الجمهورية العربية السورية
جامعة دمشق
كلية العلوم
قسم الرياضيات

نَظريَّة الجُبور، حالة دراسِية: جَبر رامزي

رِسالَةٌ أُعِدَّت لِنَيل دَرَجةِ المَاجستيرِ في الرياضيات (الجَبرِ والهَندسةِ)

إعداد:

حنان عبد المنعم الجنادي

إشراف:

د. جبران جبران

أستاذ مدرس في قسم الرياضيات– كلية العلوم– جامعة دمشق

2026

الإهداء

إلى من علمني أن الحلم لا يستحال.... **إلى أبي**
يا سندي الأول، ويدي التي لم تتركني يوماً أهديك ثمرة جهدي هذا، عرفاناً بجميلك الذي لا يُوفى فما أنا إلا غُرس يديك، وما نجاحي إلا دعوةٌ صادقةً منك في جوف الليل .
"أبي الغالي هذا الإنجاز باسمك وحدك" .

إلى ذلك القلب الذي كان حاضراً دائماً، من كان في قلبي نوراً يهديني مانحاً لقب البروفيسور بكل كلمةِ دعمٍ كانت في ضعفي تُحييني، برفقة يدٍ امتدت بصدقٍ لِتُعينَني وتقويني .

إليكم **عائلتي** أمي العزيزة وزهرات حياتي اختاي نرفت والمهندسة إسراء وإلى صديقي الحبيب أخي محمد وإليك أخي الكبير حسام.

إلى من رسم الضحكة بوجهي أولاد اخوتي عمر ومالك ومحمد.

إليكم أقاربي الأحباء فأنتم كنتم الضوء في وسط الظلام وإليكن طالباتي العزيزات.

"إلى صديقتاي وشريكتا رحلتي رغد وشهد كنتنّ نِعمَ صحبةٍ لا تقدر بثمن**".**

أحبكم جميعاً.

حَنان.

شكر وتقدير

قال تعالى:{ ربّ أوزعني أن أشكرَ نعمتكَ التي أنعمتَ عليّ وعلى والديّ وأن أعملَ صالحاً تَرْضٰه}

يا رب لك الحمد على ما أنعمت ويسرت ووهبت.

أتقدم بخالص الشكر والثناء لكل من ساعد في إنجاح هذه الرسالة كما وأخص بالشكر:

أستاذي ومشرفي **الدكتور جبران جبران** لقبوله الإشراف على هذا البحث وإمدادي بالتوجيهات اللازمة ومتابعته له منذ الخطوات الأولى وحتى مراحله المتقدمة.

وأخص بالشكر **الدكتور شوقي الراشد** فقد كان له الدور الأبرز والسبب الحقيقي بعد الله في قراري لمواصلة دراسة الماجستير فجزاه الله خير الجزاء وبارك فيه.

وكل الشكر **لـ الدكتور حمزة حاكمي** الذي مدّ يد العون لي ومنحني من وقته الثمين وعلمه وإرشاده وقبوله التحكيم على هذه الرسالة.. لكَ امتناني ما حييت.

وشكري وتقديري . **لـ الدكتور فراس الحلبي** رئيس قسم الرياضيات لملاحظاته القيّمة ولتقديمه النصائح والتوجيهات.

وأتقدم بشكري لكل أساتذتي في قسم الرياضيات فلهم فضلٌ فيما أنا فيه الآن.

فهرس المحتويات

الفصل الأول: مفاهيم أساسيّة 12

1-1- مَفاهيمٌ أساسيَّة في الجبر 13

1-1-1. العلاقات 13

1-1-2. الترتيبات 14

1-1-3. الدوال 14

1-1-4. القدرات 15

1-1-5. الجبر الشامل 16

1-1-6. الجبر الجزئي 19

1-1-7. المتتاليات 21

1-2- مفاهيم أساسية في نظرية البيان 24

1-3- مفاهيم أساسيّة في الطوبولوجيا 29

1-3-1. الطوبولوجيا والفضاءات الطوبولوجية 29

1-3-2. القواعد والقواعد الجزئية الطوبولوجية 31

1-3-3. جمل الجوارات الأساسية 33

1-3-4. التطبيقات المستمرة 35

1-3-5. الفضاءات الجزئية وفضاءات الجداء..... 35

1-3-6. فضاءات الجداء 37

1-3-7. أنواع من الفضاءات 39

الفصل الثاني: نظرية رامزي 41

2-1- لنشأة نظرية رامزي 42

2-2- مبدأ برج الحمام:$(Pigeonhole\ Principle)$ 44

2-3- مبدأ برج الحمام المعمم..... 46

2-4- مسألة كلاين: $(Esther\ Klein)$..... 48

2-5- مسألة الأصدقاء والغرباء: $(Friends\ and\ Stranger)$ 50

2-6- نظرية رامزي ونظرية البيان 52

2-7- نظرية فان دير فاردين: $(Van\ der\ Waerden's\ Theorem)$ 69

2-8- نظرية شور: $(Schur's\ Theorem)$ 72

2-9- نظرية رادو:$(\ Rado's\ Theorem)$ 74

الفصل الثالث: جبر رامزي 77

3-1- نظرية هندمان $(Hindman's\ theorem)$ 79

3-2- تعميم مبرهنة هندمان لأنصاف الزمر: 84

3-3- جبر رامزي 98

الفصل الرابع: فضاء رامزي 108

4-1- نظرية إيلينتوك $(Ellentuck\ Theorem)$.....109

4-2- فضاء رامزي..... 112

4-3- فضاء رامزي المولد من جبر رامزي $(Ramsey\ Space\ from\ Ramsey\ Algebra)$ 121

الفصل الخامس: أعداد رامزي 128

5-1- استيفاء لأعداد رامزي 130

الخاتمة: .....

المصطلحات العلمية .....,.....

المراجع .....

قائمة الأشكال

رقم الشكل	الموضوع	رقم الصفحة
$(1-1)$	عقد وأضلاع البيان G	25
$(2-1)$	بيانات منتظمة	27
$(3-1)$	بيانات تامة	28
$(1-2)$	الغلاف المحدب	49
$(2-2)$	تلوين ضلعي للبيان التام K_6	53
$(3-2)$	بيان تام k_5.	54
$(4-2)$	جدول أعداد رامزي المعروفة $R(r,s)$	56
$(5-2)$	جدول بعض الحدود المعروفة لأعداد رامزي $R(r,s)$	57
$(6-2)$	تلوين البيان التام K_{16}.	60
$(7-2)$	تمثيل تخطيطي لاختيار العنصر a_1 وفق تلوين رامزي	62
$(8-2)$	تمثيل تخطيطي لخطوة استقرائية في البناء الرامزي	63
$(9-2)$	تمثيل تخطيطي لاختيار عنصر في مجموعة غير منتهية	63
$(10-2)$	تمثيل تخطيطي لتكون متتالية متجانسة	64
$(11-2)$	تمثيل تخطيطي لظهور مجموعة غير منتهية أحادية اللون	65
$(12-2)$	جدول أعداد فان الشهيرة.	72
$(13-2)$	جدول أعداد شور	73

الملخص

ملخص رسالة أعدت لنيل درجة الماجستير في الرياضيات (اختصاص الجبر والهندسة)

بعنوان:

نظرية الجبور، حالة دراسية: جبر رامزي

إعداد: حنان الجنادي ... إشراف: د. جبران جبران

تقدّم هذه الرسالة دراسةً جبريةً منظَّمة لمفهوم **جبر رامزي** بوصفه أحد المفاهيم الحديثة المتفرعة عن نظرية رامزي في التوافقيات، مع إبراز علاقاته بالنتائج الكلاسيكية في نظرية رامزي وبالبُنى الطوبولوجية التي تُعرف بفضاءات رامزي. تأتي أهمية هذا العمل من كون موضوع جبر رامزي لم يُقدَّم بصورة مرجعية متكاملة ضمن بحوث قسم الرياضيات في جامعة دمشق، ولذلك يهدف البحث إلى بناء أساس تعريفي ومنهجي يسمح للطالب والباحث بالانتقال من نظرية رامزي إلى جبر رامزي ثم إلى فضاءات رامزي بصورة سلسة ومترابطة.

تبدأ الرسالة بتجهيز الخلفية اللازمة عبر عرض مفاهيم أساسية مختارة من نظرية البيان والجبر والطوبولوجيا، ثم تنتقل إلى نظرية رامزي بصيغتيها المنتهية وغير المنتهية، مع التركيز على **أعداد رامزي** وبعض المبرهنات المحورية ذات الصلة (مثل مبرهنة شور، ومبرهنة فان دير فاردن، ومبرهنة رادو). بعد ذلك نعرض بناء مفهوم **جبر رامزي** بالاستناد إلى نتائج تمهيدية من نمط مبرهنة هندمان (مجاميع منتهية وجداءات منتهية) وصولًا إلى التعريفات الأساسية والخصائص التي تميز هذا الصنف من الجبر. كما تتناول الرسالة في فصل مستقل مفهوم **فضاء رامزي** عبر نظرية إيلينتوك وطوبولوجيا إيلينتوك، وتنتهي بعرض مبرهنات تربط – على مستوى البنية والخواص – بين جبر رامزي وفضاء رامزي.

وفي الفصل الأخير تُطرح محاولةٌ تطبيقيةٌ تتمثل في **استيفاء/تقريب أعداد رامزي** عبر اقتراح دالة تقريبية لحساب قيمها اعتمادًا على المعطيات الموثقة، مع مقارنة مخرجات التقريب بالقيم المعروفة في المراجع، وبيان حدود الدقة وإمكانات التطوير.

الكلمات المفتاحية: نظرية رامزي، أعداد رامزي، جبر رامزي، مبرهنة هندمان، طوبولوجيا إيلينتوك، فضاء رامزي، التقريب/الاستيفاء.

المقدمة

تُعدّ نظرية رامزي من الركائز الأساسية في التوافقيات الحديثة، إذ تعبّر – بصيغ متعددة – عن مبدأ عام مفاده أن البُنى الكبيرة لا بد أن تحتوي انتظامًا داخليًا مهما بدا "اللون" أو التقسيم عشوائيًا. ومن هذا المنطلق تطورت النظرية من نتائج كلاسيكية تتناول الحالات المنتهية إلى نظريات أعمق في السياق غير المنتهي، ثم اتسع مجالها ليشمل امتدادات جبرية وطوبولوجية تُظهر أن "الانتظام" ليس ظاهرةً توافقيّةً فقط، بل يمكن ترجمته إلى خصائص بنيوية داخل أنظمة جبرية أو ضمن طوبولوجيات خاصة.

ضمن هذا السياق ظهر مفهوم **جبر رامزي** ($\boldsymbol{Ramsey\ Algebra}$) كإطار جَبري يلتقط مضمون النتائج الرامزية داخل عمليات جبرية محددة، ويُبرز كيف يمكن لفرضيات من نمط رامزي أن تنعكس على سلوك التراكيب الجبرية الناتجة عن عمليات.

كما برز بالتوازي مفهوم **فضاء رامزي** ($\boldsymbol{Ramsey\ Space}$) الذي يقدّم لغة طوبولوجية لوصف الظواهر الرامزية باستخدام طوبولوجيات محددة مثل **طوبولوجيا إيلينتوك**، ما يسمح بصياغة نتائج تربط بين الانتظام وبين خصائص مجموعات لها طبيعة طوبولوجية.

تنطلق هذه الرسالة من حاجة علمية ومعرفية تتمثل في تقديم عرض مرجعي مترابط لمفهوم جبر رامزي وعلاقاته، وبشكل خاص ضمن بيئة بحثية لم يُتناول فيها هذا الموضوع بصورة منهجية كافية. لذلك جاء الهدف الرئيس للرسالة **:التعريف بجبر رامزي وبناء الجسر المفاهيمي الذي يربطه بكلٍ من نظرية رامزي وفضاءات رامزي**، مع إضافة محاولة تطبيقية في اتجاه استيفاء أعداد رامزي اعتمادًا على بيانات موثقة.

بنية الرسالة

تتألف الرسالة من خمسة فصول:

1. **الفصل الأول:** مفاهيم أساسية منتقاة من نظرية البيان والجبر والطوبولوجيا، تُستخدم لاحقًا كأدوات لغوية وتقنية لباقي الفصول.
2. **الفصل الثاني:** نظرية رامزي: لمحة تاريخية، الصيغة المنتهية وغير المنتهية، أعداد رامزي، إضافة إلى عرض مبرهنات محورية مثل شور وفان دير فاردن ورادو ضمن سياق يخدم الانتقال إلى المفاهيم اللاحقة.
3. **الفصل الثالث:** جبر رامزي: تمهيد عبر مبرهنة هندمان (المجاميع المنتهية والجداءات المنتهية)، ثم سلسلة تعريفات ونتائج تُفضي إلى صياغة مفهوم جبر رامزي وخصائصه الأساسية.
4. **الفصل الرابع:** فضاءات رامزي: بدءًا من نظرية إيلينتوك وطوبولوجيا إيلينتوك وصولًا إلى تعريف فضاء رامزي، مع مبرهنات تربط جبر رامزي بفضاء رامزي وتوضح نقاط الالتقاء بين المنهجين الجبري والطوبولوجي.
5. **الفصل الخامس:** أعداد رامزي: محاولة استيفاء/تقريب عبر دالة تقريبية تُقترح اعتمادًا على القيم الموثقة، مع مقارنة النتائج وبيان حدود المنهج المقترح.

مشكلة البحث:

تتمثل مشكلة البحث في **غياب عرض منهجي محلي** يقدّم مفهوم **جبر رامزي** ضمن سلسلة مترابطة تبدأ من نظرية رامزي وتنتهي بفضاءات رامزي، مع توضيح الروابط بين هذه الحقول الثلاثة، إضافة إلى الحاجة لاستكشاف إمكاناتٍ تطبيقية مرتبطة بـ **أعداد رامزي** من خلال التقريب اعتمادًا على المعطيات المعروفة.

تساؤلات البحث:

1. ما التعريف الدقيق لجبر رامزي، وما الشروط/الخصائص التي تميّزه جبريًا؟
2. كيف يُبنى الانتقال المفاهيمي من نتائج نظرية رامزي (وخاصة غير المنتهية) إلى جبر رامزي؟
3. ما الإطار الطوبولوجي لفضاءات رامزي، وكيف تُستخدم طوبولوجيا إيلينتوك في هذا السياق؟
4. ما طبيعة العلاقة بين جبر رامزي وفضاء رامزي، وما أهم المبرهنات التي تربطهما؟
5. إلى أي مدى يمكن اقتراح دالة تقريبية لاستيفاء أعداد رامزي اعتمادًا على القيم الموثقة، وما حدود الدقة المتوقعة؟

دراسات مرجعية:

ظهرت نظرية رامزي بعد فترة طويلة من عمل العالم فرانك رامزي 1930، حيث حظيت نظرية رامزي باهتمام واسع بوصفها أحد الأسس الجوهرية في التوافقيات الحديثة، لما لها من دور في إظهار البنى المنتظمة ضمن تراكيب تبدو عشوائية. وقد تطورت النظرية من نتائجها الكلاسيكية وأعداد رامزي إلى صيغ غير منتهية أكثر عمقًا. وأسهمت مبرهنة هندمان في نقلها إلى إطار أقرب للجبر من خلال ربط التجانس بالعمليات. كما وفرت مبرهنة إيلينتوك أساسًا طوبولوجيًا لتعميم هذه النتائج عبر مفهوم الفضاءات الرامزية، مما أكد مكانة نظرية رامزي كنظرية جامعة بين التوافقيات والجبر والطوبولوجيا.

منهج البحث وأدواته:

اعتمدت الرسالة منهجًا **تحليليًا استنباطيًا** يقوم على: بناء الخلفية النظرية اللازمة، تتبع تطور المفاهيم من نظرية رامزي إلى الجبر والطوبولوجيا، عرض البراهين والنتائج الأساسية بصورة مترابطة، ثم توظيف المعطيات الموثقة لأعداد رامزي لصياغة محاولة تقريبية ومناقشة نتائجها مقارنةً بالقيم المرجعية.

هدف البحث:

يهدف هذا البحث إلى دراسة جبر رامزي داخل بنية الجبر الشامل بناء على جبر نصف الزمرة وذلك انطلاقا من نظرية رامزي وصولا إلى فضاء رامزي والربط بينهما.

أهمية البحث:

تكمن أهمية هذا البحث في كون جبر رامزي مازال مجالاً حديثاً للبحث والدراسة، وفي قلة الباحثين عنه بالإضافة إلى قلة المراجع العربية أو حتى انعدامها ومن كونه يفتح أبواباً لدراساتٍ أخرى عن جبر رامزي.

مسوغات البحث ومحدوديته:

تنبع مسوغات هذا البحث من أهمية نظرية رامزي في فهم الحتمية التوافيقية داخل البنى الجبرية ومن الحاجة إلى عرض منظم يربط بين النتائج التوافقية والبنى الجبرية والطوبولوجية بما يساهم في سد فجوة في الأدبيات العربية وتوفير أساس يصلح لأبحاث لاحقة.

وتقتصر هذه الدراسة على الجانب النظري لنظرية رامزي وعلاقتها بالبنى الجبرية ضمن إطار الجبر الشامل، مع التركيز على مبرهنة هندمان وتعريف الجبر الرامزي وبعض نتائجه الأساسية، إضافةً إلى تقديم مدخل لفضاء إيلينتوك بوصفه إطاراً طوبولوجياً داعماً.

الفصلُ الأوّل

مفاهيمٌ أساسيّةٌ

Fundamental Concepts

1-1- مفاهيم أساسية في الجبر

1-1-1. العلاقات:

1-1-1-1. تعريف: [6]

لتكن A مجموعة ما، وليكن n عدد طبيعي، إن العلاقة من المرتبة n على المجموعة A هي مجموعة جزئية من A^n (أي مجموعة جزئية من الجداء الديكارتي).

إذا كانت $n = 2$ تُسمى: علاقة ثنائية على A.

1-1-1-2. تعريف: [3]

لتكن $\mathcal{P}$ علاقة ثنائية على المجموعة A:

- نقول عن العلاقة $\mathcal{P}$ أنها انعكاسية إذا تحقق الشرط: $\forall a \in A; a\mathcal{P}a$
- نقول عن العلاقة $\mathcal{P}$ أنها متعدية إذا تحقق الشرط: $\forall a, b, c \ ; a\mathcal{P}b \ , b\mathcal{P}c \implies a\mathcal{P}c$
- نقول عن العلاقة $\mathcal{P}$ أنها تخالفية إذا تحقق الشرط: $\forall a, b \in A \ ; a\mathcal{P}b \ \wedge b\mathcal{P}a \implies a = b$

1-1-1-3. تعريف: [3] [8]

لتكن $\leq$ علاقة على المجموعة A:

- نقول عن العلاقة $\leq$ أنها علاقة ترتيب شبه جزئي على المجموعة $(Preorder\ relation)$ إذا كانت انعكاسية ومتعدية.
- نقول عن العلاقة $\leq$ أنها علاقة ترتيب جزئي على المجموعة A $(Order\ relation)$ إذا كانت انعكاسية وتخالفية ومتعدية.
- نسمي المجموعة $(A, \leq)$ حيث $\leq$ علاقة ترتيب، مجموعة مرتبة.

1-1-2. الترتيبات: [3]

كل عدد طبيعي n يمثل ترتيباً: $n = \{0,1, \dots, n\}$

• أول ترتيب غير منتهٍ: $w = \{0,1,2, \dots\}$

• الترتيب المعرّف جيداً أو المرتب جيداً: هي الترتيبات المرتبة جيداً بعلاقة الانتماء (أو $<$) أي إذا كان $a \in b$ فهذا يعني $a < b$

1-1-3. الدوال: [4]

1-1-3-1. تعريف: لتكن A وَ B مجموعتين غير خاليتين:

الدالة f من A إلى B هي علاقة ثنائية منطلقها المجموعة A ومستقرها المجموعة B بحيث كل عنصر من المنطلق $a \in A$ يرتبط به عنصر وحيد من المستقر B، ونرمز لها بـ:

$$f: A \longrightarrow B$$
$$f(a) = b$$

وهذا يعني يحقق الشرط التالي:

$$\forall a_1, a_2 \in A : a_1 = a_2 \implies f(a_1) = f(a_2)$$

• تكون الدالة f متباينة إذا تحقق الشرط التالي:

$$\forall a_1, a_2 \in A : a_1 \neq a_2 \implies f(a_1) \neq f(a_2)$$

وهذا الشرط يُكافئ الشرط:

$$\forall a_1, a_2 \in A: f(a_1) = f(a_2) \implies a_1 = a_2$$

• الدالة f غامرة إذا تحقق الشرط التالي:

$$\forall b \in B;\ \exists a \in A: f(a) = b$$

• نقول عن الدالة f أنها تقابل إذا كانت متباينة وغامرة.

1-1-3-2. تعريف:

لتكن $f: A \longrightarrow B$ دالة، ولتكن: $X \subseteq A$, $Y \subseteq B$:

- نعرّف الصورة المباشرة لـ X وفق f بأنها المجموعة: $f(X) = \{f(a)\ ;\ a \in X\}$
- نعرّف فالصورة العكسية لـ Y وفق f بأنها المجموعة: $f^{-1}(Y) = \{a \in A\ ; f(a) \in Y\}$

مثال:

1- الدالة الثابتة: نقول عن الدالة $f: A \longrightarrow B$ أنها ثابتة إذا وُجد $b \in B$ بحيث:

$$f(a) = b\ ;\ \forall a \in A$$

2- مقصور الدالة: ليكن $f: A \longrightarrow B$ دالة، ولتكن: $\emptyset \neq X \subseteq A$، نعرّف مقصور الدالة على X ونرمز له بالرمز f_X بأنه الدالة:

$$f_X: X \longrightarrow B$$

المعرّف كما يلي: $f_X(x) = f(x)\ ;\ \forall x \in X$

1-1-4. القدرات: [3]

إن مفهوم المقارنة بين المجموعات يلعب دوراً هاماً في الرياضيات بشكل عام، وفي الجبر المجرد بشكل خاص، ولا سيما عند التعامل مع المجموعات غير المنتهية. وتُعد علاقة الاحتواء بين المجموعات أبسط معايير المقارنة بين المجموعات من حيث طبيعة العناصر، والمعيار الآخر هو علاقة التساوي بين المجموعات. قدرة المجموعة هو معيار آخر يُستخدم للمقارنة بين المجموعات.

1-1-4-1. تعريف: [3]

لتكن A وَ B مجموعتين ما، نقول أن قدرة المجموعة A تساوي قدرة المجموعة B إذا وُجد تطبيق $f: A \longrightarrow B$ تقابل بين المجموعتين A و B.

إن قدرة المجموعة المنتهية هو مفهوم يعبر عن عددالعناصر التي تتألف منها المجموعة.

أما قدرة المجموعة غير المنتهية فهو تعميم لمفهوم كمية العناصر التي تتألف منها المجموعة.

• نرمز لقدرة المجموعة A بالرمز: $|A|$

1-1-4-2. تعريف: [15]

ليكن $k \in w$ وَ A مجموعة ما، إن:

$$[A]^k = \{B \subseteq A : |B| = k\}$$
$$[A]^{<k} = \{B \subseteq A : |B| < k\}$$

1-1-5. الجبر الشامل: ($Univensel\ Algrbra$) [6]

يسعى الجبر الشامل إلى استخلاص العناصر المشتركة بين البنى الجبرية المتنوعة وتقديمها في إطار موحد، وذلك يُتيح اقتصاداً في العرض وتعميماً للبراهين، فمفاهيم التشاكل، التمايز، القسمة، وغيرها تثبت مرة واحدة، وتُطبق على طيف واسع من البنى. إن الحاجة إلى مثل هذا التعريف نوه لها من قبل عدد من الرياضيين مثل: ($Emmy\ Noether\ , Alfred\ North\ Whitehead, \dots$) وإن الفضل في تحقيق هذا الهدف يعود إلى ($Garrett\ Birkhoff$) ولعله يجب التنبيه هنا إلى أن الأبحاث الحديثة في المنطق وعلوم الحاسوب وغيرها قد كشفت أن فكرة بيركهون الأصلية قابلة للتوسيع بصورة مثمرة، فعلى سبيل المثال: الجبور الجزئية والجبور غير المتجانسة. مع الإشارة إلى أن تعريف بيركهون سمح بوجود عمليات غير منتهية الرتبة غير أن نتائجه كانت معنية بالعمليات منتهية الرتبة.

هذه الرؤية الموحدة تشكل الخلفية الطبيعية لدراسة جبر رامزي، حيث تُبنى المفاهيم الأساسية داخل قالب جبر شامل.

1-1-5-1. تعريف: [6]

لتكن A مجموعة غير خالية، وليكن n عدد صحيح غير سالب. نعرّف:

- $A^{\circ} = \{\emptyset\}$
- لكل $n > 0$ يكون A^n مجموعة من الكتل من عناصر A.
- العملية من المرتبة n على A $(n - ary\ operation)$ هي دالة خاصة من القوة الديكارتية:

$$f: A^n \longrightarrow A$$
$$(a_1, \dots, a_n) \longmapsto f(a_1, \dots, a_n) = x$$

- العملية f على A تُسمى عملية صفرية أو ثابتة إذا كانت رتبتها صفر

$f(\emptyset) \in A$ صورة العنصر الوحيد: $f: A^{\circ} \longrightarrow A\ ;\ \emptyset \in A^{\circ}$ حيث تُعد العملية الصفرية عنصراً من A وتُسمى العملية f أحادية إذا كانت رتبتها تساوي 1 $(A \longrightarrow A)$، وثنائية إذا كانت رتبتها تساوي 2 $(A^2 \longrightarrow A)$، وثلاثية إذا كانت رتبتها تساوي 3 $(A^3 \longrightarrow A)$.

ملاحظة: كل عملية هي دالة، فالعملية تشترط أن يكون المستقر هو A، والمنطلق من الشكل A^n، بينما الدالة لا تشترط ذات المجموعة $f: X \longrightarrow Y$ أي عمومية.

مثال:

1- عملية ثنائية على $\mathbb{Z}$: $+: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$

2- عملية أحادية على $\mathbb{Z}$: $-: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$

$$x \longmapsto -x \quad \left(\text{النظير الجمعي}\right)$$

3- عملية صفرية على A:

$$\bullet : A^{\circ} \longrightarrow A$$
$$(\ ) \longmapsto c; c \in A$$

4- دالة وليست عملية: هي دالة القيمة المطلقة:

$$|\bullet| : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$$

وذلك لأن المستقر ليس $\mathbb{Z}$

1-1-5-2. تعريف الجبر الشامل(universal Algebra): [6]

لتكن A مجموعة غير خالية، $\mathcal{F}$ جماعة من العمليات المنتهية على A.

نقول عن الزوج المرتب $(A, \mathcal{F})$ أنه جبر، وتسمى A حامل الجبر، أما الدوال f^A تسمى العمليات الأساسية للجبر A.

- يُقال عن الجبر A أنه أحادي $(unary)$ إذا كانت كل عملياته أحادية.
- يُقال عن الجبر أحادي فقط $(mono - unary)$ إذا كانت له عملية أحادية واحدة فقط.
- يُقال عن الجبر أنه مونوئيد $(groupoid)$: إذا كانت له عملية ثنائية واحدة فقط.
- يكون الجبر جبراً منتهياً إذا كانت $|A|$ منتهية.
- يكون الجبر جبراً بسيطاً إذا كانت $|A| = 1$

أمثلة:

1- نصف الزمرة $(Semigroup)$: $(G, .)$ حيث G مجموعة ما، . عملية ثنائية.

هي مونوئيد $(groupoid)$ تتحقق فيها الخاصة التجميعية:

$$\forall a, b, c \in G\ ; (a.b).c = a.(b.c)$$

$(G, .) \Longleftarrow$ هي جبر شامل.

2- الزمرة $(\boldsymbol{group})$: لتكن$(G,.)$ زمرة، إن $(G,.,-1,1)$ هي جبر، حيث:

. عملية ثنائية، و -1 عملية أحادية (النظير)، و 1 عملية صفرية (ثابت)

ويتحقق فيه ما يلي:

$$\boxed{1}\ x.(y.z) = (x.y).z$$

$$\boxed{2}\ x.1 = 1.x = x$$

$$\boxed{3}\ x.x^{-1} = x^{-1}.x = 1$$

وتسمى تبديلية إذا تحقق الشرط التالي:

$$x.y = y.x$$

3- **الحلقة** $(\boldsymbol{Rings})$:

لتكن$(R,+,.)$ حلقة، إن $(R,+,.\ ,-,0)$ هي جبر حيث:

$+,.$ عمليات ثنائية، و $-$ أحادية، و 0 الثابتة: هي جبر.

$\boxed{R_1}$ $(R,+,-,0)$ هي زمرة تبديلية

$\boxed{R_2}$ $(R,.)$ نصف زمرة

$$\boxed{R_3}\ x.(y+z) = (x.y) + (x.z)$$

$$(y+z).x = (y.x) + (z.x)$$

1-1-6. الجبر الجزئي: $(\boldsymbol{subalgebra})$ [6]

1-1-6-1. تعريف:

ليكن A و B جبرين من نفس النوع $\mathcal{F}$، نقول أن B هو جبر جزئي من A إذا تحقق:

1- $B \subseteq A$

2- أياً تكن $f \in \mathcal{F}$ من المرتبة n، تكون $f: B^n \longrightarrow B$ هي مقصور العملية الموافقة في A:

$$f^B = F^A_{\restriction_B}$$

• تسمى B (حامل جزئي) من A إذا كان مغلقاً تحت العمليات الأساسية لـ A أيا تكن $f^A: A^n \longrightarrow A$

• كل $a_1, \dots, a_n \in B$ لدينا $f^A(a_1, \dots, a_n) \in B$

نتائج من التعريف:

1- إذا كان B جبراً جزئياً من A فحاملها B حامل جزئي من A.

2- المجموعة الخالية $\emptyset$ قد تكون حاملاً جزئياً، لكنها لا تصلح حاملاً لأي جبر جزئي.

3- إذا كانت A تحوي ثوابت (عمليات صفرية) فكل حامل جزئي يجب أن يحتوي متمم تلك الثوابت.

مثال:

1- زمر الجمع:

$$\mathcal{F} = \{+ , - , .\}$$
$$A = (\mathbb{Z}, + , - , 0)$$
$$B = (2\mathbb{Z}, +, -, 0)$$

إن $2\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$، ومغلق تحت العمليات $+$ وَ $-$ ويحتوي 0، وكذلك $+$ وَ $-$ في B هما تقييدان لعمليات A

$\Longleftarrow A$ جبر جزئي من B.

2- الحلقات:

$$\mathcal{F} = \{+ , . , - , 0 , 1\}$$
$$A = \{\mathbb{Z}, + , . , - , 0 , 1\}$$

إن $2\mathbb{Z}$ لا يحتوي الواحد، فإن: $2\mathbb{Z}$ ليس جبراً جزئياً من A في هذه الحلقة.

1-1-7. المتتاليات: [19]

1-1-7-1. المتتاليات المنتهية (finite sequences):

هي دالة مجالها عدد طبيعي، ونرمز لها بالرمز $< x_i >_{i\leq n}$ قيمتها $x_0, x_1, \dots, x_n$ وتكتب $< x_0, x_1, \dots, x_{n-1} >$ ونرمز لها بالرمز ^nA لكل المتتاليات المنتهية من العناصر A ذات الطول n

مثال:

المتتالية $< a, b, c >$ هي دالة حيث: $f: 3 \to (a, b, c)$

$$f(0) = a\ , f(1) = b\ , f(2) = c$$

1-1-7-2. المتتاليات غير المنتهية (finite sequences):

هي دالة مجالها ω ونرمز لها $< x_i >_{i\in W} =< x_1, x_2, \dots >$، ونرمز $^\omega A$ جماعة كل المتتاليات غير المنتهية من عناصر A.

1-1-7-3. طول المتتالية المنتهية:

هو مجالها أو عدد عناصرها، ويكون $|\vec{s}|$ هو مجال تعريف المتتالية $\vec{s}$ سواء كانت منتهية أو غير منتهية.

1-1-7-4. المتتالية الخالية:

هي متتالية خالية من العناصر، ونرمز لها بالرمز: $< >$

1-1-7-5. العمليات على المتتاليات:

① دمج المتتاليات(concatenation) :

إذا كانت لدينا متتاليتين منتهيتين: $\vec{s} =< s_0, .., s_n >, \vec{t} =< t_0, \dots, t_n >$ فإن تركيب المتتاليتين:

$$\vec{s} * \vec{t} =< s_0, .., s_n, t_0, \dots, t_n >$$

مثال:

$$< a, b > * < w, y, z > =< a, b, w, y, z >$$

② تقييد المتتالية:

لتكن $\vec{s}$ متتالية، إذا كان $n \geq 1$; $|\vec{s}| \geq n$ فإن: $\vec{s}_{\restriction_n} =< s_0, \dots, s_{n-1} >$ أي نأخذ أول n عنصر.

مثال:

- لتكن لدينا متتالية الأعداد الزوجية $\vec{s}$، التقييد عند 5 يكون من الشكل:

$$\vec{s} =< 0,2,4,6,8,10,12, \dots > \Rightarrow \vec{s}_{\restriction_5} =< 0,2,4,6,8 >$$

- لتكن $\vec{s}$ متتالية، إن $\vec{s}_{\restriction_0}$ هو $< >$ هو المتتالية الخالية.

③ الذيل التسلسلي:

لتكن $\vec{s}$ متتالية، لأجل $n \in W$ فإن $\vec{s} - n$ هي متتالية t تحقق: $\vec{t} = \vec{s} * \left(\vec{s}_{\restriction_n}\right)$ أي الجزء المتبقي من المتتالية بعد إزالة n عنصر.

مثال:

لتكن $\vec{s} =< 1,2,3,4,5 >$, $n = 2$ إن:

$$\vec{s} - n =< 3,4,5 >$$

④ المقطع الابتدائي: $(\boldsymbol{Initial\ segment})$

لتكن $\vec{s}$ متتالية ما، إن المقاطع الابتدائية للمتتالية $\vec{s}$ هو تقييد المتتالية عند عدد ما.

مثال:

إذا كانت لدينا $\vec{s} =< a, b, c, d >$، فإن المقاطع الابتدائية:

$$< >, < a >, < a, b >, < a, b, c >, < a, b, c, d >$$

⑤ المتتالية الجزئية:

هي متتالية تُشتق من $\vec{s}$ بحذف بعض العناصر مع حفظ الترتيب.

مثال:

لتكن $\vec{s} =< 0,1,0,1,0,1, \ldots >$، فإن:

$\vec{t} =< 0,1 >$ هي متتالية جزئية من المتتالية $\vec{s}$.

1-2- مفاهيم أساسية في نظرية البيان

مقدمة:

تعتبر نظرية البيان من أهم العلوم الحديثة التي تقوم بحل معظم المشكلات الحياتية من خلال تطبيقاتها الواسعة، بأن تقوم بتقديم حلول للعديد من النماذج. سنعرض في هذا الفصل أهم المفاهيم في نظرية البيان، والتي نتمكن من خلالها مناقشة موضوع تلوين البيان. سنتطرق أيضاً إلى التعاريف والمصطلحات الأساسية بالإضافة إلى المفاهيم والنظريات الشائعة في نظرية البيان، نوضح بعدها التصنيفات العديدة للبيانات الشهيرة مدعّمة بالأمثلة التوضيحية. أخيراً ننتقل إلى عرض الموضوع الأكثر شيوعاً في التلوين، وهو: تلونُ أضلاع البيان.

1-2-1. البيان: ($Graph$) [7]

لتكن V مجموعة غير خالية ومنتهية من العناصر التي تُسمى بالعقد، ولتكن E مجموعة (قد تكون خالية) من العناصر التي تُسمى بالأضلاع، يُعرّف التطبيق f على الشكل التالي:

$$f: E \longrightarrow V \times V$$
$$f(e) = \{v_1, v_2\} : v_1, v_2 \in V$$

تُسمى الثلاثية المرتبة $G = (V, E, f)$ بياناً، $V(G)$ مجموعة عقد البيان G، و $E(G)$ مجموعة أضلاع البيان G.

ونقول إن البيان $G = (V, E, f)$ هو بيان منتهٍ إذا كانت كل من V و E مجموعة منهية.

ملاحظة:

• إذا كان $G = (V, E, f)$ بياناً، فإننا سنطابق كل ضلع مع صورته بواسطة التطبيق f ولا نفرق بينهما، أي إذا كان e ضلعاً يربط العقدتين v و u أي $f(e) = \{u, v\}$، فإننا نكتب مباشرةً: $e = \{u, v\}$ أو

$e = uv$، أي أننا نتجاهل التطبيق f. وعندها يمكننا أن نكتب الرمز $G = (V, E)$ بدلاً من الرمز $G = (V, E, f)$.

• إذا كان $e = uv$ تُسمى العقدتان v و u بـ: طرفيّ الضلع e.

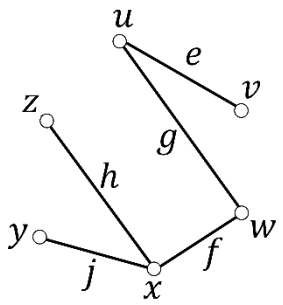
• لا توجد طريقة وحيدة لرسم البيان، حيث يتم تمثيل العقد بواسطة نقاط (دوائر صغيرة)، وكل ضلع يصل بين نقطتين بواسطة خط (قطعة مستقيمة أو منحني)، ويُفيد التمثيل البياني للبيان بفهم المسائل المتعلقة به.

مثال:

ليكن لدينا البيان $G = (V, E)$ حيث مجموعتَي أضلاعه وعقده هي:

$$V(G) = \{v, u, w, x, z, y\}$$
$$E(G) = \{e]vu\ , g = uw, f = wx, h = xz, j = xy\}$$

فإن تمثيله البياني مبيّن في الشكل $(1 - 1)$:



الشكل $(1 - 1)$ عقد وأضلاع البيان G

إن معظم المفاهيم والتعاريف في نظرية البيان مقترحة من التمثيل البياني للبيان، واستناداً لذلك سنعرض التعاريف التالية:

ليكن لدينا البيان $G = (V, E)$ عندئذٍ:

1-2-2. العقدة المؤثرة بضلع: ($Incident\ A\ vertex\ with\ An\ Edge$) [7]

إذا كان لدينا $u,v \in V$، و $e \in E$، وكان $e = uv$ عندئذٍ نقول أن e وَ u أو $\left(v \text{ وَ } e\right)$ يؤثران ببعضهما البعض أو أن العقدة u تؤثر على الضلع e أو الضلع e يؤثر على العقدة u.

1-2-3. العقدتان المتجاورتان: ($Tow\ Adjacent\ Vertex$) [7]

إذا كانت $u,v \in V$، نقول إن العقدتين v و u متجاورتان أو (u مُجاورة لـ v) إذا وُجد $e \in E$ يحقق $e = uv$، أي: إذا وُجد ضلع e يربط بين العقدتين u و v.

1-2-4. الضلعان المتجاوران: ($Two\ Adjacent\ Edges$) [7]

إذا كان لدينا $e_1, e_2 \in E$ ضلعان مختلفان، نقول إن الضلعين e_2 و e_1 هما ضلعان متجاوران إذا وُجدت $v \in V$ عقدة مشتركة بين الضلعين e_2 و e_1 (أي إذا كان الضلعان يؤثران على عقدة مشتركة).

1-2-5. الأضلاع المضاعفة "المتوازية": ($Parallel\ Edges$) [7]

إذا كان لدينا ضلعان أو عدة أضلاع تربط بين ثنائية العقد ذاتها عندئذٍ نقول أن هذه الأضلاع هي أضلاع مضاعفة للبيان. بمعنى آخر إذا كان $e_2, e_1 \in E$ وَ

$e_1 = e_2 = uv \Longleftarrow e_2, e_1$ أضلاع مضاعفة للبيان G.

1-2-6. العُروة: ($Loop$) [7]

إذا كان $e \in E$ وكان $e = \{v\}$ أي الضلع e يربط العقدة v بنفسها، عندئذٍ نقول أن الضلع e عروة عند العقدة v.

1-2-7. البيان البسيط: ($Simple\ Graph$) [7]

نقول عن بيان أنه بسيط إذا لم يحتوِ على عرى أو أضلاع مضاعفة.

1-2-8. البيان المنتظم: ($Regular\ Graph$) [7]

ليكن $G(V,E)$ بياناً، وليكن $r \geq 0$ عدداً صحيحاً، نقول إن G بيان منتظم من الدرجة r أو $r-$ منتظم، إذا كانت درجة كل عقدة من مجموعة عقد البيان G تساوي r.

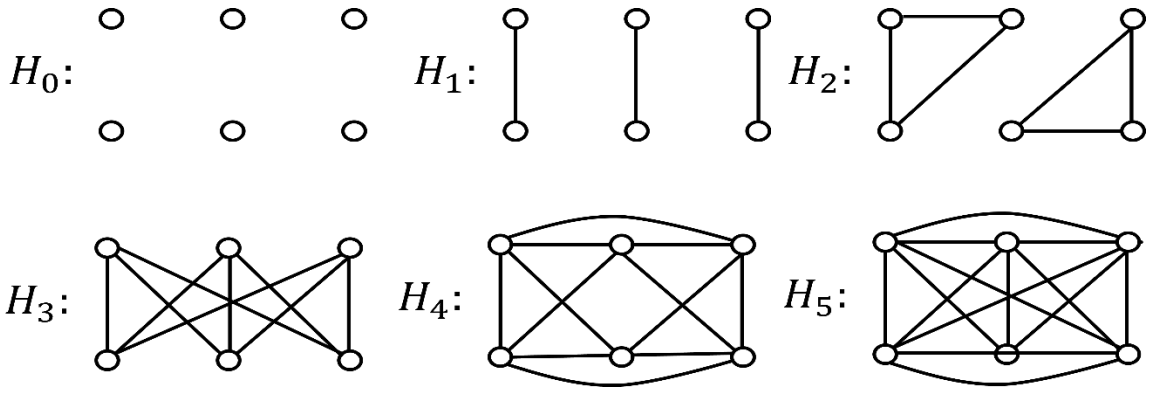
أي: $deg(v) = r$ وذلك لكل $v \in V$.

ملاحظة:

• ليكن G بياناً رتبته n ومنتظم من الدرجة r، عندئذٍ فإن: $0 \leq r \leq n-1$

مثال:

الشكل $(1-8)$ يُظهر بيانات H_r منتظمة من الدرجة r ومن الرتبة 6، لأجل $r = 0,1,\dots,5$



الشكل $(1-2)$ بيانات منتظمة

1-2-9. البيان التام: ($Complete\ Graph$) [7]

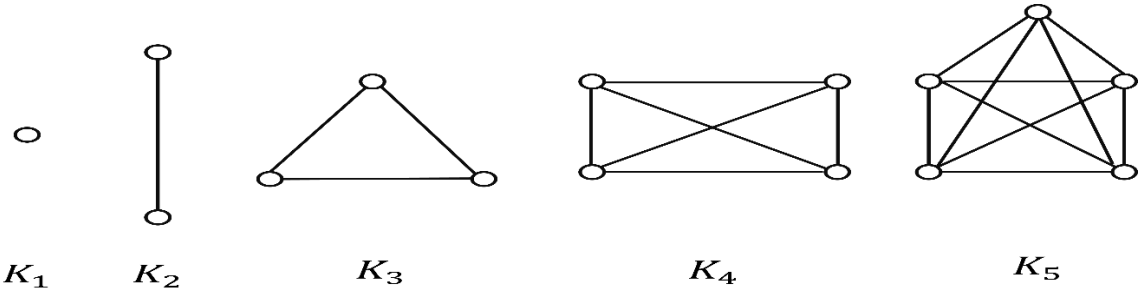
نقول عن بيان أنه بيان تام إذا كانت كل عقدتين مختلفتين من هذا البيان متجاورتان، يُرمز للبيان التام من الرتبة n بالرمز K_n، فيكون لدينا:

- البيان التام K_n هو بيان منتظم من الدرجة $n-1$

- حجم البيان التام K_n يُعطى بالعلاقة: $m = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$

مثال:

الشكل $(1-9)$ يبيّن بعض البيانات التامة K_n حيثُ: $1 \leq n \leq 5$



الشكل $(1-3)$ بيانات تامة

1-2-10. البيان الجزئي: $(Subgraph)$ [7]

إذا كان H بياناً، فإننا نقول إن H بيان جزئي من G إذا كانت: $V(H) \subseteq V(G)$ وَ $E(H) \subseteq E(G)$

1-2-11. تعريف تلوين أضلاع البيان: $(Edge-coloring)$ [13] [16]

هو تعيين لون لكل ضلع من أضلاع البيان، ويُسمى البيان أحادي اللون إذا كانت جميع أضلاعه ملونة بنفس اللون.

1-2-12. تعريف r تلوين للمجموعة A: $(e-coloring\ of\ A)$ [13] [16]

هو تطبيق: $f: A \to [r]$ حيث $[r] = \{1, \dots, r\}, r \in \mathbb{N}$ ولأجل كل $a \in A$ فإننا نسمي $f(a)$ لون a

1-2-13. تعريف: [13] [16]

نقول عن التلوين f أنه أحادي اللون على المجموعة A إذا كان f ثابت على A.

1-3- مفاهيم أساسية في الطوبولوجيا

1-3-1. الطوبولوجيا والفضاءات الطوبولوجية [1] [2]

1-3-1-1. تعريف: [1] [2]

لتكن X مجموعة غير خالية، ولتكن $\mathcal{L}$ جماعة من أجزائها، نقول عن $\mathcal{L}$ أنها تشكل طوبولوجيا على X إذا حققت الموضوعات التالية:

(1) المجموعة الخالية $\emptyset$ وَالمجموعة الكلية X عنصران من $\mathcal{L}$.

(2) تقاطع أي جماعة منتهية من عناصر $\mathcal{L}$ هو عنصر من $\mathcal{L}$.

(3) اجتماع أي جماعة (منتهية أو غير منتهية) من عناصر $\mathcal{L}$ هو عنصر من $\mathcal{L}$.

تُسمى الثنائية $(X, \mathcal{L})$ المؤلفة من المجموعة X ومن الطوبولوجية $\mathcal{L}$ فضاءاً طوبولوجياً، وتُسمى عناصر المجموعة X نقاطاً، ونقول عن كل مجموعة جزئية من $E \subseteq X$ أنها مفتوحة بالنسبة للطوبولوجيا $\mathcal{L}$ إذا كانت عنصراً من $\mathcal{L}$.

1-3-1-2. المجموعة المغلقة: [1] [2]

نقول عن المجموعة $E \subseteq X$ أنها مغلقة إذا كانت متمم لمجموعة E عنصر من $\mathcal{L}$.

1-3-1-3. المجموعة المفتوحة المغلقة: [1] [2]

هي مجموعة مفتوحة ومغلقة في آن معاً.

أمثلة: [1] [2]

1) الطوبولوجيا المتقطعة:

لتكن X مجموعة غير خالية، $P(X)$ جماعة كل أجزاء X.

إن $P(X)$ تشكل طوبولوجيا على X (تحقق الشروط الثلاث).

تُدعى هذه الطوبولوجيا بالطوبولوجيا المتقطعة، والفضاء $\big(X, P(X)\big)$ الفضاء المتقطع.

نتائج مباشرة:

(1) إن كل مجموعة جزئية $A \subseteq X$ هي مجموعة مفتوحة بالنسبة للطوبولوجيا المتقطعة.

(2) كل مجموعة جزئية $E \subseteq X$ هي مجموعة مغلقة (لان، متممتها عنصر من $P(X)$).

(3) كل مجموعة جزئية هي مجموعة مفتوحة ومغلقة.

2) الطوبولوجيا الخشناء (التافهة):

لتكن X مجموعة غير خالية، فإن $\mathcal{L} = \{\emptyset . X\}$ طوبولوجيا على X.

تُدعى هذه الطوبولوجيا بالطوبولوجيا الخشناء.

3) الطوبولوجيا المألوفة على $\mathbb{R}$:

هي كل المجموعات التي كل منها اجتماع مجموعة من المجالات المفتوحة في $\mathbb{R}$، إنها تُشكل طوبولوجيا على $\mathbb{R}$، وتُدعى الطوبولوجيا المألوفة على $\mathbb{R}$.

1-3-1-4. تعريف: [1] [2]

لتكن X مجموعة غير خالية، ولتكن كل من $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ طوبولوجيا على X. فإننا نقول إن $\mathcal{L}_2$ أدق من $\mathcal{L}_1$ أو $\mathcal{L}_1$ أخشن من $\mathcal{L}_2$ إذا كانت $\mathcal{L}_1 \subseteq \mathcal{L}_2$

أما إذا كانت $\mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L}_2$ نقول أن $\mathcal{L}_2$ أدق تماماً من $\mathcal{L}_1$ أو $\mathcal{L}_1$ أخشن تماماً من $\mathcal{L}_2$

مثال:

لتكن X مجموعة غير خالية، إن الطوبولوجيا المتقطعة أدق من أي طوبولوجيا على X، وهي أدق تماماً من أية طوبولوجيا أخرى على X. والطوبولوجيا الخشناء هي أخشن من أية طوبولوجيا أخرى على X.

1-3-2. القواعد والقواعد الجزئية الطوبولوجية

1-3-2-1. تعريف: [1] [2]

ليكن $(X, \mathcal{L})$ فضاء طوبولوجي، ولتكن B جماعة من المجموعات الجزئية من X.

نقول عن B أنها قاعدة أو أساس للطوبولوجيا $\mathcal{L}$ إذا تحقق:

(1) B مجموعة جزئية من $\mathcal{L}$.

(2) كل عنصر من $\mathcal{L}$ اجتماعاً لعناصر من B.

نستنتج أن: كل عنصر من القاعدة B هو مجموعة مفتوحة، وأن B تشكل تغطية للفضاء $(X, \mathcal{L})$.

أمثلة:

(1) $\mathcal{L}$ جماعة المجالات المفتوحة في $\mathbb{R}$ قاعدة للطوبولوجيا المألوفة على $\mathbb{R}$.

(2) صف المجموعات الأحادية (المؤلفة من عنصر واحد) في X هو أساس الطوبولوجيا المتقطعة $P(X)$.

(3) لتكن $X = \{1,2,3,4\}$ ولتكن $\mathcal{L} = \{\emptyset, E, \{1,2\}, \{3,4\}\}$ طوبولوجيا على X

إن $B = \{\emptyset, \{1,2\}, \{3,4\}\}$ أساس لـ $\mathcal{L}$

1-3-2-2. مبرهنة: [1] [2]

لتكن X مجموعة ما، ولتكن B جماعة من المجموعات الجزئية من X اجتماعها يساوي X

إن الشرط اللازم والكافي كي تكون B قاعدة لطوبولوجيا على X هو ان يكون تقاطع أي عنصرين من B اجتماعاً لعناصر من B.

ملاحظة:

إذا كانت B قاعدة لطوبولوجيا $\mathcal{L}$ على X فلا يمكن أن تكون قاعدة لطوبولوجيا أخرى على X مغايرة لـ $\mathcal{L}$

1-3-2-3. تعريف: [1] [2]

ليكن $(X, \mathcal{L})$ فضاء طوبولوجي، ولتكن S مجموعة جزئية من $\mathcal{L}$.

نقول عن S أنها قاعدة جزئية للطوبولوجيا $\mathcal{L}$ إذا كانت جماعة كل التقاطعات المنتهية لعناصر S تشكل قاعدة للطوبولوجيا $\mathcal{L}$(أي إذا كان كل عنصر من $\mathcal{L}$ هو اجتماعاً لتقاطعات منتهية من عناصر الجماعة S)

1-3-2-4. مبرهنة: [1] [2]

لتكن X مجموعة ما، ولتكن S جماعة غير خالية من المجموعات الجزئية من X اجتماعها يساوي X.

فإذا كانت B جماعة كل التقاطعات المنتهية لعناصر S، فإن B تشكل قاعدة لطوبولوجيا $\mathcal{L}(B)$ على X، كما أن S تشكل قاعدة جزئية لـ $\mathcal{L}(B)$.

مثال:

لتكن $X = \{a, b, c, d\}$ ولتكن $S = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c, d\}\}$:

- إن $\{a, b\} \cap \{a, c\} = \{a\}$؛ أي تقاطع العنصر $\{a.c\}, \{a, b\}$ من S ليس اجتماعاً لعناصر من S، ومنه فإن S لا تشكل قاعدة لطوبولوجيا على X.
- بينما لو أخذنا المجموعة B كما حددناه في المبرهنة السابقة؛ أي:

$$B = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c, d\}\}$$

إن B تشكل قاعدة لطوبولوجيا على X، S هو قاعدة جزئية لطوبولوجيا على X.

• كما أن جماعة كل الاجتماعات لعناصر B هي: $\{\emptyset, \{a\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,b,c\}, \{a,b,c,d\}\}$،

ويمكن التحقق مباشرة أن هذه الجماعة تشكل طوبولوجيا على X.

1-3-3. جمل الجوارات الأساسية:

1-3-3-1. تعريف: [1] [2]

ليكن $(X, \mathcal{L})$ فضاء طوبولوجي، ولنسند إلى كل نقطة x من X جماعة N_x من المجموعات المفتوحة تحت الخواص التالية:

(1) أياً تكن x من X فإن: $N_x \neq \emptyset$

(2) أياً كان N من N_x فإن: $x \in N$

(3) أياً كان N_1, N_2 من N_x، فثمة عنصر N_3 من N_x بحيث $N_3 \subseteq N_1 \cap N_2$

(4) أياً كان N من N_x، وأياً يكن y من N، فثمة عنصر $\grave{N}$ من N_y بحيث: $\grave{N} \subseteq N$

(5) الشرط اللازم والكافي كي تكون مجموعة جزئية U من X مفتوحة هو أن يقابل كل عنصر x من U عنصر N من N_x بحيث: $N \subseteq U$

عندئذٍ:

تُسمى N جملة جوارات أساسية محلية (موضعية) في النقطة x للطوبولوجيا $\mathcal{L}$، كما تُسمى المجموعة $N = \{N_X \in N_x : x \in X\}$ جملة جوارات أساسية للطوبولوجيا $\mathcal{L}$.

هنالك رباط وثيق بين القاعدة وجملة الجوارات الأساسية لطوبولوجيا سنشير له في المبرهنة التالية

1-3-3-2. مبرهنة: [1] [2]

ليكن $(X, \mathcal{L})$ فضاء طوبولوجي، ولتكن N جملة جوارات أساسية للطوبولوجيا $\mathcal{L}$، عندئذٍ: تشكل جماعة المجموعات الجزئية من X والمنتمية إلى N قاعدة لـ $\mathcal{L}$.

وبالمقابل: إذا كانت $\mathcal{B}$ قاعدة لـ $\mathcal{L}$ ورمزنا بـ N_x للمجموعة $\{B \in \mathcal{B} : x \in B\}$ وذلك أياً تكن $x \in X$، فإننا نحصل على جملة جوارات أساسية محلية في x لـ $\mathcal{L}$.

1-3-3-3. مبرهنة: [1] [2]

لتكن X مجموعة ما، ولنزود كل عنصر x بجماعة من المجموعات الجزئية N_x من X تحقق الشروط الأربعة من التعريف السابق.

لنعرّف جماعة $\mathcal{L}$ من المجموعات الجزئية من X بحيث يكون الشرط اللازم والكافي كي ينتمي عنصر ما U إلى $\mathcal{L}$ هو ان يقابل كل عنصر x من U عنصر N من N_x بحيث: $N \subseteq U$. عندئذٍ:

(1) $\mathcal{L}$ تشكل طوبولوجيا على X.

(2) تشكل N_x جملة جوارات أساسية محلية في x للطوبولوجيا $\mathcal{L}$.

مثال:

لنأخذ $\mathbb{R}$ مجموعة الأعداد الحقيقية، ولنسند إلى كل عنصر x من $\mathbb{R}$ المجموعة:

$$N_x = \{[x, a[: x \in \mathbb{R}, x < a\}$$

إن جماعة المجموعات N_x تحقق الشروط الأربعة في التعريف، وبالتالي:

حسب المبرهنة فإن هذه الجماعة تشكل جملة جوارات أساسية للطوبولوجيا على $\mathbb{R}$.

1-3-4. التطبيقات المستمرة

1-3-4-1. تعريف: [1] [2]

ليكن $(X,\mathcal{L})$ وَ $(Y,\hat{\mathcal{L}})$ فضاءين طوبولوجيَين، وَ f تطبيقاً لـ X على Y.

نقول عن f أنه تطبيق مستمر في النقطة x_0 من X إذا وُجِدَ لكل جوار V لـ $f(x_0)$ جوار U لـ x_0 بحيث يكون: $f(U)\subseteq V$

- إذا كان f مستمراً في كل نقطة x من X فإن f تطبيق مستمر طوبولوجياً للفضاء $(X,\mathcal{L})$ في الفضاء $(Y,\hat{\mathcal{L}})$.

- إذا كان f تقابل، فيوجد تطبيق عكسي f^{-1} لـ Y على X. فإذا كان كل من f و f^{-1} مستمراً فإن F يُسمى: تطبيق طوبولوجي، ويُقال عندئذٍ الفضائَين $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{\mathcal{L}}),(Y,\hat{\boldsymbol{\mathcal{L}}})$ متكافئان طوبولوجياً.

مثال:

ليكن $(X,\mathcal{L})$ فضاء طوبولوجي متقطع، $(Y,\hat{\mathcal{L}})$ أي فضاء طوبولوجي، عندئذٍ:

يكون أي تطبيق لـ X في Y مستمراً، ذلك لأن كل x من X لها جوار $\{x\}$ وأياً يكن الجوار V لـ $f(x)$ بحيث $f(\{x\})\subseteq V$ لأن $(f(x)\in V)$

1-3-5. الفضاءات الجزئية وفضاءات الجداء

1-3-5-1. تعريف: [1] [2]

ليكن $(X,\mathcal{L})$ فضاء طوبولوجي، و Y مجموعة جزئية من X. نرمز ت $\mathcal{L}_Y$ للمجموعة التالية:

$$\{Y\cap U : U\in\mathcal{L})$$

إن $\mathcal{L}_Y$ تشكل طوبولوجيا على Y، تُسمى $\mathcal{L}_Y$ الطوبولوجيا النسبية على Y (أو طوبولوجيا الفضاء الجزئي على Y)، وتُسمى الثنائية $(Y,\mathcal{L}_Y)$ فضاء طوبولوجي جزئي من الفضاء $(x,\mathcal{L})$

مثال:

• $(X,\mathcal{L})$ فضاء متقطع، ولتكن Y مجموعة جزئية ما من X، فإذا كانت A أي مجموعة جزئية من Y، فإن $A = Y \cap A$ لكن A مفتوحة في X (لأ، $(X,\mathcal{L})$ متقطع) فإن:

$Y \cap A \in \mathcal{L}_Y$ أو $A \in \mathcal{L}_Y$ وهكذا فإن كل مجموعة جزئية من Y مفتوحة في Y (أي أنها عنصر من الطوبولوجيا النسبية) وبالتالي: فإن كل فضاء جزئي من فضاء طوبولوجي متقطع فهو فضاء متقطع.

•• كل فضاء جزئي من فضاء طوبولوجي تافه هو فضاء تافه

••• إذا كان الفضاء الجزئي المزود بالطوبولوجيا النسبية المتقطعة فليس بالضرورة أن يكون الفضاء الكلي متقطعاً [2]

1-3-5-2. مبرهنة: [1] [2]

ليكن $(X,\mathcal{L})$ فضاء طوبولوجي، وليكن $(Y,\mathcal{L}_Y)$ فضاء جزئي من $(X,\mathcal{L})$، عندئذٍ:

(1) إذا كانت $\mathcal{B}$ قاعدة (قاعدة جزئية) لـ $\mathcal{L}$، فإن: $\mathcal{B}_Y = \{Y \cap B : B \in \mathcal{B}\}$ قاعدة (قاعدة جزئية) للطوبولوجيا النسبية $\mathcal{L}_Y$ على Y.

(2) إذا زوّدنا كل نقطة x بجماعة N_x من المجموعات الجزئية من X، حيث تشكل جملة الجماعات N_x جملة جوارات أساسية محلية في x للطوبولوجيا $\mathcal{L}$، وإذا قابلنا كل نقطة y من Y بالمجموعة $\grave{N}_Y = \{Y \cap N : N \in N_Y\}$ فإننا نجد جملة جوارات أساسية محلية في Y للطوبولوجيا النسبية على Y.

1-3-5-3. مبرهنة: [1] [2]

ليكن f تطبيقاً للفضاء $(X,\mathcal{L})$ في الفضاء $\left(Y,\grave{\mathcal{L}}\right)$ عندئذٍ القضايا التالية متكافئة:

(a) f مستمر.

(b) إذا كانت V أي مجموعة مفتوحة في Y، فإن $f^{-1}(V)$ مجموعة مفتوحة في X.

(c) إذا اكنت F أي مجموعة مغلقة في Y، فإن $f^{-1}(F)$ مجموعة مغلقة في X.

(d) إذا كانت $\mathcal{B}$ قاعدة لـ $\grave{\mathcal{L}}$ فإن الصورة العكسية $f^{-1}(\mathcal{B})$ لأي عنصر B من $\mathcal{B}$ مجموعة مفتوحة في X

نتيجة:

الشرط اللازم والكافي كي يكون التطبيق f للفضاء $(X,\mathcal{L})$ في الفضاء $\left(Y,\grave{\mathcal{L}}\right)$ مستمراً هو أن يكون الخيال العكسي $f^{-1}(N)$ لأي عنصر N من جملة الجوارات الأساسية لـ $\grave{\mathcal{L}}$ مجموعة مفتوحة في X.

1-3-5-4. مبرهنة: [1] [2]

ليكن $(X,\mathcal{L})$ فضاء طوبولوجي، و Y مجموعة جزئية مفتوحة (مغلقة) في X، و Z مجموعة جزئية في Y.

إن الشرط اللازم والكافي كي تكون Z مفتوحة (مغلقة) في الفضاء الجزئي $(Y,\mathcal{L}_Y)$ هو أن تكون Z مفتوحة (مغلقة) في الفضاء $(X,\mathcal{L})$.

1-3-6. فضاءات الجداء [1] [2]

سنذكر أولاً تعريف حاصل ضرب جماعة قابلة للعد من المجموعات:

1-3-6-1. تعريف:

لتكن $\{X_i\}_{i\in I}$ جماعة من المجموعات غير الخالية، حيث: I مجموعة أدلة قابلة للعد منتهية أو غير منتهية (أي أن I مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الطبيعية)

يُعرّف حاصل ضرب (أو جداء) المجموعات X_i الذي سنرمز له بالرمز $\prod X_i$ على أنه:

مجموعة كل التطبيقات x المعرّفة على I بحيث يكون $x_i \in X_i$

إن هذا التعريف يفرض على كل مجموعة X_i ان تكون غير خالية، ومن المفيد أن نوسع هذا التعريف قليلاً بحيث نقول إنه: إذا كانت أي مجموعة من المجموعات X_i خالية فإن الجداء $\prod X_i$ خالٍ.

1-3-6-2. تعريف مُكافئ:

إن الجداء $\prod X_i$ هو مجموعة كل من المرتبات من الشكل $(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots.)$ حيث $x_i \in X_i$ أياً كانت $i \in I$.

- نقول إن x_i هو الإحداثي لـ i للعنصر x
- نقول إن x_i هو المركبة الـ i للجداء $\prod X_i$
- سنرمز بـ P_j لتطبيق الجداء: $P_j : \prod X_i \longrightarrow X_j$

المعرّف بالدستور: $P_j(X) = x_j$

(أي التطبيق الذي تكون قيمته عند أي عنصر من الجداء هو الإحداثي الـ j لهذا العنصر)

عندئذٍ يُسمى P_j تطبيق الإسقاط على المركبة الـ j.

لتكن لدينا جماعة قابلة للعد من الفضاءات الطوبولوجية $\{(X_i, \mathcal{L}_i)\}$ ونشكل جداء المجموعات $\prod X_i$. فإننا نستطيع تزويد هذا الجداء بأكثر من طوبولوجيا واحدة وتحويله من مجرد مرتبات إلى فضاء طوبولوجي، إن من الطبيعي إسناد طوبولوجيا $\mathcal{L}$ إلى $\prod X_i$ مفيدة ومرتبطة طوبولوجياً بالطوبولوجيات $\mathcal{L}_i$، ويتم الإجماع على أن أنسب طوبولوجيا يمكن أن نزوّد بها الجداء هي تلك الطوبولوجيا التي تجعل كلاً من تطبيقات الإسقاط P_i مستمراً.

1-3-6-3. تعريف:

لتكن $\{(X_i, \mathcal{L}_i)\}_{i \in I}\}$ جماعة من الفضاءات الطوبولوجية، ولتكن S جماعة من المجموعات الجزئية من $\prod X_i$ معرّفة بالدستور:

$$S = \left\{ \prod W_i : \begin{matrix} W_i = X_i \text{ أياً تكن } i \text{ من } I \text{ باستثناء واحدة على الأكثر} \\ W_i \text{ مجموعة جزئية مفتوحة في } X_i \text{ أياً كان } i \text{ من } I \end{matrix} \right\}$$

عندئذٍ:

تُدعى الطوبولوجيا $\mathcal{L}$ على $\prod X_i$ التي تشكل S قاعدة جزئية لها طوبولوجية الجداء، كما يُدعى الفضاء $(\prod X_i , \mathcal{L})$ فضاء الجداء للجماعة $\{(X_i, \mathcal{L}_i)\}_{i\in I}$

1-3-6-4. مبرهنة:

ليكن $(\prod X_i , \mathcal{L})$ فضاء الجداء للجماعة $\{(x_i, \mathcal{L}_i)\}_{i\in I}$ عندئذٍ يكون تطبيق الإسقاط:

$P_j: (\prod X_i , \mathcal{L}) \longrightarrow (X_j, \mathcal{L}_j)$ مستمراً أياً كان J من I.

1-3-6-5. مبرهنة:

ليكن $(\prod X_i , \mathcal{L})$ فضاء الجداء للجماعة $\{(x_i, \mathcal{L}_i)\}_{i\in I}$، ولنشكل المجموعة:

$$\mathcal{B} = \left\{ \prod V_i : \begin{matrix} V_i = X_i \text{ أياً كان } i \text{ من } I \text{ باستثناء عدد منتهٍ على الأكثر من عناصر } I \\ V_i \text{ مجموعة جزئية مفتوحة في } X_i \text{ أياً كان } i \text{ من } I \end{matrix} \right\}$$

عندئذٍ: تُشكل $\mathcal{B}$ قاعدة لطوبولوجيا الجداء $\boldsymbol{\mathcal{L}}$

1-3-7. أنواع من الفضاءات [2]

1-3-7-1. فضاء هاوسدروف: ($Hausdorff\ space$) [1]

ليكن $(X, \mathcal{L})$ فضاء طوبولوجي، نقول عن هذا الفضاء أنه فضاء هاوسدروف إذا تحقق الشرط التالي:

أياً كانت النقطتان المختلفتان x, y من X فإنه يوجد مجموعتان مفتوحتان U_x, U_y بحيث أن:

$$U_x \cap U_y = \emptyset \ ; \ x \in U_x \ \wedge y \in U_y$$

أب أنه أي نقطتين يمكن فصلهما بحوارين مفتوحين لا يتقاطعان

1-3-7-2. فضاء تيخونوف: ($Tychonoff\ space$) [2]

ليكن $(X, \mathcal{L})$ فضاء طوبولوجي، نقول عن هذا الفضاء أنه فضاء تيخونوف إذا تحقق:

(1) فضاء هاوسدروف.

(2) أياً تكن المجموعة الجزئية F هي الخالية والمغلقة في $(X, \mathcal{L})$، وأياً تكن النقطة $x \notin F$ (نقطة خارجة عن F).

فإنه يوجد تابع مستمر للفضاء $(X, \mathcal{L})$ في الفضاء $[0,1]$ (المزود بطوبولوجيا القيمة المطلقة):

$$f: X \longrightarrow [0,1]$$

بحيث أن:

$$f(x) = 0$$
$$f(F) = \{1\}$$

ليس فقط نفصل نقاطاً بجوارين، بل نفصل نقطة من مجموعة مغلقة باستخدام دالة مستمرة.

1-3-7-3. فضاء كانتور: ($cantor\ space$) [2]

هو الجداء العددي لنسخ من $\{0,1\}$ مع الطوبولوجيا المتقطعة هي $\prod\{0,1\}$ مع طوبولوجيا الجداء، نرمز بـ $^w2$ حيث $^w\{0,1\} = {}^w2$ مع طوبولوجيا الجداء عندما لا نزود $\{0,1\}$ بالطوبولوجيا المتقطعة

أي:

أي عنصر في $^w2$ هو متتالية غير منتهية من أصفار وواحدات.

الجوارات الأساسية هب أسطوانات نثبت فيها عدداً منتهياً من القيم الأولى ونترك الثاني حر.

الخلاصة:

قمنا في هذا الفصل أولا بذكر مفاهيم أساسية في الجبر الشامل ومفاهيم حول المتتاليات، ثم قمنا بتقديم مفاهيم أساسية في نظرية البيان بما يخدم بحثنا، وفي النهاية قمنا بتقديم مفاهيم أساسية في الطوبولوجيا.

الفصلُ الثَّاني

نَظريّة رامزي

Ramsey Theory

الفوضى الكاملة مستحيلة

نظريّة رامزي

مقدمة:

تعد نظرية رامزي مجالاً دراسياً غنياً وبحثياً نشطاً. يمكن وصف النظرية على أنها حقلا مؤثرا يجمع بين أدوات نظرية المجموعات والرياضيات التوافقية بهدف دراسة حتمية ظهور الأنماط المنتظمة في الأنظمة الكبيرة، حتى في الشروط العشوائية. إلا أن الحجج لإثبات بعض نتائجها تختلف عبر العديد من المجالات. ذلك جعلها جسرا بين مجالات متعددة كنظرية الأعداد والجبر. يعتمد جزء كبير من نظرية رامزي على أحد أكثر المبادئ الأساسية في الرياضيات، وهو مبدأ التصنيف ويطلق عليه مبدأ برج الحمام $(\boldsymbol{Pigeonhole\ Principle})$ وسنقوم بعرضه في هذا الفصل. كما وسنستعرض نظرية رامزي في سياقيها المنتهي وغير المنتهي، مع ذكر أعداد رامزي $R(s,t)$ المعروفة وكذلك الحدود المعروفة حتى الان. كذلك سنسلط الضوء على نظريات أساسية أخرى كنظرية فان وشور ورادو، والتي تندرج أيضا تحت اسم نظرية رامزي. وذلك لنقوم في الفصل اللاحق بدراسة تعميمات في نظرية شور ودراستها في البنى الجبرية، حيث تستخدم أدوات رامزي لتحليل الهياكل الجبرية غير المنتهية.

2-1- نشأة نظرية رامزي: [12]

2-1-1. التأسيس الأول (1928):

يعتبر العالم والفيلسوف والاقتصادي الإنكليزي فرانك رامزي $(Frank\ Plumpton\ Ramsey)$ المؤسس الفعلي للنظرية، حيث أثبت رياضيا أن "الفوضى الكاملة مستحيلة" أي أن أي هيكل كبير بما فيه الكفاية يحتوي على نمط منتظم بداخله (مثل مجموعة من النجوم أو الأرقام أو النقاط ...) على سبيل المثال:

إذا كان هناك عدد كاف من النجوم فيمكن للمرء دائما العثور على مجموعة تكاد أن تشكل نمط معين.

جاء إثبات هذا بشكل غير متوقع أثناء عمله على مشكلة في المنطق الرياضي تتعلق بأعمال راسل وألفريد ($Russell\ and\ Alfred\ North\ whitehead$) في ($Principia\ Mathematica$). وتوفي بشكل مأساوي عام 1930 عن عمر يناهز 26 عاما.

2-1-2. إعادة الاكتشاف والتطوير (1933-1934):

أعاد عالما الرياضيات بول إيردوس ($Paul\ Erd\grave{o}s$) 19 عاما آنذاك وجورج سيكريش ($George\ Szekeres$) اكتشاف المبدأ الأساسي لنظرية رامزي بشكل مستقل تماما في عام 1933. جاء ذلك من خلال مناقشة مشكلة هندسية طرحتها الطالبة استر كلاين ($Esther\ Klein$)، والتي عُرفت لاحقا باسم "مسألة كلاين" التي كانت إثبات أن خمس نقاط في المستوي بحيث لا تقع ثلاث منها على خط مستقيم تشكل دائما رباعي أضلاع محدب.

قام إيردوس وسيكريش بتعميم هذه المسألة، ووصفا العدد الدقيق اللازم لتشكيل مضلعات محدبة بأضلاع أكثر. مما قادهم إلى إثبات نظرية رامزي مرة أخرى دون أن يدروا بوجود عمل رامزي السابق.

أطلق إيردوس على الورقة البحثية التي نشروها في عام 1934 اسم "ورقة النهاية السعيدة" لأنه بعدها مباشرة تزوجا سيكيرش وكلاين.

2-1-3. العمل الموازي (1926):

على الرغم من أن نظرية رامزي سميت باسمه إلا أن الرياضي الهولندي بارتل لـ. فان ($Bartel\ Van\ Der\ Waerden$) قد سبقه إلى فكرة مماثلة في عام 1926. حيث أثبت ما يعرف الآن باسم نظرية فان أنه في أي تلوين لمجموعة كبيرة بما فيه الكفاية من مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة بلونين، لا بد من وجود متتالية حسابية جميع حدودها لها نفس اللون. عمل فان على هذا الإثبات بالتعاون مع زملائه ارتين وأوتو ($Emil\ Artin\ and\ Otto\ Schreire$).

2-1-4. التطور النظامي والانتشار:

بعد التأسيس المبكر على يد فرانك رامزي وإعادة الاكتشاف من قبل بول إيردوس وجورج سيكيرش، دخلت النظرية مرحلة التطوير النظامي في النصف الثاني من القرن العشرين حيث كان المحرك الرئيسي لهذه العملية هو النتائج الجديدة واستطلاعان اجراهما غراهام"(Ronald Graham) و روتشيلد (Bruce Rothschild) عام 1980 وقاموا برفقة سبنسر (Joel Spencer) بتأليف النص المعياري والشامل عن النظرية، والذي أصبح المرجع الأساسي للأكاديميين والباحثين. وقد ساهم **غراهام** بشكل خاص في نشر شهرة النظرية من خلال اكتشافه **عدد غراهام** – "الذي سجل في موسوعة غينيس كأكبر عدد مستخدم في برهان رياضي – وذلك في سياق حل مسائل تتعلق بتلوين البنى الهندسية عالية الأبعاد في إطار النظرية.

وهكذا انطلقت نظرية رامزي من فكرة تأسيسية عميقة إلى حقل رياضي مزدهر له تطبيقاته في عدة مجالات.

2-2- مبدأ برج الحمام:(*Pigeonhole Principle*) [22]

2-2-1. نظرية:

إذا كان لدينا n حمامة نريد توزيعها في k حجرة بحيث أن $n > k$ فإنه يجب أن يتشارك حمامتان على الأقل في ذات الحجرة.

الاثبات:

بفرض لدينا k حجره، n حمام و $n > k$ (أي أن عدد الحمام أكبر من عدد الحجرات)

سنعتبر أن وضع n حمام في k حجرة هو دالة: $f: \{1,2,..,n\} \longrightarrow \{1,2,\dots,k\}$

لنفرض جدلا أن هذه الدالة متباينة أي أنه: $\forall\, x,y \in \{1,2,\dots,n\}; x \neq y \implies f(x) \neq f(y)$

أي أنه يوجد تطابق بين المجموعة $\{1,2, \dots . , n\}$ والمجموعة

$$f(\{1,2,, \dots , n\}) = \{z \in \{1,2, \dots . , k\} : \exists\, x \in \{1,2, \dots , n\}\, ; f(x) = z\}$$

وهذا يعني أن المجموعة $f(\{1,2,, \dots , n\})$ هي مجموعة جزئية من $\{1,2, \dots . , k\}$

والمجموعة $f(\{1,2,, \dots , n\})$ لديها n عنصر. وهذا يناقض كون أن $n > k$

وبالتالي لا يمكن أن تكون f دالة متباينة. أي أنه يوجد $x, y \in \{1,2, \dots , n\}$ بحيث أن:

$$x \neq y \ \& f(x) = f(y)$$

• • •

أي أنه إذا أردنا توزيع n عنصر في k مكان (خانة) وكان عدد العناصر أكبر من عدد الخانات (الأمكنة) فإنه من اللازم والضروري أن يقع أكثر من عنصر في خانة واحدة.

أمثلة:

(1) من بين كل ثلاثة أشخاص عاديين اثنان منهم حتما يجب أن يكون لهم نفس الجنس.

(2) في صف يحوي ثلاثة عشر طالبا من المؤكد أن اثنين منهم على الأقل مولود في نفس الشهر.

(3) من بين أي خمس أعداد تستطيع إيجاد عددين بحيث أن الفرق بينهما يقبل القسمة على العدد 4

الحل:

بحسب بمبدأ برج الحمام. لنفرض أنه لدينا 4 حجرات ولتكن 1,2,3,4

نريد وضع العدد a في الحجرة i بحيث أن $i \in \{1,2,3,4\}$

إذا كان i هو باقي قسمة العدد a على 4

بما أن لدينا 5 أعداد فإن اثنان منهم على الأقل يقعان في نفس الحجرة وليكونا

$$a = 4k + i \wedge b = 4n + i : n, k \in \mathbb{N}$$

$$a - b = (4k + i)_(4n + i) = 4(k_n)$$

أي أن الفرق يقبل القسمة على 4.

...

يعتمد جزء كبير من نظرية رامزي على هذا المبدأ حيث ذكر غراهام وروتشيلد في كتابهما **[13]** أن نظرية رامزي هي تعميم لمبدأ برج الحمام.

2-3- مبدأ برج الحمام المعمم:($\boldsymbol{Generalized\ Pigeonhole\ Principle}$) [22]

2-3-1. نظرية:

إذا كان لدينا n حمام نريد توزيعها في k حجرة بحيث أن $n > k$. فان هناك حجرة على الأقل تحوي $\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil$ حمام وعلى الأقل حجرة لا تحوي أكثر من $\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$.

الاثبات:

• العدد $\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil$ هو عدد صحيح بحيث أن: $\frac{n}{k} \leq \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil < \frac{n}{k} + 1$ وبالتالي إذا لم تكن أي حجرة تحوي $\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil$ (أي أن أكبر عدد من الحمامات في كل حجرة سيكون أقل أو يساوي $\frac{n}{k} + 1$) فإن:

$$\text{عدد الحمامات} \leq k.\left(\frac{n}{k} - 1\right) < k.\left(\left(\frac{n}{k} + 1\right) - 1\right) = n$$

وهذا يناقض كون أن عدد الحمام يساوي n .

• العدد $\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$ هو عدد صحيح بحيث أن: $\frac{n}{k} - 1 < \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor \leq \frac{n}{k}$ ومنه:

إذا كل حجرة تحوي أكثر من $\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$ حمام فإن:

$$\text{عدد الحمامات} \geq k.\left(\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor + 1\right) > k.\left(\left(\frac{n}{k} - 1\right) + 1\right) = n$$

وهذا يناقض أيضا كون أن عدد الحمامات يساوي n .

...

مثال (1):

هناك 38 فترة زمنية يمكن خلالها جدولة المحاضرات في جامعة ما. إذا كان هناك 677 مقرر دراسي، فما هو عدد القاعات المختلفة المطلوبة لضمان عدم تعارض الجدولة؟

الحل:

هناك $n = 677$ مقررًا دراسيًا يحتاج إلى جدولة. "تمثل الحمام"

هناك $k = 38$ **فترة** زمنية متاحة (مثل 9 – 8 صباحًا، 10 – 9 صباحًا، إلخ). "تمثل الحجرات"

المطلوب: إيجاد **الحد الأدنى لعدد القاعات** المطلوبة لضمان أن جميع المقررات يمكن جدولتها دون تعارض في أي فترة زمنية، وذلك حسب مبدأ الحمام المعمم

$$\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil = \left\lceil \frac{677}{38} \right\rceil = \left\lceil 17\frac{31}{38} \right\rceil = 18$$

وللتحقق: $38 \times 18 = 684 > 677$

هنا استخدمنا فقط الجزء الأول من المبدأ لأننا نهتم بالحد الأقصى للقاعات المطلوبة لتجنب التعارض.

مثال(2):

لدينا 10 كتب و3 رفوف، ما هو الحد الأدنى وما هو الحد الأقصى للكتب في رف واحد؟

$\left\lceil \frac{10}{3} \right\rceil = 4$ أي يوجد رف واحد على الأقل يحتوي على 4 كتب.

$\left\lfloor \frac{10}{3} \right\rfloor = 3$ أي يوجد رف واحد على الأقل يحتوي على 3 كتب أو أقل.

2-4- مسألة كلاين: ($Esther\ Klein$) [12]

إذا وجد خمس نقاط في مستوي إقليدي بحيث لا تشكل أي ثلاث نقاط منها خطاً مستقيماً فأثبت أن أربعاً من هذه النقاط ستشكل دائما رباعي أضلاع محدب.

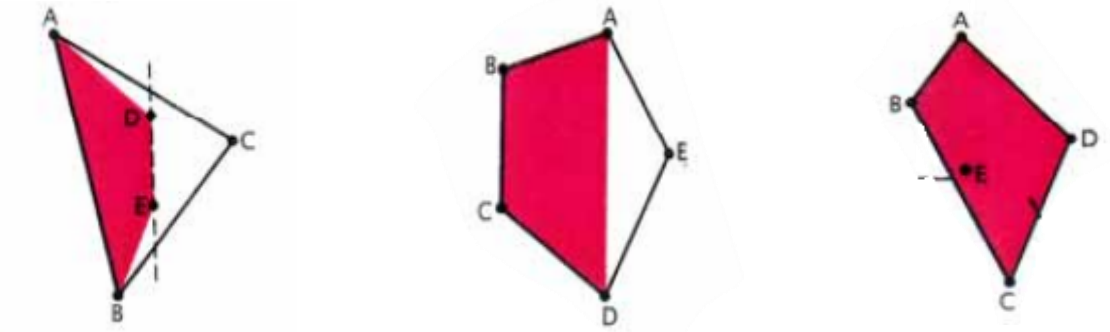
الإثبات:

كل الاحتمالات الممكنة لترتيب خمس نقاط هي في ثلاث حالات بناء على شكل الغلاف المحدب لها.

الغلاف المحدب لمجموعة النقاط S في المستوي الإقليدي: هو أصغر مجموعة تحتوي على جميع النقاط S.

الشكل الرباعي المحدب: هو شكل لأي نقطتين فيه A وB داخل الشكل، فإن القطعة المستقيمة AB بأكملها تكون داخل الشكل الرباعي.

الحالات الثلاث موضحة في الشكل التالي:



(3) (2) (1)

الشكل $(2-1)$ الغلاف المحدب.

الحالة (1): عندما يكون الغلاف المحدب رباعي أضلاع.

أربع نقاط من النقاط الخمسة تكون هي نفسها رؤوس الغلاف المحدب ولتكن النقاط A, B, C, D والنقطة الخامسة E تكون موجودة داخل الغلاف. ومنه الرباعي المحدب موجود بالفعل هو $ABCD$.

الحالة (2): عندما يكون الغلاف المحدب خماسي أضلاع.

في هذه الحالة ستكون جميع النقاط الخمسة هي رؤوس الغلاف المحدب ولا توجد أي نقطة داخلية، يوجد رباعي محدب إذا أخذت أي أربع نقاط من الخمسة ورسمت الضلع الذي يصل بين نقطتين غير متصلتين.

الحالة (3): عندما يكون الغلاف المحدب ثلاثي.

ABC غلاف محدب والنقطتان D, E يقعان داخل هذا المثلث. إن هاتين النقطتين تشكلان قطعة مستقيمة DE داخل المثلث. هذا الخط يقسم المثلث إلى مناطق حيث ستقع رؤوس المثلث ABC في مناطق مختلفة بالنسبة لهذا الخط DE. بما أن DE يقع داخل المثلث فلا بد من أن يقع رأسين على الأقل من رؤوس المثلث على نفس الجانب من الخط. ومنه الرباعي المحدب هو $ABED$.

بعد ذلك سرعان ما توصل كلاين وإيردوس إلى تعميم لهذه المسألة حيث أدركا أن خمسا من تسع نقاط في المستوي الإقليدي ستشكل دائما مضلع محدب.

2-5- مسألة الأصدقاء والغرباء: (***Friends and Stranger***) [13] [22]

2-5-1. المسألة:

في أي مجموعة تضم ستة أشخاص، إما ثلاثة منهم يعرفون بعضهم البعض بشكل متبادل (أصدقاء)، أو ثلاثة منهم لا يعرفون بعضهم البعض بشكل متبادل (غرباء).

الإثبات:

- ليكن لدينا ستة أشخاص هم: A, B, C, D, E, F

بفرض أنَّ علاقة المعرفة هي علاقة تناظرية أي أنه إذا كان A يعرف B فإن B يعرف A.

ولنفرض أن العلاقة غير متعدية أي أنه إذا كان A يعرف B وكان B يعرف C فقد يعرف الشخص A الشخص C أو قد لا يعرفه.

- سنركز على أحد الأشخاص وليكن الشخص A وعلاقته مع الأشخاص B, C, D, E, F. لدينا حالتين بسيطتين هما: الشخص A إما يعرف ثلاثة منهم على الأقل أو لا يعرف ثلاثة منهم على الأقل.

• الحالة الأولى: لنفرض أن A يعرف ثلاثة أشخاص منهم وليكن D, E, F.

إذا كان هناك زوج من هؤلاء الثلاثة يعرفون بعضهم البعض إما E, F أو D, E أو D, F فإن A مع أحد هذه الأزواج هم ثلاثة أشخاص يعرفون بعضهم البعض.

وإذا لم يكن زوج من الثلاثة يعرف بعضهم البعض فإن: هؤلاء الثلاثة D, E, F لا يعرفون بعضهم البعض.

أي في كلتا الحالتين نجد مجموعة مكونة من ثلاثة أشخاص تتمتع بالخاصية المطلوبة.

• الحالة الثانية: إذا كان A لا يعرف على الأقل ثلاثة منهم (أي يعرف اثنين فقط أو أقل).

لنفرض أن A يعرف فقط اثنين منهم وليكن B, C.

فإذا كان إما D, E أو D, F أو E, F لا يعرفون بعضهم البعض فإن A وأحد الزوجين لا يعرف أحدهم الأخر. وإلا فإن الأشخاص الثلاثة D, E, F يعرفون بعضهم البعض.

بتعميم هذه الحالة الخاصة، يمكننا تقديم النظرية كاملة. بدلا من اعتبار ستة أشخاص في المسألة، يمكن أن يكون لدينا عدد من الأشخاص أو عدد من العناصر. ولا نحتاج لتقييد أنفسنا بعلاقتين أصدقاء وغرباء، يمكن أن يكون لدينا أي عدد من العلاقات المتبادلة، على سبيل المثال أصدقاء وأعداء وأطراف محايدة.

2-5-2. النظرية: [17]

إذا كان عدد العناصر في مجموعة كبيرة بما فيه الكفاية، وكل زوج من هذه العناصر له واحدة من عدد من العلاقات. فإن هناك دائما مجموعة جزئية تحتوي على عدد معين من العناصر حيث يكون لكل زوج العلاقة نفسها.

يجدر بالذكر أن النظرية السابقة هي النظرية التي أثبتها العالم فرانك رامزي في أبحاثه في المنطق.

ملاحظة: إن مسألة الأصدقاء والغرباء هي من أولى الأمثلة المحيرة لما أطلق عليه نظرية رامزي.

2-5-3. الانتقال بالمسألة إلى التمثيل البياني: [12]

لقد كان العالم إيردوس مفتونا بفكرة رامزي، لذلك بدأ العمل على نسخة من مسألة الأصدقاء والغرباء. قام بتمثيل الأشخاص بستة نقاط وأن ترسم النقاط الستة على مستو بحيث لا يكون أي ثلاث نقاط على خط مستقيم. وتتصل هذه النقاط بضلع ملونة لتمثل العلاقة بين الشخصين المتقابلين. تعني الضلع الحمراء أن الأشخاص يعرفون بعضهم البعض بشكل متبادل، والضلع الزرقاء تعني أنه لا يعرف أحدهم الاخر. وبالتالي إذا كان ثلاثة أشخاص يعرفون

بعضهم البعض فستشكل الأضلاع بين النقاط مثلثا أحمر. وإذا ثلاثة أشخاص غرباء عن بعضهم البعض سيتم تشكيل مثلث أزرق. لذا عرف الشبكة الكاملة على أنها عدد من النقاط المتصلة جميعها بواسطة ضلع، ثم سأل ما هي أصغر شبكة كاملة تضمن عند تلوينها باللونين الأحمر أو أزرق شبكة كاملة من ثلاث نقاط باللون الأحمر أو ثلاث نقاط باللون الأزرق والإجابة هي شبكة كاملة من ست نقاط.

وقد عبر عن هذه المسألة وحلها بالشكل التالي:

إن عدد رامزي للثلاثة الحمراء والثلاثة الزرقاء يساوي 6.

2-6- نظرية رامزي ونظرية البيان:

ليكن البيان التام $G = (V, E)$ حيث:

V مجموعة الرؤوس تمثل الأفراد (6 أشخاص).

E مجموعة الأضلاع تمثل العلاقات بينهم.

نريد تلوين الأضلاع (العلاقات) بلونين (كل ضلع يتم تلوينه بلون واحد) حيث:

اللون الأحمر: يرمز إلى علاقة الصداقة (المعرفة).

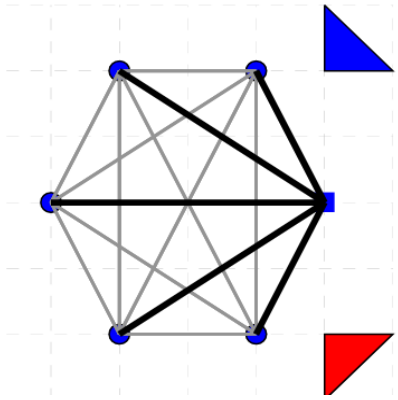
اللون الأزرق: يرمز إلى علاقة الغرباء (عدم المعرفة).

حسب المسألة أي تلوين عشوائي لأضلاع البيان التام K_6 بلونين سنحصل على بيان جزئي تام K_3 أحمر اللون (ثلاثة أصدقاء) أو بيان جزئي تام K_3 أزرق اللون (ثلاثة غرباء).

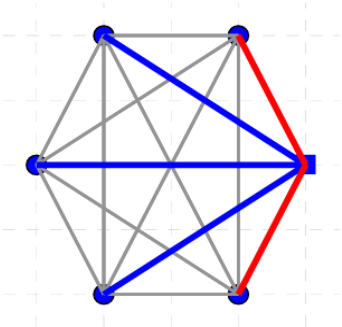
سنوضح ذلك في الشكل $(2-2)$:

نثبت عقدة واحدة فيكون لدينا كل عقدة تتصل بخمسة أضلاع كما في الشكل (1) فإذا لونا الأضلاع الخمسة بلونين أحمر وأزرق وبشكل عشوائي فإنه بحسب مبدأ الحمام حتما سيكون لدينا ثلاثة أضلاع ملونة بأحد اللونين وليكن أزرق وضلعين ملونين بلون أخر وليكن أحمر كما في الشكل (2).

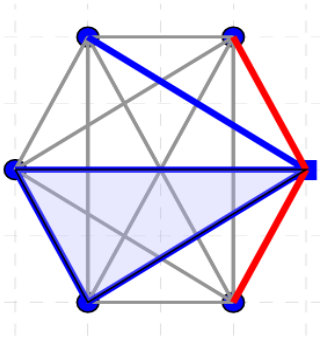
إذا لونا أحد الأضلاع بلون أزرق سيظهر لدينا بيام تام جزئي ثلاثي بلون أزرق كما هو موضح في الشكل (3) أما إذا لونا الأضلاع بلون أحمر سيظهر لدينا بيان تام جزئي ثلاثي بلون أحمر كما موضح في الشكل (4).



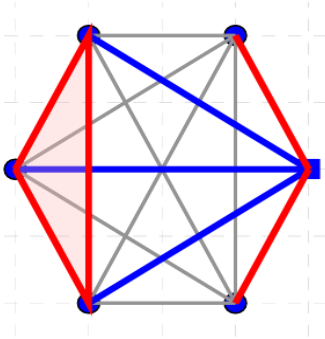
(1)



(2)



(3)

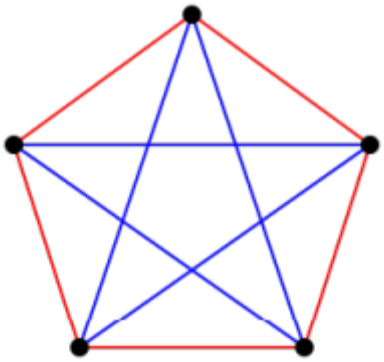


(4)

الشكل (2 – 2) تلوين ضلعي للبيان التام K_6

ومنه نجد أن وجود ستة أشخاص (عقد) كافية لضمان وجود ثلاثة أصدقاء أو ثلاثة غرباء. أي أنه في أي بيان تام من ست عقد على الأقل ملون بلونين نستطيع دوما إيجاد بيان جزئي تام ثلاثي أحادي اللون، ولكن ماذا إذا كان عدد الأشخاص 5؟ أي أن هل نستطيع إيجاد مثلث أحادي اللون إذا كان لدينا البيان التام خماسي؟

في البيان التام k_5 إذا قمنا بتلوينه بلونين أحمر وأزرق كما موضح في الشكل



الشكل $(2-3)$ بيان تام k_5.

نلاحظ أن البيان لا يحوي أي بيان جزئي تام أحادي اللون. مما يعني أن بيان تام من 5 عقد ليس كاف لضمان وجود بيان جزئي ثلاثي أحادي اللون. ومنه:

2-6-1. تعريف عدد رامزي: (*Ramsey Number*) [13] [22]

هو أصغر عدد صحيح موجب n يحقق أنه لأجل أي تلوين ثنائي لأضلاع البيان k_n بلونين أحمر أو أزرق فإنه يحوي إما بيان جزئي تام بلون أحمر k_r أو بيان جزئي تام k_s بلون أزرق. ويرمز له بالرمز $\mathrm{R(r,s)} = n$.

مثال:

$R(3,3) = 6$ هو أول عدد رامزي تم حسابه. (مسألة الأصدقاء والغرباء الشهيرة)

ماذا عن عدد رامزي إذا كان إما $r = 2$ أو $s = 2$ أي هل نستطيع إيجاد بيان تام يضمن لنا وجود بيان جزئي تام أحادي اللون؟ نلاحظ أن أي بيان تام ملون بلونين فإنه يحتوي بيان جزئي ثنائي له لون واحد. أي $R(s, 2) = R(2, s) = s$.

وماذا عن عدد رامزي $R(1, s)$ **أو** $R(s, 1)$؟ إن البيان التام الوحيد الذي يضمن وجود عقدة معزولة هو K_1. ومنه $R(1, s) = R(s, 1) = 1$.

ولكن ماذا عن بقية الأعداد؟ هنا يتوجب علينا طرح الأسئلة الثلاثة التالية:

هل عدد رامزي موجود لأجل كل عدد $s \geq 2, r \geq 2$ اختياري من $\mathbb{N}$ ؟

إذا كان عدد رامزي $R(r, s)$ موجود، هل نستطيع إيجاد قيمة محددة له؟

إذا كان عدد رامزي $R(r, s)$ موجود، وإذا لم نستطع إيجاد قيمة محددة له، ماهي حدود هذا العدد؟

وهذا ما ستجيب عليه النظرية التالية:

2-6-2. نظرية رامزي: (*Ramsey Theory for two Colors*) [13] [18]

لأي عددين $r, s \in \mathbb{N} \setminus [1]$ إن عدد رامزي $R(r, s)$ موجود. ولأجل $r, s \geq 3$ فإن:

$$R(r, s) \leq R(r - 1, s) + R(r, s - 1)$$

ملاحظة حول أعداد رامزي:

$$R(r, s) = R(s, r); r, s \geq 2$$

2-6-3. أعداد رامزي: [13] [18]

من المعروف أن أعداد رامزي صعبة الحساب، حيث يقاوم حساب الأعداد الدقيقة أقوى الحواسيب. ولم يتم التوصل إلى صيغة عامة لحساب عدد رامزي $R(s,t)$. ولكن قد نجحت جهود أجيال من علماء الرياضيات في العثور على عدد قليل جدا من أعداد رامزي. ويجدر بالذكر أنه لم يكتشف أي قيمة جديدة لأعداد رامزي منذ عام 1994.

فيما يلي جدول لأعداد رامزي المعروفة:

r \ s	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	1	3	6	9	14	18	23	28	36	
4	1	4	9	18	25					
5	1	5	14	25						
6	1	6	18							
7	1	7	23							
8	1	8	28							
9	1	9	36							
10	1	10								

الشكل$(2-4)$ جدول أعداد رامزي المعروفة $R(r,s)$

2-6-4. بول في وصفه أعداد رامزي: [16]

إن عالم الرياضيات بول $(Paul\ Erdos)$ قال في شكوكه في أننا سنتمكن من الوصول إلى القيمة الدقيقة لبعض هذه الأعداد.

لنفترض أن كائنات فضائية غزت الأرض وهددت بتدميريها خلال عام ما لم يتمكن البشر من إيجاد عدد رامزي للخمسة الحمراء والخمسة الزرقاء. يمكننا تشغيل أفضل عقول العالم وأسرع أجهزة الكمبيوتر، وخلال عام على الأرجح

سنتمكن من حساب قيمة هذا العدد. أما إذا طالبت الكائنات الفضائية بعدد رامزي للستة الحمراء والستة الزرقاء. فإنه لن يكون أمامنا خيار سوى شن هجوم استباقي.

2-6-5. حدود أعداد رامزي: [18]

يوجد أعداد لم يتم الوصول لقيمتها بدقة ولكن استطاع الباحثون من الوصول إلى حدود مجالاتها.

فيما يلي جدول يوضح بعض الحدود الدنيا والعليا المعروفة لأعداد رامزي $R(r,s)$.

	3	4	5	6	7	8	9	10
3								40 43
4				36 40	49 58	59 79	73 105	92 135
5			43 46	59 85	80 133	101 193	133 282	149 381
6		36 40	59 85	102 160	115 270	134 423	183 651	204 944
7		49 58	80 133	115 270	205 492	219 832	252 1368	292 2119
8		59 79	101 193	134 423	219 832	282 1518	329 2662	343 6090
9		73 105	133 282	183 651	252 1368	329 2662	565 4956	581 8675
10	40 43	92 135	149 381	204 944	292 2119	343 6090	581 8675	789 16064

الشكل $(2-5)$ جدول بعض الحدود المعروفة لأعداد رامزي $R(r,s)$

2-6-6. تعريف عدد رامزي بـ r لون: [13] [16] [22]

ليكن $s_1, s_2 \dots \dots \dots, s_r \epsilon \mathbb{N} \setminus \{1\}$ فإن عدد رامزي $R(s_1, s_2 \dots \dots \dots, s_r)$ هو أصغر عدد n لأي $r-$ تلوين لأضلاع البيان k_n فإنه يحوي على: k_{s_i} بيان جزئي ثابت اللون $i \in [1, r]$.

مثال: $R(3,3,3) = 17$

أي أنه إذا قمنا بتلوين بيان تام k_{17} بثلاث ألوان ولتكن أحمر أزرق وأخضر بشكل عشوائي سيظهر لدينا إما k_3 أحمر اللون أو k_3 أزرق اللون أو k_3 أخضر اللون.

الإثبات:

سنثبت أولا أن $R(3,3,3) \geq 17$.

نأخذ تلوين c_1, c_2, c_3 لأضلاع البيان k_{17} سنثبت وجود مثلث أحادي اللون.

نثبت أحد العقد ولتكن x من k_{17} فإن هذه العقدة ستتصل بـ 16 ضلع. هذه الأضلاع سنلونها بثلاث ألوان، فإنه بحسب مبدأ برج الحمام المعمم يوجد لون c_i يظهر ست مرات على الأقل.

ولتكن المجموعة التالية هي مجموعة العقد التي تصل بين الأضلاع الستة التي تحمل ذات اللون:

$$Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6\}$$

سنميز حالتين:

الحالة (1): إذا وجدت ضلع بين عنصرين من المجموعة Y لها نفس اللون c_i، عندئذ سنحصل على بيان تام ثلاثي (مثلث) أحادي اللون.

الحالة (2):

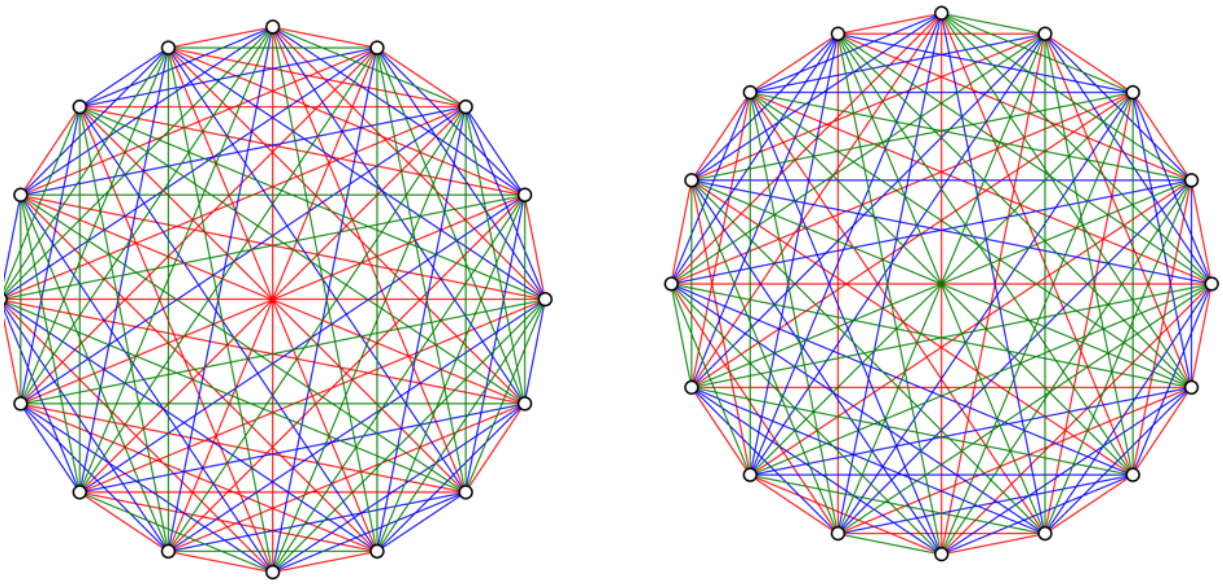
إذا كانت كل الأضلاع بين عناصر المجموعة Y ليست لها نفس اللون، أي أن الأضلاع داخل البيان التام K_6 ملونة بلونين فقط. وكون أن $R(3,3) = 6$ فإنه يوجد مثلثا احادي اللون.

في كلتا الحالتين يظهر لدينا بيان تام ثلاثي أحادي اللون في K_6. أي أن 17 عقدة كافية لضمان وجود مثلث أحادي اللون.

ومنه نجد أن $R(3,3,3) \leq 17$.

سنثبت الان أن $R(3,3,3) > 16$ وذلك سيكون موضح في البيان التام K_{16} التالي:

أي أنه في البيان التام K_{16} السابق الملون بثلاث ألوان أحمر أزرق وأخضر لا يوجد أي بيان ثلاثي أحادي اللون. مما يعني أننا بحاجة لأكثر من 16 عقدة. وعلينا أن ننوه أن هنالك فقط تلوينان مختلفان لأضلاع البيان التام K_{16} لا يحويان أي بيان جزئي تام أحادي اللون. ولقد عرضت أحدهما.



(2) (1)

الشكل$(2-6)$ تلوين البيان التام K_{16}.

2-6-7. نظرية رامزي المنتهية: (Ramsey's Theorem, Finite Case) [13] [22]

لأجل أي $s_1, s_2, \dots \dots, s_r \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ فإن عدد رامزي $R(s_1, s_2, \dots \dots, s_r)$ موجود.

ينبع الدافع وراء دراسة نظرية رامزي من السؤال التالي: هل يمكن للمرء أن يجد دائما النظام في الفوضى؟ وإذا كان الأمر كذلك فإلى أي مدى؟ إلى أي مدى نحتاج من الفوضى للتأكد من وجود قدر معين من النظام فيها. أي ما هو الحجم المطلوب لبنية ما بحيث تضمن بعد تقسيمها إلى عدد محدود من البنى الجزئية، أن تمتلك واحدة منها على الأقل خاصية معينة ذات أهمية.

إن أعداد رامزي هي الأعداد التي تحدد الحد الأدنى لحجم الفوضى المطلوبة لضمان وجود نظام معين. فعلى سبيل المثال: $R(s,t)$ هو أصغر عدد من العقد المطلوبة بحيث أن أي رسم بياني تام بهذا العدد من العقد، وأي تلوين

لأضلاعه بلونين، سيحتوي إما على بيان جزئي تام من s عقدة ملون بلون واحد، أو بيان جزئي تام من t عقدة ملون بلون آخر.

هذه الأعداد لا تُجيب فقط عن سؤال الوجود الرياضي، بل تُحدد عتبة الانتقال من الفوضى العشوائية إلى النظام الحتمي. على سبيل المثال: $R(3,3) = 6$ تعني أن أي فوضى في تلوين علاقات مجموعة من ستة عناصر ستؤدي حتمًا إلى ظهور نظام جزئي (ثلاثة عناصر مترابطة تمامًا بنمط واحد).

وهذا ما نصت عليه نظرية رامزي أنه في أي نظام كبير بما فيه الكفاية، ستظهر حتما أنماط منتظمة.

...

سننتقل الآن من نظرية رامزي في سياقها المنتهي لنتعرف على نظرية رامزي في سياقها غير المنتهي.
حيث أن نظرية رامزي أثبتت لنا وجود عدد رامزي أما في نظرية رامزي غير المنتهية فسنتعامل مع مجموعات غير منتهية.

2-6-8. نظرية رامزي غير منتهية بلونين: [13] [22]

$(Ramsey\ Theorem - Two\ Colors - \ Infinite\ Case)$

أيا تكن $\mathbb{N}^2 = \{X; X \subset \mathbb{N}; |X| = 2\}$ ملونة بلونين أحمر أو أزرق فإنه يوجد مجموعة غير منتهية في $\mathbb{N}$ أحادية اللون.

الإثبات:

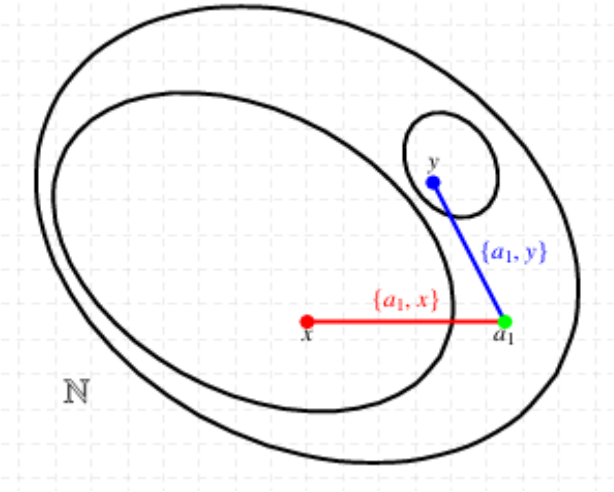
لتكن $\mathbb{N}$ مجموعة الأعداد الطبيعية، وليكن $c: \mathbb{N}^2 \longrightarrow \{r, b\}$ هو تلوين لأضلاع عناصر المجموعة $\mathbb{N}$ (حيث r اللون الأحمر و b اللون الأزرق).

المطلوب: هو اثبات وجود مجموعة جزئية غير منتهية $A \subset \mathbb{N}$ أحادية اللون.

نختار عنصرا أوليا عشوائيا $a_1 \in \mathbb{N}$

ننظر إلى جميع الأزواج (الأضلاع) $\{a, x\}$ فهذه الأزواج إما حمراء او زرقاء.

لنأخذ $\{a_1, x\}$ و $\{a_1, y\}$ حيث $x, y \in \mathbb{N}$ " كما هو موضح بالشكل $(2-7)$ "



الشكل$(2-7)$

بما أن هناك عدد غير منته الأضلاع فإحدى الحالتين يجب أن تكون غير منتهية.

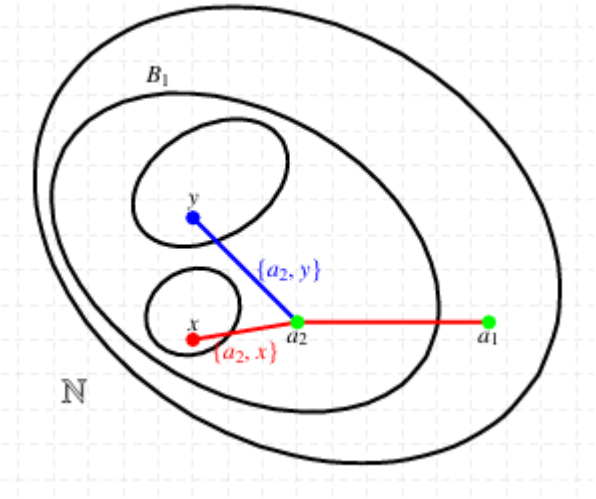
المجموعة الحمراء: $R_1 = \{x \in \mathbb{N}; \{a_1, x\}$أحمر$\}$

المجموعة الزرقاء: $B_1 = \{y \in \mathbb{N}; \{a_1, y\}$أزرق$\}$

نفرض أن R_1 غير منتهية. (الإثبات مشابه لو أخذنا المجموعة B_1). نختار $a_2 \in R_1$

ننظر إلى جميع الأضلاع $\{a_2, x\}$ بحيث أن: $x \in R_1$.

لنأخذ $\{a_2, x\}$ و $\{a_2, y\}$ حيث أن: $x, y \in R_1$ " كما هو موضح بالشكل$(2-8)$ "

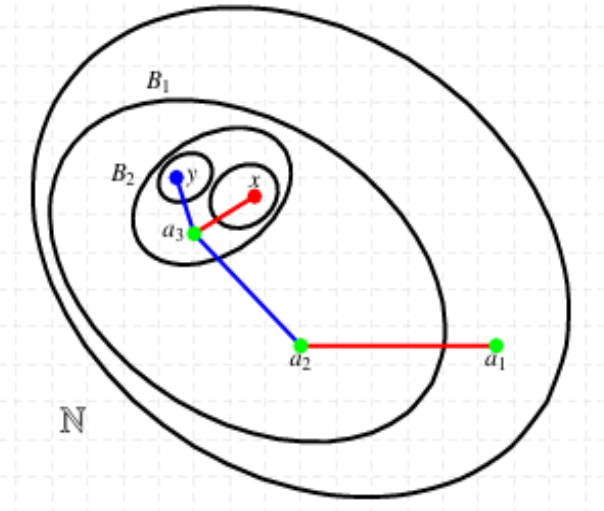


الشكل$(2-8)$

نفرض أن $B_2 = \{y \in R_1; \{a_2, y\}$أزرق$\}$ غير منتهية. نختار $a_3 \in B_2$

ومنه:

$\{a_3, x\}$ حمراء و $\{a_3, y\}$ حيث أن $x, y \in B_2$ "كما موضح في الشكل $(2-9)$ "



الشكل$(2-9)$

نفرض أن $B_3 = \{x \in B_2; \{a_3, x\}$ أحمر$\}$ هي غير منتهية. ونختار $a_4 \in B_3$

ومنه:

$\{a_4, x\}$ حمراء و $\{a_4, y\}$ حيث أن: $x, y \in B_3$.

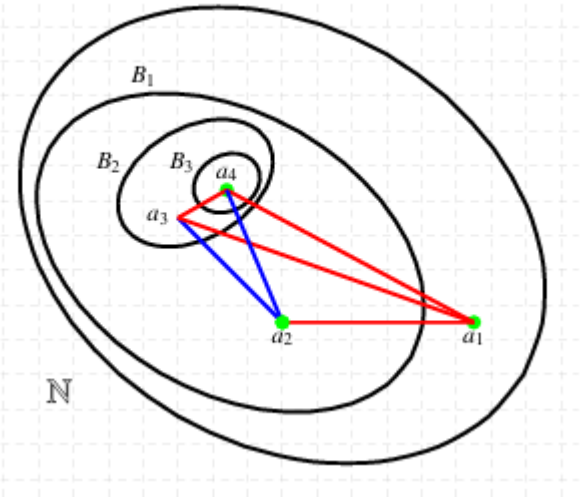
نلاحظ أن:

$\{a_1, a_2\}, \{a_1, a_3\}, \{a_1, a_4\}, \ldots \ldots$ حمراء

$\{a_2, a_3\}, \{a_2, a_4\}, \ldots \ldots \ldots$ زرقاء

$\{a_3, a_4\}, \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$ حمراء

وذلك موضحا بالشكل التالي:



الشكل$(2 - 10)$

وبشكل مشابه نحصل على متتالية غير منتهية من الأعداد الطبيعية $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots \ldots$

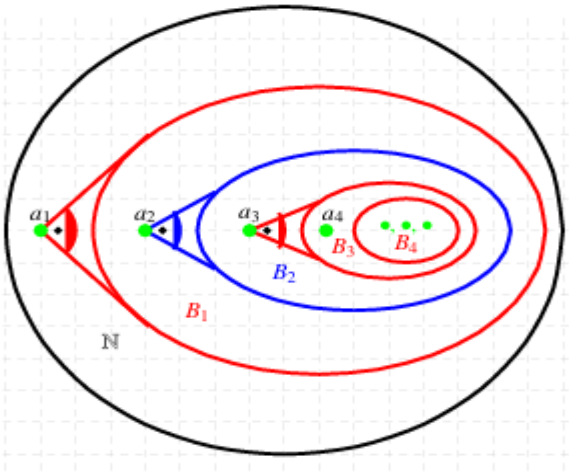
ومتتالية غير منتهية من المجموعات $\mathbb{N} \supseteq R_1 \supseteq B_2 \supseteq B_3 \supseteq \cdots$

تحقق الخواص التالية، لأجل كل $i \in \mathbb{N}$ فإن:

B_i هي مجموعة غير منتهية

$$a_{i+1} \in B_i$$

$$c(\{a_i, a_{i+1}\}) = c(\{a_i, a_{i+2}\}) = c(\{a_i, a_{i+3}\}) = \cdots$$



الشكل$(2-11)$

وبالتالي نستطيع إيجاد $A \subset \mathbb{N}$ هي مجموعة جزئية غير منتهية أحادية اللون.

2-6-9. تطبيق مبرهنة رامزي على المتتاليات المطردة: [22]

مثال (1):

لتكن لدينا $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية من الأعداد الحقيقية المختلفة مثنى مثنى، أثبت أنها تحتوي على متتالية جزئية $\left(a_{n_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ مطردة (إما متزايدة تماما أو متناقصة تماما).

الحل:

نعرف تلوينا ثنائيا لمجموعة من الأدلة (الأزواج) $\{i,j\}$ (حيث $i > j$) كما يلي:

أحمر: إذا كان $a_i > a_j$

أزرق: إذا كان $a_i < a_j$

بتطبيق مبرهنة رامزي غير المنتهية للتلوين الثنائي على $\mathbb{N}^2$، بما أن $\mathbb{N}$ مجموعة غير منتهية، فإنه توجد مجموعة جزئية غير منتهية $I \subseteq \mathbb{N}$ أحادية اللون. لدينا حالتين:

إما المجموعة I حمراء اللون، فإنه لكل $i > j$ يكون $a_i > a_j$ فنحصل على متتالية جزئية $(a_i)_{i\in I}$ متزايدة تماما.

أو المجموعة I زرقاء اللون، فإنه لكل $i > j$ يكون $a_i < a_j$ فنحصل على متتالية جزئية $(a_i)_{i\in I}$ متناقصة تماما.

في كلتا الحالتين نحصل على متتالية جزئية مطردة تماما.

مثال (2):

لتكن لدينا $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية من الأعداد الحقيقية (يوجد تكرار). أثبت أنها تحتوي إما على متتالية جزئية ثابتة أو متتالية جزئية مطردة تماما.

الإثبات:

يوجد لدينا حالتين:

الحالة (1): تكرار غير منته لعنصر ما: أي يوجد عدد حقيقي x يظهر عدد غير منته من المرات، فاختيار أدلته يعطي متتالية جزئية ثابتة.

الحالة (2): لا يوجد تكرار غير منته لعنصر: أي أن كل قيمة تظهر عدد منته من المرات، نبني متتالية جزئية حدودها مختلفة مثنى مثنى، ومنه بحسب المثال السابق فإنها تحتوي على متتالية جزئية مطردة.

2-6-10. نظرية رامزي غير منتهية: ($Ramsey's\ Theorem, Infinite\ Case$) [13] [18]

ليكن $k, r \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. لكل $r-$ تلوين للمجموعة $\mathbb{N}^{(k)} = \{A: A \subset N\ ,\ |A| = k\}$ فإنه يوجد مجموعة جزئية غير منتهية ثابتة اللون (أي أن جميع أجزائها لها نفس اللون).

بلغة رياضية: لتكن $\mathbb{N} = \{1,2,3, \dots \dots \dots \dots \dots\}$

لأجل $k \epsilon \mathbb{N}$ **فإن:**

$$\mathbb{N}^{(k)} = \{A \subset N\ ;\ \ |A| = k\}$$

لأجل $\boldsymbol{r} \in \mathbb{N}$ نعرف $\boldsymbol{r}-$ تلوين $\mathbb{N}^{(\boldsymbol{k})}$ بأنه:

$$f: \mathbb{N}^{(k)} \longrightarrow [1, r]$$

إذا كان f هو $r-$ تلوين لـ $\mathbb{N}^{(k)}$ و $A \subseteq \mathbb{N}$ بحيث أن أياً يكن $f(x) = f(y)\ ,\ \ x, y \in A^{(k)}$

نقول عن المجموعة A أنها أحادية اللون.

تؤكد نظرية رامزي غير المنتهية أنه مهما قمنا بتلوين المجموعات الجزئية المكونة من k عنصرًا في الأعداد الطبيعية بعدد محدود من الألوان، فلا بد من وجود مجموعة غير منتهية من الأعداد تكون جميع مجموعاتها الجزئية أحادية اللون هذا يثبت أن النظام يظهر حتميًا حتى في البنى الغير منتهية.

مثال:

ليكن لدينا S مجموعة غير منتهية من النقاط في المستوي. نريد إثبات أنه توجد A مجموعة جزئية غير منتهية في S بحيث أن: إما لا توجد ثلاث نقاط في A تقع على استقامة واحدة.

أو جميع نقاط A تقع على استقامة واحدة.

الحل:

لتكن $\mathcal{A}$ مجموعة كل الثلاثيات من النقاط من S أي: $\mathcal{A} = \{\{x,y,z\}: x,y,z \in S\} = S^{(3)}$

إن هذه المجموعة تمثل كل الطرق الممكنة لاختيار ثلاث نقاط مختلفة من S .

نعرف دالة التلوين كما يلي: $f: \mathcal{A} \longrightarrow \{red, blue\}$ بحيث أن:

$f(x,y,z) = red$ إذا كانت x,y,z لا تقع على استقامة واحدة.

$f(x,y,z) = blue$ إذا كانت x,y,z تقع على استقامة واحدة.

بتطبيق نظرية رامزي الغير منتهية: لأي تلوين لـ$S^{(3)}$ الغير منتهية بلونين أحمر وأزرق، توجد مجموعة غير منتهية $A \subset \mathbb{N}$ أحادية اللون (أي جميع الثلاثيات فيها لها نفس اللون)

أي: إما جميع الثلاثيات حمراء (هذا يعني أنه لا يوجد ثلاث نقاط في A تقع على استقامة واحدة).

أو جميع الثلاثيات زرقاء (هذا يعني أنه أي ثلاث نقاط في A تقع على استقامة واحدة).

...

في سياق مجال نظرية رامزي، تبرز عدة نظريات أساسية:

- نظرية فان دير فاردين (المتتاليات الحسابية).
- نظرية شور (للمجموعات الجبرية).
- نظرية رادو (للمعادلات الخطية).
- نظرية هندمان (للتراكيب الجبرية). وسنتطرق لها في الفصل الثالث.

تشكل هذه النظريات معاً نظرة شاملةً للانتظام الحتمي، حيث يكمل كل منها الآخر في تفسير ظواهر الانتظام في الأنظمة الكبيرة.

2-7- نظرية فان دير فاردين: (*Van der Waerden's Theorem*)

على الرغم من أن الكثير من الاعمال المبكرة في نظرية رامزي ركزت على مجموعات من النقاط أو المستقيمات إلا أن العديد من المسائل تضمنت مجموعات الأعداد. في الواقع، بدأ العالم الهولندي بارتل فان في حل مثل هذه المسائل قبل أن يثبت رامزي نظريته. في عام 1926 درس فان المتتاليات وأول ما أثار اهتمامه المثال الأعداد من 1 إلى 9.

ثم تحدى نفسه في تعميمها مستعينا بـ أرتين وأوتو. وسميت نظرية رامزي في المتتاليات بنظرية فان ديرفاردن.

2-7-1. نظرية رامزي والمتتاليات الحسابية: [12]

العبارة التالية حول المتتالية الحسابية تنبع من نظرية رامزي:

إذا كان كل رقم من 1 إلى 9 ملون بأحد اللونين الأحمر أو الأزرق، فإن ثلاثة أرقام حمراء أو ثلاثة أرقام زرقاء ستشكل متتالية حسابية.

الإثبات:

لدينا 512 طريقة لتلوين هذه الأرقام بلونين. ويمكننا التحقق من كل الطرق لإثبات ذلك.

ومع ذلك يمكننا إثبات ذلك من خلال حالتين فقط:

الحالة (1): نبدأ بالحالة التي يكون فيها الرقمان 4 , 6 من نفس اللون: أزرق على سبيل المثال

1 2 3 4 5 6 7 8 9

لتجنب متتالية حسابية زرقاء، نقوم بتلوين العدد 5 باللون الأحمر.

1 2 3 4 5 6 7 8 9

لتجنب المتتالية الحسابية الزرقاء 2,4,6 و 4,6,8 نقوم بتلوين كل من العددين 2,8 باللون الأحمر.

1 2 3 4 5 6 7 8 9

لكن هذا ترك المتتالية الحسابية 2,5,8 حمراء اللون.

وبالتالي: إذا كان هناك 4 و6 من نفس اللون فسيكون دائما متتالية حسابية حمراء أو زرقاء طولها 3.

الحالة (2): الحالة التي يكون فيها العددين 4 و6 من لونين مختلفين. يمكننا تلوين 5 إما باللون الأزرق أو باللون الأحمر دون ان يظهر متتالية حسابية، لذلك نختار عشوائيا تلوين 5 باللون الأحمر.

1 2 3 4 5 6 7 8 9

نستمر في تلوين الأرقام كما يلي:

3 بالأزرق لتجنب 3,4,5

9 بالأحمر لتجنب 3,6,9

7 بالأزرق لتجنب 5,7,9

8 بالأحمر لتجنب 6,7,8

2 بالأزرق لتجنب 2,5,8

1 بالأحمر لتجنب 1,2,3

ينتج من هذا التلوين ما يلي:

1 2 3 4 5 6 7 8 9

ومع ذلك، لايزال لدينا المتتالية الحسابية الحمراء 1,5,9. لذلك بغض النظر عما إذا كان 4 و 6 من نفس اللون أو مختلفين، دائما سيكون هناك متتالية حسابية حمراء اللون أو زرقاء.

لم يستطع فان اثباتها للونين دون إثباتها لعدد من الألوان، حيث استخدم في إثباته شكلا خاصا من الاستقراء الرياضي. بعد إثبات نظرية رامزي للمتتاليات الحسابية عمل فان على المسألة التالية: ماهي أصغر قيمة للعدد n تضمن متتالية حسابية أحادية اللون.

2-7-2. نظرية فان ديرفاردن: [13] [16] [22]

لأجل أي عددين $k, r \in \mathbb{N}$ وأي $r-$ تلوين لمجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة فإنها تحتوي على متتالية حسابية ذات K- حد أحادية اللون.

أي أن: إذا لونا (قسمنا) مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة بعدد محدود من الألوان (الفئات) فإنه يوجد متتالية حسابية طويلة أحادية اللون.

علاوة على ذلك:

يوجد عدد طبيعي N بحيث أن أي $r-$ تلوين لمقطع من مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة $\{1, \dots \dots, N\}$ تحتوي على متتالية حسابية ذات k حد أحادية اللون.

2-7-3. تعريف: [13] [16] [22]

أصغر عدد طبيعي N يحقق النظرية يسمى عدد فان نرمز له بالرمز $\boldsymbol{w(k,r)}$.

فيما يلي جدول عن بعض أعداد فان المعروفة $w(k,r)$ والحدود الدنيا.

r \ k	3	4	5	6	7	8	9
2	9	35	178	>1131	> 3703	> 11495	>41265
3	27	> 292	> 1209	> 8886	> 43855	> 238400	
4	76	> 1048	> 17705	> 91331	> 393469		
5	> 125	> 2254	> 24045	> 246956			
6	> 207	> 9778	> 63473	> 633981			

الشكل$(2-12)$ جدول أعداد فان الشهيرة.

تُظهر نظرية فان دير فاردين كيف أن **الانتظام حتمي** في المتتاليات الحسابية (حتى تحت التلوينات العشوائية) مما يعكس جوهر نظرية رامزي في حتمية ظهور الأنماط في البنى الكبيرة.

2-8- نظرية شور: (*Schur's Theorem*) [13] [16] [22]

وضعت نظرية شور لأول مرة لإثبات نتيجة تتعلق بمبرهنة فيرما الأخيرة، حيث نشر العالم شور برهان نظريته الأصلية والذي سبق نظرية رامزي عام 1917.ولم يتم التعرف عليها إلا بعد فترة طويلة من اكتشافها.

2-8-1. نظرية شور الأصلية:

لأي عدد صحيح $r \geq 1$ ، فإنه يوجد عدد صحيح موجب s بحيث أن أي $r-$ تلوين للمجموعة $[1,s]$ يحتوي على أحادية اللون تحقق أن x,y,z $x+y=z$.

2-8-2. تعريف:

نسمي أصغر s عدد يحقق المبرهنة السابقة عدد شور ويرمز له بالرمز $s(r)$.

2-8-3. أعداد شور:

هناك عدد قليل جدا من اعداد شور المعروفة. في الواقع لم يتم تحديد القيمة الدقيقة للعدد $s(4)$ حتى عام 1931.

r	$s(r)$
1	2
2	5
3	14
4	45

الشكل$(2-13)$ جدول أعداد شور.

2-8-4. حدود أعداد شور:

بما أن القيمة الدقيقة لعدد قليل جدا من أعداد شور معروفة، فإن تركيز العلماء والباحثين سيتحول بشكل تلقائي إلى الحدود الدنيا والعليا لهذه الأعداد. لقد تم إثبات نظريات ونتائج للحدود الدنيا والعليا للأعداد، إلا انها لا تحدد قيمتها الفعلية.

2-8-5. نظرية (1):

لأجل كل $r \geq 1$، إن $s(r) \leq 3r!_1$.

2-8-6. نظرية (2):

لأجل كل $r \geq 1$، إن $s(r) \geq \frac{3^r+1}{2}$.

2-8-7. أعداد شور وأعداد رامزي:

هناك علاقة بين أعداد شور وأعداد رامزي، حيث تم إثبات النظرية السابقة (1) بالاعتماد على نتيجة تربط بين أعداد شور ورامزي.

2-9-8. النتيجة:

لكل $r \geq 1$، فإن: $s(r) \leq R_r(3)_1$.

2-8-9. نظرية شور:

ليكن $r \in \mathbb{N}$ ، لأجل أي $r-$ تلوين لمجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة فإنها تحتوي على ثلاثة أعداد x, y, z أحادية اللون بحيث تحقق أن: $x + y = z$.

2-8-10. تعريف:

نسمي الثلاثية x, y, z التي تحقق $x + y = z$ ثلاثية شور.

2-9- نظرية رادو: ($Rado's\ Theorem$) [13] [16] [22]

إن نظرية شور تقودنا إلى التساؤل عن المعادلات الخطية التي لها حلول أحادية اللون تحت التلوين المنتهي للأعداد الصحيحة الموجبة.

إن نظرية شور تتوافق مع المعادلة التالية: $x + y - z = 0$

وبالنظر إلى نظرية فان نجدها تتوافق مع المعادلة التالية: $x + y - 2z = 0$

حول ريتشارد رادو أحد طلاب شور، انتباهه على هذا الإطار العام، مع الأخذ بعين الاعتبار المعاملات وعدد

اختياري من المتغيرات. هو حدد بالضبط متى تكون المعادلات من الشكل: $\sum_i^k c_i \mathrm{x_i} = 0$ مضمونة أن يكون لها حلول أحادية اللون تحت أي تلوين منته للأعداد الصحيحة الموجبة.

2-9-1. تعريف:

نقول عن المعادلة الخطية المتجانسة:

$$C_1.x_1 + C_2.x_2 + \cdots + C_n.x_n = 0$$

حيث أن: $C_i \in \mathbb{Z}$, $i \in \{1, \ldots\ldots, n\}$

أنها منتظمة التقسيم فوق $\mathbb{N}$ إذا كان لأجل كل $r-$ تلوين لـ $\mathbb{N}$ يوجد حل للمعادلة أحادي اللون.

على سبيل المثال: إن كل من المعادلتين التاليتين هي معادلات منتظمة التقسيم فوق $\mathbb{N}$:

$$x_1 + x_2 - x_3 = 0$$

$$x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$$

بينما كل من المعادلتين التاليتين ليست منتظمة التقسيم فوق $\mathbb{N}$.

$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0$$

$$x_1 - 2x_2 = 0$$

2-9-2. مبرهنة رادو: $(Rado's\ Theorem)$

المعادلة الخطية:

$$\boldsymbol{C_1.x_1 + C_2.x_2 + \cdots + C_n.x_n = 0}$$

هي منتظمة التقسيم فوق $\mathbb{N}$ إذا وفقط إذا وجد $\theta \neq J \subseteq [n]$.

$$\sum_{i \in J} \mathrm{c_i} = \mathbf{0}$$

مثال:

$$\frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{4}x_2 + 2x_3 - \frac{1}{12}x_4 = 0$$

$$c_1 + c_2 + c_4 = 4 - 3 - 1 = 0$$

بحسب مبرهنة رادو تكون المعادلة السابقة منتظمة التقسيم فوق $\mathbb{N}$.

إن كل من نظريتي شور ورادو هي نظريات مركزية في نظرية رامزي، حيث أنها تظهر حتمية وجود نظام معين تحت التلوين العشوائي.

الخلاصة:

لقد قمنا في هذا الفصل بعرض نظرية رامزي منذ نشأتها حتى تطورها وانتشارها، وعرضنا نظرية رامزي بسياقيها المنتهي وغير المنتهي، وقمنا بذكر أعداد رامزي وحدودها. وكما قمنا بتقديم نظريات من نوع رامزي ذات صلة ببحثنا.

الفَصلُ الثَّالث

جَبر رامزي

Ramsey Algebra

جبر رامزي

مقدمة:

في إطار نظرية رامزي التوافقية، تبرز مبرهنة شور كإحدى النتائج الأساسية التي تؤكد: أن لأي تقسيم منتهي لمجموعة الأعداد الطبيعية يوجد جزء من التقسيم يحتوي على عددين (ليس بالضرورة مختلفين) ومجموع هذين العددين.

في الستينات، تم الحصول على تعميم قوي لهذه النتيجة عبر مبرهنة فولكمان (غير منشور)، رادو وساندرز والتي تنص: أن لكل تلوين منتهي لمجموعة الأعداد الطبيعية ولكل عدد طبيعي m . توجد مجموعة منتهية H بحجم m بحيث تكون جميع المجاميع الجزئية المنتهية وغير الخالية لعناصر H أحادية اللون.

لاحقا طرح غراهام وروتشيلد تخمينا، أن النسخة الغير المنتهية من هذه النتيجة صحيحة أيضا، وهي مسألة بقيت مفتوحة لعقود من الزمن على الرغم من الجهود الكبيرة التي بذلها عدد من الرياضيين البارزين. من بينهم هيلبرت 1892. في عام 1974، قام هندمان بحل هذه المشكلة بشكل إيجابي حيث أثبت أنه: لكل تلوين منتهي لمجموعة الأعداد الطبيعية توجد مجموعة غير منتهية H بحيث تكون جميع المجاميع الجزئية وغير الخالية لعناصر H أحادية اللون.

في هذا الفصل نستكشف الامتدادات الجبرية لهذه الأفكار من خلال دراسة جبر رامزي، الذي يهتم بدراسة البنى الجبرية التي تخضع لنظريات من نوع رامزي. بهدف توضيح الروابط العميقة بين نظرية رامزي والبنى الجبرية، وتقديم إطار نظري موحد لفهم هذه التفاعلات.

3-1- نظرية هندمان $(Hindman's\ theorem)$

3-1-1. تخمين غراهام_روتشيلد: ($Graham\ and\ Rothschil\ conjecture$) [14]

أيا تكن $\mathbb{N} = A_1 \cup A_2$ ، فإنه يوجد $i \in \{1,2\}$ ويوجد متتالية غير منتهية $\langle x_n \rangle_{n=1}^{\infty}$ بحيث أن:

$\sum_{n\in F} x_n \in A_i$ وذلك أيا تكن F مجموعة جزئية منتهية غير خالية في $\mathbb{N}$.

هذا التخمين ينص على أنه إذا قسمت مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة إلى قسمين، فإن هناك متتالية غير منتهية مستخرجة من احدى القسمين بحيث تبقى جميع المجاميع المنتهية لعناصر مختلفة من هذه المتتالية في قسم واحد.

إن هذا التخمين نسبه رادو في ورقته بعد طرح غراهام وروتشيلد سؤالهما. (ماذا عن النسخة الغير منتهية؟ ذاكرين أنه ستكون هناك حالة بسيطة محددة وهي: إذا كانت مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة ملونة بلونين فقط فهل صحيح أنه توجد دائما مجموعة جزئية غير منتهية A بحيث أن كل المجاميع ($\sum_{b\in B} b$ بحيث: $\emptyset \neq B \subseteq A$; B هي مجموعة منتهية) لديها نفس اللون.

أثبت هندمان في ورقته [14] صحة هذا التخمين لأي تقسيم منتهي لمجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ (أي أنه ليس فقط بالتقسيم إلى مجموعتين، بل إلى k مجموعة).

3-1-2. تعريف:[14]

لتكن $\langle x_n \rangle_{n=1}^{\infty}$ متتالية غير منتهية من الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$. نعرّف $FS(\langle x_n \rangle_{n=1}^{\infty})$ هي مجموعة جميع المجاميع المنتهية لعناصر المتتالية $\langle x_n \rangle_{n=1}^{\infty}$ وهي:

$$FS(\langle x_n \rangle_{n=1}^{\infty}) = \left\{ \sum_{n\in F} x_n : F \in \mathcal{P}_f\mathbb{N} \right\}$$

حيث أن F هي مجموعة جزئية منتهية وغير خالية في $\mathbb{N}$.(هي مجموعة منتهية من المؤشرات)

مثال:

لتكن $\langle x_i\rangle_{i=1}^{\infty} = (1,2,3,4,5, \dots\dots)$. بعض المجموعات الجزئية المنتهية ومجموعها:

$$F = \{0\}: \sum_{i\in F} x_i = x_0 = 1$$

$$F = \{1\}: \sum_{i\in F} x_i = x_1 = 2$$

$$F = \{1,2\}: \sum_{i\in F} x_i = x_1 + x_2 = 2 + 3 = 5$$

$$F = \{1,2,4\}: \sum_{i\in F} x_i = x_1 + x_2 + x_4 = 2 + 3 + 5 = 10$$

فإن: $FS(\langle x_i\rangle_{i=1}^{\infty}) = \{1,2,3,4,5, \dots\dots.\} = \mathbb{N} \setminus \{0\}$

أي أن كل عدد صحيح موجب يمكن كتابته كمجموع لعناصر من المتتالية. في الحقيقة إن هذا المثال يوضح أن FS للمتتالية يولد كل الأعداد الصحيحة الموجبة.

3-1-3. نظرية هندمان للمجاميع المنتهية:(*Finite sums Theorem*) [14] [19] [20]

بفرض لدينا مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ ملونة بعدد منتهي من الألوان(تجزئة منتهية) . فإنه يوجد متتالية غير منتهية من الأعداد الطبيعية $\langle x_i\rangle_{i=1}^{\infty}$ بحيث أن: مجموعة جميع المجاميع الجزئية المنتهية لعناصر المتتالية المختلفة $FS(\langle x_i\rangle_{i=1}^{\infty})$ هي مجموعة أحادية اللون.

رياضياً:

لتكن $\mathbb{N} = \bigcup_{i=1}^{r} A_i$ وليكن $r \in \mathbb{N}$ فإنه يوجد $i \in \{1,2,3,4, \dots \dots, r\}$ ومتتالية $\langle x_i \rangle_{i=1}^{\infty}$ في $\mathbb{N}$ بحيث أن:

$FS(\langle x_i \rangle_{i=1}^{\infty}) \subseteq A_i$

مثال:

لو قسمنا مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ إلى مجموعتين فقط هما:

المجموعة الزرقاء: هي الأعداد الفردية $(1,3,5, \dots \dots \dots)$

المجموعة الحمراء: هي الأعداد الزوجية $(0,2,4, \dots \dots \dots)$

النظرية تخبرنا أنه **يوجد دائمًا** متتالية غير منتهية من الأعداد وتحقق أن: جميع "المجاميع المنتهية" لأعداد هذه المتتالية ستكون **كلها حمراء، أو كلها زرقاء.**

في مثالنا هذا إن متتالية الأعداد الزوجية $\langle x_i \rangle_{i=1}^{\infty} = \{0,2,4,6, \dots \dots \dots\}$ (مضاعفات العدد 2) هي متتالية غير منتهية من عناصر $\mathbb{N}$ وجميعها ملونة بلون أحمر. فإنه حسب مبرهنة المجاميع أي مجموع لأعداد منها سيكون أحمر اللون، وذلك صحيح لأن مجموع أي عدد من الأعداد الزوجية هو عدد زوجي.

مثل: $(2 + 4 = 6, 4 + 6 + 8 = 18, \dots \dots \dots)$ إذن جميع المجاميع تنتمي للمجموعة الحمراء.

ولكن ماذا لو لم يكن التلوين كذلك وعشوائيا؟ ماذا لو اخترنا متتالية الأعداد الفردية $(1,3,5, \dots \dots \dots)$ أي مجموع لأعداد منها سيكون إما زوجيا أو فرديا مثل:

$$(1 + 3 = 4, 3 + 5 + 7 = 15, \dots \dots \dots)$$

في الحقيقة تؤكد النظرية أن المتتالية $\langle x_i \rangle_{i\in\omega}$ نستطيع اختيارها لتكون نظام مجموعي (وهو متتالية جديدة مشتقة من متتالية موجودة مسبقا بحيث تحتفظ بخاصية المجاميع المنتهية) لأي متتالية معطاه $\langle y_i \rangle_{i\in\omega}$ من الأعداد الطبيعية.

مثال:

لتكن متتالية مضاعفات العدد 5 $\langle y_i \rangle = (5,10,15,20, \dots\dots\dots)$ فإنه يمكننا بناء المتتالية التالية

$$\langle x_i \rangle = (5 + 10 = 15, 15 + 20 = 35, 25 + 30 = 55, \dots\dots\dots)$$

فإذا كان التقسيم يعتمد على القسمة على العدد 5 فستكون $\langle x_i \rangle$ هنا جميع المجاميع في نفس الخلية.

هذا يؤكد أننا لسنا مضطرين لبناء المتتالية من الصفر، بل يمكننا اشتقاقها من أي متتالية موجودة. (حتى لو كانت عشوائية).

لقد قدم $Baumgartner$ برهاناً بسيطاً نسبياً لنظرية هندمان أثبت نسخة من نظرية هندمان تتناول الاجتماعات المنتهية لمجموعات جزئية من $\mathbb{N}$ بدلا" من المجاميع المنتهية، والتي كانت معروفة سابقا بأنها معادلة لنظرية هندمان. تسمى هذه النظرية "نظرية الاجتماع المنتهي" بينما تسمى نظرية هندمان "نظرية المجاميع المنتهية". ونظرا" لأهميتها التاريخية سنذكر أيضا نظرية الاجتماع المنتهي.

3-1-4. تعريف: [5]

نقول عن المجموعة $D \subseteq \mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ أنها جماعة منفصلة (Disjoint Collection) إذا وفقط إذا تحقق:

D هي مجموعة غير منتهية.

عناصر D منفصلة زوجياً(مختلفة مثنى مثنى)(Pairwise Disjoint). *أي أن:*

$$\forall\, A, B \in D: A \neq B;\ A \cap B = \emptyset$$

مثال:

لتكن $D = \{\{1\},\{2\},\{3\},\ldots\ldots\}$ جماعة المجموعات وحيدة العنصر.

إن D هي جماعة منفصلة، كونها تحقق الشرطيين:

D غير خالية وتقاطع أي مجموعتين فيها هو $\emptyset$.

3-1-5. تعريف: [5] [14]

لتكن $D \subseteq \mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ نعرّف الاجتماع المنتهي $FU(D)$ بالشكل:

$$FU(D) = \left\{\bigcup_{i=1}^{n} A_i : n \in \mathbb{N}, A_i \in D\right\}$$

3-1-6. نظرية الاجتماعات المنتهية: (*Finite Union Theorem*) [5] [14]

بفرض لدينا $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ ملونة بعدد منتهي من الألوان، فإنه يوجد $\langle H_i\rangle_{i\in\mathbb{N}}$ متتالية من المجموعات المنتهية المنفصلة زوجياً في $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ بحيث أن:

$$FU(\langle H_i\rangle_{i\in\mathbb{N}}) = \left\{\bigcup_{i\in F} H_i\,; F \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N})\right\}$$

تكون أحادية اللون.

تؤكد النظرية أنه بغض النظر عن كيفية تلوين (تقسيم) $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ (المجموعات الجزئية المنتهية) بعدد منتهي من الألوان ستوجد دوماً متتالية $\langle H_i\rangle_{i\in\mathbb{N}}$ من المجموعات الجزئية المنتهية والمنفصلة زوجياً (أي أن تقاطع أي مجموعتين هو مجموعة خالية) بحيث كل اجتماع منته لأي مجموعة جزئية منها يكون بلون واحد.

3-2- تعميم مبرهنة هندمان لأنصاف الزمر:

3-2-1. الضرب المرتب حسب المؤشرات: $(\boldsymbol{Ordered\ Product})$ [15]

في نصف الزمرة غير التبديلية، نعطي تعريفا دقيقا للضرب بحيث يحافظ على ترتيب المؤشرات.

1- **الضرب المنتهي التصاعدي** $(\prod_{i=1}^{n} x_i)$: هذا يعني ضرب العناصر بترتيب تصاعدي للمؤشرات.

$$\prod_{i=1}^{n} x_i = x_1.x_2 \dots \dots x_n$$

مثال:

إذا كانت لدينا المتتالية $\langle x_i \rangle = (a,b,c)$ فإن:

$\prod_{i=1}^{3} x_i = a.b.c$ وليس $c.b.a$

2- **الضرب التصاعدي لمجموعة منتهية** $(\prod_{x\in F} x_n)$:

لتكن F هي مجموعة منتهية. فإن الضرب التصاعدي لعناصرها هو:

$$\prod_{x\in F} x_n = x_{min\,F}.x_{next} \dots \dots x_{max\,F}$$

مثال:

لتكن لدينا المجموعة $F = \{2,5,6,9\}$. إن الضرب التصاعدي لعناصرها:

$$\prod_{x\in F} x_n = x_2.x_5.x_6.x_9$$

3-2-2. تعريف:[15]

لتكن $(S,.)$ نصف زمرة. ولتكن $\langle x_n\rangle_{n=1}^{\infty}$ متتالية غير منتهية في S فإن:

$$FP(\langle x_n\rangle_{n=1}^{\infty}) = \left\{\prod_{n\in F} x_n : F \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N})\right\} \setminus \emptyset$$

ولتكن $\langle x_n\rangle_{n=1}^{m}$ متتالية منتهية في S فإن:

$$FP(\langle x_n\rangle_{n=1}^{m}) = \left\{\prod_{n\in F} x_n : F \in \mathcal{P}_f\{1,2,,\dots.,m\}\right\}$$

مثال: لتكن $(S,.)$ نصف زمرة. ولتكن $\langle x_n\rangle_{n=1}^{3} = (a,b,c)$ متتالية منتهية في S فإن:

$$FS(\langle x_n\rangle_{n=1}^{3}) = \{a,b,c,a.b,a.c,b.c,a.b.c\}$$

3-2-3. تعريف: [15]

لتكن $(S,+)$ نصف زمرة. ولتكن $\langle x_n\rangle_{n=1}^{\infty}$ متتالية غير منتهية في S فإن:

$$FS(\langle x_n\rangle_{n=1}^{\infty}) = \left\{\sum_{n\in F} x_n : F \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N})\right\}$$

ولتكن $\langle x_n\rangle_{n=1}^{m}$ متتالية منتهية في S فإن:

$$FS(\langle x_n\rangle_{n=1}^{m}) = \left\{\sum_{n\in F} x_n : F \in \mathcal{P}_f\{1,2,,\dots.,m\}\right\}$$

مثال:

لتكن $(S,+)$ نصف زمرة. ولتكن $\langle x_n\rangle_{n=1}^{4}$ متتالية منتهية في S فإن:

$$FS(\langle x_n\rangle_{n=1}^{4}) = \{1,2,3,4,1+2,1+3,1+4,2+3,2+4,3+4,1+2+3+4\}$$

3-2-4. تعريف: [15]

لتكن $(S,.)$ نصف زمرة، ولتكن $\langle x_n\rangle_{n=1}^{\infty}$ متتالية غير منتهية في S. نقول إن المتتالية

$\langle y_n\rangle_{n=1}^{\infty}$ هي نظام جزئي ضربي للمتتالية $\langle x_n\rangle_{n=1}^{\infty}$ إذا وفقط إذا:

وجد متتالية $\langle H_n\rangle_{n=1}^{\infty}$ في $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ بحيث أن: لأجل كل $n \in \mathbb{N}$ إن $max\ H_n < max\ H_{n+1}$

و $y_n = \prod_{t\in H_n} x_t$ (الجداء بترتيب تصاعدي للمؤشرات)

3-2-5. تعريف: [15]

لتكن $(S,+)$ نصف زمرة. ولتكن $\langle x_n\rangle_{n=1}^{\infty}$ متتالية غير منتهية في S. نقول إن المتتالية $\langle y_n\rangle_{n=1}^{\infty}$ هي نظام جزئي جمعي للمتتالية $\langle x_n\rangle_{n=1}^{\infty}$ إذا وفقط إذا:

وجد متتالية $\langle H_n\rangle_{n=1}^{\infty}$ في $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ بحيث أن: لأجل كل $n \in \mathbb{N}$ إن $max\ H_n < max\ H_{n+1}$

و $y_n = \sum_{t\in H_n} x_t$

3-2-6. مبرهنة: (هندمان لأنصاف الزمر الضربية) [15]

لتكن $(S,.)$ نصف زمرة، ولتكن $\langle x_n\rangle_{n=1}^{\infty}$ متتالية غير منتهية في S. وبفرض $\mathcal{S}$ ملونة بعدد منته من الألوان. فإنه يوجد نظام جزئي ضربي $\langle y_n\rangle_{n=1}^{\infty}$ للمتتالية $\langle x_n\rangle_{n=1}^{\infty}$ بحيث أن $FP(\langle y_n\rangle_{n=1}^{\infty})$ تكون أحادية اللون.

أي أن لو لوّنا عناصر المجموعة S بعدد محدود من الألوان. فإن المبرهنة تضمن لنا وجود متتالية $\langle y_n\rangle_{n=1}^{\infty}$ مشتقة من متتالية $\langle x_n\rangle_{n=1}^{\infty}$ (عن طريق تجميع عناصرها في كتل منفصلة) بحيث جميع الجداءات المنتهية لهذه المتتالية المشتقة تكون أحادية اللون.

وفقا لما سبق نلاحظ أن أنصاف الزمر تتمتع بخاصية توافقية محددة (القدرة على إنتاج أنماط منتظمة تحت أي تقسيم) أما الآن سنعرّف جبر رامزي، هذا المفهوم قدمه العالم كارلسون (*Carlson*) حيث لاحظ أن هذه الخاصية ليست حكرا" على أنصاف الزمر فقط. لذلك قام باقتراح مفهوم جبر رامزي ليكون إطارا" عاما" يضم كل البنى الجبرية التي تمتلك هذه الخاصية. أولا" سنعمم مفهوم النظام الجزئي الضربي إلى جماعة من العمليات. هو نوع خاص من تركيب العمليات قدمه كارلسون في [8]

3-2-7. تعريف: العنصر المراوح(جامد) (*Idempotent Element*) [19] [20]

ليكن $(A,\mathcal{F})$ جبر. نقول عن العنصر $a\in A$ أنه عنصر مراوح بالنسبة للجبر $(A,\mathcal{F})$ إذا كان لأجل كل $f\in\mathcal{F}$ حيث: $f:A^n\longrightarrow A$.فإن $f(\underbrace{a,a,\ldots\ldots,a}_{n\text{ مرة}})=a$.

هذا يعني أن العنصر a هو نقطة ثابتة لجميع العمليات $\mathcal{F}$.

مثال:

لتكن لدينا $\mathbb{Z}_6$ أوجد العناصر المراوحة.

الحل: إن عناصر هي $\mathbb{Z}_6=\{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4},\bar{5}\}$ العنصر المراوح لـ $\mathbb{Z}_6$ حيث أن العملية هي وحيدة وهي عملية الضرب ومنه فإن العنصر المراوح هو كل عنصر من عناصر الزمرة يحقق أن: $a^2=a$

ومنه:

$$\bar{0}^2 = \bar{0}$$

$$\bar{1}^2 = \bar{1}$$

$$\bar{2}^2 = \bar{4}$$

$$\bar{3}^2 = \bar{9} = \bar{3}$$

$$\bar{4}^2 = \overline{16} = \bar{4}$$

$$\bar{5}^2 = \overline{25} = \bar{1}$$

إن كل من $\bar{0}, \bar{1}, \bar{3}, \bar{4}$ هي عناصر مراوحة.

3-2-8. تعريف التركيب المرتب: $(\boldsymbol{orderly\ composition})$ [15] [20]

بفرض $(A, \mathcal{F})$ جبر، و $f: A^m \longrightarrow A$ دالة من المرتبة m حيث $m \in \mathbb{N}$. نقول إن f هي تركيب مرتب من $\mathcal{F}$ **إذا وفقط إذا** وُجِدَ:

$$g, h_1, h_2, \dots\dots, h_n \in \mathcal{F} \text{ وَ } k_1, k_2, \dots\dots, k_n \in \mathbb{N} \left(\text{دوال منتهية الرتبة}\right)$$

حيث أن:

$$(1)\ g: A^n \longrightarrow A, \qquad (2)\ h_i: A^{k_i} \longrightarrow A\ ;\ \forall\ i = 1,2, \dots\dots, n,$$

$$(3)\ m = \sum_{i=1}^{n} k_i\ , \qquad (4)\ \vec{x}_i \text{ متتاليات منتهية}$$

حيث أن: $\vec{x} = \vec{x}_1\ *\ \vec{x}_2\ * \dots * \vec{x}_n$ وَ $|\vec{x}_i| = k_i\ ;\ \forall i = 1,2, \dots, n$

فإن:

$$f(\vec{x}) = g\big(h_1(\vec{x}_1), h_2(\vec{x}_2), \dots\dots, h_n(\vec{x}_n)\big)$$

• نقول عن $\mathcal{F}$ أنها مغلقة تحت التركيب المرتب **إذا وفقط إذا** تحقق أنه: أياً تكن $f \in \mathcal{F}$ فإن f هي تركيب مرتب من $\mathcal{F}$.

مثال (1):

لتكن $(\mathbb{N}, +)$ نصف زمرة مع عملية واحدة، أي: $\mathcal{F} = \{+\}$

$$\vec{x}_1 = (x_1, x_2)\,, \vec{x}_2 = (x_3, x_4)$$
$$\vec{x} = x_1 * x_2 = (x_1, x_2, x_3, x_4)$$

نأخذ العمليات:

$$(+)h: \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N} \quad , \quad h_1: + \quad , \quad h_2: +$$

عندها:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = +\big(+(x_1, x_2), +(x_3, x_4)\big) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$

هذا تركيب مرتب لأن: $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$

يحافظ على الترتيب دون تداخل.

مثال (2):

$$\mathcal{F} = \{+, .\}$$

$$h: + \quad , \quad h_1: . \quad , \quad h_2: .$$

مع: $\vec{x}_1 = (x_1, x_2)\,,\ \vec{x}_2 = (x_3, x_4)$

عندها:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 . x_2) + (x_3 . x_4) = x_1 x_2 + x_3 x_4 = h\big(h_1(\vec{x}_1), h_2(\vec{x}_2)\big)$$

هذا أيضاً تركيب مرتب متعدد العمليات.

السؤال: ماذا لو اخترنا: $\vec{x}_1 = (x_1, x_3)\ ,\ \vec{x}_2 = (x_2, x_4)$ ؟

هذا ليس مرتباً؛ لأنه يخرق ترتيب المتغيرات عبر الوصل ويحدث تداخلاً.

3-2-9. تعريف الحد المرتب: $(orderly\ term)$ [19] [20]

نعرف مجموعة الحدود المرتبة $(orderly\ terms\ over\ \mathcal{F})$ $OT(\mathcal{F})$ بأنها أصغر مجموعة عمليات على A تحقق أن:

$$\boxed{1}\ \mathcal{F} \subseteq OT(\mathcal{F})$$

$$\boxed{2}\ id_A \in OT(\mathcal{F})$$

$$\boxed{3}\ \forall g, g_1, \dots\dots, g_n \in OT(\mathcal{F})$$

وشكلنا منها f تركيب مرتب من $\mathcal{F}$ عندئذٍ:

$$f \in OT(\mathcal{F})$$

أي أنها مغلقة تحت أي تركيب مرتب.

- إن كل عنصر من $OT(\mathcal{F})$ يسمى حداً مرتباً.

مثال (3):

ليكن: $(\mathbb{Z}, +, .)$ حلقة الأعداد الصحيحة، حيث أن: $+$ وَ $.$ المعروفان.

بفرض لدينا: g, h هي عمليات من المرتبة 3.

$$g: \mathbb{Z}^3 \longrightarrow \mathbb{Z}$$
$$(x, y, z) \longmapsto g(x, y, z) = xy + z$$
$$h: \mathbb{Z}^3 \longrightarrow \mathbb{Z}$$
$$(x, y, z) \longmapsto h(x, y, z) = xz + y$$

• إن g حد مرتب فوق $\{.,+\}$:

لنأخذ متتاليتين من المتغيرات:

$$\vec{x}_1 = (x, y)\ , \vec{x}_2 = z$$

ثم (من المرتبة الأولى): $h_1: \bullet \quad , h_2: id_A$

(من المرتبة الثانية) $h: +$

$$\begin{aligned} g(x,y,z) &= +\big((x \cdot y), z\big) \\ &= +(\cdot\,(x,y), id_z) \\ &= h\big(h_1(\vec{x}_1), h_2(\vec{x}_2)\big) \end{aligned}$$

وهو تركيب مرتب لأن: $\vec{x} = \overrightarrow{x_1} \cdot \overrightarrow{x_2} = (\,x, y, z)$ يحافظ على الترتيب

• بينما h ليس حداً مرتباً؛ لان:

لكتابته على هيئة تركيب مرتب نحتاج إلى $\vec{x}_1 = (x, z\,)\ , \vec{x}_2 = (y)$ وهذا بسبب تداخل في المتغيرات.

يأخذ x ثم يقفز إلى z قبل y (فيكسر شرط الترتيب).

3-2-10. تعريف الاختزال: $(reduction)$ [19] [20]

ليكن $(A, \mathcal{F})$ جبراً، ولتكن لدينا المتتاليتين الغير المنتهيتين في A.

$$\vec{a} = (a_0, a_1, \dots\dots)\ , \vec{b} = (b_0, b_1, \dots\dots)$$

نقول أن المتتالية $\vec{b}$ هي اختزال للمتتالية $\vec{a}$ وفق $\mathcal{F}$، ونرمز لها بالرمز التالي:

$$\vec{b} \leq_{\mathcal{F}} \vec{a}$$

إذا وُجدت متتاليات منتهية $\overrightarrow{a_k}; k \in \mathbb{N}$ من عناصر A:

$$\vec{a}_0\ , \vec{a}_1\ , \vec{a}_2, \dots\dots$$

وَحدود مرتبة فوق $\mathcal{F}$ وَ $f_k; k \in \mathbb{N}$:

$$f_0, f_1, f_2, \dots\dots$$

بحيث أن:

1- ... ... $\overrightarrow{a_0}.\overrightarrow{a_1}.\overrightarrow{a_2}$ متتالية جزئية من $\vec{a}$ (أي نحصل عليها بحذف بعض حدود $\vec{a}$ مع المحافظة على الترتيب).

2- $\forall k \in \mathbb{N}$ فإن:

$$\vec{b}(k) = f_k(\vec{a}_k)$$

بالتالي: كل حد من $\vec{b}$ ينتج بتطبيق حد مرتب على متتالية منتهية مأخوذة من $\vec{a}$، مع الحفاظ على ترتيب العناصر

مثال: لنفرض أن: $A = \mathbb{N}$

$$\mathcal{F} = \{+\}$$

إنَّ: $\vec{a} \leq_{\mathcal{F}} \vec{b}$

أي: $\vec{a} \leq_{\{+\}} \vec{b}$

بحيث:

• لو اخترنا: $\overrightarrow{b_0} =< 1,2 >$

$$f_0(x,y) = x + y = 1 + 2 = 3$$

• لو اخترنا: $\overrightarrow{b_1} =< 3,4 >$

$$f_1(x,y) = x + y = 3 + 4 = 7$$

• لو اخترنا: $\overrightarrow{b_2} =< 5,6 >$

$$f_2(x,y) = x + y = 5 + 6 = 11$$

وهكذا...

$$\vec{a} =< 3,7,11, \dots \dots \dots >$$

ومنه: $\vec{a} \leq_{\mathcal{F}} \vec{b}$

لأن كل عنصر من $\vec{a}$ هو ناتج عن جمع عنصرين متتاليين في $\vec{b}$.

← العلاقة $\preceq_{\mathcal{F}}$ هي علاقة انعكاسية ومتعدية.

• ليكن $\vec{a} = (a_0, a_1, a_2, \dots)$ متتالية غير منتهية من عناصر A.

لنعرّف: $\overrightarrow{a_k} = (a_k)$ متتاليات جزئية منتهية طول كل منها واحد.

$f_k = id_A$ وذلك أياً يكن $k \in \mathbb{N}$. عندئذٍ: $\vec{a} = \overrightarrow{a_0} * \overrightarrow{a_1} * \dots$ متتالية جزئية من $\vec{a}$ (نفسها)

وكذلك: $f_k(\overrightarrow{a_k}) = \vec{a}(k); \forall k \in \mathbb{N} \iff \vec{a} \leq_{\mathcal{F}} \vec{a}$

• لنفرض أن: $\vec{b} \leq_{\mathcal{F}} \vec{a}$ وَ $\vec{c} \leq_{\mathcal{F}} \vec{b}$

بحسب التعريف: توجد متتاليات منتهية وحدود مرتبة، بحيث أن:

$f_k(\vec{a}_k) = \vec{b}(k); \forall k \in \mathbb{N}$ حيث: $\vec{a}_0 * \vec{a}_1 * \dots$ متتالية جزئية في $\vec{a}$

وَ $g_i(\vec{b}_j) = \vec{c}(j);\ \forall j \in \mathbb{N}$ حيث: $\vec{b}_0 * \vec{b}_1 * \dots$ متتالية جزئية في $\vec{b}$

بما أن $\vec{b}_j$ هي متتالية في $\vec{b}$، توجد أدلة متزايدة $k_1 < \dots < k_r$ تحقق:

$$\vec{b}_j = \left(\vec{b}(k_1), \vec{b}(k_2), \dots, \vec{b}(k_r)\right)$$

$$f_{k_s}(\vec{a}_{k_s}) = \vec{b}(k_s)\ ; s = 1, \dots, r$$

• نعرّف: $\vec{a}_j = \vec{a}_{k_1} * \vec{a}_{k_2} * \dots * \vec{a}_{k_r}$

بما أن $k_1 < \dots < k_r$ فإن المتتاليات المنتهية $\vec{a}_{k_s}$ هي متتابعة وغير متداخلة، فإن: $\vec{a}_j$ متتالية جزئية من $\vec{a}$.

•لتكن رتبة g_j هي r، نعرّف: $h_j = g_j\ o\ (f_{k_1}, \dots, f_{k_r})$ بتطبيقها على الكتل (المتتاليات المنتهية):

$$h_j = g_j\ o\ \left(f_{k_1}(\vec{a}_{k_1}), \dots, f_{k_r}(\vec{a}_{k_r})\right)$$

بما أن: $(\mathcal{F})\ OT \in g_j, f_{k_s}$ وَ $(\mathcal{F})\ OT$ مغلقة تحت التركيب المرتب $\Longleftarrow h_j \in OT(\mathcal{F})$

- نطابق القيم: $h_j(\vec{a}_j) = g_j\left(f_{k_1}(\vec{a}_k), \dots, f_{k_r}(\vec{a}_{k_r})\right)$

$$= g_j\left(\vec{b}(k_1), \dots, \vec{b}(k_r)\right) = g_j(\vec{b}_j) = \vec{c}(j)$$

- بما أن ... $* \vec{b}_1 * \vec{b}_0$ هي متتالية جزئية في $\vec{b}$

باختيارنا $k_1 < k_2 < \cdots < k_r$ نضمن أن ... $* \vec{a}_1 * \vec{a}_0$ متتالية جزئية من $\vec{a}$ (كتل مرتبة غير متداخلة)

وَكما أن h_j هو تركيب مرتب f_k مع g_j

ومنه تحقق شرطي التعريف $\Longleftarrow \vec{a}\ \vec{c} \leq_{\mathcal{F}}$

3-2-11. تعريف الاختزال المنتهي: (*finite reduction*) [19] [20]

ليكن $(A, \mathcal{F})$ جبر، و $\vec{b}$ هي متتالية غير منتهية من عناصر A، وليكن $a \in A$. نقول عن العنصر a أنه اختزالاً منته لـ $\vec{b}$ وفق $\mathcal{F}$ إذا كان عنصر من الشكل $f(\vec{b}_0)$ حيث:

① f حد مرتب فوق $\mathcal{F}$.

② $\vec{b}_0$ متتالية جزئية منتهية من $\vec{b}$.

ونرمز لمجموعة جميع الاختزالات المنتهية للمتتالية $\vec{b}$ وفق $\mathcal{F}$ بالرمز: $FR_{\mathcal{F}}(\vec{b})$، أي:

$$FR_{\mathcal{F}}(\vec{b}) = \left\{f(\vec{b}_0);\ \begin{matrix} f \text{ حد مرتب فوق } \mathcal{F} \\ \vec{b}_0 \text{ متتالية جزئية منتهية في } \vec{b} \end{matrix}\right\}$$

مثال: ليكن $(\mathbb{N}, +)$ جبراً، ولتكن $\vec{b} = (1,2,3,4,5, \dots)$، لنأخذ:

$$\vec{b}_0 = (1,4,16)$$

$$\vec{b}_1 = (20)$$

$$\vec{b}_2 = (21,22,28)$$

ونختار حدا مرتباً من الجمع $\Longleftarrow$ القيمة هي مجموعة العناصر $\vec{b}_i \; ; \; i \in \mathbb{N}$، إذاً:

$$FR_{\{\mathcal{F}\}}(\vec{b}) = FS(\vec{b})$$

نلاحظ أنها هذه هي الصيغة التي استخدمت في هندمان.

* **تعريف مكافئ:** ليكن $(A, \mathcal{F})$ جبراً، $\vec{b}$ متتالية غير منتهية من عناصر A. نقول عن العنصر $a \in A$ أنه اختزال منتهٍ للمتتالية $\vec{b}$ **إذا وفقط إذا** كان يساوي $\vec{c}(0)$ حيث: $\vec{c} \leq_{\mathcal{F}} \vec{b}$، أي:

$$FR_{\mathcal{F}}(\vec{b}) = \{\vec{c}(0) \; ; \;\; \vec{c} \leq_{\mathcal{F}} \vec{b}\}$$

الآن سنناقش بعض خاصيّات هذه المجموعة ثم سنتطرق لإثبات التكافؤ بين التعريفين:

* **خواص:** $(A, \mathcal{F})$ جبر، $\vec{b} = (b_0, b_1, \dots)$ هي متتالية غير منتهية في A.

❶ مناقشة $FR_{\mathcal{F}}(\vec{b})$ هي غير خالية:

لو أخذنا $f = id_A$ (لأن $id_A \in OT(\mathcal{F})$) وَ $\vec{b}_0 =< b_k >$ (متتالية جزئية طولها 1)

$$f(\vec{b}_0) = id_A(b_k) = b_k \;\; ; \;\; \forall k \in \mathbb{N} \qquad \Longleftarrow$$

$$FR_{\mathcal{F}}(\vec{b}) \neq \emptyset \quad \Longleftarrow \quad b_k \in FR_{\mathcal{F}}(\vec{b}) \qquad \Longleftarrow$$

❷ رتيبة بالنسبة للمتتاليات الجزئية: (*subsequence monotonicity*)

إذا كانت $\vec{d}$ هي متتالية غير منتهية جزئية في $\vec{b}$ فإن:

$$FR_{\mathcal{F}}(\vec{d}) \subseteq FR_{\mathcal{F}}(\vec{b})$$

حيث: كل $\vec{d}_0$ متتالية جزئية منتهية في $\vec{d}$ فهي متتالية جزئية منتهية في $\vec{b}$ إذا كان: $x = f(\vec{d}_0) \in FR_{\mathcal{F}}(\vec{d})$ فهو نفسه عنصراً من $FR_{\mathcal{F}}(\vec{b})$.

❸ رتيبة: إذا كان $\vec{c} \leq_{\mathcal{F}} \vec{b}$ فإن: $FR_{\mathcal{F}}(\vec{c}) \subseteq FR_{\mathcal{F}}(\vec{b})$

إن $x = g(\vec{c}_0) \in FR_{\mathcal{F}}(\vec{c})$ حيث أن: g حد مرتب فوق $\mathcal{F}$ وَ $\vec{c}_0$ متتالية جزئية منتهية في $\vec{c}$.

إن كل عنصر في $\vec{c}_0$ هو بدوره $f_k(\vec{b}_k)$ حيث أن: f هو حد مرتب فوق $\mathcal{F}$ وَ $\vec{b}_k$ متتالية جزئية منتهية في $\vec{b}$ (ذلك لأن $\vec{c} \leq_{\mathcal{F}} \vec{b}$). بوصل هذه المتتاليات $\vec{b}_k$ بالترتيب، نحصل على متتالية $\vec{b}_0$ جزئية من $\vec{b}_k$.

ونعرّف: $h = g\ o\ (f_{k_1}, \dots, f_{k_r})$ وهو حد مرتب لأن $OT(\mathcal{F})$ مغلق تحت التركيب المرتب:

$$h(\vec{b}_0) = g\ o\ \left(f_{k_1}(\vec{b}_1), \dots, f_{k_r}(\vec{b}_r)\right) = g(\vec{c}_{k_1}, \dots, \vec{c}_{k_r}) = g(\vec{c}_0) \in FR_{\mathcal{F}}(\vec{b})$$

❹ توصيف التكافؤ بين التعريفين:

التعريف المباشر: $FR_{\mathcal{F}}(\vec{b}) = \left\{ f(\vec{b}_0)\ ;\ \begin{matrix} f \text{ حد مرتب قوث } \mathcal{F} \\ \vec{b}_0 \text{ متتالية جزئية منتهية قي } \vec{b} \end{matrix} \right\}$

الصيغة المكافئة: $FR_{\mathcal{F}}(\vec{b}) = \{\vec{c}(0)\ ;\ \vec{c} \leq_{\mathcal{F}} \vec{b}\}$

– الاحتواء الأول: من التعريف المباشر إلى أول عنصر لاختزال:

$x \in FR_{\mathcal{F}}(\vec{b})$ فإن $x = f(\vec{b}_0)$ حيث: f حد مرتب فوق $\mathcal{F}$، وَ $\vec{b}_0$ متتالية جزئية منتهية في $\vec{b}$.

نكتب: $\vec{b} = \left(\vec{b}(i_1), \dots, \vec{b}(i_r)\right)$ حيث: $i_1 < \dots < i_r$ وَ $i_r = L$

ننشئ متتالية $\vec{c}$ كما يلي:

نأخذ الكتلة الأولى $\vec{b}_0$ كما هي، ونعرّف الحد المرتب الأول f_0 مساوياً لـ f، فيكون:

$$x = f(\vec{b}_0) = f_0(b_0) = \vec{c}(0)$$

لبقية المتتاليات الجزئية، نأخذ كتلاً أحادية العنصر من $\vec{b}$ بعد الدليل L: $\vec{b}_j = \left(\vec{b}_{(L+j)}\right) ; j \geq 1$

ونأخذ: $f_i = id_A$، إذاً:

$\vec{b}_0 * \vec{b}_1 * \vec{b}_2 * \ldots =< \vec{b}(i_1), \ldots, \vec{b}(i_r), \vec{b}(L+1), \vec{b}(L+2), \ldots >$ هي متتالية جزئية في $\vec{b}$.

$$\vec{c}(j) = f_j\left(\vec{b}_j\right) = id_A\left(\vec{b}_{(L+j)}\right) = \vec{b}(L+j) \ ; \ j \geq 1$$

ومنه: $\vec{c} \leq_{\mathcal{F}} \vec{b}$ وَ $\vec{c}(0) = x$ $\Longleftarrow$ تحقق الاحتواء الأول.

– الاحتواء الثاني: من أول عنصر لاختزال إلى التعريف المباشر.

نفرض أن: $x = \vec{c}(0)$ لمتتالية غير منتهية $\vec{c}$ وَ $\vec{b}$ $\leq_{\mathcal{F}} \vec{c}$، إذاً:

توجد متتاليات منتهية جزئية $\vec{b}_k$ وحدود مرتبة f_k حيث $k \in \mathbb{N}$، بحيث تحقق:... $* \vec{b}_1 * \vec{b}_0$ هي متتالية جزئية في $\vec{b}$ وَ $\vec{c}(k) = f_k\left(\vec{b}_k\right)$، عند $k = 0$ يكون: $x = \vec{c}(0) = f_0\left(\vec{b}_0\right)$ حيث:

f_0 حد مرتب فوق $\mathcal{F}$ وَ $\vec{b}_0$ متتالية جزئية منتهية في $\vec{b}$، ومنه: تحقق الاحتواء الثاني.

– الخُلاصة:

إن الاختزال $\leq_{\mathcal{F}}$ يبني متتالية غير منتهية جديدة من متتالية غير منتهية سابقة، بينما الاختزال المنتهي يعطي عنصراً واحداً فقط من A ناتجاً عن حد مرتب على مقطع منتهٍ من $\vec{b}$.

بتشبيه بسيط: يمكننا التعبير عن الاختزال $\leq_{\mathcal{F}}$ بأنه خط إنتاج كامل يخرج متتالية بينما الاختزال المنتهي هو قطعة منتجة واحدة فقط من هذا الخط.

إن مجموعة الاختزالات المنتهية للمتتالية $\vec{b}$ تجمع كل القيم الممكنة من تطبيق حدود مرتبة على مقاطع منتهية من $\vec{b}$. وهي ذات أهمية في الجبر الرامزي لأن التلوين يكون على عناصر المجموعة A، وهذه المجموعة هي المجموعة التي سنختبر أحاديتها تحت التلوين.

سأقدم الآن مفهوم جبر رامزي، وهو مفهوم متقدم في نظرية رامزي الجبرية.

3-3- جبر رامزي: [19] [20]

3-3-1. تعريف:

ليكن $(A,\mathcal{F})$ جبراً، نقول عن هذا الجبر أنه رامزي **إذا وفقط إذا** كان:

لكل $X \subseteq A$ وَكل $\vec{a} \in A$ متتالية غير منتهية من عناصر A يوجد متتالية $\vec{b}$ بحيث: $\vec{b} \leq_{\mathcal{F}} \vec{a}$

بحيث ان $FR_{\mathcal{F}}(\vec{b})$ هي: إما محتواه في X أو منفصلة عنها (أي محتواه في X^c)، أي:

إما: $FR_{\mathcal{F}}(\vec{b}) \subseteq X$، أو: $FR_{\mathcal{F}}(\vec{b}) \cap X = \emptyset$.

نقول عن المتتالية $\vec{b}$ أنها متجانسة بالنسبة لـ X وفق $\mathcal{F}$

- الإسقاط إلى لغة التلوين:

ليكن $x: A \longrightarrow \{1,0\}$ تلويناً ثنائياً، حيث: $\left(1 \text{ داخل } X, 0 \text{ خارج } X\right)$.

التعريف يُكافئ:

$(A,\mathcal{F})$ جبراً رامزياً **إذا وفقط إذا** كان لكل $\vec{a}$ متتالية غير منتهية من عناصر A، ولكل تلوين ثنائي c، توجد متتالية $\vec{b}$ تحقق: $\vec{b} \leq_{\mathcal{F}} \vec{a}$.

بحيث: $FR_{\mathcal{F}}(\vec{b})$ هي أحادية اللون بالنسبة لـ c (أي كله 0 أو كله 1)

مثال(1): لأي مجموعة A، يكون الجبر الخالي $(A,\emptyset)$ حيث $\mathcal{F} = \{\emptyset\}$: هو جبر رامزي؛ ذلك لأن:

$OT(\mathcal{F}) = \{id_A\}$ أي الحد المرتب الوحيد هو التطبيق المطابق على A.

بالتالي: $FR(\vec{b}) = \{f(\vec{b}_0); f \in OT(\mathcal{F}) \text{ وَ } \vec{b}_0\}$ متتالية جزئية منتهية في $\vec{b}$

$$= \{\vec{b}(i); i \in \mathbb{N}\} = \{id_A(\vec{b}_i); i \in \mathbb{N}\}$$

وَأن: $\vec{b} \leq_{\mathcal{F}} \vec{a}$ تعني ببساطة أن $\vec{b}$ هي متتالية جزئية من $\vec{a}$، لنأخذ $\vec{a} \in {}^{\omega}A$ وَ $X \subseteq A$، إذاً:

إما: $\{i;\ \vec{a}(i) \in X\}$، أو: $\{i;\ \vec{a}(i) \in X^c\}$، هي مجموعة غير منتهية أو كلاهما، وذلك حسب مبدأ الحمام كون أن: $\vec{a}$ هي متتالية غير منتهية من عناصر A.

• إذا كان (داخل X) غير منتهية:

نأخذ $\vec{b}$ المتكونة من عناصر $\vec{a}$ بنفس الترتيب، وتكون $\vec{b}$ متتالية جزئية في $\vec{a}$ وكلها نفس اللون (أحادية اللون).

• إذا كان (خارج X) غير منتهية: (بالمثل)، أي:$\cdots < i_2 < i_1$ $\vec{b} =< \vec{a}_{(k_i)} >_{k\in\mathbb{N}}$، عندها:

$\vec{b} \leq_{\mathcal{F}} \vec{a}$ وَ $FR_{\mathcal{F}}(\vec{b}) = \{\vec{a}(k_i); k \in \mathbb{N}\}$ إما محتواه في X أو في X^c.

$\Longleftarrow (A, \emptyset)$ هو جبر رامزي.

مثال (2): ليكن $(A, \mathcal{F})$ جبراً، بحيث أن لكل $\vec{a}$ متتالية غير منتهية من عناصر A يوجد اختزال $\vec{b} \leq_{\mathcal{F}} \vec{a}$، بحيث أن: $\left|FR_{\mathcal{F}}(\vec{b})\right| = 1$ (أي مجموعة الاختزالات المنتهية تحوي عنصر واحد فقط)، فإن: $(A, \mathcal{F})$ هو جبر رامزي.

• يُطلق على هذا الجبر: جبر رامزي المتردي (degenerate Ramsey algebra)

3-3-2. مبرهنة:

كل نصف زمرة هي جبر رامزي.

إذا كانت $(A, .)$ نصف زمرة، فإن الجبر $(A, \mathcal{F})$ مع $\mathcal{F} = \{.\}$ هو جبر رامزي.

أي نريد إثبات أن لأي متتالية $\vec{a}$ غير منتهية من A وأي تلوين منتهٍ لعناصر نستطيع إيجاد أو استخراج اختزال من تلك المتتالية بجعل جميع اختزالاته المنتهية أحادية اللون.

بما أن لدينا عملية تجميعية واحدة، فأي حد مرتب لن يفعل سوى ضرب عناصر مقطع منتهٍ بالترتيب نفسه، ولا يهم هما وضع الأقواس لأنها تجميعية. إذاً: عملياً الاختزالات المنتهية هي بالضبط النواتج المنتهية المرتبة لعناصر متتالية. هذه الفكرة تختصر كل الرموز، ما إن نبني متتالية جديدة فإن:

مجموعة اختزالاتها المنتهية = جميع النواتج الممكنة لعناصر المتتالية

سنثبت أولاً أن: $FR = FP$

أياً تكن $\vec{b}$ متتالية غير منتهية من عناصر A سنحصل على أن: $FR = FP$

• إن كل حد مرتب مبني من عملية تجميعية واحدة وتظهر متغيراته مرة واحدة وبالترتيب، لذا تطبيقه على $\vec{b}_{i_1}, \dots, \vec{b}_{i_k}$ يساوي $b_{i_1}, \dots, b_{i_k}$ حيث k عدد طبيعي بغض النظر عن الأقواس، ومنه: $FR \subseteq FP$

• لكل جداء $b_{i_1} \cdot \dots \cdot b_{i_k}$ نأخذ الحد: $t(x_1, .., x_k) = \Big(\big((x_1, x_2).x_3\big) \dots x_k\Big)$ تطبيقه على $\big(b_{i_1}, \dots, b_{i_k}\big)$ ينتج الجداء نفسه، ومنه: $FP \subseteq FR$

بحسب مبرهنة هندمان: إذا كان $(S, .)$ نصف زمرة، ولوّنا S بعدد ألوان منتهٍ، فهناك متتالية غير منتهية $\vec{c}$ من عناصر S بحيث تكون $FP(\vec{c})$ أحادية اللون.

نأخذ $\vec{a}$ متتالية غير منتهية من عناصر A، لتكن S نصف زمرة جزئية متولدة من قيم $\vec{a}$، أي:

$$S = \{a_{i_1} \cdot \dots \cdot a_{i_k} \, ; i_1 < \dots < i_k \, , k \geq 1\}$$

إن: $(S, .)$ نصف زمرة.

نلوّن S بالتلوين الثنائي $S \cap X$ (أي نعتبر $S \cap X$ لوناً داخل S)، بتطبيق مبرهنة هندمان على $(S, .)$ نحصل على $\vec{c} \in {}^{\omega}S$ بحيث $FP(\vec{c})$ أحادية اللون.

كل حد $\vec{c}(j)$ هو ناتج منتهٍ لعناصر من $\vec{a}$:

$\vec{c}(j) = a_{t_{j_1}} \cdot a_{t_{j_2}} \cdot \dots \cdot a_{t_{j_m}}$ حيث $t_{j_1} < t_{j_2} < \dots < t_{j_m}$:

$\vec{b} = (\vec{c}(j_0), \vec{c}(j_1), \vec{c}(j_2), \dots)$ كل $\vec{b}(k)$ ناتج من $\vec{a}$: $\vec{b}(k) = f_k(\vec{a}_k)$

ومنه حسب التعريف: $\vec{a} \leq_{\mathcal{F}} \vec{b} \Longleftarrow FP(\vec{c}) \subseteq FP(\vec{b}) \Longleftarrow$ أحادية اللون.

3-3-3. مبرهنة:

كل جبر جزئي من جبر رامزي هو جبر رامزي.

ليكن $(A,\mathcal{F})$ جبراً رامزياً، $B \subseteq A$ جبراً رامزياً بالنسبة لـ $\mathcal{F}$، فإن: الجبر $\left(B,\mathcal{F}_{\Lambda_B}\right)$ جبر رامزي.

الإثبات: بالاعتماد على الحقيقتين البسيطتين:

1- إذا كان f حداً مرتباً وَ $\vec{b}$ هي متتالية من B، فإن: $f(\vec{b}) \in B$

2- إذا كان $\vec{a},\vec{b}$ متتاليات غير منتهية في B فإن:

$$FR_{\mathcal{F}}^{B}(\vec{b}) = FR_{\mathcal{F}}^{A}(\vec{b}) \text{ وَ } \vec{b} \leq_{\mathcal{F}}^{B} \vec{a} \iff \vec{b} \leq_{\mathcal{F}}^{A} \vec{a}$$

ما نريد إثباته: أنه من أجل أي تلوين ثنائي $X \subseteq B$، وأي متتالية غير منتهية $\vec{a}$ في B، وجد $\vec{b}$ بحيث:

$$\left(FR_{\mathcal{F}}^{B}(\vec{b}) \cap X = \emptyset \text{ أو } FR_{\mathcal{F}}^{B}(\vec{b}) \subseteq X\right) \text{ وَ } \vec{b} \leq_{\mathcal{F}}^{B} \vec{a}$$

بما أن $X \subseteq B \subseteq A$، وبما أن $(A,\mathcal{F})$ جبر رامزي، فهناك $\vec{b}$ متتالية غير منتهية في A وتحقق $\vec{b} \leq_{\mathcal{F}}^{A} \vec{a}$ و $FR_{\mathcal{F}}^{A}(\vec{b}) \subseteq X$ أو $FR_{\mathcal{F}}^{A}(\vec{b}) \cap X = \emptyset$، $\vec{a}$ متتالية غير منتهية في B بحيث كل عنصر في $\vec{b}$ هو عبارة عن تطبيق حد مرتب على كتل مأخوذة من $\vec{a}$ $\Longleftarrow$ $\vec{b}$ متتالية غير منتهية في B.

$\Longleftarrow$ نجد أن $\left(B,\mathcal{F}_{\restriction_B}\right)$

ملاحظة (1): قد يكون $(A,\mathcal{F})$ جبر رامزي، لكن: $\hat{\mathcal{F}} \subseteq \mathcal{F}$ فإنه ليس بالضرورة $\left(A,\hat{\mathcal{F}}\right)$ أن يكون جبراً رامزياً.

مثال: $(\mathbb{Z},+,\times,c)$ حيث: C هي الدالة الثابتة الصفرية، فإنه جبر رامزي مترددٍ، من أي متتالية نستطيع اختيار الحد المرتب ((الثابت)) وإنتاج اختزال ثابت $< 0,0,0,\ldots >$ $\Longleftarrow$ $FR = \{0\}$ أحادية اللون تلقائياً.

لكن: $\hat{\mathcal{F}} = \{+,\times\} \subseteq \mathcal{F}$ والجبر $(\mathbb{Z},+,.)$ ليس جبر رامزي.

ملاحظة (2): قد يكون كل من $(A,\mathcal{F})$ وَ $(A,\mathfrak{G})$ جبراً رامزياً، ومع ذلك ليس بالضرورة أن يكون $(A,\mathcal{F}\cup\mathfrak{G})$ جبر رامزي.

مثال: $(\mathbb{Z},+,.)$ ليس رامزي، ولكن: $(\mathbb{Z},+)$ وَ $(\mathbb{Z},.)$ هي رامزي.

ملاحظة (3): إذا كانت $FR_{\mathcal{F}}(\vec{b})=\{e\}$ (أي مجموعة الاختزالات المنتهية تحوي عنصر واحد فقط) فإن المتتالية $\vec{b}$ ستكون متتالية ثابتة.

وأكثر من ذلك فإن e هو عنصر مراوح لهذا الجبر: $\vec{b}=<e,e,e,\dots>$

أمثلة:

1- جبر ذو ثابت صفري: إذا احتوى $\mathcal{F}$ على عمليات صفرية c (تعطي عنصراً ثابتاً من A بلا مدخلات) يمكننا أخذ أي $\vec{a}$، وبناء اختزال ثابت: $c=\vec{b}(k)$، عندئذٍ: $FR_{\mathcal{F}}(\vec{b})=\{x\}$ (وحيدة العنصر) $\Longleftarrow$ هذا الجبر رامزي مترددٍ.

2- جبر ذو حامل وحيد العنصر: $A=\{e\}$

هنا كل المتتاليات ثابتة تلقائياً، وكل دالة من المرتبة n أساسية ترجع e $\Longleftarrow$ $FR=\{e\}$

$\Longleftarrow$ الجبر رامزي مترددٍ، والعنصر الوحيد هو عنصر مراوح تلقائياً.

إن تعريف الجبر الرامزي يعطينا حالة لونين (أي المجموعة X وَ متمم المجموعة X) ولكن ماذا عن التلوين بعدد منتهٍ من الألوان كما في صياغات رامزي الكلاسيكية، حيث يمكننا بفضل أن $\leq_{\mathcal{F}}$ متعدية تعميم حالة اللونين إلى عدد منتهٍ من الألوان.

ملاحظة:

لنفرض أن $(A,\mathcal{F})$ جبر رامزي، فإنه لكل $\vec{a}$ متتالية غير منتهية في A ولكل تلوين منتهٍ (تقسيم) لـ

$A = X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_N \; ; N \in \mathbb{N}$:A

توجد متتالية $\vec{b}$ غير منتهية في A، بحيث: $\vec{b} \leq_{\mathcal{F}} \vec{a}$ تحقق $FR_{\mathcal{F}}(\vec{b})$ أحادية اللون.

أي يوجد j بحيث $1 \leq j \leq N$ تحقق: $FR_{\mathcal{F}}(\vec{b}) \subseteq X_j$

الإثبات: ذلك بالاستقراء الرياضي على عدد الألوان:

• لدينا $(A, \mathcal{F})$ جبر رامزي، حسب التعريف بالصيغة الثنائية؛ أياً تكن $\vec{a}$ متتالية غير منتهية في A وأياً تكن $X \subseteq A$ توجد: $\vec{b} \leq_{\mathcal{F}} \vec{a}$، بحيث: إما $FR_{\mathcal{F}}(\vec{b}) \subseteq X$ أو $FR_{\mathcal{F}}(\vec{b}) \cap X = \emptyset$

ونريد إثبات أنه أياً يكن التقسيم المنتهي لـ A، أي: $A = X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_N$ وأياً تكن $\vec{a}$ متتالية غير منتهية من عناصر A، فإنه توجد $\vec{b} \leq_{\mathcal{F}} \vec{a}$ بحيث:

$$FR_{\mathcal{F}}(\vec{b}) \subseteq X_j \; ; \; 1 \leq j \leq N$$

• خطة الاستقراء: قاعدة البدء $N = 2$ هذا هو التعريف نفسه للونين X_1, X_2 والمجموعة A إذاً القاعدة صحيحة.

• الفرض الاستقرائي: نفرض أن الفرضية صحيحة لأي تقسيم حتى $N - 1$ لون.

• خطوة الاستقراء: من $(N - 1)$ إلى N

إن $\vec{a}$ متتالية في A وَ $A = X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_N$ سنبني سلسلة من الاختزالات:

$$\ldots \leq_{\mathcal{F}} \vec{a}_{(2)} \leq_{\mathcal{F}} \vec{a}_{(1)} \leq_{\mathcal{F}} \vec{a}_{(0)} = \vec{a}$$

بالنسبة للون X_1: سنطبق الصيغة الثنائية على $(A, A \backslash X_1)$ مع $\vec{a}_{(0)}$ نحصل على المتتالية $\vec{a}_{(1)}$ هي اختزال لـ $\vec{a}_{(0)}$ وتحقق أحد الأمرين:

إما: $FR_{\mathcal{F}}(\vec{a}_{(1)}) \subseteq X_1$، أو $FR_{\mathcal{F}}(\vec{a}_{(1)}) \cap X_1 = \emptyset$

ومنه فإن: $FR(\vec{a}_{(1)}) \subseteq A \backslash X_1$

• الخطوة الثانية: إذا لم ننتهي نعيد الإجراء على $\vec{a}_{(1)}$ مع اللونين X_2 وَ $X_1 \cup X_2$ نحصل على $\vec{a}_{(2)}$ هي اختزال لـ $\vec{a}_{(1)}$ وفق $\mathcal{F}$ بحيث:

إما: $FR_{\mathcal{F}}(\vec{a}_{(2)}) \subseteq X_2$، أو: $FR_{\mathcal{F}}(\vec{a}_{(2)}) \cap (X_1 \cup X_2) = \emptyset$

نستمر عند اللون X_t بحيث $t \leq N-1$: إما تنتهي بأحادية اللون، أو ننتقل إلى المتمم لنكمل.

إذا كررنا الفشل في كل من $X_1, \dots, X_{N-1}$ سنصل بعد الخطوة $(N-1)$ إلى متتالية $\vec{a}_{(N-1)}$ تحقق:

$$FR_{\mathcal{F}}(\vec{a}_{(N-1)}) \cap (X_1 \cup \dots \cup X_{(N-1)}) = \emptyset$$

لكن: $A = X_1 \cup \dots \cup X_N$ وَ $FR_{\mathcal{F}}(\vec{a}_{(N-1)})$ هي غير خالية

إذاً لا بد من أن: $FR_{\mathcal{F}}(\vec{a}_{(N-1)}) \subseteq X_N$، وبما أن: $\leq_{\mathcal{F}}$ متعدية، ولدينا: $\vec{a} \leq_{\mathcal{F}} \vec{b}$،

فالنتيجة: وُجِدَ j حيث $FR_{\mathcal{F}}(\vec{b}) \subseteq X_j$

3-3-4. مبرهنة:

بفرض أن $(A, \mathcal{F})$ جبر منتهٍ، فالقضايا التالية متكافئة:

1- $(A, \mathcal{F})$ جبر رامزي.
2- أياً يكن $a \in A$ فإن: $FR_{\mathcal{F}}(< a, a, \dots >)$ تحوي عنصر مراوح للجبر $(A, \mathcal{F})$.
3- $(A, \mathcal{F})$ جبر رامزي متردي.

الإثبات:

① من $(1 \longleftarrow 2)$:

ليكن $a \in A$، بما أن الجبر منتهي فيوجد تلوين منتهٍ لعناصر A بحيث يأخذ كل عنصر لون مختلف

وحيد، وكون أن $(A,\mathcal{F})$ جبر رامزي، فإن: $\vec{b} \leq_{\mathcal{F}} < a,a,\dots >$ بحيث تكون: $FR_{\mathcal{F}}(\vec{b})$ أحادية اللون.

وبحسب اختيارنا للتلوين فإن مجموعة الاختزالات المنتهية $FR_{\mathcal{F}}(\vec{b})$ تحوي عنصر واحد، وليكن هذا العنصر e. إذاً e هو عنصر مراوح في $(A,\mathcal{F})$.

زيادةً على ذلك إن: $e = \vec{b}(0) \in FR_{\mathcal{F}}(< a,a,\dots >)$

② من $(2 \longleftarrow 3)$:

لنأخذ متتالية $\vec{a}$ غير منتهية في A، وكون أن الجبر منتهٍ يمكن الانتقال إلى للمتتالية الجزئية الثابتة

$a \in A$; $< a,a,\dots >$ من $\vec{a}$ (ذلك حسب مبدأ برج الحمام)

نختار عنصر مراوح وليكن e للجبر $(A,\mathcal{F})$، أي أنه يوجد t حد مرتب وعدد صحيح m بحيث أن من:

$$FR(< a,a,\dots >) \qquad t\left(\underbrace{a,\dots,a}_{\text{مرة } m}\right) = e$$

بتقسيم المتتالية الثابتة إلى متتاليات جزئية منتهية طول كل منها m وبتطبيق t حد مرتب على كل منها نحصل على السلسلة $< e,e,e,\dots >$، إذاً:

$$\vec{b} =< e,e,e,\dots > \leq_{\mathcal{F}} < a,a,\dots > \underbrace{\leq_{\mathcal{F}}}_{\text{حسب التعدي}} \vec{a}$$

وكون أن $\vec{b}$ متتالية ثابتة فإن: $FR_{\mathcal{F}}(\vec{b}) = \{e\}$، ومنه: $(A,\mathcal{F})$ جبر رامزي مترددٍ.

③ من $(3 \longleftarrow 1)$: مباشرة.

3-3-5. مبرهنة:

ليكن $(A,\mathcal{F})$ جبراً منتهياً، عندئذٍ:

الجبر $(A,\mathcal{F})$ رامزي $\Leftrightarrow$ كل جبر جزئي من $(A,\mathcal{F})$ يحتوي عنصر مراوح.

الإثبات:

ليكن $(A,\mathcal{F})$ جبراً منتهياً، أيا تكن $x,y \in A$:

إن العنصر b ينتمي للجبر المولد بالعنصر x إذا وفقط إذا كان $y \in FR_{\mathcal{F}}(< x,x,\dots >)$

("$\Longleftarrow$"): بفرض B جبر جزئي، لنأخذ عنصر $x \in B$:

بما أن A جبر منتهٍ، فهناك تلوين منتهٍ لعناصر A بحيث نعطي كل عنصر لون مختلف، وكون أن $(A,\mathcal{F})$ رامزي، و $\vec{a}$ متتالية غير منتهية في A وَ $\vec{a} \leq_{\mathcal{F}} < x,x,\dots >$ بحيث تكون $FR_{\mathcal{F}}(\vec{a})$ أحادية اللون وبحسب اختيارنا للتلوين يجب أن تتألف $FR_{\mathcal{F}}(\vec{a})$ من عنصر واحد وليكن y

وبما أن: $y \in FR_{\mathcal{F}}(< x,x,\dots >)$ وأن الجبر المولد بالعنصر $x \in B$، ومنه: $y \in B$

(" $\Longrightarrow$ "):

يكفي أن نثبت أن لكل متتالية $\vec{a}$ غير منتهية في A توجد متتالية $\vec{b}$ هي $\vec{b} \leq_{\mathcal{F}} \vec{a}$ بحيث تكون $FR_{\mathcal{F}}(\vec{b})$ وحيدة العنصر.

بما أن A جبر منتهٍ، $\vec{a}$ متتالية غير منتهية في A، بالتالي يوجد X عنصر غير منتهٍ في $\vec{a}$ فنأخذ $< x,x,\dots >$ متتالية جزئية من $\vec{a}$

نأخذ عنصر مراوح y للجبر $(A,\mathcal{F})$ من المجموعة $FR_{\mathcal{F}}(< x,x,\dots >)$ (كون الجبر الجزئي المولد بالعنصر x يحتوي عنصر مراوح)

كون y ناتج عن حد مرتب على مقطع منتهٍ من $< x,x,\dots >$، فنحصل على

$\vec{b} =< y,y,\dots >$ وبالتعدي يكون $\vec{b} \leq_{\mathcal{F}} \vec{a}$

وَ $FR_{\mathcal{F}}(\vec{b}) = \{y\}$ (كون y عنصر مراوح) وهي حتماً أحادية اللون تحت أي تلوين $\Leftarrow (A, \mathcal{F})$ جبر رامزي.

تعقيب: إن المبرهنة غير محققة عندما يكون الجبر غير منتهي، ومثال على ذلك:

$(\mathbb{N}\backslash\{0\}, +)$ هو جبر رامزي ولكنها لا تحوي عنصر مراوح.

كل جبر جزئي من $(\mathbb{Z}, -)$ يحتوي عنصر مراوح ولكن $(\mathbb{Z}, -)$ ليس جبر رامزي (وذلك كون العملية ليست تجميعية).

الخلاصة:

في هذا الفصل قمنا بتقديم مبرهنة هندمان وبعض التعاريف المتعلقة بها، ثم قدمنا تعاريف أساسية ذات أهمية في مفهوم الجبر الرامزي والتي تعتبر الحجر الأساسي لتوضيح هذا المفهوم مع ذكر أمثلة، ثم قدمنا مفهوم جبر رامزي كما قدمه كارلسون وذكرنا بعض المبرهنات والملاحظات الهامة.

الفَصلُ الرَّابع

فضَاءُ رامْزي

Ramsey Space

فضاء رامزي

مقدمة:

هو أحد المواضيع العميقة والممتعة ضمن البنية العامة لنظرية رامزي، ويجمع بين مفاهيم الترتيب والتقسيم والتقريب ضمن فضاءات معينة، حيث يتم صياغة مبدأ رامزي داخل إطار طوبولوجي.

ظهر مفهوم فضاء رامزي من التطور الطبيعي لفكرة مبرهنة رامزي الكلاسيكية، والتي تنص باختصار:

"إذا قسمنا جميع المجموعات الجزئية ذات الحجم الثابت من مجموعة غير منتهية إلى عدد محدود من الألوان، فلا بد أن توجد مجموعة جزئية غير منتهية تكون أحادية اللون".

هذه النتيجة كانت من البداية نظرية توافقية بحتة، تتعلق بالمجموعات الطبيعية لها.

لكن في سبعينيات القرن العشرين تقريباً، بدأ علماء المنطق ونظرية المجموعات، مثل: $Ellentuck$ بمعادلة صياغة مبدأ رامزي داخل إطار طوبولوجي، ومن هنا وُلد مصطلح: فضاء رامزي، بحيث نحاول أن نربط بين الخاصية الرامزية التوافقية وبين الخصائص الطوبولوجية لمجموعات معينة.

4-1- نظرية إيلينتوك $(Ellentuck\ Theorem)$

لتكن A مجموعة، نرمّز: $[A]^w$ مجموعة جميع المجموعات الجزئية في A ذات الحجم w. أي:

$$[A]^w = \{B \subseteq A : |B| = w\}$$

يمكن غمسطمر الفضاء $[w]^w$ بشكل طبيعي في فضاء كانتور، وبالتالي فإن $[w]^w$ فضاء جزئي في الفضاء 2^w المزود بطوبولوجيا الجداء تيخونوف.

4-1-1. تعريف: [10]

يُقال عن المجموعة $X \subseteq [w]^w$ أنها رامزي **إذا وفقط إذا** وُجدت مجموعة $H \in [w]^w$ بحيث أن:

إما: $[H]^w \subseteq X$

أو: $[H]^w \cap X = \emptyset$

أظهر إردوس ورادو عام 1956 ($Erdös\ and\ Rado$) أن ليس كل مجموعة $X \subseteq [w]^w$ هي مجموعة رامزية وذلك من خلال مثال مضاد.

(النص المختصر للمثال 1 – 434 p – [11])

برهنوا أن: يوجد تقسيم لمجموعة جميع المجموعات الجزئية غيرفي المنتهية من S إلى صفين k_1 وَ k_2 بحيث لكل مجموعة غير منتهية $\dot{S} \subseteq S$ يوجد بداخلها مجموعتان غير منتهيتان A وَ B لهما نفس العدد من العناصر المنتهية ولكن تنتميان إلى صفين مختلفين، مما يعني أنه لا يوجد أي مجموعة غير منتهية $\dot{S}$ تجعل كل مجموعاتها الجزئية المنتهية بلون واحد.

إن مبرهنة رامزي الكلاسيكية في المرجع [17] يمكن اعتبارها النتيجة الإيجابية الأولى التي تُصنف أي مجموعة جزئية من $[w]^w$ على أنها رامزية.

وفي عام 1968 أثبت ناش–ويليامز $(Nash - Williams)$ نتيجة تقع في المنتصف بين القول بأن المجموعات المفتوحة المغلقة هي رامزية والمجموعات المفتوحة هي رامزية. وتُعتبر هذه النتيجة تعميماً لمبرهنة رامزي حيث أن لكل عدد طبيعي $k \in w$ وأي تلوين ثنائي العناصر $[w]^k$ يُعطي مجموعة مفتوحة مغلقة في $[w]^w$.

برهن كالفين $(Galvin)$ أن المجموعات المفتوحة في $[w]^w$ هي رامزية، ثم برهنن كطالفين وبريكري $(Galvin\ and\ prikry)$ باستخدام طريقة ناش–ويليامز أن كل مجموعة بوريلية في $[w]^w$ هي مجموعة رامزية.

فيما بعد برهن سيلفر $(Silver)$ أن كل مجموعة تحليلية في $[w]^w$ هي رامزية.

وفي عام 1974 قدّم إيلينتوك برهاناً جديداً لنتيجة سيلفر وذلك عن طريق تقديم طوبولوجيا جديدة على فضاء المجموعات غير المنتهية $[w]^w$، والتي سُميت اليوم بطوبولوجيا إيلينتوك برهن فيها أن كل مجموعة تحليلية هي رامزية تماماً.

والفضاء $[w]^w$ المزود بهذه الطوبولوجيا يُسمى فضاء إيلينتوك، ويعتمد برهانه على طريقة كالفين وبريكري.

وبذلك قدم نسخة قوية وحاسمة في مبرهنة رامزي الطوبولوجية، ووضعت الأساس لتطوير الفضاءات الرامزية الحديثة.

4-1-2. طوبولوجيا إيلينتوك: (*Ellentuck Topology*) [10]

لأجل كل $n \in w$ وَ $A \in [w]^w$ لتكن:

$$[n, A]^w = \{B \in [w]^w; B \subseteq A \text{ وَ } A \text{ تحتوي على أول } n \text{ عنصر من عناصر } B\}$$

إن طوبولوجيا إيلينتوك على $[w]^w$ هي الطوبولوجيا المولدة بالمجموعات $[n, A]^w$ وتُسمى هذه المجموعات بالمجموعات الأساسية (الجوارات الأساسية) في طوبولوجيا إيلينتوك.

4-1-3. تعريف: [10]

نقول عن المجموعة $X \subseteq [w]^w$ أنها رامزية تماماً **إذا وفقط إذا** كان لأجل كل $n \in w$ وَ $A \in [w]^w$ يوجد مجموعة $B \in [n, A]^w$ بحيث أن:

إما: $[n, B]^w \subseteq X$

أو: $[n, B]^w \cap X = \emptyset$

أي أنه أياً يكن المقطع الابتدائي n ومجموعة الانطلاق A فإنه يوجد مجموعة جزئية غير منتهية B بحيث كل الامتدادات داخل X أو كلها خارج X.

مما يعني أن المجموعة X تمتلك قدرة التحكم في جميع الجوارات الأساسية للفضاء.

4-1-4. نظرية إيلينتوك: [10]

بفرض أن $X \subseteq [w]^w$، تكون المجموعة X رامزية تماماً **إذا وفقط إذا** كانت تمتلك خاصية باير وفق طوبولوجيا إيلينتوك.

ومنه: بما أن كل مجموعة تحليلية في $[w]^w$ تتمتع بخاصية باير وفق طوبولوجيا إيلينتوك فإن كل مجموعة تحليلية هي بالضرورة رامزية تماماً.

4-2- فضاء رامزي: [19]

بعد مبرهنة إيلينتوك عام 1974 لاحظ الباحثون أن الخصائص الرامزية لا تقتصر فقط على الفضاء $[w]^w$، ففي عام 1988 قام كارلسون (t.j Carlson) بتوسيع (تعميم) الفكرة إلى إطار تجريدي. حيث أطلق كارلسون على البنى التي تحقق نظيراً لمبرهنة إيلينتوك اسم÷ الفضاءات الرامزية.

سنقوم الآن بتقديم تعريف كارلسون للفضاءات الرامزية، ويلزم ذلك تقديم عدة تعاريف وصولاً إلى البنية التي تحقق شروطها فضاء رامزي.

4-2-1. تعريف: [8] [9] [19]

بفرض R هي مجموعة غير خالية، و p هي دالة منطلقها $w \times R$، و $\leq$ هي علاقة ترتيب شبه جزئي.

نرمز للبنية الثلاثية: $\mathcal{R}\ (R, \leq, p)$

نقول عن البنية $\mathcal{R}$ أنها ترتيب شبه جزئي مع تقريبات إذا تحققت الفروض التالية:

1 $$p(0, A) = p(0, B)\ ;\ \forall A, B \in R$$

(هذا يعني أن التقريب الصفري ثابت دائماً وهذا طبيعي لأن التقريب من المرتبة 0 عادةً هو الشيء الخاليفارغ)

2 إذا كان A وَ B عناصر مختلفة في R، فإن: $p(n, A) \neq p(n, B)$

(أي: لا بد من أن يوجد عدد طبيعي $n \in w$ بحيث: $p(n,A) \neq p(n,B)$ أي هناك مرتبة معينة من التقريب تظهر فيها الاختلاف بين A وَ B ⟵ التقريبات تفصل بين العناصر المختلفة)

3 إذا تحقق أن $p(n,A) = p(m,B)$ فإن: $n = m$ (أي أنها في المستوى نفسه من التقريب، وأيضاً كل التقريبات السابقة متطابقة، أي: $\forall i < n \; (p(i,A) = p(i,B)$

- نسمي لمجموعة R عالم البنية $\mathcal{R}$.
- نسمي $p(n,A)$ التقريب من المرتبة (العمق) n للعنصر A، n هو العمق المرتبط بالتقريبرتيب (مرتبة التقريب).
- يُقال عن α أنه تقريب للبنية $\mathcal{R}$ **إذا وفقط إذا** كان: $\alpha = p(n,A); A \in R, n \in w$
- إذا كان $A,B \in R$ وَكان $A \leq B$ فإن A تُسمى اختزالاً لـ B وفق البنية $\mathcal{R}$
- بفرض أن $\mathcal{R} = (R, \leq, p)$ هي ترتيب شبه جزئي مع تقريبات.

نرمز لـ $p(A)$ لمتتالية من التقريبات للعنصر A بحيث أن $A \in R$:

$$p(A) = (p(0,A), p(1,A), p(2,A), \dots)$$

ونرمز لـ $p(A)_{(n)}$ هو التقريب من المرتبة (العمق) n.

ملاحظة:

عندما تكون R هي مجموعة من المتتاليات الغير منتهية، فإنp دالة التقريب هي ببساطة دالة التقييدغيير، أي: $p(n,A) = A|n$ تقييد المتتالية A بأول n عنصر.

على سبيل المثال:

لتكن المتتالية $\vec{a} = (0,2,4,6,\dots)$ و $n = 5$ فإن تقييد المتتالية $\vec{a}$ عند n:

$$\vec{a}\restriction n = (0,2,4,6,8,..)\restriction_5 = (0,2,4,6,8)$$

أي هو تقييد المتتالية الطبيعي والمعروف، وفي هذه الحالة نكتفي بتمثيل البنية الثلاثية بزوج، وذلك كون أن p واضحة ومفهومة فتصبح $(R, \leq)$، مما يعني أن البنية تعتمد فعلياً على نوع العلاقة $\leq$ وطبيعة العنصر R بينما p مجرد أداة فنية لتوليد التقريبات الجزئية.

- **أمثلة: [19] [20]**

1 فضاء إيلينتوك:

لتكن $R = [w]^w$ مجموعة جميع المجموعات الجزئية غير المنتهية من مجموعة الأعداد الطبيعية.

نعرّف: $p(n, A)$ أول n عنصر من المجموعة A.

رابط الترتيب: $A \leq B$ **إذا وفقط إذا** كان $A \subseteq B$ (أي مجموعة جزئية منها)

هذا المثال يحقق الشروط الثلاث، وهو النموذج الأساسي التي تُبنى عليه فضاءات رامزي.

2 الفضاء الكلاسيكي للمتتاليات الغير منتهية:

لتكن $R = w^w$ مجموعة جميع المتتاليات الغير منتهية من مجموعة الأعداد الطبيعية.

إن $p(n, A) = A\restriction n$ أي المقطع الأولي من المتتالية A بالطول n.

رابط الترتيب: $A \leq B$ **إذا وفقط إذا** كانت المتتالية A هي متتالية جزئية من ~~(أو في)~~ B.

- **مثال عملي:**

$f = (2,5,7), g = (2,5,7,9,11, \dots)$، إن $f \leq g$ لأن f هي أول ثلاث عناصر من g، إذاً:

f اختزال لـ g فهي تحتفظ ببداية نفس النمط ولكنها أبسط وأقصر.

• **مثال عملي:**

$A = \{1,3,5\}, B = \{1,3,5,7,9, \dots\}$، إن $A \leq B$ لأن كل عناصر A مأخوذة من B، إذاً:

في هذا الفضاء: A تُسمى اختزالاً لـ B لأنها تمثل مجموعة أكثر تحديداً داخل B.

4-2-2. تعريف: [8] [19]

لتكن لدينا البنية $\mathcal{R}(R, \leq, p)$ هي ترتيب شبه جزئي مع تقريبات، ولتكن المجموعة P هي مجموعة التقريبات للبنية $\mathcal{R}$، فإن:

$$P = \{p(n, A\alpha): A \in R\ , n \in w\}$$

نعرّف طوبولوجيا الجداء على هذه البنية $\mathcal{R}$ وهي الطوبولوجيا المولدة بواسطة غمسطمر المجموعة R دخل $^w p$، التي ترسل كل عنصر $A \in R$ إلى متتالية تقريباته $p(A)$، حيث أننا نزود المجموعة P بالطوبولوجيا المتقطعة.

• نقول إن البنية $\mathcal{R}$ مغلقة إذا كانت المجموعة $\{p(A) : A \in R\}$ مجموعة جزئية مغلقة داخل الفضاء $^w p$.

• جماعة المجموعات من الشكل $\{A \in R: A$ لـ α هي تقريب$\}$ هي أساس طوبولوجيا الجداء.

ملاحظة: في حال لكانت R هي مجموعة من المتتاليات الغير منتهية لمجموعة ما S، فإن البنية $\mathcal{R}$ مغلقة، يُكافئ تماماً أن تكون المجموعة R هي مجموعة جزئية مغلقة من الفضاء $^w S$، حيث: S مزودة بالطوبولوجيا المتقطعة.

4-2-3. تعريف: [8] [19]

إذا كانت α هي تقريب وَ $A \in R$، نعرّف $\mathcal{R}(\alpha, A)$ على أنها مجموعة الاختزالات للعنصر A التي تملك α تقريب لها: $\mathcal{R}(\alpha, A) = \{B \leq A : B \in R\ , p(\alpha, B) = p(\alpha, A)\}$

• كما نرمز بالرمز $\mathcal{R}(n, A)$ إلى $\mathcal{R}(p(n, A), A)$ ذلك لكل $n \in w$ و $A \in R$.

وتعرّف الطوبولوجيا الطبيعية على البنية $\mathcal{R}$ بأنها الطوبولوجيا المولدة بواسطة المجموعات من الشكل $\mathcal{R}(n, A)$.

• نلاحظ أن المجموعات $\mathcal{R}(n,A)$لكل $n \in w$ تشكل أساساً للجوار عند A ونسمي هذه المجموعات بالمجموعات الأساسية المفتوحة في الفضاء بالنسبة للطوبولوجيا الطبيعية، كما أن الطوبولوجيا الطبيعية تحتوي على طوبولوجيا الجداء.

مثال: بفرض لدينا البنية $\mathcal{R} = ({}^{w}w, \leq)$ بنية ذات ترتيب شبه جزئي مع تقريبات.

لكل عدد طبيعي $n \in w$ وَ $\vec{a} \in {}^{w}w$، نعرّف: $[n,\vec{a}]_{\mathcal{R}} = \{\vec{b} \in R: \vec{b} \leq \vec{a}\ , \vec{b}\restriction n = \vec{a}\restriction n\}$ الطوبولوجيا المولدة بواسطة هذه المجموعات هي الطوبولوجيا الطبيعية على $\mathcal{R}$، وهذه المجموعات هي مجموعات أساسية مفتوحة في الفضاء.

مثال: $\mathcal{R}([w]^{w}, \subseteq)$ بنية ذات ترتيب شبه جزئي مع تقريبات.

لكل $n \in w$ وَ $A \in [w]^{w}$، نعرّف: $[n,A]_{\mathcal{R}} = \{B \in R: B \subseteq A, p(n,B) = p(n,A)\}$ أيضاً هذه المجموعات من الشكل $[n,A]_{\mathcal{R}}$ هي المجموعات الأساسية المفتوحة التي تكون الطوبولوجيا الطبيعية على هذا الفضاء (هذه هي الطوبولوجيا التي عرّفها إيلينتوك)

مثال: فضاء الأشجار الغير منتهية: $(infinte\ trees\ space)$

بفرض R هي مجموعة الأشجار الغير المنتهية، كل T في R هي شجرة لها مستويات.

نعرّف: $T_1 \leq T_2$ **إذا وفقط إذا** كانت الشجرة T_1 شجرة جزئية من T_2

نعرّف التقريب: $T\restriction n$ بانه الشجرة الجزئية التي تحتوي فقط على أول n مشتوى من T.

ومنه: $[n,T]_{\mathcal{R}} = \{S \in R: S \subseteq T\ , T$ مستوى في n تحتوي نفس أول $S\}$

هذا المثال يُظهر أن المفهوم عام جداً، فهو لا يشمل فقط المتتاليات والمجموعات، بل أيضاً يشمل بنى أكثر تعقيداً مثل الأشجار والدوال.

إن الطوبولوجيا الطبيعية هي التي تُنظم كيف "تقترب" العناصر من بعضها (متتاليات، مجموعات، ...) حيث يمكننا القول إنَّ المتتالية $\vec{b}$ تكون قريبة من متتالية $\vec{a}$ إذا اتفقت معها في عددٍ كافٍ من العناصر الأولى. وهذه الفكرة هي جوهر مبرهنة إيلينتوك وطريقة كارلسون، ومنه استطاعوا أن يثبتوا أن مجموعات معينة (مثل المجموعات التحليلية) تكون رامزية تماماً.

ملاحظة: [20]

بفرض أن $\mathcal{R}(R,\leq)$ هي ترتي شبه جزئي مع تقريبات. T مجموعة جزئية من R، من الواضح أن البنية

$\ell = (T, \leq_T \cancel{\leq})$ هي ترتيب شبه جزئي جزئياً من $\mathcal{R}$. حيث:

علاقة الترتيب $\leq$ هنا هي تقييد لعلاقة الترتيب الأصلية $\leq$ من R إلى T، أما الطوبولوجيا الطبيعية على ℓ فهي في الحقيقة فضاء جزئي طوبولوجي على T المولد من الطوبولوجيا الطبيعية على $\mathcal{R}$.

مثال (1): فضاء المجموعات الغير منتهية من الأعداد الطبيعية (فضاء إيلينتوك) $R = [w]^w$ لنأخذ:

$$T = \{A \in [w]^w \cancel{w} : a \in A\}$$

في R لدينا المجموعات المفتوحة $[n, A]$ المعرّفة مسبقاً، في T نحصل على المجموعات لكنها مقيدة فقط بالمجموعات التي تحتوي على العدد 1.

فالطوبولوجيا الطبيعية على T هي نفسها التي نحصل عليها من تقييد طوبولوجيا R.

مثال (2): فضاء المتتاليات الغير منتهية من الأعداد الطبيعية: $R = {}^w w$

$$f \leq g \iff g \text{ مقطع أولي من } f$$

لنأخذ: $T = \{f \in {}^w w : f(0) \text{ عدد زوجي}\}$ (أي كل المتتاليات التي تبدأ بعدد زوجي)

البنية الجزئية تكون $\ell = (T, \leq)$ بنفس العلاقة السابقة (المقطع الأولي)، لكنها تنطبق على المتتاليات ذات البداية الزوجية.

الطوبولوجيا الطبيعية على R تُبنى من المجموعات $[n, f]$ وإذا قيدناها على T نحصل على نفس نوع المجموعات $[n, f]$ ولكن داخل T فقط.

4-2-4. تعريف: [8] [9] [19]

ليكن لدينا $\mathcal{R} = (R, \leq, p)$ بنية ذات ترتيب شبه جزئي مع تقريبات، بفرض أن X هي مجموعة جزئية من R،

نقول عن المجموعة X أنها رامزية تماماً وفقمن البنية $\mathcal{R}$ **إذا وفقط إذا** كان:

لكل $n \in w$ و لكل $A \in R$ يوجد عنصر $B \in \mathcal{R}(n, A)$ بحيث أن:

إما: $\mathcal{R}(n, B) \subseteq X$

أو: $\mathcal{R}(n, B) \cap X = \emptyset$

- نعرّف X بأنها رامزي صفرية **إذا وفقط إذا** كان:

لكل $n \in w$ وَ $A \in R$ يوجد عنصر $B \in \mathcal{R}(n, A)$ بحيث أن: $\mathcal{R}(n, B) \cap X = \emptyset$ (أي المجموعة $\mathcal{R}(n, B)$ منفصلة تماماً عن X).

- نقول عن البنية $\mathcal{R}$ أنها فضاء رامزي **إذا وفقط إذا** كان كل مجموعة جزئية من R وفق البنية $\mathcal{R}$ (المزودة بالطوبولوجيا الطبيعية) تتمتع بخاصية باير هي رامزية، وكلا مجموعة هزيلة هي رامزي صفرية

~~$Ramseynull$~~ $(Ramsey - null)$.

باستخدام موضوعة الاختيار يمكن إثبات أنه إذا كانت كل مجموعة تتمتع بخاصية باير هي مجموعة رامزية، فإن كل مجموعة هزيلة هي مجموعة رامزي – صفرية، وكون أن دراسة فضاءات رامزي في الحالات التي لا تنطبطق عليها موضوعة الاختيار ذات أهمية أيضاً، فإن الشرط الذي يشترط أن تكون كل مجموعة هزيلة هي رامزي – صفرية يدرّج في تعريف فضاء رامزي.

مثال: فضاء إيلينتوك الكلاسيكي: (كما ذُكر في الأمثلة السابقة)

كل مجموعة تحليلية هي مجموعة رامزية، وكل مجموعة تتمتع بخاصية باير هي مجموعة تحليلية، ومنه نجد أن فضاء إيلينتوك هو فضاء رامزي.

الآن سنعرض تعريف للفضاء الرامزي في الإطار العام كما عرّفه كارلسون:

4-2-5. تعريف: [8] [19]

بفرض أن $\trianglelefteq$ هي علاقة ترتيب شبه جزئي، مجالها يحتوي على مجموعة تقريبات للبنية $\mathcal{R}$، لتكن α وَ β تقريبين من تقريبات $\mathcal{R}$.

- نقول أن التقريب α هو اختزال للتقريب β (بالنسبة للعلاقة $\trianglelefteq$) **إذا وفقط إذا:** $\alpha \trianglelefteq \beta$

- نقول أن $\trianglelefteq$ هي تنيهة $(finitezation)$ للفضاء $\mathcal{R}$ إذا تحقق:

أياً تكن $A, B \in R$ فإن:

A اختزال لـ B **إذا وفقط إذا** كان كل تقريب من تقريبات A هو اختزال لتقريب من تقريبات B.

هذه الفكرة هي جوهر فلسفة إيلينتوك وكارلسون: إن السلوك الرامزي في الفضاء يمكن تنهيته وفهمه عبر قطع منتهية فقط.

لنعرّف الخصائص التالية:

A_1- كل تقريب من تقريبات $\mathcal{R}$ يملك عدداً منتهياً من الاختزالات.

A_2- إذا كانت $B \in \mathcal{R}(\beta, A)$ بحيث β هي اختزال للتقريب $p(n, A)$ ولكنها ليست اختزال لـ $p(i, A)$ بحيث $i < n$، عندئذٍ:

يوجد $\dot{A} \in \mathcal{R}(n, A)$ بحيث أن $\mathcal{R}(\beta, \dot{A}) \subseteq \mathcal{R}(\beta, B)$ (أي يمكننا دائماً تعديل A ليصبح منسجماً تماماً مع الاختزال في B)

A_3- لأجل كل $n \in w$، إذا كانت Z مجموعة من التقريبات ذات المرتبة $n+1$ وَ $A \in R$، عندئذٍ يوجد $B \in \mathcal{R}(n, A)$ بحيث أن:

مجموعة كل التقريبات ذات المرتبة $n+1$ للعناصر الموافقة في $\mathcal{R}(n, B)$ هي تكون محتواه في Z أو منفصلة تماماً عنها.

إنه أحد التعاريف الهامة في بناء فضاء رامزي عام، يمثل الهيكل التنهوي الذي يحولي السلوك الغير منتهي إلى سلوك على تقريبات منتهية، والخصائص A_1, A_2, A_3 تجعل الفضاء قادراً على دعم الرامزية.

حيث A_3 هي المقابل المنتهي لخاصية إيلينتوك الأساسية $[w]^w$، يؤكد التعريف أن كل شيء يحدث في العالم غير المنتهي يمكن التحقق منه داخل عالم منتهٍ أبسط بكثير، وهذا موافق لمبدأ إيلينتوك الأصلية.

على سبيل المثال: في التعامل مع المتتاليات الغير منتهية عبر مقاطعها الأولية المنتهية مما يعني أنه إذا حقق الفضاء هذه الخصائص فهو قادر استضافة نسخة عامة من نظرية رامزي.

4-2-6. نظرية: (النسخة المجردة لنظرية إيلينتوك) [8] [19]

إذا كان الفضاء $\mathcal{R}$ مغلقاً ويملك تنهية تحقق الخاصيتين A_1 وَ A_2، عندئذٍ:

يكون الفضاء $\mathcal{R}$ فضاءً رامزياً **إذا وفقط إذا** كان $\mathcal{R}$ يحقق الخاصية A_3

ملاحظة:

نلاحظ أنه إذا كان الفضاء $\mathcal{R}$ رامزي فإن الخاصية A_3 تتحقق تلقائياً، وذلك لأن مجموعات التقريبعريف ذات العمق المحدد تولد مجموعة مفتوحة في طوبولوجيا الجداء، وبالتالي فهي مفتوحة فغي الطوبولوجيا الطبيعية للفضاء $\mathcal{R}$.

مثال: فضاء إيلينتوك (المذكور سابقاً)

لتكن δ هي علاقة ترتيب شبه جزئي مع تقريبات $\varepsilon = ([w]^w, \leq, p)$ حيث أن:

لأجل كل $n \in w$ وَ $A, B \in [w]^w$ تكون $p(n, A)$ مجموعة تحوي أول n عنصر في A،

وَ $A \leq B$ إذا $A \subseteq B$ بموجب الطوبولوجيا الطبيعية، تكون ε هو فضاء إيلينتوك.

باستخدام النسخة المجردة من مبرهنة إيلينتوك، فإن إثبات هذا الفضاء ليكون رامزياً يتقلص فقط إلى التحقق من أن ε تحقق الخاصية التوافقية A_3، وهي محققة بحسب مبدأ برج الحمام.

4-3- فضاء رامزي المولد من جبر رامزي: (*Ramsey Space from Ramsey Algebra*)

إن الفضاءات الرامزية ليست مجرد فضاءات طوبولوجية بل هي انعكاس لطبيعة جبرية موجودة، مما يعني أنها ليست كيانات مستقلة بل يمكن بناؤها من جبور رامزية.

إن فضاءات رامزي التي تهتم بها في هذا السياق تنشأ من بعض الجبور الأساسية.

4-3-1. تعريف: [8] [19]

بفرض $(A, \mathcal{F})$ جبر ، ولتكن $\mathcal{R}(A, \mathcal{F})$ تشير إلى الزوج $({}^wA, \leq_{\mathcal{F}})$ حيث:

${}^wA$ هي مجموعة كل المتتاليات الغير منتهية في A.

$\leq_{\mathcal{F}}$ هي ترتيب شبه جزئي على ${}^wA$.

(يجدر بالذكر أن $\leq_{\mathcal{F}}$ هب علاقة الاختزال بالنسبة للعمليات $\mathcal{F}$ المذكورة في التعريف في الفصل السابق)

وبالتالي فإن البنية $\mathcal{R}(A, \mathcal{F})$ هي ترتيب شبه جزئي مع تقريبات، أي أن الفضاء يحتوي على كل المتتاليات الغير المنتهية في (من) A مرتبة وفق علاقة الاختزال الجبري المحددة بـ $\mathcal{F}$.

ومنه يمكننا تزويد $\mathcal{R}(A, \mathcal{F})$ بالطوبولوجيا الطبيعية حينها نستطيع طرح السؤال ما إذا كان هذا الفضاء رامزياً أم لا!

مثال: ليكن لدينا الجبر $(w,+)$ إن $\mathcal{F}=\{+\}$ و $A=w$، كل المتتاليات الغير منتهية من الأعداد الطبيعية w^w. نعرّف $\vec{a}\preceq_{\mathcal{F}}\vec{b}$ إذا كانت كل b_i هي مجموعة جزئية لبعض عناصر a_j $i,j\in w\ ;\ a_j$

على سبيل المثال:

$$\vec{a}=(1,2,3,4,5,6,..),\vec{b}=(3,7,11,\dots)$$

نقول أن $\vec{a}\preceq_{\mathcal{F}}\vec{b}$ كل b_i هو مجموع جزئي من $\vec{a}$.

4-3-2. الفضاء الجزئي: [8] [19] [20]

أياً تكن $n\in w$ وَ $\vec{a}\in {}^{w}A$، فإن $\mathcal{R}_{\vec{a}}(A,\mathcal{F})$ هو ترتيب شبه جزئي مع تقريبات جزئية في الفضاء $\mathcal{R}(A,\mathcal{F})$ المعطى بالشكل: $\left(\{\vec{b}\in {}^{w}A:\vec{b}\preceq_{\mathcal{F}}\vec{a}\},\preceq_{\mathcal{F}}\right)$ أي هذا الفضاء ~~يحتوي~~ يحتوي على كل المتتاليات المشتقة من المتتالية $\vec{a}$. (التي تستطيع الحصول عليها من $\vec{a}$ عبر العمليات $\mathcal{F}$)

~~**4-3-3. تعريف: [19]**~~

~~$\vec{a}\preceq_{\mathcal{F}}\vec{b}$ إذا كانت كل b_i هي مجموعة جزئية لبعض عناصر a_j $i,j\in w\ ;\ a_j$~~

~~**على سبيل المثال:**~~

~~$\vec{a}=(1,2,3,4,5,6,..),\vec{b}=(3,7,11,\dots)$~~

~~نقول أن $\vec{a}\preceq_{\mathcal{F}}\vec{b}$ كل b_i هو مجموع جزئي من $\vec{a}$.~~

إن هذا التعريف يوسع نطاق الفضاءات الرامزية لتشمل ليس فقط المجموعات والمتتاليات بل أي بنية جبرية ذات عمليات، كما وأنه يربط النظرية الرامزية والبنى الجبرية، بحيث يصبح كل جبر $(A,\mathcal{F})$ هو نقطة انطلاق لبناء فضاء رامزي خاص به.

كما رأينا سابقاً في البنية $\mathcal{R} = (R, \leq)$ ترتيب شبه جزئي مع تقريبات

أن الفضاء الجزئي من $\mathcal{R}$ الناتج عن مجموعة جزئية $T \subseteq R$ لا يكون بالضرورة فضاءاً رامزياً حتى لو كانت البنية نفسها فضاء رامزي.

أي أن: الخاصية الرامزية لا تنتقل دائماً من الفضاء الأم إلى فضاء جزئي بشكل تلقائي.

ومع ذلك، فإن هذا الفضاء الأساسي $\mathcal{R} = (R, \leq)$ يكون فضاء جزئي **إذا وفقط إذا** كان كل فضاء جزئي من $\mathcal{R}$ المولد من مجموعة مفتوحة أساسية $[n, \vec{a}]_{\mathcal{R}}$ يكون فضاء رامزي.

على وجه الخصوص: إذا كان الفضاء $\mathcal{R}(A, \mathcal{F})$ المولد بالجبر $(A, \mathcal{F})$ فضاء رامزي

فإن: الفضاء الجزئي $\mathcal{R}_{\vec{a}}(A, \mathcal{F})$ هو فضاء رامزي وذلك لكل $\vec{a} \in {}^{w}A$

(لأن الفضاء الجزئي المولد من مجموعة أساسية مفتوحة يجب أن يحتفظ بنفس الخصائص الطوبولوجية للفضاء الأصلي)

والعكس صحيح أيضاً: أي إذا كان كل فضاء جزئي من هذا النوع رامزي فإن الفضاء الكلي الرامزي.

$\Longleftarrow$ ومنه يمكن تقوية النتيجة التالية:

بفرض $\mathcal{R}_{\vec{b}}(A, \mathcal{F})$ فضاء رامزي وَكانت $\vec{b} \leq_{\mathcal{F}} \vec{a}$ فهذا لا يعني بالضرورة أن $\mathcal{R}_{\vec{a}}(A, \mathcal{F})$ هو فضاء رامزي

4-3-43. مبرهنة: [19] [20]

بفرض أن $(A, \mathcal{F})$ جبر، إذا كان لأجل كل $\vec{a} \in {}^{w}A$ يوجد $\vec{b} \leq_{\mathcal{F}} \vec{a}$

بحيث أن: $\mathcal{R}_{\vec{b}}(A, \mathcal{F})$ هو فضاء رامزي

فإن: $\mathcal{R}(A, \mathcal{F})$ هو فضاء رامزي

(حيث لإثبات هذه المبرهنة موجود في المرجع)

ملاحظة:

من أجل كل $n \in w$ وَ $\vec{a} \in {}^{w}A$، يكون لدينا الفضاء الجزئي $\left(\mathcal{R}(A,\mathcal{F})\right)_{[n,\vec{a}]}$ مماثلاً لـ $\left(\mathcal{R}(A,\mathcal{F})\right)_{[0,\vec{a}-n]}$

ومنه نستنتج:

$\mathcal{R}(A,\mathcal{F})$ فضاء رامزي **إذا وفقط إذا** كان $\left(\mathcal{R}(A,\mathcal{F})\right)_{[0,\vec{a}]}$ فضاء جزئي رامزي وذلك $\forall \vec{a} \in {}^{w}A$.

إن النسخة المجردة من نظرية إيلينتوك التي وضعها العالم كارلسون تربط خاصية كون الفضاء $\mathcal{R}(A,\mathcal{F})$ فضاء رامزي بخاصية كون الجبر $(A,\mathcal{F})$ جبر رامزي.

وحتى تنطبق النسخة المجردة على $\mathcal{R}(A,\mathcal{F})$ فنحن بحاجة إلى ترتيب جزئي على مجموعة تقريباتها، أي مجموعة المتتاليات المنتهية في A.

4-3-~~5~~4. تعريف: [19]

بفرض أن $\mathcal{F}$ هو جماعة من العمليات على المجموعة A. نعرّف الترتيب الجزئي $\trianglelefteq$ على مجموعة المتتاليات المنتهية من عناصر A بالشكل التالي: ~~$\vec{b} \trianglelefteq_{\mathcal{F}} \vec{a}$~~ $\vec{a} \trianglelefteq_{\mathcal{F}} \vec{b}$ **إذا وفقط إذا** وجدت متتاليات منتهية $\vec{b}_k$ وحدود مرتبة $f_k \in \mathcal{F}$ وذلك أياً تكن $k < |\vec{a}|$ بحيث:

1 المتتالية المركبة $\vec{b}_0 * \ldots * \vec{b}_{|\vec{a}|-1}$ هي متتالية جزئية من $\vec{b}$

2 ولكل $k < |\vec{a}|$: $\vec{a}(k) = f_k(\vec{b}_k)$

• نقول أن $\vec{a}$ اختزال لـ $\vec{b}$ **إذا وفقط إذا** كان $\vec{a} \trianglelefteq \vec{b}$

هذا التعريف يعطي أداة لبناء الترتيب على التقريبات المنتهية وهو أساس لربط البنية الجبرية $(A,\mathcal{F})$ بالفضاء الطوبولوجي، وهو العمود الفقري في مبرهنة كارلسون التي تعمم مبرهنة إيلينتوك.

مثال(1):

عندما تكون العمليات = عملية الجمع فقط، أي: $A = \mathbb{N}$ و $\mathcal{F} = \{+\}$، ومتتالية $\vec{b} = (3,5,2,7)$

ونريد بناء متتالية مختزلة $\vec{a} = (8,9)$، نقسم $\vec{b}$ إلى قطعتين:

1 $\vec{b}_0 = (3,5)$ ثم نطبق العملية:

$$f_0(x,y) = x + y \implies f_0(\vec{b}_0) = 8$$

2 $\vec{b}_1 = (2,7)$ ثم نطبق العملية:

$$f_1(x,y) = x + y \implies f_1(\vec{b}_0) = 9$$

إذاً: $\vec{a}(1) = 9\ , \vec{a}(0) = 8$، وأيضاً: $\vec{b}_1 = (3,5,2,7)$ *~~-~~ $\vec{b}_0$ وهي متتالية جزئية من $\vec{b}$، إذاً:

$$\vec{a} \trianglelefteq \vec{b}$$

مثال(2): (مثال إيلينتوك التقليدي)

عندما تكون $\mathcal{F}$ العمليات التي تأخذ متتاليات جزئية، حيث: كل $\vec{a}$ هي متتالية جزئية من $\vec{b}$

والعمليات f_k هي عمليات اختيار عنصر واحد من القطعة $\vec{b}_k$

وهذا يتوافق تماماً مع استعمال $p(n,A) = A_{\restriction}n$ في فضاء إيلينتوك.

4-3-~~6~~5. تمهيدية (1): (*Carlson*) [19]

بفرض أن $\mathcal{F}$ هي جماعة من العمليات على مجموعة A فإن:

$\trianglelefteq$ هي تنهية للفضاء $\mathcal{R}(A,\mathcal{F})$ وتحقق الخاصية A_2

تعني كل عنصر في الفضاء A^w يمكن تقريبه أو تمثيله بواسطة متتاليات منتهية، وإن اختزال أي عنصر يمكن تحديده بدراسة اختزالات تقاربه المنتهية. (الإثبات في المرجع)

4-3-~~7~~6. تمهيدية (2): (Carlson) [19]

بفرض $\mathcal{F}$ جماعة من العمليات على مجموعة A، فإن:

الفضاء $\mathcal{R}(A,\mathcal{F})$ يحقق الخاصية A_3 إذا وفقط إذا كلن $(A,\mathcal{F})$ جبر رامزي. (الإثبات في المرجع).

4-3-~~8~~7. نظرية: (Carlson) [19]

بفرض $\mathcal{F}$ جماعة من العمليات على مجموعة A، إذا كانت $\trianglelefteq$ تحقق الخاصية A_1 فإن الفضاء $\mathcal{R}(A,\mathcal{F})$ رامزي **إذا وفقط إذا** كان الجبر $(A,\mathcal{F})$ رامزي.

الإثبات: (من التمهيديتين السابقتين)

ملاحظة: [19] [20]

إذا كان الفضاء $\mathcal{R}(A,\mathcal{F})$ رامزياً فإنه مباشرة يكون الجبر $(A,\mathcal{F})$ رامزياً.

الإثبات:

تفرض أن $E \subseteq A$، لنعرّف المناظرة لها في الفضاء $X_E = \{\vec{a} \in {}^{w}A : a\cancel{A}_0 \in E\}$

1 إن المجموعة X_E هي مجموعة مفتوحة وذلك لأننا إذا زودنا A بالطوبولوجيا المتقطعة ومن ثم نزود مجموعة المتتاليات الغير منتهية ${}^{w}A$ بطوبولوجيا الجداء، فإنه بموجد ذلك يكون أساس الطوبولوجيا الطبيعية مجموعات من الشكل:

$$[1,\vec{a}] = \{\vec{b} \in {}^{w}A : a_0 = b_0\};\ \vec{a} \in {}^{w}A \ \wedge a_0 \in E$$

وبالتالي المجموعة المفتوحة الأساسية $[1,\vec{a}] \ni X_E$، ومنه فإن كل نقطة في X_E تملك جوار مفتوح محتوى في X_E، مما يجعل X_E مجموعة مفتوحة.

2 المجموعة X_E مجموعة مغلقة: ستتم كتابة X_E بالشكل:

$$X_E^C = \{\vec{a} \in {}^wA : a_0 \notin E\} = X_{A\setminus E}$$

بما أن $A\setminus E$ جزئية من A فإن $X_{A\setminus E}$ مفتوحة $\Longleftarrow$ X_E^C مغلقة في الفضاء.

3 بما أن $\mathcal{R}(A,\mathcal{F})$ فضاء رامزي، فإن كل مجموعة مفتوحة مغلقة هي مجموعة رامزية بالمعنى الطوبولوجي،

عندئذٍ يكون:

لكل $n \in w$، ولكل $\vec{a} \in {}^wA$ توجد $\vec{b} \in \mathcal{R}(n,A)$ بحيث أن:

إما: $\mathcal{R}(n,\vec{b}) \subseteq X_E$، أو: $\mathcal{R}(n,\vec{b}) \cap X_E = \emptyset$

وبترجمة~~يرجع~~ هذا الشرط إلى لغة الجبر الرامزي تعطي بالضبط تعريف الجبر الرامزي:

فالمجموعة X_E تمثل تلويناً لعناصر A والشرطان السابقان يعادلان وجود متتالية $\vec{b} \leq_{\mathcal{F}} \vec{a}$ تكون كل اختزالاتها المنتهية إما داخل E أو خارج E.

ومنه فإنه: إذا كان $\mathcal{R}(A,\mathcal{F})$ رامزي فإن $(A,\mathcal{F})$ رامزي.

4-3-~~98~~. نظرية: (Carlson) [19] [20]

بفرض أن $\mathcal{F}$ جماعة منتهية من العمليات على المجموعة A، ولا تحتوي أي من هذه العمليات على عمليات أحادية.

عندئذٍ:

يكون الفضاء $\mathcal{R}(A,\mathcal{F})$ فضاء رامزي **إذا وفقط إذا** كان $(A,\mathcal{F})$ جبر رامزي.

~~**الإثبات:** ... بطريقة مماثلة يمكن إثبات النظرية التالية.~~

4-3-~~109~~. نظرية: [19] [20]

بفرض أن $\mathcal{F}$ جماعة منتهية من العمليات على المجموعة A، ولا تحتوي أي من هذه العمليات على عمليات أحادية،

ولتكن $\vec{a} \in {}^wA$. عندئذٍ:

الفضاء $\mathcal{R}_{\vec{a}}(A,\mathcal{F})$ يكون فضاء رامزي **إذا وفقط إذا** كان $(A,\mathcal{F})$ جبر رامزي تحت $\vec{a}$.

مثال:

• $(A,\emptyset)$ هو جبر رامزي، بالتالي: $\mathcal{R}(A,\emptyset)$ هو فضاء رامزي، حيث أنها تحقق الخاصية A_1.

• نصف الزمرة (A,f) هي جبر رامزي، بالتالي: الفضاء $\mathcal{R}(A,f)$ هو فضاء رامزي، وذلك بالاعتماد على مبرهنة هندمان.

الخلاصة:

قدمنا في هذا الفصل مفهوم لطوبولوجيا وفضاء إيلينتوك، بعد ذلك قدمنا تعاريف أساسية لطرح مفهوم الفضاء الرامزي كما قدمه إيلينتوك. مع ذكر أمثلة، ثم قدمنا ارتباط للفضاء الرامزي بالجبر الرامزي مع ذكر مبرهنات ونتائج هامة.

الفَصلُ الخامِس

أعدادُ رامزي

Ramsey Numbers

أعداد رامزي

مقدمة:

أعداد رامزي تمثل أحد المفاهيم المحورية في التوافقيات ونظرية البيان، كونها تترجم فكرة حتمية ظهور البنية داخل الأنظمة التي تبدو عشوائية. تكمن الصعوبة في أن أعداد رامزي تنمو سريعا وذلك كونها أسية على الأقطار، كما أن إيجادها يتطلب بحثا حسابيا ونظريا شديد التعقيد. لذلك القيم الدقيقة والمعروفة محدودة (الشكل (2−4)). ويتوفر لنا بدل من ذلك حدود دنيا وعليا (الشكل (2−5)). إن هذا الواقع يدفعنا إلى استخدام أدوات عددية مساعدة بهدف بناء نموذج يحاكي سلوك هذه الأعداد اعتمادا على مجموعة من النقاط المعروفة، ثم استخدامه للتنبؤ بالقيم في نقاط غير محسومة، أو لمقارنة اتجاهات النمو مع الحدود المتاحة.

في هذا الفصل سنقوم بإجراء استيفاء لأعداد رامزي ومحاولة إيجاد تقريب يعتمد على القيم المعروفة. مع التنويه إلى أن هذا النوع من الاستيفاء لا يعد إثباتا لقيم أعداد رامزي، وإنما هو نموذج عددي مساعد يهدف إلى توصيف الاتجاه العام اعتمادا على البيانات المتوفرة، وتقديم تقديرات قابلة للاختبار والمقارنة ضمن الإطار المعروف من النتائج المؤكدة.

5−1− استيفاء لأعداد رامزي:

نستطيع النظر إلى أعداد رامزي على أنها قانون تشكيل داخلي على $\mathbb{N}^*$ كما يلي:

$$R: \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$$
$$(r, s) \longmapsto R(r, s)$$

من المعلوم لدينا إذا وُجد قانون تشكيل داخلي على مجموعة نقوم بدراسة الخواص التالية:

• الخاصية التبديلية• الخاصية التجميعية• العنصر الحيادي• العنصر الماص• لكل عنصر نظير.

⟸ بالنظر لأعداد رامزي على أنها قانون تشكيل داخلي، نرى أنه من المعلوم لدينا:

1 1 هو عنصر ماص. 2 2 هو عنصر حيادي. 3 تبديلية: محققة. 4 ليس لكل عنصر نظير إلا 1.

⟵ لدينا مجموعة من النقاط المدروسة لأعداد رامزي: (الشكل (2−4))

الاستيفاء: ننظر إلى التقريب الأول لأعداد رامزي $R_1(r,s)$ كأنه كثير حدود من الدرجة الأولى نسبياً.

$$R_1(r,s) = a_0 + a_1\underbrace{(r+s)} + a_2\, rs \quad (\bigstar)$$

$a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ عدد المعاملات هو 3.

نستخدم ما هو معلوم بالشكل التالي: $\begin{cases} R_1(1,s) = 1 \\ R_2(2,s) = s \end{cases}$ سنعوض ونطابق.

$$1 = a_0 + a_1(1+s) + a_2 s$$
$$1 = a_0 + a_1 + a_1 s + a_2 s$$

بالمطابقة نجد:

$$\left.\begin{matrix} a_0 + a_1 = 1 \\ a_1 + a_2 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} a_2 = -a_1 \\ a_0 = 1 - a_1 \end{cases}$$

نعوض في $(\bigstar)$ نجد:

$$R_1(r,s) = 1 - a_1 + a_1(r+s) - a_1 rs$$
$$= 1 - a_1 + a_1 r + a_1 s - a_1 rs$$
$$R_1(r,s) = 1 + a_1(-1 + r + s - rs) \ldots (\bigstar\bigstar)$$

$$R_1(2,s) = S$$

ومنه: نعوض في $(\bigstar\bigstar)$ $\qquad R_1\,(2,s) = 1 + a_1(-1 + 2 + s - 2s)$

$$s = 1 + a_1(1 - s) = \underbrace{1 + a_1}_{0} - a_1 s \Rightarrow \boxed{a_1 = -1}$$

$$\Rightarrow \boxed{a_0 = 2} \quad \text{و} \quad \boxed{a_2 = 1}$$

$$R_1(r,s) = 1 - (-1 + r + s - rs) = 1 + 1 - r - s + rs$$
$$R_1(r,s) = 2 - (r + s) + rs = (r - 1)(s - 1) + 1$$

فيكون التقريب من الدرجة الأولى.

◆ **التقريب الثاني:**

$$R_2(r,s) = a_0 + a_1(r + s) + a_2 rs + a_3(r^2 + s^2) + a_4(r^2 s + rs^2) + a_5 r^2 s^2$$

عدد المعاملات هو: 6

نضع: $R(1,s) = 1\,, R(2,s) = s\,, R(3,3) = 6$

$$R_2(1,s) = a_0 + a_1(1 + s) + a_2 s + a_3(1 + s^2) + a_4(s + s^2) + a_5 s^2$$
$$1 = a_0 + a_1 + a_1 s + a_2 s + a_3 + a_3 s^2 + a_4 s + a_4 s^2 + a_5 s^2$$

$$\left.\begin{array}{l} a_3 + a_4 + a_5 = 0 \\ a_1 + a_2 + a_4 = 0 \\ a_0 + a_1 + a_3 = 1 \end{array}\right\} ①$$

$$R_2(2,s) = a_0 + a_1(2 + s) + a_2 2s + a_3(4 + s^2) + a_4(4s + 2s^2) + a_5 4s^2$$
$$s = a_0 + 2a_1 + a_1 s + 2a_2 s + 4a_3 + a_3 s^2 + 4a_4 s + 2a_4 s^2 + 4a_5 s^2$$

$$\left.\begin{array}{l} a_3 + 2a_4 + 4a_5 = 0 \\ a_1 + 2a_2 + 4a_4 = 1 \\ a_0 + 2a_1 + 4a_3 = 1 \end{array}\right\} ②$$

① و ② فنجد:

$$\Rightarrow -a_1 - 3a_3 = 1 \Rightarrow a_1 + 3a_3 = -1 \Rightarrow a_1 = -1 - 3a_3 \ldots ③$$
$$\Rightarrow -a_2 - 3a_4 = -1 \Rightarrow a_2 + 3a_4 = 1 \Rightarrow a_2 = 1 - 3a_4 \ldots ④$$

$$\Rightarrow -a_4 - 3a_5 = 0 \Rightarrow a_4 + 3a_5 = 0 \Rightarrow a_4 = -3a_5 \dots ⑤$$

بتعويض ⑤ في ④ نجد أن:

$$a_2 = 1 - 3a_4 = 1 - 3(-3a_5) \Rightarrow \boxed{a_2 = 1 + 9a_5}$$

⟵ ينبغي علينا كتابة a_3 بدلالة a_5:

من المعادلة الأولى في جملة المعادلات ① نجد:

$$a_3 + a_4 + a_5 = 0 \Rightarrow a_3 - 3a_5 + a_5 = 0 \Rightarrow \boxed{a_3 = 2a_5}$$

ومنه نعوض في ③:

$$a_1 = -1 - 3a_3 \Rightarrow a_1 = -1 - 3(2a_5) \Rightarrow \boxed{a_1 = -1 - 6a_5}$$

⟵ لنحسب a_0 بدلالة a_5: نعوض في المعادلة الثالثة في جملة المعادلات ①:

$$a_0 = 1 - a_1 - a_3 = 1 - (-1 - 6a_5) - 2a_5 = 1 + 1 + 6a_5 - 2a_5$$
$$\Rightarrow \boxed{a_0 = 2 + 4a_5}$$

نعوض كل القيم في $R_2(r,s)$:

$$R_2(r,s) = 2 + 4a_5 + (-1 - 6a_5)(r + s) + (1 + 9a_5)rs$$
$$+2a_5(r^2 + s^2) - 3a_5(r^2 s + rs^2) + a_5 r^2 s^2$$

لدينا $R(3,3) = 6$:

$$R(3,3) = 2 + 4a_5 + (-1 - 6a_5)(3 + 3) + (1 + 9a_5)(3 \times 3) + 2a_5(3^2 + 3^2)$$
$$- 3a_5(3^3 + 3^3) + a_5 3^2 3^2$$
$$6 = 2 + 4a_5 - 6 - 36a_5 + 9 + 81a_5 + 36a_5 - 162a_5 + 81a_5$$
$$6 = 5 + 4a_5$$
$$\Rightarrow a_5 = \frac{6-5}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow \boxed{a_5 = \frac{1}{4}}$$

ومنه نجد جميع المعاملات:

$$\boxed{1}\ a_0 = 2 + 4a_5 = 2 + 4 \times \frac{1}{4} = 2 + 1 = 3$$

$$\boxed{2}\ a_1 = -1 - 6a_5 = -1 - 6 \times \frac{1}{4} = -1 - \frac{3}{2} = -\frac{5}{3} = -\frac{10}{4}$$

$$\boxed{3}\ a_2 = 1 + 9a_5 = 1 + 9 \times \frac{1}{4} = \frac{13}{4}$$

$$\boxed{4}\ a_3 = 2a_5 = 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2} = \frac{2}{4}$$

$$\boxed{5}\ a_4 = -3a_5 = \frac{-3}{4}$$

ومنه نجد أن:

$$R_2(r,s) = 3 - \frac{10}{4}(r+s) + \frac{13}{4}rs + \frac{2}{4}(r^2+s^2) - \frac{3}{4}(r^2s+rs^2) + \frac{1}{4}r^2s^2$$

ونجري اختبار على التقريب بالتعويض بأعداد رامزي المعروفة:

$R_2(3,4) = 10$	$R(3,4) = 9$
$R_2(3,5) = 15$	$R(3,5) = 14$
$R_2(3,6) = 21$	$R(3,6) = 18$
$R_2(3,7) = 28$	$R(3,7) = 23$
$R_2(3,8) = 36$	$R(3,8) = 28$
$R_2(3,9) = 45$	$R(3,9) = 36$
$R_2(4,4) = 19$	$R(4,4) = 18$
$R_2(4,5) = 31$	$R(4,5) = 25$

بافتراض أن $a_5 = t$ تكون المعاملات:

$$a_0 = 2 + 4t$$
$$a_1 = -1 - 6t$$
$$a_2 = 1 + 9t$$
$$a_3 = 2t$$
$$a_4 = -3t$$
$$a_5 = t$$

وبالتعويض سنجد:

$$R_2(r,s) = (4t+2) + (-6t-1)(r+s) + (9t+1)rs + (2t)(r^2+s^2) + (-3t)(r^2s + rs^2) + t(r^2s^2)$$

سنقوم بالتعويض عند $R(4,4) = 18$.

ومنه:

$$R_2(4,4) = a_0 + 8a_1 + 16a_2 + 32a_3 + 128a_4 + 256a_5$$

وتصبح المعاملات:

$$a_0 = \frac{26}{9}$$
$$a_1 = -\frac{7}{3}$$
$$a_2 = 3$$
$$a_3 = \frac{4}{9}$$
$$a_4 = -\frac{2}{3}$$
$$a_5 = \frac{2}{9}$$

بالتعويض نجد أن:

$$R_2(4,4) = 36t + 10 \implies t = \frac{2}{9}$$

ومنه:

$$R_2(r,s) = \frac{26}{9} - \frac{7}{3}(r+s) + 3(rs) + \frac{4}{9}(r^2+s^2) - \frac{2}{3}(r^2s + rs^2) + \frac{2}{9}(r^2s^2)$$

وبالاختبار:

$R_2(3,3) = 6$	$R(3,3) = 6$
$R_2(3,4) = 10$	$R(3,4) = 9$
$R_2(3,5) = 14$	$R(3,5) = 14$
$R_2(3,6) = 20$	$R(3,6) = 18$
$R_2(3,7) = 26$	$R(3,7) = 23$
$R_2(3,8) = 34$	$R(3,8) = 28$
$R_2(3,9) = 42$	$R(3,9) = 36$
$R_2(4,5) = 29$	$R(4,5) = 25$

وبالتعويض عند $(5,5)$ نجد أن $R_2(5,5) = 49$

سنقوم بالتعويض عند $R(4,5)=25$ نجد أن:

$$R_2(4,5)=a_0+9a_1+20a_2+41a_3+180a_4+400a_5$$

$$\Longrightarrow R_2(4,5)=72t+13\Longrightarrow \boxed{t=\frac{1}{6}}$$

$$a_0=\frac{8}{3}$$

$$a_1=-2$$

$$a_2=\frac{5}{2}$$

$$a_3=\frac{1}{3}$$

$$a_4=-\frac{1}{2}$$

$$a_5=\frac{1}{6}$$

$$R_2(r,s)=\frac{8}{3}-2(r+s)+\frac{5}{2}(rs)+\frac{1}{3}(r^2+s^2)-\frac{1}{2}(r^2s+rs^2)+\frac{1}{6}r^2s^2$$

الاختبار:

$R_2(3,3)=6$	$R(3,3)=6$
$R_2(3,4)=9$	$R(3,4)=9$
$R_2(3,5)=13$	$R(3,5)=14$
$R_2(3,6)=18$	$R(3,6)=18$
$R_2(3,7)=23$	$R(3,7)=23$
$R_2(3,8)=29$	$R(3,8)=28$

$R_2(3,9) = 36$	$R(3,9) = 36$
$R_2(4,4) = 16$	$R(4,4) = 18$

وبالتعويض عند $(5,5)$ نجد أن $R_2(5,5) = 41$

◆ **التقريب الثالث:**

$$R_3(r,s) = a_0 + a_1(r+s) + a_2rs + a_3(r^2+s^2) + a_4(r^2s+rs^2) + a_5r^2s^2 + a_6(r^3+s^3) + a_7(r^3s+rs^3) + a_8(r^3s^2+r^2s^3) + a_9r^3s^3$$

سنبدأ بإيجاد قيم المعادلات العشرة:

$$R_3(1,s) = a_0 + a_1(1+s) + a_2s + a_3(1+s^2) + a_4(s+s^2) + a_5s^2 + a_6(1+s^3) + a_7(s+s^3) + a_8(s^2+s^3) + a_9s^3$$

$$1 = a_0 + a_1 + a_1s + a_2s + a_3 + a_3s^2 + a_4s + a_4s^2 + a_5s^2 + a_6 + a_6s^3 + a_7s + a_7s^3 + a_8s^2 + a_8s^3 + a_9s^3$$

$$\left.\begin{aligned} a_6 + a_7 + a_8 + a_9 &= 0 \\ a_3 + a_4 + a_5 + a_8 &= 0 \\ a_1 + a_2 + a_4 + a_7 &= 0 \\ a_0 + a_1 + a_3 + a_6 &= 1 \end{aligned}\right\} \quad ①$$

$$R_3(2,s) = a_0 + a_1(2+s) + a_2 2s + a_3(4+s^2) + a_4(4s+2s^2) + a_5 4s^2 + a_6(8+s^3) + a_7(8s+2s^3) + a_8(8s^2+4s^3) + a_9 8s^3$$

$$s = a_0 + 2a_1 + a_1s + 2a_2s + 4a_3 + a_3s^2 + 4a_4s + 2a_4s^2 + 4a_5s^2 + 8a_6 + a_6s^3 + 8a_7s + 2a_7s^3 + 8a_8s^2 + 4a_8s^3 + 8a_9s^3$$

$$\left.\begin{aligned} a_6 + 2a_7 + 4a_8 + 8a_9 &= 0 \\ a_3 + 2a_4 + 4a_5 + 8a_8 &= 0 \\ a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_7 &= 1 \\ a_0 + 2a_1 + 4a_3 + 8a_6 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad ②$$

بطرح جملة المعادلتين نجد أن:

$$a_1 + 3a_3 + 7a_6 = -1 \implies a_1 = -1 - 3a_3 - 7a_6$$

$$a_2 + 3a_4 + 7a_7 = 1 \implies a_2 = 1 - 3a_4 - 7a_7$$

$$a_4 + 3a_5 + 7a_8 = 0 \implies \boxed{a_4 = -3a_5 - 7a_8}$$

$$a_7 + 3a_8 + 7a_9 = 0 \implies \boxed{a_7 = -3a_8 - 7a_9}$$

$$\implies a_0 = 2 + 2a_3 + 6a_6$$

- $a_3 = -a_4 - a_5 - a_8 = +3a_5 + 7a_8 - a_5 - a_8 \implies \boxed{a_3 = 2a_5 + 6a_8}$
- $a_6 = -a_7 - a_8 - a_9 = +3a_8 + 7a_9 - a_8 - a_9 \implies \boxed{a_6 = 2a_8 + 6a_9}$

$\implies a_0 = 2 + 2(2a_5 + 6a_8) + 6(2a_8 + 6a_9) = 2 + 4a_5 + 12a_8 + 12a_8 + 36a_9$

$\implies \boxed{a_0 = 2 + 4a_5 + 24a_8 + 36a_9}$

- $\boxed{a_1 = -1 - 6a_5 - 32a_8 - 42a_9}$
- $a_2 = 1 - 3(-3a_5 - 7a_8) - 7(-3a_8 - 7a_9)$

$= 1 + 9a_5 + 21a_8 + 21a_8 + 49a_9$

$\implies \boxed{a_2 = 1 + 9a_5 + 42a_8 + 49a_9}$

$$\begin{aligned} R_3(r,s) = {} & 2 + 4a_5 + 24a_8 + 36a_5 + (-1 - 6a_5 - 32a_8 - 42a_9)(r + s) \\ & + (1 + 9a_5 + 42a_8 + 49a_9)rs + (2a_5 + 6a_8)(r^2 + s^2) \\ & + (-3a_5 - 7a_8)(r^s s + sr^2) + a_5 r^2 s^2 + (2a_8 + 6a_9)(r^3 + s^3) \\ & + (-3a_8 - 7a_9)(r^3 s + rs^3) + a_8(r^3 s^2 + r^2 s^3) + a_9 r^3 s^3 \end{aligned}$$

نعوض في $R(3,3) = 6$ ونوجد

$$\begin{aligned} R_3(3,3) &= 5 + 4a_5 + 48a_8 + 144a_9 \\ 6 &= 5 + 4a_5 + 48a_8 + 144a_9 \\ 1 &= 4a_5 + 48a_8 + 144a_9 \end{aligned}$$

$$\implies \boxed{a_5 = \frac{1}{4} - 12a_8 - 36a_9}$$

نكتب المعاملات بدلالة a_8 و a_9:

$$a_0 = 3 - 24a_8 - 108a_9$$
$$a_1 = -\frac{5}{2} + 40a_8 + 174a_9$$
$$a_2 = \frac{13}{4} - 66a_8 - 275a_9$$
$$a_3 = \frac{1}{2} - 18a_8 - 72a_9$$
$$a_4 = -\frac{3}{4} + 29a_8 + 108a_9$$
$$a_5 = \frac{1}{4} - 12a_8 - 36a_9$$
$$a_6 = 2a_8 + 6a_9$$
$$a_7 = -3a_8 - 7a_9$$

$$R_3(3,4) = 3 - 24a_8 - 108a_9 + 7a_1 + 12a_2 + 25a_3 + 84a_4 + 144a_5 + 91a_6 + 300a_7 + 1008a_8 + 1728a_9$$

نعوض القيم الجديدة من a_0 حتى a_9 فنجد أن:

$$R_3(3,4) = 10 + 12a_8 + 72a_9$$
$$9 = 10 + 12a_8 + 72a_9$$
$$\Longrightarrow -1 = 12a_8 + 72a_9$$
$$\Longrightarrow \boxed{a_8 = -\frac{1}{12} - 6a_9}$$

نريد حساب a_9 ومنه سنعوض $r = 3$ وَ $s = 5$

$$R_3(3,5) = a_0 + 8a_1 + 5a_2 + 34a_3 + 120a_4 + 225a_5 + 152a_6 + 510a_7 + 1800a_8 + 3375a_9$$
$$= 5 + 36a_9 + 8\left(-\frac{35}{6} - 66a_9\right) + 15\left(\frac{35}{4} + 121a_9\right) + 34(2 + 36a_9) + 120\left(-\frac{19}{6} - 66a_9\right) + 225\left(\frac{5}{4} + 36a_9\right) + 152\left(-\frac{1}{6} - 6a_9\right) + 510\left(\frac{1}{4} + 11a_9\right) + 1800\left(-\frac{1}{12} - 6a_9\right) + 3375a_9$$
$$11 + 0a_9 = 11$$

نلاحظ أن معاملات a_9 التغت تماماً عند الجمع فأصبحت النتيجة ثابتة مساوية لـ 11.

من أجل ذلك لإيجاد a_9 عوضت $R_3(4,4)$.

$$R_3(4,4) = a_0 + 8a_1 + 16a_2 + 32a_3 + 128a_4 + 256a_5 + 128a_6 + 512a_7 + 2048a_8 + 4096a_9$$

وبتعويض كل العناصر من a_0 حتى a_9 نجد ان:

$$R_3(4,4) = 13 + 36a_9$$
$$\Longrightarrow 18 = 13 + 36a_9 \Longrightarrow \boxed{a_9 = \frac{5}{36}}$$

ومنه:

$$a_0 = 10\,, a_1 = -15\,, a_2 = \frac{230}{9}\,, a_3 = 7\,, a_4 = -\frac{37}{3}\,, a_5 = \frac{25}{4}\,, a_6 = -1\,,$$
$$a_7 = \frac{16}{9}\,, a_8 = \frac{-11}{12}\,, a_9 = \frac{5}{36}$$

بكتابة التقريب وبالتعويض بأعداد رامزي المعروفة أعطى قيم سالبة وهذا مستحيل.

لذلك سنقوم بالتعويض بالنقاط $(3,4)$, $(4,4)$, $(3,5)$، ومنه المعاملات:

$$a_0 = 2\,, a_1 = -1\,, a_2 = \frac{19}{18}, a_3 = 0\,, a_4 = -\frac{1}{12}, a_5 = \frac{1}{8}, a_6 = 0,$$
$$a_7 = \frac{1}{36}, a_8 = -\frac{1}{24}, a_9 = \frac{1}{72}$$

نلاحظ انعدام المعاملين a_3 ,a_6.

سنقوم بحساب التقريب بثلاث نقاط $(3,3)$, $(4,4)$, $(4,5)$ ومنه:

$$R_3(4,4) = 19 + 72a_8 + 468a_9$$

بالتعويض بقيمة $R(4,4) = 18$ نجد أن:

$$\boxed{a_8 = -\frac{1}{72} - \frac{13}{2}a_9}$$

لحساب a_9 نعوض في $(4,5)$ ومنه:

$$R_3(4,5) = a_0 + 9a_1 + 20a_2 + 41a_3 + 180a_4 + 400a_5 + 189a_6 + 820a_7 + 3600a_8 + 8000a_9$$

$$R_3(4,5) = 31 + 216a_8 + 1440a_9$$

بالتعويض بقيمة $R(4,5) = 25$ نجد أن:

$$\boxed{a_9 = -\frac{1}{12}}$$

وبالتعويض نجد:

$$a_0 = -\frac{2}{3}, \quad a_1 = \frac{37}{9}, \quad a_2 = -\frac{26}{3}, \quad a_3 = -3, \quad a_4 = \frac{50}{9}, \quad a_5 = -\frac{37}{12},$$
$$a_6 = \frac{5}{9}, \quad a_7 = -1, \quad a_8 = \frac{19}{36}$$

$$\Rightarrow R_3(r,s) = -\frac{2}{3} + \frac{37}{9}(r+s) - \frac{26}{3}rs - 3(r^2+s^2) + \frac{50}{9}(r^2s + rs^2) - \frac{37}{12}r^2s^2 + \frac{5}{9}(r^3+s^3) - (r^3s + rs^3) + \frac{19}{36}(r^3s^2 + r^2s^3) - \frac{1}{12}r^3s^3$$

هو تقريب من الدرجة الثالثة.

خلاصة الفصل

لقد قمنا في هذا الفصل بإجراء استيفاء لأعداد رامزي كقانون تشكيل داخلي، وكما قمنا بمحاولة إيجاد تقريب لأعداد رامزي بناء على القيم القليلة المعروفة لأعداد رامزي.

الخاتمة والرؤى المستقبلية

تُبرز هذه الرسالة الأهمية العميقة لنظرية رامزي بوصفها إطارًا رياضيًا كاشفًا للحتمية البنيوية الكامنة داخل البنى التوافقية غير المنتهية. وقد أظهر البحث أن الانتقال من النتائج التوافقية الكلاسيكية إلى الصياغة الجبرية، ولا سيما من خلال جبر رامزي والفضاءات الرامزية، يتيح فهمًا أعمق لطبيعة الانتظام في السياقات التجريدية. وتكمن أهمية هذا العمل في إبراز الدور التكاملي لنظرية رامزي بين التوافقية والجبر والطوبولوجيا، مما يؤكد مكانتها كنظرية محورية ذات تأثير واسع في الرياضيات الحديثة.

تفتح النتائج والمفاهيم التي تم تناولها في هذه الرسالة آفاقًا بحثية واسعة يمكن متابعتها في دراسات لاحقة، ومن أبرزها:

***دراسة أصناف جديدة من الجبور الرامزية**، ولا سيما الجبور ذات العمليات المتعددة غير الثنائية، وتحليل شروط رامزيتها وعلاقتها بالبنى الجبرية المعروفة.

***تعميق الربط بين الجبر الرامزي والطوبولوجيا**، من خلال دراسة فضاءات رامزية جديدة، أو تعميم خصائص الفضاءات الرامزية على أصناف أوسع من الفضاءات الطوبولوجية.

***دراسة التقريبات والحدود التقريبية لأعداد رامزي من منظور تحليلي أو جبري**، بما قد يسهم في فهم أفضل لسلوك هذه الأعداد التي لا تزال قيم الكثير منها مجهولة.

ختامًا، يمكن القول إن الجبر الرامزي والفضاءات الرامزية يشكلان مجالًا خصبًا للبحث الرياضي المعاصر، يجمع بين العمق النظري وتعدد الاتجاهات، ويتيح إمكانات واسعة للتطوير والتعميم في المستقبل.

المُصطلحَات العلميَّة

انكليزي	عربي
a + b	
Algebra	الجبر
analytic set	مجموعة تحليلية
antisymmetric	تخالفيّة
arithmetic progression	متتالية حسابية
associative operation	عملية تجميعية
Baire property	خاصية باير
binary relation	علاقة ثنائية
C + e +f	
clopen set	مجموعة مفتوحة مغلقة
close set	مجموعة مغلقة
collection	جماعة
combinatoric	توافيق
concatenation	وصل– دمج
empty	خالي
finite algebra	جبر منتهي
finite sequence	متتالية منتهية
g	
groupoid	زميره
group	زمرة
h + i + L + m	
homogeneous	متجانس
idempotent element	عنصر مراوح
infinite algebra	جبر غير منتهي
infinite sequence	متتالية غير منتهية
initial seqment	مقطع ابتدائي

length n	الطول n
meager set	مجموعة هزيلة

n + o + p

n-ary function	دالة نونية
open set	مجموعة مفتوحة
pairwise disjoint	مختلفة زوجياً
pigeonhole principle	مبدأ برج الحمام

r

r-coloring	تلوين أضلاع
ramsey property	خاصية رامزي
reduction	تخفيض – اختزال
reflexive relation	علاقة انعكاسية
restriction	تقييد– مقصور

s + t + u + w

semigroup	نصف زمرة
space	فضاء
subalgebra	الجبر الجزئي
subsequence	متتالية جزئية
symmetric difference	الفرق التناظري
topology space	فضاء طوبولوجي
transitive relation	علاقة متعدية
universal algebra	الجبر الشامل
weakly ramsey	رامزي الضعيف

المَراجع العلميَّة

1) الأحمد، خضر حامد. (1993). **مبادئ الطوبولوجيا العامة**. دمشق: سورية. منشورات جامعة دمشق. ص: 303.

2) أحمد، صلاح، أبو حمدة، عبد الواحد، قابيل، محمد بشير. (1991). **الطوبولوجيا(1)** حلب: سورية. مطبعة جامعة حلب الأهلية. ص: 240.

3) الحاكمي، حمزة. (2010). **بنى جبرية(1)(الطبعة الثانية)**. دمشق: سورية. منشورات جامعة دمشق، كلية العلوم. ص: 443.

4) هنانو، عبد اللطيف. (2012). **الجبر الخطي(1)**. دمشق: منشورات جامعة دمشق، كلية العلوم. ص: 281.

5) Baumgartner, James E. (1974, Nov.). **A short proof of Hindman's theorem**. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*. Vol: 17. pp-pp: 384–386**.**

6) Burris, S. N., & Sankappanavar, H. P. (2000). **A Course in Universal Algebra**. The Millennium Edition. Waterloo: Canada. University of Waterloo. p: 331.

7) Diestel, R. (2000). **Graph Theory**. New York: USA. Springer-Verlag.

8) Carlson, Timothy J. (1988). **Some unifying principles in Ramsey theory**. *Discrete Mathematics*. Vol: 68, No: 2–3. pp-pp: 117–169. Amsterdam: Netherlands. North-Holland (Elsevier).\

9) Carlson, Timothy J., & Simpson, Stephen G. (1990). **Topological Ramsey Theory**. In: Nešetřil, J., & Rödl, V. (eds), Mathematics of Ramsey Theory. Algorithms and Combinatorics, vol: 5. Berlin/Heidelberg: Springer. pp-pp: 172–183. doi: 10.1007/978-3-642-72905-8_12.

10) Ellentuck, Erik. (1974, Mar.). **A new proof that analytic sets are Ramsey**. *The Journal of Symbolic Logic*. Vol: 39, No: 1. pp-pp: 163–165. Storrs, CT: USA. Association for Symbolic Logic.

11) Erdős, P., & Rado, R. (1952). **Combinatorial theorems on classifications of subsets of a given set**. Proceedings of the London Mathematical Society (Series 3). Vol: 2. pp-pp: 417–439.

12) Graham, Ronald L., & Spencer, Joel H. (1990, Jul.). **Ramsey theory**. *Scientific American*. Vol: 263, No: 1. pp-pp: 112–117.

13) Graham, Ronald L., Rothschild, Bruce L., & Spencer, Joel H. (1990). ***Ramsey Theory* (2nd ed.)**. New York: USA. John Wiley & Sons (Wiley-Interscience). p: 208.

14) Hindman, Neil. (1974, Jul.). **Finite sums from sequences within cells of a partition of N**. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*. Vol: 17, No: 1. pp-pp: 1–11. New York: USA. Academic Press.

15) Hindman, Neil, & Strauss, Dona. (2012). ***Algebra in the Stone-Čech Compactification: Theory and Applications* (2nd revised and extended ed.)**. Berlin/Boston: Walter de Gruyter. p: 591.

16) Kisner, Summer Lynne. (2013). **Schur's Theorem and Related Topics in Ramsey Theory**. Master of Science in Mathematics. Boise State University. Boise, ID: USA. p: 90.

17) Ramsey, F. P. (1930). **On a problem of formal logic**. Proceedings of the London Mathematical Society (Series 2). Vol: 30, No: 1. pp-pp: 264–286. doi: 10.1112/plms/s2-30.1.264.

18) Radziszowski, Stanislaw P. (2026). **Small Ramsey Numbers**. Dynamic Survey DS1, Revision #18 (January 6, 2026). The Electronic Journal of Combinatorics. doi: 10.37236/21.

19) Teh, Wen Chean. (2013). **Ramsey Algebras and Ramsey Spaces**. Doctor of Philosophy. Graduate Program in Mathematics. The Ohio State University. Columbus: USA. p: 109.

20) Teh, Wen Chean. (2016). **Ramsey algebras**. *Journal of Mathematical Logic*, 16(02), 1650005, pp: 1–16. Singapore: Singapore. World Scientific Publishing Company.

21) Todorcevic, Stevo. (2010). **Introduction to Ramsey Space**s. Princeton and Oxford: Princeton University Press. p: 296.

22) Jungic, Veselin. **Introduction to Ramsey Theory***: Lecture notes for undergraduate course*. Simon Fraser University الرابط: https://www.sfu.ca/~vjungic/Ramsey/RamseyNotes.pdf

Abstract

The Abstract of a thesis submitted in partial fulfillment of the requirements for the Master Degree in Mathematics (Algebra and Geometry)

Titled

" Algebraic Theory, Study Case: Ramsey Algebra "

By **Hanan Aljanadi** Supervision of Prof. **Jebran Jebran**

This thesis presents a systematic algebraic study of **Ramsey algebra** as one of the modern concepts arising from **Ramsey theory** in combinatorics. The study highlights its connections with classical results in Ramsey theory as well as with topological structures known as **Ramsey spaces**. The significance of this work lies in the fact that, **to the best of our knowledge**, Ramsey algebra has not previously been presented in a comprehensive, reference-style manner within the research output of the Department of Mathematics at Damascus University. Accordingly, the thesis aims to establish a clear definitional and methodological foundation that enables students and researchers to move in a coherent and connected way from Ramsey theory to Ramsey algebra and then to Ramsey spaces.The thesis begins by preparing the necessary background through a presentation of selected fundamental concepts from **graph theory, algebra, and topology**. It then proceeds to Ramsey theory in both its **finite and infinite** forms, with an emphasis on **Ramsey numbers** and several related cornerstone theorems, such as **Schur's theorem**, **van der Waerden's theorem**, and **Rado's theorem**. Next, the thesis develops the notion of Ramsey algebra by drawing on preparatory results of the type exemplified by **Hindman's theorem** (finite sums and finite products), leading to the basic definitions and the key properties that characterize this class of algebras. In a separate chapter, the thesis studies the concept of a Ramsey space via the **Ellentuck theorem** and **Ellentuck topology**, and concludes by presenting theorems that connect—at the level of structure and properties—Ramsey algebras with Ramsey spaces.
In the final chapter, an applied attempt is proposed to **interpolate/approximate Ramsey numbers** by introducing an approximate function for estimating their values based on documented data. The resulting estimates are compared with the known values reported in the literature, and the attainable accuracy and potential directions for improvement are discussed

Keywords: Ramsey theory; Ramsey numbers; Ramsey algebra; Hindman's theorem; Ellentuck topology; Ramsey space; approximation; interpolation.

Syrian Arab Republic
Damascus University
Faculty Of Science
Department Of Mathematics

Algebraic Theory, Study Case: Ramsey Algebra

A dissertation Submitted in partial fulfillment of the requirements for the Master Degree in Mathematics (Algebra and Geometry)

By

HANAN ALJANADI

Supervisor

Dr. JEBRAN JEBRAN

2026