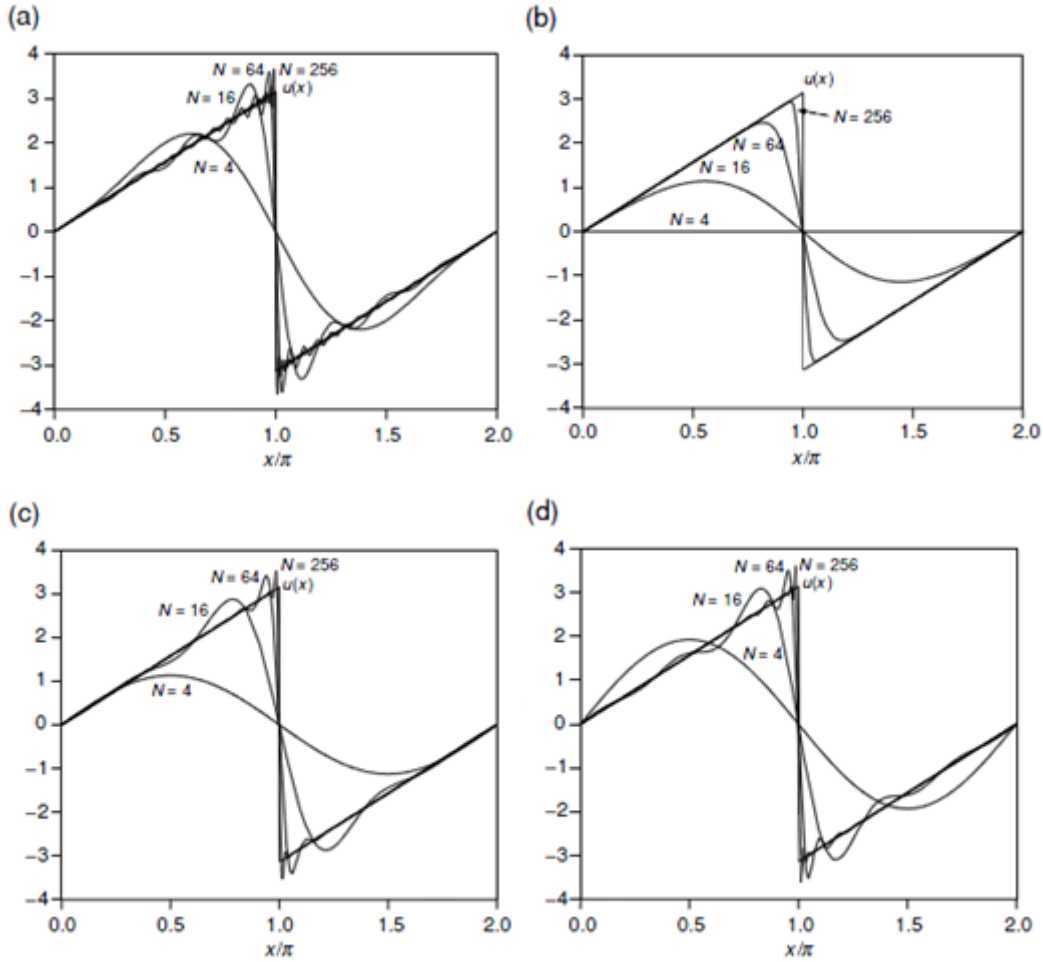
$$\sigma_4(\eta) = e^{-\alpha \eta^2} \quad \dots (٤-٣٠)$$

من الملاحظ أنّ هذه المرشحة لا تحقق جميع الشروط الواردة في تعريف المرشحة وذلك لأنّ $\sigma_4(1) = e^{-\alpha}$ وعليه فإنّ خطأ الاقتطاع في هذه الحالة لن ينعدم، إلا أننا عملياً نختار α بحيث يتحقق أنّ $\sigma_4(1) = O(\varepsilon_M)$ ، حيث ε_M دقة الآلة^٣، ولتوضيح تأثير هذه المرشحة على تذبذبات ظاهرة جيس فإننا سنعرض الخطوط البيانية الموافقة لترشيح فورييه لتابع المنشار المعرّف بالعلاقة:

^٣ خطأ التدوير لكمبيوتر ثابت

$$f(x) = \begin{cases} x & ; 0 \leq x \leq \pi \\ x - 2\pi & ; \pi < x \leq 2\pi \end{cases}$$

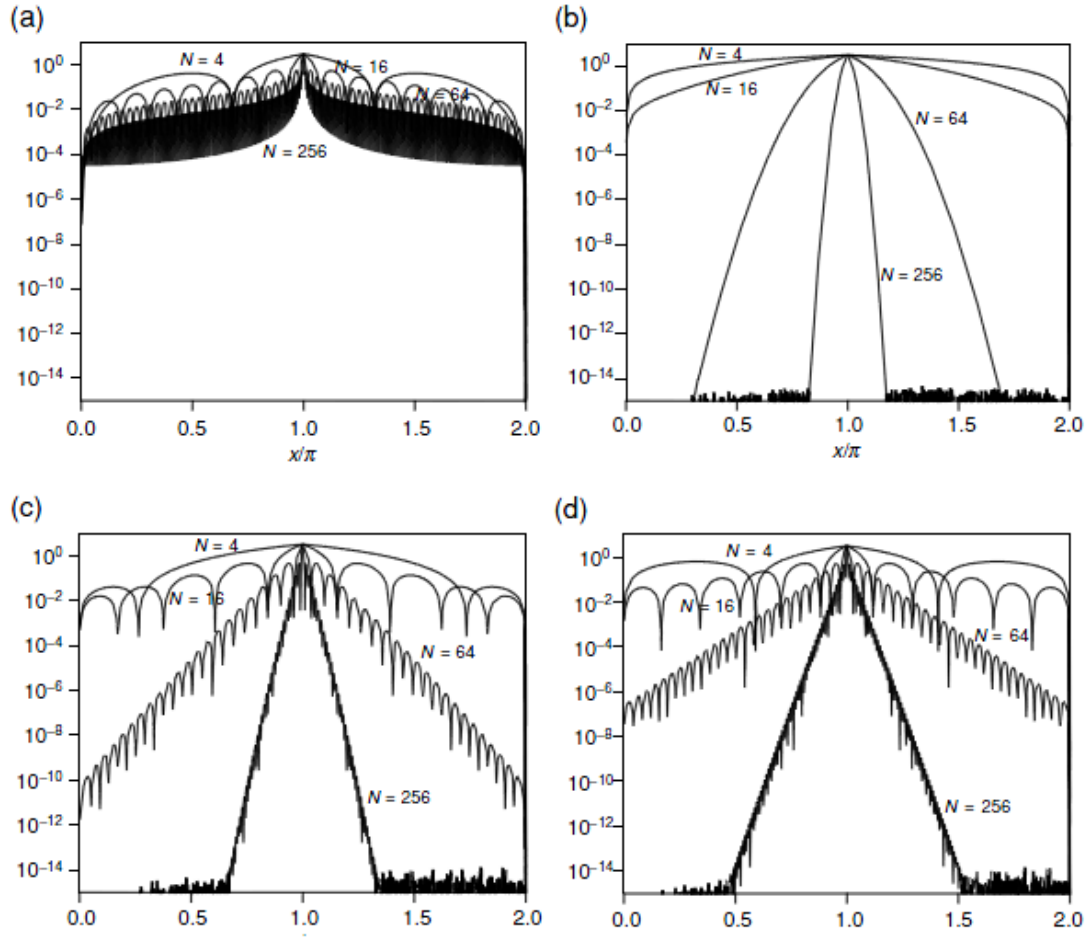
وذلك باستخدام مرشحات أسية من مراتب مختلفة.



(a) تقريب فورييه الغير مرشح ، ترشيح تابع المنشار باستخدام المرشحة الأسية من المرتبة الثانية، (b) الثانية، (c) السادسة، (d) العاشرة

الشكل (٣-٤)

وتبين هذه الخطوط التحسن الذي يطرأ على تقريب فورييه عند استخدام المرشحة الأسية إلا أنها تبين في الوقت نفسه أن الأثر السلبي لهذه الظاهرة لا يزول نهائياً. ولمعرفة مدى الدقة التي حصلنا عليها عند ترشيح تابع المنشار باستخدام المرشحات الأسية السابقة فإننا سنعرض الخطوط البيانية للخطأ النقطي في كل حالة من الحالات السابقة.



الخطأ النقطي (a) تقريب فورييه غير المرشح ، الخطأ النقطي عند ترشيح تابع المنشار باستخدام المرشحة الأسية من المرتبة (b) الثانية، (c) السادسة ، (d) العاشرة. الشكل (٤-٤)

٤) مرشحة فانديفن (Vandevenfilter):

تُعطي مرشحة فانديفن من المرتبة P بالعلاقة:

$$\sigma_5(\eta) = 1 - \frac{(2P-1)!}{(P-1)!} \int_0^\eta [t(1-t)]^{P-1} dt \quad (٤-٣١)$$

وتكمن أهمية هذه المرشحة في أنها تُمكننا من تصغير الثابت A الوارد في الطرف الأيمن من العلاقة (٤-٢٢).

والجدير بالذكر أن فانديفن بين أنه [19] من الممكن الحصول على تقارب من الرتبة الأسية بعيداً عن نقطة الانقطاع لتابع تحليلي قطعي وذلك بجعل درجة التقريب تتناسب طردياً مع رتبة مرشحته.

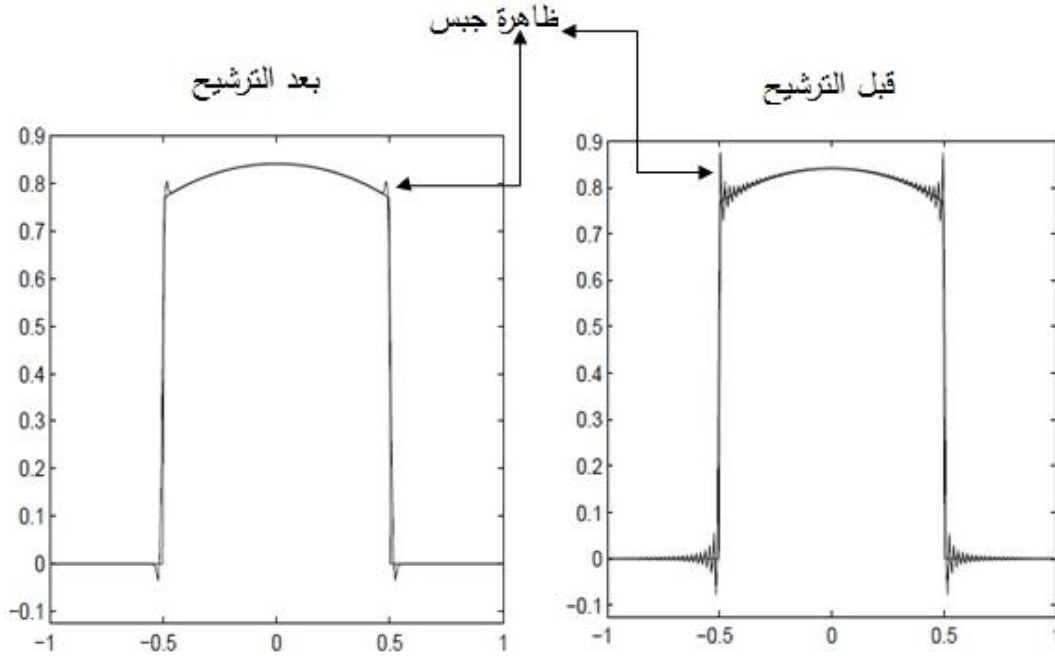
ليكن لدينا التابع المعرّف بالعلاقة:

$$f(x) = \chi_{[-0.5, 0.5]} \sin(\cos(x))$$

حيثُ:

$$\chi_{[-0.5, 0.5]} = \begin{cases} 1 & ; x \in [-0.5, 0.5] \\ 0 & ; x \notin [-0.5, 0.5] \end{cases}$$

سنعرض فيما يلي الخطوط البيانية لكل من تقريب فورييه لهذا التابع من أجل $N = 200$ والترشيح الطيفي الموافق له باستخدام المرشحة فانديفن من المرتبة الرابعة ويمكن من خلال الشكل ملاحظة أنّ أثر ظاهرة جيبس المتمثل بالنتوءات يقل باستخدام الترشيح الطيفي إلا أنّه لا يزول.

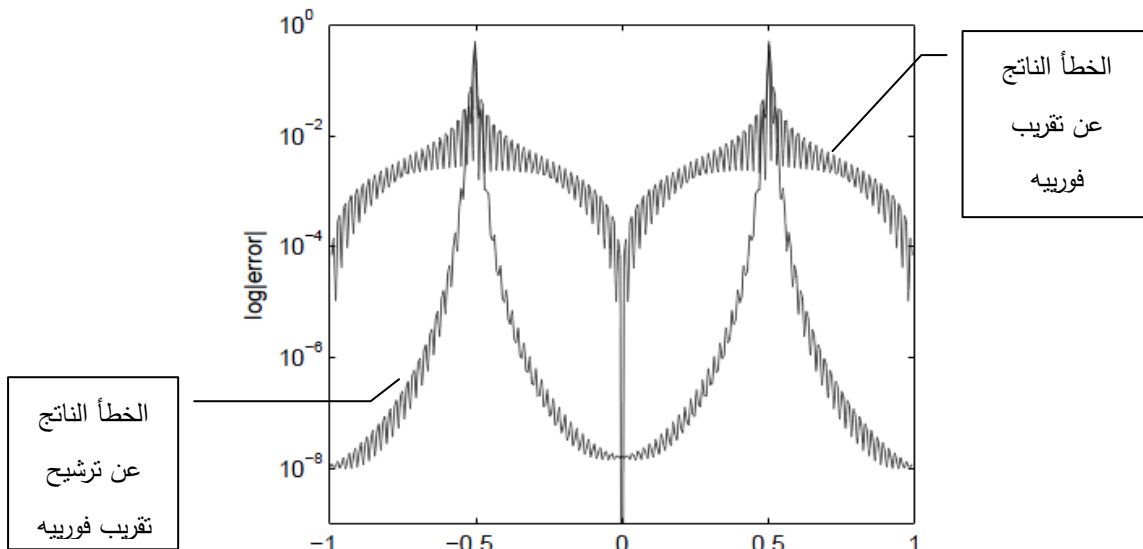


ترشيح فورييه من الدرجة $N = 200$
باستخدام مرشحة فانديفن من المرتبة الرابعة

تقريب فورييه من الدرجة $N = 200$

الشكل (٤-٥)

أمّا الشكل التالي فيبين لنا الدقة التي تعطيها مرشحة فانديفن لتقريب فورييه وذلك من خلال لوغاريتم الخطأ النقطي



الشكل (٤-٦) (مقارنة بين خطأ فورييه وخطأ ترشيح فورييه)

من أجل توضيح التحسن الذي يطرأ على مجموع فورييه عند ترشيحه فإننا سنستعرض فيما يلي جدولاً قمنا من ببرمجته من خلال برنامج الـ Mathematica قارنا فيه بين دقة تقريبي فورييه والترشيح الطيفي للتابع الذي تُعطى قاعدة ربطه بالشكل:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & ; x \in [-1, 0[\\ x & ; x \in [0, +1] \end{cases}$$

علماً أنّ المرشحة المستخدمة هي مرشحة التجيب.

يجدر الإشارة إلى أنّ FA ترمز إلى تقريب فورييه و FE ترمز إلى خطأ فورييه النقطة

x	f(x)	FA	Filter	FE	FilterError
0.	0.	$0.465425 + 6.07153 \times 10^{-18} i$	$0.000197125 + 0.0947777 i$	0.465425	0.0947779
0.1	0.1	$0.416874 + 1.30104 \times 10^{-18} i$	$0.0305702 + 0.106122 i$	0.46384	0.0949937
0.2	0.2	$0.395916 + 1.73472 \times 10^{-18} i$	$0.0626777 + 0.0960806 i$	0.462256	0.0952132
0.3	0.3	$0.407672 + 2.60209 \times 10^{-18} i$	$0.0875848 + 0.0666627 i$	0.460674	0.0954363
0.4	0.4	$0.448265 + 0. i$	$0.0977573 + 0.0239555 i$	0.459094	0.095663
0.5	0.5	$0.505721 + 1.73472 \times 10^{-18} i$	$0.0888734 - 0.0233206 i$	0.457516	0.0958933
0.6	0.6	$0.562768 + 1.73472 \times 10^{-18} i$	$0.0608947 - 0.065806 i$	0.455938	0.0961269
0.7	0.7	$0.600872 - 3.46945 \times 10^{-18} i$	$0.0181425 - 0.0955724 i$	0.454363	0.096364
0.8	0.8	$0.604588 + 0. i$	$-0.0316348 - 0.107795 i$	0.452789	0.0966044
0.9	0.9	$0.565206 - 3.46945 \times 10^{-18} i$	$-0.0789824 - 0.101653 i$	0.451217	0.096848

الجدول (٢-١) (مقارنة بين دقة الترشيح الطيفي وتقريب فورييه)

٤-٢. طرائق إعادة الإسقاط الطيفي (Reprojection methods):

٤-٢-١. إعادة الإسقاط الطيفي المباشر (Direct Spectral Reprojection) [1,10,16,20]:

نفرض لدينا تابع $f \in L^2[-1,1]$ تحليلي على أي مجال جزئي $[a,b] \subseteq [-1,1]$ ، ولتكن $\{\psi_k(x)\}$ أساساً بالنسبة إلى جداء داخلي ما.

إنّ النشر الطيفي المستمر الموافق للتابع f بدلالة الأساس $\{\psi_k(x)\}$ يُعطى بالعلاقة:

$$f_N(x) = \sum_{k=0}^N (f, \psi_k) \psi_k(x) \quad \dots (٤-٣٢)$$

وبفرض:

$$(٤-٣٣) \dots \quad |(f, \psi_k)| \leq C$$

حيث C مستقل عن k .

$$(٤-٣٤) \dots \quad \lim_{N \rightarrow \infty} |f(x) - f_N(x)| = 0$$

وذلك تقريباً في كل مكان من المجال $[-1,1]$.

وجدنا في الفصل السابق أنّ النشر الطيفي المعطى بالعلاقة (٤-٣٢) يعاني من ظاهرة جيبس عند وجود نقاط انقطاع للتابع في المجال $[-1,1]$ ، وبينّا كذلك أنّ هذه الظاهرة تُسبب التقارب البطيء للنشر الطيفي وذلك نتيجة الطبيعة الشاملة لمثل هذه التقريبات إذ أنّه يتم تعيين المعاملات بالتكامل على كامل مجال التقريب حتّى وإنّ تضمن على نقاط انقطاع.

سنقدم في هذا الجزء من بحثنا إجرائية تُمكننا وفق شروط معينة من تقريب التابع f لدرجة عالية من الدقة وذلك على أي مجال $[a,b] \subseteq [-1,1]$ يكون التابع تحليلياً عليه، وبذلك نكون قد تخلصنا من ظاهرة جيبس، يُطلق على مثل هذه الإجرائية اسم إعادة الإسقاط الطيفي المباشر ويرمز لها بـ (RP).

إنّ خوارزمية إعادة الإسقاط المباشر تتمحور حول الخطوتين الآتيتين:

(١) تعريف المتغير الموضعي $\xi \in [-1,1]$ وذلك باعتماد التحويل:

$$\xi = -1 + 2 \left(\frac{x-a}{b-a} \right)$$

بحيث إذا كان $x \in [a,b]$ فإنّ $\xi \in [-1,1]$.

وهذا التعريف للمتغير الموضعي يكافئ تعريف التطبيق:

$$\xi : [a,b] \rightarrow [-1,1]$$

$$(٤-٣٥) \dots \quad \xi(x) = -1 + 2 \left(\frac{x-a}{b-a} \right)$$

(٢) نقوم بإعادة نشر f_N المعطى بالعلاقة (٤-٣٢) على المجال $[a,b] \subseteq [-1,1]$ باستخدام قاعدة

جديدة ولتكن $\{\phi_k^{\lambda}(\xi)\}$ ، λ معامل حدوديات جيجينبار ، حيث يُعطى النشر الجديد بالعلاقة:

$$f_N^\lambda(x) = \sum_{k=0}^N (f_N, \phi_k^\lambda)_\lambda \phi_k^\lambda(\xi(x)) \quad \dots (٣٦-٤)$$

وذلك من أجل كل λ مثبتته.

إنّ القاعدة الجديدة $\{\phi_k^\lambda(\xi)\}$ التي أشرنا إليها قبل قليل ما هي إلا أسرة من التوابع المتعامدة المنظمة بالنسبة إلى جداء داخلي ما وليكن $(.,.)_\lambda$.

إنّ النشر الجديد والذي تمّ بناؤه في العلاقة (٣٦-٤) يتقارب في المجال $[a, b]$ وفق معدل تقارب أسّي إذا اختيرت القاعدة الجديدة $\{\phi_k^\lambda(\xi)\}$ بحيث تكون **مكملة جيبس** بالنسبة للقاعدة $\{\psi_k(x)\}$.

تعريف (٣-٤) (مكملة جيبس):

يُقال عن الأسرة $\{\phi_k^\lambda(\xi)\}$ إنها مكملة جيبس (Gibbs' Complementary) بالنسبة للأسرة $\{\psi_k(x)\}$ إذا تحققت الشروط الثلاث الآتية:

(١) **التعامد (Orthonormality):**

$$(\phi_k^\lambda(\xi), \phi_l^\lambda(\xi))_\lambda = \delta_{kl} \quad \dots (٣٧-٤)$$

وذلك من أجل كل λ مثبتته.

(٢) **التقارب الطيفي (Spectral Convergence):**

إنّ النشر الطيفي للتابع $g(\xi)$ حيث $-1 \leq \xi \leq 1$ ، والموافقة لـ $a \leq x \leq b$ ، بدلالة الأساس $\{\phi_k^\lambda(\xi)\}$ يتقارب وفق سرعة تقارب أسية وذلك من أجل كل λ مثبتته أي:

$$\max_{-1 \leq \xi \leq 1} \left| g(\xi) - \sum_{k=0}^{\lambda} (g, \phi_k^\lambda)_\lambda \phi_k^\lambda(\xi) \right| \leq e^{-q\lambda} \quad ; q > 0 \quad \dots (٣٨-٤)$$

(٣) **شرط جيبس (Gibbs Condition):**

يوجد عدد $\beta < 1$ بحيث إذا كان $\lambda = \beta N$ فإنّه يتحقق:

$$\left| (\phi_k^\lambda(\xi), \psi_l(x(\xi)))_\lambda \right| \max_{-1 \leq \xi \leq 1} |\phi_l^\lambda(\xi)| \leq \left(\frac{\alpha N}{k} \right)^\lambda \quad \dots (٣٩-٤)$$

$$k > N, l \leq \lambda, \alpha < 1$$

نستعرض الآن النظرية الأساسية في هذا الجزء من بحثنا والتي تبين أنّ النشر الجديد f_N^λ بدلالة أساس مكملة جيبس يُقرب التابع الأصلي f أسياً في N وذلك في كل مكان من المجال $[a, b]$.

مبرهنة (٤-٤):

بفرض لدينا تابع $f \in L^2[-1, 1]$ تحليلي على أي مجال جزئي $[a, b] \subseteq [-1, 1]$ ، وبفرض $\{\psi_k(x)\}$ أسرة متعامدة منظمة بالنسبة إلى الجداء الداخلي $(.,.)_\lambda$ الذي يُحقق كل من العلاقتين (٣٣-٤)، (٣٤-٤) وأيضاً بفرض لدينا الأسرة $\{\phi_k^\lambda(\xi)\}$ التي تشكل قاعدة جيبس المكملة بالنسبة للقاعدة $\{\psi_l(x)\}$ حيث $\lambda = \beta N$ وإذا فرضنا بالإضافة إلى كل ذلك تحقق العلاقة:

$$(٤٠-٤) \dots \quad (f - f_N, \phi_k^\lambda)_\lambda = \sum_{l=N+1}^{\infty} (f, \psi_l) (\phi_k^\lambda, \psi_l)_\lambda$$

فإنه ينتج لدينا أن:

$$(٤١-٤) \dots \quad \max_{a \leq x \leq b} \left| f(x) - \sum_{k=0}^{\lambda} (f_N, \phi_k^\lambda)_\lambda \phi_k^\lambda(\xi(x)) \right| \leq e^{-qN} \quad ; q > 0$$

الإثبات:

نضيف ونطرح $\sum_{k=0}^{\lambda} (f, \phi_k^\lambda)_\lambda \phi_k^\lambda(\xi(x))$ للمقدار $f(x) - \sum_{k=0}^{\lambda} (f_N, \phi_k^\lambda)_\lambda \phi_k^\lambda(\xi(x))$ وبالإعتماد على خواص القيمة المطلقة فإنه ينتج لدينا:

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{\lambda} (f_N, \phi_k^\lambda)_\lambda \phi_k^\lambda(\xi(x)) \right| \leq \left| f(x) - \sum_{k=0}^{\lambda} (f, \phi_k^\lambda)_\lambda \phi_k^\lambda(\xi(x)) \right| + \left| \sum_{k=0}^{\lambda} (f - f_N, \phi_k^\lambda)_\lambda \phi_k^\lambda(\xi(x)) \right|$$

بأخذ القيمة العظمى لكل من طرفي التراجع السابق ينتج لدينا:

$$\max_{a \leq x \leq b} \left| f(x) - \sum_{k=0}^{\lambda} (f_N, \phi_k^\lambda)_\lambda \phi_k^\lambda(\xi(x)) \right| \leq \max_{a \leq x \leq b} \left| f(x) - \sum_{k=0}^{\lambda} (f, \phi_k^\lambda)_\lambda \phi_k^\lambda(\xi(x)) \right| + \max_{a \leq x \leq b} \left| \sum_{k=0}^{\lambda} (f - f_N, \phi_k^\lambda)_\lambda \phi_k^\lambda(\xi(x)) \right|$$

(٤٢-٤)...

بما أن التابع f تحليلي على المجال $[a, b]$ فإن شرط التقارب الطيفي يعني أن النشر بدلالة الأساس الجديد يتقارب بشكل أسي أي :

$$\max_{a \leq x \leq b} \left| f(x) - \sum_{k=0}^N (f, \phi_k^\lambda)_\lambda \phi_k^\lambda(\xi(x)) \right| \leq e^{-q_1 N} \quad ; q_1 > 0$$

وبما أن المقدار $(f, \phi_k^\lambda)_\lambda$ غير موجود فإنه سيكتفى بالمقدار $(f - f_N, \phi_k^\lambda)_\lambda$ وعليه فإنه يكفي مناقشة الحد الثاني من الطرف الأيمن من العلاقة (٤٢-٤).

وبتطبيق العلاقات (٣٣-٤) و (٣٩-٤) و (٤٠-٤) على الحد الثاني من العلاقة (٤٢-٤) يمكن أن يُصغر هذا الحد بالشكل:

$$\begin{aligned} \max_{a \leq x \leq b} \left| \sum_{k=0}^N (f - f_N, \phi_k^\lambda)_\lambda \phi_k^\lambda(\xi(x)) \right| &\leq \max_{a \leq x \leq b} \sum_{k=0}^{\lambda} \sum_{l=N+1}^{\infty} |(f, \psi_l) (\phi_k^\lambda, \psi_l)_\lambda \phi_k^\lambda(\xi(x))| \\ &\leq C \sum_{k=0}^{\lambda} \sum_{l=N+1}^{\infty} \left(\frac{\alpha N}{l} \right)^{\lambda} \leq e^{-qN} \quad , q > 0 \end{aligned}$$

وبناءً عليه ينتج المطلوب أي:

$$\max_{a \leq x \leq b} \left| f(x) - \sum_{k=0}^N (f_N, \phi_k^\lambda)_{\lambda} \phi_k^\lambda(\xi(x)) \right| \leq e^{-qN} \quad ; q > 0$$

نتيجة هامة:

يمكن التخلص من ظاهرة جيبس إذا أمكن إيجاد قاعدة مكمل لجيبس بالنسبة لقاعدة النشر الذي يتقارب ببطء نحو التابع الأصلي وبشكل غير منتظم في جوار نقطة الانقطاع.
مبرهنة (٤-٥) :

إنّ أساس جيجينبار هو أساس جيبس المكمل لأسس التقريبات الطيفية.

ملاحظة:

عندما يُعتمد أساس جيجينبار كأساس جيبس المكمل لأساس قاعدة النشر الطيفي فإنّه يُطلق على طريقة إعادة الإسقاط اسم إعادة بناء جيجينبار التي يُرمز لها بـ (GRP).

الإثبات:

يقوم إثبات هذه المبرهنة على جزأين ندرس في الجزء الأول أساس فورييه ثمّ ننقل في الجزء الثاني إلى أساس جيجينبار.

الحالة الأولى: أساس فورييه (Fourier Base):

من المعلوم أنّ أساس فورييه يُعطى بالعلاقة:

$$\psi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{ik\pi x} \quad ; -\infty \leq k \leq \infty$$

(٤٣-٤)...

إنّ أساس جيبس المكمل لأساس فورييه السابق يُعطى بالعلاقة:

$$\phi_k^\lambda(\xi) = \frac{1}{\sqrt{h_k^\lambda}} C_k^\lambda(\xi)$$

(٤٤-٤)...

حيثُ:

$C_k^\lambda(\xi)$ حدوديات جيجينبار

h_k^λ معامل التنظيم.

إنّ الجداء الداخلي $(\cdot, \cdot)_\lambda$ يُعرّف بالشكل:

$$(f, g)_\lambda = \int_{-1}^{+1} (1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} f(\xi) g(\xi) d\xi$$

(٤٥-٤)...

لإثبات أنّ الأساس المعطى بالعلاقة (٤٤-٤) مكمل لجيبس بالنسبة لقاعدة فورييه يجب أن نتحقق من الشروط الثلاث الواردة في التعريف (٤-٣).

شرط التعامد:

بالاعتماد على تعريف حدوديات جيجينبار ومعامل التنظيم ينتج لدينا أنّ:

$$(\phi_k^\lambda(\xi), \phi_l^\lambda(\xi))_\lambda = \frac{1}{\sqrt{h_k^\lambda h_l^\lambda}} \int_{-1}^{+1} (1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} C_k^\lambda(\xi) C_l^\lambda(\xi) d\xi = \delta_{kl}$$

أي أنّ هذه الحدوديات متعامدة على المجال $[-1,1]$ بالنسبة لتابع الوزن $(1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}$.
شرط التقارب الطيفي:

إنّ إثبات هذا الشرط يعني برهان صحة العلاقة:

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} \left| f(x) - \sum_{k=0}^N (f, \phi_k^\lambda)_\lambda \phi_k^\lambda(x) \right| \leq e^{-q\lambda} \quad ; q > 0 \quad (\text{٤٦-٤}) \dots$$

$$\text{حيثُ: } \phi_k^\lambda(\xi) = \frac{1}{\sqrt{h_k^\lambda}} C_k^\lambda(\xi)$$

إنّ $(f, \phi_k^\lambda)_\lambda$ ماهي إلا معاملات نشر جيجينبار التي تُعطى وفق العلاقة الصريحة الآتية:

$$\hat{f}_k^\lambda = \frac{1}{h_k^\lambda} \int_{-1}^{+1} (1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} C_k^\lambda(x) f(x) dx \quad ; 0 \leq k \leq N \quad (\text{٤٧-٤}) \dots$$

وعليه فإنّ العلاقة (٤٦-٤) تصبح بالشكل:

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} \left| f(x) - \sum_{k=0}^N \hat{f}_k^\lambda C_k^\lambda(x) \right| \leq e^{-q\lambda} \quad ; q > 0 \quad (\text{٤٨-٤}) \dots$$

افتراض:

حتّى نستطيع برهان صحة التراجع الأخير فلا بدّ من إضافة الفرض التالي:

يوجد ثابت $\rho \geq 1$ و $C(\rho)$ بحيث يتحقق من أجل كل $k \geq 0$:

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} \left| \frac{d^k f}{dx^k}(x) \right| \leq C(\rho) \frac{k!}{\rho^k} \quad (\text{٤٩-٤}) \dots$$

حيثُ ρ تمثل المسافة بين نقاط المجال $[-1,1]$ وأقرب نقطة شاذة للتابع f في المستوي العقدي.

توطئة (٣-٤):

إنّ معاملات نشر جيجينبار تحقق التراجع التالي:

$$|\hat{f}_k^\lambda| \leq \sqrt{\pi} \frac{C(\rho) \Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \Gamma(k + 2\lambda)}{h_k^\lambda \Gamma(2\lambda) (2\rho)^k \Gamma(k + \lambda + 1/2)} \quad (\text{٥٠-٤}) \dots$$

إذا تحقق الافتراض السابق.

الإثبات:

بيّنا في الفصل السابق أنّ صيغة رودريغز لحدوديات جيجينبار يُعطى بالعلاقة الآتية:

$$(٥١-٤) \dots \quad (1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} C_k^\lambda(x) = \frac{(-1)^k}{2^k k!} G(\lambda, k) \frac{d^k}{dx^k} \left[(1-x^2)^{k+\lambda-\frac{1}{2}} \right]$$

حيثُ:

$$(٥٢-٤) \dots \quad G(\lambda, k) = \frac{\Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \Gamma(k + 2\lambda)}{\Gamma(2\lambda) \Gamma(k + \lambda + 1/2)}$$

بضرب طرفي العلاقة (٥١-٤) بـ $\frac{f(x)}{h_k^\lambda}$ ينتج:

$$\frac{1}{h_k^\lambda} (1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} f(x) C_k^\lambda(x) = \frac{(-1)^k}{2^k k! h_k^\lambda} G(\lambda, k) f(x) \frac{d^k}{dx^k} \left[(1-x^2)^{k+\lambda-\frac{1}{2}} \right]$$

وبمكاملة طرفي العلاقة الأخيرة ينتج لدينا:

$$\frac{1}{h_k^\lambda} \int_{-1}^{+1} (1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} f(x) C_k^\lambda(x) dx = \frac{(-1)^k}{2^k k! h_k^\lambda} G(\lambda, k) \int_{-1}^{+1} f(x) \frac{d^k}{dx^k} \left[(1-x^2)^{k+\lambda-\frac{1}{2}} \right] dx$$

وبتعويض (٤٧-٤) في العلاقة الأخيرة نجد أنَّ:

$$\hat{f}_k^\lambda = \frac{(-1)^k}{2^k k! h_k^\lambda} G(\lambda, k) \int_{-1}^{+1} f(x) \frac{d^k}{dx^k} \left[(1-x^2)^{k+\lambda-\frac{1}{2}} \right] dx$$

بإجراء التكامل التجزئة k مرة يصبح لدينا:

$$\hat{f}_k^\lambda = \frac{1}{2^k k! h_k^\lambda} G(\lambda, k) \int_{-1}^{+1} (1-x^2)^{k+\lambda-\frac{1}{2}} \frac{d^k f(x)}{dx^k} dx$$

وبالاعتماد على خواص القيمة المطلقة فإنَّ المساواة الأخيرة تؤول إلى التراجع الآتي:

$$\left| \hat{f}_k^\lambda \right| \leq \frac{1}{2^k k! h_k^\lambda} G(\lambda, k) \int_{-1}^{+1} \left| (1-x^2)^{k+\lambda-\frac{1}{2}} \right| \left| \frac{d^k f(x)}{dx^k} \right| dx$$

وبتعويض العلاقة (٤٩-٤) في التراجع الأخير نتج لدينا:

$$(٥٣-٤) \dots \quad \left| \hat{f}_k^\lambda \right| \leq \frac{G(\lambda, k) C(\rho)}{(2\rho)^k h_k^\lambda} \int_{-1}^{+1} (1-x^2)^{k+\lambda-\frac{1}{2}} dx$$

وبملاحظة أنَّ:

$$\int_{-1}^{+1} (1-x^2)^{k+\lambda-\frac{1}{2}} dx = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma\left(k + \lambda + \frac{1}{2}\right)}{(k + \lambda) \Gamma(k + \lambda)}$$

فإنَّه يمكن كتابة العلاقة (٥٣-٤) بالشكل:

$$\left| \hat{f}_k^\lambda \right| \leq \sqrt{\pi} \frac{G(\lambda, k) C(\rho) \Gamma\left(k + \lambda + \frac{1}{2}\right)}{(2\rho)^k h_k^\lambda (k + \lambda) \Gamma(k + \lambda)}$$

بتعويض العلاقة (٥٢-٤) في التراجع الأخير يصبح لدينا:

$$\left| \hat{f}_k^\lambda \right| \leq \sqrt{\pi} \frac{\Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \Gamma(k + 2\lambda) C(\rho)}{(2\rho)^k h_k^\lambda \Gamma(2\lambda) \Gamma(k + \lambda + 1)}$$

وهو المطلوب.

توطئة (٤-٤):

إنّ معاملات نشر جيجينبار تحقق التراجع التالي:

$$(٥٤-٤) \dots \left| \hat{f}_k^\lambda \right| \left| C_k^\lambda(x) \right| \leq \left| \hat{f}_k^\lambda \right| \left| C_k^\lambda(1) \right| \leq L \frac{\Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \Gamma(k + 2\lambda) C(\rho)}{(2\rho)^k \sqrt{\lambda} \Gamma(2\lambda) \Gamma(k + \lambda)}$$

حيث L ثابت مستقل عن k و λ .

الإثبات:

نعلم أنّ:

$$\left| C_k^\lambda(x) \right| \leq C_k^\lambda(1) \leq A \frac{k + \lambda}{\sqrt{\lambda}} h_k^\lambda$$

وبناءً عليه وعلى العلاقة (٥٠-٤) ينتج لدينا:

$$\left| \hat{f}_k^\lambda \right| \left| C_k^\lambda(x) \right| \leq \left| \hat{f}_k^\lambda \right| C_k^\lambda(1) \leq A \sqrt{\pi} \frac{\Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \Gamma(k + 2\lambda) C(\rho)}{(2\rho)^k \sqrt{\lambda} \Gamma(2\lambda) \Gamma(k + \lambda)}$$

وبفرض $L = A \sqrt{\pi}$ تصبح العلاقة الأخيرة بالشكل:

$$\left| \hat{f}_k^\lambda \right| \left| C_k^\lambda(x) \right| \leq L \frac{\Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \Gamma(k + 2\lambda) C(\rho)}{(2\rho)^k \sqrt{\lambda} \Gamma(2\lambda) \Gamma(k + \lambda)}$$

وهو المطلوب.

لنعرف المقدار:

$$(٥٥-٤) \dots B_k = L \frac{\Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \Gamma(k + 2\lambda) C(\rho)}{(2\rho)^k \sqrt{\lambda} \Gamma(2\lambda) \Gamma(k + \lambda)}$$

من الواضح أنّ المقدار السابق يحقق التراجع الآتي وذلك من أجل $\rho \geq 1$:

$$(٥٦-٤) \dots \frac{B_{k+1}}{B_k} = \frac{k + 2\lambda}{2\rho(k + \lambda)} \leq \frac{k + 2\lambda}{2(k + \lambda)}$$

لنبرهن الآن التراجع المعطى بالعلاقة (٤٨-٤):

$$\begin{aligned}
\max_{-1 \leq x \leq 1} \left| f(x) - \sum_{k=0}^N f_k^\lambda C_k^\lambda(x) \right| &\leq \max_{-1 \leq x \leq 1} \left| \sum_{k=N+1}^{\infty} f_k^\lambda C_k^\lambda(x) \right| \\
&\leq \max_{-1 \leq x \leq 1} \sum_{k=N+1}^{\infty} |f_k^\lambda| C_k^\lambda(1) \\
&\leq \sum_{k=N+1}^{\infty} B_{k+1} \leq B_{N+1} \sum_{q=0}^{\infty} \left(\frac{N+2\lambda}{2(N+\lambda)} \right)^q
\end{aligned}$$

من الواضح أنَّ الحد الأعلى للعلاقة الأخيرة ما هو إلا متسلسلة هندسية متقاربة من أجل $N > 0$ وبناءً عليه:

$$\sum_{q=0}^{\infty} \left(\frac{N+2\lambda}{2(N+\lambda)} \right)^q = \frac{1}{1 - \frac{N+2\lambda}{2(N+\lambda)}} = \frac{2(N+\lambda)}{N}$$

وعليه تؤول العلاقة (٥٧-٤) إلى التراجع:

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} \left| f(x) - \sum_{k=0}^N f_k^\lambda C_k^\lambda(x) \right| \leq B_{N+1} \sum_{q=0}^{\infty} \left(\frac{N+2\lambda}{2(N+\lambda)} \right)^q = B_{N+1} \frac{2(N+\lambda)}{N}$$

وبتعويض B_{N+1} بما يساويها يصبح التراجع السابق بالشكل:

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} \left| f(x) - \sum_{k=0}^N f_k^\lambda C_k^\lambda(x) \right| \leq L \frac{2(N+\lambda) C(\rho) \Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \Gamma(N+1+2\lambda)}{N \sqrt{\lambda} (2\rho)^{N+1} \Gamma(2\lambda) \Gamma(N+1+\lambda)}$$

وبجعل $\lambda = \beta N$; $\beta > 0$ وبلاستفادة من صيغة ستيرلينغ يصبح لدينا:

$$\begin{aligned}
(٥٨-٤) \dots \max_{-1 \leq x \leq 1} \left| f(x) - \sum_{k=0}^N f_k^\lambda C_k^\lambda(x) \right| &\leq A q^N ; q = \frac{(1+2\beta)^{1+2\beta}}{2^{1+2\beta} \rho^\beta \beta^\beta (1+\beta)^{1+\beta}} \\
&\text{وبما أن } \rho \geq 1 \text{ فإنه يتحقق } q < 1.
\end{aligned}$$

وعليه فإنَّ الشرط الثاني من مكملة جيس محقق.

ملاحظة:

لقد برهنا صحة الشرط الثاني بافتراض أنَّ التابع تحليلي على كامل المجال $[-1,1]$ فإذا لم يكن التابع تحليلي على كامل المجال يجب أن نجري تغييراً في المتحول بالشكل:

$$\begin{aligned}
\varepsilon &= \frac{b-a}{2} \\
\delta &= \frac{b+a}{2}
\end{aligned}$$

حيثُ:

$$\begin{aligned}
x &: [-1,1] \rightarrow [a,b] \\
x(\xi) &= \varepsilon \xi + \delta
\end{aligned}$$

تعريف (٤-٤) (خطأ التنظيم):

يُعطى خطأ التنظيم بالعلاقة:

$$RE(\lambda, m) = \max_{a \leq \xi \leq b} \left| f(\xi) - \sum_{k=0}^m f_k^\lambda C_k^\lambda(\xi) \right| \quad (٥٩-٤) \dots$$

بتعويض العلاقة (٥٩-٤) في العلاقة (٥٨-٤) نجد أنَّ:

$$RE(\lambda, m) \leq Aq^m$$

شرط جيبس:

وجدنا من تعريف مكمل جيبس أنَّ شرط جيبس ينص على أنه:

يوجد عدد $\beta < 1$ بحيث إذا كان $\lambda = \beta N$ فإنه يتحقق:

$$\left| (\phi_l^\lambda(\xi), \psi_k(x(\xi)))_\lambda \right| \max_{-1 \leq \xi \leq +1} |\phi_l^\lambda(\xi)| \leq \left(\frac{\alpha N}{k} \right)^\lambda \quad (٦٠-٤) \dots$$

$$k > N, l \leq \lambda, \alpha < 1$$

وبتعويض:

$$\psi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{ik\pi x} \quad ; -\infty \leq k \leq \infty$$

$$\phi_l^\lambda(\xi) = \frac{1}{\sqrt{h_l^\lambda}} C_l^\lambda(\xi)$$

فإنَّ العلاقة (٦٠-٤) تصبح بالشكل:

$$\left| \int_{-1}^{+1} (1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} e^{ik\pi x(\xi)} C_l^\lambda(\xi) d\xi \right| \leq \left(\frac{\alpha N}{k} \right)^\lambda \quad (٦١-٤) \dots$$

$$k > N, l \leq \lambda = \beta N, 0 < \alpha < 1$$

أي أنَّ إثبات شرط جيبس يعني إثبات صحة العلاقة الأخيرة، يُبرهن على أنَّ التكامل الوارد في

الطرف الأيسر من التراجع السابق يُعطى بالعلاقة الصريحة الآتية [21]:

$$\int_{-1}^{+1} (1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} e^{ik\pi x(\xi)} C_l^\lambda(\xi) d\xi = h_l^\lambda \Gamma(\lambda) \left(\frac{2}{\pi k \varepsilon} \right)^\lambda i^l (l+\lambda) J_{l+\lambda}(\pi k \varepsilon) \quad (٦٢-٤) \dots$$

حيثُ: $\varepsilon = b - a$

$J_v(x)$ تابع بسل من النوع الأول من المرتبة v .

بالاعتماد على صيغة ستارلينغ وعلى أنَّ تابع بسل يحقق

$$|J_v(x)| \leq 1 \quad \forall x, \forall v > 0$$

ينتج أنَّ شرط جيبس محقق وذلك من أجل $\beta < \frac{2\pi\varepsilon}{27}$.

الحالة الثانية: أساس جيجينبار [22, 23, 24, 25, 26]

من المعلوم أنّ أساس حدوديات جيجينبار يُعطى بالعلاقة:

$$\psi_l(x) = \frac{1}{\sqrt{h_l^\mu}} C_l^\mu(x) \quad (٦٣-٤)...$$

إنّ أساس جيس المكمل لأساس Gegenbaure السابق يُعطى بالعلاقة:

$$\phi_k^\lambda(\xi) = \frac{1}{\sqrt{h_k^\lambda}} C_k^\lambda(\xi) \quad (٦٤-٤)...$$

حيثُ:

حدوديات Gegenbaure $C_l^\mu(\xi), C_k^\lambda(\xi)$

معاملات التنظيم h_l^μ, h_k^λ

إنّ الجداء الداخلي $(\cdot, \cdot)_\lambda$ يُعرف بالشكل:

$$(f, g)_\lambda = \int_{-1}^{+1} (1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} f(\xi) g(\xi) d\xi \quad (٦٥-٤)...$$

لإثبات أنّ الأساس المعطى بالعلاقة (٦٤-٤) مكمل جيس بالنسبة لأساس جيجينبار يجب أن نتحقق من الشروط الثلاث الواردة في التعريف (٣-٤) وذلك كما فعلنا سابقاً.

إنّ شرطي التعامد والتقارب الطيفي محققان، ومناقشة ذلك وردت في الجزء الأول من البرهان وعليه فإنّه يبقى برهان شرط جيس الذي يؤول في هذا الحالة إلى التراجع:

$$\frac{1}{\sqrt{h_l^\mu}} \left| \int_{-1}^{+1} (1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} C_l^\mu(x(\xi)) C_k^\lambda(\xi) d\xi \right| \leq \left(\frac{\alpha N}{l} \right)^\lambda \quad (٦٦-٤)...$$

$$l > N, k \leq \lambda = \beta N, 0 < \alpha < 1$$

لا يمكن هنا الاعتماد على الصيغة الصريحة للتكامل الواردة في العلاقة (٦٢-٤)، ولإتمام البرهان سنقوم بإيجاد صيغة تراجعية للتكامل الوارد في العلاقة (٦٦-٤) الأمر الذي سيسمح بإنقاص λ إلى 0 وذلك بتغير l و N وسيرد فيما يأتي تفصيل كل ذلك.

للتبسيط سيُعمد الترميز التالي:

$$F_l^{\lambda, k} = \int_{-1}^{+1} (1-\xi^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} C_l^\mu(x(\xi)) C_k^\lambda(\xi) d\xi \quad (٦٧-٤)...$$

توطئة (٥-٤):

إذا اعتمدنا الترميز:

$$I_l^{\lambda, k} = \frac{F_l^{\lambda, k}}{G(\lambda, k)} \quad (٦٨-٤)...$$

حيثُ:

$$G(\lambda, k) = \frac{(-1)^k \Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \Gamma(k + 2\lambda)}{2^k k! \Gamma(2\lambda) \Gamma\left(k + \lambda + \frac{1}{2}\right)}$$

عندئذٍ نتحقق العلاقة التراجعية:

$$I_l^{\lambda, k} = \frac{1}{2(l + \mu)\varepsilon} \left[I_{l-1}^{\lambda-1, k+1} - I_{l+1}^{\lambda-1, k+1} \right] ; \begin{cases} \lambda \geq 1 \\ l \geq 1 \end{cases}$$

الإثبات:

لدينا

$$I_l^{\lambda, k} = \frac{F_l^{\lambda, k}}{G(\lambda, k)}$$

وعليه

$$I_l^{\lambda, k} = \frac{1}{G(\lambda, k)} \frac{1}{2(l + \mu)\varepsilon} \int_{-1}^{+1} (1 - \xi^2)^{\lambda - \frac{1}{2}} C_k^\lambda(\xi) \frac{d}{d\xi} \left[C_{l+1}^\mu(\varepsilon \xi + \delta) - C_{l-1}^\mu(\varepsilon \xi + \delta) \right] d\xi$$

بالمكاملة بالتجزئة نجد:

$$\begin{aligned} I_l^{\lambda, k} &= \frac{-1}{G(\lambda, k)} \frac{1}{2(l + \mu)\varepsilon} \int_{-1}^{+1} \frac{d}{d\xi} \left[(1 - \xi^2)^{\lambda - \frac{1}{2}} C_k^\lambda(\xi) \right] \left[C_{l+1}^\mu(\varepsilon \xi + \delta) - C_{l-1}^\mu(\varepsilon \xi + \delta) \right] d\xi \\ &= \frac{-1}{G(\lambda, k)} \frac{1}{2(l + \mu)\varepsilon} \int_{-1}^{+1} \frac{G(\lambda, k)}{G(\lambda - 1, k + 1)} (1 - \xi^2)^{\lambda - \frac{3}{2}} C_{k+1}^{\lambda-1}(\xi) \left[C_{l+1}^\mu(\varepsilon \xi + \delta) - C_{l-1}^\mu(\varepsilon \xi + \delta) \right] d\xi \\ &= \frac{1}{2(l + \mu)\varepsilon G(\lambda - 1, k + 1)} \int_{-1}^{+1} (1 - \xi^2)^{\lambda - \frac{3}{2}} C_{k+1}^{\lambda-1}(\xi) \left[C_{l+1}^\mu(\varepsilon \xi + \delta) - C_{l-1}^\mu(\varepsilon \xi + \delta) \right] d\xi \end{aligned}$$

وبناءً عليه:

$$\begin{aligned} I_l^{\lambda, k} &= \frac{1}{2(l + \mu)\varepsilon G(\lambda - 1, k + 1)} \left[F_{l-1}^{\lambda-1, k+1} - F_{l+1}^{\lambda-1, k+1} \right] \\ &= \frac{1}{2(l + \mu)\varepsilon} \left[\frac{F_{l-1}^{\lambda-1, k+1}}{G(\lambda - 1, k + 1)} - \frac{F_{l+1}^{\lambda-1, k+1}}{G(\lambda - 1, k + 1)} \right] \\ &= \frac{1}{2(l + \mu)\varepsilon} \left[I_{l-1}^{\lambda-1, k+1} - I_{l+1}^{\lambda-1, k+1} \right] \end{aligned}$$

وهو المطلوب.

توطئة (٤-٦):

إنَّ $I_l^{\lambda, k}$ يحقق العلاقة التراجعية:

$$|I_l^{\lambda, k}| \leq \frac{\Gamma(l + \mu + 1 - j)}{\varepsilon^j \Gamma(l + \mu + 1)} \max_{l-j \leq p \leq l+j} |I_p^{\lambda-j, k+j}| ; j \leq \min(\lambda, l)$$

الإثبات:

نتحقق من كون العلاقة صحيحة من أجل $j = 0$:

$$\begin{aligned}
|I_l^{\lambda,k}| &\stackrel{?}{\leq} \frac{\Gamma(l+\mu+1-0)}{\varepsilon^0 \Gamma(l+\mu+1)} \max_{l-0 \leq P \leq l+0} |I_P^{\lambda-0,k+0}| \\
|I_l^{\lambda,k}| &\stackrel{?}{\leq} \frac{\Gamma(l+\mu+1)}{\Gamma(l+\mu+1)} \max_{l \leq P \leq l} |I_P^{\lambda,k}| \\
|I_l^{\lambda,k}| &\stackrel{?}{\leq} \max_{l=P} |I_P^{\lambda,k}| \\
|I_l^{\lambda,k}| &\leq |I_l^{\lambda,k}|
\end{aligned}$$

وعليه فإنّ العلاقة محققة من أجل $j = 0$.

نفرض أنّ العلاقة صحيحة من أجل $j = j_0$ أي:

$$|I_l^{\lambda,k}| \leq \frac{\Gamma(l+\mu+1-j_0)}{\varepsilon^{j_0} \Gamma(l+\mu+1)} \max_{l-j_0 \leq P \leq l+j_0} |I_P^{\lambda-j_0,k+j_0}| \quad ; j_0 \leq \min(\lambda, l)$$

لنبرهن أنّ العلاقة صحيحة من أجل $j = j_0 + 1$ بمعنى أننا نريد أن نبرهن صحة العلاقة:

$$|I_l^{\lambda,k}| \leq \frac{\Gamma(l+\mu-j_0)}{\varepsilon^{j_0+1} \Gamma(l+\mu+1)} \max_{l-j_0-1 \leq P \leq l+j_0+1} |I_P^{\lambda-j_0-1,k+j_0+1}| \quad ; j_0 \leq \min(\lambda, l) - 1$$

لدينا فرضاً

$$\begin{aligned}
|I_l^{\lambda,k}| &\leq \frac{\Gamma(l+\mu+1-j_0)}{\varepsilon^{j_0} \Gamma(l+\mu+1)} \max_{l-j_0 \leq P \leq l+j_0} |I_P^{\lambda-j_0,k+j_0}| \quad ; j_0 \leq \min(\lambda, l) - 1 \\
&\leq \frac{\Gamma(l+\mu+1-j_0)}{\varepsilon^{j_0} \Gamma(l+\mu+1)} \max_{l-j_0 \leq P \leq l+j_0} \left| \frac{1}{2(P+\mu)\varepsilon} [I_{P-1}^{\lambda-j_0-1,k+j_0+1} - I_{P+1}^{\lambda-j_0-1,k+j_0+1}] \right| \\
&\leq \frac{\Gamma(l+\mu+1-j_0)}{\varepsilon^{j_0} \Gamma(l+\mu+1)} \frac{1}{2(l-j_0+\mu)\varepsilon} \max_{l-j_0 \leq P \leq l+j_0} \left[|I_{P-1}^{\lambda-j_0-1,k+j_0+1}| - |I_{P+1}^{\lambda-j_0-1,k+j_0+1}| \right] \\
&\leq \frac{(l+\mu-j_0)\Gamma(l+\mu-j_0)}{\varepsilon^{j_0} \Gamma(l+\mu+1)} \frac{1}{2(l-j_0+\mu)\varepsilon} \max_{l-j_0 \leq P \leq l+j_0} \left[|I_{P-1}^{\lambda-j_0-1,k+j_0+1}| + |I_{P+1}^{\lambda-j_0-1,k+j_0+1}| \right] \\
&\leq \frac{\Gamma(l+\mu-j_0)}{\varepsilon^{j_0+1} \Gamma(l+\mu+1)} \max_{l-j_0-1 \leq P \leq l+j_0+1} |I_P^{\lambda-j_0-1,k+j_0+1}|
\end{aligned}$$

وهو المطلوب.

توطئة (٧-٤) [24]:

من أجل $l \leq \lambda$ نجد أنّ:

$$(٧٢-٤) \dots \quad |F_l^{\lambda,k}| \leq A \frac{\Gamma(l-\lambda)}{\varepsilon^\lambda \Gamma(l)} \frac{|G(\lambda,k)|}{|G(0,k+\lambda)|}$$

حيثُ A يتزايد مع تزايد $l^{2\mu-1}$.

توطئة (٨-٤):

من أجل $k \leq m \leq N$ و $l > N$ لدينا:

$$(٧٣-٤) \dots \quad |F_l^{\lambda,k}| \leq A \frac{(m+2\lambda)^{m+2\lambda}}{(2\varepsilon\lambda)^\lambda m^m} \frac{1}{l^\lambda}$$

حيث A يتزايد مع تزايد $l^{2\mu-1}$

الإثبات:

لدينا من العلاقة (٧٢-٤)

$$|F_l^{\lambda,k}| \leq A \frac{\Gamma(l-\lambda)}{\varepsilon^\lambda \Gamma(l)} \frac{|G(\lambda,k)|}{|G(0,k+\lambda)|}$$

ومن العلاقة (٦٩-٤) نجد

$$\begin{aligned} |F_l^{\lambda,k}| &\leq A \frac{\Gamma(l-\lambda)}{\varepsilon^\lambda \Gamma(l)} \left| \frac{(-1)^k \Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \Gamma(k+2\lambda)}{2^k k! \Gamma(2\lambda) \Gamma\left(k + \lambda + \frac{1}{2}\right)} \right| \left| \frac{2^{k+\lambda} (k+\lambda)! \Gamma(0) \Gamma\left(k + \lambda + \frac{1}{2}\right)}{(-1)^{k+\lambda} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma(k+\lambda)} \right| \\ &\leq A \frac{\Gamma(\lambda) \Gamma(l-\lambda) \Gamma(k+2\lambda) 2^\lambda}{\varepsilon^\lambda \Gamma(l) k! \Gamma(2\lambda)} \end{aligned}$$

بناءً على الاطراد بالنسبة لـ k فإننا نستطيع أن نكتب:

$$|F_l^{\lambda,k}| \leq A \frac{\Gamma(\lambda) \Gamma(l-\lambda) \Gamma(m+2\lambda) 2^\lambda}{\varepsilon^\lambda \Gamma(l) m! \Gamma(2\lambda)}$$

بالاعتماد على صيغة ستيرلينغ فإن العلاقة السابقة تصبح بالشكل:

$$|F_l^{\lambda,k}| \leq A \frac{(l-\lambda)^{l-\lambda} e^{-l+\lambda} \lambda e^{-\lambda} (m+2\lambda)^{(m+2\lambda)} e^{-(m+2\lambda)} 2^\lambda}{\varepsilon^\lambda l^l e^{-l} m^m e^{-m} (2\lambda)^{(2\lambda)} e^{-2\lambda}}$$

وبالاصلاح ينتج لدينا:

$$|F_l^{\lambda,k}| \leq A \frac{(m+2\lambda)^{(m+2\lambda)}}{(2\varepsilon\lambda)^\lambda m^m} \frac{1}{l^\lambda}$$

وهو المطلوب.

وعليه ومن التوطئة الأخيرة يتبين أن شرط جبس محقق.

أمّا الآن فلا بدّ لنا من استعراض خطأ الاقتطاع من أجل ذلك فإننا سنقدم عدداً من المفاهيم الضرورية لصياغة هذا الخطأ.

إنّ النشر الطيفي من الدرجة N بدلالة الأساس $\{\psi_k\}$ الموافق لتابع $f \in L^1$ معرّف على المجال $[-1,1]$ يُعطى بالعلاقة:

$$f_N(x) = \sum_{l=0}^N f_l \psi_l(x) \quad (٧٠-٤) \dots$$

حيث:

$$f_l = (f, \psi_l)$$

وعليه نشر جيجينبار الطيفي من الدرجة m الموافق لتابع $f \in L^1$ معرّف على المجال $[-1,1]$ يُعطى بالعلاقة:

$$f_m(x) = \sum_{l=0}^m \hat{f}_l^\lambda \psi_l(x)$$

حيثُ:

$$\hat{f}_l^\lambda = \frac{1}{h_l^\lambda} \int_{-1}^{+1} (1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} C_l^\lambda(x) f(x) dx \quad (٧١-٤) \dots$$

و

$$h_l^\lambda = \sqrt{\pi} C_l^\lambda(1) \frac{\Gamma(\lambda+1/2)}{\Gamma(\lambda)(l+\lambda)} \quad (٧٢-٤) \dots$$

للحصول على نشر جيجينبار الطيفي الموافق لتابع $f \in L^1$ على المجال $[a, b] \subseteq [-1, 1]$ لا بُدّ لنا من تعريف متغير موضعي، وهو التابع العكسي للتابع الوارد في العلاقة (٤-٣٥)، بالشكل:

$$x: [-1, 1] \rightarrow [a, b]$$

$$x(\xi) = \xi^\varepsilon + \delta$$

حيثُ:

$$\varepsilon = \frac{b-a}{2}$$

$$\delta = \frac{b+a}{2}$$

وعليه يصبح النشر في المجال $[a, b] \subseteq [-1, 1]$ بالشكل:

$$f(\xi^\varepsilon + \delta) = \sum_{l=0}^m \hat{f}_l^\lambda C_l^\lambda(\xi)$$

حيثُ:

$$\hat{f}_l^\lambda = \frac{1}{h_l^\lambda} \int_{-1}^{+1} (1-\xi^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} C_l^\lambda(\xi) f(\xi^\varepsilon + \delta) d\xi \quad (٧٣-٤) \dots$$

كما أنّ معاملات نشر جيجينبار الموافق للنشر الطيفي المعطى بالعلاقة

$$\hat{g}_l^\lambda = \frac{1}{h_l^\lambda} \int_{-1}^{+1} (1-\xi^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} C_l^\lambda(\xi) f_N(\xi^\varepsilon + \delta) d\xi \quad (٧٤-٤) \dots$$

تعريف (٤-٥) (خطأ الاقتطاع) (Truncation error):

يُعطى خطأ الاقتطاع بالعلاقة:

$$TE(\lambda, m, N, \varepsilon) = \max_{-1 \leq \xi \leq +1} \left| \sum_{l=0}^m (\hat{f}_l^\lambda - \hat{g}_l^\lambda) C_l^\lambda(\xi) \right| \quad (٧٥-٤) \dots$$

مبرهنة (٤-٦):

بفرض أنّه لدينا خطأ الاقتطاع المعرّف بالعلاقة (٤-٧٥) وبفرض $\lambda = \alpha \varepsilon N$ و $m = \beta \varepsilon N$

حيثُ $0 < \alpha, \beta < 1$ عندئذٍ:

$$TE(\alpha \varepsilon N, \beta \varepsilon N, N, \varepsilon) \leq A \left(\frac{(\beta + 2\alpha)^{\beta+2\alpha}}{2^\alpha \alpha^\alpha \beta^\beta} \right)^{\varepsilon N}$$

حيث A تزداد مع ازدياد $N^{1-2\mu}$.

وفي حال كان $\alpha = \beta < \frac{2}{27}$ فإنَّ العلاقة السابقة تصبح بالشكل:

$$TE(\alpha \varepsilon N, \beta \varepsilon N, N, \varepsilon) \leq A q^{\varepsilon N}$$

حيث: $q = \left(\frac{27\alpha}{2} \right)^\alpha < 1$

الإثبات:

$$\begin{aligned} TE(\lambda, m, N, \varepsilon) &= \max_{-1 \leq \xi \leq +1} \left| \sum_{l=0}^m (\hat{f}_l^\lambda - \hat{g}_l^\lambda) C_l^\lambda(\xi) \right| \\ &= \max_{-1 \leq \xi \leq +1} \left| \sum_{l=0}^m \frac{C_l^\lambda(\xi)}{h_l^\lambda} \int_{-1}^{+1} (1 - \xi^2)^{\lambda - \frac{1}{2}} C_l^\lambda(\xi) (f(\xi^\lambda + \delta) - f_N(\xi^\lambda + \delta)) d\xi \right| \\ &= \max_{-1 \leq \xi \leq +1} \left| \sum_{l=0}^m \frac{C_l^\lambda(\xi)}{h_l^\lambda} \int_{-1}^{+1} (1 - \xi^2)^{\lambda - \frac{1}{2}} C_l^\lambda(\xi) \left(\sum_{k=N+1}^{\infty} \hat{f}_k C_k^\lambda(\xi^\lambda + \delta) \right) d\xi \right| \end{aligned}$$

ومنه

$$\begin{aligned} TE(\lambda, m, N, \varepsilon) &\leq \max_{-1 \leq \xi \leq +1} \sum_{l=0}^m \sum_{k=N+1}^{\infty} \left| \frac{\hat{f}_k C_l^\lambda(\xi)}{h_l^\lambda} \right| \left| \int_{-1}^{+1} (1 - \xi^2)^{\lambda - \frac{1}{2}} C_l^\lambda(\xi) C_k^\lambda(\xi^\lambda + \delta) d\xi \right| \\ &\leq A \sum_{l=0}^m \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{C_l^\lambda(1)}{h_l^\lambda} \left| \int_{-1}^{+1} (1 - \xi^2)^{\lambda - \frac{1}{2}} C_l^\lambda(\xi) C_k^\lambda(\xi^\lambda + \delta) d\xi \right| \end{aligned}$$

إنَّ التراجع الأخير ينتج من العلاقتين:

$$|\hat{f}_k| \leq A \quad f \in L^1 \quad \text{فإنَّ} \quad (1)$$

$$|C_l^\lambda(x)| \leq C_l^\lambda(1) \quad \forall -1 \leq x \leq 1 \quad (2)$$

بما أنَّ المجموع الثاني يملك حداً مسيطراً واحداً هو الحد الأول الموافق لـ $N+1$ فإننا نجد أنَّ:

$$TE(\lambda, m, N, \varepsilon) \leq A \left| \int_{-1}^{+1} (1 - \xi^2)^{\lambda - \frac{1}{2}} C_l^\lambda(\xi) C_{N+1}^\lambda(\xi^\lambda + \delta) d\xi \right|$$

وبالاعتماد على التوطئة (٨-٤) تصبح العلاقة الأخيرة:

$$TE(\lambda, m, N, \varepsilon) \leq A \frac{1}{N^\lambda} \frac{(m+2\lambda)^{m+2\lambda}}{(2\lambda)^\lambda m^m}$$

باختيار $\lambda = \alpha \varepsilon N$ و $m = \beta \varepsilon N$ يصبح خطأ الاقتطاع بالشكل:

$$\begin{aligned}
TE(\lambda, m, N, \varepsilon) &\leq A \frac{1}{N^\lambda} \frac{(m+2\lambda)^{m+2\lambda}}{(2\varepsilon\lambda)^\lambda m^m} \\
&= A \left(\frac{m+2\lambda}{m} \right)^m \left(\frac{(m+2\lambda)^2}{2\varepsilon\lambda N} \right)^\lambda \\
&= A \left(\frac{\beta\varepsilon N + 2\alpha\varepsilon N}{\beta\varepsilon N} \right)^{\beta\varepsilon N} \left(\frac{(\beta\varepsilon N + 2\alpha\varepsilon N)^2}{2\varepsilon\lambda N} \right)^{\alpha\varepsilon N} \\
&= A \left(\frac{\beta+2\alpha}{\beta} \right)^{\beta\varepsilon N} \left(\frac{(\beta+2\alpha)^2}{2\alpha} \right)^{\alpha\varepsilon N} \\
&= A \left(\frac{(\beta+2\alpha)^{2\alpha+\beta}}{2^\alpha \alpha^\alpha \beta^\beta} \right)^{\varepsilon N}
\end{aligned}$$

وهو المطلوب.

مثال (٢-٢):

ليكن لدينا التابعان التاليان:

$$f_1(x) = \begin{cases} x^3 - x^2 + 2 & ; -1 \leq x \leq -1/2 \\ x^2 + 5 & ; -1/2 \leq x \leq 1/2 \\ x^3 - 2 & ; 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} (x+0.43)^2 & ; -1 \leq x < -0.43 \\ 40(x+0.43)^2 & ; -0.43 \leq x < -0.33 \\ 10(x+0.23)^2 & ; -0.33 \leq x < -0.23 \\ -5(x^2 - 0.0529) & ; -0.23 \leq x < 0.23 \\ -5(x-0.23)^2 & ; 0.23 \leq x < 0.33 \\ -30(x-0.43)^2 & ; 0.33 \leq x < 0.43 \\ 0.5(x-0.43)^2 & ; 0.43 \leq x < 1 \end{cases}$$

وبفرض أعطينا $N = 256$ و $N = 512$ معاملاً من معاملات فورييه الموافقة لكل من التابعين عندئذٍ يمكننا إعادة بناء تقريب فورييه باستخدام أساس جيجينبار بحيث نحصل على تقريب لا يعاني من ظاهرة جيبس.

قارنا من خلال الأشكال البيانية الآتية بين الخطوط البيانية لتقريب فورييه وإعادة بنائه والخطأ المرتكب عند إعادة البناء الموافقة لكل التابعين.

في العمود الأيمن تظهر الخطوط البيانية لتقريب فورييه وإعادة بنائه والخطأ المرتكب الموافقة للتابع f_1 وذلك من أجل $N = 256$ و $N = 512$ ، أما العمود الأيسر فيعرض الخطوط البيانية لتقريب فورييه وإعادة بنائه والخطأ المرتكب الموافقة للتابع f_2 من أجل $N = 256$ و $N = 512$.

الوسطاء التي اخترناها عند إعادة البناء ودراسة الخطأ النقطي هي:

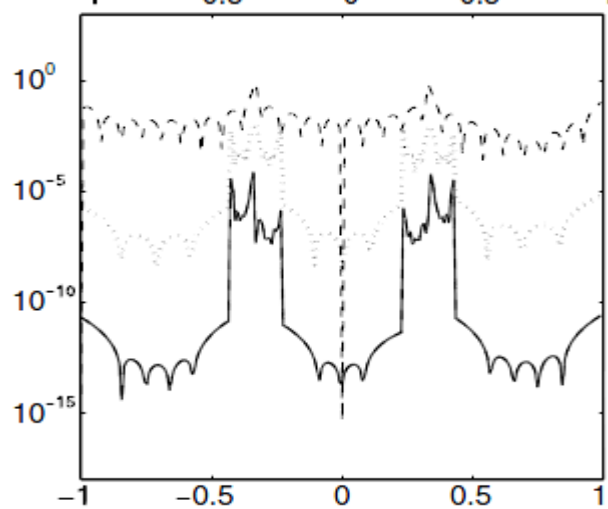
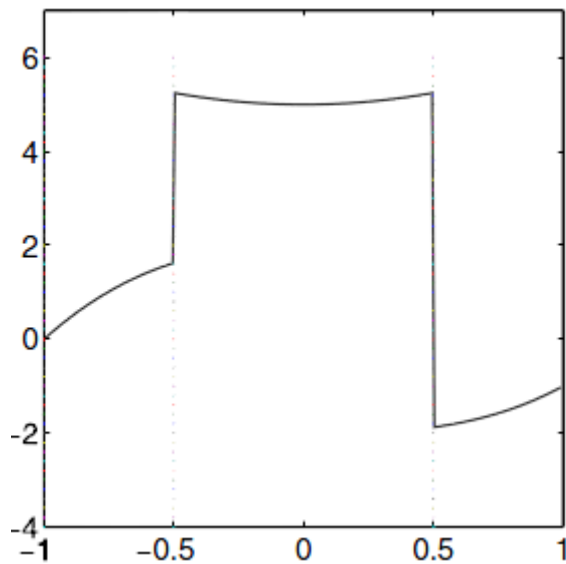
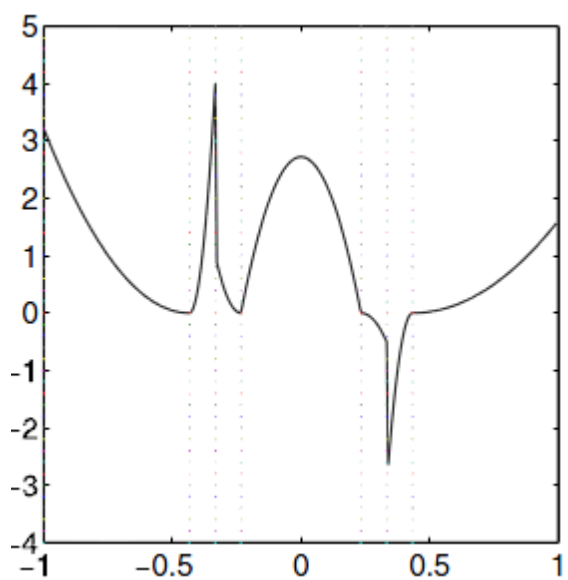
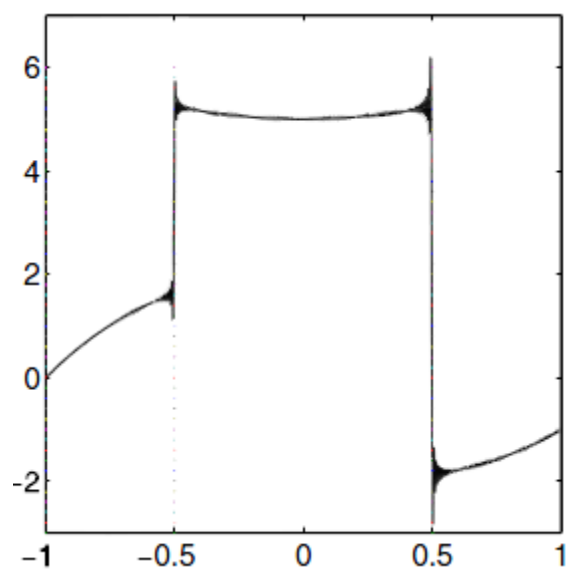
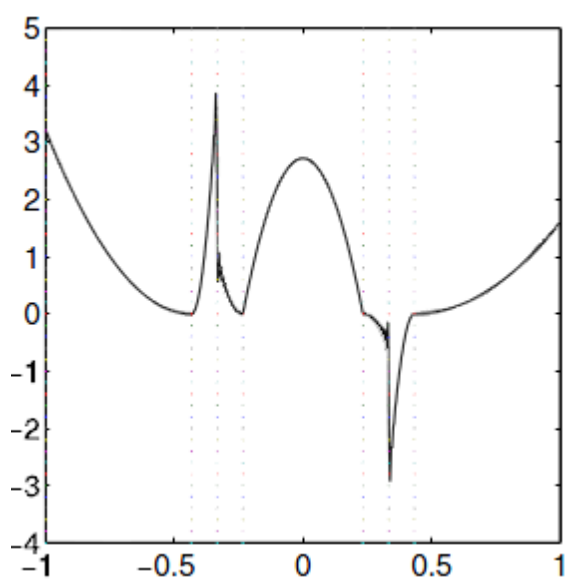
$\lambda = 6, m = 6$ في حالة $N = 256$ وتوافقها عند دراسة الخطأ النقطي الخطوط النقطية

$\lambda = 8, m = 8$ في حالة $N = 512$ وتوافقها عند دراسة الخطأ النقطي الخطوط المتصلة

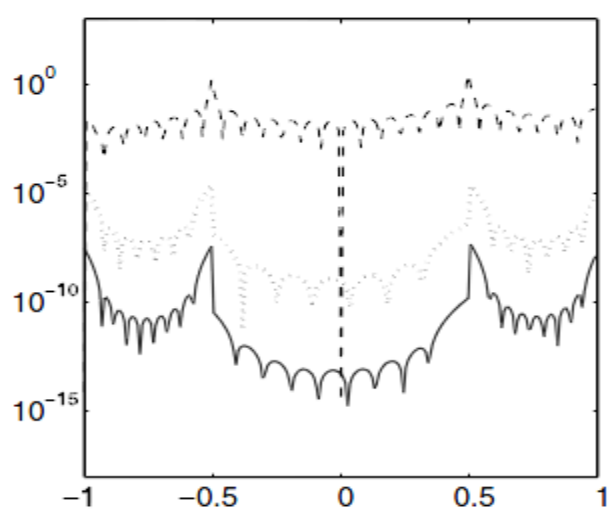
أما الخطوط المتقطعة فهي توافق الخطأ المرتكب عند تقريب فورييه.

الخطوط النقطية العمودية على محور السينات تبين مواقع نقط الانقطاع والمجالات التي يكون فيها التابع أملساً.

وبالتدقيق في الأشكال البيانية يمكننا ملاحظة أنّ إعادة بناء جيجينبار يُخلصنا من ظاهرة جيس بدقة تقريب عالية.



الخطوط البيانية الموافقة للتابع f_2



الخطوط البيانية الموافقة للتابع f_1

الشكل (٧-٤)

٤-٢-٢. طريقة إعادة البناء العكسي (Inverse Reconstruction Method) [27,28]:

إنَّ الحساسية العالية لطرائق إعادة الإسقاط الطيفي لأخطاء التدوير دفع العلماء إلى التفكير في صف جديد يكون أقل حساسية لهذا النوع من الأخطاء.

تقوم طرائق هذا الصف على البحث في أي مجموعة حدوديات عن حدودية بحيث يكون الباقي بين إسقاط فورييه f_N الموافق للتابع f وإسقاط فورييه f_m للحدودية التي نبحث عنها أصغر ما يمكن وذلك في فضاء فورييه F_N أو فضاء الحدوديات P_N وبفعل ذلك يمكن إيجاد حدودية من أجلها يكون خطأ الاقتطاع وخطأ التنظيم متساويين الأمر الذي يجعل التقارب طيفياً. إنَّ نشر فورييه من الدرجة N يُعطى بالعلاقة:

$$f_N(x) = \sum_{k=-N}^N \hat{f}_k e^{ik\pi x}$$

حيث:

$$\hat{f}_k = (f(x), e^{ik\pi x}) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} f(x) e^{-ik\pi x} dx$$

يُمكن تقريب التابع f وفق تقريب جيجينبار بالشكل:

$$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \hat{g}_l C_l^{\lambda}(x)$$

حيثُ:

$$\hat{g}_l = (f(x), C_l^{\lambda}(x))_{\lambda} = \frac{1}{h_l^{\lambda}} \int_{-1}^{+1} f(x) C_l^{\lambda}(x) (1-x^2)^{\lambda-1/2} dx$$

$$h_l^{\lambda} = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(l+2\lambda)\Gamma(l+1/2)}{l!\Gamma(2\lambda)\Gamma(2\lambda)(l+2\lambda)}$$

يمكن التعبير عن معاملات فورييه بدلالة معاملات جيجينبار كما يلي:

$$\begin{aligned} \hat{f}_k &= (f(x), e^{ik\pi x}) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} f(x) e^{-ik\pi x} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \left(\sum_{l=0}^{\infty} \hat{g}_l C_l^{\lambda}(x) \right) e^{-ik\pi x} dx \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \hat{g}_l \left(\frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} C_l^{\lambda}(x) e^{-ik\pi x} dx \right) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \hat{g}_l W_{kl} \end{aligned}$$

(٧٦-٤)...

حيثُ:

$$W_{kl} = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} C_l^\lambda(x) e^{-ik\pi x} dx$$

وهذا التكامل يحسب عددياً.

كما يُبرهن على أنّ التكامل الأخير يُعطى بالعلاقة:

$$W_{kl} = \sum_{j=0}^{[l/2]} \frac{(-1)^{l-2j}}{\sqrt{2n}} J_{l-2j+1/2}(\pi k) \times \frac{(\lambda-1/2)_j (3/2)_{l-2j}}{j! (3/2)_{l-j} (1/2)_{l-2j}}$$

$$W_{0l} = \begin{cases} \frac{(\lambda-1/2)_{l/2} (\lambda)_{l/2}}{j! (3/2)_{l/2}} & , l \text{ even} \\ 0 & , l \text{ odd} \end{cases}$$

إنّ إجراء إعادة بناء الحدوديات العكسي يقوم على اقتطاع المتسلسلة

$$\hat{f}_k = \sum_{l=0}^{\infty} \hat{g}_l W_{kl}$$

ومن ثم حل جملة المعادلات الخطية

$$\hat{f}_k = \sum_{l=0}^{2N} \hat{g}_l W_{kl} \quad ; k = -N, \dots, N$$

وعليه يكون التقريب:

$$S_N(x) = \sum_{l=0}^{2N} \hat{f}_l C_l^\lambda(x)$$

ملاحظة:

إنّ طريقة إعادة البناء العكسي تتم بأسلوب مشابه من أجل تقريب الحدوديات الطيفي.

٤-٢-١. الطريقة العكسية لإعادة البناء الموضوعي [29, 30]:

وضحنا في الفقرة السابقة الطريقة العامة لإعادة البناء العكسي لتابع تحليلي، f ، وسنقوم فيما يلي بتفصيل هذه الطريقة من أجل تابع قطعي.

بفرض لدينا $2N+1$ معامل من معامل نشر طيفي ما لتابع f تحليلي على المجال $[-1,1]$ ويعاني من انقطاع عند النقطة $x=a$ حيث $-1 < a < +1$ ، وبفرض أنّه قد تمّ التحديد الدقيق لموقع نقطة الانقطاع التي يُعاني منها التابع f ، الذي يُعطى النشر الطيفي له وفق العلاقتين:

$$f_N(x) = \sum_{k=0}^N \hat{f}_k \phi_k(x) \quad \dots (٧٧-٤)$$

حيثُ:

$$\hat{f}_k = \frac{1}{c_k} \int_{-1}^{+1} \omega(x) f(x) \phi_k(x) dx \quad \dots (٧٨-٤)$$

عندئذٍ فإننا نستطيع الحصول على مجالين، ليس بالضرورة أن يكونا متساويي الطول، أحدهما يقع على يسار نقطة الانقطاع سنرمز له بـ $\Omega^L = [-1, a]$ أما المجال الآخر الواقع على يمين نقطة الانقطاع فسنرمز له بالرمز $\Omega^R = [a, 1]$.

إنّ التابع تحليلي على كلا المجالين السابقين وسنرمز له على المجال Ω^L بالرمز f^L ، وعلى المجال Ω^R بالرمز f^R .

بما أنّ كلا التابعين f^L ، f^R تحليلي، فإنّه يمكن تمثيلهما بالشكل:

$$f^L(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \tilde{g}_l^L C_l^\lambda(X_L(x)) \quad ; x \in \Omega^L$$

$$f^R(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \tilde{g}_l^R C_l^\lambda(X_R(x)) \quad ; x \in \Omega^R$$

حيثُ:

$$X_L(x) = \frac{2x+1-a}{1+a}$$

$$X_R(x) = \frac{2x-1-a}{1-a}$$

$$-1 \leq X_L(x), X_R(x) \leq 1$$

(٧٩-٤)...

وبناءً عليه فإننا نستطيع كتابة العلاقة (٨٨-٤) بالشكل:

$$\hat{f}_k = \frac{1}{c_k} \int_{-1}^a \omega(x) f^L(x) \phi_k(x) dx + \frac{1}{c_k} \int_a^1 \omega(x) f^R(x) \phi_k(x) dx$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \tilde{g}_l^L \frac{1}{c_k} \int_{-1}^a \omega(x) C_l^\lambda[X_L(x)] \phi_k(x) dx + \sum_{l=0}^{\infty} \tilde{g}_l^R \frac{1}{c_k} \int_a^1 \omega(x) C_l^\lambda[X_R(x)] \phi_k(x) dx$$

بالاستفادة من العلاقة (٨٩-٤) يمكن كتابة التكامل الأخير بالشكل:

$$\hat{f}_k = \sum_{l=0}^{\infty} \tilde{g}_l^L \frac{1+a}{2c_k} \int_{-1}^1 \omega(x(X_L)) C_l^\lambda[X_L] \phi_k(x(X_L)) dX_L$$

$$+ \sum_{l=0}^{\infty} \tilde{g}_l^R \frac{1-a}{2c_k} \int_{-1}^1 \omega(x(X_R)) C_l^\lambda[X_R] \phi_k(x(X_R)) dX_R$$

وبالاعتماد على العلاقة الأخيرة فإننا نستطيع تعريف المصفوفتين R_{kl} ، L_{kl} بالشكل:

$$L_{kl} = \frac{1+a}{2c_k} \int_{-1}^1 \omega(x(X_L)) C_l^\lambda[X_L] \phi_k(x(X_L)) dX_L$$

$$R_{kl} = \frac{1-a}{2c_k} \int_{-1}^1 \omega(x(X_R)) C_l^\lambda[X_R] \phi_k(x(X_R)) dX_R$$

وبناءً عليه فإنّ معاملات النشر الطيفي للتابع f تصبح بالشكل:

$$\hat{f}_k = \sum_{l=0}^{\infty} \tilde{g}_l^L L_{lk} + \sum_{l=0}^{\infty} \tilde{g}_l^R R_{lk} \quad ; k = 0, \dots, N$$

باقتطاع كل من المتسلسلتين اللانهائيتين الواردتين في العلاقة الأخيرة إلى الدرجتين m_L ، m_R وذلك من أجل Ω^L ، Ω^R على الترتيب تنتج لدينا العلاقة:

$$\hat{f}_k \approx \sum_{l=0}^{m_L} \tilde{g}_l^L L_{lk} + \sum_{l=0}^{m_R} \tilde{g}_l^R R_{lk} \quad ; k = 0, \dots, N$$

من المهم ملاحظة أنّ m_R ليس بالضرورة أن تساوي m_L .
لنرمز بـ

$$f = (f_0, f_1, f_2, \dots, f_N)^T$$

$$\tilde{g} = (\tilde{g}_0^L, \tilde{g}_2^L, \dots, \tilde{g}_{m_L}^L, \tilde{g}_0^R, \dots, \tilde{g}_{m_R}^R)^T$$

حيث الشعاع الأخير مكون من $m_R + m_L + 2$ عنصر.

من المهم الإشارة إلى أنّ المصفوفات $L = (L_{lk})$ و $R = (R_{lk})$ ليست مصفوفات مربعة إنّما هي من البعد $(N+1) \times (m_L+1)$ ، $(N+1) \times (m_R+1)$ على الترتيب.

إذا فرضنا أنّ $m = m_L + m_R = N - 1$ فإنّنا نستطيع أن نبني مصفوفات مربعة

$$T = [L \mid R]$$

من البعد $(N+1) \times (N+1)$ ، تُعطى الصيغة الصريحة لها بالشكل التالي:

$$\begin{bmatrix} L_{00} & \dots & L_{0m_L} & , & R_{0,0} & \dots & R_{0,m_R} \\ L_{10} & \dots & L_{1m_L} & , & R_{10} & \dots & R_{1m_R} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ L_{N0} & \dots & L_{Nm_L} & , & R_{N0} & \dots & R_{Nm_R} \end{bmatrix}$$

وعليه فإنّنا نستطيع التعبير عن المعاملات بالشكل:

$$f = T \cdot \tilde{g}$$

ولتوضيح هذه الطريقة فإننا سنعرض مقارنة بيانية بين تقريب فورييه وإعادة بنائه العكسي للتابع

المعرّف بالشكل:

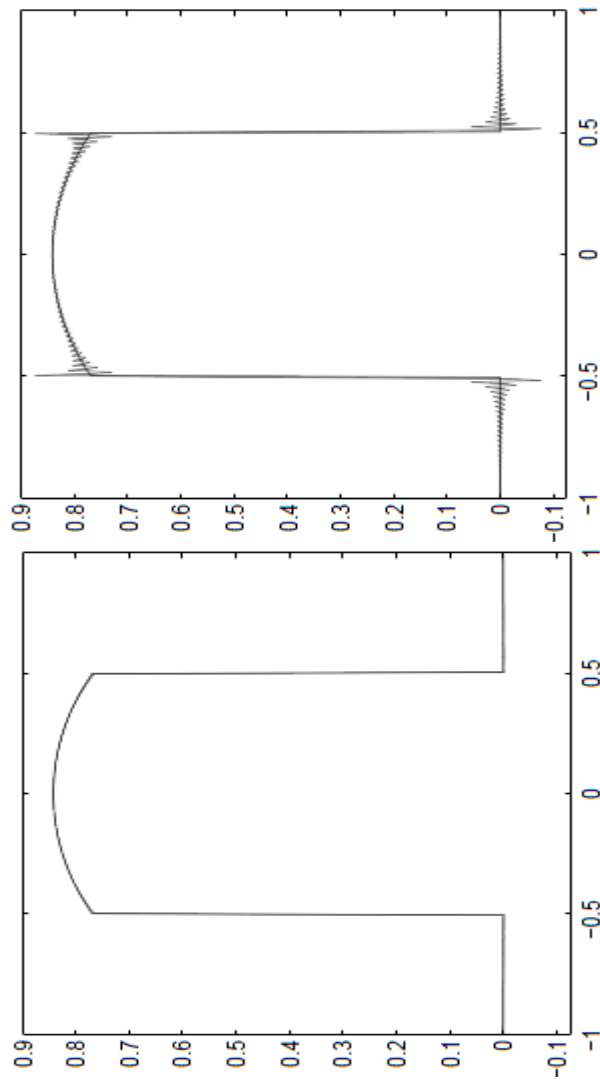
$$f(x) = \chi_{[-0.5, 0.5]} \sin(\cos(x)) \quad ; x \in [-1, 1]$$

حيثُ:

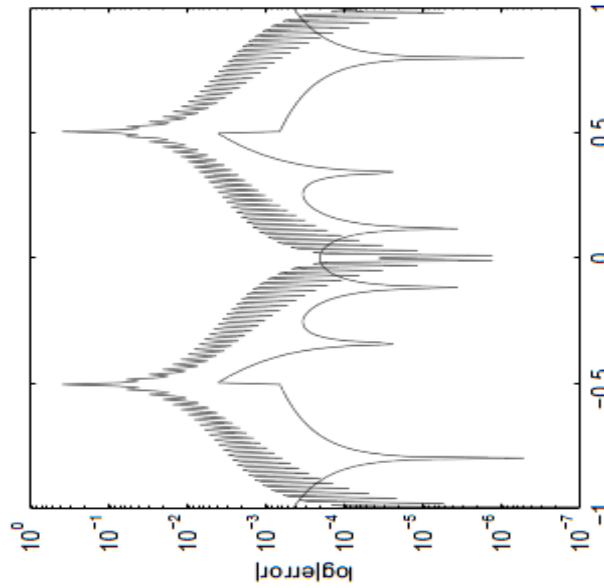
$$\chi_{[-0.5, 0.5]}(x) = \begin{cases} 1 & ; x \in [-0.5, 0.5] \\ 0 & ; x \notin [-0.5, 0.5] \end{cases}$$

حيث يمكننا بسهولة ملاحظة مدى التحسن الذي يطرأ عند إعادة البناء العكسي لتقريب فورييه

ويمكن التحقق من ذلك من خلال الخطوط البيانية التي عرضنا من خلالها دقة التقريبيين.



الشكل (٨-٤) الخطوط البيانية لتقريب فورييه وإعادة بناءه العكسي والخطا النقطي الموافق للتقريب وإعادة بناءه



٤-٣. إعادة البناء الكسري (Rational Reconstruction):

٤-٣-١. التقريبات الكسرية (Rational Approximations) [31,32,33,34]:

إذا كانت متسلسلة القوى الناتجة عن تقريب تابع ما متباعدة فهذا يدل على وجود نقاط شذوذ، كما أنّ تباعد هذه المتسلسلة يعكس عدم قدرة الحدوديات على تقريب التابع بشكل كافٍ. الأمر الذي دفع العلماء إلى إيجاد صف جديد من التقريبات أطلق عليه اسم **التقريبات الكسرية** وذلك بُغية إظهار بعض الصفات المميزة جداً كالأقطاب وسلوك التقارب فمثلاً إنّ سلوك الدالة الكسرية المعطاة بالعلاقة:

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$$

بالقرب من الصفر أو اللانهاية لا يمكن معرفته من خلال تقريب هذه الدالة باستخدام الحدوديات.

تعريف (٤-٦) (التابع الكسري) (Rational function):

إنّ التابع الكسري R من الدرجة N يعطى بالعلاقة:

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{p_0 + p_1 z + \dots + p_n z^n}{q_0 + q_1 z + \dots + q_m z^m} \quad \dots (٤-٨٠)$$

حيثُ: $N = m + n$.

ملاحظات:

(١) يُبرهن أنّ التقريبات الكسرية تكون أفضل من تقريبات الحدوديات عندما يتم اختيار درجتي حدوديتي البسط والمقام بحيث تكون متقاربتين أو متساويتين.

(٢) يُبرهن أنّ التقريبات الكسرية تكون أفضل من تقريبات الحدوديات عند تقريب التتابع التي تعاني من انقطاع.

(٣) عادةً ما يُفرض أنّ $q_0 \neq 0$ أو $Q(0) \neq 0$ وذلك لضمان كون التابع الكسري المعطى بالعلاقة (٤-٩٠) معرّفاً.

٤-٣-٢. طرائق بادي لإعادة البناء الكسري:

٤-٣-٢-١. تقريب بادي (*Pade' Approximation*):

إنّ وجود تطبيقات كثيرة لتقريب بادي في الفيزياء والكيمياء والهندسة الالكترونية يستدعي الدراسة المعمقة لهذا التقريب إذ أنّ أهمية المعلومات التي يزودنا بها هذا التقريب حول سلوك الدالة سواء خارج دائرة تقاربها أم داخلها يجعل من الاعتماد عليها أمراً لا بُدّ منه في العديد من المجالات.

تعريف (٤-٧) (تقريب بادي):

إذا تمّ تعيين الحدوديتين P_n و Q_m بحيث يتحقق:

$$\frac{P_n(z)}{Q_m(z)} = f(z) + O(z^{m+n+1})$$

$$Q_m(0) = 1$$

(٤-٨١)...

عندئذٍ يُعرف تقريب بادي على أنّه التابع الكسري

$$R(z) = \frac{P_n(z)}{Q_m(z)} = \frac{\sum_{i=0}^n p_i z^i}{\sum_{i=0}^m q_i z^i}$$

منّ الواضح أنّ العلاقة (٣-٨١) الواردة في تعريف تقريب بادي تكافئ العلاقة:

$$P_n(z) - Q_m(z) f(z) = O(z^{m+n+1})$$

$$Q_m(0) = 1$$

٤-٣-٢-٢. المفهوم الكلاسيكي لتقريب بادي (*Classic Pade' Approximate*):

بفرض لدينا تابع ما f ممثّل وفق متسلسلة قوى كما بالشكل:

$$f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i$$

إذا تمّ تعويض التابع f الوارد في العلاقة (٤-٨١) بالمتسلسلة المعطاة وفق العلاقة الأخيرة

عندئذٍ يمكن إعادة تعريف تقريب بادي على أنّه التابع الكسري من الدرجة N :

$$(٨٢-٤) \dots R(z) = \frac{P_n(z)}{Q_m(z)} = \frac{\sum_{i=0}^n p_i z^i}{\sum_{i=0}^m q_i z^i}$$

الذي تُعين معاملاته بحيث يتحقق:

$$\sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i = \frac{p_0 + p_1 z + \dots + p_n z^n}{q_0 + q_1 z + \dots + q_m z^m} + O(z^{n+m+1})$$

يمكن ترتيب المساواة الأخيرة كجملة معادلات بالشكل:

$$(q_0 + q_1 z + \dots + q_m z^m)(c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots) = p_0 + p_1 z + \dots + p_n z^n + O(z^{n+m+1})$$

وبمطابقة معاملات الحدود $z^{n+1}, z^{n+2}, \dots, z^{n+m}$ في العلاقة الأخيرة نجد:

$$q_m c_{n-m+1} + q_{m-1} c_{n-m+2} + \dots + q_0 c_{n+1} = 0$$

$$q_m c_{n-m+2} + q_{m-1} c_{n-m+3} + \dots + q_0 c_{n+2} = 0$$

$\vdots$

$$q_m c_n + q_{m-1} c_{n+1} + \dots + q_0 c_{n+m} = 0$$

وبجعل $q_0 = 1$ تصبح جملة المعادلات الخطية المعطاة بالعلاقة الأخيرة جملة خطية بـ m

معامل من المعاملات المجهولة $q_0, q_1, \dots, q_m$.

يمكن كتابة جملة المعادلات السابقة وفق الصيغة المصفوفية الآتية:

$$(٨٣-٤) \dots \begin{bmatrix} c_{n-m+1} & c_{n-m+2} & c_{n-m+3} & \dots & c_n \\ c_{n-m+2} & c_{n-m+3} & c_{n-m+4} & \dots & c_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_n & c_{n+1} & c_{n+2} & \dots & c_{n+m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_n \\ q_{n-1} \\ \vdots \\ q_1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} c_{n+1} \\ c_{n+2} \\ \vdots \\ c_{n+m} \end{bmatrix}$$

وبمطابقة معاملات الحدود $1, z, z^2, \dots, z^n$ يمكن إيجاد المعاملات $p_0, p_1, \dots, p_n$ كما يلي:

$$p_0 = c_0$$

$$p_1 = c_1 + b_1 c_0$$

$$p_2 = c_2 + b_1 c_1 + b_2 c_0$$

$\vdots$

$$p_n = c_n + \sum_{i=1}^{\min(n,m)} q_i c_{n-i}$$

ويُمكن إعادة كتابة جملة المعادلات السابقة وفق الصيغة المصفوفية التالية:

$$(٨٤-٤) \dots \begin{bmatrix} c_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c_1 & c_0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_n & c_{n-1} & c_{n-2} & \dots & c_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix}$$

وعليه يمكن تعيين بسط ومقام تقريب بادي المعطى بالعلاقة (٨٢-٤) من جملتي المعادلتين

(٨٣-٤) و (٨٤-٤) واللّتين يسميان **معادلات بادي** (Pade' Equations).

٤-٣-٢-٣. تقريب فورييه بادي (Fourier Pade' Approximation):

بفرض لدينا تابع f من الصف $C^P[-\pi, \pi]$ يعاني من انقطاع من المرتبة P ، وجدنا سابقاً أنّ مجموع فورييه الجزئي من الدرجة N الذي يُقرب التابع f يُعطى بالعلاقة:

$$S_N^f(x) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx}$$

لنعرف متحول جديد وفق العلاقة $z = e^{ix}$ محولين بذلك المجال $(-\pi, \pi)$ إلى دائرة الوحدة $|z|=1$ ، عندئذٍ يؤول نشر فورييه المعطى بالعلاقة السابقة إلى نشر لورانت الذي يُعطى بالشكل:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_{-n} z^{-n} = f^+(z) + f^-(z^{-1})$$

الفتحة التي تعلو المجاميع في العلاقة السابقة تدل على أنّ الحد الأول مضروباً بـ $1/2$.
ملاحظات:

(١) نسمي الجزء التحليلي $\sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$ من متسلسلة لورانت المعطاة بالعلاقة السابقة بالجزء الموجب

للتابع f وقد تمّ ترميزه بالرمز f^+ .

(٢) نسمي الجزء الأساسي $\sum_{n=0}^{\infty} C_{-n} z^{-n}$ من متسلسلة لورانت المعطاة بالعلاقة السابقة بالجزء السالب

للتابع f وقد تمّ ترميزه بالرمز f^- .

(٣) إنّ المتسلسلتين $\sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$ ، $\sum_{n=0}^{\infty} C_{-n} z^{-n}$ ما هما إلا نشر تايلور في جوار الصفر لكل من التابعين f^+ ، f^- على الترتيب.

(٤) إذا كان التابع f المراد تقريبه حقيقياً فإنّ $C_{-n} = \overline{C_n}$ أي أننا نتعامل فقط مع f^+ .

إنّ تقريب فورييه بادي يقوم على البحث عن أربعة حدوديات $P^+(z)$ ، $P^-(z)$ ، $Q^+(z)$ ، $Q^-(z)$ من الدرجة $N/2$ حيث N زوجي تحقق:

$$P^+(z) - Q^+(z) f^+(z) = O(z^{N+1}) \quad z \rightarrow 0$$

$$P^-(z) - Q^-(z) f^-(z) = O(z^{N+1}) \quad z \rightarrow 0$$

وبتعيين هذه الحدوديات الأربع فإنّه ينتج تقريب فورييه بادي الذي يُعطى بالعلاقة:

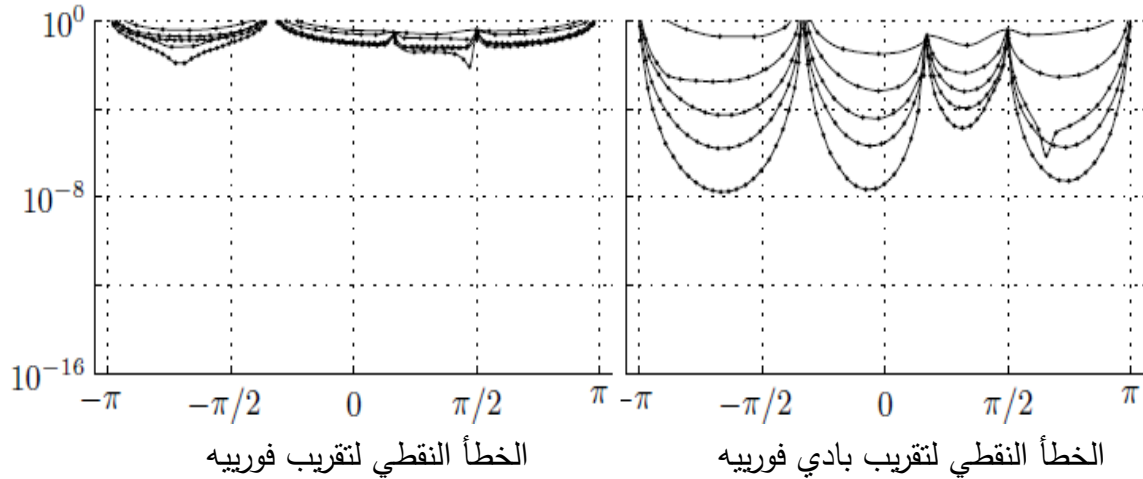
$$f(x) \approx \frac{P^+(z)}{Q^+(z)} + \frac{P^-(z^{-1})}{Q^-(z^{-1})} = \frac{P^+(e^{ix})}{Q^+(e^{ix})} + \frac{P^-(e^{-ix})}{Q^-(e^{-ix})}$$

والجدير بالذكر أنّه لسنا ملزمين أن نعين الحدوديات الأربعة بحيث تكون من الدرجة $N/2$ إلا أنّ هذا الاختيار تمّ بغية التبسيط فقط.

الشكل التالي يقارن بيانياً بين الخطأ النقطي لتقريب فورييه والخطأ النقطي لتقريب بادي فورييه للتابع المعرف بالعلاقة:

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) & ; -\pi \leq x < -\pi/3 \\ -e^{-2x} & ; -\pi/3 \leq x < \pi/6 \\ 0 & ; \pi/6 \leq x < \pi/2 \\ 2-x^2 & ; \pi/2 \leq x < \pi \end{cases}$$

وذلك من أجل درجات التقريب $N = 8, 16, 24, 32, 40$



الشكل (٩-٤) (مقارنة بين تقريب فورييه وتقريب بادي فورييه)

يمكن بسهولة ملاحظة أنه عند استخدام تقريب فورييه بادي فإن دقة التقريب تزداد وخصوصاً في جوار نقاط الانقطاع إلا أنه لا يؤدي إلى زوال ظاهرة جيبس نهائياً، حيث يُبرهن [3] أن التجاوزات تصبح 2.5% بدلاً من 9%.

٤-٣-٢-٤. تقريب بادي - فورييه الشاذ (Singular Fourier Pade' Approximate):

نظراً لكون تقريب فورييه بادي لا يتخلص نهائياً من ظاهرة جيبس كان لابد من تحسين هذه الطريقة، سنعرض فيما يلي تعديلاً لهذه الطريقة بحيث نتخلص نهائياً من ظاهرة جيبس.

نظرية (٥-٤) [32]:

إن أي تابع f يعاني هو ومشتقاته من انقطاع من جميع المراتب عند النقاط $x = \xi$ يمكن تمثيله بالشكل:

$$f(z) = g(z) + \sum_{m=0}^{\infty} R_m(z + \xi)^m \log \left(1 - \frac{z}{\xi} \right)$$

حيث: $g(z)$ تحليلي في جوار $z = -1$ ، $\xi = e^{i\zeta}$ ، والمعاملات $R_0, R_1, \dots$ تتعلق بانقطاع التتابع عند النقطة $f, f', f'', \dots$ $x = \xi$.

وبناءً على النظرية السابقة يمكن تمثيل التابع f بالشكل:

$$f(x) = g(z) + g_1(z) \log \left(1 - \frac{z}{\zeta} \right)$$

حيث: $g_1(z) = \sum_{m=0}^{\infty} R_m (z - \zeta)^m$ و $g(z)$ ، $g_1(z)$ التابعان تحليليان في جوار $z = -1$.

تُسمى العبارة $g_1(z) \log \left(1 - \frac{z}{\zeta} \right)$ بالجزء اللوغاريتمي للتابع f .

تُسمى العبارة $g(z)$ بالجزء التحليلي للتابع f .

وبناءً عليه يُمكن التعبير عن الجزء السالب و الجزء الموجب للتابع f بالشكل:

$$f^{\mp}(z) = g^{\mp}(z) + g_1^{\mp}(z) \log \left(1 - \frac{z}{\zeta^{\mp}} \right)$$

وبتقريب كل من التابعين $g_1(z)$ ، $g_2(z)$ وفق تقريب بادي فإننا نستطيع أن نكتب:

$$\frac{P^{\mp}(z)}{Q^{\mp}(z)} + \frac{r^{\mp}(z)}{Q^{\mp}(z)} \log \left(1 - \frac{z}{\zeta^{\mp}} \right) = f^{\mp}(z) + O(z^{N+1})$$

بشرط $Q^{\mp}(0) \neq 0$.

ومنه:

$$P^{\mp}(z) + r^{\mp}(z) \log \left(1 - \frac{z}{\zeta^{\mp}} \right) = Q^{\mp}(z) f^{\mp}(z) + O(z^{N+1})$$

بتعيين الحدوديات $Q^{\mp}(z)$ ، $P^{\mp}(z)$ ، $r^{\mp}(z)$ نحصل على تقريب جديد للتابع f يُعطى

بالعلاقة:

$$f(x) \approx f^{+}(z) + f^{-}(z^{-1}) = \frac{P^{+}(z)}{Q^{+}(z)} + \frac{r^{+}(z)}{Q^{+}(z)} \log \left(1 - \frac{z}{\zeta^{+}} \right) + \frac{P^{-}(z^{-1})}{Q^{-}(z^{-1})} + \frac{r^{-}(z^{-1})}{Q^{-}(z^{-1})} \log \left(1 - \frac{z^{-1}}{\zeta^{-}} \right)$$

يُطلق على هذا التقريب اسم تقريب فوربيه بادي الشاذ ويُرمز له بالرمز SFP .

لنعمم ما سبق لتابع يعاني من عدد منته من الانقطاعات:

إذا كان التابع f يعاني هو ومشتقاته من انقطاع من جميع المراتب عند النقاط $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_s$

عندئذٍ يمكن تمثيل هذا بالشكل:

$$f(z) = g(z) + g_1(z) \log \left(1 - \frac{z}{\zeta_1} \right) + g_2(z) \log \left(1 - \frac{z}{\zeta_2} \right) + \dots + g_s(z) \log \left(1 - \frac{z}{\zeta_s} \right)$$

حيثُ التوابع $g(z), g_1(z), \dots, g_s(z)$ تحليلية في جوار $z = -1$ ، $\zeta = e^{i\zeta}$.

وبتقريب التوابع $g(z), g_1(z), \dots, g_s(z)$ وفق تقريب بادي فإننا نجد:

$$P^{\mp}(z) + r_1^{\mp}(z) \log \left(1 - \frac{z}{\zeta_1^{\mp}} \right) + \dots + r_s^{\mp}(z) \log \left(1 - \frac{z}{\zeta_s^{\mp}} \right) = Q^{\mp}(z) f^{\mp}(z) + O(z^{N+1})$$

وعليه فإنّ تقريب بادى فورييه الشاذ للتابع f يُعطى بالعلاقة:

$$f(x) \approx f^+(z) + f^-(z^{-1}) \\ = \frac{P^+(z)}{Q^+(z)} + \sum_{i=1}^s \frac{r^+(z)}{Q^+(z)} \log \left(1 - \frac{z}{\zeta_i^+} \right) + \frac{P^-(z^{-1})}{Q^-(z^{-1})} + \sum_{i=1}^s \frac{r^-(z^{-1})}{Q^-(z^{-1})} \log \left(1 - \frac{z^{-1}}{\zeta_i^-} \right)$$

ملاحظة:

إذا كانت $s = 0$ فإنّ تقريب فورييه بادى الشاذ يؤول إلى تقريب فورييه بادى.

٤-٣-٢-٤-١. خوارزمية تقريب فورييه- بادى الشاذ (*SFP Algorithm*):

إنّ تقريب فورييه الشاذ لتابع يعاني من انقطاع واحد يُعطى كما بينا في الفقرة السابقة بالعلاقة:

$$P(z) + r(z) \log \left(1 - \frac{z}{\zeta^{\mp}} \right) = Q(z) f^{\mp}(z) + O(z^{N+1})$$

حيثُ أسقطنا الأدلة العلوية للحدوديات لتسهيل التعامل معها.

بفرض أنّ التابع المراد تقريبه يعاني من انقطاع عند $x = \pi$ ، عندئذٍ تؤول العلاقة الأخيرة إلى العلاقة:

$$P(z) + r(z) \log(z+1) = Q(z) f^{\mp}(z) + O(z^{N+1}) \\ \text{حيثُ: } \zeta = e^{i\pi} = -1.$$

بتعويض كل من التابعين $\log(z+1)$ ، $f^{\mp}(z)$ بنشر تايلور الموافق لهما فإننا نحصل على جملة من المعادلات الخطية التي مجايلها معاملات الحدوديات التي نريد تعيينها وحتى يكون هذا التعيين وحيداً فإننا سنفترض أنّ:

$$n_p + n_q + n_r = N - 1$$

حيثُ: n_p, n_q, n_r هي درجات الحدوديات $r(z)$ ، $Q(z)$ ، $P(z)$.

نُعيّن معاملات الحدوديتين $Q(z)$ ، $r(z)$ بحل جملة المعادلات المعطاة بالصيغة المصفوفية:

$$[C \quad -L] \begin{bmatrix} Q \\ r \end{bmatrix} = 0 \quad \dots (٤-٨٥)$$

حيثُ:

المصفوفة C تمثل معاملات نشر تايلور للجزء الموجب أو السالب للتابع f ، و هي مصفوفة

توزيع من البعد $(n_q + 1) \times (n_q + n_r + 1)$.

$$\begin{bmatrix} c_{N/2+1} & c_{N/2} & c_{N/2-1} & \dots & c_1 \\ c_{N/2+2} & c_{N/2+1} & c_{N/2} & \dots & c_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_N & c_{N-1} & c_{N-2} & \dots & c_{N/2} \end{bmatrix}$$

المصفوفة L تمثل معاملات نشر تايلور للتابع $\log(z+1)$ و هي مصفوفة توليز من البعد $(n_q + n_r + 1) \times (n_r + 1)$.

$$\begin{bmatrix} l_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_1 & l_0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{N/2} & l_{N/2-1} & l_{N/2-2} & \dots & l_0 \end{bmatrix}$$

إن r, Q هي أشعة مكونة من معاملات الحدوديتين $Q(z)$ ، $r(z)$ على الترتيب على أن تكون هذه المعاملات حسب تزايد درجة الحدودية.

من الجدير الإشارة إلى أنه بما أن عدد الأعمدة يزيد واحداً على عدد الأسطر فإنه يوجد على الأقل حل واحد غير صفري.

من المؤلف عادةً جعل المصفوفة في العلاقة (٤-٨٥) مربعة وذلك بفرض $Q(0) = 1$.
إن معاملات P يتم تعيينها من خلال الصيغة المصفوفية:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}c_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c_1 & \frac{1}{2}c_0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{N/2} & c_{N/2-1} & c_{N/2-2} & \dots & \frac{1}{2}c_0 \end{bmatrix} Q = \begin{bmatrix} l_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_1 & l_0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{N/2} & l_{N/2-1} & l_{N/2-2} & \dots & l_0 \end{bmatrix} r$$

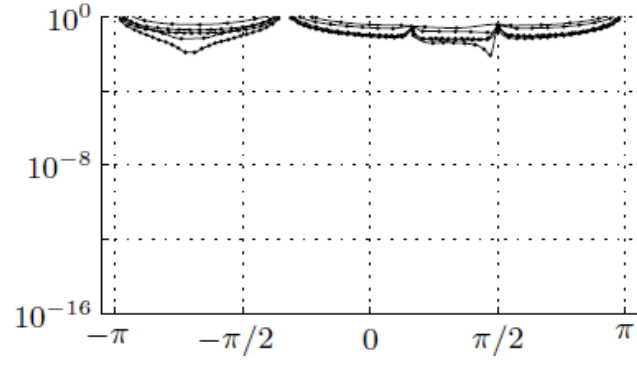
ولتوضيح أثر تقريب فورييه بادي الشاذ على ظاهرة جيس فقد قارنا بين الخطوط البيانية للخطأ النقطي لتقريب فورييه وتقريب بادي الشاذ لكل من التابعين الآتين:

التابع الأول:

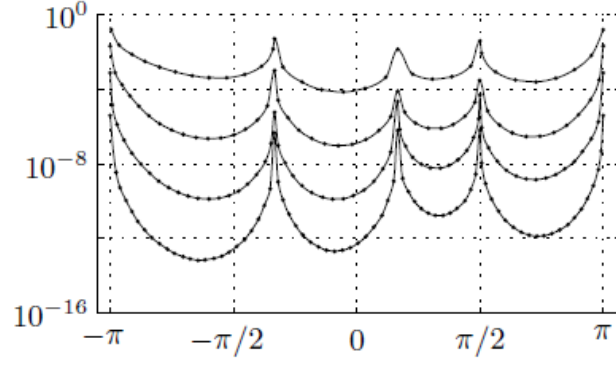
الذي تُعطى قاعدة ربطه بالعلاقة:

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) & ; -\pi \leq x < -\pi/3 \\ -e^{-2x} & ; -\pi/3 \leq x < \pi/6 \\ 0 & ; \pi/6 \leq x < \pi/2 \\ 2 - x^2 & ; \pi/2 \leq x < \pi \end{cases}$$

حيثُ يمكننا ملاحظة أنه عند إعادة بناء التابع باستخدام تقريب بادي فورييه الشاذ فإننا نحصل على تقريب ذو دقة عالية على كامل مجال التقريب بما في ذلك نقاط الانقطاع، الأمر الذي يعني أن ظاهرة جيس تزول عند استخدام تقريب فورييه بادي الشاذ.



الخطأ النقطي الموافق لتقريب فورييه للتابع f



الخطأ النقطي الموافق لتقريب فورييه بادي الشاذ

للتابع f

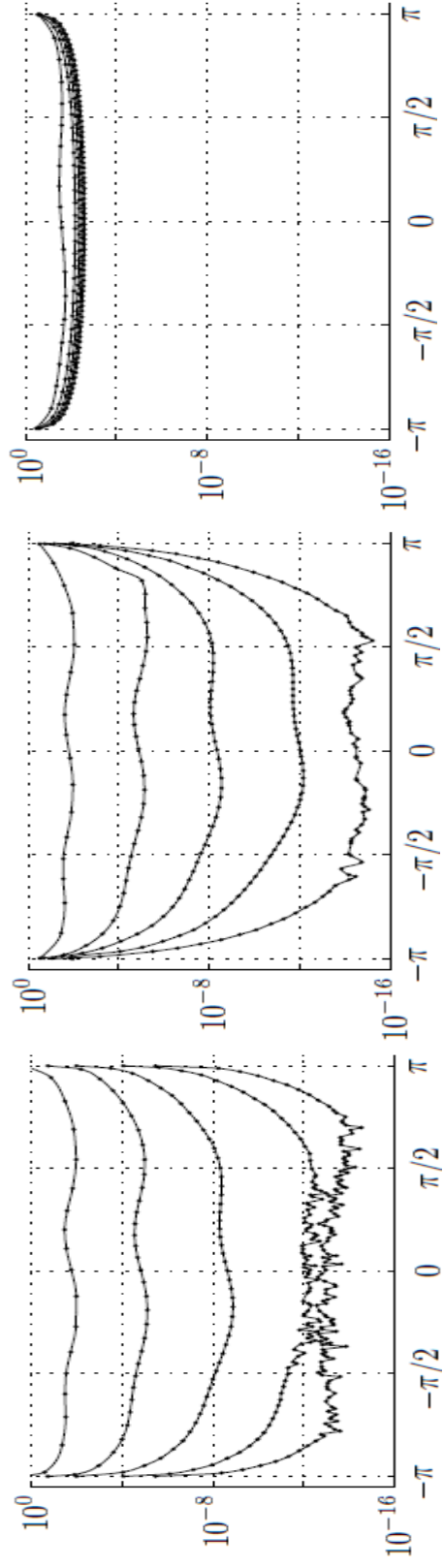
الشكل (١٠-٤) (مقارنة بين تقريب فورييه وتقريب فورييه بادي الشاذ)

التابع الثاني

المعرّف على المجال $[-\pi, \pi]$ بالعلاقة:

$$f(x) = e^{\sin(2.7x) + \cos(x)}$$

من الواضح أنّ هذا التابع تحليلي عند جميع نقاط مجموعة التعريف باستثناء النقطتين $x = \pm\pi$.
قارنا من خلال الشكل التالي بين الخطأ النقطي لتقريب فورييه وفورييه بادي وفورييه بادي الشاذ
وبيّنا مدى التحسن الذي يطرأ على تقريب فورييه عند إعادة بنائه باستخدام تقريب فورييه بادي
وفورييه بادي الشاذ.



الشكل (١١-٤) (الخطوط البيضاء من اليمين إلى اليسار هي الخطأ النقطة لتقريب فورييه وتقريب فورييه بادي وتقريب فورييه بادي الشاذ)

٤-٣-٢-٥. تقريب تشيبيشيف - بادي الشاذ (Singular Chebyshev Pade' Approximat):

وجدنا سابقاً أنّ نشر تشيبيشيف المستمر لتابع f يُعرّف بالعلاقة:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n T_n$$

حيثُ:

$$c_n = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x) T_n(x) dx & ; n \neq 0 \\ \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x) T_n(x) dx & ; n = 0 \end{cases}$$

بالاستفادة من تعريف حدوديات تشيبيشيف فإننا نستطيع التعبير عن نشر فورييه بالشكل:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\theta) \\ &= \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left(\frac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{2} \right) \\ &= \frac{c_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} c_n (e^{in\theta} + e^{-in\theta}) \end{aligned}$$

باستخدام التحويل

(٨٦-٤)...

$$z = e^{i\theta}$$

فإننا نستطيع تحويل نشر تشيبيشيف للتابع f إلى نشر لورانت أي

$$f(z) = \frac{c_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} c_n (z^n + z^{-n})$$

بوضع

(٨٧-٤)...

$$g(z) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$$

ينتج لدينا:

$$f(z) = \frac{1}{2} (g(z) + g(z^{-1}))$$

بما أنّ معاملات تشيبيشيف $\{c_n\}$ أعداد حقيقية فإن:

$$g(z^{-1}) = \overline{g(z)}$$

ومنه:

$$f(z) = \frac{1}{2} (g(z) + g(z^{-1})) = \Re(g(z))$$

إنّ التابع g المُعطى بالعلاقة (٩٧-٤) يُدعى متسلسلة تشيبيشيف المحوّلة للتابع f .

بفرض f تابع تحليلي قطعي معرف على المجال $[-1,1]$ ويعاني من s انقطاع من النوع الأول تُعطى مواقعها بالشكل:

$$\xi_k \in [-1,1] \quad ; k=1,\dots,s$$

ولتكن لدينا متسلسلة تشيشف المحولة للتابع f والمعطاة بالعلاقة (٤-٨٧).

بما أن انقطاعات أي تابع يُمكن تمثيلها لوغاريتمياً فإنه يمكن بالاعتماد على التحويل المعطى بالعلاقة (٤-٩٦) تمثيل هذه الانقطاعات وفق الشكل الآتي:

$$\log\left(1 - \frac{z}{e^{i\theta_k}}\right) \quad ; 0 \leq \theta_k = \cos^{-1}(\xi_k) \leq \pi$$

وبناءً عليه يُعطى تقريب بادي تشيشف الشاذ للتابع g بالشكل:

$$\frac{P_n(z) + \sum_{r=1}^s R_{n_r} \log\left(1 - \frac{z}{e^{i\theta_k}}\right)}{Q_m(z)} = g(z) + O(z^\eta) \quad ; r=1,\dots,s$$

حيثُ:

$$P(z) = \sum_{i=0}^{n_p} p_i z^i$$

$$Q(z) = \sum_{i=0}^{n_q} q_i z^i \neq 0$$

$$R_{n_r}(z) = \sum_{i=0}^{n_r} b_i^r z^i \quad ; r=1,\dots,s$$

$$\eta = n_p + n_q + \sum_{r=1}^s n_r$$

يُدعى الجزء الحقيقي للتقريب السابق تقريب بادي تشيشف الشاذ للتابع f ويرمز له بالرمز (SPC).

تُعين معاملات الحدوديات $P, Q, R_{n_r} ; r=1,\dots,s$ من خلال جملة المعادلات الخطية الآتية:

$$\sum_{i=0}^{n_q} c_{N-i+1} q_i - \sum_{i=0}^{n_1} a_{n_p-i+t}^1 b_i^1 - \dots - \sum_{i=0}^{n_s} a_{n_p-i+t}^s b_i^s = 0$$

$$\sum_{i=0}^{n_q} c_{l-i} q_i - \sum_{i=0}^{v_1} a_{l-i}^1 b_i^1 - \dots - \sum_{i=0}^{v_s} a_{l-i}^s b_i^s = p_l$$

حيثُ

$$t = 1, \dots, \eta - n_p$$

$$l = 0, \dots, n_p$$

والمجموع الذي يعلوه نجمة يرمز إلى أن:

(١) الحد c_0 مضروباً بـ $1/2$.

(٢) $c_n = 0$; $n < 0$.

تجدر الإشارة إلى أنَّ a_n^k هي معاملات نشر تايلور للتابع $\log\left(1 - \frac{z}{e^{i\theta_k}}\right)$ وتحقق:

$$a_n^k = 0 \quad \text{if} \quad n \leq 0$$

ملاحظة:

يُرمز لتقريب بادى تشييف الشاذ بالرمز $SPC(n_p, n_q, n_1, \dots, n_s)$ ولتوضيح أثر تقريب بادى تشييف الشاذ على ظاهرة جيس درسنا تابع الإشارة الذي يُعرّف بالعلاقة:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & ; x \in [0, 1] \\ -1 & ; x \in [-1, 0) \end{cases}$$

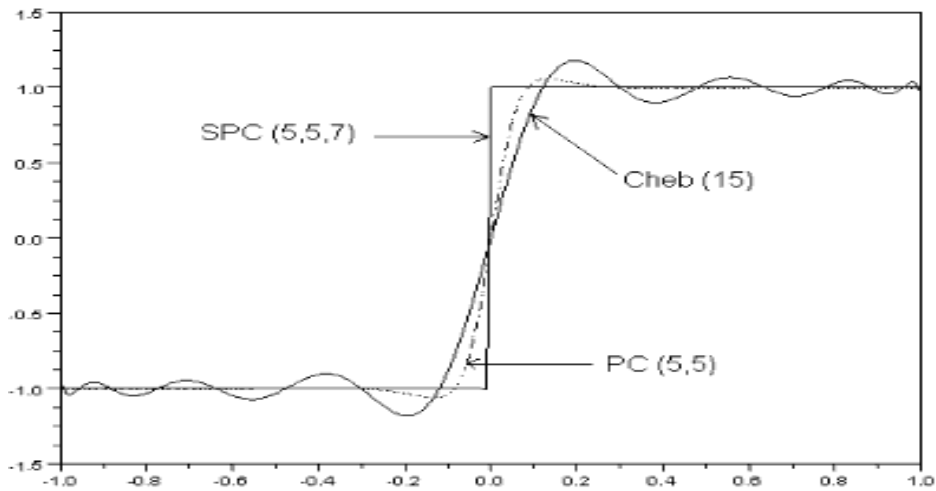
إنَّ معاملات تشييف الموافقة لهذا التابع تُعطى بالعلاقة:

$$c_n = \begin{cases} \frac{4}{n\pi} (-1)^{(n-1)/2} & ; n = 2k + 1 \& k \geq 0 \\ 0 & ; otherwise \end{cases}$$

من الواضح أنَّ هذا التابع يُعاني من انقطاع عند النقطة $x = 0$ والتي توافق على دائرة الوحدة الزاوية $\theta = \pi/2$ ، عندئذٍ يُعين تقريب بادى تشييف الشاذ من العلاقة:

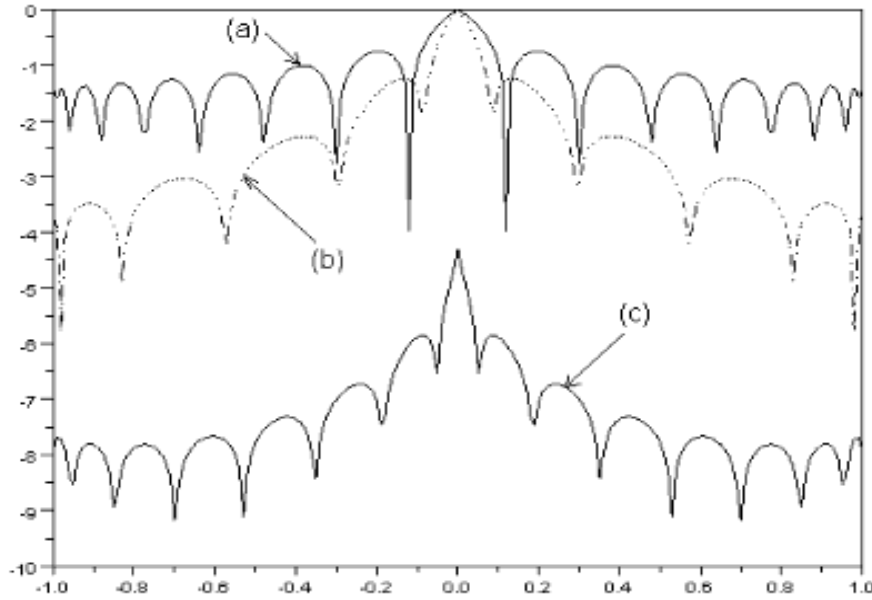
$$\frac{P(z) + R(z) \log\left(1 - \frac{z}{i}\right)}{Q(z)}$$

الشكل التالي يقارن بين الخطوط البيانية لكل من تقريب تشييف (15) Cheb وتقريب بادى تشييف PC(5,5) وبادى تشييف الشاذ SPC(5,5,7) (يمكن مراجعة الملحق (١) لبرمجة هذه الطرائق)



الشكل (١٢-٤) (مقارنة بين تقريبات تشييف)

يمكن بسهولة ملاحظة أنّ تقريب بادي تشيشف الشاذ هو الأفضل بين تقريبات تشيشف إذ أنّه يتخلص نهائياً من الأثر السلبي لظاهرة جيس، ويمكننا تبيين ذلك من خلال استعراض الخطوط البيانية للأخطاء المرتكبة عند كل تقريب من تقريبات تشيشف السابقة.



الشكل (٢٠-٤) الخطأ النقطي لتقريبات تشيشف وفق التابع اللوغاريتمي

(a) خطأ تقريب تشيشف، (b) خطأ تقريب بادي تشيشف، (c) خطأ تقريب بادي تشيشف الشاذ فيما يلي نستعرض جدولاً نوضح من خلاله كيف يتناقص ثابت جيس لتقريبات تشيشف الموافقة لتابع الإشارة السابق أي أنّ هذا الجدول يوضح لنا مدى التحسن الذي يطرأ على تقريب تشيشف الذي يعاني من ظاهرة جيس إذا أعدنا بناءه باستخدام طريقة بادي تشيشف الشاذ.

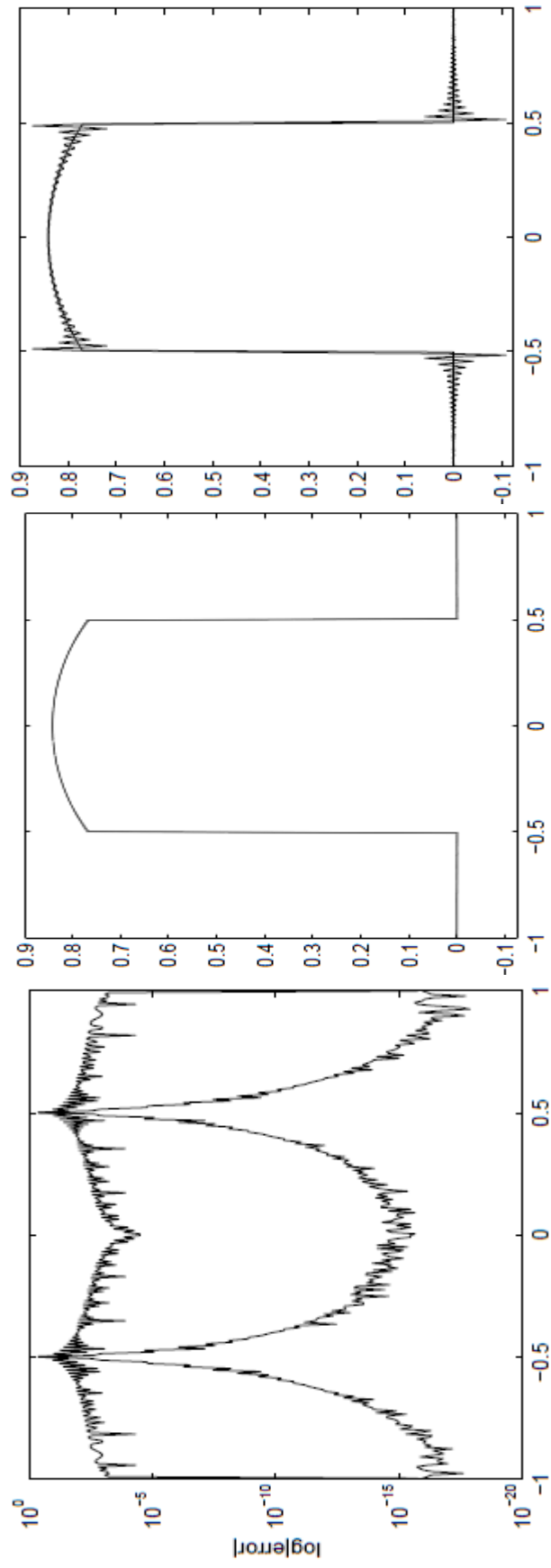
ثابت جيس		
معاملات النشر بعد التدوير	معاملات النشر بدون تدوير	التقريب
0.0606156	0.0585387	PC (5,5)
0.0268526	0.0158730	SPC (5,5,0)
0.0269967	0.0009775	SPC (5,5,2)
0.0717451	0.0000027	SPC (5,5,5)
0.0051746	0.0000494	SPC (5,5,7)
0.0006276	0.0000511	SPC (5,5,10)

الجدول (١-٤)

سنوضح فيما يلي الدقة التي يمكن إنجازوها بواسطة هذه الطريقة وذلك من خلال الخطوط البيانية لتقريب تشيشف وتقريب تشيشف والخطأ اللوغاريتمي للتابع المعرف بالعلاقة:

$$f(x) = \chi_{[-0.5, 0.5]} \sin(\cos(x))$$

$$\chi_{[-0.5, 0.5]}(x) = \begin{cases} 1 & ; x \in [-0.5, 0.5] \\ 0 & ; x \notin [-0.5, 0.5] \end{cases} \quad \text{حيث:}$$



الشكل (١٢-٤) (الخطوط البيانية من اليمين إلى اليسار هي تقريب تشيف وبادي تشيف والخط النقطي لكلا التقريبين)

الفصل الخامس

جودة طرائق التخلص من الأثر السلبي لظاهرة جيس

وجدنا في الفصل الثاني من بحثنا أنّ ظاهرة جيس تؤثر على دقة التقريب الطيفي إلا أنّ هذا الأثر السلبي ليس دائماً ، حيث يمكننا التغلب عليه أو التقليل منه باستخدام واحدة من التقنيات التي تحدثنا عنها في الفصل السابق، ولمعرفة كيف نختار التقنية المناسبة فإننا سنقدم في هذا الفصل دراسة لمقارنة دقة هذه الطرائق بعضها مع بعض ولتحديد محاسن ومساوئ كل منها.

٥-١. مقارنة:

سنقوم فيما يلي ببناء جدول قارنا من خلاله بين متطلبات الطرائق المستخدمة للتخلص من ظاهرة جيس كما عرضنا من خلاله أيضاً أساسيات كل طريقة من هذه الطرائق

اسم الصف	خوارزمية لاكتشاف الحواف	وسطاء	الدقة الطيفية	جمل المعادلات الخطية
الترشيح الطيفي		P	$\sim$	
بادي	$\sim$	n_q, n_r		✓
إعادة الإسقاط الطيفي GRP	✓	λ, m_i	✓	
إعادة البناء العكسي IRM	✓	m_i	✓	✓

الجدول (٥-١) (تصنيف طرائق التخلص من ظاهرة جيس)

أمّا الآن فإننا سنقوم بشرح الرموز التي أوردناها في هذا الجدول:

أولاً : في عمود خوارزميات اكتشاف الحواف ($EdgeDetection$):

الرمز ✓ يشير إلى أنّه لا يمكن إنجاز هذا الصف من الطرائق ما لم يتم التحديد الدقيق لمواقع نقاط الانقطاع.

الرمز $\sim$ يشير إلى أنّ هذا الصف من الطرائق يمكن أن يُعطي نتائج أفضل ودقة أعلى إذا دمج مع خوارزمية لتحديد مواقع الانقطاع.

ثانياً : في عمود الوسطاء ($Parameters$):

الرمز P يشير إلى رتبة المرشحة.

الرمز λ يشير إلى معامل الوزن لحدوديات جيجينبار.

الرمز i يدل على رقم المجال الجزئي من المجال الأصلي الذي يكون فيه التابع تحليلي
الرمز m_i درجة التقريب في المجال الجزئي i .
الرمز n_q يدل على درجة حدودية المقام في تقريب بادي.
الرمز n_r يدل على درجة حدودية البسط للجزء اللوغاريتمي من تقريب بادي الشاذ.

ثالثاً: في عمود الدقة الطيفية (Spectral accuracy):

الرمز ✓ يشير إلى أنّ طرائق هذا الصف يمكنها أن تعيد الدقة الطيفية إلى مجال التقريب بما في ذلك نقاط الانقطاع .
الرمز ~ يشير إلى أنّ خوارزميات هذا الصف لا تعيد الدقة إلى كامل مجال التقريب وإنما إلى جزء من ذلك المجال بعيداً عن مواقع نقاط الانقطاع.

رابعاً: في عمود جمل المعادلات الخطية:

الرمز ✓ يشير إلى أنّ طرائق هذا الصف لا يمكن أن تتجزأ إلا بجل جملة من المعادلات الخطية والمصفوفة الموافقة لهذه الجملة قد تمتلك عدداً كبيراً من الشروط.

٥-٢. الترشيح الطيفي:

٥-٢-١. محاسن الترشيح الطيفي:

١. إنّ الترشيح الطيفي لا يحتاج كلفة حسابية عالية ذلك لأنّه
- (١) لا يعتمد على تعيين مواقع نقط الانقطاع والمجالات التي يكون عليها التابع أملاًساً.
- (٢) يتم إيجاده مباشرة باستخدام واحد من المجموعين الآتيين وذلك تبعاً لنوع التقريب الطيفي المستخدم:

$$f_N^\sigma(x) = \sum_{k=0}^N \hat{f}_k \sigma\left(\frac{k}{N}\right) \phi_k(x)$$

$$f_N^\sigma(x) = \sum_{k=-N}^N \hat{f}_k \sigma\left(\frac{k}{N}\right) e^{ikx}$$

- وذلك فقط إذا عيّنا درجة التقريب N وتابع الترشيح σ علماً أنّ معاملات التقريب الطيفي $\hat{f}_k$ معلومة، الأمر الذي يعني أنّ كلفة ترشيح فورييه الطيفي تعادل كلفة تقريب فورييه أي $N \log N$.
٢. لا يعاني الترشيح الطيفي من حساسية عالية لأخطاء التدوير.

٥-٢-١-٢. مساوي الترشيح الطيفي:

وجدنا في الفصل السابق أنّ الحد الأعلى للخطأ الناتج عن اعتماد الترشيح لتقريب تابع ما يُعطى بالعلاقة:

$$\left| f(x) - f_N^\sigma(x) \right| \leq C_1 N^{1-p} d(x)^{1-p} K(f) + C N^{\frac{1-p}{2}} \|f^{(p)}\|_{L^2}$$

حيثُ:

$$K(f) = \sum_{l=0}^{P-1} d(x)^l \left(f^{(l)}(\xi^+) - f^{(l)}(\xi^-) \right) \int_{-\infty}^{\infty} |G_l^{(P-l)}(\eta)| d\eta$$

والتي تبين لنا أنَّ:

١. الترشيح يزيد من دقة التقريب الطيفي وذلك بعيداً عن نقاط الانقطاع ($d(x) > 0$) أي أنَّ الترشيح لا يتخلص من ظاهرة جيبس نهائياً.

٢. إنَّ جعل الطرف الأيمن من المترابطة السابقة (الحد الأعلى للخطأ الناتج عن اعتماد الترشيح لتقريب التابع) من الرتبة $O(N^{1-P})$ يعتمد على:

(١) نظامية التابع المستمر قطعياً أي ملوسة التابع بعيداً عن نقط الانقطاع.

(٢) رتبة تابع المرشحة σ .

٣. لا يمكننا الحصول على دقة أسية لتابع تحليلي قطعي بعيداً عن نقاط الانقطاع ما لم تكن:

(١) $d(x)$ ليست صغيرة جداً.

(٢) رتبة تابع الترشيح كبيرة بشكل كاف.

٤. لا نستطيع الحصول على دقة أسية عند كل نقطة يكون التابع مستمراً عندها ما لم تتحقق الشروط التالية:

(١) أن يكون التابع قطعياً تحليلياً.

(٢) أن نستخدم مرشحة فانديفن حصراً.

(٢) أن تحقق رتبة مرشحة فانديفن العلاقة التالية:

$$P = \alpha N^{\beta/4}$$

حيثُ α ثابت مستقل عن N ، β تحقق

$$d x = \min_{k=0,-1,1} |x - \xi + 2\pi k| > N^{\beta-1}$$

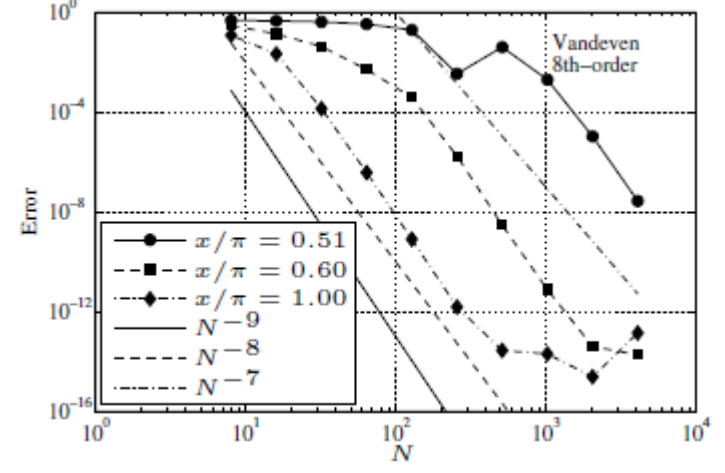
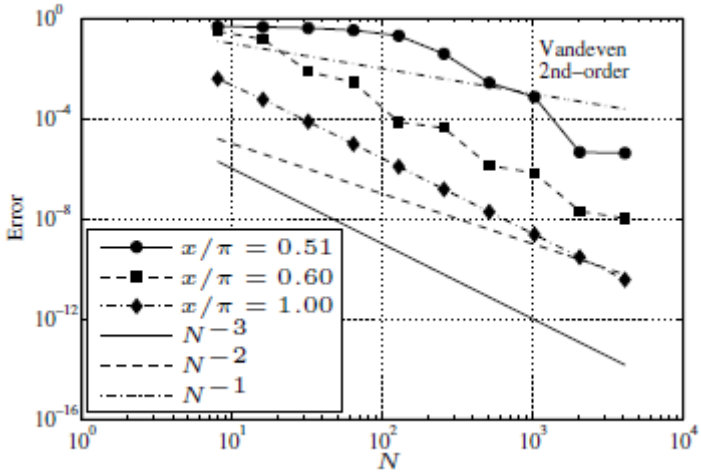
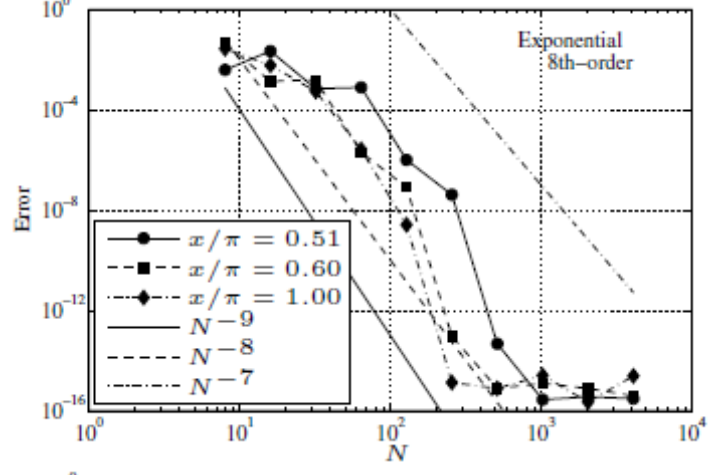
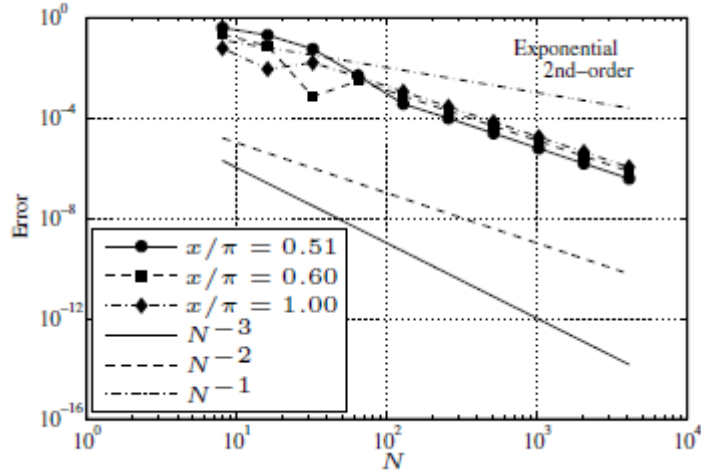
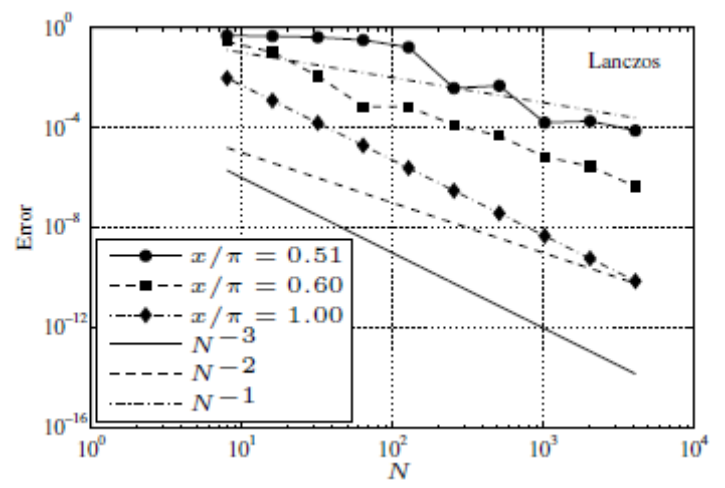
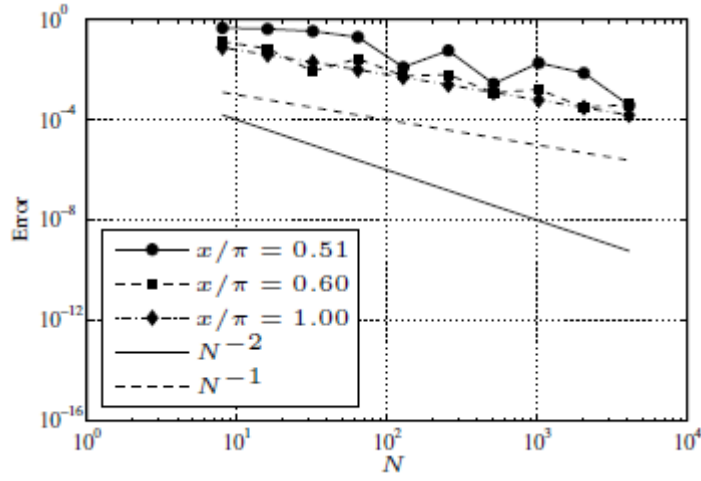
حيثُ ξ نقطة انقطاع للتابع.

ولتوضيح هذه الأفكار فإننا سنعرض خطوط بيانية تبين العلاقة بين درجة التقريب ودقته للتابعين الآتيين:

التابع الأول: تابع الموجة التربيعي (Square wave) الأملس قطعياً والذي يُعرف بالعلاقة:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & ; x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right] \\ 0 & ; x \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right] \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi \right] \end{cases}$$

وذلك من أجل النقاط $x = \pi$ ، $x = 0.6\pi$ ، $x = 0.51\pi$ المتفاوتة البعد عن نقطة انقطاع $x = \pi/2$.



الشكل (٥-١) مقارنة بين درجة التقريب ودقته لتابع الموجة التريبيعي

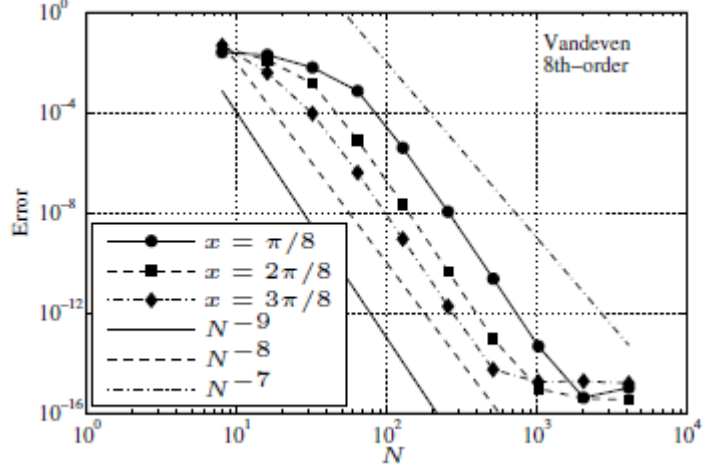
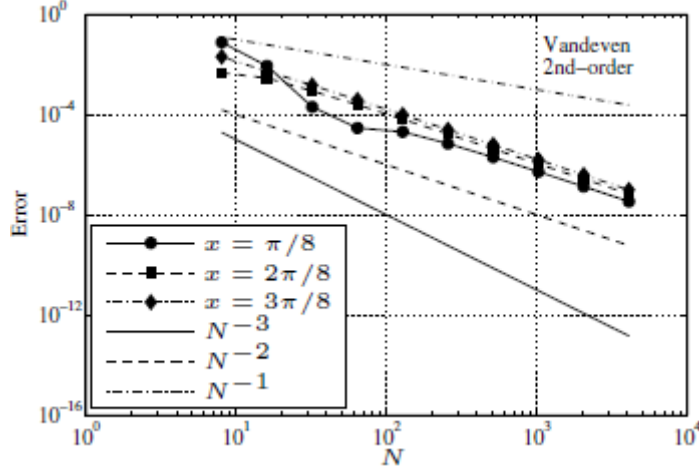
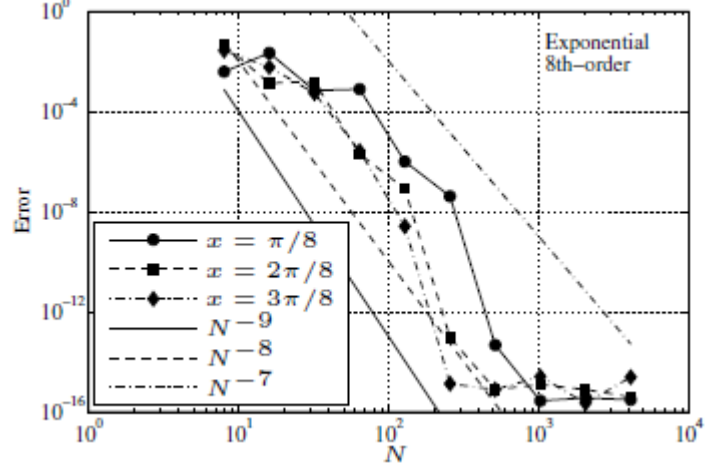
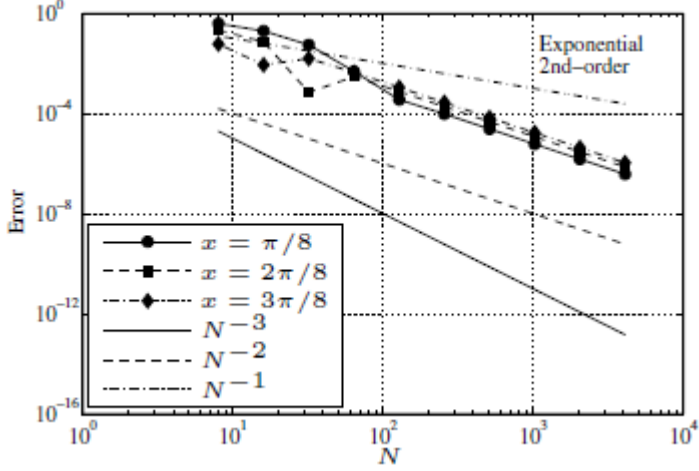
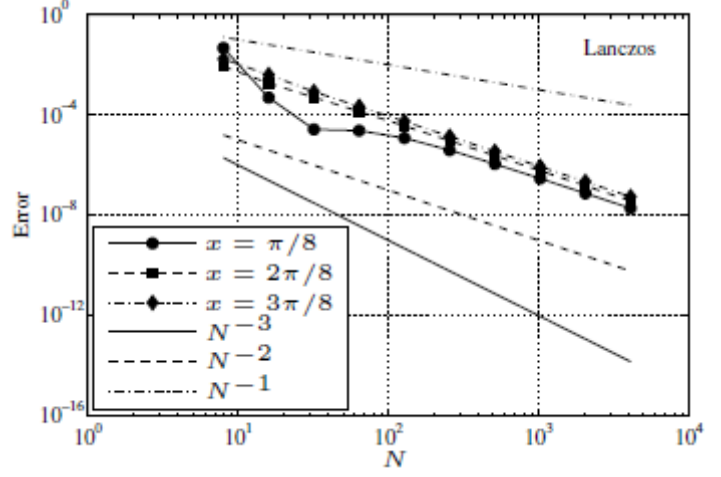
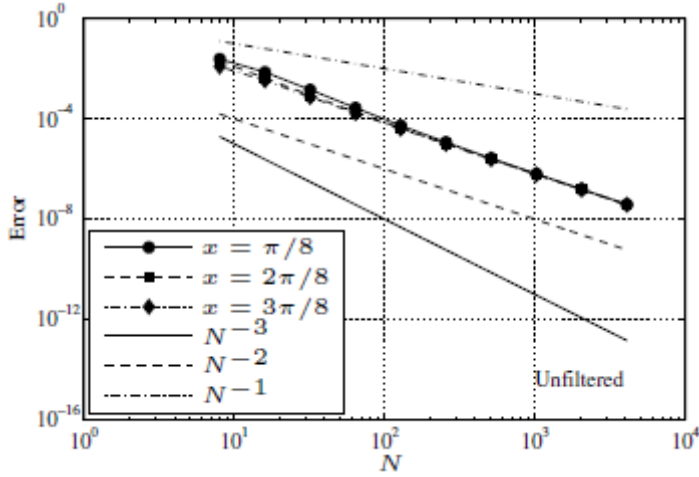
يمكن بسهولة ملاحظة أنه كلما زادت درجة التقريب وبعد النقطة عن انقطاع التابع كان الترشيح أدق كما يمكننا ملاحظة أن دقة الترشيح تزداد كلما زادت رتبة المرشحة الطيفية.

التابع الثاني: جيب نصف الزاوية

$$f(x) = \sin(x/2) \quad ; x \in [0, 2\pi]$$

الأمس قطعياً على المجال $[0, 2\pi]$.

وبين الشكل الذي سنعرضه فيما يلي العلاقة بين درجة التقريب ودقة التقارب وذلك من أجل النقاط $x = \pi/8, x = 2\pi/8, x = 3\pi/8$ ، حيث نلاحظ أنه كلما ازدادت درجة التقريب زادت دقة الترشيح الطيفي.



الشكل (٥-٢) مقارنة بين درجة التقريب ودقة التقريب لتابع جيب نصف الزاوية

٥-٣. إعادة الإسقاط الطيفي:

٥-٣-١. إعادة الإسقاط الطيفي (الطريقة المباشرة):

٥-٣-١-١. محاسن طريقة إعادة الإسقاط الطيفي:

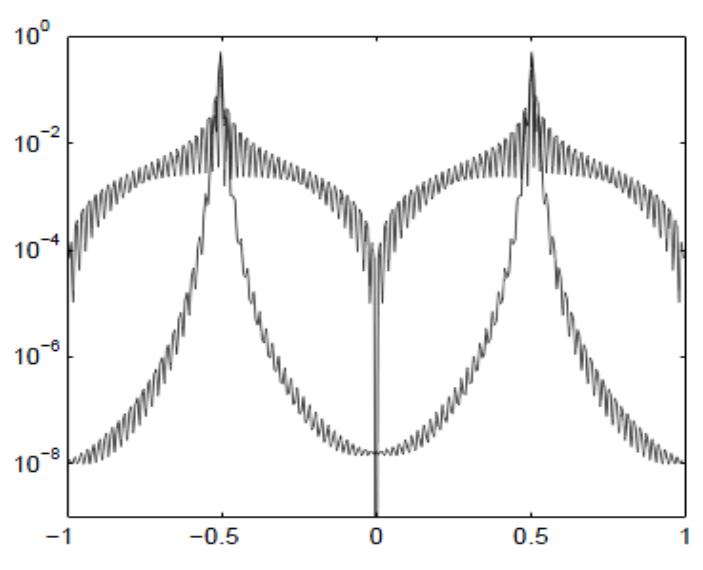
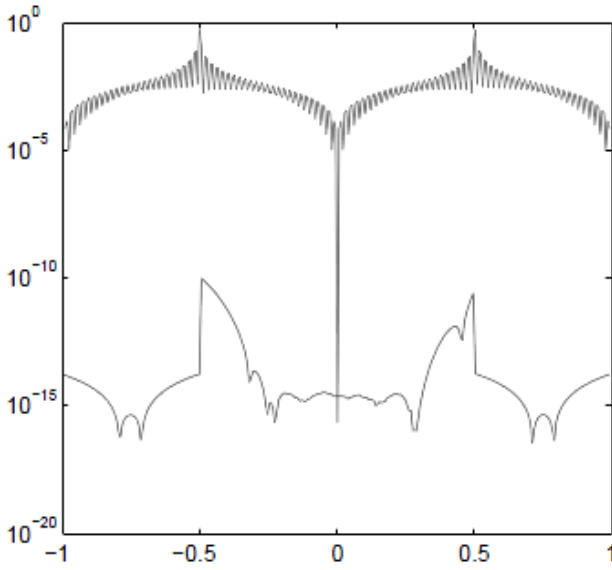
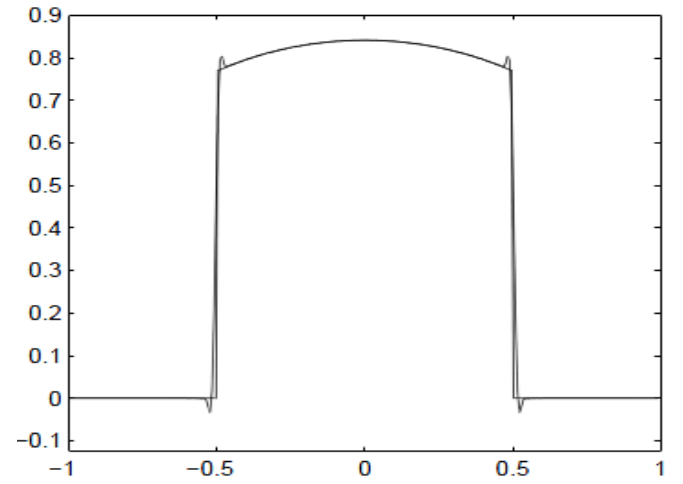
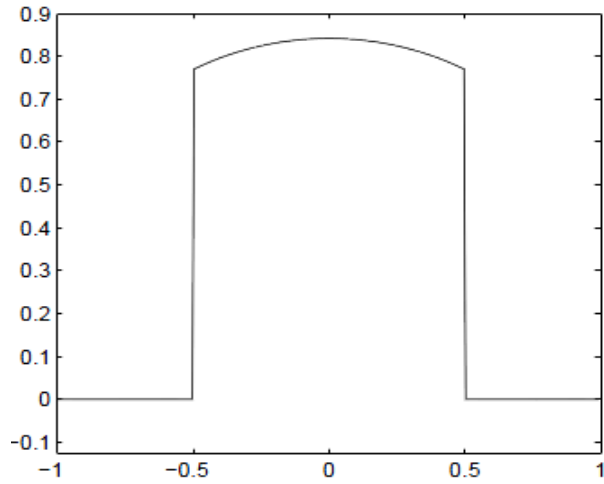
لقد حققت الطريقة المباشرة لإعادة البناء الطيفي النجاح في العديد من المجالات ، ولعل أبرزها التصوير الطبي ، ومعالجة الإشارة ، بالإضافة إلى حل المعادلات التفاضلية الزائدية غير الملساء والتي تستخدم لنمذجة للعديد من الظواهر الطبيعية ، وذلك لقدرتها على إيجاد تقريب طيفي ذو دقة أسية لتابع يعاني من ظاهر حبس على كامل مجال التقريب بما في ذلك نقاط الانقطاع ، بمعنى آخر لقدرتها على التخلص من الأثر السلبي لظاهرة حبس.

وبذلك فإنّ النتائج التي تقدمها الطريقة المباشرة أفضل بكثير من تلك التي يقدمها الترشيح الطيفي ولتوضيح مدى الدقة العالية التي تتمتع بها طريقة إعادة الإسقاط الطيفي بالمقارنة مع طريقة الترشيح الطيفي فقد قارنا بيانياً بين ترشيح تقريب فورييه الموافق للتابع

$$f(x) = \chi_{[-0.5, 0.5]} \sin(\cos(x))$$
$$\chi_{[-0.5, 0.5]}(x) = \begin{cases} 1 & ; x \in [-0.5, 0.5] \\ 0 & ; x \notin [-0.5, 0.5] \end{cases} \quad \text{حيث:}$$

من أجل الدرجة $N = 200$ وذلك باستخدام مرشحة فانديفن من المرتبة الرابعة وإعادة بناءه وفق جيجينبار عند درجة التقريب نفسها مع العلم أنّ المجالات التي يكون عليها التابع تحليلياً، أمّا معاملات ودرجات تقريب جيجينبار التي اخترناها هي على الترتيب: $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 7, \lambda_3 = 4$ ،
 $m_1 = m_2 = m_3 = 13$.

ويمكن بسهولة ملاحظة أنّ الترشيح الطيفي لا يتخلص من الأثر السلبي لظاهرة حبس نهائياً حيث تزداد دقة الترشيح كلما ابتعدنا عن نقاط الانقطاع وتقل كلما اقتربنا منها، في حين تبين الخطوط البيانية لإعادة البناء زوال الأثر السلبي لهذه الظاهرة حبس والدقة العالية الموافقة للتقريب الناتج.



إعادة بناء Gegenbauer

الترشيح الطيفي

الشكل (٣-٥) (مقارنة بين الترشيح الطيفي وإعادة بناء Gegenbauer)

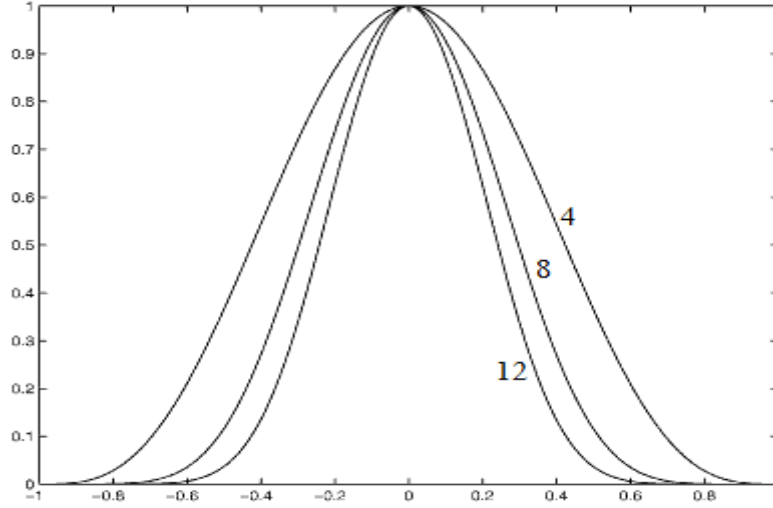
٥-٣-١-٢. مساوي طريقة إعادة الإسقاط الطيفي المباشر:

١. لا يمكن أن نحصل على تقارب طيفي ما لم نفرض شروطاً معينة على m و λ حيث يجب أن:

(١) لا تكون m كبيرة جداً وذلك لإمكانية تمركز نوى الأسس الجديدة بالقرب من الصفر ، فمثلاً تابع وزن حدوديات جيجينبار الذي يُعطى بالعلاقة:

$$\omega(x) = (1 - x^2)^{\lambda - \frac{1}{2}}$$

يضيق بسرعة كبيرة جداً مع زيادة λ معامل جيجينبار، الأمر الذي يعني أنه يتمركز حول الصفر، والشكل البياني التالي يوضح ذلك.



الشكل (٥-٤) (تابع الوزن لحدودية جيجينبار)

(٢) تحقق $m < N$ حيث N درجة التقريب الذي انطلقنا منه

(٣) يتم اختيار معامل تابع الوزن لحدودية جيجينبار بحيث يُحقق:

$$\lambda = m = \beta N$$

حيث: β صغيرة جداً.

$$\beta = \frac{2\pi}{27} \approx 0.2327 \quad \text{يُبرهن على أن أفضل قيمة لـ } \beta \text{ هي:}$$

إلا أن القيمة المألوف استخدامها عملياً:

$$\lambda = m = \frac{N}{4}$$

٢. لا يمكن اعتماد هذه الطريقة ما لم يتم تحديد مواقع نقاط الانقطاع والمجالات التي يكون التابع عليها تحليلياً الأمر الذي يجعلنا غالباً في حاجة إلى واحدة من إجراءات تحديد الحواف مثل إجراءات نوى التمرکز (Concentration Kernels).

٣. الكلفة الحسابية العالية لهذه الطريقة والصعوبة العملية في تطبيقها، إذ أن إعادة بناء تقريب جيجينبار لتابع أملس قطعياً على مجال $[-1,1]$ يتطلب القيام بالخطوات الآتية:

- (١) التعيين الدقيق لمواقع نقاط انقطاع التابع والمجالات التي يكون التابع عليها تحليلياً.
- (٢) بفرض $[a,b]$ واحد من المجالات التي يكون التابع تحليلياً عليها عندئذٍ يجب:
- (1) إجراء تغير في المتحول بحيث ننقل من المجال $[-1,1]$ إلى المجال $[a,b]$ وذلك باستخدام علاقة التحويل:

$$x: [-1,1] \rightarrow [a,b]$$

$$x(\xi) = a\xi + \delta$$

حيث:

$$\varepsilon = \frac{b-a}{2}$$

$$\delta = \frac{b+a}{2}$$

(2) إيجاد معاملات التقريب الذي تمّ إعادته بناءه وفق جيجينبار

$$\hat{g}_l^\lambda = \frac{1}{h_l^\lambda} \int_{-1}^{+1} (1-\xi^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} C_l^\lambda(\xi) f_N(\xi) d\xi$$

حيث $f_N(\xi) + \delta$ النشر الطيفي المعطى في المجال $[a, b]$.

(٣) تكرار الخطوة على كل مجال تحليلي وجدناه في الخطوة الأولى.

٤. تعاني هذه الطريقة من:

(١) حساسية عالية لأخطاء التدوير (Round-off errors):

تكن خطورة أخطاء التدوير في أنها تنقص دقة التقريب الناتج عن إعادة البناء ، وذلك لأنّه عند حساب معاملات هذا التقريب فإنّ هذه المعاملات ستحسب بدقة الآلة (machine epsilon) الأمر الذي ينقص عدد حدود التقريب m الأمر الذي يعني أنّه عند حد معين كلما زدنا درجة التقريب فإنّ أخطاء التدوير تزداد وبناءً عليه يزداد عدد الحدود التي تنقص من التقريب وعليه فإنّ دقة التقريب تقلّ.

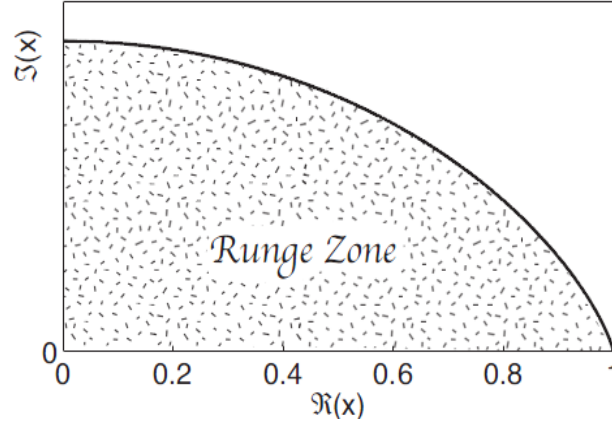
(٢) ظاهرة رانج المعممة (Generalized Rungephenomenon):

لقد برهن كارل رانج في بداية القرن العشرين أنّ حدودية الاستيفاء $f_N(x)$ الموافقة لمجموعة من النقاط المتساوية البعد عن بعضها البعض تكون متباعدة عن أطراف مجال التقريب $x = \pm 1$ إذا كان التابع يعاني من شذوذات في جزء من المستوي العقدي ندعوه بمنطقة رانج (Runge zone). من المهم ملاحظة أنّ التابع ليس بالضرورة أن يعاني من انقطاعات في $\Re$ فقد يكون التابع تحليلياً على $\Re$ ومع ذلك يعاني من شذوذات في المستوي العقدي ونستطيع أن نورد كتوضيح لذلك مثال رانج الشهير

ليكن لدينا التابع:

$$f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$$

من الواضح أنّ هذا التابع تحليلي على كامل $\Re$ إلا أنه يمتلك أقطاب عند $\pm \pi i/5$ الأمر الذي يعني أنّه يمتلك متتالية متباعدة من حدوديات الاستيفاء الموافقة لنقاط متساوية البعد عن بعضها البعض، ويمكن للشكل التالي أن يوضح منطقة رانج لهذا التابع:



الشكل (٥-٥) (منطقة رانج)

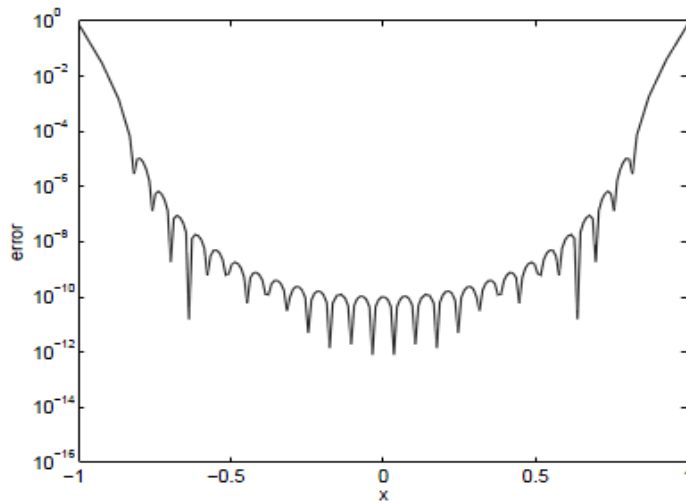
إلا أنَّ هذه الظاهرة قد عُمِّمت لَنُطلق على أي نشر يكون متقارباً في مركز المجال الذي يتم نشر التابع عليه ومتباعداً كلما اقتربنا من حدود مجال التقريب.

وبما أنَّ ظاهرة رانج كما رأينا لا تقتصر على التتابع التي تعاني من انقطاعات إنَّما تتعداها إلى التتابع التحليلية الأمر الذي يعني أنَّه إذا كان التابع الذي قمنا بإعادة بنائه يعاني من شذوذات في المستوي العقدي فلا بد للتقريب الناتج من أن يعاني من هذه الظاهرة، ولتوضيح هذه الظاهرة فقد قدمنا رسم للخط البياني الذي يربط بين دقة التقريب ومجال التقريب للتابع المعرّف بالعلاقة:

$$f(x; \lambda) = \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + x^2}$$

حيثُ: λ وسيط ما في $\Re$.

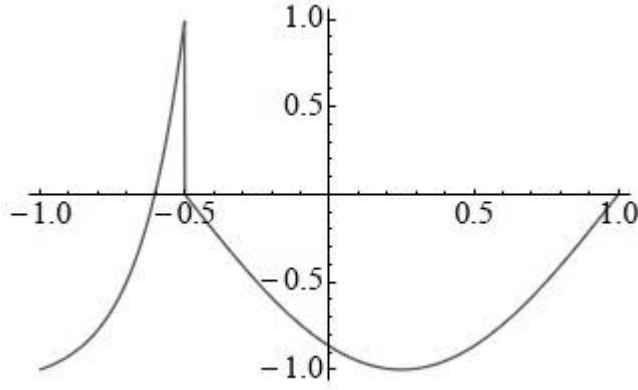
ويمكننا ملاحظة أنَّ هذا التقريب متباعد عند أطراف المجال على الرغم من كون التابع تحليلياً على $\Re$ وذلك بسبب وجود شذوذات في المستوي العقدي توافق $\mp 2i/3$ وهذا ما نسميه ظاهرة رانج.



الشكل (٥-٦) (الخطأ النقطي الموافق لإعادة بناء Gegenbauer للتابع $f(x; 2/3)$)

ولتوضيح العيوب التي تعاني منها الطريقة المباشرة قمنا باستعراض الخطوط البيانية الناتجة عن تطبيق خوارزمية إعادة البناء الطيفي على التابع الأملس القطعي المعرف بالشكل:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2e^{2\pi(x+1)} - 1 - e^\pi}{e^\pi - 1} & ; x \in [-1, -1/2) \\ -\sin(2\pi x/3 + \pi/3) & ; x \in [-1/2, 1) \end{cases}$$



يبين الشكل المرسوم جانباً الخط

البياني لهذا التابع أمّا الشكل التالي

فيوضح الخطأ المرتكب عند إعادة

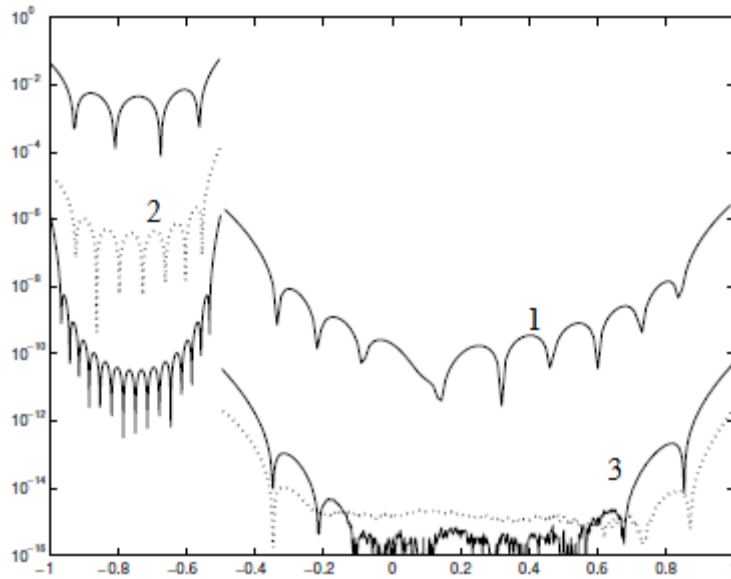
بناء جيجينبار كما يبين الدقة العالية

لهذا التقريب وتحديداً في جوار نقط

الانقطاع. الشكل (٧-٥) (الخط البياني للتابع f)

الانقطاع.

يمكننا من خلال التدقيق في الخطوط البيانية ملاحظة أنّ دقة التقريب تقل عند أطراف المجالات وذلك نتيجةً لظاهرة رانج التي يعاني منها التقريب الناتج عن إعادة البناء.



الشكل (٨-٥): الخطوط البيانية الموافقة للخطأ النقطي لإعادة بناء وذلك من أجل

$$N = 265 \text{ (3)}, N = 128 \text{ (2)}, N = 64 \text{ (1)}$$

N	جيجينبار
32	6.05×10^{-1}
64	5.73×10^{-1}
128	1.34×10^{-4}
256	1.52×10^{-6}
512	2.16×10^{-9}
1048	1.43×10^{-7}
4096	8.99×10^{-7}
2096	1.23×10^{-6}

ولدراسة تأثير زيادة درجة التقريب فإننا سنعرض جدولاً نبين فيه الحد الأعلى للخطأ النقطي المرتكب عند إعادة جيجينبار الموافق لدرجات تقريب مختلفة. و يمكننا ملاحظة أنّ الحد الأعلى للخطأ النقطي يزداد من أجل $N > 512$ وذلك نتيجة حساسية نواة تقريب جيجينبار لأخطاء التدوير.

الجدول (٥-٢)

٥-٣-٢. الطريقة العكسية لإعادة البناء:

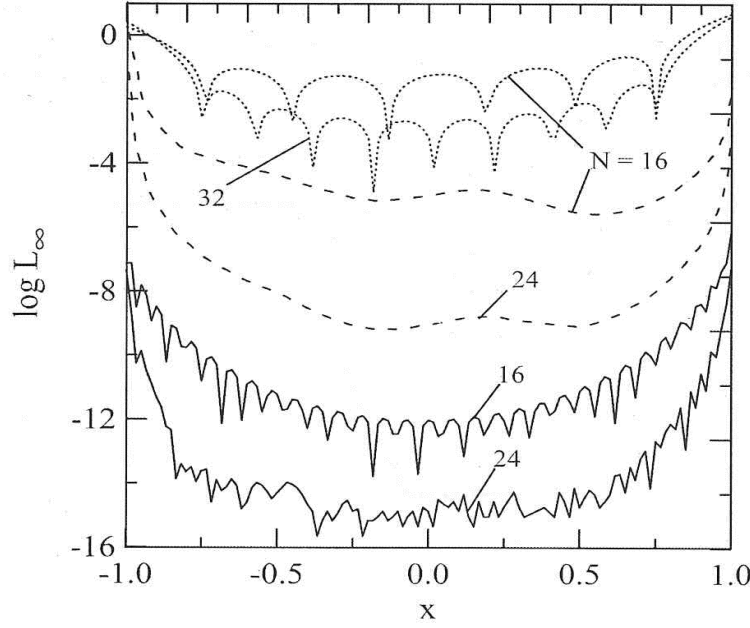
٥-٣-٢-١. محاسن الطريقة غير المباشرة:

١. لا تعاني من حساسية عالية لأخطاء التدوير.

٢. السرعة العالية في الحصول على الدقة الطيفية بالمقارنة مع الطريقة المباشرة وطرائق بادي. وليبان ذلك ليكن لدينا التابع المعرف بالعلاقة:

$$f(x) = e^{\sin(2.7x) + \cos(x)}$$

الشكل التالي يقارن بين الخطوط البيانية لكل من إعادة بناء تقريب فورييه باستخدام الطريقة المباشرة و الطريقة العكسية وطريقة فورييه بادي الشاذ.



الشكل (٥-٩) الخطوط النقطية موافقة للطريقة المباشرة ، الخطوط المتقطعة موافقة لبادي فورييه الشاذ، الخطوط المتصلة موافقة للطريقة العكسية.

٣. لا تتطلب فرض شروط معينة ١.

٥-٣-٢. مساوي الطريقة العكسية لإعادة البناء:

١. التعيين الدقيق لمواقع نقاط انقطاع التابع والمجالات التي يكون التابع عليها تحليلياً.

٢. تتطلب هذه الطريقة حل جملة من المعادلات التي قد تمتلك المصفوفات الموافقة لها شروط صعبة.

٥-٤. إعادة البناء الكسري (طرائق بادي لإعادة البناء):

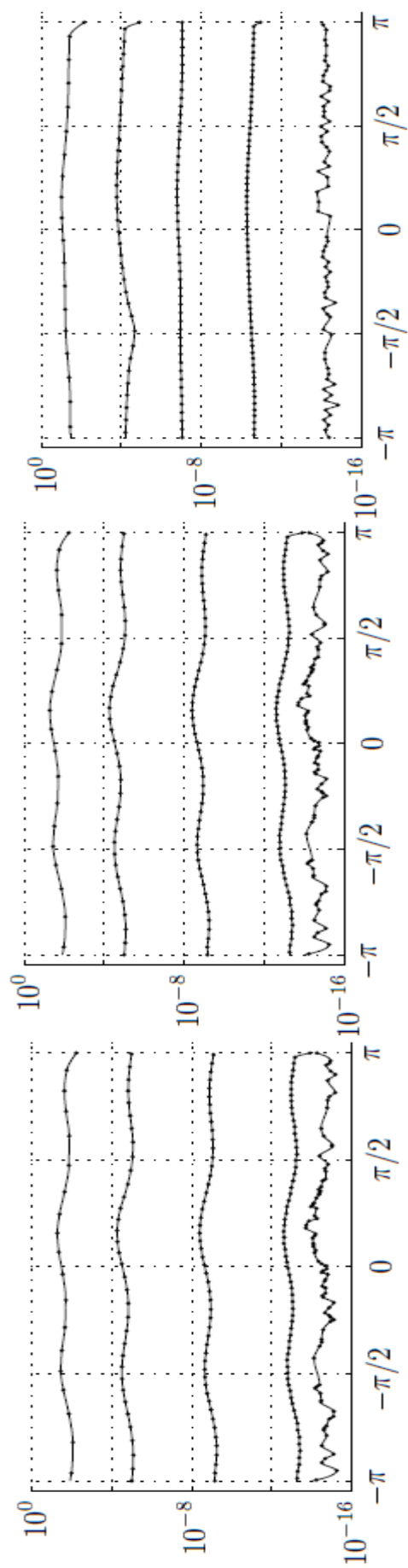
٥-٤-١. محاسن طرائق بادي لإعادة البناء:

١. لا تتطلب هذه الطرائق تحديد مواقع نقاط الانقطاع ولكنها إذا ما دمجت مع خوارزمية لتحديد مواقع نقط الانقطاع فإنّ الدقة الطيفية تزداد.

٢. تزيد سرعة تقارب متسلسلات فورييه وتشبيشف الموافقة للتتابع التحليلية ، ولتوضيح ذلك سنقوم باستعراض الخطوط البيانية للتابع التحليلي:

$$f(x) = e^{\sin(2.7x) + \cos(x)}$$

الموافقة لتقريب فورييه ثم الخطوط البيانية لهذا التقريب بعد إعادة بنائه وفق بادي فورييه وبعد ذلك الخطوط البيانية للتقريب وقد تمّ إعادة بنائه وفق بادي فورييه الشاذ



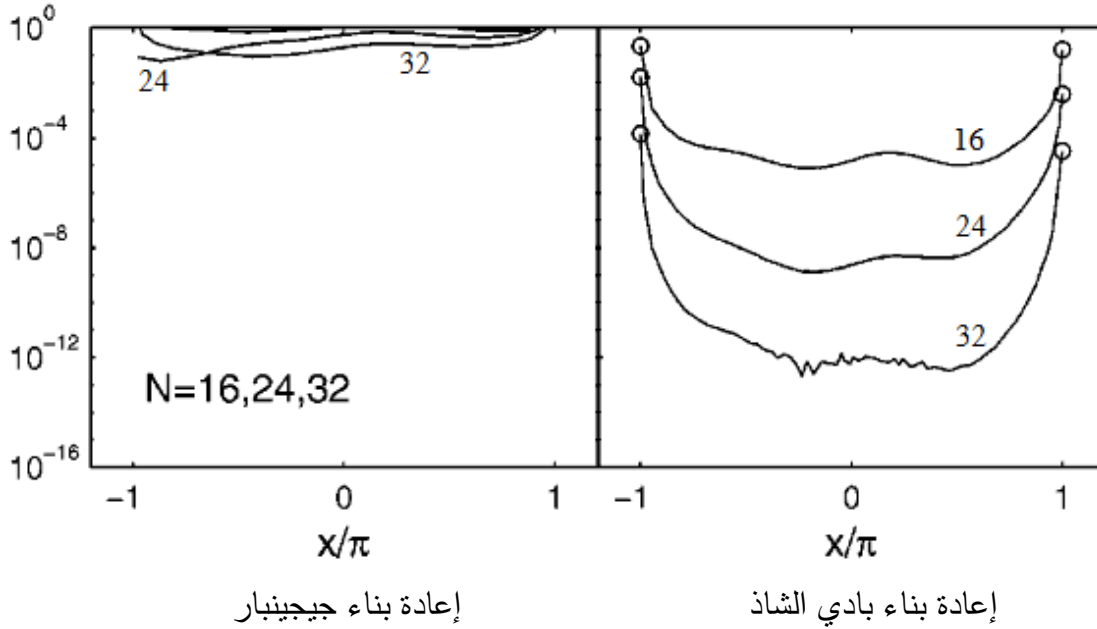
الشكل (٩-٥) (المقارنة من اليمين إلى اليسار بين تقريبات فورييه وفورييه بادي وفورييه بادي الشاذ لتابع تحليلي)

٣. الحصول على دقة طيفية عالية على كامل مجال التقريب بما في ذلك نقاط الانقطاع.
٤. السرعة العالية في الحصول على الدقة الطيفية بالمقارنة مع الطرائق المباشرة لإعادة البناء، ويمكن للمثال التالي أن يوضح ذلك.
- ليكن لدينا التابع المعرّف بالعلاقة:

$$f(x) = e^{\sin(2.7x) + \cos(x)}$$

الخطوط البيانية التالية توضح الخطأ المرتكب عند إعادة بناء تقريب فورييه لهذا التابع باستخدام فورييه بادي وجيجينبار.

يمكننا من خلال الشكل ملاحظة الدقة الأسية للتقارب على كامل مجال التقريب بما في ذلك نقاط الانقطاع كما يمكن ملاحظة أنّ سرعة إعادة بناء التقارب وفق بادي فورييه أعلى منها عند إعادة البناء وفق جيجينبار.



الشكل (١٠-٥)

٥-٤-٢. مساوي طرائق بادي لإعادة البناء:

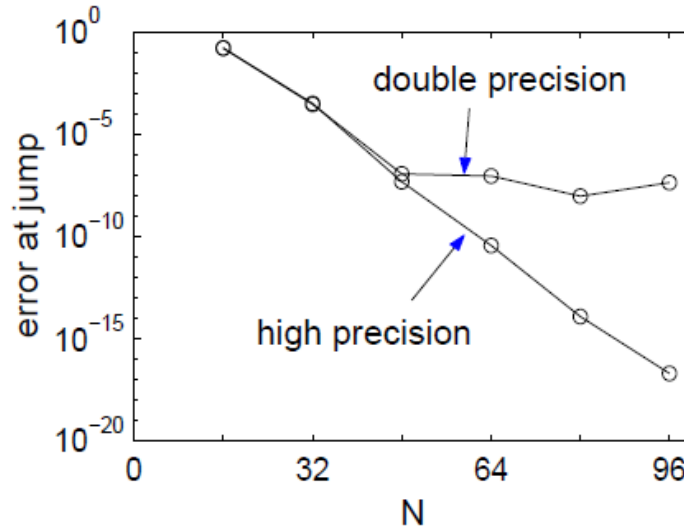
١. تتطلب هذه الصف من الطرائق حل جملة من المعادلات التي قد تمتلك المصفوفات الموافقة لها عدد كبير من الشروط .
 ٢. قد لا يزيد التقارب الطيفي في جوار نقط الانقطاع عن $O(10^{-6})$ ما لم نعتمد دقة تقريب عالية جداً.
- قارنا من خلال الشكل البياني التالي بين الخطأ النقطي الموافق لإعادة بناء التابع المعرّف بالعلاقة:

$$f(x) = e^{\sin(2.7x) + \cos(x)}$$

وذلك باستخدام تقريب بادي فورييه الشاذ عند نقاط الانقطاع وذلك في الحالتين الآتيتين:

(١) دقة الآلة مضاعفة

(٢) دقة عالية جداً وهي دقة برنامج الـ *Mathematica*



الشكل (٥-١١) مقارنة بين الخطأ النقطي عند نقاط الانقطاع وذلك عند إعادة بناء التابع وفق تقريب بادي فورييه الشاذ عند استخدام دقة مضاعفة وعند استخدام دقة عالية)

نتائج وتوصيات ومقترحات

تُعد الدقة الأسية التي تتمتع بها التقريبات الطيفية عند تقريبها لتتابع مستمرة من أبرز مميزات هذه التقريبات الأمر الذي جعل التخلص من ظاهرة جيبس التي تعاني منها هذه التقريبات عند تقريبها لتابع مستمر قطعياً لاستعادة هذه الدقة أمراً في غاية الأهمية.

وجدنا من خلال دراستنا لجودة الطرائق المتبعة للتخلص أو التقليل من الأثر السلبي لظاهرة جيبس أن كل طريقة تعاني من عيوب معينة فهل من الممكن

(1) إيجاد طريقة مثالية أي أنها:

١. لا تتطلب كلفة حسابية عالية.

٢. لا تتطلب فرض شروط معينة على وسطائها.

٣. لا تتمركز نواتها حول الصفر.

٤. لا ينتج عنها جملة من المعادلات التي قد تكون مريضة.

٥. لا تتطلب خوارزمية لتحديد مواقع انقطاع التابع.

٦. لا تعاني من حساسية لأخطاء التدوير.

(2) قمنا في أطروحتنا بتصنيف الطرائق المستخدمة للتخلص من ظاهرة جيبس من حيث محاسنها ومساوئها فهل من الممكن تصنيف التتابع تبعاً لجودة هذه الطرائق في إعادة بنائها.

(3) قمنا في عملنا هذا ببرمجة عدد من الطرائق المستخدمة للتخفيف من الأثر السلبي من ظاهرة جيبس فهل من الممكن إيجاد برامج لجميع الطرائق المستخدمة للتخلص من ظاهرة جيبس لا تكون ذات كلفة برمجية عالية!!؟

ملحق (٢)

دليل المصطلحات العلميّة

-A-	
Accuarcy	دقة
Admissibility	قبول
Algorithm	خوارزمية
Analytic	تحليلي
Approach	طريقة
Approximation	تقريب
-B-	
Base	أساس
Bounded	محدود
- C -	
Coefficients	معاملات
Collocation	التجميع
Complementary	مكمل
Concentration	التركز
Condition	شرط
Conjugate	مرافق
Continuous	مستمر
Convergence	تقارب
Convolution	الالتفاف
- D -	
Decay	اضمحلال
Decomposing	تحليل

Detection	اكتشاف
Differential	تفاضلي
Discrete	منقطع
- E -	
Edge	حواف
Equation	معادلة
Error	خطأ
Even	زوجي
Expansion	نشر
Exponential Convergence	تقارب أسي
- F -	
Factors	عوامل
Filter	مرشحة
Filtering	ترشيح
Formula	صيغة
Function	تابع
- G -	
Gaps	فراغات
Generalized	معمم
- I -	
Interpolation	استيفاء
Inverse	عكسي
- J -	
Jumps	قفزات
- K -	
Kernel	نواة
- L -	

Law	قانون
Local	موضعي
- M -	
Machine Epsilon	دقة الآلة
Matrix	مصفوفة
Method	طريقة
- N -	
Numerical	عددي
Normalized	منتظم
- O -	
Odd	فردى
Operator	مؤثر
Orthogonal Polynomials	حدوديات متعامدة منظمة
Orthonormality	التعامد
Oscillatory Behavior	سلوك تذبذبي
Oscillatory Kernels	نوى متذبذبة
- P -	
Parameters	وسطاء
Piecewise	قطعي
Pointwise	نقطي
Property	خاصة
Polynomials	حدوديات
- Q -	
Quadrature	تربيعي
- R -	
Rational	كسري
Reconstructions	إعادة البناء

Regularization	التنظيم
Round-off Erroes	أخطاء التدوير
Runge Phenomenon	ظاهرة رانج
Runge Zone	منطقة رانج
- S -	
Saw Tooth Function	تابع أسنان المنشار
Sign	الإشارة
Singular	شاذ
Shifte	إزاحة
Smooth	أملس
Spectral accuracy	دقة أسية
Spectral Convergence	تقارب طيفي
Square Wave	تابع الموجة التربيعي
Sturm-Liouville Problem	مسألة ليوفيل شتورم
- T -	
Total	كلي
Transform	تحويل
Trapezoidal Rule	قاعدة شبه المنحرف
Truncation	اقتطاع
- U -	
Ultraspherical Polynomials	حدوديات فوق كروية
- V -	
Variation	تغير

References

1. D.Gottlieb and C.Shu, "***On the Gibbs Phenomenon and its resolution***", SIAM Review, 39:644-668, 1997.
2. C.Lanczos, "**Discourse on Fourier series**", Oliver and Boyd, London, 1966.
3. M.S.Tomas, J.Fikorska and C.Alsina, "**Norm Derivatives and Characterizations of Inner Product Spaces**", World Scientific, 2010.
4. E.M.Stein and R.Shakarchi, "**Functional Analysis: Introduction to Further Topics in Analysis**", Princeton University Press, 2011.
5. J.P.Boyd, "**Chebyshev and Fourier Spectral Methods**", 2th ed , Dover, Inc, 2000.
6. A.Jeffery, "**Hand Book of Mathematical Formulas and Integrals**", 2th ed, Academic Press, 2000.
7. E.M.Stein and R.Shakarchi, "**Fourier Analysis :An Introduction**", Princeton University Press, 2003.
8. A.k.Ghosh, "**Numerical Analysis**", Purna Chandra Biswal, New Delhi, 2008.
9. C. Canuto, M.Y.Hussaini, A.Quarteroni and T. A . Zang, "**Spectral methods: Fundamentals in Signal Domains** ", Springer, 2006.
10. S. Gottlieb , D. Gottlieb and J.S.Hesthaven, "**Spectral Methods for Time-Dependent Problems**",Cambridge University Press, 2007.
- 11.C.I.Gheorghiu, "**Spectral Methods For Differential Problems**",Cluj-Napoca, Romania, 2007.
12. W.K.Pratt, "**Digital Image Processing**", 2th ed, John Wiley, New York, 1991.
13. E. Tadmor. "**Filters, mollifiers and the computation of the Gibbs Phenomenon**", Acta Numerica, 16:305-378, 2007.

14. S.Engelberg, "***Edge Detection Using Fouerier Coefficients***",The Mathematical association of America,115:499-513, 2008.
15. A.V.Oppenheim, R.W.Schafer and J.R.Buck, "***Discrete-Time Signal Processing***", 2th ed, Prentice-Hall, NewJercey ,1999.
16. S. Gottlieb and A.Gelb, "***The resolution of the Gibbs phenomenon for Fourspectral methods***", Sampling Publishing, Potsdam, New York , 2007.
17. Q. Shi and X. Shi, "***Determination of Jumps in Terms of Spectral Data***",Acta Math, 3:193-206, 2006.
18. N.Bary, "***Treatise of Trigonometric Series***", The Macmillan Company, New York, 1964.
19. H.Vandeven, "***Family of Spectral Filters For Discontinuous Problems***", J.Sci.Comput, 8:159-192, 1991.
20. A. Gleb and J. Tanner, "***Robust Reprojection methods for the resolution oftheGibbs phenomenon***", Applied Computational Analysis, 20:3-25, 2006.
21. H.Bateman, "***Higher Transcendental Functions***",McGraw-Hill Book Company;Inc, 1953.
- 22.P.F.Fischer, S.K.Gray, T.W.Lee and M.S.Min, "***Fourier Spectral simulations and Gegenbauer reconstructions for electromagnetic waves in the presence of ametal nanoparticale***", Journal of Computational Physics, 213:730-747, 2006.
23. D.Gottlieb and C.Shu, "***On the Gibbs Phenomenon IV: "Recovering exponential accuracy in a subinterval from a Gegenbauer partial sum of Piecewise analytic function"***", Mathematics of computational Physics, 64:1081-1095,1995.
24. D.Gottlieb and C.Shu, "***On the Gibbs Phenomenon V:Recovering exponential accuracy from collocation point values of Piecewise analytic function***", Mathematics of computation,71:511-526,1995.
- 25.D.Gottlieb and C.Shu, "***On the Gibbs Phenomenon III:Recovering exponential accuracy in a subinterval from a Spectral partial sum of***

Piecewise analytic function", SIAM Journal on Numerical Analysis, 33:280-290, 1996.

26. A.J.Jerri, editor, "**Advances in the Gibbs Phenomenon**", Sampling Publishing, Postdam, New York , 2007.

27. J-H.Jung and B.D.Shizagal, "**Generalization of The Inverse Polynomial Reconstructions Method in the Resolution of the Gibbs Phenomenon**", Journal of Computational Applied mathematics, 172:131-151, 2004.

28. N.Greene, "**Inverse Wavelet Reconstruction for Resolving the Gibbs Phenomenon**", International Journal of Circuits, Systems and Signal Processing, 2:73-77, 2008.

29. B.Shizgal and J.H.Jung, "**Towards the resolution of the Gibbs phenomenon**", Computational and applied Mathematics, 161:41-65, 2003.

30. D.Gottlieb and S. Gottlieb, "**Spectral Methods for Discontinuous Problems**", SIAM Journal on Numerical Analysis, 3:65-71, 2003.

31. G.A.Baker and P.G.Morris, "**Pade Approximants**", Cambridge University Press , 2th ed, 1996.

32. T. A. Driscoll and B. Fornberg, "**A pade based algorithm for overcoming the Gibbs phenomenon**", Numerical Algorithms , 26: 77-92 , 2001.

33. J.E.Lope and A.L.Tampos, "**A Pade –chebyshev reconstruction of functions with Jump Discontinuities**", World Congress on Engineering, 2:1-3, 2009.

34. S.A. Sarra, "**Algorithmxxx: The Matlab Postprocessing Toolkit**", ACM, 2008.