



الجمهورية العربية السورية

جامعة دمشق

كلية العلوم

قسم الرياضيات

حلول بعض المعادلات التفاضلية والتكاملية - حالة دراسية:

دراسة طريقتي " ADM-DTM " لحل بعض المعادلات التفاضلية والتكاملية

رسالة أعدت لنيل درجة الماجستير في التحليل الرياضي

إعداد:

عُلا المنصور

إشراف:

أ.د. خليل يحيى

أستاذ في كلية العلوم، جامعة دمشق

(2026)

التصنيف الرياضياتي العالمي

34A45, 35A22, 45J05, 65R20

الإهداء

إلى من كانا لي السند والعون، وغرسا في نفسي حبّ العلم والاجتهاد، وحملا عني الكثير من الأعباء لكي أتمكّن من الانصراف إلى محارِب العلم، ومنهما تعلّمت الصمود مهما اشتدت الصعوبات؛ فكان دعاؤهما سرّ توفّيقِي، وتعبهما أساس هذا الإنجاز.

..... والديّ العزيزين

إلى سند الروح ورفيق الدرب، الذي شاركني التعب قبل الفرح، وكان مصدر قوتي ودافعي للاستمرار.

..... أخي العزيز

إلى كل أهلي وأصدقائي وزملائي في العمل والدراسة، وإلى أستاذي المشرف الذي كان منارة في طريقي، وإلى كل أساتذتي في قسم الرياضيات، أُهدي لكم هذا النجاح بكل فخرٍ وامتنان.

الشكر

الحمد لله في البدء والختام، وكما قال رسول الله ﷺ: "من لا يشكر الناس لا يشكر الله"، فإنني أتقدم بأخلص

الشكر والامتنان لكل من ساهم في مسيرتي العلمية.

وأخص بالشكر مشرفي وأستاذي الفاضل أ.د. خليل يحيى، الذي كان خير معين لي وداعم طوال فترة البحث،

وآزرني بنصحه وتوجيهاته القيّمة، وساعدني على اكتساب أدوات البحث العلمي السديدة، أسأل الله أن يجزيه

خير الجزاء، وأن يجعل ما قدمه في ميزان حسناته.

كما أتقدم بجزيل الشكر وعظيم الامتنان إلى الأساتذة الدكاترة أعضاء لجنة الحكم، على جهودهم المبذولة في

تقويم هذه الرسالة، وإغنائها بملاحظاتهم القيّمة، فلهم مني كل التقدير والاحترام.

أ.د. محمد نور شمة

أ.م.د. محمد الشيخ

فهرس المحتويات

5	قائمة الجداول
6	قائمة الأشكال
8	المُلخص
10	المقدمة
10	مُشكلة البحث
11	تساؤلات البحث
11	أهداف البحث
12	أهمية البحث
12	مبررات البحث
13	محدودية البحث
13	منهج البحث وأدواته
14	الدراسات المرجعية
16	الفصل الأول: مفاهيم أساسية حول المعادلات التفاضلية والتكاملية
16	تمهيد
16	1-1 المعادلات التفاضلية العادية
16	1-1-1 تعاريف أساسية
18	2-1 المعادلات التفاضلية الجزئية
18	2-2-1 تعاريف أساسية
19	2-2-2 تصنيفات المعادلات التفاضلية الجزئية
22	3-1 المعادلات التكاملية
22	3-1-1 تعاريف أساسية
25	الفصل الثاني: طرائق التحويل التفاضلي (DTM – RDTM – He-RDTM الهجينة)
25	تمهيد
26	1-2 طريقة التحويل التفاضلي DTM
26	1-1-2 مفاهيم أساسية
26	2-1-2 الخواص الأساسية لطريقة التحويل التفاضلي DTM
39	3-1-2 الفكرة العامة لطريقة التحويل التفاضلي DTM
41	4-1-2 أمثلة تطبيقية
58	2-2 طريقة التحويل التفاضلي المختزلة RDTM
58	1-2-2 مفاهيم أساسية
59	2-2-2 الخواص الأساسية لطريقة التحويل التفاضلي المختزلة RDTM
64	3-2-2 الفكرة العامة لطريقة التحويل التفاضلي المختزلة RDTM
65	4-2-2 أمثلة تطبيقية
70	3-2 دمج طريقة التحويل التفاضلي المختزلة RDTM مع كثيرات حدود He

71	2-3-1 تعريف كثيرات حدود He.....
72	2-3-2 الفكرة العامة لطريقة He-RDTM الهجينة في حل المعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطية.....
74	2-3-3 أمثلة تطبيقية.....
95	2-4 مقارنة عامة بين طريقتي RDTM و He-RDTM الهجينة.....
96	نتائج الفصل الثاني.....
97	الفصل الثالث: طريقة تحليل أدوميان ADM وطريقة Anuj-ADM الهجينة.....
97	تمهيد.....
98	1-3 الفكرة العامة لطريقة أدوميان ADM في حل المعادلات التفاضلية العادية.....
100	1-1-3 أمثلة تطبيقية.....
104	2-1-3 طريقة تحليل أدوميان المعدلة MDM.....
105	• مثال تطبيقي.....
109	2-3 الفكرة العامة لطريقة أدوميان ADM في حل معادلة فولتيرا التفاضلية-التكاملية والتكاملية من النوع الثاني غير الخطية.....
112	1-2-3 أمثلة تطبيقية.....
117	3-3 الفكرة العامة لطريقة تحليل أدوميان ADM في حل المعادلات التفاضلية الجزئية.....
119	1-3-3 أمثلة تطبيقية.....
123	4-3 دمج طريقة تحليل أدوميان ADM مع تحويل Anuj التكاملية.....
123	5-3 تحويل Anuj التكاملية.....
123	1-5-3 تعاريف أساسية.....
125	2-5-3 تحويل Anuj لبعض الدوال الشهيرة.....
126	3-5-3 بعض الخواص الأساسية لتحويل Anuj.....
132	6-3 الفكرة العامة لطريقة Anuj-ADM الهجينة في حل المعادلات التفاضلية العادية.....
134	1-6-3 أمثلة تطبيقية.....
154	2-6-3 تطبيق طريقة Anuj-ADM الهجينة لحل معادلة فولتيرا التفاضلية-التكاملية والتكاملية من النوع الثاني غير الخطية.....
159	7-3 الفكرة العامة لطريقة Anuj-ADM الهجينة في حل المعادلات التفاضلية الجزئية.....
161	1-7-3 أمثلة تطبيقية.....
172	8-3 مقارنة عامة بين طريقتي ADM و Anuj-ADM الهجينة.....
173	نتائج الفصل الثالث.....
174	الفصل الرابع: الخاتمة والرؤى المستقبلية.....
174	1-4 الخاتمة والاستنتاجات.....
175	2-4 التوصيات والأعمال المستقبلية.....
176	الملحق (A).....
179	دليل المصطلحات العلمية.....
182	قائمة المراجع العلمية.....
186	Abstract.....

قائمة الجداول

رقم الصفحة	الموضوع	رقم الجدول
43	مقارنة عددية بين الحل الدقيق للمثال (2) والحل الناتج عن تطبيق طريقة DTM باستخدام 4 و 5 تكرارات.	1
47	مقارنة عددية بين الحل الدقيق للمثال (3) والحل التقريبي الناتج عن تطبيق طريقة DTM باستخدام 17 تكراراً.	2
50	مقارنة عددية بين الحل الدقيق للمثال (4) والحل التقريبي الناتج عن تطبيق طريقة DTM باستخدام 17 تكراراً.	3
69	مقارنة عددية بين الحل الدقيق للمثال (10) والحل الناتج عن تطبيق طريقة RDTM باستخدام 4 تكرارات عندما $t = 0.5$ و $\mu = 0.1$.	4
81	مقارنة عددية بين الحل الدقيق للمثال (12) والحل عن تطبيق طريقة He-RDTM باستخدام 6 تكرارات عندما $t = 0.1$.	5
84	مقارنة عددية بين الحل الدقيق للمثال (13) والحل الناتج عن تطبيق طريقة He-RDTM باستخدام 5 تكرارات عندما $t = 0.1$.	6
88	مقارنة عددية بين الحل الدقيق للمثال (14) والحل الناتج عن تطبيق طريقة He-RDTM باستخدام 6 تكرارات عندما $t = 0.1$.	7
93	مقارنة عددية بين الجزأين الحقيقيين لكلاً من الحل الدقيق للمثال (15) والحل الناتج عن تطبيق طريقة He-RDTM باستخدام 6 تكرارات عندما $t = 0.1$.	8
93	مقارنة عددية بين الجزأين التخيليين لكلاً من الحل الدقيق للمثال (15) والحل الناتج عن تطبيق طريقة He-RDTM باستخدام 6 تكرارات عند $t = 0.1$.	9
95	مقارنة عامة بين طريقتي RDTM و He-RDTM الهجينة.	10
101	مقارنة عددية بين الحل الدقيق للمثال (16) والحل الناتج عن تطبيق طريقة ADM باستخدام 5 و 6 تكرارات.	11
108	مقارنة عددية بين الحل الدقيق للمثال (18) والحل التقريبي الناتج عن تطبيق طريقة MDM باستخدام تكرارين.	12
120	مقارنة عددية بين الحل الدقيق للمثال (22) والحل الناتج عن تطبيق طريقة ADM باستخدام 6 تكرارات عندما $t = 0.1$.	13
125	تحويل Anuj لبعض الدوال الشهيرة.	14

139	مقارنة عددية بين الحل الدقيق للمثال (25) والحل الناتج عن تطبيق طريقة Anuj-ADM باستخدام 6 و 10 تكرارات.	15
153	مقارنة عددية بين الحل الدقيق للمثال (27) والحل التقريبي الناتج عن تطبيق طريقة Anuj-MDM باستخدام تكرارين.	16
166	مقارنة عددية بين الجزأين الحقيقيين لكلاً من الحل الدقيق للمثال (31) والحل الناتج عن تطبيق طريقة Anuj-ADM باستخدام 5 تكرارات عندما $t = 0.1$.	17
166	مقارنة عددية بين الجزأين التخيليين لكلاً من الحل الدقيق للمثال (31) والحل الناتج عن تطبيق طريقة Anuj-ADM باستخدام 5 تكرارات عندما $t = 0.1$.	18
171	مقارنة عددية بين الحل الدقيق للمثال (32) والحل الناتج عن تطبيق طريقة Anuj-ADM باستخدام 5 تكرارات عندما $t = 0.1$.	19
172	مقارنة عامة بين طريقتي ADM و Anuj-ADM الهجينة.	20

قائمة الأشكال

رقم الشكل	الموضوع	رقم الصفحة
1	مقارنة بيانية بين الحل الدقيق للمثال (2) والحل الناتج عن تطبيق طريقة DTM باستخدام 4 تكرارات.	44
2	مقارنة بيانية بين الحل الدقيق للمثال (2) والحل الناتج عن تطبيق طريقة DTM باستخدام 5 تكرارات.	44
3	مقارنة بيانية بين الحل الدقيق للمثال (3) والحل التقريبي الناتج عن تطبيق طريقة DTM باستخدام 17 تكراراً .	47
4	مقارنة بيانية بين الحل الدقيق للمثال (4) والحل التقريبي الناتج عن تطبيق طريقة DTM باستخدام 17 تكراراً.	51
5	مقارنة بيانية بين الحل الدقيق للمثال (10) والحل الناتج عن تطبيق طريقة RDTM باستخدام 4 تكرارات عندما $t = 0.5$ و $\mu = 0.1$.	70
6	مقارنة بيانية بين الحل الدقيق للمثال (12) والحل بطريقة He-RDTM باستخدام 6 تكرارات عند $t = 0.1$.	82
7	مقارنة بيانية بين الحل الدقيق للمثال (13) والحل الناتج عن تطبيق He-RDTM باستخدام 5 تكرارات عند $t = 0.1$.	85

89	مقارنة بيانية بين الحل الدقيق للمثال (14) والحل الناتج عن تطبيق He-RDTM باستخدام 6 تكرارات عند $t = 0.1$.	8
94	مقارنة بيانية بين الجزأين الحقيقيين لكلاً من الحل الدقيق للمثال (15) والحل الناتج عن تطبيق طريقة He-RDTM باستخدام 6 تكرارات عندما $t = 0.1$.	9
94	مقارنة بيانية بين الجزأين التخيليين لكلاً من الحل الدقيق للمثال (15) والحل الناتج عن تطبيق طريقة He-RDTM باستخدام 6 تكرارات عندما $t = 0.1$.	10
102	مقارنة بيانية بين الحل الدقيق للمثال (16) والحل الناتج عن تطبيق طريقة ADM باستخدام 5 تكرارات.	11
102	مقارنة بيانية بين الحل الدقيق للمثال (16) والحل الناتج عن تطبيق طريقة ADM باستخدام 6 تكرارات.	12
109	مقارنة بيانية بين الحل الدقيق للمثال (18) والحل التقريبي الناتج عن تطبيق طريقة MDM باستخدام تكرارين.	13
121	مقارنة بيانية بين الحل الدقيق للمثال (22) والحل الناتج عن تطبيق طريقة ADM باستخدام 6 تكرارات عندما $t = 0.1$.	14
139	مقارنة بيانية بين الحل الدقيق للمثال (25) والحل الناتج عن تطبيق طريقة Anuj-ADM باستخدام 6 تكرارات.	15
140	مقارنة بيانية بين الحل الدقيق للمثال (25) والحل الناتج عن تطبيق طريقة Anuj-ADM باستخدام 10 تكرارات.	16
153	مقارنة بيانية بين الحل الدقيق للمثال (27) والحل التقريبي الناتج عن تطبيق طريقة Anuj-MDM باستخدام تكرارين.	17
167	مقارنة بيانية بين الجزأين الحقيقيين لكلاً من الحل الدقيق للمثال (31) والحل الناتج عن تطبيق طريقة Anuj-ADM باستخدام 5 تكرارات عندما $t = 0.1$.	18
167	مقارنة بيانية بين الجزأين التخيليين لكلاً من الحل الدقيق للمثال (31) والحل الناتج عن تطبيق طريقة Anuj-ADM باستخدام 5 تكرارات عندما $t = 0.1$.	19
171	مقارنة بيانية بين الحل الدقيق للمثال (32) والحل الناتج عن تطبيق طريقة Anuj-ADM باستخدام 5 تكرارات عند $t = 0.1$.	20

المُلخَص

تتناول هذه الرسالة دراسة بعض الطرائق التحليلية-التقريبية لحل المعادلات التفاضلية بنوعيتها العادية والجزئية، والمعادلات التكاملية، والمعادلات التفاضلية-التكاملية، وقد تمّ التركيز بشكلٍ خاص على دراسة طريقة التحويل التفاضلي DTM، وطريقة التحويل التفاضلي المختزلة RDTM، وطريقة تحليل أدوميان ADM، مع عرض الأسس النظرية لكل طريقة وبيان آلية تطبيقها.

ولمعالجة الصعوبات المرتبطة بتطبيق بعض هذه الطرائق، ولا سيّما طريقتي ADM و RDTM، وخاصةً فيما يتعلق بالتعامل مع الحدود اللاخطية والتعقيد الحسابي، تمّ في هذه الرسالة اقتراح طريقتين هجينتين جديدتين، هما: طريقة He-RDTM التي تعتمد على دمج طريقة RDTM مع كثيرات حدود He بهدف تبسيط التعامل مع الحدود غير الخطية، وطريقة Anuj-ADM التي تعتمد على دمج طريقة ADM مع تحويل Anuj التكاملي، وذلك بهدف تقليل التعقيد الحسابي وإلغاء الحاجة إلى إجراء التكاملات.

تمّ تطبيق الطرائق المدروسة والطريقتين الهجنتين المقترحتين على مجموعة متنوعة من المسائل الخطية وغير الخطية التي شملت المعادلات التفاضلية العادية والجزئية، والمعادلات التكاملية، فضلاً عن المعادلات التفاضلية-التكاملية.

في معظم المسائل المدروسة، تتقارب الحلول الناتجة عن تطبيق هذه الطرائق إلى الحل الدقيق بعد إجراء عدد قليل من التكرارات، أما في الحالات التي لم نستطع فيها الوصول إلى الحل الدقيق، قدمت هذه الطرائق حلولاً تقريبية ذات دقة عالية عند مقارنتها مع الحل الدقيق، وتمّ إجراء هذه المقارنة باستخدام الجداول والأشكال البيانية بالاعتماد على برنامج Mathematica 12.0.

كما أُجريت مقارنة عامة بين الطرائق الهجينة المقترحة والطرائق الأصلية المشتقة منها، حيث أظهرت النتائج فعالية الطريقتين He-RDTM و Anuj-ADM في تحسين أداء طريقتي RDTM و ADM من خلال تبسيط التعامل مع الحالات غير الخطية، وتسهيل خطوات الحل، وتقليل التعقيد الحسابي، وتسريع عملية الوصول إلى الحل النهائي مع الحفاظ على دقته.

الكلمات المفتاحية: طريقة DTM، طريقة RDTM، كثيرات حدود He، طريقة He-RDTM، طريقة ADM،

تحويل Anuj، طريقة Anuj-ADM، معادلة تفاضلية عادية، معادلة تفاضلية جزئية، معادلة تكاملية، معادلة

تفاضلية-تكاملية، مسألة قيم ابتدائية، مسألة قيم حدية.

المقدمة

مع تقدّم العلوم المختلفة نتيجة التداخل فيما بينها وتطوّرها بشكلٍ كبير، توجّه العلماء لدراسة العديد من الظواهر الفيزيائية والبيولوجية والهندسية، وكان للمعادلات التفاضلية والتكاملية دورٌ أساسي في هذا المجال؛ إذ تُتمذج الكثير من الظواهر التي تحدث في هذه المجالات باستخدام مسائل رياضية تتضمن معادلات تفاضلية وتكاملية، ولا تزال هذه المسائل حتى اليوم محورَ دراساتٍ تهدف إلى إيجاد حلول دقيقة أو تقريبية لها.

مشكلة البحث

تنشأ مشكلة البحث من بعض التحديات التي تواجه حل المعادلات التفاضلية والتكاملية، إذ أن عملية الحصول على الحل ليست دائماً بالأمر السهل، ولا سيما في الحالات غير الخطية التي تضيف مزيداً من التعقيد على المعادلة، وتشكل عائقاً أمام الوصول إلى الحل، كما أن العديد من الطرائق التحليلية المعروفة قد لا تفي بمتطلبات التعامل مع جميع أشكال المعادلات غير الخطية.

وانطلاقاً من ذلك، برزت الحاجة إلى تطوير أساليب بديلة فعّالة، فظهرت عدة طرائق عُرفت باسم الطرائق التحليلية-التقريبية (Analytical–Approximate Methods)، والتي تتميز بقدرتها على حل المعادلات التفاضلية العادية والجزئية، والمعادلات التكاملية، بالإضافة إلى المعادلات التفاضلية-التكاملية، سواء كانت هذه المعادلات خطية أو غير خطية. ومن أبرز هذه الطرائق:

(1) طريقة التحويل التفاضلي (Differential Transform Method)، وتُعرف اختصاراً بـ DTM.

(2) طريقة التحويل التفاضلي المختزلة (Reduced Differential Transform Method)، وتُعرف

اختصاراً بـ RDTM.

(3) طريقة تحليل أدوميان (Adomian Decomposition Method)، وتُعرف اختصاراً بـ ADM.

نُخصّص هذه الرسالة لدراسة كلّ من الطرائق DTM و RDTM و ADM من حيث الأسس النظرية وآلية التطبيق، إلى جانب تطوير طريقتين هجينتين جديدتين، هما:

- طريقة He-RDTM التي تعتمد على دمج طريقة RDTM مع كثيرات حدود He.
 - طريقة Anuj-ADM التي تعتمد على دمج طريقة ADM مع تحويل Anuj التكامل.
- تُنتج كلٌّ من الطرائق DTM و RDTM و ADM، فضلاً عن الطريقتين الهجينتين He-RDTM و Anuj-ADM حلولاً تقريبية وحلولاً أخرى على شكل متسلسلة غير منتهية تتقارب إلى الحل الدقيق.

تساؤلات البحث

- (1) ما هي الأسس والمفاهيم النظرية التي تركز عليها كلٌّ من الطرائق DTM و RDTM و ADM؟ وما هي خطوات تطبيق كل طريقة عملياً؟
- (2) ما هي أبرز التحديات والصعوبات التي تواجه طريقتي ADM و RDTM؟ وكيف يمكن تطوير وتحسين كل منهما للتغلب على هذه المشكلات وتحقيق أداء أفضل؟

أهداف البحث

يسعى هذا البحث إلى تحقيق الأهداف التالية:

- (1) اقتراح طريقتين هجينتين جديدتين هما:
 - طريقة He-RDTM: تعتمد على دمج طريقة RDTM مع كثيرات حدود He؛ لمعالجة الصعوبات المرتبطة بطريقة RDTM عند التعامل مع الحدود غير الخطية في المعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطية.
 - طريقة Anuj-ADM: تعتمد على دمج طريقة ADM مع تحويل Anuj التكامل؛ لمعالجة الصعوبات المرتبطة بطريقة ADM، والمتمثلة في الحاجة إلى إجراء تكاملات تستغرق وقتاً وجهداً حسابيين كبيرين.
- (2) تقييم فعالية وأداء الطريقتين المقترحتين (He-RDTM و Anuj-ADM) من خلال تطبيقهما على أمثلة متنوعة، ومقارنة نتائجهما بالطرائق الأصلية RDTM و ADM.

أهمية البحث

تكتسب هذه الدراسة أهميتها من عدة جوانب:

من الناحية النظرية: تكمن أهمية هذا البحث في دراسة طرائق تحليلية-تقريبية فعّالة تُستخدم في حل المعادلات المعادلات التفاضلية العادية والجزئية، فضلاً عن المعادلات التكاملية والتفاضلية-التكاملية، سواء أكانت هذه المعادلات خطية أو غير خطية، ذات معاملات ثابتة أو متغيرة، متجانسة أو غير متجانسة، مع العمل على اقتراح تعديلات جديدة لبعض هذه الطرائق بهدف تحسين أدائها.

من الناحية التطبيقية: توفير طرائق رياضية فعّالة يمكن استخدامها في حل نماذج رياضية غير خطية ذات تطبيقات فيزيائية وهندسية متعددة، مما يفتح آفاقاً بحثية مستقبلية لتوسيع نطاق التطبيقات على أنواع أخرى من المعادلات والنماذج الأكثر تعقيداً.

مُبررات البحث

تبرز مبررات البحث في أهمية المعادلات التفاضلية والتكاملية، والحاجة إلى إيجاد حلول دقيقة أو تقريبية لها. إذ تُعد هذه المعادلات من الموضوعات الأساسية في مجالي التحليل الرياضي والرياضيات التطبيقية، ولها امتدادات واسعة تشمل مجالات متعددة مثل الفيزياء، الكيمياء، الطب، العلوم الهندسية، الاقتصاد وغيرها، حيث تُوصَف العديد من المسائل في هذه المجالات على شكل معادلات تفاضلية أو تكاملية.

محدوديةُ البحث

يقتصر نطاق هذا البحث على الجوانب الآتية:

(1) أنواع المعادلات المدروسة:

- المعادلات التفاضلية العادية
- المعادلات التفاضلية الجزئية
- المعادلات التكاملية
- المعادلات التفاضلية-التكاملية

(2) طبيعة المعادلات المدروسة:

- خطية وغير خطية.
- متجانسة وغير متجانسة.
- ذات معاملات ثابتة أو متغيرة.

منهجُ البحث وأدواته:

يعتمد هذا البحث على المنهج التحليلي-التجريبي من خلال دراسة تفصيلية تبين آلية تطبيق الطرائق المدروسة، مع عرض المفاهيم والخصائص الأساسية لكل طريقة، وإبراز فعالية هذه الطرائق في حل العديد من الأمثلة المتنوعة.

الأدوات البرمجية المستخدمة في البحث:

تم استخدام برنامج Mathematica الإصدار (12.0) لتنفيذ المهام الآتية:

- إجراء العمليات الحسابية والجبرية المعقدة.
- إجراء المقارنات العددية وإعداد الرسوم البيانية.
- حساب قيم الخطأ المطلق.
- حساب كثيرات حدود He باستخدام أكواد برمجية مخصصة.

الدراسات المرجعية

- طريقة التحويل التفاضلي DTM:

هي طريقة تقريبية-تحليلية تُستخدم في حل المعادلات التفاضلية العادية، والمعادلات التكاملية، بالإضافة إلى المعادلات التفاضلية-التكاملية، قدّم هذه الطريقة لأول مرة الباحث الصيني Zhou في عام 1986 من خلال مقالة بحثية عرض فيها المفاهيم والخواص الأساسية للطريقة، حيث طبقها لحل مسائل القيم الابتدائية في مجال الدارات الكهربائية (Zhou, 1986).

- طريقة التحويل التفاضلي المختزلة RDTM:

هي طريقة تقريبية-تحليلية تُستخدم في حل المعادلات التفاضلية الجزئية، وقد تم تطويرها بواسطة الباحثين التركيين Oturanc و Keskin في عام 2009، من خلال مقالة بحثية تناولت المفاهيم والخصائص الأساسية لهذه الطريقة (Keskin and Oturanc, 2009).

- طريقة تحليل أدوميان ADM:

هي طريقة تقريبية-تحليلية تُستخدم في حل المعادلات التفاضلية العادية والجزئية، والمعادلات التكاملية، بالإضافة إلى المعادلات التفاضلية-التكاملية، قدّم هذه الطريقة الباحث الأمريكي Adomian في عام 1986 من خلال مقالة بحثية، حيث استخدمها لحل أنظمة المعادلات العشوائية (Adomian, 1986).
ولاحقاً، قام Adomian بإصدار كتابه الشهير الذي يحمل العنوان التالي:

Solving Frontier Problems of Physics: The Decomposition Method

حيث تناول فيه طريقة ADM بشكل مفصل لحل مسائل القيم الابتدائية والحدية للمعادلات التفاضلية العادية والجزئية ذات التطبيقات الفيزيائية المتقدمة (Adomian, 2013).

ومن جهة أخرى، قدم الباحث Wazwaz تعديلاً على طريقة ADM أطلق عليه اسم طريقة أدوميان المعدلة، وعُرفت اختصاراً بطريقة MDM، وأسهم هذا التعديل في تحسين تقارب الحل لطريقة ADM بشكل ملحوظ (Wazwaz, 1999).

وفي سياقٍ متصل، طوّرت العديد من الدراسات طرائق هجينة تعتمد على دمج الطرائق التحليلية-التقريبية مع تحويل لابلاس التكاملي، بهدف تحسين أدائها في حل المعادلات التفاضلية والتكاملية، ومن هذه الدراسات نذكر ما يلي:

- قدمت دراسة (Wazwaz, 2011) طريقة هجينة تجمع بين طريقة تحليل أدوميان ADM وتحويل لابلاس لإيجاد حلول معادلة فولتيرا التفاضلية-التكاملية الخطية وغير الخطية ذات النواة الفرقية.
- كما قدمت دراسة (Mishra and Nagar, 2012) طريقة هجينة تعتمد على دمج طريقة He مع تحويل لابلاس لحل المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية وغير الخطية.
- كذلك، طورت دراسة (Aminikhah, 2013) طريقة هجينة تجمع بين طريقة اضطراب الهوموتوبي HPM وتحويل لابلاس، حيث تم تطبيق هذه الطريقة لإيجاد حلول معادلة Riccati التفاضلية العادية غير الخطية مع شروط ابتدائية.
- فضلاً عن ذلك، طورت دراسة (Yindoula and Nganga, 2023) طريقتين هجنتين: الأولى تعتمد على دمج طريقة أدوميان ADM مع تحويل لابلاس، والثانية تعتمد على دمج طريقة التكرار التبايري VIM مع تحويل لابلاس، حيث تم استخدام هاتين الطريقتين لإيجاد حلول معادلة Boussinesq التفاضلية الجزئية غير الخطية مع شروط ابتدائية.

الفصل الأول:

مفاهيم أساسية حول المعادلات التفاضلية والتكاملية

تمهيد:

نعرض في هذا الفصل بعض التعاريف والمفاهيم الأساسية المرتبطة بالمعادلات التفاضلية العادية والجزئية، والمعادلات التكاملية، والمعادلات التفاضلية-التكاملية.

1-1 المعادلات التفاضلية العادية

1-1-1 تعريف أساسية:

- تعريف المعادلة التفاضلية العادية (العويضي وآخرون، د.ت، ج: 1، ص: 9)

هي علاقة تربط بين متغير مستقل وليكن x ومتغير تابع وليكن $y(x)$ وواحد أو أكثر من المشتقات التفاضلية $y', y'', \dots$ وتكتب بصورة عامة على النحو الآتي:

$$F(x, y, y', y'', \dots) = 0$$

بعض الأمثلة عن المعادلات التفاضلية العادية:

$$(y''')^2 + 2y''' - 5y = \sin(x)$$

$$y'' + yy' + (y')^2 = 0$$

$$y' + xy = x^2$$

- تعريف مرتبة المعادلة التفاضلية العادية (العويضي وآخرون، د.ت، ج: 1، ص: 10)

هي مرتبة أعلى مشتق يظهر في المعادلة، بغض النظر عن طريقة ظهوره.

- تعريف درجة المعادلة التفاضلية العادية (العويضي وآخرون، د.ت، ج: 1، ص: 10)

تُعرف بأنها قوة أعلى مشتق موجود في المعادلة، بشرط أن تكون المعادلة كثيرة حدود في مشتقاتها، أي أن جميع المشتقات في المعادلة خالية من القوى الكسرية، وألا تظهر المشتقات داخل دوال (مثل الجذور أو الدوال المثلثية أو اللوغاريتمية).

أمثلة:

المعادلة التفاضلية $\sin(y'') + y' - x = 0$ يظهر فيها المشتق y'' داخل الدالة $\sin(y'')$ ، ولذلك لا

يمكن تعريف درجة هذه المعادلة، أما مرتبتها فتساوي 2

المعادلة التفاضلية $(y''')^2 + 2y''' - 5y = \sin(x)$ تظهر فيها المشتقات على شكل قوى صحيحة موجبة،

لذا مرتبة المعادلة تساوي 3 ودرجة المعادلة تساوي 2

المعادلة التفاضلية $(y'')^3 = \sqrt{1 + (y')^2}$ تحتوي على جذر، لتحديد الدرجة نقوم بالتخلص من الجذر عن طريق

تربيع طرفي المعادلة، فيصبح لدينا:

$$((y'')^3)^2 = \left((1 + (y')^2)^{\frac{1}{2}} \right)^2 \Rightarrow (y'')^6 = 1 + (y')^2$$

وبذلك تكون المعادلة السابقة من المرتبة الثانية والدرجة السادسة.

• تعريف المعادلة التفاضلية العادية الخطية (العويضي وآخرون، د.ت، ج: 1، ص: 48)

نقول عن معادلة تفاضلية عادية إنها خطية إذا كان المتغير التابع ومشتقاته من الدرجة الأولى، وأمثلة المتغير

التابع ومشتقاته ثوابت أو متغيرات مستقلة، وفيما عدا ذلك تكون المعادلة التفاضلية غير خطية.

أمثلة:

$$(y''')^2 + 2y''' - 5y = \sin(x) \text{ معادلة تفاضلية عادية غير خطية بسبب وجود } (y''')^2$$

$$y' - y^2 = 1 \text{ معادلة تفاضلية عادية غير خطية بسبب وجود } y^2$$

$$yy' + (y')^2 = 0 \text{ معادلة تفاضلية عادية غير خطية بسبب وجود } yy', (y')^2$$

$$y' + xy = x^2 \text{ معادلة تفاضلية عادية خطية.}$$

- تعريف الشروط الابتدائية والشروط الحدية (العويضي وآخرون، د.ت، ج: 1، ص: 15)

عند دراستنا المعادلات التفاضلية العادية تصادفنا في بعض الأحيان معادلات تفاضلية مصحوبة بشروط معينة، والمطلوب إيجاد الحل للمعادلة الذي يحقق تلك الشروط، وهذه الشروط تأخذ أشكالاً مختلفة ومنها:

(1) إذا أُعطيت هذه الشروط عند نفس النقطة x_0 مثل:

$$y(x_0) = a , y'(x_0) = b$$

فإن تلك الشروط تسمى شروط ابتدائية عند x_0 ، وتسمى المعادلة التفاضلية بالإضافة للشروط الابتدائية المرافقة لها بمسألة قيم ابتدائية (Initial Value Problem).

(2) إذا أُعطيت الشروط عند نقطتين مختلفتين x_1, x_2 مثل:

$$y(x_1) = a , y'(x_2) = b$$

فإن تلك الشروط تسمى شروط حدودية عند النقطتين x_1, x_2 ، وتسمى المعادلة التفاضلية بالإضافة للشروط الحدية المرافقة لها بمسألة قيم حدية (Boundary Value Problem).

1-2 المعادلات التفاضلية الجزئية

1-2-1 تعاريف أساسية:

- تعريف المعادلة التفاضلية الجزئية (العويضي وآخرون، د.ت، ج: 2، ص: 223)

إذا كان عدد المتغيرات المستقلة أكثر من متغير مستقل واحد وليكن x, y متغيرين مستقلين، وكان $z(x, y)$ متغير تابع قابل للاشتقاق جزئياً بالنسبة للمتغيرين x, y ، عندئذٍ نسمي المعادلة التي تحتوي على المتغيرات المستقلة والمتغير التابع $z(x, y)$ وأحد مشتقاته الجزئية على الأقل بمعادلة تفاضلية جزئية، والصورة العامة للمعادلة التفاضلية الجزئية تكون على النحو الآتي:

$$F(x, y, z, z_x, z_y, z_{xy}, z_{xx}, z_{yy}, \dots) = 0$$

ويعبر عن المشتقات الجزئية رياضياً بالرموز التالية:

$$z_x = \frac{\partial z}{\partial x}, z_y = \frac{\partial z}{\partial y}, z_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, z_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, z_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

بعض الأمثلة عن المعادلات التفاضلية الجزئية:

$$z_{xy} + 2z_x + 3z_y + 5z = 2x + \cos(x - y)$$

$$z_{xx} + z_{yy} = x^2 y^2$$

1-2-2 تصنيفات المعادلات التفاضلية الجزئية (العويضي وآخرون، د.ت، ج: 2، ص: 224)

يمكن تصنيف المعادلات التفاضلية الجزئية إلى تصنيفات مختلفة كما يلي:

(a) مرتبة المعادلة التفاضلية الجزئية: هي مرتبة أعلى مشتق جزئي يظهر في المعادلة.

أمثلة:

$u_t = u_{xx}$ معادلة تفاضلية جزئية من المرتبة الثانية.

$u_t = u_x$ معادلة تفاضلية جزئية من المرتبة الأولى.

$u_t = u_{xxx} + \sin(x)$ معادلة تفاضلية جزئية من المرتبة الثالثة.

(b) عدد المتغيرات: هو عدد المتغيرات المستقلة في المعادلة.

أمثلة:

$u_t = u_{xx}$ المتغيرات المستقلة هي x, t

$u_t = u_{rr} + \frac{1}{r}u_{\theta\theta}$ المتغيرات المستقلة هي r, t, θ

(c) الخطية:

نقول عن معادلة تفاضلية جزئية إنها خطية إذا تحقق الشرطين الآتيين:

- المتغير التابع ومشتقاته الجزئية من الدرجة الأولى.

- أمثال المتغير التابع ومشتقاته الجزئية ثوابت أو متغيرات مستقلة.

وفيما عدا ذلك تكون المعادلة التفاضلية الجزئية غير خطية.

إن الصيغة العامة للمعادلة التفاضلية الجزئية الخطية من المرتبة الثانية في متغيرين مستقلين تعطى بالشكل

الآتي:

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G \quad (1.1)$$

حيث A, B, C, D, E, F, G إما ثوابت أو توابع مستمرة في المتغيرين x, y

أمثلة:

$$u_{tt} = e^{-t}u_{xx} + \sin(x) \text{ معادلة تفاضلية جزئية خطية.}$$

$$uu_{xx} + u_t = 0 \text{ معادلة تفاضلية جزئية غير خطية بسبب وجود } uu_{xx}.$$

$$uu_{xx} + yu_y + u^2 = 0 \text{ معادلة تفاضلية جزئية غير خطية بسبب وجود } uu_{xx}, u^2.$$

$$u_{xx} + yu_{yy} = 0 \text{ معادلة تفاضلية جزئية خطية.}$$

(d) التجانس:

إذا كان الطرف الأيمن في المعادلة (1.1) معدوماً أي $G(x, y) = 0$ فإن المعادلة (1.1) تسمى معادلة

تفاضلية جزئية متجانسة، وتكون المعادلة غير متجانسة إذا كان $G(x, y) \neq 0$.

(e) أنواع المعاملات:

إذا كانت المعاملات A, B, C, D, E, F, G في المعادلة (1.1) ثوابت فإن المعادلة (1.1) تسمى معادلة تفاضلية

جزئية خطية ذات معاملات ثابتة، أما إذا كان واحد من المعاملات أو أكثر دالة في x أو y أو كلاهما فإنها

تكون ذات معاملات متغيرة.

(f) الأنواع الثلاثة الأساسية للمعادلات التفاضلية الجزئية الخطية:

يتم التمييز بين الأنواع الثلاثة للمعادلات التفاضلية الجزئية الخطية وفقاً للصيغة المعطاة في العلاقة (1.1)

على النحو الآتي:

مكافئية (Parabolic) إذا كان:

$$B^2 - 4AC = 0$$

زائدية (Hyperbolic) إذا كان:

$$B^2 - 4AC > 0$$

ناقصية (Elliptic) إذا كان:

$$B^2 - 4AC < 0$$

أمثلة:

$u_t = u_{xx}$ هي معادلة تفاضلية جزئية مكافئة حيث $C = 0, A = 1, B = 0$

$$B^2 - 4AC = 0$$

$u_{tt} = u_{xx}$ هي معادلة تفاضلية جزئية زائدية حيث $C = -1, A = 1, B = 0$

$$B^2 - 4AC = 4 > 0$$

$\alpha u_{xx} + u_{yy} = 0$ نجد أن $C = 1, A = \alpha, B = 0$

$$B^2 - 4AC = -4\alpha$$

تكون ناقصية إذا كان $\alpha > 0$

تكون مكافئة إذا كان $\alpha = 0$

تكون زائدية إذا كان $\alpha < 0$

3-1 المعادلات التكاملية

1-3-1 تعريف أساسية:

- تعريف المعادلة التكاملية (Wazwaz, 2011, p: 33)

هي معادلة تظهر فيها الدالة المجهولة $y(x)$ في طرف، وداخل إشارة التكامل في الطرف الآخر، وتعطى الصيغة العامة لها بالشكل الآتي:

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_{g(x)}^{h(x)} K(x, t) y(t) dt \quad (2.1)$$

حيث:

$y(x)$ دالة مجهولة، $f(x)$ دالة حقيقية معلومة، λ وسيط ثابت، $K(x, t)$ دالة حقيقية معلومة تابعة للمتغيرين x, t وتدعى بنواة المعادلة التكاملية، $h(x), g(x)$ هما حدي التكامل.

- تعريف معادلة فريدهولم التكاملية من النوع الثاني (Wazwaz, 2011, p: 33)

إذا كان حدي التكامل $g(x), h(x)$ في المعادلة (2.1) عبارة عن ثوابت، فإنها تدعى بمعادلة فريدهولم التكاملية من النوع الثاني، وتعطى الصيغة العامة لها بالشكل الآتي:

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) y(t) dt$$

- تعريف معادلة فولتيرا التكاملية من النوع الثاني (Wazwaz, 2011, p: 33)

إذا كان أحد حدود التكامل $g(x), h(x)$ في المعادلة (2.1) متغير والحد الآخر ثابت، فإنها تدعى بمعادلة فولتيرا التكاملية من النوع الثاني، وتعطى الصيغة العامة لها بالشكل الآتي:

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x, t) y(t) dt$$

- تعريف معادلة فريدهولم التكاملية من النوع الثاني غير الخطية (Wazwaz, 2011, p: 467)

تعطى الصيغة العامة لها بالشكل الآتي:

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) F(y(t)) dt$$

حيث:

$y(x)$ دالة مجهولة، $f(x)$ دالة حقيقية معلومة، λ وسيط، النواة $K(x, t)$ دالة حقيقية معلومة تابعة للمتغيرين x, t ، $F(y(t))$ دالة غير خطية.

- تعريف معادلة فولتيرا التكاملية من النوع الثاني غير الخطية (Wazwaz, 2011, p: 387)

تعطى الصيغة العامة لها بالشكل الآتي:

$$y(x) = f(x) + \int_0^x K(x, t) F(y(t)) dt$$

حيث:

$y(x)$ دالة مجهولة، $f(x)$ دالة حقيقية معلومة، النواة $K(x, t)$ دالة حقيقية معلومة تابعة للمتغيرين x, t ، $F(y(t))$ دالة غير خطية.

- تعريف معادلة فريدهولم التفاضلية-التكاملية (Wazwaz, 2011, p: 38)

هي معادلة يظهر فيها مشتق الدالة المجهولة في طرف، والدالة المجهولة في الطرف الآخر داخل إشارة التكامل، وتكون حدود التكامل عبارة عن ثوابت، وتعطى الصيغة العامة لها بالشكل الآتي:

$$y^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) y(t) dt, \quad n \geq 1$$

حيث:

$$y^{(n)}(x) = \frac{d^n y(x)}{dx^n}$$

- تعريف معادلة فولتيرا التفاضلية-التكاملية (Wazwaz, 2011, p: 38)

هي معادلة يظهر فيها مشتق الدالة المجهولة في طرف، والدالة المجهولة في الطرف الآخر داخل إشارة التكامل، حيث يكون أحد حدود التكامل متغير والحد الآخر ثابت، وتعطى الصيغة العامة لها بالشكل الآتي:

$$y^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x, t) y(t) dt, \quad n \geq 1$$

حيث:

$$y^{(n)}(x) = \frac{d^n y(x)}{dx^n}$$

- تعريف معادلة فريدهولم التفاضلية-التكاملية من النوع الثاني غير الخطية (Wazwaz, 2011, p: 517)

تعطى الصيغة العامة لها بالشكل الآتي:

$$y^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) F(y(t)) dt, \quad n \geq 1$$

حيث:

$$y^{(n)}(x) = \frac{d^n y(x)}{dx^n}$$

يمثل المشتق من المرتبة n للدالة المجهولة $y(x)$ ، $f(x)$ دالة حقيقية معلومة، النواة

$$K(x, t) \text{ دالة حقيقية معلومة تابعة للمتغيرين } x, t, F(y(t)) \text{ دالة غير خطية.}$$

- تعريف معادلة فولتيرا التفاضلية-التكاملية من النوع الثاني غير الخطية (Wazwaz, 2011, p: 425)

تعطى الصيغة العامة لها بالشكل الآتي:

$$y^{(n)}(x) = f(x) + \int_0^x K(x, t) F(y(t)) dt, \quad n \geq 1$$

حيث:

$$y^{(n)}(x) = \frac{d^n y(x)}{dx^n}$$

يمثل المشتق من المرتبة n للدالة المجهولة $y(x)$ ، $f(x)$ دالة حقيقية معلومة، النواة

$$K(x, t) \text{ دالة حقيقية معلومة تابعة للمتغيرين } x, t, F(y(t)) \text{ دالة غير خطية.}$$

- قاعدة Leibnitz للاشتقاق (Stroud and Booth, 2005, p: 128)

تُعرف قاعدة Leibnitz للاشتقاق من المرتبة k لجداء دالتين $f(x)$ و $g(x)$ بالعلاقة الآتية:

$$\frac{d^k}{dx^k} (f(x) \cdot g(x)) = \sum_{r=0}^k C_r^k \frac{d^r f(x)}{dx^r} \cdot \frac{d^{k-r} g(x)}{dx^{k-r}}, \quad C_r^k = \frac{k!}{r! (k-r)!}$$

حيث:

k مرتبة الاشتقاق (عدد مرات الاشتقاق)

$$\frac{d^r f(x)}{dx^r} \text{ يمثل المشتق من المرتبة } r \text{ للدالة } f(x)$$

$$\frac{d^{k-r} g(x)}{dx^{k-r}} \text{ يمثل المشتق من المرتبة } k-r \text{ للدالة } g(x)$$

الفصل الثاني:

طرائق التحويل التفاضلي (DTM – RDTM – He-RDTM الهجينة)

تمهيد:

ندرس في الفصل الثاني طريقة التحويل التفاضلي DTM بأسلوب تفصيلي يبين آلية تطبيقها في حل المعادلات التفاضلية العادية، والمعادلات التكاملية، والمعادلات التفاضلية-التكاملية، كما نعرض المفاهيم والخواص الأساسية لهذه الطريقة مع البراهين، ونستخدم طريقة DTM لحل العديد من الأمثلة التي تشمل مسائل القيم الابتدائية والحدية للمعادلات التفاضلية العادية غير الخطية، بالإضافة إلى معادلات فولتيرا وفريدهولم التكاملية والتفاضلية-التكاملية، سواء الخطية وغير الخطية.

كما نتناول في هذا الفصل طريقة التحويل التفاضلي المختزلة RDTM، حيث ندرسها بأسلوب مفصل يبين آلية تطبيقها في حل المعادلات التفاضلية الجزئية، مع عرض المفاهيم والخواص الأساسية المرتبطة بها مدعومة بالبراهين.

نقترح أيضاً تطوير طريقة هجينة جديدة تُعرف بـ (He-RDTM)، تعتمد على دمج طريقة RDTM مع كثيرات حدود He. جاءت فكرة هذا الدمج لمواجهة الصعوبات التي تواجه طريقة RDTM عند التعامل مع المعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطية.

ولإظهار فعالية طريقة He-RDTM وقدرتها على تبسيط التعامل مع اللاخطية، نطبقها على عدة نماذج من المعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطية التي لها تطبيقات هامة في مجالات مختلفة مثل الفيزياء والعلوم الهندسية. فضلاً عن ذلك، نقوم بمقارنة الحلول الناتجة عن تطبيق طريقة He-RDTM مع الحلول الناتجة عن طريقة RDTM الأصلية وطرائق أخرى، بهدف التأكد من صحة النتائج ودقتها.

2-1 طريقة التحويل التفاضلي DTM

2-1-1 مفاهيم أساسية

- تعريف التحويل التفاضلي (Olotu *et al.*, 2025)

لتكن $y(x)$ دالة تحليلية في جوار النقطة $x = 0$ ، عندئذ يُعرّف التحويل التفاضلي من المرتبة k للدالة $y(x)$ في جوار النقطة $x = 0$ بالعلاقة الآتية:

$$Y(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k y(x)}{dx^k} \right]_{x=0}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.2)$$

حيث تدعى $y(x)$ بدالة الأصل، وتدعى $Y(k)$ بالدالة المحولة.

- تعريف التحويل التفاضلي العكسي (Olotu *et al.*, 2025)

يُقصد بالتحويل التفاضلي العكسي استعادة دالة الأصل $y(x)$ انطلاقاً من دالتها المحولة $Y(k)$ ، وذلك في صورة متسلسلة قوى على النحو الآتي:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} Y(k) x^k \quad (2.2)$$

بتعويض العلاقة (1.2) في (2.2) نحصل على:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k y(x)}{dx^k} \right]_{x=0} x^k \quad (3.2)$$

إن العلاقة (3.2) هي متسلسلة تايلور للدالة $y(x)$ في جوار النقطة $x = 0$ ، والتي تمثل صيغة متسلسلة الحل في طريقة DTM.

2-1-2 الخواص الأساسية لطريقة التحويل التفاضلي DTM

نعرض في هذه الفقرة أهم الخواص الأساسية لطريقة DTM، والتي ينتج برهانها بالاعتماد على تعريف التحويل التفاضلي (1.2)

- الخاصية الأولى: (خاصية الخطية) (Das, 2019)

(1) إذا كان $y(x) = g(x) \pm h(x)$ فإن التحويل التفاضلي للدالة $y(x)$ هو

$$Y(k) = G(k) \pm H(k)$$

البرهان:

باستخدام تعريف التحويل التفاضلي (1.2) لدينا:

$$\begin{aligned}
 Y(k) &= \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k y(x)}{dx^k} \right]_{x=0} \\
 &= \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k (g(x) \pm h(x))}{dx^k} \right]_{x=0} \\
 &= \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k g(x)}{dx^k} \pm \frac{d^k h(x)}{dx^k} \right]_{x=0} \\
 &= \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k g(x)}{dx^k} \right]_{x=0} \pm \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k h(x)}{dx^k} \right]_{x=0} \\
 &= G(k) \pm H(k)
 \end{aligned}$$

وهو المطلوب.

(2) إذا كان $y(x) = \alpha g(x)$ فإن التحويل التفاضلي للدالة $y(x)$ هو

$$Y(k) = \alpha G(k)$$

حيث α ثابت.

البرهان:

باستخدام تعريف التحويل التفاضلي (1.2) لدينا:

$$\begin{aligned}
 Y(k) &= \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k y(x)}{dx^k} \right]_{x=0} \\
 &= \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k (\alpha g(x))}{dx^k} \right]_{x=0} \\
 &= \alpha \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k g(x)}{dx^k} \right]_{x=0} \\
 &= \alpha G(k)
 \end{aligned}$$

وهو المطلوب.

• الخاصية الثانية: (خاصية جداء دالتين) (Das, 2019)

إذا كان $y(x) = g(x)h(x)$ فإن التحويل التفاضلي للدالة $y(x)$ هو

$$Y(k) = \sum_{r=0}^k G(r)H(k-r)$$

البرهان:

بتطبيق صيغة Leibnitz للاشتقاق على الدالة $y(x) = g(x)h(x)$ نجد:

$$\frac{d^k y(x)}{dx^k} = \frac{d^k (g(x)h(x))}{dx^k} = \sum_{r=0}^k C_r^k \frac{d^r g(x)}{dx^r} \frac{d^{k-r} h(x)}{dx^{k-r}}, \quad C_r^k = \frac{k!}{r!(k-r)!}$$

الآن باستخدام تعريف التحويل التفاضلي (1.2) لدينا:

$$\begin{aligned} Y(k) &= \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k y(x)}{dx^k} \right]_{x=0} \\ &= \frac{1}{k!} \left[\sum_{r=0}^k C_r^k \frac{d^r g(x)}{dx^r} \frac{d^{k-r} h(x)}{dx^{k-r}} \right]_{x=0} \\ &= \frac{1}{k!} \left[\sum_{r=0}^k \frac{k!}{r!(k-r)!} \frac{d^r g(x)}{dx^r} \frac{d^{k-r} h(x)}{dx^{k-r}} \right]_{x=0} \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{r=0}^k \frac{k!}{r!(k-r)!} \left[\frac{d^r g(x)}{dx^r} \frac{d^{k-r} h(x)}{dx^{k-r}} \right]_{x=0} \\ &= \sum_{r=0}^k \underbrace{\frac{1}{r!} \left[\frac{d^r g(x)}{dx^r} \right]_{x=0}}_{G(r)} \underbrace{\frac{1}{(k-r)!} \left[\frac{d^{k-r} h(x)}{dx^{k-r}} \right]_{x=0}}_{H(k-r)} \\ &= \sum_{r=0}^k G(r)H(k-r) \end{aligned}$$

• الخاصية الثالثة: (خاصية جداء ثلاث دوال) (Das, 2019)

إذا كان $y(x) = g(x)h(x)w(x)$ فإن التحويل التفاضلي للدالة $y(x)$ هو:

$$Y(k) = \sum_{r=0}^k \sum_{m=0}^r G(m)H(r-m)W(k-r)$$

البرهان:

نفرض الدالة $u(x) = g(x)h(x)$ وبالتالي يصبح لدينا:

$$y(x) = u(x)w(x)$$

بتطبيق (خاصية جداء دالتين) على الدالة $y(x) = u(x)w(x)$ نجد:

$$Y(k) = \sum_{r=0}^k U(r)W(k-r) \quad (4.2)$$

حيث $U(r)$ هو التحويل التفاضلي للدالة $u(x) = g(x)h(x)$ ويعطى بالعلاقة الآتية:

$$U(r) = \sum_{m=0}^r G(m)H(r-m) \quad (5.2)$$

الآن بتعويض العلاقة (5.2) في (4.2) نحصل على:

$$Y(k) = \sum_{r=0}^k \sum_{m=0}^r G(m)H(r-m)W(k-r)$$

وهو المطلوب.

• الخاصية الرابعة: (خاصية جداء أربع دوال) (Das, 2019)

إذا كان $y(x) = g(x)h(x)w(x)v(x)$ فإن التحويل التفاضلي للدالة $y(x)$ هو:

$$Y(k) = \sum_{r=0}^k \sum_{m=0}^r \sum_{s=0}^m G(s)H(m-s)W(r-m)V(k-r)$$

البرهان:

نفرض الدالة $u(x) = g(x)h(x)w(x)$ وبالتالي يصبح لدينا:

$$y(x) = u(x)v(x)$$

بتطبيق (خاصية جداء دالتين) على الدالة $y(x) = u(x)v(x)$ نجد:

$$Y(k) = \sum_{r=0}^k U(r)V(k-r) \quad (6.2)$$

حيث $U(r)$ هو التحويل التفاضلي للدالة $u(x) = g(x)h(x)w(x)$ ويعطى بالعلاقة الآتية:

$$U(r) = \sum_{m=0}^r \sum_{s=0}^m G(s)H(m-s)W(r-m) \quad (7.2)$$

بتعويض العلاقة (7.2) في (6.2) نجد:

$$Y(k) = \sum_{r=0}^k \sum_{m=0}^r \sum_{s=0}^m G(s)H(m-s)W(r-m)V(k-r)$$

وهو المطلوب.

• الخاصية الخامسة: (خاصية جداء خمس دوال) (Das, 2019)

إذا كان $y(x) = g(x)h(x)w(x)v(x)f(x)$ فإن التحويل التفاضلي للدالة $y(x)$ هو

$$Y(k) = \sum_{r=0}^k \sum_{m=0}^r \sum_{s=0}^m \sum_{p=0}^s G(p)H(s-p)W(m-s)V(r-m)F(k-r)$$

البرهان:

نفرض الدالة $u(x) = g(x)h(x)w(x)v(x)$ وبالتالي يصبح لدينا:

$$y(x) = u(x)f(x)$$

بتطبيق (خاصية جداء دالتين) على الدالة $y(x) = u(x)f(x)$ نجد:

$$Y(k) = \sum_{r=0}^k U(r)F(k-r) \quad (8.2)$$

حيث $U(r)$ هو التحويل التفاضلي للدالة $u(x) = g(x)h(x)w(x)v(x)$ ويعطى بالعلاقة الآتية:

$$U(r) = \sum_{m=0}^r \sum_{s=0}^m \sum_{p=0}^s G(p)H(s-p)W(m-s)V(r-m) \quad (9.2)$$

بتعويض العلاقة (9.2) في (8.2) نجد:

$$Y(k) = \sum_{r=0}^k \sum_{m=0}^r \sum_{s=0}^m \sum_{p=0}^s G(p)H(s-p)W(m-s)V(r-m)F(k-r)$$

وهو المطلوب.

• الخاصية السادسة: (خاصية الاشتقاق لدالة $g(x)$ من المرتبة n) (Das, 2019)

إذا كان $y(x) = \frac{d^n g(x)}{dx^n}$ فإن التحويل التفاضلي للدالة $y(x)$ هو

$$Y(k) = (k+1)(k+2) \dots (k+n)G(k+n)$$

البرهان:

باستخدام تعريف التحويل التفاضلي (1.2) لدينا:

$$\begin{aligned} Y(k) &= \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k y(x)}{dx^k} \right]_{x=0} \\ &= \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dx^k} \left(\frac{d^n g(x)}{dx^n} \right) \right]_{x=0} \\ &= \frac{1}{k!} \left[\frac{d^{k+n} g(x)}{dx^{k+n}} \right]_{x=0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(k+n)!}{k!} \frac{1}{(k+n)!} \left[\frac{d^{k+n} g(x)}{dx^{k+n}} \right]_{x=0} \\
&= \frac{(k+n) \dots (k+2)(k+1)k!}{k!} \frac{1}{(k+n)!} \left[\frac{d^{k+n} g(x)}{dx^{k+n}} \right]_{x=0} ; (k+n)! = (k+n) \dots (k+2)(k+1)k! \\
&= (k+1)(k+2) \dots (k+n) \underbrace{\frac{1}{(k+n)!} \left[\frac{d^{k+n} g(x)}{dx^{k+n}} \right]_{x=0}}_{G(k+n)} \\
&= (k+1)(k+2) \dots (k+n) G(k+n)
\end{aligned}$$

(1) الخاصية السابعة (خاصية التكامل): (Das, 2019)

إذا كان $y(x) = \int_0^x g(t) dt$ فإن التحويل التفاضلي للدالة $y(x)$ هو:

$$Y(k) = \begin{cases} \frac{G(k-1)}{k} & \text{if } k \geq 1 \\ 0 & \text{if } k = 0 \end{cases}$$

البرهان:

من أجل $k = 0$ نعوض في تعريف التحويل التفاضلي (1.2) فنجد:

$$Y(0) = \frac{1}{0!} \left[\frac{d^0}{dx^0} \left(\int_0^x g(t) dt \right) \right]_{x=0} = \left[\int_0^x g(t) dt \right]_{x=0} = \int_0^0 g(t) dt = g(0) - g(0) = 0$$

من أجل $k \geq 1$

حسب المبرهنة الثانية في حساب التفاضل والتكامل التي تنص على: (Larson and Edwards, 2009, p: 251)

إذا كانت $f(x)$ دالة مستمرة على فترة مفتوحة I تحتوي على النقطة a فإنه لكل x في هذه الفترة يكون:

$$\frac{d}{dx} \left(\int_a^x f(t) dt \right) = f(x)$$

وبالتالي حسب المبرهنة السابقة يكون مشتق الدالة $y(x) = \int_0^x g(t) dt$ هو:

$$\begin{aligned}
\frac{dy(x)}{dx} &= \frac{d}{dx} \left(\int_0^x g(t) dt \right) = g(x) \\
\Rightarrow \frac{dy(x)}{dx} &= g(x)
\end{aligned}$$

بتطبيق الخاصيتين (1) و (6) من خواص التحويل التفاضلي على العلاقة السابقة نحصل على:

$$(k+1)Y(k+1) = G(k)$$

بإستبدال كل k بـ $k - 1$

$$kY(k) = G(k - 1)$$

$$\Rightarrow Y(k) = \frac{G(k - 1)}{k}, \quad k \geq 1$$

وبالتالي نجد:

$$Y(k) = \begin{cases} \frac{G(k-1)}{k} & \text{if } k \geq 1 \\ 0 & \text{if } k = 0 \end{cases}$$

وهو المطلوب.

(2) الخاصية الثامنة (Jothika and Savitha, 2018)

إذا كان $y(x) = \int_0^x g(t)h(t) dt$ فإن التحويل التفاضلي للدالة $y(x)$ هو:

$$Y(k) = \begin{cases} \frac{1}{k} \sum_{r=0}^{k-1} G(r)H(k-1-r) & \text{if } k \geq 1 \\ 0 & \text{if } k = 0 \end{cases}$$

البرهان:

من أجل $k = 0$ نعوض في تعريف التحويل التفاضلي (1.2) فنجد:

$$Y(0) = \frac{1}{0!} \left[\frac{d^0}{dx^0} \left(\int_0^x g(t)h(t) dt \right) \right]_{x=0} = \left[\int_0^x g(t)h(t) dt \right]_{x=0} = \int_0^0 g(t)h(t) dt$$

$$= g(0)h(0) - g(0)h(0) = 0$$

من أجل $k \geq 1$

باشتقاق طرفي الدالة $y(x) = \int_0^x g(t)h(t) dt$ بالنسبة إلى x نجد:

$$\frac{dy(x)}{dx} = g(x)h(x)$$

بتطبيق الخاصيتين (2) و (6) من خواص التحويل التفاضلي على العلاقة السابقة نحصل على:

$$(k+1)Y(k+1) = \sum_{r=0}^k G(r)H(k-r)$$

بإستبدال كل k بـ $k - 1$

$$kY(k) = \sum_{r=0}^{k-1} G(r)H(k-1-r)$$

$$\Rightarrow Y(k) = \frac{1}{k} \sum_{r=0}^{k-1} G(r)H(k-1-r), \quad k \geq 1$$

وبالتالي نجد:

$$Y(k) = \begin{cases} \frac{1}{k} \sum_{r=0}^{k-1} G(r)H(k-1-r) & \text{if } k \geq 1 \\ 0 & \text{if } k = 0 \end{cases}$$

وهو المطلوب.

• التحويلات التفاضلية لبعض الدوال الشهيرة (Das, 2019)

(1) إذا كان $y(x) = \sin(\alpha x + \beta)$ فإن التحويل التفاضلي للدالة $y(x)$ هو:

$$Y(k) = \frac{\alpha^k}{k!} \sin\left(\frac{\pi k}{2} + \beta\right)$$

حيث α, β ثوابت.

البرهان:

بالاستفادة من دساتير التحويل المثلثية لدينا:

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(x) + \sin(x)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \cdot \cos(x) + \sin(x) \cdot 0 \\ &\Rightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x) \end{aligned}$$

وبالتالي:

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{d}{dx}(\sin(\alpha x + \beta)) = \alpha \cos(\alpha x + \beta) = \sin\left(\alpha x + \beta + \frac{\pi}{2}\right) \\ y''(x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{dy(x)}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\alpha \sin\left(\alpha x + \beta + \frac{\pi}{2}\right)\right) = \alpha^2 \cos\left(\alpha x + \beta + \frac{\pi}{2}\right) = \alpha^2 \sin\left(\alpha x + \beta + \frac{2\pi}{2}\right) \\ y'''(x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2 y(x)}{dx^2}\right) = \frac{d}{dx}\left(\alpha^2 \sin\left(\alpha x + \beta + \frac{2\pi}{2}\right)\right) = \alpha^3 \cos\left(\alpha x + \beta + \frac{2\pi}{2}\right) = \alpha^3 \sin\left(\alpha x + \beta + \frac{3\pi}{2}\right) \\ &\vdots \\ y^{(k)}(x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{k-1} y(x)}{dx^{k-1}}\right) = \frac{d}{dx}\left(\alpha^{k-1} \sin\left(\alpha x + \beta + (k-1)\frac{\pi}{2}\right)\right) \\ &= \alpha^k \cos\left(\alpha x + \beta + (k-1)\frac{\pi}{2}\right) = \alpha^k \sin\left(\alpha x + \beta + \frac{k\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

وبالتالي باستخدام تعريف التحويل التفاضلي (1.2) نجد:

$$Y(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k y(x)}{dx^k} \right]_{x=0} = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k \sin(\alpha x + \beta)}{dx^k} \right]_{x=0} = \frac{1}{k!} \left[\alpha^k \sin\left(\alpha x + \beta + \frac{k\pi}{2}\right) \right]_{x=0} = \frac{1}{k!} \alpha^k \sin\left(\frac{k\pi}{2} + \beta\right)$$

وهو المطلوب.

(2) إذا كان $y(x) = \cos(\alpha x + \beta)$ فإن التحويل التفاضلي للدالة $y(x)$ هو :

$$Y(k) = \frac{\alpha^k}{k!} \cos\left(\frac{\pi k}{2} + \beta\right)$$

حيث α, β ثوابت.

البرهان:

بالاستفادة من دساتير التحويل المثلثية لدينا :

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos(x) - \sin(x) \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \cdot \cos(x) - \sin(x) \cdot 1 \\ &\Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x) \end{aligned}$$

وبالتالي :

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{d}{dx}(\cos(\alpha x + \beta)) = -\alpha \sin(\alpha x + \beta) = \alpha \cos\left(\alpha x + \beta + \frac{\pi}{2}\right) \\ y''(x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{dy(x)}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\alpha \cos\left(\alpha x + \beta + \frac{\pi}{2}\right)\right) = -\alpha^2 \sin\left(\alpha x + \beta + \frac{\pi}{2}\right) = \alpha^2 \cos\left(\alpha x + \beta + \frac{2\pi}{2}\right) \\ y'''(x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2 y(x)}{dx^2}\right) = \frac{d}{dx}\left(\alpha^2 \cos\left(\alpha x + \beta + \frac{2\pi}{2}\right)\right) \\ &= -\alpha^3 \sin\left(\alpha x + \beta + \frac{2\pi}{2}\right) = \alpha^3 \cos\left(\alpha x + \beta + \frac{3\pi}{2}\right) \\ y''''(x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{d^3 y(x)}{dx^3}\right) = \frac{d}{dx}\left(\alpha^3 \cos\left(\alpha x + \beta + \frac{3\pi}{2}\right)\right) \\ &= -\alpha^4 \sin\left(\alpha x + \beta + \frac{3\pi}{2}\right) = \alpha^4 \cos\left(\alpha x + \beta + \frac{4\pi}{2}\right) \\ &\vdots \\ y^{(k)}(x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{k-1} y(x)}{dx^{k-1}}\right) = \frac{d}{dx}\left(\alpha^{k-1} \cos\left(\alpha x + \beta + (k-1)\frac{\pi}{2}\right)\right) \\ &= -\alpha^k \sin\left(\alpha x + \beta + (k-1)\frac{\pi}{2}\right) = \alpha^k \cos\left(\alpha x + \beta + \frac{k\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

وبالتالي باستخدام تعريف التحويل التفاضلي (1.2) نجد :

$$\begin{aligned} Y(k) &= \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k y(x)}{dx^k} \right]_{x=0} = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k \cos(\alpha x + \beta)}{dx^k} \right]_{x=0} = \frac{1}{k!} \left[\alpha^k \cos\left(\alpha x + \beta + \frac{k\pi}{2}\right) \right]_{x=0} \\ &= \frac{1}{k!} \alpha^k \cos\left(\frac{k\pi}{2} + \beta\right) \end{aligned}$$

وهو المطلوب.

(3) إذا كان $y(x) = e^{\alpha x}$ فإن التحويل التفاضلي للدالة $y(x)$ هو:

$$Y(k) = \frac{\alpha^k}{k!}$$

البرهان:

باستخدام تعريف التحويل التفاضلي (1.2) لدينا:

$$\begin{aligned} Y(k) &= \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k y(x)}{dx^k} \right]_{x=0} \\ &= \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k (e^{\alpha x})}{dx^k} \right]_{x=0} \\ &= \frac{1}{k!} \alpha^k [e^{\alpha x}]_{x=0} \\ &= \frac{\alpha^k}{k!} e^0 \\ &= \frac{\alpha^k}{k!} \cdot 1 = \frac{\alpha^k}{k!} \end{aligned}$$

وهو المطلوب.

(4) إذا كان $y(x) = e^{-\alpha x}$ فإن التحويل التفاضلي للدالة $y(x)$ هو:

$$Y(k) = \frac{(-\alpha)^k}{k!}$$

البرهان:

باستخدام تعريف التحويل التفاضلي (1.2) لدينا:

$$\begin{aligned} Y(k) &= \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k y(x)}{dx^k} \right]_{x=0} \\ &= \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k (e^{-\alpha x})}{dx^k} \right]_{x=0} \\ &= \frac{1}{k!} (-\alpha)^k [e^{-\alpha x}]_{x=0} \\ &= \frac{(-\alpha)^k}{k!} e^0 \\ &= \frac{(-\alpha)^k}{k!} \cdot 1 = \frac{(-\alpha)^k}{k!} \end{aligned}$$

وهو المطلوب.

(5) إذا كان $y(x) = \sinh(ax)$ فإن التحويل التفاضلي للدالة $y(x)$ هو

$$Y(k) = \begin{cases} \frac{\alpha^k}{k!} & \text{if } k \text{ is odd} \\ 0 & \text{if } k \text{ is even} \end{cases}$$

البرهان:

نعلم أن $\sinh(ax) = \frac{1}{2}e^{ax} - \frac{1}{2}e^{-ax}$ وبالتالي لدينا:

$$y(x) = \sinh(ax) = \frac{1}{2}e^{ax} - \frac{1}{2}e^{-ax} \quad (10.2)$$

بتطبيق خاصية التحويل التفاضلي للدالة الأسية على (10.2) نحصل على:

$$Y(k) = \frac{1}{2} \frac{\alpha^k}{k!} - \frac{1}{2} \frac{(-\alpha)^k}{k!}$$

نميز حالتين:

• إذا كان k عدد فردي فإن $(-\alpha)^k = -\alpha^k$ ومنه يكون:

$$Y(k) = \frac{1}{2} \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{1}{2} \frac{\alpha^k}{k!} = \frac{\alpha^k}{k!}$$

• إذا كان k عدد زوجي فإن $(-\alpha)^k = \alpha^k$ ومنه يكون:

$$Y(k) = \frac{1}{2} \frac{\alpha^k}{k!} - \frac{1}{2} \frac{\alpha^k}{k!} = 0$$

وبذلك يتم المطلوب.

(6) إذا كان $y(x) = \cosh(ax)$ فإن التحويل التفاضلي للدالة $y(x)$ هو:

$$Y(k) = \begin{cases} \frac{\alpha^k}{k!} & \text{if } k \text{ is even} \\ 0 & \text{if } k \text{ is odd} \end{cases}$$

البرهان:

نعلم أن $\cosh(ax) = \frac{1}{2}e^{ax} + \frac{1}{2}e^{-ax}$ وبالتالي لدينا:

$$y(x) = \cosh(ax) = \frac{1}{2}e^{ax} + \frac{1}{2}e^{-ax} \quad (11.2)$$

بتطبيق خاصية التحويل التفاضلي للدالة الأسية على (11.2) نحصل على:

$$Y(k) = \frac{1}{2} \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{1}{2} \frac{(-\alpha)^k}{k!}$$

نميز حالتين:

• إذا كان k عدد فردي $(-\alpha)^k = -\alpha^k$ ومنه يكون:

$$Y(k) = \frac{1}{2} \frac{\alpha^k}{k!} - \frac{1}{2} \frac{\alpha^k}{k!} = 0$$

• إذا كان k عدد زوجي فإن $(-\alpha)^k = \alpha^k$ ومنه يكون:

$$Y(k) = \frac{1}{2} \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{1}{2} \frac{\alpha^k}{k!} = \frac{\alpha^k}{k!}$$

وبذلك يتم المطلوب.

(7) إذا كان $y(x) = x^n$ فإن التحويل التفاضلي للدالة $y(x)$ هو

$$Y(k) = \delta(k - n) = \begin{cases} 1 & , \text{ if } k = n \\ 0 & , \text{ if } k \neq n \end{cases}$$

البرهان:

من قواعد الاشتقاق لدينا:

$$\frac{d^k y(x)}{dx^k} = \frac{d^k (x^n)}{dx^k} = n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1)x^{n-k}$$

باستخدام تعريف التحويل التفاضلي (1.2) لدينا:

$$\begin{aligned} Y(k) &= \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k y(x)}{dx^k} \right]_{x=0} \\ &= \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k (x^n)}{dx^k} \right]_{x=0} \\ &= \frac{1}{k!} [n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1)x^{n-k}]_{x=0} \end{aligned}$$

نميز حالتين:

• إذا كان $n = k$ فإن:

$$Y(k) = \frac{1}{k!} k(k-1)(k-2) \dots (1) = \frac{1}{k!} k! = 1$$

• إذا كان $n \neq k, x = 0$ فإن:

$$Y(k) = \frac{1}{k!} 0 = 0$$

وبالتالي نجد:

$$Y(k) = \delta(k - n) = \begin{cases} 1 & , \text{ if } k = n \\ 0 & , \text{ if } k \neq n \end{cases}$$

وهو المطلوب.

(8) إذا كان $y(x) = \alpha x^n$ فإن التحويل التفاضلي للدالة $y(x)$ هو :

$$Y(k) = \alpha \delta(k - n) \quad , \quad \delta(k - n) = \begin{cases} 1 & , \text{ if } k = n \\ 0 & , \text{ if } k \neq n \end{cases}$$

حيث α ثابت.

البرهان:

لدينا

$$\frac{d^k y(x)}{dx^k} = \frac{d^k (x^n)}{dx^k} = n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1)x^{n-k}$$

باستخدام تعريف التحويل التفاضلي (1.2) لدينا:

$$\begin{aligned} Y(k) &= \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k y(x)}{dx^k} \right]_{x=0} \\ &= \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k (\alpha x^n)}{dx^k} \right]_{x=0} \\ &= \frac{1}{k!} \alpha \left[\frac{d^k (x^n)}{dx^k} \right]_{x=0} \\ &= \alpha \frac{1}{k!} [n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1)x^{n-k}]_{x=0} \end{aligned}$$

نميز حالتين:

• إذا كان $n = k$ فإن:

$$Y(k) = \alpha \frac{1}{k!} k(k-1)(k-2) \dots (1) = \alpha \frac{1}{k!} k! = \alpha$$

• إذا كان $n \neq k, x = 0$ فإن:

$$Y(k) = \alpha \frac{1}{k!} \cdot 0 = 0$$

وبالتالي نجد:

$$Y(k) = \alpha \delta(k - n) ; \quad \delta(k - n) = \begin{cases} 1 & , \text{ if } k = n \\ 0 & , \text{ if } k \neq n \end{cases}$$

وهو المطلوب.

(9) إذا كان $y(x) = 1$ فإن التحويل التفاضلي للدالة $y(x)$ هو

$$Y(k) = \delta(k) = \begin{cases} 1 & , \text{ if } k = 0 \\ 0 & , \text{ if } k \neq 0 \end{cases}$$

البرهان:

من تعريف التحويل التفاضلي الذي يعطى بالعلاقة الآتية:

$$Y(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k y(x)}{dx^k} \right]_{x=0}$$

من أجل $k = 0$

$$Y(0) = \frac{1}{0!} \left[\frac{d^0 y(x)}{dx^0} \right]_{x=0} = \frac{1}{1} [y(x)]_{x=0} = y(0) = 1$$

من أجل $k \geq 1$

$$\frac{d^k y(x)}{dx^k} = \frac{d^k (1)}{dx^k} = 0 \Rightarrow Y(k) = \frac{1}{k!} \cdot 0 = 0$$

وبالتالي نستنتج:

$$Y(k) = \delta(k) = \begin{cases} 1 & , \text{ if } k = 0 \\ 0 & , \text{ if } k \neq 0 \end{cases}$$

وهو المطلوب.

2-1-3 الفكرة العامة لطريقة التحويل التفاضلي DTM

في هذه الفقرة، سنعرض كيفية تطبيق طريقة التحويل التفاضلي DTM لحل المعادلات التفاضلية العادية،

معتمدين في ذلك على المفهوم الأساسي لطريقة التحويل التفاضلي المختزلة RDTM كما ورد في دراسة

(Keskin and Oturanc, 2009)، حيث تم تقديم هذه الطريقة في سياق المعادلات التفاضلية الجزئية.

ومن هذا المنطلق، سنعيد صياغة المعادلة بما يتناسب مع طبيعة المعادلات التفاضلية العادية، حيث يتم

عرض الصيغة العامة للمعادلة التفاضلية العادية التالية مع شروطها الابتدائية كما يلي:

$$L(y(x)) + R(y(x)) + N(y(x)) = g(x) \quad (12.2)$$

$$y^{(i)}(0) = c_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

حيث أن:

$y(x)$ دالة مجهولة، $L = \frac{d^n}{dx^n}$ مؤثر تفاضلي خطي يمثل المشتق من المرتبة n

$R(y(x))$ يمثل بقية الحدود الخطية، $N(y(x))$ يمثل الحدود غير الخطية، $g(x)$ دالة معطاة

نعيد كتابة المعادلة (12.2) على الشكل الآتي:

$$\frac{d^n y(x)}{dx^n} = g(x) - R(y(x)) - N(y(x)) \quad (13.2)$$

حسب طريقة DTM يمكن أن إنشاء علاقة تكرارية للمعادلة (13.2) بالشكل الآتي:

$$(k+1)(k+2) \dots (k+n)Y(k+n) = G(k) - R(Y(k)) - N(Y(k)) \quad (14.2)$$

حيث أن:

$(k+1)(k+2) \dots (k+n)Y(k+n)$, $G(k)$, $R(Y(k))$, $N(Y(k))$ تمثل التحويلات التفاضلية

لكل من $Ly(x) = \frac{d^n y(x)}{dx^n}$, $g(x)$, $R(y(x))$, $N(y(x))$ على الترتيب.

وبتطبيق تعريف التحويل التفاضلي (1.2) على الشروط الابتدائية المرافقة للمعادلة (12.2) نحصل على

الشروط الابتدائية بالصيغة المحولة كما يلي:

$$\begin{cases} Y(0) = c_0 \\ Y(1) = c_1 \\ Y(2) = \frac{1}{2!} c_2 \\ Y(3) = \frac{1}{3!} c_3 \\ \vdots \\ Y(n-1) = \frac{1}{(n-1)!} c_{n-1} \end{cases} \quad (15.2)$$

ويتم تحديد بقية قيم المعاملات المجهولة $Y(n)$, $Y(n+1)$, $Y(n+2)$, ... باستخدام العلاقة التكرارية (14.2)،

ومن ثم يتم الحصول على الحل النهائي من خلال تعويض جميع قيم المعاملات الناتجة في متسلسلة الحل

لطريقة DTM والتي تعطى بالعلاقة الآتية:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} Y(k)x^k$$

ملاحظة: يتم تطبيق طريقة DTM بالأسلوب السابق نفسه في حل المعادلات التفاضلية العادية الخطية ؛

باعتبارها حالة خاصة من المعادلة (12.2)، وذلك حينما يكون الحد غير الخطي معدوماً أي $N(y(x)) = 0$

1-2-4 أمثلة تطبيقية

مثال (1): معادلة ريكاتي (Riccati Equation) (Opanuga *et al.*, 2015)

هي معادلة تفاضلية عادية غير خطية من المرتبة الأولى، تعود تسميتها نسبةً إلى الإيطالي

Count Jacopo Francesco Riccati (1676–1754)، وتُعرض الأسس النظرية لهذه المعادلة في

كتاب ريد (Reid, 1972)، حيث تُستخدم في تطبيقات متعددة تشمل نظرية العمليات العشوائية، والتحكم

الأمثل، ومسائل الانتشار وغيرها من التطبيقات الأخرى.

لتكن مسألة القيم الابتدائية لمعادلة ريكاتي:

$$y'(x) = 16x^2 - 5 + 8xy(x) + y^2(x) \quad (16.2)$$

مع الشرط الابتدائي $y(0) = 1$

الحل:

بتطبيق خواص التحويل التفاضلي على المعادلة (16.2) وتطبيق تعريف التحويل التفاضلي على الشرط

الابتدائي $y(0) = 1$ نحصل على:

$$(k+1)Y(k+1) = 16\delta(k-2) - 5\delta(k) + 8 \sum_{r=0}^k \delta(r-1)Y(k-r) + \sum_{r=0}^k Y(r)Y(k-r)$$

$$Y(0) = 1$$

بالتعويض في العلاقة التكرارية السابقة من أجل $k = 0$ نجد:

$$Y(1) = 16(0) - 5(1) + 8(0)Y(0) + Y(0)Y(0)$$

$$Y(1) = -5 + 1 = -4$$

$$\Rightarrow Y(1) = -4$$

من أجل $k = 1, 2, 3, \dots$ يكون:

$$Y(2) = Y(3) = Y(4) = Y(5) = Y(6) = Y(7) = Y(8) \dots = 0$$

بتعويض قيم المعاملات السابقة في متسلسلة الحل نجد:

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} Y(k)x^k = Y(0) + Y(1)x + Y(2)x^2 + \dots \\ &= 1 - 4x \end{aligned}$$

وهو الحل الدقيق لهذه المسألة، حيث نلاحظ فاعلية طريقة DTM في الوصول إلى الحل الدقيق من خلال

إجراء تكرارين فقط.

مثال (2): مسألة القيم الابتدائية للمعادلة التفاضلية العادية غير الخطية من المرتبة الرابعة:

$$y''''(x) = 0.09 \left(\frac{(y''(x))^2 y'(x) y(x)}{y'''(x)} + y''(x) y^2(x) \right) \quad (17.2)$$

مع الشروط الابتدائية

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = -\frac{1}{10}, \quad y''(0) = \frac{2}{100}, \quad y'''(0) = -\frac{6}{1000}$$

إنّ هذه المسألة محلولة سابقاً باستخدام طريقة three point block في المرجع (Rasedee *et al.*, 2021)

وسنقوم في هذا المثال بحلها باستخدام طريقة DTM.

الحل:

بضرب طرفي المعادلة (17.2) بـ $y'''(x)$ تصبح بالشكل الآتي:

$$y'''(x)y''''(x) = 0.09(y''(x))^2 y'(x)y(x) + 0.09y'''(x) y''(x) y^2(x) \quad (18.2)$$

بتطبيق خواص التحويل التفاضلي على المعادلة (18.2) وتطبيق تعريف التحويل التفاضلي على الشروط

الابتدائية المعطاة نحصل على:

$$\begin{aligned} & \sum_{r=0}^k (r+1)(r+2)(r+3)Y(r+3)(k-r+1)(k-r+2)(k-r+3)(k-r+4)Y(k-r+4) \\ &= 0.09 \sum_{r=0}^k \sum_{m=0}^r \sum_{s=0}^m (s+1)(s+2)Y(s+2)(m-s+1)(m-s+2)Y(m-s+2)(r-m+1)Y(r-m+1)Y(k-r) \\ &+ 0.09 \sum_{r=0}^k \sum_{m=0}^r \sum_{s=0}^m (s+1)(s+2)(s+3)Y(s+3)(m-s+1)(m-s+2)Y(m-s+2)Y(r-m)Y(k-r) \end{aligned} \quad (19.2)$$

$$Y(0) = 1, \quad Y(1) = -\frac{1}{10}, \quad Y(2) = \frac{1}{100} = \frac{1}{10^2}, \quad Y(3) = -\frac{1}{1000} = -\frac{1}{10^3}$$

بالتعويض في العلاقة التكرارية (19.2) من أجل قيم $k \geq 0$ وحساب المعاملات $Y(4), Y(5), \dots$ فنجد:

$$\begin{aligned} k=0 &\Rightarrow Y(4) = \frac{1}{10000} = \frac{1}{10^4} \\ k=1 &\Rightarrow Y(5) = -\frac{1}{100000} = -\frac{1}{10^5} \\ k=2 &\Rightarrow Y(6) = \frac{1}{1000000} = \frac{1}{10^6} \\ k=3 &\Rightarrow Y(7) = -\frac{1}{10000000} = -\frac{1}{10^7} \\ k=4 &\Rightarrow Y(8) = \frac{1}{100000000} = \frac{1}{10^8} \end{aligned}$$

$$k = 5 \Rightarrow Y(9) = -\frac{1}{1000000000} = -\frac{1}{10^9}$$

$$k = 6 \Rightarrow Y(10) = \frac{1}{10000000000} = \frac{1}{10^{10}}$$

$$\vdots$$

وبالتالي الحل الناتج هو:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} Y(k)x^k$$

$$= 1 - \frac{x}{10} + \frac{x^2}{10^2} - \frac{x^3}{10^3} + \frac{x^4}{10^4} - \frac{x^5}{10^5} + \frac{x^6}{10^6} - \frac{x^7}{10^7} + \frac{x^8}{10^8} - \frac{x^9}{10^9} + \frac{x^{10}}{10^{10}} - \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x}{10}\right)^n, \quad \left|-\frac{x}{10}\right| < 1 \Rightarrow |x| < 10$$

وبالتالي نحصل على التابع الهندسي:

$$y(x) = \frac{10}{10+x}, \quad |x| < 10$$

والذي يمثل الحل الدقيق لهذه المسألة.

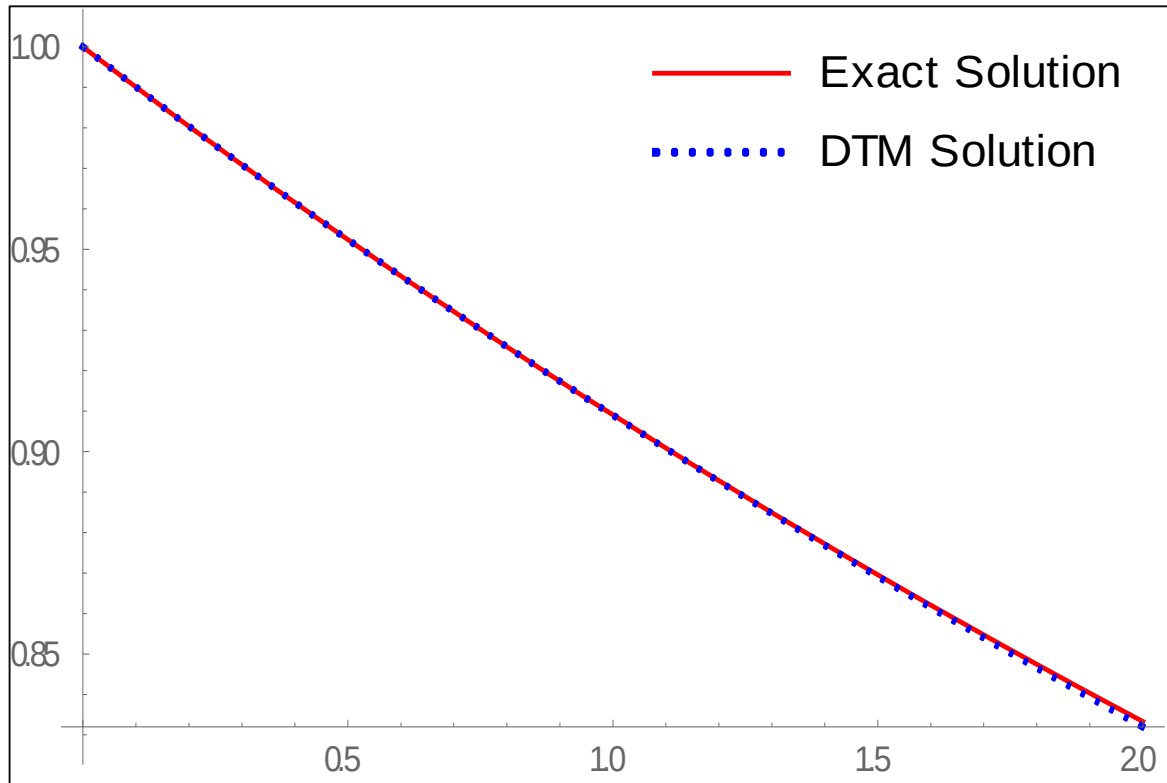
يتضمن كلاً من الجدول (1) والشكلين (1) و (2) مقارنة بين الحل الدقيق والحل الناتج عن طريقة DTM

باستخدام 4 و 5 تكرارات.

الجدول (1): مقارنة عددية بين الحل الدقيق للمثال (2) والحل الناتج عن تطبيق طريقة DTM باستخدام 4 و 5 تكرارات

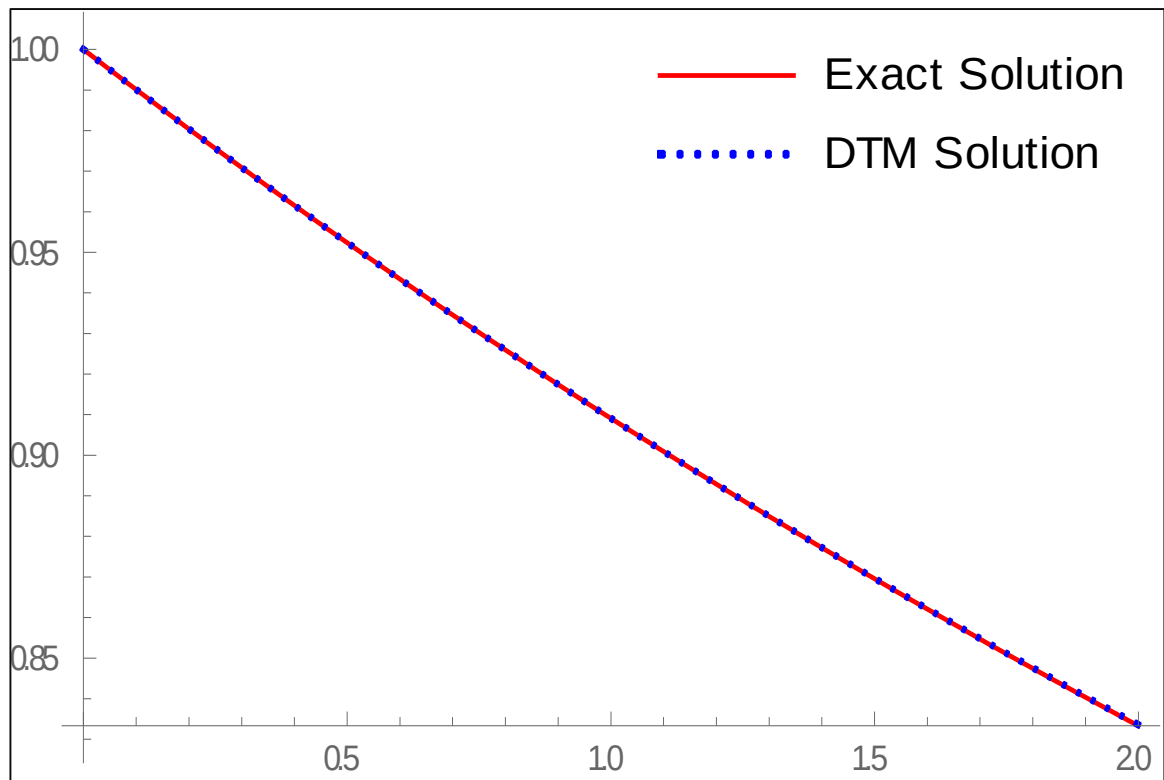
x	Exact Solution	DTM Solution		Absolute Error Exact Solution – DTM Solution	
		4 iterations	5 iterations	4 iterations	5 iterations
0	1	1	1	0	0
0.2	0.980392	0.980392	0.980392	1.6×10^{-7}	3.1×10^{-9}
0.4	0.961539	0.961537	0.961539	2.5×10^{-6}	9.8×10^{-8}
0.6	0.943396	0.943384	0.943396	1.2×10^{-5}	7.3×10^{-7}
0.8	0.925926	0.925889	0.925925	3.8×10^{-5}	3.0×10^{-6}
1	0.909091	0.909000	0.909090	9.1×10^{-5}	9.0×10^{-6}
1.2	0.892857	0.892672	0.892855	1.9×10^{-4}	2.2×10^{-5}
1.4	0.877193	0.876857	0.877191	3.4×10^{-4}	4.7×10^{-5}
1.6	0.862069	0.861504	0.862066	5.7×10^{-4}	9.0×10^{-5}
1.8	0.847457	0.846569	0.847454	8.9×10^{-4}	1.6×10^{-4}
2	0.833333	0.832000	0.833330	1.3×10^{-3}	2.7×10^{-4}

المصدر: تم إعداده باستخدام برنامج Mathematica 12.0



المصدر: تم إعداده باستخدام برنامج Mathematica 12.0

الشكل (1): مقارنة بيانية بين الحل الدقيق للمثال (2) والحل الناتج عن تطبيق طريقة DTM باستخدام 4 تكرارات



المصدر: تم إعداده باستخدام برنامج Mathematica 12.0

الشكل (2): مقارنة بيانية بين الحل الدقيق للمثال (2) والحل الناتج عن تطبيق طريقة DTM باستخدام 5 تكرارات

مثال (3): مسألة القيم الحدية للمعادلة التفاضلية العادية غير الخطية من المرتبة الثامنة التالية:
(Hussin and Mandangen, 2014)

$$y^{(8)}(x) = e^{-x}y^2(x), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (20.2)$$

مع الشروط الحدية عند النقطتين $x = 0, x = 1$

$$y(0) = 1, \quad y^{(1)}(0) = 1, \quad y^{(2)}(0) = 1, \quad y^{(3)}(0) = 1, \quad y^{(4)}(0) = 1, \quad y^{(5)}(0) = 1$$

$$y(1) = e, \quad y'(1) = e$$

الحل:

بتطبيق خواص التحويل التفاضلي على المعادلة (20.2)، وتطبيق تعريف التحويل التفاضلي على الشروط

الحدية عند النقطة $x = 0$ نحصل على:

$$Y(k+8) = \frac{\sum_{r=0}^k \sum_{m=0}^r \frac{(-1)^m}{m!} Y(r-m)Y(k-r)}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)(k+5)(k+6)(k+7)(k+8)} \quad (21.2)$$

$$Y(0) = 1, \quad Y(1) = 1, \quad Y(2) = \frac{1}{2!}, \quad Y(3) = \frac{1}{3!}, \quad Y(4) = \frac{1}{4!}, \quad Y(5) = \frac{1}{5!}$$

ونفرض المعاملات المجهولة:

$$Y(6) = A, \quad Y(7) = B$$

بالتعويض في العلاقة التكرارية (21.2) من أجل قيم $(k = 0,1,2,3,4,5,6,7,8)$ نحصل على قيم المعاملات التالية:

$$k = 0 \Rightarrow Y(8) = \frac{1}{8!}$$

$$k = 1 \Rightarrow Y(9) = \frac{1}{9!}$$

$$k = 2 \Rightarrow Y(10) = \frac{1}{10!}$$

$$k = 3 \Rightarrow Y(11) = \frac{1}{11!}$$

$$k = 4 \Rightarrow Y(12) = \frac{1}{12!}$$

$$k = 5 \Rightarrow Y(13) = \frac{1}{13!}$$

$$k = 6 \Rightarrow Y(14) = \frac{1}{121080960} \left(2A - \frac{1}{720} \right)$$

$$k = 7 \Rightarrow Y(15) = \frac{1}{259459200} \left(2B - \frac{1}{5040} \right)$$

$$k = 8 \Rightarrow Y(16) = \frac{1}{16!}$$

بالتعويض في متسلسلة الحل لطريقة DTM يكون الحل التقريبي الناتج هو:

$$\begin{aligned} y(x) = & 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + Ax^6 + Bx^7 + \frac{1}{8!}x^8 + \frac{1}{9!}x^9 + \frac{1}{10!}x^{10} \\ & + \frac{1}{11!}x^{11} + \frac{1}{12!}x^{12} + \frac{1}{13!}x^{13} + \frac{1}{121080960} \left(2A - \frac{1}{720} \right) x^{14} \\ & + \frac{1}{259459200} \left(2B - \frac{1}{5040} \right) x^{15} + \frac{1}{16!}x^{16} \end{aligned} \quad (22.2)$$

لتحديد قيم الثوابت المجهولة A, B نقوم بتعويض الشرطين الحدين $y(1) = y'(1) = e$ في الحل المعطى

بالعلاقة (22.2) فنحصل على جملة المعادلتين الآتيتين:

$$\frac{3789388585007 + 1394852682240A + 1394852669952B}{1394852659200} = e$$

$$\frac{252993855059 + 560431893600A + 653837194800B}{93405312000} = e$$

بحل المعادلات السابقة باستخدام برنامج Mathematica 12.0 نحصل على:

$$A = 0.001388889455, \quad B = 0.000198412132$$

بتعويض قيم الثوابت A, B في الحل المعطى بالعلاقة (22.2) نحصل على:

$$\begin{aligned} y(x) = & 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + 0.001388889455x^6 \\ & + 0.000198412132x^7 + \frac{1}{8!}x^8 + \frac{1}{9!}x^9 + \frac{1}{10!}x^{10} + \frac{1}{11!}x^{11} + \frac{1}{12!}x^{12} \\ & + \frac{1}{13!}x^{13} + 1.147075495 \times 10^{-11}x^{14} + 7.647120068 \times 10^{-13}x^{15} + \frac{1}{16!}x^{16} \end{aligned}$$

وهو الحل التقريبي الناتج عن تطبيق طريقة DTM على هذه المسألة، يتضمن كلاً من الجدول

(2) والشكل (3) مقارنة بين الحل الدقيق والحل التقريبي الناتج عن طريقة DTM، كما يتضمن

الجدول مقارنة بين الخطأ المطلق الناتج عن تطبيق طريقة DTM والخطأ المطلق الناتج عن

تطبيق طريقة MVAM في المرجع (Hesaaraki and Jalilian, 2008) في حل هذه المسألة.

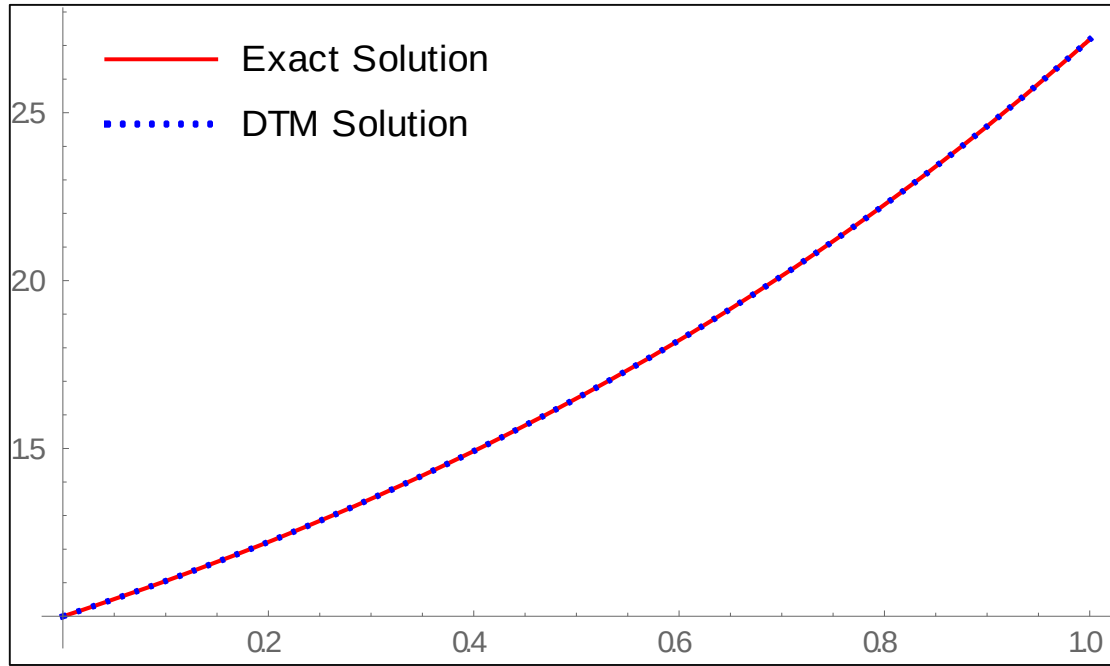
علماً أنّ الحل الدقيق للمسألة هو:

$$y_{\text{Exact}}(x) = e^x$$

الجدول (2): مقارنة عددية بين الحل الدقيق للمثال (3) والحل التقريبي الناتج عن تطبيق طريقة DTM باستخدام 17 تكراراً

x	Exact Solution	DTM Solution	Absolute Error Exact Solution – DTM Solution	Absolute Error Exact Solution – MVAM Solution
0.25	1.2840254167	1.2840254167	$1.428874763 \times 10^{-23}$	7.02×10^{-17}
0.50	1.6487212707	1.6487212707	$1.428874760 \times 10^{-23}$	2.48×10^{-15}
0.75	2.1170000166	2.1170000166	$1.428872473 \times 10^{-23}$	5.80×10^{-15}
0.85	2.3396468519	2.3396468519	$1.428857802 \times 10^{-23}$	4.50×10^{-15}
0.95	2.5857096593	2.5857096593	$1.428774223 \times 10^{-23}$	3.17×10^{-14}
1	2.7182818285	2.7182818285	$1.428646329 \times 10^{-23}$	1.60×10^{-14}

المصدر: (Hussin and Mandangen, 2014)



المصدر: تم إعداده باستخدام برنامج Mathematica 12.0

الشكل (3): مقارنة بيانية بين الحل الدقيق للمثال (3) والحل التقريبي الناتج عن تطبيق طريقة DTM باستخدام 17 تكراراً

مثال (4): مسألة القيم الحدية للمعادلة التفاضلية العادية غير الخطية من المرتبة التاسعة التالية:

$$y^{(9)}(x) - y(x)y'(x) = e^{-2x}(2 + e^x(x - 10) - 3x + x^2), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (23.2)$$

مع الشروط الحدية عند النقطتين $x = 0, x = 1$

$$y(0) = 1, \quad y^{(1)}(0) = -2, \quad y^{(2)}(0) = 3, \quad y^{(3)}(0) = -4, \quad y^{(4)}(0) = 5$$

$$y(1) = 0, \quad y^{(1)}(1) = -e^{-1}, \quad y^{(2)}(1) = 2e^{-1}, \quad y^{(3)}(1) = -3e^{-1}$$

ملاحظة: إن هذه المسألة محلولة سابقاً باستخدام طريقة HAM في المرجع (Sadaf and Akram, 2017)،

وسنقوم في هذا المثال بحلها باستخدام طريقة DTM.

الحل:

نعيد كتابة المعادلة (23.2) على الشكل الآتي:

$$y^{(9)}(x) = y(x)y'(x) + 2e^{-2x} + xe^{-x} - 10e^{-x} - 3xe^{-2x} + x^2e^{-2x} \quad (24.2)$$

بتطبيق خواص التحويل التفاضلي على المعادلة (24.2) وتطبيق تعريف التحويل التفاضلي على الشروط

الحدية عند النقطة $x = 0$ نحصل على:

$$\begin{aligned} & (k+1)(k+2)(k+3)(k+4)(k+5)(k+6)(k+7)(k+8)(k+9)Y(k+9) \\ &= \sum_{r=0}^k Y(r)(k-r+1)Y(k-r+1) + 2\frac{(-2)^k}{k!} + \sum_{r=0}^k \delta(r-1)\frac{(-1)^{k-r}}{(k-r)!} - 10\frac{(-1)^k}{k!} \\ & - 3\sum_{r=0}^k \delta(r-1)\frac{(-2)^{k-r}}{(k-r)!} + \sum_{r=0}^k \delta(r-2)\frac{(-2)^{k-r}}{(k-r)!} \end{aligned} \quad (25.2)$$

$$Y(0) = 1, \quad Y(1) = -2, \quad Y(2) = \frac{3}{2}, \quad Y(3) = -\frac{2}{3}, \quad Y(4) = \frac{5}{24}$$

نفرض المعاملات المجهولة:

$$Y(5) = A, \quad Y(6) = B, \quad Y(7) = C, \quad Y(8) = D$$

بالتعويض في العلاقة التكرارية (24.2) من أجل قيم $(k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$ نحصل على قيم المعاملات التالية:

$$k = 0 \Rightarrow Y(9) = -\frac{1}{36288}$$

$$\begin{aligned}
k=1 &\Rightarrow Y(10) = \frac{11}{3628800} \\
k=2 &\Rightarrow Y(11) = -\frac{1}{3326400} \\
k=3 &\Rightarrow Y(12) = \frac{13}{479001600} \\
k=4 &\Rightarrow Y(13) = \frac{1}{259459200} \left(5A - \frac{1}{3} \right) \\
k=5 &\Rightarrow Y(14) = \frac{1}{726485760} \left(-12A + 6B - \frac{8}{15} \right) \\
k=6 &\Rightarrow Y(15) = \frac{1}{1816214400} \left(\frac{21A}{2} - 14B + 7C + \frac{13}{20} \right) \\
k=7 &\Rightarrow Y(16) = \frac{1}{4151347200} \left(-\frac{16A}{3} + 12B - 16C + 8D - \frac{57}{140} \right)
\end{aligned}$$

بالتعويض في متسلسلة الحل لطريقة DTM يكون الحل التقريبي الناتج هو:

$$\begin{aligned}
y(x) = & 1 - 2x + \frac{3x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} + \frac{5x^4}{24} + Ax^5 + Bx^6 + Cx^7 + Dx^8 - \frac{1}{36288}x^9 \\
& + \frac{11}{3628800}x^{10} - \frac{1}{3326400}x^{11} + \frac{13}{479001600}x^{12} + \frac{1}{259459200} \left(5A - \frac{1}{3} \right) x^{13} \\
& + \frac{1}{726485760} \left(-12A + 6B - \frac{8}{15} \right) x^{14} \\
& + \frac{1}{1816214400} \left(\frac{21A}{2} - 14B + 7C + \frac{13}{20} \right) x^{15} \\
& + \frac{1}{4151347200} \left(-\frac{16A}{3} + 12B - 16C + 8D - \frac{57}{140} \right) x^{16} \quad (26.2)
\end{aligned}$$

لتحديد قيم الثوابت المجهولة A, B, C, D نقوم بتعويض الشروط الحدية للمسألة عند $x = 1$ في الحل المعطى بالعلاقة (26.2) فنحصل على جملة المعادلات الآتية:

$$\begin{aligned}
\frac{24201777791}{581188608000} + \frac{10897286479A}{10897286400} + \frac{290594305B}{290594304} + C + \frac{518918401D}{518918400} &= 0 \\
-\frac{252586043}{1513512000} + \frac{1111968019A}{222393600} + \frac{129729601B}{21621600} + \frac{1816214399C}{259459200} + \frac{259459201D}{32432400} &= -e^{-1} \\
\frac{32653913143}{21794572800} + \frac{1037836847A}{51891840} + \frac{51891841B}{1729728} + \frac{363242879C}{8648640} + \frac{121080961D}{2162160} &= 2e^{-1} \\
\frac{17090209}{17297280} + \frac{3113510839A}{51891840} + \frac{518918429B}{4324320} + \frac{86486399C}{411840} + \frac{51891841D}{154440} &= -3e^{-1}
\end{aligned}$$

بحل جملة المعادلات السابقة باستخدام برنامج Mathematica 12.0 نحصل على:

$$\begin{aligned}
A &= -0.04999999999225823, \quad B = 0.009722222196875314 \\
C &= -0.0015873015594008483, \quad D = 0.00022321427537417833
\end{aligned}$$

بتعويض قيم الثوابت A, B, C, D في الحل المعطى بالعلاقة (26.2) نحصل على:

$$y(x) = 1 - 2x + \frac{3x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} + \frac{5x^4}{24} - 0.04999999999225823x^5 \\ + 0.009722222196875312x^6 - 0.0015873015594008485x^7 \\ + 0.00022321427537417833x^8 - \frac{x^9}{36288} + \frac{11x^{10}}{3628800} - \frac{x^{11}}{3326400} \\ + \frac{13x^{12}}{479001600} - 2.248266137005835 \times 10^{-9}x^{13} \\ + 1.720611836287298 \times 10^{-10}x^{14} - 1.223546162323771 \times 10^{-11}x^{15} \\ + 8.125109358308666 \times 10^{-13}x^{16}$$

وهو الحل التقريبي الناتج عن تطبيق طريقة DTM على هذه المسألة.

يتضمن الجدول (3)، والشكل (4) مقارنة بين الحل الدقيق والحل التقريبي الناتج عن طريقة DTM، كما

يتضمن الجدول مقارنة بين الخطأ المطلق الناتج عن تطبيق طريقة DTM، والخطأ المطلق الناتج عن تطبيق

طريقة HAM في المرجع (Sadaf and Akram, 2017) في حل هذه المسألة.

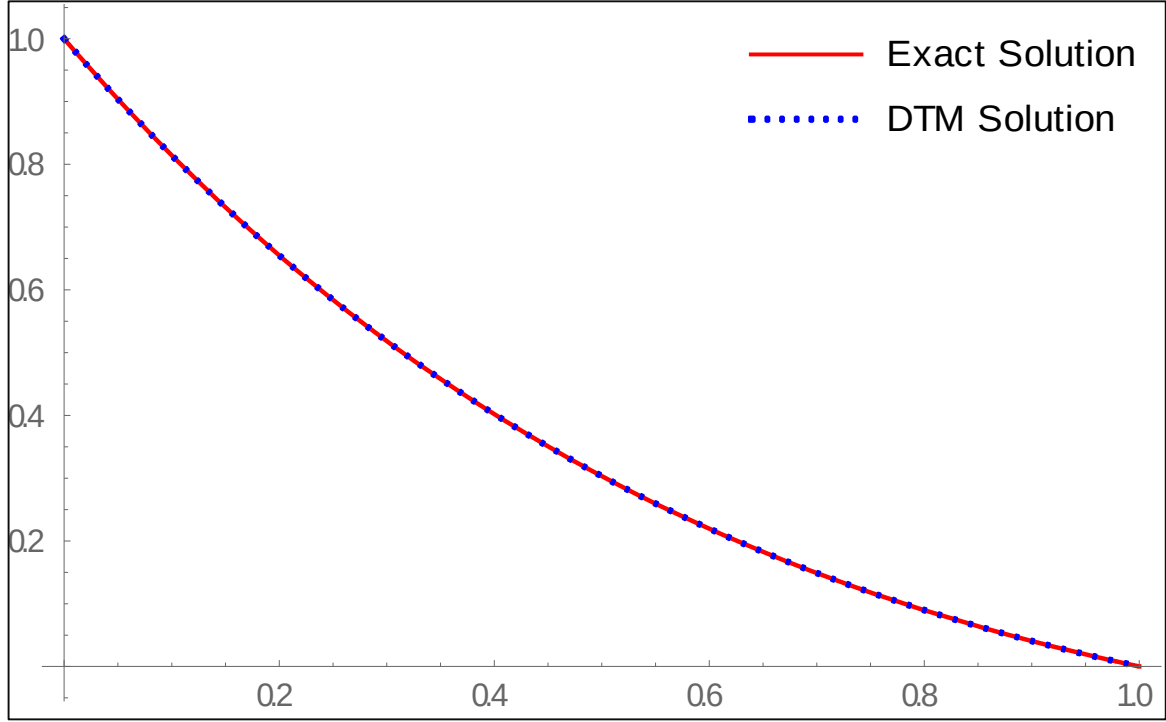
علماً أن الحل الدقيق للمسألة هو:

$$y_{\text{Exact}}(x) = (1 - x)e^{-x}$$

الجدول (3): مقارنة عددية بين الحل الدقيق للمثال (4) والحل التقريبي الناتج عن تطبيق طريقة DTM باستخدام 17 تكراراً

x	Exact Solution	DTM Solution	Absolute Error Exact Solution – DTM Solution	Absolute Error Exact Solution – HAM Solution
0	1.000000000	1.000000000	0	0
0.1	0.8143536762	0.8143536762	1.110223×10^{-16}	3.648192×10^{-11}
0.2	0.6549846025	0.6549846025	1.221245×10^{-15}	6.893886×10^{-10}
0.3	0.5185727545	0.5185727545	5.662137×10^{-15}	2.896354×10^{-9}
0.4	0.4021920276	0.4021920276	1.443290×10^{-14}	6.203250×10^{-9}
0.5	0.3032653299	0.3032653299	2.348122×10^{-14}	8.573576×10^{-9}
0.6	0.2195246544	0.2195246544	2.675637×10^{-14}	8.182360×10^{-9}
0.7	0.1489755911	0.1489755911	2.087219×10^{-14}	5.222692×10^{-9}
0.8	0.0898657928	0.0898657928	9.894863×10^{-15}	1.870414×10^{-9}
0.9	0.0898657928	0.0898657928	2.838008×10^{-15}	1.950906×10^{-10}
1	0.000000000	$3.3093848300 \times 10^{-16}$	3.309385×10^{-16}	1.524790×10^{-15}

المصدر: تم إعداده باستخدام برنامج Mathematica 12.0



المصدر: تم إعداده باستخدام برنامج Mathematica 12.0

الشكل (4): مقارنة بيانية بين الحل الدقيق للمثال (4) والحل التقريبي الناتج عن تطبيق طريقة DTM باستخدام 17 تكراراً

مثال (5): لتكن معادلة فولتيرا التكاملية غير الخطية: (Jothika and Savitha, 2018)

$$y(x) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}e^{-2x} - \int_0^x (y^2(t) + y(t))dt \quad (27.2)$$

الحل:

نعيد كتابة المعادلة على الشكل الآتي:

$$y(x) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}e^{-2x} - \int_0^x y^2(t)dt - \int_0^x y(t)dt \quad (28.2)$$

بتطبيق خواص التحويل التفاضلي على المعادلة (28.2) نحصل على العلاقة التكرارية الآتية:

$$Y(k) = \frac{3}{2}\delta(k) - \frac{1}{2}\frac{(-2)^k}{k!} - \frac{1}{k}\sum_{r=0}^{k-1} Y(r)Y(k-1-r) - \frac{Y(k-1)}{k}, \quad k \geq 1 \quad (29.2)$$

حيث $Y(0) = 1$

بالتعويض في العلاقة التكرارية (29.2) من أجل قيم $k \geq 1$ وحساب المعاملات $Y(1), Y(2), \dots$ فنجد:

$$Y(1) = -1, \quad Y(2) = \frac{1}{2!}, \quad Y(3) = -\frac{1}{3!}, \quad Y(4) = \frac{1}{4!}, \quad Y(5) = -\frac{1}{5!},$$

$$Y(6) = \frac{1}{6!}, \quad Y(7) = -\frac{1}{7!}, \quad Y(8) = \frac{1}{8!}, \quad Y(9) = -\frac{1}{9!}, \quad Y(10) = \frac{1}{10!}, \dots$$

وبالتالي الحل الناتج هو:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} Y(k)x^k$$

$$= 1 - x + \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{6!}x^6 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{8!}x^8 - \frac{1}{9!}x^9 + \frac{1}{10!}x^{10} - \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n = e^{-x}$$

وهو الحل الدقيق لهذه المعادلة.

مثال (6): لتكن مسألة القيم الابتدائية لمعادلة فولتيرا التفاضلية-التكاملية غير الخطية من المرتبة الرابعة:

$$y''''(x) = \sinh(x) + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\cosh(x)\sinh(x) - \int_0^x y'(t)y'(t)dt \quad (30.2)$$

مع الشروط الابتدائية

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = 0, \quad y'''(0) = 1$$

تم حل هذه المسألة على شكل مسألة قيم ابتدائية ممثلة بمعادلة فولتيرا التفاضلية-التكاملية من المرتبة الثانية باستخدام

طريقة متسلسلة الحل في المرجع (Ansari et al., 2024)، في هذا المثال سنقوم بإعادة صياغتها على شكل مسألة

قيم ابتدائية من المرتبة الرابعة وحلها باستخدام طريقة DTM.

الحل:

$$\text{بوضع } f(x) = \sinh(x), \quad g(x) = \cosh(x), \quad h(x) = \int_0^x (y'(t))^2 dt \quad \text{في المعادلة (30.2)}$$

تصبح بالشكل الآتي:

$$y''''(x) = f(x) + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}g(x)f(x) - h(x) \quad (31.2)$$

نوجد التحويلات التفاضلية لحدود المعادلة (31.2) على النحو الآتي:

التحويل التفاضلي لـ $y''''(x)$ هو :

$$(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)Y(k+4)$$

التحويل التفاضلي لـ $\frac{1}{2}x$ هو :

$$\frac{1}{2}\delta(k-1), \delta(k-1) = \begin{cases} 1 & \text{if } k=1 \\ 0 & \text{if } k \neq 1 \end{cases}$$

التحويل التفاضلي للدالة $f(x) = \sinh(x)$ هو :

$$F(k) = \begin{cases} \frac{a^k}{k!} & \text{if } k \text{ is odd} \\ 0 & \text{if } k \text{ is even} \end{cases}$$

التحويل التفاضلي للدالة $g(x) = \cosh(x)$ هو :

$$G(k) = \begin{cases} \frac{a^k}{k!} & \text{if } k \text{ is even} \\ 0 & \text{if } k \text{ is odd} \end{cases}$$

التحويل التفاضلي لـ $g(x)f(x) = \cosh(x)\sinh(x)$ باستخدام خاصية التحويل التفاضلي لجداء دالتين

هو :

$$\sum_{r=0}^k G(r)F(k-r)$$

التحويل التفاضلي للدالة $h(x) = \int_0^x (y'(t))^2 dt$ باستخدام خاصية التحويل التفاضلي لتكامل جداء دالتين

هو :

$$H(k) = \begin{cases} \frac{1}{k} \sum_{r=0}^{k-1} (r+1)Y(r+1)(k-r)Y(k-r) & \text{if } k \geq 1 \\ 0 & \text{if } k = 0 \end{cases}$$

بالتعويض عن جميع التحويلات التفاضلية السابقة في المعادلة (31.2) نحصل على العلاقة التكرارية

الآتية:

$$(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)Y(k+4) = F(k) + \frac{1}{2}\delta(k-1) + \frac{1}{2} \sum_{r=0}^k G(r)F(k-r) - H(k) \quad (32.2)$$

بتطبيق تعريف التحويل التفاضلي على الشروط الابتدائية المعطاة نحصل على:

$$Y(0) = 0, \quad Y(1) = 1, \quad Y(2) = 0, \quad Y(3) = \frac{1}{3!}$$

بالتعويض في العلاقة التكرارية (32.2) من أجل قيم $k \geq 0$ وحساب المعاملات $Y(4), Y(5), \dots$ فنجد:

$$k=0 \Rightarrow Y(4) = 0$$

$$k=1 \Rightarrow Y(5) = \frac{1}{5!}$$

$$k=2 \Rightarrow Y(6) = 0$$

$$k=3 \Rightarrow Y(7) = \frac{1}{7!}$$

$$\begin{aligned}
k = 4 &\Rightarrow Y(8) = 0 \\
k = 5 &\Rightarrow Y(9) = \frac{1}{9!} \\
k = 6 &\Rightarrow Y(10) = 0 \\
k = 7 &\Rightarrow Y(11) = \frac{1}{11!} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

بالتالي الحل الناتج هو:

$$\begin{aligned}
y(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} Y(k) x^k \\
&= Y(0) + Y(1)x + Y(2)x^2 + Y(3)x^3 + Y(4)x^4 + Y(5)x^5 + Y(6)x^6 + Y(7)x^7 + Y(8)x^8 \\
&\quad + Y(9)x^9 + Y(10)x^{10} + Y(11)x^{11} + \dots \\
&= x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 + \frac{1}{11!}x^{11} + \dots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sinh(x)
\end{aligned}$$

وهو الحل الدقيق لهذه المسألة، ويمكن التحقق من ذلك من خلال تعويضه في المعادلة الأصلية.

مثال (7): لتكن معادلة فريدهولم التكاملية غير الخطية الآتية:

$$y(x) = e^x - \frac{1}{9}x - \frac{2e^3}{9}x + \int_0^1 xty^3(t)dt \quad (33.2)$$

تم حل هذه المعادلة باستخدام طريقة كثيرات حدود Hosoya (Mundewadi and Jummannaver, 2024)، وفي هذا المثال سنقوم بحلها باستخدام طريقة DTM.

الحل:

نظراً لعدم توفر صيغة تحويل تفاضلي مباشرة للتكاملات التي تكون حدودها ثوابت من الشكل:

$$\int_a^b y(t)dt$$

فإننا نلجأ إلى تعريف هذا التكامل كثابت مستقل، وعليه نفرض:

$$\alpha = \int_0^1 ty^3(t)dt$$

بتعويض α في المعادلة (33.2) تصبح الشكل الآتي:

$$y(x) = e^x - \frac{1}{9}x - \frac{2e^3}{9}x + \alpha x \quad (34.2)$$

بتطبيق خواص التحويل التفاضلي على المعادلة (34.2) نحصل على العلاقة التكرارية الآتية:

$$Y(k) = \frac{(1)^k}{k!} - \frac{1}{9}\delta(k-1) - \frac{2e^3}{9}\delta(k-1) + \alpha\delta(k-1) \quad (35.2)$$

بالتعويض في العلاقة التكرارية (35.2) من أجل قيم $k \geq 0$ وحساب المعاملات $Y(0), Y(1), \dots$ فنجد:

$$k = 0 \Rightarrow Y(0) = 1$$

$$k = 1 \Rightarrow Y(1) = 1 - \frac{1}{9} - \frac{2e^3}{9} + \alpha$$

$$k = 2 \Rightarrow Y(2) = \frac{1}{2!}$$

$$k = 3 \Rightarrow Y(3) = \frac{1}{3!}$$

$$k = 4 \Rightarrow Y(4) = \frac{1}{4!}$$

$$k = 5 \Rightarrow Y(5) = \frac{1}{5!}$$

$$k = 6 \Rightarrow Y(6) = \frac{1}{6!}$$

$$k = 7 \Rightarrow Y(7) = \frac{1}{7!}$$

$$k = 8 \Rightarrow Y(8) = \frac{1}{8!}$$

بالاستمرار في التعويض في العلاقة التكرارية (35.2) من أجل $k \geq 9$ نجد:

$$Y(k) = \frac{1}{k!}$$

وبالتالي الحل الناتج هو:

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} Y(k) x^k \\ &= Y(0) + Y(1)x + Y(2)x^2 + Y(3)x^3 + Y(4)x^4 + Y(5)x^5 + Y(6)x^6 + Y(7)x^7 + Y(8)x^8 + \dots \\ &= \left(-\frac{1}{9} - \frac{2e^3}{9} + \alpha\right)x + \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^8}{8!} + \dots\right) \\ &= \left(-\frac{1}{9} - \frac{2e^3}{9} + \alpha\right)x + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \\ &= \left(-\frac{1}{9} - \frac{2e^3}{9} + \alpha\right)x + e^x \end{aligned} \quad (36.2)$$

لتحديد قيمة α نقوم بتعويض الحل المعطى بالعلاقة (36.2) في العلاقة الآتية:

$$\alpha = \int_0^1 ty^3(t)dt$$

وبإجراء المكاملة نجد:

$$\begin{aligned} \alpha = & \frac{6071}{14580} - \frac{2e}{27} - \frac{e^2}{12} + \frac{3101e^3}{2430} - \frac{8e^4}{27} - \frac{e^5}{6} + \frac{1076e^6}{1215} - \frac{8e^7}{27} - \frac{8e^9}{3645} - \frac{2561\alpha}{540} + \frac{4e\alpha}{3} \\ & + \frac{3e^2\alpha}{4} - \frac{1076e^3\alpha}{135} + \frac{8e^4\alpha}{3} + \frac{4e^6\alpha}{135} + \frac{269\alpha^2}{15} - 6e\alpha^2 - \frac{2e^3\alpha^2}{15} + \frac{\alpha^3}{5} \\ \Rightarrow \alpha - & \frac{6071}{14580} + \frac{2e}{27} + \frac{e^2}{12} - \frac{3101e^3}{2430} + \frac{8e^4}{27} + \frac{e^5}{6} - \frac{1076e^6}{1215} + \frac{8e^7}{27} + \frac{8e^9}{3645} + \frac{2561\alpha}{540} - \frac{4e\alpha}{3} \\ & - \frac{3e^2\alpha}{4} + \frac{1076e^3\alpha}{135} - \frac{8e^4\alpha}{3} - \frac{4e^6\alpha}{135} - \frac{269\alpha^2}{15} + 6e\alpha^2 + \frac{2e^3\alpha^2}{15} - \frac{\alpha^3}{5} = 0 \end{aligned}$$

بحل المعادلة السابقة نجد:

$$\alpha = \frac{1}{9} + \frac{2e^3}{9}$$

بتعويض قيمة α في الحل المعطى بالعلاقة (36.2) نحصل على:

$$y(x) = e^x$$

وهو الحل الدقيق لهذه المعادلة.

مثال (8): لتكن مسألة القيم الابتدائية لمعادلة فريدهولم التفاضلية-التكاملية الخطية:

$$y''(x) = 32x + \int_{-1}^1 (1 - xt)y(t)dt \quad (37.2)$$

مع الشروط الابتدائية

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

تم حل هذه المسألة باستخدام طريقة كثيرات حدود Lucas (Comfort *et al.*, 2025)، وفي هذا المثال

سنقوم بحلها باستخدام طريقة DTM.

الحل:

نعيد كتابة المعادلة (37.2) على الشكل الآتي:

$$y''(x) = 32x + \int_{-1}^1 y(t)dt - x \int_{-1}^1 ty(t)dt \quad (38.2)$$

نفرض:

$$\alpha = \int_{-1}^1 y(t) dt \quad , \quad \beta = \int_{-1}^1 ty(t) dt$$

بتعويض α, β في المعادلة (38.2) تصبح بالشكل الآتي:

$$y''(x) = 32x + \alpha - \beta x \quad (39.2)$$

بتطبيق خواص التحويل التفاضلي على المعادلة (39.2) نحصل على العلاقة التكرارية الآتية:

$$(k+1)(k+2)Y(k+2) = 32\delta(k-1) + \alpha\delta(k-0) - \beta\delta(k-1) \quad (40.2)$$

بتطبيق تعريف التحويل التفاضلي على الشروط الابتدائية المرافقة نحصل على:

$$Y(0) = 1 \quad , \quad Y(1) = 0$$

بالتعويض في العلاقة التكرارية (40.2) من أجل قيم $k \geq 0$ وحساب المعاملات $Y(2), Y(3), \dots$ فنجد:

$$k = 0 \Rightarrow Y(2) = \frac{\alpha}{2}$$

$$k = 1 \Rightarrow Y(3) = \frac{32 - \beta}{6}$$

بالاستمرار في التعويض في العلاقة التكرارية (40.2) من أجل $k \geq 2$ نجد:

$$Y(k) = 0$$

وبالتالي الحل الناتج هو:

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} Y(k) x^k \\ &= Y(0) + Y(1)x + Y(2)x^2 + Y(3)x^3 + \dots \\ &= 1 + \frac{\alpha}{2}x^2 + \frac{(32 - \beta)}{6}x^3 \end{aligned} \quad (41.2)$$

لتحديد قيمة α, β نقوم بتعويض الحل المعطى بالعلاقة (41.2) في العلاقتين الآتيتين:

$$\alpha = \int_{-1}^1 y(t) dt \quad , \quad \beta = \int_{-1}^1 ty(t) dt$$

وبإجراء المكاملة نجد:

$$\alpha = 2 + \frac{\alpha}{3} \quad , \quad \beta = \frac{32}{15} - \frac{\beta}{15}$$

$$\begin{aligned} \alpha - 2 - \frac{\alpha}{3} &= 0 \\ \Rightarrow \beta - \frac{32}{15} + \frac{\beta}{15} &= 0 \end{aligned}$$

بحل المعادلتين السابقتين نجد:

$$\alpha = 3, \quad \beta = 2$$

بتعويض قيمة الثوابت α, β في الحل المعطى بالعلاقة (41.2) نحصل على:

$$y(x) = 1 + \frac{3}{2}x^2 + 5x^3$$

وهو الحل الدقيق لهذه المسألة.

2-2 طريقة التحويل التفاضلي المختزلة RDTM

1-2-2 مفاهيم أساسية:

(3) تعريف التحويل التفاضلي المختزل (Keskin and Oturanc, 2009)

لتكن $y(x, t)$ دالة تحليلية بالنسبة إلى المتغيرين x و t عندئذ يعرف التحويل التفاضلي المختزل من المرتبة k

للدالة $y(x, t)$ عند النقطة $t = 0$ بالعلاقة الآتية:

$$Y_k(x) = \frac{1}{k!} \left[\frac{\partial^k y(x, t)}{\partial t^k} \right]_{t=0}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (42.2)$$

حيث تدعى $y(x, t)$ بدالة الأصل، وتدعى $Y_k(x)$ بالدالة المحولة.

(4) تعريف التحويل التفاضلي المختزل العكسي (Keskin and Oturanc, 2009)

يُقصد بالتحويل التفاضلي المختزل العكسي استعادة دالة الأصل $y(x, t)$ انطلاقاً من دالتها المحولة $Y_k(x)$

وذلك في صورة متسلسلة قوى على النحو الآتي:

$$y(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} Y_k(x) t^k \quad (43.2)$$

بتعويض العلاقة (42.2) في (43.2) نحصل على:

$$y(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left[\frac{\partial^k y(x, t)}{\partial t^k} \right]_{t=0} t^k \quad (44.2)$$

إن العلاقة (44.2) تمثل متسلسلة الحل التي تُعرفها طريقة RDTM.

2-2-2 الخواص الأساسية لطريقة التحويل التفاضلي المختزلة RDTM

• الخاصية الأولى: (خاصية جمع وطرح دالتين) (Keskin and Oturanc, 2009)

إذا كان $y(x, t) = g(x, t) \pm h(x, y)$ فإن التحويل التفاضلي المختزل للدالة $y(x, t)$ هو:

$$Y_k(x) = G_k(x) \pm H_k(x)$$

البرهان:

باستخدام تعريف التحويل التفاضلي المختزل (42.2) لدينا:

$$\begin{aligned} Y_k(x) &= \frac{1}{k!} \left[\frac{\partial^k y(x, t)}{\partial t^k} \right]_{t=0} = \frac{1}{k!} \left[\frac{\partial^k (g(x, t) \pm h(x, y))}{\partial t^k} \right]_{t=0} = \frac{1}{k!} \left[\frac{\partial^k (g(x, t))}{\partial t^k} \pm \frac{\partial^k (h(x, t))}{\partial t^k} \right]_{t=0} \\ &= \frac{1}{k!} \left[\frac{\partial^k (g(x, t))}{\partial t^k} \right]_{t=0} \pm \frac{1}{k!} \left[\frac{\partial^k (h(x, t))}{\partial t^k} \right]_{t=0} = G_k(x) \pm H_k(x) \end{aligned}$$

(5) الخاصية الثانية: (خاصية ضرب دالة بثابت α) (Keskin and Oturanc, 2009)

إذا كان $y(x, t) = \alpha g(x, t)$ فإن التحويل التفاضلي المختزل للدالة $y(x, t)$ هو:

$$Y_k(x) = \alpha G_k(x)$$

حيث α ثابت.

البرهان:

باستخدام تعريف التحويل التفاضلي المختزل (42.2) لدينا:

$$Y_k(x) = \frac{1}{k!} \left[\frac{\partial^k y(x, t)}{\partial t^k} \right]_{t=0} = \frac{1}{k!} \left[\frac{\partial^k (\alpha g(x, t))}{\partial t^k} \right]_{t=0} = \alpha \frac{1}{k!} \left[\frac{\partial^k (g(x, t))}{\partial t^k} \right]_{t=0} = \alpha Y_k(x)$$

(6) الخاصية الثالثة: (خاصية جداء دالتين) (Keskin and Oturanc, 2009)

إذا كان $y(x, t) = g(x, t)h(x, y)$ فإن التحويل التفاضلي المختزل للدالة $y(x, t)$ هو:

$$Y_k(x) = \sum_{r=0}^k G_r(x) H_{k-r}(x)$$

البرهان:

لدينا $y(x, t) = g(x, t)h(x, y)$ ، بتطبيق قاعدة Leibnitz لمشتق جداء دالتين من المرتبة k نجد:

$$\frac{\partial^k y(x, t)}{\partial t^k} = \frac{\partial^k (g(x, t)h(x, y))}{\partial t^k} = \sum_{r=0}^k C_r^k \frac{\partial^r (g(x, t))}{\partial t^r} \frac{\partial^{k-r} (h(x, t))}{\partial t^{k-r}}, \quad C_r^k = \frac{k!}{r! (k-r)!}$$

باستخدام تعريف التحويل التفاضلي المختزل (42.2) لدينا:

$$\begin{aligned}
Y_k(x) &= \frac{1}{k!} \left[\frac{\partial^k y(x, t)}{\partial t^k} \right]_{t=0} \\
&= \frac{1}{k!} \left[\frac{\partial^k g(x, t) h(x, t)}{\partial t^k} \right]_{t=0} \\
&= \frac{1}{k!} \left[\sum_{r=0}^k C_r^k \frac{\partial^r (g(x, t))}{\partial t^r} \frac{\partial^{k-r} (h(x, t))}{\partial t^{k-r}} \right]_{t=0} \\
&= \frac{1}{k!} \left[\sum_{r=0}^k \frac{k!}{r! (k-r)!} \frac{\partial^r (g(x, t))}{\partial t^r} \frac{\partial^{k-r} (h(x, t))}{\partial t^{k-r}} \right]_{t=0} \\
&= \frac{1}{k!} \sum_{r=0}^k \frac{k!}{r! (k-r)!} \left[\frac{\partial^r (g(x, t))}{\partial t^r} \right]_{t=0} \left[\frac{\partial^{k-r} (h(x, t))}{\partial t^{k-r}} \right]_{t=0} \\
&= \sum_{r=0}^k \underbrace{\frac{1}{r!} \left[\frac{\partial^r (g(x, t))}{\partial t^r} \right]_{t=0}}_{G_r(x)} \underbrace{\frac{1}{(k-r)!} \left[\frac{\partial^{k-r} (h(x, t))}{\partial t^{k-r}} \right]_{t=0}}_{H_{k-r}(x)} = \sum_{r=0}^k G_r(x) H_{k-r}(x)
\end{aligned}$$

وهو المطلوب.

(1) الخاصية الرابعة: (خاصية جداء ثلاث دوال) (Hagbabin and Hesam, 2012)

إذا كان $y(x, t) = g(x, t)h(x, t)w(x, t)$ فإن التحويل التفاضلي المختزل للدالة $y(x, t)$ هو:

$$Y_k(x) = \sum_{r=0}^k \sum_{m=0}^r G_m(x) H_{r-m}(x) W_{k-r}(x)$$

البرهان:

نفرض الدالة $u(x, t) = g(x, t)h(x, t)$ وبالتالي يصبح لدينا:

$$y(x, t) = u(x, t)w(x, t)$$

بتطبيق الخاصية الثالثة (خاصية جداء دالتين) على الدالة $y(x, t) = u(x, t)w(x, t)$ نجد:

$$Y_k(x) = \sum_{r=0}^k U_r(x) W_{k-r}(x) \quad (45.2)$$

حيث $U_r(x)$ هو التحويل التفاضلي للدالة $u(x, t) = g(x, t)h(x, t)$ ويعطى بالعلاقة الآتية:

$$U_r(x) = \sum_{m=0}^r G_m(x) H_{r-m}(x) \quad (46.2)$$

الآن بتعويض العلاقة (46.2) في (45.2) نحصل على:

$$Y_k(x) = \sum_{r=0}^k \sum_{m=0}^r G_m(x) H_{r-m}(x) W_{k-r}(x)$$

وهو المطلوب.

(2) الخاصية الخامسة: (خاصية جداء أربع دوال)

إذا كان $y(x, t) = g(x, t)h(x, t)w(x, t)v(x, t)$ فإن التحويل التفاضلي المختزل للدالة $y(x, t)$ هو

$$Y_k(x) = \sum_{r=0}^k \sum_{m=0}^r \sum_{s=0}^m G_s(x) H_{m-s}(x) W_{r-m}(x) V_{k-r}(x)$$

البرهان:

نفرض الدالة $u(x, t) = g(x, t)h(x, t)w(x, t)$ وبالتالي يصبح لدينا:

$$y(x, t) = u(x, t)v(x, t)$$

بتطبيق الخاصية الثالثة (خاصية جداء دالتين) على الدالة $y(x, t) = u(x, t)v(x, t)$ نجد:

$$Y_k(x) = \sum_{r=0}^k U_r(x) V_{k-r}(x) \quad (47.2)$$

حيث $U_r(x)$ هو التحويل التفاضلي للدالة $u(x, t) = g(x, t)h(x, t)w(x, t)$ ويعطى بالعلاقة الآتية:

$$U_r(x) = \sum_{m=0}^r \sum_{s=0}^m G_s(x) H_{m-s}(x) W_{r-m}(x) \quad (48.2)$$

بتعويض العلاقة (48.2) في (47.2) نجد:

$$Y_k(x) = \sum_{r=0}^k \sum_{m=0}^r \sum_{s=0}^m G_s(x) H_{m-s}(x) W_{r-m}(x) V_{k-r}(x)$$

وهو المطلوب.

(3) الخاصية السادسة: (خاصية جداء خمس دوال)

إذا كان $y(x, t) = g(x, t)h(x, t)w(x, t)v(x, t)f(x, t)$ فإن التحويل التفاضلي المختزل للدالة $y(x, t)$ هو

$$Y_k(x) = \sum_{r=0}^k \sum_{m=0}^r \sum_{s=0}^m \sum_{p=0}^s G_p(x) H_{s-p}(x) W_{m-s}(x) V_{r-m}(x) F_{k-r}(x)$$

البرهان:

نفرض الدالة $u(x, t) = g(x, t)h(x, t)w(x, t)v(x, t)$ وبالتالي يصبح لدينا:

$$y(x, t) = u(x, t)f(x, t)$$

ب تطبيق الخاصية الثالثة (خاصية جداء دالتين) على الدالة $y(x, t) = u(x, t)v(x, t)$ نجد:

$$Y_k(x) = \sum_{r=0}^k U_r(x) F_{k-r}(x) \quad (49.2)$$

حيث $U_r(x)$ هو التحويل التفاضلي للدالة $u(x, t) = g(x, t)h(x, t)w(x, t)v(x, t)$ ويعطى بالعلاقة الآتية:

$$U_r(x) = \sum_{m=0}^r \sum_{s=0}^m \sum_{p=0}^s G_p(x) H_{s-p}(x) W_{m-s}(x) V_{r-m}(x) \quad (50.2)$$

بتعويض العلاقة (50.2) في (49.2) نجد:

$$Y_k(x) = \sum_{r=0}^k \sum_{m=0}^r \sum_{s=0}^m \sum_{p=0}^s G_p(x) H_{s-p}(x) W_{m-s}(x) V_{r-m}(x) F_{k-r}(x)$$

وهو المطلوب.

(4) الخاصية السابعة: خاصية الاشتقاق الجزئي لدالة $g(x, t)$ من المرتبة n بالنسبة إلى t

(Keskin and Oturanc, 2009)

إذا كان $y(x, t) = \frac{\partial^n g(x, t)}{\partial t^n}$ فإن التحويل التفاضلي المختزل للدالة $y(x, t)$ هو:

$$Y_k(x) = (k+1)(k+2) \dots (k+n) G_{k+n}(x)$$

البرهان: باستخدام تعريف التحويل التفاضلي المختزل (42.2) لدينا:

$$\begin{aligned} Y_k(x) &= \frac{1}{k!} \left[\frac{\partial^k y(x, t)}{\partial t^k} \right]_{t=0} \\ &= \frac{1}{k!} \left[\frac{\partial^k}{\partial t^k} \left(\frac{\partial^n g(x, t)}{\partial t^n} \right) \right]_{t=0} \\ &= \frac{1}{k!} \left[\frac{\partial^{k+n} (g(x, t))}{\partial t^{k+n}} \right]_{t=0} \\ &= \frac{(k+n)!}{k!} \frac{1}{(k+n)!} \left[\frac{\partial^{k+n} (g(x, t))}{\partial t^{k+n}} \right]_{t=0} \\ &= \frac{(k+1)(k+2) \dots (k+n)k!}{k!} \frac{1}{(k+n)!} \left[\frac{\partial^{k+n} (g(x, t))}{\partial t^{k+n}} \right]_{t=0} \\ &= (k+1)(k+2) \dots (k+n) \underbrace{\frac{1}{(k+n)!} \left[\frac{\partial^{k+n} (g(x, t))}{\partial t^{k+n}} \right]_{t=0}}_{G_{k+n}(x)} \\ &= (k+1)(k+2) \dots (k+n) G_{k+n}(x) \end{aligned}$$

وهو المطلوب.

(5) الخاصية الثامنة: (خاصية الاشتقاق الجزئي لدالة $g(x, t)$ من المرتبة n بالنسبة إلى x)

(Keskin and Oturanc, 2009)

إذا كان $y(x, t) = \frac{\partial^n g(x, t)}{\partial x^n}$ فإن التحويل التفاضلي المختزل للتابع $y(x, t)$ هو :

$$Y_k(x) = \frac{\partial^n}{\partial x^n} G_k(x)$$

البرهان:

باستخدام تعريف التحويل التفاضلي المختزل (42.2) لدينا:

$$Y_k(x) = \frac{1}{k!} \left[\frac{\partial^k y(x, t)}{\partial t^k} \right]_{t=0} = \frac{1}{k!} \left[\frac{\partial^k}{\partial t^k} \left(\frac{\partial^n g(x, t)}{\partial x^n} \right) \right]_{t=0} = \frac{\partial^n}{\partial x^n} \left(\frac{1}{k!} \left[\frac{\partial^k (g(x, t))}{\partial t^k} \right]_{t=0} \right) = \frac{\partial^n}{\partial x^n} G_k(x)$$

وهو المطلوب.

(6) الخاصية التاسعة: (Keskin and Oturanc, 2009)

إذا كان $y(x, t) = x^m t^n$ فإن التحويل التفاضلي للتابع $y(x, t)$ هو :

$$Y_k(x) = x^m \delta(k - n)$$

حيث أن

$$\delta(k - n) = \begin{cases} 1 & , \text{ if } k = n \\ 0 & , \text{ if } k \neq n \end{cases}$$

البرهان:

لدينا

$$\frac{\partial^k y(x, t)}{\partial t^k} = \frac{\partial^k (x^m t^n)}{\partial t^k} = x^m \frac{\partial^k (t^n)}{\partial t^k} = x^m n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1) t^{n-k}$$

بالتعويض في تعريف التحويل التفاضلي المختزل (42.2) نجد:

$$\begin{aligned} Y_k(x) &= \frac{1}{k!} \left[\frac{\partial^k y(x, t)}{\partial t^k} \right]_{t=0} \\ &= \frac{1}{k!} \left[\frac{\partial^k (x^m t^n)}{\partial t^k} \right]_{t=0} \\ &= x^m \frac{1}{k!} \left[\frac{\partial^k (t^n)}{\partial t^k} \right]_{t=0} \\ &= x^m \frac{1}{k!} [n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1) t^{n-k}]_{t=0} \end{aligned}$$

نميز حالتين:

(a) إذا كان $n = k$ فإن:

$$Y_k(x) = x^m \frac{1}{k!} k(k-1)(k-2) \dots (1) = x^m \frac{1}{k!} k! = x^m$$

(b) إذا كان $n \neq k, x = 0$ فإن:

$$Y_k(x) = x^m \frac{1}{k!} \cdot 0 = 0$$

وبالتالي نجد:

$$Y_k(x) = x^m \delta(k-n); \quad \delta(k-n) = \begin{cases} 1 & , \text{ if } k = n \\ 0 & , \text{ if } k \neq n \end{cases}$$

وهو المطلوب.

2-2-3 الفكرة العامة لطريقة التحويل التفاضلي المختزلة RDTM (Keskin and Oturanc, 2009)

في هذه الفقرة سوف نعرض الفكرة العامة لطريقة RDTM في حل المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية

، و غير الخطية من خلال المعادلة التفاضلية الجزئية المعطاة في الصيغة الآتية :

$$L(y(x, t)) + R(y(x, t)) + N(y(x, t)) = g(x, t) \quad (51.2)$$

مع الشروط الابتدائية

$$\frac{\partial^i y(x, 0)}{\partial t^i} = f_i(x), \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (52.2)$$

حيث أن

$$L = \frac{\partial^n}{\partial t^n} \text{ مؤثر تفاضلي يمثل المشتق الجزئي من المرتبة } n \text{ بالنسبة إلى المتغير } t$$

R مؤثر خطي يحتوي على مشتقات جزئية، $N(y(x, t))$ حد غير خطي، $g(x, t)$ حد غير متجانس

نعيد كتابة المعادلة (51.2) بالشكل الآتي:

$$L(y(x, t)) = g(x, t) - R(y(x, t)) - N(y(x, t)) \quad (53.2)$$

وفقاً لطريقة RDTM يمكن إنشاء علاقة تكرارية للمعادلة (53.2) على النحو الآتي:

$$(k+1)(k+2) \dots (k+n) Y_{k+n}(x) = G_k(x) - R(Y_k(x)) - N(Y_k(x)) \quad (54.2)$$

حيث $(k+1)(k+2) \dots (k+n) Y_{k+n}(x)$, $G_k(x)$, $R(Y_k(x))$, $N(Y_k(x))$ تمثل التحويلات

التفاضلية المختزلة لكل من $L(y(x, t)) = \frac{\partial^n y(x, t)}{\partial t^n}$, $g(x, t)$, $R(y(x, t))$, $N(y(x, t))$ على الترتيب.

بتطبيق تعريف التحويل التفاضلي المختزل (42.2) على الشروط الابتدائية (52.2) نحصل على الشروط الابتدائية بالصيغة المحولة على النحو الآتي:

$$\begin{cases} Y_0(x) = f_0(x) \\ Y_1(x) = f_1(x) \\ Y_2(x) = \frac{1}{2!} f_2(x) \\ Y_3(x) = \frac{1}{3!} f_3(x) \\ \vdots \\ Y_{n-1}(x) = \frac{1}{(n-1)!} f_{n-1}(x) \end{cases} \quad (55.2)$$

يتم تحديد بقية الدوال المجهولة $Y_n(x), Y_{n+1}(x), Y_{n+2}(x), \dots$ باستخدام العلاقة التكرارية (54.2)، ثم نحصل على الحل النهائي من خلال تعويض جميع الدوال الناتجة في متسلسلة الحل لطريقة RDTM التي تعطى بالعلاقة الآتية:

$$y(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} Y_k(x) t^k \quad (56.2)$$

ملاحظة: يتم تطبيق طريقة RDTM بالأسلوب السابق نفسه في حل المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية باعتبارها حالة خاصة من المعادلة (51.2)، وذلك حينما يكون الحد غير الخطي معدوماً أي $N(y(x, t)) = 0$

2-2-4 أمثلة تطبيقية

مثال (9): لنكن مسألة القيم الابتدائية للمعادلة التفاضلية الجزئية الخطية:

(Hosseinzadeh and Salehpou, 2013)

$$y_{tt}(x, t) - y_{xx}(x, t) - y(x, t) = 0 \quad (57.2)$$

مع الشروط الابتدائية $y(x, 0) = 1 + \sin(x)$, $y_t(x, 0) = 0$
الحل:

نعيد كتابة المعادلة (57.2) على الشكل الآتي:

$$y_{tt}(x, t) = y_{xx}(x, t) + y(x, t) \quad (58.2)$$

بتطبيق خواص التحويل التفاضلي المختزل (7) و (8) الواردة في الفقرة (2-2-2) على المعادلة (58.2) نحصل على العلاقة التكرارية:

$$(k+1)(k+2)Y_{k+2}(x) = \frac{\partial^2 Y_k(x)}{\partial x^2} + Y_k(x) \quad (59.2)$$

بتطبيق تعريف التحويل التفاضلي المختزل على الشروط الابتدائية للمعادلة نحصل على:

$$Y_0(x) = 1 + \sin(x) \quad , \quad Y_1(x) = 0$$

بالتعويض في العلاقة التكرارية (59.2) من أجل $k \geq 0$ نحصل على:

$$\begin{aligned} k=0 &\Rightarrow Y_2(x) = \frac{1}{2!} \\ k=1 &\Rightarrow Y_3(x) = 0 \\ k=2 &\Rightarrow Y_4(x) = \frac{1}{4!} \\ k=3 &\Rightarrow Y_5(x) = 0 \\ k=4 &\Rightarrow Y_6(x) = \frac{1}{6!} \\ &\vdots \end{aligned}$$

وبالتالي الحل الناتج هو:

$$\begin{aligned} y(x, t) &= \sum_{k=0}^{\infty} Y_k(x) t^k = Y_0(x) + Y_1(x)t + Y_2(x)t^2 + Y_3(x)t^3 + Y_4(x)t^4 + Y_5(x)t^5 + Y_6(x)t^6 + \dots \\ &= \sin(x) + \left(1 + \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{4!}t^4 + \frac{1}{6!}t^6 + \dots\right) \\ &= \sin(x) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} = \sin(x) + \cosh(t) \end{aligned}$$

وهو الحل الدقيق للمسألة.

مثال (10): معادلة Sawada–Kotera–Ito

هي معادلة تفاضلية جزئية غير خطية من المرتبة السابعة، تمثل هذه المعادلة نموذجاً رياضياً يستخدم لوصف ظواهر الموجات غير الخطية المعقدة التي تحدث في ميكانيكا الموائع، وفيزياء البلازما، وغيرها من مجالات العلوم التطبيقية (Nimra et al., 2025).

لتكن مسألة القيم الابتدائية لمعادلة Sawada–Kotera–Ito: (Hagbabin and Hesam, 2012)

$$\begin{aligned} \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} + \left(63y^4(x, t) + 63\left(2y^2(x, t)\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} + y(x, t)\left(\frac{\partial y(x, t)}{\partial x}\right)^2\right) + 21\left(y(x, t)\frac{\partial^4 y(x, t)}{\partial x^4} + \left(\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2}\right)^2 + \frac{\partial y(x, t)}{\partial x}\frac{\partial^3 y(x, t)}{\partial x^3}\right) + \frac{\partial y^7(x, t)}{\partial x^7}\right)_x &= 0 \end{aligned} \quad (60.2)$$

مع الشرط الابتدائي $y(x, 0) = \frac{4\mu^2}{3}(2 - 3 \tanh^2(\mu x))$ حيث μ ثابت اختياري.

الحل:

باشتقاق الحدود داخل القوس في المعادلة (60.2) بالنسبة لـ x نحصل على الصيغة المكافئة لها:

$$\begin{aligned} \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} + 252y^3 \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} + 378y(x, t) \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} + 126y^2(x, t) \frac{\partial^3 y(x, t)}{\partial x^3} + 63 \left(\frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \right)^3 \\ + 42 \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \frac{\partial^4 y(x, t)}{\partial x^4} + 21y(x, t) \frac{\partial^5 y(x, t)}{\partial x^5} + 63 \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \frac{\partial^3 y(x, t)}{\partial x^3} + \frac{\partial^7 y(x, t)}{\partial x^7} = 0 \end{aligned}$$

وبإعادة كتابة المعادلة السابقة على الشكل التالي:

$$\begin{aligned} \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} = -252y^3 \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} - 378y(x, t) \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} - 126y^2(x, t) \frac{\partial^3 y(x, t)}{\partial x^3} - 63 \left(\frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \right)^3 \\ - 42 \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \frac{\partial^4 y(x, t)}{\partial x^4} - 21y(x, t) \frac{\partial^5 y(x, t)}{\partial x^5} - 63 \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \frac{\partial^3 y(x, t)}{\partial x^3} - \frac{\partial^7 y(x, t)}{\partial x^7} \end{aligned}$$

بتطبيق خواص التحويل التفاضلي المختزل (3) و (4) و (7) الواردة في الفقرة (2-2-2) على المعادلة السابقة نحصل على العلاقة التكرارية التالية:

$$\begin{aligned} (k+1)Y_{k+1}(x) \\ = -252 \sum_{r=0}^k \sum_{m=0}^r \sum_{s=0}^m Y_s(x) Y_{m-s}(x) Y_{r-m}(x) \frac{\partial}{\partial x} Y_{k-r}(x) \\ - 378 \sum_{r=0}^k \sum_{m=0}^r Y_m(x) \frac{\partial}{\partial x} Y_{r-m}(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} Y_{k-r}(x) - 126 \sum_{r=0}^k \sum_{m=0}^r Y_m(x) Y_{r-m}(x) \frac{\partial^3}{\partial x^3} Y_{k-r}(x) \\ - 63 \sum_{r=0}^k \sum_{m=0}^r \frac{\partial}{\partial x} Y_m(x) \frac{\partial}{\partial x} Y_{r-m}(x) \frac{\partial}{\partial x} Y_{k-r}(x) - 42 \sum_{r=0}^k \frac{\partial}{\partial x} Y_r(x) \frac{\partial^4}{\partial x^4} Y_{k-r}(x) \\ - 21 \sum_{r=0}^k Y_r(x) \frac{\partial^5}{\partial x^5} Y_{k-r}(x) - 63 \sum_{r=0}^k \frac{\partial^2}{\partial x^2} Y_r(x) \frac{\partial^3}{\partial x^3} Y_{k-r}(x) \\ - \frac{\partial^7}{\partial x^7} Y_k(x) \end{aligned} \quad (61.2)$$

بتطبيق تعريف التحويل التفاضلي المختزل على الشرط الابتدائي المرافق للمعادلة نحصل عليه بالصيغة المحولة كما يلي:

$$Y_0(x) = \frac{4\mu^2}{3} (2 - 3 \tanh^2(\mu x))$$

بالتعويض في العلاقة التكرارية (61.2) من أجل $k \geq 0$:

$$\begin{aligned} k=0 \Rightarrow Y_1(x) = -252Y_0(x)Y_0(x)Y_0(x) \frac{\partial}{\partial x} Y_0(x) - 378Y_0(x) \frac{\partial}{\partial x} Y_0(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} Y_0(x) - \\ 126Y_0(x)Y_0(x) \frac{\partial^3}{\partial x^3} Y_0(x) - 63 \frac{\partial}{\partial x} Y_0(x) \frac{\partial}{\partial x} Y_0(x) \frac{\partial}{\partial x} Y_0(x) - 42 \frac{\partial}{\partial x} Y_0(x) \frac{\partial^4}{\partial x^4} Y_0(x) - \\ 21Y_0(x) \frac{\partial^5}{\partial x^5} Y_0(x) - 63 \frac{\partial^2}{\partial x^2} Y_0(x) \frac{\partial^3}{\partial x^3} Y_0(x) - \frac{\partial^7}{\partial x^7} Y_0(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k = 1 \Rightarrow 2Y_2(x) = & -252 \left(Y_0(x)Y_0(x)Y_0(x) \frac{\partial}{\partial x} Y_1(x) + 3Y_0(x)Y_0(x)Y_1(x) \frac{\partial}{\partial x} Y_0(x) \right) - \\
& 378 \left(Y_0(x) \frac{\partial}{\partial x} Y_0(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} Y_1(x) + Y_0(x) \frac{\partial}{\partial x} Y_1(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} Y_0(x) + Y_1(x) \frac{\partial}{\partial x} Y_0(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} Y_0(x) \right) - \\
& 126 \left(Y_0(x)Y_0(x) \frac{\partial^3}{\partial x^3} Y_1(x) + 2Y_0(x)Y_1(x) \frac{\partial^3}{\partial x^3} Y_0(x) \right) - 63 \left(3 \frac{\partial}{\partial x} Y_0(x) \frac{\partial}{\partial x} Y_0(x) \frac{\partial}{\partial x} Y_1(x) \right) - \\
& 42 \left(\frac{\partial}{\partial x} Y_0(x) \frac{\partial^4}{\partial x^4} Y_1(x) + \frac{\partial}{\partial x} Y_1(x) \frac{\partial^4}{\partial x^4} Y_0(x) \right) - 21 \left(Y_0(x) \frac{\partial^5}{\partial x^5} Y_1(x) + Y_1(x) \frac{\partial^5}{\partial x^5} Y_0(x) \right) - \\
& 63 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} Y_0(x) \frac{\partial^3}{\partial x^3} Y_1(x) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} Y_1(x) \frac{\partial^3}{\partial x^3} Y_0(x) \right) - \frac{\partial^7}{\partial x^7} Y_1(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k = 2 \Rightarrow 3Y_3(x) = & -252 \left(Y_0(x)Y_0(x)Y_0(x) \frac{\partial}{\partial x} Y_2(x) + 3Y_0(x)Y_0(x)Y_1(x) \frac{\partial}{\partial x} Y_1(x) + \right. \\
& 3Y_0(x)Y_0(x)Y_2(x) \frac{\partial}{\partial x} Y_0(x) + 3Y_0(x)Y_1(x)Y_1(x) \frac{\partial}{\partial x} Y_0(x) \left. \right) - 378 \left(Y_0(x) \frac{\partial}{\partial x} Y_0(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} Y_2(x) + \right. \\
& Y_0(x) \frac{\partial}{\partial x} Y_1(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} Y_1(x) + Y_1(x) \frac{\partial}{\partial x} Y_0(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} Y_1(x) + Y_0(x) \frac{\partial}{\partial x} Y_2(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} Y_0(x) + \\
& Y_1(x) \frac{\partial}{\partial x} Y_1(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} Y_0(x) + Y_2(x) \frac{\partial}{\partial x} Y_0(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} Y_0(x) \left. \right) - 126 \left(Y_0(x)Y_0(x) \frac{\partial^3}{\partial x^3} Y_2(x) + \right. \\
& 2Y_0(x)Y_1(x) \frac{\partial^3}{\partial x^3} Y_1(x) + 2Y_0(x)Y_2(x) \frac{\partial^3}{\partial x^3} Y_0(x) + Y_1(x)Y_1(x) \frac{\partial^3}{\partial x^3} Y_0(x) \left. \right) - \\
& 63 \left(3 \frac{\partial}{\partial x} Y_0(x) \frac{\partial}{\partial x} Y_0(x) \frac{\partial}{\partial x} Y_2(x) + 3 \frac{\partial}{\partial x} Y_0(x) \frac{\partial}{\partial x} Y_1(x) \frac{\partial}{\partial x} Y_1(x) \right) - 42 \left(\frac{\partial}{\partial x} Y_0(x) \frac{\partial^4}{\partial x^4} Y_2(x) + \right. \\
& \frac{\partial}{\partial x} Y_1(x) \frac{\partial^4}{\partial x^4} Y_1(x) + \frac{\partial}{\partial x} Y_2(x) \frac{\partial^4}{\partial x^4} Y_0(x) \left. \right) - 21 \left(Y_0(x) \frac{\partial^5}{\partial x^5} Y_2(x) + Y_1(x) \frac{\partial^5}{\partial x^5} Y_1(x) + \right. \\
& Y_2(x) \frac{\partial^5}{\partial x^5} Y_0(x) \left. \right) - 63 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} Y_0(x) \frac{\partial^3}{\partial x^3} Y_2(x) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} Y_1(x) \frac{\partial^3}{\partial x^3} Y_1(x) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} Y_2(x) \frac{\partial^3}{\partial x^3} Y_0(x) \right) - \\
& \frac{\partial^7}{\partial x^7} Y_2(x)
\end{aligned}$$

بالتعويض في العلاقات السابقة وإجراء العمليات الحسابية باستخدام برنامج Mathematica 12.0 نجد:

$$\begin{aligned}
Y_1(x) &= -\frac{2084\mu^9}{3} \operatorname{sech}^2(\mu x) \tanh(\mu x) \\
Y_2(x) &= \frac{262144\mu^{16}}{9} (-2 + \cosh(2\mu x)) \operatorname{sech}^4(\mu x) \\
Y_3(x) &= -\frac{67108864\mu^{23}}{81} (-11 \sinh(\mu x) + \sinh(3\mu x)) \operatorname{sech}^5(\mu x) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

وبالتالي الحل الناتج هو :

$$y(x, t) = Y_0(x) + Y_1(x)t + Y_2(x)t^2 + Y_3(x)t^3 + \dots$$

$$= \frac{4\mu^2}{3} (2 - 3 \tanh^2(\mu x)) - \frac{2084\mu^9}{3} \operatorname{sech}^2(\mu x) \tanh(\mu x) t$$

$$+ \frac{262144\mu^{16}}{9} (-2 + \cosh(2\mu x)) \operatorname{sech}^4(\mu x) t^2$$

$$- \frac{67108864\mu^{23}}{81} (-11 \sinh(\mu x) + \sinh(3\mu x)) \operatorname{sech}^5(\mu x) t^3$$

$$+ \dots$$

يمثل الحل السابق الحدود الأولى من منشور تايلور للدالة $\frac{4\mu^2}{3} \left(2 - 3 \tanh^2 \left(\mu \left(x - \frac{256}{3} \mu^6 t \right) \right) \right)$ في جوار النقطة $t = 0$ ، وتمثل هذه الدالة الحل الدقيق للمسألة المعطاة.

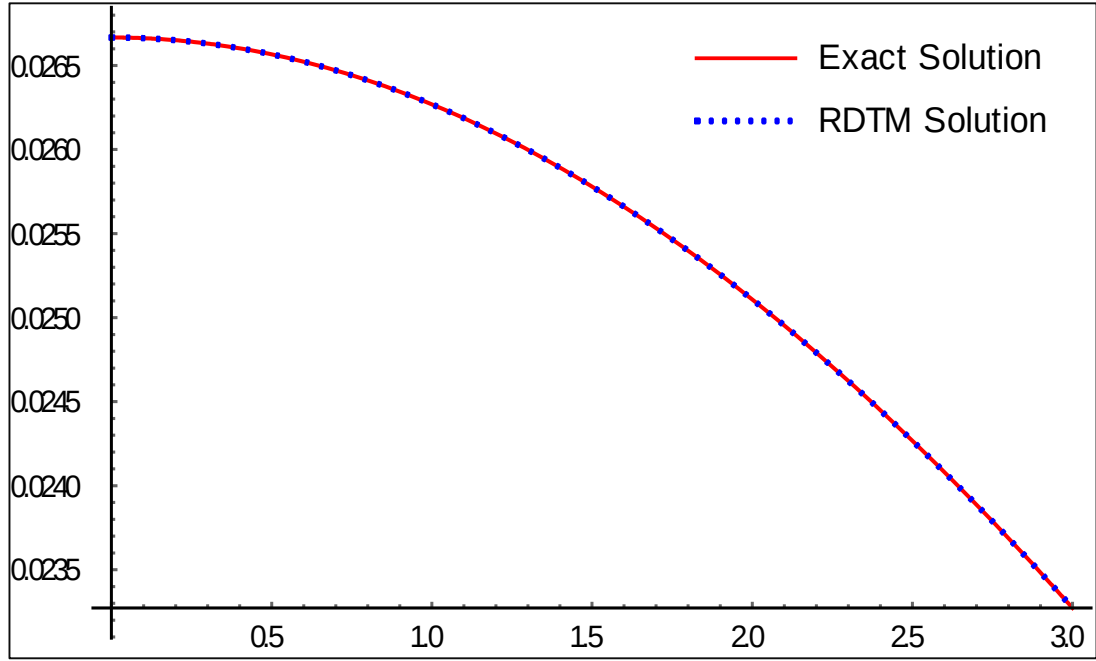
يتضمن الجدول (4) والشكل (5) مقارنة بين الحل الدقيق لهذه المسألة والحل الناتج عن تطبيق طريقة RDTM باستخدام 4 تكرارات.

الجدول (4): مقارنة عددية بين الحل الدقيق للمثال (10) والحل الناتج عن تطبيق طريقة RDTM باستخدام 4 تكرارات

عندما $\mu = 0.1$ و $t = 0.5$

x	Exact Solution	RDTM Solution	Absolute Error of Exact Solution – RDTM Solution
0	0	0	0
0.1	0.0266626635	0.0266626635	3.46945×10^{-18}
0.2	0.0266506641	0.0266506641	0
0.3	0.0266306780	0.0266306780	0
0.4	0.0266027212	0.0266027212	3.46945×10^{-18}
0.5	0.0265668161	0.0265668161	3.46945×10^{-18}
0.6	0.0265230319	0.0265230319	0
0.7	0.0264713289	0.0264713289	3.46945×10^{-18}
0.8	0.0264117821	0.0264117821	0
0.9	0.0263444387	0.0263444387	0
1	0.0262693520	0.0262693520	0
1.2	0.0260961917	0.0260961917	3.46945×10^{-18}
1.4	0.0258928449	0.0258928449	3.46945×10^{-18}
1.6	0.0256599455	0.0256599455	0
1.8	0.0253982137	0.0253982137	0
2	0.0251084507	0.0251084507	3.46945×10^{-18}
2.5	0.0242673392	0.0242673392	0
3	0.0232722361	0.0232722361	0

المصدر: تم إعداده باستخدام برنامج Mathematica 12.0



المصدر: تم إعداده باستخدام برنامج Mathematica 12.0

الشكل (5): مقارنة بيانية بين الحل الدقيق للمثال (10) والحل الناتج عن تطبيق طريقة RDTM باستخدام 4 تكرارات عندما $\mu = 0.1$ و $t = 0.5$

2-3 دمج طريقة التحويل التفاضلي المختزلة RDTM مع كثيرات حدود He

تُعدُّ طريقة التحويل التفاضلي المختزلة RDTM من الطرائق الفعّالة في حل المعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطية، إلا أنَّها تواجه بعض الصعوبات عند التعامل مع الحالات اللاخطية المعقدة، خاصة تلك التي تتضمن جداءات بين الدالة المجهولة ومشتقاتها الجزئية (كما في المثال 10)، فمعالجة هذه الحالات باستخدام RDTM تؤدي إلى تكوين صيغ رياضية تتداخل فيها مجاميع عدة يزداد تعقيدها وصعوبة حسابها مع تزايد عدد التكرارات، وقد ينتج عن ذلك حدوث أخطاء جبرية تؤثر سلباً على دقة الحل النهائي.

وانطلاقاً من هذه الإشكالية، نقترح تطوير طريقة هجينة جديدة أسميناها He-RDTM، والتي تعتمد على دمج RDTM مع كثيرات حدود He.

تعتمد الفكرة الأساسية لكثيرات حدود He على تمثيل الحد غير الخطي على شكل متسلسلة غير منتهية من

كثيرات حدود He، التي تُحسب باستخدام العلاقة الآتية (Mohyud-Din, 2009):

$$H_k = \frac{1}{k!} \frac{\partial^k}{\partial p^k} \left[N \left(\sum_{i=0}^k p^i y_i \right) \right]_{p=0}, \quad k \geq 0 \quad (62.2)$$

ومن الجدير بالذكر أنَّ الحدوديات الناتجة عن حساب كثيرات حدود He في تمثيل الحد غير الخطي تتطابق مع تلك التي تولدها طريقة RDTM الأصلية في صيغة التحويل التفاضلي المختزل، إلا أنَّ ما يميز استخدام كثيرات حدود He هو سهولة حسابها مقارنةً بطريقة RDTM، فضلاً عن إمكانية حسابها من خلال أكواد برمجية باستخدام برنامج Mathematica 12.0 (انظر الملحق A)، مما يُسهل دمجها مع طريقة RDTM في تبسيط التعامل مع الحدود غير الخطية، وتوفير الوقت والجهد الحسابي، وبالتالي تحسين أداء وفعالية RDTM في حل المعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطية.

2-3-1 تعريف كثيرات حدود He (Mohyud-Din, 2009)

لتكن $N(y)$ دالة غير خطية يمكن تمثيلها على شكل متسلسلة غير منتهية من كثيرات حدود He كما يلي:

$$N(y) = N \left(\sum_{i=0}^{\infty} p^i y_i \right) = \sum_{k=0}^{\infty} p^k H_k = H_0 + p H_1 + p^2 H_2 + \dots$$

حيث تمثل H_k كثيرات حدود He وتحسب باستخدام الصيغة الآتية:

$$H_k = \frac{1}{k!} \frac{\partial^k}{\partial p^k} \left[N \left(\sum_{i=0}^k p^i y_i \right) \right]_{p=0}, \quad k \geq 0 \quad (63.2)$$

مثال:

لنأخذ الدالة غير الخطية $N(y) = y^2$ عندئذٍ يمكن كتابتها على الصورة:

$$N(y) = y^2 = \sum_{i=0}^{\infty} p^i H_i = H_0 + p H_1 + p^2 H_2 + \dots$$

وباستخدام الصيغة الخاصة بكثيرات حدود He نضع:

$$H_k = \frac{1}{k!} \frac{\partial^k}{\partial p^k} \left[\left(\sum_{i=0}^k p^i y_i \right)^2 \right]_{p=0}, \quad k \geq 0$$

وبالتالي:

$$H_0 = \frac{1}{0!} \frac{\partial^0}{\partial p^0} [(y_0)^2]_{p=0} = (y_0)^2$$

$$H_1 = \frac{1}{1!} \frac{\partial^1}{\partial p^1} [(y_0 + py_1)^2]_{p=0} = [2(y_0 + py_1)y_1]_{p=0} = 2y_0y_1$$

$$H_2 = \frac{1}{2!} \frac{\partial^2}{\partial p^2} [(y_0 + py_1 + p^2y_2)^2]_{p=0} = \frac{1}{2!} [2(y_1 + 2py_2)^2 + 4(y_0 + py_1 + p^2y_2)y_2]_{p=0} \\ = (y_1)^2 + 2y_0y_2$$

ويتم الاكتفاء بعدد معين من الحدود عند التطبيق عددياً.

2-3-2 الفكرة العامة لطريقة He-RDTM الهجينة في حل المعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطية:

في هذه الفقرة سوف نوضح آلية تطبيق طريقة He-RDTM في حل المعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطية.

لنفترض المعادلة التفاضلية الجزئية غير الخطية بالصيغة الآتية:

$$L(y(x, t)) + R(y(x, t)) + N(y(x, t)) = g(x, t) \quad (64.2)$$

مع الشروط الابتدائية

$$\frac{\partial^i y(x, 0)}{\partial t^i} = f_i(x), \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (65.2)$$

حيث أن:

$$L = \frac{\partial^n}{\partial t^n} \text{ مؤثر تفاضلي يمثل المشتق الجزئي من المرتبة } n \text{ بالنسبة إلى المتغير } t$$

R مؤثر خطي يحتوي مشتقات جزئية

$N(y(x, t))$ حد غير خطي

$g(x, t)$ حد غير متجانس

نعيد كتابة المعادلة (64.2) على الشكل:

$$L(y(x, t)) = g(x, t) - R(y(x, t)) - N(y(x, t)) \quad (66.2)$$

وفقاً لطريقة RDTM يمكن إنشاء علاقة تكرارية للمعادلة (66.2) على النحو الآتي:

$$(k+1)(k+2) \dots (k+n)Y_{k+n}(x) = G_k(x) - R(Y_k(x)) - N(Y_k(x)) \quad (67.2)$$

حيث:

$$(k+1)(k+2) \dots (k+n)Y_{k+n}(x), G_k(x), R(Y_k(x)), N(Y_k(x))$$

المختزلة لكل من $L(y(x,t)) = \frac{\partial^n y(x,t)}{\partial t^n}$, $g(x,t)$, $R(y(x,t))$, $N(y(x,t))$ على الترتيب.

وفقاً لفكرة طريقة He-RDTM المقترحة نقوم باستبدال الحد غير الخطي $N(Y_k(x))$ في المعادلة (67.2)

بكثيرات حدود He والتي تعطى بالعلاقة الآتية:

$$H_k = \frac{1}{k!} \frac{\partial^k}{\partial p^k} \left[N \left(\sum_{l=0}^k Y_l(x) p^l \right) \right]_{p=0}, \quad k \geq 0 \quad (68.2)$$

وبذلك تصبح المعادلة (67.2) على الشكل الآتي:

$$(k+1)(k+2) \dots (k+n)Y_{k+n}(x) = G_k(x) - R(Y_k(x)) - H_k \quad (69.2)$$

بتطبيق تعريف التحويل التفاضلي المختزل (42.2) على الشروط الابتدائية (65.2) نحصل على الشروط

الابتدائية بالصيغة المحولة على النحو الآتي:

$$\begin{cases} Y_0(x) = f_0(x) \\ Y_1(x) = f_1(x) \\ Y_2(x) = \frac{1}{2!} f_2(x) \\ Y_3(x) = \frac{1}{3!} f_3(x) \\ \vdots \\ Y_{n-1}(x) = \frac{1}{(n-1)!} f_{n-1}(x) \end{cases} \quad (70.2)$$

يتم تحديد بقية الدوال المجهولة $Y_n(x), Y_{n+1}(x), Y_{n+2}(x), \dots$ باستخدام العلاقة التكرارية (69.2)، ثم

نحصل على الحل النهائي من خلال تعويض جميع الدوال الناتجة في متسلسلة الحل لطريقة RDTM التي

تعطى بالعلاقة الآتية:

$$y(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} Y_k(x) t^k$$

2-3-3 أمثلة تطبيقية:

مثال (11): معادلة Sawada-Kotera-Ito

لتكن مسألة القيم الابتدائية لمعادلة Sawada-Kotera-Ito:

$$y_t + \left(63y^4 + 63(2y^2y_{xx} + yy_x^2) + 21(yy_{xxxx} + y_{xx}^2 + y_x y_{xxx}) + \frac{\partial^7 y(x,t)}{\partial x^7} \right)_x = 0 \quad (71.2)$$

$$y(x, 0) = \frac{4\mu^2}{3} (2 - 3 \tanh^2(\mu x))$$

حيث $y = y(x, t)$ ، μ ثابت اختياري.

ملاحظة: تم حل هذه المسألة باستخدام طريقة RDTM في المثال (10)، وسنقوم الآن بحلها باستخدام طريقة He-RDTM لإظهار فعاليتها في حل هذه المسألة.

الحل:

باشتقاق الحدود داخل القوس في المعادلة (71.2) بالنسبة لـ x نحصل على الصيغة المكافئة لها:

$$y_t + 252y^3y_x + 378yy_x y_{xx} + 126y^2y_{xxx} + 63(y_x)^3 + 42y_x y_{xxxx} + 21yy_{xxxxx} + 63y_{xx}y_{xxx} + \frac{\partial^7 y(x,t)}{\partial x^7} = 0$$

وإعادة كتابة المعادلة السابقة بالشكل:

$$y_t = -252y^3y_x - 378yy_x y_{xx} - 126y^2y_{xxx} - 63(y_x)^3 - 42y_x y_{xxxx} - 21yy_{xxxxx} - 63y_{xx}y_{xxx} - \frac{\partial^7 y(x,t)}{\partial x^7}$$

بتطبيق خواص RDTM على طرفي المعادلة السابقة واستبدال الحدود غير الخطية بكثيرات حدود He

نحصل على العلاقة التكرارية الآتية:

$$(k+1)Y_{k+1}(x) = -252H_k - 378I_k - 126G_k - 63L_k - 42M_k - 21Q_k - 63R_k - \frac{\partial^7 Y_k(x)}{\partial x^7} \quad (72.2)$$

حيث $H_k, I_k, G_k, L_k, M_k, Q_k, R_k$ تمثل كثيرات حدود He للحدود غير الخطية الآتية على الترتيب.

$$y^3y_x, yy_x y_{xx}, y^2y_{xxx}, (y_x)^3, y_x y_{xxxx}, yy_{xxxxx}, y_{xx}y_{xxx}$$

○ صيغة كثيرات حدود He للحد غير الخطي y^3y_x هي:

$$H_k = \frac{1}{k!} \frac{\partial^k}{\partial p^k} \left[\left(\sum_{i=0}^k Y_i(x) p^i \right)^3 \left(\sum_{i=0}^k Y_i(x) p^i \right)_x \right]_{p=0}, \quad k \geq 0$$

وتعطى الحدود الأولى كما يلي:

$$H_0 = (Y_0(x))^3 (Y_0(x))_x$$

$$H_1 = (Y_0(x))^3 (Y_1(x))_x + 3(Y_0(x))^2 Y_1(x) (Y_0(x))_x$$

$$H_2 = (Y_0(x))^3 (Y_2(x))_x + 3(Y_0(x))^2 Y_1(x) (Y_1(x))_x + 3(Y_0(x))^2 Y_2(x) (Y_0(x))_x + 3Y_0(x) (Y_1(x))^2 (Y_0(x))_x$$

$$H_3 = (Y_0(x))^3 (Y_3(x))_x + 3(Y_0(x))^2 Y_1(x) (Y_2(x))_x + 3(Y_1(x))^2 Y_0(x) (Y_1(x))_x + 3(Y_0(x))^2 Y_2(x) (Y_1(x))_x + (Y_1(x))^3 (Y_0(x))_x + 6Y_0(x) Y_1(x) Y_2(x) (Y_0(x))_x + 3(Y_0(x))^2 Y_3(x) (Y_0(x))_x$$

○ صيغة كثيرات حدود He للحد غير الخطي $yy_x y_{xx}$ هي:

$$I_k = \frac{1}{k!} \frac{\partial^k}{\partial p^k} \left[\left(\sum_{i=0}^k Y_i(x) p^i \right) \left(\sum_{i=0}^k Y_i(x) p^i \right)_x \left(\sum_{i=0}^k Y_i(x) p^i \right)_{xx} \right]_{p=0}, \quad k \geq 0$$

وتعطى الحدود الأولى كما يلي:

$$I_0 = Y_0(x) (Y_0(x))_x (Y_0(x))_{xx}$$

$$I_1 = Y_0(x) (Y_0(x))_x (Y_1(x))_{xx} + Y_0(x) (Y_1(x))_x (Y_0(x))_{xx} + Y_1(x) (Y_0(x))_x (Y_0(x))_{xx}$$

$$I_2 = Y_0(x) (Y_0(x))_x (Y_2(x))_{xx} + Y_0(x) (Y_1(x))_x (Y_1(x))_{xx} + Y_1(x) (Y_0(x))_x (Y_1(x))_{xx} + Y_0(x) (Y_2(x))_x (Y_0(x))_{xx} + Y_1(x) (Y_1(x))_x (Y_0(x))_{xx} + Y_2(x) (Y_0(x))_x (Y_0(x))_{xx}$$

$$I_3 = Y_3(x) (Y_0(x))_x (Y_0(x))_{xx} + Y_2(x) (Y_1(x))_x (Y_0(x))_{xx} + Y_1(x) (Y_2(x))_x (Y_0(x))_{xx} + Y_0(x) (Y_3(x))_x (Y_0(x))_{xx} + Y_2(x) (Y_0(x))_x (Y_1(x))_{xx} + Y_1(x) (Y_1(x))_x (Y_1(x))_{xx} + Y_0(x) (Y_2(x))_x (Y_1(x))_{xx} + Y_1(x) (Y_0(x))_x (Y_2(x))_{xx} + Y_0(x) (Y_1(x))_x (Y_2(x))_{xx} + Y_0(x) (Y_0(x))_x (Y_3(x))_{xx}$$

○ صيغة كثيرات حدود He للحد غير الخطي $y^2 y_{xxx}$ هي:

$$G_k = \frac{1}{k!} \frac{\partial^k}{\partial p^k} \left[\left(\sum_{i=0}^k Y_i(x) p^i \right)^2 \left(\sum_{i=0}^k Y_i(x) p^i \right)_{xxx} \right]_{p=0}, \quad k \geq 0$$

وتعطى الحدود الأولى كما يلي:

$$G_0 = (Y_0(x))^2 (Y_0(x))_{xxx}$$

$$G_1 = (Y_0(x))^2 (Y_1(x))_{xxx} + 2Y_0(x) Y_1(x) (Y_0(x))_{xxx}$$

$$G_2 = (Y_0(x))^2 (Y_2(x))_{xxx} + 2Y_0(x) Y_1(x) (Y_1(x))_{xxx} + 2Y_0(x) Y_2(x) (Y_0(x))_{xxx} + (Y_1(x))^2 (Y_0(x))_{xxx}$$

$$G_3 = 2Y_1(x)Y_2(x)(Y_0(x))_{xxx} + 2Y_0(x)Y_3(x)(Y_0(x))_{xxx} + (Y_1(x))^2(Y_1(x))_{xxx} + 2Y_0(x)Y_2(x)(Y_1(x))_{xxx} + 2Y_0(x)Y_1(x)(Y_2(x))_{xxx} + (Y_0(x))^2(Y_3(x))_{xxx}$$

○ صيغة كثيرات حدود He للحد غير الخطي $(y_x)^3$ هي:

$$L_k = \frac{1}{k!} \frac{\partial^k}{\partial p^k} \left[\left(\left(\sum_{i=0}^k Y_i(x) p^i \right)_x \right)^3 \right]_{p=0}, \quad k \geq 0$$

وتعطى الحدود الأولى كما يلي:

$$L_0 = \left((Y_0(x))_x \right)^3$$

$$L_1 = 3 \left((Y_0(x))_x \right)^2 (Y_1(x))_x$$

$$L_2 = 3 \left((Y_0(x))_x \right)^2 (Y_2(x))_x + 3(Y_0(x))_x \left((Y_1(x))_x \right)^2$$

$$L_3 = \left((Y_1(x))_x \right)^3 + 6(Y_0(x))_x (Y_1(x))_x (Y_2(x))_x + 3 \left((Y_0(x))_x \right)^2 (Y_3(x))_x$$

○ صيغة كثيرات حدود He للحد غير الخطي $y_x y_{xxxx}$ هي:

$$M_k = \frac{1}{k!} \frac{\partial^k}{\partial p^k} \left[\left(\sum_{i=0}^k Y_i(x) p^i \right)_x \left(\sum_{i=0}^k Y_i(x) p^i \right)_{xxxx} \right]_{p=0}, \quad k \geq 0$$

وتعطى الحدود الأولى كما يلي:

$$M_0 = (Y_0(x))_x (Y_0(x))_{xxxx}$$

$$M_1 = (Y_0(x))_x (Y_1(x))_{xxxx} + (Y_1(x))_x (Y_0(x))_{xxxx}$$

$$M_2 = (Y_0(x))_x (Y_2(x))_{xxxx} + (Y_1(x))_x (Y_1(x))_{xxxx} + (Y_2(x))_x (Y_0(x))_{xxxx}$$

$$M_3 = (Y_0(x))_x (Y_3(x))_{xxxx} + (Y_1(x))_x (Y_2(x))_{xxxx} + (Y_3(x))_x (Y_1(x))_{xxxx} + (Y_3(x))_x (Y_0(x))_{xxxx}$$

○ صيغة كثيرات حدود He للحد غير الخطي yy_{xxxxx} هي:

$$Q_k = \frac{1}{k!} \frac{\partial^k}{\partial p^k} \left[\left(\sum_{i=0}^k Y_i(x) p^i \right) \left(\sum_{i=0}^k Y_i(x) p^i \right)_{xxxxx} \right]_{p=0}, \quad k \geq 0$$

وتعطى الحدود الأولى كما يلي:

$$Q_0 = Y_0(x)(Y_0(x))_{xxxxx}$$

$$Q_1 = Y_0(x)(Y_1(x))_{xxxxx} + Y_1(x)(Y_0(x))_{xxxxx}$$

$$Q_2 = Y_0(x)(Y_2(x))_{xxxxx} + Y_1(x)(Y_1(x))_{xxxxx} + Y_2(x)(Y_0(x))_{xxxxx}$$

$$Q_3 = Y_0(x)(Y_3(x))_{xxxxx} + Y_1(x)(Y_2(x))_{xxxxx} + Y_2(x)(Y_3(x))_{xxxxx} + Y_3(x)(Y_0(x))_{xxxxx}$$

○ صيغة كثرات حدود He للحد غير الخطي $y_{xx}y_{xxx}$ هي:

$$R_k = \frac{1}{k!} \frac{\partial^k}{\partial p^k} \left[\left(\sum_{i=0}^k Y_i(x) p^i \right)_{xx} \left(\sum_{i=0}^k Y_i(x) p^i \right)_{xxx} \right]_{p=0}, \quad k \geq 0$$

وتعطى الحدود الأولى كما يلي:

$$R_0 = (Y_0(x))_{xx} (Y_0(x))_{xxx}$$

$$R_1 = (Y_0(x))_{xx} (Y_1(x))_{xxx} + (Y_1(x))_{xx} (Y_0(x))_{xxx}$$

$$R_2 = (Y_0(x))_{xx} (Y_2(x))_{xxx} + (Y_1(x))_{xx} (Y_1(x))_{xxx} + (Y_2(x))_{xx} (Y_0(x))_{xxx}$$

$$R_3 = (Y_0(x))_{xx} (Y_3(x))_{xxx} + (Y_1(x))_{xx} (Y_2(x))_{xxx} + (Y_2(x))_{xx} (Y_1(x))_{xxx} + (Y_3(x))_{xx} (Y_0(x))_{xxx}$$

بتطبيق تعريف التحويل التفاضلي المختزل على الشرط الابتدائي للمسألة نحصل على:

$$Y_0(x) = \frac{4\mu^2}{3} (2 - 3 \tanh^2(\mu x))$$

نقوم بالتعويض في العلاقة التكرارية (72.2) من أجل $k \geq 0$:

$$\begin{aligned} k = 0 \Rightarrow Y_1(x) = & -252(Y_0(x))^3 (Y_0(x))_x - 378Y_0(x)(Y_0(x))_x (Y_0(x))_{xx} - 126(Y_0(x))^2 (Y_0(x))_{xxx} \\ & - 63((Y_0(x))_x)^3 - 42(Y_0(x))_x (Y_0(x))_{xxx} - 21Y_0(x)(Y_0(x))_{xxxx} \\ & - 63(Y_0(x))_{xx} (Y_0(x))_{xxx} - \frac{\partial^7 Y_0(x)}{\partial x^7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k = 1 \Rightarrow 2Y_2(x) = & -252((Y_0(x))^3 (Y_1(x))_x + 3(Y_0(x))^2 Y_1(x)(Y_0(x))_x) - \\ & 378(Y_0(x)(Y_0(x))_x (Y_1(x))_{xx} + Y_0(x)(Y_1(x))_x (Y_0(x))_{xx} + Y_1(x)(Y_0(x))_x (Y_0(x))_{xx}) - \\ & 126((Y_0(x))^2 (Y_1(x))_{xxx} + 2Y_0(x)Y_1(x)(Y_0(x))_{xxx}) - 63(3((Y_0(x))_x)^2 (Y_1(x))_x) - \\ & 42((Y_0(x))_x (Y_1(x))_{xxx} + (Y_1(x))_x (Y_0(x))_{xxx}) - 21(Y_0(x)(Y_1(x))_{xxxx} + Y_1(x)(Y_0(x))_{xxxx}) - \\ & 63((Y_0(x))_{xx} (Y_1(x))_{xxx} + (Y_1(x))_{xx} (Y_0(x))_{xxx}) - \frac{\partial^7 Y_1(x)}{\partial x^7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k = 2 \Rightarrow 3Y_3(x) = & -252((Y_0(x))^3 (Y_2(x))_x + 3(Y_0(x))^2 Y_1(x)(Y_1(x))_x + 3(Y_0(x))^2 Y_2(x)(Y_0(x))_x + \\ & 3Y_0(x)(Y_1(x))^2 (Y_0(x))_x) - 378(Y_0(x)(Y_0(x))_x (Y_2(x))_{xx} + Y_0(x)(Y_1(x))_x (Y_1(x))_{xx} + \\ & Y_1(x)(Y_0(x))_x (Y_1(x))_{xx} + Y_0(x)(Y_2(x))_x (Y_0(x))_{xx} + Y_1(x)(Y_1(x))_x (Y_0(x))_{xx} + \\ & Y_2(x)(Y_0(x))_x (Y_0(x))_{xx}) - 126((Y_0(x))^2 (Y_2(x))_{xxx} + 2Y_0(x)Y_1(x)(Y_1(x))_{xxx} + \\ & 2Y_0(x)Y_2(x)(Y_0(x))_{xxx} + (Y_1(x))^2 (Y_0(x))_{xxx}) - 63(3((Y_0(x))_x)^2 (Y_2(x))_x + \\ & 3(Y_0(x))_x ((Y_1(x))_x)^2) - 42((Y_0(x))_x (Y_2(x))_{xxx} + (Y_1(x))_x (Y_1(x))_{xxx} + (Y_2(x))_x (Y_0(x))_{xxx}) - \\ & 21(Y_0(x)(Y_2(x))_{xxxx} + Y_1(x)(Y_1(x))_{xxxx} + Y_2(x)(Y_0(x))_{xxxx}) - 63((Y_0(x))_{xx} (Y_2(x))_{xxx} + \\ & (Y_1(x))_{xx} (Y_1(x))_{xxx} + (Y_2(x))_{xx} (Y_0(x))_{xxx}) - \frac{\partial^7 Y_2(x)}{\partial x^7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k = 3 \Rightarrow 4Y_4(x) = & -252 \left((Y_0(x))^3 (Y_3(x))_x + 3(Y_0(x))^2 Y_1(x) (Y_2(x))_x + 3(Y_1(x))^2 Y_0(x) (Y_1(x))_x + \right. \\
& 3(Y_0(x))^2 Y_2(x) (Y_1(x))_x + (Y_1(x))^3 (Y_0(x))_x + 6Y_0(x) Y_1(x) Y_2(x) (Y_0(x))_x + \\
& 3(Y_0(x))^2 Y_3(x) (Y_0(x))_x \left. \right) - 378 \left(Y_3(x) (Y_0(x))_x (Y_0(x))_{xx} + Y_2(x) (Y_1(x))_x (Y_0(x))_{xx} + \right. \\
& Y_1(x) (Y_2(x))_x (Y_0(x))_{xx} + Y_0(x) (Y_3(x))_x (Y_0(x))_{xx} + Y_2(x) (Y_0(x))_x (Y_1(x))_{xx} + \\
& Y_1(x) (Y_1(x))_x (Y_1(x))_{xx} + Y_0(x) (Y_2(x))_x (Y_1(x))_{xx} + Y_1(x) (Y_0(x))_x (Y_2(x))_{xx} + \\
& Y_0(x) (Y_1(x))_x (Y_2(x))_{xx} + Y_0(x) (Y_0(x))_x (Y_3(x))_{xx} \left. \right) - 126 \left(2Y_1(x) Y_2(x) (Y_0(x))_{xxx} + \right. \\
& 2Y_0(x) Y_3(x) (Y_0(x))_{xxx} + (Y_1(x))^2 (Y_1(x))_{xxx} + 2Y_0(x) Y_2(x) (Y_1(x))_{xxx} + 2Y_0(x) Y_1(x) (Y_2(x))_{xxx} + \\
& (Y_0(x))^2 (Y_3(x))_{xxx} \left. \right) - 63 \left(((Y_1(x))_x)^3 + 6(Y_0(x))_x (Y_1(x))_x (Y_2(x))_x + 3((Y_0(x))_x)^2 (Y_3(x))_x \right) - \\
& 42 \left((Y_0(x))_x (Y_3(x))_{xxxx} + (Y_1(x))_x (Y_2(x))_{xxxx} + (Y_3(x))_x (Y_1(x))_{xxxx} + (Y_3(x))_x (Y_0(x))_{xxxx} \right) - \\
& 21 \left(Y_0(x) (Y_3(x))_{xxxxx} + Y_1(x) (Y_2(x))_{xxxxx} + Y_2(x) (Y_3(x))_{xxxxx} + Y_3(x) (Y_0(x))_{xxxxx} \right) - \\
& 63 \left((Y_0(x))_{xx} (Y_3(x))_{xxx} + (Y_1(x))_{xx} (Y_2(x))_{xxx} + (Y_2(x))_{xx} (Y_1(x))_{xxx} + (Y_3(x))_{xx} (Y_0(x))_{xxx} \right) - \\
& \frac{\partial^7 Y_3(x)}{\partial x^7}
\end{aligned}$$

بالتعويض في العلاقات السابقة وإجراء العمليات الحسابية باستخدام برنامج Mathematica نجد:

$$\begin{aligned}
Y_1(x) &= -\frac{2084\mu^9}{3} \operatorname{sech}^2(\mu x) \tanh(\mu x) \\
Y_2(x) &= \frac{262144\mu^{16}}{9} (-2 + \cosh(2\mu x)) \operatorname{sech}^4(\mu x) \\
Y_3(x) &= -\frac{67108864\mu^{23}}{81} (-11 \sinh(\mu x) + \sinh(3\mu x)) \operatorname{sech}^5(\mu x) \\
Y_4(x) &= \frac{4294967296\mu^{30}}{243} (33 - 26\cosh(2\mu x) + \cosh(4\mu x)) \operatorname{sech}^6(\mu x) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

وبالتالي الحل الناتج هو:

$$\begin{aligned}
y(x, t) &= \sum_{k=0}^{\infty} Y_k(x) t^k = Y_0(x) + Y_1(x) t + Y_2(x) t^2 + Y_3(x) t^3 + Y_4(x) t^4 + \dots \\
&= \frac{4\mu^2}{3} (2 - 3 \tanh^2(\mu x)) - \frac{2084\mu^9}{3} \operatorname{sech}^2(\mu x) \tanh(\mu x) t + \frac{262144\mu^{16}}{9} (-2 + \\
&\cosh(2\mu x)) \operatorname{sech}^4(\mu x) t^2 - \frac{67108864\mu^{23}}{81} (-11 \sinh(\mu x) + \sinh(3\mu x)) \operatorname{sech}^5(\mu x) t^3 + \\
&\frac{4294967296\mu^{30}}{243} (33 - 26\cosh(2\mu x) + \cosh(4\mu x)) \operatorname{sech}^6(\mu x) t^4 + \dots
\end{aligned}$$

من خلال هذا المثال، برزت أفضلية الطريقة الهجينة He-RDTM مقارنة بطريقة RDTM، إذ تمكنا من الوصول إلى نفس الحل الذي تم الحصول عليه باستخدام RDTM في المثال (10)، مع سهولة أكبر في التعامل مع الحدود غير الخطية وسرعة محسنة في الوصول إلى الحل النهائي.

مثال (12): معادلة Sine-Gordon

هي معادلة تفاضلية جزئية غير خطية قدمها الباحث المهندس الفرنسي Edmond Bour عام 1862 ،وتظهر تطبيقاتها في مجالات متعددة مثل الهندسة التفاضلية، وفيزياء الحالة الصلبة، والبصريات غير الخطية ، وغيرها من التطبيقات العلمية (Al-Tai and Al-Fayadh, 2021).

لتكن مسألة القيم الابتدائية لمعادلة Sine-Gordon:

$$y_{tt}(x, t) = y_{xx}(x, t) - \sin(y(x, t)) \quad (73.2)$$

مع الشروط الابتدائية:

$$y(x, 0) = 0, \quad y_t(x, 0) = 4 \operatorname{sech}(x)$$

ملاحظة: تم حل هذه المسألة باستخدام طريقة RDTM في المرجع (Keskin et al., 2011)، وسنقوم في هذا المثال بحلها باستخدام طريقة He-RDTM لإظهار فعاليتها في حل هذه المسألة.

الحل:

بتطبيق خواص RDTM على طرفي المعادلة (73.2) واستبدال الحد غير الخطي $\sin(y(x, t))$ بكثيرات حدود He نحصل على العلاقة التكرارية الآتية:

$$(k + 1)(k + 2)Y_{k+2}(x) = \frac{\partial^2 Y_k(x)}{\partial x^2} - H_k \quad (74.2)$$

كثيرات حدود He للحد غير الخطي $\sin(y(x, t))$ تعطى بالصيغة الآتية:

$$H_k = \frac{1}{k!} \frac{\partial^k}{\partial p^k} \left[\sin \left(\sum_{i=0}^k Y_i(x) p^i \right) \right]_{p=0}, \quad k \geq 0$$

وتعطى الحدود الأولى لـ H_k كما يأتي:

$$H_0 = \sin(Y_0(x))$$

$$H_1 = \cos(Y_0(x)) Y_1(x)$$

$$H_2 = \cos(Y_0(x)) Y_2(x) - \frac{1}{2!} \sin(Y_0(x)) (Y_1(x))^2$$

$$H_3 = \cos(Y_0(x)) \left(-\frac{1}{3!} (Y_1(x))^3 + Y_3(x) \right) - \sin(Y_0(x)) Y_1(x) Y_2(x)$$

$$H_4 = -\frac{1}{2!} \cos(Y_0(x)) \left((Y_1(x))^2 Y_2(x) - 2Y_4(x) \right) + \frac{1}{4!} \sin(Y_0(x)) \left((Y_1(x))^4 - 12(Y_2(x))^2 - 24Y_1(x)Y_3(x) \right)$$

$$H_5 = \cos(Y_0(x)) \left(\frac{(Y_1(x))^5}{5!} - \frac{1}{2} Y_1(x) (Y_2(x))^2 - \frac{1}{2} (Y_1(x))^2 Y_3(x) + Y_5(x) \right) +$$

$$\frac{1}{3!} \sin(Y_0(x)) \left((Y_1(x))^3 Y_2(x) - 6Y_2(x)Y_3(x) - 6Y_1(x)Y_4(x) \right)$$

وبتطبيق تعريف التحويل التفاضلي المختزل على الشروط الابتدائية للمسألة نحصل على:

$$Y_0(x) = 0 \quad , \quad Y_1(x) = 4 \operatorname{sech}(x)$$

بالتعويض في العلاقة التكرارية (74.2) من أجل $k \geq 0$:

$$k = 0 \Rightarrow 2Y_2(x) = \frac{\partial^2 Y_0(x)}{\partial x^2} - \sin(Y_0(x))$$

$$k = 1 \Rightarrow 6Y_3(x) = \frac{\partial^2 Y_1(x)}{\partial x^2} - \cos(Y_0(x)) Y_1(x)$$

$$k = 2 \Rightarrow 12Y_4(x) = \frac{\partial^2 Y_2(x)}{\partial x^2} - \left(\cos(Y_0(x)) Y_2(x) - \frac{1}{2!} \sin(Y_0(x)) (Y_1(x))^2 \right)$$

$$k = 3 \Rightarrow 20Y_5(x) = \frac{\partial^2 Y_3(x)}{\partial x^2} - \left(\cos(Y_0(x)) \left(-\frac{1}{3!} (Y_1(x))^3 + Y_3(x) \right) - \sin(Y_0(x)) Y_1(x) Y_2(x) \right)$$

$$k = 4 \Rightarrow 30Y_6(x) = \frac{\partial^2 Y_4(x)}{\partial x^2} - \left(-\frac{1}{2!} \cos(Y_0(x)) \left((Y_1(x))^2 Y_2(x) - 2Y_4(x) \right) + \right.$$

$$\left. \frac{1}{4!} \sin(Y_0(x)) \left((Y_1(x))^4 - 12(Y_2(x))^2 - 24Y_1(x)Y_3(x) \right) \right)$$

$$k = 5 \Rightarrow 42Y_7(x) = \frac{\partial^2 Y_5(x)}{\partial x^2} - \left(\cos(Y_0(x)) \left(\frac{(Y_1(x))^5}{5!} - \frac{1}{2} Y_1(x) (Y_2(x))^2 - \frac{1}{2} (Y_1(x))^2 Y_3(x) + \right. \right.$$

$$\left. Y_5(x) \right) + \frac{1}{3!} \sin(Y_0(x)) \left((Y_1(x))^3 Y_2(x) - 6Y_2(x)Y_3(x) - 6Y_1(x)Y_4(x) \right) \right)$$

:

بالتعويض في العلاقات السابقة، وإجراء العمليات الحسابية نجد:

$$Y_2(x) = 0$$

$$Y_3(x) = -\frac{4}{3} \operatorname{sech}^3(x)$$

$$Y_4(x) = 0$$

$$Y_5(x) = \frac{4}{5} \operatorname{sech}^5(x)$$

$$Y_6(x) = 0$$

$$Y_7(x) = -\frac{4}{7} \operatorname{sech}^7(x)$$

:

$$Y_k(x) = \begin{cases} (-1)^{\frac{k}{2}} \frac{4}{k} \operatorname{sech}^k(x) & \text{for } k \text{ is odd} \\ 0 & \text{for } k \text{ is even} \end{cases}$$

وبالتالي الحل الناتج هو:

$$y(x, t) = Y_0(x) + Y_1(x)t + Y_2(x)t^2 + Y_3(x)t^3 + Y_4(x)t^4 + Y_5(x)t^5 + Y_6(x)t^6 + \dots$$

$$\begin{aligned}
&= 4 \operatorname{sech}(x) t - \frac{4}{3} \operatorname{sech}^3(x) t^3 + \frac{4}{5} \operatorname{sech}^5(x) t^5 - \frac{4}{7} \operatorname{sech}^7(x) t^7 + \dots \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{\frac{k}{2}} \frac{4}{k} \operatorname{sech}^k(x) t^k \\
&= 4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{k}{2}}}{k} \operatorname{sech}^k(x) t^k = 4 \arctan(\operatorname{sech}(x) t)
\end{aligned}$$

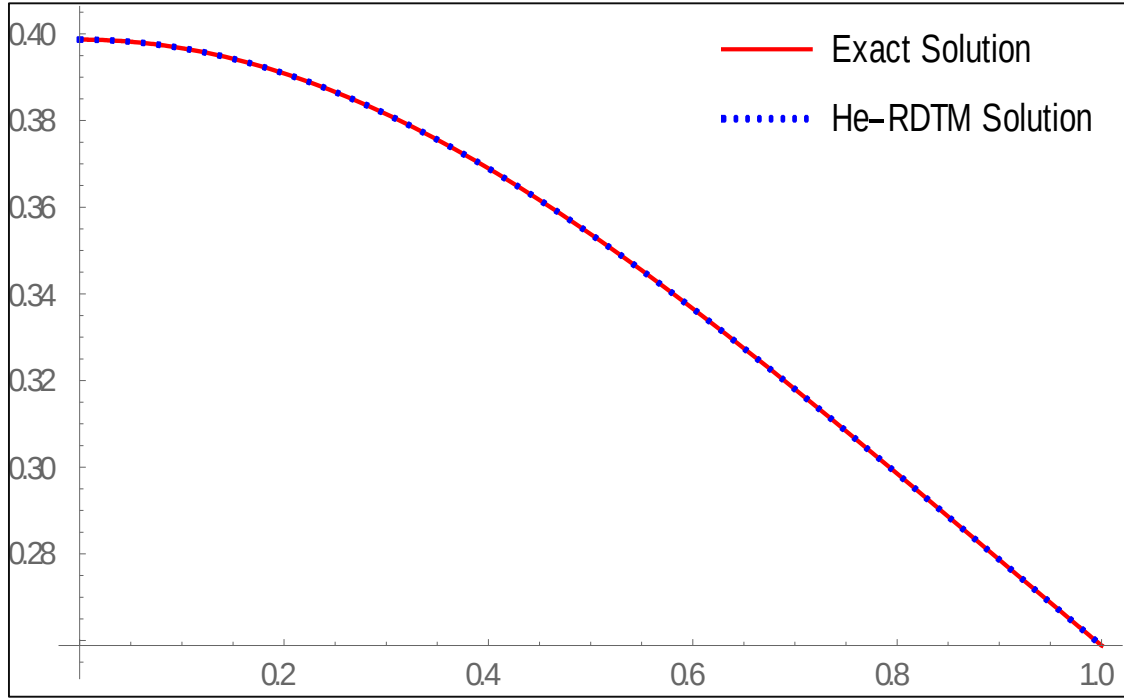
وهو الحل الدقيق لهذه المسألة، وهو الحل نفسه الذي تم الحصول عليه باستخدام طريقة RDTM في المرجع (Keskin *et al.*, 2011).

يتضمن كلاً من الجدول (5) والشكل (6) مقارنة بين الحل الدقيق، والحل الناتج عن طريقة He-RDTM باستخدام 6 تكرارات.

الجدول (5): مقارنة عددية بين الحل الدقيق للمثال (12) والحل الناتج عن تطبيق He-RDTM باستخدام 6 تكرارات عندما $t = 0.1$

x	Exact Solution	He-RDTM Solution	Absolute Error of Exact Solution - He-RDTM Solution
0	0.398674610	0.398674667	5.7×10^{-8}
0.1	0.396702532	0.396702587	5.5×10^{-8}
0.2	0.390882210	0.390882259	4.9×10^{-8}
0.3	0.381490272	0.381490313	4.2×10^{-8}
0.4	0.368953069	0.368953102	3.3×10^{-8}
0.5	0.353802001	0.353802026	2.4×10^{-8}
0.6	0.336623339	0.336623356	1.7×10^{-8}
0.7	0.318010473	0.318010485	1.2×10^{-8}
0.8	0.298524489	0.298524496	7.4×10^{-9}
0.9	0.278666151	0.278666156	4.6×10^{-9}
1	0.258859733	0.258859736	2.7×10^{-9}

المصدر: تم إعداده باستخدام برنامج Mathematica 12.0



المصدر: تم إعداده باستخدام برنامج Mathematica 12.0

الشكل (6): مقارنة بيانية بين الحل الدقيق للمثال (12) والحل الناتج عن تطبيق He-RDTM باستخدام 6 تكرارات عندما $t = 0.1$

مثال (13): معادلة انتشار الحرارة (Heat Diffusion Equation)

تعد معادلة انتشار الحرارة من أهم النماذج الرياضية التي تستخدم في المجالات الفيزيائية والهندسية، وتظهر خاصةً في مسائل التوصيل الحراري (Alkarawi and Al-Saiq, 2021).

لتكن مسألة القيم الابتدائية لمعادلة انتشار الحرارة :

$$y_t(x, t) = y_{xx}(x, t) - y_x(x, t) - y^2(x, t) + y(x, t)y_{xx}(x, t) + y(x, t) \quad (75.2)$$

$$y(x, 0) = e^x \text{ مع الشرط الابتدائي}$$

ملاحظة: تم حل هذه المسألة باستخدام طريقة ADM في المرجع (Alkarawi and Al-Saiq, 2021)،

وسنقوم في هذا المثال بحلها باستخدام طريقة He-RDTM لإظهار فعاليتها في حل هذه المسألة.

الحل:

بتطبيق خواص RDTM على طرفي المعادلة (75.2) واستبدال الحدود غير الخطية بكثيرات حدود He

نحصل على العلاقة التكرارية الآتية:

$$(k + 1)Y_{k+1}(x) = \frac{\partial^2 Y_k(x)}{\partial x^2} - \frac{\partial Y_k(x)}{\partial x} - H_k + G_k + Y_k(x) \quad (76.2)$$

حيث H_k, G_k تمثل كثيرات حدود He لكلٍ من الحدود غير الخطية $y^2(x, t), y(x, t)y_{xx}(x, t)$ على الترتيب.

صيغة كثيرات حدود He للحد غير الخطي $y^2(x, t)$ هي:

$$H_k = \frac{1}{k!} \frac{\partial^k}{\partial p^k} \left[\left(\sum_{i=0}^k Y_i(x) p^i \right)^2 \right]_{p=0}, \quad k \geq 0$$

وتعطى الحدود الأولى لـ H_k بالعلاقات الآتية:

$$H_0 = (Y_0(x))^2$$

$$H_1 = 2Y_0(x)Y_1(x)$$

$$H_2 = 2Y_0(x)Y_2(x) + (Y_1(x))^2$$

$$H_3 = 2Y_0(x)Y_3(x) + 2Y_1(x)Y_2(x)$$

صيغة كثيرات حدود He للحد غير الخطي $y(x, t)y_{xx}(x, t)$ هي:

$$G_k = \frac{1}{k!} \frac{\partial^k}{\partial p^k} \left[\left(\sum_{i=0}^k Y_i(x) p^i \right) \left(\sum_{i=0}^k Y_i(x) p^i \right)_{xx} \right]_{p=0}, \quad k \geq 0$$

وتعطى الحدود الأولى لـ G_k بالعلاقات الآتية:

$$G_0 = Y_0(x)(Y_0(x))_{xx}$$

$$G_1 = Y_1(x)(Y_0(x))_{xx} + Y_0(x)(Y_1(x))_{xx}$$

$$G_2 = Y_2(x)(Y_0(x))_{xx} + Y_1(x)(Y_1(x))_{xx} + Y_0(x)(Y_2(x))_{xx}$$

$$G_3 = Y_3(x)(Y_0(x))_{xx} + Y_2(x)(Y_1(x))_{xx} + Y_1(x)(Y_2(x))_{xx} + Y_0(x)(Y_3(x))_{xx}$$

بتطبيق تعريف التحويل التفاضلي المختزل على الشرط الابتدائي $y(x, 0) = e^x$ نحصل على:

$$Y_0(x) = e^x$$

بالتعويض في العلاقة التكرارية (76.2) من أجل $k \geq 0$:

$$k = 0 \Rightarrow Y_1(x) = \frac{\partial^2 Y_0(x)}{\partial x^2} - \frac{\partial Y_0(x)}{\partial x} - (Y_0(x))^2 + Y_0(x)(Y_0(x))_{xx} + Y_0(x)$$

$$k = 1 \Rightarrow 2Y_2(x) = \frac{\partial^2 Y_1(x)}{\partial x^2} - \frac{\partial Y_1(x)}{\partial x} - 2Y_0(x)Y_1(x) + Y_1(x)(Y_0(x))_{xx} + Y_0(x)(Y_1(x))_{xx} + Y_1(x)$$

$$k = 2 \Rightarrow 3Y_3(x) = \frac{\partial^2 Y_2(x)}{\partial x^2} - \frac{\partial Y_2(x)}{\partial x} - (2Y_0(x)Y_2(x) + (Y_1(x))^2) + Y_2(x)(Y_0(x))_{xx} + Y_1(x)(Y_1(x))_{xx} + Y_0(x)(Y_2(x))_{xx} + Y_2(x)$$

$$k = 3 \Rightarrow 4Y_4(x) = \frac{\partial^2 Y_3(x)}{\partial x^2} - \frac{\partial Y_3(x)}{\partial x} - (2Y_0(x)Y_3(x) + 2Y_1(x)Y_2(x)) + Y_3(x)(Y_0(x))_{xx} + Y_2(x)(Y_1(x))_{xx} + Y_1(x)(Y_2(x))_{xx} + Y_0(x)(Y_3(x))_{xx} + Y_3(x)$$

:

بالتعويض في العلاقات السابقة وإجراء العمليات الحسابية نجد:

$$Y_1(x) = e^x, \quad Y_2(x) = \frac{e^x}{2}, \quad Y_3(x) = \frac{e^x}{6}, \quad Y_4(x) = \frac{e^x}{24}, \dots$$

وبالتالي الحل الناتج هو:

$$\begin{aligned} y(x, t) &= \sum_{k=0}^{\infty} Y_k(x) t^k = Y_0(x) + Y_1(x)t + Y_2(x)t^2 + Y_3(x)t^3 + Y_4(x)t^4 + \dots \\ &= e^x + e^x t + e^x \frac{t^2}{2} + e^x \frac{t^3}{6} + e^x \frac{t^4}{24} + \dots \\ &= e^x \left(1 + t + \frac{1}{2!} t^2 + \frac{1}{3!} t^3 + \frac{1}{4!} t^4 + \dots \right) \\ &= e^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \right) = e^x e^t = e^{x+t} \end{aligned}$$

وهو الحل الدقيق للمسألة، وهو الحل نفسه الذي تم الحصول عليه باستخدام طريقة ADM في المرجع

(Alkarawi and Al-Saiq, 2021) مما يؤكد دقة وفعالية طريقة He-RDTM.

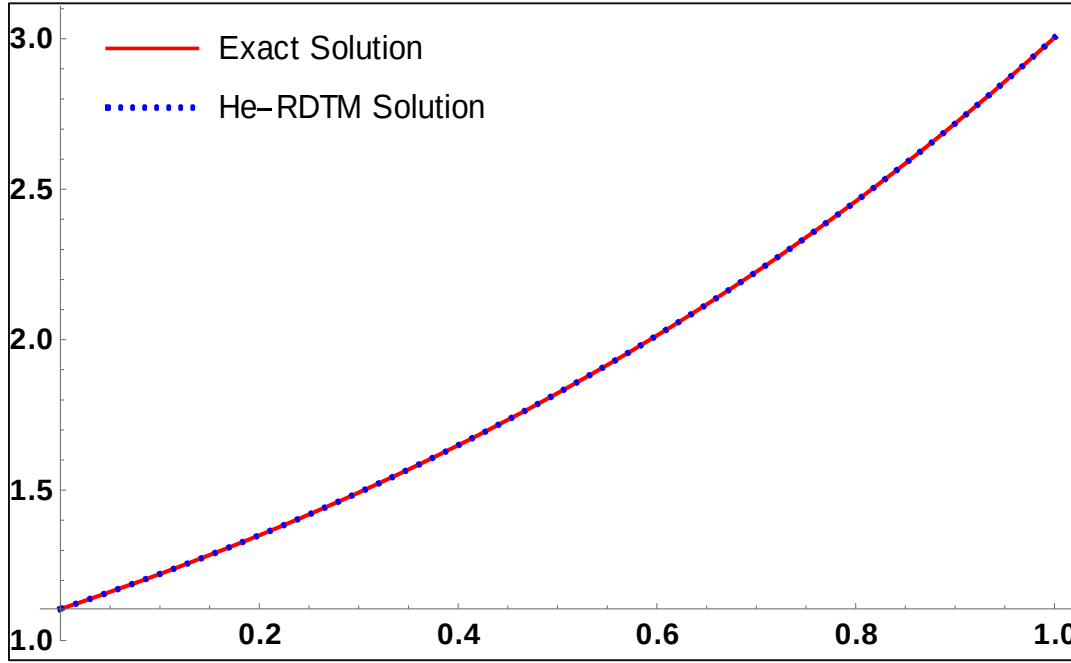
يتضمن كلاً من الجدول (6) والشكل (7) مقارنة بين الحل الدقيق والحل الناتج عن تطبيق طريقة He-RDTM

باستخدام 5 تكرارات.

الجدول (6): مقارنة عددية بين الحل الدقيق للمثال (13) والحل الناتج عن تطبيق He-RDTM باستخدام 5 تكرارات عندما $t = 0.1$

x	Exact Solution	He-RDTM Solution	Absolute Error of Exact Solution - He-RDTM Solution
0.0	1.105170918	1.105170833	8.5×10^{-8}
0.1	1.221402758	1.221402665	9.4×10^{-8}
0.2	1.349858808	1.349858704	1.0×10^{-7}
0.3	1.491824698	1.491824583	1.1×10^{-7}
0.4	1.648721271	1.648721144	1.3×10^{-7}
0.5	1.822118800	1.822118661	1.4×10^{-7}
0.6	2.013752707	2.013752553	1.5×10^{-7}
0.7	2.225540928	2.225540758	1.7×10^{-7}
0.8	2.459603111	2.459602923	1.9×10^{-7}
0.9	2.718281828	2.718281620	2.1×10^{-7}
1.0	3.004166024	3.004165794	2.3×10^{-7}

المصدر: تم إعداده باستخدام برنامج Mathematica 12.0



المصدر: تم إعداده باستخدام برنامج Mathematica 12.0

الشكل (7): مقارنة بيانية بين الحل الدقيق للمثال (13) والحل الناتج عن تطبيق He-RDTM باستخدام 5 تكرارات عندما $t = 0.1$

مثال (14): معادلة Rosenau–Hyman

هي معادلة تفاضلية جزئية غير خطية تعود تسميتها نسبةً إلى مكتشفها الباحثين Philip Rosenau و James M. Hyman اللذين استخدمهما في دراستهما للأجسام المضغوطة في عام 1993، ويظهر مثل هذا النوع من المعادلات أثناء دراسة تكوّن أنماط قطرات السائل (Singh and Kaur, 2024).

لتكن مسألة القيم الابتدائية لمعادلة Rosenau–Hyman:

$$y_t(x, t) = y(x, t)y_{xxx}(x, t) + y(x, t)y_x(x, t) + 3y_x(x, t)y_{xx}(x, t) \quad (77.2)$$

$$y(x, 0) = -\frac{8}{3} \cos^2\left(\frac{x}{4}\right) \text{ مع الشرط الابتدائي}$$

ملاحظة: تم حل هذه المسألة باستخدام طريقة Double Elzaki Decomposition في المرجع

(Singh and Kaur, 2024)، وسنقوم في هذا المثال بحلها باستخدام طريقة He-RDTM.

الحل:

بتطبيق خواص RDTM على المعادلة (77.2)، واستبدال الحدود غير الخطية بكثيرات حدود He نحصل

على العلاقة التكرارية الآتية:

$$(k+1)Y_{k+1}(x) = H_k + G_k + 3L_k \quad (78.2)$$

حيث H_k, G_k, L_k تمثل كثيرات حدود He للحدود غير الخطية $y(x, t)y_{xxx}(x, t), y(x, t)y_x(x, t), y_x(x, t)y_{xx}(x, t)$ على الترتيب.

صيغة كثيرات حدود He للحد غير الخطي $y(x, t)y_{xxx}(x, t)$ هي:

$$H_k = \frac{1}{k!} \frac{\partial^k}{\partial p^k} \left[\left(\sum_{i=0}^k Y_i(x) p^i \right) \left(\sum_{i=0}^k Y_i(x) p^i \right)_{xxx} \right]_{p=0}, \quad k \geq 0$$

وتعطى الحدود الأولى لـ H_k بالعلاقات الآتية:

$$\begin{aligned} H_0 &= Y_0(x)(Y_0(x))_{xxx} \\ H_1 &= Y_1(x)(Y_0(x))_{xxx} + Y_0(x)(Y_1(x))_{xxx} \\ H_2 &= Y_0(x)(Y_2(x))_{xxx} + Y_1(x)(Y_1(x))_{xxx} + Y_2(x)(Y_0(x))_{xxx} \\ H_3 &= Y_0(x)(Y_3(x))_{xxx} + Y_1(x)(Y_2(x))_{xxx} + Y_2(x)(Y_1(x))_{xxx} + Y_3(x)(Y_0(x))_{xxx} \\ H_4 &= Y_0(x)(Y_4(x))_{xxx} + Y_1(x)(Y_3(x))_{xxx} + Y_2(x)(Y_2(x))_{xxx} + Y_3(x)(Y_1(x))_{xxx} + \\ &\quad Y_4(x)(Y_0(x))_{xxx} \end{aligned}$$

صيغة كثيرات حدود He للحد غير الخطي $y(x, t)y_x(x, t)$ هي:

$$G_k = \frac{1}{k!} \frac{\partial^k}{\partial p^k} \left[\left(\sum_{i=0}^k Y_i(x) p^i \right) \left(\sum_{i=0}^k Y_i(x) p^i \right)_x \right]_{p=0}, \quad k \geq 0$$

وتعطى الحدود الأولى لـ G_k بالعلاقات الآتية:

$$\begin{aligned} G_0 &= Y_0(x)(Y_0(x))_x \\ G_1 &= Y_1(x)(Y_0(x))_x + Y_0(x)(Y_1(x))_x \\ G_2 &= Y_0(x)(Y_2(x))_x + Y_1(x)(Y_1(x))_x + Y_2(x)(Y_0(x))_x \\ G_3 &= Y_0(x)(Y_3(x))_x + Y_1(x)(Y_2(x))_x + Y_2(x)(Y_1(x))_x + Y_3(x)(Y_0(x))_x \\ G_4 &= Y_0(x)(Y_4(x))_x + Y_1(x)(Y_3(x))_x + Y_2(x)(Y_2(x))_x + Y_3(x)(Y_1(x))_x + Y_4(x)(Y_0(x))_x \end{aligned}$$

صيغة كثيرات حدود He للحد غير الخطي $y_x(x, t)y_{xx}(x, t)$ هي:

$$L_k = \frac{1}{k!} \frac{\partial^k}{\partial p^k} \left[\left(\sum_{i=0}^k Y_i(x) p^i \right)_x \left(\sum_{i=0}^k Y_i(x) p^i \right)_{xx} \right]_{p=0}, \quad k \geq 0$$

وتعطى الحدود الأولى لـ L_k بالعلاقات الآتية:

$$L_0 = (Y_0(x))_x (Y_0(x))_{xx}$$

$$L_1 = (Y_1(x))_x (Y_0(x))_{xx} + (Y_0(x))_x (Y_1(x))_{xx}$$

$$L_2 = (Y_0(x))_x (Y_2(x))_{xx} + (Y_1(x))_x (Y_1(x))_{xx} + (Y_2(x))_x (Y_0(x))_{xx}$$

$$L_3 = (Y_0(x))_x (Y_3(x))_{xx} + (Y_1(x))_x (Y_2(x))_{xx} + (Y_2(x))_x (Y_1(x))_{xx} + (Y_3(x))_x (Y_0(x))_{xx}$$

$$L_4 = (Y_0(x))_x (Y_4(x))_{xx} + (Y_1(x))_x (Y_3(x))_{xx} + (Y_2(x))_x (Y_2(x))_{xx} + (Y_3(x))_x (Y_1(x))_{xx} + (Y_4(x))_x (Y_0(x))_{xx}$$

بتطبيق تعريف التحويل التفاضلي المختزل على الشرط الابتدائي $y(x, 0) = -\frac{8}{3} \cos^2\left(\frac{x}{4}\right)$ نحصل على:

$$Y_0(x) = -\frac{8}{3} \cos^2\left(\frac{x}{4}\right) = -\frac{4}{3} - \frac{4}{3} \cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

بالتعويض في العلاقة التكرارية (118.2) من أجل $k \geq 0$ وحساب حدود متسلسلة الحل $Y_1(x), Y_2(x), \dots$ فنجد:

$$k = 0 \Rightarrow Y_1(x) = -\frac{2}{3} \sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$k = 1 \Rightarrow Y_2(x) = \frac{1}{6} \cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$k = 2 \Rightarrow Y_3(x) = \frac{1}{36} \sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$k = 3 \Rightarrow Y_4(x) = -\frac{1}{288} \cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$k = 4 \Rightarrow Y_5(x) = -\frac{1}{2880} \sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

⋮

بالتالي الحل الناتج هو:

$$y(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} Y_k(x) t^k = Y_0(x) + Y_1(x)t + Y_2(x)t^2 + Y_3(x)t^3 + Y_4(x)t^4 + Y_5(x)t^5 + \dots$$

$$= -\frac{4}{3} - \frac{4}{3} \cos\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{2}{3} \sin\left(\frac{x}{2}\right) t + \frac{1}{6} \cos\left(\frac{x}{2}\right) t^2 + \frac{1}{36} \sin\left(\frac{x}{2}\right) t^3 - \frac{1}{288} \cos\left(\frac{x}{2}\right) t^4 - \frac{1}{2880} \sin\left(\frac{x}{2}\right) t^5 + \dots$$

$$= -\frac{4}{3} - \frac{4}{3} \cos\left(\frac{x}{2}\right) \left(1 - \frac{\left(\frac{t}{2}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{t}{2}\right)^4}{4!} - \dots\right) - \frac{4}{3} \sin\left(\frac{x}{2}\right) \left(\frac{t}{2} - \frac{\left(\frac{t}{2}\right)^3}{3!} + \frac{\left(\frac{t}{2}\right)^5}{5!} - \dots\right)$$

$$= -\frac{4}{3} - \frac{4}{3} \cos\left(\frac{x}{2}\right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{t}{2}\right)^{2n}}{(2n)!}\right) - \frac{4}{3} \sin\left(\frac{x}{2}\right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{t}{2}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{4}{3} - \frac{4}{3} \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{t}{2}\right) - \frac{4}{3} \sin\left(\frac{x}{2}\right) \sin\left(\frac{t}{2}\right) \\
&= -\frac{4}{3} \left(1 + \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{t}{2}\right) + \sin\left(\frac{x}{2}\right) \sin\left(\frac{t}{2}\right) \right)
\end{aligned}$$

وبالتالي فإن:

$$y(x, t) = -\frac{4}{3} \left(1 + \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{t}{2}\right) + \sin\left(\frac{x}{2}\right) \sin\left(\frac{t}{2}\right) \right) \quad (79.2)$$

بالاستفادة من دساتير التحويل المثلثية لدينا:

$$\cos\left(\frac{x-t}{2}\right) = \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{t}{2}\right) + \sin\left(\frac{x}{2}\right) \sin\left(\frac{t}{2}\right)$$

بتعويض العلاقة السابقة في الحل المعطى بالعلاقة (79.2) نجد:

$$y(x, t) = -\frac{4}{3} \left(1 + \cos\left(\frac{x-t}{2}\right) \right)$$

$$\cos^2\left(\frac{x-t}{4}\right) = \frac{1}{2} \left(1 + \cos\left(\frac{x-t}{2}\right) \right) \quad \text{لدينا}$$

وبالتالي:

$$y(x, t) = -\frac{8}{3} \cos^2\left(\frac{x-t}{4}\right)$$

وهو الحل الدقيق للمسألة، وهو الحل نفسه الناتج عن تطبيق طريقة Double Elzaki Decomposition في

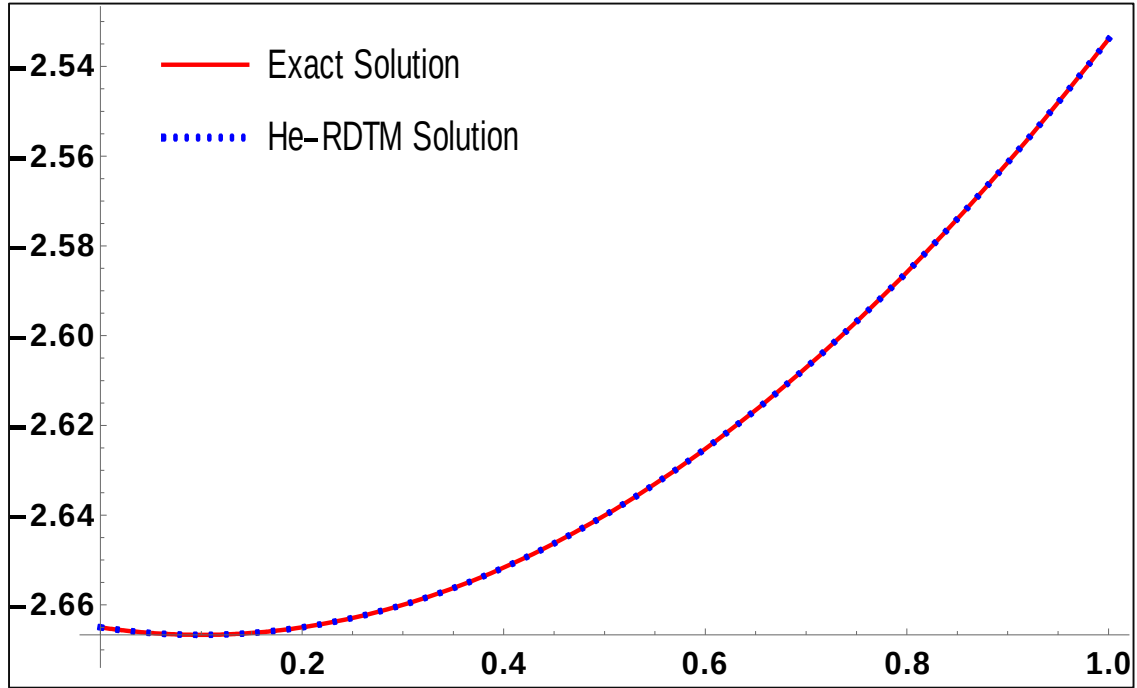
المرجع (Singh and Kaur, 2024) مما يؤكد دقة وفعالية طريقة He-RDTM، يتضمن كلاً من الجدول (7)

والشكل (8) مقارنة بين الحل الدقيق والحل الناتج عن طريقة He-RDTM باستخدام 6 تكرارات.

الجدول (7): مقارنة عددية بين الحل الدقيق للمثال (14) والحل الناتج عن تطبيق He-RDTM باستخدام 6 تكرارات عندما $t = 0.1$

x	Exact Solution	He-RDTM Solution	Absolute Error of Exact Solution - He-RDTM Solution
0	-2.6650003472	-2.6650003472	2.9×10^{-11}
0.1	-2.6666666667	-2.6666666667	3.4×10^{-11}
0.2	-2.6650003472	-2.6650003472	3.9×10^{-11}
0.3	-2.6600055537	-2.6600055537	4.3×10^{-11}
0.4	-2.6516947706	-2.6516947706	4.8×10^{-11}
0.5	-2.6400887705	-2.6400887705	5.3×10^{-11}
0.6	-2.6252165623	-2.6252165623	5.7×10^{-11}
0.7	-2.6071153189	-2.6071153188	6.1×10^{-11}
0.8	-2.5858302839	-2.5858302838	6.5×10^{-11}
0.9	-2.5614146587	-2.5614146587	6.9×10^{-11}
1	-2.5339294699	-2.5339294698	7.3×10^{-11}

المصدر: تم إعداده باستخدام برنامج Mathematica 12.0



المصدر: تم إعداده باستخدام برنامج Mathematica 12.0

الشكل (8): مقارنة بيانية بين الحل الدقيق للمثال (14) والحل الناتج عن تطبيق He-RDTM باستخدام 6 تكرارات عندما $t = 0.1$

مثال (15): معادلة Ginzburg–Landau

هي معادلة تفاضلية جزئية غير خطية، وقد سُميت نسبةً إلى الفيزيائيين Vitaly Ginzburg و Lev Landau، تظهر تطبيقات هذه المعادلة في العديد من المجالات المختلفة مثل البصريات غير الخطية، وديناميكا الموائع،

والفيزياء الكيميائية (Naghshband and Araghi, 2018).

لتكن مسألة القيم الابتدائية لمعادلة Ginzburg–Landau:

$$y_t = (1 + 3i)y_{xx} + 3y - (1 + i)|y|^4y - (1 - 6i)|y|^8y, \quad i^2 = -1 \quad (80.2)$$

مع الشرط الابتدائي $y(x, 0) = e^{-ix}$

حيث $y = y(x, t)$ تمثل دالة عقدية.

ملاحظة: تم حل هذه المسألة باستخدام طريقة HAM في المرجع (Naghshband and Araghi, 2018)،

وسنقوم في هذا المثال بحلها باستخدام طريقة He-RDTM.

الحل:

بالاستفادة من خواص المرافق العقدي يمكن أن نكتب الحدود غير الخطية $|y|^4 y, |y|^8 y$ بالشكل:

$$\begin{aligned} |y|^2 &= y\bar{y} \Rightarrow |y|^4 y = y^2(\bar{y})^2 y = y^3(\bar{y})^2 \\ |y|^4 &= y^2(\bar{y})^2 \Rightarrow |y|^8 y = y^4(\bar{y})^4 y = y^5(\bar{y})^4 \end{aligned}$$

وبذلك تصبح المعادلة (80.2) على الشكل الآتي:

$$y_t = (1 + 3i)y_{xx} + 3y - (1 + i)y^3(\bar{y})^2 - (1 - 6i)y^5(\bar{y})^4 \quad (81.2)$$

بتطبيق خواص RDTM على طرفي المعادلة (81.2) واستبدال الحدود غير الخطية بكثيرات حدود He

نحصل على العلاقة التكرارية الآتية:

$$(k + 1)Y_{k+1}(x) = (1 + 3i)\frac{\partial^2 Y_k(x)}{\partial x^2} + 3Y_k(x) - (1 + i)H_k - (1 - 6i)G_k \quad (82.2)$$

حيث H_k, G_k تمثل كثيرات حدود He لكل من $y^3(\bar{y})^2, y^5(\bar{y})^4$ على الترتيب.

صيغة كثيرات حدود He للحد غير الخطي $y^3(\bar{y})^2$ هي:

$$H_k = \frac{1}{k!} \frac{\partial^k}{\partial p^k} \left[\left(\sum_{i=0}^k Y_i(x) p^i \right)^3 \left(\sum_{i=0}^k \overline{Y_i(x)} p^i \right)^2 \right]_{p=0}, \quad k \geq 0$$

وتعطى الحدود الأولى لـ H_k بالعلاقات الآتية:

$$H_0 = (Y_0(x))^3 (\overline{Y_0(x)})^2$$

$$H_1 = 3(Y_0(x))^2 Y_1(x) (\overline{Y_0(x)})^2 + 2(Y_0(x))^3 \overline{Y_0(x)} \overline{Y_1(x)}$$

$$\begin{aligned} H_2 = & 3Y_0(x)(Y_1(x))^2 (\overline{Y_0(x)})^2 + 3(Y_0(x))^2 Y_2(x) (\overline{Y_0(x)})^2 + 6(Y_0(x))^2 Y_1(x) \overline{Y_0(x)} \overline{Y_1(x)} + \\ & (Y_0(x))^3 (\overline{Y_1(x)})^2 + 2(Y_0(x))^3 \overline{Y_0(x)} \overline{Y_2(x)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_3 = & (Y_1(x))^3 (\overline{Y_0(x)})^2 + 6Y_0(x)Y_1(x)Y_2(x) (\overline{Y_0(x)})^2 + 3(Y_0(x))^2 Y_3(x) (\overline{Y_0(x)})^2 + \\ & 6Y_0(x)(Y_1(x))^2 \overline{Y_0(x)} \overline{Y_1(x)} + 6(Y_0(x))^2 Y_2(x) \overline{Y_0(x)} \overline{Y_1(x)} + \\ & 3(Y_0(x))^2 Y_1(x) (\overline{Y_1(x)})^2 + 6(Y_0(x))^2 Y_1(x) \overline{Y_0(x)} \overline{Y_2(x)} + 2(Y_0(x))^3 \overline{Y_1(x)} \overline{Y_2(x)} + \\ & 2(Y_0(x))^3 \overline{Y_0(x)} \overline{Y_3(x)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_4 = & (Y_0(x))^3 (\overline{Y_2(x)})^2 + 2(Y_0(x))^3 \overline{Y_0(x)} \overline{Y_4(x)} + 2(Y_0(x))^3 \overline{Y_1(x)} \overline{Y_3(x)} + \\
& 6(Y_0(x))^2 Y_1(x) \overline{Y_0(x)} \overline{Y_3(x)} + 6(Y_0(x))^2 Y_1(x) \overline{Y_1(x)} \overline{Y_2(x)} + \\
& 3(Y_0(x))^2 Y_2(x) (\overline{Y_1(x)})^2 + 6(Y_0(x))^2 Y_2(x) \overline{Y_0(x)} \overline{Y_2(x)} + 3Y_0(x) (Y_1(x))^2 (\overline{Y_1(x)})^2 + \\
& 6Y_0(x) (Y_1(x))^2 \overline{Y_0(x)} \overline{Y_2(x)} + 6(Y_0(x))^2 Y_3(x) \overline{Y_0(x)} \overline{Y_1(x)} + \\
& 12Y_0(x) Y_1(x) Y_2(x) \overline{Y_0(x)} \overline{Y_1(x)} + 2(Y_1(x))^3 \overline{Y_0(x)} \overline{Y_1(x)} + \\
& 3(Y_0(x))^2 Y_4(x) (\overline{Y_0(x)})^2 + 6Y_0(x) Y_1(x) Y_3(x) (\overline{Y_0(x)})^2 + 3Y_0(x) (Y_2(x))^2 (\overline{Y_0(x)})^2 + \\
& 3(Y_1(x))^2 Y_2(x) (\overline{Y_0(x)})^2
\end{aligned}$$

صيغة كثيرات حدود He للحد غير الخطي $y^5(\bar{y})^4$ هي:

$$G_k = \frac{1}{k!} \frac{\partial^k}{\partial p^k} \left[(\sum_{i=0}^k Y_i(x) p^i)^5 (\sum_{l=0}^k \overline{Y_l(x)} p^l)^4 \right]_{p=0}, \quad k \geq 0$$

وتعطى الحدود الأولى لـ G_k بالعلاقات الآتية:

$$G_0 = (Y_0(x))^5 (\overline{Y_0(x)})^4$$

$$G_1 = 5(Y_0(x))^4 Y_1(x) (\overline{Y_0(x)})^4 + 4(Y_0(x))^5 (\overline{Y_0(x)})^3 \overline{Y_1(x)}$$

$$\begin{aligned}
G_2 = & 10(Y_0(x))^3 (Y_1(x))^2 (\overline{Y_0(x)})^4 + 5(Y_0(x))^4 Y_2(x) (\overline{Y_0(x)})^4 + \\
& 20(Y_0(x))^4 Y_1(x) (\overline{Y_0(x)})^3 \overline{Y_1(x)} + 6(Y_0(x))^5 (\overline{Y_0(x)})^2 (\overline{Y_1(x)})^2 + \\
& 4(Y_0(x))^5 (\overline{Y_0(x)})^3 \overline{Y_2(x)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_3 = & 10(Y_0(x))^2 (Y_1(x))^3 (\overline{Y_0(x)})^4 + 20(Y_0(x))^3 Y_1(x) Y_2(x) (\overline{Y_0(x)})^4 + \\
& 5(Y_0(x))^4 Y_3(x) (\overline{Y_0(x)})^4 + 40(Y_0(x))^3 (Y_1(x))^2 (\overline{Y_0(x)})^3 \overline{Y_1(x)} + \\
& 20(Y_0(x))^4 Y_2(x) (\overline{Y_0(x)})^3 \overline{Y_1(x)} + 30(Y_0(x))^4 Y_1(x) (\overline{Y_0(x)})^2 (\overline{Y_1(x)})^2 + \\
& 4(Y_0(x))^5 \overline{Y_0(x)} (\overline{Y_1(x)})^3 + 20(Y_0(x))^4 Y_1(x) (\overline{Y_0(x)})^3 \overline{Y_2(x)} + \\
& 12(Y_0(x))^5 (\overline{Y_0(x)})^2 \overline{Y_1(x)} \overline{Y_2(x)} + 4(Y_0(x))^5 (\overline{Y_0(x)})^3 \overline{Y_3(x)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_4 = & (Y_0(x))^5 (\overline{Y_1(x)})^4 + 12(Y_0(x))^5 (\overline{Y_0(x)})^2 \overline{Y_1(x)} \overline{Y_3(x)} + 6(Y_0(x))^5 (\overline{Y_0(x)})^2 (\overline{Y_2(x)})^2 + \\
& 12(Y_0(x))^5 \overline{Y_0(x)} (\overline{Y_1(x)})^2 \overline{Y_2(x)} + 4(Y_0(x))^5 (\overline{Y_0(x)})^3 \overline{Y_4(x)} + \\
& 20(Y_0(x))^4 Y_1(x) (\overline{Y_0(x)})^3 \overline{Y_3(x)} + 60(Y_0(x))^4 Y_1(x) (\overline{Y_0(x)})^2 \overline{Y_1(x)} \overline{Y_2(x)} + \\
& 20(Y_0(x))^4 Y_1(x) \overline{Y_0(x)} (\overline{Y_1(x)})^3 + 30(Y_0(x))^4 Y_2(x) (\overline{Y_0(x)})^2 (\overline{Y_1(x)})^2 + \\
& 20(Y_0(x))^4 Y_2(x) (\overline{Y_0(x)})^3 \overline{Y_2(x)} + 60(Y_0(x))^3 (Y_1(x))^2 (\overline{Y_0(x)})^2 (\overline{Y_1(x)})^2 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 40(Y_0(x))^3(Y_1(x))^2(\overline{Y_0(x)})^3\overline{Y_2(x)} + 20(Y_0(x))^4Y_3(x)(\overline{Y_0(x)})^3\overline{Y_1(x)} + \\
& 80(Y_0(x))^3Y_1(x)Y_2(x)(\overline{Y_0(x)})^3\overline{Y_1(x)} + 40(Y_0(x))^2(Y_1(x))^3(\overline{Y_0(x)})^3\overline{Y_1(x)} + \\
& 5(Y_0(x))^4Y_4(x)(\overline{Y_0(x)})^4 + 20(Y_0(x))^3Y_1(x)Y_3(x)(\overline{Y_0(x)})^4 + \\
& 10(Y_0(x))^3(Y_2(x))^2(\overline{Y_0(x)})^4 + 30(Y_0(x))^2(Y_1(x))^2Y_2(x)(\overline{Y_0(x)})^4 + \\
& 5Y_0(x)(Y_1(x))^4(\overline{Y_0(x)})^4
\end{aligned}$$

بتطبيق تعريف التحويل التفاضلي المختزل على الشرط الابتدائي $y(x,0) = e^{-ix}$ نحصل على:

$$Y_0(x) = e^{-ix}$$

بالتعويض في العلاقة التكرارية (82.2) من أجل $k \geq 0$ نحصل على:

$$\begin{aligned}
k = 0 & \Rightarrow Y_1(x) = 2ie^{-ix} \\
k = 1 & \Rightarrow Y_2(x) = -2e^{-ix} \\
k = 2 & \Rightarrow Y_3(x) = -\frac{4i}{3}e^{-ix} \\
k = 3 & \Rightarrow Y_4(x) = \frac{2}{3}e^{-ix} \\
k = 4 & \Rightarrow Y_5(x) = \frac{4i}{15}e^{-ix} \\
& \vdots
\end{aligned}$$

وبالتالي الحل الناتج هو:

$$\begin{aligned}
y(x,t) &= Y_0(x) + Y_1(x)t + Y_2(x)t^2 + Y_3(x)t^3 + Y_4(x)t^4 + Y_5(x)t^5 + \dots \\
&= e^{-ix} + 2ie^{-ix}t - 2e^{-ix}t^2 - \frac{4i}{3}e^{-ix}t^3 + \frac{2}{3}e^{-ix}t^4 + \frac{4i}{15}e^{-ix}t^5 + \dots \\
&= e^{-ix} \left(1 + 2it + \frac{(2it)^2}{2!} + \frac{(2it)^3}{3!} + \frac{(2it)^4}{4!} + \frac{(2it)^5}{5!} + \dots \right) \\
&= e^{-ix} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2it)^n}{n!} \right) = e^{-ix} e^{2it} = e^{i(2t-x)}
\end{aligned}$$

وهو الحل الدقيق للمسألة، وهو نفسه الحل الناتج عن تطبيق طريقة HAM في المرجع

(Naghshband and Araghi, 2018)؛ مما يؤكد دقة وفعالية طريقة He-RDTM.

يتضمن الجدولين (8) و(9) والشكلين (9) و(10) مقارنة بين الجزأين الحقيقيين والتخيليين لكلاً من الحل الدقيق

والحل الناتج عن طريقة He-RDTM باستخدام 6 تكرارات.

الجدول (8): مقارنة عددية بين الجزأين الحقيقيين لكلاً من الحل الدقيق للمثال (15) والحل الناتج عن تطبيق طريقة He-RDTM باستخدام 6 تكرارات عندما $t = 0.1$

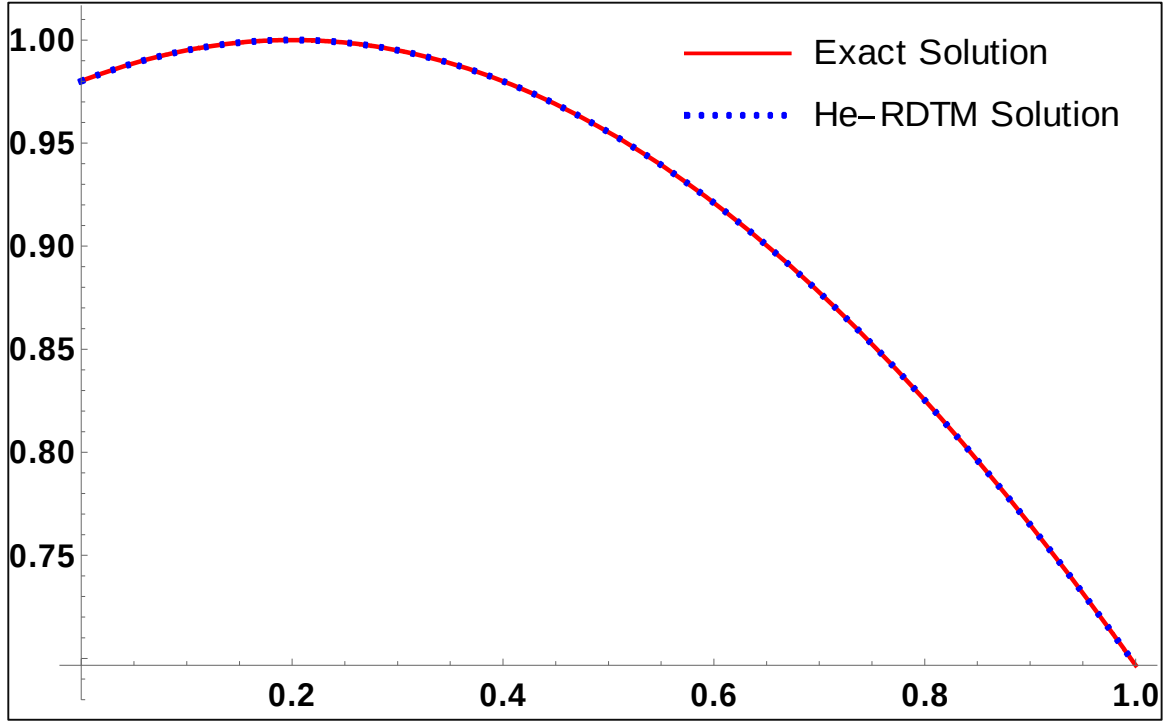
x	Real Part of (Exact Solution)	Real Part of (He-RDTM Solution)	Absolute Error of $ \text{Re(Exact Solution) - Re(He-RDTM Solution)} $
0	0.9800666667	0.9800665778	8.9×10^{-8}
0.1	0.9950042539	0.9950041653	8.9×10^{-8}
0.2	1.0000000000	1.0000000876	8.8×10^{-8}
0.3	0.9950042509	0.9950041653	8.6×10^{-8}
0.4	0.9800666606	0.9800665778	8.3×10^{-8}
0.5	0.9553365683	0.9553364891	7.9×10^{-8}
0.6	0.9210610687	0.9210609940	7.5×10^{-8}
0.7	0.8775826315	0.8775825619	7.0×10^{-8}
0.8	0.8253356786	0.8253356149	6.4×10^{-8}
0.9	0.7648422445	0.7648421873	5.7×10^{-8}
1	0.6967067595	0.6967067093	5.0×10^{-8}

المصدر: تم إعداده باستخدام برنامج Mathematica 12.0

الجدول (9): مقارنة عددية بين الجزأين التخيليين لكلاً من الحل الدقيق للمثال (15) والحل الناتج عن تطبيق طريقة He-RDTM باستخدام 6 تكرارات عندما $t = 0.1$

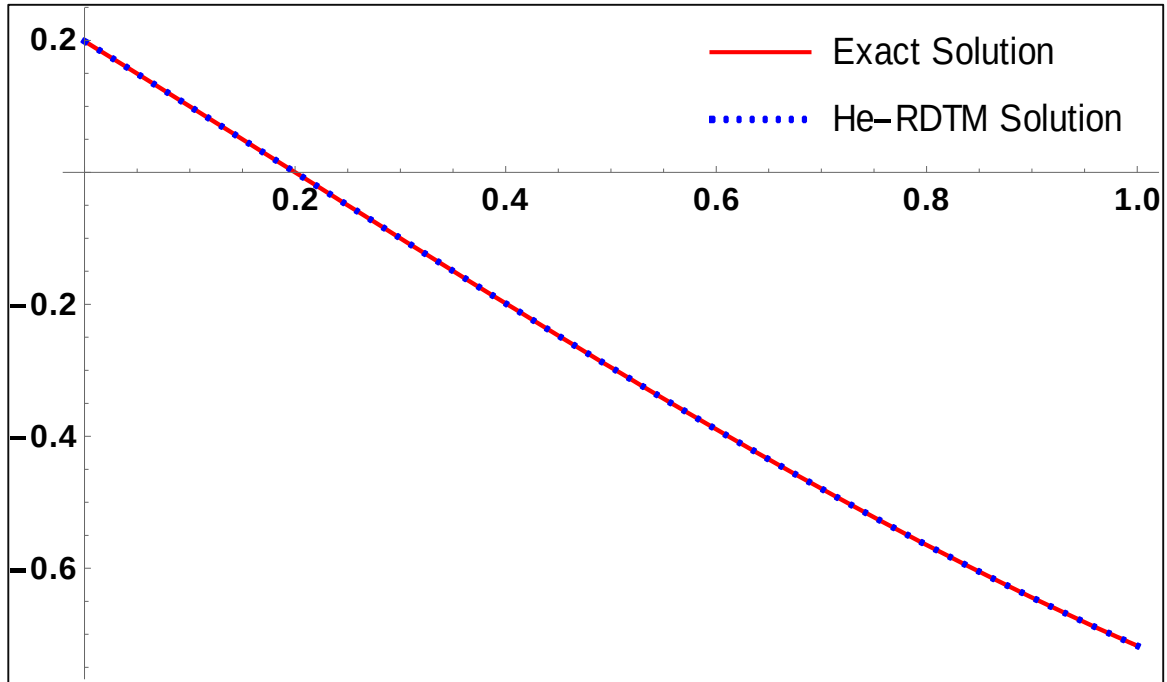
x	Imaginary Part of (Exact Solution)	Imaginary Part of (He-RDTM Solution)	Absolute Error of $ \text{Im(Exact Solution) - Im(He-RDTM Solution)} $
0	0.1986693333	0.1986693308	2.5×10^{-9}
0.1	0.0998334166	0.0998334103	6.3×10^{-9}
0.2	0.0000000000	$-1.5159212108 \times 10^{-8}$	1.5×10^{-8}
0.3	-0.0998334166	-0.0998334405	2.4×10^{-8}
0.4	-0.1986693308	-0.1986693630	3.2×10^{-8}
0.5	-0.2955202067	-0.2955202470	4.0×10^{-8}
0.6	-0.3894183423	-0.3894183904	4.8×10^{-8}
0.7	-0.4794255386	-0.4794255939	5.5×10^{-8}
0.8	-0.5646424734	-0.5646425353	6.2×10^{-8}
0.9	-0.6442176872	-0.6442177552	6.8×10^{-8}
1	-0.7173560909	-0.7173561643	7.3×10^{-8}

المصدر: تم إعداده باستخدام برنامج Mathematica 12.0



المصدر: تم إعداده باستخدام برنامج Mathematica 12.0

الشكل (9): مقارنة بيانية بين الجزئين الحقيقيين لكلاً من الحل الدقيق للمثال (15) والحل الناتج عن تطبيق طريقة He-RDTM باستخدام 6 تكرارات عندما $t = 0.1$



المصدر: تم إعداده باستخدام برنامج Mathematica 12.0

الشكل (10): مقارنة بيانية بين الجزئين التخيليين لكلاً من الحل الدقيق للمثال (15) والحل الناتج عن تطبيق طريقة He-RDTM باستخدام 6 تكرارات عندما $t = 0.1$

2-4 مقارنة عامة بين طريقتي RDTM و He-RDTM الهجينة

الجدول (10): يبين مقارنة عامة بين طريقتي RDTM و He-RDTM الهجينة

وجه المقارنة	طريقة RDTM	طريقة He-RDTM
نوع المعادلات المدروسة	المعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطية	
آلية الطريقة	تعتمد على تطبيق خواص RDTM على المعادلة لتحويلها إلى علاقة تكرارية تُستخدم لإيجاد حدود متسلسلة الحل	تعتمد على تطبيق خواص RDTM على المشتقات والحدود الخطية في المعادلة، في حين يتم استبدال الحدود غير الخطية بكثيرات حدود He، ومن ثم يتم الحصول على علاقة تكرارية تُستخدم لإيجاد حدود متسلسلة الحل
الفعالية والأداء	طريقة فعّالة، لكنها تواجه صعوبة عند التعامل مع الحدود غير الخطية المعقدة، حيث تتطلب استنتاج صيغ التحويل التفاضلي المختزل لكل حالة غير خطية بشكل منفصل، وغالباً ما تكون هذه الصيغ معقدة ويصعب تطبيقها عملياً، مما يزيد من الجهد الحسابي ويؤثر سلباً على كفاءة الطريقة.	تعد كثيرات حدود He أداة فعالة وسهلة التطبيق، حيث توفر صيغة عامة وموحدة تتيح التعامل مع جميع الحالات غير الخطية، كما يمكن حسابها برمجياً بشكل مباشر دون الحاجة لاستنتاج تحويل تفاضلي مختزل لكل حالة على حدة، مما يساهم في تحسين أداء طريقة RDTM.
نوع الحلول الناتجة	تنتج حلولاً دقيقة أو تقريبية	تعطي نفس الحلول التي تنتجها طريقة RDTM

نتائج الفصل الثاني:

لقد تبين من خلال تطبيق طريقة التحويل التفاضلي DTM، وطريقة التحويل التفاضلي المختزلة RDTM على أمثلة متنوعة شملت مسائل القيم الابتدائية والحدية للمعادلات التفاضلية العادية غير الخطية، فضلاً عن المعادلات التكاملية والتفاضلية-التكاملية من نوعي فولتيرا وفريدهولم الخطية وغير الخطية، والمعادلات التفاضلية الجزئية الخطية وغير الخطية مع شروط ابتدائية، فعاليتها في الحصول على حلول دقيقة لمعظم المسائل المدروسة، فضلاً عن قدرتهما على تقديم حلول تقريبية ذات دقة عالية باستخدام عدد قليل من التكرارات مقارنةً بالحلول الدقيقة.

وأخيراً، أثبتت الطريقة الهجينة He-RDTM فعاليتها في تحسين أداء طريقة RDTM في حل المعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطية، إذ جرى تطبيقها على نماذج متعددة من هذا النوع من المعادلات، ومقارنة الحلول الناتجة عنها مع حلول طريقة RDTM وطرائق أخرى، وقد أظهرت النتائج دقة وفعالية الطريقة الهجينة في الحصول على حلول دقيقة تماثل تلك التي تقدمها طريقة RDTM، إلى جانب تميز He-RDTM في تبسيط التعامل مع الحدود غير الخطية وسهولة تنفيذها برمجياً، مما يجعلها خياراً أكثر كفاءة وفعالية في حل هذا النوع من المعادلات.

الفصل الثالث:

طريقة تحليل أدوميان ADM وطريقة Anuj-ADM الهجينة

تمهيد:

نتناول في الفصل الثالث طريقة تحليل أدوميان ADM، حيث ندرس هذه الطريقة بأسلوب تفصيلي يبين آلية تطبيقها في حل المعادلات التفاضلية العادية والجزئية، فضلاً عن المعادلات التكاملية والمعادلات التفاضلية-التكاملية، كما نبرز فعاليتها من خلال تطبيقها على العديد من الأمثلة.

وفي سياق متصل، نقترح تطوير طريقة هجينة جديدة تُعرف بـ (Anuj-ADM)، تعتمد على دمج طريقة أدوميان (ADM) مع تحويل Anuj التكاملية، بهدف تقليل التعقيد الحسابي المرتبط بتطبيق طريقة ADM وتحسين أدائها بشكل عام، وندرس آلية الطريقة الهجينة Anuj-ADM بأسلوب تفصيلي يبين آلية تطبيقها في حل المعادلات التفاضلية العادية والجزئية، والمعادلات التكاملية، والمعادلات التفاضلية-التكاملية.

ولإظهار فعالية طريقة Anuj-ADM، نقوم بتطبيقها على مجموعة متنوعة من الأمثلة التي تشمل مسائل القيم الابتدائية والحدية للمعادلات التفاضلية العادية الخطية وغير الخطية، بالإضافة إلى تطبيقها على نماذج رياضية من المعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطية ذات التطبيقات الهامة في المجالات الفيزيائية والهندسية، كما نظهر فعاليتها في حل أمثلة من معادلة فولتيرا التكاملية والتفاضلية-التكاملية من النوع الثاني غير الخطية.

فضلاً عن ذلك، نقوم بمقارنة الحلول الناتجة عن تطبيق طريقة Anuj-ADM مع الحلول الناتجة عن طريقة ADM الأصلية وطرائق أخرى، بهدف التأكد من صحة النتائج ودقتها.

3-1 الفكرة العامة لطريقة تحليل أدوميان ADM في حل المعادلات التفاضلية العادية

لتوضيح كيفية تطبيق طريقة ADM في حل المعادلات التفاضلية العادية، نأخذ المعادلة التفاضلية العادية

غير الخطية الآتية (Sumiati *et al.*, 2019):

$$L(y(x)) + R(y(x)) + N(y(x)) = g(x) \quad (1.3)$$

مع الشروط الابتدائية

$$y^{(k)}(0) = c_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (2.3)$$

حيث أن:

$$y(x) \text{ دالة مجهولة، } L = \frac{d^n}{dx^n} \text{ مؤثر تفاضلي خطي يمثل المشتق من المرتبة } n$$

$R(y(x))$ يمثل بقية الحدود الخطية، $N(y(x))$ يمثل الحدود غير الخطية، $g(x)$ دالة معطاة

نعيد كتابة المعادلة (1.3) على الشكل:

$$L(y(x)) = g(x) - (R(y(x)) + N(y(x))) \quad (3.3)$$

بما أن L مؤثر تفاضلي يمثل المشتق من المرتبة n ويكتب بالشكل:

$$L = \frac{d^n}{dx^n}$$

فإن المؤثر العكسي هو مؤثر التكامل n مرة ، ويعرف كما يلي:

$$L^{-1}(\cdot) = \int_0^x \int_0^x \dots \int_0^x (\cdot) dx dx \dots dx$$

نطبق المؤثر العكسي L^{-1} على طرفي المعادلة (3.3):

$$L^{-1}(L(y(x))) = L^{-1}(g(x)) - L^{-1}(R(y(x)) + N(y(x))) \quad (4.3)$$

وبما أن تطبيق L^{-1} على $L(y(x))$ يعيد الدالة $y(x)$ مطروحاً منها الحدود الناتجة عن المكاملة مع استخدام

الشروط الابتدائية، نحصل على:

$$y(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(0)}{k!} x^k = L^{-1}(g(x)) - L^{-1}(R(y(x)) + N(y(x))) \quad (5.3)$$

وبالتالي:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(0)}{k!} x^k + L^{-1}(g(x)) - L^{-1}(R(y(x)) + N(y(x))) \quad (6.3)$$

نعرف الدالة $f(x)$ بالشكل:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(0)}{k!} x^k + L^{-1}(g(x))$$

وبذلك تصبح المعادلة (6.3) على الصورة:

$$y(x) = f(x) - L^{-1}(R(y(x)) + N(y(x))) \quad (7.3)$$

وفقاً لطريقة ADM يتم تمثيل الحل $y(x)$ على شكل متسلسلة غير منتهية:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x) \quad (8.3)$$

كما يتم تمثيل المؤثر غير الخطي $N(y(x))$ على شكل متسلسلة غير منتهية من كثيرات حدود أدوميان كما يلي:

$$N(y(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \quad (9.3)$$

حيث تدعى A_n بكثيرات حدود أدوميان وتحسب من العلاقة الآتية:

$$A_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} \left[N \left(\sum_{i=0}^n \lambda^i y_i(x) \right) \right]_{\lambda=0}, \quad n \geq 0$$

بتعويض العلاقتين (8.3) و (9.3) في (7.3) نحصل على:

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n(x) = f(x) - L^{-1}(R(\sum_{n=0}^{\infty} y_n(x)) + \sum_{n=0}^{\infty} A_n) \quad (10.3)$$

يتم حساب حدود متسلسلة الحل $y_0(x), y_1(x), \dots$ من خلال العلاقة التكرارية الآتية:

$$\begin{aligned} y_0(x) &= f(x) \\ y_{k+1}(x) &= -L^{-1} \left(R(y_k(x)) + A_k \right), \quad k \geq 0 \end{aligned} \quad (11.3)$$

ويكون الحل النهائي للمعادلة هو

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x) = y_0(x) + y_1(x) + y_2(x) + \dots$$

ملاحظة: يتم تطبيق طريقة ADM بالأسلوب السابق نفسه في حل المعادلات التفاضلية العادية الخطية

باعتبارها حالة خاصة من المعادلة (1.3)، وذلك حينما يكون الحد غير الخطي معدوماً أي $N(y(x)) = 0$

3-1-1 أمثلة تطبيقية

مثال (16): لتكن مسألة القيم الابتدائية للمعادلة التفاضلية العادية من المرتبة الأولى غير الخطية التالية:
(Wazwaz, 2010, p: 304)

$$y'(x) - y^2(x) = 1 \quad (12.3)$$

مع الشرط الابتدائي $y(0) = 0$

الحل:

نكتب المعادلة (12.3) في صيغة المؤثر على الشكل:

$$L(y(x)) = 1 + y^2(x) \quad (13.3)$$

بما أن $L = \frac{d}{dx}$ ، وبتطبيق $L^{-1}(\cdot) = \int_0^x (\cdot) dx$ على طرفي المعادلة (13.3) ، وبالاستفادة من الشرط الابتدائي المعطى نحصل على:

$$y(x) = x + L^{-1}(y^2(x))$$

بتعويض متسلسلة الحل $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x)$

واستبدال الحد غير الخطي $y^2(x)$ بمتسلسلة كثيرات حدود أدوميان بالشكل $y^2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$ نجد:

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n(x) = x + L^{-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n\right)$$

حيث تعطى الحدود الأولى لكثيرات حدود أدوميان للحد غير الخطي $y^2(x)$ بالعلاقات الآتية:

$$A_0 = y_0^2, \quad A_1 = 2y_0y_1, \quad A_2 = 2y_0y_2 + y_1^2, \quad A_3 = 2y_0y_3 + 2y_1y_2$$

$$A_4 = 2y_0y_4 + 2y_1y_3 + y_2^2, \dots$$

نوجد $y_0(x), y_1(x), \dots$ من خلال العلاقة التكرارية الآتية:

$$y_0(x) = x$$

$$y_{k+1}(x) = L^{-1}(A_k) = \int_0^x (A_k) dx, \quad k \geq 0 \quad (14.3)$$

بالتعويض في العلاقة التكرارية (14.3) من أجل $k = 0, 1, 2, \dots$ ، وإجراء الحسابات نجد:

$$y_1(x) = \frac{x^3}{3}, \quad y_2(x) = \frac{2x^5}{15}, \quad y_3(x) = \frac{17x^7}{315}, \quad y_4(x) = \frac{62x^9}{2835}, \quad y_5(x) = \frac{1382x^{11}}{155925}, \dots$$

وبالتالي الحل الناتج هو :

$$y(x) = y_0(x) + y_1(x) + y_2(x) + y_3(x) + y_4(x) + y_5(x) + \dots$$

$$= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \frac{62x^9}{2835} + \frac{1382x^{11}}{155925} + \dots$$

منشور ماكلوران للدالة $\tan(x)$

$$= \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \dots}{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \dots}$$

$$= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}} = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \tan(x)$$

وهو الحل الدقيق للمسألة.

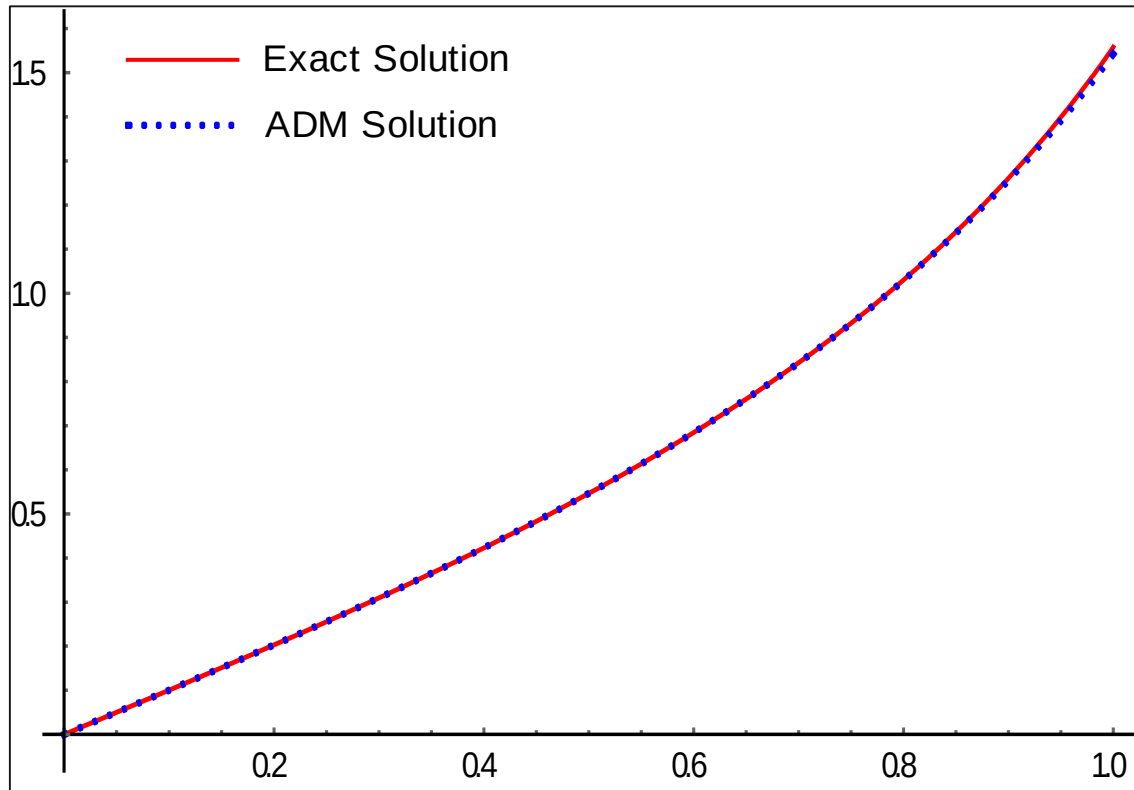
يتضمن الجدول (11) والشكلين (11) و(12) مقارنة بين الحل الدقيق، والحل الناتج عن تطبيق طريقة ADM

باستخدام 5 و 6 تكرارات.

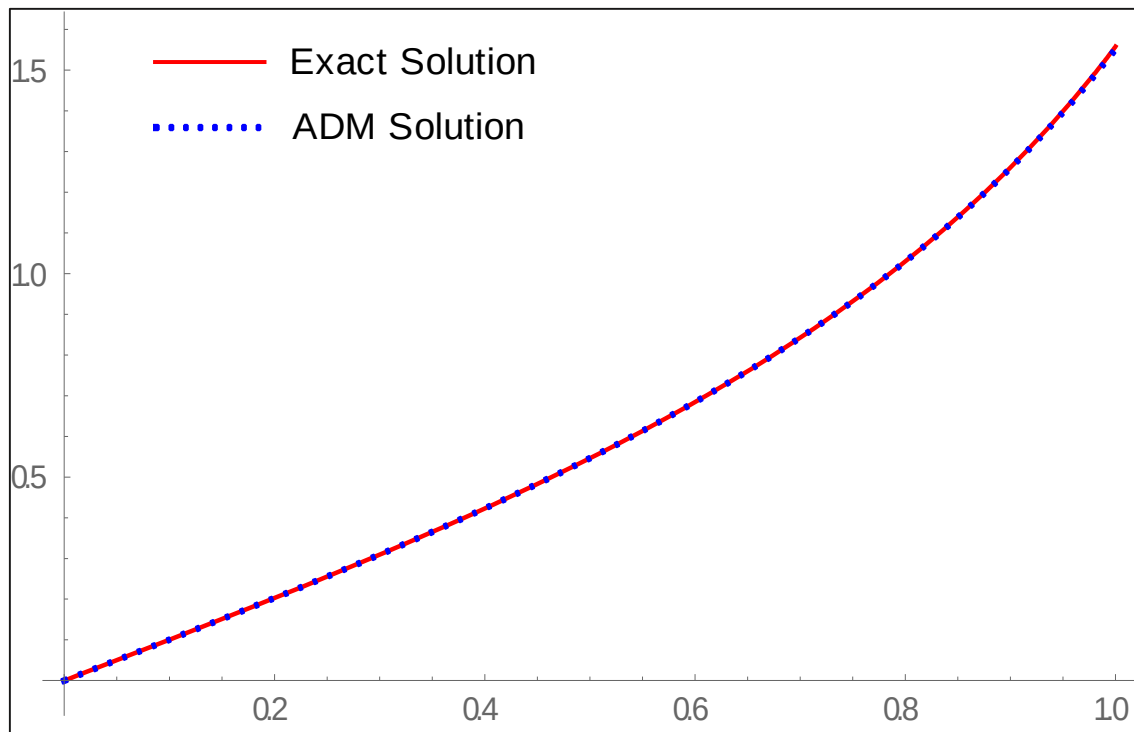
الجدول (11): مقارنة عددية بين الحل الدقيق للمثال (16) والحل الناتج عن تطبيق طريقة ADM باستخدام 5 و 6 تكرارات

x	Exact Solution	ADM Solution		Absolute Error of Exact Solution – ADM Solution	
		5 iterations	6 iterations	5 iterations	6 iterations
0	0	0	0	0	0
0.1	0.1003347	0.1003347	0.1003347	8.9×10^{-14}	3.5×10^{-16}
0.2	0.2027100	0.2027100	0.2027100	1.8×10^{-10}	3.0×10^{-12}
0.3	0.3093362	0.3093362	0.3093362	1.6×10^{-8}	5.9×10^{-10}
0.4	0.4227932	0.4227928	0.4227932	4.0×10^{-7}	2.6×10^{-8}
0.5	0.5463025	0.5462977	0.5463020	4.8×10^{-6}	4.9×10^{-7}
0.6	0.6841368	0.6840992	0.6841313	3.8×10^{-5}	5.5×10^{-6}
0.7	0.8422884	0.8420697	0.8422450	2.2×10^{-4}	4.3×10^{-5}
0.8	1.0296386	1.0286106	1.0293719	1.0×10^{-3}	2.7×10^{-4}
0.9	1.2601582	1.2560175	1.2587989	4.1×10^{-3}	1.4×10^{-3}
1	1.5574077	1.5425044	1.5513676	1.5×10^{-2}	6.0×10^{-3}

المصدر: تم إعداده باستخدام برنامج Mathematica 12.0



الشكل (11): مقارنة بيانية بين الحل الدقيق للمثال (16) والحل الناتج عن تطبيق طريقة ADM باستخدام 5 تكرارات



الشكل (12): مقارنة بيانية بين الحل الدقيق للمثال (16) والحل الناتج عن تطبيق طريقة ADM باستخدام 6 تكرارات

مثال (17): لتكن مسألة القيم الابتدائية للمعادلة التفاضلية العادية الخطية من المرتبة الثامنة التالية:

$$y^{(8)}(x) + y(x) = 2e^x \quad (15.3)$$

مع الشروط الابتدائية $y^{(k)}(0) = 1$, $k = 0, 1, 2, \dots, 7$

الحل: نكتب المعادلة (15.3) في صيغة المؤثر على الشكل:

$$L(y(x)) = 2e^x - y(x) \quad (16.3)$$

بما أن $L = \frac{d^8}{dx^8}$ ، وبتطبيق $L^{-1}(\cdot) = \int_0^x \int_0^x \int_0^x \int_0^x \int_0^x \int_0^x \int_0^x \int_0^x dx dx dx dx dx dx dx dx$ على طرفي

المعادلة (16.3) وبالإستفادة من الشروط الابتدائية المعطاة نحصل على:

$$y(x) = -1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{24} - \frac{x^5}{120} - \frac{x^6}{720} - \frac{x^7}{5040} + 2e^x - L^{-1}(y(x))$$

نعوض متسلسلة الحل $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n(x) = -1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{24} - \frac{x^5}{120} - \frac{x^6}{720} - \frac{x^7}{5040} + 2e^x - L^{-1}(\sum_{n=0}^{\infty} y_n(x))$$

وبالتالي تكون العلاقة التكرارية هي:

$$y_0(x) = -1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{24} - \frac{x^5}{120} - \frac{x^6}{720} - \frac{x^7}{5040} + 2e^x$$

$$y_{k+1}(x) = -L^{-1}(y_k(x)) = - \int_0^x \int_0^x \int_0^x \int_0^x \int_0^x \int_0^x \int_0^x \int_0^x (y_k(x)) dx dx dx dx dx dx dx dx , \quad k \geq 0$$

بالتعويض في العلاقة التكرارية السابقة من أجل $k = 0, 1, 2, \dots$ وإجراء الحسابات نحصل على:

$$y_1(x) = 2 - 2e^x + 2x + x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{60} + \frac{x^6}{360} + \frac{x^7}{2520} + \frac{x^8}{40320} + \frac{x^9}{362880} +$$

$$\frac{x^{10}}{3628800} + \frac{x^{11}}{39916800} + \frac{x^{12}}{479001600} + \frac{x^{13}}{6227020800} + \frac{x^{14}}{87178291200} + \frac{x^{15}}{1307674368000}$$

$$y_2(x) = -2 + 2e^x - 2x - x^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^5}{60} - \frac{x^6}{360} - \frac{x^7}{2520} - \frac{x^8}{20160} - \frac{x^9}{181440} -$$

$$\frac{x^{10}}{1814400} - \frac{x^{11}}{19958400} - \frac{x^{12}}{239500800} - \frac{x^{13}}{3113510400} - \frac{x^{14}}{43589145600} - \frac{x^{15}}{653837184000} -$$

$$\frac{x^{16}}{20922789888000} - \frac{x^{17}}{355687428096000} - \frac{x^{18}}{6402373705728000} - \frac{x^{19}}{121645100408832000} -$$

$$\frac{x^{20}}{2432902008176640000} - \frac{x^{21}}{51090942171709440000} - \frac{x^{22}}{112400072777607680000} -$$

$$\frac{x^{23}}{25852016738884976640000}$$

⋮

وبالتالي الحل الناتج هو :

$$y(x) = y_0(x) + y_1(x) + y_2(x) + \dots$$

$$\begin{aligned} &= -1 + 2e^x - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{24} - \frac{x^5}{120} - \frac{x^6}{720} - \frac{x^7}{5040} - \frac{x^8}{40320} - \frac{x^9}{362880} - \\ &\frac{x^{10}}{3628800} - \frac{x^{11}}{39916800} - \frac{x^{12}}{479001600} - \frac{x^{13}}{6227020800} - \frac{x^{14}}{87178291200} - \frac{x^{15}}{1307674368000} - \\ &\frac{x^{16}}{20922789888000} - \frac{x^{17}}{355687428096000} - \frac{x^{18}}{6402373705728000} - \frac{x^{19}}{121645100408832000} - \\ &\frac{x^{20}}{2432902008176640000} - \frac{x^{21}}{51090942171709440000} - \frac{x^{22}}{112400072777607680000} - \\ &\frac{x^{23}}{2432902008176640000} + \dots \\ &25852016738884976640000 \end{aligned}$$

بأخذ منشور ماكلوران للدالة $2e^x$ نلاحظ أن الحدود السالبة تلغى فيصبح الحل بالشكل الآتي:

$$\begin{aligned} y(x) = & 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^8}{8!} + \frac{x^9}{9!} + \frac{x^{10}}{10!} + \frac{x^{11}}{11!} + \frac{x^{12}}{12!} + \frac{x^{13}}{13!} + \\ & \frac{x^{14}}{14!} + \frac{x^{15}}{15!} + \frac{x^{16}}{16!} + \frac{x^{17}}{17!} + \frac{x^{18}}{18!} + \frac{x^{19}}{19!} + \frac{x^{20}}{20!} + \frac{x^{21}}{21!} + \frac{x^{22}}{22!} + \frac{x^{23}}{23!} + \dots \end{aligned}$$

من خلال متابعة العمل والاستمرار في حساب التكرارات، نلاحظ أن متسلسلة الحل تتقارب تدريجياً نحو الحل الدقيق لهذه المسألة، والذي يتمثل في الدالة التالية:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

3-1-2 طريقة تحليل أدوميان المعدلة (Modified Decomposition Method-MDM)

اقتُرحت طريقة تحليل أدوميان المعدلة MDM من قبل الباحث Wazwaz كتعديل لطريقة تحليل أدوميان ADM في عام 1999، حيث استخدمها لحل مسائل القيم الحدية للمعادلات التفاضلية العادية من مراتب عُلْيَا، إن طريقة MDM تتشابه مع طريقة ADM من حيث الخطوات الأساسية، إلا أن الاختلاف الجوهرى بينهما يكمن في صياغة العلاقة التكرارية التي تستخدم لإيجاد حدود متسلسلة الحل، في طريقة MDM يتم تقسيم الدالة $f(x)$ إلى جزأين بالشكل: $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ ، حيث يُستخدم الجزء الأول $f_1(x)$ لتحديد الحد الابتدائي $y_0(x)$ في متسلسلة الحل، في حين يُدمج الجزء الثاني $f_2(x)$ في حساب الحد $y_1(x)$ ، وبالتالي في طريقة MDM تصبح الصيغة التكرارية المعطاة بالعلاقة (11.3) على النحو الآتي (Wazwaz, 1999):

$$\begin{cases} y_0(x) = f_1(x) \\ y_1(x) = f_2(x) - L^{-1}(R(y_0(x)) + A_0) \\ y_{k+2}(x) = -L^{-1}(R(y_{k+1}(x)) + A_{k+1}) , \quad k \geq 0 \end{cases} \quad (17.3)$$

لقد أسهم ذلك التعديل البسيط في صياغة العلاقة التكرارية في تقليل العمل الحسابي وتسريع تقارب الحل، ومع ذلك فإن نجاح هذه الطريقة يعتمد بشكل أساسي على الاختيار المناسب للدالتين $f_1(x), f_2(x)$ (Wazwaz, 1999).

مثال (18): لتكن مسألة القيم الحدية للمعادلة التفاضلية العادية غير الخطية من المرتبة الرابعة عشرة التالية:

$$y^{(14)}(x) = 16384e^{-8x}y^5(x) \quad , \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (18.3)$$

مع الشروط الحدية عند النقطتين $x = 0, x = 1$

$$y(0) = 1 \quad , \quad y^{(1)}(0) = 2 \quad , \quad y^{(2)}(0) = 4 \quad , \quad y^{(3)}(0) = 8 \quad , \quad y^{(4)}(0) = 16$$

$$y^{(5)}(0) = 32 \quad , \quad y^{(6)}(0) = 64$$

$$y(1) = e^2, \quad y^{(1)}(1) = 2e^2, \quad y^{(2)}(1) = 4e^2, \quad y^{(3)}(1) = 8e^2, \quad y^{(4)}(1) = 16e^2$$

$$y^{(5)}(1) = 32e^2 \quad , \quad y^{(6)}(1) = 64e^2$$

ملاحظة: في هذا المثال، سوف نطبق طريقة تحليل أدوميان المعدلة MDM لحل مسألة قيم حدية ممثلة بمعادلة تفاضلية عادية غير خطية من المرتبة الرابعة عشرة، وقد قمنا ببناء هذا المثال استناداً إلى مثال آخر موجود في المرجع (Opanuga, 2017)، والذي يتناول مسألة قيم حدية لمعادلة تفاضلية عادية غير خطية من المرتبة الثالثة عشرة.

الحل:

نكتب المعادلة (18.3) في صيغة المؤثر على الشكل:

$$L(y(x)) = 16384e^{-8x}y^5(x) \quad (19.3)$$

بما أن $L = \frac{d^{14}}{dx^{14}}$ ، وتطبيق $L^{-1}(\cdot) = \int_0^x \int_0^x \int_0^x \int_0^x \int_0^x \int_0^x \int_0^x \int_0^x \int_0^x \int_0^x \int_0^x \int_0^x \int_0^x \int_0^x (\cdot) dx dx dx dx dx dx dx dx dx dx dx dx dx dx dx$ على

طرفي المعادلة (19.3) وبالاستفادة من الشروط الحدية المعطاة عند النقطة $x = 0$ نحصل على:

$$y(x) = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^4 + \frac{4}{15}x^5 + \frac{4}{45}x^6 + \frac{\alpha}{7!}x^7 + \frac{\beta}{8!}x^8 + \frac{\gamma}{9!}x^9 + \frac{\xi}{10!}x^{10} +$$

$$\frac{\eta}{11!}x^{11} + \frac{\omega}{12!}x^{12} + \frac{\varphi}{13!}x^{13} + L^{-1}(16384e^{-8x}y^5(x))$$

$\alpha = y^{(7)}(0), \beta = y^{(8)}(0), \gamma = y^{(9)}(0), \xi = y^{(10)}(0), \eta = y^{(11)}(0), \omega = y^{(12)}(0), \varphi = y^{(13)}(0)$ حيث

هي ثوابت عددية مجهولة يتم تحديدها لاحقاً.

بتعويض متسلسلة الحل $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x)$

واستبدال الحد غير الخطي $y^5(x)$ بمتسلسلة كثيرات حدود أدميان بالشكل $y^5(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$ نجد:

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n(x) = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^4 + \frac{4}{15}x^5 + \frac{4}{45}x^6 + \frac{\alpha}{7!}x^7 + \frac{\beta}{8!}x^8 + \frac{\gamma}{9!}x^9 + \frac{\xi}{10!}x^{10} + \frac{\eta}{11!}x^{11} + \frac{\omega}{12!}x^{12} + \frac{\varphi}{13!}x^{13} + L^{-1}(16384e^{-8x} \sum_{n=0}^{\infty} A_n)$$

حيث تعطى الحدود الأولى لكثيرات حدود أدوميان للحد غير الخطي $y^5(x)$ بالعلاقات الآتية:

$$A_0 = y_0^5, \quad A_1 = 5y_0^4y_1, \quad A_2 = 10y_0^3y_1^2 + 5y_0^4y_2, \dots$$

الآن بتطبيق طريقة تحليل أدوميان المعدلة MDM نفرض الدالة $f(x)$ كما يلي:

$$f(x) = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^4 + \frac{4}{15}x^5 + \frac{4}{45}x^6 + \frac{\alpha}{7!}x^7 + \frac{\beta}{8!}x^8 + \frac{\gamma}{9!}x^9 + \frac{\xi}{10!}x^{10} + \frac{\eta}{11!}x^{11} + \frac{\omega}{12!}x^{12} + \frac{\varphi}{13!}x^{13}$$

نقوم بتقسيم الدالة $f(x)$ إلى جزأين بالشكل الآتي:

$$f_1(x) = 1$$

$$f_2(x) = 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^4 + \frac{4}{15}x^5 + \frac{4}{45}x^6 + \frac{\alpha}{7!}x^7 + \frac{\beta}{8!}x^8 + \frac{\gamma}{9!}x^9 + \frac{\xi}{10!}x^{10} + \frac{\eta}{11!}x^{11} + \frac{\omega}{12!}x^{12} + \frac{\varphi}{13!}x^{13}$$

وعليه تكون العلاقة التكرارية حسب طريقة MDM هي:

$$y_0(x) = 1$$

$$y_1(x) = 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^4 + \frac{4}{15}x^5 + \frac{4}{45}x^6 + \frac{\alpha}{7!}x^7 + \frac{\beta}{8!}x^8 + \frac{\gamma}{9!}x^9 + \frac{\xi}{10!}x^{10} + \frac{\eta}{11!}x^{11} + \frac{\omega}{12!}x^{12} + \frac{\varphi}{13!}x^{13} + L^{-1}(16384e^{-8x}A_0) \quad (20.3)$$

$$y_{k+2}(x) = L^{-1}(16384e^{-8x}A_k), \quad k \geq 0 \quad (21.3)$$

بالتعويض في العلاقة التكرارية (20.3)، وإجراء الحسابات نجد:

$$y_1(x) = -\frac{1}{268435456} + \frac{67108865x}{33554432} + \frac{16777215x^2}{8388608} + \frac{4194305x^3}{3145728} + \frac{349525x^4}{524288} + \frac{52429x^5}{196608} + \frac{4369x^6}{49152} + \left(\frac{1}{645120} + \frac{\alpha}{5040}\right)x^7 + \left(-\frac{1}{645120} + \frac{\beta}{40320}\right)x^8 + \left(\frac{1}{725760} + \frac{\gamma}{362880}\right)x^9 + \left(-\frac{1}{907200} + \frac{\xi}{3628800}\right)x^{10} + \left(\frac{1}{1247400} + \frac{\eta}{39916800}\right)x^{11} + \left(-\frac{1}{1871100} + \frac{\omega}{479001600}\right)x^{12} + \left(\frac{2}{6081075} + \frac{\varphi}{6227020800}\right)x^{13} + \frac{e^{-8x}}{268435456}$$

وبالتالي الحل الناتج هو:

$$y(x) = y_0(x) + y_1(x)$$

$$\begin{aligned}
&= 1 - \frac{1}{268435456} + \frac{67108865x}{33554432} + \frac{16777215x^2}{8388608} + \frac{4194305x^3}{3145728} + \frac{349525x^4}{524288} + \frac{52429x^5}{196608} \\
&+ \frac{4369x^6}{49152} + \left(\frac{1}{645120} + \frac{\alpha}{5040} \right) x^7 + \left(-\frac{1}{645120} + \frac{\beta}{40320} \right) x^8 + \left(\frac{1}{725760} + \frac{\gamma}{362880} \right) x^9 \\
&+ \left(-\frac{1}{907200} + \frac{\xi}{3628800} \right) x^{10} + \left(\frac{1}{1247400} + \frac{\eta}{39916800} \right) x^{11} \\
&+ \left(-\frac{1}{1871100} + \frac{\omega}{479001600} \right) x^{12} + \left(\frac{2}{6081075} + \frac{\varphi}{6227020800} \right) x^{13} \\
&+ \frac{e^{-8x}}{268435456}
\end{aligned}$$

بأخذ منشور ماكلوران للدالة $\frac{e^{-8x}}{268435456}$ يصبح الحل $y(x)$ بالشكل الآتي:

$$\begin{aligned}
y(x) = & 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4x^3}{3} + \frac{2x^4}{3} + \frac{4x^5}{15} + \frac{4x^6}{45} + \frac{\alpha x^7}{5040} + \frac{\beta x^8}{40320} + \frac{\gamma x^9}{362880} \\
& + \frac{\xi x^{10}}{3628800} + \frac{\eta x^{11}}{39916800} + \frac{\omega x^{12}}{479001600} + \frac{\varphi x^{13}}{6227020800} + O(x^{14}) \quad (22.3)
\end{aligned}$$

بتعويض الشروط $y(1) = e^2$, $y^{(1)}(1) = 2e^2$, $y^{(2)}(1) = 4e^2$, $y^{(3)}(1) = 8e^2$, $y^{(4)}(1) = 16e^2$, $y^{(5)}(1) = 32e^2$, $y^{(6)}(1) = 64e^2$

في الحل المعطى بالعلاقة (22.3) من أجل تعيين قيم الثوابت المجهولة فنحصل على جملة المعادلات الآتية:

$$\frac{331}{45} + \frac{\alpha}{5040} + \frac{\beta}{40320} + \frac{\gamma}{362880} + \frac{\eta}{39916800} + \frac{\xi}{3628800} + \frac{\varphi}{6227020800} + \frac{\omega}{479001600} = e^2$$

$$\frac{218}{15} + \frac{\alpha}{720} + \frac{\beta}{5040} + \frac{\gamma}{40320} + \frac{\eta}{3628800} + \frac{\xi}{362880} + \frac{\varphi}{479001600} + \frac{\omega}{39916800} = 2e^2$$

$$28 + \frac{\alpha}{120} + \frac{\beta}{720} + \frac{\gamma}{5040} + \frac{\eta}{362880} + \frac{\xi}{40320} + \frac{\varphi}{39916800} + \frac{\omega}{3628800} = 4e^2$$

$$\frac{152}{3} + \frac{\alpha}{24} + \frac{\beta}{120} + \frac{\gamma}{720} + \frac{\eta}{40320} + \frac{\xi}{5040} + \frac{\varphi}{3628800} + \frac{\omega}{362880} = 8e^2$$

$$80 + \frac{\alpha}{6} + \frac{\beta}{24} + \frac{\gamma}{120} + \frac{\eta}{5040} + \frac{\xi}{720} + \frac{\varphi}{362880} + \frac{\omega}{40320} = 16e^2$$

$$96 + \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{6} + \frac{\gamma}{24} + \frac{\eta}{720} + \frac{\xi}{120} + \frac{\varphi}{40320} + \frac{\omega}{5040} = 32e^2$$

$$64 + \alpha + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{6} + \frac{\eta}{120} + \frac{\xi}{24} + \frac{\varphi}{5040} + \frac{\omega}{720} = 64e^2$$

بحل جملة المعادلات السابقة باستخدام برنامج Mathematica 12.0 نحصل على:

$$\alpha = 128.00248509366065, \quad \beta = 255.86333034932613$$

$$\gamma = 515.6029057502747, \quad \eta = 2656.321089863777$$

$$\xi = 965.9088063240051, \quad \varphi = 23021.44944548607$$

$$\omega = 58.79911780357361$$

بتعويض قيم الثوابت السابقة في الحل المعطى بالعلاقة (22.3) نجد:

$$y(x) = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4x^3}{3} + \frac{2x^4}{3} + \frac{4x^5}{15} + \frac{4x^6}{45} + 0.025397318470964415x^7 \\ + 0.006345816724933684x^8 + 0.001420863386657503x^9 \\ + 0.0002661785731712977x^{10} + 0.00006654644384980201x^{11} \\ + 1.227534893486235 \times 10^{-7}x^{12} + 0.000003697024658322334x^{13} \\ + O(x^{14})$$

وهو الحل التقريبي الناتج عن تطبيق طريقة MDM على هذه المسألة.

يتضمن كلاً من الجدول (12) والشكل (13) مقارنة بين الحل الدقيق لهذه المسألة، والحل التقريبي الناتج عن

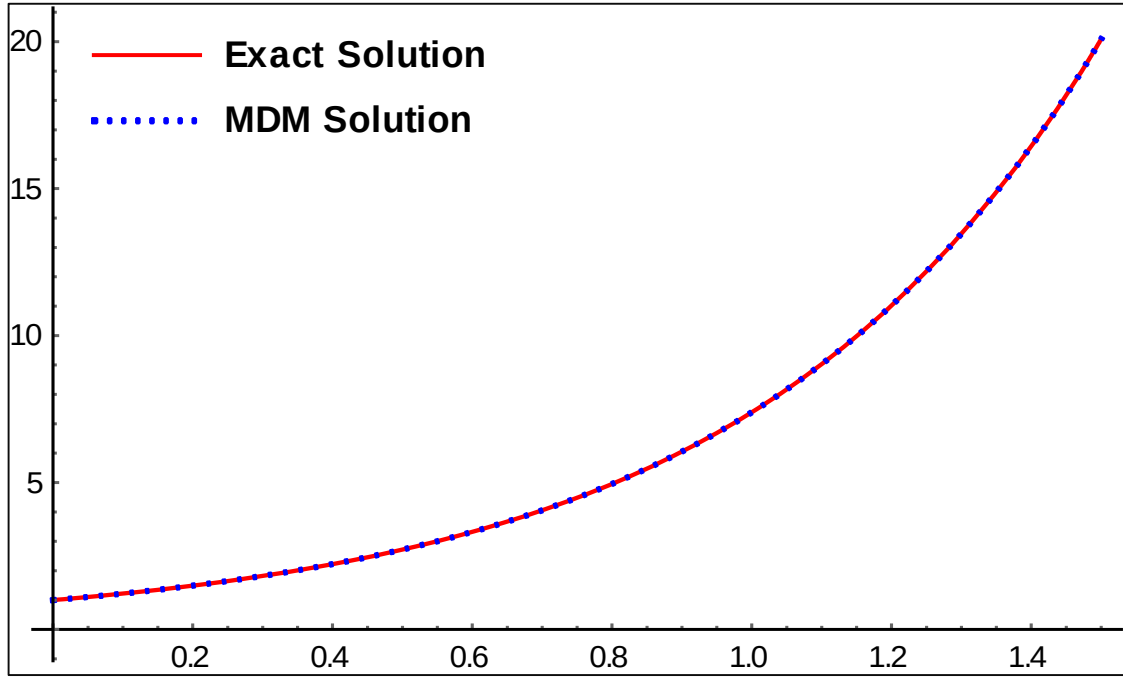
طريقة MDM باستخدام تكرارين، علماً أنّ الحل الدقيق لهذه المسألة هو

$$y_{\text{Exact}}(x) = e^{2x}$$

الجدول (12): مقارنة عددية بين الحل الدقيق للمثال (18) والحل التقريبي الناتج عن تطبيق طريقة MDM باستخدام تكرارين

x	Exact Solution	MDM Solution	Absolute Error of Exact Solution – MDM Solution
0	1	1	0
0.1	1.2214027582	1.2214027582	2.4×10^{-14}
0.2	1.4918246976	1.4918246976	1.4×10^{-12}
0.3	1.8221188004	1.8221188004	9.2×10^{-12}
0.4	2.2255409285	2.2255409285	2.4×10^{-11}
0.5	2.7182818285	2.7182818285	3.2×10^{-11}
0.6	3.3201169227	3.3201169228	2.4×10^{-11}
0.7	4.0551999668	4.0551999669	9.8×10^{-12}
0.8	4.9530324244	4.9530324244	1.8×10^{-12}
0.9	6.0496474644	6.0496474644	1.0×10^{-12}
1	7.3890560989	7.3890560989	2.6×10^{-12}
1.1	9.0250134994	9.0250134994	6.3×10^{-12}
1.2	11.0231763806	11.0231763806	1.2×10^{-11}
1.3	13.4637380350	13.4637380342	7.8×10^{-10}
1.4	16.4446467711	16.4446467609	1.0×10^{-8}
1.5	20.0855369232	20.0855368425	8.1×10^{-8}

المصدر: تم إعداده باستخدام برنامج Mathematica 12.0



المصدر: تم إعداده باستخدام برنامج Mathematica 12.0

الشكل (13): مقارنة بيانية بين الحل الدقيق للمثال (18) والحل التقريبي الناتج عن تطبيق طريقة MDM باستخدام تكرارين

2-3 الفكرة العامة لطريقة تحليل أدوميان ADM في حل معادلة فولتيرا التفاضلية-التكاملية والتكاملية من النوع الثاني غير الخطية:

• معادلة فولتيرا التفاضلية-التكاملية من النوع الثاني غير الخطية:

تظهر استخدامات هذه المعادلة في العديد من التطبيقات الفيزيائية مثل عملية تشكيل الزجاج، ونقل الحرارة، وعملية الانتشار بشكل عام، وانتشار النيوترونات، وغيرها من التطبيقات المختلفة، ويعطى الشكل العام لها على

النحو الآتي (Wazwaz, 2011, p: 426):

$$\frac{d^n}{dx^n} y(x) = f(x) + \int_0^x K(x, t) F(y(t)) dt \quad (23.3)$$

مع الشروط الابتدائية $y^{(k)}(0) = c_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$

حيث أن:

$$\frac{d^n y(x)}{dx^n} \text{ هو المشتق من المرتبة } n \text{ للدالة المجهولة } y(x)$$

$f(x)$ دالة حقيقية معلومة

النواة $K(x, t)$ دالة حقيقية معلومة تابعة للمتغيرين x, t

$F(y(t))$ دالة غير خطية

نكتب المعادلة (23.3) في صيغة المؤثر على الشكل:

$$L(y(x)) = f(x) + \int_0^x K(x, t) F(y(t)) dt \quad (24.3)$$

بما أن $L = \frac{d^n}{dx^n}$ فإن المؤثر العكسي هو مؤثر التكامل n مرة ، ويُعرف كما يلي:

$$L^{-1}(\cdot) = \int_0^x \int_0^x \dots \int_0^x (\cdot) dx dx \dots dx$$

نطبق المؤثر العكسي L^{-1} على طرفي المعادلة (24.3):

$$L^{-1}(L(y(x))) = L^{-1}(f(x)) - L^{-1}\left(\int_0^x K(x, t) F(y(t)) dt\right) \quad (25.3)$$

فنحصل على:

$$y(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(0)}{k!} x^k = L^{-1}(f(x)) - L^{-1}\left(\int_0^x K(x, t) F(y(t)) dt\right) \quad (26.3)$$

وبالتالي:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(0)}{k!} x^k + L^{-1}(f(x)) - L^{-1}\left(\int_0^x K(x, t) F(y(t)) dt\right) \quad (27.3)$$

نعرف الدالة $g(x)$ بالشكل:

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(0)}{k!} x^k + L^{-1}(f(x))$$

وبذلك تصبح المعادلة (27.3) على الصورة:

$$y(x) = g(x) - L^{-1}\left(\int_0^x K(x, t) F(y(t)) dt\right) \quad (28.3)$$

وفقاً لطريقة ADM يتم تمثيل الحل $y(x)$ على شكل متسلسلة غير منتهية كما يلي:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x) \quad (29.3)$$

كما يتم تمثيل الدالة غير الخطية $F(y(t))$ على شكل متسلسلة غير منتهية من كثيرات حدود أدوميان كما يلي:

$$F(y(t)) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \quad (30.3)$$

حيث تُحسب A_n من العلاقة التالية:

$$A_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} \left[F \left(\sum_{i=0}^n \lambda^i y_i(t) \right) \right]_{\lambda=0}, \quad n \geq 0$$

بتعويض العلاقتين (29.3) و (30.3) في (28.3) نحصل على:

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n(x) = g(x) - L^{-1} \left(\int_0^x K(x,t) \left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n \right) dt \right) \quad (31.3)$$

يتم حساب حدود متسلسلة الحل $y_0(x), y_1(x), \dots$ من خلال العلاقة التكرارية الآتية:

$$\begin{aligned} y_0(x) &= g(x) \\ y_{k+1}(x) &= -L^{-1} \left(\int_0^x K(x,t) (A_k) dt \right), \quad k \geq 0 \end{aligned} \quad (32.3)$$

ويكون الحل النهائي للمعادلة هو:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x) = y_0(x) + y_1(x) + y_2(x) + \dots$$

• معادلة فولتيرا التكاملية من النوع الثاني غير الخطية:

إذا كانت مرتبة المشتق للدالة المجهولة $y(x)$ في المعادلة (23.3) تساوي الصفر أي $n = 0$ ، فإن المعادلة

(23.3) تؤول إلى معادلة فولتيرا التكاملية غير الخطية من النوع الثاني، وتظهر استخدامات هذه المعادلة في

العديد من المجالات العلمية مثل ديناميكيات السكان، وانتشار الأوبئة وغيرها من التطبيقات الأخرى، ويعطى

الشكل العام لهذه المعادلة على النحو الآتي (Wazwaz, 2011, p: 387):

$$y(x) = f(x) + \int_0^x K(x,t) F(y(t)) dt \quad (33.3)$$

حيث أن:

$y(x)$ تمثل الدالة المجهولة

$f(x)$ دالة حقيقية معلومة

النواة $K(x,t)$ دالة حقيقية معلومة تابعة للمتغيرين x, t

$F(y(t))$ دالة غير خطية

يتم حل المعادلة (33.3) باستخدام طريقة ADM من تعويض متسلسلة الحل $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x)$

واستبدال الدالة غير الخطية $F(y(t))$ بمتسلسلة كثيرات حدود أدميان في المعادلة (33.3) فنحصل على:

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n(x) = f(x) + \int_0^x K(x, t) (\sum_{n=0}^{\infty} A_n) dt \quad (34.3)$$

حيث تُحسب A_n من العلاقة التالية:

$$A_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} \left[F \left(\sum_{i=0}^n \lambda^i y_i(t) \right) \right]_{\lambda=0}, \quad n \geq 0$$

يتم حساب حدود متسلسلة الحل $y_0(x), y_1(x), \dots$ من خلال العلاقة التكرارية الآتية:

$$\begin{cases} y_0(x) = f(x) \\ y_{k+1}(x) = \int_0^x K(x, t) (A_k) dt, \quad k \geq 0 \end{cases} \quad (35.3)$$

ويكون الحل النهائي للمعادلة هو:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x) = y_0(x) + y_1(x) + y_2(x) + \dots$$

ملاحظة: يتم تطبيق طريقة ADM بالأسلوب السابق نفسه في حل معادلة فولتيرا التفاضلية-التكاملية والتكاملية

من النوع الثاني الخطية، وفي هذه الحالة لا نحتاج إلى استخدام كثيرات حدود أدوميان.

3-2-1 أمثلة تطبيقية:

مثال (19): لتكن مسألة القيم الابتدائية لمعادلة فولتيرا التفاضلية-التكاملية من النوع الثاني الخطية:

(Wazwaz, 2011, p: 180)

$$y^{(3)}(x) = 1 + x + \frac{x^3}{6} + \int_0^x (x-t) y(t) dt \quad (36.3)$$

مع الشروط الابتدائية

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 1$$

الحل:

نكتب المعادلة (36.3) في صيغة المؤثر على الشكل:

$$L(y(x)) = 1 + x + \frac{x^3}{6} + \int_0^x (x-t) y(t) dt \quad (37.3)$$

بما أن $L = \frac{d^3}{dx^3}$ ، وبتطبيق $L^{-1}(\cdot) = \int_0^x \int_0^x \int_0^x (\cdot) dx dx dx$ على طرفي المعادلة (37.3) وبالاستفادة من

الشروط الابتدائية نحصل على:

$$y(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720} + L^{-1} \left(\int_0^x (x-t) y(t) dt \right)$$

وبملاحظة أن المعادلة خطية، فإننا لا نحتاج لكثيرات حدود أدوميان في هذه الحالة، فنقوم بتعويض متسلسلة

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x) \text{ الحل}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720} + L^{-1} \left(\int_0^x (x-t) \left(\sum_{n=0}^{\infty} y_n(t) \right) dt \right)$$

وتعطى العلاقة التكرارية بالشكل الآتي:

$$y_0(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720}$$

$$y_{k+1}(x) = L^{-1} \left(\int_0^x (x-t) y_k(t) dt \right) = \int_0^x \int_0^x \int_0^x \left(\int_0^x (x-t) y_k(t) dt \right) dx dx dx, \quad k \geq 0 \quad (38.3)$$

بالتعويض في العلاقة التكرارية (38.3) وإجراء الحسابات نجد:

$$y_1(x) = \frac{x^5}{120} + \frac{x^7}{5040} + \frac{x^8}{40320} + \frac{x^9}{362880} + \frac{x^{11}}{39916800}$$

$$y_2(x) = \frac{x^{10}}{3628800} + \frac{x^{12}}{479001600} + \frac{x^{13}}{6227020800} + \frac{x^{14}}{87178291200} + \frac{x^{16}}{20922789888000}$$

$$y_3(x) = \frac{x^{15}}{1307674368000} + \frac{x^{17}}{355687428096000} + \frac{x^{18}}{6402373705728000} +$$

$$\frac{x^{19}}{121645100408832000} + \frac{x^{21}}{51090942171709440000}$$

$$y_4(x) = \frac{x^{20}}{2432902008176640000} + \frac{x^{22}}{1124000727777607680000} + \frac{x^{23}}{25852016738884976640000} +$$

$$\frac{x^{24}}{620448401733239439360000} + \frac{x^{26}}{403291461126605635584000000}$$

وبالتالي الحل الناتج هو:

$$y(x) = y_0(x) + y_1(x) + y_2(x) + y_3(x) + y_4(x) + \dots$$

$$= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^8}{8!} + \frac{x^9}{9!} + \frac{x^{10}}{10!} + \frac{x^{11}}{11!} + \frac{x^{12}}{12!} + \frac{x^{13}}{13!} + \frac{x^{14}}{14!} + \dots$$

$$= -x + \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^8}{8!} + \frac{x^9}{9!} + \frac{x^{10}}{10!} + \frac{x^{11}}{11!} + \frac{x^{12}}{12!} + \frac{x^{13}}{13!} + \frac{x^{14}}{14!} + \dots \right)$$

$$= -x + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$= -x + e^x$$

وهو الحل الدقيق للمسألة.

مثال (20): لتكن مسألة القيم الابتدائية لمعادلة فولتيرا التفاضلية-التكاملية من النوع الثاني غير الخطية:

$$y'(x) = -2 \sin(x) - \frac{1}{3} \cos(x) - \frac{2}{3} \cos(2x) + \int_0^x \cos(x-t) y^2(t) dt \quad (39.3)$$

مع الشرط الابتدائي $y(0) = 1$

الحل:

نعلم أن $\cos(x-t) = \cos(x)\cos(t) + \sin(x)\sin(t)$ ، وعليه تصبح المعادلة (39.3) على الشكل:

$$y'(x) = -2 \sin(x) - \frac{1}{3} \cos(x) - \frac{2}{3} \cos(2x) + \cos(x) \int_0^x \cos(t) y^2(t) dt + \sin(x) \int_0^x \sin(t) y^2(t) dt \quad (40.3)$$

نكتب المعادلة (40.3) في صيغة المؤثر على الشكل:

$$L(y(x)) = -2 \sin(x) - \frac{1}{3} \cos(x) - \frac{2}{3} \cos(2x) + \cos(x) \int_0^x \cos(t) y^2(t) dt + \sin(x) \int_0^x \sin(t) y^2(t) dt$$

بما أن $L = \frac{d}{dx}$ ، وبتطبيق $L^{-1}(\cdot) = \int_0^x (\cdot) dx$ على طرفي المعادلة السابقة وبالاستفادة من الشرط الابتدائي

المعطى نحصل على:

$$y(x) = -1 + 2 \cos(x) - \frac{1}{3} \sin(x) - \frac{2}{3} \cos(x) \sin(x) + L^{-1}(\cos(x) \int_0^x \cos(t) y^2(t) dt) + L^{-1}(\sin(x) \int_0^x \sin(t) y^2(t) dt)$$

بتعويض متسلسلة الحل $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x)$

واستبدال الحد غير الخطي $y^2(t)$ بمتسلسلة كثيرات حدود أدوميان بالشكل $y^2(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$ نجد:

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n(x) = -1 + 2 \cos(x) - \frac{1}{3} \sin(x) - \frac{2}{3} \cos(x) \sin(x) + L^{-1}(\cos(x) \int_0^x \cos(t) y^2(t) dt) + L^{-1}(\sin(x) \int_0^x \sin(t) y^2(t) dt)$$

حيث:

$$A_0 = y_0^2, \quad A_1 = 2y_0y_1, \quad A_2 = 2y_0y_2 + y_1^2, \quad A_3 = 2y_0y_3 + 2y_1y_2, \dots$$

وتعطى العلاقة التكرارية بالشكل الآتي:

$$y_0(x) = -1 + 2 \cos(x) - \frac{1}{3} \sin(x) - \frac{2}{3} \cos(x) \sin(x)$$

$$y_{k+1}(x) = L^{-1}(\cos(x) \int_0^x \cos(t) y^2(t) dt) + L^{-1}(\sin(x) \int_0^x \sin(t) y^2(t) dt), \quad k \geq 0 \quad (41.3)$$

بأخذ أول خمسة حدود من منشور ماكلوران لـ $y_0(x)$ نجد:

$$y_0(x) = 1 - x - x^2 + \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{12} - \frac{11x^5}{120}$$

بالتعويض في العلاقة التكرارية (41.3) من أجل $k = 0$ وإجراء الحسابات نجد:

$$y_1(x) = -34093 - 7070x + 17047x^2 + 1178x^3 - \frac{4262x^4}{3} - \frac{235x^5}{4} + \frac{1705x^6}{36}$$

$$+ \frac{41x^7}{30} - \frac{1211x^8}{1440} - \frac{11x^9}{720} + \frac{121x^{10}}{14400} + 34093 \cos(x) + 7070 \sin(x)$$

بأخذ أول أربعة حدود من منشور ماكلوران لـ $y_1(x)$ نجد:

$$y_1(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{8} + \frac{x^5}{6}$$

بالتعويض في العلاقة التكرارية (41.3) من أجل $k = 1$ وإجراء الحسابات نجد:

$$y_2(x) = 119448 + 21668x - 59724x^2 - \frac{10834x^3}{3} + \frac{59725x^4}{12} + \frac{10829x^5}{60} - \frac{14933x^6}{90}$$

$$- \frac{383x^7}{90} + \frac{2129x^8}{720} + \frac{73x^9}{1440} - \frac{11x^{10}}{360} - 119448 \cos(x) - 21668 \sin(x)$$

بأخذ أول حدين من منشور ماكلوران لـ $y_2(x)$ نجد:

$$y_2(x) = \frac{x^4}{12} - \frac{x^5}{12}$$

وبالتالي الحل الناتج هو:

$$y(x) = y_0(x) + y_1(x) + y_2(x) + \dots$$

$$= 1 - x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^5}{120} + \dots$$

$$= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots\right) - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

من خلال متابعة العمل والاستمرار في حساب التكرارات، نلاحظ أنّ متسلسلة الحل تتقارب تدريجياً نحو الحل

الدقيق لهذه المسألة، والذي يتمثل في الدالة التالية:

$$y(x) = \cos(x) - \sin(x)$$

مثال (21): لتكن معادلة فولتيرا التكاملية من النوع الثاني غير الخطية: (Wazwaz, 2011, p: 403)

$$y(x) = x - \int_0^x y^2(t) dt \quad (42.3)$$

الحل:

بتعويض متسلسلة الحل $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x)$ واستبدال الحد غير الخطي $y^2(t)$ بمتسلسلة كثيرات

حدود أدوميان في المعادلة (42.3) فنحصل على:

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n(x) = x - \int_0^x (\sum_{n=0}^{\infty} A_n) dt \quad (43.3)$$

حيث تعطى الحدود الأولى لكثيرات حدود أدوميان للحد غير الخطي $y^2(x)$ بالعلاقات الآتية:

$$A_0 = y_0^2, \quad A_1 = 2y_0y_1, \quad A_2 = 2y_0y_2 + y_1^2, \quad A_3 = 2y_0y_3 + 2y_1y_2$$

$$A_4 = 2y_0y_4 + 2y_1y_3 + y_2^2, \dots$$

نوجد $y_0(x), y_1(x), \dots$ من خلال العلاقة التكرارية الآتية:

$$\begin{aligned} y_0(x) &= x \\ y_{k+1}(x) &= - \int_0^x (A_k) dt, \quad k \geq 0 \end{aligned} \quad (44.3)$$

بالتعويض في العلاقة التكرارية (44.3) من أجل $k = 0, 1, 2, \dots$ وإجراء الحسابات نجد:

$$y_1(x) = -\frac{x^3}{3}, \quad y_2(x) = \frac{2x^5}{15}, \quad y_3(x) = -\frac{17x^7}{315}, \quad y_4(x) = \frac{62x^9}{2835}, \quad y_5(x) = -\frac{1382x^{11}}{155925}, \dots$$

وبالتالي الحل الناتج هو:

$$y(x) = y_0(x) + y_1(x) + y_2(x) + y_3(x) + y_4(x) + y_5(x) + \dots$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \frac{17x^7}{315} + \frac{62x^9}{2835} - \frac{1382x^{11}}{155925} + \dots$$

منشور ماكلوران للدالة $\tanh(x)$

$$= \frac{\left(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \frac{x^{11}}{11!} + \dots \right)}{\left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \frac{x^{10}}{10!} + \dots \right)} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}} = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \tanh(x)$$

وهو الحل الدقيق للمعادلة.

3-3 الفكرة العامة لطريقة تحليل أدوميان ADM في حل المعادلات التفاضلية الجزئية:

لتوضيح كيفية تطبيق طريقة ADM في حل المعادلات التفاضلية الجزئية، نأخذ المعادلة التفاضلية الجزئية

غير الخطية الآتية (Sumiati *et al.*, 2019):

$$L_t(y(x, t)) + R(y(x, t)) + N(y(x, t)) = g(x, t) \quad (45.3)$$

مع الشروط الابتدائية:

$$\frac{\partial^k y(x, 0)}{\partial t^k} = \varphi_k(x), k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (46.3)$$

حيث أن:

$$L_t = \frac{\partial^n}{\partial t^n} \text{ مؤثر تفاضلي خطي يمثل المشتق الجزئي من المرتبة } n \text{ بالنسبة لـ } t$$

$R(y(x, t))$ يمثل بقية الحدود الخطية، $N(y(x, t))$ يمثل الحدود غير الخطية، $g(x, t)$ دالة معطاة

نعيد كتابة المعادلة (45.3) على الشكل:

$$L_t(y(x, t)) = g(x, t) - (R(y(x, t)) + N(y(x, t))) \quad (47.3)$$

بما أن L_t مؤثر تفاضلي يمثل المشتق الجزئي من المرتبة n بالنسبة لـ t ويكتب بالشكل:

$$L_t = \frac{\partial^n}{\partial t^n}$$

فإن المؤثر العكسي هو مؤثر التكامل n مرة ، ويعرف كما يلي:

$$L_t^{-1}(\cdot) = \int_0^t \int_0^t \dots \int_0^t (\cdot) dt dt \dots dt$$

نطبق المؤثر العكسي L_t^{-1} على طرفي المعادلة (47.3):

$$L_t^{-1}(L_t(y(x, t))) = L_t^{-1}(g(x, t)) - L_t^{-1}(R(y(x, t)) + N(y(x, t))) \quad (48.3)$$

وبما أن تطبيق L_t^{-1} على $L_t(y(x, t))$ يعيد الدالة $y(x, t)$ مطروحاً منها الحدود الناتجة عن المكاملة مع

استخدام الشروط الابتدائية، نحصل على:

$$y(x, t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k y(x, 0)}{\partial t^k} t^k = L_t^{-1}(g(x, t)) - L_t^{-1}(R(y(x, t)) + N(y(x, t))) \quad (49.3)$$

وبالتالي:

$$y(x, t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k y(x, 0)}{\partial t^k} t^k + L_t^{-1}(g(x, t)) - L_t^{-1}(R(y(x, t)) + N(y(x, t))) \quad (50.3)$$

نعرف الدالة $f(x, t)$ بالشكل:

$$f(x, t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k y(x, 0)}{\partial t^k} t^k + L_t^{-1}(g(x, t))$$

وبذلك تصبح المعادلة (50.3) على الصورة:

$$y(x, t) = f(x, t) - L_t^{-1}(R(y(x, t)) + N(y(x, t))) \quad (51.3)$$

وفقاً لطريقة ADM يتم تمثيل الحل $y(x, t)$ على شكل متسلسلة غير منتهية كما يلي:

$$y(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x, t) \quad (52.3)$$

كما يتم تمثيل المؤثر غير الخطي $N(y(x, t))$ على شكل متسلسلة غير منتهية من كثيرات حدود أدوميان كما يلي:

$$N(y(x, t)) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \quad (53.3)$$

حيث يتم حساب كثيرات حدود أدوميان A_n من العلاقة:

$$A_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} \left[N \left(\sum_{i=0}^n \lambda^i y_i(x, t) \right) \right]_{\lambda=0}, \quad n \geq 0$$

بتعويض العلاقتين (52.3) و (53.3) في (51.3) نحصل على:

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n(x, t) = f(x, t) - L_t^{-1}(R(\sum_{n=0}^{\infty} y_n(x, t)) + \sum_{n=0}^{\infty} A_n) \quad (54.3)$$

يتم حساب $y_0(x, t), y_1(x, t), \dots$ من خلال العلاقة التكرارية الآتية:

$$\begin{cases} y_0(x, t) = f(x, t) \\ y_{k+1}(x, t) = -L_t^{-1}(R(y_k(x, t)) + A_k), \quad k \geq 0 \end{cases} \quad (55.3)$$

ويكون الحل النهائي للمعادلة هو:

$$y(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x, t) = y_0(x, t) + y_1(x, t) + y_2(x, t) + \dots$$

ملاحظة: يتم تطبيق طريقة ADM بالأسلوب السابق نفسه في حل المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية باعتبارها حالة خاصة من المعادلة (45.3)، وذلك حينما يكون الحد غير الخطي معدوماً أي $N(y(x, t)) = 0$

3-3-1 أمثلة تطبيقية

مثال (22): لتكن مسألة القيم الابتدائية للمعادلة التفاضلية الجزئية غير الخطية من المرتبة الأولى:

(Wazwaz, 2010, p: 322)

$$y_t(x, t) + y(x, t)y_x(x, t) = 0 \quad (56.3)$$

مع الشرط الابتدائي $y(x, 0) = x$

الحل:

نكتب المعادلة (56.3) في صيغة المؤثر:

$$L_t(y(x, t)) = -y(x, t)y_x(x, t) \quad (57.3)$$

بما أن $L_t = \frac{\partial}{\partial t}$ ، وبتطبيق $L_t^{-1}(\cdot) = \int_0^t (\cdot) dt$ على طرفي المعادلة (57.3) وبلاستفادة من الشرط الابتدائي

المعطى نحصل على:

$$y(x, t) = x - L_t^{-1}(y(x, t)y_x(x, t))$$

بتعويض متسلسلة الحل $y(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x, t)$ واستبدال الحد غير الخطي $y(x, t)y_x(x, t)$

بمتسلسلة كثيرات حدود أدوميان بالشكل $y(x, t)y_x(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$ نجد:

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n(x, t) = x - L_t^{-1}(\sum_{n=0}^{\infty} A_n)$$

حيث تعطى الحدود الأولى لكثيرات حدود أدوميان للدالة غير الخطية $y(x, t)y_x(x, t)$ بالعلاقات الآتية:

$$A_0 = y_0(y_0)_x, \quad A_1 = y_0(y_1)_x + y_1(y_0)_x, \quad A_2 = y_0(y_2)_x + y_1(y_1)_x + y_2(y_0)_x$$

$$A_3 = y_0(y_3)_x + y_1(y_2)_x + y_2(y_1)_x + y_3(y_0)_x$$

$$A_4 = y_0(y_4)_x + y_1(y_3)_x + y_2(y_2)_x + y_3(y_1)_x + y_4(y_0)_x, \dots$$

نوجد $y_0(x, t), y_1(x, t), \dots$ من خلال العلاقة التكرارية الآتية:

$$\begin{cases} y_0(x, t) = x \\ y_{k+1}(x, t) = -L_t^{-1}(A_k) = -\int_0^t A_k dt, \quad k \geq 0 \end{cases} \quad (58.3)$$

بالتعويض في العلاقة التكرارية (58.3) من أجل $k = 0, 1, 2, \dots$ وإجراء الحسابات نجد:

$$y_0(x, t) = x, \quad y_1(x, t) = -xt, \quad y_2(x, t) = xt^2, \quad y_3(x, t) = -xt^3, \quad y_4(x, t) = xt^4$$

$$y_5(x, t) = -xt^5, \dots$$

ويكون الحل الناتج هو:

$$\begin{aligned}
 y(x, t) &= y_0(x, t) + y_1(x, t) + y_2(x, t) + y_3(x, t) + y_4(x, t) + y_5(x, t) + \dots \\
 &= x - xt + xt^2 - xt^3 + xt^4 - xt^5 + \dots \\
 &= x(1 - t + t^2 - t^3 + t^4 - t^5 + \dots) = x \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n \right) = \frac{x}{1+t}, \quad |t| < 1
 \end{aligned}$$

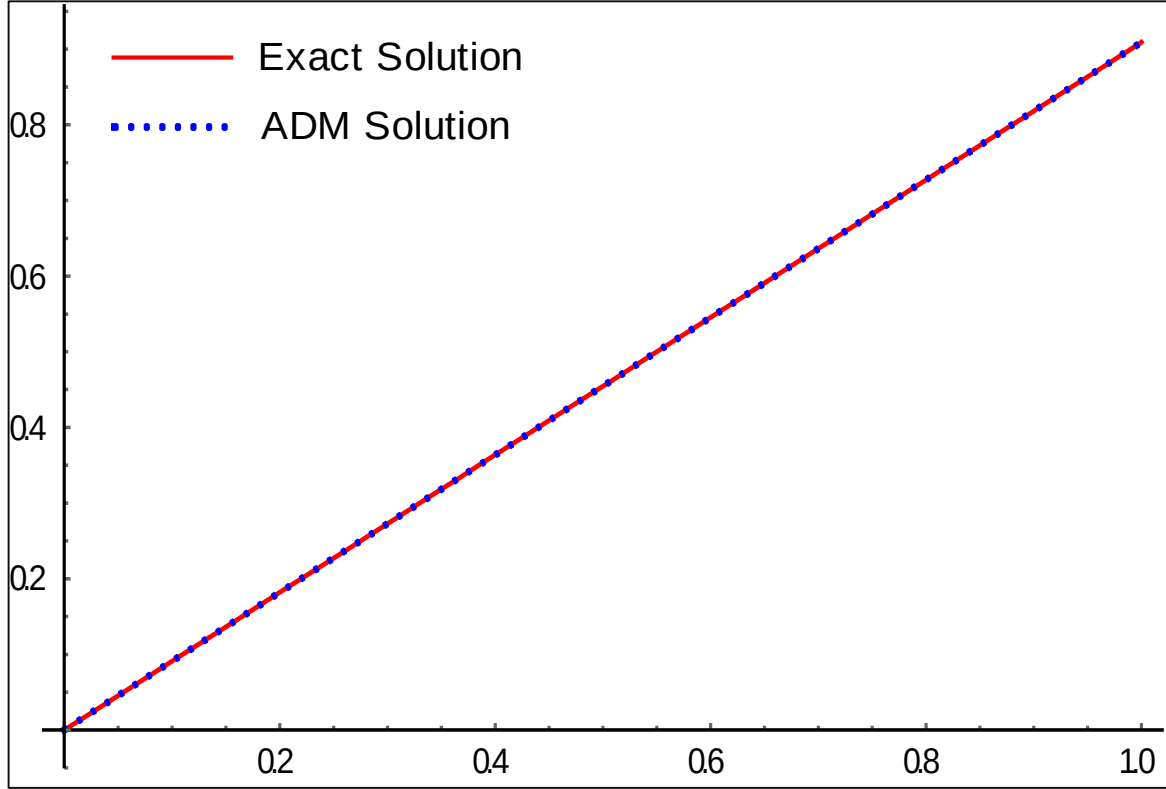
وهو الحل الدقيق للمسألة.

يتضمن كلاً من الجدول (13) والشكل (14) مقارنة بين الحل الدقيق والحل الناتج عن طريقة ADM باستخدام 6 تكرارات.

الجدول (13): مقارنة عددية بين الحل الدقيق للمثال (22) والحل الناتج عن تطبيق طريقة ADM باستخدام 6 تكرارات عندما $t = 0.1$

x	Exact Solution	ADM Solution	Absolute Error of Exact Solution – ADM Solution
0	0	0	0
0.1	0.0909091	0.0909090	9.1×10^{-8}
0.2	0.1818182	0.1818180	1.8×10^{-7}
0.3	0.2727273	0.2727270	2.7×10^{-7}
0.4	0.3636364	0.3636360	3.6×10^{-7}
0.5	0.4545455	0.4545450	4.5×10^{-7}
0.6	0.5454545	0.5454540	5.5×10^{-7}
0.7	0.6363636	0.6363630	6.4×10^{-7}
0.8	0.7272727	0.7272720	7.3×10^{-7}
0.9	0.8181818	0.8181810	8.2×10^{-7}
1	0.9090909	0.9090900	9.1×10^{-7}

المصدر: تم إعداده باستخدام برنامج Mathematica 12.0



المصدر: تم إعداده باستخدام برنامج Mathematica 12.0

الشكل (14): مقارنة بيانية بين الحل الدقيق للمثال (22) والحل الناتج عن تطبيق طريقة ADM باستخدام 6 تكرارات عندما $t = 0.1$

مثال (23): لتكن مسألة القيم الابتدائية للمعادلة التفاضلية الجزئية غير الخطية من المرتبة الأولى:

$$y_t(x, t) + y(x, t)y_x(x, t) = y_{xxxx}(x, t) - y^2(x, t) \quad (59.3)$$

$$y(x, 0) = e^{-x} \text{ مع الشرط الابتدائي}$$

الحل:

نكتب المعادلة (59.3) في صيغة المؤثر:

$$L_t(y(x, t)) = y_{xxxx}(x, t) - y(x, t)y_x(x, t) - y^2(x, t) \quad (60.3)$$

بما أن $L_t = \frac{\partial}{\partial t}$ ، وبتطبيق $L_t^{-1}(\cdot) = \int_0^t (\cdot) dt$ على طرفي المعادلة (60.3) وبالاستفادة من الشرط الابتدائي

المعطى نحصل على:

$$y(x, t) = e^{-x} + L_t^{-1}(y_{xxxx}(x, t) - y(x, t)y_x(x, t) - y^2(x, t))$$

نقوم بتعويض متسلسلة الحل $y(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x, t)$ واستبدال الدوال غير الخطية $y(x, t)y_x(x, t), y^2(x, t)$ بمتسلسلاتي حدود أوميان $\sum_{n=0}^{\infty} A_n, \sum_{n=0}^{\infty} B_n$ على الترتيب فنحصل على:

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n(x, t) = e^{-x} - L_t^{-1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n + \sum_{n=0}^{\infty} B_n - \left(\sum_{n=0}^{\infty} y_n(x, t) \right)_{xxxx} \right)$$

حيث تعطى الحدود الأولى لكثيرات حدود أوميان للدالتين غير الخطيتين $y(x, t)y_x(x, t), y^2(x, t)$ بالعلاقات الآتية:

$$A_0 = y_0(y_0)_x, \quad A_1 = y_0(y_1)_x + y_1(y_0)_x, \quad A_2 = y_0(y_2)_x + y_1(y_1)_x + y_2(y_0)_x$$

$$A_3 = y_0(y_3)_x + y_1(y_2)_x + y_2(y_1)_x + y_3(y_0)_x$$

$$A_4 = y_0(y_4)_x + y_1(y_3)_x + y_2(y_2)_x + y_3(y_1)_x + y_4(y_0)_x, \dots$$

$$B_0 = y_0^2, \quad B_1 = 2y_0y_1, \quad B_2 = 2y_0y_2 + y_1^2, \quad B_3 = 2y_0y_3 + 2y_1y_2, \quad B_4 = 2y_0y_4 + 2y_1y_3 + y_2^2, \dots$$

والعلاقة التكرارية هي:

$$y_0(x, t) = e^{-x}$$

$$y_{k+1}(x, t) = -L_t^{-1} \left(A_k + B_k - (y_k(x, t))_{xxxx} \right), \quad k \geq 0 \quad (61.3)$$

بالتعويض في العلاقة التكرارية (61.3) من أجل $k = 0, 1, 2, \dots$ وإجراء الحسابات نجد:

$$y_1(x, t) = e^{-x}t, \quad y_2(x, t) = \frac{e^{-x}}{2}t^2, \quad y_3(x, t) = \frac{e^{-x}}{6}t^3, \quad y_4(x, t) = \frac{e^{-x}}{24}t^4$$

$$y_5(x, t) = \frac{e^{-x}}{120}t^5, \dots$$

وبالتالي الحل الناتج هو:

$$y(x, t) = y_0(x, t) + y_1(x, t) + y_2(x, t) + y_3(x, t) + y_4(x, t) + y_5(x, t) + \dots$$

$$= e^{-x} + e^{-x}t + \frac{e^{-x}}{2}t^2 + \frac{e^{-x}}{6}t^3 + \frac{e^{-x}}{24}t^4 + \frac{e^{-x}}{120}t^5 + \dots$$

$$= e^{-x} \left(1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \frac{t^5}{5!} + \dots \right)$$

$$= e^{-x} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \right) = e^{-x} e^t = e^{t-x}$$

وهو الحل الدقيق للمسألة.

3-4 دمج طريقة تحليل أدوميان ADM مع تحويل Anuj التكاملي

تُعد طريقة تحليل أدوميان (Adomian Decomposition Method – ADM) من الطرائق الفعّالة في حل المعادلات التفاضلية والتكاملية والتفاضلية-التكاملية، سواء أكانت خطية أو غير خطية، لما تتميز به من قدرة على إعطاء حلول دقيقة أو حلول تقريبية ذات دقة عالية، إلا أنّ هذه الطريقة تتطلب في معظم تطبيقاتها إجراء تكاملات وعمليات حسابية تزداد صعوبتها كلما ارتفعت مرتبة المعادلة، وخاصةً عند التعامل مع المعادلات ذات المراتب العليا.

وانطلاقاً من هذه الإشكالية، نقترح تطوير طريقة هجينة جديدة أسميناها اختصاراً بـ Anuj-ADM، وتهدف هذه الطريقة الهجينة إلى تقليل التعقيد الحسابي المصاحب لطريقة أدوميان التقليدية وتحسين أدائها، وتعتمد على دمج طريقة تحليل أدوميان (ADM) مع تحويل تكاملي حديث يدعى بتحويل Anuj، والذي يُعدّ من التحويلات التكاملية التي ظهرت حديثاً، وأثبتت فعاليتها في حل المعادلات التفاضلية العادية الخطية (Kumar et al., 2022)، والمعادلات التفاضلية الجزئية الخطية (Rashdi and Mahmoud, 2022)، وكذلك في حل معادلات فولتيرا التكاملية ذات النواة الفرقية (Patil et al., 2022).

3-5 تحويل Anuj التكاملي

3-5-1 تعاريف أساسية:

• تعريف الاستمرار القطعي (Shah and Naik, 2022, p: 12)

لتكن $f(t)$ دالة معرفة على الفترة $0 \leq a \leq t \leq b$ ، إذا وجد في هذه الفترة عدد منتهٍ من النقاط t_k حيث $(k = 1, 2, 3, \dots, r)$ وتحقق $t_{k-1} < t_k$ ، وكان للدالة $f(t)$ عدد منتهٍ من نقاط الانقطاع وكانت مستمرة على كل فترة جزئية $t_{k-1} < t < t_k$ عندئذٍ نقول عن الدالة $f(t)$ إنها مستمرة قطعياً.

مثال: لتكن لدينا الدالة $f(t)$ المعرفة بالشكل الآتي:

$$f(t) = \begin{cases} t^2, & 0 \leq t < 5 \\ 7, & 5 \leq t < 8 \\ 9 - t, & 8 \leq t \leq 9 \end{cases}$$

تتألف الدالة $f(t)$ من ثلاث فترات جزئية مستمرة تفصل بينها نقطتا انقطاع عند $t = 5$ و $t = 8$ وبالتالي

الدالة $f(t)$ مستمرة قطعياً في الفترة $[0,9]$

• تعريف المرتبة الأسية (Shah and Naik, 2022, p: 13)

يقال عن دالة $f(t)$ إنها ذات مرتبة أسية α إذا وجد ثوابت $\alpha, K, T > 0$ بحيث يكون:

$$|f(t)| \leq Ke^{\alpha t} \text{ لأجل قيم } t > T.$$

• تعريف تحويل Anuj (Kumar, et al., 2022)

يعرف تحويل Anuj لدالة $f(t)$ مستمرة قطعياً وذات مرتبة أسية وذلك من أجل $t \geq 0$ بالعلاقة الآتية:

$$\Lambda[f(t)] = F(p) = p^2 \int_0^{\infty} f(t) e^{-\left(\frac{1}{p}\right)t} dt, \quad p > 0 \quad (77.3)$$

حيث أن:

$$\Lambda[f(t)] \text{ أو } F(p) \text{ يدعى بتحويل Anuj للدالة } f(t)$$

Λ يرمز إلى مؤثر تحويل Anuj، p هو متغير تحويل Anuj

• تعريف تحويل Anuj العكسي (Kumar, et al., 2022)

يرمز لتحويل Anuj العكسي بالمؤثر Λ^{-1} ويعرف بالعلاقة الآتية:

$$\Lambda^{-1}[F(p)] = f(t) \quad (78.3)$$

3-5-2 تحويل Anuj لبعض الدوال الشهيرة:

يبين الجدول (14) تحويل Anuj لبعض الدوال الشهيرة، مع إمكانية الاطلاع على براهين هذه التحويلات في

المرجع (Kumar, *et al.*, 2022).

الجدول (14): تحويل Anuj لبعض الدوال الشهيرة

$f(t)$	$\Lambda[f(t)] = F(p)$
1	p^3
C ; C is constant	Cp^3
t	p^4
t^2	$2!p^5$
t^3	$3!p^6$
$t^\rho, \rho \in \mathbb{N}$	$\rho!p^{\rho+3}$
e^{lt}	$\frac{p^3}{1-lp}$
$\cos(lt)$	$\frac{p^3}{1+l^2p^2}$
$\sin(lt)$	$\frac{lp^4}{1+l^2p^2}$
$\cosh(lt)$	$\frac{p^3}{1-l^2p^2}$
$\sinh(lt)$	$\frac{lp^4}{1-l^2p^2}$

المصدر: (Kumar, *et al.*, 2022)

3-5-3 بعض الخواص الأساسية لتحويل Anuj:

في هذه الفقرة، نعرض بعض الخواص الأساسية الهامة لتحويل Anuj.

(1) خاصية الالتفاف (Kumar, et al., 2022)

ليكن $\Lambda[f(t)] = F(p)$, $\Lambda[g(t)] = G(p)$ تحويلي Anuj للدالتين $f(t)$, $g(t)$ على الترتيب عندئذ:

$$\Lambda[f(t) * g(t)] = \frac{1}{p^2} \Lambda[f(t)] \Lambda[g(t)] = \frac{1}{p^2} F(p) G(p)$$

حيث يُرمز إلى التفاف الدالتين $f(t)$, $g(t)$ بالرمز $f(t) * g(t)$ ويعرف بالعلاقة الآتية:

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(t-u)g(u) du = \int_0^t f(u)g(t-u) du$$

البرهان:

باستخدام تعريف تحويل Anuj (62.3) لدينا:

$$\begin{aligned} \Lambda[f(t) * g(t)] &= p^2 \int_0^\infty e^{-\left(\frac{1}{p}\right)t} (f(t) * g(t)) dt \\ &= p^2 \int_0^\infty e^{-\left(\frac{1}{p}\right)t} \left(\int_0^t f(t-u)g(u) du \right) dt \end{aligned}$$

بتبديل ترتيب التكامل يصبح لدينا:

$$= p^2 \int_0^\infty g(u) \left(\int_u^\infty f(t-u) e^{-\left(\frac{1}{p}\right)t} dt \right) du$$

نضع $t - u = v$ في التكامل السابق وبالتالي يكون $t = v + u$ و $dt = dv$

$$\begin{aligned} &= p^2 \int_0^\infty g(u) \left(\int_0^\infty f(v) e^{-\left(\frac{1}{p}\right)(v+u)} dv \right) du \\ &= p^2 \int_0^\infty g(u) e^{-\left(\frac{1}{p}\right)u} \left(\int_0^\infty f(v) e^{-\left(\frac{1}{p}\right)v} dv \right) du \\ &= \frac{1}{p^2} \left(p^2 \int_0^\infty g(u) e^{-\left(\frac{1}{p}\right)u} du \right) \left(p^2 \int_0^\infty f(v) e^{-\left(\frac{1}{p}\right)v} dv \right) \\ &= \frac{1}{p^2} \left(p^2 \int_0^\infty g(u) e^{-\left(\frac{1}{p}\right)u} du \right) \left(p^2 \int_0^\infty f(v) e^{-\left(\frac{1}{p}\right)v} dv \right) \\ &= \frac{1}{p^2} F(p) G(p) \end{aligned}$$

وهو المطلوب.

(2) خاصية تحويل Anuj للمشتقات (Kumar, et al., 2022)

ليكن $\Lambda[f(t)] = F(p)$ تحويل Anuj للدالة $f(t)$ عندئذ:

$$\begin{aligned} a) \quad \Lambda[f'(t)] &= \frac{1}{p}F(p) - p^2f(0) \\ b) \quad \Lambda[f''(t)] &= \frac{1}{p^2}F(p) - pf(0) - p^2f'(0) \\ &\vdots \\ d) \quad \Lambda[f^{(n)}(t)] &= \frac{1}{p^n}F(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^{3-n+k}f^{(k)}(0) \end{aligned}$$

البرهان:

(a) باستخدام تعريف تحويل Anuj (62.3) لدينا:

$$\Lambda[f'(t)] = p^2 \int_0^\infty f'(t) e^{-\left(\frac{1}{p}\right)t} dt$$

نكامل بالتجزئة:

$$\begin{aligned} u &= e^{-\left(\frac{1}{p}\right)t} \Rightarrow du = -\frac{1}{p} e^{-\left(\frac{1}{p}\right)t} dt \\ dv &= f'(t)dt \Rightarrow v = f(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \Lambda[f'(t)] &= p^2 \left(\left[f(t) e^{-\left(\frac{1}{p}\right)t} \right]_0^\infty + \frac{1}{p} \int_0^\infty f(t) e^{-\left(\frac{1}{p}\right)t} dt \right) \\ &= p^2 \left((0 - f(0)) + \frac{1}{p} \int_0^\infty f(t) e^{-\left(\frac{1}{p}\right)t} dt \right) \\ &= -p^2 f(0) + \frac{1}{p} \left(p^2 \int_0^\infty f(t) e^{-\left(\frac{1}{p}\right)t} dt \right) \\ &= -p^2 f(0) + \frac{1}{p} \Lambda[f(t)] \\ &= -p^2 f(0) + \frac{1}{p} F(p) \\ &= \frac{1}{p} F(p) - p^2 f(0) \end{aligned}$$

(b) لدينا من البند (a)

$$\Lambda[f'(t)] = \frac{1}{p}F(p) - p^2f(0) = \frac{1}{p}\Lambda[f(t)] - p^2f(0)$$

وبالتالي يكون:

$$\Lambda[f''(t)] = \Lambda[(f'(t))']$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{p} \Lambda[f'(t)] - p^2 f'(0) \\
&= \frac{1}{p} \left(\frac{1}{p} \Lambda[f(t)] - p^2 f(0) \right) - p^2 f'(0) \\
&= \frac{1}{p^2} \Lambda[f(t)] - p f(0) - p^2 f'(0) \\
&= \frac{1}{p^2} F(p) - p f(0) - p^2 f'(0)
\end{aligned}$$

(C) سوف نستخدم مبدأ الاستقراء الرياضي لإثبات صحة العلاقة الآتية:

$$\Lambda[f^{(n)}(t)] = \frac{1}{p^n} F(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^{3-n+k} f^{(k)}(0) \quad (64.3)$$

من أجل $n = 1$

$$\Lambda[f'(t)] = \frac{1}{p} F(p) - p^2 f(0)$$

إذاً العلاقة صحيحة من أجل $n = 1$

نفرض صحة العلاقة من أجل $n = m$

$$\Lambda[f^{(m)}(t)] = \frac{1}{p^m} F(p) - \sum_{k=0}^{m-1} p^{3-m+k} f^{(k)}(0)$$

نبرهن صحة العلاقة من أجل $n = m + 1$

$$\begin{aligned}
\Lambda[f^{(m+1)}(t)] &= \Lambda[(f^{(m)}(t))'] \\
&= \frac{1}{p} \Lambda[f^{(m)}(t)] - p^2 f^{(m)}(0) \\
&= \frac{1}{p} \left(\frac{1}{p^m} F(p) - \sum_{k=0}^{m-1} p^{3-m+k} f^{(k)}(0) \right) - p^2 f^{(m)}(0) \\
&= \frac{1}{p^{m+1}} F(p) - \sum_{k=0}^{m-1} p^{2-m+k} f^{(k)}(0) - p^2 f^{(m)}(0) \\
&= \frac{1}{p^{m+1}} F(p) - \sum_{k=0}^m p^{2-m+k} f^{(k)}(0)
\end{aligned}$$

وهي نفسها العلاقة (64.3) عند تعويض $n = m + 1$ مما يدل على أن العلاقة صحيحة من أجل

$n = m + 1$ ، وبالتالي حسب مبدأ الاستقراء الرياضي نستنتج أن العلاقة صحيحة لأجل جميع قيم $n \geq 1$.

(3) خاصية الخطية (Kumar, et al., 2022)

ليكن $\Lambda[f(t)] = F(p)$, $\Lambda[g(t)] = G(p)$ تحويلي Anuj للدالتين $f(t)$, $g(t)$ على الترتيب، وليكن l, m ثوابت اختيارية عندئذ:

$$\Lambda[lf(t) + mg(t)] = l\Lambda[f(t)] + m\Lambda[g(t)] = lF(p) + mG(p)$$

البرهان:

باستخدام تعريف تحويل Anuj (62.3) لدينا:

$$\begin{aligned}\Lambda[lf(t) + mg(t)] &= p^2 \int_0^\infty [lf(t) + mg(t)] e^{-\left(\frac{1}{p}\right)t} dt \\ &= p^2 \int_0^\infty lf(t) e^{-\left(\frac{1}{p}\right)t} dt + p^2 \int_0^\infty mg(t) e^{-\left(\frac{1}{p}\right)t} dt \\ &= l \left(p^2 \int_0^\infty f(t) e^{-\left(\frac{1}{p}\right)t} dt \right) + m \left(p^2 \int_0^\infty g(t) e^{-\left(\frac{1}{p}\right)t} dt \right) \\ &= l\Lambda[f(t)] + m\Lambda[g(t)] \\ &= lF(p) + mG(p)\end{aligned}$$

(4) خاصية تحويل Anuj للمشتقات الجزئية (Rashdi & Mahmoud, 2022)

ليكن $\Lambda[f(x, t)] = F(x, p)$ عندئذ:

$$\begin{aligned}a) \quad \Lambda \left[\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} \right] &= \frac{1}{p} F(x, p) - p^2 f(x, 0) \\ b) \quad \Lambda \left[\frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial t^2} \right] &= \frac{1}{p^2} F(x, p) - pf(x, 0) - p^2 \frac{\partial f(x, 0)}{\partial t} \\ c) \quad \Lambda \left[\frac{\partial^n f(x, t)}{\partial t^n} \right] &= \frac{1}{p^n} F(x, p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^{3-n+k} \frac{\partial^k f(x, 0)}{\partial t^k} \\ d) \quad \Lambda \left[\frac{\partial f(x, t)}{\partial x} \right] &= \frac{d}{dx} (F(x, p)) \\ e) \quad \Lambda \left[\frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} \right] &= \frac{d^2}{dx^2} (F(x, p)) \\ f) \quad \Lambda \left[\frac{\partial^n f(x, t)}{\partial x^n} \right] &= \frac{d^n}{dx^n} (F(x, p))\end{aligned}$$

البرهان:

(a) باستخدام تعريف تحويل Anuj (62.3) لدينا:

$$\Lambda \left[\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} \right] = p^2 \int_0^\infty \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} e^{-\left(\frac{1}{p}\right)t} dt$$

نكامل بالتجزئة:

$$u = e^{-\left(\frac{1}{p}\right)t} \Rightarrow du = -\frac{1}{p} e^{-\left(\frac{1}{p}\right)t} dt$$

$$dv = \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} dt \Rightarrow v = f(x, t)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \Lambda \left[\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} \right] &= p^2 \left(\left[f(x, t) e^{-\left(\frac{1}{p}\right)t} \right]_0^\infty + \frac{1}{p} \int_0^\infty f(x, t) e^{-\left(\frac{1}{p}\right)t} dt \right) \\ &= p^2 \left((0 - f(x, 0)) + \frac{1}{p} \int_0^\infty f(x, t) e^{-\left(\frac{1}{p}\right)t} dt \right) \\ &= -p^2 f(x, 0) + \frac{1}{p} \left(p^2 \int_0^\infty f(x, t) e^{-\left(\frac{1}{p}\right)t} dt \right) \\ &= -p^2 f(x, 0) + \frac{1}{p} \Lambda[f(x, t)] \\ &= -p^2 f(x, 0) + \frac{1}{p} F(x, p) \end{aligned}$$

(b) لدينا من البند (a)

$$\Lambda \left[\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} \right] = \frac{1}{p} \Lambda[f(x, t)] - p^2 f(x, 0) = \frac{1}{p} F(x, p) - p^2 f(x, 0)$$

وبالتالي فإن:

$$\begin{aligned} \Lambda \left[\frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial t^2} \right] &= \frac{1}{p} \Lambda \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} \right) \right] \\ &= \frac{1}{p} \Lambda \left[\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} \right] - p^2 \frac{\partial f(x, 0)}{\partial t} \\ &= \frac{1}{p} \left(\frac{1}{p} \Lambda[f(x, t)] - p^2 f(x, 0) \right) - p^2 \frac{\partial f(x, 0)}{\partial t} \\ &= \frac{1}{p} \left(\frac{1}{p} F(x, p) - p^2 f(x, 0) \right) - p^2 \frac{\partial f(x, 0)}{\partial t} \\ &= \frac{1}{p^2} F(x, p) - p f(x, 0) - p^2 \frac{\partial f(x, 0)}{\partial t} \end{aligned}$$

(C) سوف نستخدم مبدأ الاستقراء الرياضي لإثبات صحة العلاقة الآتية:

$$\Lambda \left[\frac{\partial^n f(x, t)}{\partial t^n} \right] = \frac{1}{p^n} F(x, p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^{3-n+k} \frac{\partial^k f(x, 0)}{\partial t^k} \quad (65.3)$$

من أجل $n = 1$

$$\Lambda \left[\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} \right] = \frac{1}{p} F(x, p) - p^2 f(x, 0)$$

إذاً العلاقة صحيحة من أجل $n = 1$

نفرض صحة العلاقة من أجل $n = m$

$$\Lambda \left[\frac{\partial^m f(x, t)}{\partial t^m} \right] = \frac{1}{p^m} F(x, p) - \sum_{k=0}^{m-1} p^{3-m+k} \frac{\partial^k f(x, 0)}{\partial t^k}$$

نبرهن صحة العلاقة من أجل $n = m + 1$

لدينا من البند (a)

$$\Lambda \left[\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} \right] = \frac{1}{p} \Lambda [f(x, t)] - p^2 f(x, 0)$$

وبالتالي إن:

$$\begin{aligned} \Lambda \left[\frac{\partial^{m+1} f(x, t)}{\partial t^{m+1}} \right] &= \Lambda \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^m f(x, t)}{\partial t^m} \right) \right] \\ &= \frac{1}{p} \Lambda \left[\frac{\partial^m f(x, t)}{\partial t^m} \right] - p^2 \frac{\partial^m f(x, 0)}{\partial t^m} \\ &= \frac{1}{p} \left(\frac{1}{p^m} F(x, p) - \sum_{k=0}^{m-1} p^{3-m+k} \frac{\partial^k f(x, 0)}{\partial t^k} \right) - p^2 \frac{\partial^m f(x, 0)}{\partial t^m} \\ &= \frac{1}{p^{m+1}} F(x, p) - \sum_{k=0}^{m-1} p^{2-m+k} \frac{\partial^k f(x, 0)}{\partial t^k} - p^2 \frac{\partial^m f(x, 0)}{\partial t^m} \\ &= \frac{1}{p^{m+1}} F(p) - \sum_{k=0}^m p^{2-m+k} \frac{\partial^k f(x, 0)}{\partial t^k} \end{aligned}$$

وهي نفسها العلاقة (65.3) عند تعويض $n = m + 1$ مما يدل على أنَّ العلاقة صحيحة من أجل

$n = m + 1$ ، وبالتالي حسب مبدأ الاستقراء الرياضي نستنتج أنَّ العلاقة صحيحة لأجل جميع قيم $n \geq 1$.

(d) باستخدام تعريف تحويل Anuj (62.3) لدينا:

$$\Lambda \left[\frac{\partial f(x, t)}{\partial x} \right] = p^2 \int_0^\infty \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} e^{-\left(\frac{1}{p}\right)t} dt = \frac{\partial}{\partial x} \left(p^2 \int_0^\infty f(x, t) e^{-\left(\frac{1}{p}\right)t} dt \right) = \frac{d}{dx} (F(x, p))$$

(e) باستخدام تعريف تحويل Anuj (62.3) لدينا:

$$\Lambda \left[\frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} \right] = p^2 \int_0^\infty \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} e^{-\left(\frac{1}{p}\right)t} dt = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(p^2 \int_0^\infty f(x, t) e^{-\left(\frac{1}{p}\right)t} dt \right) = \frac{d^2}{dx^2} (F(x, p))$$

(f) باستخدام تعريف تحويل Anuj (62.3) لدينا:

$$\Lambda \left[\frac{\partial^n f(x, t)}{\partial x^n} \right] = p^2 \int_0^\infty \frac{\partial^n f(x, t)}{\partial x^n} e^{-\left(\frac{1}{p}\right)t} dt = \frac{\partial^n}{\partial x^n} \left(p^2 \int_0^\infty f(x, t) e^{-\left(\frac{1}{p}\right)t} dt \right) = \frac{d^n}{dx^n} (F(x, p))$$

وهو المطلوب.

3-6 الفكرة العامة لطريقة Anuj-ADM الهجينة في حل المعادلات التفاضلية

العادية:

لتوضيح كيفية طريقة Anuj-ADM في حل المعادلات التفاضلية العادية، لنفترض أنَّ لدينا المعادلة التفاضلية العادية غير الخطية الآتية:

$$L(y(x)) + R(y(x)) + N(y(x)) = g(x) \quad (66.3)$$

مع الشروط الابتدائية

$$y^{(k)}(0) = c_k, \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \quad (67.3)$$

حيث أن:

$y(x)$ دالة مجهولة

$$L = \frac{d^n}{dx^n} \text{ مؤثر تفاضلي خطي يمثل المشتق من المرتبة } n$$

$R(y(x))$ يمثل بقية الحدود الخطية

$N(y(x))$ يمثل الحدود غير الخطية

$g(x)$ دالة معطاة

نعيد كتابة المعادلة (66.3) على الشكل:

$$\frac{d^n y(x)}{dx^n} = g(x) - (R(y(x)) + N(y(x))) \quad (68.3)$$

بتطبيق تحويل Anuj طرفي المعادلة (68.3):

$$\Lambda \left[\frac{d^n y(x)}{dx^n} \right] = \Lambda[g(x)] - \Lambda[R(y(x)) + N(y(x))] \quad (69.3)$$

بالاستفادة من خاصية المشتق لتابع $y(x)$ من المرتبة n في تحويل Anuj لدينا:

$$\Lambda \left[\frac{d^n y(x)}{dx^n} \right] = \frac{1}{p^n} Y(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^{3-n+k} y^{(k)}(0) \quad (70.3)$$

بتعويض العلاقة (70.3) في (69.3) نحصل على:

$$\frac{1}{p^n} Y(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^{3-n+k} y^{(k)}(0) = \Lambda[g(x)] - \Lambda[R(y(x)) + N(y(x))] \quad (71.3)$$

وبالتالي:

$$\frac{1}{p^n} Y(p) = \sum_{k=0}^{n-1} p^{3-n+k} y^{(k)}(0) + \Lambda[g(x)] - \Lambda[R(y(x)) + N(y(x))] \quad (72.3)$$

بضرب طرفي المعادلة (72.3) بـ p^n نحصل على:

$$Y(p) = \sum_{k=0}^{n-1} p^{3+k} y^{(k)}(0) + p^n \Lambda[g(x)] - p^n \Lambda[R(y(x)) + N(y(x))] \quad (73.3)$$

بتطبيق تحويل Anuj العكسي Λ^{-1} على طرفي المعادلة (73.3) نجد:

$$y(x) = \Lambda^{-1} \left[\sum_{k=0}^{n-1} p^{3+k} y^{(k)}(0) \right] + \Lambda^{-1} [p^n \Lambda[g(x)]] - \Lambda^{-1} [p^n \Lambda[R(y(x)) + N(y(x))]] \quad (74.3)$$

نعرف الدالة $f(x)$ بالشكل:

$$f(x) = \Lambda^{-1} \left[\sum_{k=0}^{n-1} p^{3+k} y^{(k)}(0) \right] + \Lambda^{-1} [p^n \Lambda[g(x)]]$$

وبذلك تصبح المعادلة (74.3) على الصورة:

$$y(x) = f(x) - \Lambda^{-1} [p^n \Lambda[R(y(x)) + N(y(x))]] \quad (75.3)$$

وفقاً لطريقة ADM يتم التعبير عن الحل $y(x)$ على شكل متسلسلة غير منتهية كما يلي:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x) \quad (76.3)$$

كما يتم تمثيل الحد غير الخطي $N(y(x))$ على شكل متسلسلة غير منتهية من كثيرات حدود أوميان كما يلي:

$$N(y(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \quad (77.3)$$

حيث يتم حساب كثيرات حدود أوميان A_n من العلاقة:

$$A_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} \left[N \left(\sum_{i=0}^n \lambda^i y_i(x) \right) \right]_{\lambda=0}, \quad n \geq 0$$

بتعويض العلاقتين (76.3) و (77.3) في (75.3) نجد:

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n(x) = f(x) - \Lambda^{-1} \left[p^n \Lambda [R(\sum_{n=0}^{\infty} y_n(x)) + \sum_{n=0}^{\infty} A_n] \right] \quad (78.3)$$

يتم حساب $y_0(x), y_1(x), \dots$ من خلال العلاقة التكرارية الآتية:

$$\begin{cases} y_0(x) = f(x) \\ y_{k+1}(x) = -\Lambda^{-1} \left[p^n \Lambda [R(y_k(x)) + A_k] \right], \quad k \geq 0 \end{cases} \quad (79.3)$$

ويكون الحل النهائي للمعادلة هو:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x) = y_0(x) + y_1(x) + y_2(x) + \dots$$

3-6-1 أمثلة تطبيقية:

مثال (24): لتكن مسألة القيم الابتدائية للمعادلة التفاضلية العادية الخطية من المرتبة الثامنة التالية:

$$y^{(8)}(x) + y(x) = 2e^x \quad (80.3)$$

مع الشروط الابتدائية

$$y^{(k)}(0) = 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots, 7$$

ملاحظة: تم حل هذه المسألة باستخدام طريقة ADM في المثال (17)، وسنقوم الآن بحلها باستخدام طريقة

Anuj-ADM لإظهار فعاليتها في حل هذه المسألة.

الحل:

نعيد كتابة المعادلة (80.3) على الشكل:

$$y^{(8)}(x) = 2e^x - y(x) \quad (81.3)$$

بتطبيق تحويل Anuj على المعادلة (81.3) نحصل على:

$$\frac{1}{p^8}Y(p) - p^{-5}y^{(0)}(0) - p^{-4}y^{(1)}(0) - p^{-3}y^{(2)}(0) + p^{-2}y^{(3)}(0) - p^{-1}y^{(4)}(0) - y^{(5)}(0) \\ - py^{(6)}(0) - p^2y^{(7)}(0) = \frac{2p^3}{1-p} - \Lambda[y(x)]$$

بضرب طرفي المعادلة السابقة بـ p^8 وتعويض الشروط الابتدائية المعطاة نجد:

$$Y(p) - p^3 - p^4 - p^5 - p^6 - p^7 - p^8 - p^9 - p^{10} = \frac{2p^{11}}{1-p} - p^8\Lambda[y(x)]$$

وبالتالي:

$$Y(p) = p^3 + p^4 + p^5 + p^6 + p^7 + p^8 + p^9 + p^{10} + \frac{2p^{11}}{1-p} - p^8\Lambda[y(x)]$$

بتبسيط الكسر $\frac{2p^{11}}{1-p}$ تصبح المعادلة السابقة على الشكل:

$$Y(p) = p^3 + p^4 + p^5 + p^6 + p^7 + p^8 + p^9 + p^{10} + (-2p^3 - 2p^4 - 2p^5 - 2p^6 - 2p^7 - \\ 2p^8 - 2p^9 - 2p^{10} + \frac{2p^3}{1-p}) - p^8\Lambda[y(x)]$$

$$Y(p) = -p^3 - p^4 - p^5 - p^6 - p^7 - p^8 - p^9 - p^{10} + \frac{2p^3}{1-p} - p^8\Lambda[y(x)]$$

بتطبيق تحويل Anuj العكسي على طرفي المعادلة السابقة نجد:

$$y(x) = -1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{24} - \frac{x^5}{120} - \frac{x^6}{720} - \frac{x^7}{5040} + 2e^x - \Lambda^{-1}[p^8\Lambda[y(x)]]$$

بتعويض متسلسلة الحل $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n(x) = -1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{24} - \frac{x^5}{120} - \frac{x^6}{720} - \frac{x^7}{5040} + 2e^x - \Lambda^{-1}\left[p^8\Lambda\left[\sum_{n=0}^{\infty} y_n(x)\right]\right]$$

نوجد $y_0(x), y_1(x), \dots$ من خلال العلاقة التكرارية الآتية:

$$y_0(x) = -1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{24} - \frac{x^5}{120} - \frac{x^6}{720} - \frac{x^7}{5040} + 2e^x \\ y_{k+1}(x) = -\Lambda^{-1}\left[p^8\Lambda[y_k(x)]\right], \quad k \geq 0 \quad (82.3)$$

نقوم بالتعويض في العلاقة التكرارية (82.3) من أجل $k = 0, 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned}
 y_1(x) &= -\Lambda^{-1}[p^8 \Lambda[y_0(x)]] \\
 &= -\Lambda^{-1} \left[-2p^3 - 2p^4 - 2p^5 - 2p^6 - 2p^7 - 2p^8 - 2p^9 - 2p^{10} - p^{11} \right. \\
 &\quad \left. - p^{12} - p^{13} - p^{14} - p^{15} - p^{16} - p^{17} - p^{18} + \frac{2p^3}{1-p} \right] \\
 &= 2 + 2x + x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{60} + \frac{x^6}{360} + \frac{x^7}{2520} + \frac{x^8}{8!} + \frac{x^9}{9!} + \frac{x^{10}}{10!} + \frac{x^{11}}{11!} + \frac{x^{12}}{12!} + \frac{x^{13}}{13!} \\
 &\quad + \frac{x^{14}}{14!} + \frac{x^{15}}{15!} - 2e^x
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y_2(x) &= -\Lambda^{-1}[p^8 \Lambda[y_1(x)]] \\
 &= -\Lambda^{-1} \left[2p^3 + 2p^4 + 2p^5 + 2p^6 + 2p^7 + 2p^8 + 2p^9 + 2p^{10} + 2p^{11} + 2p^{12} + 2p^{13} \right. \\
 &\quad \left. + 2p^{14} + 2p^{15} + 2p^{16} + 2p^{17} + 2p^{18} + p^{19} + p^{20} + p^{21} + p^{22} + p^{23} + p^{24} \right. \\
 &\quad \left. + p^{25} + p^{26} - \frac{2p^3}{1-p} \right] \\
 &= -2 - 2x - x^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^5}{60} - \frac{x^6}{360} - \frac{x^7}{2520} - \frac{x^8}{20160} - \frac{x^9}{181440} - \frac{x^{10}}{1814400} \\
 &\quad - \frac{x^{11}}{19958400} - \frac{x^{12}}{239500800} - \frac{x^{13}}{3113510400} - \frac{x^{14}}{43589145600} - \frac{x^{15}}{653837184000} \\
 &\quad - \frac{x^{16}}{16!} - \frac{x^{17}}{17!} - \frac{x^{18}}{18!} - \frac{x^{19}}{19!} - \frac{x^{20}}{20!} - \frac{x^{21}}{21!} - \frac{x^{22}}{22!} - \frac{x^{23}}{23!} + 2e^x
 \end{aligned}$$

⋮

وبالتالي الحل الناتج هو:

$$\begin{aligned}
 y(x) &= y_0(x) + y_1(x) + y_2(x) + \dots \\
 &= -1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{24} - \frac{x^5}{120} - \frac{x^6}{720} - \frac{x^7}{5040} - \frac{x^8}{40320} - \frac{x^9}{362880} - \\
 &\quad \frac{x^{10}}{3628800} - \frac{x^{11}}{39916800} - \frac{x^{12}}{479001600} - \frac{x^{13}}{6227020800} - \frac{x^{14}}{87178291200} - \frac{x^{15}}{1307674368000} - \\
 &\quad \frac{x^{16}}{20922789888000} - \frac{x^{17}}{355687428096000} - \frac{x^{18}}{6402373705728000} - \frac{x^{19}}{121645100408832000} - \\
 &\quad \frac{x^{20}}{2432902008176640000} - \frac{x^{21}}{51090942171709440000} - \frac{x^{22}}{112400072777607680000} - \\
 &\quad \frac{x^{23}}{25852016738884976640000} + 2e^x + \dots
 \end{aligned}$$

بأخذ منشور ماكلوران للدالة $2e^x$ نحصل على:

$$y(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^8}{8!} + \frac{x^9}{9!} + \frac{x^{10}}{10!} + \frac{x^{11}}{11!} + \frac{x^{12}}{12!} + \frac{x^{13}}{13!} + \frac{x^{14}}{14!} + \frac{x^{15}}{15!} + \frac{x^{16}}{16!} + \frac{x^{17}}{17!} + \frac{x^{18}}{18!} + \frac{x^{19}}{19!} + \frac{x^{20}}{20!} + \frac{x^{21}}{21!} + \frac{x^{22}}{22!} + \frac{x^{23}}{23!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

من خلال هذا المثال، برزت أفضلية الطريقة الهجينة Anuj-ADM مقارنة بطريقة ADM الأصلية، حيث تمكنا من الوصول إلى نفس الحل الذي تم الحصول عليه باستخدام ADM في المثال (17)، مع تقليل ملموس في حجم العمليات الحسابية والتكاملات التي تتطلبها ADM، بالإضافة إلى سرعة محسنة في الوصول إلى الحل النهائي.

مثال (25): معادلة ريكاتي (Reccati Equation)

لتكن مسألة القيم الابتدائية لمعادلة ريكاتي التفاضلية العادية غير الخطية من المرتبة الأولى التالية:

$$y'(x) = -y(x) + y^2(x) \quad (83.3)$$

$$y(0) = \frac{1}{2} \text{ مع الشرط الابتدائي}$$

ملاحظة: إن هذه المسألة محلولة سابقاً في المرجع (Aminikhah, 2013) باستخدام طريقة اضطراب الهوموتوبي

HPM المهجنة مع تحويل لابلاس، وسنقوم في هذا المثال بحلها باستخدام طريقة Anuj-ADM.

الحل:

بتطبيق تحويل Anuj على المعادلة (83.3) نحصل على:

$$\frac{1}{p} Y(p) - p^2 y(0) = \Lambda [-y(x) + y^2(x)]$$

$$\frac{1}{p} Y(p) = p^2 y(0) + \Lambda [-y(x) + y^2(x)]$$

بتعويض الشرط الابتدائي $y(0) = \frac{1}{2}$ وضرب طرفي المعادلة بـ p نجد:

$$Y(p) = \frac{p^3}{2} + p\Lambda [-y(x) + y^2(x)]$$

نطبق تحويل Anuj العكسي على المعادلة السابقة نحصل على:

$$y(x) = \frac{1}{2} + \Lambda^{-1}[p\Lambda [-y(x) + y^2(x)]]$$

بتعويض متسلسلة الحل $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x)$

واستبدال الحد غير الخطي $y^2(x)$ بمتسلسلة كثيرات حدود أدوميان بالشكل $y^2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$ نجد:

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n(x) = \frac{1}{2} + \Lambda^{-1}[p\Lambda [-\sum_{n=0}^{\infty} y_n(x) + \sum_{n=0}^{\infty} A_n]]$$

حيث تعطى الحدود الأولى لكثيرات حدود أدوميان للحد غير الخطي $y^2(x)$ بالعلاقات الآتية:

$$A_0 = y_0^2, \quad A_1 = 2y_0y_1, \quad A_2 = 2y_0y_2 + y_1^2, \quad A_3 = 2y_0y_3 + 2y_1y_2, \quad A_4 = 2y_0y_4 + 2y_1y_3 + y_2^2$$

$$A_5 = 2y_0y_5 + 2y_1y_4 + 2y_2y_3, \quad A_6 = 2y_0y_6 + 2y_1y_5 + 2y_2y_4 + y_3^2$$

$$A_7 = 2y_0y_7 + 2y_1y_6 + 2y_2y_5 + 2y_3y_4, \quad A_8 = 2y_0y_8 + 2y_1y_7 + 2y_2y_6 + 2y_3y_5 + y_4^2, \quad \dots$$

نوجد $y_0(x), y_1(x)$ من خلال العلاقة التكرارية الآتية:

$$y_0(x) = \frac{1}{2}$$

$$y_{k+1}(x) = \Lambda^{-1}[p\Lambda[-y_k(x) + A_k]], \quad k \geq 0 \quad (84.3)$$

نقوم بالتعويض في العلاقة التكرارية (84.3) من أجل $k = 0, 1, 2, \dots$

$$y_1(x) = \Lambda^{-1}[p\Lambda[-y_0 + y_0^2]] = \Lambda^{-1}\left[-\frac{p^4}{4}\right] = -\frac{x}{4}$$

$$y_2(x) = \Lambda^{-1}[p\Lambda[-y_1 + 2y_0y_1]] = \Lambda^{-1}[0] = 0$$

$$y_3(x) = \Lambda^{-1}[p\Lambda[-y_2 + 2y_0y_2 + y_1^2]] = \Lambda^{-1}\left[\frac{p^6}{8}\right] = \frac{x^3}{48}$$

$$y_4(x) = \Lambda^{-1}[p\Lambda[-y_3 + 2y_0y_3 + 2y_1y_2]] = \Lambda^{-1}[0] = 0$$

$$y_5(x) = \Lambda^{-1}[p\Lambda[-y_4 + 2y_0y_4 + 2y_1y_3 + y_2^2]] = \Lambda^{-1}\left[-\frac{p^8}{4}\right] = -\frac{x^5}{480}$$

$$y_6(x) = \Lambda^{-1}[p\Lambda[-y_5 + 2y_0y_5 + 2y_1y_4 + 2y_2y_3]] = \Lambda^{-1}[0] = 0$$

$$y_7(x) = \Lambda^{-1}[p\Lambda[-y_6 + 2y_0y_6 + 2y_1y_5 + 2y_2y_4 + y_3^2]] = \Lambda^{-1}\left[\frac{17p^{10}}{16}\right] = \frac{17x^7}{80640}$$

$$y_8(x) = \Lambda^{-1}[p\Lambda[-y_7 + 2y_0y_7 + 2y_1y_6 + 2y_2y_5 + 2y_3y_4]] = \Lambda^{-1}[0] = 0$$

$$y_9(x) = \Lambda^{-1}[p\Lambda[-y_8 + 2y_0y_8 + 2y_1y_7 + 2y_2y_6 + 2y_3y_5 + y_4^2]] = \Lambda^{-1}\left[-\frac{31p^{12}}{4}\right] = -\frac{31x^9}{1451520}$$

⋮

وبالتالي الحل الناتج هو:

$$y(x) = y_0(x) + y_1(x) + y_2(x) + y_3(x) + y_4(x) + y_5(x) + y_6(x) + y_7(x) + y_8(x) + y_9(x) + \dots$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{x}{4} + \frac{x^3}{48} - \frac{x^5}{480} + \frac{17x^7}{80640} - \frac{31x^9}{1451520} + \dots = \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}}$$

منشور ماكلوران للدالة $\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$

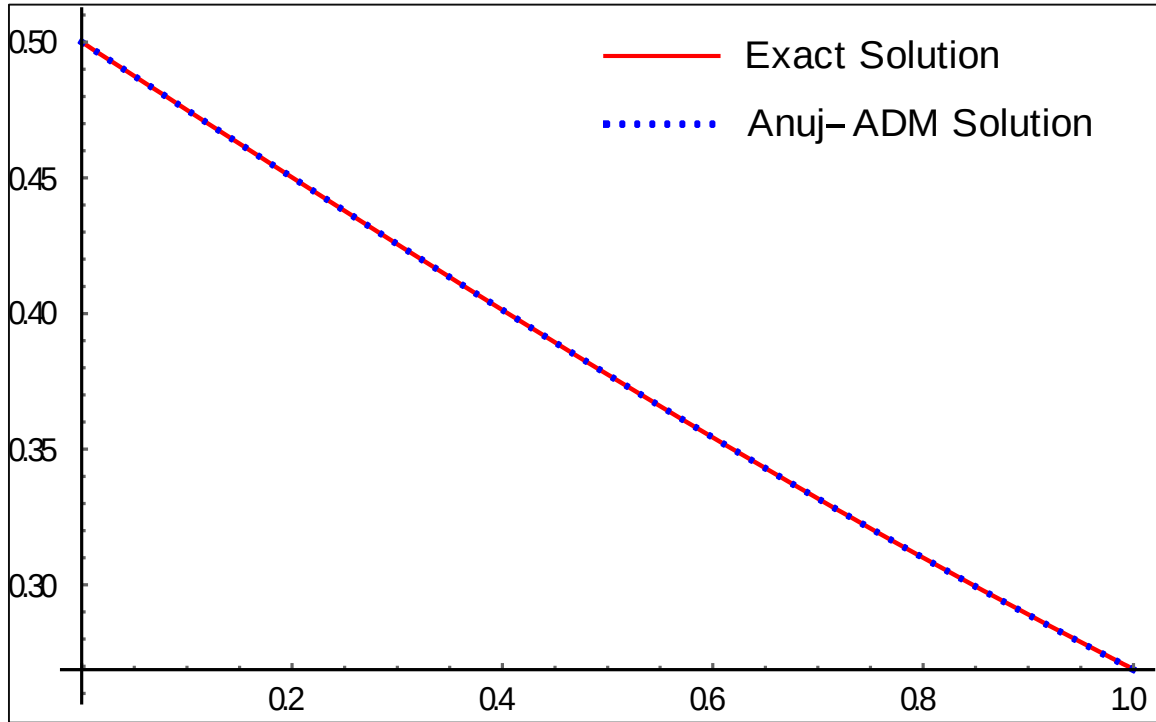
وهو الحل الدقيق للمسألة.

يتضمن كلاً من الجدول (15) والشكلين (15) و (16) مقارنة بين الحل الدقيق والحل الناتج عن طريقة Anuj-ADM باستخدام 6 و 10 تكرارات.

الجدول (15): مقارنة عددية بين الحل الدقيق للمثال (25) والحل الناتج عن تطبيق طريقة Anuj-ADM باستخدام 6 و 10 تكرارات

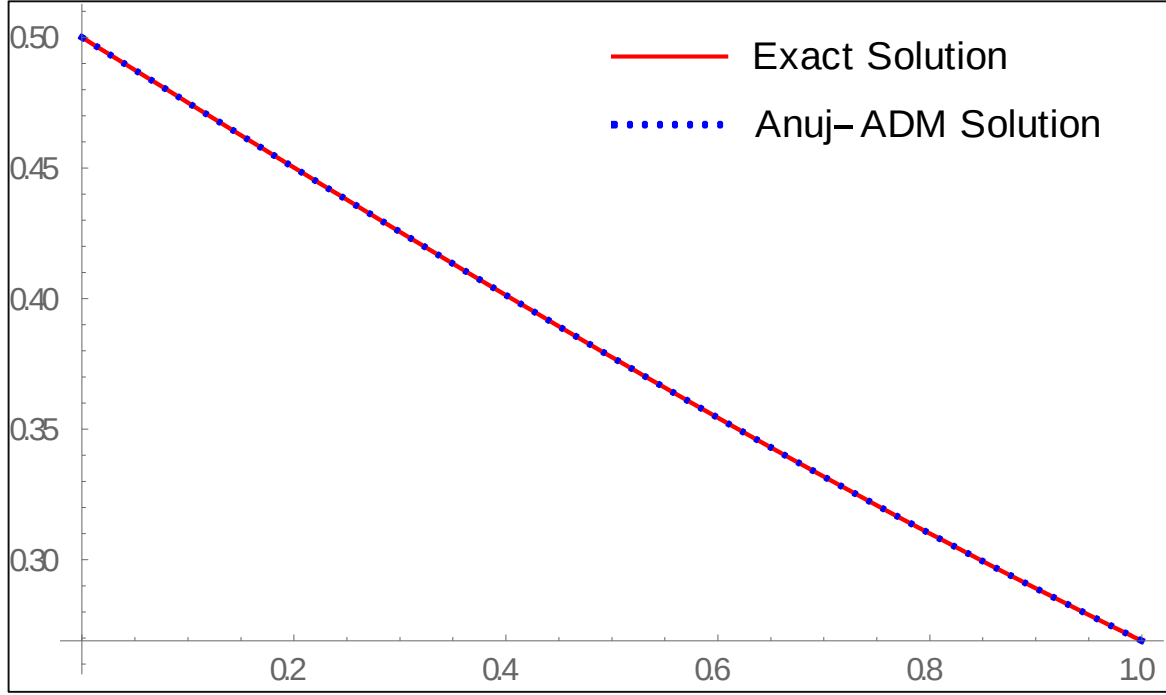
x	Exact Solution	Anuj-ADM Solution		Absolute Error Exact Solution – (Anuj – ADM Solution)	
		6 Iterations	10 iterations	6 Iterations	10 iterations
0	0.5	0.5	0.5	0	0
0.1	0.475020813	0.475020813	0.475020813	2.1×10^{-11}	0
0.2	0.450166003	0.450166000	0.450166000	2.7×10^{-9}	4.4×10^{-14}
0.3	0.425557483	0.425557438	0.425557483	4.6×10^{-8}	3.8×10^{-12}
0.4	0.401312340	0.401312000	0.401312340	3.4×10^{-7}	8.9×10^{-11}
0.5	0.377540669	0.377539063	0.377540668	1.6×10^{-6}	1.0×10^{-9}
0.6	0.354343694	0.354338000	0.354343686	5.7×10^{-6}	7.6×10^{-9}
0.7	0.331812228	0.331795688	0.331812187	1.7×10^{-5}	4.1×10^{-8}
0.8	0.310025519	0.309984000	0.310025344	4.2×10^{-5}	1.7×10^{-7}
0.9	0.289050497	0.288957313	0.289049870	9.3×10^{-5}	6.3×10^{-7}
1	0.268941421	0.268750000	0.268939457	1.9×10^{-4}	2.0×10^{-6}

المصدر: تم إعداده باستخدام برنامج Mathematica 12.0



المصدر: تم إعداده باستخدام برنامج Mathematica 12.0

الشكل (15): مقارنة بيانية بين الحل الدقيق للمثال (25) والحل الناتج عن تطبيق طريقة Anuj-ADM باستخدام 6 تكرارات



المصدر: تم إعداده باستخدام برنامج Mathematica 12.0

الشكل (16): مقارنة بيانية بين الحل الدقيق للمثال (25) والحل الناتج عن تطبيق طريقة Anuj-ADM باستخدام 10 تكرارات

مثال (26): لتكن مسألة القيم الحدية للمعادلة التفاضلية العادية غير الخطية من المرتبة الرابعة عشر التالية:

$$y^{(14)}(x) = 16384e^{-8x}y^5(x), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (85.3)$$

مع الشروط الحدية عند النقطتين $x = 0, x = 1$

$$y(0) = 1, \quad y^{(1)}(0) = 2, \quad y^{(2)}(0) = 4, \quad y^{(3)}(0) = 8, \quad y^{(4)}(0) = 16$$

$$y^{(5)}(0) = 32, \quad y^{(6)}(0) = 64$$

$$y(1) = e^2, \quad y^{(1)}(1) = 2e^2, \quad y^{(2)}(1) = 4e^2, \quad y^{(3)}(1) = 8e^2, \quad y^{(4)}(1) = 16e^2$$

$$y^{(5)}(1) = 32e^2, \quad y^{(6)}(1) = 64e^2$$

ملاحظة: تم حل هذه المسألة باستخدام طريقة MDM في المثال (18)، وسنقوم الآن بحلها من خلال دمج

طريقة MDM مع تحويل Anuj لإظهار فعالية وكفاءة الجمع بينهما في حل هذه المسألة.

الحل:

بتطبيق تحويل Anuj على المعادلة (85.3) نحصل على:

$$\begin{aligned} & \frac{Y(p)}{p^{14}} - \frac{y(0)}{p^{11}} - \frac{y^{(1)}(0)}{p^{10}} - \frac{y^{(2)}(0)}{p^9} - \frac{y^{(3)}(0)}{p^8} - \frac{y^{(4)}(0)}{p^7} - \frac{y^{(5)}(0)}{p^6} - \frac{y^{(6)}(0)}{p^5} - \frac{y^{(7)}(0)}{p^4} - \\ & \frac{y^{(8)}(0)}{p^3} - \frac{y^{(9)}(0)}{p^2} - \frac{y^{(10)}(0)}{p} - y^{(11)}(0) - py^{(12)}(0) - p^2y^{(13)}(0) = \Lambda[16384e^{-8x}y^5(x)] \end{aligned}$$

بتعويض الشروط $y(0) = 1$, $y^{(1)}(0) = 2$, $y^{(2)}(0) = 4$, $y^{(3)}(0) = 8$, $y^{(4)}(0) = 16$, $y^{(5)}(0) = 32$, $y^{(6)}(0) = 64$ ، وضرب طرفي المعادلة السابقة بـ p^{14} تصبح بالشكل الآتي:

$$Y(p) = p^3 + p^4 + p^5 + p^6 + p^7 + p^8 + p^9 + \alpha p^{10} + \beta p^{11} + \gamma p^{12} + \xi p^{13} + \eta p^{14} \\ + \omega p^{15} + \varphi p^{16} + p^{14} \Lambda[16384e^{-8x}y^5(x)]$$

بتطبيق تحويل Anuj العكسي على طرفي المعادلة السابقة:

$$y(x) = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^4 + \frac{4}{15}x^5 + \frac{4}{45}x^6 + \frac{\alpha}{7!}x^7 + \frac{\beta}{8!}x^8 + \frac{\gamma}{9!}x^9 + \frac{\xi}{10!}x^{10} \\ + \frac{\eta}{11!}x^{11} + \frac{\omega}{12!}x^{12} + \frac{\varphi}{13!}x^{13} + \Lambda^{-1} \left[p^{14} \Lambda[16384e^{-8x}y^5(x)] \right]$$

حيث أن $\alpha = y^{(7)}(0)$, $\beta = y^{(8)}(0)$, $\gamma = y^{(9)}(0)$, $\xi = y^{(10)}(0)$, $\eta = y^{(11)}(0)$, $\omega = y^{(12)}(0)$, $\varphi = y^{(13)}(0)$

هي ثوابت عددية مجهولة يتم تحديدها لاحقاً.

بتعويض متسلسلة الحل $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x)$

واستبدال الحد غير الخطي $y^5(x)$ بمتسلسلة كثيرات حدود أوميان بالشكل $y^5(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$ نجد:

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n(x) = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^4 + \frac{4}{15}x^5 + \frac{4}{45}x^6 + \frac{\alpha}{7!}x^7 + \frac{\beta}{8!}x^8 + \\ \frac{\gamma}{9!}x^9 + \frac{\xi}{10!}x^{10} + \frac{\eta}{11!}x^{11} + \frac{\omega}{12!}x^{12} + \frac{\varphi}{13!}x^{13} + \Lambda^{-1} \left[p^{14} \Lambda[16384e^{-8x} \sum_{n=0}^{\infty} A_n] \right]$$

حيث تعطى الحدود الأولى لكثيرات حدود أوميان للحد غير الخطي $y^5(x)$ بالعلاقات الآتية:

$$A_0 = y_0^5 , \quad A_1 = 5y_0^4y_1 , \quad A_2 = 10y_0^3y_1^2 + 5y_0^4y_2 , \dots$$

الآن بتطبيق طريقة تحليل أوميان المعدلة MDM نفرض الدالة $f(x)$ كما يلي:

$$f(x) = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^4 + \frac{4}{15}x^5 + \frac{4}{45}x^6 + \frac{\alpha}{7!}x^7 + \frac{\beta}{8!}x^8 + \frac{\gamma}{9!}x^9 + \frac{\xi}{10!}x^{10} + \\ \frac{\eta}{11!}x^{11} + \frac{\omega}{12!}x^{12} + \frac{\varphi}{13!}x^{13}$$

نقوم بتقسيم الدالة $f(x)$ إلى جزأين بالشكل الآتي:

$$f_1(x) = 1$$

$$f_2(x) = 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^4 + \frac{4}{15}x^5 + \frac{4}{45}x^6 + \frac{\alpha}{7!}x^7 + \frac{\beta}{8!}x^8 + \frac{\gamma}{9!}x^9 + \frac{\xi}{10!}x^{10} \\ + \frac{\eta}{11!}x^{11} + \frac{\omega}{12!}x^{12} + \frac{\varphi}{13!}x^{13}$$

وبالتالي حسب طريقة MDM تعطى العلاقة التكرارية بالشكل الآتي:

$$y_0(x) = 1$$

$$y_1(x) = 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^4 + \frac{4}{15}x^5 + \frac{4}{45}x^6 + \frac{\alpha}{7!}x^7 + \frac{\beta}{8!}x^8 + \frac{\gamma}{9!}x^9 + \frac{\xi}{10!}x^{10} \\ + \frac{\eta}{11!}x^{11} + \frac{\omega}{12!}x^{12} + \frac{\varphi}{13!}x^{13} + \Lambda^{-1}[p^{14}\Lambda[16384e^{-8x}A_0]]$$

$$y_{k+2}(x) = \Lambda^{-1}[p^{14}\Lambda[16384e^{-8x}A_k]], \quad k \geq 0$$

نحسب التكرار $y_1(x)$:

$$y_1(x) = 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^4 + \frac{4}{15}x^5 + \frac{4}{45}x^6 + \frac{\alpha}{7!}x^7 + \frac{\beta}{8!}x^8 + \frac{\gamma}{9!}x^9 + \frac{\xi}{10!}x^{10} + \\ \frac{\eta}{11!}x^{11} + \frac{\omega}{12!}x^{12} + \frac{\varphi}{13!}x^{13} + \Lambda^{-1}[p^{14}\Lambda[16384e^{-8x}(y_0)^5]]$$

$$= 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^4 + \frac{4}{15}x^5 + \frac{4}{45}x^6 + \frac{\alpha}{7!}x^7 + \frac{\beta}{8!}x^8 + \frac{\gamma}{9!}x^9 + \frac{\xi}{10!}x^{10} + \\ \frac{\eta}{11!}x^{11} + \frac{\omega}{12!}x^{12} + \frac{\varphi}{13!}x^{13} + \Lambda^{-1}\left[-\frac{p^3}{268435456} + \frac{p^4}{33554432} - \frac{p^5}{4194304} + \frac{p^6}{524288} - \right. \\ \left. \frac{p^7}{65536} + \frac{p^8}{8192} - \frac{p^9}{1024} + \frac{p^{10}}{128} - \frac{p^{11}}{16} + \frac{p^{12}}{2} - 4p^{13} + 32p^{14} - 256p^{15} + 2048p^{16} + \right. \\ \left. \frac{p^3}{268435456(1+8p)}\right]$$

$$= 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^4 + \frac{4}{15}x^5 + \frac{4}{45}x^6 + \frac{\alpha}{7!}x^7 + \frac{\beta}{8!}x^8 + \frac{\gamma}{9!}x^9 + \frac{\xi}{10!}x^{10} + \\ \frac{\eta}{11!}x^{11} + \frac{\omega}{12!}x^{12} + \frac{\varphi}{13!}x^{13} + \left(-\frac{1}{268435456} + \frac{x}{33554432} - \frac{x^2}{8388608} + \frac{x^3}{3145728} - \right. \\ \left. \frac{x^4}{1572864} + \frac{x^5}{983040} - \frac{x^6}{737280} + \frac{x^7}{645120} - \frac{x^8}{645120} + \frac{x^9}{725760} - \frac{x^{10}}{907200} + \frac{x^{11}}{1247400} - \frac{x^{12}}{1871100} + \right. \\ \left. \frac{2x^{13}}{6081075} + \frac{1}{268435456}e^{-8x}\right)$$

$$= -\frac{1}{268435456} + \frac{67108865x}{33554432} + \frac{16777215x^2}{8388608} + \frac{4194305x^3}{3145728} + \frac{349525x^4}{524288} + \frac{52429x^5}{196608} + \frac{4369x^6}{49152} + \\ \left(\frac{1}{645120} + \frac{\alpha}{5040}\right)x^7 + \left(-\frac{1}{645120} + \frac{\beta}{40320}\right)x^8 + \left(\frac{1}{725760} + \frac{\gamma}{362880}\right)x^9 + \left(-\frac{1}{907200} + \right. \\ \left.\frac{\xi}{3628800}\right)x^{10} + \left(\frac{1}{1247400} + \frac{\eta}{39916800}\right)x^{11} + \left(-\frac{1}{1871100} + \frac{\omega}{479001600}\right)x^{12} + \\ \left(\frac{2}{6081075} + \frac{\varphi}{6227020800}\right)x^{13} + \frac{e^{-8x}}{268435456}$$

وبالتالي الحل الناتج هو:

$$y(x) = y_0(x) + y_1(x)$$

$$\begin{aligned}
&= 1 - \frac{1}{268435456} + \frac{67108865x}{33554432} + \frac{16777215x^2}{8388608} + \frac{4194305x^3}{3145728} + \frac{349525x^4}{524288} + \frac{52429x^5}{196608} \\
&+ \frac{4369x^6}{49152} + \left(\frac{1}{645120} + \frac{\alpha}{5040} \right) x^7 + \left(-\frac{1}{645120} + \frac{\beta}{40320} \right) x^8 + \left(\frac{1}{725760} + \frac{\gamma}{362880} \right) x^9 \\
&+ \left(-\frac{1}{907200} + \frac{\xi}{3628800} \right) x^{10} + \left(\frac{1}{1247400} + \frac{\eta}{39916800} \right) x^{11} \\
&+ \left(-\frac{1}{1871100} + \frac{\omega}{479001600} \right) x^{12} + \left(\frac{2}{6081075} + \frac{\varphi}{6227020800} \right) x^{13} \\
&+ \frac{e^{-8x}}{268435456}
\end{aligned}$$

بأخذ منشور ماكلوران للدالة $\frac{e^{-8x}}{268435456}$ يصبح الحل $y(x)$ بالشكل الآتي:

$$\begin{aligned}
y(x) = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4x^3}{3} + \frac{2x^4}{3} + \frac{4x^5}{15} + \frac{4x^6}{45} + \frac{\alpha x^7}{5040} + \frac{\beta x^8}{40320} + \frac{\gamma x^9}{362880} + \frac{\xi x^{10}}{3628800} \\
+ \frac{\eta x^{11}}{39916800} + \frac{\omega x^{12}}{479001600} + \frac{\varphi x^{13}}{6227020800} + O(x^{14}) \quad (86.3)
\end{aligned}$$

بتعويض الشروط $y(1) = e^2$, $y^{(1)}(1) = 2e^2$, $y^{(2)}(1) = 4e^2$, $y^{(3)}(1) = 8e^2$, $y^{(4)}(1) = 16e^2$, $y^{(5)}(1) = 32e^2$, $y^{(6)}(1) = 64e^2$

في الحل المعطى بالعلاقة (86.3) من أجل تعيين قيم الثوابت المجهولة فنحصل على جملة المعادلات الآتية:

$$\begin{aligned}
\frac{331}{45} + \frac{\alpha}{5040} + \frac{\beta}{40320} + \frac{\gamma}{362880} + \frac{\eta}{39916800} + \frac{\xi}{3628800} + \frac{\varphi}{6227020800} + \frac{\omega}{479001600} &= e^2 \\
\frac{218}{15} + \frac{\alpha}{720} + \frac{\beta}{5040} + \frac{\gamma}{40320} + \frac{\eta}{3628800} + \frac{\xi}{362880} + \frac{\varphi}{479001600} + \frac{\omega}{39916800} &= 2e^2 \\
28 + \frac{\alpha}{120} + \frac{\beta}{720} + \frac{\gamma}{5040} + \frac{\eta}{362880} + \frac{\xi}{40320} + \frac{\varphi}{39916800} + \frac{\omega}{3628800} &= 4e^2 \\
\frac{152}{3} + \frac{\alpha}{24} + \frac{\beta}{120} + \frac{\gamma}{720} + \frac{\eta}{40320} + \frac{\xi}{5040} + \frac{\varphi}{3628800} + \frac{\omega}{362880} &= 8e^2 \\
80 + \frac{\alpha}{6} + \frac{\beta}{24} + \frac{\gamma}{120} + \frac{\eta}{5040} + \frac{\xi}{720} + \frac{\varphi}{362880} + \frac{\omega}{40320} &= 16e^2 \\
96 + \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{6} + \frac{\gamma}{24} + \frac{\eta}{720} + \frac{\xi}{120} + \frac{\varphi}{40320} + \frac{\omega}{5040} &= 32e^2 \\
64 + \alpha + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{6} + \frac{\eta}{120} + \frac{\xi}{24} + \frac{\varphi}{5040} + \frac{\omega}{720} &= 64e^2
\end{aligned}$$

بحل جملة المعادلات السابقة باستخدام برنامج Mathematica 12.0 نحصل على:

$$\alpha = 128.00248509366065 \quad , \quad \beta = 255.86333034932613$$

$$\gamma = 515.6029057502747 \quad , \quad \eta = 2656.321089863777$$

$$\xi = 965.9088063240051 \quad , \quad \varphi = 23021.44944548607$$

$$\omega = 58.79911780357361$$

بتعويض قيم الثوابت في الحل المعطى بالعلاقة (86.3) نجد:

$$\begin{aligned}
 y(x) = & 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4x^3}{3} + \frac{2x^4}{3} + \frac{4x^5}{15} + \frac{4x^6}{45} + 0.025397318470964415x^7 \\
 & + 0.006345816724933684x^8 + 0.001420863386657503x^9 \\
 & + 0.0002661785731712977x^{10} + 0.00006654644384980201x^{11} \\
 & + 1.227534893486235 \times 10^{-7}x^{12} + 0.000003697024658322334x^{13} \\
 & + O(x^{14})
 \end{aligned}$$

وهو الحل التقريبي نفسه الذي تم الحصول عليه باستخدام طريقة MDM في المثال (18).

مثال (27): لنكن مسألة القيم الحدية للمعادلة التفاضلية العادية غير الخطية من المرتبة العاشرة التالية:

$$y^{(10)}(x) = \frac{14175}{4}(x + y(x) + 1)^{11}, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (87.3)$$

مع الشروط الحدية

$$y(0) = 0, \quad y^{(1)}(0) = -\frac{1}{2}, \quad y^{(2)}(0) = \frac{1}{2}, \quad y^{(3)}(0) = \frac{3}{4}, \quad y^{(4)}(0) = \frac{3}{2}$$

$$y(1) = 0, \quad y^{(1)}(1) = 1, \quad y^{(2)}(1) = 4, \quad y^{(3)}(1) = 12, \quad y^{(4)}(1) = 48$$

ملاحظة: تم حل هذه المسألة في المرجع (Kasi and Raju, 2012) باستخدام طريقة B-Spline العددية، وسنقوم الآن بحلها من خلال دمج طريقة MDM مع تحويل Anuj لإظهار فعالية الجمع بينهما في حل هذه المسألة.

الحل:

بفك المتطابقة في الطرف الأيمن من المعادلة (87.3) فتصبح على الشكل:

$$\begin{aligned}
 y^{(10)}(x) = & \frac{14175}{4} + \frac{155925x}{4} + \frac{779625x^2}{4} + \frac{2338875x^3}{4} + \frac{2338875x^4}{2} + \frac{3274425x^5}{2} + \frac{3274425x^6}{2} + \\
 & \frac{2338875x^7}{2} + \frac{2338875x^8}{4} + \frac{779625x^9}{4} + \frac{155925x^{10}}{4} + \frac{14175x^{11}}{4} + \frac{155925y}{4} + \frac{779625xy}{2} + \\
 & \frac{7016625x^2y}{4} + 4677750x^3y + \frac{16372125x^4y}{2} + 9823275x^5y + \frac{16372125x^6y}{2} + \\
 & 4677750x^7y + \frac{7016625x^8y}{4} + \frac{779625x^9y}{2} + \frac{155925x^{10}y}{4} + \frac{779625y^2}{4} + \frac{7016625xy^2}{4} + \\
 & 7016625x^2y^2 + 16372125x^3y^2 + \frac{49116375x^4y^2}{2} + \frac{49116375x^5y^2}{2} + 16372125x^6y^2 + \\
 & 7016625x^7y^2 + \frac{7016625x^8y^2}{4} + \frac{779625x^9y^2}{4} + \frac{2338875y^3}{4} + 4677750xy^3 + \\
 & 16372125x^2y^3 + 32744250x^3y^3 + \frac{81860625x^4y^3}{2} + 32744250x^5y^3 + \\
 & 16372125x^6y^3 + 4677750x^7y^3 + \frac{2338875x^8y^3}{4} + \frac{2338875y^4}{2} + \frac{16372125xy^4}{2} +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{49116375x^2y^4}{2} + \frac{81860625x^3y^4}{2} + \frac{81860625x^4y^4}{2} + \frac{49116375x^5y^4}{2} + \frac{16372125x^6y^4}{2} + \\
& \frac{2338875x^7y^4}{2} + \frac{3274425y^5}{2} + 9823275xy^5 + \frac{49116375x^2y^5}{2} + 32744250x^3y^5 + \\
& \frac{49116375x^4y^5}{2} + 9823275x^5y^5 + \frac{3274425x^6y^5}{2} + \frac{3274425y^6}{2} + \frac{16372125xy^6}{2} + \\
& 16372125x^2y^6 + 16372125x^3y^6 + \frac{16372125x^4y^6}{2} + \frac{3274425x^5y^6}{2} + \frac{2338875y^7}{2} + \\
& 4677750xy^7 + 7016625x^2y^7 + 4677750x^3y^7 + \frac{2338875x^4y^7}{2} + \frac{2338875y^8}{4} + \\
& \frac{7016625xy^8}{4} + \frac{7016625x^2y^8}{4} + \frac{2338875x^3y^8}{4} + \frac{779625y^9}{4} + \frac{779625xy^9}{2} + \frac{779625x^2y^9}{4} + \frac{155925y^{10}}{4} + \\
& \frac{155925xy^{10}}{4} + \frac{14175y^{11}}{4} \tag{88.3}
\end{aligned}$$

بتطبيق تحويل Anuj على طرفي المعادلة (88.3) نحصل على:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{p^{10}}Y(p) - p^{-7}y(0) - p^{-6}y^{(1)}(0) - p^{-5}y^{(2)}(0) - p^{-4}y^{(3)}(0) - p^{-3}y^{(4)}(0) - \\
& p^{-2}y^{(5)}(0) - p^{-1}y^{(6)}(0) - y^{(7)}(0) - py^{(8)}(0) - p^2y^{(9)}(0) = \frac{14175p^3}{4} + \frac{155925p^4}{4} + \\
& \frac{779625p^5}{2} + \frac{7016625p^6}{2} + 28066500p^7 + 196465500p^8 + 1178793000p^9 + \\
& 5893965000p^{10} + 23575860000p^{11} + 70727580000p^{12} + 141455160000p^{13} + \\
& 141455160000p^{14} + \Lambda \left[\frac{155925y}{4} + \frac{779625xy}{2} + \frac{7016625x^2y}{4} + 4677750x^3y + \frac{16372125x^4y}{2} + \right. \\
& 9823275x^5y + \frac{16372125x^6y}{2} + 4677750x^7y + \frac{7016625x^8y}{4} + \frac{779625x^9y}{2} + \frac{155925x^{10}y}{4} + \\
& \frac{779625y^2}{4} + \frac{7016625xy^2}{4} + 7016625x^2y^2 + 16372125x^3y^2 + \frac{49116375x^4y^2}{2} + \frac{49116375x^5y^2}{2} + \\
& 16372125x^6y^2 + 7016625x^7y^2 + \frac{7016625x^8y^2}{4} + \frac{779625x^9y^2}{4} + \frac{2338875y^3}{4} + 4677750xy^3 + \\
& 16372125x^2y^3 + 32744250x^3y^3 + \frac{81860625x^4y^3}{2} + 32744250x^5y^3 + 16372125x^6y^3 + \\
& 4677750x^7y^3 + \frac{2338875x^8y^3}{4} + \frac{2338875y^4}{2} + \frac{16372125xy^4}{2} + \frac{49116375x^2y^4}{2} + \frac{81860625x^3y^4}{2} + \\
& \frac{81860625x^4y^4}{2} + \frac{49116375x^5y^4}{2} + \frac{16372125x^6y^4}{2} + \frac{2338875x^7y^4}{2} + \frac{3274425y^5}{2} + 9823275xy^5 + \\
& \frac{49116375x^2y^5}{2} + 32744250x^3y^5 + \frac{49116375x^4y^5}{2} + 9823275x^5y^5 + \frac{3274425x^6y^5}{2} + \frac{3274425y^6}{2} + \\
& \frac{16372125xy^6}{2} + 16372125x^2y^6 + 16372125x^3y^6 + \frac{16372125x^4y^6}{2} + \frac{3274425x^5y^6}{2} + \frac{2338875y^7}{2} + \\
& 4677750xy^7 + 7016625x^2y^7 + 4677750x^3y^7 + \frac{2338875x^4y^7}{2} + \frac{2338875y^8}{4} + \frac{7016625xy^8}{4} + \\
& \frac{7016625x^2y^8}{4} + \frac{2338875x^3y^8}{4} + \frac{779625y^9}{4} + \frac{779625xy^9}{2} + \frac{779625x^2y^9}{4} + \frac{155925y^{10}}{4} + \frac{155925xy^{10}}{4} + \\
& \left. \frac{14175y^{11}}{4} \right] \tag{89.3}
\end{aligned}$$

الآن بتعويض الشروط $y(0) = 0, y^{(1)}(0) = -\frac{1}{2}, y^{(2)}(0) = \frac{1}{2}, y^{(3)}(0) = \frac{3}{4}, y^{(4)}(0) = \frac{3}{2}$

وضرب طرفي المعادلة (89.3) بـ p^{10} تصبح بالشكل الآتي:

$$\begin{aligned}
 Y(p) = & -\frac{p^4}{2} + \frac{p^5}{2} + \frac{3p^6}{4} + \frac{3p^7}{2} + \alpha p^8 + \beta p^9 + \gamma p^{10} + \xi p^{11} + \eta p^{12} + \frac{14175p^{13}}{4} + \\
 & \frac{155925p^{14}}{4} + \frac{779625p^{15}}{2} + \frac{7016625p^{16}}{2} + 28066500p^{17} + 196465500p^{18} + \\
 & 1178793000p^{19} + 5893965000p^{20} + 23575860000p^{21} + 70727580000p^{22} + \\
 & 141455160000p^{23} + 141455160000p^{24} + p^{10} \Lambda \left[\frac{155925y}{4} + \frac{779625xy}{2} + \frac{7016625x^2y}{4} + \right. \\
 & 4677750x^3y + \frac{16372125x^4y}{2} + 9823275x^5y + \frac{16372125x^6y}{2} + 4677750x^7y + \\
 & \frac{7016625x^8y}{4} + \frac{779625x^9y}{2} + \frac{155925x^{10}y}{4} + \frac{779625y^2}{4} + \frac{7016625xy^2}{4} + 7016625x^2y^2 + \\
 & 16372125x^3y^2 + \frac{49116375x^4y^2}{2} + \frac{49116375x^5y^2}{2} + 16372125x^6y^2 + 7016625x^7y^2 + \\
 & \frac{7016625x^8y^2}{4} + \frac{779625x^9y^2}{4} + \frac{2338875y^3}{4} + 4677750xy^3 + 16372125x^2y^3 + \\
 & 32744250x^3y^3 + \frac{81860625x^4y^3}{2} + 32744250x^5y^3 + 16372125x^6y^3 + \\
 & 4677750x^7y^3 + \frac{2338875x^8y^3}{4} + \frac{2338875y^4}{2} + \frac{16372125xy^4}{2} + \frac{49116375x^2y^4}{2} + \frac{81860625x^3y^4}{2} + \\
 & \frac{81860625x^4y^4}{2} + \frac{49116375x^5y^4}{2} + \frac{16372125x^6y^4}{2} + \frac{2338875x^7y^4}{2} + \frac{3274425y^5}{2} + 9823275xy^5 + \\
 & \frac{49116375x^2y^5}{2} + 32744250x^3y^5 + \frac{49116375x^4y^5}{2} + 9823275x^5y^5 + \frac{3274425x^6y^5}{2} + \\
 & \frac{3274425y^6}{2} + \frac{16372125xy^6}{2} + 16372125x^2y^6 + 16372125x^3y^6 + \frac{16372125x^4y^6}{2} + \\
 & \frac{3274425x^5y^6}{2} + \frac{2338875y^7}{2} + 4677750xy^7 + 7016625x^2y^7 + 4677750x^3y^7 + \\
 & \frac{2338875x^4y^7}{2} + \frac{2338875y^8}{4} + \frac{7016625xy^8}{4} + \frac{7016625x^2y^8}{4} + \frac{2338875x^3y^8}{4} + \frac{779625y^9}{4} + \\
 & \frac{779625xy^9}{2} + \frac{779625x^2y^9}{4} + \frac{155925y^{10}}{4} + \frac{155925xy^{10}}{4} + \\
 & \left. \frac{14175y^{11}}{4} \right] \tag{90.3}
 \end{aligned}$$

حيث أن:

$$\alpha = y^{(5)}(0), \quad \beta = y^{(6)}(0), \quad \gamma = y^{(7)}(0), \quad \xi = y^{(8)}(0), \quad \eta = y^{(9)}(0)$$

وهي ثوابت عددية مجهولة يتم تحديدها لاحقاً.

بتطبيق تحويل Anuj العكسي على طرفي المعادلة (90.3) تصبح بالشكل الآتي:

$$\begin{aligned}
 y(x) = & -\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{8} + \frac{x^4}{16} + \frac{\alpha x^5}{120} + \frac{\beta x^6}{720} + \frac{\gamma x^7}{5040} + \frac{\xi x^8}{40320} + \frac{\eta x^9}{362880} + \frac{x^{10}}{1024} + \frac{x^{11}}{1024} + \\
 & \frac{5x^{12}}{6144} + \frac{15x^{13}}{26624} + \frac{15x^{14}}{46592} + \frac{x^{15}}{6656} + \frac{3x^{16}}{53248} + \frac{15x^{17}}{905216} + \frac{5x^{18}}{1357824} + \frac{5x^{19}}{8599552} + \frac{x^{20}}{17199104} + \\
 & \frac{x^{21}}{361181184} + \Lambda^{-1} \left[p^{10} \Lambda \left[\frac{155925y}{4} + \frac{779625xy}{2} + \frac{7016625x^2y}{4} + 4677750x^3y + \right. \right. \\
 & \frac{16372125x^4y}{2} + 9823275x^5y + \frac{16372125x^6y}{2} + 4677750x^7y + \frac{7016625x^8y}{4} + \\
 & \frac{779625x^9y}{2} + \frac{155925x^{10}y}{4} + \frac{779625y^2}{4} + \frac{7016625xy^2}{4} + 7016625x^2y^2 + \\
 & 16372125x^3y^2 + \frac{49116375x^4y^2}{2} + \frac{49116375x^5y^2}{2} + 16372125x^6y^2 + \\
 & 7016625x^7y^2 + \frac{7016625x^8y^2}{4} + \frac{779625x^9y^2}{4} + \frac{2338875y^3}{4} + 4677750xy^3 + \\
 & 16372125x^2y^3 + 32744250x^3y^3 + \frac{81860625x^4y^3}{2} + 32744250x^5y^3 + \\
 & 16372125x^6y^3 + 4677750x^7y^3 + \frac{2338875x^8y^3}{4} + \frac{2338875y^4}{2} + \frac{16372125xy^4}{2} + \\
 & \frac{49116375x^2y^4}{2} + \frac{81860625x^3y^4}{2} + \frac{81860625x^4y^4}{2} + \frac{49116375x^5y^4}{2} + \frac{16372125x^6y^4}{2} + \\
 & \frac{2338875x^7y^4}{2} + \frac{3274425y^5}{2} + 9823275xy^5 + \frac{49116375x^2y^5}{2} + 32744250x^3y^5 + \\
 & \frac{49116375x^4y^5}{2} + 9823275x^5y^5 + \frac{3274425x^6y^5}{2} + \frac{3274425y^6}{2} + \frac{16372125xy^6}{2} + \\
 & 16372125x^2y^6 + 16372125x^3y^6 + \frac{16372125x^4y^6}{2} + \frac{3274425x^5y^6}{2} + \frac{2338875y^7}{2} + \\
 & 4677750xy^7 + 7016625x^2y^7 + 4677750x^3y^7 + \frac{2338875x^4y^7}{2} + \frac{2338875y^8}{4} + \\
 & \frac{7016625xy^8}{4} + \frac{7016625x^2y^8}{4} + \frac{2338875x^3y^8}{4} + \frac{779625y^9}{4} + \frac{779625xy^9}{2} + \frac{779625x^2y^9}{4} + \\
 & \frac{155925y^{10}}{4} + \frac{155925xy^{10}}{4} + \\
 & \left. \left. \frac{14175y^{11}}{4} \right] \right] \quad (91.3)
 \end{aligned}$$

بتعويض متسلسلة الحل واستبدال الحدود غير الخطية في المعادلة (91.3) بمتسلسلات كثيرات حدود أوميان:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} y_n(x) = & -\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{8} + \frac{x^4}{16} + \frac{\alpha x^5}{120} + \frac{\beta x^6}{720} + \frac{\gamma x^7}{5040} + \frac{\xi x^8}{40320} + \frac{\eta x^9}{362880} + \frac{x^{10}}{1024} + \frac{x^{11}}{1024} + \\
& \frac{5x^{12}}{6144} + \frac{15x^{13}}{26624} + \frac{15x^{14}}{46592} + \frac{x^{15}}{6656} + \frac{3x^{16}}{53248} + \frac{15x^{17}}{905216} + \frac{5x^{18}}{1357824} + \frac{5x^{19}}{8599552} + \frac{x^{20}}{17199104} + \\
& \frac{x^{21}}{361181184} + \Lambda^{-1} \left[p^{10} \Lambda \left[\frac{155925}{4} (\sum_{n=0}^{\infty} y_n(x)) + \frac{779625}{2} x (\sum_{n=0}^{\infty} y_n(x)) + \right. \right. \\
& \frac{7016625x^2}{4} (\sum_{n=0}^{\infty} y_n(x)) + 4677750x^3 (\sum_{n=0}^{\infty} y_n(x)) + \frac{16372125x^4}{2} (\sum_{n=0}^{\infty} y_n(x)) + \\
& 9823275x^5 (\sum_{n=0}^{\infty} y_n(x)) + \frac{16372125x^6}{2} (\sum_{n=0}^{\infty} y_n(x)) + 4677750x^7 (\sum_{n=0}^{\infty} y_n(x)) + \\
& \frac{7016625x^8}{4} (\sum_{n=0}^{\infty} y_n(x)) + \frac{779625x^9}{2} (\sum_{n=0}^{\infty} y_n(x)) + \frac{155925x^{10}}{4} (\sum_{n=0}^{\infty} y_n(x)) + \\
& \frac{779625}{4} (\sum_{n=0}^{\infty} A_n) + \frac{7016625x}{4} (\sum_{n=0}^{\infty} A_n) + 7016625x^2 (\sum_{n=0}^{\infty} A_n) + 16372125x^3 (\sum_{n=0}^{\infty} A_n) + \\
& \frac{49116375x^4}{2} (\sum_{n=0}^{\infty} A_n) + \frac{49116375x^5}{2} (\sum_{n=0}^{\infty} A_n) + 16372125x^6 (\sum_{n=0}^{\infty} A_n) + \\
& 7016625x^7 (\sum_{n=0}^{\infty} A_n) + \frac{7016625x^8}{4} (\sum_{n=0}^{\infty} A_n) + \frac{779625x^9}{4} (\sum_{n=0}^{\infty} A_n) + \frac{2338875}{4} (\sum_{n=0}^{\infty} B_n) + \\
& 4677750x (\sum_{n=0}^{\infty} B_n) + 16372125x^2 (\sum_{n=0}^{\infty} B_n) + 32744250x^3 (\sum_{n=0}^{\infty} B_n) + \\
& \frac{81860625x^4}{2} (\sum_{n=0}^{\infty} B_n) + 32744250x^5 (\sum_{n=0}^{\infty} B_n) + 16372125x^6 (\sum_{n=0}^{\infty} B_n) + \\
& 4677750x^7 (\sum_{n=0}^{\infty} B_n) + \frac{2338875x^8}{4} (\sum_{n=0}^{\infty} B_n) + \frac{2338875}{2} (\sum_{n=0}^{\infty} C_n) + \frac{16372125x}{2} (\sum_{n=0}^{\infty} C_n) + \\
& \frac{49116375x^2}{2} (\sum_{n=0}^{\infty} C_n) + \frac{81860625x^3}{2} (\sum_{n=0}^{\infty} C_n) + \frac{81860625x^4}{2} (\sum_{n=0}^{\infty} C_n) + \frac{49116375x^5}{2} (\sum_{n=0}^{\infty} C_n) + \\
& \frac{16372125x^6}{2} (\sum_{n=0}^{\infty} C_n) + \frac{2338875x^7}{2} (\sum_{n=0}^{\infty} C_n) + \frac{3274425}{2} (\sum_{n=0}^{\infty} D_n) + 9823275x (\sum_{n=0}^{\infty} D_n) + \\
& \frac{49116375x^2}{2} (\sum_{n=0}^{\infty} D_n) + 32744250x^3 (\sum_{n=0}^{\infty} D_n) + \frac{49116375x^4}{2} (\sum_{n=0}^{\infty} D_n) + \\
& 9823275x^5 (\sum_{n=0}^{\infty} D_n) + \frac{3274425x^6}{2} (\sum_{n=0}^{\infty} D_n) + \frac{3274425}{2} (\sum_{n=0}^{\infty} E_n) + \frac{16372125x}{2} (\sum_{n=0}^{\infty} E_n) + \\
& 16372125x^2 (\sum_{n=0}^{\infty} E_n) + 16372125x^3 (\sum_{n=0}^{\infty} E_n) + \frac{16372125x^4}{2} (\sum_{n=0}^{\infty} E_n) + \\
& \frac{3274425x^5}{2} (\sum_{n=0}^{\infty} E_n) + \frac{2338875}{2} (\sum_{n=0}^{\infty} F_n) + 4677750x (\sum_{n=0}^{\infty} F_n) + 7016625x^2 (\sum_{n=0}^{\infty} F_n) + \\
& 4677750x^3 (\sum_{n=0}^{\infty} F_n) + \frac{2338875x^4}{2} (\sum_{n=0}^{\infty} F_n) + \frac{2338875}{4} (\sum_{n=0}^{\infty} G_n) + \frac{7016625x}{4} (\sum_{n=0}^{\infty} G_n) + \\
& \frac{7016625x^2}{4} (\sum_{n=0}^{\infty} G_n) + \frac{2338875x^3}{4} (\sum_{n=0}^{\infty} G_n) + \frac{779625}{4} (\sum_{n=0}^{\infty} H_n) + \frac{779625x}{2} (\sum_{n=0}^{\infty} H_n) + \\
& \frac{779625x^2}{4} (\sum_{n=0}^{\infty} H_n) + \frac{155925}{4} (\sum_{n=0}^{\infty} I_n) + \frac{155925x}{4} (\sum_{n=0}^{\infty} I_n) + \\
& \left. \frac{14175}{4} (\sum_{n=0}^{\infty} M_n) \right] \Bigg] \quad (92.3)
\end{aligned}$$

حيث أن:

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n, \sum_{n=0}^{\infty} B_n, \sum_{n=0}^{\infty} C_n, \sum_{n=0}^{\infty} D_n, \sum_{n=0}^{\infty} E_n, \sum_{n=0}^{\infty} F_n, \sum_{n=0}^{\infty} G_n, \sum_{n=0}^{\infty} H_n, \sum_{n=0}^{\infty} I_n, \sum_{n=0}^{\infty} M_n$$

هي متسلسلات كثيرات حدود أدوميان لتمثيل الحدود غير الخطية $y^2, y^3, y^4, y^5, y^6, y^7, y^8, y^9, y^{10}, y^{11}$ على الترتيب، وتعطى علاقاتها الأولى بالشكل الآتي:

$$\begin{aligned} A_0 &= y_0^2, & A_1 &= 2y_0y_1, \dots \\ B_0 &= y_0^3, & B_1 &= 3y_0^2y_1, \dots \\ C_0 &= y_0^4, & C_1 &= 4y_0^3y_1, \dots \\ D_0 &= y_0^5, & D_1 &= 5y_0^4y_1, \dots \\ E_0 &= y_0^6, & E_1 &= 6y_0^5y_1, \dots \\ F_0 &= y_0^7, & F_1 &= 7y_0^6y_1, \dots \\ G_0 &= y_0^8, & G_1 &= 8y_0^7y_1, \dots \\ H_0 &= y_0^9, & H_1 &= 9y_0^8y_1, \dots \\ I_0 &= y_0^{10}, & I_1 &= 10y_0^9y_1, \dots \\ M_0 &= y_0^{11}, & M_1 &= 11y_0^{10}y_1, \dots \end{aligned}$$

الآن بتطبيق طريقة MDM نفرض الدالة $f(x)$ كما يلي:

$$\begin{aligned} f(x) = & -\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{8} + \frac{x^4}{16} + \frac{\alpha x^5}{120} + \frac{\beta x^6}{720} + \frac{\gamma x^7}{5040} + \frac{\xi x^8}{40320} + \frac{\eta x^9}{362880} + \frac{x^{10}}{1024} + \frac{x^{11}}{1024} + \frac{5x^{12}}{6144} \\ & + \frac{15x^{13}}{26624} + \frac{15x^{14}}{46592} + \frac{x^{15}}{6656} + \frac{3x^{16}}{53248} + \frac{15x^{17}}{905216} + \frac{5x^{18}}{1357824} + \frac{5x^{19}}{8599552} \\ & + \frac{x^{20}}{17199104} + \frac{x^{21}}{361181184} \end{aligned}$$

بتقسيم الدالة $f(x)$ إلى جزأين بالشكل الآتي:

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

حيث

$$\begin{aligned} f_1(x) &= -\frac{x}{2} \\ f_2(x) &= \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{8} + \frac{x^4}{16} + \frac{\alpha x^5}{120} + \frac{\beta x^6}{720} + \frac{\gamma x^7}{5040} + \frac{\xi x^8}{40320} + \frac{\eta x^9}{362880} + \frac{x^{10}}{1024} + \frac{x^{11}}{1024} + \frac{5x^{12}}{6144} \\ &+ \frac{15x^{13}}{26624} + \frac{15x^{14}}{46592} + \frac{x^{15}}{6656} + \frac{3x^{16}}{53248} + \frac{15x^{17}}{905216} + \frac{5x^{18}}{1357824} + \frac{5x^{19}}{8599552} + \frac{x^{20}}{17199104} \\ &+ \frac{x^{21}}{361181184} \end{aligned}$$

وبالتالي حسب طريقة MDM تعطى العلاقة التكرارية بالشكل الآتي:

$$y_0(x) = -\frac{x}{2}$$

$$\begin{aligned} y_1(x) = & \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{8} + \frac{x^4}{16} + \frac{\alpha x^5}{120} + \frac{\beta x^6}{720} + \frac{\gamma x^7}{5040} + \frac{\xi x^8}{40320} + \frac{\eta x^9}{362880} + \frac{x^{10}}{1024} + \frac{x^{11}}{1024} + \frac{5x^{12}}{6144} + \frac{15x^{13}}{26624} + \frac{15x^{14}}{46592} + \\ & \frac{x^{15}}{6656} + \frac{3x^{16}}{53248} + \frac{15x^{17}}{905216} + \frac{5x^{18}}{1357824} + \frac{5x^{19}}{8599552} + \frac{x^{20}}{17199104} + \frac{x^{21}}{361181184} + \Lambda^{-1} \left[p^{10} \Lambda \left[\frac{155925}{4} y_0 + \right. \right. \\ & \frac{779625x}{2} y_0 + \frac{7016625x^2}{4} y_0 + 4677750x^3 y_0 + \frac{16372125x^4}{2} y_0 + 9823275x^5 y_0 + \frac{16372125x^6}{2} y_0 + \\ & 4677750x^7 y_0 + \frac{7016625x^8}{4} y_0 + \frac{779625x^9}{2} y_0 + \frac{155925x^{10}}{4} y_0 + \frac{779625}{4} A_0 + \frac{7016625x}{4} A_0 + \\ & 7016625x^2 A_0 + 16372125x^3 A_0 + \frac{49116375x^4}{2} A_0 + \frac{49116375x^5}{2} A_0 + 16372125x^6 A_0 + \\ & 7016625x^7 A_0 + \frac{7016625}{4} x^8 A_0 + \frac{779625}{4} x^9 A_0 + \frac{2338875}{4} B_0 + 4677750x B_0 + 16372125x^2 B_0 + \\ & 32744250x^3 B_0 + \frac{81860625x^4}{2} B_0 + 32744250x^5 B_0 + 16372125x^6 B_0 + 4677750x^7 B_0 + \\ & \frac{2338875x^8}{4} B_0 + \frac{2338875}{2} C_0 + \frac{16372125x}{2} C_0 + \frac{49116375}{2} x^2 C_0 + \frac{81860625}{2} x^3 C_0 + \frac{81860625}{2} x^4 C_0 + \\ & \frac{49116375}{2} x^5 C_0 + \frac{16372125}{2} x^6 C_0 + \frac{2338875}{2} x^7 C_0 + \frac{3274425}{2} D_0 + 9823275x D_0 + \frac{49116375}{2} x^2 D_0 + \\ & 32744250x^3 D_0 + \frac{49116375}{2} x^4 D_0 + 9823275x^5 D_0 + \frac{3274425}{2} x^6 D_0 + \frac{3274425}{2} E_0 + \frac{16372125x}{2} E_0 + \\ & 16372125x^2 E_0 + 16372125x^3 E_0 + \frac{16372125}{2} x^4 E_0 + \frac{3274425}{2} x^5 E_0 + \frac{2338875}{2} F_0 + 4677750x F_0 + \\ & 7016625x^2 F_0 + 4677750x^3 F_0 + \frac{2338875}{2} x^4 F_0 + \frac{2338875}{4} G_0 + \frac{7016625x}{4} G_0 + \frac{7016625}{4} x^2 G_0 + \\ & \left. \left. \frac{2338875}{4} x^3 G_0 + \frac{779625}{4} H_0 + \frac{779625x}{2} H_0 + \frac{779625}{4} x^2 H_0 + \frac{155925}{4} I_0 + \frac{155925x}{4} I_0 + \frac{14175}{4} M_0 \right] \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_{k+2}(x) = & \Lambda^{-1} \left[p^{10} \Lambda \left[\frac{155925}{4} y_{k+1} + \frac{779625x}{2} y_{k+1} + \frac{7016625x^2}{4} y_{k+1} + 4677750x^3 y_{k+1} + \right. \right. \\ & \frac{16372125x^4}{2} y_{k+1} + 9823275x^5 y_{k+1} + \frac{16372125x^6}{2} y_{k+1} + 4677750x^7 y_{k+1} + \frac{7016625x^8}{4} y_{k+1} + \\ & \frac{779625x^9}{2} y_{k+1} + \frac{155925x^{10}}{4} y_{k+1} + \frac{779625}{4} A_{k+1} + \frac{7016625x}{4} A_{k+1} + 7016625x^2 A_{k+1} + \\ & 16372125x^3 A_{k+1} + \frac{49116375x^4}{2} A_{k+1} + \frac{49116375x^5}{2} A_{k+1} + 16372125x^6 A_{k+1} + 7016625x^7 A_{k+1} + \\ & \frac{7016625}{4} x^8 A_{k+1} + \frac{779625}{4} x^9 A_{k+1} + \frac{2338875}{4} B_{k+1} + 4677750x B_{k+1} + 16372125x^2 B_{k+1} + \\ & 32744250x^3 B_{k+1} + \frac{81860625x^4}{2} B_{k+1} + 32744250x^5 B_{k+1} + 16372125x^6 B_{k+1} + \\ & 4677750x^7 B_{k+1} + \frac{2338875x^8}{4} B_{k+1} + \frac{2338875}{2} C_{k+1} + \frac{16372125x}{2} C_{k+1} + \frac{49116375}{2} x^2 C_{k+1} + \\ & \frac{81860625}{2} x^3 C_{k+1} + \frac{81860625}{2} x^4 C_{k+1} + \frac{49116375}{2} x^5 C_{k+1} + \frac{16372125}{2} x^6 C_{k+1} + \frac{2338875}{2} x^7 C_{k+1} + \\ & \frac{3274425}{2} D_{k+1} + 9823275x D_{k+1} + \frac{49116375}{2} x^2 D_{k+1} + 32744250x^3 D_{k+1} + \frac{49116375}{2} x^4 D_{k+1} + \\ & 9823275x^5 D_{k+1} + \frac{3274425}{2} x^6 D_{k+1} + \frac{3274425}{2} E_{k+1} + \frac{16372125x}{2} E_{k+1} + 16372125x^2 E_{k+1} + \\ & 16372125x^3 E_{k+1} + \frac{16372125}{2} x^4 E_{k+1} + \frac{3274425}{2} x^5 E_{k+1} + \frac{2338875}{2} F_{k+1} + 4677750x F_{k+1} + \\ & 7016625x^2 F_{k+1} + 4677750x^3 F_{k+1} + \frac{2338875}{2} x^4 F_{k+1} + \frac{2338875}{4} G_{k+1} + \frac{7016625x}{4} G_{k+1} + \\ & \frac{7016625}{4} x^2 G_{k+1} + \frac{2338875}{4} x^3 G_{k+1} + \frac{779625}{4} H_{k+1} + \frac{779625x}{2} H_{k+1} + \frac{779625}{4} x^2 H_{k+1} + \frac{155925}{4} I_{k+1} + \\ & \left. \left. \frac{155925x}{4} I_{k+1} + \frac{14175}{4} M_{k+1} \right] \right], \quad k \geq 0 \end{aligned}$$

نحسب $y_1(x)$ من العلاقة التكرارية التالية:

$$\begin{aligned}
 y_1(x) = & \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{8} + \frac{x^4}{16} + \frac{\alpha x^5}{120} + \frac{\beta x^6}{720} + \frac{\gamma x^7}{5040} + \frac{\xi x^8}{40320} + \frac{\eta x^9}{362880} + \frac{x^{10}}{1024} + \frac{x^{11}}{1024} + \frac{5x^{12}}{6144} + \frac{15x^{13}}{26624} + \frac{15x^{14}}{46592} + \\
 & \frac{x^{15}}{6656} + \frac{3x^{16}}{53248} + \frac{15x^{17}}{905216} + \frac{5x^{18}}{1357824} + \frac{5x^{19}}{8599552} + \frac{x^{20}}{17199104} + \frac{x^{21}}{361181184} + \Lambda^{-1} \left[p^{10} \Lambda \left[\frac{155925}{4} y_0 + \right. \right. \\
 & \frac{779625xy_0}{2} + \frac{7016625x^2y_0}{4} + 4677750x^3y_0 + \frac{16372125x^4y_0}{2} + 9823275x^5y_0 + \frac{16372125x^6y_0}{2} + \\
 & 4677750x^7y_0 + \frac{7016625x^8y_0}{4} + \frac{779625x^9y_0}{2} + \frac{155925x^{10}y_0}{4} + \frac{779625y_0^2}{4} + \frac{7016625xy_0^2}{4} + \\
 & 7016625x^2y_0^2 + 16372125x^3y_0^2 + \frac{49116375}{2}x^4y_0^2 + \frac{49116375}{2}x^5y_0^2 + 16372125x^6y_0^2 + \\
 & 7016625x^7y_0^2 + \frac{7016625}{4}x^8y_0^2 + \frac{779625}{4}x^9y_0^2 + \frac{2338875y_0^3}{4} + 4677750xy_0^3 + 16372125x^2y_0^3 + \\
 & 32744250x^3y_0^3 + \frac{81860625}{2}x^4y_0^3 + 32744250x^5y_0^3 + 16372125x^6y_0^3 + 4677750x^7y_0^3 + \\
 & \frac{2338875}{4}x^8y_0^3 + \frac{2338875y_0^4}{2} + \frac{16372125xy_0^4}{2} + \frac{49116375}{2}x^2y_0^4 + \frac{81860625}{2}x^3y_0^4 + \frac{81860625}{2}x^4y_0^4 + \\
 & \frac{49116375}{2}x^5y_0^4 + \frac{16372125}{2}x^6y_0^4 + \frac{2338875}{2}x^7y_0^4 + \frac{3274425y_0^5}{2} + 9823275xy_0^5 + \frac{49116375}{2}x^2y_0^5 + \\
 & 32744250x^3y_0^5 + \frac{49116375}{2}x^4y_0^5 + 9823275x^5y_0^5 + \frac{3274425}{2}x^6y_0^5 + \frac{3274425y_0^6}{2} + \frac{16372125xy_0^6}{2} + \\
 & 16372125x^2y_0^6 + 16372125x^3y_0^6 + \frac{16372125}{2}x^4y_0^6 + \frac{3274425}{2}x^5y_0^6 + \frac{2338875y_0^7}{2} + \\
 & 4677750xy_0^7 + 7016625x^2y_0^7 + 4677750x^3y_0^7 + \frac{2338875}{2}x^4y_0^7 + \frac{2338875y_0^8}{4} + \frac{7016625xy_0^8}{4} + \\
 & \frac{7016625}{4}x^2y_0^8 + \frac{2338875}{4}x^3y_0^8 + \frac{779625y_0^9}{4} + \frac{779625xy_0^9}{2} + \frac{779625}{4}x^2y_0^9 + \frac{155925y_0^{10}}{4} + \frac{155925xy_0^{10}}{4} + \\
 & \left. \frac{14175y_0^{11}}{4} \right] \Bigg] \quad (93.3)
 \end{aligned}$$

بالتعويض في العلاقة (93.3) وإجراء الحسابات نجد:

$$\begin{aligned}
 y_1(x) = & \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{8} + \frac{x^4}{16} + \frac{\alpha x^5}{120} + \frac{\beta x^6}{720} + \frac{\gamma x^7}{5040} + \frac{\xi x^8}{40320} + \frac{\eta x^9}{362880} + \frac{x^{10}}{1024} + \frac{x^{11}}{2048} + \frac{5x^{12}}{24576} \\
 & + \frac{15x^{13}}{212992} + \frac{15x^{14}}{745472} + \frac{x^{15}}{212992} + \frac{3x^{16}}{3407872} + \frac{15x^{17}}{115867648} + \frac{5x^{18}}{347602944} + \frac{5x^{19}}{4402970624} \\
 & + \frac{x^{20}}{17611882496} + \frac{x^{21}}{739699064832}
 \end{aligned}$$

وبالتالي الحل الناتج هو:

$$\begin{aligned}
 y(x) = & y_0(x) + y_1(x) \\
 = & -\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{8} + \frac{x^4}{16} + \frac{\alpha x^5}{120} + \frac{\beta x^6}{720} + \frac{\gamma x^7}{5040} + \frac{\xi x^8}{40320} + \frac{\eta x^9}{362880} + \frac{x^{10}}{1024} + \frac{x^{11}}{2048} + \frac{5x^{12}}{24576} \\
 & + \frac{15x^{13}}{212992} + \frac{15x^{14}}{745472} + \frac{x^{15}}{212992} + \frac{3x^{16}}{3407872} + \frac{15x^{17}}{115867648} + \frac{5x^{18}}{347602944} + \frac{5x^{19}}{4402970624} \\
 & + \frac{x^{20}}{17611882496} + \frac{x^{21}}{739699064832} \quad (94.3)
 \end{aligned}$$

الآن بتعويض الشروط $y(1) = 0, y^{(1)}(1) = 1, y^{(2)}(1) = 4, y^{(3)}(1) = 12, y^{(4)}(1) = 48$ في الحل الناتج المعطى بالعلاقة (94.3) من أجل تعيين قيم الثوابت المجهولة نحصل على جملة المعادلات الآتية:

$$-\frac{6417992459}{105671294976} + \frac{\alpha}{120} + \frac{\beta}{720} + \frac{\gamma}{5040} + \frac{\xi}{40320} + \frac{\eta}{362880} = 0$$

$$\frac{22679255953}{35223764992} + \frac{\alpha}{24} + \frac{\beta}{120} + \frac{\gamma}{720} + \frac{\xi}{5040} + \frac{\eta}{40320} = 1$$

$$\frac{19235193671}{8805941248} + \frac{\alpha}{6} + \frac{\beta}{24} + \frac{\gamma}{120} + \frac{\xi}{720} + \frac{\eta}{5040} = 4$$

$$\frac{1801164397}{463470592} + \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{6} + \frac{\gamma}{24} + \frac{\xi}{120} + \frac{\eta}{720} = 12$$

$$\frac{3383051079}{231735296} + \alpha + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{6} + \frac{\xi}{24} + \frac{\eta}{120} = 48$$

بحل جملة المعادلات السابقة باستخدام برنامج Mathematica 12.0 نحصل على:

$$\alpha = \frac{27120399915}{4402970624}, \quad \beta = -\frac{28882725135}{550371328}, \quad \gamma = \frac{432406792755}{550371328}$$

$$\xi = -\frac{598868248545}{137592832}, \quad \eta = \frac{1715338979235}{137592832}$$

بتعويض قيم الثوابت $\alpha, \beta, \gamma, \xi, \eta$ في الحل المعطى بالعلاقة (94.3) نحصل على:

$$\begin{aligned} y(x) = & -\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{8} + \frac{x^4}{16} + \frac{1808026661x^5}{35223764992} - \frac{1925515009x^6}{26417823744} + \frac{1372719977x^7}{8805941248} \\ & - \frac{1901169043x^8}{17611882496} + \frac{605057841x^9}{17611882496} + \frac{x^{10}}{1024} + \frac{x^{11}}{2048} + \frac{5x^{12}}{24576} + \frac{15x^{13}}{212992} + \frac{15x^{14}}{745472} \\ & + \frac{x^{15}}{212992} + \frac{3x^{16}}{3407872} + \frac{15x^{17}}{115867648} + \frac{5x^{18}}{347602944} + \frac{5x^{19}}{4402970624} + \frac{x^{20}}{17611882496} \\ & + \frac{x^{21}}{739699064832} \end{aligned}$$

وهو الحل التقريبي الناتج عن تطبيق طريقة Anuj-MDM، حيث يوضح كل من الجدول (16) والشكل (17) مقارنة

بين الحل الدقيق لهذه المسألة والحل التقريبي الناتج عن تطبيق طريقة Anuj-MDM باستخدام تكرارين، كما يعرض

الجدول (16) مقارنة بين الخطأ المطلق الناتج عن تطبيق طريقة Anuj-MDM والخطأ المطلق الناتج عن تطبيق

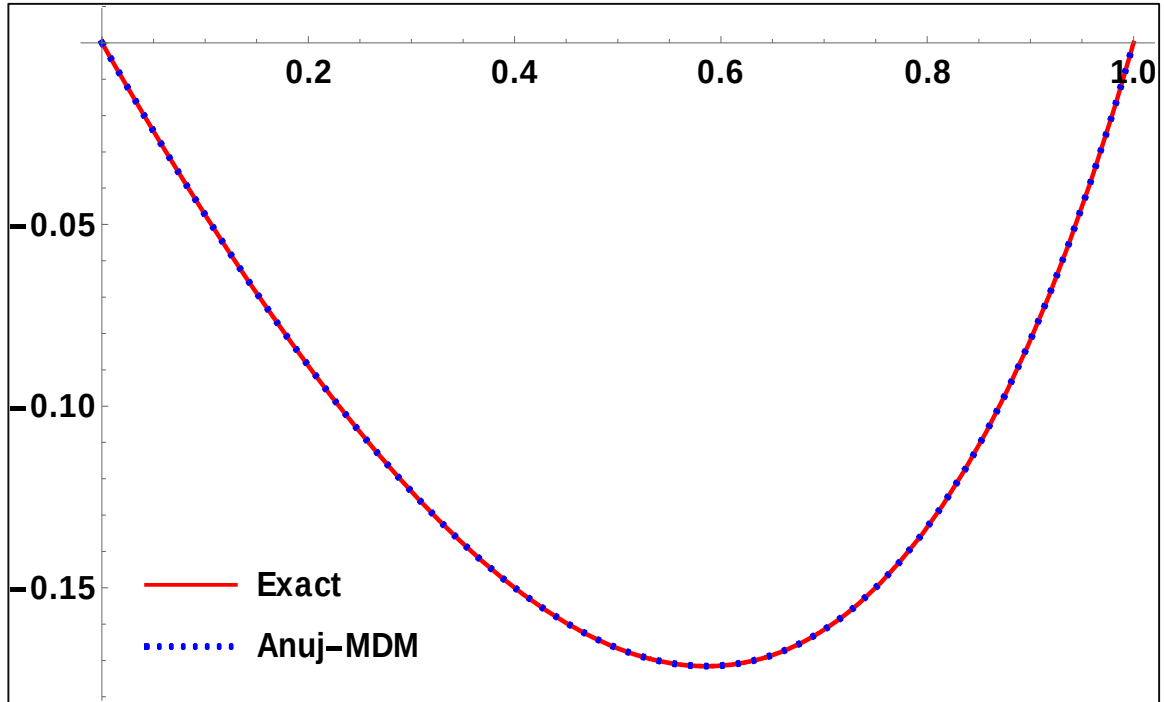
طريقة B-Spline الواردة في المرجع (Kasi and Raju, 2012) على هذه المسألة.

$$y_{\text{Exact}}(x) = \frac{2}{2-x} - x - 1 \quad \text{علماً أن الحل الدقيق لهذه المسألة هو}$$

الجدول (16): مقارنة بين الحل الدقيق للمثال (27) والحل التقريبي الناتج عن تطبيق طريقة Anuj-MDM باستخدام تكرارين

x	Exact Solution	Anuj-MDM Solution	Absolute Error of $ (\text{Exact Solution}) - (\text{Anuj-ADM Solution}) $	Absolute Error of $ (\text{Exact Solution}) - (\text{B-Spline Solution}) $
0.1	-0.4736840	-0.0473683	1.260066×10^{-7}	1.322478×10^{-6}
0.2	-0.0888889	-0.0888865	2.386330×10^{-6}	4.231930×10^{-6}
0.3	-0.1235294	-0.1235195	9.951116×10^{-6}	1.676381×10^{-5}
0.4	-0.1500000	-0.1499791	2.086253×10^{-5}	4.245341×10^{-5}
0.5	-0.1666667	-0.1666390	2.764822×10^{-5}	6.663799×10^{-5}
0.6	-0.1714286	-0.1714041	2.449480×10^{-5}	6.940961×10^{-5}
0.7	-0.1615385	-0.1615247	1.373686×10^{-5}	4.750490×10^{-5}
0.8	-0.1333333	-0.1333294	3.884078×10^{-6}	1.643598×10^{-5}
0.9	-0.0818182	-0.0818179	2.428948×10^{-7}	2.607703×10^{-7}

المصدر: تم إعداده باستخدام برنامج Mathematica 12.0



المصدر: تم إعداده باستخدام برنامج Mathematica 12.0

الشكل (17): مقارنة بين الحل الدقيق للمثال (27) والحل التقريبي الناتج عن تطبيق طريقة Anuj-MDM باستخدام تكرارين

3-6-2 تطبيق طريقة Anuj-ADM الهجينة لحل معادلة فولتيرا التفاضلية-التكاملية والتكاملية من النوع الثاني غير الخطية:

مثال (28): لتكن معادلة فولتيرا التفاضلية-التكاملية من النوع الثاني غير الخطية:

$$y'(x) = -2 \sin(x) - \frac{1}{3} \cos(x) - \frac{2}{3} \cos(2x) + \int_0^x \cos(x-t) y^2(t) dt \quad (95.3)$$

مع الشرط الابتدائي $y(0) = 1$

ملاحظة: تم حل هذه المسألة باستخدام طريقة ADM في المثال (20)، وسنقوم الآن بحلها باستخدام طريقة Anuj-ADM لإظهار فعاليتها في حل هذه المسألة.

الحل:

بتطبيق تحويل Anuj على طرفي المعادلة (95.3) نحصل على:

$$\frac{1}{p} Y(p) - p^2 y(0) = -\frac{2p^4}{1+p^2} - \frac{1}{3} \frac{p^3}{(1+p^2)} - \frac{2}{3} \frac{p^3}{(1+4p^2)} + \Lambda \left[\int_0^x \cos(x-t) y^2(t) dt \right] \quad (96.3)$$

وبالاستفادة من خاصية الالتفاف لتحويل Anuj لدينا:

$$\begin{aligned} \Lambda \left[\int_0^x \cos(x-t) y^2(t) dt \right] &= \Lambda [\cos(x) * y^2(x)] = \frac{1}{p^2} \Lambda [\cos(x)] \Lambda [y^2(x)] \\ &= \frac{1}{p^2} \frac{p^3}{(1+p^2)} \Lambda [y^2(x)] = \frac{p}{1+p^2} \Lambda [y^2(x)] \end{aligned}$$

بتطبيق خاصية الالتفاف في المعادلة (96.3) نحصل على:

$$\frac{1}{p} Y(p) - p^2 y(0) = -\frac{2p^4}{1+p^2} - \frac{1}{3} \frac{p^3}{(1+p^2)} - \frac{2}{3} \frac{p^3}{(1+4p^2)} + \frac{p}{1+p^2} \Lambda [y^2(x)]$$

بتعويض الشرط الابتدائي $y(0) = 1$ وضرب طرفي المعادلة السابقة بـ p نجد:

$$Y(p) - p^3 = -\frac{2p^5}{1+p^2} - \frac{1}{3} \frac{p^4}{(1+p^2)} - \frac{2}{3} \frac{p^4}{(1+4p^2)} + \frac{p^2}{1+p^2} \Lambda [y^2(x)]$$

$$Y(p) = p^3 - \frac{2p^5}{1+p^2} - \frac{1}{3} \frac{p^4}{(1+p^2)} - \frac{2}{3} \frac{p^4}{(1+4p^2)} + \frac{p^2}{1+p^2} \Lambda [y^2(x)]$$

نبسط الكسر $\frac{p^5}{1+p^2}$ فتصبح المعادلة على الشكل:

$$Y(p) = p^3 - 2 \left(p^3 - \frac{p^3}{1+p^2} \right) - \frac{1}{3} \frac{p^4}{(1+p^2)} - \frac{2}{3} \frac{p^4}{(1+4p^2)} + \frac{p^2}{1+p^2} \Lambda[y^2(x)]$$

وبالتالي:

$$Y(p) = -p^3 + \frac{2p^3}{1+p^2} - \frac{1}{3} \frac{p^4}{(1+p^2)} - \frac{2}{3} \frac{p^4}{(1+4p^2)} + \frac{p^2}{1+p^2} \Lambda[y^2(x)]$$

بتطبيق تحويل Anuj العكسي على طرفي المعادلة السابقة نحصل على:

$$y(x) = -1 + 2 \cos(x) - \frac{1}{3} \sin(x) - \frac{1}{3} \sin(2x) + \Lambda^{-1} \left[\frac{p^2}{1+p^2} \Lambda[y^2(x)] \right]$$

بتعويض متسلسلة الحل $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x)$

واستبدال الحد غير الخطي $y^2(x)$ بمتسلسلة كثيرات حدود أوميان بالشكل $y^2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$ نجد:

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n(x) = -1 + 2 \cos(x) - \frac{1}{3} \sin(x) - \frac{1}{3} \sin(2x) + \Lambda^{-1} \left[\frac{p^2}{1+p^2} \Lambda \left[\sum_{n=0}^{\infty} A_n \right] \right]$$

حيث تعطى الحدود الأولى لكثيرات حدود أوميان للحد غير الخطي $y^2(x)$ بالعلاقات الآتية:

$$A_0 = y_0^2, \quad A_1 = 2y_0y_1, \quad A_2 = 2y_0y_2 + y_1^2, \dots$$

نوجد $y_0(x), y_1(x), \dots$ من خلال العلاقة التكرارية الآتية:

$$y_0(x) = -1 + 2 \cos(x) - \frac{1}{3} \sin(x) - \frac{1}{3} \sin(2x)$$

$$y_{k+1}(x) = \Lambda^{-1} \left[\frac{p^2}{1+p^2} \Lambda[A_k] \right], \quad k \geq 0 \quad (97.3)$$

بأخذ الحدود الستة الأولى من منشور ماكلوران لـ $y_0(x)$ نجد:

$$y_0(x) = 1 - x - x^2 + \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{12} - \frac{11x^5}{120}$$

بالتعويض في العلاقة التكرارية (97.3) من أجل $k = 0$

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \Lambda^{-1} \left[\frac{p^2}{1+p^2} \Lambda[y_0^2] \right] \\ &= \Lambda^{-1} \left[-34093p^3 - 7070p^4 + 34094p^5 + 7068p^6 - 34096p^7 \right. \\ &\quad \left. - 7050p^8 + 34100p^9 + 6888p^{10} - 33908p^{11} - 5544p^{12} \right. \\ &\quad \left. + 30492p^{13} + \frac{34093p^3}{1+p^2} + \frac{7070p^4}{1+p^2} \right] \end{aligned}$$

$$= -34093 - 7070x + 17047x^2 + 1178x^3 - \frac{4262x^4}{3} - \frac{235x^5}{4} + \frac{1705x^6}{36} + \frac{41x^7}{30} \\ - \frac{1211x^8}{1440} - \frac{11x^9}{720} + \frac{121x^{10}}{14400} + 34093 \cos(x) + 7070 \sin(x)$$

وبأخذ الحدود الأربعة الأولى من منشور ماكلوران لـ $y_1(x)$ نجد:

$$y_1(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{8} + \frac{x^5}{6}$$

بالتعويض في العلاقة التكرارية (97.3) من أجل $k = 1$

$$y_2(x) = \Lambda^{-1} \left[\frac{p^2}{1+p^2} \Lambda[2y_0y_1] \right] \\ = \Lambda^{-1} \left[119448p^3 + 21668p^4 - 119448p^5 - 21668p^6 + 119450p^7 + 21658p^8 \right. \\ \left. - 119464p^9 - 21448p^{10} + 119224p^{11} + 18396p^{12} - 110880p^{13} \right. \\ \left. - \frac{119448p^3}{1+p^2} - \frac{21668p^4}{1+p^2} \right] \\ = 119448 + 21668x - 59724x^2 - \frac{10834x^3}{3} + \frac{59725x^4}{12} + \frac{10829x^5}{60} - \frac{14933x^6}{90} \\ - \frac{383x^7}{90} + \frac{2129x^8}{720} + \frac{73x^9}{1440} - \frac{11x^{10}}{360} - 119448 \cos(x) - 21668 \sin(x)$$

وبأخذ أول حدين من منشور ماكلوران لـ $y_2(x)$ نجد:

$$y_2(x) = \frac{x^4}{12} - \frac{x^5}{12}$$

وبالتالي الحل الناتج هو:

$$y(x) = y_0(x) + y_1(x) + y_2(x) + \dots$$

$$= 1 - x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} + \dots$$

$$= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \right) - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \right) - \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right)$$

من خلال متابعة العمل والاستمرار في حساب التكرارات، نلاحظ أن متسلسلة الحل تتقارب تدريجياً نحو الحل الدقيق لهذه المسألة، والذي يعطى بالدالة التالية:

$$y(x) = \cos(x) - \sin(x)$$

وهو الحل الدقيق للمسألة، وهو الحل نفسه الذي تم الحصول باستخدام طريقة ADM في المثال (20).

مثال (29): لتكن معادلة فولتيرا التكاملية من النوع الثاني غير الخطية:

$$y(x) = x - \int_0^x y^2(t) dt \quad (98.3)$$

ملاحظة: تم حل هذه المسألة باستخدام طريقة ADM في المثال (21)، وسنقوم في هذا المثال بحلها باستخدام طريقة Anuj-ADM.

الحل: بتطبيق تحويل Anuj على المعادلة (98.3) نحصل على:

$$Y(p) = p^3 - \Lambda \left[\int_0^x y^2(t) dt \right] \quad (99.3)$$

بالاستفادة من خاصية الالتفاف لتحويل Anuj لدينا:

$$\Lambda \left[\int_0^x y^2(t) dt \right] = \Lambda [1 * y^2(x)] = \frac{1}{p^2} \Lambda [1] \Lambda [y^2(x)] = \frac{1}{p^2} p^3 \Lambda [y^2(x)] = p \Lambda [y^2(x)]$$

بتطبيق خاصية الالتفاف في المعادلة (99.3) نحصل على:

$$Y(p) = p^3 - p \Lambda [y^2(x)]$$

بتطبيق تحويل Anuj العكسي على طرفي المعادلة السابقة تصبح بالشكل الآتي:

$$y(x) = x - \Lambda^{-1} [p \Lambda [y^2(x)]]$$

بتعويض متسلسلة الحل $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x)$

نوجد واستبدال الحد غير الخطي $y^2(x)$ بمتسلسلة كثيرات حدود أدوميان بالشكل $y^2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$ نجد:

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n(x) = x - \Lambda^{-1} [p \Lambda [\sum_{n=0}^{\infty} A_n]]$$

حيث تعطى الحدود الأولى لكثيرات حدود أدوميان للحد غير الخطي $y^2(x)$ بالعلاقات الآتية:

$$A_0 = y_0^2, \quad A_1 = 2y_0y_1, \quad A_2 = 2y_0y_2 + y_1^2, \quad A_3 = 2y_0y_3 + 2y_1y_2$$

$$A_4 = 2y_0y_4 + 2y_1y_3 + y_2^2, \dots$$

نوجد $y_0(x), y_1(x), \dots$ من خلال العلاقة التكرارية الآتية:

$$y_0(x) = x$$

$$y_{k+1}(x) = -\Lambda^{-1} [p \Lambda [A_n]], \quad k \geq 0 \quad (100.3)$$

نقوم بالتعويض في العلاقة التكرارية (100.3) من أجل $k = 0, 1, 2, \dots$

$$y_1(x) = -\Lambda^{-1} [p \Lambda [y_0^2]] = -\Lambda^{-1} [2p^6] = -\frac{x^3}{3}$$

$$\begin{aligned}
y_2(x) &= -\Lambda^{-1}[p\Lambda[2y_0y_1]] = -\Lambda^{-1}[-16p^5] = \frac{2x^5}{15} \\
y_3(x) &= -\Lambda^{-1}[p\Lambda[2y_0y_2 + y_1^2]] = -\Lambda^{-1}[272p^{10}] = -\frac{17x^7}{315} \\
y_4(x) &= -\Lambda^{-1}[p\Lambda[2y_0y_3 + 2y_1y_2]] = -\Lambda^{-1}[-7936p^{12}] = \frac{62x^9}{2835} \\
y_5(x) &= -\Lambda^{-1}[p\Lambda[2y_0y_4 + 2y_1y_3 + y_2^2]] = -\Lambda^{-1}[353792p^{14}] = \frac{1382x^{11}}{155925} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

وبالتالي الحل الناتج هو :

$$y(x) = y_0(x) + y_1(x) + y_2(x) + y_3(x) + y_4(x) + y_5(x) + \dots$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \frac{17x^7}{315} + \frac{62x^9}{2835} - \frac{1382x^{11}}{155925} + \dots$$

منشور ماكلوران للدالة $\tanh(x)$

$$= \frac{x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \frac{x^{11}}{11!} + \dots}{1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \frac{x^{10}}{10!} + \dots} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}} = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \tanh(x)$$

وهو الحل الدقيق للمعادلة، وهو الحل نفسه الذي تم الحصول باستخدام طريقة ADM في المثال (21).

3-7 الفكرة العامة لطريقة Anuj-ADM الهجينة في حل المعادلات التفاضلية الجزئية:

لتوضيح كيفية تطبيق طريقة Anuj-ADM في حل المعادلات التفاضلية الجزئية، لنفترض أن لدينا المعادلة التفاضلية الجزئية غير الخطية الآتية:

$$L_t(y(x, t)) + R(y(x, t)) + N(y(x, t)) = g(x, t) \quad (101.3)$$

مع الشروط الابتدائية:

$$\frac{\partial^k y(x, 0)}{\partial t^k} = \varphi_k(x), \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \quad (102.3)$$

حيث أن:

$$L_t = \frac{\partial^n}{\partial t^n} \text{ مؤثر تفاضلي خطي يمثل المشتق الجزئي من المرتبة } n \text{ بالنسبة لـ } t$$

$R(y(x, t))$ يمثل بقية الحدود الخطية.

$N(y(x, t))$ يمثل الحدود غير الخطية.

$g(x, t)$ دالة معطاة

نعيد كتابة المعادلة (101.3) على الشكل:

$$\frac{\partial^n y(x, t)}{\partial t^n} = g(x, t) - (R(y(x, t)) + N(y(x, t))) \quad (103.3)$$

بتطبيق تحويل Anuj طرفي المعادلة (103.3):

$$\Lambda \left[\frac{\partial^n y(x, t)}{\partial t^n} \right] = \Lambda[g(x, t)] - \Lambda \left[(R(y(x, t)) + N(y(x, t))) \right] \quad (104.3)$$

وبالاستفادة من خاصية المشتق الجزئي لدالة $y(x, t)$ بالنسبة لـ t في تحويل Anuj لدينا:

$$\Lambda \left[\frac{\partial^n y(x, t)}{\partial t^n} \right] = \frac{1}{p^n} Y(x, p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^{3-n+k} \frac{\partial^k y(x, 0)}{\partial t^k} \quad (105.3)$$

بتعويض العلاقة (105.3) في (104.3) نجد:

$$\frac{1}{p^n} Y(x, p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^{3-n+k} \frac{\partial^k y(x, 0)}{\partial t^k} = \Lambda[g(x, t)] - \Lambda \left[(R(y(x, t)) + N(y(x, t))) \right] \quad (106.3)$$

وبالتالي:

$$\frac{1}{p^n} Y(x, p) = \sum_{k=0}^{n-1} p^{3-n+k} \frac{\partial^k y(x, 0)}{\partial t^k} + \Lambda[g(x, t)] - \Lambda \left[\left(R(y(x, t)) + N(y(x, t)) \right) \right] \quad (107.3)$$

بضرب طرفي المعادلة (107.3) بـ p^n نحصل على:

$$Y(x, p) = \sum_{k=0}^{n-1} p^{3+k} \frac{\partial^k y(x, 0)}{\partial t^k} + p^n \Lambda[g(x, t)] - p^n \Lambda \left[\left(R(y(x, t)) + N(y(x, t)) \right) \right] \quad (108.3)$$

بتطبيق تحويل Anuj العكسي Λ^{-1} على طرفي المعادلة (108.3) نجد:

$$y(x, t) = \Lambda^{-1} \left[\sum_{k=0}^{n-1} p^{3+k} \frac{\partial^k y(x, 0)}{\partial t^k} \right] + \Lambda^{-1} [p^n \Lambda[g(x, t)]] - \Lambda^{-1} \left[p^n \Lambda \left[\left(R(y(x, t)) + N(y(x, t)) \right) \right] \right] \quad (109.3)$$

نعرف الدالة $f(x, t)$ بالشكل:

$$f(x, t) = \Lambda^{-1} \left[\sum_{k=0}^{n-1} p^{3+k} \frac{\partial^k y(x, 0)}{\partial t^k} \right] + \Lambda^{-1} [p^n \Lambda[g(x, t)]]$$

وبذلك تصبح المعادلة (109.3) على الصورة:

$$y(x, t) = f(x, t) - \Lambda^{-1} \left[p^n \Lambda \left[\left(R(y(x, t)) + N(y(x, t)) \right) \right] \right] \quad (110.3)$$

وفقاً لطريقة ADM يتم تمثيل الحل $y(x, t)$ على شكل متسلسلة غير منتهية على الشكل الآتي:

$$y(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x, t) \quad (111.3)$$

ويتم تمثيل الحد غير الخطي $N(y(x, t))$ على شكل متسلسلة غير منتهية من كثيرات حدود أدميان:

$$N(y(x, t)) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \quad (112.3)$$

حيث أن:

$$A_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} \left[N \left(\sum_{i=0}^n \lambda^i y_i(x, t) \right) \right]_{\lambda=0}, \quad n \geq 0$$

بتعويض العلاقتين (111.3) و (112.3) في (110.3) نحصل على:

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n(x, t) = f(x, t) - \Lambda^{-1} \left[p^n \Lambda \left[\left(R \left(\sum_{n=0}^{\infty} y_n(x, t) \right) + \sum_{n=0}^{\infty} A_n \right) \right] \right] \quad (113.3)$$

يتم حساب $y_0(x, t), y_1(x, t), \dots$ من خلال العلاقة التكرارية الآتية:

$$\begin{cases} y_0(x, t) = f(x, t) \\ y_{k+1}(x, t) = -\Lambda^{-1} \left[p^n \Lambda \left[(R(y_k(x, t)) + A_k) \right] \right], \quad k \geq 0 \end{cases} \quad (114.3)$$

ويكون الحل النهائي للمعادلة هو:

$$y(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x, t) = y_0(x, t) + y_1(x, t) + y_2(x, t) + \dots$$

3-7-1 أمثلة تطبيقية:

مثال (30): لتكن مسألة القيم الابتدائية للمعادلة التفاضلية الجزئية غير الخطية من المرتبة الأولى:

$$y_t(x, t) + y(x, t)y_x(x, t) = y_{xxxx}(x, t) - y^2(x, t) \quad (115.3)$$

مع الشرط الابتدائي $y(x, 0) = e^{-x}$

ملاحظة: تم حل هذه المسألة في المثال (23) باستخدام طريقة ADM، وسنقوم في هذا المثال بحلها باستخدام

طريقة Anuj-ADM لإظهار فعاليتها في حل هذه المسألة.

الحل:

نعيد كتابة المعادلة (115.3) على الشكل:

$$y_t(x, t) = y_{xxxx}(x, t)y(x, t) - y_x(x, t) - y^2(x, t)$$

بتطبيق تحويل Anuj على طرفي المعادلة السابقة نحصل على:

$$\frac{1}{p}Y(x, p) - p^2y(x, 0) = \Lambda[y_{xxxx}(x, t) - y(x, t)y_x(x, t) - y^2(x, t)]$$

بتعويض الشرط الابتدائي $y(x, 0) = e^{-x}$ وضرب طرفي المعادلة السابقة بـ p تصبح على الشكل التالي:

$$Y(x, p) = p^3e^{-x} + p\Lambda[y_{xxxx}(x, t) - y(x, t)y_x(x, t) - y^2(x, t)]$$

بتطبيق تحويل Anuj العكسي نجد:

$$y(x, t) = e^{-x} + \Lambda^{-1}[p\Lambda[y_{xxxx}(x, t) - y(x, t)y_x(x, t) - y^2(x, t)]]$$

بتعويض متسلسلة الحل $y(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x, t)$ واستبدال الحدود غير الخطية $y(x, t)y_x(x, t), y^2(x, t)$

بمتسلسلات كثيرات حدود أدوميان $\sum_{n=0}^{\infty} B_n, \sum_{n=0}^{\infty} A_n$ على الترتيب نجد:

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n(x, t) = e^{-x} + \Lambda^{-1} \left[p\Lambda \left[\left(\sum_{n=0}^{\infty} y_n(x, t) \right)_{xxxx} - \sum_{n=0}^{\infty} A_n - \sum_{n=0}^{\infty} B_n \right] \right]$$

حيث:

$$A_0 = y_0(y_0)_x, \quad A_1 = y_0(y_1)_x + y_1(y_0)_x, \quad A_2 = y_0(y_2)_x + y_1(y_1)_x + y_2(y_0)_x$$

$$A_3 = y_0(y_3)_x + y_1(y_2)_x + y_2(y_1)_x + y_3(y_0)_x$$

$$A_4 = y_0(y_4)_x + y_1(y_3)_x + y_2(y_2)_x + y_3(y_1)_x + y_4(y_0)_x, \dots$$

$$B_0 = y_0^2, \quad B_1 = 2y_0y_1, \quad B_2 = 2y_0y_2 + y_1^2, \quad B_3 = 2y_0y_3 + 2y_1y_2, \dots$$

$$B_4 = 2y_0y_4 + 2y_1y_3 + y_2^2, \dots$$

نوجد من خلال العلاقة التكرارية الآتية:

$$y_0(x, t) = e^{-x}$$

$$y_{k+1}(x, t) = \Lambda^{-1} \left[p\Lambda \left[A_k + B_k - (y_k(x, t))_{xxxx} \right] \right], \quad k \geq 0 \quad (116.3)$$

نقوم بالتعويض في العلاقة التكرارية (116.3) من أجل $k = 0, 1, 2, \dots$

$$y_1(x, t) = \Lambda^{-1} [p\Lambda [y_0(y_0)_x + y_0^2 - (y_0)_{xxxx}]]$$

$$= \Lambda^{-1} [p^4 e^{-x}] = t e^{-x}$$

$$y_2(x, t) = \Lambda^{-1} [p\Lambda [y_0(y_1)_x + y_1(y_0)_x + 2y_0y_1 - (y_1)_{xxxx}]]$$

$$= \Lambda^{-1} [p^5 e^{-x}] = \frac{t^2}{2!} e^{-x}$$

$$y_3(x, t) = \Lambda^{-1} [p\Lambda [y_0(y_2)_x + y_1(y_1)_x + y_2(y_0)_x + 2y_0y_2 + y_1^2 - (y_2)_{xxxx}]]$$

$$= \Lambda^{-1} [p^6 e^{-x}] = \frac{t^3}{3!} e^{-x}$$

$$y_4(x, t) = \Lambda^{-1} [p\Lambda [y_0(y_3)_x + y_1(y_2)_x + y_2(y_1)_x + y_3(y_0)_x + 2y_0y_3 + 2y_1y_2 - (y_3)_{xxxx}]]$$

$$= \Lambda^{-1} [p^7 e^{-x}] = \frac{t^4}{4!} e^{-x}$$

$$y_5(x, t) = \Lambda^{-1} [p\Lambda [y_0(y_4)_x + y_1(y_3)_x + y_2(y_2)_x + y_3(y_1)_x + y_4(y_0)_x + 2y_0y_4 + 2y_1y_3 + y_2^2 - (y_4)_{xxxx}]]$$

$$= \Lambda^{-1} [p^8 e^{-x}] = \frac{t^5}{5!} e^{-x}$$

⋮

وبالتالي الحل الناتج هو :

$$\begin{aligned}
 y(x, t) &= y_0(x, t) + y_1(x, t) + y_2(x, t) + y_3(x, t) + y_4(x, t) + y_5(x, t) + \dots \\
 &= e^{-x} + e^{-x}t + \frac{e^{-x}}{2}t^2 + \frac{e^{-x}}{6}t^3 + \frac{e^{-x}}{24}t^4 + \frac{e^{-x}}{120}t^5 + \dots \\
 &= e^{-x} \left(1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \frac{t^5}{5!} + \dots \right) \\
 &= e^{-x} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \right) = e^{-x} e^t = e^{t-x}
 \end{aligned}$$

وهو الحل الدقيق للمسألة، وهو الحل نفسه الذي حصلنا عليه باستخدام طريقة ADM في المثال (23).

مثال (31): معادلة Schrödinger

ظهرت معادلة Schrödinger على يد العالم الفيزيائي Erwin Schrödinger عام 1926، وتعد من أهم النماذج الرياضية في المجالات الفيزيائية والهندسية، حيث تظهر تطبيقاتها في فيزياء البلازما، والبصريات غير الخطية، والانتشار الكهربائي في الألياف البصرية، وحركة أمواج المياه في المحيطات، كما تظهر في دراسة التطور الزمني للدالة الموجية (Behzadi, 2011).

لتكن مسألة القيم الابتدائية لمعادلة Schrödinger غير الخطية:

$$iy_t + \frac{1}{2}y_{xx} - y\cos^2(x) - |y|^2y = 0, \quad i^2 = -1 \quad (117.3)$$

مع الشرط الابتدائي $y(x, 0) = \sin(x)$

حيث $y = y(x, t)$ تمثل دالة عقدية.

ملاحظة: تم حل هذه المسألة في المرجع (المنصور، 2025) باستخدام طريقة ADM المهيجنة مع تحويل

AMJ، وسنقوم في هذا المثال بحلها باستخدام طريقة Anuj-ADM.

الحل:

استناداً إلى خواص المرافق العقدي إنَّ الحد غير الخطي $|y|^2y$ يمكن أن يكتب بالصيغة:

$$|y|^2y = y\bar{y}y = y^2\bar{y}$$

وبذلك تكتب المعادلة (117.3) على الشكل:

$$iy_t + \frac{1}{2}y_{xx} - y\cos^2(x) - y^2\bar{y} = 0$$

بضرب طرفي المعادلة السابقة بـ $-i$

$$y_t - \frac{1}{2}iy_{xx} + iycos^2(x) + iy^2\bar{y} = 0$$

وبالتالي:

$$y_t = \frac{1}{2}iy_{xx} - iycos^2(x) - iy^2\bar{y}$$

بتطبيق تحويل Anuj على طرفي المعادلة السابقة نحصل على:

$$\frac{1}{p}Y(x, p) - p^2y(x, 0) = \Lambda \left[\frac{1}{2}iy_{xx} - iycos^2(x) - iy^2\bar{y} \right]$$

بتعويض الشرط الابتدائي $u(x, 0) = \sin(x)$ وضرب طرفي المعادلة بـ p نجد:

$$Y(x, p) = p^3\sin(x) + p\Lambda \left[\frac{1}{2}iy_{xx} - iycos^2(x) - iy^2\bar{y} \right]$$

بتطبيق تحويل Anuj العكسي على طرفي المعادلة السابقة نحصل على:

$$y(x, t) = \sin(x) + \Lambda^{-1} \left[p\Lambda \left[\frac{1}{2}iy_{xx} - iycos^2(x) - iy^2\bar{y} \right] \right]$$

بتعويض متسلسلة الحل $y(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x, t)$

واستبدال الحد غير الخطي $y^2\bar{y}$ بمتسلسلة كثيرات حدود أوميان بالشكل $y^2\bar{y} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$ نجد:

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n(x, t) = \sin(x) + \Lambda^{-1} \left[p\Lambda \left[\left(\frac{1}{2}i \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x, t) \right)_{xx} - i \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x, t) \cos^2(x) - i \sum_{n=0}^{\infty} A_n \right] \right]$$

حيث تعطى الحدود الأولى لكثيرات حدود أوميان للحد غير الخطي $y^2\bar{y}$ من العلاقات الآتية:

$$A_0 = y_0^2\bar{y}_0$$

$$A_1 = 2y_0y_1\bar{y}_0 + y_0^2\bar{y}_1$$

$$A_2 = 2y_0y_2\bar{y}_0 + y_1^2\bar{y}_0 + 2y_0y_1\bar{y}_1 + y_0^2\bar{y}_2$$

$$A_3 = 2y_0y_3\bar{y}_0 + 2y_1y_2\bar{y}_0 + 2y_0y_2\bar{y}_1 + y_1^2\bar{y}_1 + 2y_0y_1\bar{y}_2 + y_0^2\bar{y}_3$$

يتم حساب $y_0(x, t), y_1(x, t), \dots$ من خلال العلاقة التكرارية الآتية:

$$y_0(x, t) = \sin(x)$$

$$y_{k+1}(x, t) = \Lambda^{-1} \left[p\Lambda \left[\left(\frac{1}{2}iy_k(x, t) \right)_{xx} - iy_k(x, t)\cos^2(x) - iA_k \right] \right], \quad k \geq 0 \quad (118.3)$$

نقوم بالتعويض في العلاقة التكرارية (118.3) من أجل $k = 0, 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned}
 y_1(x, t) &= \Lambda^{-1} \left[p\Lambda \left[\left(\frac{1}{2} i y_0(x, t) \right)_{xx} - i y_0(x, t) \cos^2(x) - i y_0^2 \bar{y}_0 \right] \right] \\
 &= \Lambda^{-1} \left[-\frac{3}{2} i p^4 \sin(x) \right] = -\frac{3it}{2} \sin(x) \\
 y_2(x, t) &= \Lambda^{-1} \left[p\Lambda \left[\left(\frac{1}{2} i y_1(x, t) \right)_{xx} - i y_1(x, t) \cos^2(x) - i(2y_0 y_1 \bar{y}_0 + y_0^2 \bar{y}_1) \right] \right] \\
 &= \Lambda^{-1} \left[\frac{9}{4} i^2 p^5 \sin(x) \right] = \frac{9i^2 t^2}{8} \sin(x) \\
 y_3(x, t) &= \Lambda^{-1} \left[p\Lambda \left[\left(\frac{1}{2} i y_2(x, t) \right)_{xx} - i y_2(x, t) \cos^2(x) - i(2y_0 y_2 \bar{y}_0 + y_1^2 \bar{y}_0 + 2y_0 y_1 \bar{y}_1 + y_0^2 \bar{y}_2) \right] \right] \\
 &= \Lambda^{-1} \left[-\frac{54}{16} i^3 p^6 \sin(x) \right] = -\frac{9i^3 t^3}{16} \sin(x) \\
 y_4(x, t) &= \Lambda^{-1} \left[p\Lambda \left[\left(\frac{1}{2} i y_3(x, t) \right)_{xx} - i y_3(x, t) \cos^2(x) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - i(2y_0 y_3 \bar{y}_0 + 2y_1 y_2 \bar{y}_0 + 2y_0 y_2 \bar{y}_1 + y_1^2 \bar{y}_1 + 2y_0 y_1 \bar{y}_2 + y_0^2 \bar{y}_3) \right] \right] \\
 &= \Lambda^{-1} \left[\frac{81}{16} i^4 p^7 \sin(x) \right] = \frac{27i^4 t^4}{128} \sin(x) \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

بالتالي الحل الناتج هو :

$$\begin{aligned}
 y(x, t) &= y_0(x, t) + y_1(x, t) + y_2(x, t) + y_3(x, t) + y_4(x, t) + \dots \\
 &= \sin(x) - \frac{3it}{2} \sin(x) + \frac{9i^2 t^2}{8} \sin(x) - \frac{9i^3 t^3}{16} \sin(x) + \frac{27i^4 t^4}{128} \sin(x) - \dots \\
 &= \sin(x) \left(1 - \frac{\frac{3it}{2}}{1!} + \frac{\left(\frac{3it}{2}\right)^2}{2!} - \frac{\left(\frac{3it}{2}\right)^3}{3!} + \frac{\left(\frac{3it}{2}\right)^4}{4!} - \dots \right) \\
 &= \sin(x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{3}{2} it\right)^n}{n!} \\
 &= \sin(x) e^{-\frac{3it}{2}}
 \end{aligned}$$

وهو الحل الدقيق للمسألة، وهو الحل نفسه الذي تم الحصول عليه باستخدام طريقة ADM المهيئة مع تحويل

AMJ في المرجع (المنصور، 2025).

يتضمن الجدولين (17) و(18)، والشكلين (18) و (19) مقارنة بين الجزئين الحقيقيين والتخيليين لكلاً من الحل الدقيق والحل الناتج عن طريقة Anuj-ADM باستخدام 5 تكرارات.

الجدول (17): مقارنة بين الجزئين الحقيقيين لكلاً من الحل الدقيق للمثال (31) والحل الناتج عن تطبيق طريقة Anuj-ADM باستخدام 5 تكرارات عندما $t = 0.1$

x	Real Part of (Exact Solution)	Real Part of (Anuj-ADM Solution)	Absolute Error of $ \text{Re(Exact Solution)} - \text{Re(Anuj-ADM Solution)} $
0	0	0	0
0.1	0.0987124	0.0987124	1.6×10^{-9}
0.2	0.1964385	0.1964385	3.1×10^{-9}
0.3	0.2922018	0.2922018	4.7×10^{-9}
0.4	0.3850456	0.3850456	6.2×10^{-9}
0.5	0.4740421	0.4740421	7.6×10^{-9}
0.6	0.5583021	0.5583021	8.9×10^{-9}
0.7	0.6369838	0.6369838	1.0×10^{-8}
0.8	0.7093010	0.7093010	1.1×10^{-8}
0.9	0.7745310	0.7745310	1.2×10^{-8}
1	0.8320222	0.8320222	1.3×10^{-8}

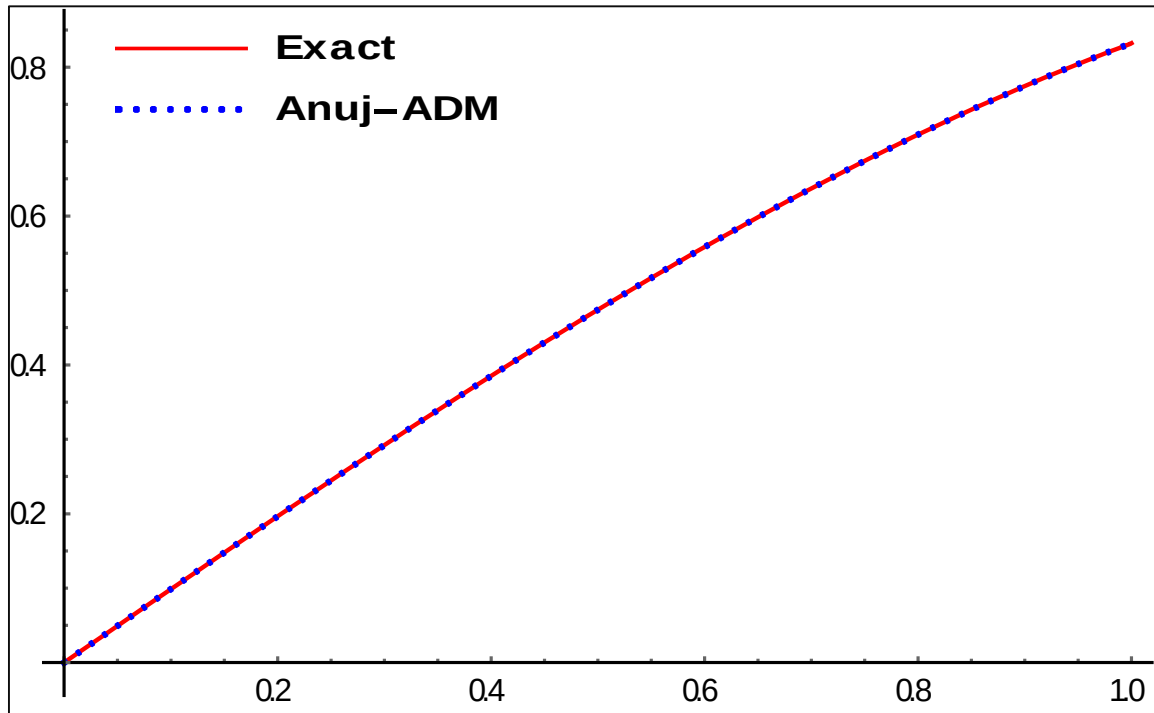
المصدر: تم إعداده باستخدام برنامج Mathematica 12.0

الجدول (18): مقارنة بين الجزئين التخيليين لكلاً من الحل الدقيق للمثال (31) والحل الناتج عن تطبيق طريقة Anuj-ADM

بإستخدام 5 تكرارات عندما $t = 0.1$

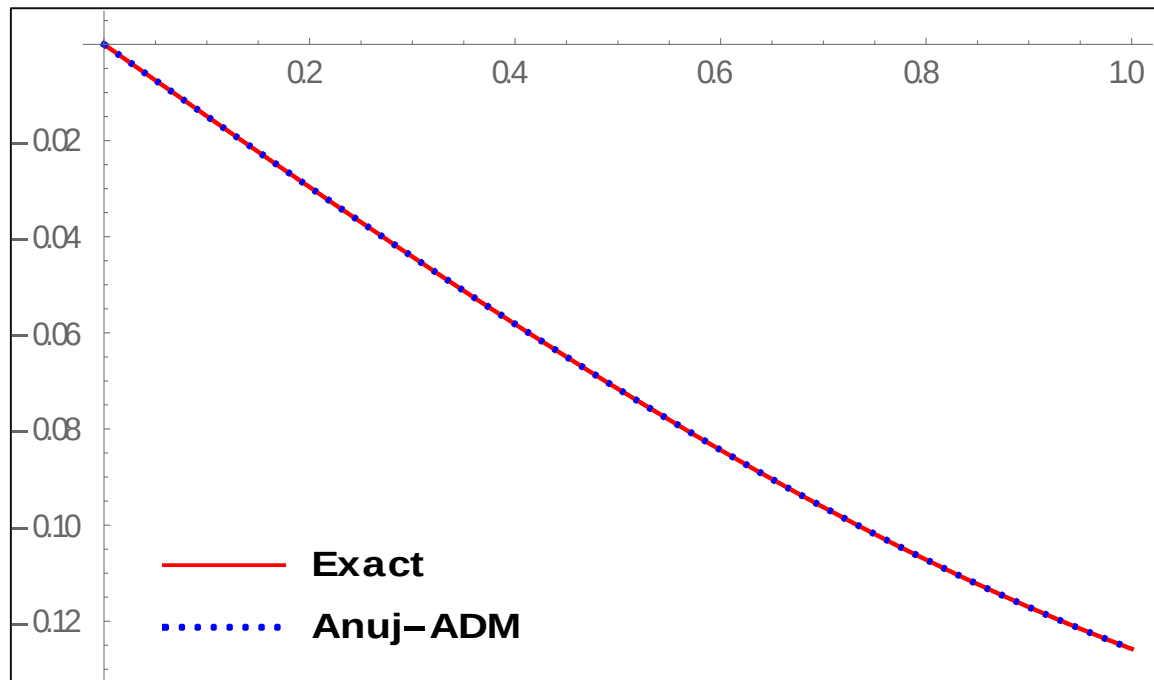
x	Imaginary Part of (Exact Solution)	Imaginary Part of (Anuj-ADM Solution)	Absolute Error of $ \text{Im(Exact Solution)} - \text{Im(Anuj-ADM Solution)} $
0	0	0	0
0.1	-0.0149189	-0.0149189	6.3×10^{-8}
0.2	-0.0296888	-0.0296886	1.3×10^{-7}
0.3	-0.0441620	-0.0441618	1.9×10^{-7}
0.4	-0.0581939	-0.0581937	2.5×10^{-7}
0.5	-0.0716445	-0.0716442	3.0×10^{-7}
0.6	-0.0843791	-0.0843788	3.6×10^{-7}
0.7	-0.0962707	-0.0962703	4.1×10^{-7}
0.8	-0.1072004	-0.1071999	4.5×10^{-7}
0.9	-0.1170589	-0.1170584	5.0×10^{-7}
1	-0.1257479	-0.1257473	5.3×10^{-7}

المصدر: تم إعداده باستخدام برنامج Mathematica 12.0



المصدر: تم إعداده باستخدام برنامج Mathematica 12.0

الشكل (18): مقارنة بيانية بين الجزأين الحقيقيين لكلاً من الحل الدقيق للمثال (31) والحل الناتج عن تطبيق طريقة Anuj-ADM باستخدام 5 تكرارات عندما $t = 0.1$



المصدر: تم إعداده باستخدام برنامج Mathematica 12.0

الشكل (19): مقارنة بيانية بين الجزأين التخيليين لكلاً من الحل الدقيق للمثال (31) والحل الناتج عن تطبيق طريقة Anuj-ADM باستخدام 5 تكرارات عندما $t = 0.1$

مثال (32): معادلة Boussinesq

هي معادلة تفاضلية جزئية غير خطية تمثل نموذجاً يصف انتشار النبضات في خطوط نقل دوائر الرنين الكهربية (Yindoula & Nganga, 2023).

لتكن مسألة القيم الابتدائية لمعادلة Boussinesq:

$$y_{tt}(x, t) = -2 \left(\ln(y(x, t)) + 3y(x, t) \right)_{xx} + y_{xxxx}(x, t) \quad (119.3)$$

مع الشروط الابتدائية

$$y(x, 0) = e^x, \quad y_t(x, 0) = 2e^x$$

ملاحظة: تم حل هذه المسألة في المرجع (Yindoula and Nganga, 2023)، باستخدام طريقتي ADM و

VIM المهجنتين مع تحويل لابلاس، وسنقوم في هذا المثال بحلها باستخدام طريقة Anuj-ADM.

الحل:

بتطبيق تحويل Anuj على طرفي المعادلة (119.3) نحصل على:

$$\frac{1}{p^2} Y(x, p) - py(x, 0) - p^2 y_t(x, 0) = \Lambda \left[-2 \left(\ln(y(x, t)) + 3y(x, t) \right)_{xx} + y_{xxxx}(x, t) \right]$$

بتعويض الشروط الابتدائية للمسألة، وضرب طرفي المعادلة السابقة بـ p^2 نجد:

$$Y(x, p) - p^3 e^x - 2p^4 e^x = p^2 \Lambda \left[-2 \left(\ln(y(x, t)) + 3y(x, t) \right)_{xx} + y_{xxxx}(x, t) \right]$$

وبالتالي:

$$Y(x, p) = p^3 e^x + 2p^4 e^x + p^2 \Lambda \left[-2 \left(\ln(y(x, t)) + 3y(x, t) \right)_{xx} + y_{xxxx}(x, t) \right]$$

بتطبيق تحويل Anuj العكسي على طرفي المعادلة السابقة نحصل على:

$$y(x, t) = e^x + 2te^x + \Lambda^{-1} \left[p^2 \Lambda \left[-2 \left(\ln(y(x, t)) + 3y(x, t) \right)_{xx} + y_{xxxx}(x, t) \right] \right]$$

بتعويض متسلسلة الحل $y(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x, t)$

واستبدال الحد غير الخطي $\ln(y(x, t))$ بمتسلسلة كثيرات حدود أدميان بالشكل $\ln(y(x, t)) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$

نجد:

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n(x, t) = e^x + 2te^x + \Lambda^{-1} \left[p^2 \Lambda \left[-2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n + 3 \left(\sum_{n=0}^{\infty} y_n \right) \right)_{xx} + \left(\sum_{n=0}^{\infty} y_n \right)_{xxxx} \right] \right]$$

حيث تعطى الحدود الأولى لـ A_n بالعلاقات الآتية:

$$A_0 = \ln(y_0)$$

$$A_1 = \frac{y_1}{y_0}$$

$$A_2 = \frac{y_2}{y_0} - \frac{1}{2} \frac{y_1^2}{y_0^2}$$

$$A_3 = \frac{y_3}{y_0} - \frac{y_1 y_2}{y_0^2} + \frac{1}{3} \frac{y_1^3}{y_0^3}$$

يتم حساب $y_0(x, t), y_1(x, t), \dots$ من خلال العلاقة التكرارية الآتية:

$$y_0(x, t) = e^x + 2te^x$$

$$y_{k+1}(x, t) = \Lambda^{-1} \left[p^2 \Lambda \left[-2(A_k + 3y_k(x, t))_{xx} + (y_k(x, t))_{xxxx} \right] \right], \quad k \geq 0 \quad (120.3)$$

نقوم بالتعويض في العلاقة التكرارية (120.3) من أجل $k = 0, 1, 2, \dots$

$$y_1(x, t) = \Lambda^{-1} \left[p^2 \Lambda \left[-2(\ln(y_0) + 3y_0(x, t))_{xx} + (y_0(x, t))_{xxxx} \right] \right]$$

$$= \Lambda^{-1} [-5p^5 e^x - 10p^6 e^x]$$

$$= -\frac{5}{2!} t^2 e^x - \frac{10}{3!} t^3 e^x$$

$$y_2(x, t) = \Lambda^{-1} \left[p^2 \Lambda \left[-2 \left(\frac{y_1}{y_0} + 3y_1(x, t) \right)_{xx} + (y_1(x, t))_{xxxx} \right] \right]$$

$$= \Lambda^{-1} [25p^7 e^x + 50p^8 e^x]$$

$$= \frac{25}{4!} t^4 e^x + \frac{50}{5!} t^5 e^x$$

$$y_3(x, t) = \Lambda^{-1} \left[p^2 \Lambda \left[-2 \left(\frac{y_2}{y_0} - \frac{1}{2} \frac{y_1^2}{y_0^2} + 3y_2(x, t) \right)_{xx} + (y_2(x, t))_{xxxx} \right] \right]$$

$$= \Lambda^{-1} [-125p^9 e^x - 250p^{10} e^x]$$

$$= -\frac{125}{6!} t^6 e^x - \frac{250}{7!} t^7 e^x$$

$$\begin{aligned}
y_4(x, t) &= \Lambda^{-1} \left[p^2 \Lambda \left[-2 \left(\frac{y_3}{y_0} - \frac{y_1 y_2}{y_0^2} + \frac{1}{3} \frac{y_1^3}{y_0^3} + 3y_3(x, t) \right)_{xx} + (y_3(x, t))_{xxxx} \right] \right] \\
&= \Lambda^{-1} [625p^{11}e^x + 1250p^{12}e^x] \\
&= \frac{625}{8!} t^8 e^x + \frac{1250}{9!} t^9 e^x \\
&\vdots
\end{aligned}$$

وبالتالي الحل الناتج هو:

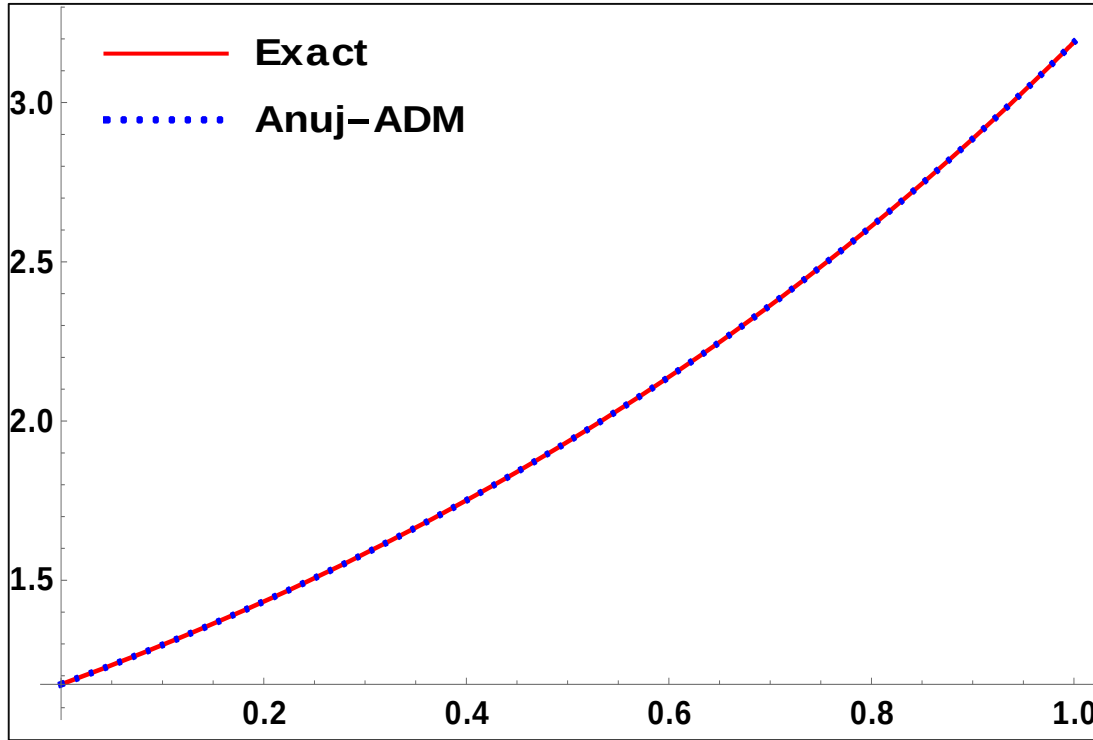
$$\begin{aligned}
y(x, t) &= y_0(x, t) + y_1(x, t) + y_2(x, t) + y_3(x, t) + y_4(x, t) + \dots \\
&= e^x + 2te^x - \frac{5}{2!} t^2 e^x - \frac{10}{3!} t^3 e^x + \frac{25}{4!} t^4 e^x + \frac{50}{5!} t^5 e^x - \frac{125}{6!} t^6 e^x - \frac{250}{7!} t^7 e^x \\
&\quad + \frac{625}{8!} t^8 e^x + \frac{1250}{9!} t^9 e^x + \dots \\
&= e^x \left(1 - \frac{5}{2!} t^2 + \frac{25}{4!} t^4 - \frac{125}{6!} t^6 + \frac{625}{8!} t^8 - \dots \right) \\
&\quad + e^x \left(2t - \frac{10}{3!} t^3 + \frac{50}{5!} t^5 - \frac{250}{7!} t^7 + \frac{1250}{9!} t^9 - \dots \right) \\
&= e^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-5)^n t^{2n}}{(2n)!} \right) + e^x \left(\frac{2\sqrt{5}}{5} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(5^{\frac{1}{2}+n} \right) t^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) \\
&= e^x \cos(\sqrt{5}t) + e^x \frac{2\sqrt{5}}{5} \sin(\sqrt{5}t)
\end{aligned}$$

وهو الحل الدقيق للمسألة، وهو الحل نفسه الذي تم الحصول عليه باستخدام طريقتي ADM و VIM المجهنتين مع تحويل لابلاس في المرجع (Yindoula and Nganga, 2023).

الجدول (19): مقارنة عددية بين الحل الدقيق للمثال (32) والحل الناتج عن تطبيق طريقة Anuj-ADM باستخدام 5 تكرارات
عندما $t = 0.1$

x	Exact Solution	Anuj-ADM Solution	Absolute Error of $ (\text{Exact Solution}) - (\text{Anuj-ADM Solution}) $
0	1.1734414883	1.1734414883	8.8×10^{-14}
0.1	1.2968534069	1.2968534069	9.7×10^{-14}
0.2	1.4332446703	1.4332446703	1.0×10^{-13}
0.3	1.5839803281	1.5839803281	1.2×10^{-13}
0.4	1.7505689934	1.7505689934	1.3×10^{-13}
0.5	1.9346779416	1.9346779416	1.4×10^{-13}
0.6	2.1381497969	2.1381497969	1.6×10^{-13}
0.7	2.3630209740	2.3630209740	1.7×10^{-13}
0.8	2.6115420593	2.6115420593	2.0×10^{-13}
0.9	2.8862003353	2.8862003353	2.2×10^{-13}
1	3.1897446743	3.1897446743	2.4×10^{-13}

المصدر: تم إعداده باستخدام برنامج Mathematica 12.0



المصدر: تم إعداده باستخدام برنامج Mathematica 12.0

الشكل (20): مقارنة بيانية بين الحل الدقيق للمثال (32) والحل الناتج عن تطبيق طريقة Anuj-ADM باستخدام 5 تكرارات
عندما $t = 0.1$

3-8 مقارنة عامة بين طريقتي ADM و Anuj-ADM الهجينة

الجدول (20): يبين مقارنة عامة بين طريقتي ADM و Anuj-ADM الهجينة

طريقة ADM	طريقة Anuj-ADM	جانب المقارنة
معادلات تفاضلية (عادية وجزئية)، ومعادلات تكاملية، ومعادلات تفاضلية-تكاملية، في الحالتين الخطية وغير الخطية	معادلات تفاضلية (عادية وجزئية)، ومعادلات تكاملية، ومعادلات تفاضلية-تكاملية، في الحالتين الخطية وغير الخطية	نوع المعادلات المدروسة
تعتمد على تطبيق المؤثر العكسي (مؤثر التكامل) على المعادلة، وفرض الحل على شكل متسلسلة غير منتهية، مع تمثيل الحدود غير الخطية باستخدام كثيرات حدود أدوميان، وأخيراً تطبيق Anuj العكسي للحصول على حدود متسلسلة الحل.	تعتمد على تطبيق تحويل Anuj على المعادلة بهدف تبسيطها وتحويلها إلى صيغة يسهل التعامل معه، ثم تطبيق طريقة ADM بفرض الحل على شكل متسلسلة غير منتهية، وتمثيل الحدود غير الخطية بكثيرات حدود أدوميان، وأخيراً تطبيق Anuj العكسي للحصول على حدود متسلسلة الحل.	آلية الطريقة
طريقة فعالة، لكنها تتطلب إجراء تكاملات وعمليات حسابية معقدة.	أكثر فعالية وسهولة في التطبيق، ولا تتطلب إجراء تكاملات، إذا يعمل تحويل Anuj على تبسيط خطوات الحل بشكل كبير.	الفعالية والأداء
تعطي حلولاً دقيقة أو تقريبية بحسب طبيعة المسألة وعدد التكرارات.	تعطي نفس حلول ADM مع الحفاظ على دقة الحل	نوع الحلول الناتجة

نتائج الفصل الثالث:

لقد تبين من خلال تطبيق طريقة تحليل أدوميان ADM على مجموعة متنوعة من الأمثلة، شملت مسائل القيم الابتدائية للمعادلات التفاضلية العادية الخطية وغير الخطية، والمعادلات التكاملية والتفاضلية-التكاملية من نوع فولتيرا الخطية وغير الخطية، إضافةً إلى المعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطية مع شروط ابتدائية، فعالية ADM في الحصول على حلول دقيقة للمسائل المدروسة، فضلاً عن فعالية طريقة أدوميان المعدلة MDM في حل مسائل القيم الحدية للمعادلات التفاضلية العادية غير الخطية، والحصول على حلول تقريبية ذات دقة عالية باستخدام عدد قليل من التكرارات مقارنةً بالحلول الدقيقة.

وأخيراً، أثبتت الطريقتان Anuj-ADM و Anuj-MDM فعاليتهما في تحسين أداء طريقتي ADM و MDM، عبر تقليل التعقيد الحسابي والاستغناء عن إجراء التكاملات، مما أدى إلى تسريع عملية الوصول إلى الحل النهائي مع الحفاظ على دقته.

الفصل الرابع: الخاتمة والرؤى المستقبلية

4-1 الخاتمة والاستنتاجات:

تم في هذه الرسالة دراسة كلٍ من طريقة التحويل التفاضلي DTM، وطريقة التحويل التفاضلي المختزلة RDTM، وطريقة تحليل أدوميان ADM مع توضيح أهمية هذه الطرائق وفعاليتها، وقد تجلت هذه الأهمية من خلال النتائج الدقيقة التي تم الحصول عليها عند تطبيق هذه الطرائق في حل عدد من المسائل المتنوعة، والتي يتضمن بعضها معادلات تفاضلية وتكاملية ذات أهمية كبيرة في المجالات الفيزيائية والهندسية.

وللتغلب على بعض الصعوبات التي تواجه تطبيق بعض هذه الطرائق، اقترحنا طريقتين هجينتين جديدتين، وهما:

(1) طريقة He-RDTM: تعتمد هذه الطريقة على دمج طريقة RDTM مع كثيرات حدود He، بهدف التغلب

على صعوبة التعامل مع الحالات اللاخطية في RDTM.

وقد أثبتت طريقة He-RDTM فعاليتها في تحسين أداء طريقة RDTM من خلال:

- تبسيط التعامل مع الحدود غير الخطية وسهولة تنفيذها برمجياً.

- تقليل العمليات الحسابية، وتوفير الوقت والجهد، وتسريع عملية الوصول إلى الحل النهائي مع المحافظة على دقته.

(2) طريقة Anuj-ADM: تعتمد هذه الطريقة على دمج طريقة ADM مع تحويل Anuj التكاملي، بهدف التغلب

على مشكلة التعقيد الحسابي في ADM.

وقد أثبتت طريقة Anuj-ADM فعاليتها في تحسين أداء طريقة ADM من خلال:

- تبسيط خطوات الحل.

- تقليل الجهد الحسابي، وإلغاء الحاجة لإجراء التكاملات.

- تسريع عملية الوصول إلى الحل النهائي مع الحفاظ على دقته.

انقسم العمل في هذه الرسالة إلى فصول ثلاثة:

في الفصل الأول عرضنا بعض المفاهيم والتعاريف الأساسية المتعلقة بالمعادلات التفاضلية والتكاملية والتفاضلية-التكاملية.

أما الفصلان الثاني والثالث، فقد خُصصا لدراسة الطرائق DTM و RDTM و ADM، بالإضافة إلى الطريقتين الهجينتين المقترحتين He-RDTM و Anuj-ADM، وذلك من خلال عرض الأسس والمفاهيم الأساسية التي تعتمد عليها كل طريقة، وبيان آلية تطبيقها، بالإضافة إلى استخدامهما في تطبيقات متعددة شملت أمثلة على مسائل خطية وغير خطية.

وأظهرت النتائج في معظم المسائل المدروسة تقارب الحلول الناتجة إلى الحل الدقيق، مع إمكانية التعرف على الحل الدقيق من خلال إجراء عدد قليل من التكرارات، أما في الحالات التي لم نستطع فيها الوصول إلى الحل الدقيق، فقد قدمت هذه الطرائق حلولاً تقريبية ذات دقة عالية مقارنةً بالحل الدقيق.

وتم عرض هذه النتائج والمقارنات في جداول ورسوم بيانية باستخدام برنامج Mathematica 12.0.

4-2 التوصيات والأعمال المستقبلية:

استناداً إلى النتائج التي تم التوصل إليها في هذا البحث، نوصي في الأعمال القادمة بما يلي:

- العمل على تطوير الطرائق المدروسة DTM و RDTM و ADM، بالإضافة إلى الطريقتين الهجينتين He-RDTM و Anuj-ADM، بهدف توسيع نطاق تطبيقها ليشمل أنواعاً أخرى من المعادلات التفاضلية، مثل المعادلات التفاضلية العادية والجزئية ذات المراتب الكسرية.
- العمل على إجراء مقارنة شاملة بين هذه الطرائق، بهدف تحديد أفضل الطرائق وأكثرها فعالية في حل المعادلات التفاضلية ذات المراتب الكسرية.

الملحق (A):

• الكود البرمجي المعمم لكثيرات حدود He في برنامج Mathematica 12.0

```

Clear["Global`*"]
(*1. CONFIGURATION*)
(*This represents (Insert Nonlinear Function Here*)
targetFunction=(Insert the symbolic representation of the
function Here)&;
nTerms=m;
(*2. COMPUTATION*)
yP=Sum[y[k][x]*p^k,{k,0,nTerms}];
expr=targetFunction[yP];
helist=Table[Simplify[(1/k!)*D[expr,{p,k}]/.p-
>0],{k,0,nTerms-1}];
(*3. CLEANING& FORMATTING*)
formatHe[expression_]:=expression/.{Derivative[d_][y[k_
]][x]:>Row[{Superscript[Subscript["Y",k],StringJoin[Tab
le["",{d}]]],"(x)"}],y[k_][x]:>Row[{Subscript["Y",k],"(x
)"}]};
(*4. DISPLAY RESULTS*)
Print[Style["He Polynomials for: Nonlinear
Function"),Bold,18]];
Print["-----"];
Do[Print[Style[Subscript["H",k],Red,16,Bold],Style[" =
",16,Bold],Style[formatHe[helist[[k+1]]],16]],{k,0,Length
[helist]-1}]

```

المصدر: تم إعداده باستخدام برنامج Mathematica 12.0

- مثال (1): حساب كثيرات حدود He للدالة غير الخطية $y^2(x, t)$

```

In[90]:= Clear["Global`*"]
(*1. CONFIGURATION*)
(*This represents (y^2(x,t)*)
targetFunction = (#^2) &;
nTerms = 6;
(*2. COMPUTATION*)
yP = Sum[y[k][x] * p^k, {k, 0, nTerms}];
expr = targetFunction[yP];
helist = Table[Simplify[(1/k!) * D[expr, {p, k}] /. p -> 0],
  {k, 0, nTerms - 1}];
(*3. CLEANING& FORMATTING*)
formatHe[expression_] :=
  expression /. {Derivative[d_][y[k_]][x] ->
    Row[{Superscript[Subscript["Y", k],
      StringJoin[Table["", {d}]]], "(x)"]},
    y[k_][x] -> Row[{Subscript["Y", k], "(x)"}]};
(*4. DISPLAY RESULTS*)
Print[Style["He Polynomials for: y^2(x,t)", Bold, 18]];
Print["-----"];
Do[Print[Style[Subscript["H", k], Red, 16, Bold],
  Style[" = ", 16, Bold], Style[formatHe[helist[[k + 1]]], 16]],
  {k, 0, Length[helist] - 1}]
He Polynomials for: y^2(x,t)
-----
H0 = Y0(x)2
H1 = 2 Y0(x) Y1(x)
H2 = Y1(x)2 + 2 Y0(x) Y2(x)
H3 = 2 (Y1(x) Y2(x) + Y0(x) Y3(x))
H4 = Y2(x)2 + 2 Y1(x) Y3(x) + 2 Y0(x) Y4(x)
H5 = 2 (Y2(x) Y3(x) + Y1(x) Y4(x) + Y0(x) Y5(x))

```

• مثال (2): حساب كثيرات حدود He للدالة غير الخطية $y^3(x, t)y_x(x, t)$

```

● Clear["Global`*"]
(*1. CONFIGURATION*)
(*This represents (y^3(x,t)*y'(x,t))*
targetFunction = (#^3 * D[#, x]) &;
nTerms = 6;
(*2. COMPUTATION*)
yP = Sum[y[k][x] * p^k, {k, 0, nTerms}];
expr = targetFunction[yP];
helist =
  Table[Simplify[(1/k!) * D[expr, {p, k}] /. p -> 0], {k, 0, nTerms - 1}];
(*3. CLEANING & FORMATTING*)
formatHe[expression_] :=
  expression /. {Derivative[d_][y[k_]][x] -> Row[{Superscript[
    Subscript["Y", k], StringJoin[Table["", {d}]]], "(x)"]],
    y[k_][x] -> Row[{Subscript["Y", k], "(x)"]}}];
(*4. DISPLAY RESULTS*)
Print[Style["He Polynomials for: y^3(x,t)*y'(x,t)", Bold, 18]];
Print["-----"];
Do[Print[Style[Subscript["H", k], Red, 16, Bold],
  Style[" = ", 16, Bold], Style[formatHe[helist[[k + 1]]], 16]],
  {k, 0, Length[helist] - 1}]
He Polynomials for: y^3(x,t)*y'(x,t)
-----
H0 = Y0(x)3 Y0'(x)
H1 = Y0(x)2 (3 Y1(x) Y0'(x) + Y0(x) Y1'(x))
H2 = Y0(x) (3 Y1(x)2 Y0'(x) +
  3 Y0(x) Y1(x) Y1'(x) + Y0(x) (3 Y2(x) Y0'(x) + Y0(x) Y2'(x)))
H3 = (Y1(x)3 + 6 Y0(x) Y1(x) Y2(x) + 3 Y0(x)2 Y3(x)) Y0'(x) +
  3 Y0(x) (Y1(x)2 + Y0(x) Y2(x)) Y1'(x) + 3 Y0(x)2 Y1(x) Y2'(x) + Y0(x)3 Y3'(x)
H4 = 3 (Y1(x)2 Y2(x) + 2 Y0(x) Y1(x) Y3(x) + Y0(x) (Y2(x)2 + Y0(x) Y4(x)))
  Y0'(x) + (Y1(x)3 + 6 Y0(x) Y1(x) Y2(x) + 3 Y0(x)2 Y3(x)) Y1'(x) +
  3 Y0(x) (Y1(x)2 + Y0(x) Y2(x)) Y2'(x) + 3 Y0(x)2 Y1(x) Y3'(x) + Y0(x)3 Y4'(x)
H5 = 3 (Y1(x)2 Y3(x) + Y1(x) (Y2(x)2 + 2 Y0(x) Y4(x)))
  Y0(x) (2 Y2(x) Y3(x) + Y0(x) Y5(x)) Y0'(x) +
  3 (Y1(x)2 Y2(x) + 2 Y0(x) Y1(x) Y3(x) + Y0(x) (Y2(x)2 + Y0(x) Y4(x)))
  Y1'(x) + (Y1(x)3 + 6 Y0(x) Y1(x) Y2(x) + 3 Y0(x)2 Y3(x)) Y2'(x) +
  3 Y0(x) (Y1(x)2 + Y0(x) Y2(x)) Y3'(x) + 3 Y0(x)2 Y1(x) Y4'(x) + Y0(x)3 Y5'(x)

```

(دليل المصطلحات العلمية)

English

عربي

A	
Accuracy	دقة
Adomian Decomposition Method	طريقة تحليل أدوميان
Adomian Polynomials	كثيرات حدود أدوميان
Anuj Transform	تحويل Anuj
Analytical–Approximate Methods	طرائق تحليلية-تقريبية
Approximate Solution	حل تقريبي
Absolute Error	خطأ مطلق
B	
Boundary Values Proplem	مسألة قيم حدية
Boundary Condition	شرط حدي
C	
Code	كود
Coefficients	معاملات
Combine	دمج
Comparison	مقارنة
Concept	مفهوم
Constant	ثابت
Convolution	التفاف
D	
Degree	درجة
Differential	تفاضل (اشتقاق)
Differential Equation	معادلة تفاضلية
Differential Transform	تحويل تفاضلي
Differential Transform Method	طريقة التحويل التفاضلي
E	
Equation	معادلة

Exact Solution	حل دقيق
Exponential Order	مرتبة أسية
F	
Figure	شكل
Finite	منتهي
Formula	صيغة
Function	دالة - تابع
H	
He Polynomials	كثيرات حدود He
Homogeneous	متجانس
Hybrid Method	طريقة هجينة
I	
Inhomogeneous	غير متجانس
Initial Condition	شرط ابتدائي
Initial Values Problem	مسألة قيم ابتدائية
Integral	تكامل
Integral Equations	معادلات تكاملية
Integro-Differential Equations	معادلات تفاضلية-تكاملية
Inverse Anuj Transform	تحويل Anuj العكسي
Infinite	غير منتهي
Infinite Series	متسلسلة غير منتهية
L	
Linear	خطي
M	
Method	طريقة
Model	نموذج
Modification	تعديل
N	
Nonlinear	غير خطي
Number	عدد

O	
Operator	مؤثر
Order	مرتبة
Ordinary Differential Equation	معادلة تفاضلية عادية
P	
Paramerter	وسيط
Partial Differential Equation	معادلة تفاضلية جزئية
Piecewise Continuous	استمرار قطعي (مقطعي)
Property	خاصية
Problem	مسألة
Programming Code	كود برمجي
R	
Reduced Differential Transform Method	طريقة التحويل التفاضلي المختزلة
S	
Series	متسلسلة
Solution	حل
Sum	مجموع
T	
Table	جدول
Term	حد
Transform	تحويل
V	
Value	قيمة

قائمة المراجع العلمية

1. العويضي، حسن، ورجب، عبد الوهاب، وزارع، سناء. (د.ت.). المعادلات التفاضلية. ج: 1. ص: 316.
2. العويضي، حسن، ورجب، عبد الوهاب، وزارع، سناء. (د.ت.). المعادلات التفاضلية. ج: 2. ص: 315.
3. المنصور، علا. (2025). تعديل طريقة تحليل أدوميان باستخدام تحويل AMJ لحل معادلة شرودنغر الخطية وغير الخطية. مجلة جامعة حماة. مج: 7. عدد: 25. حماة: سورية. جامعة حماة.
4. Adomian, G. (1980). Stochastic systems analysis. In Applied Stochastic Processes. pp: 1-17.
5. Adomian, G. (2013). Solving frontier problems of physics: the decomposition method. Springer Science & Business Media. p: 354.
6. Alkarawi, A. H., & Al-Saiq, I. R. (2021). Adomian decomposition method applied to Klien Gordon and nonlinear wave equation. Journal of Interdisciplinary Mathematics. 24(5). pp: 1149-1157.
7. Al-Tai, M. H. and Al-Fayadh, A. (2021). Solving Two Dimensional Coupled Burger's Equations and Sine-Gordon Equation Using El-Zaki Transform-Variational Iteration Method. Al-Nahrain of Journal Science. 24(2). pp: 41-47.
8. Aminikhah, H. (2013). Approximate analytical solution for quadratic Riccati differential equation. Iranian J. of Numerical Analysis and Optimization. 3(1). pp:21-31.
9. Ansari, A., Ahmad, N., & Ali, A. H. (2024). Numerical Study of the Series solution method to analysis of Volterra integro-differential equations. Journal of applied mathematics & informatics. 42(4). pp: 899-913.
10. Comfort, S. M., Mahwash, K. N., & Sunday, J. (2025). A Novel Algorithm for Solving Fredholm Integro-Differential Equations Using Lucas Polynomials. Journal of Advances in Mathematics and Computer Science. 40(2). pp: 95-103.
11. Das, N. (2019). Study of properties of differential transform method for solving the linear differential equation. Asian Journal of Engineering and Applied Technology. 8(2). pp:50-56.

12. Haghbin, A., & Hesam, S. (2012). Reduced differential transform method for solving seventh order Sawada–Kotera equations. **The Journal of Mathematics and Computer Science**. 5(1). pp: 53–59.
13. Hesaaraki, M., & Jalilian, Y. (2008). A numerical method for solving nth–order boundary–value problems. **Applied mathematics and computation**. 196(2). pp: 889–897.
14. Hosseinzadeh, H., & Salehpour, E. (2013). Reduced differential transform method for solving partial differential equations. **Iranian Conference on Applied Mathematics**. pp: 608–611.
15. Hussin, C. H. C., & Mandangan, A. (2014). Solving eighth–order boundary value problems using differential transformation method. **American Institute of Physics**. 1635(1). pp: 99–106.
16. Jothika, k., Savitha, S. (2018). Solving Volterra integral equations by using differential transform method. **International Journal of Engineering Development and Research**. 6(3). pp: 592–595.
17. Kasi, K. N. S., & Raju, Y. S. (2012). Quintic B–spline collocation method for tenth order boundary value problems. **International Journal of Computer Applications**. 51(15). pp: 7–13.
18. Keskin, Y., & Oturanc, G. (2009). Reduced differential transform method for partial differential equations. **International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation**. 10(6). pp: 741–750.
19. Keskin, Y., Caglar, I., & Koç, A. B. (2011). Numerical solution of sine–Gordon equation by reduced differential transform method. **Proceedings of the World Congress on Engineering**.
20. Kumar, A., Bansal, S., & Aggarwal, S. (2022). A new novel integral transform "Anuj Transform" with application. **Design Engineering**. Issue (9). pp:12741–12751.
21. Larson, R., Edwards, B. H. (2009). **Calculus of a Single Variable**. United States: Brooks Cole. p: 832.
22. Mishra, K. H., & Nagar, A. K. (2012). He-Laplace method for linear and nonlinear partial differential equations. **Journal of Applied Mathematics**. 2012(1).

23. Mohyud-Din, S. T. (2009). Solving Heat and Wave-Like Equations Using He' s Polynomials. **Mathematical Problems in Engineering**. 2009(1).
24. Mundewadi, R. A., & Jummanner, R. B. (2024). A novel approach for the numerical solution of nonlinear Fredholm integral equations using Hosoya polynomial method. **International Journal of Mathematics and Computer in Engineering**. 3(2). pp: 137–152.
25. Naghshband, S., & Araghi, M. A. F. (2018). Solving generalized quintic complex Ginzburg–Landau equation by homotopy analysis method. **Ain Shams Engineering Journal**. 9(4). pp: 607–613.
26. Nimra, N., Wang, T., Yasin, F., Kebaili, I., Arshad, M., Boukhris, I., Alomayrah, N., Al-Buriahi, M. S., & Sesay, M. (2025). Dynamics and stability of soliton solutions for the seventh–order Sawada–Kotera–Ito equation with applications. **Scientific Reports**. 15(1).
27. Olotu, O. T., Salaudeen, K. A., Folaranmi, R. O., Omole, E. O., & Odetunde, O. (2025). An In–Depth Study on The Application of The Differential Transform Method for Effectively Solving Various–Order Ordinary Differential Equations. **Fudma Journal Of Sciences**. 9(4). pp: 347–356.
28. Opanuga, A. A. (2017). Modified Adomian decomposition method for thirteenth order boundary value problems. **Gazi University Journal of Science**. 30(4). pp: 454–461.
29. Opanuga, A. A., Edeki, S., Okagbue, H. I., & Akinlabi, G. (2015). A novel approach for solving quadratic Riccati differential equations. **International Journal of Applied Engineering Research**. 10(11). pp: 29121–29126.
30. Patil, D. P., Shinde, P. D., & Tile, G. K. (2022). Volterra integral equations of first kind by using Anuj transform. **International Journal of Advances in Engineering and Management**. 4(5). pp: 917–920.
31. Rasedee, A. F. N., Abdul Sathar, M. H., Othman, K. I., Hamzah, S. R., & Ishak, N. (2021). Approximating non linear higher order ODEs by a three point block algorithm. **Plos one**. 16(2).
32. Rashdi, H., & Mahmoud, A. B. (2022). A New Application of Anuj Transform for Solving Partial Differential Equations. **Journal of Humanitarian and Applied Sciences**. 7(13). pp: 409–417.
33. Reid, W. T. (1972). **Riccati differential equations**. Academic press. p: 86.

34. Sadaf, M., & Akram, G. (2017). An improved adaptation of homotopy analysis method. **Mathematical Sciences**. 11(1). pp: 55–62.
35. Shah, N. H., K. Naik, M. (2022). **Integral Transforms and Applications**. Germany: De Gruyter. p: 282.
36. Singh, I., & Kaur, P. (2024). Double Elzaki Decomposition Method For Solving Pdes Arising During Liquid Drop Formations. **Journal of Mechanics of Continua and Mathematical Sciences**. 19(11). pp: 44–55.
37. Stroud, K. A., Booth, D. J. (2005). **Differential Equations**. United States: Industrial Press. p: 408.
38. Sumiati, I., Rusyaman, E., Sukono, S., & Bon, A. T. (2019). A review of adomian decomposition method and applied to deferential equations. **In Proceedings of the International Conference on Industrial Engineering and Operations Management**. pp: 1328–1338.
39. Wazwaz, A. M. (1999). A reliable modification of Adomian decomposition method. **Applied mathematics and computation**. 102(1). pp: 77–86.
40. Wazwaz, A. (2010). **Partial Differential Equations and Solitary Waves Theory**. Germany: Higher Education Press. p: 741.
41. Wazwaz, A. (2011). **Linear and Nonlinear Integral Equations: Methods and Applications**. Germany: Higher Education Press. p: 639.
42. Yindoula, J. B. & Nganga, G. D. (2023). Comparison of Laplace–Adomian’s Decomposition Method and Laplace Variational Iteration Method in Nonlinear Boussinesq Equation. **Advances in Mathematics: Scientific Journal**. 12(10) . pp: 921–940.
43. Zhou, J. K. (1986). Differential transformation and its applications for electronic circuits. **Huazhong Science & Technology University Press**. China.

Abstract

This thesis investigates some analytical–approximate methods for solving differential equations of both ordinary and partial types, integral equations, and integro–differential equations. Particular emphasis is placed on studying the Differential Transform Method (DTM), the Reduced Differential Transform Method (RDTM), and the Adomian Decomposition Method (ADM), including the presentation of the theoretical foundations of each method and the mechanism of their application.

To address the difficulties associated with applying some of these methods, particularly ADM and RDTM, especially concerning the treatment of nonlinear terms and computational complexity, this thesis proposes two novel hybrid methods: the He–RDTM method, which combines RDTM with He polynomials to simplify handling nonlinear terms, and the Anuj–ADM method, which combines ADM with the Anuj integral transform, aiming to reduce computational complexity and eliminate the need for performing integrations.

The studied methods and the two proposed hybrid methods were applied to a variety of linear and nonlinear problems encompassing ordinary and partial differential equations, integral equations, as well as integro–differential equations. For most of the studied problems, the solutions obtained by applying these methods converge to the exact solution after a few iterations. In cases where the exact solution could not be reached, these methods provided highly accurate approximate solutions compared to the exact solution. This comparison was performed using tables and graphical figures based on Mathematica 12.0.

A general comparison was also made between the proposed hybrid methods and the original methods derived from them, and the results showed the effectiveness of the He–RDTM and Anuj–ADM methods in improving the performance of the RDTM and ADM methods by simplifying the handling of nonlinear cases, facilitating the solution steps, reducing computational complexity, and accelerating the process of reaching the final solution while maintaining its accuracy.

Key words: DTM Method, RDTM Method, He Polynomials, He–RDTM Method, ADM Method, Anuj Transform, Anuj–ADM Method, Ordinary Differential Equation, Partial Differential Equation, Integral Equation, Integro–Differential Equation, Initial Values Problem, Boundar Values Problem.

**Syrian Arab Republic
Damascus University
Faculty of Sciences
Department of Mathematics**



**Solutions of Some Differential and Integral Equations, Case Study:
Study about Two Methods " ADM–DTM " to Solve some Differential
and Integral Equations**

**A dissertation submitted in partial fulfillment of the
requirements for the degree of Master in Mathematical Analysis**

by

Ola Almansour

Supervision:

Dr. Khalil Yahya

Professor at the Faculty of Sciences, Damascus University

(2026)

International Mathematics Classification

34A45, 35A22, 45J05, 65R20

