



تطبيقات نظرية الفئات



تطبيقات نظرية الفئات

السنة الرابعة رياضيات تطبيقية ومعلوماتية

قسم الرياضيات



منشورات جامعة دمشق

كلية العلوم

قسم الرياضيات

تطبيقات نظرية الفضاءات

الدكتور

حمزة إبراهيم حاكمي

أستاذ في قسم الرياضيات

1437-1436

2016-2015

جامعة دمشق



الفهرس

الفهرس	٥
المقدمة	٩
الفصل الأول	١٣
الفئات	١٣
١-١. الفئة والفئة الثنوية	١٤
٢-١. مونومورفيزم، إيبومورفيزم، إيزومورفيزم	٢٣
٣-١. الأشياء الجزئية وأشياء الخارج	٣١
تمارين محلولة (١)	٣٩
الفصل الثاني	٤١
الدوال والمورفيززمات الدالية	٤١
١-٢. الدوال	٤١
٢-٢. المورفيززمات الدالية	٥٢
٣-٢. فئة الدوال	٦٩
تمارين محلولة (٢)	٧٧
الفصل الثالث	٨٥
تكافؤ الفئات	٨٥
١-٣. الدوال المرافقة	٨٥
٢-٣. تكافؤ الفئات	١١٤
٣-٣. تمثيل الدوال	١٣١
٤-٣. بعض خواص فئة المجموعات	١٣٨
تمارين محلولة (٣)	١٤٤
الفصل الرابع	١٥١
الجداءات و المجاميع	١٥١

١٥١	١-٤. الجداءات.
١٦٠	٢-٤. فئة الجداءات التطبيقية.
١٦٧	٣-٤. المجاميع.
١٧٥	٤-٤. فئة المجاميع التطبيقية.
١٨٥	٥-٤. النواة.
١٩٣	٦-٤. النواة المرافقة.
٢٠١	الفصل الخامس
٢٠١	النهايات الإسقاطية والاستقرائية.
٢٠١	١-٥. النهايات الإسقاطية (العكسية).
٢١٦	٢-٥. النهايات الاستقرائية (المباشرة).
٢٣١	٣-٥. الدوال التامة.
٢٤٣	الفصل السادس
٢٤٣	البنى على أشياء الفئة.
٢٤٣	١-٦. علاقات التكافؤ.
٢٤٩	٢-٦. التشاكلات.
٢٥٥	الفصل السابع
٢٥٥	النظرية العامة للفئات التبدلية
٢٥٥	١-٧. الفئة الجمعية.
٢٦٧	٢-٧. النواة.
٢٧٥	٣-٧. النواة المرافقة.
٢٨٥	الفصل الثامن
٢٨٥	الفئات شبه التبدلية والتبدلية
٢٨٥	١-٨. الفئات شبه التبدلية.
٣١٥	٢-٨. الفئات التبدلية.
٣٢٢	٣-٨. الدوال التامة.

٣٣٦	تمارين مطولة (٨)
٣٤٣	الفصل التاسع
٣٤٣	مبرهنات التماثل في الفئات التبديلية
٣٤٣	١-٩. مبرهنات التماثل في الفئات التبديلية
٣٥٣	٢-٩. الصور المباشرة والصور العكسية
٣٧١	٣-٩. احتواء الفئات
٣٨٣	الفصل العاشر
٣٨٣	الأشياء الأفقية والإسقاطية
٣٨٣	١-١٠. الأشياء الأفقية
٣٨٩	٢-١٠. الأشياء الإسقاطية
٣٩٥	٣-١٠. المولدات والمولدات المرافقة
٤٠٧	الفصل الحادي عشر
٤٠٧	أسس الجبر الهومولوجي
٤٠٧	١-١١. المركبات
٤٢٩	٢-١١. التمثيل الأفقي
٤٣٥	٣-١١. التمثيل الإسقاطي
٤٤١	٤-١١. الدوال المشتقة
٤٤٣	المصطلحات العلمية
٤٤٧	المراجع العلمية



المقدمة

ظهرت نظرية الفئات منذ أكثر من نصف قرن وبالتحديد عام 1944، وحالياً تشكل فرعاً مستقلاً من فروع الرياضيات. يعود الأصل إلى ظهور هذا الفرع من الرياضيات إلى التطور الذي حدث في الطوبولوجيا الجبرية، فضلاً عن عدد من المشاكل التي ظهرت عن نظرية الزمر والفضاءات الطوبولوجية.

يعد كل من *S. Eilenberg & S. MacLane* أول من صاغ المفاهيم الأساسية للفئة *Category* والدالي *Functor* وتكافؤ الفئات *Equivalent category* وذلك عام 1944؛ وكان الهدف الأساس لهما نقل المفاهيم الجبرية إلى الطوبولوجيا. ومن الجدير ذكره أنه ومنذ البداية كان واضحاً أن مجال تطبيق هذه المفاهيم يتجاوز حدود الطوبولوجيا الجبرية، وأن كثيراً من القضايا التي تمت صياغتها من خلال هذه المفاهيم كانت تقع في صلب فرع الجبر والتي أدت إلى صياغة مفهوم جديد في الرياضيات هو الهومولوجيا الجبرية *Homological algebra* الذي يرتبط بشكل وثيق بالفئات التبادلية، وبشكل خاص بفئة المودولات.

ويرى العديد من الجبريين أنه لم يكن من المتوقع أن يحتل مفهوم الفئة والدالي تلك المكانة المرموقة في الرياضيات التي أصبحت عليه الآن. وفي العقود الأخيرة تضاعف حجم المعرفة في هذا المجال بشكل مذهل، وتجاوز حدود الجبر إلى فروع أخرى من الرياضيات، مثل: التحليل التابعي والنطق الرياضي.

إن هذا الكتاب يمثل الخطوات الأولى للراغبين في دراسة هذه النظرية ولآخرين الذين يريدون تطبيق أفكار هذه النظرية في فروع أخرى من الرياضيات. وأمنيته أن يكون هذا الكتاب الجامعي لطلاب السنوات المتقدمة دليلاً ومرشداً لهم في دراسة المواضيع الجبرية المجردة ومعالجتها.

يعد هذا الكتاب مدخلاً لدراسة نظرية الفئات العامة والفئات التبادلية بشكل خاص، ويضم أحد عشر فصلاً كتبت جميعها بلغة علمية مبسطة قدر الإمكان، وقد ألحق كل

فصل منه بعدد من التمارين المطلوبة بحيث يمكن اعتباره مغطياً لكل من الناحيتين النظرية والعملية على حد سواء.

يبدأ الكتاب في فصله الأول بدراسة خواص الفئة والمورفيزات وخواصها فضلاً عن الأشياء الجزئية وأشياء الخارج. وأما في فصله الثاني، فيبدأ بدراسة العلاقة بين الفئات من خلال مفهوم الدوال وأيضاً العلاقة بين الدوال من خلال مفهوم المورفيزات الدالية، ثم ينتقل إلى دراسة فئة الدوال.

والفصل الثالث، فقد خصص لدراسة الدوال المرافقة وأيضاً لمفهوم التكافؤ بين الفئات الذي يعد حجر الأساس في دراسة الفئات، وفي هذا الفصل أيضاً تمت دراسة مفهوم تمثيل الدوال. أما الفصل الرابع، فقد خصص لدراسة الجداءات والمجاميع لأسرة من أشياء الفئة فضلاً عن مفهومي النواة والنواة المرافقة للمورفيزات.

في الفصل الخامس تمت دراسة النهايات الإسقاطية والاستقرائية فضلاً عن الدوال التامة. أما الفصل السادس فقد بدأت فيه بدراسة الفئة كبنية جبرية، حيث درست فيه علاقات التكافؤ على الفئات فضلاً عن التشاكلات. وقد خصص الفصل السابع لدراسة الفئات الجمعية، ويعد هذا الفصل مدخلاً لدراسة الفئات التبديلية، ودرست فيه أيضاً النواة والنواة المرافقة في الفئات الجمعية. بينما خصص الفصل الثامن لدراسة الفئات شبه التبديلية والتبديلية، فضلاً عن دراسة الدوال بين الفئات التبديلية. وقد درس في هذا الفصل أيضاً عدد من الدوال، مثل: دالي النواة والنواة المرافقة وأيضاً دالي الصورة والصورة المرافقة.

وأما الفصل التاسع، فقد خصص لدراسة مبرهنات التماثل في الفئات التبديلية. بينما خصص الفصل العاشر لدراسة نوعين من الأشياء في الفئات التبديلية، هما: الأشياء الأفقية والإسقاطية. وأخيراً فقد خصص الفصل الحادي عشر لدراسة أسس الجبر الهومولوجي، حيث درست فيه المركبات والمورفيزات بين المركبات، فضلاً عن التمثيل الأفقي والإسقاطي للأشياء، ويعد هذا الفصل مدخلاً لدراسة الجبر الهومولوجي.

ونلفت الانتباه إلى أنه يجب قراءة الصيغ المكتوبة بالأحرف الأجنبية من اليسار إلى اليمين.

هذا وإنني أمل أن يؤدي هذا الكتاب الفائدة المرجوة منه، وهي:
أن يحصل الطالب على أساس قوي ومتين في هذا الموضوع حيث إن الكثير من
المفاهيم التي تمت معالجتها في هذا الكتاب تعد أساساً لكثير من فروع الرياضيات
الأخرى. كما أريد من القارئ أن يستمتع بقراءة هذا الكتاب لاسيما الفصول الثلاثة الأخيرة
حيث تمت معالجة أفكار أساسية ومواضيع حديثة.
وأخيراً، أرجو أن أكون قد وفقت من خلال عرض مواضيع هذا الكتاب في تغيير نظرة
طلابنا حول المواضيع الرياضية لاسيما الجبرية منها التي يعتبرونها نظرية بحتة ولا تمت
إلى الواقع بصلة، وقد بذلت جهدي لتغيير هذه النظرة.
وفي النهاية لا بد من شكر جميع من رافقني في رحلة إعداد هذا الكتاب، ولم يبخل
في تزويدي بالملاحظات والإرشادات في طريقة عرض المواضيع التي وردت ضمن هذا
الكتاب.

والله ولي التوفيق

المؤلف
أ. د. حمزة حاكمي

دمشق
في ١ / ٩ / ٢٠١٥ م



الفصل الأول

الفئات

يعد كل من *S.Eilenberg & S.Maclane* أول من أدخل مفهوم الفئة والدالي في الرياضيات وذلك عام 1944؛ بهدف حل بعض المشكلات الناتجة عن نظرية الزمر والفضاءات الطوبولوجية. وسرعان ما وجدت هذه المفاهيم تطبيقات في مجالات أخرى من فروع الرياضيات.

قبل الخوض في دراسة الفئة، لابد لنا من مناقشة المفاهيم الأساسية الآتية (المجموعة - الصف - التكنل). في نظرية الفئات نحن نتعامل مع جماعات كبيرة مثل "جميع المجموعات"، "جميع الفضاءات المتجهية"، "جميع الفضاءات الطوبولوجية". إن القارئ الذي لديه خلفية جيدة في نظرية المجموعات يعلم أن هذه الكائنات لا يمكن أن تشكل مجموعة؛ لأنه على سبيل المثال، إذا كانت U كل المجموعات تشكل مجموعة فإن المجموعة الجزئية $B = \{A : A \in U; A \notin A\}$ من U تحقق الخاصة الآتية:

$$B \in B \text{ عندما وفقط عندما } B \notin B$$

وهذا ما ندعوه بتناقض راسل *Russell's paradox*؛ وبالتالي لأجل التعامل مع جماعات كبيرة تم إدخال مفهوم الصف. فعلى سبيل المثال فإن صف المجموعات يعرف بالشكل الآتي:

- ١ - جميع عناصره مجموعات.
- ٢ - لأجل أي خاصة ما P ، فإنه يمكننا تشكيل صف كل المجموعات التي تحقق الخاصة P .

لأجل ذلك وجد الصف الأكبر الذي يدعى الصف العام، ونرمز له $\mathcal{K}$. وأن الصفوف هي بالتحديد جماعات جزئية من $\mathcal{K}$.

وهنا نجد أنه في حال كان لدينا صفان A, B فإنه بإمكاننا تعيين الصفوف الآتية $A \cup B$ و $A \cap B$ و $A \times B$. وبسبب ذلك لا توجد أية مشكلة أيضاً في تعريف التطبيقات بين الصفوف، وعلاقات التكافؤ على الصفوف وغيرها.

وأيضاً يمكننا تعريف الأسرة $(A_i)_{i \in I}$ من المجموعات على أنها التطبيق $A: I \rightarrow \mathcal{K}$ الذي يرسل كل $i \in I$ إلى $A(i) = A_i$.

٣ - إذا كان $X_1, X_2, \dots, X_n$ صفوفاً فإن النونية $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ هي أيضاً صف.

٤ - كل مجموعة هي صف.

من هنا نجد أن المجموعات هي صفوف. الصفوف التي هي ليست مجموعات تسمى صفوفاً خاصة.

٥ - لا يوجد تطبيق عامر من مجموعة إلى أي صف خاص.

وهذا يعني أن قدرة أي مجموعة أصغر من (لا تساوي) قدرة أي صف خاص. ولأجل ذلك يمكننا تسمية المجموعات بالصفوف الصغيرة، والصفوف الخاصة بالصفوف الكبيرة.

هذا الوصف للمجموعات والصفوف يكفينا لدراسة فئة المجموعات وفئة الفضاءات المتجهية وغيرها.

لا بد من الإشارة هنا إلى وجود مفهوم أوسع من مفهوم الصف، وهو مفهوم التكتل، ويمكن وصفه بالشكل، جماعة الصفوف التي لا تشكل صفاً، ولكن ضمن مفردات مقررنا هذا لن نحتاج إلى مفهوم التكتل.

١-١. الفئة والفئة الثنوية.

بداية وقبل أي شيء آخر لنورد تعريف الفئة مع عدد من النتائج والأمثلة.

تعريف.

نقول إنه توجد لدينا فئة $\mathcal{C}$ إذا كان لدينا:

١ - صف الأشياء $ob(\mathcal{C})$. يمثل عناصر الفئة $\mathcal{C}$ التي تسمى أشياء الفئة، ونرمز لها: $A, B, D, \dots \in ob(\mathcal{C})$.

٢ - صف المورفيزمات $Mor(\mathcal{C})$. يمثل مورفيزمات الفئة $\mathcal{C}$ ويحقق أيأ كان $A, B \in ob(\mathcal{C})$ فإن $Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ تشكل مجموعة، وتمثل مجموعة الأسهم من A إلى B ويرمز لها:

$$\cdot \mathfrak{I}(A, B) = \text{Hom}_{\mathfrak{I}}(A, B)$$

وأياً كان $u \in \mathfrak{I}(A, B)$ ، فإن $u : A \rightarrow B \in \text{Mor}(\mathfrak{I})$ حيث $A, B \in \text{ob}(\mathfrak{I})$. فضلاً عن ذلك، إن أشياء الفئة $\mathfrak{I}$ ومورفيزمات هذه الفئة يجب أن تحقق الآتي:

أ - أياً كانت الأشياء $A, B, D \in \text{ob}(\mathfrak{I})$ يوجد تطبيق:

$$\mu : \mathfrak{I}(A, B) \times \mathfrak{I}(B, D) \rightarrow \mathfrak{I}(A, D)$$

معرف بالشكل الآتي: أياً كان $(f, g) \in \mathfrak{I}(A, B) \times \mathfrak{I}(B, D)$ فإن:

$$\mu(f, g) = g \circ f = g \cdot f$$

نسمي العملية $(\circ)$ أو $(\cdot)$ بعملية تركيب المورفيزمات.

ب - أياً كان $f \in \mathfrak{I}(A, B)$ و $g \in \mathfrak{I}(B, D)$ و $\psi \in \mathfrak{I}(D, C)$ ، فإن:

$$(\psi \cdot g) \cdot f = \psi \cdot (g \cdot f)$$

أي إن عملية تركيب المورفيزمات تجميعية.

ج - أياً كان $A \in \text{ob}(\mathfrak{I})$ يوجد $I_A : A \rightarrow A \in \mathfrak{I}(A, A)$ ويسمى المورفيزم المطابق،

ويحقق $I_A \cdot f = f$ و $g \cdot I_A = g$ وذلك أياً كان $g \in \mathfrak{I}(A, D)$ و $f \in \mathfrak{I}(B, A)$ وأياً كان

$$B, D \in \text{ob}(\mathfrak{I})$$

هـ - أياً كان $A, B, A', B' \in \text{ob}(\mathfrak{I})$ بحيث $(A, B) \neq (A', B')$ ، فإن:

$$\cdot \mathfrak{I}(A, B) \cap \mathfrak{I}(A', B') = \Phi$$

من خلال تعريف الفئة يمكننا صياغة النتيجة الآتية:

نتيجة.

لنكن $\mathfrak{I}$ فئة. أياً كان $A \in \text{ob}(\mathfrak{I})$ ، فإن المورفيزم المطابق $I_A : A \rightarrow A$ وحيد؛

لأنه إذا وجد مورفيزم مطابق آخر $I'_A : A \rightarrow A$ عندئذ فإن:

$$\circ \cdot I'_A = I'_A \cdot I_A = I_A$$

أمثلة.

١ - فئة المجموعات Set's .

أشياء هذه الفئة هي مجموعات.

من أجل أي مجموعتين $A, B \in \text{ob}(\text{Set's})$ ، فإن $\text{Hom}_{\text{Set's}}(A, B)$ تمثل مجموعة كل

التطبيقات من A إلى B . أياً كان $A, B, D \in Ob(Set's)$ يوجد تطبيق:

$$\mu : Hom_{Set's}(A, B) \times Hom_{Set's}(B, D) \rightarrow Hom_{Set's}(A, D)$$

معرف بالشكل $\mu(f, g) = g \circ f$ وذلك أياً كان:

$$(f, g) \in Hom_{Set's}(A, B) \times Hom_{Set's}(B, D)$$

حيث إن العملية $(\circ)$ تمثل عملية تركيب التطبيقات وهذه العملية تجميعية. فضلاً عن ذلك أياً كان $A \in Ob(Set's)$ يوجد التطبيق المطابق $I_A : A \rightarrow A$ الذي يحقق $I_A \cdot f = f$ و $g \cdot I_A = g$ وذلك أياً كان:

$$f \in Hom_{Set's}(B, A), g \in Hom_{Set's}(A, D)$$

وأياً كان $B, D \in Ob(Set's)$. كما أنه أياً كان $A, B, A', B' \in Ob(Set's)$ بحيث $(A, B) \neq (A', B')$ ، فإن:

$$\circ \cdot Hom_{Set's}(A, B) \cap Hom_{Set's}(A', B') = \Phi$$

٢ - فئة الزمر $\mathcal{G}$.

أشياء هذه الفئة هي زمر، ومورفيزماتها هي التشاكلات الزمرية، حيث إنه لأجل أي زمريتين $A, B \in ob(\mathcal{G})$ ، فإن $Hom_{\mathcal{G}}(A, B)$ تمثل مجموعة كل التشاكلات الزمرية من الزمرة A إلى الزمرة B .

أياً كان $A, B, D \in Ob(\mathcal{G})$ يوجد تطبيق:

$$\mu : Hom_{\mathcal{G}}(A, B) \times Hom_{\mathcal{G}}(B, D) \rightarrow Hom_{\mathcal{G}}(A, D)$$

معرف بالشكل $\mu(f, g) = g \circ f$ وذلك أياً كان:

$$(f, g) \in Hom_{Set's}(A, B) \times Hom_{Set's}(B, D)$$

حيث إن العملية $(\circ)$ تمثل عملية تركيب التطبيقات وهذه العملية تجميعية بالإضافة لذلك أياً كان $A \in Ob(\mathcal{G})$ يوجد التشاكل الزمري المطابق $I_A : A \rightarrow A$ الذي يحقق $I_A \cdot f = f$ و $g \cdot I_A = g$ وذلك أياً كان $f \in Hom_{\mathcal{G}}(B, A), g \in Hom_{\mathcal{G}}(A, D)$ وأياً كان $B, D \in Ob(\mathcal{G})$.

كما أنه أياً كان $A, B, A', B' \in Ob(\mathcal{G})$ بحيث $(A, B) \neq (A', B')$ ، فإن:

$$\circ \cdot Hom_{\mathcal{G}}(A, B) \cap Hom_{\mathcal{G}}(A', B') = \Phi$$

٣ - فئة الزمر التبدلية AC .

أشياء هذه الفئة هي الزمر التبدلية، ومورفيزماتها هي التماثلات الزمرية بين الزمر التبدلية. إن أشياء هذه الفئة ومورفيزماتها تحقق شروط الفئة جميعها الواردة في تعريف الفئة كما هو الحال في المثال السابق.

٤ - فئة المودولات $\mathcal{M}_R$.

لتكن R حلقة واحدة. أشياء الفئة $\mathcal{M}_R$ هي المودولات الواحدة اليسارية فوق الحلقة R . مورفيزمات هذه الفئة هي التماثلات المودولية وهذه التماثلات تحقق شروط الفئة، جميعها كما هو الحال في الأمثلة السابقة.

بشكل مشابه نشكل فئة المودولات اليمينية $\mathcal{M}_R$ فوق الحلقة R .

٥ - فئة الفضاءات الطوبولوجية $\mathcal{X}$.

أشياء هذه الفئة هي الفضاءات الطوبولوجية، ومورفيزماتها هي التطبيقات المستمرة بين الفضاءات الطوبولوجية. من أجل أي فضاءين طوبولوجيين $A, B \in ob(\mathcal{X})$ ، فإن: $Hom_{\mathcal{X}}(A, B)$ تمثل مجموعة كل التطبيقات المستمرة من الفضاء A إلى الفضاء B . وهنا نلاحظ أن تركيب تطبيقين مستمرين هو تطبيق مستمر. وهذا يبين تحقق شروط الفئة جميعها الواردة في التعريف.

٦ - الفئة وحيدة الشيء.

وهي فئة $\mathcal{I}$ تتألف من:

- صف الأشياء. ويتألف من شيء واحد، وليكن X .

- صف المورفيزمات. ويتألف من مورفيزم واحد هو: $I_X : X \rightarrow X$.

من الواضح أن $\mathcal{I}$ تشكل فئة.

٧ - الفئة ثنائية الشيء.

وهي فئة $\mathcal{I}$ تتألف من:

- صف الأشياء. ويتألف من شيئين، لنفرض أنهما: X, Y .

- صف المورفيزمات. ويتألف من ثلاثة مورفيزمات هي:

$$v: X \rightarrow Y, \quad I_X: X \rightarrow X, \quad I_Y: Y \rightarrow Y$$

واضح أن $\mathcal{I}$ تشكل فئة.

٨ - الفئة ثلاثية الشيء.

وهي فئة $\mathcal{I}$ تتألف من:

- صف الأشياء. ويتألف من ثلاثة أشياء لنفرض أنها X, Y, Z .
- صف المورفيزمات. ويتألف من المورفيزمات الآتية: $v: X \rightarrow Y, \quad u: Z \rightarrow Y$.
- فضلاً عن $I_X: X \rightarrow X, \quad I_Y: Y \rightarrow Y, \quad I_Z: Z \rightarrow Z$.
- من الواضح أن $\mathcal{I}$ تشكل فئة.

لنورد الآن مفهوم الفئة الجزئية من خلال التعريف الآتي:

الفئة الجزئية.

لنكن $\mathcal{I}$ فئة ما. الفئة الجزئية $\mathcal{I}'$ من الفئة $\mathcal{I}$ هي الفئة التي تحقق الشروط الآتية:

- ١ - $ob(\mathcal{I}') \subset ob(\mathcal{I})$.
 - ٢ - $\mathcal{I}'(A, B) \subset \mathcal{I}(A, B)$ وذلك أيأ كان $A, B \in ob(\mathcal{I}')$.
 - ٣ - تركيب المورفيزمات المعروف في الفئة $\mathcal{I}'$ هو ذاته تركيب المورفيزمات المعروف في الفئة $\mathcal{I}$.
 - ٤ - المورفيزمات المطابقة في الفئة $\mathcal{I}'$ هي ذاتها المورفيزمات المطابقة في الفئة $\mathcal{I}$.
- مثال.

فئة الزمر التبديلية تشكل فئة جزئية من فئة الزمر.

تعريف.

لنكن $\mathcal{I}$ فئة ما و $\mathcal{I}'$ فئة جزئية من الفئة $\mathcal{I}$. نقول عن الفئة الجزئية $\mathcal{I}'$ من الفئة

$\mathcal{I}$ إنها فئة جزئية تامة إذا حققت الشرط: أيأ كان $A, B \in ob(\mathcal{I}')$ ، فإن:

$$\mathcal{I}'(A, B) = \mathcal{I}(A, B)$$

الفئة الشوية.

لنكن $\mathcal{I}$ فئة ما. الفئة الشوية للفئة $\mathcal{I}$ يرمز لها $\mathcal{I}^o$ وتتألف من:

- ١ - صف الأشياء. $ob(\mathcal{T}^o) = ob(\mathcal{T})$ ويمثل أشياء الفئة $\mathcal{T}^o$.
- ٢ - صف المورفيزمات. $Mor(\mathcal{T}^o)$ ويمثل مورفيزمات الفئة $\mathcal{T}^o$ ويحقق أيًا كان $A, B \in ob(\mathcal{T})$ فإن $\mathcal{T}^o(A, B) = \mathcal{T}(B, A) \in Mor(\mathcal{T})$
- فضلاً عن ذلك، إن أشياء الفئة $\mathcal{T}^o$ ومورفيزماتها تحقق الآتي:
- أيًا كانت الأشياء $A, B, D \in ob(\mathcal{T})$ يوجد تطبيق:

$$\mu: \mathcal{T}^o(A, B) \times \mathcal{T}^o(B, D) \rightarrow \mathcal{T}^o(A, D)$$

معرف بالشكل الآتي: أيًا كان $(f, g) \in \mathcal{T}^o(A, B) \times \mathcal{T}^o(B, D)$ ، فإن:

$$\mu((f, g)) = g \cdot f_{in \mathcal{T}} = f \cdot g_{in \mathcal{T}}$$

واضح أن هذه العملية تحقق شروط الفئة جميعها الواردة في التعريف. نسمي الفئة $\mathcal{T}^o$ الفئة الثنوية للفئة $\mathcal{T}$.

من خلال تعريف الفئة الثنوية يمكننا صياغة النتيجة الآتية:

نتيجة.

- ١ - لأجل أية فئة $\mathcal{T}$ توجد الفئة الثنوية $\mathcal{T}^o$.
- ٢ - لأجل أية فئة $\mathcal{T}$ ، فإن: $(\mathcal{T}^o)^o = \mathcal{T}$.
- إن وجود الفئة الثنوية لفئة ما $\mathcal{T}$ يعطينا إمكانية الحصول على ثنوية أي مفهوم أو قضية تتعلق بالفئة $\mathcal{T}$ ، وذلك من خلال عكس الأسهم (المورفيزمات) في ذلك المفهوم أو تلك القضية.

جداء الفئات.

لتكن $(\mathcal{T}_i)_{i \in I}$ أسرة من الفئات. نرمز لجداء الفئات بالشكل $\prod_{i \in I} \mathcal{T}_i$ ويسمى فئة الجداء وتعرف كما يأتي:

- ١ - أشياء الفئة $\prod_{i \in I} \mathcal{T}_i$ هي جميع الأسر الممكنة $(X_i)_{i \in I}$ حيث لأجل كل $i \in I$ ، فإن:
- $$X_i \in ob(\mathcal{T}_i)$$

- ٢ - مورفيزمات الفئة $\prod_{i \in I} \mathcal{T}_i$ هي $\prod_{i \in I} \mathcal{T}_i(X_i, Y_i)$ هي $\prod_{i \in I} \mathcal{T}_i((X_i)_{i \in I}, (Y_i)_{i \in I})$ فإذا كان:

$$(u_i)_{i \in I} \in \mathfrak{S}_{\prod_{i \in I} \mathfrak{S}_i}((X_i)_{i \in I}, (Y_i)_{i \in I})$$

$$(v_i)_{i \in I} \in \mathfrak{S}_{\prod_{i \in I} \mathfrak{S}_i}((Y_i)_{i \in I}, (Z_i)_{i \in I}) \text{ و}$$

$$\cdot (v_i)_{i \in I} \circ (u_i)_{i \in I} = (v_i \circ u_i)_{i \in I} \text{ فإن:}$$

تطبيق.

من أجل $I = \{1, 2\}$ لتكن $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2$ فئتين. لنضع $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_2$ التي تتألف من:

١ - صف الأشياء $ob(\mathfrak{S})$ الذي يتألف من الأشياء على الشكل $A = (A_1, A_2)$ حيث:

$$A_1 \in ob(\mathfrak{S}_1), A_2 \in ob(\mathfrak{S}_2)$$

٢ - صف المورفيزمات $Mor(\mathfrak{S})$ الذي يتألف من المورفيزمات $u \in Mor(\mathfrak{S})$ حيث:

$$u = (u_1, u_2) \text{ وأن } u_1 \in Mor(\mathfrak{S}_1), u_2 \in Mor(\mathfrak{S}_2)$$

كما أنه $\forall A, B, D \in ob(\mathfrak{S})$ يوجد تطبيق:

$$\mu: \mathfrak{S}(A, B) \times \mathfrak{S}(B, D) \rightarrow \mathfrak{S}(A, D)$$

حيث: $A = (A_1, A_2), B = (B_1, B_2), D = (D_1, D_2)$ وأن $A_1, B_1, D_1 \in ob(\mathfrak{S}_1)$ و

$A_2, B_2, D_2 \in ob(\mathfrak{S}_2)$ يحقق $\forall (u, v) \in \mathfrak{S}(A, B) \times \mathfrak{S}(B, D)$ فإن

$$\mu(u, v) = v \cdot u = (v_1, v_2) \cdot (u_1, u_2) = (v_1 \cdot u_1, v_2 \cdot u_2) \in \mathfrak{S}(A, D)$$

$$u = (u_1, u_2) \in \mathfrak{S}_1(A_1, B_1) \times \mathfrak{S}_2(A_2, B_2)$$

$$v = (v_1, v_2) \in \mathfrak{S}_1(B_1, D_1) \times \mathfrak{S}_2(B_2, D_2)$$

وهذا التطبيق يحقق شرط التجميعية.

فضلاً عن ذلك أيما كان $A \in ob(\mathfrak{S})$ ، فإن: $A = (A_1, A_2)$ حيث: $A_1 \in ob(\mathfrak{S}_1)$ و

$A_2 \in ob(\mathfrak{S}_2)$. ولما كانت المورفيزمات المطابقة $I_{A_1}: A_1 \rightarrow A_1$ و $I_{A_2}: A_2 \rightarrow A_2$ موجودة فإن:

$$I_{A=(A_1, A_2)} = (I_{A_1}, I_{A_2}): A = (A_1, A_2) \rightarrow A = (A_1, A_2) \in Mor(\mathfrak{S})$$

يمثل المورفيزم المطابق على $A \in ob(\mathfrak{S})$ ويحقق أيما كان:

$$u = (u_1, u_2): A = (A_1, A_2) \rightarrow B = (B_1, B_2) \in \mathfrak{S}(A, B)$$

$$u \cdot I_A = (u_1, u_2) \cdot (I_{A_1}, I_{A_2}) = (u_1 \cdot I_{A_1}, u_2 \cdot I_{A_2}) = (u_1, u_2) = u$$

وأيما كان $v = (v_1, v_2): D = (D_1, D_2) \rightarrow A = (A_1, A_2) \in \mathfrak{S}(D, A)$ فإن:

$$I_A \cdot v = (I_{A_1}, I_{A_2}) \cdot (v_1, v_2) = (I_{A_1} \cdot v_1, I_{A_2} \cdot v_2) = (v_1, v_2) = v$$

كما نلاحظ أن الشرط الأخير من شروط الفئة الواردة في التعريف محقق، مما سبق نجد أن $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_2$ فئة.

مثال.

لتكن $\mathfrak{S}$ فئة و $\mathfrak{S}^o$ الفئة الثنوية للفئة $\mathfrak{S}$. لنشكل الجداء $\mathfrak{S}_0 = \mathfrak{S}^o \times \mathfrak{S}$ المؤلف من:

١ - صف الأشياء $ob(\mathfrak{S}_0)$. أشياء هذا الجداء هي الأزواج المرتبة (A, B) حيث: $A, B \in ob(\mathfrak{S})$

٢ - صف المورفيزمات $Mor(\mathfrak{S}_0)$. مورفيزمات هذا الجداء هي الأزواج المرتبة (u, u') حيث: $u \in Mor(\mathfrak{S}^o)$ و $u' \in Mor(\mathfrak{S})$

فإذا كان $u: A \rightarrow A'$ و $v: B \rightarrow B'$ حيث: $A, B, A', B' \in ob(\mathfrak{S})$ ، فإن:

$$(u, v): (A, B) \rightarrow (A', B')$$

إن أشياء ومورفيزمات هذا الجداء تحقق الشروط الآتية: أيأ كان:

$$(A, B), (A', B'), (A'', B'') \in ob(\mathfrak{S}_0)$$

يوجد تطبيق:

$$\mu: \mathfrak{S}_0((A, B), (A', B')) \times \mathfrak{S}_0((A', B'), (A'', B'')) \rightarrow \mathfrak{S}_0((A, B), (A'', B''))$$

يحقق $\forall ((u, v), (u', v')) \in \mathfrak{S}_0((A, B), (A', B')) \times \mathfrak{S}_0((A', B'), (A'', B''))$ ، فإن:

$$\mu((u, v), (u', v')) = (u', v') \cdot (u, v) = (u' \cdot u, v' \cdot v)$$

وهذا التطبيق يحقق شرط التجميعية. إضافة لذلك، أيأ كان $(A, B) \in ob(\mathfrak{S}_0)$ ، فإن

المورفيزمات المطابقة $I_A: A \rightarrow A$ و $I_B: B \rightarrow B$ موجودة وأن:

$$I_{(A, B)} = (I_A, I_B): (A, B) \rightarrow (A, B) \in Mor(\mathfrak{S}_0)$$

ويحقق أيأ كان:

$$(u, v): (A, B) \rightarrow (A', B') \in Mor(\mathfrak{S}_0)$$

$$(u, v) \cdot (I_A, I_B) = (u \cdot I_A, v \cdot I_B) = (u, v)$$

وأيأ كان: $(u', v'): (A', B') \rightarrow (A, B) \in Mor(\mathfrak{S}_0)$ ، فإن:

$$(I_A, I_B) \cdot (u', v') = (I_A \cdot u', I_B \cdot v') = (u', v')$$

كما نلاحظ أن الشرط الأخير من شروط الفئة الواردة في التعريف محقق، مما سبق نجد أن $S_0 = S^\circ \times S$ فئة.



٢-١. مونومورفيزم، إيزومورفيزم، إيزومورفيزم.

في هذه الفقرة سوف ندرس بعضاً من الخواص للمورفيزمات في الفئة المقابلة لمفاهيم التباين والغمر والتقابل لأجل التطبيقات، والبداية سوف تكون مع التعريف الآتي:

تعريف.

لتكن $\mathcal{S}$ فئة، وليكن $u \in \mathcal{S}(A, B)$ حيث: $A, B \in \text{ob}(\mathcal{S})$. أيأ كان $X \in \text{ob}(\mathcal{S})$ ، لنأخذ التطبيق:

$$\alpha : \mathcal{S}(X, A) \rightarrow \mathcal{S}(X, B)$$

المعرف بالشكل الآتي: $\forall f \in \mathcal{S}(X, A)$ ، فإن: $\alpha(f) = u \circ f$. لنأخذ أيضاً التطبيق:

$$\beta : \mathcal{S}(B, X) \rightarrow \mathcal{S}(A, X)$$

المعرف بالشكل الآتي: $\forall g \in \mathcal{S}(B, X)$ ، فإن: $\beta(g) = g \circ u$.

١ - نقول عن المورفيزم u إنه مونومورفيزم إذا كان التطبيق α متباين.

٢ - نقول عن المورفيزم u إنه إيزومورفيزم إذا كان التطبيق β متباين.

بالاعتماد على التعريف السابق يمكننا صياغة النتيجة الآتية:

نتيجة.

لتكن $\mathcal{S}$ فئة، وليكن $u : A \rightarrow B$ مورفيزماً للفئة $\mathcal{S}$. الشروط الآتية متكافئة:

١ - المورفيزم u مونومورفيزم.

٢ - أيأ كان $g_1, g_2 \in \text{Mor}(\mathcal{S})$ بحيث: $u \circ g_1 = u \circ g_2$ ينتج أن: $g_1 = g_2$.

نتيجة.

لتكن $\mathcal{S}$ فئة، وليكن $u : A \rightarrow B$ مورفيزماً للفئة $\mathcal{S}$. الشروط الآتية متكافئة:

١ - المورفيزم u إيزومورفيزم.

٢ - أيأ كان $g_1, g_2 \in \text{Mor}(\mathcal{S})$ بحيث: $g_1 \circ u = g_2 \circ u$ ينتج أن: $g_1 = g_2$.

مثال.

لنأخذ في فئة المجموعات $Set's$ أو في فئة المودولات ${}_R\mathfrak{T}$ حيث R حلقة واحدة، المورفيزم $u: A \rightarrow B$. الشروط التالية متكافئة:

- ١ - المورفيزم u مونومورفيزم.
 - ٢ - المورفيزم u متباين. أي إنه أياً كان $x, y \in A$ بحيث $x \neq y$ ، فإن $u(x) \neq u(y)$.
- البرهان.

سوف نورد البرهان لأجل فئة المودولات، أي إن u هو تشاكل مودولات.
 $(1) \Leftrightarrow (2)$. لنضع $N = Ker(u)$ ، ولنفرض جدلاً أن u ليس متبايناً، عندئذ $N \neq 0$. بما أن u مونومورفيزم، وأن $N \in ob({}_R\mathfrak{T})$ ، وحسب التعريف يكون التطبيق:

$$\alpha: Hom_R(N, A) \rightarrow Hom_R(N, B)$$

متبايناً. ليكن $v_1, v_2 \in Hom_R(N, A)$ المعرفين بالشكل الآتي:

أياً كان $x \in N$ ، فإن: $v_1(x) = 0$ و $v_2(x) = x$. واضح أن $v_1 \neq v_2$.

من جهة أخرى، لدينا $\alpha(v_1) = u \cdot v_1$ و $\alpha(v_2) = u \cdot v_2$ وأنه أياً كان $x \in N$ ، فإن:

$$u \cdot v_1(x) = u(v_1(x)) = u(0) = 0$$

$$u \cdot v_2(x) = u(v_2(x)) = u(x) = 0$$

وهذا بين لنا أن $\alpha(v_1) = \alpha(v_2)$ وبالتالي يكون $v_1 = v_2$ وهذا غير ممكن.

$(1) \Leftrightarrow (2)$. ليكن $M \in ob({}_R\mathfrak{T})$ ، وليكن:

$$\alpha: Hom_R(M, A) \rightarrow Hom_R(M, B)$$

لنفرض جدلاً أن التطبيق α ليس متبايناً، عندئذ يوجد $v_1, v_2 \in Hom_R(M, A)$ بحيث:

$v_1 \neq v_2$ ، وأن $\alpha(v_1) = \alpha(v_2)$ ، ومنه يوجد $x \in M$ بحيث: $v_1(x) \neq v_2(x)$.

من جهة أخرى، إن $u \cdot v_1 = u \cdot v_2$ ، ومنه أياً كان $x \in M$ ، فإن: $u \cdot v_1(x) = u \cdot v_2(x)$

وبالتالي يكون $u(v_1(x) - v_2(x)) = 0$ أي إن $v_1(x) - v_2(x) \in Ker(u)$ ، بما أن

u متباين نجد أن $v_1(x) - v_2(x) = 0$ وبالتالي $v_1(x) = v_2(x)$ وذلك أياً كان $x \in M$

ومنه نجد أن $v_1 = v_2$ وهذا غير ممكن.

تمهيدية ١-٢-١.

في أي فئة $\mathfrak{I}$ القضايا الآتية صحيحة:

- ١ - تركيب أي مونومورفيزمين هو مونومورفيزم.
 - ٢ - ليكن $u, v \in \text{Mor}(\mathfrak{I})$. إذا كان $v \cdot u$ مونومورفيزم، فإن: u مونومورفيزم.
 - ٣ - المورفيزم $I_A: A \rightarrow A$ هو مونومورفيزم، وذلك أيًا كان $A \in \text{Ob}(\mathfrak{I})$.
- البرهان.

ليكن $u \in \mathfrak{I}(A, B)$ و $v \in \mathfrak{I}(B, D)$ عندئذ $v \cdot u \in \mathfrak{I}(A, D)$ حيث $A, B, D \in \text{Ob}(\mathfrak{I})$.
أيًا كان $X \in \text{Ob}(\mathfrak{I})$ لنأخذ التطبيقات:

$$\alpha: \mathfrak{I}(X, A) \rightarrow \mathfrak{I}(X, B)$$

المعرف بالشكل: $\alpha(f) = u \cdot f$ وذلك أيًا كان $f \in \mathfrak{I}(X, A)$.

$$\beta: \mathfrak{I}(X, B) \rightarrow \mathfrak{I}(X, D)$$

المعرف بالشكل: $\beta(g) = v \cdot g$ وذلك أيًا كان $g \in \mathfrak{I}(X, B)$.

$$\mu: \mathfrak{I}(X, A) \rightarrow \mathfrak{I}(X, D)$$

المعرف بالشكل: $\mu(\varphi) = (v \cdot u) \cdot \varphi$ وذلك أيًا كان $\varphi \in \mathfrak{I}(X, A)$.

- ١ - لنفرض أن كلاً من u, v مونومورفيزم. ولنبرهن أن $v \cdot u$ مونومورفيزم. حسب التعريف فإن كلاً من α, β متباين. لنبرهن على أن التطبيق μ متباين.

ليكن $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathfrak{I}(X, A)$ بحيث $\mu(\varphi_1) = \mu(\varphi_2)$ عندئذ $(v \cdot u) \cdot \varphi_1 = (v \cdot u) \cdot \varphi_2$ ومنه $v \cdot (u \cdot \varphi_1) = v \cdot (u \cdot \varphi_2)$ أي إن $\beta(u \cdot \varphi_1) = \beta(u \cdot \varphi_2)$ ، ولأن β متباين نجد أن: $u \cdot \varphi_1 = u \cdot \varphi_2$ أي إن $\alpha(\varphi_1) = \alpha(\varphi_2)$ ، ولأن α متباين نجد أن: $\varphi_1 = \varphi_2$ وهذا يبين أن التطبيق μ متباين أي إن المورفيزم $v \cdot u$ هو مونومورفيزم.

- ٢ - لنفرض أن المورفيزم $v \cdot u$ مونومورفيزم عندئذ يكون التطبيق μ متبايناً. لأجل البرهان على أن المورفيزم u مونومورفيزم يكفي البرهان على أن التطبيق α متباين. ليكن $f_1, f_2 \in \mathfrak{I}(X, A)$ بحيث: $\alpha(f_1) = \alpha(f_2)$ ، ومنه، $u \cdot f_1 = u \cdot f_2$ ؛ وبالتالي $v \cdot (u \cdot f_1) = v \cdot (u \cdot f_2)$ أي إن $(v \cdot u) \cdot f_1 = (v \cdot u) \cdot f_2$ ؛ وبالتالي $\mu(f_1) = \mu(f_2)$ ؛ وبالتالي $f_1 = f_2$ ، ومنه فإن التطبيق α متباين.

٣ - ليكن $A \in \text{ob}(\mathfrak{I})$ ، ولنأخذ التطبيق :

$$\lambda : \mathfrak{I}(X, A) \rightarrow \mathfrak{I}(X, A)$$

المعرف بالشكل الآتي : $\lambda(f) = I_A \cdot f = f$ وذلك أيأ كان $f \in \mathfrak{I}(X, A)$.
 ليكن $g_1, g_2 \in \mathfrak{I}(X, A)$ بحيث : $\lambda(g_1) = \lambda(g_2)$ عندئذ $I_A \cdot g_1 = I_A \cdot g_2$ ومنه نجد
 أن $g_1 = g_2$ وهذا يبين أن التطبيق λ متباين؛ وبالتالي المورفيزم I_A مونومورفيزم .
 تمهيدية ٢-٢-١ .

لتكن $\mathfrak{I}$ فئة. القضايا الآتية صحيحة:

- ١ - تركيب أي إيومورفيزمين هو إيومورفيزم .
- ٢ - ليكن $u, v \in \text{Mor}(\mathfrak{I})$. إذا كان $v \cdot u$ إيومورفيزم فإن v إيومورفيزم .
- ٣ - المورفيزم $I_A : A \rightarrow A$ هو إيومورفيزم وذلك أيأ كان $A \in \text{ob}(\mathfrak{I})$.
 البرهان .

ليكن $u \in \mathfrak{I}(A, B)$ و $v \in \mathfrak{I}(B, D)$ عندئذ $v \cdot u \in \mathfrak{I}(A, D)$. أيأ كان $X \in \text{ob}(\mathfrak{I})$
 لنأخذ التطبيقات

$$\alpha : \mathfrak{I}(B, X) \rightarrow \mathfrak{I}(A, X)$$

المعرف بالشكل $\alpha(f) = f \cdot u$ وذلك أيأ كان $f \in \mathfrak{I}(B, X)$.

$$\beta : \mathfrak{I}(D, X) \rightarrow \mathfrak{I}(B, X)$$

المعرف بالشكل $\beta(g) = g \cdot v$ وذلك أيأ كان $g \in \mathfrak{I}(D, X)$.

$$\mu : \mathfrak{I}(D, X) \rightarrow \mathfrak{I}(A, X)$$

المعرف بالشكل $\mu(\varphi) = \varphi \cdot (v \cdot u)$ وذلك أيأ كان $\varphi \in \mathfrak{I}(D, X)$.

- ١ - لنفرض أن كلا من u, v إيومورفيزم . ولنبرهن أن $v \cdot u$ إيومورفيزم . حسب التعريف
 فإن كلا من α, β متباين . لنبرهن على أن التطبيق μ متباين .
 ليكن $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathfrak{I}(D, X)$ بحيث : $\mu(\varphi_1) = \mu(\varphi_2)$ عندئذ $\varphi_1 \cdot (v \cdot u) = \varphi_2 \cdot (v \cdot u)$
 ومنه : $(\varphi_1 \cdot v) \cdot u = (\varphi_2 \cdot v) \cdot u$ أي إن $\alpha(\varphi_1 \cdot v) = \alpha(\varphi_2 \cdot v)$ ولكون التطبيق α
 متبايناً نجد أن : $\varphi_1 \cdot v = \varphi_2 \cdot v$ أي إن $\beta(\varphi_1) = \beta(\varphi_2)$ وبالتالي $\varphi_1 = \varphi_2$ وذلك لأن
 التطبيق β . وهذا يبين أن التطبيق μ متبايناً أي إن المورفيزم $v \cdot u$ هو إيومورفيزم .

٢ - لنفرض أن المورفيزم $v \cdot u$ إبيومورفيزم عندئذ يكون التطبيق μ متبايناً. لنبرهن على أن المورفيزم v إبيومورفيزم. يكفي لأجل ذلك البرهان على أن التطبيق β متباين.

ليكن $f_1, f_2 \in \mathfrak{S}(D, X)$ بحيث $\beta(f_1) = \beta(f_2)$ ، ومنه يكون $f_1 \cdot v = f_2 \cdot v$ ؛ وبالتالي يكون $(f_1 \cdot v) \cdot u = (f_2 \cdot v) \cdot u$ أي إن $f_1 \cdot (v \cdot u) = f_2 \cdot (v \cdot u)$ ، ومنه يكون $\mu(f_1) = \mu(f_2)$ وبما أن التطبيق μ متباين، فإن $f_1 = f_2$ ومنه فإن التطبيق β متباين وحسب التعريف يكون المورفيزم v إبيومورفيزماً.

٣ - ليكن $A \in \text{Ob}(\mathfrak{S})$ ولنأخذ التطبيق:

$$\lambda : \mathfrak{S}(A, X) \rightarrow \mathfrak{S}(A, X)$$

المعرف بالشكل الآتي: $\lambda(f) = f \cdot I_A = f$ ، وذلك أيأ كان $f \in \mathfrak{S}(A, X)$.

ليكن $g_1, g_2 \in \mathfrak{S}(A, X)$ بحيث $\lambda(g_1) = \lambda(g_2)$ ، ومنه $g_1 \cdot I_A = g_2 \cdot I_A$ ؛ وبالتالي يكون $g_1 = g_2$ وهذا يبين أن التطبيق λ متباين؛ وبالتالي المورفيزم I_A إبيومورفيزم.

مثال.

لنأخذ في فئة المجموعات Set's أو في فئة المودولات $\mathfrak{S}_R$ فوق الحلقة الواحدية R المورفيزم $u : A \rightarrow B$. الشروط التالية متكافئة:

- ١ - المورفيزم u إبيومورفيزم.
 - ٢ - المورفيزم u غامر. أي إنه أيأ كان $y \in B$ يوجد $x \in A$ بحيث $u(x) = y$.
- البرهان.

سوف نورد البرهان لأجل فئة المودولات $\mathfrak{S}_R$ فوق الحلقة الواحدية R ، أي إن u هو تشاكل مودولات.

(1) $\Leftrightarrow$ (2). لنفرض أن المورفيزم u إبيومورفيزم. لنفرض جدلاً أن $u(A) \subsetneq B$. لنشكل المودول $C = B_1 \oplus B_2$ حيث $B_i \cong B$ وذلك لأجل $i = 1, 2$.

لنفرض أن هذا التماثل هو: $\pi_i : B \rightarrow B_i$ ، وليكن $\tau_i : B_i \rightarrow C$ الاحتواء القانوني ولنضع $v_i = \tau_i \cdot \pi_i : B \rightarrow C$ لأجل $i = 1, 2$.

لنأخذ المودول الجزئي $K \subseteq C$ المولد بالعناصر جميعها من الشكل $v_1(x) - v_2(x)$ ، حيث $x \in u(A)$. لنشكل مودول الخارج $D = C / K$.

ليكن $w: C \rightarrow D$ التشاكل القانوني الغامر . نلاحظ أنه أياً كان $x \in B$ ، فإن:

$$v_1(x) = \tau_1 \pi_1(x) = (x, 0) \quad , \quad v_2(x) = \tau_2 \pi_2(x) = (0, x)$$

ومنه نجد أن $v_1(x) - v_2(x) = (x, -x)$. بما أن $u(A) \subseteq B$ يوجد $y \in u(A)$ ، $y \in B$ ومنه

ومنه $(y, -y) \in K$ ؛ وبالتالي يكون $v_1(y) - v_2(y) \in K$ ، ومنه:

$$v_1(y) + K \neq v_2(y) + K$$

أي إن $w(v_1(y)) \neq w(v_2(y))$ ، ومنه يكون $w \cdot v_1 \neq w \cdot v_2$.

بينما أياً كان $x \in A$ فإن $u(x) \in u(A)$ ومنه:

$$v_1(u(x)) - v_2(u(x)) \in K$$

وبالتالي يكون $v_1 \cdot u(x) + K = v_2 \cdot u(x) + K$ ، ومنه فإن:

$$(w \cdot v_1) \cdot u(x) = (w \cdot v_2) \cdot u(x)$$

وهكذا نجد أن $(w \cdot v_1) \cdot u = (w \cdot v_2) \cdot u$. بما أن التطبيق $\beta: \mathfrak{S}(B, D) \rightarrow \mathfrak{S}(A, D)$

المعرف بالشكل $\beta(g) = g \cdot u$ متباين وذلك أياً كان $g \in \mathfrak{S}(B, D)$ ، نجد أن

$\beta(w \cdot v_1) = \beta(w \cdot v_2)$ ؛ وبالتالي يكون $w \cdot v_1 = w \cdot v_2$ وهذا غير ممكن، بهذا الشكل

نجد أن $u(A) = B$ وبالتالي يكون المورفيزم u غامراً.

(2) $\Leftarrow$ (1). لنفرض أن المورفيزم u غامراً. ليكن $X \in \text{ob}({}_R \mathfrak{S})$ ، ولنأخذ التطبيق:

$$\beta: \mathfrak{S}(B, X) \rightarrow \mathfrak{S}(A, X)$$

المعرف بالشكل الآتي: $\forall g \in \mathfrak{S}(B, X)$ فإن $\beta(g) = g \cdot u$.

ليكن $v, w \in \mathfrak{S}(B, X)$ بحيث $v \neq w$ ، عندئذ يوجد $x \in B$ يحقق $v(x) \neq w(x)$. أيضاً

يوجد $y \in A$ بحيث $u(y) = x$ ، ومنه $v \cdot u(y) = v(x) \neq w(x) = w \cdot u(y)$ ، أي

إن $v \cdot u \neq w \cdot u$ وبالتالي $\beta(v) \neq \beta(w)$ وهذا يبين أن التطبيق β متباين، وبالتالي

فإن المورفيزم u إيزومورفيزم.

تعريف.

لتكن $\mathfrak{S}$ فئة. نقول عن المورفيزم $u \in \mathfrak{S}(A, B)$ إنه إيزومورفيزم إذا وجد مورفيزم

$v \in \mathfrak{S}(B, A)$ يحقق $u \cdot v = I_B$ ، $v \cdot u = I_A$ ونقول في هذه الحالة إن الشئيين A, B

إيزومرفيان (متماثلان) ونعبر عن ذلك $A \cong B$.

من خلال التعريف السابق يمكننا صياغة النتيجة الآتية:

نتيجة.

لتكن $\mathcal{S}$ فئة و $u: A \rightarrow B \in \mathcal{S}(A, B)$ مورفيزم للفئة $\mathcal{S}$. إذا كان المورفيزم u إيزومورفيزماً عندئذ المورفيزم $v: B \rightarrow A \in \mathcal{S}(B, A)$ الذي يحقق $u \cdot v = I_B, v \cdot u = I_A$ هو إيزومورفيزم وهو وحيد. البرهان.

واضح حسب التعريف أن المورفيزم v هو إيزومورفيزماً. لنفرض أنه يوجد مورفيزم آخر: $w: B \rightarrow A \in \mathcal{S}(B, A)$ يحقق: $u \cdot w = I_B, w \cdot u = I_A$ عندئذ فإن:

$$v \cdot v = v \cdot I_B = v \cdot (u \cdot w) = (v \cdot u) \cdot w = I_A \cdot w = w$$

تمهيدية ١-٢-٣.

لتكن $\mathcal{S}$ فئة. عندئذ:

- ١ - إذا كان المورفيزم $u \in \text{Mor}(\mathcal{S})$ إيزومورفيزماً عندئذ u مونومورفيزم وأيضاً إيزومورفيزم.
 - ٢ - تركيب إيزومورفيزمين هو إيزومورفيزم.
 - ٣ - المورفيزم المطابق I_A هو إيزومورفيزم وذلك أياً كان $A \in \text{ob}(\mathcal{S})$.
- البرهان.

١ - ليكن $u \in \mathcal{S}(A, B)$ إيزومورفيزماً عندئذ يوجد $v \in \mathcal{S}(B, A)$ بحيث: $u \cdot v = I_B$ و $v \cdot u = I_A$. بما أن المورفيزم I_A مونومورفيزم، فإنه حسب التمهيدية (١-٢-١) يكون المورفيزم $v \cdot u = I_A$ مونومورفيزماً وحسب التمهيدية (١-٢-١) ينتج أن المورفيزم u مونومورفيزم. بشكل مشابه نجد أن I_B إيزومورفيزم، ومنه المورفيزم $u \cdot v = I_B$ إيزومورفيزم وحسب التمهيدية (١-٢-١) فإن المورفيزم u إيزومورفيزم.

٢ - ليكن $u \in \mathcal{S}(A, B), v \in \mathcal{S}(B, D)$ إيزومورفيزمين، لنبرهن على أن $v \cdot u \in \mathcal{S}(A, D)$ إيزومورفيزم.

بما أن u إيزومورفيزم يوجد $u_1 \in \mathcal{S}(B, A)$ بحيث $u_1 \cdot u = I_A$ ، $u \cdot u_1 = I_B$. كذلك بما أن v إيزومورفيزم يوجد $v_1 \in \mathcal{S}(D, B)$ بحيث $v_1 \cdot v = I_D$ ، $v \cdot v_1 = I_B$ ومنه فإن:

وإن $u_1 \cdot v_1 \in \mathfrak{S}(D, A)$

$$(u_1 \cdot v_1) \cdot (v \cdot u) = u_1 \cdot (v_1 \cdot v) \cdot u = u_1 \cdot (I_B \cdot u) = u_1 \cdot u = I_A$$

$$(v \cdot u) \cdot (u_1 \cdot v_1) = v \cdot (u \cdot u_1) \cdot v_1 = (v \cdot I_A) \cdot v_1 = v \cdot v_1 = I_D$$

وهذا يبين لنا أن المورفيزم $v \cdot u$ إيزومورفيزم.

٣ - واضح. ◊

ملاحظة.

لأبد من التذكير هنا أنه إذا كان u مورفيزماً لفئة ما $\mathfrak{S}$ وكان u مونومورفيزماً وإيزومورفيزماً في آن واحد، فليس من الضروري أن يكون u إيزومورفيزماً.

١-٣. الأشياء الجزئية وأشياء الخارج.

- الأشياء الجزئية.

لنبين في هذه الفقرة كيفية الحصول على الأشياء الجزئية من أشياء فئة ما.

تعريف.

لتكن $\mathcal{I}$ فئة و $A \in ob(\mathcal{I})$. لنأخذ الصف M_A من مورفيزمات الفئة $\mathcal{I}$ المؤلف من جميع المونومورفيزمات $v: V \rightarrow A$ وذلك أيأ كان $V \in ob(\mathcal{I})$. لنعرف على الصف M_A العلاقة " $\leq$ " بالشكل الآتي: أيأ كان $v: V \rightarrow A, u: U \rightarrow A \in M_A$ نقول إن:

$$v \leq u \Leftrightarrow \exists v_1 \in \mathcal{I}(V, U); \quad u \cdot v_1 = v$$

بما أن v مونومورفيزم فإنه حسب التمهيدية (١-٢-١) يكون v_1 مونومورفيزماً.

تمهيدية ١-٣-١.

لتكن $\mathcal{I}$ فئة و $A \in ob(\mathcal{I})$. وليكن $v: V \rightarrow A, u: U \rightarrow A \in M_A$ مونومورفيزمين للفئة $\mathcal{I}$. الشروط الآتية متكافئة:

$$1 - v \leq u$$

$$2 - \text{يوجد مورفيزم وحيد } v_1 \in \mathcal{I}(V, U) \text{ لأجله } u \cdot v_1 = v$$

البرهان.

$$(1) \Leftrightarrow (2). \text{ لنفرض أن } v \leq u \text{ وليكن } v_1, v_2 \in \mathcal{I}(V, U) \text{ بحيث } u \cdot v_1 = v, u \cdot v_2 = v$$

بما أن u مونومورفيزم للفئة $\mathcal{I}$ ، فإنه أيأ كان $X \in ob(\mathcal{I})$ التطبيق:

$$\alpha: \mathcal{I}(X, U) \rightarrow \mathcal{I}(X, A)$$

المعرف بالشكل الآتي: أيأ كان $\lambda \in \mathcal{I}(X, U)$ ، فإن $\alpha(\lambda) = u \cdot \lambda$ ، متباين. ومنه لأجل

$X = V$ نجد أن التطبيق $\alpha: \mathcal{I}(V, U) \rightarrow \mathcal{I}(V, A)$ متباين وبما أن $v_1, v_2 \in \mathcal{I}(V, U)$ ،

فإن:

$$\alpha(v_1) = u \cdot v_1 = u \cdot v_2 = \alpha(v_2)$$

ولكون α متبايناً نجد أن $v_1 = v_2$.

$$(2) \Leftrightarrow (1). \text{ واضح. } \square$$

تمهيدية ١-٣-٢.

لتكن $\mathcal{S}$ فئة، وليكن $A \in ob(\mathcal{S})$. إن العلاقة " $\leq$ " المعرفة على الصف M_A انعكاسية ومتعدية.

البرهان.

- نلاحظ أنه لأجل كل $u: U \rightarrow A \in M_A$ فإن المورفيزم المطابق $I_U: U \rightarrow U$ يحقق $u \cdot I_U = u$ ومنه يكون $u \leq u$ ، أي إن العلاقة " $\leq$ " انعكاسية.

- لنفرض أن $u: U \rightarrow A, v: V \rightarrow A, w: W \rightarrow A$ عناصر من الصف M_A ، وأن $v \leq u$ و $u \leq w$. عندئذ يوجد $v_1 \in \mathcal{S}(V, U)$ لأجله $u \cdot v_1 = v$ و $u_1 \in \mathcal{S}(U, W)$ لأجله $w \cdot u_1 = u$ ومنه نجد أن:

$$w \cdot (u_1 \cdot v_1) = (w \cdot u_1) \cdot v_1 = u \cdot v_1 = v$$

وهكذا نجد أنه يوجد مورفيزم $u_1 \cdot v_1: V \rightarrow W$ لأجله $w \cdot (u_1 \cdot v_1) = v$ ، وبالتالي يكون $v \leq w$ وهذا يبين أن العلاقة " $\leq$ " متعدية.

تمهيدية ١-٣-٣.

لتكن $\mathcal{S}$ فئة، وليكن $A \in ob(\mathcal{S})$. لنفرض أن $u: U \rightarrow A, v: V \rightarrow A \in M_A$ عندئذ الشروط الآتية متكافئة:

$$1 - v \leq u \text{ و } u \leq v$$

٢ - توجد إيزومورفزمات وحيدة $u_1: U \rightarrow V$ و $v_1: V \rightarrow U$ تحقق:

$$u \cdot v_1 = v, v \cdot u_1 = u$$

البرهان.

(1) $\Leftrightarrow$ (2). لنفرض أن $v \leq u$ و $u \leq v$ ، عندئذ حسب التعريف توجد مورفيزمات وحيدة $u_1: U \rightarrow V$ و $v_1: V \rightarrow U$ تحقق $u \cdot v_1 = v, v \cdot u_1 = u$. إن $u_1 \cdot v_1: V \rightarrow V$ و $v_1 \cdot u_1: U \rightarrow U$ كما أن $u \cdot (v_1 \cdot u_1) = (u \cdot v_1) \cdot u_1 = v \cdot u_1 = u$ وبما أن u مونومورفيزم فإن التطبيق $\alpha: \mathcal{S}(U, U) \rightarrow \mathcal{S}(U, A)$ المعرف بالشكل $\alpha(\lambda) = u \cdot \lambda$ متباين؛ وبالتالي

$$\text{يكون } v_1 \cdot u_1 = I_U \text{ ومنه نجد أن } \alpha(v_1 \cdot u_1) = u \cdot (v_1 \cdot u_1) = u = u \cdot I_U = \alpha(I_U)$$

أيضاً إن $v \cdot (u_1 \cdot v_1) = (v \cdot u_1) \cdot v_1 = u \cdot v_1 = v$ وبما أن المورفيزم v مونومورفيزم فإن

التطبيق $\alpha: \mathfrak{I}(V, F) \rightarrow \mathfrak{I}(V', A)$ المعرف بالشكل $\alpha(\mu) = u \cdot \mu$ متباين وبالتالي ومنه

$$\alpha(u_1 \cdot v_1) = u \cdot (u_1 \cdot v_1) = v = v \cdot I_F = \alpha(I_F)$$

وهذا يبين أن $u_1 \cdot v_1 = I_F$ مما سبق نجد أن كلاً من v_1, u_1 هو إيزومورفيزم وهو وحيد، وذلك حسب التمهيدية (١-٣-١).

(2) $\Leftrightarrow$ (1) واضح حسب التعريف.

تمهيدية ١-٣-٤.

لتكن $\mathfrak{I}$ فئة، وليكن $A \in ob(\mathfrak{I})$. لنعرف على الصف M_A العلاقة ρ بالشكل الآتي: أيًا كان $u: U \rightarrow A, v: V \rightarrow A \in M_A$ فإن:

$$u\rho v \Leftrightarrow u \leq v \wedge v \leq u$$

إن العلاقة ρ هي علاقة تكافؤ على M_A .
البرهان.

لدينا حسب التمهيدية (٢-٣-١) أن العلاقة " $\leq$ " انعكاسية ومتعدية.

- ليكن $u \in M_A$. بما أن العلاقة " $\leq$ " المعرفة على M_A انعكاسية نجد أن $u \leq u$ ، ومنه يكون $u\rho u$ أي إن العلاقة ρ انعكاسية.

- ليكن $u, v \in M_A$ تحقق $u\rho v$ عندئذ يكون $u \leq v \wedge v \leq u$ ، ومنه يكون $v \leq u \wedge u \leq v$ ، ومنه نجد أن $v\rho u$ أي إن العلاقة ρ تناظرية.

- ليكن $u, v, w \in M_A$ تحقق $u\rho v \wedge v\rho w$ عندئذ يكون:

$$u \leq v \wedge v \leq u, \quad v \leq w \wedge w \leq v$$

ومنه نجد أن $u \leq v \wedge v \leq w, \quad w \leq v \wedge v \leq u$ ولكون العلاقة " $\leq$ " متعدية نجد أن $u \leq w \wedge w \leq u$ وحسب تعريف ρ نجد أن $u\rho w$ ، والعلاقة ρ متعدية. مما سبق نجد أن العلاقة ρ هي علاقة تكافؤ على الصف M_A .

تعريف.

لتكن $\mathfrak{I}$ فئة و $A \in ob(\mathfrak{I})$. وجدنا حسب المبرهنة (٤-٣-١) أن العلاقة ρ المعرفة على الصف M_A هي علاقة تكافؤ. سوف نرمز لصف التكافؤ المولد بالعنصر $u: U \rightarrow A$ بالشكل $\bar{u}$ والذي يتألف من العناصر $v \in M_A$ والتي تحقق $u\rho v$ ، والذي

يكافئ $v \leq u \wedge u \leq v$ ونسمى u الممثل لهذا الصف، ونسمى الثنائية (U, u) شيئاً جزئياً في A ، وللاختصار نقول إن U شيء جزئي من A . ونرمز لذلك $U \subset A$. بمعنى آخر، نقول إن $U \in ob(\mathfrak{I})$ هو شيء جزئي في A إذا وجد مونومورفيزم $u: U \rightarrow A$ للفئة $\mathfrak{I}$.

تمهيدية ١-٣-٥.

لتكن $\mathfrak{I}$ فئة، وليكن $A \in ob(\mathfrak{I})$. وليكن $\overline{M}_A$ الصف المؤلف من جميع صفوف تكافؤ العلاقة ρ المعرفة في التمهيدية (١-٣-٤). عندئذ العلاقة " $\leq$ " المعرفة على $\overline{M}_A$ بالشكل الآتي:

$$\forall \overline{u}, \overline{v} \in \overline{M}_A; \quad \overline{u} \leq \overline{v} \Leftrightarrow u \leq v$$

هي علاقة ترتيب جزئي على $\overline{M}_A$.

البرهان.

حسب التمهيدية (١-٣-٢)، فإن العلاقة " $\leq$ " المعرفة على M_A انعكاسية ومتعدية.

لنبرهن أولاً أن العلاقة " $\leq$ " المعرفة على $\overline{M}_A$ معرفة جيداً.

ليكن $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}, \overline{\sigma} \in \overline{M}_A$ بحيث $\overline{u} = \overline{v} \wedge \overline{w} = \overline{\sigma}$ عندئذ يكون:

$$u \in \overline{u} = \overline{v} \wedge w \in \overline{w} = \overline{\sigma}$$

ومنه، $u \rho v \wedge w \rho \sigma$ وبالتالي يكون $u \leq v \wedge v \leq u$ ، وأيضاً $w \leq \sigma \wedge \sigma \rho w$.

لنفرض أن $\overline{u} \leq \overline{w}$ عندئذ $u \leq w$ ومنه نجد أن $v \leq w \wedge w \leq \sigma$ وبالتالي $v \leq \sigma$ أي إن

$\overline{v} \leq \overline{\sigma}$ ، وذلك لكون العلاقة " $\leq$ " متعدية. إثبات أن العلاقة " $\leq$ " علاقة ترتيب نتركه

للقارئ. □

- أشياء الخارج.

سوف نبين في هذه الفقرة كيفية الحصول على أشياء الخارج لشيء من أشياء فئة ما.

تعريف.

لتكن $\mathcal{I}$ فئة و $B \in ob(\mathcal{I})$. لنأخذ الصف E_B من مورفيزمات الفئة $\mathcal{I}$ المؤلف من جميع الإيومورفيزمات من الشكل $v: B \rightarrow V$ وذلك أيأ كان $V \in ob(\mathcal{I})$. لنعرف على الصف E_B العلاقة " $\leq$ " بالشكل الآتي: أيأ كان $u: B \rightarrow U, v: B \rightarrow V \in E_B$ نقول إن:

$$v \leq u \Leftrightarrow \exists v_1 \in \mathcal{I}(U, V); \quad v_1 \cdot u = v$$

بما أن v إيومورفيزم فإنه حسب التمهيدية (١-٢-٢) يكون v_1 إيومورفيزماً.

تمهيدية ١-٣-٦.

لتكن $\mathcal{I}$ فئة و $B \in ob(\mathcal{I})$. ولنفرض أن $u: B \rightarrow U, v: B \rightarrow V \in E_B$ عندئذ الشروط الآتية متكافئة:

$$v \leq u - ١$$

٢ - يوجد إيومورفيزم وحيد $v_1 \in \mathcal{I}(U, V)$ لأجله $v_1 \cdot u = v$.

البرهان.

(1) $\Leftrightarrow$ (2). لنفرض أن $v \leq u$ وليكن $v_1, v_2 \in \mathcal{I}(U, V)$ بحيث $v_1 \cdot u = v, v_2 \cdot u = v$ بما أن u إيومورفيزم للفئة $\mathcal{I}$ فإنه أيأ كان $X \in ob(\mathcal{I})$ ، التطبيق:

$$\beta: \mathcal{I}(U, X) \rightarrow \mathcal{I}(B, X)$$

المعرف بالشكل الآتي: أيأ كان $\lambda \in \mathcal{I}(U, X)$ فإن $\beta(\lambda) = \lambda \cdot u$ متباين، ومنه لأجل $X = V$ نجد أن التطبيق $\beta: \mathcal{I}(U, V) \rightarrow \mathcal{I}(B, V)$ متباين وبما أن $v_1, v_2 \in \mathcal{I}(U, V)$ فإن $\beta(v_1) = v_1 \cdot u = v = v_2 \cdot u = \beta(v_2)$ متبايناً نجد أن $v_1 = v_2$.
(1) $\Leftrightarrow$ (2) واضح.

تمهيدية ١-٣-٧.

لتكن $\mathcal{I}$ فئة، وليكن $B \in ob(\mathcal{I})$. إن العلاقة " $\leq$ " المعرفة على الصف E_B انعكاسية ومتعدية.

البرهان.

- نلاحظ أنه لأجل $u: B \rightarrow U$ فإن المورفيزم المطابق $I_U: U \rightarrow U$ يحقق $I_U \cdot u = u$ ومنه يكون $u \leq u$ ، أي إن العلاقة " $\leq$ " انعكاسية.

- لنفرض أن $u: B \rightarrow U, v: B \rightarrow V, w: B \rightarrow W \in E_B$ عندئذ يوجد مورفيزم $v_1 \in \mathfrak{S}(U, V)$ لأجله $v_1 \cdot u = v$ وآخر $u_1 \in \mathfrak{S}(W, U)$ لأجله $u_1 \cdot w = u$ ومنه نجد أن $(v_1 \cdot u_1) \cdot w = v_1 \cdot (u_1 \cdot w) = v_1 \cdot u = v$ وهذا يبين أنه يوجد مورفيزم $v_1 \cdot u_1: W \rightarrow V$ لأجله $(v_1 \cdot u_1) \cdot w = v$ وبالتالي يكون $v \leq w$ وهذا يبين أن العلاقة " $\leq$ " متعدية.

تمهيدية ١-٣-٨.

لتكن $\mathfrak{S}$ فئة، وليكن $B \in ob(\mathfrak{S})$ وأن $u: B \rightarrow U, v: B \rightarrow V \in E_B$ عندئذ الشروط الاتية متكافئة:

$$١ - v \leq u \text{ و } u \leq v.$$

٢ - توجد إيزومورفزمات وحيدة $v_1: U \rightarrow V$ و $u_1: V \rightarrow U$ تحقق:

$$v_1 \cdot u = v, u_1 \cdot v = u$$

البرهان.

(1) $\Leftrightarrow$ (2). لنفرض أن $v \leq u$ و $u \leq v$ ، عندئذ حسب التعريف توجد مورفيزمات وحيدة $v_1: U \rightarrow V$ و $u_1: V \rightarrow U$ تحقق $v_1 \cdot u = v, u_1 \cdot v = u$. إن $u_1 \cdot v_1: U \rightarrow U$ و $v_1 \cdot u_1: V \rightarrow V$. كما أن $u_1 \cdot (v_1 \cdot u) = u_1 \cdot v = u$ وبما أن u إيزومورفيزم فإن التطبيق $\beta: \mathfrak{S}(U, U) \rightarrow \mathfrak{S}(B, U)$ المعرف بالشكل: أيأ كان $\mu \in \mathfrak{S}(U, U)$ فإن $\beta(\mu) = \mu \cdot u$ وبالتالي يكون $\beta(u_1 \cdot v_1) = (u_1 \cdot v_1) \cdot u = u = I_U \cdot u = \beta(I_U)$ ومنه نجد أن $u_1 \cdot v_1 = I_U$. أيضاً لما كان المورفيزم v إيزومورفيزماً فإن التطبيق $\beta: \mathfrak{S}(V, V) \rightarrow \mathfrak{S}(B, V)$ المعرف بالشكل: أيأ كان $\lambda \in \mathfrak{S}(V, V)$ فإن $\beta(\lambda) = \lambda \cdot v$ وبما أن $v_1 \cdot u_1 \in \mathfrak{S}(V, V)$ وأن $(v_1 \cdot u_1) \cdot v = v_1 \cdot (u_1 \cdot v) = v_1 \cdot u = v$ نجد أن $\beta(v_1 \cdot u_1) = (v_1 \cdot u_1) \cdot v = v = I_V \cdot v = \beta(I_V)$ وهذا يبين أن $v_1 \cdot u_1 = I_V$. مما سبق نجد أن كلا من v_1, u_1 هو إيزومورفيزم وهو وحيد وذلك حسب التمهيدية (١-٣-٦).

(2) $\Leftrightarrow$ (1) واضح.

تمهيدية ٩-٣-١.

لتكن $\mathcal{I}$ فئة، وليكن $B \in ob(\mathcal{I})$. لنعرف على الصف E_B العلاقة ρ بالشكل الآتي:
أياً كان $u: B \rightarrow U, v: B \rightarrow V \in E_B$ فإن:

$$u\rho v \Leftrightarrow u \leq v \wedge v \leq u$$

إن العلاقة ρ هي علاقة تكافؤ على E_B .

البرهان.

لدينا حسب التمهيدية (٧-٣-١) أن العلاقة " $\leq$ " انعكاسية ومتعدية.

- ليكن $u \in E_B$. بما أن العلاقة " $\leq$ " المعرفة على E_B انعكاسية نجد أن $u \leq u$ ، ومنه يكون $u\rho u$ أي إن العلاقة ρ انعكاسية.

- ليكن $u, v \in E_B$ تحقق $u\rho v$ عندئذ يكون $u \leq v \wedge v \leq u$ ، ومنه يكون $v \leq u \wedge u \leq v$ ومنه نجد أن $v\rho u$ أي إن العلاقة ρ تناظرية.

- ليكن $u, v, w \in E_B$ تحقق $u\rho v \wedge v\rho w$ عندئذ يكون:

$$u \leq v \wedge v \leq u, \quad v \leq w \wedge w \leq v$$

ومنه نجد أن $u \leq v \wedge v \leq w, \quad w \leq v \wedge v \leq u$ ولكون العلاقة " $\leq$ " متعدية نجد أن

$u \leq w \wedge w \leq u$ وحسب تعريف ρ نجد أن $u\rho w$ ، والعلاقة ρ متعدية. مما سبق نجد

أن العلاقة ρ هي علاقة تكافؤ على الصف E_B .

تعريف.

لتكن $\mathcal{I}$ فئة و $B \in ob(\mathcal{I})$. وجدنا حسب المبرهنة (٩-٣-١) أن العلاقة ρ هي علاقة

تكافؤ على الصف E_B . سوف نرمز لصف التكافؤ المولد بالعنصر $u \in E_B$ بالشكل $\bar{u}$

حيث $u: B \rightarrow U$ إبيومورفيزم للفئة $\mathcal{I}$. إن $\bar{u}$ يتألف من العناصر $v \in E_B$ والتي تحقق

$u\rho v$ ، والذي يكافئ بدوره $v \leq u \wedge u \leq v$ ونسمى u الممثل لهذا الصف، ونسمي

التشائية (U, u) شيء الخارج لـ B ، وللاختصار نقول إن U هو شيء الخارج لـ B .

بمعنى آخر، نقول إن $U \in ob(\mathcal{I})$ هو شيء الخارج لـ B إذا وجد إبيومورفيزم

$u: B \rightarrow U$ للفئة $\mathcal{I}$.

تمهيدية ١-٣-١٠.

لتكن $\mathfrak{I}$ فئة، وليكن $B \in ob(\mathfrak{I})$. وليكن $\bar{E}_B$ الصف المؤلف من جميع صفوف تكافؤ العلاقة ρ المعرفة في التمهيدية (١-٣-٩). عندئذ العلاقة " $\leq$ " المعرفة على $\bar{E}_B$ بالشكل الآتي: $\forall \bar{u}, \bar{v} \in \bar{E}_B: \bar{u} \leq \bar{v} \Leftrightarrow u \leq v$ هي علاقة ترتيب جزئي على $\bar{E}_B$.
البرهان.

حسب التمهيدية (١-٣-٧) فإن العلاقة " $\leq$ " المعرفة على M_A انعكاسية ومتعدية.

لنبرهن أولاً أن العلاقة " $\leq$ " المعرفة على $\bar{E}_B$ معرفة جيداً.

ليكن: $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{\sigma} \in \bar{M}_A$ بحيث $\bar{u} = \bar{v} \wedge \bar{w} = \bar{\sigma}$ عندئذ يكون:

$$u \in \bar{u} = \bar{v} \wedge w \in \bar{w} = \bar{\sigma}$$

ومنه $\sigma \wedge w \leq v \wedge u$ وبالتالي يكون $u \leq v \wedge v \leq u$ وأيضاً $w \leq \sigma \wedge \sigma \leq w$. لنفرض أن $\bar{u} \leq \bar{w}$ عندئذ $u \leq w$ ومنه نجد أن $\sigma \leq w \wedge w \leq \sigma$ ؛ وبالتالي $v \leq \sigma$ أي إن $\bar{v} \leq \bar{\sigma}$ ؛ وذلك لكون العلاقة " $\leq$ " متعدية. إثبات أن العلاقة " $\leq$ " علاقة ترتيب نتركه للقارئ.

تمارين محلولة (١)

١ - الفئة المتقطعة. الفئة المتقطعة $\mathcal{I}$ وتتألف من:

- صف الأشياء $ob(\mathcal{I})$.

- صف مورفيزمات $ob(\mathcal{I})$ يحقق الآتي: أيأ كان $A, B \in ob(\mathcal{I})$ ، فإن:

$$\mathcal{I}(A, B) = \begin{cases} \{I_A\} & A = B \\ \phi & \text{otherwise} \end{cases}$$

وهي تحقق جميع شروط الفئة.

٢ - لتكن فئة $\mathcal{I}$ فئة و $u: A \rightarrow B$ مورفيزم للفئة $\mathcal{I}$. الشروط الآتية متكافئة:

١ - المورفيزم u مونومورفيزم في الفئة $\mathcal{I}$.

٢ - المورفيزم u إبيومورفيزم في الفئة $\mathcal{I}^o$.

الحل.

(1) $\Leftrightarrow$ (2). لنفرض أن المورفيزم u مونومورفيزم للفئة $\mathcal{I}$. عندئذ أيأ كان $X \in ob(\mathcal{I})$ ، فإن التطبيق $\alpha: \mathcal{I}(X, A) \rightarrow \mathcal{I}(X, B)$ المعرفة بالشكل: أيأ كان $f \in \mathcal{I}(X, A)$ فإن $\alpha(f) = u \cdot f$ ، متباين. ولما كان $u \in \mathcal{I}(A, B) = \mathcal{I}^o(B, A)$ ، فإن التطبيق $\alpha_0: \mathcal{I}^o(A, X) \rightarrow \mathcal{I}^o(B, X)$ المعرفة بالشكل: أيأ كان $g \in \mathcal{I}^o(A, X)$ ، فإن: $\alpha_0(g) = g \cdot u$ متباين، لأنه إذا كان $g_1, g_2 \in \mathcal{I}^o(A, X)$ بحيث $\alpha_0(g_1) = \alpha_0(g_2)$ فإن $g_1 \cdot u = g_2 \cdot u$ وبما أن التطبيق α متباين وأن $g_1, g_2 \in \mathcal{I}^o(A, X) = \mathcal{I}(X, A)$ فإن $u \cdot g_1 = u \cdot g_2$ وبالتالي يكون $\alpha(g_1) = \alpha(g_2)$ ، ومنه $g_1 = g_2$ وهذا يبين أن المورفيزم u إبيومورفيزم للفئة $\mathcal{I}^o$.

(2) $\Leftrightarrow$ (1). يبرهن بطريقة مشابهة.

٣ - لتكن فئة $\mathcal{I}$ فئة و $u: A \rightarrow B$ مورفيزم للفئة $\mathcal{I}$. الشروط الآتية متكافئة:

١ - المورفيزم u إبيومورفيزم في الفئة $\mathcal{I}$.

٢ - المورفيزم u مونومورفيزم في الفئة $\mathcal{I}^o$.

الحل.

- (1) $\Leftrightarrow$ (2). لنفرض أن المورفيزم h إبيومورفيزم في الفئة $\mathcal{C}$ ، عندئذ حسب التمرين (٢) وبما أن $\mathcal{C} = (\mathcal{C}^o)^o$ يكون h مونومورفيزماً في الفئة $\mathcal{C}$.
- (2) $\Leftrightarrow$ (1). لنفرض أن المورفيزم h مونومورفيزم في الفئة $\mathcal{C}$ ، عندئذ حسب التمرين (٢) وبما أن $\mathcal{C} = (\mathcal{C}^o)^o$ يكون h إبيومورفيزماً في الفئة $\mathcal{C}$.



الفصل الثاني

الدوال والمورفيزمات الدالية

٢-١. الدوال.

في هذه الفقرة سوف ندرس العلاقة بين الفئات من خلال ما يسمى بالدوال المباشرة وغير المباشرة وسوف تكون البداية مع التعريف الآتي:

تعريف.

لتكن $\mathfrak{R}, \mathfrak{S}$ فئتين. نقول إنه يوجد لدينا دالي $F: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{S}$ من الفئة $\mathfrak{R}$ إلى الفئة $\mathfrak{S}$ إذا وجد لدينا:

١ - تطبيق $F: ob(\mathfrak{R}) \rightarrow ob(\mathfrak{S})$ بحيث $\forall A \in ob(\mathfrak{R})$ ، فإن $F(A) \in ob(\mathfrak{S})$.

٢ - تطبيق $F(A, B): \mathfrak{R}(A, B) \rightarrow \mathfrak{S}(F(A), F(B))$ وذلك $\forall A, B \in ob(\mathfrak{R})$ ، يحقق $F(f) \in \mathfrak{S}(F(A), F(B))$ ، فإن $F(f): F(A) \rightarrow F(B)$ أي إن $F(f) \in \mathfrak{S}(F(A), F(B))$ كما إن:

$$\forall A \in ob(\mathfrak{R}); \quad F(I_A) = I_{F(A)}$$

$$\forall f, g \in Mor(\mathfrak{R}); \quad F(f \cdot g) = F(f) \cdot F(g)$$

نسمي الدالي F في هذه الحالة دالياً مباشراً (موافق للتغير).

تعريف.

لتكن $\mathfrak{R}, \mathfrak{S}$ فئتين. نقول إنه يوجد لدينا دالي $F: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{S}$ غير مباشر (مخالف للتغير) من الفئة $\mathfrak{R}$ إلى الفئة $\mathfrak{S}$ إذا وجد لدينا:

١ - تطبيق $F: ob(\mathfrak{R}) \rightarrow ob(\mathfrak{S})$ بحيث $\forall A \in ob(\mathfrak{R})$ ، فإن $F(A) \in ob(\mathfrak{S})$.

٢ - تطبيق $F(A, B): \mathfrak{R}(A, B) \rightarrow \mathfrak{S}(F(B), F(A))$ وذلك $\forall A, B \in ob(\mathfrak{R})$ بحيث $F(f) \in \mathfrak{S}(F(B), F(A))$ ، أي إن $F(f): F(B) \rightarrow F(A)$ ، أي إن $F(f) \in \mathfrak{S}(F(B), F(A))$ ويحقق:

$$\begin{aligned} \forall A \in \text{ob}(\mathfrak{K}); \quad F(I_A) &= I_{F(A)} \\ \forall f, g \in \text{Mor}(\mathfrak{K}); \quad F(f \cdot g) &= F(g) \cdot F(f) \end{aligned}$$

مثال.

لتكن $\mathfrak{S}$ فئة ما و $\mathfrak{S}^0$ الفئة الثنوية للفئة $\mathfrak{S}$. لنأخذ الفئة $\mathfrak{S}_0 = \mathfrak{S}^0 \times \mathfrak{S}$. لنعرف علاقة

$$F : \mathfrak{S}_0 = \mathfrak{S}^0 \times \mathfrak{S} \rightarrow \text{Set's}$$

$$F : \text{ob}(\mathfrak{S}_0) \rightarrow \text{ob}(\text{Set's})$$

أياً كان $A \in \text{ob}(\mathfrak{S}_0)$ ، فإن $A = (A_1, A_2)$ حيث $A_1, A_2 \in \text{ob}(\mathfrak{S})$. لنضع:

$$F(A) = \mathfrak{S}(A_1, A_2) \in \text{ob}(\text{Set's})$$

ف نجد أن $F : \text{ob}(\mathfrak{S}_0) \rightarrow \text{ob}(\text{Set's})$ تطبيق؛ لأنه إذا كان $A, B \in \text{ob}(\mathfrak{S}_0)$ حيث:

$$A = (A_1, A_2) \text{ و } B = (B_1, B_2), \text{ بفرض أن } A = B \text{ فنجد أن } A_1 = B_1 \text{ و } A_2 = B_2$$

$$\text{ومنه فإن: } F(A) = \mathfrak{S}(A_1, A_2) = \mathfrak{S}(B_1, B_2) = F(B)$$

ولنعرف أيضاً $F : \text{Mor}(\mathfrak{S}_0) \rightarrow \text{Mor}(\text{Set's})$ بالشكل الآتي:

ليكن $u : A \rightarrow B \in \text{Mor}(\mathfrak{S}_0)$ عندئذ فإن:

$$u = (u_1, u_2) : A = (A_1, A_2) \rightarrow B = (B_1, B_2)$$

$$\text{حيث } u_1 \in \mathfrak{S}(A_1, B_1) = \mathfrak{S}(B_1, A_1) \text{ و } u_2 \in \mathfrak{S}(A_2, B_2) \text{ إن:}$$

$$F(u) : F(A) \rightarrow F(B)$$

$$F(u_1, u_2) : \mathfrak{S}(A_1, A_2) \rightarrow \mathfrak{S}(B_1, B_2)$$

أياً كان $f \in \mathfrak{S}(A_1, A_2)$ فإن $F(u_1, u_2)(f) = u_2 \cdot f \cdot u_1 \in \mathfrak{S}(B_1, B_2)$ أي إن

$$F(u_1, u_2)(f) \in \text{Mor}(\text{Set's})$$

أياً كان $A \in \text{Mor}(\mathfrak{S}_0)$ ، فإن $I_A : A \rightarrow A$ حيث $A = (B, D)$ وإن

$$I_A = (I_B, I_D) \text{ ومنه } F(I_A) : F(A) \rightarrow F(A) \text{ أي إن:}$$

$$F(I_B, I_D) : \mathfrak{S}(B, D) \rightarrow \mathfrak{S}(B, D)$$

وبالتالي أياً كان $g \in \mathfrak{S}(B, D)$ ، فإن $F(I_B, I_D)(g) = I_D \cdot g \cdot I_B = I_D \cdot g = g$

$$\text{وهذا يبين أن } F(I_A) = I_{F(A)} = I_{\mathfrak{S}(B, D)}$$

ليكن $f, g \in \text{Mor}(\mathfrak{S}_0)$ ولنبرهن على أن $F(f \cdot g) = F(f) \cdot F(g)$

لنفرض أن $g: A \rightarrow B$ و $f: B \rightarrow D$ عندئذ فإن: $f \cdot g: A \rightarrow D \in \text{Mor}(\mathfrak{I}_0)$
حيث إن $A, B, D \in \text{ob}(\mathfrak{I})$ كما إن $g = (g_1, g_2): (A_1, A_2) \rightarrow (B_1, B_2)$ وإن:
 $f = (f_1, f_2): (B_1, B_2) \rightarrow (D_1, D_2)$

$$g_2, f_2 \in \text{Mor}(\mathfrak{I}) \text{ ، } g_1, f_1 \in \text{Mor}(\mathfrak{I}^\circ)$$

كما إن $f \cdot g = (f_1, f_2) \cdot (g_1, g_2) = (f_1 \cdot g_1, f_2 \cdot g_2)$ وإن:

$$f \cdot g: (A_1, A_2) \rightarrow (D_1, D_2)$$

$$F(f \cdot g): F(A) \rightarrow F(D)$$

$$F(f_1 \cdot g_1, f_2 \cdot g_2): \mathfrak{I}(A_1, A_2) \rightarrow \mathfrak{I}(D_1, D_2)$$

بما أن $g_1, f_1 \in \text{Mor}(\mathfrak{I}^\circ)$ فإن $g_1 \cdot f_1: D_1 \rightarrow A_1|_{\text{in } \mathfrak{I}} = D_1|_{\text{in } \mathfrak{I}^\circ}$ ومنه أيأ كان $\lambda \in \mathfrak{I}(A_1, A_2)$ فإن:

$$\begin{aligned} F(f_1 \cdot g_1, f_2 \cdot g_2)(\lambda) &= (f_2 \cdot g_2) \cdot \lambda \cdot (g_1 \cdot f_1) = f_2 \cdot (g_2 \cdot \lambda \cdot g_1) \cdot f_1 = \\ &= f_2 \cdot F(g)(\lambda) \cdot f_1 = F(f) \cdot F(g)(\lambda) \end{aligned}$$

مما سبق نجد أن $F(f \cdot g) = F(f) \cdot F(g)$ وهذا يبين أن $F: \mathfrak{I}_0 \rightarrow \text{Set's}$ هو دالي مباشر.

تمهيدية ٢-١-١.

لتكن $\mathfrak{I}, \mathfrak{K}$ فئتين. وليكن $F: \mathfrak{K} \rightarrow \mathfrak{I}$ دالياً غير مباشر من الفئة $\mathfrak{K}$ إلى الفئة $\mathfrak{I}$ ، ولنفرض أن $\mathfrak{I}^\circ, \mathfrak{K}^\circ$ الفئات الثتوية للفئات $\mathfrak{I}, \mathfrak{K}$ على الترتيب. عندئذ يوجد:

١ - دالي مباشر $G: \mathfrak{K}^\circ \rightarrow \mathfrak{I}$ من الفئة $\mathfrak{K}^\circ$ إلى الفئة $\mathfrak{I}$.

٢ - دالي مباشر $H: \mathfrak{K} \rightarrow \mathfrak{I}^\circ$ من الفئة $\mathfrak{K}$ إلى الفئة $\mathfrak{I}^\circ$.

البرهان.

ليكن $F: \mathfrak{K} \rightarrow \mathfrak{I}$ دالياً غير مباشر.

١ - بما أن F دالي فإنه يوجد تطبيق $F: \text{ob}(\mathfrak{K}) \rightarrow \text{ob}(\mathfrak{I})$ بحيث $\forall A \in \text{ob}(\mathfrak{K})$ فإن $F(A) \in \text{ob}(\mathfrak{I})$ ، ولكون $\text{ob}(\mathfrak{K}^\circ) = \text{ob}(\mathfrak{K})$ عندئذ $F: \text{ob}(\mathfrak{K}^\circ) \rightarrow \text{ob}(\mathfrak{I})$ هو تطبيق

لنرمز له $G: \text{ob}(\mathfrak{K}^\circ) \rightarrow \text{ob}(\mathfrak{I})$ ، عندئذ $\forall A \in \text{ob}(\mathfrak{K}^\circ)$ فإن $G(A) = F(A)$.

أيضاً بما أن الدالي F غير مباشر فإنه $\forall A, B \in \text{ob}(\mathfrak{K})$ يوجد تطبيق:

$$F : \mathfrak{K}(A, B) \rightarrow \mathfrak{S}(F(B), F(A))$$

وبما أن $\mathfrak{K}(A, B) = \mathfrak{K}^o(B, A)$ نجد أن:

$$F : \mathfrak{K}^o(B, A) \rightarrow \mathfrak{S}(F(B), F(A))$$

هو أيضاً تطبيق، لنرمز له:

$$G : \mathfrak{K}^o(B, A) \rightarrow \mathfrak{S}(G(B), G(A))$$

ويحقق $\forall f \in \mathfrak{K}^o(B, A)$ فإن $G(f) = F(f)$.

كما أنه $\forall A \in \text{ob}(\mathfrak{K}^o)$ فإن:

$$G(I_A) = F(I_A) = I_{F(A)} = I_{G(A)}$$

وإنه $\forall f \in \mathfrak{K}^o(A, B), g \in \mathfrak{K}^o(B, D)$ فإن $g \cdot f \in \mathfrak{K}^o(A, D)$ وأن:

$$G(g \cdot f) = F(f \cdot g) = F(g) \cdot F(f) = G(g) \cdot G(f)$$

مما سبق نجد أن $G : \mathfrak{K}^o \rightarrow \mathfrak{S}$ هو دالي مباشر.

٢ - بما أن F دالي فإنه يوجد تطبيق $F : \text{ob}(\mathfrak{K}) \rightarrow \text{ob}(\mathfrak{S})$ بحيث $\forall A \in \text{ob}(\mathfrak{K})$

فإن $F(A) \in \text{ob}(\mathfrak{S})$ ، ولكون $\text{ob}(\mathfrak{S}^o) = \text{ob}(\mathfrak{S})$ عندئذ $F : \text{ob}(\mathfrak{K}) \rightarrow \text{ob}(\mathfrak{S}^o)$ هو

تطبيق لنرمز له: $H : \text{ob}(\mathfrak{K}) \rightarrow \text{ob}(\mathfrak{S}^o)$ ، عندئذ $\forall A \in \text{ob}(\mathfrak{K})$ فإن $H(A) = F(A)$.

أيضاً بما أن الدالي F غير مباشر فإنه $\forall A, B \in \text{ob}(\mathfrak{K})$ يوجد تطبيق:

$$F : \mathfrak{K}(A, B) \rightarrow \mathfrak{S}(F(B), F(A))$$

وبما أن:

$$\mathfrak{S}(F(B), F(A)) = \mathfrak{S}^o(F(A), F(B))$$

نجد أن $F : \mathfrak{K}(A, B) \rightarrow \mathfrak{S}^o(F(A), F(B))$ هو أيضاً تطبيق، لنرمز له:

$$H : \mathfrak{K}(A, B) \rightarrow \mathfrak{S}^o(F(A), F(B)) = \mathfrak{S}^o(H(A), H(B))$$

ويحقق $\forall f \in \mathfrak{K}(A, B)$ ، فإن $H(f) = F(f)$. كما أن $\forall A \in \text{Ob}(\mathfrak{K})$ فإن:

$$H(I_A) = F(I_A) = I_{F(A)} = I_{H(A)}$$

وإنه $\forall f \in \mathfrak{K}(A, B), g \in \mathfrak{K}(B, D)$ فإن $g \cdot f \in \mathfrak{K}(A, D)$ وأن:

$$H(g \cdot f) = F(f \cdot g) = F(g) \cdot F(f) = H(g) \cdot H(f)$$

وهذا يبين أن $H : \mathfrak{K} \rightarrow \mathfrak{S}^o$ هو دالي مباشر.

المبرهنة الآتية تبين لنا أنه لأجل كل شيء من أشياء فئة ما يوجد داليان على الأقل أحدهما مباشر والآخر غير مباشر.

مبرهنة ٢-١-٢.

لتكن $\mathfrak{I}$ فئة ولتكن $Set's$ فئة المجموعات. عندئذ لأجل كل $X \in ob(\mathfrak{I})$ يوجد:

١ - دالي مباشر (موافق للتغير) $h_X : \mathfrak{I} \rightarrow Set's$.

٢ - دالي غير مباشر (مخالف للتغير) $\hat{h}_X : \mathfrak{I} \rightarrow Set's$.

البرهان.

ليكن $X \in ob(\mathfrak{I})$.

١ - لنبرهن على أنه يوجد دالي مباشر $h_X : \mathfrak{I} \rightarrow Set's$. لنعرف:

$$h_X : ob(\mathfrak{I}) \rightarrow ob(Set's)$$

بالشكل الآتي: أياً كان $Y \in ob(\mathfrak{I})$ فإن $h_X(Y) = \mathfrak{I}(X, Y) \in ob(Set's)$ واضح أن

h_X تطبيق. ليكن $u \in \mathfrak{I}(Y, Y')$ حيث $Y, Y' \in ob(\mathfrak{I})$ ولنعرف العلاقة:

$$h_X(u) : h_X(Y) = \mathfrak{I}(X, Y) \rightarrow h_X(Y') = \mathfrak{I}(X, Y')$$

بالشكل الآتي: $\forall v \in \mathfrak{I}(X, Y)$ فإن: $h_X(u)(v) = u \cdot v$. فنجد أن $h_X(u)$ تطبيق وإنه

$\forall Y \in ob(\mathfrak{I})$ فإن:

$$h_X(I_Y) : h_X(Y) = \mathfrak{I}(X, Y) \rightarrow h_X(Y) = \mathfrak{I}(X, Y)$$

يحقق أياً كان $w \in \mathfrak{I}(X, Y)$ فإن $h_X(I_Y)(w) = I_Y \cdot w = w$ ومنه:

$$h_X(I_Y) = I_{h_X(Y)} = I_{\mathfrak{I}(X, Y)}$$

كما أنه $\forall f, g \in Mor(\mathfrak{I})$ بحيث $f : Y \rightarrow Y', g : Y' \rightarrow Y''$ فإن:

$$h_X(g \cdot f) : h_X(Y) \rightarrow h_X(Y'')$$

$$h_X(g \cdot f) : \mathfrak{I}(X, Y) \rightarrow \mathfrak{I}(X, Y'')$$

ومنه أياً كان $v \in \mathfrak{I}(X, Y)$ فإن:

$$h_X(g \cdot f)(v) = (g \cdot f) \cdot v = g \cdot (f \cdot v) = h_X(g)(f \cdot v) =$$

$$= h_X(g) \cdot h_X(f)(v) = (h_X(g) \cdot h_X(f))(v)$$

ومنه نجد أن $h_X(g \cdot f) = h_X(g) \cdot h_X(f)$ وهذا يبين لنا أن h_X هو دالي مباشر.

٢ - لنبرهن على وجود دالي غير مباشر $\hat{h}_X : \mathfrak{S} \rightarrow \text{Set's}$.

لنضع لأجل كل $Y \in \text{ob}(\mathfrak{S})$

$$\hat{h}_X(Y) = \mathfrak{S}(Y, X) = \text{Hom}_{\mathfrak{S}}(Y, X) \in \text{ob}(\text{Set's})$$

واضح أن $\hat{h}_X$ تطبيق.

ليكن $u \in \mathfrak{S}(Y, Y')$ حيث $Y, Y' \in \text{ob}(\mathfrak{S})$ ، ولنعرف العلاقة:

$$\hat{h}_X(u) : \hat{h}_X(Y') \rightarrow \hat{h}_X(Y)$$

$$\hat{h}_X(u) : \mathfrak{S}(Y', X) \rightarrow \mathfrak{S}(Y, X)$$

بالشكل الآتي: $\forall v \in \mathfrak{S}(Y', X)$ فإن $\hat{h}_X(u)(v) = v \cdot u$ فنجد أن $\hat{h}_X(u)$ تطبيق وإنه $\forall Y \in \text{ob}(\mathfrak{S})$ فإن:

$$\hat{h}_X(I_Y) : \hat{h}_X(Y) \rightarrow \hat{h}_X(Y)$$

$$\hat{h}_X(I_Y) : \mathfrak{S}(Y, X) \rightarrow \mathfrak{S}(Y, X)$$

وإنه أيأ كان $w \in \mathfrak{S}(Y, X)$ فإن $\hat{h}_X(I_Y)(w) = w \cdot I_Y = w$ وبالتالي:

$$\hat{h}_X(I_Y) = I_{\hat{h}_X(Y)} = I_{\mathfrak{S}(Y, X)}$$

كما إنه $\forall f, g \in \text{Mor}(\mathfrak{S})$ بحيث $f : Y \rightarrow Y', g : Y' \rightarrow Y''$ فإن $g \cdot f \in \mathfrak{S}(Y, Y'')$

$$\hat{h}_X(g \cdot f) : \hat{h}_X(Y'') \rightarrow \hat{h}_X(Y)$$

$$\hat{h}_X(g \cdot f) : \mathfrak{S}(Y'', X) \rightarrow \mathfrak{S}(Y, X)$$

وإنه أيأ كان $w \in \mathfrak{S}(Y'', X)$ فإن:

$$\hat{h}_X(g \cdot f)(w) = w \cdot (g \cdot f) = (w \cdot g) \cdot f$$

وبما أن $f \in \mathfrak{S}(Y, Y')$ فإن $\hat{h}_X(f) : \mathfrak{S}(Y', X) \rightarrow \mathfrak{S}(Y, X)$

أيضاً بما أن $w \cdot g \in \mathfrak{S}(Y', X)$ نجد أن $\hat{h}_X(f)(w \cdot g) = (w \cdot g) \cdot f$ ومنه فإن:

$$\hat{h}_X(g \cdot f)(w) = (w \cdot g) \cdot f = \hat{h}_X(f)(w \cdot g)$$

وبما أن $g \in \mathfrak{S}(Y', Y'')$ فإن:

$$\hat{h}_X(g) : \mathfrak{S}(Y'', X) \rightarrow \mathfrak{S}(Y', X)$$

أيضاً بما أن $w \in \mathfrak{S}(Y'', X)$ نجد أن $\hat{h}_X(g)(w) = w \cdot g$ ومنه فإن:

$$\hat{h}_X(g \cdot f)(w) = \hat{h}_X(f)(w \cdot g) = \hat{h}_X(f)(\hat{h}_X(g)(w)) = (\hat{h}_X(f) \cdot \hat{h}_X(g))(w)$$

وهذا يبين أن $\hat{h}_X(g \cdot f) = \hat{h}_X(f) \cdot \hat{h}_X(g)$ وهكذا فإن $\hat{h}_X$ هو دالي غير مباشر.
 التمهيدية الآتية تبين لنا أن تركيب داليين مباشرين أو غير مباشرين هو دالي مباشر.

تمهيدية ٢-١-٣.

لتكن $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \mathfrak{S}_3$ ثلاث فئات.

١ - إذا كان $F: \mathfrak{S}_1 \rightarrow \mathfrak{S}_2$ و $G: \mathfrak{S}_2 \rightarrow \mathfrak{S}_3$ دوال مباشرة. عندئذ $G \circ F: \mathfrak{S}_1 \rightarrow \mathfrak{S}_3$ هو دالي مباشر.

٢ - إذا كان $F: \mathfrak{S}_1 \rightarrow \mathfrak{S}_2$ و $G: \mathfrak{S}_2 \rightarrow \mathfrak{S}_3$ دوال غير مباشرة. عندئذ $G \circ F: \mathfrak{S}_1 \rightarrow \mathfrak{S}_3$ هو دالي مباشر.

البرهان.

١ - لدينا $G \circ F: \mathfrak{S}_1 \rightarrow \mathfrak{S}_3$ بحيث أياً كان $A \in ob(\mathfrak{S}_1)$ ، فإن $F(A) \in ob(\mathfrak{S}_2)$ ومنه: $G(F(A)) \in ob(\mathfrak{S}_3)$ وهكذا فإن: $(G \circ F)(A) = G(F(A)) \in ob(\mathfrak{S}_3)$.

وهكذا نجد أنه يوجد لدينا تطبيق $G \circ F: ob(\mathfrak{S}_1) \rightarrow ob(\mathfrak{S}_3)$ يحقق أياً كان $A \in ob(\mathfrak{S}_1)$ ، فإن $(G \circ F)(A) = G(F(A))$.

ليكن $f \in \mathfrak{S}_1(A, B)$ حيث $A, B \in ob(\mathfrak{S}_1)$ ، عندئذ:

$$F(f): F(A) \rightarrow F(B) \in \mathfrak{S}_2(F(A), F(B))$$

وذلك لكون F هو دالي مباشر، وبما أن G هو أيضاً دالي مباشر فإن:

$$G(F(f)): G(F(A)) \rightarrow G(F(B)) \in \mathfrak{S}_3(G(F(A)), G(F(B)))$$

أي إن $(G \circ F)(f): (G \circ F)(A) \rightarrow (G \circ F)(B)$.

بهذا الشكل نجد أنه يوجد تطبيق:

$$(G \circ F)(f): \mathfrak{S}_1(A, B) \rightarrow \mathfrak{S}_3(G \circ F(A), G \circ F(B))$$

ويحقق: $\forall A \in ob(\mathfrak{S}_1)$ ، فإن:

$$(G \circ F)(I_A) = G(F(I_A)) = G(I_{F(A)}) = I_{(G \circ F)(A)}$$

كذلك $\forall f, g \in Mor(\mathfrak{S}_1)$ ، فإن:

$$\begin{aligned} (G \circ F)(fg) &= G(F(fg)) = G(F(f) \cdot F(g)) = G(F(f)) \cdot G(F(g)) = \\ &= (G \circ F)(f) \cdot (G \circ F)(g) \end{aligned}$$

وهذا يبين لنا أن $G \circ F : \mathfrak{S}_1 \rightarrow \mathfrak{S}_3$ هو دالي مباشر .

٢ - لدينا $G \circ F : \mathfrak{S}_1 \rightarrow \mathfrak{S}_3$. أياً كان $A \in ob(\mathfrak{S}_1)$ ، فإن $F(A) \in ob(\mathfrak{S}_2)$ ومنه:

$$(G \circ F)(A) = G(F(A)) \in ob(\mathfrak{S}_3) \text{ ، وهكذا فإن } (G \circ F)(A) = G(F(A)) \in ob(\mathfrak{S}_3)$$

وهكذا نجد أنه يوجد لدينا تطبيق: $G \circ F : ob(\mathfrak{S}_1) \rightarrow ob(\mathfrak{S}_3)$ يحقق أياً كان

$$A \in ob(\mathfrak{S}_1) \text{ ، فإن: } (G \circ F)(A) = G(F(A))$$

ليكن $f \in \mathfrak{S}_1(A, B)$ حيث $A, B \in ob(\mathfrak{S}_1)$ ، عندئذ:

$$F(f) : F(B) \rightarrow F(A) \in \mathfrak{S}_2(F(B), F(A))$$

وذلك لكون F هو دالي غير مباشر ، وبما أن G هو أيضاً دالي غير مباشر فإن:

$$G(F(f)) : G(F(A)) \rightarrow G(F(B)) \in \mathfrak{S}_3(G(F(A)), G(F(B)))$$

$$(G \circ F)(f) : (G \circ F)(A) \rightarrow (G \circ F)(B)$$

بهذا الشكل نجد أنه يوجد تطبيق:

$$(G \circ F)(f) : \mathfrak{S}_1(A, B) \rightarrow \mathfrak{S}_3(G \circ F(A), G \circ F(B))$$

يحق: $\forall A \in ob(\mathfrak{S}_1)$ ، فإن:

$$(G \circ F)(I_A) = G(F(I_A)) = G(I_{F(A)}) = I_{(G \circ F)(A)}$$

كذلك $\forall f, g \in Mor(\mathfrak{S}_1)$ ، فإن:

$$\begin{aligned} (G \circ F)(fg) &= G(F(fg)) = G(F(g) \cdot F(f)) = G(F(f)) \cdot G(F(g)) = \\ &= (G \circ F)(f) \cdot (G \circ F)(g) \end{aligned}$$

وهذا يبين لنا أن $G \circ F : \mathfrak{S}_1 \rightarrow \mathfrak{S}_3$ هو دالي مباشر .

التمهيدية الآتية تبين لنا وجود الدالي المطابق والدالي الثابت وذلك لأجل أي فئة.

تمهيدية ٢-١-٤ .

القضايا الآتية صحيحة:

١ - لأجل أي فئة $\mathfrak{S}$ يوجد دالي مباشر $I_{\mathfrak{S}} : \mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{S}$ معرف بالشكل الآتي: أياً كان

$$A \in ob(\mathfrak{S}) \text{ ، فإن: } I_{\mathfrak{S}}(A) = A \text{ . وأياً كان } u \in \mathfrak{S}(X, Y) \text{ فإن } I_{\mathfrak{S}}(u) = u \text{ . نسمي } I_{\mathfrak{S}}$$

الدالي المطابق للفئة $\mathfrak{S}$.

٢ - لتكن $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ فئتين عندئذ لأجل كل $B \in ob(\mathcal{T}_2)$ يوجد دالي مباشر $F: \mathcal{T}_1 \rightarrow \mathcal{T}_2$ معرف بالشكل الآتي: أيأ كان $A \in ob(\mathcal{T}_1)$ فإن $F(A) = B$ ، وأيأ كان $u \in \mathcal{T}_1(X, Y)$ فإن $F(u) = I_B$ وهذا الدالي يسمى بالدالي الثابت.
البرهان.

١ - لأجل $I_3: \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ لنعرف تطبيق الأشياء $I_3: ob(\mathcal{T}) \rightarrow ob(\mathcal{T})$ بالشكل الآتي: أيأ كان $A \in ob(\mathcal{T})$ فإن $I_3(A) = A$ ، فنجد أن هذه العلاقة تمثل التطبيق المطابق. لنعرف أيضاً تطبيق المورفيزمات $I_3: Mor(\mathcal{T}) \rightarrow Mor(\mathcal{T})$ بالشكل الآتي: لأجل كل مورفيزم $u: X \rightarrow Y$ للفئة $\mathcal{T}$ ، فإن: $I_3(u) = u$ فنجد أنه يمثل التطبيق المطابق أيضاً ويحقق الشروط الآتية:

- أيأ كان $A \in ob(\mathcal{T})$ فإن $I_3(I_A) = I_A = I_{I_3(A)}$.
- لأجل أي مورفيزمين $u: X \rightarrow Y, v: Y \rightarrow Z$ للفئة $\mathcal{T}$ فإن:
$$I_3(v \cdot u) = v \cdot u = I_3(v) \cdot I_3(u)$$
 ومنه نجد أن I_3 هو دالي مباشر.

٢ - ليكن $B \in ob(\mathcal{T}_2)$. لنعرف تطبيق الأشياء $F: ob(\mathcal{T}_1) \rightarrow ob(\mathcal{T}_2)$ بالشكل الآتي: أيأ كان $A \in ob(\mathcal{T}_1)$ فإن: $F(A) = B$ ، فنجد أن هذه العلاقة تمثل التطبيق الثابت. لنعرف أيضاً تطبيق المورفيزمات $F: Mor(\mathcal{T}_1) \rightarrow Mor(\mathcal{T}_2)$ بالشكل الآتي: لأجل كل مورفيزم $u: X \rightarrow Y$ للفئة $\mathcal{T}_1$ فإن $F(u) = I_B$ فنجد أنه يمثل التطبيق الثابت أيضاً ويحقق الشروط الآتية:

- أيأ كان $A \in ob(\mathcal{T}_1)$ فإن: $F(I_A) = I_B = I_{F(A)}$.
- لأجل أي مورفيزمين $u: X \rightarrow Y, v: Y \rightarrow Z$ للفئة $\mathcal{T}_1$ فإن:
$$F(v \cdot u) = I_B = I_B \cdot I_B = F(v) \cdot F(u)$$
 ومنه نجد أن F هو دالي مباشر.

تمهيدية ٢-١-٥.

لتكن $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ فئتين. الشروط الآتية متكافئة:

١ - يوجد دالي غير مباشر $F: \mathcal{T}_1 \rightarrow \mathcal{T}_2$.

٢ - يوجد دالي مباشر $H: \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2^o$.

٣ - يوجد دالي مباشر $G: \mathcal{S}_1^o \rightarrow \mathcal{S}_2$.

البرهان.

(1) $\Leftrightarrow$ (2). لنفرض أنه يوجد دالي غير مباشر $F: \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$ ، عندئذ حسب التمهيدية

(١-١-٢) يوجد دالي مباشر $H: \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2^o$.

(2) $\Leftrightarrow$ (1). لنفرض أنه يوجد دالي مباشر $H: \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2^o$ عندئذ حسب التمرين المحلول

(١-٢) يوجد دالي غير مباشر $F: \mathcal{S}_1 \rightarrow (\mathcal{S}_2^o)^o$ وبما أن $(\mathcal{S}_2^o)^o = \mathcal{S}_2$ نجد أن

$F: \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$ هو دالي غير مباشر.

التكافؤ (1) $\Leftrightarrow$ (3) يبرهن بطريقة مشابهة.

تمهيدية ٦-١-٢.

لتكن $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ فئتين. الشروط الآتية متكافئة:

١ - يوجد دالي مباشر $F: \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$.

٢ - يوجد دالي غير مباشر $H: \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2^o$.

٣ - يوجد دالي غير مباشر $G: \mathcal{S}_1^o \rightarrow \mathcal{S}_2$.

البرهان.

(1) $\Leftrightarrow$ (2). لنفرض أنه يوجد دالي مباشر $F: \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$ عندئذ حسب التمرين المحلول

(١-٢) يوجد دالي غير مباشر $H: \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2^o$.

(2) $\Leftrightarrow$ (1). لنفرض أنه يوجد دالي غير مباشر $H: \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2^o$ ، عندئذ حسب التمهيدية

(١-١-٢) يوجد دالي مباشر $F: \mathcal{S}_1 \rightarrow (\mathcal{S}_2^o)^o$ وبما أن $(\mathcal{S}_2^o)^o = \mathcal{S}_2$ نجد أن

$F: \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$ هو دالي مباشر.

التكافؤ (1) $\Leftrightarrow$ (3) يبرهن بطريقة مشابهة.

تمهيدية ٧-١-٢.

لتكن $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ فئتين، وليكن دالياً مباشراً. إذا كانت المورفيزم $u: A \rightarrow B$

للفئة $\mathcal{S}_1$ إيزومورفيزماً، عندئذ يكون المورفيزم $F(u): F(A) \rightarrow F(B)$ للفئة $\mathcal{S}_2$

إيزومورفيزماً.

البرهان.

نفرض أن المورفيزم $u: A \rightarrow B$ إيزومورفيزماً عندئذ يوجد مورفيزم $v: B \rightarrow A$ للفئة $\mathcal{S}_1$ بحيث $u \cdot v = I_B$, $v \cdot u = I_A$ ومنه فإن: $F(v): F(B) \rightarrow F(A)$ يكون مورفيزماً للفئة $\mathcal{S}_2$ ويحقق:

$$F(u \cdot v) = F(u) \cdot F(v) = F(I_B) = I_{F(B)}$$

$$F(v \cdot u) = F(v) \cdot F(u) = F(I_A) = I_{F(A)}$$

مما سبق نجد أن المورفيزم $F(u): F(A) \rightarrow F(B)$ إيزومورفيزم.

تعريف.

نقول عن الدالي المباشر $F: \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$ من الفئة $\mathcal{S}_1$ إلى الفئة $\mathcal{S}_2$ إنه إيزومورفيزم إذا وجد دالي مباشر $G: \mathcal{S}_2 \rightarrow \mathcal{S}_1$ يحقق $G \cdot F = I_{\mathcal{S}_1}$, $F \cdot G = I_{\mathcal{S}_2}$ حيث $I_{\mathcal{S}_1}$ و $I_{\mathcal{S}_2}$ هما الداليان المطابقان للفئتين $\mathcal{S}_1$ و $\mathcal{S}_2$ على الترتيب. ونقول عن الفئتين $\mathcal{S}_1$ و $\mathcal{S}_2$ إنهما إيزومورفيتان إذا وجد دالي $F: \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$ إيزومورفيزم ونعبر عن ذلك بالشكل $\mathcal{S}_1 \cong \mathcal{S}_2$.

٢-٢. المورفيزمات الدالية.

تعريف.

ليكن $F, G: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{S}$ داليتين مباشرتين (موافقين للتغير) من الفئة $\mathfrak{R}$ إلى الفئة $\mathfrak{S}$.
- نقول إنه لدينا مورفيزم دالي $f: F \rightarrow G$ من الدالي F إلى الدالي G إذا تحقق الشرط التالي: أيًا كان $A \in ob(\mathfrak{R})$ يوجد مورفيزم:

$$f(A): F(A) \rightarrow G(A) \in Mor(\mathfrak{S})$$

يحقق $\forall u \in \mathfrak{R}(A, B)$ فإن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{f(A)} & G(A) \\ F(u) \downarrow & & \downarrow G(u) \\ F(B) & \xrightarrow{f(B)} & G(B) \end{array}$$

يكون تبديلياً، أي إن $f(B) \cdot F(u) = G(u) \cdot f(A)$.

- نقول عن المورفيزم الدالي $f: F \rightarrow G$ إنه إيزومورفيزم دالي إذا كان المورفيزم $f(A): F(A) \rightarrow G(A)$ إيزومورفيزم وذلك $\forall A \in ob(\mathfrak{R})$.

تعريف.

ليكن $F, G: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{S}$ داليتين غير مباشرتين (مخالفين للتغير) من الفئة $\mathfrak{R}$ إلى الفئة $\mathfrak{S}$.
- نقول إنه لدينا مورفيزم دالي $f: F \rightarrow G$ من الدالي F إلى الدالي G إذا تحقق الشرط الآتي: أيًا كان $A \in ob(\mathfrak{R})$ يوجد مورفيزم $f(A): F(A) \rightarrow G(A) \in Mor(\mathfrak{S})$ يحقق: لأجل كل $u \in \mathfrak{R}(A, B)$ فإن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{f(A)} & G(A) \\ F(u) \uparrow & & \uparrow G(u) \\ F(B) & \xrightarrow{f(B)} & G(B) \end{array}$$

يكون تبديلياً، أي إن $f(A) \cdot F(u) = G(u) \cdot f(B)$.

- نقول عن المورفيزم الدالي $f: F \rightarrow G$ إنه إيزومورفيزم دالي إذا كان المورفيزم $f(A): F(A) \rightarrow G(A)$ إيزومورفيزم وذلك $\forall A \in ob(\mathfrak{R})$.

تبين التمهيدية الآتية لنا أنه لأجل كل مورفيزم من مورفيزمات فئة ما يوجد مورفيزمان داليان على الأقل.

تمهيدية ٢-٢-١.

لتكن $\mathcal{S}$ فئة، وليكن $w: X \rightarrow X' \in \text{Mor}(\mathcal{S})$ حيث $X, X' \in \text{ob}(\mathcal{S})$. عندئذ:

١ - يوجد مورفيزم دالي $f: h_{X'} \rightarrow h_X$.

٢ - يوجد مورفيزم دالي $g: \hat{h}_X \rightarrow \hat{h}_{X'}$.

البرهان.

١ - وجدنا حسب المبرهنة (٢-١-٢) أنه أياً كان $X, X' \in \text{ob}(\mathcal{S})$ توجد دوال مباشرة:

$$h_X, h_{X'}: \mathcal{S} \rightarrow \text{Set's}$$

لنعرف $f: h_{X'} \rightarrow h_X$ بالشكل الآتي: $\forall Y \in \text{ob}(\mathcal{S})$ ، فإن:

$$f(Y): h_{X'}(Y) \rightarrow h_X(Y)$$

$$f(Y): \mathcal{S}(X', Y) \rightarrow \mathcal{S}(X, Y)$$

وأنه أياً كان $v \in \mathcal{S}(X', Y)$ ، فإن: $f(Y)(v) = v \cdot w \in \mathcal{S}(X, Y)$.

واضح أن $f(Y)(v) \in \mathcal{S}(X, Y)$ مورفيزم وإن $f(Y)(v) \in \mathcal{S}(X, Y)$. كما أنه أياً كان $u: Y \rightarrow Y'$ ، فإن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} h_{X'}(Y) & \xrightarrow{f(Y)} & h_X(Y) \\ h_{X'}(u) \downarrow & & \downarrow h_X(u) \\ h_{X'}(Y') & \xrightarrow{f(Y')} & h_X(Y') \end{array}$$

تبدلي، لأنه إذا كان $\lambda \in h_{X'}(Y) = \mathcal{S}(X', Y)$ فإن:

$$h_X(u) \cdot f(Y)(\lambda) = h_X(u)(\lambda \cdot w) = u \cdot (\lambda \cdot w)$$

$$f(Y') \cdot h_{X'}(u)(\lambda) = f(Y')(u \cdot \lambda) = (u \cdot \lambda) \cdot w$$

ومنه نجد أن $h_X(u) \cdot f(Y) = f(Y') \cdot h_{X'}(u)$ وهذا يبين أن $f: h_{X'} \rightarrow h_X$ هو مورفيزم دالي.

٢ - وجدنا حسب المبرهنة (٢-١-٢) أنه أياً كان $X, X' \in \text{ob}(\mathcal{S})$ توجد دوال غير

مباشرة $\hat{h}_X, \hat{h}_{X'}: \mathcal{S} \rightarrow \text{Set's}$.

لنعرف $g: \hat{h}_X \rightarrow \hat{h}_{X'}$ بالشكل الآتي: $\forall Y \in ob(\mathfrak{S})$ ، فإن:

$$g(Y): \hat{h}_X(Y) \rightarrow \hat{h}_{X'}(Y)$$

$$g(Y): \mathfrak{S}(Y, X) \rightarrow \mathfrak{S}(Y, X')$$

وإنه أياً كان $v \in \mathfrak{S}(Y, X)$ ، فإن: $g(Y)(v) = w \cdot v$.

واضح أن $g(Y)(v) \in \mathfrak{S}(Y, X')$ مورفيزم وإن $g(Y)(v) \in \mathfrak{S}(Y, X')$. كما أنه أياً كان $u: Y \rightarrow Y'$ فإن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} \hat{h}_X(Y) & \xrightarrow{g(Y)} & \hat{h}_{X'}(Y) \\ \hat{h}_X(u) \uparrow & & \uparrow \hat{h}_{X'}(u) \\ \hat{h}_X(Y') & \xrightarrow{g(Y')} & \hat{h}_{X'}(Y') \end{array}$$

تبدلي، لأنه إذا كان $\mu \in \hat{h}_X(Y') = \mathfrak{S}(Y', X)$ فإن:

$$\hat{h}_{X'}(u) \cdot g(Y')(\mu) = \hat{h}_{X'}(u)(g(Y')(\mu)) = \hat{h}_{X'}(u)(w \cdot \mu) = (w \cdot \mu) \cdot u$$

$$g(Y) \cdot \hat{h}_X(u)(\mu) = g(Y)(\hat{h}_X(u)(\mu)) = g(Y)(\mu \cdot u) = w \cdot (\mu \cdot u)$$

ومنه نجد أن $\hat{h}_X(u) \cdot g(Y') = g(Y) \cdot \hat{h}_X(u)$ وهذا يبين لنا أن $g: \hat{h}_X \rightarrow \hat{h}_{X'}$ هو مورفيزم دالي.

مبرهنة ٢-٢-٢.

لتكن $F, G: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{S}$ دوال مباشرة (موافقة للتغير) من الفئة $\mathfrak{R}$ إلى الفئة $\mathfrak{S}$. وليكن $f: F \rightarrow G$ مورفيزماً دالياً. إذا كان المورفيزم الدالي $f: F \rightarrow G$ إيزومورفيزم عندئذ يوجد مورفيزم دالي وحيد $g: G \rightarrow F$ يحقق $g \cdot f = I_F$ ، $f \cdot g = I_G$. البرهان.

لنفرض أن المورفيزم الدالي $f: F \rightarrow G$ إيزومورفيزماً، عندئذ $\forall A \in ob(\mathfrak{R})$ ، فإن: المورفيزم $f(A): F(A) \rightarrow G(A)$ إيزومورفيزماً؛ وبالتالي $\forall u \in \mathfrak{R}(A, B)$ فإن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{f(A)} & G(A) \\ F(u) \downarrow & & \downarrow G(u) \\ F(B) & \xrightarrow{f(B)} & G(B) \end{array}$$

تبديلي، أي إن $f(B) \cdot F(u) = G(u) \cdot f(A)$ بما أن المورفيزم $f(A)$ إيزومورفيزم فإنه يوجد مورفيزم $g(A) : G(A) \rightarrow F(A)$ يحقق

$$f(A) \cdot g(A) = I_{G(A)}, \quad g(A) \cdot f(A) = I_{F(A)}$$

نضع $g : G \rightarrow F$ ، كي يكون g مورفيزماً دالياً يكفي إثبات أن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} G(A) & \xrightarrow{g(A)} & F(A) \\ G(u) \downarrow & & \downarrow F(u) \\ G(B) & \xrightarrow{g(B)} & F(B) \end{array}$$

تبديلي وذلك $\forall A \in \text{ob}(\mathfrak{R})$ و $\forall u \in \mathfrak{R}(A, B)$. أي إن $g(B) \cdot G(u) = F(u) \cdot g(A)$ لدينا:

$$\begin{aligned} F(u) \cdot g(A) &= I_{F(B)} \cdot F(u) \cdot g(A) = g(B) \cdot f(B) \cdot F(u) \cdot g(A) = \\ &= g(B) \cdot G(u) \cdot I_{G(A)} = g(B) \cdot G(u) \end{aligned}$$

وهذا يبين لنا أن $g : G \rightarrow F$ هو مورفيزم دالي.

لنبرهن الآن على أن: $f \cdot g = I_G$ ، $g \cdot f = I_F$

ليكن $A \in \text{ob}(\mathfrak{R})$ عندئذ $f(A) : F(A) \rightarrow G(A)$ و $g(A) : G(A) \rightarrow F(A)$ كما أن $f(A) \cdot g(A) = I_{G(A)}$ ومنه: $f \cdot g = I_G$. بشكل مشابه نجد أن: $g \cdot f = I_F$. برهان الوجدانية.

ليكن $\zeta : G \rightarrow F$ مورفيزماً دالياً آخر يحقق $\zeta \cdot f = I_F$ ، $f \cdot \zeta = I_G$ عندئذ $\forall A \in \text{ob}(\mathfrak{R})$ ، فإن: $\zeta(A) \cdot f(A) = I_{F(A)}$ وإن $f(A) \cdot \zeta(A) = I_{G(A)}$ ومنه: $\zeta(A) = I_{F(A)} \cdot \zeta(A) = g(A) \cdot f(A) \cdot \zeta(A) = g(A) \cdot I_{G(A)} = g(A)$

مبرهنة ٢-٢-٣.

لتكن $F, G : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{S}$ دوالاً غير مباشرة (مخالفة للتغير) من الفئة $\mathfrak{R}$ إلى الفئة $\mathfrak{S}$. وليكن $f : F \rightarrow G$ مورفيزماً دالياً. إذا كان المورفيزم الدالي $f : F \rightarrow G$ إيزومورفيزماً عندئذ يوجد مورفيزم دالي وحيد $g : G \rightarrow F$ يحقق $g \cdot f = I_F$ ، $f \cdot g = I_G$. البرهان.

لنفرض أن المورفيزم الدالي $f: F \rightarrow G$ إيزومورفيزماً، عندئذ $\forall A \in \text{ob}(\mathfrak{K})$ ، فإن المورفيزم $f(A): F(A) \rightarrow G(A)$ إيزومورفيزم؛ وبالتالي $\forall u \in \mathfrak{K}(A, B)$ ، فإن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{f(A)} & G(A) \\ F(u) \uparrow & & \uparrow G(u) \\ F(B) & \xrightarrow{f(B)} & G(B) \end{array}$$

تبديلي، أي إن $f(A) \cdot F(u) = G(u) \cdot f(B)$

بما أن المورفيزم $f(A)$ إيزومورفيزم، فإنه يوجد مورفيزم $g(A): G(A) \rightarrow F(A)$ يحقق:

$$f(A) \cdot g(A) = I_{G(A)}, \quad g(A) \cdot f(A) = I_{F(A)}$$

لنضع $g: G \rightarrow F$ ، كي يكون g مورفيزماً دالياً يكفي إثبات أن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} G(A) & \xrightarrow{g(A)} & F(A) \\ G(u) \uparrow & & \uparrow F(u) \\ G(B) & \xrightarrow{g(B)} & F(B) \end{array}$$

تبدلياً وذلك $\forall A \in \text{ob}(\mathfrak{K})$ و $\forall u \in \mathfrak{K}(A, B)$ ، أي إن $g(A) \cdot G(u) = F(u) \cdot g(B)$ لدينا

$$\begin{aligned} F(u) \cdot g(B) &= I_{F(A)} \cdot F(u) \cdot g(B) = g(A) \cdot f(A) \cdot F(u) \cdot g(B) = \\ &= g(A) \cdot G(u) \cdot f(B) \cdot g(B) = g(A) \cdot G(u) \cdot I_{G(B)} = g(A) \cdot G(u) \end{aligned}$$

وهذا يبين لنا أن $g: G \rightarrow F$ مورفيزم دالي.

لنبرهن على أن: $f \cdot g = I_G$ ، $g \cdot f = I_F$

ليكن $A \in \text{ob}(\mathfrak{K})$ عندئذ $f(A): F(A) \rightarrow G(A)$ و $g(A): G(A) \rightarrow F(A)$ كما أن

$$f(A) \cdot g(A) = I_{G(A)} \quad \text{ومنه: } f \cdot g = I_G \quad \text{بشكل مشابه نجد أن } g \cdot f = I_F$$

برهان الوحدانية.

ليكن $\zeta: G \rightarrow F$ مورفيزماً دالياً آخر يحقق $\zeta \cdot f = I_G$ ، $f \cdot \zeta = I_F$ عندئذ

$$\forall A \in \text{ob}(\mathfrak{K}) \text{، فإن: } \zeta(A) \cdot f(A) = I_{F(A)} \quad \text{وإن } f(A) \cdot \zeta(A) = I_{G(A)} \quad \text{ومنه:}$$

$$\zeta \cdot \zeta(A) = I_{F(A)} \cdot \zeta(A) = g(A) \cdot f(A) \cdot \zeta(A) = g(A) \cdot I_{G(A)} = g(A)$$

تمهيد.

لتكن $\mathfrak{K}$ فئة، ولتكن $Set's$ فئة المجموعات، وليكن $F: \mathfrak{K} \rightarrow Set's$ دالياً مباشراً من الفئة $\mathfrak{K}$ إلى فئة المجموعات $Set's$ ، وليكن $X \in ob(\mathfrak{K})$. وجدنا في المبرهنة (٢-١-٢) أنه يوجد دالي مباشر $h_X: \mathfrak{K} \rightarrow Set's$.
ليكن $Hom(h_X, F)$ صف المورفيزمات الدالية من الدالي h_X إلى الدالي F . عندئذ يمكننا صياغة المبرهنة الآتية:

مبرهنة ٢-٢-٤.

لتكن $\mathfrak{I}$ فئة، و $Set's$ فئة المجموعات، وليكن $F: \mathfrak{I} \rightarrow Set's$ دالياً مباشراً من الفئة $\mathfrak{I}$ إلى فئة المجموعات $Set's$ ، وليكن $X \in ob(\mathfrak{I})$. إذا كان $Hom(h_X, F)$ هو صف المورفيزمات الدالية من الدالي h_X إلى الدالي F . عندئذ يوجد تطبيق:

$$\alpha: Hom(h_X, F) \rightarrow F(X)$$

متبايناً وغامراً.

البرهان.

ليكن $f \in Hom(h_X, F)$ مورفيزماً دالياً $f: h_X \rightarrow F$ عندئذ أياً كان $Y \in ob(\mathfrak{I})$ يوجد مورفيزم $f(Y): h_X(Y) \rightarrow F(Y)$ أي إن $f(Y): \mathfrak{I}(X, Y) \rightarrow F(Y)$ يحقق $\forall u \in \mathfrak{I}(Y, Y')$ فإن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} h_X(Y) & \xrightarrow{f(Y)} & F(Y) \\ h_X(u) \downarrow & & \downarrow F(u) \\ h_X(Y') & \xrightarrow{f(Y')} & F(Y') \end{array}$$

تبديلي، أي إن $F(u) \cdot f(Y) = f(Y') \cdot h_X(u)$.

من أجل $X = Y$ فإن $f(X): h_X(X) \rightarrow F(X)$ مورفيزم وإن:

$$f(X): \mathfrak{I}(X, X) \rightarrow F(X)$$

لنعرف التطبيق $\alpha: Hom(h_X, F) \rightarrow F(X)$ بالشكل: $\forall f \in Hom(h_X, F)$ ، فإن:

$$\alpha(f) = f(X)(I_X)$$

ولنعرف التطبيق $\beta: F(X) \rightarrow Hom(h_X, F)$ بالشكل الآتي: $\forall \xi \in F(X)$ ، فإن:

$\beta(\zeta): h_X \rightarrow F$ أي إن $\beta(\zeta)$ هو مورفيزم دالي.

وإنه أياً كان $Y \in ob(\mathcal{S})$ ، فإن: $\beta(\zeta)(Y): h_X(Y) \rightarrow F(Y)$ أي إن:

$$\beta(\zeta)(Y): \mathcal{S}(X, Y) \rightarrow F(Y)$$

وإنه $\forall u \in \mathcal{S}(X, Y)$ ، فإن: $F(u): F(X) \rightarrow F(Y)$ لنضع:

$$\beta(\zeta)(Y)(u) = F(u)(\zeta)$$

كي نبرهن أنه يوجد لدينا مورفيزم دالي $\beta(\zeta): h_X \rightarrow F$ يكفي أن نبرهن أنه $\forall v \in \mathcal{S}(Y, Y')$ فإن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} h_X(Y) & \xrightarrow{\beta(\zeta)(Y)} & F(Y) \\ h_X(v) \downarrow & & \downarrow F(v) \\ h_X(Y') & \xrightarrow{\beta(\zeta)(Y')} & F(Y') \end{array}$$

تبدلي، أي إن $F(v) \cdot \beta(\zeta)(Y) = \beta(\zeta)(Y') \cdot h_X(v)$

ليكن $w \in h_X(Y)$ عندئذ فإن:

$$\begin{aligned} (F(v) \cdot \beta(\zeta)(Y))(w) &= F(v)(\beta(\zeta)(Y)(w)) = F(v) \cdot F(w)(\zeta) = F(v \cdot w)(\zeta) \\ (\beta(\zeta)(Y') \cdot h_X(v))(w) &= \beta(\zeta)(Y')(h_X(v)(w)) = \beta(\zeta)(Y')(v \cdot w) = F(v \cdot w)(\zeta) \end{aligned}$$

ومنه فإن:

$$F(v) \cdot \beta(\zeta)(Y) = \beta(\zeta)(Y') \cdot h_X(v)$$

لنبرهن الآن على أن: $\alpha \cdot \beta = I_{F(X)}$ وإن $\beta \cdot \alpha = I_{\text{Hom}(h_X, F)}$

لنبرهن بداية على أنه $\forall f \in \text{Hom}(h_X, F)$ فإن $\beta(\alpha(f)) = f$

ليكن $f \in \text{Hom}(h_X, F)$ عندئذ $\alpha(f) \in F(X)$ ومنه فإن $\beta(\alpha(f)): h_X \rightarrow F$ وبالتالي أياً كان $Y \in ob(\mathcal{S})$ ، فإن:

$$\beta(\alpha(f))(Y): h_X(Y) \rightarrow F(Y)$$

$$\beta(\alpha(f))(Y): \mathcal{S}(X, Y) \rightarrow F(Y)$$

عندئذ أياً كان $n \in \mathcal{S}(X, Y)$ فإن $(\beta(\alpha(f))(Y))(n) \in F(Y)$ وهكذا نجد أن:

$$\begin{aligned} (\beta \cdot \alpha)(f)(Y)(n) &= (\beta(\alpha(f))(Y))(n) = F(n)(\alpha(f)) = F(n)(f(X)(I_X)) = \\ &= (F(n) \cdot f(X))(I_X) \end{aligned}$$

وبما أن $f: h_X \rightarrow F$ مورفيزم دالي، فإن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} h_X(X) & \xrightarrow{f(X)} & F(X) \\ h_X(u) & \downarrow & \downarrow F(u) \\ h_X(Y) & \xrightarrow{f(Y)} & F(Y) \end{array}$$

تبدلي، أي إن $F(u) \cdot f(X) = f(Y) \cdot h_X(u)$ حيث $u \in \mathfrak{I}(X, Y)$ ومنه فإن:

$$\begin{aligned} (\beta \cdot \alpha)(f)(Y)(u) &= (F(u) \cdot f(X))(I_X) = (f(Y) \cdot h_X(u))(I_X) = \\ &= f(Y)(h_X(u)(I_X)) = f(Y)(u \cdot I_X) = f(Y)(u) \end{aligned}$$

وهذا يبين أن $\beta \cdot \alpha(f) = f$ وذلك $\forall f \in \text{Hom}(h_X, F)$.

من جهة أخرى، لنبرهن أنه أياً كان $\zeta \in F(X)$ فإن $\zeta = \alpha \cdot \beta(\zeta)$. لدينا:

$$\beta(\zeta): h_X \rightarrow F$$

ومنه $\beta(\zeta)(X): h_X(X) \rightarrow F(X)$ وبالتالي فإن:

$$\beta(\zeta)(X)(I_X) \in F(X)$$

$$\beta(\zeta)(X)(I_X) = F(I_X)(\zeta) = I_{F(X)}(\zeta) = \zeta$$

ومنه نجد أن $\alpha \cdot \beta(\zeta) = \alpha(\beta(\zeta)) = \beta(\zeta)(X)(I_X) = \zeta$ وهذا يبين لنا أن

$$\alpha \cdot \beta = I_{F(X)} \quad \text{مما سبق نجد أن التطبيق } \alpha \text{ متباين وغامر.}$$

مبرهنة ٢-٢-٥.

لتكن $\mathfrak{I}$ فئة، ولتكن $Set's$ فئة المجموعات، وليكن $X, X' \in ob(\mathfrak{I})$. لنفرض أن $h_X, h_{X'}: \mathfrak{I} \rightarrow Set's$ الداليان المباشرين المعرفان في المبرهنة (٢-١-٢). عندئذ من أجل أي مورفيزم دالي $f: h_X \rightarrow h_{X'}$ يوجد مورفيزم وحيد $\mu \in \mathfrak{I}(X', X)$ يحقق $f(Y)(u) = u \cdot \mu$ وذلك أياً كان $Y \in ob(\mathfrak{I})$ و أياً كان $u \in \mathfrak{I}(X, Y)$. فضلاً عن ذلك، يكون المورفيزم الدالي f إيزومورفيزماً عندما وفقط عندما المورفيزم μ إيزومورفيزماً. البرهان.

ليكن $X, X' \in ob(\mathfrak{I})$ و $f: h_X \rightarrow h_{X'}$ مورفيزماً دالياً. حسب المبرهنة (٢-٢-٤)

يوجد تطبيق:

$$\alpha: \text{Hom}(h_X, h_{X'}) \rightarrow h_{X'}(X)$$

$$\alpha: \text{Hom}(h_X, h_{X'}) \rightarrow \mathfrak{Z}(X', X)$$

لنضع $\alpha(f) = \mu$ فنجد أن $\mu: X' \rightarrow X$ مورفيزم للفتة $\mathfrak{Z}$.
أيضاً حسب المبرهنة (٢-٢-٤) يوجد تطبيق:

$$\beta: h_{X'}(X) \rightarrow \text{Hom}(h_X, h_{X'})$$

$$\beta: \mathfrak{Z}(X', X) \rightarrow \text{Hom}(h_X, h_{X'})$$

بحيث $\beta \cdot \alpha = I_{\text{Hom}(h_X, h_{X'})}$ ومنه:

$$\beta \cdot \alpha(f) = \beta(\alpha(f)) = \beta(\mu) = f$$

وبالتالي $\forall Y \in \text{ob}(\mathfrak{Z})$ ، فإن:

$$f(Y) = \beta(\mu)(Y): h_X(Y) \rightarrow h_{X'}(Y)$$

$$f(Y): \mathfrak{Z}(X, Y) \rightarrow \mathfrak{Z}(X', Y)$$

ومنه أياً كان $u \in \mathfrak{Z}(X, Y)$ ، فإن:

$$f(Y)(u) = (\beta(\mu)(Y))(u) = h_{X'}(u)(\mu) = u \cdot \mu$$

إن المورفيزم μ وحيد، لأنه إذا وجد مورفيزم آخر $\psi: X' \rightarrow X$ بحيث

$$u \in \mathfrak{Z}(X, Y) \text{ وذلك } \forall Y \in \text{ob}(\mathfrak{Z}) \text{ و } u \cdot \psi = f(Y)(u) = u \cdot \mu$$

عندئذ فإنه من أجل $X = Y$ ومن أجل $u = I_X$ نجد أن:

$$f(X)(I_X) = I_X \cdot \mu = \mu; \quad f(X)(I_X) = I_X \cdot \psi = \psi$$

مما سبق نجد أن $\psi = \mu$.

لزم الشرط. لنفرض أن المورفيزم الدالي $f: h_{X'} \rightarrow h_X$ إيزومورفيزم عندئذ يوجد

مورفيزم دالي $g: h_{X'} \rightarrow h_X$ بحيث $g \cdot f = I_{h_X}$ ، $f \cdot g = I_{h_{X'}}$ وحسب المبرهنة (٢-٢-٤)

(٢-٤) يوجد تطبيق:

$$\alpha': \text{Hom}(h_{X'}, h_X) \rightarrow h_X(X')$$

$$\alpha': \text{Hom}(h_{X'}, h_X) \rightarrow \mathfrak{Z}(X, X')$$

بما أن $g \in \text{Hom}(h_{X'}, h_X)$ ، لنفرض أن $\alpha'(g) = \mu'$ فنجد أن $\mu': X' \rightarrow X$ مورفيزم

للفتة $\mathfrak{Z}$. وحسب ما تم إثباته أعلاه فإن $g(Y)(u) = u \cdot \mu'$ وذلك أياً كان $Y \in \text{ob}(\mathfrak{Z})$ و

أياً كان $u \in \mathfrak{Z}(X', Y)$.

من جهة أخرى، بما أن $g \cdot f = I_{h_X}$ فإنه حسب المبرهنة (٢-٢-٤) يوجد تطبيق:

$$\alpha'' : \text{Hom}(h_X, h_X) \rightarrow h_X(X)$$

$$\alpha'' : \text{Hom}(h_X, h_X) \rightarrow \mathfrak{I}(X, X)$$

وبما أن $g \cdot f = I_X \in \text{Hom}(h_X, h_X)$ نجد أن:

$$\alpha''(g \cdot f) = \alpha''(I_{h_X}) = I_{h_X}(X)(I_X) = I_{\mathfrak{I}(X, X)}(I_X) = I_X$$

$$I_X = \alpha''(g \cdot f) = (g \cdot f)(X)(I_X) = (g(X) \cdot f(X))(I_X) =$$

$$= g(X)(f(X)(I_X)) = g(X)(I_X \cdot \mu) = g(X)(\mu) = \mu \cdot \mu'$$

وهذا يبين أن $\mu \cdot \mu' = I_X$

لنبرهن على أن $\mu' \cdot \mu = I_{X'}$ بما أن $f \cdot g = I_{h_{X'}}$ وحسب المبرهنة (٢-٢-٤) يوجد تطبيق:

$$\alpha_0 : \text{Hom}(h_{X'}, h_{X'}) \rightarrow h_{X'}(X')$$

$$\alpha_0 : \text{Hom}(h_{X'}, h_{X'}) \rightarrow \mathfrak{I}(X', X')$$

وبما أن $f \cdot g = I_{h_{X'}} \in \text{Hom}(h_{X'}, h_{X'})$ نجد أن $\alpha_0(f \cdot g) = \alpha_0(I_{h_{X'}})$ بما أن:

$$\alpha_0(I_{h_{X'}}) = I_{h_{X'}}(X')(I_{X'})$$

$$I_{h_{X'}} : h_{X'} \rightarrow h_{X'}$$

$$I_{h_{X'}}(X') : h_{X'}(X') \rightarrow h_{X'}(X')$$

$$I_{h_{X'}}(X') : \mathfrak{I}(X', X') \rightarrow \mathfrak{I}(X', X')$$

$$\alpha_0(I_{h_{X'}}) = I_{h_{X'}}(X')(I_{X'}) = I_{X'}$$

وهكذا نجد أن:

$$I_{X'} = \alpha_0(I_{h_{X'}}) = \alpha_0(f \cdot g) = (f \cdot g)(X')(I_{X'}) = (f(X') \cdot g(X'))(I_{X'}) =$$

$$= f(X')(g(X')(I_{X'})) = f(X')(I_{X'} \cdot \mu') = f(X')(\mu') = \mu' \cdot \mu$$

أي إن $\mu' \cdot \mu = I_{X'}$ مما سبق نجد أن المورفيزم $\mu : X' \rightarrow X$ للفتة $\mathfrak{I}$ هو إيزومورفيزم للفتة $\mathfrak{I}$.

كفاية الشرط. لنفرض أن المورفيزم $\mu : X' \rightarrow X$ إيزومورفيزم للفتة $\mathfrak{I}$. عندئذ يوجد

مورفيزم $\mu' : X \rightarrow X'$ للفتة $\mathfrak{I}$ يحقق $\mu' \cdot \mu = I_X$ ، $\mu \cdot \mu' = I_{X'}$ ، لنعرف مورفيزماً

دالياً $f' : h_{X'} \rightarrow h_X$ حسب المبرهنة (٢-٢-٤) يوجد تطبيق متباين وغامر :

$$\alpha : \text{Hom}(h_{X'}, h_X) \rightarrow h_X(X')$$

$$\alpha : \text{Hom}(h_{X'}, h_X) \rightarrow \mathfrak{S}(X, X')$$

وبالتالي يوجد تطبيق :

$$\beta : h_X(X') \rightarrow \text{Hom}(h_{X'}, h_X)$$

$$\beta : \mathfrak{S}(X, X') \rightarrow \text{Hom}(h_{X'}, h_X)$$

لنضع $f' = \beta(\mu')$ فنجد أن $f' : h_{X'} \rightarrow h_X$ مورفيزم دالي. وأنه أياً كان $Y \in \text{ob}(\mathfrak{S})$ فإن $f'(Y) = \beta(\mu')(Y)$ حيث $f'(Y) : h_{X'}(Y) \rightarrow h_X(Y)$ أي إن :

$$f'(Y) : \mathfrak{S}(X', Y) \rightarrow \mathfrak{S}(X, Y)$$

وإنه $\forall u \in \mathfrak{S}(X', Y)$ ، فإن :

$$f'(Y)(u) = (\beta(\mu')(Y))(u) = \beta(\mu')(Y)(u) = h_X(u)(\mu') = u \cdot \mu'$$

لنبرهن على أن : $f \cdot f' = I_{h_{X'}}$.

أياً كان $Y \in \text{ob}(\mathfrak{S})$ فإن $f \cdot f'(Y) = f(Y) \cdot f'(Y)$ وأياً كان $n \in \mathfrak{S}(X', Y)$ فإن

$$\begin{aligned} (f(Y) \cdot f'(Y))(u) &= f(Y)(f'(Y)(u)) = f(Y)(u \cdot \mu') = (u \cdot \mu') \cdot \mu = \\ &= u \cdot (\mu' \cdot \mu) = u \cdot I_{X'} = u \end{aligned}$$

وهذا يبين أن $f \cdot f' = I_{h_{X'}}$ ومنه $f(Y) \cdot f'(Y) = I_{\mathfrak{S}(X', Y)} = I_{h_{X'}}(Y)$.

كذلك الأمر ، أياً كان $v \in \mathfrak{S}(X, Y)$ ، فإن :

$$\begin{aligned} (f'(Y) \cdot f(Y))(v) &= f'(Y)(f(Y)(v)) = f'(Y)(v \cdot \mu) = (v \cdot \mu) \cdot \mu' = \\ &= v \cdot (\mu \cdot \mu') = v \cdot I_X = v \end{aligned}$$

وهذا يبين أن $f' \cdot f = I_{h_X}$ ومنه $f'(Y) \cdot f(Y) = I_{\mathfrak{S}(X, Y)} = I_{h_X}(Y)$.

مما سبق نجد أن المورفيزم الدالي f إيزومورفيزم .

تمهيد .

لتكن $\mathfrak{S}$ فئة ، و Set's فئة المجموعات ، وليكن $F : \mathfrak{S} \rightarrow \text{Set's}$ دالياً غير مباشر من الفئة $\mathfrak{S}$ إلى فئة المجموعات Set's ، وليكن $X \in \text{ob}(\mathfrak{S})$. وجدنا في المبرهنة (٢-١-٢)

(٢) أنه يوجد دالياً غير مباشر $\hat{h}_X : \mathfrak{S} \rightarrow \text{Set's}$.

ليكن $\text{Hom}(\hat{h}_X, F)$ صف المورفيزمات الدالية من الدالي $\hat{h}_X$ إلى الدالي F . عندئذ يمكننا صياغة المبرهنة الآتية:

مبرهنة ٢-٢-٦.

لتكن $\mathfrak{I}$ فئة، و $\text{Ser}'s$ فئة المجموعات، وليكن $F: \mathfrak{I} \rightarrow \text{Ser}'s$ دالياً غير مباشر من الفئة $\mathfrak{I}$ إلى فئة المجموعات $\text{Ser}'s$ ، وليكن $X \in \text{ob}(\mathfrak{I})$. إذا كان $\text{Hom}(\hat{h}_X, F)$ هو صف المورفيزمات الدالية من الدالي $\hat{h}_X$ إلى الدالي F . عندئذ يوجد تطبيق:

$$\hat{\alpha}: \text{Hom}(\hat{h}_X, F) \rightarrow F(X)$$

متباين وغامر.

البرهان.

ليكن $f \in \text{Hom}(\hat{h}_X, F)$ مورفيزماً دالياً $f: \hat{h}_X \rightarrow F$ عندئذ أياً كان $Y \in \text{ob}(\mathfrak{I})$ يوجد مورفيزم $f(Y): \hat{h}_X(Y) \rightarrow F(Y)$ أي إن $f(Y): \mathfrak{I}(Y, X) \rightarrow F(Y)$ يحقق أن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} \hat{h}_X(Y) & \xrightarrow{f(Y)} & F(Y) \\ \hat{h}_X(u) \uparrow & & \uparrow F(u) \\ \hat{h}_X(Y') & \xrightarrow{f(Y')} & F(Y') \end{array}$$

تبديلي، أي إن: $F(u) \cdot f(Y') = f(Y) \cdot \hat{h}_X(u)$ وذلك $\forall u \in \mathfrak{I}(Y, Y')$.

من أجل $X = Y$ فإن: $f(X): \hat{h}_X(X) \rightarrow F(X)$ مورفيزم وإن:

$$f(X): \mathfrak{I}(X, X) \rightarrow F(X)$$

لنعرف التطبيق $\hat{\alpha}: \text{Hom}(\hat{h}_X, F) \rightarrow F(X)$ بالشكل: $\forall f \in \text{Hom}(\hat{h}_X, F)$ ، فإن:

$$\hat{\alpha}(f) = f(X)(I_X)$$

ولنعرف التطبيق $\hat{\beta}: F(X) \rightarrow \text{Hom}(\hat{h}_X, F)$ بالشكل الآتي: $\forall \zeta \in F(X)$ ، فإن:

$$\hat{\beta}(\zeta): \hat{h}_X \rightarrow F$$

وإنه أياً كان $Y \in \text{ob}(\mathfrak{I})$ ، فإن $\hat{\beta}(\zeta)(Y): \hat{h}_X(Y) \rightarrow F(Y)$ أي إن:

$$\hat{\beta}(\zeta)(Y): \mathfrak{I}(Y, X) \rightarrow F(Y)$$

وإنه $\forall u \in \mathfrak{I}(Y, X)$ ، فإن $F(u): F(X) \rightarrow F(Y)$.

لنضع:

$$\cdot \hat{\beta}(\xi)(Y)(u) = F(u)(\xi)$$

كي نبرهن أنه يوجد لدينا مورفيزم دالي $\hat{\beta}(\zeta): \hat{h}_X \rightarrow F$ يكفي أن نبرهن أنه:
 $\forall v \in \mathfrak{Z}(Y, Y')$ فإن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} \hat{h}_X(Y) & \xrightarrow{\hat{\beta}(\zeta)(Y)} & F(Y) \\ \hat{h}_X(v) \uparrow & & \uparrow F(v) \\ \hat{h}_X(Y') & \xrightarrow{\hat{\beta}(\zeta)(Y')} & F(Y') \end{array}$$

تبديلي، أي إن: $F(v) \cdot \hat{\beta}(\zeta)(Y') = \hat{\beta}(\zeta)(Y) \cdot \hat{h}_X(v)$
 ليكن $w \in \hat{h}_X(Y') = \mathfrak{Z}(Y', X)$ عندئذ فإن:

$$\begin{aligned} (F(v) \cdot \hat{\beta}(\zeta)(Y'))(w) &= F(v)(\hat{\beta}(\zeta)(Y')(w)) = \\ &= F(v) \cdot F(w)(\xi) = F(w \cdot v)(\xi) \\ (\hat{\beta}(\zeta)(Y) \cdot \hat{h}_X(v))(w) &= \hat{\beta}(\zeta)(Y)(\hat{h}_X(v)(w)) = \\ &= \hat{\beta}(\zeta)(Y)(w \cdot v) = F(w \cdot v)(\xi) \end{aligned}$$

ومنه نجد أن:

$$F(v) \cdot \hat{\beta}(\zeta)(Y') = \hat{\beta}(\zeta)(Y) \cdot \hat{h}_X(v)$$

لنبرهن الآن على أن $\hat{\alpha} \cdot \hat{\beta} = I_{F(X)}$ وأن $\hat{\beta} \cdot \hat{\alpha} = I_{\text{Hom}(\hat{h}_X, F)}$

لنبرهن بداية على أنه $\forall f \in \text{Hom}(\hat{h}_X, F)$ فإن $\hat{\beta}(\hat{\alpha}(f)) = f$

ليكن $f \in \text{Hom}(\hat{h}_X, F)$ عندئذ $\hat{\alpha}(f) \in F(X)$ ومنه فإن $\hat{\beta}(\hat{\alpha}(f)): \hat{h}_X \rightarrow F$ وبالتالي أياً كان $Y \in \text{ob}(\mathfrak{Z})$ فإن:

$$\hat{\beta}(\hat{\alpha}(f))(Y): \hat{h}_X(Y) \rightarrow F(Y)$$

$$\hat{\beta}(\hat{\alpha}(f))(Y): \mathfrak{Z}(Y, X) \rightarrow F(Y)$$

ومنه أياً كان $u \in \mathfrak{Z}(Y, X)$ فإن $u \in \mathfrak{Z}(Y, X)$ وهكذا نجد أن:

$$\begin{aligned} (\hat{\beta} \cdot \hat{\alpha})(f)(Y)(u) &= (\hat{\beta}(\hat{\alpha}(f))(Y))(u) = F(u) \cdot (\hat{\alpha}(f)) = F(u) \cdot (f(X)(I_X)) = \\ &= (F(u) \cdot f(X))(I_X) \end{aligned}$$

وبما أن $f: \hat{h}_X \rightarrow F$ مورفيزم دالي فإن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} \hat{h}_X(X) & \xrightarrow{f(X)} & F(X) \\ \hat{h}_X(u) & \downarrow & \downarrow F(u) \\ \hat{h}_X(Y) & \xrightarrow{f(Y)} & F(Y) \end{array}$$

تبديلي، أي إن: $F(u) \cdot f(X) = f(Y) \cdot \hat{h}_X(u)$ حيث $u \in \mathfrak{I}(Y, X)$ ومنه فإن:

$$\begin{aligned} (\hat{\beta} \cdot \hat{\alpha})(f)(Y)(u) &= (\hat{\beta}(\hat{\alpha}(f)(Y)(u))) = (F(u) \cdot f(X))(I_X) = \\ &= (f(Y) \cdot \hat{h}_X(u))(I_X) = f(Y)(u \cdot I_X) = f(Y)(u) \end{aligned}$$

وهذا يبين أن $\hat{\beta} \cdot \hat{\alpha}(f) = f$ وذلك $\forall f \in \text{Hom}(\hat{h}_X, F)$ وبالتالي $\hat{\beta} \cdot \hat{\alpha} = I_{\text{Hom}(\hat{h}_X, F)}$.
من جهة أخرى، لنبرهن أنه أياً كان $\zeta \in F(X)$ فإن $\hat{\alpha} \cdot \hat{\beta}(\zeta) = \zeta$ لدينا:

$$\hat{\beta}(\zeta) : \hat{h}_X \rightarrow F$$

ومنه $\hat{\beta}(\zeta)(X) : \hat{h}_X(X) \rightarrow F(X)$ ؛ وبالتالي فإن:

$$\hat{\beta}(\zeta)(X) : \mathfrak{I}(X, X) \rightarrow F(X)$$

$$\hat{\beta}(\zeta)(X)(I_X) \in F(X)$$

$$\hat{\beta}(\zeta)(X)(I_X) = F(I_X)(\zeta) = I_{F(X)}(\zeta) = \zeta$$

ومنه نجد أن $\hat{\alpha} \cdot \hat{\beta}(\zeta) = \hat{\alpha}(\hat{\beta}(\zeta)) = \hat{\beta}(\zeta)(X)(I_X) = \zeta$ وهذا يبين لنا أن $\hat{\alpha} \cdot \hat{\beta} = I_{F(X)}$. مما سبق نجد أن التطبيق α متباين وغامر .

مبرهنة ٢-٢-٧.

لتكن $\mathfrak{I}$ فئة، وليكن $Set's$ فئة المجموعات، وليكن $X, X' \in ob(\mathfrak{I})$. لنفرض أن

$$\hat{h}_X, \hat{h}_{X'} : \mathfrak{I} \rightarrow Set's \text{ الداليان غير المباشرين المعرفين في المبرهنة (٢-١-٢).}$$

عندئذ من أجل أي مورفيزم دالي $f : \hat{h}_X \rightarrow \hat{h}_{X'}$ يوجد مورفيزم وحيد $\mu \in \mathfrak{I}(X, X')$

يحقق $f(Y)(u) = \mu \cdot u$ وذلك أياً كان $Y \in ob(\mathfrak{I})$ و أياً كان $u \in \mathfrak{I}(Y, X)$.

فضلاً عن ذلك، يكون المورفيزم الدالي f إيزومورفيزماً عندما فقط عندما يكون المورفيزم μ إيزومورفيزماً.

البرهان.

ليكن $X, X' \in ob(\mathfrak{I})$ و $f : \hat{h}_X \rightarrow \hat{h}_{X'}$ مورفيزماً دالياً. حسب المبرهنة (٢-٢-٦) يوجد

تطبيق:

$$\hat{\alpha}: \text{Hom}(\hat{h}_X, \hat{h}_{X'}) \rightarrow \hat{h}_{X'}(X)$$

$$\cdot \hat{\alpha}: \text{Hom}(\hat{h}_X, \hat{h}_{X'}) \rightarrow \mathfrak{I}(X, X')$$

لنضع $\hat{\alpha}(f) = \mu$ فنجد أن $\mu: X \rightarrow X'$ هو مورفيزم للفئة $\mathfrak{I}$.
أيضاً حسب المبرهنة (٦-٢-٢) يوجد تطبيق:

$$\hat{\beta}: \hat{h}_{X'}(X) \rightarrow \text{Hom}(\hat{h}_X, \hat{h}_{X'})$$

$$\hat{\beta}: \mathfrak{I}(X, X') \rightarrow \text{Hom}(\hat{h}_X, \hat{h}_{X'})$$

بحيث $\hat{\beta} \cdot \hat{\alpha}(f) = \hat{\beta}(\hat{\alpha}(f)) = \hat{\beta}(\mu) = f$ ومنه $\hat{\beta} \cdot \hat{\alpha} = I_{\text{Hom}(\hat{h}_X, \hat{h}_{X'})}$ وبالتالي:
 $\forall Y \in \text{ob}(\mathfrak{I})$ ، فإن:

$$f(Y) = \hat{\beta}(\mu)(Y): \hat{h}_X(Y) \rightarrow \hat{h}_{X'}(Y)$$

$$f(Y): \mathfrak{I}(Y, X) \rightarrow \mathfrak{I}(Y, X')$$

ومنه أياً كان $u \in \mathfrak{I}(Y, X)$ ، فإن:

$$f(Y)(u) = (\hat{\beta}(\mu)(Y))(u) = \hat{h}_{X'}(u)(\mu) = \mu \cdot u$$

إن المورفيزم μ وحيد، لأنه إذا وجد مورفيزم آخر $\psi: X \rightarrow X'$ بحيث:

$$f(Y)(u) = \psi \cdot u \quad \forall Y \in \text{ob}(\mathfrak{I}) \text{ و أياً كان } u \in \mathfrak{I}(Y, X)$$

عندئذ فإنه من أجل $X = Y$ ومن أجل $u = I_X$ نجد أن:

$$f(X)(I_X) = \mu \cdot I_X = \mu; \quad f(X)(I_X) = \psi \cdot I_X = \psi$$

مما سبق نجد أن $\psi = \mu$.

لنقوم الشرط. لنفرض أن المورفيزم الدالي $f: \hat{h}_X \rightarrow \hat{h}_{X'}$ إيزومورفيزم عندئذ يوجد

مورفيزم دالي $g: \hat{h}_{X'} \rightarrow \hat{h}_X$ بحيث $g \cdot f = I_{\hat{h}_X}$ ، $f \cdot g = I_{\hat{h}_{X'}}$ وحسب المبرهنة (٢-٦-٢)

يوجد تطبيق:

$$\cdot \hat{\alpha}_1: \text{Hom}(\hat{h}_{X'}, \hat{h}_X) \rightarrow \hat{h}_X(X')$$

$$\cdot \hat{\alpha}_1: \text{Hom}(\hat{h}_{X'}, \hat{h}_X) \rightarrow \mathfrak{I}(X', X)$$

بما أن $g \in \text{Hom}(\hat{h}_{X'}, \hat{h}_X)$ ، لنفرض أن $\hat{\alpha}_1(g) = \mu'$ فنجد أن $\mu': X' \rightarrow X$ هو

مورفيزم للفئة $\mathfrak{I}$. وحسب ما تم إثباته أعلاه، فإن $g(Y)(u) = \mu' \cdot u$ وذلك أياً كان

$Y \in \text{ob}(\mathfrak{I})$ و أياً كان $u \in \mathfrak{I}(Y, X')$

من جهة أخرى، بما أن $g \cdot f = I_{\hat{h}_X}$ ، فإنه حسب المبرهنة (٦-٢-٢) يوجد تطبيق:

$$\hat{\alpha}_2 : \text{Hom}(\hat{h}_X, \hat{h}_X) \rightarrow \hat{h}_X(X)$$

$$\hat{\alpha}_2 : \text{Hom}(\hat{h}_X, \hat{h}_X) \rightarrow \mathfrak{I}(X, X)$$

وبما أن $g \cdot f = I_{\hat{h}_X} \in \text{Hom}(\hat{h}_X, \hat{h}_X)$ نجد أن:

$$\hat{\alpha}_2(g \cdot f) = \hat{\alpha}_2(I_{\hat{h}_X}) = I_{\hat{h}_X}(X)(I_X) = I_{\mathfrak{I}(X, X)}(I_X) = I_X$$

$$I_X = \hat{\alpha}_2(g \cdot f) = (g \cdot f)(X)(I_X) = (g(X) \cdot f(X))(I_X) =$$

$$= g(X)(f(X)(I_X)) = g(X)(\mu \cdot I_X) = g(X)(\mu) = \mu' \cdot \mu$$

وهذا يبين أن $\mu' \cdot \mu = I_X$

لنبرهن الآن على أن $\mu \cdot \mu' = I_{X'}$ بما أن $f \cdot g = I_{\hat{h}_{X'}}$ وحسب المبرهنة (٦-٢-٢)

يوجد تطبيق $\hat{\alpha}_0 : \text{Hom}(\hat{h}_{X'}, \hat{h}_{X'}) \rightarrow \hat{h}_{X'}(X')$ أي أن:

$$\hat{\alpha}_0 : \text{Hom}(\hat{h}_{X'}, \hat{h}_{X'}) \rightarrow \mathfrak{I}(X', X')$$

وبما أن $f \cdot g = I_{\hat{h}_{X'}} \in \text{Hom}(\hat{h}_{X'}, \hat{h}_{X'})$ نجد أن $\hat{\alpha}_0(f \cdot g) = \hat{\alpha}_0(I_{\hat{h}_{X'}})$ بما أن:

$$\hat{\alpha}_0(I_{\hat{h}_{X'}}) = I_{\hat{h}_{X'}}(X')(I_{X'})$$

$$I_{\hat{h}_{X'}} : \hat{h}_{X'} \rightarrow \hat{h}_{X'}$$

$$I_{\hat{h}_{X'}}(X') : \hat{h}_{X'}(X') \rightarrow \hat{h}_{X'}(X')$$

$$I_{\hat{h}_{X'}}(X') : \mathfrak{I}(X', X') \rightarrow \mathfrak{I}(X', X')$$

$$\hat{\alpha}_0(I_{\hat{h}_{X'}}) = I_{\hat{h}_{X'}}(X')(I_{X'}) = I_{X'}$$

وهكذا نجد أن:

$$I_{X'} = \hat{\alpha}_0(I_{\hat{h}_{X'}}) = \hat{\alpha}_0(f \cdot g) = (f \cdot g)(X')(I_{X'}) = (f(X') \cdot g(X'))(I_{X'}) =$$

$$= f(X')(g(X')(I_{X'})) = f(X')(\mu' \cdot I_{X'}) = f(X')(\mu') = \mu \cdot \mu'$$

أي إن $\mu \cdot \mu' = I_{X'}$ مما سبق نجد أن المورفيزم $\mu : X \rightarrow X'$ للفتة $\mathfrak{I}$ هو ايزومورفيزم للفتة $\mathfrak{I}$.

كفاية الشرط. لنفرض أن المورفيزم $\mu : X \rightarrow X'$ ايزومورفيزم للفتة $\mathfrak{I}$. عندئذ يوجد

مورفيزم $\mu' : X' \rightarrow X$ للفتة $\mathfrak{I}$ يحقق $\mu' \cdot \mu = I_X$ ، $\mu \cdot \mu' = I_{X'}$

لنعرف مورفيزماً دالياً $f': \hat{h}_{X'} \rightarrow \hat{h}_X$. حسب المبرهنة (٢-٢-٦) يوجد تطبيق متباين
وغامر :

$$\hat{\alpha}: \text{Hom}(\hat{h}_{X'}, \hat{h}_X) \rightarrow \hat{h}_X(X')$$

$$\hat{\alpha}: \text{Hom}(\hat{h}_{X'}, \hat{h}_X) \rightarrow \mathfrak{S}(X', X)$$

وبالتالي يوجد تطبيق:

$$\hat{\beta}: \hat{h}_X(X') \rightarrow \text{Hom}(\hat{h}_{X'}, \hat{h}_X)$$

$$\hat{\beta}: \mathfrak{S}(X', X) \rightarrow \text{Hom}(\hat{h}_{X'}, \hat{h}_X)$$

لنضع $f' = \hat{\beta}(\mu')$ فنجد أن $f': \hat{h}_{X'} \rightarrow \hat{h}_X$ مورفيزم دالي. وأنه أياً كان $Y \in \text{ob}(\mathfrak{S})$ فإن: $f'(Y) = \hat{\beta}(\mu')(Y)$ حيث:

$$f'(Y): \hat{h}_{X'}(Y) \rightarrow \hat{h}_X(Y)$$

$$f'(Y): \mathfrak{S}(Y, X') \rightarrow \mathfrak{S}(Y, X)$$

وأنه $\forall u \in \mathfrak{S}(Y, X')$ فإن:

$$f'(Y)(u) = (\hat{\beta}(\mu')(Y))(u) = \hat{\beta}(\mu')(Y)(u) = \hat{h}_X(u)(\mu') = \mu' \cdot u$$

لنبرهن على أن $f \cdot f' = I_{\hat{h}_{X'}}$.

أياً كان $Y \in \text{ob}(\mathfrak{S})$ فإن $f \cdot f'(Y) = f(Y) \cdot f'(Y)$ وأياً كان $u \in \mathfrak{S}(Y, X')$ فإن

$$\begin{aligned} (f(Y) \cdot f'(Y))(u) &= f(Y)(f'(Y)(u)) = f(Y)(\mu' \cdot u) = \mu \cdot (\mu' \cdot u) = \\ &= (\mu \cdot \mu') \cdot u = I_{X'} \cdot u = u \end{aligned}$$

وهذا يبين أن $f \cdot f' = I_{\hat{h}_{X'}}$ ومنه $f(Y) \cdot f'(Y) = I_{\mathfrak{S}(Y, X')} = I_{\hat{h}_X}$

كذلك الأمر، أياً كان $v \in \mathfrak{S}(Y, X)$ فإن:

$$\begin{aligned} (f'(Y) \cdot f(Y))(v) &= f'(Y)(f(Y)(v)) = f'(Y)(\mu \cdot v) = \mu' \cdot (\mu \cdot v) = \\ &= (\mu' \cdot \mu) \cdot v = I_X \cdot v = v \end{aligned}$$

وهذا يبين أن $f' \cdot f = I_{\hat{h}_X}$ ومنه $f'(Y) \cdot f(Y) = I_{\mathfrak{S}(Y, X)} = I_{\hat{h}_{X'}}(Y)$

مما سبق نجد أن المورفيزم الدالي f إيزومورفيزم.

٢-٣. فئة الدوال.

قبل البدء في دراسة الدوال لابد من التعرف إلى عدد من الخواص للدوال، وسوف نبدأ مع التمهيدية الآتية:

تمهيدية ٢-٣-١.

لتكن $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2$ فئتين. عندئذ:

- ١ - لأجل كل دالي مباشر $F: \mathfrak{S}_1 \rightarrow \mathfrak{S}_2$ يوجد مورفيزم دالي مطابق $I_F: F \rightarrow F$.
 - ٢ - لأجل كل دالي غير مباشر $F: \mathfrak{S}_1 \rightarrow \mathfrak{S}_2$ يوجد مورفيزم دالي مطابق $I_F: F \rightarrow F$.
- البرهان.

١ - ليكن $F: \mathfrak{S}_1 \rightarrow \mathfrak{S}_2$ دالياً مباشراً. لنعرف $I_F: F \rightarrow F$ بالشكل الآتي:

أيما كان $A \in ob(\mathfrak{S}_1)$ فإن $I_F(A) = I_{F(A)}: F(A) \rightarrow F(A)$ فنجد أن $I_F(A)$ مورفيزم للفئة $\mathfrak{S}_2$. كما أن $I_F(A)$ يحقق الشرط: أيما كان $A \in \mathfrak{S}_1(A, B)$ مورفيزم للفئة $\mathfrak{S}_1$ فإن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{I_F(A)} & F(A) \\ F(u) \downarrow & & \downarrow F(u) \\ F(B) & \xrightarrow{I_F(B)} & F(B) \end{array}$$

تبديلي، لأن:

$$F(u) \cdot I_F(A) = F(u) \cdot I_{F(A)} = F(u)$$

$$I_F(B) \cdot F(u) = I_{F(B)} \cdot F(u) = F(u)$$

ومنه نجد أن I_F مورفيزم دالي.

فضلاً عن ذلك، إذا كان $G: \mathfrak{S}_1 \rightarrow \mathfrak{S}_2$ دالياً مباشراً فإن I_F يحقق الشروط الآتية:

- لأجل أي مورفيزم دالي $f: F \rightarrow G$ فإن $f \cdot I_F = f$ لأنه أيما كان $A \in ob(\mathfrak{S}_1)$ ، فإن:

$$(f \cdot I_F)(A) = f(A) \cdot I_F(A) = f(A) \cdot I_{F(A)} = f(A)$$

ومنه $f \cdot I_F = f$.

- لأجل أي مورفيزم دالي $g: G \rightarrow F$ فإن $I_F \cdot g = g$ لأنه أيما كان $A \in ob(\mathfrak{S}_1)$ فإن:

$$(I_F \cdot g)(A) = I_F(A) \cdot g(A) = g(A) = g(A)$$

ومنه $I_F \cdot g = g$. مما سبق نجد أن I_F مورفيزم دالي مطابق.

٢ - يتم الإثبات بطريقة مشابهة.

تمهيدية ٢-٣-٢.

لتكن $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2$ فئتين، ولتكن $F, G, H : \mathfrak{S}_1 \rightarrow \mathfrak{S}_2$ دوال مباشرة. لنفرض أن $f : F \rightarrow G$

و $g : G \rightarrow H$ مورفيزمات دالية. عندئذ $g \cdot f : F \rightarrow H$ مورفيزم دالي.

البرهان.

لنفرض أن $f : F \rightarrow G$ و $g : G \rightarrow H$ مورفيزمات دالية، عندئذ أيأ كان $A \in ob(\mathfrak{S}_1)$

فإن كلاً من $g(A) : G(A) \rightarrow H(A)$ و $f(A) : F(A) \rightarrow G(A)$ هو مورفيزم للفئة $\mathfrak{S}_2$ ؛

وبالتالي فإن: $g(A) \cdot f(A) : F(A) \rightarrow H(A)$ مورفيزماً للفئة $\mathfrak{S}_2$.

لنعرف $g \cdot f : F \rightarrow H$ بالشكل الآتي: أيأ كان $A \in ob(\mathfrak{S}_1)$ ، فإن:

$$g \cdot f(A) = g(A) \cdot f(A) : F(A) \rightarrow H(A)$$

مورفيزم للفئة $\mathfrak{S}_2$.

ليكن $u : A \rightarrow B \in \mathfrak{S}_1(A, B)$ ولنبرهن على أن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{g \cdot f(A)} & H(A) \\ F(u) \downarrow & & \downarrow H(u) \\ F(B) & \xrightarrow{g \cdot f(B)} & H(B) \end{array}$$

تبدلي، أي إن: $H(u) \cdot (g \cdot f)(A) = (g \cdot f)(B) \cdot F(u)$.

بما أن كلاً من $f : F \rightarrow G$ و $g : G \rightarrow H$ مورفيزمات دالية فإن كلاً من المخططات

الآتية تبدلية:

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{f(A)} & G(A) \\ F(u) \downarrow & & \downarrow G(u) \\ F(B) & \xrightarrow{f(B)} & G(B) \end{array}$$

أي إن: $G(u) \cdot f(A) = f(B) \cdot F(u)$.

$$\begin{array}{ccc}
G(A) & \xrightarrow{g(A)} & H(A) \\
G(u) & \downarrow & \downarrow H(u) \\
G(B) & \xrightarrow{g(B)} & H(B)
\end{array}$$

أي إن $H(u) \cdot g(A) = g(B) \cdot G(u)$ ومنه نجد أن:

$$\begin{aligned}
H(u) \cdot (g \cdot f)(A) &= H(u) \cdot (g(A) \cdot f(A)) = (H(u) \cdot g(A)) \cdot f(A) = \\
&= (g(B) \cdot G(u)) \cdot f(A) = g(B) \cdot (G(u) \cdot f(A)) = g(B) \cdot (f(B) \cdot F(u)) = \\
&= (g(B) \cdot f(B)) \cdot F(u) = (g \cdot f(A)) \cdot F(u)
\end{aligned}$$

مما سبق نجد أن $g \cdot f : F \rightarrow H$ هو مورفيزم دالي.

تعريف.

لتكن $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ فئتين، ولتكن $F, G, H : \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$ دوال مباشرة. لنفرض أن $f : F \rightarrow G$ و $g : G \rightarrow H$ مورفيزمات دالية. وجدنا حسب التمهيدية (٢-٣-٢) أن $g \cdot f : F \rightarrow H$ مورفيزم دالي. نسمي العملية (.) المعرفة على المورفيزمات الدالية عملية تركيب المورفيزمات الدالية.

مبرهنة ٢-٣-٣.

لتكن $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ فئتين. لنفرض أن أشياء الفئة $\mathcal{S}_1$ مجموعات. لنشكل فئة جديدة نرمز لها $\text{Funct}(\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2)$ المؤلفة من:

١ - صف الأشياء. أشياء $\text{Funct}(\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2)$ جميع الدوال المباشرة الممكنة من الفئة $\mathcal{S}_1$ إلى الفئة $\mathcal{S}_2$.

٢ - صف المورفيزمات. أيأ كان $F, G \in \text{ob}(\text{Funct}(\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2))$ فإن $\text{Hom}(F, G)$ هي مجموعة كل المورفيزمات الدالية من الدالي F إلى الدالي G .

إن $\text{Funct}(\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2)$ تشكل فئة.

البرهان.

لتكن $f : F \rightarrow G, g : G \rightarrow H, h : H \rightarrow D$ مورفيزمات دالية حيث F, G, H هي دوال مباشرة من الفئة $\mathcal{S}_1$ إلى الفئة $\mathcal{S}_2$. وجدنا حسب التمهيدية (٢-٣-٢) أن عملية تركيب المورفيزمات الدالية معرفة وإن تركيب المورفيزمين الداليين f, g هو المورفيزم الدالي

لنبرهن أن هذه العملية تجميعية. أيأ كان $A \in ob(\mathfrak{S}_1)$ ، فإن:

$$((h \cdot g) \cdot f)(A) = (h \cdot g)(A) \cdot f(A) = (h(A) \cdot g(A)) \cdot f(A)$$

بما أن كلاً من $f(A), g(A), h(A)$ هي مورفيزمات للفئة $\mathfrak{S}_2$ وإن عملية تركيب المورفيزمات تجميعية نجد أن:

$$((h \cdot g) \cdot f)(A) = h(A) \cdot (g(A) \cdot f(A)) = h(A) \cdot ((g \cdot f)(A)) = (h \cdot (g \cdot f))(A)$$

ومنه نجد أن $(h \cdot g) \cdot f = h \cdot (g \cdot f)$.

أيضاً من أجل الدالي المباشر $F: \mathfrak{S}_1 \rightarrow \mathfrak{S}_2$ وجدنا حسب التمهيدية (٢-٣-١) أنه يوجد المورفيزم الدالي المطابق $I_F: F \rightarrow F$ الذي يحقق الشرط: لأجل أي مورفيزمين داليين $f: F \rightarrow G$ و $\lambda: D \rightarrow F$ فإن $f \cdot I_F = f, I_F \cdot \lambda = \lambda$ ، لأن $f \cdot I_F = f, I_F \cdot \lambda = \lambda$ ، $A \in ob(\mathfrak{S}_1)$ فإن:

$$(f \cdot I_F)(A) = f(A) \cdot I_F(A) = f(A) \cdot I_{F(A)} = f(A)$$

$$(I_F \cdot \lambda)(A) = I_F(A) \cdot \lambda(A) = I_{F(A)} \cdot \lambda(A) = \lambda(A)$$

أي إن $f \cdot I_F = f, I_F \cdot \lambda = \lambda$. مما سبق نجد أن $Funct(\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2)$ تشكل فئة.

مبرهنة ٢-٣-٤.

لتكن فئة $\mathfrak{S}$ ، ولنفرض أن الفئة $\mathfrak{S}_F = Funct(\mathfrak{S}, Set's)$ معرفة، عندئذ يوجد دالي غير مباشر:

$$h: \mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{S}_F = Funct(\mathfrak{S}, Set's)$$

معرف بالشكل الآتي: أيأ كان $A \in ob(\mathfrak{S})$ فإن $h(A) = h_A$ حيث $h_A: \mathfrak{S} \rightarrow Set's$ هو الدالي المباشر المعرف من خلال المبرهنة (٢-١-٢).

البرهان.

نلاحظ أولاً أن $h: ob(\mathfrak{S}) \rightarrow ob(\mathfrak{S}_F)$ المعرف بالشكل الآتي: أيأ كان $A \in ob(\mathfrak{S})$ فإن:

$h(A) = h_A$ هو تطبيق، لأنه إذا كان $A_1, A_2 \in ob(\mathfrak{S})$ ، وإن $A_1 = A_2$ فإن:

$h_{A_1}, h_{A_2}: \mathfrak{S} \rightarrow Set's$ هي دوال مباشرة وإنه أيأ كان $X \in ob(\mathfrak{S})$ ، فإن:

$$h_{A_1}(X) = \mathfrak{S}(A_1, X) = \mathfrak{S}(A_2, X) = h_{A_2}(X)$$

ومنه: $h(A_1) = h_{A_1} = h_{A_2} = h(A_2)$.

لنبرهن على وجود التطبيق $h: Mor(\mathfrak{S}) \rightarrow Mor(\mathfrak{S}_F)$. نعلم أن مورفيزمات الفئة $Funct(\mathfrak{S}, Set's)$ هي المورفيزمات الدالية $f: F \rightarrow G$ حيث $F, G: \mathfrak{S} \rightarrow Set's$ هي دوال مباشرة.

ليكن $w: A \rightarrow B$ حيث $A, B \in ob(\mathfrak{S})$ مورفيزم للفئة $\mathfrak{S}$ ، حسب التمهيدية (٢-٢-١)، فإنه يوجد مورفيزم دالي $f_w: h_A \rightarrow h_B$ حيث $f_w: h_A \rightarrow h_B$ دوال مباشرة. لنضع $h_{A,B}: \mathfrak{S}(A, B) \rightarrow \mathfrak{S}_F(h_B, h_A)$ وأن $h_{A,B}(w) = h_w$ عندئذ أيًا كان $Y \in ob(\mathfrak{S})$ فإن $h_w(Y): h_B(Y) \rightarrow h_A(Y)$ أي إن $h_w(Y): \mathfrak{S}(B, Y) \rightarrow \mathfrak{S}(A, Y)$ ومنه أيًا كان $u \in \mathfrak{S}(B, Y)$ فإن $h_w(Y)(u) = u \cdot w \in \mathfrak{S}(A, Y)$

إن $h_{A,B}$ تطبيق، لأنه إذا كان $\mathfrak{S}(A, B)$ $w_1, w_2: A \rightarrow B$ بحيث $w_1 = w_2$ فإن:

$$h_{w_1}(Y), h_{w_2}(Y): h_B(Y) \rightarrow h_A(Y)$$

$$h_{w_1}(Y), h_{w_2}(Y): \mathfrak{S}(B, Y) \rightarrow \mathfrak{S}(A, Y)$$

وأنه أيًا كان $u \in \mathfrak{S}(B, Y)$ فإن $h_{w_1}(Y)(u) = u \cdot w_1 = u \cdot w_2 = h_{w_2}(Y)(u)$ وهذا يبين أن $h_{w_1} = h_{w_2}$ أي إن $h_{A,B}(w_1) = h_{A,B}(w_2)$.

ليكن $A \in ob(\mathfrak{S})$ ولنبرهن على أن $h(I_A) = I_{h_A}$. لدينا حسب تعريف h أن $h(I_A) = h_{I_A}$ مورفيزم دالي، ومنه أيًا كان $Y \in ob(\mathfrak{S})$ فإن $h_{I_A}(Y): h_A(Y) \rightarrow h_A(Y)$ أي إن:

$$h_{I_A}(Y): \mathfrak{S}(A, Y) \rightarrow \mathfrak{S}(A, Y)$$

ومنه أيًا كان $u \in \mathfrak{S}(A, Y)$ فإن $h_{I_A}(Y)(u) = u \cdot I_A = u$ أي إن $h_{I_A}(Y) = I_{h_A}(Y)$ وبالتالي يكون $h_{I_A} = I_{h_A}$.

ليكن $\alpha: A \rightarrow B, \beta: B \rightarrow D$ مورفيزمات للفئة $\mathfrak{S}$ ، لنبرهن أن $h(\beta \cdot \alpha) = h(\alpha) \cdot h(\beta)$ لما كان $\beta \cdot \alpha: A \rightarrow D \in \mathfrak{S}(A, D)$ فإن:

$$h_{\beta \cdot \alpha}: \mathfrak{S}(A, D) \rightarrow \mathfrak{S}_F(h_D, h_A)$$

حيث $h_A, h_D: \mathfrak{S} \rightarrow Set's$ دوال مباشرة. كما إن $h_{\beta \cdot \alpha}: h_D \rightarrow h_A$ دوال مباشرة. $h_{\beta \cdot \alpha}(\beta \cdot \alpha) = h_{\beta \cdot \alpha}$ مورفيزم دالي. ومنه أيًا كان $Y \in ob(\mathfrak{S})$ فإن:

$$h_{\beta \cdot \alpha}(Y): h_D(Y) \rightarrow h_A(Y)$$

$$h_{\beta \cdot \alpha}(Y): \mathfrak{S}(D, Y) \rightarrow \mathfrak{S}(A, Y)$$

وإنه أياً كان $u \in \mathfrak{S}(D, Y)$ فإن $h_{\beta \cdot \alpha}(Y)(u) = u \cdot (\beta \cdot \alpha) = (u \cdot \beta) \cdot \alpha$ ولما كان

$$\alpha: A \rightarrow B \text{ فإن } h_{A,B}: \mathfrak{S}(A, B) \rightarrow \mathfrak{S}_F(h_B, h_A) \text{ وإن:}$$

$$h_{A,B}(\alpha) = h_\alpha: h_B \rightarrow h_A$$

ومنه أياً كان $Y \in ob(\mathfrak{S})$ فإن $h_\alpha(Y): h_B(Y) \rightarrow h_A(Y)$ أي إن:

$$h_\alpha(Y): \mathfrak{S}(B, Y) \rightarrow \mathfrak{S}(A, Y)$$

ولما كان $u \cdot \beta \in \mathfrak{S}(B, Y)$ نجد أن $h_\alpha(Y)(u \cdot \beta) = (u \cdot \beta) \cdot \alpha$ أيضاً لما كان

$$\alpha: A \rightarrow B \text{ فإن } h_{B,D}: \mathfrak{S}(B, D) \rightarrow \mathfrak{S}_F(h_D, h_B) \text{ أي إن } h_{B,D}(\beta) = h_\beta: h_D \rightarrow h_B$$

ومنه لأجل كل $Y \in ob(\mathfrak{S})$ فإن $h_\beta(Y): h_D(Y) \rightarrow h_B(Y)$ وبالتالي:

$$h_\beta(Y): \mathfrak{S}(D, Y) \rightarrow \mathfrak{S}(B, Y)$$

ولما كان $u \in \mathfrak{S}(D, Y)$ نجد أن $h_\beta(Y)(u) = u \cdot \beta$ وهكذا نجد أن:

$$h_{\beta \cdot \alpha}(Y)(u) = (u \cdot \beta) \cdot \alpha = h_\alpha(Y)(u \cdot \beta) = h_\alpha(Y)(h_\beta(Y)(u)) = (h_\alpha(Y) \cdot h_\beta(Y))(u)$$

ومنه نجد أن $h_{\beta \cdot \alpha}(Y) = h_\alpha(Y) \cdot h_\beta(Y) = (h_\alpha \cdot h_\beta)(Y)$ أي إن $h_{\beta \cdot \alpha} = h_\alpha \cdot h_\beta$ ومنه

يكون $h(\beta \cdot \alpha) = h(\alpha) \cdot h(\beta)$ وهكذا نجد أن h هو دالي غير مباشر.

مبرهنة ٢-٣-٥.

لتكن $\mathfrak{S}$ فئة، وإن $\mathfrak{S}^\circ$ الفئة التثوية للفئة $\mathfrak{S}$ ولنفرض أن الفئة $\mathfrak{S}^\circ = \text{Funct}(\mathfrak{S}^\circ, \text{Set's})$

معرفة، عندئذ يوجد دالي مباشر:

$$\hat{h}: \mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{S}^\circ = \text{Funct}(\mathfrak{S}^\circ, \text{Set's})$$

معرف بالشكل الآتي: أياً كان $A \in ob(\mathfrak{S})$ فإن $\hat{h}(A) = \hat{h}_A$ حيث $\hat{h}_A: \mathfrak{S}^\circ \rightarrow \text{Set's}$

هو الدالي غير المباشر المعرف من خلال التمرين المحلول (٦-٢).

البرهان.

نلاحظ أولاً: أن $\hat{h}: ob(\mathfrak{S}) \rightarrow ob(\mathfrak{S}^\circ)$ المعرف بالشكل الآتي: أياً كان $A \in ob(\mathfrak{S})$ فإن

$\hat{h}(A) = \hat{h}_A$ هو تطبيق، لأنه إذا كان $A_1, A_2 \in ob(\mathfrak{S})$ وإن $A_1 = A_2$ فإن:

$\hat{h}_{A_1}, \hat{h}_{A_2}: \mathfrak{S}^\circ \rightarrow \text{Set's}$ هي دوال غير مباشرة وذلك حسب التمرين المحلول (٦-٢)

وإنه أياً كان $X \in ob(\mathfrak{S}^\circ)$ فإن:

$$\hat{h}_{A_1}(X) = \mathfrak{S}^\circ(X, A_1) = \mathfrak{S}^\circ(X, A_2) = \hat{h}_{A_2}(X)$$

ومنه: $\hat{h}(A_1) = \hat{h}_{A_1} = \hat{h}_{A_2} = \hat{h}(A_2)$.

لنبرهن على وجود التطبيق $\hat{h}: Mor(\mathfrak{S}) \rightarrow Mor(\mathfrak{S}_F^o)$. نعلم أن مورفيزمات الفئة $Funct(\mathfrak{S}^o, Set's)$ هي المورفيزمات الدالية $g: F \rightarrow G$ حيث $F, G: \mathfrak{S}^o \rightarrow Set's$ هي دوال غير مباشرة، أي إن $F, G \in Mor(\mathfrak{S}_F^o)$.
ليكن $w: A \rightarrow B$ حيث $A, B \in ob(\mathfrak{S})$ مورفيزم للفئة $\mathfrak{S}$ ، عندئذ حسب التمثيلية (٢-٢-٢-١) يوجد مورفيزم دالي $\hat{h}_w: \hat{h}_A \rightarrow \hat{h}_B$ حيث $\hat{h}_w: \hat{h}_A \rightarrow \hat{h}_B$ دوال غير مباشرة.
لنضع:

$$\hat{h}_{A,B}: \mathfrak{S}^o(A, B) \rightarrow \mathfrak{S}_F^o(\hat{h}_A, \hat{h}_B)$$

وإن $\hat{h}_{A,B}(w) = \hat{h}_w$ عندئذ أيضاً كان $Y \in ob(\mathfrak{S}^o)$ ، فإن $\hat{h}_w(Y): \hat{h}_A(Y) \rightarrow \hat{h}_B(Y)$ أي $\hat{h}_w(Y): \mathfrak{S}^o(Y, A) \rightarrow \mathfrak{S}^o(Y, B)$ ومنه أيضاً كان $v \in \mathfrak{S}^o(Y, A)$ ، فإن:
 $\hat{h}_w(Y)(v) = w \cdot v \in \mathfrak{S}^o(Y, B)$
إن $\hat{h}_{A,B}$ تطبيق، لأنه إذا كان $w_1, w_2: A \rightarrow B \in \mathfrak{S}(A, B)$ بحيث، $w_1 = w_2$ فإن:

$$\begin{aligned} \hat{h}_{w_1}(Y), \hat{h}_{w_2}(Y): \hat{h}_A(Y) &\rightarrow \hat{h}_B(Y) \\ \hat{h}_{w_1}(Y), \hat{h}_{w_2}(Y): \mathfrak{S}^o(Y, A) &\rightarrow \mathfrak{S}^o(Y, B) \end{aligned}$$

وإنه أيضاً كان $v \in \mathfrak{S}^o(Y, A)$ ، فإن:

$$\hat{h}_{w_1}(Y)(v) = w_1 \cdot v = w_2 \cdot v = \hat{h}_{w_2}(Y)(v)$$

وهذا يبين أن $\hat{h}_{w_1} = \hat{h}_{w_2}$ أي إن $\hat{h}_{A,B}(w_1) = \hat{h}_{A,B}(w_2)$.

ليكن $A \in ob(\mathfrak{S})$ ولنبرهن على أن $\hat{h}(I_A) = I_{\hat{h}_A}$. لدينا حسب تعريف $\hat{h}$ أن $\hat{h}(I_A) = \hat{h}_{I_A}$ أي إن $\hat{h}_{I_A}(Y): \hat{h}_A(Y) \rightarrow \hat{h}_A(Y)$ فإن $Y \in ob(\mathfrak{S}^o)$ ومنه أيضاً كان $u \in \mathfrak{S}^o(Y, A)$ ، فإن $\hat{h}_{I_A}(Y)(u) = I_A \cdot u = u$ أي إن $\hat{h}_{I_A}(Y) = I_{\hat{h}_A}(Y)$ وبالتالي يكون $\hat{h}_{I_A} = I_{\hat{h}_A}$.

ليكن $\alpha: A \rightarrow B, \beta: B \rightarrow D$ مورفيزمات للفئة $\mathfrak{S}$ ، لنبرهن أن $\hat{h}(\beta \cdot \alpha) = \hat{h}(\beta) \cdot \hat{h}(\alpha)$.
لما كان $\beta \cdot \alpha: A \rightarrow D \in \mathfrak{S}(A, D)$ فإن $\hat{h}_{\beta \cdot \alpha}: \mathfrak{S}^o(A, D) \rightarrow \mathfrak{S}_F^o(\hat{h}_A, \hat{h}_D)$ حيث $\hat{h}_{\beta \cdot \alpha}: \mathfrak{S}^o(A, D) \rightarrow \mathfrak{S}_F^o(\hat{h}_A, \hat{h}_D)$ دوال غير مباشرة، كما أن $\hat{h}_\beta, \hat{h}_\alpha: \mathfrak{S}^o \rightarrow Set's$

مورفيزم دالي. ومنه أياً كان $Y \in ob(\mathfrak{S}^o)$ ، فإن $\hat{h}_{\beta\alpha}(Y): \hat{h}_A(Y) \rightarrow \hat{h}_D(Y)$ فإن أي إن:

$$\hat{h}_{\beta\alpha}(Y): \mathfrak{S}^o(Y, A) \rightarrow \mathfrak{S}^o(Y, D)$$

وإنه أياً كان $u \in \mathfrak{S}^o(Y, A)$ ، فإن $\hat{h}_{\beta\alpha}(Y)(u) = (\beta \cdot \alpha) \cdot u = \beta \cdot (\alpha \cdot u)$

ولما كان $\beta: B \rightarrow D$ فإن $\hat{h}_{\beta\alpha}(Y): \mathfrak{S}^o(Y, B) \rightarrow \mathfrak{S}^o(Y, D)$ وإن:

$$\hat{h}_{\beta\alpha}(Y)(\beta) = \hat{h}_\beta: \hat{h}_B \rightarrow \hat{h}_D$$

ومنه أياً كان $Y \in ob(\mathfrak{S}^o)$ ، فإن $\hat{h}_\beta(Y): \hat{h}_B(Y) \rightarrow \hat{h}_D(Y)$ فإن أي إن:

$$\hat{h}_\beta(Y): \mathfrak{S}^o(Y, B) \rightarrow \mathfrak{S}^o(Y, D)$$

ولما كان $\alpha \cdot u \in \mathfrak{S}^o(Y, B)$ نجد أن $\hat{h}_\beta(Y)(\alpha \cdot u) = \beta \cdot (\alpha \cdot u)$

أيضاً لما كان $\alpha: A \rightarrow B$ ، فإن $\hat{h}_{\alpha\beta}(Y) = \hat{h}_\alpha: \hat{h}_A \rightarrow \hat{h}_B$ ومنه لأجل $Y \in ob(\mathfrak{S}^o)$ فإن:

$$\hat{h}_\alpha(Y): \hat{h}_A(Y) \rightarrow \hat{h}_B(Y)$$

$$\hat{h}_\alpha(Y): \mathfrak{S}^o(Y, A) \rightarrow \mathfrak{S}^o(Y, B)$$

ولما كان $u \in \mathfrak{S}^o(Y, A)$ ، نجد أن $\hat{h}_\alpha(Y)(u) = \alpha \cdot u$ وهكذا نجد أن:

$$\begin{aligned} \hat{h}_{\beta\alpha}(Y)(u) &= \beta \cdot (\alpha \cdot u) = \hat{h}_\beta(Y)(\alpha \cdot u) = \hat{h}_\beta(Y) \cdot (\hat{h}_\alpha(Y)(u)) = \\ &= (\hat{h}_\beta(Y) \cdot \hat{h}_\alpha(Y))(u) \end{aligned}$$

ومنه نجد أن $\hat{h}_{\beta\alpha} = \hat{h}_\beta \cdot \hat{h}_\alpha$ أي إن $\hat{h}_{\beta\alpha}(Y) = \hat{h}_\beta(Y) \cdot \hat{h}_\alpha(Y) = (\hat{h}_\beta \cdot \hat{h}_\alpha)(Y)$ ومنه

يكون $h(\beta \cdot \alpha) = h(\alpha) \cdot h(\beta)$ وهكذا نجد أن h هو دالي مباشر.

تمارين محلولة (٢)

١ - لتكن $\mathfrak{K}, \mathfrak{L}$ فئتين. وليكن $F: \mathfrak{K} \rightarrow \mathfrak{L}$ دالياً مباشراً من الفئة $\mathfrak{K}$ إلى الفئة $\mathfrak{L}$ ، ولنفرض أن $\mathfrak{K}^o, \mathfrak{L}^o$ الفئات الثنوية للفئات $\mathfrak{K}, \mathfrak{L}$ على الترتيب. عندئذ يوجد:

١ - دالي غير مباشر $G: \mathfrak{K}^o \rightarrow \mathfrak{L}^o$ من الفئة $\mathfrak{K}^o$ إلى الفئة $\mathfrak{L}^o$.

٢ - دالي غير مباشر $H: \mathfrak{K} \rightarrow \mathfrak{L}^o$ من الفئة $\mathfrak{K}$ إلى الفئة $\mathfrak{L}^o$.

الحل.

ليكن $F: \mathfrak{K} \rightarrow \mathfrak{L}$ دالياً مباشراً.

١ - بما أن F دالي، فإنه يوجد تطبيق $F: ob(\mathfrak{K}) \rightarrow ob(\mathfrak{L})$ بحيث $\forall A \in ob(\mathfrak{K})$ فإن

$F(A) \in ob(\mathfrak{L})$ ولكون $ob(\mathfrak{K}^o) = ob(\mathfrak{K})$ عندئذ $F: ob(\mathfrak{K}^o) \rightarrow ob(\mathfrak{L})$ هو تطبيق

لنرمز له $G: ob(\mathfrak{K}^o) \rightarrow ob(\mathfrak{L})$ ، عندئذ $\forall A \in ob(\mathfrak{K}^o)$ فإن $G(A) = F(A)$.

أيضاً بما أن الدالي F مباشر فإنه $\forall A, B \in ob(\mathfrak{K})$ ، يوجد تطبيق:

$$F: \mathfrak{K}(A, B) \rightarrow \mathfrak{L}(F(A), F(B))$$

وبما أن $\mathfrak{K}(A, B) = \mathfrak{K}^o(B, A)$ نجد أن $F: \mathfrak{K}^o(B, A) \rightarrow \mathfrak{L}(F(A), F(B))$ هو أيضاً

تطبيق، لنرمز له:

$$G: \mathfrak{K}^o(B, A) \rightarrow \mathfrak{L}(F(A), F(B)) = \mathfrak{L}(G(A), G(B))$$

ويحقق $\forall f \in \mathfrak{K}^o(B, A)$ فإن $G(f) = F(f)$. كما أنه $\forall A \in ob(\mathfrak{K}^o)$ ، فإن:

$$G(I_A) = F(I_A) = I_{F(A)} = I_{G(A)}$$

وإنه $\forall f \in \mathfrak{K}^o(A, B), g \in \mathfrak{K}^o(B, D)$ فإن $g \cdot f \in \mathfrak{K}^o(A, D)$ وأن:

$$G(g \cdot f) = F(f \cdot g) = F(f) \cdot F(g) = G(f) \cdot G(g)$$

مما سبق نجد أن $G: \mathfrak{K}^o \rightarrow \mathfrak{L}$ هو دالي غير مباشر.

٢ - بما أن F دالي، فإنه يوجد تطبيق $F: ob(\mathfrak{K}) \rightarrow ob(\mathfrak{L})$ بحيث $\forall A \in ob(\mathfrak{K})$ فإن

$F(A) \in ob(\mathfrak{L})$ ، ولكون $ob(\mathfrak{L}^o) = ob(\mathfrak{L})$ عندئذ $F: ob(\mathfrak{K}) \rightarrow ob(\mathfrak{L}^o)$ هو

تطبيق لنرمز له $H: ob(\mathfrak{K}) \rightarrow ob(\mathfrak{L}^o)$ ، عندئذ $\forall A \in ob(\mathfrak{K})$ فإن $H(A) = F(A)$.

أيضاً بما أن الدالي F مباشر فإنه $\forall A, B \in ob(\mathfrak{K})$ ، يوجد تطبيق:

$$F : \mathfrak{K}(A, B) \rightarrow \mathfrak{S}(F(A), F(B))$$

وبما أن $\mathfrak{S}(F(A), F(B)) = \mathfrak{S}^o(F(B), F(A))$ نجد أن:

$$F : \mathfrak{K}(A, B) \rightarrow \mathfrak{S}^o(F(B), F(A))$$

هو أيضاً تطبيق، لنرمز له:

$$H : \mathfrak{K}(A, B) \rightarrow \mathfrak{S}^o(F(B), F(A)) = \mathfrak{S}^o(H(B), H(A))$$

ويحقق $\forall f \in \mathfrak{K}(A, B)$ فإن $H(f) = F(f)$. كما أنه $\forall A \in ob(\mathfrak{K})$ فإن:

$$H(I_A) = F(I_A) = I_{F(A)} = I_{H(A)}$$

وأنه $\forall f \in \mathfrak{K}(A, B), g \in \mathfrak{K}(B, D)$ فإن $g \cdot f \in \mathfrak{K}(A, D)$ وإن:

$$H(g \cdot f) = F(f \cdot g) = F(g) \cdot F(f) = H(g) \cdot H(f)$$

وهذا يبين أن $H : \mathfrak{K} \rightarrow \mathfrak{S}^o$ هو دالي مباشر.

٢ - لتكن $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2$ فئتين، و $F_1, F_2, F_3 : \mathfrak{S}_1 \rightarrow \mathfrak{S}_2$ دوالاً غير مباشرة. إذا كان $f : F_1 \rightarrow F_2$ و $g : F_2 \rightarrow F_3$ مورفيزمات دالية، عندئذ، فإن $g \cdot f : F_1 \rightarrow F_3$ مورفيزم دالي.

الحل.

نفرض أن $f : F_1 \rightarrow F_2$ و $g : F_2 \rightarrow F_3$ مورفيزمات دالية، عندئذ أياً كان $A \in ob(\mathfrak{S}_1)$ فإن كلاً من $f(A) : F_1(A) \rightarrow F_2(A)$ و $g(A) : F_2(A) \rightarrow F_3(A)$ مورفيزم للفئة $\mathfrak{S}_2$ ومنه فإن $g(A) \cdot f(A) : F_1(A) \rightarrow F_3(A)$ مورفيزم للفئة $\mathfrak{S}_2$.

لنعرف $g \cdot f : F_1 \rightarrow F_3$ بالشكل الآتي: أياً كان $A \in ob(\mathfrak{S}_1)$ ، فإن:

$$(g \cdot f)(A) = g(A) \cdot f(A) : F_1(A) \rightarrow F_3(A)$$

هو مورفيزم للفئة $\mathfrak{S}_2$.

ليكن $u : A \rightarrow B$ مورفيزم للفئة $\mathfrak{S}_1$ ولنبرهن على أن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccccc} F_1(A) & \xrightarrow{g \cdot f(A)} & F_3(A) & & \\ F_1(u) & \uparrow & \uparrow & F_3(u) & \\ F_1(B) & \xrightarrow{g \cdot f(B)} & F_3(B) & & \end{array}$$

تبديلي، أي إن: $F_3(u) \cdot (g \cdot f)(B) = (g \cdot f)(A) \cdot F_1(u)$.
 بما أن كلاً من $g: F_2 \rightarrow F_3$ و $f: F_1 \rightarrow F_2$ مورفيزمات دالية، فإن كلاً من المخططات
 الآتية تبديلي:

$$\begin{array}{ccc} F_1(A) & \xrightarrow{f(A)} & F_2(A) \\ F_1(u) \uparrow & & \uparrow F_2(u) \end{array}$$

$$F_1(B) \xrightarrow{f(B)} F_2(B)$$

$$\text{أي إن: } F_2(u) \cdot f(B) = f(A) \cdot F_1(u)$$

$$\begin{array}{ccc} F_2(A) & \xrightarrow{g(A)} & F_3(A) \\ F_2(u) \uparrow & & \uparrow F_3(u) \end{array}$$

$$F_2(B) \xrightarrow{g(B)} F_3(B)$$

$$\text{أي إن: } F_3(u) \cdot g(B) = g(A) \cdot F_2(u) \text{ ومنه نجد أن:}$$

$$\begin{aligned} F_3(u) \cdot (g \cdot f)(B) &= F_3(u) \cdot (g(B) \cdot f(B)) = (F_3(u) \cdot g(B)) \cdot f(B) = \\ &= (F_3(u) \cdot g(B)) \cdot f(B) = (g(A) \cdot F_2(u)) \cdot f(B) = g(A) \cdot (F_2(u) \cdot f(B)) = \\ &= g(A) \cdot (f(A) \cdot F_1(u)) = (g(A) \cdot f(A)) \cdot F_1(u) = (g \cdot f)(A) \cdot F_1(u) \end{aligned}$$

مما سبق نجد أن $g \cdot f: F_1 \rightarrow F_3$ مورفيزم دالي.

٣ - لنكن $\mathcal{S}$ فئة، و $A, B \in ob(\mathcal{S})$. لنفرض أن $\mathcal{S}_2$ هي الفئة ثنائية الشيء المؤلفة من
 الأشياء X, Y والمورفيزمات $v: X \rightarrow Y$ ، فضلاً عن I_X, I_Y .
 أثبت أن $F: \mathcal{S}_2 \rightarrow \mathcal{S}$ المعرف بالشكل $F(X) = A, F(Y) = B$ هو دالي مباشر.
 الحل.

واضح أن $F: ob(\mathcal{S}_2) \rightarrow ob(\mathcal{S})$ المعرف بالشكل $F(X) = A, F(Y) = B$ هو تطبيق.

كما أن $F(v): F(X) = A \rightarrow F(Y) = B$ مورفيزم للفئة $\mathcal{S}$ ، وإن:

$$F(I_X): F(X) \rightarrow F(X)$$

$$F(I_X): A \rightarrow A = I_A = I_{F(X)}$$

وأيضاً $F(I_Y) = I_{F(Y)}$ ، وهذا يبين أن F هو دالي مباشر.

٤ - لنكن $\mathcal{S}$ فئة و $A, B, D \in ob(\mathcal{S})$. لنفرض أن $\mathcal{S}_3$ هي الفئة ثلاثية الشيء المؤلفة
 من الأشياء X, Y, Z والمورفيزمات $v: X \rightarrow Y, u: Z \rightarrow Y$ ، فضلاً عن I_X, I_Y, I_Z .

أثبت أن $F: \mathfrak{S}_3 \rightarrow \mathfrak{S}$ المعرف بالشكل $F(X) = A, F(Y) = B, F(Z) = D$ هو دالي مباشر .

الحل.

واضح أن $F: ob(\mathfrak{S}_3) \rightarrow ob(\mathfrak{S})$ المعرف بالشكل $F(X) = A, F(Y) = B, F(Z) = D$ هو تطبيق. كما أن:

$$F(v): F(X) = A \rightarrow F(Y) = B$$

$$F(u): F(Z) = D \rightarrow F(Y) = B$$

مورفيزمات للفئة $\mathfrak{S}$ ، وإن:

$$F(I_X): F(X) \rightarrow F(X)$$

$$F(I_X): A \rightarrow A = I_A = I_{F(X)}$$

وأيضاً $F(I_Y) = I_{F(Y)}$ ، $F(I_Z) = I_{F(Z)}$ ، وهذا يبين أن F هو دالي مباشر .

٥ - لتكن $\mathfrak{S}$ فئة، ولتكن $\mathfrak{S}^o$ الفئة الثتوية للفئة $\mathfrak{S}$ و $Set's$ فئة المجموعات. عندئذ

لأجل كل $X \in ob(\mathfrak{S})$ يوجد: دالي مباشر (موافق للتغير) $h_X: \mathfrak{S}^o \rightarrow Set's$.

الحل.

ليكن $X \in ob(\mathfrak{S})$. لنبرهن على أنه يوجد دالي مباشر $h_X: \mathfrak{S}^o \rightarrow Set's$. لنعرف:

$$h_X: ob(\mathfrak{S}^o) \rightarrow ob(Set's)$$

بالشكل الآتي: أياً كان $A \in ob(\mathfrak{S}^o) = ob(\mathfrak{S})$ فإن $A \in ob(Set's)$ فإن $h_X(A) = \mathfrak{S}^o(X, A)$

واضح أن h_X تطبيق. لأنه إذا كان $A_1, A_2 \in ob(\mathfrak{S}^o)$ بحيث $A_1 = A_2$ ، فإن:

$$h_X(A_1) = \mathfrak{S}^o(X, A_1) = \mathfrak{S}^o(X, A_2) = h_X(A_2)$$

لنعرف $h_X: Mor(\mathfrak{S}^o) \rightarrow Mor(Set's)$ بالشكل الآتي:

لأجل أي مورفيزم $u: A \rightarrow B \in \mathfrak{S}^o(A, B)$ ، فإن $h_X(u): h_X(A) \rightarrow h_X(B)$ أي إن:

$$h_X(u): \mathfrak{S}^o(X, A) \rightarrow \mathfrak{S}^o(X, B)$$

وأياً كان $\alpha \in \mathfrak{S}^o(X, A)$ فإن $h_X(u)(\alpha) = u \cdot \alpha \in \mathfrak{S}^o(X, B)$ فنجد أن h_X تطبيق

لأنه إذا كان $u_1, u_2 \in \mathfrak{S}^o(A, B)$ فإن $h_X(u_1), h_X(u_2): \mathfrak{S}^o(X, A) \rightarrow \mathfrak{S}^o(X, B)$ وأنه

أياً كان $\alpha \in \mathfrak{S}^o(X, A)$ فإن $h_X(u_1)(\alpha) = u_1 \cdot \alpha = u_2 \cdot \alpha = h_X(u_2)(\alpha)$ ومنه فإن

$$h_X(u_1) = h_X(u_2): \mathfrak{S}^o(X, A) \rightarrow \mathfrak{S}^o(X, B)$$

ليكن $A \in \text{ob}(\mathfrak{S}^o)$ عندئذ فإن $h_X(I_A): h_X(A) = \mathfrak{S}^o(X, A) \rightarrow h_X(A) = \mathfrak{S}^o(X, A)$ أي إن ومنه أيًا كان $v \in \mathfrak{S}^o(X, A)$ فإن $h_X(I_A)(v) = I_A \cdot v = v$ لنبرهن

$$\cdot h_X(I_A) = I_{\mathfrak{S}^o(X, A)} = I_{h_X(A)}$$

ليكن $\alpha: A \rightarrow B, \beta: B \rightarrow D$ مورفيزمات للفئة $\mathfrak{S}^o$ عندئذ $\beta \cdot \alpha: A \rightarrow D$ لنبرهن على أن $h_X(\beta \cdot \alpha): h_X(A) \rightarrow h_X(D)$ إن $h_X(\beta \cdot \alpha) = h_X(\beta) \cdot h_X(\alpha)$ أي إن $h_X(\beta \cdot \alpha): \mathfrak{S}^o(X, A) \rightarrow \mathfrak{S}^o(X, D)$ ومنه أيًا كان $w: X \rightarrow A \in \mathfrak{S}^o(X, A)$ فإن:

$$\cdot h_X(\beta \cdot \alpha)(w) = (\beta \cdot \alpha) \cdot w = \beta \cdot (\alpha \cdot w)$$

لما كان $\alpha \cdot w: X \rightarrow B \in \mathfrak{S}^o(X, B)$ وإن $h_X(\beta): h_X(B) \rightarrow h_X(D)$ فإن $h_X(\beta)(\alpha \cdot w) = \beta \cdot (\alpha \cdot w)$ أيضاً لما كان $h_X(\beta): \mathfrak{S}^o(X, B) \rightarrow \mathfrak{S}^o(X, D)$ فإن $\alpha: A \rightarrow B \in \mathfrak{S}^o(A, B)$:

$$h_X(\alpha): h_X(A) \rightarrow h_X(B)$$

أي إن $h_X(\alpha): \mathfrak{S}^o(X, A) \rightarrow \mathfrak{S}^o(X, B)$ وبالتالي فإن $h_X(\alpha)(w) = \alpha \cdot w$ وهكذا فإن

$$\begin{aligned} h_X(\beta \cdot \alpha)(w) &= \beta \cdot (\alpha \cdot w) = h_X(\beta)(\alpha \cdot w) = h_X(\beta)(h_X(\alpha)(w)) = \\ &= (h_X(\beta) \cdot h_X(\alpha))(w) \end{aligned}$$

وهذا يبين أن $h_X(\beta \cdot \alpha) = h_X(\beta) \cdot h_X(\alpha)$ وهكذا نجد أن $h_X: \mathfrak{S}^o \rightarrow \text{Set's}$ هو دالي مباشر.

٦ - لتكن فئة $\mathfrak{S}$ ولتكن $\mathfrak{S}^o$ الفئة الثنوية للفئة $\mathfrak{S}$ و Set's فئة المجموعات. عندئذ لأجل كل $X \in \text{ob}(\mathfrak{S})$ يوجد دالي غير مباشر (مخالف للتغير) $\hat{h}_X: \mathfrak{S}^o \rightarrow \text{Set's}$ الحل.

ليكن $X \in \text{ob}(\mathfrak{S})$. لنبرهن على أنه يوجد دالي غير مباشر $\hat{h}_X: \mathfrak{S}^o \rightarrow \text{Set's}$ لنعرف:

$$\hat{h}_X: \text{ob}(\mathfrak{S}^o) \rightarrow \text{ob}(\text{Set's})$$

بالشكل الآتي: أيًا كان $A \in \text{ob}(\mathfrak{S}^o) = \text{ob}(\mathfrak{S})$ فإن $\hat{h}_X(A) = \mathfrak{S}^o(A, X) \in \text{ob}(\text{Set's})$ واضح أن $\hat{h}_X$ تطبيق. لأنه إذا كان $A_1, A_2 \in \text{ob}(\mathfrak{S}^o)$ بحيث $A_1 = A_2$ فإن:

$$\hat{h}_X(A_1) = \mathfrak{S}^o(A_1, X) = \mathfrak{S}^o(A_2, X) = \hat{h}_X(A_2)$$

لنعرف $u: A \rightarrow B$ مورفيزم بالشكل الآتي: لأجل أي مورفيزم $\hat{h}_X: \text{Mor}(\mathfrak{S}^o) \rightarrow \text{Mor}(\text{Set's})$

للفئة $\mathfrak{S}^o$ فإن $\hat{h}_X(u): \hat{h}_X(B) \rightarrow \hat{h}_X(A)$ أي إن $\hat{h}_X(u): \mathfrak{S}^o(B, X) \rightarrow \mathfrak{S}^o(A, X)$ وأياً كان $\alpha \in \mathfrak{S}^o(B, X)$ فإن :

$$\hat{h}_X(u)(\alpha) = \alpha \cdot u \in \mathfrak{S}^o(A, X)$$

ف نجد أن $\hat{h}_X$ تطبيق لأنه إذا كان $u_1, u_2 \in \mathfrak{S}^o(A, B)$ فإن :

$$\hat{h}_X(u_1), \hat{h}_X(u_2): \mathfrak{S}^o(B, X) \rightarrow \mathfrak{S}^o(A, X)$$

وانه أياً كان $\alpha \in \mathfrak{S}^o(B, X)$ فإن $\hat{h}_X(u_1)(\alpha) = \alpha \cdot u_1 = \alpha \cdot u_2 = \hat{h}_X(u_2)(\alpha)$ ومنه فإن

$$\hat{h}_X(u_1) = \hat{h}_X(u_2) \text{ لنبرهن الآن أن } \hat{h}_X(I_A) = I_{\hat{h}_X(A)}$$

ليكن $A \in ob(\mathfrak{S}^o)$ عندئذ فإن $\hat{h}_X(I_A): \mathfrak{S}^o(A, X) \rightarrow \mathfrak{S}^o(A, X)$ أي إن $\hat{h}_X(I_A): \hat{h}_X(A) \rightarrow \hat{h}_X(A)$

$$\hat{h}_X(I_A) = I_{\mathfrak{S}^o(A, X)} = I_{\hat{h}_X(A)}$$

أي إن $\hat{h}_X(I_A)(v) = v \cdot I_A = v$ فإن $v \in \mathfrak{S}^o(A, X)$ ليكن $\alpha: A \rightarrow B, \beta: B \rightarrow D$ مورفيزمات للفئة $\mathfrak{S}^o$ عندئذ $\beta \cdot \alpha: A \rightarrow D$ لنبرهن على

$$\hat{h}_X(\beta \cdot \alpha): \hat{h}_X(D) \rightarrow \hat{h}_X(A) \text{ إن } \hat{h}_X(\beta \cdot \alpha) = \hat{h}_X(\alpha) \cdot \hat{h}_X(\beta) \text{ أي إن}$$

$$\hat{h}_X(\beta \cdot \alpha): \mathfrak{S}^o(D, X) \rightarrow \mathfrak{S}^o(A, X)$$

ولأجل كل $w: D \rightarrow X \in \mathfrak{S}^o(D, X)$ فإن $w \cdot (\beta \cdot \alpha) = (w \cdot \beta) \cdot \alpha$

لما كان $w \cdot \beta: B \rightarrow X \in \mathfrak{S}^o(B, X)$ وإن $\hat{h}_X(\alpha): \hat{h}_X(B) \rightarrow \hat{h}_X(A)$ أي إن

$$\hat{h}_X(\alpha)(w \cdot \beta) = (w \cdot \beta) \cdot \alpha \text{ فإن } \hat{h}_X(\alpha): \mathfrak{S}^o(B, X) \rightarrow \mathfrak{S}^o(A, X)$$

$$\hat{h}_X(\beta): \hat{h}_X(D) \rightarrow \hat{h}_X(B) \text{ فإن } \beta: B \rightarrow D \in \mathfrak{S}^o(B, D)$$

$$\hat{h}_X(\beta): \mathfrak{S}^o(D, X) \rightarrow \mathfrak{S}^o(B, X)$$

ومنه نجد أن $\hat{h}_X(\beta)(w) = w \cdot \beta$ ومنه فإن

$$\hat{h}_X(\beta \cdot \alpha)(w) = (w \cdot \beta) \cdot \alpha = \hat{h}_X(\alpha)(w \cdot \beta) = \hat{h}_X(\alpha)(\hat{h}_X(\beta)(w)) =$$

$$= (\hat{h}_X(\alpha) \cdot \hat{h}_X(\beta))(w)$$

وهذا يبين أن $\hat{h}_X(\beta \cdot \alpha) = \hat{h}_X(\alpha) \cdot \hat{h}_X(\beta)$ وهكذا نجد أن $\hat{h}_X: \mathfrak{S}^o \rightarrow \text{Set's}$ هو دالي

غير مباشر للفئة $\mathfrak{S}^o$.

٧ - لتكن $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \mathfrak{S}_3$ ثلاث فئات. عندئذ :

١ - إذا كان $F: \mathfrak{S}_1 \rightarrow \mathfrak{S}_2$ دالياً غير مباشر و $G: \mathfrak{S}_2 \rightarrow \mathfrak{S}_3$ دالياً مباشراً عندئذ يكون

$$G \cdot F: \mathfrak{S}_1 \rightarrow \mathfrak{S}_3 \text{ دالياً غير مباشر.}$$

٢ - إذا كان $F: \mathfrak{S}_1 \rightarrow \mathfrak{S}_2$ دالياً مباشراً و $G: \mathfrak{S}_2 \rightarrow \mathfrak{S}_3$ دالياً غير مباشر عندئذ يكون $G \cdot F: \mathfrak{S}_1 \rightarrow \mathfrak{S}_3$ دالياً غير مباشر.

الحل.

١ - لنعرف تطبيق أشياء $G \cdot F: ob(\mathfrak{S}_1) \rightarrow ob(\mathfrak{S}_3)$ بالشكل الآتي: أيأ كان $X \in ob(\mathfrak{S}_1)$ ، فإن $G \cdot F(X) = G(F(X))$ ، واضح أنه تطبيق.

لنعرف تطبيق مورفيزمات $G \cdot F: Mor(\mathfrak{S}_1) \rightarrow Mor(\mathfrak{S}_3)$ بالشكل الآتي: لأجل أي مورفيزم $u: X \rightarrow Y \in \mathfrak{S}_1(X, Y)$ فإن $F(u): F(X) \rightarrow F(Y)$ هو مورفيزم للفئة $\mathfrak{S}_2$ وإن $G(F(u)): G(F(X)) \rightarrow G(F(Y))$ هو مورفيزم للفئة $\mathfrak{S}_3$.

لنضع $G \cdot F(u) = G(F(u))$ فنجد أن $G \cdot F$ تطبيق ويحقق:

- أيأ كان $A \in ob(\mathfrak{S}_1)$ ، فإن:

$$G \cdot F(I_A) = G(F(I_A)) = G(I_{F(A)}) = I_{G(F(A))} = I_{G \cdot F(A)}$$

- كما أنه لأجل أي مورفيزمين $u: A \rightarrow B$ و $v: B \rightarrow D$ للفئة $\mathfrak{S}_1$ ، فإن:

$$\begin{aligned} G \cdot F(v \cdot u) &= G(F(v \cdot u)) = G(F(u) \cdot F(v)) = G(F(u)) \cdot G(F(v)) = \\ &= (G \cdot F)(u) \cdot (G \cdot F)(v) \end{aligned}$$

مما سبق نجد أن $G \cdot F$ هو دالي غير مباشر.

٢ - يبرهن بطريقة مشابهة.



الفصل الثالث

تكافؤ الفئات

٣-١. الدوال المرافقة.

تمهيدية ٣-١-١.

لتكن $\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2$ فئتين، وليكن $F: \mathfrak{T}_1 \rightarrow \mathfrak{T}_2$ و $G: \mathfrak{T}_2 \rightarrow \mathfrak{T}_1$ دوال مباشرة. لنأخذ الفئة $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_1^\circ \times \mathfrak{T}_2$. عندئذ توجد دوال مباشرة:

$$1. \text{Hom}_{\mathfrak{T}_1}(G): \mathfrak{T} = \mathfrak{T}_1^\circ \times \mathfrak{T}_2 \rightarrow \text{Set's}$$

$$2. \text{Hom}_{\mathfrak{T}_2}(F): \mathfrak{T} = \mathfrak{T}_1^\circ \times \mathfrak{T}_2 \rightarrow \text{Set's}$$

البرهان.

١ - لندرس وجود الدالي $\text{Hom}_{\mathfrak{T}_1}(G): \mathfrak{T} = \mathfrak{T}_1^\circ \times \mathfrak{T}_2 \rightarrow \text{Set's}$

لنعرف $\text{Hom}_{\mathfrak{T}_1}(G)$ بالشكل الآتي: أيأ كان $(A, B) \in \text{ob}(\mathfrak{T})$ ، فإن:

$$\text{Hom}_{\mathfrak{T}_1}(G)(A, B) = \mathfrak{T}_1(A, G(B)) \in \text{Set's}$$

وذلك لأن $A, G(B) \in \text{ob}(\mathfrak{T}_1)$ وبالتالي $A \in \text{ob}(\mathfrak{T}_1), B \in \text{ob}(\mathfrak{T}_2)$

كما إنه $\forall f \in \mathfrak{T}(A, B)$ ، فإن $f = (f_1, f_2)$ حيث $A, B \in \text{ob}(\mathfrak{T})$ ، ومنه $A = (A_1, A_2)$

و $B = (B_1, B_2)$ وإن $A_1, B_1 \in \text{ob}(\mathfrak{T}_1)$ و $A_2, B_2 \in \text{ob}(\mathfrak{T}_2)$

فضلاً عن ذلك فإن $f_1 \in \mathfrak{T}_1(A_1, B_1) = \mathfrak{T}_1(B_1, A_1)$ و $f_2 \in \mathfrak{T}_2(A_2, B_2)$. كما أن:

$$\text{Hom}_{\mathfrak{T}_1}(G)(f): \text{Hom}_{\mathfrak{T}_1}(G)(A) \rightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{T}_1}(G)(B)$$

$$\text{Hom}_{\mathfrak{T}_1}(G)(f): \text{Hom}_{\mathfrak{T}_1}(G)(A_1, A_2) \rightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{T}_1}(G)(B_1, B_2)$$

$$\text{Hom}_{\mathfrak{T}_1}(G)(f): \mathfrak{T}_1(A_1, G(A_2)) \rightarrow \mathfrak{T}_1(B_1, G(B_2))$$

وبالتالي $\forall u \in \mathfrak{T}_1(A_1, G(A_2))$ ، لنضع:

$$\text{Hom}_{\mathfrak{T}_1}(G)(f)(u) = G(f_2) \cdot u \cdot f_1$$

$$\begin{array}{ccc}
 B_1 & \xrightarrow{f_1} & A_1 \\
 & \searrow & \downarrow u \\
 & & G(A_2) \\
 & & \downarrow G(f_2) \\
 & \searrow & G(B_2)
 \end{array}$$

كما إنه أياً كان $A \in \text{ob}(\mathfrak{S})$ فإن $A = (A_1, A_2)$ وإن $I_A = (I_{A_1}, I_{A_2})$ ومنه:

$$\text{Hom}_{\mathfrak{S}_1}(G)(I_A) : \mathfrak{S}_1(A_1, G(A_2)) \rightarrow \mathfrak{S}_1(A_1, G(A_2))$$

وبالتالي أياً كان $u \in \mathfrak{S}_1(A_1, G(A_2))$ فإن:

$$\text{Hom}_{\mathfrak{S}_1}(G)(I_A)(u) = G(I_{A_2}) \cdot u \cdot I_{A_1} = (I_{G(A_2)}) \cdot u = u$$

وهذا يبين لنا أن $\text{Hom}_{\mathfrak{S}_1}(G)(I_A) = I_{\text{Hom}_{\mathfrak{S}_1}(G)(A)}$

من جهة أخرى، ليكن $f, g \in \text{Mor}(\mathfrak{S})$ بحيث $f : B \rightarrow D, g : A \rightarrow B$ حيث $A, B, D \in \text{ob}(\mathfrak{S})$ ، عندئذ فإن $f \cdot g \in \mathfrak{S}(A, D)$ ومنه:

$$\text{Hom}_{\mathfrak{S}_1}(G)(f \cdot g) : \text{Hom}_{\mathfrak{S}_1}(G)(A) \rightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{S}_1}(G)(D)$$

$$\text{Hom}_{\mathfrak{S}_1}(G)(f \cdot g) : \mathfrak{S}_1(A_1, G(A_2)) \rightarrow \mathfrak{S}_1(D_1, G(D_2))$$

وبالتالي أياً كان $u : A_1 \rightarrow G(A_2)$ وبما أن $g = (g_1, g_2)$ ، $f = (f_1, f_2)$ ، فإن $f \cdot g = (g_1 \cdot f_1, f_2 \cdot g_2)$ ومنه:

$$\begin{aligned}
 \text{Hom}_{\mathfrak{S}_1}(G)(f \cdot g)(u) &= G(f_2 \cdot g_2) \cdot u \cdot (g_1 \cdot f_1) = G(f_2) \cdot G(g_2) \cdot u \cdot (g_1 \cdot f_1) = \\
 &= G(f_2) \cdot (G(g_2) \cdot u \cdot g_1) \cdot f_1 = G(f_2) \cdot \text{Hom}_{\mathfrak{S}_1}(G)(g)(u) \cdot f_1 = \\
 &= (\text{Hom}_{\mathfrak{S}_1}(G)(f)) \cdot (\text{Hom}_{\mathfrak{S}_1}(G)(g))(u)
 \end{aligned}$$

مما سبق نجد أن:

$$\text{Hom}_{\mathfrak{S}_1}(G)(f \cdot g) = \text{Hom}_{\mathfrak{S}_1}(G)(f) \cdot \text{Hom}_{\mathfrak{S}_1}(G)(g)$$

وهذا يبين لنا أن $\text{Hom}_{\mathfrak{S}_1}(G)$ هو دالي مباشر.

٢ - لندرس وجود الدالي $\text{Hom}_{\mathfrak{S}_2}(F) : \mathfrak{S} = \mathfrak{S}_1^o \times \mathfrak{S}_2 \rightarrow \text{Set's}$

لنعرف $\text{Hom}_{\mathfrak{S}_2}(F)$ بالشكل الآتي: أياً كان $(A, B) \in \text{ob}(\mathfrak{S})$ ، فإن:

$$\text{Hom}_{\mathfrak{S}_2}(F)(A, B) = \mathfrak{S}_2(F(A), B) \in \text{ob}(\text{Set's})$$

حيث $(A, B) \in \text{ob}(\mathfrak{S})$ وإن $A \in \text{ob}(\mathfrak{S}_1), B \in \text{ob}(\mathfrak{S}_2)$

كما إنه $\forall f \in \mathfrak{S}(A, B)$ ، فإن $f = (f_1, f_2)$ حيث $A, B \in ob(\mathfrak{S})$ ، ومنه $A = (A_1, A_2)$ و $B = (B_1, B_2)$ فإن $A_1, B_1 \in ob(\mathfrak{S}_1)$ و $A_2, B_2 \in ob(\mathfrak{S}_2)$ فضلاً عن ذلك فإن $f_1 \in \mathfrak{S}_1(A_1, B_1) = \mathfrak{S}_1(B_1, A_1)$ و $f_2 \in \mathfrak{S}_2(A_2, B_2)$ ، كما أن:

$$\text{Hom}_{\mathfrak{S}_2}(F)(f) : \text{Hom}_{\mathfrak{S}_2}(F)(A) \rightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{S}_2}(F)(B)$$

$$\text{Hom}_{\mathfrak{S}_2}(F)(f) : \mathfrak{S}_2(F(A_1), A_2) \rightarrow \mathfrak{S}_2(F(B_1), B_2)$$

وبالتالي $\forall u \in \mathfrak{S}_2(F(A_1), A_2)$ ، لنضع:

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathfrak{S}_2}(F)(f)(u) = f_2 \cdot u \cdot F(f_1) & & \\ F(B_1) & \xrightarrow{F(f_1)} & F(A_1) \\ & \searrow & \downarrow u \\ & & A_2 \\ & & \downarrow f_2 \\ & & B_2 \end{array}$$

كما إنه أياً كان $A \in ob(\mathfrak{S})$ فإن $A = (A_1, A_2)$ ، وإن $I_A = (I_{A_1}, I_{A_2})$ ، ومنه:

$$\text{Hom}_{\mathfrak{S}_2}(F)(I_A)(u) = I_{A_2} \cdot u \cdot F(I_{A_1}) = I_{A_2} \cdot u \cdot I_{F(A_1)} = I_{A_2} \cdot u = u$$

أي إن: $\text{Hom}_{\mathfrak{S}_2}(F)(I_A) = I_{\text{Hom}_{\mathfrak{S}_2}(F)(A)}$

كما إنه أياً كان $f, g \in \text{Mor}(\mathfrak{S})$ بحيث $g : A \rightarrow B$ ، $f : B \rightarrow D$ ، وحيث إن $A, B, D \in ob(\mathfrak{S})$ ، فإن $f \cdot g \in \mathfrak{S}(A, D)$ ، ومنه:

$$\text{Hom}_{\mathfrak{S}_2}(F)(f \cdot g) : \text{Hom}_{\mathfrak{S}_2}(F)(A) \rightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{S}_2}(F)(D)$$

$$\text{Hom}_{\mathfrak{S}_2}(F)(f \cdot g) : \mathfrak{S}_2(F(A_1), A_2) \rightarrow \mathfrak{S}_2(F(D_1), D_2)$$

وبالتالي أياً كان $u : F(A_1) \rightarrow A_2$ وبما أن $g = (g_1, g_2)$ ، $f = (f_1, f_2)$ فإن: $f \cdot g = (g_1 \cdot f_1, f_2 \cdot g_2)$ ، ومنه:

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathfrak{S}_2}(F)(f \cdot g)(u) &= (f_2 \cdot g_2) \cdot u \cdot F(g_1 \cdot f_1) = \\ &= (f_2 \cdot g_2) \cdot u \cdot F(g_1) \cdot F(f_1) = f_2 \cdot \text{Hom}_{\mathfrak{S}_2}(F)(g)(u) \cdot f_1 = \\ &= (\text{Hom}_{\mathfrak{S}_2}(F)(f)) \cdot (\text{Hom}_{\mathfrak{S}_2}(F)(g))(u) \end{aligned}$$

مما سبق نجد أن $\text{Hom}_{\mathfrak{S}_2}(F)(f \cdot g) = \text{Hom}_{\mathfrak{S}_2}(F)(f) \cdot \text{Hom}_{\mathfrak{S}_2}(F)(g)$ وهذا يبين لنا أن $\text{Hom}_{\mathfrak{S}_2}(F)$ هو دالي مباشر.

تعريف.

لتكن $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ فئتين، ولتكن $F: \mathcal{T}_1 \rightarrow \mathcal{T}_2$ و $G: \mathcal{T}_2 \rightarrow \mathcal{T}_1$ دوالاً مباشرة. لنأخذ الفئة $\mathcal{T} = \mathcal{T}_1^\circ \times \mathcal{T}_2$. عندئذ حسب التمهيدية (٣-١-١) نوجد دوال مباشرة هي:

$$\text{Hom}_{\mathcal{T}_1}(G): \mathcal{T} = \mathcal{T}_1^\circ \times \mathcal{T}_2 \rightarrow \text{Set's}$$

$$\text{Hom}_{\mathcal{T}_2}(F): \mathcal{T} = \mathcal{T}_1^\circ \times \mathcal{T}_2 \rightarrow \text{Set's}$$

سوف نقول إن الدالي G مرافق للدالي F إذا وجد إيزومورفيزم دالي:

$$\varphi: \text{Hom}_{\mathcal{T}_2}(F) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{T}_1}(G)$$

مبرهنة ٣-١-٢.

لتكن $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ فئتين، وليكن $F, F_1: \mathcal{T}_1 \rightarrow \mathcal{T}_2$ و $G, G_1: \mathcal{T}_2 \rightarrow \mathcal{T}_1$ دوال مباشرة. إذا كان الدالي G مرافقاً للدالي F وكان الدالي G_1 مرافقاً للدالي F_1 وإذا كان $f: F \rightarrow F_1$ مورفيزماً دالياً، عندئذ، أيأ كان $B \in \text{ob}(\mathcal{T}_2)$ يوجد مورفيزم دالي:

$$\psi(B): \hat{h}_{G_1(B)} \rightarrow \hat{h}_{G(B)}$$

البرهان.

لنضع $\mathcal{T} = \mathcal{T}_1^\circ \times \mathcal{T}_2$ ، وليكن $B \in \text{ob}(\mathcal{T}_2)$ عندئذ فإن $G(B), G_1(B) \in \text{ob}(\mathcal{T}_1)$ وحسب المبرهنة (٢-١-٢) نوجد دوال غير مباشرة:

$$\hat{h}_{G_1(B)}: \mathcal{T}_1 \rightarrow \text{Set's}$$

$$\hat{h}_{G(B)}: \mathcal{T}_1 \rightarrow \text{Set's}$$

لنبرهن على وجود مورفيزم دالي $\psi(B): \hat{h}_{G_1(B)} \rightarrow \hat{h}_{G(B)}$.

لنعرف $\psi(B)$ بالشكل الآتي: أيأ كان $A \in \text{ob}(\mathcal{T}_1)$ لنضع:

$$\psi(A, B) = \psi(B)(A): \hat{h}_{G_1(B)}(A) \rightarrow \hat{h}_{G(B)}(A)$$

$$\psi(A, B) = \psi(B)(A): \mathcal{T}_1(A, G_1(B)) \rightarrow \mathcal{T}_1(A, G(B))$$

بما أن الدالي G_1 مرافق للدالي F_1 ، فإنه يوجد إيزومورفيزم دالي:

$$\varphi_1: \text{Hom}_{\mathcal{T}_2}(F_1) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{T}_1}(G_1)$$

بما أن $\mathcal{T} = \mathcal{T}_1^\circ \times \mathcal{T}_2$ ، فإن:

$$\text{Hom}_{\mathcal{T}_2}(F_1)(A, B) = \mathcal{T}_2(F_1(A), B)$$

$$\text{Hom}_{\mathfrak{S}_1}(G_1)(A, B) = \mathfrak{S}_1(A, G_1(B))$$

ومنه نجد أن:

$$\varphi_1(A, B) : \mathfrak{S}_2(F_1(A), B) \rightarrow \mathfrak{S}_1(A, G_1(B))$$

وبما أن φ_1 إيزومورفيزم، فإنه يوجد مورفيزم:

$$\varphi_1(A, B)^{-1} : \mathfrak{S}_1(A, G_1(B)) \rightarrow \mathfrak{S}_2(F_1(A), B)$$

من جهة أخرى، بما أن $f : F \rightarrow F_1$ مورفيزم دالي فإن $f(A) : F(A) \rightarrow F_1(A)$ إن $f(A) \in \mathfrak{S}_2(F(A), F_1(A))$ ، ومنه فإن:

$$\hat{h}_B(f(A)) : \hat{h}_B(F_1(A)) \rightarrow \hat{h}_B(F(A))$$

$$\hat{h}_B(f(A)) : \mathfrak{S}_2(F_1(A), B) \rightarrow \mathfrak{S}_2(F(A), B)$$

بما أن الدالي G مرافق للدالي F ، فإنه يوجد إيزومورفيزم دالي:

$$\varphi : \text{Hom}_{\mathfrak{S}_2}(F) \rightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{S}_1}(G)$$

$$\varphi(A, B) : \text{Hom}_{\mathfrak{S}_2}(F)(A, B) \rightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{S}_1}(G)(A, B)$$

$$\text{Hom}_{\mathfrak{S}_2}(F)(A, B) = \mathfrak{S}_2(F(A), B)$$

$$\text{Hom}_{\mathfrak{S}_1}(G)(A, B) = \mathfrak{S}_1(A, G(B))$$

$$\varphi(A, B) : \mathfrak{S}_2(F(A), B) \rightarrow \mathfrak{S}_1(A, G(B))$$

الآن سوف نعرف $\psi(A, B)$ بالشكل، لنضع:

$$\psi(A, B) = \varphi(A, B) \cdot \hat{h}_B(f(A)) \cdot \varphi(A, B)^{-1}$$

فنجد أن $\psi(A, B) : \mathfrak{S}_1(A, G_1(B)) \rightarrow \mathfrak{S}_1(A, G(B))$ هو مورفيزم للفتة $\mathfrak{S}_1$.

لنبرهن الآن على أنه أياً كان $u : C \rightarrow A \in \mathfrak{S}_1(C, A)$ فإن المخطط الآتي تبديلي:

$$\begin{array}{ccc} \hat{h}_{G_1(B)}(A) & \xrightarrow{\psi(A, A)} & \hat{h}_{G(B)}(A) \\ \hat{h}_{G_1(B)}(u) \downarrow & & \downarrow \hat{h}_{G(B)}(u) \\ \hat{h}_{G_1(B)}(C) & \xrightarrow{\psi(B, C)} & \hat{h}_{G(B)}(C) \end{array}$$

أي لنبرهن على أن $\hat{h}_{G(B)}(u) \cdot \psi(A, B) = \psi(A, C) \cdot \hat{h}_{G_1(B)}(u)$

$$\hat{h}_{G(B)}(u) \cdot \psi(A, B) = \hat{h}_{G(B)}(u) \cdot \varphi(A, B) \cdot \hat{h}_B(f(A)) \cdot \varphi_1(A, B)^{-1}$$

وبما أن $\varphi(A, B)$ مورفيزم دالي، فإنه لأجل $u : C \rightarrow A \in \mathfrak{S}_1(C, A)$ المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc}
\mathfrak{S}_2(F(A), B) & \xrightarrow{\varphi(A, B)} & \mathfrak{S}_1(A, G(B)) \\
\hat{h}_B(F(u)) \downarrow & & \downarrow \hat{h}_{G(B)}(u) \\
\mathfrak{S}_2(F(C), B) & \xrightarrow{\varphi(C, B)} & \mathfrak{S}_1(C, G(B))
\end{array}$$

تبديلي، أي إن $\hat{h}_{G(B)}(u) \cdot \varphi(A, B) = \varphi(A, C) \cdot \hat{h}_B(u)$ ومنه نجد أن:

$$\hat{h}_{G(B)}(u) \cdot \psi(A, B) = \varphi(C, B) \cdot \hat{h}_B(F(u)) \cdot \hat{h}_B(f(A)) \cdot \varphi_1(A, B)^{-1}$$

وبما أن $f: F \rightarrow F_1$ مورفيزم دالي، فإنه لأجل $u: C \rightarrow A \in \mathfrak{S}_1(C, A)$ المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc}
\mathfrak{S}_2(F_1(A), B) & \xrightarrow{\hat{h}_B(f(A))} & \mathfrak{S}_2(F(A), B) \\
\hat{h}_B(F_1(u)) \downarrow & & \downarrow \hat{h}_B(F(u)) \\
\mathfrak{S}_2(F_1(C), B) & \xrightarrow{\hat{h}_B(f(C))} & \mathfrak{S}_2(F(C), B)
\end{array}$$

تبديلي، أي إن: $\hat{h}_B(F(u)) \cdot \hat{h}_B(f(A)) = \hat{h}_B(f(C)) \cdot \hat{h}_B(F_1(u))$ ومنه نجد أن:

$$\begin{aligned}
\hat{h}_{G(B)}(u) \cdot \psi(A, B) &= \varphi(C, B) \cdot \hat{h}_B(f(C)) \cdot \hat{h}_B(F_1(u)) \cdot \varphi_1(A, B)^{-1} = \\
&= \varphi(C, B) \cdot \hat{h}_B(f(C)) \cdot \varphi_1(C, B)^{-1} \cdot \varphi_1(C, B) \cdot \hat{h}_B(F_1(u)) \cdot \varphi_1(A, B)^{-1} = \\
&= \psi(C, B) \cdot \varphi_1(C, B) \cdot \hat{h}_B(F_1(u)) \cdot \varphi_1(A, B)^{-1} = \\
&= \psi(C, B) \cdot \hat{h}_{G_1(B)}(u)
\end{aligned}$$

مما سبق نجد أن $\psi(B): \hat{h}_{G_1(B)} \rightarrow \hat{h}_{G(B)}$ هو مورفيزم دالي.

مبرهنة ٣-١-٣.

لتكن $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2$ فئتين، وليكن $F, F_1: \mathfrak{S}_1 \rightarrow \mathfrak{S}_2$ ، $G, G_1: \mathfrak{S}_2 \rightarrow \mathfrak{S}_1$ دوال مباشرة. وليكن

$f: F \rightarrow F_1$ مورفيزماً دالياً. إذا كان الدالي G مرافقاً للدالي F ، وكان الدالي G_1 مرافقاً

للدالي F_1 ، عندئذ أياً كان $B \in ob(\mathfrak{S}_2)$ يوجد مورفيزم وحيد $g(B): G_1(B) \rightarrow G(B)$

يحقق: أياً كان $A \in ob(\mathfrak{S}_1)$ فإن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc}
\hat{h}_B(F(A)) & \xrightarrow{\varphi(A, B)} & h_A(G(B)) \\
\hat{h}_B(f(A)) \uparrow & & \uparrow h_A(g(B)) \\
\hat{h}_B(F_1(A)) & \xrightarrow{\varphi_1(A, B)} & h_A(G_1(B))
\end{array}$$

تبديلي، أي إن:

$$h_A(g(B)) \cdot \varphi_1(A, B) = \varphi(A, B) \cdot \hat{h}_B(f(A))$$

البرهان.

لنضع $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_1' \times \mathfrak{S}_2$ ، وليكن $B \in ob(\mathfrak{S}_2)$ عندئذ فإن $G(B), G_1(B) \in ob(\mathfrak{S}_1)$ وحسب المبرهنة (٢-١-٢) توجد دوال غير مباشرة:

$$\hat{h}_{G_1(B)} : \mathfrak{S}_1 \rightarrow Set's$$

$$\hat{h}_{G(B)} : \mathfrak{S}_1 \rightarrow Set's$$

وحسب المبرهنة (٢-١-٣) يوجد مورفيزم دالي $\hat{h}_{G(B)} \rightarrow \hat{h}_{G_1(B)}$ معرف بالشكل: أيأ كان $A \in ob(\mathfrak{S}_1)$ ، فإن:

$$\psi(A, B) = \varphi(A, B) \cdot \hat{h}_B(f(A)) \cdot \varphi(A, B)^{-1}$$

فضلاً عن ذلك، حسب المبرهنة (٧-٢-٢) يوجد مورفيزم وحيد:

$$g(B) : G_1(B) \rightarrow G(B)$$

يحقق: أيأ كان $A \in ob(\mathfrak{S}_1)$ وأيأ كان $A \in ob(\mathfrak{S}_1)$ ، فإن:

$$\psi(B)(A)(v) = g(B) \cdot v$$

لنبرهن الآن على أن المخطط الوارد في نص المبرهنة تبديلي.

ليكن $w \in \hat{h}_B(f(A)) = \mathfrak{S}_2(f(A), B)$ عندئذ فإن:

$$\begin{aligned} \varphi(A, B) \cdot \hat{h}_B(f(A))(w) &= \varphi(A, B) \cdot \hat{h}_B(f(A)) \cdot \varphi_1(A, B)^{-1} \cdot \varphi(A, B)(w) = \\ &= \psi(A, B) \cdot \varphi_1(A, B)(w) = \psi(A, B)(\varphi_1(A, B)(w)) = \\ &= g(B) \cdot \varphi_1(A, B)(w) = h_A(g(B))(\varphi_1(A, B)(w)) = \\ &= h_A(g(B)) \cdot \varphi_1(A, B)(w) \end{aligned}$$

ومنه نجد أن $\varphi(A, B) \cdot \hat{h}_B(f(A)) = h_A(g(B)) \cdot \varphi_1(A, B)$

مبرهنة ٤-١-٣.

لنتكن $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2$ فئتين، وليكن $F, F_1 : \mathfrak{S}_1 \rightarrow \mathfrak{S}_2$ ، وليكن $G, G_1 : \mathfrak{S}_2 \rightarrow \mathfrak{S}_1$ دوال مباشرة. وليكن $f : F \rightarrow F_1$ مورفيزماً دالياً. إذا كان الدالي G مرافقاً للدالي F ، وكان الدالي G_1 مرافقاً للدالي F_1 ، عندئذ يوجد مورفيزم دالي وحيد $g : G_1 \rightarrow G$ يحقق: أيأ كان $A \in ob(\mathfrak{S}_1)$ ، و $B \in ob(\mathfrak{S}_2)$ فإن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccccc}
\hat{h}_B(F(A)) & \xrightarrow{\varphi(A,B)} & h_A(G(B)) & & \\
\hat{h}_B(f(A)) & \uparrow & \uparrow & & h_A(g(B)) \\
\hat{h}_B(F_1(A)) & \xrightarrow{\varphi_1(A,B)} & h_A(G_1(B)) & &
\end{array}$$

تبديلي، أي إن:

$$h_A(g(B)) \cdot \varphi_1(A, B) = \varphi(A, B) \cdot \hat{h}_B(f(A))$$

البرهان.

وجدنا حسب المبرهنة (٣-١-٣) أنه أياً كان $B \in ob(\mathfrak{T}_2)$ فإنه يوجد مورفيزم وحيد

$g(B): G_1(B) \rightarrow G(B)$ يحقق: أياً كان $A \in ob(\mathfrak{T}_1)$ ، فإن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccccc}
\hat{h}_B(F(A)) & \xrightarrow{\varphi(A,B)} & h_A(G(B)) & & \\
\hat{h}_B(f(A)) & \uparrow & \uparrow & & h_A(g(B)) \\
\hat{h}_B(F_1(A)) & \xrightarrow{\varphi_1(A,B)} & h_A(G_1(B)) & &
\end{array}$$

تبديلي، أي إن:

$$h_A(g(B)) \cdot \varphi_1(A, B) = \varphi(A, B) \cdot \hat{h}_B(f(A))$$

لنبرهن على أن المورفيزم $g(B)$ يعرف مورفيزماً دالياً وحيداً $g: G_1 \rightarrow G$. لأجل ذلك

يكفي إثبات أنه لأجل أي مورفيزم $u: B \rightarrow B_1 \in \mathfrak{T}_2(B, B_1)$ فإن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccccc}
G_1(B) & \xrightarrow{g(B)} & G(B) & & \\
G_1(u) \downarrow & & \downarrow & & G(u) \\
G_1(B_1) & \xrightarrow{g(B_1)} & G(B_1) & &
\end{array}$$

تبديلي، أي إن: $G(u) \cdot g(B) = g(B_1) \cdot G_1(u)$

بما أن الدالي G_1 مرافق للدالي F_1 ، فإنه يوجد إيزومورفيزم دالي:

$$\varphi_1: \text{Hom}_{\mathfrak{T}_2}(F_1) \rightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{T}_1}(G_1)$$

ومنه أياً كان $A \in ob(\mathfrak{T}_1)$ و $B \in ob(\mathfrak{T}_2)$ ، فإن:

$$\varphi_1(A, B): \text{Hom}_{\mathfrak{T}_2}(F_1)(A, B) \rightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{T}_1}(G_1)(A, B)$$

$$\varphi_1(A, B): \text{Hom}_{\mathfrak{T}_2}(F_1(A), B) \rightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{T}_1}(A, G_1(B))$$

وهذا يبين أن $\varphi_1(A, B): h_{F_1(A)}(B) \rightarrow h_A(G_1(B))$ وبالتالي فإنه لأجل المورفيزم

$u: B \rightarrow B_1 \in \mathfrak{T}_2(B, B_1)$ المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc}
h_{F_1(A)}(B) & \xrightarrow{\varphi_1(A,B)} & h_A(G_1(B)) \\
h_{F_1(A)}(u) & \downarrow & \downarrow h_A(G_1(u)) \\
h_{F_1(A)}(B_1) & \xrightarrow{\varphi_1(A,B_1)} & h_A(G_1(B_1))
\end{array}$$

تبديلي، أي إن: $h_A(G(u)) \cdot \varphi_1(A, B) = \varphi_1(A, B_1) \cdot h_{F_1(A)}(u)$
من جهة أخرى، حسب المبرهنة (3-1-3)، فإنه لأجل $B_1 \in ob(\mathfrak{T}_2)$ يوجد مورفيزم
وحيد $g(B_1): G_1(B_1) \rightarrow G(B_1)$ لأجله المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc}
\hat{h}_{B_1}(F(A)) & \xrightarrow{\varphi(A,B_1)} & h_A(G(B_1)) \\
\hat{h}_{B_1}(f(A)) & \uparrow & \uparrow h_A(g(B_1)) \\
\hat{h}_{B_1}(F_1(A)) & \xrightarrow{\varphi_1(A,B_1)} & h_A(G_1(B_1))
\end{array}$$

تبديلي، أي إن: $h_A(g(B_1)) \cdot \varphi_1(A, B_1) = \varphi(A, B_1) \cdot \hat{h}_{B_1}(f(A))$ ومنه نجد أن:
 $h_A(g(B_1)) \cdot h_A(G_1(u)) \cdot \varphi_1(A, B) = h_A(g(B_1)) \cdot \varphi_1(A, B_1) \cdot \hat{h}_{F_1(A)}(u) =$
 $= \varphi(A, B_1) \cdot \hat{h}_{B_1}(f(A)) \cdot h_{F_1(A)}(u) \quad (1)$

من جهة ثالثة، بما أن الدالي G مرافقاً للدالي F ، فإنه يوجد إيزومورفيزم دالي:

$$\varphi: \text{Hom}_{\mathfrak{T}_2}(F) \rightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{T}_1}(G)$$

ومنه أياً كان $A \in ob(\mathfrak{T}_1)$ و $B \in ob(\mathfrak{T}_2)$ ، فإن:

$$\varphi(A, B): \text{Hom}_{\mathfrak{T}_2}(F)(A, B) \rightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{T}_1}(G)(A, B)$$

$$\varphi(A, B): \text{Hom}_{\mathfrak{T}_2}(F(A), B) \rightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{T}_1}(A, G(B))$$

وهذا يبين أن $\varphi(A, B): h_{F(A)}(B) \rightarrow h_A(G(B))$ وبالتالي فإنه لأجل المورفيزم
 $u: B \rightarrow B_1 \in \mathfrak{T}_2(B, B_1)$ المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc}
h_{F(A)}(B) & \xrightarrow{\varphi(A,B)} & h_A(G(B)) \\
h_{F(A)}(u) & \downarrow & \downarrow h_A(G(u)) \\
h_{F(A)}(B_1) & \xrightarrow{\varphi(A,B_1)} & h_A(G(B_1))
\end{array}$$

تبديلي، أي إن:

$$h_A(G(u)) \cdot \varphi(A, B) = \varphi(A, B_1) \cdot h_{F(A)}(u)$$

وبما أن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccccc}
\hat{h}_B(F(A)) & \xrightarrow{\varphi(A,B)} & h_A(G(B)) & & \\
\hat{h}_B(f(A)) \uparrow & & \uparrow & h_A(g(B)) & \\
\hat{h}_B(F_1(A)) & \xrightarrow{\varphi_1(A,B)} & h_A(G_1(B)) & &
\end{array}$$

تبديلي، فإن:

$$\varphi(A, B) \cdot \hat{h}_A(f(A)) = h_A(g(B)) \cdot \varphi_1(A, B)$$

ومنه نجد أن:

$$\begin{aligned}
h_A(G(u)) \cdot h_A(g(B)) \cdot \varphi_1(A, B) &= h_A(G(u)) \cdot \varphi(A, B) \cdot \hat{h}_B(f(A)) = \\
&= \varphi(A, B_1) \cdot \hat{h}_{F(A)}(u) \cdot \hat{h}_B(f(A)) \quad (2)
\end{aligned}$$

أخيراً لنبرهن على أن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccccc}
h_{F(A)}(B) & \xrightarrow{h_{F(A)}(u)} & h_{F(A)}(B_1) & & \\
\hat{h}_B(f(A)) \uparrow & & \uparrow & \hat{h}_{B_1}(f(A)) & \\
h_{F(A)}(B) & \xrightarrow{h_{F(A)}(u)} & h_{F(A)}(B_1) & &
\end{array}$$

تبديلي. ليكن $w \in h_{F(A)}(B) = \mathfrak{S}_2(F(A), B)$ ، عندها فإن:

$$\begin{aligned}
(\hat{h}_{B_1}(f(A)) \cdot h_{F(A)}(u))(w) &= \hat{h}_{B_1}(f(A))((h_{F(A)}(u))(w)) = \\
&= (\hat{h}_{B_1}(f(A))(u \cdot w) = (u \cdot w) \cdot f(A) \\
(h_{F(A)}(u) \cdot \hat{h}_B(f(A)))(w) &= h_{F(A)}(u)(\hat{h}_B(f(A))(w)) = \\
&= (h_{F(A)}(u)(w \cdot f(A)) = u \cdot (w \cdot f(A)) = (u \cdot w) \cdot f(A)
\end{aligned}$$

ومنه نجد أن:

$$\begin{aligned}
(\hat{h}_{B_1}(f(A)) \cdot h_{F(A)}(u))(w) &= (h_{F(A)}(u) \cdot \hat{h}_B(f(A)))(w) \\
\hat{h}_{B_1}(f(A)) \cdot h_{F(A)}(u) &= h_{F(A)}(u) \cdot \hat{h}_B(f(A)) \quad (3)
\end{aligned}$$

من (١) و (٢) و (٣) نجد أن:

$$\begin{aligned}
h_A(g(B_1)) \cdot h_A(G_1(u)) \cdot \varphi_1(A, B) &= \varphi(A, B_1) \cdot \hat{h}_{B_1}(f(A)) \cdot h_{F(A)}(u) = \\
&= \varphi(A, B_1) \cdot h_{F(A)}(u) \cdot h_B(f(A)) = h_A(G(u)) \cdot h_A(g(B)) \cdot \varphi_1(A, B)
\end{aligned}$$

وبما أن φ_1 هو إيزومورفيزم دالي نجد أن:

$$\begin{aligned}
h_A(g(B_1)) \cdot h_A(G_1(u)) &= h_A(G(u)) \cdot h_A(g(B)) \\
h_A(g(B_1)) \cdot G_1(u) &= h_A(G(u)) \cdot g(B)
\end{aligned}$$

وبالتالي فإنه لأجل $A = G_1(B)$ نجد أن $I_{G_1(B)} \in \mathfrak{I}_1(G_1(B), G_1(B))$ ، وإن:

$$h_A(g(B_1) \cdot G_1(u))(I_{G_1(B_1)}) = h_A(G(u) \cdot g(B))(I_{G_1(B_1)})$$

$$g(B_1) \cdot G_1(u) \cdot I_{G_1(B_1)} = G(u) \cdot g(B) \cdot I_{G_1(B_1)}$$

$$g(B_1) \cdot G_1(u) = G(u) \cdot g(B)$$

وهكذا نجد أن $g: G_1 \rightarrow G$ هو مورفيزم دالي.

مبرهنة ٣-١-٥.

لتكن $\mathfrak{I}_1, \mathfrak{I}_2$ فئتين، وليكن $G: \mathfrak{I}_2 \rightarrow \mathfrak{I}_1, F: \mathfrak{I}_1 \rightarrow \mathfrak{I}_2$ دوال مباشرة. عندئذ لأجل كل مورفيزم دالي $\varphi: \text{Hom}_{\mathfrak{I}_2}(F) \rightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{I}_1}(G)$ يوجد مورفيزماً دالياً $\mathcal{E}_\varphi: I_{\mathfrak{I}_1} \rightarrow GF$. البرهان.

بما أن كلا من F و G دوال مباشرة فإن GF هو دالي مباشر. فضلاً عن ذلك فإن $I_{\mathfrak{I}_1}$ هو أيضاً دالي مباشر.

ليكن $\varphi: \text{Hom}_{\mathfrak{I}_2}(F) \rightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{I}_1}(G)$ مورفيزم دالي، عندئذ أيأ كان $A \in \text{ob}(\mathfrak{I}_1)$ ، فإن $F(A) \in \text{ob}(\mathfrak{I}_2)$ ، ومنه فإن $(A, F(A)) \in \text{ob}(\mathfrak{I})$ ؛ وبالتالي:

$$\varphi(A, F(A)): \text{Hom}_{\mathfrak{I}_2}(F)(A, F(A)) \rightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{I}_1}(G)(A, F(A))$$

$$\varphi(A, F(A)): \mathfrak{I}_2(F(A), F(A)) \rightarrow \mathfrak{I}_1(A, GF(A))$$

وبما أن $I_{F(A)}: F(A) \rightarrow F(A) \in \mathfrak{I}_2(F(A), F(A))$ فإن:

$$\varphi(A, F(A))(I_{F(A)}): A \rightarrow GF(A)$$

لتعرف $\mathcal{E}_\varphi: I_{\mathfrak{I}_1} \rightarrow GF$ بالشكل الآتي: أيأ كان $A \in \text{ob}(\mathfrak{I}_1)$ ، فإن:

$$\mathcal{E}_\varphi(A): \varphi(A, F(A))(I_{F(A)}) \in \mathfrak{I}_1(A, GF(A))$$

ولنبرهن على أن ذلك يعرف مورفيزم دالي. لأجل ذلك يكفي إثبات أنه لأجل أي مورفيزم

$\mu: A \rightarrow A_1 \in \mathfrak{I}_1(A, A_1)$ فإن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\mathcal{E}_\varphi(A)} & GF(A) \\ \mu \downarrow & & \downarrow GF(\mu) \\ A_1 & \xrightarrow{\mathcal{E}_\varphi(A_1)} & GF(A_1) \end{array}$$

تبديلي، أي إن: $GF(\mu) \cdot \mathcal{E}_\varphi(A) = \mathcal{E}_\varphi(A_1) \cdot \mu$.

بما أن φ هو مورفيزم دالي فإن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{S}_2(F(A), F(A)) & \xrightarrow{\varphi(A, F(A))} & \mathfrak{S}_1(A, GF(A)) \\ h_{F(A)}(F(\mu)) \downarrow & & \downarrow h_A(GF(\mu)) \\ \mathfrak{S}_2(F(A), F(A_1)) & \xrightarrow{\varphi(A, F(A_1))} & \mathfrak{S}_1(A, GF(A_1)) \end{array}$$

تبديلي، أي إن:

$$h_A(GF(\mu)) \cdot \varphi(A, F(A)) = \varphi(A, F(A_1)) \cdot h_{F(A)}(F(\mu))$$

ومنه بما أن $I_{F(A)} \in \mathfrak{S}_2(F(A), F(A))$ فإن:

$$\begin{aligned} (h_A(GF(\mu)) \cdot \varphi(A, F(A)))(I_{F(A)}) &= (\varphi(A, F(A_1)) \cdot h_{F(A)}(F(\mu)))(I_{F(A)}) \\ h_A(GF(\mu))(\varphi(A, F(A))(I_{F(A)})) &= \varphi(A, F(A_1))(h_{F(A)}(F(\mu))(I_{F(A)})) \\ GF(\mu) \cdot \varepsilon_\varphi(A) &= \varphi(A, F(A_1))(F(\mu)) \quad (1) \end{aligned}$$

أيضاً بما أن φ هو مورفيزم دالي، فإن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{S}_2(F(A), F(A_1)) & \xrightarrow{\varphi(A, F(A_1))} & \mathfrak{S}_1(A, GF(A_1)) \\ \hat{h}_{F(A_1)}(F(\mu)) \uparrow & & \uparrow \hat{h}_{GF(A_1)}(\mu) \\ \mathfrak{S}_2(F(A_1), F(A_1)) & \xrightarrow{\varphi(A_1, F(A_1))} & \mathfrak{S}_1(A_1, GF(A_1)) \end{array}$$

تبديلي، أي إن $\varphi(A, F(A_1)) \cdot \hat{h}_{F(A_1)}(F(\mu)) = \hat{h}_{GF(A_1)}(\mu) \cdot \varphi(A_1, F(A_1))$

ومنه بما أن $I_{F(A_1)} \in \mathfrak{S}_1(F(A_1), F(A_1))$ فإن:

$$\begin{aligned} (\varphi(A, F(A_1)) \cdot \hat{h}_{F(A_1)}(F(\mu)))(I_{F(A_1)}) &= (\hat{h}_{GF(A_1)}(\mu) \cdot \varphi(A_1, F(A_1)))(I_{F(A_1)}) \\ \varphi(A, F(A_1))(\hat{h}_{F(A_1)}(F(\mu))(I_{F(A_1)})) &= \hat{h}_{GF(A_1)}(\mu)(\varphi(A_1, F(A_1))(I_{F(A_1)})) \\ \varphi(A, F(A_1))(I_{F(A_1)} \cdot F(\mu)) &= \hat{h}_{GF(A_1)}(\mu)(\varepsilon_\varphi(A_1)) \\ \varphi(A, F(A_1))(F(\mu)) &= (\varepsilon_\varphi(A_1) \cdot \mu) \quad (2) \end{aligned}$$

من (١) و (٢) نجد أن $GF(\mu) \cdot \varepsilon_\varphi(A) = \varepsilon_\varphi(A_1) \cdot \mu$. مما سبق نجد أن ε_φ هو مورفيزم دالي.

مبرهنة ٣-١-٦.

لنكن $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2$ فئتين، وليكن $G: \mathfrak{S}_2 \rightarrow \mathfrak{S}_1, F: \mathfrak{S}_1 \rightarrow \mathfrak{S}_2$ دوال مباشرة. عندئذ لأجل كل

مورفيزم دالي $\Theta: I_{\mathfrak{S}_1} \rightarrow GF$ يوجد مورفيزم دالي:

$$\cdot \delta_{\Theta} : \text{Hom}_{\mathfrak{S}_2}(F) \rightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{S}_1}(G)$$

البرهان.

لنضع $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_1^{\circ} \times \mathfrak{S}_2$. لنفرض أن $\Theta : I_{\mathfrak{S}_1} \rightarrow GF$ مورفيزم دالي. لنعرف:

$$\delta_{\Theta} : \text{Hom}_{\mathfrak{S}_2}(F) \rightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{S}_1}(G)$$

بالشكل الآتي: أيًا كان $(A, B) \in \text{ob}(\mathfrak{S})$ ، فإن:

$$\delta_{\Theta}(A, B) : \text{Hom}_{\mathfrak{S}_2}(F)(A, B) \rightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{S}_1}(G)(A, B)$$

$$\delta_{\Theta}(A, B) : \mathfrak{S}_2(F(A), B) \rightarrow \mathfrak{S}_1(A, G(B))$$

ليكن $u : F(A) \rightarrow B \in \mathfrak{S}_2(F(A), B)$ ، ولنضع:

$$\delta_{\Theta}(A, B)(u) = G(u) \cdot \Theta(A)$$

ولنبرهن على أن δ_{Θ} هو مورفيزم دالي.

ليكن $(\mu, v) : (A, B) \rightarrow (A_1, B_1) \in \text{Mor}(\mathfrak{S})$ ولنبرهن على أن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{S}_2(F(A), B) & \xrightarrow{\delta_{\Theta}(A, B)} & \mathfrak{S}_1(A, G(B)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Hom}_{\mathfrak{S}_2}(F(\mu), v) & & \text{Hom}_{\mathfrak{S}_1}(\mu, G(v)) \\ \mathfrak{S}_2(F(A_1), B_1) & \xrightarrow{\delta_{\Theta}(A_1, B_1)} & \mathfrak{S}_1(A_1, G(B_1)) \end{array}$$

تبديلي، أي إن:

$$\cdot \delta_{\Theta}(A_1, B_1) \cdot \text{Hom}_{\mathfrak{S}_2}(F(\mu), v) = \text{Hom}_{\mathfrak{S}_1}(\mu, G(v)) \cdot \delta_{\Theta}(A, B)$$

ومنه أيًا كان $u : F(A) \rightarrow B \in \mathfrak{S}_2(F(A), B)$ فإن:

$$\begin{aligned} (\delta_{\Theta}(A_1, B_1) \cdot \text{Hom}_{\mathfrak{S}_2}(F(\mu), v))(u) &= \delta_{\Theta}(A_1, B_1)(\text{Hom}_{\mathfrak{S}_2}(F(\mu), v)(u)) = \\ &= \delta_{\Theta}(A_1, B_1)(v \cdot u \cdot F(\mu)) = G(v \cdot u \cdot F(\mu)) \cdot \Theta(A_1) = \\ &= G(v \cdot u) \cdot F(\mu) \cdot \Theta(A_1) \end{aligned}$$

كما أن:

$$\begin{aligned} (\text{Hom}_{\mathfrak{S}_1}(\mu, G(v)) \cdot \delta_{\Theta}(A, B))(u) &= \text{Hom}_{\mathfrak{S}_1}(\mu, G(v))(\delta_{\Theta}(A, B)(u)) = \\ &= \text{Hom}_{\mathfrak{S}_1}(\mu, G(v))(G(u) \cdot \Theta(A)) = G(v) \cdot G(u) \cdot \Theta(A) \cdot \mu = \\ &= G(v \cdot u) \cdot \Theta(A) \cdot \mu \end{aligned}$$

بما أن $\Theta : I_{\mathfrak{S}_1} \rightarrow GF$ مورفيزم دالي فإنه لأجل $\mu : A \rightarrow A_1 \in \mathfrak{S}_1^{\circ}(A, A_1)$ المخطط الآتي

$$\begin{array}{ccc}
A_1 & \xrightarrow{\Theta(A_1)} & GF(A_1) \\
\mu \downarrow & & \downarrow GF(\mu) \\
A & \xrightarrow{\Theta(A)} & GF(A)
\end{array}$$

تبديلي، أي إن: $GF(\mu) \cdot \Theta(A_1) = \Theta(A) \cdot \mu$ وهكذا نجد أن:

$$\begin{aligned}
(\text{Hom}_{\mathfrak{S}_1}(\mu, G(v)) \cdot \delta_{\Theta}(A, B))(u) &= G(v \cdot u) \cdot \Theta(A) \cdot \mu = \\
&= G(v \cdot u) \cdot GF(\mu) \cdot \Theta(A_1)
\end{aligned}$$

مما سبق نجد أن $\delta_{\Theta} : \text{Hom}_{\mathfrak{S}_2}(F) \rightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{S}_1}(G)$ مورفيزم دالي.

مبرهنة ٣-١-٧.

لتكن $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2$ فئتين، وليكن Σ هو صف المورفيزمات الدالية من الدالي $\text{Hom}_{\mathfrak{S}_2}(F)$ إلى الدالي $\text{Hom}_{\mathfrak{S}_1}(G)$ ، و Σ_0 هو صف المورفيزمات الدالية من الدالي $I_{\mathfrak{S}_1}$ إلى الدالي GF . عندئذ يوجد تطبيق متباين وغامر $\Gamma : \Sigma \rightarrow \Sigma_0$. البرهان.

لنعرف $\Gamma : \Sigma \rightarrow \Sigma_0$ بالشكل الآتي: ليكن $\varphi \in \Sigma$ عندئذ:

$$\varphi : \text{Hom}_{\mathfrak{S}_2}(F) \rightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{S}_1}(G)$$

هو مورفيزم دالي. حسب المبرهنة (٣-١-٥)، فإن φ يعرف مورفيزماً دالياً $\varepsilon_{\varphi} : I_{\mathfrak{S}_1} \rightarrow GF$ لنضع $\Gamma(\varphi) = \varepsilon_{\varphi} \in \Sigma_0$. إن Γ هو تطبيق، لأنه إذا كان:

$$\varphi, \psi : \text{Hom}_{\mathfrak{S}_2}(F) \rightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{S}_1}(G) \in \Sigma$$

بحيث $\varphi = \psi$ عندئذ، أياً كان $(A, B) \in \mathfrak{S} = \mathfrak{S}_1^o \times \mathfrak{S}_2$ فإن $\varphi(A, B) = \psi(A, B)$ ليكن $A \in \text{ob}(\mathfrak{S}_1)$ ، بما أن $F(A) \in \text{ob}(\mathfrak{S}_2)$ فإن $\varphi(A, F(A)) = \psi(A, F(A))$ ومنه $\varphi(A, F(A))(I_{F(A)}) = \psi(A, F(A))(I_{F(A)})$

وبالتالي يكون $\varepsilon_{\varphi}(A) = \varepsilon_{\psi}(A)$ ومنه $\varepsilon_{\varphi} = \varepsilon_{\psi}$ أي إن $\Gamma(\varphi) = \Gamma(\psi)$.

لنعرف تطبيقاً آخر $\Gamma_0 : \Sigma_0 \rightarrow \Sigma$ بالشكل الآتي: ليكن $\Theta : I_{\mathfrak{S}_1} \rightarrow GF \in \Sigma_0$ مورفيزماً دالياً حسب المبرهنة (٣-١-٦) فإن Θ يعرف مورفيزماً دالياً:

$$\delta_{\Theta} : \text{Hom}_{\mathfrak{S}_2}(F) \rightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{S}_1}(G)$$

لنضع $\Gamma_0(\Theta) = \delta_\Theta \in \Sigma$ فنجد أن Γ_0 تطبيق، لأنه إذا كان $\Theta_1, \Theta_2 \in \Sigma_0$ بحيث $\Theta_1 = \Theta_2$ ، فإنه توجد مورفيزمات دالية:

$$\delta_{\Theta_1}, \delta_{\Theta_2} : \text{Hom}_{\mathfrak{S}_2}(F) \rightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{S}_1}(G)$$

ومنه أياً كان $(A, B) \in \mathfrak{S} = \mathfrak{S}_1^\circ \times \mathfrak{S}_2$ وأياً كان $u : F(A) \rightarrow B \in \mathfrak{S}_2(F(A), B)$ فإن:

$$\delta_{\Theta_1}(A, B)(u) = G(u) \cdot \Theta_1(A) = G(u) \cdot \Theta_2(A) = \delta_{\Theta_2}(A, B)(u)$$

وهذا يبين أن $\delta_{\Theta_1} = \delta_{\Theta_2}$ أي إن $\Gamma_0(\Theta_1) = \Gamma_0(\Theta_2)$ ؛ وبالتالي Γ_0 تطبيق.

لنبرهن الآن على أن $\Gamma \cdot \Gamma_0 = I_{\Sigma}$ وأن $\Gamma_0 \cdot \Gamma = I_{\Sigma_0}$.

ليكن $\Theta \in \Sigma_0$ عندئذ:

$$\Gamma \cdot \Gamma_0(\Theta) = \Gamma(\Gamma_0(\Theta)) = \Gamma(\delta_\Theta) = \varepsilon_{\delta_\Theta}$$

ومنه أياً كان $D \in \text{ob}(\mathfrak{S}_1)$ فإن:

$$\varepsilon_{\delta_\Theta}(D) = \delta_\Theta(D, F(D))(I_{F(D)}) = G(I_{F(D)}) \cdot \Theta(D) = I_{GF(D)} \cdot \Theta(D) = \Theta(D)$$

ومنه نجد أن $\varepsilon_{\delta_\Theta} = \Theta$ وبالتالي فإن $\Gamma \cdot \Gamma_0 = I_{\Sigma}$.

من جهة أخرى، أياً كان $\varphi \in \Sigma$ فإن:

$$\Gamma_0 \cdot \Gamma(\varphi) = \Gamma_0(\Gamma(\varphi)) = \Gamma_0(\varepsilon_\varphi) = \delta_{\varepsilon_\varphi} = \varphi$$

ومنه نجد أن $\Gamma_0 \cdot \Gamma = I_{\Sigma_0}$. وهكذا فإن التطبيق $\Gamma : \Sigma \rightarrow \Sigma_0$ متباين وغامر.

مبرهنة ٣-١-٨.

لتكن $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2$ فئتين، وليكن $F : \mathfrak{S}_1 \rightarrow \mathfrak{S}_2, G : \mathfrak{S}_2 \rightarrow \mathfrak{S}_1$ دوال مباشرة. عندئذ لأجل كل

مورفيزم دالي $\psi : \text{Hom}_{\mathfrak{S}_1}(G) \rightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{S}_2}(F)$ يوجد مورفيزم دالي $I_{\mathfrak{S}_2} : FG \rightarrow$

البرهان.

بما أن كلا من F و G دوال مباشرة فإن FG هو دالي مباشر. فضلاً عن ذلك، فإن $I_{\mathfrak{S}_2}$

هو أيضاً دالي مباشر. ليكن $\psi : \text{Hom}_{\mathfrak{S}_1}(G) \rightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{S}_2}(F)$ مورفيزماً دالياً. عندئذ أياً

كان $B \in \text{ob}(\mathfrak{S}_2)$ ، فإن $G(B) \in \text{ob}(\mathfrak{S}_1)$ ، ومنه:

$$\psi(B, G(B)) : \text{Hom}_{\mathfrak{S}_1}(G)(G(B), B) \rightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{S}_2}(F)(G(B), B)$$

$$\psi(B, G(B)) : \mathfrak{S}_1(G(B), G(B)) \rightarrow \mathfrak{S}_2(FG(B), B)$$

وبما أن $I_{G(B)} : G(B) \rightarrow G(B) \in \mathfrak{S}_1(G(B), G(B))$ فإن:

$$\psi(B, G(B))(I_{G(B)}): F(G(B)) \rightarrow B$$

لنعرف $\varepsilon_\psi: FG \rightarrow I_{\mathfrak{I}_2}$ بالشكل الآتي: أيًا كان $B \in \text{ob}(\mathfrak{I}_2)$ ، فإن:

$$\varepsilon_\psi(B): \psi(G(B), B)(I_{G(B)}) \in \mathfrak{I}_1(FG(B), B)$$

لنبرهن على أن ذلك يعرف مورفيزماً دالياً. لأجل ذلك يكفي إثبات أنه لأجل أي مورفيزم $w: B \rightarrow B_1 \in \mathfrak{I}_2(B, B_1)$ ، فإن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} FG(B) & \xrightarrow{\varepsilon_\psi(B)} & B \\ \downarrow FG(w) & & \downarrow w \\ FG(B_1) & \xrightarrow{\varepsilon_\psi(B_1)} & B_1 \end{array}$$

تبديلي، أي إن: $w \cdot \varepsilon_\psi(B) = \varepsilon_\psi(B_1) \cdot FG(w)$

بما أن ψ مورفيزم دالي فإن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{I}_1(G(B), G(B)) & \xrightarrow{\psi(G(B), B)} & \mathfrak{I}_2(FG(B), B) \\ \downarrow h_{G(B)}(G(w)) & & \downarrow h_{FG(B)}(w) \\ \mathfrak{I}_1(G(B), G(B_1)) & \xrightarrow{\psi(G(B), B_1)} & \mathfrak{I}_2(FG(B), B_1) \end{array}$$

تبديلي، أي إن:

$$h_{FG(B)}(w) \cdot \psi(G(B), B) = \psi(G(B), B_1) \cdot h_{G(B)}(G(w))$$

وبما أن $I_{G(B)}: G(B) \rightarrow G(B) \in \mathfrak{I}_1(G(B), G(B))$ نجد أن:

$$(h_{FG(B)}(w) \cdot \psi(G(B), B))(I_{G(B)}) = (\psi(G(B), B_1) \cdot h_{G(B)}(G(w)))(I_{G(B)})$$

$$h_{FG(B)}(w)(\psi(G(B), B)(I_{G(B)})) = \psi(G(B), B_1)(h_{G(B)}(G(w))(I_{G(B)}))$$

$$h_{FG(B)}(w)(\varepsilon_\psi(B)) = \psi(G(B), B_1)(G(w) \cdot (I_{G(B)}))$$

$$w \cdot \varepsilon_\psi(B) = \psi(G(B), B_1)(G(w)) \quad (1)$$

من جهة ثانية، بما أن $\psi: \text{Hom}_{\mathfrak{I}_1}(G) \rightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{I}_2}(F)$ مورفيزم دالي، فإن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccccc} \mathfrak{I}_1(G(B), G(B_1)) & \xrightarrow{\psi(G(B), B_1)} & \mathfrak{I}_2(FG(B), B_1) & & \\ \uparrow & & \uparrow & & \hat{h}_B(FG(w)) \\ \hat{h}_{G(B_1)}(G(w)) & & & & \\ \mathfrak{I}_1(G(B_1), G(B_1)) & \xrightarrow{\psi(G(B_1), B_1)} & \mathfrak{I}_2(FG(B_1), B_1) & & \end{array}$$

تبديلي، أي إن:

$$\hat{h}_{B_1}(FG(w)) \cdot \psi(G(B_1), B_1) = \psi(G(B), B_1) \cdot \hat{h}_{G(B_1)}(G(w))$$

وبما أن $I_{G(B_1)} : G(B_1) \rightarrow G(B_1) \in \mathfrak{S}_1(G(B_1), G(B_1))$ نجد أن:

$$(\hat{h}_{B_1}(FG(w)) \cdot \psi(G(B_1), B_1))(I_{G(B_1)}) = (\psi(G(B), B_1) \cdot \hat{h}_{G(B_1)}(G(w)))(I_{G(B_1)})$$

$$\hat{h}_{B_1}(FG(w))(\psi(G(B_1), B_1))(I_{G(B_1)}) = \psi(G(B), B_1)(\hat{h}_{G(B_1)}(G(w))(I_{G(B_1)}))$$

$$\hat{h}_{B_1}(FG(w))(\varepsilon_{\nu}(B_1)) = \psi(G(B), B_1)(I_{G(B_1)} \cdot G(w))$$

$$\varepsilon_{\nu}(B_1) \cdot FG(w) = \psi(G(B), B_1)(G(w)) \quad (2)$$

من (١) و (٢)، نجد أن $w \cdot \varepsilon_{\nu(B_1)} = \varepsilon_{\nu(B_1)} \cdot FG(w)$ وهذا يبين أن $\varepsilon_{\nu} : FG \rightarrow I_{\mathfrak{S}_2}$ مورفيزم دالي.

مبرهنة ٩-١-٣.

لتكن $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2$ فئتين، وليكن $F : \mathfrak{S}_1 \rightarrow \mathfrak{S}_2$ ، $G : \mathfrak{S}_2 \rightarrow \mathfrak{S}_1$ دوال مباشرة. عندئذ لأجل

كل مورفيزم دالي $\psi : FG \rightarrow I_{\mathfrak{S}_2}$ ، يوجد مورفيزم دالي:

$$\delta_{\nu} : \text{Hom}_{\mathfrak{S}_1}(G) \rightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{S}_2}(F)$$

البرهان.

لنضع $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_1^{\circ} \times \mathfrak{S}_2$ ولنفرض أن $\psi : FG \rightarrow I_{\mathfrak{S}_2}$ مورفيزم دالي. لنعرف:

$$\delta_{\nu} : \text{Hom}_{\mathfrak{S}_1}(G) \rightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{S}_2}(F)$$

بالشكل الآتي: أيأ كان $(A, B) \in \text{ob}(\mathfrak{S})$ ، فإن:

$$\delta_{\nu}(A, B) : \text{Hom}_{\mathfrak{S}_1}(G)(A, B) \rightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{S}_2}(F)(A, B)$$

$$\delta_{\nu}(A, B) : \mathfrak{S}_1(A, G(B)) \rightarrow \mathfrak{S}_2(F(A), B)$$

ليكن $w : A \rightarrow G(B) \in \mathfrak{S}_1(A, G(B))$ ، لنضع:

$$\delta_{\nu}(A, B)(w) = \psi(B) \cdot F(w)$$

ولنبرهن على أن δ_{ν} هو مورفيزم دالي. ليكن:

$$(\mu, \nu) : (A, B) \rightarrow (A_1, B_1) \in \text{ob}(\mathfrak{S})$$

ولنبرهن على أن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc}
\mathfrak{S}_1(A, G(B)) & \xrightarrow{\delta_{\nu, A, B}} & \mathfrak{S}_2(F(A), B) \\
\text{Hom}_{\mathfrak{S}_1}(\mu, G(v)) & \downarrow & \downarrow \text{Hom}_{\mathfrak{S}_2}(F(\mu), v) \\
\mathfrak{S}_1(A_1, G(B_1)) & \xrightarrow{\delta_{\nu, A_1, B_1}} & \mathfrak{S}_2(F(A_1), B_1)
\end{array}$$

تبديلي، أي إن:

$$\text{Hom}_{\mathfrak{S}_2}(F(\mu), v) \cdot \delta_{\nu}(A, B) = \delta_{\nu}(A_1, B_1) \cdot \text{Hom}_{\mathfrak{S}_1}(\mu, G(v))$$

ومنه أياً كان $w: A \rightarrow G(B) \in \mathfrak{S}_1(A, G(B))$ ، فإن:

$$\begin{aligned}
(\text{Hom}_{\mathfrak{S}_2}(F(\mu), v) \cdot \delta_{\nu}(A, B))(w) &= \text{Hom}_{\mathfrak{S}_2}(F(\mu), v)(\delta_{\nu}(A, B)(w)) = \\
&= \text{Hom}_{\mathfrak{S}_2}(F(\mu), v)(\psi(B) \cdot F(w)) = v \cdot \psi(B) \cdot F(w) \cdot F(\mu) = \\
&= v \cdot \psi(B) \cdot F(w \cdot \mu)
\end{aligned}$$

كما أن:

$$\begin{aligned}
(\delta_{\nu}(A_1, B_1) \cdot \text{Hom}_{\mathfrak{S}_1}(\mu, G(v)))(w) &= \delta_{\nu}(A_1, B_1)(\text{Hom}_{\mathfrak{S}_1}(\mu, G(v))(w)) = \\
&= \delta_{\nu}(A_1, B_1)(G(v) \cdot w \cdot \mu) = \psi(B_1) \cdot F(G(v) \cdot w \cdot \mu) = \\
&= \psi(B_1) \cdot FG(v) \cdot F(w \cdot \mu)
\end{aligned}$$

وبما أن $\psi: FG \rightarrow I_{\mathfrak{S}_2}$ مورفيزم دالي، فإن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc}
GF(B) & \xrightarrow{\psi(B)} & B \\
GF(v) & \downarrow & \downarrow v \\
GF(B_1) & \xrightarrow{\psi(B_1)} & B_1
\end{array}$$

تبديلي، أي إن: $v \cdot \psi(B) = \psi(B_1) \cdot GF(v)$ وهكذا نجد أن:

$$\begin{aligned}
\delta_{\nu}(A_1, B_1) \cdot \text{Hom}_{\mathfrak{S}_1}(\mu, G(v))(w) &= \psi(B_1) \cdot FG(v) \cdot F(w \cdot \mu) = \\
&= v \cdot \psi(B) \cdot F(w \cdot \mu)
\end{aligned}$$

ومنه نجد أن $\text{Hom}_{\mathfrak{S}_2}(F(\mu), v) \cdot \delta_{\nu}(A, B) = \delta_{\nu}(A_1, B_1) \cdot \text{Hom}_{\mathfrak{S}_1}(\mu, G(v))$ وهذا

يبين أن $\delta_{\nu}: \text{Hom}_{\mathfrak{S}_1}(G) \rightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{S}_2}(F)$ هو مورفيزم دالي.

مبرهنة ٣-١-١٠.

لتكن $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2$ فئتين، وليكن $F: \mathfrak{S}_1 \rightarrow \mathfrak{S}_2$ ، $G: \mathfrak{S}_2 \rightarrow \mathfrak{S}_1$ دوال مباشرة. ولنفرض أن Ω

هو صف المورفيزمات الدالية من الدالي FG إلى الدالي $I_{\mathfrak{S}_2}$ ، و Ω_0 هو صف

المورفيزمات الدالية من الدالي $\text{Hom}_{\mathfrak{S}_1}(G)$ إلى الدالي $\text{Hom}_{\mathfrak{S}_2}(F)$ عندئذ يوجد تطبيق متباين وغامر $\Theta: \Omega \rightarrow \Omega_0$. البرهان.

لنعرف $\Theta: \Omega \rightarrow \Omega_0$ بالشكل الآتي: ليكن $\psi: FG \rightarrow I_{\mathfrak{S}_2} \in \Omega$ مورفيزماً دالياً، عندئذ حسب المبرهنة (٣-١-٩) يوجد مورفيزم دالي $\delta_\psi: \text{Hom}_{\mathfrak{S}_1}(G) \rightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{S}_2}(F)$ معرف بالشكل الآتي: أيأ كان $(A, B) \in \text{ob}(\mathfrak{S})$ وأيأ كان:

$$w: A \rightarrow G(B) \in \mathfrak{S}_1(A, G(B))$$

$$\text{فإن } \Theta(\psi) = \delta_\psi \in \Omega_0 \text{ لنضع } \delta_\psi(A, B)(w) = \psi(B) \cdot F(w)$$

واضح أن Θ هو تطبيق، لأنه إذا كان $\psi_1, \psi_2 \in \Omega$ بحيث $\psi_1 = \psi_2$ عندئذ أيأ كان $B \in \text{ob}(\mathfrak{S}_2)$ فإن $\psi_1(B) = \psi_2(B)$ ومنه لأجل كل $w: A \rightarrow G(B)$ ، فإن:

$$\psi_1(B) \cdot F(w) = \psi_2(B) \cdot F(w)$$

ومنه $\delta_{\psi_1}(A, B)(w) = \psi_1(B) \cdot F(w) = \psi_2(B) \cdot F(w) = \delta_{\psi_2}(A, B)(w)$ وهكذا نجد

$$\text{أن } \Theta(\psi_1) = \delta_{\psi_1} = \delta_{\psi_2} = \Theta(\psi_2)$$

لنعرف تطبيقاً آخر، $\Theta_0: \Omega_0 \rightarrow \Omega$ بالشكل الآتي: أيأ كان:

$$\varphi: \text{Hom}_{\mathfrak{S}_1}(G) \rightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{S}_2}(F) \in \Omega_0$$

فإنه حسب المبرهنة (٣-١-٨) يوجد مورفيزم دالي $\varepsilon_\varphi: FG \rightarrow I_{\mathfrak{S}_2} \in \Omega$ معرف

بالشكل الآتي: أيأ كان $B \in \text{ob}(\mathfrak{S}_2)$ ، فإن $\varepsilon_\varphi(B) = \varphi(G(B), B)(I_{G(B)})$

لنضع $\Theta_0(\varphi) = \varepsilon_\varphi$. فنجد أن Θ_0 تطبيق؛ لأنه $\varphi_1, \varphi_2 \in \Omega_0$ بحيث $\varphi_1 = \varphi_2$ فإن

$\varphi_1(A, B) = \varphi_2(A, B)$ وذلك أيأ كان $(A, B) \in \text{ob}(\mathfrak{S})$ ومنه لأجل $(G(B), B)$ فإن

$$\varphi_1(G(B), B) = \varphi_2(G(B), B) \text{ وهكذا نجد أن:}$$

$$\varepsilon_{\varphi_1}(B) = \varphi_1(G(B), B)(I_{G(B)}) = \varphi_2(G(B), B)(I_{G(B)}) = \varepsilon_{\varphi_2}(B)$$

أي إن $\varepsilon_{\varphi_1} = \varepsilon_{\varphi_2}$ ، ومنه $\Theta_0(\varphi_1) = \Theta_0(\varphi_2)$

لنبرهن على أن $\Theta_0 \cdot \Theta = I_\Omega$. ليكن $\psi: FG \rightarrow I_{\mathfrak{S}_2} \in \Omega$ عندئذ فإن:

$$\Theta_0 \cdot \Theta(\psi) = \Theta_0(\Theta(\psi)) = \Theta_0(\delta_\psi) = \varepsilon_{\delta_\psi}$$

وبما أن $\varepsilon_{\delta_\psi}: FG \rightarrow I_{\mathfrak{S}_2}$ فإنه أيأ كان $B \in \text{ob}(\mathfrak{S}_2)$ ، فإن:

$$\varepsilon_{\delta_\psi}(B) = \delta_\psi(G(B), B)(I_{G(B)}) = \psi(B) \cdot F(I_{G(B)}) = \psi(B) \cdot I_{FG(B)} = \psi(B)$$

وهذا يبين أن $\varepsilon_{\delta_\psi} = \psi$ أي إن $\Theta_0 \cdot \Theta = I_{\Omega}$.

لنبرهن أيضاً أن $\Theta \cdot \Theta_0 = I_{\Omega_0}$. ليكن $\varphi: \text{Hom}_{\mathfrak{S}_1}(G) \rightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{S}_2}(F) \in \Omega_0$ عندئذ فإن

$$\Theta \cdot \Theta_0(\varphi) = \Theta(\Theta_0(\varphi)) = \Theta(\varepsilon_\varphi) = \delta_{\varepsilon_\varphi}$$

ومنه أياً كان $(A, B) \in \text{ob}(\mathfrak{S})$ ، فإن $\delta_{\varepsilon_\varphi}(A, B)(w) = \varepsilon_\varphi(B) \cdot F(w)$ ومنه:

$$\delta_{\varepsilon_\varphi}(G(B), B)(I_{G(B)}) = \varepsilon_\varphi(B) \cdot F(I_{G(B)}) = \varepsilon_\varphi(B) \cdot I_{FG(B)} =$$

$$= \varepsilon_\varphi(B) = \varphi(G(B), B)(I_{FG(B)}) = \varphi$$

وهكذا نجد أن التطبيق $\Theta: \Omega \rightarrow \Omega_0$ متباين وغامر.

مبرهنة ١-١-١١.

لتكن $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2$ فئتين، وليكن $F: \mathfrak{S}_1 \rightarrow \mathfrak{S}_2$ ، $G: \mathfrak{S}_2 \rightarrow \mathfrak{S}_1$ دوال مباشرة ولنفرض أن

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_1^\circ \times \mathfrak{S}_2$$

١ - الدالي G مرافق للدالي F .

٢ - توجد مورفيزمات دالية $\Phi: I_{\mathfrak{S}_1} \rightarrow GF$ و $\Psi: FG \rightarrow I_{\mathfrak{S}_2}$ تحقق الشروط الآتية:

$$(a) \text{ أياً كان } A \in \text{ob}(\mathfrak{S}_1) \text{، فإن } \Psi(F(A)) \cdot F(\Phi(A)) = I_{F(A)}$$

$$(b) \text{ أياً كان } B \in \text{ob}(\mathfrak{S}_2) \text{، فإن } G(\Psi(B)) \cdot \Phi(G(B)) = I_{G(B)}$$

البرهان.

(١) $\Leftrightarrow$ (٢). لنفرض أن الدالي G مرافق للدالي F . عندئذ حسب التعريف يوجد

إيزومورفيزم دالي $\varphi: \text{Hom}_{\mathfrak{S}_2}(F) \rightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{S}_1}(G)$ وحسب المبرهنة (٢-٢-٢)، فإن

$$\varphi: \text{Hom}_{\mathfrak{S}_2}(F) \rightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{S}_1}(G)$$

$$\psi: \text{Hom}_{\mathfrak{S}_1}(G) \rightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{S}_2}(F)$$

$$\text{يحقق أن } \varphi \cdot \psi = I_{\text{Hom}_{\mathfrak{S}_1}(G)} \text{، وإن } \psi \cdot \varphi = I_{\text{Hom}_{\mathfrak{S}_2}(F)}$$

وحسب المبرهنة (٣-١-٥)، فإن المورفيزم الدالي φ يعرف مورفيزماً دالياً

$$\Phi: I_{\mathfrak{S}_1} \rightarrow GF \text{ معرف بالشكل الآتي: أياً كان } A \in \text{ob}(\mathfrak{S}_1) \text{، فإن:}$$

$$\Phi(A) = \varphi(A, F(A))(I_{F(A)}) \quad (1)$$

وحسب المبرهنة (٣-١-٦)، فإنه أياً كان $(A, B) \in ob(\mathfrak{S})$ وأياً كان:

$$u: F(A) \rightarrow B \in \mathfrak{S}_2(F(A), B)$$

فإن:

$$\varphi(A, B)(u) = G(u) \cdot \Phi(A) \quad (2)$$

من جهة أخرى، حسب المبرهنة (٣-١-٨)، فإن المورفيزم الدالي ψ يعرف مورفيزماً دالياً

$\Psi: FG \rightarrow I_{\mathfrak{S}_2}$ معرف بالشكل الآتي: أياً كان $B \in ob(\mathfrak{S}_2)$ ، فإن:

$$\Psi(B) = \psi(G(B), B)(I_{G(B)}) \quad (3)$$

وحسب المبرهنة (٣-١-٩)، فإنه أياً كان $(A, B) \in ob(\mathfrak{S})$ ، وأياً كان:

$$w: A \rightarrow G(B) \in \mathfrak{S}_1(A, G(B))$$

$$\psi(A, B)(w) = \Psi(B) \cdot F(w) \quad (4)$$

وهكذا نجد أنه أياً كان $A \in ob(\mathfrak{S}_1)$ ، فإن $F(A) \in ob(\mathfrak{S}_2)$ ؛ ومنه نجد أن:

$$\Phi(A) = \varphi(A, F(A))(I_{F(A)}) \in \mathfrak{S}_1(A, GF(A))$$

وبالتالي حسب العلاقة (4) نجد أن:

$$\begin{aligned} \Psi(F(A)) \cdot F(\Phi(A)) &= \psi(A, F(A))(\Phi(A)) = \\ &= \psi(A, F(A))(\varphi(A, F(A))(I_{F(A)})) = I_{Hom_{\mathfrak{S}_2}(F)}(I_{F(A)}) = I_{F(A)} \end{aligned}$$

كذلك الأمر أياً كان $B \in ob(\mathfrak{S}_2)$ ، فإن $G(B) \in ob(\mathfrak{S}_1)$ ومنه نجد أن:

$$\Psi(B) = \psi(G(B), B)(I_{G(B)}): FG(B) \rightarrow B$$

وحسب العلاقة (2) نجد أن:

$$\begin{aligned} G(\Psi(B)) \cdot \Phi(G(B)) &= \varphi(G(B), B)(\Psi(B)) = \\ &= \varphi(G(B), B)(\psi(G(B), B)(I_{G(B)})) = I_{Hom_{\mathfrak{S}_1}(G)}(I_{G(B)}) = I_{G(B)} \end{aligned}$$

(٢) $\Leftarrow$ (١). لنفرض أنه توجد مورفيزمات دالية $\Phi: I_{\mathfrak{S}_1} \rightarrow GF$ و $\Psi: FG \rightarrow I_{\mathfrak{S}_2}$

تحقق الشروط الآتية: أياً كان $A \in ob(\mathfrak{S}_1)$ فإن $\Psi(F(A)) \cdot F(\Phi(A)) = I_{F(A)}$ وأياً كان

$B \in ob(\mathfrak{S}_2)$ فإن $G(\Psi(B)) \cdot \Phi(G(B)) = I_{G(B)}$

عندئذ حسب المبرهنة (٣-١-٦)، فإن المورفيزم الدالي Φ يعرف مورفيزماً دالياً:

$$\varphi: Hom_{\mathfrak{S}_2}(F) \rightarrow Hom_{\mathfrak{S}_1}(G)$$

معرف بالشكل الآتي: أياً كان $(A, B) \in ob(\mathfrak{S})$ و $u: F(A) \rightarrow B \in \mathfrak{S}_2(F(A), B)$ فإن:

$$\varphi(A, B)(u) = G(u) \cdot \Phi(A)$$

أيضاً حسب المبرهنة (٣-١-٩)، فإن المورفيزم الدالي Ψ يعرف مورفيزماً دالياً:

$$\psi: \text{Hom}_{\mathfrak{S}_1}(G) \rightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{S}_2}(F)$$

معرف بالشكل الآتي: أياً كان $(A, B) \in ob(\mathfrak{S})$ و $v: A \rightarrow G(B) \in \mathfrak{S}_1(A, G(B))$ فإن

$$\psi(A, B)(v) = \Psi(B) \cdot F(v)$$

لنبرهن على أن $\psi \cdot \varphi = I_{\text{Hom}_{\mathfrak{S}_1}(G)}$ وأن $\psi \cdot \varphi = I_{\text{Hom}_{\mathfrak{S}_2}(F)}$ إن:

$$\begin{aligned} \psi(A, B)(\varphi(A, B)(u)) &= \psi(A, B)(G(u) \cdot \Phi(A)) = \Psi(B) \cdot F(G(u) \cdot \Phi(A)) = \\ &= \Psi(B) \cdot FG(u) \cdot F(\Phi(A)) \end{aligned}$$

وبما أن $\Psi: FG \rightarrow I_{\mathfrak{S}_2}$ مورفيزم دالي، فإن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} FG(F(A)) & \xrightarrow{\Psi(F(A))} & F(A) \\ \downarrow FG(u) & & \downarrow u \\ FG(F(B)) & \xrightarrow{\Psi(B)} & B \end{array}$$

تبديلي، أي إن: $u \cdot \Psi(F(A)) = \Psi(B) \cdot FG(u)$ ؛ ومنه نجد أن:

$$\psi(A, B)(\varphi(A, B)(u)) = u \cdot \Psi(F(A)) \cdot F(\Phi(A)) = u \cdot I_{F(A)} = u$$

وهذا يبين أن $\psi(A, B) \cdot \varphi(A, B) = I_{\text{Hom}_{\mathfrak{S}_2}(F)}$ من جهة أخرى، فإن:

$$\begin{aligned} \varphi(A, B)(\psi(A, B)(v)) &= \varphi(A, B)(\Psi(B) \cdot F(v)) = G(\Psi(B) \cdot F(v)) \cdot \Phi(A) = \\ &= G(\Psi(B)) \cdot GF(v) \cdot \Phi(A) \end{aligned}$$

وبما أن $\Phi: I_{\mathfrak{S}_1} \rightarrow GF$ مورفيزم دالي، فإن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\Phi(A)} & GF(A) \\ \downarrow v & & \downarrow GF(v) \\ G(B) & \xrightarrow{\Phi(G(B))} & GF(G(B)) \end{array}$$

تبديلي، أي إن: $GF(v) \cdot \Phi(A) = \Phi(G(B)) \cdot v$ ؛ ومنه نجد أن:

$$\varphi(A, B)(\psi(A, B)(v)) = G(\Psi(B)) \cdot \Phi(G(B)) \cdot v = I_{G(B)} \cdot v = v$$

وهذا يبين أن $\varphi(A, B) \cdot \psi(A, B) = I_{\text{Hom}_{\mathfrak{S}_1}(G)}$. مما سبق نجد أن:

$$\varphi: \text{Hom}_{\mathfrak{S}_2}(F) \rightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{S}_1}(G)$$

إيزومورفيزم دالي، وحسب التعريف يكون الدالي G مرافقاً للدالي F .

تمهيدية ١٢-١-٣ .

لتكن $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2$ فئتين. وليكن $F: \mathfrak{S}_1 \rightarrow \mathfrak{S}_2$ ، $G: \mathfrak{S}_2 \rightarrow \mathfrak{S}_1$ دوال مباشرة. لنفرض أن

$\Psi: FG \rightarrow I_{\mathfrak{S}_2}$ مورفيزم دالي. وليكن $X \in \text{ob}(\mathfrak{S}_2)$. عندئذ الشروط الآتية متكافئة:

١ - المورفيزم $\Psi(X): FG(X) \rightarrow X$ إيزومورفيزم.

٢ - أيًا كان $Y \in \text{ob}(\mathfrak{S}_2)$ ، فإن التطبيق:

$$\hat{h}_Y(\Psi(X)): \mathfrak{S}_2(X, Y) \rightarrow \mathfrak{S}_2(FG(X), Y)$$

متباين وغامر.

البرهان.

(1) $\Leftrightarrow$ (2). لنفرض أن المورفيزم $\Psi(X)$ إيزومورفيزم. ليكن $u, v \in \mathfrak{S}_2(X, Y)$ ، بحيث:

$$\hat{h}_Y(\Psi(X))(u) = \hat{h}_Y(\Psi(X))(v)$$

عندئذ فإن $u \cdot \Psi(X) = v \cdot \Psi(X)$ ومنه نجد أن $u = v$ أي إن التطبيق $\hat{h}_Y(\Psi(X))$ متباين.

ليكن $w \in \mathfrak{S}_2(FG(X), Y)$ عندئذ $w \cdot \Psi(X)^{-1}: X \rightarrow Y \in \mathfrak{S}_2(X, Y)$ ، وإن:

$$\begin{aligned} \hat{h}_Y(\Psi(X))(w \cdot \Psi(X)^{-1}) &= (w \cdot \Psi(X)^{-1})\Psi(X) = \\ &= w \cdot (\Psi(X)^{-1} \cdot \Psi(X)) = w \end{aligned}$$

ومنه نجد أن التطبيق $\hat{h}_Y(\Psi(X))$ غامراً.

(2) $\Leftrightarrow$ (1). لنفرض أن التطبيق $\hat{h}_Y(\Psi(X))$ متباين وغامر وذلك أيًا كان $Y \in \text{ob}(\mathfrak{S}_2)$.

بما أن $X \in \text{ob}(\mathfrak{S}_2)$ فإن $FG(X) \in \text{ob}(\mathfrak{S}_2)$ ومنه لأجل $Y = FG(X)$ ، فإن التطبيق:

$$\hat{h}_{FG(X)}(\Psi(X)): \mathfrak{S}_2(X, FG(X)) \rightarrow \mathfrak{S}_2(FG(X), FG(X))$$

متباين وغامر، وبما أن $I_{FG(X)} \in \mathfrak{S}_2(FG(X), FG(X))$ فإنه يوجد مورفيزم:

$$\Psi_0(X): X \rightarrow FG(X) \in \mathfrak{S}_2(X, FG(X))$$

بحيث: $\Psi_0(X) \cdot \Psi(X) = I_{FG(X)}$ وهذا يبين أن $\hat{h}_{FG(X)}(\Psi(X))(\Psi_0(X)) = I_{FG(X)}$.

من جهة أخرى، بما أن $X \in ob(\mathfrak{S}_2)$ فإنه حسب الفرض لأجل $Y = X$ ، يكون التطبيق:

$$\hat{h}_X(\Psi(X)) : \mathfrak{S}_2(X, X) \rightarrow \mathfrak{S}_2(FG(X), X)$$

متباين وغامر. وبما أن $I_X : X \rightarrow X \in \mathfrak{S}_2(X, X)$ فإن:

$$\hat{h}_X(\Psi(X))(I_X) = I_X \cdot \Psi(X) = \Psi(X)$$

وبما أن $\Psi(X) \cdot \Psi_0(X) : X \rightarrow X \in \mathfrak{S}_2(X, X)$ فإن:

$$\hat{h}_X(\Psi(X))(\Psi(X) \cdot \Psi_0(X)) = (\Psi(X) \cdot \Psi_0(X)) \cdot \Psi(X) =$$

$$\Psi(X) \cdot (\Psi_0(X) \cdot \Psi(X)) = \Psi(X) \cdot I_X = \Psi(X)$$

وبما أن التطبيق $\hat{h}_X(\Psi(X))$ متباين نجد أن $\Psi(X) \cdot \Psi_0(X) = I_X$. مما سبق نجد أن المورفيزم $\Psi(X)$ إيزومورفيزم.

مبرهنة ١٣-١-٣.

لتكن $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2$ فئتين. وليكن $F : \mathfrak{S}_1 \rightarrow \mathfrak{S}_2$ ، وليكن $G : \mathfrak{S}_2 \rightarrow \mathfrak{S}_1$ دوال مباشرة. لنفرض أن الدالي G مرافق للدالي F ، وأن $\Phi : I_{\mathfrak{S}_1} \rightarrow GF$ و $\Psi : FG \rightarrow I_{\mathfrak{S}_2}$ المورفيزمات الدالية المذكورة في المبرهنة (١١-١-٣). عندئذ الشروط الآتية متكافئة:

١ - المورفيزم الدالي $\Psi : FG \rightarrow I_{\mathfrak{S}_2}$ إيزومورفيزم.

٢ - أيأ كان $X, Y \in ob(\mathfrak{S}_2)$ فإن التطبيق:

$$G(X, Y) : \mathfrak{S}_2(X, Y) \rightarrow \mathfrak{S}_1(G(X), G(Y))$$

متباين وغامر.

البرهان.

لنفرض أن الدالي G مرافق للدالي F ، وأن $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_1' \times \mathfrak{S}_2$ عندئذ حسب المبرهنة (١٣-١-٣)

(١١) توجد مورفيزمات دالية $\Phi : I_{\mathfrak{S}_1} \rightarrow GF$ و $\Psi : FG \rightarrow I_{\mathfrak{S}_2}$.

وحسب المبرهنة (٩-١-٣) فإن المورفيزم الدالي Ψ يعرف المورفيزم الدالي:

$$\psi : \text{Hom}_{\mathfrak{S}_1}(G) \rightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{S}_2}(F)$$

معرف بالشكل الآتي: أيأ كان $(X, Y) \in ob(\mathfrak{S})$ و $v : X \rightarrow G(Y) \in \mathfrak{S}_1(X, G(Y))$ فإن

$$\psi(X, Y)(v) = \Psi(Y) \cdot F(v)$$

أيضاً بما أن $G : \mathfrak{S}_2 \rightarrow \mathfrak{S}_1$ دالي مباشر فإنه أيأ كان $X, Y \in ob(\mathfrak{S}_2)$ ، يوجد تطبيق:

$$G(X, Y): \mathfrak{S}_2(X, Y) \rightarrow \mathfrak{S}_1(G(X), G(Y))$$

لنبرهن أولاً على أن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{S}_2(X, Y) & \xrightarrow{G(X, Y)} & \mathfrak{S}_1(G(X), G(Y)) \\ \downarrow & \swarrow & \\ \mathfrak{S}_2(FG(X), Y) & & \psi(G(X), Y) \end{array}$$

تبديلي، أي إن: $\psi(G(X), Y) \cdot G(X, Y) = \hat{h}_Y(\Psi(X))$

أياً كان $u: X \rightarrow Y \in \mathfrak{S}_2(X, Y)$ ، فإن $\hat{h}_Y(\Psi(X))(u) = u \cdot \Psi(X)$ من جهة أخرى، إن:

$$\begin{aligned} \psi(G(X), Y) \cdot G(X, Y)(u) &= \psi(G(X), Y)(G(X, Y)(u)) = \\ &= \Psi(Y) \cdot F(G(u)) \end{aligned}$$

وبما أن Ψ مورفيزم دالي، فإن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} FG(X) & \xrightarrow{\Psi(X)} & X \\ \downarrow & & \downarrow u \\ FG(Y) & \xrightarrow{\Psi(Y)} & Y \end{array}$$

تبديلي، أي إن: $u \cdot \Psi(X) = \Psi(Y) \cdot FG(u)$ ومنه نجد أن:

$$\begin{aligned} \hat{h}_Y(\Psi(X))(u) &= u \cdot \Psi(X) = \Psi(Y) \cdot FG(u) = \psi(G(X), Y) \cdot G(X, Y)(u) \\ \hat{h}_Y(\Psi(X)) &= \psi(G(X), Y) \cdot G(X, Y) \end{aligned}$$

كما أن التطبيق:

$$\psi(G(X), Y): \mathfrak{S}_1(G(X), G(Y)) \rightarrow \mathfrak{S}_2(FG(X), Y)$$

متباين وغامر، وذلك لأن الدالي G مرافق للدالي F .

(1) $\Leftrightarrow$ (2). لنفرض أن المورفيزم الدالي Ψ إيزومورفيزم عندئذ أياً كان $X \in ob(\mathfrak{S}_2)$ ، فإن المورفيزم $\Psi(X)$ إيزومورفيزم.

ليكن $u, v \in \mathfrak{S}_2(X, Y)$ ، بحيث $G(X, Y)(u) = G(X, Y)(v)$ ، عندئذ يكون:

$$\begin{aligned} \hat{h}_Y(\Psi(X))(u) &= \psi(G(X), Y) \cdot G(X, Y)(u) = \psi(G(X), Y) \cdot G(X, Y)(v) = \\ &= \hat{h}_Y(\Psi(X))(v) \end{aligned}$$

ومنه نجد أن $\Psi(X) = v \cdot \Psi(X)$ وبما أن $u \cdot \Psi(X) = v \cdot \Psi(X)$ ؛ وبالتالي التطبيق $G(X, Y)$ متباين.

ليكن $w_0 : G(X) \rightarrow G(Y) \in \mathfrak{S}_1(G(X), G(Y))$ عندئذ فإن:

$$\psi(G(X), Y)(w_0) \in \mathfrak{S}_2(FG(X), Y)$$

وبما أن المورفيزم $\Psi(X)$ إيزومورفيزم، فإنه حسب التمهيدية (٣-١-١٢) فإن التطبيق $\hat{h}_Y(\Psi(X))$ متباين وغامر؛ وبالتالي يوجد $w : X \rightarrow Y \in \mathfrak{S}_2(X, Y)$ بحيث يكون:

$$\hat{h}_Y(\Psi(X))(w) = \psi(G(X), Y)(w_0)$$

ومنه نجد أن $w \cdot \Psi(X) = \Psi(Y) \cdot F(w_0)$.

وبما أن Ψ مورفيزم دالي، فإن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} FG(X) & \xrightarrow{\Psi(X)} & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ FG(w) & & w \\ FG(Y) & \xrightarrow{\Psi(Y)} & Y \end{array}$$

تبديلي، أي إن: $w \cdot \Psi(X) = \Psi(Y) \cdot FG(w)$ ، ومنه نجد أن:

$$\Psi(Y) \cdot F(G(w)) = \Psi(Y) \cdot F(w_0)$$

ولكون المورفيزم $\Psi(Y)$ إيزومورفيزماً نجد أن $F(G(w)) = F(w_0)$. وهكذا فإن:

$$\psi(G(X), Y)(G(w)) = \psi(G(X), Y)(w_0)$$

ولكون المورفيزم $\Psi(X)$ إيزومورفيزماً فإن التطبيق $\psi(G(X), Y)$ متباين، وهذا يبين أن $G(w) = w_0$ ؛ وبالتالي التطبيق $G(X, Y)$ غامر.

(2) $\Leftrightarrow$ (1). لنفرض أن التطبيق $G(X, Y)$ متباين غامر. ولنبرهن على أن التطبيق

$\hat{h}_1(\Psi(X))$ متباين وغامر. ليكن $u, v : X \rightarrow Y \in \mathfrak{S}_2(X, Y)$ ، بحيث:

$$\hat{h}_Y(\Psi(X))(u) = \hat{h}_Y(\Psi(X))(v)$$

عندئذ يكون $u \cdot \Psi(X) = v \cdot \Psi(X)$ ، وبما أن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} FG(X) & \xrightarrow{\Psi(X)} & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ FG(u), FG(v) & & u, v \\ FG(Y) & \xrightarrow{\Psi(Y)} & Y \end{array}$$

تبديلي لأجل كل من u و v نجد أن $\Psi(Y) \cdot FG(u) = \Psi(Y) \cdot FG(v)$ ، ومنه فإن:

$$\psi(G(X), Y)(G(X, Y)(u)) = \psi(G(X), Y)(G(X, Y)(v))$$

وبما أن $\psi(G(X), Y)$ متباين نجد أن $G(X, Y)(u) = G(X, Y)(v)$ ، أيضاً لكون $G(X, Y)$ متبايناً نجد أن $u = v$. ومنه فإن $\hat{h}_Y(\Psi(X))$ متباين .

ليكن $\mu'' : FG(X) \rightarrow Y \in \mathfrak{S}_2(FG(X), Y)$ بما أن التطبيق $\psi(G(X), Y)$ غامر يوجد $\mu' : G(X) \rightarrow G(Y) \in \mathfrak{S}_1(G(X), G(Y))$ بحيث $\psi(G(X), Y)(\mu') = \mu''$ ، وبما أن $G(X, Y)$ غامر يوجد $\mu : X \rightarrow Y \in \mathfrak{S}_2(X, Y)$ بحيث $G(X, Y)(\mu) = \mu'$ ومنه نجد :

$$\hat{h}_Y(\Psi(X))(\mu) = \psi(G(X), Y)G(X, Y)(\mu) = \psi(G(X), Y)(\mu') = \mu''$$

وهذا يبين أن $\hat{h}_Y(\Psi(X))$ غامر . وحسب التمهيدية (٣-١-١٢) نجد أن المورفيزم $\Psi(X)$ إيزومورفيزم ، وذلك لأجل كل $X \in ob(\mathfrak{S}_2)$ ، ومنه فإن المورفيزم الدالي Ψ إيزومورفيزم .

مبرهنة ٣-١-١٤ .

لتكن $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2$ فئتين . وليكن $G : \mathfrak{S}_2 \rightarrow \mathfrak{S}_1$ دالياً مباشراً . لنفرض أنه يوجد :

- ١ - تطبيق $F : ob(\mathfrak{S}_1) \rightarrow ob(\mathfrak{S}_2)$ يحقق $A \in ob(\mathfrak{S}_1)$ فإن $A \mapsto F(A) \in ob(\mathfrak{S}_2)$.
- ٢ - أياً كان $A \in ob(\mathfrak{S}_1)$ يوجد مورفيزم :

$$\rho_A : A \rightarrow G(F(A)) \in \mathfrak{S}_1(A, G(F(A)))$$

(١) و (٢) يحققان : أياً كان $A \in ob(\mathfrak{S}_1)$ و $B \in ob(\mathfrak{S}_2)$ يوجد تطبيق :

$$\varphi(A, B) : \mathfrak{S}_2(F(A), B) \rightarrow \mathfrak{S}_1(A, G(B))$$

معرف بالشكل أياً كان $v \in \mathfrak{S}_2(F(A), B)$ ، فإن :

$$\varphi(A, B)(v) = G(v) \cdot \rho_A$$

متباين وغامر . عندئذ يوجد دالي مباشر $F : \mathfrak{S}_1 \rightarrow \mathfrak{S}_2$ بحيث يكون الدالي G مرافقاً للدالي F .

البرهان .

لنعرف دالياً مباشراً $F : \mathfrak{S}_1 \rightarrow \mathfrak{S}_2$. حسب الفرض يوجد تطبيق $F : ob(\mathfrak{S}_1) \rightarrow ob(\mathfrak{S}_2)$.

ليكن $u : A \rightarrow B \in \mathfrak{S}_1(A, B)$ ولنبرهن على وجود مورفيزم $F(u) : F(A) \rightarrow F(B)$

يحقق شروط الدالي المباشر . حسب الفرض يوجد مورفيزم :

$$\rho_B : B \rightarrow G(F(B)) \in \mathfrak{S}_1(B, G(F(B)))$$

ومنه فإن $\rho_B \cdot u : A \rightarrow G(F(B))$ وحسب الفرض فإن التطبيق:

$$\varphi(A, F(B)) : \mathfrak{S}_2(F(A), F(B)) \rightarrow \mathfrak{S}_1(A, G(F(B)))$$

غامر، وبما أن $\rho_B \cdot u \in \mathfrak{S}_1(B, G(F(B)))$ فإنه يوجد مورفيزم:

$$F(u) : F(A) \rightarrow F(B) \in \mathfrak{S}_2(F(A), F(B))$$

بحيث $\varphi(A, F(B))(F(u)) = \rho_B \cdot u$ لنبرهن على أنه أياً كان $M \in ob(\mathfrak{S}_1)$ فإن

$$F(I_M) = I_{F(M)} \text{ . ليكن } M \in ob(\mathfrak{S}_1) \text{ عندئذ حسب (٢) يوجد مورفيزم:}$$

$$\rho_M : M \rightarrow G(F(M)) \in \mathfrak{S}_1(M, G(F(M)))$$

بما أن التطبيق $\varphi(M, F(M)) : \mathfrak{S}_2(F(M), F(M)) \rightarrow \mathfrak{S}_1(M, G(F(M)))$ غامر

وإن $\rho_M \in \mathfrak{S}_1(M, G(F(M)))$ فإنه يوجد $F(I_M) : F(M) \rightarrow F(M)$ من أجله:

$$\varphi(M, F(M))(F(I_M)) = \rho_M$$

من جهة أخرى، بما أن $I_{F(M)} \in \mathfrak{S}_2(F(M), F(M))$ فإن:

$$\varphi(M, F(M))(I_{F(M)}) = G(I_{F(M)}) \cdot \rho_M = I_{G(F(M))} \cdot \rho_M = \rho_M$$

وبما أن التطبيق $\varphi(M, F(M))$ متباين نجد أن $F(I_M) = I_{F(M)}$

لتكن $u : M \rightarrow N$ ، $v : N \rightarrow P$ مورفيزمات للفئة $\mathfrak{S}_1$ ، عندئذ:

$$v \cdot u : M \rightarrow P \in \mathfrak{S}_1(M, P)$$

ولنبرهن على أن $F(v \cdot u) = F(u) \cdot F(v)$

لأجل المورفيزم $u : M \rightarrow N$ لنعرف المورفيزم $F(u) : F(M) \rightarrow F(N)$ بحيث يحقق:

$$\varphi(M, F(N)) : \mathfrak{S}_2(F(M), F(N)) \rightarrow \mathfrak{S}_1(M, G(F(N)))$$

$$\varphi(M, F(N))(F(u)) = G(F(u)) \cdot \rho_M$$

وبما أن $\varphi(M, F(N))(F(u)) = \rho_N \cdot u$ نجد أن:

$$G(F(u)) \cdot \rho_M = \varphi(M, F(N))(F(u)) = \rho_N \cdot u$$

ولأجل المورفيزم $v : N \rightarrow P$ لنعرف المورفيزم $F(v) : F(N) \rightarrow F(P)$ بحيث يحقق:

$$\varphi(N, F(P)) : \mathfrak{S}_2(F(N), F(P)) \rightarrow \mathfrak{S}_1(N, G(F(P)))$$

$$\varphi(N, F(P))(F(v)) = G(F(v)) \cdot \rho_N$$

وبما أن $\varphi(N, F(P))(F(v)) = \rho_P \cdot v$ نجد أن:

$$G(F(v)) \cdot \rho_N = \varphi(N, F(P))(F(v)) = \rho_P \cdot v$$

ولأجل المورفيزم $v \cdot u : M \rightarrow P$ ، لنعرف المورفيزم $F(v \cdot u) : F(M) \rightarrow F(P)$ بحيث يحقق:

$$\varphi(M, F(P)) : \mathfrak{I}_2(F(M), F(P)) \rightarrow \mathfrak{I}_1(M, G(F(P)))$$

$$\varphi(M, F(P))(F(v \cdot u)) = G(F(v \cdot u)) \cdot \rho_M$$

وبما أن $\varphi(M, F(P))(F(v \cdot u)) = \rho_P \cdot (v \cdot u)$ نجد أن:

$$G(F(v \cdot u)) \cdot \rho_M = \varphi(M, F(P))(F(v)) = \rho_P \cdot (v \cdot u)$$

لنبرهن الآن على أن:

$$\varphi(M, F(P))(F(v \cdot u)) = \varphi(M, F(P))(F(v) \cdot F(u))$$

$$\begin{aligned} \varphi(M, F(P))(F(v \cdot u)) &= \rho_P \cdot (v \cdot u) = (\rho_P \cdot v) \cdot u = (G(F(v)) \cdot \rho_N) \cdot u = \\ &= (G(F(v)) \cdot \rho_N) \cdot u = G(F(v)) \cdot (\rho_N \cdot u) = G(F(v)) \cdot (G(F(u)) \cdot \rho_M) = \\ &= (G(F(v)) \cdot G(F(u)) \cdot \rho_M) = G(F(v) \cdot F(u)) \cdot \rho_M \end{aligned}$$

من جهة أخرى، بما أن:

$$\varphi(M, F(P))(F(v) \cdot F(u)) = G((F(v) \cdot F(u))) \cdot \rho_M$$

نجد أن $\varphi(M, F(P))(F(v \cdot u)) = \varphi(M, F(P))(F(v) \cdot F(u))$ وبما أن التطبيق $\varphi(M, F(P))$ متباين نجد أن $F(v \cdot u) = F(v) \cdot F(u)$ ، وهذا يبين أن F هو دالي مباشر. مما سبق نجد أن الدالي G مرافق للدالي F .

٣-٢. تكافؤ الفئات.

تمهيدية ٣-٢-١.

لنكن $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \mathfrak{S}_3$ ثلاث فئات، ولنكن $F, G: \mathfrak{S}_1 \rightarrow \mathfrak{S}_2$ و $T: \mathfrak{S}_2 \rightarrow \mathfrak{S}_3$ دوال مباشرة. إذا كان $\varphi: F \rightarrow G$ مورفيزماً دالياً. عندئذ يوجد مورفيزم دالي $T\varphi: T \circ F \rightarrow T \circ G$ معطى بالشكل $(\forall A \in \text{ob}(\mathfrak{S}_1))$ فإن:

$$(T\varphi)(A) = T(\varphi(A))$$

البرهان.

لدينا حسب التمهيدية (٣-١-٢) أن $T \circ F, T \circ G: \mathfrak{S}_1 \rightarrow \mathfrak{S}_3$ هي دوال مباشرة. نعرف $T\varphi: T \circ F \rightarrow T \circ G$ بالشكل الآتي: $(\forall A \in \text{ob}(\mathfrak{S}_1))$ ، فإن:

$$\varphi(A): F(A) \rightarrow G(A) \in \text{Mor}(\mathfrak{S}_2)$$

$$T\varphi(A): T \circ F(A) \rightarrow T \circ G(A) \in \text{Mor}(\mathfrak{S}_3)$$

لنبرهن أنه $(\forall A, B \in \text{ob}(\mathfrak{S}_1))$ و $\forall u \in \mathfrak{S}_1(A, B)$ ، فإن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccccc} (T \circ F)(A) & \xrightarrow{T\varphi(A)} & (T \circ G)(A) & & \\ T \circ F(u) & \downarrow & \downarrow & T \circ G(u) & \\ (T \circ F)(B) & \xrightarrow{T\varphi(B)} & (T \circ G)(B) & & \end{array}$$

تبديلي، أي إن: $(T \circ G)(u) \cdot T\varphi(A) = T\varphi(B) \cdot (T \circ F)(u)$.

بما أن $\varphi: F \rightarrow G$ مورفيزم دالي فإنه $(\forall A, B \in \text{ob}(\mathfrak{S}_1))$ و $\forall u \in \mathfrak{S}_1(A, B)$ ، فإن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccccc} F(A) & \xrightarrow{\varphi(A)} & G(A) & & \\ F(u) & \downarrow & \downarrow & G(u) & \\ F(B) & \xrightarrow{\varphi(B)} & G(B) & & \end{array}$$

تبديلي. أي إن: $G(u) \cdot \varphi(A) = \varphi(B) \cdot F(u)$ ومنه:

$$\begin{aligned} (T \circ G)(u) \cdot T\varphi(A) &= T(G(u)) \cdot T(\varphi(A)) = T(G(u) \cdot \varphi(A)) = \\ &= T(\varphi(B) \cdot F(u)) = T(\varphi(B)) \cdot T(F(u)) = (T\varphi)(B) \cdot (T \circ F)(u) \end{aligned}$$

مما سبق نجد أن $T\varphi: T \circ F \rightarrow T \circ G$ مورفيزم دالي.

تمهيدية ٣-٢-٢.

لتكن $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3$ ثلاث فئات، ولتكن $F_1, F_2 : \mathcal{S}_2 \rightarrow \mathcal{S}_3$ و $F_3 : \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$ دوال مباشرة. إذا كان $\psi : F_1 \rightarrow F_2$ مورفيزماً دالياً. عندئذ يوجد مورفيزم دالي:

$$\psi F_3 : F_1 \circ F_3 \rightarrow F_2 \circ F_3$$

معرف بالشكل الآتي: $\forall A \in ob(\mathcal{S}_1)$ ، فإن:

$$(\psi F_3)(A) = \psi(F_3(A))$$

البرهان.

لدينا حسب التمهيدية (٢-١-٣) أن $F_2 \circ F_3 : \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_3$ ، $F_1 \circ F_3$ دوال مباشرة. لنعرف $\psi F_3 : F_1 \circ F_3 \rightarrow F_2 \circ F_3$ بالشكل الآتي: $\forall A \in ob(\mathcal{S}_1)$ ، فإن: $F_3(A) \in ob(\mathcal{S}_2)$ وإن $\psi(F_3(A)) : F_1(F_3(A)) \rightarrow F_2(F_3(A))$ ومنه:

$$\psi F_3(A) : F_1 \circ F_3(A) \rightarrow F_2 \circ F_3(A)$$

كما إنه $\forall A, B \in ob(\mathcal{S}_1)$ و $\forall u \in \mathcal{S}_1(A, B)$ فإن $F_3(A), F_3(B) \in ob(\mathcal{S}_2)$ و $F_3(u) : F_3(A) \rightarrow F_3(B)$ أي إن $F_3(u) \in \mathcal{S}_2(F_3(A), F_3(B))$ بما أن $\psi : F_1 \rightarrow F_2$ مورفيزم دالي، فإن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} F_1(A) & \xrightarrow{\psi(A)} & F_2(A) \\ F_1(u) \downarrow & & \downarrow F_2(u) \\ F_1(B) & \xrightarrow{\psi(B)} & F_2(B) \end{array}$$

تبدلي، أي إن: $F_2(u) \cdot \psi(A) = \psi(B) \cdot F_1(u)$

لنبرهن الآن على أن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} F_1 \circ F_3(A) & \xrightarrow{\psi F_3(A)} & F_2 \circ F_3(A) \\ F_1 \circ F_3(u) \downarrow & & \downarrow F_2 \circ F_3(u) \\ F_1 \circ F_3(B) & \xrightarrow{\psi F_3(B)} & F_2 \circ F_3(B) \end{array}$$

تبدلي. لدينا:

$$\begin{aligned} F_2 \circ F_3(u) \cdot \psi F_3(A) &= F_2(F_3(u)) \cdot \psi(F_3(A)) = \psi(F_3(B)) \cdot F_1(F_3(u)) = \\ &= (\psi F_3)(B) \cdot (F_1 \circ F_3)(u) \end{aligned}$$

وهذا يبين لنا أن ψF_3 هو مورفيزم دالي.

تعريف.

لتكن $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ فئتين، وليكن $F: \mathcal{T}_1 \rightarrow \mathcal{T}_2$ دالي مباشر. نقول عن الدالي F إنه تكافؤ بين الفئتين $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ إذا وجد دالياً مباشراً $G: \mathcal{T}_2 \rightarrow \mathcal{T}_1$ وإيزومورفيزمات دالية $F\varphi = \psi F$ تحقق $\psi: I_{\mathcal{T}_2} \rightarrow F \circ G, \varphi: I_{\mathcal{T}_1} \rightarrow G \circ F$.

مبرهنة ٣-٢-٣.

لتكن $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ فئتين، وليكن $F: \mathcal{T}_1 \rightarrow \mathcal{T}_2$ دالياً مباشراً. إذا كان الدالي F تكافؤاً بين الفئتين $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ ، عندئذ:

١ - $\forall A, B \in ob(\mathcal{T}_1)$ ، فإن التطبيق:

$$F(A, B): \mathcal{T}_1(A, B) \rightarrow \mathcal{T}_2(F(A), F(B))$$

متباين وغامر.

٢ - $\forall M \in ob(\mathcal{T}_2)$ يوجد $N \in ob(\mathcal{T}_1)$ بحيث $F(N) \equiv M$.

البرهان.

١ - بما أن $F: \mathcal{T}_1 \rightarrow \mathcal{T}_2$ تكافؤ فئات فإنه يوجد $G: \mathcal{T}_2 \rightarrow \mathcal{T}_1$ وإيزومورفيزمات دالية $F\varphi = \psi F$ تحقق $\psi: I_{\mathcal{T}_2} \rightarrow F \circ G, \varphi: I_{\mathcal{T}_1} \rightarrow G \circ F$ ، ومنه $\forall A \in ob(\mathcal{T}_1)$ ، فإن $F(A) \in ob(\mathcal{T}_2)$ ؛ وبالتالي $G(F(A)) \in ob(\mathcal{T}_1)$ ، أي إن $G \circ F(A) \in ob(\mathcal{T}_1)$.

ليكن $u, v \in \mathcal{T}_1(A, B)$ بحيث $F(u) = F(v)$ ، عندئذ $G \circ F(u) = G \circ F(v)$.

بما أن $\varphi: I_{\mathcal{T}_1} \rightarrow G \circ F$ إيزومورفيزم دالي، عندئذ $\forall A \in ob(\mathcal{T}_1)$ ، فإن:

$$\varphi(A): I_{\mathcal{T}_1}(A) \rightarrow G \circ F(A) = A \rightarrow G \circ F(A)$$

إيزومورفيزم، يحقق أن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & B \\ \downarrow \varphi(A) & & \downarrow \varphi(B) \\ G \circ F(A) & \xrightarrow{G \circ F(u)} & G \circ F(B) \end{array}$$

تبديلي، أي إن $\varphi(B) \cdot u = G \circ F(u) \cdot \varphi(A)$.

بما أن $\varphi(A)$ إيزومورفيزم، فإنه يوجد مورفيزم $\varphi(A)^{-1}: G \circ F(A) \rightarrow A$ بحيث:

$$\varphi(A) \cdot \varphi(A)^{-1} = I_{G \circ F(A)} \text{ و } \varphi(A)^{-1} \cdot \varphi(A) = I_A$$

ومنه نجد أن $u = \varphi(B)^{-1} \cdot G \circ F(u) \cdot \varphi(A)$
كذلك، بما أن $v \in \mathfrak{S}_1(A, B)$ ، فإن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{v} & B \\ \varphi(A) \downarrow & & \downarrow \varphi(B) \\ G \circ F(A) & \xrightarrow{G \circ F(v)} & G \circ F(B) \end{array}$$

تبديلي، أي إن: $\varphi(B) \cdot v = G \circ F(v) \cdot \varphi(A)$
ومنه نجد أن $v = \varphi(B)^{-1} \cdot G \circ F(v) \cdot \varphi(A)$ وهكذا نجد أن:

$$u = \varphi(B)^{-1} \cdot G \circ F(u) \cdot \varphi(A) = \varphi(B)^{-1} \cdot G \circ F(v) \cdot \varphi(A) = v$$

وذلك لأن $G \circ F(u) = G \circ F(v)$ ، مما سبق نجد أن $u = v$ وهذا يبين لنا أن التطبيق $F(A, B)$ متباين. لنبرهن على أنه غامر، ليكن $w: F(A) \rightarrow F(B)$ عندئذ $G(w): G \circ F(A) \rightarrow G \circ F(B)$ مورفيزم. لنضع:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi^*} & B \\ \varphi(A) \downarrow & & \downarrow \varphi(B) \\ G \circ F(A) & \xrightarrow{G(w)} & G \circ F(B) \end{array}$$

حيث $\varphi^* = \varphi(B)^{-1} \cdot G(w) \cdot \varphi(A)$ فنجد أن $\varphi^* \in \mathfrak{S}_1(A, B)$ ومنه يكون:
 $F(\varphi^*) = F(\varphi(B)^{-1} \cdot G(w) \cdot \varphi(A)) = F(\varphi(B)^{-1}) \cdot F(G(w)) \cdot F(\varphi(A)) =$
 $= F(\varphi(B)^{-1}) \cdot (F \circ G)(w) \cdot (F\varphi)(A) = F(\varphi(B)^{-1}) \cdot (F \circ G)(w) \cdot (\psi F)(A)$
وبما أن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{w} & F(B) \\ \psi(F(A)) \downarrow & & \downarrow \psi(F(B)) \\ (F \circ G)(F(A)) & \xrightarrow{(F \circ G)(w)} & (F \circ G)(F(B)) \end{array}$$

تبديلي، فإن: $(\psi F)(B) \cdot w = (F \circ G)(w) \cdot (\psi F)(A)$ ومنه:

$$\begin{aligned} F(\varphi^*) &= F(\varphi(B)^{-1}) \cdot (\psi F)(B) \cdot w = F(\varphi(B)^{-1}) \cdot \psi(F(B)) \cdot w = \\ &= F(\varphi(B)^{-1}) \cdot F(\varphi(B)) \cdot w = F(\varphi(B)^{-1} \cdot \varphi(B)) \cdot w = F(I_B) \cdot w = I_{F(B)} \cdot w = w \end{aligned}$$

وهذا يبين لنا أن التطبيق $F(A, B)$ غامر .

٢ - ليكن $M \in ob(\mathfrak{S}_2)$ عندئذ $G(M) \in ob(\mathfrak{S}_1)$. لنضع :

$$N = G(M) \in ob(\mathfrak{S}_1)$$

فنجد أن $F(N) \in ob(\mathfrak{S}_2)$ ، وإن $F(N) = (F \circ G)(M) = F(G(M)) = F(N)$ ، أي $F(N) \cong M$.

مبرهنة ٣-٢-٤ .

لتكن $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2$ فئتين ، وليكن $F : \mathfrak{S}_1 \rightarrow \mathfrak{S}_2$ دالياً مباشراً . إذا كان الدالي F تكافؤاً بين الفئتين $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2$ ، عندئذ فإن :

١ - $\forall M, N \in ob(\mathfrak{S}_2)$ ، فإن التطبيق :

$$G(M, N) : \mathfrak{S}_2(M, N) \rightarrow \mathfrak{S}_1(G(M), G(N))$$

متباين وغامر .

٢ - الدالي G مرافق للدالي F .

٣ - الدالي F مرافق للدالي G .

٤ - $G\psi = \varphi G$.

البرهان .

١ - بما أن الدالي $F : \mathfrak{S}_1 \rightarrow \mathfrak{S}_2$ هو تكافؤ فئات فإنه يوجد دالي مباشر $G : \mathfrak{S}_2 \rightarrow \mathfrak{S}_1$

وايزومورفيزمات دالية $F\varphi = \psi F$ ، $\varphi : I_{\mathfrak{S}_1} \rightarrow G \circ F$ ، $\psi : I_{\mathfrak{S}_2} \rightarrow F \circ G$ تحقق $F\varphi = \psi F$.

بما أنه $\forall M \in ob(\mathfrak{S}_2)$ ، فإن $G(M) \in ob(\mathfrak{S}_1)$ ؛ وبالتالي فإن $F(G(M)) \in ob(\mathfrak{S}_2)$ أي إن $F \circ G(M) \in ob(\mathfrak{S}_2)$.

وهذا يبين لنا أن $G(M, N) : \mathfrak{S}_2(M, N) \rightarrow \mathfrak{S}_1(G(M), G(N))$ تطبيق .

ليكن $u, v \in \mathfrak{S}_2(M, N)$ بحيث $G(u) = G(v)$ ، عندئذ $F(G(u)) = F(G(v))$ أي إن : $F \circ G(u) = F \circ G(v)$.

بما أن $\psi : I_{\mathfrak{S}_2} \rightarrow F \circ G$ ايزومورفيزم دالي ، عندئذ $\forall M \in ob(\mathfrak{S}_2)$ ، فإن :

$$\psi(M) : I_{\mathfrak{S}_2}(M) \rightarrow F \circ G(M)$$

$$\psi(M) : M \rightarrow F \circ G(M)$$

إيزومورفيزم يحقق لأجل كل مورفيزم $u: M \rightarrow N \in \mathfrak{S}_2(M, N)$ المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{u} & N \\ \psi(M) \downarrow & & \downarrow \psi(N) \\ F \circ G(M) & \xrightarrow{F \circ G(u)} & F \circ G(N) \end{array}$$

تبديلي، أي إن: $\psi(N) \cdot u = F \circ G(u) \cdot \psi(M)$ وبما أن المورفيزم

$$\psi(M): M \rightarrow G \circ F(M)$$

إيزومورفيزم فإنه يوجد مورفيزم $\psi(M)^{-1}: F \circ G(M) \rightarrow M$ بحيث:

$$\psi(M) \cdot \psi(M)^{-1} = I_{F \circ G(M)} \quad \text{و} \quad \psi(M)^{-1} \cdot \psi(M) = I_M$$

$$u = \psi(N)^{-1} \cdot F \circ G(u) \cdot \psi(M)$$

كذلك الأمر بالنسبة للمورفيزم $v: M \rightarrow N \in \mathfrak{S}_2(M, N)$ فإن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{v} & N \\ \psi(M) \downarrow & & \downarrow \psi(N) \\ F \circ G(M) & \xrightarrow{F \circ G(v)} & F \circ G(N) \end{array}$$

تبديلي، أي إن: $\psi(N) \cdot v = F \circ G(v) \cdot \psi(M)$ وبما $\psi(M): M \rightarrow G \circ F(M)$ فإن:

$$v = \psi(N)^{-1} \cdot F \circ G(v) \cdot \psi(M)$$

وهكذا نجد أن:

$$u = \psi(N)^{-1} \cdot F \circ G(u) \cdot \psi(M) = \psi(N)^{-1} \cdot F \circ G(v) \cdot \psi(M) = v$$

وذلك لأن $F \circ G(u) = F \circ G(v)$. مما سبق نجد أن التطبيق $G(M, N)$ متباين.

لنبرهن على أن التطبيق $G(M, N)$ غامر.

بما أن $M, N \in ob(\mathfrak{S}_2)$ فإنه يوجد تطبيق متباين

$$G(M, N): \mathfrak{S}_2(M, N) \rightarrow \mathfrak{S}_1(G(M), G(N))$$

أيضاً بما أن $F \circ G: \mathfrak{S}_2 \rightarrow \mathfrak{S}_2$ هو دالي مباشر فإنه يوجد تطبيق:

$$F \circ G(M, N): \mathfrak{S}_2(M, N) \rightarrow \mathfrak{S}_2(F \circ G(M), F \circ G(N))$$

كذلك الأمر، بما أن $M, N \in ob(\mathfrak{S}_2)$ فإن $G(M), G(N) \in ob(\mathfrak{S}_1)$ ، عندئذ حسب

المبرهنة (٣-٢-٣)، فإن التطبيق:

$$F(G(M), G(N)) : \mathfrak{S}_2(G(M), G(N)) \rightarrow \mathfrak{S}_1(F \circ G(M), F \circ G(N))$$

متباين وغامر . ومنه يوجد تطبيق:

$$G_0(F \circ G(M), F \circ G(N)) : \mathfrak{S}_1(F \circ G(M), F \circ G(N)) \rightarrow \mathfrak{S}_2(G(M), G(N))$$

لنأخذ تركيب التطبيقين $F \circ G(M, N)$ و $G_0(F \circ G(M), F \circ G(N))$ فنحصل على التطبيق الآتي:

$$G_0(F \circ G(M), F \circ G(N)) \circ (F \circ G)(M, N) : \mathfrak{S}_2(M, N) \rightarrow \mathfrak{S}_1(G(M), G(N))$$

والذي يحقق أن:

$$G_0(F \circ G(M), F \circ G(N)) \circ (F \circ G)(M, N) = G(M, N)$$

وذلك لأنه إذا كان $v : M \rightarrow N$ ، فإن $G(v) : G(M) \rightarrow G(N)$ وبما أن المخطط الآتي

$$\begin{array}{ccc} G(M) & \xrightarrow{G(v)} & G(N) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \varphi(G(M)) & & \varphi(G(N)) \\ G \circ F(G(M)) & \xrightarrow{G \circ F(G(v))} & G \circ F(G(N)) \end{array}$$

تبديلي، أي إن: $\varphi(G(N)) \cdot G(v) = (G \circ F)(G(v)) \cdot \varphi(G(M))$

وبما أن φ إيزومورفيزم نجد أن:

$$G(v) = \varphi(G(N)^{-1}) \cdot (G \circ F)(G(v)) \cdot \varphi(G(M))$$

من جهة أخرى، بما أن $v : M \rightarrow N$ فإن $G \circ F(v) : G \circ F(M) \rightarrow G \circ F(N)$ ومنه:

$$G(F(v)) : G(F(M)) \rightarrow G(F(N))$$

وبالتالي يكون $G \circ F(G(v)) : G \circ F(G(M)) \rightarrow G \circ F(G(N))$ وهذا يبين أنه لأجل

أي $\beta : G(M) \rightarrow G(N)$ بحيث:

$$\beta = \varphi(G(N)^{-1}) \cdot (G \circ F)(G(v)) \cdot \varphi(G(M))$$

يكون المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} G(M) & \xrightarrow{\beta} & G(N) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \varphi(G(M)) & & \varphi(G(N)) \\ G \circ F(G(M)) & \xrightarrow{G \circ F(G(v))} & G \circ F(G(N)) \end{array}$$

تبدلياً. مما سبق نجد أن $\beta = G(v)$.

بما أن الدالي $\psi : I_{\mathfrak{S}_2} \rightarrow F \circ G$ إيزومورفيزم نجد أن التطبيق:

$$F \circ G(M, N): \mathfrak{S}_2(M, N) \rightarrow \mathfrak{S}_2(F \circ G(M), F \circ G(N))$$

غامر ومنه يكون التطبيق:

$$G_0(F \circ G(M), F \circ G(N)): \mathfrak{S}_1(F \circ G(M), F \circ G(N)) \rightarrow \mathfrak{S}_2(G(M), G(N))$$

غامر.

٢ - لنبرهن على أن الدالي G مرافق للدالي F . أي لنبرهن على وجود إيزومورفيزم دالي

$$\bar{\varphi}: \text{Hom}_{\mathfrak{S}_2}(F) \rightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{S}_1}(G)$$

ليكن $A \in \text{ob}(\mathfrak{S}_1)$ و $B \in \text{ob}(\mathfrak{S}_2)$ ، عندئذ $F(A) \in \text{ob}(\mathfrak{S}_2)$ وحسب (١) فإن التطبيق:

$$G(F(A), B): \mathfrak{S}_2(F(A), B) \rightarrow \mathfrak{S}_1(GF(A), G(B))$$

متباين وغامر.

من جهة أخرى، بما أن $\varphi: I_{\mathfrak{S}_1} \rightarrow GF$ إيزومورفيزم دالي عندئذ $\forall A \in \text{ob}(\mathfrak{S}_1)$ ، فإن:

$$\varphi(A): A \rightarrow GF(A)$$

$$\hat{h}_{G(B)}(\varphi(A)): \mathfrak{S}_1(GF(A), G(B)) \rightarrow \mathfrak{S}_1(A, G(B))$$

متباين وغامر، وذلك لأنه إذا كان $u, v \in \mathfrak{S}_1(GF(A), G(B))$ بحيث

$$\hat{h}_{G(B)}(\varphi(A))(u) = \hat{h}_{G(B)}(\varphi(A))(v)$$

فإن $u \cdot \varphi(A) = v \cdot \varphi(A)$ ومنه نجد أن $u = v$ أي إن التطبيق $\hat{h}_{G(B)}(\varphi(A))$ متباين.

ليكن $w \in \mathfrak{S}_1(A, G(B))$ بما أن $\varphi: I_{\mathfrak{S}_1} \rightarrow GF$ إيزومورفيزم دالي، فإن:

$$\varphi(G(B)): G(B) \rightarrow GF(G(B))$$

إيزومورفيزم للفئة $\mathfrak{S}_1$ ، ومنه فإن $\varphi(G(B))^{-1}: GF(G(B)) \rightarrow G(B)$ هو مورفيزم للفئة

$\mathfrak{S}_1$ ، كما أن $GF(w): GF(A) \rightarrow GF(G(B))$ هو أيضاً مورفيزم للفئة $\mathfrak{S}_1$ ، ومنه فإن:

$$\varphi(G(B))^{-1} \cdot GF(w): GF(A) \rightarrow G(B) \in \mathfrak{S}_1(GF(A), G(B))$$

$$\hat{h}_{G(B)}(\varphi(A))(\varphi(G(B))^{-1} \cdot GF(w)) = \varphi(G(B))^{-1} \cdot GF(w) \cdot \varphi(A)$$

وبما أن $\varphi: I_{\mathfrak{S}_1} \rightarrow GF$ إيزومورفيزم دالي، فإن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi(A)} & GF(A) \\ w \downarrow & & \downarrow GF(w) \\ G(B) & \xrightarrow{\varphi(G(B))} & GF(G(B)) \end{array}$$

تبديلي، أي إن: $GF(w) \cdot \varphi(A) = \varphi(G(B)) \cdot w$ ، ومنه نجد أن:

$$w = \varphi(G(B))^{-1} \cdot GF(w) \cdot \varphi(A)$$

وبالتالي يكون $\hat{h}_{G(B)}(\varphi(A))(\varphi(G(B))^{-1} \cdot GF(w)) = w$ وهذا يبين أن التطبيق

$\hat{h}_{G(B)}(\varphi(A))$ غامر. لنعرف $\bar{\varphi}: \text{Hom}_{\mathfrak{S}_2}(F) \rightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{S}_1}(G)$ بالشكل الآتي: أيأ كان $A \in \text{ob}(\mathfrak{S}_1)$ و $B \in \text{ob}(\mathfrak{S}_2)$ فإن:

$$\bar{\varphi}(A, B) = \hat{h}_{G(B)}(\varphi(A)) \cdot G(F(A), B): \mathfrak{S}_2(F(A), B) \rightarrow \mathfrak{S}_1(A, G(B))$$

ف نجد أن $\bar{\varphi}(A, B)$ متباين وغامر وذلك لأن كلاً من $G(F(A), B)$ و $\hat{h}_{G(B)}(\varphi(A))$ متباين وغامر وذلك أيأ كان $A \in \text{ob}(\mathfrak{S}_1)$ و $B \in \text{ob}(\mathfrak{S}_2)$.

لنبرهن الآن على أن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{S}_2(F(A), B) & \xrightarrow{\varphi(A, B)} & \mathfrak{S}_1(A, G(B)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Hom}_{\mathfrak{S}_2}(F)(\mu, \nu) & & \text{Hom}_{\mathfrak{S}_1}(G)(\mu, \nu) \\ \mathfrak{S}_2(F(A_1), B_1) & \xrightarrow{\bar{\varphi}(A_1, B_1)} & \mathfrak{S}_1(A_1, G(B_1)) \end{array}$$

تبديلي، أي إن: $\text{Hom}_{\mathfrak{S}_1}(G)(\mu, \nu) \cdot \bar{\varphi}(A, B) = \bar{\varphi}(A_1, B_1) \cdot \text{Hom}_{\mathfrak{S}_2}(F)(\mu, \nu)$.

ليكن $\lambda \in \mathfrak{S}_2(F(A), B)$ ، عندئذ فإن:

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathfrak{S}_1}(G)(\mu, \nu) \cdot \bar{\varphi}(A, B)(\lambda) &= G(\nu) \cdot \bar{\varphi}(A, B)(\lambda) \cdot \mu = \\ &= G(\nu) \cdot (\hat{h}_{G(B)}(\varphi(A)) \cdot G(F(A), B)(\lambda)) \cdot \mu = \\ &= G(\nu) \cdot G(F(A), B)(\lambda) \cdot \varphi(A) \cdot \mu = \\ &= G(\nu) \cdot G(\lambda) \cdot \varphi(A) \cdot \mu = G(\nu \cdot \lambda) \cdot \varphi(A) \cdot \mu \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}(A_1, B_1) \cdot \text{Hom}_{\mathfrak{S}_2}(F)(\mu, \nu)(\lambda) &= \bar{\varphi}(A_1, B_1)(\nu \cdot \lambda \cdot F(\mu)) = \\ &= \hat{h}_{G(B_1)}(\varphi(A_1)) \cdot G(F(A_1), B_1)(\nu \cdot \lambda \cdot F(\mu)) = \\ &= G(F(A_1), B_1)(\nu \cdot \lambda \cdot F(\mu)) \cdot \varphi(A_1) = \\ &= G(\nu \cdot \lambda) \cdot GF(\mu) \cdot \varphi(A_1) \end{aligned}$$

وبما أن $\varphi: I_{\mathfrak{S}_1} \rightarrow GF$ إيزومورفيزم دالي، فإن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi(A)} & GF(A) \\ \mu \uparrow & & \uparrow GF(\mu) \\ A_1 & \xrightarrow{\varphi(A_1)} & GF(A_1) \end{array}$$

تبديلي، أي إن: $GF(\mu) \cdot \varphi(A_1) = \varphi(A) \cdot \mu$ ومنه يكون:

$$\bar{\varphi}(A_1, B_1) \cdot \text{Hom}_{\mathfrak{S}_2}(F)(\mu, \nu)(\lambda) = G(\nu \cdot \lambda) \cdot \varphi(A) \cdot \mu \quad (2)$$

من (١) و (٢) نجد أن المخطط السابق تبديلي؛ وبالتالي الدالي G مرافق للدالي F .

٣ - لنبرهن على أن الدالي F مرافق للدالي G . أي لنبرهن على وجود إيزومورفيزم دالي

$$\bar{\psi} : \text{Hom}_{\mathfrak{S}_1}(G) \rightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{S}_2}(F)$$

ليكن $A \in \text{ob}(\mathfrak{S}_1)$ و $B \in \text{ob}(\mathfrak{S}_2)$ عندئذ فإن $G(B) \in \text{ob}(\mathfrak{S}_1)$ وحسب المبرهنة (٣-٢)

(٣-٢) فإن التطبيق:

$$F(A, G(B)) : \mathfrak{S}_1(A, G(B)) \rightarrow \mathfrak{S}_2(F(A), FG(B))$$

متباين وغامر. من جهة أخرى، بما أن $\psi : I_{\mathfrak{S}_2} \rightarrow FG$ إيزومورفيزم دالي عندئذ فإن

$\psi(B) : B \rightarrow FG(B)$ هو إيزومورفيزم للفئة $\mathfrak{S}_2$ وبالتالي يوجد مورفيزم للفئة $\mathfrak{S}_2$ هو

$$\psi(B)^{-1} : FG(B) \rightarrow B$$

$$h_{F(A)}(\psi(B)^{-1}) : \mathfrak{S}_2(F(A), FG(B)) \rightarrow \mathfrak{S}_2(F(A), B)$$

متباين وغامر، لأنه إذا كان $u, v \in \mathfrak{S}_2(F(A), FG(B))$ بحيث:

$$h_{F(A)}(\psi(B)^{-1})(u) = h_{F(A)}(\psi(B)^{-1})(v)$$

فإن $\psi(B)^{-1} \cdot u = \psi(B)^{-1} \cdot v$ ومنه نجد أن $u = v$.

كما أن التطبيق $h_{F(A)}(\psi(B)^{-1})$ غامر؛ لأنه إذا كان $w \in \mathfrak{S}_2(F(A), B)$ فإن

$w : F(A) \rightarrow B$ مورفيزم للفئة $\mathfrak{S}_2$ وبما أن $\psi : I_{\mathfrak{S}_2} \rightarrow FG$ إيزومورفيزم دالي، فإن

$\psi(B) \cdot w : F(A) \rightarrow FG(B)$ ومنه $\psi(B) : B \rightarrow FG(B)$ هو إيزومورفيزم للفئة $\mathfrak{S}_2$ ومنه

مورفيزم للفئة $\mathfrak{S}_2$ أي $\psi(B) \cdot w \in \mathfrak{S}_2(F(A), FG(B))$ وإن:

$$h_{F(A)}(\psi(B)^{-1})(\psi(B) \cdot w) = \psi(B)^{-1} \cdot \psi(B) \cdot w = w$$

لنبرهن الآن على أن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{S}_1(A, G(B)) & \xrightarrow{\psi(A, B)} & \mathfrak{S}_2(F(A), B) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Hom}_{\mathfrak{S}_1}(G)(\mu, \nu) & & \text{Hom}_{\mathfrak{S}_2}(F)(\mu, \nu) \\ \mathfrak{S}_1(A_1, G(B_1)) & \xrightarrow{\psi(A_1, B_1)} & \mathfrak{S}_2(F(A_1), B_1) \end{array}$$

تبديلي، أي إن: $\text{Hom}_{\mathfrak{S}_2}(F)(\mu, \nu) \cdot \bar{\psi}(A, B) = \bar{\psi}(A_1, B_1) \cdot \text{Hom}_{\mathfrak{S}_1}(G)(\mu, \nu)$

ليكن $(\lambda \in \mathfrak{S}_1(A, G(B)))$ عندئذ فإن:

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathfrak{S}_2}(F)(\mu, v) \cdot \bar{\psi}(A, B)(\lambda) &= v \cdot \bar{\psi}(A, B)(\lambda) \cdot F(\mu) = \\ &= v \cdot \hat{h}_{F(A)}(\psi(B)^{-1}) \cdot F(A, G(B))(\lambda) \cdot F(\mu) = \\ &= v \cdot \psi(B)^{-1} \cdot F(A, G(B))(\lambda) \cdot F(\mu) = \\ &= v \cdot \psi(B)^{-1} \cdot F(\lambda \cdot \mu) \end{aligned} \quad (1)$$

من جهة أخرى، إن:

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(A_1, B_1) \cdot \text{Hom}_{\mathfrak{S}_1}(G)(\mu, v)(\lambda) &= \bar{\psi}(A_1, B_1)(G(v) \cdot \lambda \cdot \mu) = \\ &= \hat{h}_{F(A_1)}(\psi(B_1)^{-1}) \cdot F(A_1, G(B_1))(G(v) \cdot \lambda \cdot \mu) = \\ &= \psi(B_1)^{-1} \cdot FG(v) \cdot F(\lambda \cdot \mu) \end{aligned}$$

وبما أن $\psi: I_{\mathfrak{S}_2} \rightarrow FG$ إيزومورفيزم دالي، فإن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\psi(B)^{-1}} & GF(B) \\ v \downarrow & & \downarrow GF(v) \\ B_1 & \xrightarrow{\psi(B_1)^{-1}} & GF(B_1) \end{array}$$

تبديلي، أي إن: $\psi(B)^{-1} \cdot FG(v) = v \cdot \psi(B)^{-1}$ ومنه نجد أن:

$$\bar{\psi}(A_1, B_1) \cdot \text{Hom}_{\mathfrak{S}_1}(G)(\mu, v)(\lambda) = v \cdot \psi(B)^{-1} \cdot F(\lambda \cdot \mu) \quad (2)$$

من (١) و (٢) نجد أن المخطط المطلوب تبديلي؛ وبالتالي الدالي F مرافق للدالي G .

٤ - وجدنا حسب (٣) أن الدالي F مرافق للدالي G ؛ ومنه حسب المبرهنة (١١-١-٣)

توجد مورفيزمات دالية $\alpha: GF \rightarrow I_{\mathfrak{S}_1}$ ، $\beta: I_{\mathfrak{S}_2} \rightarrow FG$ تحقق $\alpha G \cdot G\beta = I_G$.

واضح أن $\beta = \psi$ و $\alpha = \varphi^{-1}$ وذلك لأنه:

- أيأ كان $M \in ob(\mathfrak{S}_2)$ ، فإن $\beta(M) = FG(M) = \psi(M)$ وبالتالي $\beta = \psi$.

- أيأ كان $N \in ob(\mathfrak{S}_1)$ ، فإن $\alpha(N) = GF(N) = \varphi^{-1}(N)$ وبالتالي $\alpha = \varphi^{-1}$.

ليكن $M \in ob(\mathfrak{S}_2)$ عندئذ، فإن $(\alpha G)(M) \cdot (G\beta)(M) = I_{G(M)}$ ومنه:

$$\varphi^{-1}(G(M)) \cdot (G(\psi(M))) = I_{G(M)}$$

$$G(\psi(M)) = \varphi(G(M))$$

ومنه نجد أن $G\psi = \varphi G$.

نتيجة ٣-٢-٥.

لتكن $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ فئتين، وليكن $F: \mathcal{T}_1 \rightarrow \mathcal{T}_2$ دالياً مباشراً. إذا كان الدالي F تكافؤاً بين الفئتين $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ ، عندئذ يوجد دالي مباشر $G: \mathcal{T}_2 \rightarrow \mathcal{T}_1$ يكون تكافؤاً من الفئة $\mathcal{T}_2$ إلى الفئة $\mathcal{T}_1$.

البرهان.

بما أن الدالي $F: \mathcal{T}_1 \rightarrow \mathcal{T}_2$ هو تكافؤ فئات، فإنه يوجد دالي مباشر $G: \mathcal{T}_2 \rightarrow \mathcal{T}_1$ وإيزومورفيزمات دالية $\varphi: I_{\mathcal{T}_1} \rightarrow G \circ F$ ، $\psi: I_{\mathcal{T}_2} \rightarrow F \circ G$ تحقق $F\varphi = \psi F$ وحسب المبرهنة (٣-٢-٤) فإن الإيزومورفيزمات الدالية φ, ψ تحقق $\varphi G = G\psi$ وحسب التعريف نجد أن الدالي $G: \mathcal{T}_2 \rightarrow \mathcal{T}_1$ هو تكافؤ للفئتين $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$.

مبرهنة ٣-٢-٦.

لتكن $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ فئتين، وليكن $F: \mathcal{T}_1 \rightarrow \mathcal{T}_2$ دالياً مباشراً. الشرط اللازم والكافي كي يكون الدالي $F: \mathcal{T}_1 \rightarrow \mathcal{T}_2$ تكافؤاً للفئتين $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ هو أن تتحقق الشروط الآتية:

١ - $\forall A, B \in ob(\mathcal{T}_1)$ ، فإن التطبيق:

$$F(A, B): \mathcal{T}_1(A, B) \rightarrow \mathcal{T}_2(F(A), F(B))$$

متباين وغامر.

٢ - $\forall M \in ob(\mathcal{T}_2)$ ، يوجد $A \in ob(\mathcal{T}_1)$ بحيث $F(A) \cong M$.

البرهان.

لزوم الشرط. لنفرض أن الدالي F هو تكافؤ للفئتين $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ عندئذ حسب المبرهنة (٣-٢-٣)

(٣-٢) فإن الشروط (١) و (٢) تكون محققة وبذلك يتم المطلوب.

كفاية الشرط. لنعرف أولاً دالياً مباشراً $G: \mathcal{T}_2 \rightarrow \mathcal{T}_1$ ، أي لنعرف تطبيق:

$$G: ob(\mathcal{T}_2) \rightarrow ob(\mathcal{T}_1)$$

بالشكل الآتي: أيأ كان $M \in ob(\mathcal{T}_2)$ فإنه حسب الفرض يوجد $A \in ob(\mathcal{T}_1)$ بحيث $F(A) \cong M$.

بما أن $F(A) \cong M$ لنضع $G(M) = A$ فنجد أن $G: ob(\mathcal{T}_2) \rightarrow ob(\mathcal{T}_1)$ تطبيق.

أيأ كان $M, N \in ob(\mathcal{T}_2)$ لنبرهن على وجود تطبيق:

$$G(M, N): \mathcal{T}_2(M, N) \rightarrow \mathcal{T}_1(G(M), G(N))$$

ليكن $w_1 : M \rightarrow N \in \mathfrak{S}_2(M, N)$ حسب (٢) من الفرض فإنه يوجد $A, B \in ob(\mathfrak{S}_1)$ بحيث $F(A) \cong M$ و $F(B) \cong N$. لنفرض أن هذه الإيزومورفزمات هي:

$$v_M : M \rightarrow F(A), \quad v_N : N \rightarrow F(B)$$

ومنه فإن $v_N \cdot w_1 \cdot v_M^{-1} : F(A) \rightarrow F(B) \in \mathfrak{S}_2(F(A), F(B))$ هو مورفيزم للفئة $\mathfrak{S}_2$. وحسب (١) بما أن التطبيق $F(A, B)$ متباين وغامر فإنه يوجد مورفيزم وحيد:

$$w : A \rightarrow B \in \mathfrak{S}_1(A, B)$$

بحيث $F(w) = v_N \cdot w_1 \cdot v_M^{-1}$. لنضع $G(w_1) = w$ فنجد أن $G(M, N)$ هو تطبيق؛ لأنه إذا كان $w_1, w_2 : M \rightarrow N \in \mathfrak{S}_2(M, N)$ وبما أنه توجد $A, B \in ob(\mathfrak{S}_1)$ تحقق $F(A) \cong M$ و $F(B) \cong N$ وبفرض أن هذه الإيزومورفزمات هي:

$$v_M : M \rightarrow F(A), \quad v_N : N \rightarrow F(B)$$

نجد أن:

$$v_N \cdot w_1 \cdot v_M^{-1} : F(A) \rightarrow F(B) \in \mathfrak{S}_2(F(A), F(B))$$

$$v_N \cdot w_2 \cdot v_M^{-1} : F(A) \rightarrow F(B) \in \mathfrak{S}_2(F(A), F(B))$$

وبما أن $F(A, B)$ غامر فإنه توجد $w', w'' : A \rightarrow B \in \mathfrak{S}_1(A, B)$ بحيث:

$$F(w') = v_N \cdot w_1 \cdot v_M^{-1}, \quad F(w'') = v_N \cdot w_2 \cdot v_M^{-1}$$

بما أن $w_1 = w_2$ نجد أن:

$$F(w') = v_N \cdot w_1 \cdot v_M^{-1} = v_N \cdot w_2 \cdot v_M^{-1} = F(w'')$$

ولكون $F(A, B)$ متبايناً نجد أن $w' = w''$ ومنه فإن $G(w_1) = w' = w'' = G(w_2)$.

ليكن $I_M : M \rightarrow M$ حيث $M \in ob(\mathfrak{S}_2)$ ولنبرهن على أن $G(I_M) = I_{G(M)}$.

بما أن $M \in ob(\mathfrak{S}_2)$ يوجد $A \in ob(\mathfrak{S}_1)$ بحيث $F(A) \cong M$ ومنه فإن $G(M) = A$.

من جهة أخرى، لنفرض أن الإيزومورفيزم $F(A) \cong M$ هو $v_M : M \rightarrow F(A)$ عندئذ فإن

$$\lambda \in \mathfrak{S}_1(A, A) \text{ غامراً يوجد } v_M \cdot I_M \cdot v_M^{-1} : F(A) \rightarrow F(A)$$

بحيث $F(\lambda) = v_M \cdot I_M \cdot v_M^{-1} = v_M \cdot v_M^{-1} = I_{F(A)} = F(I_A)$ ولكون $F(A, A)$ متبايناً

نجد أن $\lambda = I_A$ ، ومنه فإن $G(I_M) = I_A = I_{G(M)}$.

ليكن $f, g \in Mor(\mathfrak{S}_2)$ ولنبرهن على أن $G(f \cdot g) = G(f) \cdot G(g)$.

لنفرض أن $g: M \rightarrow N$ و $f: N \rightarrow K$ حيث $M, N, K \in ob(\mathfrak{S}_2)$ فنجد أن:
 $f \cdot g: M \rightarrow K$ وحسب (٢) من الفرض توجد $A, B, D \in ob(\mathfrak{S}_1)$ بحيث:

$$F(A) \cong M, \quad F(B) \cong N, \quad F(D) \cong K$$

لنفرض أن الإيزومورفيزمات السابقة، هي:

$$v_M: M \rightarrow F(A), \quad v_N: N \rightarrow F(B), \quad v_K: K \rightarrow F(D)$$

بما أن $w': A \rightarrow B$ فإنه يوجد $v_N \cdot g \cdot v_M^{-1}: F(A) \rightarrow F(B) \in \mathfrak{S}_2(F(A), F(B))$ بحيث $F(w') = v_N \cdot g \cdot v_M^{-1}$ وذلك لكون التطبيق $F(A, B)$ غامراً وإن $G(g) = w'$ أيضاً.
 بما أن $w'': B \rightarrow D$ فإنه يوجد $v_K \cdot f \cdot v_N^{-1}: F(B) \rightarrow F(D) \in \mathfrak{S}_2(F(B), F(D))$ بحيث $F(w'') = v_K \cdot f \cdot v_N^{-1}$ وذلك لكون التطبيق $F(B, D)$ غامراً، وإن $G(f) = w''$.
 ومنه فإن $w'' \cdot w': A \rightarrow D \in \mathfrak{S}_1(A, D)$ وإن:

$$\begin{aligned} F(w'' \cdot w') &= F(w'') \cdot F(w') = v_K \cdot f \cdot v_N^{-1} \cdot v_N \cdot g \cdot v_M^{-1} = \\ &= v_K \cdot (f \cdot g) \cdot v_M^{-1} \end{aligned}$$

وحسب تعريف G فإن $G(f \cdot g) = w'' \cdot w' = G(f) \cdot G(g)$ مما سبق نجد أن $G: \mathfrak{S}_2 \rightarrow \mathfrak{S}_1$ هو دالي مباشر.

لنعرف الآن إيزومورفيزمات دالية $\varphi: \mathfrak{S}_1 \rightarrow GF$, $\psi: I_{\mathfrak{S}_2} \rightarrow FG$ تحقق $\varphi G = G\psi$.
 ليكن $A \in ob(\mathfrak{S}_1)$ عندئذ فإن $F(A) \in ob(\mathfrak{S}_2)$ وحسب (٢) من الفرض يوجد $B \in ob(\mathfrak{S}_1)$ بحيث $F(A) \cong F(B)$ ، وحسب تعريف الدالي G فإن $B = G(F(A))$.
 من جهة أخرى، لنفرض أن الإيزومورفيزم $F(A) \cong F(B)$ هو $v_{F(A)}: F(A) \rightarrow F(B)$ وبما أن $F(A, B)$ متباين وغامر فإنه يوجد مورفيزم وحيد $\varphi(A): A \rightarrow B$ بحيث:

$$F(\varphi(A)) = v_{F(A)}$$

لنبرهن على أن المورفيزم $\varphi(A): A \rightarrow B$ إيزومورفيزم.

بما أن $v_{F(A)}: F(A) \rightarrow F(B)$ إيزومورفيزم فإنه يوجد مورفيزم $v_{F(A)}^{-1}: F(B) \rightarrow F(A)$ يحقق $v_{F(A)}^{-1} \cdot v_{F(A)} = I_{F(A)}$ و $v_{F(A)} \cdot v_{F(A)}^{-1} = I_{F(B)}$. وبما أن $F(B, A)$ غامر فإنه يوجد $\varphi(A)^{-1}: B \rightarrow A$ بحيث $F(\varphi(A)^{-1}) = v_{F(A)}^{-1}$. ومنه فإن:

$$F(I_A) = I_{F(A)} = v_{F(A)}^{-1} \cdot v_{F(A)} = F(\varphi(A)^{-1} \cdot F(\varphi(A))) =$$

$$= F(\varphi(A)^{-1} \cdot \varphi(A))$$

وبما أن $F(A, A)$ متباين نجد أن $\varphi(A)^{-1} \cdot \varphi(A) = I_A$ أيضاً لدينا:

$$F(I_B) = I_{F(B)} = v_{F(A)} \cdot v_{F(A)}^{-1} = F(\varphi(A)) \cdot F(\varphi(A)^{-1}) = \\ = F(\varphi(A) \cdot \varphi(A)^{-1})$$

وبما أن التطبيق $F(B, B)$ متباين نجد أن $\varphi(A) \cdot \varphi(A)^{-1} = I_B$ مما سبق نجد أن

$\varphi(A): A \rightarrow B = GF(A)$ إيزومورفيزم. إن الإيزومورفيزمات $\varphi(A): A \rightarrow B$ لأجل كل

$A \in ob(\mathfrak{S}_1)$ تعرف إيزومورفيزماً دالياً $\varphi: I_{\mathfrak{S}_1} \rightarrow GF$ يحقق:

$$(F\varphi)(A) = F(\varphi(A)) = v_{F(A)} \quad (1)$$

ليكن $M \in ob(\mathfrak{S}_2)$ وحسب (٢) من الفرض يوجد $A \in ob(\mathfrak{S}_1)$ بحيث $F(A) \equiv M$

وحسب تعريف G ، فإن $G(M) = A$.

لنفرض أن الإيزومورفيزم السابق هو $v_M: M \rightarrow F(A)$. إن الإيزومورفيزمات هذه تعرف

لنا إيزومورفيزماً دالياً $\psi: I_{\mathfrak{S}_2} \rightarrow FG$ يعطى بالشكل أياً كان $M \in ob(\mathfrak{S}_2)$ ، فإن:

$$\psi(M) = v_M \text{ وتحقق الشرط أياً كان } A \in ob(\mathfrak{S}_1) \text{، فإن:}$$

$$(\psi F)(A) = \psi(F(A)) = v_{F(A)} \quad (2)$$

من (١) و (٢)، نجد أن $\psi F = F\varphi$ مما سبق نجد أن الدالي F هو تكافؤ فئات.

تعريف.

لتكن $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2$ فئتين، وليكن $F: \mathfrak{S}_1 \rightarrow \mathfrak{S}_2$ دالياً مباشراً. نقول عن الدالي F ، إنه

إيزومورفيزم للفئتين $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2$ إذا حقق الشروط الآتية:

١ - أياً كان $Y \in ob(\mathfrak{S}_2)$ يوجد شيء وحيد $X \in ob(\mathfrak{S}_1)$ بحيث $F(X) = Y$.

٢ - أياً كان $A, B \in ob(\mathfrak{S}_1)$ ، فإن التطبيق:

$$F(A, B): \mathfrak{S}_1(A, B) \rightarrow \mathfrak{S}_2(F(A), F(B))$$

متباين وغامر. وفي هذه الحالة نقول عن الفئتين $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2$ إنهما متماثلتان.

تعريف.

لتكن $\mathfrak{S}$ فئة. نقول عن الفئة $\mathfrak{S}$ إنها محدودة إذا كانت تماثل فئة جزئية من فئة

المجموعات *Set's*.

تعريف.

لتكن $\mathcal{T}$ فئة و $A \in ob(\mathcal{T})$. نقول عن A إنه شيء تكاملي إذا تحققت الشروط الآتية:

- ١ - أياً كان $X \in ob(\mathcal{T})$ فإن $\mathcal{T}(A, X) \neq \emptyset$.
- ٢ - أياً كان $X, Y \in ob(\mathcal{T})$ ولأجل أي $u, v \in \mathcal{T}(X, Y)$ بحيث $u \neq v$ ، فإنه يوجد $w \in \mathcal{T}(A, X)$ يحقق $w \cdot u \neq w \cdot v$.

أمثلة.

١ - لتكن $Set's$ هي فئة المجموعات. أياً كان $A \in ob(Set's)$ بحيث $A \neq \emptyset$ فإن A شيء تكاملي في الفئة $Set's$.

٢ - في فئة الزمر فإن كل زمرة دوارة وغير منتهية هي شيء تكاملي في هذه الفئة.

مبرهنة ٣-٢-٧.

كل فئة تحوي شيئاً تكاملياً هي فئة محدودة.

البرهان.

لتكن $\mathcal{T}$ فئة تحوي شيئاً تكاملياً $A \in ob(\mathcal{T})$. لنبرهن على أن الفئة $\mathcal{T}$ تماثل فئة جزئية من فئة المجموعات $Set's$. لنعرف دالياً مباشراً $F: \mathcal{T} \rightarrow Set's$ بالشكل الآتي: العلاقة

$$F: ob(\mathcal{T}) \rightarrow ob(Set's)$$

المعرفة بالشكل الآتي: أياً كان $X \in ob(\mathcal{T})$ فإن $F(X) = \mathcal{T}(A, X)$ تشكل تطبيق، لأنه إذا كان $X_1, X_2 \in ob(\mathcal{T})$ بحيث $X_1 = X_2$ فإن $\mathcal{T}(A, X_1) = \mathcal{T}(A, X_2)$ ومنه فإن $F(X_1) = F(X_2)$ ، أي إن $F: ob(\mathcal{T}) \rightarrow ob(Set's)$ هو تطبيق. كما أن العلاقة:

$$F: Mor(\mathcal{T}) \rightarrow Mor(Set's)$$

المعرفة بالشكل الآتي: أياً كان $u: X \rightarrow Y \in \mathcal{T}(X, Y)$ فإن $F(u): F(X) \rightarrow F(Y)$ وبالتالي فإن $F(u): \mathcal{T}(A, X) \rightarrow \mathcal{T}(A, Y)$ وأياً كان $v: A \rightarrow X \in \mathcal{T}(A, X)$ ، فإن:

$$F(u)(v) = u \cdot v \in \mathcal{T}(A, Y)$$

هو تطبيق، لأنه إذا كان $u_1, u_2: X \rightarrow Y \in \mathcal{T}(X, Y)$ بحيث $u_1 \neq u_2$ فإن $u_1 \cdot v \neq u_2 \cdot v$ وذلك أياً كان $v: A \rightarrow X$ ومنه نجد أن $F(u_1)(v) = F(u_2)(v)$ وبالتالي

$$F(u_1) = F(u_2)$$

كما أن $F(I_X) = I_{F(X)}$ وذلك أيأ كان $X \in ob(\mathfrak{S})$ ، أي إن $F(I_X): F(X) \rightarrow F(X)$

$$F(I_X): \mathfrak{S}(A, X) \rightarrow \mathfrak{S}(A, X)$$

لأنه أيأ كان $v: A \rightarrow X$ فإن $F(I_X)(v) = I_X \cdot v = v = I_{\mathfrak{S}(A, X)}(v) = I_{F(X)}(v)$ ومنه

$$F(I_X) = I_{F(X)}$$

ليكن $u: X \rightarrow Y$ و $w: Y \rightarrow Z$ حيث $X, Y, Z \in ob(\mathfrak{S})$ عندئذ فإن $w \cdot u: X \rightarrow Z$

وبالتالي فإن $F(w \cdot u): F(X) \rightarrow F(Z)$ ، ومنه $F(w \cdot u): \mathfrak{S}(A, X) \rightarrow \mathfrak{S}(A, Z)$

وهكذا أيأ كان $v: A \rightarrow X$ فإن:

$$F(w \cdot u)(v) = (w \cdot u) \cdot v = w \cdot (u \cdot v) = F(w)(u \cdot v) = (F(w) \cdot F(u))(v)$$

ومنه نجد أن $F(w \cdot u) = F(w) \cdot F(u)$ مما سبق نجد أن F هو دالي مباشر.

في فئة المجموعات *Set's* لنأخذ صف الأشياء المؤلف من $F(X) = \mathfrak{S}(A, X)$ وذلك أيأ

كان $X \in ob(\mathfrak{S})$ ، ولنرمز له $ob(\mathfrak{S}')$ ، فيكون لدينا $ob(\mathfrak{S}') \subset ob(\mathfrak{S})$.

لنأخذ أيضاً صف المورفيزمات $\mathfrak{S}(F(X), F(Y))$ وذلك أيأ كان $X, Y \in ob(\mathfrak{S})$ ولنرمز

له $Mor(\mathfrak{S}')$ ، فيكون لدينا $Mor(\mathfrak{S}') \subset Mor(\mathfrak{S})$.

لنأخذ الفئة المكونة من الصفيين $ob(\mathfrak{S}')$ و $Mor(\mathfrak{S}')$ ولنرمز لها $\mathfrak{S}'$ ، فنجد أنها تشكل

فئة جزئية في فئة المجموعات *Set's*. وإن $F: \mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{S}'$ يشكل دالياً مباشراً، ويحقق

الشروط:

- أيأ كان $X, Y \in ob(\mathfrak{S})$ ، فإن التطبيق:

$$F(X, Y): \mathfrak{S}(X, Y) \rightarrow \mathfrak{S}(F(X), F(Y))$$

متباين، لأنه أيأ كان $u_1, u_2 \in \mathfrak{S}(X, Y)$ بحيث $F(u_1) = F(u_2): F(X) \rightarrow F(Y)$ أي:

$$F(u_1) = F(u_2): \mathfrak{S}(X, Y) \rightarrow \mathfrak{S}(F(X), F(Y))$$

ومنه أيأ كان $v: A \rightarrow X \in \mathfrak{S}(A, X)$ فإن $F(u_1)(v) = F(u_2)(v)$ أي إن $u_1 \cdot v = u_2 \cdot v$

وبالتالي يكون $u_1 = u_2$ ، لأنه إذا كان $u_1 \neq u_2$ وبما أن A هو شيء تكاملي وحسب

التعريف يوجد $v_0: A \rightarrow X \in \mathfrak{S}(A, X)$ بحيث $u_1 \cdot v_0 \neq u_2 \cdot v_0$ وهذا غير ممكن. من

الواضح أن $F(X, Y)$ غامر. مما سبق وحسب التعريف نجد أن $F: \mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{S}'$

إيزومورفيزم، وبالتالي $\mathfrak{S} \equiv \mathfrak{S}' \subset Set's$ وهذا يبين أن الفئة $\mathfrak{S}$ محدودة.

٣-٣. تمثيل الدوال.

لتكن $\mathfrak{I}$ فئة، ولتكن $Set's$ فئة المجموعات، و $F: \mathfrak{I} \rightarrow Set's$ دالياً غير مباشر من الفئة $\mathfrak{I}$ إلى فئة المجموعات $Set's$ ، وليكن $X \in ob(\mathfrak{I})$. وجدنا في المبرهنة (١-٢-٢) أنه يوجد دالي غير مباشر $\hat{h}_X: \mathfrak{I} \rightarrow Set's$. بفرض أن $Hom(\hat{h}_X, F)$ هو صف المورفيزمات الدالية من الدالي $\hat{h}_X$ إلى الدالي F . وجدنا حسب المبرهنة (٢-٢-٦) أنه يوجد تطبيق متباين وغامر $\hat{\alpha}: Hom(\hat{h}_X, F) \rightarrow F(X)$.

تعريف.

لتكن $\mathfrak{I}$ فئة، و $F: \mathfrak{I} \rightarrow Set's$ دالياً غير مباشر. نقول إن $X \in ob(\mathfrak{I})$ يمثل الدالي F إذا وجد إيزومورفيزم دالي $f: \hat{h}_X \rightarrow F$. سنرمز لذلك $(X, \hat{\alpha}(f))$ ونقول إن الثنائية $(X, \hat{\alpha}(f))$ تمثل الدالي F .

مبرهنة ١-٣-٣.

لتكن $\mathfrak{I}$ فئة، و $F: \mathfrak{I} \rightarrow Set's$ دالياً غير مباشر. إذا كانت الثنائيات $(X, \hat{\alpha}(f))$ و $(X', \hat{\alpha}(f'))$ تمثل الدالي F عندئذ يوجد إيزومورفيزم وحيد $u: X \rightarrow X'$ يحقق:

$$F(u)(\hat{\alpha}(f')) = \hat{\alpha}(f)$$

البرهان.

نفرض أن الثنائيات $(X, \hat{\alpha}(f))$ و $(X', \hat{\alpha}(f'))$ تمثل الدالي F عندئذ فإن $f: \hat{h}_X \rightarrow F$ و $f': \hat{h}_{X'} \rightarrow F$ هي إيزومورفيزمات دالية حيث $X, X' \in ob(\mathfrak{I})$. بما أن $f': \hat{h}_{X'} \rightarrow F$ إيزومورفيزم دالي عندئذ يوجد إيزومورفيزم دالي $f'^{-1}: F \rightarrow \hat{h}_{X'}$ يحقق $f'^{-1} \cdot f' = I_F$ و $f' \cdot f'^{-1} = I_{\hat{h}_{X'}}$. لنضع:

$$g = f'^{-1} \cdot f: \hat{h}_X \rightarrow \hat{h}_{X'}$$

ف نجد أن g هو إيزومورفيزم دالي وحسب المبرهنة (٢-٢-٧) فإنه يوجد إيزومورفيزم وحيد $u: X \rightarrow X'$ يحقق أيأ كان $Y \in ob(\mathfrak{I})$ وأيأ كان $w \in \mathfrak{I}(Y, X)$ ، فإن:

$$g(Y)(w) = u \cdot w$$

ومنه نجد أن:

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}(f) &= f(X)(I_X) = (f'(X)g(X))(I_X) = f'(X)(g(X)(I_X)) = \\ &= f'(X)(u \cdot I_X) = f'(X)(u)\end{aligned}$$

من جهة أخرى، بما أن $f': \hat{h}_{X'} \rightarrow F$ مورفيزم دالي، فإن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc}\hat{h}_{X'}(X') & \xrightarrow{f'(X')} & F(X') \\ \hat{h}_{X'}(u) \downarrow & & \downarrow F(u) \\ \hat{h}_{X'}(X) & \xrightarrow{f'(X)} & F(X)\end{array}$$

تبديلي، أي إن: $f'(X) \cdot \hat{h}_{X'}(u) = F(u) \cdot f'(X')$ ومنه نجد أن:

$$(f'(X) \cdot \hat{h}_{X'}(u))(I_{X'}) = (F(u) \cdot f'(X'))(I_{X'})$$

$$f'(X)(\hat{h}_{X'}(u)(I_{X'})) = F(u)(f'(X')(I_{X'}))$$

$$f'(X)(I_{X'} \cdot u) = F(u)(\hat{\alpha}(f'))$$

$$f'(X)(u) = F(u)(\hat{\alpha}(f'))$$

مما سبق نجد أن $\hat{\alpha}(f) = f'(X)(u) = F(u)(\hat{\alpha}(f'))$

الوحدانية. لنفرض أن $u, v: X \rightarrow X'$ يحققان:

$$\hat{\alpha}(f) = F(u)(\hat{\alpha}(f')) = F(v)(\hat{\alpha}(f'))$$

عندئذ يوجد $\hat{h}_{X'} \rightarrow \hat{h}_{X'}$ يحققان $g_1, g_2: \hat{h}_{X'} \rightarrow \hat{h}_{X'}$ $f = f' \cdot g_1 = f' \cdot g_2$

بما أن $f: \hat{h}_X \rightarrow F$ فإنه أيأ كان $Y \in ob(\mathfrak{I})$ يكون $f(Y): \hat{h}_X(Y) \rightarrow F(Y)$ وبالتالي

$$f(Y): \mathfrak{I}(Y, X) \rightarrow F(Y)$$

ومنه أيأ كان $w \in \mathfrak{I}(Y, X)$ فإن:

$$\begin{aligned}(f'(Y) \cdot g_1(Y))(w) &= f'(Y)(g_1(Y)(w)) = f'(Y)(u \cdot w) = \\ &= F(u \cdot w)(\hat{\alpha}(f')) = (F(w) \cdot F(u))(\hat{\alpha}(f')) = F(w)(F(u)(\hat{\alpha}(f'))) = \\ &= F(w)(\hat{\alpha}(f))\end{aligned}$$

وبما أن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc}\hat{h}_X(X) & \xrightarrow{f(X)} & F(X) \\ \hat{h}_X(w) \downarrow & & \downarrow F(w) \\ \hat{h}_X(Y) & \xrightarrow{f(Y)} & F(Y)\end{array}$$

تبديلي، أي إن $F(w) \cdot f(X) = f(Y) \cdot \hat{h}_X(w)$ ومنه فإن:

$$(F(w) \cdot f(X))(I_X) = (f(Y) \cdot \hat{h}_X(w))(I_X) = F(Y)(\hat{h}_X(w)(I_X)) = \\ = F(Y)(I_X \cdot w) = F(Y)(w)$$

مما سبق نجد أن:

$$(f'(Y) \cdot g_1(Y))(w) = F(w)(\hat{\alpha}(f)) = F(w)(f(X)(I_X)) = f(Y)(w)$$

وهذا يبين لنا أن $f'(Y) \cdot g_1(Y) = f(Y)$ وبالتالي يكون $f' \cdot g_1 = f$ بطريقة مشابهة نجد أن:

$$(f'(Y) \cdot g_2(Y))(w) = f'(Y)(g_2(Y)(w)) = f'(Y)(u \cdot w) = \\ = F(u \cdot w)(\hat{\alpha}(f')) = (F(w) \cdot F(u))(\hat{\alpha}(f')) = F(w)(F(u)(\hat{\alpha}(f'))) = \\ = F(w)(\hat{\alpha}(f))$$

وبما أن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} \hat{h}_X(X) & \xrightarrow{f(X)} & F(X) \\ \hat{h}_X(w) \downarrow & & \downarrow F(w) \\ \hat{h}_X(Y) & \xrightarrow{f(Y)} & F(Y) \end{array}$$

تبديلي، أي إن: $F(w) \cdot f(X) = f(Y) \cdot \hat{h}_X(w)$ نجد أن:

$$(F(w) \cdot f(X))(I_X) = (f(Y) \cdot \hat{h}_X(w))(I_X) = f(Y)(\hat{h}_X(w)(I_X)) = \\ = f(Y)(I_X \cdot w) = f(Y)(w)$$

مما سبق نجد أن:

$$(f'(Y) \cdot g_2(Y))(w) = F(w)(\hat{\alpha}(f)) = F(w)(f(X)(I_X)) = f(Y)(w)$$

وهذا يبين لنا أن $f'(Y) \cdot g_2(Y) = f(Y)$ وبالتالي يكون $f' \cdot g_2 = f$ وهكذا فإن

$$f' \cdot u = v \text{ أي } g_1 = g_2 \text{ يكون } f = f' \cdot g_1 = f' \cdot g_2$$

تعريف.

لتكن $\mathfrak{I}$ فئة، و $F: \mathfrak{I} \rightarrow Set's$ دالياً مباشراً. نقول إن $X \in ob(\mathfrak{I})$ يمثل الدالي F إذا وجد إيزومورفيزم دالي $f: h_X \rightarrow F$. سنرمز لذلك $(X, \alpha(f))$ ونقول إن الثنائية $(X, \alpha(f))$ تمثل الدالي F .

مبرهنة ٣-٣-٢.

لتكن $\mathfrak{I}$ فئة، و $F: \mathfrak{I} \rightarrow \text{Set's}$ دالياً مباشراً. إذا كانت الثنائيات $(X, \alpha(f))$ و $(X', \alpha(f'))$ تمثل الدالي F عندئذ يوجد إيزومورفيزم وحيد $u: X \rightarrow X'$ يحقق:

$$F(u)(\alpha(f')) = \alpha(f)$$

البرهان.

نفرض أن التثانيات $(X, \alpha(f))$ و $(X', \alpha(f'))$ تمثل الدالي F عندئذ فإن $f': h_{X'} \rightarrow F$ و $f: h_X \rightarrow F$ هي إيزومورفيزمات دالية حيث $X, X' \in \text{ob}(\mathfrak{I})$. بما أن $f': h_{X'} \rightarrow F$ إيزومورفيزم دالي عندئذ يوجد إيزومورفيزم دالي $f'^{-1}: F \rightarrow h_{X'}$ يحقق $f'^{-1} \cdot f' = I_{h_{X'}}$ و $f' \cdot f'^{-1} = I_F$. لنضع $g = f'^{-1} \cdot f: h_X \rightarrow h_{X'}$ فنجد أن g هو إيزومورفيزم دالي وحسب المبرهنة (٢-٢-٥) فإنه يوجد إيزومورفيزم وحيد $u: X' \rightarrow X$ يحقق أياً كان $Y \in \text{ob}(\mathfrak{I})$ وأياً كان $w \in \mathfrak{I}(X, Y)$ فإن $g(Y)(w) = w \cdot u$ ومنه نجد أن

$$\begin{aligned}\alpha(f) &= f(X)(I_X) = (f'(X) \cdot g(X))(I_X) = f'(X)(g(X)(I_X)) = \\ &= f'(X)(I_Y \cdot u) = f'(X)(u)\end{aligned}$$

من جهة أخرى، بما أن $f': h_{\text{inv}} \rightarrow F$ مورفيزم دالي، فإن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccccc} h_{X'}(X') & \xrightarrow{f'(X')} & F(X') & & \\ h_{X'}(u) & \downarrow & \downarrow & & F(u) \\ h_{X'}(X) & \xrightarrow{f'(X)} & F(X) & & \end{array}$$

تبدیلی، أي إن: $F(u) \cdot f'(X') = f'(X) \cdot h_{F^{-1}}(u)$. ومنه نجد أن:

$$(F(u) \cdot f'(X'))(I_{X'}) = (f'(X) \cdot h_{X'}(u))(I_{X'})$$

$$F(u)(f'(X')(I_{V'})) = f'(X)(h_{V'}(u)(I_{V'}))$$

$$F(u)(\alpha(f')) = f'(X)(u \cdot I_V)$$

$$F(u)(\alpha(f')) = f'(X)(u)$$

مما سبق نجد أن $\alpha(f) = f'(X)(u) = F(u)(\alpha(f'))$.

الوحدانية. لنفرض أن $u, v: X' \rightarrow X$ يحققان:

$$\alpha(f) = F(u)(\alpha(f')) = F(v)(\alpha(f'))$$

عندئذ يوجد $g_1, g_2: h_X \rightarrow h_{X'}$ يحققان $f = f' \cdot g_1 = f' \cdot g_2$ بما أن $f: h_X \rightarrow F$ فإنه أيًا كان $Y \in \text{ob}(\mathfrak{S})$ يكون $f(Y): h_X(Y) \rightarrow F(Y)$ وبالتالي؛

$$f(Y): \mathfrak{S}(X, Y) \rightarrow F(Y)$$

ومنه أيًا كان $w \in \mathfrak{S}(X, Y)$ ، فإن:

$$\begin{aligned} (f'(Y) \cdot g_1(Y))(w) &= f'(Y)(g_1(Y)(w)) = f'(Y)(w \cdot u) = \\ &= F(w \cdot u)(\alpha(f')) = (F(w) \cdot F(u))(\alpha(f')) = F(w)(F(u)(\alpha(f'))) = \\ &= F(w)(\alpha(f)) \end{aligned}$$

وبما أن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} h_X(X) & \xrightarrow{f(X)} & F(X) \\ h_X(w) & \downarrow & \downarrow F(w) \\ h_X(Y) & \xrightarrow{f(Y)} & F(Y) \end{array}$$

تبديلي، أي إن: $F(w) \cdot f(X) = f(Y) \cdot h_X(w)$ نجد أن:

$$\begin{aligned} (F(w) \cdot f(X))(I_X) &= (f(Y) \cdot h_X(w))(I_X) = f(Y)(h_X(w)(I_X)) = \\ &= f(Y)(w \cdot I_X) = f(Y)(w) \end{aligned}$$

مما سبق نجد أن:

$$(f'(Y) \cdot g_1(Y))(w) = F(w)(\alpha(f)) = F(w)(f(X)(I_X)) = f(Y)(w)$$

وهذا يبين لنا أن $f'(Y) \cdot g_1(Y) = f(Y)$ وبالتالي يكون $f' \cdot g_1 = f$

بطريقة مشابهة نجد أن:

$$\begin{aligned} (f'(Y) \cdot g_2(Y))(w) &= f'(Y)(g_2(Y)(w)) = f'(Y)(u \cdot w) = \\ &= F(u \cdot w)(\alpha(f')) = (F(w) \cdot F(u))(\alpha(f')) = F(w)(F(u)(\alpha(f'))) = \\ &= F(w)(\hat{\alpha}(f)) \end{aligned}$$

وبما أن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} \hat{h}_X(X) & \xrightarrow{f(X)} & F(X) \\ \hat{h}_X(w) & \downarrow & \downarrow F(w) \\ \hat{h}_X(Y) & \xrightarrow{f(Y)} & F(Y) \end{array}$$

تبديلي، أي إن: $F(w) \cdot f(X) = f(Y) \cdot \hat{h}_X(w)$ نجد أن:

$$(F(w) \cdot f(X))(I_X) = (f(Y) \cdot \hat{h}_X(w))(I_X) = f(Y)(\hat{h}_X(w)(I_X)) = \\ = f(Y)(I_X \cdot w) = f(Y)(w)$$

مما سبق نجد أن:

$$(f'(Y) \cdot g_2(Y))(w) = F(w)(\alpha(f)) = F(w)(f(X)(I_X)) = f(Y)(w)$$

وهذا يبين لنا أن $f'(Y) \cdot g_2(Y) = f(Y)$ وبالتالي يكون $f' \cdot g_2 = f$ وهكذا فإن $f = f' \cdot g_1 = f' \cdot g_2$ وبالتالي يكون $g_1 = g_2$ أي إن $u = v$.

مبرهنة ٣-٣-٣.

لتكن $\mathfrak{S}$ فئة، و $F, G: \mathfrak{S} \rightarrow \text{Set's}$ دوال مباشرة. لنفرض أن الثنائية $(A, \alpha(\varphi))$ تمثل الدالي F وأن الثنائية $(B, \alpha(\psi))$ تمثل الدالي G . عندئذ لأجل أي مورفيزم دالي $\mu: F \rightarrow G$ يوجد مورفيزم وحيد $u: B \rightarrow A$ يحقق:

$$\mu(A)(\alpha(\varphi)) = G(u)(\alpha(\psi))$$

البرهان.

بما أن الثنائية $(A, \alpha(\varphi))$ تمثل الدالي F عندئذ يوجد إيزومورفيزم دالي $\varphi: h_A \rightarrow F$ من أجله $\alpha(\varphi) = \varphi(A)(I_A)$ وبما أن الثنائية $(B, \alpha(\psi))$ تمثل الدالي G فإنه يوجد:

إيزومورفيزم دالي $\psi: h_B \rightarrow G$ من أجله $\alpha(\psi) = \psi(B)(I_B)$.

بما أن $\psi: h_B \rightarrow G$ إيزومورفيزم دالي عندئذ أيأ كان $X \in \text{ob}(\mathfrak{S})$ ، فإن:

$$\psi(X): h_B(X) \rightarrow G(X)$$

إيزومورفيزم وبالتالي يوجد إيزومورفيزم $\psi(X)^{-1}: G(X) \rightarrow h_B(X)$ يحقق:

$$\psi(X)^{-1} \cdot \psi(X) = I_{h_B(X)}, \quad \psi(X) \cdot \psi(X)^{-1} = I_{G(X)}$$

لنضع $\lambda(X) = \psi(X)^{-1} \cdot \mu(X) \cdot \varphi(X)$ فنجد أن $\lambda(X): h_A(X) \rightarrow h_B(X)$ أي إن:

$$\lambda(X): \mathfrak{S}(A, X) \rightarrow \mathfrak{S}(B, X)$$

وإن $\psi(X) \cdot \lambda(X) = \mu(X) \cdot \varphi(X)$ وهذا يبين أن المخطط الآتي تبديلي:

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{\mu(X)} & G(X) \\ \varphi(X) \downarrow & & \downarrow \psi(X) \\ h_A(X) & \xrightarrow{\lambda(X)} & h_B(X) \end{array}$$

من أجل $X = A$ نجد أن $\lambda(A): \mathfrak{S}(A, A) \rightarrow \mathfrak{S}(B, A)$ وبما أن $I_A \in \mathfrak{S}(A, A)$ لنضع $u = \lambda(A)(I_A) \in \mathfrak{S}(B, A)$ فنجد أن $u: B \rightarrow A$ هو مورفيزم للفئة $\mathfrak{S}$ ، كما أن:

$$\begin{aligned}\mu(A)(\alpha(\varphi)) &= \mu(A)(\varphi(A)(I_A)) = (\mu(A) \cdot \varphi(A))(I_A) = \\ &= (\mu(A) \cdot \varphi(A))(I_A) = (\psi(A) \cdot \lambda(A))(I_A) = \psi(A)(\lambda(A)(I_A)) = \\ &= \psi(A)(u)\end{aligned}$$

وبما أن $\psi: h_B \rightarrow G$ إيزومورفيزم دالي فإن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} h_B(A) & \xrightarrow{\psi(A)} & G(A) \\ h_B(u) \uparrow & & \uparrow G(u) \\ h_A(B) & \xrightarrow{\psi(B)} & G(B) \end{array}$$

تبدلي، أي إن $\psi(A) \cdot h_B(u) = G(u) \cdot \psi(B)$ ، وبما أن $I_B \in h_B(B) = \mathfrak{S}(B, B)$ فإن:

$$(\psi(A) \cdot h_B(u))(I_B) = (G(u) \cdot \psi(B))(I_B)$$

$$\psi(A)(h_B(u)(I_B)) = G(u)(\psi(B)(I_B))$$

$$\psi(A)(u \cdot I_B) = G(u)(\alpha(\psi))$$

$$\psi(A)(u) = G(u)(\alpha(\psi))$$

مما سبق نجد أن $\mu(A)(\alpha(\varphi)) = \psi(A)(u) = G(u)(\alpha(\psi))$

لنفرض أنه يوجد مورفيزم آخر $u_0: B \rightarrow A$ يحقق:

$$\mu(A)(\alpha(\varphi)) = \psi(A)(u_0) = G(u_0)(\alpha(\psi))$$

فنجد أن:

$$\mu(A)(\alpha(\varphi)) = \psi(A)(u_0)$$

$$\mu(A)(\alpha(\varphi)) = \psi(A)(u)$$

ومنه يكون $\psi(A)(u_0) = \psi(A)(u)$ وبما أن ψ إيزومورفيزم نجد أن $u = u_0$.

٣-٤. بعض خواص فئة المجموعات.

تمهيدية ٣-٤-١.

في فئة المجموعات $Set's$ ، لأجل كل مجموعة $B \in ob(Set's)$ يوجد دالي مباشر:

$$F : Set's \rightarrow Set's$$

معرف بالشكل الآتي: أيأ كان $A \in ob(Set's)$ فإن $F(A) = A \times B$ ، حيث $A \times B$ هو الجداء الديكارتي للمجموعتين A, B .

البرهان.

لنعرف $F : Set's \rightarrow Set's$ من خلال تطبيقي الأشياء والمورفيزمات الآتين:

١ - تطبيق الأشياء $F : ob(Set's) \rightarrow ob(Set's)$ المعرف بالشكل الآتي: أيأ كانت الزمرة $A \in ob(Set's)$ فإن $F(A) = A \times B$ ، واضح هنا أن F تطبيق.

٢ - تطبيق المورفيزمات $F : Mor(Set's) \rightarrow Mor(Set's)$.

نلاحظ أولاً أنه إذا كان $u : A \rightarrow D$ مورفيزماً لفئة المجموعات $Set's$ (تطبيق) حيث $A, D \in ob(Set's)$ ، فإن العلاقة $\bar{u} : A \times B \rightarrow D \times B$ المعرفة بالشكل الآتي: أيأ كان $(a, b) \in A \times B$ ، فإن $\bar{u}((a, b)) = (u(a), b)$ تشكل تطبيقاً. لنعرف F بالشكل الآتي: أيأ كان التطبيق $u : A \rightarrow D$ فإن $F(u) : F(A) \rightarrow F(D)$ أي إن:

$$F(u) : A \times B \rightarrow D \times B$$

لنضع $F(u) = \bar{u}$. فنجد أن F تطبيق مورفيزمات؛ لأنه إذا كان $u, v : A \rightarrow D$ بحيث $u = v$ ، فإن $\bar{u}, \bar{v} : A \times B \rightarrow D \times B$ وإن $\bar{u} = \bar{v}$ ؛ لأنه إذا كان $(a, b) \in A \times B$ ، فإن:

$$\bar{u}((a, b)) = (u(a), b) = (v(a), b) = \bar{v}((a, b))$$

وهذا التطبيق يحقق الآتي: لأجل كل $A \in ob(Set's)$ ، فإن:

$$F(I_A) = \bar{I}_A : A \times B \rightarrow A \times B$$

ويحقق أيأ كان $(a, b) \in A \times B$ ، فإن $\bar{I}_A((a, b)) = (I_A(a), b) = (a, b)$ ومنه:

$$F(I_A) = \bar{I}_A = I_{A \times B} = I_{F(A)}$$

ليكن $u : A \rightarrow D$ ، $w : D \rightarrow K$ مورفيزمات (تطبيقات) لفئة $Set's$ ، عندئذ يكون

حيث $F(w \cdot u) = \overline{w \cdot u} : A \times B \rightarrow K \times B$ ، لأن $w \cdot u : A \rightarrow K$ ويحقق أيأ كان

فإن: $(a, b) \in A \times B$

$$\begin{aligned}\overline{w \cdot u}((a, b)) &= (w \cdot u(a), b) = (w(u(a)), b) = \overline{w}(u(a), b) = \\ &= \overline{w}(\overline{u}(a, b)) = \overline{w \cdot u}(a, b)\end{aligned}$$

وهذا يبين أن $\overline{w \cdot u} = \overline{w} \cdot \overline{u}$ ، ومنه نجد أن:

$$F(w \cdot u) = \overline{w \cdot u} = \overline{w} \cdot \overline{u} = F(w) \cdot F(u)$$

مما سبق نجد أن F هو دالي مباشر .

تمهيدية ٣-٤-٢ .

في فئة المجموعات $Set's$ ، لأجل كل مجموعة $B \in ob(Set's)$ يوجد دالي مباشر:

$$G: Set's \rightarrow Set's$$

معرف بالشكل الآتي: أيأ كان $A \in ob(Set's)$ فإن $G(A) = Hom_{Set's}(B, A)$ البرهان.

لنعرف $G: Set's \rightarrow Set's$ من خلال تطبيقي الأشياء والمورفيزمات الآتين:

١ - تطبيق الأشياء $G: ob(Set's) \rightarrow ob(Set's)$ المعرف بالشكل الآتي: أيأ كانت الزمرة $A \in ob(Set's)$ ، فإن $G(A) = Hom_{Set's}(B, A)$ ، واضح أن G تطبيق، لأنه إذا كانت $A_1, A_2 \in ob(Set's)$ وإن $A_1 = A_2$ ، فإن:

$$G(A_1) = Hom_{Set's}(B, A_1) = Hom_{Set's}(B, A_2) = G(A_2)$$

٢ - تطبيق المورفيزمات $G: Mor(Set's) \rightarrow Mor(Set's)$

لأجل كل مورفيزم $u: A \rightarrow D$ للفئة $Set's$ لنعرف $G(u): G(A) \rightarrow G(D)$

$$G(u): Hom_{Set's}(B, A) \rightarrow Hom_{Set's}(B, D)$$

بالشكل الآتي: أيأ كان $v \in Hom_{Set's}(B, A)$ ، لنضع $G(u)(v) = u \cdot v$ ، فنجد أن G هو تطبيق مورفيزمات؛ لأنه أيأ كان $u, w: A \rightarrow D$ بحيث $u = w$ فإنه أيأ كان $v: B \rightarrow A$ فإن $v(b) \in A$ وذلك أيأ كان $b \in B$ وبالتالي يكون:

$$u \cdot v(b) = u(v(b)) = w(v(b)) = w \cdot v(b)$$

وهذا يبين أن $u \cdot v = w \cdot v$ وبالتالي يكون $G(u)(v) = u \cdot v = w \cdot v = G(w)(v)$ ، أي إن

$G(u) = G(w)$. وهذا التطبيق يحقق الآتي:

أيًا كان $A \in ob(Set's)$ ، فإن $G(I_A): G(A) \rightarrow G(A)$ أي إن:

$$G(I_A): Hom_{Set's}(B, A) \rightarrow Hom_{Set's}(B, A)$$

وأيًا كان $\lambda \in Hom_{Set's}(B, A)$ ، فإن $G(I_A)(\lambda) = I_A \cdot \lambda = \lambda$ وهذا يبين أن:

$$G(I_A) = I_{Hom_{Set's}(B, A)} = I_{G(A)}$$

ليكن $u: A \rightarrow D$ ، $w: D \rightarrow K$ مورفيزمات (تطبيقات) للفتة $Set's$ ، عندئذ يكون

$$G(w \cdot u): G(A) \rightarrow G(K) \text{ وإن } w \cdot u: A \rightarrow K$$

$$G(w \cdot u): Hom_{Set's}(B, A) \rightarrow Hom_{Set's}(B, K)$$

ويحقق أيًا كان $\mu \in Hom_{Set's}(B, A)$ ، فإن:

$$\begin{aligned} G(w \cdot u)(\mu) &= (w \cdot u) \cdot \mu = w \cdot (u \cdot \mu) = G(w)(u \cdot \mu) = G(w)(G(u)(\mu)) = \\ &= (G(w) \cdot G(u))(\mu) \end{aligned}$$

وهذا يبين أن $G(w \cdot u) = G(w) \cdot G(u)$ ، مما سبق نجد أن G هو دالي مباشر.

تمهيدية ٣-٤-٣.

في فئة المجموعات $Set's$ ، لأجل كل مجموعة $B \in ob(Set's)$ ، فإن الدالي G مرافق للدالي F ، أي إن:

$$Hom_{Set's}(A \times B, D) \cong Hom_{Set's}(A, Hom_{Set's}(B, D))$$

البرهان.

ليكن $B \in ob(Set's)$ ، وجدنا حسب التمهيديتين (٣-٤-١) و (٣-٤-٢) أنه توجد دوال مباشرة $F, G: Set's \rightarrow Set's$ معرفة بالشكل الآتي:

$$F(A) = A \times B, \quad G(A) = Hom_{Set's}(B, A)$$

وحسب التمهيدية (٣-١-١) فإنه لأجل $\mathfrak{I}_1 = \mathfrak{I}_2 = ob(Set's)$ توجد دوال مباشرة:

$$Hom_{Set's}(F): (Set's)^o \times Set's \rightarrow Set's$$

$$Hom_{Set's}(G): (Set's)^o \times Set's \rightarrow Set's$$

لنبرهن على وجود إيزومورفيزم دالي $\psi: Hom_{Set's}(F) \rightarrow Hom_{Set's}(G)$

أيًا كان $(A, D) \in ob((Set's)^o \times Set's)$ لنضع:

$$\psi(A, D): Hom_{Set's}(F)(A, D) \rightarrow Hom_{Set's}(G)(A, D)$$

$$\psi(A, D): Hom_{Ser's}(F(A), D) \rightarrow Hom_{Ser's}(A, G(D))$$

$$\psi(A, D): Hom_{Ser's}(A \times B, D) \rightarrow Hom_{Ser's}(A, Hom_{Ser's}(B, D))$$

ليكن $f \in Hom_{Ser's}(A \times B, D)$ أي إن $f: A \times B \rightarrow D$ هو تطبيق (مورفيزم للفئة) $Set's$. لأجل كل $a \in A$ ، لنعرف $f_a: B \rightarrow D$ بالشكل الآتي: أيأ كان $b \in B$ ، فإن $f_a(b) = f((a, b)) \in D$ فنجد أن f_a تطبيق؛ لأنه أيأ كان $b_1, b_2 \in B$ بحيث $b_1 = b_2$ فإن $(a, b_1) = (a, b_2)$ ومنه فإن:

$$f_a(b_1) = f((a, b_1)) = f((a, b_2)) = f_a(b_2)$$

أي إن f_a هو تطبيق. لنعرف علاقة $\bar{f}: A \rightarrow Hom_{Ser's}(B, D)$ بالشكل الآتي: أيأ كان $a \in A$ فإن $\bar{f} = f_a$ فنجد أن $\bar{f}$ هو تطبيق؛ لأنه إذا كان $a_1, a_2 \in A$ بحيث $a_1 = a_2$ فإن $f_{a_1} = f_{a_2}$ ؛ لأنه إذا كان $b \in B$ فإن:

$$f_{a_1}(b) = f((a_1, b)) = f((a_2, b)) = f_{a_2}(b)$$

وهذا يبين أن $f_{a_1} = f_{a_2}$ ، ومنه نجد أن $f_{a_1} = f_{a_2} = f(a_2)$ ، أي إن $\bar{f}$ تطبيق.

لنضع $\psi(A, B)(f) = \bar{f}$ فنجد أنه أيأ كان $a \in A$ فإن $\psi(A, B)(f)(a) = \bar{f}(a) = f_a$ وأيأ كان $b \in B$ فإن:

$$\psi(A, B)(f)(a)(b) = \bar{f}(a)(b) = f_a(b) = f((a, b))$$

إن $\psi(A, B)$ تطبيق؛ لأنه أيأ كان $f, g \in Hom_{Ser's}(A \times B, D)$ بحيث $f = g$ ، فإنه لأجل كل $a \in A$ يكون a يكون $f_a(b) = f((a, b)) = g((a, b)) = g_a(b)$ وذلك أيأ كان $b \in B$ ، ومنه نجد أن $f_a = g_a$ ، وهكذا نجد أن:

$$\psi(A, B)(f)(a)(b) = f_a(b) = g_a(b) = \psi(A, B)(g)(a)(b)$$

أي إن $\psi(A, B)(f) = \psi(A, B)(g)$.

لنبرهن الآن على أن التطبيق $\psi(A, B)$ غامر.

ليكن $\lambda \in Hom_{Ser's}(A, Hom_{Ser's}(B, D))$ فنجد أن $\lambda: A \rightarrow Hom_{Ser's}(B, D)$ هو تطبيق. لأجل كل $a \in A$ ، لنضع $\lambda_a \in Hom_{Ser's}(B, D)$ ، أي إن $\lambda_a: B \rightarrow D$ هو تطبيق وإنه أيأ كان $b \in B$ فإن $\lambda_a(b) \in D$. لنعرف العلاقة: $\mu: A \times B \rightarrow D$ بالشكل الآتي: أيأ كان $(a, b) \in A \times B$ ، لنضع $\mu((a, b)) = \lambda_a(b) \in D$ ، فنجد أن μ

هو تطبيق؛ لأنه إذا كان $(a,b), (a',b') \in A \times B$ بحيث $(a,b) = (a',b')$ فإن $a = a'$ و $b = b'$ ومنه فإن $\lambda_a = \lambda(a) = \lambda(a') = \lambda_{a'}$ وإن $\lambda_a(b) = \lambda_{a'}(b) = \lambda_{a'}(b')$ وبالتالي يكون $\mu((a,b)) = \lambda_a(b) = \lambda_{a'}(b') = \mu((a',b'))$ هو تطبيق. لنبرهن على أن $\psi(A,B)(\mu) = \lambda$ أي أن $a \in A$ وأي $b \in B$ فإن:

$$\psi(A,B)(\mu)(a)(b) = \mu((a,b)) = \lambda_a(b)$$

ومنه نجد أن $\psi(A,B)(\mu)(a) = \lambda_a = \lambda(a)$ أي إن $\psi(A,B)(\mu) = \lambda$ وهذا يبين أن التطبيق $\psi(A,B)$ غامر.

الخطوة الثانية. لنعرف تطبيقاً آخر:

$$\varphi: \text{Hom}_{\text{Ser's}}(A, \text{Hom}_{\text{Ser's}}(B, D)) \rightarrow \text{Hom}_{\text{Ser's}}(A \times B, D)$$

بالشكل الآتي: ليكن $\theta \in \text{Hom}_{\text{Ser's}}(A, \text{Hom}_{\text{Ser's}}(B, D))$ فنجد أن:

$$\theta: A \rightarrow \text{Hom}_{\text{Ser's}}(B, D)$$

هو تطبيق. أي أن $a \in A$ لنضع $\theta(a) = \theta_a$ فنجد أن $\theta_a \in \text{Hom}_{\text{Ser's}}(B, D)$ أي إن $\theta_a: B \rightarrow D$ هو تطبيق؛ وإنه أي $b \in B$ فإن $\theta_a(b) \in D$ بالاعتماد على θ لنعرف علاقة $\bar{\theta}: A \times B \rightarrow D$ بالشكل الآتي: أي أن $(a,b) \in A \times B$ لنضع:

$$\bar{\theta}((a,b)) = \theta_a(b) \in D$$

ف نجد أن $\bar{\theta}$ هو تطبيق، لأنه إذا كان $(a,b), (a',b') \in A \times B$ بحيث $(a,b) = (a',b')$ نجد أن $a = a'$ و $b = b'$ وبالتالي يكون $\theta_a = \theta(a) = \theta(a') = \theta_{a'}$ وإن:

$$\bar{\theta}((a,b)) = \theta_a(b) = \theta_{a'}(b) = \theta_{a'}(b') = \bar{\theta}((a',b'))$$

لنضع $\varphi(\theta) = \bar{\theta}$ فنجد أن φ هو تطبيق؛ لأنه إذا كان:

$$\theta, w \in \text{Hom}_{\text{Ser's}}(A, \text{Hom}_{\text{Ser's}}(B, D))$$

أي إن $\theta, w: A \rightarrow \text{Hom}_{\text{Ser's}}(B, D)$ تطبيقات، ولنفرض أن $\theta = w$ ، عندئذ أي أن $a \in A$ فإن $\theta(a) = w(a)$ ومنه $\theta_a = w_a \in \text{Hom}_{\text{Ser's}}(B, D)$ أي إن $\theta_a, w_a: B \rightarrow D$ تطبيقات، وإنه أي $b \in B$ فإن $\theta_a(b) = w_a(b)$ وحسب تعريف φ فإن $\varphi(\theta) = \bar{\theta}$ وإن $\varphi(w) = \bar{w}$ وإنه أي $(a,b) \in A \times B$ فإن:

$$\varphi(\theta)(a,b) = \bar{\theta}(a,b) = \theta_a(b) = w_a(b) = \bar{w}(a,b)$$

وبالتالي يكون $\varphi(\theta) = \bar{\theta} = \bar{w} = \varphi(w)$. لنبرهن على أن التطبيق φ غامر.
 ليكن $\bar{\alpha} \in \text{Hom}_{\text{Ser's}}(A \times B, D)$ ، إن $\bar{\alpha}: A \times B \rightarrow D$ تطبيق؛ وأنه أياً كان
 $(a, b) \in A \times B$ ، فإن $\bar{\alpha}(a, b) \in D$. لأجل كل $a \in A$ لنعرف التطبيق $\alpha_a: B \rightarrow D$
 بالشكل الآتي: أياً كان $b \in B$ ، فإن $\alpha_a(b) = \bar{\alpha}((a, b))$ فنجد أن α_a تطبيق؛ لأنه أياً
 كان $b, b' \in B$ بحيث $b = b'$ فإن $(a, b) = (a, b') \in A \times B$ وإن:

$$\alpha_a(b) = \bar{\alpha}((a, b)) = \bar{\alpha}((a, b')) = \alpha_a(b')$$
 وهذا يبين أن α_a هو تطبيق.

لنعرف تطبيق آخر $\alpha: A \rightarrow \text{Hom}_{\text{Ser's}}(B, D)$ بالشكل الآتي: أياً كان $a \in A$ ، فإن
 $\alpha(a) = \alpha_a$ ، فنجد أن α هو تطبيق؛ لأنه إذا كان $a, a' \in A$ ؛ بحيث $a = a'$ عندئذ،
 فإن $\alpha_a = \alpha_{a'}$ ؛ لأنه إذا كان $b \in B$ فإن $(a, b) = (a', b)$ ومنه $\alpha((a, b)) = \alpha((a', b))$
 وبالتالي يكون $\alpha_a(b) = \alpha_{a'}(b)$ أي إن $\alpha_a = \alpha_{a'}$ وبالتالي $\alpha(a) = \alpha(a')$ أي إن:

$$\alpha \in \text{Hom}_{\text{Ser's}}(A, \text{Hom}_{\text{Ser's}}(B, D))$$

وإن $\varphi(\alpha) = \bar{\alpha}$ وذلك حسب تعريف φ . وهكذا نجد أن التطبيق φ غامر.
 مما سبق نجد أن $\text{Hom}_{\text{Ser's}}(A \times B, D) \cong \text{Hom}_{\text{Ser's}}(A, \text{Hom}_{\text{Ser's}}(B, D))$.

تمارين محلولة (٣)

١ - لتكن $\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2$ فئتين وليكن $G: \mathfrak{T}_2 \rightarrow \mathfrak{T}_1$ دالياً غير مباشر (مخالف للتغير). ولتكن $Set's$ فئة المجموعات. لتأخذ الفئة $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_1 \times \mathfrak{T}_2$. عندئذ يوجد دالي غير مباشر:

$$\cdot \text{Hom}_{\mathfrak{T}_1}(G): \mathfrak{T} = \mathfrak{T}_1 \times \mathfrak{T}_2 \rightarrow Set's$$

الحل.

لنعرف $\text{Hom}_{\mathfrak{T}_1}(G): \mathfrak{T} = \mathfrak{T}_1 \times \mathfrak{T}_2 \rightarrow Set's$ بالشكل الآتي:

أياً كان $(A, B) \in ob(\mathfrak{T})$ ، فإن:

$$\cdot \text{Hom}_{\mathfrak{T}_1}(G)(A, B) = \mathfrak{T}_1(A, G(B)) \in Set's$$

وذلك لأن $(A, G(B)) \in ob(\mathfrak{T}_1)$ وبالتالي $A \in ob(\mathfrak{T}_1)$ ، $B \in ob(\mathfrak{T}_2)$ ؛ وبالتالي

كما إنه $\forall f \in \mathfrak{T}(A, B)$ ، فإن $f = (f_1, f_2)$ حيث $A, B \in ob(\mathfrak{T})$ ومنه $A = (A_1, A_2)$ و

$B = (B_1, B_2)$ وإن $A_1, B_1 \in ob(\mathfrak{T}_1)$ و $A_2, B_2 \in ob(\mathfrak{T}_2)$ و

فضلاً عن ذلك، فإن $f_1 \in \mathfrak{T}_1(A_1, B_1)$ و $f_2 \in \mathfrak{T}_2(A_2, B_2)$. كما أن:

$$\text{Hom}_{\mathfrak{T}_1}(G)(f): \text{Hom}_{\mathfrak{T}_1}(G)(B) \rightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{T}_1}(G)(A)$$

$$\text{Hom}_{\mathfrak{T}_1}(G)(f): \text{Hom}_{\mathfrak{T}_1}(G)(B_1, B_2) \rightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{T}_1}(G)(A_1, A_2)$$

$$\text{Hom}_{\mathfrak{T}_1}(G)(f): \mathfrak{T}_1(B_1, G(B_2)) \rightarrow \mathfrak{T}_1(A_1, G(A_2))$$

وبالتالي $\forall u \in \mathfrak{T}_1(B_1, G(B_2))$ ، لنضع:

$$\text{Hom}_{\mathfrak{T}_1}(G)(f)(u) = G(f_2) \cdot u \cdot f_1$$

$$\begin{array}{ccc} A_1 & \xrightarrow{f_1} & B_1 \\ & \searrow & \downarrow u \\ & & G(B_2) \\ & \searrow G(f_2) \cdot u \cdot f_1 & \downarrow G(f_2) \\ & & G(A_2) \end{array}$$

وذلك وفق المخطط المذكور أعلاه، حيث إن $G(f_2): G(B_2) \rightarrow G(A_2)$ وذلك لأن

الدالي G غير مباشر.

كما إنه أياً كان $A \in ob(\mathfrak{S})$ ، فإن $A = (A_1, A_2)$ وإن $I_A = (I_{A_1}, I_{A_2})$ ، ومنه:

$$\text{Hom}_{\mathfrak{S}_1}(G)(I_A) : \mathfrak{S}_1(A_1, G(A_2)) \rightarrow \mathfrak{S}_1(A_1, G(A_2))$$

وبالتالي أياً كان $u \in \mathfrak{S}_1(A_1, G(A_2))$ ، فإن:

$$\text{Hom}_{\mathfrak{S}_1}(G)(I_A)(u) = G(I_{A_2}) \cdot u \cdot I_{A_1} = (I_{G(A_2)}) \cdot u = u$$

وهذا يبين لنا أن $\text{Hom}_{\mathfrak{S}_1}(G)(I_A) = I_{\text{Hom}_{\mathfrak{S}_1}(G)(A)}$.

من جهة أخرى، ليكن $f, g \in \text{Mor}(\mathfrak{S})$ بحيث $f : B \rightarrow D, g : A \rightarrow B$ حيث $A, B, D \in ob(\mathfrak{S})$ ، عندئذ فإن $f \cdot g \in \mathfrak{S}(A, D)$ ؛ ومنه:

$$\text{Hom}_{\mathfrak{S}_1}(G)(f \cdot g) : \text{Hom}_{\mathfrak{S}_1}(G)(D) \rightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{S}_1}(G)(A)$$

$$\text{Hom}_{\mathfrak{S}_1}(G)(f \cdot g) : \mathfrak{S}_1(D_1, G(D_2)) \rightarrow \mathfrak{S}_1(A_1, G(A_2))$$

وبالتالي أياً كان $u : D_1 \rightarrow G(D_2)$ وبما أن $f = (f_1, f_2), g = (g_1, g_2)$ فإن $f \cdot g = (f_1 \cdot g_1, f_2 \cdot g_2)$ ؛ ومنه:

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathfrak{S}_1}(G)(f \cdot g)(u) &= G(f_2 \cdot g_2) \cdot u \cdot (f_1 \cdot g_1) = G(g_2) \cdot G(f_2) \cdot u \cdot (f_1 \cdot g_1) = \\ &= G(g_2) \cdot (G(f_2) \cdot u \cdot f_1) \cdot g_1 = G(g_2) \cdot \text{Hom}_{\mathfrak{S}_1}(G)(f)(u) \cdot g_1 = \\ &= (\text{Hom}_{\mathfrak{S}_1}(G)(g)) \cdot (\text{Hom}_{\mathfrak{S}_1}(G)(f))(u) \end{aligned}$$

مما سبق نجد أن:

$$\text{Hom}_{\mathfrak{S}_1}(G)(f \cdot g) = \text{Hom}_{\mathfrak{S}_1}(G)(g) \cdot \text{Hom}_{\mathfrak{S}_1}(G)(f)$$

وهذا يبين لنا أن $\text{Hom}_{\mathfrak{S}_1}(G)$ هو دالي غير مباشر.

٢ - لنأخذ فئة المجموعات $Set's$. عندئذ لأجل كل مجموعة $B \in ob(Set's)$ يوجد دالي مباشر $F : Set's \rightarrow Set's$ معرف بالشكل الآتي: أياً كان $A \in ob(Set's)$ ، فإن:

$$F(A) = A \times B$$

حيث $A \times B$ هو الجداء الديكارتي للمجموعتين A و B .

الحل.

لنعرف $F : Set's \rightarrow Set's$ من خلال:

١ - تطبيق الأشياء $F : ob(Set's) \rightarrow ob(Set's)$ المعرف بالشكل الآتي: أياً كان $A \in ob(Set's)$ ، فإن $F(A) = A \times B$ ، واضح هنا أن F تطبيق.

٢ - تطبيق المورفيزمات $F: Mor(Set's) \rightarrow Mor(Set's)$. نلاحظ أولاً أنه إذا كان $u: A \rightarrow D$ مورفيزماً (تطبيقاً) للفئة $Set's$ حيث $A, D \in ob(Set's)$ ، فإن العلاقة $\bar{u}: A \times B \rightarrow D \times B$ المعرفة بالشكل الآتي: أيأ كان $(a, b) \in A \times B$ ، فإن:

$$\bar{u}((a, b)) = (u(a), b)$$

تشكل تطبيقاً. لنعرف F بالشكل الآتي: أيأ كان التطبيق $u: A \rightarrow D$ فإن

$$F(u): F(A) = A \times B \rightarrow F(D) = D \times B$$

لنضع $F(u) = \bar{u}$ ، فنجد أن F هو تطبيق مورفيزمات؛ لأنه إذا كان $u, v: A \rightarrow D$ بحيث $u = v$ ، فإن $\bar{u}, \bar{v}: A \times B \rightarrow D \times B$ وإن $\bar{u} = \bar{v}$ لأنه أيأ كان $(a, b) \in A \times B$ فإن:

$$\bar{u}((a, b)) = (u(a), b) = (v(a), b) = \bar{v}((a, b))$$

وهذا التطبيق يحقق الآتي: لأجل كل $A \in ob(Set's)$ ، فإن:

$$F(I_A) = \bar{I}_A: A \times B \rightarrow A \times B$$

ويحقق أيأ كان $(a, b) \in A \times B$ ، فإن $\bar{I}_A((a, b)) = (I_A(a), b) = (a, b)$ وهذا يبين أن:

$$F(I_A) = \bar{I}_A = I_{A \times B} = I_{F(A)}$$

ليكن $u: A \rightarrow D$ و $v: D \rightarrow K$ مورفيزمات (تطبيقات) للفئة $Set's$ عندئذ:

$$F(v \cdot u) = \overline{v \cdot u}$$

حيث $\overline{v \cdot u}: A \times B \rightarrow K \times B$ لأن $v \cdot u: A \rightarrow K$ ويحقق: أيأ كان $(a, b) \in A \times B$ فإن

$$\begin{aligned} \overline{v \cdot u}((a, b)) &= (v \cdot u(a), b) = (v(u(a)), b) = \bar{v}(u(a), b) = \bar{v}(\bar{u}(a, b)) = \\ &= \bar{v} \cdot \bar{u}((a, b)) \end{aligned}$$

وهذا يبين أن $\overline{v \cdot u} = \bar{v} \cdot \bar{u}$ ؛ ومنه نجد أن $\overline{v \cdot u} = \bar{v} \cdot \bar{u} = F(v) \cdot F(u)$ ، مما سبق نجد أن F هو دالي مباشر.

٣ - لنأخذ فئة المجموعات $Set's$. عندئذ لأجل كل مجموعة $B \in ob(Set's)$ يوجد دالي مباشر $G: Set's \rightarrow Set's$ معرف بالشكل الآتي: أيأ كان $A \in ob(Set's)$ ، فإن:

$$G(A) = Hom_{Set's}(B, A)$$

الحل.

لنعرف $G: Set's \rightarrow Set's$ من خلال:

١ - تطبيق الأشياء $G: ob(Ser's) \rightarrow ob(Ser's)$ المعرف بالشكل الآتي: أيأ كان $A \in ob(Ser's)$ ، فإن $G(A) = Hom_{Ser's}(B, A)$ ، واضح هنا أن G تطبيق؛ لأنه إذا كان $A_1, A_2 \in ob(Ser's)$ وإن $A_1 = A_2$ ، فإن:

$$G(A_1) = Hom_{Ser's}(B, A_1) = Hom_{Ser's}(B, A_2) = G(A_2)$$

٢ - تطبيق المورفيزمات $G: Mor(Ser's) \rightarrow Mor(Ser's)$

ليكن $u: A \rightarrow D$ مورفيزماً (تطبيق) للفئة $Ser's$ حيث $A, D \in ob(Ser's)$ ، لنعرف:

$$G(u): G(A) \rightarrow G(D)$$

$$G(u): Hom_{Ser's}(B, A) \rightarrow Hom_{Ser's}(B, D)$$

بالشكل الآتي: أيأ كان $v \in Hom_{Ser's}(B, A)$ ، لنضع $G(u)(v) = u \cdot v$

ف نجد أن G هو تطبيق مورفيزمات؛ لأنه أيأ كان $u, w: A \rightarrow D$ بحيث $u = w$ ، فإنه لأجل كل $v: B \rightarrow A$ نجد أنه أيأ كان $b \in B$ ، فإن $v(b) \in A$ وبالتالي فإن:

$$u \cdot v(b) = u(v(b)) = w(v(b)) = w \cdot v(b)$$

وهذا يبين أن $u \cdot v = w \cdot v$ وبالتالي يكون:

$$G(u)(v) = u \cdot v = w \cdot v = G(w)(v)$$

أي إن $G(u) = G(w)$. وهذا التطبيق يحقق الآتي:

- أيأ كان $A \in ob(Ser's)$ ، فإن $G(I_A): G(A) \rightarrow G(A)$ أي إن:

$$G(I_A): Hom_{Ser's}(B, A) \rightarrow Hom_{Ser's}(B, A)$$

وأيأ كان $\lambda \in Hom_{Ser's}(B, A)$ ، فإن $G(I_A)(\lambda) = I_A \cdot \lambda = \lambda$ وهذا يبين أن:

$$G(I_A) = I_{Hom_{Ser's}(B, A)} = I_{G(A)}$$

ليكن $u: A \rightarrow D$ و $v: D \rightarrow K$ مورفيزمات (تطبيقات) للفئة $Ser's$ عندئذ $v \cdot u: A \rightarrow K$

وإن $G(v \cdot u): G(A) \rightarrow G(K)$ أي إن:

$$G(v \cdot u): Hom_{Ser's}(B, A) \rightarrow Hom_{Ser's}(B, K)$$

وأيأ كان $\mu \in Hom_{Ser's}(B, A)$ ، فإن:

$$\begin{aligned} G(v \cdot u)(\mu) &= (v \cdot u) \cdot \mu = v \cdot (u \cdot \mu) = G(v)(u \cdot \mu) = G(v)(G(u)(\mu)) = \\ &= (G(v) \cdot G(u))(\mu) \end{aligned}$$

وهذا يبين أن $G(v \cdot u) = G(v) \cdot G(u)$ ، مما سبق نجد أن G هو دالي مباشر.

٤ - لتكن $\bar{\mathcal{C}}$ فئة صغيرة وليكن $F : \bar{\mathcal{C}} \rightarrow \text{Set's}$ دالياً مباشراً، عندئذ توجد فئة $\bar{\mathcal{C}}$:

- أشياءها هي جميع المورفيزمات الدالية الممكنة $h_A : A \rightarrow F$ ، وذلك أيأ كان $A \in \text{ob}(\bar{\mathcal{C}})$.

- مورفيزماتها هي جميع المورفيزمات من الشكل $h(\alpha)$ حيث $\alpha : A \rightarrow B$ مورفيزم للفئة $\bar{\mathcal{C}}$ التي لأجلها المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} h_A & \longrightarrow & F \\ h(\alpha) \uparrow & \nearrow & \\ h_B & & \end{array}$$

تبديلي.

الحل.

لنبرهن على أن $\bar{\mathcal{C}}$ فئة التي تتألف من:

- صف الأشياء $\text{ob}(\bar{\mathcal{C}})$ ، الذي يتألف من جميع المورفيزمات الدالية $f_A : h_A \rightarrow F$ وذلك أيأ كان $A \in \text{ob}(\bar{\mathcal{C}})$ ، وإن $h_A : \bar{\mathcal{C}} \rightarrow \text{Set's}$ هو الدالي المباشر المعرف في المبرهنة (٢-١).

- صف المورفيزمات $\text{Mor}(\bar{\mathcal{C}})$ بالاعتماد على المبرهنة (٢-٣-٤)، فإنه يوجد دالي غير مباشر $h : \bar{\mathcal{C}} \rightarrow \text{Funct}(\bar{\mathcal{C}}, \text{Set's})$ معرف بالشكل الآتي: أيأ كان $A \in \text{ob}(\bar{\mathcal{C}})$ فإن $h(A) = h_A$. لنشكل صف المورفيزمات $\text{Mor}(\bar{\mathcal{C}})$ المؤلف من جميع المورفيزمات الممكنة $h(\alpha)$ حيث $\alpha : A \rightarrow B$ مورفيزم للفئة $\bar{\mathcal{C}}$ والذي لأجله المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} h_B & \xrightarrow{f_B} & F \\ h(\alpha) \uparrow & \nearrow & \\ h_A & \xrightarrow{f_A} & F \end{array}$$

تبديلي أي إن $f_B \cdot h(\alpha) = f_A$. لنبرهن على أن صفي الأشياء والمورفيزمات المذكورين يشكلان الفئة $\bar{\mathcal{C}}$.

ليكن $f_A, f_B, f_D \in \text{ob}(\bar{\mathcal{C}})$ حيث $A, B, D \in \text{ob}(\bar{\mathcal{C}})$ ، ولنبرهن على وجود تطبيق:

$$\mu : \bar{\mathcal{C}}(f_A, f_B) \times \bar{\mathcal{C}}(f_B, f_D) \longrightarrow \bar{\mathcal{C}}(f_A, f_D)$$

ليكن $(h(v), h(u)) \in \bar{\mathcal{C}}(f_A, f_B) \times \bar{\mathcal{C}}(f_B, f_D)$ حيث $v : A \rightarrow B, u : B \rightarrow D$ مورفيزمات

للفئة $\bar{\mathcal{C}}$ ، عندئذ $u \cdot v : A \rightarrow D$ مورفيزم للفئة $\bar{\mathcal{C}}$. لنبرهن على أن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} & h_A & \xrightarrow{f_A} F \\ h(u \cdot v) & \uparrow & \nearrow \\ & h_D & f_D \end{array}$$

تبديلي. بما أن $h(v), h(u) \in \text{Mor}(\bar{\mathcal{T}})$ ، فإن المخططات الآتية:

$$\begin{array}{ccc} & h_A & \xrightarrow{f_A} F \\ h(v) & \uparrow & \nearrow \\ & h_B & f_B \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & h_B & \xrightarrow{f_B} F \\ h(u) & \uparrow & \nearrow \\ & h_D & f_D \end{array}$$

تبديلية، أي إن $f_A \cdot h(v) = f_B$ ، $f_B \cdot h(u) = f_D$ ، وبما أن الدالي h غير مباشر نجد:

$$f_A \cdot h(u \cdot v) = f_A \cdot (h(v) \cdot h(u)) = (f_A \cdot h(v)) \cdot h(u) = f_B \cdot h(u) = f_D$$

ومنه نجد أن $\mu((h(v), h(u))) \in \bar{\mathcal{T}}(f_A, f_D)$ ، وإن هذه العملية تجميعية، لأن تركيب المورفيزمات الدالية تجميعي.

لنبرهن أنه أياً كان $f_A : h_A \rightarrow F \in \text{ob}(\bar{\mathcal{T}})$ يوجد مورفيزم مطابق. ليكن $f_A : h_A \rightarrow F$ عندئذ $A \in \text{ob}(\bar{\mathcal{T}})$ ومنه يوجد المورفيزم المطابق $I_A : A \rightarrow A$ ، ولما كان h دالياً نجد أن

$$h(I_A) = I_{h(A)} = I_{h_A} \text{ ومنه } f_A \cdot I_{h(A)} = f_A \cdot I_{h_A} = f_A \text{، أي إن المخطط الآتي:}$$

$$\begin{array}{ccc} & h_A & \xrightarrow{f_A} F \\ h(I_A) & \uparrow & \nearrow \\ & h_A & f_A \end{array}$$

وهذا يبين أن $h(I_A) \in \text{Mor}(\bar{\mathcal{T}})$ ، ويحقق:

- أياً كان $h(u) : h(B) \rightarrow h(A)$ حيث $u : A \rightarrow B$ مورفيزم للفئة $\bar{\mathcal{T}}$ وأياً كان $h(v) : h(A) \rightarrow h(D)$ حيث $v : B \rightarrow D$ مورفيزم للفئة $\bar{\mathcal{T}}$ ، فإن:

$$h(I_A) \cdot h(u) = h(u \cdot I_A) = h(u)$$

$$h(v) \cdot h(I_A) = h(I_A \cdot v) = h(v)$$

وهذا يبين أن $h(I_A)$ هو المورفيزم المطابق في الفئة $\bar{\mathcal{T}}$ وذلك لأجل كل $f_A \in \text{ob}(\bar{\mathcal{T}})$. مما سبق نجد أن $\bar{\mathcal{T}}$ فئة.



الفصل الرابع الجداءات و المجاميع

٤-١. الجداءات.

تعريف.

لتكن $\mathcal{S}$ فئة و I مجموعة من الأدلة. لنفرض أن أسرة من أشياء الفئة $\mathcal{S}$ وأن $(u_i : A \rightarrow A_i)_{i \in I}$ أسرة من مورفيزمات الفئة $\mathcal{S}$ حيث $A \in ob(\mathcal{S})$. نقول إن الثنائية $(A, (u_i)_{i \in I})$ تشكل جداء لأسرة الأشياء $(A_i)_{i \in I}$ إذا تحقق الشرط:
لأجل أي $B \in ob(\mathcal{S})$ ولأجل أي أسرة من المورفيزمات $(v_i : B \rightarrow A_i)_{i \in I}$ يوجد مورفيزم وحيد $v : B \rightarrow A$ يجعل المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{v} & A \\ & \searrow v_i & \downarrow u_i \\ & & A_i \end{array}$$

تبدلي، وذلك أيًا كان $i \in I$. أي إن $u_i \cdot v = v_i$ $\forall i \in I$.

سوف نسمي المورفيزمات $u_i : A \rightarrow A_i$ مورفيزمات الإسقاط القانونية وذلك $\forall i \in I$.

ملاحظة.

لتكن $\mathcal{S}$ فئة. لنفرض أن أسرة من أشياء الفئة $\mathcal{S}$ و $X \in ob(\mathcal{S})$. سوف نرمز للجداء الديكارتي للمجموعات $\mathcal{S}(X, A_i)$ بالشكل $\prod_{i \in I} \mathcal{S}(X, A_i)$.

تمهيدية ٤-١-١.

لتكن $\mathcal{S}$ فئة و $(A_i)_{i \in I}$ أسرة من أشياء الفئة $\mathcal{S}$. الشروط الآتية متكافئة:

١ - الأسرة $(A_i)_{i \in I}$ تملك جداء هو الثنائية $(A, (u_i)_{i \in I})$ حيث $(u_i : A \rightarrow A_i)_{i \in I}$ و $A \in ob(\mathcal{S})$.

٢ - أيًا كان $X \in ob(\mathcal{S})$ ، فإن التطبيق:

$$\Gamma : \mathcal{S}(X, A) \rightarrow \prod_{i \in I} \mathcal{S}(X, A_i)$$

المعرف بالشكل الآتي: أياً كان $w \in \mathfrak{S}(X, A)$ ، فإن $\Gamma(w) = (u_i \cdot w)_{i \in I}$ متباين وغامر .
البرهان .

(١) $\Leftarrow$ (٢). لنبرهن أولاً على أن Γ تطبيق .

ليكن $\lambda, \mu \in \mathfrak{S}(X, A)$ بحيث $\lambda = \mu$ عندئذ، فإن $u_i \cdot \lambda = u_i \cdot \mu$ وذلك $\forall i \in I$ ؛ ومنه

$$\Gamma(\lambda) = (u_i \cdot \lambda)_{i \in I} = (u_i \cdot \mu)_{i \in I} = \Gamma(\mu)$$

لنعرف العلاقة:

$$\Gamma^{-1} : \prod_{i \in I} \mathfrak{S}(X, A_i) \rightarrow \mathfrak{S}(X, A)$$

بالشكل الآتي: ليكن $(v_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \mathfrak{S}(X, A_i)$. بما أن الأسرة $(A_i)_{i \in I}$ تملك جداء هو

التثنائية $(A, (u_i)_{i \in I})$ ، فإنه لأجل $(v_i)_{i \in I}$ يوجد مورفيزم وحيد $v \in \mathfrak{S}(X, A)$ بحيث

$u_i \cdot v = v_i$ وذلك $\forall i \in I$. لنضع $\Gamma^{-1}((v_i)_{i \in I}) = v$. لنبرهن على أن Γ^{-1} هو تطبيق .

ليكن $(v_i)_{i \in I} = (w_i)_{i \in I}$ بحيث $(v_i)_{i \in I}, (w_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \mathfrak{S}(X, A_i)$. عندئذ حسب الفرض

يوجد $v, w \in \mathfrak{S}(X, A)$ بحيث $u_i \cdot v = v_i$ و $u_i \cdot w = w_i$ وذلك $\forall i \in I$. وهذا يبين لنا

أن $v = w$. ومنه يكون $\Gamma^{-1}((v_i)_{i \in I}) = \Gamma^{-1}((w_i)_{i \in I})$ وهذا يبين أن Γ^{-1} هو تطبيق .

من جهة أخرى، أياً كان $(v_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \mathfrak{S}(X, A_i)$ ، فإن:

$$\Gamma(\Gamma^{-1}((v_i)_{i \in I})) = \Gamma(v) = (u_i \cdot v)_{i \in I} = (v_i)_{i \in I}$$

وهذا يبين أن $\Gamma \circ \Gamma^{-1} = I_{\prod_{i \in I} \mathfrak{S}(X, A_i)}$. كما أنه أياً كان $v \in \mathfrak{S}(X, A)$ ، فإن:

$$\Gamma^{-1}(\Gamma(v)) = \Gamma^{-1}((u_i \cdot v)_{i \in I}) = v$$

أي إن $\Gamma^{-1} \circ \Gamma = I_{\mathfrak{S}(X, A)}$. مما سبق نجد أن التطبيق Γ متباين وغامر .

(٢) $\Leftarrow$ (١). لنفرض أن التطبيق Γ متباين وغامر .

ليكن $B \in ob(\mathfrak{S})$ و $(v_i : B \rightarrow A_i)_{i \in I}$ أسرة من مورفيزمات الفئة $\mathfrak{S}$. عندئذ:

$$(v_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \mathfrak{S}(B, A_i)$$

بما أن التطبيق Γ غامر يوجد $v \in \mathfrak{S}(B, A)$ بحيث $\Gamma(v) = (v_i)_{i \in I}$. من جهة أخرى،

بما أن $\Gamma(v) = (u_i \cdot v)_{i \in I}$ نجد أن $(v_i)_{i \in I} = (u_i \cdot v)_{i \in I}$ ، أي إن $v_i = u_i \cdot v$ وذلك أياً كان

$i \in I$. لنبرهن على أن v وحيد .

ليكن $v, w \in \mathfrak{S}(X, A)$ بحيث $v_i = u_i \cdot v$ و $v_i = u_i \cdot w$ ، فنجد أن:

$$\Gamma(v) = (v_i)_{i \in I} = (u_i \cdot v)_{i \in I} = (u_i \cdot w)_{i \in I} = \Gamma(w)$$

وبما أن التطبيق Γ متباين نجد أن $v = w$. مما سبق نجد أن الأسرة $(A_i)_{i \in I}$ تملك جداء هو الثنائية $\diamond \cdot (A, (u_i)_{i \in I})$

تمهيدية ٤-١-٢.

لتكن $\mathfrak{I}$ فئة و $(A_i)_{i \in I}$ أسرة من أشياء الفئة $\mathfrak{I}$. لنفرض أن الثنائية $(A, (u_i)_{i \in I})$ حيث $A \in \text{ob}(\mathfrak{I})$ و $(u_i : A \rightarrow A_i)_{i \in I}$ هي جداء للأسرة $(A_i)_{i \in I}$. ولتكن أيضاً الثنائية $(A', (u'_i)_{i \in I})$ حيث $A' \in \text{ob}(\mathfrak{I})$ و $(u'_i : A' \rightarrow A_i)_{i \in I}$ جداء آخر للأسرة $(A_i)_{i \in I}$. عندئذ يوجد إيزومورفيزم $\alpha : A \rightarrow A'$ لأجله المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & A' \\ & \searrow & \downarrow u'_i \\ & u_i & A_i \end{array}$$

تبديلي، وذلك $\forall i \in I$. أي إن $u'_i \cdot \alpha = u_i$ $\forall i \in I$.
البرهان.

لنفرض أن الثنائية $(A', (u'_i)_{i \in I})$ هي جداء للأسرة $(A_i)_{i \in I}$. عندئذ يوجد $\alpha : A \rightarrow A'$ لأجله المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & A' \\ & \searrow & \downarrow u'_i \\ & u_i & A_i \end{array}$$

تبديلي وذلك $\forall i \in I$. أي إن $u'_i \cdot \alpha = u_i$ $\forall i \in I$.

أيضاً لنفرض أن الثنائية $(A, (u_i)_{i \in I})$ هي جداء للأسرة $(A_i)_{i \in I}$. عندئذ يوجد $\beta : A' \rightarrow A$ لأجله المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} A' & \xrightarrow{\beta} & A \\ & \searrow & \downarrow u_i \\ & u'_i & A_i \end{array}$$

تبديلي وذلك $\forall i \in I$. أي إن $u_i \cdot \beta = u'_i$ $\forall i \in I$.

ومنه نجد أن $u_i = u'_i \cdot \alpha = u_i \cdot \beta \cdot \alpha$ $\forall i \in I$; $u'_i = u_i \cdot \beta = u'_i \cdot \alpha \cdot \beta$ $\forall i \in I$.

وحسب التمهيدية (٤-١-١) ولأجل $X = A$ ، فإن التطبيق:

$$\Gamma: \mathfrak{S}(A, A) \rightarrow \prod_{i \in I} \mathfrak{S}(A, A_i)$$

المعرف بالشكل أيأ كان $w \in \mathfrak{S}(A, A)$ ، فإن $\Gamma(w) = (u_i \cdot w)_{i \in I}$ متباين وغامر. بما أن $I_A \in \mathfrak{S}(A, A)$ نجد أن:

$$\Gamma(I_A) = (u_i \cdot I_A)_{i \in I} = (u_i)_{i \in I} = (u_i \cdot (\beta \cdot \alpha))_{i \in I} = \Gamma(\beta \cdot \alpha)$$

ومنه نجد أن $I_A = \beta \cdot \alpha$

أيضاً بما أن التطبيق $\Gamma: \mathfrak{S}(A', A') \rightarrow \prod_{i \in I} \mathfrak{S}(A', A_i)$ المعرف بالشكل أيأ كان $w \in \mathfrak{S}(A', A')$ فإن $\Gamma(w) = (u'_i \cdot w)_{i \in I}$ متباين وغامر. وبما أن $I_{A'} \in \mathfrak{S}(A', A')$ نجد أن:

$$\Gamma(I_{A'}) = (u'_i \cdot I_{A'})_{i \in I} = (u'_i)_{i \in I} = (u'_i \cdot (\alpha \cdot \beta))_{i \in I} = \Gamma(\alpha \cdot \beta)$$

ومنه فإن $I_{A'} = \alpha \cdot \beta$. مما سبق نجد أن $\alpha: A \rightarrow A'$ إيزومورفيزم يحقق $\forall i \in I; u'_i \cdot \alpha = u_i$.

ملاحظة.

لنكن فئة $\mathfrak{S}$ فئة $(A_i)_{i \in I}$ أسرة من أشياء الفئة $\mathfrak{S}$. إذا كانت هذه الأسرة تملك جداء سوف نرمز لهذا الجداء بالشكل $\prod_{i \in I} A_i$. لابد من الإشارة هنا إلى أن $\prod_{i \in I} A_i$ ليس هو فقط أحد أشياء الفئة $\mathfrak{S}$ ، وإنما يتضمن وجود المورفيزمات $A_i \rightarrow \prod_{i \in I} A_i$ والتي سوف ندعوها المورفيزمات الإسقاطية.

تمهيدية ٤-١-٣.

لنكن فئة $\mathfrak{S}$ فئة، و $(A_i)_{i \in I}, (B_i)_{i \in I}$ أسرتين من أشياء الفئة $\mathfrak{S}$. إذا كانت هاتان الأسرتان تملكان جداءات $\prod_{i \in I} A_i, \prod_{i \in I} B_i$ على الترتيب، عندئذ لأجل أي أسرة:

$$(w_i: A_i \rightarrow B_i)_{i \in I}$$

من مورفيزمات الفئة $\mathfrak{S}$ يوجد مورفيزم وحيد $w: \prod_{i \in I} A_i \rightarrow \prod_{i \in I} B_i$ يجعل المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} \prod_{i \in I} A_i & \xrightarrow{w} & \prod_{i \in I} B_i \\ v_i \downarrow & & \downarrow u_i \\ A_i & \xrightarrow{w_i} & B_i \end{array}$$

تبدلياً، أي إن: $u_i \cdot w = w_i \cdot v_i$ وذلك $\forall i \in I$.
البرهان.

بما أن الأسرة $(B_i)_{i \in I}$ تملك جداء هو $\prod_{i \in I} B_i$ ، فإنه توجد المورفيزمات $u_i : \prod_{i \in I} B_i \rightarrow B_i$ من جهة أخرى، بما أن الأسرة $(A_i)_{i \in I}$ تملك جداء هو $\prod_{i \in I} A_i$ ، فإنه توجد المورفيزمات $v_i : \prod_{i \in I} A_i \rightarrow A_i$. لتأخذ أسرة المورفيزمات $w_i : \prod_{i \in I} A_i \rightarrow B_i$ عندئذ حسب التعريف يوجد مورفيزم وحيد $w : \prod_{i \in I} A_i \rightarrow \prod_{i \in I} B_i$ يجعل المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} \prod_{i \in I} A_i & \xrightarrow{w} & \prod_{i \in I} B_i \\ v_i \downarrow & & \downarrow u_i \\ A_i & \xrightarrow{w_i} & B_i \end{array}$$

تبدلياً، أي إن: $u_i \cdot w = w_i \cdot v_i$ وذلك $\forall i \in I$.

ملاحظة.

سوف نرمز للمورفيزم $w : \prod_{i \in I} A_i \rightarrow \prod_{i \in I} B_i$ بالشكل:

$$\prod_{i \in I} w_i : \prod_{i \in I} A_i \rightarrow \prod_{i \in I} B_i$$

والذي سوف ندعوه بجداء المورفيزمات $w_i : A_i \rightarrow B_i$ وذلك $\forall i \in I$.

مثال.

لتكن $\mathfrak{I}$ فئة، و $A \in ob(\mathfrak{I})$. لنفرض أن $I = \{1, 2\}$ وأن $A_i = A$ وذلك لأجل $i = 1, 2$ ، أي إن $A = A_1 = A_2$.

لنفرض أن الجداء للأسرة $(A_i)_{i \in I}$ موجود، ولنرمز له $A \times A$ ولنرمز للمورفيزمات الإسقاطية بالشكل: $pr_1 : A \times A \rightarrow A$, $pr_2 : A \times A \rightarrow A$. أيضاً توجد مورفيزمات $\Delta_A : A \rightarrow A \times A$, $S_A : A \times A \rightarrow A \times A$ لأجلها المخططات الآتية:

$$\begin{array}{ccc} A \times A & \xrightarrow{pr_2} & A \\ pr_1 \downarrow & \nwarrow \Delta_A & \uparrow I_A \\ A & \xleftarrow{I_A} & A \end{array} \quad \begin{array}{ccc} A \times A & \xrightarrow{pr_2} & A \\ pr_1 \uparrow & \nwarrow S_A & \uparrow pr_1 \\ A & \xleftarrow{pr_2} & A \times A \end{array}$$

تبديلية. نسمي المورفيزم Δ_A بالاحتواء القطري، والمورفيزم S_A نظير القطري.

تعريف.

لتكن $\mathfrak{I}$ فئة. نقول عن الفئة $\mathfrak{I}$ إنها فئة جداءات منتهية إذا كانت كل أسرة منتهية من أشياء الفئة $\mathfrak{I}$ تملك جداء واحداً على الأقل.
ونقول عن الفئة $\mathfrak{I}$ إنها فئة جداءات إذا كانت كل أسرة من أشياء الفئة $\mathfrak{I}$ تملك جداء واحداً على الأقل.

ملاحظة.

كل فئة من الفئات الآتية: فئة المجموعات - فئة الزمر - فئة الزمر التبادلية - فئة الفضاءات الطوبولوجية - فئة المودولات فوق الحلقات الواحدية، هي فئات جداءات.
توجد فئات ليست فئة جداءات منتهية، مثال على ذلك فئة الزمر التبادلية المرتبة.

مبرهنة ٤-١-٤.

لتكن $\mathfrak{I}$ فئة و $(A_i)_{i \in I}$ أسرة من أشياء الفئة $\mathfrak{I}$. لنفرض أن الثنائية $(A, u_i : A \rightarrow A_i)_{i \in I}$ حيث $A \in ob(\mathfrak{I})$ و $u_i : A \rightarrow A_i \in \mathfrak{I}(A, A_i)$ أيأ كان $i \in I$ هي جداء للأسرة $(A_i)_{i \in I}$.
لنفرض أنه لأجل كل $i \in I$ ، فإن الثنائية $(A_i, v_{ij} : A_i \rightarrow B_{ij})_{j \in J_i}$ هي جداء لأسرة من الأشياء هي $(B_{ij})_{j \in J_i}$ حيث $B_{ij} \in ob(\mathfrak{I})$ و $v_{ij} : A_i \rightarrow B_{ij} \in \mathfrak{I}(A_i, B_{ij})$ وذلك أيأ كان $i \in I, j \in J_i$.
عندئذ الثنائية $(A, v_{ij} \cdot u_i : A \rightarrow B_{ij})_{j \in J_i, i \in I}$ تشكل جداء للأسرة $(B_{ij})_{j \in J_i, i \in I}$.

البرهان.

ليكن $D \in ob(\mathfrak{I})$ ، وليكن $w_{ij} : D \rightarrow B_{ij} \in \mathfrak{I}(D, B_{ij})$ وذلك لأجل كل $i \in I, j \in J_i$.
بما أن الثنائية $(A_i, v_{ij})_{j \in J_i}$ جداء للأسرة $(B_{ij})_{j \in J_i}$ ، عندئذ أيأ كان $i \in I$ يوجد مورفيزم وحيد $t_i : D \rightarrow A_i \in \mathfrak{I}(D, A_i)$ لأجله المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{t_i} & A_i \\ & \searrow w_{ij} & \downarrow v_{ij} \\ & & B_{ij} \end{array}$$

تبديلي، أي إن: $v_{ij} \cdot t_i = w_{ij}$ وذلك لأجل كل $j \in J_i$.

أيضاً بما أن الثنائية $(A, u_i)_{i \in I}$ جداء للأسرة $(A_i)_{i \in I}$ فإنه يوجد مورفيزم وحيد $\alpha: D \rightarrow A \in \mathfrak{Z}(D, A)$ لأجله المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{\alpha} & A \\ & \searrow & \downarrow u_i \\ & & A_i \\ & t_i & \nearrow \end{array}$$

تبديلي، أي إن: $u_i \cdot \alpha = t_i$ وذلك أياً كان $i \in I$. وهكذا نجد أن:

$$w_{ij} = v_{ij} \cdot t_i = v_{ij} \cdot (u_i \cdot \alpha) = (v_{ij} \cdot u_i) \cdot \alpha \quad \forall i \in I, j \in J_i$$

وهذا يبين أن المورفيزم $\alpha: D \rightarrow A$ يجعل المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{\alpha} & A \\ & \searrow & \downarrow v_{ij} \cdot u_i \\ & & B_{ij} \\ & w_{ij} & \nearrow \end{array}$$

تبدلياً. لنبرهن على أن المورفيزم $\alpha: D \rightarrow A$ هو المورفيزم الوحيد الذي لأجله:

$$w_{ij} = (v_{ij} \cdot u_i) \cdot \alpha \quad \forall i \in I, j \in J_i$$

لنفرض أنه يوجد مورفيزم آخر $\beta: D \rightarrow A \in \mathfrak{Z}(D, A)$ لأجله:

$$w_{ij} = (v_{ij} \cdot u_i) \cdot \beta \quad \forall i \in I, j \in J_i$$

عندئذ يكون $w_{ij} = v_{ij} \cdot (u_i \cdot \beta)$ وهذا يبين أنه أياً كان $i \in I$ ، فإن

$u_i \cdot \beta: D \rightarrow A_i \in \mathfrak{Z}(D, A_i)$ لأجله المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{u_i \cdot \beta} & A_i \\ & \searrow & \downarrow v_{ij} \\ & & B_{ij} \\ & w_{ij} & \nearrow \end{array}$$

تبديلي، ولكون المورفيزم $t_i: D \rightarrow A_i$ وحيداً نجد أن $t_i = u_i \cdot \beta$ $\forall i \in I$. إن المساواة

الأخيرة تبين لنا أن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{\beta} & A \\ & \searrow & \downarrow u_i \\ & & A_i \\ & t_i & \nearrow \end{array}$$

تبديلي، ولكون المورفيزم $\alpha: D \rightarrow A$ وحيداً نجد أن $\alpha = \beta$. مما سبق نجد أن

الثنائية $(A, v_{ij} \cdot u_i: A \rightarrow B_{ij})_{j \in J_i, i \in I}$ تشكل جداء للأسرة $(B_{ij})_{j \in J_i, i \in I}$.

تمهيدية ٤-١-٥.

لتكن $\mathfrak{S}$ فئة، و $(A_i)_{i \in I}$ أسرة من أشياء الفئة $\mathfrak{S}$. إذا كان $A \in ob(\mathfrak{S})$ جداء للأسرة

$(A_i)_{i \in I}$ وكانت $\pi_i : A \rightarrow A_i$ المورفيزمات الإسقاطية وذلك $\forall i \in I$ ، عندئذ:

١ - لأجل كل $i \in I$ يوجد مورفيزم $\alpha_i : A_i \rightarrow A$ للفئة $\mathfrak{S}$ يحقق $\pi_i \cdot \alpha_i = I_{A_i}$.

٢ - لأجل كل $i \in I$ المورفيزم الإسقاطي π_i إبيومورفيزم.

البرهان.

لنفرض أن $\pi_i : A \rightarrow A_i$ المورفيزمات الإسقاطية وذلك $\forall i \in I$. بما أن A هو جداء للأسرة $(A_i)_{i \in I}$ فإنه حسب التمهيدية (٤-١-١) ولأجل كل $X \in ob(\mathfrak{S})$ يكون التطبيق:

$$\Gamma : \mathfrak{S}(X, A) \rightarrow \prod_{i \in I} \mathfrak{S}(X, A_i)$$

المعرف بالشكل $\Gamma(w) = (\pi_i \cdot w)_{i \in I}$ وذلك أيأ كان $w \in \mathfrak{S}(X, A)$ ، نقابلاً.

من جهة أخرى، لما كان $\prod_{i \in I} \mathfrak{S}(X, A_i)$ هو الجداء الديكارتي للمجموعات $\mathfrak{S}(X, A_i)$ وذلك أيأ كان $i \in I$ ، فإنه لأجل كل $j \in I$ يوجد التطبيق الغامر:

$$\Gamma_j : \prod_{i \in I} \mathfrak{S}(X, A_i) \rightarrow \mathfrak{S}(X, A_j)$$

المعرف بالشكل الآتي: أيأ كان $(\lambda_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \mathfrak{S}(X, A_i)$ فإن:

$$\Gamma_j((\lambda_i)_{i \in I}) = \lambda_j \in \mathfrak{S}(X, A_j)$$

فإننا نحصل على التطبيق الغامر $\Gamma_j \cdot \Gamma : \mathfrak{S}(X, A) \rightarrow \mathfrak{S}(X, A_j)$.

ومنه لأجل $X = A_j$ ولما كان $I_{A_j} \in \mathfrak{S}(A_j, A_j)$ فإنه يوجد $\alpha_i \in \mathfrak{S}(A_i, A)$ بحيث

$$\Gamma_j \cdot \Gamma(\alpha_i) = I_{A_j}, \text{ وحسب تعريف } \Gamma \text{ نجد أن } \Gamma_j((\pi_i \cdot \alpha_i)_{i \in I}) = I_{A_j} \text{ وهكذا نجد أن}$$

$$\pi_i \cdot \alpha_i = I_{A_i} \text{ وذلك لأجل كل } i \in I.$$

٢ - ليكن $i \in I$ ، لأجل كل $X \in ob(\mathfrak{S})$ لتأخذ التطبيق: $\beta : \mathfrak{S}(A_i, X) \rightarrow \mathfrak{S}(A, X)$

المعرف بالشكل الآتي: $\beta(\zeta) = \zeta \cdot \pi_i$ وذلك أيأ كان $\zeta \in \mathfrak{S}(A_i, X)$.

ليكن $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathfrak{S}(A_i, X)$ بحيث $\beta(\zeta_1) = \beta(\zeta_2)$ فنجد أن $\zeta_1 \cdot \pi_i = \zeta_2 \cdot \pi_i$ وحسب

(١) فإنه يوجد مورفيزم $\alpha_i : A_i \rightarrow A$ للفئة $\mathfrak{S}$ يحقق $\pi_i \cdot \alpha_i = I_{A_i}$ وبالتالي يكون:

$$(\zeta_1 \cdot \pi_i) \cdot \alpha_i = (\zeta_2 \cdot \pi_i) \cdot \alpha_i$$

ومنه $\zeta_1 \cdot (\pi_i \cdot \alpha_i) = \zeta_2 \cdot (\pi_i \cdot \alpha_i)$ ، وبالتالي $\zeta_1 \cdot I_{\alpha_i} = \zeta_2 \cdot I_{\alpha_i}$ أي إن $\zeta_1 = \zeta_2$ وهذا
 يبين أن التطبيق β متبايناً، وبالتالي يكون المورفيزم π_i إبيومورفيزماً.



٤-٢. فئة الجداءات الطبقية.

في هذه الفقرة سوف نقوم ببناء فئة جديدة من خلال فئة معطاة سابقاً.

مبرهنة ٤-٢-١.

لتكن $\mathcal{T}$ فئة، وليكن $S \in ob(\mathcal{T})$. سنقوم بتشكيل فئة جديدة سنرمز لها $\mathcal{T}/S$ المولفة من:

- صف الأشياء. أشياء $\mathcal{T}/S$ هي جميع الأزواج الممكنة من الشكل (A, α) حيث $A \in ob(\mathcal{T})$ و $\alpha: A \rightarrow S \in \mathcal{T}(A, S)$.

- صف المورفيزمات. إن المورفيزمات في $\mathcal{T}/S$ من (A, α) إلى (B, β) حيث $(A, \alpha), (B, \beta) \in ob(\mathcal{T}/S)$ هي جميع المورفيزمات الممكنة $\gamma: A \rightarrow B \in Mor(\mathcal{T})$ في الفئة $\mathcal{T}$ التي لأجلها المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\gamma} & B \\ & \searrow \alpha & \downarrow \beta \\ & & S \end{array}$$

تبديلي، أي إن: $\beta \circ \gamma = \alpha$.

إن صفي الأشياء والمورفيزمات المعرفين أعلاه يشكلان فئة.
البرهان.

ليكن $A, B, D \in ob(\mathcal{T})$ عندئذ فإن $A' = (A, \alpha), B' = (B, \beta), D' = (D, \gamma) \in \mathcal{T}/S$ و $\alpha, \beta, \gamma \in Mor(\mathcal{T})$ لنبرهن على وجود تطبيق:

$$\mu': \mathcal{T}/S(A', B') \times \mathcal{T}/S(B', D') \rightarrow \mathcal{T}/S(A', D')$$

ليكن $(f, g) \in \mathcal{T}/S(A', B') \times \mathcal{T}/S(B', D')$ عندئذ:

- $f \in \mathcal{T}/S(A', B')$ أي إن $f: (A, \alpha) \rightarrow (B, \beta)$ وحسب التعريف فإن:

$$f: A \rightarrow B \in \mathcal{T}(A, B)$$

لأجله المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ & \searrow \alpha & \downarrow \beta \\ & & S \end{array}$$

تبديلي، أي إن: $\beta \cdot f = \alpha$.

- أيضاً $g \in \mathfrak{S}/S(B', D')$ ، أي إن $g : (B, \beta) \rightarrow (D, \gamma)$ وحسب التعريف فإن:

$$g : B \rightarrow D \in \mathfrak{S}(B, D)$$

لأجله المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{g} & D \\ & \searrow \beta & \downarrow \gamma \\ & & S \end{array}$$

تبديلي، أي إن: $\gamma \cdot g = \beta$.

ومنه نجد أن $g \cdot f : A \rightarrow D \in \mathfrak{S}(A, D)$ ، لأجله المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{g \cdot f} & D \\ & \searrow \alpha & \downarrow \gamma \\ & & S \end{array}$$

تبديلي، أي إن: $\gamma \cdot (g \cdot f) = \alpha$ ، وذلك لأن:

$$\gamma \cdot (g \cdot f) = (\gamma \cdot g) \cdot f = \beta \cdot f = \alpha$$

ومنه نجد أن $g \cdot f : A' \rightarrow D' \in \mathfrak{S}/S$ ، أي إن $g \cdot f : (A, \alpha) \rightarrow (D, \gamma)$

لنضع $\mu'(f, g) = g \cdot f$ فنجد بهذا الشكل أن μ' هو تطبيق.

واضح أن عملية تركيب المورفيزمات هذه تجميعية.

لنبرهن على وجود المورفيزم المطابق. ليكن $(A, \alpha) \in ob(\mathfrak{S}/S)$ عندئذ فإن $A \in ob(\mathfrak{S})$

ومنه يوجد $I_A : A \rightarrow A \in \mathfrak{S}(A, A)$.

لنضع $I_{(A, \alpha)} = I_A : (A, \alpha) \rightarrow (A, \alpha)$ فنجد أن $I_{(A, \alpha)} \in Mor(\mathfrak{S}/S)$ لأن المخطط

الآتي:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{I_A} & A \\ & \searrow \alpha & \downarrow \alpha \\ & & S \end{array}$$

تبديلي، أي إن: $\alpha \cdot I_A = \alpha$ ويحقق: أيأ كان $g : (A, \alpha) \rightarrow (B, \beta)$ حيث:

$$(A, \alpha), (B, \beta) \in ob(\mathfrak{S}/S)$$

فإن $g : A \rightarrow B \in \mathfrak{S}(A, B)$ لأجله المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varepsilon} & B \\ & \searrow \alpha & \downarrow \beta \\ & & S \end{array}$$

تبديلي، أي إن: $\beta \cdot g = \alpha$ ، ومنه فإن $g \cdot I_{(A,\alpha)} = g \cdot I_A = g$

كذلك الأمر، أي كان $f: (B, \beta) \rightarrow (A, \alpha) \in \text{Mor}(\mathfrak{T}/S)$ فإن $f: B \rightarrow A \in \mathfrak{T}(B, A)$ لأجله المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{f} & A \\ & \searrow \beta & \downarrow \alpha \\ & & S \end{array}$$

تبديلي، أي إن: $\alpha \cdot f = \beta$ ، ومنه فإن $I_{(A,\alpha)} \cdot f = I_A \cdot f = f$ وهذا يبين لنا أن $I_{(A,\alpha)}$ هو المورفيزم المطابق. مما سبق نجد أن $\mathfrak{T}/S$ فئة. نسمي الفئة $\mathfrak{T}/S$ فئة الجداءات الطبقية.

تعريف.

لتكن $\mathfrak{T}$ فئة و $S \in \text{ob}(\mathfrak{T})$. لنفرض أن $(A, \alpha), (B, \beta) \in \text{ob}(\mathfrak{T}/S)$. نسمي جداء الأشياء $(A, \alpha), (B, \beta)$ في الفئة $\mathfrak{T}/S$ بالجداء الطبقى المرتبط بالمخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} A & & \\ \downarrow \alpha & & \\ B & \xrightarrow{\beta} & S \end{array}$$

ونرمز له $(A \amalg_S B, p_A, p_B)$. ونسمي المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccccc} A \amalg B & \xrightarrow{p_A} & A & & \\ p_B \downarrow & & \downarrow \alpha & & \\ B & \xrightarrow{\beta} & S & & \end{array}$$

مربعاً ديكارتياً، حيث p_A, p_B هي المورفيزمات الإسقاطية.

تمهيدية ٤-٢-٢.

لتكن $\mathfrak{T}$ فئة، وليكن $S \in \text{ob}(\mathfrak{T})$. لنفرض أن $(A \amalg_S B, p_A, p_B)$ الجداء الطبقى المرتبط بالمخطط:

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ & \downarrow \alpha & \\ B & \xrightarrow{\beta} & S \end{array}$$

عندئذ إن $\alpha \cdot p_A = \beta \cdot p_B$

البرهان.

بما أن $(A, \alpha), (B, \beta) \in ob(\mathfrak{S}/S)$ ، فإنه توجد مورفيزمات $\lambda: A \rightarrow B$, $\mu: B \rightarrow A$ للفتة $\mathfrak{S}$ تحقق أن المخططات الآتية:

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\mu} & A \\ & \searrow \beta & \swarrow \alpha \\ & S & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} B & \xleftarrow{\lambda} & A \\ & \searrow \beta & \swarrow \alpha \\ & S & \end{array}$$

تبديلية، أي إن: $\beta \cdot \lambda = \alpha$, $\alpha \cdot \mu = \beta$. وحسب تعريف الجداء فإنه لأجل المورفيزمين $\lambda \cdot p_A$, $\mu \cdot p_B$ يوجد مورفيزم وحيد $I_{A \amalg B}$ لأجله المخططات الآتية:

$$\begin{array}{ccc} A \amalg_S B & \xleftarrow{I_{A \amalg B}} & A \amalg_S B \\ & \searrow \lambda \cdot p_A & \swarrow p_B \\ & B & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} A \amalg_S B & \xleftarrow{I_{A \amalg B}} & A \amalg_S B \\ & \searrow \mu \cdot p_B & \swarrow p_A \\ & A & \end{array}$$

تبديلية، أي إن: $p_A = \mu \cdot p_B$, $p_B = \lambda \cdot p_A$ ومنه نجد أن:

$$\alpha \cdot p_A = \alpha \cdot \mu \cdot p_B = \beta \cdot p_B$$

تمهيدية ٣-٢-٤.

لتكن $\mathfrak{S}$ فتة، وليكن $S \in ob(\mathfrak{S})$. لنفرض أن $(A \amalg_S B, p_A, p_B)$ الجداء الطبقي المرتبط بالمخطط:

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ & \downarrow \alpha & \\ B & \xrightarrow{\beta} & S \end{array}$$

عندئذ:

- ١ - إذا كان المورفيزم α مونومورفيزماً، عندئذ يكون المورفيزم p_B مونومورفيزماً أيضاً.
- ٢ - إذا كان المورفيزم β مونومورفيزماً، عندئذ يكون المورفيزم p_A مونومورفيزماً أيضاً.

البرهان.

١ - لنفرض أن المورفيزم $\alpha: A \rightarrow S$ مونومورفيزماً، عندئذ أياً كان $X \in ob(\mathfrak{S})$ ، فإن التطبيق $f: \mathfrak{S}(X, A) \rightarrow \mathfrak{S}(X, S)$ المعرف بالشكل الآتي: أياً كان $u \in \mathfrak{S}(X, A)$ ، فإن $f(u) = \alpha \cdot u$ يكون متبايناً. لنبرهن على أنه أياً كان $X \in ob(\mathfrak{S})$ ، فإن التطبيق:

$$g: \mathfrak{S}(X, A \amalg_S B) \rightarrow \mathfrak{S}(X, B)$$

المعرف بالشكل الآتي: أياً كان $v \in \mathfrak{S}(X, A \amalg_S B)$ ، فإن $g(v) = p_B \cdot v$ متباين.

ليكن $v_1, v_2 \in \mathfrak{S}(X, A \amalg_S B)$ بحيث $g(v_1) = g(v_2)$ عندئذ يكون $p_B \cdot v_1 = p_B \cdot v_2$ وحسب التمهيدية (٢-٢-٤) فإن $\alpha \cdot p_A = \beta \cdot p_B$ ومنه نجد أن:

$$\begin{aligned} (\alpha \cdot p_A) \cdot v_1 &= (\beta \cdot p_B) \cdot v_1 = \beta \cdot (p_B \cdot v_1) = \beta \cdot (p_B \cdot v_2) = (\beta \cdot p_B) \cdot v_2 = \\ &= (\alpha \cdot p_A) \cdot v_2 \end{aligned}$$

وبما أن $p_A \cdot v_1, p_A \cdot v_2 \in \mathfrak{S}(X, A)$ نجد أن:

$$f(p_A \cdot v_1) = \alpha \cdot (p_A \cdot v_1) = \alpha \cdot (p_A \cdot v_2) = f(p_A \cdot v_2)$$

وبما أن التطبيق f متباين نجد أن $p_A \cdot v_1 = p_A \cdot v_2$ أصبح لدينا:

$$p_A \cdot v_1 = p_A \cdot v_2, \quad p_B \cdot v_1 = p_B \cdot v_2$$

وبما أن $A \amalg_S B$ هو جداء الأسرة $(A, \alpha), (B, \beta)$ فإنه حسب التمهيدية (١-١-٤) لأجل كل $X \in ob(\mathfrak{S})$ يكون التطبيق $\Gamma: \mathfrak{S}(X, A \amalg_S B) \rightarrow \mathfrak{S}(X, A) \times \mathfrak{S}(X, B)$ المعرف بالشكل الآتي: أياً كان $\lambda \in \mathfrak{S}(X, A \amalg_S B)$ فإن $\Gamma(\lambda) = (p_A \cdot \lambda, p_B \cdot \lambda)$ متباين وبما أن

$$\Gamma(v_1) = (p_A \cdot v_1, p_B \cdot v_1) = (p_A \cdot v_2, p_B \cdot v_2) = \Gamma(v_2)$$

نجد أن $v_1 = v_2$ وهذا يبين أن التطبيق g متباين، وبالتالي يكون المورفيزم p_B مونومورفيزماً.

٢ - يبرهن بطريقة مشابهة.

ملاحظة.

ضمن شروط التمهيدية (٣-٢-٤)، إذا كان المورفيزم α إبيومورفيزماً، فليس من الضروري أن يكون المورفيزم p_B إبيومورفيزماً أيضاً.

مبرهنة ٤-٢-٤.

لتكن $\mathfrak{S}$ فئة، وليكن $S \in ob(\mathfrak{S})$. لنفرض أن $\mathfrak{S}/S$ فئة الجداءات الطبقية. لنأخذ المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\delta} & A \\ \gamma \downarrow & & \downarrow \alpha \\ B & \xrightarrow{\beta} & S \end{array} \quad (*)$$

من أشياء ومورفيزمات الفئة $\mathfrak{S}/S$. الشروط الآتية متكافئة:

- ١ - المخطط $(*)$ هو مربع ديكارتي.
 - ٢ - المخطط $(*)$ تبديلياً وبحقق الشرط الآتي: أيأ كان $U \in ob(\mathfrak{S})$ ولأجل أي مورفيزمين $\mu: U \rightarrow A$, $\nu: U \rightarrow B$ يوجد مورفيزم وحيد $\lambda: U \rightarrow P$ يحقق $\mu = \delta \cdot \lambda$ و $\nu = \gamma \cdot \lambda$.
- البرهان.

(1) $\Leftrightarrow$ (2). لنفرض أن المخطط $(*)$ مربعاً ديكارتيًا، عندئذ حسب التعريف يكون $P = A \prod_S B$ وأن $\delta = p_A$, $\gamma = p_B$ وحسب التمهيدية (٤-٢-٢) يكون المخطط $(*)$ تبديلياً. من جهة أخرى، بما أن P هو جداء أسرة الأشياء (A, B) فإنه لأجل كل $U \in ob(\mathfrak{S})$ يكون التطبيق:

$$\Gamma: \mathfrak{S}(U, P) \rightarrow \mathfrak{S}(U, A) \times \mathfrak{S}(U, B)$$

المعرف بالشكل الآتي: أيأ كان $w \in \mathfrak{S}(U, P)$ فإن $\Gamma(w) = (\delta \cdot w, \gamma \cdot w)$ ، تقابلاً. ليكن $(\mu, \nu) \in \mathfrak{S}(U, A) \times \mathfrak{S}(U, B)$ عندئذ مورفيزمات للفئة $\mathfrak{S}$ ، ومنه يوجد مورفيزم وحيد $\lambda \in \mathfrak{S}(U, P)$ للفئة $\mathfrak{S}$ يحقق $\Gamma(\lambda) = (\mu, \nu)$ وبما أن $\mu = \delta \cdot \lambda$ و $\nu = \gamma \cdot \lambda$ نجد أن $\Gamma(\lambda) = (\delta \cdot \lambda, \gamma \cdot \lambda)$.

(2) $\Leftrightarrow$ (1). لنفرض أن الشرط (٢) محقق.

ليكن $U \in ob(\mathfrak{S})$ وأن $\mu: U \rightarrow A$, $\nu: U \rightarrow B$ وحسب الفرض يوجد مورفيزم وحيد $\lambda: U \rightarrow P$ يحقق $\mu = \delta \cdot \lambda$ و $\nu = \gamma \cdot \lambda$ وهذا يبين أن المخططات الآتية:

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\lambda} & P \\ & \searrow \mu & \swarrow \delta \\ & A & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\lambda} & P \\ & \searrow \nu & \swarrow \gamma \\ & B & \end{array}$$

تبديلية، أي إن $P = A \prod B$. وبما أن $\alpha \cdot \delta = \beta \cdot \gamma$ نجد أن P هو الجداء الطبقي
للأشياء $(A, \alpha), (B, \beta)$ المرتبط بالمخطط:

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ & \downarrow \alpha & \\ B & \xrightarrow{\beta} & S \end{array}$$

أي إن $P = A \prod_S B$ ، ومنه فإن المخطط $(*)$ مربعاً ديكارتياً.

٤-٣. المجاميع.

تعريف.

لتكن $\mathfrak{S}$ فئة، و I مجموعة من الأدلة. لنفرض أن أسرة من أشياء الفئة $\mathfrak{S}$ ولتكن $(u_i : A_i \rightarrow A)_{i \in I}$ أسرة من مورفيزمات الفئة $\mathfrak{S}$ حيث $A \in ob(\mathfrak{S})$. نقول إن الثنائية (A, u_i) تشكل مجموع لأسرة الأشياء $(A_i)_{i \in I}$ إذا تحقق الشرط: لأجل أي $B \in ob(\mathfrak{S})$ ولأجل أي أسرة $(v_i : A_i \rightarrow B)_{i \in I}$ يوجد مورفيزم وحيد $v : A \rightarrow B$ يجعل المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} B & \xleftarrow{v} & A \\ & \nwarrow v_i & \uparrow u_i \\ & & A_i \end{array}$$

تبدلياً وذلك أي أن $i \in I$ ، أي إن $v \cdot u_i = v_i$ $\forall i \in I$.

تمهيدية ٤-٣-١.

لتكن $\mathfrak{S}$ فئة، و $(A_i)_{i \in I}$ أسرة من أشياء الفئة $\mathfrak{S}$. الشروط الآتية متكافئة:

١ - الأسرة $(A_i)_{i \in I}$ تملك مجموعاً هو الثنائية (A, u_i) حيث $(u_i : A_i \rightarrow A)_{i \in I}$ و $A \in ob(\mathfrak{S})$.

٢ - أيأ كان $X \in ob(\mathfrak{S})$ فإن التطبيق $\Gamma : \mathfrak{S}(A, X) \rightarrow \prod_{i \in I} \mathfrak{S}(A_i, X)$ المعروف بالشكل أيأ كان $w \in \mathfrak{S}(X, A)$ فإن $\Gamma(w) = (w \cdot u_i)_{i \in I}$ متباين وغامر. البرهان.

(١) $\Leftrightarrow$ (٢). لنبرهن أولاً على أن Γ تطبيق. ليكن $\lambda, \mu \in \mathfrak{S}(A, X)$ بحيث $\lambda = \mu$ عندئذ فإن $\lambda \cdot u_i = \mu \cdot u_i$ وذلك $\forall i \in I$ ، ومنه:

$$\Gamma(\lambda) = (\lambda \cdot u_i)_{i \in I} = (\mu \cdot u_i)_{i \in I} = \Gamma(\mu)$$

لنعرف العلاقة:

$$\Gamma^{-1} : \prod_{i \in I} \mathfrak{S}(A_i, X) \rightarrow \mathfrak{S}(A, X)$$

بالشكل الآتي: ليكن $(v_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \mathfrak{S}(A_i, X)$. بما أن الأسرة $(A_i)_{i \in I}$ تملك مجموع هو الثنائية (A, u_i) ، فإنه لأجل الأسرة $(v_i)_{i \in I}$ يوجد مورفيزم وحيد $v \in \mathfrak{S}(A, X)$ بحيث

$v \cdot u_i = v_i$ وذلك $\forall i \in I$. لنضع $\Gamma^{-1}((v_i)_{i \in I}) = v$. لنبرهن على أن Γ^{-1} تطبيق.
ليكن $(v_i)_{i \in I} = (w_i)_{i \in I}$ بحيث $(v_i)_{i \in I}, (w_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \mathcal{S}(A_i, X)$ عندئذ يوجد $v, w \in \mathcal{S}(A, X)$ بحيث $v \cdot u_i = v_i$ و $w \cdot u_i = w_i$ وذلك $\forall i \in I$ ومنه نجد أن:

$$w \cdot u_i = w_i = v_i = v \cdot u_i$$

وهذا يبين لنا أن $v = w$ ؛ وبالتالي $\Gamma^{-1}((v_i)_{i \in I}) = v = w = \Gamma^{-1}((w_i)_{i \in I})$.
من جهة أخرى، أيأ كان $(v_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \mathcal{S}(A_i, X)$ ، فإن:

$$\Gamma(\Gamma^{-1}((v_i)_{i \in I})) = \Gamma(v) = (v \cdot u_i)_{i \in I} = (v_i)_{i \in I}$$

وهذا يبين أن $\Gamma \circ \Gamma^{-1} = I_{\prod_{i \in I} \mathcal{S}(A_i, X)}$. كما أنه أيأ كان $v \in \mathcal{S}(A, X)$ ، فإن:

$$\Gamma^{-1}(\Gamma(v)) = \Gamma^{-1}((v \cdot u_i)_{i \in I}) = v$$

أي إن $\Gamma^{-1} \circ \Gamma = I_{\mathcal{S}(A, X)}$. مما سبق نجد أن التطبيق Γ متباين وغامر.

(٢) $\Leftarrow$ (١). لنفرض أن التطبيق Γ متباين وغامر. ليكن $B \in ob(\mathcal{S})$ و $(v_i : A_i \rightarrow B)_{i \in I}$ أسرة من مورفيزمات الفئة $\mathcal{S}$. عندئذ $(v_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \mathcal{S}(A_i, B)$ ، بما أن التطبيق:

$$\Gamma : \mathcal{S}(A, B) \rightarrow \prod_{i \in I} \mathcal{S}(A_i, B)$$

غامر يوجد $v \in \mathcal{S}(A, B)$ بحيث $\Gamma(v) = (v_i)_{i \in I}$.

من جهة أخرى، بما أن $\Gamma(v) = (v \cdot u_i)_{i \in I}$ نجد أن $(v_i)_{i \in I} = (u_i \cdot v)_{i \in I}$ ، أي إن $v_i = u_i \cdot v$ وذلك $\forall i \in I$. لنبرهن على أن v وحيد.

ليكن $v, w \in \mathcal{S}(A, B)$ بحيث $v_i = w \cdot u_i$ و $v_i = w \cdot u_i$ ، فنجد أن:

$$\Gamma(v) = (v_i)_{i \in I} = (v \cdot u_i)_{i \in I} = (w \cdot u_i)_{i \in I} = \Gamma(w)$$

وبما أن التطبيق Γ متباين نجد أن $v = w$. مما سبق نجد أن الأسرة $(A_i)_{i \in I}$ تملك مجموعاً هو الثنائية (A, u_i) .

تمهيدية ٢-٣-٤.

لتكن $\mathcal{S}$ فئة، و $(A_i)_{i \in I}$ أسرة من أشياء الفئة $\mathcal{S}$. لنفرض أن الثنائية (A, u_i) حيث $A \in ob(\mathcal{S})$ و $u_i : A_i \rightarrow A$ هي مجموع للأسرة $(A_i)_{i \in I}$. ولتكن أيضاً الثنائية (A', u'_i) حيث $A' \in ob(\mathcal{S})$ و $u'_i : A_i \rightarrow A'$ هي مجموع آخر للأسرة $(A_i)_{i \in I}$. عندئذ

يوجد إيزومورفيزم $\alpha : A \rightarrow A'$ لأجله المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} A' & \xleftarrow{\alpha} & A \\ & \nwarrow u'_i & \uparrow u_i \\ & & A_i \end{array}$$

تبديلي وذلك $\forall i \in I$. أي إن $\alpha \cdot u_i = u'_i$.

البرهان.

نفرض أن الثنائية (A, u_i) هي مجموع للأسرة $(A_i)_{i \in I}$. عندئذ لأجل الأسرة

$(u'_i : A_i \rightarrow A')_{i \in I}$ يوجد مورفيزم وحيد $\alpha : A' \rightarrow A$ لأجله المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} A' & \xleftarrow{\alpha} & A \\ & \nwarrow u'_i & \uparrow u_i \\ & & A_i \end{array}$$

تبديلي وذلك $\forall i \in I$ ، أي إن $\alpha \cdot u_i = u'_i$.

أيضاً نفرض أن الثنائية (A', u'_i) هي مجموع للأسرة $(A_i)_{i \in I}$. عندئذ لأجل الأسرة

$(u_i : A_i \rightarrow A)_{i \in I}$ يوجد مورفيزم وحيد $\beta : A' \rightarrow A$ لأجله المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} A & \xleftarrow{\beta} & A' \\ & \nwarrow u_i & \uparrow u'_i \\ & & A_i \end{array}$$

تبديلي وذلك $\forall i \in I$ ، أي إن $\beta \cdot u'_i = u_i$. ومنه نجد أن أيأ كان $i \in I$ ، فإن:

$$u'_i = \alpha \cdot u_i = \alpha \cdot (\beta \cdot u'_i) = (\alpha \cdot \beta) \cdot u'_i$$

$$u_i = \beta \cdot u'_i = \beta \cdot (\alpha \cdot u_i) = (\beta \cdot \alpha) \cdot u_i$$

وحسب التمييزية (٤-٣-١) ولأجل $X = A$ ، فإن التطبيق:

$$\Gamma : \mathfrak{S}(A, A) \rightarrow \prod_{i \in I} \mathfrak{S}(A_i, A)$$

المعرف بالشكل أيأ كان $w \in \mathfrak{S}(A, A)$ ، فإن $\Gamma(w) = (w \cdot u_i)_{i \in I}$ متباين وغامر.

بما أن $I_A \in \mathfrak{S}(A, A)$ نجد أن:

$$\Gamma(I_A) = (I_A \cdot u_i)_{i \in I} = (u_i)_{i \in I} = ((\beta \cdot \alpha) \cdot u_i)_{i \in I} = \Gamma(\beta \cdot \alpha)$$

وبما أن Γ متباين نجد أن $\beta \cdot \alpha = I_A$.

أيضاً من أجل $X = A'$ ، فإن التطبيق $\Gamma : \mathfrak{S}(A', A') \rightarrow \prod_{i \in I} \mathfrak{S}(A_i, A')$ المعرف

بالشكل الآتي: أياً كان $w \in \mathfrak{S}(A', A')$ فإن $\Gamma(w) = (w \cdot u'_i)_{i \in I}$ متباين وغامر .

بما أن $I_{A'} \in \mathfrak{S}(A', A')$ ، نجد أن:

$$\Gamma(I_{A'}) = (I_{A'} \cdot u'_i)_{i \in I} = (u'_i)_{i \in I} = ((\alpha \cdot \beta) \cdot u'_i)_{i \in I} = \Gamma(\alpha \cdot \beta)$$

وبما أن Γ متباين نجد أن $\alpha \cdot \beta = I_{A'}$. مما سبق نجد أن $\alpha : A' \rightarrow A$ إيزومورفيزم .

ملاحظة.

لتكن $\mathfrak{S}$ فئة و $(A_i)_{i \in I}$ أسرة من أشياء الفئة $\mathfrak{S}$. إذا كانت هذه الأسرة تملك مجموعاً سوف نرمز لهذا المجموع بالشكل $\coprod_{i \in I} A_i$. لابد من الإشارة هنا إلى أن $\coprod_{i \in I} A_i$ ليس هو فقط أحد أشياء الفئة $\mathfrak{S}$ ، وإنما يتضمن وجود المورفيزمات $u_i : A_i \rightarrow \coprod_{i \in I} A_i$ التي سوف ندعوها مورفيزمات الاحتواء .

تمهيدية ٤-٣-٣ .

لتكن $\mathfrak{S}$ فئة، و $(A_i)_{i \in I}$ ، $(B_i)_{i \in I}$ أسرتين من أشياء الفئة $\mathfrak{S}$. إذا كانت هاتان الأسرتان تملكان مجاميع $\coprod_{i \in I} A_i$ ، $\coprod_{i \in I} B_i$ على الترتيب، عندئذ لأجل أي أسرة $(w_i : B_i \rightarrow A_i)_{i \in I}$ من مورفيزمات الفئة $\mathfrak{S}$ يوجد مورفيزم وحيد $w : \coprod_{i \in I} B_i \rightarrow \coprod_{i \in I} A_i$ يجعل المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{i \in I} A_i & \xleftarrow{w} & \coprod_{i \in I} B_i \\ u_i \uparrow & & \uparrow v_i \\ A_i & \xleftarrow{w_i} & B_i \end{array}$$

تبدلياً أي إن: $u_i \cdot w_i = w \cdot v_i$ وذلك $\forall i \in I$.

البرهان.

بما أن الأسرة $(B_i)_{i \in I}$ تملك مجموعاً هو $\coprod_{i \in I} B_i$ فإنه توجد مورفيزمات $v_i : B_i \rightarrow \coprod_{i \in I} B_i$ وذلك $\forall i \in I$. من جهة أخرى، بما أن الأسرة $(A_i)_{i \in I}$ تملك مجموعاً $\coprod_{i \in I} A_i$ فإنه توجد مورفيزمات $u_i : A_i \rightarrow \coprod_{i \in I} A_i$ وذلك $\forall i \in I$. لناخذ أسرة المورفيزمات $(u_i \cdot w_i : B_i \rightarrow \coprod_{i \in I} A_i)_{i \in I}$ عندئذ حسب التعريف يوجد مورفيزم وحيد $w : \coprod_{i \in I} B_i \rightarrow \coprod_{i \in I} A_i$ يجعل المخطط المذكور أعلاه تبدلياً، أي إن $u_i \cdot w_i = w \cdot v_i$ وذلك $\forall i \in I$.

ملاحظة.

سوف نرمز للمورفيزم $w: \coprod_{i \in I} B_i \rightarrow \coprod_{i \in I} A_i$ بالشكل:

$$\coprod_{i \in I} w_i: \coprod_{i \in I} B_i \rightarrow \coprod_{i \in I} A_i$$

والذي سوف ندعوه بجداء المورفيزمات $w_i: B_i \rightarrow A_i$ وذلك $\forall i \in I$.

تعريف.

لتكن $\mathfrak{I}$ فئة. نقول عن الفئة $\mathfrak{I}$ إنها فئة مجاميع منتهية إذا كانت كل أسرة منتهية من أشياء الفئة $\mathfrak{I}$ تملك مجموعاً واحداً على الأقل. ونقول عن الفئة $\mathfrak{I}$ إنها فئة مجاميع إذا كانت كل أسرة من أشياء الفئة $\mathfrak{I}$ تملك مجموعاً واحداً على الأقل.

ملاحظة.

كل فئة من الفئات الآتية: فئة المجموعات - فئة الزمر التبادلية - فئة الفضاءات الطوبولوجية، هي فئات مجاميع. توجد فئات ليست فئة مجاميع منتهية.

مبرهنة ٤-٣-٤.

لتكن $\mathfrak{I}$ فئة، و I مجموعة من الأدلة. لتكن $(A_i)_{i \in I}$ أسرة من أشياء الفئة $\mathfrak{I}$ ولنفرض أن الثنائية $(A, u_i: A_i \rightarrow A)_{i \in I}$ حيث $A \in ob(\mathfrak{I})$ و $u_i \in \mathfrak{I}(A_i, A)$ أيأ كان $i \in I$ ، مجموع للأسرة $(A_i)_{i \in I}$.

لنفرض أنه لأجل كل $i \in I$ فإن الثنائية $(A_i, v_{ij}: B_{ij} \rightarrow A_i)_{j \in J_i}$ هي مجموع لأسرة من الأشياء $(B_{ij})_{j \in J_i}$ للفئة $\mathfrak{I}$ ، حيث $v_{ij} \in \mathfrak{I}(A_i, B_{ij})$ وذلك أيأ كان $i \in I, j \in J_i$. عندئذ الثنائية $(A, u_i \cdot v_{ij}: B_{ij} \rightarrow A)_{j \in J_i, i \in I}$ تشكل مجموعاً للأسرة $(B_{ij})_{j \in J_i, i \in I}$. البرهان.

ليكن $D \in ob(\mathfrak{I})$ ، وليكن $w_{ij}: B_{ij} \rightarrow D \in \mathfrak{I}(B_{ij}, D)$ وذلك لأجل كل $i \in I, j \in J_i$ ، مورفيزمات للفئة $\mathfrak{I}$. بما أنه لأجل كل $i \in I$ ، الثنائية $(A_i, v_{ij})_{j \in J_i}$ هي مجموع للأسرة $(B_{ij})_{j \in J_i}$ ، فإنه يوجد مورفيزم وحيد $t_i: A_i \rightarrow D \in \mathfrak{I}(D, A_i)$ لأجله المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc}
 D & \xleftarrow{t_i} & A_i \\
 & \nwarrow & \uparrow v_{ij} \\
 & w_{ij} & B_{ij}
 \end{array}$$

تبديلي، أي إن: $t_i \cdot v_{ij} = w_{ij}$ وذلك لأجل كل $j \in J_i$.

أيضاً بما أن الثنائية $(A, u_i)_{i \in I}$ هي مجموع للأسرة $(A_i)_{i \in I}$ فإنه يوجد مورفيزم وحيد $\alpha: A \rightarrow D \in \mathfrak{Z}(A, D)$ لأجله المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc}
 D & \xleftarrow{\alpha} & A \\
 & \nwarrow & \uparrow u_i \\
 & t_i & A_i
 \end{array}$$

تبديلي، أي إن: $\alpha \cdot u_i = t_i$ وذلك أياً كان $i \in I$. وهكذا نجد أن:

$$w_{ij} = t_i \cdot v_{ij} = (\alpha \cdot u_i) \cdot v_{ij} = \alpha \cdot (u_i \cdot v_{ij}) \quad \forall i \in I, j \in J_i$$

وهذا يبين أن المورفيزم $\alpha: A \rightarrow D$ يجعل المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc}
 D & \xleftarrow{\alpha} & A \\
 & \nwarrow & \uparrow u_i \cdot v_{ij} \\
 & w_{ij} & B_{ij}
 \end{array}$$

تبديلي. لنبرهن على أن المورفيزم $\alpha: A \rightarrow D$ هو المورفيزم الوحيد الذي لأجله:

$$w_{ij} = \alpha \cdot (u_i \cdot v_{ij}) \quad \forall i \in I, j \in J_i$$

لنفرض أنه يوجد مورفيزم آخر $\beta: A \rightarrow D \in \mathfrak{Z}(A, D)$ لأجله:

$$w_{ij} = \beta \cdot (u_i \cdot v_{ij}) \quad \forall i \in I, j \in J_i$$

عندئذ يكون $w_{ij} = (\beta \cdot u_i) \cdot v_{ij} \quad \forall i \in I, j \in J_i$ وهذا يبين أنه أياً كان $i \in I$ ، فإن

$\beta \cdot u_i: A_i \rightarrow D \in \mathfrak{Z}(A_i, D)$ لأجله المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc}
 D & \xleftarrow{\beta \cdot u_i} & A_i \\
 & \nwarrow & \uparrow v_{ij} \\
 & w_{ij} & B_{ij}
 \end{array}$$

تبديلي، ولما كان المورفيزم $t_i: A_i \rightarrow D$ وحيداً لأجله المخطط السابق تبديلي، نجد أنه

$$t_i = \beta \cdot u_i \quad \forall i \in I$$

إن المساواة الأخيرة تبين لنا أن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} D & \xleftarrow{\beta} & A \\ & \nwarrow \iota_i & \uparrow u_i \\ & A_i & \end{array}$$

تبديلي لأجل كل $i \in I$ ، ولما كان المورفيزم $\alpha : A \rightarrow D$ وحيداً لأجله المخطط السابق تبديلي نجد أن $\alpha = \beta$. مما سبق نجد أن الثنائية $(A, u_i \cdot v_{ij} : A \rightarrow B_{ij})_{j \in J_i, i \in I}$ تشكل مجموعاً للأسرة $(B_{ij})_{j \in J_i, i \in I}$.

تمهيدية ٥-٣-٤.

لتكن $\mathfrak{S}$ فئة، و $(A_i)_{i \in I}$ أسرة من أشياء الفئة $\mathfrak{S}$. إذا كان $A \in ob(\mathfrak{S})$ مجموعاً للأسرة $(A_i)_{i \in I}$ وكانت $\tau_i : A_i \rightarrow A$ مورفيزمات الاحتواء وذلك $\forall i \in I$ ، عندئذ:

- ١ - لأجل كل $i \in I$ يوجد مورفيزم $\alpha_i : A \rightarrow A_i$ يحقق $\alpha_i \cdot \tau_i = I_{A_i}$.
- ٢ - لأجل كل $i \in I$ مورفيزم الاحتواء τ_i مونومورفيزماً.

البرهان.

نفرض أن $\tau_i : A_i \rightarrow A$ مورفيزمات الاحتواء وذلك $\forall i \in I$. بما أن A هو مجموع للأسرة $(A_i)_{i \in I}$ ، فإنه حسب التمهيدية (٤-٣-١) ولأجل كل $X \in ob(\mathfrak{S})$ يكون التطبيق $\Gamma : \mathfrak{S}(A, X) \rightarrow \prod_{i \in I} \mathfrak{S}(A_i, X)$ المعرف بالشكل $\Gamma(w) = (w \cdot \tau_i)_{i \in I}$ وذلك أيضاً كان $w \in \mathfrak{S}(A, X)$ ، تقابلاً.

من جهة أخرى، لما كان $\prod_{i \in I} \mathfrak{S}(A_i, X)$ هو الجداء الديكارتي للمجموعات $\mathfrak{S}(A_i, X)$ وذلك أيضاً كان $i \in I$ ، فإنه لأجل كل $j \in I$ يوجد التطبيق الغامر:

$$\Gamma_j : \prod_{i \in I} \mathfrak{S}(A_i, X) \rightarrow \mathfrak{S}(A_j, X)$$

المعرف بالشكل الآتي: أياً كان $(\mu_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \mathfrak{S}(A_i, X)$ فإن:

$$\Gamma_j((\mu_i)_{i \in I}) = \mu_j \in \mathfrak{S}(A_j, X)$$

فإننا نحصل على التطبيق الغامر $\Gamma_j \cdot \Gamma : \mathfrak{S}(A, X) \rightarrow \mathfrak{S}(A_j, X)$.

ومنه لأجل $X = A_i$ ولما كان $I_{A_i} \in \mathfrak{S}(A_i, A_i)$ فإنه يوجد $\alpha_i \in \mathfrak{S}(A, A_i)$ بحيث $\Gamma_i \cdot \Gamma(\alpha_i) = I_{A_i}$ ، وحسب تعريف Γ نجد أن $\Gamma_i((\alpha_i \cdot \tau_i)_{i \in I}) = I_{A_i}$ وهكذا نجد أن $\alpha_i \cdot \tau_i = I_{A_i}$ وذلك لأجل كل $i \in I$.

٢ - ليكن $i \in I$ ، لأجل كل $X \in ob(\mathcal{S})$ لناخذ التطبيق $\alpha: \mathcal{S}(X, A_i) \rightarrow \mathcal{S}(X, A)$ المعروف بالشكل الآتي: $\zeta_i \cdot \tau_i = \alpha(\zeta_i)$ وذلك أياً كان $\zeta_i \in \mathcal{S}(X, A_i)$.
 ليكن $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathcal{S}(X, A_i)$ بحيث $\alpha(\zeta_1) = \alpha(\zeta_2)$ فنجد أن $\tau_i \cdot \zeta_1 = \tau_i \cdot \zeta_2$ وحسب (١) فإنه يوجد مورفيزم $\alpha_i: A \rightarrow A_i$ للفئة $\mathcal{S}$ يحقق $\alpha_i \cdot \tau_i = I_{A_i}$ وبالتالي يكون:

$$\alpha_i \cdot (\tau_i \cdot \zeta_1) = \alpha_i \cdot (\tau_i \cdot \zeta_2)$$

ومنه $\zeta_1 = \zeta_2$ $(\alpha_i \cdot \tau_i) \cdot \zeta_1 = (\alpha_i \cdot \tau_i) \cdot \zeta_2$ وبالتالي $I_{A_i} \cdot \zeta_1 = I_{A_i} \cdot \zeta_2$ أي إن $\zeta_1 = \zeta_2$ وهذا يبين أن التطبيق α متباين، وبالتالي يكون المورفيزم τ_i مونومورفيزماً.

٤-٤. فئة المجاميع الطبقيّة.

في هذه الفقرة سوف نقوم ببناء فئة جديدة من خلال فئة معطاة.

مبرهنة ٤-٤-١.

لنكن $\mathcal{T}$ فئة، وليكن $S \in ob(\mathcal{T})$. سنقوم بتشكيل فئة جديدة سنرمز لها $S/\mathcal{T}$ كالآتي:

- أشياء الفئة $S/\mathcal{T}$. هي جميع الأزواج الممكنة من الشكل (A, α) حيث $A \in ob(\mathcal{T})$ و $\alpha: S \rightarrow A \in \mathcal{T}(S, A)$

- مورفيزمات الفئة $S/\mathcal{T}$. ليكن $(A, \alpha), (B, \beta) \in ob(S/\mathcal{T})$. إن مورفيزمات الفئة $S/\mathcal{T}$ من (A, α) إلى (B, β) هي جميع المورفيزمات $\gamma: A \rightarrow B \in Mor(\mathcal{T})$ التي لأجلها المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\gamma} & B \\ & \nwarrow \alpha & \uparrow \beta \\ & & S \end{array}$$

تبديلي، أي إن $\alpha \cdot \gamma = \beta$. لنبرهن على أن صفي الأشياء والمورفيزمات المعرفين أعلاه تشكل فئة.

ليكن $A', B', D' \in S/\mathcal{T}$. عندئذ فإن $A' = (A, \alpha), B' = (B, \beta), D' = (D, \gamma) \in S/\mathcal{T}$ و $\alpha, \beta, \gamma \in Mor(\mathcal{T})$. لنبرهن على وجود تطبيق:

$$\mu': S/\mathcal{T}(A', B') \times S/\mathcal{T}(B', D') \rightarrow S/\mathcal{T}(A', D')$$

ليكن $(f, g) \in S/\mathcal{T}(A', B') \times S/\mathcal{T}(B', D')$. عندئذ:

- $f \in S/\mathcal{T}(A', B')$ ، أي إن $f: (A, \alpha) \rightarrow (B, \beta)$ وحسب التعريف فإن:

$$f: A \rightarrow B \in \mathcal{T}(A, B)$$

لأجله المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ & \nwarrow \alpha & \uparrow \beta \\ & & S \end{array}$$

تبديلي، أي إن $f \cdot \alpha = \beta$.

- أيضاً $g \in S/\mathfrak{S}(B', D')$ ، أي إن $g : (B, \beta) \rightarrow (D, \gamma)$ وحسب التعريف فإن:

$$g : B \rightarrow D \in \mathfrak{S}(B, D)$$

لأجله المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{g} & D \\ & \nwarrow \beta & \uparrow \gamma \\ & & S \end{array}$$

تبديلي، أي إن: $g \cdot \beta = \gamma$.

ومنه نجد أن $g \cdot f : A \rightarrow D \in \mathfrak{S}(A, D)$ ، لأجله المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{g \cdot f} & D \\ & \nwarrow \alpha & \uparrow \gamma \\ & & S \end{array}$$

تبديلي، أي إن: $(g \cdot f) \cdot \alpha = \gamma$ ، وذلك لأن:

$$(g \cdot f) \cdot \alpha = g \cdot (f \cdot \alpha) = g \cdot \beta = \gamma$$

ومنه نجد أن $g \cdot f : (A, \alpha) \rightarrow (D, \gamma) \in S/\mathfrak{S}$ ، أي إن $g \cdot f : A' \rightarrow D' \in S/\mathfrak{S}$.

لنضع $\mu'(f, g) = g \cdot f$ فنجد بهذا الشكل أن μ' هو تطبيق.

واضح أن عملية تركيب المورفيزمات هذه تجميعية.

لنبرهن على وجود المورفيزم المطابق. ليكن $(A, \alpha) \in ob(S/\mathfrak{S})$ عندئذ فإن $A \in ob(\mathfrak{S})$

ومنه يوجد $I_A : A \rightarrow A \in \mathfrak{S}(A, A)$.

لنضع: $I_{(A, \alpha)} = I_A : (A, \alpha) \rightarrow (A, \alpha)$ فنجد أن $I_{(A, \alpha)} \in Mor(S/\mathfrak{S})$ ، لأن المخطط

الآتي:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{I_A} & A \\ & \nwarrow \alpha & \uparrow \alpha \\ & & S \end{array}$$

تبديلي، أي إن $I_A \cdot \alpha = \alpha$ وبحقق: أيأ كان $g : (A, \alpha) \rightarrow (B, \beta)$ حيث:

$$g : (A, \alpha) \rightarrow (B, \beta) \in ob(S/\mathfrak{S})$$

فإن $g : A \rightarrow B \in \mathfrak{S}(A, B)$ لأجله المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{g} & B \\ & \nwarrow \alpha & \uparrow \beta \\ & S & \end{array}$$

تبديلي، أي إن: $g \cdot \alpha = \beta$ ، ومنه فإن $g \cdot I_{(A,\alpha)} = g \cdot I_A = g$

كذلك الأمر، أيأ كان $f: (B, \beta) \rightarrow (A, \alpha) \in \text{Mor}(S/\mathfrak{I})$ فإن $f: B \rightarrow A \in \mathfrak{I}(B, A)$ لأجله المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{f} & A \\ & \nwarrow \beta & \uparrow \alpha \\ & S & \end{array}$$

تبديلي، أي إن: $f \cdot \beta = \alpha$ ، ومنه فإن $I_{(A,\alpha)} \cdot f = I_A \cdot f = f$ وهذا يبين لنا أن $I_{(A,\alpha)}$ هو المورفيزم المطابق. مما سبق نجد أن $S/\mathfrak{I}$ فئة.

نسمي الفئة $S/\mathfrak{I}$ فئة المجاميع الطبقية.

تعريف.

لتكن $\mathfrak{I}$ فئة، وليكن $S \in \text{ob}(\mathfrak{I})$. لنفرض أن $(A, \alpha), (B, \beta) \in S/\mathfrak{I}$ ، نسمي مجموع الأشياء $(A, \alpha), (B, \beta)$ المجموع الطبقي المرتبط بالمخطط:

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\alpha} & A \\ \beta \downarrow & & \\ B & & \end{array}$$

ونرمز له $A \amalg_S B$ أو $(A \amalg_S B, \tau_A, \tau_B)$ حيث τ_A, τ_B هي مورفيزمات الاحتواء. ونسمي المخطط:

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\alpha} & A \\ \beta \downarrow & & \downarrow \tau_A \\ B & \xrightarrow{\tau_B} & A \amalg_S B \end{array}$$

مربعاً ديكارتياً مرافقاً.

تمهيدية ٤-٤-٢.

لتكن $\mathfrak{I}$ فئة وليكن $S \in \text{ob}(\mathfrak{I})$. لنفرض أن $(A \amalg_S B, \tau_A, \tau_B)$ ، المجموع الطبقي المرتبط

بالمخطط:

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\alpha} & A \\ \beta \downarrow & & \\ B & & \end{array}$$

عندئذ فإن: $\tau_A \cdot \alpha = \tau_B \cdot \beta$

البرهان.

بما أن $(A, \alpha), (B, \beta) \in ob(S/\mathfrak{S})$ فإنه توجد مورفيزمات $\lambda: A \rightarrow B, \mu: B \rightarrow A$ للفتة $\mathfrak{S}$ تحقق أن المخططات الآتية:

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\alpha} & A \\ \beta \downarrow & \nearrow \lambda & \\ B & & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\alpha} & A \\ \beta \downarrow & \nearrow \mu & \\ B & & \end{array}$$

تبدلية، أي إن $\lambda \cdot \alpha = \beta, \mu \cdot \beta = \alpha$ ، وحسب تعريف المجموع، فإنه لأجل المورفيزمين $\tau_A \cdot \mu, \tau_B \cdot \lambda$ يوجد مورفيزم وحيد $I_{A \amalg B}$ لأجله المخططات الآتية:

$$\begin{array}{ccc} A \amalg_S B & \xleftarrow{I_{A \amalg B}} & A \amalg_S B \\ \tau_A \cdot \mu \swarrow & & \searrow \tau_B \\ B & & A \end{array} \quad \begin{array}{ccc} A \amalg_S B & \xleftarrow{I_{A \amalg B}} & A \amalg_S B \\ \tau_B \cdot \lambda \swarrow & & \searrow \tau_A \\ B & & A \end{array}$$

تبدلية، أي إن: $\tau_A = \tau_B \cdot \lambda, \tau_B = \tau_A \cdot \mu$ ومنه نجد أن:

$$\tau_A \cdot \alpha = \tau_B \cdot \lambda \cdot \alpha = \tau_B \cdot \beta$$

تمهيدية ٤-٤-٣.

لنكن $\mathfrak{S}$ فئة، وليكن $S \in ob(\mathfrak{S})$. لنفرض أن $(A \amalg_S B, \tau_A, \tau_B)$ المجموع الطبقي

المرتبط بالمخطط:

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\alpha} & A \\ \beta \downarrow & & \\ B & & \end{array}$$

عندئذ:

١ - إذا كان المورفيزم α إبيومورفيزماً، عندئذ يكون المورفيزم τ_B إبيومورفيزماً أيضاً.

٢ - إذا كان المورفيزم β إبيومورفيزماً، عندئذ يكون المورفيزم τ_A إبيومورفيزماً أيضاً.

البرهان.

١ - لنفرض أن المورفيزم $\alpha: S \rightarrow A$ إبيومورفيوماً، عندئذ أياً كان $X \in ob(\mathfrak{S})$ ، فإن التطبيق $f: \mathfrak{S}(A, X) \rightarrow \mathfrak{S}(S, X)$ المعرف بالشكل الآتي: أياً كان $u \in \mathfrak{S}(A, X)$ ، فإن $f(u) = u \cdot \alpha$ يكون متبايناً. لنبرهن على أنه أياً كان $X \in ob(\mathfrak{S})$ ، فإن التطبيق:

$$g: \mathfrak{S}(A \amalg_S B, X) \rightarrow \mathfrak{S}(B, X)$$

المعرف بالشكل الآتي: أياً كان $\mu \in \mathfrak{S}(A \amalg_S B, X)$ ، فإن $g(\mu) = \mu \cdot \tau_B$ ، متباين. ليكن $\mu_1, \mu_2 \in \mathfrak{S}(A \amalg_S B, X)$ بحيث $g(\mu_1) = g(\mu_2)$ ، عندئذ فإن $\mu_1 \cdot \tau_B = \mu_2 \cdot \tau_B$ وحسب التمهيدية (٤-٤-٢) يكون $\tau_A \cdot \alpha = \tau_B \cdot \beta$ ومنه نجد أن:

$$\begin{aligned} (\mu_1 \cdot \tau_A) \cdot \alpha &= \mu_1 \cdot (\tau_A \cdot \alpha) = \mu_1 \cdot (\tau_B \cdot \beta) = (\mu_1 \cdot \tau_B) \cdot \beta = (\mu_2 \cdot \tau_B) \cdot \beta = \\ &= \mu_2 \cdot (\tau_B \cdot \beta) = \mu_2 \cdot (\tau_A \cdot \alpha) = (\mu_2 \cdot \tau_A) \cdot \alpha \end{aligned}$$

وبما أن $\mu_1 \cdot \tau_A, \mu_2 \cdot \tau_A \in \mathfrak{S}(A, X)$ نجد أن:

$$f(\mu_1 \cdot \tau_A) = (\mu_1 \cdot \tau_A) \cdot \alpha = (\mu_2 \cdot \tau_A) \cdot \alpha = f(\mu_2 \cdot \tau_A)$$

ولكون التطبيق f متبايناً نجد أن $\mu_1 \cdot \tau_A = \mu_2 \cdot \tau_A$ وأصبح لدينا:

$$\mu_1 \cdot \tau_A = \mu_2 \cdot \tau_A, \quad \mu_1 \cdot \tau_B = \mu_2 \cdot \tau_B$$

ولما كان $A \amalg_S B$ مجموع الأسرة $(A, \alpha), (B, \beta)$ فإنه حسب التمهيدية (٤-٣-١) أياً كان $X \in ob(\mathfrak{S})$ ، فإن التطبيق:

$$\Gamma: \mathfrak{S}(A \amalg_S B, X) \rightarrow \mathfrak{S}(A, X) \times \mathfrak{S}(B, X)$$

المعرف بالشكل الآتي: أياً كان $\lambda \in \mathfrak{S}(A \amalg_S B, X)$ ، فإن $\Gamma(\lambda) = (\lambda \cdot \tau_A, \lambda \cdot \tau_B)$ متباين، ولما كان $\Gamma(\mu_1) = (\mu_1 \cdot \tau_A, \mu_1 \cdot \tau_B) = (\mu_2 \cdot \tau_A, \mu_2 \cdot \tau_B) = \Gamma(\mu_2)$ نجد أن $\mu_1 = \mu_2$ ، وهذا يبين أن التطبيق g متباين، وبالتالي يكون المورفيزم τ_B إبيومورفيوماً.

٢ - يبرهن بطريقة مشابهة.

ملاحظة.

ضمن شروط التمهيدية (٤-٤-٣) إذا كان المورفيزم α مونومورفيوماً، فليس من الضروري أن يكون المورفيزم τ_B مونومورفيوماً.

تعريف.

لتكن $\mathcal{I}$ فئة، وليكن $(A, B) \in ob(\mathcal{I}) \times ob(\mathcal{I})$ زوجاً من أشياء الفئة $\mathcal{I}$. نسمي المورفيزم $o_{B,A} : A \rightarrow B \in \mathcal{I}(A, B)$ (في حال وجوده) مورفيزماً صفرياً إذا حقق الشرط: لأجل أي مورفيزمين $v : B \rightarrow C, u : D \rightarrow A$ للفئة $\mathcal{I}$ ، فإن $v \cdot o_{B,A} = o_{C,A} \cdot o_{B,A} \cdot u = o_{B,D}$. نقول عن الفئة $\mathcal{I}$ إنها صفرية إذا وجد لكل زوج (A, B) من أشياء الفئة $\mathcal{I}$ مورفيزم صفري $o_{B,A} : A \rightarrow B$.

نتيجة.

لتكن $\mathcal{I}$ فئة صفرية، عندئذ لكل زوج (A, B) من أشياء الفئة $\mathcal{I}$ يوجد مورفيزم صفري وحيد $o_{B,A} : A \rightarrow B$.

البرهان.

نفرض أنه لأجل زوج الأشياء (A, B) يوجد مورفيزمان صفريان هما $o_{B,A}, o'_{B,A} : A \rightarrow B$. بما أن الفئة $\mathcal{I}$ صفرية فإنه لأجل زوج الأشياء (A, A) يوجد المورفيزم الصفري $o_{A,A} : A \rightarrow A$. ومنه فإن $o'_{B,A} = o'_{B,A} \cdot o_{A,A} = o_{B,A}$ وهذا يبين أن المورفيزم الصفري $o_{B,A}$ وحيد.

مبرهنة ٤-٤-٤.

لتكن $\mathcal{I}$ فئة صفرية، وليكن (A, B) زوجاً من أشياء الفئة $\mathcal{I}$. إذا كان الجداء $A \amalg B$ والمجموع $A \sqcup B$ موجودين، عندئذ يوجد مورفيزم وحيد:

$$h(A, B) : A \amalg B \rightarrow A \sqcup B$$

للفئة $\mathcal{I}$ يحقق

$$\begin{aligned} p_B \cdot h(A, B) \cdot i_A &= o_{B,A} & p_A \cdot h(A, B) \cdot i_A &= I_A \\ p_A \cdot h(A, B) \cdot i_B &= o_{A,B} & p_B \cdot h(A, B) \cdot i_B &= I_B \end{aligned}$$

حيث p_A, p_B المورفيزمات الإسقاطية و i_A, i_B مورفيزمات الاحتواء.

البرهان.

بما أن الفئة $\mathcal{I}$ صفرية، فإنه لأجل زوج الأشياء (A, B) يوجد المورفيزم الصفري $o_{B,A} : A \rightarrow B$. من جهة أخرى، بما أن $A \amalg B$ هو جداء لأسرة الأشياء A, B ، فإنه يوجد

مورفيزم وحيد $\alpha: A \rightarrow A \sqcup B$ لأجله المخططات الآتية:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & A \sqcup B \\ & \searrow & \downarrow p_A \\ I_A & & A \end{array} \quad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & A \sqcup B \\ & \searrow & \downarrow p_B \\ o_{B,A} & & B \end{array}$$

تبديلية، أي إن: $p_A \cdot \alpha = I_A$, $p_B \cdot \alpha = o_{B,A}$ وبالتالي يكون المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccccc} I_A & & A & & o_{B,A} \\ & \swarrow & \downarrow \alpha & \searrow & \\ A & \xleftarrow{p_A} & A \sqcup B & \xrightarrow{p_B} & B \end{array}$$

تبدلياً، أيضاً بما أن الفئة $\mathcal{C}$ صفيرية فإنه لأجل زوج الأشياء (B, A) يوجد المورفيزم الصفري $o_{AB}: B \rightarrow A$ ولما كان $A \sqcup B$ جداء لأسرة الأشياء A, B فإنه يوجد مورفيزم وحيد $\beta: B \rightarrow A \sqcup B$ لأجله المخططات الآتية:

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\beta} & A \sqcup B \\ & \searrow & \downarrow p_A \\ o_{AB} & & A \end{array} \quad \begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\beta} & A \sqcup B \\ & \searrow & \downarrow p_B \\ I_B & & B \end{array}$$

تبديلية، أي إن $p_B \cdot \beta = I_B$, $p_A \cdot \beta = o_{AB}$ وبالتالي يكون المخطط الآتي تبدلياً:

$$\begin{array}{ccccc} o_{AB} & & B & & I_B \\ & \swarrow & \downarrow \beta & \searrow & \\ A & \xleftarrow{p_A} & A \sqcup B & \xrightarrow{p_B} & B \end{array}$$

أخيراً، بما أن $A \sqcup B$ مجموع لأسرة الأشياء A, B ، فإنه يوجد مورفيزم وحيد:

$$h(A, B): A \sqcup B \rightarrow A \sqcup B$$

لأجله المخططات الآتية:

$$\begin{array}{ccc} A \sqcup B & \xleftarrow{h(A, B)} & A \sqcup B \\ & \nwarrow & \uparrow i_B \\ \beta & & A \end{array} \quad \begin{array}{ccc} A \sqcup B & \xleftarrow{h(A, B)} & A \sqcup B \\ & \nwarrow & \uparrow i_A \\ \alpha & & B \end{array}$$

تبديلية، أي إن: $h(A, B) \cdot i_B = \beta$, $h(A, B) \cdot i_A = \alpha$ وهكذا نجد أن:

$$p_B \cdot h(A, B) \cdot i_A = p_B \cdot (h(A, B) \cdot i_A) = p_B \cdot \alpha = o_{BA}$$

$$p_A \cdot h(A, B) \cdot i_B = p_A \cdot (h(A, B) \cdot i_B) = p_A \cdot \beta = o_{AB}$$

$$p_A \cdot h(A, B) \cdot i_A = p_A \cdot (h(A, B) \cdot i_A) = p_A \cdot \alpha = I_A$$

$$p_B \cdot h(A, B) \cdot i_B = p_B \cdot (h(A, B) \cdot i_B) = p_B \cdot \beta = I_B$$

وبالتالي المخطط الآتي تبديلي:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i_A} & A \amalg B \\ & \searrow h(A, B) \downarrow & \swarrow i_B \\ \alpha & & \beta \end{array}$$

تعريف.

لتكن $\mathcal{S}$ فئة، وليكن $A \in ob(\mathcal{S})$.

- نقول إن A هو شيء ابتدائي إذا كانت المجموعة $\mathcal{S}(A, X)$ وحيدة العنصر، وذلك لأجل كل $X \in ob(\mathcal{S})$.

- نقول إن A هو شيء نهائي إذا كانت المجموعة $\mathcal{S}(X, A)$ وحيدة العنصر، وذلك لأجل كل $X \in ob(\mathcal{S})$.

- نقول إن A هو شيء صفري إذا كان هو شيئاً ابتدائياً ونهائياً في آن واحد.

أمثلة.

١ - في فئة المجموعات Set's. إن:

- المجموعة وحيدة العنصر هي شيء نهائي؛ لأنه إذا كانت $A = \{a\}$ مجموعة وحيدة العنصر، عندئذ لأجل أي مجموعة أخرى B فإن المجموعة $Hom_{Set's}(B, A)$ تتألف من عنصر واحد هو التطبيق الثابت.

- المجموعة الخالية هي شيء ابتدائي؛ لأنه لأجل أي مجموعة أخرى B ، فإن المجموعة $Hom_{Set's}(\emptyset, B)$ تتألف من عنصر واحد هو Φ .

٢ - في فئة الزمر $\mathcal{G}$ ، الزمرة المؤلفة من عنصر واحد (العنصر المحايد) هي شيء صفري؛ لأنه إذا كانت $G = \langle e \rangle$ زمرة حيث e هو العنصر المحايد في G ، عندئذ لأجل كل $X \in ob(\mathcal{G})$ أي لأجل كل زمرة أخرى X ، فإن المجموعة $Hom_{\mathcal{G}}(X, G)$ تتألف من

عنصر واحد هو التشاكل الزمري الثابت، أي التشاكل $u: X \rightarrow G$ الذي يحقق $u(x) = e$ وذلك لأجل كل $x \in X$.

ولأجل أي زمرة أخرى $Y \in ob(\mathcal{G})$ ، فإن المجموعة $Hom_{\mathcal{G}}(G, Y)$ تتألف من عنصر واحد هو التشاكل الزمري $v: G \rightarrow Y$ الذي يحقق $v(e) = e_1$ حيث e_1 هو العنصر المحايد للزمرة Y . ومنه نجد أن G هو شيء صفري في الفئة $\mathcal{G}$.

مبرهنة ٤-٤-٥.

لتكن $\mathcal{S}$ فئة، وليكن $S \in ob(\mathcal{S})$. لنفرض أن فئة المجاميع الطبقية. لنأخذ المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\alpha} & A \\ \beta \downarrow & & \downarrow \delta \\ B & \xrightarrow{\gamma} & Q \end{array} \quad (*)$$

من أشياء ومورفيزمات الفئة $S/\mathcal{S}$. الشروط الآتية متكافئة:

- ١ - المخطط (*) هو مربع ديكارتي.
- ٢ - المخطط (*) تبديلي ويحقق الشرط الآتي: أيًا كان $V \in ob(\mathcal{S})$ ولأجل أي مورفيزمين $\mu: A \rightarrow V$ ، $\nu: B \rightarrow V$ يوجد مورفيزم وحيد $\lambda: Q \rightarrow V$ يحقق $\mu = \lambda \cdot \delta$ و $\nu = \lambda \cdot \gamma$.

البرهان.

(1) $\Leftrightarrow$ (2). لنفرض أن المخطط (*) مربع ديكارتي، عندئذ حسب التعريف يكون $Q = A \coprod_S B$ وأن $\delta = \tau_A$ ، $\gamma = \tau_B$ وحسب التمهيدية (٤-٤-٢) يكون المخطط (*) تبديلياً، أي إن $\tau_A \cdot \alpha = \tau_B \cdot \gamma$. من جهة أخرى، بما أن Q هو مجموع أسرة الأشياء (A, B) فإنه لأجل كل $V \in ob(\mathcal{S})$ يكون التطبيق:

$$\Gamma: \mathcal{S}(Q, V) \rightarrow \mathcal{S}(A, V) \times \mathcal{S}(B, V)$$

المعرف بالشكل الآتي: أيًا كان $w \in \mathcal{S}(Q, V)$ فإن $w \cdot \delta, w \cdot \gamma \in \mathcal{S}(A, V)$ ، $\mathcal{S}(B, V)$ ، $\Gamma(w) = (w \cdot \delta, w \cdot \gamma)$ ، Γ تقابل.

ليكن $\mu: A \rightarrow V$ و $\nu: B \rightarrow V$ مورفيزمات للفئة $\mathcal{S}$ ، عندئذ:

$$(\mu, \nu) \in \mathcal{S}(A, V) \times \mathcal{S}(B, V)$$

ومنه يوجد مورفيزم وحيد $\lambda \in \mathfrak{S}(Q, V)$ يحقق $\Gamma(\lambda) = (\mu, \nu)$ وبما أن:

$$\Gamma(\lambda) = (\lambda \cdot \delta, \lambda \cdot \gamma)$$

نجد أن $\nu = \lambda \cdot \gamma$ و $\mu = \lambda \cdot \delta$

(2) $\Leftrightarrow$ (1). لنفرض أن الشرط (٢) محقق.

ليكن $V \in \text{ob}(\mathfrak{S})$ ، وأن $\mu: A \rightarrow V$ ، $\nu: B \rightarrow V$ وحسب الفرض يوجد مورفيزم وحيد $\lambda: Q \rightarrow V$ يحقق $\mu = \lambda \cdot \delta$ و $\nu = \lambda \cdot \gamma$ وهذا يبين أن المخططات الآتية:

$$\begin{array}{ccc} V & \xleftarrow{\lambda} & Q \\ \mu \swarrow & & \searrow \delta \\ & A & \\ \nu \swarrow & & \searrow \gamma \\ & B & \end{array}$$

تبدلية، أي إن: $Q = A \amalg B$. وبما أن $\delta \cdot \alpha = \gamma \cdot \beta$ نجد أن Q هو المجموع الطبقى للأشياء $(A, \alpha), (B, \beta)$ المرتبط بالمخطط:

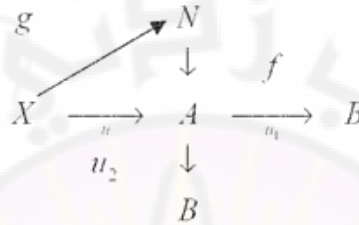
$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\alpha} & A \\ \beta \downarrow & & \\ B & & \end{array}$$

أي إن $Q = A \amalg_s B$ ، ومنه فإن المخطط $(*)$ مربع ديكارتي مرافق.

٤-٥. النواة.

تعريف.

لتكن $\mathcal{I}$ فئة، و $N \in ob(\mathcal{I})$ و $f : N \rightarrow A$ مورفيزماً للفئة $\mathcal{I}$. نقول إن الثنائية (N, f) تشكل نواة للمورفيزمين $u_1, u_2 : A \rightarrow B$ إذا تحققت الشروط الآتية:



١ - لأجل أي مورفيزم $u : X \rightarrow A$ يحقق $u_1 \cdot u = u_2 \cdot u$ يوجد مورفيزم وحيد $g : X \rightarrow N$ من أجله $f \cdot g = u$.

٢ - إذا كان لأجل أي مورفيزم $u : X \rightarrow A$ يوجد مورفيزم $g : X \rightarrow N$ يحقق $u = f \cdot g$ عندئذ يكون $u_1 \cdot u = u_2 \cdot u$.

بالاعتماد على التعريف السابق يمكننا صياغة النتيجة الآتية:

نتيجة.

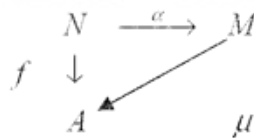
إذا كانت الثنائية (N, f) نواة للمورفيزمين $u_1, u_2 : A \rightarrow B$ ، فإن $u_1 \cdot f = u_2 \cdot f$.

البرهان.

حسب الشرط (٢) من التعريف فإنه لأجل $X = N$ ولأجل $u = f$ يوجد $I_N : N \rightarrow N$ و يحقق $f \cdot I_N = f$ ومنه يكون $u_1 \cdot f = u_2 \cdot f$.

مبرهنة ٤-٥-١.

لتكن $\mathcal{I}$ فئة. إذا كانت الثنائيات (M, μ) و (N, f) تشكل كل منهما نواة للمورفيزمين $u_1, u_2 : A \rightarrow B$ فإنه يوجد إيزومورفيزم وحيد $\alpha : N \rightarrow M$ لأجله المخطط الآتي:



تبديلي، أي إن: $\mu \cdot \alpha = f$.
البرهان.

لنفرض أن كلا من الثنائيات (M, μ) و (N, f) تشكل كل منهما نواة للمورفيزمين u_1, u_2 .
بما أن المورفيزم $f: N \rightarrow A$ يحقق $f \cdot I_N = f$ فإنه حسب (٢) من التعريف يكون
 $u_1 \cdot f = u_2 \cdot f$ وحسب (١) من التعريف بما أن (M, μ) نواة للمورفيزمين u_1, u_2 ، فإنه
يوجد مورفيزم وحيد $\alpha: N \rightarrow M$ لأجله $\mu \cdot \alpha = f$.

من جهة أخرى، بما أن المورفيزم $\mu: M \rightarrow A$ يحقق $\mu \cdot I_M = \mu$ فإنه حسب (٢) من
التعريف نجد $u_1 \cdot \mu = u_2 \cdot \mu$ وحسب (١) من التعريف وبما أن (N, f) نواة للمورفيزمين
 u_1, u_2 ، فإنه يوجد مورفيزم وحيد $\mu: M \rightarrow N$ لأجله $f \cdot \beta = \mu$ ومنه نجد:

$$f \cdot (\beta \cdot \alpha) = (f \cdot \beta) \cdot \alpha = \mu \cdot \alpha = f$$

وبما أن $f \cdot I_N = f$ نجد أن $\beta \cdot \alpha = I_N$ أيضاً:

$$\mu \cdot (\alpha \cdot \beta) = (\mu \cdot \alpha) \cdot \beta = f \cdot \beta = \mu$$

وبما أن $\mu \cdot I_M = \mu$ نجد أن $\alpha \cdot \beta = I_M$ وهذا يبين أن α إيزومورفيزم.

تمهيدية ٤-٥-٢.

لتكن $\mathfrak{I}$ فئة، و $A, B \in ob(\mathfrak{I})$ و $u_1, u_2: A \rightarrow B \in \mathfrak{I}(A, B)$ مورفيزمات للفئة $\mathfrak{I}$.
عندئذ: يوجد دالي $F: \mathfrak{I} \rightarrow Set's$ معرف بالشكل: أيأ كان $X \in ob(\mathfrak{I})$ ، فإن:

$$F(X) = \{f: f \in \mathfrak{I}(X, A); u_1 \cdot f = u_2 \cdot f\}$$

وهذا الدالي غير مباشر.

البرهان.

واضح أن العلاقة $F: ob(\mathfrak{I}) \rightarrow ob(Set's)$ المعرفة بالشكل: $\forall X \in ob(\mathfrak{I})$ ، فإن:

$$F(X) = \{f: f \in \mathfrak{I}(X, A); u_1 \cdot f = u_2 \cdot f\}$$

هي تطبيق؛ لأنه إذا كان $X, Y \in ob(\mathfrak{I})$ بحيث $X = Y$ ، فإن $F(X) = F(Y)$ ؛ لأنه إذا
كان $f \in F(X)$ ، فإن $f \in \mathfrak{I}(X, A) = \mathfrak{I}(Y, A)$ ويحقق $u_1 \cdot f = u_2 \cdot f$ وهذا يبين أن
 $f \in F(Y)$ أي إن $F(X) \subseteq F(Y)$. بطريقة مشابهة نجد أن $F(Y) \subseteq F(X)$ ، ومنه
فإن $F(X) = F(Y)$.

لنعرف $F: Mor(\mathfrak{S}) \rightarrow Mor(Set's)$ كما يلي: ليكن $v: M \rightarrow N \in \mathfrak{S}(M, N)$ لنضع $F(v): F(N) \rightarrow F(M)$ بحيث أياً كان $\lambda \in F(N)$ فإن $F(v)(\lambda) = \lambda \cdot v$ فنجد أن تطبيق F تطبيق. ليكن $M \in ob(\mathfrak{S})$ عندئذ، فإن $F(I_M): F(M) \rightarrow F(M)$ ؛ وأنه أياً كان $\lambda \in F(M)$ ، فإن $F(I_M)(\lambda) = \lambda \cdot I_M = \lambda$ وهذا يبين أن $F(I_M) = I_{F(M)}$ ؛
ليكن $v: M \rightarrow N, w: N \rightarrow D$ حيث $M, N, D \in ob(\mathfrak{S})$ عندئذ:

$$w \cdot v: M \rightarrow D \in \mathfrak{S}(M, D)$$

وأن $F(w \cdot v): F(D) \rightarrow F(M)$ وأنه أياً كان $\lambda \in F(D)$ ، فإن:

$$\begin{aligned} F(w \cdot v)(\lambda) &= \lambda \cdot (w \cdot v) = (\lambda \cdot w) \cdot v = F(v)(\lambda \cdot w) = F(v)(F(w)(\lambda)) = \\ &= (F(v) \cdot F(w))(\lambda) \end{aligned}$$

مما سبق نجد أن $F(w \cdot v) = F(v) \cdot F(w)$ وهكذا نجد أن $F: \mathfrak{S} \rightarrow Set's$ هو دالي غير مباشر.

مبرهنة ٤-٥-٣.

لتكن $\mathfrak{S}$ فئة، و $u_1, u_2: A \rightarrow B \in \mathfrak{S}(A, B)$ مورفيزمات للفئة $\mathfrak{S}$ حيث $A, B \in ob(\mathfrak{S})$. إذا كانت الثنائية (N, f) نواة للمورفيزمين u_1, u_2 ، عندئذ يوجد دالي غير مباشر $F: \mathfrak{S} \rightarrow Set's$ تمثله الثنائية (N, f) .

البرهان.

لنفرض أن الثنائية (N, f) هي نواة للمورفيزمين u_1, u_2 ، عندئذ حسب التمهيدية (٤-٥-٥-٢) يوجد دالي غير مباشر $F: \mathfrak{S} \rightarrow Set's$ معرف بالشكل: أياً كان $X \in ob(\mathfrak{S})$ ، فإن:

$$F(X) = \{f: f \in \mathfrak{S}(X, A); u_1 \cdot f = u_2 \cdot f\}$$

أيضاً حسب المبرهنة (٢-١-٢) يوجد دالي غير مباشر $\hat{h}_N: \mathfrak{S} \rightarrow Set's$ لنعرف مورفيزماً دالياً $\Theta: \hat{h}_N \rightarrow F$ بالشكل: أياً كان $X \in ob(\mathfrak{S})$ ، فإن:

$$\Theta(X): \hat{h}_N(X) \rightarrow F(X)$$

$$\Theta(X): \mathfrak{S}(X, N) \rightarrow F(X)$$

وأياً كان $g \in \mathfrak{S}(X, Y)$ ، فإن $\Theta(X)(g) = f \cdot g$. بما أن $u_1 \cdot f = u_2 \cdot f$ نجد أن $(u_1 \cdot f) \cdot g = (u_2 \cdot f) \cdot g$ ومنه $u_1 \cdot (f \cdot g) = u_2 \cdot (f \cdot g)$ أي إن $f \cdot g \in F(X)$.

ليكن $\lambda: X \rightarrow Y \in \mathfrak{S}(X, Y)$ ولنبرهن على أن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} \hat{h}_N(X) & \xrightarrow{\Theta(X)} & F(X) \\ \hat{h}_N(\lambda) \uparrow & & \uparrow F(\lambda) \\ \hat{h}_N(Y) & \xrightarrow{\Theta(Y)} & F(Y) \end{array}$$

تبديلي، أي $F(\lambda) \cdot \Theta(Y) = \Theta(X) \cdot \hat{h}_N(\lambda)$. ليكن $\mu \in \hat{h}_N(Y) = \mathfrak{S}(Y, N)$ عندئذ فإن:

$$(F(\lambda) \cdot \Theta(Y))(\mu) = F(\lambda)(\Theta(Y)(\mu)) = F(\lambda)(f \cdot \mu) = (f \cdot \mu) \cdot \lambda = f \cdot (\mu \cdot \lambda)$$

$$(\Theta(X) \cdot \hat{h}_N(\lambda))(\mu) = \Theta(X)(\hat{h}_N(\lambda)(\mu)) = \Theta(X)(\mu \cdot \lambda) = f \cdot (\mu \cdot \lambda)$$

ومنه نجد أن $(F(\lambda) \cdot \Theta(Y))(\mu) = (\Theta(X) \cdot \hat{h}_N(\lambda))(\mu)$ أي إن:

$$F(\lambda) \cdot \Theta(Y) = \Theta(X) \cdot \hat{h}_N(\lambda)$$

وهذا يبين لنا أن $\Theta: \hat{h}_N \rightarrow F$ مورفيزم دالي.

لنبرهن على وجود مورفيزم دالي آخر $\Gamma: F \rightarrow \hat{h}_N$ يحقق $\Gamma \cdot \Theta = I_{\hat{h}_N}$ ، $\Theta \cdot \Gamma = I_F$.

أيًا كان $X \in \text{ob}(\mathfrak{S})$ ، لنعرف $\Gamma: F \rightarrow \hat{h}_N$ بالشكل:

$$\Gamma(X): F(X) \rightarrow \hat{h}_N(X) = \mathfrak{S}(X, N)$$

وأيًا كان $v: X \rightarrow A \in F(X)$ عندئذ، فإن $u_1 \cdot f = u_2 \cdot f$ وبما أن الثنائية (N, f) نواة

للمورفيزمين u_1, u_2 يوجد مورفيزم وحيد $g: X \rightarrow N$ يحقق $f \cdot g = v$. لنضع:

$$\Gamma(X)(g) = v$$

ليكن $\mu: X \rightarrow A \in F(X)$ ولنبرهن على أن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{\Gamma(X)} & \hat{h}_N(X) = \mathfrak{S}(X, N) \\ F(\mu) \uparrow & & \uparrow \hat{h}_N(\mu) \\ F(Y) & \xrightarrow{\Gamma(Y)} & \hat{h}_N(Y) = \mathfrak{S}(Y, N) \end{array}$$

تبديلي، أي إن $\hat{h}_N(\mu) \cdot \Gamma(Y) = \Gamma(X) \cdot F(\mu)$.

ليكن $w: Y \rightarrow A \in F(Y)$ عندئذ:

$$(\hat{h}_N(\mu) \cdot \Gamma(Y))(w) = \hat{h}_N(\mu)(\Gamma(Y)(w)) = \hat{h}_N(\mu)(g) = g \cdot \mu$$

حيث إن $g: Y \rightarrow N$ يحقق $f \cdot g = w$ كما أن:

$$(\Gamma(X) \cdot F(\mu))(w) = \Gamma(X)(F(\mu)(w)) = \Gamma(X)(w \cdot \mu) = g \cdot \mu$$

وذلك لأن $f \cdot (g \cdot \mu) = (f \cdot g) \cdot \mu = w$ مما سبق نجد أن:

$$(\hat{h}_N(\mu) \cdot \Gamma(Y))(w) = (\Gamma(X) \cdot F(\mu))(w)$$

وبالتالي فإن $\hat{h}_N(\mu) \cdot \Gamma(Y) = \Gamma(X) \cdot F(\mu)$

وهذا يبين لنا أن $\Gamma: F \rightarrow \hat{h}_N$ مورفيزم دالي. لنبرهن الآن على أن $\Theta \cdot \Gamma = I_F$.
ليكن $\alpha \in F(X)$ عندئذ $\alpha: X \rightarrow A$ ، بما أن (N, f) نواة للمورفيزمين u_1, u_2 فإنه يوجد مورفيزم وحيد $g: X \rightarrow N$ يحقق $f \cdot g = \alpha$ ، ومنه:

$$(\Theta(X) \cdot \Gamma(X))(\alpha) = \Theta(X)(\Gamma(X)(\alpha)) = \Theta(X)(g) = f \cdot g = \alpha$$

وهذا يبين أن $\Theta \cdot \Gamma = I_F$.

من جهة أخرى، ليكن $\beta \in \hat{h}_N(X) = \mathfrak{S}(X, N)$ عندئذ $\beta: X \rightarrow N$ وأن:

$$(\Gamma(X) \cdot \Theta(X))(\beta) = \Gamma(X)(\Theta(X)(\beta)) = \Gamma(X)(f \cdot \beta)$$

وبما أن $f \cdot \beta: X \rightarrow A$ فإنه يوجد مورفيزم وحيد $g: X \rightarrow N$ يحقق $f \cdot g = f \cdot \beta$ ومنه $g = \beta$ وبالتالي:

$$(\Gamma(X) \cdot \Theta(X))(\beta) = \Gamma(X)(f \cdot \beta) = \Gamma(X)(f \cdot g) = v$$

حيث $f \cdot g = v$ وهكذا فإن $\Gamma \cdot \Theta = I_{\hat{h}_N}$ وهذا يبين أن $\Theta: \hat{h}_N \rightarrow F$ إيزومورفيزم دالي.

تمهيدية ٤-٥-٤.

لتكن $\mathfrak{S}$ فئة، و $A, B \in ob(\mathfrak{S})$ و $u_1, u_2: A \rightarrow B \in \mathfrak{S}(A, B)$ مورفيزمات للفئة $\mathfrak{S}$.
إذا كانت الثنائية (N, f) نواة للمورفيزمين u_1, u_2 ، عندئذ المورفيزم f مونومورفيزم.
البرهان.

نفرض أن الثنائية (N, f) نواة للمورفيزمين u_1, u_2 ، عندئذ $f: N \rightarrow A$.
لنبرهن على أنه: أيأ كان $X \in ob(\mathfrak{S})$ ، فإن التطبيق $\alpha: \mathfrak{S}(X, N) \rightarrow \mathfrak{S}(X, A)$ المعرف بالشكل: أيأ كان $v \in \mathfrak{S}(X, N)$ ، فإن $\alpha(v) = f \cdot v$ متباين.
ليكن $v_1, v_2 \in \mathfrak{S}(X, N)$ بحيث $\alpha(v_1) = \alpha(v_2)$ عندئذ، فإن $f \cdot v_1 = f \cdot v_2$. بما أن $u_1 \cdot f = u_2 \cdot f$ نجد أن:

$$u_1 \cdot (f \cdot v_1) = (u_1 \cdot f) \cdot v_1 = (u_2 \cdot f) \cdot v_1 = u_2 \cdot (f \cdot v_1) = u_2 \cdot (f \cdot v_2)$$

ومنه يوجد مورفيزم وحيد $g: X \rightarrow N$ يحقق $f \cdot g = f \cdot v_1 = f \cdot v_2$ وهذا يبين أن $v_1 = v_2$

وبالتالي فإن التطبيق α متباين، أي إن المورفيزم f مونومورفيزم.

تعريف.

لتكن $\mathcal{C}$ فئة. نقول عن متتالية المورفيزمات $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z$ للفئة $\mathcal{C}$ إنها تامة إذا كانت الثنائية (X, u) نواة للمورفيزمين v, w .

نتيجة.

لتكن $\mathcal{C}$ فئة. إذا كانت متتالية المورفيزمات $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z$ للفئة $\mathcal{C}$ ، تامة عندئذ يكون $v \circ u = w \circ u$.

البرهان.

لنفرض أن متتالية المورفيزمات $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z$ تامة، عندئذ فإن الثنائية (X, u) هي نواة للمورفيزمين v, w ، وحسب الشرط (٢) من تعريف النواة نجد أن $v \circ u = w \circ u$.

تعريف.

لتكن $\mathcal{C}$ فئة وليكن $u: X \rightarrow Y$ مورفيزماً للفئة $\mathcal{C}$. نقول إن u مونومورفيزم قوي للفئة $\mathcal{C}$ إذا كان u مونومورفيزماً للفئة $\mathcal{C}$ وكان المجموع الطبقى $Y \amalg Y$ موجوداً، وكانت المتتالية $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{f_1} Y \xrightarrow{f_2} Z$ تامة، حيث τ_1, τ_2 مورفيزمات الاحتواء.

نعلم أنه إذا كان المورفيزم u للفئة $\mathcal{C}$ مونومورفيزماً وإبيومورفيزماً، فليس بالضرورة أن يكون إيزومورفيزماً. تبين التمهيدية الآتية لنا متى يكون u إيزومورفيزماً.

تمهيدية ٤-٥-٥.

لتكن $\mathcal{C}$ فئة، وليكن $u: X \rightarrow Y$ مورفيزماً للفئة $\mathcal{C}$. إذا كان u مونومورفيزماً قوياً وإبيومورفيزماً للفئة $\mathcal{C}$ عندئذ يكون u إيزومورفيزماً للفئة $\mathcal{C}$.

البرهان.

لنفرض أن المورفيزم $u: X \rightarrow Y$ مونومورفيزم قوياً وإبيومورفيزماً للفئة $\mathcal{C}$ عندئذ تكون

المتتالية $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow[\tau_2]{\tau_1} Y \coprod_X Y$ تامة، وحسب التعريف تكون الثنائية (X, u) نواة

للمورفيزمين τ_1, τ_2 وبالتالي يكون $\tau_1 \cdot u = \tau_2 \cdot u$ ولكون المورفيزم u إبيومورفيزماً نجد أن $\tau_1 = \tau_2$. من جهة أخرى، بما أن الثنائية (X, u) نواة للمورفيزمين τ_1, τ_2 فإنه لأجل المورفيزم I_Y يوجد مورفيزم وحيد $v: Y \rightarrow X$ لأجله $u \cdot v = I_Y$. وذلك حسب الشرط (١) من تعريف النواة. أيضاً لدينا $v \cdot u: X \rightarrow X$ ويحقق $v \cdot u = I_X$ ومنه نجد أن $I_X \cdot v = v$ كما أن $I_X \cdot v = v$ وهذا يبين أن u إيزومورفيزم للفئة $\mathcal{I}$.

تمهيدية ٤-٥-٦.

لتكن $\mathcal{I}$ فئة. إذا كانت متتالية المورفيزمات $A \xrightarrow{\gamma} B \xrightarrow[\tau_2]{\tau_1} D$ تامة، عندئذ

يكون المورفيزم γ مونومورفيزماً قوياً.
البرهان.

نفرض أن متتالية المورفيزمات $A \xrightarrow{\gamma} B \xrightarrow[\tau_2]{\tau_1} D$ تامة، عندئذ تكون الثنائية (A, γ)

نواة للمورفيزمين τ_1, τ_2 وحسب التمهيدية (٤-٥-٤) يكون المورفيزم $\gamma: A \rightarrow B$ مونومورفيزماً. أيضاً لكون الثنائية (A, γ) نواة للمورفيزمين τ_1, τ_2 فإن المجموع الطبقى $B \coprod_A B$ موجود.

لنبرهن الآن على أن المتتالية $A \xrightarrow{\gamma} B \xrightarrow[\tau_2]{\tau_1} B \coprod_A B$ حيث τ_1, τ_2 مورفيزمات

الاحتواء، تامة. بالاعتماد على الشرط (٢) من تعريف النواة نجد أن $\tau_1 \cdot \gamma = \tau_2 \cdot \gamma$. من ناحية أخرى، ليكن $u: X \rightarrow B$ مورفيزماً للفئة $\mathcal{I}$ يحقق $\tau_1 \cdot \gamma = \tau_2 \cdot \gamma$ عندئذ يوجد مورفيزم وحيد $\beta: B \coprod_A B \rightarrow D$ لأجله المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} D & \xleftarrow{\beta} & B \coprod_A B \\ \tau_1 \swarrow & & \searrow \tau_2 \\ & B & \end{array}$$

تبديلي، أي إن: $\beta \cdot \tau_i = v_i$ حيث $i = 1, 2$. ومنه نجد أن:

$$v_1 \cdot u = (\beta \cdot \tau_1) \cdot u = \beta \cdot (\tau_1 \cdot u) = \beta \cdot (\tau_2 \cdot u) = (\beta \cdot \tau_2) \cdot u = v_2 \cdot u$$

ولكون الثنائية (A, γ) نواة للمورفيزمين v_1, v_2 فإنه يوجد مورفيزم وحيد $\delta: X \rightarrow A$ لأجله المخطط الآتي:

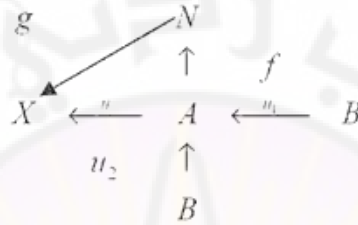
$$\begin{array}{ccccc} & & A & & \\ & \nearrow \delta & \downarrow & \xrightarrow{\gamma} & \\ X & \xrightarrow{u} & B & \xrightarrow{v_1} & D \\ & & \downarrow v_2 & & \\ & & D & & \end{array}$$

تبدلي أي إن $\gamma \cdot \delta = u$. مما سبق نجد أن الثنائية (A, γ) هي نواة للمورفيزمين τ_1, τ_2 ، وهكذا تكون المتتالية $A \xrightarrow{\tau_1} B \xrightarrow{v_1} D$ تامة، وبالتالي يكون المورفيزم γ مونومورفيزماً قوياً.

٤-٦. النواة المرافقة.

تعريف.

لتكن $\mathcal{C}$ فئة و $N \in ob(\mathcal{C})$ و $f: A \rightarrow N$ مورفيزم للفئة $\mathcal{C}$. نقول إن الثنائية (N, f) تشكل نواة مرافقة للمورفيزمين $u_1, u_2: B \rightarrow A$ إذا تحققت الشروط الآتية:



١ - لأجل أي مورفيزم $u: A \rightarrow X$ يحقق $u \cdot u_1 = u \cdot u_2$ يوجد مورفيزم وحيد $g: N \rightarrow X$ من أجله $g \cdot f = u$.

٢ - لأجل أي مورفيزم $u: A \rightarrow X$ يحقق $g \cdot f = u$ ، فإن $u \cdot u_1 = u \cdot u_2$.

بالاعتماد على التعريف السابق يمكننا صياغة النتيجة الآتية:

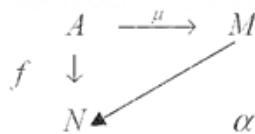
نتيجة.

إذا كانت الثنائية (N, f) نواة مرافقة للمورفيزمين $u_1, u_2: A \rightarrow B$ فإن $f \cdot u_1 = f \cdot u_2$. البرهان.

حسب الشرط (٢) من التعريف فإنه لأجل $X = N$ ولأجل $u = f$ يوجد $I_N: N \rightarrow N$ و الذي يحقق $I_N \cdot f = f$ ومنه يكون $f \cdot u_1 = f \cdot u_2$.

مبرهنة ٤-٦-١.

لتكن $\mathcal{C}$ فئة. و $N, M \in ob(\mathcal{C})$ إذا كانت الثنائيات (N, f) و (M, μ) تشكل كل منهما نواة مرافقة للمورفيزمين $u_1, u_2: B \rightarrow A$ فإنه يوجد إيزومورفيزم وحيد $\alpha: M \rightarrow N$ لأجله المخطط الآتي:



تبديلي، أي إن: $\alpha \cdot \mu = f$.

البرهان.

لنفرض أن كلا من الثنائيات (M, μ) و (N, f) تشكل كل منهما نواة مرافقة للمورفيزمين u_1, u_2 . بما أن المورفيزم $f: N \rightarrow A$ يحقق $I_N \cdot f = f$ ، فإنه حسب (٢) من التعريف يكون $f \cdot u_1 = f \cdot u_2$ ، وحسب (١) من التعريف بما أن (M, μ) نواة مرافقة للمورفيزمين u_1, u_2 يوجد مورفيزم وحيد $\alpha: M \rightarrow N$ لأجله $\alpha \cdot \mu = f$.

من جهة أخرى، بما أن المورفيزم $\mu: A \rightarrow M$ يحقق $I_M \cdot \mu = \mu$ ، فإنه حسب (٢) من التعريف يكون $\mu \cdot u_1 = \mu \cdot u_2$ وحسب (١) من التعريف وبما أن (N, f) نواة مرافقة للمورفيزمين u_1, u_2 فإنه يوجد مورفيزم وحيد $\beta: N \rightarrow M$ لأجله $\beta \cdot f = \mu$ ومنه نجد:

$$(\alpha \cdot \beta) \cdot f = \alpha \cdot (\beta \cdot f) = \alpha \cdot \mu = f$$

وبما أن $I_N \cdot f = f$ نجد أن $\alpha \cdot \beta = I_N$ أيضاً:

$$(\beta \cdot \alpha) \cdot \mu = \beta \cdot (\alpha \cdot \mu) = \beta \cdot f = \mu$$

وبما أن $I_M \cdot \mu = \mu$ نجد أن $\alpha \cdot \beta = I_M$ وهذا يبين أن المورفيزم α إيزومورفيزم.

تمهيدية ٤-٦-٢.

لتكن $\mathfrak{I}$ فئة، و $A, B \in ob(\mathfrak{I})$ و $u_1, u_2: B \rightarrow A \in \mathfrak{I}(B, A)$ مورفيزمات للفئة $\mathfrak{I}$. عندئذ: يوجد دالي مباشر $F: \mathfrak{I} \rightarrow Set's$ معرف بالشكل: أياً كان $X \in ob(\mathfrak{I})$ ، فإن:

$$F(X) = \{f: f \in \mathfrak{I}(A, X); f \cdot u_1 = f \cdot u_2\}$$

البرهان.

واضح أن العلاقة $F: ob(\mathfrak{I}) \rightarrow ob(Set's)$ المعرفة بالشكل: $\forall X \in ob(\mathfrak{I})$ ، فإن:

$$F(X) = \{f: f \in \mathfrak{I}(A, X); f \cdot u_1 = f \cdot u_2\}$$

هي تطبيق؛ لأنه إذا كان $X, Y \in ob(\mathfrak{I})$ بحيث $X = Y$ فإن $F(X) = F(Y)$ ؛ لأنه إذا كان $f \in F(X)$ ، فإن $f \in \mathfrak{I}(A, X) = \mathfrak{I}(A, Y)$ ويحقق $f \cdot u_1 = f \cdot u_2$ وهذا يبين أن $f \in F(Y)$ ، أي إن $F(X) \subseteq F(Y)$. بطريقة مشابهة نجد أن $F(Y) \subseteq F(X)$ ؛ ومنه فإن $F(X) = F(Y)$.

لنعرف $F: Mor(\mathfrak{I}) \rightarrow Mor(Set's)$ كما يلي: ليكن $v: M \rightarrow N \in \mathfrak{I}(M, N)$

لنضع $F(v): F(M) \rightarrow F(N)$ بحيث أياً كان $\lambda \in F(N)$ ، فإن $F(v)(\lambda) = \lambda \cdot v$. فنجد أن F تطبيق. ليكن $M \in ob(\mathfrak{S})$ عندئذ، فإن $F(I_M): F(M) \rightarrow F(M)$ وأنه أياً كان $\lambda \in F(M)$ ، فإن $F(I_M)(\lambda) = \lambda \cdot I_M = \lambda$ وهذا يبين أن $F(I_M) = I_{F(M)}$.
ليكن $v: M \rightarrow N$ ، $w: N \rightarrow D$ حيث $M, N, D \in ob(\mathfrak{S})$ عندئذ $w \cdot v: M \rightarrow D$ أي أن $w \cdot v \in \mathfrak{S}(M, D)$ ، ومنه فإن $F(w \cdot v): F(M) \rightarrow F(D)$ ليكن $\mu \in F(M)$ عندئذ

$$F(w \cdot v)(\mu) = (w \cdot v) \cdot \mu = w \cdot (v \cdot \mu) = F(w)(v \cdot \mu) = F(w)(F(v)(\mu)) =$$

$$= (F(w) \cdot F(v))(\lambda)$$
مما سبق نجد أن $F(w \cdot v) = F(w) \cdot F(v)$ وهكذا نجد أن $F: \mathfrak{S} \rightarrow Set's$ هو دالي مباشر.

مبرهنة ٣-٦-٤.

لتكن $\mathfrak{S}$ فئة، و $u_1, u_2: B \rightarrow A \in \mathfrak{S}(B, A)$ مورفيزمات للفئة $\mathfrak{S}$ حيث $A, B \in ob(\mathfrak{S})$. إذا كانت الثنائية (N, f) نواة مرافقة للمورفيزمين u_1, u_2 ، عندئذ يوجد دالي مباشر $F: \mathfrak{S} \rightarrow Set's$ تمثله الثنائية (N, f) .
البرهان.

لنفرض أن الثنائية (N, f) هي نواة مرافقة للمورفيزمين u_1, u_2 ، عندئذ $f: A \rightarrow N$ حيث $N \in ob(\mathfrak{S})$. حسب التمهيدية (٢-٦-٤) يوجد دالي مباشر $F: \mathfrak{S} \rightarrow Set's$ معرف بالشكل: أياً كان $X \in ob(\mathfrak{S})$ ، فإن:

$$F(X) = \{v: v \in \mathfrak{S}(X, A); v \cdot u_1 = v \cdot u_2\}$$

بما أن $N \in ob(\mathfrak{S})$ ، فإنه حسب المبرهنة (٢-١-٢) يوجد دالي مباشر

$$h_N: \mathfrak{S} \rightarrow Set's$$

لنعرف مورفيزماً دالياً $\Theta: h_N \rightarrow F$ بالشكل: أياً كان $X \in ob(\mathfrak{S})$ ، فإن:

$$\Theta(X): h_N(X) \rightarrow F(X)$$

$$\Theta(X): \mathfrak{S}(N, X) \rightarrow F(X)$$

وأياً كان $\lambda \in \mathfrak{S}(N, X)$ فإن $\Theta(X)(\lambda) = \lambda \cdot f \in F(X)$ وذلك لأن $\lambda \cdot f \in \mathfrak{S}(A, X)$ وبما أن $f \cdot u_1 = f \cdot u_2$ فإن $\lambda \cdot (f \cdot u_1) = \lambda \cdot (f \cdot u_2)$ ومنه $(\lambda \cdot f) \cdot u_1 = (\lambda \cdot f) \cdot u_2$

ليكن $v: X \rightarrow Y \in \mathfrak{Z}(X, Y)$ ولنبرهن على أن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} h_N(X) & \xrightarrow{\Theta(X)} & F(X) \\ h_N(v) \downarrow & & \downarrow F(v) \\ h_N(Y) & \xrightarrow{\Theta(Y)} & F(Y) \end{array}$$

تبديلي، أي $F(v) \cdot \Theta(X) = \Theta(Y) \cdot h_N(v)$.

ليكن $\mu \in h_N(X) = \mathfrak{Z}(N, X)$ عندئذ فإن:

$$\begin{aligned} (F(v) \cdot \Theta(X))(\mu) &= F(v)(\Theta(X)(\mu)) = F(v)(\mu \cdot f) = v \cdot (\mu \cdot f) \\ (\Theta(Y) \cdot h_N(v))(\mu) &= \Theta(Y)(h_N(v)(\mu)) = \Theta(Y)(v \cdot \mu) = (v \cdot \mu) \cdot f = v \cdot (\mu \cdot f) \end{aligned}$$

ومنه نجد أن $(F(v) \cdot \Theta(X))(\mu) = (\Theta(Y) \cdot h_N(v))(\mu)$ أي إن:

$$F(v) \cdot \Theta(X) = \Theta(Y) \cdot h_N(v)$$

وهذا يبين لنا أن $\Theta: h_N \rightarrow F$ مورفيزم دالي.

لنبرهن على وجود مورفيزم دالي آخر $\Gamma: F \rightarrow h_N$ يحقق $\Gamma \cdot \Theta = I_{h_N}$ ، $\Theta \cdot \Gamma = I_F$.
أيأ كان $X \in ob(\mathfrak{Z})$ ، لنعرف $\Gamma: F \rightarrow h_N$ بالشكل الآتي:

$$\Gamma(X): F(X) \rightarrow h_N(X) = \mathfrak{Z}(N, X)$$

وأياً كان $v: A \rightarrow X \in F(X)$ عندئذ، فإن $v \cdot u_1 = v \cdot u_2$ وبما أن الثنائية (N, f) نواة مرافقة للمورفيزمين u_1, u_2 يوجد مورفيزم وحيد $g: N \rightarrow X$ يحقق $g \cdot f = v$. لنضع:

$$\Gamma(X)(v) = g$$

ليكن $\mu: X \rightarrow Y \in \mathfrak{Z}(X, Y)$ ولنبرهن على أن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{\Gamma(X)} & h_N(X) = \mathfrak{Z}(N, X) \\ F(\mu) \downarrow & & \downarrow h_N(\mu) \\ F(Y) & \xrightarrow{\Gamma(Y)} & h_N(Y) = \mathfrak{Z}(N, Y) \end{array}$$

تبديلي، أي إن: $h_N(\mu) \cdot \Gamma(X) = \Gamma(Y) \cdot F(\mu)$.

ليكن $v: A \rightarrow X \in F(X)$ عندئذ:

$$(h_N(\mu) \cdot \Gamma(X))(v) = h_N(\mu)(\Gamma(X)(v)) = h_N(\mu)(g) = \mu \cdot g$$

حيث إن $g: N \rightarrow X$ يحقق $g \cdot f = v$ كما أن:

$$(\Gamma(Y) \cdot F(\mu))(v) = \Gamma(Y)(\mu \cdot v)$$

وبما أن $g \cdot f = v$ ، فإن $\mu \cdot (g \cdot f) = \mu \cdot v$ وبالتالي يكون $(\mu \cdot g) \cdot f = \mu \cdot v$ ومنه فإن

$$(\Gamma(Y) \cdot F(\mu))(v) = \Gamma(Y)(\mu \cdot v) = \mu \cdot g$$

مما سبق نجد أن:

$$(h_N(\mu) \cdot \Gamma(X))(v) = (\Gamma(Y) \cdot F(\mu))(v)$$

وبالتالي فإن $h_N(\mu) \cdot \Gamma(X) = \Gamma(Y) \cdot F(\mu)$

وهذا يبين لنا أن $\Gamma: F \rightarrow h_N$ مورفيزم دالي. لنبرهن الآن على أن $\Theta \cdot \Gamma = I_F$.

ليكن $\alpha \in F(X)$ عندئذ $\alpha: A \rightarrow X \in \mathfrak{S}(A, X)$ ، بما أن (N, f) نواة مرافقة للمورفيزمين u_1, u_2 فإنه يوجد مورفيزم وحيد $g: N \rightarrow X$ يحقق $g \cdot f = \alpha$ ومنه:

$$(\Theta(X) \cdot \Gamma(X))(\alpha) = \Theta(X)(\Gamma(X)(\alpha)) = \Theta(X)(g) = g \cdot f = \alpha$$

وهذا يبين أن $\Theta \cdot \Gamma = I_F$

من جهة أخرى، ليكن $\beta \in h_N(X) = \mathfrak{S}(N, X)$ عندئذ $\beta: N \rightarrow X$ وأن:

$$(\Gamma(X) \cdot \Theta(X))(\beta) = \Gamma(X)(\Theta(X)(\beta)) = \Gamma(X)(\beta \cdot f)$$

بما أن $f \cdot u_1 = f \cdot u_2$ فإن $(\beta \cdot f) \cdot u_1 = (\beta \cdot f) \cdot u_2$ وأن $\beta \cdot f: A \rightarrow X$ فإنه يوجد

مورفيزم وحيد $g_0: N \rightarrow X$ يحقق $g_0 \cdot f = \beta \cdot f$ ومنه نجد أن $g_0 = \beta$ ؛ وبالتالي:

$$(\Gamma(X) \cdot \Theta(X))(\beta) = \Gamma(X)(\Theta(X)(\beta)) = \Gamma(X)(\beta \cdot f)$$

حيث $f \cdot g = v$ وهكذا نجد أن $\Gamma \cdot \Theta = I_{h_N}$. مما سبق نجد أن $\Theta: \hat{h}_N \rightarrow F$ إيزومورفيزم

دالي.

تمهيدية ٤-٦-٤.

لنكن $\mathfrak{S}$ فئة، و $A, B \in ob(\mathfrak{S})$ و $u_1, u_2: B \rightarrow A \in \mathfrak{S}(B, A)$ مورفيزمات للفئة $\mathfrak{S}$.

إذا كانت الثنائية (N, f) نواة مرافقة للمورفيزمين u_1, u_2 ، عندئذ المورفيزم f إيدومورفيزم.

البرهان.

لنفرض أن الثنائية (N, f) نواة مرافقة للمورفيزمين u_1, u_2 ، عندئذ $f: A \rightarrow N$.

لنبرهن على أنه أيأ كان $X \in ob(\mathfrak{S})$ ، فإن التطبيق $\beta: \mathfrak{S}(N, X) \rightarrow \mathfrak{S}(A, X)$ المعروف

بالشكل: أيأ كان $g \in \mathfrak{S}(N, X)$ ، فإن $\beta(g) = g \cdot f$ متباين. ليكن $v_1, v_2 \in \mathfrak{S}(N, X)$

بحيث $\beta(v_1) = \beta(v_2)$ عندئذ فإن $v_1 \cdot f = v_2 \cdot f$ بما أن $v_1 \cdot f : A \rightarrow X$ وإن (N, f) نواة مرافقة للمورفيزمين u_1, u_2 ، فإن $f \cdot u_1 = f \cdot u_2$ ومنه فإن:

$$(v_1 \cdot f) \cdot u_1 = v_1 \cdot (f \cdot u_1) = v_1 \cdot (f \cdot u_2) = (v_1 \cdot f) \cdot u_2$$

ومنه يوجد مورفيزم وحيد $g : N \rightarrow X$ يحقق $g \cdot f = v_1 \cdot f = v_2 \cdot f$ وهذا يبين أن $v_1 = v_2$ وبالتالي فإن التطبيق β متباين، أي إن المورفيزم f إبيومورفيزم.

تعريف.

لتكن $\mathcal{I}$ فئة. نقول عن متتالية المورفيزمات:

$$X \xrightarrow[u]{v} Y \xrightarrow{w} Z$$

للفئة $\mathcal{I}$ إنها تامة إذا كانت الثنائية (Z, w) نواة مرافقة للمورفيزمين u, v .

نتيجة.

لتكن $\mathcal{I}$ فئة. إذا كانت متتالية المورفيزمات $X \xrightarrow[u]{v} Y \xrightarrow{w} Z$ للفئة $\mathcal{I}$ ، تامة عندئذ

$$w \cdot u = w \cdot v$$

البرهان.

نفرض أن متتالية المورفيزمات $X \xrightarrow[u]{v} Y \xrightarrow{w} Z$ تامة، عندئذ فإن الثنائية (Z, w)

هي نواة مرافقة للمورفيزمين u, v ، وحسب الشرط (٢) من تعريف النواة المرافقة نجد أن

$$w \cdot u = w \cdot v$$

تعريف.

لتكن $\mathcal{I}$ فئة وليكن $u : X \rightarrow Y$ مورفيزماً للفئة $\mathcal{I}$. نقول إن u إبيومورفيزم قوي للفئة $\mathcal{I}$

إذا كان u إبيومورفيزماً للفئة $\mathcal{I}$ وكان المجموع الطبقي $X \amalg X$ موجوداً وكانت المتتالية:

$$X \amalg X \xrightarrow[p_2]{p_1} X \xrightarrow{u} Y$$

تامة، حيث p_1, p_2 المورفيزمات الإسقاطية.

نعلم أنه إذا كان المورفيزم u للفئة $\mathcal{I}$ مونومورفيزماً وإبيومورفيزماً، فليس بالضرورة أن

يكون إيزومورفيزماً. التمهيدية الآتية تبين لنا متى يكون u إيزومورفيزماً.

تمهيدية ٤-٦-٥.

لتكن $\mathcal{C}$ فئة، وليكن $u: X \rightarrow Y$ مورفيزماً للفئة $\mathcal{C}$. إذا كان u مونومورفيزماً وإبيومورفيزماً قوياً للفئة $\mathcal{C}$ عندئذ يكون u إيزومورفيزماً للفئة $\mathcal{C}$.

البرهان.

لنفرض أن المورفيزم $u: X \rightarrow Y$ مونومورفيزم وإبيومورفيزم قوي للفئة $\mathcal{C}$ عندئذ تكون المتتالية $X \prod_I X \xrightarrow{p_1} X \xrightarrow{u} Y$ تامة، وحسب التعريف تكون الثنائية (X, u) نواة مرافقة للمورفيزمين p_1, p_2 ؛ وبالتالي يكون $u \cdot p_1 = u \cdot p_2$ ولكون المورفيزم u مونومورفيزماً نجد أن $p_1 = p_2$. من جهة أخرى، بما أن الثنائية (X, u) نواة مرافقة للمورفيزمين p_1, p_2 ؛ فإنه لأجل المورفيزم I_X يوجد مورفيزم وحيد $v: Y \rightarrow X$ لأجله $v \cdot u = I_X$.

من جهة أخرى، إن $u \cdot v: Y \rightarrow Y$ مورفيزم للفئة $\mathcal{C}$ ويحقق:

$$(u \cdot v) \cdot u = u \cdot (v \cdot u) = u \cdot I_X = u$$

وبما أن $I_Y \cdot u = u$ نجد أن $u \cdot v = I_Y$ وهذا يبين أن u إيزومورفيزم للفئة $\mathcal{C}$.

تمهيدية ٤-٦-٦.

لتكن $\mathcal{C}$ فئة. إذا كانت متتالية المورفيزمات $A \xrightarrow{u_1} B \xrightarrow{\gamma} C$ للفئة $\mathcal{C}$ تامة، عندئذ يكون المورفيزم γ إبيومورفيزماً قوياً.

البرهان.

لنفرض أن متتالية المورفيزمات $A \xrightarrow{u_1} B \xrightarrow{\gamma} C$ تامة، عندئذ تكون الثنائية (C, γ) نواة مرافقة للمورفيزمين u_1, u_2 وحسب التمهيدية (٤-٦-٤) يكون المورفيزم $\gamma: B \rightarrow C$ إبيومورفيزماً. أيضاً لكون الثنائية (C, γ) نواة مرافقة للمورفيزمين u_1, u_2 فإن الجداء الطبقي $B \prod_C B$ موجود.

لنبرهن الآن على أن المتتالية $B \prod_C B \xrightarrow{p_1} B \xrightarrow{\gamma} C$ حيث p_1, p_2 المورفيزمات

الإسقاطية تامة. بالاعتماد على الشرط (٢) من تعريف النواة مرافقة نجد أن:

$$\gamma \cdot p_1 = \gamma \cdot p_2$$

من ناحية أخرى، ليكن $v: B \rightarrow D$ مورفيزماً للفئة $\mathcal{C}$ يحقق $v \cdot p_1 = v \cdot p_2$ عندئذ يوجد مورفيزم وحيد $\alpha: A \rightarrow B \amalg_C B$ لأجله المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & B \amalg_C B \\ & \searrow u_1 & \swarrow p_i \\ & B & \end{array}$$

تبديلي، أي إن $p_i \cdot \alpha = u_i$ حيث $i = 1, 2$ ومنه نجد أن:

$$v \cdot u_1 = v \cdot (p_1 \cdot \alpha) = (v \cdot p_1) \cdot \alpha = (v \cdot p_2) \cdot \alpha = v \cdot u_2$$

ولكون الثانية (C, γ) نواة مرافقة للمورفيزمين u_1, u_2 فإنه يوجد مورفيزم وحيد $\delta: C \rightarrow D$ لأجله المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccccc} & & C & & \\ & \nearrow \delta & \uparrow & \xrightarrow{\gamma} & \\ D & \xleftarrow{v} & B & \xrightarrow{u_1} & A \\ & & \uparrow & \searrow u_2 & \\ & & A & & \end{array}$$

تبديلي، أي إن $\delta \cdot \gamma = v$. مما سبق نجد أن الثانية (C, γ) هي نواة مرافقة للمورفيزمين

p_1, p_2 ، وهكذا نجد أن المتتالية $B \amalg_C B \xrightarrow{p_1} B \xrightarrow{\gamma} C$ تامة؛ وبالتالي يكون المورفيزم γ إبيمورفيزماً قوياً. ◻

الفصل الخامس

النهايات الإسقاطية والاستقرائية

١-٥. النهايات الإسقاطية (العكسية).

تعريف.

لتكن $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ فئتين، وليكن $F: \mathcal{T}_1 \rightarrow \mathcal{T}_2$ دالياً مباشراً. ليكن $A \in ob(\mathcal{T}_2)$ ولنفرض أن المورفيزمات $u_X: A \rightarrow F(X)$ معرفة لأجل كل $X \in ob(\mathcal{T}_1)$. نسمي A مع المورفيزمات u_X نهاية إسقاطية (عكسية) للدالي F إذا تحققت الشروط الآتية:

١ - لأجل أي مورفيزم $\alpha: X \rightarrow Y$ للفئة $\mathcal{T}_1$ فإن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u_X} & F(X) \\ & \searrow & \downarrow F(\alpha) \\ & & F(Y) \\ & \nearrow u_Y & \\ & & \end{array}$$

تبديلي، أي إن: $F(\alpha) \cdot u_X = u_Y$.

٢ - إذا كان $B \in ob(\mathcal{T}_2)$ وكانت المورفيزمات $v_X: B \rightarrow F(X)$ معرفة لأجل كل $X \in ob(\mathcal{T}_1)$ وتحقق أن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{v_X} & F(X) \\ & \searrow & \downarrow F(\alpha) \\ & & F(Y) \\ & \nearrow v_Y & \\ & & \end{array}$$

تبديلي، أي إن: $F(\alpha) \cdot v_X = v_Y$. وذلك لأجل جميع المورفيزمات $\alpha: X \rightarrow Y$ للفئة $\mathcal{T}_1$ ، فإنه يوجد مورفيزم وحيد $v: B \rightarrow A$ لأجله المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{v} & A \\ & \searrow & \downarrow u_X \\ & & F(X) \\ & \nearrow v_X & \\ & & \end{array}$$

تبديلي، أي إن: $u_X \cdot v = v_X$. وذلك أيأ كان $X \in ob(\mathcal{T}_1)$.

تمهيدية ٥-١-١.

لتكن M مجموعة غير خالية، ولتكن $\mathcal{I}$ فئة ما. لنشكل فئة $\mathcal{I}_0$ والمؤلفة من:

- $ob(\mathcal{I}_0)$. يتألف من جميع عناصر المجموعة M .

- $Mor(\mathcal{I}_0)$. أيأ كان $i, j \in ob(\mathcal{I}_0)$. لنضع:

$$\mathcal{I}_0(i, j) = Hom_{\mathcal{I}_0}(i, j) = \begin{cases} \rho_i & \text{when } i = j \\ \emptyset & \text{when } i \neq j \end{cases}$$

حيث ρ_i هي العلاقة الثنائية المعرفة على المجموعة M بالشكل الآتي:

$$\rho_i = \{(i, i)\} \subseteq M \times M$$

ف نجد أن $\mathcal{I}_0$ فئة بالنسبة لعملية تركيب العلاقات الثنائية المعرفة على M وهذه العملية تجميعية وتقبل عنصراً محايداً.

لتكن $(A_i)_{i \in M}$ أسرة من أشياء الفئة $\mathcal{I}$. لنعرف $F: \mathcal{I}_0 \rightarrow \mathcal{I}$ بالشكل الآتي:

أولاً: $F: ob(\mathcal{I}_0) \rightarrow ob(\mathcal{I})$ المعرفة بالشكل الآتي: أيأ كان $i \in ob(\mathcal{I}_0)$ ، لنضع:

$$F(i) = A_i \in ob(\mathcal{I})$$

ف نجد أن $F: ob(\mathcal{I}_0) \rightarrow ob(\mathcal{I})$ هو تطبيق أشياء.

ثانياً: $F: Mor(\mathcal{I}_0) \rightarrow Mor(\mathcal{I})$ المعرفة بالشكل: أيأ كان $\alpha: i \rightarrow j \in Mor(\mathcal{I}_0)$

حيث $i, j \in ob(\mathcal{I}_0)$ ، نميز حالتين:

- إذا كان $i = j$ فإن $\alpha = \rho_i: i \rightarrow i$ ، لنضع في هذه الحالة:

$$F(\alpha) = F(\rho_i): F(i) \rightarrow F(i)$$

$$: A_i \rightarrow A_i = I_{A_i} = I_{F(i)}$$

- إذا كان $i \neq j$ لنضع في هذه الحالة:

$$F(\alpha) \in \mathcal{I}_0(i, j) = \emptyset$$

ف نجد بهذا الشكل أن F هو دالي مباشر.

ليكن $A \in ob(\mathcal{I})$. الشروط الآتية متكافئة لأجل الدالي F :

١ - A هو جداء للأسرة $(A_i)_{i \in M}$.

٢ - A نهاية إسقاطية (عكسية) للدالي F .

البرهان.

(1) $\Leftrightarrow$ (2). لنفرض أن A هو جداء للأسرة $(A_i)_{i \in M}$ ، عندئذ توجد المورفيزمات الإسقاطية $u_i : A \rightarrow A_i$ وذلك أياً كان $i \in \text{ob}(\mathfrak{S}_0)$.
 - ليكن $\alpha : i \rightarrow j \in \mathfrak{S}_0$ مورفيزماً للفئة $\mathfrak{S}_0$ ، عندئذ المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u_i} & A_i = F(i) \\ & \searrow & \downarrow F(\alpha) \\ & & A_j = F(j) \end{array}$$

تبديلي؛ لأنه من أجل $i = j$ فإن $F(\alpha) \cdot u_i = I_{A_i} \cdot u_i = u_i = u_j$.
 - ليكن $B \in \text{ob}(\mathfrak{S})$ ولنفرض أن المورفيزمات $v_i : B \rightarrow A_i = F(i)$ معرفة لأجل كل $i \in \text{ob}(\mathfrak{S}_0)$ ، ولنفرض أيضاً أن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{v_i} & A_i = F(i) \\ & \searrow & \downarrow F(\alpha) \\ & & A_j = F(j) \end{array}$$

تبديلي وذلك أياً كان $\alpha : i \rightarrow j \in \mathfrak{S}_0(i, j)$.
 عندئذ، بما أن A هو جداء للأسرة $(A_i)_{i \in M}$ ، حسب الفرض فإنه يوجد مورفيزم وحيد $v : B \rightarrow A$ لأجله المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{v} & A \\ & \searrow & \downarrow u_i \\ & & A_i = F(i) \end{array}$$

أي إن $u_i \cdot v = v_i$ وذلك أياً كان $i \in M$. مما سبق نجد أن A نهاية إسقاطية للدالي F .
 (2) $\Leftrightarrow$ (1). لنفرض أن A نهاية إسقاطية للدالي F ، عندئذ أياً كان $i \in \text{ob}(\mathfrak{S}_0)$ ، فإن المورفيزمات $u_i : A \rightarrow F(i) = A_i$ تكون معرفة.

ليكن $B \in \text{ob}(\mathfrak{S})$ ولتكن أسرة من المورفيزمات للفئة $\mathfrak{S}$ $(v_i : B \rightarrow A_i = F(i))_{i \in M}$ لنفرض أن $\alpha : i \rightarrow j \in \mathfrak{S}_0(i, j)$ ، عندئذ المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{v_i} & A_i = F(i) \\ & \searrow & \downarrow F(\alpha) \\ & & A_j = F(j) \end{array}$$

تبديلي؛ لأنه عندما $i = j$ ، فإن $v_i = v_j = v_i = v_j$ ، ولما كان A نهاية إسقاطية للدالي F ، فإنه حسب التعريف يوجد مورفيزم وحيد $v: B \rightarrow A$ للفئة $\mathfrak{S}$ لأجله المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{v} & A \\ & \searrow v_i & \downarrow u_i \\ & & A_i = F(i) \end{array}$$

تبديلي، أي إن: $u_i \cdot v = v_i$ وذلك أياً كان $i \in M$. وهذا يبين أن A هو جداء للأسرة $(A_i)_{i \in M}$.

تمهيدية ٢-١-٥.

لتكن $\mathfrak{S}$ فئة، وليكن $u_1, u_2: A \rightarrow B$ مورفيزمات للفئة $\mathfrak{S}$. لنأخذ الفئة ثنائية الشيء $\mathfrak{S}_0$ المؤلفة من الأشياء X, Y والمورفيزمات $v_1, v_2: X \rightarrow Y$ إضافة إلى I_X, I_Y . لنعرف $F: \mathfrak{S}_0 \rightarrow \mathfrak{S}$ بالشكل الآتي:

$$F(v_1) = u_1, \quad F(v_2) = u_2, \quad F(X) = A, \quad F(Y) = B$$

إن F دالي مباشر، (أنظر التمرين المحلول (٢-٣)).

ليكن $K \in ob(\mathfrak{S})$. الشروط الآتية متكافئة:

١ - K نواة للمورفيزمات u_1, u_2 .

٢ - K نهاية إسقاطية (عكسية) للدالي F .

البرهان.

(1) $\Leftrightarrow$ (2). لنفرض أن K نواة للمورفيزمات u_1, u_2 ، عندئذ حسب التعريف يوجد مورفيزم

$f: K \rightarrow A$ للفئة $\mathfrak{S}$ يحقق $u_1 \cdot f = u_2 \cdot f$. لنعرف المورفيزمات $u_X: K \rightarrow F(X)$ ولأجل كل $X \in ob(\mathfrak{S}_0)$.

لأجل $X \in ob(\mathfrak{S}_0)$ لنضع: $u_X = f: K \rightarrow A = F(X)$.

ولأجل $Y \in ob(\mathfrak{S}_0)$ ، لنضع: $u_Y = u_1 \cdot f: K \rightarrow B = F(Y)$. فنجد أن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{u_X} & F(X) \\ & \searrow u_Y & \downarrow F(\alpha) \\ & & F(Y) \end{array}$$

تبديلي لأجل كل مورفيزم $\alpha: X \rightarrow Y$ للفئة $\mathcal{S}_0$ ، لأنه:

- إذا كان $\alpha = I_X$ نجد أن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{u_X = f} & F(X) \\ & \searrow & \downarrow F(I_X) = I_{F(X)} = I_A \\ & & F(X) \end{array}$$

يحق $I_A \cdot f = f$ وبالتالي $I_A \cdot u_X = u_X$ أي إن المخطط تبدلي.

- إذا كان $\alpha = I_Y$ نجد أن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{u_Y = u_1 \cdot f} & F(Y) \\ & \searrow & \downarrow F(I_Y) = I_{F(Y)} = I_B \\ & & F(Y) \end{array}$$

يحق $I_B \cdot (u_1 \cdot f) = u_1 \cdot f = u_Y$ وبالتالي $I_B \cdot u_Y = u_Y$ أي إن المخطط تبدلي.

- إذا كان $\alpha = v_1: X \rightarrow Y$ نجد أن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{u_X = f} & F(X) \\ & \searrow & \downarrow F(v_1) = u_1 \\ & & F(Y) \end{array}$$

يحق $F(v_1) \cdot u_X = u_1 \cdot f = u_Y$ أي إن المخطط تبدلي.

- إذا كان $\alpha = v_2: X \rightarrow Y$ نجد أن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{u_X = f} & F(X) \\ & \searrow & \downarrow F(v_2) = u_2 \\ & & F(Y) \end{array}$$

يحق $F(v_2) \cdot u_X = u_2 \cdot f = u_1 \cdot f = u_Y$ أي إن المخطط تبدلي.

ليكن $D \in \text{ob}(\mathcal{S})$ ولنفرض أن المورفيزمات:

$$w_X: D \rightarrow F(X) = A, \quad w_Y: D \rightarrow F(Y) = B$$

معرفة وتحقق أن المخططات الآتية:

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{w_X} & F(X) = A \\ & \searrow & \downarrow F(v_1) = u_1 \\ & & F(Y) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{w_X} & F(X) = A \\ & \searrow & \downarrow F(v_2) = u_2 \\ & & F(Y) \end{array}$$

تبدلية، أي إن $u_1 \cdot w_X = w_Y$ ومنه نجد أن $u_2 \cdot w_X = w_Y$ ولما

كانت K نواة للمورفيزمات u_1, u_2 فإنه يوجد مورفيزم وحيد $g: D \rightarrow K$ للفئة $\mathcal{I}$ لأجله المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} & & K \\ g \nearrow & & \downarrow f \\ D & \xrightarrow{w_Y} & A \end{array}$$

تبديلي، أي إن $f \cdot g = w_X$ ، ومنه نجد أن:

$$w_Y = u_1 \cdot w_X = u_1 \cdot (f \cdot g) = (u_1 \cdot f) \cdot g = f \cdot g$$

وهذا يبين لنا أن المخططات الآتية:

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{g} & K \\ & \searrow u_X & \downarrow u_X \\ & & F(X) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{g} & K \\ & \searrow u_Y & \downarrow u_Y \\ & & F(Y) \end{array}$$

تبديلية، لأن $w_X = f \cdot g = u_X \cdot g$ وإن:

$$w_Y = u_1 \cdot w_X = u_1 \cdot (f \cdot g) = (u_1 \cdot f) \cdot g = f \cdot g = u_Y \cdot g$$

مما سبق نجد أن K نهاية إسقاطية (عكسية) للدالي F .

(1) $\Leftrightarrow$ (2). لنفرض أن K نهاية إسقاطية للدالي F ، عندئذ أياً كان $D \in \text{ob}(\mathcal{I}_0)$ ، فإن المورفيزمات $u_D: K \rightarrow F(D)$ تكون معرفة.

لأجل $X \in \text{ob}(\mathcal{I}_0)$ ، لنضع: $f = u_X: K \rightarrow F(X)$ و $u_Y: K \rightarrow F(Y)$ ، ولنبرهن على أن الثنائية (K, f) هي نواة للمورفيزمات u_1, u_2 .

ليكن $v: M \rightarrow A$ مورفيزماً للفئة $\mathcal{I}$ من أجله $u_1 \cdot v = u_2 \cdot v$ ولنأخذ المورفيزمات:

$$v_X = v: M \rightarrow F(X) = A$$

$$v_Y = u_1 \cdot v: M \rightarrow F(Y) = B$$

فنجد أن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{v} & F(D) \\ & \searrow v_D & \downarrow F(\alpha) \\ & & F(D') \end{array}$$

تبديلي، أي إن $F(\alpha) \cdot v_D = v_{D'}$ وذلك لأجل كل مورفيزم $\alpha: D \rightarrow D'$ للفئة $\mathcal{I}_0$ ؛ لأنه - إذا كان $\alpha = I_X$ نجد أن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc}
 M & \xrightarrow{v_X} & F(X) = A \\
 & \searrow v_X & \downarrow F(I_X) = \downarrow I_{F(X)} = I_A \\
 & & F(X) = A
 \end{array}$$

تبديلي، لأن $I_A \cdot v_X = v_X$.

- إذا كان $\alpha = I_Y$ نجد أن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc}
 M & \xrightarrow{v_Y} & F(Y) = B \\
 & \searrow v_Y & \downarrow F(I_Y) = \downarrow I_{F(Y)} = I_B \\
 & & F(Y) = B
 \end{array}$$

تبديلي، لأن $I_B \cdot v_Y = v_Y$.

- إذا كان $\alpha = v_1 : X \rightarrow Y$ نجد أن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc}
 M & \xrightarrow{v_X} & F(X) = A \\
 & \searrow v_Y & \downarrow F(v_1) = u_1 \\
 & & F(Y) = B
 \end{array}$$

تبديلي، لأن $F(v_1) \cdot v_X = u_1 \cdot v = v_Y$.

- إذا كان $\alpha = v_2 : X \rightarrow Y$ نجد أن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc}
 M & \xrightarrow{v_X} & F(X) = A \\
 & \searrow v_Y & \downarrow F(v_2) = u_2 \\
 & & F(Y) = B
 \end{array}$$

تبديلي، لأن $F(v_2) \cdot v_X = u_2 \cdot v_X = u_2 \cdot v = u_1 \cdot v = v_Y$.

وحسب تعريف النهاية العكسية يوجد مورفيزم وحيد $g : M \rightarrow K$ يحقق أن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc}
 M & \xrightarrow{g} & K \\
 & \searrow v_X & \downarrow u_X \\
 & & F(X)
 \end{array}$$

تبديلي أي إن $u_X \cdot g = v_X$ ، وبالتالي يكون $f \cdot g = u_X \cdot g = v_X = v$.

- ليكن $w : D \rightarrow A = F(X)$ مورفيزماً للفئة $\mathcal{C}$ لأجله يوجد مورفيزم $\lambda : D \rightarrow K$ للفئة

$\mathcal{C}$ والذي يحقق $f \cdot \lambda = w$ ولنبرهن على أن $u_1 \cdot w = u_2 \cdot w$ إن:

$$u_1 \cdot w = u_1 \cdot f \cdot \lambda = u_1 \cdot u_X \cdot \lambda$$

$$u_2 \cdot w = u_2 \cdot f \cdot \lambda = u_2 \cdot u_X \cdot \lambda$$

وبما أن K نهاية عكسية للدالي F فإن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{u_X} & F(X) \\ & \searrow u_Y & \downarrow F(\alpha) \\ & & F(Y) \end{array}$$

تبديلي وذلك لأجل كل مورفيزم $\alpha: X \rightarrow Y$ للفئة $\mathcal{S}_0$. وهذا يبين أن:

$$u_1 \cdot u_X = F(v_1) \cdot u_X = u_Y, \quad u_2 \cdot u_X = F(v_2) \cdot u_X = u_Y$$

ومنه نجد أن $u_1 \cdot w = u_2 \cdot w$ وهكذا تكون الثنائية (K, f) نواة للمورفيزمات u_1, u_2 .

مبرهنة ٣-١-٥.

لتكن $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ فئات، وليكن $F_i: \mathcal{S}_i \rightarrow \mathcal{S}$ و $G: \mathcal{S}_2 \rightarrow \mathcal{S}_1$ حيث $i=1,2$ دوال مباشرة. من أجل $i=1,2$ لنفرض أن $A_i \in ob(\mathcal{S})$ وأن الثنائيات $(A_i, u_X^i: A_i \rightarrow F_i(X))$ معرفة لأجل كل $X \in ob(\mathcal{S}_i)$ وتشكل نهايات إسقاطية للدوال F_i . أخيراً لنفرض أن $f: F_1 G \rightarrow F_2$ مورفيزم دالي، عندئذ يوجد مورفيزم وحيد $u: A_1 \rightarrow A_2$ للفئة $\mathcal{S}$ لأجله المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccccc} A_1 & \xrightarrow{u} & A_2 & & \\ u_{G(X)}^1 \downarrow & & \downarrow u_X^2 & & \\ F_1(G(X)) & \xrightarrow{f(X)} & F_2(X) & & \end{array}$$

تبديلي، أي إن $f(X) \cdot u_{G(X)}^1 = u_X^2 \cdot u$ وذلك لأجل كل $X \in ob(\mathcal{S}_2)$. البرهان.

نلاحظ أنه لأجل أي مورفيزم $v: X \rightarrow Y$ للفئة $\mathcal{S}_2$ حيث $X, Y \in ob(\mathcal{S}_2)$ ولما كان $f: F_1 G \rightarrow F_2$ مورفيزماً دالياً، فإن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccccc} F_1(G(X)) & \xrightarrow{f(X)} & F_2(X) & & \\ F_1(G(v)) \downarrow & & \downarrow F_2(v) & & \\ F_1(G(Y)) & \xrightarrow{f(Y)} & F_2(Y) & & \end{array}$$

تبديلي، أي إن $f(Y) \cdot F_1(G(v)) = F_2(v) \cdot f(X)$

من جهة أخرى، بما أن الثنائية $(A_1, u_D^1: A_1 \rightarrow F_1(D))$ نهاية إسقاطية للدالي F_1 ، فإن المورفيزمات $u_D^1: A_1 \rightarrow F_1(D)$ معرفة لأجل كل $D \in ob(\mathcal{S}_1)$ ولما كان

$G(X), G(Y) \in ob(\mathfrak{T}_1)$ فإن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} A_1 & \xrightarrow{u_{G(X)}^1} & F_1(G(X)) \\ & \searrow & \downarrow F_1(G(v)) \\ & & F_1(G(Y)) \end{array}$$

تبديلي، أي إن $u_{G(X)}^1 \cdot F_1(G(v)) = u_{G(Y)}^1$ ومنه نجد أن

$$\begin{aligned} f(Y) \cdot u_{G(Y)}^1 &= f(Y) \cdot (F_1(G(v)) \cdot u_{G(X)}^1) = (f(Y) \cdot F_1(G(v))) \cdot u_{G(X)}^1 = \\ &= F_2(v) \cdot f(X) \cdot u_{G(X)}^1 \end{aligned}$$

ولما كانت الثنائية $(A_2, u_X^2 : A_2 \rightarrow F_2(D))$ نهاية إسقاطية للدالي F_2 وإن المورفيزمات $f(X) \cdot u_{G(X)}^1 : A_1 \rightarrow F_2(D)$ معرفة لأجل كل $X \in ob(\mathfrak{T}_2)$ فإنه حسب الشرط (٢) من تعريف النهاية الإسقاطية، يوجد مورفيزم وحيد $u : A_1 \rightarrow A_2$ لأجله المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} A_1 & \xrightarrow{u} & A_2 \\ & \searrow & \downarrow u_X^2 \\ & & F_2(X) \end{array}$$

تبديلي، أي إن $u_X^2 \cdot u = f(X) \cdot u_{G(X)}^1$ وهكذا نجد أن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccccc} & A_1 & \xrightarrow{u} & A_2 & \\ & \downarrow & & \downarrow & \\ u_{G(X)}^1 & & & & u_X^2 \\ & F_1(G(X)) & \xrightarrow{f(X)} & F_2(X) & \end{array}$$

تبديلي وذلك لأجل كل $X \in ob(\mathfrak{T}_2)$

مبرهنة ٥-١-٤.

لتكن $\mathfrak{T}, \mathfrak{T}_1$ فئتين، وليكن $F_1 : \mathfrak{T}_1 \rightarrow \mathfrak{T}$ دالياً مباشراً، وليكن $A_1, A_2 \in ob(\mathfrak{T})$ ولنفرض أن الثنائيات $(A_1, u_X^1 : A_1 \rightarrow F(X))$ و $(A_2, u_X^2 : A_2 \rightarrow F(X))$ هي نهايات إسقاطية للدالي F . عندئذ يوجد إيزومورفيزم وحيد $u : A_1 \rightarrow A_2$ للفئة $\mathfrak{T}$ لأجله $u_X^1 = u_X^2 \cdot u$.
البرهان.

لنفرض أن كلا من (A_1, u_X^1) و (A_2, u_X^2) نهاية إسقاطية للدالي F ، بما أن (A_1, u_X^1) وإن المورفيزمات $u_X^2 : A_2 \rightarrow F(X)$ معرفة لأجل كل $X \in ob(\mathfrak{T}_1)$ لأنها نهاية

إسقاطية) وتحقق أن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} A_2 & \xrightarrow{u_X^2} & F(X) \\ & \searrow & \downarrow F(\alpha) \\ & & F(Y) \end{array}$$

تبديلي، أي إن $F(\alpha) \cdot u_X^2 = u_Y^2$ وذلك لأجل كل مورفيزم $\alpha: X \rightarrow Y$ للفئة $\mathcal{S}_1$. وحسب الشرط (٢) من التعريف فإنه يوجد مورفيزم وحيد $v: A_2 \rightarrow A_1$ لأجله المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} A_2 & \xrightarrow{v} & A_1 \\ & \searrow & \downarrow u_X^1 \\ & & F(X) \end{array}$$

تبديلي، أي إن $u_X^1 \cdot v = u_X^2$.

أيضاً بما أن (A_2, u_X^2) نهاية إسقاطية للدالي F ولما كان $A_1 \in \text{ob}(\mathcal{S})$ وإن المورفيزمات $u_X^1: A_1 \rightarrow F(X)$ معرفة لأجل كل $X \in \text{ob}(\mathcal{S}_1)$ (لأنها نهاية إسقاطية) وتحقق أن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} A_1 & \xrightarrow{u_Y^1} & F(X) \\ & \searrow & \downarrow F(\alpha) \\ & & F(Y) \end{array}$$

تبديلي، أي إن $F(\alpha) \cdot u_X^1 = u_Y^1$ وذلك لأجل كل مورفيزم $\alpha: X \rightarrow Y$ للفئة $\mathcal{S}_1$. وحسب الشرط (٢) من التعريف فإنه يوجد مورفيزم وحيد $u: A_1 \rightarrow A_2$ لأجله المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} A_1 & \xrightarrow{u} & A_2 \\ & \searrow & \downarrow u_X^2 \\ & & F(X) \end{array}$$

تبديلي، أي إن $u_X^2 \cdot u = u_X^1$ ومنه نجد أن:

$$u_X^1 = u_X^2 \cdot u = (u_X^1 \cdot v) \cdot u = u_X^1 \cdot (v \cdot u)$$

$$u_X^2 = u_X^1 \cdot v = (u_X^2 \cdot u) \cdot v = u_X^2 \cdot (u \cdot v)$$

ولما كان المورفيزم المطابق I_{A_1} هو المورفيزم الوحيد الذي لأجله المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc}
 A_1 & \xrightarrow{I_A} & A_1 \\
 & \searrow u_X^1 & \downarrow u_X^1 \\
 & & F(X)
 \end{array}$$

تبديلي، نجد أن $v \cdot u = I_A$ وللأسبب نفسه، فإن $u \cdot v = I_A$ وهذا يبين أن المورفيزم u هو إيزومورفيزم وهو وحيد.

تعريف.

بالاعتماد على المبرهنة السابقة نجد أن لكل دالي مباشر نهاية إسقاطية (عكسية) واحدة فقط (في حال وجودها). لذلك سوف نرمز للنهاية العكسية للدالي F بالشكل $\text{Lim}(F)$.

تعريف.

نقول عن الفئة $\mathcal{I}$ إنها صغيرة إذا كانت جميع أشیائها مجموعات.

مبرهنة ٥-١-٥.

لتكن $\mathcal{I}_1$ فئة صغيرة، و $\mathcal{I}$ فئة ما. لنفرض أن $F: \mathcal{I}_1 \rightarrow \mathcal{I}$ دالي. الشروط الآتية متكافئة:

- ١ - الدالي F يملك نهاية إسقاطية (عكسية).
- ٢ - الفئة $\mathcal{I}$ هي فئة جداءات وكل زوج من مورفيزمات الفئة $\mathcal{I}$ يملك نواة.

البرهان.

(1) $\Leftrightarrow$ (2). لنفرض أن الدالي F يملك نهاية إسقاطية (عكسية)، عندئذ حسب التمثيلية (٥-١-١) تكون الفئة $\mathcal{I}$ فئة جداءات وحسب التمثيلية (٥-١-٢) يكون لكل زوج من مورفيزمات الفئة $\mathcal{I}$ نواة.

(2) $\Leftrightarrow$ (1). لنفرض أن الفئة $\mathcal{I}$ فئة جداءات وإن كل زوج من مورفيزمات الفئة $\mathcal{I}$ يملك نواة. لنفرض أيضاً أن $P = \prod_{X \in \text{ob}(\mathcal{I}_1)} F(X)$ أي إن P هو جداء جميع الأشياء $F(X)$ وذلك أيأ كان $X \in \text{ob}(\mathcal{I}_1)$ ، وإن $p_X: P \rightarrow F(X)$ هي المورفيزمات الإسقاطية. لأجل كل $Y \in \text{ob}(\mathcal{I}_1)$ لنأخذ المجموعة:

$$M = \{\alpha: X \rightarrow Y; \forall Y \in \text{ob}(\mathcal{I}_1)\}$$

ولنأخذ الجداء $Q = \prod_I F(Y)$ حيث $I = \text{Card } M$ ، ولنفرض أن $q_Y^\alpha: P \rightarrow F(Y)$ هي المورفيزمات الإسقاطية، فنجد أنه لأجل كل $Y \in \text{ob}(\mathcal{I}_1)$ ولأجل كل مورفيزم

. $X \in ob(\mathfrak{S}_1)$ معرفة لأجل كل $\alpha: X \rightarrow Y$ للفئة $\mathfrak{S}_1$ ، فإن المورفيزمات $F(\alpha) \cdot p_X$ معرفة لأجل كل $X \in ob(\mathfrak{S}_1)$ ، ولكون Q هو جداء للأسرة $(F(Y))_I$ فإنه يوجد مورفيزم وحيد $w: P \rightarrow Q$ لأجله جميع المخططات الآتية:

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{w} & Q \\ p_X \downarrow & & \downarrow q_Y^\alpha \\ F(X) & \xrightarrow{F(\alpha)} & F(Y) \end{array}$$

تبديلية، أي إن $F(\alpha) \cdot p_X = q_Y^\alpha \cdot w$.

من جهة أخرى، لنأخذ المورفيزمات $p_Y: P \rightarrow F(Y)$ المعرفة لأجل كل $Y \in ob(\mathfrak{S}_1)$ ولأجل كل مورفيزم $\alpha: X \rightarrow Y$ للفئة $\mathfrak{S}_1$ ولكون Q هو جداء للأسرة $(F(Y))_I$ فإنه يوجد مورفيزم وحيد $\bar{w}: P \rightarrow Q$ لأجله جميع المخططات الآتية:

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\bar{w}} & Q \\ & \searrow p_Y & \downarrow q_Y^\alpha \\ & & F(Y) \end{array}$$

تبديلية، أي إن $q_Y^\alpha \cdot \bar{w} = p_Y$.

أصبح لدينا $w, \bar{w}: P \rightarrow Q$ مورفيزمات للفئة $\mathfrak{S}$ وحسب الفرض توجد نواة للمورفيزمات $w, \bar{w}$. لنفرض أن هذه النواة هي الثنائية (A, s) حيث $s: A \rightarrow P$ مورفيزم للفئة $\mathfrak{S}$. لنبرهن على أن الثنائية $(A, u_X = p_X \cdot s)$ هي نهاية إسقاطية للدالي F . نلاحظ أولاً أن المورفيزمات $u_X = p_X \cdot s: A \rightarrow F(X)$ معرفة لأجل كل $X \in ob(\mathfrak{S}_1)$. - ليكن $\alpha: X \rightarrow Y$ مورفيزم للفئة $\mathfrak{S}$ ، ولنبرهن على أن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u_X} & F(X) \\ & \searrow u_Y & \downarrow F(\alpha) \\ & & F(Y) \end{array}$$

تبديلي، أي إن $F(\alpha) \cdot u_X = u_Y$. إن:

$$\begin{aligned} F(\alpha) \cdot u_X &= F(\alpha) \cdot (p_X \cdot s) = (F(\alpha) \cdot p_X) \cdot s = (q_Y^\alpha \cdot w) \cdot s = \\ &= (q_Y^\alpha \cdot \bar{w}) \cdot s = p_Y \cdot s = u_Y \end{aligned}$$

من جهة ثالثة، ليكن $B \in ob(\mathfrak{S})$ ولنفرض أن أسرة المورفيزمات $v_X: B \rightarrow F(X)$ معرفة لأجل كل $X \in ob(\mathfrak{S}_1)$ وتحقق أن المخططات الآتية:

$$\begin{array}{ccc}
 B & \xrightarrow{v_X} & F(X) \\
 & \searrow v_Y & \downarrow F(\alpha) \\
 & & F(Y)
 \end{array}$$

تبديلية لأجل جميع المورفيزمات $\alpha: X \rightarrow Y$ للفئة $\mathfrak{S}_1$ ، أي إن $F(\alpha) \cdot v_X = v_Y$.
عندئذ حسب تعريف الجداء يوجد مورفيزم وحيد $t: B \rightarrow P$ لأجله المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc}
 B & \xrightarrow{t} & P \\
 & \searrow v_X & \downarrow p_X \\
 & & F(X)
 \end{array}$$

تبديلي، أي إن $p_X \cdot t = v_X$ وذلك لأجل كل $X \in \text{ob}(\mathfrak{S}_1)$ ، عندئذ لأجل كل مورفيزم $\alpha: X \rightarrow Y$ للفئة $\mathfrak{S}_1$ ، فإن:

$$q_Y^\alpha \cdot w \cdot t = F(\alpha) \cdot p_X \cdot t = F(\alpha) \cdot v_X = v_Y$$

$$q_Y^\alpha \cdot \bar{w} \cdot t = p_Y \cdot t = v_Y$$

وبما أن $w \cdot t, \bar{w} \cdot t: B \rightarrow Q$ هو جداء للأسرة $(F(Y))_I$ فإن التطبيق:

$$\Gamma: \mathfrak{S}(D, Q) \rightarrow \prod_I \mathfrak{S}(D, F(Y))$$

المعرف بالشكل الآتي: أيأ كان $\lambda \in \mathfrak{S}(D, Q)$ ، فإن $\Gamma(\lambda) = (q_Y^\alpha \cdot \lambda)_I$ متباين؛ وذلك لأجل كل $D \in \text{ob}(\mathfrak{S})$ حسب التمييزية (١-١-٥). ومنه لأجل $D = B$ نجد أن التطبيق

$$\Gamma: \mathfrak{S}(B, Q) \rightarrow \prod_I \mathfrak{S}(B, F(Y))$$

متباين، ولما كان $w \cdot t, \bar{w} \cdot t \in \mathfrak{S}(B, Q)$ وإن:

$$\Gamma(w \cdot t) = (q_Y^\alpha \cdot (w \cdot t))_I = (v_Y)_I = (q_Y^\alpha \cdot (\bar{w} \cdot t))_I = \Gamma(\bar{w} \cdot t)$$

نجد أن $w \cdot t = \bar{w} \cdot t$. وحسب تعريف النواة فإنه يوجد مورفيزم وحيد $v: B \rightarrow A$ يحقق

$s \cdot v = t$ ومنه نجد أن $u_X \cdot v = (p_X \cdot s) \cdot v = p_X \cdot (s \cdot v) = p_X \cdot t = v_X$ وذلك لأجل

كل $X \in \text{ob}(\mathfrak{S}_1)$ ، وهذا يبين أن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc}
 B & \xrightarrow{v} & A \\
 & \searrow v_X & \downarrow u_X \\
 & & F(X)
 \end{array}$$

تبديلي، أي إن $u_X \cdot v = v_X$ وهكذا نجد أن الثنائية $(A, u_X = p_X \cdot s)$ هي نهاية إسقاطية للدالي F .

مبرهنة ٥-١-٦.

لتكن $\mathcal{T}_1$ فئة أشياءها مجموعات و $\mathcal{T}$ فئة ما. لنفرض أن الفئة $\mathcal{T}_0 = \text{Funct}(\mathcal{T}_1, \mathcal{T})$ وتحقق أن كل دالي مباشر من أشياء الفئة $\mathcal{T}_0$ يملك نهاية إسقاطية، عندئذ يوجد دالي مباشر $\underline{\text{Lim}}: \mathcal{T}_0 = \text{Funct}(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}) \rightarrow \mathcal{T}$.

البرهان.

لنعرف $\underline{\text{Lim}}: \text{ob}(\mathcal{T}_0) \rightarrow \text{ob}(\mathcal{T})$ بالشكل الآتي: ليكن $F \in \text{ob}(\mathcal{T}_0)$ عندئذ $F: \mathcal{T}_1 \rightarrow \mathcal{T}$ دالي مباشر، وحسب الفرض فإن F يملك نهاية عكسية ولتكن $A \in \text{ob}(\mathcal{T})$. لنضع: $\underline{\text{Lim}}(F) = A$ فنجد بالاعتماد على المبرهنة (٥-١-٤) أن $\underline{\text{Lim}}$ تطبيق أشياء.

لنعرف $\underline{\text{Lim}}: \text{Mor}(\mathcal{T}_0) \rightarrow \text{Mor}(\mathcal{T})$ بالشكل الآتي: ليكن $f \in \text{Mor}(\mathcal{T}_0)$ عندئذ فإن $f: F_1 \rightarrow F_2$ مورفيزم دالي حيث $F_1, F_2: \mathcal{T}_1 \rightarrow \mathcal{T} \in \text{ob}(\mathcal{T}_0)$ دوال مباشرة، وحسب الفرض فإن كلاً من F_1, F_2 يملك نهاية عكسية، ولتكن $A_1, A_2 \in \text{ob}(\mathcal{T})$ على الترتيب. حسب المبرهنة (٥-١-٣)، فإنه من أجل $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$ و $G = I_{\mathcal{T}_1}$ يوجد مورفيزم وحيد $u: A_1 \rightarrow A_2$ للفئة $\mathcal{T}$. لنضع $\underline{\text{Lim}}(f) = u$ فنجد أن $\underline{\text{Lim}}$ تطبيق مورفيزمات بسبب وحدانية المورفيزم u . ليكن $F \in \text{ob}(\mathcal{T}_0)$ وإن $I_F: F \rightarrow F$ المورفيزم المطابق، ولنبرهن على أن $\underline{\text{Lim}}(I_F) = I_A$ حيث $A \in \text{ob}(\mathcal{T})$. بما أن $F: \mathcal{T}_1 \rightarrow \mathcal{T}$ دالي مباشر، فإنه حسب الفرض توجد نهاية عكسية، ولتكن $A \in \text{ob}(\mathcal{T})$ للدالي F ، حسب المبرهنة (٥-١-٣) فإنه لأجل $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$ و $F_1 = F_2 = F$ و $G = I_{\mathcal{T}_1}$ ، فإنه يوجد مورفيزم وحيد $\lambda: A \rightarrow A$ للفئة $\mathcal{T}$ لأجله المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\lambda} & A \\ u_X \downarrow & & \downarrow u_X \\ F(X) & \xrightarrow{I_F(X)} & F(X) \end{array}$$

تبديلي، أي إن $u_X \cdot \lambda = I_F(X) \cdot u_X$ وذلك لأجل كل $X \in \text{ob}(\mathcal{T}_1)$ ، ومنه:

$$u_X \cdot \lambda = I_F(X) \cdot u_X = I_{F(X)} \cdot u_X = u_X$$

وهذا يبين أن $\lambda = I_A$ بسبب وحدانية المورفيزم λ ومنه نجد أن $\underline{\text{Lim}}(I_F) = \lambda = I_A$.

ليكن $F_1, F_2, F_3: \mathfrak{S}_1 \rightarrow \mathfrak{S}$ حيث $\mathfrak{S}_0$ مورفيزمات للفئة $f: F_1 \rightarrow F_2$ و $g: F_2 \rightarrow F_3$ دوال مباشرة، إن f, g مورفيزمات دالية. لنبرهن على أن:

$$\underline{\lim} (g \cdot f) = \underline{\lim} (g) \cdot \underline{\lim} (f)$$

حسب الفرض فإن كلاً من F_1, F_2, F_3 يملك نهاية عكسية، ولتكن $A_1, A_2, A_3 \in ob(\mathfrak{S})$ على الترتيب. حسب المبرهنة (٥-١-٣) فإنه لأجل $\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{S}_2$ ، $G = I_{\mathfrak{S}_1}$ ، فإنه لأجل f يوجد مورفيزم وحيد $u: A_1 \rightarrow A_2$ للفئة $\mathfrak{S}$ ، وإن $\underline{\lim} (f) = u$. أيضاً لأجل g يوجد مورفيزم وحيد $v: A_2 \rightarrow A_3$ للفئة $\mathfrak{S}$ ، وإن $\underline{\lim} (g) = v$ ، ولأجل كل من u, v المخططات الآتية:

$$\begin{array}{ccccc} A_1 & \xrightarrow{u} & A_2 & \xrightarrow{v} & A_3 \\ u_X^1 \downarrow & & \downarrow u_X^2 & & \downarrow u_X^3 \\ F_1(X) & \xrightarrow{f(X)} & F_2(X) & \xrightarrow{g(X)} & F_3(X) \end{array}$$

تبديلية، أي إن $g(X) \cdot u_X^2 = u_X^3 \cdot v$ ، $u_X^2 \cdot u = f(X) \cdot u_X^1$ ، إن $v \cdot u: A_1 \rightarrow A_3$ مورفيزم للفئة $\mathfrak{S}$ لأجله المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} A_1 & \xrightarrow{v \cdot u} & A_3 \\ u_X^1 \downarrow & & \downarrow u_X^3 \\ F_1(X) & \xrightarrow{g \cdot f(X)} & F_3(X) \end{array}$$

تبديلي، لأن:

$$\begin{aligned} (g \cdot f)(X) \cdot u_X^1 &= (g(X) \cdot f(X)) \cdot u_X^1 = g(X) \cdot (f(X) \cdot u_X^1) = \\ &= g(X) \cdot (u_X^2 \cdot u) = (g(X) \cdot u_X^2) \cdot u = (u_X^3 \cdot v) \cdot u = u_X^3 \cdot (v \cdot u) \end{aligned}$$

وإن $\underline{\lim} (g \cdot f) = v \cdot u = \underline{\lim} (g) \cdot \underline{\lim} (f)$ ، مما سبق نجد أن $\underline{\lim}$ هو دالي مباشر.

٥-٢. النهايات الاستقرائية (المباشرة).

تعريف.

لتكن $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2$ فئتين، وليكن $F: \mathfrak{S}_1 \rightarrow \mathfrak{S}_2$ دالياً مباشراً. ليكن $A \in ob(\mathfrak{S}_2)$ ولنفرض أن المورفيزمات $u_X: F(X) \rightarrow A$ معرفة لأجل كل $X \in ob(\mathfrak{S}_1)$. نسمي A مع المورفيزمات u_X أي نسمي الثنائية (A, u_X) نهاية استقرائية (مباشرة) للدالي F إذا تحققت الشروط الآتية:

١ - لأجل أي مورفيزم $\alpha: X \rightarrow Y$ للفتة $\mathfrak{S}_1$ فإن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{u_X} & A \\ F(\alpha) \downarrow & & \nearrow u_Y \\ F(Y) & & \end{array}$$

تبديلي، أي إن $u_Y \cdot F(\alpha) = u_X$.

٢ - إذا كان $B \in ob(\mathfrak{S}_2)$ وكانت المورفيزمات $v_X: F(X) \rightarrow B$ معرفة لأجل كل $X \in ob(\mathfrak{S}_1)$ وتحقق أن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{v_X} & B \\ F(\alpha) \downarrow & & \nearrow v_Y \\ F(Y) & & \end{array}$$

تبديلي، أي إن $v_Y \cdot F(\alpha) = v_X$ وذلك لأجل جميع المورفيزمات $\alpha: X \rightarrow Y$ للفتة $\mathfrak{S}_1$ ، فإنه يوجد مورفيزم وحيد $\theta: A \rightarrow B$ لأجله المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\theta} & B \\ & \nwarrow u_X & \nearrow v_X \\ & F(X) & \end{array}$$

تبديلي، أي إن $\theta \cdot u_X = v_X$ وذلك أيأ كان $X \in ob(\mathfrak{S}_1)$.

تمهيدية ٥-٢-١.

بالعودة إلى التمهيدية (٥-١-١) نجد أنه إذا كان $A \in ob(\mathfrak{S})$ فإن الشروط الآتية

متكافئة لأجل الدالي المباشر $F: \mathfrak{S}_0 \rightarrow \mathfrak{S}$:

١ - A هو مجموع للأسرة $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$.

٢ - A نهاية استقرائية (مباشرة) للدالي F .
البرهان.

(1) $\Leftrightarrow$ (2). لنفرض أن A هو مجموع للأسرة $(A_i)_{i \in M}$ ، عندئذ توجد المورفيزمات $u_i : A_i = F(i) \rightarrow A$ وذلك أيأ كان $i \in ob(\mathfrak{S}_0)$.
- ليكن $\alpha : i \rightarrow j \in \mathfrak{S}_0$ مورفيزماً للفتة $\mathfrak{S}_0$ ، عندئذ المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} F(i) = A_i & \xrightarrow{u_i} & A \\ F(\alpha) \downarrow & \nearrow & \\ F(j) = A_j & & u_j \end{array}$$

تبديلي، لأنه من أجل $i = j$ فإن $u_j \cdot F(\alpha) = u_j \cdot I_{A_i} = u_j = u_i$.

- ليكن $B \in ob(\mathfrak{S})$ ولنفرض أن المورفيزمات $v_i : F(i) = A_i \rightarrow B$ معرفة لأجل كل $i \in ob(\mathfrak{S}_0)$ ، ولنفرض أيضاً أن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} F(i) = A_i & \xrightarrow{v_i} & B \\ F(\alpha) \downarrow & \nearrow & \\ F(j) = A_j & & v_j \end{array}$$

تبديلي وذلك أيأ كان المورفيزم $\alpha : i \rightarrow j \in \mathfrak{S}_0(i, j)$.

عندئذ، بما أن A هو مجموع للأسرة $(A_i)_{i \in M}$ ، حسب الفرض فإنه يوجد مورفيزم وحيد $v : A \rightarrow B$ لأجله المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} B & \xleftarrow{v} & A \\ & \nearrow v_i & \uparrow u_i \\ & A_i = F(i) & \end{array}$$

أي إن $v \cdot u_i = v_i$ وذلك أيأ كان $i \in M$. مما سبق نجد أن A نهاية استقرائية للدالي F .
(1) $\Leftrightarrow$ (2). لنفرض أن A نهاية استقرائية للدالي F ، عندئذ أيأ كان $i \in ob(\mathfrak{S}_0)$ فإن المورفيزمات $u_i : F(i) = A_i \rightarrow A$ تكون معرفة. لنبرهن على أن الثنائية $(A, u_i)_{i \in M}$ تشكل مجموعاً للأسرة $(A_i)_{i \in M}$.

ليكن $B \in ob(\mathfrak{S})$ ، ولتكن $(v_i : A_i = F(i) \rightarrow B)_{i \in M}$ أسرة من المورفيزمات للفتة $\mathfrak{S}$. لنفرض أن $\alpha : i \rightarrow j \in \mathfrak{S}_0(i, j)$ ، عندئذ المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc}
 F(i) = A_i & \xrightarrow{v_i} & B \\
 \downarrow & & \nearrow \\
 F(j) = A_j & & v_j
 \end{array}$$

تبديلي، لأنه عندما $i = j$ فإن $v_j \cdot F(\alpha) = v_j \cdot I_{A_i} = v_j = v_i$ ولما كان A نهاية استقرائية للدالي F ، فإنه حسب التعريف يوجد مورفيزم وحيد $\beta: A \rightarrow B \in \mathfrak{I}(A, B)$ لأجله المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc}
 B & \xleftarrow{\beta} & A \\
 & \nwarrow v_j & \uparrow u_i \\
 & A_i = F(i) &
 \end{array}$$

تبديلي، أي إن $\beta \cdot u_i = v_i$ وذلك أياً كان $i \in M$. وهذا يبين أن A هو مجموع للأسرة $\bigcup_{i \in M} (A_i)$.

تمهيدية ٢-٢-٥.

لتكن $\mathfrak{I}$ فئة وليكن $u_1, u_2: A \rightarrow B$ مورفيزمات للفئة $\mathfrak{I}$. لنأخذ الفئة ثنائية الشيء $\mathfrak{I}_0$ المؤلفة من الأشياء X, Y والمورفيزمات $v_1, v_2: X \rightarrow Y$ فضلاً عن I_X, I_Y . لنعرف $F: \mathfrak{I}_0 \rightarrow \mathfrak{I}$ بالشكل الآتي:

$$F(X) = A, \quad F(Y) = B, \quad F(v_i) = u_i, \quad i = 1, 2$$

إن F هو دالي مباشر، (انظر التمرين المحلول (٢-٣)).
ليكن $K \in ob(\mathfrak{I})$. الشروط الآتية متكافئة:

١ - K هي نواة مرافقة للمورفيزمات u_1, u_2 .

٢ - K هي نهاية استقرائية (مباشرة للدالي) F .

البرهان.

(1) $\Leftrightarrow$ (2). لنفرض أن K هي نواة مرافقة للمورفيزمات $u_1, u_2: A \rightarrow B$ عندئذ حسب التعريف يوجد مورفيزم $f: B \rightarrow K$ للفئة $\mathfrak{I}$ يحقق $f \cdot u_1 = f \cdot u_2$. لنعرف المورفيزمات $u_X: F(X) \rightarrow K$ بالشكل الآتي: أياً كان $X \in ob(\mathfrak{I}_0)$ ، لنضع:

$$u_X = f \cdot u_1: F(X) = A \rightarrow K$$

$$u_Y = f: F(Y) = B \rightarrow K$$

فنجذ أن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{u_X} & K \\ \downarrow F(\alpha) & \nearrow & \\ F(Y) & & u_Y \end{array}$$

تبديلي لأجل كل مورفيزم $\alpha: X \rightarrow Y$ للفتة $\mathfrak{S}_0$ ؛ لأنه:

- إذا كان $\alpha = I_X$ ، فإن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} F(X) = A & \xrightarrow{u_X} & K \\ F(I_X) = \downarrow I_{F(X)} = I_A & \nearrow & \\ F(X) = A & & u_X \end{array}$$

تبديلي، لأن $u_X \cdot I_A = (f \cdot u_1) \cdot I_A = f \cdot (u_1 \cdot I_A) = f \cdot u_1 = u_X$

- إذا كان $\alpha = I_Y$ ، فإن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} F(Y) & \xrightarrow{u_Y} & K \\ F(I_Y) = \downarrow I_{F(Y)} = I_B & \nearrow & \\ F(Y) & & u_Y \end{array}$$

تبديلي، لأن $u_Y \cdot I_B = f \cdot I_B = f = u_Y$

- إذا كان $\alpha = v_1: X \rightarrow Y$ ، فإن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{u_Y} & K \\ F(\alpha) = \downarrow F(v_1) = u_1 & \nearrow & \\ F(Y) & & u_Y \end{array}$$

تبديلي، لأن $u_Y \cdot F(\alpha) = u_Y \cdot u_1 = f \cdot u_1 = u_X$

- إذا كان $\alpha = v_2: X \rightarrow Y$ ، فإن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{u_Y} & K \\ F(\alpha) = \downarrow F(v_2) = u_2 & \nearrow & \\ F(Y) & & u_Y \end{array}$$

تبديلي، لأن $u_Y \cdot F(\alpha) = u_Y \cdot F(v_2) = u_Y \cdot u_2 = f \cdot u_2 = f \cdot u_1 = u_X$

- ليكن $D \in ob(\mathfrak{S})$ ، ولنفرض أن المورفيزمات:

$$w_X: F(X) = A \rightarrow D, \quad w_Y: F(Y) = B \rightarrow D$$

وتحقق أن المخططات الآتية:

$$\begin{array}{ccc}
 F(X) = A & \xrightarrow{w_Y} & D \\
 F(v_1) \downarrow = u_1 & \nearrow & \\
 F(Y) = B & & w_Y
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 F(X) = A & \xrightarrow{w_Y} & D \\
 F(v_2) \downarrow = u_2 & \nearrow & \\
 F(Y) = B & & w_Y
 \end{array}$$

تبديلية، أي إن $w_Y \cdot u_1 = w_Y \cdot u_2$ ؛ ومنه نجد أن $w_Y \cdot u_1 = w_X$ ، $w_Y \cdot u_2 = w_X$ ولما كانت K نواة مرافقة للمورفيزمات u_1, u_2 فإنه يوجد مورفيزم وحيد $g: K \rightarrow D$ لأجله $g \cdot f = w_Y$.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & K & & \\
 & \nearrow g & \uparrow & \searrow f & \\
 D & \xleftarrow{w_Y} & B & \xleftarrow{u_1} & A \\
 & & \uparrow & \searrow u_2 & \\
 & & A & &
 \end{array}$$

وهذا يبين أن $w_Y = g \cdot f = g \cdot u_Y$ وإن:

$$w_X = w_Y \cdot u_1 = (g \cdot f) \cdot u_1 = g \cdot (f \cdot u_1) = g \cdot u_X$$

وهذا يبين أيضاً أن المخططات الآتية:

$$\begin{array}{ccc}
 K & \xrightarrow{g} & D \\
 u_X \swarrow & & \nwarrow w_X \\
 & F(X) = A &
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 K & \xrightarrow{g} & D \\
 u_Y \swarrow & & \nwarrow w_Y \\
 & F(Y) = B &
 \end{array}$$

تبديلية، مما سبق نجد أن K هي نهاية استقرائية (مباشرة) للدالي F .

(1) $\Leftrightarrow$ (2). لنفرض أن K نهاية استقرائية للدالي F ، عندئذ لأجل كل $D \in \text{ob}(\mathfrak{D}_0)$

تكون المورفيزمات $F(D) \rightarrow K$ معرفة.

لنضع $u_X: F(X) = A \rightarrow K$ ، $u_Y: F(Y) = B \rightarrow K$ ولأجل $Y \in \text{ob}(\mathfrak{D}_0)$ لنضع:

$f = u_Y: B \rightarrow K$ ولنبرهن على أن الثنائية (K, f) هي النواة المرافقة للمورفيزمات

u_1, u_2 . ليكن $v: B \rightarrow M$ مورفيزم للفئة $\mathfrak{D}$ لأجله $v \cdot u_1 = v \cdot u_2$. ولنأخذ المورفيزمات

$$v_X = v \cdot u_1: A = F(X) \rightarrow M, \quad v_Y = v: B = F(Y) \rightarrow M$$

فنجد أن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc}
 F(D) & \xrightarrow{v_D} & M \\
 F(\alpha) \downarrow & \nearrow & \\
 F(D') & & v_{D'}
 \end{array}$$

تبديلي لأجل كل مورفيزم $\alpha: D \rightarrow D'$ للفئة $\mathfrak{S}_0$ ، أي إن $v_D \cdot F(\alpha) = v_{D'}$ ؛ لأنه
- إذا كان $\alpha = I_X$ ، فإن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{v_X} & M \\ F(I_X) = \downarrow I_{F(X)} = I_A & \nearrow & \\ F(X) & & v_X \end{array}$$

تبديلي، لأن $v_X \cdot I_X = v_X$.

- إذا كان $\alpha = I_Y$ ، فإن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} F(Y) & \xrightarrow{v_Y} & M \\ F(I_Y) = \downarrow I_{F(Y)} = I_B & \nearrow & \\ F(Y) & & v_Y \end{array}$$

تبديلي، لأن $v_Y \cdot I_Y = v_Y$.

- إذا كان $\alpha = v_1: X \rightarrow Y$ ، فإن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{v_X} & M \\ F(v_1) = u_1 \downarrow & \nearrow & \\ F(Y) & & v_Y \end{array}$$

تبديلي، لأن $v_Y \cdot F(v_1) = v_Y \cdot u_1 = v \cdot u_1 = v_X$.

- إذا كان $\alpha = v_2: X \rightarrow Y$ ، فإن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{v_X} & M \\ F(v_2) = u_2 \downarrow & \nearrow & \\ F(Y) & & v_Y \end{array}$$

تبديلي، لأن $v_Y \cdot F(v_2) = v_Y \cdot u_2 = v \cdot u_1 = v_X$.

وحسب تعريف النهاية الاستقرائية (المباشرة) يوجد مورفيزم وحيد $g: K \rightarrow M$ لأجله
المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{g} & M \\ u_X \swarrow & & \nearrow v_X \\ & F(X) & \end{array}$$

تبديلي وذلك لأجل كل $X \in \text{ob}(\mathfrak{S}_0)$ أي إن $g \cdot u_X = v_X$ ، $g \cdot u_Y = v_Y$ ومنه نجد أن

$$g \cdot f = g \cdot u_Y = v_Y = v$$

- ليكن $w: B = F(Y) \rightarrow D$ مورفيزماً للفئة $\mathfrak{S}$ ، لأجله يوجد المورفيزم $\lambda: K \rightarrow D$ للفئة $\mathfrak{S}$ يحقق $\lambda \cdot f = w$

$$\begin{array}{ccccc} & & K & & \\ & \swarrow \lambda & \uparrow & \xleftarrow{f=u_Y} & A \\ D & \xleftarrow{w} & B & \xleftarrow{u_1} & \\ & & \uparrow & \xleftarrow{u_2} & \\ & & A & & \end{array}$$

ولنبرهن على أن $w \cdot u_1 = w \cdot u_2$ ، إن:

$$w \cdot u_1 = \lambda \cdot f \cdot u_1 = \lambda \cdot u_Y \cdot u_1$$

$$w \cdot u_2 = \lambda \cdot f \cdot u_2 = \lambda \cdot u_Y \cdot u_2$$

ولما كانت K هي نهاية استقرائية (مباشرة) للدالي F فإن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{u_Y} & K \\ F(\alpha) \downarrow & \nearrow & \\ F(Y) & & u_Y \end{array}$$

تبدلي لأجل كل $X \in ob(\mathfrak{S}_0)$ أي إن $u_Y \cdot F(\alpha) = u_X$ ، ومنه نجد أن:

$$u_Y \cdot u_1 = u_Y \cdot F(v_1) = u_X, \quad u_Y \cdot u_2 = u_Y \cdot F(v_2) = u_X$$

وهكذا نجد أن:

$$w \cdot u_1 = \lambda \cdot u_Y \cdot u_1 = \lambda \cdot u_Y = w \cdot u_2$$

وهذا يبين أن K هي نواة مرافقة للمورفيزمات u_1, u_2 .

مبرهنة ٣-٢-٥.

لتكن $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2$ فئات، وليكن $F_i: \mathfrak{S}_i \rightarrow \mathfrak{S}$ و $G: \mathfrak{S}_2 \rightarrow \mathfrak{S}_1$ حيث $i=1,2$ دوال مباشرة.

من أجل $i=1,2$ لنفرض أن $A_i \in ob(\mathfrak{S})$ وأن الثنائيات $(A_i, u'_i: F_i(X) \rightarrow A_i)$ معرفة

لأجل كل $X \in ob(\mathfrak{S}_i)$ وتشكل نهايات استقرائية (مباشرة) للدوال F_i . أخيراً لنفرض أن

$g: F_2 \rightarrow F_1 G$ مورفيزم دالي. عندئذ يوجد مورفيزم وحيد $u: A_2 \rightarrow A_1$ للفئة $\mathfrak{S}$ لأجله

المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccccc} F_2(X) & \xrightarrow{g(X)} & F_1 G(X) & & \\ u_X^2 \downarrow & & \downarrow & & u_{G(X)}^1 \\ A_2 & \xrightarrow{u} & A_1 & & \end{array}$$

تبديلي، أي إن $u \cdot u_X^2 = u_{G(X)}^1 \cdot g(X)$ وذلك لأجل كل $X \in ob(\mathfrak{S}_2)$.
البرهان.

نلاحظ أولاً أن $F_2: \mathfrak{S}_2 \rightarrow \mathfrak{S}$ و $F_1G: \mathfrak{S}_2 \rightarrow \mathfrak{S}$ هي دوال مباشرة، ولما كان $g: F_2 \rightarrow F_1G$ مورفيزماً دالياً فإنه لأجل أي مورفيزم $v: Y \rightarrow X$ للفتة $\mathfrak{S}_2$ حيث $X, Y \in ob(\mathfrak{S}_2)$ فإن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} F_2(Y) & \xrightarrow{g(Y)} & F_1(G(Y)) \\ F_2(v) \downarrow & & \downarrow F_1(G(v)) \\ F_2(X) & \xrightarrow{g(X)} & F_1(G(X)) \end{array}$$

تبديلي، أي إن $F_1G(v) \cdot g(Y) = g(X) \cdot F_2(v)$.
من جهة أخرى، بما أن الثنائية $(A_1, u_D^1: F_1(D) \rightarrow A_1)$ هي نهاية استقرائية (مباشرة) للدالي F_1 فإن المورفيزمات $u_D^1: F_1(D) \rightarrow A_1$ معرفة لأجل كل $D \in ob(\mathfrak{S}_1)$ ولما كان $G(X), G(Y) \in ob(\mathfrak{S}_1)$ فإن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} F_1G(Y) & \xrightarrow{u_{G(Y)}^1} & A_1 \\ F_1G(v) \downarrow & \nearrow & \\ F_1G(X) & & u_{G(X)}^1 \end{array}$$

تبديلي، أي إن $u_{G(Y)}^1 = u_{G(X)}^1 \cdot F_1G(v)$ ومنه نجد أن:

$$\begin{aligned} u_{G(Y)}^1 \cdot g(Y) &= (u_{G(X)}^1 \cdot F_1G(v)) \cdot g(Y) = u_{G(X)}^1 \cdot (F_1G(v) \cdot g(Y)) = \\ &= u_{G(X)}^1 \cdot g(X) \cdot F_2(v) = (u_{G(X)}^1 \cdot g(X)) \cdot F_2(v) \end{aligned}$$

ولما كانت الثنائية $(A_2, u_X^2: F_2(X) \rightarrow A_2)$ نهاية استقرائية (مباشرة) للدالي F_2 ، وإن المورفيزمات $u_{G(X)}^1 \cdot g(X): F_2(X) \rightarrow A_1$ معرفة لأجل كل $X \in ob(\mathfrak{S}_2)$ فإنه حسب الشرط (٢) من تعريف النهاية الاستقرائية يوجد مورفيزم وحيد $u: A_2 \rightarrow A_1$ لأجله المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} A_2 & \xrightarrow{u} & A_1 \\ & \nwarrow u_X^2 & \nearrow u_{G(X)}^1 \cdot g(X) \\ & & F_2(X) \end{array}$$

أي إن $u \cdot u_X^2 = u_{G(X)}^1 \cdot g(X)$ وبالتالي يكون المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc}
F_2(X) & \xrightarrow{g(X)} & F_1(G(X)) \\
u_X^2 \downarrow & & \downarrow u_{G(X)}^1 \\
A_2 & \xrightarrow{u} & A_1
\end{array}$$

تبديلي، أي إن $u \cdot u_X^2 = u_{G(X)}^1 \cdot g(X)$.

مبرهنة ٥-٢-٤.

لتكن $\mathfrak{S}, \mathfrak{S}_1$ فئات، وليكن $F_i: \mathfrak{S}_i \rightarrow \mathfrak{S}$ دالياً مباشراً. وليكن $A_1, A_2 \in ob(\mathfrak{S})$ ولنفرض أن الثنائيات $(A_i, u_X^i: F_i(X) \rightarrow A_i)$ حيث $i=1,2$ تشكل نهايات استقرائية (مباشرة) للدالي F . عندئذ يوجد إيزومورفيزم وحيد $u: A_1 \rightarrow A_2$ للفتة $\mathfrak{S}$ لأجله $u \cdot u_X^1 = u_X^2$ ، وذلك لأجل كل $X \in ob(\mathfrak{S}_1)$.

البرهان.

لنفرض أن الثنائيات (A_1, u_X^1) و (A_2, u_X^2) نهايات مباشرة للدالي F .
- بما أن (A_1, u_X^1) نهاية مباشرة للدالي F وإن $A_2 \in ob(\mathfrak{S})$ ، وإن المورفيزمات $u_X^2: F(X) \rightarrow A_2$ معرفة لأجل كل $X \in ob(\mathfrak{S}_1)$ وتحقق أن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc}
F(X) & \xrightarrow{u_X^2} & A_2 \\
F(\alpha) \downarrow & \nearrow & \\
F(Y) & & u_Y^2
\end{array}$$

تبديلي، أي إن $u_Y^2 \cdot F(\alpha) = u_X^2$. لأن (A_2, u_X^2) نهاية مباشرة، وذلك لأجل كل مورفيزم $\alpha: X \rightarrow Y$ للفتة $\mathfrak{S}_1$. وحسب الشرط (٢) من التعريف فإنه يوجد مورفيزم وحيد $v: A_1 \rightarrow A_2$ لأجله المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc}
A_1 & \xrightarrow{v} & A_2 \\
u_X^1 \uparrow & \nearrow & \\
F(X) & & u_X^2
\end{array}$$

تبديلي، أي إن $v \cdot u_X^1 = u_X^2$ ، وذلك لأجل كل $X \in ob(\mathfrak{S}_1)$.

- أيضاً بما أن (A_2, u_X^2) نهاية مباشرة للدالي F ، وإن $A_1 \in ob(\mathfrak{S})$ ، وإن المورفيزمات $u_X^1: F(X) \rightarrow A_1$ معرفة لأجل كل $X \in ob(\mathfrak{S}_1)$ وتحقق أن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc}
 F(X) & \xrightarrow{u_Y^1} & A_1 \\
 F(\alpha) \downarrow & \nearrow & \\
 F(Y) & & u_Y^1
 \end{array}$$

تبديلي، أي إن $u_Y^1 \cdot F(\alpha) = u_X^1$. لأن (A_1, u_X^1) نهاية مباشرة، وذلك لأجل كل مورفيزم $\alpha: X \rightarrow Y$ للفئة $\mathcal{S}_1$. وحسب الشرط (٢) من التعريف فإنه يوجد مورفيزم وحيد $u: A_2 \rightarrow A_1$ لأجله المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc}
 A_2 & \xrightarrow{u} & A_1 \\
 u_X^2 \uparrow & \nearrow & \\
 F(X) & & u_X^1
 \end{array}$$

تبديلي، أي إن $u \cdot u_X^2 = u_X^1$ وذلك لأجل كل $X \in \text{ob}(\mathcal{S}_1)$. ومنه نجد أن:

$$u_X^1 = u \cdot u_X^2 = u \cdot (v \cdot u_X^1) = (u \cdot v) \cdot u_X^1$$

$$u_X^2 = v \cdot u_X^1 = v \cdot (u \cdot u_X^2) = (v \cdot u) \cdot u_X^2$$

ولما كان المورفيزم مطابق I_{A_1} هو المورفيزم الوحيد الذي لأجله المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc}
 A_1 & \xrightarrow{I_{A_1}} & A_1 \\
 u_X^1 \uparrow & \nearrow & \\
 F(X) & & u_X^1
 \end{array}$$

تبديلي، أي إن $I_{A_1} \cdot u_X^1 = u_X^1$ نجد أن $u \cdot v = I_{A_1}$. للسبب نفسه، نجد أن $v \cdot u = I_{A_1}$. وهذا يبين أن المورفيزم u هو إيزومورفيزم وهو وحيد.

تعريف.

بالاعتماد على المبرهنة الأخيرة، نجد أن لكل دالي مباشر نهاية استقرائية (مباشرة) واحدة فقط (في حال وجودها). لذلك سوف نرمز للنهائية الاستقرائية (المباشرة) لدالي F بالشكل

$$\varinjlim (F)$$

مبرهنة ٥-٢-٥.

لنكن فئة صغيرة، و $\mathcal{S}$ فئة ما. لنفرض أن $F: \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}$ دالي. الشروط الآتية متكافئة:

١ - الدالي F يملك نهاية استقرائية (مباشرة).

٢ - الفئة $\mathcal{S}$ هي فئة مجاميع وكل زوج من مورفيزمات الفئة $\mathcal{S}$ يملك نواة مرافقة.

البرهان.

(1) $\Leftrightarrow$ (2). لنفرض أن الدالي F يملك نهاية استقرائية (مباشرة)، عندئذ حسب التمهيدية (١-٢-٥) تكون الفئة $\mathfrak{S}$ فئة مجاميع وحسب التمهيدية (٢-٢-٥) يكون لكل زوج من مورفيزمات الفئة $\mathfrak{S}$ نواة مرافقة.

(2) $\Leftrightarrow$ (1). لنفرض أن الفئة $\mathfrak{S}$ فئة مجاميع وإن كل زوج من مورفيزمات الفئة $\mathfrak{S}$ يملك نواة مرافقة. لنفرض أيضاً أن $P = \coprod_{X \in ob(\mathfrak{S}_1)} F(X)$ أي إن P هو مجموع جميع الأشياء $F(X)$ وذلك أيأ كان $X \in ob(\mathfrak{S}_1)$ ، وإن $p_X: F(X) \rightarrow P$ هي مورفيزمات الاحتواء. لأجل كل $Y \in ob(\mathfrak{S}_1)$ لنأخذ المجموعة:

$$M = \{\alpha: Y \rightarrow X; \forall X \in ob(\mathfrak{S}_1)\}$$

ولنأخذ المجموع $Q = \coprod_I F(Y)$ حيث $I = Card M$ ، ولنفرض أن $q_Y'': F(Y) \rightarrow Q$ هي مورفيزمات الاحتواء، فنجد أنه لأجل كل $Y \in ob(\mathfrak{S}_1)$ ولأجل كل مورفيزم: $\alpha: Y \rightarrow X$ للفئة $\mathfrak{S}_1$ فإن المورفيزمات $p_X \cdot F(\alpha): F(Y) \rightarrow P$ معرفة لأجل كل $X \in ob(\mathfrak{S}_1)$ ، ولما كان Q هو مجموع للأسرة $(F(Y))_I$ فإنه يوجد مورفيزم وحيد $\sigma: Q \rightarrow P$ لأجله جميع المخططات الآتية:

$$\begin{array}{ccc} F(Y) & \xrightarrow{F(\alpha)} & F(X) \\ q_Y'' \downarrow & & \downarrow p_X \\ Q & \xrightarrow{\sigma} & P \end{array}$$

تبديلية، أي إن $p_X \cdot F(\alpha) = \sigma \cdot q_Y''$.

من جهة أخرى، لنأخذ المورفيزمات $p_Y: F(Y) \rightarrow P$ المعرفة لأجل كل $Y \in ob(\mathfrak{S}_1)$ ولأجل كل مورفيزم $\alpha: Y \rightarrow X$ للفئة $\mathfrak{S}_1$ ولكون Q هو مجموع للأسرة $(F(Y))_I$ فإنه يوجد مورفيزم وحيد $\bar{\sigma}: Q \rightarrow P$ لأجله جميع المخططات الآتية:

$$\begin{array}{ccc} P & \xleftarrow{\bar{\sigma}} & Q \\ & \nwarrow p_Y & \uparrow q_Y'' \\ & & F(Y) \end{array}$$

تبديلية، أي إن $\bar{\sigma} \cdot q_Y'' = p_Y$.

أصبح لدينا $\sigma, \bar{\sigma}: Q \rightarrow P$ مورفيزمات للفئة $\mathfrak{S}$ وحسب الفرض توجد نواة مرافقة

للمورفيزمات $\sigma, \bar{\sigma}$. لنفرض أن هذه النواة المرافقة هي الثنائية (A, s) حيث $s: P \rightarrow A$ مورفيزم للفئة $\mathfrak{I}$.

لنبرهن على أن الثنائية $(A, u_X = s \cdot p_X)$ هي نهاية استقرائية (مباشرة) للدالي F .
نلاحظ أولاً أن المورفيزمات $u_X = s \cdot p_X: F(X) \rightarrow A$ معرفة لأجل كل $X \in ob(\mathfrak{I}_1)$.
- ليكن $\alpha: Y \rightarrow X$ مورفيزم للفئة $\mathfrak{I}$ ولنبرهن على أن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} F(Y) & \xrightarrow{u_Y} & A \\ F(\alpha) \downarrow & \nearrow & \\ F(X) & \xrightarrow{u_X} & \end{array}$$

تبديلي، أي إن $u_X \cdot F(\alpha) = u_Y$ من الواضح أن:

$$\begin{aligned} u_X \cdot F(\alpha) &= (s \cdot p_X) \cdot F(\alpha) = s \cdot (p_X \cdot F(\alpha)) = s \cdot (\sigma \cdot q_Y^\alpha) = \\ &= s \cdot (\bar{\sigma} \cdot q_Y^\alpha) = s \cdot p_Y = u_Y \end{aligned}$$

من جهة ثالثة، ليكن $B \in ob(\mathfrak{I})$ ولنفرض أن أسرة المورفيزمات $v_X: F(X) \rightarrow B$ معرفة لأجل كل $X \in ob(\mathfrak{I}_1)$ وتحقق أن المخططات الآتية:

$$\begin{array}{ccc} F(Y) & \xrightarrow{v_Y} & B \\ F(\alpha) \downarrow & \nearrow & \\ F(X) & \xrightarrow{v_X} & \end{array}$$

تبديلية، لأجل جميع المورفيزمات $\alpha: Y \rightarrow X$ للفئة $\mathfrak{I}_1$ ، أي إن $v_X \cdot F(\alpha) = v_Y$.
عندئذ حسب تعريف المجموع يوجد مورفيزم وحيد $t: P \rightarrow B$ لأجله المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} B & \xleftarrow{t} & P \\ v_X \swarrow & & \nearrow p_X \\ & F(X) & \end{array}$$

تبديلي، أي إن $t \cdot p_X = v_X$ وذلك لأجل كل $X \in ob(\mathfrak{I}_1)$ ، عندئذ لأجل كل مورفيزم $\alpha: Y \rightarrow X$ للفئة $\mathfrak{I}_1$ ، فإن:

$$\begin{aligned} t \cdot \sigma \cdot q_Y^\alpha &= t \cdot p_X \cdot F(\alpha) = v_X \cdot F(\alpha) = v_Y \\ t \cdot \bar{\sigma} \cdot q_Y^\alpha &= t \cdot p_Y = v_Y \end{aligned}$$

وبما أن Q هو مجموع للأسرة $(F(Y))_I$ فإن التطبيق:

$$\Gamma: \mathfrak{I}(Q, D) \rightarrow \prod_I \mathfrak{I}(F(Y), D)$$

المعرف بالشكل الآتي: أيًا كان $\lambda \in \mathfrak{S}(Q, D)$ فإن $\Gamma(\lambda) = (\lambda \cdot q_I^e)_I$ متباين وذلك لأجل كل $D \in \text{ob}(\mathfrak{S})$ حسب التمهيدية (٤-٣-١). ومنه لأجل $D = B$ نجد أن التطبيق

$$\Gamma: \mathfrak{S}(Q, B) \rightarrow \prod_I \mathfrak{S}(F(Y), B)$$

متباين، ولما كان $t \cdot \sigma, t \cdot \bar{\sigma} \in \mathfrak{S}(Q, B)$ وإن:

$$\Gamma(t \cdot \sigma) = ((t \cdot \sigma) \cdot q_I^e)_I = (v_I)_I = ((t \cdot \bar{\sigma}) \cdot q_I^e)_I = \Gamma(t \cdot \bar{\sigma})$$

نجد أن $t \cdot w = t \cdot \bar{w}$ ، وحسب تعريف النواة المرافقة، فإنه يوجد مورفيزم وحيد $v: A \rightarrow B$ يحقق $v \cdot s = t$ ومنه نجد أن:

$$v \cdot u_X = v \cdot (s \cdot p_X) = (v \cdot s) \cdot p_X = t \cdot p_X = v_X$$

وذلك لأجل كل $X \in \text{ob}(\mathfrak{S}_1)$ ، وهذا يبين أن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} B & \xleftarrow{v} & A \\ v_X \swarrow & & \nearrow u_X \\ & F(X) & \end{array}$$

تبديلي، أي إن $v \cdot u_X = v_X$ ، وهكذا نجد أن الثنائية $(A, u_X = s \cdot p_X)$ هي نهاية استقرائية (مباشرة) للدالي F .

مبرهنة ٥-٢-٦.

لتكن $\mathfrak{S}_1$ فئة أشیائها مجموعات، ولتكن $\mathfrak{S}$ فئة ما. لنفرض أن الفئة $\mathfrak{S}_0 = \text{Funct}(\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S})$ موجودة، وتحقق أن كل دالي مباشر من أشياء الفئة $\mathfrak{S}_0$ يملك نهاية (استقرائية) مباشرة.

عندئذ: يوجد دالي مباشر $\varinjlim: \mathfrak{S}_0 = \text{Funct}(\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}) \longrightarrow \mathfrak{S}$.

البرهان.

لنعرف $\varinjlim: \text{ob}(\mathfrak{S}_0) \longrightarrow \text{ob}(\mathfrak{S})$ بالشكل الآتي: ليكن $F \in \text{ob}(\mathfrak{S}_0)$ عندئذ فإن

$F: \mathfrak{S}_1 \rightarrow \mathfrak{S}$ دالي مباشر وحسب الفرض فإن F يملك نهاية مباشرة ولتكن $A \in \text{ob}(\mathfrak{S})$. لنضع $\varinjlim(F) = A$ ، فنجد بالاعتماد على المبرهنة (٥-٢-٤) أن $\varinjlim$ هو تطبيق

أشياء. لنعرف $\varinjlim: \text{Mor}(\mathfrak{S}_0) \longrightarrow \text{Mor}(\mathfrak{S})$ بالشكل الآتي: ليكن $f \in \text{Mor}(\mathfrak{S}_0)$

عندئذ فإن $f: F_1 \rightarrow F_2$ مورفيزم دالي، حيث $F_1, F_2 \in \text{ob}(\mathfrak{S}_0)$ وحسب الفرض فإن

كلاً من F_1, F_2 يملك نهاية مباشرة، ولتكن $A_1, A_2 \in ob(\mathfrak{S})$ على الترتيب. بما أن $\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{S}_2$ فإنه لأجل $F_1, F_2: \mathfrak{S}_1 \rightarrow \mathfrak{S}$ دوالاً مباشرة وحسب المبرهنة (٣-٢-٥) فنجد أن $\lim (f) = u$ لنضع $u: A_1 \rightarrow A_2$ وحيد مورفيزم $G = I_{\mathfrak{S}_1}$ مورفيزمات بسبب وحدانية المورفيزم u .

ليكن $F \in ob(\mathfrak{S}_0)$ ، وإن $I_F: F \rightarrow F$ المورفيزم الدالي المطابق، ولنبرهن على أن $\lim (I_F) = I_A$ حيث $A \in ob(\mathfrak{S})$. لما كان $F: \mathfrak{S}_1 \rightarrow \mathfrak{S}$ دالياً مباشراً، فإنه حسب الفرض توجد نهاية مباشرة ولتكن $A \in ob(\mathfrak{S})$ للدالي F وحسب المبرهنة (٣-٢-٥) فإنه لأجل $\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{S}_2$ و $F_1 = F_2 = F$ و $G = I_{\mathfrak{S}_1}$ يوجد مورفيزم وحيد $\beta: A \rightarrow A$ لأجله المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\beta} & A \\ u_X \downarrow & & \downarrow u_X \\ F(X) & \xrightarrow{I_{F(X)}} & F(X) \end{array}$$

تبديلي، أي إن $u_X \cdot \beta = I_{F(X)} \cdot u_X = u_X$ وهذا يبين أن $\beta = I_A$ بسبب وحدانية β . ومنه نجد أن $\lim (I_F) = \beta = I_A$.

ليكن $f: F_1 \rightarrow F_2$ و $g: F_2 \rightarrow F_3$ مورفيزمات للفتة $\mathfrak{S}_0$ حيث $F_1, F_2, F_3: \mathfrak{S}_1 \rightarrow \mathfrak{S}$ دوالاً مباشرة. لنبرهن على أن $\lim (g \cdot f) = \lim (g) \cdot \lim (f)$ حسب الفرض فإن

كلاً من F_1, F_2, F_3 يملك نهاية مباشرة، ولتكن $A_1, A_2, A_3 \in ob(\mathfrak{S})$ على الترتيب. حسب المبرهنة (٣-٢-٥) فإنه لأجل $\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{S}_2$ و $G = I_{\mathfrak{S}_1}$ يوجد لأجل f مورفيزم وحيد $u: A_1 \rightarrow A_2$ للفتة $\mathfrak{S}$ لأجله $\lim (f) = u$ وأيضاً لأجل g يوجد مورفيزم وحيد $v: A_2 \rightarrow A_3$ للفتة $\mathfrak{S}$ لأجله $\lim (g) = v$ وأنه لأجل كل من u و v المخططات الآتية:

$$\begin{array}{ccc} A_1 & \xrightarrow{u} & A_2 \\ u_X^1 \downarrow & & \downarrow u_X^2 \\ F_1(X) & \xrightarrow{f(X)} & F_2(X) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} A_2 & \xrightarrow{v} & A_3 \\ u_X^2 \downarrow & & \downarrow u_X^3 \\ F_2(X) & \xrightarrow{g(X)} & F_3(X) \end{array}$$

تبديلية، أي إن $u_X^2 \cdot u = f(X) \cdot u_X^1$, $u_X^3 \cdot v = g(X) \cdot u_X^2$

ومنه نجد أن مورفيزم للفتة $\mathfrak{I}$ لأجله المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} A_1 & \xrightarrow{v \cdot u} & A_3 \\ u_X^1 \downarrow & & \downarrow u_X^3 \\ F_1(X) & \xrightarrow{g \cdot f(X)} & F_3(X) \end{array}$$

تبديلي، لأن:

$$\begin{aligned} (g \cdot f)(X) \cdot u_X^1 &= (g(X) \cdot f(X)) \cdot u_X^1 = g(X) \cdot (f(X) \cdot u_X^1) = \\ &= g(X) \cdot (u_X^2 \cdot u) = (g(X) \cdot u_X^2) \cdot u = (u_X^3 \cdot v) \cdot u = u_X^3 \cdot (v \cdot u) \end{aligned}$$

وإن $\lim (g \cdot f) = v \cdot u = \lim (g) \cdot \lim (f)$ وهذا يبين أن $\lim$ دالي مباشر.

٣-٥. الدوال التامة.

تعريف.

لتكن $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3$ ثلاث فئات، وليكن $F: \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$ دالياً مباشراً. نقول إن الدالي F يحفظ النهايات العكسية من الفئة $\mathcal{S}_3$ إذا تحقق الشرط:

إذا كان $G: \mathcal{S}_3 \rightarrow \mathcal{S}_1$ دالياً، وكانت الثنائية $(B, u_D: B \rightarrow G(D))$ نهاية عكسية للدالي G ، حيث $B \in ob(\mathcal{S}_1)$ والمورفيزمات $u_D: B \rightarrow G(D)$ معرفة لأجل كل $D \in ob(\mathcal{S}_3)$ ، فإن الثنائية:

$$(F(B), F(u_D): F(B) \rightarrow F \cdot G(D))$$

تكون نهاية عكسية للدالي $F \cdot G$.

ملاحظة.

وجدنا حسب المبرهنة (٢-١-٢) أنه إذا كانت $\mathcal{S}$ فئة عندئذ لأجل كل $X \in ob(\mathcal{S})$ يوجد دالي مباشر $h_X: \mathcal{S} \rightarrow Set's$ حيث h_X هي فئة المجموعات، المعرف بالشكل الآتي: أياً كان $u \in \mathcal{S}(Y, Y')$ فإن $h_X(u): \mathcal{S}(X, Y) \rightarrow \mathcal{S}(X, Y')$ ويحقق أياً كان $v \in \mathcal{S}(X, Y)$ ، فإن $h_X(u)(v) = u \cdot v$.

مبرهنة ١-٣-٥.

لتكن $\mathcal{S}$ فئة، وليكن $A \in ob(\mathcal{S})$ ، عندئذ الدالي المباشر $h_A: \mathcal{S} \rightarrow Set's$ يحفظ النهايات العكسية، بمعنى أن صورة أي نهاية عكسية لدالي مباشر ما وفق F هي نهاية عكسية للدالي $h_A \cdot F$.

البرهان.

لتكن $\mathcal{S}_1$ فئة ما، وليكن $F: \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}$ دالياً مباشراً ولنفرض أن $B \in ob(\mathcal{S})$ ، وإن المورفيزمات $u_X: B \rightarrow F(X)$ معرفة لأجل كل $X \in ob(\mathcal{S}_1)$ ولنفرض أيضاً أن الثنائية (B, u_X) نهاية عكسية للدالي F ، ولنبرهن على أن الثنائية $(h_A(B), h_A(u_X))$ هي نهاية عكسية للدالي $h_A \cdot F$.

نلاحظ أولاً أن $h_A \cdot F: \mathcal{S}_1 \rightarrow Set's$ هو دالي مباشر، وذلك حسب التمهيدية (٢-١-٣).

- ليكن $\alpha: X \rightarrow Y$ مورفيزماً للغة $\mathfrak{I}_1$ ، عندئذ يكون المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{u_X} & F(X) \\ & \searrow u_Y & \downarrow F(\alpha) \\ & & F(Y) \end{array}$$

تبدلياً، أي إن $F(\alpha) \cdot u_X = u_Y$ ، وذلك لأن (B, u_X) نهاية عكسية للدالي F وبالتالي يكون المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} h_A(B) & \xrightarrow{h_A(u_X)} & h_A(F(X)) \\ & \searrow h_A(u_Y) & \downarrow h_A(F(\alpha)) \\ & & h_A(F(Y)) \end{array}$$

تبدلياً أي إن $h_A(F(\alpha)) \cdot h_A(u_X) = h_A(u_Y)$ ؛ لأنه أيأ كان $\lambda \in h_A(B) = \mathfrak{I}_1(A, B)$ فإن

$$\begin{aligned} (h_A(F(\alpha)) \cdot h_A(u_X))(\lambda) &= h_A(F(\alpha))(h_A(u_X)(\lambda)) = h_A(F(\alpha))(u_X \cdot \lambda) = \\ &= F(\alpha) \cdot (u_X \cdot \lambda) = (F(\alpha) \cdot u_X) \cdot \lambda = u_Y \cdot \lambda = h_A(u_Y)(\lambda) \end{aligned}$$

ومنه $h_A(F(\alpha)) \cdot h_A(u_X) = h_A(u_Y)$ وهذا يبين أن المورفيزمات $h_A(u_X)$ معرفة لأجل كل $X \in ob(\mathfrak{I}_1)$ وتحقق الشرط (١) من التعريف.

- لتكن $M \in ob(\text{Set's})$ ، أي إن M مجموعة، ولنفرض أن التطبيقات:

$$f(X): M \rightarrow h_A(F(X))$$

معرفة لأجل كل $X \in ob(\mathfrak{I}_1)$ ، وليكن $\alpha: X \rightarrow Y$ مورفيزماً للغة $\mathfrak{I}_1$ ولنفرض أن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f(X)} & h_A(F(X)) \\ & \searrow f(Y) & \downarrow h_A(F(\alpha)) \\ & & h_A(F(Y)) \end{array}$$

تبدلياً، أي إن $h_A(F(\alpha)) \cdot f(X) = f(Y)$ وبالتالي يكون $F(\alpha) \cdot f(X) = f(Y)$ من جهة أخرى، نلاحظ أنه لأجل كل $m \in M$ فإن:

$$f(X)(m) \in h_A(F(X)) = \mathfrak{I}_1(A, F(X))$$

ولكون المخطط السابق تبدلياً نجد أن:

$$(F(\alpha) \cdot f(X))(m) = f(Y)(m)$$

وبالتالي يكون $F(\alpha)(f(X)(m)) = f(Y)(m)$ وهذا يبين أن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{f(X)(m)} & F(X) \\
 & \searrow & \downarrow F(\alpha) \\
 & f(Y)(m) & F(Y)
 \end{array}$$

ولكون (B, u_X) نهاية عكسية، فإنه حسب الشرط (٢) يوجد مورفيزم وحيد $v_m : A \rightarrow B$ لأجله المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{v_m} & B \\
 & \searrow & \downarrow u_X \\
 & f(X)(m) & F(X)
 \end{array}$$

تبدلياً، أي إن $u_X \cdot v_m = f(X)(m)$ وذلك لأجل كل $X \in \text{ob}(\mathcal{T}_1)$ ولأجل كل $m \in M$.
لنعرف العلاقة: $g : M \rightarrow h_A(B) = \mathcal{T}(A, B)$ بالشكل الآتي: أيأ كان $m \in M$ ، لنضع $g(m) = v_m$ ، فنجد أن g تطبق بسبب وحدانية المورفيزم v_m وهكذا نجد أن:

$$h_A(u_X) \cdot g = f(X)$$

لأنه أيأ كان $m \in M$ فإن:

$$(h_A(u_X) \cdot g)(m) = h_A(u_X)(g(m)) = u_X \cdot v_m = f(X)(m)$$

ومنه نجد أن الثنائية $(h_A(B), h_A(u_X))$ هي نهاية عكسية للدالي $h_A \cdot F$.

تمهيدية ٢-٣-٥.

لتكن $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \mathcal{T}_3$ ثلاث فئات. ولنفرض أن الفئة $\mathcal{T}_0 = \text{Funct}(\mathcal{T}_2, \mathcal{T}_1)$ موجودة. وليكن $H_A : \mathcal{T}_3 \rightarrow \mathcal{T}_1$ دالياً. عندئذ لأجل كل $A \in \text{ob}(\mathcal{T}_2)$ يوجد دالي $H_A : \mathcal{T}_3 \rightarrow \mathcal{T}_0$ معرف بالشكل الآتي: أيأ كان $X \in \text{ob}(\mathcal{T}_3)$ ، فإن $H_A(X) = F(X)(A)$.
البرهان.

لنعرف $H_A : \mathcal{T}_3 \rightarrow \mathcal{T}_1$ من خلال تطبيقي أشياء ومورفيزمات.

لنعرف $H_A : \text{ob}(\mathcal{T}_3) \rightarrow \text{ob}(\mathcal{T}_1)$ بالشكل الآتي: أيأ كان $X \in \text{ob}(\mathcal{T}_3)$ ، فإن:

$$F(X) : \mathcal{T}_2 \rightarrow \mathcal{T}_1$$

وبما أن $A \in \text{ob}(\mathcal{T}_2)$ نجد أن $F(X)(A) \in \text{ob}(\mathcal{T}_1)$ ، لنضع $H_A(X) = F(X)(A)$.

فنجد أنه تطبيقي أشياء، لأنه إذا كان $X_1, X_2 \in \text{ob}(\mathcal{T}_3)$ بحيث $X_1 = X_2$ يكون:

$$F(X_1) = F(X_2) \text{ ولما كان كل من } F(X_1), F(X_2) \text{ تطبيقي نجد أن:}$$

$$F(X_1)(A) = F(X_2)(A)$$

ومنه نجد أن $H_A(X_1) = H_A(X_2)$. وهذا يبين أن H_A هو تطبيق أشياء.

لنعرف تطبيق مورفيزمات $H_A : Mor(\mathfrak{T}_3) \rightarrow Mor(\mathfrak{T}_1)$ بالشكل الآتي: ليكن

$u : B \rightarrow D$ مورفيزم للفئة $\mathfrak{T}_3$ حيث $B, D \in ob(\mathfrak{T}_3)$. لنضع

$$H_A(u) : \mathfrak{T}_3(B, D) \rightarrow \mathfrak{T}_1(H_A(B), H_A(D))$$

وذلك لأن $(H_A(B), H_A(D)) \in ob(\mathfrak{T}_1)$. بما أن $\mathfrak{T}_2 \rightarrow \mathfrak{T}_1$ فإن $F(B), F(D) : \mathfrak{T}_2 \rightarrow \mathfrak{T}_1$ هي دوال فإن

$$F(u)(A) : F(B)(A) \rightarrow F(D)(A) \text{ هو مورفيزم دالي وإن } F(u) : F(B) \rightarrow F(D)$$

هو مورفيزم للفئة $\mathfrak{T}_1$ ومنه $F(u)(A) : H_A(B) \rightarrow H_A(D)$ لنضع:

$$H_A(u) = F(u)(A)$$

فنجد أنه تطبيق؛ لأنه إذا كان u_1, u_2 مورفيزمات للفئة $\mathfrak{T}_3$ بحيث $u_1 = u_2$ فإن

$$F(u_1) = F(u_2) \text{ ومنه } F(u_1)(A) = F(u_2)(A) \text{ وبالتالي يكون } H_A(u_1) = H_A(u_2)$$

كما أنه لأجل كل $X \in ob(\mathfrak{T}_3)$ ، فإن:

$$H_A(I_X) = F(I_X)(A) = I_{F(X)}(A) = I_{F(X)(A)} = I_{H_A(X)}$$

حيث $I_{F(X)} : F(X) \rightarrow F(X)$ هو المورفيزم الدالي المطابق.

كما أنه لأجل أي مورفيزمين u, v للفئة $\mathfrak{T}_3$ ، فإن:

$$\begin{aligned} H_A(u \cdot v) &= F(u \cdot v)(A) = (F(u) \cdot F(v))(A) = (F(u)(A)) \cdot (F(v)(A)) \\ &= H_A(u) \cdot H_A(v) \end{aligned}$$

مما سبق نجد أن H_A هو دالي مباشر.

مبرهنة ٣-٣-٥.

لتكن $\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2, \mathfrak{T}_3$ ثلاث فئات. ولنفرض أن الفئة $\mathfrak{T}_0 = Funct(\mathfrak{T}_2, \mathfrak{T}_1)$ موجودة. وليكن

$$H_A : \mathfrak{T}_3 \rightarrow \mathfrak{T}_1 \text{ دالياً. عندئذٍ لأجل كل } A \in ob(\mathfrak{T}_2) \text{ لتأخذ الدالي } H_A : \mathfrak{T}_3 \rightarrow \mathfrak{T}_1$$

المعرف بالشكل الآتي: أيًا كان $X \in ob(\mathfrak{T}_3)$ ، فإن $H_A(X) = F(X)(A)$

أخيراً، ليكن $G : \mathfrak{T}_2 \rightarrow \mathfrak{T}_1$ دالياً يحقق أنه لأجل كل $A \in ob(\mathfrak{T}_2)$ فإن الثنائية:

$$u_X^d : G(A) \rightarrow H_A(X) \text{ نهاية عكسية للدالي } H_A, \text{ حيث إن المورفيزمات } u_X^d$$

معرفة لأجل كل $X \in ob(\mathfrak{T}_3)$ ولأجل كل $A \in ob(\mathfrak{T}_2)$ ، فضلاً عن ذلك، لنفرض أنه

لأجل كل مورفيزم $\alpha: A \rightarrow B$ للفئة $\mathfrak{T}_2$ ، فإن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} G(A) & \xrightarrow{u_X^A} & H_A(X) = F(X)(A) \\ G(\alpha) \downarrow & & \downarrow F(X)(\alpha) \\ G(B) & \xrightarrow{u_X^B} & H_B(X) = F(X)(B) \end{array}$$

تبديلي، أي إن $F(X)(\alpha) \cdot u_X^A = u_X^B \cdot G(\alpha)$ ، عندئذ تكون الثانية:

$$(G, v_X: G \rightarrow F(X))$$

نهاية عكسية للدالي F ، حيث $v_X: G \rightarrow F(X)$ هي مورفيزمات دالية معرفة بالشكل:

$$v_X(A) = u_X^A, \quad A \in \text{ob}(\mathfrak{T}_2) \text{ ولأجل كل } X \in \text{ob}(\mathfrak{T}_3)$$

البرهان.

لنبرهن على أن الدالي F يملك نهاية عكسية. ليكن $L: \mathfrak{T}_2 \rightarrow \mathfrak{T}_1 \in \text{ob}(\mathfrak{T}_0)$ دالياً.

عندئذ لأجل كل $X \in \text{ob}(\mathfrak{T}_3)$ ، فإن $F(X) \in \text{ob}(\mathfrak{T}_0)$ أي إن $F(X): \mathfrak{T}_2 \rightarrow \mathfrak{T}_1$ دالي

أيضاً. لنأخذ المورفيزمات الدالية $w_X: L \rightarrow F(X)$ لأجل كل $X \in \text{ob}(\mathfrak{T}_3)$ التي تحقق

الشرط الآتي: لأجل كل مورفيزم $\mu: X \rightarrow Y$ للفئة $\mathfrak{T}_3$ ، فإن $F(\mu) \cdot w_X = w_Y$. فنجد

أنه لأجل كل $X \in \text{ob}(\mathfrak{T}_3)$ ولأجل كل $A \in \text{ob}(\mathfrak{T}_2)$ ، أن:

$$w_Y(A) = (F(\mu) \cdot w_X)(A) = F(\mu)(A) \cdot w_X(A)$$

أي إن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} L(A) & \xrightarrow{w_X(A)} & F(X)(A) \\ & \searrow & \downarrow F(\mu)(A) \\ w_Y(A) & & F(Y)(A) \end{array}$$

تبديلي، ولما كان لأجل كل $A \in \text{ob}(\mathfrak{T}_2)$ ، الثنائية $(G(A), u_X^A)$ هي نهاية عكسية

للدالي H_A فإنه يوجد مورفيزم وحيد $S(A): L(A) \rightarrow G(A)$ لأجله المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} L(A) & \xrightarrow{S(A)} & G(A) \\ w_X(A) \searrow & & \swarrow u_X^A \\ & F(X)(A) = H_A(X) & \end{array}$$

أي إن $u_X^A \cdot S(A) = w_X(A)$ ، وحسب الفرض يكون $v_X \cdot S(A) = w_X(A)$

إن $S: L \rightarrow G$ هو مورفيزم دالي، لأنه لأجل أي مورفيزم $\alpha: A \rightarrow B$ للفئة $\mathfrak{T}_2$ ولأجل

كل $X \in \text{ob}(\mathfrak{T}_3)$ فإن:

$$u_X^B \cdot G(\alpha) \cdot S(A) = F(X)(\alpha) \cdot u_X^A \cdot S(A) = F(X)(\alpha) \cdot v_X(A) \cdot S(A) = \\ = F(X)(\alpha) \cdot w_X(A) = w_X(B) \cdot L(\alpha) = u_X^B \cdot S(B) \cdot L(\alpha)$$

ولكون الثنائية $(G(B), u_X^B)$ هي نهاية عكسية للدالي H_B نجد أن:

$$G(\alpha) \cdot S(A) = S(B) \cdot L(\alpha)$$

وهذا يبين أن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} L(A) & \xrightarrow{S(A)} & G(A) \\ L(\alpha) \downarrow & & \downarrow G(\alpha) \\ L(B) & \xrightarrow{S(B)} & G(B) \end{array}$$

تبديلي، وبالتالي يكون $S: L \rightarrow G$ مورفيزماً دالياً وإن $v_X \cdot S = w_X$ لأجل كل $X \in ob(\mathfrak{S}_3)$ أي إن الثنائية (G, v_X) نهاية عكسية للدالي F .

تعريف.

لتكن $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \mathfrak{S}_3$ ثلاث فئات، وليكن $F: \mathfrak{S}_1 \rightarrow \mathfrak{S}_2$ دالياً مباشراً. نقول إن الدالي F ينقل النهايات المباشرة للدوال من أية فئة إلى نهايات عكسية إذا تحقق الشرط:

إذا كان $A \in ob(\mathfrak{S}_1)$ وكانت المورفيزمات $u_X: G(X) \rightarrow A$ معرفة لأجل كل $X \in ob(\mathfrak{S}_3)$ وكانت الثنائية (A, u_X) نهاية مباشرة للدالي $G: \mathfrak{S}_3 \rightarrow \mathfrak{S}_1$ فإن الثنائية $(F(A), F(u_X): F(A) \rightarrow F \cdot G(X))$ تكون نهاية عكسية للدالي $F \cdot G$.

مبرهنة ٤-٣-٥.

لتكن $\mathfrak{S}$ فئة، وليكن $A \in ob(\mathfrak{S})$ ، عندئذ الدالي غير المباشر $\hat{h}_A: \mathfrak{S} \rightarrow Set's$ ينقل النهايات الاستقرائية (المباشرة) للدوال من أية فئة إلى نهايات إسقاطية (عكسية).

البرهان.

لتكن $\mathfrak{S}_1$ فئة ما وليكن $F: \mathfrak{S}_1 \rightarrow \mathfrak{S}$ دالياً غير مباشر، ولنفرض أن $B \in ob(\mathfrak{S})$ ، وإن المورفيزمات $u_X: F(X) \rightarrow B$ معرفة لأجل كل $X \in ob(\mathfrak{S}_1)$ ولنفرض أيضاً أن الثنائية (B, u_X) نهاية مباشرة للدالي F ، ولنبرهن على أن الثنائية $(\hat{h}_A(B), \hat{h}_A(u_X))$ هي نهاية عكسية للدالي $\hat{h}_A \cdot F$.

نلاحظ أولاً أن $\hat{h}_A \cdot F: \mathfrak{S}_1 \rightarrow Set's$ هو دالي مباشر، وذلك حسب التمهيدية (٢-١-٣).

- ليكن $\alpha: X \rightarrow Y$ مورفيزماً للفتة $\mathfrak{I}_1$ ، عندئذ يكون المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} F(Y) & \xrightarrow{u_Y} & B \\ F(\alpha) \downarrow & \nearrow & \\ F(X) & & u_X \end{array}$$

تبديلياً، أي إن $u_X \cdot F(\alpha) = u_Y$ ، وذلك لأن الثنائية (B, u_X) نهاية مباشرة للدالي F وبالتالي يكون المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} \hat{h}_A(B) & \xrightarrow{\hat{h}_A(u_X)} & \hat{h}_A(F(X)) \\ & \searrow & \downarrow \hat{h}_A(F(\alpha)) \\ \hat{h}_A(u_Y) & & \hat{h}_A(F(Y)) \end{array}$$

تبديلياً أي إن $\hat{h}_A(u_X) \cdot \hat{h}_A(F(\alpha)) = \hat{h}_A(u_Y)$ ، لأنه أياً كان $\lambda \in \hat{h}_A(B) = \mathfrak{I}(B, A)$ فإن

$$\begin{aligned} (\hat{h}_A(F(\alpha)) \cdot \hat{h}_A(u_X))(\mu) &= \hat{h}_A(F(\alpha))(\hat{h}_A(u_X)(\mu)) = \hat{h}_A(F(\alpha))(\mu \cdot u_X) = \\ &= (\mu \cdot u_X) \cdot F(\alpha) = \mu \cdot (u_X \cdot F(\alpha)) = \mu \cdot u_Y = \hat{h}_A(u_Y)(\mu) \end{aligned}$$

ومنه $\hat{h}_A(F(\alpha)) \cdot \hat{h}_A(u_X) = \hat{h}_A(u_Y)$ وهذا يبين أن المورفيزمات $\hat{h}_A(u_X)$ معرفة لأجل كل $X \in \text{ob}(\mathfrak{I}_1)$ وتحقق الشرط (١) من التعريف.

- لتكن $M \in \text{ob}(\text{Ser's})$ ، أي إن M مجموعة، ولنفرض أن التطبيقات:

$$f(X): M \rightarrow \hat{h}_A(F(X))$$

معرفة لأجل كل $X \in \text{ob}(\mathfrak{I}_1)$ وليكن $\alpha: X \rightarrow Y$ مورفيزماً للفتة $\mathfrak{I}_1$ ولنفرض أن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f(X)} & \hat{h}_A(F(X)) \\ & \searrow & \downarrow \hat{h}_A(F(\alpha)) \\ f(Y) & & \hat{h}_A(F(Y)) \end{array}$$

تبديلياً، أي إن $\hat{h}_A(F(\alpha)) \cdot f(X) = f(Y)$

من جهة أخرى، نلاحظ أنه لأجل كل $m \in M$ فإن:

$$f(X)(m) \in \hat{h}_A(F(X)) = \mathfrak{I}(F(X), A)$$

ولكون المخطط السابق تبديلياً نجد أن $\hat{h}_A(F(\alpha)) \cdot f(X)(m) = f(Y)(m)$ وهذا يبين أن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc}
 F(X) & \xrightarrow{f(X)(m)} & A \\
 F(\alpha) \uparrow & \nearrow & \\
 f(Y) & & f(Y)(m)
 \end{array}$$

تبدلياً، أي إن $f(X)(m) \cdot F(\alpha) = f(Y)(m)$ وذلك لكون (B, u_X) نهاية مباشرة، وحسب الشرط (٢) يوجد مورفيزم وحيد $v_m : B \rightarrow A$ لأجله المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc}
 B & \xrightarrow{v_m} & A \\
 \searrow u_X & & \nearrow f(X)(m) \\
 & F(X) &
 \end{array}$$

تبدلياً، أي إن $v_m \cdot u_X = f(X)(m)$ وذلك لأجل كل $X \in \text{ob}(\mathcal{T}_1)$ ولأجل كل $m \in M$. لنعرف العلاقة: $g : M \rightarrow \hat{h}_A(B) = \mathcal{T}(B, A)$ بالشكل الآتي: أيأ كان $m \in M$ ، لنضع $g(m) = v_m$ ، فنجد أن g تطبيق بسبب وحدانية المورفيزم v_m . وهكذا نجد أن:

$$\hat{h}_A(u_X) \cdot g = f(X)$$

لأنه أيأ كان $m \in M$ فإن:

$$(\hat{h}_A(u_X) \cdot g)(m) = \hat{h}_A(u_X)(g(m)) = \hat{h}_A(u_X)(v_m) = v_m \cdot u_X = f(X)(m)$$

ومنه نجد أن الثنائية $(\hat{h}_A(B), \hat{h}_A(u_X))$ هي نهاية عكسية للدالي $\hat{h}_A \cdot F$.

مبرهنة ٥-٣-٥.

لتكن $\mathcal{T}$ فئة وليكن $F : \mathcal{T} \rightarrow \text{Set's}$ دالياً غير مباشر. إذا كان الدالي F ممثلاً، عندئذ فإن F ينقل النهايات الاستقرائية (المباشرة) للدوال من أية فئة إلى نهايات إسقاطية (عكسية).

البرهان.

لنفرض أن الدالي F ممثلاً، عندئذ حسب التعريف يوجد $A \in \text{ob}(\mathcal{T})$ بحيث $F \equiv \hat{h}_A$ ، وحسب المبرهنة (٥-٣-٤) بما أن الدالي $\hat{h}_A$ ينقل النهايات الاستقرائية (المباشرة) للدوال من أية فئة إلى نهايات إسقاطية (عكسية) نجد أن الدالي F ينقل النهايات الاستقرائية (المباشرة) للدوال من أية فئة إلى نهايات إسقاطية (عكسية).

مبرهنة ٥-٣-٦.

ليكن $F: \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}'$ دالياً مباشراً. إذا كان الدالي F يملك مرافقاً، عندئذ فإن الدالي F يحفظ النهايات العكسية (المباشرة) للدوال من أية فئة.

البرهان.

لنفرض أن الدالي F يملك مرافقاً $G: \mathcal{T}' \rightarrow \mathcal{T}$ عندئذ حسب التعريف أيأ كان $A \in ob(\mathcal{T})$ و $B \in ob(\mathcal{T}')$ فإن $h_B(F(A)) \equiv h_{G(B)}(A)$.

لتكن فئة $\mathcal{T}_0$ فئة و $L: \mathcal{T}_0 \rightarrow \mathcal{T}$ دالياً يملك نهاية عكسية $\underline{\text{Lim}}(L)$ ، عندئذ حسب المبرهنة (٥-٣-١) فإنه لأجل كل $B \in ob(\mathcal{T}')$ فإن:

$$\begin{aligned} h_B(F(\underline{\text{Lim}}(L))) &\equiv h_{G(B)}(\underline{\text{Lim}}(L)) \equiv \underline{\text{Lim}}(h_{G(B)} \cdot L) \equiv \\ &\equiv \underline{\text{Lim}}(h_{G(B)} \cdot L) \equiv \underline{\text{Lim}}(h_B \cdot F \cdot L) \equiv h_B(\underline{\text{Lim}}(F \cdot L)) \end{aligned}$$

من هنا نجد أن $F(\underline{\text{Lim}}(L)) \equiv \underline{\text{Lim}}(F \cdot L)$

تمهيدية ٥-٣-٧.

لتكن $\mathcal{T}$ فئة صغيرة، وليكن $F: \mathcal{T}^o \rightarrow \text{Set's}$ دالياً غير مباشراً، عندئذ توجد فئة $\bar{\mathcal{T}}$:
 - أشياءها هي جميع المورفيزمات الدالية الممكنة $\hat{h}_A \rightarrow F$ ، وذلك أيأ كان $A \in ob(\mathcal{T})$.
 - مورفيزماتها هي جميع المورفيزمات من الشكل $\hat{h}(\alpha)$ حيث $\alpha: A \rightarrow B$ مورفيزم للفئة $\mathcal{T}$ التي لأجلها المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} \hat{h}_A & \longrightarrow & F \\ \hat{h}(\alpha) \downarrow & \nearrow & \\ \hat{h}_B & & \end{array}$$

تبديلي.

البرهان.

لنبرهن على أن $\bar{\mathcal{T}}$ فئة والتي تتألف من:

- صف الأشياء $ob(\bar{\mathcal{T}})$ ، الذي يتألف من جميع المورفيزمات الدالية $\hat{h}_A \rightarrow F$ وذلك $f_A: \hat{h}_A \rightarrow F$ أيأ كان $A \in ob(\mathcal{T})$ ، حيث إنه حسب التمرين المحلول (٢-٥)، فإن $\hat{h}_A: \mathcal{T}^o \rightarrow \text{Set's}$ هو دالي غير مباشر وذلك أيأ كان $A \in ob(\mathcal{T})$.

- صف المورفيزمات $Mor(\bar{\mathcal{T}})$. بالاعتماد على المبرهنة (٢-٣-٥) فإنه يوجد دالي مباشر $\hat{h}: \mathcal{T} \rightarrow Funct(\mathcal{T}^o, Set's)$ معرف بالشكل الآتي: أيأ كان $A \in ob(\mathcal{T})$ ، فإن $\hat{h}(A) = \hat{h}_A$. لنشكل صف المورفيزمات $Mor(\bar{\mathcal{T}})$ المؤلف من جميع المورفيزمات الممكنة $\hat{h}(\alpha)$ حيث $\alpha: A \rightarrow B$ مورفيزم للفئة $\mathcal{T}$ الذي لأجله المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} \hat{h}_A & \xrightarrow{f_A} & F \\ \hat{h}(\alpha) \downarrow & \nearrow & \\ \hat{h}_B & \xrightarrow{f_B} & F \end{array}$$

تبدلياً أي إن $f_B \cdot \hat{h}(\alpha) = f_A$. لنبرهن على أن صفي الأشياء والمورفيزمات المذكورين يشكلان الفئة $\bar{\mathcal{T}}$.

ليكن $f_A, f_B, f_D \in ob(\bar{\mathcal{T}})$ حيث $A, B, D \in ob(\mathcal{T})$ ، ولنبرهن على وجود تطبيق:

$$\mu: \bar{\mathcal{T}}(f_A, f_B) \times \bar{\mathcal{T}}(f_B, f_D) \longrightarrow \bar{\mathcal{T}}(f_A, f_D)$$

ليكن $(\hat{h}(v), \hat{h}(u)) \in \bar{\mathcal{T}}(f_A, f_B) \times \bar{\mathcal{T}}(f_B, f_D)$ حيث $v: A \rightarrow B, u: B \rightarrow D$ مورفيزمان

للفئة $\mathcal{T}$ ، عندئذ $u \cdot v: A \rightarrow D$ مورفيزم للفئة $\mathcal{T}$. لنبرهن على أن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} \hat{h}_A & \xrightarrow{f_A} & F \\ \hat{h}(u \cdot v) \downarrow & \nearrow & \\ \hat{h}_D & \xrightarrow{f_D} & F \end{array}$$

تبدلي. بما أن $\hat{h}(v), \hat{h}(u) \in Mor(\bar{\mathcal{T}})$ ، فإن المخططات الآتية:

$$\begin{array}{ccc} \hat{h}_A & \xrightarrow{f_A} & F \\ \hat{h}(v) \downarrow & \nearrow & \\ \hat{h}_B & \xrightarrow{f_B} & F \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \hat{h}_B & \xrightarrow{f_B} & F \\ \hat{h}(u) \downarrow & \nearrow & \\ \hat{h}_D & \xrightarrow{f_D} & F \end{array}$$

تبدلية، أي إن $f_B \cdot \hat{h}(v) = f_A$ ، $f_D \cdot \hat{h}(u) = f_B$ ، وبما أن الدالي h مباشر نجد:

$$f_D \cdot \hat{h}(u \cdot v) = f_D \cdot (\hat{h}(u) \cdot \hat{h}(v)) = (f_D \cdot \hat{h}(u)) \cdot \hat{h}(v) = f_B \cdot \hat{h}(v) = f_A$$

ومنه نجد أن:

$$\mu((\hat{h}(v), \hat{h}(u))) = \hat{h}(u) \cdot \hat{h}(v) = \hat{h}(u \cdot v) \in \bar{\mathcal{T}}(f_A, f_D)$$

وإن هذه العملية تجميعية، لأن تركيب المورفيزمات الدالية تجميعي.

لنبرهن أنه أيأ كان $f_A: \hat{h}_A \rightarrow F \in ob(\bar{\mathcal{T}})$ يوجد مورفيزم مطابق. ليكن $f_A: \hat{h}_A \rightarrow F$

عندئذ $A \in ob(\mathcal{T})$ ، ومنه يوجد المورفيزم المطابق $I_A: A \rightarrow A$ ، ولما كان $\hat{h}$ دالياً نجد

أن $\hat{h}(I_A) = I_{\hat{h}(A)} = I_{\hat{h}_A}$ ؛ ومنه $f_A \cdot \hat{h}(I_A) = f_A \cdot I_{\hat{h}_A} = f_A$ ، أي إن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} \hat{h}_A & \xrightarrow{f_A} & F \\ \hat{h}(I_A) \downarrow & \nearrow & \\ \hat{h}_A & & f_A \end{array}$$

تبدلي، وهذا يبين أن $\hat{h}(I_A) \in \text{Mor}(\overline{\mathcal{S}})$ ، ويحقق:

- أيأ كان $\hat{h}(u): \hat{h}(A) \rightarrow \hat{h}(B)$ حيث $u: A \rightarrow B$ مورفيزم للفئة $\mathcal{S}$ وأيأ كان $\hat{h}(v): \hat{h}(D) \rightarrow \hat{h}(A)$ حيث $v: D \rightarrow A$ مورفيزم للفئة $\mathcal{S}$ ، فإن:

$$\hat{h}(u) \cdot \hat{h}(I_A) = \hat{h}(u \cdot I_A) = \hat{h}(u)$$

$$\hat{h}(I_A) \cdot \hat{h}(v) = \hat{h}(I_A \cdot v) = \hat{h}(v)$$

وهذا يبين أن $\hat{h}(I_A)$ هو المورفيزم المطابق في الفئة $\overline{\mathcal{S}}$ وذلك لأجل كل $f_A \in \text{ob}(\overline{\mathcal{S}})$.
مما سبق نجد أن $\overline{\mathcal{S}}$ فئة.



الفصل السادس

البنى على أشياء الفئة

٦-١. علاقات التكافؤ.

تعريف.

لتكن M مجموعة غير خالية، ولتكن R مجموعة جزئية من الجداء الديكارتي $M \times M$.
نقول إن R تشكل علاقة تكافؤ على المجموعة M إذا حققت الشروط الآتية:

- ١ - أيأ كان $x \in M$ فإن $(x, x) \in R$.
 - ٢ - أيأ كان $x, y \in M$ وكان $(x, y) \in R$ فإن $(y, x) \in R$.
 - ٣ - أيأ كان $x, y, z \in M$ وكان $(x, y), (y, z) \in R$ فإن $(x, z) \in R$.
- إذا كانت R علاقة تكافؤ على المجموعة M ، فإننا نسمي الثنائية (M, R) بنية.

تمهيدية ٦-١-١.

إن صفي الأشياء والمورفيومات الآتين:

- صف الأشياء. المؤلف من جميع الثنائيات الممكنة (M, R) حيث M مجموعة و R علاقة تكافؤ على M .

- صف المورفيزمات. المورفيزمات $u: (M, R) \rightarrow (N, S)$ هي جميع التطبيقات الممكنة $u: M \rightarrow N$ التي تحقق الشرط الآتي: أيأ كان $x, y \in M$ وكان $(x, y) \in R$ ، فإن $(u(x), u(y)) \in S$.

يشكلان فئة سوف نرمز لها $\overline{\mathcal{S}}$.

البرهان.

لتكن $(M, R), (N, S), (K, T) \in ob(\overline{\mathcal{S}})$ ولنبرهن على وجود تطبيق:

$$\mu: \overline{\mathcal{S}}((M, R), (N, S)) \times \overline{\mathcal{S}}((N, S), (K, T)) \longrightarrow \overline{\mathcal{S}}((M, R), (K, T))$$

بحيث أيأ كان $u, v \in \overline{\mathcal{S}}((M, R), (N, S)) \times \overline{\mathcal{S}}((N, S), (K, T))$ فإن $\mu(u, v) = v \circ u$ بما أن $u: M \rightarrow N, v: N \rightarrow K$ تطبيقات فإن $v \circ u: M \rightarrow K$ تطبيق ويحقق، أيأ كان

$x, y \in M$ بحيث $(x, y) \in R$ ، فإن $(u(x), u(y)) \in S$ وأن $(v(u(x)), v(u(y))) \in T$ وبالتالي يكون $(v \cdot u(x), v \cdot u(y)) \in T$ ، ومنه فإن تركيب المورفيزمات معرف وهو تجميعي وأنه أياً كان $(M, R) \in ob(\bar{\mathcal{S}})$ ، فإن التطبيق المطابق $I_M: M \rightarrow M$ موجود؛ ويحقق الشرط $I_M \cdot f = f$ ، $g \cdot I_M = g$ وذلك أياً كان $f: (N, S) \rightarrow (M, R)$ وأياً كان $g: (M, R) \rightarrow (K, T)$ مورفيزمات للفئة $\bar{\mathcal{S}}$. وهكذا نجد أن $\bar{\mathcal{S}}$ فئة.

تمهيدية ٢-١-٦.

لأجل الفئة $\bar{\mathcal{S}}$ المعرفة في التمهيدية (١-١-٦) يوجد داليان:

١ - $\mathcal{C}: \bar{\mathcal{S}} \rightarrow Set's$ معرف بالشكل الآتي: أياً كان $(M, R) \in ob(\bar{\mathcal{S}})$ ، فإن $\mathcal{C}((M, R)) = M$.

٢ - $\mathcal{Q}: \bar{\mathcal{S}} \rightarrow Set's$ معرف بالشكل الآتي: أياً كان $(M, R) \in ob(\bar{\mathcal{S}})$ ، فإن $\mathcal{Q}((M, R)) = M/R$ حيث M/R هي مجموعة الخارج المؤلفة من جميع صفوف تكافؤ العلاقة R .

البرهان.

١ - واضح أن $\mathcal{C}: ob(\bar{\mathcal{S}}) \rightarrow ob(Set's)$ المعرف بالشكل الآتي: أياً كان $(M, R) \in ob(\bar{\mathcal{S}})$ فإن $\mathcal{C}((M, R)) = M \in ob(Set's)$ هو تطبيق.

- لنعرف تطبيق مورفيزمات $\mathcal{C}: Mor(\bar{\mathcal{S}}) \rightarrow Mor(Set's)$ بالشكل الآتي: وذلك لأجل أي مورفيزم $u: (M, R) \rightarrow (N, S)$ ، واضح أنه تطبيق، ويحقق الشروط الآتية:

- لأجل أي $(M, R) \in ob(\bar{\mathcal{S}})$ ، فإن $\mathcal{C}(I_{(M, R)}) = I_M$ ، وأياً كان $u: (M, R) \rightarrow (N, S)$ ، فإن $\mathcal{C}(v \cdot u) = v \cdot u = \mathcal{C}(v) \cdot \mathcal{C}(u)$ مما سبق نجد أن $\mathcal{C}$ هو دالي مباشر.

٢ - واضح أن $\mathcal{Q}: ob(\bar{\mathcal{S}}) \rightarrow ob(Set's)$ المعرف بالشكل الآتي: أياً كان $(M, R) \in ob(\bar{\mathcal{S}})$ ، فإن $\mathcal{Q}((M, R)) = M/R \in ob(Set's)$ هو تطبيق.

- لنعرف تطبيق مورفيزمات $\mathcal{Q}: Mor(\bar{\mathcal{S}}) \rightarrow Mor(Set's)$ بالشكل الآتي: ليكن $u: (M, R) \rightarrow (N, S)$ مورفيزماً للفئة $\bar{\mathcal{S}}$ ولنعرف العلاقة $\bar{u}: M/R \rightarrow N/S$ بالشكل

الآتي: ليكن $\overline{a_R} \in M/R$ صف التكافؤ للعنصر $a \in M$ بالنسبة للعلاقة R ، لنضع:

$$\overline{u}(\overline{a_R}) = \overline{u(a)_S}$$

حيث $\overline{u(a)_S}$ صف التكافؤ المولد بالعنصر $u(a) \in N$ بالنسبة للعلاقة S .

إن $\overline{u}$ تطبيق؛ لأنه إذا كان $\overline{a_R}, \overline{b_R} \in M/R$ بحيث $\overline{a_R} = \overline{b_R}$ ، فإن $a \in \overline{b_R}$ أي إن $(a, b) \in R$ ؛ ومنه فإن $(u(a), u(b)) \in S$ وبالتالي يكون $u(a) \in \overline{u(b)_S}$ ؛ ومنه يكون $\overline{u(a)_S} = \overline{u(b)_S}$ ، أي إن $\overline{u}(\overline{a_R}) = \overline{u}(\overline{b_R})$ ؛ وبالتالي يكون $\overline{u}$ تطبيقاً.

لنضع $\overline{Q(u)} = \overline{u}$ فنجد أنه يشكل تطبيق مورفيزمات؛ لأنه إذا كان u, v مورفيزمات للفئة $\overline{\mathcal{S}}$ بحيث $u = v$ نجد أن $u, v: (M, R) \rightarrow (N, S)$ وأنه أياً كان $a \in M$ ، فإن $u(a) = v(a)$ وبالتالي فإن $\overline{u}, \overline{v}: M/R \rightarrow N/S$ وأن $\overline{u} = \overline{v}$ ؛ لأنه أياً كان $a_R \in M/R$ فإن $a \in M$ ، ومنه $u(a) = v(a)$ وبالتالي يكون $\overline{u(a)_S} = \overline{v(a)_S}$ أي إن $\overline{u}(\overline{a_R}) = \overline{v}(\overline{a_R})$ وهذا يبين أن $\overline{u} = \overline{v}$ ، ومنه $\overline{Q(u)} = \overline{Q(v)}$ ، أي إن $\overline{Q}$ تطبيق.

لنبرهن على أنه أياً كان $(M, R) \in ob(\overline{\mathcal{S}})$ ، فإن $\overline{Q(I_{(M,R)})} = I_{M/R}$ ، نلاحظ أولاً أنه لأجل كل شيء (M, R) فإن المورفيزم المطابق $I_{(M,R)}$ موجود، وأيضاً التطبيق المطابق $I_{M/R}$ موجود وحسب تعريف $\overline{Q}$ فإن $\overline{Q(I_{(M,R)})} = \overline{I}$ حيث إن $\overline{I}: M/R \rightarrow M/R$ معرف بالشكل الآتي: أياً كان $a \in M/R$ فإن:

$$\overline{I}(\overline{a_R}) = \overline{I(a)_R} = \overline{a_R}$$

أي إن $\overline{I} = I_{M/R}$ ، ومنه فإن $\overline{Q(I_{(M,R)})} = I_{M/R}$.

ليكن $u: (M, R) \rightarrow (N, S)$ و $v: (N, S) \rightarrow (K, T)$ مورفيزمات للفئة $\overline{\mathcal{S}}$ عندئذ توجد التطبيقات $\overline{u}: M/R \rightarrow N/S$ و $\overline{v}: N/S \rightarrow K/T$ ، لنبرهن على أن:

$$\overline{Q(v \cdot u)} = \overline{Q(v)} \cdot \overline{Q(u)}$$

إن $v \cdot u: (M, R) \rightarrow (K, T)$ وأن $\overline{v \cdot u}: M/R \rightarrow K/T$ كما أنه أياً كان $a \in M/R$ فإن

$$\overline{v \cdot u}(a) = \overline{v(u(a))} = \overline{v(u(a)_S)} = \overline{v(u(a))_T} = \overline{v \cdot u}(a)$$

ومنه فإن $\overline{v \cdot u} = \overline{v} \cdot \overline{u}$ وهذا يبين أن $\overline{Q(v \cdot u)} = \overline{v \cdot u} = \overline{v} \cdot \overline{u} = \overline{Q(v)} \cdot \overline{Q(u)}$ ومنه فإن $\overline{Q}$ دالياً مباشراً.

تعريف.

لتكن $\mathcal{T}$ فئة، وليكن $X \in ob(\mathcal{T})$. نقول إن X معرف عليه علاقة تكافؤ إذا وجد دالي غير مباشر $\bar{\mathcal{T}} \rightarrow \mathcal{T}$ ، حيث $F: \bar{\mathcal{T}} \rightarrow \mathcal{T}$ ، حيث $\bar{\mathcal{T}}$ هي الفئة المعرفة في التمهيدية (١-١-٦)، لأجله المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{T} & \\ F \swarrow & & \searrow \hat{h}_X \\ \bar{\mathcal{T}} & \xrightarrow{c} & Set's \end{array}$$

تبديلي، أي إن $\bar{C} \cdot F = \hat{h}_X$ ، حيث $\bar{C}: \bar{\mathcal{T}} \rightarrow Set's$ هو الدالي المباشر المعرف في التمهيدية (٢-١-٦).

تمهيدية ٣-١-٦

لتكن $\mathcal{T}$ فئة، وليكن $X \in ob(\mathcal{T})$. الشروط الآتية متكافئة:

١ - X معرف عليه علاقة تكافؤ.

٢ - أياً كان $Y \in ob(\mathcal{T})$ ، فإن المجموعة $\mathcal{T}(Y, X)$ معرف عليها علاقة تكافؤ، ولتكن $\rho(Y)$ ، تحقق الشرط الآتي: لأجل أي مورفيزم $u: Z \rightarrow Y$ للفئة $\mathcal{T}$ ولأجل أي ثنائية $(v, w) \in \rho(Y)$ ، فإن $(v \cdot u, w \cdot u) \in \rho(Z)$.

البرهان.

(1) $\Leftrightarrow$ (2). لنفرض أن $X \in ob(\mathcal{T})$ معرف عليه علاقة تكافؤ، عندئذ حسب التعريف يوجد دالي غير مباشر $\bar{\mathcal{T}} \rightarrow \mathcal{T}$ لأجله المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{T} & \\ F \swarrow & & \searrow \hat{h}_X \\ \bar{\mathcal{T}} & \xrightarrow{c} & Set's \end{array}$$

تبديلي، أي إن $\bar{C} \cdot F = \hat{h}_X$ ، حيث $\bar{\mathcal{T}}$ هي الفئة المعرفة في التمهيدية (١-١-٦)، وأن $\bar{C}$ هو الدالي المباشر المعرف في التمهيدية (٢-١-٦).

ليكن $Y \in ob(\mathcal{T})$ ، عندئذ فإن $F(Y) \in ob(\mathcal{T})$ ؛ وبالتالي فإن $F(Y)$ هي مجموعة معرف عليها علاقة تكافؤ ولتكن $\rho(Y)$ ، ومنه $(F(Y), \rho(Y))$ ؛ وبالتالي يكون:

$$\bar{C} \cdot F(Y) = \bar{C}(F(Y), \rho(Y)) = \hat{h}_X(Y)$$

ومنه $F(Y) = \mathfrak{S}(Y, X)$ ، أي إن المجموعة $\mathfrak{S}(Y, X)$ معرف عليها علاقة تكافؤ $\rho(Y)$.
ليكن $u: Z \rightarrow Y$ مورفيزماً للفئة $\mathfrak{S}$ ولنفرض أن $\rho(Z)$ هي علاقة التكافؤ المعرفة على
المجموعة $\mathfrak{S}(Z, X)$ ، وليكن $(v, w) \in \rho(Y) \subseteq \mathfrak{S}(Y, X) \times \mathfrak{S}(Y, X)$ فنجد أن:

$$v, w \in \mathfrak{S}(Y, X) = \hat{h}_X(Y) = F(Y)$$

ومنه $(v, w) \in (F(Y), \rho(Y))$ وبالتالي $(F(u)(v), F(u)(w)) \in (F(Z), \rho(Z))$ أي إن:

$$(F(u)(v), F(u)(w)) \in \rho(Z)$$

$$(\hat{h}_X(u)(v), \hat{h}_X(u)(w)) \in \rho(Z)$$

وبالتالي $(v \cdot u, w \cdot u) \in \rho(Z)$.

(2) $\Leftarrow$ (1). لنبرهن على وجود دالي غير مباشر $F: \mathfrak{S} \rightarrow \overline{\mathfrak{S}}$. لنعرف تطبيق أشياء

$F: ob(\mathfrak{S}) \rightarrow ob(\overline{\mathfrak{S}})$ بالشكل الآتي: أيأ كان $Y \in ob(\mathfrak{S})$ ، فإن $\hat{h}_X(Y) = \mathfrak{S}(Y, X)$

وحسب الفرض فإن المجموعة $\mathfrak{S}(Y, X)$ معرف عليها علاقة تكافؤ $\rho(Y)$ ، لنضع:

$$F(Y) = (\hat{h}_X(Y), \rho(Y))$$

واضح أن هذه العلاقة تعرف تطبيقاً.

لنعرف تطبيق مورفيزمات $F: Mor(\mathfrak{S}) \rightarrow Mor(\overline{\mathfrak{S}})$ بالشكل الآتي: ليكن $u: Z \rightarrow Y$

مورفيزماً للفئة $\mathfrak{S}$ ، عندئذ المجموعتان $\hat{h}_X(Z) = \mathfrak{S}(Z, X)$ ، $\hat{h}_X(Y) = \mathfrak{S}(Y, X)$ حسب

الفرض كل منهما معرف عليها علاقة تكافؤ $\rho(Z)$ ، $\rho(Y)$ على الترتيب. لنضع:

$$F(u): (F(Y), \rho(Y)) \rightarrow (F(Z), \rho(Z))$$

وأنه أيأ كان $\lambda \in F(Y) = \hat{h}_X(Y)$ ، فإن:

$$F(u)(\lambda) = \lambda \cdot u \in \mathfrak{S}(Z, X) = \hat{h}_X(Z)$$

وأيضاً لأجل كل $(v, w) \in \rho(Y)$ ، فإن $(v \cdot u, w \cdot u) \in \rho(Z)$ حسب الفرض، ومنه نجد

أن F تطبيق، ويحقق $F(I_A)(\lambda) = \lambda \cdot I_A = \lambda$ أي إن $F(I_A) = I_{F(A)}$.

ليكن $\mu: Y \rightarrow Y'$ ، $\theta: Y' \rightarrow Y''$ مورفيزمات للفئة $\mathfrak{S}$ ، عندئذ $\theta \cdot \mu: Y \rightarrow Y''$ وأن:

$$F(\mu): (F(Y'), \rho(Y')) \rightarrow (F(Y), \rho(Y))$$

$$F(\theta): (F(Y''), \rho(Y'')) \rightarrow (F(Y'), \rho(Y'))$$

ومنه فإن $F(\mu) \cdot F(\theta): (F(Y''), \rho(Y'')) \rightarrow (F(Y), \rho(Y))$ أيضاً إن:

$$F(\theta \cdot \mu) : (F(Y''), \rho(Y'')) \rightarrow (F(Y), \rho(Y))$$

وأياً كان $\lambda \in F(Y'') = \hat{h}_X(Y'') = \mathfrak{I}(X, Y'')$ ، فإن :

$$\begin{aligned} F(\theta \cdot \mu)(\lambda) &= \lambda \cdot (\theta \cdot \mu) = (\lambda \cdot \theta) \cdot \mu = F(\mu)(\lambda \cdot \theta) = F(\mu)(F(\theta)(\lambda)) = \\ &= F(\mu) \cdot F(\theta)(\lambda) \end{aligned}$$

ومنه نجد أن $F(\theta \cdot \mu) = F(\mu) \cdot F(\theta)$ ، وذلك لأنه إذا كان $(v, w) \in \rho(Y'')$ ، فإن $(v \cdot \theta, w \cdot \theta) \in \rho(Y')$ وأن $((v \cdot \theta) \cdot \mu, (w \cdot \theta) \cdot \mu) \in \rho(Y)$ حسب الفرض، ومنه :

$$(v \cdot (\theta \cdot \mu), w \cdot (\theta \cdot \mu)) \in \rho(Y)$$

مما سبق نجد أن F هو دالي غير مباشر، ويحقق $C \cdot F = \hat{h}_X$ ؛ لأنه أياً كان $Y \in ob(\mathfrak{I})$ ، فإن :

$$C \cdot F(Y) = C(F(Y), \rho(Y)) = F(Y) = \hat{h}_X(Y)$$

أي إن المخطط الآتي :

$$\begin{array}{ccc} F & \mathfrak{I} & \hat{h}_X \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ \overline{\mathfrak{I}} & \xrightarrow{C} & Set's \end{array}$$

تبديلي. وحسب التعريف فإن X معرف عليه علاقة تكافؤ.

٢-٦. التشاكلات.

تمهيدية ١-٢-٦.

لتكن $\mathcal{C}$ فئة الزمر. عندئذ يوجد دالي مباشر $C: \mathcal{C} \rightarrow \text{Set's}$ الذي ينقل الزمرة إلى مجموعة عناصرها، ويسمى الدالي الحاذف. البرهان.

لنعرف $C: \mathcal{C} \rightarrow \text{Set's}$ من خلال تطبيق الأشياء والمورفيزمات الآتئين:

- تطبيق الأشياء. $C: \text{ob}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{ob}(\text{Set's})$ معرف بالشكل الآتي: أيًا كانت الزمرة $(G, \cdot) \in \text{ob}(\mathcal{C})$ ، فإن $C((G, \cdot)) = G$ ، واضح أن C هو تطبيق.
- تطبيق المورفيزمات. $C: \text{Mor}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Mor}(\text{Set's})$ معرف بالشكل الآتي: لأجل أي تشاكل زمري $u: (G, \cdot) \rightarrow (G', *)$ ، فإن $C(u) = u: G \rightarrow G'$ ، واضح أنه تطبيق، ويحقق جميع الشروط الواردة في تعريف الدالي المباشر، (تأكد من ذلك).

تعريف.

لتكن $\mathcal{C}$ فئة، وليكن $X \in \text{ob}(\mathcal{C})$. نقول إن X معرف عليه بنية زمرة ونسميه زمرة في $\mathcal{C}$ إذا وجد دالياً غير مباشر $\sigma: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ ، لأجله المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{\hat{h}_X} & \text{Set's} \\ \sigma \searrow & & \nearrow C \\ & \mathcal{C} & \end{array}$$

تبديلي، أي إن $C \cdot \sigma = \hat{h}_X$ ، حيث $C: \mathcal{C} \rightarrow \text{Set's}$ هو الدالي الحاذف.

ملاحظة.

لا بد من الإشارة هنا إلى أن الدالي $\sigma: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ الوارد في التعريف السابق ليس بالضرورة أن يكون وحيداً.

تمهيدية ٢-٢-٦.

لتكن $\mathcal{C}$ فئة، وليكن $X \in \text{ob}(\mathcal{C})$. الشروط الآتية متكافئة:

- ١ - X زمرة في الفئة $\mathcal{C}$.

٢ - أياً كان $Y \in ob(\mathfrak{S})$ ، فإن زمرة $\mathfrak{S}(Y, X)$ زمرة، ولأجل أي مورفيزم u للفئة $\mathfrak{S}$ ، فإن $\hat{h}_X(u)$ تشاكل زمري.

البرهان.

(1) $\Leftrightarrow$ (2). لنفرض أن X زمرة في الفئة $\mathfrak{S}$. عندئذ حسب التعريف يوجد دالي غير مباشر $\mathcal{D} : \mathfrak{S} \rightarrow \mathcal{D}$ يحقق $\sigma = \hat{h}_X \cdot C$ ، حيث $\mathcal{D}$ هي فئة الزمر. ليكن $Y \in ob(\mathfrak{S})$ عندئذ، فإن زمرة $\sigma(Y) = (Y, \cdot)$ عندئذ، فإن

$$\hat{h}_X(Y) = C \cdot \sigma(Y) = C(\sigma(Y)) = C((Y, \cdot)) = Y$$

أي إن $\mathfrak{S}(Y, X) = Y$

لنبرهن على أن زمرة $\mathfrak{S}(Y, X)$ لنعرف على المجموعة $\mathfrak{S}(Y, X)$ عملية ثنائية $(\cdot)$ بالشكل الآتي: أياً كان $u, v \in \mathfrak{S}(Y, X)$ ، فإن $u, v : Y \rightarrow X$ ، لنعرف $u \cdot v : Y \rightarrow X$ بالشكل الآتي: أياً كان $y \in Y$ فإن $u \cdot v(y) = u(y) \cdot v(y) \in X$ ومنه نجد أن:

$$u \cdot v \in \mathfrak{S}(Y, X)$$

وأن العملية $(\cdot)$ تجميعية؛ لأنه إذا كان $u, v, w \in \mathfrak{S}(Y, X)$ ، عندئذ أياً كان $y \in Y$ ، فإن:

$$((u \cdot v) \cdot w)(y) = (u \cdot v)(y) \cdot w(y) = (u(y) \cdot v(y)) \cdot w(y) =$$

$$= u(y) \cdot (v(y) \cdot w(y)) = u(y) \cdot ((v \cdot w)(y)) = (u \cdot (v \cdot w))(y)$$

ومنه نجد أن $(u \cdot v) \cdot w = u \cdot (v \cdot w)$. وهكذا نجد أن المجموعة $\mathfrak{S}(Y, X)$ تملك بنية زمرة، وهذه البنية مرتبطة بالبنية الزمرية في X .

ليكن $u : A \rightarrow B$ مورفيزماً للفئة $\mathfrak{S}$ ، عندئذ فإن $\hat{h}_X(u) : \hat{h}_X(B) \rightarrow \hat{h}_X(A)$ أي إن:

$$\hat{h}_X(u) : \mathfrak{S}(B, X) \rightarrow \mathfrak{S}(A, X)$$

ومنه أياً كان $v, w \in \mathfrak{S}(B, X)$ فإن $\hat{h}_X(u)(v \cdot w) = (v \cdot w) \cdot u$ وأنه أياً كان $a \in A$ ، فإن $u(a) \in B$

$$((v \cdot w) \cdot u)(a) = (v \cdot w)(u(a)) = v(u(a)) \cdot w(u(a)) = (v \cdot u)(a) \cdot (w \cdot u)(a) =$$

$$= (v \cdot u)(a) \cdot (w \cdot u)(a)$$

وبالتالي يكون $(v \cdot w) \cdot u = (v \cdot u) \cdot (w \cdot u)$ ، ومنه نجد أن:

$$\hat{h}_X(u)(v \cdot w) = (v \cdot w) \cdot u = (v \cdot u) \cdot (w \cdot u) = \hat{h}_X(u)(v) \cdot \hat{h}_X(u)(w)$$

ومنه نجد أن $\hat{h}_X(u) = Hom_{\mathfrak{S}}(u, X)$ تشاكلاً زمرياً.

(2) $\Leftrightarrow$ (1). لنعرف دالياً غير مباشر $\sigma : \mathfrak{S} \rightarrow \mathcal{O}$ بالشكل الآتي: أياً كان $Y \in ob(\mathfrak{S})$,

فإن المجموعة $\mathfrak{S}(Y, X)$ هي زمرة حسب الفرض.

لنضع: $\sigma(Y) = (\mathfrak{S}(Y, X), \cdot)$ فنجد أنه تم تعريف تطبيق أشياء $\sigma : ob(\mathfrak{S}) \rightarrow ob(\mathcal{O})$ بالشكل $\sigma(Y) = (\mathfrak{S}(Y, X), \cdot)$ ، و الذي يحقق:

$$C \cdot \sigma(Y) = C(\sigma(Y)) = C((\mathfrak{S}(Y, X), \cdot)) = \mathfrak{S}(Y, X) = \hat{h}_X(Y)$$

أي إن $C \cdot \sigma = \hat{h}_X$.

لنعرف تطبيق مورفيزمات $\sigma : Mor(\mathfrak{S}) \rightarrow Mor(\mathcal{O})$ بالشكل الآتي: ليكن $u : A \rightarrow B$

مورفيزماً للفئة $\mathfrak{S}$ ، حسب الفرض فإن $\hat{h}_X(u) = Hom_{\mathfrak{S}}(u, X)$ هو تشاكل زمري.

لنضع $\sigma(u) = \hat{h}_X(u) = Hom_{\mathfrak{S}}(u, X)$ ، فنجد أن:

$$C \cdot \sigma(u) = C(\sigma(u)) = C(Hom_{\mathfrak{S}}(u, X)) = \hat{h}_X(u)$$

وهذا يبين أن $C \cdot \sigma = \hat{h}_X$ ، وأنه أياً كان $A \in ob(\mathfrak{S})$ يوجد المورفيزم المطابق I_A ، وحسب

الفرض فإن $Hom_{\mathfrak{S}}(I_A, X)$ تشاكل زمري، وإن:

$$C \cdot \sigma(I_A) = C(\sigma(I_A)) = C(Hom_{\mathfrak{S}}(I_A, X)) = \hat{h}_X(I_A) = I_{\hat{h}_X(I_A)} = I_{\sigma(I_A)}$$

ليكن $u : A \rightarrow B, v : B \rightarrow D$ مورفيزمين للفئة $\mathfrak{S}$ ، عندئذ $v \cdot u : A \rightarrow D$ مورفيزم للفئة

$\mathfrak{S}$ وحسب الفرض فإن $Hom_{\mathfrak{S}}(v \cdot u, X)$ تشاكل زمري وأن $\sigma(v \cdot u) = Hom_{\mathfrak{S}}(v \cdot u, X)$

$$\begin{aligned} C \cdot \sigma(v \cdot u) &= C(\sigma(v \cdot u)) = C(Hom_{\mathfrak{S}}(v \cdot u, X)) = \hat{h}_X(v \cdot u) = \hat{h}_X(u) \cdot \hat{h}_X(v) = \\ &= \sigma(u) \cdot \sigma(v) \end{aligned}$$

مما سبق نجد أن σ هو دالي غير مباشر، ويحقق $C \cdot \sigma = \hat{h}_X$ ، وحسب التعريف يكون

X زمرة في $\mathfrak{S}$.

تمهيدية ٢-٣.

لتكن $\mathfrak{S}$ فئة، عندئذ توجد فئة $\mathcal{O}$ تسمى الفئة الزمرية للفئة $\mathfrak{S}$ ، وتتألف من:

- صف الأشياء $ob(\mathcal{O})$ ، المؤلف من جميع الأزواج الممكنة (X, σ) حيث:

$X \in ob(\mathfrak{S})$ و $\sigma : \mathfrak{S} \rightarrow \mathcal{O}$ هو الدالي غير المباشر الذي لأجله المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{I} & \xrightarrow{h_{\mathfrak{I}}} & \text{Set's} \\ \sigma & \searrow & \nearrow C \\ & \wp & \end{array}$$

حيث $C: \wp \rightarrow \text{Set's}$ هو الدالي الحاذف.

- صف المورفيزمات $Mor(\wp \mathfrak{I})$. ليكن $(X_1, \sigma_1), (X_2, \sigma_2) \in Mor(\wp \mathfrak{I})$ ، المورفيزم من (X_1, σ_1) إلى (X_2, σ_2) هو المورفيزم الدالي من σ_1 إلى σ_2 .
البرهان.

لنبرهن على أن صفى الأشياء والمورفيزمات المذكورين يشكلان الفئة $\wp \mathfrak{I}$. ليكن $A = (X_1, \sigma_1), B = (X_2, \sigma_2), D = (X_3, \sigma_3) \in ob(\wp \mathfrak{I})$

$$\mu: \wp \mathfrak{I}(A, B) \times \wp \mathfrak{I}(B, D) \longrightarrow \wp \mathfrak{I}(A, D)$$

ليكن $(f, g) \in \wp \mathfrak{I}(A, B) \times \wp \mathfrak{I}(B, D)$ عندئذ، فإن $f: \sigma_1 \rightarrow \sigma_2, g: \sigma_2 \rightarrow \sigma_3$ مورفيزمات دالية. لنضع $\mu((f, g)) = g \circ f$ فنجد أن $g \circ f: \sigma_1 \rightarrow \sigma_3$ مورفيزم دالي وذلك حسب التمهيدية (٢-٣-٢) وأن عملية تركيب المورفيزمات الدالية تجميعية؛ ولأجلها يوجد المورفيزم الدالي المطابق، ومنه فإن $\wp \mathfrak{I}$ فئة.

تعريف.

لنفرض أن $\wp \mathfrak{I}$ الفئة الزمرية للفئة $\mathfrak{I}$ ، وليكن $(X_1, \sigma_1), (X_2, \sigma_2) \in ob(\wp \mathfrak{I})$. نسمي أيضاً المورفيزم الدالي من σ_1 إلى σ_2 هومومورفيزماً (تشاكلاً) من X_1 إلى X_2 .

مبرهنة ٢-٦-٤.

لتكن $\mathfrak{I}$ فئة، ولتكن X, Y زمريتين في $\mathfrak{I}$ ، ولنفرض أن $f: X \rightarrow Y$ تشاكل. لنأخذ المورفيزم الدالي $\hat{h}_Y: \bar{f}: \hat{h}_X \rightarrow \hat{h}_Y$ عندئذ:

١ - يوجد دالي مباشر $k: \mathfrak{I}^o \rightarrow \text{Set's}$.

٢ - أيأ كان $Z \in ob(\mathfrak{I})$ فإن $k(Z) = Ker(\bar{f}(Z))$.

البرهان.

لنفرض أن X, Y زمريتان في $\mathfrak{I}$ ، عندئذ $X, Y \in ob(\mathfrak{I})$ ، وحسب التمهيدية (٢-٢-٦) فإن $\mathfrak{I}(Z, X), \mathfrak{I}(Z, Y)$ زمريتان، ولنفرض أن $f: X \rightarrow Y$ تشاكل، عندئذ $f \in \mathfrak{I}(X, Y)$ وحسب التمهيدية (١-٢-٢) يوجد مورفيزم دالي $\hat{h}_Y: \bar{f}: \hat{h}_X \rightarrow \hat{h}_Y$ يحقق: أيأ كان

$\bar{f}(Z): \mathfrak{S}(Z, X) \rightarrow \mathfrak{S}(Z, Y)$ فإن $\bar{f}(Z): \hat{h}_X(Z) \rightarrow \hat{h}_Y(Z)$ أي إن $\bar{f}(Z): \mathfrak{S}(Z, X) \rightarrow \mathfrak{S}(Z, Y)$ ومعرف بالشكل الآتي: أيأ كان $u \in \mathfrak{S}(Z, X)$ فإن $\bar{f}(Z)(u) = f \cdot u$.

١ - لنعرف $k: \mathfrak{S}^o \rightarrow \text{Set's}$ من خلال تطبيقي الأشياء والمورفيزمات الآتيين:

- تطبيق الأشياء $k: ob(\mathfrak{S}^o) \rightarrow ob(\text{Set's})$. ليكن $Z \in ob(\mathfrak{S}^o) = ob(\mathfrak{S})$ ولنفرض أن $k(Z) = K$ ، حيث K هي مجموعة كل المورفيزمات $u: Z \rightarrow X$ للفئة $\mathfrak{S}$ التي لأجلها $\bar{f}(Z)(u) = w$ حيث w هو العنصر المحايد للزمرة $\mathfrak{S}(Z, Y)$ فنجد أن:

$$k(Z) = K \in ob(\text{Set's})$$

واضح أن k تطبيق أشياء؛ لأنه إذا كان $Z_1, Z_2 \in ob(\mathfrak{S})$ بحيث $Z_1 = Z_2$ ، فإن $\bar{f}(Z_1) = \bar{f}(Z_2)$. لنفرض أن $k(Z_1) = K_1, k(Z_2) = K_2$ ، وليكن $u \in K_1$ وبما أن $\mathfrak{S}(Z_1, Y) = \mathfrak{S}(Z_2, Y)$ نجد أن $\bar{f}(Z_1)(u) = w = \bar{f}(Z_2)(u)$ أي إن $u \in K_2$ ومنه $K_1 \subseteq K_2$ ، بالمثل نجد أن $K_2 \subseteq K_1$ ، وهكذا فإن $K_1 = K_2$ ، أي إن $k(Z_1) = k(Z_2)$ وبالتالي يكون k تطبيقاً.

- تطبيق مورفيزمات $k: Mor(\mathfrak{S}^o) \rightarrow Mor(\text{Set's})$. ليكن $\lambda: Z \rightarrow Z_1 \in Mor(\mathfrak{S}^o)$ عندئذ $\lambda: Z_1 \rightarrow Z \in Mor(\mathfrak{S})$ بما أن $\bar{f}: \hat{h}_X \rightarrow \hat{h}_Y$ مورفيزم دالي وأن $\hat{h}_X, \hat{h}_Y$ داليان غير مباشرين، فإن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} \hat{h}_X(Z_1) & \xrightarrow{f(Z_1)} & \hat{h}_Y(Z_1) \\ \hat{h}_X(\lambda) \uparrow & & \uparrow \hat{h}_Y(\lambda) \\ \hat{h}_X(Z) & \xrightarrow{f(Z)} & \hat{h}_Y(Z) \end{array}$$

تبديلي، أي إن $\bar{f}(Z_1) \cdot \hat{h}_X(\lambda) = \hat{h}_Y(\lambda) \cdot \bar{f}(Z)$ ، ومنه أيأ كان $u \in \hat{h}_X(Z) = \mathfrak{S}(Z, X)$ فإن $(\bar{f}(Z_1) \cdot \hat{h}_X(\lambda))(u) = (\hat{h}_Y(\lambda) \cdot \bar{f}(Z))(u)$.

ليكن $u \in k(Z)$ عندئذ $u: Z \rightarrow X$ مورفيزم للفئة $\mathfrak{S}$ ، أي إن $u \in \mathfrak{S}(Z, X)$ ، ومنه فإن

$$(\bar{f}(Z_1) \cdot \hat{h}_X(\lambda))(u) = (\hat{h}_Y(\lambda) \cdot \bar{f}(Z))(u) = \hat{h}_Y(\lambda)(\bar{f}(Z)(u)) = \hat{h}_Y(\lambda)(w)$$

حيث w هو العنصر المحايد للزمرة $\mathfrak{S}(Z, Y)$ ، وحسب التمهيدية (٦-٢-٢) فإن:

$$\hat{h}_Y(\lambda): \mathfrak{S}(Z, Y) \rightarrow \mathfrak{S}(Z_1, Y)$$

تساكلى زمري، ومنه نجد أن $(\bar{f}(Z_1) \cdot \hat{h}_X(\lambda))(u) = \hat{h}_Y(\lambda)(w) = w_1$ حيث w_1 العنصر

المحايد للزمرة $\mathfrak{S}(Z_1, Y)$ ، وهذا يبين أن $\hat{h}_X(\lambda)(u) \in k(Z_1)$ وبالتالي فإن التطبيق $\hat{h}_X(\lambda): k(Z) \rightarrow k(Z_1)$ يعرف لنا التطبيق $\hat{h}_X(\lambda): \mathfrak{S}(Z, X) \rightarrow \mathfrak{S}(Z_1, X)$ لأن $k(Z) \subset \mathfrak{S}(Z, X)$. لنضع $k(\lambda) = \hat{h}_X(\lambda)$ ، أي إن $k(\lambda)$ هو مقصور التطبيق $\hat{h}_X(\lambda)$ على المجموعة $k(Z)$ ، وهذا يبين أن k هو تطبيق مورفيزمات ويحقق:

- أياً كان $Z \in \text{ob}(\mathfrak{S})$ ، فإن $k(I_Z) = \hat{h}_X(I_Z) = I_{\hat{h}_X(Z)} = I_{\mathfrak{S}(Z, X)}$ ، وبالتالي فإن $k(I_Z) = I_{k(Z)}$.

- ليكن $\alpha: Z_1 \rightarrow Z_2$ مورفيزمين للفتة $\mathfrak{S}$ ، عندئذ $\alpha \cdot \beta: Z_3 \rightarrow Z_1$ مورفيزم للفتة $\mathfrak{S}$ ، كما أن: $\beta: Z_3 \rightarrow Z_2$ مورفيزمين للفتة $\mathfrak{S}$ وأن $\alpha \cdot \beta: Z_3 \rightarrow Z_1$ مورفيزم للفتة $\mathfrak{S}$ ، كما أن: $k(\alpha \cdot \beta) = \hat{h}_X(\alpha \cdot \beta) = \hat{h}_X(\beta) \cdot \hat{h}_X(\alpha) = k(\beta) \cdot k(\alpha)$

مما سبق نجد أن k دالي مباشر.

٢ - لنبرهن على أن $k(Z) = \text{Ker}(\bar{f}(Z))$ وذلك أياً كان $Z \in \text{ob}(\mathfrak{S})$. نلاحظ أنه لأجل كل $Z \in \text{ob}(\mathfrak{S})$ ، فإن $\bar{f}(Z): \hat{h}_X(Z) \rightarrow \hat{h}_Y(Z)$ تشاكل زمري، لأنه إذا كان $u, v \in \hat{h}_X(Z)$ فإن:

$$\bar{f}(Z)(u \cdot v)(z) = u \cdot v(z) = u(z) \cdot v(z) = \bar{f}(Z)(u)(z) \cdot \bar{f}(Z)(v)(z)$$

$$\text{أي إن } \bar{f}(Z)(u \cdot v) = \bar{f}(Z)(u) \cdot \bar{f}(Z)(v)$$

ليكن $\alpha \in \text{Ker}(\bar{f}(Z))$ عندئذ، فإن $\bar{f}(Z)(\alpha) = w$ حيث w هو العنصر المحايد للزمرة $\mathfrak{S}(X, Y)$ وحسب تعريف $k(Z)$ نجد أن $\alpha \in k(Z)$ ، ومنه فإن $\text{Ker}(\bar{f}(Z)) \subseteq k(Z)$.
ليكن $\beta \in k(Z)$ عندئذ فإن $\beta \in \mathfrak{S}(Z, X) = \hat{h}_X(Z)$ وأن $k(\beta) = \hat{h}_X(\beta) = w$ وهذا يبين أن $\beta \in \text{Ker}(\bar{f}(Z))$ أي إن $k(Z) \subseteq \text{Ker}(\bar{f}(Z))$ وهكذا نجد أن $k(Z) = \text{Ker}(\bar{f}(Z))$.

الفصل السابع

النظرية العامة للفئات التبديلية

٧-١. الفئة الجمعية.

تعريف.

نقول عن الفئة $\mathcal{C}$ إنها جمعية إذا حققت الشروط الآتية:

١ - لأجل أي زوج (A, B) من أشياء الفئة $\mathcal{C}$ يوجد الجداء $A \sqcap B$ والمجموع $A \sqcup B$.

٢ - لأجل أي زوج (A, B) من أشياء الفئة $\mathcal{C}$ ، فإن المجموعة $\mathcal{C}(A, B) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ تتمتع ببنية زمرة تبديلية، بمعنى أنه أياً كان $u, v \in \mathcal{C}(A, B)$ ، فإن:

$$u + v = v + u \in \mathcal{C}(A, B)$$

إضافة إلى وجود العنصر المحايد $o_{B,A} \in \mathcal{C}(A, B)$.

٣ - لأجل أي ثلاثية (A, B, C) من أشياء الفئة $\mathcal{C}$ ، فإن التطبيق:

$$\mathcal{C}(A, B) \times \mathcal{C}(B, C) \rightarrow \mathcal{C}(A, C)$$

ثنائي الخطية، بمعنى أن تركيب المورفيزمات يحقق الخاصة الآتية:

- أياً كان $u, v \in \mathcal{C}(A, B)$ و $w \in \mathcal{C}(B, C)$ ، فإن $(u + v) \cdot w = u \cdot w + v \cdot w$.

- أياً كان $w' \in \mathcal{C}(A, B)$ و $u', v' \in \mathcal{C}(B, C)$ ، فإن $w' \cdot (u' + v') = w' \cdot u' + w' \cdot v'$.

٤ - يوجد $A \in \text{ob}(\mathcal{C})$ يحقق $I_A = o$.

مبرهنة ٧-١-١.

لتكن $\mathcal{C}$ فئة جمعية. عندئذ:

١ - الفئة $\mathcal{C}$ هي فئة صفرية.

٢ - لأجل أي زوج (A, B) من أشياء الفئة $\mathcal{C}$ يوجد مورفيزم وحيد:

$$h(A, B) : A \sqcup B \rightarrow A \sqcap B$$

للفئة $\mathcal{C}$ يحقق:

$$\begin{aligned} p_B \cdot h(A, B) \cdot i_A &= o_{BA} & p_A \cdot h(A, B) \cdot i_A &= I_A \\ p_A \cdot h(A, B) \cdot i_B &= o_{AB} & p_B \cdot h(A, B) \cdot i_B &= I_B \end{aligned}$$

حيث p_A, p_B هي المورفيزمات الإسقاطية و i_A, i_B هي مورفيزمات الاحتواء. البرهان.

١ - ليكن (A, B) زوجاً من أشياء الفئة $\mathfrak{I}$ ، ولما كانت الفئة $\mathfrak{I}$ جمعية، فإن المجموعة $\mathfrak{I}(A, B)$ تتمتع ببنية زمرة تبديلية، وبالتالي يوجد في $\mathfrak{I}(A, B)$ عنصر محايد وليكن $o: A \rightarrow B \in \mathfrak{I}(A, B)$. لنبرهن على أن هذا المحاييد هو المورفيزم الصفري.

ليكن $v: B \rightarrow C$ مورفيزماً للفئة $\mathfrak{I}$ ، عندئذ فإن $v \cdot o = v \cdot (o + o) = v \cdot o + v \cdot o$ ، ومنه نجد أن $v \cdot o = o \in \mathfrak{I}(A, C)$. أيضاً لنفرض أن $u: D \rightarrow A$ مورفيزم للفئة $\mathfrak{I}$ عندئذ فإن $o \cdot u = (o + o) \cdot u = o \cdot u + o \cdot u$ ، ومنه نجد أن $o \cdot u = o \in \mathfrak{I}(D, B)$. مما سبق نجد أن العنصر المحاييد في الزمرة $\mathfrak{I}(A, B)$ هو المورفيزم الصفري o_{BA} ويحقق الآتي:

- لأجل أي مورفيزم $v \in \mathfrak{I}(B, C)$ ، فإن $v \cdot o_{BA} = o_{CA}$

- لأجل أي مورفيزم $u \in \mathfrak{I}(D, A)$ ، فإن $o_{BA} \cdot u = o_{BD}$

٢ - بما أن الفئة $\mathfrak{I}$ جمعية فإنه لأجل أي زوج (A, B) من أشياء الفئة $\mathfrak{I}$ يوجد المجموع $A \sqcup B$ والجداء $A \sqcap B$ ، وأيضاً حسب (١) فإن الفئة $\mathfrak{I}$ هي فئة صفرية، ومنه حسب المبرهنة (٤-٤-٤) يوجد مورفيزم وحيد $h(A, B): A \sqcup B \rightarrow A \sqcap B$ للفئة $\mathfrak{I}$ يحقق الشروط الواردة أعلاه.

تمهيدية ٧-١-٢.

لتكن $\mathfrak{I}$ فئة جمعية، وليكن $A, B \in ob(\mathfrak{I})$. لنفرض أن $I_A = o$ ، عندئذ الشروط الآتية متكافئة:

١ - $I_B = o$

٢ - يوجد إيزومورفيزم $v: B \rightarrow A$ للفئة $\mathfrak{I}$.

البرهان.

(1) $\Leftrightarrow$ (2). لنفرض أن $I_B = o$ ، عندئذ فإن:

$$o_{AB} \cdot o_{BA} = o_{AA} = I_A, \quad o_{BA} \cdot o_{AB} = o_{BB} = I_B$$

ومنه يوجد إيزومورفيزم $B \rightarrow A$ للفئة $\mathcal{I}$.

(2) $\Leftrightarrow$ (1). لنفرض أنه يوجد إيزومورفيزم $v: B \rightarrow A$ للفئة $\mathcal{I}$ ، عندئذ نجد أن:

$$I_A \cdot v \cdot I_B = o_{AA} \cdot v \cdot I_B = o_{AB} \cdot I_B = o_{AB}$$

$$I_A \cdot v \cdot o_{BB} = o_{AB} \cdot o_{BB} = o_{AB}$$

ومنه نجد أن $(I_A \cdot v) \cdot I_B = (I_A \cdot v) \cdot o_{BB}$ ولما كان المورفيزم $I_A \cdot v: B \rightarrow A$ مونومورفيزماً، فإنه لأجل كل $X \in ob(\mathcal{I})$ يكون التطبيق $\alpha: \mathcal{I}(X, B) \rightarrow \mathcal{I}(X, A)$ المعرف بالشكل الآتي: $\alpha(\lambda) = (I_A \cdot v) \cdot \lambda$ أيأ كان $\lambda \in \mathcal{I}(X, B)$ ، متبايناً. ومنه لأجل $X = B$ نجد أن:

$$\alpha(I_B) = (I_A \cdot v) \cdot I_B = (I_A \cdot v) \cdot o_{BB} = \alpha(o_{BB})$$

وهذا يبين أن $I_B = o_{BB}$.

ملاحظة.

لتكن $\mathcal{I}$ فئة جمعية. إن الأشياء A للفئة $\mathcal{I}$ التي تحقق الشرط $I_A = o$ تشكل صفاً من الأشياء الإيزومورفية في الفئة $\mathcal{I}$ وجميع هذه الأشياء تشكل أشياء صفية في الفئة $\mathcal{I}$ وهذا ما تبينه لنا التمهيدية الآتية:

تمهيدية ٧-١-٣.

لتكن $\mathcal{I}$ فئة جمعية، وليكن $A \in ob(\mathcal{I})$. إذا كان $I_A = o$ ، عندئذ فإن:

١ - A هو شيء صفري في $\mathcal{I}$.

٢ - أيأ كان $B \in ob(\mathcal{I})$ ، فإن أي مورفيزم $A \rightarrow B$ يكون مونومورفيزماً.

٣ - أيأ كان $D \in ob(\mathcal{I})$ ، فإن أي مورفيزم $D \rightarrow A$ يكون إبيومورفيزماً.

البرهان.

١ - لنفرض أن $I_A = o$ ، عندئذ أيأ كان $Y \in ob(\mathcal{I})$ ، فإن المجموعة $\mathcal{I}(A, Y)$ هي زمرة وإن $o_{IA} = o \in \mathcal{I}(A, Y)$ ، كما أنه أيأ كان $\alpha \in \mathcal{I}(A, Y)$ فإن:

$$\alpha = \alpha \cdot I_A = \alpha \cdot o_{IA} = o_{IA}$$

وهذا يبين أن $\mathcal{I}(A, Y) = \{0\}$ ؛ وبالتالي فإن A يكون شيئاً ابتدائياً.

أيضاً أيأ كان $X \in ob(\mathcal{I})$ فإن المجموعة $\mathcal{I}(X, A)$ هي زمرة وإن $0_{AX} = 0 \in \mathcal{I}(X, A)$

وإنه أياً كان $\beta \in \mathfrak{S}(X, A)$ ، فإن $\beta = I_A \cdot \beta = 0_{AA} \cdot \beta = 0_{AX}$ وهذا يبين أن $\mathfrak{S}(X, A) = \{0\}$ وبالتالي فإن A يكون شيئاً نهائياً. مما سبق نجد أن A هو شيء صفري.

٢ - لنفرض أن $I_A = 0$ ؛ وليكن $v: A \rightarrow B$ مورفيزماً للفئة $\mathfrak{S}$ حيث $B \in ob(\mathfrak{S})$ ، عندئذ أياً كان $X \in ob(\mathfrak{S})$ ، فإن التطبيق $\alpha: \mathfrak{S}(X, A) \rightarrow \mathfrak{S}(X, B)$ المعرف بالشكل الآتي: $\alpha(\lambda) = v \cdot \lambda$ وذلك أياً كان $\lambda \in \mathfrak{S}(X, A)$ ، يكون متبانياً؛ لأن $\mathfrak{S}(X, A) = \{0\}$ حسب (١). ومنه نجد أن المورفيزم v مونومورفيزماً.

٣ - لنفرض أن $I_A = 0$ ؛ وليكن $u: D \rightarrow A$ مورفيزماً للفئة $\mathfrak{S}$ حيث $D \in ob(\mathfrak{S})$ ، عندئذ أياً كان $Y \in ob(\mathfrak{S})$ ، فإن التطبيق $\phi: \mathfrak{S}(A, X) \rightarrow \mathfrak{S}(B, X)$ المعرف بالشكل الآتي: $\beta(\lambda) = \lambda \cdot u$ وذلك أياً كان $\lambda \in \mathfrak{S}(A, X)$ ، يكون متبانياً؛ لأن $\mathfrak{S}(A, X) = \{0\}$ حسب (١). ومنه نجد أن المورفيزم u إبيومورفيزم.

تمهيدية ٧-١-٤.

لتكن $\mathfrak{S}$ فئة جمعية، وليكن $u: A \rightarrow B$ مورفيزماً للفئة $\mathfrak{S}$. عندئذ:

- ١ - لأجل أي $X \in ob(\mathfrak{S})$ ، فإن التطبيق $\alpha: \mathfrak{S}(X, A) \rightarrow \mathfrak{S}(X, B)$ المعرف بالشكل الآتي: أياً كان $\mu \in \mathfrak{S}(X, A)$ ، فإن $\alpha(\mu) = u \cdot \mu$ هو تشاكل زمري.
 - ٢ - لأجل أي $X \in ob(\mathfrak{S})$ ، فإن التطبيق $\beta: \mathfrak{S}(B, X) \rightarrow \mathfrak{S}(A, X)$ المعرف بالشكل الآتي: أياً كان $\lambda \in \mathfrak{S}(X, A)$ ، فإن $\beta(\lambda) = \lambda \cdot u$ هو تشاكل زمري.
- البرهان.

بما أن الفئة $\mathfrak{S}$ جمعية، فإنه أياً كان $X, Y \in ob(\mathfrak{S})$ ، فإن $\mathfrak{S}(X, Y)$ زمرة تبديلية.

- ١ - واضح أن α تطبيق. ليكن $\mu_1, \mu_2 \in \mathfrak{S}(X, A)$ ، عندئذ فإن:

$$\alpha(\mu_1 + \mu_2) = u \cdot (\mu_1 + \mu_2) = u \cdot \mu_1 + u \cdot \mu_2 = \alpha(\mu_1) + \alpha(\mu_2)$$

ومنه نجد أن α تشاكل زمري.

- ٢ - واضح أن β تطبيق. ليكن $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathfrak{S}(B, X)$ ، عندئذ فإن:

$$\beta(\lambda_1 + \lambda_2) = (\lambda_1 + \lambda_2) \cdot u = \lambda_1 \cdot u + \lambda_2 \cdot u = \beta(\lambda_1) + \beta(\lambda_2)$$

ومنه نجد أن β تشاكل زمري.

تعريف.

لتكن $\mathfrak{S}$ فئة جمعية، و $A \in ob(\mathfrak{S})$. لنأخذ صف المورفيزمات M_A للفئة $\mathfrak{S}$ المؤلف من جميع المورفيزمات $A: U \rightarrow A$ التي لأجلها $I_U = 0 = 0_U$ وذلك أيأ كان $U \in ob(\mathfrak{S})$. عندئذ حسب التمهيدية (٧-١-٣) أيأ كان $u \in M_A$ ، فإن u مونومورفيزماً.

مبرهنة ٧-١-٥.

لتكن $\mathfrak{S}$ فئة جمعية، و $A \in ob(\mathfrak{S})$. لنعرف على الصف M_A العلاقة ρ بالشكل الآتي:
أيأ كان $u: U \rightarrow A, v: V \rightarrow A \in M_A$ نقول إن:

$$v\rho u \Leftrightarrow \exists v_1 \in \mathfrak{S}(V, U); u \cdot v_1 = v$$

عندئذ: ١ - المورفيزم v_1 إيزومورفيزم.

٢ - العلاقة ρ هي علاقة تكافؤ على الصف M_A .

البرهان.

١ - بما أن $u, v \in M_A$ ، فإن $I_U = 0, I_V = 0$ وحسب التمهيدية (٧-١-٣)، فإن المورفيزم $v_1 \in \mathfrak{S}(V, U)$ يكون مونومورفيزماً وإيزومورفيزماً؛ وبالتالي فهو إيزومورفيزم.

٢ - ليكن $u: U \rightarrow A \in M_A$ عندئذ فإن المورفيزم I_U المطابق I_U يحقق $u \cdot I_U = I_U$ ؛ وبالتالي يكون $u\rho u$ ، أي إن العلاقة ρ انعكاسية.

ليكن $u: U \rightarrow A, v: V \rightarrow A \in M_A$ بحيث $v\rho u$ ، عندئذ يوجد مورفيزم $v_1 \in \mathfrak{S}(V, U)$ يحقق $u \cdot v_1 = v$ وحسب (١)، فإن v_1 إيزومورفيزم، ومنه يوجد مورفيزم $u_1 \in \mathfrak{S}(U, V)$ بحيث $u_1 \cdot v_1 = I_U, v_1 \cdot u_1 = I_V$ ، كما أن:

$$v \cdot u_1 = (u \cdot v_1) \cdot u_1 = u \cdot (v_1 \cdot u_1) = u \cdot I_V = v$$

وبالتالي يكون $u\rho v$ ، أي إن العلاقة ρ تناظرية.

ليكن $u: U \rightarrow A, v: V \rightarrow A, w: W \rightarrow A \in M_A$ ولنفرض أن $v\rho u \wedge u\rho w$ عندئذ يوجد $v_1 \in \mathfrak{S}(V, U) \wedge u_1 \in \mathfrak{S}(U, W)$ بحيث $u \cdot v_1 = v \wedge w \cdot u_1 = u$ ، ومنه نجد أن $u_1 \cdot v_1 \in \mathfrak{S}(V, W)$ ويحقق $w \cdot (u_1 \cdot v_1) = (w \cdot u_1) \cdot v_1 = u \cdot v_1 = v$ ومنه فإن $w\rho v$ ولكون العلاقة ρ تناظرية نجد أن $v\rho w$ ، وهذا يبين أن العلاقة ρ متعدية، مما سبق نجد أن العلاقة ρ هي علاقة تكافؤ على الصف M_A .

تعريف.

لتكن $\mathfrak{I}$ فئة جمعية، و $A \in ob(\mathfrak{I})$. وجدنا حسب المبرهنة (٧-١-٥) أن العلاقة ρ هي علاقة تكافؤ على الصف M_A . سوف نرمز لصف التكافؤ المولد بالعنصر $u: U \rightarrow A$ بالشكل $A \rightarrow 0$.

تعريف.

لتكن $\mathfrak{I}$ فئة جمعية، و $B \in ob(\mathfrak{I})$. لنأخذ صف المورفيزمات E_B للفئة $\mathfrak{I}$ المؤلف من جميع المورفيزمات $u: B \rightarrow U$ والتي لأجلها $I_U = 0 = 0_U$ وذلك أيأ كان $U \in ob(\mathfrak{I})$. عندئذ حسب التمييزية (٧-١-٣) أيأ كان $u \in E_B$ فإن u إيزومورفيوم.

مبرهنة ٧-١-٦.

لتكن $\mathfrak{I}$ فئة جمعية، و $B \in ob(\mathfrak{I})$. لنعرف على الصف E_B العلاقة ρ بالشكل الآتي: أيأ كان $u: B \rightarrow U, v: B \rightarrow V \in E_B$ نقول إن:

$$v\rho u \Leftrightarrow \exists v_1 \in \mathfrak{I}(U, V); v_1 \cdot u = v$$

عندئذ:

١ - المورفيزم v_1 إيزومورفيوم.

٢ - العلاقة ρ هي علاقة تكافؤ على الصف E_B .

البرهان.

١ - بما أن $u, v \in E_B$ ، فإن $I_U = 0, I_V = 0$ وحسب التمييزية (٧-١-٣)، فإن المورفيزم

$v_1 \in \mathfrak{I}(U, V)$ يكون مونومورفيوماً، وإيزومورفيوماً؛ وبالتالي فهو إيزومورفيوم.

٢ - ليكن $u: B \rightarrow U \in E_B$ ، عندئذ فإن المورفيزم المطابق I_U يحقق $I_U \cdot u = I_U$ وبالتالي يكون $u\rho u$ ، أي إن العلاقة ρ انعكاسية.

ليكن $u: B \rightarrow U, v: B \rightarrow V \in E_B$ بحيث $v\rho u$ عندئذ يوجد مورفيزم $v_1 \in \mathfrak{I}(U, V)$

يحقق $v_1 \cdot u = v$ وحسب (١)، فإن v_1 إيزومورفيوم، ومنه يوجد مورفيزم $u_1 \in \mathfrak{I}(V, U)$

بحيث $u_1 \cdot v_1 = I_V$ ، $v_1 \cdot u_1 = I_U$ ، كما أن:

$$u_1 \cdot v = u_1 \cdot (v_1 \cdot u) = (u_1 \cdot v_1) \cdot u = I_U \cdot u = u$$

وهذا يبين أن العلاقة ρ تناظرية.

ليكن $u: B \rightarrow U, v: B \rightarrow V, w: B \rightarrow W \in E_B$ ونفرض أن $vpw \wedge upw$ عندئذ يوجد $v_1 \in \mathfrak{S}(U, V) \wedge u_1 \in \mathfrak{S}(W, U)$ بحيث $v_1 \cdot u = v \wedge u_1 \cdot w = u$ ومنه نجد أن $v_1 \cdot u_1 \in \mathfrak{S}(W, V)$ ويحقق $(v_1 \cdot u_1) \cdot w = v_1 \cdot (u_1 \cdot w) = v_1 \cdot u = v$ ومنه فإن vpw وهذا يبين أن العلاقة ρ متعدية، مما سبق نجد أن العلاقة ρ هي علاقة تكافؤ على الصف E_B .

تعريف.

لتكن $\mathfrak{S}$ فئة جمعية، و $B \in ob(\mathfrak{S})$ وجدنا حسب المبرهنة (٧-١-٦) أن العلاقة ρ هي علاقة تكافؤ على الصف E_B . سوف نرمز لصف التكافؤ المولد بالعنصر $u: B \rightarrow U$ بالشكل $B \rightarrow 0$.

مبرهنة ٧-١-٧.

لتكن $\mathfrak{S}$ فئة جمعية، وليكن $A, B, C \in ob(\mathfrak{S})$ لنفرض أن $i_A: A \rightarrow C, i_B: B \rightarrow C$ مورفيزمات للفئة $\mathfrak{S}$. عندئذ الشروط الآتية متكافئة:

١- إن $C \in ob(\mathfrak{S})$ مع زوج المورفيزمات (i_A, i_B) يشكلان مجموعاً للأسرة (A, B) .

٢- توجد مورفيزمات $p_A: C \rightarrow A, p_B: C \rightarrow B$ للفئة $\mathfrak{S}$ تحقق الشروط:

$$I. \quad p_A \cdot i_A = I_A, \quad p_B \cdot i_A = 0_{BA}$$

$$II. \quad p_B \cdot i_B = I_B, \quad p_A \cdot i_B = 0_{AB}$$

$$III. \quad i_A \cdot p_A + i_B \cdot p_B = I_C$$

البرهان.

(1) $\Leftrightarrow$ (2). لنفرض أن $C = A \amalg B$ مع المورفيزمات i_A, i_B عندئذ حسب التمهيدية

(٤-٣-١) أيأ كان $X \in ob(\mathfrak{S})$ فإن التطبيق $\Gamma: \mathfrak{S}(C, X) \rightarrow \mathfrak{S}(A, X) \times \mathfrak{S}(B, X)$

المعرف بالشكل الآتي: أيأ كان $\lambda \in \mathfrak{S}(C, X)$ فإن $\Gamma(\lambda) = (\lambda \cdot i_A, \lambda \cdot i_B)$ متباين

وغامر. من أجل $X = A$ نجد أن $I_A \in \mathfrak{S}(A, A)$ أيضاً لما كانت المجموعة $\mathfrak{S}(B, A)$

تتمتع ببنية زمرة تبديلية، فإن $0_{AB}: B \rightarrow A \in \mathfrak{S}(B, A)$ ومنه لأجل الثنائية $(I_A, 0_{AB})$

يوجد مورفيزم $p_A: C \rightarrow A$ لأجله $\Gamma(p_A) = (I_A, 0_{AB})$ ولما كان:

$$\Gamma(p_A) = (p_A \cdot i_A, p_A \cdot i_B)$$

نجد أن $p_A \cdot i_A = I_A$ ، $p_A \cdot i_B = 0_{AB}$

أيضاً من أجل $X = B$ نجد أن $I_B \in \mathfrak{S}(B, B)$ ، أيضاً لما كانت المجموعة $\mathfrak{S}(A, B)$ تتمتع ببنية زمرة تبديلية، فإن $0_{BA} : A \rightarrow B \in \mathfrak{S}(A, B)$ ومنه لأجل الثنائية $(0_{BA}, I_B)$ يوجد مورفيزم $p_B : C \rightarrow B$ لأجله $\Gamma(p_B) = (0_{BA}, I_B)$ ولما كان:

$$\Gamma(p_B) = (p_B \cdot i_A, p_B \cdot i_B)$$

نجد أن $p_B \cdot i_A = 0_{BA}$ ، $p_B \cdot i_B = I_B$ بهذا الشكل نجد أن I و II محققان.
من أجل $X = C$ نجد أن $I_C \in \mathfrak{S}(C, C)$ ، ومنه فإن:

$$\Gamma(I_C) = (I_C \cdot i_A, I_C \cdot i_B) = (i_A, i_B)$$

من جهة أخرى، لدينا $i_A \cdot p_A + i_B \cdot p_B \in \mathfrak{S}(C, C)$ ، ويحقق:

$$\begin{aligned} (i_A \cdot p_A + i_B \cdot p_B) \cdot i_A &= i_A \cdot p_A \cdot i_A + i_B \cdot p_B \cdot i_A = i_A \cdot I_A + i_B \cdot 0_{BA} = \\ &= i_A + 0_{CA} = i_A \\ (i_A \cdot p_A + i_B \cdot p_B) \cdot i_B &= i_A \cdot p_A \cdot i_B + i_B \cdot p_B \cdot i_B = i_A \cdot 0_{AB} + i_B \cdot I_B = \\ &= 0_{CB} + i_B = i_B \end{aligned}$$

ومنه نجد أن:

$$\Gamma(i_A \cdot p_A + i_B \cdot p_B) = ((i_A \cdot p_A + i_B \cdot p_B) \cdot i_A, (i_A \cdot p_A + i_B \cdot p_B) \cdot i_B) = (i_A, i_B)$$

ولكون التطبيق Γ متباين نجد أن $i_A \cdot p_A + i_B \cdot p_B = I_C$
(2) $\Leftrightarrow$ (1). لنبرهن على أنه أياً كان $X \in \text{ob}(\mathfrak{S})$ ، فإن التطبيق:

$$\Gamma : \mathfrak{S}(C, X) \rightarrow \mathfrak{S}(A, X) \times \mathfrak{S}(B, X)$$

المعرف بالشكل $\Gamma(\lambda) = (\lambda \cdot i_A, \lambda \cdot i_B)$ متباين وغامر، وذلك أياً كان $\lambda \in \mathfrak{S}(C, X)$.
ليكن $u, v \in \mathfrak{S}(C, X)$ بحيث $\Gamma(u) = \Gamma(v)$ ، عندئذ يكون $(u \cdot i_A, u \cdot i_B) = (v \cdot i_A, v \cdot i_B)$
ومنه نجد أن $u \cdot i_A = v \cdot i_A$ ، $u \cdot i_B = v \cdot i_B$ وبالتالي يكون:

$$\begin{aligned} u \cdot i_A \cdot p_A &= v \cdot i_A \cdot p_A, \quad u \cdot i_B \cdot p_B = v \cdot i_B \cdot p_B \\ u \cdot i_A \cdot p_A + u \cdot i_B \cdot p_B &= v \cdot i_A \cdot p_A + v \cdot i_B \cdot p_B \\ u \cdot (i_A \cdot p_A + i_B \cdot p_B) &= v \cdot (i_A \cdot p_A + i_B \cdot p_B) \end{aligned}$$

وحسب الفرض نجد أن $u = v$ ، أي إن التطبيق Γ متباين.

ليكن $(w, \sigma) \in \mathfrak{S}(A, X) \times \mathfrak{S}(B, X)$ عندئذ يكون $w: A \rightarrow X, \sigma: B \rightarrow X$ ومنه فإن

$$w \cdot p_A + \sigma \cdot p_B \in \mathfrak{S}(C, X) \text{ وأن } w \cdot p_A, \sigma \cdot p_B \in \mathfrak{S}(C, X)$$

لنضع: $\xi = w \cdot p_A + \sigma \cdot p_B$ ، فنجد أن $\Gamma(\xi) = (\xi \cdot i_A, \xi \cdot i_B)$ أي إن:

$$\Gamma(\xi) = ((w \cdot p_A + \sigma \cdot p_B) \cdot i_A, (w \cdot p_A + \sigma \cdot p_B) \cdot i_B)$$

ولما كان:

$$(w \cdot p_A + \sigma \cdot p_B) \cdot i_A = w \cdot p_A \cdot i_A + \sigma \cdot p_B \cdot i_A =$$

$$= w \cdot I_A + \sigma \cdot 0_{B,A} = w + 0_{A,X} = w$$

$$(w \cdot p_A + \sigma \cdot p_B) \cdot i_B = w \cdot p_A \cdot i_B + \sigma \cdot p_B \cdot i_B =$$

$$= w \cdot 0_{A,B} + \sigma \cdot I_B = 0_{A,B} + \sigma = \sigma$$

وهذا يبين أن $\Gamma(\xi) = (w, \sigma)$ ، أي إن التطبيق Γ غامر. مما سبق نجد أن (C, i_A, i_B)

يشكل مجموعاً للأسرة (A, B) .

مبرهنة ٧-١-٨.

لتكن $\mathfrak{S}$ فئة جمعية. عندئذ لأجل أي زوج A, B من أشياء الفئة $\mathfrak{S}$. يوجد إيزومورفيزم

وحيد $h(A, B): A \amalg B \rightarrow A \prod B$ للفئة $\mathfrak{S}$ يحقق:

$$p'_B \cdot h(A, B) \cdot i_A = 0_{B,A}, \quad p'_A \cdot h(A, B) \cdot i_A = I_A$$

$$p'_A \cdot h(A, B) \cdot i_B = 0_{A,B}, \quad p'_B \cdot h(A, B) \cdot i_B = I_B$$

حيث p'_A, p'_B المورفيزمات الإسقاطية و i_A, i_B مورفيزمات الاحتواء.

البرهان.

حسب المبرهنة (٤-٤-٤)، فإنه يوجد مورفيزم وحيد $h(A, B): A \amalg B \rightarrow A \prod B$ للفئة

$\mathfrak{S}$ يحقق جميع الشروط الواردة في النص. لنبرهن الآن على أن المورفيزم $h(A, B)$

إيزومورفيوم. لنعرف مورفيزم $g(A, B): A \prod B \rightarrow A \amalg B$ بالشكل الآتي:

لدينا $i_A \cdot p'_A: A \prod B \rightarrow A \amalg B$ ، ولدينا أيضاً $i_B \cdot p'_B: A \prod B \rightarrow A \amalg B$. لنضع:

$$g(A, B) = i_A \cdot p'_A + i_B \cdot p'_B$$

فنجد أن $g(A, B): A \prod B \rightarrow A \amalg B$ مورفيزم للفئة $\mathfrak{S}$. لنبرهن على أن:

$$h(A, B) \cdot g(A, B) = I_{A \prod B}, \quad g(A, B) \cdot h(A, B) = I_{A \amalg B}$$

للسهولة سوف نكتب h بدلاً من $h(A, B)$ و g بدلاً من $g(A, B)$. لنبرهن أولاً على صحة العلاقات الآتية:

$$\begin{aligned}
 g \cdot h \cdot i_A &= i_A, \quad g \cdot h \cdot i_B = i_B \\
 p'_A \cdot g \cdot h &= p'_A, \quad p'_B \cdot g \cdot h = p'_B \\
 g \cdot h \cdot i_A &= (i_A \cdot p'_A + i_B \cdot p'_B) \cdot h \cdot i_A = i_A \cdot p'_A \cdot h \cdot i_A + i_B \cdot p'_B \cdot h \cdot i_A = \\
 &= i_A \cdot I_A + i_B \cdot 0_{BA} = i_A + 0_{CA} = i_A \\
 g \cdot h \cdot i_B &= (i_A \cdot p'_A + i_B \cdot p'_B) \cdot h \cdot i_B = i_A \cdot p'_A \cdot h \cdot i_B + i_B \cdot p'_B \cdot h \cdot i_B = \\
 &= i_A \cdot 0_{AB} + i_B \cdot I_B = 0_{CB} + i_B = i_B \\
 p'_A \cdot h \cdot g &= p'_A \cdot h \cdot (i_A \cdot p'_A + i_B \cdot p'_B) = p'_A \cdot h \cdot i_A \cdot p'_A + p'_A \cdot h \cdot i_B \cdot p'_B = \\
 &= I_A \cdot p'_A + 0_{AB} \cdot p'_B = p'_A + 0_{A \sqcup B} = p'_A \\
 p'_B \cdot h \cdot g &= p'_B \cdot h \cdot (i_A \cdot p'_A + i_B \cdot p'_B) = p'_B \cdot h \cdot i_A \cdot p'_A + p'_B \cdot h \cdot i_B \cdot p'_B = \\
 &= 0_{AB} \cdot p'_A + I_B \cdot p'_B = 0_{BA \sqcup B} \cdot p'_B = p'_B
 \end{aligned}$$

وبما أن $A \sqcup B$ موجود فإنه لأجل كل $X \in ob(\mathfrak{S})$ ، فإن التطبيق:

$$\Gamma: \mathfrak{S}(A \sqcup B, X) \rightarrow \mathfrak{S}(A, X) \times \mathfrak{S}(B, X)$$

المعرف بالشكل الآتي: أيًا كان $\lambda \in \mathfrak{S}(A \sqcup B, X)$ ، فإن $\Gamma(\lambda) = (\lambda \cdot i_A, \lambda \cdot i_B)$ ، فإن Γ تقابل ومنه لأجل $X = A \sqcup B$ وبما أن $g \cdot h \in \mathfrak{S}(A \sqcup B, A \sqcup B)$ ، فإن:

$$\begin{aligned}
 \Gamma(g \cdot h) &= ((g \cdot h) \cdot i_A, (g \cdot h) \cdot i_B) = (i_A, i_B) = (I_{A \sqcup B} \cdot i_A, I_{A \sqcup B} \cdot i_B) = \Gamma(I_{A \sqcup B}) \\
 &\quad \cdot g \cdot h = I_{A \sqcup B}
 \end{aligned}$$

من جهة أخرى، لما كان الجداء $A \sqcup B$ موجوداً؛ فإنه لأجل كل $X \in ob(\mathfrak{S})$ ، فإن التطبيق:

$$\Gamma: \mathfrak{S}(X, A \sqcup B) \rightarrow \mathfrak{S}(X, A) \times \mathfrak{S}(X, B)$$

المعرف بالشكل الآتي: أيًا كان $\lambda \in \mathfrak{S}(X, A \sqcup B)$ ، فإن $\Gamma(\lambda) = (p'_A \cdot \lambda, p'_B \cdot \lambda)$ ، فإن Γ تقابل ومنه لأجل $X = A \sqcup B$ وبما أن $h \cdot g \in \mathfrak{S}(A \sqcup B, A \sqcup B)$ ، فإن:

$$\begin{aligned}
 \Gamma(h \cdot g) &= (p'_A \cdot (h \cdot g), p'_B \cdot (h \cdot g)) = (p'_A, p'_B) = \\
 &= (p'_A \cdot I_{A \sqcup B}, p'_B \cdot I_{A \sqcup B}) = \Gamma(I_{A \sqcup B})
 \end{aligned}$$

وهذا يبين أن $h \cdot g = I_{A \amalg B}$. مما سبق نجد أن المورفيزم h إيزومورفيزم.

تعريف.

لتكن $\mathcal{S}, \mathcal{S}'$ فئتين جمعيتين، وليكن $F: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}'$ دالياً مباشراً. نقول إن الدالي F جمعياً إذا حقق الشرط الآتي: أيأ كان $A, B \in ob(\mathcal{S})$ وأيأ كان $u, v \in \mathcal{S}(A, B)$ ، فإن:

$$F(u+v) = F(u) + F(v)$$

ينتج من التعريف مباشرة أنه إذا كان $F: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}'$ دالياً جمعياً، فإن $F(0) = 0$ ؛ وذلك لأن $F(0) = F(0+0) = F(0) + F(0)$ ومنه يكون $F(0) = 0$.

مبرهنة ٧-١-٩.

ليكن $F: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}'$ دالياً جمعياً، ولتكن (A, B) أسرة من أشياء الفئة $\mathcal{S}$. إذا كان $C \in ob(\mathcal{S})$ مع المورفيزمات $i_A: A \rightarrow C$, $i_B: B \rightarrow C$ للفئة $\mathcal{S}$ يشكلون مجموعاً للأسرة (A, B) في $\mathcal{S}$ ، عندئذ فإن $F(C) \in ob(\mathcal{S}')$ مع المورفيزمات:

$$F(i_A): F(A) \rightarrow F(C), \quad F(i_B): F(B) \rightarrow F(C)$$

للفئة $\mathcal{S}'$ يشكلون مجموعاً لأسرة الأشياء $(F(A), F(B))$ في الفئة $\mathcal{S}'$.

البرهان.

لنفرض أن $C \in ob(\mathcal{S})$ مع المورفيزمات $i_A: A \rightarrow C$, $i_B: B \rightarrow C$ للفئة $\mathcal{S}$ يشكلون مجموعاً للأسرة الأشياء (A, B) في الفئة $\mathcal{S}$ ، عندئذ حسب المبرهنة (٧-١-٧) توجد مورفيزمات $p_A: C \rightarrow A$, $p_B: C \rightarrow B$ للفئة $\mathcal{S}$ تحقق العلاقات الواردة في المبرهنة (٧-١-٧). ومنه فإن $F(C) \in ob(\mathcal{S}')$ ، وإن:

$$F(i_A): F(A) \rightarrow F(C), \quad F(i_B): F(B) \rightarrow F(C)$$

هي مورفيزمات للفئة $\mathcal{S}'$. لإثبات أن $F(C)$ مع المورفيزمات $F(i_A), F(i_B)$ يشكلون مجموعاً لأسرة الأشياء $(F(A), F(B))$ في الفئة $\mathcal{S}'$ يكفي إثبات صحة العلاقات الواردة

في المبرهنة (٧-١-٧) لأجل المورفيزمات $F(i_A), F(i_B), F(p_A), F(p_B)$.

بما أن $p_A \cdot i_A = I_A$ نجد أن:

$$F(p_A) \cdot F(i_A) = F(p_A \cdot i_A) = F(I_A) = I_{F(A)}$$

أيضاً بما أن $p_B \cdot i_B = I_B$ نجد أن:

$$F(p_B) \cdot F(i_B) = F(p_B \cdot i_B) = F(I_B) = I_{F(B)}$$

كذلك بما أن $p_B \cdot i_A = 0_{B,A}$ ، فإن :

$$F(p_B) \cdot F(i_A) = F(p_B \cdot i_A) = F(0_{B,A}) = 0_{F(B)F(A)}$$

ولما كان $p_A \cdot i_B = 0_{A,B}$ ، فإن :

$$F(p_A) \cdot F(i_B) = F(p_A \cdot i_B) = F(0_{A,B}) = 0_{F(A)F(B)}$$

أخيراً بما أن $i_A \cdot p_A + i_B \cdot p_B = I_C$ نجد أن

$$\begin{aligned} F(i_A) \cdot F(p_A) + F(i_B) \cdot F(p_B) &= F(i_A \cdot p_A) + F(i_B \cdot p_B) = \\ &= F(i_A \cdot p_A + i_B \cdot p_B) = F(I_C) = I_{F(C)} \end{aligned}$$

وهذا يبين أن $F(C)$ مع المورفيزمات $F(i_A), F(i_B)$ يشكلون مجموعاً لأسرة الأشياء

$(F(A), F(B))$ في الفئة $\mathcal{S}'$.

٢-٧. النواة.

تمهيدية ١-٢-٧.

لتكن $\mathfrak{I}$ فئة جمعية، وليكن $u_1, u_2 : A \rightarrow B$ مورفيزمين للفئة $\mathfrak{I}$. لنفرض أن $v : N \rightarrow A$ مورفيزم للفئة $\mathfrak{I}$. الشروط الآتية متكافئة:

١ - الثنائية (N, v) تشكل نواة للمورفيزمين u_1, u_2 .

٢ - الثنائية (N, v) تشكل نواة للمورفيزمين $u_1 - u_2, 0_{B,A}$.

البرهان.

(1) $\Leftrightarrow$ (2). لنفرض أن الثنائية (N, v) تشكل نواة للمورفيزمات u_1, u_2 .

- ليكن $X \in ob(\mathfrak{I})$ و $u : X \rightarrow A$ مورفيزماً للفئة $\mathfrak{I}$ يحقق $(u_1 - u_2) \cdot u = 0_{B,A} \cdot u$.

$$\begin{array}{ccccc} & & N & & N \\ & \nearrow g & \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{u} & A & \xrightarrow{u_1} & B \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & B & & B \end{array} \quad \begin{array}{ccccc} & & N & & N \\ & \nearrow g & \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{u} & A & \xrightarrow{u_1 - u_2} & B \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & B & & B \end{array}$$

عندئذ يكون $u_1 \cdot u - u_2 \cdot u = 0_{B,A} \cdot u$ ؛ ومنه نجد أن $u_1 \cdot u = u_2 \cdot u$ ولكون (N, v) هي

نواة للمورفيزمات u_1, u_2 ؛ فإنه يوجد مورفيزم وحيد $g : X \rightarrow N$ يحقق $v \cdot g = u$.

- ليكن $u : X \rightarrow A$ مورفيزماً للفئة $\mathfrak{I}$ لأجله يوجد المورفيزم $g : X \rightarrow N$ الذي يحقق

$v \cdot g = u$ ، عندئذ يكون $u_1 \cdot u = u_2 \cdot u$ ، ومنه فإن $u_1 \cdot u - u_2 \cdot u = 0_{B,A} \cdot u$ ؛ وبالتالي يكون

$(u_1 - u_2) \cdot u = 0_{B,A} \cdot u = 0_{B,A} \cdot u$ وهذا يبين أن الثنائية (N, v) تشكل نواة للمورفيزمات

$u_1 - u_2, 0_{B,A}$.

(2) $\Leftrightarrow$ (1). لنفرض أن الثنائية (N, v) تشكل نواة للمورفيزمات $u_1 - u_2, 0_{B,A}$. ليكن

$X \in ob(\mathfrak{I})$ ، ولنفرض أن $u : X \rightarrow A$ مورفيزم للفئة $\mathfrak{I}$ يحقق $u_1 \cdot u = u_2 \cdot u$ عندئذ

يكون $u_1 \cdot u - u_2 \cdot u = 0_{B,A} \cdot u$ ؛ وبالتالي $(u_1 - u_2) \cdot u = 0_{B,A} \cdot u$ ولما كانت

الثنائية (N, v) تشكل نواة للمورفيزمات $u_1 - u_2, 0_{B,A}$ ، فإنه يوجد مورفيزم وحيد

$g : X \rightarrow N$ يحقق $v \cdot g = u$.

- ليكن $X \in ob(\mathfrak{I})$ وأن $u : X \rightarrow A$ مورفيزم للفئة $\mathfrak{I}$ لأجله يوجد المورفيزم

$g: X \rightarrow N$ والذي يحقق $v \cdot g = u$ ، عندئذ يكون $(u_1 - u_2) \cdot u = 0_{B_A} \cdot u$ ومنه فإن $u_1 \cdot u = u_2 \cdot u$ وبالتالي يكون $u_1 \cdot u = u_2 \cdot u = 0_{B_X}$ وهذا يبين أن الثنائية (N, v) تشكل نواة للمورفيزمات u_1, u_2 .

ملاحظة.

بالاعتماد على التمهيدية (٧-٢-١) فإنه لدراسة نوى المورفيزمات في الفئات الجمعية سوف نقتصر في دراستنا على الثنائيات من الشكل $(u, 0)$.

تعريف.

لتكن $\mathfrak{I}$ فئة جمعية، وليكن $i: K \rightarrow A$ ، $u: A \rightarrow B$ مورفيزمين للفئة $\mathfrak{I}$. نسمي الثنائية (K, i) نواة للمورفيزم u إذا كانت الثنائية (K, i) نواة للمورفيزمين $(u, 0_{B_A})$.

مبرهنة ٧-٢-٢.

لتكن $\mathfrak{I}$ فئة جمعية، وليكن $i: K \rightarrow A$ ، $u: A \rightarrow B$ مورفيزمين للفئة $\mathfrak{I}$. عندئذ الشروط الآتية متكافئة:

١ - الثنائية (K, i) تكون نواة للمورفيزم u .

٢ - أيأ كان $X \in ob(\mathfrak{I})$ ، فإن متتالية الزمر التبديلية:

$$0 \rightarrow \mathfrak{I}(X, K) \xrightarrow{\alpha} \mathfrak{I}(X, A) \xrightarrow{\beta} \mathfrak{I}(X, B) \quad (*)$$

تكون تامة، حيث α, β تشاكلات زميرية معرفة بالشكل الآتي:

أيأ كان $\xi \in \mathfrak{I}(X, K)$ ، فإن $\alpha(\xi) = i \cdot \xi$ ، وأيأ كان $\mu \in \mathfrak{I}(X, A)$ فإن $\beta(\mu) = u \cdot \mu$. البرهان.

بما أن الفئة $\mathfrak{I}$ جمعية، فإن كلاً من $\mathfrak{I}(X, K)$ ، $\mathfrak{I}(X, A)$ ، $\mathfrak{I}(X, B)$ هي زمر تبديلية وإن التطبيقات α, β هي تشاكلات زميرية، وذلك حسب التمهيدية (٧-١-٤).

(1) $\Leftrightarrow$ (2). لنفرض أن الثنائية (K, i) هي نواة للمورفيزم u ، عندئذ حسب التعريف، فإن (K, i) هي نواة للمورفيزمين $u, 0_{B_A}$ ، وحسب التمهيدية (٤-٥-٤) يكون المورفيزم u مونومورفيزماً، ومنه أيأ كان $X \in ob(\mathfrak{I})$ ، فإن التطبيق $\alpha: \mathfrak{I}(X, K) \rightarrow \mathfrak{I}(X, A)$ معرف بالشكل $\alpha(\xi) = i \cdot \xi$ ، أيأ كان $\xi \in \mathfrak{I}(X, K)$ ، يكون متبايناً. وهذا يبين أن

المتتالية $0 \rightarrow \mathfrak{I}(X, K) \xrightarrow{\alpha} \mathfrak{I}(X, A)$ تامة.

لنبرهن الآن على أن $Im(\alpha) = Ker(\beta)$.

ليكن $w \in Ker(\beta)$ ، عندئذ $w \in \mathfrak{I}(X, A)$ ، وإن $\beta(w) = 0_{BY}$ ، ومنه $u \cdot w = 0_{BY}$ وبما أن $0_{BA} \cdot w = 0_{BY}$ نجد أن $u \cdot w = 0_{BA} \cdot w$ ، ولما كانت (K, i) هي نواة للمورفيزمين $u, 0_{BA}$ فإنه يوجد مورفيزم وحيد $g: X \rightarrow K \in \mathfrak{I}(X, K)$ يحقق $i \cdot g = w$ ومنه نجد أن:

$$w = i \cdot g = \alpha(g) \in Im(\alpha)$$

وهكذا، فإن $Ker(\beta) \subseteq Im(\alpha)$. ليكن $\theta \in Im(\alpha)$ عندئذ يوجد $\delta \in \mathfrak{I}(X, K)$ بحيث $\theta = \alpha(\delta) = i \cdot \delta$ ، وإن $\theta \in \mathfrak{I}(X, A)$ ، لنبرهن على أن $\beta(\theta) = 0$ ، إن:

$$\beta(\theta) = u \cdot \theta = u \cdot (i \cdot \delta) = (u \cdot i) \cdot \delta$$

ولما كانت (K, i) هي نواة للمورفيزمين $u, 0_{BA}$ فإن $u \cdot i = 0_{BA} \cdot i$ ، ومنه يكون:

$$\beta(\theta) = (u \cdot i) \cdot \delta = (0_{BA} \cdot i) \cdot \delta = 0_{BK} \cdot \delta = 0_{BY}$$

ومنه نجد أن $\theta \in Ker(\beta)$ ، وهذا يبين أن $Im(\alpha) \subseteq Ker(\beta)$. مما سبق نجد أن $Im(\alpha) = Ker(\beta)$ ، ومنه تكون المتتالية (*) تامة.

(2) $\Leftarrow$ (1). لنفرض أن متتالية الزمر والتشاكلات الزمرية (*) تامة. عندئذ يكون التشاكل α متبايناً، ويكون $Im(\alpha) = Ker(\beta)$. لنبرهن الآن على أن الثنائية (K, i) هي نواة للمورفيزمين $u, 0_{BA}$.

- أيأ كان $X \in ob(\mathfrak{I})$ لنأخذ المورفيزم $\lambda: X \rightarrow A$ للفئة $\mathfrak{I}$ الذي يحقق $u \cdot \lambda = 0_{BA} \cdot \lambda$ فنجد أن $\beta(\lambda) = u \cdot \lambda = 0_{BA} \cdot \lambda = 0_{BY}$ ، ومنه يكون $\lambda \in Ker(\beta) = Im(\alpha)$ ، وبالتالي يوجد $g \in \mathfrak{I}(X, K)$ بحيث $\lambda = \alpha(g)$ ، ومنه يكون $\lambda = i \cdot g$ وإن المورفيزم g وحيد، لأن التشاكل α متباين.

- ليكن $w: X \rightarrow A$ مورفيزماً للفئة $\mathfrak{I}$ لأجله يوجد المورفيزم $g \in \mathfrak{I}(X, K)$ الذي يحقق $w = i \cdot g$ ، عندئذ يكون:

$$w = i \cdot g = \alpha(g) \in Im(\alpha) = Ker(\beta)$$

ومنه فإن $\beta(w) = 0_{BY}$ أي إن $u \cdot w = 0_{BY}$ ، وبما أن $0_{BA} \cdot \lambda = 0_{BY}$ نجد أن $u \cdot w = 0_{BA} \cdot \lambda$ ، مما سبق نجد أن الثنائية (K, i) هي نواة للمورفيزمين $u, 0_{BA}$.

مبرهنة ٧-٢-٣.

لتكن $\mathcal{S}$ فئة جمعية، وليكن $u: A \rightarrow B$ مورفيزماً للفئة $\mathcal{S}$. إن نوى المورفيزم u (في حال وجودها) تشكل صف تكافؤ نرمز له $Ker(u)$.
البرهان.

لنفرض أن (C, w) و (K, v) نواتان للمورفيزم u ، عندئذ فإن $v: K \rightarrow A$ ، $w: C \rightarrow A$ ، وحسب التمهيدية (٤-٥-٤) فإن كلا من v, w مونومورفيزم، وحسب المصطلحات المستخدمة في الفقرة (٣-١) فإن $v, w \in M_A$. أيضاً حسب المبرهنة (٤-٥-١)، فإنه يوجد إيزومورفيزم وحيد $v_1: K \rightarrow C$ لأجله يكون المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{u} & C \\ & \searrow v & \swarrow w \\ & A & \end{array}$$

تبديلي، أي إن $v \cdot v_1 = w$. ومنه يكون $v \leq w$ حيث $(\leq)$ العلاقة المعرفة على الصف M_A في الفقرة (٣-١). ولما كان v_1 إيزومورفيزماً، فإنه يوجد $u_1: C \rightarrow K$ يحقق $v_1 \cdot u_1 = I_C$ و $u_1 \cdot v_1 = I_K$ وإن:

$$w = w \cdot I_C = w \cdot (v_1 \cdot u_1) = (w \cdot v_1) \cdot u_1 = v \cdot u_1$$

ومنه يكون $v \leq w$. وحسب المبرهنة (٤-٣-١)، فإن $v \rho w$ حيث ρ هي علاقة التكافؤ المعرفة على M_A . مما سبق نجد أن المورفيزمين v, w متكافئان؛ وبالتالي فهما ينتميان إلى صف تكافؤ واحد. وهكذا نجد أن جميع نوى المورفيزم u سوف تنتمي إلى هذا الصف الذي يسمى صف تكافؤ نوى المورفيزم u وسنرمز له $Ker(u)$ وهو يشكل شيئاً جزئياً في A .

مبرهنة ٧-٢-٤.

لتكن $\mathcal{S}$ فئة جمعية، وليكن $u: A \rightarrow B$ مورفيزماً و $v: B \rightarrow C$ مونومورفيزماً للفئة $\mathcal{S}$. الشروط الآتية متكافئة:

$$١ - i = Ker(u)$$

$$٢ - i = Ker(v \cdot u)$$

البرهان.

(1) $\Leftrightarrow$ (2). لنفرض أن الثنائية (K, i) هي نواة للمورفيزم u ولنبرهن على أن الثنائية (K, i) هي نواة للمورفيزم $v \cdot u$.

- ليكن $\lambda: X \rightarrow A$ مورفيزماً للفئة $\mathcal{I}$ يحقق $\lambda = 0_{AC} \cdot \lambda = 0_{CX} \cdot \lambda$ فنجد أن $v \cdot (u \cdot \lambda) = v \cdot 0_{AB} = 0_{CX}$ ولما كان المورفيزم v مونومورفيزماً ينتج أن $u \cdot \lambda = 0_{AB}$ ومنه يوجد مورفيزم وحيد $g: X \rightarrow K$ يحقق $i \cdot g = \lambda$:

$$\begin{array}{ccccc} & & N & & N \\ & \nearrow g & \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{\lambda} & A & \xrightarrow{u} & B \\ & & \downarrow 0_{BA} & & \downarrow 0_{BA} \end{array}$$

- ليكن $\mu: X \rightarrow A$ مورفيزماً للفئة $\mathcal{I}$ لأجله يوجد $\mu: X \rightarrow N$ يحقق $i \cdot g = \mu$ عندئذ $u \cdot \mu = u \cdot 0_{BA}$ ومنه يكون $v \cdot (u \cdot \mu) = v \cdot (u \cdot 0_{BA})$ أي إن $(v \cdot u) \cdot \mu = (v \cdot u) \cdot 0_{BA}$ وهذا يبين أن الثنائية (K, i) هي نواة للمورفيزم $v \cdot u$.
(1) $\Leftrightarrow$ (2). لنفرض أن الثنائية (K, i) هي نواة للمورفيزم $v \cdot u$.

- ليكن $w: X \rightarrow A$ مورفيزماً للفئة $\mathcal{I}$ حيث $X \in \text{ob}(\mathcal{I})$ يحقق $u \cdot w = 0_{BA} \cdot w = 0_{BX}$ عندئذ يكون $v \cdot (u \cdot w) = v \cdot 0_{BX} = 0_{CX}$ أي إن $(v \cdot u) \cdot w = 0_{CX}$ وحسب الفرض يوجد مورفيزم وحيد $g: X \rightarrow K$ يحقق $i \cdot g = w$.
ليكن $w: X \rightarrow A$ مورفيزماً للفئة $\mathcal{I}$ لأجله يوجد $g: X \rightarrow K$ يحقق $i \cdot g = w$ عندئذ حسب الفرض يكون:

$$(v \cdot u) \cdot w = 0_{CA} \cdot w = 0_{CX}$$

ومنه فإن $v \cdot (u \cdot w) = 0_{CX} = v \cdot 0_{BX}$ ولكون المورفيزم v مونومورفيزماً ينتج أن $u \cdot w = 0_{BA} \cdot w = 0_{BX}$ مما سبق نجد أن الثنائية (K, i) هي نواة للمورفيزم u .

تعريف.

لتكن $\mathcal{I}$ فئة جمعية، وليكن $B, C \in \text{ob}(\mathcal{I})$. نقول إن B يشكل حداً مباشراً في C إذا وجد $A \in \text{ob}(\mathcal{I})$ ومورفيزمان $i_A: A \rightarrow C$, $i_B: B \rightarrow C$ بحيث يكون C مع المورفيزمين i_A, i_B يشكلون مجموعاً للأسرة A, B .

مبرهنة ٧-٢-٥.

لتكن $\mathcal{C}$ فئة جمعية، وليكن $p: C \rightarrow B$ مورفيزماً للفئة $\mathcal{C}$. لنفرض أنه:

١ - توجد نواة للمورفيزم p .

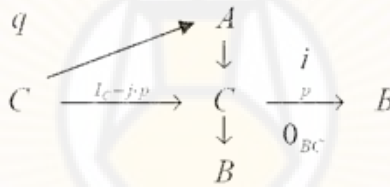
٢ - يوجد مورفيزم $j: B \rightarrow C$ يحقق $p \cdot j = I_B$.

عندئذ يكون B حداً مباشراً في C .

البرهان.

لنفرض أن الشرطين (١) و (٢) محققان، ولنفرض أيضاً أن الثنائية (A, i) نواة للمورفيزم p . يكفي لإثبات أن B حد مباشر في C إيجاد مورفيزم $q: C \rightarrow A$ يحقق مع المورفيزم p الشروط الواردة في المبرهنة (٧-١-٧).
لنأخذ المورفيزم $1_C - j \cdot p: C \rightarrow C$ والذي يحقق:

$$p \cdot (1_C - j \cdot p) = p - p \cdot j \cdot p = p - I_B \cdot p = p - p = 0_{BC} = 0_{BC} \cdot (1_C - j \cdot p)$$



ولكون (A, i) نواة للمورفيزم p ، فإنه يوجد مورفيزم وحيد $q: C \rightarrow A$ يحقق $i \cdot q = 1_C - j \cdot p$. عندئذ يكون $i \cdot q = 1_C - j \cdot p$. كما أن $i \cdot q + j \cdot p = 1_C$. لنبرهن على أن $q \cdot i = I_A$. لدينا:

$$i \cdot (q \cdot i) = (i \cdot q) \cdot i = (1_C - j \cdot p) \cdot i = i - j \cdot p \cdot i = i \cdot I_A$$

ولكون i مونومورفيزماً نجد أن $q \cdot i = I_A$. أيضاً لدينا:

$$i \cdot (q \cdot j) = (i \cdot q) \cdot j = (1_C - j \cdot p) \cdot j = j - j \cdot p \cdot j = 0_{CB} = i \cdot 0_{AB}$$

ولكون i مونومورفيزماً نجد أن $q \cdot j = 0_{AB}$. وحسب المبرهنة (٧-١-٧) نجد أن C مع المورفيزمات p, q يشكلون مجموعاً للأسرة (A, B) وحسب التعريف نجد أن B حد مباشر في C .

تعريف.

لتكن $\mathcal{C}$ فئة جمعية، وليكن $u: A \rightarrow B$ مورفيزماً للفئة $\mathcal{C}$.

- إذا كان u يملك نواة مرافقة (L, j) ، أي إن $Coker(u) = (L, j)$ حيث $j: B \rightarrow L$ الإييومورفيزم القانوني، فإننا نسمي الشيء الجزئي $Ker(j)$ من A صورة المورفيزم u ، أي إن $Ker(j) = Im(u)$.

- إذا كان u يملك نواة (K, i) ، أي إن $Ker(u) = (K, i)$ حيث $i: K \rightarrow A$ المونومورفيزم القانوني فإننا نسمي شيء الخارج $Coker(i)$ الصورة المرافقة للمورفيزم u ، أي إن $Coker(i) = Coim(u)$.

$$\begin{array}{ccc} Ker(u) & & Coker(u) \\ i \downarrow & & \uparrow j \\ A & \xrightarrow{u} & B \end{array}$$

مبرهنة ٦-٢-٧.

لتكن $\mathcal{C}$ فئة جمعية، وليكن $u: A \rightarrow B$ مورفيزماً للفئة $\mathcal{C}$. الشروط الآتية متكافئة:

- ١ - المورفيزم u مونومورفيوم.
 - ٢ - $0 \rightarrow A$ هو نواة u ، أي إن $Ker(u) = 0$.
 - ٣ - $I_A: A \rightarrow A$ هو صورة مرافقة للمورفيزم u ، أي إن $Coim(u) = A$.
- البرهان.

(1) $\Leftrightarrow$ (2). ليكن $\lambda: X \rightarrow A$ عنصراً من صف التكافؤ $Ker(u)$ ، عندئذ (λ, X) هي نواة للمورفيزم u ، ومنه $u \cdot \lambda = 0_{B_A} \cdot \lambda = 0_{B_V}$ ، وأيضاً $u \cdot 0_{A_V} = 0_{B_V}$ ، ومنه $u \cdot \lambda = u \cdot 0_{A_V}$ ولكون u مونومورفيزماً نجد أن $\lambda = 0$ ، وبما أن $I_{A_V} = 0$ فإنه حسب التمييزية (٧-١-٣) نجد أن $X = 0$ وهذا يبين أن $0 \rightarrow A$ هو نواة u ، أي إن $Ker(u) = 0$.

(2) $\Leftrightarrow$ (3). حسب الفرض لدينا $0 \rightarrow A$ هو نواة المورفيزم u ، ومنه فإن:

$$Coim(u) = Coker(0 \rightarrow A)$$

أياً كان $\mu: A \rightarrow X$ ، فإن $\mu \cdot 0_{A_O} = 0_{X_O}$ ، وإن $\mu \cdot I_A = \mu$ وبالتالي يكون:

$$I_A = \text{Coker}(0 \rightarrow A)$$

(3) $\Leftrightarrow$ (2). ليكن $i: K \rightarrow A$ مورفيزماً لأجله $I_A \cdot i = i \cdot 0$ ، عندئذ بما أن:

$$i \cdot I_K = 0 = i \cdot 0_{KK}$$

وبما أن i مونومورفيزم نجد أن $I_K = 0_{KK}$ ومنه $K = 0$.

(2) $\Leftrightarrow$ (1). ليكن $\theta_1, \theta_2: C \rightarrow A$ مورفيزمين يحققان $u \cdot \theta_1 = u \cdot \theta_2$ عندئذ يكون:

$$u \cdot (\theta_1 - \theta_2) = 0 \text{، ولكون } \text{Ker}(u) = 0 \text{ يوجد مورفيزم } \mu: C \rightarrow 0 \text{ بحيث:}$$

$$0_{AO} \cdot \mu = (\theta_1 - \theta_2)$$

ومنه $\theta_1 = \theta_2$ أي إن المورفيزم u مونومورفيزم.

٧-٣. النواة المرافقة.

تمهيدية ٧-٣-١.

لتكن $\mathcal{I}$ فئة جمعية، وليكن $u_1, u_2 : B \rightarrow A$ مورفيزمين للفئة $\mathcal{I}$. لنفرض أن $v : A \rightarrow N$ مورفيزم للفئة $\mathcal{I}$ حيث $N \in ob(\mathcal{I})$. الشروط الآتية متكافئة:

١ - الثنائية (N, v) تشكل نواة مرافقة للمورفيزمين u_1, u_2 .

٢ - الثنائية (N, v) تشكل نواة مرافقة للمورفيزمين $u_1 - u_2, 0_{AB}$.

البرهان.

(1) $\Leftrightarrow$ (2). لنفرض أن الثنائية (N, v) تشكل نواة مرافقة للمورفيزمين u_1, u_2 .

- ليكن $X \in ob(\mathcal{I})$ و $u : A \rightarrow X$ مورفيزماً للفئة $\mathcal{I}$ يحقق $u \cdot (u_1 - u_2) = u \cdot 0_{AB}$

$$\begin{array}{ccccc}
 & N & & N & \\
 g \swarrow & \uparrow & & \swarrow g & \\
 X & \xleftarrow{u} & A & \xleftarrow{u} & A \\
 & \uparrow & \xleftarrow{u_1} & & \uparrow \\
 & B & B & & B \\
 & & \xleftarrow{u_2} & & \xleftarrow{0_{AB}}
 \end{array}$$

عندئذ يكون $u \cdot u_1 - u \cdot u_2 = 0_{XB}$ ، ومنه نجد أن $u \cdot u_1 = u \cdot u_2$ ، ولكون (N, v) هي نواة مرافقة للمورفيزمين u_1, u_2 ، فإنه يوجد مورفيزم وحيد $g : N \rightarrow X$ يحقق $g \cdot v = u$.

- ليكن $X \in ob(\mathcal{I})$ ، وليكن $u : A \rightarrow X$ مورفيزماً للفئة $\mathcal{I}$ لأجله يوجد المورفيزم $g : N \rightarrow X$ الذي يحقق $g \cdot v = u$ ، ولما كانت الثنائية (N, v) تشكل نواة مرافقة للمورفيزمين u_1, u_2 ، عندئذ يكون $u \cdot u_1 = u \cdot u_2$ ، ومنه فإن $u \cdot u_1 - u \cdot u_2 = 0_{XB}$ ؛ وبالتالي يكون $u \cdot (u_1 - u_2) = u \cdot 0_{AB}$ وهذا يبين أن الثنائية (N, v) تشكل نواة مرافقة للمورفيزمين $u_1 - u_2, 0_{AB}$.

(2) $\Leftrightarrow$ (1). لنفرض أن الثنائية (N, v) تشكل نواة مرافقة للمورفيزمين $u_1 - u_2, 0_{AB}$.

ليكن $X \in ob(\mathcal{I})$ ولنفرض أن $u : A \rightarrow X$ مورفيزم للفئة $\mathcal{I}$ يحقق $u \cdot u_1 = u \cdot u_2$ عندئذ $u \cdot u_1 - u \cdot u_2 = 0_{XB}$ ومنه يكون $u \cdot (u_1 - u_2) = u \cdot 0_{AB}$ ولما كانت الثنائية (N, v) تشكل نواة مرافقة للمورفيزمين $u_1 - u_2, 0_{AB}$ فإنه يوجد مورفيزم وحيد $g : N \rightarrow X$ يحقق

$$g \cdot v = u$$

- ليكن $X \in ob(\mathfrak{I})$ ، وإن $u: A \rightarrow X$ مورفيزم للفئة $\mathfrak{I}$ لأجله يوجد المورفيزم $g: N \rightarrow X$ الذي يحقق $g \cdot v = u$ ، عندئذ يكون $u \cdot (u_1 - u_2) = u \cdot 0_{AB}$ ومنه فإن $u \cdot u_1 - u \cdot u_2 = 0_{XB}$ وبالتالي يكون $u \cdot u_1 = u \cdot u_2$ وهذا يبين أن الثنائية (N, v) تشكل نواة مرافقة للمورفيزمين u_1, u_2 .

ملاحظة.

بالاعتماد على التمهيدية (٧-٣-١)، فإنه لدراسة النوى المرافقة للمورفيزمات في الفئات الجمعية سوف نقتصر في دراستنا على الثنائيات من الشكل $(u, 0)$.

تعريف.

لتكن $\mathfrak{I}$ فئة جمعية، وليكن $j: B \rightarrow L$ ، $u: A \rightarrow B$ مورفيزمين للفئة $\mathfrak{I}$. نسمي الثنائية (L, j) نواة مرافقة للمورفيزم u إذا كانت الثنائية (L, j) نواة مرافقة للمورفيزمين $(u, 0_{BA})$.

مبرهنة ٧-٣-٢.

لتكن $\mathfrak{I}$ فئة جمعية، وليكن $j: B \rightarrow L$ ، $u: A \rightarrow B$ مورفيزمين للفئة $\mathfrak{I}$. عندئذ الشروط الآتية متكافئة:

- ١ - الثنائية (L, j) تكون نواة مرافقة للمورفيزم u .
- ٢ - أيأ كان $X \in ob(\mathfrak{I})$ ، فإن متتالية الزمر التبديلية:

$$0 \rightarrow \mathfrak{I}(L, X) \xrightarrow{\varphi} \mathfrak{I}(B, X) \xrightarrow{\psi} \mathfrak{I}(A, X) \quad (*)$$

تكون تامة، حيث φ, ψ تشاكلات زميرية معرفة بالشكل الآتي:
أيأ كان $\xi \in \mathfrak{I}(L, X)$ ، فإن $\xi \cdot j = \xi$ ، $\varphi(\xi) = \xi$ ، وأيأ كان $\mu \in \mathfrak{I}(B, X)$ ، فإن $\psi(\mu) = \mu \cdot u$.
البرهان.

بما أن الفئة $\mathfrak{I}$ جمعية، فإن كلاً من $\mathfrak{I}(L, X)$ ، $\mathfrak{I}(B, X)$ ، $\mathfrak{I}(A, X)$ هي زمر تبديلية وإن التطبيقات φ, ψ هي تشاكلات زميرية، وذلك حسب التمهيدية (٧-١-٤).

(1) $\Leftarrow$ (2). لنفرض أن الثنائية (L, j) هي نواة للمورفيزم u ، عندئذ حسب التعريف فإن (L, j) هي نواة للمورفيزمين $u, 0_{BA}$ ، وحسب التمهيدية (٤-٦-٤) يكون المورفيزم u

إبيومورفيزماً، ومنه أياً كان $X \in ob(\mathfrak{I})$ يكون التشاكل φ متبايناً. وهذا يبين أن المتتالية

$$0 \rightarrow \mathfrak{I}(L, X) \xrightarrow{\varphi} \mathfrak{I}(B, X)$$

تامة. لنبرهن الآن على أن $Im(\varphi) = Ker(\psi)$

ليكن $w \in Ker(\psi)$ عندئذ $w \in \mathfrak{I}(B, X)$ ، وإن $\beta(\psi) = 0_{X4}$ ، ومنه $w \cdot u = 0_{X4}$ وبما أن $w \cdot 0_{B4} = 0_{X4}$ نجد أن $w \cdot u = w \cdot 0_{B4}$ ، ولما كانت (L, j) هي نواة للمورفيزمين $u, 0_{B4}$ فإنه يوجد مورفيزم وحيد $g: L \rightarrow X \in \mathfrak{I}(L, X)$ يحقق $g \cdot j = w$ ومنه نجد أن:

$$w = g \cdot j = \varphi(g) \in Im(\varphi)$$

وهكذا فإن $Ker(\psi) \subseteq Im(\varphi)$. ليكن $\theta \in Im(\varphi)$ عندئذ يوجد $\delta \in \mathfrak{I}(L, X)$ بحيث $\theta = \varphi(\delta) = \delta \cdot j$ لنبرهن على أن $\psi(\theta) = 0$. إن:

$$\psi(\theta) = \theta \cdot u = (\delta \cdot j) \cdot u = \delta \cdot (j \cdot u)$$

ولما كانت (L, j) هي نواة للمورفيزمين $u, 0_{B4}$ فإن $j \cdot u = j \cdot 0_{B4}$ وهذا يبين أن:

$$\psi(\theta) = \delta \cdot (j \cdot u) = \delta \cdot (j \cdot 0_{B4}) = \delta \cdot 0_{L4} = 0_{X4}$$

ومنه نجد أن $\theta \in Ker(\psi)$ وهذا يبين أن $Im(\varphi) \subseteq Ker(\psi)$. مما سبق نجد أن $Im(\varphi) = Ker(\psi)$. ومنه تكون المتتالية (*) تامة.

(2) $\Leftarrow$ (1). لنفرض أن متتالية الزمر والتشاكلات الزمرية (*) تامة. عندئذ يكون التشاكل φ متبايناً، ويكون $Im(\varphi) = Ker(\psi)$. لنبرهن الآن على أن الثنائية (L, j) هي نواة مرافقة للمورفيزمين $u, 0_{B4}$.

- أياً كان $X \in ob(\mathfrak{I})$ لنأخذ المورفيزم $\lambda: B \rightarrow X$ للفئة $\mathfrak{I}$ الذي يحقق $\lambda \cdot u = \lambda \cdot 0_{B4}$ فنجد أن $\psi(\lambda) = \lambda \cdot u = \lambda \cdot 0_{B4} = 0_{X4}$ ومنه يكون $\lambda \in Ker(\psi) = Im(\varphi)$ وبالتالي يوجد $g \in \mathfrak{I}(L, X)$ بحيث $\lambda = \varphi(g)$ ، ومنه يكون $\lambda = g \cdot j$ وإن المورفيزم g وحيد؛ لأن التشاكل φ متباين.

- ليكن $w: B \rightarrow X$ مورفيزماً للفئة $\mathfrak{I}$ لأجله يوجد المورفيزم $g \in \mathfrak{I}(L, X)$ الذي يحقق $w = g \cdot j$ عندئذ يكون $w \in Im(\varphi) = Ker(\psi)$ ومنه $\psi(w) = 0_{X4}$ أي إن $w \cdot u = 0_{X4}$ وبما أن $w \cdot 0_{B4} = 0_{X4}$ نجد أن $w \cdot u = w \cdot 0_{B4}$. مما سبق نجد أن الثنائية (L, j) هي نواة مرافقة للمورفيزم u .

مبرهنة ٧-٣-٣.

لتكن $\mathcal{C}$ فئة جمعية، وليكن $u: A \rightarrow B$ مورفيزماً للفئة $\mathcal{C}$. إن النوى المرافقة للمورفيزم u (في حال وجودها) تشكل صف تكافؤ نرمز له $Coker(u)$.
البرهان.

نفرض أن (C, w) و (K, v) نواتان مرافقتان للمورفيزم u ، عندئذ فإن:

$$w: B \rightarrow C, v: B \rightarrow K$$

وحسب التمهيدية (٤-٦-٤) فإن كلا من v, w إيزومورفيزم، وحسب المصطلحات المستخدمة في الفقرة (٣-١) فإن $v, w \in E_B$. أيضاً حسب المبرهنة (١-٦-٤) فإنه يوجد إيزومورفيزم وحيد $v_1: C \rightarrow K$ لأجله يكون المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{v_1} & K \\ w \swarrow & & \nearrow v \\ & B & \end{array}$$

تبديلي، أي إن $v_1 \cdot w = v$ ومنه يكون $v \leq w$ حيث $(\leq)$ العلاقة المعرفة على الصف E_B في الفقرة (٣-١). ولما كان v_1 إيزومورفيزم فإنه يوجد $u_1: K \rightarrow C$ يحقق $u_1 \cdot v_1 = I_K$ و $u_1 \cdot w = I_C$ وإن:

$$w = I_C \cdot w = (u_1 \cdot v_1) \cdot w = u_1 \cdot (v_1 \cdot w) = u_1 \cdot v$$

ومنه يكون $v \leq w$. وحسب المبرهنة (٩-٣-١)، فإن $v \rho w$ حيث ρ هي علاقة التكافؤ المعرفة على E_B . مما سبق نجد أن المورفيزمين v, w متكافئان؛ وبالتالي فهما ينتميان إلى صف تكافؤ واحد. وهكذا نجد أن جميع النوى المرافقة للمورفيزم u سوف تنتمي إلى هذا الصف الذي يسمى صف تكافؤ النوى المرافقة للمورفيزم u ، وسنرمز له $Coker(u)$ وهو يشكل شيء الخارج للشيء B .

مبرهنة ٧-٣-٤.

لتكن $\mathcal{C}$ فئة جمعية، وليكن $u: A \rightarrow B$ مورفيزماً و $v: C \rightarrow B$ إيزومورفيزماً للفئة $\mathcal{C}$. الشروط الآتية متكافئة:

$$j = Coker(u) - ١$$

$$j = \text{Coker}(u \cdot v) - 2$$

البرهان.

(1) $\Leftrightarrow$ (2). لنفرض أن الثنائية (L, j) هي نواة مرافقة للمورفيزم u ولنبرهن على أن

الثنائية (L, j) هي نواة للمورفيزم $u \cdot v$.

- ليكن $\lambda: A \rightarrow X$ مورفيزماً للفئة $\mathfrak{S}$ يحقق $\lambda \cdot (u \cdot v) = \lambda \cdot 0_{AC}$ فنجد أن

$$\lambda \cdot u = \lambda \cdot 0_{AB} \quad \text{ولما كان المورفيزم } v \text{ إبيومورفيزماً نجد أن } \lambda \cdot (u \cdot v) = 0_{AB} \cdot v = 0_{AC}$$

ولما كانت الثنائية (L, j) نواة مرافقة للمورفيزم u ، فإنه يوجد مورفيزم وحيد $g: L \rightarrow X$

يحقق $g \cdot j = \lambda$.

$$\begin{array}{ccccc} & L & & L & \\ & \uparrow & & \uparrow & \\ g \swarrow & A & \xleftarrow{j} & A & \xleftarrow{j} C \\ & \uparrow & & \uparrow & \\ & B & \xleftarrow{0_{AB}} & B & \end{array}$$

- ليكن $\mu: A \rightarrow X$ مورفيزماً للفئة $\mathfrak{S}$ لأجله يوجد $g: L \rightarrow X$ يحقق $g \cdot j = \mu$ ، عندئذ:

$$\mu \cdot u = \mu \cdot 0_{AB} \quad \text{ومنه يكون } (\mu \cdot u) \cdot v = (\mu \cdot 0_{AB}) \cdot v \quad \text{أي إن:}$$

$$\mu \cdot (u \cdot v) = \mu \cdot (0_{AB} \cdot v)$$

وهذا يبين أن الثنائية (L, j) هي نواة مرافقة للمورفيزم $u \cdot v$.

(2) $\Leftrightarrow$ (1). لنفرض أن الثنائية (L, j) هي نواة مرافقة للمورفيزم $u \cdot v$.

- ليكن $\lambda: A \rightarrow X$ مورفيزماً للفئة $\mathfrak{S}$ حيث $X \in \text{ob}(\mathfrak{S})$ ، يحقق $\lambda \cdot u = \lambda \cdot 0_{AB} = 0_{XB}$ ، يحقق

عندئذ يكون $\lambda \cdot (u \cdot v) = \lambda \cdot (0_{BX} \cdot v) = \lambda \cdot 0_{AC} = 0_{XC}$ ، ولكون (L, j) هي نواة مرافقة

للمورفيزم $u \cdot v$ فإنه يوجد مورفيزم وحيد $g: L \rightarrow X$ يحقق $g \cdot j = \lambda$.

ليكن $\theta: A \rightarrow X$ مورفيزماً للفئة $\mathfrak{S}$ لأجله يوجد $g: L \rightarrow X$ يحقق $g \cdot j = \theta$. عندئذ

حسب الفرض يكون $\theta \cdot (u \cdot v) = \theta \cdot 0_{AB}$ ، ومنه فإن:

$$(\theta \cdot u) \cdot v = \theta \cdot (0_{AB} \cdot v) = (\theta \cdot 0_{AB}) \cdot v$$

ولكون المورفيزم v مونومورفيزماً ينتج أن $\theta \cdot u = \theta \cdot 0_{AB} = 0_{XB}$ ، مما سبق نجد أن

الثنائية (L, j) هي نواة مرافقة للمورفيزم $u \cdot v$.

مبرهنة ٧-٣-٥.

لتكن $\mathcal{C}$ فئة جمعية، وليكن $i: A \rightarrow C$ مورفيزماً للفئة $\mathcal{C}$. لنفرض أنه:

١ - توجد نواة مرافقة للمورفيزم i .

٢ - يوجد مورفيزم $p: C \rightarrow A$ يحقق $p \cdot i = I_A$.

عندئذ يكون A حداً مباشراً في C .

البرهان.

لنفرض أن الشرطين (١) و (٢) محققان، ولنفرض أيضاً أن الثنائية (B, j) نواة مرافقة للمورفيزم i . يكفي لإثبات أن A حد مباشر في C إيجاد مورفيزم $q: B \rightarrow C$ يحقق مع المورفيزم p الشروط الواردة في المبرهنة (٧-١-٧).
لنأخذ المورفيزم $p: C \rightarrow A$ والذي يحقق:

$$(I_C - i \cdot p) \cdot i = i - i \cdot (p \cdot i) = i - i \cdot I_A = i - i = 0_{CA} = (I_C - i \cdot p) \cdot 0_{CA}$$

$$\begin{array}{ccccc} & & B & & \\ & \nearrow q & \uparrow & \nwarrow j & \\ C & \xleftarrow{I_C - i \cdot p} & C & \xleftarrow{i} & A \\ & & \uparrow 0_{CA} & & \\ & & B & & \end{array}$$

ولكون (B, j) نواة مرافقة للمورفيزم i ، فإنه يوجد مورفيزم وحيد $q: B \rightarrow C$ يحقق

$$q \cdot j = I_C - i \cdot p \quad \text{كما أن} \quad j \cdot i = j \cdot 0_{CA} = 0$$

لنبرهن على أن $j \cdot q = I_B$. لدينا:

$$(j \cdot q) \cdot j = j \cdot (q \cdot j) = j \cdot (I_C - i \cdot p) = j - (j \cdot i) \cdot p = j - 0_{BA} \cdot p = j = I_B \cdot j$$

ولكون j إبيومورفيزماً نجد أن $j \cdot q = I_B$. لنبرهن أيضاً أن $p \cdot q = 0_{AB}$ لدينا:

$$\begin{aligned} (p \cdot q) \cdot j &= p \cdot (q \cdot j) = p \cdot (I_C - i \cdot p) = p - (p \cdot i) \cdot p = \\ &= p - I_A \cdot p = 0_{AC} = 0_{AB} \cdot j \end{aligned}$$

ولكون j إبيومورفيزماً نجد أن $p \cdot q = 0_{AB}$. وحسب المبرهنة (٧-١-٧) نجد أن C

مع المورفيزمات p, q يشكلون مجموعاً للأسرة (A, B) وحسب التعريف نجد أن A حد مباشر في C .

مبرهنة ٧-٣-٦.

لتكن $\mathcal{C}$ فئة جمعية، وليكن $u: A \rightarrow B$ مورفيزماً للفئة $\mathcal{C}$. الشروط الآتية متكافئة:

١ - المورفيزم u إبيومورفيزم.

٢ - $B \rightarrow 0$ هو نواة مرافقة للمورفيزم u ، أي إن $Coker(u) = 0$.

٣ - $I_B: B \rightarrow B$ هو صورة المورفيزم u ، أي إن $Im(u) = B$.

البرهان.

(1) $\Leftrightarrow$ (2). ليكن $\lambda: B \rightarrow X$ عنصراً من صف التكافؤ $Coker(u)$ ، عندئذ (λ, X)

هي نواة مرافقة للمورفيزم u ، ومنه $\lambda \cdot u = \lambda \cdot 0_{B,A} = 0_{\lambda, X}$ وأيضاً:

$$\lambda \cdot 0_{B,A} = 0_{\lambda, X} = 0_{\lambda, B} \cdot u$$

ومنه نجد أن $\lambda \cdot u = 0_{\lambda, B} \cdot u$ ، ولكون u إبيومورفيزماً نجد أن $\lambda = 0_{\lambda, B}$ ، وبما أن $I_{\lambda, X} = 0$

فإنه حسب التمهيدية (٧-١-٣) نجد أن $X = 0$ وهذا يبين أن $B \rightarrow 0$ هو نواة مرافقة

للمورفيزم u ، أي إن $Coker(u) = 0$.

(2) $\Leftrightarrow$ (3). حسب الفرض لدينا $B \rightarrow 0$ هو نواة مرافقة للمورفيزم u ، ومنه فإن:

$$Coim(u) = Coker(B \rightarrow 0)$$

أياً كان $\mu: B \rightarrow X$ فإن $\mu \cdot 0_{B,0} = 0_{\mu, X}$ ، وإن $\mu \cdot I_B = \mu$ وبالتالي يكون:

$$I_B = Coker(B \rightarrow 0)$$

(3) $\Leftrightarrow$ (2). ليكن $j: B \rightarrow K$ مورفيزماً لأجله $0 = 0_{KK} \cdot j$ ، عندئذ بما أن:

$$I_K \cdot j = 0 = 0_{KK} \cdot j$$

وبما أن j إبيومورفيزماً نجد أن $I_K = 0_{KK}$ ، ومنه $K = 0$.

(2) $\Leftrightarrow$ (1). ليكن $\mu_1, \mu_2: B \rightarrow K$ مورفيزمين يحققان $\mu_1 \cdot u = \mu_2 \cdot u$ عندئذ يكون

$(\mu_1 - \mu_2) \cdot u = 0$ ولكون $Coker(u) = 0$ يوجد مورفيزم $\lambda: 0 \rightarrow K$ بحيث:

$$\lambda \cdot 0 = \mu_1 - \mu_2$$

ومنه $\mu_1 = \mu_2$ أي إن المورفيزم u إبيومورفيزم.

مبرهنة ٧-٣-٧.

لتكن $\mathcal{C}$ فئة جمعية، وليكن $u: A \rightarrow B$ مورفيزماً للفئة $\mathcal{C}$. إذا كان u يملك صورة

وصورة مرافقة، عندئذ يوجد مورفيزم وحيد $\bar{u} : Coim(u) \rightarrow Im(u)$ يحقق:

$$A \xrightarrow{\lambda} Coim(u) \xrightarrow{u} Im(u) \xrightarrow{\mu} B$$

حيث λ هو الإيبومورفيزم القانوني و μ المونومورفيزم القانوني.
البرهان.

لنفرض أن u يملك صورة $Im(u)$ وصورة مرافقة $Coim(u)$. ومنه فإن u يملك نواة ونواة مرافقة، لنفرض أنهما $(Ker(u), i)$ و $(Coker(u), j)$ على الترتيب، فيكون:

$$Ker(u) \xrightarrow{i} A \xrightarrow{u} B, \quad A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{j} Coker(u)$$

وإن $Im(u) = Ker(j)$, $Coim(u) = Coker(i)$

$$\begin{array}{ccc} Ker(u) & & \\ \downarrow i & & \\ A & \xrightarrow{u} & B \end{array}$$

بما أن $(Ker(u), i)$ هي نواة u فإن i مونومورفيوم، وإن $u \cdot i = 0$ ، ولكون $(Coker(i), \lambda)$ نواة مرافقة للمورفيزم $i : Ker(u) \rightarrow A$ فإنه يوجد مورفيزم وحيد $u' : Coim(u) \rightarrow B$

$$\begin{array}{ccccc} & & Coker(i) & & \\ & \swarrow u' & \uparrow \lambda & & \\ B & \xleftarrow{u} & A & \xleftarrow{i} & Ker(u) \end{array}$$

يحقق $u' \cdot \lambda = u$ ، لنبرهن على أن $j \cdot u' = 0$.

بما أن $(Coker(u), j)$ نواة مرافقة للمورفيزم u ، فإن $j \cdot u = 0$ ، ومنه فإن $j \cdot (u' \cdot \lambda) = 0$

$$\begin{array}{ccc} Coker(u) & & \\ \uparrow j & & \\ B & \xleftarrow{u} & A \end{array}$$

أي إن $(j \cdot u') \cdot \lambda = 0$ وبما أن λ إيبومورفيزم ينتج أن $j \cdot u' = 0$.

ولما كانت $(Ker(j), \mu)$ نواة للمورفيزم $j : B \rightarrow Coker(u)$ وإن $u' : Coker(i) \rightarrow B$ فإن $j \cdot u' = 0$ فإنه يوجد مورفيزم وحيد $\bar{u} : Coker(i) \rightarrow Ker(j)$ يحقق $\mu \cdot \bar{u} = u'$

$$\begin{array}{ccccc}
 \bar{u} & \nearrow & \text{Ker}(j) & & \\
 & & \downarrow \mu & & \\
 \text{Coker}(i) & \xrightarrow{u'} & B & \xrightarrow{j} & \text{Coker}(u)
 \end{array}$$

ومنه فإن $\bar{u}: \text{Coim}(u) \rightarrow \text{Im}(u)$ وهكذا نجد أنه يوجد تفريق للمورفيزم u على الشكل

$$A \xrightarrow{\lambda} \text{Coim}(u) \xrightarrow{u} \text{Im}(u) \xrightarrow{\mu} B$$

الوحدانية. لنفرض أنه يوجد $\bar{u}, \bar{u}: \text{Coim}(u) \rightarrow \text{Im}(u)$ بحيث $\mu \cdot \bar{u} \cdot \lambda = \mu \cdot \bar{u} \cdot \lambda$

وبما أن μ مونومورفيزم ينتج أن $\bar{u} \cdot \lambda = \bar{u} \cdot \lambda$ وبما أن λ إبيومورفيزم ينتج أن $\bar{u} \cdot \bar{u} = \bar{u}$



الفصل الثامن

الفئات شبه التبديلية والتبديلية

٨-١. الفئات شبه التبديلية.

تعريف.

نقول عن الفئة $\mathcal{C}$ إنها فئة شبه تبديلية إذا كانت جمعية وكل مورفيزم فيها يملك نواة ونواة مرافقة.

تمهيدية ٨-١-١.

لتكن $\mathcal{C}$ فئة جمعية. عندئذ الشروط الآتية متكافئة:

١ - الفئة $\mathcal{C}$ شبه تبديلية.

٢ - لأجل أي مورفيزم للفئة $\mathcal{C}$ توجد صورة وصورة مرافقة.

البرهان.

(1) $\Leftrightarrow$ (2). لنفرض أن الفئة $\mathcal{C}$ شبه تبديلية وليكن $u : A \rightarrow B$ مورفيزماً للفئة $\mathcal{C}$ ، عندئذ توجد $Ker(u)$ و $Coker(u)$. لنفرض أن $Ker(u) = (K, i)$ ، وأن $Coker(u) = (L, j)$ ، فنجد أن $Im(u) = Ker(j)$ وأن $Coim(u) = Coker(i)$. ولما كانت النواة $Ker(j)$ والنواة المرافقة $Coker(i)$ موجودتين، فإنه توجد $Im(u)$ و $Coim(u)$. وهذا يبين أن لكل مورفيزم u يملك صورة $Im(u)$ وصورة مرافقة $Coim(u)$.

(2) $\Leftrightarrow$ (1). ليكن $u : A \rightarrow B$ مورفيزماً للفئة $\mathcal{C}$ يملك صورة $Im(u)$ وصورة مرافقة $Coim(u)$. عندئذ حسب التعريف يكون $Im(u) = Ker(j)$ حيث $j : B \rightarrow Coker(u)$ وأن $Coim(u) = Coker(i)$ حيث $i : Ker(u) \rightarrow A$ ، وهذا يبين أن المورفيزم u يملك نواة ونواة مرافقة، ومنه تكون الفئة $\mathcal{C}$ شبه تبديلية.

لدراسة الخواص الدالية للنوى والنوى المرافقة، وأيضاً للصور والصورة المرافقة في الفئات شبه التبديلية، لابد لنا من بناء فئة جديدة وعملية البناء هذه نوردتها من خلال التمهيدية الآتية:

لتكن $\mathfrak{I}$ فئة شبه تبديلية. لنشكل فئة جديدة نرمز لها $\mathfrak{I}_1$ والتي تتألف من:

- صف الأشياء. أشياء الفئة $\mathfrak{I}_1$ هي جميع المورفيزمات الممكنة $u: A \rightarrow B$ للفئة $\mathfrak{I}$.
- صف المورفيزمات. المورفيزمات من $A \xrightarrow{u} B$ إلى $A_1 \xrightarrow{u_1} B_1$ هي جميع الأزواج المرتبة (α, β) حيث $\alpha: A \rightarrow A_1, \beta: B \rightarrow B_1$ مورفيزمات للفئة $\mathfrak{I}$ تحقق أن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & B \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\ A_1 & \xrightarrow{u_1} & B_1 \end{array}$$

تبديلي، أي إن $\beta \cdot u = u_1 \cdot \alpha$ إن $\mathfrak{I}_1$ تشكل فئة. البرهان.

لنعرف تطبيق المورفيزمات بالشكل الآتي:

$$\mu: \mathfrak{I}_1(u, u_1) \times \mathfrak{I}_1(v, v_1) \longrightarrow \mathfrak{I}_1(v \cdot u, v_1 \cdot u_1)$$

بحيث أياً كان $((\alpha, \beta), (\beta, \gamma)) \in \mathfrak{I}_1(u, u_1) \times \mathfrak{I}_1(v, v_1)$ فإن:

$$\mu((\alpha, \beta), (\beta, \gamma)) = (\alpha, \gamma)$$

أو بالشكل:

$$\begin{array}{ccccc} \mu(\alpha \downarrow & \xrightarrow{u} & B & \xrightarrow{v} & D \\ A_1 & \xrightarrow{u_1} & B_1 & \xrightarrow{v_1} & D_1 \end{array} \quad \begin{array}{c} B \\ \downarrow \beta, \beta \downarrow \\ B_1 \end{array} \quad \begin{array}{c} D \\ \downarrow \gamma \\ D_1 \end{array}$$

$$= \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{v \cdot u} & D \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \gamma \\ A_1 & \xrightarrow{v_1 \cdot u_1} & D_1 \end{array}$$

وذلك لأن $\beta \cdot u = u_1 \cdot \alpha, \gamma \cdot v = v_1 \cdot \beta$ ومنه نجد أن:

$$\gamma \cdot (v \cdot u) = (\gamma \cdot v) \cdot u = (v_1 \cdot \beta) \cdot u = v_1 \cdot (\beta \cdot u) = v_1 \cdot (u_1 \cdot \alpha) = (v_1 \cdot u_1) \cdot \alpha$$

واضح أن μ تطبيق، ويحقق جميع الشروط الواردة في تعريف الفئة. حيث إن المورفيزم

المطابق للشيء $A \xrightarrow{u} B$ هو (I_A, I_B) لأن:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & B \\ I_A \downarrow & & \downarrow \beta \\ A & \xrightarrow{u} & B \end{array}$$

يحقّق $I_B \cdot u = u \cdot I_A$. وإن عملية تركيب المورفيزمات تجميعية، وهذا يبين أن $\mathfrak{I}$ فئة.

تمهيدية ٨-١-٣.

لتكن $\mathfrak{I}$ فئة شبه تبديلية، وليكن:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & B \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\ A_1 & \xrightarrow{u_1} & B_1 \end{array}$$

مخططاً تبديلياً من أشياء ومورفيومات الفئة $\mathfrak{I}$. عندئذ يوجد مورفيزم وحيد للفئة $\mathfrak{I}$:

$$\bar{\alpha}: Ker(u) \longrightarrow Ker(u_1)$$

لأجله المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccccccc} Ker(u) & \xrightarrow{i} & A & \xrightarrow{u} & B \\ \bar{\alpha} \downarrow & & \alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\ Ker(u_1) & \xrightarrow{i_1} & A_1 & \xrightarrow{u_1} & B_1 \end{array}$$

تبديلي، أي إن $\bar{\alpha} \cdot i_1 \cdot \beta = u_1 \cdot i \cdot \alpha$. حيث i, i_1 هي المونومورفيزمات القانونية. البرهان.

لنفرض أن $(Ker(u), i)$ و $(Ker(u_1), i_1)$ نواة كل من u و u_1 على الترتيب. عندئذ لأجل أي مورفيزم $\lambda: X \rightarrow A_1$ حيث $X \in ob(\mathfrak{I})$ ويحقّق $u_1 \cdot \lambda = 0$ يوجد مورفيزم وحيد $g: X \rightarrow Ker(u_1)$ من أجله $i_1 \cdot g = \lambda$ ومنه لأجل $X = Ker(u) \in ob(\mathfrak{I})$ فإن $\alpha \cdot i: Ker(u) \rightarrow A_1$

$$u_1 \cdot (\alpha \cdot i) = (u_1 \cdot \alpha) \cdot i = (\beta \cdot u) \cdot i = \beta \cdot (u \cdot i)$$

وبما أن $u \cdot i = 0$ نجد أن $u_1 \cdot (\alpha \cdot i) = \beta \cdot 0 = 0$ ومنه يوجد مورفيزم وحيد:

$$\begin{array}{ccc} \bar{\alpha} & \nearrow & Ker(u_1) \\ & & \downarrow i_1 \\ Ker(u) & \xrightarrow{\alpha \cdot i} & A_1 \xrightarrow{u_1} B_1 \end{array}$$

$\bar{\alpha}: Ker(u) \rightarrow Ker(u_1)$ يحقّق $i_1 \cdot \bar{\alpha} = \alpha \cdot i$ وهذا يبين أن المخطط المطلوب تبديلي.

مبرهنة ٨-١-٤.

لتكن $\mathcal{T}$ فئة شبه تبديلية، ولتكن $\mathcal{T}_1$ الفئة المعرفة في التمهيدية (٨-١-٢)، عندئذ يوجد دالي مباشر $\mathcal{T}_1 \longrightarrow \mathcal{T}$ يسمى دالي النواة. البرهان.

لنعرف $\mathcal{T}_1 \longrightarrow \mathcal{T}$ من خلال تطبيقي الأشياء والمورفيزمات الآتين:
- تطبيق الأشياء. $\mathcal{T}_1 \longrightarrow \mathcal{T}$ معرف بالشكل الآتي: أيأ كان $u: A \rightarrow B \in \mathcal{T}_1$ لنضع:

$$\text{Ker}(u: A \rightarrow B) = (\text{Ker}(u) \xrightarrow{i} A) = (\text{Ker}(u), i)$$

حيث الثنائية $(\text{Ker}(u), i)$ هي نواة المورفيزم u وإن i هو المونومورفيزم القانوني، وهذه العلاقة هي تطبيق؛ لأن $\text{Ker}(u)$ هي الممثل لصف تكافؤ نوى المورفيزم u وهي شيء جزئي في A وإن $i: \text{Ker}(u) \rightarrow A$ مونومورفيزم.

- تطبيق المونومورفيزمات. $\mathcal{T}_1 \longrightarrow \mathcal{T}_1$ معرف بالشكل الآتي: أيأ كان $(\alpha, \beta): (u: A \rightarrow B) \rightarrow (u_1: A_1 \rightarrow B_1)$ مورفيزماً للفئة $\mathcal{T}_1$ لأجله المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & B \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\ A_1 & \xrightarrow{u_1} & B_1 \end{array}$$

تبديلي، أي إن $\beta \cdot u = u_1 \cdot \alpha$.

لنضع $\text{Ker}((\alpha, \beta)): \text{Ker}(u: A \rightarrow B) \longrightarrow \text{Ker}(u_1: A_1 \rightarrow B_1)$ أي إن:

$$\text{Ker}((\alpha, \beta)): (\text{Ker}(u), i) \longrightarrow (\text{Ker}(u_1), i_1)$$

والذي لأجله المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Ker}(u) & \xrightarrow{i} & A & \xrightarrow{u} & B \\ \bar{\alpha} \downarrow & & \alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\ \text{Ker}(u_1) & \xrightarrow{i_1} & A_1 & \xrightarrow{u_1} & B_1 \end{array}$$

تبديلي.

وجدنا في التمهيدية (٨-١-٣) بأنه يوجد مورفيزم وحيد $\bar{\alpha}: \text{Ker}(u) \longrightarrow \text{Ker}(u_1)$ لأجله المخطط السابق تبديلي، أي إن $\alpha \cdot i = i_1 \cdot \bar{\alpha}$.

لنضع $\text{Ker}((\alpha, \beta)) = (\bar{\alpha}, \alpha)$ فنجد أنه تطابق بسبب وحدانية المورفيزم $\bar{\alpha}$ ويحقق:

- أياً كان $u: A \rightarrow B \in \text{ob}(\mathfrak{S}_1)$ فإن $I_{u:A \rightarrow B} = (I_A, I_B)$ وإن:

$$\text{Ker}(I_{u:A \rightarrow B}) = \text{Ker}((I_A, I_B)) = (\bar{I}_A, I_A)$$

حيث $\bar{I}_A: \text{Ker}(u) \rightarrow \text{Ker}(u)$ أي إن $\bar{I}_A = I_{\text{Ker}(u)}$ ومنه فإن:

$$\text{Ker}(I_{u:A \rightarrow B}) = (\bar{I}_A, I_A) = I_{\text{Ker}(u)} = I_{(i: \text{Ker}(u) \rightarrow A)} = I_{\text{Ker}(u: A \rightarrow B)}$$

- ليكن $(\alpha, \beta), (\alpha_1, \beta_1)$ مورفيزمين للفتة $\mathfrak{S}_1$ ، لنأخذ المخطط:

$$\begin{array}{ccccc} \text{Ker}(u) & \xrightarrow{i} & A & \xrightarrow{u} & B \\ \bar{\alpha} \downarrow & & \alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\ \text{Ker}(u_1) & \xrightarrow{i_1} & A_1 & \xrightarrow{u_1} & B_1 \\ \bar{\alpha}_1 \downarrow & & \beta \downarrow & & \downarrow \beta_1 \\ \text{Ker}(u_2) & \xrightarrow{i_2} & A_2 & \xrightarrow{u_2} & B_2 \end{array}$$

بما أن $\beta \cdot u = u_1 \cdot \alpha$ ، فإنه يوجد مورفيزم وحيد $\bar{\alpha}: \text{Ker}(u) \rightarrow \text{Ker}(u_1)$ لأجله $\alpha \cdot i = i_1 \cdot \bar{\alpha}$.

أيضاً بما أن $\beta_1 \cdot u_1 = u_2 \cdot \alpha_1$ ، فإنه يوجد مورفيزم وحيد $\bar{\alpha}_1: \text{Ker}(u_1) \rightarrow \text{Ker}(u_2)$ لأجله $\alpha_1 \cdot i_1 = i_2 \cdot \bar{\alpha}_1$ ولما كان $\beta_1 \cdot \beta \cdot u = \beta_1 \cdot u_1 \cdot \alpha = u_2 \cdot \alpha_1 \cdot \alpha$ فإنه يوجد مورفيزم وحيد:

$$\bar{\alpha}_1 \cdot \bar{\alpha}: \text{Ker}(u) \rightarrow \text{Ker}(u_2)$$

يحق أن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccccc} \text{Ker}(u) & \xrightarrow{i} & A & \xrightarrow{u} & B \\ \bar{\alpha}_1 \cdot \bar{\alpha} \downarrow & & \alpha_1 \cdot \alpha \downarrow & & \downarrow \beta_1 \cdot \beta \\ \text{Ker}(u_2) & \xrightarrow{i_2} & A_2 & \xrightarrow{u_2} & B_2 \end{array}$$

تبدلي، أي إن $\alpha_1 \cdot \alpha \cdot i = i_2 \cdot \bar{\alpha}_1 \cdot \bar{\alpha}$ ومنه نجد أن:

$$i_2 \cdot \bar{\alpha}_1 \cdot \bar{\alpha} = (\alpha_1 \cdot \alpha) \cdot i = \alpha_1 \cdot (\alpha \cdot i) = \alpha_1 \cdot (i_1 \cdot \bar{\alpha}) = (\alpha_1 \cdot i_1) \cdot \bar{\alpha} = i_2 \cdot (\bar{\alpha}_1 \cdot \bar{\alpha})$$

وبما أن المورفيزم i_2 مونومورفيزم نجد أن $\bar{\alpha}_1 \cdot \bar{\alpha} = \bar{\alpha}_1 \cdot \bar{\alpha}$.

من جهة أخرى، لدينا $(\alpha_1, \beta_1) \cdot (\alpha, \beta) = (\alpha_1 \cdot \alpha, \beta_1 \cdot \beta)$ وإن:

$$\begin{aligned} \text{Ker}((\alpha_1, \beta_1) \cdot (\alpha, \beta)) &= \text{Ker}((\alpha_1 \cdot \alpha, \beta_1 \cdot \beta)) = (\bar{\alpha}_1 \cdot \bar{\alpha}, \alpha_1 \cdot \alpha) = \\ &= (\bar{\alpha}_1 \cdot \bar{\alpha}, \alpha_1 \cdot \alpha) = (\bar{\alpha}_1, \alpha_1) \cdot (\bar{\alpha}, \alpha) = \text{Ker}((\alpha_1, \beta_1) \cdot \text{Ker}((\alpha, \beta))) \end{aligned}$$

وهكذا نجد أن $\text{Ker} : \mathfrak{T}_1 \longrightarrow \mathfrak{T}_1$ دالي مباشر .

تمهيدية ٨-١-٥ .

لتكن $\mathfrak{T}$ فئة شبه تبديلية، وليكن:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & B \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\ A_1 & \xrightarrow{u_1} & B_1 \end{array}$$

مخططاً تبديلياً من أشياء ومورفيومات الفئة $\mathfrak{T}$. عندئذ يوجد مورفيزم وحيد للفئة $\mathfrak{T}$:

$$\bar{\beta} : \text{Coker}(u) \longrightarrow \text{Coker}(u_1)$$

لأجله المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{u} & B & \xrightarrow{i} & \text{Coker}(u) & & \\ \alpha \downarrow & & \beta \downarrow & & \downarrow \bar{\beta} & & \\ A_1 & \xrightarrow{u_1} & B_1 & \xrightarrow{j_1} & \text{Coker}(u_1) & & \end{array}$$

تبديلي، أي إن $\bar{\beta} \cdot j \cdot u = j_1 \cdot u_1 \cdot \alpha$ حيث j, j_1 هي الإييومورفيزمات القانونية. البرهان.

لنفرض أن $(\text{Coker}(u), j)$ و $(\text{Coker}(u_1), j_1)$ النواة المرافقة للمورفيزمين u و u_1 على الترتيب. عندئذ لأجل أي مورفيزم $\lambda : B \rightarrow X$ حيث $X \in \text{ob}(\mathfrak{T})$ ويحقق $\lambda \cdot u = 0$ يوجد مورفيزم وحيد $g : \text{Coker}(u) \rightarrow X$ لأجله $g \cdot j = \lambda$. من أجل $X = \text{Coker}(u_1) \in \text{ob}(\mathfrak{T})$ ، فإن:

$$j_1 \cdot \beta : B \rightarrow \text{Coker}(u_1)$$

$$(j_1 \cdot \beta) \cdot u = j_1 \cdot (\beta \cdot u) = j_1 \cdot (u_1 \cdot \alpha) = (u_1 \cdot j_1) \cdot \alpha = 0 \cdot \alpha = 0$$

ومنه يوجد مورفيزم وحيد $\bar{\beta} : \text{Coker}(u) \longrightarrow \text{Coker}(u_1)$:

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{Coker}(u) & & \\ & \nwarrow \bar{\beta} & \uparrow j & & \\ \text{Coker}(u_1) & \xleftarrow{j_1 \beta} & B & \xleftarrow{u} & A \end{array}$$

يحقق $\bar{\beta} \cdot j = j_1 \cdot \beta$ ، وهذا يبين أن المخطط المطلوب تبديلي .

مبرهنة ٨-١-٦.

لتكن $\mathcal{S}$ فئة شبه تبديلية، ولتكن $\mathcal{S}_1$ الفئة المعرفة في التمهيدية (٨-١-٢)، عندئذ يوجد دالي مباشر $\text{Coker} : \mathcal{S}_1 \longrightarrow \mathcal{S}_1$ يسمى دالي النواة المرافقة.

البرهان.

لنعرف $\text{Coker} : \mathcal{S}_1 \longrightarrow \mathcal{S}_1$ من خلال تطبيق الأشياء والمورفيزمات الآتئين:

- تطبيق الأشياء. $\text{Coker} : \text{ob}(\mathcal{S}_1) \longrightarrow \text{ob}(\mathcal{S}_1)$ معرف بالشكل الآتي: أيأ كان $u : A \rightarrow B \in \text{ob}(\mathcal{S}_1)$ لنضع:

$$\text{Coker}(u : A \rightarrow B) = (B \xrightarrow{j} \text{Coker}(u)) = (\text{Coker}(u), j)$$

حيث الثنائية $(\text{Coker}(u), j)$ هي نواة المرافقة للمورفيزم u وإن j هو الإيومورفيزم القانوني، وهذه العلاقة هي تطبيق لأن $\text{Coker}(u)$ هي الممثل لصف تكافؤ النوى المرافقة للمورفيزم u وهي شيء خارج A وإن $j : B \rightarrow \text{Coker}(u)$ إيومورفيزم.

- تطبيق المونومورفيزمات. $\text{Coker} : \text{Mor}(\mathcal{S}_1) \longrightarrow \text{Mor}(\mathcal{S}_1)$ معرف بالشكل الآتي: أيأ كان $(\alpha, \beta) : (u : A \rightarrow B) \rightarrow (u_1 : A_1 \rightarrow B_1)$ مورفيزماً للفئة $\mathcal{S}_1$ لأجله المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & B \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\ A_1 & \xrightarrow{u_1} & B_1 \end{array}$$

تبديلي، لنضع: $\text{Coker}((\alpha, \beta)) : \text{Coker}(u : A \rightarrow B) \longrightarrow \text{Coker}(u_1 : A_1 \rightarrow B_1)$

$$\text{Coker}((\alpha, \beta)) : (\text{Coker}(u), j) \longrightarrow (\text{Coker}(u_1), j_1)$$

والذي لأجله المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{u} & B & \xrightarrow{j} & \text{Coker}(u) \\ \alpha \downarrow & & \beta \downarrow & & \downarrow \bar{\beta} \\ A_1 & \xrightarrow{u_1} & B_1 & \xrightarrow{j_1} & \text{Coker}(u_1) \end{array}$$

تبدلياً. وجدنا في التمهيدية (٨-١-٥) بأنه يوجد مورفيزم وحيد:

$$\bar{\beta} : \text{Coker}(u) \longrightarrow \text{Coker}(u_1)$$

يحقق $\bar{\beta} \cdot j = j_1 \cdot \beta$ ولأجله المخطط السابق تبدلي.

لنضع $\text{Coker}((\alpha, \beta)) = (\beta, \bar{\beta})$. فنجد أنه تطبيق بسبب وحدانية المورفيزم $\bar{\beta}$ ويحقق:

- أياً كان $u: A \rightarrow B \in \text{ob}(\mathfrak{S}_1)$ ، فإن $I_{u:A \rightarrow B} = (I_A, I_B)$ ، وإن:

$$\text{Coker}(I_{u:A \rightarrow B}) = \text{Coker}((I_A, I_B)) = (I_B, \bar{I}_B)$$

حيث $\bar{I}_B: \text{Coker}(u) \rightarrow \text{Coker}(u)$ أي إن $\bar{I}_B = I_{\text{Coker}(u)}$ ، ومنه فإن:

$$\text{Coker}(I_{u:A \rightarrow B}) = (I_B, \bar{I}_B) = I_{\text{Coker}(u)} = I_{(j: \text{Coker}(u) \rightarrow A)} = I_{\text{Coker}(u: A \rightarrow B)}$$

- ليكن $(\alpha, \beta), (\alpha_1, \beta_1)$ مورفيزمين للفئة $\mathfrak{S}_1$ ، لنأخذ المخطط:

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{u} & B & \xrightarrow{j} & \text{Coker}(u) \\ \alpha \downarrow & & \beta \downarrow & & \downarrow \bar{\beta} \\ A_1 & \xrightarrow{u_1} & B_1 & \xrightarrow{j_1} & \text{Coker}(u_1) \\ \alpha_1 \downarrow & & \beta_1 \downarrow & & \downarrow \bar{\beta}_1 \\ A_2 & \xrightarrow{u_2} & B_2 & \xrightarrow{j_2} & \text{Coker}(u_2) \end{array}$$

بما أن $\beta \cdot u = u_1 \cdot \alpha$ فإنه حسب التمهيدية (٥-١-٨) يوجد مورفيزم وحيد

$$\bar{\beta} \cdot j = j_1 \cdot \beta \text{ لأجله } \bar{\beta}: \text{Coker}(u) \longrightarrow \text{Coker}(u_1)$$

أيضاً بما أن $\beta_1 \cdot u_1 = u_2 \cdot \alpha_1$ فإنه حسب التمهيدية (٥-١-٨) يوجد مورفيزم وحيد

$$\bar{\beta}_1: \text{Coker}(u_1) \longrightarrow \text{Coker}(u_2) \text{ لأجله } \bar{\beta}_1 \cdot j_1 = j_2 \cdot \beta_1 \text{ ولما كان:}$$

$$\begin{aligned} (\beta_1 \cdot \beta) \cdot u &= \beta_1 \cdot (\beta \cdot u) = \beta_1 \cdot (u_1 \cdot \alpha) = (\beta_1 \cdot u_1) \cdot \alpha = \\ &= (u_2 \cdot \alpha_1) \cdot \alpha = u_2 \cdot (\alpha_1 \cdot \alpha) \end{aligned}$$

فإنه يوجد مورفيزم وحيد:

$$\bar{\beta}_1 \cdot \bar{\beta}: \text{Coker}(u) \longrightarrow \text{Coker}(u_2)$$

يحقق $(\bar{\beta}_1 \cdot \bar{\beta}) \cdot j = j_2 \cdot (\beta_1 \cdot \beta)$ ومنه نجد أن:

$$\begin{aligned} (\bar{\beta}_1 \cdot \bar{\beta}) \cdot j &= j_2 \cdot (\beta_1 \cdot \beta) = (j_2 \cdot \beta_1) \cdot \beta = (\bar{\beta}_1 \cdot j_1) \cdot \beta = \bar{\beta}_1 \cdot (j_1 \cdot \beta) = \\ &= \bar{\beta}_1 \cdot (\bar{\beta} \cdot j) = (\bar{\beta}_1 \cdot \bar{\beta}) \cdot j \end{aligned}$$

وبما أن المورفيزم j إيبومورفيزم نجد أن $\bar{\beta}_1 \cdot \bar{\beta} = \bar{\beta}_1 \cdot \bar{\beta}$

من جهة أخرى، لدينا $(\alpha_1, \beta_1) \cdot (\alpha, \beta) = (\alpha_1 \cdot \alpha, \beta_1 \cdot \beta)$ وإن:

$$\text{Coker}((\alpha_1, \beta_1) \cdot (\alpha, \beta)) = \text{Coker}((\alpha_1 \cdot \alpha, \beta_1 \cdot \beta)) = (\beta_1 \cdot \beta, \bar{\beta}_1 \cdot \bar{\beta}) =$$

$$= (\beta_1 \cdot \beta, \overline{\beta_1} \cdot \overline{\beta}) = (\beta_1, \overline{\beta_1}) \cdot (\beta, \overline{\beta}) = \text{Coker}((\alpha_1, \beta_1) \cdot \text{Coker}((\alpha, \beta)))$$

وهكذا نجد أن $\text{Coker} : \mathfrak{S}_1 \longrightarrow \mathfrak{S}_1$ دالي مباشر.

تمهيدية ٨-١-٧.

لنكن $\mathfrak{S}$ فئة شبه تبديلية، وليكن:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & B \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\ A_1 & \xrightarrow{u_1} & B_1 \end{array}$$

مخططاً تبديلياً من أشياء ومورفيومات الفئة $\mathfrak{S}$. عندئذ يوجد مورفيزم وحيد للفئة $\mathfrak{S}$:

$$\beta' : \text{Im}(u) \longrightarrow \text{Im}(u_1)$$

لأجله المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} \text{Im}(u) & \xrightarrow{\mu} & B \\ \beta' \downarrow & & \downarrow \beta \\ \text{Im}(u_1) & \xrightarrow{\mu_1} & B_1 \end{array}$$

تبديلي، أي إن $\beta \cdot \mu = \mu_1 \cdot \beta'$ حيث μ, μ_1 هي المونومورفيزمات القانونية.

البرهان.

لنفرض أن $(\text{Coker}(u_1), j_1)$ النواة المرافقة للمورفيزم u_1 ، حيث $j_1 : B_1 \rightarrow \text{Coker}(u_1)$

الإيبومورفيزم القانوني، ولنفرض أن $(\text{Ker}(j_1), \mu_1)$ نواة المورفيزم j_1 ، حيث:

$$\mu_1 : \text{Ker}(j_1) \rightarrow B_1$$

وجدنا حسب التمهيدية (٨-١-٥) أنه يوجد مورفيزم وحيد:

$$\bar{\beta} : \text{Coker}(u) \longrightarrow \text{Coker}(u_1)$$

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{j} & \text{Coker}(u) \\ \beta \downarrow & & \downarrow \bar{\beta} \\ B_1 & \xrightarrow{j_1} & \text{Coker}(u_1) \end{array}$$

تبديلي، أي إن $\bar{\beta} \cdot j = j_1 \cdot \beta$ حيث $j : B \rightarrow \text{Coker}(u)$ الإيبومورفيزم القانوني.

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{Ker}(j) & & \\ & & \downarrow \mu & & \\ \text{Ker}(j) = \text{Im}(u) & \xrightarrow{\mu} & B & \xrightarrow{j} & \text{Coker}(j) \end{array}$$

ولما كان $\mu: Ker(j) \rightarrow B$ المونومورفيزم القانوني، فإن $j \cdot \mu = 0$.
لنأخذ المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccccc} & & Ker(j_1) = Im(u_1) & & \\ & \nearrow \beta' & \downarrow \mu_1 & & \\ Im(u) & \xrightarrow{\beta \cdot \mu} & B_1 & \xrightarrow{j_1} & Coker(u_1) \end{array}$$

ف نجد أن:

$$j_1 \cdot (\beta \cdot \mu) = (j_1 \cdot \beta) \cdot \mu = (\bar{\beta} \cdot j) \cdot \mu = \bar{\beta} \cdot (j \cdot \mu) = \bar{\beta} \cdot 0 = 0$$

وحسب تعريف النواة يوجد مورفيزم وحيد $\beta': Im(u) \rightarrow Im(u_1)$ يحقق $\beta' \cdot \mu = \mu_1 \cdot \beta$ وهذا يبين أن المخطط المطلوب تبديلياً.

مبرهنة ٨-١-٨.

لتكن $\mathfrak{I}$ فئة شبه تبديلية، ولتكن $\mathfrak{I}_1$ الفئة المعرفة في التمهيدية (٨-١-٢)، عندئذ يوجد دالي مباشر $Im: \mathfrak{I}_1 \rightarrow \mathfrak{I}$ يسمى دالي الصورة.
البرهان.

لنعرف $Im: \mathfrak{I}_1 \rightarrow \mathfrak{I}$ من خلال تطبيقي الأشياء والمورفيزمات الآتين:
- تطبيق الأشياء. $Im: ob(\mathfrak{I}_1) \rightarrow ob(\mathfrak{I})$ معرف بالشكل الآتي: أياً كان $u: A \rightarrow B \in ob(\mathfrak{I}_1)$ ، لنفرض أن (L, j) النواة المرافقة للمورفيزم u ، عندئذ يكون:

$$Ker(j) = Im(u)$$

$$\begin{array}{ccccc} L & & Ker(j) = Im(u) & & \\ j \uparrow & & \mu \downarrow & & \\ B & \xleftarrow{u} & A & & B \xrightarrow{j} L \end{array}$$

حيث j الإبيومورفيزم القانوني و μ المونومورفيزم القانوني. لنضع:

$$Im(u: A \rightarrow B) = (Im(u) \xrightarrow{\mu} B) = (Im(u), \mu)$$

واضح أن العلاقة Im هي تطبيق أشياء؛ لأن $(Ker(j), \mu)$ هي الممثل لصف تكافؤ نوى المورفيزم j وهي شيء جزئي في B .

- تطبيق المونومورفيزمات. $Im: Mor(\mathfrak{I}_1) \rightarrow Mor(\mathfrak{I})$ معرف بالشكل الآتي: أياً كان $(\alpha, \beta): (u: A \rightarrow B) \rightarrow (u_1: A_1 \rightarrow B_1)$ مورفيزم للفئة $\mathfrak{I}_1$ لأجله المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & B \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\ A_1 & \xrightarrow{u_1} & B_1 \end{array}$$

تبدلياً، لنضع: $\text{Im}((\alpha, \beta)): \text{Im}(u: A \rightarrow B) \longrightarrow \text{Im}(u_1: A_1 \rightarrow B_1)$ أي إن:

$$\text{Im}((\alpha, \beta)): (\text{Im}(u), \mu) \longrightarrow (\text{Im}(u_1), \mu_1)$$

لنفرض أن (L, j) و (L_1, j_1) النوى المرافقة للمورفيزمات u و u_1 على الترتيب وحسب التعريف يكون $\text{Ker}(j) = \text{Im}(u)$, $\text{Ker}(j_1) = \text{Im}(u_1)$. لنأخذ المخططات:

$$\begin{array}{ccc} \text{Ker}(j_1) & & \text{Ker}(j) \\ \mu_1 \downarrow & & \mu \downarrow \\ B_1 & \xrightarrow{j_1} & L_1 \quad B \xrightarrow{j} L \end{array}$$

حيث μ و μ_1 المونومورفيزمات القانونية. وجدنا حسب التمهيدية (٧-١-٨) أنه يوجد مورفيزم وحيد $\beta': \text{Im}(u) \longrightarrow \text{Im}(u_1)$ لأجله المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} \text{Im}(u) & \xrightarrow{\mu} & B \\ \beta' \downarrow & & \downarrow \beta \\ \text{Im}(u_1) & \xrightarrow{\mu_1} & B_1 \end{array}$$

تبدلياً، أي إن $\beta \cdot \mu = \mu_1 \cdot \beta'$. لنضع $\text{Im}((\alpha, \beta)) = (\beta', \beta)$. فنجد أن Im تطبيق بسبب وحدانية المورفيزم β' الذي لأجله المخطط الأخير تبدلي. إن Im يحقق:

- أياً كان $u: A \rightarrow B \in \text{ob}(\mathfrak{T}_1)$ ، فإن $I_{u: A \rightarrow B} = (I_A, I_B)$ ، وإن:

$$\text{Im}(I_{u: A \rightarrow B}) = \text{Im}((I_A, I_B)) = (I'_A, I'_B)$$

حيث $I'_B: \text{Im}(u) \rightarrow \text{Im}(u)$ ، أي إن $I'_B = I_{\text{Im}(u)}$ ، ومنه نجد أن:

$$\text{Im}(I_{u: A \rightarrow B}) = (I'_A, I'_B) = I_{\text{Im}(u)} = I_{(\mu: \text{Im}(u) \rightarrow B)} = I_{\text{Im}(u)}$$

- ليكن (α, β) ، (α_1, β_1) مورفيزمين للفتة $\mathfrak{T}_1$ ، لنأخذ المخطط:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & B \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\ A_1 & \xrightarrow{u_1} & B_1 \\ \alpha_1 \downarrow & & \downarrow \beta_1 \\ A_2 & \xrightarrow{u_2} & B_2 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \text{Im}(u) & \xrightarrow{\mu} & B \\ \beta' \downarrow & & \downarrow \beta \\ \text{Im}(u_1) & \xrightarrow{\mu_1} & B_1 \\ \beta'_1 \downarrow & & \downarrow \beta_1 \\ \text{Im}(u_2) & \xrightarrow{\mu_2} & B_2 \end{array}$$

بما أن $\beta \cdot u = u_1 \cdot \alpha$ فإنه حسب التمهيدية (٧-١-٨) يوجد مورفيزم وحيد

$$\overline{\beta'} : Im(u) \longrightarrow Im(u_1)$$

يحقق $\beta \cdot \mu = \mu_1 \cdot \beta'$ ، حيث μ, μ_1 المونومورفيزمات القانونية.

أيضاً بما أن $\beta_1 \cdot u_1 = u_2 \cdot \alpha_1$ فإنه حسب التمهيدية (٨-١-٧) يوجد مورفيزم وحيد

$$\overline{\beta'} : Im(u_1) \longrightarrow Im(u_2)$$

حيث $\beta_1 \cdot \mu_1 = \mu_2 \cdot \beta'_1$ ، حيث μ_2 المونومورفيزم القانوني.

ولما كان:

$$\begin{aligned} (\beta_1 \cdot \beta) \cdot u &= \beta_1 \cdot (\beta \cdot u) = \beta_1 \cdot (u_1 \cdot \alpha) = (\beta_1 \cdot u_1) \cdot \alpha = \\ &= (u_2 \cdot \alpha_1) \cdot \alpha = u_2 \cdot (\alpha_1 \cdot \alpha) \end{aligned}$$

فإنه يوجد مورفيزم وحيد $(\beta \cdot \beta_1)' : Im(u) \longrightarrow Im(u_2)$ يحقق:

$$(\beta_1 \cdot \beta) \cdot \mu = \mu_2 \cdot (\beta \cdot \beta_1)'$$

ومنه نجد أن:

$$\begin{aligned} \mu_2 \cdot (\beta \cdot \beta_1)' &= (\beta_1 \cdot \beta) \cdot \mu = \beta_1 \cdot (\beta \cdot \mu) = \beta_1 \cdot (\mu_1 \cdot \beta') = \\ &= (\beta_1 \cdot \mu_1) \cdot \beta' = (\mu_2 \cdot \beta'_1) \cdot \beta' = \mu_2 \cdot (\beta'_1 \cdot \beta') \end{aligned}$$

ولما كان المورفيزم μ_2 مونومورفيزم، نجد أن $(\beta \cdot \beta_1)' = \beta'_1 \cdot \beta'$

من جهة أخرى، إن $(\alpha_1 \cdot \beta_1) \cdot (\alpha, \beta) = (\alpha_1 \cdot \alpha, \beta_1 \cdot \beta)$ ، ومنه نجد أن:

$$\begin{aligned} Im((\alpha_1 \cdot \beta_1) \cdot (\alpha, \beta)) &= Im((\alpha_1 \cdot \alpha, \beta_1 \cdot \beta)) = ((\beta_1 \cdot \beta)', \beta_1 \cdot \beta) = \\ &= (\beta'_1 \cdot \beta', \beta_1 \cdot \beta) = (\beta'_1, \beta_1) \cdot (\beta', \beta) = Im((\alpha_1, \beta_1) \cdot Im((\alpha, \beta))) \end{aligned}$$

وهكذا نجد أن $Im : \mathfrak{I}_1 \longrightarrow \mathfrak{I}_1$ دالي مباشر .

تمهيدية ٨-١-٩.

لتكن $\mathfrak{I}$ فئة شبه تبديلية، وليكن:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & B \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\ A_1 & \xrightarrow{u_1} & B_1 \end{array}$$

مخططاً تبديلياً من أشياء ومورفيومات الفئة $\mathfrak{I}$. عندئذ يوجد مورفيزم وحيد للفئة $\mathfrak{I}$:

$$\alpha' : Coim(u) \longrightarrow Coim(u_1)$$

لأجله المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\lambda} & \text{Coim}(u) \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \alpha' \\ A_1 & \xrightarrow{\lambda_1} & \text{Coim}(u_1) \end{array}$$

تبدلياً، أي إن $\lambda_1 \cdot \alpha = \alpha' \cdot \lambda$ حيث λ, λ_1 هي الإبيومورفيزمات القانونية.
البرهان.

لنفرض أن $(Ker(u), i), (Ker(u_1), i_1)$ نواتي المورفيزمين u, u_1 على الترتيب.

$$\begin{array}{ccc} Ker(u) & & Ker(u_1) \\ i \downarrow & & i_1 \downarrow \\ A & \xrightarrow{u} & B \\ & & A_1 \xrightarrow{u_1} B_1 \end{array}$$

حيث i, i_1 هي المونومورفيزمات القانونية، كما أن $u \cdot i = 0, u_1 \cdot i_1 = 0$ بما أن $(Ker(u_1), i_1)$ هي نواة للمورفيزم u_1 فإنه لأجل المورفيزم $\alpha \cdot i : Ker(u) \rightarrow A_1$ والذي لأجله:

$$u_1 \cdot (\alpha \cdot i) = (u_1 \cdot \alpha) \cdot i = (\beta \cdot u) \cdot i = \beta \cdot (u \cdot i) = \beta \cdot 0 = 0$$

$$\begin{array}{ccc} & \nearrow \alpha_0 & Ker(u_1) \\ & & \downarrow i_1 \\ Ker(u) & \xrightarrow{\alpha} & A_1 \xrightarrow{u_1} B_1 \end{array}$$

يوجد مورفيزم وحيد $\alpha_0 : Ker(u) \rightarrow Ker(u_1)$ لأجله $i_1 \cdot \alpha_0 = \alpha \cdot i$ لنفرض أن $(Coker(i), \lambda)$ النواة المرافقة للمورفيزم $i : Ker(u) \rightarrow A$ وإن $(Coker(i_1), \lambda_1)$ النواة المرافقة للمورفيزم $i_1 : Ker(u_1) \rightarrow A_1$

$$\begin{array}{ccc} Coker(i) & & Coker(i_1) \\ \lambda \uparrow & & \lambda_1 \uparrow \\ A & \xleftarrow{i} & Ker(u) \\ & & A_1 \xleftarrow{i_1} Ker(u_1) \end{array}$$

حيث λ, λ_1 الإبيومورفيزمات القانونية، عندئذ يكون $\lambda \cdot i = 0, \lambda_1 \cdot i_1 = 0$ وحسب التعريف يكون $Coim(u) = Coker(i), Coim(u_1) = Coker(i_1)$ وبما أن $(Coker(i), \lambda)$ هي النواة المرافقة للمورفيزم $i : Ker(u) \rightarrow A$ فإنه لأجل المورفيزم $\lambda_1 \cdot \alpha : A \rightarrow Coker(i_1)$ والذي يحقق:

$$(\lambda_1 \cdot \alpha) \cdot i = \lambda_1 \cdot (\alpha \cdot i) = \lambda_1 \cdot (i_1 \cdot \alpha_0) = (\lambda_1 \cdot i_1) \cdot \alpha_0 = 0 \cdot \alpha_0 = 0$$

$$\begin{array}{ccccc}
 & \alpha' & & Coker(i) & \\
 & \swarrow & & \uparrow \lambda & \\
 Coker(i_1) & \xleftarrow{\lambda_1 \alpha} & A & \xleftarrow{i} & Ker(u)
 \end{array}$$

يوجد مورفيزم وحيد $\alpha' : Coker(i) \rightarrow Coker(i_1)$ يحقق $\alpha' \cdot \lambda = \lambda_1 \cdot \alpha$ أي إن:

$$\alpha' : Coim(u_1) \rightarrow Coim(u)$$

ويحقق $\alpha' \cdot \lambda = \lambda_1 \cdot \alpha$ ، وهذا يبين أن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{\lambda} & Coim(u) \\
 \alpha \downarrow & & \downarrow \alpha' \\
 A_1 & \xrightarrow{\lambda_1} & Coim(u_1)
 \end{array}$$

تبدلي، حيث λ, λ_1 هي الإبيومورفيزمات القانونية.

مبرهنة ٨-١-١٠.

لتكن $\mathcal{T}$ فئة شبه تبدلية، ولتكن $\mathcal{T}_1$ الفئة المعرفة في التمهيدية (٨-١-٢)، عندئذ يوجد دالي مباشر $Coim : \mathcal{T}_1 \longrightarrow \mathcal{T}$ يسمى الدالي $Coim$ أو دالي الصورة المرافقة. البرهان.

لنعرف $Coim : \mathcal{T}_1 \longrightarrow \mathcal{T}$ من خلال تطبيقي الأشياء والمورفيزمات الآتين:

- تطبيق الأشياء. $Coim : \mathcal{T}_1 \longrightarrow \mathcal{T}$ معرف بالشكل الآتي:

أيضاً كان $u : A \rightarrow B \in ob(\mathcal{T}_1)$ ، لنفرض أن الثنائية $(Ker(u), i)$ نواة المورفيزم u حيث $i : Ker(u) \rightarrow A$ المونومورفيزم القانوني، ولنفرض أن $(Coker(i), \lambda)$ النواة المرافقة للمورفيزم i حيث λ الإبيومورفيزم القانوني. عندئذ حسب التعريف يكون:

$$Coim(u) = Coker(i)$$

$$\begin{array}{ccccc}
 Ker(u) & & Coker(i) & & \\
 i \downarrow & & \lambda \uparrow & & \\
 A & \xrightarrow{u} & B & & A \xleftarrow{i} Ker(u)
 \end{array}$$

لنضع:

$$Coim(u : A \rightarrow B) = (Coim(u), \lambda) = (A \xrightarrow{\lambda} Coim(i))$$

حيث $\lambda : A \rightarrow Coker(i)$ الإبيومورفيزم القانوني.

- تطبيق المونومورفيزمات $\text{Coim} : \text{Mor}(\mathfrak{I}_1) \longrightarrow \text{Mor}(\mathfrak{I}_1)$ معرف بالشكل الآتي: أياً كان $(\alpha, \beta) : (u : A \rightarrow B) \rightarrow (u_1 : A_1 \rightarrow B_1)$ مورفيزماً للفئة $\mathfrak{I}_1$ لأجله المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & B \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\ A_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & B_1 \end{array}$$

$$\mathbf{Coim}((\alpha, \beta)) : \mathbf{Coim}(u : A \rightarrow B) \longrightarrow \mathbf{Coim}(u_! : A_! \rightarrow B_!)$$

أأي إن $\text{Coim}((\alpha, \beta)): (\text{Coim}(u), \lambda) \longrightarrow (\text{Coim}(u_1), \lambda_1)$ لنفرض أن (K, i) و (K_1, i_1) نوى المورفيزمات u و u_1 ولناخذ المخططات الآتية:

$$\begin{array}{ccc} K & & K_1 \\ i \downarrow & & i_1 \downarrow \\ A & \xrightarrow{\iota} & B \quad A_1 \xrightarrow{\iota_1} B_1 \end{array}$$

حيث i و i_1 المونومورفيزمات القانونية. عندئذ حسب التعريف يكون:

$$\text{Coker}(i) = \text{Coim}(u), \quad \text{Coker}(i_1) = \text{Coim}(u_1)$$

$$\begin{array}{ccc} \text{Coker}(i) & & \text{Coker}(i_1) \\ \lambda \uparrow & & \lambda_1 \uparrow \\ A & \xleftarrow{i} & K \\ & & A_1 \xleftarrow{i_1} K \end{array}$$

حيث λ و λ_1 الإيغومورفيزمات القانونية.

وحسب التمهيدية (٨-١-٩)، يوجد مورفيزم وحيد $\alpha': Coim(u) \rightarrow Coim(u_1)$ لأجله المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\lambda} & \text{Coim}(u) \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \alpha' \\ A_1 & \xrightarrow{\lambda_1} & \text{Coim}(u_1) \end{array}$$

تبدیلی، أي إن $\alpha' \cdot \lambda = \lambda' \cdot \alpha$

لنضع: $\text{Coim}((\alpha, \beta)) = (\alpha, \alpha')$. فنجد أن Coim تطبيقاً بسبب وحدانية المورفيزم

α' الذي لأجله المخطط الأخير تبديلي. إن Coim يحقق:

- أياً كان $u: A \rightarrow B \in \text{ob}(\mathfrak{S}_1)$ ، فإن $I_{u:A \rightarrow B} = (I_A, I_B)$ ، وإن:

$$\text{Coim}(I_{u:A \rightarrow B}) = \text{Coim}((I_A, I_B)) = (I_A, I'_A)$$

حيث $I'_A: \text{Coim}(u) \rightarrow \text{Coim}(u)$ ، أي إن $I'_A = I_{\text{Coim}(u)}$ ، ومنه نجد أن:

$$\text{Coim}(I_{u:A \rightarrow B}) = (I_A, I'_A) = I_{\text{Coim}(u)} = I_{(\lambda: A \rightarrow \text{Coim}(u))} = I_{\text{Coim}(u)}$$

- ليكن $(\alpha, \beta), (\alpha_1, \beta_1)$ مورفيزمين للفئة $\mathfrak{S}_1$ ، لنأخذ المخطط:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & B \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\ A_1 & \xrightarrow{u_1} & B_1 \\ \alpha_1 \downarrow & & \downarrow \beta_1 \\ A_2 & \xrightarrow{u_2} & B_2 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\lambda} & \text{Coim}(u) \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \alpha' \\ A_1 & \xrightarrow{\lambda_1} & \text{Coim}(u_1) \\ \alpha_1 \downarrow & & \downarrow \alpha'_1 \\ A_2 & \xrightarrow{\lambda_2} & \text{Coim}(u_2) \end{array}$$

بما أن $\beta \cdot u = u_1 \cdot \alpha$ فإنه حسب التمهيدية (٨-١-٩) يوجد مورفيزم وحيد:

$$\alpha': \text{Coim}(u) \rightarrow \text{Coim}(u_1)$$

يحقق $\alpha' \cdot \lambda = \lambda_1 \cdot \alpha$ ، حيث $\lambda: A \rightarrow \text{Coim}(u)$ و $\lambda_1: A_1 \rightarrow \text{Coim}(u_1)$

الإيبومورفيزمات القانونية.

أيضاً بما أن $\beta_1 \cdot u_1 = u_2 \cdot \alpha_1$ فإنه حسب التمهيدية (٨-١-٩) يوجد مورفيزم وحيد

$$\alpha'_1: \text{Coim}(u_1) \rightarrow \text{Coim}(u_2)$$

لأجله $\alpha'_1 \cdot \lambda_1 = \lambda_2 \cdot \alpha_1$ ، حيث $\lambda_2: A_2 \rightarrow \text{Coim}(u_2)$

الإيبومورفيزم القانوني. ولما كان:

$$\begin{aligned} (\beta_1 \cdot \beta) \cdot u &= \beta_1 \cdot (\beta \cdot u) = \beta_1 \cdot (u_1 \cdot \alpha) = (\beta_1 \cdot u_1) \cdot \alpha = \\ &= (u_2 \cdot \alpha_1) \cdot \alpha = u_2 \cdot (\alpha_1 \cdot \alpha) \end{aligned}$$

فإنه يوجد مورفيزم وحيد $(\alpha_1 \cdot \alpha)': \text{Coim}(u) \rightarrow \text{Coim}(u_2)$ يحقق:

$$(\alpha_1 \cdot \alpha)' \cdot \lambda = \lambda_2 \cdot (\alpha_1 \cdot \alpha)$$

$$\begin{aligned} (\alpha_1 \cdot \alpha)' \cdot \lambda &= \lambda_2 \cdot (\alpha_1 \cdot \alpha) = (\lambda_2 \cdot \alpha_1) \cdot \alpha = (\alpha'_1 \cdot \lambda_1) \cdot \alpha = \\ &= \alpha'_1 \cdot (\lambda_1 \cdot \alpha) = \alpha'_1 \cdot (\alpha' \cdot \lambda) = (\alpha'_1 \cdot \alpha') \cdot \lambda \end{aligned}$$

ولما كان المورفيزم λ إيبومورفيزماً نجد أن $(\alpha_1 \cdot \alpha)' = \alpha'_1 \cdot \alpha'$

من جهة أخرى، إن $(\alpha_1, \beta_1) \cdot (\alpha, \beta) = (\alpha_1 \cdot \alpha, \beta_1 \cdot \beta)$ ، ومنه نجد أن:

$$\begin{aligned}\text{Coim}((\alpha_1, \beta_1) \cdot (\alpha, \beta)) &= \text{Coim}((\alpha_1 \cdot \alpha, \beta_1 \cdot \beta)) = (\alpha_1 \cdot \alpha, (\alpha_1 \cdot \alpha)') = \\ &= (\alpha_1 \cdot \alpha, \alpha'_1 \cdot \alpha') = (\alpha_1, \alpha'_1) \cdot (\alpha, \alpha') = \text{Coim}((\alpha_1, \beta_1) \cdot \text{Coim}((\alpha, \beta)))\end{aligned}$$

وهكذا نجد أن $\text{Coim} : \mathfrak{S}_1 \longrightarrow \mathfrak{S}_1$ دالي مباشر .

تمهيدية ٨-١-١١ .

لتكن $\mathfrak{S}$ فئة شبه تبديلية، وليكن:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & B \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\ A_1 & \xrightarrow{u_1} & B_1 \end{array}$$

مخططاً تبديلياً من أشياء ومورفيزمات الفئة $\mathfrak{S}$. عندئذ يوجد مورفيزمان وحيدان:
 $\alpha' : \text{Coim}(u) \rightarrow \text{Coim}(u_1)$, $\beta' : \text{Im}(u) \rightarrow \text{Im}(u_1)$ لأجلهما المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} \text{Coim}(u) & \xrightarrow{\bar{u}} & \text{Im}(u) \\ \alpha' \downarrow & & \downarrow \beta' \\ \text{Coim}(u_1) & \xrightarrow{\bar{u}_1} & \text{Im}(u_1) \end{array}$$

تبديلي، أي إن $\beta' \cdot \bar{u} = \bar{u}_1 \cdot \alpha'$.
 البرهان.

بما أن $\beta \cdot u = u_1 \cdot \alpha$ فإنه حسب التمهيدية (٨-١-٩) يوجد مورفيزم وحيد:

$$\alpha' : \text{Coim}(u) \rightarrow \text{Coim}(u_1)$$

يحقق $\alpha' \cdot \lambda = \lambda_1 \cdot \alpha$ حيث λ, λ_1 الإيبومورفيزمات القانونية. وأيضاً حسب التمهيدية (٨-١-٧) يوجد مورفيزم وحيد $\beta' : \text{Im}(u) \rightarrow \text{Im}(u_1)$ يحقق $\beta' \cdot \mu = \mu_1 \cdot \beta$ حيث μ, μ_1 المونومورفيزمات القانونية. ولكون كل من u و u_1 يملك تفریقاً على الشكل $u = \mu \cdot \bar{u} \cdot \lambda$ و $u_1 = \mu_1 \cdot \bar{u}_1 \cdot \lambda_1$ على الترتيب نجد أن:

$$\beta \cdot u = \beta \cdot (\mu \cdot \bar{u} \cdot \lambda) = (\beta \cdot \mu) \cdot (\bar{u} \cdot \lambda) = \mu_1 \cdot \beta' \cdot \bar{u} \cdot \lambda$$

ولما كان $\beta \cdot u = u_1 \cdot \alpha$ نجد أن $\mu_1 \cdot \beta' \cdot \bar{u} \cdot \lambda = \mu_1 \cdot \bar{u}_1 \cdot \lambda_1 \cdot \alpha = (\mu_1 \cdot \bar{u}_1) \cdot (\lambda_1 \cdot \alpha) = (\mu_1 \cdot \bar{u}_1) \cdot (\alpha' \cdot \lambda) = \mu_1 \cdot \bar{u}_1 \cdot \alpha' \cdot \lambda$
 ولما كان المورفيزم μ_1 وأيضاً لما كان المورفيزم λ إيبومورفيزماً نجد أن $\beta' \cdot \bar{u} \cdot \lambda = \bar{u}_1 \cdot \alpha' \cdot \lambda$
 نجد أن $\beta' \cdot \bar{u} = \bar{u}_1 \cdot \alpha'$

سوف نقوم الآن ببناء فئة جديدة وذلك من خلال التمهيدية الآتية:

تمهيدية ٨-١-١٢.

لتكن $\mathcal{I}$ فئة شبه تبديلية. لنشكل فئة جديدة نرسم لها $\mathcal{I}_2$ والتي تتألف من:

- صف الأشياء. أشياء الفئة $\mathcal{I}_2$ هي جميع المتتاليات الممكنة:

$$A_1 \xrightarrow{u_1} A_2 \xrightarrow{u_2} A_3 \xrightarrow{u_3} A_4$$

من أشياء ومورفيزمات الفئة $\mathcal{I}$.

- صف المورفيزمات. المورفيزم من المتتالية $A_1 \xrightarrow{u_1} A_2 \xrightarrow{u_2} A_3 \xrightarrow{u_3} A_4$ إلى

المتتالية $B_1 \xrightarrow{v_1} B_2 \xrightarrow{v_2} B_3 \xrightarrow{v_3} B_4$ هو الرباعية $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ حيث

$\alpha_i : A_i \rightarrow B_i$ ، $i = 1, 2, 3, 4$ مورفيزمات للفئة $\mathcal{I}$ والتي تحقق أن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccccccc} A_1 & \xrightarrow{u_1} & A_2 & \xrightarrow{u_2} & A_3 & \xrightarrow{u_3} & A_4 \\ \alpha_1 \downarrow & & \alpha_2 \downarrow & & \alpha_3 \downarrow & & \downarrow \alpha_4 \\ B_1 & \xrightarrow{v_1} & B_2 & \xrightarrow{v_2} & B_3 & \xrightarrow{v_3} & B_4 \end{array}$$

تبديلي، أي إن $\alpha_2 \cdot u_1 = v_1 \cdot \alpha_1$ ، $\alpha_3 \cdot u_2 = v_2 \cdot \alpha_2$ ، $\alpha_4 \cdot u_3 = v_3 \cdot \alpha_3$ وإن:

$$\alpha_4 \cdot u_3 \cdot u_2 \cdot u_1 = v_3 \cdot v_2 \cdot v_1 \cdot \alpha_1$$

البرهان.

لنعرف تطبيق المورفيزمات بالشكل الآتي:

$$\begin{array}{ccccccccccc} A_1 & \xrightarrow{u_1} & A_2 & \xrightarrow{u_2} & A_3 & \xrightarrow{u_3} & A_4 & \xrightarrow{u_4} & A_5 & \xrightarrow{u_5} & A_6 & \xrightarrow{u_6} & A_7 \\ \mu(\downarrow \alpha_1 & \alpha_2 \downarrow & \alpha_3 \downarrow & \alpha_4 \downarrow & \downarrow \alpha_4 & \alpha_5 \downarrow & \alpha_6 \downarrow & \alpha_7 \downarrow) = \\ B_1 & \xrightarrow{v_1} & B_2 & \xrightarrow{v_2} & B_3 & \xrightarrow{v_3} & B_4 & \xrightarrow{v_4} & B_5 & \xrightarrow{v_5} & B_6 & \xrightarrow{v_6} & B_7 \end{array}$$

$$= \begin{array}{ccccccc} A_1 & \xrightarrow{u_3 \cdot u_1} & A_3 & \xrightarrow{u_5 \cdot u_3} & A_5 & \xrightarrow{u_6 \cdot u_5} & A_7 \\ \alpha_1 \downarrow & & \alpha_3 \downarrow & & \alpha_5 \downarrow & & \downarrow \alpha_7 \\ B_1 & \xrightarrow{v_3 \cdot v_1} & B_3 & \xrightarrow{v_5 \cdot v_3} & B_5 & \xrightarrow{v_6 \cdot v_5} & B_7 \end{array}$$

والذي يحقق:

$$\alpha_7 \cdot (u_6 \cdot u_5) = (\alpha_7 \cdot u_6) \cdot u_5 = (v_6 \cdot \alpha_6) \cdot u_5 = v_6 \cdot (\alpha_6 \cdot u_5) =$$

$$= v_6 \cdot (v_5 \cdot \alpha_5) = (v_6 \cdot v_5) \cdot \alpha_5$$

$$\alpha_5 \cdot (u_4 \cdot u_3) = (\alpha_5 \cdot u_4) \cdot u_3 = (v_4 \cdot \alpha_4) \cdot u_3 = v_4 \cdot (\alpha_4 \cdot u_3) =$$

$$\begin{aligned}
&= v_4 \cdot (v_3 \cdot \alpha_3) = (v_4 \cdot v_3) \cdot \alpha_3 \\
\alpha_3 \cdot (u_2 \cdot u_1) &= (\alpha_3 \cdot u_2) \cdot u_1 = (v_2 \cdot \alpha_2) \cdot u_1 = v_2 \cdot (\alpha_2 \cdot u_1) = \\
&= v_2 \cdot (v_1 \cdot \alpha_1) = (v_2 \cdot v_1) \cdot \alpha_1
\end{aligned}$$

ومنه نجد أن:

$$\begin{aligned}
\alpha_7 \cdot (u_6 \cdot u_5) \cdot (u_4 \cdot u_3) \cdot (u_2 \cdot u_1) &= (v_6 \cdot v_5) \cdot \alpha_5 \cdot (u_4 \cdot u_3) \cdot (u_2 \cdot u_1) = \\
&= (v_6 \cdot v_5) \cdot (u_4 \cdot u_3) \cdot \alpha_3 \cdot (u_2 \cdot u_1) = (v_6 \cdot v_5) \cdot (u_4 \cdot u_3) \cdot (u_2 \cdot u_1) \cdot \alpha_1
\end{aligned}$$

واضح أن μ تطبيق ويحقق جميع الشروط الواردة في تعريف الفئة. حيث إن المورفيزم

المطابق للشيء $A_1 \xrightarrow{u_1} A_2 \xrightarrow{u_2} A_3 \xrightarrow{u_3} A_4$ هو:

$$I_{A_1 \xrightarrow{u_1} A_2 \xrightarrow{u_2} A_3 \xrightarrow{u_3} A_4} = (I_{A_1}, I_{A_2}, I_{A_3}, I_{A_4})$$

كما أن عملية تركيب المورفيزمات تجميعية، وهذا يبين أن $\mathcal{S}_2$ فئة.

لنعرف الآن دالياً مباشراً من الفئة $\mathcal{S}_1$ المعرفة في التمهيدية (٢-١-٨) إلى الفئة

$\mathcal{S}_2$ المعرفة في التمهيدية (١٢-١-٨) وذلك من خلال المبرهنة الآتية:

مبرهنة ١٣-١-٨.

لنكن $\mathcal{S}$ فئة شبه تبديلية، عندئذ يوجد دالي مباشر $F: \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$ حيث $\mathcal{S}_1$ الفئة

المعرفة في التمهيدية (٢-١-٨) و $\mathcal{S}_2$ المعرفة في التمهيدية (١٢-١-٨).

البرهان.

لنعرف $F: \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$ من خلال تطبيقي الأشياء والمورفيزمات الآتيين:

تطبيق الأشياء. ليكن $u: A \rightarrow B \in ob(\mathcal{S}_1)$ عندئذ حسب المبرهنة (٦-٣-٧) يوجد

مورفيزم وحيد:

$$\bar{u}: Coim(u) \rightarrow Im(u)$$

بحيث إن المورفيزم u يتفرق بالشكل الآتي:

$$A \xrightarrow{\lambda} Coim(u) \xrightarrow{\bar{u}} Im(u) \xrightarrow{\mu} B$$

حيث λ الإبيومورفيزم القانوني و μ المونومورفيزم القانوني. لنضع:

$$F(A \xrightarrow{u} B) = A \xrightarrow{\lambda} Coim(u) \xrightarrow{\bar{u}} Im(u) \xrightarrow{\mu} B$$

ف نجد أن F تطبيق بسبب وحدانية المورفيزم $\bar{u}$.
تطبيق المورفيزمات. ليكن (α, β) مورفيزماً للفئة $\mathcal{S}_1$. إن:

$$(\alpha, \beta) : (A \xrightarrow{u} B) \rightarrow (A_1 \xrightarrow{u_1} B_1)$$

لأجله المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & B \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\ A_1 & \xrightarrow{u_1} & B_1 \end{array}$$

تبدلياً، أي إن $\beta \cdot u = u_1 \cdot \alpha$.

عندئذ حسب التمهيدية (٨-١-٩) يوجد مورفيزم وحيد $\alpha' : Coim(u) \rightarrow Coim(u_1)$ لأجله المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\lambda} & Coim(u) \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \alpha' \\ A_1 & \xrightarrow{\lambda_1} & Coim(u_1) \end{array}$$

تبدلي، أي إن $\alpha' \cdot \lambda = \lambda_1 \cdot \alpha$ ، حيث λ, λ_1 الإيومورفيزمات القانونية.

وحسب التمهيدية (٨-١-٧) يوجد مورفيزم وحيد $\beta' : Im(u) \rightarrow Im(u_1)$ لأجله المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} Im(u) & \xrightarrow{\mu} & B \\ \beta' \downarrow & & \downarrow \beta \\ Im(u_1) & \xrightarrow{\mu_1} & B_1 \end{array}$$

تبدلي، أي إن $\beta \cdot \mu = \mu_1 \cdot \beta'$ ، حيث μ, μ_1 المونومورفيزمات القانونية.

أيضاً لأجل المورفيزمين u, u_1 يوجد مورفيزمان وحيدان:

$$\bar{u} : Coim(u) \rightarrow Im(u), \quad \bar{u}_1 : Coim(u_1) \rightarrow Im(u_1)$$

لنأخذ المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} Coim(u) & \xrightarrow{\bar{u}} & Im(u) \\ \alpha' \downarrow & & \downarrow \beta' \\ Coim(u_1) & \xrightarrow{\bar{u}_1} & Im(u_1) \end{array}$$

ولنبرهن على أنه تبدلي. إن:

$$\beta \cdot u = \beta \cdot (\mu \cdot \bar{u} \cdot \lambda) = (\beta \cdot \mu) \cdot (\bar{u} \cdot \lambda) = \mu_1 \cdot \beta' \cdot \bar{u}_1 \cdot \lambda$$

$u_1 \cdot \alpha = (\mu_1 \cdot \bar{u}_1 \cdot \lambda_1) \cdot \alpha = (\mu_1 \cdot \bar{u}_1) \cdot (\lambda_1 \cdot \alpha) = (\mu_1 \cdot \bar{u}_1) \cdot (\alpha' \cdot \lambda) = \mu_1 \cdot \bar{u}_1 \cdot \alpha' \cdot \lambda$
ولما كان $\beta \cdot u = u_1 \cdot \alpha$ نجد أن $\mu_1 \cdot \beta' \cdot \bar{u} \cdot \lambda = \mu_1 \cdot \bar{u}_1 \cdot \alpha' \cdot \lambda$ ولما كان المورفيزم μ_1
مونومورفيزماً نجد أن $\beta' \cdot \bar{u} \cdot \lambda = \bar{u}_1 \cdot \alpha' \cdot \lambda$ ، أيضاً لما كان المورفيزم λ إبيومورفيزماً
نجد أن $\beta' \cdot \bar{u} = \bar{u}_1 \cdot \alpha'$ لنضع $F((\alpha, \beta)) = (\alpha, \alpha', \beta, \beta')$ فنجد أن F تطبيق بسبب
وحدانية المورفيزمين α', β' كما أن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{\lambda} & Coim(u) & \xrightarrow{u} & Im(u) & \xrightarrow{\mu} & B \\ \alpha \downarrow & & \alpha' \downarrow & & \downarrow \beta' & & \downarrow \beta \\ A_1 & \xrightarrow{\lambda_1} & Coim(u_1) & \xrightarrow{\bar{u}_1} & Im(u_1) & \xrightarrow{\mu_1} & B_1 \end{array}$$

تبدلي، لأن $\beta \cdot \mu \cdot \bar{u} \cdot \lambda = \mu_1 \cdot \beta' \cdot \bar{u}_1 \cdot \lambda = \mu_1 \cdot \bar{u}_1 \cdot \alpha' \cdot \lambda = \mu_1 \cdot \bar{u}_1 \cdot \lambda_1 \cdot \alpha$ وأن F يحقق:

- أياً كان $u: A \rightarrow B \in ob(\mathfrak{T}_1)$ ، فإن $I_{u:A \rightarrow B} = (I_A, I_B)$ ، وأن:

$$F(I_{u:A \rightarrow B}) = F((I_A, I_B)) = (I_A, I'_A, I'_B, I_B) = I_{F(A \xrightarrow{u} B)}$$

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{\lambda} & Coim(u) & \xrightarrow{u} & Im(u) & \xrightarrow{\mu} & B \\ I_A \downarrow & & I'_A \downarrow & & \downarrow I'_B & & \downarrow I_B \\ A & \xrightarrow{\lambda} & Coim(u) & \xrightarrow{\bar{u}} & Im(u) & \xrightarrow{\mu} & B \end{array}$$

- ليكن $(\alpha, \beta), (\alpha_1, \beta_1)$ مورفيزمين للفئة $\mathfrak{T}_1$ ، لنأخذ المخطط:

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{\lambda} & Coim(u) & \xrightarrow{\bar{u}} & Im(u) & \xrightarrow{\mu} & B \\ \alpha \downarrow & & \alpha' \downarrow & & \downarrow \beta' & & \downarrow \beta \\ A_1 & \xrightarrow{\lambda_1} & Coim(u_1) & \xrightarrow{\bar{u}_1} & Im(u_1) & \xrightarrow{\mu_1} & B_1 \\ \alpha_1 \downarrow & & \alpha'_1 \downarrow & & \downarrow \beta'_1 & & \downarrow \beta_1 \\ A_2 & \xrightarrow{\lambda_2} & Coim(u_2) & \xrightarrow{\bar{u}_2} & Im(u_2) & \xrightarrow{\mu_2} & B_2 \end{array}$$

بما أن $\beta \cdot u = u_1 \cdot \alpha$ ، $\beta_1 \cdot u_1 = u_2 \cdot \alpha_1$ فإنه حسب التمهيدية (٨-١-٩) يوجد مورفيزمان وحيدان

$$\alpha': Coim(u) \rightarrow Coim(u_1), \quad \alpha'_1: Coim(u_1) \rightarrow Coim(u_2)$$

لأجلهما المخططين الآتيين:

$$\begin{array}{ccc}
A & \xrightarrow{\lambda} & Coim(u) \\
\alpha \downarrow & & \downarrow \alpha' \\
A_1 & \xrightarrow{\lambda_1} & Coim(u_1)
\end{array}
\quad
\begin{array}{ccc}
A_1 & \xrightarrow{\lambda_1} & Coim(u_1) \\
\alpha' \downarrow & & \downarrow \alpha'_1 \\
A_2 & \xrightarrow{\lambda_2} & Coim(u_2)
\end{array}$$

تبدليين، أي إن $\alpha' \cdot \lambda = \lambda_1 \cdot \alpha$ ، $\alpha'_1 \cdot \lambda_1 = \lambda_2 \cdot \alpha_1$ أيضاً حسب التمهيدية (٧-١-٨) يوجد مورفيزمين وحيدين $\beta' : Im(u) \rightarrow Im(u_1)$ ، $\beta'_1 : Im(u_1) \rightarrow Im(u_2)$ لأجلهما المخططان الآتيان:

$$\begin{array}{ccc}
Im(u) & \xrightarrow{\mu} & B \\
\beta' \downarrow & & \downarrow \beta \\
Im(u_1) & \xrightarrow{\mu_1} & B_1
\end{array}
\quad
\begin{array}{ccc}
Im(u_1) & \xrightarrow{\mu_1} & B_1 \\
\beta'_1 \downarrow & & \downarrow \beta_1 \\
Im(u_2) & \xrightarrow{\mu_2} & B_2
\end{array}$$

تبدليان، أي إن $\beta \cdot \mu = \mu_1 \cdot \beta'$ ، $\beta_1 \cdot \mu_1 = \mu_2 \cdot \beta'_1$ ولما كان:

$$\begin{aligned}
(\beta_1 \cdot \beta) \cdot u &= \beta_1 \cdot (\beta \cdot u) = \beta_1 \cdot (u_1 \cdot \alpha) = (\beta_1 \cdot u_1) \cdot \alpha = \\
&= (u_2 \cdot \alpha_1) \cdot \alpha = u_2 \cdot (\alpha_1 \cdot \alpha)
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc}
A & \xrightarrow{u} & B \\
\alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\
A_1 & \xrightarrow{u_1} & B_1 \\
\alpha_1 \downarrow & & \downarrow \beta_1 \\
A_2 & \xrightarrow{u_2} & B_2
\end{array}
\quad
\begin{array}{ccc}
A & \xrightarrow{\lambda} & Coim(u) \\
\alpha \downarrow & & \downarrow \alpha' \\
A_1 & \xrightarrow{\lambda_1} & Coim(u_1) \\
\alpha_1 \downarrow & & \downarrow \alpha'_1 \\
A_2 & \xrightarrow{\lambda_2} & Coim(u_2)
\end{array}$$

فإنه حسب التمهيدية (٩-١-٨) يوجد مورفيزم وحيد $(\alpha_1 \cdot \alpha)' : Coim(u) \rightarrow Coim(u_2)$ يحقق $(\alpha_1 \cdot \alpha)' \cdot \lambda = \lambda_2 \cdot (\alpha_1 \cdot \alpha)$ ومنه نجد أن:

$$\begin{aligned}
(\alpha_1 \cdot \alpha)' \cdot \lambda &= \lambda_2 \cdot (\alpha_1 \cdot \alpha) = (\lambda_2 \cdot \alpha_1) \cdot \alpha = (\alpha'_1 \cdot \lambda_1) \cdot \alpha = \alpha'_1 \cdot (\lambda_1 \cdot \alpha) = \\
&= \alpha'_1 \cdot (\alpha' \cdot \lambda) = (\alpha'_1 \cdot \alpha') \cdot \lambda
\end{aligned}$$

وبما أن المورفيزم λ إبيومورفيزماً نجد أن $(\alpha_1 \cdot \alpha)' = \alpha'_1 \cdot \alpha'$

$$\begin{array}{ccc}
A & \xrightarrow{u} & B \\
\alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\
A_1 & \xrightarrow{u_1} & B_1 \\
\alpha_1 \downarrow & & \downarrow \beta_1 \\
A_2 & \xrightarrow{u_2} & B_2
\end{array}
\quad
\begin{array}{ccc}
Im(u) & \xrightarrow{\mu} & B \\
\beta' \downarrow & & \downarrow \beta \\
Im(u_1) & \xrightarrow{\mu_1} & B_1 \\
\beta'_1 \downarrow & & \downarrow \beta_1 \\
Im(u_2) & \xrightarrow{\mu_2} & B_2
\end{array}$$

وحسب التمهيدية (٨-١-٧) يوجد مورفيزم وحيد $(\beta_1 \cdot \beta)': Im(u) \rightarrow Im(u_2)$ يحقق $(\beta_1 \cdot \beta) \cdot \mu = \mu_2 \cdot (\beta_1 \cdot \beta)'$ ومنه نجد أن:

$$\mu_2 \cdot (\beta_1 \cdot \beta)' = (\beta_1 \cdot \beta) \cdot \mu = \beta_1 \cdot (\beta \cdot \mu) = \beta_1 \cdot (\mu_1 \cdot \beta') = (\beta_1 \cdot \mu_1) \cdot \beta' = (\mu_2 \cdot \beta'_1) \cdot \beta' = \mu_2 \cdot (\beta'_1 \cdot \beta')$$

ولما كان المورفيزم μ_2 مونومورفيوماً نجد أن $(\beta_1 \cdot \beta)' = \beta'_1 \cdot \beta'$

من جهة أخرى، إن $(\alpha_1, \beta_1) \cdot (\alpha, \beta) = (\alpha_1 \cdot \alpha, \beta_1 \cdot \beta)$ ومنه نجد أن:

$$\begin{aligned} F((\alpha_1, \beta_1) \cdot (\alpha, \beta)) &= F((\alpha_1 \cdot \alpha, \beta_1 \cdot \beta)) = (\alpha_1 \cdot \alpha, (\alpha_1 \cdot \alpha)', (\beta_1 \cdot \beta)', \beta_1 \cdot \beta) = \\ &= (\alpha_1 \cdot \alpha, \alpha'_1 \cdot \alpha', \beta'_1 \cdot \beta', \beta_1 \cdot \beta) = (\alpha_1, \alpha'_1, \beta'_1, \beta_1) \cdot (\alpha, \alpha', \beta', \beta) = \\ &= F((\alpha_1, \beta_1)) \cdot F((\alpha, \beta)) \end{aligned}$$

وهكذا نجد أن $F: \mathfrak{S}_1 \longrightarrow \mathfrak{S}_2$ دالي مباشر.

مبرهنة ٨-١-١٤.

في الفئة شبه التبديلية يوجد الجداء الطبقي.

البرهان.

لنفرض أن $\mathfrak{S}$ فئة شبه تبديلية، ولنأخذ المخطط الآتي:

$$(*) \quad \begin{array}{ccc} & A & \\ & \downarrow \alpha & \\ B & \xrightarrow{\beta} & C \end{array}$$

من أشياء ومورفيزمات الفئة $\mathfrak{S}$. لما كانت الفئة $\mathfrak{S}$ شبه تبديلية، فإن فئة جمعية وبالتالي يوجد $A \amalg B, A \oplus B$. وحسب المبرهنة (٧-١-٨)، فإنه يوجد مورفيزم وحيد:

$$h: A \oplus B \longrightarrow A \amalg B$$

للفئة $\mathfrak{S}$ يحقق العلاقات الواردة في المبرهنة (٧-١-٨). لنفرض أن $p_A: A \amalg B \rightarrow A$ و $p_B: A \amalg B \rightarrow B$ المورفيزمات الإسقاطية، عندئذ يكون:

$$p_A \cdot h: A \oplus B \rightarrow A, \quad p_B \cdot h: A \oplus B \rightarrow B$$

$$\alpha \cdot p_A \cdot h: A \oplus B \rightarrow C, \quad \beta \cdot p_B \cdot h: A \oplus B \rightarrow C$$

لنأخذ المورفيزم:

$$\mu = \alpha \cdot p_A \cdot h - \beta \cdot p_B \cdot h : A \oplus B \rightarrow C$$

ولكون الفئة $\mathfrak{I}$ شبه تبديلية، فإن المورفيزم μ يملك نواة ولتكن (N, ν) ، أي إن $\text{Ker}(\mu) = \nu$. لنبرهن على أن $p_A \cdot h \cdot \nu$ ، $p_B \cdot h \cdot \nu$ هو الجداء الطبقي المرتبط بالمخطط (*). لنأخذ المخطط:

$$\begin{array}{ccc} N & & \\ \nu \downarrow & & \\ A \oplus B & \xrightarrow{\mu} & C \end{array}$$

بما أن (N, ν) هي نواة المورفيزم μ ، فإن $\mu \cdot \nu = 0$ ، ومنه يكون:

$$(\alpha \cdot p_A \cdot h - \beta \cdot p_B \cdot h) \cdot \nu = 0$$

$$\alpha \cdot p_A \cdot h \cdot \nu = \beta \cdot p_B \cdot h \cdot \nu$$

ليكن $X \in \text{ob}(\mathfrak{I})$ ، ولنفرض أن $\lambda : X \rightarrow A$ ، $\delta : X \rightarrow B$ مورفيزمات للفئة $\mathfrak{I}$ تحقق $\alpha \cdot \lambda = \beta \cdot \delta$. ولنبرهن على وجود مورفيزم وحيد $\gamma : X \rightarrow N$ يحقق:

$$p_A \cdot h \cdot \nu \cdot \gamma = \lambda, \quad p_B \cdot h \cdot \nu \cdot \gamma = \delta$$

$$\begin{array}{ccccc} X & & & & \\ & \searrow \lambda & & \searrow p_A \cdot h \cdot \nu & \\ & & N & \xrightarrow{p_A \cdot h \cdot \nu} & A \\ & \searrow \delta & \downarrow h \cdot \nu & & \downarrow \alpha \\ & & B & \xrightarrow{\beta} & C \end{array}$$

لنفرض أن $i_A : A \rightarrow A \oplus B$ ، $i_B : B \rightarrow A \oplus B$ مورفيزمات الاحتواء، عندئذ يكون $i_A \cdot \lambda + i_B \cdot \delta : X \rightarrow A \oplus B$ ومنه يكون $i_A \cdot \lambda$ ، $i_B \cdot \delta : X \rightarrow A \oplus B$ للفئة $\mathfrak{I}$ ، ويحقق:

$$\begin{aligned} \mu \cdot (i_A \cdot \lambda + i_B \cdot \delta) &= (\alpha \cdot p_A \cdot h - \beta \cdot p_B \cdot h) \cdot (i_A \cdot \lambda + i_B \cdot \delta) = \\ &= \alpha \cdot p_A \cdot h \cdot i_A \cdot \lambda + \alpha \cdot p_A \cdot h \cdot i_B \cdot \delta - \beta \cdot p_B \cdot h \cdot i_A \cdot \lambda + \\ &- \beta \cdot p_B \cdot h \cdot i_B \cdot \delta = \alpha \cdot I_A \cdot \lambda + \alpha \cdot 0_{AB} \cdot \delta - \beta \cdot 0_{BA} \cdot \lambda - \beta \cdot I_B \cdot \delta = \\ &= \alpha \cdot \lambda - \beta \cdot \delta = 0 \end{aligned}$$

وذلك بالاعتماد على العلاقات الواردة في المبرهنة (٧-١-٨)، ومنه يوجد مورفيزم وحيد

$$\gamma : X \rightarrow N \text{ يحقق } \gamma \cdot \nu = i_A \cdot \lambda + i_B \cdot \delta$$

$$\begin{array}{ccccc}
 & \nearrow \gamma & & N & \\
 & & & \downarrow v & \\
 X & \xrightarrow{i_A \cdot \lambda + i_B \cdot \delta} & A \oplus B & \xrightarrow{\mu} & C
 \end{array}$$

ومنه نجد أن:

$$\begin{aligned}
 p_A \cdot h \cdot v \cdot \gamma &= p_A \cdot h \cdot (i_A \cdot \lambda + i_B \cdot \delta) = p_A \cdot h \cdot i_A \cdot \lambda + p_A \cdot h \cdot i_B \cdot \delta = \\
 &= I_A \cdot \lambda + 0_{AB} \cdot \delta = \lambda
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 p_B \cdot h \cdot v \cdot \gamma &= p_B \cdot h \cdot (i_A \cdot \lambda + i_B \cdot \delta) = p_B \cdot h \cdot i_A \cdot \lambda + p_B \cdot h \cdot i_B \cdot \delta = \\
 &= 0_{BA} \cdot \lambda + I_B \cdot \delta = \delta
 \end{aligned}$$

الوحدانية. لنفرض أنه يوجد مورفيزم آخر $\gamma': X \rightarrow N$ يحقق:

$$p_A \cdot h \cdot v \cdot \gamma' = \lambda, \quad p_B \cdot h \cdot v \cdot \gamma' = \delta$$

عندئذ يكون:

$$\begin{aligned}
 v \cdot \gamma &= i_A \cdot \lambda + i_B \cdot \delta = i_A \cdot p_A \cdot h \cdot v \cdot \gamma' + i_B \cdot p_B \cdot h \cdot v \cdot \gamma' = \\
 &= (i_A \cdot p_A + i_B \cdot p_B) \cdot h \cdot v \cdot \gamma' = I_{A \oplus B} \cdot v \cdot \gamma' = v \cdot \gamma'
 \end{aligned}$$

وبما أن المورفيزم v مونومورفيزم نجد أن $\gamma = \gamma'$.

مبرهنة ٨-١-١٥.

في الفئة شبه التبديلية يوجد المجموع الطبقى.

البرهان.

لنفرض أن $\mathcal{C}$ فئة شبه تبديلية، ولنأخذ المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc}
 & A & \\
 & \uparrow \alpha & \\
 (*) & B \xleftarrow{\beta} C &
 \end{array}$$

من أشياء ومورفيزمات الفئة $\mathcal{C}$. لما كانت الفئة $\mathcal{C}$ شبه تبديلية، فإن $\mathcal{C}$ فئة جمعية وبالتالي يوجد $A \sqcap B, A \oplus B$. وحسب المبرهنة (٧-١-٨)، فإنه يوجد مورفيزم وحيد:

$$h: A \oplus B \longrightarrow A \sqcap B$$

للفئة $\mathcal{C}$ يحقق العلاقات الواردة في المبرهنة (٧-١-٨). لنفرض أن $i_A: A \rightarrow A \oplus B$

و $i_B: B \rightarrow A \oplus B$ مورفيزمات الاحتواء، عندئذ يكون:

$$h \cdot i_A : A \rightarrow A \amalg B, \quad h \cdot i_B : B \rightarrow A \amalg B$$

$$h \cdot i_A \cdot \alpha : C \rightarrow A \amalg B, \quad h \cdot i_B \cdot \beta : C \rightarrow A \amalg B$$

لنأخذ المورفيزم:

$$\mu = h \cdot i_A \cdot \alpha - h \cdot i_B \cdot \beta : C \rightarrow A \amalg B$$

ولكون الفئة $\mathfrak{I}$ شبه تبديلية، فإن المورفيزم μ يملك نواة مرافقة ولنكن (K, ν) ، أي إن $\text{Coker}(\mu) = \nu$ ، عندئذ يكون $\nu \cdot \mu = 0$ ، ومنه نجد أن:

$$\nu \cdot (h \cdot i_A \cdot \alpha - h \cdot i_B \cdot \beta) = 0$$

وبالتالي يكون $\nu \cdot h \cdot i_A \cdot \alpha = \nu \cdot h \cdot i_B \cdot \beta$

لنبرهن على أن $\nu \cdot h \cdot i_A, \nu \cdot h \cdot i_B$ هو المجموع الطبقى المرتبط بالمخطط (*).

لنأخذ المخطط:

$$\begin{array}{ccccc} & & K & & \\ & \swarrow \gamma & \uparrow \nu & & \\ X & \xleftarrow{\lambda \cdot p_A + \delta \cdot p_B} & A \amalg B & \xleftarrow{\mu} & C \end{array}$$

ليكن $X \in \text{ob}(\mathfrak{I})$ ولنفرض أن $\lambda : A \rightarrow X, \delta : B \rightarrow X$ مورفيزمات للفئة $\mathfrak{I}$ تحقق $\lambda \cdot \alpha = \delta \cdot \beta$. ولنبرهن على وجود مورفيزم وحيد $\gamma : K \rightarrow X$ يحقق:

$$\gamma \cdot \nu \cdot h \cdot i_A = \lambda, \quad \gamma \cdot \nu \cdot h \cdot i_B = \delta$$

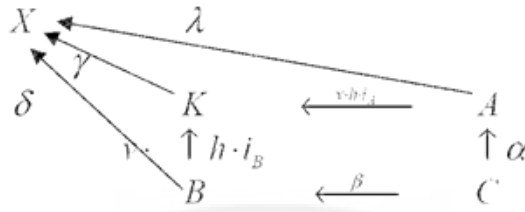
لنفرض أن $p_A : A \amalg B \rightarrow A, p_B : A \amalg B \rightarrow B$ المورفيزمات الإسقاطية، عندئذ

يكون $\lambda \cdot p_A + \delta \cdot p_B : A \amalg B \rightarrow X$ ومنه يكون $\lambda \cdot p_A, \delta \cdot p_B : A \amalg B \rightarrow X$ مورفيزماً للفئة $\mathfrak{I}$ ، ويحقق:

$$\begin{aligned} (\lambda \cdot p_A + \delta \cdot p_B) \cdot \mu &= (\lambda \cdot p_A + \delta \cdot p_B) \cdot (h \cdot i_A \cdot \alpha - h \cdot i_B \cdot \beta) = \\ &= \lambda \cdot p_A \cdot h \cdot i_A \cdot \alpha - \lambda \cdot p_A \cdot h \cdot i_B \cdot \beta + \delta \cdot p_B \cdot h \cdot i_A \cdot \alpha \\ &\quad - \delta \cdot p_B \cdot h \cdot i_B \cdot \beta = \lambda \cdot I_A \cdot \alpha - \lambda \cdot 0_{AB} \cdot \beta + \delta \cdot 0_{BA} \cdot \alpha - \delta \cdot I_B \cdot \beta = \\ &= \alpha \cdot \lambda - \beta \cdot \delta = 0 \end{aligned}$$

وذلك بالاعتماد على العلاقات الواردة في المبرهنة (٧-١-٨)، ومنه يوجد مورفيزم وحيد

$$\gamma : K \rightarrow X, \quad \gamma \cdot \nu = \lambda \cdot p_A + \delta \cdot p_B$$



ومنه نجد أن:

$$\begin{aligned}\gamma \cdot (v \cdot h \cdot i_A) &= \gamma \cdot v \cdot h \cdot i_A = (\lambda \cdot p_A + \delta \cdot p_B) \cdot h \cdot i_A = \\ &= \lambda \cdot p_A \cdot h \cdot i_A + \delta \cdot p_B \cdot h \cdot i_A = \lambda \cdot I_A + \delta \cdot 0_{BA} = \lambda \\ \gamma \cdot (v \cdot h \cdot i_B) &= \gamma \cdot v \cdot h \cdot i_B = (\lambda \cdot p_A + \delta \cdot p_B) \cdot h \cdot i_B = \\ &= \lambda \cdot p_A \cdot h \cdot i_B + \delta \cdot p_B \cdot h \cdot i_B = \lambda \cdot 0_{AB} + \delta \cdot I_B = \delta\end{aligned}$$

الوحدانية. لنفرض أنه يوجد مورفيزم آخر $\gamma': K \rightarrow X$ يحقق:

$$\gamma' \cdot v \cdot h \cdot i_A = \lambda, \quad \gamma' \cdot v \cdot h \cdot i_B = \delta$$

عندئذ يكون:

$$\begin{aligned}\gamma \cdot v &= \lambda \cdot i_A + \delta \cdot i_B = \gamma' \cdot v \cdot h \cdot i_A \cdot p_A + \gamma' \cdot v \cdot h \cdot i_B \cdot p_B = \\ &= \gamma' \cdot v \cdot h \cdot (i_A \cdot p_A + i_B \cdot p_B) = \gamma' \cdot v \cdot I_{A+B} = \gamma' \cdot v\end{aligned}$$

وبما أن المورفيزم v إبيومورفيزماً نجد أن $\gamma = \gamma'$.

مبرهنة ٨-١-١٦.

لتكن $\mathcal{C}$ فئة شبه التبادلية، و $f: M' \rightarrow M$ مورفيزماً للفئة $\mathcal{C}$ ، ولنفرض أن $(Ker(f), \lambda)$ نواة f ، وإن $M' \prod_M M'$ الجداء الطبقي المرتبط بالمخطط:

$$(*) \quad \begin{array}{ccc} & M' & \\ & \downarrow f & \\ M & \xrightarrow{f} & M \end{array}$$

وإن p_1, p_2 المورفيزمات الإسقاطية، عندئذ $Coker(p_1 - p_2) = Coim(f)$.
البرهان.

بما أن $M' \prod_M M'$ الجداء الطبقي المرتبط بالمخطط $(*)$ ، فإن المربع الآتي:

$$\begin{array}{ccc} M' \prod_M M' & \xrightarrow{p_1} & M' \\ p_2 \downarrow & & \downarrow f \\ M & \xrightarrow{f} & M \end{array}$$

ديكارتي، ومنه يكون $f \cdot p_1 = f \cdot p_2$ ؛ وبالتالي فإن $f \cdot (p_1 - p_2) = 0$

$$\begin{array}{ccccc} & \nearrow \alpha & & \text{Ker}(f) & \\ & & & \downarrow \lambda & \\ M' \prod_M M' & \xrightarrow{p_1 - p_2} & M' & \xrightarrow{f} & M \end{array}$$

وحسب تعريف النواة، فإنه يوجد مورفيزم وحيد $\alpha: M' \prod_M M' \rightarrow \text{Ker}(f)$ يحقق

$\lambda \cdot \alpha = p_1 - p_2$. من جهة أخرى، بما أن $M' \prod_M M'$ هو جداء الأسرة (M', M') ، فإن

التطبيق $\Gamma: \mathcal{S}(X, M' \prod_M M') \longrightarrow \mathcal{S}(X, M') \times \mathcal{S}(X, M')$ المعرف بالشكل الآتي:

أياً كان $\zeta \in \mathcal{S}(X, M' \prod_M M')$ ، فإن $\Gamma(\zeta) = (p_1 \cdot \zeta, p_2 \cdot \zeta)$ ، وأياً كان $X \in \text{ob}(\mathcal{S})$ ،

تقابلاً وبما أن $f \cdot \lambda = 0_{M\text{Ker}(f)} = f \cdot 0_{M\text{Ker}(f)}$ فإنه لأجل $X = \text{Ker}(f)$ ومن أجل

التثائية $(\lambda, 0_{M\text{Ker}(f)})$ يوجد مورفيزم وحيد:

$$\sigma_1: \text{Ker}(f) \rightarrow M' \prod_M M'$$

يحقق $\Gamma(\sigma_1) = (\lambda, 0)$ ولما كان $\Gamma(\sigma_1) = (p_1 \cdot \sigma_1, p_2 \cdot \sigma_1)$ فإن:

$$(p_1 \cdot \sigma_1, p_2 \cdot \sigma_1) = (\lambda, 0)$$

ومنه $p_1 \cdot \sigma_1 = \lambda$ و $p_2 \cdot \sigma_1 = 0$ ؛ وبالتالي يكون $(p_1 - p_2) \cdot \sigma_1 = \lambda$. لنأخذ المخطط:

$$\begin{array}{ccccccc} M' \prod_M M' & \xrightarrow{p_1 - p_2} & M' & \xrightarrow{u} & \text{Coker}(p_1 - p_2) \\ \alpha \downarrow \uparrow \sigma_1 & & I_M \downarrow & & \\ \text{Ker}(f) & \xrightarrow{\lambda} & M' & \xrightarrow{\rho} & \text{Coim}(f) = \text{Coker}(\text{Ker}(f)) \end{array}$$

ولنأخذ التفريق القانوني للمورفيزم f الآتي:

$$M' \xrightarrow{\rho} \text{Coim}(f) \xrightarrow{f} \text{Im}(f) \longrightarrow M$$

حيث ρ الإيومورفيزم القانوني. بما أن $\rho \cdot (p_1 - p_2) = \rho \cdot \lambda \cdot \alpha = 0$ وبفرض أن

$\mu: M' \rightarrow \text{Coker}(p_1 - p_2)$ الإيومورفيزم القانوني وحسب تعريف النواة المرافقة، فإنه

يوجد مورفيزم وحيد $\tau: \text{Coker}(p_1 - p_2) \rightarrow \text{Coim}(f)$ يحقق $\tau \cdot \mu = \rho$

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \text{Coker}(p_1 - p_2) & & \\
 & \swarrow \tau & \uparrow \mu & & \\
 \text{Coim}(f) & \xleftarrow{\rho} & M' & \xleftarrow{p_1 - p_2} & M' \prod_M M'
 \end{array}$$

أيضاً بما أن $\mu \cdot \lambda = \mu \cdot (p_1 - p_2) \cdot \sigma_1 = 0$ ، فإنه يوجد مورفيزم وحيد:

$$\tau_1 : \text{Coim}(f) \longrightarrow \text{Coker}(p_1 - p_2)$$

يحقق $\tau_1 \cdot \rho = \mu$ ومنه نجد أن

$$(\tau \cdot \tau_1) \cdot \rho = \tau \cdot (\tau_1 \cdot \rho) = \tau \cdot \mu = \rho = I_{\text{Coim}(f)} \cdot \rho$$

وبما أن ρ إبيومورفيزم نجد أن $\tau \cdot \tau_1 = I_{\text{Coim}(f)}$. أيضاً بما أن:

$$(\tau_1 \cdot \tau) \cdot \mu = \tau_1 \cdot (\tau \cdot \mu) = \tau_1 \cdot \rho = \mu = I_{\text{Coker}(p_1 - p_2)} \cdot \mu$$

وبما أن μ إبيومورفيزم نجد أن $\tau_1 \cdot \tau = I_{\text{Coker}(p_1 - p_2)}$. ومنه نجد أن أشياء الخارج

$\text{Coim}(f)$ و $\text{Coker}(p_1 - p_2) \perp M'$ متكافئة، وبالتالي يكون:

$$\text{Coim}(f) \cong \text{Coker}(p_1 - p_2)$$

مبرهنة ٨-١-١٧.

لتكن $\mathcal{S}$ فئة شبه التبديلية، و $f : M' \rightarrow M$ إبيومورفيزماً للفئة $\mathcal{S}$ ، ولنفرض أن:

$$M' \longrightarrow \text{Coim}(f) \xrightarrow{f} \text{Im}(f) \longrightarrow M$$

التفريق القانوني للمورفيزم f . عندئذ الشروط الآتية متكافئة:

١ - الإبيومورفيزم f قوي.

٢ - المورفيزم $\bar{f}$ إيزومورفيزم.

البرهان.

بما أن f إبيومورفيزم للفئة $\mathcal{S}$ ، فإن $\text{Im}(f) = M$ ؛ وبالتالي يصبح التفريق القانوني

$$M' \longrightarrow \text{Coim}(f) \xrightarrow{f} M$$

(1) $\Leftrightarrow$ (2). لنفرض أن الإبيومورفيزم f قوي، عندئذ حسب التعريف تكون المتتالية:

$$M' \prod_M M' \xrightarrow{p_1 - p_2} M' \xrightarrow{f} M$$

تامة، وبالتالي فإن (M, f) نواة مرافقة للمورفيزم $p_1 - p_2$ ، أي إن:

$$M = \text{Coker}(p_1 - p_2)$$

وحسب المبرهنة (٨-١-١٦)، فإن $M = \text{Coker}(p_1 - p_2) = \text{Coim}(f)$ وهذا يبين أن $\bar{f}$ إيزومورفيزم.

(2) $\Leftrightarrow$ (1). لنفرض أن $\bar{f}$ إيزومورفيزم عندئذ يكون $\bar{f}$ مونومورفيزماً وحسب المبرهنة

(٧-٢-٦)، فإن $M = \text{Coim}(f)$ ؛ وبالتالي تكون المتتالية:

$$M' \prod_M M' \xrightarrow{p_1 - p_2} M' \xrightarrow{f} M$$

تامة، وحسب التعريف يكون الإيزومورفيزم f قوياً.

٨-٢. الفئات التبديلية.

وجدنا حسب المبرهنة (٧-٣-٧) أنه إذا كانت $\mathcal{S}$ فئة شبه تبديلية، فإنه لأجل أي مورفيزم $u: A \rightarrow B$ للفئة $\mathcal{S}$ يوجد مورفيزم وحيد $\bar{u}$ يحقق:

$$A \longrightarrow \text{Coim}(u) \xrightarrow{\quad} \text{Im}(u) \longrightarrow B$$

تعريف.

نقول عن الفئة $\mathcal{S}$ إنها تبديلية إذا كانت:

- ١ - الفئة $\mathcal{S}$ شبه تبديلية.
- ٢ - لأجل أي مورفيزم $u: A \rightarrow B$ للفئة $\mathcal{S}$ ، فإن المورفيزم $\bar{u}: \text{Coim}(u) \rightarrow \text{Im}(u)$ يكون إيزومورفيزماً.

تعريف.

لتكن $\mathcal{S}$ فئة جمعية. عندئذ الشروط الآتية متكافئة:

- ١ - الفئة $\mathcal{S}$ شبه تبديلية.
- ٢ - لأجل أي مورفيزم للفئة $\mathcal{S}$ توجد صورة وصورة مرافقة.

مبرهنة ٨-٢-١.

لتكن $\mathcal{S}$ فئة ما. عندئذ الشروط الآتية متكافئة:

- ١ - الفئة $\mathcal{S}$ تبديلية.
- ٢ - الفئة $\mathcal{S}$ شبه تبديلية، وتحقق الشرطين الآتيين:
 - أ - لأجل أي مورفيزم $u: A \rightarrow B$ للفئة $\mathcal{S}$ ، فإن المورفيزم $\bar{u}: \text{Coim}(u) \rightarrow \text{Im}(u)$ يكون مونومورفيزماً وإبيومورفيزماً في آن واحد.
 - ب - إذا كان $u: A \rightarrow B$ مورفيزماً للفئة $\mathcal{S}$ ، وكان u مونومورفيزماً وإبيومورفيزماً في آن واحد، فإن u يكون إيزومورفيزماً.

البرهان.

(1) $\Leftrightarrow$ (2). لنفرض أن الفئة $\mathcal{S}$ تبديلية، وليكن $u: A \rightarrow B$ مورفيزماً للفئة $\mathcal{S}$ ، عندئذ:

حسب التعريف يكون المورفيزم $\bar{u}: \text{Coim}(u) \rightarrow \text{Im}(u)$ إيزومورفيزماً؛ وبالتالي يكون u

مونومورفيزماً وإيزومورفيزماً في آن واحد.

ليكن $u: A \rightarrow B$ مورفيزماً للفئة $\mathcal{C}$ ، ولنفرض أن u مونومورفيزم وإيزومورفيزم في آن واحد. بما أن u مونومورفيزم، فإنه حسب المبرهنة (٦-٢-٧) يكون $Coim(u) = A$ ، وبما أن u إيزومورفيزم، فإنه حسب المبرهنة (٦-٣-٧) يكون $Im(u) = B$ ، ومنه نجد أن $\bar{u}: Coim(u) = A \rightarrow Im(u) = B$ ، أي إن $\bar{u} = u$ وهذا يبين أن u إيزومورفيزم.

(2) $\Leftrightarrow$ (1). واضح.

تمهيدية ٢-٢-٨.

لتكن $\mathcal{C}$ فئة تبديلية، وليكن $A \in ob(\mathcal{C})$. لنفرض أن (A', i) شيء جزئي في A ، وإن (A'', j) شيء خارج A . إذا كان $j = Coker(i)$ عندئذ يكون $Ker(j) = (A', i)$.

البرهان.

لنفرض أن (A', i) شيء جزئي في A ، عندئذ يكون $i: A' \rightarrow A$ مونومورفيزماً. لنفرض أيضاً أن (A'', j) النواة المرافقة للمورفيزم i ، عندئذ $j: A \rightarrow Coker(i)$ إيزومورفيزم وهو الإيزومورفيزم القانوني وإن (A'', j) شيء خارج A .

$$\begin{array}{ccc} A'' = Coker(i) & & \\ \uparrow j & & \\ A & \xleftarrow{i} & A' \end{array}$$

وحسب التعريف، فإن $Ker(Coker(i)) = Im(i)$. لنفرض أن $\lambda: Im(i) \rightarrow A$ المونومورفيزم القانوني، عندئذ بما أن $j \cdot \lambda = 0$ ، فإنه يوجد مورفيزم وحيد:

$$\begin{array}{ccccc} \mu & \nearrow & Ker(Coker(i)) = Im(i) & \downarrow \lambda & \\ A' & \xrightarrow{i} & A & \xrightarrow{j} & A'' \end{array}$$

$\mu: A' \rightarrow Im(i)$ لأجله $\lambda \cdot \mu = i$. لنبرهن على أن μ إيزومورفيزم.

لنأخذ التفريق الآتي $A' \xrightarrow{i} Coim(i) \xrightarrow{\bar{i}} Im(i) \xrightarrow{\lambda} A$ بما أن i مونومورفيزم، فإنه حسب التمهيدية (٦-٢-٧) يكون $Coim(i) = A'$ ؛ ومنه فإن $v = I_{A'} \rightarrow A$ وبما أن الفئة $\mathcal{C}$ تبديلية، فإن المورفيزم $\bar{i}: Coim(i) \rightarrow Im(i)$ إيزومورفيزم ومنه نجد أن $A' \xrightarrow{i} Im(i) \xrightarrow{\lambda} A$ وإن $\lambda \cdot \bar{i} = i$ وبسبب وحدانية المورفيزم μ نجد أن $\mu = \bar{i}$ هو إيزومورفيزم؛ وبالتالي يكون $Ker(j) = (A', i)$.

تمهيدية ٨-٢-٣.

لتكن $\mathcal{S}$ فئة تبديلية، وليكن $A \in ob(\mathcal{S})$. لنفرض أن (A'', j) شيء خارج $\mathcal{S}$ ، وإن (A', i) شيء جزئي في A . إذا كان $i = Ker(j)$ عندئذ يكون $Coker(i) = (A'', j)$. البرهان.

لنفرض أن (A'', j) شيء خارج $\mathcal{S}$ ، عندئذ يكون $j: A \rightarrow A''$ إبيومورفيزماً. لنفرض أن (A', i) نواة المورفيزم j عندئذ يكون $i: Ker(j) \rightarrow A$ مونومورفيزماً:

$$\begin{array}{ccc} A' = Ker(j) & & \\ i \downarrow & & \\ A & \xrightarrow{j} & A'' \end{array}$$

وحسب التعريف يكون $Coker(i) = Coim(j)$ ، أي إن $Coker(Ker(j)) = Coim(j)$. لنفرض أن $\mu: A \rightarrow Coim(j)$ الإبيومورفيزم القانوني، ولنأخذ المخطط:

$$\begin{array}{ccccc} & Coker(Ker(j)) = Coim(j) & & & \\ & \uparrow \mu & & & \\ \lambda \swarrow & A & \xleftarrow{i} & Ker(j) & \end{array}$$

بما أن $\mu \cdot i = 0$ ، $j \cdot i = 0$ فإنه يوجد مورفيزم وحيد $\lambda: Coim(j) \rightarrow A''$ يحقق $\lambda \cdot \mu = j$. لنبرهن على أن λ إيزومورفيزماً. لنأخذ التفريق للمورفيزم $j: A \rightarrow A''$ الآتي:

$$A \xrightarrow{\mu} Coim(j) \xrightarrow{j} Im(j) \xrightarrow{w} A''$$

بما أن j إبيومورفيزم، فإنه حسب التمهيدية (٦-٣-٧) يكون $Im(j) = A''$ ؛ ومنه فإن $w = I_{A''}$ ، أيضاً بما أن الفئة $\mathcal{S}$ تبديلية، فإن المورفيزم $\bar{j}: Coim(j) \rightarrow Im(j)$ إيزومورفيزم، ومنه نجد أن $A \xrightarrow{\mu} Coim(j) \xrightarrow{\bar{j}} A''$ وإن $\bar{j} \cdot \mu = j$ ، وبسبب وحدانية المورفيزم λ نجد أن $\bar{j} = \lambda$ هو إيزومورفيزم؛ وبالتالي يكون:

$$Coker(i) = (A'', j)$$

لتكن $\mathcal{S}$ فئة تبديلية، و $A \in ob(\mathcal{S})$. لنفرض أن $P(A)$ صف الأشياء الجزئية في A ، وجدنا حسب التمهيدية (٥-٣-١) أن الصف $P(A)$ معرف عليه علاقة ترتيب جزئية " $\leq$ ". لنفرض أيضاً أن $Q(A)$ هو صف أشياء الخارج لـ A ، حسب التمهيدية (١-٣-١)

(١٠) إن الصف $Q(A)$ معرف عليه علاقة ترتيب جزئية "≤". سوف ندرس الآن العلاقة بين الصفتين $P(A)$ و $Q(A)$ وذلك من خلال المبرهنة المهمة الآتية:

مبرهنة ٨-٢-٤.

لنكن $\mathfrak{A}$ فئة تبديلية، وليكن $A \in ob(\mathfrak{A})$. لنفرض أن $P(A)$ صف جميع الأشياء الجزئية في A و $Q(A)$ صف جميع أشياء الخارج لـ A . عندئذ:

١ - يوجد تطبيق $f: P(A) \rightarrow Q(A)$ يعكس علاقة الترتيب، بمعنى أنه إذا كان $\bar{u}, \bar{v} \in P(A)$ وكان $\bar{u} \leq \bar{v}$ فإن $f(\bar{u}) \geq f(\bar{v})$.

٢ - يوجد تطبيق $g: Q(A) \rightarrow P(A)$ يعكس علاقة الترتيب، بمعنى أنه إذا كان $\bar{u}, \bar{v} \in Q(A)$ وكان $\bar{u} \leq \bar{v}$ فإن $g(\bar{u}) \geq g(\bar{v})$.

٣ - التطبيقات f, g تحقق $f \cdot g = I_{Q(A)}$ ، $g \cdot f = I_{P(A)}$.

البرهان.

وجدنا حسب التمهيدية (١-٣-٥) أن الصف $P(A)$ معرف عليه علاقة ترتيب "≤" بالشكل الآتي: $\forall \bar{u}, \bar{v} \in P(A); \bar{u} \leq \bar{v} \Leftrightarrow u \leq v$.

أيضاً حسب التمهيدية (١-٣-١٠)، فإن الصف $Q(A)$ معرف عليه علاقة ترتيب "≤" بالشكل الآتي: $\forall \bar{u}, \bar{v} \in Q(A); \bar{u} \leq \bar{v} \Leftrightarrow u \leq v$.

١ - لنعرف العلاقة $f: P(A) \rightarrow Q(A)$ بالشكل الآتي: ليكن $(A', i) \in P(A)$ عندئذ $i: A' \rightarrow A$ مونومورفيزماً للفئة $\mathfrak{A}$ ، لنفرض أن الثنائية $(Coker(i), j)$ النواة المرافقة للمورفيزم i ، حيث $j: A \rightarrow Coker(i)$ الإيبومورفيزم القانوني.

$$\begin{array}{ccc} Coker(i) & & \\ j \uparrow & & \\ A & \xleftarrow{i} & A' \end{array}$$

لنضع $f((A', i)) = (Coker(i), j) \in Q(A)$ ، فنجد أن f تطبيقاً بسبب وحدانية صف التكافؤ $Coker(i)$. لنبرهن أن f يعكس علاقة الترتيب.

ليكن $(A', i'), (A'', i'') \in P(A)$ بحيث $(A', i') \leq (A'', i'')$ عندئذ بحسب التمهيدية (١-٣-٥)، فإن $i' \leq i''$ حيث $i': A' \rightarrow A, i'': A'' \rightarrow A$ مونومورفيزمات للفئة $\mathfrak{A}$. عندئذ يوجد

$i_1 \in \mathfrak{I}(A', A'')$ يحقق $i'' \cdot i_1 = i'$ وبما أن i' مونومورفيزم، فإن i_1 مونومورفيزم. لنبرهن على أن $f((A', i')) \geq f((A'', i''))$. لنفرض أن $(Coker(i'), j'), (Coker(i''), j'')$ النوى المرافقة للمورفيزمات i', i'' على الترتيب. عندئذ:

$$j' : A \rightarrow Coker(i'), j'' : A \rightarrow Coker(i'')$$

إيومورفيزمات للفئة $\mathfrak{I}$ ، ومنه $j', j'' \in Q(A)$ ، ومنه فإن $j'' \cdot i'' = 0$ ، $j' \cdot i' = 0$ ، وبالتالي

$$j'' \cdot i' = j'' \cdot (i'' \cdot i_1) = (j'' \cdot i'') \cdot i_1 = 0 \cdot i_1 = 0$$

$$\begin{array}{ccccc} & & Coker(i') & & \\ & \swarrow j_1 & \uparrow j' & & \\ Coker(i'') & \xleftarrow{j''} & A & \xleftarrow{j'} & A' \end{array}$$

ومنه يوجد مورفيزم وحيد $j_1 : Coker(i') \rightarrow Coker(i'')$ يحقق $j_1 \cdot j' = j''$ وبما أن j'' إيومورفيزم، فإن j_1 إيومورفيزم، وحسب التمهيدية (٦-٣-١) ينتج أن $j'' \leq j'$ ؛ وبالتالي يكون $(Coker(i''), j'') \leq (Coker(i'), j')$ وهذا بين أن $f((A'', i'')) \leq f((A', i'))$.

٢ - لنعرف العلاقة $g : Q(A) \rightarrow P(A)$ بالشكل الآتي: ليكن $(A', j) \in Q(A)$ عندئذ $j : A \rightarrow A'$ إيومورفيزماً للفئة $\mathfrak{I}$ ، لنفرض أن الثنائية $(Ker(j), i)$ نواة المورفيزم j ، عندئذ $i : Ker(j) \rightarrow A$ المونومورفيزم القانوني.

$$\begin{array}{ccc} Ker(j) & & \\ i \downarrow & & \\ A & \xrightarrow{j} & A' \end{array}$$

لنضع $g((A', j)) = (Ker(j), i) \in P(A)$ ، فنجد أن g تطبيق، بسبب وحدانية صف التكافؤ $(Ker(j), i)$. لنبرهن على أن g يعكس علاقة الترتيب.

ليكن $(A', j'), (A'', j'') \in Q(A)$ بحيث $(A', j') \leq (A'', j'')$ عندئذ بحسب التمهيدية (١-٣-١٠) فإن $j' \leq j''$ حيث $j' : A \rightarrow A'$ ، $j'' : A \rightarrow A''$ إيومورفيزمات للفئة $\mathfrak{I}$.

وحسب التمهيدية (٦-٣-١) يوجد مورفيزم $j_1 : A'' \rightarrow A'$ للفئة $\mathfrak{I}$ يحقق $j_1 \cdot j'' = j'$ ،

$$\begin{array}{ccc} A'' & \xrightarrow{j''} & A' \\ & \swarrow j_1 & \uparrow j' \\ & A & \end{array}$$

ولما كان j' إيومورفيزماً، فإن j_1 إيومورفيزم. وبما أن $j'' \cdot i'' = 0$ نجد أن:

$$j' \cdot i'' = (j_1 \cdot j'') \cdot i'' = j_1 \cdot (j'' \cdot i'') = 0$$

$$\begin{array}{ccccc} & i_1 & \nearrow & \text{Ker}(j') & \\ & & & \downarrow i' & \\ \text{Ker}(j'') & \xrightarrow{i} & & A & \xrightarrow{i} A' \end{array}$$

ومنه يوجد مورفيزم وحيد $i_1: \text{Ker}(j'') \rightarrow \text{Ker}(j')$ للفتة $\exists$ يحقق $i' \cdot i_1 = i''$ ، وبما أن i'' مونومورفيزم فإن i_1 مونومورفيزم، وحسب التمهيدية (١-٣-١) نجد أن $i'' \leq i'$ ؛ وبالتالي يكون $(\text{Ker}(j''), i'') \leq (\text{Ker}(j'), i')$ أي إن $g((A'', j'')) \leq g((A', j'))$.

٣ - ليكن $(A', i) \in P(A)$ عندئذ فإن $f((A', i)) = (\text{Coker}(i), j) \in Q(A)$ وبما أن $g(f((A', i))) = (\text{Ker}(j), i)$ فإنه حسب المبرهنة (٢-٢-٨) يكون $(\text{Ker}(j), i) = (A', i)$ ، ومنه نجد أن $g \cdot f((A', i)) = (A', i)$ وهذا يبين أن $g \cdot f = I_{P(A)}$.

ليكن $(A'', j) \in Q(A)$ ، عندئذ فإن $g((A'', j)) = (\text{Ker}(j), i) \in P(A)$ وإن:

$$f(g((A'', j))) = f((\text{Ker}(j), i)) = (\text{Coker}(i), j)$$

وبما أن $i = \text{Ker}(j)$ فإنه حسب المبرهنة (٣-٢-٨) نجد أن:

$$g \cdot f((A'', j)) = (\text{Coker}(i), j) = (A'', j)$$

وهذا يبين أن $f \cdot g = I_{Q(A)}$.

نتيجة.

بالاعتماد على المبرهنة (٤-٢-٨)، فإن (٣) يبين لنا أن التطبيقين f, g المعرفين في (١) و (٢) كل منهما متباين وغامر، وهذا يعني أنه يوجد تقابل بين الأشياء الجزئية لأي شيء $A \in \text{ob}(\mathcal{S})$ وأشياء الخارج لـ A .

ملاحظة.

لتكن $\mathcal{S}$ فئة تبديلية، و $A \in \text{ob}(\mathcal{S})$ ، عندئذ:

- إذا كان $A' \in \text{ob}(\mathcal{S})$ شيئاً جزئياً في A ، فإن شيء الخارج الناتج عن A سوف نرمز له A/A' ، أي إن $f(A') = A/A' \in Q(A)$.

- إذا كان $A'' \in ob(\mathcal{T})$ شيئاً خارجاً لـ A ، فإن الشيء الجزئي في A الناتج عن A'' سوف نرمز له $A \setminus A''$ ، أي إن $g(A'') = A \setminus A'' \in P(A)$.



٨-٣. الدوال التامة.

تعريف.

لتكن $\mathfrak{S}$ فئة تبديلية. نقول عن المتتالية من أشياء ومورفيزمات الفئة $\mathfrak{S}$ ، الآتية:

$$A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C$$

إنها تامة، إذا كان $Im(u) = Ker(v)$.

ونقول عن المتتالية من أشياء ومورفيزمات الفئة $\mathfrak{S}$ ، الآتية:

$$\cdots \longrightarrow A_{i-1} \xrightarrow{u_{i-1}} A_i \xrightarrow{u_i} A_{i+1} \longrightarrow \cdots$$

إنها تامة، إذا كان $Im(u_{i-1}) = Ker(u_i)$ لأجل كل إنها تامة، إذا كان i .

ينتج من التعريف مباشرة، أنه إذا كانت المتتالية $A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C$ للفئة $\mathfrak{S}$ تامة، فإن $(C, v) = (Coker(u))$ وإن $(A, u) = (Ker(v))$ ، والعكس أيضاً صحيح. وإن $v \cdot u = 0$ ، لأن $(A, u) = (Ker(v))$.

تمهيدية ٨-٣-١.

لتكن $\mathfrak{S}$ فئة تبديلية، وليكن $u: A \rightarrow B$ مورفيزماً للفئة $\mathfrak{S}$. عندئذ الشروط الآتية متكافئة:

١ - المورفيزم u مونومورفيزم.

٢ - المتتالية $0 \longrightarrow A \xrightarrow{u} B$ تامة.

٣ - لأجل كل $X \in ob(\mathfrak{S})$ ، فإن متتالية الزمر، والتشاكلات الزمرية الآتية:

$$0 \longrightarrow \mathfrak{S}(X, A) \xrightarrow{u} \mathfrak{S}(X, B)$$

تامة، حيث إن α معرف بالشكل الآتي: $\alpha(\zeta) = u \cdot \zeta$ وذلك أيأ كان $\zeta \in \mathfrak{S}(X, A)$.

٤ - التشاكل α متباين.

البرهان.

(1) $\Leftrightarrow$ (2). حسب المبرهنة (٦-٢-٧).

(2) $\Leftrightarrow$ (3). حسب المبرهنة (٢-٢-٧).

(3) $\Leftrightarrow$ (4). واضح. (4) $\Leftrightarrow$ (1). حسب التعريف.

تمهيدية ٨-٣-٢.

لنكن $\mathfrak{I}$ فئة تبديلية، وليكن $\nu: B \rightarrow C$ مورفيزماً للفئة $\mathfrak{I}$. عندئذ الشروط الآتية متكافئة:

- ١ - المورفيزم ν إبيومورفيزم.
- ٢ - المتتالية $0 \rightarrow B \xrightarrow{\nu} C$ تامة.
- ٣ - أياً كان $X \in ob(\mathfrak{I})$ ، فإن متتالية الزمر، والتشاكلات الزمرية الآتية:

$$0 \rightarrow \mathfrak{I}(C, X) \xrightarrow{\beta} \mathfrak{I}(B, X)$$
تامة، حيث إن β معرف بالشكل الآتي: $\beta(\zeta) = \zeta \cdot \nu$ وذلك أياً كان $\zeta \in \mathfrak{I}(C, X)$.
- ٤ - التشاكل β متباين.

البرهان.

$$(1) \Leftrightarrow (2) \text{ . حسب المبرهنة (٦-٣-٧) .}$$

$$(2) \Leftrightarrow (3) \text{ . حسب المبرهنة (٢-٣-٧) .}$$

$$(3) \Leftrightarrow (4) \text{ . واضح . (1) } \Leftrightarrow (4) \text{ . حسب التعريف .}$$

تمهيدية ٨-٣-٣.

لنكن $\mathfrak{I}$ فئة تبديلية، ولنكن

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{\mu} B \xrightarrow{\nu} C$$

متتالية من أشياء ومورفيزمات الفئة $\mathfrak{I}$. عندئذ الشروط الآتية متكافئة:

- ١ - المتتالية $0 \rightarrow A \xrightarrow{\mu} B \xrightarrow{\nu} C$ تامة.
 - ٢ - أياً كان $X \in ob(\mathfrak{I})$ ، فإن متتالية الزمر، والتشاكلات الزمرية الآتية:

$$0 \rightarrow \mathfrak{I}(X, A) \xrightarrow{\alpha} \mathfrak{I}(X, B) \xrightarrow{\beta} \mathfrak{I}(X, C)$$
تامة، حيث إن التشاكلات α, β معرفة بالشكل الآتي: أياً كان $\zeta \in \mathfrak{I}(X, A)$ ، فإن $\alpha(\zeta) = \zeta \cdot \mu$ ، وأياً كان $\zeta \in \mathfrak{I}(X, B)$ ، فإن $\beta(\zeta) = \zeta \cdot \nu$.
- البرهان.

$$(1) \Leftrightarrow (2) \text{ . لنفرض أن المتتالية } 0 \rightarrow A \xrightarrow{\mu} B \xrightarrow{\nu} C \text{ تامة، عندئذ تكون المتتالية}$$

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{\mu} B \text{ تامة، وحسب التمهيدية (٨-٣-١) أياً كان } X \in ob(\mathfrak{I}) \text{، تكون}$$

المتتالية:

$$0 \longrightarrow \mathfrak{I}(X, A) \xrightarrow{\alpha} \mathfrak{I}(X, B)$$

تامة. لنبرهن أن $\text{Ker}(\beta) = \text{Im}(\alpha)$. بما أن المتتالية $0 \rightarrow A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C$ متتالية، فإن $(A, u) = \text{Ker}(v) = \text{Im}(u)$ ، وإن $v \cdot u = 0$. ليكن $\theta \in \text{Ker}(\beta)$ عندئذ يكون $\theta \in \mathfrak{I}(X, B)$ ، وإن $\beta(\theta) = 0 = v \cdot \theta$. لنأخذ المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccccc} & & \delta & & \\ & & \nearrow & & \\ X & \xrightarrow{\theta} & B & \xrightarrow{v} & C \\ & & \downarrow u & & \\ & & \text{Ker}(v) = A & & \end{array}$$

ولما كان $v \cdot u = 0$ وإن $v \cdot \theta = 0$ ، فإنه يوجد مورفيزم وحيد $\delta: X \rightarrow A$ بحيث $u \cdot \delta = \theta$ ومنه نجد أن $\theta = u \cdot \delta = \alpha(\delta) \in \text{Im}(\alpha)$ ، وهكذا نجد أن $\text{Ker}(\beta) \subseteq \text{Im}(\alpha)$. ليكن $w \in \text{Im}(\alpha)$ عندئذ $w \in \mathfrak{I}(X, B)$ وإنه يوجد $\sigma \in \mathfrak{I}(X, A)$ بحيث $\alpha(\sigma) = w$ ومنه نجد أن $w = u \cdot \sigma$ ، كما أن $\beta(w) = v \cdot w = v \cdot (u \cdot \sigma) = (v \cdot u) \cdot \sigma = 0$ وبالتالي $w \in \text{Ker}(\beta)$ أي إن $\text{Im}(\alpha) \subseteq \text{Ker}(\beta)$ وهكذا نجد أن $\text{Ker}(\beta) = \text{Im}(\alpha)$. مما سبق نجد أن المتتالية في (2) تامة.

(2) $\Leftrightarrow$ (1). لنفرض أن المتتالية في (2) تامة، عندئذ يكون التشاكل α متباين، وحسب التعريف يكون المورفيزم u مونومورفيزماً وحسب المبرهنة (٧-٢-٦) فإن $\text{Ker}(u) = 0$. لنبرهن على أن $\text{Im}(u) = \text{Ker}(v)$. لدينا حسب المبرهنة (٧-٢-٦) أن المورفيزم u هو نواة للمورفيزم v أي إن $(A, u) = \text{Ker}(v)$ ، ومنه يكون:

$$\text{Im}(u) = \text{Ker}(\text{Coker}(u)) = (A, u) = \text{Ker}(v)$$

مما سبق نجد أن المتتالية $0 \rightarrow A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C$ متتالية تامة.

تمهيدية ٨-٣-٤.

لتكن $\mathfrak{I}$ فئة تبديلية، ولتكن $0 \rightarrow A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C$ متتالية من أشياء ومورفيزمات الفئة $\mathfrak{I}$. عندئذ الشروط الآتية متكافئة:

- ١ - المتتالية $0 \rightarrow A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C$ تامة.
- ٢ - أيأ كان $X \in \text{ob}(\mathfrak{I})$ ، فإن متتالية الزمر، والتشاكلات الزمرية الآتية:

$$0 \longrightarrow \mathfrak{I}(A, X) \xrightarrow{\beta} \mathfrak{I}(B, X) \xrightarrow{\alpha} \mathfrak{I}(C, X)$$

تامة، حيث إن التشاكلات α, β معرفة بالشكل الآتي: أيأ كان $\zeta \in \mathfrak{I}(A, X)$ ، فإن

$\alpha(\zeta) = \zeta \cdot v$ ، وأياً كان $\zeta \in \mathfrak{I}(B, X)$ ، فإن $\beta(\zeta) = \zeta \cdot u$.
البرهان.

(1) $\Leftrightarrow$ (2) . لنفرض أن المتتالية $0 \rightarrow A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \rightarrow 0$ تامة، عندئذ تكون المتتالية $0 \rightarrow A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \rightarrow 0$ تامة، وحسب التمهيدية (٢-٣-٨) أياً كان $X \in \text{ob}(\mathfrak{I})$ ، تكون المتتالية:

$$0 \longrightarrow \mathfrak{I}(A, X) \xrightarrow{\beta} \mathfrak{I}(B, X)$$

تامة. لنبرهن أن $\text{Ker}(\alpha) = \text{Im}(\beta)$. بما أن المتتالية $0 \rightarrow A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \rightarrow 0$ تامة، فإن $\text{Ker}(u) = \text{Im}(v)$ وإن $\text{Coker}(v) = (A, u)$ كما أن $u \cdot v = 0$. ليكن $w \in \text{Ker}(\alpha)$ عندئذ يكون $w \in \mathfrak{I}(B, X)$ وإن $\alpha(w) = 0 = w \cdot v$. لنأخذ المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{Coker}(v) = A & & \\ & \nearrow \delta & \uparrow u & & \\ X & \xleftarrow{w} & B & \xleftarrow{v} & C \end{array}$$

بما أن $u \cdot v = 0$ ، وإن $w \cdot v = 0$ ، فإنه يوجد مورفيزم وحيد $\delta: X \rightarrow A$ يحقق $\delta \cdot u = w$. ومنه نجد أن $w = \delta \cdot u = \beta(\delta) \in \text{Im}(\beta)$ ، وهكذا نجد أن $\text{Ker}(\alpha) \subseteq \text{Im}(\beta)$.
ليكن $\sigma \in \text{Im}(\beta)$ عندئذ $\sigma \in \mathfrak{I}(B, X)$ وإنه يوجد $\mu \in \mathfrak{I}(A, X)$ بحيث $\sigma = \beta(\mu) = \mu \cdot u$ ، ومنه فإن:

$$\alpha(\sigma) = \sigma \cdot v = (\mu \cdot u) \cdot v = \mu \cdot (u \cdot v) = \mu \cdot 0 = 0$$

وهذا يبين أن $\sigma \in \text{Ker}(\alpha)$ ؛ وبالتالي فإن $\text{Im}(\beta) \subseteq \text{Ker}(\alpha)$ ومنه $\text{Ker}(\alpha) = \text{Im}(\beta)$.
وهكذا نجد أن المتتالية (2) تامة.

(2) $\Leftrightarrow$ (1) . لنفرض أن المتتالية في (2) تامة، عندئذ تكون المتتالية:

$$0 \longrightarrow \mathfrak{I}(A, X) \xrightarrow{\beta} \mathfrak{I}(B, X)$$

تامة، وحسب التمهيدية (٢-٣-٨) تكون المتتالية $0 \rightarrow A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \rightarrow 0$ تامة، أي إن المورفيزم u إبيومورفيزم. من جهة أخرى، فإنه حسب المبرهنة (٢-٣-٧) يكون $\text{Im}(v) = \text{Ker}(\text{Coker}(v)) = \text{Ker}(u)$ ومنه نجد أن $(A, u) = \text{Coker}(v)$ وهذا يبين أن المتتالية $0 \rightarrow A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \rightarrow 0$ تامة؛ وبالتالي فإن المتتالية $0 \rightarrow A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \rightarrow 0$ تامة.

مبرهنة ٨-٣-٥.

لتكن $\mathfrak{S}$ فئة تبديلية، ولتكن $0 \rightarrow A' \xrightarrow{u} A \xrightarrow{v} A'' \rightarrow 0$ متتالية من أشياء ومورفيزمات الفئة $\mathfrak{S}$. عندئذ الشروط الآتية متكافئة:

$$١ - \text{المتتالية } 0 \rightarrow A' \xrightarrow{u} A \xrightarrow{v} A'' \rightarrow 0 \text{ تامة.}$$

$$٢ - (A', u) = \text{Ker}(v), \quad (A'', v) = \text{Coker}(u).$$

البرهان.

(1) $\Leftrightarrow$ (2). لنفرض أن المتتالية $0 \rightarrow A' \xrightarrow{u} A \xrightarrow{v} A'' \rightarrow 0$ تامة، عندئذ تكون المتتالية $0 \rightarrow A' \xrightarrow{u} A \xrightarrow{v} A'' \rightarrow 0$ تامة وحسب المبرهنة (٨-٣-٣) تكون متتالية الزمر، والتشاكلات الزمرية الآتية:

$$0 \longrightarrow \mathfrak{S}(X, A') \xrightarrow{\alpha} \mathfrak{S}(X, A) \xrightarrow{\beta} \mathfrak{S}(X, A'')$$

تامة، وحسب المبرهنة (٧-٢-٢) تكون الثنائية (A', u) نواة للمورفيزم v أي إن $(A', u) = \text{Ker}(v)$.

من جهة أخرى، تكون المتتالية $0 \rightarrow A' \xrightarrow{u} A \xrightarrow{v} A'' \rightarrow 0$ تامة وحسب المبرهنة (٨-٣-٤) تكون متتالية الزمر، والتشاكلات الزمرية الآتية:

$$0 \longrightarrow \mathfrak{S}(A', X) \xrightarrow{\alpha} \mathfrak{S}(A, X) \xrightarrow{\beta} \mathfrak{S}(A'', X)$$

تامة، وحسب المبرهنة (٧-٣-٢) تكون الثنائية (A'', v) نواة مرافقة للمورفيزم u ، أي إن $(A'', v) = \text{Coker}(u)$.

$$(2) \Leftrightarrow (1). \text{ يبرهن بطريقة مشابهة.}$$

تمهيدية ٨-٣-٦.

لتكن $\mathfrak{S}$ فئة تبديلية، وليكن $A \in \text{ob}(\mathfrak{S})$. إذا كان $(A', i) \in P(A)$ حيث i المونومورفيزم القانوني، وكان $(A'', j) \in Q(A)$ حيث j الإييومورفيزم القانوني، عندئذ:

$$١ - \text{المتتالية } 0 \longrightarrow A' \xrightarrow{i} A \xrightarrow{j} A/A' \longrightarrow 0 \text{ تكون تامة.}$$

$$٢ - j \cdot i = 0.$$

البرهان.

$$١ - \text{لما كان } i \text{ مونومورفيزماً، فإن المتتالية } 0 \longrightarrow A' \xrightarrow{i} A \text{ تامة. ولما كان } j$$

إبيومورفيزماً، فإن المتتالية $A \xrightarrow{j} A/A' \longrightarrow 0$ تامة.

لنبرهن على أن $\text{Ker}(j) = \text{Im}(i)$. بما أن $(A', i) \in P(A)$ فإن $(A/A', j) = f((A', i))$ حيث $j = \text{Coker}(i)$ و f هو التطبيق المعرف في المبرهنة (٤-٢-٨) ومنه نجد أن:

$$\text{Ker}(j) = \text{Ker}(\text{Coker}(i)) = \text{Im}(i)$$

مما سبق نجد أن المتتالية $0 \longrightarrow A' \xrightarrow{i} A \xrightarrow{j} A/A' \longrightarrow 0$ تامة.

٢ - إن $j \cdot i = 0$ ؛ لأن $j = \text{Coker}(i)$.

تمهيدية ٧-٣-٨.

لتكن $\mathfrak{I}$ فئة تبديلية، وليكن $B \in \text{ob}(\mathfrak{I})$. إذا كان $(B', j) \in Q(B)$ حيث j الإبيومورفيزم القانوني، وكان $(B \setminus B', i) \in P(B)$ ؛ حيث i المونومورفيزم، عندئذ:

١ - المتتالية $0 \longrightarrow B \setminus B' \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} B' \longrightarrow 0$ تكون تامة.

٢ - $j \cdot i = 0$.

البرهان.

١ - لما كان j إبيومورفيزماً، فإن المتتالية $B \xrightarrow{j} B' \longrightarrow 0$ تامة. ولما كان i مونومورفيزماً فإن المتتالية $0 \longrightarrow B \setminus B' \xrightarrow{i} B$ تامة.

لنبرهن على أن $\text{Ker}(j) = \text{Im}(i)$. بما أن $(B', j) \in Q(B)$ فإن $(B \setminus B', i) \in P(B)$ ويحقق $f((B \setminus B'), i) = (B', j)$ حيث $j = \text{Coker}(i)$ و f هو التطبيق المعرف في المبرهنة (٤-٢-٧) ومنه نجد أن

$$\text{Ker}(j) = \text{Ker}(\text{Coker}(i)) = \text{Im}(i)$$

مما سبق نجد أن المتتالية $0 \longrightarrow B \setminus B' \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} B' \longrightarrow 0$ تامة.

٢ - إن $j \cdot i = 0$ ؛ لأن $j = \text{Coker}(i)$.

تعريف.

لتكن $\mathfrak{I}_1, \mathfrak{I}_2$ فئتين تبديليتين، وليكن $F: \mathfrak{I}_1 \rightarrow \mathfrak{I}_2$ دالياً جمعياً مباشراً. سوف نقول إن:

- الدالي F تام من اليسار إذا كان لأجل أي متتالية تامة:

$$0 \rightarrow A' \xrightarrow{u} A \xrightarrow{v} A'' \rightarrow 0$$

من أشياء ومورفيزمات الفئة $\mathfrak{I}_1$ ، فإن متتالية الأشياء والمورفيزمات الآتية:

$$0 \rightarrow F(A') \xrightarrow{F(u)} F(A) \xrightarrow{F(v)} F(A'')$$

للفئة $\mathcal{S}_2$ ، تكون تامة.

- الدالي F تام من اليمين إذا كان لأجل أي متتالية تامة:

$$0 \rightarrow A' \xrightarrow{u} A \xrightarrow{v} A'' \rightarrow 0$$

من أشياء ومورفيزمات الفئة $\mathcal{S}_1$ ، فإن متتالية الأشياء والمورفيزمات الآتية:

$$F(A') \xrightarrow{F(u)} F(A) \xrightarrow{F(v)} F(A'') \rightarrow 0$$

للفئة $\mathcal{S}_2$ تكون تامة.

- الدالي F تام إذا كان لأجل أي متتالية تامة:

$$0 \rightarrow A' \xrightarrow{u} A \xrightarrow{v} A'' \rightarrow 0$$

من أشياء ومورفيزمات الفئة $\mathcal{S}_1$ ، فإن متتالية الأشياء والمورفيزمات الآتية:

$$0 \rightarrow F(A') \xrightarrow{F(u)} F(A) \xrightarrow{F(v)} F(A'') \rightarrow 0$$

للفئة $\mathcal{S}_2$ تكون تامة.

بشكل مشابه نعرف الدالي الجمعي التام غير المباشر .

تمهيدية ٨-٣-٨.

لتكن $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ فئتين تبديليتين، وليكن $F: \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$ دالياً جمعياً مباشراً تاماً، ولنفرض أن

$u: A \rightarrow B$ مورفيزم للفئة $\mathcal{S}_1$. عندئذ:

١ - إذا كان u مونومورفيزماً للفئة $\mathcal{S}_1$ ، فإن المورفيزم $F(u)$ يكون مونومورفيزماً للفئة $\mathcal{S}_2$.

٢ - إذا كان u إيبومورفيزماً للفئة $\mathcal{S}_1$ ، فإن المورفيزم $F(u)$ يكون إيبومورفيزماً للفئة $\mathcal{S}_2$.

٣ - إذا كان u إيزومورفيزماً للفئة $\mathcal{S}_1$ ، فإن المورفيزم $F(u)$ يكون إيزومورفيزماً للفئة $\mathcal{S}_2$.

البرهان.

١ - لنفرض أن u مونومورفيزم للفئة $\mathcal{S}_1$ ، ولنفرض أيضاً أن $(B', j) = \text{Coker}(u)$ عندئذ

تكون المتتالية الآتية $0 \rightarrow A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{j} B' \rightarrow 0$ للفئة $\mathcal{S}_1$ تامة، لأن:

$$\text{Ker}(j) = \text{Ker}(\text{Coker}(u)) = \text{Im}(u)$$

وبما أن الدالي F تام تكون المتتالية الآتية:

$$0 \rightarrow F(A) \xrightarrow{F(u)} F(B) \xrightarrow{F(j)} F(B') \rightarrow 0$$

للفئة $\mathfrak{S}_2$ تامة، وهذا يبين لنا أن المورفيزم $F(u)$ مونومورفيزم.

٢ - لنفرض أن u إبيومورفيزم للفئة $\mathfrak{S}_1$ ، ولنفرض أيضاً أن $(A', i) = \text{Ker}(u)$ عندئذ تكون المتتالية الآتية $0 \rightarrow A' \xrightarrow{i} A \xrightarrow{u} B \rightarrow 0$ للفئة $\mathfrak{S}_1$ تامة، لأن:

$$\text{Im}(i) = \text{Ker}(\text{Coker}(i)) = \text{Ker}(u)$$

ولما كان الدالي F تام، فإن المتتالية الآتية:

$$0 \rightarrow F(A') \xrightarrow{F(i)} F(A) \xrightarrow{F(u)} F(B) \rightarrow 0$$

للفئة $\mathfrak{S}_2$ تكون تامة، وهذا يبين لنا أن المورفيزم $F(u)$ إبيومورفيزم.

٣ - ينتج من (١) و (٢).

مبرهنة ٨-٣-٩.

لتكن $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2$ فئتين تبديليتين، وليكن $F: \mathfrak{S}_1 \rightarrow \mathfrak{S}_2$ دالياً جمعياً. عندئذ الشروط الآتية متكافئة:

١ - الدالي F تام.

٢ - الدالي F ينقل المتتاليات التامة من الفئة $\mathfrak{S}_1$ إلى متتاليات تامة في الفئة $\mathfrak{S}_2$.

البرهان.

(1) $\Leftrightarrow$ (2). ينتج مباشرة من التعريف.

(1) $\Leftrightarrow$ (2). لتكن $A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C$ متتالية تامة من أشياء ومورفيزمات الفئة $\mathfrak{S}_1$.

ولنبرهن على أن متتالية الأشياء والمورفيزمات $F(A) \xrightarrow{F(u)} F(B) \xrightarrow{F(v)} F(C)$ للفئة $\mathfrak{S}_2$ تامة. لنفرض أن المتتالية $A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C$ تامة عندئذ يكون

$\text{Ker}(v) = \text{Im}(u)$. لنأخذ النشر القانوني للمورفيزمين u و v الآتين:

$$A \xrightarrow{\lambda} \text{Coim}(u) \xrightarrow{u} \text{Im}(u) \xrightarrow{\lambda} B$$

$$B \xrightarrow{\mu} \text{Coim}(v) \xrightarrow{v} \text{Im}(v) \xrightarrow{\mu} C$$

حيث μ, λ الإبيومورفيزمات القانونية، μ, λ المونومورفيزمات القانونية.

بما أن λ مونومورفيزم، فإن المتتالية $0 \rightarrow \text{Im}(u) \xrightarrow{\lambda} B$ تامة. أيضاً بما أن μ

إبيومورفيزم، فإن المتتالية $0 \rightarrow \text{Im}(v) \xrightarrow{\mu} C$ تامة. وحسب التمهيدية (٨-٢-٢)؛

فإن $\text{Ker}(\mu) = \text{Ker}(\text{Coker}(\lambda)) = \text{Im}(\lambda)$ ؛ ومنه نجد أن المتتالية:

$$0 \rightarrow \text{Im}(u) \xrightarrow{\lambda} B \xrightarrow{\mu} \text{Coim}(v) \rightarrow 0$$

تامة، وحسب الفرض تكون المتتالية الآتية:

$$0 \rightarrow F(\text{Im}(u)) \xrightarrow{F(\lambda)} F(B) \xrightarrow{F(\mu)} F(\text{Coim}(v)) \rightarrow 0$$

تامة. من جهة أخرى، بما أن $\lambda: \text{Im}(u) = \text{Ker}(v) \rightarrow B$ المونومورفيزم القانوني، وإن $v \cdot u = 0$ ، فإنه يوجد مورفيزم $u': A \rightarrow \text{Ker}(v)$ يحقق $u' \cdot \lambda = u$ وإن u' إبيومورفيزم.

$$\begin{array}{ccccc} u' & & \text{Ker}(v) & & \\ & \nearrow & \downarrow \lambda & & \\ A & \xrightarrow{u} & B & \xrightarrow{v} & C \end{array}$$

أيضاً بما أن $\mu: B \rightarrow \text{Coim}(v) = \text{Coker}(u)$ الإبيومورفيزم القانوني وإن $v \cdot u = 0$ ، فإنه:

$$\begin{array}{ccccc} v' & & \text{Coker}(u) & & \\ & \nwarrow & \uparrow \mu & & \\ C & \xleftarrow{v} & B & \xleftarrow{u} & A \end{array}$$

يوجد مورفيزم وحيد $v': \text{Coker}(u) \rightarrow C$ يحقق $v' \cdot \mu = v$ وإن v' إبيومورفيزم. حسب التمهيدية (٨-٣-٨)، ولكون الدالي F تاماً ومباشراً يكون $F(u) = F(\lambda) \cdot F(u')$ ؛ وإن $F(u')$ إبيومورفيزم للفئة $\mathfrak{S}_2$ ، كما أن $F(v) = F(v') \cdot F(\mu)$ ، وإن $F(v')$ مونومورفيزم للفئة $\mathfrak{S}_2$. ومنه نجد أن $\text{Im}(F(\lambda)) = \text{Im}(F(u))$ وإن $\text{Ker}(F(v)) = \text{Ker}(F(\mu))$ وبالتالي يكون $\text{Im}(F(\lambda)) = \text{Ker}(F(\mu))$ ، وهذا يبين أن $\text{Im}(F(u)) = \text{Ker}(F(v))$ وهكذا نجد أن المتتالية $F(A) \xrightarrow{F(u)} F(B) \xrightarrow{F(v)} F(C)$ للفئة $\mathfrak{S}_2$ تامة.

تمهيدية ٨-٣-١٠.

لتكن $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2$ فئتين تبدليتين، وليكن $F: \mathfrak{S}_1 \rightarrow \mathfrak{S}_2$ دالياً جمعياً مباشراً، ولنفرض أن $u: A \rightarrow B$ مورفيزم للفئة $\mathfrak{S}_1$. عندئذ:

١ - إذا كان الدالي F تاماً من اليسار، وكان u مونومورفيزماً، فإن $F(u)$ مونومورفيزم.

٢ - إذا كان الدالي F تاماً من اليمين، وكان u إبيومورفيزماً، فإن $F(u)$ إبيومورفيزم.

البرهان.

١ - لنفرض أن u إبيومورفيزم للفئة $\mathfrak{S}_1$ ، وإن الدالي F تام من اليسار، ولنفرض أيضاً

أن $(B', j) = \text{Coker}(u)$ عندئذ تكون المتتالية الآتية $0 \rightarrow A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{j} B' \rightarrow 0$ للفتة $\mathfrak{S}_1$ تامة، لأن $\text{Ker}(j) = \text{Ker}(\text{Coker}(u)) = \text{Im}(u)$ وحسب الفرض تكون المتتالية الآتية $0 \rightarrow F(A) \xrightarrow{F(u)} F(B) \xrightarrow{F(j)} F(B') \rightarrow 0$ للفتة $\mathfrak{S}_2$ تامة، وهذا يبين لنا أن المورفيزم $F(u)$ مونومورفيزم.

٢ - لنفرض أن u إبيومورفيزم للفتة $\mathfrak{S}_1$ ، وإن الدالي F تام من اليمين، ولنفرض أيضاً أن $(A', i) = \text{Ker}(u)$ عندئذ تكون المتتالية الآتية $0 \rightarrow A' \xrightarrow{i} A \xrightarrow{u} B \rightarrow 0$ للفتة $\mathfrak{S}_1$ تامة، لأن $\text{Im}(i) = \text{Ker}(\text{Coker}(i)) = \text{Ker}(u)$ وحسب الفرض تكون المتتالية الآتية $0 \rightarrow F(A') \xrightarrow{F(i)} F(A) \xrightarrow{F(u)} F(B) \rightarrow 0$ للفتة $\mathfrak{S}_2$ تكون تامة، وهذا يبين لنا أن المورفيزم $F(u)$ إبيومورفيزم.

تمهيدية ٨-٣-١١.

لتكن $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2$ فئتين تبديليتين، وليكن $F: \mathfrak{S}_1 \rightarrow \mathfrak{S}_2$ دالياً جمعياً مباشراً وتاماً من اليسار، عندئذ الدالي F ينقل المتتاليات التامة من الشكل $0 \rightarrow A' \xrightarrow{u} A \xrightarrow{v} A''$ إلى متتاليات تامة في الفتة $\mathfrak{S}_2$.

البرهان.

لنفرض أن $0 \rightarrow A' \xrightarrow{u} A \xrightarrow{v} A''$ متتالية تامة للفتة $\mathfrak{S}_1$ عندئذ $\text{Im}(u) = \text{Ker}(v)$ لنأخذ النشر القانوني للمورفيزمات u, v :

$$A' \xrightarrow{i_1} \text{Coim}(u) \xrightarrow{\bar{u}} \text{Im}(u) \xrightarrow{u} A$$

$$A \xrightarrow{j} \text{Coim}(v) \xrightarrow{v} \text{Im}(v) \xrightarrow{i_2} A''$$

حيث λ, λ_1 الإبيومورفيزمات القانونية، μ, μ_1 المونومورفيزمات القانونية. عندئذ نحصل على المتتالية التامة في الفتة $\mathfrak{S}_1$ الآتية: $0 \rightarrow \text{Im}(u) \xrightarrow{\mu} A \xrightarrow{j} \text{Coim}(v) \rightarrow 0$ وذلك لأن μ مونومورفيزم و λ إبيومورفيزم، وإن $\text{Im}(\mu) = \text{Ker}(\text{Coker}(\mu)) = \text{Ker}(\lambda)$ وحسب الفرض تكون المتتالية:

$$0 \rightarrow F(\text{Im}(u)) \xrightarrow{F(\mu)} F(A) \xrightarrow{F(j)} F(\text{Coim}(v))$$

للفتة $\mathfrak{S}_2$ تامة. من جهة أخرى، بما أن $\mu: \text{Im}(u) = \text{Ker}(v) \rightarrow A$ المونومورفيزم

القانوني وإن $v \cdot u = 0$ ، فإنه يوجد مورفيزم وحيد $u' : A' \rightarrow \text{Ker}(v)$ ، يحقق $\mu \cdot u' = u$ وإن:

$$\begin{array}{ccccc} u' & & \text{Ker}(v) & & \\ & \nearrow & \downarrow \mu & & \\ A' & \xrightarrow{u} & A & \xrightarrow{v} & A'' \end{array}$$

u' إبيومورفيزماً. أيضاً بما أن $\lambda : A \rightarrow \text{Coim}(v) = \text{Coker}(u)$ الإبيومورفيزم القانوني وإن $v \cdot u = 0$ فإنه يوجد مورفيزم وحيد $v' : \text{Coker}(u) \rightarrow A''$ يحقق $v' \cdot \lambda = v$ وإن $v' :$

$$\begin{array}{ccccc} v' & & \text{Coker}(u) & & \\ & \nearrow & \uparrow \lambda & & \\ A'' & \xleftarrow{v'} & A & \xleftarrow{u} & A' \end{array}$$

مونومورفيزم. ولما كان الدالي F تاماً ومباشراً نجد $F(u) = F(\mu) \cdot F(u')$ ، كما أن $F(v) = F(v') \cdot F(\lambda)$. وبما أن u مونومورفيزم فإنه حسب التمهيدية (٨-٣-١٠) يكون $F(u)$ مونومورفيزماً للفئة $\mathfrak{S}_2$ ؛ وبالتالي تكون المتتالية $0 \rightarrow F(A') \xrightarrow{F(u)} F(A) \xrightarrow{F(v)} F(A'')$ تامة. كما أن $\text{Im}(F(\mu)) = \text{Im}(F(u))$ وإن $\text{Ker}(F(v)) = \text{Ker}(F(\lambda))$ ؛ وبالتالي يكون $\text{Im}(F(\mu)) = \text{Ker}(F(\lambda))$ ، وهكذا نجد أن:

$$F(A'') \xrightarrow{F(u)} F(A) \xrightarrow{F(v)} F(A'')$$

متتالية تامة للفئة $\mathfrak{S}_2$ وبالتالي $0 \rightarrow F(A'') \xrightarrow{F(u)} F(A) \xrightarrow{F(v)} F(A'')$ تكون متتالية تامة.

تمهيدية ٨-٣-١٢.

لتكن $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2$ فئتين تبديليتين، وليكن $F : \mathfrak{S}_1 \rightarrow \mathfrak{S}_2$ دالياً جمعياً مباشراً وتاماً من اليمين، عندئذ الدالي F ينقل المتتاليات التامة من الشكل $A' \xrightarrow{u} A \xrightarrow{v} A'' \rightarrow 0$ للفئة $\mathfrak{S}_1$ إلى متتاليات تامة في الفئة $\mathfrak{S}_2$.
البرهان.

لنفرض أن $A' \xrightarrow{u} A \xrightarrow{v} A'' \rightarrow 0$ متتالية تامة للفئة $\mathfrak{S}_1$ عندئذ $\text{Im}(u) = \text{Ker}(v)$. لنأخذ النشر القانوني للمورفيزمات u, v :

$$A' \xrightarrow{u} \text{Coim}(u) \xrightarrow{u} \text{Im}(u) \xrightarrow{u} A$$

$$A \xrightarrow{\lambda} \text{Coim}(v) \xrightarrow{\gamma} \text{Im}(v) \xrightarrow{\mu} A''$$

حيث λ, λ_1 الإبيومورفيزمات القانونية، μ, μ_1 المونومورفيزمات القانونية، فنحصل على المتتالية التامة في الفئة $\mathfrak{S}_1$ الآتية $0 \rightarrow \text{Im}(u) \xrightarrow{\mu} A \xrightarrow{\lambda} \text{Coim}(v) \rightarrow 0$ وذلك لأن μ مونومورفيزم و λ إبيومورفيزم، وإن $\text{Im}(\mu) = \text{Ker}(\text{Coker}(\mu)) = \text{Ker}(\lambda)$ وحسب الفرض تكون المتتالية:

$$F(\text{Im}(u)) \xrightarrow{F(\mu)} F(A) \xrightarrow{F(\lambda)} F(\text{Coim}(v)) \rightarrow 0$$

للفئة $\mathfrak{S}_2$ تامة. من جهة أخرى، بما أن $\mu: \text{Im}(u) = \text{Ker}(v) \rightarrow A$ المونومورفيزم القانوني، وإن $v \cdot u = 0$ فإنه يوجد مورفيزم وحيد $u': A' \rightarrow \text{Ker}(v)$ يحقق $u' \cdot u = u$ وإن u' إبيومورفيزم. أيضاً بما أن $\lambda: A \rightarrow \text{Coim}(v) = \text{Coker}(u)$ الإبيومورفيزم القانوني، وإن $v \cdot u = 0$ فإنه يوجد مورفيزم وحيد $v': \text{Coker}(u) \rightarrow A''$ يحقق $v' \cdot \lambda = v$ وإن v' مونومورفيزم. ولما كان الدالي F تاماً ومباشراً نجد:

$$F(v) = F(v') \cdot F(\lambda), \quad F(u) = F(\mu) \cdot F(u')$$

وبما أن v إبيومورفيزم، فإنه حسب التمهيدية (٨-٣-١٠) يكون $F(v)$ إبيومورفيزماً للفئة $\mathfrak{S}_2$ ، وبالتالي تكون المتتالية $0 \rightarrow F(A) \xrightarrow{F(v)} F(A'') \rightarrow 0$ تامة. كما أن:

$$\text{Ker}(F(v)) = \text{Ker}(F(\lambda)) \quad \text{و} \quad \text{Im}(F(\mu)) = \text{Im}(F(u))$$

ومنه $\text{Im}(F(\mu)) = \text{Ker}(F(\lambda))$ وهكذا فإن $F(A'') \xrightarrow{F(u)} F(A) \xrightarrow{F(v)} F(A'') \rightarrow 0$ متتالية تامة للفئة $\mathfrak{S}_2$ ؛ وبالتالي $0 \rightarrow F(A'') \xrightarrow{F(v)} F(A) \xrightarrow{F(v)} F(A'') \rightarrow 0$ تكون متتالية تامة.

مبرهنة ٨-٣-١٣.

لتكن $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2$ فئتين تبدليتين، وليكن دالياً $F: \mathfrak{S}_1 \rightarrow \mathfrak{S}_2$ دالياً جمعياً و $G: \mathfrak{S}_2 \rightarrow \mathfrak{S}_1$ دالياً جمعياً مرافقاً للدالي F . عندئذ:

١ - الدالي F تام من اليمين.

٢ - الدالي G تام من اليسار.

البرهان.

١ - لنفرض أن $0 \rightarrow A' \rightarrow A \rightarrow A'' \rightarrow 0$ متتالية تامة من أشياء ومورفيزمات الفئة $\mathfrak{S}_1$.

وليكن $Y \in ob(\mathfrak{S}_2)$ عندئذ $G(Y) \in ob(\mathfrak{S}_1)$ وحسب التمهيدية (٨-٣-٤) تكون متتالية الزمر والتشاكلات الزمرية الآتية:

$$0 \rightarrow \mathfrak{S}_1(A'', G(Y)) \rightarrow \mathfrak{S}_1(A, G(Y)) \rightarrow \mathfrak{S}_1(A', G(Y))$$

تامة، وبما أن الدالي G مرافق للدالي F ، فإنه يوجد إيزومورفيزم دالي:

$$\varphi: Hom_{\mathfrak{S}_2}(F) \rightarrow Hom_{\mathfrak{S}_1}(G)$$

وهذا يبين أن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \mathfrak{S}_1(A'', G(Y)) & \rightarrow & \mathfrak{S}_1(A, G(Y)) & \rightarrow & \mathfrak{S}_1(A', G(Y)) \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \rightarrow & \mathfrak{S}_2(F(A''), Y) & \rightarrow & \mathfrak{S}_2(F(A), Y) & \rightarrow & \mathfrak{S}_2(F(A'), Y) \end{array}$$

تبديلي، حيث إن الأعمدة فيه إيزومورفيزمات. وهكذا تكون المتتالية الآتية:

$$0 \rightarrow \mathfrak{S}_2(F(A''), Y) \rightarrow \mathfrak{S}_2(F(A), Y) \rightarrow \mathfrak{S}_2(F(A'), Y)$$

تامة، وحسب التمهيدية (٨-٣-٤) تكون المتتالية الآتية:

$$F(A') \rightarrow F(A) \rightarrow F(A'') \rightarrow 0$$

تامة، أي إن الدالي F تام من اليمين.

٢ - لنفرض أن $0 \rightarrow B' \rightarrow B \rightarrow B'' \rightarrow 0$ متتالية تامة من أشياء ومورفيزمات الفئة $\mathfrak{S}_2$ وليكن $X \in ob(\mathfrak{S}_1)$ عندئذ $F(X) \in ob(\mathfrak{S}_2)$ وحسب التمهيدية (٨-٣-٤) تكون متتالية الزمر، والتشاكلات الزمرية الآتية:

$$0 \rightarrow \mathfrak{S}_2(F(X), B') \rightarrow \mathfrak{S}_2(F(X), B) \rightarrow \mathfrak{S}_2(F(X), B'')$$

تامة، وبما أن الدالي G مرافق للدالي F فإنه يوجد إيزومورفيزم دالي:

$$\varphi: Hom_{\mathfrak{S}_2}(F) \rightarrow Hom_{\mathfrak{S}_1}(G)$$

وهذا يبين أن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \mathfrak{S}_2(F(X), B') & \rightarrow & \mathfrak{S}_2(F(X), B) & \rightarrow & \mathfrak{S}_2(F(X), B'') \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & \mathfrak{S}_1(X, G(B')) & \rightarrow & \mathfrak{S}_1(X, G(B)) & \rightarrow & \mathfrak{S}_1(X, G(B'')) \end{array}$$

تبديلي، حيث إن الأعمدة فيه إيزومورفيزمات. وهكذا تكون المتتالية الآتية:

$$0 \rightarrow \mathfrak{S}_1(X, G(B')) \rightarrow \mathfrak{S}_1(X, G(B)) \rightarrow \mathfrak{S}_1(X, G(B''))$$

تامة، وحسب التمهيدية (٨-٣-٣) تكون المتتالية الآتية:

$$0 \rightarrow G(B') \rightarrow G(B) \rightarrow G(B'')$$

تامة، أي إن الدالي G تام من اليسار. ◻



تمارين محلولة (٨)

١ - لتكن $\mathfrak{I}$ فئة تبديلية، ولتكن $\mathfrak{I}_1$ الفئة المعرفة في التمهيدية (٨-١-٢). إذا كانت الفئة $\mathfrak{I}_1$ تبديلية، عندئذ يكون الدالي $\text{Ker} : \mathfrak{I}_1 \longrightarrow \mathfrak{I}_1$ جمعياً.

الحل.

وجدنا حسب المبرهنة (٨-١-٤) أن $\text{Ker} : \mathfrak{I}_1 \longrightarrow \mathfrak{I}_1$ دالي مباشر. ليكن

$$(\alpha, \beta), (\alpha_1, \beta_1) : (u : A \rightarrow B) \rightarrow (u_1 : A_1 \rightarrow B_1)$$

مورفيزمين للفئة $\mathfrak{I}_1$ ولنبرهن على أن:

$$\text{Ker} ((\alpha, \beta) + (\alpha_1, \beta_1)) = \text{Ker} ((\alpha, \beta)) + \text{Ker} ((\alpha_1, \beta_1))$$

بما أن $(\alpha, \beta), (\alpha_1, \beta_1)$ مورفيزمان للفئة $\mathfrak{I}_1$ ، فإن المخططين الآتيين:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & B \\ \alpha \downarrow & (1) & \downarrow \beta \\ A_1 & \xrightarrow{u_1} & B_1 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & B \\ \alpha_1 \downarrow & (2) & \downarrow \beta_1 \\ A_1 & \xrightarrow{u_1} & B_1 \end{array}$$

تبدليان، أي إن $\beta \cdot u = u_1 \cdot \alpha$ ، $\beta_1 \cdot u_1 = u_1 \cdot \alpha_1$ ، ومنه يكون المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & B \\ \alpha + \alpha_1 \downarrow & (3) & \downarrow \beta + \beta_1 \\ A_1 & \xrightarrow{u_1} & B_1 \end{array}$$

تبدلياً؛ لأن $(\beta + \beta_1) \cdot u = \beta \cdot u + \beta_1 \cdot u = u_1 \cdot \alpha + u_1 \cdot \alpha_1 = u_1 \cdot (\alpha + \alpha_1)$ وحسب التمهيدية (٨-١-٣) فإنه:

- لأجل المخطط (١) يوجد مورفيزم وحيد $\bar{\alpha} : \text{Ker}(u) \rightarrow \text{Ker}(u_1)$ للفئة $\mathfrak{I}$ لأجله المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccccc} \text{Ker}(u) & \xrightarrow{i} & A & \xrightarrow{u} & B \\ \bar{\alpha} \downarrow & & \alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\ \text{Ker}(u_1) & \xrightarrow{i_1} & A_1 & \xrightarrow{u_1} & B_1 \end{array}$$

تبدلي، أي إن $\beta \cdot u = u_1 \cdot \alpha$ ، $\beta_1 \cdot u_1 = u_1 \cdot \alpha_1$ ، $\alpha \cdot i = i_1 \cdot \bar{\alpha}$ ،

- لأجل المخطط (٢) يوجد مورفيزم وحيد $\bar{\alpha}_1 : \text{Ker}(u) \rightarrow \text{Ker}(u_1)$ للفئة $\mathfrak{I}$ لأجله المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccccc} \text{Ker}(u) & \xrightarrow{i} & A & \xrightarrow{u} & B \\ \alpha_1 \downarrow & & \alpha_1 \downarrow & & \downarrow \beta_1 \\ \text{Ker}(u_1) & \xrightarrow{i_1} & A_1 & \xrightarrow{u_1} & B_1 \end{array}$$

تبديلي، أي إن $\alpha_1 \cdot i = i_1 \cdot \overline{\alpha_1}$ ، $\beta_1 \cdot u = u_1 \cdot \alpha_1$

- لأجل المخطط (٣) يوجد مورفيزم وحيد $\overline{\alpha_1} : \text{Ker}(u) \rightarrow \text{Ker}(u_1)$ للفئة $\mathfrak{S}$ لأجله المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccccc} \text{Ker}(u) & \xrightarrow{i} & A & \xrightarrow{u} & B \\ \overline{\alpha + \alpha_1} \downarrow & & \alpha + \alpha_1 \downarrow & & \downarrow \beta + \beta_1 \\ \text{Ker}(u_1) & \xrightarrow{i_1} & A_1 & \xrightarrow{u_1} & B_1 \end{array}$$

تبديلي، أي إن $(\alpha + \alpha_1) \cdot i = i_1 \cdot (\overline{\alpha + \alpha_1})$ ، $(\beta + \beta_1) \cdot u = u_1 \cdot (\alpha + \alpha_1)$ ، ومنه نجد أن

$$i_1 \cdot (\overline{\alpha + \alpha_1}) = (\alpha + \alpha_1) \cdot i = \alpha \cdot i + \alpha_1 \cdot i = i_1 \cdot \overline{\alpha} + i_1 \cdot \overline{\alpha_1} = i_1 \cdot (\overline{\alpha} + \overline{\alpha_1})$$

وبما أن المورفيزم i_1 مونومورفيزم نجد أن $\overline{\alpha + \alpha_1} = \overline{\alpha} + \overline{\alpha_1}$ ؛ وبالتالي يكون:

$$\begin{aligned} \text{Ker}((\alpha, \beta) + (\alpha_1, \beta_1)) &= \text{Ker}((\alpha + \alpha_1, \beta + \beta_1)) = \overline{(\alpha + \alpha_1, \beta + \beta_1)} = \\ &= (\overline{\alpha} + \overline{\alpha_1}, \beta + \beta_1) = (\overline{\alpha}, \beta) + (\overline{\alpha_1}, \beta_1) = \text{Ker}((\alpha, \beta)) + \text{Ker}((\alpha_1, \beta_1)) \end{aligned}$$

وهذا يبين أن الدالي Ker جمعي.

٢ - لتكن $\mathfrak{S}$ فئة تبديلية، ولتكن $\mathfrak{S}_1$ الفئة المعرفة في التمهيدية (٨-١-٢). إذا كانت

الفئة $\mathfrak{S}_1$ تبديلية، عندئذ يكون الدالي $\text{Coker} : \mathfrak{S}_1 \longrightarrow \mathfrak{S}_1$ جمعيًا.

الحل.

وجدنا حسب المبرهنة (٨-١-٦) أن $\text{Coker} : \mathfrak{S}_1 \longrightarrow \mathfrak{S}_1$ دالي مباشر. ليكن:

$$(\alpha, \beta), (\alpha_1, \beta_1) : (u : A \rightarrow B) \rightarrow (u_1 : A_1 \rightarrow B_1)$$

مورفيزمين للفئة $\mathfrak{S}_1$ ولنبرهن على أن:

$$\text{Coker}((\alpha, \beta) + (\alpha_1, \beta_1)) = \text{Coker}((\alpha, \beta)) + \text{Coker}((\alpha_1, \beta_1))$$

بما أن $(\alpha, \beta), (\alpha_1, \beta_1)$ مورفيزمان للفئة $\mathfrak{S}_1$ ، فإن المخططين الآتيين:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & B \\ \alpha \downarrow & (1) & \downarrow \beta \\ A_1 & \xrightarrow{u_1} & B_1 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & B \\ \alpha_1 \downarrow & (2) & \downarrow \beta_1 \\ A_1 & \xrightarrow{u_1} & B_1 \end{array}$$

تبدليان، أي إن $\beta \cdot u = u_1 \cdot \alpha$ ، $\beta_1 \cdot u = u_1 \cdot \alpha_1$ ، ومنه يكون المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & B \\ \alpha + \alpha_1 \downarrow & (3) & \downarrow \beta + \beta_1 \\ A_1 & \xrightarrow{u_1} & B_1 \end{array}$$

تبدلياً؛ لأن $(\beta + \beta_1) \cdot u = \beta \cdot u + \beta_1 \cdot u = u_1 \cdot \alpha + u_1 \cdot \alpha_1 = u_1 \cdot (\alpha + \alpha_1)$ وحسب التمثيلية (٨-١-٥)، فإنه:

- لأجل المخطط (١) يوجد مورفيزم وحيد $\bar{\beta}: \text{Coker}(u) \rightarrow \text{Coker}(u_1)$ للفئة $\mathfrak{S}$ لأجله المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{u} & B & \xrightarrow{j} & \text{Coker}(u) \\ \alpha \downarrow & & \beta \downarrow & & \downarrow \bar{\beta} \\ A_1 & \xrightarrow{u_1} & B_1 & \xrightarrow{j_1} & \text{Coker}(u_1) \end{array}$$

تبدلياً، أي إن $\bar{\beta} \cdot j = j_1 \cdot \beta$, $\beta \cdot u = u_1 \cdot \alpha$

- لأجل المخطط (٢) يوجد مورفيزم وحيد $\bar{\beta}_1: \text{Coker}(u) \rightarrow \text{Coker}(u_1)$ للفئة $\mathfrak{S}$ لأجله المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{u} & B & \xrightarrow{j} & \text{Coker}(u) \\ \alpha \downarrow & & \beta \downarrow & & \downarrow \bar{\beta}_1 \\ A_1 & \xrightarrow{u_1} & B_1 & \xrightarrow{j_1} & \text{Coker}(u_1) \end{array}$$

تبدلياً، أي إن $\bar{\beta}_1 \cdot j = j_1 \cdot \beta$, $\beta \cdot u = u_1 \cdot \alpha$

- لأجل المخطط (٣) يوجد مورفيزم وحيد $\overline{\beta + \beta_1}: \text{Coker}(u) \rightarrow \text{Coker}(u_1)$ للفئة $\mathfrak{S}$ لأجله المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{u} & B & \xrightarrow{j} & \text{Coker}(u) \\ \alpha + \alpha_1 \downarrow & & \beta + \beta_1 \downarrow & & \downarrow \overline{\beta + \beta_1} \\ A_1 & \xrightarrow{u_1} & B_1 & \xrightarrow{j_1} & \text{Coker}(u_1) \end{array}$$

تبدلياً، أي إن $\overline{(\beta + \beta_1)} \cdot j = j_1 \cdot (\beta + \beta_1)$, $(\beta + \beta_1) \cdot u = u_1 \cdot (\alpha + \alpha_1)$ ومنه نجد أن:

$$\overline{(\beta + \beta_1)} \cdot j = j_1 \cdot (\beta + \beta_1) = j_1 \cdot \beta + j_1 \cdot \beta_1 = \bar{\beta} \cdot j + \bar{\beta}_1 \cdot j = (\bar{\beta} + \bar{\beta}_1) \cdot j$$

وبما أن المورفيزم j إبيومورفيزم نجد أن $\bar{\beta} + \bar{\beta}_1 = \overline{\beta + \beta_1}$ وبالتالي يكون:

$$\begin{aligned} \text{Coker}((\alpha, \beta) + (\alpha_1, \beta_1)) &= \text{Coker}((\alpha + \alpha_1, \beta + \beta_1)) = (\beta + \beta_1, \overline{\beta + \beta_1}) = \\ &= (\beta + \beta_1, \bar{\beta} + \bar{\beta}_1) = (\beta, \bar{\beta}) + (\beta_1, \bar{\beta}_1) = \text{Coker}((\alpha, \beta)) + \text{Coker}((\alpha_1, \beta_1)) \end{aligned}$$

وهذا يبين أن الدالي Coker جمعي.

٣ - لنكن فئة تبديلية، ولنكن الفئة المعرفة في التمهيدية (٨-١-٢). إذا كانت الفئة $\mathcal{T}_1$ تبديلية، عندئذ يكون الدالي $\text{Im} : \mathcal{T}_1 \longrightarrow \mathcal{T}_1$ جمعيًا.

الحل.

وجدنا حسب المبرهنة (٨-١-٨) أن $\text{Im} : \mathcal{T}_1 \longrightarrow \mathcal{T}_1$ دالي مباشر. ليكن:

$$(\alpha, \beta), (\alpha_1, \beta_1) : (u : A \rightarrow B) \rightarrow (u_1 : A_1 \rightarrow B_1)$$

مورفيزمين للفئة $\mathcal{T}_1$ ولنبرهن على أن:

$$\text{Im}((\alpha, \beta) + (\alpha_1, \beta_1)) = \text{Im}((\alpha, \beta)) + \text{Im}((\alpha_1, \beta_1))$$

بما أن $(\alpha, \beta), (\alpha_1, \beta_1)$ مورفيزمان للفئة $\mathcal{T}_1$ ، فإن المخططين الآتيين:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & B \\ \alpha \downarrow & (1) & \downarrow \beta \\ A_1 & \xrightarrow{u_1} & B_1 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & B \\ \alpha_1 \downarrow & (2) & \downarrow \beta_1 \\ A_1 & \xrightarrow{u_1} & B_1 \end{array}$$

تبدليان، أي إن $\beta \cdot u = u_1 \cdot \alpha$ ، $\beta_1 \cdot u_1 = u_1 \cdot \alpha_1$ ومنه يكون المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & B \\ \alpha + \alpha_1 \downarrow & (3) & \downarrow \beta + \beta_1 \\ A_1 & \xrightarrow{u_1} & B_1 \end{array}$$

تبدلياً، لأن $(\beta + \beta_1) \cdot u = \beta \cdot u + \beta_1 \cdot u = u_1 \cdot \alpha + u_1 \cdot \alpha_1 = u_1 \cdot (\alpha + \alpha_1)$ وحسب التمهيدية (٨-١-٧)، فإنه:

- لأجل المخطط (١) يوجد مورفيزم وحيد $\beta' : \text{Im}(u) \rightarrow \text{Im}(u_1)$ للفئة $\mathcal{T}$ لأجله المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} \text{Im}(u) & \xrightarrow{\mu} & B \\ \beta' \downarrow & & \downarrow \beta \\ \text{Im}(u_1) & \xrightarrow{\mu_1} & B_1 \end{array}$$

تبدلي، أي إن $\beta \cdot \mu = \mu_1 \cdot \beta'$

- لأجل المخطط (٢) يوجد مورفيزم وحيد $\beta'' : \text{Im}(u) \rightarrow \text{Im}(u_1)$ للفئة $\mathcal{T}$ لأجله المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} \text{Im}(u) & \xrightarrow{\mu} & B \\ \beta'' \downarrow & & \downarrow \beta_1 \\ \text{Im}(u_1) & \xrightarrow{\mu_1} & B_1 \end{array}$$

تبديلي، أي إن $\beta_1 \cdot \mu = \mu_1 \cdot \beta''$.

- لأجل المخطط (٣) يوجد مورفيزم وحيد $\bar{\beta}: \text{Im}(u) \rightarrow \text{Im}(u_1)$ للفئة $\mathfrak{S}$ لأجله المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} \text{Im}(u) & \xrightarrow{\mu} & B \\ \bar{\beta} \downarrow & & \downarrow \beta + \beta_1 \\ \text{Im}(u_1) & \xrightarrow{\mu_1} & B_1 \end{array}$$

تبديلي، أي إن $(\beta + \beta_1) \cdot \mu = \mu_1 \cdot \bar{\beta}$ ومنه نجد أن:

$$\mu_1 \cdot \bar{\beta} = (\beta + \beta_1) \cdot \mu = \beta \cdot \mu + \beta_1 \cdot \mu = \mu_1 \cdot \beta' + \mu_1 \cdot \beta'' = \mu_1 \cdot (\beta' + \beta'')$$

وبما أن المورفيزم μ_1 مونومورفيزماً نجد أن $\bar{\beta} = \beta' + \beta''$ ؛ وبالتالي يكون:

$$\begin{aligned} \text{Im}((\alpha, \beta) + (\alpha_1, \beta_1)) &= \text{Im}((\alpha + \alpha_1, \beta + \beta_1)) = (\bar{\beta}, \beta + \beta_1) = \\ &= (\beta' + \beta'', \beta + \beta_1) = (\beta', \beta) + (\beta'', \beta_1) = \text{Im}((\alpha, \beta)) + \text{Im}((\alpha_1, \beta_1)) \end{aligned}$$

وهذا يبين أن الدالي Im جمعي.

٤ - لنكن $\mathfrak{S}$ فئة تبديلية، ولنكن $\mathfrak{S}_1$ الفئة المعرفة في التمهيدية (٨-١-٢). إذا كانت الفئة $\mathfrak{S}_1$ تبديلية، عندئذ يكون الدالي $\text{Coim}: \mathfrak{S}_1 \longrightarrow \mathfrak{S}_1$ جمعياً.

الحل.

وجدنا حسب المبرهنة (٨-١-١٠) أن $\text{Coim}: \mathfrak{S}_1 \longrightarrow \mathfrak{S}_1$ دالي مباشر. ليكن:

$$(\alpha, \beta), (\alpha_1, \beta_1): (u: A \rightarrow B) \rightarrow (u_1: A_1 \rightarrow B_1)$$

مورفيزمين للفئة $\mathfrak{S}_1$ ولنبرهن على أن:

$$\text{Coim}((\alpha, \beta) + (\alpha_1, \beta_1)) = \text{Coim}((\alpha, \beta)) + \text{Coim}((\alpha_1, \beta_1))$$

بما أن $(\alpha, \beta), (\alpha_1, \beta_1)$ مورفيزمان للفئة $\mathfrak{S}_1$ ، فإن المخططين الآتيين:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & B \\ \alpha \downarrow & (1) & \downarrow \beta \\ A_1 & \xrightarrow{u_1} & B_1 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & B \\ \alpha_1 \downarrow & (2) & \downarrow \beta_1 \\ A_1 & \xrightarrow{u_1} & B_1 \end{array}$$

تبدليان، أي إن $\beta \cdot u = u_1 \cdot \alpha$ ، $\beta_1 \cdot u = u_1 \cdot \alpha_1$ ومنه يكون المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & B \\ \alpha + \alpha_1 \downarrow & (3) & \downarrow \beta + \beta_1 \\ A_1 & \xrightarrow{u_1} & B_1 \end{array}$$

تبدلياً، لأن $(\beta + \beta_1) \cdot u = \beta \cdot u + \beta_1 \cdot u = u_1 \cdot \alpha + u_1 \cdot \alpha_1 = u_1 \cdot (\alpha + \alpha_1)$ وحسب التمهيدية (٨-١-٩) فإنه:

- لأجل المخطط (١) يوجد مورفيزم وحيد $\alpha' : Coim(u) \rightarrow Coim(u_1)$ للفتة $\mathfrak{I}$ لأجله المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\lambda} & Coim(u) \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \alpha' \\ A_1 & \xrightarrow{\lambda_1} & Coim(u_1) \end{array}$$

تبدلي، أي إن $\alpha' \cdot \lambda = \lambda_1 \cdot \alpha$ حيث λ, λ_1 الإبيومورفيزمات القانونية.

- لأجل المخطط (٢) يوجد مورفيزم وحيد $\alpha'' : Coim(u) \rightarrow Coim(u_1)$ للفتة $\mathfrak{I}$ لأجله المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\lambda} & Coim(u) \\ \alpha_1 \downarrow & & \downarrow \alpha'' \\ A_1 & \xrightarrow{\lambda_1} & Coim(u_1) \end{array}$$

تبدلي، أي إن $\alpha'' \cdot \lambda = \lambda_1 \cdot \alpha$

- لأجل المخطط (٣) يوجد مورفيزم وحيد $\bar{\alpha} : Coim(u) \rightarrow Coim(u_1)$ للفتة $\mathfrak{I}$ لأجله المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\lambda} & Coim(u) \\ \alpha + \alpha_1 \downarrow & & \downarrow \bar{\alpha} \\ A_1 & \xrightarrow{\lambda_1} & Coim(u_1) \end{array}$$

تبدلياً، أي إن $\bar{\alpha} \cdot \lambda = \lambda_1 \cdot (\alpha + \alpha_1)$ ومنه نجد أن:

$$\bar{\alpha} \cdot \lambda = \lambda_1 \cdot (\alpha + \alpha_1) = \lambda_1 \cdot \alpha + \lambda_1 \cdot \alpha_1 = \alpha' \cdot \lambda + \alpha'' \cdot \lambda = (\alpha' + \alpha'') \cdot \lambda$$

وبما أن المورفيزم λ إبيومورفيزم نجد أن $\bar{\alpha} = \alpha' + \alpha''$ وبالتالي يكون:

$$\begin{aligned} Coim((\alpha, \beta) + (\alpha_1, \beta_1)) &= Coim((\alpha + \alpha_1, \beta + \beta_1)) = (\alpha + \alpha_1, \bar{\alpha}) = \\ &= (\alpha + \alpha_1, \alpha' + \alpha'') = (\alpha, \alpha') + (\alpha_1, \alpha'') = Coim((\alpha, \beta)) + Coim((\alpha_1, \beta_1)) \end{aligned}$$

وهذا يبين أن الدالي Coim جمعي. و



الفصل التاسع

مبرهنات التماثل في الفئات التبديلية

٩-١. مبرهنات التماثل في الفئات التبديلية.

نعلم أنه في فئة المودولات فوق حلقة واحدة يوجد عدد من المبرهنات المعروفة باسم مبرهنات التماثل "مبرهنة التماثل الأولى والثانية والثالثة". في هذه الفقرة سوف نثبت صحة هذه المبرهنات في الفئات التبديلية.

مبرهنة ٩-١-١.

لتكن $\mathcal{T}$ فئة تبديلية و $A \in ob(\mathcal{T})$. لنفرض أن A_1, A_2 أشياء جزئية في A وإن $i_1: A_1 \rightarrow A, i_2: A_2 \rightarrow A$ المونومورفيزمات القانونية وإن $i: A_1 \rightarrow A_2$ مونومورفيزم للفئة $\mathcal{T}$ يحقق $i_2 \cdot i = i_1$ ، وإن $p_1: A \rightarrow A/A_1$ الإيومورفيزم القانوني. عندئذ المتتالية:

$$0 \rightarrow A_1 \xrightarrow{i} A_2 \xrightarrow{\alpha} A/A_1$$

حيث $\alpha = p_1 \cdot i_2$ ، تامة.

البرهان.

بما أن المورفيزم $i: A_1 \rightarrow A_2$ مونومورفيزم، فإن المتتالية $0 \rightarrow A_1 \xrightarrow{i} A_2$ وذلك حسب التمهيدية (٨-٣-١). لنبرهن على أن $Im(i) = Ker(\alpha)$.

لنفرض أن $(Ker(\alpha), \lambda)$ نواة المورفيزم α ، عندئذ $\alpha \cdot \lambda = 0$ وبما أن $\alpha \cdot i = 0$ ، لأن:

$$\begin{array}{ccccc} \delta & & Ker(\alpha) & & \\ & \nearrow & \downarrow \lambda & & \\ A_1 & \xrightarrow{i} & A_2 & \xrightarrow{\alpha} & A/A_1 \end{array}$$

$$\alpha \cdot i = (p_1 \cdot i_2) \cdot i = p_1 \cdot (i_2 \cdot i) = p_1 \cdot i_1 = 0$$

فإنه يوجد مورفيزم وحيد $\delta: A_1 \rightarrow Ker(\alpha)$ يحقق $\delta \cdot i = \lambda$ ولما كان i مونومورفيزماً

فإن δ هو مونومورفيزم، ومنه $A_1 \subset Ker(\alpha)$ ، وبما أن $Im(i) = Ker(Coker(i)) = A_1$

نجد أن $Im(i) \subset Ker(\alpha)$. من جهة أخرى، حسب التمهيدية (٨-٣-٦)، فإن المتتالية:

$$0 \rightarrow A_1 \xrightarrow{i_1} A \xrightarrow{p_1} A/A_1 \rightarrow 0$$

تامة، وحسب المبرهنة (٥-٣-٨) يكون $(A_1, i_1) = \text{Ker}(p_1)$ ؛ وبالتالي فإن $p_1 \cdot i_1 = 0$. لنفرض أن $\theta: \text{Ker}(\alpha) \rightarrow A_2$ المونومورفيزم القانوني، عندئذ فإن $i_2 \cdot \theta: \text{Ker}(\alpha) \rightarrow A$ نجد أن $\alpha \cdot \theta = 0$ وبما أن $p_1 \cdot (i_2 \cdot \theta) = (p_1 \cdot i_2) \cdot \theta = \alpha \cdot \theta = 0$

$$\begin{array}{ccccc} & & A_1 & & \\ & \nearrow w & \downarrow i_1 & & \\ \text{Ker}(\alpha) & \xrightarrow{i_2 \cdot \theta} & A & \xrightarrow{p_1} & A/A_1 \end{array}$$

وحسب تعريف النواة، يوجد مورفيزم وحيد $w: \text{Ker}(\alpha) \rightarrow A_1$ يحقق $i_1 \cdot w = i_2 \cdot \theta$ وبالتالي يكون $i_2 \cdot (i_1 \cdot w) = i_2 \cdot \theta$ ولما كان i_2 مونومورفيزماً نجد أن $i \cdot w = \theta$ وبما أن θ مونومورفيزم يكون w مونومورفيزماً، وهذا يبين أن $\text{Ker}(\alpha) \subset \text{Im}(i)$ ومنه يكون $\text{Ker}(\alpha) = \text{Im}(i)$ وبالتالي تكون المتتالية $A_1 \xrightarrow{i} A_2 \xrightarrow{\alpha} A/A_1$

مبرهنة ٢-١-٩.

لتكن $\mathfrak{I}$ فئة تبديلية، و $B \in \text{ob}(\mathfrak{I})$. لنفرض أن $B_1, B_2 \in Q(B)$ أشياء خارج B ، وإن $p: B_2 \rightarrow B_1$ الإيومورفيزمات القانونية، وإن $p_1: B \rightarrow B_1, p_2: B \rightarrow B_2$ يحقق $\mathfrak{I}$ يحقق $p \cdot p_2 = p_1$ ، وإن $i_1: B \setminus B_1 \rightarrow B$ المونومورفيزم القانوني. عندئذ المتتالية:

$$B \setminus B_1 \xrightarrow{\beta} A_2 \xrightarrow{p} B_1 \rightarrow 0$$

حيث $\beta = p_2 \cdot i_1$ ، تامة.

البرهان.

بما أن المورفيزم p إيومورفيزم، فإن المتتالية $A_2 \xrightarrow{p} B_1 \rightarrow 0$ تامة، وذلك حسب التمييزية (٢-٣-٨). لنبرهن على أن $\text{Im}(\beta) = \text{Ker}(p)$. بما أن i_1 المونومورفيزم القانوني و p_1 الإيومورفيزم القانوني، فإن المتتالية:

$$0 \rightarrow B \setminus B_1 \xrightarrow{i_1} B \xrightarrow{p_1} B_1 \rightarrow 0$$

تامة وإن $p_1 \cdot i_1 = 0$ وذلك حسب التمييزية (٦-٣-٨)؛ ومنه نجد أن:

$$p \cdot \beta = p \cdot (p_2 \cdot i_1) = (p \cdot p_2) \cdot i_1 = p_1 \cdot i_1 = 0$$

لنفرض أن $(\text{Coker}(\beta), \lambda)$ النواة المرافقة للمورفيزم β ، عندئذ $\lambda \cdot \beta = 0$ ، ومنه يوجد:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \text{Coker}(\beta) & & \\
 & \swarrow \mu & \uparrow \lambda & & \\
 B_1 & \xrightarrow{p} & B_2 & \xrightarrow{\beta} & B \setminus B_1
 \end{array}$$

مورفيزم $\mu: \text{Coker}(\beta) \rightarrow B_1$ يحقق $\mu \cdot \lambda = p$ ولما كان p إبيومورفيزماً نجد أن μ إبيومورفيزم؛ وبالتالي يكون $\text{Im}(\beta) = \text{Ker}(\text{Coker}(\beta)) \subset \text{Ker}(p)$ من جهة ثانية، بما أن $\lambda: B_2 \rightarrow \text{Coker}(\beta)$ هو الإبيومورفيزم القانوني، فإن $\lambda \cdot p_2: B \rightarrow \text{Coker}(\beta)$ وأن $(\lambda \cdot p_2) \cdot i_1 = \lambda \cdot (p_2 \cdot i_1) = \lambda \cdot \beta = 0$

وبما أن المتتالية $0 \rightarrow B \setminus B_1 \xrightarrow{i_1} B \xrightarrow{p} B_1 \rightarrow 0$ تامة، فإنه حسب المبرهنة (٨-٥-٣) نجد أن $\text{Coker}(i_1) = (B_1, p_1)$ وحسب تعريف النواة المرافقة، يوجد مورفيزم وحيد:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \beta_1 & & \\
 & \swarrow \mu & \uparrow p_1 & & \\
 \text{Coker}(\beta) & \xleftarrow{\lambda \cdot p_2} & B & \xleftarrow{i_1} & B \setminus B_1
 \end{array}$$

$w: B_1 \rightarrow \text{Coker}(\beta)$ يحقق $w \cdot p_1 = \lambda \cdot p_2$ وحسب الفرض فإن $w \cdot (p \cdot p_2) = \lambda \cdot p_2$ ومنه $(w \cdot p) \cdot p_2 = \lambda \cdot p_2$ ولما كان p_2 إبيومورفيزماً نجد أن $w \cdot p = \lambda$ وبما أن $\lambda \cdot p_2 = \lambda \cdot (p \cdot p_2)$ فإن $\text{Ker}(p) \subset \text{Im}(\beta)$ أي إن $\text{Ker}(p) = \text{Im}(\beta)$ وبالتالي المتتالية المطلوبة تامة.

مبرهنة ٩-١-٣.

لتكن $\mathcal{S}$ فئة تبديلية، و $A \in \text{ob}(\mathcal{S})$. لنفرض أن $A_1, A_2 \in P(A)$ أشياء جزئية في A وإن $i_1: A_1 \rightarrow A, i_2: A_2 \rightarrow A$ المونومورفيزمات القانونية، وإن $i: A_1 \rightarrow A_2$ مونومورفيزم يحقق $i_2 \cdot i = i_1$ ، وإن $p_1: A \rightarrow A/A_1$ و $p_2: A \rightarrow A/A_2$ الإبيومورفيزمات القانونية. فضلاً عن ذلك، لنفرض أن $\alpha: A_2 \rightarrow A/A_1$ مونومورفيزم يحقق $\alpha = p_1 \cdot i_2$. أخيراً لنفرض أن $j: A/A_1 \rightarrow A/A_2$ المورفيزم الوحيد الذي لأجله المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccccc}
 A_1 & \xrightarrow{i_1} & A & \xrightarrow{p_1} & A/A_1 \\
 i \downarrow & & \downarrow I_A & & \downarrow j \\
 A_2 & \xrightarrow{i_2} & A & \xrightarrow{p_2} & A/A_2
 \end{array}$$

تبدلي، عندئذ تكون المتتالية الآتية تكون تامة:

$$0 \rightarrow A_1 \xrightarrow{i} A_2 \xrightarrow{\alpha} A/A_1 \xrightarrow{j} A/A_2 \rightarrow 0$$

البرهان.

أولاً: بما أن $A_1, A_2 \in P(A)$ وأن i_1, i_2 المونومورفيزمات القانونية وأن i مونومورفيزم يحقق $i_2 \cdot i = i_1$ ، وأن $\alpha: A_2 \rightarrow A/A_1$ مونومورفيزم يحقق $\alpha \cdot p_1 = i_2$ ، فإنه حسب المبرهنة (٩-١-١) تكون المتتالية $0 \rightarrow A_1 \xrightarrow{i} A_2 \xrightarrow{\alpha} A/A_1$ تامة. ثانياً: لنضع $B_1 = A/A_1$ ، $B_2 = A/A_2$ ، فيكون $B_1, B_2 \in Q(B)$ ، ويكون أيضاً $p_1: B \rightarrow B_1$ ، $p_2: B \rightarrow B_2$ الإيبومورفيزمات القانونية. بفرض أن $p = j$ نجد أن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{p_1} & B_1 \\ I_B \downarrow & & \downarrow p \\ B & \xrightarrow{p_2} & B_2 \end{array}$$

تبدلي حسب الفرض، لأن $i_2 \cdot i = i_1$ ، أي إن $p_2 = p \cdot p_1$ وبما أن p_2 إيبومورفيزم نجد أن p إيبومورفيزم.

أخيراً. بما أن $B_2 = B/A_2$ ، فإن الشيء الجزئي الناتج عن B_2 هو $A_2 = B/B_2$ ؛ وبالتالي أصبح $\alpha: B/B_2 = A_2 \rightarrow A/A_1 = B_1$ يحقق $\alpha = p_1 \cdot i_2$ ، بفرض أن $\alpha = \beta$ نجد حسب المبرهنة (٩-١-٢) أن المتتالية:

$$A_2 = B/B_2 \xrightarrow{\beta} B_1 = A/A_1 \xrightarrow{p} B_2 = A/A_2 \rightarrow 0$$

تامة، وبالتالي تكون المتتالية الآتية:

$$0 \rightarrow A_1 \xrightarrow{i} A_2 \xrightarrow{\alpha} A/A_1 \xrightarrow{j} A/A_2 \rightarrow 0$$

تامة.

مبرهنة ٩-١-٤: (مبرهنة التماثل الأولى).

لنكن $\mathcal{I}$ فئة تبديلية، و $A \in ob(\mathcal{I})$. لنفرض أن $A_1, A_2 \in P(A)$ أشياء جزئية في A وأن $i_1: A_1 \rightarrow A$ ، $i_2: A_2 \rightarrow A$ المونومورفيزمات القانونية، وأن $i: A_1 \rightarrow A_2$ مونومورفيزم يحقق $i_2 \cdot i = i_1$ ، وأن $p_1: A \rightarrow A/A_1$ و $p_2: A \rightarrow A/A_2$ الإيبومورفيزمات القانونية. فضلاً عن ذلك، لنفرض أن $\alpha: A_2 \rightarrow A/A_1$ مونومورفيزم يحقق $\alpha = p_1 \cdot i_2$. أخيراً لنفرض أن $j: A/A_1 \rightarrow A/A_2$ المورفيزم الوحيد الذي لأجله المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccccc} A_1 & \xrightarrow{i_1} & A & \xrightarrow{p_1} & A/A_1 \\ i \downarrow & & \downarrow I_{A_1} & & \downarrow j \\ A_2 & \xrightarrow{i_2} & A & \xrightarrow{p_2} & A/A_2 \end{array}$$

تبديلي، ولنفرض أن $\rho: A_2/A_1 \rightarrow A/A_1$ المورفيزم الوحيد الذي لأجله المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccccc} A_1 & \xrightarrow{i} & A_2 & \xrightarrow{q} & A_2/A_1 \\ I_{A_1} \downarrow & & \downarrow i_2 & & \downarrow \rho \\ A_1 & \xrightarrow{i_1} & A & \xrightarrow{p_1} & A/A_1 \end{array}$$

تبديلي، حيث q مورفيزم للفئة $\mathcal{S}$ ، عندئذ المتتالية:

$$0 \rightarrow A_2/A_1 \xrightarrow{\rho} A/A_1 \xrightarrow{j} A/A_2 \rightarrow 0$$

تامة.

البرهان.

لدينا حسب المبرهنة (٣-١-٩) أن المتتالية:

$$0 \rightarrow A_1 \xrightarrow{i} A_2 \xrightarrow{\alpha} A/A_1 \xrightarrow{j} A/A_2 \rightarrow 0$$

تامة، ومنه فإن $\text{Ker}(j) = \text{Im}(\alpha)$ ، وإن $j: A/A_1 \rightarrow A/A_2$ إيبومورفيزم، وبالتالي تكون المتتالية $0 \rightarrow A/A_1 \xrightarrow{j} A/A_2 \rightarrow 0$ تامة. من جهة أخرى، بما أن A_2/A_1 هو شيء خارج A_2 ، فإن q إيبومورفيزم، كما أن $\rho \cdot q = p_1 \cdot i_2 = \alpha$ نجد أن:

$$\text{Im}(\alpha) = \text{Ker}(\text{Coker}(\alpha)) = \text{Ker}(\text{Coker}(\rho \cdot q)) = \text{Ker}(\text{Coker}(\rho)) = \text{Im}(\rho)$$

ومنه يكون $\text{Im}(\rho) = \text{Ker}(j)$ وبالتالي المتتالية:

$$A_2/A_1 \xrightarrow{\rho} A/A_1 \xrightarrow{j} A/A_2$$

تامة. أخيراً، لدينا حسب المبرهنة (٣-١-٩) ولكون المتتالية:

$$A_1 \xrightarrow{i} A_2 \xrightarrow{\alpha} A/A_1$$

تامة، فإن $\text{Ker}(\alpha) = \text{Im}(i)$ ؛ ومنه نجد أن:

$$\begin{aligned} A_2/A_1 &= \text{Coker}(i) = \text{Coker}(\text{Ker}(\text{Coker}(i))) = \text{Coker}(\text{Im}(i)) = \\ &= \text{Coker}(\text{Ker}(\alpha)) = \text{Coim}(\alpha) \end{aligned}$$

ومنه فإن $A_2/A_1 = \text{Coim}(\alpha) \cong \text{Im}(\alpha) = \text{Im}(\rho)$ وهذا يبين أن ρ مونومورفيزم، مما

سبق نجد أن المتتالية $0 \rightarrow A_2/A_1 \xrightarrow{\rho} A/A_1 \xrightarrow{j} A/A_2 \rightarrow 0$ تامة. ◊

مبرهنة ٩-١-٥.

لتكن $\mathcal{I}$ فئة تبديلية، ولنفرض أن $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$ مورفيزمان للفئة $\mathcal{I}$. عندئذ:

$$Im(g \cdot f) \subset Im(g)$$

البرهان.

لنأخذ النشر القانوني للمورفيزمين f, g الآتيين:

$$A \xrightarrow{\lambda} Coim(f) \xrightarrow{\bar{f}} Im(f) \xrightarrow{\mu} B$$

$$B \xrightarrow{\lambda_1} Coim(g) \xrightarrow{\bar{g}} Im(g) \xrightarrow{\mu_1} C$$

حيث λ, λ_1 الإبيومورفيزمات القانونية، وإن μ, μ_1 المونومورفيزمات القانونية. عندئذ:

يكون $f = \mu \cdot \bar{f} \cdot \lambda, g = \mu_1 \cdot \bar{g} \cdot \lambda_1$ لنأخذ المورفيزم:

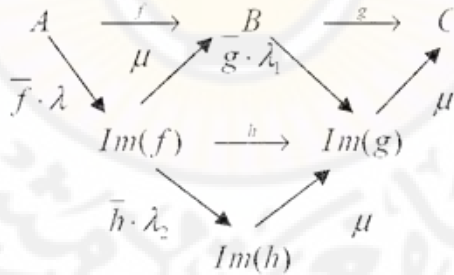
$$Im(f) \xrightarrow{\mu} B \xrightarrow{\lambda_1} Coim(g) \xrightarrow{\bar{g}} Im(g)$$

ولنضع $h = \bar{g} \cdot \lambda_1 \cdot \mu: Im(f) \rightarrow Im(g)$ ، ولنأخذ النشر القانوني للمورفيزم h الآتي:

$$Im(f) \xrightarrow{\lambda_2} Coim(h) \xrightarrow{\bar{h}} Im(h) \xrightarrow{\mu_2} Im(g)$$

حيث λ_2 الإبيومورفيزم القانوني وإن μ_2 المونومورفيزم القانوني فنحصل على المخطط

التبديلي الآتي:



والذي فيه المورفيزم $\bar{h} \cdot \lambda_2 \cdot \bar{f} \cdot \lambda: A \rightarrow Im(h)$ إبيومورفيزم، وإن $\mu_1 \cdot \mu_2: Im(h) \rightarrow C$

مونومورفيزم. ومنه فإن $Im(\bar{h} \cdot \lambda_2 \cdot \bar{f} \cdot \lambda) = Im(h) = Ker(\mu_1 \cdot \mu_2)$ وإن:

$$Im(h) = Ker(\mu_1 \cdot \mu_2) = Ker(\mu_2) \subset Im(g)$$

وهكذا نجد أن $Im(g \cdot h) = Im(h) \subset Im(g)$

لتكن فئة تبديلية، ولنفرض أن:

$$* \begin{cases} 0 \rightarrow B \xrightarrow{\beta} A \xrightarrow{\beta'} B' \\ 0 \rightarrow C \xrightarrow{\gamma} A \xrightarrow{\gamma'} C' \end{cases}$$

متتاليتان من أشياء، ومورفيزمات الفئة $\mathfrak{S}$. إذا كان المورفيزم $\gamma' \cdot \beta$ مونومورفيزماً، عندئذ يكون المورفيزم $\beta' \cdot \gamma$ مونومورفيزماً.

البرهان.

لنفرض أن المتتاليتين (*) تامتان، عندئذ حسب التمهيدية (٨-٣-٣) تكون متتاليتا الزمر والتشاكلات الزمرية الآتيتين:

$$0 \rightarrow \mathfrak{S}(X, B) \xrightarrow{\beta} \mathfrak{S}(X, A) \xrightarrow{\beta'} \mathfrak{S}(X, B')$$

$$0 \rightarrow \mathfrak{S}(X, C) \xrightarrow{\gamma} \mathfrak{S}(X, A) \xrightarrow{\gamma'} \mathfrak{S}(X, C')$$

تامتين، وذلك لأجل كل $X \in ob(\mathfrak{S})$ ، وحيث:

$$\forall w \in \mathfrak{S}(X, B); \bar{\beta}(w) = \beta \cdot w, \quad \forall w \in \mathfrak{S}(X, A); \bar{\beta'}(w) = \beta' \cdot w$$

$$\forall w \in \mathfrak{S}(X, C); \bar{\gamma}(w) = \gamma \cdot w, \quad \forall w \in \mathfrak{S}(X, A); \bar{\gamma'}(w) = \gamma' \cdot w$$

فضلاً عن ذلك، فإن التشاكلين $\bar{\beta}, \bar{\gamma}$ كل منهما متباين، وذلك لأن كلا من المورفيزمين β, γ مونومورفيزم.

لنفرض أن المورفيزم $\gamma' \cdot \beta: B \rightarrow C$ مونومورفيزم، عندئذ حسب التعريف يكون التشاكل $\Gamma: \mathfrak{S}(X, B) \rightarrow \mathfrak{S}(X, C')$ المعروف بالشكل الآتي: أيأ كان $w \in \mathfrak{S}(X, B)$ ، فإن $\Gamma(w) = (\gamma' \cdot \beta) \cdot w$ متباين، ومنه نجد أن:

$$\Gamma(w) = (\gamma' \cdot \beta) \cdot w = \gamma' \cdot (\beta \cdot w) = \bar{\gamma'}(\beta \cdot w) = \bar{\gamma'}(\bar{\beta}(w)) = (\bar{\gamma'} \cdot \bar{\beta})(w)$$

وهذا يبين أن $\Gamma = \bar{\gamma'} \cdot \bar{\beta}$ ، أي إن التشاكل $\bar{\gamma'} \cdot \bar{\beta}$ متباين.

لنبرهن على أن التشاكل $\bar{\beta'} \cdot \bar{\gamma}: \mathfrak{S}(X, C) \rightarrow \mathfrak{S}(X, B')$ متبايناً، ليكن $\delta \in Ker(\bar{\beta'} \cdot \bar{\gamma})$ عندئذ $(\bar{\beta'} \cdot \bar{\gamma})(\delta) = 0$ ؛ ومنه فإن $\bar{\gamma}(\delta) \in Ker(\bar{\beta'}) = Im(\bar{\beta})$ وبالتالي يوجد $\theta \in \mathfrak{S}(X, B)$ بحيث $\bar{\gamma}(\delta) = \bar{\beta}(\theta)$ ، ومنه نجد أن:

$$(\bar{\gamma'} \cdot \bar{\beta})(\theta) = \bar{\gamma'}(\bar{\beta}(\theta)) = \bar{\gamma'}(\bar{\gamma}(\theta)) = (\bar{\gamma'} \cdot \bar{\gamma})(\theta) = 0$$

ومنه نجد أن $\theta \in \text{Ker}(\bar{\gamma}' \cdot \bar{\beta}) = 0$ ، أي إن $\bar{\gamma}(\delta) = \bar{\beta}(0) = 0$ ومنه $\bar{\gamma}(\delta) = \bar{\gamma}(0)$ ولما كان $\bar{\gamma}$ متبايناً نجد أن $\delta = 0$ وهذا يبين أن التشاكل $\bar{\beta}' \cdot \bar{\gamma}$ متباين.

لنبرهن الآن على أن المورفيزم $\beta' \cdot \gamma$ مونومورفيزم.

لدينا $\beta' \cdot \gamma: C \rightarrow B'$ ، أيأ كان $X \in \text{ob}(\mathfrak{S})$ ، لنأخذ التطبيق $\varphi: \mathfrak{S}(X, C) \rightarrow \mathfrak{S}(X, B')$ المعروف بالشكل الآتي: أيأ كان $\zeta \in \mathfrak{S}(X, C)$ ، فإن $\varphi(\zeta) = (\beta' \cdot \gamma) \cdot \zeta$. نلاحظ أن:

$$\varphi(\zeta) = (\beta' \cdot \gamma) \cdot \zeta = \beta' \cdot (\gamma \cdot \zeta) = \bar{\beta}'(\gamma \cdot \zeta) = \bar{\beta}'(\bar{\gamma}(\zeta)) = (\bar{\beta}' \cdot \bar{\gamma})(\zeta)$$

ومنه نجد أن $\varphi = \bar{\beta}' \cdot \bar{\gamma}$ ، ولما كان $\bar{\beta}' \cdot \bar{\gamma}$ متبايناً نجد أن φ متباين، وحسب التعريف يكون المورفيزم $\beta' \cdot \gamma$ مونومورفيزماً.

تمهيدية ٩-١-٧.

لتكن $\mathfrak{S}$ فئة تبديلية، ولنفرض أن:

$$* \left\{ \begin{array}{l} B \xrightarrow{\beta} A \xrightarrow{\beta'} B' \rightarrow 0 \\ C \xrightarrow{\gamma} A \xrightarrow{\gamma'} C' \rightarrow 0 \end{array} \right.$$

متتاليتان من أشياء ومورفيزمات الفئة $\mathfrak{S}$. إذا كان المورفيزم $\beta' \cdot \gamma$ إبيومورفيزماً، عندئذ يكون المورفيزم $\beta' \cdot \gamma$ إبيومورفيزماً.

البرهان.

لنفرض أن المتتاليتين (*) تامتان، عندئذ حسب التمهيدية (٨-٣-٤) تكون متتاليتا الزمر والتشاكلات الزمرية الآتيتين:

$$0 \rightarrow \mathfrak{S}(B', X) \xrightarrow{\beta} \mathfrak{S}(A, X) \xrightarrow{\beta'} \mathfrak{S}(B, X)$$

$$0 \rightarrow \mathfrak{S}(C', X) \xrightarrow{\gamma} \mathfrak{S}(A, X) \xrightarrow{\gamma'} \mathfrak{S}(C, X)$$

تامتين، وذلك لأجل كل $X \in \text{ob}(\mathfrak{S})$ ، وحيث:

$$\forall w \in \mathfrak{S}(B', X); \bar{\beta}'(w) = w \cdot \beta', \quad \forall w \in \mathfrak{S}(A, X); \bar{\beta}(w) = w \cdot \beta$$

$$\forall w \in \mathfrak{S}(C', X); \bar{\gamma}'(w) = w \cdot \gamma', \quad \forall w \in \mathfrak{S}(A, X); \bar{\gamma}(w) = w \cdot \gamma$$

فضلاً عن ذلك، فإن التشاكلين $\bar{\beta}'$ ، $\bar{\gamma}'$ كل منهما متباين، وذلك لأن كلاً من المورفيزمين β' ، γ' إبيومورفيزم.

لنفرض أن المورفيزم $\beta' \cdot \gamma: B \rightarrow C'$ إبيومورفيزم، عندئذ حسب التعريف يكون التشاكل

فإن $\Gamma: \mathfrak{S}(C', X) \rightarrow \mathfrak{S}(B, X)$ المعروف بالشكل الآتي: أيأ كان $w \in \mathfrak{S}(C', X)$ ، فإن $\Gamma(w) = w \cdot (\gamma' \cdot \beta)$ متبايناً وذلك أيأ كان $X \in \text{ob}(\mathfrak{S})$ ، ومنه نجد أن:

$$\Gamma(w) = w \cdot (\gamma' \cdot \beta) = (w \cdot \gamma') \cdot \beta = \bar{\beta}(w \cdot \gamma') = \bar{\beta}(\bar{\gamma}(w)) = (\bar{\beta} \cdot \bar{\gamma})(w)$$

ومنه نجد أن $\Gamma = \bar{\beta} \cdot \bar{\gamma}$ ، أي إن التشاكل $\bar{\beta} \cdot \bar{\gamma}$ متباين.

لنبرهن على أن التشاكل $\bar{\gamma} \cdot \bar{\beta}': \mathfrak{S}(B', X) \rightarrow \mathfrak{S}(C, X)$ متباين. ليكن $\delta \in \text{Ker}(\bar{\gamma} \cdot \bar{\beta}')$ عندئذ $(\bar{\gamma} \cdot \bar{\beta}')(\delta) = 0$ ؛ ومنه فإن $\bar{\beta}'(\delta) \in \text{Ker}(\bar{\gamma}) = \text{Im}(\bar{\gamma})$ وبالتالي يوجد $w \in \mathfrak{S}(C', X)$ بحيث $\bar{\beta}'(\delta) = \bar{\gamma}(w)$ ، ومنه نجد أن:

$$(\bar{\beta} \cdot \bar{\gamma})(w) = \bar{\beta}(\bar{\gamma}(w)) = \bar{\beta}(\bar{\beta}'(\delta)) = (\bar{\beta} \cdot \bar{\beta}')(\delta) = 0$$

ومنه نجد أن $w \in \text{Ker}(\bar{\beta} \cdot \bar{\gamma}) = 0$ ، أي إن $\bar{\beta}'(\delta) = \bar{\gamma}(0) = 0$ ومنه $\bar{\beta}'(\delta) = \bar{\beta}'(0)$ ولما كان $\bar{\beta}'$ متبايناً نجد أن $\delta = 0$ وهذا يبين أن التشاكل $\bar{\gamma} \cdot \bar{\beta}'$ متباين.

أخيراً لنبرهن على أن المورفيزم $\beta' \cdot \gamma$ إبيومورفيزم.

لدينا $\beta' \cdot \gamma: C \rightarrow B'$ ، أيأ كان $X \in \text{ob}(\mathfrak{S})$ ، لنأخذ التشاكل $\psi: \mathfrak{S}(B', X) \rightarrow \mathfrak{S}(C, X)$ المعروف بالشكل الآتي: أيأ كان $\zeta \in \mathfrak{S}(B', X)$ ، فإن $\psi(\zeta) = \zeta \cdot (\beta' \cdot \gamma)$. نلاحظ أن:

$$\psi(\zeta) = \zeta \cdot (\beta' \cdot \gamma) = (\zeta \cdot \beta') \cdot \gamma = \bar{\gamma}(\zeta \cdot \beta') = \bar{\gamma}(\bar{\beta}'(\zeta)) = (\bar{\gamma} \cdot \bar{\beta}')(\zeta)$$

ومنه نجد أن $\varphi = \bar{\gamma} \cdot \bar{\beta}'$ ، ولما كان $\bar{\gamma} \cdot \bar{\beta}'$ متبايناً نجد أن ψ متباين، وحسب التعريف يكون المورفيزم $\beta' \cdot \gamma$ إبيومورفيزماً.

تمهيدية ٩-١-٨.

لتكن $\mathfrak{S}$ فئة تبديلية، ولنفرض أن:

$$* \left\{ \begin{array}{l} 0 \rightarrow B \xrightarrow{\beta} A \xrightarrow{\beta'} B' \rightarrow 0 \\ 0 \rightarrow C \xrightarrow{\gamma} A \xrightarrow{\gamma'} C' \rightarrow 0 \end{array} \right.$$

متتاليتان من أشياء ومورفيزمات الفئة $\mathfrak{S}$. إذا كان المورفيزم $\gamma' \cdot \beta$ إبيومورفيزماً، عندئذ يكون المورفيزم $\beta' \cdot \gamma$ إبيومورفيزماً.

البرهان.

لنفرض أن المورفيزم $\gamma' \cdot \beta$ إبيومورفيزم، عندئذ يكون $\gamma' \cdot \beta$ إبيومورفيزماً ومونومورفيزماً في آن واحد، وحسب التمهيدية (٩-١-٦) يكون المورفيزم $\beta' \cdot \gamma$ مونومورفيزماً وحسب

التمهيدية (٧-١-٩) يكون المورفيزم $\beta \cdot \gamma$ إبيومورفيزماً، ولكون الفئة $\mathcal{A}$ تبديلية نجد أن المورفيزم $\beta \cdot \gamma$ إيزومورفيزم.



٩-٢. الصور المباشرة والصور العكسية.

لتكن $\mathcal{I}$ فئة تبديلية، و $A \in ob(\mathcal{I})$ ، ولنفرض أن $P(A)$ صف الأشياء الجزئية في A وإن $Q(A)$ صف أشياء الخارج لـ A . وجدنا حسب المبرهنة (٨-٢-٤) أنه توجد تطبيقات:

$$f_A: P(A) \rightarrow Q(A), \quad g_A: Q(A) \rightarrow P(A)$$

تحقق $f_A \cdot g_A = I_{Q(A)}$ ، $g_A \cdot f_A = I_{P(A)}$ أي إن كلا من التطبيقين f_A, g_A متباينين وغامر. لنبرهن الآن على أنه لأجل أي مورفيزم $u: A \rightarrow B$ للفئة $\mathcal{I}$ يوجد تطبيقان:

$$P(A) \rightarrow P(B), \quad Q(A) \rightarrow Q(B)$$

وذلك من خلال التمهيدية الآتية:

تمهيدية ٩-٢-١.

لتكن $\mathcal{I}$ فئة تبديلية، و $u: A \rightarrow B$ مورفيزماً للفئة $\mathcal{I}$ ، عندئذ:

١ - يوجد تطبيق $u: P(A) \rightarrow P(B)$.

٢ - يوجد تطبيق $u: Q(A) \rightarrow Q(B)$.

البرهان.

١ - ليكن (A', i) شيئاً جزئياً في A حيث $A' \in ob(\mathcal{I})$ وإن $i: A' \rightarrow A$ مونومورفيزم للفئة $\mathcal{I}$. عندئذ يكون $u \cdot i: A' \rightarrow B$ مورفيزماً للفئة $\mathcal{I}$ ، وحسب المبرهنة (٧-٣-٧) يوجد مورفيزم وحيد $\overline{u \cdot i}: Coim(u \cdot i) \rightarrow Im(u \cdot i)$ وإن $u \cdot i$ يتفرق على الشكل الآتي:

$$A' \xrightarrow{i} Coim(u \cdot i) \xrightarrow{\overline{u \cdot i}} Im(u \cdot i) \xrightarrow{\mu} B$$

حيث μ الإبيومورفيزم القانوني و μ المونومورفيزم القانوني. بما أن $u: Im(u \cdot i) \rightarrow B$ مونومورفيزم للفئة $\mathcal{I}$ ، فإن $Im(u \cdot i)$ يكون شيئاً جزئياً في B أي إن $Im(u \cdot i) \in P(B)$. لنعرف $u: P(A) \rightarrow P(B)$ بالشكل الآتي: $u(A') = Im(u \cdot i)$. فنجد أنه تطبيق؛ لأنه إذا كان $(A', i_1), (A'', i_2) \in P(A)$ بحيث $(A', i_1) = (A'', i_2)$ فيكون $A' = A''$ و $i_1 = i_2$ ؛ ومنه $u \cdot i_1 = u \cdot i_2$ وبالتالي $u(A') = Im(u \cdot i_2) = Im(u \cdot i_1) = u(A'')$ وهذا يبين أن u تطبيق.

٢ - ليكن (A'', j) شيئاً خارجاً لـ A حيث $A'' \in ob(\mathcal{I})$ وإن $j: A \rightarrow A''$ إبيومورفيزم.

عندئذ $g_A((A'', j)) = (A', i)$ حيث $i = \text{Ker}(j)$ وإن $i: A' \rightarrow A$ مونومورفيزم للفئة $\mathcal{I}$ ومنه يكون $u \cdot i: A' \rightarrow B$ مورفيزماً للفئة $\mathcal{I}$. لنعرف $u: Q(A) \rightarrow Q(B)$ بالشكل الآتي:
 $(A_1'', j_1), (A_2'', j_2) \in Q(A)$ إذا كان $u(A'') = \text{Coker}(u \cdot i)$ بحيث $(A_1'', j_1) = (A_2'', j_2)$ يكون $g_A((A_1'', j_1)) = g_A((A_2'', j_2))$ ومنه $(A_1', i_1) = (A_2', i_2)$ ومنه $i_1 = i_2: A' \rightarrow A$ ، $A_1' = A_2'$ ومنه يكون $i_1 = \text{Ker}(j_1)$ و $i_2 = \text{Ker}(j_2)$ وبالتالي يكون $u \cdot i_1 = u \cdot i_2: A' \rightarrow B$ وهذا يبين أن $\text{Coker}(u \cdot i_1) = \text{Coker}(u \cdot i_2)$ أي إن $u(A_1'') = u(A_2'')$ ومنه نجد أن u تطبيق.

تمهيدية ٢-٢-٩.

لتكن $\mathcal{I}$ فئة تبديلية، و $u: A \rightarrow B$ مورفيزماً للفئة $\mathcal{I}$ ، عندئذ:

- ١ - التطبيق $u: P(A) \rightarrow P(B)$ يعين لنا مورفيزماً للفئة $\mathcal{I}$ هو $u': A' \rightarrow u(A')$.
- ٢ - التطبيق $u: Q(A) \rightarrow Q(B)$ يعين لنا مورفيزماً للفئة $\mathcal{I}$ هو $u'': A'' \rightarrow u(A'')$ لأجله المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & B \\ j \downarrow & & \downarrow \\ A'' & \xrightarrow{u''} & u(A'') \end{array}$$

تبديلي.

البرهان.

- ١ - ليكن $(A', i) \in P(A)$ ، حسب التمهيدية (٨-٥-١)، فإن $u(A') = \text{Im}(u \cdot i)$ حيث $i: A' \rightarrow A$. لنأخذ النشر القانوني للمورفيزم $u \cdot i$ الآتي:

$$A' \xrightarrow{\lambda} \text{Coim}(u \cdot i) \xrightarrow{u \cdot i} \text{Im}(u \cdot i) \xrightarrow{\mu} B$$

حيث λ الإييومورفيزم القانوني و μ المونومورفيزم القانوني. لنضع $\lambda' = \overline{u \cdot i} \cdot \lambda$ فنجد أن $u': A' \rightarrow \text{Im}(u \cdot i) = u(A')$ مورفيزم للفئة $\mathcal{I}$ ، وإن $u': A' \rightarrow u(A')$.

- ٢ - $(A'', j) \in Q(A)$ عندئذ $j: A \rightarrow A''$ الإييومورفيزم القانوني، وحسب التمهيدية (٩-٥-١) فإن $u(A'') = \text{Coker}(u \cdot i)$ حيث $i = \text{Ker}(j)$ ، ومنه $u \cdot i: \text{Ker}(j) \rightarrow B$ وحسب التمهيدية (٨-٢-٣)، فإن $\text{Coker}(i) = (A'', j)$ وبما أن المتتالية:

$$\text{Ker}(j) \xrightarrow{i} A \xrightarrow{j} A''$$

تامة فإن $j \cdot i = 0$ ، ولما كان $Coker(u \cdot i) \in Q(B)$ ، لنفرض أن $\mu: B \rightarrow Coker(u \cdot i)$ الإيومورفيزم القانوني، عندئذ تكون المتتالية $Ker(j) \xrightarrow{u \cdot i} B \xrightarrow{\mu} Coker(u \cdot i)$ تامة، ومنه $\mu \cdot (u \cdot i) = 0$ أي إن $(\mu \cdot u) \cdot i = 0$ ؛ وبالتالي يوجد مورفيزم وحيد:

$$\begin{array}{ccccc} & & A'' = Coker(i) & & \\ & \swarrow w & \uparrow j & & \\ Coker(u \cdot i) & \xleftarrow{\mu \cdot u} & A & \xleftarrow{i} & Ker(j) \end{array}$$

لأجله $w \cdot j = \mu \cdot u$ وهذا يبين أن المخطط الوارد في النص، تبديلي.

تمهيدية ٩-٢-٣.

لتكن $\mathcal{I}$ فئة تبديلية، و $u: A \rightarrow B$ مورفيزماً للفئة $\mathcal{I}$ ، عندئذ:

١ - يوجد تطبيق $u^{-1}: P(B) \rightarrow P(A)$.

٢ - يوجد تطبيق $u^{-1}: Q(B) \rightarrow Q(A)$.

البرهان.

١ - ليكن $(B', i) \in P(B)$ عندئذ $i: B' \rightarrow B$ مونومورفيزم للفئة $\mathcal{I}$ ، وإن:

$$f_{\mathcal{I}}((B', i)) = (B'', j) \in Q(B)$$

حيث $j = Coker(i)$ ومنه فإن $j: B \rightarrow B''$ إيومورفيزم للفئة $\mathcal{I}$. إن $j \cdot u: A \rightarrow B''$ مورفيزم للفئة $\mathcal{I}$. لنضع $u^{-1}(B') = Ker(j \cdot u)$ ، وبما أن $Ker(j \cdot u)$ شيء جزئي في A فنجد أن $u^{-1}: P(B) \rightarrow P(A)$ تطبيق، بسبب وحدانية $Ker(j \cdot u)$.

٢ - ليكن $(B'', j) \in Q(B)$ عندئذ $j: B \rightarrow B''$ إيومورفيزماً للفئة $\mathcal{I}$ وإن $j \cdot u: A \rightarrow B''$ وحسب التمهيدية (٧-٣-٧) يوجد مورفيزم وحيد $\overline{j \cdot u}: Coim(j \cdot u) \rightarrow Im(j \cdot u)$ لنأخذ النشر القانوني للمورفيزم $j \cdot u$ الآتي:

$$A \xrightarrow{j \cdot u} Coim(j \cdot u) \xrightarrow{\overline{j \cdot u}} Im(j \cdot u) \xrightarrow{\mu} B''$$

حيث λ الإيومورفيزم القانوني، μ المونومورفيزم القانوني. بما أن $\lambda: A \rightarrow Coim(j \cdot u)$ إيومورفيزم، فإن $Coim(j \cdot u)$ هو شيء خارج لـ A ؛ وبالتالي فإن $Coim(j \cdot u) \in Q(A)$ لنضع: $u^{-1}(B'') = Coim(j \cdot u)$ ، فنجد أن $u^{-1}: Q(B) \rightarrow Q(A)$ تطبيق.

لتكن $\mathcal{I}$ فئة تبديلية، و $u: A \rightarrow B$ مورفيزماً للفئة $\mathcal{I}$ ، عندئذ:

١ - التطبيق $u^{-1}: P(B) \rightarrow P(A)$ يعين لنا مورفيزماً للفئة $\mathcal{I}$ هو $u_1: u^{-1}(B') \rightarrow B'$ وذلك لأجل كل $B' \in P(B)$ ، لأجله المخطط الآتي تبديلي:

$$\begin{array}{ccc} u^{-1}(B') & \longrightarrow & B' \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \xrightarrow{u} & B \end{array}$$

٢ - التطبيق $u^{-1}: Q(B) \rightarrow Q(A)$ يعين لنا مورفيزماً للفئة $\mathcal{I}$ ، وذلك لأجل كل $B'' \in Q(B)$.

البرهان.

١ - $(B', i) \in P(B)$ عندئذ $i: B' \rightarrow B$ مونومورفيزم للفئة $\mathcal{I}$ ، وحسب المبرهنة (٨-٢-٢-

٤) فإن $(B'', j) \in Q(B)$ حيث $f_{B''}(B', i) = (B'', j)$ ، ومنه فإن $j: B \rightarrow B''$ إبيومورفيزماً للفئة $\mathcal{I}$. وحسب التمهيدية (٨-٣-٥)، فإن $u^{-1}(B') = \text{Ker}(j \cdot u)$ ، وبما أن المتتالية $B' \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} B''$ تامة، فإن $j \cdot i = 0$ ، كما أن:

$$\text{Ker}(j) = \text{Ker}(\text{Coker}(i)) = B'$$

من جهة أخرى، $j \cdot u: A \rightarrow B''$ مورفيزم للفئة $\mathcal{I}$ فإن $\text{Ker}(j \cdot u) \in P(A)$. لنفرض أن $\lambda: \text{Ker}(j \cdot u) \rightarrow A$ المونومورفيزم القانوني، فنجد أن المتتالية:

$$\text{Ker}(j \cdot u) \xrightarrow{\lambda} A \xrightarrow{j \cdot u} B$$

تامة، ومنه $0 = (j \cdot u) \cdot \lambda$ ، أي إن $j \cdot (u \cdot \lambda) = 0$ ، ومنه يوجد مورفيزم وحيد:

$$\begin{array}{ccc} u_1 & \nearrow & \text{Ker}(j) = B' \\ & & \downarrow i \\ \text{Ker}(j \cdot u) & \xrightarrow{u \cdot \lambda} & B \xrightarrow{j} B'' \end{array}$$

$u_1: \text{Ker}(j \cdot u) \rightarrow B'$ لأجله المخطط السابق تبديلياً، أي إن $i \cdot u_1 = u \cdot \lambda$ ، وهكذا نجد أن $u_1: \text{Ker}(j \cdot u) \rightarrow B'$ مورفيزم للفئة $\mathcal{I}$ ، لأجله المخطط الوارد في النص تبديلياً.

٢ - ليكن $(B'', j) \in Q(B)$ عندئذ $j: B \rightarrow B''$ إبيومورفيزماً للفئة $\mathcal{I}$ ، وإن $j \cdot u: A \rightarrow B''$

مورفيزم للفئة $\mathcal{S}$ ، وإن النشر القانوني للمورفيزم $j \cdot u$ هو:

$$A \xrightarrow{j} \text{Coim}(j \cdot u) \xrightarrow{j \cdot u} \text{Im}(j \cdot u) \xrightarrow{u} B''$$

حيث λ الإييومورفيزم القانوني، μ المونومورفيزم القانوني.

بما أن $u^{-1}(B'') = \text{Coim}(j \cdot u)$ نجد أنه يوجد مورفيزم $u_2: u^{-1}(B'') \rightarrow B''$ هو

$$u_2 = \mu \cdot \overline{j \cdot u}$$

مبرهنة ٩-٢-٥.

لتكن $\mathcal{S}$ فئة تبديلية، و $u: A \rightarrow B$ مورفيزماً للفئة $\mathcal{S}$ ، عندئذ المخططان الآتيان من صفوف الأشياء والتطبيقات:

$$\begin{array}{ccc} Q(A) & \xrightarrow{u} & Q(B) \\ \varphi_A \uparrow & (1) & \uparrow \varphi_B \\ P(A) & \xrightarrow{u} & P(B) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} Q(B) & \xrightarrow{u^{-1}} & Q(A) \\ \varphi_B \uparrow & (2) & \uparrow \varphi_A \\ P(B) & \xrightarrow{u^{-1}} & P(A) \end{array}$$

تبدليان.

البرهان.

لأجل المخطط (1). حسب المبرهنة (٨-٢-٤)، فإنه لأجل $A \in \text{ob}(\mathcal{S})$ يوجد تطبيق

$\varphi_A: P(A) \rightarrow Q(A)$ معرف بالشكل الآتي: أيأ كان $(A', i) \in P(A)$ ، فإن:

$$\varphi_A((A', i)) = (A'', j)$$

حيث $j = \text{Coker}(i)$. كذلك لأجل $B \in \text{ob}(\mathcal{S})$ فإنه يوجد تطبيق $\varphi_B: P(B) \rightarrow Q(B)$

معرف بالشكل الآتي: $\varphi_B((B', i)) = (B'', j)$ حيث $j = \text{Coker}(i)$ وذلك أيأ كان

$(B', i) \in P(B)$. وحسب التمهيدية (٩-٢-١) فإنه يوجد تطبيق $u: P(A) \rightarrow P(B)$

معرف بالشكل الآتي: أيأ كان $(A', i) \in P(A)$ ، فإن $u((A', i)) = \text{Im}(u \cdot i)$ وأيضاً يوجد

تطبيق آخر $u: Q(A) \rightarrow Q(B)$ معرف بالشكل الآتي: أيأ كان $(A'', j) \in Q(A)$ ، فإن

$u((A'', j)) = \text{Coker}(u \cdot i)$ حيث $j = \text{Coker}(i)$. ليكن $(A', i) \in P(A)$ ، عندئذ فإن:

$$\varphi_B \cdot u((A', i)) = \varphi_B(u((A', i))) = \varphi_B(\text{Im}(u \cdot i)) = \text{Coker}(\text{Im}(u \cdot i))$$

$$u \cdot \varphi_A((A', i)) = u((A'', j)) = \text{Coker}(u \cdot i)$$

وبما أن $\text{Coker}(\text{Im}(u \cdot i)) = \text{Coker}(\text{Ker}(\text{Coker}(u \cdot i))) = \text{Coker}(u \cdot i)$ نجد أن:

$$\varphi_B \cdot u((A', i)) = u \cdot \varphi_A((A', i))$$

أي إن $\varphi_B \cdot u = u \cdot \varphi_A$ ، وهذا يبين أن المخطط (1) تبديلي.

لأجل المخطط (2). حسب التمهيدية (٩-٢-٣)، فإنه لأجل المرفيزم $u: A \rightarrow B$ يوجد

تطبيق $u^{-1}: Q(B) \rightarrow Q(A)$ معرف بالشكل الآتي: أيأ كان $(B'', j) \in Q(B)$ ، فإن:

$$u^{-1}((B'', j)) = \text{Coim}(j \cdot u)$$

حيث $j = \text{Coker}(i)$. كذلك يوجد تطبيق $u^{-1}: P(B) \rightarrow P(A)$ معرف بالشكل الآتي:

أيأ كان $(B', i) \in P(B)$ ، فإن $u^{-1}((B', i)) = \text{Ker}(j \cdot u)$ حيث $j = \text{Coker}(i)$. ومنه أيأ

كان $(B', i) \in P(B)$ ، فإن:

$$u^{-1} \cdot \varphi_B((B', i)) = u^{-1}((B'', j)) = \text{Coim}(j \cdot u)$$

$$\varphi_A \cdot u^{-1}((B', i)) = \varphi_A(u^{-1}((B', i))) = \varphi_A(\text{Ker}(j \cdot u)) = \text{Coker}(\text{Ker}(j \cdot u))$$

ولما كان $\text{Coker}(\text{Ker}(j \cdot u)) = \text{Coim}(j \cdot u)$ نجد أن:

$$u^{-1} \cdot \varphi_B((B', i)) = \varphi_A \cdot u^{-1}((B', i))$$

ومنه يكون $u^{-1} \cdot \varphi_B = \varphi_A \cdot u^{-1}$ وهذا يبين أن المخطط (2) تبديلي.

تمهيدية ٩-٢-٦.

لتكن $\mathcal{I}$ فئة تبديلية، و $u: A \rightarrow B$ مورفيزماً للفئة $\mathcal{I}$ ، لنفرض أن $A' \in P(A)$ ، عندئذ

المورفيزم $u': A' \rightarrow u(A')$ إبيومورفيزم.

البرهان.

لنفرض أن $i: A' \rightarrow A$ المونومورفيزم القانوني، عندئذ يكون $u \cdot i: A' \rightarrow B$ مورفيزماً للفئة

$\mathcal{I}$ الذي يملك النشر القانوني الآتي:

$$A' \xrightarrow{i} \text{Coim}(u \cdot i) \xrightarrow{\overline{u \cdot i}} \text{Im}(u \cdot i) \xrightarrow{u} B$$

حيث $\overline{u \cdot i}$ الإبيومورفيزم القانوني، u المونومورفيزم القانوني و $\overline{u \cdot i}$ إيزومورفيزم. ومنه فإن

المورفيزم $u' = \overline{u \cdot i} \cdot i$ إبيومورفيزم.

مبرهنة ٩-٢-٧.

لتكن $\mathcal{I}$ فئة تبديلية، و $u: A \rightarrow B$ مورفيزماً للفئة $\mathcal{I}$ ، ولنفرض أن $(A', i), (B', k)$ أشياء

جزئية من A, B على الترتيب وإن $(A'', j), (B'', l)$ أشياء الخارج لكل من A, B على

الترتيب. عندئذ القضايا الآتية صحيحة:

$$1 - A' \subset u^{-1}(u(A))$$

$$2 - u^{-1}(u(A'')) \subset A''$$

$$3 - B'' \subset u(u^{-1}(B''))$$

$$4 - u(u^{-1}(B')) \subset B'$$

البرهان.

١ - بما أن $i: A' \rightarrow A$ مونومورفيزم للفئة $\mathcal{A}$ ، فإن المورفيزم $u \cdot i: A' \rightarrow B$ للفئة $\mathcal{B}$ يملك النشر القانوني الآتي:

$$A' \xrightarrow{i} \text{Coim}(u \cdot i) \xrightarrow{u \cdot j} \text{Im}(u \cdot i) \xrightarrow{\mu} B$$

حيث λ الإيبومورفيزم القانوني، μ المونومورفيزم القانوني، وإن $u \cdot i = \mu \cdot \overline{u \cdot i} \cdot \lambda$ ، ولما كان $u' = \overline{u \cdot i} \cdot \lambda$ نجد أن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} A' & \xrightarrow{u'} & u(A') \\ i \downarrow & & \downarrow \mu \\ \text{Ker}(\delta \cdot u) = u^{-1}(u(A)) & \xrightarrow{u} & B \\ & & \downarrow \delta \\ & & \text{Coker}(\mu) \end{array}$$

تبدلياً، أي إن $\mu \cdot u' = u \cdot i$ ومنه فإن $\delta \cdot \mu \cdot u' = \delta \cdot u \cdot i = 0 \cdot u' = 0$ ومنه نجد أن: $u(A') \in P(B)$ لأن $A' \subset \text{Ker}(\delta \cdot u) = u^{-1}(u(A'))$ وذلك لأن

٢ - بما أن $A' \in P(A)$ ، فإنه حسب المبرهنة (٩-٢-٥) يكون $\varphi_A(A') = A''$ وحسب (١) يكون $\varphi_A(u^{-1}(u(A'))) \subset \varphi_A(A') = A''$ أيضاً حسب المبرهنة (٩-٢-٥) لدينا:

$$\varphi_A(u^{-1} \cdot u) = (\varphi_A \cdot u^{-1}) \cdot u = (u^{-1} \cdot \varphi_B) \cdot u = u^{-1} \cdot (\varphi_B \cdot u) = u^{-1} \cdot (u \cdot \varphi_A)$$

ومنه نجد أن:

$$(u^{-1} \cdot (u \cdot \varphi_A))(A') = u^{-1} \cdot (u(\varphi_A(A'))) = \varphi_A(u^{-1}(u(A'))) \subset A''$$

أي إن $u^{-1}(u(A'')) \subset A''$.

٣ - بما أن $(B'', l) \in Q(B)$ فإن $l: B \rightarrow B''$ إيبومورفيزم للفئة $\mathcal{B}$ وإن $l \cdot u: A \rightarrow B''$ مورفيزم للفئة $\mathcal{A}$ ، لنأخذ النشر القانوني الآتي للمورفيزم

$$A \xrightarrow{\lambda} \text{Coim}(l \cdot u) \xrightarrow{l \cdot u} \text{Im}(l \cdot u) \xrightarrow{\mu} B''$$

حيث λ الإبيومورفيزم القانوني، μ المونومورفيزم القانوني وإن $l \cdot u = \mu \cdot \overline{l \cdot u} \cdot \lambda$ ، ولما كان $u_2 = \mu \cdot \overline{l \cdot u}$ وذلك حسب التمهيدية (٩-٢-٤) حيث $u_2 : u^{-1}(B'') \rightarrow B''$ ، ومنه نجد أن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccccc} & \text{Ker}(\lambda) & & & \\ & \downarrow & & & \\ \lambda & A & \xrightarrow{u} & B & \\ \delta & \downarrow & & \downarrow l & \\ & \text{Coim}(l \cdot u) = u^{-1}(B'') & \xrightarrow{u_2} & B'' & \end{array}$$

تبدلي، أي إن $l \cdot u = u_2 \cdot \lambda$ وإن $u^{-1}(B'') = \text{Coim}(l \cdot u)$ وذلك حسب التمهيدية (٩-٢-٣) ومنه يكون $l \cdot u \cdot \delta = u_2 \cdot \lambda \cdot \delta = u_2 \cdot 0 = 0$ وبالتالي يكون $B'' \subset u(u^{-1}(B''))$ وذلك لأن $u^{-1}(B'') \in Q(A)$.

٤ - بما أن $(B', k) \in P(B)$ عندئذ حسب المبرهنة (٩-٢-٥) فإن $\varphi_B(B') = B'' \in Q(B)$ وحسب (٣)، فإن $B'' \subset u(u^{-1}(B''))$ وبالتالي يكون:

$$\varphi_B(B') \subset u(u^{-1}(\varphi_B(B'))) = u(u \cdot \varphi_B(B'))$$

وحسب المبرهنة (٩-٢-٥) ولما كان $u \cdot \varphi_A = \varphi_B \cdot u$ ، $u^{-1} \cdot \varphi_B = \varphi_A \cdot u^{-1}$ نجد أن:

$$\begin{aligned} \varphi_B(B') &\subset u(u^{-1}(\varphi_B(B'))) = u(u \cdot \varphi_B(B')) = u(\varphi_A \cdot u^{-1}(B')) = \\ &= u(\varphi_A(u^{-1}(B'))) = \varphi_B(u(u^{-1}(B'))) = \varphi_B(u(u^{-1}(B'))) \end{aligned}$$

ومنه نجد أن $u(u^{-1}(B')) \subset B'$.

مبرهنة ٩-٢-٨.

لتكن $\mathfrak{I}$ فئة تبديلية و $A, B \in \text{ob}(\mathfrak{I})$. لنفرض أن $(A', i), (C', k)$ أشياء جزئية من A, C على الترتيب وإن $(A'', j), (C'', l)$ أشياء الخارج لكل من A, C على الترتيب. عندئذ لأجل أي مورفيزمين $u : A \rightarrow B, v : B \rightarrow C$ للفئة $\mathfrak{I}$ ، القضايا الآتية صحيحة:

$$(v \cdot u)(A') = v(u(A')) \quad - \quad ١$$

$$(v \cdot u)(A'') = v(u(A'')) \quad - \quad ٢$$

$$(v \cdot u)^{-1}(C'') = u^{-1}(v^{-1}(C'')) \quad - \quad ٣$$

$$\cdot (v \cdot u)^{-1}(C') = u^{-1}(v^{-1}(C')) - \text{٤}$$

البرهان.

١ - بما أن $(A', i) \in P(A)$ ، فإنه حسب التمهيدية (١-٢-٩) يكون $u(A') \in P(B)$ وحسب التمهيدية (٢-٢-٩) يوجد مورفيزم $u': A' \rightarrow u(A')$ من جهة أخرى، بما أن $i: A' \rightarrow A$ مونومورفيزم للفتة $\mathcal{I}$ ، فإن المورفيزم $u \cdot i: A' \rightarrow B$ للفتة $\mathcal{I}$ يملك النشر القانوني الآتي:

$$A' \xrightarrow{\lambda} \text{Coim}(u \cdot i) \xrightarrow{\overline{u \cdot i}} \text{Im}(u \cdot i) \xrightarrow{\mu} B$$

حيث λ الإيبومورفيزم القانوني، μ المونومورفيزم القانوني، وإن $u \cdot i = \mu \cdot \overline{u \cdot i} \cdot \lambda$ ولما كان $u' = \overline{u \cdot i} \cdot \lambda$ نجد أن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccccc} A' & \xrightarrow{u'} & u(A') & & \\ i \downarrow & & \downarrow \mu & & \\ A & \xrightarrow{u} & B & \xrightarrow{v} & C \end{array}$$

تبدلياً، أي إن $\mu \cdot u' = u \cdot i$ حيث $u(A') = \text{Im}(u \cdot i)$ وذلك حسب التمهيدية (١-١-٩) ومنه يكون $v \cdot (u \cdot i) = v \cdot (\mu \cdot u')$ أي إن $(v \cdot \mu) \cdot u' = (v \cdot u) \cdot i$ وحسب التمهيدية (٦-٥-٨)، فإن u' إيبومورفيزم وأيضاً حسب التمهيدية (٤-٣-٧) يكون:

$$\text{Coker}((v \cdot \mu) \cdot u') = \text{Coker}(v \cdot \mu)$$

ومنه فإن:

$$\text{Im}((v \cdot \mu) \cdot u') = \text{Ker}(\text{Coker}((v \cdot \mu) \cdot u')) = \text{Ker}(\text{Coker}(v \cdot \mu)) = \text{Im}(v \cdot \mu)$$

$$(v \cdot u)(A') = \text{Im}(v \cdot u') = v(u(A'))$$

٢ - حسب المبرهنة (٥-٢-٩)، فإنه لأجل المورفيزمات:

$$u: A \rightarrow B, v: B \rightarrow C, v \cdot u: A \rightarrow C$$

فإن المخططات الآتية من صفوف الأشياء والتطبيقات:

$$\begin{array}{ccccc} Q(A) & \xrightarrow{u} & Q(B) & & Q(B) & \xrightarrow{v} & Q(C) \\ \varphi_A \uparrow & & \uparrow \varphi_B & & \varphi_B \uparrow & & \uparrow \varphi_C \\ P(A) & \xrightarrow{u} & P(B) & & P(B) & \xrightarrow{v} & P(C) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} Q(A) & \xrightarrow{v \cdot u} & Q(C) \\ \varphi_A \uparrow & & \uparrow \varphi_C \\ P(A) & \xrightarrow{v \cdot u} & P(C) \end{array}$$

تبديلية، وبما أن $A' \in P(A)$ ، فإن $A' = A'' \in Q(A)$ ومنه $\varphi_A(A') = u(A'')$ وبالتالي يكون $(u \cdot \varphi_A)(A') = u(A'')$ ومنه نجد أن:

$$\begin{aligned} v(u(A'')) &= v((u \cdot \varphi_A)(A')) = (v \cdot (u \cdot \varphi_A))(A') = (v \cdot (\varphi_B \cdot u))(A') = \\ &= ((v \cdot \varphi_B) \cdot u)(A') = ((\varphi_C \cdot v) \cdot u)(A') = (\varphi_C \cdot (v \cdot u))(A') = ((v \cdot u) \cdot \varphi_A)(A') = \\ &= (v \cdot u)(\varphi_A(A')) = (v \cdot u)(A'') \end{aligned}$$

$$3 - \text{حسب (٢)، فإن } (u^{-1} \cdot v^{-1})(C'') = (v \cdot u)^{-1}(C'')$$

$$4 - \text{حسب (١)، فإن } (u^{-1} \cdot v^{-1})(C') = (v \cdot u)^{-1}(C')$$

لأجل إثبات مبرهنة التماثل الثالثة نحن بحاجة إلى مفهوم جديد يخص الفئات التبديلية. لتكن $\mathcal{I}$ فئة تبديلية و $A \in ob(\mathcal{I})$ ، ولنفرض أن $P(A), Q(A)$ صفي الأشياء الجزئية وأشياء الخارج لـ A على الترتيب، وجدنا حسب التمييزيتين (١-٣-٥) و (١-٣-١-١٠) أن هذين الصنفين مرتبان جزئياً؛ بالاعتماد على علاقتي الترتيب المعرفتين على $P(A)$ و $Q(A)$ سوف نورد المبرهنتين الآتيتين:

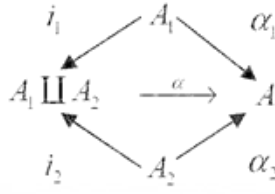
مبرهنة ٩-٢-٩.

لتكن $\mathcal{I}$ فئة تبديلية، و $A \in ob(\mathcal{I})$. لنفرض أن $A_1, A_2 \in P(A)$ ، عندئذ بالنسبة لعلاقة الترتيب المعرفة على $P(A)$ يوجد $\sup(A_1, A_2)$. البرهان.

لنفرض أن $\alpha_1: A_1 \rightarrow A, \alpha_2: A_2 \rightarrow A$ المونومورفيزمات القانونية وأن $(A_1 \amalg A_2, i_1, i_2)$ مجموع أسرة الأشياء (A_1, A_2) ، حيث:

$$i_1: A_1 \rightarrow A_1 \amalg A_2, i_2: A_2 \rightarrow A_1 \amalg A_2$$

مونومورفيزمات الإحتواء. عندئذ حسب تعريف المجموع يوجد مورفيزم وحيد $\alpha: A_1 \amalg A_2 \rightarrow A$ للفئة $\mathcal{I}$ لأجله المخطط الآتي:



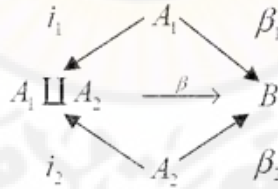
تبديلي، أي إن $\alpha \cdot i_1 = \alpha_1$, $\alpha \cdot i_2 = \alpha_2$. لنبرهن على أن $Im(\alpha) = \sup(A_1, A_2)$.
لنأخذ النشر القانوني للمورفيزم α الآتي:

$$A_1 \amalg A_2 \xrightarrow{i} Coim(\alpha) \xrightarrow{\alpha} Im(\alpha) \xrightarrow{\mu} A$$

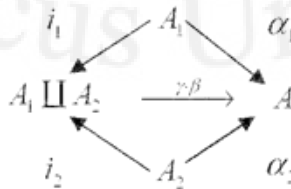
حيث λ الإيبومورفيزم القانوني، μ المونومورفيزم القانوني، عندئذ يكون $\alpha = \mu \cdot \bar{\alpha} \cdot \lambda$ ومنه يكون:

$$\alpha_1 = \alpha \cdot i_1 = \mu \cdot \bar{\alpha} \cdot \lambda \cdot i_1 = \mu \cdot (\bar{\alpha} \cdot \lambda \cdot i_1)$$

ولما كان α_1 مونومورفيزماً نجد أن $\bar{\alpha} \cdot \lambda \cdot i_1 : A_1 \rightarrow Im(\alpha)$ مونومورفيزم للفئة $\mathcal{I}$ ؛ وبالتالي يكون $A_1 \subset Im(\alpha)$ ، بطريقة مشابهة نجد أيضاً $A_2 \subset Im(\alpha)$.
ليكن $(B, \gamma) \in P(A)$ حداً أعلى للمجموعة $\{A_1, A_2\}$ عندئذ $\gamma : B \rightarrow A$ مونومورفيزم للفئة $\mathcal{I}$ ، وإن $A_1 \subset B, A_2 \subset B$ ومنه توجد مونومورفيزمات $\beta_1 : A_1 \rightarrow B, \beta_2 : A_2 \rightarrow B$ وتحقق $\gamma \cdot \beta_1 = \alpha_1, \gamma \cdot \beta_2 = \alpha_2$ وبما أن $A_1 \amalg A_2$ هو مجموع للأسرة الأشياء (A_1, A_2) ، فإنه يوجد مورفيزم وحيد $\beta : A_1 \amalg A_2 \rightarrow B$ للفئة $\mathcal{I}$ لأجله المخطط الآتي:



تبديلي، أي إن $\beta \cdot i_1 = \beta_1, \beta \cdot i_2 = \beta_2$. أصبح لدينا $\gamma \cdot \beta : A_1 \amalg A_2 \rightarrow A$ مورفيزم للفئة $\mathcal{I}$ لأجله المخطط الآتي:



تبديلي، أي إن $(\gamma \cdot \beta) \cdot i_1 = \alpha \cdot i_1 = \alpha_1$ ، $(\gamma \cdot \beta) \cdot i_2 = \alpha \cdot i_2 = \alpha_2$ ، ولما كان المورفيزم α وحيداً لأجله المخطط السابق تبديلي، نجد أن $\alpha = \gamma \cdot \beta$ ، ولما كان γ مونومورفيزماً، فإنه حسب التمهيدية (٧-٢-٤) نجد أن $Ker(\alpha) = Ker(\gamma \cdot \beta) = Ker(\beta)$ وبالتالي؛

$$Coker(Ker(\alpha)) = Coker(Ker(\beta))$$

أي إن $Coim(\alpha) = Coim(\beta)$. لنأخذ النشر القانوني للمورفيزم β الآتي:

$$A_1 \amalg A_2 \xrightarrow{\lambda_1} Coim(\beta) \xrightarrow{\beta} Im(\beta) \xrightarrow{\mu_1} B$$

حيث λ_1 الإبيومورفيزم القانوني، μ_1 المونومورفيزم القانوني، فنجد أن $\beta = \mu_1 \cdot \bar{\beta} \cdot \lambda_1$ وبما أن $Coim(\alpha) = Coim(\beta)$ وإن $\lambda_1 : A_1 \amalg A_2 \rightarrow Coim(\alpha)$ الإبيومورفيزمات القانونية نجد أن $\lambda_1 = \lambda_2$ ، ولما كان $\alpha = \gamma \cdot \beta$ نجد أن $\alpha = \mu \cdot \bar{\alpha} \cdot \lambda$ وبالتالي يكون $\gamma \cdot \mu_1 \cdot \bar{\beta} \cdot \lambda_1 = \mu \cdot \bar{\alpha} \cdot \lambda$ وبما أن λ إبيومورفيزماً نجد أن $\gamma \cdot \mu_1 \cdot \bar{\beta} = \mu \cdot \bar{\alpha}$ ومنه نجد أن $\mu = \gamma \cdot \mu_1 \cdot \bar{\beta} \cdot \bar{\alpha}^{-1}$ وهذا يبين أن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccccccc} Coim(\alpha) = Coim(\beta) & \xrightarrow{\bar{\beta}} & Im(\beta) & \xrightarrow{\mu_1} & B & \xrightarrow{\gamma} & A \\ & \nwarrow \bar{\alpha}^{-1} & Im(\alpha) & \nearrow \mu & & & \end{array}$$

تبديلي، ولما كان كل من $\gamma, \mu_1, \bar{\beta}, \bar{\alpha}^{-1}$ مونومورفيزماً نجد أن μ مونومورفيزم، ومنه يكون $Im(\alpha) \subset A$ ، وهكذا نجد أن $Im(\alpha) = \sup(A_1, A_2)$.

ملاحظة.

لتكن $\mathfrak{I}$ فئة تبديلية، و $A \in ob(\mathfrak{I})$. إذا كان $A_1, A_2 \in P(A)$ ، سوف نرمز:

$$A_1 \cup A_2 = \sup(A_1, A_2)$$

مبرهنة ٩-٢-١٠.

لتكن $\mathfrak{I}$ فئة تبديلية، و $A \in ob(\mathfrak{I})$. لنفرض أن $A_1, A_2 \in P(A)$ ، عندئذ بالنسبة لعلاقة الترتيب المعرفة على $P(A)$ يوجد $\inf(A_1, A_2)$.
البرهان.

بما أن $A_1, A_2 \in P(A)$ ، فإن $A/A_1, A/A_2 \in Q(A)$ ، وذلك حسب المبرهنة (٨-٢-٤).

لنفرض أن $\rho_1 : A \rightarrow A/A_1$, $\rho_2 : A \rightarrow A/A_2$ الإيومورفيزمات القانونية. بما أن الفئة $\mathfrak{S}$ تبديلية فإن $(A/A_1) \prod (A/A_2)$ موجود، لنفرض أن:

$$p_1 : (A/A_1) \prod (A/A_2) \rightarrow A/A_1, \quad p_2 : (A/A_1) \prod (A/A_2) \rightarrow A/A_2$$

المورفيزمات الإسقاطية، عندئذ حسب تعريف الجداء، فإنه يوجد مورفيزم وحيد:

$$p : A \rightarrow (A/A_1) \prod (A/A_2)$$

لأجله المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccccc} & A/A_1 & & & p_1 \\ & \swarrow & & \searrow & \\ \rho_1 & & & & \\ A & \xrightarrow{p} & (A/A_1) \prod (A/A_2) & & \\ \rho_2 & & & \swarrow & \\ & A/A_2 & & \searrow & p_2 \end{array}$$

تبديلياً، أي إن $p_1 \cdot p = \rho_1$, $p_2 \cdot p = \rho_2$ لنفرض أن $i_1 : A_1 \rightarrow A$, $i_2 : A_2 \rightarrow A$ لنفرض أن $i_1 : A_1 \rightarrow A$, $i_2 : A_2 \rightarrow A$ تكون المتتالية $A_1 \xrightarrow{i_1} A \xrightarrow{p} (A/A_1) \prod (A/A_2)$ تامة، وذلك حسب التمهيدية (٦-٣-٨) وبالتالي يكون $\rho_1 \cdot i_1 = 0$ أي إن $(A_1, i_1) = \text{Ker}(\rho_1)$.

لنفرض أن $\lambda : \text{Ker}(p) \rightarrow A$ المونومورفيزم القانوني، عندئذ بما أن:

$$\rho_1 \cdot \lambda = (p_1 \cdot p) \cdot \lambda = p_1 \cdot (p \cdot \lambda) = 0$$

$$\begin{array}{ccccc} \mu & \nearrow & A_1 = \text{Ker}(\rho_1) & & \\ & & i_1 \downarrow & & \\ \text{Ker}(p) & \xrightarrow{\lambda} & A & \xrightarrow{p} & A/A_1 \end{array}$$

وحسب تعريف النواة، فإنه يوجد مورفيزم وحيد $\mu : \text{Ker}(p) \rightarrow A_1$ يحقق $i_1 \cdot \mu = \lambda$ وبما أن λ مونومورفيزم نجد أن $\text{Ker}(p) \subset A_1$. بطريقة مشابهة نجد أن $\text{Ker}(p) \subset A_2$. ليكن $(B, \beta) \in P(A)$ ولنفرض أن (B, β) حد أدنى للأسرة (A_1, A_2) بحيث $B \subset A_1$ و $B \subset A_2$ عندئذ فإن $\beta : B \rightarrow A$ المونومورفيزم القانوني. لنفرض أن $\beta_1 : B \rightarrow A_1$ و $\beta_2 : B \rightarrow A_2$ المونومورفيزمات القانونية التي تحقق $i_1 \cdot \beta_1 = \beta$, $i_2 \cdot \beta_2 = \beta$. بما أن $(A/A_1) \prod (A/A_2)$ هو جداء للأسرة الأشياء $(A/A_1, A/A_2)$ فإنه أياً كان $X \in \text{ob}(\mathfrak{S})$ يكون التطبيق:

$$\Gamma: \mathfrak{S}(X, (A/A_1) \amalg (A/A_2)) \rightarrow \mathfrak{S}(X, A/A_1) \times \mathfrak{S}(X, A/A_2)$$

متباين وغامر، ومن أجل $X = B$ وبما أن $p \cdot \beta \in \mathfrak{S}(B, (A/A_1) \amalg (A/A_2))$ نجد أن $\Gamma(p \cdot \beta) = (p_1 \cdot (p \cdot \beta), p_2 \cdot (p \cdot \beta))$ ولما كان:

$$p_1 \cdot (p \cdot \beta) = (p_1 \cdot p) \cdot \beta = \rho_1 \cdot (i_1 \cdot \beta_1) = (\rho_1 \cdot i_1) \cdot \beta_1 = 0$$

$$p_2 \cdot (p \cdot \beta) = (p_2 \cdot p) \cdot \beta = \rho_2 \cdot (i_2 \cdot \beta_2) = (\rho_2 \cdot i_2) \cdot \beta_2 = 0$$

وهكذا نجد أن $\Gamma(p \cdot \beta) = 0 = \Gamma(0)$ أي إن $p \cdot \beta = 0$ لنفرض أن $\lambda: \text{Ker}(p) \rightarrow A$ المونومورفيزم القانوني، بما أن $p \cdot \lambda = 0$ وإن $p \cdot \beta = 0$ فإنه يوجد مورفيزم وحيد:

$$\begin{array}{ccccc} \theta & & \text{Ker}(p) & & \\ & \nearrow & \lambda \downarrow & & \\ B & \xrightarrow{\beta} & A & \xrightarrow{p} & (A/A_1) \amalg (A/A_2) \end{array}$$

$\theta: B \rightarrow \text{Ker}(p)$ لأجله $\lambda \cdot \theta = \beta$ ، ولما كان β مونومورفيزماً نجد أن θ مونومورفيزم، ومنه يكون $B \subset \text{Ker}(p)$ مما سبق نجد أن $\text{Ker}(p) = \inf(A_1, A_2)$.

ملاحظة.

لتكن $\mathfrak{S}$ فئة تبديلية، و $A \in \text{ob}(\mathfrak{S})$. إذا كان $A_1, A_2 \in P(A)$ ، سوف نرمز:

$$A_1 \cap A_2 = \inf(A_1, A_2)$$

لتكن $\mathfrak{S}$ فئة تبديلية، و $B \in \text{ob}(\mathfrak{S})$. بالاعتماد على علاقة الترتيب المعرفة على $Q(B)$ و سوف نورد المبرهنتين الآتيتين:

مبرهنة ٩-٢-١١.

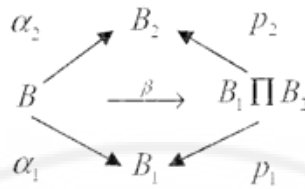
لتكن $\mathfrak{S}$ فئة تبديلية، و $B \in \text{ob}(\mathfrak{S})$. عندئذ أياً كان $B_1, B_2 \in Q(B)$ يوجد $\inf(B_1, B_2)$. البرهان.

ليكن $B_1, B_2 \in Q(B)$ ، وإن $\alpha_1: B \rightarrow B_1$ ، $\alpha_2: B \rightarrow B_2$ الإبيومورفيزمان القانونيان، لنفرض أيضاً أن $(B_1 \amalg B_2, p_1, p_2)$ جداء أسرة الأشياء (B_1, B_2) حيث:

$$p_2: B_1 \amalg B_2 \rightarrow B_2 \text{ و } p_1: B_1 \amalg B_2 \rightarrow B_1$$

الإبيومورفيزمات الإسقاطية. عندئذ حسب تعريف الجداء يوجد مورفيزم وحيد

تبديلي، أي إن $p_1 \cdot \beta = \alpha_1$, $p_2 \cdot \beta = \alpha_2$. لتأخذ النشر القانوني للمورفيزم β الآتي:



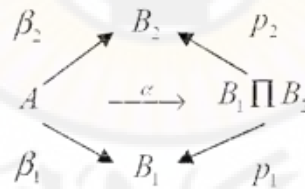
حيث λ الإيبومورفيزم القانوني، μ المونومورفيزم القانوني، فنجد أن $\beta = \mu \cdot \bar{\beta} \cdot \lambda$ ، ومنه

$$B \xrightarrow{\lambda} \text{Coim}(\beta) \xrightarrow{\beta} \text{Im}(\beta) \xrightarrow{\mu} B_1 \amalg B_2$$

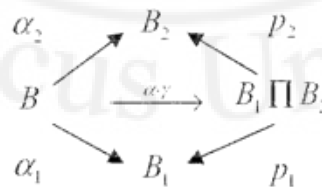
وبما أن α_1 إيبومورفيزم للفتة $\mathfrak{I}$ ، فإن المورفيزم $p_1 \cdot \mu \cdot \bar{\beta} : \text{Coim}(\beta) \rightarrow B_1$ إيبومورفيزم،

ومنه فإن $\text{Coim}(\beta) \subset B_1$. بطريقة مشابهة نجد أن $\text{Coim}(\beta) \subset B_2$ ؛ ومنه فإن $\text{Coim}(\beta) \subset \inf(B_1, B_2)$.

ليكن $(A, \gamma) \in Q(B)$ حداً أدنى لأسرة الأشياء (B_1, B_2) عندئذ $\gamma : B \rightarrow A$ إيبومورفيزم للفتة $\mathfrak{I}$ وإن $A \subset B_1, A \subset B_2$. عندئذ توجد إيبومورفيزمات $\beta_1 : A \rightarrow B_1$, $\beta_2 : A \rightarrow B_2$ بحيث $\beta_1 \cdot \gamma = \alpha_1$, $\beta_2 \cdot \gamma = \alpha_2$ وحسب تعريف الجداء، فإنه يوجد مورفيزم وحيد $\alpha : A \rightarrow B_1 \amalg B_2$ لأجله المخطط الآتي:



تبديلي، أي إن $p_1 \cdot \alpha = \beta_1$, $p_2 \cdot \alpha = \beta_2$. أصبح لدينا $\alpha \cdot \gamma : B \rightarrow B_1 \amalg B_2$ مورفيزماً للفتة $\mathfrak{I}$ لأجله المخطط الآتي:



تبديلي، أي إن $p_1 \cdot (\alpha \cdot \gamma) = \alpha_1$, $p_2 \cdot (\alpha \cdot \gamma) = \alpha_2$ ، وبما أن المورفيزم β وحيد نجد

أن $\alpha \cdot \gamma = \beta$ وبما أن γ إبيومورفيزم، فإن $Coker(\beta) = Coker(\alpha \cdot \gamma) = Coker(\alpha)$

$$Ker(Coker(\beta)) = Ker(Coker(\alpha))$$

أي إن $Im(\beta) = Im(\alpha)$. لنأخذ النشر القانوني للمورفيزم α الآتي:

$$A \xrightarrow{\lambda_1} Coim(\alpha) \xrightarrow{\alpha} Im(\alpha) \xrightarrow{\mu_1} B_1 \amalg B_2$$

حيث λ_1 الإبيومورفيزم القانوني، μ_1 المونومورفيزم القانوني، فنجد أن $\alpha = \mu_1 \cdot \bar{\alpha} \cdot \lambda_1$ وبما أن $Im(\beta) = Im(\alpha)$ وإن $\mu, \mu_1 : Im(\alpha) \rightarrow B_1 \amalg B_2$ المونومورفيزمات القانونية نجد أن $\mu = \mu_1$ وبما أن $\alpha \cdot \gamma = \beta$ فإن $\mu \cdot \bar{\beta} \cdot \lambda = \mu \cdot \bar{\alpha} \cdot \lambda_1 \cdot \gamma$ أي إن:

$$\mu \cdot \bar{\alpha} \cdot \lambda_1 \cdot \gamma = \mu \cdot \bar{\beta} \cdot \lambda$$

وبما أن μ مونومورفيزم ينتج أن $\bar{\alpha} \cdot \lambda_1 \cdot \gamma = \bar{\beta} \cdot \lambda$ ومنه $\lambda = \bar{\beta}^{-1} \cdot \bar{\alpha} \cdot \lambda_1 \cdot \gamma$ وهذا يبين أن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccccccc} B & \xrightarrow{\gamma} & A & \xrightarrow{\lambda_1} & Coim(\alpha) & \xrightarrow{\bar{\alpha}} & Im(\alpha) = Im(\beta) \\ & & & & \searrow \lambda & & \nearrow \bar{\beta}^{-1} \\ & & & & Coim(\beta) & & \end{array}$$

تبدلي، ولما كان كل من $\gamma, \lambda_1, \bar{\alpha}, \bar{\beta}^{-1}$ إبيومورفيزماً نجد أن λ إبيومورفيزم، ومنه يكون $B \subset Coim(\beta)$ ، وهكذا نجد أن $Coim(\beta) = \inf(B_1, B_2)$.

مبرهنة ٩-٢-١٢.

لتكن $\mathcal{I}$ فئة تبديلية، و $B \in ob(\mathcal{I})$. عندئذ أياً كان $B_1, B_2 \in Q(B)$ يوجد $\sup(B_1, B_2)$. البرهان.

لنفرض أن $B_1, B_2 \in Q(B)$ عندئذ $B \setminus B_1, B \setminus B_2 \in P(B)$ وذلك حسب المبرهنة (٨-٢). لنفرض أن $\alpha_1 : B \setminus B_1 \rightarrow B$, $\alpha_2 : B \setminus B_2 \rightarrow B$ المونومورفيزمات القانونية، بما أن الفئة $\mathcal{I}$ تبديلية فإن $B \setminus B_1 \amalg B \setminus B_2$ موجود. لنفرض أن:

$$i_1 : B \setminus B_1 \rightarrow B \setminus B_1 \amalg B \setminus B_2, \quad i_2 : B \setminus B_2 \rightarrow B \setminus B_1 \amalg B \setminus B_2$$

مورفيزمات الاحتواء القانونية. عندئذ حسب تعريف المجموع يوجد مورفيزم وحيد للفئة $\mathcal{I}$

$$p: B \setminus B_1 \amalg B \setminus B_2 \rightarrow B$$

لأجله المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccccc} & i_1 & & B \setminus B_1 & \xrightarrow{\alpha_1} \\ & \swarrow & & \searrow & \\ (B \setminus B_1) \amalg (B \setminus B_2) & \xrightarrow{p} & & B & \\ & \nwarrow & & \nearrow & \\ & i_2 & & B \setminus B_2 & \xrightarrow{\alpha_2} \end{array}$$

تبديلي، أي إن $p \cdot i_1 = \alpha_1$ ، $p \cdot i_2 = \alpha_2$ لنفرض أن $p_1: B \rightarrow B_1$ ، $p_2: B \rightarrow B_2$ عندئذ تكون المتتالية $B \xrightarrow{p} B_1 \xrightarrow{\alpha_1} B$ تامة، وذلك حسب التمهيدية (٧-٣-٨)، وبالتالي يكون $p_1 \cdot \alpha_1 = 0$ ، أي إن:

$$Coker(B \setminus B_1, \alpha_1) = (B_1, p_1)$$

لنفرض أن $\lambda: B \rightarrow Coker(p)$ الإيومورفيزم القانوني، ولنأخذ المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccccc} & \mu & & Coker(\alpha_1) = B_1 & \\ & \swarrow & & \uparrow p_1 & \\ Coker(p) & \xleftarrow{\lambda} & & B & \xleftarrow{\alpha_1} B \setminus B_1 \end{array}$$

بما أن $\lambda \cdot \alpha_1 = \lambda \cdot (p \cdot i_1) = (\lambda \cdot p) \cdot i_1 = 0 \cdot i_1 = 0$ ، فإنه يوجد مورفيزم وحيد:

$$\mu: B_1 \rightarrow Coker(p)$$

لأجله $p_1 \cdot \mu = \lambda$ بما أن λ إيومورفيزم فإن μ إيومورفيزم ومنه فإن:

$$B_1 \subset Coker(p)$$

بطريقة مشابهة نجد أن $B_2 \subset Coker(p)$ ، ومنه فإن $\sup(B_1, B_2) \subset Coker(p)$ ، ليكن $(A, \alpha) \in Q(B)$ حداً أعلى لأسرة الأشياء (B_1, B_2) عندئذ $\alpha: B \rightarrow A$ إيومورفيزم للفترة $\mathfrak{I}$ وإن $B_1 \subset A$ ، $B_2 \subset A$ ، لنفرض أيضاً أن $\beta_1: B_1 \rightarrow A$ ، $\beta_2: B_2 \rightarrow A$ المونومورفيزمات القانونية، عندئذ توجد مونومورفيزمات $p_1: B \rightarrow B_1$ ، $p_2: B \rightarrow B_2$ تحقق $\beta_1 \cdot p_1 = \alpha$ ، $\beta_2 \cdot p_2 = \alpha$ بما أن $(B \setminus B_1) \amalg (B \setminus B_2)$ مجموع أسرة الأشياء $(B \setminus B_1), (B \setminus B_2)$ ، فإن التطبيق:

$$\Gamma: \mathfrak{I}((B \setminus B_1) \amalg (B \setminus B_2), X) \rightarrow \mathfrak{I}(B \setminus B_1, X) \times \mathfrak{I}(B \setminus B_2, X)$$

متباين وغامر؛ وذلك لأجل كل $X \in ob(\mathcal{T})$. من أجل $X = A$ وبما أن:

$$\alpha \cdot p : (B \setminus B_1) \amalg (B \setminus B_2) \rightarrow A$$

فإن $(\alpha \cdot p) \cdot i_1 = (\alpha \cdot p) \cdot i_2$ ، ومنه فإن:

$$(\alpha \cdot p) \cdot i_1 = \alpha \cdot (p \cdot i_1) = \alpha \cdot \alpha_1 = (\beta_1 \cdot p_1) \cdot \alpha_1 = \beta_1 \cdot (p_1 \cdot \alpha_1) = \beta_1 \cdot 0 = 0$$

$$(\alpha \cdot p) \cdot i_2 = \alpha \cdot (p \cdot i_2) = \alpha \cdot \alpha_2 = (\beta_2 \cdot p_2) \cdot \alpha_2 = \beta_2 \cdot (p_2 \cdot \alpha_2) = \beta_2 \cdot 0 = 0$$

ومنه فإن $\Gamma(\alpha \cdot p) = 0 = \Gamma(0)$ أي إن $\alpha \cdot p = 0$. لنفرض أن $\theta : B \rightarrow Coker(p)$

الإبيومورفيزم القانوني، عندئذ $\theta \cdot p = 0$ وبما أن $\alpha \cdot p = 0$ ، فإنه يوجد مورفيزم وحيد:

$$w : Coker(p) \rightarrow A$$

لأجله المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccccc} & & Coker(p) & & \\ & \swarrow \theta & \uparrow & & \\ A & \xleftarrow{\alpha} & B & \xleftarrow{p} & (B \setminus B_1) \amalg (B \setminus B_2) \end{array}$$

تبديلي، أي إن $w \cdot \theta = \alpha$. ولما كان α إبيومورفيزم، فإن θ إبيومورفيزم، ومنه يكون

$$Coker(p) \subset A, \text{ مما سبق نجد أن } \sup(B_1, B_2) = Coker(p)$$

٩-٣. احتواء الفئات.

تعريف.

لتكن $\mathcal{S}, \mathcal{S}'$ فئتين تبدليتين، و $T: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}'$ دالياً.

- نقول إن الدالي T هو دالي احتواء إذا كان التطبيق:

$$T: \mathcal{S}(X, Y) \rightarrow \mathcal{S}'(T(X), T(Y))$$

متبايناً، وذلك أيأ كان $X, Y \in ob(\mathcal{S})$.

- نقول إن الدالي T هو دالي احتواء كامل إذا كان التطبيق:

$$T: \mathcal{S}(X, Y) \rightarrow \mathcal{S}'(T(X), T(Y))$$

متبايناً وغامراً، وذلك أيأ كان $X, Y \in ob(\mathcal{S})$.

- نقول إن الدالي T هو دالي احتواء كامل وتام إذا كان T هو دالي احتواء كامل، وكان T تاماً.

تمهيدية ٩-٣-١.

لتكن فئة تبدلية، و $X \in ob(\mathcal{S})$. لنرمز لمجموعة كل الثنائيات (A, p) حيث $A \in ob(\mathcal{S})$ و $p: A \rightarrow X$ إيبومورفيزم، بالرمز $E(X)$. عندئذ القضايا الآتية صحيحة:

١ - $(X, I_X) \in E(X)$ ، أي إن المجموعة $E(X)$ غير خالية.

٢ - إذا كان $(A, p) \in E(X)$ و $(B, q) \in E(A)$ ، فإن $(B, p \cdot q) \in E(X)$.

٣ - إذا كان $(A, p) \in E(X)$ ، وكان $f: X' \rightarrow X$ مورفيزماً للفئة $\mathcal{S}$ ، فإنه يوجد $(A', p') \in E(X')$ لأجله المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} A' = A \prod_{X'} X' & \xrightarrow{f'} & X' \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ A & \xrightarrow{p} & X \end{array}$$

تبدلي، أي إن $f \cdot A' = p \cdot f'$.

البرهان.

١ - واضح لأن المورفيزم المطابق $I_A: A \rightarrow A$ إيبومورفيزم.

٢ - ليكن $(A, p) \in E(X)$ عندئذ $p: A \rightarrow X$ إبيومورفيزماً للفئة $\mathcal{S}$. بفرض أن $(B, q) \in E(A)$ عندئذ $q: B \rightarrow A$ إبيومورفيزم للفئة $\mathcal{S}$ ؛ ومنه يكون $p \cdot q: B \rightarrow X$ إبيومورفيزماً للفئة $\mathcal{S}$ ؛ وبالتالي $(B, p \cdot q) \in E(X)$.

٣ - لنفرض أن $p: A \rightarrow X$ إبيومورفيزم للفئة $\mathcal{S}$ ، وأن $f: X' \rightarrow X$ مورفيزم للفئة $\mathcal{S}$. بما أن الفئة $\mathcal{S}$ تبديلية، فإن $A \oplus X', A \amalg X' \in ob(\mathcal{S})$ وأنه حسب المبرهنة (٧-١-٨) يوجد إيزومورفيزم $h: A \oplus X' \rightarrow A \amalg X'$ يحقق العلاقات الواردة في المبرهنة (٧-١-٨). لنفرض أن $p_A: A \amalg X' \rightarrow A$ ، $p_{X'}: A \amalg X' \rightarrow X'$ عندئذ يكون كل من $p_A \cdot h: A \oplus X' \rightarrow A$ ، $p_{X'} \cdot h: A \oplus X' \rightarrow X'$ إبيومورفيزمات للفئة $\mathcal{S}$. لنضع $\pi = p_A \cdot h$ ، $\pi' = p_{X'} \cdot h$ وبفرض أن $S = A \oplus X'$ ، فنجد أن:

$$\pi: S \rightarrow X, \pi': S \rightarrow X'$$

وإن $f \cdot \pi: S \rightarrow X$ ، $p \cdot \pi': S \rightarrow X$. لنأخذ المورفيزم $\mu = f \cdot \pi - p \cdot \pi': S \rightarrow X$ وبفرض أن الثنائية $(A, \nu) = Ker(\mu)$ وحسب المبرهنة (٨-١-٤) نجد أن $A' = A \amalg_X X'$

وبما أن $\mu \cdot \nu = 0$ نجد أن $f \cdot \pi \cdot \nu = p \cdot \pi' \cdot \nu$. لنفرض أن:

$$p' = \pi' \cdot \nu: A \amalg_X X' \rightarrow X', \quad f' = \pi \cdot \nu: A \amalg_X X' \rightarrow A$$

نجد أن $f \cdot p' = p \cdot f'$ وهذا يبين أن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} A' = A \amalg_X X' & \xrightarrow{f'} & X' \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ A & \xrightarrow{p} & X \end{array}$$

تبديلي. لنبرهن على أن p' إبيومورفيزم. لنفرض أن $i: A \rightarrow S$ ، $i': X' \rightarrow S$ مورفيزمات الاحتواء، فنجد أن $\mu \cdot i = (f \cdot \pi' - p \cdot \pi) \cdot i = f \cdot \pi' \cdot i - p \cdot \pi \cdot i = -p$ ولما كان p إبيومورفيزماً نجد أن $p = 0$ ؛ وبالتالي يكون μ إبيومورفيزماً؛ وهذا يبين لنا أن المتتالية:

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{\nu} S \xrightarrow{\mu} X \rightarrow 0$$

تامة. من جهة أخرى، بما أن π' إبيومورفيزم وإن i مونومورفيزم وإن $\pi' \cdot i = 0$ نجد: أن $Ker(\pi') = i$ وهذا يبين أن المتتالية:

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{i} S \xrightarrow{\pi} X \rightarrow 0$$

تامة، ولما كان $\mu \cdot i$ إبيومورفيزم؛ فإنه حسب التمهيدية (٩-١-٧) يكون $p' = \pi' \cdot \nu$ إبيومورفيزماً ومنه يكون $(A', p') \in E(X')$.

تمهيدية ٩-٣-٢.

لتكن $\mathfrak{I}$ فئة تبديلية، و $X \in ob(\mathfrak{I})$. لنرمز بالشكل $\mathfrak{I}(X)$ لصفى الأشياء والمورفيزمات الآتين:

١ - صف الأشياء، $ob(\mathfrak{I}(X)) = E(X)$.

٢ - صف المورفيزمات، المورفيزمات من (A, p) إلى (A', p') هي المورفيزمات $u: A \rightarrow A'$ للفئة $\mathfrak{I}$ التي لأجلها المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{p} & X \\ u \downarrow & \nearrow & \\ A' & & p' \end{array}$$

تبديلي، أي إن $p' \cdot u = p$. إن $\mathfrak{I}(X)$ تشكل فئة.

البرهان.

نتركه كتمرين للقارئ.

تمهيدية ٩-٣-٣.

لتكن $\mathfrak{I}$ فئة تبديلية، عندئذ لأجل كل إبيومورفيزم $f: X \rightarrow X'$ للفئة $\mathfrak{I}$ يوجد دالي مباشر $f^*: \mathfrak{I}(X) \rightarrow \mathfrak{I}(X')$ معرف بالشكل الآتي: أياً كان $(A, p) \in \mathfrak{I}(X)$ ، فإن $f^*((A, p)) = (A, f \cdot p)$.

البرهان.

ليكن $f: X \rightarrow X'$ إبيومورفيزم للفئة $\mathfrak{I}$ ، بما أن $X, X' \in ob(\mathfrak{I})$ فإنه حسب التمهيدية (٩-٣-٢) توجد الفئتان $\mathfrak{I}(X), \mathfrak{I}(X')$. لنعرف $f^*: \mathfrak{I}(X) \rightarrow \mathfrak{I}(X')$ من خلال تطبيق الأشياء والمورفيزمات الآتين:

١ - تطبيق الأشياء $f^*: ob(\mathfrak{I}(X)) \rightarrow ob(\mathfrak{I}(X'))$. أياً كان $(A, p) \in ob(\mathfrak{I}(X))$

فإن $p: A \rightarrow X$ إبيومورفيزم للفئة $\mathfrak{I}$ وبما أن $f: X \rightarrow X'$ إبيومورفيزم للفئة $\mathfrak{I}$ نجد أن

$f \cdot p : A \rightarrow X'$ إيبومورفيزم للفئة $\mathcal{S}$ ؛ ومنه فإن $(A, f \cdot p) \in ob(\mathcal{S}(X'))$. لنضع:
 $(A, p), (B, q) \in ob(\mathcal{S}(X))$ لأنه إذا كان $f^\circ((A, p)) = (A, f \cdot p)$
 $(A, p) = (B, q)$ فإن $A = B, p = q$ ، ومنه فإن:
 $f^\circ((A, p)) = (A, f \cdot p) = (B, f \cdot q) = f^\circ((B, q))$

٢ - تطبيق مورفيزمات $f^\circ : Mor(\mathcal{S}(X)) \rightarrow Mor(\mathcal{S}(X'))$

ليكن $u : (A, p) \rightarrow (B, q)$ مورفيزماً للفئة $\mathcal{S}(X)$ عندئذ $u : A \rightarrow B$ مورفيزم للفئة $\mathcal{S}$ لأجله المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{p} & X \\ u \downarrow & \nearrow & \\ B & & q \end{array}$$

تبديلي، أي إن $q \cdot u = p$ ، ومنه نجد أن $f \cdot (q \cdot u) = f \cdot p$ أي إن $(f \cdot q) \cdot u = f \cdot p$
وهذا يبين أن $u : A \rightarrow B$ مورفيزم للفئة $\mathcal{S}$ لأجله المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f \cdot p} & X' \\ u \downarrow & \nearrow & \\ B & & f \cdot q \end{array}$$

تبديلي، وبالتالي يكون $u : (A, f \cdot p) \rightarrow (B, f \cdot q)$ مورفيزماً للفئة $\mathcal{S}(X')$.
لنضع $f^\circ(u) = u$ ، واضح أن f° تطبيق مورفيزمات وأنه أياً كان $(A, p) \in ob(\mathcal{S}(X))$
فإن $f^\circ(I_{(A, p)}) = I_A = I_{(A, f \cdot p)} = I_{f \cdot (A, p)}$
كما أنه لأجل أي مورفيزمين u, v للفئة $\mathcal{S}(X)$ ، فإن $f^\circ(u \cdot v) = u \cdot v = f^\circ(u) \cdot f^\circ(v)$ ،
مما سبق نجد أن f° هو دالي مباشر.

تمهيدية ٩-٣-٤.

لتكن فئة تبديلية، عندئذ لأجل كل مورفيزم $f : X \rightarrow X'$ للفئة $\mathcal{S}$ يوجد دالي مباشر $f : \mathcal{S}(X') \rightarrow \mathcal{S}(X)$ معرف بالشكل الآتي: أياً كان $(A', p') \in \mathcal{S}(X')$ فإن:
 $f((A', p')) = (A' \prod_X X, p)$ حيث $p : A' \prod_X X \rightarrow X$ المورفيزم القانوني.
البرهان.

ليكن $f : X \rightarrow X'$ مورفيزماً للفئة $\mathcal{S}$. بما أن $X, X' \in ob(\mathcal{S})$ ، فإنه حسب التمهيدية

(٢-٣-٩) توجد الفئتان $\mathcal{S}(X), \mathcal{S}(X')$. لنعرف $f_*: \mathcal{S}(X') \rightarrow \mathcal{S}(X)$ من خلال تطبيق الأشياء والمورفيزمات الآتيتين:

- تطبيق الأشياء، $f_*: ob(\mathcal{S}(X')) \rightarrow ob(\mathcal{S}(X))$. ليكن $(A', p') \in ob(\mathcal{S}(X'))$ عندئذ $p': A' \rightarrow X'$ إبيومورفيزماً للفئة $\mathcal{S}$ ، وحسب التمهيدية (١-٣-٩) يوجد $(A, p) \in ob(\mathcal{S}(X))$ لأجله المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} A = A' \prod_{X'} X & \xrightarrow{p} & X \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ A' & \xrightarrow{p'} & X' \end{array}$$

تبديلي، أي إن $f \cdot p = p' \cdot f'$.

لنضع $(A, p) \in ob(\mathcal{S}(X))$ حيث $f_*((A', p')) = (A, p)$.

- تطبيق المورفيزمات، $f_*: Mor(\mathcal{S}(X')) \rightarrow Mor(\mathcal{S}(X))$.

ليكن $u': (A', p') \rightarrow (A'_1, p'_1)$ مورفيزماً للفئة $\mathcal{S}(X')$ ، عندئذ $u': A' \rightarrow A'_1$ مورفيزم للفئة $\mathcal{S}$ لأجله المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} A' & \xrightarrow{p'} & X' \\ u' \downarrow & \nearrow & \\ A'_1 & & p'_1 \end{array}$$

تبديلي، أي إن $p'_1 \cdot u' = p'$. من جهة أخرى، بما أن $(A', p') \in ob(\mathcal{S}(X'))$ ؛ وإن $f: X \rightarrow X'$ فإنه حسب التمهيدية (١-٣-٩) يوجد $(A, p) \in ob(\mathcal{S}(X))$ بحيث يكون المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} A = A' \prod_{X'} X & \xrightarrow{p} & X \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ A' & \xrightarrow{p'} & X' \end{array}$$

تبديلي، أي إن $f \cdot p = p' \cdot f'$. أيضاً، بما أن $(A'_1, p'_1) \in ob(\mathcal{S}(X'))$ ؛ فإنه حسب التمهيدية (١-٣-٩) يوجد $(A_1, p_1) \in ob(\mathcal{S}(X))$ لأجله المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} A_1 = A'_1 \prod_{X'} X & \xrightarrow{p_1} & X \\ f'_1 \downarrow & & \downarrow f \\ A'_1 & \xrightarrow{p'_1} & X' \end{array}$$

تبدلياً، أي إن $f \cdot p_1 = p'_1 \cdot f'_1$. لنأخذ المورفيزم $u: A \rightarrow A_1$ الذي لأجله المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & A' \\ u \downarrow & & \downarrow u' \\ A_1 & \xrightarrow{f_1} & A'_1 \end{array}$$

تبدلي، أي إن $f_1 \cdot u' = u \cdot f$. لنضع $f_1(u') = u \cdot f$.

- أياً كان $(A', p') \in \text{ob}(\mathfrak{S}(X'))$ فإن $I_{(A', p')}: (A', p') \rightarrow (A_1, p'_1)$ ، وإن:

$$f_1(I_{(A', p')}) : f_1((A', p')) \rightarrow f_1((A_1, p'_1))$$

وبما أن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & A' \\ I_A \downarrow & & \downarrow I_{A'} \\ A & \xrightarrow{f} & A' \end{array}$$

تبدلي، أي إن $I_A \cdot f' = f' \cdot I_{A'}$ ، فإن $f_1(I_{(A', p')}) = I_A$.

- ليكن $u': (A', p') \rightarrow (A'_1, p'_1)$ ، $u'': (A'_1, p'_1) \rightarrow (A''_1, p''_1)$ مورفيزمين للفئة $\mathfrak{S}(X')$ عندئذ $u'' \cdot u': (A', p') \rightarrow (A''_1, p''_1)$ مورفيزم للفئة $\mathfrak{S}(X')$ وذلك لأن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} A' & \xrightarrow{p'} & X' \\ u'' \cdot u' \downarrow & \searrow & \downarrow p'_1 \\ A''_1 & & p''_1 \end{array}$$

تبدلي، أي إن $p'_1 \cdot (u'' \cdot u') = p''_1$ ، وذلك لأن المخططات الآتية:

$$\begin{array}{ccc} A' & \xrightarrow{p'} & X' \\ u' \downarrow & \searrow & \downarrow p'_1 \\ A'_1 & & p'_1 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} A'_1 & \xrightarrow{p'_1} & X' \\ u'' \cdot u' \downarrow & \searrow & \downarrow p''_1 \\ A''_1 & & p''_1 \end{array}$$

تبدلية، أي إن $p'_1 \cdot u' = p''_1$ ، $p''_1 \cdot u'' = p'_1$.

بما أن $(A', p'), (A'_1, p'_1), (A''_1, p''_1) \in \mathfrak{S}(X')$ ، وإن $f: X \rightarrow X'$ ، فإنه حسب التمهيدية (٩-٣-١) يوجد $(A, p), (A_1, p_1) \in \mathfrak{S}(X)$ بحيث تكون المخططات الآتية:

$$\begin{array}{ccc} A = A' \prod_{X'} X & \xrightarrow{p} & X \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ A' & \xrightarrow{p'} & X' \end{array} \quad \begin{array}{ccc} A_1 = A'_1 \prod_{X'} X & \xrightarrow{p_1} & X \\ f'_1 \downarrow & & \downarrow f \\ A'_1 & \xrightarrow{p'_1} & X' \end{array}$$

تبديلية، أي إن $f \cdot p_1 = p'_1 \cdot f'_1$ ، $f \cdot p = p' \cdot f'$ ، ومنه يكون المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} A_2 = A'_2 \prod_{X'} X & \xrightarrow{p_2} & X \\ f'_2 \downarrow & & \downarrow f \\ A'_2 & \xrightarrow{p'_2} & X' \end{array}$$

تبدلياً، أي إن $f \cdot p_2 = p'_2 \cdot f'_2$

لنأخذ المورفيزمات $u: A \rightarrow A_1$ ، $v: A_1 \rightarrow A_2$ التي لأجلها المخططات الآتية:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f'} & A' \\ u \downarrow & & \downarrow u' \\ A_1 & \xrightarrow{f'_1} & A'_1 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} A_1 & \xrightarrow{f} & A'_1 \\ v \downarrow & & \downarrow u'' \\ A_2 & \xrightarrow{f'_2} & A'_2 \end{array}$$

تبديلية، أي إن $u' \cdot f' = f'_1 \cdot u$ ، $u'' \cdot f'_1 = f'_2 \cdot v$ وحسب تعريف f_* يكون:

$$f_*(u') = u , \quad f_*(u'') = v$$

من جهة أخرى، المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f'} & A' \\ u \downarrow & & \downarrow u' \\ A' & \xrightarrow{f'_1} & A'_1 \\ v \downarrow & & \downarrow u'' \\ A_2 & \xrightarrow{f'_2} & A'_2 \end{array}$$

تبدلياً، لأن

$$f'_2 \cdot (v \cdot u) = (f'_2 \cdot v) \cdot u = (u'' \cdot f'_1) \cdot u = u'' \cdot (f'_1 \cdot u) = u'' \cdot (u' \cdot f') = (u'' \cdot u') \cdot f'$$

ومنه نجد أن $f_*(u'' \cdot u') = v \cdot u = f_*(u'') \cdot f_*(u')$ ، مما سبق نجد أن f دالي.

تمهيدية ٩-٣-٥.

لنكن $\mathfrak{S}$ فئة صغيرة تبديلية، و $\mathcal{A}$ فئة الزمر التبديلية. عندئذ لأجل كل $X \in ob(\mathfrak{S})$

يوجد دالي غير مباشر جمعي $\hat{h}_X: \mathfrak{S} \rightarrow \mathcal{A}$ معرف بالشكل الآتي: أيأ كان $Y \in ob(\mathfrak{S})$

$$\hat{h}_X(Y) = \mathfrak{S}(Y, X).$$

البرهان.

لنعرف $\hat{h}_X: \mathfrak{S} \rightarrow \mathcal{A}$ من خلال تطبيقي الأشياء والمورفيزمات الآتين:

- تطبيق الأشياء، $\hat{h}_X : ob(\mathfrak{I}) \rightarrow ob(A\ell)$ معرف بالشكل الآتي: أياً كان $Y \in ob(\mathfrak{I})$ ، فإن $\hat{h}_X(Y) = \mathfrak{I}(Y, X)$. بما أن الفئة $\mathfrak{I}$ صغيرة وتبديلية فإن $\mathfrak{I}$ هي فئة صغيرة وجمعية وحسب التعريف، فإنه لأجل كل $X, Y \in ob(\mathfrak{I})$ فإن $\mathfrak{I}(X, Y)$ هي زمرة تبديلية؛ وبالتالي فإن $\mathfrak{I}(X, Y) \in ob(A\ell)$. واضح أن $\hat{h}_X$ هو تطبيق أشياء.

- تطبيق مورفيزمات، $\hat{h}_X : Mor(\mathfrak{I}) \rightarrow Mor(A\ell)$ معرف بالشكل الآتي: لأجل أي مورفيزم $u : Y \rightarrow Y'$ للفئة $\mathfrak{I}$ ، فإن $\hat{h}_X(u) : \hat{h}_X(Y') \rightarrow \hat{h}_X(Y)$ أي إن:

$$\hat{h}_X(u) : \mathfrak{I}(Y', X) \rightarrow \mathfrak{I}(Y, X)$$

وإنه أياً كان $v \in \mathfrak{I}(Y', X)$ ، فإن $\hat{h}_X(u)(v) = v \cdot u$ ، فنجد أن تطبيق مورفيزمات، وإنه أياً كان $\lambda \in \mathfrak{I}(Y, X)$ ، فإن $\hat{h}_X(I_Y) : \mathfrak{I}(Y, X) \rightarrow \mathfrak{I}(Y, X)$ وأياً كان $\lambda \in \mathfrak{I}(Y, X)$ ، فإن $\hat{h}_X(I_Y)(\lambda) = \lambda \cdot I_Y = \lambda$ أي إن $\hat{h}_X(I_Y) = I_{\mathfrak{I}(Y, X)} = I_{\hat{h}_X(Y)}$.

ليكن $u : Y \rightarrow Y'$ مورفيزمين للفئة $\mathfrak{I}$ ، عندئذ $w : Y' \rightarrow Y''$ ، وإن:

$$\hat{h}_X(w \cdot u) : \mathfrak{I}(Y'', X) \rightarrow \mathfrak{I}(Y, X)$$

ومنه أياً كان $\mu \in \mathfrak{I}(Y'', X)$ ، فإن $\hat{h}_X(w \cdot u)(\mu) = \mu \cdot (w \cdot u) = (\mu \cdot w) \cdot u$ ، فإن $\hat{h}_X(u) : \mathfrak{I}(Y', X) \rightarrow \mathfrak{I}(Y, X)$ وإن $\mu \cdot w \in \mathfrak{I}(Y', X)$ ، ومنه فإن $\hat{h}_X(u)(\mu \cdot w) = (\mu \cdot w) \cdot u$ وبالتالي يكون:

$$\hat{h}_X(w \cdot u)(\mu) = (\mu \cdot w) \cdot u = \hat{h}_X(u)(\mu \cdot w)$$

أيضاً لما كان $w : Y' \rightarrow Y''$ فإن $\hat{h}_X(w) : \mathfrak{I}(Y'', X) \rightarrow \mathfrak{I}(Y', X)$ وإن $\mu \in \mathfrak{I}(Y'', X)$ نجد أن $\hat{h}_X(w)(\mu) = \mu \cdot w$ وهكذا نجد أن:

$$\hat{h}_X(w \cdot u)(\mu) = \hat{h}_X(u)(\mu \cdot w) = \hat{h}_X(u)(\hat{h}_X(w)(\mu)) = (\hat{h}_X(u) \cdot \hat{h}_X(w))(\mu)$$

وهذا يبين أن $\hat{h}_X(w \cdot u) = \hat{h}_X(u) \cdot \hat{h}_X(w)$ ، مما سبق نجد أن $\hat{h}_X$ هو دالي غير مباشر. لنبرهن على أن الدالي $\hat{h}_X$ جمعياً. ليكن $u, v : Y \rightarrow Y'$ مورفيزمان للفئة $\mathfrak{I}$ ، بما أن الفئة $\mathfrak{I}$ جمعية، فإن $u + v : Y \rightarrow Y'$ مورفيزم للفئة $\mathfrak{I}$ ، ومنه فإن:

$$\hat{h}_X(u + v) : \mathfrak{I}(Y', X) \rightarrow \mathfrak{I}(Y, X)$$

وإنه أياً كان $\lambda \in \mathfrak{I}(Y', X)$ ، فإن:

$$\hat{h}_X(u + v)(\lambda) = \lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v = \hat{h}_X(u)(\lambda) + \hat{h}_X(v)(\lambda) =$$

$$= (\hat{h}_X(u) + \hat{h}_X(v))(\lambda)$$

وهذا يبين أن $\hat{h}_X(u+v) = \hat{h}_X(u) + \hat{h}_X(v)$ ، أي إن الدالي $\hat{h}_X$ جمعي.

تمهيدية ٩-٣-٦.

لتكن $\mathcal{T}$ فئة صغيرة تبديلية و $\mathcal{A}\ell$ فئة الزمر التبديلية. لنفرض أن $\mathcal{T}^F = \text{Funct}(\mathcal{T}, \mathcal{A}\ell)$ فئة الدوال غير المباشرة والجمعية من الفئة $\mathcal{T}$ إلى الفئة $\mathcal{A}\ell$ ، عندئذ يوجد دالي احتواء جمعي $\hat{h}: \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}^F$.

البرهان.

لنعرف $\hat{h}: \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}^F$ من خلال تطبيق الأشياء والمورفيزمات الآتين:

- تطبيق الأشياء $\hat{h}: ob(\mathcal{T}) \rightarrow ob(\mathcal{T}^F)$ معرف بالشكل الآتي: أيأ كان $X \in ob(\mathcal{T})$ ، فإن $\hat{h}(X) = \hat{h}_X$ وحسب التمهيدية (٩-٣-٥)، فإن $\hat{h}_X: \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{A}\ell$ دالي غير مباشر جمعي. إن تطبيق $\hat{h}$ لأنه إذا كان $X', X'' \in ob(\mathcal{T})$ ، بحيث $X' = X''$ ، فإن $\hat{h}_{X'}, \hat{h}_{X'': \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{A}\ell$ وأنه أيأ كان $Y \in ob(\mathcal{T})$ ، فإن:

$$\hat{h}_{X'}(Y) = \mathcal{T}(Y, X') = \mathcal{T}(Y, X'') = \hat{h}_{X''}(Y)$$

ومنه فإن $\hat{h}(X') = \hat{h}_{X'} = \hat{h}_{X''} = \hat{h}(X'')$.

- تطبيق مورفيزمات، $\hat{h}: Mor(\mathcal{T}) \rightarrow Mor(\mathcal{T}^F)$. ليكن $u: X \rightarrow Y$ مورفيزم للفئة $\mathcal{T}$. بما أن $X, Y \in ob(\mathcal{T})$ ، فإنه توجد دوال غير مباشرة جمعية $\hat{h}_X, \hat{h}_Y: \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{A}\ell$ ، وذلك حسب التمهيدية (٩-٣-٥)، لنضع: $\hat{h}(u): \hat{h}(X) \rightarrow \hat{h}(Y)$ أي إن $\hat{h}(u): \hat{h}_X \rightarrow \hat{h}_Y$ ، عندئذ أيأ كان $A \in ob(\mathcal{T})$ ، فإن $\hat{h}(u)(A): \hat{h}_X(A) \rightarrow \hat{h}_Y(A)$ أي إن:

$$\hat{h}(u)(A): \mathcal{T}(A, X) \rightarrow \mathcal{T}(A, Y)$$

وإنه أيأ كان $\lambda \in \mathcal{T}(A, X)$ ، فإن $\hat{h}(u)(A)(\lambda) = u \cdot \lambda$. لنبرهن أنه لأجل u ، فإن u مورفيزم للفئة $\mathcal{T}^F$. نلاحظ أنه أيأ كان $A \in ob(\mathcal{T})$ ، فإن $\hat{h}(u)(A)$ هو تطبيق، لأنه إذا كان $w, v \in \mathcal{T}(A, X)$ ، بحيث $w = v$ ، فإن $u \cdot w = u \cdot v$ ؛ ومنه فإن:

$$\hat{h}(u)(A)(w) = \hat{h}(u)(A)(v)$$

وإن $\hat{h}(u)(A)$ هو تشاكل زمري، لأن:

$$\hat{h}(u)(A)(v+w) = u \cdot (v+w) = u \cdot v + u \cdot w = \hat{h}(u)(A)(v) + \hat{h}(u)(A)(w)$$

وهذا يبين أن $\hat{h}(u)(A)$ مورفيزم للفتة A . من جهة أخرى، أياً كان $\sigma: A \rightarrow B$ ، فإن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} \hat{h}_X(A) & \xrightarrow{\hat{h}(u)(A)} & \hat{h}_Y(A) \\ \hat{h}_X(\sigma) \uparrow & & \uparrow \hat{h}_Y(\sigma) \\ \hat{h}_X(B) & \xrightarrow{\hat{h}(u)(B)} & \hat{h}_Y(B) \end{array}$$

تبدلي، لأنه أياً كان $\lambda \in \hat{h}_X(B) = \mathfrak{S}(B, X)$ ، فإن:

$$\begin{aligned} \hat{h}_Y(\sigma) \cdot \hat{h}(u)(B)(\lambda) &= \hat{h}_Y(\sigma)(\hat{h}(u)(B)(\lambda)) = \hat{h}_Y(\sigma)(u \cdot \lambda) = (u \cdot \lambda) \cdot \sigma = \\ &= u \cdot (\lambda \cdot \sigma) \end{aligned}$$

$$\hat{h}(u)(A) \cdot \hat{h}_X(\sigma)(\lambda) = \hat{h}(u)(A)(\hat{h}_X(\sigma)(\lambda)) = \hat{h}(u)(A)(\lambda \cdot \sigma) = u \cdot (\lambda \cdot \sigma)$$

أي إن $\hat{h}(u)$ مورفيزم للفتة $\mathfrak{S}^F$.

كما أن $\hat{h}(I_X): \hat{h}_X \rightarrow \hat{h}_X$ وأنه أياً كان $A \in \text{ob}(\mathfrak{S})$ فإن $\hat{h}(I_X)(A): \hat{h}_X(A) \rightarrow \hat{h}_X(A)$ أي إن $\hat{h}(I_X)(A): \mathfrak{S}(A, X) \rightarrow \mathfrak{S}(A, X)$ ، وأنه أياً كان $\mu \in \mathfrak{S}(A, X)$ ، فإن:

$$\hat{h}(I_X)(A)(\mu) = \mu \cdot I_X = \mu$$

ومنه نجد أن $\hat{h}(I_X) = I_{\hat{h}_X} = \mu$.

ليكن $u: X \rightarrow X'$ ، $v: X' \rightarrow X''$ مورفيزمين للفتة $\mathfrak{S}$ ، عندئذ $v \cdot u: X \rightarrow X''$ وإن $\hat{h}(v \cdot u): \hat{h}_X \rightarrow \hat{h}_{X''}$ ، أي إن $\hat{h}(v \cdot u): \hat{h}(X) \rightarrow \hat{h}(X'')$ ، وأنه أياً كان $A \in \text{ob}(\mathfrak{S})$ ، فإن

$\hat{h}(v \cdot u)(A): \hat{h}_X(A) \rightarrow \hat{h}_{X''}(A)$ وأياً كان $\lambda \in \mathfrak{S}(A, X)$ ، فإن:

$$\hat{h}(v \cdot u)(A)(\lambda) = (v \cdot u) \cdot \lambda = v \cdot (u \cdot \lambda)$$

وبما أن $u \cdot \lambda \in \mathfrak{S}(A, X')$ وإن $\hat{h}(v)(A): \mathfrak{S}(A, X') \rightarrow \mathfrak{S}(A, X'')$ ، فإن:

$$\hat{h}(v)(A)(u \cdot \lambda) = v \cdot (u \cdot \lambda)$$

$$\hat{h}(v \cdot u)(A)(\lambda) = \hat{h}(v)(A)(u \cdot \lambda)$$

من جهة أخرى، بما أن $\lambda \in \mathfrak{S}(A, X)$ وإن $\hat{h}(u): \hat{h}(X) \rightarrow \hat{h}(X')$ ، فإن:

$$\hat{h}(u)(A): \mathfrak{S}(A, X) \rightarrow \mathfrak{S}(A, X')$$

وإن $\hat{h}(u)(A)(\lambda) = u \cdot \lambda$ ، ومنه نجد أن $\hat{h}(v \cdot u)(A)(\lambda) = (\hat{h}(v)(A) \cdot \hat{h}(u)(A))(\lambda)$

وهكذا نجد أن $\hat{h}(v \cdot u)(A) = \hat{h}(v)(A) \cdot \hat{h}(u)(A) = (\hat{h}(v) \cdot \hat{h}(u))(A)$ أي إن:

$$\hat{h}(v \cdot u) = \hat{h}(v) \cdot \hat{h}(u)$$

مما سبق نجد أن $\hat{h}$ دالي مباشر وأنه جمعياً، لأنه أيأ كان $\sigma, \sigma_1: X \rightarrow Y$ ، فإن

$\sigma + \sigma_1: X \rightarrow Y$ وإن $\hat{h}(\sigma + \sigma_1): \hat{h}(X) \rightarrow \hat{h}(Y)$ وأنه أيأ كان $A \in ob(\mathfrak{S})$ ، فإن

$\hat{h}(\sigma + \sigma_1)(A): \mathfrak{S}(A, X) \rightarrow \mathfrak{S}(A, Y)$ ، وأنه أيأ كان $\lambda \in \mathfrak{S}(A, X)$ ، فإن:

$$\begin{aligned} \hat{h}(\sigma + \sigma_1)(A)(\lambda) &= (\sigma + \sigma_1)(\lambda) = \sigma \cdot \lambda + \sigma_1 \cdot \lambda = \hat{h}(\sigma)(A)(\lambda) + \hat{h}(\sigma_1)(A)(\lambda) = \\ &= (\hat{h}(\sigma)(A) + \hat{h}(\sigma_1)(A))(\lambda) \end{aligned}$$

ومنه نجد أن $\hat{h}(\sigma + \sigma_1)(A) = \hat{h}(\sigma)(A) + \hat{h}(\sigma_1)(A) = (\hat{h}(\sigma) + \hat{h}(\sigma_1))(A)$ أي إن:

$$\hat{h}(\sigma + \sigma_1) = \hat{h}(\sigma) + \hat{h}(\sigma_1)$$

لنبرهن على أن الدالي $\hat{h}$ هو دالي احتواء. ليكن $w, w_1: X \rightarrow Y$ مورفيزمان للفتة $\mathfrak{S}$ وإن

$\hat{h}(w) = \hat{h}(w_1)$ ، بما أن $\hat{h}(w), \hat{h}(w_1): \hat{h}(X) \rightarrow \hat{h}(Y)$ ، فإن $\hat{h}(w), \hat{h}(w_1): \hat{h}(X) \rightarrow \hat{h}(Y)$

وأنه لأجل $X \in ob(\mathfrak{S})$ ، فإن $\hat{h}(w)(X) = \hat{h}(w_1)(X): \mathfrak{S}(X, X) \rightarrow \mathfrak{S}(Y, X)$ وأنه

لأجل $I_X \in \mathfrak{S}(X, X)$ فإن $\hat{h}(w)(X)(I_X) = \hat{h}(w_1)(X)(I_X)$ وبالتالي $w \cdot I_X = w_1 \cdot I_X$

أي أن $w = w_1$. ليكن $X, Y \in ob(\mathfrak{S})$ عندئذ $\hat{h}: \mathfrak{S}(X, Y) \rightarrow \mathfrak{S}^F(\hat{h}(X), \hat{h}(Y))$

لنفرض أن $w \in \mathfrak{S}^F(\hat{h}(X), \hat{h}(Y))$ عندئذ $w: \hat{h}(X) \rightarrow \hat{h}(Y)$ وحسب المبرهنة (٢-٢-٢)

(٦) يوجد مورفيزم وحيد $\mu: X \rightarrow Y$ بحيث $\mu \cdot u = w(Z)(u)$ وذلك أيأ كان $Z \in ob(\mathfrak{S})$

وأيأ كان $u \in \mathfrak{S}(Z, X)$ ، ومنه نجد أن $\hat{h}(\mu): \hat{h}(X) \rightarrow \hat{h}(Y)$ أي إن $\hat{h}(\mu): \hat{h}_X \rightarrow \hat{h}_Y$

وأيأ كان $Z \in ob(\mathfrak{S})$ فإن $\hat{h}(\mu)(Z): \hat{h}_X(Z) \rightarrow \hat{h}_Y(Z)$ وبالتالي:

$$\hat{h}(\mu)(Z): \mathfrak{S}(Z, X) \rightarrow \mathfrak{S}(Z, Y)$$

وأنه أيأ كان $u \in \mathfrak{S}(Z, X)$ فإن $\hat{h}(\mu)(Z)(u) = \mu \cdot u = w(Z)(u)$ وهذا يبين أن

$\hat{h}(\mu)(Z) = w(Z)$ أي إن $\hat{h}(\mu) = w$ ، مما سبق نجد أن الدالي $\hat{h}$ هو احتواء كامل.



الفصل العاشر

الأشياء الأفقية والإسقاطية

١٠-١. الأشياء الأفقية.

تعريف.

لتكن $\mathcal{I}$ فئة تبديلية، و $Q \in ob(\mathcal{I})$. نقول عن الشيء Q إنه أفقي إذا حقق الشرط الآتي: لأجل أي مونومورفيزم $\alpha: A' \rightarrow A$ وأي مورفيزم $u: A' \rightarrow Q$ للفئة $\mathcal{I}$ يوجد مورفيزم $v: A \rightarrow Q$ للفئة $\mathcal{I}$ لأجله المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \rightarrow & A' & \xrightarrow{\alpha} & A \\ & & \downarrow u & \swarrow & \downarrow v \\ & & Q & & \end{array}$$

تبديلي، أي إن $v \cdot \alpha = u$.

مبرهنة ١٠-١-١.

لتكن $\mathcal{I}$ فئة تبديلية، و $\{Q_i\}_{i \in I}$ أسرة من أشياء الفئة $\mathcal{I}$ تملك جداء $Q = \prod_{i \in I} Q_i$. عندئذ الشروط الآتية متكافئة:

- ١ - الشيء Q أفقياً في $\mathcal{I}$.
- ٢ - الأشياء Q_i أفقية في $\mathcal{I}$ وذلك أيأ كان $i \in I$.

البرهان.

لنفرض أن $\pi_i: Q \rightarrow Q_i$ المورفيزمات الإسقاطية وذلك أيأ كان $i \in I$ ، وحسب التمهيدية

$$(٤-١-٥)، فإنه لأجل كل $i \in I$ يوجد مورفيزم $\alpha_i: Q_i \rightarrow Q$ يحقق $\pi_i \cdot \alpha_i = I_{Q_i}$.$$

(1) $\Leftrightarrow$ (2). لنفرض أن Q أفقي في $\mathcal{I}$ وليكن $f: X' \rightarrow X$ مونومورفيزماً للفئة $\mathcal{I}$ و $g: X' \rightarrow Q$ مورفيزماً للفئة $\mathcal{I}$ ، عندئذ يكون $\alpha_i \cdot g: X' \rightarrow Q$ مورفيزماً للفئة $\mathcal{I}$ ، ولما كان Q أفقياً فإنه يوجد مورفيزم $h: X \rightarrow Q$ للفئة $\mathcal{I}$ يحقق $h \cdot f = \alpha_i \cdot g$ ، ومنه نجد أن $\pi_i \cdot h \cdot f = \pi_i \cdot \alpha_i \cdot g$ ، وبما أن $\pi_i \cdot \alpha_i = I_{Q_i}$ نجد أن $\pi_i \cdot h \cdot f = g$ ، ومنه نجد أن Q_i أفقي في $\mathcal{I}$ وذلك أيأ كان $i \in I$.

(2) $\Leftrightarrow$ (1). لنفرض أن Q_i لأجل كل $i \in I$ وليكن $f: X' \rightarrow X$ مونومورفيزماً للفئة $\mathcal{S}$ و $g: X' \rightarrow Q$ مورفيزماً للفئة $\mathcal{S}$ ، ولنفرض أن $\pi_i: Q \rightarrow Q_i$ المورفيزمات الإسقاطية وذلك أيأ كان $i \in I$ ، عندئذ يكون $\pi_i \cdot g: X' \rightarrow Q_i$ مورفيزماً للفئة $\mathcal{S}$. وبما أن Q_i أفقي، فإنه يوجد مورفيزم $h_i: X \rightarrow Q_i$ يحقق $h_i \cdot f = \pi_i \cdot g$ وحسب تعريف الجداء، فإنه يوجد مورفيزم وحيد $h: X \rightarrow Q$ للفئة $\mathcal{S}$ لأجله المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{h} & Q \\ & \searrow & \swarrow \\ & Q_i & \end{array} \quad \begin{array}{c} h_i \\ \pi_i \end{array}$$

تبديلي، أي إن $h_i \cdot h = h_i$ ، ومنه نجد أن $\pi_i \cdot h \cdot f = \pi_i \cdot g$ وذلك لأجل كل $i \in I$. وبما أن Q هو جداء لأسرة الأشياء $\{Q_i\}_{i \in I}$ فإنه حسب التمهيدية (٤-١-١) يكون التطبيق $\Gamma: \mathcal{S}(X', Q) \rightarrow \prod_{i \in I} \mathcal{S}(X', Q_i)$ المعرف بالشكل الآتي: $\Gamma(w) = (\pi_i \cdot w)_{i \in I}$ تقابلاً، وذلك أيأ كان $w \in \mathcal{S}(X', Q)$ ، ومنه نجد أن:

$$\Gamma(g) = (\pi_i \cdot g)_{i \in I} = (\pi_i \cdot (h \cdot f))_{i \in I} = \Gamma(h \cdot f)$$

وبما أن Γ متباين نجد أن $g = h \cdot f$ ، مما سبق نجد أن $Q \in \text{ob}(\mathcal{S})$ أفقي.

مبرهنة ١٠-١-٢.

لتكن $\mathcal{S}$ فئة تبديلية، و $C \in \text{ob}(\mathcal{S})$. ولنفرض أن $Q \in \text{ob}(\mathcal{S})$ شيء جزئي في C . إذا كان Q أفقياً عندئذ يكون Q حداً مباشراً في C .
البرهان.

لنفرض أن Q شيء جزئي في C وأن $i: Q \rightarrow C$ المونومورفيزم القانوني، لنفرض أن Q أفقياً في $\mathcal{S}$ ، عندئذ يوجد مورفيزم $p: C \rightarrow Q$ للفئة $\mathcal{S}$ يحقق $p \cdot i = I_Q$ أي إن المخطط:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \rightarrow & Q & \xrightarrow{i} & C \\ & & \downarrow I_Q & \nearrow p & \\ & & Q & & \end{array}$$

تبديلي. من جهة أخرى، بما أن الفئة $\mathcal{S}$ تبديلية، فإن النواة المرافقة للمورفيزم i موجودة: وحسب المبرهنة (٧-٣-٥) يكون Q حداً مباشراً في C .

مبرهنة ١٠-١-٣.

لتكن $\mathfrak{I}_1, \mathfrak{I}_2$ فئتين تبدليتين، وليكن $F: \mathfrak{I}_1 \rightarrow \mathfrak{I}_2$ دالياً مباشراً جمعياً و $G: \mathfrak{I}_2 \rightarrow \mathfrak{I}_1$ دالياً مرافقاً للدالي F . إذا كان الدالي F تاماً عندئذ فإن الدالي G ينقل الأشياء الأفقية من الفئة $\mathfrak{I}_2$ إلى أشياء أفقية في الفئة $\mathfrak{I}_1$.
البرهان.

ليكن $Q \in ob(\mathfrak{I}_2)$ شيئاً أفقياً، ولنبرهن على أن $G(Q) \in ob(\mathfrak{I}_1)$ شيء أفقي.
لنفرض أن $0 \rightarrow X' \rightarrow X \rightarrow X'' \rightarrow 0$ متتالية تامة من أشياء ومورفيزمات الفئة $\mathfrak{I}_1$ ، بما أن الدالي F تام، فإن المتتالية $0 \rightarrow F(X') \xrightarrow{f} F(X) \rightarrow F(X'') \rightarrow 0$ متتالية تامة. وحسب التمهيدية (٨-٣-٤) تكون متتالية الزمر، والتشاكلات الزمرية الآتية:

$$0 \rightarrow \mathfrak{I}_2(F(X''), Q) \rightarrow \mathfrak{I}_2(F(X), Q) \xrightarrow{\alpha} \mathfrak{I}_2(F(X'), Q)$$

تامة، حيث أن التشاكل α معرف بالشكل الآتي: أيأ كان $u \in \mathfrak{I}_2(F(X), Q)$ ، فإن $\alpha(u) = u \cdot \lambda$. لنبرهن على أن التشاكل $\alpha: \mathfrak{I}_2(F(X), Q) \rightarrow \mathfrak{I}_2(F(X'), Q)$ غامر. ليكن $v \in \mathfrak{I}_2(F(X'), Q)$ بما أن المورفيزم $\lambda: F(X') \rightarrow F(X)$ مونومورفيزماً فإنه يوجد مورفيزم وحيد $\mu: F(X) \rightarrow Q$ للفئة $\mathfrak{I}_2$ لأجله المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \rightarrow & F(X') & \xrightarrow{f} & F(X) \\ & & v \downarrow & \swarrow & \mu \\ & & Q & & \end{array}$$

تبدلي، أي إن $\mu \cdot \lambda = v$ ، ومنه يكون $\mu \in \mathfrak{I}_2(F(X), Q)$ ، وأن $\alpha(\mu) = \mu \cdot \lambda = v$ ، وهذا يبين أن التشاكل α غامر، وبالتالي تكون متتالية الزمر والتشاكلات الزمرية الآتية:

$$0 \rightarrow \mathfrak{I}_2(F(X''), Q) \rightarrow \mathfrak{I}_2(F(X), Q) \xrightarrow{\alpha} \mathfrak{I}_2(F(X'), Q) \rightarrow 0$$

تامة. وبما أن الدالي G مرافق للدالي F ، فإنه حسب التعريف يكون:

$$Hom_{\mathfrak{I}_2}(F) \cong Hom_{\mathfrak{I}_1}(G)$$

وهكذا نحصل على المخطط التبدلي الآتي:

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \rightarrow & \mathfrak{S}_2(F(X''), Q) & \rightarrow & \mathfrak{S}_2(F(X), Q) & \rightarrow & \mathfrak{S}_2(F(X'), Q) \rightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \rightarrow & \mathfrak{S}_1(X'', G(Q)) & \rightarrow & \mathfrak{S}_1(X, G(Q)) & \rightarrow & \mathfrak{S}_1(X', G(Q)) \rightarrow 0
\end{array}$$

حيث أن الأعمدة في هذا المخطط إيزومورفيزمات وهذا يبين أن متتالية الزمر والتشاكلات الزمرية الآتية:

$$0 \rightarrow \mathfrak{S}_1(X'', G(Q)) \rightarrow \mathfrak{S}_1(X, G(Q)) \xrightarrow{\delta} \mathfrak{S}_1(X', G(Q)) \rightarrow 0$$

تامة. ليكن $\beta: X' \rightarrow X$ مونومورفيزماً للفئة $\mathfrak{S}_1$ ، وليكن $w: X' \rightarrow G(Q)$ مورفيزماً للفئة $\mathfrak{S}_1$ ، بما أن $w \in \mathfrak{S}_1(X', G(Q))$ وأن التشاكل δ غامر، فإنه يوجد $\sigma \in \mathfrak{S}_1(X, G(Q))$

$$\begin{array}{ccccc}
0 & \rightarrow & X' & \xrightarrow{\beta} & X \\
& & w \downarrow & \nearrow & \\
& & G(Q) & & \sigma
\end{array}$$

بحيث $\delta(\sigma) = w$ وحسب تعريف δ ، فإن $\delta(\sigma) = \sigma \cdot \beta$ ، ومنه نجد أن $\sigma \cdot \beta = w$. وهذا يبين أن $G(Q) \in \text{ob}(\mathfrak{S}_1)$ أفقي.

تعريف.

لتكن فئة تبديلية، نقول عن الفئة $\mathfrak{S}$ إنها كثيفة أفقياً إذا حففت الشرط: أيأ كان $A \in \text{ob}(\mathfrak{S})$ ، فإنه يوجد شيء أفقي $Q \in \text{ob}(\mathfrak{S})$ بحيث $A \subset Q$. بمعنى آخر، نقول عن الفئة التبديلية $\mathfrak{S}$ إنها كثيفة أفقياً إذا كان كل شيء منها هو شيء جزئي من شيء أفقي.

مبرهنة ١٠-١-٤.

لتكن $\mathfrak{S}, \mathfrak{S}'$ فئتين تبديليتين، وليكن $F: \mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{S}'$ دالياً مباشراً جمعياً و $G: \mathfrak{S}' \rightarrow \mathfrak{S}$ دالياً مرافقاً للدالي F . إذا كانت الفئة $\mathfrak{S}'$ كثيفة أفقياً، وكان الدالي G ينقل الأشياء الأفقية من الفئة $\mathfrak{S}'$ إلى أشياء أفقية في الفئة $\mathfrak{S}$ ، عندئذ يكون الدالي F تاماً. **البرهان.**

لتكن $0 \rightarrow A' \xrightarrow{\alpha} A \xrightarrow{\beta} A'' \rightarrow 0$ متتالية تامة من أشياء ومورفيزمات الفئة $\mathfrak{S}$ ، بما أن الدالي G مرافق للدالي F عندئذ حسب المبرهنة (٨-٣-١٣)، فإن الدالي F يكون تاماً من اليمين والدالي G تاماً من اليسار. ومنه تكون متتالية الأشياء والمورفيزمات:

$$F(A') \xrightarrow{F(\alpha)} F(A) \xrightarrow{F(\beta)} F(A'') \rightarrow 0$$

تامة في الفئة $\mathcal{T}'$. لنبرهن على أن المورفيزم $F(\alpha): F(A') \rightarrow F(A)$ مونومورفيزم. بما أن الدالي G مرافق للدالي F عندئذ حسب المبرهنة (٣-١-١١)، فإنه توجد إيزومورفيزمات دالية $\Phi: I_{\mathcal{T}} \rightarrow GF$, $\Psi: FG \rightarrow I_{\mathcal{T}'}$ تحقق:

$$\Psi(F(X)) \cdot F(\Phi(X)) = I_{F(X)}, \quad G(\Psi(Y)) \cdot \Phi(G(Y)) = I_{G(Y)}$$

وذلك أياً كان $X \in ob(\mathcal{T})$, $Y \in ob(\mathcal{T}')$. أيضاً بما أن $F(A') \in ob(\mathcal{T})$ وأن الفئة $\mathcal{T}'$ كثيفة أفقياً، فإنه يوجد شيء أفقي $Q \in ob(\mathcal{T}')$ بحيث $F(A') \subset Q$. لنفرض أن $f: F(A') \rightarrow Q$ مونومورفيزم للفئة $\mathcal{T}'$.

$$\begin{array}{ccc} & F(A) & \\ F(\alpha) \uparrow & & \\ & F(A') & \xrightarrow{f} Q \end{array}$$

أيضاً بما أن Φ إيزومورفيزم دالي، فإن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccccc} & A' & \xrightarrow{\alpha} & A & \\ \Phi(A') \downarrow & & & \downarrow & \Phi(A) \\ G(Q) \xleftarrow{G(f)} & GF(A') & \xrightarrow{GF(\alpha)} & GF(A) & \end{array}$$

تبديلي، أي إن $\Phi(A) \cdot \alpha = GF(\alpha) \cdot \Phi(A')$. بما أن Q أفقي في $\mathcal{T}'$ ، وأن G ينقل الأشياء الأفقية من الفئة $\mathcal{T}'$ إلى أشياء أفقية في الفئة $\mathcal{T}$ ، فإن $G(Q) \in ob(\mathcal{T})$ شيء أفقي، ومنه يوجد مورفيزم $\beta: A \rightarrow G(Q)$ لأجله المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \rightarrow & A' & \xrightarrow{\alpha} & A \\ & & \Phi(A') \downarrow & & \searrow \beta \\ & & GF(A') & & \\ & G(f) \downarrow & & \swarrow & \\ & G(Q) & & & \end{array}$$

تبديلي، أي إن $\beta \cdot \alpha = G(f) \cdot \Phi(A')$. ولكون الدالي F مباشراً نجد أن:

$$F(\beta) \cdot F(\alpha) = F(G(f)) \cdot F(\Phi(A'))$$

من جهة أخرى، بما أن Ψ إيزومورفيزم دالي عندئذ يكون المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} FG(Q) & \xrightarrow{\Psi(Q)} & Q \\ FG(f) \uparrow & & \uparrow f \\ FG(F(A')) & \xrightarrow{\Psi(F(A'))} & F(A') \end{array}$$

تبديلي، أي إن $f \cdot \Psi(F(A')) = \Psi(Q) \cdot FG(f)$

وبما أن $\Psi(F(A')) \cdot F(\Phi(A')) = I_{F(A')}$ نجد أن:

$$f \cdot \Psi(F(A')) \cdot F(\Phi(A')) = \Psi(Q) \cdot FG(f) \cdot F(\Phi(A'))$$

$$f = \Psi(Q) \cdot FG(f) \cdot F(\Phi(A')) = (\Psi(Q) \cdot F(\beta)) \cdot F(\alpha)$$

وبما أن f مونومورفيزم نجد أن $F(\alpha)$ مونومورفيزم، وهكذا نجد أن المتتالية:

$$F(A') \xrightarrow{F(\alpha)} F(A) \xrightarrow{F(\beta)} F(A'') \rightarrow 0$$

تامة، ومنه الدالي F تام.

١٠-٢. الأشياء الإسقاطية.

تعريف.

لتكن $\mathcal{I}$ فئة تبديلية و $P \in ob(\mathcal{I})$. نقول عن الشيء P إنه إسقاطي إذا حقق الشرط الآتي: لأجل أي إيبومورفيزم $\alpha: A \rightarrow A'$ ، وأي مورفيزم $u: P \rightarrow A'$ للفئة $\mathcal{I}$ يوجد مورفيزم $v: P \rightarrow A$ للفئة $\mathcal{I}$ لأجله المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ & \downarrow u & \\ A & \xrightarrow{\alpha} & A' \rightarrow 0 \end{array}$$

تبدلي، أي إن $\alpha \cdot v = u$.

مبرهنة ١٠-٢-١.

لتكن $\mathcal{I}$ فئة تبديلية، و $\{P_i\}_{i \in I}$ أسرة من أشياء الفئة $\mathcal{I}$ تملك مجموعاً $P = \coprod_{i \in I} P_i$. عندئذ الشروط الآتية متكافئة:

١ - الشيء P إسقاطي في $\mathcal{I}$.

٢ - الأشياء P_i إسقاطية في $\mathcal{I}$ وذلك أياً كان $i \in I$.

البرهان.

لنفرض أن $\tau_i: P_i \rightarrow P$ مورفيزمات الاحتواء وذلك أياً كان $i \in I$ ، وحسب التمهيدية (٤-٣-٥)، فإنه لأجل كل $i \in I$ توجد مورفيزمات $\alpha_i: P \rightarrow P_i$ يحقق $\alpha_i \cdot \tau_i = I_{P_i}$.

(1) $\Leftrightarrow$ (2). لنفرض أن P إسقاطي في $\mathcal{I}$ وليكن $f: A' \rightarrow A$ إيبومورفيزماً للفئة $\mathcal{I}$ و $g: P_i \rightarrow A$ مورفيزماً للفئة $\mathcal{I}$ ، عندئذ يكون $g \cdot \alpha_i: P \rightarrow A$ مورفيزماً للفئة $\mathcal{I}$ ، ولما كان P إسقاطياً فإنه يوجد مورفيزم $h: P \rightarrow A'$ للفئة $\mathcal{I}$ يحقق $f \cdot h = g \cdot \alpha_i$ ، ومنه نجد أن $f \cdot h \cdot \tau_i = g \cdot \alpha_i \cdot \tau_i = g \cdot I_{P_i} = g$ وذلك أياً كان $i \in I$.

(2) $\Leftrightarrow$ (1). لنفرض أن P_i إسقاطي لأجل كل $i \in I$ وليكن $f: A' \rightarrow A$ مونومورفيزماً للفئة $\mathcal{I}$ و $g: P \rightarrow A$ مورفيزماً للفئة $\mathcal{I}$ ، عندئذ يكون $g \cdot \tau_i: P_i \rightarrow A$ مورفيزماً للفئة $\mathcal{I}$ ، وبما أن P_i إسقاطي، فإنه يوجد مورفيزم $h_i: P_i \rightarrow A'$ يحقق $f \cdot h_i = g \cdot \tau_i$ وحسب

تعريف المجموع، فإنه يوجد مورفيزم وحيد $h: P \rightarrow A$ للفئة $\mathcal{S}$ لأجله المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} & \xleftarrow{h} & P \\ & \swarrow \searrow & \nearrow \nwarrow \\ h_i & P_i & \tau_i \end{array}$$

تبديلي، أي إن $h \cdot \tau_i = h_i$ ، ومنه نجد أن $f \cdot h \cdot \tau_i = g \cdot \tau_i$ وذلك لأجل كل $i \in I$. وحسب التمهيدية (٤-٣-١) يكون التطبيق $\Gamma: \mathcal{S}(P, A) \rightarrow \prod_{i \in I} \mathcal{S}(P_i, A)$ المعرف بالشكل الآتي: $\Gamma(w) = (w \cdot \tau_i)_{i \in I}$ ، وذلك أيأ كان $w \in \mathcal{S}(P, A)$ ، ومنه نجد أن:

$$\Gamma(g) = (g \cdot \pi_i)_{i \in I} = ((f \cdot h) \cdot \tau_i)_{i \in I} = \Gamma(f \cdot h)$$

وبما أن Γ متباين نجد أن $g = f \cdot h$ ، مما سبق نجد أن $P \in \text{ob}(\mathcal{S})$ إسقاطي.

مبرهنة ١٠-٢-٢.

لتكن $\mathcal{S}$ فئة تبدلية، و $C \in \text{ob}(\mathcal{S})$. ولنفرض أن $P \in \text{ob}(\mathcal{S})$ شيء خارج C . إذا كان P إسقاطياً في $\mathcal{S}$ عندئذ يكون P حداً مباشراً في C .
البرهان.

لنفرض أن P شيء خارج C ، وأن $j: C \rightarrow P$ الإيومورفيزم القانوني، لنفرض أن P إسقاطي في $\mathcal{S}$ ، عندئذ يوجد مورفيزم $q: P \rightarrow C$ للفئة $\mathcal{S}$ يحقق $j \cdot q = I_P$ ، أي إن المخطط:

$$\begin{array}{ccccc} & & P & & \\ & \swarrow q & \downarrow I_P & & \\ C & \xrightarrow{j} & P & \rightarrow & 0 \end{array}$$

تبديلي. من جهة أخرى، بما أن الفئة $\mathcal{S}$ تبدلية، فإن المورفيزم j يملك نواة، وحسب المبرهنة (٧-٢-٥) يكون P حداً مباشراً في C .

مبرهنة ١٠-٢-٣.

لتكن $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ فئتين تبدليتين، وليكن $F: \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$ دالياً مباشراً جمعياً و $G: \mathcal{S}_2 \rightarrow \mathcal{S}_1$ دالياً مرافقاً للدالي F . إذا كان الدالي F تاماً عندئذ فإن الدالي G ينقل الأشياء الإسقاطية من الفئة $\mathcal{S}_2$ إلى أشياء إسقاطية في الفئة $\mathcal{S}_1$.
البرهان.

ليكن $P \in ob(\mathfrak{S}_2)$ شيئاً إسقاطياً ولنبرهن على أن $G(P) \in ob(\mathfrak{S}_1)$ شيء إسقاطي.
 لنفرض أن $0 \rightarrow X' \rightarrow X \rightarrow X'' \rightarrow 0$ متتالية تامة من أشياء ومورفيزمات الفئة $\mathfrak{S}_1$ ،
 بما أن الدالي F تاماً، فإن المتتالية $0 \rightarrow F(X') \rightarrow F(X) \xrightarrow{\beta} F(X'') \rightarrow 0$ من
 أشياء ومورفيزمات الفئة $\mathfrak{S}_2$ تكون تامة. وحسب التمهيدية (٣-٣-٨) تكون متتالية الزمر
 والتشاكلات الزمرية الآتية:

$$0 \rightarrow \mathfrak{S}_2(P, F(X')) \rightarrow \mathfrak{S}_2(P, F(X)) \xrightarrow{\alpha} \mathfrak{S}_2(P, F(X'')) \rightarrow 0$$

تامة، حيث أن التشاكل α معرف بالشكل الآتي: أيأ كان $u \in \mathfrak{S}_2(P, F(X))$ ، فإن
 $\alpha(u) = \beta \cdot u$. لنبرهن على أن التشاكل $\alpha: \mathfrak{S}_2(P, F(X)) \rightarrow \mathfrak{S}_2(P, F(X''))$ غامر.
 ليكن $u \in \mathfrak{S}_2(P, F(X''))$ بما أن المورفيزم $\beta: F(X) \rightarrow F(X'')$ إبيومورفيزم، وأن P
 إسقاطي، فإنه يوجد مورفيزم $\lambda: P \rightarrow F(X)$ للفئة $\mathfrak{S}_2$ لأجله المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ \lambda \swarrow & & \searrow u \\ F(X) & \xrightarrow{\beta} & F(X'') \rightarrow 0 \end{array}$$

تبديلي، أي إن $\beta \cdot \lambda = u$ ، ومنه يكون $\lambda \in \mathfrak{S}_2(P, F(X))$ ، وأن $\alpha(\lambda) = \beta \cdot \lambda = u$ وهذا يبين أن التشاكل α غامر، وبالتالي تكون متتالية الزمر، والتشاكلات الزمرية الآتية:

$$0 \rightarrow \mathfrak{S}_2(P, F(X')) \rightarrow \mathfrak{S}_2(P, F(X)) \xrightarrow{\alpha} \mathfrak{S}_2(P, F(X'')) \rightarrow 0$$

تامة. وبما أن الدالي G مرافق للدالي F ، فإنه حسب التعريف يكون:

$$Hom_{\mathfrak{S}_2}(F) \cong Hom_{\mathfrak{S}_1}(G)$$

وهكذا نحصل على المخطط التبديلي الآتي:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \mathfrak{S}_2(P, F(X')) & \rightarrow & \mathfrak{S}_2(P, F(X)) & \rightarrow & \mathfrak{S}_2(P, F(X'')) \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & \mathfrak{S}_1(G(P), X') & \rightarrow & \mathfrak{S}_1(G(P), X) & \rightarrow & \mathfrak{S}_1(G(P), X'') \rightarrow 0 \end{array}$$

حيث أن الأعمدة في هذا المخطط إيزومورفيزمات وهذا يبين أن متتالية الزمر،
 والتشاكلات الزمرية الآتية:

$$0 \rightarrow \mathfrak{S}_1(G(P), X') \rightarrow \mathfrak{S}_1(G(P), X) \xrightarrow{\delta} \mathfrak{S}_1(G(P), X'') \rightarrow 0$$

تامة. ليكن $\gamma: X \rightarrow X''$ إبيومورفيزماً للفئة $\mathcal{I}_1$ ، وليكن $w: G(P) \rightarrow X''$ مورفيزماً للفئة $\mathcal{I}_1$ ، بما أن $w \in \mathcal{I}_1(G(P), X'')$ وأن التشاكل δ غامر، فإنه يوجد $\sigma \in \mathcal{I}_1(G(P), X)$

$$\begin{array}{ccccc} & & G(P) & & \\ & \swarrow \sigma & \downarrow w & & \\ X & \xrightarrow{\gamma} & X'' & \rightarrow & 0 \end{array}$$

بحيث $\delta(\sigma) = w$ وحسب تعريف التشاكل δ فإن $\delta(\sigma) = \gamma \cdot \sigma$ ومنه نجد أن $\gamma \cdot \sigma = w$ وهذا يبين أن $G(P) \in \text{ob}(\mathcal{I}_1)$ إسقاطي.

تعريف.

لتكن $\mathcal{I}$ فئة تبديلية، نقول عن الفئة $\mathcal{I}$ إنها كثيفة إسقاطياً إذا حققت الشرط: أي كان $A \in \text{ob}(\mathcal{I})$ ، فإنه يوجد شيء إسقاطي $P \in \text{ob}(\mathcal{I})$ بحيث يكون A شيئاً خارجاً للشيء P . بمعنى آخر، نقول عن الفئة التبديلية $\mathcal{I}$ إنها كثيفة إسقاطياً إذا كان كل شيء منها هو شيء خارج لشيء إسقاطي.

مبرهنة ١٠-٢-٤.

لتكن $\mathcal{I}, \mathcal{I}'$ فئتين تبديليتين، وليكن $F: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{I}'$ دالياً مباشراً جمعياً و $G: \mathcal{I}' \rightarrow \mathcal{I}$ دالياً مرافقاً للدالي F . إذا كانت الفئة $\mathcal{I}$ كثيفة إسقاطياً وكان الدالي F ينقل الأشياء الإسقاطية من الفئة $\mathcal{I}$ إلى أشياء إسقاطية في الفئة $\mathcal{I}'$ ، عندئذ يكون الدالي G تاماً. **البرهان.**

لتكن $0 \rightarrow B' \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} B'' \rightarrow 0$ متتالية تامة من أشياء ومورفيزمات الفئة $\mathcal{I}'$ عندئذ حسب المبرهنة (٨-٣-١٣)، فإن الدالي F يكون تاماً من اليمين وأن الدالي G يكون تاماً من اليسار، ومنه تكون متتالية الأشياء والمورفيزمات للفئة $\mathcal{I}$ ، الآتية:

$$0 \rightarrow G(B') \xrightarrow{G(\alpha)} G(B) \xrightarrow{G(\beta)} G(B'')$$

تامة. لنبرهن على أن المورفيزم $G(\beta): G(B) \rightarrow G(B'')$ إبيومورفيزم.

بما أن الدالي G مرافق للدالي F عندئذ حسب المبرهنة (٣-١-١١)، فإنه توجد إيزومورفيزمات دالية $\Phi: I_{\mathcal{I}} \rightarrow GF$ ، $\Psi: FG \rightarrow I_{\mathcal{I}'}$ تحقق:

$$\Psi(F(X)) \cdot F(\Phi(X)) = I_{F(X)}, \quad G(\Psi(Y)) \cdot \Phi(G(Y)) = I_{G(Y)}$$

وذلك أياً كان $X \in ob(\mathcal{T}), Y \in ob(\mathcal{T}')$ أيضاً بما أن $G(B'') \in ob(\mathcal{T})$ وأن $\mathcal{T}$ كثيفة إسقاطياً، فإنه يوجد شيء إسقاطي $P \in ob(\mathcal{T})$ بحيث $G(B'') \in ob(\mathcal{T})$ شيء خارج للشيء P . لنفرض أن $g: P \rightarrow G(B'')$ إيزومورفيزم للفئة $\mathcal{T}$.

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{g} & G(B'') \\ & \uparrow G(\beta) & \\ & G(B) & \end{array}$$

أيضاً بما أن Ψ أيزومورفيزم دالي، فإن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} FG(B) & \xrightarrow{FG(\beta)} & G(B'') \\ \Psi(B) \downarrow & & \downarrow \Psi(B'') \\ B & \xrightarrow{\beta} & B'' \end{array}$$

تبديلي، أي إن $\Psi(B'') \cdot FG(\beta) = \beta \cdot \Psi(B)$. بما أن P إسقاطي، وأن F ينقل الأشياء الإسقاطية من الفئة $\mathcal{T}$ إلى أشياء إسقاطية في الفئة $\mathcal{T}'$ ، عندئذ يكون $F(P)$ إسقاطياً في $\mathcal{T}'$ ، ومنه يوجد مورفيزم $\alpha: F(P) \rightarrow B$ لأجله المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccccc} & & F(P) & & \\ & \searrow \alpha & \downarrow F(g) & & \\ & & FG(B'') & & \\ & & \downarrow \Psi(B'') & & \\ B & \xrightarrow{\beta} & B'' & \rightarrow & 0 \end{array}$$

تبديلي، أي إن $\beta \cdot \alpha = \Psi(B'') \cdot F(g)$. أيضاً بما أن Φ إيزومورفيزم دالي، فإن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\Phi(P)} & GF(P) \\ g \downarrow & & \downarrow GF(g) \\ G(B'') & \xrightarrow{\Phi(G(B''))} & GF(G(B'')) \end{array}$$

تبدلياً، أي إن $GF(g) \cdot \Phi(P) = \Phi(G(B'')) \cdot g$. ولما كان لأجل كل $Y \in ob(\mathcal{T}')$ فإن $G(\Psi(Y)) \cdot \Phi(G(Y)) = I_{G(Y)}$ نجد أن $G(\Psi(B'')) \cdot \Phi(G(B'')) = I_{G(B')}$ ومنه فإن

$$G(\Psi(B'')) \cdot \Phi(G(B'')) \cdot g = g$$

$$g = G(\Psi(B'')) \cdot GF(g) \cdot \Phi(P)$$

ولما كان $g = G(\beta) \cdot (G(\alpha) \cdot \Phi(P))$ فإن $G(\beta) \cdot G(\alpha) = G(\Psi(B'')) \cdot G(F(g))$ وبما أن g إبيومورفيزماً نجد أن $G(\beta)$ إبيومورفيزماً، وبالتالي تكون المتتالية:

$$0 \rightarrow G(B') \xrightarrow{G(\alpha)} G(B) \xrightarrow{G(\beta)} G(B'') \rightarrow 0$$

وهذا يبين أن الدالي G تام. ◻



١٠-٣. المولدات والمولدات المرافقة.

المولدات.

في كثير من الأحيان، ولأجل الحصول على نتائج جديدة في الفئات التبديلية يجب علينا إضافة شروط جديدة إلى هذه الفئة، ومن أكثر الشروط أهمية هي الشروط:
 $AB 3, AB 4, AB 5, AB 3^*, AB 4^*, AB 5^*$

تعريف. الشرط $AB 3$.

نقول عن الفئة التبديلية $\mathcal{T}$ إنها تحقق الشرط $AB 3$ إذا كانت كل أسرة $(A_i)_{i \in I}$ من أشياء الفئة $\mathcal{T}$ تملك مجموعاً واحداً على الأقل.

مبرهنة ١٠-٣-١.

لتكن $\mathcal{T}$ فئة تبديلية تحقق الشرط $AB 3$ ، وليكن $A \in ob(\mathcal{T})$. عندئذٍ لأجل أي أسرة $(A_i)_{i \in I}$ من الأشياء الجزئية من A يوجد $\sup_{i \in I} (A_i)$.

البرهان.

ليكن $A \in ob(\mathcal{T})$ و $(A_i)_{i \in I}$ أسرة من الأشياء الجزئية من A . لنفرض أن $u_i: A_i \rightarrow A$ المونومورفيزم القانوني لأجل كل $i \in I$. حسب الفرض فإن $\bigoplus_{i \in I} A_i \in ob(\mathcal{T})$ موجود. لنفرض أن $\alpha_i: A_i \rightarrow \bigoplus_{i \in I} A_i$ مورفيزمات الاحتواء لأجل كل $i \in I$ ، عندئذٍ حسب تعريف المجموع فإنه يوجد مورفيزم وحيد $\alpha: \bigoplus_{i \in I} A_i \rightarrow A$ لأجله المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} A & \xleftarrow{\alpha} & \bigoplus_{i \in I} A_i \\ & \nearrow u_i & \nearrow \alpha_i \\ & A_i & \end{array}$$

تبديلياً، أي إن $\alpha \cdot \alpha_i = u_i$ وذلك أيأ كان $i \in I$. لنبرهن على أن $\sup_{i \in I} (A_i) = Im(\alpha)$.

لنأخذ النشر القانوني للمورفيزم α الآتي:

$$\bigoplus_{i \in I} A_i \xrightarrow{\lambda} Coim(\alpha) \xrightarrow{\alpha} Im(\alpha) \xrightarrow{\mu} A$$

حيث λ الإيومورفيزم القانوني، μ المونومورفيزم القانوني، عندئذ يكون $\alpha = \mu \cdot \bar{\alpha} \cdot \lambda$ ، ومنه يكون $u_i = \alpha \cdot \alpha_i = \mu \cdot \bar{\alpha} \cdot \lambda \cdot \alpha_i = \mu \cdot (\bar{\alpha} \cdot \lambda \cdot \alpha_i)$ ولما كان u_i مونومورفيزماً نجد أن $\bar{\alpha} \cdot \lambda \cdot \alpha_i : A_i \rightarrow Im(\alpha)$ مونومورفيزم للفئة $\mathfrak{S}$ ؛ وبالتالي يكون $A_i \subset Im(\alpha)$ وذلك أيأ كان $i \in I$. ليكن $(B, \gamma) \in P(A)$ حداً أعلى لأسرة الأشياء $(A_i)_{i \in I}$ عندئذ يكون $\gamma : B \rightarrow A$ مونومورفيزماً للفئة $\mathfrak{S}$ ، وأن $A_i \subset B$ وذلك أيأ كان $i \in I$. ومنه توجد مونومورفيزمات $\beta_i : A_i \rightarrow B$ للفئة $\mathfrak{S}$ تحقق $\gamma \cdot \beta_i = u_i$ ، وبما أن مجموع للأسرة $\bigoplus_{i \in I} A_i$ الأشياء $(A_i)_{i \in I}$ ، فإنه يوجد مورفيزم وحيد $\beta : \bigoplus_{i \in I} A_i \rightarrow B$ للفئة $\mathfrak{S}$ لأجله المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{i \in I} A_i & \xrightarrow{\beta} & B \\ \alpha_i \swarrow & & \nearrow \beta_i \\ & A_i & \end{array}$$

تبديلي، أي إن $\beta \cdot \alpha_i = \beta_i$ وذلك أيأ كان $i \in I$. أصبح لدينا $\gamma \cdot \beta : \bigoplus_{i \in I} A_i \rightarrow A$ مورفيزم للفئة $\mathfrak{S}$ لأجله المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{i \in I} A_i & \xrightarrow{\gamma \cdot \beta} & A \\ \alpha_i \swarrow & & \nearrow u_i \\ & A_i & \end{array}$$

تبديلي، أي إن $(\gamma \cdot \beta) \cdot \alpha_i = \gamma \cdot (\beta \cdot \alpha_i) = \gamma \cdot \beta_i = u_i$. ولما كان المورفيزم α وحيداً لأجله المخطط السابق تبديلي، نجد أن $\alpha = \gamma \cdot \beta$ ، ولما كان γ مونومورفيزماً، فإنه حسب التمهيدية (٧-٢-٤) نجد أن $Ker(\alpha) = Ker(\gamma \cdot \beta) = Ker(\beta)$ ، وبالتالي:

$$Coker(Ker(\alpha)) = Coker(Ker(\beta))$$

أي إن $Coim(\alpha) = Coim(\beta)$. لنأخذ النشر القانوني للمورفيزم β الآتي:

$$\bigoplus_{i \in I} A_i \xrightarrow{\lambda_i} Coim(\beta) \xrightarrow{\beta} Im(\beta) \xrightarrow{\mu_i} B$$

حيث λ_i الإيومورفيزم القانوني، μ_i المونومورفيزم القانوني، فنجد أن $\beta = \mu_i \cdot \bar{\beta} \cdot \lambda_i$ وبما أن $Coim(\alpha) = Coim(\beta)$ ، وأن $\lambda_i : \bigoplus_{i \in I} A_i \rightarrow Coim(\alpha)$ الإيومورفيزمات القانونية

نجد أن $\lambda = \lambda_1$ ، ولما كان $\alpha = \gamma \cdot \beta$ نجد أن $\mu \cdot \bar{\alpha} \cdot \lambda = \gamma \cdot \mu_1 \cdot \bar{\beta} \cdot \lambda_1 = \gamma \cdot \mu_1 \cdot \bar{\beta} \cdot \lambda$ وبما أن λ إبيومورفيزماً نجد أن $\mu \cdot \bar{\alpha} = \gamma \cdot \mu_1 \cdot \bar{\beta}$ ، ومنه نجد أن $\mu = \gamma \cdot \mu_1 \cdot \bar{\beta} \cdot \bar{\alpha}^{-1}$ وهذا يبين أن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Coim}(\alpha) = \text{Coim}(\beta) & \xrightarrow{\bar{\beta}} & \text{Im}(\beta) & \xrightarrow{\mu_1} & B & \xrightarrow{\gamma} & A \\ & \nwarrow \bar{\alpha}^{-1} & \text{Im}(\alpha) & \nearrow \mu & & & \end{array}$$

تبديلي، ولما كان كل من $\gamma, \mu_1, \bar{\beta}, \bar{\alpha}^{-1}$ مونومورفيزماً نجد أن μ مونومورفيزم، ومنه يكون $\text{Im}(\alpha) \subset A$ ، وهكذا نجد أن $\text{Im}(\alpha) = \sup_{i \in I} (A_i)$.

الشرط 4 AB .

لتكن $\mathfrak{S}$ فئة تبديلية وتحقق الشرط 3 AB . ولتكن $(u_i : A_i \rightarrow B_i)_{i \in I}$ أسرة من المورفيزمات للفئة $\mathfrak{S}$ ، عندئذ يوجد $\bigoplus_{i \in I} A_i, \bigoplus_{i \in I} B_i \in \text{ob}(\mathfrak{S})$. بفرض أن:

$$\alpha_i : A_i \rightarrow \bigoplus_{i \in I} A_i, \quad \beta_i : B_i \rightarrow \bigoplus_{i \in I} B_i$$

مورفيزمات الاحتواء وذلك أيأ كان $i \in I$ ، عندئذ حسب التمهيدية (٣-٣-٤) يوجد مورفيزم وحيد $u : \bigoplus_{i \in I} A_i \rightarrow \bigoplus_{i \in I} B_i$ لأجله المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{i \in I} A_i & \xrightarrow{u} & \bigoplus_{i \in I} B_i \\ \alpha_i \uparrow & & \uparrow \beta_i \\ A_i & \xrightarrow{u_i} & B_i \end{array}$$

تبديلي، أي إن $\beta_i \cdot u = u_i \cdot \alpha_i$ وذلك لأجل كل $i \in I$.

إلا أن المورفيزم u ليس مونومورفيزماً في الحالة العامة.

تعريف.

نقول عن الفئة التبديلية $\mathfrak{S}$ إنها تحقق الشرط 4 AB إذا كانت تحقق ما يأتي:

١ - الفئة $\mathfrak{S}$ تحقق الشرط 3 AB .

٢ - لأجل أي أسرة من المورفيزمات $(u_i : A_i \rightarrow B_i)_{i \in I}$ للفئة $\mathfrak{S}$ فإن المورفيزم

$$u: \bigoplus_{i \in I} A_i \rightarrow \bigoplus_{i \in I} B_i$$

مونومورفيزم للفئة $\mathcal{S}$.

تعريف.

لتكن $\mathcal{S}$ فئة تبديلية تحقق الشرط $AB3$ ، وليكن $A \in ob(\mathcal{S})$ ، ولتكن $(U_i)_{i \in I}$ أسرة من أشياء الفئة $\mathcal{S}$. نقول إن الأسرة $(U_i)_{i \in I}$ هي أسرة مولدة للفئة $\mathcal{S}$ إذا حققت الشرط:
لأجل كل $A \in ob(\mathcal{S})$ ، ولأجل كل $B \in P(A)$ بحيث $A \neq B$ يوجد لأجل دليل واحد على الأقل $i \in I$ مورفيزم $u_i: U_i \rightarrow A$ لا يقبل القسمة على المونومورفيزم القانوني $A \rightarrow B$. ونقول عن الشيء $U \in ob(\mathcal{S})$ إنه شيء مولد للفئة $\mathcal{S}$ إذا كانت الأسرة (U) هي أسرة مولدة للفئة $\mathcal{S}$.

تمهيدية ١٠-٣-٢.

لتكن $\mathcal{S}$ فئة تبديلية تحقق الشرط $AB3$ ، ولتكن $(U_i)_{i \in I}$ أسرة من أشياء الفئة $\mathcal{S}$ ، الشروط الآتية متكافئة:

١ - الأسرة $(U_i)_{i \in I}$ هي أسرة مولدة للفئة $\mathcal{S}$.

٢ - الشيء $\bigoplus_{i \in I} U_i$ هو شيء مولد للفئة $\mathcal{S}$.

البرهان.

(1) $\Leftrightarrow$ (2). لنفرض أن الأسرة $(U_i)_{i \in I}$ مولدة للفئة $\mathcal{S}$. وليكن $A \in ob(\mathcal{S})$ ، وأن $B \in P(A)$ بحيث $A \neq B$ ، عندئذ يوجد دليل $j \in I$ لأجله يوجد مورفيزم $u_j: U_j \rightarrow A$ لا يقبل القسمة على المونومورفيزم القانوني $A \rightarrow B$. وحسب التمهيدية (٤-٣-٣) فإن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} U_j & \xrightarrow{u_j} & A \\ \alpha_j \downarrow & & \downarrow I_A \\ \bigoplus_{i \in I} U_i & \xrightarrow{u} & A \end{array}$$

تبدلي، أي إن $u_j = u \cdot \alpha_j$ ، حيث $u = \bigoplus_{i \in I} u_i$ هو المورفيزم الذي مركباته $u_i = 0$ عندما

$i \neq j$ ويساوي u_j عندما $i = j$ كما أن α_j مورفيزم الاحتواء. ومنه نجد أن المورفيزم u

لا يقبل القسمة على β ، وحسب التعريف يكون الشيء $\bigoplus_{i \in I} U_i$ مولداً للفئة $\mathcal{S}$.

(2) $\Leftarrow$ (1). لنفرض أن الشيء $\bigoplus_{i \in I} U_i$ مولد للفئة $\mathcal{S}$ ، عندئذ فإن المورفيزم $u = \bigoplus_{i \in I} u_i$ لا يقبل القسمة على β ومنه يوجد دليل واحد على الأقل $i \in I$ لأجله المورفيزم u_i لا يقبل القسمة β وحسب التعريف تكون أسرة الأشياء $(U_i)_{i \in I}$ مولدة للفئة $\mathcal{S}$.

ملاحظة.

لتكن $\mathcal{S}$ فئة تبديلية، و $U \in ob(\mathcal{S})$ ، ولتكن I مجموعة ما. سوف نرمز للمجموع $\bigoplus_{i \in I} U_i$ حيث $U_i = U$ وذلك أيأ كان $i \in I$ (في حال وجوده)، بالشكل $U^{(I)}$.

مبرهنة ٣-٣-١٠.

لتكن $\mathcal{S}$ فئة تبديلية تحقق الشرط $AB3$ ، وليكن $U \in ob(\mathcal{S})$ مولداً للفئة $\mathcal{S}$. عندئذ أيأ كان $A \in ob(\mathcal{S})$ ، فإن $A \equiv B$ ، حيث A هو شيء خارج للشيء $U^{(I)}$. البرهان.

لنفرض أن الفئة $\mathcal{S}$ تحقق الشرط $AB3$ ، وأن $U \in ob(\mathcal{S})$ مولد للفئة $\mathcal{S}$. وليكن $A \in ob(\mathcal{S})$ ولنفرض أيضاً أن $I = \mathcal{S}(U, A)$ ولنأخذ المورفيزم $u: U^{(I)} \rightarrow A$ المعرف بالشكل $u_i = i$ وذلك لأجل كل $i \in I$. لنبرهن على أن المورفيزم u إبيومورفيزماً، أي لنبرهن على أن التشاكل $\alpha: \mathcal{S}(A, X) \rightarrow \mathcal{S}(U^{(I)}, X)$ المعرف بالشكل $\alpha(g) = g \cdot u$ وذلك أيأ كان $A \in ob(\mathcal{S})$ ، متباين. ليكن $v \in Ker(\alpha)$ ، عندئذ $v: A \rightarrow X$ مورفيزماً للفئة $\mathcal{S}$ وأن $\alpha(v) = v \cdot u = 0$. لنفرض أن $(K, k) = Ker(v)$ ولنأخذ المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} & & K \\ & \nearrow \lambda & \downarrow k \\ U & \xrightarrow{u_i} & A \xrightarrow{v} X \end{array}$$

بما أن $v \cdot k = 0$ وأن $v \cdot u = 0$ ، فإن $v \cdot u_i = 0$ وذلك لأجل كل $i \in I$ ، وحسب تعريف النواة فإنه يوجد مورفيزم وحيد $\lambda: U \rightarrow K$ بحيث $k \cdot \lambda = u_i$. بما أن U مولد للفئة $\mathcal{S}$ ، فإنه يوجد دليل i لأجله المورفيزم u_i لا يقبل القسمة على المونومورفيزم القانوني k ، ومنه، فإن $k = I_A$ أي إن $v = 0$ ؛ ومنه فإن α متباين؛ وبالتالي المورفيزم u إبيومورفيزم.

المولدات المرافقة.

تعريف. الشرط $AB 3^\circ$.

نقول عن الفئة التبديلية $\mathcal{S}$ إنها تحقق الشرط $AB 3^\circ$ إذا كانت كل أسرة $(B_i)_{i \in I}$ من أشياء الفئة $\mathcal{S}$ تملك جداء واحداً على الأقل.

مبرهنة ١٠-٣-٤.

لتكن $\mathcal{S}$ فئة تبديلية تحقق الشرط $AB 3^\circ$ ، وليكن $B \in ob(\mathcal{S})$. عندئذ لأجل أي أسرة $(B_i)_{i \in I}$ من أشياء الخارج $B \downarrow$ يوجد $\inf_{i \in I} (B_i)$.
البرهان.

ليكن $B \in ob(\mathcal{S})$ و $(B_i)_{i \in I}$ أسرة من أشياء الخارج $B \downarrow$. لنفرض أن $v_i: B \rightarrow B_i$ الإيومورفيزم القانوني لأجل كل $i \in I$. حسب الفرض فإن $\prod_{i \in I} B_i \in ob(\mathcal{S})$ موجود. لنفرض أن $p_i: \prod_{i \in I} B_i \rightarrow B_i$ الإيومورفيزمات الإسقاطية وذلك لأجل كل $i \in I$ ، عندئذ حسب تعريف الجداء فإنه يوجد مورفيزم وحيد $\beta: B \rightarrow \prod_{i \in I} B_i$ لأجله المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\beta} & \prod_{i \in I} B_i \\ & \searrow v_i & \swarrow p_i \\ & B_i & \end{array}$$

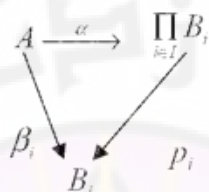
تبدلي، أي إن $p_i \cdot \beta = v_i$ وذلك أيأ كان $i \in I$. لنبرهن على أن $\inf_{i \in I} (B_i) = Coim(\beta)$.

لنأخذ النشر القانوني للمورفيزم β الآتي:

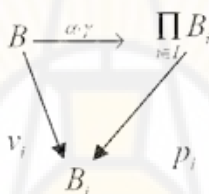
$$B \xrightarrow{\lambda} Coim(\beta) \xrightarrow{\bar{\beta}} Im(\beta) \xrightarrow{\mu} \prod_{i \in I} B_i$$

حيث λ الإيومورفيزم القانوني، μ المونومورفيزم القانوني، عندئذ يكون $\beta = \mu \cdot \bar{\beta} \cdot \lambda$ ومنه يكون $v_i = p_i \cdot \beta = p_i \cdot \mu \cdot \bar{\beta} \cdot \lambda = (p_i \cdot \mu \cdot \bar{\beta}) \cdot \lambda$ وذلك لأجل كل $i \in I$. ولما كان v_i إيومورفيزماً نجد أن $p_i \cdot \mu \cdot \bar{\beta}: Coim(\beta) \rightarrow B_i$ إيومورفيزم للفئة $\mathcal{S}$ ؛ وبالتالي يكون $Coim(\beta) \subset B_i$ وذلك أيأ كان $i \in I$.

ليكن $(A, \gamma) \in Q(B)$ حداً أدنى لأسرة الأشياء $(B_i)_{i \in I}$ عندئذ يكون $\gamma: B \rightarrow A$ إبيومورفيزماً للفتة $\mathcal{I}$ ، وأن $A \subset B_i$ ، وذلك أيأ كان $i \in I$. ومنه توجد إبيومورفيزمات $\beta_i: A \rightarrow B_i$ للفتة $\mathcal{I}$ تحقق $\beta_i \cdot \gamma = v_i$ ، وبما أن $\prod_{i \in I} B_i$ جداء للأسرة الأشياء $(B_i)_{i \in I}$ ، فإنه يوجد مورفيزم وحيد $\alpha: A \rightarrow \prod_{i \in I} B_i$ للفتة $\mathcal{I}$ لأجله المخطط الآتي:



تبديلي، أي إن $p_i \cdot \alpha = \beta_i$ وذلك أيأ كان $i \in I$. أصبح لدينا $\alpha \cdot \gamma: B \rightarrow \prod_{i \in I} B_i$ مورفيزماً للفتة $\mathcal{I}$ لأجله المخطط الآتي:



تبديلي، أي إن $p_i \cdot (\alpha \cdot \gamma) = (p_i \cdot \alpha) \cdot \gamma = \beta_i \cdot \gamma = v_i$ وذلك لأجل كل $i \in I$. ولما كان المورفيزم β وحيداً لأجله المخطط السابق تبديلي، نجد أن $\beta = \alpha \cdot \gamma$ ، ولما كان γ إبيومورفيزماً فإنه حسب التمهيدية (٦-٣-٤) نجد أن:

$$Coker(\beta) = Coker(\alpha \cdot \gamma) = Coker(\alpha)$$

وبالتالي يكون $Ker(Coker(\beta)) = Ker(Coker(\alpha))$ أي إن $Im(\beta) = Im(\alpha)$. لنأخذ النشر القانوني للمورفيزم α الآتي:

$$A \xrightarrow{\lambda_1} Coim(\alpha) \xrightarrow{\bar{\alpha}} Im(\alpha) \xrightarrow{u_1} \prod_{i \in I} B_i$$

حيث λ_1 الإبيومورفيزم القانوني، μ_1 المونومورفيزم القانوني، فنجد أن $\alpha = \mu_1 \cdot \bar{\alpha} \cdot \lambda_1$ وبما أن $Im(\beta) = Im(\alpha)$ وأن $\mu, \mu_1: Im(\alpha) \rightarrow \prod_{i \in I} B_i$ المونومورفيزمات القانونية نجد أن $\mu = \mu_1$ ، ولما كان $\beta = \alpha \cdot \gamma$ نجد أن $\mu \cdot \bar{\beta} \cdot \lambda = \mu_1 \cdot \bar{\alpha} \cdot \lambda_1 \cdot \gamma$ ومنه يكون

وبما أن $\mu \cdot \bar{\beta} \cdot \lambda = \mu \cdot \bar{\alpha} \cdot \lambda_1 \cdot \gamma$ ونومورفيزم نجد أن $\bar{\beta} \cdot \lambda = \bar{\alpha} \cdot \lambda_1 \cdot \gamma$ ومنه نجد أن $\lambda = \bar{\beta}^{-1} \cdot \bar{\alpha} \cdot \lambda_1 \cdot \gamma$ وهذا يبين أن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccccccc} B & \xrightarrow{\gamma} & A & \xrightarrow{\bar{\beta}} & \text{Coim}(\alpha) & \xrightarrow{\bar{\sigma}} & \text{Im}(\alpha) = \text{Im}(\beta) \\ & & & & \searrow & & \swarrow \\ & & & & \text{Coim}(\beta) & & \end{array}$$

λ $\bar{\beta}^{-1}$

تبديلي، ولما كان كلاً من $\bar{\beta}^{-1}, \bar{\alpha}, \lambda, \gamma$ إبيومورفيزماً نجد أن λ إبيومورفيزماً، ومنه يكون $B \subset \text{Coim}(\beta)$ ، وهكذا نجد أن $\text{Coim}(\beta) = \inf_{i \in I} (B_i)$.

الشرط $AB 4^+$.

لتكن $\mathfrak{I}$ فئة تبديلية تحقق الشرط $AB 3^+$ ، ولتكن $(v_i : A_i \rightarrow B_i)_{i \in I}$ أسرة من الإبيومورفيزمات للفئة $\mathfrak{I}$ ، عندئذ يوجد $\prod_{i \in I} A_i, \prod_{i \in I} B_i \in \text{ob}(\mathfrak{I})$. بفرض أن:

$$\alpha_i : \prod_{i \in I} A_i \rightarrow A_i, \quad \beta_i : \prod_{i \in I} B_i \rightarrow B_i$$

المورفيزمات الإسقاطية، وذلك أي أن $i \in I$ ، عندئذ حسب التمهيدية (3-1-3) يوجد مورفيزم وحيد $w : \prod_{i \in I} A_i \rightarrow \prod_{i \in I} B_i$ لأجله المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} \prod_{i \in I} A_i & \xrightarrow{w} & \prod_{i \in I} B_i \\ \alpha_i \downarrow & & \downarrow \beta_i \\ A_i & \xrightarrow{v_i} & B_i \end{array}$$

تبديلي، أي إن $\beta_i \cdot w = v_i \cdot \alpha_i$ وذلك لأجل كل $i \in I$.
إلا أن المورفيزم w ليس إبيومورفيزماً في الحالة العامة.

تعريف.

نقول عن الفئة التبديلية $\mathfrak{I}$ إنها تحقق الشرط $AB 4^+$ إذا كانت تحقق ما يأتي:

- ١ - الفئة $\mathfrak{I}$ تحقق الشرط $AB 3^+$.
- ٢ - لأجل أي أسرة من المورفيزمات $(v_i : A_i \rightarrow B_i)_{i \in I}$ للفئة $\mathfrak{I}$ ، فإن المورفيزم

$$w : \prod_{i \in I} A_i \rightarrow \prod_{i \in I} B_i$$

إبيومورفيزم للفئة $\mathcal{I}$.

تعريف.

لتكن $\mathcal{I}$ فئة تبديلية تحقق الشرط $AB3^+$ ، ولتكن $(V_i)_{i \in I}$ أسرة من أشياء الفئة $\mathcal{I}$.
 نقول إن الأسرة $(V_i)_{i \in I}$ هي أسرة مولدة مرافقة للفئة $\mathcal{I}$ إذا حققت الشرط:
 لأجل كل $B \in ob(\mathcal{I})$ ، ولأجل كل $A \in Q(B)$ بحيث $A \neq B$ يوجد لأجل دليل واحد على الأقل $i \in I$ مورفيزم $v_i: V_i \rightarrow A$ لا يقبل القسمة على الإبيومورفيزم القانوني $B \rightarrow A$.
 ونقول عن الشيء $V \in ob(\mathcal{I})$ إنه شيء مولد مرافق للفئة $\mathcal{I}$ إذا كانت الأسرة (V) هي أسرة مولدة مرافقة للفئة $\mathcal{I}$.

تمهيدية ١٠-٣-٥.

لتكن $\mathcal{I}$ فئة تبديلية تحقق الشرط $AB3^+$ ، ولتكن $(V_i)_{i \in I}$ أسرة من أشياء الفئة $\mathcal{I}$ ،
 الشروط الآتية متكافئة:

١ - الأسرة $(V_i)_{i \in I}$ هي أسرة مولدة مرافقة للفئة $\mathcal{I}$.

٢ - الشيء $\prod_{i \in I} V_i$ هو شيء مولد مرافق للفئة $\mathcal{I}$.

البرهان.

(1) $\Leftrightarrow$ (2). لنفرض أن الأسرة $(V_i)_{i \in I}$ مولدة مرافقة للفئة $\mathcal{I}$. وليكن $B \in ob(\mathcal{I})$ ، وأن
 $A \in Q(B)$ بحيث $A \neq B$ ، عندئذ يوجد دليل $j \in I$ لأجله يوجد مورفيزم $v_j: B \rightarrow V_j$
 لا يقبل القسمة على الإبيومورفيزم القانوني $\alpha: A \rightarrow B$. وحسب التمهيدية (٣-١-٣)
 فإن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{v} & \prod_{i \in I} V_i \\ I_B \downarrow & & \downarrow \beta_j \\ B & \xrightarrow{\alpha} & V_j \end{array}$$

تبدلي، أي إن $\beta_j \cdot v = v_j \cdot I_B = v_j$ حيث $v = \prod_{i \in I} v_i$ هو المورفيزم الذي مركباته $v_i = 0$
 عندما $i \neq j$ ويساوي v_j عندما $i = j$ كما أن β_j المورفيزم الإسقاطي. ومنه نجد أن
 المورفيزم v لا يقبل القسمة على α ، وحسب التعريف يكون الشيء $\prod_{i \in I} V_i$ مولداً مرافقاً

للفئة $\mathfrak{S}$.

(2) $\Leftrightarrow$ (1). لنفرض أن الشيء $\prod_{i \in I} V_i$ مولد مرافق للفئة $\mathfrak{S}$ ، عندئذ فإن المورفيزم $v = \prod_{i \in I} v_i$ لا يقبل القسمة على α ، ومنه يوجد دليل واحد على الأقل $j \in I$ لأجله المورفيزم v_j لا يقبل القسمة α وحسب التعريف تكون أسرة الأشياء $(V_i)_{i \in I}$ مولدة مرافقة للفئة $\mathfrak{S}$.

ملاحظة.

لتكن $\mathfrak{S}$ فئة تبديلية و $V \in ob(\mathfrak{S})$ ، ولتكن I مجموعة ما. سوف نرمز للجداء $\prod_{i \in I} V_i$ حيث $V_i = V$ وذلك أيأ كان $i \in I$ (في حال وجوده)، بالشكل $V^{(I)}$.

تمهيدية ١٠-٣-٦.

لتكن $\mathfrak{S}$ فئة تبديلية تحقق الشرط $AB3$ ، وليكن $V \in ob(\mathfrak{S})$ مولداً مرافق للفئة $\mathfrak{S}$. عندئذ أيأ كان $B \in ob(\mathfrak{S})$ فإن $B \cong A$ حيث A هو شيء جزئي في $V^{(I)}$. البرهان.

لنفرض أن الفئة $\mathfrak{S}$ تحقق الشرط $AB3$ ، وأن $V \in ob(\mathfrak{S})$ مولد مرافق للفئة $\mathfrak{S}$ ، ولنفرض أيضاً أن $B \in ob(\mathfrak{S})$ ، أخيراً لنفرض أن $I = \mathfrak{S}(B, V)$. لنأخذ المورفيزم $v: B \rightarrow V^{(I)}$ المعروف بالشكل $v_i = i$ وذلك لأجل كل $i \in I$. لنبرهن على أن المورفيزم v مونومورفيزم، أي لنبرهن أن التشاكل $\beta: \mathfrak{S}(X, B) \rightarrow \mathfrak{S}(X, V^{(I)})$ المعرف بالشكل $\beta(g) = v \circ g$ وذلك أيأ كان $g \in \mathfrak{S}(X, B)$ ، متباين. ليكن $\lambda \in Ker(\beta)$ عندئذ $\lambda: X \rightarrow B$ ، ولنفرض أن $(K, \mu) = Coker(\lambda)$ ولنأخذ المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccccc} & & Coker(\lambda) & & \\ & \nearrow \theta & \uparrow k & & \\ V_j & \xleftarrow{v_j} & B & \xleftarrow{\lambda} & X \end{array}$$

بما أن $\lambda \in Ker(\beta)$ ، فإن $\beta(\lambda) = 0$ ، ومنه $v \cdot \lambda = 0$ ؛ وبالتالي $v_j \cdot \lambda = 0$ وذلك لأجل كل $i \in I$ كما أن $k \cdot \lambda = 0$ وحسب تعريف النواة المرافقة يوجد مورفيزم وحيد:

$$\theta: Coker(\lambda) \rightarrow V_j$$

لأجله $\theta \cdot k = v_i$ وبما أن v_i لا يقبل القسمة على الإيبومورفيزم القانوني k نجد أن $k = I_B$ ومنه $\lambda = 0$ أي إن التشاكل β متباين؛ وبالتالي المورفيزم ν مونومورفيزم.





الفصل الحادي عشر

أسس الجبر الهومولوجي

١١-١. المركبات.

تعريف.

لتكن $\mathcal{C}$ فئة تبديلية. نقول إنه يوجد لدينا مركب K في الفئة $\mathcal{C}$ إذا وجد لدينا:

- متتالية أشياء $(K^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ من أشياء الفئة $\mathcal{C}$.
- متتالية مورفيزمات $(d_K^n : K^n \rightarrow K^{n+1})_{n \in \mathbb{Z}}$ من مورفيزمات الفئة $\mathcal{C}$ تحقق الشرط:

$$d_K^{n+1} \cdot d_K^n = 0$$

وذلك لأجل كل $n \in \mathbb{Z}$. بمعنى آخر، نسمي كل متتالية من أشياء ومورفيزمات الفئة $\mathcal{C}$ من الشكل:

$$\dots \rightarrow K^{-2} \xrightarrow{d_K^{-2}} K^{-1} \xrightarrow{d_K^{-1}} K^0 \xrightarrow{d_K^0} K^1 \xrightarrow{d_K^1} K^2 \dots$$

تحقق الشرط $d_K^{n+1} \cdot d_K^n = 0$ أيأ كان $n \in \mathbb{Z}$ ، مركباً K في الفئة $\mathcal{C}$.

تعريف.

لتكن $\mathcal{C}$ فئة تبديلية. وليكن K, L مركبين في الفئة $\mathcal{C}$. نسمي متتالية المورفيزمات

$f = (f^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ للفئة $\mathcal{C}$ ، حيث $f^n : K^n \rightarrow L^n$ أيأ كان $n \in \mathbb{Z}$ ، التي لأجلها المخطط

الآتي:

$$\begin{array}{ccc} K^n & \xrightarrow{d_K^n} & K^{n+1} \\ f^n \downarrow & & \downarrow f^{n+1} \\ L^n & \xrightarrow{d_L^n} & L^{n+1} \end{array}$$

تبديلي، أي إن $f^{n+1} \cdot d_K^n = d_L^n \cdot f^n$ ، مورفيزم من المركب K إلى المركب L ونرمز له $f : K \rightarrow L$.

تمهيدية ١١-١-١.

لتكن $\mathcal{C}$ فئة تبديلية. إن صفى الأشياء والمورفيزمات الآتيين:

- صف الأشياء المؤلف من جميع المركبات الممكنة للفئة $\mathcal{T}$.
 - صف المورفيزمات المؤلف من جميع المورفيزمات بين مركبات الفئة $\mathcal{T}$.
- يشكلان فئة سوف نرمز لها $\mathcal{T}_K$ أو $K(\mathcal{T})$.
- البرهان.

ليكن $K, L, H \in ob(\mathcal{T}_K)$ مركبات للفئة $\mathcal{T}$ ، ولنبرهن على وجود تطبيق:

$$\mu: \mathcal{T}_K(K, L) \times \mathcal{T}_K(L, H) \rightarrow \mathcal{T}_K(K, H)$$

ليكن $(f, g) \in \mathcal{T}_K(K, L) \times \mathcal{T}_K(L, H)$ عندئذ فإن $f = (f^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ ، $g = (g^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ حيث $f^n: K^n \rightarrow L^n$ ، $g^n: L^n \rightarrow H^n$ مورفيزمات للفئة $\mathcal{T}$ لأجل كل $n \in \mathbb{Z}$ ، ولأجلها المخططات الآتية:

$$\begin{array}{ccc} K^n & \xrightarrow{d_K^n} & K^{n+1} \\ f^n \downarrow & & \downarrow f^{n+1} \\ L^n & \xrightarrow{d_L^n} & L^{n+1} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} L^n & \xrightarrow{d_L^n} & L^{n+1} \\ g^n \downarrow & & \downarrow g^{n+1} \\ H^n & \xrightarrow{d_H^n} & H^{n+1} \end{array}$$

تبديلية، أي إن $f^{n+1} \cdot d_K^n = d_L^n \cdot f^n$ ، $g^{n+1} \cdot d_L^n = d_H^n \cdot g^n$ ومنه فإن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} K^n & \xrightarrow{d_K^n} & K^{n+1} \\ g^n \cdot f^n \downarrow & & \downarrow g^{n+1} \cdot f^{n+1} \\ H^n & \xrightarrow{d_H^n} & H^{n+1} \end{array}$$

تبديلي، لأن:

$$\begin{aligned} (g^{n+1} \cdot f^{n+1}) \cdot d_K^n &= g^{n+1} \cdot (f^{n+1} \cdot d_K^n) = g^{n+1} \cdot (d_L^n \cdot f^n) = (g^{n+1} \cdot d_L^n) \cdot f^n = \\ &= (d_H^n \cdot g^n) \cdot f^n = d_H^n \cdot (g^n \cdot f^n) \end{aligned}$$

وهكذا نجد أن $g \cdot f = (g^n \cdot f^n)_{n \in \mathbb{Z}}: K \rightarrow H$ مورفيزم مركبات.

إن هذه العملية تجميعية؛ لأن ضرب المورفيزمات في الفئة $\mathcal{T}$ تجميعي. وأنه أياً كان $K \in ob(\mathcal{T}_K)$ ، فإن $I_K = (I^n)_{n \in \mathbb{Z}} = (I_{K^n})_{n \in \mathbb{Z}}$ هو المورفيزم المطابق في $\mathcal{T}_K$ ، حيث

أن $I_{K^n}: K^n \rightarrow K^n$ المورفيزم المطابق للشيء $K^n \in ob(\mathcal{T})$ ؛ لأن:

$$I_{K^{n+1}} \cdot d_K^n = d_K^n \cdot I_{K^n}$$

أي إن المخطط الآتي تبديلي:

$$\begin{array}{ccc} K^n & \xrightarrow{d_K^n} & K^{n+1} \\ I_{K^n} \downarrow & & \downarrow I_{K^{n+1}} \\ K^n & \xrightarrow{d_K^n} & K^{n+1} \end{array}$$

- لأجل أي مورفيزمين $f: K \rightarrow L$, $g: H \rightarrow K$ من $\mathfrak{S}_K$ حيث $K, L, H \in ob(\mathfrak{S}_K)$ فإن

$$f \cdot I_K = (f^n)_{n \in \mathbb{Z}} \cdot (I_{K^n})_{n \in \mathbb{Z}} = (f^n \cdot I_{K^n})_{n \in \mathbb{Z}} = (f^n)_{n \in \mathbb{Z}} = f$$

$$I_K \cdot g = (I_{K^n})_{n \in \mathbb{Z}} \cdot (g^n)_{n \in \mathbb{Z}} = (I_{K^n} \cdot g^n)_{n \in \mathbb{Z}} = (g^n)_{n \in \mathbb{Z}} = g$$

مما سبق نجد أن $\mathfrak{S}_K$ تشكل فئة.

تعريف.

لتكن $\mathfrak{S}$ فئة تبديلية. نسمي الفئة المعرفة في التمهيدية (١-١-١١) فئة المركبات في $\mathfrak{S}$.

مبرهنة ١-١-٢.

لتكن $\mathfrak{S}$ فئة تبديلية. إن فئة المركبات $\mathfrak{S}_K$ في $\mathfrak{S}$ هي فئة تبديلية.

البرهان.

ليكن $f, g: K \rightarrow L$ مورفيزمين للفئة $\mathfrak{S}_K$ حيث $K, L \in ob(\mathfrak{S}_K)$ ولنبرهن على أن

$f^n, g^n: K^n \rightarrow L^n$ حيث $f = (f^n)_{n \in \mathbb{Z}}$, $g = (g^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ إن $f + g \in \mathfrak{S}_K(K, L)$ مورفيزمات للفئة $\mathfrak{S}$ وذلك لأجل كل $n \in \mathbb{Z}$ ولأجلها المخططات الآتية:

$$\begin{array}{ccc} K^n & \xrightarrow{d_K^n} & K^{n+1} \\ f^n \downarrow & & \downarrow f^{n+1} \\ L^n & \xrightarrow{d_L^n} & L^{n+1} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} K^n & \xrightarrow{d_K^n} & K^{n+1} \\ g^n \downarrow & & \downarrow g^{n+1} \\ L^n & \xrightarrow{d_L^n} & L^{n+1} \end{array}$$

تبديلية، أي إن $f^{n+1} \cdot d_K^n = d_L^n \cdot f^n$, $g^{n+1} \cdot d_K^n = d_L^n \cdot g^n$ ومنه نجد أن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} K^n & \xrightarrow{d_K^n} & K^{n+1} \\ f^n + g^n \downarrow & & \downarrow f^{n+1} + g^{n+1} \\ L^n & \xrightarrow{d_L^n} & L^{n+1} \end{array}$$

تبديلي، وذلك لأن:

$$\begin{aligned} (f^{n+1} + g^{n+1}) \cdot d_K^n &= f^{n+1} \cdot d_K^n + g^{n+1} \cdot d_K^n = d_L^n \cdot f^n + d_L^n \cdot g^n = \\ &= d_L^n \cdot (f^n + g^n) \end{aligned}$$

ومنه نجد أن $f + g = (f^n + g^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ مورفيزم للفئة $\mathfrak{S}_K$.

- أي إن المجموعة $\mathfrak{S}_K(K, L)$ معرف عليها عملية جمع وهذا الجمع تبديلي؛ لأن

$$f + g = (f^n)_{n \in \mathbb{Z}} + (g^n)_{n \in \mathbb{Z}} = (f^n + g^n)_{n \in \mathbb{Z}} = (g^n + f^n)_{n \in \mathbb{Z}} = \\ = (g^n)_{n \in \mathbb{Z}} + (f^n)_{n \in \mathbb{Z}} = g + f$$

وذلك لأن الفئة $\mathfrak{S}$ تبديلية.

- بما أن المجموعة $\mathfrak{S}(K^n, L^n)$ تتمتع ببنية زمرة تبديلية فإنه يوجد عنصر محايد $o^n \in \mathfrak{S}(K^n, L^n)$ ؛ وبالتالي يكون $o = (o^n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \text{Mor}(\mathfrak{S}_K)$ مورفيزماً للفئة $\mathfrak{S}_K$ ؛ لأن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} K^n & \xrightarrow{d_K^n} & K^{n+1} \\ o^n \downarrow & & \downarrow o^{n+1} \\ L^n & \xrightarrow{d_L^n} & L^{n+1} \end{array}$$

تبديلي، أي إن $o^{n+1} \cdot d_K^n = d_L^n \cdot o^n$.

- كما أن ضرب المورفيزمات توزيعي على الجمع من اليمين واليسار؛ لأنه إذا كان $f, g \in \mathfrak{S}_K(K, L)$ و $w \in \mathfrak{S}_K(H, K)$ حيث $K, L, H \in \text{ob}(\mathfrak{S}_K)$ ، فإن:

$$(f + g) \cdot w = f \cdot w + g \cdot w$$

لأنه من أجل كل $n \in \mathbb{Z}$ فإن $(f^n + g^n) \cdot w^n = f^n \cdot w^n + g^n \cdot w^n$ ومنه فإن

$$((f^n)_{n \in \mathbb{Z}} + (g^n)_{n \in \mathbb{Z}}) \cdot (w^n)_{n \in \mathbb{Z}} = (f^n \cdot w^n)_{n \in \mathbb{Z}} + (g^n \cdot w^n)_{n \in \mathbb{Z}} = \\ = (f^n)_{n \in \mathbb{Z}} \cdot (w^n)_{n \in \mathbb{Z}} + (g^n)_{n \in \mathbb{Z}} \cdot (w^n)_{n \in \mathbb{Z}}$$

بالطريقة نفسها يمكن إثبات أن $u \cdot (f + g) = u \cdot f + u \cdot g$ وذلك لأجل كل مورفيزم $u: K \rightarrow N$ حيث $N \in \text{ob}(\mathfrak{S}_K)$.

كما أنه يوجد $L \in \text{ob}(\mathfrak{S}_K)$ يحقق $I_L = 0$.

ليكن $A = (A^n)_{n \in \mathbb{Z}}, B = (B^n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \text{ob}(\mathfrak{S}_K)$ ولنبرهن أن $A \amalg B, A \prod B$ موجودان.

بما أن الفئة $\mathfrak{S}$ تبديلية وإن $A^n, B^n \in \text{ob}(\mathfrak{S})$ فإن $A^n \prod B^n \in \text{ob}(\mathfrak{S})$ وذلك $K^n = A^n \prod B^n$ ولنفرض أن:

$$d_A^n: A^n \rightarrow A^{n+1}, d_B^n: B^n \rightarrow B^{n+1}$$

متتاليات المورفيزمات للشئتين A, B ، ولنفرض أن:

$$\pi_A^{n+1}: K^{n+1} \rightarrow A^{n+1}, \pi_B^{n+1}: K^{n+1} \rightarrow B^{n+1}$$

المورفيزمات الإسقاطية، عندئذ يوجد مورفيزم وحيد $d_K^n : K^n \rightarrow K^{n+1}$ لأجله المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccccc} d_B^n \cdot \pi_B^n & & B^{n+1} & & \pi_B^{n+1} \\ & \nearrow & & \nwarrow & \\ K^n & \xrightarrow{d_K^n} & K^{n+1} & & \\ & \searrow & & \swarrow & \\ d_A^n \cdot \pi_A^n & & A^{n+1} & & \pi_A^{n+1} \end{array}$$

تبديلي، أي إن $\pi_B^{n+1} \cdot d_K^n = d_B^n \cdot \pi_B^n$ ، $\pi_A^{n+1} \cdot d_K^n = d_A^n \cdot \pi_A^n$ ، وهذا يبين أن المخططين الآتيين:

$$\begin{array}{ccc} K^n & \xrightarrow{d_K^n} & K^{n+1} \\ \pi_A^n \downarrow & & \downarrow \pi_A^{n+1} \\ A^n & \xrightarrow{d_A^n} & A^{n+1} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} K^n & \xrightarrow{d_K^n} & K^{n+1} \\ \pi_B^n \downarrow & & \downarrow \pi_B^{n+1} \\ B^n & \xrightarrow{d_B^n} & B^{n+1} \end{array}$$

تبديليان، ومنه نجد أن $d_K^{n+1} \cdot d_K^n = 0$ ، وبالتالي يكون $K \in ob(\mathfrak{S}_K)$. بطريقة مشابهة نجد أن المجموع أيضاً موجود. مما سبق نجد أن الفئة $\mathfrak{S}_K$ تبديلية. (انظر التمرين المحلول (١-١١) و (٢-١١)).

مبرهنة ٣-١-١١.

لتكن $\mathfrak{S}$ فئة تبديلية، وإن $\mathfrak{S}_K$ فئة المركبات في $\mathfrak{S}$ ، ولنفرض أن $n \in \mathbb{Z}$ عدد صحيح، عندئذ يوجد دالي جمعي $Z^n : \mathfrak{S}_K \rightarrow \mathfrak{S}$ معرف بالشكل الآتي: أيأ كان $K \in ob(\mathfrak{S}_K)$ ، فإن $Z^n(K) = Ker(d_K^n)$.
البرهان.

من أجل العدد الصحيح $n \in \mathbb{Z}$ لنعرف $Z^n : \mathfrak{S}_K \rightarrow \mathfrak{S}$ من خلال تطبيقي الأشياء والمورفيزمات الآتيين:

- تطبيق الأشياء $Z^n : ob(\mathfrak{S}_K) \rightarrow ob(\mathfrak{S})$ المعرف بالشكل: أيأ كان $K \in ob(\mathfrak{S}_K)$ ، فإن $Z^n(K) = Ker(d_K^n)$. وبسبب وحدانية $Ker(d_K^n)$ نجد أن Z^n تطبيق أشياء.
- تطبيق المورفيزمات $Z^n : Mor(\mathfrak{S}_K) \rightarrow Mor(\mathfrak{S})$ المعرف بالشكل الآتي: ليكن: $f : K \rightarrow L$ مورفيزماً للفئة $\mathfrak{S}_K$ ، عندئذ المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} K^n & \xrightarrow{d_K^n} & K^{n+1} \\ f^n \downarrow & & \downarrow f^{n+1} \\ L^n & \xrightarrow{d_L^n} & L^{n+1} \end{array}$$

تبديلي، أي إن $f^{n+1} \cdot d_K^n = d_L^n \cdot f^n$

لنفرض أن $\mu: Ker(d_L^n) \rightarrow L^n$ و $\lambda: Ker(d_K^n) \rightarrow K^n$ المونومورفيزمات القانونية فنجد أن $f^n \cdot \lambda: Ker(d_K^n) \rightarrow L^n$ وإن $d_K^n \cdot \lambda = 0$, $d_L^n \cdot \mu = 0$ كما أن $d_L^n \cdot (f^n \cdot \lambda) = (d_L^n \cdot f^n) \cdot \lambda = (f^{n+1} \cdot d_K^n) \cdot \lambda = f^{n+1} \cdot (d_K^n \cdot \lambda) = f^{n+1} \cdot 0 = 0$

$$\begin{array}{ccccc} & & & & Ker(d_L^n) \\ & & & \nearrow w & \downarrow \mu \\ Ker(d_K^n) & \xrightarrow{f^n \cdot \lambda} & L^n & \xrightarrow{d_L^n} & L^{n+1} \end{array}$$

وحسب تعريف النواة، فإنه يوجد مورفيزم وحيد $w: Ker(d_K^n) \rightarrow Ker(d_L^n)$ للفتة $\mathfrak{S}$ يحقق $\mu \cdot w = f^n \cdot \lambda$. لنضع $Z^n(f) = w \in Mor(\mathfrak{S}_K)$ فنجد أن Z^n هو تطبيق مورفيزمات بسبب وحدانية المورفيزم w ، فضلاً عن ذلك فإن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccccccc} Ker(d_K^n) = Z^n(K) & \xrightarrow{\gamma} & K^n & \xrightarrow{d_K^n} & K^{n+1} \\ w \downarrow & & f^n \downarrow & & \downarrow f^{n+1} \\ Ker(d_L^n) = Z^n(L) & \xrightarrow{\mu} & L^n & \xrightarrow{d_L^n} & L^{n+1} \end{array}$$

تبديلي، وذلك لأن $f^{n+1} \cdot d_K^n = d_L^n \cdot f^n$ ، $w \cdot \mu = f^n \cdot \lambda$ ،

لنبرهن على أن $Z^n(I_K) = I_{Z^n(K)}$ ، وذلك أيأ كان $K \in ob(\mathfrak{S}_K)$.

لنفرض أن $\lambda: Ker(d_K^n) \rightarrow K^n$ المونومورفيزم القانوني، عندئذ $d_K^n \cdot \lambda = 0$ كما أن $d_K^n \cdot (I_K^n \cdot \lambda) = d_K^n \cdot \lambda = 0$ وحسب تعريف النواة، فإنه يوجد مورفيزم وحيد:

$$w: Ker(d_K^n) \rightarrow Ker(d_K^n)$$

$$\begin{array}{ccccc} & & & & Ker(d_L^n) \\ & & & \nearrow w & \downarrow \lambda \\ Ker(d_K^n) & \xrightarrow{I_K^n \cdot \lambda} & K^n & \xrightarrow{d_K^n} & K^{n+1} \end{array}$$

للفئة $\mathfrak{S}$ يحقق $\lambda \cdot w = I_K^n \cdot \lambda = \lambda$ وبما أن $\lambda \cdot w = I_{Ker(d_K^n)} \cdot \lambda$ وبسبب وحدانية w نجد

أن $Z^n(I_K) = w = I_{Z^n(K)} = I_{Ker(d_K^n)} = I_{Z^n(K)}$ وهكذا نجد أن $w = I_{Ker(d_K^n)} = I_{Z^n(K)}$
 ليكن $f: K \rightarrow L, g: L \rightarrow H$ مورفيزمات للفئة $\mathfrak{S}_K$ ، حيث $K, L, H \in ob(\mathfrak{S}_K)$
 ولنبرهن على أن $Z^n(g \cdot f) = Z^n(g) \cdot Z^n(f)$
 لنفرض أن $Z^n(f) = w_1, Z^n(g) = w_2$ ولنأخذ المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccccccc} Ker(d_K^n) = Z^n(K) & \xrightarrow{\lambda} & K^n & \xrightarrow{d_K^n} & K^{n+1} \\ w_1 \downarrow & & f^n \downarrow & & \downarrow f^{n+1} \\ Ker(d_L^n) = Z^n(L) & \xrightarrow{\mu} & L^n & \xrightarrow{d_L^n} & L^{n+1} \\ w_2 \downarrow & & g^n \downarrow & & \downarrow g^{n+1} \\ Ker(d_H^n) = Z^n(H) & \xrightarrow{\delta} & H^n & \xrightarrow{d_H^n} & H^{n+1} \end{array}$$

حيث λ, μ, δ المونومورفيزمات القانونية، ولما كان:

$$f^{n+1} \cdot d_K^n = d_L^n \cdot f^n, \quad g^{n+1} \cdot d_L^n = d_H^n \cdot g^n$$

نجد أن:

$$\begin{aligned} (g^{n+1} \cdot f^{n+1}) \cdot d_K^n &= g^{n+1} \cdot (f^{n+1} \cdot d_K^n) = g^{n+1} \cdot (d_L^n \cdot f^n) = (g^{n+1} \cdot d_L^n) \cdot f^n = \\ &= (d_H^n \cdot g^n) \cdot f^n = d_H^n \cdot (g^n \cdot f^n) \end{aligned}$$

وحسب المبرهنة (٨-١-٤) فإنه يوجد مورفيزم وحيد $w: Ker(d_K^n) \rightarrow Ker(d_H^n)$ لأجله
 المخطط السابق تبديلي، وإن $w = w_2 \cdot w_1$ ومنه نجد أن:

$$Z^n(g \cdot f) = w = w_2 \cdot w_1 = Z^n(g) \cdot Z^n(f)$$

مما سبق نجد أن $Z^n: \mathfrak{S}_K \rightarrow \mathfrak{S}$ دالي مباشر. لنبرهن على أن الدالي Z^n جمعي.

ليكن $f, T: K \rightarrow L$ مورفيزمات للفئة $\mathfrak{S}_K$ حيث $K, L \in ob(\mathfrak{S}_K)$ ولنبرهن على أن:

$$Z^n(f + T) = Z^n(f) + Z^n(T)$$

حسب المبرهنة (١١-١-٢)، فإن $f + T: K \rightarrow L$ مورفيزم للفئة $\mathfrak{S}_K$. لنفرض أن
 $Z^n(f) = w, Z^n(T) = w_1$ فنجد أن:

$$w, w_1: Ker(d_K^n) = Z^n(K) \rightarrow Ker(d_L^n) = Z^n(L)$$

مورفيزمات للفئة $\mathfrak{S}$ لأجلها المخططان الآتيان:

$$\begin{array}{ccccc}
Ker(d_K^n) = Z^n(K) & \xrightarrow{\lambda} & K^n & \xrightarrow{d_K^n} & K^{n+1} \\
w \downarrow & & f^n \downarrow & & \downarrow f^{n+1} \\
Ker(d_L^n) = Z^n(L) & \xrightarrow{\mu} & L^n & \xrightarrow{d_L^n} & L^{n+1} \\
\\
Ker(d_K^n) = Z^n(K) & \xrightarrow{\lambda} & K^n & \xrightarrow{d_K^n} & K^{n+1} \\
w_1 \downarrow & & T^n \downarrow & & \downarrow T^{n+1} \\
Ker(d_L^n) = Z^n(L) & \xrightarrow{\mu} & L^n & \xrightarrow{d_L^n} & L^{n+1}
\end{array}$$

تبدليان، أي إن:

$$\begin{aligned}
f^{n+1} \cdot d_K^n &= d_L^n \cdot f^n, & f^n \cdot \lambda &= \mu \cdot w \\
T^{n+1} \cdot d_K^n &= d_L^n \cdot T^n, & T^n \cdot \lambda &= \mu \cdot w_1
\end{aligned}$$

ومنه نجد أن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccccc}
Ker(d_K^n) = Z^n(K) & \xrightarrow{\lambda} & K^n & \xrightarrow{d_K^n} & K^{n+1} \\
w + w_1 \downarrow & & f^n + T^n \downarrow & & \downarrow f^{n+1} + T^{n+1} \\
Ker(d_L^n) = Z^n(L) & \xrightarrow{\mu} & L^n & \xrightarrow{d_L^n} & L^{n+1}
\end{array}$$

تبدلي، لأن:

$$\begin{aligned}
(f^{n+1} + T^{n+1}) \cdot d_K^n &= f^{n+1} \cdot d_K^n + T^{n+1} \cdot d_K^n = d_L^n \cdot f^n + d_L^n \cdot T^n = d_L^n \cdot (f^n + T^n) \\
(f^n + T^n) \cdot \lambda &= f^n \cdot \lambda + T^n \cdot \lambda = \mu \cdot w + \mu \cdot w_1 = \mu \cdot (w + w_1)
\end{aligned}$$

ومنه نجد أن $Z^n(f + T) = Z^n(f) + Z^n(T)$ أي إن الدالي Z^n جمعي.

مبرهنة ١١-١-٤.

لتكن $\mathfrak{I}$ فئة تبدلية، وإن $\mathfrak{I}_K$ فئة المركبات في $\mathfrak{I}$ ، ولنفرض أن $n \in \mathbb{Z}$ عدد صحيح، عندئذ يوجد دالي جمعي $B^n: \mathfrak{I}_K \rightarrow \mathfrak{I}$ معرف بالشكل الآتي: أيأ كان $K \in ob(\mathfrak{I}_K)$ فإن $B^n(K) = Im(d_K^{n-1})$.
البرهان.

من أجل العدد الصحيح $n \in \mathbb{Z}$ لنعرف $B^n: \mathfrak{I}_K \rightarrow \mathfrak{I}$ من خلال تطبيقي الأشياء والمورفيزمات الآتيتين:

- تطبيق الأشياء $B^n: ob(\mathfrak{I}_K) \rightarrow ob(\mathfrak{I})$ المعرف بالشكل: أيأ كان $K \in ob(\mathfrak{I}_K)$ ، فإن $B^n(K) = Im(d_K^{n-1}) \in ob(\mathfrak{I}_K)$ وهنا نجد أن $Im(d_K^{n-1}) \subset Z^n(K)$ وبسبب وحدانية

$Im(d_K^{n-1})$ نجد أن B^n تطبيق أشياء.

- تطبيق المورفيزمات $B^n : Mor(\mathfrak{S}_K) \rightarrow Mor(\mathfrak{S})$ المعروف بالشكل الآتي: ليكن $f : K \rightarrow L$ مورفيزماً للفئة $\mathfrak{S}_K$ ، عندئذ المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} K^{n-1} & \xrightarrow{d_K^{n-1}} & K^n \\ f^{n-1} \downarrow & & \downarrow f^n \\ L^{n-1} & \xrightarrow{d_L^{n-1}} & L^n \end{array}$$

تبديلي، أي إن $f^n \cdot d_K^{n-1} = d_L^{n-1} \cdot f^{n-1}$.

وحسب التمهيدية (٨-١-٧)، فإنه يوجد مورفيزم وحيد $\sigma : Im(d_K^{n-1}) \rightarrow Im(d_L^{n-1})$ لأجله المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} Im(d_K^{n-1}) & \xrightarrow{\mu} & K^n \\ \sigma \downarrow & & \downarrow f^n \\ Im(d_L^{n-1}) & \xrightarrow{\mu_1} & L^n \end{array}$$

تبديلي، أي إن $f^n \cdot \mu = \mu_1 \cdot \sigma$ ، حيث μ, μ_1 المونومورفيزمات القانونية.

لنضع $B^n(f) = \sigma$ فنجد أن B^n هو تطبيق مورفيزمات بسبب وحدانية المورفيزم σ . لنبرهن على أن $B^n(I_K) = I_{B^n(K)}$ وذلك لأجل كل $K \in ob(\mathfrak{S}_K)$. لنفرض أن:

$$\mu : Im(d_K^{n-1}) \rightarrow K^n$$

المونومورفيزم القانوني. فنجد أن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} Im(d_K^{n-1}) & \xrightarrow{\mu} & K^n \\ I_{Im(d_K^{n-1})} \downarrow & & \downarrow I_K \\ Im(d_K^{n-1}) & \xrightarrow{\mu_1} & K^n \end{array}$$

تبدلياً، لأن $I_K \cdot \mu = \mu = \mu \cdot I_{Im(d_K^{n-1})}$ ، ومنه نجد أن $B^n(K) = I_{Im(d_K^{n-1})} = I_{B^n(K)}$.

ليكن $f : K \rightarrow L, g : L \rightarrow H$ مورفيزمات للفئة $\mathfrak{S}_K$ ، حيث $K, L, H \in ob(\mathfrak{S}_K)$ ولنبرهن على أن $B^n(g \cdot f) = B^n(g) \cdot B^n(f)$.

نلاحظ أولاً أن $g \cdot f : K \rightarrow H$ مورفيزم للفئة $\mathfrak{S}_K$. لنفرض أن $B^n(f) = \sigma_1$ وإن $B^n(g) = \sigma_2$ ، ولتأخذ المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccccc}
Im(d_K^{n-1}) = B^n(K) & \xrightarrow{\lambda} & K^n & \xrightarrow{d_K^n} & K^{n+1} \\
\sigma_1 \downarrow & & f^n \downarrow & & \downarrow f^{n+1} \\
Im(d_L^{n-1}) = B^n(L) & \xrightarrow{\mu} & L^n & \xrightarrow{d_L^n} & L^{n+1} \\
\sigma_2 \downarrow & & g^n \downarrow & & \downarrow g^{n+1} \\
Im(d_H^{n-1}) = B^n(H) & \xrightarrow{\delta} & H^n & \xrightarrow{d_H^n} & H^{n+1}
\end{array}$$

حيث λ, μ, δ المونومورفزمات القانونية، ولما كان:

$$f^{n+1} \cdot d_K^n = d_L^n \cdot f^n, \quad g^{n+1} \cdot d_L^n = d_H^n \cdot g^n$$

وإن $f^n \cdot \lambda = \mu \cdot \sigma_1, \quad g^n \cdot \mu = \delta \cdot \sigma_2$ نجد أن:

$$\begin{aligned}
(g^{n+1} \cdot f^{n+1}) \cdot d_K^n &= g^{n+1} \cdot (f^{n+1} \cdot d_K^n) = g^{n+1} \cdot (d_L^n \cdot f^n) = (g^{n+1} \cdot d_L^n) \cdot f^n = \\
&= (d_H^n \cdot g^n) \cdot f^n = d_H^n \cdot (g^n \cdot f^n)
\end{aligned}$$

وحسب المبرهنة (٨-١-٧)، فإنه يوجد مورفيزم وحيد $\sigma : Im(d_K^{n-1}) \rightarrow Im(d_H^{n-1})$ لأجله المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc}
Im(d_K^{n-1}) = B^n(K) & \xrightarrow{\lambda} & K^n \\
\sigma \downarrow & & \downarrow g^n \cdot f^n \\
Im(d_H^{n-1}) = B^n(H) & \xrightarrow{\delta} & H^n
\end{array}$$

تبديلي، أي إن $(g^n \cdot f^n) \cdot \lambda = \delta \cdot \sigma$ ، ومنه نجد أن $B^n(g \cdot f) = \sigma$ ، وإن:

$$\begin{aligned}
\delta \cdot \sigma &= (g^n \cdot f^n) \cdot \lambda = g^n \cdot (f^n \cdot \lambda) = g^n \cdot (\mu \cdot \sigma_1) = (g^n \cdot \mu) \cdot \sigma_1 = \\
&= (\delta \cdot \sigma_2) \cdot \sigma_1 = \delta \cdot (\sigma_1 \cdot \sigma_2)
\end{aligned}$$

وبسبب كون المورفيزم σ مونومورفيزماً نجد أن $\sigma = \sigma_1 \cdot \sigma_2$ وبالتالي يكون:

$$B^n(g \cdot f) = \sigma = \sigma_2 \cdot \sigma_1 = B^n(g) \cdot B^n(f)$$

وهذا يبين أن B^n دالي مباشر. لنبرهن على أن الدالي B^n جمعي.

ليكن $f, T : K \rightarrow L$ مورفيزمات للفئة $\mathfrak{S}_K$ حيث $K, L \in ob(\mathfrak{S}_K)$ ولنبرهن على أن:

$$B^n(f + T) = B^n(f) + B^n(T)$$

حسب المبرهنة (١١-١-٢)، فإن $f + T : K \rightarrow L$ مورفيزم للفئة $\mathfrak{S}_K$. لنفرض أن

$$B^n(f) = \sigma_1, \quad B^n(T) = \sigma_2$$

$$\sigma_1, \sigma_2 : Im(d_K^{n-1}) = B^n(K) \rightarrow Im(d_L^{n-1}) = B^n(L)$$

مورفيزمات للفئة $\mathfrak{S}$ لأجلها المخططان الآتيان:

$$\sigma_1 \quad \begin{array}{ccccc} \text{Im}(d_K^{n-1}) = B^n(K) & \xrightarrow{\lambda} & K^n & \xrightarrow{d_K^n} & K^{n+1} \\ \downarrow & & f^n \downarrow & & \downarrow f^{n+1} \\ \text{Im}(d_L^{n-1}) = B^n(L) & \xrightarrow{\lambda_1} & L^n & \xrightarrow{d_L^n} & L^{n+1} \end{array}$$

$$\sigma_2 \quad \begin{array}{ccccc} \text{Im}(d_K^{n-1}) = B^n(K) & \xrightarrow{\lambda} & K^n & \xrightarrow{d_K^n} & K^{n+1} \\ \downarrow & & T^n \downarrow & & \downarrow T^{n+1} \\ \text{Im}(d_L^{n-1}) = B^n(L) & \xrightarrow{\lambda_1} & L^n & \xrightarrow{d_L^n} & L^{n+1} \end{array}$$

تبديليان، أي إن:

$$f^{n+1} \cdot d_K^n = d_L^n \cdot f^n, \quad f^n \cdot \lambda = \lambda_1 \cdot \sigma_1$$

$$T^{n+1} \cdot d_K^n = d_L^n \cdot T^n, \quad T^n \cdot \lambda = \lambda_1 \cdot \sigma_2$$

ومنه نجد أن المخطط الآتي:

$$\sigma_1 + \sigma_2 \quad \begin{array}{ccccc} \text{Im}(d_K^{n-1}) = B^n(K) & \xrightarrow{\lambda} & K^n & \xrightarrow{d_K^n} & K^{n+1} \\ \downarrow & & f^n + T^n \downarrow & & \downarrow f^{n+1} + T^{n+1} \\ \text{Im}(d_L^{n-1}) = B^n(L) & \xrightarrow{\lambda_1} & L^n & \xrightarrow{d_L^n} & L^{n+1} \end{array}$$

تبديلي، لأن:

$$\begin{aligned} (f^{n+1} + T^{n+1}) \cdot d_K^n &= f^{n+1} \cdot d_K^n + T^{n+1} \cdot d_K^n = d_L^n \cdot f^n + d_L^n \cdot T^n = \\ &= d_L^n \cdot (f^n + T^n) \end{aligned}$$

$$(f^n + T^n) \cdot \lambda = f^n \cdot \lambda + T^n \cdot \lambda = \lambda_1 \cdot \sigma_1 + \lambda_1 \cdot \sigma_2 = \lambda_1 \cdot (\sigma_1 + \sigma_2)$$

ومنه نجد أن $B^n(f+T) = B^n(f) + B^n(T)$ أي إن الدالي B^n جمعي.

تعريف.

لتكن $\mathfrak{S}$ فئة تبديلية، ولتكن $\mathfrak{S}_K$ فئة المركبات في $\mathfrak{S}$ ، ولنفرض أن $K \in \text{ob}(\mathfrak{S}_K)$.

- نسمي الشيء $Z^n(K)$ الشيء الدوار للمركب K ذي البعد n (بعده n).

- نسمي الشيء $B^n(K)$ حد المركب K ذي البعد n (بعده n).

تمهيدية ١١-١-٥.

لتكن $\mathfrak{S}$ فئة تبديلية، وإن $\mathfrak{S}_K$ فئة المركبات في $\mathfrak{S}$ ، عندئذ لأجل كل $n \in \mathbb{Z}$ فإن:

$$B^n(K) \subset Z^n(K)$$

البرهان.

لدينا لأجل العدد الصحيح $n \in Z$ ، $Z^n(K) = \text{Ker}(d_K^n)$ ، $B^n(K) = \text{Im}(d_K^{n-1})$ ، حيث

$$K^{n-1} \xrightarrow{d_K^{n-1}} K^n \xrightarrow{d_K^n} K^{n+1}$$

وإن $d_K^n \cdot d_K^{n-1} = 0$ لنفرض أن $\lambda: \text{Ker}(d_K^n) \rightarrow K^n$ و $\mu: \text{Im}(d_K^{n-1}) \rightarrow K^n$ ، فنجد أن $d_K^n \cdot \lambda = 0$ و $d_K^n \cdot \mu = 0$ وحسب تعريف النواة فإنه:

$$\begin{array}{ccc} \alpha & \nearrow & \text{Ker}(d_K^n) \\ & & \downarrow \lambda \\ \text{Ker}(d_K^{n-1}) & \xrightarrow{\mu} & K^n \xrightarrow{d_K^n} K^{n+1} \end{array}$$

يوجد مورفيزم وحيد $\alpha: \text{Im}(d_K^{n-1}) \rightarrow \text{Ker}(d_K^n)$ لأجله $\lambda \cdot \alpha = \mu$ ، ولما كان μ مورفيزماً نجد أن α مورفيزم؛ وبالتالي يكون $\text{Im}(d_K^{n-1}) \subset \text{Ker}(d_K^n)$ ، أي إن $B^n(K) \subset Z^n(K)$.

مبرهنة ١١-١-٦.

لتكن $\mathfrak{I}$ فئة تبديلية، وإن $\mathfrak{I}_K$ فئة المركبات في $\mathfrak{I}$ ، ولنفرض أن $n \in Z$ عدد صحيح، عندئذ يوجد دالي مباشر جمعي $H^n: \mathfrak{I}_K \rightarrow \mathfrak{I}$ معرف بالشكل الآتي: أيأ كان $K \in \text{ob}(\mathfrak{I}_K)$ ، فإن $H^n(K) = Z^n(K) / B^n(K)$.

البرهان.

من أجل العدد الصحيح $n \in Z$ لنعرف $H^n: \mathfrak{I}_K \rightarrow \mathfrak{I}$ من خلال تطبيق الأشياء والمورفيزمات الآتيين:

- تطبيق الأشياء $H^n: \text{ob}(\mathfrak{I}_K) \rightarrow \text{ob}(\mathfrak{I})$ ، ليكن $K \in \text{ob}(\mathfrak{I}_K)$ ، وجدنا حسب المبرهنة (١١-١-٣) أنه لأجل $n \in Z$ يوجد $Z^n(K), B^n(K)$ وحسب التمهيدية (١١-١-٥) فإن $B^n(K) \subset Z^n(K)$ وحسب المبرهنة (٨-٢-٤) فإن $Z^n(K) / B^n(K)$ هو شيء خارج لـ $Z^n(K)$.

لنضع $H^n(K) = Z^n(K) / B^n(K)$ ، فنجد أن H^n هو تطبيق أشياء، لأنه إذا كان $K_1, K_2 \in \text{ob}(\mathfrak{I}_K)$ بحيث $K_1 = K_2$ ، فإن:

$$H^n(K_1) = Z^n(K_1)/B^n(K_1) = Z^n(K_2)/B^n(K_2) = H^n(K_2)$$

- تطبيق المورفيزمات $H^n : Mor(\mathfrak{S}_K) \rightarrow Mor(\mathfrak{S})$ المعرف بالشكل الآتي: ليكن $f : K \rightarrow L$ مورفيزماً للفتة $\mathfrak{S}_K$ ، بما أن $B^n(K) \subset Z^n(K)$ ، $B^n(L) \subset Z^n(L)$ لنفرض أن $i : B^n(K) \rightarrow Z^n(K)$ ، $i_1 : B^n(L) \rightarrow Z^n(L)$ هي أشياء خارج $Z^n(K)$ ، $Z^n(L)$ على الترتيب، لنفرض أن:

$$j : Z^n(K) \rightarrow H^n(K), j_1 : Z^n(L) \rightarrow H^n(L)$$

الإيبومورفيزمات القانونية، حيث $j = Coker(i)$ ، $j_1 = Coker(i_1)$ عندئذ يكون $j \cdot i = 0$ و $j_1 \cdot i_1 = 0$ وحسب المبرهنة (٣-١-١١) يوجد مورفيزم وحيد $w : Z^n(K) \rightarrow Z^n(L)$ للفتة $\mathfrak{S}$ لأجله المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccccccc} Z^n(K) & \xrightarrow{\lambda} & K^n & \xrightarrow{d_K^n} & K^{n+1} & & \\ Z^n(f) = w \downarrow & & \downarrow f^n & & \downarrow f^{n+1} & & \\ Z^n(L) & \xrightarrow{\mu} & L^n & \xrightarrow{d_L^n} & L^{n+1} & & \end{array}$$

تبديلي، أي إن $f^n \cdot \lambda = \mu \cdot w$. لنأخذ المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccccccc} B^n(K) & \xrightarrow{i} & Z^n(K) & \xrightarrow{\lambda} & K^n & & \\ \theta \downarrow & & \downarrow w = Z^n(f) & & \downarrow f^n & & \\ B^n(L) & \xrightarrow{i_1} & Z^n(L) & \xrightarrow{\mu} & L^n & & \end{array}$$

وبما أن المربع الأيمن تبديلي، فإنه حسب التمهيدية (٣-١-٨) يوجد مورفيزم وحيد $\theta : B^n(K) \rightarrow B^n(L)$ للفتة $\mathfrak{S}$ لأجله المخطط الأخير تبديلي، أي إن $w \cdot i = i_1 \cdot \theta$. لنأخذ المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccccccc} B^n(K) & \xrightarrow{i} & Z^n(K) & \xrightarrow{j} & H^n(K) & & \\ \theta \downarrow & & \downarrow w & & \downarrow f^n & & \\ B^n(L) & \xrightarrow{i_1} & Z^n(L) & \xrightarrow{j_1} & H^n(L) & & \end{array}$$

بما أن المربع الأيسر تبديلي، فإنه حسب التمهيدية (٥-١-٨) يوجد مورفيزم وحيد $\varepsilon : H^n(K) \rightarrow H^n(L)$ للفتة $\mathfrak{S}$ لأجله المخطط السابق تبديلي، أي إن $\varepsilon \cdot j = j_1 \cdot w$. لنضع $H^n(f) = \varepsilon$ فنجد أن ε مورفيزم للفتة $\mathfrak{S}$ وإن H^n تطبيق مورفيزمات بسبب وحدانية المورفيزم ε . لنبرهن على أن $H^n(I_K) = I_{H^n(K)}$ وذلك لأجل كل $K \in ob(\mathfrak{S}_K)$.

لنفرض أن $i: B^n(K) \rightarrow Z^n(K)$ المونومورفيزم القانوني وإن $j: Z^n(K) \rightarrow H^n(K)$ الإيبومورفيزم القانوني، فنجد أنه في المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccccc} B^n(K) & \xrightarrow{i} & Z^n(K) & \xrightarrow{j} & H^n(K) \\ I_{B^n(K)} \downarrow & & \downarrow I_{Z^n(K)} & & \downarrow \gamma \\ B^n(K) & \xrightarrow{i_1} & Z^n(K) & \xrightarrow{j_1} & H^n(K) \end{array}$$

أن المربع الأيسر تبديلي، وحسب التمهيدية (٨-١-٥) يوجد مورفيزم وحيد:

$$\gamma: H^n(K) \rightarrow H^n(K)$$

لأجله المربع الأيمن تبديلي، أي إن $j \cdot I_{Z^n(K)} = j = I_{H^n(K)} \cdot j$ وبما أن j إيبومورفيزم نجد أن $\gamma = I_{H^n(K)}$ ، ولما كان $\gamma = H^n(I_K)$ نجد أن:

$$H^n(I_K) = I_{H^n(K)}$$

ليكن $f: K \rightarrow L$, $g: L \rightarrow N$ مورفيزمين للفئة $\mathfrak{S}_K$ حيث $K, L, N \in ob(\mathfrak{S}_K)$ ولنبرهن على أن $H^n(g \cdot f) = H^n(g) \cdot H^n(f)$. نلاحظ أولاً أن $g \cdot f: K \rightarrow N$ مورفيزم للفئة $\mathfrak{S}$. لنفرض أن:

$$H^n(f) = \gamma_1, \quad Z^n(f) = w_1, \quad B^n(f) = \sigma_1$$

$$H^n(g) = \gamma_2, \quad Z^n(g) = w_2, \quad B^n(g) = \sigma_2$$

بما أن المخططين الآتيين:

$$\begin{array}{ccccc} B^n(K) & \xrightarrow{i} & Z^n(K) & \xrightarrow{j} & H^n(K) \\ B^n(f) = \sigma_1 \downarrow & & \downarrow Z^n(f) = w_1 & & \downarrow H^n(f) = \gamma_1 \\ B^n(L) & \xrightarrow{i_1} & Z^n(L) & \xrightarrow{j_1} & H^n(L) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} B^n(L) & \xrightarrow{i_1} & Z^n(L) & \xrightarrow{j_1} & H^n(L) \\ B^n(g) = \sigma_2 \downarrow & & \downarrow Z^n(g) = w_2 & & \downarrow H^n(g) = \gamma_2 \\ B^n(N) & \xrightarrow{i_2} & Z^n(N) & \xrightarrow{j_2} & H^n(N) \end{array}$$

تبديليان، أي إن:

$$w_1 \cdot i = i_1 \cdot \sigma_1, \quad w_2 \cdot i_1 = i_2 \cdot \sigma_2, \quad \gamma_1 \cdot j = j_1 \cdot w_1, \quad \gamma_2 \cdot j_1 = j_2 \cdot w_2$$

حيث i, i_1, i_2 المونومورفيزمات القانونية و j, j_1, j_2 الإيبومورفيزمات القانونية.

لنأخذ المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccccc} B^n(K) & \xrightarrow{i} & Z^n(K) & \xrightarrow{j} & H^n(K) \\ \sigma_2 \cdot \sigma_1 \downarrow & & \downarrow & w_2 \cdot w_1 & \downarrow \gamma \\ B^n(N) & \xrightarrow{i_2} & Z^n(N) & \xrightarrow{j_2} & H^n(N) \end{array}$$

ف نجد أن المربع الأيسر منه تبديلي، لأن:

$$\begin{aligned} (w_2 \cdot w_1) \cdot i_1 &= w_2 \cdot (w_1 \cdot i_1) = w_2 \cdot (i_1 \cdot \sigma_1) = (w_2 \cdot i_1) \cdot \sigma_1 = \\ &= (i_2 \cdot \sigma_2) \cdot \sigma_1 = i_2 \cdot (\sigma_2 \cdot \sigma_1) \end{aligned}$$

وحسب التمهيدية (٨-١-٥) يوجد مورفيزم وحيد $\gamma: H^n(K) \rightarrow H^n(N)$ للفئة $\mathcal{S}$ لأجله المخطط السابق تبديلي، أي إن $\gamma \cdot j = j_2 \cdot (w_2 \cdot w_1)$ ومنه نجد أن $H^n(g \cdot f) = \gamma$ من جهة أخرى، لدينا:

$$\begin{aligned} \gamma \cdot j &= j_2 \cdot (w_2 \cdot w_1) = (j_2 \cdot w_2) \cdot w_1 = (\gamma_2 \cdot j_1) \cdot w_1 = \gamma_2 \cdot (j_1 \cdot w_1) = \\ &= \gamma_2 \cdot (\gamma_1 \cdot j) = (\gamma_2 \cdot \gamma_1) \cdot j \end{aligned}$$

ولما كان j إبيومورفيزماً نجد أن $\gamma = \gamma_2 \cdot \gamma_1$ ، ومنه يكون:

$$H^n(g \cdot f) = \gamma = \gamma_2 \cdot \gamma_1 = H^n(g) \cdot H^n(f)$$

وهذا يبين أن H^n دالي مباشر. لنبرهن على أن الدالي H^n جمعي.

ليكن $f, T: K \rightarrow L$ مورفيزمين للفئة $\mathcal{S}_K$ حيث $K, L \in ob(\mathcal{S}_K)$ ولنبرهن على أن $H^n(f+T) = H^n(f) + H^n(T)$. حسب المبرهنة (١١-١-٢) فإن $f+T: K \rightarrow L$ مورفيزم للفئة $\mathcal{S}_K$. لنفرض أن $H^n(f) = \gamma_1, H^n(T) = \gamma_2$ فنجد أن:

$$\gamma_1, \gamma_2: H^n(K) \rightarrow H^n(L)$$

مورفيزمان للفئة $\mathcal{S}$ لأجلهما المخططين الآتيين:

$$\begin{array}{ccccc} B^n(K) & \xrightarrow{i} & Z^n(K) & \xrightarrow{j} & H^n(K) \\ B^n(f) = \sigma_1 \downarrow & & \downarrow & Z^n(f) = w_1 & \downarrow \gamma_1 \\ B^n(L) & \xrightarrow{i_1} & Z^n(L) & \xrightarrow{j_1} & H^n(L) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} B^n(K) & \xrightarrow{i} & Z^n(K) & \xrightarrow{j} & H^n(K) \\ B^n(f) = \sigma_2 \downarrow & & \downarrow & Z^n(f) = w_2 & \downarrow \gamma_2 \\ B^n(L) & \xrightarrow{i_2} & Z^n(L) & \xrightarrow{j_2} & H^n(L) \end{array}$$

تبدليان، أي إن:

$$w_1 \cdot i = i_1 \cdot \sigma_1, \quad w_2 \cdot i = i_1 \cdot \sigma_2, \quad \gamma_1 \cdot j = j_1 \cdot w_1, \quad \gamma_2 \cdot j = j_1 \cdot w_2$$

$$.B''(f) = \sigma_1, \quad B''(T) = \sigma_2, \quad Z''(f) = w_1, \quad Z''(T) = w_2$$

وإن i, i_1 المونومورفيزمات القانونية و j, j_1 الإيبومورفيزمات القانونية. ومنه نجد أن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccccc} B''(K) & \xrightarrow{i} & Z''(K) & \xrightarrow{j} & H''(K) \\ \sigma_1 + \sigma_2 \downarrow & & \downarrow w_1 + w_2 & & \downarrow \gamma_1 + \gamma_2 \\ B''(L) & \xrightarrow{i} & Z''(L) & \xrightarrow{j} & H''(L) \end{array}$$

تبدلي، لأن:

$$(w_1 + w_2) \cdot i = w_1 \cdot i + w_2 \cdot i = i_1 \cdot \sigma_1 + i_1 \cdot \sigma_2 = i_1 \cdot (\sigma_1 + \sigma_2)$$

$$(\gamma_1 + \gamma_2) \cdot j = \gamma_1 \cdot j + \gamma_2 \cdot j = j_1 \cdot w_1 + j_1 \cdot w_2 = j_1 \cdot (w_1 + w_2)$$

من جهة أخرى، بما أن المربع الأيسر من المخطط السابق تبدلي، فإنه حسب التمهيدية (٨-١-٥) يوجد مورفيزم وحيد $\gamma: H''(K) \rightarrow H''(L)$ للفتة $\mathcal{I}$ لأجله المخطط السابق تبدلي، أي إن $\gamma \cdot j = j_1 \cdot (w_1 + w_2)$ ومنه نجد أن:

$$\gamma \cdot j = j_1 \cdot (w_1 + w_2) = j_1 \cdot w_1 + j_1 \cdot w_2 = \gamma_1 \cdot j + \gamma_2 \cdot j = (\gamma_1 + \gamma_2) \cdot j$$

ولما كان j إيبومورفيزماً نجد أن $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ ، وبما أن $H''(g+T) = \gamma$ نجد أن:

$$H''(g+T) = H''(g) + H''(T)$$

أي إن الدالي H'' جمعي.

تعريف.

لنكن $\mathcal{I}$ فئة تبدلية، ولنكن $\mathcal{I}_K$ فئة المركبات في $\mathcal{I}$ ، ولنفرض أن $K \in ob(\mathcal{I}_K)$. نسمي الشيء $H''(K)$ هومولوجياً المركب K بعده n . ونسمي الدالي $H'' : \mathcal{I}_K \rightarrow \mathcal{I}$ دالياً هومولوجياً بعده n .

تعريف.

لنكن $\mathcal{I}$ فئة تبدلية، ولنكن $\mathcal{I}_K$ فئة المركبات في $\mathcal{I}$ ، ولنفرض أن $f, g : K \rightarrow L$ مورفيزمان للفتة $\mathcal{I}_K$ ، حيث $f = (f'')_{n \in \mathbb{Z}}$ ، $g = (g'')_{n \in \mathbb{Z}}$. نقول إن f, g يشكلان تشوهاً

إذا حققا الشرط: لأجل كل $n \in Z$ يوجد مورفيزم $k^n : K^n \rightarrow L^{n-1}$ للفئة $\mathcal{T}$ يحقق:

$$f^{n+1} - g^{n+1} = d_L^n \cdot k^{n+1} + k^{n+2} \cdot d_K^{n+1}$$

تعريف.

لتكن $\mathcal{T}$ فئة تبديلية، ولتكن $\mathcal{T}_K$ فئة المركبات في $\mathcal{T}$ ، ولنفرض أن $K \in ob(\mathcal{T}_K)$:

١ - نقول عن المركب K إنه موجب إذا كان $K^n = 0$ لأجل جميع القيم $n < 0$.

٢ - نقول عن المركب K إنه سالب إذا كان $K^n = 0$ لأجل جميع القيم $n > 0$.

نسمي المركب الموجب مركباً متسلسلاً مرافقاً، ونسمي أشياءه الهومولوجية أشياء كوهومولوجية. ونسمي المركب السالب مركباً متسلسلاً.

لأجل المركب السالب سوف نستخدم الرموز الآتية:

$$K^{-n} = K_n, \quad H^{-n}(K) = H_n(K), \quad d_K^n = d_n^K$$

حيث $n > 0$. بمعنى آخر سوف نرمز للمركب المتسلسل السالب بالشكل:

$$\cdots \rightarrow K_n \xrightarrow{d_n^K} K_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}^K} \cdots \xrightarrow{d_1^K} K_0 \rightarrow 0 \rightarrow 0 \cdots$$

مبرهنة ٧-١-١١.

لتكن $\mathcal{T}$ فئة تبديلية، ولتكن $\mathcal{T}_K$ فئة المركبات في $\mathcal{T}$ ، وليكن $f, g : K \rightarrow L$

مورفيزمين للفئة $\mathcal{T}_K$ حيث $f = (f^n)_{n \in Z}$, $g = (g^n)_{n \in Z}$. إذا كان f, g يشكلان تشوهاً،

عندئذ يكون $H^n(f) = H^n(g)$ وذلك لأجل كل $n \in Z$.

البرهان.

لدينا $f, g : K \rightarrow L$ مورفيزمان للفئة $\mathcal{T}_K$ ومنه فإن $f - g : K \rightarrow L$ مورفيزم للفئة $\mathcal{T}_K$

وإن $f - g = (f^n - g^n)_{n \in Z}$. بما أن الدالي H^n جمعي نجد أن:

$$H^n(f - g) = H^n(f) - H^n(g)$$

لنبرهن على أن $H^n(f - g) = 0$. لنفرض أن $h = f - g$ ، لدينا حسب المبرهنة (١١-١)

(٦-١) أن $H^n(h) : H^n(K) \rightarrow H^n(L)$ هو المورفيزم الوحيد الذي لأجله المخطط

الآتي:

$$\begin{array}{ccccc} B^n(K) & \xrightarrow{\mu_K^n} & Z^n(K) & \xrightarrow{\bar{\kappa}_K^n} & H^n(K) \\ B^n(h) \downarrow & & \downarrow & & \downarrow H^n(h) \\ B^n(L) & \xrightarrow{\mu_L^n} & Z^n(L) & \xrightarrow{\bar{\kappa}_L^n} & H^n(L) \end{array}$$

حيث μ_K^n, μ_L^n المونومورفيزمات القانونية. لنفرض أن:

$$\sigma_K^n : Z^n(K) \rightarrow K^n, \quad \sigma_L^n : Z^n(L) \rightarrow L^n$$

المونومورفيزمات القانونية، وإن $\varepsilon_L^n : Z^{n-1}(L) \rightarrow B^n(L)$ الإيبومورفيزم القانوني، ولنأخذ المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccccccc} k^n & B^n(K) & \xrightarrow{\mu_K^n} & Z^n(K) & \xrightarrow{\sigma_K^n} & K^n & \xrightarrow{d_K^n} & K^{n+1} \\ & \downarrow B^n(h) & & \downarrow Z^n(h) & & \downarrow h^n & \swarrow k^{n+1} & \downarrow \\ L^{n-1} & \xleftarrow{\varepsilon_L^n} & B^n(L) & \xrightarrow{\mu_L^n} & Z^n(L) & \xrightarrow{\sigma_L^n} & L^n & \xrightarrow{d_L^n} & L^{n+1} \end{array}$$

بما أن f, g يشكلان تشوهاً، فإن $h^n = f^n - g^n = d_L^{n-1} \cdot k^n + k^{n+1} \cdot d_K^n$ وبما أن:

$$h^n = \sigma_L^n \cdot \mu_L^n \cdot \varepsilon_K^n \cdot k^n + k^{n+1} \cdot d_K^n$$

نجد أن:

$$\sigma_L^n \cdot Z^n(h) = h^n \cdot \sigma_K^n = \sigma_L^n \cdot \mu_L^n \cdot \varepsilon_K^n \cdot k^n \cdot d_K^n + k^{n+1} \cdot d_K^n \cdot \sigma_K^n$$

وبما أن $d_K^n \cdot \sigma_K^n = 0$ لأن $d_K^n \cdot \sigma_K^n = \text{Ker}(d_K^n)$ نجد أن:

$$\sigma_L^n \cdot Z^n(h) = \sigma_L^n \cdot \mu_L^n \cdot \varepsilon_K^n \cdot k^n \cdot d_K^n$$

وبما أن σ_L^n مونومورفيزم نجد أن $Z^n(h) = \mu_L^n \cdot \varepsilon_K^n \cdot k^n \cdot d_K^n$ أي إن:

$$Z^n(h) \xrightarrow{\varepsilon_K^n \cdot k^n \cdot d_K^n} B^n(L) \xrightarrow{\mu_L^n} Z^n(L)$$

وهذا يبين أن $H^n(h) = 0$.

سوف نوجد الآن طريقة مريحة لبناء مركبات متسلسلة مرافقة، وذلك من خلال فئة

جديدة نقوم ببنائها من خلال التمهيدية الآتية:

تمهيدية ١١-١-٨.

لنفرض أن Δ_n هي المجموعة $\{0, 1, 2, 3, \dots, n\}$. عندئذ تتشكل لدينا فئة جديدة $\mathfrak{T}_0$

مؤلفة من: صف الأشياء، المؤلف من جميع المجموعات Δ_n حيث $n \geq 0$.

- صف المورفيزمات. لأجل أي شيئين $\Delta_n, \Delta_m \in ob(\mathfrak{T}_0)$ ، فإن المورفيزمات من Δ_n

إلى Δ_m هي مجموعة كل التطبيقات المتزايدة من Δ_n إلى Δ_m .

البرهان.

نتركه كتمرين للقارئ.

تمهيدية ٩-١-١١.

لتكن Δ_0 هي الفئة المعرفة في التمهيدية (٨-١-١١)، ولنأخذ في الفئة Δ_0 المورفيزمات الآتية:

$$1 - \text{المورفيزم } d_n^i : \Delta_n \rightarrow \Delta_{n+1}, \quad 0 \leq i \leq n+1$$

المعرف بالشكل الآتي: أيًا كان $p \in \Delta_n$ ، فإن:

$$d_n^i(p) = \begin{cases} p & p < i \\ p+1 & p \geq i \end{cases}$$

$$2 - \text{المورفيزم } S_n^i : \Delta_{n+1} \rightarrow \Delta_n, \quad 0 \leq i \leq n$$

المعرف بالشكل الآتي: أيًا كان $p \in \Delta_{n+1}$ ، فإن:

$$S_n^i(p) = \begin{cases} p & p \leq i \\ p-1 & p > i \end{cases}$$

عندئذ العلاقات الآتية صحيحة:

$$1 - d_{n+1}^j \cdot d_n^i = d_{n+1}^i \cdot d_n^{j-1} \quad (i < j)$$

$$2 - S_n^j \cdot S_n^i = S_n^i \cdot S_{n+1}^{j+1} \quad (i \leq j)$$

$$3 - S_{n+1}^j \cdot d_{n+1}^i = d_n^i \cdot S_n^{j-1} \quad (i < j)$$

$$4 - S_n^i \cdot d_n^i = S_n^i \cdot d_n^{i+1} = I_{\Delta_n}$$

$$5 - S_{n+1}^j \cdot d_{n+1}^i = d_n^{i-1} \cdot S_n^j \quad (j+1 < i)$$

البرهان.

$$1 - \text{لدينا } d_{n+1}^j : \Delta_{n+1} \rightarrow \Delta_{n+2}, \quad 0 \leq j \leq n+2 \text{ و } d_n^i : \Delta_n \rightarrow \Delta_{n+1}, \quad 0 \leq i \leq n+1$$

$$\text{ومنه يكون } d_{n+1}^j \cdot d_n^i : \Delta_n \rightarrow \Delta_{n+2}, \quad 0 \leq i \leq j \leq n+2$$

$$\text{ولدينا } d_n^{j-1} : \Delta_n \rightarrow \Delta_{n+1}, \quad 0 \leq j-1 \leq n+1 \text{ و } d_{n+1}^i : \Delta_{n+1} \rightarrow \Delta_{n+2}, \quad 0 \leq i \leq n+2$$

$$\text{ومنه فإن } d_{n+1}^i \cdot d_n^{j-1} : \Delta_n \rightarrow \Delta_{n+2} \text{ وإن } 0 \leq i < j \leq n+2 \text{ وبالتالي } 1 \leq j \leq n+2$$

وهكذا نجد أنه لأجل كل $p \in \Delta_n$ ، فإن:

$$- \text{إذا كان } p < i \text{ و } i < j \text{ نجد أن } p < i < j \text{ وإن } p < j-1 \text{ ومنه:}$$

$$d_{n+1}^j \cdot d_n^i(p) = d_{n+1}^j(p) = p$$

$$d_{n+1}^i \cdot d_n^{j-1}(p) = d_{n+1}^i(p) = p$$

وإذا كان $p \geq i$ يكون $p+1 > j > i$ ، ومنه:

$$d_{n+1}^j \cdot d_n^i(p) = d_{n+1}^i(p+1) = p+1$$

$$\text{وهكذا نجد أن } d_{n+1}^j \cdot d_n^i = d_{n+1}^i \cdot d_n^{j-1}$$

٢ - لدينا $S_{n+1}^j: \Delta_{n+2} \rightarrow \Delta_{n+1}$, $0 \leq i \leq n+1$ و $S_n^j: \Delta_{n+1} \rightarrow \Delta_n$, $0 \leq j \leq n$ ولما

كان $i < j$ فرضاً نجد أن $0 \leq i \leq j \leq n$ ، وإن $S_n^j \cdot S_{n+1}^i: \Delta_{n+2} \rightarrow \Delta_n$

ولدينا $S_{n+1}^{j+1}: \Delta_{n+2} \rightarrow \Delta_{n+1}$, $0 \leq j+1 \leq n+1$ و $S_n^i: \Delta_{n+1} \rightarrow \Delta_n$, $0 \leq i \leq n$

ومنه فإن $0 \leq i \leq j \leq n+2$ وبالتالي؛ وإن $S_n^i \cdot d_{n+1}^{j+1}: \Delta_{n+1} \rightarrow \Delta_n$

وهكذا نجد أنه لأجل كل $p \in \Delta_{n+2}$ ، فإن:

- إذا كان $p \leq i$ و $i \leq j$ نجد أن $p \leq i \leq j$ وإن $p < j+1$ ، ومنه:

$$S_n^i \cdot S_{n+1}^j(p) = S_n^j(p) = p$$

$$S_n^i \cdot S_{n+1}^{j+1}(p) = S_n^j(p) = p$$

- إذا كان $p \geq i$ يكون $p-1 > j$ ، ومنه:

$$S_n^j \cdot S_{n+1}^i(p) = S_n^j(p-1) = p-1$$

$$S_n^j \cdot S_{n+1}^{i+1}(p) = S_n^j(p-1) = p-1$$

$$\text{وهكذا نجد أن } S_n^j \cdot S_n^i = S_n^i \cdot S_{n+1}^{j+1}$$

٣ - لدينا $i < j$ فرضاً، وإن $S_{n+1}^j: \Delta_{n+2} \rightarrow \Delta_{n+1}$ ، $0 \leq j \leq n+1$ كما أن:

$$d_{n+1}^i: \Delta_{n+1} \rightarrow \Delta_{n+2}, \quad 0 \leq i \leq n+2$$

$$S_{n+1}^j \cdot d_{n+1}^i: \Delta_{n+1} \rightarrow \Delta_{n+1}, \quad 0 \leq i < j \leq n+1$$

كما أن $d_n^i: \Delta_n \rightarrow \Delta_{n+1}$, $0 \leq i \leq n+1$ وإن $S_n^{j-1}: \Delta_{n+1} \rightarrow \Delta_n$

ومنه يكون $0 \leq i < j \leq n+1$ ، $d_n^i \cdot S_n^{j-1}: \Delta_{n+1} \rightarrow \Delta_{n+1}$ ، ومنه أيأ كان $p \in \Delta_{n+1}$ فإنه

- لأجل $p < i$ و $i < j$ يكون $p < j$ ؛ ومنه $p < j-1$ ؛ وبالتالي فإن:

$$S_{n+1}^j \cdot d_{n+1}^i(p) = S_{n+1}^j(p) = p$$

$$d_n^i \cdot S_n^{j-1}(p) = d_n^i(p) = p$$

- لأجل $p \geq i$ و $i < j$ يكون $p+1 \leq j$ وبالتالي $p \leq j-1$ ، ومنه:

$$S_{n+1}^j \cdot d_{n+1}^i(p) = S_{n+1}^j(p+1) = p+1$$

$$d_n^i \cdot S_n^{j-1}(p) = d_n^i(p) = p+1$$

وهكذا نجد أن $S_{n+1}^j \cdot d_{n+1}^i = d_n^i \cdot S_n^{j-1}$

٤ - لدينا $S_n^i : \Delta_{n+1} \rightarrow \Delta_n$ ، $0 \leq i \leq n$ ولدينا أيضاً $d_n^i : \Delta_n \rightarrow \Delta_{n+1}$ ، $0 \leq i \leq n+1$

ومنه فإن $S_n^i \cdot d_n^i : \Delta_n \rightarrow \Delta_n$ ، $0 \leq i \leq n+1$

من جهة أخرى، إن $d_n^{i+1} : \Delta_n \rightarrow \Delta_{n+1}$ ، $0 \leq i+1 \leq n+1$ ومنه يكون:

$$S_n^i \cdot d_n^{i+1} : \Delta_n \rightarrow \Delta_n$$

وإنه لأجل كل $p \in \Delta_n$ فإنه:

- لأجل $p < i$ يكون $p < i+1$ وبالتالي يكون:

$$S_n^i \cdot d_n^i(p) = S_n^i(p) = p$$

$$S_n^i \cdot d_n^{i+1}(p) = S_n^i(p) = p$$

- لأجل $p \geq i$ يكون $p+1 \geq i+1 > i$ وبالتالي يكون:

$$S_n^i \cdot d_n^i(p) = S_n^i(p+1) = (p+1)-1 = p$$

$$S_n^i \cdot d_n^{i+1}(p) = S_n^i(p+1) = (p+1)-1 = p$$

وهكذا نجد أن $S_n^i \cdot d_n^i = S_n^i \cdot d_n^{i+1} = I_{\Delta_n}$

٥ - لدينا فرضاً $j+1 < i$ وإن $0 \leq j \leq n+1$ ولدينا أيضاً $S_{n+1}^j : \Delta_{n+2} \rightarrow \Delta_{n+1}$

ومنه فإن $d_{n+1}^i : \Delta_{n+1} \rightarrow \Delta_{n+2}$ ، $0 \leq i \leq n+2$

$$S_{n+1}^j \cdot d_{n+1}^j : \Delta_{n+1} \rightarrow \Delta_{n+1}$$

من جهة أخرى، إن $d_n^{i-1} : \Delta_n \rightarrow \Delta_{n+1}$ ، $0 \leq i-1 \leq n+1$ وإن:

$$S_n^j : \Delta_{n+1} \rightarrow \Delta_n$$

ومنه يكون $d_n^{i-1} \cdot S_n^j : \Delta_{n+1} \rightarrow \Delta_{n+1}$ ، $0 \leq j+1 < i \leq n+2$ وإنه أياً كان $p \in \Delta_n$ فإنه:

- لأجل $p < i$ و $j+1 < i$ يكون $p \leq j$ وبالتالي نجد أن

$$S_{n+1}^j \cdot d_{n+1}^j(p) = S_{n+1}^j(p) = p$$

$$d_n^{i-1} \cdot S_n^j(p) = d_n^{i-1}(p) = p$$

- لأجل $p \geq i$ يكون $p+1 \geq i+1$ و $p+1 > j+1$ وبالتالي يكون:

$$S_{n+1}^j \cdot d_{n+1}^j(p) = S_{n+1}^j(p+1) = (p+1)-1 = p$$

$$d_n^{i-1} \cdot S_n^j(p) = d_n^{i-1}(p-1) = (p-1)+1 = p$$

$$d_n^j \cdot S_{n+1}^i = d_n^{i-1} \cdot S_n^j \quad (j+1 < i) \quad \text{وهكذا نجد أن}$$



١١-٢. التمثيل الأفقي.

تعريف.

لتكن $\mathcal{T}$ فئة تبديلية، ولتكن $\mathcal{T}_K$ فئة المركبات في $\mathcal{T}$. لنفرض أن $A \in ob(\mathcal{T})$ نسمي المركب الموجب $K \in ob(\mathcal{T}_K)$ مع المورفيزم $\varepsilon: A \rightarrow K^0$ والذي لأجله المتتالية:

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{\varepsilon} K^0 \xrightarrow{d_K^0} K^1$$

تامة تمثيلاً يمينياً للشيء A .

- نقول عن التمثيل للشيء A إنه تام إذا كان $H^n(K) = 0$ لأجل جميع القيم $n > 0$.
- نقول عن التمثيل للشيء A إنه أفقي إذا كان لأجل كل n الأشياء K^n هي أشياء أفقية في الفئة $\mathcal{T}$.

مبرهنة ١١-٢-١.

لتكن $\mathcal{T}$ فئة تبديلية كثيفة أفقياً، عندئذ كل شيء $A \in ob(\mathcal{T})$ يملك تمثيلاً أفقياً واحداً على الأقل.
البرهان.

ليكن $A \in ob(\mathcal{T})$ عندئذ يوجد شيء أفقي $K^0 \in ob(\mathcal{T})$ بحيث $A \subset K^0$. لنفرض أن $\lambda^0: K^0 \rightarrow L^0$ وأن $L^0 = \text{Coker}(\varepsilon)$ وأن المونومورفيزم القانوني $\varepsilon: A \rightarrow K^0$ الإيبومورفيزم القانوني. بما أن $L^0 \in ob(\mathcal{T})$ ، وأن $\mathcal{T}$ كثيفة أفقياً فإنه يوجد شيء أفقي $K^1 \in ob(\mathcal{T})$ بحيث $L^0 \subset K^1$. لنفرض أن $\mu^0: L^0 \rightarrow K^1$ المونومورفيزم القانوني. لنضع $d_K^0 = \mu^0 \cdot \lambda^0$ فنجد أن $d_K^0: K^0 \rightarrow K^1$ ، وأن المتتالية:

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{\varepsilon} K^0 \xrightarrow{d_K^0} K^1$$

تامة، لأن ε مونومورفيزم، وأن $\text{Ker}(d_K^0) = \text{Ker}(\mu^0 \cdot \lambda^0) = \text{Ker}(\lambda^0)$ وذلك لأن μ^0 مونومورفيزم. ومنه نجد أن $\text{Ker}(d_K^0) = \text{Im}(\varepsilon)$.

نتابع، لنفرض أن $L^1 = \text{Coker}(d_K^0)$ ، وأن $\lambda^1: K^1 \rightarrow L^1$ الإيبومورفيزم القانوني، ولكون $L^1 \in ob(\mathcal{T})$ فإنه يوجد شيء أفقي $K^2 \in ob(\mathcal{T})$ بحيث $L^1 \subset K^2$.

ولنفرض أن $\mu^1: L^1 \rightarrow K^2$ المونومورفيزم القانوني. لنضع $d_K^1 = \mu^1 \cdot \lambda^1$ فنجد أن

$d_K^1 : K^1 \rightarrow K^2$ فنحصل على المتتالية التامة الآتية:

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{\varphi} K^0 \xrightarrow{d_K^0} K^1 \xrightarrow{d_K^1} K^2$$

وذلك لأن μ^1 مونومورفيزم، وإن $\text{Im}(d_K^0) = \text{Ker}(\text{Coker}(d_K^0)) = \text{Ker}(\lambda^1)$ نتابع بهذا الشكل فنحصل على مركب أفقي، وحسب التعريف نجد أن A يملك تمثيلاً أفقياً.

مبرهنة ١١-٢-٢.

لتكن $\mathcal{S}$ فئة تبديلية، ولتكن $A_1 \xrightarrow{u_1} A_2 \xrightarrow{u_2} A_3$ متتالية تامة من أشياء ومورفيزمات الفئة $\mathcal{S}$. لنفرض أن $Q \in \text{ob}(\mathcal{S})$ شيء أفقي ولنأخذ المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccccc} A_1 & \xrightarrow{u_1} & A_2 & \xrightarrow{u_2} & A_3 \\ & & \varphi \downarrow & \swarrow & \\ & & Q & \psi & \end{array}$$

والذي لأجله $\varphi \cdot u_1 = 0$ ، عندئذ يوجد مورفيزم $\psi : A_3 \rightarrow Q$ للفئة $\mathcal{S}$ لأجله $\psi \cdot u_2 = \varphi$. البرهان.

لنأخذ النشر القانوني للمورفيزمين u_1, u_2 الآتين:

$$A_1 \xrightarrow{i_1} \text{Coim}(u_1) \xrightarrow{\bar{u}_1} \text{Im}(u_1) \xrightarrow{j_1} A_2$$

$$A_2 \xrightarrow{i_2} \text{Coim}(u_2) \xrightarrow{\bar{u}_2} \text{Im}(u_2) \xrightarrow{j_2} A_3$$

حيث j_1, j_2 المونومورفيزمات القانونية و i_1, i_2 الإبيومورفيزمات القانونية، فنجد أن:

$$u_1 = j_1 \cdot \bar{u}_1 \cdot i_1, \quad u_2 = j_2 \cdot \bar{u}_2 \cdot i_2$$

وبما أن $\varphi \cdot u_1 = 0$ نجد أن $\varphi \cdot j_1 \cdot (\bar{u}_1 \cdot i_1) = 0$ وبما أن i_1 إبيومورفيزم وأن $\bar{u}_1$ إيزومورفيزم

نجد أن $\bar{u}_1 \cdot i_1 \cdot \varphi \cdot j_1 = 0 = 0 \cdot (\bar{u}_1 \cdot i_1)$ وإن $\varphi \cdot j_1 \cdot (\bar{u}_1 \cdot i_1) = 0$ ومنه يكون $\varphi \cdot j_1 = 0$.

لنبرهن على أن $\text{Coim}(u_2) = \text{Coker}(j_1)$. بما أن $u_2 = j_2 \cdot \bar{u}_2 \cdot i_2$ وإن $j_2 \cdot \bar{u}_2$

مونومورفيزم، فإن $\text{Ker}(u_2) = \text{Ker}(j_2 \cdot \bar{u}_2 \cdot i_2) = \text{Ker}(i_2)$ ومنه نجد أن:

$$\text{Coim}(u_2) = \text{Coker}(\text{Ker}(u_2)) = \text{Coker}(\text{Ker}(i_2)) = \text{Coim}(i_2)$$

أيضاً بما أن $u_1 = j_1 \cdot \bar{u}_1 \cdot i_1$ وإن $\bar{u}_1 \cdot i_1$ إبيومورفيزم، فإن:

$$\text{Coim}(u_1) = \text{Coker}(j_1 \cdot (\bar{u}_1 \cdot i_1)) = \text{Coker}(j_1)$$

ومنه نجد أن:

$$Im(u_1) = Ker(Coker(u_1)) = Ker(Coker(j_1)) = Im(j_1)$$

وبما أن $Ker(u_2) = Im(u_1)$ نجد أن $Ker(u_2) = Im(j_1)$ ؛ وبالتالي يكون :

$$\begin{aligned} Coim(u_2) &= Coker(Ker(u_2)) = Coker(Im(j_1)) = \\ &= Coker(Ker(Coker(j_1))) = Coker(j_1) \end{aligned}$$

لنأخذ المخطط الآتي :

$$\begin{array}{ccccc} & & Coker(j_1) & & \\ & & \uparrow i_2 & & \\ Q & \xleftarrow{\varphi} & A_2 & \xleftarrow{j_1} & Im(u_1) \end{array}$$

ف نجد أن $i_2 \cdot j_1 = 0$ ، لأن $i_2 : A_2 \rightarrow Coim(u_2) = Coker(j_1)$ الإيزومورفيزم القانوني وإن $\varphi \cdot j_1 = 0$ وحسب تعريف النواة المرافقة فإنه يوجد مورفيزم وحيد :

$$\theta : Coker(j_1) \rightarrow Q$$

يحقق $\theta \cdot i_2 = \varphi$ ، أي إن $\theta : Coim(u_2) \rightarrow Q$ لأجله $\theta \cdot i_2 = \varphi$. وبما أن :

$$\bar{u}_2 : Coim(u_2) \rightarrow Im(u_2)$$

إيزومورفيزماً فإن $\bar{u}_2^{-1} : Im(u_2) \rightarrow Coim(u_2)$ إيزومورفيزماً للفئة $\mathcal{I}$.

لنضع : $\psi_1 = \theta \cdot \bar{u}_2^{-1}$ فنجد أن $\psi_1 : Im(u_2) \rightarrow Q$ مورفيزم للفئة $\mathcal{I}$ ، لنأخذ المخطط الآتي :

$$\begin{array}{ccccccc} Im(u_1) & \xrightarrow{j_1} & A_2 & \xrightarrow{i_2} & Coim(u_2) & \xrightarrow{\bar{u}_2} & Im(u_2) & \xrightarrow{j_2} & A_3 \\ & & & & & & \psi_1 \downarrow & \swarrow \psi & \\ & & & & & & Q & & \end{array}$$

بما أن j_1 مونومورفيزم وإن Q أفقي ، فإنه يوجد مورفيزم $\psi : A_3 \rightarrow Q$ يحقق $\psi \cdot j_2 = \psi_1$ وهكذا نجد أن :

$$\psi \cdot u_2 = \psi \cdot j_2 \cdot \bar{u}_2 \cdot i_2 = \psi_1 \cdot \bar{u}_2 \cdot i_2 = \theta \cdot \bar{u}_2^{-1} \cdot \bar{u}_2 \cdot i_2 = \theta \cdot i_2 = \varphi$$

مبرهنة ١١-٢-٣ .

لتكن $\mathcal{I}$ فئة تبديلية ، و $A, B \in ob(\mathcal{I})$. لنفرض أن (K, ε) تمثيل تام للشيء A ، وإن (L, η) تمثيل أفقي للشيء B . عندئذ :

١ - لأجل كل مورفيزم $u: A \rightarrow B$ للفتة $\mathfrak{I}$ يوجد مورفيزم مركبات واحد على الأقل $f: K \rightarrow L$ حيث $f = (f^n)_{n \geq 0}$ لأجله المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varepsilon} & K^0 \\ u \downarrow & & \downarrow f^0 \\ B & \xrightarrow{\eta} & L^0 \end{array}$$

تبديلي، أي إن $f^0 \cdot \varepsilon = \eta \cdot u$.

٢ - إذا كان $g: K \rightarrow L$ مورفيزم مركبات آخر حيث $g = (g^n)_{n \geq 0}$ لأجله المخطط السابق تبديلي عندئذ f, g يشكلان تشوهاً.
البرهان.

١ - سوف نقوم بعملية بناء المورفيزمات $f^0, f^1, f^2, \dots, f^n, \dots$ التي سوف تشكل المورفيزم $f: K \rightarrow L$. بما أن (K, ε) تمثيل تام للشيء A فإنه توجد متتالية تامة:

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{\varepsilon} K^0 \xrightarrow{d_K^0} K^1$$

لأجلها $H^n(K) = 0$ لأجل كل $n > 0$ وإن ε مونومورفيزم. ولما كان (L, η) تمثيلاً أفقياً للشيء B فإنه توجد متتالية تامة $0 \rightarrow B \xrightarrow{\eta} L^0 \xrightarrow{d_L^0} L^1$ حيث η مونومورفيزم وإن $L^0 \in \text{ob}(\mathfrak{I})$ أفقي لأجل كل $n > 0$. بما أن $u: A \rightarrow B$ نجد أن $\eta \cdot u: A \rightarrow L^0$

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \rightarrow & A & \xrightarrow{\varepsilon} & K^0 \\ & & \eta \cdot u \downarrow & \nearrow & \downarrow f^0 \\ & & L^0 & & \end{array}$$

ولما كان L^0 أفقياً، فإنه يوجد مورفيزم $f^0: K^0 \rightarrow L^0$ لأجله $f^0 \cdot \varepsilon = \eta \cdot u$.
لأجل بناء f^0 المورفيزم لناخذ المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{\varepsilon} & K^0 & \xrightarrow{d_K^0} & K^1 \\ & & d_L^0 \cdot f^0 \downarrow & \nearrow & \downarrow f^1 \\ & & L^1 & & \end{array}$$

بما أن المتتالية $A \xrightarrow{\varepsilon} K^0 \xrightarrow{d_K^0} K^1$ تامة، وإن:

$$(d_L^0 \cdot f^0) \cdot \varepsilon = d_L^0 \cdot (f^0 \cdot \varepsilon) = d_L^0 \cdot (\eta \cdot u) = (d_L^0 \cdot \eta) \cdot u = 0$$

لأن $d_L^0 \cdot \eta = 0$ ، وذلك بسبب كون المتتالية $B \xrightarrow{\eta} L^0 \xrightarrow{d_L^0} L^1$ تامة، فإنه حسب

المبرهنة (٢-٢-١١) بما أن $L^1 \in ob(\mathfrak{S})$ أفقي يوجد مورفيزم $f^1: K^1 \rightarrow L^1$ يحقق
 $f^1 \cdot d_K^0 = d_L^0 \cdot f^0$

نتابع بالاستقراء. لنفرض أنه تم الحصول على المورفيزمات $f^0, f^1, f^2, \dots, f^{n-1}$ التي تحقق العلاقات $f^i \cdot d_K^{i-1} = d_L^{i-1} \cdot f^{i-1}$ حيث $0 \leq i \leq n-1$ فنجد أنه لأجل $i = n-1$ يكون $f^{n-1} \cdot d_K^{n-2} = d_L^{n-2} \cdot f^{n-2}$ واضح أن المتتالية:

$$K^{n-2} \xrightarrow{d_K^{n-2}} K^{n-1} \xrightarrow{d_K^{n-1}} K^n$$

تامة. لنأخذ المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} K^{n-1} & \xrightarrow{d_K^{n-2}} & K^{n-1} \xrightarrow{d_K^{n-1}} K^n \\ & \downarrow & \downarrow d_L^{n-1} \cdot f^{n-1} \\ & L^n & \end{array}$$

ولنبرهن على أن $d_L^{n-1} \cdot f^{n-1} \cdot d_K^{n-2} = 0$ في الواقع لدينا:

$$d_L^{n-1} \cdot (f^{n-1} \cdot d_K^{n-2}) = d_L^{n-1} \cdot (d_L^{n-2} \cdot f^{n-1}) = (d_L^{n-1} \cdot d_L^{n-2}) \cdot f^{n-1} = 0$$

ولكون $L^n \in ob(\mathfrak{S})$ أفقياً يوجد مورفيزم $f^n: K^n \rightarrow L^n$ يحقق $f^n \cdot d_K^{n-1} = d_L^{n-1} \cdot f^{n-1}$ بهذا الشكل نحصل على مورفيزم مركبات $f: K \rightarrow L$

٢ - ليكن $g: K \rightarrow L$ مورفيزم مركبات آخر حيث $g = (g^n)_{n \geq 0}$ يحقق الشروط الواردة في النص. سوف نقوم بعملية بناء مورفيزمات $k^i: K^i \rightarrow L^{i-1}$ $i \geq 1$ يحقق الشروط:

$$f^i - g^i = d_L^{i-1} \cdot k^i + k^{i+1} \cdot d_K^i$$

من أجل بناء المورفيزم $k^1: K^1 \rightarrow L^0$ لنأخذ المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{\varepsilon} & K^0 & \xrightarrow{d_K^0} & K^1 \\ & \searrow f^0 - g^0 & \downarrow & \swarrow & \\ & & L^0 & & k^1 \end{array}$$

ف نجد أن $(f^0 - g^0) \cdot \varepsilon = f^0 \cdot \varepsilon - g^0 \cdot \varepsilon = \eta \cdot u - \eta \cdot u = 0$ وحسب المبرهنة (٢-٢-١١)

(٢-٢) ولما كان $L^0 \in ob(\mathfrak{S})$ أفقياً يوجد مورفيزم $k^1: K^1 \rightarrow L^0$ يحقق:

$$f^0 - g^0 = k^1 \cdot d_K^0$$

من أجل بناء المورفيزم $k^2: K^2 \rightarrow L^1$ لنأخذ المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccccc}
 K^0 & \xrightarrow{d_K^0} & K^1 & \xrightarrow{d_K^1} & K^2 \\
 f^1 - g^1 - d_L^0 \cdot k^1 & & \downarrow & \swarrow & \\
 & & L^1 & & k^2
 \end{array}$$

ف نجد أن :

$$\begin{aligned}
 (f^1 - g^1 - d_L^0 \cdot k^1) \cdot d_K^0 &= f^1 \cdot d_K^0 - g^1 \cdot d_K^0 - d_L^0 \cdot k^1 \cdot d_K^0 = d_L^0 \cdot f^0 - d_L^0 \cdot g^0 - \\
 d_L^0 \cdot (f^0 - g^0) &= d_L^0 \cdot (f^0 - g^0) - d_L^0 \cdot (f^0 - g^0) = 0
 \end{aligned}$$

وحسب المبرهنة (٢-٢-١١) ولما كان $L^1 \in ob(\mathfrak{S})$ أفقياً يوجد مورفيزم $k^2 : K^2 \rightarrow L^1$

يحقق $f^1 - g^1 - d_L^0 \cdot k^1 = k^2 \cdot d_K^1$ ، ومنه يكون $f^1 - g^1 = d_L^0 \cdot k^1 + k^2 \cdot d_K^1$

لنفرض أنه تم الحصول على المورفيزمات $k^1, k^2, k^3, \dots, k^i \quad i \leq n-1$ التي تحقق :

$$f^i - g^i = d_L^{i-1} \cdot k^i + k^{i+1} \cdot d_K^i$$

ف نجد أنه لأجل $i = n-1$ ، فإن $f^{n-1} - g^{n-1} = d_L^{n-2} \cdot k^{n-1} + k^n \cdot d_K^{n-1}$. لأجل بناء

المورفيزم $k^{n+1} : K^{n+1} \rightarrow L^n$ ، لنأخذ المخطط الآتي :

$$\begin{array}{ccccc}
 K^{n-1} & \xrightarrow{d_K^{n-1}} & K^n & \xrightarrow{d_K^n} & K^{n+1} \\
 f^n - g^n - d_L^{n-1} \cdot k^n & & \downarrow & \swarrow & \\
 & & L^n & & k^{n+1}
 \end{array}$$

ف نجد أن :

$$\begin{aligned}
 (f^n - g^n - d_L^{n-1} \cdot k^n) \cdot d_K^n &= f^n \cdot d_K^n - g^n \cdot d_K^n - d_L^{n-1} \cdot k^n \cdot d_K^n = \\
 &= d_L^{n-1} \cdot f^{n-1} - d_L^{n-1} \cdot g^{n-1} - d_L^{n-1} \cdot k^n \cdot d_K^n = d_L^{n-1} \cdot (f^{n-1} - g^{n-1} - k^n \cdot d_K^{n-1}) = \\
 &= d_L^{n-1} \cdot d_L^{n-2} \cdot k^{n-1} = 0
 \end{aligned}$$

وحسب المبرهنة (٢-٢-١١) ولما كان $L^n \in ob(\mathfrak{S})$ أفقياً يوجد مورفيزم :

$$k^{n+1} : K^{n+1} \rightarrow L^n$$

يحقق $f^n - g^n - d_L^{n-1} \cdot k^n = k^{n+1} \cdot d_K^n$ ، هكذا نجد أن f, g يشكلان تشوهاً .

١١-٣. التمثيل الإسقاطي.

تعريف.

لتكن $\mathcal{T}$ فئة تبديلية، ولتكن $\mathcal{T}_K$ فئة المركبات في $\mathcal{T}$. لنفرض أن $B \in ob(\mathcal{T})$ نسمي المركب السالب ($K \in ob(\mathcal{T}_K)$) مع المورفيزم $\varepsilon: K^0 \rightarrow B$ والذي لأجله المتتالية:

$$K_1 \xrightarrow{d_0^K} K_0 \xrightarrow{\varepsilon} B \rightarrow 0$$

تامة تمثيلاً يسارياً للشيء B .

- نقول عن التمثيل للشيء B إنه تام إذا كان $H_n(K) = 0$ لأجل جميع القيم $n < 0$.
- نقول عن التمثيل للشيء B إنه إسقاطي إذا كان لأجل كل n الأشياء K_n هي أشياء إسقاطية في الفئة $\mathcal{T}$.

مبرهنة ١١-٣-١.

لتكن $\mathcal{T}$ فئة تبديلية كثيفة إسقاطياً، عندئذ كل شيء $B \in ob(\mathcal{T})$ يملك تمثيلاً إسقاطياً واحداً على الأقل.

البرهان.

ليكن $B \in ob(\mathcal{T})$ ، لما كانت الفئة $\mathcal{T}$ كثيفة إسقاطياً فإنه يوجد شيء إسقاطي $K_0 \in ob(\mathcal{T})$ بحيث B هو شيء خارج للشيء K_0 . لنفرض أن $\varepsilon: K_0 \rightarrow B$ الإيومورفيزم القانوني، ولنفرض أيضاً أن $L_0 = Ker(\varepsilon)$ وأن $\lambda_0: L_0 \rightarrow K_0$ المونومورفيزم القانوني. بما أن $L_0 \in ob(\mathcal{T})$ وأن $\mathcal{T}$ كثيفة إسقاطياً فإنه يوجد شيء إسقاطي $K_1 \in ob(\mathcal{T})$ بحيث L_0 يكون شيئاً خارجاً للشيء K_1 . لنفرض أن $\mu_0: K_1 \rightarrow L_0$ الإيومورفيزم القانوني. لنضع $d_0^K = \lambda_0 \cdot \mu_0$ فنجد أن $d_0^K: K_1 \rightarrow K_0$ ، وأن المتتالية:

$$K_1 \xrightarrow{d_0^K} K_0 \xrightarrow{\varepsilon} B \rightarrow 0$$

تامة؛ لأن ε إيومورفيزم وإن:

$$Im(d_0^K) = Ker(Coker(\lambda_0 \cdot \mu_0)) = Ker(Coker(\lambda_0)) = Ker(\varepsilon)$$

لنفرض أيضاً أن $L_1 = Ker(d_0^K)$ ، وأن $\lambda_1: L_1 \rightarrow K_1$ المونومورفيزم القانوني، ولما كانت

الفئة $\mathcal{I}$ كثيفة إسقاطياً يوجد $K_2 \in ob(\mathcal{I})$ بحيث يكون L_1 شيئاً خارجاً للشيء K_2 .
نفرض أن $\mu_1 : K_2 \rightarrow L_1$ الإيبومورفيزم القانوني.

لنضع $d_1^K = \lambda_1 \cdot \mu_1$ فنجد أن $d_1^K : K_2 \rightarrow K_1$ ، فنحصل على المتتالية التامة الآتية:

$$K_2 \xrightarrow{d_1^K} K_1 \xrightarrow{d_0^K} K_0 \xrightarrow{\varepsilon} B \rightarrow 0$$

لأن ε إيبومورفيزم، وإن:

$$\begin{aligned} Im(d_1^K) &= Ker(Coker(d_1^K)) = Ker(Coker(\lambda_1 \cdot \mu_1)) = Ker(Coker(\lambda_1)) = \\ &= Ker(Coker(d_0^K)) = Ker(d_0^K) \end{aligned}$$

نتابع بهذا الشكل فنحصل على مركب إسقاطي، وحسب التعريف نجد أن B يملك تمثيلاً إسقاطياً.

مبرهنة ١١-٣-٢.

لتكن فئة تبديلية، ولتكن $B_1 \xrightarrow{v_1} B_2 \xrightarrow{v_2} B_3$ متتالية تامة من أشياء ومورفيزمات الفئة $\mathcal{I}$. لنفرض أن $P \in ob(\mathcal{I})$ شيء إسقاطي ولنأخذ المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccccc} & & P & & \\ & \swarrow \varphi & \downarrow \psi & & \\ B_1 & \xrightarrow{v_1} & B_2 & \xrightarrow{v_2} & B_3 \end{array}$$

والذي لأجله $v_2 \cdot \psi = 0$ ، عندئذ يوجد مورفيزم $\varphi : P \rightarrow B_1$ للفئة $\mathcal{I}$ لأجله $v_1 \cdot \varphi = \psi$.
البرهان.

لنأخذ النشر القانوني للمورفيزمين v_1, v_2 الآتيين:

$$B_1 \xrightarrow{i_1} Coim(v_1) \xrightarrow{\bar{v}_1} Im(v_1) \xrightarrow{j_1} B_2$$

$$B_2 \xrightarrow{i_2} Coim(v_2) \xrightarrow{\bar{v}_2} Im(v_2) \xrightarrow{j_2} B_3$$

حيث j_1, j_2 المونومورفيزمات القانونية و i_1, i_2 الإيبومورفيزمات القانونية، فنجد أن:

$$v_1 = j_1 \cdot \bar{v}_1 \cdot i_1, \quad v_2 = j_2 \cdot \bar{v}_2 \cdot i_2$$

وبما أن $v_2 \cdot \psi = 0$ نجد أن $(j_2 \cdot \bar{v}_2) \cdot i_2 \cdot \psi = 0$ ولما كان j_2 مونومورفيزماً، وإن $\bar{v}_2 \cdot i_2 \cdot \psi = 0$ فإن $j_2 \cdot \bar{v}_2$ مونومورفيزم، وإن $(j_2 \cdot \bar{v}_2) \cdot 0 = 0$ ومنه يكون $i_2 \cdot \psi = 0$. لنبرهن على أن $Ker(i_2) = Im(j_1)$.

لدينا $Coker(v_1) = Coker(j_1 \cdot \bar{v}_1 \cdot i_1)$ وبما أن $\bar{v}_1 \cdot i_1$ إبيومورفيزم نجد أن:

$$Coker(v_1) = Coker(j_1)$$

ومنه نجد أن $Im(v_1) = Ker(Coker(v_1)) = Ker(Coker(j_1)) = Im(j_1)$ ولما كان

$Im(v_1) = Ker(v_2)$ نجد أن $Ker(v_2) = Im(j_1)$. من جهة أخرى، لدينا:

$$Ker(v_2) = Ker(j_2 \cdot \bar{v}_2 \cdot i_2)$$

وبما أن $\bar{v}_2 \cdot i_2$ مونومورفيزم نجد أن $Ker(v_2) = Ker(i_2)$ وهذا يبين لنا أن

$Ker(i_2) = Im(j_1)$ ، أي إن المتتالية $Im(v_1) \xrightarrow{j_1} B_2 \xrightarrow{i_2} Coim(v_2)$ تامة؛

وبالتالي يكون $i_2 \cdot j_1 = 0$. لنأخذ المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccccc} \theta & & Ker(i_2) & & \\ & \nearrow & \downarrow j_1 & & \\ P & \xrightarrow{v} & B_2 & \xrightarrow{i_2} & Coim(v_2) \end{array}$$

وحسب تعريف النواة؛ فإنه يوجد مورفيزم وحيد $\theta: P \rightarrow Ker(i_2)$ للفئة $\mathcal{I}$ لأجله

$j_1 \cdot \theta = \psi$ ولما كان $Ker(i_2) = Im(v_1)$ نجد أن $\theta: P \rightarrow Im(v_1)$. لنأخذ المخطط:

$$\begin{array}{ccccccc} & & \varphi & & P & & \\ & & \searrow & & \downarrow \theta & & \\ B_1 & \xrightarrow{i_1} & Coim(v_1) & \xrightarrow{v_1} & Im(v_1) & \xrightarrow{j_1} & B_2 \xrightarrow{i_2} Coim(v_2) \end{array}$$

بما أن $v_1 \cdot i_1$ إبيومورفيزم وإن P إسقاطي، فإنه يوجد مورفيزم $\varphi: P \rightarrow B_1$ يحقق

$$\bar{v}_1 \cdot i_1 \cdot \varphi = \theta \text{ وهكذا نجد أن } \psi = j_1 \cdot \theta = (j_1 \cdot \bar{v}_1 \cdot i_1) \cdot \varphi = v_1 \cdot \varphi$$

مبرهنة ١١-٣-٣.

لتكن $\mathcal{I}$ فئة تبديلية، و $A, B \in ob(\mathcal{I})$. لنفرض أن (L, ε) تمثيل تام للشيء B وإن

(K, η) تمثيل إسقاطي للشيء A . عندئذ:

١ - لأجل كل مورفيزم $n: A \rightarrow B$ للفئة $\mathcal{I}$ يوجد مورفيزم مركبات واحد على الأقل

$f: K \rightarrow L$ حيث $f = (f_n)_{n \in \mathcal{I}}$ لأجله المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} K_0 & \xrightarrow{\eta} & A \\ f_0 \downarrow & & \downarrow n \\ L_0 & \xrightarrow{\varepsilon} & B \end{array}$$

تبديلي، أي إن $u \cdot \eta = \varepsilon \cdot f_0$.

٢ - إذا كان $g: K \rightarrow L$ مورفيزم مركبات آخر حيث $g = (g_n)_{n \leq 0}$ لأجله المخطط السابق تبدلي عندئذ f, g يشكلان تشوهاً.
البرهان.

١ - سوف نقوم بعملية بناء المورفيزمات $f_0, f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$ التي سوف تشكل المورفيزم $f: K \rightarrow L$. بما أن (L, ε) تمثيل تام للشيء B فإنه توجد متتالية تامة:

$$L_1 \xrightarrow{d_1^K} L_0 \xrightarrow{\varepsilon} B \rightarrow 0$$

لأجلها $H_n(K) = 0$ لأجل كل $n < 0$ وإن ε إبيومورفيزم. ولما كان (K, η) تمثيلاً إسقاطياً للشيء A . فإنه توجد متتالية تامة $A \rightarrow 0$ حيث $K_1 \xrightarrow{d_1^K} K_0 \xrightarrow{\eta} A \rightarrow 0$ إبيومورفيزم وإن الأشياء $K_n \in ob(\mathfrak{S})$ إسقاطية لأجل كل $n < 0$. بما أن $u: A \rightarrow B$ نجد أن $u \cdot \eta: K_0 \rightarrow B$ ، وبما أن K_0 إسقاطي، فإنه يوجد مورفيزم $f_0: K_0 \rightarrow L_0$ لأجله المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} K_0 & & \\ \swarrow f_0 & \searrow u \cdot \eta & \\ L_0 & \xrightarrow{\varepsilon} & B \end{array} \rightarrow 0$$

تبديلي، أي إن $u \cdot \eta = \varepsilon \cdot f_0$.

لنأخذ المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} K_1 & & \\ \swarrow f_1 & \searrow f_0 \cdot d_1^K & \\ L_1 & \xrightarrow{d_1^L} & L_0 \end{array} \xrightarrow{\varepsilon} B$$

بما أن المتتالية $L_1 \xrightarrow{d_1^K} L_0 \xrightarrow{\varepsilon} B$ تامة، وإن:

$$\varepsilon \cdot (f_0 \cdot d_1^K) = (\varepsilon \cdot f_0) \cdot d_1^K = (u \cdot \eta) \cdot d_1^K = u \cdot (\eta \cdot d_1^K) = u \cdot 0 = 0$$

فإنه حسب المبرهنة (١١-٣-٢) يوجد مورفيزم $f_1: K_1 \rightarrow L_1$ يحقق:

$$d_1^L \cdot f_1 = f_0 \cdot d_1^K$$

وذلك لأن $K_1 \in ob(\mathfrak{S})$ إسقاطي.

نتابع بالاستقراء. لنفرض أنه تم الحصول على المورفيزمات $f_0, f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$ التي

تحقق العلاقات $d_i^L \cdot f_i = f_{i-1} \cdot d_i^K$ حيث $0 < i \leq n-1$ فنجد أنه لأجل $i = n-1$ يكون

$$L_n \xrightarrow{d_n^L} L_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}^L} L_{n-2}$$

تامة. لنأخذ المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccccc} & & K_n & & \\ & \swarrow & \downarrow & \searrow & \\ L_n & \xrightarrow{d_n^L} & L_{n-1} & \xrightarrow{d_{n-1}^L} & L_{n-2} \end{array} \quad \begin{array}{c} f_{n-1} \cdot d_n^K \\ \\ \end{array}$$

ولنبرهن على أن $d_{n-1}^L \cdot (f_{n-1} \cdot d_n^K) = 0$ في الواقع لدينا:

$$d_{n-1}^L \cdot (f_{n-1} \cdot d_n^K) = (d_{n-1}^L \cdot f_{n-1}) \cdot d_n^K = (f_{n-2} \cdot d_{n-1}^K) \cdot d_n^K = f_{n-2} \cdot (d_{n-1}^K \cdot d_n^K) = 0$$

ولكون $K_n \in ob(\mathfrak{S})$ إسقاطياً، فإنه حسب المبرهنة (١١-٣-٢) يوجد مورفيزم $f_n: K_n \rightarrow L_n$ للفتة $\mathfrak{S}$ يحقق $d_n^L \cdot f_n = f_{n-1} \cdot d_n^K$. بهذا الشكل نحصل على مورفيزم مركبات $f: K \rightarrow L$.

٢ - ليكن $g: K \rightarrow L$ مورفيزم مركبات آخر حيث $g = (g_n)_{n < 0}$ يحقق الشروط الواردة في النص. سوف نقوم بعملية بناء مورفيزمات $k_i: K_i \rightarrow L_{i+1}$ $i \geq 1$ يحقق الشروط:

$$f_i - g_i = d_{i-1}^L \cdot k_i + k_{i+1} \cdot d_i^K$$

من أجل بناء المورفيزم $k_1: K_0 \rightarrow L_1$ لنأخذ المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccccc} & & K_0 & & \\ & \swarrow & \downarrow & \searrow & \\ L_1 & \xrightarrow{d_1^L} & L_0 & \xrightarrow{\varepsilon} & B \end{array} \quad \begin{array}{c} f_0 - g_0 \\ \\ \end{array}$$

بما أن المتتالية $L_1 \rightarrow L_0 \rightarrow B$ تامة، وإن:

$$\varepsilon \cdot (f_0 - g_0) = \varepsilon \cdot f_0 - \varepsilon \cdot g_0 = u \cdot \eta - u \cdot \eta = 0$$

ولما كان $K_0 \in ob(\mathfrak{S})$ إسقاطياً، فإنه حسب المبرهنة (١١-٣-٢) يوجد مورفيزم

$$k_1: K_0 \rightarrow L_1 \text{ يحقق } f_0 - g_0 = d_1^L \cdot k_1$$

من أجل بناء المورفيزم $k_2: K_1 \rightarrow L_2$ لنأخذ المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccccc} & & K_1 & & \\ & \swarrow & \downarrow & \searrow & \\ L_2 & \xrightarrow{d_2^L} & L_1 & \xrightarrow{d_1^L} & L_0 \end{array} \quad \begin{array}{c} f_1 - g_1 - k_1 \cdot d_1^K \\ \\ \end{array}$$

والذي يحقق:

$$\begin{aligned} d_1^L \cdot (f_1 - g_1 - k_1 \cdot d_1^K) &= d_1^L \cdot f_1 - d_1^L \cdot g_1 - d_1^L \cdot k_1 \cdot d_1^K = \\ &= f_0 \cdot d_1^K - g_0 \cdot d_1^K - (f_0 - g_0) \cdot d_1^K = (f_0 - g_0) \cdot d_1^K - (f_0 - g_0) \cdot d_1^K = 0 \end{aligned}$$

ولما كان $K_1 \in ob(\mathfrak{I})$ إسقاطياً، فإنه حسب المبرهنة (١١-٣-٢) يوجد مورفيزم

$$k_2 : K_1 \rightarrow L_2 \text{ يحقق } f_1 - g_1 - k_1 \cdot d_1^K = d_2^L \cdot k_2 \text{، ومنه يكون:}$$

$$f_1 - g_1 = k_1 \cdot d_1^K + d_2^L \cdot k_2$$

نفرض أنه تم الحصول على المورفيزمات $k_1, k_2, k_3, \dots, k_i \quad i < n$ التي تحقق:

$$f_i - g_i = k_i \cdot d_i^K + d_{i+1}^L \cdot k_{i+1}$$

ف نجد أنه لأجل $i = n-1$ فإن $f_n - g_n = k_n \cdot d_n^K + d_{n+1}^L \cdot k_{n+1}$ لأجل بناء المورفيزم

$k_{n+1} : K_n \rightarrow L_{n+1}$ ، لنأخذ المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccccc} & & K_n & & \\ & \swarrow & \downarrow & \searrow & \\ k_{n+1} & & f_n - g_n - k_n \cdot d_n^K & & \\ & \swarrow & \downarrow & \searrow & \\ L_{n+1} & \xrightarrow{d_{n+1}^L} & L_n & \xrightarrow{d_n^K} & L_{n-1} \end{array}$$

ف نجد أن:

$$\begin{aligned} d_n^L \cdot (f_n - g_n - k_n \cdot d_n^K) &= d_n^L \cdot (f_n - g_n) - d_n^L \cdot k_n \cdot d_n^K = \\ &= d_n^L \cdot (f_n - g_n) - d_n^L \cdot (f_n - g_n - d_{n+1}^L \cdot k_{n+1}) = \\ &= d_n^L \cdot (f_n - g_n) - d_n^L \cdot (f_n - g_n) + d_n^L \cdot d_{n+1}^L \cdot k_{n+1} = 0 \end{aligned}$$

وحسب المبرهنة (١١-٣-٢) ولما كان $L_n \in ob(\mathfrak{I})$ إسقاطياً يوجد مورفيزم:

$$k_{n+1} : K_n \rightarrow L_{n+1}$$

للفئة $\mathfrak{I}$ يحقق $f_n - g_n - k_n \cdot d_n^K = d_{n+1}^L \cdot k_{n+1}$ ، أي إن:

$$f_n - g_n = k_n \cdot d_n^K + d_{n+1}^L \cdot k_{n+1}$$

وهكذا نجد أن f, g يشكلان تشوهاً.

١١-٤. الدوال المشتقة.

في هذه الفقرة سوف نورد واحداً من المفاهيم المهمة في الجبر الهومولوجي وهو مفهوم الدوال المشتقة، لأجل ذلك لابد لنا من بعض التمهيدات.

تمهيدية ١١-٤-١.

لتكن $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ فئتين تبدليتين، ولنفرض أن $F: \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$ دالي مباشر جمعي. إذا كان K مركباً للفئة $\mathcal{S}_1$ عندئذ يكون $F(K)$ مركباً للفئة $\mathcal{S}_2$. البرهان.

لنفرض أن K مركب للفئة $\mathcal{S}_1$ ، عندئذ توجد لدينا:

- متتالية أشياء $(K^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ من أشياء الفئة $\mathcal{S}_1$.
- متتالية مورفيزمات $(d_K^n: K^{n-1} \rightarrow K^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ من مورفيزمات الفئة $\mathcal{S}_1$ تحقق $d_K^{n+1} \cdot d_K^n = 0$ وذلك لأجل كل $n \in \mathbb{Z}$. ومنه نجد أن
- المتتالية $(F(K^n))_{n \in \mathbb{Z}}$ هي متتالية من أشياء الفئة $\mathcal{S}_2$.
- متتالية المورفيزمات $(F(d_K^n): F(K^{n-1}) \rightarrow F(K^n))_{n \in \mathbb{Z}}$ هي متتالية من مورفيزمات الفئة $\mathcal{S}_2$ تحقق $F(d_K^{n+1}) \cdot F(d_K^n) = F(d_K^{n+1} \cdot d_K^n) = F(0) = 0$ وذلك لأجل كل $n \in \mathbb{Z}$. لنرمز للمتتاليتين السابقتين بالشكل $F(K)$ ، فنجد أن $F(K)$ مركب للفئة $\mathcal{S}_2$.

تمهيدية ١١-٤-٢.

لتكن $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ فئتين تبدليتين، ولنفرض أن $F: \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$ دالي مباشر جمعي. وليكن K, L مركبين للفئة $\mathcal{S}_1$. إذا كان $f: K \rightarrow L$ مورفيزم مركبات للفئة $\mathcal{S}_1$ ، عندئذ يكون $F(f): F(K) \rightarrow F(L)$ مركبات للفئة $\mathcal{S}_2$. البرهان.

لنفرض أن $f: K \rightarrow L$ مورفيزم مركبات للفئة $\mathcal{S}_1$ ، عندئذ $f = (f^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ حيث $f^n: K^n \rightarrow L^n$ مورفيزم للفئة $\mathcal{S}_1$ لأجله المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} K^n & \xrightarrow{d_K^n} & K^{n+1} \\ f^n \downarrow & & \downarrow f^{n+1} \\ L^n & \xrightarrow{d_L^n} & L^{n+1} \end{array}$$

تبديلي، أي أن $f^{n+1} \cdot d_K^n = d_L^n \cdot f^n$ وذلك لأجل كل $n \in \mathbb{Z}$. ومنه أيضاً كان $n \in \mathbb{Z}$ ، فإن $F(f^n): F(K^n) \rightarrow F(L^n)$ مورفيزم للفئة $\mathcal{S}_2$. لنضع $F(f) = (F(f^n))_{n \in \mathbb{Z}}$ ، ولنأخذ المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc} F(K^n) & \xrightarrow{F(d_K^n)} & F(K^{n+1}) \\ F(f^n) \downarrow & & \downarrow F(f^{n+1}) \\ F(L^n) & \xrightarrow{F(d_L^n)} & F(L^{n+1}) \end{array}$$

بما أن $f^{n+1} \cdot d_K^n = d_L^n \cdot f^n$ وأن الدالي F مباشر نجد أن:

$$F(f^{n+1}) \cdot F(d_K^n) = F(d_L^n) \cdot F(f^n)$$

وهذا يبين أن المخطط السابق تبديلي، ومنه نجد أن $F(f): F(K) \rightarrow F(L)$ مركبات للفئة $\mathcal{S}_2$.

المصطلحات العلمية

(إنكليزي - عربي)

<i>Abelian category</i>	فئة تبديلية
<i>Abelian group</i>	زمرة تبديلية
<i>Divisible group</i>	زمرة قسمة
<i>Finite group</i>	زمرة منتهية
<i>Additive category</i>	فئة جمعية
<i>Additive functor</i>	دالي جمعي
<i>Adjoint functor</i>	دالي مرافق
<i>Adjunction of unit</i>	مرافق الواحدة
<i>Algebra</i>	الجبر
<i>Algebraic category</i>	فئة جبرية
<i>Algebraic functor</i>	دالي جبري
<i>Canonical algebra</i>	الجبر القانوني
<i>Cartesian square</i>	المربع الديكارتي
<i>Category</i>	فئة
<i>Category of Abelian groups</i>	فئة الزمر التبديلية
<i>Category of finite groups</i>	فئة الزمر المنتهية
<i>Discrete Category</i>	الفئة المنقطعة
<i>Dual Category</i>	الفئة الثنوية
<i>Equivalent Category</i>	الفئة المكافئة
<i>Category with (monomorphic)</i>	فئة الصور المرافقة
<i>Category with (epimorphic) images</i>	فئة الصور
<i>Category with (finite) intersections</i>	فئة التقاطع المنتهي
<i>Category with (finite) products</i>	فئة الجداءات المنتهية
<i>Category with (finite) sums</i>	فئة المجاميع المنتهية
<i>Category of rings</i>	فئة الحلقات
<i>Category of sets</i>	فئة المجموعات

Category of modules	فئة المودولات
Category of topological spaces	فئة الفضاءات الطوبولوجية
Chain complex	مركب متسلسل
Small category	فئة صغيرة
Short exact sequence	متتالية قصيرة تامة
Category with zero morphisms	فئة تحوي صفر
Category of subobjects	فئة أشياء جزئية
Commutative algebra	جبر تبديلي
Commutative diagram	مخطط تبديلي
Complex	مركب
Cochain complex	مركب متسلسل مرافق
Coker	نواة مرافقة
Coim	صورة مرافقة
Conical morphism	المورفيزم القانوني
Conical monomorphism	المونومورفيزم القانوني
Conical epimorphism	الإبيومورفيزم القانوني
Derived functor	الدالي المشتق
Diagram	مخطط
Direct limit	نهاية مباشرة
Direct sum	مجموع مباشر
Divisible Abelian group	زمرة قابلة للتبديل
Endomorphism	تشاكل ذاتي
Epimorphism	تشاكل غامر
Monomorphism	تشاكل متباين
Equivalence	تكافؤ
Equivalence relation	علاقة تكافؤ
Exact functor	دالي تام
Exact sequence	متتالية تامة
Family	أسرة
Factor object	شيء خارج
Final object	شيء نهائي
Functor	دالي

<i>Functor additive</i>	دالي جمعي
<i>Functor adjoint</i>	دالي مرافق
<i>Functor contravariant</i>	دالي غير مباشر
<i>Functor covariant</i>	دالي مباشر
<i>Functor exact</i>	دالي تام
<i>Functor morphism</i>	المورفيزم الدالي
<i>Functor isomorphism</i>	إيزومورفيزم دالي
<i>Functor representable</i>	دالي ممثل
<i>Homotopy</i>	تشوه
<i>Image</i>	صورة
<i>Injective extension</i>	تمديد أفقي
<i>Injective map</i>	تطبيق متباين
<i>Injective object</i>	شيء أفقي
<i>Inverse limit</i>	نهاية عكسية
<i>Integral object</i>	شيء تكاملي
<i>Isomorphic categories</i>	تمائل الفئات
<i>Isomorphic functors</i>	تمائل الدوال
<i>Isomorphic objects</i>	تمائل الأشياء
<i>Isomorphic</i>	تمائل
<i>Kernel</i>	نواة
<i>Large diagram</i>	مخطط كبير
<i>Left adjoint functor</i>	دالي مرافق يساري
<i>Left exact functor</i>	دالي مرافق يميني
<i>Limit</i>	نهاية
<i>direct</i>	نهاية مباشرة
<i>inverse</i>	نهاية عكسية
<i>projective</i>	نهاية إسقاطية
<i>Homology</i>	هومولوجيا
<i>Homology functor</i>	دالي هومولوجي
<i>Map</i>	تطبيق
<i>injective</i>	تطبيق متباين
<i>surjective</i>	تطبيق غامر

<i>Module</i>	مودول
<i>Morphism</i>	مورفيزم
<i>Object</i>	شيء
<i>Object projective</i>	شيء إسقاطي
<i>Object injective</i>	شيء أفقي
<i>Category with (finite) products</i>	فئة الجداءات المنتهية
<i>Category with (finite) products</i>	فئة الجداءات المنتهية
<i>Projective object</i>	شيء إسقاطي
<i>Subobject</i>	شيء جزئي
<i>Strong monomorphism</i>	مونومورفيزم قوي
<i>Strong epimorphism</i>	إبيومورفيزم قوي
<i>Zero</i>	صفر

المراجع العلمية

- 1 - Ad'amek, J. *Theory of Mathematical Structures*. Reidel, Dordrecht-Boston - Lancaster, 1983.
- 2 - Barr, M., and C. Wells. *Category Theory for Computer Science*. Third edition, CRM Montreal, 1999.
- 3 - Blyth, T. S. *Categories*. Wiley, New York, 1986.
- 4 - Borceaux, F. *Handbook of Categorical Algebra*. Three volumes, Cambridge University Press, 1994.
- 5 - Bucur, I., and A. Deleanu (with the collaboration of P. J. Hilton and N. Popescu). *Introduction to the Theory of Categories and Functors*. Wiley, New York, 1968.
- 6 - Diers, Y. *Categories of Commutative Algebras*. Oxford University Press, Oxford, 1992.
- 7 - Eilenberg, S., and S. Mac Lane. *Collected Works*. Academic Press, New York, 1986.
- 8 - Freyd, P. *Abelian Categories. An Introduction to the Theory of Functors*. Harper & Row, New York, 1964.
- 9 - Herrlich, H., and G. E. Strecker. *Category Theory*. Allyn Bacon, Boston, 1973, 2nd ed. Heldermann, Berlin, 1979.
- 10 - Mac Lane, S. *Categories for the Working Mathematician*. Springer, Berlin - Heidelberg - New York, 2nd ed., 1997.
- 11 - McLarty, C. *Elementary Categories, Elementary Toposes*. Oxford University Press, Oxford, 1992.
- 12 - Michor, P. W. *Functors and Categories of Banach Spaces*. *Lecture Notes in Mathematics*, Vol. 651. Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1978.
- 13 - Mitchell, B. *Theory of Categories. Pure and Applied Mathematics 17*. Academic Press, New York, 1965.
- 13 - Pareigis, B. *Categories and Functors*. Academic Press, New

York, 1970.

14 - Popescu, N. *Abelian Categories with Applications to Rings and Modules*. Academic Press, New York, 1973.

15 - Richter, G. *Kategorielle Algebra*. Akademie Verlag, Berlin, 1979.

16 - Schubert, H. *Categories*. Springer, Berlin – Heidelberg – New York, 1972.

اللجنة العلمية

قسم الرياضيات جامعة دمشق.	الأستاذ الدكتور يوسف الوادي
قسم الرياضيات جامعة دمشق.	الأستاذ المساعد الدكتور عبد اللطيف هنانو
قسم الرياضيات جامعة البعث.	الأستاذ المساعد الدكتور إيمان الخوجة

المدقق اللغوي

الدكتور فخري بوش

حقوق الطباعة والترجمة والنشر محفوظة لمديرية الكتب والمطبوعات