التحليل (3)

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University


وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

منشورات جامعة دمشق

كلية العلوم

التحليل ((3))

MATHEMATICAL ((3))

تأليف

الدكتور عبد الواحد أبو حمدة

أستاذ في قسم الرياضيات

DR.ABDOLWAHED ABOHAMDAH

PROFESSOR OF MATHEMATICS

جامعة دمشق

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الفهرس

الموضوع — رقم الصفحة

المقدمة ..... (13)

مفردات مقرر التحليل (3) ..... (15)

الفصل الأول

المتتاليات (المتواليات) غير المنتهية

1 – 1 – مدخل ..... (19)

1 – 2 – بعض الخواص الأساسية للأعداد الحقيقية ..... (23)

1 – 3 – المجموعات الحقيقية المحدودة ، وغير المحدودة ..... (23)

1 – 4 – القيمة المطلقة ..... (25)

1 – 5 – المجالات (الفترات) ..... (26)

1 – 6 – تمارين للحل ..... (27)

1 – 7 – المتتاليات ..... (30)

1 – 8 – المتتالية العددية المحدودة ،وغير المحدودة ..... (32)

1 – 9 – المتتالية المتقاربة ..... (34)

1 – 10 – اللامتناهيات في الصغر واللامتناهيات في الكبر

و تتمات أخرى ..... (38)

1 – 11 – تمارين للحل ..... (66)

Damascus University

الفصل الثاني

المتسلسلات (السلاسل) غير المنتهية

والجداءات غير المنتهية

2 – 1 – مفاهيم أساسية ..... (79)

2 – 2 – تمارين للحل ..... (85)

2 – 3 – بعض الخواص الأساسية للمتسلسلات المتقاربة ..... (85)

2 – 4 – تمارين للحل ..... (92)

2 – 5 – المتسلسلات العددية ذات الحدود غير السالبة ..... (93)

2 – 6 – تمارين للحل ..... (117)

2 – 7 – المتسلسلات المتناوبة ..... (130)

2 – 8 – تمارين للحل ..... (137)

2 – 9 – المتسلسلات ذوات الحدود الكيفية ..... (138)

2 – 10 – تمارين محلولة ..... (148)

2 – 11 – تمارين للحل ..... (170)

2 – 12 – لمحة موجزة عن المتسلسلات العددية

العقدية (المركبة) اللانهائية ..... (172)

2 – 13 – تمارين للحل ..... (176)

2 – 14 – الجداءات غير المنتهية ..... (178)

الفصل الثالث

متتاليات التوابع (الدوال)

3 – 1 – تعاريف ..... (197)
3 – 2 – التقارب المنتظم لمتتالية التوابع الحقيقية ..... (201)
3 – 3 – بعض خواص متتاليات التوابع المتقاربة بانتظام ..... (203)
3 – 4 – تمارين محلولة ..... (214)
3 – 5 – تمارين للحل ..... (218)

الفصل الرابع

متسلسلات التوابع

(سلاسل الدوال)

4 – 1 – تعاريف ..... (223)
4 – 2 – دراسة التقارب المنتظم لمتسلسلات التوابع ..... (233)
4 – 3 – بعض خواص متسلسلات التوابع المتقاربة بانتظام..... (243)
4 – 4 – تمارين محلولة ..... (255)
4 – 5 – تمارين للحل ..... (267)
4 – 6 – متسلسلات القوى ..... (270)
4 – 7 – تمارين للحل ..... (294)
4 – 8 – متسلسلات تايلور ..... (297)
4 – 9 – نشر التوابع وحسابها التقريبي ..... (304)
4 – 10 – تمارين للحل ..... (321)

الفصل الخامس

التكاملات المعتلة

5 – 1 – التكاملات المعتلة من النوع الأول ..... (327)

5 – 2 – معايير التقارب للتكاملات المعتلة من النوع الأول

في حالة التوابع غير السالبة ..... (334)

5 – 3 – معايير التقارب للتكاملات المعتلة من النوع الأول

في الحالة العامة ..... (341)

5 – 4 – القيمة الرئيسة والقيمة المعممة (للتكامل المعتل من

النوع الأول)..... (349)

5 – 5 – تمارين محلولة ..... (352)

5 – 6 – التكاملات المعتلة من النوع الثاني ..... (354)

5 – 7 – القيمة الرئيسة للتكامل المعتل من النوع الثاني ..... (363)

5 – 8 – التكاملات الأولرية ..... (367)

5 – 9 – تمارين للحل ..... (383)

الفصل السادس

التكاملات التابعة لوسيط

6 – 1 – تعريف..... (389)

6 – 2 – خواص التكاملات التابعة لوسيط ..... (389)

6 – 3 – أمثلة..... (393)

6 – 4 – خواص..... (396)
6 – 5 – تمارين محلولة ..... (398)
6 – 6 – تمارين للحل..... (414)

الفصل السابع

تحويلات لابلاس

7 – 1 – مقدمة ..... (419)
7 – 2 – تعريف تحويل لابلاس..... (419)
7 – 3 – تعريف الاستمرار القطعي..... (422)
7 – 4 – تعريف المرتبة الأسية ..... (423)
7 – 5 – مبرهنة الوجود لتحويل لابلاس ..... (423)
7 – 6 – تعريف تحويل لابلاس العكسي ..... (425)
7 – 7 – الخاصة الخطية لتحويل لابلاس..... (425)
7 – 8 – الخاصة الخطية لتحويل لابلاس العكسي..... (426)
7 – 9 – تحويلات لابلاس لبعض التوابع الشهيرة ..... (427)
7 – 10 – بعض القوانين لتحويلات لابلاس..... (429)
7 – 11 – حساب تحويلات لابلاس العكسية ..... (436)
7 – 12 – قوانين أخرى لتحويلات لابلاس..... (440)
7 – 13 – بعض الخواص الإضافية..... (450)

7 – 14 – مبرهنة القيمة البدائية..... (476)

7 – 15 – مبرهنة القيمة النهائية..... (478)

7 – 16 – التفاف التوابع..... (479)

7 – 17 – تمارين محلولة..... (489)

7 – 18 – ملخص لأهم قوانين تحويلات لابلاس (الحقيقية)..... (510)

7 – 19 – تمارين للحل..... (511)

الفصل الثامن

متسلسلات فورييه وتكاملات فورييه

8 – 1 – التوابع (الدوال) الدورية ..... (519)

8 – 2 – المتسلسلات المثلثية ..... (522)

8 – 3 – متسلسلة فورييه..... (524)

8 – 4 – الشكل العقدي لمتسلسلة فورييه ..... (534)

8 – 5 – ملاحظات مهمة ..... (539)

8 – 6 – نشر التابع $f(x)$ المعطى على جزء من المجال $[-\pi,\pi]$

في متسلسلة مثلثية..... (551)

8 – 7 – نشر التابع $f(x)$ ، ذي الدور 2π ، في متسلسلة فورييه

على المجال $[c,c+2\pi]$، حيث $c\in\Re$ ..... (561)

8 – 8 – متسلسلات فورييه للتوابع الدورية ذوات الدور $2l$ ..... (564)

8 – 9 – اشتقاق متسلسلة فوريه وتكاملها ..... (567)

8 – 10 – تكامل فوريه ..... (570)

8 – 11 – تكامل فوريه للتوابع الزوجية ..... (577)

8 – 12 – تكامل فوريه للتوابع الفردية ..... (579)

8 – 13 – تمثيل التابع ، المعرف في

المجال $]0,\infty[$ ، بتكامل فوريه ..... (581)

8 – 14 – تمارين محلولة ..... (584)

8 – 15 – تمارين للحل ..... (608)

المصطلحات العلمية ..... (621)

المراجع العلمية ..... (624)

Damascus University


وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

مقـــــــدمة

إنّ التّقدُّم العلمي الهائل ، الذي يشهدهُ العالم حالياً ،مع استخدام التقنيات الحديثة ،من حواسيب وأقمار صناعيّة وغيرها ، زاد من اعتماد العلوم على الرياضيات ، لدعم هذا التقدُّم ، وتفسير ظواهره المستعصية ، والمساهمة في حل مشكلاتهِ . ومن ثمَّ زادت حاجة المتعلم إلى المعرفة في الرياضيات ، والتّوسُّع فيها والاستزادة منها ، ليتمكّن بدوره من فهم المادة التي يدرسها ، ولتكون له عونا في المستقبل على مواكبةِ التقدُّم ، والمساهمة في دفع ركب الحضارة .

ورغبة في مساعدة دارس الرياضيات ، على الإلمام بأكبر قدر ممكن من التحليل الرياضي (الحقيقي) ،فقد قمتُ بتأليف هذا الكتاب ، محاولاً تبسيط المادة للمساعدة على فهمها . وقد دعمت البحث النظري بالكثير من الأمثلة المحلولة ، والتمارين الداعمة ليقوم القارئ بحلها وحده .

وقد تمت تغطية جميع فقرات منهاج مقرر التحليل (3)لطلبة السنة الثانية - فرع الرياضيات ،ولطلبة السنة الثانية - فرع الإحصاء .

ولقد قمت بإثبات صحة الكثير من المبرهنات ، حتى يألف القارئ التقنية الرياضيّة في الإثبات .كما ابتعدت عن إثبات صحة بعضها القليل لأسباب منطقية .

هذا ومن المعلوم أنه كي يتم استيعاب أيّة مادة يجب أن يتم فهمها بعمق . ولقد بذلت جهدي في تبسيط المادة ، وشرحها وتوضيحها ، مع المحافظة على الدقة العلميّة ، والتقنية الرياضيّة في معالجتها . ولكن جهدي هذا وحده قد لا يكفي لاستيعاب المادة وفهمها ، بل إنّ النجاح في الفهم يعتمد أيضاً على ما يبذله القارئ من جهد ، في إعادة حل الأمثلة المحلولة ، والتمارين الداعمة ، إلى جانب حضور المحاضرات لهذا المقرر والانتباه إلى الأستاذ المحاضر خلال هذه المحاضرات .

ومع ذلك فكلّي أمل بأن يكـون هذا الكتاب عونـاً للقارئ على فهم المـادة واستيعابهـا ، وحبّه لـــها .

وتجدر الإشارة إلى أن الطلبة ، الذين يدرسون الرياضيات في صفوف متقدمـــة في كلية العلـــوم ، والطلبة الذين يدرسون الرياضيات في كليّات أخرى ، يجدون في هذا الكـتاب ما يفيدهم .

وأخيراً ، فإننـي أرجو أن يكون هذا الكـــتاب مصدراً علمـــياً إلى جانب المصادر العـــلمية الأخرى في المكتبة العـلمية العربيـة ، وأن يؤدي الغاية المرجـــوة من تأليفـــه .

المؤلف

أ.د. عبد الواحـــد أبو حمـــدة

Damascus University

مفردات مقرر التحليل (3)

1- المتتاليات العددية غير المنتهية والمتسلسلات العددية غير المنتهية .
2- المتتاليات التابعية والمتسلسلات التابعية وخواصها .
3- التكاملات المعتلة بنوعيها وخواصها - تكاملات أولر .
4- التكاملات المتعلقة بوسيط على كل أنواع المجالات .
5- متسلسلات فوريه وتكاملات فورييه وخواصها .

جامعة دمشق Damascus University

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الفصل الأول

المتتاليات (المتواليات) غير المنتهية

- بعض خواص الأعداد الحقيقية
- المجموعات الحقيقية المحدودة وغير المحدودة
- القيمة المطلقة
- المجالات
- المتتاليات
- المتتالية العددية المحدودة وغير المحدودة
- المتتالية المتقاربة
- اللامتناهيات في الصغر واللامتناهيات في الكبر
- تمارين محلولة
- تمارين للحل

Damascus University

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الفصل الأول
المتتاليات (المتواليات) غير المنتهية

1-1- مدخل :

تعاريف واصطلاحات : يُقال عن مجموعة إنها منتهية إذا كان عدد عناصرها محدوداً مثل m ، حيث $m \geq 0$. أو بعبارة أخرى ، إن المجموعة المنتهية هي تلك المجموعة التي تنتهي عملية عد عناصرها(ولو نظرياً) .

ويقال عن المجموعة التي ليست منتهية إنها مجموعة غير منتهية .

أوبعبارة أخرى، المجموعة غير المنتهية هي تلك المجموعة التي عدد عناصرها غير محدود، أي لا يمكن أن تنتهي عملية عد عناصرها. ولذلك فإنه عندما يقال إن مجموعة ما غير منتهية فإن هذا يعني أنه بعد أن يؤخذ منها عنصر أو عنصران أو ثلاثة .... فإنه ستبقىفيها عناصر بعدكل عملية أخذ.... .

فإذا كانت M مجموعة ما فإنه توجد حالتان :

إما M منتهية أو M غير منتهية . (وإذا كانت M منتهية فإنها قد تكون خالية ، أي $M=\phi$، أو غير خالية ، أي $M\neq\phi$) .

هذا ، ويرمز لمجموعة الأعداد الطبيعية بالرمز N ، أي ان :

$$N=\{0,1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$$

ويرمز لمجموعة الأعداد الصحيحة بالرمز Z ، أي ان :

$$Z=\{\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots\}$$

ويرمز لمجموعة الأعداد العادية بالرمز Q ، أي ان :

$$Q=\left\{\frac{x}{y}/\,x,y\in Z,y\neq 0\right\}$$

ويرمز لمجموعة الأعداد الحقيقية بالرمز $\Re$.

ويرمز لمجموعة الأعداد العقدية بالرمز $\mathbb{C}$، أي ان :

$$\mathbb{C}=\left\{Z/\,Z=x+iy,x,y\in\Re,i=\sqrt{-1}\right\}$$

ويرمز لمجموعة الأعداد الحقيقية الموسّعة بالرمز $\overline{\Re}$، أيْ انّ :

$$\overline{\Re}=\{x/-\infty\leq x\leq+\infty\}=\Re\cup\{-\infty,+\infty\}$$

وتجدر الإشارة إلى أنه عندما يحذف الصفر من أية مجموعة من المجموعات العددية فإنه يتم وضع الرمز * فوق رمز المجموعة المدروسة . فمثلاً، إن $\mathbb{N}^*$ هو رمز لمجموعة الأعداد الطبيعية المغايرة للصفر ، أي أن:

$$\mathbb{N}^* = \{1,2,3,\cdots,n,\ldots\}$$

وأيضاً ، إن $\Re^*$ هو رمز لمجموعة الأعداد الحقيقية المغايرة للصفر،أي أن:

$$\Re^* = \Re - \{0\}$$

هذا ،ومن الملاحظ أنه إذا كتب موضوع رياضي فإنه سيكون مؤلفاً من وحدات كلامية ، يدعى كل منها جملة مفيدة . وإن الجمل التي يحتمل صدقها (صحتها) كما يحتمل كذبها (خطؤها) ،يحتاج قبولها إلى برهان أصولاً ،ومثل هذه الجمل تدعى،عادةً،قضايا.

أما الموضوعة فهي قضية أولية صحيحة لا تبرهن بل تقبل دون برهان ، وتعدّ أحد مبادئ الرياضيات . كما يعطى كل تعريف بدلالة عناصر سبق تعريفها ، أو مفاهيم لا تحتاج إلى تعريف، وتبرهن كل قضية استناداً إلى قضايا كان قد جرى برهانها ، أو قبلت كموضوعة . وبالمحاكمات المنطقية يتم الحصول على نتائج جديدة ويتم بناء علم رياضي متماسك منطقياً .

وبالإضافة إلى ذلك فإن لكل قضية توجد قضية نافية لها تسمى نفيها أو نقيضها أو القضية المعاكسة لها .ولهذا فإما أن تكون القضية صحيحة ،أو يكون نفيها صحيحاً. وهذا يساعد على إنجاز البرهان لقضية ما بإتباع إحدى الطريقتين الآتيتين :

(1) بأن يتم الانطلاق من الفرض بمناقشة منطقية حتى الوصول إلى صحة الطلب بشكل مباشر .

(2) بأن يتم الانطلاق من نفي الطلب بمناقشة منطقية حتى الوصول إلى نتيجة غير ممكنة ،ومن ثمّ يتم الوصول إلى صحة الطلب بشكل غير مباشر.

طريقة البرهان بالاستقراء الرياضي :

لتكن P قضية متعلقة بمتغير طبيعي $(n \in \mathbb{N})$ فلبرهان صحتها من أجل جميع قيم n المحققة للشرط $n \geq m$ يجب تحقيق ما يلي:

(i) إثبات أن القضية P صحيحة من أجل m .

(ii) بأخذ $n \geq m$. وبافتراض أنّ القضية P صحيحة من أجل n فيجب إثبات أنها تكون صحيحة من أجل $n+1$.

مثال(1): برهن أنّ :

$$a+(a+r)+(a+2r)+\cdots+[a+(n-1)\cdot r]=\frac{n\cdot[2a+(n-1)\cdot r)]}{2}$$

الحل :

طريقة اولى (برهان مباشر):

$$\sum = a+(a+r)+\cdots+[a+(n-2)\cdot r]+[a+(n-1)\cdot r]$$

$$\sum = [a+(n-1)\cdot r]+[a+(n-2)\cdot r]+\cdots+(a+r)+a$$

ومنه ،بالجمع، يكون:

$$2\sum = [2a+(n-1)\cdot r]+[2a+(n-1)\cdot r]+\cdots+[2a+(n-1\cdot r)]$$

$$2\sum = n\cdot[2a+(n-1)\cdot r]$$

$$\sum = \frac{n\cdot[2a+(n-1)\cdot r]}{2}$$

طريقة ثانية :باستخدام طريقة البرهان بالاستقراء الرياضي،حيث $n \geq 1$ ويترك الإثبات للقارئ.

مثال (2):برهن أن :

$$a+(a\cdot r)+(a\cdot r^2)+\cdots+a\cdot r^{n-1}=\frac{a\cdot(1-r^n)}{1-r}$$

وذلك بفرض أن $r \neq 1$.

الحل :طريقة أولى :

$$\sum = a+a\cdot r+\cdots+a\cdot r^{n-2}+a\cdot r^{n-1}$$

$$r\cdot\sum = a\cdot r+a\cdot r^2+\cdots+a\cdot r^{n-1}+a\cdot r^n$$

ومنه،بالطرح ،يكون :

$$(1-r)\cdot\sum = a-a\cdot r^n = a\cdot(1-r^n) \quad , r\neq 1$$

$$\sum = \frac{a\cdot(1-r^n)}{1-r}$$

طريقة ثانية : باستخدام طريقة البرهان بالاستقراء الرياضي، حيث $n \geq 1$ ويترك البرهان للقارئ .

مثال (3): برهن على صحة القضية الآتية :

أيا كان n من N^* فإن : $\frac{3}{n \cdot (n+1)} > \frac{1}{n^2}$

الحل : بفرض أنه يوجد في N^* عدد مثل n_0 بحيث يكون :

$\frac{3}{n_0 \cdot (n_0+1)} \leq \frac{1}{n_0^2}$ ، فعندئذٍ يكون $n_0 \geq 2n_0^2$ أي أن: $n_0 \leq \frac{1}{2}$

وهذا غير ممكن لأن $n_0 \geq 1$

فالقضية المدروسة تكون صحيحة وهو المطلوب .

مثال (4):

أثبت بطريقة البرهان بالاستقراء الرياضي صحة القضية الآتية:

أيا كان n من N^* فإن :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$$

الحل :

عندما $n = 1$ تأخذ القضية المدروسة الشكل الآتي : $1^2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}$

وهذا صحيح .

ليكن $n \geq 1$. فإذا كان $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$ فإن:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} + \frac{6(n+1)^2}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(2n^2 + n + 6n + 6)}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

وبذلك يمكن القول إنه قد تم إثبات المطلوب.

2-1 بعض الخواص الأساسية للأعداد الحقيقية :

(1) مجموعة الأعداد الحقيقية تكون مجموعة غير منتهية .

(2) بين كل عددين حقيقيين مختلفين توجد أعداد عادية كثيرة بحيث تؤلف مجموعة غير منتهية ، كما توجد أيضاً أعداد غير عادية كثيرة بحيث تؤلف مجموعة غير منتهية ، ومن ثم يمكن القول إن مجموعة الأعداد الحقيقية الواقعة بين أيّ عددين حقيقيين مختلفين هي مجموعة غير منتهية .

(3) يوجد تقابل (أي:تطبيق متباين وغامر) بين عناصر المجموعة $\Re$ ونقاط محور (السينات).

(4) إذا كان x و y عددين حقيقيين بحيث $x > 0$ فإنه يوجد عدد صحيح موجب تماماً n بحيث يكون $n \cdot x > y$. [تسمى هذه الخاصة ((خاصة أرخميدس)) للأعداد الحقيقية].

3-1 المجموعات الحقيقية المحدودة وغير المحدودة :

تعاريف: لتكن H أية مجموعة جزئية من المجموعة $\Re$.

يُقال عن عدد حقيقي مثل m إنه حد أدنى للمجموعة H إذا كان $m \le x$ من أجل جميع الأعداد x من H. ويقال عن المجموعة H ،حينئذٍ،إنها محدودة من الأدنى (محدودة من الأسفل) .

وبفرض أن المجموعة H محدودة من الأدنى ،فيرمز لأكبر حد أدنى لـ H (في حالة وجوده في $\Re$) بالرمز $\inf H$ وهو ليس إلا عدداً حقيقياً محققاً للشرطين الآتيين :

(1) أياً كان x من H فإن $\inf H \le x$.

(2) أياً كان $\varepsilon > 0$ فإنه يوجد في H عدد مثل y بحيث يكون $y < \inf H + \varepsilon$.

وبطريقة مماثلة ، يقال عن عدد حقيقي مثل M إنه **حد أعلى** للمجموعة H إذا كان $x \le M$ من أجل جميع الأعداد x من H .ويقال ،حينئذٍ، إن المجموعة H محدودة من الأعلى .

وبفرض أن H محدودة من الأعلى ، فيرمز لأصغر حد أعلى لـ H (في حالة وجوده في $\Re$) بالرمز $\sup H$ وهو ليس إلا عدداً حقيقياً محققاً للشرطين الآتيين :

(1) أيا كان x من H فإن $x \le \sup H$.

(2) أيا كان $\varepsilon > 0$ فإنه يوجد في H عدد مثل y بحيث يكون $y > \sup H - \varepsilon$.

هذا، ويُقال عن H إنها محدودة إذا كانت محدودة من الأعلى ومن الأدنى(بأن واحد).

ومن ثم،يقال عن H إنها غير محدودة إذا كانت غير محدودة من الأعلى أوغير محدودة من الأدنى (أو كلاهما).

تقبل (دون برهان) صحة المبرهنة الآتية:

مبرهنة:

(*i*) إذا كانت H مجموعة غير خالية من الأعداد الحقيقية ،ومحدودة من الأعلى،فإنه يوجد في $\Re$ عدد يساوي $\sup H$.

(*ii*) إذا كانت H مجموعة غير خالية من الأعداد الحقيقية ،ومحدودة من الأدنى، فإنه يوجد في $\Re$ عدد يساوي $\inf H$.

(*iii*) إذا كانت H مجموعة غير خالية من الأعداد الحقيقية،ومحدودة، فيوجد في $\Re$ عددان، أحدهما يساوي $\sup H$ والآخر يساوي $\inf H$.

مثال (1): المجموعة $H = \left\{ \frac{1}{n} / \, n \in N^* \right\}$ محدودة وغير خالية في $\Re$. ولهذا فإن $\sup H = 1 \in \Re$ و $\inf H = 0 \in \Re$. وتجدر ملاحظة أن :

$\sup H \in H$ و $\inf H \notin H$.

مثال (2): المجموعة $H=\{r \;/\; r\in \Re, r\geq 0\}\neq\phi$ ومحدودة من الأدنى و غير محدودة من الأعلى ،ومن ثم فهي غير محدودة . وأيضاً: $\inf H=0\in H\subset \Re$.

مثال (3):

المجموعة $H=\{\sqrt{5}\}\neq\phi$ محدودة ،ومن ثم فإنّ : $\sup H=\inf H=\sqrt{5}\in H$

ملاحظة :

(1) إنّ $\sup H$ (أو $\inf H$) قد ينتمي إلى H وقد لا ينتمي إليها ، ولكنه يكون وحيداً في حالة وجوده .

(2) إذا كان x حداً أعلى (أو أدنى) لـ H فليس من الضروري أن يكون $x\in H$.

(3) إذا كانت $H\neq\phi$ وكان $\inf H,\sup H$ موجودين فإن $\inf H\leq \sup H$.

1-4- القيمة المطلقة:

تعريف: القيمة المطلقة لعدد حقيقي مثل x هي عدد حقيقي غير سالب ،يرمز لها بالرمز $|x|$ ويتعين بما يلي :

$$|x|=\begin{cases} x & (x\geq 0 \text{ عندما}) \\ -x & (x<0 \text{ عندما}) \end{cases}$$

خواص:

(1) أيا كان x من $\Re$ فإن : $|-x|=|x|$ و $-|x|\leq x\leq |x|$ و $\sqrt{x^2}=|x|$

(2) بفرض أن x,y عددان حقيقيّان فإنه يكون :

Damascus University

$$-\alpha \le x \le \alpha \Leftrightarrow |x| \le \alpha$$
$$-\alpha < x < \alpha \Leftrightarrow |x| < \alpha$$
$$x \le -\alpha \text{ أو } x \ge \alpha \Leftrightarrow |x| \ge \alpha$$
$$x < -\alpha \text{ أو } x > \alpha \Leftrightarrow |x| > \alpha$$

(3) أيا كان x, y من $\Re$ فإنّ: $||x|-|y|| \le |x \mp y| \le |x|+|y|$

1-5- المجالات (الفترات):

تعاريف: إذا كان a,b عددين حقيقيين بحيث $a \le b$. عندها يكون :

$]a,b[=\{x \,/\, x \in \Re, a < x < b\}$ (مجال مفتوح)

$[a,b]=\{x \,/\, x \in \Re, a \le x \le b\}$ (مجال مغلق)

$[a,b[=\{x \,/\, x \in \Re, a \le x < b\}$ (مجال نصف مغلق أو نصف مفتوح)

$]a,b]=\{x \,/\, x \in \Re, a < x \le b\}$ (مجال نصف مغلق أو نصف مفتوح)

(يُقال عن a,b إنهما طرفا المجال المدروس).

وإذا كان $a,b \in \Re$ بحيث $a \le b$ فالتعاريف السابقة للمجالات تُصاغ بطريقة مماثلة .

نتائج:

(1) $\Re =]-\infty,+\infty[$ و $\bar{\Re} = [-\infty,+\infty]$

$$\left.\begin{array}{l} \phi =]a,a] = [a,a[=]a,a[\\ \{a\} = [a,a] \end{array}\right\} \quad (\forall a \in \Re)$$

(2) إذا كان $a < b$ و $a \ne b$ فإنّ كل مجال من المجالات الآتية يكون مجموعة غير منتهية : $[a,b],]a,b[,]a,b], [a,b[$

(3) $|x-a|<\varepsilon \Leftrightarrow a-\varepsilon<x<a+\varepsilon$

(4) طول المجال الذي طرفاه a,b هو $|a-b|=|b-a|$.

(5) تسمى كل نقطة واقعة تماماً بين طرفي مجال بنقطة داخلية في هذا المجال.

(6) تسمى كل مجموعة جزئية من $\Re$ تحوي مجالاً مفتوحاً حاوياً a، حيث $a\in\Re$ ، بجوار للنقطة a.

1-6-تمارين للحل :

(1) أثبت بطريقة الاستقراء الرياضي صحة العلاقات الخمس الآتية :

$$1^3+2^3+\cdots+n^3=(1+2+\cdots+n)^2=[\frac{n(n+1)}{2}]^2$$

$$\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha\cdot\cdots\cdots\cdot\cos 2^n\alpha=\frac{\sin 2^{n+1}\alpha}{2^{n+1}\cdot\sin\alpha}$$

$$\sin x+\sin 2x+\cdots\cdots+\sin nx=\sin\frac{n}{2}x\cdot\frac{\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}$$

$$\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\cdots\cdots+\cos nx=\frac{\sin\frac{2n+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}$$

$$\left|\sin\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)\right|\le\sum_{k=1}^{n}\sin x_k$$

[وذلك من أجل $0\le x_k\le\pi,\quad (k=1,2,3,\ldots,n)$]

(2) اعتمد على أسلوب الاستقراء الرياضي لإيجاد المجموع S_n الآتي:

$$S_n = arctg\frac{1}{2} + arctg\frac{1}{8} + arctg\frac{1}{18} + \cdots + arctg\frac{1}{2n^2}$$

أو بعبارة مكافئة :

[حيث الرمزان $arctg$ و $\tan^{-1}$ يعبران عن الكائن الرياضي ذاته]:

الجواب :

$$S_n = \tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{8} + \tan^{-1}\frac{1}{18} + \cdots + \tan^{-1}\frac{1}{2n^2}$$

$$S_N = arctg\frac{n}{n+1} = \tan^{-1}\frac{n}{n+1}$$

إرشاد :استخدم العلاقة الآتية : $arctg\,x + arctg\,y = arctg\frac{x+y}{1-xy}$

(3) برهن على أنّ: $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$

وذلك من أجل كل عدد طبيعي n محقق للشرط $n \geq 2$.

(4) حل كلاً من المتراجحتين الآتيتين :

$$|x^2 - 7x + 12| > x^2 - 7x + 12 \quad , \quad |2x-4| < 2$$

الأجوبة : $3 < x < 4$, $1 < x < 3$

(5) هل توجد لكل من المعادلتين الآتيتين حلول أم لا :

$$|x| = x - 5 \;\; (i) \quad \text{و} \quad |x| = x + 5 \;\; (ii)$$

الأجوبة : (i) (لا توجد حلول للمعادلة) و (ii) $x = -\frac{5}{2}$

(6) بفرض $a,b\in\Re^*$ برهن أن المساواة $|a+b|=|a|+|b|$ تكون محققة عندما وفقط عندما يكون العددان الحقيقيان a,b من إشارة واحدة.

(7) بفرض أن $a,b\in\Re^*$ برهن على صحة التكافؤ الآتي :

$$[(|a|\geq|b|),\ (a,b \text{ من إشارة واحدة})]\Leftrightarrow[|a-b|=|a|-|b|]$$

(8) ما هي قيم x التي تحقق بآن واحد المتراجحتين الآتيتين :

$$|x-2|<3 \quad \text{و} \quad |x-6|<4$$

الجواب: $2<x<5$

(9) أوجد قيم x الموافقة لنقاط محور السينات التي تبعد عن النقطة $x_0=3$ بمسافة لاتتجاوز 10.

الجواب : $-7\leq x\leq 13$

(10) بفرض $f(x)=x-x^2$ أوجد كل قيم x التي من أجلها يكون :

$$(i)\ f(x)=0 \quad (ii)\ f(x)>0 \quad (iii)\ f(x)<0$$

الجواب: $(i)\ x=0,x=1 \quad (ii)\ 0<x<1 \quad (iii)\ x>1,x<0$

(11) لتكن المجموعتان غير الخاليتين X,Y من الأعداد الحقيقية ، والمرتبطتان بالشرط الآتي : $(x\in X\Leftrightarrow -x\in Y)$

وبافتراض أن X محدودة ، برهن أن :

(i) Y تكون محدودة .

(ii) $\inf Y=-\sup X$.

(iii) $\sup Y=-\inf X$.

(12) لتكن المجموعتان المحدودتان وغير الخاليتين X,Y من الأعداد الحقيقية. وبافتراض أن :

$$H=\{x+y\ /\ x\in X, y\in Y\}$$

$$K=\{x\cdot y/\ x\in X, y\in Y\}$$

برهن صحة كل مما يلي :

$$\sup H=\sup X+\sup Y \quad (i)$$
$$\inf H=\inf X+\inf Y \quad (ii)$$

(*iii*) إذا كان كل عنصر من عناصر المجموعة $X\cup Y$ عدداً حقيقياً غير سالب ، فإنّ :

$$\inf K=\inf X\cdot\inf Y$$
$$\sup K=\sup X\cdot\sup Y$$

7-1 المتتاليات :

تعريف: المتتالية (من عناصر مجموعة غير خالية مثل X) هي تطبيق (تابع أو دالة) ، منطلقه مجموعة الأعداد الطبيعية N أو أيّ مجموعة جزئية منها ، ومستقره المجموعة المذكورة X .

فإذا كان منطلق المتتالية مجموعة منتهية فإنها تدعى متتالية منتهية (أو متتالية نهائية). أما إذا كان منطلق المتتالية مجموعة غير منتهية فإنها تدعى متتالية غير منتهية (أو متتالية لا نهائية).

إذا كان المستقر X للمتتالية هو $\mathfrak{R}$ أو أي مجموعة من الأعداد فإنها تدعى متتالية عددية .وإذا كانت X مجموعة توابع فإن المتتالية المدروسة تدعى متتالية تابعية (أو متتالية دوال).

ومنه، إذا وضع، مقابل كل عدد طبيعي n مغاير للصفر ،عدد حقيقي مثل x_n ،فإنه يتم الحصول على جملة من الأعداد الحقيقية المرقمة بوساطة الأعداد

الطبيعية المغايرة للصفر ، أي يتم الحصول على متتالية عددية حقيقية [غير منتهية] أو [لانهائية]، شكلها المفصل (التفصيلي) هو:

$$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots\cdots$$

حيث يدعى x_1 حدها الأول ،ويدعى x_2 الحد الثاني لها،ويدعى x_3 الحد الثالث، ... ،ويدعى x_n الحد العام أو الحد النوني أو الحد ذا الرقم n لهذه المتتالية ،أما الشكل المختزل لهذه المتتالية فهو $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ أو هو $\{x_n\}$.

وسوف يُقال صراحة عن الرمز $\{x_n\}$ إنه متتالية (غير منتهية) أو أنه مجموعة وحيدة العنصر ،وذلك كي لا يحصل أي التباس .

ينتج مما سبق أن الشيء الأكثر أهمية في المتتالية هو معرفة أن x_{n+1} يلي x_n وأنّ x_n يسبق x_{n+1} وذلك بغضّ النظر عن قيمتي x_{n+1} و x_n ،حيث من الممكن أن تكون قيمة x_{n+1} أكبر أو أصغر أو تساوي قيمة x_n . ولذلك،إذا تمّ تغيير ترتيب حدود متتالية ما ، فإنه يتم الحصول، في الحالة العامّة،على متتالية أخرى جديدة تختلف عن المتتالية الأصلية بالرغم من أنهما تتألفان من الأعداد ذاتها .

أمثلة:

(1) إن الحد العام للمتتالية العددية غير المنتهية : $0,1,0,\frac{1}{2},0,\frac{1}{3},\cdots\cdots$

هو $x_n = \frac{1+(-1)^n}{n}$. ومن الملاحظ ،طبعاً، أنّ :

$x_1 = x_3 = x_5 = \cdots\cdots = 0$ بينما $x_2 = 1, x_4 = \frac{1}{2}, x_6 = \frac{1}{3}, \cdots\cdots$

حيث $x_1 \neq x_2 \, , x_2 \neq x_3 \, , x_4 \neq x_6$ على سبيل المثال .

(2)الحد العام للمتتالية غير المنتهية : $a,a,a,\cdots$ هو $x_n = a$

(3)الحد العام للمتتالية العددية الحقيقية غير المنتهية :

$a,b,a,b,a,b,\cdots$ حيث $a \neq b$ هو:

$$x_n = \frac{1}{2}\left[(b+a)+(-1)^n \cdot (b-a)\right]$$

(4)إذا كانت $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ متتالية غير منتهية فإن حدها العام هو $x_n = \frac{n}{n+1}$ ،وإنّ حدودها هي:

$$x_1 = \frac{1}{2} \, , x_2 = \frac{2}{3} \, , x_3 = \frac{3}{4} , \cdots\cdots$$

أي أنّ الشكل المفصل لها هو: $\frac{1}{2} , \frac{2}{3} , \frac{3}{4} , \cdots , \frac{n}{n+1} , \cdots$

(5)المتتاليتان العدديتان الحقيقيتان غير المنتهيتين :

$$2,4,6,8,10,12,\cdots\cdots,2n,2n+2,\cdots$$
$$4,2,8,6,12,10,\cdots\cdots,2n+2,2n,\cdots$$

هما متتاليتان مختلفتان بالرغم من أنهما تتألفان من الأعداد نفسها .

1-8- المتتالية العددية المحدودة وغير المحدودة:

تعاريف:يُقال عن مجموعة كل القيم العددية المختلفة لحدود متتالية إنهامجموعة قيم هذه المتتالية .

ومنه ينتج أن مجموعة قيم أي متتالية تكون غير خالية (حتماً)،ولكنها قد تكون محدودة وقد تكون غير محدودة .ومن ثمّ ،يُقال عن متتالية إنها محدودة إذا كانت مجموعة قيمها محدودة. ويُقال عن متتالية أنها محدودة من الأعلى (من الأدنى)

إذا كانت مجموعة قيمها محدودة من الأعلى (من الأدنى).ويقال إنها غير محدودة إذا كانت مجموعة قيمها غير محدودة .....

أمثلة :

(1) مجموعةقيم المتتالية $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ هي المجموعة $\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\frac{1}{n+1},\cdots\right\}$:التي هي مجموعة محدودة (وغيرمنتهية) ، ومن ثم فهذه المتتالية محدودة .

(2) مجموعة قيم المتتالية $\{n^2\}$ هي المجموعة $\{1^2,2^2,\cdots,n^2,\cdots\}$ التي هي مجموعة غير محدودة من الأعلى ،ولكنها محدودة من الأدنى (وغير منتهية)، ومن ثم فهذه المتتالية غير محدودة ، ولكنها محدودةمن الأدنى .

(3) مجموعة قيم المتتالية $\{(-1)^n\}$ هي المجموعة $\{-1,1\}$ التي هيمجموعة محدودة(ومنتهية) ، ومن ثم فهذه المتتالية $-1,+1,-1,+1,\ldots\ldots$ محدودة .

(4) مجموعة قيم المتتالية $\{2\}$ هي المجموعة المنتهية ،وحيدة العنصر $\{2\}$، ومن ثم فهذه المتتالية $2,2,2,2,\ldots\ldots,2,\ldots\ldots$ محدودة .

هذا ويمكن تعريف المتتالية المحدودة بتعريف آخر مكافئ للتعريفالسابق:

يُقال عن متتالية عددية غير منتهية مثل $\{x_n\}$ إنها محدودة إذا أمكن إيجاد عدد حقيقي موجب تماماً مثل k بحيث يكون $|x_n| < k$ من أجل كل n من N^* أما برهان التكافؤ بين التعريفين فهو الآتي :

إذا أمكن إيجاد عدد حقيقي موجب تماماً مثل k بحيث يكون $|x_n| < k$ من أجل كل n من N^* ، فإنّ $-k < x_n < k$ من أجل كل n من N^* ،ومن ثم فإن العدد k يكون حداً أعلى لمجموعة قيم المتتالية المدروسة ، وإن العدد $k-$ يكون حداً أدنى لها، ومن ثم فإنّ مجموعة قيم المتتالية المدروسة $\{x_n\}$ تكون محدودة .

وبالعكس ،إذا كانت مجموعة قيم المتتالية $\{x_n\}$ محدودة ،فإنه يوجد عددان حقيقيان مثل k_1 ، k_2 بحيث يكون $x_n \le k_1$ و $k_2 \le x_n$ من أجل كل n من N^* . ومنه

يوجد العدد الحقيقي الموجب تماماً $k = \max(|k_1|,|k_2|)+1$ بحيث يكون $-k < x_n < k$ من أجل كل n من N^* ، أي : بحيث يكون $k > |x_n|$ من أجل كل n من N^* .

ففي المثالين (1) و (3) يمكن إيجاد العدد الحقيقي $k = 2$ بحيث يكون $2 > |x_n|$ من أجل كل n من N^* ما يدل على أنّ المتتالية $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ محدودة والمتتالية $\{(-1)^n\}$ محدودة.

وفي المثال (4) يمكن إيجاد العدد الحقيقي $k = 3$ بحيث يكون $3 > |x_n|$ من أجل كل n من N^* ما يدل على أنّ المتتالية $2,2,2,....$ محدودة .

أما في المثال (2) فلا يمكن إيجاد أي عدد حقيقي موجب تماماً مثل k بحيث يكون $k > |x_n|$ من أجل كل n من N^* . ويعني هذا أنه أيّاً كان العدد الحقيقي الموجب تماماً k فإنه يوجد عدد طبيعي مغاير للصفر مثل n بحيث يكون $k < |x_n|$ ما يدل على أنّ المتتالية $\{n^2\}$ غير محدودة.

1-9- المتتالية المتقاربة :

تعريف نهاية متتالية عددية:

يُقال عن عدد حقيقي مثل a إنه نهاية لمتتالية عددية حقيقية مثل $\{x_n\}$ عندما $n \to \infty$ ، ويعبّر عن ذلك بالرمز $\lim_{n\to+\infty} x_n = a$ أو بالرمز $x_n \to a$ ، إذا تحقق مايلي:

((أيّاً كان العدد الحقيقي الموجب تماماً ε فإنه يوجد عدد طبيعي مغاير للصفر مثل N_ε بحيث يكون $|x_n - a| < \varepsilon$ عندما $n \geq N_\varepsilon$)).

[لاحظ أنّ $a \in \Re$ وأنّ العدد N_ε يتغير، في الحالة العامّة ،بتغير العدد ε ،أي أنه تابع لـ ε]. وبذلك كله ، يقال عن المتتالية العددية الحقيقية التي لها نهاية مثل a (في $\Re$) إنها متتالية متقاربة من a (في $\Re$)، أيْ أنّ نهاية المتتالية ليست إلا نهاية

حدها العام عندما $n \to \infty$ ، حيث يتم النظر إلى الحد العام x_n بأنه متغير تابع لـ n ، وفي هذه الحالة يمكن أن يُعطى x_n الصفات ذاتها التي تتصف بها المتتالية $\{x_n\}$ التي حدها العام هو x_n نفسه.

أمثلة :

(1) المتتالية $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ متقاربة في $\Re$ من العدد 1 لأنه توجد لها نهاية مساوية للواحد ،حيث $1 \in \Re$ $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$ وذلك كما هو معلوم ، أو للأسباب الآتية (فيما إذا كانت توجد رغبة في تطبيق تعريف النهاية الذي تمّ إيراده قبل قليل لتبيان أنّ $\frac{n}{n+1} \to 1$):

ليكن $\varepsilon > 0$. عندها يطلب البحث عن قيم n التي تحقق المتراجحة $|x_n - 1| < \varepsilon$ ،حيث $x_n = \frac{n}{n+1}$. ولكن العلاقة $[|x_n - 1| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon]$ تكافئ العلاقة $[n > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}]$.

ومنه ،بأخذ بمثابة N_ε أصغر عدد طبيعي مغاير للصفر بحيث يكون $N_\varepsilon > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$ ، يمكن القول إنه يوجد N_ε بحيث يكون:

$$n \geq N_\varepsilon \Rightarrow n > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \Rightarrow |x_n - 1| < \varepsilon$$

إذن: $x_n \to 1$.

هذا وبخصوص **المثال (1)** يمكن ملاحظة الآتي :

[1] إذا كان $\varepsilon = 0.01$ فإن $N_\varepsilon = 100$ ،وإذا كان $\varepsilon = \frac{1}{2}$ فإنّ $N_\varepsilon = 2$ ، وإذا كان $\varepsilon = 10$ فإنّ $N_\varepsilon = 1$ ،..... وهذا كله يبيّن أنّ N_ε يتغير ،في الحالة العامة ،بتغيّر ε (كما كان قد ذكر)

[2] كان من الممكن أخذ بمثابة N_ε أي عدد طبيعي أكبر تماما من $\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$.

[3] كان من الممكن استخدام خاصة أرخميدس للأعداد الحقيقيّة وذلك لتعيين N_ε.

(2) المتتالية $\{(-1)^n\}$ غير متقاربة في $\Re$ لأنه لا توجد لها نهاية في $\Re$ بسبب الآتي:بفرض أنه توجد لهذه المتتالية نهاية ولتكن $a \in \Re$. عندها،باخذ $\varepsilon = \frac{1}{2}$ يوجد N_ε بحيث يكون:

$$n \geq N_\varepsilon \Rightarrow |x_n - a| = |(-1)^n - a| < \frac{1}{2} \Rightarrow |1-a| < \frac{1}{2} \,,\, |-1-a| < \frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow 2 = |2| = |(1-a)-(-1-a)| \leq |1-a| + |-1-a| < 1$$

وهذا مستحيل.

(3) المتتالية $\{n^3\}$ غير متقاربة (في $\Re$) لأنها لا توجد لها نهاية في $\Re$ ، حيث من المعلوم أنّ $n^3 \to +\infty \notin \Re$. وبتفصيل أكثر ،لو كانت $\{n^3\}$ متقاربة في $\Re$ لكان يوجد $a \in \Re$ بحيث يكون $x_n = n^3 \to a$ ، ومن ثمّ يوجد $N_0 \in N$ بحيث يكون $|n^3 - a| < 1$

عندما $n \geq N_0$ ،ومن ثم : $a-1 < n^3 < a+1$ عندما $n \geq N_0$ ، وهذا غير ممكن

(4) المتتالية $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ متقاربة من الصفر (في $\Re$) لأن $0 \in \Re \to \frac{1}{n}$ ،بينما لاتكون متقاربة فيمجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة تماما لأنّ الصفر لا ينتمي إليها

(5) المتتالية $\{a\}$ ،حيث $a \in \Re$ ،تكون متقاربة من a (في $\Re$) لأن
$x_n = a \to a \in \Re$ ،أو بعبارة أخرى :أيا كان $\varepsilon > 0$ يوجد $N_0 = 1$ بحيث يكون :

$$n \geq N_0 = 1 \Rightarrow |x_n - a| = 0 < \varepsilon$$

(6) المتتالية $\{-n^4\}$ غير متقاربة (في $\Re$) لأنّ $-n^4 \to -\infty \notin \Re$.

تعريف: إذا كانت المتتالية غير متقاربة فيُقال عنها إنها **متباعدة** .

ومنه ، حسب هذا التعريف ، يمكن القول إنّ المتتاليات في الأمثلة (2)و(3)و(6) السابقة هي متتاليات متباعدة .

نتيجة: كل متتالية تكون إما متقاربة أو متباعدة ، أيْ أنّ نفي التقاربيكونتباعدا ،ونفي التباعد يكون تقاربا .

هذا وتوجد طرائق أخرى لتعيين (أو لتعريف) متتالية ومنها الطريقة التدريجية التي يمكن تبيانها في المثال الأتي :

مثال : عيّن المتتالية $\{x_n\}$ ،حيث $x_1 = 1$ و $x_{n+1} = (n+1)x_n$ من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$.

الحل :

$$\begin{aligned}
x_1 &= 1 \\
x_2 &= 2x_1 = 2 = 2! \\
x_3 &= 3x_2 = 3 \cdot 2! = 3! \\
x_4 &= 4! \\
&\vdots \\
x_n &= n! \\
&\vdots
\end{aligned}$$

1-10- اللامتناهيات في الصغر واللامتناهيات في الكبر وتتمات أخرى :

تعريف (1): يُقال عن متغير مثل x_n إنه لا متناهٍ في الصغر (عندما $n \to \infty$) إذا كانت له نهاية تساوي الصفر ،أيْ $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ أيْ $x_n \to 0$. وهذا يكافئ النص الآتي :

((أيا كان $\varepsilon > 0$ فإنه يوجد عدد طبيعي مغاير للصفر N_ε بحيث يكون $|x_n| < \varepsilon$ عندما $n \geq N_\varepsilon$))

تعريف(2): يُقال عن متغير مثل x_n إنه لا متناهٍ في الكبر (عندما $n \to \infty$) إذا تحقق الآتي :

((أيا كان $M > 0$ فإنه يوجد عدد طبيعي مغاير للصفر N_0 بحيث يكون $|x_n| > M$ عندما $n \geq N_0$)).

وهذا يكافئ القول إنّ اللامتناهي في الكبر (عندما $n \to \infty$) هو متغير مثل x_n قيمته المطلقة تسعى إلى اللانهاية الموجبة ،أيْ $\lim_{n\to\infty} |x_n| = +\infty$.

ملاحظات:

(1) إذا كان x_n لا متناهياً في الكبر ، وكانت قيم x_n موجبة اعتباراً من قيمة معيّنة، فإنّ $x_n \to +\infty$. ويُقال،عادةً في مثل هذه الحالة ،إنّ x_n لا متناهٍ في الكبر موجب.

(2) إذا كان x_n لا متناهياً في الكبر ،وكانت قيم x_n سالبة اعتباراً من قيمة معينة ، فإنّ $x_n \to -\infty$. ويُقال، هنا عادة، إنّ x_n لا متناهفي الكبر سالب .

(3) إن نهاية المتتالية $\{x_n\}$ ،والتي هي نهاية المتغير x_n ،إما أن تكون محدودة (في حالة وجودها)،أو تكون غير موجودة بتاتاً،أو تكون $+\infty$ أو تكون $-\infty$.

(4) إذا كان x_n يغير إشارته دوماً أثناء تزايد n إلى اللانهاية ،وكانت $\lim_{n\to\infty}|x_n|=+\infty$ فيُكتفى بالقول إنّ x_n لا متناهٍ في الكبر [عندما $n\to\infty$].

فمثلاً،المتغير $x_n=(-1)^n\cdot n$ يغيّر إشارته دوماً و $|x_n|\to+\infty$ ،فهو لا متناهٍ في الكبر،مع ملاحظة أنّ النهاية $\lim x_n$ غير موجودة (في $\Re$).

(5) إذا كانت المتتالية غير محدودة فليس من الضروري أن يكون حدها العام لا متناهياً في الكبر.فمثلاً،بأخذ المتتالية $\{a_n\}$ ،حيث:

$$a_n=\begin{cases}-\dfrac{1}{n} & (n\ \text{فردي})\\ 2n & (n\ \text{زوجي})\end{cases}$$

،يمكن ملاحظة أنها غير محدودة،وأنّ كلاً من النهايتين $\lim|a_n|$ و $\lim a_n$ غير موجودة.

(6) لحل المسائل المتعلقة باللامتناهيات في الكبر ،عندما $n\to\infty$،وليكن x_n أحدها، تدرس نهاية القيمة المطلقة $|x_n|$ للمتغير المدروس .فإذا كانت هذه النهاية $\lim|x_n|$ مساوية $+\infty$ فيُقال إنّ هذا المتغير x_n هو لا متناهٍ في الكبر .ثمّ تدرس إشارة x_n للقول إنه لا متناهٍ في الكبر موجب أو سالب ، أو يُكتفى بالقول إنه (مجرد) لا متناهٍ في الكبر .

أمثلة:

(1) إذا كان $x_n\to a\in\Re$ وكان $\beta_n=x_n-a$ فإنّ $\beta_n\to 0$.

ليكن $\varepsilon>0$.عندها يوجد N_ε بحيث يكون $|\beta_n|=|x_n-a|<\varepsilon$ عندما $n\geq N_\varepsilon$.أيْ أنّ $\beta_n\to 0$.

(2) إذا كان $\beta = x_n - a$ ، حيث $a \in \Re$ ، وكان $\beta \to 0$ فإنّ $x_n \to a$.

ليكن $\varepsilon > 0$. عندها يوجد N_ε بحيث يكون $|x_n - a| = |\beta| < \varepsilon$ عندما $n \geq N_\varepsilon$

أيْ أنّ $x_n \to a$.

(3) ليكن $x_n = a + y_n$ حيث $a \in \Re$. عندئذٍ:

$$(y_n \to 0) \Leftrightarrow (x_n \to a)$$

(4) لما كان $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ فإنه يمكن القول إنّ $\frac{1}{n}$ لا متناهٍ في الصغر .

(5) إنّ $2^{\sqrt{n}} \to \infty$ للأسباب الآتية :

ليكن $M > 0$. إنّ المتراجحة $|x_n| > M$ تكافئ المتراجحة $|2^{\sqrt{n}}| > M$ والتي تكافئ $\sqrt{n}\ \ln 2 > \ln M$ والتي تكافئ $\sqrt{n} > \frac{\ln M}{\ln 2}$. ومنه ، بأخذ عدد طبيعي مغاير للصفر مثل N بحيث يكون $N > \left(\frac{\ln M}{\ln 2}\right)^2$ يمكن كتابة الآتي :

$$n \geq N \Rightarrow n > \left(\frac{\ln M}{\ln 2}\right)^2 \Rightarrow \sqrt{n} > \frac{\ln M}{\ln 2} \Rightarrow 2^{\sqrt{n}} > M$$

(6) $x_n = n \to +\infty$ بملاحظة أنّ جميع قيمه موجبة تماماً.

(7) $x_n = n^2 - 5 \to +\infty$ بملاحظة أن قيمه موجبة تماماً اعتباراً من الحد الثالث .

(8) $x_n = -n \to -\infty$ بملاحظة أنّ جميع قيمه سالبة تماماً .

(9) $x_n = 6 - n \to -\infty$ بملاحظة أن قيمه سالبة تماماً اعتباراً من الحد السابع .

(10) إنّ المتغير $x_n = (-2)^n \cdot n$ هو لا متناهٍ في الكبر بسبب الآتي :

$|x_n| = |(-2)^n \cdot n| = 2^n \cdot n \to \infty$. أمّا قيم هذا المتغيّر x_n فتغيّر إشاراتها كل الوقت بملاحظة أنّ هذه القيم هي :

$$-2, +8, -24, +64, -160, +384, \cdots\cdots$$

(11) $x_n = 0 \to 0$ ؛ أيْ $\lim_{n\to\infty} 0 = 0$

(12) ليكن x_n متغيراً. عندها تكون القضيتان الآتيتان متكافئتين :

(i) أياكانالعددالحقيقي M فيوجد عدد طبيعي مغاير للصفر مثل N_0 بحيث يكون $x_n > M$ عندما $n \geq N_0$.

(ii) $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

برهان التكافؤ بين هاتين القضيتين :

$(i) \Leftarrow (ii)$: ليكن $M > 0$. عندها يوجد عدد طبيعي $N_0 \neq 0$ بحيث يكون $|x_n| \geq x_n > M$ عندما $n \geq N_0$ ، أيْ أنّ $|x_n| \to \infty$ ومن الواضح أنّ قيم هذا المتغير x_n تكون موجبة تماماً اعتباراً من قيمة معيّنة، ومن ثمّ: $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$

$(ii) \Leftarrow (i)$: ليكن $x_n \to +\infty$. عندها تكون قيم x_n موجبة اعتباراً من حد معيّن. أيْ يوجد عدد طبيعي مغاير للصفر مثل N_1 بحيث يكون $x_n > 0$ عندما $n \geq N_1$. ليكن M أي عدد حقيقي. فإذا كان $M > 0$ فيوجد $N_2 \neq 0$ بحيث يكون $|x_n| > M$ عندما $n \geq N_2$ ، ومن ثم يوجد $N_0 = \max(N_1, N_2)$ بحيث يكون $x_n > M$ عندما $n \geq N_0$.

وإذا كان $M \leq 0$ فإنه يوجد العدد $N_1 \neq 0$ بحيث يكون $x_n > 0 \geq M$ عندما $n \geq N_1$.

(13) ليكن x_n متغيراً مغايراً للصفر .عندئذٍ:

x_n لا متناهٍ في الصغر $\Leftrightarrow \frac{1}{x_n}$ لا متناهٍ في الكبر .

x_n لا متناهٍ في الكبر $\Leftrightarrow \frac{1}{x_n}$ لا متناهٍ في الصغر .

[يترك البرهان للقارئ بمثابة تمرين].

(14) إن حاصل ضرب متغير محدود مثل x_n بلا متناهٍ في الصغر مثل y_n يكون لا متناهياً في الصغر.

البرهان: حيث أن x_n محدود فإنه يوجد عدد حقيقي موجب تماماً مثل k بحيث يكون $|x_n| < k$ من اجل جميع قيم n . ثم بفرض $\varepsilon > 0$ يكون $\frac{\varepsilon}{k} > 0$.وحيث أن $y_n \to 0$ فإنه يوجد $N \neq 0$ بحيث يكون $|y_n| < \frac{\varepsilon}{k}$ عندما $n \geq N$ ،ومن ثم:

$|x_n \cdot y_n| = |x_n| \cdot |y_n| < k \cdot \frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon$ عندما $n \geq N$ ،أي أن: $x_n \cdot y_n \to 0$.

(15) [i]- إن حاصل جمع لا متناهيين في الصغر يكون لا متناهياً في الصغر.

[ii]- إن حاصل طرح لا متناهيين في الصغر يكونلا متناهياً في الصغر.

[iii]- إن حاصل ضرب لا متناهيين في الصغر يكون لا متناهياً في الصغر.

[iv]- إن حاصل ضرب مقدار ثابت بلا متناهٍ في الصغر يكون لا متناهياً فيالصغر. (برهن كل ذلك!).

(16) إن $y_n = \frac{3\sin n}{n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ بسبب الأتي :

$y_n = \frac{3}{n^2}\cdot \sin n$ ، حيث $\frac{3}{n^2} \longrightarrow 0$ ، $\sin n$ متغير محدود [لأن $|\sin n| \le 1$]

، ومن ثم $y_n \to 0$.

(17) إن $y_n = \frac{(-1)^n}{n} \longrightarrow 0$ بسبب الأتي :

$y_n = \frac{(-1)^n}{n} = \frac{1}{n}\cdot(-1)^n$ ، حيث $\frac{1}{n} \longrightarrow 0$ ، $(-1)^n$ متغير محدود

[$|(-1)^n| = 1 < 2$] ، ومن ثم $y_n \to 0$.

(18) إن $x_n = \frac{1-(-1)^n}{n} \longrightarrow 0$ للأسباب الآتية :

$x_n = \frac{1}{n} - \frac{(-1)^n}{n} \to 0 - 0 = 0$.

(19) بيّن وفق قيم العدد الحقيقي q متى تكون المتتالية $\{q^n\}$، التي حدها العام $x_n = q^n$ ، متقاربة ومتى تكون متباعدة ؟ولماذا؟

الحل:

[i]-إذا كان $q = 1$ فإن $x_n = 1$ ،ومن ثم فإن $x_n \to 1$ ،أي أن المتتالية المدروسة تكون متقاربة من العدد1.

[ii]-إذا كان $q = -1$ فإن $x_n = (-1)^n$ ،ومن ثم فالمتتالية $\{(-1)^n\}$ تكون متباعدة،لأنه لا توجد لها نهاية.

[iii]- إذا كان $|q| < 1$ فإن $x_n = q^n \to 0$ للأسباب الآتية :

في الواقع ،إذا كان $|q|=0$ فإن $q=0$ ومن ثم $x_n \to 0$.أما إذا كان $0<|q|<1$ فإن المتراجحة $|x_n-0|<\varepsilon$ تُكافئ المتراجحة $|q|^n<\varepsilon$ ،حيث ε عدد حقيقي موجب تماماً مثبت بشكل كيفي ، وهذه المتراجحة الأخيرة تُكافئ $n\cdot\ln|q|<\ln\varepsilon$ ،والتي بدورها تُكافئ $n>\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}$ (لأن $\ln|q|<0$).ومنه،بفرض $\varepsilon>0$ ،يوجد $N\neq 0$ بحيث يكون $N>\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}$ ،ومن ثم يكون:

$$n\geq N\Rightarrow n>\frac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}\Rightarrow|q|^n<\varepsilon\Rightarrow|q^n-0|<\varepsilon\Rightarrow|x_n|<\varepsilon$$

اي أن $x_n\to 0$ ،وبذلك فالمتتالية $\{q^n\}$ تكون متقاربة من الصفر في هذه الحالة.

[*iv*]- إذا كان $|q|>1$ فإن x_n يكون لا متناهياً في الكبر للأسباب الآتية:

ليكن $M>0$.إن المتراجحة $|x_n|>M$ تُكافئ $|q|^n>M$ التي بدورها تُكافئ $n\cdot\ln|q|>\ln M$ والتي تكافئ $n>\dfrac{\ln M}{\ln|q|}$.ومنه يوجد $N\neq 0$ بحيث يكون $N>\dfrac{\ln M}{\ln|q|}$ ومن ثم يكون :

$$n\geq N\Rightarrow n>\frac{\ln M}{\ln|q|}\Rightarrow|q|^n>M\Rightarrow|x_n|>M$$

وبذلك فإن المتتالية التي حدها العام $x_n=q^n$ تكون متباعدة في هذه الحالة.

نتيجة مهمّة:1- إذا كان $|q|<1$ فإن $q^n\to 0$ عندما $n\to\infty$.

2- إذا كان $|q|>1$ فإن q^n يكون لا متناهياً في الكبر عندما $n\to\infty$.

3- إذا كان $0<a<1$ فإن $a^n\to 0$.

4- إذا كان $a>1$ فإن $a^n\to+\infty$.

(20) النصوص الآتية صحيحة (يُطلب من القارئ أن يبرهن على صحتها):

(i)- إذا كانت المتتالية العددية متقاربة من a ومن b فإن $a=b$.

(ii)- إذا كانت المتتاليتان العدديتان $\{x_n\}$ و$\{y_n\}$ متقاربتين فإن:

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \mp y_n)=\lim_{n\to\infty}x_n \mp \lim_{n\to\infty}y_n$$

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n)=\lim_{n\to\infty}x_n \cdot \lim_{n\to\infty}y_n$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}{\lim\limits_{n\to\infty}y_n}$$ (بشرط عدم التقسيم على صفر)

$$k\geq 2 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sqrt[k]{x_n}=\sqrt[k]{\lim_{n\to\infty}x_n}$$ (بشرط $x_n\geq 0$)

(iii)- كل متتالية عددية متقاربة تكون محدودة.

(21) إذا كانت $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a>b$ فإنه يوجد $N_0\neq 0$ بحيث يكون $x_n>b$ عندما $n\geq N_0$.

وإذا كانت $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a<b$ فإنه يوجد $N_1\neq 0$ بحيث يكون $x_n<b$ عندما $n\geq N_1$.

البرهان: من كون $a>b$ ينتج $a-b>0$. ليكن ε عدداً حقيقياً محققاً للشرط $a-b>\varepsilon>0$ ومن ثم $b<a-\varepsilon$. ولكن $x_n\to a$ إذن يوجد $N_0\neq 0$ بحيث يكون:

$$n\geq N_0 \Rightarrow |x_n-a|<\varepsilon \Rightarrow a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon \Rightarrow x_n>b$$

وعندما $a<b$ يتم البرهان بطريقة مماثلة .

(22) - إذا كانت المتتاليتان العدديتان $\{x_n\}$ و$\{y_n\}$ متقاربتين، وكان $x_n\leq y_n$ من أجل جميع قيم n فإن $\lim\limits_{n\to\infty}x_n\leq\lim\limits_{n\to\infty}y_n$.

يتم البرهان بافتراض $\lim x_n > \lim y_n$ (جدلاً) ثم الوصول إلى تناقض بالاستفادة من المثال (21) السابق.

(23) إذا كان $x_n \le y_n \le z_n$ وكان $\lim x_n = \lim z_n = a$ فإن $\lim y_n = a$.

البرهان: يترك للقارئ .

(24) أثبت أنّ:

[1] $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0$

[2] $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ (نهاية مشهورة)

[3] $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$، حيث a عدد حقيقي موجب تماماً، (نهاية مشهورة)

[4] $\lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{(1+\rho)^n} = 0$، حيث α عدد حقيقي ،و ρ عدد حقيقي موجب تماماً (نهاية مشهورة).

الحل: سوف يستخدم دستور الكرخي - نيوتن الآتي:

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1!}a^{n-1}\cdot b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}\cdot b^2 + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}a^{n-k}\cdot b^k + \cdots + b^n$$

حيث a,b عددان حقيقيان ، $n \ge 1$ (عدد طبيعي):

$$2^n = (1+1)^n = 1 + n + \frac{n(n-1)}{2} + \cdots + 1 \ge \ge 1 + n + (\frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}) > \frac{n^2}{2} \quad [1]$$

ومنه $0<\frac{1}{2^n}<\frac{2}{n^2}$ ومن ثم $0<\frac{n}{2^n}<\frac{2}{n}$.وحيث أن $\frac{2}{n}\to 0$ وأن $0\to 0$ ،
فبالاستفادة من المثال (23) السابق يتم إثبات المطلوب.

[2] بفرض $x_n=\sqrt[n]{n}-1$ يكون $x_n\geq 0$ و $\sqrt[n]{n}=1+x_n$. ومنه :

$$n=(1+x_n)^n=1+nx_n+\frac{n(n-1)}{2!}x_n^2+\cdots+x_n^n$$

ومن ثم $n\geq \frac{n(n-1)}{2}x_n^2$ أي $0\leq x_n\leq\sqrt{\frac{2}{n-1}}$ حيث: $n\geq 2$ ،وهذا يعني ،حسب المثال (23) ،أن $x_n\to 0$ ومن ثم $\sqrt[n]{n}\to 1$.

[3] ليكن $a>0$.عندها يوجد $N_0\neq 0$ بحيث يكون $\frac{1}{n}<a<n$ عندما $n\geq N_0$ ومنه

$\sqrt[n]{\frac{1}{n}}<\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{n}$ عندما $n\geq N_0$.وحيث أن : $\lim\sqrt[n]{n}=\lim\frac{1}{\sqrt[n]{n}}=1$

فإن $\sqrt[n]{a}\to 1$.

[4] ليكن k أي عدد صحيح بحيث $k>\alpha$ و $k>0$. عندئذٍ ، من أجل $n>2k$ ،

يكون: $(1+\rho)^n>\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\rho^k>\frac{n^k\cdot\rho^k}{2^k\cdot k!}$

ومن ثم فإن $0<\frac{n^\alpha}{(1+\rho)^n}<\frac{2^k\cdot k!}{\rho^k}n^{\alpha-k}$ حيث: $n>2k$. ولما كان $\alpha-k<0$ فإن $n^{\alpha-k}\to 0$ ، ومن ثم يتم إثبات المطلوب.

(25) يقال عن متتالية عددية مثل $\{x_n\}$ إنها متتالية كوشي أو متتالية كوشيّة إذا تحقق الآتي :

أيا كان $\varepsilon>0$ فإنه يوجد $N_0\neq 0$ بحيث يكون $|x_m-x_n|<\varepsilon$ عندما $m\geq n\geq N_0$.

إنّ النص الآتي صحيح يُترك برهانه للقارئ :

الشرط اللازم والكافي كي تكون المتتالية العددية متقاربة هو أن تكون هذه المتتالية كوشية .

(26) يقال عن متتالية عددية مثل $\{x_n\}$ إنها متزايدة (أو غير متناقصة) إذا كان $x_n \le x_{n+1}$ اعتباراً من قيمة معينة لـ n. ويقال عن $\{x_n\}$ إنها متناقصة(أو غير متزايدة) إذا كان $x_n \ge x_{n+1}$ اعتباراً من قيمة معينة لـ n. ويقال عن $\{x_n\}$ إنها مطردة إذا كانت إما متزايدة أو متناقصة .

إن النصوص الآتية صحيحة يترك برهانها للقارئ :

(1)إذا كانت المتتالية العددية متزايدة ومحدودة من الأعلى فإنها تكون متقاربة من أصغر حد أعلى لمجموعة قيمها .

(2)إذا كانت المتتالية العددية متناقصة ومحدودة من الأدنى فإنها تكون متقاربة من أكبر حد أدنى لمجموعة قيمها.

(3)بفرض أن المتتالية العددية $\{x_n\}$ مطردة .عندئذٍ:

$$[\{x_n\} \text{ متقاربة }] \Leftrightarrow [\{x_n\} \text{ محدودة }]$$

(27)برهن أن المتتالية العددية $\{x_n\}$، حيث $x_n = \frac{a^n}{n!}$ و $a > 0$ ،تكون متقاربة ،ثم أوجد نهايتها .

الحل : $x_{n+1} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{a}{n+1} \cdot \frac{a^n}{n!} = \frac{a}{n+1} \cdot x_n$

ومنه ، عندما $n > a-1$، يكون $x_n \le x_{n+1}$ ، أي أن $\{x_n\}$متناقصة . وحيث أن $x_n > 0$ من أجل جميع قيم n ينتج أن $\{x_n\}$محدودة من الأدنى ، ومن ثم فهي تكون متقاربة .

وبفرض $x_n \to A$ ينتج أن $x_{n+1} \to A$ لأن x_{n+1} يأخذ القيم ذاتها التي يأخذها x_n ومنه:

$$A = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{n+1} \cdot \lim_{n\to\infty} x_n = 0 \cdot A = 0$$

إذن: $x_n \to 0$

(28) برهن أن المتتالية العددية $\{x_n\}$ ،حيث :

$$x_n = \frac{1}{2+1} + \frac{1}{2^2+1} + \frac{1}{2^3+1} + \cdots + \frac{1}{2^n+1}$$

تكون متقاربة ،ونهايتها ليست أكبر من العدد 1

الحل :إن $x_{n+1} > x_n$ بملاحظة أن $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{2^{n+1}+1}$. كما أن هذه المتتالية محدودة من الأعلى لأن:

$$x_n < \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n} < 1$$

فالمتتالية $\{x_n\}$ تكون متقاربة من supH، حيث H هي مجموعة قيمها . وحيث أن $x_n < 1$ فإن $\sup H = \lim_{n\to\infty} x_n \le \lim_{n\to\infty} 1 = 1$.

(29)أثبت أن المتتالية العددية $\{x_n\}$ الآتية تكون متقاربة ،ثم أوجد نهايتها:

$$x_1 = \sqrt{a} \ , \ x_{n+1} = \sqrt{a + x_n} \ \ , (a > 0)$$

الحل :إن الحدود الأولى لهذه المتتالية هي:

$$\sqrt{a} \ , \sqrt{a+\sqrt{a}} , \sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a}}} , \ldots\ldots$$

ومنه يمكن استنتاج أن $x_n < x_{n+1}$ (كما يمكن إثبات هذا بالاستقراء الرياضي على n).

ومنه يكون $x_n < \sqrt{a+x_n}$ ، ومن ثم $x_n^2 < a+x_n$ أي: $x_n^2 - x_n - a < 0$ ، ومن ثم $x_n < \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}+a}$، وهذا يعني أن $\{x_n\}$ محدودة من الأعلى.

فالمتتالية المدروسة تكون متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي تكون متقاربة من عدد وليكن A. إذاً $x_n \to A$ و $x_{n-1} \to A$. وحيث أن $x_n = \sqrt{a+x_{n-1}}$ فإن $A = \sqrt{a+A}$ ومن ثم $A^2 = a+A$ أي $A^2 - A - a = 0$. وحيث أن $a > 0$ وأن $\{x_n\}$ متزايدة فإنه ينتج أن $A > 0$. وبذلك يكون :

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}+a}$$

(30) بعض النهايات المشهورة [برهن ذلك]:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \qquad (1)$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e \qquad (2)$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e} \qquad (3)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n} = 0 \qquad (4)$$

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot \sin\frac{1}{n} = 1 \qquad (5)$$

(31) برهن أن المتتالية العددية $\{x_n\}$، حيث $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ، تكون متزايدة .

الحل:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left[\frac{n^2+2n}{(n+1)^2}\right]^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n}$$

$$= \left[\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2}\right]^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} = \left[1-\frac{1}{(n+1)^2}\right]^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n}$$

ولكن (عندما $m \geq 2$) يكون $(1+h)^m > 1+mh$ ، حيث $h \neq 0$ و $h > -1$. ومنه :

$$\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} > 1-\frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

إذن ، $\frac{x_{n+1}}{x_n} > 1$ ومن ثم $x_{n+1} > x_n$.

(32) المتتالية الجزئية:

لتكن $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots\cdots$ أية متتالية ولتكن $\{n_k\}$ متتالية من الأعداد الطبيعية المغايرة للصفر بحيث يكون : $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots < n_k < \cdots\cdots$

عندئذ يكون $n_k \geq k$ من أجل جميع القيم $k \geq 1$.

يُقال عن المتتالية $x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \cdots, x_{n_k}, \cdots$ إنها **متتالية جزئية** من المتتالية $\{x_n\}$.

إذا كانت المتتالية الجزئية $\{x_{n_k}\}$ متقاربة من عدد مثل b فنسمي نهايتها b بـ ((نهاية جزئية)) للمتتالية $\{x_n\}$.

وهنا تكون النصوص الآتية صحيحة :

1- كل متتالية تعد متتالية جزئية من نفسها .

2- الشرط اللازم والكافي كي تكون $\{x_n\}$متقاربة من x هو أن تكون كل متتالية جزئية منها متقاربة من x.

3- إذا كانت إحدى المتتاليات الجزئية ، من متتالية عددية، متباعدة فإن هذه المتتالية العددية تكون متباعدة .

4- إن المتتاليات الثلاث الآتية هي متتاليات جزئية من المتتالية :

$$1,2,3,4,\cdots,n,\cdots\cdots$$

$$1,3,5,7,\cdots,2n-1,\cdots\cdots (1)$$

$$2,4,6,8,\cdots,2n,\cdots\cdots (2)$$

$$2,5,10,17,26,\cdots,n^2+1,\cdots\cdots \quad (3)$$

وتوجد متتاليات جزئية أخرى من المتتالية المدروسة ،.....

5- هل المتتالية الأتية تكون متقاربة أم متباعدة ، ولماذا :

$a,b,a,b,a,b,\cdots\cdots$ حيث a,b عددان حقيقيان

جواب النص (5) :

إذا كان $a=b$ فإن $x_n=a$ (الحد العام لهذه المتتالية)،ومن ثم فإن $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}a=a$ وهذا يعني أن المتتالية المدروسة تكون متقاربة من a.

إذا كان $a\neq b$ فإن المتتالية المدروسة تكون متباعدة بسبب الآتي :

بافتراض أن المتتالية المدروسة متقاربة من x (مثلاً). عندها تكون كل متتالية جزئية منها متقاربة من x . ومنه فكل من المتتاليتين الجزئيتين منها:

$$a,a,a,\cdots,a,\cdots$$

$$b,b,b,\cdots,b,\cdots$$

تكون متقاربة من x .

ولكن المتتالية الجزئية الأولى تتقارب من a أيضاً،ومن ثم يجب أن يكون $x=a$.وكذلك فإن المتتالية الجزئية الثانية تتقارب من b أيضاً، ومن ثم يجب أن يكون $x=b$.

إذاً $a=b$ وهذا يناقض كون $a\neq b$. إذاً فالمتتالية المدروسة متباعدة .

6- عندما يكون $a\neq b$ تسمى المتتالية العددية :

$$a,b,a,b,a,b,\cdots\cdots$$

متتالية متارجحة بين العددين المختلفين a,b. ويدل النص (5) على أن كل متتالية عددية متارجحة بين عددين مختلفين لا يوجد لها نهاية ، ومن ثم فهي متباعدة .

هذا وقد تتارجح المتتالية بين عدّة أعداد مختلفة ،وتكون (حينئذٍ) متباعدة.

وبناءً على ذلك فإن المتتالية العددية $\{x_n\}$ ، حيث $x_n=(-1)^n$ ، تكون متباعدة .

ذلك لأن شكلها المفصل هو: $-1,1,-1,1,\cdots$

وهذا يعني أنها متارجحة بين العددين المختلفين 1+،1- .

نتائج مشهورة:

(1) النهاية $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$ غير موجودة.

(2) النهاية $\lim_{n\to\infty}\sin n$ غير موجودة .

(3) النهاية $\lim_{n\to\infty}\cos n$ غير موجودة.

(4) $\lim_{n\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{n})^s-1}{(\frac{1}{n})}=S$ حيث S عدد.

(5) $\lim_{n\to\infty}\frac{1-\cos\frac{1}{n}}{(\frac{1}{2n^2})}=1$

(6) $\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{(\frac{1}{n})}=1$

[برهن كل ذلك]

(33) ليكن $a_n>0$. وليكن $d=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ حيث $d\in\Re$ أو $d=+\infty$.

المطلوب:

(i) أثبت أن $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$

(ii) أوجد $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$

(iii) أوجد $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}$

الحل:

(i) بترك برهان هذا النص للقارئ .

(ii) بفرض $a_n = \frac{n!}{n^n}$ فيكون $a_n > 0$. وأيضاً:

$$d = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{1}{e}$$

ومنه :

$$= \frac{1}{e} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} =$$

(iii) بفرض $a_n = n!$ فيكون $a_n > 0$. وأيضاً:

$$d = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim(n+1) = +\infty$$

إذن $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$

ملاحظة: يمكن عد النص (33) كتمرين مشهور يحفظ مضمونه ويعتمد عليه حين اللزوم .

(34) مقارنة اللامتناهيات في الصغر :

1- إذا كان $\alpha_n \to 0$ و $\beta_n \to 0$ ، وكان $\frac{\beta_n}{\alpha_n} \to A$ ، وتحقق أن $A = 1$ ، فيكتب $\beta_n \sim \alpha_n$ ، وإلا يكتب التكافؤ $\beta_n \sim A\alpha_n$ ، أو يعبر عنه بالشكل $\beta_n = O(\alpha_n)$ ، حيث الحرف O هو الحرف الكبير .

2- إذا كان $\alpha_n \to 0$ و $\beta_n \to 0$ ، وكان $\frac{\beta_n}{\alpha_n} \to 0$ ، فيُقال إن β_n لا متناه في الصغر بالنسبة للمتغير α_n ، ويكتب حينئذٍ : $\beta_n = o(\alpha_n)$ ، حيث الحرف o هو الحرف الصغير .

3- إذا كان $\alpha_n \to 0$ و $\beta_n \to 0$ ، وكان $\frac{\beta_n}{\alpha_n} \to \infty$ ، فيكتب،وضوحاً، $\alpha_n = o(\beta_n)$.

مثال:

1- إذا كان $\beta_n = \frac{1}{n^k}$ ،حيث $k > 0$ ، فإن $\alpha_n = \frac{1}{2^n}$ و $\alpha_n \to 0$ و $\beta_n \to 0$ وإن $\frac{\beta_n}{\alpha_n} = \frac{2^n}{n^k} \to \infty$ ، ومن ثم فإن : $\frac{1}{2^n} = o(\frac{1}{n^k})$.

2- إذا كان $\beta_n = \frac{1}{n!}$ و $\alpha_n = \frac{1}{2^n}$ فإن $\alpha_n \to 0$ و $\beta_n \to 0$ وإن $\frac{\beta_n}{\alpha_n} = \frac{2^n}{n!} \to 0$ ، ومن ثم فإن : $\frac{1}{n!} = o(\frac{1}{2^n})$

مثال محلول : ليكن $a \in \Re$.أثبت أن $\frac{|a|^n}{n!} \to 0$ عندما $n \to \infty$.

الحل: بفرض $m \le |a| < m+1$ فعندئذٍ يكون:

$$0 \le \frac{|a|^n}{n!} = \left[\frac{|a|}{1}.\frac{|a|}{2}.....\frac{|a|}{m}.\frac{|a|}{m+1}\right].\frac{|a|}{m+2}....\frac{|a|}{n} \le \frac{|a|^{m+1}}{(m+1)!}(\frac{|a|}{m+2})^{n-m-1}$$

ومنه ،بأخذ نهايات الأطراف عندما $n \to \infty$ ، ينتج المطلوب .

(35) مقارنة اللامتناهيات في الكبر :

1- إذا كان $|\alpha_n| \to \infty$ و $|\beta_n| \to \infty$ ، وكان $\frac{|\alpha_n|}{|\beta_n|} \to A$ ، حيث A عدد مغاير للصفر فإن $|\alpha_n| \sim A \cdot |\beta_n|$، و يكتب حينئذٍ $|\alpha_n| = O(|\beta_n|)$،[حيث الحرف O هو الحرف الكبير].

2- إذا كان $|\alpha_n| \to \infty$ و $|\beta_n| \to \infty$ ، وكان $\frac{|\alpha_n|}{|\beta_n|} \to 0$، فيُكتب حينئذٍ : $|\alpha_n| = o(|\beta_n|)$، [حيث الحرف o هو الحرف الصغير] .

3- إذا كان $|\alpha_n| \to \infty$ و $|\beta_n| \to \infty$ ، وكان $\frac{|\alpha_n|}{|\beta_n|} \to \infty$، فيكتب : $|\beta_n| = o(|\alpha_n|)$ (الحرف o هو الحرف الصغير).

مثال : إن $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$ ، ومن ثم فإن : $\ln n = o(n)$.

تعريف: يقال عن متتالية عددية مثل $\{a_n\}$ إنها **ذات تغيُّر محدود** إذا وجد عدد مثل $M > 0$ بحيث يكون $\sum_{k=1}^{n} |a_{k+1} - a_k| < M$ عندما $n \geq 1$.

مبرهنة: كل متتالية عددية ذات تغير محدود تكون متتالية كوشية ،ومن ثم متقاربة.

الإثبات: بفرض أن $\{a_n\}$ ذات تغير محدود ، فيوجد $M > 0$ بحيث يكون :

$\sum_{k=1}^{n} |a_{k+1} - a_k| < M$ عندما $n \geq 1$. وبملاحظة أن المجموع الموجود في الطرف الأيسر يتزايد بتزايد n ، وحيث أنه محدود من الأعلى فهو متقارب من نهاية

معينة. ومنه ،بفرض $\varepsilon > 0$ يمكن إيجاد عدد طبيعي كبير بكفاية مثل N بحيث يكون :

$$\left| \sum_{k=1}^{n+p} |a_{k+1} - a_k| - \sum_{k=1}^{n} |a_{k+1} - a_k| \right| < \varepsilon \quad \text{عندما } n \geq N \text{ و } p \geq 1 \text{ (طبيعي)}$$

أيْ :

$$|a_{n+1+p} - a_{n+1}| \leq |a_{n+2} - a_{n+1}| + |a_{n+3} - a_{n+2}| + \cdots + |a_{n+p+1} - a_{n+p}| < \varepsilon$$

عندما $n \geq N$ و $p \geq 1$.

ومنه فالمتتالية العددية $\{a_n\}$ تكون كوشية ، ومن ثم فهي تكون متقاربة .

ملاحظة مهمة : ليس من الضروري أن تكون المتتالية الكوشية ذات تغير محدود، وهذا ما يمكن إيجاده في المثال الآتي :

المتتالية التي حدها العام $a_n = \frac{1-(-1)^n}{2n}$ متقاربة من الصفر فهي كوشية .

وأيضاً:

$$|a_{n+1} - a_n| = \begin{cases} \frac{1}{n} & (\text{عندما n فردي}) \\ \frac{1}{n+1} & (\text{عندما n زوجي}) \end{cases}$$

ومنه: $$\sum_{k=1}^{n} |a_{k+1} - a_k| = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1}$$

ولكن هذا المقدار الأخير غير محدود، إذن فالمتتالية المدروسة ليست ذات تغير محدود.

(36) النهاية العليا للمتتالية والنهاية الدنيا للمتتالية:

لتكن $\{S_n\}$متتالية عددية ولتكن $H \subseteq [-\infty,+\infty]$ مجموعة غير خالية ،تتألف من كل النهايات الجزئية للمتتالية $\{S_n\}$ ،وربما تحوي $+\infty$و $-\infty$. ثم بوضع $S^* = \sup H$ و $S_* = \inf H$ في $\overline{\mathfrak{R}} = [-\infty,+\infty]$(مجموعة الأعداد الحقيقية الموسعة) ، فعندها يسمى S^* [النهاية العليا] و S_* [النهاية الدنيا] للمتتالية $\{S_n\}$. ويرمز لهاتين النهايتين وفق الآتي : $S^* = \overline{\lim_{n\to\infty}} S_n$ و $S_* = \underline{\lim_{n\to\infty}} S_n$.

كما يستعمل ،أحياناً، الرمزان: $S^* = \limsup_{n\to\infty} S_n$ و $S_* = \liminf_{n\to\infty} S_n$ للنهايتين العليا والدنيا .

يقبل النص الآتي بدون برهان :

لتكن $\{S_n\}$متتالية عددية . ولتكن $H \neq \phi$مجموعة مؤلفة من كل النهايات الجزئية للمتتالية $\{S_n\}$ ، وربما تحوي $+\infty$ و $-\infty$ ولتكن S^* و S_* النهايتين العليا والدنيا للمتتالية $\{S_n\}$ على الترتيب .

عندئذٍ تتمتع S^*بالخاصتين الآتيتين:

(1) $S^* \in H$

(2) إذا كان $x > S^*$ فإنه يوجد N بحيث يكون $x > S_n$ عندما $n \geq N$.

وبالإضافة إلى ذلك ، فإن S^* تكون العنصر الوحيد الذي يتمتع بالخاصتين (1)و(2).

هذا وتتمتع S_* بالخاصتين الآتيتين :

(1) $S_* \in H$.

(2) إذا كان $x < S_*$ فإنه يوجد N بحيث يكون $x < S_n$ عندما $n \geq N$.

وبالإضافة إلى ذلك ، فإن S_* تكون العنصر الوحيد الذي يتمتع بالخاصتين (1)و(2).

مثال (1): إذا كانت $\{S_n\}$ متتالية تتضمن جميع الأعداد العادية ،فإن كل عدد حقيقي يكون نهاية جزئية لهذه المتتالية ،ويكون:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} S_n = +\infty \quad \text{و} \quad \underline{\lim_{n\to\infty}} S_n = -\infty$$

مثال (2): إذا كانت $\{S_n\}$ متتالية بحيث أن $S_n = (-1)^n \cdot (1+\frac{1}{n})$ ، فإن:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} S_n = +1 \quad \text{و} \quad \underline{\lim_{n\to\infty}} S_n = -1$$

مبرهنة: لتكن $\{S_n\}$ متتالية عددية ، وليكن S عدداً حقيقياً . عندئذٍ يكون النص الآتي صحيحاً:

الشرط اللازم والكافي كي يكون $\lim S_n = S$ هو أن يكون $\underline{\lim_{n\to\infty}} S_n = S \ \overline{\lim_{n\to\infty}} S_n$

الإثبات: بفرض $S_n \to S$.عندها تكون $\{S_n\}$ محدودة ، وتكون كل متتالية جزئية منها متقاربة من S . ومنه $H = \{S\}$ و $+\infty \notin H$ و $-\infty \notin H$ [انظر إلى تعريف H قبل قليل].ومنه $\sup H = \inf H = S$ ومن ثم ينتج المراد.

وبالعكس ،بفرض $\underline{\lim_{n\to\infty}} S_n = S \ \overline{\lim_{n\to\infty}} S_n$ و $\varepsilon > 0$. عندها يكون المجال المفتوح $]S_* - \varepsilon, S^* + \varepsilon[$ حاوياً جميع حدود المتتالية $\{S_n\}$ ما عدا ،ربما، جزءاً منتهياً منها.وبما أن $S^* = S_* = S$ فإنه ، من أجل $\varepsilon > 0$ ، يوجد N بحيث يكون $S_n \in]S-\varepsilon, S+\varepsilon[$ عندما $n \geq N$ ، ومن ثم فإن : $|S_n - S| < \varepsilon$ عندما $n \geq N$. ومنه $S_n \to S$. وبذلك يتم إثبات المطلوب .

مبرهنة: ليكن N عدداً طبيعياً مغايراً للصفر .عندئذٍ:

إذا كان $S_n \le t_n$ عندما $n \ge N$ فإن $\overline{\lim} S_n \le \overline{\lim} t_n$ و $\underline{\lim} S_n \le \underline{\lim} t_n$

الإثبات:بفرض $\overline{\lim} S_n > \overline{\lim} t_n$. عندئذٍ يوجد عدد مثل x بحيث يكون $\overline{\lim} S_n > x > \overline{\lim} t_n$. ومنه يوجد N_1 بحيث يكون $x > t_n$ عندما $n \ge N_1$. ومنه،بفرض $N_2 = \max(N, N_1)$ ، ينتج أن $S_n < x$ عندما $n \ge N_2$. ومنه :

$\overline{\lim} S_n \le x$ مما يناقض كون $\overline{\lim} S_n > x$

ويبرهن ،بطريقة مماثلة ، على أن $\underline{\lim} S_n \le \underline{\lim} t_n$.

مبرهنة: لتكن $\{E_n\}$ متتالية من المجموعات $E_1, E_2, E_3, \cdots$ يعرف **الحد الأعلى** لهذه المتتالية بأنه المجموعة $\overline{\lim} E_n$ المعينة بالعلاقة الآتية:

$$\overline{\lim} E_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} E_m$$

أي: $\overline{\lim} E_n = (E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \cdots) \cap (E_2 \cup E_3 \cup \cdots) \cap (E_3 \cup E_4 \cup \cdots) \cap \cdots\cdots$

ويعرف **الحد الأدنى** لهذه المتتالية بأنه المجموعة $\underline{\lim} E_n$ المعينة بالعلاقة :

$$\underline{\lim} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} E_m \quad \text{أي:}$$

$$\underline{\lim} E_n = (E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap \cdots) \cup (E_2 \cap E_3 \cap \cdots) \cup (E_3 \cap E_4 \cap \cdots) \cup \cdots\cdots$$

عندئذٍ يكون : $\underline{\lim} E_n \subseteq \overline{\lim} E_n$

وتكون العلاقة الآتية صحيحة في الحالة العامة : $\bigcup_{i \in I} \bigcap_{j \in J} A_{ij} \subseteq \bigcap_{j \in J} \bigcup_{i \in I} A_{ij}$

هذا ومن الممكن أن تعرض هذه المفاهيم بصورة أخرى وفق الآتي :

لتكن $\{f_n\}$ متتالية من التوابع $f_1, f_2, f_3, \cdots\cdots$.عندئذٍ يكون:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} f_n = \inf_{n\in\mathbb{N}^*} \sup_{m\geq n} f_m \quad \text{و} \quad \underline{\lim_{n\to\infty}} f_n = \sup_{n\in\mathbb{N}^*} \inf_{m\geq n} f_m$$

وبالإضافة إلى ذلك تجدر الإشارة إلى الخاصة الآتية :

$$\underline{\lim} a_n + \underline{\lim} b_n \leq \underline{\lim}(a_n + b_n) \leq \underline{\lim} a_n + \overline{\lim} b_n \leq$$
$$\leq \overline{\lim}(a_n + b_n) \leq \overline{\lim} a_n + \overline{\lim} b_n$$

وذلك عندما $n \to \infty$.

كما أن هذه المتراجحات قد لا تحقق التساوي ، وكمثال على هذا يمكن أخذ:

$a_n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \cdot \sin^2 n\frac{\pi}{2}$ و $b_n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \cdot \cos^2 n\frac{\pi}{2}$ ، حيث $n \geq 1$.

(37) مبرهنة شتولتس : لتكن $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ متتاليتين بحيث $y_n < y_{n+1}$ من أجل $n \geq 1$ وبحيث $y_n \to \infty$. وبفرض أن $\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} \to a \in \Re$. عندئذٍ يكون :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = a .$$

الإثبات: بفرض أن $\alpha_n = \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} - a$ فيكون $\alpha_n \to 0$. وبفرض أن $N > 0$ بحيث $y_n > 0$ عندما $n \geq N$. ثم ،بفرض أن $n > N$ ،يكون:

$$x_{N+1} - x_N = a(y_{N+1} - y_N) + \alpha_{N+1}(y_{N+1} - y_N)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_n - x_{n-1} = a(y_n - y_{n-1}) + \alpha_n(y_n - y_{n-1})$$

ومنه بجمع العلاقات ،وملاحظة أن $y_n < y_{n+1}$ ،ينتج أن:

$$\frac{x_n}{y_n}-a=\frac{x_N-a\cdot y_N}{y_n}+\frac{\alpha_{N+1}(y_{N+1}-y_N)+\cdots+\alpha_n(y_n-y_{n-1})}{y_n}$$

$$\left|\frac{x_n}{y_n}-a\right|\le\left|\frac{x_N-a\cdot y_N}{y_n}\right|+\frac{|\alpha_{N+1}|\cdot(y_{N+1}-y_N)+\cdots+|\alpha_n|\cdot(y_n-y_{n-1})}{y_n}$$

ليكن $\varepsilon>0$. بما أن $\alpha_n\to 0$ فيوجد N_1 بحيث يكون $|\alpha_n|<\frac{\varepsilon}{2}$ عندما $n\ge N_1$.

وأيضاً، يوجد N_2 بحيث يكون $\left|\frac{x_N-a\cdot y_N}{y_n}\right|<\frac{\varepsilon}{2}$ عندما $n\ge N_2$ ، وذلك لأن $x_N-a\cdot y_N$ ثابت و $\frac{1}{y_n}\to 0$.

ومنه ،يوجد $N_3=\max(N,N_1,N_2)+1$ بحيث يكون:

$$\left|\frac{x_n}{y_n}-a\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{y_n-y_N}{y_n}$$

وذلك عندما $n\ge N_3$. وبما أن $y_n-y_N<y_n$ و $y_n>0$ عندما $n\ge N_3$ فإن $\frac{y_n-y_N}{y_n}<1$.

إذن ، $\left|\frac{x_n}{y_n}-a\right|<\varepsilon$ عندما $n\ge N_3$،وبذلك يكون $\frac{x_n}{y_n}\to a$ وبهذا يتم إثبات المطلوب.

ملاحظة (*): إذا كانت $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ متتاليتين بحيث $y_n < y_{n+1}$ و $y_n \to +\infty$ ، وإذا كان $\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = A_n$ وكان $A_n > 0$ عندما $n \geq N_0$ وكان A_n لا متناهياً في الكبر ،فإن $\frac{x_n}{y_n}$ يكون لا متناهياً في الكبر (عندما $n \to \infty$).

بالحقيقة ،يوجد N بحيث، من أجل $n \geq N$ ، يكون صحيحاً ما يأتي :

$$x_{N+1} - x_N = A_{N+1}(y_{N+1} - y_N)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_n - x_{n-1} = A_n(y_n - y_{n-1})$$

ومنه :

$$x_n - x_N = A_{N+1}(y_{N+1} - y_N) + \cdots + A_n(y_n - y_{n-1})$$

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{A_{N+1}(y_{N+1} - y_N) + \cdots + A_n(y_n - y_{n-1})}{y_n} + \frac{x_N}{y_n}$$

ليكن $A > 0$. عندئذٍ يوجد N_1 بحيث يكون $A_n > 4A$ عندما $n \geq N_1$.كما يمكن إيجاد N_2 بحيث يكون $\left|\frac{x_N}{y_n}\right| < A$ و $\frac{y_N}{y_n} < \frac{1}{2}$ عندما $n \geq N_2$ ، وذلك لأن A_n و y_n لا متناهيين في الكبر وأن $y_n > 0$.

ومنه، يوجد $N_3 = \max(N, N_0, N_1, N_2) + 1$ بحيث يكون:

$$\left|\frac{x_n}{y_n}\right| > 4A \cdot (1 - \frac{y_{N_3}}{y_n}) - A > A$$

وذلك عندما $n \geq N_3$.إذن $\frac{x_n}{y_n}$ يكون لا متناهياً في الكبر .

(38) إذا كانت $\{a_n\}$متتالية متقاربة من العدد a [أو كان a_n لا متناهيا في الكبر] فإن المتتالية التي حدها العام $b_n=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$ تكون متقاربة من a [أو يكون المتغير b_n لا متناهيا في الكبر]. (برهن ذلك).

الحل: بفرض $x_n=a_1+\cdots+a_n$ و $y_n=n$ فعندها يكون $a_n=\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}$ وتكون شروط مبرهنة شتولتس [أو شروط الملاحظة (*)] محققة ، ومن ثم فإن:

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}a_n$$

مثال :من المعلوم أن $\sqrt[n]{n}\to 1$ ومن ثم فإن $\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}\to 1$

(39) ادرس المتتالية $\{a_n\}$من حيث التقارب أو التباعد إذا علمت أن:

$a_n=\frac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}}$ حيث k عدد صحيح موجب.

الحل: بفرض $x_n=1^k+\cdots+n^k$ و $y_n=n^{k+1}$ فيكون $a_n=\frac{x_n}{y_n}$.

وأيضا:

$$\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=\frac{n^k}{n^{k+1}-(n-1)^{k+1}}=\frac{n^k}{(k+1)n^k-\frac{(k+1)k}{2}n^{k-1}+\cdots+(-1)^{k+1}}$$

ومن ثم فإن $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=\frac{1}{k+1}$

ومنه ،حسب مبرهنة شتولتس، يكون: $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{1}{k+1}$ فالمتتالية المدروسة تكون متقاربة من $\frac{1}{k+1}$.

(40) ادرس المتتالية $\{b_n\}$ من حيث التقارب أو التباعد إذا علمت أن :

$$b_n = \frac{a_n}{n}$$ حيث $a > 1$ (ثابت) .

الحل: بفرض $x_n = a^n$ و $y_n = n$ فيكون $b_n = \frac{x_n}{y_n}$ ، ومن ثم فإن:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} (a^n - a^{n-1}) = +\infty$$

وذلك حسب الملاحظة (*) [المذكورة بعد مبرهنة شتولتس].

إذن فالمتتالية المدروسة تكون متباعدة.

1-11- تمارين للحل:

اصطلاح: عندما يقال :((ادرس المتتالية)) ،فإن هذا يعني: ((بين فيما إذا كانت المتتالية متقاربة أم متباعدة،ولماذا؟)).

(1) بفرض أن المتتاليتين العدديتين المتقاربتين $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ تحققان الشرط $x_n < y_n$ من أجل جميع قيم n ،أو اعتبارا من قيمة معينة لـ n .بيّن أنه ليس من الضروري أن يكون $\lim_{n\to\infty} x_n < \lim_{n\to\infty} y_n$.

إرشاد: خُذ $x_n = -\frac{1}{n}$ و $y_n = \frac{1}{n}$.

(2) بافتراض أن النهاية موجودة للمتغير .

المطلوب:

هل يمكن أن تكون نهاية متغير (متحول) موجب سالبة ،وهل يمكن أن تكون نهاية متغير سالب موجبة .ثم هل يؤثر حذف عدد منته (محدود) من الحدود الأولى لمتتالية عددية على نوعها (من حيث كونها متقاربة أو متباعدة) .

(3) أثبت أن المتغير $x_n=\sqrt{n^2+2}-\sqrt{2n-1}$ هو لا متناه في الكبر (عندما $n\to\infty$).

(4) أوجد نهاية المتغير $x_n=\frac{2n}{n+1}+\frac{\sin n}{n}$ (الجواب 2).

(5) بفرض أن $x_n=\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2+5}$ فاثبت أن $x_n\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{1}{2}$.

(6) ادرس المتتالية التي حدها العام $x_n=\frac{n-\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$.

(7) بفرض أن $x_n=\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{3^n}}$ فاثبت أن $x_n\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{4}{3}$

(8) بفرض $a>0$ فأوجد نهاية المتغير $x_n=\frac{a^n}{1+a^n}$.

الجواب :($a>1$ عندما 1) و($a=1$ عندما $\frac{1}{2}$) و ($0<a<1$ عندما 0)

(9) برهن أن $x_n\xrightarrow[n\to\infty]{}1$ حيث $x_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)\cdot n}$.

(10) برهن أن المتغير x_n هو لا متناه في الكبر (عندما $n \to \infty$) وذلك بفرض أن $x_{n+1} = (n+1) \cdot x_n$: من أجل جميع قيم n، $x_1 = 1$.

(11) أجب عما يلي :

(1) اضرب مثالاً على لا متناهيين في الصغر بحيث يكون خارج قسمتهما لا متناهياً في الكبر . (الجواب :خذ $\alpha_n = \frac{1}{n}$ و $\beta_n = \frac{1}{n^2}$).

(2) اضرب مثالاً على لا متناهيين في الكبر بحيث يكون حاصل طرحهما لا متناهياً في الصغر (الجواب : $n+\frac{1}{n}$ و n).

(3)اضرب مثالاً على متتالية عددية متقاربة وليست مطردة .

[إرشاد: خذ $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$.]

(4) أثبت أنه إذا كانت المتتالية العددية $\{S_n\}$ متقاربة من Sفإن المتتالية$\{|S_n|\}$ تكون متقاربة من $|S|$. هل العكس صحيح؟ ولماذا؟ .

(12) أوجد نهاية المتتالية العددية $\{x_n\}$ في كل مما يأتي:

(1) $x_n = \frac{2n}{3n+8} - \frac{\cos n}{2n}$ (الجواب: $\frac{2}{3}$)

(2) $x_n = \frac{\sin n}{n} + \frac{n+1}{\sqrt{n^2-5n+6}}$ (الجواب:1)

(3) $x_n = \frac{\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1}}{n+1}$ (الجواب:0)

(4) $x_n = \dfrac{\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}}$ (الجواب:2)

(5) $x_n = \sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2-2}$ (الجواب:0)

(6) $x_n = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n+4}$ (الجواب: e)

(7) $x_n = \dfrac{\left(\sqrt{n+1}\right)^{\frac{1}{3}}-1}{\left(\sqrt{n+1}\right)^{\frac{1}{3}}+1}$ (الجواب: 1)

(8) $x_n = \dfrac{(n+1)(n-2)(n+2)}{n^3-n^2+5n-2}$ (الجواب:1)

(9) $x_n = \dfrac{1+4+9+\cdots+n^2}{n^3+3n+2}$ (الجواب: $\frac{1}{3}$)

(10) $x_n = \dfrac{1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3}{n^3}-\dfrac{n}{4}$ (الجواب: $\frac{1}{2}$)

(11) $x_n = \sqrt{n^2+n}-n$ (الجواب: $\frac{1}{2}$)

(12) $x_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{2n}$ (الجواب: $\frac{1}{e^2}$)

(13) أثبت أن المتتالية العددية $\{x_n\}$، حيث $x_n = n\cdot[\ln(1+n)-\ln n]$ ، تكون متقاربة من الواحد .

(14) أثبت أنه لا توجد نهاية لكل من المتغيرين :

$$x_n = 1+(-1)^n \text{ و } y_n = \sin n + \frac{1}{n}$$

(15) أثبت باستخدام طريقة البرهان بالاستقراء الرياضي صحة المتراجحة $(1+h)^m \geq 1+mh$ ، حيث h عدد حقيقي يحقق الشرط $h > -1$ ، وحيث m أي عدد طبيعي مغاير للصفر .ثم استخدم هذه المتراجحة في إثبات أن المتتالية العددية $\{x_n\}$، حيث $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ ، تكون متناقصة .

(16) برهن على أنه توجد نهاية للمتغير x_n ، حيث :

$$x_n = \frac{1}{3+1} + \frac{1}{3^2+2} + \frac{1}{3^3+3} \cdots + \frac{1}{3^n+n}$$

(17) بفرض أن $S_1 = \sqrt{2}$ و $S_{n+1} = \sqrt{2+S_n}$. أثبت أن المتتالية $\{S_n\}$ تكون متقاربة ، وأن $S_n < 2$ من أجل جميع قيم n .

(18) برهن على أن المتغير $x_n = n^{(-1)^n}$ غير محدود ، ولكنه ليس متناهياً في الكبر (عندما $n \to \infty$).

(19) أثبت أن كلاً من المتغيرات الآتية هو لا متناهٍ في الصغر (عندما $n \to \infty$):

[1] $x_n = \frac{2^n}{n!}$

[2] $x_n = \frac{n^k}{a^n}$ حيث $a > 1$ ، k عدد حقيقي.

[3] $x_n = n \cdot q^n$ حيث $|q| < 1$ و $q \in \mathbb{R}$.

$$x_n = \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \quad [4]$$

$$x_n = \frac{\ln n}{n} \quad [5]$$

(20) إذا كان $x \in \Re$ فأثبت أن $\lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$.

(21) بفرض أن a و x_1 عددان حقيقيان موجبان تماما ، وأن:

$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n})$. أثبت أن المتتالية $\{x_n\}$ تكون متقاربة من $\sqrt{a}$.

(22) إذا كان كل من المتتاليتين العدديتين $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ متتالية كوشية فأثبت أن المتتالية العددية $\{|x_n - y_n|\}$ تكون متقاربة .

(23)ليكن x_1 عددا حقيقيا موجبا تماما . وبفرض أن $x_{n+1} = \frac{x_n}{2 + x_n}$.

أثبت أن المتتالية $\{x_n\}$ تكون متقاربة من الصفر .

(24) ليكن المتغير $x_n = a^{\frac{1}{2^n}}$ ،حيث $a > 0$. والمطلوب :أوجد العلاقة التي تربط بين x_{n+1} و x_n ثم أثبت أن $x_n \to 1$.

(25) لتكن $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ متتاليتين عدديتين حقيقيتين على نحو يوجد فيه عدد صحيح موجب تماما مثل N_0 بحيث يكون:

$$|x_m - x_n| \le |y_m - y_n|$$

من أجل جميع قيم m و n المحققة للشرط $m \ge n \ge N_0$.

اثبت أنه إذا كانت $\{y_n\}$ متقاربة فإن $\{x_n\}$ تكون متقاربة .

(26) لتكن $\{x_n\}$ متتالية عددية حقيقية لا نهائية ومتقاربة من الصفر. بيّن أنه يمكن إيجاد عدد حقيقي موجب مثل M بحيث يكون $|x_n| < M$ من أجل جميع قيم $n \geq 1$.

(27) إذا كان $\lim_{n\to\infty} f(n) = l$ ، حيث l عدد حقيقي ، فأثبت أن:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(1) + f(2) + \cdots + f(n)}{n} = l$$

إرشاد : $f(n) = l + \varphi(n)$ ، حيث $\varphi(n) \to 0$ ، فيكفي برهان أن :

$$\phi(n) = \frac{\varphi(1) + \varphi(2) + \cdots + \varphi(n)}{n} \to 0$$

فنأخذ $\varepsilon > 0$ يوجد $N \neq 0$ بحيث $|\varphi(n)| < \frac{\varepsilon}{2}$ عندما $n > N$.وبكتابة :

$|\varphi(1) + \varphi(2) + \cdots + \varphi(N)| = k$ يكون :

$$|\phi(n)| \leq \frac{k}{n} + \frac{|\varphi(N+1) + \cdots + \varphi(n)|}{n} < \frac{k}{n} + \frac{\varepsilon(n-N)}{2n} < \varepsilon$$

عندما: $n > \max(N, \frac{2k}{\varepsilon})$.

(28) أوجد كلاً من :

$$\overline{\lim_{x\to 0}}(\cos\frac{1}{x})\ (i)$$

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}\left\{(-1)^n+\sin\frac{1}{4}n\pi\right\} \quad (ii)$$

$$\underline{\lim}_{x\to 0}\frac{1}{x+1}\sin\frac{1}{x} \quad (iii)$$

$$\overline{\lim}_{x\to 0}\frac{1}{x+1}\cdot\sin\frac{1}{x} \quad (iv)$$

الأجوبة: (i) 1 ; (ii) $-1-\frac{1}{2}\sqrt{2}$; (iii) -1 ; (iv) 1 .

(29) ادرس كلاً من المتتاليات الآتية :

(i) المتتالية $\left\{\frac{a^n}{n!}\right\}$ ، حيث $a>0$.

(ii) المتتالية $\{x_n\}$ ، حيث : $x_1=\sqrt{a}$ و $x_{n+1}=\sqrt{a+x_n}$ و $a>0$.

(iii) المتتالية $\{x_n\}$ ، حيث: $x_n=\frac{3+4+5+\cdots+n}{-6n^2}$

(30) ليكن $\phi(x)$ تابعاً موجباً، أي تابعاً للمتغير x لا يأخذ إلا قيماً موجبة. وليكن $f(x)$ تابعاً معرفاً على مجموعة تعريف $\phi(x)$ ذاتها. إذا كان، من أجل هذه القيم للمتغير x، يوجد عدد موجب مثل k ،مستقل عن x ،بحيث يكون: $|f(x)|<k\cdot\phi(x)$ فتستعمل الكتابة: $f(x)=O\{\phi(x)\}$ ،حيث O بالحرف الكبير . فمثلاً:

$\sin x=O(|x|)$ و $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$ و $\cos x=O(1)$ من أجل جميع قيم x .

إن العلاقة الأولى تكون صحيحة من أجل قيم x الواقعة خارج المجال $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ طبعاً، ولكن، في مثل هذه الحالات ،تكون العلاقة $\sin x = O(1)$ أكثر وضوحاً .

إن القضية $f(x) = O\{\phi(x)\}$ عندما $x \to \infty$ تعني أن $f(x) = O\{\phi(x)\}$ من أجل جميع قيم x التي تكون أكبر من عدد مثبت . وبالطريقة نفسها تفسر القضية $f(x) = O\{\phi(x)\}$ عندما $x \to a$.

إذا كان ، عندما $x \to a$ ، $\frac{f(x)}{\phi(x)} \to 0$ فتستعمل الكتابة $f(x) = o\{\phi(x)\}$ عندما $x \to a$ ، حيث o بالحرف الصغير .فمثلاً :

$tg\, x^3 = o(x^2)$ عندما $x \to 0$

$\sqrt{x} = o(x)$ عندما $x \to \infty$ ؛ $x = o(\sqrt{x})$ عندما $x \to 0$.

هذا و غالباً ما يكون من الملائم استعمال رموز مثل $o(x^{-1}), O(x^2), O(x), o(1) \cdots$

دون الرجوع إلى تابع معين .فمثلاً، الرمز $O(x^2)$ يمثل أي تابع قيمته العددية أو قيمته المطلقة بعد تقسيمه على x^2 تكون محدودة من أجل جميع قيم x المدروسة . وأيضاً، يمثل الرمز $o(1)$ أي تابع يسعى إلى الصفر عندما يسعى المتغير المدروس إلى عدد معين يكون غير غامض من سياق الكلام .ولهذا فإن :

$o(x) = o(\sqrt{x})$ عندما $x \to 0$ و $O(1) = o(x)$ عندما $x \to \infty$.

إذا كان $\phi(x)$ و $f(x)$ أي تابعين بحيث أن $\frac{f(x)}{\phi(x)} \to 1$ عندما $x \to a$ فتستعمل الكتابة $f(x) \sim \phi(x)$ عندما $x \to a$.فمثلاً، $tg\, x \sim x$ عندما $x \to 0$.

المطلوب:

(i) إذا كان ، عندما $x \to \infty$ ، $f(x) = x^2 + O(x)$ ، $\phi(x) \sim x^{-1}$ فبيّن أن $f(x) \cdot \phi(x) = x + o(x)$.

(ii) إذا كان ، عندما $x \to 0$ ، $f(x) = x + o(x^2)$ ، $\phi(x) = x^{-2} + O(x^{-1})$ فأثبت أن $f(x) \cdot \phi(x) = x^{-1} + O(1)$.

[إرشاد: $\phi(x) \sim x^{-1}$ تسمح بالكتابة $\phi(x) = x^{-1} + o(x^{-1})$. ومنه:
$f(x) \cdot \phi(x) = \{x^2 + O(x)\}\{x^{-1} + o(x^{-1})\} = x + O(1) + o(x) + O(x) \cdot o(x^{-1})$ عندما $x \to \infty$ يكون $O(1) = o(x)$ و $O(x) \cdot o(x^{-1}) = o(1) = o(x)$ ومن ثم إثبات (i)]

(31) إذا كان $\phi(x)$ تابعاً مستمراً من أجل $a \le x \le b$ وكانت $\lim_{x \to k}\{f(x)\} = l$ ، حيث k منته أو غير منته و $a \le l \le b$ ، فأثبت أن: $\lim_{x \to k}\phi\{f(x)\} = \phi(l)$

(32) أوجد النهايتين الآتيتين:

$\lim_{n \to \infty} \frac{n}{2n}$ ، الجواب $\begin{cases} \frac{1}{2} & \text{إذا كان } |x| \le 1 \\ x & \text{إذا كان } |x| > 1 \end{cases}$

$\lim_{n \to \infty} \frac{x - x^{2n+1}}{1 + x^{2n+2}}$ ، الجواب $\begin{cases} x & \text{إذا كان } |x| < 1 \\ 0 & \text{إذا كان } x = \mp 1 \\ -\frac{1}{x} & \text{إذا كان } |x| > 1 \end{cases}$

(33) أثبت أن الشرط اللازم والكافي لتقارب المتتالية المطردة هو تقارب إحدى متتالياتها الجزئية.

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الفصل الثاني

المتسلسلات غير المنتهية

و الجداءات غير المنتهية

- مفاهيم أساسية
- خواص المتسلسلات المتقاربة
- المتسلسلات العددية ذات الحدود غير السالبة
- المتسلسلات المتناوبة
- المتسلسلات ذوات الحدود الكيفية
- المتسلسلات العددية العقدية
- الجداءات غير المنتهية
- تمارين محلولة
- تمارين للحل

Damascus University

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الفصل الثاني

المتسلسلات(السلاسل)غير المنتهية و الجداءات غير المنتهية

2-1- مفاهيم أساسية : لتكن :

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$$

متتالية لانهائية . اذا تم ربط حدود هذه المتتالية جميعها بإشارة الجمع(بصورة شكلية)فإنه يتم الحصول على العبارة :

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots \qquad (1)$$

أو بإختصار على العبارة : $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ، التي تدعى **متسلسلة غير منتهية (لا نهائية).**

اذا كانت الحدود $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$ للمتسلسلة المدروسة أعدادا" فتسمى(1) **متسلسلة عددية لا نهائية**

يدعى a_1 **الحد الأول للمتسلسلة** و يدعى a_2 **الحد الثاني للمتسلسلة** و ..... و يدعى a_n **الحد العام أو الحد النوني للمتسلسلة** و هكذا.....

و تجدر الملاحظة بأنه يرمز في بعض الأحيان للحد الأول بالرمز a_0 و للحد الثاني بالرمز a_1،..... و هكذا.

تدعى المجاميع:

$$s_1 = a_1, s_2 = a_1 + a_2, s_3 = a_1 + a_2 + a_3, \cdots, s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \cdots$$

المجاميع الجزئيّة للمتسلسلة(1). وتؤلف هذه المجاميع المتتالية $\{s_n\}$ التي تسمى **متتالية المجاميع الجزئيّة للمتسلسلة(1).**

هذا و يقال عن المتسلسلة(1) إنها **متقاربة** عندما و فقط عندما تكون متتالية مجاميعها الجزئيّة متقاربة.

وبصورة أكثر تفصيلاً،يقال عن المتسلسلة العددية اللانهائية(1)إنها متقاربة ومجموعها يساوي s عندما و فقط عندما تكون متتالية مجاميعها الجزئيّة $\{s_n\}$ متقاربة من العدد s .

كما يقال عن المتسلسلة العددية(1) إنها**متباعدة** (أي غير متقاربة) عندما وفقط عندما تكون المتتالية $\{s_n\}$ متباعدة ، أي : عندما وفقط عندما يتحقق الآتي :

[إما s_nتسعى الى اللانهاية الموجبة أو السالبة، **أو** لا توجد لـ s_n أية نهاية وذلك عندما $n \to \infty$].

امثلة:

(1)المتسلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} = 1+(-1)+\cdots$ متباعدة لأن متتالية مجاميعها الجزئيّة هي المتتالية المتباعدة:

$$s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 = 0, \cdots$$

التي تتارجح بين العددين المختلفين 1 و 0 .

(2)المتسلسلة $1+2+3+4+5+\cdots$ متباعدةلأن متتالية مجاميعها الجزئيّة هي المتتالية المتباعدة التي حدها العام $s_n = 1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

يسعى الى $+\infty$ عندما $n \to \infty$.

(3)المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ متقاربة ، و مجموعها يساوي العدد 1 .

الحل:

$$s_n = \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)} = (1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\cdots+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}) = 1-\frac{1}{n+1}$$

و منه: $$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n+1}) = 1 = s$$

(4)المتسلسلة العددية الهندسية $\sum_{n=0}^{\infty} a\cdot r^n$، التي حدها الأول هو a، حيث $a\neq 0$، وأساسها هو r، حيث $r\in\Re$، تكون متقاربة من أجل جميع قيم r التي تحققالشرط $|r|<1$، و تكون متباعدة من أجل القيم الأخرى ل r، أي من أجل $|r|\geq 1$.

الحل:

$$s_n = a+a\cdot r+a\cdot r^2+\cdots+a\cdot r^{n-1} = \frac{a-a\cdot r^n}{1-r} = \frac{a}{1-r}-\frac{a}{1-r}\cdot r^n$$

[1]إذا كان $|r|<1$ فإن $r^n\to 0$ ومن ثمّ:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{a}{1-r}-\frac{a}{1-r}\cdot 0 = \frac{a}{1-r} = s$$

أي أن $\{s_n\}$ متقاربة من s، أي ان المتسلسلة الهندسية تكون متقاربة و مجموعها $s=\frac{a}{1-r}$ بشرط $|r|<1$.

[2]إذا كان $|r|>1$ فان النهاية $\lim_{n\to\infty} r^n$ إما غير موجودة أو تساوي $\mp\infty$ وذلك عندما $n\to\infty$ ومن ثمّ فإن $\{s_n\}$ تكون متباعدة ، أي أن المتسلسلة الهندسية تكون متباعدة عندما $|r|>1$.

[3] إذا كان $r=1$ فان $s_n=a+a+\cdots+a=n\cdot a$ وهذا يعني أن s_n يكون لامتناهيا في الكبر عندما $n\to\infty$ فالمتسلسلة الهندسية المدروسة تكون متباعدة عندما $r=1$.

[4]إذا كان $r=-1$ فإن المتسلسلة الهندسية المدروسة تأخذ الشكل :

$$a-a+a-a+a-a+a-a+\cdots$$

ومنه : $s_1=a, s_2=0, s_3=a, s_4=0,\cdots$

وهذا يعني أن $\{s_n\}$ تتارجح بين العددين المختلفين a و 0 فهي تكون متباعدة ، أي أن المتسلسلة المدروسة تكون متباعدة .

ملاحظة: إذا كان $a=0$ فإن المتسلسلة المدروسة تأخذ الشكل :

$$0+0+0+\cdots+0+\cdots$$

، حيث $s_n=0+0+\cdots+0=0_{n\to\infty}\to 0=s$ ، وتكون هذه المتسلسلة متقاربة ، ومجموعها هو العدد 0 .[تدعى هذه المتسلسلة **"المتسلسلة الصفرية"**].

(5)المتسلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots$ هي متسلسلة هندسية ، حدها الأول $a=1$ و أساسها $r=\frac{1}{2}$. ولما كان $|r|<1$ فان هذه المتسلسلة تكون متقاربة و مجموعها هو $s=\frac{a}{1-r}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$.

(6)المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$ تدعى **"المتسلسلة التوافقية أو المتسلسلة المتجانسة"**

وهي متسلسلة **متباعدة** بملاحظة الآتي :

$$s_{2k} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^k}$$
$$= \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{2^{k-1}+1}+\cdots+\frac{1}{2^k}\right)$$

حيث مقام كل آخر حد في كل قوس هو قوة للعدد 2 ،وعدد الحدود في كل قوس يساوي نصف العدد الدال على مقام حده الأخير.

ولكن : $\frac{1}{3}+\frac{1}{4} > \frac{1}{4}+\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8} > \frac{1}{8}\cdot 4 = \frac{1}{2}$$

.....

$$\frac{1}{2^{k-1}+1}+\cdots+\frac{1}{2^k} > \frac{1}{2^k}\cdot 2^{k-1} = \frac{1}{2}$$

إذا: $s_{2k} \geq 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2} = 1+\frac{k}{2}$

ومنه: $\lim_{k\to\infty} s_{2k} = +\infty$.

وكذلك ، إن : $s_{2^{k+1}} = s_{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} \geq \frac{k+2}{2} + \frac{1}{2^{k+1}} \to +\infty$.

فإذا كان n كيفياً، وكانت 2^k أكبر قوة لـ2 لا تتجاوز n، فإن $n \geq 2^k$ ومن ثمّ: $s_n \geq s_{2^k}$ و $s_{n+1} \geq s_n$. ومنه : $s_n \to +\infty$ ، أي أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ تكون متباعدة .

(7)المتسلسلة العددية $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2\cdot(-1)^n}{3^n}$ هي متسلسلة هندسية ، حدها الأول $a=2$ و أساسها $r=-\frac{1}{3}$، ومن ثمّ $|r|=\left|-\frac{1}{3}\right|<1$، فهي تكون متقاربة ، ومجموعها هو

$$s=\frac{a}{1-r}=\frac{2}{1+\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}\ .$$

اصطلاح :

إن القول "ادرس المتسلسلة" يعني " بين فيما إذا كانت المتسلسلة متقاربة أم متباعدة و لماذا ؟" .

(8)ادرس المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+3)}$.

الحل:

$$s_n=\frac{1}{1\cdot4}+\frac{1}{2\cdot5}+\frac{1}{3\cdot6}+\cdots+\frac{1}{(n-1)(n+2)}+\frac{1}{n(n+3)}$$

$$=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)+\cdots+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+2}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+3}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left[\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+2}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+3}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)\to\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)=\frac{11}{18}=s$$

فالمتسلسلة المدروسة تكون متقاربة و مجموعها هو $s=\frac{11}{18}$.

2-2- تمارين للحل :

ادرس كلاًمن المتسلسلات العددية الحقيقية اللانهائية الآتية ، واحسب مجموع كل متسلسلة متقاربة من بينها :

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+5)}$ الجواب :متقاربة و مجموعها $\frac{23}{90}$.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2\cdot(n+1)^2}$ الجواب :متقاربة و مجموعها 1.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2\cdot(n+2)^2}$ الجواب :متقاربة و مجموعها $\frac{5}{16}$.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(2n-1)^2\cdot(2n+1)^2}$ الجواب : متقاربة و مجموعها $\frac{1}{8}$.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot(-5)^n}{3^n}$ الجواب : متباعدة

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{10^n}$ الجواب : متقاربة و مجموعها 1 .

2-3- بعض الخواص الأساسية للمتسلسلات المتقاربة :

مبرهنة(1) : إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ متقاربة فإن حدها العام يسعى نحو الصفر عندما $n\to\infty$ ، (أي : $a_n\to 0$) .

الاثبات : إن $a_n=s_n-s_{n-1}$ ومن ثمّ :

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}s_n-\lim_{n\to\infty}s_{n-1}=s-s=0$$

حيث s هو مجموع المتسلسلة المتقاربة المفروضة .

ملاحظة : تبين المبرهنة السابقة **شرطاً لازماً** لتقارب أية متسلسلة ، ولكن هذا الشرط غير كاف ، لأنه توجد متسلسلات متباعدة مع أن نهاية حدها العام تساوي الصفر ، فمثلاً، المتسلسلة التوافقية $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ متباعدة و نهاية حدها العام $\frac{1}{n}$ هي الصفر عندما $n\to\infty$.

نتيجة : إذا كانت نهاية الحد العام، لمتسلسلة ما ، مغايرة للصفر(أي إما أن تساوي هذه النهاية عدداً مغايراً للصفر أو أن تساوي $\mp\infty$ او أن هذه النهاية غير موجودة بتاتاً)عندما $n\to\infty$ ،فإن هذه المتسلسلة تكون متباعدة .

أمثلة :

(1)المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}n^{q}$ ،حيث $q>0$ ،هي متسلسلة متباعدة لأن $n^{q}\to+\infty$ عندما $n\to\infty$ (أي أن n^{q} لا يسعى الى الصفر).

(2)المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n+1}$ متباعدة لأن $\frac{n}{2n+1}\to\frac{1}{2}\neq 0$.

(3)المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\sin n$ متباعدة لأن $\sin n$ لا يسعى الى أية نهاية .

مبرهنة(2) : الشرط اللازم و الكافي كي تكون المتسلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty}a_{n}$ متقاربة هو أن تكون متتالية مجاميعها الجزئية $\{s_{n}\}$ متتالية كوشي .

الإثبات : يترك للقارئ .

طريقة أخرى لإثبات أن $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ متباعدة :

بفرض أن $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ متقاربة . عندها تكون متتالية مجاميعها الجزئيّة $\{s_n\}$ متتالية كوشي ، ومنه يتحقق الآتي :

يوجد ، من أجل العدد $\frac{1}{2}$ ،عدد طبيعي $N_0 \neq 0$ بحيث يكون $|s_m - s_n| < \frac{1}{2}$ عندما $m \geq n \geq N_0$.

ومنه ،بفرض $n \geq N_0$. عندها $2n > n \geq N_0$ ومن ثمّ يكون :

$|s_{2n} - s_n| < \frac{1}{2}$. ولكن : $s_{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2n}$

إذاً:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} > |s_{2n} - s_n| &= s_{2n} - s_n \\ &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \\ &\geq \frac{1}{n+n} + \frac{1}{n+n} + \cdots + \frac{1}{n+n} \\ &= n \cdot \frac{1}{n+n} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

وهذا مستحيل . فالمتسلسلة المدروسة تكون متباعدة .

تعريف : لتكن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متسلسلة و ليكن n أي عدد طبيعي مغاير للصفر . يعرف **الباقي النوني** (أي الباقي الموافق للعدد n) لهذه المتسلسلة بأنه المتسلسلة اللانهائيّة:

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_k + \cdots$$

أو $\sum_{p=1}^{\infty} a_{n+p}$ ،التي يتم الحصول عليها بعد حذف الحدود الأولى $a_1, a_2, \cdots, a_n$ التي عددها n ، من المتسلسلة المفروضة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

اصطلاح : إذا كان الباقي النوني لمتسلسلة متسلسلة متقاربة ، فان مجموعها يرمز له بالرمز r_n .

مبرهنة(3):

(1)إذا كانت المتسلسلة متقاربة فإن كل باقٍ من بواقيها يكون متقارباً.

(2)إذا كان أحد بواقي متسلسلة متباعداً فإنها تكون متباعدة.

(3)إذا تقارب أحد بواقي متسلسلة فإنها تكون متقاربة.

(4)إذا كانت المتسلسلة متباعدة فكل باقٍ من بواقيها يكون متباعداً.

الإثبات :

(1) بفرض $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. وليكن $\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ الباقي النوني للمتسلسلة المفروضة حيث $n \geq 1$. وبفرض $\sigma_m = \sum_{k=n+1}^{n+m} a_k$. عندها يكون :

$$\sigma_m = (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n+m}) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = s_{n+m} - s_n$$

،حيث s_n هو الحد العام لمتتالية المجاميع الجزئيّة للمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ،

ومنه : $$\lim_{m\to\infty} \sigma_m = \lim_{m\to\infty} s_{n+m} - \lim_{m\to\infty} s_n = s - s_n$$

أي أن $\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ تكون متقاربة ، ومجموعها هو $r_n = s - s_n$.

(2)هذه القضية تكافئ القضية (1).

(3)ليكن $n \geq 1$. و بفرض $\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ هو الباقي النوني للمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

وبفرض أن هذا الباقي متقارب . و بفرض p أي عدد طبيعي بحيث يكون $p > n$.عندها يمكن أن يُكتب $p = n + m$ ، ومن ثمّ :

$$s_p = s_{n+m} = s_n + \sigma_m$$ [انظر الى σ_m في (1)]

وحيث أن n مثبت ، فعندما $p \to \infty$ ينتج أن $m \to \infty$ ، ومن ثم :

$$\lim_{p\to\infty} s_p = \lim_{p\to\infty} s_n + \lim_{p\to\infty} \sigma_m = s_n + r_n$$

أي أن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ تكون متقاربة ، ومجموعها هو $s = s_n + r_n$.

(4)هذه القضية تكافئ القضية (3).

ملاحظة : إذا كانتالمتسلسلة متقاربة فإن مجموعها s يساوي حاصل جمع s_n مع مجموع الباقي النوني r_n ،أي : $s = s_n + r_n$. فإذا كانت s_n قيمة تقريبية للمجموع s فإن الخطأ المرتكب في هذا الحساب التقريبي يكون r_n .

نتيجة : إن حذف عدد محدودمن الحدود الأولى لمتسلسلة لا يؤثر على نوعها (من حيث كونها متقاربة أو متباعدة)، كما إن إضافة عدد محدود من الحدود الجديدة إلى مقدمة المتسلسلة لا يؤثر أيضاً على نوعها (من حيث كونها متقاربة أو متباعدة).

مبرهنة(4): إذا كانت المتسلسلة متقاربة فإن نهاية مجموع الباقي النوني لها تساوي الصفر عندما $n \to \infty$.

الإثبات : لتكن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة ، ومجموعها s . عندها $r_n = s - s_n$ حيث r_n هو مجموع الباقي النوني لهذه المتسلسلة المفروضة . ومنه :

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty} s - \lim_{n\to\infty} s_n = s - s = 0$$

مبرهنة(5): إذا كانت المتسلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة ، ومجموعها يساوي s ،و إذا كان b عددا" ما ،فان المتسلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty} b \cdot a_n$ تكون متقاربة ، و مجموعها يساوي $b \cdot s$.

الإثبات :يترك للقارئ .

ملاحظة :إذا كانت $\sum a_n$ متقاربة ، وكان b عدداً ما ، فإن :

$$\sum_{n=1}^{\infty} b \cdot a_n = b \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

نتيجة : إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متباعدة ، وكان b أي عدد مغاير للصفر ، فإن $\sum_{n=1}^{\infty} b \cdot a_n$ تكون متباعدة .

مبرهنة(6): إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ، $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متقاربتين ، ومجموع الأولى s و مجموع الثانية s' فإن $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \mp b_n)$ تكون متقاربة ، و مجموعها $s \mp s'$.

الإثبات : يترك للقارئ .

ملاحظة : إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متقاربتين ، فإن :

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \mp b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \mp \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

مبرهنة(7): إن أيّ تجميع لحدود متسلسلة متقاربة بوساطة الأقواس ، شريطة المحافظة على ترتيب الحدود نفسه ، لا يؤثر على تقاربها و لا يؤثر على مجموعها.

الاثبات :بفرض أنه تم تجميع ما لحدود المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ بوساطة الأقواس ، بشرط المحافظة على ترتيب الحدود نفسه ، فعندها تظهر متسلسلة جديدة ، ولتكن مثلاً:

$$(a_1 + a_2) + a_3 + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + (a_8 + a_9) + \cdots$$

و منه يبدو كل مجموع جزئي للمتسلسلة الجديدة مجموعاً جزئيّاً للمتسلسلة الأصلية و لكن برقم أكبر . فعلى سبيل المثال ، إذا كان s_n الحد النوني لمتتالية المجاميع الجزئية للمتسلسلة الأصلية ، و كان σ_n الحد النوني لمتتالية المجاميع الجزئية للمتسلسلة الجديدة ، فإن :

$$\sigma_1 = (a_1 + a_2) = s_2$$

$$\sigma_2 = (a_1 + a_2) + a_3 = s_3$$

$$\sigma_3 = s_7$$

$$\sigma_4 = s_9$$

.....

وهذا يعني أن المتتالية $\{\sigma_n\}$ هي متتالية جزئية من المتتالية $\{s_n\}$. ولما كانت $\{s_n\}$ متقاربة من s (مثلاً) فإنّ $\{\sigma_n\}$ تكون متقاربة من s أيضاً .

و بذلك يتم إثبات المطلوب .

ملاحظة : إن حذف الأقواس في متسلسلة ما لا يعد قانونياً في الحالة العامة . فمثلاً،بحذف الأقواس في المتسلسلة العددية المتقاربة :

$$(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots$$

يتم الحصول على المتسلسلة العددية المتباعدة :

$$1-1+1-1+1-1+\cdots$$

و لكن ، من المنطقي ، إذا فرضت بعض الشروط فإن حذف الأقواس في متسلسلة متقاربة لا يؤثر على تقاربها أو مجموعها . فمثلاً ، إذا كانت المتسلسلة العددية المتقاربة ذات حدود غير سالبة ، فإن تجميع حدودها بوساطة الأقواس ، أو حذف الأقواس في حالة وجودها في هذه المتسلسلة ، شريطة المحافظة على ترتيب الحدود نفسه ، لا يؤثر على تقاربها و لا يؤثر على مجموعها .

4-2- تمارين للحل :

(1)أثبت أن المتسلسلة العددية الآتية تكون متقاربة و أن مجموعها هو $\frac{3}{2}$:

$$(\frac{1}{2}+\frac{1}{3})+(\frac{1}{4}+\frac{1}{9})+(\frac{1}{8}+\frac{1}{27})+\cdots$$

(2)أثبت أن المتسلسلة الآتية تكون متقاربة ، و أن مجموعها هو $\frac{7}{36}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+3)}$$

2-5- المتسلسلات العددية ذات الحدود غير السالبة :

مبرهنة(1) :

(i)الشرط اللازم و الكافي كي تتقارب المتسلسلة ذات الحدود غير السالبة هو أن تكون متتالية مجاميعها الجزئيّة محدودة .

(ii)الشرط اللازم و الكافي كي تتقارب المتسلسلة ذات الحدود غير السالبة هو أن تكون متتالية مجاميعها الجزئية محدودة من الأعلى .

الإثبات :

(i)لزوم الشرط : بفرض $\sum a_n$ متقاربة ، حيث $a_n \geq 0$. عندها يكون:

$(s_n \to s)$ و $s_{n+1} \geq s_n$. ومنه $0 \leq s_n \leq s$، أي أن $\{s_n\}$ محدودة .

كفاية الشرط : بفرض $\{s_n\}$ محدودة . بما أن المتسلسلة المدروسة هي ذات حدود غير سالبة فإن $\{s_n\}$ تكون متزايدة .إذا$\{s_n\}$ تكون متقاربة و من ثم تكون المتسلسلة المدروسة متقاربة .

(ii)بملاحظة (i) وملاحظة أن حدود المتسلسلة غير سالبة يمكن إثبات المطلوب بسهولة .

مثال :المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ متقاربة لأنها ذات حدود موجبة ،و متتالية مجاميعها الجزئية محدودة من الأعلى بملاحظة الآتي :

$$S_n = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{(n-1)!} < 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-2}} =$$

$$= 1+\frac{1-\frac{1}{2^{n-1}}}{1-\frac{1}{2}} < 3$$

ملاحظة : من المعلوم صحة التكافؤ الآتي :

$$e = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n \Leftrightarrow e = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$$

ومن الواضح أنّ:

$$\frac{n^2}{n!} = \frac{n}{(n-1)!} = \frac{(n-1)+1}{(n-1)!} = \frac{1}{(n-2)!}+\frac{1}{(n-1)!}\text{ ، }[n \geq 2]$$

إذا:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!} = 1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2}{n!} = 1+\sum_{n=2}^{\infty}[\frac{1}{(n-2)!}+\frac{1}{(n-1)!}] = 2e = S$$

تمرين: احسب مجموع المتسلسلة المتقاربة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{n!}$ ،

الجواب: [$S = 5e$ يطلب من القارئ ان يحل هذا التمرين] .

مبرهنة(2) [اختبار المقارنة] :بفرض $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ متسلسلتين بحيث يكون :

$0 \leq a_n \leq b_n$ من أجل جميع قيم n . عندئذٍ:

(i)إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ متقاربة ،فإن $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ متقاربة .

(ii)إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متباعدة ،فإن $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ تكون متباعدة .

الإثبات:

(i)بفرض أن $\sum b_n$ متقاربة ،وأن $\{\sigma_n\}$ متتالية مجاميعها الجزئيّة ،وأنّ $\{S_n\}$ متتالية المجاميع الجزئية للمتسلسلة $\sum a_n$.عندها تكون $\{\sigma_n\}$ محدودة من الأعلى،أيْ يوجد عدد مثل M بحيث يكون :

$\sigma_n \le M$.ولكن $S_n \le \sigma_n$ إذا $S_n \le M$.وهذا يعني أن $\{S_n\}$ محدودة من الأعلى.ومنه $\sum a_n$ تكون متقاربة .

(ii)لو كانت $\sum b_n$ متقاربة لكانت $\sum a_n$ متقاربة وهذا غير صحيح .

ملاحظة: ليس من الضروري أن يكون $a_n \le b_n$ من أجل جميع قيم n بل يكفي أن يكون هذا الشرط محققاً من أجل جميع قيم n التي تحقق شرطاً مثل $n \ge N$ ، حيث N عدد طبيعي مناسب و أكبر تماماً من الواحد. وهنا يمكن القول إن النتائج و النصوص السابقة و اللاحقة أيضاً تبقى صحيحة ضمن مثل هذه الشروط .

مثال(1): المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{n+1}}$ متقاربة بملاحظة أن $\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{2})^n$ متقاربة وأن $0 \le \frac{1}{(n+1)^{n+1}} \le \frac{1}{2^n}$.

مثال(2):المتسلسلة $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ متقاربة بملاحظة أن $\sum_{1}^{\infty} \frac{3}{n(n+1)}$ متقاربة وأن

$$0 \le \frac{1}{n^2} \le \frac{3}{n(n+1)} .$$

مثال(3): المتسلسلة $\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ متباعدة بملاحظة أن $\sum\frac{1}{n}$ متباعدة وأن

$0\le\frac{1}{n}\le\frac{1}{\sqrt{n}}$.

مبرهنة(3) [معيار المقارنة]: بفرض $\sum a_n$ و $\sum b_n$ متسلسلتين بحيث يكون

$a_n>0$ و $b_n>0$.وبفرض $\frac{a_{n+1}}{a_n}\le\frac{b_{n+1}}{b_n}$ عندئذ:

(1)إذا كانت $\sum b_n$ متقاربة فإن $\sum a_n$ تكون متقاربة .

(2)إذا كانت $\sum a_n$ [illegible] $\sum b_n$ تكون متباعدة .

الإثبات:

$$\frac{a_n}{a_1}=\frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdot\ldots\cdot\frac{a_n}{a_{n-1}}\le\frac{b_2}{b_1}\cdot\frac{b_3}{b_2}\cdot\ldots\cdot\frac{b_n}{b_{n-1}}=\frac{b_n}{b_1}$$

ومنه $a_n\le\frac{a_1}{b_1}\cdot b_n$.ومن هنا ينتج (1)ثم (2).

مبرهنة(4) [قاعدة دالامبير أو اختبار النسبة]:

لتكن $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ متسلسلة بحيث $a_n>0$.وبفرض $D=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ حيث

$0\le D\le+\infty$.عندئذ:

(1)إذا كان $0\le D<1$ فإن $\sum a_n$ تكون متقاربة .

(2)إذا كان $+\infty\ge D>1$ فإن $\sum a_n$ تكون متباعدة .

الإثبات:

(1)بفرض $D<1$ ،وليكن ε عدداً حقيقياً بحيث $D+\varepsilon<1$.

لما كان $\frac{a_{n+1}}{a_n}\to D$ فيوجد $N_0\neq 0$ بحيث يكون : $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}-D\right|<\varepsilon$ عندما $n\geq N_0$

أيْ أن: $D-\varepsilon<\frac{a_{n+1}}{a_n}<D+\varepsilon$ عندما $n\geq N_0$.

وبفرض أن p عدد طبيعي كيفي مغاير للصفر عندها:

$$\frac{a_{N_0+1}}{a_{N_0}}<D+\varepsilon,\cdots,\frac{a_{N_0+p}}{a_{N_0+p-1}}<D+\varepsilon$$

ومن ثمّ:

$$\frac{a_{N_0+p}}{a_{N_0}}<(D+\varepsilon)^p \quad \text{أي:} \quad a_{N_0+p}<(D+\varepsilon)^p\cdot a_{N_0}$$

ولكن $\sum_{p=1}^{\infty}(D+\varepsilon)^p\cdot a_{N_0}$ متسلسلة متقاربة لأنها هندسية أساسها $r=D+\varepsilon$ ، حيث $|r|<1$ ،إذن $\sum_{p=1}^{\infty}a_{N_0+p}$ تكون متقاربة .ومنه ،بملاحظة أنّ المتسلسلة $\sum_{p=1}^{\infty}a_{N_0+p}$ هي الباقي الموافق للعدد N_0 للمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ ،ينتج أن $\sum_{1}^{\infty}a_n$ تكون متقاربة .

(2)بفرض $+\infty>D>1$.لما كان $\frac{a_{n+1}}{a_n}\to D$ فيوجد $N_0\neq 0$ بحيث يكون:

$\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$ عندما $n\geq N_0$ ،ومن ثمّ: $a_{n+1}>a_n>0$ عندما $n\geq N_0$.

وهذا يعني أن حدود المتسلسلة المدروسة لا تتناقص بالقيم العددية ،ومن ثم فإن a_n لا يسعى الى الصفر عندما $n \to \infty$ ،فالمتسلسلة المدروسة تكون متباعدة ثم،

بفرض $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \infty$ يوجد $N_1 \neq 0$ بحيث يكون: $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 2 > 1$ عندما $n \geq N_1$

ومنه $a_{n+1} > a_n > 0$ عندما $n \geq N_1$ ،ومن ثم فالمتسلسلة المدروسة تكون متباعدة

ملاحظة: إذا كان $D = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ فإن قاعدة دالامبير لا تتمكن من إعطاء نوع المتسلسلة المدروسة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ من حيث كونها متقاربة أو متباعدة .

ذلك لأنه توجد متسلسلات متقاربة من أجلها يكون $D = 1$ ،وتوجد متسلسلات متباعدة من أجلها يكون $D = 1$.فعلى سبيل المثال:

من أجل المتسلسلة المتباعدة $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n}$ يكون $D = 1$ ،ومن أجل المتسلسلة المتقاربة $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ يكون $D = 1$.

إذا ،عندما يكون $D = 1$ فإن قاعدة دالامبير تفشل ،لذا فإنه يجب استخدام طريقة أخرى غير قاعدة دالامبير لدراسة المتسلسلة المعطاة .

مثال(4): بتطبيق قاعدة دالامبير لدراسة المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(n+1)!}$ ينتج أن $D = 0 < 1$ فهي متقاربة .

مثال(5): بتطبيق قاعدة دالامبير لدراسة المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ ينتج أن $D = e > 1$ فهي متباعدة .

مثال(6): بتطبيق قاعدة دالامبير لدراسة المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n^2-1}}{2^{n^2}\cdot\sqrt{n}}$ ينتج أن $D=+\infty>1$ فهي متباعدة .

ملاحظة أخرى: إذا كان a_n متغيراً (متحولا) يتبع لـ n، وطلب إثبات أن $a_n\to 0$، عندما $n\to\infty$، فيمكن أخذ المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ ودراستها. فإذا كانت متقاربة فإن $a_n\to 0$.

مثال: أثبت أن $\frac{n}{2^n}\to 0$ عندما $n\to\infty$.

الحل: المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ متقاربة حسب قاعدة دالامبير لأن $D=\frac{1}{2}<1$. إذن $\frac{n}{2^n}\to 0$.

مبرهنة(5) [قاعدة كوشي أو اختبار الجذر]: لتكن $\sum a_n$ بحيث $a_n\geq 0$.

وبفرض $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=C$ حيث $0\leq C\leq+\infty$. عندئذٍ:

(1)إذا كان $0\leq C<1$ فإن $\sum_{1}^{\infty}a_n$ تكون متقاربة .

(2)إذا كان $1<C\leq+\infty$ فإن $\sum_{1}^{\infty}a_n$ تكون متباعدة .

الإثبات:

(1)بفرض $0\leq C<1$، وليكن $\varepsilon>0$ بحيث $C+\varepsilon<1$. لما كان $\sqrt[n]{a_n}\to C$ فإنه يوجد $N_0\neq 0$ بحيث يكون $|\sqrt[n]{a_n}-C|<\varepsilon$ عندما $n\geq N_0$.

ومنه $C-\varepsilon<\sqrt[n]{a_n}<C+\varepsilon$ عندما $n\geq N_0$.ومن ثم:

$a_n<(C+\varepsilon)^n$.ولكن $\sum_{n=1}^{\infty}(C+\varepsilon)^n$ متقاربة ،إذا $\sum_{1}^{\infty}a_n$ تكون متقاربة .

(2)بفرض $+\infty>C>1$ يكون $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=C>1$ ،ومن ثم يوجد $N_1\neq 0$ بحيث يكون $\sqrt[n]{a_n}>1$ عندما $n\geq N_1$.ومنه $a_n>1$ عندما $n\geq N_1$ ،ومن ثم فإن a_n لا يسعى إلى الصفر عندما $n\to\infty$ ،وهذا يؤدي إلى القول إن $\sum a_n$ متباعدة .

وأيضاً ،بفرض $\sqrt[n]{a_n}\to+\infty$ فيوجد $N_2\neq 0$ بحيث يكون $\sqrt[n]{a_n}\geq 2>1$ عندما $n\geq N_2$.ومنه $a_n>1$ عندما $n\geq N_2$ ،ومن ثم فإن a_n لا يسعى إلى الصفر عندما $n\to\infty$ ،ومن ثم $\sum a_n$ متباعدة .

ملاحظة: عندما $C=1$ تفشل قاعدة كوشي في إعطاء جواب حول كون المتسلسلة المدروسة متقاربة أو متباعدة .وفي هذه الحالة يتوجب استخدام طريقة أخرى غير قاعدة كوشي. فمثلاً،من أجل المتسلسلة المتباعدة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ يكون: $C=1$.

ومن أجل المتسلسلة المتقاربة $\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ يكون: $C=1$.

مثال(7): بتطبيق قاعدة كوشي من أجل المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n}{2n+1})^n$ ينتج أن $C=\frac{1}{2}<1$ فهي متقاربة .

مثال(8): بتطبيق قاعدة كوشي على المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{5n-1}{3n-2})^n$ ينتج أن

$C=\frac{5}{3}>1$ فهي متباعدة .

مثال(9): بتطبيق قاعدة كوشي على المتسلسلة $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^n}$ ينتج أن

$C=0<1$ فهي متقاربة .

مثال(10): ادرس المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{x}{a_n})^n$ ،حيث $x>0$ و $a_n>0$ و $\lim_{n\to\infty}a_n=a\neq x$.

الحل: إذا كان $a=0$ فإن $C=\lim_{n\to\infty}\frac{x}{a_n}=+\infty$ ومن ثم فالمتسلسلة المدروسة تكون متباعدة حسب قاعدة كوشي .أما إذا كان $a=+\infty$ فإن $C=\lim\frac{x}{a_n}=0<1$ ومن ثم فالمتسلسلة المدروسة تكون متقاربة .

ثم، بفرض $0<a<+\infty$ يكون $C=\frac{x}{a}$.وهنا توجد حالتان :

(1)إذا كان $x<a$ فإنّ $C<1$ ،ومن ثم فالمتسلسلة المدروسة تكون متقاربة .

(2)إذا كان $x>a$ فإن $C>1$ ،ومن ثم فالمتسلسلة المدروسة تكون متباعدة .

ملاحظة: يمكن القول إن قاعدة كوشي أقوى من قاعدة دالامبير ،لأنه يمكن التحقق من أنه في تلك الحالات التي تعطي فيها قاعدة دالامبير نوع المتسلسلة من حيث التقارب أو التباعد فإن قاعدة كوشي تعطي فيها نوع المتسلسلة ذاته أيضا ،إلا أن العكس ليس صحيحا في الحالة العامة .

فعلى سبيل المثال ،باخذ المتسلسلة ذات الحدود غير السالبة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n+3}{2^{n+1}}$

وبفرض أنّ حدها العام هو a_n فإن:

$$C=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\frac{1}{2}<1$$

فهي متقاربة حسب قاعدة كوشي .

بينما يمكن إثبات أن النهاية $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ غير موجودة ،أيْ لا تستطيع قاعدة دالامبير أن تعطي نوع هذه المتسلسلة .ومع ذلك يظل استعمال قاعدة دالامبير في التمارين أكثر من استعمال قاعدة كوشي لأن حساب النسبة $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ أسهل ،عادةً، من حساب الجذر النوني $\sqrt[n]{a_n}$.

مبرهنة(6) [قاعدة المقارنة]: لتكن $\sum_{1}^{\infty}a_n$ و $\sum_{1}^{\infty}b_n$ متسلسلتين بحيث $a_n>0$ و $b_n>0$. وبفرض أن $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=A$ حيث $0\leq A\leq+\infty$.

عندها تكون المتسلسلتان $\sum a_n$ و $\sum b_n$ من نوع واحد ،أيْ أنهما إما أن تكونا متقاربتين معاً أو تكونا متباعدتين معاً .

الإثبات: ليكن $\varepsilon>0$ بحيث $A-\varepsilon>0$.عندها يوجد $N_0\neq 0$ بحيث يكون $\left|\frac{a_n}{b_n}-A\right|<\varepsilon$ عندما $n\geq N_0$ ،ومن ثم:

$A-\varepsilon<\frac{a_n}{b_n}<A+\varepsilon$ عندما $n\geq N_0$.وهنا توجد حالتان :

(1)إذا كانت $\sum a_n$ متقاربة فإن $\sum_1^{\infty}(A-\varepsilon)\cdot b_n$ تكون متقاربة لأن $(A-\varepsilon)\cdot b_n < a_n$ ومنه $\sum_1^{\infty} b_n$ تكون متقاربة .

(2)إذا كانت $\sum b_n$ متقاربة فإن $\sum_1^{\infty}(A+\varepsilon)\cdot b_n$ تكون متقاربة ومنه $\sum a_n$ تكون متقاربة لأن $a_n < (A+\varepsilon)\cdot b_n$.

وهذا كله يعني أنه لا يمكن للمتسلسلتين $\sum a_n$ و $\sum b_n$ أن تتقاربا إلا معا ،ومن ثم فهما لا يمكن أن تتباعدا إلا معا .

مثال(11): ادرس المتسلسلة $\sum_1^{\infty}\frac{3+n}{2+n^3}$.

الحل: بأخذ المتسلسلة المتقاربة $\sum_1^{\infty}\frac{1}{n^2}$ و باستخدام قاعدة المقارنة ينتج أن :

$$0 < A = \lim_{n\to\infty}[\frac{3+n}{2+n^3} \div \frac{1}{n^2}] = \lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+n}{2+n^3} = 1 < +\infty$$

إذن فالمتسلسلة المدروسة تكون متقاربة .

مثال(12): ادرس المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{2}{n})$.

الحل: بأخذ المتسلسلة المتباعدة $\sum_1^{\infty}\frac{1}{n}$ و باستخدام قاعدة المقارنة ينتج أن :

$$0 < A = \lim_{n\to\infty}[\ln(1+\frac{2}{n}) \div \frac{1}{n}] = 2\lim_{n\to\infty}\ln(1+\frac{2}{n})^{\frac{n}{2}} = 2\cdot\ln e = 2 < +\infty$$

إذن فالمتسلسلة المدروسة تكون متباعدة .

تعريف: يقال عن التكامل ذي الشكل $\int_a^{+\infty} f(x)\cdot dx$ ،حيث a عدد حقيقي، إنه **متقارب** إذا كانت النهاية $\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\cdot dx$ موجودة و محدودة ،حيث $a<b$ ، و تكون قيمته حينئذٍ مساوية قيمة هذه النهاية ،أيَ أن:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\cdot dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\cdot dx \text{ ، } (b>a)$$

ويقال عن التكامل المذكور إنه متباعد إذا كان غير متقارب .وسوف تدرس مثل هذه التكاملات بالتفصيل في الفصل الخامس من هذا الكتاب.

مبرهنة(7)[اختبار كوشي التكاملي]:لتكن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متسلسلة عددية ذات حدود غير سالبة. وبفرض أنه يوجد تابع مستمر و متناقص $f(x)$ ،معرف من أجل $x\geq 1$ ، بحيث يكون $f(n)=a_n$ ، عندئذٍ:

(1)الشرط اللازم و الكافي كي تكون المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة هو أن يكون التكامل $\int_1^{+\infty} f(x)\cdot dx$ متقارباً.

(2)الشرط اللازم و الكافي كي تكون $\sum_{1}^{\infty} a_n$ متباعدة هو أن يكون $\int_1^{+\infty} f(x)\cdot dx$ متباعداً.

الإثبات: يمكن للقارئ أن يرسم في المستوي xoy جزءاً من منحني التابع $f(x)$ ، وليكن قوساً في الربع الأول (مثلاً) ،يسمى طرفه الأيسر B ويسمى الآخر C ،ثم يرسم مستقطه AD على القسم الموجب من محور السينات ،ثم يقسم المجال AD إلى $(n-1)$ قسماً متساوياً ، طول كل منها يساوي واحدة القياس ،وذلك بنقط تقسيم مرقمة بحيث تعطى النقطة A الرقم 1 وتعطى النقطة D الرقم n ،ثم نرسم أعمدة على محور السينات من نقط التقسيم جميعها حتى تلاقي المنحني BC ،

ونمدد هذه الأعمدة بحيث يتم الحصول بنتيجة كل ذلك على مستطيلات واقعة تحت المنحني ،عرضها 1 وطولها $(k=2,3,\cdots,n)\,a_k$ ، ومستطيلات مختلفة للمنحني BC ، عرضها 1 وطولها $(k=1,2,\cdots,n-1)\,a_k$ ، حيث طول AB يساوي a_1 وطول DC يساوي a_n.

إنّ مساحة $ABCD$ تساوي $\int_1^n f(x)\cdot dx$ ،وإنّ مساحة $ABCD$ أكبر من مجموع مساحات المستطيلات التي عرضها 1 وطولها $(k=2,3,\cdots,n)\,a_k$ ،وإنّ مساحة $ABCD$ أصغر من مجموع مساحات المستطيلات التي عرضها 1 وطولها $(k=1,2,\cdots,n-1)\,a_k$.

ومنه:

$$a_2+a_3+\cdots+a_n<\int_1^n f(x)\cdot dx<a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}$$

ومن ثمّ فإنّ :

$$S_n-a_1<\int_1^n f(x)\cdot dx<S_{n-1} \qquad (*)$$

Damascus University

(1)لزوم الشرط: بفرض $\sum a_n$ متقاربة. عندها تكون متتالية مجاميعها الجزئية $\{S_n\}$ محدودة . ومن ($*$) ينتج أن المتتالية $\{\int_1^n f(x)\cdot dx\}$ تكون محدودة ،ومن ثم فهي محدودة من الأعلى. ولكن هذه المتتالية متزايدة ما دام $f(x)\geq 0$ و n متزايد، إذن فهي تكون متقاربة من نهاية محدودة، وهذه يعني ان النهاية $\lim_{n\to\infty}\int_1^n f(x)\cdot dx$ موجودة ومحدودة ،ومن ثم فالتكامل $\int_1^{+\infty} f(x)\cdot dx$ متقارب.

كفاية الشرط: بفرض ان التكامل $\int_1^{+\infty} f(x)\cdot dx$ متقارب .إنّ المتتالية $\{\int_1^n f(x)\cdot dx\}$ متزايدة[ما دام $f(x)\geq 0$ و n متزايد] و محدودة من الأعلى[لأنّ $\int_1^{+\infty} f(x)\cdot dx \leq \int_1^n f(x)\cdot dx$]،وحسب ($*$) ينتج أنّ $S_n \leq a_1 + \int_1^{+\infty} f(x)\cdot dx$.

ومنه $\{S_n\}$ محدودة من الأعلى، ومن ثم فالمتسلسلة ذات الحدود غير السالبة $\sum_1^{\infty} a_n$ تكون متقاربة.

(2)يترك للقارئ.

مثال(13): ادرس المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$

الحل:

(1)إذا كان $\alpha\leq 0$ فإن $\frac{1}{n^{\alpha}}$ لا يسعى الى الصفر عندما $n\to\infty$ فالمتسلسلة المدروسة تكون متباعدة.

(2)بفرض $\alpha > 0$. وبأخذ التابع $f(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}$ فيكون محققاً لشروط اختبار كوشي التكاملي ،حيث $x \geq 1$. ومنه يكون:

$$\int_1^{+\infty} f(x) \cdot dx = \lim_{b \to +\infty} \int_1^b f(x) \cdot dx = \lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^{\alpha}} = \lim_{b \to +\infty} [\frac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}]$$

بشرط $\alpha \neq 1$.

فإذا كان $\alpha > 1$ فإن $\lim_{b \to +\infty} b^{1-\alpha} = 0$ ،ومن ثم فإنّ $\int_1^{+\infty} f(x) \cdot dx = \frac{1}{\alpha - 1}$ أيْ أن هذا التكامل متقارب فالمتسلسلة المدروسة تكون متقاربة.

وإذا كان $\alpha < 1$ فإن $\lim_{b \to +\infty} b^{1-\alpha} = +\infty$ ،ومن ثم فإنّ : $\int_1^{+\infty} f(x) \cdot dx = \lim_{b \to +\infty} \int_1^b f(x) \cdot dx = +\infty$ ،أيْ أن هذا التكامل متباعد فالمتسلسلة المدروسة تكون متباعدة.

أما إذا كان $\alpha = 1$ فإن المتسلسلةالمدروسة ليست إلا المتسلسلة التوافقية $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ التي هي متسلسلة متباعدة.

ملاحظة: تدعى ،أحياناً، كل متسلسلة مثل $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ ، بمتسلسلة ريمان .وتستعمل هذه المتسلسلات و المتسلسلات الهندسية كمتسلسلات مقارنة يتم باستعمالها تبيان نوع متسلسلة معطاة باستخدام قاعدة المقارنة أو اختبار المقارنة....

مثال(14): ادرس المتسلسلة $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (\ln n)^2}$.

الحل: بأخذ $f(x)=\frac{1}{x\cdot(\ln x)^2}$ ،حيث $x\geq 2$ ، يكون التابع $f(x)$ مستمراً عندما $x\geq 2$ ،ومتناقصاً عندما تزداد $x\geq 2$ [ما دام المشتق $f'(x)$ سالباً عندما $x\geq 2$] ،وأيضاً $f(n)=\frac{1}{n\cdot(\ln n)^2}$.وكذلك:

$$\lim_{b\to+\infty}\int_2^b f(x)\cdot dx=\lim_{b\to+\infty}[\frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{\ln b}]=\frac{1}{\ln 2}$$

ومنه التكامل $\int_2^{+\infty} f(x)\cdot dx$ متقارب ،ومن ثم فالمتسلسلة المدروسة تكون متقاربة حسب اختبار كوشي التكاملي.

مثال(15): ادرس المتسلسلة $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n^3}}$.

الحل: إذا تم تطبيق قاعدة دالامبير فإنها ستفشل لأنّ $D=1$ حينئذٍ .ولكن $\frac{n+1}{\sqrt{n^3}}>\frac{n}{\sqrt{n^3}}=\frac{1}{\sqrt{n}}$ و $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1/2}}$ متباعدة ،إذن فالمتسلسلة المدروسة تكون متباعدة حسب اختبار المقارنة.

مثال(16): ادرس المتسلسلة $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{3n-2}{n^3}$.

الحل: إن $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ متقاربة ،ومن ثم فإن $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n^2}$ تكون متقاربة .

ولكن $\frac{3n-2}{n^3}<\frac{3n}{n^3}=\frac{3}{n^2}$ إذاً فالمتسلسلة المدروسة تكون متقاربة.

ملاحظة: إذا كان التابع $f(x)$ المذكور في نص اختبار كوشي التكاملي معرفاً ومستمراً و متناقصاً ليس من أجل $x\geq 1$ بل من أجل $x\geq \gamma>1$ وبحيث يكون

$f(n)=a_n$ ،فإن تقارب المتسلسلة ذات الحدود غير السالبة $\sum a_n$ يكون مكافئا لتقارب التكامل $\int_{\gamma}^{+\infty} f(x)\cdot dx$.

وذلك أنه إذا كان للمنحني $y=f(x)$ مساحة محدودة ،محصورة بدءا من المستقيم $x=1$ فإن له مساحة محدودة ومحصورة بدءا من المستقيم $x=\gamma$ وبالعكس.

مبرهنة(8) [اختبار راب]: بفرض أن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متسلسلة بحيث $a_n>0$. وبفرض أن $\lim_{n\to\infty} n\cdot(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)=r$ بحيث $-\infty\le r\le+\infty$. عندئذ:

(1)إذا كان $r>1$ فإنّ المتسلسلة $\sum a_n$ تكون متقاربة.

(2)إذا كان $r<1$ فإنّ المتسلسلة $\sum a_n$ تكون متباعدة.

الإثبات: (1)بفرض $\lim_{n\to\infty} n\cdot(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)=r>1$ و $-\infty<r<+\infty$ عندها يوجد عدد حقيقي مثل t بحيث يكون $r>t>1$. ومنه يوجدعدد طبيعي مثل $N_1\neq 0$ بحيث يكون $n\cdot(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)>t>1$ عندما $n\ge N_1$ ،ومن ثم $\frac{a_n}{a_{n+1}}>1+\frac{t}{n}$ عندما $n\ge N_1$ ،ثم نأخذ عدد حقيقي مثل s بحيث يكون $1<s<t$ ،وبالمقابلة أنّ $\lim_{n\to\infty}[(1+\frac{1}{n})^s-1]+\frac{1}{n}=s$ يوجد $N_2\neq 0$ بحيث يكون $[(1+\frac{1}{n})^s-1]+\frac{1}{n}<t$

عندما $n \geq N_2$، ومن ثم $1+\frac{t}{n} > (1+\frac{1}{n})^s$ عندما $n \geq N_2$. ثم، بفرض $N_0 = \max(N_1, N_2)$، ينتج أنّ:

$\frac{a_n}{a_{n+1}} > (1+\frac{1}{n})^s$ عندما $n \geq N_0$. ومنه:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < (\frac{n}{n+1})^s = \frac{1}{(n+1)^s} \div \frac{1}{n^s}$$

وذلك عندما $n \geq N_0$. وحيث أنّ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ متقاربة ينتج أن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ تكون متقاربة استنادا إلى المبرهنة(3).

بفرض $r = +\infty$. عندها يكون $\lim_{n\to\infty} n \cdot (\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) = +\infty$، ومن ثم يوجد، مناجل العدد q حيث $1 < t < q$، عدد طبيعي مثل $N_1' \neq 0$ بحيث يكون $n \cdot (\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) \geq q > t > 1$ عندما $n \geq N_1'$. ومنه يمكن، بصورة مشابهة، استنتاج أن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة.

(2) بفرض $\lim_{n\to\infty} n \cdot (\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) = r < 1$ و $-\infty < r < +\infty$ عندها يوجد $N' \neq 0$ بحيث يكون $n \cdot (\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) < 1$ عندما $n \geq N'$. ومنه $\frac{a_{n+1}}{a_n} > \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1} \div \frac{1}{n}$ عندما $n \geq N'$، وبملاحظة أنّ $\sum \frac{1}{n}$ متباعدة ينتج أن $\sum a_n$ تكون متباعدة .

بفرض $r=-\infty$.عندها يوجد ،من أجل العدد $\frac{1}{2}$، عدد طبيعي مثل $N^{*}\neq 0$ بحيث يكون $n\cdot(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)\leq\frac{1}{2}<1$ وذلك عندما $n\geq N^{*}$.ومنه يمكن ،بصورةٍ مماثلة، استنتاج أن $\sum a_n$ متباعدة .

ملاحظة: إن اختبار راب أقوى من قاعدة دالامبير ،لأنه إذا كانت النهاية $D=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ موجودة(محدودة أو غير محدودة) ومغايرة للواحد فإن النهاية $\lim_{n\to\infty}n\cdot(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)$ تكون موجودة و تساوي $+\infty$ عندما $D<1$ و تساوي $-\infty$ عندما $D>1$. ومنه، إذا أعطت قاعدة دالامبير نوع المتسلسلة من حيث التقارب أو التباعد فإن اختبار راب يعطي نوع هذه المتسلسلة نفسه أيضاً.

إلاّ أنّ العكس ليس صحيحاً في الحالة العامة .ففي المثال الآتي يتبيّن أنه يستنتج حسب اختبار راب أنّ المتسلسلة $\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ تكون متقاربة .

في حين أن قاعدة دالامبير لا تستطيع أن تعطي أيّ جواب حول نوع هذه المتسلسلة من حيث كونها متقاربة. ومع ذلك فإنه عندما $r=1$ لا يستطيع اختبار راب أن يعطي أيّ جواب حول نوع المتسلسلة المدروسة(من حيث كونها متقاربة أو متباعدة) وفي هذه الحالة يجب البحث عن طرق أخرى لحل المسألة المدروسة.

مثال(17): أثبت أن $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ تكون متقاربة.

الحل:طريقة أولى: لأنها متسلسلة ريمان من أجل $\alpha=2>1$.

طريقة ثانية: باستخداماختبار كوشي التكاملي .

طريقة ثالثة: باستخدام اختبار راب:

$$r=\lim_{n\to\infty} n\cdot(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)=\lim_{n\to\infty} n\cdot[\frac{(n+1)^2}{n^2}-1]=2>1$$

مثال(18): بيّن (مع التعليل) نوع المتسلسلة العددية:

$$(\frac{1}{3})^2+(\frac{1.4}{3.6})^2+(\frac{1.4.7}{3.6.9})^2+\cdots$$

الحل: إنّ $a_n=[\frac{1.4.\cdots.(3n-2)}{3.6.9.\cdots(3n)}]^2$ ومن ثم فإنّ:

$$r=\lim_{n\to\infty} n\cdot(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)=\lim_{n\to\infty} n\cdot[(\frac{3n+3}{3n+1})^2-1]=\frac{8}{3}>1$$

فالمتسلسلة المدروسة تكون متقاربة حسب اختبار راب .

مثال(19): ادرس تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot(\frac{n}{e})^n$.

الحل:
$$r=\lim_{n\to\infty} n\cdot[e\cdot\frac{n^n}{(n+1)^n}-1]=\lim_{n\to\infty} n\cdot[\frac{e}{(1+\frac{1}{n})^n}-1]=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot[\frac{e}{(1+x)^{1/x}}-1]\quad[\text{بافتراض } x=\frac{1}{n}]$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{e}{(1+x)^{1/x}}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{-e\cdot[(1+x)^{1/x}]'}{[(1+x)^{1/x}]^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}-\frac{e}{[(1+x)^{1/x}]^2}\cdot[(1+x)^{\frac{1}{x}-1}\cdot\frac{x-(1+x)\cdot\ln(1+x)}{x^2}]=$$

$$= -\lim_{x\to 0}\frac{1-\ln(1+x)-1}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}}{2} = \frac{1}{2} < 1$$

فالمتسلسلة المدروسة تكون متباعدة حسب اختبار رابب.

ملاحظة(9): بتغيير أماكن عدد محدود أو غير محدود من حدود متسلسلة عددية متقاربة ذات حدود غير سالبة ،بشرط أن لا يهمل أيّ حد وأن لا يتكرر كل حد أكثر من مرة واحدة ،فإن المتسلسلة الناتجة تكون متقاربة ،ومجموعها يساوي مجموع الأصلية.

الإثبات: نفرض $\sum_{1}^{\infty} a_n$ متقاربة ،و ذات حدود غير سالبة ،ومجموعها S .

وبتغيير الترتيب ضمن الشروط المذكورة في النص يتم الحصول على متسلسلة جديدة ناتجة عن ذلك والتي سترمز:

$$a_{n_1} + a_{n_2} + a_{n_3} + \cdots \qquad (*)$$

إمثلا:

$$a_{12} + a_3 + a_1 + a_8 + a_{100} + a_5 + \cdots$$

حيث

$$[n_1 = 12, n_2 = 3, n_3 = 1, n_4 = 8, n_5 = 100, n_6 = 5, \cdots$$

ثم، بفرض الحد العام لمتتالية المجاميع الجزئية المتسلسلة (*) هو σ_m يكون:

$$\sigma_m = a_{n_1} + a_{n_2} + \cdots + a_{n_m}$$

وبفرض $N_0 = \max(n_1, n_2, \cdots, n_m)$ يكون:

$$(**)\ \sigma_m \le S_{N_0}$$

لاحظ أن S_{N_0} هو مجموع الحدود $a_1, a_2, \cdots, a_{N_0}$

بينما σ_m يساوي مجموع جزء من هذه الحدود ،فمثلاً من أجل المثال المذكور قبل قليل ومن أجل $m = 5$ يكون:

$$N_0 = \max(12,3,1,8,100) = 100 \text{ ، } \quad \sigma_5 = a_{12} + a_3 + a_1 + a_8 + a_{100}$$

$$\sigma_5 < S_{100} \text{ ، } \quad S_{100} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{99} + a_{100}$$

وحيث أن $\sum_{1}^{\infty} a_n$ متقاربة ،فإن متتالية مجاميعها الجزئية تكون محدودة من الأعلى ،ومن ثم [حسب] (**)تكون $\{\sigma_m\}$ محدودة من الأعلى ،وهذا يقتضي أن المتسلسلة (*) تكون متقاربة .

وبفرض أن مجموع المتسلسلة (*) هو σ .بملاحظة أنّ $N_0 \to +\infty$ عندما $m \to +\infty$ ينتج [حسب] (**) أن:

$$\sigma = \lim_{m \to +\infty} \sigma_m \le \lim_{N_0 \to +\infty} S_{N_0} = S$$

و إلى جانب ذلك، باستبدال المتسلسلتين $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ، $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}$ إحداهما بالأخرى في مثل هذه المناقشة يمكن استنتاج أن $S \le \sigma$ باعتماد الطريقة ذاتها ،إذاً $S = \sigma$.

مبرهنة(10)[ضرب المتسلسلات]: إنّ المتسلسلة العددية ذات الحدود غير السالبة:

$$a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_1 \cdot b_2 + a_1 \cdot b_3 + a_2 \cdot b_3 + a_3 b_3 + a_3 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_1 + \cdots$$

التي يتم الحصول عليها بضرب كل حد من المتسلسلة العددية المتقاربة ذات الحدود غير السالبة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ بكل حد من المتسلسلة العددية المتقاربة ذات الحدود غير السالبة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ،ثم بجمع الجداءات الحاصلة،تكون متقاربة و مجموعها يساوي حاصل ضرب مجموعي المتسلسلتين $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

الإثبات: لتكن (S_n) متتالية المجاميع الجزئيّة للمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.ولتكن (σ_n) متتالية المجاميع الجزئيّة للمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.عندها يوجد العددان S و σ بحيث يكون: $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ ، $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma$ ،ومن ثم يكون:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ ، } \sigma = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ .}$$

ثم لتكن $(\cup_n)$ متتالية المجاميع الجزئيّة لمتسلسلة حاصل الضرب (المذكورة في النص) .عندها يكون $\cup_{n^2} = S_n \cdot \sigma_n$ ومن ثم يكون: $\lim_{n\to\infty} \cup_{n^2} = S \cdot \sigma$ ،وهذا يعني أن المتتالية الجزئية $(\cup_{n^2})$ (من المتتالية $(\cup_n)$) تكون متقاربة من $S \cdot \sigma$.

ولكن يوجد ،من أجل كل عدد طبيعي مغاير للصفر n ، عدد طبيعي مغاير للصفر مثل m بحيث يكون $m^2 \geq n$ ،إذن: $\cup_n \leq \cup_{m^2} \leq S \cdot \sigma$

أيْ أنّ $(\cup_n)$ محدودة من الأعلى ،ومن ثم فإن متسلسلة حاصل الضرب تكون متقاربة .ومنه فالنهاية $\lim_{n\to\infty} \cup_n$ تكون موجودة و محدودة.

وحيث أن نهاية كل متتالية جزئية من متتالية متقاربة تساوي نهاية هذه المتتالية فإنه ينتج أن:

$$\lim_{n\to\infty} \cup_n = \lim_{n\to\infty} \cup_{n^2} = S \cdot \sigma = \text{[مجموع متسلسلة حاصل الضرب]}$$

ملاحظة: لما كان تقارب و مجموع المتسلسلة المتقاربة ذات الحدود غير السالبة لا يتعلقان بترتيب حدودها ،فإنه يمكن أن تكتب متسلسلة حاصل الضرب بأشكال مختلفة أهمها:

$$a_1b_1 + a_2b_1 + a_2b_2 + a_1b_2 + a_1b_3 + a_2b_3 + a_3b_3 + a_3b_2 + a_3b_1 + \cdots \quad [1]$$

$$a_1b_1 + (a_1b_2 + a_2b_1) + (a_3b_1 + a_2b_2 + a_1b_3) + \cdots \quad [2]$$

حيث يتم إنجاز ضرب المتسلسلتين $(\sum_{n=1}^{\infty} a_n)\cdot(\sum_{n=1}^{\infty} b_n)$ بالطريقة ذاتها المتبعة في ضرب كثيرات الحدود أو المجاميع المنتهية ،حيث يضرب a_1 بجميع حدود $\sum b_n$ وكتابة النواتج في السطر الأول لجدول ثم يضاف إليها نواتج ضرب a_2 بجميع حدود $\sum b_n$ وكتابة هذه النواتج في السطر الثاني من الجدول..... وهكذا. ثم يتم ترقيم عناصر الجدول و كتابتها على شكل متسلسلة الجداء .

[الجدول (1)]:

$$a_1b_1 + a_1b_2 + a_1b_3 + \cdots$$
$$+ a_2b_1 + a_2b_2 + a_2b_3 + \cdots$$
$$+ a_3b_1 + a_3b_2 + a_3b_3 + \cdots$$
$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

حيث يتم تجميع العناصر وترقيمها كما ورد في [1].

[الجدول(2)]:

$$a_1b_1 + a_1b_2 + a_1b_3 + \cdots$$
$$+ a_2b_1 + a_2b_2 + a_2b_3 + \cdots$$
$$+ a_3b_1 + a_3b_2 + a_3b_3 + \cdots$$
$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

حيث يتم تجميع العناصر وترقيمها كما ورد في [2].

2-6- تمارين للحل:

[1]بيّن (مع التعليل) نوع كل من المتسلسلات العددية الآتية :

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}}$ الجواب: متقاربة

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ الجواب: متباعدة

(3) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{3}}$ الجواب: متباعدة

(4) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n}$ الجواب: متباعدة

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$ الجواب: متقاربة

(6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\frac{2}{5})^n$ الجواب: متقاربة

(7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n+1}$ الجواب: متباعدة

(8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\sqrt{10}}$ الجواب: متباعدة

(9) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ الجواب: متباعدة

(10) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10n+1}$ الجواب: متباعدة

(11) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ الجواب: متباعدة

(12) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}$ الجواب: متباعدة

(13) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)^2}$ الجواب: متقاربة

(14) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n}}$ الجواب: متقاربة

(15) $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3}{2} + \frac{5}{2\sqrt{2}} + \cdots$ الجواب: متقاربة

(16) $\frac{2}{1} + \frac{2.5}{1.5} + \frac{2.5.8}{1.5.9} + \cdots$ الجواب: متقاربة

(17) $\frac{2}{1} + (\frac{3}{3})^2 + (\frac{4}{5})^3 + \cdots$ الجواب: متقاربة

(18) $\frac{1}{2} + (\frac{2}{5})^3 + (\frac{3}{8})^5 + \cdots$ الجواب: متقاربة

(19) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ الجواب: متقاربة

(20) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2 - 1}$ الجواب: متقاربة

(21) $\frac{1}{1.4} + \frac{1}{4.7} + \frac{1}{7.10} + \cdots$ الجواب: متقاربة

$$\frac{1}{3}+\frac{4}{9}+\frac{9}{19}+\cdots \quad (22)$$ الجواب: متباعدة

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{5}+\frac{3}{10}+\cdots \quad (23)$$ الجواب: متباعدة

$$\frac{3}{2^2\cdot 3^2}+\frac{5}{3^2.4^2}+\frac{7}{4^2\cdot 5^2}+\cdots \quad (24)$$ الجواب: متقاربة

$$\frac{3}{4}+(\frac{6}{7})^2+(\frac{9}{10})^3+\cdots \quad (25)$$ الجواب: متباعدة

$$(\frac{3}{4})^{1/2}+\frac{5}{7}+(\frac{7}{10})^{3/2}+\cdots \quad (26)$$ الجواب: متقاربة

$$\frac{1}{e}+\frac{8}{e^2}+\frac{27}{e^3}+\cdots \quad (27)$$ الجواب: متقاربة

$$1+\frac{2}{2^2}+\frac{4}{3^3}+\cdots \quad (28)$$ الجواب: متقاربة

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{2^n+1} \quad (29)$$ الجواب: متباعدة

$$1+\frac{2}{1!}+\frac{4}{2!}+\cdots \quad (30)$$ الجواب: متقاربة

$$\frac{1}{4}+\frac{1.3}{4.8}+\frac{1.3.5}{4.8.12}+\cdots \quad (31)$$ الجواب: متقاربة

$$\frac{(1!)^2}{2!}+\frac{(2!)^2}{4!}+\frac{(3!)^2}{6!}+\cdots \quad (32)$$ الجواب: متقاربة

$$1000+\frac{1000.1002}{1.4}+\frac{1000.1002.1004}{1.4.7}+\cdots \quad (33)$$ الجواب: متقاربة

الجواب: متقاربة $\frac{2}{1}+\frac{2.5.8}{1.5.9}+\frac{2.5.8.11}{1.5.9.13}+\cdots$ (34)

الجواب: متقاربة $\frac{1}{2}+\frac{1.5}{2.4.6}+\frac{1.5.9}{2.4.6.8}+\cdots$ (35)

الجواب: متقاربة $\frac{1}{1!}+\frac{1.11}{3!}+\frac{1.11.21}{5!}+\cdots$ (36)

الجواب: متقاربة $1+\frac{1.4}{1.3.5}+\frac{1.4.9}{1.3.5.7.9}+\cdots$ (37)

الجواب: متباعدة $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{\sqrt{n}}$ (38)

الجواب: متقاربة $\sum_{n=1}^{\infty}\sin^{-1}\frac{1}{n^2}$ (39)

الجواب: متباعدة $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{n})$ (40)

الجواب: متقاربة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1.5}}$ (41)

الجواب: متباعدة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$ (42)

الجواب: متباعدة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$ (43)

الجواب: متقاربة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n-n}$ (44)

الجواب: متقاربة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$ (45)

(46) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)\cdot 2n}$ الجواب: متقاربة

(47) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^2+1}{n^2}$ الجواب: متقاربة

(48) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ الجواب: متباعدة

(49) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n}{n+1}$ الجواب: متباعدة

(50) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\cdot \ln^2 n}$ الجواب: متقاربة

(51) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\cdot \ln n\cdot \ln\ln n}$ الجواب: متباعدة

(52) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-n}$ الجواب: متقاربة

(53) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ الجواب: متباعدة

(54) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$ الجواب: متقاربة

(55) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\cdot \ln n+\sqrt{\ln^3 n}}$ الجواب: متباعدة

(56) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\cdot \sqrt[3]{n}-\sqrt{n}}$ الجواب: متقاربة

(57) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{(2n-1)(5\sqrt[3]{n}-1)}$ الجواب: متباعدة

(58) $\sum_{n=1}^{\infty} (1-\cos\frac{\pi}{2})$ الجواب: متقاربة

(59) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ الجواب: متقاربة

(60) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ الجواب: متباعدة

(61) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot (n!)}{n^n}$ الجواب: متقاربة

(62) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot (n!)}{n^n}$ الجواب: متباعدة

(63) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n \cdot (n!)}{n^n}$ الجواب: متباعدة

[ارشاد: $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$]

(64) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n^2}{5+n^4}$ الجواب: متقاربة

(65) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+1}$ الجواب: متباعدة

(66) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ الجواب: متباعدة

(67) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt[3]{(n^2+3)^5}}$ الجواب: متقاربة

(68) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$ الجواب: متباعدة

(69) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+\frac{1}{n^2})$ الجواب: متقاربة

(70) $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 \cdot \tan^5 \frac{\pi}{\sqrt{n^3}}$ الجواب: متقاربة

(71) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin nx|}{n^3}$ الجواب: متقاربة

(72) $\sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \cdot q^n$ ،حيث $0 < q < 1$ الجواب: متقاربة

(73) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n-1)!!}$ الجواب: متقاربة

[اصطلاح: الرمز !! يستعمل للتعبير بشكل مختصر عن جداء الأعداد الصحيحة الموجبة ذات النوع الواحد ،من حيث كونها فردية أو زوجية ،فمثلاً، $5!! = 5 \cdot 3 \cdot 1$ ، $12!! = 12 \cdot 10 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2$]

(74) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n!)^2}$ الجواب: متقاربة

(75) $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot (e^{1/n} - 1)^2$ الجواب: متباعدة

(76) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{3^{2n-1}}$ الجواب: متقاربة

(77) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2 \cdot 3^n}{(2n)!}$ الجواب: متقاربة

(78) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot \sin \frac{5}{3^n}$ الجواب: متقاربة

(79) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^2+3} - \sqrt{n^2+1})$ الجواب: متباعدة

(80) $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \cos \frac{1}{\sqrt{n}})$ الجواب: متباعدة

(81) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - n)$ الجواب: متباعدة

(82) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^2+2}{n^2+1}$ الجواب: متقاربة

(83) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{2n^3-1}$ الجواب: متقاربة

(84) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2}$ الجواب: متقاربة

[2] 1- اكتب الحدود السبعة الأولى للمتسلسلة العددية اللانهائية الناتجة من ضرب المتسلسلتين العدديتين اللانهائيتين:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \cdots$$

وذلك بالطريقة نفسها التي تستخدم لضرب حدودبتين ثم أوجد مجموع المتسلسلة الناتجة.

2- أثبت أن: $0,99999\cdots = 1$

3- أثبت أن: $0,03999\cdots = 0,04$

4- أثبت أن : $0,3333\cdots = \frac{1}{3}$

[3]برهن أن المتسلسلة $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p \cdot \ln^q n}$ تكون:

(i)- متقاربة من أجل أيّ q إذا كان $p > 1$.

(ii)- متقاربة من أجل $q > 1$ إذا كان $p = 1$.

(iii)- متباعدة من أجل أيّ q إذا كان $p < 1$.

(iv)- متباعدة من أجل $q \le 1$ إذا كان $p = 1$.

[4] ادرس كلاً من المتسلسلات الآتية:

(1) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n}$ الجواب: متباعدة

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos^{-1} \frac{1}{2n}$ الجواب: متباعدة

(3) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n \cdot (\ln \ln n)^2}$ الجواب: متقاربة

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{1}{n}$ الجواب: متقاربة

[5] برهن على تقارب كل متسلسلة من المتسلسلات الآتية و احسب مجموعها:

(1) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n!}$ الجواب: $2e$

(2) $\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+\cdots$ الجواب: $\frac{1}{2}$

(3) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+3}{n!}$ الجواب: $5e$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+2^n}{6^n}$ الجواب: $\frac{3}{2}$

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2-1}$ الجواب: $\frac{3}{4}$

(6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+n-1}{(n-1)!}$ الجواب: $6e$

(7) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(n-1)^3}{n!}$ الجواب: $e+\frac{1}{2}$

(8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n-1)}{(n+1)!}$ الجواب: $e-2$

(9) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{n!}$ الجواب: $5e$

(10) $1+\frac{2}{1!}+\frac{3}{2!}+\frac{4}{3!}+\cdots$ الجواب: $2e$

(11) $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\cdots$ الجواب: 1

$$\frac{1^2}{2!}+\frac{2^2}{3!}+\frac{3^2}{4!}+\cdots \quad (12)$$

الجواب: $e-1$

$$1+\frac{2^2}{1!}+\frac{3^2}{2!}+\cdots \quad (13)$$

الجواب: $5e$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4}{n!} \quad (14)$$

الجواب: $15e$

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\cdots \quad (15)$$

الجواب: $\frac{3}{2}$

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\cdots \quad (16)$$

الجواب: $\frac{3}{4}$

$$\frac{1}{(e+1)(e+2)}+\frac{1}{(e+2)(e+3)}+\cdots \quad (17)$$

الجواب: $\frac{1}{e+1}$

$$\frac{3}{1.4}+\frac{5}{4.9}+\frac{7}{9.16}+\frac{9}{16.25}+\cdots \quad (18)$$

الجواب: 1

$$\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{3.4.5}+\cdots \quad (19)$$

الجواب: $\frac{1}{4}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(c+n)(c+n+1)} \quad (20)$$

الجواب: $\frac{1}{c+1}$

حيث c ثابت ، $c\neq -n$ ، $n=1,2,3,\cdots$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(c+n)(c+n+2)} \quad (21)$$

الجواب: $\frac{1}{2}\cdot\frac{2c+3}{c^2+3c+2}$

حيث c ثابت ، $c\neq -n$ ، $n=1,2,3,\cdots$

(22) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(c+n-1)(c+n)(c+n+1)}$ الجواب: $\frac{1}{2c\cdot(c+1)}$

حيث c ثابت، $c \neq n+1$، $n = 1,2,3,\cdots$.

[6] أثبت أن الحد العام a_n للمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \tan^{-1} \frac{1}{n^2+n+1}$ يكتب وفق العلاقة $a_n = \tan^{-1}\frac{1}{n} - \tan^{-1}\frac{1}{n+1}$ ثم أثبت أن هذه المتسلسلة متقاربة و مجموعها يساوي $\frac{\pi}{4}$. [الرمز $\tan^{-1}$ هو الرمز $\arctan$ نفسه]

[7] أثبت أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$ متقاربة، ومجموعها يساوي $\ln 2$.

[8] لتكن $\sum a_n$ متسلسلة متقاربة حدها العام هو:

$$a_n = \sqrt[3]{n^3+3n+7} - \sqrt{f(n)}$$

حيث $f(n)$ هو تابع للمتغير n. أثبت أن: $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{n^2} = 1$

[9] أثبت أن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-na}$، حيث $a > 0$، تكون متقاربة، ومجموعها $\frac{e^a}{e^a-1}$.

[10] لتكن $\sum_{n=0}^{\infty} x^n \cdot e^{na}$، $\sum_{n=0}^{\infty} x^n \cdot e^{-na}$ متسلسلتين بحيث $a > 0$، $|x|\cdot e^a < 1$.

أثبت أن كلاً من هاتين المتسلسلتين تكون متقاربة، وأن مجموع الأولى هو $\frac{1}{1-xe^a}$ ومجموع الثانية $\frac{1}{1-xe^{-a}}$.

[11] أثبت أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+\sin nx}{n}$ متباعدة.

[12] أثبت أن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n+5}{4^n+n^8}$ متقاربة.

[13] أثبت ان المتسلسلة $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln^2 n}$ متباعدة.

[14]أثبت ان المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n+3}{2n+1})^{n\ln n}$ متقاربة.

[15] ادرس المتسلسلات الآتية و احسب المجموع لكل متسلسلة متقاربة من بين هذه المتسلسلات:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2\cdot(n+1)^2}$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot(-1)^n}{3^n}$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}(2+4+\cdots+2n)$ (4) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{8}+\frac{1}{27}+\cdots$

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}$ (إذا علمت أن $e=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$)

[16] أثبت ان المتسلسلة $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$ تكون متقاربة.

[إرشاد: $\ln n > e^2$ بدءاً من قيمة معينة لـ n]

[17] ادرس ،بحسب قيم α ، تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}\sin^{2n}\alpha$ ،حيث $0<\alpha\le\frac{\pi}{2}$.

[الجواب: متقاربة عندما $0 < \alpha \le \frac{\pi}{2}$ ومتباعدة عندما $\frac{\pi}{4} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$]

[18] أثبت ان المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}(2^{\frac{1}{2n-1}} - 2^{\frac{1}{2n+1}})$ متقاربة واحسب مجموعها.

[الجواب1:].

[19] لتكن $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}th\frac{x}{2^n}$ متسلسلة بحيث $x \neq 0$. والمطلوب:

(أ)أثبت أن: $\frac{2}{th2x} - \frac{1}{thx} = thx$

(ب)أثبت أن هذه المتسلسلة متقاربة ،مجموعها هو $\frac{1}{thx} - \frac{1}{x}$

2-7- المتسلسلات المتناوبة:

تعريف: يقال عن متسلسلة عددية إنها متناوبة إذا كان كل حدين متجاورين مباشرة من حدودها عبارة عن عددين مختلفي الإشارة. ولذلك فإن شكلها المفصل هو أحد الشكلين الأتيين:

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + - \cdots + (-1)^{n-1} \cdot a_n + \cdots$$

وذلك إذا كان حدها الأول موجباً،

$$-a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - + \cdots + (-1)^{n-1} \cdot a_n + \cdots$$

وذلك إذا كان حدها الأول سالباً،حيث $a_n \ge 0$ من أجل كل القيم $n = 1,2,3,\cdots$.

هذا ويمكن الإكتفاء بدراسة تقارب المتسلسلة المتناوبة التي حدها الأول موجب،لأنه إذا كان الحد الأول لمتسلسلة متناوبة سالباً فبعد ضرب هذه المتسلسلة بالعدد (1-)تتحول إلى متسلسلة متناوبة حدها الأول موجب ولهاتين المتسلسلتين النوع ذاته من حيث التقارب أو التباعد.

إذن فالشكل المفصل(التفصيلي)للمتسلسلة المتناوبة التي ستتم دراسة تقاربها فيما يأتي هو:

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + a_{2n-1} - a_{2n} + \cdots$$

أما الشكل المختزل(المختصر) لها فهو: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot a_n$.

وتجدر الملاحظة إلى أن a_n يعبّر عن **القيمة المطلقة** للحد العام ما دام $a_n \geq 0$ والحد العام هو $(-1)^{n+1}\cdot a_n$.

مبرهنة(1)[اختبار ليبنتز]: إذا كان الحد العام للمتسلسلة العددية المتناوبة يسعى إلى الصفر متناقصاً بالقيمة المطلقة ،عندما $n \to \infty$ ، فإن هذه المتسلسلة تكون متقاربة.

الإثبات: لتكن:

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + a_{2n-1} - a_{2n} + \cdots$$

متسلسلة متناوبة ،حيث $a_n \geq a_{n+1}$ ،و $a_n \to 0$ عندما $n \to \infty$.

(1)المتتالية $\{S_{2n}\}$ متقاربة:

$$S_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2n-1} - a_{2n}) \geq 0$$

ومن ثم فإن: $S_{2n} \leq S_{2n+2}$ ،أي أن المتتالية $\{S_{2n}\}$ متزايدة.

ومن جهة ثانية فإنّ:

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \cdots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} \leq a_1$$

وهذا يعني أن $\{S_{2n}\}$ محدودة من الأعلى.

إذن $\{S_{2n}\}$ تكون متقاربة من عدد ،وليكن S ، فيكون: $S_{2n} \to S$.

(2)المتتالية $\{S_{2n+1}\}$ متقاربة من العدد S أيضاً:

$$S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1}$$

ومن ثم فإن:

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} S_{2n} + \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = S + 0 = S$$

وبذلك ،من (1)و(2)، يكون: $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ أيْ أن المتسلسلة المدروسة تكون متقاربة ،ومجموعها S.

ملاحظة:

ينتج من البرهان السابق ،أنّ: $S_{2n} \le S$ ، ومن ثم فإنّ: $0 \le a_1 - a_2 = S_2 \le S$

ومن جهة أخرى فإنّ: $S_{2n+1} = S_{2n-1} - (a_{2n} - a_{2n+1})$

ومنه: $S_{2n-1} - S_{2n+1} = a_{2n} - a_{2n+1} \ge 0$ أيْ: $S_{2n+1} \le S_{2n-1}$.

وكذلك: $S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1} \ge 0$.

ومنه ينتج أنّ: $S \le S_{2n+1}$ ،ومن ثم فإن $S \le S_1 = a_1$. إذن: $0 \le S \le a_1$.

أما إذا كان $a_n > a_{n+1} > 0$ ،وهي الحالة الأكثر ظهوراً، فإنّ: $0 < S < a_1$ ،وهذا يعني أن مجموع أية متسلسلة عددية متناوبة ،ومتقاربة، وحدها الأول موجب تماماً، يكون موجباً تماماً وأصغر من الحد الأول الموجب تماماً.

وأيضاً: يمكن أخذ أيّ مجموع جزئي S_n بمثابة قيمة تقريبية لمجموع متسلسلة عددية متناوبة و متقاربة، حيث n عدد طبيعي كبير بقدر كاف. ومنه فإنّ S_{2n} يعّد قيمة تقريبية بالنقص للمجموع S لأن S_{2n} يسعى إلى نهايته Sبتزايد، ويكون الخطأ المرتكب في هذا الحساب التقريبي موجباً و مساوياً:

$$r_{2n} = a_{2n+1} - a_{2n+2} + -\cdots$$

ومنه $0 < r_{2n} < a_{2n+1}$، ومن ثم فإنّ $|r_{2n}| < a_{2n+1}$.

كما إن S_{2n+1} يعدّ قيمة تقريبية بالزيادة للمجموع S لأن S_{2n+1} يسعى إلى نهايته S بتناقص ،ويكون الخطأ المرتكب في هذا الحساب التقريبي سالباً و مساوياً:

$$r_{2n+1} = -a_{2n+2} + a_{2n+3} - \cdots = -(a_{2n+2} - a_{2n+3} + \cdots)$$

ولما كان $|r_{2n+1}| = a_{2n+2} - a_{2n+3} + - \cdots$

فإنّ : $|r_{2n+1}| < a_{2n+2}$

إذن ،عندما تتحقق شروط اختبار ليبنتز تكون المتسلسلة المتناوبة متقاربة ،ويمكن قول الآتي:

(1)إن إشارة مجموع أيّ باقٍ هي نفس إشارة أول حد من الحدود المشكلة له.

(2)يمكن أخذ قيمة أيّ مجموع جزئي بمثابة قيمة تقريبية لمجموع المتسلسلة المتناوبة ،وتكون القيمة المطلقة للخطأ المرتكب أصغر من القيمة المطلقة لأول حد من الحدود المحذوفة (أيْ أول حد من الحدود المشكلة للباقي الموافق لعدد الحدود الذي تم أخذه من أجل المجموع الجزئي).

أمثلة:

(1)المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$ هي متسلسلة عددية متناوبة القيم المطلقة لحدودها تتناقص عندما يتزايد n، وحدها العام يسعى إلى الصفر عندما $n \to \infty$، لذا فإنها متقاربة ،ومجموعها هو $S = \ln 2$ (بناءً على ما يمكن برهانه لاحقاً).

ومع ذلك فاستعمال هذه المتسلسلة للحساب الفعلي للمقدار $\ln 2$ لا يجدي ،وذلك لأنه إذا كانت الرغبة في أن يكون باقي المتسلسلة أصغر من 0,0001 يجب أخذ 10000 حداً منها:

$$|r_n| < \frac{1}{n+1} \le 0{,}0001$$

وهكذا، فمع أن المتسلسلة متقاربة ،إلاّ أن تقاربها بطيئ جداً.

وللإفادة العملية من مثل هذه المتسلسلات يجب تحويلها مسبقا من متسلسلات بطيئة التقارب إلى سريعة التقارب، أو كما يقال عادة ،يجب تحسين تقاربها.

(2)أثبت أن المتسلسلة المتناوبة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$ تكون متقاربة، ثم أوجد قيمة عددية لا تتجاوزها القيمة المطلقة للخطأ المرتكب عند أخذ S_8 بمثابة قيمة تقريبية لمجموع هذه المتسلسلة ثم كرر السؤال من أجل S_9 ثم بيّن كم حداً يجب أخذهم من الحدود الأولى لهذه المتسلسلة للحصول على قيمة تقريبية لمجموع هذه المتسلسلة بحيث تكون القيمة المطلقة للخطأ المرتكب حينئذٍ أصغر من 0,001.

الحل: إن هذه المتسلسلة تحقق شروط اختبار ليبنتز فهي متقاربة. ثم بأخذ:

$$S \approx S_8 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15}$$

فإنّ القيمة المطلقة للخطأ المرتكب أصغر من القيمة المطلقة لأول حد من الحدود المحذوفة ،أيْ أصغر من $\frac{1}{17}$.

وأيضاً: بأخذ $S \approx S_9$ فإن القيمة المطلقة للخطأ المرتكب أصغر من العدد $\left|-\frac{1}{19}\right| = \frac{1}{19}$.

وأخيراً: بأخذ $S \approx S_n$ فإن القيمة المطلقة للخطأ المرتكب أصغر من القيمة المطلقة لأول حد من الحدود المحذوفة، أيْ أصغر من $\left|\frac{(-1)^{n+2}}{2n+1}\right| = \frac{1}{2n+1}$.

ولتعيين عدد الحدود التي يجب أخذها كي تكون القيمة المطلقة للخطأ أصغر من

0,001 يكفي حل المتراجحة $\frac{1}{2n+1} \le 0{,}001$ التي تكافئ $n \ge 499{,}5$، ولهذا يجب أخذ 500 حداً على الأقل للحصول على القيمة التقريبية التي تحقق المطلوب

(3)أوجد قيمة تقريبية لمجموع المتسلسلة المتناوبة ،المتقاربة بحسب اختبار ليبنتز:

$$1-\frac{1}{1!3}+\frac{1}{2!5}-\frac{1}{3!7}+\frac{1}{4!9}-\frac{1}{5!11}+\cdots$$

وذلك بخطأ قيمته المطلقة أصغر من 10^{-5}.

الحل: إن الحد العام لهذه المتسلسلة هو $\frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}$ ،حيث $n \ge 0$. فيجب حل المتراجحة $\frac{1}{n!(2n+1)} < 10^{-6}$ التي تكافئ $n \ge 9$.

فبأخذ S_9 كقيمة تقريبية للمجموع S للمتسلسلة المدروسة ،أي:

$$S \approx S_9 = 1-\frac{1}{1!3}+-\cdots-\frac{1}{7!15}+\frac{1}{8!17}$$

فإن القيمة المطلقة للخطأ المرتكب تكون أصغر من $\frac{1}{9!19}$ ومن ثم أصغر من $\frac{1}{6}\cdot 10^{-6}$. ثم إن الحدين الأول و الثالث من S_9 يحسبان دون اللجوء إلى التقريب، بينما يجب حساب الحدود السبعة الباقية مقربة إلى ستة أرقام عشرية ،وذلك لأن القيمة المطلقة للخطأ في كل منها لا تتجاوز $0{,}5\cdot 10^{-6}$ ،ومن ثم فالقيمة المطلقة للخطأ في حساب الحدود السبعة المذكورة لا تتجاوز $7\cdot 0{,}5\cdot 10^{-6}$ أي لاتتجاوز $3{,}5\cdot 10^{-6}$. وبذلك فالقيمة المطلقة للخطأ المرتكب في هذا الحساب التقريبي للمجموع S لا تتجاوز العدد:

$$3,5\cdot 10^{-6}+\frac{1}{6}\cdot 10^{-6}=\frac{22}{6}\cdot 10^{-6}$$

اي أصغر من 10^{-5}.

ومنه : $S=S_9=0,746824\approx 0,74682$

حيث تم تقريب قيمة S بالنقصان إلى خمسة أرقام عشرية ،بخطأ قيمته المطلقة أصغر من 10^{-5}. و تجدر الإشارة إلى أن الأرقام العشرية الأربعة الأولى الواقعة على يمين الفاصلة في القيمة التقريبية التي تم الحصول عليها هي أرقام مضبوطة بدقة كاملة ودون أي تقريب.

(4)المتسلسلة المتناوبة الآتية تكون مثالاً يدل على أن شرط تناقص القيم المطلقة للحدود هو شرط لا بد منه ،ولا يمكن الاستغناء عنه في اختبار ليبنتز:

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}-1}-\frac{1}{\sqrt{n}+1}+\cdots$$

فحدها العام يسعى إلى الصفر عندما $n\to\infty$ ، أما القيم المطلقة لحدودها فلا تتناقص عندما يتزايد n [لاحظ $\frac{1}{\sqrt{n}+1}<\frac{1}{\sqrt{n+1}-1}$].

كما إن هذه المتسلسلة **متباعدة** بملاحظة الآتي:

$$S_{2m}=\sum_{n=2}^{m+1}\left(\frac{1}{\sqrt{n}-1}-\frac{1}{\sqrt{n}+1}\right)=\sum_{n=2}^{m+1}\frac{2}{n-1}=2\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m}\right)=2S'_m$$

ومن ثم فإن: $\lim_{m\to\infty}S_{2m}=2\lim_{m\to\infty}S'_m=+\infty$

(5)إنّ المتسلسلة المتناوبة الآتية تكون مثالاً يدل على أن شرط كون نهاية الحد العام ،للمتسلسلة المتناوبة ،تساوي الصفر عندما $n\to\infty$ هو شرط لا يمكن إهماله في اختبار ليبنتز: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{2^{n-1}+1}{2^n}$

فالقيم المطلقة لحدودها تتناقص عندما يتزايد n. أما حدها العام فلا يسعى إلى الصفر عندما $n \to \infty$ بملاحظة الآتي:

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{-(2^{2n-1}+1)}{2^{2n}} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}+1}{2^{2n+1}} = \frac{1}{2}$$

ومن ثم فهي متباعدة.

وبالإضافة إلى ذلك فإنّ:

$$S_{2n} = (1-\frac{3}{4}) + (\frac{5}{8}-\frac{9}{16}) + \cdots + (\frac{2^{2n-2}+1}{2^{2n-1}} - \frac{2^{2n-1}+1}{2^{2n}}) =$$

$$= \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \cdots + \frac{1}{2^{2n}} = \frac{1}{3} - \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2^{2n+2}}$$

ومن ثم فإن $\lim_{n\to\infty} S_{2n} = \frac{1}{3}$. وأيضاً:

$$S_{2n+1} = S_{2n} + \frac{2^{2n}+1}{2^{2n+1}} \underset{n\to\infty}{\to} \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$$

8-2 تمارين للحل:

(1)ادرس المتسلسلة $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ الجواب: متقاربة.

(2)أثبت أن كلا من المتسلسلات الآتية متقاربة ،ثم أوجد قيمة تقريبية لمجموعها بخطأ قيمته المطلقة أصغر من ε (المذكور وفق الآتي):

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ $[\varepsilon = 0{,}1]$ الجواب: 0,9

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!}\ [\varepsilon=0,001]\ (2)$$ الجواب: 0,842

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n\cdot\ln n}\ [\varepsilon=0,5]\ (3)$$ الجواب: 0,7

$$\frac{1}{2!.2}-\frac{1}{4!.4}+\frac{1}{6!.6}-\frac{1}{8!.8}+\cdots\ [\varepsilon=10^{-5}]\ (4)$$ الجواب: 0,23981

$$\frac{1}{10}-\frac{2}{3.10^{3}}+\frac{2^{2}}{2!.5\cdot 10^{5}}-\frac{2^{3}}{3!.7\cdot 10^{7}}+\cdots\ [\varepsilon=10^{-9}]\ (5)$$

الجواب: 0,099337315

2-9- المتسلسلات ذوات الحدود الكيفية:

تعريف: يقال عن متسلسلة كيفية مثل $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ إنها **متقاربة بالإطلاق** أو متقاربة مطلقاً عندما وفقط عندما تكون المتسلسلة المؤلفة من القيم المطلقة لحدودها متقاربة،أيْ إذا تقاربت المتسلسلة ذات الحدود غير السالبة:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|+\cdots$$

نتيجة: إذا كانت المتسلسلة ذات الحدود غير السالبة متقاربة فإنها تكون متقاربة بالإطلاق.

مبرهنة(1): إذا كانت متسلسلة كيفية مثل $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ متقاربة بالإطلاق فإنها تكون متقاربة.

الإثبات: لما كانت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة بالإطلاق فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ تكون متقاربة.

ثم، بأخذ المتسلسلتين $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ، $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ ،حيث:

$$C_n = \begin{cases} 0 & (a_n \geq 0 \text{ عندما }) \\ |a_n| & (a_n < 0 \text{ عندما }) \end{cases} \; ; \; b_n = \begin{cases} a_n & (a_n > 0 \text{ عندما }) \\ 0 & (a_n \leq 0 \text{ عندما }) \end{cases}$$

فينتج أنّ: $0 \leq b_n \leq |a_n|$ و $0 \leq c_n \leq |a_n|$. ومنه ينتج ان كلاً من المتسلسلتين $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ، $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ متقاربة. وبفرض أنّ B هو مجموع $\sum b_n$ وأنّ C هو مجموع $\sum c_n$ فإنه يمكن كتابة المجموع الجزئي النوني للمتسلسلة $\sum a_n$ بالشكل:
$S_n = (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) - (c_1 + c_2 + \cdots + c_n)$ حيث أن عدد الحدود المغايرة للصفر في الطرف الأيمن من هذه المساواة لا يتجاوز n ،أما بقية الحدود فهي تساوي الصفر.

ومنه $\lim_{n\to\infty} S_n = B - C$ ،أيْ أن $\sum a_n$ تكون متقاربة و مجموعها $B - C$.

مثال(1): لتكن المتسلسلة الكيفية:

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{16} + \frac{1}{9} - \frac{1}{64} - \frac{1}{256} + \frac{1}{27} - - + \cdots$$

المطلوب: (1)أثبت أن هذه المتسلسلة تكون متقاربة بالإطلاق.

(2)أوجد المتسلسلتين $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ، $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ ،المذكورتين في إثبات المبرهنة(1) ،من أجل هذه المتسلسلة الكيفية المفروضة، ثم أثبت أنهما متقاربتان و احسب مجموع كل منهما.

(3)أوجد مجموع هذه المتسلسلة الكيفية المفروضة.

الحل: (1)إن متسلسلة القيم المطلقة لحدود المتسلسلة المفروضة هي:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{9}+\frac{1}{64}+\frac{1}{256}+\frac{1}{27}+\cdots$$

والتي تساوي مجموع المتسلسلتين الهندسيتين المتقاربتين:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\cdots$$

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\frac{1}{256}+\cdots$$

ومن ثم فإنها تكون متقاربة. ومنه فالمتسلسلة المدروسة تكون متقاربة بالإطلاق.

(2)إنّ: $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{1}{3}+0+0+\frac{1}{9}+0+0+\frac{1}{27}+\cdots$

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = 0+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+0+0+\frac{1}{64}+\frac{1}{256}+\cdots$$

ومن الملاحظ أن هاتين المتسلسلتين متقاربتان لأنه يوجد لكل منهما مجموع محدود يمكن حسابه كمجموع متسلسلة هندسية متقاربة(بغض النظر عن الأصفار) حيث: $B=\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$

$$C=\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$$

(3)إن مجموع المتسلسلة الكيفية المفروضة هو: $S = B - C = \frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

ملاحظة: إن شرط التقارب بالإطلاق ذو أهمية بالغة في المبرهنة(1) وذلك بملاحظة المثال الآتي:

إنّ المتسلسلة $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-+\cdots$ متقاربة ولكن ليس بالإطلاق. وإنّ المتسلسلتين:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-+\cdots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = -\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}-\cdots$$

هما المتسلسلتان المشكّلتان من الحدود الموجبة و السالبة للمتسلسلة المفروضة، وهما متباعدتان.

مبرهنة(2): إنّ مجموع متسلسلة عددية كيفية متقاربة بالإطلاق يساوي حاصل الطرح $B-C$ ، حيث B هو مجموعالمتسلسلة المؤلفة من جميع الحدود الموجبة في هذه المتسلسلة الكيفية و C هو مجموع المتسلسلة المؤلفة من القيم المطلقة لجميع الحدود السالبة في هذه المتسلسلة الكيفية.

الإثبات: تنتج صحة هذه المبرهنة مما ورد في إثبات المبرهنة(1).

مبرهنة(3): إذا تمّ تغيير في أماكن عدد محدود أو غير محدود من حدود متسلسلة عددية كيفية متقاربة بالإطلاق ،بحيث أن كل حد من حدود هذه المتسلسلة لا يهمل ، ولا يتكرر أكثر من مرة واحدة ،فإن المتسلسلة الناتجة تكون متقاربة بالإطلاق ،ومجموعها يساوي مجموع المتسلسلة الأصلية.

الإثبات: بفرض أنه تم إنجاز تغيير ترتيب لحدود المتسلسلة المتقاربة بالإطلاق:

$a_1+a_2+a_3+\cdots$ وذلك بتغيير ما لأماكن عدد محدود أو غير محدود من حدودها دون إهمال لأيّ حد، ودون تكرار لأي حد من حدودها أكثر من مرة واحدة، بحيث تم الحصول على متسلسلة جديدة ،ولتكن:

$$a_{n1}+a_{n2}+a_{n3}+\cdots$$

ثم بإجراء تغيير ترتيب الحدود **نفسه** في المتسلسلة ذات الحدود غير السالبة:

$$|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots$$

فإنه يتم الحصول على المتسلسلة:

$$|a_{n1}|+|a_{n2}|+|a_{n3}|+\cdots$$

التي تكون متقاربة ،ومن ثم فالمتسلسلة $a_{n1}+a_{n2}+a_{n3}+\cdots$ تكون متقاربة بالإطلاق، أما مجموعها فيساوي حاصل طرح مجموعي متسلسلتين متقاربتين، كل منهما ذات حدود موجبة . ولما كان مجموع المتسلسلة المتقاربة ذات الحدود غير السالبة لا يتعلق بترتيب حدودها ،فإن مجموع المتسلسلة $\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}$ هو مجموع المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ نفسه.

مبرهنة(4): إن المتسلسلة العددية التي يتم الحصول عليها بضرب كل حد من متسلسلة عددية متقاربة بالإطلاق مثل $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ بكل حد من حدود من متسلسلة عددية متقاربة بالإطلاق مثل $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ،ثم بجمع الجداءات الحاصلة، تكون متقاربة بالإطلاق، ومجموعها يساوي حاصل ضرب مجموعي المتسلسلتين $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

الإثبات: يترك للقارئ.

مبرهنة(5): إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متسلسلة عددية متقاربة بالإطلاق ،ومجموعها هو S ،أيْ: $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ، فإنّ المتراجحة $|S| \le \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ تكون صحيحة، أيْ أنّ:

$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \le \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ (عندما يكون التقارب مطلقا).

الإثبات: من المتراجحة $\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \le \sum_{k=1}^{n} |a_k|$ ينتج أن $\lim_{n\to\infty}\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \le \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} |a_k|$

ومن ثم $|S| \le \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ أي: $\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \le \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ [بشرط التقارب المطلق].

مبرهنة(6)[اختبار دالامبير]: بفرض أن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متسلسلة عددية كيفية،حيث $a_n \neq 0$ ،وبفرض أن $D = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$. عندئذٍ:

(1) $0 \le D \le +\infty$

(2)إذا كان $0 \le D < 1$ فإن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ تكون متقاربة بالإطلاق، ومن ثم متقاربة.

(3)إذا كان $1 < D \le +\infty$ فإن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ تكون متباعدة.

(4)إذا كان $D = 1$ فإنّ هذه الإختبار يفشل في إعطاء نوع المتسلسلة المدروسة من حيث التقارب أو التباعد.

الإثبات: (1)واضح.

(2)حسب الفرض وبتطبيق قاعدة دالامبير على المتسلسلة ذات الحدود الموجبة $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ ينتج أنّ $D<1$ ،فهي متقاربة، ومن ثم فإنّ $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ تكون متقاربة بالإطلاق.

(3)بفرض $D>1$ يوجد $N_0\neq 0$ بحيث يكون $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}>1$ عندما $n\geq N_0$. ومنه فإن $|a_n|$ لا يسعى إلى الصفر عندما $n\to\infty$، ومن ثم فإنّ a_n لا يسعى إلى الصفر عندما $n\to\infty$ وهذا يعني أن $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ تكون متباعدة.

(4)هذه الحالة هي حالة شك أو حالة فشل بسبب وجود متسلسلات متقاربة عندما $D=1$ ومتسلسلات متباعدة عندما $D=1$ أيضاً.

ومنه فهذه الحالة تستوجب البحث عن طريقة أخرى للإجابة عن السؤال المدروس

مبرهنة(7) [اختبار الجذر النوني]: بفرض أن $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ متسلسلة عددية كيفية ، وبفرض $C=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$. عندئذٍ:

(1) $0\leq C\leq+\infty$

(2)إذا كان $0\leq C<1$ فإن $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ تكون متقاربة بالإطلاق.

(3)إذا كان $1<C\leq+\infty$ فإن $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ تكون متباعدة.

(4)إذا كان $C=1$ فإن هذا الإختبار يفشل.

الإثبات: (1)واضح

(2)حسب الفرض وبتطبيق قاعدة كوشي على المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ ينتج أن $C>1$ ،فهي متقاربة، ومن ثم فإن $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ تكون متقاربة بالإطلاق.

(3)بفرض $C>1$ يوجد $N_0\neq 0$ بحيث يكون $\sqrt[n]{|a_n|}>1$ عندما $n\geq N_0$. ومنه $|a_n|>1$ عندما $n\geq N_0$ ،ومن ثم فإنّ a_n لا يسعى إلى الصفر عندما $n\to\infty$ وهذا يعني أن $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ تكون متباعدة.

(4)واضح.

ملاحظة: يبقى اختبار الجذر النوني صحيحاً عندما تُستعمل النهاية العليا بوضع $C=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}$. ويمكن أن يقال شيئ مماثل من أجل اختبار دالامبير في حالة التقارب. أما في حالة التباعد فتستخدم النهاية الدنيا.

مبرهنة(8): إذا كان $|a_n|\leq b_n$ بدءاً من قيمة معينة للمتغير n ، وإذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ متقاربة ،فإنّ $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ تكون متقاربة بالإطلاق ،ومن ثم متقاربة.

الإثبات: حسب قاعدة المقارنة من أجل $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ ينتج، استناداً إلى الفرض، أن $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ متقاربة، ومن ثم $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ تكون متقاربة بالإطلاق.

تعريف: إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ متقاربة ولكن $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ متباعدة ،فيقال إن $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ متقاربة شرطياً.

مثال(2): المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ متقاربة شرطياً ،لأنها متقاربة حسب اختبار ليبنتز ولكن $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ متباعدة.

مثال(3): المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n^2}$ متقاربة بالإطلاق ،لأن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n}}{n^2}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ متقاربة.

مثال(4): المتسلسلة $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\cdot\sin\frac{\pi}{n}$ متقاربة شرطياً بملاحظة الآتي:

$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\cdot\sin\frac{\pi}{n}$ متقاربة حسب اختبار ليبنتز، ولكن المتسلسلة $\sum_{n=2}^{\infty}\left|(-1)^{n}\cdot\sin\frac{\pi}{n}\right|=\sum_{n=2}^{\infty}\sin\frac{\pi}{n}$ متباعدة بمقارنتها مع المتسلسلة المتباعدة $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\pi}{n}$

وذلك باستخدام اختبار المقارنة:

$$A=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}=1\ ,\ 0<A<+\infty$$

مثال(5): المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}\cdot\sqrt[3]{n}}{3n+5}$ متقاربة شرطياً للأسباب الآتية:

إن هذه المتسلسلة متقاربة حسب اختبار ليبنتز(تحقق من ذلك). كما إنّ المتسلسلة

$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n\cdot\sqrt[3]{n}}{3n+5}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n}}{3n+5}$ متباعدة بمقارنتها مع المتسلسلة المتباعدة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2/3}}$ باستخدام اختبار المقارنة:

$$A=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[3]{n}}{3n+5}\div\frac{1}{n^{2/3}}\right)=\frac{1}{3}\text{ ، }0<A<+\infty$$

مثال(6): من المعلوم أن المتسلسلة الآتية متقاربة شرطياً ومجموعها $\ln 2$:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots$$

فبتغيير ترتيب حدودها بحيث يتم الحصول على المتسلسلة:

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\cdots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}+\cdots$$

وبافتراض أن (σ_n) هي متتالية المجاميع الجزئية لهذه المتسلسلة الجديدة ،ينتج أن:

$$\sigma_{3m}=\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}\right)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)=\frac{1}{2}S_{2m}$$

حيث S_{2m} هو مجموع الحدود الأولى ،التي عددها $2m$ ، من المتسلسلة الأصلية $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$. ومنه:

$$\lim_{m\to\infty}\sigma_{3m}=\lim_{m\to\infty}S_{2m}=\frac{1}{2}\ln 2$$

وأيضاً:

$$\sigma_{3m-1}=\sigma_{3m}+\frac{1}{4m}\text{ ، }\sigma_{3m-2}=\sigma_{3m}+\frac{1}{4m}+\frac{1}{4m-2}$$

ومن ثم فإنّ: $\lim_{m\to\infty}\sigma_{3m-1}=\frac{1}{2}\ln 2$ ، $\lim_{m\to\infty}\sigma_{3m-2}=\frac{1}{2}\ln 2$

وبذلك يكون: $\lim_{n\to\infty}\sigma_n=\frac{1}{2}\cdot\ln 2$

أيْ أن المتسلسلة الجديدة متقاربة ومجموعها $\frac{1}{2}\ln 2$.

إذن لا يمكن في الحالة العامة تغيير ترتيب حدود متسلسلة متقاربة شرطياً.

وبذلك يمكن القول إن تغيير ترتيب حدود متسلسلة متقاربة شرطياً قد يؤثر على تقاربها(أيْ قد تتحول إلى متسلسلة متباعدة) أو قد يؤثر على قيمة مجموعها (كما نتج قبل قليل).

هذا وأثبت ريمان أنه إذا أعطيتْ متسلسلة متقاربة شرطياً فيمكن إيجاد ،لأجل كل عدد مثل B ، تغيير مناسب في ترتيب حدودها ،بحيث يتم الحصول على متسلسلة جديدة، مجموعها يساوي B.

2-10- تمارين محلولة:

[1]القضايا الآتية صحيحة:

1- أيّ متتالية جزئية من متتالية متقاربة لابد وأن تكون متقاربة.

2- المتتالية الجزئية من متتالية متباعدة قد تكون متقاربة أو متباعدة.

3- تقارب متتالية جزئية من متتالية مطردة يضمن تقارب هذه المتتالية.

الحل:

1- من المعلوم أنه إذا كانت المتتالية (a_n) متقاربة من b فإن كل متتالية جزئية منها تكون متقاربة من b. [يترك البرهان للقارئ].

2- مثال: المتتالية $1,2,3,1,2,3,1,2,3,\cdots$ متباعدة. وبأخذ المتتالية الجزئية منها $1,2,1,2,1,2,\cdots$ فإنها متباعدة كذلك. بيد أنّ المتتالية الجزئية $3,3,3,\cdots$ متقاربة.

3- من المعلوم أنه إذا وجدت متتالية جزئية متقاربة مثل $\{a_{n_k}\}$ من متتالية مطردة $\{a_n\}$ فإن المتتالية $\{a_n\}$ تكون متقاربة. [يترك البرهان للقارئ].

[2]1- من الممكن أن يبدأ الجمع في المتسلسلة من الواحد أو من الصفر أو من أي عدد صحيح. اكتب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ ،التي يبدأ الجمع فيها من الواحد، بحيث يبدأ الجمع فيها من الصفر ثم من العدد 2 ثم من العدد 1 – ثم من العدد p حيث $p\geq 0$ ،ثم اكتب $\sum_{k=p}^{\infty}a_k$ بحيث يبدأ الجمع من الواحد.

2- برهن أن المتسلسلتين $\sum_{n=p}^{\infty}a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ متقاربتان معاً أو متباعدتان معاً ،وذلك بفرض $p\geq 0$.

الحل: 1- إن $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ تكتب بالشكل $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ ، وبالشكل $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-1}$ ،وبالشكل $\sum_{n=-1}^{\infty}\frac{1}{n+2}$ ،وبالشكل $\sum_{n=p}^{\infty}\frac{1}{n-p+1}$ ،وأيضاً: $\sum_{k=p}^{\infty}a_k=\sum_{k=1}^{\infty}a_{p+k-1}$.

2- بفرض أن $T_n=a_p+\cdots+a_{p+n-1}$ ، $S_n=a_1+\cdots+a_n$.

فإذا كان $p=0$ فإن $T_{n+1}=a_0+S_n$ ،ومن ثم فإنه إذا كان $S_n\to S\in\Re$ فإن $T_n\to a_0+S$. وبالعكس، إذا كان $T_n\to T\in\Re$ فإن $S_n\to T-a_0$. وهذا يعني أن المتسلسلتين المدروستين تتقاربان معاً أو تتباعدان معاً في الحالة $p=0$. وفي الحالة $p=1$ فالأمر صحيح أيضاً لأن $S_n=T_n$. وأخيراً، إذا كان $p>1$ فإن $T_n=S_{n+p-1}-S_{p-1}$ ما يؤكد أن $\{T_n\}$ و $\{S_n\}$ تتقاربان معاً أو تتباعدان معاً، أي أن المطلوب يكون محققاً أيضاً. وبذلك يتم إثبات الطلب الثاني من هذا التمرين.

نتيجة: إن حذف(أو إضافة) عدد منته من الحدود من(أو إلى) بداية متسلسلة لا يؤثر في تقاربها أو تباعدها، ولكنه قد يؤثر على قيمة المجموع في حالة التقارب.

[3]ناقش بالأمثلة اللازمة أن حاصل جمع متسلسلتين متباعدتين يكون متسلسلة متقاربة أو متباعدة.

الحل: المتسلسلتان $\sum_{n=1}^{\infty}1$ ، $\sum_{n=1}^{\infty}1$ متباعدتان، ومجموعهما المتسلسلة المتباعدة

$\sum_{n=1}^{\infty}(1+1)=\sum_{n=1}^{\infty}2$.

أما المتسلسلتان $\sum_{n=1}^{\infty}1$ و $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)$ فهما متباعدتان ولكن مجموعهما هو المتسلسلة المتقاربة $\sum_{n=1}^{\infty}[(-1)+1]=\sum_{n=1}^{\infty}0$.

[4]يقال عن متسلسلة مثل $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ إنها متراكبة(أو تلسكوبية) إذا أمكن التعبير عن حدها العام بالشكل الآتي:

$a_n=b_n-b_{n+1}$ ، $(n=1,2,\cdots)$

المطلوب: (1)لتكن $\{b_n\}$ و $\{a_n\}$ متتاليتين حقيقيتين بحيث أن: $a_n=b_n-b_{n+1}$ و $(n=1,2,\cdots)$. عندئذٍ يكون الشرط اللازم و الكافي كي تتقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ هو أن تتقارب المتتالية $\{b_n\}$. وفي هذه الحالة يكون: $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=b_1-L$ حيث $L=\lim_{n\to\infty}b_n$. [برهن ذلك].

(2)ادرس المتسلسلات $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2\cdot(n+1)^2}$ و $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln[(1+\frac{1}{n})^n\cdot(n+1)]}{\ln n^n\cdot\ln(n+1)^{n+1}}$،

$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n+1}{n}$

(3)**نتيجة:** لا يصح دوماً حذف الأقواس في المتسلسلات كما في المجاميع المنتهية. [ناقش هذا النص].

الحل: (1)بفرض أن $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$ فإنه يكون:

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(b_n-b_{n+1})=(b_1-b_2)+(b_2-b_3)+\cdots+(b_n-b_{n+1})=b_1-b_{n+1}$$

وهذا يبيّن أن المتتاليتين $\{b_n\}$ و $\{S_n\}$ تتقاربان معاً أو تتباعدان معاً. وفضلاً عن ذلك، إذا كان $b_n\to L$ فإن $S_n\to b_1-L$، أيْ أن $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=b_1-L$.

(2)بفرض أن a_n هو الحد العام للمتسلسلة المدروسة فإنه يكون:

$$a_n=\frac{2n+1}{n^2\cdot(n+1)^2}=\frac{(n+1)^2-n^2}{n^2\cdot(n+1)^2}=\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}=b_n-b_{n+1}$$

ولما كان $b_1=1$ و $b_n\to L=0$، فإن $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=1$

وأيضاً بالنسبة للمتسلسلة الثانية يكون:

$$a_n=\frac{\ln(n+1)^{n+1}-\ln n^n}{\ln n^n\cdot\ln(n+1)^{n+1}}=\frac{1}{\ln n^n}-\frac{1}{\ln(n+1)^{n+1}}=b_n-b_{n+1},\ n\geq 2$$

ولما كان $b_2=\frac{1}{\ln 4}$، فإن $b_n=\frac{1}{n\cdot\ln n}\to L=0$ $\sum_{n=2}^{\infty}a_n=\frac{1}{\ln 4}$

أما بالنسبة للمتسلسلة الثالثة فيكون:

$$a_n = \ln\frac{n+1}{n} = \ln(n+1) - \ln n = (-\ln n) - [-\ln(n+1)] = b_n - b_{n+1}$$

ولما كان $b_n = -\ln n \to -\infty$ فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ تكون متباعدة.

(3)لو تم حذف الأقواس و إجراء الإختصارات التي أنجزت في حالة المجاميع المنتهية $\sum_{k=1}^{n}(b_k - b_{k+1}) = b_1 - b_{n+1}$ بحيث أمكن القيام بهذه العمليات جميعها على المتسلسلة $\sum_{k=1}^{\infty}(b_k - b_{k+1})$ فإن نتيجة الجمع يمكن القول إنها b_1 الأمر الذي لا يصح، وفق الطلب(1)، إلا إذا كان $b_n \to 0$.

[5] (1)ليكن $a_n \geq 0$ و $b_n \geq 0$ من أجل جميع قيم n ،حيث $n = 1,2,3,\cdots$.
وبفرض وجود عدد موجب $c > 0$ بحيث $a_n \leq c \cdot b_n$ من أجل جميع قيم n.
عندئذٍ فإن تقارب المتسلسلة $\sum b_n$ يقتضي تقارب المتسلسلة $\sum a_n$.[برهن ذلك]

(2)استخدم الطلب (1) في إثبات تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$.

(3)إن نص الطلب (1) يسمى [معيار المقارنة]وهو يُكافئ النص الآتي:
ليكن $a_n \geq 0$ و $b_n \geq 0$ من أجل جميع قيم n. وبفرض وجود $c > 0$ بحيث $a_n \leq c \cdot b_n$ من أجل جميع قيم n. عندئذٍ فإن تباعد المتسلسلة $\sum a_n$ يقتضي تباعد المتسلسلة $\sum b_n$. [برهن ذلك]

(4)لما كان حذف عدد منته من الحدود في بداية متسلسلة لا يغير تقارب أو تباعد المتسلسلة فبيّن أن النصين المذكورين في الطلبين (1)و(3)يبقيان صحيحين إذا

تحققت المتراجحة $a_n \le c \cdot b_n$ بدءاً من عدد طبيعي مثل p ،ليس بالضرورة مساوياً 1.

ملاحظة مهمة: إنّ هذا هو ما يتم استخدامه في المناقشات المتعلقة بهذا الشأن عموماً.

(5)ليكن $a_n > 0$ و $b_n > 0$ من أجل $n \ge 1$. فإذا كان $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{b_{n+1}}{b_n}$ من أجل $n \ge 1$ ، فإن تقارب $\sum b_n$ يقتضي تقارب $\sum a_n$.

(6)ليكن $a_n > 0$ و $b_n > 0$ من أجل $n \ge 1$. وبفرض أن $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c$ ،حيث $0 \le c < +\infty$. عندئذٍ:

إذا كان $c > 0$ فإن الشرط اللازم و الكافي لتقارب $\sum a_n$ هو تقارب $\sum b_n$. أما إذا كان $c = 0$ فإن تقارب $\sum b_n$ يقتضي تقارب $\sum a_n$.

"يسمى هذا النص [معيار نهاية النسبة]". [يُطلب البرهان على صحته].

(7)أثبت تقارب المتسلسلة $\sum \frac{1}{n^2+n}$ بتحويلها إلى متسلسلة متراكبة، ثم استخدم معيار نهاية النسبة في إثبات أن $\sum \frac{1}{n^2}$ تكون متقاربة، ثم استخدم معيار المقارنة في إثبات أن $\sum \frac{1}{n^s}$ تكون متقاربة عندما $s \ge 2$.

(8)[معيار التكامل]: ليكن f تابعاً معرفاً على المجال $I = [1,+\infty[$. وبفرض أن f موجب و مستمر و متناقص على I. وبفرض أن:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) \text{ ، } T_n = \int_1^n f(x)dx$$

عندئذٍ تكون المتتاليتان $\{T_n\}$ و $\{S_n\}$ متقاربتين معاً أو متباعدتين معاً. [برهن ذلك].

(9)ادرس،بالإستفادة من معيار التكامل، المتسلسلة $\sum \frac{1}{n^s}$ حيث s عدد حقيقي ما.

ملاحظة مهمة: إن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ تكون متقاربة عندما و فقط عندما $s > 1$.

وحينئذٍ يرمز لمجموعها بالرمز $\Im(s)$ الذي يدعى [تابع زيتا لريمان]، ومن ثم فإنّ: $(s > 1)$ و $\Im(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$

الحل: (1)كان قد تم إثبات صحة هذا النص من أجل $c = 1$. ولبرهانه من أجل $c > 0$ يكفي ملاحظة أن الشرط اللازم و الكافي لتقارب $\sum c \cdot b_n$ هو تقارب $\sum b_n$.

(2)أيا كان $n \geq 1$ فإن $n! \geq 2^{n-1}$، ومن ثم فإن $\frac{1}{n!} \leq (\frac{1}{2})^{n-1}$. ولما كانت $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^{n-1}$ متقاربة فإن $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ متقاربة [ومجموعها لا يتجاوز 2(لماذا؟)]

(3)بنقض الفرض [و يترك البرهان للقارئ].

(4)إنظر المسألة[2].

(5)من الفرض يكون:

$$\frac{a_2}{a_1} \leq \frac{b_2}{b_1}, \frac{a_3}{a_2} \leq \frac{b_3}{b_2}, \cdots, \frac{a_n}{a_{n-1}} \leq \frac{b_n}{b_{n-1}}$$

ومنه، بضرب هذه المتراجحات، يكون: $\frac{a_n}{a_1} \le \frac{b_n}{b_1}$، أي: $a_n \le c \cdot b_n$، حيث $c = \frac{a_1}{b_1} > 0$. وباستخدام معيار المقارنة يتم إثبات المطلوب في (5).

(6)إذا كان $0 < c < \infty$ يترك البرهان للقارئ لأنه موجود في إحدى الفقرات السابقة.

والآن، بفرض $c = 0$ يكون $\frac{a_n}{b_n} \to 0$. ومنه، من أجل $\varepsilon = 1$ يوجد عدد طبيعي مثل N بحيث يكون $\left|\frac{a_n}{b_n}\right| < 1$ عندما $n \ge N$، أي أن $\frac{a_n}{b_n} < 1$ ومن ثم فإن $a_n < b_n$ عندما $n \ge N$ [لأن $b_n > 0$، $a_n > 0$]. وباستخدام معيار المقارنة يتم إثبات المطلوب في (6).

$$a_n = \frac{1}{n^2+n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = b_n - b_{n+1} \qquad (7)$$

$$b_n = \frac{1}{n} \to 0 = L \Rightarrow \sum a_n = b_1 - L = 1 - 0 = 1 \qquad \text{(متقاربة)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2+n}} = 1 = c > 0 \Rightarrow \sum \frac{1}{n^2} \qquad \text{(متقاربة)}$$

عندما $s \ge 2$ يكون $\frac{1}{n^s} \le \frac{1}{n^2}$ ومن ثم فإن $\sum \frac{1}{n^s}$ تكون متقاربة حينئذٍ.

(8)ليكن $n > 1$. ثم بأخذ المجال $[1,n]$ وتقسيمه إلى n قطعة مستقيمة متساوية في الطول بحيث أن طول كل قطعة منها يساوي واحدة القياس المستعملة، فإنه

سيظهر تابعان درجيان، أحدهما يقع تحت منحني التابع f ، و الآخر يقع فوق منحني التابع f. ومن ثم يمكن كتابة العلاقة:

$$\sum_{k=2}^{n} f(k) \le \int_{1}^{n} f(x)dx \le \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$$

أيْ:

$$S_n - f(1) \le T_n \le S_{n-1}$$

ولما كانت المتتاليتان $\{T_n\}$ و $\{S_n\}$ متزايدتين. فإن العلاقة الأخيرة تبين أنهما محدودتان من الأعلى معاً، أو غير محدودتين من الأعلى معاً. لذا فإن هاتين المتتاليتين تتقاربان معاً أو تتباعدان معاً.

(9)بفرض $S \in \Re$ ،وبأخذ التابع $f(x) = \frac{1}{x^s}$ المعرف على $I = [1,\infty[$ ، فيكون f موجباً و مستمراً على I. كما إنّ:

$$T_n = \int_{1}^{n} \frac{dx}{x^s} = \begin{cases} \frac{n^{1-s}-1}{1-s} & (s \neq 1 \text{ عندما}) \\ \ln n & (s = 1 \text{ عندما}) \end{cases}$$

فإذا كان $s > 1$ فإن f يكون متناقصاً على I ويكون $n^{1-s} \to 0$ ، ومن ثم فإن المتتالية $\{T_n\}$ تكون متقاربة. ومنه ،حسب معيار التكامل، يمكن القول إن المتسلسلة $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ تكون متقاربة عندما $s > 1$.

أما في الحالة $s \le 1$ فإن $T_n \to \infty$ الأمر الذي يعني أن المتسلسلة المدروسة $\sum \frac{1}{n^s}$ تكون متباعدة.

[6] 1- ادرس المتسلسلتين الآتيتين من حيث التقارب أو التباعد:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})^{n^2}\ ،1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{1}{2n+1}$$

2- ليكن $a_n>0$ و $b_n>0$ من أجل $n\geq 1$. وبفرض وجود عددين حقيقيين مثل m,M بحيث يكون $0<m\leq\frac{a_n}{b_n}\leq M$ من أجل $n\geq 1$. عندئذٍ تكون المتسلسلتان $\sum a_n$ و $\sum b_n$ من نوع واحد [برهن ذلك].

الحل: 1-

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e>1$$

فالمتسلسلة $\sum_{1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})n^2$ متباعدة حسب قاعدة كوشي.

إذا طبقت قاعدة دالامبير من أجل المتسلسلة الثانية فإن $D=1$ فلا تفيد هذه القاعدة في تقصي تقارب او تباعد المتسلسلة المدروسة. ولكن بتطبيق اختبار راب يكون:

$$r=\lim_{n\to\infty}n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)=\lim_{n\to\infty}\frac{n(6n-1)}{(2n-1)^2}=\frac{3}{2}>1$$

فالمتسلسلة المدروسة تكون متقاربة.

2- بأخذ العلاقة: $mb_n\leq a_n\leq Mb_n$ حيث $n\geq 1$

ثم بالجمع منذ $n=1$ حتى n ينتج أن: $mB_n\leq A_n\leq MB_n$ حيث $A_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$ ،

$B_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$. ومنه: $m\lim_{n\to\infty}B_n\leq\lim_{n\to\infty}A_n\leq M\cdot\lim_{n\to\infty}B_n$

فإن كانت $\sum b_n$ متقاربة فإن $B_n\to B\in\Re$ ،ومن ثم فإن $\{A_n\}$ تكون متقاربة، ما يدل على أن $\sum a_n$ تكون متقاربة.

وإذا كانت $\sum a_n$ متقاربة فإن $A_n \to A \in \Re$، ومن ثم فإن $\{B_n\}$ تكون متقاربة، ما يدل على أن $\sum b_n$ تكون متقاربة.

فتقارب $\sum a_n$ يكافئ تقارب $\sum b_n$، ومن ثم فإن التباعد يكافئ التباعد أيْ أن المتسلسلتين من نوع واحد.

[7][معيار كومير] بفرض أنّ $a_n > 0$ و $b_n > 0$، وأنّ $\sum b_n$ متباعدة. ولتكن

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{b_n}\cdot\frac{a_n}{a_{n+1}}-\frac{1}{b_{n+1}}\right)=k$$

عندئذٍ تكون $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة عندما $k > 0$، وتكون $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متباعدة عندما $k < 0$.

الحل: بفرض $k > 0$. عندها يوجد N بحيث يكون:

$$\frac{1}{b_n}\cdot\frac{a_n}{a_{n+1}}-\frac{1}{b_{n+1}}>\frac{k}{2}$$ عندما $n \geq N$.

ومنه $$a_{n+1}<\frac{2}{k}\left(\frac{a_n}{b_n}-\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\right)$$ عندما $n \geq N$.

وهكذا فإنّ: $$\sum_{i=N+1}^{n+1} a_i<\frac{2}{k}\left(\frac{a_N}{b_N}-\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\right)<\frac{2}{k}\cdot\frac{a_N}{b_N}$$

إذن، من أجل المتسلسلة $\sum a_n$، تكون متتالية المجاميع الجزئية $\{A_n\}$ محدودة، ومن ثم فإن هذه المتسلسلة تكون متقاربة. ومن جهة ثانية، بفرض $k < 0$. عندها يمكن إيجاد N بحيث يكون:

$$\frac{1}{b_n}\cdot\frac{a_n}{a_{n+1}}-\frac{1}{b_{n+1}}<0$$ عندما $n \geq N$، أيْ:

$a_{n+1} > \frac{a_n}{b_n} \cdot b_{n+1}$ عندما $n \geq N$. ومنه:

$$a_{N+1} > \frac{a_N}{b_N} \cdot b_{N+1}$$

$$a_{N+2} > \frac{a_{N+1}}{b_{N+1}} \cdot b_{N+2} > \frac{a_N}{b_N} \cdot b_{N+2}$$

.....

$$a_{N+m} > \frac{a_N}{b_N} \cdot b_{N+m}$$

ومنه ينتج الطلوب بالإستفادة من معيار المقارنة طالما أن $\sum b_n$ متباعدة.

[8] [معيار برتراند] لتكن $\sum a_n$ متسلسلة بحيث $a_n > 0$. وبفرض أنّ:

$$B = \lim_{n\to\infty}\{\ln n[n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) - 1]\}$$

حيث B قد يكون عدداً منتهياً أو غير منته. عندئذٍ:

إذا كان $B > 1$ فإن المتسلسلة المدروسة تكون متقاربة.

أما إذا كان $B < 1$ فإن المتسلسلة المدروسة تكون متباعدة.

الحل: بفرض $b_n = \frac{1}{n \cdot \ln n}$ (حيث $n \geq 2$). عندئذٍ $a_n > 0$ و $b_n > 0$، $\sum b_n$ متباعدة[لماذا؟]. ومنه، حسب الفرض وحسب معيار كومير، يكون:

$$\frac{1}{b_n}\cdot\frac{a_n}{a_{n+1}}-\frac{1}{b_{n+1}}=$$

$$=n\cdot\ln n\cdot\frac{a_n}{a_{n+1}}-n\cdot\ln n \quad \ln n-(n+1)\ln(n+1)+(n+1)\ln n=$$

$$=[n\cdot\ln n\cdot\frac{a_n}{a_{n+1}} \quad \ln n]-\ln(1+\frac{1}{n})^{n+1}$$

ومنه، بأخذ نهاية الطرفين عندما $n\to\infty$، يكون (حسب الرموز المستخدمة في معيار كومير وفي الفرض لمعيار برتراند)

$$K=\quad -1$$

ومنه $\sum a_n$ تكون متقار[illegible]، أي عندما $B>1$. وأيضاً، $\sum a_n$ تكون متباعدة عندما $0<\chi<$ [illegible] $B<1$.

[9] [معيار عام] لتكن $\sum a_n$ متسلسلة بحيث $a_n>0$. وبفرض أنه أمكن تمثيل $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ على الشكل: $\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lambda+\frac{\chi}{n}+\frac{\varphi_n}{n^2}$

حيث λ,χ ثابتان حقيقيان و φ_n مقدار محدود(أي أن هنالك عددا موجبا L بحيث يكون $|\varphi_n|\le L$). عندئذٍ:

إذا كان $(\lambda>1)$، أو كان $(\chi>1,\lambda=1)$ فإن المتسلسلة المدروسة تكون متقاربة.

أما إذا كان $(\lambda<1)$، أو كان $(\chi\le 1,\lambda=1)$ فإن المتسلسلة المدروسة تكون متباعدة.

الحل: من الواضح أن $\frac{a_{n+1}}{a_n}\to\frac{1}{\lambda}$. ومنه، إذا كان $(\lambda>1)$ فحسب قاعدة دالامبير تكون $\sum a_n$ متقاربة. أما إذا كان $(\lambda<1)$ فإن $\sum a_n$ تكون متباعدة.

لذا يمكن إفتراض $\lambda=1$. عندها:

$$n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)=\chi+\frac{\varphi_n}{n}\to r=\chi$$

ومن ثم،حسب اختبار راب، يكون:

إذا كان $\chi>1$ فالمتسلسلة المدروسة تكون متقاربة.

أما إذا كان $\chi<1$ فالمتسلسلة المدروسة تكون متباعدة.

وأخيراً، بفرض $\lambda=1$ ، $\chi=1$. عندئذٍ:

$$\ln n[n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)-1]=\frac{\ln n}{n}\varphi_n$$

ولما كان $\frac{\ln n}{n}\to 0$ وكان φ_n محدوداً فإن $B=0<1$ وهذا يعني ،حسب معيار برتراند، أن المتسلسلة المدروسة تكون متباعدة(في هذه الحالة).

[10] ادرس المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}]^k$ ،حيث $k>0$ ، وذلك من حيث التقارب أو التباعد.

الحل:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=(\frac{2n}{2n-1})^k=(1-\frac{1}{2n})^{-k}=1+\frac{k}{2n}+\frac{k(k+1)}{2!(2n)^2}+O(\frac{1}{n^2})$$

وذلك باستخدام دستور تايلور. ومنه:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{\frac{k}{2}}{n}+\frac{\varphi_n}{n^2}$$

حيث $\lambda=1$ ، $\chi=\frac{k}{2}>0$ ، φ_n محدود .

فإذا كان $\frac{k}{2} > 1$ أيْ $k > 2$ فالمتسلسلة المدروسة تكون متقاربة.

و إذا كان $\frac{k}{2} \le 1$ أيْ $k \le 2$ فالمتسلسلة المدروسة تكون متباعدة.

[11] أثبت أن المتسلسلة $\sum_{1}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{\ln n}{n}$ متقاربة.

الحل: إن هذه المتسلسلة متناوبة ،وحدها العام يسعى إلى الصفر لأن $\frac{\ln n}{n} \to 0$ ، وحدودها تتناقص بالقيمة المطلقة للأسباب الآتية:

إن مشتق التابع $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ ،المعرف على المجال المفتوح $]0,+\infty[$ ،هو $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$. وعندما $x > e$ يكون هذا المشتق سالباً، ومن ثم يكون f متناقصاً. وبوجه خاص، فإن $f(n) > f(n+1)$ عندما $n \ge 3$.

إذن فالمتسلسلة المدروسة تكون متقاربة حسب اختبار ليبنتز.

[12] أثبت أن المتسلسلة $\sum_{1}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{\sqrt{n}}$ متقاربة شرطياً.

الحل: من الواضح أن $\cos n\pi = (-1)^n$ من أجل $n \ge 1$. ومنه:

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{\sqrt{n}} = \sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

و هذه متسلسلة متناوبة، حدودها تتناقص بالقيمة المطلقة، وحدها العام يسعى إلى الصفر ،فهي متقاربة حسب اختبار ليبنتز.

أما متسلسلة القيم المطلقة لهذه المتسلسلة فهي $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$.

وهذه متسلسلة متباعدة.

إذن فالمتسلسلة المدروسة متقاربة شرطياً.

[1.3] [دستور آبل]: لتكن $\{b_n\}$ و $\{a_n\}$ متتاليتين. ولتكن $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. عندئذٍ يكون:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot b_k = A_n \cdot b_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} A_k \cdot (b_k - b_{k+1})$$

الحل: إنّ: $a_k = A_k - A_{k-1}$ ، $(k \geq 1)$ ،وذلك بإفتراض أن $A_0 = 0$. ومنه:

$$\sum_{1}^{n} a_k \cdot b_k = \sum_{1}^{n} (A_k - A_{k-1}) \cdot b_k =$$

$$= \sum_{1}^{n} A_k \cdot b_k - \sum_{k=1}^{n} A_k \cdot b_{k+1} + A_n \cdot b_{n+1}$$

$$= A_n \cdot b_{n+1} + \sum_{1}^{n} A_k \cdot (b_k - b_{k+1})$$

[14][معيار ديريكليه]: لتكن $\sum a_n$ متسلسلة بحيث تشكل مجاميعها الجزئية متتالية محدودة. فإذا كانت $\{b_n\}$ متتالية متناقصة، تتقارب من الصفر، فإن المتسلسلة $\sum a_n \cdot b_n$ تكون متقاربة.

الحل: بما أن المتتالية $\{A_n\}$ ،حيث $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ ، محدودة، فيوجد عدد مثل $M > 0$ بحيث يكون $|A_n| \leq M$ من أجل $n \geq 1$. وبما أن $b_n \to 0$ فإنه، بفرض $\varepsilon > 0$ ،يوجد عدد مثل N بحيث يكون $|b_n| < \frac{\varepsilon}{M}$ عندما $n \geq N$.

يترتب على هذا أن المتراجحة $n \geq N$ تقتضي المتراجحة $|b_{n+1}| < \frac{\varepsilon}{M}$. ينجم عن هذا أنه إذا كان $n \geq N$ فإن $|A_n \cdot b_{n+1}| < \varepsilon$. لذا فإن $A_n \cdot b_{n+1} \to 0$.

ولبرهان تقارب المتسلسلة $\sum a_n \cdot b_n$ يكفي تبيان أن المتسلسلة $\sum A_k \cdot (b_k - b_{k+1})$ متقاربة، والإستفادة من دستور آبل:

بما أن $\{b_n\}$ متناقصة فإن: $|A_n \cdot (b_k - b_{n+1})| \leq M \cdot (b_k - b_{k+1})$

و بما أن $\{b_n\}$ متقاربة فإن $\sum (b_k - b_{k+1})$ تكون متقاربة، ومن ثم فإن $\sum M \cdot (b_k - b_{k+1})$ تكون متقاربة، ومن ثم فإن $\sum | A_k \cdot (b_k - b_{k+1})|$ تكون متقاربة، وهذا يعني أنّ $\sum A_k \cdot (b_k - b_{k+1})$ تكونمتقاربة بالإطلاق ،ومن ثم فهي تكون متقاربة.

[15][معيار آبل]:لتكن $\sum a_n$ متسلسلة متقاربة،ولتكن $\{b_n\}$ متتالية مطردة متقاربة. عندئذٍ تكون $\sum a_n b_n$ متسلسلة متقاربة.

الحل: إن تقارب $\sum a_n$ يقتضي تقارب متتالية مجاميعها الجزئية $\{A_n\}$، ومن ثم تقارب المتتالية $\{A_n \cdot b_{n+1}\}$. وكذلك فإن المتتالية $\{A_n\}$ تكون محدودة. ومنه،يمكن إفتراض أن $A_n \cdot b_{n+1} \to r$ وأن $|A_n| \leq M$ ،حيث $r \in \Re$ و $M > 0$ ، ومن ثم فلبرهان تقارب $\sum a_n b_n$ يكفي تبيان أن $\sum A_k \cdot (b_k - b_{k+1})$ متقاربة، والإستفادة من دستور آبل:

من الواضح أنّ: $|A_n \cdot (b_k - b_{n+1})| \leq M \cdot |b_k - b_{k+1}|$

وبما أن $\{b_n\}$ مطردة فإنّ $|b_k - b_{k+1}| = b_k - b_{k+1}$ إذا كانت $\{b_n\}$ متناقصة، وإنّ $|b_k - b_{k+1}| = b_{k+1} - b_k = -(b_k - b_{k+1})$ إذا كانت $\{b_n\}$ متزايدة.

ولما كانت $\sum (b_k - b_{k+1})$ و $\sum -(b_k - b_{k+1})$ متقاربتين فإن $\sum | A_k \cdot (b_k - b_{k+1})|$ تكون متقاربة، ومن ثم فإن $\sum A_k \cdot (b_k - b_{k+1})$ متقاربة.

[16] 1- ادرس المتسلسلة الآتية من حيث التقارب أو التباعد:

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot b_n$ إذا علمت أن المتتالية $\{b_n\}$ متناقصة ومتقاربة من الصفر.

2- لتكن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}$ حيث $\{a_n\}$ متتالية كيفيةمن الأعداد الحقيقية .فإذا علمت أن هذه المتسلسلة متقاربة من أجل قيمة ما للمقدار x ولتكن kفاثبت أنها متقاربة من أجل أي قيمة للمقدار x أكبر من k.

الحل: 1- إن متتالية المجاميع الجزئية للمتسلسلة $\sum(-1)^n$ هي متتالية محدودة. وبما أن $\{b_n\}$ متناقصة، تتقارب من الصفر، فإنه ينتج حسب معيار ديريكليه أن المتسلسلة $\sum(-1)^{n-1}\cdot b_n$ تكون متقاربة.

نتيجة: إن اختبار ليبنتز يمثل حالة خاصة من معيار ديريكليه.

2- المتسلسلة $\sum\frac{a_n}{n^k}$ متقاربة(فرضاً). وبفرض $x=m$ بحيث $m>k$. إن المتسلسلة $\sum\frac{a_n}{n^m}$ تنتج من المتسلسلة المتقاربة $\sum\frac{a_n}{n^k}$ بضرب حدها العام $\frac{a_n}{n^k}$ بالحد العام للمتتالية المطردة المتقاربة $\{\frac{1}{n^{m-k}}\}$. ومنه ينتج الطلوب إستناداً إلى معيار أبل.

[17] 1- إذا كانت $\sum b_n$ متقاربة بالإطلاق، وكانت $\{a_n\}$ محدودة فإن المتسلسلة $\sum a_n b_n$ تكون متقاربة بالإطلاق.

2- إذا كانت $\sum b_n$ متقاربة بالإطلاق، وكانت $\sum a_n$ متقاربة فإن المتسلسلة $\sum a_n b_n$ تكون متقاربة بالإطلاق.

3- اضرب مثالاً يبيّن أنه إذا كانت $\sum b_n$ متقاربة شرطياً، وكانت $\{a_n\}$ محدودة،فإن هذا لا يكفي لتقارب $\sum a_n b_n$.

الحل: 1- يوجد $M > 0$ بحيث يكون $|a_n| \le M$ وذلك لأن $\{a_n\}$ محدودة. وإن $\sum |b_n|$ متقاربة لأن $\sum b_n$ متقاربة بالإطلاق. ومنه، بفرض $\varepsilon > 0$، يوجد N بحيث يكون $\sum_{k=n+1}^{m} |b_k| < \frac{\varepsilon}{M}$ عندما $m \ge n \ge N$، ومن ثم فإنّ $\sum_{k=n+1}^{m} |a_n \cdot b_n| < \varepsilon$ عندما $m \ge n \ge N$. وهذا يعني تحقق شروط كوشي للتقارب المطلق للمتسلسلة $\sum a_n b_n$.

2- يكفي ملاحظة أن $a_n \to 0$ طالما أن $\sum a_n$ متقاربة، ومن ثم فإن $\{a_n\}$ محدودة. ومنه، حسب الطلب الأول، ينتج المطلوب.

3- بأخذ :

$$a_n = \begin{cases} 0 & (n = 2k) \\ 1 & (n = 2k-1) \end{cases} \quad \text{و} \quad b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

فتكون $\sum b_n$ متقاربة شرطياً، $\{a_n\}$ محدودة، ولكن $\sum a_n b_n = \sum \frac{1}{2n-1}$ متسلسلة متباعدة.

[18] بفرض $\{a_n\}$ متناقصة وتسعى للصفر، $x \ne 2\pi k$ فأثبت أن كلاً من المتسلسلتين الآتيتين تكون متقاربة:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \quad ، \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$$

الحل: يمكن إثبات العلاقتين:

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \sin kx \right| = \left| \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}} \right| \le \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|} \le M$$

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\cos kx\right| = \left|\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x-\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}\right| \le \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|} \le M$$

وذلك بضرب كل مجموع في اليسار بالحد $2\sin\frac{x}{2}$ والتقسيم عليه وباستخدام دساتير المثلثات. ومنه فكل من المتسلسلتين $\sum \sin nx$ و $\sum \cos nx$ تكون ذات مجاميع جزئية محدودة. ومنه، حسب الفرض و إستناداً إلى معيار ديريكليه، ينتج أن المتسلسلتين المذكورتين في نص التمرين هما متسلسلتان متقاربتان.

[19] (1)بفرض $a_1 \ge a_2 \ge a_3 \ge \cdots \ge 0$. عندئذٍ:

تتقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ عندما وفقط عندما تتقارب المتسلسلة $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \cdot a_{2^k}$

(2)إذا كان $p > 1$ فإن $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\cdot(\ln n)^p}$ تتقارب. أما إذا كان $p \le 1$ فإن هذه المتسلسلة تتباعد

(3)أثبت أن المتسلسلة $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n\ln n\cdot \ln\ln n}$ متباعدة، وأنّ $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n\ln n\cdot(\ln\ln n)^2}$ متقاربة .

الحل: (1)بفرض:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

$$t_k = a_1 + 2a_2 + \cdots + 2^k a_{2^k}$$

ومنه، بفرض $n < 2^k$، يكون:

$$S_n \le a_1 + (a_2 + a_3) + \cdots + (a_{2^k} + \cdots + a_{2^{k+1}-1}) \le t_k$$

وأيضاً ،بفرض $n > 2^k$، يكون:

$$S_n \geq a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + \cdots + (a_{2^{k-1}+1} + \cdots + a_{2^k}) \geq$$

$$\geq \frac{1}{2} a_1 + a_2 + 2a_4 + \cdots + 2^{k-1} a_{2^k} = \frac{1}{2} t_k$$

ثم باستخدام النص الآتي يتم حل الطلب الأول:

تتقارب المتسلسلة ذات الحدود غير السالبة عندما وفقط عندما تكون متتالية مجاميعها الجزئية محدودة.

(2)من المعروف أن $\ln n$ متزايد، ومن ثم فإن $\frac{1}{n \cdot \ln n}$ متناقص. ومنه يمكن تطبيق مضمون الطلب(1)على المتسلسلة المدروسة فيكون:

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \cdot \frac{1}{2^k \cdot (\ln 2^k)^p} = \sum \frac{1}{(k \cdot \ln 2)^p} = \frac{1}{(\ln 2)^p} \sum \frac{1}{k^p}$$

ومن المعلوم أن متسلسلة ريمان $\sum \frac{1}{k^p}$ تتقارب عندما $p > 1$ ، وتتباعد عندما $p \leq 1$.

ومنه ينتج حل الطلب الثاني.

(3)يترك للقارئ.

[20] (1)بفرض (c_n) متتالية بحيث $c_n > 0$. عندئذٍ:

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} \quad \text{(i)}$$

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} \leq \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n} \quad \text{(ii)}$$

(2)ادرس المتسلسلة $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots$

(3)ادرس المتسلسلة $\frac{1}{2}+1+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{32}+\frac{1}{16}+\frac{1}{128}+\frac{1}{64}+\cdots$

الحل: (1)(i) بفرض $\alpha=\limsup_{n\to\infty}\frac{c_{n+1}}{c_n}$. فإذا كان $\alpha=+\infty$ فإن المطلوب يكون محققاً. لذا يمكن إفتراض أن α محدود. ومنه، يمكن اختيار $\beta>\alpha$. ومنه يوجد عدد طبيعي مثل N بحيث يكون: $\frac{c_{n+1}}{c_n}\le\beta$ عندما $n\ge N$. وبشكل خاص، من أجل أيّ $p>0$ يكون:

$$c_{N+k+1}\le\beta\cdot c_{N+k}\ (k=0,1,\cdots,p-1)$$

وبضرب هذه المتراجحات ينتج: $c_{N+p}\le\beta^p\cdot c_N$، أو:

$$c_n\le c_N\beta^{-N}\cdot\beta^n \text{ عندما } n\ge N$$

ومن ثم فإنّ: $\sqrt[n]{c_n}\le\sqrt[n]{c_N\beta^{-N}}\cdot\beta$

ومنه: $\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{c_n}\le\beta$

ومنه، بملاحظة أن المتراجحة الأخيرة محققة من أجل كل β يحقق الشرط $\beta\succ\alpha$، يكون: $\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{c_n}\le\alpha$

(ii) يبرهن بشكل مماثل لبرهان(i) ويترك البرهان للقارئ.

(2)يمكن ملاحظة الآتي:

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim(\frac{2}{3})^n=0$$

$$\liminf\sqrt[n]{a_n}=\lim\sqrt[2n]{\frac{1}{3^n}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\limsup \sqrt[n]{a_n} = \lim \sqrt[2n]{\frac{1}{3^n}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim(\frac{3}{2})^n = +\infty$$

ومنه، حسب اختبار كوشي(اختبار الجذر النوني) باستعمال النهاية العليا، يمكن القول إنّ المتسلسلة المدروسة تكون متقاربة. بينما يمكن ملاحظة أن اختبار دالامبير(اختبار النسبة) غير قابل للتطبيق.

(3) $\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{8}$ ، $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2$ ولكن $\lim \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2}$

فهي متقاربة حسب اختبار الجذر.

11-2- تمارين للحل:

(1)(i) ماهو نوع المتسلسلة الناتجة عن جمع متسلسلتين، إحداهما متقاربة والأخرى متباعدة؟

(ii) أثبت أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+(-1)^n \sqrt{n}}{1+n}$ متباعدة.

(2)أثبت أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \sin n\varphi$ متقاربة بالإطلاق.

(3)اضرب مثالاً يدل على أن حاصل جمع متسلسلتين متباعدتين يمكن أن يؤلف متسلسلة متقاربة.

[ارشاد: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2}$ و $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-n+1}{n^2}$]

(4)ادرس المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n} - \frac{1}{2^n})$ ،الجواب: متباعدة.

(5)ادرس المتسلسلة الآتية بثلاث طرائق مختلفة، إحداها باستخدام اختبار كوشي التكاملي: $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot e^{-n^2}$ ،الجواب: متقاربة.

(6)هل المتسلسلة الأتية متقاربة بالإطلاق ام شرطياً، وذلك في كل مما يلي:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ ،الجواب: متقاربة شرطياً.

(2) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k}{k^3}$ ،الجواب: متقاربة بالإطلاق.

(3) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k\cdot(k-1)}}{3^k}$ ، الجواب: متقاربة بالإطلاق.

(4) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (1+\sqrt{n})}{\sqrt{n^2-2}}$ ، الجواب: متقاربة شرطياً.

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot n^n}{(2n+1)^n}$ ، الجواب: متقاربة بالإطلاق.

(6) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \sin\frac{\pi}{\sqrt{n}}$ ، الجواب: متقاربة شرطياً.

(7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot 2n \cdot (2n-1)}{(2n+1)^4}$ ، الجواب: متقاربة بالإطلاق.

(7)كم حداً يجب أن نأخذ من الحدود الأولى للمتسلسلة $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^3}$ كي نحصل على قيمة تقريبية لمجموعها بخطأ قيمته المطلقة أصغر من 0,001 [الجواب:9].

(8)أثبت أنه إذا كانت المتسلسلة $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ متقاربة بالإطلاق، فإن المتسلسلة $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k} \cdot a_k$ تكون متقاربة بالإطلاق.

(9)أوجد حاصل ضرب المتسلسلتين:

$$(k = 1,2,3,\cdots)\ 2+2+2^2+2^3+\cdots+2^k+\cdots$$

$$(k = 2,3,4,\cdots)\ -1+1+1+1+\cdots+1^k+\cdots$$

ثمّ بيّن فيما إذا كانت المتسلسلة الناتجة متقاربة أم لا.

[الجواب: المتسلسلة الناتجة هي:

$(k = 2,3,4,\cdots)\ -2+0+0+0+\cdots+0^k+\cdots$ وهي متقاربة بالإطلاق]

(10)أوجد مجموع المتسلسلة $1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}\cdots$ الناتجة عن عملية تغيير في مواقع حدود المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$. [الجواب: $\frac{3}{2}\ln 2$].

12-2لمحة موجزة عن المتسلسلات العددية العقدية(المركبة)اللانهائية:

تعاريف ونتائج: يقال عن المتتالية العددية اللانهائية $\Im_1, \Im_2, \Im_3, \cdots, \Im_n, \cdots$ التي حدودها أعداد عقدية، حيث $\Im_n = x_n + jy_n$ ، $(n = 1,2,3,\cdots)$ ، $j = i = \sqrt{-1}$ ، إنها متتالية عقدية (مركبة).

ويقال عن العدد العقدي(المركب) $c = a + j \cdot b$ إنه نهاية للمتتالية $\{\Im_n\}$ إذا كان يوجد ،من أجل كل عدد حقيقي $\varepsilon > 0$ ، عدد طبيعي $N_0 \neq 0$ بحيث يكون $|\Im_n - c| < \varepsilon$ عندما $n \geq N_0$. [إن $|\Im_n - c|$ هي القيمة المطلقة(أو الطويلة) للعدد العقدي $\Im_n - c$].

هذا ويتم التعبير عن ذلك بصورة رمزية وفق الآتي:

$$\lim_{n\to\infty} \Im_n = c \quad \text{أو} \quad \Im_n \underset{n\to\infty}{\to} c \quad \text{أو باختصار} \quad \Im_n \to c$$

وأيضاً، يكون العدد العقدي $c = a + j\cdot b$ نهاية للمتتالية العقدية:

$$x_1 + jy_1, x_2 + jy_2, \cdots, x_n + jy_n, \cdots$$

عندما وفقط عندما يكون $\lim_{n\to\infty} y_n = b$ ، $\lim_{n\to\infty} x_n = a$

يقال عن متسلسلة عددية لانهائية مثل: $\sum_{n=1}^{\infty} w_n = w_1 + w_2 + \cdots + w_n + \cdots$

إنها متسلسلة عقدية(مركبة) لانهائية إذا كانت حدودها أعداداً عقدية(مركبة).
ويسمى المجموع: $S_n = w_1 + w_2 + \cdots + w_n$ ،كالعادة، المجموع الجزئي النوني للمتسلسلة العقدية المفروضة، وتسمى المتتالية $\{S_n\}$ ،كالعادة، متتالية المجاميع الجزئية للمتسلسلة المدروسة.

تكون المتسلسلة العقدية $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ متقاربة، ومجموعها العدد العقدي S ، عندما وفقط عندما تكون لمتتالية مجاميعها الجزئية نهاية هي S ،أيْ عندما: $S_n \to S$.

وإذا لم تكن المتسلسلة العقدية متقاربة فيقال إنها متباعدة.

إن الشرط اللازم والكافي كي تتقارب المتسلسلة العقدية اللانهائية
$\sum_{n=1}^{\infty} w_n = \sum_{n=1}^{\infty} (u_n + jv_n)$ من المجموع $S = S' + jS''$ هو أن تكون كل من المتسلسلتين العدديتين الحقيقيتين اللانهائيتين متقاربة وفق الآتي:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S' \text{ ، } \sum_{n=1}^{\infty} v_n = S''$$

وبالإضافة إلى ذلك، تتقارب المتسلسلة العقدية $\sum_{n=1}^{\infty} w_n = \sum_{n=1}^{\infty} (u_n + jv_n)$ عندما تتقارب المتسلسلة الحقيقية $\sum_{n=1}^{\infty} |w_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{u_n^2 + v_n^2}$ المؤلفة من القيم المطلقة لحدود المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$. وفي هذه الحالة يقال 'ن المتسلسلة العقدية متقاربة بالإطلاق.

ويعرّف التقارب الشرطي بطريقة مماثلة لما سبق.

بعض اختبارات التقارب:

(1)إذا وجدت متسلسلة عددية حقيقية لانهائية متقاربة ذات حدود غير سالبة مثل $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ بحيث يكون $|w_n| \le a_n$ من أجل جميع قيم n، فإنّ المتسلسلة العددية العقدية اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ تكون متقاربة بالإطلاق، ومن ثم متقاربة.

(2)إذا كانت $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{w_{n+1}}{w_n}\right| = \ell < 1$ فإن المتسلسلة العددية العقدية اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ تكون متقاربة بالإطلاق [اختبار دالامبير].

(3)إذا كانت $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|w_n|} = \ell < 1$ فإن المتسلسلة العددية العقدية اللانهائية تكون متقاربة بالإطلاق [اختبار كوشي].

مثال(1): المتسلسلة العقدية $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2^n} + j \cdot \frac{1}{3^n})$ متقاربة، لأن المتسلسلتين $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$، $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ متقاربتان. أما مجموعها فهو: $S = S' + jS'' = 1 + \frac{1}{2} j$

مثال(2): المتسلسلة العقدية $\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{n}+\frac{(-1)^{n+1}}{2^n}j]$ متباعدة، لأن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ متباعدة،(في حين أن $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2^n}$ متقاربة).

مثال(3): المتسلسلة العقدية $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n+j\cos n}{n^3}$ متقاربة بالإطلاق (ومن ثم فهي متقاربة) للأسباب الآتية:

بفرض $w_n=\frac{\sin n+j\cos n}{n^3}$ يكون: $|w_n|=\sqrt{\frac{\sin^2 n}{n^6}+\frac{\cos^2 n}{n^6}}=\frac{1}{n^3}$

ومن ثم يتم الحصول على المتسلسلة المتقاربة: $\sum_{n=1}^{\infty}|w_n|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ وهذا يعني أن $\sum_{n=1}^{\infty}w_n$ متقاربة بالإطلاق.

مثال(4): المتسلسلة العقدية $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+j}$ متباعدة بملاحظة الأتي:

$w_n=\frac{1}{\sqrt{n}+j}=\frac{\sqrt{n}}{n+1}-\frac{j}{n+1}$، $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ متباعدة ، $(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+1}$ متباعدة)

مثال(5): المتسلسلة العقدية $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1+j}{2})^n$ متقاربة، بملاحظة الأتي:

$$1+j=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+j\sin\frac{\pi}{4})$$

$$w_n=(\frac{1+j}{2})^n=\frac{(\cos\frac{\pi}{4}+j\sin\frac{\pi}{4})^n}{(\sqrt{2})^n}=\frac{1}{2^{n/2}}\cdot(\cos\frac{n\pi}{4}+j\sin\frac{n\pi}{4})$$

ومن ثم $|w_n| = \frac{1}{2^{n/2}}$ فالمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}|w_n|$ متقاربة.

ومنه فالمتسلسلة المفروضة تكون متقاربة بالإطلاق، ومن ثم متقاربة.

2-13- تمارين للحل: [اصطلاح: $j = \sqrt{-1}$]:

هل المتسلسلة العقدية الآتية متقاربة أم متباعدة في كل مما يأتي:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{2^n} + \frac{(-1)^{n+1}}{3^n} j]$ ،الجواب: متقاربة

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{(-1)^{n+1}}{5^n} + \frac{j}{6^n}]$ ،الجواب: متقاربة

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{j}{7^n})$ ،الجواب: متباعدة

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{n-1}{n} + \frac{n}{n+1} j]$ ،الجواب: متباعدة

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{\sqrt{n^3+4n^2+5}} + \frac{j}{\sqrt[3]{n^2(n^2+2)}}]$ ،الجواب: متقاربة

(6) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n^3} + \frac{j}{n^2})$ ،الجواب: متقاربة

(7) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2^n}{n^n} + j \cdot \frac{n}{3^n})$ ،الجواب: متقاربة

(8) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{(-1)^n}{\sqrt[4]{n^5}} + j \cdot \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}})$ ،الجواب: متقاربة

(9) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos n^2}{n^3}+j\cdot\frac{\sin n\alpha}{n^4}\right)$ ،الجواب: متقاربة

(10) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2^n}{n(2^n+1)}+j\cdot\frac{1}{\sqrt{n(n+3)}}\right)$ ،الجواب: متباعدة

(11) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-\sqrt{n}}{n^2-n}+j\cdot\frac{n-\sqrt[3]{n}}{n^3-n}\right)$ ،الجواب: متباعدة

(12) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n+4}+j\cdot\frac{3n-1}{2n+1}\right)$ ،الجواب: متباعدة

(13) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+j)^n}{n!}$ ،الجواب: متقاربة بالإطلاق

(14) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!\cdot(e-j)^n}$ ،الجواب: متقاربة

(15) $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{j(2n+j)}{4n}\right]^n$ ،الجواب: متقاربة

(16) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot(2j-1)^n}{3^n}$ ،الجواب: متقاربة بالإطلاق

(17) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+j)\sqrt{n}}$ ،الجواب: متقاربة بالإطلاق

(18) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot(2+j)^n}{2^n}$ ،الجواب: متباعدة

(19) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot(3+j)^n}$ ،الجواب: متقاربة بالإطلاق

(20) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{j^n}{n}$ ،الجواب: متقاربة شرطياً

(21) $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n^2} + \frac{2j}{n^3})$ ،الجواب: متقاربة بالإطلاق

(22) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} + \frac{j}{n^2})$ ،الجواب: متباعدة

(23) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{a} - \frac{j}{n^3})$ ،حيث $a > 0$ ،،الجواب: متباعدة.

14-2- الجداءات غير المنتهية:

1- تعريف: لتكن $\{a_n\}$متتالية غير منتهية من الأعداد الحقيقية a_n، حيث $n \in N$، $n > 0$. عندئذ يسمى الرمز :

$\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ أو اختصاراً : $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_n \cdots (1)$

جداء غير منته فيكون: $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_n \cdots = \prod_{n=1}^{\infty} a_n$

وعندها توجد المتتالية $\{p_n\}$المعينة وفق الآتي:

$p_1 = a_1 , p_2 = a_1 \cdot a_2 , p_3 = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 , \ldots\ldots , p_n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \ldots a_n , \cdots$ (2)

تدعى المتتالية $\{p_n\}$**متتالية الجداءات الجزئية** للجداء غير المنتهي(1).

إذا كانت النهاية $\lim_{n \to \infty} p_n$موجودة و محدودة فيقال إنها تعبّر عن قيمة الجداء غير المنتهي $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ ، وفي هذه الحالة يمكن كتابة:

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n = p \quad if \quad p_n \xrightarrow[n\to\infty]{} p \in \Re$$

يقال عن الجداء $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ إنه **متقارب** إذا وفقط إذا كانت $\lim_{n\to\infty} p_n = p$ و $p \neq 0$ و $p \neq +\infty$ و $p \neq -\infty$. ويقال عن الجداء $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ إنه **متباعد** إذا وفقط إذا كانت $\lim_{n\to\infty} p_n = 0$ أو $\lim_{n\to\infty} p_n = \mp\infty$ أو $\lim_{n\to\infty} p_n$ غير موجودة.

من الواضح أنه يكفي ان يكون أحد المضاريب $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3, \cdots$ صفراً كي تكون قيمة الجداء(1) مساوية الصفر.

ملاحظة مهمة: يفترض أن يكون $a_n \neq 0$ من أجل كل قيمة لـ n، وذلك اعتباراً من الآن وحتى نهاية الفقرة المتعلقة بالجداءات غير المنتهية.

وبالإضافة إلى ذلك، فإن القول"ادرس الجداء" يعني "بيّن فيما إذا كان هذا الجداء متقارباً أم متباعداً ولماذا؟".

2- أمثلة:

[1] ادرس الجداء الآتي و أوجد قيمته في حالة تقاربه: $\prod_{n=2}^{\infty}(1-\frac{1}{n^2})$

الحل:

$$p_n = \prod_{k=2}^{n}(1-\frac{1}{k^2}) = \prod_{2}^{n}\frac{k^2-1}{k^2} = \prod_{2}^{n}\frac{(k-1)(k+1)}{k^2} =$$

$$= \frac{1.3}{2.2}\cdot\frac{2.4}{3.3}\cdot\frac{3.5}{4.4}\cdots\frac{(n-1)(n+1)}{n\cdot n} = \frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n} \to \frac{1}{2} = p$$

فالجداء غير المنتهي المدروس يكون متقارباً، وقيمته تساوي $\frac{1}{2}$.

[2] ادرس الجداء الآتي وأوجد قيمته في حالة تقاربه: $\prod_{n=1}^{\infty}\cos\frac{\varphi}{2^n}$ حيث $\varphi\neq 0$

الحل:

$$p_n=\cos\frac{\varphi}{2}\cdot\cos\frac{\varphi}{2^2}\cdots\cos\frac{\varphi}{2^{n-1}}\cdot\cos\frac{\varphi}{2^n}=$$

$$=\frac{\cos\frac{\varphi}{2}\cdots\cos\frac{\varphi}{2^{n-1}}\cdot 2\sin\frac{\varphi}{2^n}\cdot\cos\frac{\varphi}{2^n}}{2\sin\frac{\varphi}{2^n}}=$$

$$=\frac{\cos\frac{\varphi}{2}\cdots\cos\frac{\varphi}{2^{n-1}}\cdot\sin\frac{\varphi}{2^{n-1}}}{2\sin\frac{\varphi}{2^n}}=$$

$$=\frac{\cos\frac{\varphi}{2}\cdots\cos\frac{\varphi}{2^{n-2}}\cdot\sin\frac{\varphi}{2^{n-2}}}{2^2\cdot\sin\frac{\varphi}{2^n}}=\cdots=\frac{\sin\varphi}{2^n\cdot\sin\frac{\varphi}{2^n}}=$$

$$=\frac{\sin\varphi}{\varphi}\cdot\frac{\frac{\varphi}{2^n}}{\sin\frac{\varphi}{2^n}}\to\frac{\sin\varphi}{\varphi}=p$$

فقيمة الجداء غير المنتهي المدروس هي $\frac{\sin\varphi}{\varphi}$ وهذا الجداء يكون متقارباً عندما $\sin\varphi\neq 0$ وقيمته في حالة التقارب هي $\frac{\sin\varphi}{\varphi}$.

ملاحظة: باخذ $\varphi=\frac{\pi}{2}$ فإنه يكون:

$$\frac{2}{\pi}=\cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{8}\cdots\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}\cdots=\prod_{n=1}^{\infty}\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$$

ومنه بسبب كون: $\cos\frac{\pi}{4}=\sqrt{\frac{1}{2}}$ ، $\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\alpha}$

ينتج أنّ:

$$\frac{2}{\pi}=\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots$$

[3]ادرس الجداء الآتي وأوجد قيمته في حالة تقاربه: $\prod_{n=0}^{\infty}(1+x^{2^n})$

بافتراض $|x|<1$.

الحل:

$$\begin{aligned}(1-x)\cdot p_n&=(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})=\\&=(1-x^2)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})=\\&=(1-x^4)(1+x^4)(1+x^8)\cdots(1+x^{2^n})=\\&=(1-x^8)(1+x^8)\cdots(1+x^{2^n})=\cdots\cdots=1-x^{2^{n+1}}\to 1\end{aligned}$$

ومن ثم فإن $p=\frac{1}{1-x}$ فالجداء المدروس يكون متقارباً، وقيمته تساوي $\frac{1}{1-x}$.

[4]ادرس الجداء الآتي وأوجد قيمته في حالة تقاربه: $\prod_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}}}{1+\frac{1}{n}}$.

الحل:

$$p_n = \frac{e}{\frac{2}{1}} \cdot \frac{e^{1/2}}{\frac{3}{2}} \cdots \frac{e^{1/n}}{\frac{n+1}{n}} = \frac{e^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}}{\frac{2\cdot 3\cdots(n+1)}{1\cdot 2\cdots n}} = = \frac{e^{\ln n+c+\gamma_n}}{n+1}$$

حيث c هو ثابت أولر، وحيث $\lim_{n\to\infty}\gamma_n = 0$. ومنه:

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \cdot e^c \cdot e^{\gamma_n} = e^c = p$$

فالجداء المدروس يكون متقارباً، وقيمته تساوي e^c حيث c هو ثابت أولر الذي يمكن التعرف عليه في مضمون الملاحظة الآتية:

ملاحظة: إذا كان $-1 < x < \infty$ و $x \neq 0$ فإن $\ln(1+x) < x$.

وإذا كان $x = 0$ فإن $\ln(1+x) = x$. ومنه يكون:

$$\ln\frac{n+1}{n} = \ln(1+\frac{1}{n}) < \frac{1}{n}$$

$$-\ln\frac{n+1}{n} = +\ln\frac{n}{n+1} = +\ln(1-\frac{1}{n+1}) < \frac{-1}{n+1}$$

ومن ثم يكون:

$$\frac{1}{n} - \ln\frac{n+1}{n} < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n^2}$$

فالمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n} - \ln\frac{n+1}{n})$ تكون متقاربة.

وبفرض أن c يساوي مجموع هذه المتسلسلة المتقاربة، وبفرض أن

$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$، وبملاحظة أن:

$$\sum_{k=1}^{n} \ln \frac{k+1}{k} = \sum_{k=1}^{n} [\ln(k+1) - \ln k] = \ln(n+1)$$

فإنه يكون: $\sum_{k=1}^{n} (\frac{1}{k} - \ln \frac{k+1}{k}) = H_n - \ln(n+1) \to c$

ولكن $\ln(n+1) - \ln n = \ln(1+\frac{1}{n}) \to 0$ إذن يمكن كتابة الأتي:

$$\lim_{n\to\infty}(H_n - \ln n) = c$$

ومن ثم فإن: $H_n = \ln n + c + \gamma_n$ حيث $\gamma_n \to 0$.

وهنا تجدر الإشارة إلى أن $c \approx 0{,}4672$، وإلى أن نمو المجموع الجزئي H_n هو كنمو $\ln n$، وإلى أن $\lim_{n\to\infty} \frac{H_n}{\ln n} = 1$.

3- خواص أساسية للجداءات غير المنتهية:

مبرهنة(1): إذا كان الحد العام لمتتالية الجداءات الجزئية $p_n = \prod_{k=1}^{n} a_k$ للجداء غير المنتهي $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ فإن الشرط اللازم والكافي لتقارب هذا الجداء هو تقارب الجداء $\pi_n = \prod_{k=n+1}^{\infty} a_k$ أيا كان العدد الطبيعي n.

ملاحظة: يدعى π_n الباقي النوني للجداء غير المنتهي $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$.

الإثبات: واضح من العلاقة: $\prod_{k=1}^{n} a_k = p_n \cdot \pi_n$ وذلك من أجل n كيفي، ثم من أجل $n = 1$ (حيث $p_1 = a_1$).

مبرهنة(2): إذا كان الجداء غير المنتهي $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ متقارباً فإن الباقي النوني $\pi_n = \prod_{k=n+1}^{\infty} a_k$ لهذا الجداء يحقق الشرط $\lim_{n\to\infty} \pi_n = 1$.

الإثبات: إنّ $\pi_n = \frac{p}{p_n}$ و $p_n \to p \neq 0$ ومن ثم $\pi_n \to 1$.

مبرهنة(3): إذا كان الجداء غير المنتهي $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ متقارباً فإن $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.

الإثبات: حيث أن $p_n \to p$ و $p_{n-1} \to p$ فإن:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{p_{n-1}} = \frac{p}{p} = 1$$

ملاحظة: إن الشرط $a_n \to 1$ هو شرط لازم لتقارب الجداء $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ ولكنه غير كاف للتقارب بملاحظة المثال الآتي:

للجداء $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n}$ النهاية: $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$

ولكن: $p_n = \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdots \frac{n+1}{n} = n+1 \to \infty$

أيْ أنّ الجداء المدروس يكون متباعداً.

ملاحظة ثانية: استناداً إلى المبرهنة(3) فإن المضاريب a_n تكون موجبة بدءاً من عدد طبيعي مناسب. ومنه، حسب المبرهنة(1)، يمكن افتراض أن كل المضاريب a_n موجبة وذلك دون أن تمس عمومية المسألة.

وهذا ما سوف يفترض حتى نهاية الفقرة المتعلقة بالجداءات غير المنتهية.ومن جهة أخرى، فمن المناسب أحياناً كتابة a_n بالشكل $a_n = 1 + b_n$ فيأخذ الجداء غير المنتهي(المدروس) الشكل $\prod_{n=1}^{\infty}(1+b_n)$ ويكون الشرط اللازم للتقارب هو $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

مبرهنة(4): الشرط اللازم والكافي لتقارب الجداء $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ هو أن تتقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \ln a_n$.

وعند تحقق هذا الشرط فإنه يكون $p = e^S$ حيث S هو مجموع المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \ln a_n$.

الإثبات: بفرض $S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln a_k$ فإنه يكون: $p_n = e^{S_n}$ ، $S_n = \ln p_n$. ومنه يتحقق الآتي بعد ملاحظة أنّ التابعين اللوغاريتمي و الأسي مستمران:

إذا كان $\lim_{n\to\infty} p_n = p > 0$ فإن $\lim_{n\to\infty} S_n = \ln p$. وبالعكس، إذا كان $\lim_{n\to\infty} S_n = S \in \Re$ فإن $\lim_{n\to\infty} p_n = e^S$.

شكل آخر للمبرهنة(4)[انظر إلى مضمون الملاحظة الثانية]:

لتقارب الجداء غير المنتهي $\prod_{n=1}^{\infty}(1+b_n)$ يلزم ويكفي أن تتقارب المتسلسلة

$\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+b_n)$.

وعندها إذا كان مجموع المتسلسلة هو S فإن قيمة الجداء هي e^S.

الإثبات: بفرض S_n هو الحد العام لمتتالية المجاميع الجزئية للمتسلسلة فيكون:

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\ln(1+b_n)=\ln\prod_{k=1}^{n}(1+b_k)=\ln p_n$$

ومن ثم $p_n=e^{S_n}$ ومن ثم،بأخذ النهايات للطرفين، يكون: $p=e^S$. ولهذا فإن تقارب أيّ منهما يعني تقارب الأخر.

مبرهنة(5): إذا تحققت المتراجحة $p_n>0$ (أو $p_n<0$)، على الأقل من أجل قيم كبيرة للعدد الطبيعي n ،فإن الشرط اللازم والكافي كي يتقارب الجداء $\prod_{n=1}^{\infty}(1+b_n)$ هو أن تتقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$.

الإثبات: لنفرض أن الجداء $\prod_{n=1}^{\infty}(1+b_n)$ متقارب. عندئذٍ $\lim_{n\to\infty}b_n=0$ الأمر الذي ينتج عنه أن: $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+b_n)}{b_n}=1$

ولما كانت حدود المتسلسلتين $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+b_n)$ و $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ تحافظ على إشارة واحدة بدءاً من عدد طبيعي مناسب، فإنه يمكن القول إن هاتين المتسلسلتين متقاربتان معاً أو متباعدتان معاً.

ويتم إثبات العكس بصورة مشابهة، كل ذلك بالإستفادة من المبرهنة(4).

مبرهنة(6): إذا تقاربت المتسلسلتان $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ فإن الجداء $\prod_{n=1}^{\infty}(1+b_n)$ يكون متقارباً.

الإثبات: من المعلوم أن: $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - + \cdots$ ومنه:

$$\ln(1+b_n) = b_n - \frac{1}{2}b_n^2 + \frac{1}{3}b_n^3 - + \cdots = b_n - \frac{1}{2}b_n^2 + O(b_n^2)$$

$$b_n - \ln(1+b_n) = \frac{1}{2}b_n^2 - \frac{1}{3}b_n^3 + - \cdots = \frac{1}{2}b_n^2 + O(b_n^2)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n - \ln(1+b_n)}{b_n^2} = \lim_{n\to\infty}(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}b_n + - \cdots) = \frac{1}{2}$$

وهذا يعني أن المتسلسلتين $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ و $\sum_{n=1}^{\infty}[b_n - \ln(1+b_n)]$ من نوع واحد ،ومن ثم، حسب الفرض، تكون المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}[b_n - \ln(1+b_n)]$ متقاربة. ومنه، حسب الفرض ،تكون المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+b_n)$ متقاربة. ومنه فالجداء $\prod_{n=1}^{\infty}(1+b_n)$ يكون متقارباً حسب المبرهنة(4).

مبرهنة(7): الشرط اللازم والكافي كي تكون قيمة الجداء غير المنتهي $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ أو $\prod_{n=1}^{\infty}(1+b_n)$ مساوية للصفر هو أن تكون نهاية متتالية المجاميع الجزئية للمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\ln a_n$ أو $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+b_n)$ مساوية $-\infty$.

وبوجه خاص، فإن هذا يتم إذا كان $b_n < 0$ والمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متباعدة.

الإثبات: $S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln(1+b_k) = \ln \prod_{k=1}^{n} (1+b_k) = \ln p_n$

ومنه: $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \ln p_n$ وبهذا يمكن تحقيق الهدف المنشود بخصوص كل من لزوم الشرط وكفايته.

4- أمثلة:

[1] إذا كان α, β عددين حقيقيين بحيث يكون $\alpha > \beta$ فإن قيمة الجداء غير المنتهي $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{\beta+n}{\alpha+n}$ تساوي الصفر.

الحل: $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{\beta+n}{\alpha+n} = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{\alpha-\beta}{\alpha+n})$

وبملاحظة أن $-\frac{\alpha-\beta}{\alpha+n} < 0$ من أجل قيم كبيرة لـ n، حيث $\alpha - \beta > 0$، وبملاحظة أن: $-\frac{\alpha-\beta}{\alpha+n}$ متباعدة بمقارنة المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha-\beta}{\alpha+n}$ مع المتسلسلة المتباعدة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ينتج، حسب المبرهنة(7)، أن قيمة الجداء تساوي الصفر.

ملاحظة: إنّ مضمون المثال السابق يعني أن:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)} = 0$$

[2] بفرض φ_n زوايا تحقق الشرط $0 < \varphi_n < \frac{\pi}{2}$. عندئذٍ يكون الجداء $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \varphi_n}{\varphi_n}$ و $\prod_{n=1}^{\infty} \cos \varphi_n$ متقاربين أو متباعدين حسبما تكون المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n^2$ متقاربة أو متباعدة.

الحل: $\frac{\sin\varphi_n}{\varphi_n}=1-\frac{\varphi_n^2}{3!}+\frac{\varphi_n^4}{5!}-\frac{\varphi_n^6}{7!}+-\cdots=1-\frac{\varphi_n^2}{6}+O(\varphi_n^2)$

$\cos\varphi_n=1-\frac{\varphi_n^2}{2!}+\frac{\varphi_n^4}{4!}-\frac{\varphi_n^6}{6!}+-\cdots=1-\frac{\varphi_n^2}{2}+O(\varphi_n^2)$

ومنه، إذا كان φ_n لامتناهياً في الصغر فإنه يكون الآتي:

الجداءان المذكوران في نص المثال يتقاربان عندما يتقارب الجداء $\prod_{n=1}^{\infty}(1-\frac{\varphi_n^2}{6}+O(\varphi_n^2))$ ويتباعدان عندما يتباعد هذا الجداء.

ولكن تقارب الجداء الأخير يتم عند تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{\varphi_n^2}{6}+O(\varphi_n^2))$ أي عند تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n^2$ وذلك على اعتبار أن $-\frac{\varphi_n^2}{6}+O(\varphi_n^2)$ من إشارة واحدة مهما تكن n.

ومن جهة أخرى فإن الجداء المذكور يتباعد عند تباعد $\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n^2$.

[3] أوجد قيمة الجداء $\prod_{n=2}^{\infty}\frac{n^3-1}{n^3+1}$.

الحل:

$$p_n=\prod_{k=2}^{n}\frac{k^3-1}{k^3+1}=\prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k+1}.\prod_{k=2}^{n}\frac{k^2+k+1}{k^2-k+1}=$$

$$=\frac{1}{3}.\frac{2}{4}.\frac{3}{5}.\frac{4}{6}.....\frac{n-1}{n+1}.\frac{7}{3}.\frac{13}{7}.\frac{21}{13}.\frac{31}{21}.....\frac{n^2+n+1}{n^2-n+1}=$$

$$=\frac{2}{n(n+1)}.\frac{n^2+n+1}{3}\to\frac{2}{3}=p$$

فقيمة الجداء هي $\frac{2}{3}$.

[4]أوجد قيمة الجداء $\prod_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{2n+3}\cdot\frac{2n+7}{2n+5}$

الحل: $p_n=\frac{3}{5}\cdot\frac{9}{7}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{11}{9}\cdot\frac{7}{9}\cdot\frac{13}{11}\cdot\frac{9}{11}\cdot\frac{15}{13}\cdots\frac{2n+1}{2n+3}\cdot\frac{2n+7}{2n+5}$

$$=\frac{3}{7}\cdot\frac{2n+7}{2n+3}\to\frac{6}{14}=\frac{3}{7}=p$$

فقيمة الجداء هي $\frac{3}{7}$.

5- التقارب المطلق والتقارب الشرطي للجداء غير المنتهي:

تعريف: يقال عن جداء غير منته إنه متقارب بالإطلاق إذا كانت المتسلسلة التي حدودها اللوغاريتمات الطبيعية لمضاريب الجداء متقاربة بالإطلاق. ويقال إن هذا الجداء متقارب شرطياً إذا كانت المتسلسلة المذكورة متقاربة شرطياً.

مبرهنة: الشرط اللازم والكافي للتقارب المطلق للجداء غير المنتهي $\prod_{n=1}^{\infty}(1+b_n)$

هو أن تكون المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ متقاربة بالإطلاق.

الإثبات: إن التقارب المطلق للجداء $\prod_{n=1}^{\infty}(1+b_n)$ يعني تقارب المتسلسلة

$\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+b_n)$ بالإطلاق، ومن ثم فإنه يمكن تبديل مواضع الحدود. وهنا يمكن تمييز حالتين:

الحالة الأولى: إذا كان $b_n>0$ فيكون $|\ln(1+b_n)|=\ln(1+b_n)$. وبترقيم هذه الحدود(المحققة لهذا الشرط) وذلك باستخدام الرمز c_m يتم الحصول على

المتسلسلة $\sum_{m=1}^{\infty}\ln(1+c_m)$ المتقاربة لأنها جزء من المتسلسلة المتقاربة بالإطلاق $\sum\ln(1+b_n)$.

الحالة الثانية: إذا كان $b_n<0$ فإنّ $|\ln(1+b_n)|=-\ln(1+b_n)$. وبترقيم هذه الحدود باستخدام الرمز d_ℓ حيث $m+\ell=n$، يتم الحصول على المتسلسلة $\sum_{\ell=1}^{\infty}-\ln(1+d_\ell)$ المتقاربة لأنها جزء من المتسلسلة المتقاربة بالإطلاق $\sum\ln(1+b_n)$.

ومن الحالتين السابقتين يمكن القول إن المتسلسلتين $\sum_{m=1}^{\infty}c_m$ و $\sum_{\ell=1}^{\infty}d_\ell$ متقاربتان حسب المبرهنة(5)، وتكون المتسلسلة:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|=\sum_{m=1}^{\infty}c_m+\sum_{\ell=1}^{\infty}-d_\ell$$

متقاربة، ومن ثم فإن $\sum b_n$ تكون متقاربة بالإطلاق.

وبالعكس، عندما تتقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|$، وبالرموز السابقة ذاتها، فإن المتسلسلتين $\sum d_\ell$ و $\sum c_m$ متقاربتان، ومن ثم فإن المتسلسلتين $\sum_{b_n<0}|\ln(1+b_n)|$، $\sum_{b_n>0}|\ln(1+b_n)|$ متقاربتان، وهذا يعني أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}|\ln(1+b_n)|$ متقاربة وبذلك يتم إثبات المطلوب.

6- أمثلة:

[1] بفرض $s>0$. إن الجداء $\prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n^s})$ متقارب عندما $s>1$، ومتباعد عندما $0<s\le 1$، وذلك لأن متسلسلة ريمان $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ هي كذلك، كل هذا بالإستفادة من المبرهنة(5).

[2] بفرض $s>0$. إن الجداء $\prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n^s})$ متقارب عندما $s>1$ حسب المبرهنة(5). أما إذا كان $0<s\le 1$، فإن هذا الجداء يكون متباعداً، وقيمته تساوي الصفر حينئذٍ، وذلك حسب المبرهنة(7).

[3] بفرض $x\neq k\pi$ من أجل جميع القيم الصحيحة للعدد k. إن الجداء $x\cdot\prod_{n=1}^{\infty}(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2})$ متقارب بالإطلاق لأن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-x^2}{n^2\pi^2}$ متقاربة بالإطلاق، وذلك حسب المبرهنة السابقة. ويقبل دون برهان أن قيمة هذا الجداء هي $\sin x$.

[4] يمكن تبديل مواضع المضاريب في الجداء المتقارب بالإطلاق. ذلك لأنه يمكن تبديل مواضع الحدود في المتسلسلة المتقاربة بالإطلاق.

[5] من المعلوم، حسب [3]، أن: $\prod_{n=1}^{\infty}(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2})\cdot x=\sin x$.

عندئذٍ: $\cos x=\prod_{n=1}^{\infty}[1-\frac{4x^2}{(2n-1)^2\cdot\pi^2}]$.

الحل:

$$\cos x=\frac{\sin 2x}{2\sin x}=\frac{2x\lim_{n\to\infty}\prod_{r=1}^{2n}(1-\frac{4x^2}{r^2\cdot\pi^2})}{2x\lim_{n\to\infty}\prod_{r=1}^{n}(1-\frac{x^2}{r^2\pi^2})}=$$

$$= \lim_{n\to\infty}(1-\frac{4x^2}{\pi^2})(1-\frac{4x^2}{3^2\cdot\pi^2})\cdots[1-\frac{4x^2}{(2n-1)^2\cdot\pi^2}]$$

$$= \prod_{n=1}^{\infty}[1-\frac{4x^2}{(2n-1)^2\cdot\pi^2}]$$

7- تمارين للحل :

[1] أثبت أن الجداء $\prod_{n=1}^{\infty}[1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}]$ متقارب شرطياً.

[2] أثبت أن الجداء $\prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})$ متباعد.

[3] أثبت أن الجداء $\prod_{n=1}^{\infty}(1-\frac{1}{n})$ متباعد.

[4] ادرس الجداء $\prod_{n=1}^{\infty}[1+\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}]$.

[5] ادرس الجداء $(1+\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1+\frac{1}{4})\ldots\ldots$ واحسب قيمته في حالة تقاربه.

Damascus University

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الفصل الثالث

متتاليات التوابع (الدوال)

- تعاريف
- التقارب المنتظم و خواصه
- تمارين محلولة
- تمارين للحل

Damascus University

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الفصل الثالث
متتاليات التوابع (متتاليات الدوال)

3-1- تعاريف:

تعريف(1): لتكن I مجموعة جزئية غير خالية من مجموعة الأعداد الحقيقية $\Re$. ولتكن H مجموعة التوابع الحقيقية المعرفة على I. عندها، بمقابلة كل عدد طبيعي مغاير للصفر n بتابع حقيقي من H، وليكن $f_n(x)$، فإنه يتم الحصول على **متتالية التوابع الحقيقية** (أو متتالية الدوال الحقيقية) المعرفة على I الآتية:

$$f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x), \cdots$$

والتي حدها الأول هو التابع $f_1(x)$ وحدها الثاني هو $f_2(x)$،....، وحدها العام (أو حدها النوني) هو التابع $f_n(x)$،.....

والتي تكتب بشكل مختصر على النحو: $\{f_n(x)\}$.

هذا وسوف يتم الاهتمام بتلك الحالة التي تكون فيها المجموعة I عبارة عن **مجال** وذلك اعتباراً من الآن ما لم يذكر خلاف ذلك بشكل صريح.

تعريف(2): يقال عن متتالية التوابع الحقيقية $\{f_n(x)\}$ المعرفة على I إنها **متقاربة (نقطياً) على I من تابع مثل** $f(x)$ معرف على I إذا وفقط إذا كانت هذه المتتالية متقاربة كمتتالية عددية من أجل كل قيمة للمتغير x مأخوذة من I.

ملاحظة: في حالة التقارب المذكور تكون قيمة العدد الذي تتقارب منه المتتالية العددية، الناجمة عن تعويض قيمة x في متتالية التوابع، متعلقة بالقيمة المأخوذة للمتغير x، ولهذا يمكن القول إن للمتتالية المدروسة نهاية عبارة عن تابع للمتغير x مثل $f(x)$ يتعين بالعلاقة :

$$[\ f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)\ \text{على}\ I\text{، أي:}]\ \forall x \in I\ .$$

ويقال عن هذا التابع $f(x)$ إنه **تابع النهاية** للمتتالية $\{f_n(x)\}$ المدروسة ،أو إنه التابع الحدي للمتتالية المدروسة، أو إنه نهاية هذه المتتالية. ويقال،حينئذٍ، إن متتالية التوابع المدروسة متقاربة (نقطياً) على I من هذا التابع $f(x)$.

هذا ومن الواضح أن التابع المذكور $f(x)$ يكون معرفاً على I.

وبالإضافة إلى ذلك، قد يحدث أن تتقارب متتالية التوابع من أجل بعض النقاط من مجموعة تعريفها وتتباعد من أجل البعض الآخر. فإذا وجدت نقطة واحدة على

الأقل مثل x_0 من I بحيث تكون من أجلها المتتالية العددية $\{f_n(x_0)\}$ متباعدة فيمكن القول إن متتالية التوابع $\{f_n(x)\}$ المعرفة على I لا تكون متقاربة على I (أي أنها تكون متباعدة عليها).

تعريف(3): يقال عن مجموعة جميع قيم x، التي من أجلها تكون متتالية التوابع $\{f_n(x)\}$ متقاربة، إنها **منطقة تقارب** هذه المتتالية، وذلك بعد افتراض أن I تساوي المجموعة $\mathbb{R}$ محذوفاً منها تلك القيم لـ x التي تجعل الحدود $f_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$ غير معرفة. وبصورة عامة، بإعطاء مجموعة التعريف فإن منطقة التقارب تكون محتواة فيها وقد تساويها.

تعريف آخر للتقارب (النقطي): يقال عن متتالية التوابع $\{f_n(x)\}$ المعرفة على I إنها متقاربة (نقطياً) من التابع الحقيقي $f(x)$ على I عندما وفقط عندما يتحقق الآتي:

من أجل أي عدد حقيقي $\varepsilon>0$ ومن أجل أية قيمة مثل $x=x_0$ من I فإنه يوجد عدد طبيعي $N_0\neq 0$ بحيث يكون $|f_n(x_0)-f(x_0)|<\varepsilon$ عندما $n\geq N_0$.

ملاحظة: إن العدد N_0، في الحالة العامة، يتغير بتغير ε وبتغير x_0، أيّ إنه يتعلق بالعدد ε المأخوذ، وبقيمة x المأخوذة من I، ولذلك يمكن كتابته كالآتي: $N_0=N_0(x_0,\varepsilon)$.

وأيضاً، إذا كانت I مجموعة منتهية وغير خالية مثل $I=\{x_1,\cdots,x_m\}$ فمن أجل $\varepsilon>0$ توجد أعداد طبيعية مغايرة للصفر $N_1(x_1,\varepsilon),\cdots,N_m(x_m,\varepsilon)$، ومن ثم يوجد العدد $N_0=\max[N_1(x_1,\varepsilon),\cdots,N_m(x_m,\varepsilon)]$ بحيث يكون $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$ عندما $n\geq N_0$ ومن أجل جميع قيم x من I. أما إذا كانت I غير منتهية، فقد لا يوجد مثل هذا العدد الأعظمي N_0 بحيث تتحقق الشروط المذكورة.

أمثلة:

مثال(1): متتالية التوابع $\{f_n(x)\}$، حيث $f_n(x)=x^n$، $x\in I=[0,1]$، متقاربة على المجال I، لأنّ:

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\begin{cases}0 & (0\le x<1 \text{ عندما})\\ 1 & (x=1 \text{ عندما})\end{cases}$$

ومن الملاحظ أن جميع حدود هذه المتتالية هي توابع مستمرة على I في حين أن تابع النهاية لها $f(x)$ منقطع عند النقطة $x=1$.

ملاحظة: ليكن $\varepsilon>0$. والمراد هو البحث عن N_0 بحيث يكون

$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$ عندما $n\ge N_0$ ومن أجل جميع قيم x من المجال المذكور I إن أمكن ذلك:

بفرض $0<x<1$ فيكون $x^n<\varepsilon$ أي $n>\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln x}$. ومنه يمكن أخذ N_0 بحيث يكون $N_0>\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln x}$. ولكن عندما تتغير x في المجال I مقتربة من الواحد فإن $\ln x\to 0$ ومن ثم $\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln x}\to\infty$.

إذن لا يمكن إيجاد عدد طبيعي مغاير للصفر N_0 بحيث تكون

$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$ محققة عندما $n\ge N_0$ ومن أجل جميع قيم x من المجال المفتوح $]0,1[$ ومن ثم من المجال المغلق $[0,1]$.

مثال(2): متتالية التوابع $\{f_n(x)\}$، حيث $f_n(x)=\dfrac{1}{e^{nx}}$، $x\in I=[0,\infty[$، متقاربة على المجال I، لأنّ:

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\begin{cases}0 & (x>0 \text{ عندما})\\ 1 & (x=0 \text{ عندما})\end{cases}$$

ومن الملاحظ أن جميع حدود هذه المتتالية هي توابع مستمرة على I في حين أن تابع النهاية لها منقطع عند النقطة $x=0$.

مثال(3): متتالية التوابع $\{f_n(x)\}$، حيث $f_n(x)=\dfrac{1}{1+nx}$، $x\in I=[0,\infty[$، متقاربة على المجال I من التابع:

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\begin{cases}0 & (x>0 \text{ عندما})\\ 1 & (x=0 \text{ عندما})\end{cases}$$

ومن الملاحظ أن جميع حدود هذه المتتالية هي توابع مستمرة I على في حين أن تابع النهاية لها هو تابع منقطع عند النقطة $x=0$.

مثال(4): متتالية التوابع $\{f_n(x)\}$ ،حيث $f_n(x)=\frac{x}{n}$ ، $x\in I=[0,\infty[$ ، متقاربة على المجال I من التابع:

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)=0$$

ومن الملاحظ أن جميع حدود هذه المتتالية هي توابع مستمرة على I ،وكذلك تابع النهاية لها هو تابع مستمر على I أيضاً.

مثال(5): متتالية التوابع $\{f_n(x)\}$ ،

$$x\in\Re=]-\infty,+\infty[\ ،\ f_n(x)=\begin{cases}\frac{n}{n+1} & (|x|<1 \text{ عندما})\\ 1 & (|x|=1 \text{ عندما})\\ \frac{n+1}{n} & (|x|>1 \text{ عندما})\end{cases} \quad \text{حيث}$$

متقاربة على المجال $]-\infty,+\infty[$ من التابع:

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)=1$$

ومن الملاحظ أن جميع حدود هذه المتتالية هي توابع غيرمستمرة على $\Re$ (لماذا؟) في حين أن تابع النهاية لها هو تابع مستمر على $\Re$.

هذا وينتج مما سبق أن تابع النهاية قد لا يتمتع بالخواص ذاتها التي تتمتع بها حدود المتتالية، ففي المثال(5) كانت حدود المتتالية غير مستمرة في حين أن تابع النهاية لها كان تابعاً مستمراً ،وفي الأمثلة(1) و(2) و(3) كانت حدود المتتالية مستمرة في حين أن تابع النهاية لها كان تابعاً منقطعاً. أما في المثال (4) فكانت حدود المتتالية مستمرة وكان تابع النهاية لها مستمراً.

مثال(6): أوجد تابع النهاية لمتتالية التوابع الآتية على المجال $I=[0,1]$:

$$\frac{1}{x+1},\frac{1}{x+2},\frac{1}{x+3},\cdots,\frac{1}{x+n},\cdots$$

الحل: $f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x+n}=0$

وذلك من أجل كل قيمة لـ x من المجال I. ومنه فتابع النهاية المطلوب هو التابع المطابق للصفر على المجال I.

ملاحظة: ليكن $\varepsilon > 0$. عندئذٍ يوجد عدد طبيعي $N_0 \neq 0$ بحيث يكون $N_0 > \frac{1}{\varepsilon}$

ومن ثم يكون:

$$\forall n \in N^*, \forall x \in \Re : n \geq N_0, x \in I = [0,1] \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{1}{x+n} - 0\right|$$

$$= \frac{1}{x+n} \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N_0} < \varepsilon$$

ومن الملاحظ أن N_0 مرتبط بـ ε فقط ومستقل عن x في هذا المثال(6).

3-2- التقارب المنتظم لمتتالية توابع حقيقية:

تعريف(1): يقال عن متتالية التوابع $\{f_n(x)\}$، المعرفة على I، إنها متقاربة بانتظام (أو متقاربة بشمول) من التابع $f_n(x)$ على I إذا وفقط إذا كانيوجد، من أجل كل عدد حقيقي $\varepsilon > 0$، عدد طبيعي $N_0 \neq 0$ بحيث يكون

$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ عندما $n \geq N_0$ ومن أجل جميع قيم x من المجال I.

نتيجة: كل متتالية توابع متقاربة بانتظام على I من تابع مثل $f(x)$ تكون متقاربة (نقطياً) على I من $f(x)$.

ملاحظة: إن كل متتالية متقاربة (نقطياً) يكون تقاربها إما منتظماً أو غير منتظم. ففي حالة التقارب المنتظم (الشامل) يتعلق العدد N_0 بـ ε فقط ولا يتعلق بالنقط x من I، أيْ أنه إذا تم تثبيت $\varepsilon > 0$ فإن N_0 يكون صالحاً لتحقيق المتراجحة $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ من أجل كل x من المجال I، حيث $n \geq N_0$.

أما في حالة التقارب غير المنتظم فلا يتحقق ما تم ذكره، لأن العدد N_0 يتعلق بـ ε وبالنقطة x.

مثال(1):

إنمتتالية التوابع $\{f_n(x)\}$، حيث $f_n(x) = \frac{1}{nx}$ و $x \in I = [1, \infty[$، متقاربة بانتظام من التابع الصفري على المجال I للأسباب الآتية:

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)=0\ ,\ x\in I$$

وهذا يعني أنها متقاربة (نقطياً) من التابع الصفري. إلاّ أن تقاربها هذا منتظم لأنه من أجل أيّ $\varepsilon>0$ يوجد $N_0>\frac{1}{\varepsilon}$ (أيْ أن N_0 يتعلق بـ ε فقط) بحيث يكون:

$$|\ f_n(x)-f(x)\ |=\left|\frac{1}{nx}-0\right|=\frac{1}{nx}\le\frac{1}{n}\le\frac{1}{N_0}<\varepsilon$$

عندما $n\ge N_0$ ومن أجل جميع قيم x من المجال I.

مثال(2): بالعودة إلى الملاحظة المتعلقة بالمثال(1) المذكور في الفقرة 3-1 فقد تبين أنه يجب أن يكون $n>\frac{\ln\varepsilon}{\ln x}$ عندما $x\in]0,1[$ وذلك لتحقيق الهدف المنشود. أيْ يمكن استنتاج أنّ N_0 سيكون متعلقاً بـ ε وبـ x ما يسمح بالقول إن تقارب المتتالية المدروسة من التابع الصفري هو تقارب غير منتظم على المجال المفتوح $]0,1[$.

مثال(3): بفرض $0<p<q<1$. إن متتالية التوابع $\{f_n(x)\}$، حيث $f_n(x)=x^n$، $x\in I=[p,q]$، متقاربة بانتظام من التابع الصفري على المجال I للأسباب الآتية:

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)=0$$

وتقاربها منتظم لأنه من أجل أيّ $\varepsilon>0$ يوجد [$N_0>\max(1,\frac{\ln\varepsilon}{\ln q})$ أيْ يتعلق بـ ε فقط] بحيث يكون:

$$n\ge N_0\Rightarrow n>1, n>\frac{\ln\varepsilon}{\ln q}\Rightarrow n\cdot\ln q<\ln\varepsilon\Rightarrow n\ln x\le n\ln q<\ln\varepsilon$$

$$\Rightarrow n\cdot\ln x<\ln\varepsilon\Rightarrow\ln x^n<\ln\varepsilon\Rightarrow x^n<\varepsilon\Rightarrow$$

$$\Rightarrow|f_n(x)-f(x)|=|x^n-0|=|x^n|=x^n<\varepsilon$$

وذلك من أجل جميع قيم x من المجال I.

نتيجة: (1)إذا كانت متتالية التوابع متقاربة بانتظام من تابع نهاية على مجال I فإنها تكون متقاربة بانتظام من تابع نهاية على أيّ مجال محتوى في I. إلاّ أن العكس غير صحيح بالضرورة.

(2) إذا كانت متتالية التوابع متقاربة (نقطياً) من تابع نهاية على مجال I فإنها تكون متقاربة (نقطياً) من تابع نهاية على أيّ مجال محتوى في I. إلا أن العكس غير صحيح بالضرورة.

مثال(4): لتكن متتالية التوابع $\{f_n(x)\}$، حيث $f_n(x)$ معرف على $]-\infty,+\infty[$ وفق الآتي:

$$(n \geq 1)\ ,\ f_n(x) = \begin{cases} 0 & (|x| > \frac{1}{n} \text{ عندما}) \\ \frac{n}{3} & (|x| \leq \frac{1}{n} \text{ عندما}) \end{cases}$$

إن هذه المتتالية متباعدة على $\Re$ لأنها متباعدة من أجل $x = 0$ (مثلاً)، وذلك بملاحظة الآتي:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & (|x| > \frac{1}{n} \text{ عندما}) \\ +\infty & (|x| \leq \frac{1}{n} \text{ عندما}) \end{cases}$$

أيْ إن المتتالية العددية $\{f_n(0)\}$ تكون متباعدة لأنّ $f_n(0) \to +\infty$، ومن ثم فإن متتالية التوابع $\{f_n(x)\}$ تكون متباعدة على $\Re$.

3-3- بعض خواص متتاليات التوابع المتقاربة بانتظام:

مبرهنة(1): لتكن $\{f_n(x)\}$ متتالية توابع معرفة على مجال مثل I. وبفرض أنها متقاربة بانتظام على I من تابع نهاية مثل $f(x)$. عندئذٍ:

(1) إذا كانت حدود هذه المتتالية توابع مستمرة على I، فإن التابع $f(x)$ يكون أيضاً مستمراً على I.

(2) إذا كانت حدود هذه المتتالية توابع محدودة على I، فإن التابع $f(x)$ يكون أيضاً محدوداً على I.

الإثبات: (1)لتكن $x_0 \in I$ وليكن $\varepsilon > 0$. لما كانت المتتالية $\{f_n(x)\}$ متقاربة بانتظام من $f(x)$ على I فإنه يوجد $N_0 \neq 0$ بحيث يكون $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ عندما $n \geq N_0$ ومن أجل جميع قيم x من I.

لتكن $x \in I$، وليكن n عدداً طبيعياً بحيث $n \geq N_0$. لما كان $f_n(x)$ مستمراً فإنه يوجد، من أجل $\frac{\varepsilon}{3} > 0$، عدد مثل $\delta > 0$ بحيث يكون:

$$|f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ عندما } |x - x_0| < \delta$$

ومنه يمكن القول إنه يوجد ،من أجل العدد الحقيقي الكيفي $\varepsilon > 0$ ، العدد الحقيقي $\delta > 0$ بحيث يكون:

$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0)| \leq$$

$$|f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

وذلك عندما $|x - x_0| < \delta$، أيْ أنّ $f(x)$ مستمر في x_0. وحيث أن x_0 كيفية من I فإن التابع $f(x)$ يكون مستمراً على I.

(2)ليكن $\varepsilon > 0$. بسبب التقارب المنتظم يوجد $N_0 \neq 0$ بحيث يكون:
$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ عندما $n \geq N_0$ ومن أجل جميع قيم x من I.

ليكن n عدداً محققاً للشرط $n \geq N_0$. لما كان $f_n(x)$ محدوداً على I فإنه يوجد عدد مثل $k > 0$ بحيث يكون: $|f_n(x)| < k$ من أجل جميع قيم x من I ،ومن ثم يكون:

$$|f(x)| = |f(x) - f_n(x) + f_n(x)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x)| < \varepsilon + k$$

وذلك من أجل جميع قيم x من I ما يعني أن $f(x)$ محدود على I.

نتيجة: (1)إذا كان تابع النهاية ،لمتتالية توابع مستمرة على مجال معين I ،غير مستمر على هذا المجال فإن تقاربها (النقطي) يكون ليس منتظماً على I.

(2)إذا كان تابع النهاية ،لمتتالية توابع محدودة على مجال معين I ،غيرمحدود على هذا المجال فإن تقاربها (النقطي) يكون ليس منتظماً على I.

(3) إذا كان تابع النهاية ،لمتتالية توابع مستمرة على مجال معين،تابعاً مستمراً على هذا المجال ،فليس من الضروري أن يكون تقاربها (النقطي) منتظماً[انظر المثال(2) من الفقرة(3-2)].

(4)إذا كان تابع النهاية ،لمتتالية توابع محدودة على مجال معين ،محدوداً على هذا المجال ،فليس من الضروري أن يكون تقاربها (النقطي) منتظماً [انظر المثال(1) من الفقرة(3-1)].

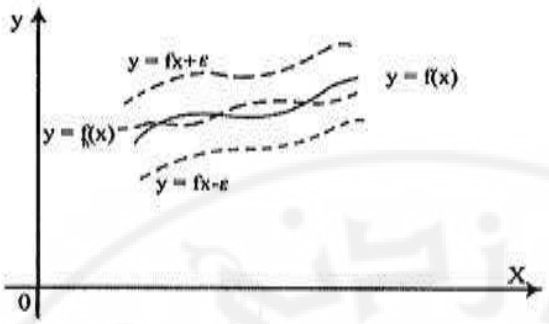
ملاحظة:يكتب التعريف للتقارب المنتظم لمتتالية توابع مثل $\{f_n(x)\}$من تابع مثل $f(x)$ على مجال مثل I ،على النحو الآتي:

ليكن $\varepsilon > 0$.عندها يوجد عدد طبيعي مثل $N_0 \neq 0$ بحيث يكون:

$$(*)\ f(x)-\varepsilon < f_n(x) < f(x)+\varepsilon$$

وذلك عندما $n \geq N_0$ ومن أجل جميع قيم x من I.

إن المتراجحات (*)تعني أن المنحنيات البيانية للتوابع $f_n(x)$ تقع داخل شريط عرضه 2ε بين المنحنيين البيانيين للتابعين $f(x)+\varepsilon$ ، $f(x)-\varepsilon$ ،حيث يتم الحصول على هذين المنحنيين البيانيين بانسحاب قدره ε نحو الأسفل و ε نحو الأعلى للمنحني البياني للتابع $f(x)$.وبذلك يتم الحصول على ما يمكن قوله إنهتفسير هندسي يميز التقارب المنتظم [انظر الشكل الآتي]:



أما في حالة التقارب (النقطي) غير المنتظم فلا يمكن ان تقع جميع المنحنيات للتوابع $f_n(x)$ داخل الشريط (*) اعتباراً من قيمة معينة لـ n.

مبرهنة(2): لتكن $\{f_n(x)\}$ متتالية توابع مستمرة ومعرفة على مجال مغلق مثل $I=[a,b]$ حيث $-\infty < a < b < +\infty$. وبفرض أنها متقاربة بانتظام من تابع مثل $f(x)$ على هذا المجال I. عندئذٍ يكون التابع $f(x)$ قابلاً للمكاملة على المجال I وتتحقق العلاقة الأتية:

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx=\int_a^b\lim_{n\to\infty}f_n(x)dx=\int_a^b f(x)dx$$

الإثبات: حسب المبرهنة (1) يكون التابع $f(x)$ مستمراً على I، ومن ثم فإنه يكون قابلاً للمكاملة على I. وبناءً على هذا وعلى الفرضيات المذكورة في النص يتم البرهان على صحة العلاقة الواردة في هذا النص وفق الأتي:

ليكن $\varepsilon>0$. عندئذٍ $\dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}>0$. ولما كان التقارب منتظماً فإنه يوجد عدد طبيعي مثل $N_0\neq 0$ بحيث يكون:

$|f_n(x)-f(x)|<\dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$ عندما $n\geq N_0$ ومن أجل جميع قيم x من I.

ليكن n عدداً طبيعياً بحيث $n\geq N_0$. عندها:

$$\left|\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx\right| = \left|\int_a^b [f_n(x) - f(x)]dx\right| \le$$

$$\le \int_a^b |f_n(x) - f(x)|dx \le \int_a^b \frac{\varepsilon}{2(b-a)}dx = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

وهذا يعني أنّ: $\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$

ملاحظة: (1)ضمن فرضيات المبرهنة(2) يمكن قول إنّ المتتالية العددية $\{\int_a^b f_n(x)dx\}$ تكون متقاربة من العدد $\int_a^b f(x)dx$ ،

أي: $\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$.

(2)إن شرط التقارب المنتظم ،في المبرهنة(2)، لمتتالية التوابع هو شرط كافٍ،ولكنه غير لازم، كي تتحقق العلاقة المذكورة في نص المبرهنة(2). والمثال الآتي يوضح ذلك:

مثال: إن متتالية التوابع المعرفة على المجال $I = [0,1]$ والتي حدها العام هو: $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2\cdot x^2}$ متقاربة (نقطياً) ولكن بشكل غير منتظم من التابع الصفري $f(x) = 0$ على المجال I بملاحظة الآتي:

بفرض أن $\{f_n(x)\}$ متقاربة بانتظام من التابع الصفري على المجال I. عندئذٍ يوجد،من أجل العدد الحقيقي $\varepsilon = \frac{1}{2}$ ،عدد طبيعي مثل $N_0 \neq 0$ بحيث يكون $\frac{nx}{1+n^2\cdot x^2} < \frac{1}{2}$ عندما $n \ge N_0$ ومن أجل جميع قيم x من I.

ومنه ،بفرض $n > N_0$ فإنه يكون $0 < \frac{1}{n} < \frac{1}{N_0} \le 1$.وباخذ $x_0 = \frac{1}{n}$ فإن $x_0 \in I$

،ومن ثم فإن: $\frac{1}{2} > \frac{nx_0}{1+n^2 \cdot x_0^{\,2}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ وهذا مستحيل.

إذاً فالمتتالية $\{f_n(x)\}$ متقاربة (نقطياً) وليس بانتظام من التابع الصفري على I .وأيضاً:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^2}dx = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+n^2)}{2n} = 0$$

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 0dx = 0$$

وهذا يعني أن العلاقة المذكورة في نص المبرهنة(2) تكون محققة بالرغم من أن التقارب ليس بانتظام.

مبرهنة(3): لتكن $\{f_n(x)\}$ متتالية توابع معرفة على مجال مغلق مثل $I = [a,b]$.وبفرض أنها متقاربة (نقطياً) من تابع مثل $f(x)$ على هذا المجال I . وبفرض أنّ حدودها $f_n(x)$ توابع قابلة للإشتقاق(بالنسبة لـx) على I وأن المشتقات $f'_n(x)$ لحدودها عبارة عن توابع مستمرة على I . وبفرض أن متتالية المشتقات $\{f'_n(x)\}$ متقاربة بانتظام على I من تابع مثل $g(x)$.عندئذٍ يكون التابع $f(x)$ قابلاً للإشتقاق على I ومشتقه هو $g(x)$ وتتحقق العلاقة الآتية:

$$(\lim_{n\to\infty} f_n(x))' = f'(x) = \lim_{n\to\infty} f'_n(x) = g(x)$$

الإثبات: من الفرضيات ينتج أن التابع $g(x)$ مستمر على I فهو قابل للمكاملة على I وليكن $G(x)$ تابعاً أصلياً له. ثم ليكن $x \in I$.عندئذٍ يكون [بالإستفادة من المبرهنة (2) السابقة]:

$$G(x)-G(a)=[G(t)]_a^x=\int_a^x g(t)dt=\lim_{n\to\infty}\int_a^x f'_n(t)dt=$$

$$=\lim_{n\to\infty}f_n(x)-\lim_{n\to\infty}f_n(a)=f(x)-f(a)$$

إذن $f(x)=G(x)-G(a)+f(a)$

ومنه يكون $f(x)$ قابلاً للإشتقاق في كل نقطة من نقاط I، ومشتقه هو $f'(x)=G'(x)=g(x)$ وتتحقق العلاقة المذكورة في النص وبذلك يتم إثبات المطلوب.

ملاحظة: إن شرط التقارب المنتظم لمتتالية المشتقات $\{f'_n(x)\}$ هو شرط لازم وغير كاف للوصول إلى النتيجة المطلوبة في نص المبرهنة السابقة بافتراض أن بقية الشروط محققة. فمثلاً، لتكن $\{\frac{\ln(1+n^2x^2)}{2n}\}$ متتالية توابع معرفة على المجال المغلق $I=[0,1]$. ومن الملاحظ أنها تتقارب (نقطياً) من التابع الصفري $f(x)=0$، لأنّ: $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+n^2x^2)}{2n}=0$، حيث $0\le x\le 1$. ومن الملاحظ أيضاً أنّ حدود هذه المتتالية قابلة للإشتقاق وأن المشتقات توابع مستمرة على I.

إلا أن متتالية المشتقات متقاربة (نقطياً)، ولكن ليس بانتظام، من التابع الصفري $g(x)=0$ على I [انظر المثال الوارد قبل المبرهنة(3) مباشرة]. وبنتيجة ذلك يكون: $f'(x)=0=g(x)$ في كل نقطة x من المجال I.

مبرهنة(4): لتكن $\{f_n(x)\}$ متتالية توابع معرفة على مجال مثل I. ولنفرض أن $\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$ على I. عندئذٍ تكون القضيتان الآتيتان متكافئتين:

(1) المتتالية $\{f_n(x)\}$ متقاربة بانتظام من التابع $f(x)$ على I.

(2) $\lim_{n\to\infty} M_n = 0$ ،حيث $M_n = \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)|$ من أجل كل n.

الإثبات: [(1) $\Leftarrow$ (2)]: بفرض المتتالية $\{f_n(x)\}$ متقاربة بانتظام من التابع $f(x)$ على المجال I، وبفرض $\varepsilon > 0$. عندها يكون $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ ويوجد عدد طبيعي مثل $N_0 \neq 0$ بحيث يكون:

$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ عندما $n \geq N_0$ ومن أجل جميع قيم x من I.

وهذا يعني أنّ المقدار $M_n = \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)|$ موجود ويحقق العلاقة:

$0 \leq \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ عندما $n \geq N_0$.

وحيث أن ε صغير بقدر كافٍ، فإنه يمكن القول إنّ:

$$\lim_{n\to\infty} M_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

[(2) $\Leftarrow$ (1)]: بفرض $\lim_{n\to\infty} M_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| = 0$، وبفرض $\varepsilon > 0$. عندها يوجد عدد طبيعي مثل $N_0 \neq 0$ بحيث يكون: $|M_n| < \varepsilon$ عندما $n \geq N_0$ ومن ثم $M_n < \varepsilon$ عندما $n \geq N_0$. ومنه:

$|f_n(x) - f(x)| \leq M_n < \varepsilon$ عندما $n \geq N_0$ ومن أجل جميع قيم x من I إذن فالمتتالية $\{f_n(x)\}$ تكون متقاربة بانتظام من $f(x)$ على I.

مبرهنة(5): تكون المتتالية $\{f_n(x)\}$ من التوابع، المعرفة على مجال مثل I، متقاربة بانتظام على I عندما وفقط عندما يتحقق الآتي:

أيّاً كان $\varepsilon > 0$ فإنه يوجد عدد طبيعي مثل $N_0 \neq 0$ بحيث يكون:

$|f_m(x)-f_n(x)|<\varepsilon$ عندما $m\geq n\geq N_0$ ومن أجل جميع قيم x من I.

الإثبات: بفرض المتتالية $\{f_n(x)\}$ متقاربة بانتظام من التابع $f(x)$ على المجال I ،وبفرض $\varepsilon>0$. عندها يكون $\frac{\varepsilon}{2}>0$ ويوجد عدد طبيعي مثل $N_0\neq 0$ بحيث يكون: $|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$ عندما $n\geq N_0$ ومن أجل جميع قيم x من I ،ومن ثم يكون:

$$|f_m(x)-f_n(x)|=|f_m(x)-f(x)+f(x)-f_n(x)|\leq$$

$$\leq|f_m(x)-f(x)\ |+|\ f(x)-f_n(x)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

وذلك عندما $m\geq n\geq N_0$ ومن أجل جميع قيم x من I.

وبالعكس، بفرض أنه أيا كان $\varepsilon>0$ فيوجد $N_0\neq 0$ بحيث يكون:
$|f_m(x)-f_n(x)|<\varepsilon$ عندما $m\geq n\geq N_0$ ومن أجل جميع قيم x من I.

فبتثبيت $x\in I$ تكون المتتالية العددية $\{f_n(x)\}$ متتالية كوشي، ومن ثم فإنها تكون متقاربة ،أيْ يوجد عدد تتقارب منه ،وهذا يسمح بالقول، بعد جعل x تأخذ جميع القيم الممكنة من I ،إنه يوجد تابع يمكن تسميته $f(x)$ بحيث يمثل نهاية المتتالية $\{f_n(x)\}$ على I ،أي أن $\{f_n(x)\}$ تتقارب من $f(x)$ على I. ويبقى أن يتم البرهان على أن هذا التقارب منتظم على I وذلك وفق الآتي:

ليكن $\varepsilon>0$. عندئذٍ $\frac{\varepsilon}{2}>0$. ومنه، يوجد [حسب الفرض] عدد طبيعي مثل $N_0\neq 0$ بحيث يكون: $|f_m(x)-f_n(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$ عندما $m\geq n\geq N_0$ ومن أجل جميع قيم x من I.

بتثبيت $n\geq N_0$ وجعل $m\to\infty$ ينتج أن:

$|f_n(x)-f(x)| \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ عندما $n \ge N_0$ ومن أجل جميع قيم x من I.

وهذا يعني أن تقارب $\{f_n(x)\}$ منتظم على I.

مبرهنة(6) [اختبار ديني]:

لتكن $\{f_n(x)\}$ متتالية توابع مستمرة ،ومعرفة على مجال مغلق مثل $I=[a,b]$، حيث $a,b \in \Re$. وبفرض أن هذه المتتالية $\{f_n(x)\}$ متقاربة (نقطياً) من تابع نهاية مثل $f(x)$. وبفرض أن $f(x)$ مستمر على I ،وأنّ $f_n(x) \ge f_{n+1}(x)$ اعتباراً من قيمة معينة لـ n. عندئذٍ تكون المتتالية $\{f_n(x)\}$ متقاربة بانتظام من التابع $f(x)$ على I.

الإثبات: يترك للقارئ ،مع ملاحظة أن النص يبقى صحيحاً في حالة التزايد.

أمثلة:

(1) إن متتالية التوابع $\{f_n(x)\}$ المعرفة على المجال $I=]0,\infty[$ بالشكل $f_n(x)=\frac{1}{nx+1}$ تكون متقاربة وليس بانتظام من التابع الصفري $f(x)=0$ على I ،وذلك بملاحظة الآتي: $f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)=0$

وكذلك: $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I} |f_n(x)-f(x)| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I} \frac{1}{nx+1} = 1 \ne 0$

(2) إن متتالية التوابع $\{f_n(x)\}$ المعرفة على المجال $I=[0,1]$ بالشكل $f_n(x)=\frac{x^n}{n}$ تكون متقاربة بانتظام من التابع الصفري $f(x)=0$ على I ،وذلك بملاحظة الآتي:

ليكن $\varepsilon > 0$. عندها يوجد عدد طبيعي مثل N_0 بحيث يكون $N_0 > \frac{2}{\varepsilon}$. ومنه يكون:

$$|f_m(x)-f_n(x)|=\left|\frac{x'''}{m}-\frac{x''}{n}\right|\le\left|\frac{x'''}{m}\right|+\left|\frac{x''}{n}\right|\le\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\le\frac{2}{n}\le\frac{2}{N_0}<\varepsilon$$

وذلك عندما $m\ge n\ge N_0$ ومن أجل جميع قيم x من I.

(3)إن متتالية التوابع $\{f_n(x)\}$ المعرفة على المجال $I=[0,\pi]$ بالشكل $f_n(x)=\frac{1}{n}\sin x$ تكون متقاربة بانتظام من التابع الصفري $f(x)=0$ على I ،وذلك بملاحظة الآتي:

إن حدود هذه المتتالية المدروسة هي توابع مستمرة ومعرفة على I وإن هذه المتتالية متقاربة من التابع $f(x)=0$ المستمر على I. كما إن $f_n(x)\ge f_{n+1}(x)$ لأن $\frac{1}{n}\sin x\ge\frac{1}{n+1}\sin x$.

وتترك أيضاً للقارئ براهين النصوص الآتية:

لتكن $\{f_n(x)\}$ و $\{g_n(x)\}$ متتاليتي توابع معرفة على مجال مثل I. عندئذٍ:

أولاً- إذا كانت المتتالية $\{f_n(x)\}$ متقاربة من تابع مثل $f(x)$ على I ،وكانت المتتالية $\{g_n(x)\}$ متقاربة من تابع مثل $g(x)$ على I ،فإنّ :

(1)متتالية التوابع $\{f_n(x)+g_n(x)\}$ تكون متقاربة من التابع $f(x)+g(x)$ على I

(2)متتالية التوابع $\{\lambda\cdot f_n(x)\}$ تكون متقاربة على I من التابع $\lambda\cdot f(x)$ وذلك مهما يكن العدد λ.

(3)متتالية التوابع $\{f_n(x)\cdot g_n(x)\}$ تكون متقاربة من التابع $f(x)\cdot g(x)$ على I.

ثانياً- إذا كانت المتتالية $\{f_n(x)\}$ متقاربة بانتظام من تابع مثل $f(x)$ على I ،وكانت المتتالية $\{g_n(x)\}$ متقاربة بانتظام من تابع مثل $g(x)$ على I ،فإنّ :

(1)متتالية التوابع $\{f_n(x)+g_n(x)\}$تكون متقاربة بانتظام من التابع $f(x)+g(x)$ على I.

(2)متتالية التوابع $\{\lambda\cdot f_n(x)\}$تكون متقاربة بانتظام على Iمن التابع $\lambda\cdot f(x)$ وذلك مهما يكن العدد λ.

4-3- تمارين محلولة:

لتكن $\{f_n(x)\}$متتالية توابع معرفة على المجال I.والمطلوب تبيان فيما إذا كان تقاربها من تابع النهاية على I تقارباً منتظماً أم غير منتظم على Iوذلك في كل مما يأتي:

$$I=[0,1]\text{ ، }f_n(x)=\frac{x}{1+n^2x^2}\quad(1)$$

$$I=[0,1]\text{ ، }f_n(x)=\frac{nx}{1+n^2x^2}\quad(2)$$

$$I=[0,1]\text{ ، }f_n(x)=\frac{1}{1+x^{2n}}\quad(3)$$

$$I=[0,+\infty[\text{ ، }f_n(x)=\frac{x^n}{1+x^n}\quad(4)$$

$$I=\Re=]-\infty,+\infty[\text{ ، }f_n(x)=\frac{1}{n}\tan^{-1}x^n\quad(5)$$

$$I=\Re\text{ ، }f_n(x)=\frac{\sin nx}{\sqrt{n}}\quad(6)$$

$$I=\Re\text{ ، }f_n(x)=x^2+\frac{\sin n(x+\frac{\pi}{2})}{n}\quad(7)$$

(8) $f_n(x) = \sin\frac{x}{n}$ عندما $I = \Re$ ثم عندما $I = [0, \frac{\pi}{2}]$

(9) $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ ، $I = [1, +\infty[$

(10) $f_n(x) = \tan^{-1} nx$ عندما $I = [0, +\infty[$ ثم عندما $I = [\alpha, \beta]$ حيث:
$0 < \alpha < \beta < +\infty$.

الحل:

(1) $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{1+n^2x^2} = 0 = f(x)$ ، $0 \le x \le 1$.

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I} | f_n(x) - f(x) | = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I} \left| \frac{x}{1+n^2x^2} \right| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I} \frac{x}{1+n^2x^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} = 0$$

[لاحظ بالإتمام إلى مربع كامل أن $\frac{1}{2n} \cdot \frac{2nx}{1+n^2x^2} \le \frac{1}{2n}$ ومن ثم

$\sup \frac{x}{1+n^2x^2} \le \frac{1}{2n}$ لأن $\frac{1}{2n}$ إحدى القيم إذ أنها تقابل $x = \frac{1}{n}$].

إذن فالتقارب منتظم.

(2) $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{1+n^2x^2} = 0 = f(x)$ ، $0 \le x \le 1$.

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I} | f_n(x) - f(x) | = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I} \frac{nx}{1+n^2x^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq 0$$

إذن فالتقارب غير منتظم.

[لاحظ أنه عندما $x = \frac{1}{n} \in I$ فإنّ $f_n(x)$ يبلغ نهاية عظمى ،وقيمته عند هذه النقطة هي $\frac{1}{2}$].

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+x^{2n}}=\begin{cases}1 & (0\le x<1 \text{ عندما})\\ \frac{1}{2} & (x=1 \text{ عندما})\end{cases} \quad (3)$$

$0\le x\le 1$ وحيث أنّ حدود المتتالية المدروسة توابع مستمرة على I وتابع النهاية منقطع عند النقطة $x=1$ فالتقارب غير منتظم.

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{1+x^n}=\begin{cases}0 & (0\le x<1 \text{ عندما})\\ +\frac{1}{2} & (x=1 \text{ عندما})\\ 1 & (x>1 \text{ عندما})\end{cases} \quad (4)$$

$0\le x<+\infty$ وحيث أن حدود المتتالية المدروسة توابع مستمرة عند النقطة $x=1$ وتابع النهاية منقطع عند هذه النقطة فالتقارب غير منتظم.

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\tan^{-1}x^n}{n}=0 \quad -\infty<x<+\infty \quad (5)$$

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in\Re}|\ f_n(x)-f(x)\ |=\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in\Re}\left|\frac{\tan^{-1}x^n}{n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2n}=0$$

فالتقارب منتظم. [لاحظ أن $0\le\left|\frac{\tan^{-1}x^n}{n}\right|\le\frac{\pi}{2}$].

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin nx}{\sqrt{n}}=0 \quad (6) \quad \text{و} \quad -\infty<x<+\infty$$

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in\Re}|\ f_n(x)-f(x)\ |=\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in\Re}\left|\frac{\sin nx}{\sqrt{n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$$

فالتقارب منتظم [لاحظ أن $0\le\left|\frac{\sin nx}{\sqrt{n}}\right|\le\frac{1}{\sqrt{n}}$].

$$-\infty < x < +\infty \ ، \ f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}[x^2 + \frac{\sin n(x+\frac{\pi}{2})}{n}] = x^2 \quad (7)$$

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in\Re}| \ f_n(x) - f(x) \ | = \lim_{n\to\infty}\sup_{x\in\Re}\left|\frac{\sin n(x+\frac{\pi}{2})}{n}\right| = 0$$ فالتقارب منتظم .

$$-\infty < x < +\infty \ ، \ f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\sin\frac{x}{n} = 0 \quad (8)$$

ليكن $\varepsilon > 0$. وليكن $x \in \Re$. عندئذٍ يوجد عدد طبيعي مثل $N_0 \neq 0$ بحيث يكون $N_0 > \frac{|x|}{\varepsilon}$ ومن ثم يكون:

$$| \ f_n(x) - f(x) \ | = \left|\sin\frac{x}{n}\right| \le \left|\frac{x}{n}\right| \le \frac{|x|}{N_0} < \varepsilon$$

وذلك عندما $n \ge N_0$ فالتقارب غير منتظم .

أما دراسة التقارب عندما $I = [0, \frac{\pi}{2}]$ فهي الآتية:

من الملاحظ أنّ: $\sin\frac{x}{n} \ge \sin\frac{x}{n+1}$ ،وأن جميع حدود المتتالية المدروسة عبارة عن توابع مستمرة على $[0, \frac{\pi}{2}]$ ،وأنّ تابع النهاية $f(x) = 0$ مستمر على I ,إذن فالتقارب منتظم في هذه الحالة.

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[1,+\infty[}| \ f_n(x) - f(x) \ | = \lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[1,+\infty[}| \ \frac{nx}{1+n^2x^2} - 0 \ | = \quad (9)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[1,+\infty[}| \ \frac{nx}{1+n^2x^2} \ | = \lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[1,+\infty[}\frac{n}{1+n^2x^2} = 0$$

فالتقارب منتظم على I.

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\tan^{-1} nx=\frac{\pi}{2}\quad ,x\in\Re \quad (10)$$

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[0,+\infty[}\left|\ f_n(x)-f(x)\ \right|=\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[0,+\infty[}\left|\tan^{-1} nx-\frac{\pi}{2}\ \right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right|=\frac{\pi}{4}\neq 0$$

فالتقارب غير منتظم عندما $I=[0,+\infty[$.

أما دراسة المتتالية عندما $I=[\alpha,\beta]$ فهي الآتية:

من الملاحظ أن $\tan^{-1} nx\le\tan^{-1}(n+1)x$، وأن جميع حدود المتتالية المدروسة عبارة عن توابع مستمرة على $I=[\alpha,\beta]$، وأن تابع النهاية $f(x)=\frac{\pi}{2}$ مستمر على I. إذن فالتقارب منتظم في هذه الحالة .

3-5- تمارين للحل:

(1)لتكن $\{f_n(x)\}$ متتالية توابع متناقصة ،معرفة على مجال حقيقي مثل I .وبفرض أنها متقاربة بانتظام على I من تابع مثل $f(x)$.المطلوب:

هل يكون التابع $f(x)$ متناقصاً على I ؟

الجواب: نعم.

ملاحظة: إذا كانت التوابع $f_n(x)$ متزايدة وتمت المحافظة على كافة الشروط الأخرى المذكورة في التمرين فهل يكون $f(x)$ متزايداً على I.

الجواب: نعم.

(2)لتكن $\{f_n(x)\}$ متتالية توابع معرفة على المجال $I=[0,1]$ وفق الآتي:

$f_n(x)=\frac{x^n}{n^\alpha}$ ،حيث $0\le\alpha<+\infty$ ، $x\in I$.

المطلوب:

(1)إذا كانت $0 < \alpha \le 1$فهل يكون تابع النهاية $f(x)$ للمتتالية المدروسة قابلاً للمكاملة على المجال I.[الجواب: نعم].

(2)إذا كانت $1 < \alpha < +\infty$فهل يكون تابع النهاية $f(x)$ للمتتالية المدروسة قابلاً للمكاملة على Iوقابلاً للإشتقاق على I. [الجواب: نعم].

(3)أوجد تابع النهاية لمتتالية التوابع $\{f_n(x)\}$المعرفة على المجال $I=]0,+\infty[$ ،حيث $f_n(x)=e^{-nx}$ ،ثم بيّن فيما إذا كان التقارب منتظماً أم غير منتظم على I. [الجواب: التقارب غير منتظم].

(4)أوجد تابع النهاية لمتتالية التوابع $\{f_n(x)\}$المعرفة على المجال $\Re=]-\infty,+\infty[$ ،حيث $f_n(x)=\frac{1+nx}{n}$ ،ثم بيّن فيما إذا كان التقارب منتظماً أم غير منتظم على $\Re$. [الجواب: التقارب منتظم].

(5)أوجد تابع النهاية لمتتالية التوابع $\{f_n(x)\}$المعرفة على المجال $I=]1,+\infty[$ ،حيث $f_n(x)=\frac{1+nx}{n^2}$ ،ثم بيّن فيما إذا كان التقارب منتظماً أم غير منتظم على I

[الجواب: التقارب غير منتظم].

(6)هل يمكن لمتتالية توابع غير مستمرة على مجال ما أن تكون متقاربة بانتظام من تابع مستمر علىهذا المجال؟
وضّح ذلك بدراسة المتتالية التي حدها العام هو:

$$f_n(x)=\frac{1}{n}\cdot\varphi(x)$$

حيث $n \ge 1$ ،وحيث: $\varphi(x)=\begin{cases}1 & (x\in Q \text{ عندما})\\ 0 & (x\in \Re-Q \text{ عندما})\end{cases}$

(7)لتكن $\{f_n(x)\}$ متتالية توابع معرفة على $\Re =]-\infty,+\infty[$ ، حيث:

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (x^{\frac{1}{2k+1}} - x^{\frac{1}{2k-1}})$$

أوجد تابع النهاية لهذه المتتالية ،ثم أثبت أنه تابع منقطع، ثم ارسم المنحني البياني له، ثم بيّن فيما إذا كانت هذه المتتالية متقاربة بانتظام على كل مجال يحوي النقطة $x = 0$ أم لا.

(8)هل التقارب منتظم أم غير منتظم على I لكل من متتاليات التوابع الآتية:

$\{f_n(x)\}$ حيث $x \in I = [0,1]$ ، $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^{2n}}$

$\{g_n(x)\}$ حيث $x \in I = [0,1]$ ، $g_n(x) = nxe^{-nx^2}$

$\{h_n(x)\}$ حيث $x \in I = [0,1]$ ، $h_n(x) = \frac{2x+n}{x+n}$

(9)هل تابع النهاية للمتتالية $\{\frac{\sin nx}{n}\}$ ،المعرفة على $\Re =]-\infty,+\infty[$ ،مستمر على $\Re$ أم لا؟

الفصل الرابع

متسلسلات التوابع

(سلاسل الدوال)

- تعاريف
- التقارب المنتظم وخواصه
- تمارين محلولة
- تمارين للحل
- متسلسلات القوى
- تمارين محلولة
- تمارين للحل
- متسلسلات تايلور
- نشر التوابع وحسابها التقريبي
- تمارين محلولة
- تمارين للحل

Damascus University

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الفصل الرابع

متسلسلات التوابع

(سلاسل الدوال)

4-1- تعاريف:

تعريف(1): لتكن $\{f_n(x)\}$ متتالية توابع حقيقية معرفة على مجال حقيقي مثل I .يسمى المجموع غير المنتهي :

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) + \cdots$$

متسلسلة توابع حقيقية معرفة على I ،ويسمى $f_1(x)$ الحد الأول لهذه المتسلسلة ،ويسمى $f_2(x)$ الحد الثاني ، ... ،ويسمى $f_n(x)$ **الحد العام** (أو الحد النوني) لهذه المتسلسلة.

تعريف(2):لتكن $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ متسلسلة توابع معرفة على مجال I .تسمى متتالية التوابع $\{S_n(x)\}$ الآتية **متتالية المجاميع الجزئية** للمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ على I :

$$S_1(x) = f_1(x), S_2(x) = f_1(x) + f_2(x), \ S_3(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)$$
$$, \cdots, \ S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x), \cdots$$

أي أن: $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ ، $n \geq 1$.

تعريف(3): يقال عن متسلسلة توابع مثل $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ ، معرفة على مجالمثل I ،**إنها متقاربة(نقطيا)** من تابع مثل $S(x)$ على I عندما وفقط عندما تكون متتالية

مجاميعها الجزئية $\{S_n(x)\}$ متقاربة (نقطيا) من $S(x)$ على I ؛ أيْ عندما وفقط عندما تكون $\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)$ على المجال I .وحينئذٍ يسمى التابع $S(x)$ **بتابع المجموع** على I لمتسلسلة التوابع المدروسة ،ويمكن كتابة الآتي:

$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ على I .

تعريف(4): يقال عن متسلسلة توابع مثل $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ ، معرفة على مجال مثل I، إنها **متقاربة بانتظام** من تابع مثل $S(x)$ على I عندما وفقط عندما تكون متتالية مجاميعها الجزئية $\{S_n(x)\}$ متقاربة بانتظام من $S(x)$ على I ، ويمكن كتابة الآتي:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x) = ،\ [\text{على } I]$$

نتيجة: إذا كانت متسلسلة توابع متقاربة بانتظام على مجال فإنها تكون متقاربة (نقطيا) على المجال ذاته .

نتيجة :إذا كانت متسلسلة التوابع $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ متقاربة (نقطيا) من $S(x)$ على المجال Iفإن حدها العام $f_n(x)$ يسعى إلى التابع الصفري (على I) عندما $n \to \infty$ [بمعنى أن المتتالية $\{f_n(x)\}$ تتقارب (نقطيا) من التابع الصفري على I حينئذٍ].

البرهان: $f_n(x) = S_n(x) - S_{n-1}(x)$ ، $x \in I$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S(x) - S(x) = 0$$

ملاحظة:(1) إن النتيجة السابقة تعطي شرطاً لازماً للتقارب ولكنه غير كاف.

فمثلاً،بأخذ متسلسلة التوابع $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ التي حدها العام يعطى بالعلاقة :

(تابع ثابت) $f_n(x)=\frac{1}{n}=$ ، حيث $x\in\Re$ ،فإنه يكون:

$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=0$ على $\Re$ ،إلا أن $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ متباعدة .

(2) إن حذف عدد محدود من الحدود الأولى للمتسلسلة أو إضافة عدد محدود من الحدود إلى مقدمة (أو بداية) المتسلسلة لا يغيران من طبيعة التقارب ، ولكن تابع المجموع في حالة التقارب قد يتغير .

(3) إذا سعى الحد العام لمتسلسلة توابع إلى تابع غير صفري على مجال معين فإن هذه المتسلسلة تكون متباعدة على هذا المجال بالرغم من أنها قد تكون متقاربة على جزء من هذا المجال .

(4) إذا تباعدت متتالية المجاميع الجزئية $\{S_n(x)\}$ لمتسلسلة توابع على مجال فإن متسلسلة التوابع هذه تكون متباعدة (على المجال المدروس).

(5): إن مجموعة جميع قيم x، التي من أجلها تكون متسلسلة التوابع متقاربة كمتسلسلة عددية ، تدعى **منطقة التقارب** لهذه المتسلسلة.

أمثلة:

(1) أوجد منطقة التقارب لمتسلسلة التوابع :

$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = 1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots$ المعرفة على $\Re$ ثم أوجد مجموعها على منطقة تقاربها.

الحل: إن هذه المتسلسلة هندسية أساسها $r=x$ وحدها الأول $a=1$. والشرط اللازم والكافي لتقاربها هو $|r|=|x|<1$ أي : $x\in I=]-1,1[$ فمنطقة تقاربها هي

المجال $I =]-1,1[$.

أما مجموعها فهو : $S(x) = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-x}$ = تابع المجموع على I.

(2) إن متسلسلة التوابع $\sum_{n=1}^{\infty} n x^2$ ، المعرفة على $\Re$،تكون متباعدة من أجل كل x من $\Re^*$ لأن $\lim_{n\to\infty} n x^2 = +\infty$ على $\Re^*$(أي أن حدها العام لا يسعى إلى التابع الصفري) ومن ثم فهي متباعدة على $\Re$ ، مع العلم بأنها متقاربة من أجل $x = 0$.

(3) إن: $\sum_{n=2}^{\infty} x^n = x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{x^2}{1-x}$

حيث $|x| < 1$. وبملاحظة أن هذه المتسلسلة تنتج من المتسلسلة المذكورة في المثال (1) بعد حذف حديها الأول والثاني إلا أنها بقيت متقاربة على I وتابع مجموعها تغير عن تابع مجموع المتسلسلة المذكورة في (1).

(4) إن متسلسلة التوابع $\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x)$ ، المعرفة على $\Re$، تكون متقاربة على المجال $I =]-1,1]$ وذلك بملاحظة الآتي:

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k(1-x) = x - x^{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty}\left(x - x^{n+1}\right)$$

$$= x - \lim_{n\to\infty} x^{n+1} = \begin{cases} 0 & (x = 1 \text{ عندما}) \\ x & (|x| < 1 \text{ عندما}) \\ -\infty & (x > 1 \text{ عندما}) \\ \text{غير موجودة} & (x \le -1 \text{ عندما}) \end{cases}$$

فالتقارب يتحقق فقط عندما $-1 < x \le 1$ وتابع المجموع يساوي :

$$S(x)=\begin{cases}0 & (x=1 \text{ عندما}) \\ x & (|x|<1 \text{ عندما})\end{cases}$$

(5) إن منطقة التقارب لمتسلسلة التوابع $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ ، المعرفة على $\Re$ ،هي $]1,+\infty[$ وذلك بالاستفادة من متسلسلات ريمان .

(6) إن متسلسلة التوابع $\sum_{n=1}^{\infty}e^{n(x+1)}$ ، المعرفة على $\Re$ ، متباعدة على $\Re$ لأن حدها العام لا يسعى إلى التابع الصفري على $\Re$.

ويطلب من القارئ أن يتحقق من أن منطقة تقاربها هي $]-\infty,-1[$.

(7) أوجد منطقة تقارب متسلسلة التوابع : $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^n$ ، المعرفة على $\Re-\{-1\}$.

الحل: إن هذه المتسلسلة هندسية أساسها $r=\frac{x-1}{x+1}$ ولذلك فالشرط اللازم والكافي كي تكون متقاربة هو $\left|\frac{x-1}{x+1}\right|<1$ وهذا يكافئ $-1<\frac{x-1}{x+1}<1$.

فإذا كان $x+1>0$ فإن $-x-1<x-1<x+1$ أي:

$-x-1<x-1$ و $x-1<x+1$. أي : $-2x<0$ أي: $x>0$.

أما إذا كان $x+1<0$ فإن $-x-1>x-1>x+1$ أي :

$x+1<x-1$ و $x-1<-x-1$. أي : $-1<+1$ (مستحيل) و $[x<0$ الذي يؤدي إلى أن $\left|\frac{x-1}{x+1}\right|>1]$:

إذن فالمتسلسلة المدروسة تتقارب عندما $x > 0$ ومن ثم فمنطقة تقاربها هي المجال $]0,+\infty[$.

(8) أوجد منطقة تقارب متسلسلة التوابع : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2+x^{2n}}$ ، المعرفة على $\Re$.

الحل: إن $|f_n(x)| = \frac{|x|^n}{2+x^{2n}} \le |x|^n$.

وبما أن $\sum_{n=1}^{\infty} |x|^n$ متقاربة عندما $|x| < 1$ فإن متسلسلة التوابع $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ تكون متقاربة عندما $|x| < 1$. ومن جهة ثانية ، إن $|f_n(x)| = \left|\frac{x^n}{2+x^{2n}}\right| \le \frac{|x^n|}{|x^{2n}|} = \frac{1}{|x^n|}$.

وبما أن $\sum_{n=1}^{\infty} |x|^{-n}$ متقاربة عندما $|x| > 1$ فإن متسلسلة التوابع المدروسة تكون متقاربة عندما $|x| > 1$.

وأخيراً، إذا كان $x = 1$ أو $x = -1$ فإن $|f_n(x)| = \frac{1}{3}$ ومن ثم فالمتسلسلة المدروسة تكون متباعدة عندما $x = \mp 1$.

إذن فالمتسلسلة المعطاة $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ تكون متقاربة من أجل جميع قيم x من $\Re$ باستثناء القيمتين $x = 1$ و $x = -1$. ومنه فمنطقة تقاربها هي :

$$\Re - \{-1,+1\} =]-\infty,-1[\cup]-1,1[\cup]1,+\infty[$$

(9) أوجد منطقة تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot 2^{nx}$ المعرفة على $\Re$.

الحل: إن : $c=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|f_n(x)|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot 2^{nx}\right|}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot 2^x=2^x$

فإذا كان $c<1$، أي $2^x<1$، فإن $x<0$ وتكون المتسلسلة المدروسة متقاربة حينئذٍ.
وإذا كان $c=1$، أي $2^x=1$، فإن $x=0$ ومن ثم فالمتسلسلة المدروسة تأخذ الشكل $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$، وهذه متسلسلة متباعدة .

إذن ، بالاستفادة من اختبار الجذر النوني ، يمكن القول إن منطقة تقارب المتسلسلة المعطاة هي المجال $]-\infty,0[$.

(10) أوجد منطقة تقارب متسلسلة التوابع : $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)\cdot x^{2n-1}}$ المعطاة على $\Re^*$.

الحل: بالاستفادة من اختبار دالامبير ينتج أن :

$$D=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n+1}\cdot\frac{1}{x^2}=\frac{1}{x^2}\qquad (x\text{ مثبت من }\Re^*)\ ،$$

فإذا كان $D<1$، أي $\frac{1}{x^2}<1$، فإن $|x|>1$ وتكون المتسلسلة المدروسة متقاربة حينئذٍ . وإذا كان $D=1$، أي $\frac{1}{x^2}=1$، فإن $x=\mp 1$. ومن الملاحظ أنه عندما $x=1$ يتم الحصول على المتسلسلة المتباعدة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$ ، وعندما $x=-1$ يتم الحصول على المتسلسلة المتباعدة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{2n-1}$ وذلك من المتسلسلة المدروسة .

إذن يمكن القول إن منطقة تقارب المتسلسلة المدروسة هي : $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$

(11) أوجد منطقة تقارب متسلسلة التوابع $\sum_{n=1}^{\infty} 4^{2n} \cdot (3x+2)^{2n-1}$.

الحل: $D = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \right| = \lim_{n\to\infty} 4^2 \cdot (3x+2)^2 = 4^2 \cdot (3x+2)^2$

فإذا كان $4^2 \cdot (3x+2)^2 < 1$ فإن $|4 \cdot (3x+2)| < 1$ ومن ثم فإن : $-\frac{3}{4} < x < -\frac{7}{12}$.

وإذا كان $4^2 \cdot (3x+2)^2 = 1$ فإن $x = -\frac{3}{4}$ أو $x = -\frac{7}{12}$.

ومن الملاحظ أنه عندما $x = -\frac{3}{4}$ تصبح المتسلسلة المعطاة بالشكل $\sum_{n=1}^{\infty} (-4)$

وهذه متسلسلة متباعدة ، وعندما $x = -\frac{7}{12}$ تصبح المتسلسلة المعطاة بالشكل $\sum_{n=1}^{\infty} 4$

وهذه متباعدة أيضاً.

إذن فمنطقة التقارب هي : $\left]-\frac{3}{4}, -\frac{7}{12}\right[$.

ملاحظة:

سوف يفترض أن جميع حدود متسلسلات التوابع ، التي تدرس، تكون معرفة على مجال معين .

تعريف : يقال عن متسلسلة توابع مثل $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ إنها متقاربة (نقطياً) على مجال معين إذا كانت هذه المتسلسلة متقاربة كمتسلسلة عددية من أجل كل قيمة عددية للمتغير x من هذا المجال .

ومنه ، بعد أخذ التعريفين (3) و(4) بعين الاعتبار، يمكن ذكر الآتي :

أمثلة:

(1) بين فيما إذا كانت متسلسلة التوابع الآتية متقاربة (نقطياً) على $I=[0,1]$ أم لا:

$$\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)(x+2)}-\frac{1}{(x+2)(x+3)}-\frac{1}{(x+3)(x+4)}-\cdots$$

الحل:

$$S_n(x)=\frac{1}{x+1}-(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2})-(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3})-\cdots-(\frac{1}{x+n-1}-\frac{1}{x+n})$$
$$=\frac{1}{x+n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0=S(x)\quad ,0\le x\le 1$$

فالمتسلسلة المدروسة تكون متقاربة (نقطياً) على المجال I ومجموعها على I يساوي الصفر.

(2) هل المتسلسلة الآتية متقاربة (نقطياً) على المجال $I=[0,1]$ أم لا :

$$x+x(x-1)+x^2(x-1)+\cdots+x^{n-1}(x-1)+\cdots$$

الحل:

$$S_n(x)=x+x(x-1)+x^2(x-1)+\cdots+x^{n-1}(x-1)=$$
$$=x+x^2-x+\cdots+x^n-x^{n-1}=$$
$$=x^n\xrightarrow[n\to\infty]{}S(x)=\begin{cases}0 & (0\le x<1 \text{ عندما})\\ 1 & (x=1 \text{ عندما})\end{cases}$$

فالمتسلسلة المدروسة تكون متقاربة نقطياً من $S(x)$ على المجال I .

(3*) بالعودة إلى المثال (1) فإنه يمكن إثبات أن المتتالية $\{S_n(x)\}$ ، حيث $S_n(x)=\frac{1}{x+n}$ ، تكون متقاربة بانتظام على المجال $I=[0,1]$:

ليكن $\varepsilon > 0$. عندئذٍ يوجد عدد طبيعي مثل $N_0 \neq 0$ بحيث يكون $N_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ ومن ثم يكون :

$$|S_n(x) - S(x)| = \left|\frac{1}{x+n} - 0\right| = \frac{1}{x+n} \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N_0} < \varepsilon$$

عندما $n \geq N_0$ ومن أجل جميع قيم x من I .

وبملاحظة أن N_0 مرتبط بـ ε فقط ، ومستقل عن x ، ينتج أن المتتالية $\left\{\frac{1}{x+n}\right\}$ متقاربة بانتظام على المجال I من تابع النهاية $S(x) = 0$.

إذاً فالمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ المذكورة في المثال (1) تكون متقاربة بانتظام على I.

أما تقارب المتسلسلة المذكورة في المثال (2) فهو ليس بانتظام على المجال $I = [0,1]$.(تحقق من ذلك).

تعريف: لتكن $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ متسلسلة توابع معرفة على مجال معين مثل I .

وبفرض أن هذه المتسلسلة متقاربة نقطياً ومجموعها $S(x)$ ، على I. إن مجموع الباقي النوني لها ورمزه $r_n(x)$ يعطى بالعلاقة $r_n(x) = S(x) - S_n(x)$ ، حيث $S_n(x)$ هو المجموع الجزئي النوني لها .

عندئذٍ يمكن صياغة تعريف يسمح بالقول إن المتسلسلة متقاربة بانتظام على مجال معين وذلك وفق الآتي :

تعريف: تكون المتسلسلة المتقاربة نقطياً $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ متقاربة بانتظام على مجال معين مثل I إذا كان يوجد ، من أجل أي عدد حقيقي $\varepsilon > 0$ ، عدد طبيعي مثل $N_0 \neq 0$ بحيث يكون : $|r_n(x)| < \varepsilon$

عندما $n \geq N_0$ ومن أجل جميع قيم x من I .

مثال : ادرس التقارب المنتظم والتقارب المطلق للمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$ وذلك على المجال $I = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

الحل : من الملاحظ أن متسلسلة التوابع المعطاة هي متسلسلة متقاربة من أجل كل قيمة للمتغير x من المجال I وذلك استناداً إلى اختبار ليبنتز .

كما أن : $|r_n(x)| < \frac{x^{n+1}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$

وذلك من أجل كل x من المجال I . وحيث أنه لا يوجد x في الطرف الأيمن من العلاقة السابقة فإنه ، بإعطاء $\varepsilon > 0$ ، يمكن إيجاد عدد طبيعي مثل $N_0 \neq 0$ بحيث يكون $|r_n(x)| < \varepsilon$ عندما $n \geq N_0$ ومن أجل جميع قيم x من I ، ومن ثم فالمتسلسلة المعطاة تكون متقاربة بانتظام على I .

ومن جهة أخرى ، إن هذه المتسلسلة متقاربة شرطياً من أجل $x = 1$.

إذن يمكن القول إن تقاربها ليس بالإطلاق على I .

4-2- دراسة التقارب المنتظم لمتسلسلات التوابع :

مبرهنة(1): الشرط اللازم لتقارب متسلسلة توابع مثل $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ بانتظام من تابع مثل $f(x)$ على مجال مثل I هو أن يسعى حدها العام إلى التابع الصفري بشكل منتظم على I .

هذا ويمكن صياغة نص المبرهنة (1) وفق الآتي :

إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ متقاربة بانتظام على مجال مثل I فإن المتتالية $\{f_n(x)\}$ تكون متقاربة بانتظام من التابع الصفري على I.

الإثبات : لتكن $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ متقاربة بانتظام على I . عندئذٍ تكون متتالية مجاميعها الجزئية $\{S_n(x)\}$ متقاربة بانتظام على I . ومنه ، أيا كان $\varepsilon > 0$ فإنه يوجد عدد طبيعي مثل $N_0 \neq 0$ بحيث يكون $|S_m(x) - S_n(x)| < \varepsilon$ عندما $m \geq n \geq N_0$ ومن أجل جميع قيم x من I .

ليكن $n \geq N_0 + 1$. عندئذٍ $n > n-1 \geq N_0$ ومن ثم $|S_n(x) - S_{n-1}(x)| < \varepsilon$ من أجل جميع قيم x من I ، أيْ : $|f_n(x)| < \varepsilon$ عندما $n > N_0$ ومن أجل جميع قيم x من I ، وهذا يعني أن $\{f_n(x)\}$ تتقارب بانتظام من $f(x) = 0$ على I .

نتيجة:

(1) إذا كانت متسلسلة توابع متقاربة بانتظام على مجال مثل I فإنها تكون متقاربة بانتظام على كل مجال جزئي من I .

(2) إذا كان الحد العام لمتسلسلة توابع مثل $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ يسعى إلى التابع الصفري بشكل منتظم على مجال مثل I ، وإذا كانت هذه المتسلسلة متقاربة من تابع على I ، فليس من الضروري أن يكون هذا التقارب منتظما .

(3) إذا كان الحد العام لمتسلسلة توابع مثل $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ يسعى إلى التابع الصفري بشكل غير منتظم على مجال مثل I ، وإذا كانت هذه المتسلسلة متقاربة على I ، فإن تقاربها يكون غير منتظم على I.

البرهان: (1) يترك للقارئ .

أما (2) فيبين المثال الآتي صحة مضمونه :

مثال: إن $\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x)$ متسلسلة توابع معطاة على المجال $I=]-1,+1[$ ومتقاربة من التابع $S(x)=x$ [لأن $S_n(x)=x-x^{n+1}$] على المجال I. وإن الحد العام لهذه المتسلسلة يتقارب من التابع الصفري بشكل منتظم على I بملاحظة أن

$$\frac{n}{n+1}\in I \text{ وأن: } \limsup_{n\to\infty}\left|x^n(1-x)\right|=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\left(1-\frac{n}{n+1}\right)=0$$

كما إن تقارب هذه المتسلسلة غير منتظم على I بملاحظة ما يأتي :

ليكن $\varepsilon>0$ وليكن $x\in I$. عندها يوجد عدد طبيعي مثل $N_0\neq 0$ بحيث يكون $N_0>\frac{\ln\varepsilon}{\ln|x|}-1$ ومن ثم يكون :

$$n\geq N_0 \Rightarrow \left|S_n(x)-S(x)\right|=\left|x^{n+1}\right|=|x|^{n+1}<\varepsilon$$

[لاحظ أن N_0 يتعلق بـ ε و بـ x].

أما (3) فيبرهن بنقض الفرض بالاستفادة من المبرهنة (1) . وبالإضافة إلى هذا فإن المثالين الآتيين يؤيدان صحة مضمونه :

مثال: إن $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}$ متسلسلة توابع معطاة على $I=]0,+\infty[$ ومتقاربة من التابع $S(x)=\frac{1}{e^x-1}$ على I. كما إن $\lim_{n\to\infty} e^{-nx}=0$ وإن هذا التقارب لحدها العام من التابع الصفري يكون غير منتظم على I بملاحظة الآتي :

$$\limsup_{n\to\infty}\left|e^{-nx}-0\right|=1\neq 0$$

فتقارب هذه المتسلسلة غير منتظم .

مثال آخر: إنالمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ متقاربة على المجال $]-1,+1[$ من التابع $f(x)=\frac{1}{1-x}$ وتقاربها غير منتظم لأن حدها العام يسعى إلى التابع الصفري بشكل غير منتظم على I .

مبرهنة (2): الشرط اللازم والكافي كي تكون متسلسلة توابع مثل $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ متقاربة بانتظام على مجال مثل I هو الشرط الآتي:

أيا كان $\varepsilon > 0$ فإنه يوجد عدد طبيعي مثل $N_0 \neq 0$ بحيث يكون :

$$|f_{n+1}(x)+\cdots+f_m(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{m} f_k(x)\right| < \varepsilon$$

عندما $m \geq n \geq N_0$ ومن أجل جميع قيم x من I .

الإثبات:

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ متقاربة بانتظام على $I \Leftrightarrow \{S_n(x)\}$ متقاربة بانتظام على I ، حيث

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$$

$\forall \varepsilon > 0 \Leftrightarrow$ فإنه يوجد $N_0 \neq 0$ بحيث يكون $|S_m(x)-S_n(x)| < \varepsilon$ عندما $m \geq n \geq N_0$ ومن أجل جميع قيم x من I

$\forall \varepsilon > 0 \Leftrightarrow$ فإنه يوجد $N_0 \neq 0$ بحيث يكون $\left|\sum_{k=n+1}^{m} f_k(x)\right| < \varepsilon$ عندما $m \geq n \geq N_0$ و $\forall x \in I$.

مبرهنة (3): [اختبار فايرشتراس]: لتكن $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ متسلسلة توابع معرفة على مجال مثل I .وبفرض وجود متسلسلة عددية متقاربة وذات حدود غير سالبة مثل $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ بحيث يكون $|f_n(x)| \le b_n$ من أجل جميع قيم n ومن أجل جميع قيم x من I. عندئذٍ:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ تكون متقاربة بالإطلاق من أجل كل قيمة لـ x من I .

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ تكون متقاربة بانتظام على I .

الإثبات: طريقة أولى : (1)ليكن $x \in I$. عندئذٍ ، بسبب كون $|f_n(x)| \le b_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متقاربة ، ينتج ، حسب اختبار المقارنة ، أن $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ تكون متقاربة ، وبالتالي تكون $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ متقاربة بالإطلاق .

(2) ليكن $\varepsilon > 0$. بما أن $\sum b_n$ متقاربة فإن متتالية مجاميعها الجزئية $\{S_n\}$ تكون متقاربة ، ومن ثم فهي تكون متتالية كوشي ، ومن ثم يوجد $N_0 \neq 0$ بحيث يكون :

$|S_m - S_n| < \varepsilon$ عندما $m \ge n \ge N_0$ ، أي:

$|S_m - S_n| = |b_{n+1} + \cdots + b_m| = b_1 + \cdots + b_m < \varepsilon$ عندما $m \ge n \ge N_0$.

ومنه [بفرض $S_n(x)$ الحد العام لمتتالية المجاميع الجزئية للمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$] يكون :

$$|f_{n+1}(x)+\cdots+f_m(x)| \le |f_{n+1}(x)|+\cdots+|f_m(x)| \le b_{n+1}+\cdots+b_m < \varepsilon$$

عندما $m \ge n \ge N_0$ ومن أجل جميع قيم x من I .فالمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ تكون متقاربة بانتظام على I حسب المبرهنة (2) .

طريقة ثانية: ليكن $\varepsilon > 0$. لما كانت $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متقاربة فإنه يوجد $N_0 \ne 0$ بحيث يكون $\sum_{k=n+1}^{\infty} b_k < \varepsilon$ عندما $n \ge N_0$. ومنه، ومن المتراجحة المفروضة في النص، ينتج (من أجل كل عدد صحيح موجب تماماً p) أن:

$$S_p(x) = \sum_{k=n+1}^{n+p} |f_k(x)| \le \sum_{k=n+1}^{n+p} b_k < \varepsilon$$

عندما $n \ge N_0$ و $x \in I$ ، حيث $S_p(x)$ هو الحد العام لمتتالية المجاميع الجزئية للمتسلسلة $\sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)|$. ومنه فالمتتالية $\{S_p(x)\}$ محدودة من الأعلى ، حيث $S_p(x) \ge 0$ ، فهي متقاربة .ومنه ينتج ، عندما $p \to \infty$ ، أن:

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k < \varepsilon$$

عندما $n \ge N_0$ و $x \in I$.

ومنه فالمتسلسلة $\sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)|$ متقاربة ، ومن ثم فإن المتسلسلة $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)|$ تكون متقاربة ، وهذا يعني أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ تكون متقاربة بالإطلاق . ومنه :

$$|r_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)\right| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| < \varepsilon$$

وذلك عندما $n \geq N_0$ و $x \in I$ ، وهذا يعني أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ تكون متقاربة بانتظام على I .

تقبل دون برهان صحة المبرهنات الآتية:

مبرهنة (4)[اختبار آبل]: لتكن $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ متسلسلة توابع معرفة على I .

وبفرض أن الحد العام لها يكتب بالشكل $f_n(x) = g_n(x) \cdot h_n(x)$ ، حيث :

(1) متسلسلة التوابع $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ متقاربة بانتظام على I .

(2) متتالية التوابع $\{h_n(x)\}$ متناقصة ، وذات حدود موجبة ، ومحدودة بعدد ثابت وذلك أيا كان n وأيا كان x من I .

عندئذٍ تكون المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ متقاربة بانتظام على I .

مبرهنة(5)[اختبار ديريكليه]: لتكن $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ متسلسلة توابع معرفة على I .

وبفرض أن $f_n(x) = g_n(x) \cdot h_n(x)$ ، حيث :

(1) متتالية المجاميع الجزئية لمتسلسلة التوابع $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ محدودة بعدد ثابت وذلك أيا كان n وأيا كان x من I .

(2) متتالية التوابع $\{h_n(x)\}$ متناقصة ، وذات حدود موجبة ، ومتقاربة بانتظام من التابع الصفري على I .

عندئذٍ تكون المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ متقاربة بانتظام على I .

مبرهنة(6)[اختبار ديني]: لتكن $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ متسلسلة توابعذات حدود موجبة تماما ومستمرة على مجال مغلق مثل $I=[a,b]$. وبفرض أنها متقاربة من تابع مثل $f(x)$ على I وأن هذا التابع $f(x)$ مستمر على I . عندئذٍ تكون هذه المتسلسلة متقاربة بانتظام على I .

أمثلة:

(1) المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ متقاربة بانتظام على $\Re$.

الحل: إن $\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$ من أجل جميع قيم n ومن أجل جميع قيم x . وحيث أن $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ متقاربة وذات حدود موجبة فإنه ينتج ، بحسب اختبار فايرشتراس ، أن المتسلسلة المدروسة تكون متقاربة بانتظام على $\Re$ (وبالتالي فهي متقاربة بانتظام على أي مجال) .

(2) ليس من الضروري أن تكون المتسلسلة المتقاربة بانتظام على مجال معين متقاربة بالإطلاق عليه . والمثال الآتي يوضح ذلك:

المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$ متقاربة بانتظام على $I=\left[\frac{1}{2},1\right]$ ولكنها متقاربة ليس بالإطلاق ، على I (بأخذ $x=1$).

(3) المتسلسلتان $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\sqrt{n}\,x}{n^3}$ و $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4+n^2}$ متقاربتان بانتظام على $\Re$.

الحل: استنادا إلى اختبار فايرشتراس بعد ملاحظة أن:

$\left|\frac{\cos\sqrt{n}\,x}{n^3}\right| \le \frac{1}{n^3}$ و $\left|\frac{1}{n^4+n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$ ، $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ و $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ متقاربتان .

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x^2)$ متقاربة بانتظام على المجال $I=[-p,p]$ ، حيث $0<p<1$ ، بملاحظة الآتي:

ليكن $\varepsilon>0$. عندئذٍ يوجد عدد طبيعي مثل $N_0\neq 0$ بحيث يكون $N_0>\dfrac{\ln\varepsilon-\ln(1+p)}{\ln p}$ ومن ثم يكون :

$$m>n>N_0 \Rightarrow \left|\sum_{k=n}^{m} f_k(x)\right| = \left|x^n(1-x^2)+x^{n+1}(1-x^2)+\cdots+x^m(1-x^2)\right| =$$
$$= \left|x^n+x^{n+1}-x^{m+1}-x^{m+2}\right| =$$
$$= \left|x^n(1+x)(1-x^{m-n+1})\right| =$$
$$= |x|^n\cdot|1+x|\cdot\left|1-x^{m-n+1}\right| \le |x|^n\cdot|1+x| \le p^n\cdot(1+p)<\varepsilon$$

وبذلك تتحقق شروط المبرهنة (2) في هذه الفقرة 4-2- ويتم إثبات المطلوب .

(5*) من المعلوم (بالتعريف) أن متسلسلة التوابع تكون متقاربة بالإطلاق على مجال عندما وفقط عندما تكون متسلسلة قيمها المطلقة متقاربة على هذا المجال .

وأيضاً ، يقال (بالتعريف) عن متسلسلة توابع مثل $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ إنها متقاربة طبيعياً على مجال مثل I عندما وفقط عندما تكون المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ متقاربة بانتظام على I .

برهن صحة الآتي :

(i) إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ متقاربة بالإطلاق على I فإنها تكون متقاربة على I .

(*ii*) لتكن $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ و $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ متسلسلتي توابع غير سالبة على مجال مثل I . وبفرض أن $f_n(x) \le g_n(x)$ اعتباراً من قيمة معينة لـ n ومن أجل جميع قيم x من I. عندئذٍ:

إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ متقاربة بانتظام على I فإن $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ تكون متقاربة بانتظام على I .

(*iii*) إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ متقاربة طبيعياً على I فإنها تكون متقاربة بانتظام على I.

الحل: بفرض $\{S_n(x)\}$ متتالية المجاميع الجزئية للمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

وبفرض $\{G_n(x)\}$ متتالية المجاميع الجزئية للمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$.

(*i*) يترك للقارئ .

(*ii*) ليكن $\varepsilon > 0$. لما كانت $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ متقاربة بانتظام على I فيوجد عدد طبيعي مثل $N_0 \neq 0$ بحيث يكون :

$\left|\sum_{k=n}^{m} g_k(x)\right| < \varepsilon$ عندما $m \ge n \ge N_0$ ومن أجل جميع قيم x من I.

أي : $|G_m(x) - G_{n-1}(x)| < \varepsilon$ عندما $m \ge n \ge N_0$ ومن أجل جميع قيم x من I، ومن ثم فإن:

$$\left|\sum_{k=n}^{m} f_k(x)\right| = |S_m(x) - S_{n-1}(x)| \le |G_m(x) - G_{n-1}(x)| < \varepsilon$$

عندما $m \geq n \geq N_0$ ومن أجل جميع قيم x من I، مايدل على أن $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ تكون متقاربة بانتظام على I .

(iii) إن $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ متقاربة طبيعياً على I بالفرض،وهذا يؤدي إلى ان $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ متقاربة بانتظام على I . ومنه، بفرض $\varepsilon > 0$ ، يوجد عدد طبيعي مثل $N_0 \neq 0$ بحيث يكون:

$$\sum_{k=n}^{m} |f_k(x)| = \left| \sum_{k=n}^{m} |f_k(x)| \right| < \varepsilon$$ عندما $m \geq n \geq N_0$ ومن أجل جميع قيم x من I، ومن ثم فإن: $\left| \sum_{k=n}^{m} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n}^{m} |f_k(x)| < \varepsilon$

عندما $m \geq n \geq N_0$ ومن أجل جميع قيم x من I.

إذن $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ تكون متقاربة بانتظام على I .

3-4- بعض خواص متسلسلات التوابع المتقاربة بانتظام :

مبرهنة(1): إذا كانت التوابع $f_n(x)$ مستمرة على مجال مثل I ، والمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ متقاربة بانتظام على I ، فإن مجموع هذه المتسلسلة يكون تابعاً مستمراً على I .

الإثبات: بأخذ متتالية المجاميع الجزئية $\{S_n(x)\}$ للمتسلسلة المدروسة يمكن القول إنها متقاربة بانتظام على I استناداً إلى الفرض .

ولما كانت حدود المتتالية $S_n(x)$ مستمرة على I ، فإنه، استناداً إلى المبرهنات التي تخص متتاليات التوابع ، ينتج أن التابع $S(x)=\lim_{n\to\infty} S_n(x)$ والذي هو مجموع المتسلسلة المدروسة على I ، يكون مستمراً على I .

نتيجة: (1) إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ ذات الحدود المستمرة متقاربة على I ، ومجموعها $S(x)$ عبارة عن تابع غير مستمر على I ، فإن تقاربها يكون غير منتظم .

(2) إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ ذات الحدود المستمرة متقاربة على I ، ومجموعها $S(x)$ عبارة عن تابع مستمر على I فليس من الضروري أن يكون تقاربها منتظماً .

البرهان: (1) حسب المبرهنة السابقة .

(2) **مثال :** المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ ذات حدود مستمرة ومتقاربة على $I=]-1,1[$ ، ومجموعها $S(x)=\frac{1}{1-x}$ عبارة عن تابع مستمر على I، وتقاربها غير منتظم .

مثال (1): إن متسلسلة التوابع المستمرة :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{nx}{1+n^2x^2}-\frac{(n-1)x}{1+(n-1)^2x^2}\right]$$

متقاربة على المجال $I=[0,1]$ ، ومجموعها $S(x)=0$ على هذا المجال ، ومن ثم فإن $S(x)=0$ مستمر على I ، ولكن تقارب هذه المتسلسلة على I غير منتظم ، بملاحظة الآتي :

$$S_n(x)=\left[\frac{x}{1+x^2}-0\right]+\left[\frac{2x}{1+2^2x^2}-\frac{x}{1+x^2}\right]+\cdots+\left[\frac{nx}{1+n^2x^2}-\frac{(n-1)x}{1-(n-1)^2x^2}\right]=$$

$$=\frac{nx}{1+n^2x^2}\xrightarrow[n\to\infty]{}0=S(x) \qquad ,\ 0\le x\le 1$$

ولقد تم سابقاً البرهان على أن تقارب هذه المتتالية $\{S_n(x)\}$ ليس بانتظام على I، ومن ثم ينتج أن المتسلسلة المدروسة متقاربة ، ولكن ليس بانتظام ، على I.

مثال (2): إن متسلسلة التوابع المستمرة :

$$\sum_{n=1}^{\infty}2x\left[n^2e^{-n^2x^2}-(n-1)^2e^{-(n-1)^2x^2}\right]$$

متقاربة على المجال $I=[0,1]$ ، ومجموعها $S(x)=0$ على هذا المجال ، ومن ثم فإن $S(x)=0$ مستمر على I ، ولكن تقارب هذه المتسلسلة على I غير منتظم ، بملاحظة الآتي :

$$S_n(x)=2x\left|e^{-x^2}-0\right|+2x\left|2^2e^{-2^2x^2}-e^{-x^2}\right|+\cdots+2x\left|n^2e^{-n^2x^2}-(n-1)^2e^{-(n-1)^2x^2}\right|=$$

$$=2x\left[n^2e^{-n^2x^2}\right]\xrightarrow[n\to\infty]{}0=S(x) \qquad ,\ 0\le x\le 1$$

ثم، بفرض أن هذه المتسلسلة المعطاة متقاربة بانتظام على I. عندئذٍ تكون متتالية مجاميعها الجزئية $\{S_n(x)\}$ متقاربة بانتظام على I من التابع الصفر $S(x)=0$ ، $0\le x\le 1$. ومنه ،يوجد، من أجل العدد الحقيقي الموجب $\varepsilon=1$ ، عدد طبيعي مثل $N_0\ne 0$ بحيث يكون : $\frac{2xn^2}{e^{n^2x^2}}<1$ عندما $n\ge N_0$ ومن أجل جميع قيم x من I.

فإذا كان $n_0 > \max(N_0, \frac{e}{2})$ فإن $n_0 > N_0$ و $\frac{1}{n_0} \in I = [0,1]$ ومن ثم $n_0 > \frac{e}{2}$

فإن:

$$\frac{2(\frac{1}{n_0})n_0^2}{e^{n_0^2(\frac{1}{n_0})^2}} < 1$$ وفي الوقت ذاته $n_0 > \frac{e}{2}$

أي: $\frac{2n_0}{e} < 1$ وفي الوقت ذاته $n_0 > \frac{e}{2}$

أي: $n_0 < \frac{e}{2}$ وفي الوقت نفسه $n_0 > \frac{e}{2}$، وهذا غير ممكن .

إذن فتقارب المتسلسلة المعطاة ليس بانتظام على I .

تعريف (1): لتكنالمتسلسلة المتقاربة $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = S(x)$ ، المؤلفة من توابع $f_n(x)$ قابلة للمكاملة على مجال مثل $I = [a,b]$. إذا كان :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \left[\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right]dx = \int_a^b S(x)dx$$

، فيقال إنه يمكن مكاملة المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ حداً فحداً على المجال $I = [a,b]$.

تعريف (2): لتكن المتسلسلة المتقاربة $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = S(x)$ ، المؤلفة من توابع $f_n(x)$ قابلة للاشتقاق على مجال مثل I . إذا كان :

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = \left[\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right]' = S'(x)$$

في كل نقطة x من I ، فيقال إنه يمكن اشتقاق المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ حداً فحداً في كل نقطة x من I، أيْ على I .

[إن الفتحة الموضوعة فوق رموز المساواة الأخيرة في أطرافها تعني المشتق بالنسبة للمتغير x].

مثال (3): إن متسلسلة التوابع المستمرة :

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2x\left[n^2 e^{-n^2x^2} - (n-1)^2 e^{-(n-1)^2x^2}\right]$$

متقاربة ، ولكن ليس بانتظام، من التابع $S(x)=0 \quad , \quad 0 \le x \le 1$ ، وذلك على المجال $I=[0,1]$ [انظر المثال (2)]. وبملاحظة أن (حدود هذه المتسلسلة ومجموعها) عبارة عن توابع مستمرة على المجال $I=[0,1]$ فإنه ينتج الآتي:

إن تكامل المجموع هو : $\int_0^1 S(x)dx = 0$

وإن مجموع التكاملات هو :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 2x\left[n^2 e^{-n^2x^2} - (n-1)^2 e^{-(n-1)^2x^2}\right]dx =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{\left(-e^{-n^2}+1\right) - \left[-e^{-(n-1)^2}+1\right]\right\} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left\{\left(-e^{-1^2}+1\right) + \left(-e^{-2^2}+e^{-1^2}\right) + \cdots + \left[-e^{-n^2}+e^{-(n-1)^2}\right]\right\} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1-e^{-n^2}\right) = 1$$

ومنه فتكامل مجموع المتسلسلة المعطاة لا يساوي مجموع تكاملات حدودها على المجال $I=[0,1]$.

مثال (4): لتكن متسلسلة التوابع المستمرة : $\sum_{n=1}^{\infty}\left[e^{-(n-1)^2x^2}-e^{-n^2x^2}\right]$

المتقاربة على المجال $I=[0,1]$ ، ومجموعها على هذا المجال هو التابع :

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\lim_{n\to\infty}\left\{\left[1-e^{-x^2}\right]+\left[e^{-x^2}-e^{-2^2x^2}\right]+\cdots+\left[e^{-(n-1)^2x^2}-e^{-n^2x^2}\right]\right\}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[1-e^{-n^2x^2}\right]=\begin{cases}0 & (x=0 \text{ عندما})\\ 1 & (0<x\le 1 \text{ عندما})\end{cases}$$

وبملاحظة أن هذا المجموع $S(x)$ هو تابع منقطع في النقطة $x=0$ فالمتسلسلة المعطاة تكون متقاربة ، ولكن ليس بانتظام ، على المجال I .

ومن جهة أخرى ، يمكن استنتاج أن مجموع مشتقات حدود هذه المتسلسلة المعطاة في أية نقطة مثل x من المجال $I=[0,1]$ يساوي الصفر وذلك بالاستفادة من المثال (2) . فلو كان مشتق مجموع المتسلسلة المعطاة يساوي مجموع مشتقات حدودها في كل نقطة من المجال $[0,1]$ لكان للتابع $S(x)$ مشتق في النقطة $x=0$ ، ومن ثم لكان التابع $S(x)$ مستمراً في النقطة $x=0$ وهذا غير صحيح .

إذن فمشتق مجموع المتسلسلة المعطاة لا يساوي مجموع مشتقات حدودها ، وذلك على المجال $I=[0,1]$.

مبرهنة (2): إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ ، حيث $f_n(x)$ هي توابع مستمرة على المجال $I=[a,b]$ ، متقاربة بانتظام على المجال I ، فإنه يمكن مكاملتها حداً فحداً على المجال I .

الإثبات:

طريقة اولى : بفرض $\{S_n(x)\}$ هي متتالية المجاميع الجزئية للمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ على I ، فإن $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$. وبفرض $\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)$ يكون $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. ومنه فالحد العام لمتتالية المجاميع الجزئية للمتسلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx$ هو العدد :

$$\sum_{k=1}^{n} \int_a^b f_k(x)dx = \int_a^b \left[\sum_{k=1}^{n} f_k(x) \right] dx = \int_a^b S_n(x)dx$$

ولكن $\{S_n(x)\}$ متقاربة بانتظام من $S(x)$ ، إذن : $\lim_{n\to\infty} \int_a^b S_n(x)dx = \int_a^b S(x)dx$

ومن ثم فإن :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_a^b f_k(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b S_n(x)dx = \int_a^b S(x)dx$$

وبذلك يتم إثبات المطلوب.

طريقة ثانية : حسب الفرض تكون متتالية المجاميع الجزئية $\{S_n(x)\}$ للمتسلسلة المدروسة متقاربة بانتظام من $S(x)$ على I ، وأيضا يكون:

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x) \quad ، \quad S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad ، \quad S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$$

وبأخذ متتالية المجاميع الجزئية $\{\sigma_n\}$ للمتسلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty} [\int_a^b f_n(x)dx]$ يكون $\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} [\int_a^b f_k(x)dx]$. ومنه [بالاستفادة من التقارب المنتظم للمتتالية $\{S_n(x)\}$

على I]:

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b\left[\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right]dx = \lim_{n\to\infty}\sigma_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left[\int_a^b f_k(x)dx\right] =$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b S_n(x)dx = \int_a^b\left[\lim_{n\to\infty} S_n(x)\right]dx = \int_a^b S(x)dx$$

فالمتتالية العددية $\{\sigma_n\}$ متقاربة من العدد $\int_a^b S(x)dx$ ، ومن ثم فالمتسلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_a^b f_n(x)dx\right]$ تكون متقاربة من العدد $\int_a^b S(x)dx$ الموجود لأن $S(x)$ مستمر (فهو مكامل) على I . إذن:

$$\int_a^b S(x)dx = \int_a^b\left[\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right]dx = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_a^b f_n(x)dx\right]$$

وهو المطلوب.

مثال (5): إن متسلسلة التوابع $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ تكون متقاربة بانتظام ، ومجموعها $S(x)=\frac{1}{1-x}$ على كل مجال من الشكل $I=[-q,q]$ حيث $0<q<1$. ومنه ينتج الآتي:

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1+x+x^2+x^3+\cdots \quad ,|x|<1$$

$$\int_{-q}^{q}\frac{dx}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{-q}^{q} x^n dx = \int_{-q}^{q}dx+\int_{-q}^{q} xdx+\int_{-q}^{q} x^2dx+\int_{-q}^{q} x^3dx+\cdots$$

$$\ln\frac{1+q}{1-q}=2\left(q+\frac{q^3}{3}+\frac{q^5}{5}+\cdots\right)\quad,\ 0<q<1$$

مثال(6): إن متسلسلة التوابع $\sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$ متقاربة بانتظام على المجال $[-p,p]$ ، حيث $-1<-p<0<p<1$ ، ومجموعها $\frac{1}{1+x^2}$ ، وذلك بالاستفادة من اختبار فايرشتراس بعد ملاحظة أن :

$|(-1)^n x^{2n}|\le p^n$ من أجل جميع قيم n ومن أجل جميع قيم x التي تحقق الشرط $-p\le x\le p<\sqrt{p}<1$ ، وملاحظة أن : $\sum_{n=1}^{\infty}p^n$ هندسية متقاربة ما دام $|p|<1$

ومنه ينتج الآتي:

$$\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}\qquad ,|x|<1$$

$$-p\le 0<x\le p\Rightarrow\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(-1)^n t^{2n}dt\Rightarrow$$

$$arctg\,x=arctg\,x-arctg\,0=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$$

ملاحظة: إن شرط التقارب المنتظم في المبرهنة (2) هو شرط كافٍ وغير لازم كي يمكن مكاملة المتسلسلة حداً فحداً . كما إنه من المثال (1) يمكن القول إن شرط التقارب المنتظم في المبرهنة (1) هو شرط كافٍ وغير لازم كي يكون مجموع المتسلسلة تابعاً مستمراً.

مثال(7): بأخذ متسلسلة التوابع المذكورة في المثال (1) ، والتي تكون متقاربة على المجال $I=[0,1]$ ، ولكن ليس بانتظام ، ومجموعها هو $S(x)=0$ على I ،

فينتج من أجل هذه المتسلسلة أنه يمكن مكاملتها حداً فحداً على I بملاحظة الأتي:

$$u_n(x)=\frac{nx}{1+n^2x^2}-\frac{(n-1)x}{1+(n-1)^2x^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 u_n(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_0^1 u_k(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_0^1\left[\sum_{k=1}^{n}u_k(x)\right]dx=$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{nx}{1+n^2x^2}dx=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+n^2)}{2n}=0=\int_0^1 S(x)dx$$

مبرهنة (3): لتكن متسلسلة التوابع $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ المعطاة على مجال مثل $I=[a,b]$ بحيث يتحقق الأتي:

(1) المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ متقاربة على I ومجموعها $S(x)$ على I.

(2) التوابع $f_n(x)$ قابلة للاشتقاق بالنسبة لـ x على I.

(3) التوابع $\frac{df_n(x)}{dx}=f_n'(x)$ هي توابع مستمرة على I .

(4) متسلسلة المشتقات $\sum_{n=1}^{\infty}f_n'(x)$ متقاربة بانتظام على I .

عندئذٍ يمكن اشتقاق المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ حداً فحداً في كل نقطة من نقاط المجال I.

الإثبات : طريقة أولى : بفرض $g(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ على I . ولتكن x نقطة كيفية من نقاط $I=[a,b]$. بحسب المبرهنة (2) يمكن مكاملة المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ حداً فحداً على المجال $[a,x]$، ومن ثم فإن:

$$\int_a^x g(t)dt=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^x f_n'(t)dt=\sum_{n=1}^{\infty}\left[f_n(t)\right]_a^x=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)-\sum_{n=1}^{\infty} f_n(a)=S(x)-S(a)$$

ومنه: $S(x)=\int_a^x g(t)dt+S(a)$

وباشتقاق طرفي (هذه العلاقة الأخيرة) بالنسبة للمتغير x ، مع الأخذ بعين الاعتبار أن التابع $g(x)$ مستمر على I حسب المبرهنة (1) ، فإنه ينتج أن :

$$S'(x)=\left[\int_a^x g(t)dt\right]'=g(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$$

وبذلك يتم إثبات المطلوب.

طريقة ثانية : لتكن $\{S_n(x)\}$ متتالية المجاميع الجزئية للمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ على I . عندئذٍ $S_n(x)=\sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ و $\lim_{n\to\infty} S_n(x)=S(x)$ على I و $S_n'(x)=\sum_{k=1}^{n} f_k'(x)$ مستمر على I و $\{S_n'(x)\}$ متقاربة بانتظام على I من تابع نهاية ، وليكن $g(x)$. إذن $g(x)=S'(x)$ حسب المبرهنة المماثلة ، التي تخص متتاليات التوابع .

مثال (8): إذا كانت متسلسلة التوابع المستمرة $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ متقاربة على مجال مثل I ، فعندئذٍ :

(i) ليس من الضروري أن تكون متسلسلة المشتقات $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ [في حالة وجودها] متقاربة بانتظام .

(ii) إذا كان تقارب $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ منتظماً على I فمن الممكن أن تكون متسلسلة المشتقات [في حالة وجودها] متباعدة .

(iii) إذا كان تقارب $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ منتظماً على I فمن الممكن أن تكون متسلسلة المشتقات متقاربة بانتظام على I .

الحل:

(i) لتكن متسلسلة التوابع المستمرة :

$$\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+\sum_{n=2}^{\infty}\left\{\frac{1}{2n}\ln(1+n^2x^2)-\frac{1}{2(n-1)}\ln\left[1+(n-1)^2x^2\right]\right\}$$

المتقاربة على المجال $I=[0,1]$ ، والتي مجموعها هو $S(x)=0$ على I ، وذلك لأن:

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\ln(1+n^2x^2)=0 \quad , \quad 0\le x\le 1$$

عندها تكون متسلسلة مشتقات حدود هذه المتسلسلة المدروسة هي المتسلسلة المذكورة في المثال (1) والتي هي متقاربة على المجال I ، ولكن ليس بانتظام ، ومجموعها هو $g(x)=0$ على I.

ومنه : $S'(x)=0=g(x)$ في كل نقطة x من I .

(ii) : إن متسلسلة التوابع $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n^3x}{n^2}$ المعرفة على $\Re$ متقاربة بانتظام على $\Re$ ،

ولكن متسلسلة المشتقات لها ، التي هي $\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot\cos n^3 x$ ، متباعدة من أجل جميع القيم $x=\frac{k\pi}{n^3}$ ، حيث k عدد صحيح .

(iii) إن متسلسلة التوابع $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^4}$ المعرفة على $I=[0,\pi]$ متقاربة بانتظام على I استنادا إلى اختبار فايرشتراس [بعد ملاحظة أن $\left|\frac{\cos nx}{n^4}\right|\le\frac{1}{n^4}$]، وإن متسلسلة المشتقات $\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{\sin nx}{n^3}$ هي أيضا متقاربة بانتظام على I استنادا إلى اختبار فايرشتراس ومنه:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^4}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos nx}{n^4}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{\sin nx}{n^3}$$

ملاحظة: إن الشرط (4) من شروط المبرهنة (3) هو شرط كاف ، ولكنه غير لازم ، كي يمكن اشتقاق المتسلسلة ، المحققة لبقية الشروط ، حدا فحدا .

[انظر (i) في المثال (8)].

4-4- تمارين محلولة:

(1) هلالمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(\sin nx)}{n^3}$ متقاربة بانتظام أم ليس بانتظام على $\Re$.

الحل: إن $\left|\frac{\cos(\sin nx)}{n^3}\right|\le\frac{1}{n^3}$ من أجل جميع قيم n وجميع قيم x من $\Re$ ولكن $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ متقاربة ، إذن ،بحسب اختبار فايرشتراس ، تكون المتسلسلة المدروسة متقاربة بانتظام على $\Re$.

(2) أوجد منطقة التقارب للمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{x-1}}$.

الحل: هذه المتسلسلة تكون متقاربة عندما $x-1>1$ ومن ثم فإن $x>2$.

كما إنها متباعدة عندما $x-1\le 1$ ومن ثم فإن $x\le 2$.

إذن فمنطقة التقارب لهذه المتسلسلة هي $I=]2,+\infty[$.

(3) هل المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2nx}{e^{n^2x^2}}$ متقاربة بانتظام أم ليس بانتظام على $I=[0,1]$.

الحل:

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{2nx}{e^{n^2x^2}}=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{0\le x\le 1}|f_n(x)-f(x)|=\lim_{n\to\infty}\sup_{0\le x\le 1}\frac{2nx}{e^{n^2x^2}}=\sqrt{\frac{2}{e}}\neq 0$$

فالتقارب ليس بانتظام .

(4) هل المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{(1+x^2)^{n-1}}$ متقاربة بانتظام أم ليس بانتظام على $\mathbb{R}$.

الحل: ثمة حالتان :

(/) بفرض $x\neq 0$:عندها تكون المتسلسلة المدروسة ليست إلا $\sum_{n=1}^{\infty}x\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^{n-1}$ وهذه متسلسلة يمكن أن يقال عنها إنها هندسية ، حدها الأول x وأساسها $\frac{1}{1+x^2}$ ، وهي متقاربة ما دام $\left|\frac{1}{1+x^2}\right|=\frac{1}{1+x^2}<1$ ، ومجموعها هو :

$$S_1(x) = \frac{x}{1-\frac{1}{1+x^2}} = \frac{x(1+x^2)}{1+x^2-1} = \frac{1+x^2}{x} \quad , \ x \neq 0$$

(ب) بفرض $x = 0$:عندها تكون المتسلسلة المدروسة ليست إلا المتسلسلة الصفرية وهي متقاربة ومجموعها الصفر ،أي $S_2(x) = 0$.

وبذلك يكون :

$$S(x) = \begin{cases} 0 & (x = 0 \text{ عندما}) \\ \dfrac{1+x^2}{x} & (x \neq 0 \text{ عندما}) \end{cases}$$

وحيث أن التابع $S(x)$ منقطع عند $x = 0$ ، وحدود المتسلسلة المدروسة توابع مستمرة على $\Re$ فالتقارب ليس بانتظام .

(5) هل المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx}{1+n^2x^2}$ متقاربة بانتظام أم ليس بانتظام على $\Re$.

الحل: $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{1+n^2x^2} = 0$

ومن أجل $x = \frac{1}{n}$ يكون $\sup_{x\in\Re}\left|\frac{nx}{1+n^2x^2}\right| \geq \frac{1}{2}$ ومن ثم فإن

$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\Re} |f_n(x) - f(x)| \neq 0$ ولهذا فإن التقارب ليس بانتظام .

(6) هل المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} n[(1+x)e]^{-n}$ متقاربة بانتظام أم ليس بانتظام على $I =]0,1[$

الحل:

$0 < x < 1$ ، $\left|\frac{n}{(1+x)^n e^n}\right| < \frac{n}{e^n}$ من أجل جميع قيم n وجميع قيم x من I وحيث

ان $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^n}$ متقاربة وذات حدود موجبة فحسب اختبار فايرشتراس تكون المتسلسلة المدروسة متقاربة بانتظام على I.

(7) هل المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} n[(1+x)e]^{-n} \tan^{-1}(nx)$ متقاربة بانتظام أمليس بانتظام على $I =]0,1[$.

الحل: حسب التمرين (6) $\sum_{n=1}^{\infty} n[(1+x)e]^{-n}$ متقاربة بانتظام على I. ومتتالية التوابع $\{\tan^{-1}(nx)\}$ متزايدة تماما ومحدودة من أجل كل n وكل x من I.

ومنه فالحد العام $f_n(x)$ للمتسلسلة المدروسة له الشكل : $f_n(x) = g_n(x) \cdot h_n(x)$

حيث : $h_n(x) = \tan^{-1} nx$ ، $g_n(x) = n[(1+x)e]^{-n}$.

وبذلك تتحقق شروط [اختبار أبل] ما يسمح بالقول إن $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ تكون متقاربة بانتظام على I.

(8) هل المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n}$ متقاربة بانتظام أم ليس بانتظام على $I =]0,1[$.

الحل: إن $f_n(x) = \frac{(-x)^n}{n} = (-x)^n \cdot \frac{1}{n} = g_n(x) \cdot h_n(x)$

وإن متتالية المجاميع الجزئية للمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-x)^n$ هي $\{G_n(x)\}$ ،حيث:

$$G_n(x) = (-x) + (-x)^2 + \cdots + (-x)^n = \frac{-x + (-x)^{n+1}}{1+x} \quad , \ 0 < x < 1$$

$$|G_n(x)| = \frac{\left|-x + (-x)^{n+1}\right|}{1+x} \le \frac{x + x^{n+1}}{1+x} \le x + x^{n+1} < 2 \quad : \text{ومن ثم}$$

من أجل جميع قيم n ومن أجل كل x من I . وهذا يعني أن $\{G_n(x)\}$ محدودة.

كما إن المتتالية $\{h_n(x)\}$ ، حيث $h_n(x) = \frac{1}{n}$ ، متناقصة ، ومتقاربة بانتظام من التابع الصفري على I.

ومنه ، حسب [اختبار ديريكليه] ، ينتج أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ المدروسة تكون متقاربة بانتظام على I .

(9) هل المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+n^2x^2}$ متقاربة بانتظام أم ليس بانتظام على $I = [0, p]$ ، حيث $0 < p < 1$.

الحل: إن $f_n(x) = \frac{x^n}{1+n^2x^2} = x^n \cdot \frac{1}{1+n^2x^2} = g_n(x) \cdot h_n(x)$

وإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ متقاربة بانتظام على I .

كما إن المتتالية $\left\{\frac{1}{1+n^2x^2}\right\}$ متناقصة ومحدودة من أجل كل n و كل x من I.

ومنه ،حسب اختبار أبل ،ينتج أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ المدروسة تكون متقاربة بانتظام على I .

(10) أوجد منطقة التقارب للمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^n}$ واحسب مجموعها .

الحل: إن هذه المتسلسلة هندسية ، حدها الأول $a=\frac{x}{2}$ وأساسها $r=\frac{x}{2}$ ، ومن ثم فهي تتقارب فقط عندما $|r|<1$ أيْ من أجل جميع قيم x المحققة للمتراجحة $\left|\frac{x}{2}\right|<1$ ، أيْ : $|x|<2$ ، أيْ أن منطقة التقارب هي $I=]-2,+2[$.

أما مجموع هذه المتسلسلة فهو $S(x)=\frac{\frac{x}{2}}{1-\frac{x}{2}}=\frac{x}{2-x}$.

(11) أوجد منطقة التقارب للمتسلسلة $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n+\cos x}$ المعرفة على $\Re$.

الحل: لما كان $-1\le\cos x\le 1$ و $n\ge 2$ ، فإن $0<n+\cos x\le n+1$ ، ومن ثم فإن $\frac{1}{n+\cos x}\ge\frac{1}{n+1}$ من أجل جميع قيم x من $\Re$ ومن أجل كل $n\ge 2$.

وحيث أن $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ متباعدة فإن $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n+\cos x}$ تكون متباعدة (حسب اختبار المقارنة) وذلك من أجل جميع قيم x من $\Re$. فمنطقة التقارب هي المجموعة الخالية .

(12) أوجد منطقة التقارب للمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n}$

الحل: $D=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-1)^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{n}{(x-1)^n}\right|=\lim_{n\to\infty}|x-1|\cdot\frac{n}{n+1}=|x-1|$

فإذا كان $D<1$ فإن المتسلسلة تكون متقاربة حسب اختبار دالامبير ، ومن ثم فإن

قيم x المحققة للمتراجحة $|x-1|<1$، أيْ: $-1<x-1<1$ ، أيْ : $0<x<2$ ، أي أن العناصر x ،حيث $x\in[0,2[$ ، تكون عناصر في منطقة التقارب .

وإذا كان $D=1$ فإن $|x-1|=1$ ومن ثم $x-1=+1$ أو $x-1=-1$ ، ومن ثم $x=2$ أو $x=0$. ومنه :

بتعويض $x=2$ في المتسلسلة المدروسة تظهر المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ التي هي متباعدة.

و بتعويض $x=0$ في المتسلسلة المدروسة تظهر المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ التي هي متقاربة حسب اختبار ليبنتز .

إذاً فمنطقة التقارب هي $I=[0,2[$.

(13) ليكن $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$ على $\Re$. أثبت أن :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} S(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n^3}$$

الحل: إن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$ ذات حدود مستمرة على $\Re$ ، ومتقاربة بانتظام على $\Re$ [[حسب اختبار فايرشتراس بملاحظة أنّ $\left|\frac{\cos nx}{n^2}\right|\le\frac{1}{n^2}$ ، وأنّ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ متقاربة]] ومن ثم فإن $S(x)$ يكون مستمراً على $\Re$، ويكون :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} S(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos nx}{n^2}dx\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\sin nx}{n^3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n^3}$$

(14) بفرض $\alpha > 0$ ، ولتكن $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(x+n)}$ متسلسلة توابع معرفة على المجال $I = [0, \alpha]$.

والمطلوب:

(i) أثبت أن هذه المتسلسلة متقاربة بانتظام على I .

(ii) بفرض أن تابع المجموع لهذه المتسلسلة هو $S(x)$ على I فأثبت أن :

$$\frac{dS(x)}{dx} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)^2} \quad [\text{على } I]$$

(iii) أوجد (من جديد) التابع $S(x)$ بالاستفادة من (ii) .

الحل: (i) بملاحظة أن : $\left|\frac{x}{n(x+n)}\right| = \frac{|x|}{|nx+n^2|} \le \frac{\alpha}{n^2}$ من أجل جميع قيم $n \ge 1$

ومن أجل جميع قيم x من I ، وأنّ المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha}{n^2}$ متقاربة، فإنه يمكن القول إن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(x+n)}$ متقاربة بانتظام على I حسب اختبار فايرشتراس .

(ii) بناء على (i) وعلى الفرضيات يكون $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(x+n)}$.

ومنه يمكن قول الآتي :

إن هذه المتسلسلة متقاربة من $S(x)$ على I ، وإن حدودها قابلة للاشتقاق على I ، وإن مشتقات الحدود عبارة عن توابع مستمرة على I ، وإن متسلسلة المشتقات $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)^2}$ متقاربة بانتظام على I حسب اختبار فايرشتراس بملاحظة أن

$\left|\frac{1}{(x+n)^2}\right| = \frac{1}{(x+n)^2} \le \frac{1}{n^2}$ من أجل جميع قيم n ومن أجل جميع قيم x من I.

إذن : $\frac{dS(x)}{dx} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx}\left[\frac{x}{n(x+n)}\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)^2}$ [على I]

(iii) من الملاحظ أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)^2}$ متقاربة بانتظام على I ، وأن حدودها مستمرة على المجال $I = [0,\alpha]$.

ليكن $x \in I$. عندئذ ، بعد ملاحظة أن $S(0) = 0$ ، يكون :

$$S(x) = [S(t)]_0^x = \int_0^x S'(t)dt = \int_0^x \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(t+n)^2}\right] dt =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^x \frac{dt}{(t+n)^2}\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{-1}{t+n}\right]_0^x = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{-1}{x+n} + \frac{1}{n}\right]$$

(15) (i) إذا كانت $\{b_n\}$ متتالية متناقصة وذات حدود غير سالبة ، وكانت $H(m,n)$ أكبر قيمة و $h(m,n)$ أصغر قيمة] للمجاميع $\sum_{r=m}^{v} a_r$ ، حيث $v = m, m+1, \cdots, n$ ، فأثبت أن : $b_m h(m,n) \le \sum_{r=m}^{n} a_r b_r \le b_m H(m,n)$

(ii) إذا كانت المتتالية $\{b_n(x)\}$ متناقصة وذات حدود غير سالبة من أجل كل x من المجال $I = [a,b]$ ، وكانت $\{b_n(x)\}$ محدودة من أجل جميع قيم n و x ، وكانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ متقاربة بانتظام على I ، فأثبت أنالمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ تكون متقاربة بانتظام على I.

(iii) أثبت أن المتسلسلة $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}|x|^n$ متقاربة بانتظام على $I = [-1,1]$.

الحل: (i) بفرض أن $f(m,v)=\sum_{r=m}^{v} a_r$ فيكون :

$$\sum_{r=m}^{n} a_r b_r = a_m b_m + a_{m+1} b_{m+1} + \cdots + a_n b_n =$$
$$= f(m,m)b_m + \{f(m,m+1) - f(m,m)\}b_{m+1} + \cdots + \{f(m,n) - f(m,n-1)\}b_n =$$
$$= f(m,m)(b_m - b_{m+1}) + f(m,m+1)(b_{m+1} - b_{m+2}) + \cdots +$$
$$+ f(m,n-1)(b_{n-1} - b_n) + f(m,n)b_n$$

ولكن المقادير $b_m - b_{m+1}, b_{m+1} - b_{m+2}, \cdots$ غير سالبة ، إذن :

$$h(m,n)(b_m - b_{m+1} + b_{m+1} - b_{m+2} + \cdots - b_n + b_n) \le$$
$$\le \sum_{r=m}^{n} a_r b_r \le H(m,n)(b_m - b_{m+1} + \cdots - b_n + b_n)$$

ومنه ينتج المطلوب في (i) .

(ii) بفرض أن $b_n(x) < k$ من أجل $a \le x \le b$ وجميع قيم n ، حيث k مستقل عن x وعن n .

ليكن $\varepsilon > 0$. عندئذٍ يوجد N بحيث أنه ، من أجل $n > N$ وأي عدد صحيح موجب v ، يكون $\left|\sum_{r=n+1}^{n+v} a_r(x)\right| < \frac{\varepsilon}{k}$. ومنه ،حسب (i)، ينتج أن :

$$\left|\sum_{r=n+1}^{n+p} a_r(x) b_r(x)\right| \le b_n(x) \max_{v=1,2,\cdots,p} \left|\sum_{r=n+1}^{n+v} a_r(x)\right| < k\frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon$$

ومنه ينتج المطلوب في (ii) .

(iii) لما كانت $\{|x|^n\}$ متناقصة ، وذات حدود غير سالبة ، ومحدودة من أجل $-1 \le x \le 1$ ، وكانت المتسلسلة $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ متقاربة ، فإن $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}|x|^n$ تكون متقاربة بانتظام على I .

وبالإضافة إلى ذلك ، فإنه، في المجال المذكور ،يكون: $\left|\sum_{r=1}^{n}\cos rx\right| \le \left(\sin\frac{x}{2}\right)^{-1}$

والأخير بدوره أقل من الأكبر بين المقدارين $\left(\sin\frac{\theta_2}{2}\right)^{-1}$ و $\left(\sin\frac{1}{2}\theta_1\right)^{-1}$ أو يساويه، حيث أن هذين المقدارين مستقلان عن x وعن n. ومنه فالمتسلسلة المدروسة تكون متقاربة بانتظام على المجال المدروس .

(17) أثبت أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin n\theta$ متقاربة بانتظام على المجال $I = [0,\pi]$. ثم ، بفرض أن مجموعها هو $\frac{\theta}{2}$ ، فاستنتج صحة المساواة :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} .$$

الحل: إن المتتالية $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ متناقصة وذات حدود غير سالبة و $\frac{1}{n} \to 0$. كما إن :

$$\left|\sum_{r=1}^{n}(-1)^{r-1}\sin r\theta\right| \le \sum_{r=1}^{n}|\sin r\theta| =$$

$$\left|\sum_{r=1}^{n}(-1)^{r-1}\sin r\theta\right| \le \sum_{r=1}^{n}|\sin r\theta| = \sum_{r=1}^{n}\sin r\theta = \sin\frac{n}{2}\theta\frac{\sin\frac{n+1}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}} \le$$

$$\le \frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}} \le Max\left(\frac{1}{\sin\frac{\theta_1}{2}}, \frac{1}{\sin\frac{\theta_2}{2}}\right) \quad ; \ 0 < \theta_1 \le \theta \le \theta_2 < \pi$$

حيث أن هذا مستقل عن θ وعن n .

إذن فالمتسلسلة المدروسة ، التي هي متسلسلة صفرية عند كل من الطرفين 0 و π ، تكون متقاربة بانتظام على المجال I .

[هذا ومن المفهوم أن θ_1 قريب جداً من الصفر وأن θ_2 قريب من 2π بقدر ما يراد].

ثم بفرض $\frac{\theta}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin n\theta$ ، مع ملاحظة أن حدود المتسلسلة مستمرة ، يكون:

$$\frac{\theta^2}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \theta \cdot \sin n\theta$$

ومن ثم فإن :

$$\int_0^{\pi} \frac{\theta^2}{2} d\theta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \int_0^{\pi} \theta \cdot \sin n\theta \, d\theta$$

$$\left[\frac{\theta^3}{6}\right]_0^{\pi} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot \frac{(-1)^{n+1} \cdot \pi}{n}$$

$$\frac{\theta^3}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{n^2}$$

ومنه ينتج المطلوب .

4-5- تمارين للحل:

[1] أوجد منطقة التقارب لكل من المتسلسلات الآتية :

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x+2}{x+3}\right)^n$ الجواب: $\left]-\frac{5}{2}, +\infty\right[$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{x}{x+1}\right)^n$ الجواب: $\left[-\frac{1}{2},+\infty\right[$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^{2n}}$ الجواب: $\{x / x \in \Re\ ,\ |x| > 1\}$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ الجواب: $]1,+\infty[$

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} x^{2n} \cdot \cos^n x$ الجواب: $]-1,1[$

(6) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{x}{n^2}$ الجواب: $]-\infty,+\infty[$

(7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{|x|}{x}\right)^n$ الجواب: $]-\infty,0[$

(8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^n$ الجواب: $\left\{x / x \in \Re\ ,\ x \le -\frac{1}{2}\right\}$

[2] اثبت أن كلاً من المتسلسلات الآتية تكون متقاربة بانتظام على $\Re$:

(1) $\sum_{k=1}^{\infty} a^k \cdot \cos k^2 x$ حيث $|a| < 1$

(2) $\sum_{k=1}^{\infty} a^k \cdot \sin b^k x$ حيث $|a| < 1$

(3) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 2^k}$

Damascus University

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{x^4+k^3} \quad (4)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{k\sqrt{k}} \quad (5)$$

[3] لتكن $\sum_{k=1}^{\infty}x^{k-1}$ متسلسلة توابع معرفة على $\mathfrak{R}$. والمطلوب :

(i) هل هذه المتسلسلة تتقارب ولكن ليس بانتظام على المجال $I=]-1,1[$.

(ii) أثبت أن هذه المتسلسلة تتقارب بانتظام على أي مجال مغلق محتوى في المجال I .

[4] أوجد مجموع المتسلسلة : $x^2+\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^2}+\cdots+\frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^{n-1}}+\cdots$

على المجال $I=[-1,1]$ ثم بيّن أن تقارب هذه المتسلسلة ليس منتظماً على هذا المجال .

[5] إذا كانت المتسلسلتان $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ و $\sum_{n=1}^{\infty}v_n(x)$ متقاربتين بانتظام على المجال $I=[a,b]$ وكان التابع $\lambda(x)$ مستمراً على I فإن المتسلسلات الآتية تكون متقاربة بانتظام على I :

$$\sum_{n=1}^{\infty}[u_n(x)+v_n(x)]\ ,\ \sum_{n=1}^{\infty}[u_n(x)-v_n(x)]\ ,\ \sum_{n=1}^{\infty}[\lambda(x)\cdot u_n(x)]$$

[6] بفرض أن : $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^3}$ على $\mathfrak{R}$.أثبت أن:

$$\int_0^{\pi}f(x)dx=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}$$

[7] بفرض أن : $F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^3}$ على $\Re$.

والمطلوب : (i) أثبت أن التابع $F(x)$ مستمر على $\Re$.

(ii) أثبت أن $\lim_{x\to 0}F(x)=0$.

(iii) أثبت أن $\frac{dF(x)}{dx}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$ على $\Re$.

(iv) أثبت أن المشتق $F'(x)$ يكون تابعاً مستمراً على $\Re$.

4-6- متسلسلات القوى :

تعريف(1): متسلسلة القوى هي متسلسلة توابع لها الشكل التفصيلي (المفصل) الآتي: $c_0+c_1(x-a)+c_2(x-a)^2+\cdots+c_n(x-a)^n+\cdots$

ولها الشكل المختصر الآتي: $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-a)^n$ ، حيث a عدد (ثابت) يدعى مركز متسلسلة القوى ، وحيث $c_0,c_1,c_2,\cdots,c_n,\cdots$ أعداد تدعى أمثال متسلسلة القوى .

مثال (1) : (i) إن مركز متسلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty}2^n(x-1)^n$ هو $a=1$.

(ii) إن مركز متسلسلة القوى $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}x^n$ هو $a=0$.

(iii) إن مركز متسلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n}(x+2)^n$ هو $a=-2$.

ملاحظة (1) : إن حدود أية متسلسلة قوى تكون توابع معرفة ومستمرة وقابلة للاشتقاق على $\Re$ طالما أن هذه الحدود عبارة عن قوى ذات أسس غير سالبة.وإن

كل متسلسلة قوى تكون متقاربة من أجل [المركز $x=a=$ المركز] لأنها تتحول إلى متسلسلة صفرية قد يضاف إليها عدد، فلها مجموع ومن ثم فهي متقاربة .

كما يمكن رد أية متسلسلة قوى ،مركزها لا يساوي الصفر، أي ذات الشكل $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ إلى متسلسلة قوى ، مركزها الصفر ، وذلك بعد فرض $x-a=y$ حيث يتم الحصول على المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} c_n y^n$. ولهذا سوف يتم الاكتفاء بدراسة متسلسلات القوى التي مركزها الصفر .

مبرهنة (1) : لتكن $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ متسلسلة قوى . عندئذٍ :

(i) إذا كانت هذه المتسلسلة متقاربة من أجل قيمة معينة مغايرة للصفر مثل $x=x_0\neq 0$ فإنها تكون متقاربة بالإطلاق من أجل جميع قيم x التي تحقق المتراجحة $|x|<|x_0|$.

(ii) إذا كانت هذه المتسلسلة متباعدة من أجل قيمة معينة مثل $x=x_1$ فإنها تكون متباعدة من أجل جميع قيم x التي تحقق المتراجحة $|x|>|x_1|$.

الإثبات : (i) بفرض أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n$ تكون متقاربة من أجل $x=x_0\neq 0$. عندئذٍ تكون المتسلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_0^n$ متقاربة ، ومن ثم فإن $c_n x_0^n \to 0$ ومن ثم فإن المتغير $c_n x_0^n$ يكون محدوداً ، أي : يوجد عدد حقيقي موجب مثل M بحيث يكون $|c_n x_0^n|<M$ من أجل جميع قيم n من N .

ليكن x أي عدد بحيث يكون $|x|<|x_0|$. عندئذٍ $\left|\frac{x}{x_0}\right|<1$. ومنه يكون [من أجل كل n] :

$$|c_n x^n| = \left|c_n x_0^n \cdot \left(\frac{x}{x_0}\right)^n\right| = |c_n x_0^n| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n < M \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$$

وحيث أن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} M \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$ متقاربة (لأنها هندسية، القيمة المطلقة لأساسها r أصغر من الواحد أي: $|r| = \left\|\frac{x}{x_0}\right\| = \left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$) فإنه يمكن استنتاج أن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n x^n|$ متقاربة (حسب اختبار المقارنة)، ومن ثم فإن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ تكون متقاربة بالإطلاق من أجل القيمة x المأخوذة بشكل كيفي بحيث يكون $|x| < |x_0|$ وبهذا يتم إثبات الطلب الأول .

(ii) بفرض أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_1^n$ متباعدة . وبفرض (مؤقتاً) أن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ متقاربة من أجل قيمة لـ x محققة المتراجحة $|x| > |x_1|$. عندئذ بملاحظة أن $x \neq 0$ ، ينتج أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n$ تكون متقاربة (حسب (i)) وهذا غير صحيح . وبهذا يتم إثبات المطلوب .

ملاحظة (2) : يمكن هندسياً تفسير نص البرهنة السابقة وفق الآتي :

(i) إذا تقاربت $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ من أجل نقطة $x_0 \neq 0$ فإن هذه المتسلسلة تتقارب بالإطلاق من أجل جميع نقط المجال المفتوح الذي طرفاه $|x_0|$ و $-|x_0|$.

(ii) إذا تباعدت $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ من أجل نقطة x_1 فإنها تتباعد من أجل جميع قيم x من المجالين $]-\infty,-|x_1|[$ و $]|x_1|,+\infty[$.

نتأخذ أية متسلسلة قوى $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ فإنه توجد ثلاث حالات :

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ متقاربة على $\Re =]-\infty,+\infty[$ [أي من أجل جميع قيم x من $\Re$].

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ متقاربة من أجل $x = 0$ ومتباعدة من أجل جميع قيم x من $\Re'$.

(3) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ تكون متقاربة من أجل جميع قيم x من مجموعة جزئية X من $\Re$ ، حيث $\Re \subset X \subset \{0\}$ ، وتكون متباعدة من أجل جميع قيم x من $\Re - X$.

برهنة (2) : إذا كانت متسلسلة قوى مثل $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ متقاربة من أجل جميع قيم x من مجموعة مثل X ، حيث $\Re \subset X \subset \{0\}$ ، ومتباعدة من أجل جميع قيم x من المجموعة $\Re - X$ ، فإنه يوجد عدد حقيقي موجب تماماً مثل ρ بحيث يتحقق الآتي:

(i) تتقارب المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ بالإطلاق من أجل جميع قيم x التي تحقق المتراجحة $|x| < \rho$.

(ii) تتباعد المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ من أجل جميع قيم x التي تحقق المتراجحة $|x| > \rho$.

الإثبات : لما كان $X \subset \Re$ فإنه يوجد $x_1 \in \Re$ بحيث يكون $x_1 \notin X$ ، ومن ثم تكون المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ متباعدة من أجل القيمة x_1 . ومنه ينتج أنه أيا كان x من X فإن $|x| \le |x_1|$ [لأنه لو كان يوجد $x \in X$ بحيث يكون $|x| > |x_1|$ لكانت $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ متباعدة من أجل هذه القيمة $x \in X$ وهذا غير صحيح].

إذن فالمجموعة غير الخالية من الأعداد الحقيقية $Y = \{|x| / x \in X\}$ تكون محدودة من الأعلى ، ومن ثم يكون $\sup Y$ موجوداً . ومنه ، بوضع $\rho = \sup Y$ ، يكون $\rho > 0$ لأن $X \subset \{0\}$. وهنا ثمة حالتان :

الحالة الأولى :

$x \in \Re$ بحيث $|x| < \rho$. عندئذٍ يوجد $|x_0| \in Y$ بحيث يكون $\rho \le |x_0| < |x|$، وهذا يعني أنه يوجد $x_0 \in X$ بحيث يكون $x_0 \neq 0$ و $|x| < |x_0|$. ومنه تكون $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_0^n$ متقاربة ، ومن ثم تكون المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ متقاربة بالإطلاق من أجل القيمة x المأخوذة بشكل كيفي بحيث يكون $|x| < \rho$.

الحالة الثانية :

$x \in \Re$ بحيث $|x| > \rho$. عندئذٍ يكون $x \notin X$ [لأنه لو كان $x \in X$ لكان $|x| \le \sup Y = \rho$ وهذا غير صحيح] ، ومن ثم $x \in \Re - X$، وهذا يعني أن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ تكون متباعدة من أجل هذه القيمة x المأخوذة بشكل كيفي بحيث يكون $|x| > \rho$.

تعريف (2): يقال عن العدد الحقيقي الموجب تماماً ρ ،المذكور في المبرهنة السابقة ، إنه **نصف قطر تقارب** متسلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$. ويقال عن المجال الذي طرفاه ρ و $-\rho$ ، أي: $I =]-\rho, \rho[$ ، إنه **مجال تقارب** متسلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$. زد على ذلك ،إذا كانت متسلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ متقاربة على $\Re =]-\infty, +\infty[$ ، أيْ متقاربة من أجل أيّ x من $\Re$ فيقال إن نصف قطر التقارب هو $\rho = +\infty$ ويقال إن مجال التقارب في هذه الحالة هو $I = \Re =]-\infty, +\infty[$.

وأيضاً، إذا كانت $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ متقاربة من أجل $x = 0$ ومتباعدة من أجل جميع قيم x من $\Re^*$ فيقال إن نصف قطر التقارب هو $\rho = 0$ ، ويقال إن مجال التقارب في هذه الحالة هو $I = [0,0] = \{0\}$.

وهكذا يمكن القول إن لكل متسلسلة قوى نصف قطر تقارب ρ، حيث $0 \le \rho \le +\infty$ ، ومن ثم مجال تقارب I ، مركزه هو مركز المتسلسلة ونصف طوله هو ρ .

وتجدر الإشارة إلى أنه عندما $\rho = +\infty$ تتقارب متسلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ بالإطلاق من أجل كل x من $\Re$، وذلك بملاحظة الآتي:

لتكن $x \in \Re$. عندئذٍ يوجد عدد حقيقي موجب تماماً x_0 بحيث يكون $|x| < x_0$.وحيث أن متسلسلة القوى المدروسة تكون متقاربة من أجل $x_0 \in \Re$ فإن هذه المتسلسلة تتقارب بالإطلاق من أجل x .

ملاحظة (3): فيما يتعلق بتقارب متسلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ على طرفي مجال التقارب $I =]-\rho, \rho[$ عندما $0 < \rho < +\infty$ فإنه لا يمكن إعطاء جواب إلا بعد

دراسة هذا التقارب بشكل منفرد ، فيمكن البدء بتعويض $x=+\rho$ في متسلسلة القوى المدروسة ثم دراسة تقارب المتسلسلة العددية الناتجة عن التعويض فيصبح من الممكن إعطاء جواب حول الطرف ρ للمجال I . ثم بتعويض $x=-\rho$ في المتسلسلة المدروسة ودراسة تقارب المتسلسلة العددية الناتجة عن التعويض يصبح من الممكن أيضاً إعطاء جواب حول الطرف $-\rho$ للمجال I .

وبذلك يتم الحصول على الشكل النهائي للمجال I ،مع العلم بأن $]-\infty,+\infty[$ و $[0,0]$ كل منهما شكل نهائي لـ I عندما $\rho=+\infty$ و $\rho=0$ (على الترتيب).

وبذلك فإن الشكل النهائي للمجال I يعبر عن منطقة التقارب لمتسلسلة القوى المدروسة . ومنطقة التقارب هذه تكون دوماً عبارة عن مجال متناظر بالنسبة لمركزه ، الذي هو مركز متسلسلة القوى المدروسة ، ونصف طول هذا المجال هو ρ ، حيث $0\le\rho\le+\infty$. ومنه فمنطقة التقارب لأية متسلسلة قوى ، مركزها الصفر، لها أحد الأشكال الآتية :

$$]-\infty,+\infty[\ ,\ [0,0]\ ,[-\rho,\rho[\ ,]-\rho,\rho]\ ,\ ]-\rho,\rho[\ ,\ [-\rho,\rho]$$

ومن المفيد القول إنه إذا كانت منطقة التقارب مجالاً نصف مفتوح ، وكان هذا المجال هو $]-\rho,\rho[$ فإن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n$ تكون متقاربة شرطياً من أجل $x=\rho$ ، أما إذا كان هذا المجال هو $]-\rho,\rho[$ فإن $\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n$ تكون متقاربة شرطياً من أجل $x=-\rho$.

أما بالنسبة لمتسلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-a)^n$ التي مركزها $a\neq 0$ فإن مجال التقارب له الشكل $]a-\rho,a+\rho[$ عندما $0<\rho<+\infty$ ، وله الشكل $]-\infty,+\infty[$ عندما $\rho=+\infty$ ، وله الشكل $[a,a]$ عندما $\rho=0$.

أما منطقة التقارب فلها الشكل $]-\infty,+\infty[$ عندما $\rho=+\infty$ ، ولها الشكل $[a,a]$ عندما $\rho=0$ ، ولها أحد الأشكال الآتية [عندما $0<\rho<+\infty$]:

$$[a-\rho,a+\rho[\ ,]a-\rho,a+\rho]\ ,[a-\rho,a+\rho]\ ,\ ]a-\rho,a+\rho[$$

وبالإضافة إلى ذلك فإن التقارب يكون شرطياً عند الطرف الذي يدخل في منطلقة التقارب التي يكون شكلها مجالاً نصف مفتوح .

طريقة إيجاد نصف قطر التقارب لمتسلسلة القوى :

يمكن استعمال اختبار دالامبير أو اختبار الجذر النوني كما يأتي:

لتكن $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ متسلسلة قوى بحيث أن $c_n \neq 0$ من أجل جميع قيم $n \geq 0$.

وبفرض وجود نهاية محدودة $D = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| \neq 0$ ، ومن ثم :

$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}\cdot x^{n+1}}{c_n \cdot x^n}\right| = |x|\cdot D$. عندئذٍ تتقارب هذه المتسلسلة بالإطلاق من أجل جميع قيم x التي تحقق المتراجحة $|x|\cdot D < 1$، وتتباعد هذه المتسلسلة من أجل جميع قيم x التي تحقق المتراجحة $|x|\cdot D \geq 1$. ومن هاتين المتراجحتين ينتج أن متسلسلة القوى هذه تتقارب بالإطلاق عندما $|x| < \frac{1}{D}$ وتتباعد عندما $|x| > \frac{1}{D}$.

وبمقارنة هذه النتائج مع تعريف نصف قطر التقارب ينتج في هذه الحالة أن :

$$\rho = \frac{1}{D}$$

أما إذا كان $D = 0$ فإن هذا يعني أن $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}\cdot x^{n+1}}{c_n \cdot x^n}\right| = 0$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$ أي أن متسلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ تكون متقاربة على $\mathbb{R}$ ، ومن ثم يكون $\rho = +\infty$

وأخيراً ، إذا كان $D=+\infty$ فإن $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}\cdot x^{n+1}}{c_n\cdot x^n}\right|=+\infty$ وهذا يعني أن متسلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n$ تكون متباعدة من أجل جميع قيم x المغايرة للصفر ، ومن ثم $\rho=0$.

وبذلك يكون الدستور الذي يعطي نصف قطر التقارب لمتسلسلة القوى هو :

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| \qquad (*)$$

ومن الملاحظ أنه تم استنتاج الدستور (*) باستعمال اختبار دالامبير . أما إذا استعمل اختبار الجذر النوني . فإنه يمكن القول إن الدستور الذي يعطي نصف قطر التقارب لمتسلسلة القوى هو : $\rho=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}}$

ومن الممكن أخذ النهاية العليا أي : $\rho=\frac{1}{\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}}$

ملاحظة مهمة : تم الحصول على دستور نصف قطر التقارب (*) بافتراض أن جميع الأمثال c_n مغايرة للصفر . ولهذا فإنه ،عندما توجد حدود بأمثال صفرية ، يتوجب استعمال اختبار دالامبير (أو اختبار الجذر النوني) بحد ذاته.

أمثلة: أولاً- أوجد منطقة التقارب لكل من متسلسلات القوى الآتية:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$:

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n}\div\frac{1}{n+1}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$$

فمجال التقارب هو $I=]-1,+1[$.

ولكن ، عندما $x=1$ يتم الحصول على المتسلسلة المتباعدة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ ،

وعندما $x=-1$ يتم الحصول على المتسلسلة المتقاربة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ ،

إذن فمنطقة التقارب لهذه المتسلسلة هي $]-1,1[$.

(2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$:

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}=\lim_{n\to\infty}(n+1)=+\infty$$

إذن فمنطقة التقارب هي $]-\infty,+\infty[$.

(3) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n(n-2)}$:

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n-1)}{n(n-2)}=1$$

فمجال التقارب هو $I=]-1,+1[$.

ولكن ، عندما $x=1$ يتم الحصول على المتسلسلة المتقاربة $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(n-2)}$

،وعندما $x=-1$ يتم الحصول على المتسلسلة المتقاربة $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{-1}{n(n-2)}$ ، إذن

فمنطقة التقارب هي $[-1,+1]$.

Damascus University

د) $\sum_{n=1}^{\infty} (n!)x^n$:

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

إذن فمنطقة التقارب هي $[0,0]$.

هـ) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$:

$$\rho = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}}} = 1$$

فمجال التقارب هو $]-1,+1[= I$.

ولكن ، عندما $x = +1$ يتم الحصول على المتسلسلة المتقاربة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ ، وعندما $x = -1$ يتم الحصول على المتسلسلة المتباعدة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n}$ ، إذن فمنطقة التقارب هي $]-1,+1]$.

و) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$:

$$\rho = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$$

فمجال التقارب هو $]-1,+1[= I$.

ولكن ، عندما $x = \mp 1$ يتم الحصول على متسلسلتين متباعدتين ، إذن فمنطقة التقارب هي $]-1,+1[$.

(7) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$:

$$\rho = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1}} = 1$$

فمجال التقارب هو $I =]-1,+1[$.

ولكن ، عندما $x = \mp 1$ يتم الحصول على متسلسلتين متباعدتين ، إذن فمنطقة التقارب هي $]-1,+1[$.

(8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n(5^n+1)}$:هنا مركز المتسلسلة هو 2- وليس الصفر ، ولهذا نفرض $y = x+2$ تأخذ هذه المتسلسلة الشكل: (*) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^n}{n(5^n+1)}$. ومنه :

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n(5^n+1)}\cdot\frac{(n+1)(5^{n+1}+1)}{1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}+1}{5^n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{5+\frac{1}{5^n}}{1+\frac{1}{5^n}} = 5$$

فمجال التقارب للمتسلسلة (*) هو $I =]-5,+5[$.

ولكن ، عندما $y = 5$ يتم الحصول ،من المتسلسلة (*) ، على المتسلسلة المتباعدة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n(5^n+1)}$ ، وعندما $y = -5$ يتم الحصول ، من المتسلسلة (*)،على المتسلسلة المتقاربة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 5^n}{n(5^n+1)}$.

إذن فمنطقة تقارب المتسلسلة (*) هي $]-5,5[$ ، وهذا يعني أن المتسلسلة (*) لا تتقارب إلا من أجل جميع قيم y التي تحقق الشرط $-5 \le y < 5$ ، ومنه فالمتسلسلة الأصلية لا تتقارب إلا من أجل جميع قيم x التي تحقق الشرط $-5 \le x+2 < 5$ أي : $-7 \le x < 3$. ومنه فمنطقة تقارب المتسلسلة الأصلية هي $]-7,3[$.

(9) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n(n+4)}$: هنا أمثال قوى x ذات الأسس الفردية تساوي الصفر . لذا سيتم استعمال اختبار دالامبير بحد ذاته من أجل المتسلسلة المدروسة فيكون :

$$D = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+2}n(n+4)}{(n+1)(n+5)x^{2n}} = x^2$$

ومنه فإن المتسلسلة المدروسة تكون متقاربة بالإطلاق عندما $x^2 < 1$ أي عندما $|x| < 1$ ، وتكون متباعدة عندما $x^2 > 1$ أي عندما $|x| > 1$. ومنه فنصف قطر تقارب المتسلسلة المدروسة هو $\rho = 1$ ، فمجال التقارب هو $I =]-1,+1[$.

ولكن ، عندما $x = \mp 1$ يتم الحصول على المتسلسلة المتقاربة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+4)}$ ، إذن فمنطقة التقارب هي $[-1,1]$.

(10) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$: هنا أمثال قوى x الزوجية تساوي الصفر . لذا باستعمال اختبار دالامبير يكون :

$$D = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+3}\cdot(2n+1)!}{(2n+3)!x^{2n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^2}{(2n+3)(2n+2)}\right| = 0$$

أي: $D < 1$ من أجل جميع قيم x من $\Re$ ، وهذا يعني أن منطقة التقارب هي $\Re =]-\infty,+\infty[$.

ثانياً- أوجد نصف قطر التقارب لكل من متسلسلتي القوى الآتيتين :

(1) $1+\frac{x}{3}+\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^3}{3^3}+\frac{x^4}{2^4}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{3^{2n-1}}+\frac{x^{2n}}{2^{2n}}+\cdots$:

هنا يكون:

$\sqrt[n]{|c_n|}=\begin{cases}\frac{1}{2} & (n \text{ عندما زوجي}) \\ \frac{1}{3} & (n \text{ عندما فردي})\end{cases}$ ، حيث c_n أمثال الحد العام .

ومنه فنصف قطر التقارب لهذه المتسلسلة هو:

$$\rho=\frac{1}{\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}}=\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)}=2$$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(n!)}{n^n}\cdot x^{2n}$:

$$D=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{n+1}\cdot(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot x^{2n+2}\cdot\frac{n^n}{2^n(n!)x^{2n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2x^2n^n}{(n+1)^n}=\frac{2}{e}x^2$$

ومنه، تتقارب هذه المتسلسلة بالإطلاق عندما $\frac{2}{e}x^2<1$ أي عندما $x^2<\frac{e}{2}$ ، وهذا يعني أن $|x|<\sqrt{\frac{e}{2}}$. كما إن هذه المتسلسلة تتباعد عندما $\frac{2}{e}x^2>1$ أي عندما $x^2>\frac{e}{2}$ ، وهذا يعني أن $|x|>\sqrt{\frac{e}{2}}$. ومنه فنصف قطر التقارب هو $\rho=\sqrt{\frac{e}{2}}$.

نتيجة :(1) إذا علم مجال التقارب لأية متسلسلة قوى فإن نصف قطر تقاربها

يساوي نصف طول هذا المجال .

(2) متسلسلة القوى تتقارب بالإطلاق من أجل جميع النقط المحصورة تماماً بين طرفي مجال تقاربها .

(3) لتكن $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ متسلسلة قوى ، نصف قطر تقاربها هو r_1 ، ومجموعها هو $S_1(x)$ على مجال تقاربها . ولتكن $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ متسلسلة قوى نصف قطر تقاربها هو r_2 ، ومجموعها هو $S_2(x)$ على مجال تقاربها. وليكن $r = \min(r_1, r_2)$ فتكون كل من هاتين المتسلسلتين متقاربة من أجل جميع قيم x من المجال $I =]-r,+r[$.

وعندئذٍ :

(i) $S_1(x) \mp S_2(x) = (a_0 \mp b_0) + (a_1 \mp b_1)x + \cdots + (a_n \mp b_n)x^n + \cdots$ على I

(ii)

$S_1(x) \cdot S_2(x) = a_0 \cdot b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + \cdots + (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0)x^n + \cdots$

على I .

البرهان :واضح.

أمثلة : (1) ليكن : $S_1(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$

$$S_2(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

عندئذٍ: $S_1(x) + S_2(x) = 2\left[1 + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{1+(-1)^n}{2} \cdot \frac{x^n}{n!} + \cdots\right]$ على $\Re$.

(2) ليكن : $S_1(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$

$$S_2(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

عندئذٍ:

$$S_1(x) \cdot S_2(x) = x + (\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!})x^3 + (\frac{1}{4!} + \frac{1}{3!2!} + \frac{1}{5!})x^5 + \cdots$$
$$= x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \cdots$$
$$= \frac{1}{2}\left[2x + \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^5}{5!} + \cdots\right]$$

على $\Re$.

مبرهنة (3): تتقارب كل متسلسلة قوى مثل $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ بانتظام على أي مجال مغلق ومحتوى تماماً في: مجال تقاربها .

الإثبات : لتكن $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ متسلسلة قوى ، نصف قطر تقاربها هو ρ . وليكن $J = [a,b]$ مجالاً مغلقاً ومحتوى تماماً في مجال التقارب I لهذه المتسلسلة .

ثم ،بفرض $\gamma = \max(|a|,|b|)$ فإنه يكون : $\gamma < \rho$ ، $[a,b] \subseteq [-\gamma,\gamma]$ وحيث أن γ محصور تماماً بين طرفي مجال التقارب I للمتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ فإن هذه المتسلسلة تتقارب بالإطلاق من أجل $x = \gamma$ ، وهذا يعني أن المتسلسلة العددية

ذات الحدود غير السالبة $\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|\gamma^n$ تكون متقاربة . ثم ، بملاحظة أن $|x|\le\gamma$ من أجل كل x من $[-\gamma,\gamma]$ ومن ثم $|c_n|\cdot|x^n|\le|c_n|\cdot\gamma^n$ من أجل كل $n\ge 0$ ومن أجل جميع قيم x من $[-\gamma,\gamma]$ ، ينتج أن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n$ تكون متقاربة بانتظام على المجال $[-\gamma,\gamma]$ ، ومن ثم فهي متقاربة بانتظام على $J=[a,b]$ وهو المطلوب .

ملاحظة: ليس من الضروري أن تكون متسلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n$ متقاربة بانتظام على مجال تقاربها (باكمله) .

مبرهنة(4): إن مجموع متسلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n$ يكون تابعاً مستمراً في كل نقطة محصورة تماماً بين طرفي مجال تقارب هذه المتسلسلة .

الإثبات: لتكن $\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n$ متسلسلة قوى ، وليكن ρ نصف قطر تقاربها . ولتكن x_0 نقطة كيفية محصورة تماماً بين طرفي مجال تقارب هذه المتسلسلة عندئذٍ يكون $|x_0|<\gamma$ ومن ثم يوجد $\gamma\in\Re$ بحيث يكون $|x_0|<\gamma<\rho$. ومنه فالمجال المغلق $[-\gamma,\gamma]$ يكون محتوى تماماً في مجال التقارب لمتسلسلة القوى المدروسة ، وهذا يقتضي أن هذه المتسلسلة تكون متقاربة بانتظام على $[-\gamma,\gamma]$. وحيث أن كل حد من حدود هذه المتسلسلة مستمر على $[-\gamma,\gamma]$ فإنه ينتج أن مجموعها يكون مستمراً على $[-\gamma,\gamma]$. وحيث أن $x_0\in[-\gamma,\gamma]$ فإن مجموع هذه المتسلسلة يكون تابعاً مستمراً في x_0 .

مبرهنة (5): بفرض أن لمتسلسلتي $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ و $\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^n$ القوى المجموع ذاته على المجال $I=]-\rho,\rho[$. عندئذٍ يكون $a_n=b_n$ من أجل جميع قيم $n\ge 0$.

الإثبات : يترك للقارئ .

مبرهنة(6): يمكن مكاملة متسلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ حداً فحداً على اي مجال $[a,b]$محتوى تماماً في مجال تقاربها .

الإثبات: بملاحظة أن $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ تكون متقاربة بانتظام على $[a,b]$ المحتوى تماماً في مجال تقاربها ، وأن كل حد من حدودها مستمر على $[a,b]$ فإنه يمكن مكاملتها حداً فحداً على $[a,b]$.

ملاحظة: من الواضح انه بمكاملة متسلسلة القوى :

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots \qquad (*)$$

حداً فحداً على المجال $[a,b]$ فإنه يتم الحصول على المتسلسلة العددية $\sum_{n=0}^{\infty}\left[\int_a^b c_n x^n dx\right]$. ولكن الاهتمام يكون منصبّاً ، في كثير من الأحيان ، على مكاملة متسلسلة القوى على مجال مثل$[a,x]$، حيث a هو عدد ثابت ينتمي إلى مجال التقارب و x متغير يأخذ قيمه من مجال التقارب ، ومن ثم فإن نتيجة المكاملة سوف تكون ليس عدداً بل تابعاً لـ x . وبغية التخلص من وجود ثابت عددي يتم تركيز الاهتمام على المجال $[0,x]$ حيث يكون :

$$\int_0^x c_n t^n dt = \left[\frac{c_n}{n+1} t^{n+1}\right]_0^x = \frac{c_n}{n+1} x^{n+1}$$

و هكذا فإلى جانب دراسة المتسلسلة (*) ستدرس المتسلسلة :

$$c_0 x + \frac{c_1}{2} x^2 + \frac{c_3}{3} x^3 + \cdots + \frac{c_n}{n+1} x^{n+1} + \cdots \qquad (**)$$

الناتجة من (*) بمكاملتها حدا فحدا على المجال $[0,x]$ ، حيث x ينتمي إلى مجال التقارب للمتسلسلة (*) .

كما إن المتسلسلة (**) هي متسلسلة قوى مجموعها يساوي تكامل المجموع $S(x)$ للمتسلسلة (*) :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} x^{n+1} = \int_0^x S(t)dt$$

اصطلاح: عندما يقال إنه ستتم مكاملة متسلسلة القوى حدا فحدا فإن هذا يعني أنه ستتم مكاملتها حدا فحدا على المجال $[0,x]$ ، حيث x نقطة من مجال التقارب لهذه المتسلسلة .

وأيضا ، يمكن أخذ المتسلسلة الناتجة من (*) باشتقاقها حدا فحدا :

$$c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + \cdots + (n+1)c_{n+1}x^n + \cdots$$

مبرهنة (7): يمكن اشتقاق متسلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ حدا فحدا في كل نقطة محصورة تماما بين طرفي مجال تقارب هذه المتسلسلة .

الإثبات: بفرض أن نصف قطر تقارب هذه المتسلسلة هو ρ وأن مجموعها على مجال تقاربها I هو $S(x)$. ولتكن x_0 نقطة محصورة تماما بين طرفي مجال التقارب I . عندئذ $|x_0| < \rho$. ومنه يوجد عددان حقيقيان مثل r_1 و r_2 بحيث يكون :

$$|x_0| < r_1 < r_2 < \rho$$

فبأخذ المجال $[-r_1, r_1]$ يمكن ملاحظة الآتي:

[1] المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ متقاربة على $[-r_1, r_1]$ ومجموعها هو $S(x)$ على هذا المجال .

[2] كل حد من حدود $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ هو تابع قابل للاشتقاق على المجال $[-r_1, r_1]$.

[3] كل حد من حدود متسلسلة المشتقات $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)c_{n+1} x^n$ هو تابع مستمر على $[-r_1, r_1]$.

[4] متسلسلة المشتقات $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)c_{n+1} x^n$ متقاربة بانتظام على $[-r_1, r_1]$ حسب اختبار فايرشتراس بعد ملاحظة الآتي:

لما كان $r_2 \in]-\rho, \rho[$ فإن المتسلسلة العددية $\sum_{n=0}^{\infty} c_n r_2^n$ تكون متقاربة بالإطلاق ، وهذا يعني أن المتسلسلة العددية ذات الحدود غير السالبة $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n r_2^n|$ تكون متقاربة. ومنه : $|c_n \cdot r_2^n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ ، ومن ثم يوجد $M > 0$ بحيث يكون : $|c_n| \cdot r_2^n < M$ من أجل جميع قيم $n \geq 0$.

ليكن x أي عنصر من $[-r_1, r_1]$ وليكن n أي عدد طبيعي . عندئذٍ :

$$|(n+1)c_{n+1} \cdot x^n| = (n+1) \cdot |c_{n+1}| \cdot |x|^n \leq (n+1) \cdot |c_{n+1}| \cdot r_1^n =$$

$$= (n+1) \cdot |c_{n+1}| \cdot r_2^{n+1} \cdot (\frac{r_1}{r_2})^n \cdot \frac{1}{r_2} < (n+1) \cdot M \cdot (\frac{r_1}{r_2})^n \cdot \frac{1}{r_2} =$$

$$= (n+1) \cdot p \cdot q^n \quad , \quad p = \frac{M}{r_2} \quad , \quad q = \frac{r_1}{r_2}$$

أي يمكن القول إن : $\left|(n+1)c_{n+1}\cdot x^n\right| \le (n+1)\cdot p\cdot q^n$ من أجل جميع قيم n ومن أجل جميع قيم x من $[-r_1,r_1]$ ولكن $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\cdot p\cdot q^n$ متسلسلة عددية متقاربة حسب قاعدة دالامبير ، وذات حدود موجبة ، إذن $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c_{n+1}x^n$ تكون متقاربة بانتظام على المجال $[-r_1,r_1]$. وبذلك ينتج أن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n$ يمكن اشتقاقها حداً فحداً في كل نقطة من نقاط المجال $[-r_1,r_1]$. وبملاحظة أن x_0 تنتمي إلى هذا المجال $[-r_1,r_1]$ فمن الممكن القول إنه يمكن اشتقاق المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n$ حداً فحداً في النقطة x_0 . وحيث أن x_0 نقطة كيفية من مجال تقارب المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n$ ومحصورة تماماً بين طرفي هذا المجال فإنه يتم إثبات المطلوب .

مبرهنة (8): إن نصفي قطري تقارب المتسلسلتين $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n+1}x^{n+1}$ و $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c_{n+1}x^n$ ، الناتجتين من متسلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n$ بمكاملتها حداً فحداً ، وباشتقاقها حداً فحداً (على الترتيب)، يتطابقان مع نصف قطر تقارب المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n$.

الإثبات: بفرض أن r هو نصف قطر تقارب المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n$ ، وأن r_1 هو نصف قطر تقارب المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n+1}x^{n+1}$ ، وأن r_2 هو نصف قطر تقارب

المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c_{n+1}x^n$. وبفرض أن $S(x)$ هو مجموع المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n$ على مجال تقاربها . عندئذٍ يتحقق الآتي:

إذا كان $|x|<r$ فإن $\int_0^x S(t)dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n+1}x^{n+1}$ وإن : $S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c_{n+1}x^n$ ، ومن ثم فإن $r_1\geq r$ و $r_2\geq r$ ، وهذا يعني أن نصف قطر تقارب متسلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n$ لا ينقص بنتيجة مكاملتها حداً فحداً أو بنتيجة اشتقاقها حداً فحداً .

وبناءً على هذا ، لما كانت المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n$ تنتج من المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n+1}x^{n+1}$ باشتقاق الأخيرة حداً فحداً فإنه يكون $r\geq r_1$. وأيضاً، لما كانت المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n$ تنتج من المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c_{n+1}x^n$ بمكاملة الأخيرة حداً فحداً [وإضافة حد c_0]فإنه يكون $r\geq r_2$.

إذن $r=r_1=r_2$ وهو المطلوب .

نتيجة: إن المجموع $S(x)$ لمتسلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n$ هو ، في مجال التقارب لهذه المتسلسلة ، تابع قابل للاشتقاق عدداً كبيراً من المرات بقدر المراد ، ومن أجل جميع قيم k من مجوعة الأعداد الطبيعية ، ومن أجل جميع قيم x من مجال التقارب ، يكون:

$$\frac{d^k S(x)}{dx^k}=S^{(k)}(x)=\sum_{n=k}^{\infty}n(n-1)\cdots(n-k+1)c_n x^{n-k}$$

أمثلة:(1) أوجد مجموع متسلسلة القوى $1+2x+3x^2+\cdots+(n+1)x^n+\cdots$.

الحل: من المعلوم أن : $1+x+x^2+\cdots+x^n+x^{n+1}+\cdots=\frac{1}{1-x}$ حيث $|x|<1$ أي أن نصف قطر التقارب لهذه المتسلسلة الهندسية هو $\rho=1$. ومنه ، باشتقاق المتسلسلة حداً فحداً ، يكون :

$$1+2x+3x^2+\cdots+(n+1)x^n+\cdots=\frac{1}{(1-x)^2}$$

حيث $|x|<1$.

(2) أوجد مجموع متسلسلة القوى : $x+\frac{x^2}{2\cdot 2}+\frac{x^3}{4\cdot 3}+\frac{x^4}{8\cdot 4}+\frac{x^5}{16\cdot 5}+\cdots$

الحل: من المعلوم أن : $1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{8}+\frac{x^4}{16}+\cdots=\frac{2}{2-x}$

حيث $\left|\frac{x}{2}\right|<1$ ، أي : $|x|<2$ ، أي أن نصف قطر تقارب هذه المتسلسلة الهندسية هو $\rho=2$. ومنه ، بمكاملتها حداً فحداً ، يكون :

$$x+\frac{x^2}{2\cdot 2}+\frac{x^3}{4\cdot 3}+\frac{x^4}{8\cdot 4}+\frac{x^5}{16\cdot 5}+\cdots=\int_0^x\frac{2}{2-t}dt=-2\ln(1-\frac{x}{2})$$

حيث $|x|<2$.

(3) اكتب التابع $f(x)=\frac{1}{1-x^2}$ على صورة مجموع متسلسلة قوى بدلالة قوى x

الحل:طريقة أولى : من المعلوم أن:

$$\frac{1}{1+t}=1-t+t^2-t^3+t^4+\cdots+(-1)^n t^n+\cdots$$

حيث $|t|<1$. ومنه ، بوضع $t=-x^2$ ، يكون :

$$\frac{1}{1-x^2}=1+x^2+x^4+x^6+\cdots+x^{2n}+\cdots$$

حيث $|x|<1$.

طريقة ثانية: لما كان $\frac{1}{1-x^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right)$ ، وأيضاً :

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+x^6+\cdots+(-1)^n x^n+\cdots$$

$$\frac{1}{1-x}=1+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+\cdots+x^n+\cdots$$

، حيث $|x|<1$ ، فإن:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x^2}&=\frac{1}{2}\{(1+1)+(-x+x)+(x^2+x^2)+(-x^3+x^3)+\ldots\ldots+\\&\quad+[(-1)^n x^n+x^n]+\ldots\ldots\ldots\}\\&=\frac{1}{2}\left(2+2x^2+2x^4+\cdots+2x^{2n}+\cdots\right)=\\&=1+x^2+x^4+\cdots+x^{2n}+\cdots\end{aligned}$$

حيث $|x|<1$.

(4) اكتب التابع $f(x)=\frac{1}{1-x}$ على شكل مجموع متسلسلة قوى [بدلالة قوى $(x+2)$].

الحل:

$$\frac{1}{1-x}=\frac{1}{1-(x+2)+2}=\frac{1}{3-(x+2)}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{x+2}{3}}=$$

$$=\frac{1}{3}\left[1+\frac{x+2}{3}+\left(\frac{x+2}{3}\right)^2+\cdots+\left(\frac{x+2}{3}\right)^n+\cdots\right]=$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{(x+2)}{3^2}+\frac{(x+2)^2}{3^3}+\cdots+\frac{(x+2)^n}{3^{n+1}}+\cdots$$

حيث $\left|\frac{x+2}{3}\right|<1$ أي: $-5<x<1$.

7.4. تمارين للحل:

(1) أوجد منطقة التقارب لكل متسلسلة من المتسلسلات الأتية :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n}\ ;\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n^2}\ ;\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(nx)^n}{n}$$

الأجوبة (هي على الترتيب): $[-1,2[$ ؛ $[1,3]$ ؛ $[0,0]$.

(2) أوجد منطقة التقارب لكل من المتسلسلات الأتية :

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n^2}$ ، الجواب : $[-1,1]$

$\sum_{n=1}^{\infty}3^n x^n$ ، الجواب: $\left]-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right[$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}$ ، الجواب: $]-\infty,\infty[$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^{n-1}}{n\cdot 7^n}$ ، الجواب: $[-9,5[$

(3) أوجد مجموع المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

[إرشاد : استخدم المتسلسلة الهندسية التي أساسها x^2 . أما الجواب فهو : $S(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$ حيث $|x|<1$.]

(4) أوجد مجموع المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(-1)^n x^n$.

الجواب: $S(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$.

(5) اكتب التابع $f(x) = \frac{4}{(1+x)(1-3x)}$ على صورة مجموع متسلسلة قوى (بدلالة قوى x).

الجواب: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^n + 3^{n+1}\right]x^n$ حيث $|x| < \frac{1}{3}$.

(6) اكتب التابع $f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$ على صورة مجموع متسلسلة قوى (بدلالة قو x). [إرشاد: لاحظ أن $\left(\frac{1}{1+x}\right)' = \frac{-1}{(1+x)^2}$].

(7) بفرض أن a,b عددان حقيقيان (ثابتان) بحيث يكون $0 < a \le b$.

أوجد نصف قطر تقارب متسلسلة القوى :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2}\right)x^n$$

[الجواب: $\frac{1}{b}$]

(8) أوجد مجال التقارب للمتسلسلة التي حدها العام هو :

$u_n(x) = \frac{n(x-1)^n}{2^n(3n-1)}$ و الجواب: $]-1,3[$

(9) احسب المجموع $S(x)$ للمتسلسلة الآتية :

$$1+3x+5x^2+7x^3+\cdots$$

الجواب: $S(x)=\frac{2}{(1-x)^2}-\frac{1}{1-x}$ حيث $|x|<1$.

(10) احسب المجموع $S(x)$ للمتسلسلة الآتية:

$$1+\frac{2x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{7x^4}{4!}-\frac{23}{5!}x^5+\frac{121}{6!}x^6-\cdots$$

الجواب: $S(x)=e^x-\ln(1+x)$

(11) احسب المجموع $S(x)$ للمتسلسلة الآتية :

$$x+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^9}{9!}+\cdots$$

الجواب: $S(x)=\frac{1}{2}shx+\frac{1}{2}\sin x$.

(12) بفرض أن التابع y معرف بالمتسلسلة :

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{x}{2}\right)^{p+2n}}{n!(n+p)!}$$

برهن أن هذه المتسلسلة تكون متقاربة (فعلا) من أجل كل قيمة للمتغير x من $\mathbb{R}$، ثم برهن أن y يحقق المعادلة التفاضلية المسماة بمعادلة بيسيل :

$$x^2y''+xy'+(x^2-p^2)y=0$$

8-4- متسلسلات تايلور :

مبرهنة(1) [دستور (أو صيغة) تايلور]: بفرض أن للتابع $f(x)$ مشتقات مستمرة حتى المرتبة $(n+1)$ بما فيها هذه المرتبة وذلك في مجال مغلق مثل $I=[b,c]$. وبفرض أن a نقطة من I بحيث $b<a<c$. عندئذ :

من أجل كل x من المجال I يكون دستور تايلور الآتي صحيحاً:

$$f(x)=f(a)+(x-a)\frac{f'(a)}{1!}+(x-a)^2\frac{f''(a)}{2!}+\cdots+(x-a)^n\frac{f^{(n)}(a)}{n!}+R_n(x)$$

حيث يمكن التعبير عن الحد الباقي أو [الحد المتمم] $R_n(x)$ بالعلاقة الآتية والتي تدعى (صيغة لاغرانج): $R_n(x)=(x-a)^{n+1}\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$

حيث ξ تقع بين a و x ويمكن كتابتها بالشكل الآتي:

$\xi=a+\theta(x-a)$ حيث $0<\theta<1$.

الإثبات: إذا كان $x=a$ فإن المبرهنة تكون صحيحة . لذا يمكن افتراض $x\neq a$ ويكون البرهان ،حينئذ ، كالآتي:

يكفي افتراض أن $R_n(x)$ معرف وفق دستور تايلور وإثبات أنه يمكن كتابة $R_n(x)$ كما في صيغة لاغرانج :

بأخذ التابع:

$$\varphi(y)=f(y)+(x-y)\frac{f'(y)}{1!}+(x-y)^2\frac{f''(y)}{2!}+\cdots+(x-y)^n\frac{f^{(n)}(y)}{n!}+(x-y)^{n+1}\frac{R_n(x)}{(x-a)^{n+1}}$$

، حيث قيمتا a و x مثبتتان وحيث y متغير جديد ، فيكون $\varphi(y)$ مستمراً وقابلاً للمفاضلة على المجال الذي طرفاه a و x .

إذا كان $x = y$ فإن $\varphi(x) = f(x)$. وإذا كان $y = a$ فإن :

$$\varphi(a) = f(a) + (x-a)\frac{f'(a)}{1!} + \cdots + (x-a)^n \frac{f^{(n)}(a)}{n!} + (x-a)^{n+1}\frac{R_n(x)}{(x-a)^{n+1}}$$

ومنه ، بالاستفادة من دستور تايلور، ينتج أن : $\varphi(a) = f(x)$.

إذن حسب مبرهنة رول ، يوجد ξ واقع بين a و x بحيث يكون : $\varphi'(\xi) = 0$

ولكن $$\varphi'(y) = (x-y)^n \frac{f^{(n+1)}(y)}{n!} - (n+1)\frac{R_n(x)}{(x-a)^{n+1}}(x-y)^n$$

إذن $$\varphi'(\xi) = (x-\xi)^n \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} - (n+1)\frac{R_n(x)}{(x-a)^{n+1}}(x-\xi)^n = 0$$ ومن ثم تنتج صيغة لاغرانج فيتم إثبات المطلوب .

ملاحظات مهمة :

[1] من دستور تايلور يمكن الحصول على القانون :

$$f(x) = S_{n+1}(x) + R_n(x)$$

[2] ثمة صيغ أخرى للحد الباقي $R_n(x)$ لذا يمكن ذكر (صيغة كوشي) الآتية :

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}[a+\theta(x-a)]}{n!}(1-\theta)^n (x-a)^{n+1}$$

حيث $0 < \theta < 1$.

[3] إذا كان $a = 0$ فيتم الحصول على ما يسمى (دستور ماكلوران) الآتي:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}\quad,\quad 0<\theta<1$$

[4] إن دستور تايلور يعطي ما يسمى [**النشر المحدود للتابع** $f(x)$ **بجوار** a] ، أما دستور ماكلوران فيعطي ما يسمى [النشر المحدود للتابع $f(x)$ بجوار الصفر].

[5] بجعل $n\to+\infty$ في دستور تايلور يتم الحصول على ما يسمى دستور **النشر غير المحدود** حول a [أو بجوار a] .

وبجعل $n\to\infty$ في دستور ماكلوران يتم الحصول على ما يسمى دستور النشر غير المحدود حول الصفر [أو بجوار الصفر].

[6] إن دستوري تايلور وماكلوران صحيحان فقط ضمن مجال التقارب لمتسلسلات القوى الموجودة في الطرف الأيمن لكل منهما .

أما فيما يتعلق بالنشر غير المحدود فسوف تتم دراسته في الفقرات اللاحقة .

2- متسلسلات تايلور ومتسلسلات ماكلوران:

بفرض أن للتابع $f(x)$ مشتقات من أية مرتبة على مجال معين مثل $[a-R,a+R]$. إن متسلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-a)^n$ ، حيث $c_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$ ، $[n=0,1,2,3,\cdots]$ تدعى [متسلسلة تايلور للتابع $f(x)$ بجوار النقطة a] أو [متسلسلة تايلور للتابع $f(x)$ حسب قوى $(x-a)$] . وبصورة خاصة ،عندما $a=0$ فإن متسلسلة تايلور للتابع $f(x)$ بجوار a تدعى متسلسلة ماكلوران للتابع $f(x)$ بجوار الصفر أو متسلسلة ماكلوران للتابع $f(x)$ حسب قوى x ، حيث يكون شكلها هو :

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

هذا ويمكن ملاحظة أنه إذا كان للتابع $f(x)$ مشتقات من كل المراتب على مجال مغلق مثل $[b,c]$ ، وكانت a نقطة من هذا المجال بحيث $b<a<c$ ، فإنمتسلسلة تايلور لهذا التابع بجوار aتكون موجودة . ويستعمل الرمز الوارد فيما

يأتي للتعبير عن أن المتسلسلة المذكورة على يمين الرمز ~ هي متسلسلة تايلور للتابع المذكور على يسار هذا الرمز :

$$f(x)\sim f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\cdots$$

تعريف: إذا كان تابع مثل $f(x)$ مساوياً مجموع متسلسلة تايلور له بجوار a ، أي إذا كان : $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ من أجل كل x من جوار a ، فيقال إن التابع $f(x)$ نُشر في متسلسلة تايلور بجوار a أو إنه نشر في متسلسلة تايلور حسب قوى $(x-a)$ أو إنه نشر بجوار a . ويقال أحياناً إن المتسلسلة التي في الطرف الأيمن من المساواة السابقة تعبر عن **منشور** $f(x)$ بجوار a .

تعريف: إذا كان تابع مثل $f(x)$ مساوياً مجموع متسلسلة ماكلوران لها بجوار الصفر ، أي إذا كان : $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ من أجل كل x من جوار الصفر، فيقال إن التابع $f(x)$ نشر في متسلسلة ماكلوران أو إنه نشر في متسلسلة [حسب قوى x] أو إنه نشر بجوار الصفر .

تعريف: ليكن I أي مجال بطرفين مختلفين . يقال عن a إنها نقطة داخلية في I إذا كانت $a\in I$ وكانت a غير متطابقة مع كل من نقطتي الطرفين . هذا ويقال عن أي مجال بطرفين مختلفين إنه جوار لكل نقطة داخلية فيه .

مبرهنة(2): لتكن $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ متسلسلة تايلور التابع $f(x)$ بجوار النقطة a التي هي نقطة داخلية في هذا الجوار الذي سنرمزه I .إن الشرط اللازم

والكافي كي تكون هذه المتسلسلة متقاربة على I ومجموعها يساوي $f(x)$ على I هو $\lim_{n\to\infty} R_n(x)=0$ على I .

الإثبات :لزوم الشرط: بفرض أن متسلسلة تايلور المذكورة في النص متقاربة على I ومجموعها يساوي $f(x)$ على I. عندئذٍ يكون : $\lim_{n\to\infty} S_n(x)=f(x)$ من أجل جميع قيم x من I . وبما أن $f(x)-S_{n+1}(x)=R_n(x)$ فإن $\lim_{n\to\infty} R_n(x)=0$ من أجل جميع قيم x من I .

كفاية الشرط: بفرض أن $\lim_{n\to\infty} R_n(x)=0$ على I . عندئذٍ يكون : $\lim_{n\to\infty} S_{n+1}(x)=f(x)$ على I ، وهذا يعني أن متسلسلة تايلور المذكورة في النص تكون متقاربة على I ، ويكون مجموعها مساوياً $f(x)$ على I .

ملاحظة: من تقارب متسلسلة تايلور للتابع $f(x)$ لا يمكن الاستنتاج ، في الحالة العامة ، أن مجموع هذه المتسلسلة هو $f(x)$.

مثال: بأخذ التابع الآتي المعرف على $\Re$:

$$\varphi(x)=\begin{cases} P\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}} & (x\neq 0 \text{ عندما}) \\ 0 & (x=0 \text{ عندما}) \end{cases}$$

فيمكن استنتاج أنه قابل للاشتقاق على $\Re$ والمشتق من نفس شكل $\varphi(x)$ ، كما إن المشتقات من جميع المراتب موجودة ولها شكل $\varphi(x)$ ذاته ، وبصورة خاصة ، $\varphi(0)=\varphi'(0)=\cdots=\varphi^{(n)}(0)=0$ ولهذا فإنه يكون ، من أجل كل n ،

$$S_{n+1}(x)=\varphi(0)+\frac{\varphi'(0)}{1!}x+\cdots+\frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!}x^n=0$$ ومن ثم فإن

$R_n(x)=\varphi(x)-S_{n+1}(x)=\varphi(x)$ ، وهذا يعني أن $R_n(x)$ لا يسعى إلى الصفر عندما يزداد n . ومنه فمتسلسلة ماكلوران للتابع $\varphi(x)$ تتقارب ، ومجموعها

يساوي الصفر ، أي أن هذا المجموع لا يساوي $\varphi(x)$.

ملاحظة أخرى : ينتج من المثال السابق أنه ليس من الضروري أن ينشر كل تابع في متسلسلة تايلور . إلا أنه إذا أمكن نشر تابع في متسلسلة قوى فإن هذا النشر يكون نشراً في متسلسلة تايلور .

مبرهنة (3): بفرض أن: $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ ، حيث المتسلسلة تتقارب على مجال معين مثل $[a-R, a+R]$ ومجموعها على هذا المجال هو $f(x)$. عندئذٍ تكون هذه المتسلسلة هي متسلسلة تايلور للتابع $f(x)$ بجوار a .

الإثبات: من الملاحظ أن المتسلسلة المذكورة في النص يمكن اشتقاقها حداً فحداً . ومنه ، باشتقاقها n مرة ، ينتج أن:

$$f^{(n)}(x)=n!c_n+\frac{(n+1)!}{1!}c_{n+1}(x-a)+\frac{(n+2)!}{2!}c_{n+2}(x-a)^2+\cdots$$

ومنه ، بوضع $x=a$ ، ينتج أن: $f^{(n)}(a)=n!c_n$ وبهذا يتم إثبات المطلوب .

ملاحظة : من المبرهنة(3) ينتج أن التابع $\varphi(x)$ المذكور في المثال السابق لا يمكن أن يكتب على صورة مجموع متسلسلة قوى بجوار الصفر ، كما لا يمكن كتابته على صورة مجموع متسلسلة ماكلوران له .

نتيجة: إذا أمكن ، على مجال معين ، كتابة تابع مثل $f(x)$ على النحو :

$$f(x)=a_0+a_1(x-a)+\cdots+a_n(x-a)^n+\cdots$$

وعلى النحو : $f(x)=b_0+b_1(x-a)+\cdots+b_n(x-a)^n+\cdots$

فإن كلاً من هاتين المتسلسلتين تكون متسلسلة تايلور للتابع $f(x)$ بجوار a ، ومن ثم فإنهما تكونان متطابقتين ، أي:

$$a_0=b_0\ ,\ a_1=b_1\ ,\cdots,\ a_n=b_n\ ,\ \cdots\cdots$$

مبرهنة(4): بفرض أن للتابع $f(x)$ مشتقات من كل المراتب على مجال معين يحوي a كنقطة داخلية فيه، وأن جميع المشتقات على هذا المجال محدودة بعدد حقيقي واحد مثل c ، أي : $\left|f^{(n)}(x)\right| \le c$ من أجل كل x من ذلك المجال ومن أجل كل n من N .

عندئذٍ تتقارب متسلسلة تايلور للتابع $f(x)$ على ذلك المجال ، ويكون مجموعها مساوياً $f(x)$ على ذلك المجال ، أي:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(x-a)^n\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$ على المجال المدروس .

الإثبات: إنّ :

$$\left|R_n(x)\right|=\left|(x-a)^{n+1}\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\right| \le c\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

وذلك من أجل كل x من المجال المدروس ومن أجل كل nمن N .

كما إن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$ متقاربة حسب اختبار دالامبير حيث $D=0<1$.

ومنه فالمتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}c\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$ تكون متقاربة ، ومن ثم يكون

$\lim_{n\to\infty}c\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}=0$ ومن ثم يكون $\lim_{n\to\infty}\left|R_n(x)\right| \le 0$.

إذن $\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$ على المجال المدروس . ومنه ، حسب المبرهنة (2) ، ينتج المطلوب .

4-9- نشر التوابع وحسابها التقريبي :

إن تقدير الحد الباقي $R_n(x)$ ، الذي يعد تابعاً المتغير n ، هو تقدير للارتياب (أو للخطأ) الذي يرتكب عند عدّ مجموع المتسلسلة هو مجموع الحدود الأولى التي عددها (n+1) بدلاً من مجموع حدود المتسلسلة كلها . لذا فإن حساب $R_n(x)$ يحتل أهمية خاصة في حساب القيمة التقريبية للتابع $f(x)$ استناداً إلى نشره حسب متسلسلة قوى ، الأمر الذي يتم اللجوء إليه غالباً في كثير من المسائل .

وسوف تستعمل الاعتبارات السابقة في نشر أبسط التوابع وحسابها التقريبي :

(1) نشر التابع e^x في متسلسلة ماكلوران :

إنّ $f^{(n)}(x) = e^x$ حيث $n = 0,1,2,3,\ldots$

ثم، باخذ مجال حقيقي من الشكل $[-h,h]$ يكون : $\left|f^{(n)}(x)\right| = e^x \le e^h$

من أجلكل x من هذا المجال ومن أجل كل n من N .

ومنه، بحسب المبرهنة(4) ، يكون :

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

وذلك على المجال الكيفي $[-h,h]$ ، ومن ثم من أجل جميع قيم x من $\mathfrak{R}$. ومنه ينتج النشر :

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

الذي يصح من أجل جميع قيم x .

وفي الحالة الخاصة عندما $x = 1$ توجد عبارة لـ e تمكن من حساب e بسهولة متناهية وبأي درجة من الدقة :

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$$

وكمثال ، سوف يحسب e بحيث يكون مقرباً إلى ستة أرقام عشرية باستخدام العلاقة السابقة كما يأتي:

إذا وضع بصورة تقريبية : $e \approx 2 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$

فإن الخطأ (الارتياب) المرتكب :

$$\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots = \frac{1}{(n+1)!}\left[1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \cdots\right] <$$

$$< \frac{1}{(n+1)!}\left[1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots\right] = \frac{1}{n!n}$$

إذن: $2 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} < e < 2 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{n!n}$

وما دام المراد إيجاد قيمة تقريبية لـ e لا تختلف عن قيمتها الحقيقية بأكثر من 10^{-6} فيمكن أخذ $n = 10$ وعندها يكون : $e \approx 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{10!}$

والارتياب [الخطأ] في هذه القيمة التقريبية لا يتجاوز $3.10^{-8} < \frac{1}{10!10}$.

إن الحدين الأولين في الطرف الأيمن من المساواة السابقة يحسبان دون تقريب ، بينما يجب حساب الحدود الثمانية المتبقية مقربة إلى سبعة أرقام عشرية ، وذلك لأن الخطأ في كل منها لا يتجاوز $0,5 \cdot 10^{-7}$ ، ومن ثم فالخطأ في حساب الحدود الثمانية المذكورة لا يتجاوز $4 \cdot 10^{-7}$. إذن فالقيمة المطلقة للخطأ المرتكب في هذا الحساب التقريبي لا تتجاوز $4,3 \cdot 10^{-7}$ أي أقل من 10^{-6} .

ومنه يكون $e \approx 2{,}7182818$ ومن ثم $e \approx 2{,}718282$ وذلك بالتقريب بالزيادة إلى ستة أرقام عشرية .

أما قيمة e مقربة إلى 12 رقماً عشرياً فهي $e = 2{,}718281828459$.

ملاحظة: بوضع $-x$ بدلاً من في المساواة :

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

، الصحيحة من أجل جميع قيم x من $\Re$ ، ينتج :

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

حيث أن مجال تقارب هذه المتسلسلة هو $]-\infty,+\infty[$ أيضاً .

(2) نشر كل من التابعين shx و chx في متسلسلة ماكلوران :

$$chx = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!}\right] =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

حيث تتقارب المتسلسلة الأخيرة من أجل جميع قيم x من $\Re$.

وبصورة مماثلة ، يمكن الاستنتاج ، من أجل جميع قيم x من $\Re$ ، أن:

$$shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

(3) نشر كل من التابعين $\sin x$ و $\cos x$ في متسلسلة ماكلوران :

إن $f(x) = \sin x$ ومن ثم فإن $f^{(n)}(x) = \sin(x + n\frac{\pi}{2})$ ، حيث $n = 0,1,2,3,\cdots$.

ومنه $\left|f^{(n)}(x)\right| \le 1$ من أجل كل x من $\Re$ ومن أجل كل n من N ، ومن ثم ، بحسب المبرهنة(4) ، ينتج الآتي من أجل جميع قيم x من $\Re$:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

هذا وتجدر الإشارة إلى أنه عندما تكون الزاوية x صغيرة ومقدرة بالراديان فإنه لحساب قيمتي $\sin x$ و $\cos x$ بصورة تقريبية يمكن اللجوء إلى المتسلسلتين السابقتين اللتين تعطيان نشر $\sin x$ ونشر $\cos x$ بجوار الصفر .

مثال : احسب $\sin 5^0$ بخطأ أصغر من 10^{-6} .

الحل: إن :

$$5^0 = 5 \cdot \frac{2\pi}{360} = \frac{\pi}{36}$$

$$\sin 5^0 = \sin \frac{\pi}{36} = \frac{\pi}{36} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{36}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{36}\right)^5 - + \cdots$$

وبملاحظة أن : $\frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{36}\right)^5 < \frac{1}{5!} \cdot (0{,}1)^5 = \frac{5}{6} \cdot 10^{-7}$

يمكن القول إنه بأخذ $\sin \frac{\pi}{36} \approx \frac{\pi}{36} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{36}\right)^3$

فإن القيمة المطلقة للخطأ المرتكب تكون أصغر من $\frac{5}{6} \cdot 10^{-7}$ ولهذا فيجب حساب كل حد مقرباً إلى سبعة أرقام عشرية ، لأن الخطأ في الحسابات لا يتجاوز (حينئذٍ)

$2 \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-7} = 10^{-7}$ ، ومن ثم فالخطأ الكلي بقيمته المطلقة يكون أصغر من $10^{-7} + \frac{5}{6} \cdot 10^{-7}$ أي أصغر من $2 \cdot 10^{-7}$ أي أصغر من 10^{-6} .

لما كان $\frac{\pi}{36} \approx 0{,}0872665$ و $\frac{1}{3!}(\frac{\pi}{36})^3 \approx 0{,}0001107$

فإن $\sin\frac{\pi}{36} \approx 0{,}0871558$ علماً بأنه يمكن ضمان صحة الأرقام العشرية الخمسة الأولى على يمين الفاصلة .

أمثلة على نشر بعض التوابع:

[1] انشر ، في متسلسلة ماكلوران ، التابع $f(x) = \sin^2 x$.

الحل:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left[1 - \frac{2^2 x^2}{2!} + \frac{2^4 x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{2^{2n} x^{2n}}{(2n)!} + \cdots\right] =$$

$$= x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{2x^6}{45} - + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{2^{n-1} x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

حيث $x \in \Re$.

طريقة ثانية للحل :

$$\sin x = \sin x \cdot \sin x = (x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \cdots)(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \cdots) =$$

$$= x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{2x^6}{45} - \cdots$$

من أجل جميع قيم x من $\Re$.

[2] أوجد مجموع متسلسلة القوى :

$$\frac{1\cdot 2}{3!}x^3-\frac{3\cdot 4}{5!}x^5+\frac{5\cdot 6}{7!}x^7-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{(2n-1)2n}{(2n+1)!}x^{2n+1}+\cdots$$

الحل: إن نصف قطر التقارب لهذه المتسلسلة هو $+\infty$ أي أن مجموع المتسلسلة المعطاة وليكن $S(x)$ هو تابع معرف ومستمر من أجل جميع قيم x .

إذن: $$S(x)=\frac{1\cdot 2}{3!}x^3-\frac{3\cdot 4}{5!}x^5+-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{(2n-1)2n}{(2n+1)!}x^{2n+1}+\cdots$$

ومنه: $$S'(x)=\frac{x^2}{0!}-\frac{x^4}{2!}+\frac{x^6}{4!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{(2n-2)!}+\cdots=x^2\cdot\cos x$$

ومنه : $$S(x)=\int_0^x S'(t)dt=\int_0^x t^2\cos t dt=(x^2-2)\sin x+2x\cos x$$

[3]نشر كثير الحدود في متسلسلة ماكلوران :

بفرض $$f(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_mx^m$$

فعندئذ: $\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=c_n$ عندما $n=0,1,2,\cdots,m$

$f^{(n)}(0)=0$ عندما $n>m$.

ولذلك فإن متسلسلة ماكلوران لهذا التابع $f(x)$ تتطابق مع كثير الحدود نفسه $f(x)$.

[4]نشر التابع الكسري في متسلسلة ماكلوران :

إن أبسط الطرائق لنشر التابع $f(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ ، حيث $P_n(x)$ و $Q_m(x)$ هما كثيرا حدود من الدرجة n و m على الترتيب ، في متسلسلة ماكلوران يتم توضيحها في المثال الآتي:

مثال: انشر في متسلسلة ماكلوران التابع $f(x)=\dfrac{5-x}{12-x-x^2}$.

الحل: بتحليل الكسر إلى مجموع كسور بسيطة يكون:

$$f(x)=\frac{9}{7}\cdot\frac{1}{4+x}+\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{3-x}$$

$$\frac{1}{4+x}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{x}{4}}=\frac{1}{4}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{4^n} \quad , \quad |x|<4 \text{ ولكن :}$$

$$\frac{1}{3-x}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{x}{3}}=\frac{1}{3}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^n} \quad , \quad |x|<3$$

إذن: $$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{9}{7}\cdot\frac{(-1)^n}{4^{n+1}}+\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{3^{n+1}}\right]x^n$$

حيث $|x|<3$.

مثال آخر: انشر في متسلسلة ماكلوران التابع $f(x)=\dfrac{x}{(1-x)^2}$.

الحل: $$\frac{x}{(1-x)^2}=\frac{-1}{1-x}+\frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\frac{-1}{1-x}=-\sum_{n=0}^{\infty}x^n \quad , \quad |x|<1 \text{ ولكن :}$$

إذن ، باشتقاق الطرفين بالنسبة لـ x ، يكون :

$$\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n \quad , \quad |x|<1$$

ومن ثم فإن :

$$\frac{x}{(1-x)^2} = -\sum_{n=0}^{\infty} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} nx^n$$

حيث $|x| < 1$.

[5]نشر التابع اللوغاريتمي في متسلسلة ماكلوران:

من الواضح أن التابع $\ln x$ لا يمكن نشره في متسلسلة ماكلوران لأنه غير معرف عندما $x = 0$. ولذلك سينشر التابع $f(x) = \ln(1+x)$ الذي يكون معرفاً من أجل $x > -1$. ولهذا يتم اشتقاقه أولاً حيث يكون : $f'(x) = \frac{1}{1+x}$ ومنه :

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad , |x| < 1$$

ومن ثم فإن :

$$\int_0^x f'(t)dt = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = [\ln(1+t)]_0^x = \ln(1+x) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad , |x| < 1$$

ومن الواضح أنه عندما $x = -1$ لا يكون للتابع $f(x)$ معنى . أما عندما $x = 1$ فللتابع $f(x)$ معنى ويكون $f(1) = \ln 2$ وتكون المتسلسلة العددية $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ متقاربة .

أما برهان أن : $\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \cdots$

فهو كما يأتي:

بتقسيم العدد 1 على 1+t حتى الخطوة ذات الرقم n+1 ينتج أن:

$$\frac{1}{1+t}=1-t+t^2-t^3++\cdots+(-1)^{n-1}t^{n-1}+\frac{(-1)^n t^n}{1+t}$$

ومنه : $\ln 2=1-\frac{1}{2}+-\cdots+(-1)^n\int_0^1\frac{t^n dt}{1+t}=\int_0^1\frac{dt}{1+t}=[\ln(1+t)]_0^1=$

$$=S_n+(-1)^n\int_0^1\frac{t^n dt}{1+t}$$

حيث S_n هو الحد العام لمتتالية المجاميع الجزئية للمتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$.

وبملاحظة أن $0\le t\le 1$ تقتضي أن $\frac{t^n}{1+t}\le t^n$ ومن ثم فإن :

$$\left|(-1)^n\cdot\int_0^1\frac{t^n dt}{1+t}\right|=\int_0^1\frac{t^n}{1+t}dt\le\int_0^1 t^n dt=\frac{1}{n+1}$$

ومن ثم فإن $\lim_{n\to\infty}(-1)^n\int_0^1\frac{t^n dt}{1+t}=0$ و $\lim_{n\to\infty}S_n=\ln 2-0=\ln 2$:

وهذا يعني أن : $\ln 2=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$

وبذلك ينتج أن:

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots$$

حيث $-1<x\le 1$.

وتجدر الملاحظة إلى أنه عندما $x>1$ يوجد معنى للتابع $\ln(1+x)$ إلا أن المتسلسلة الموجودة في الطرف الأيمن من المساواة الأخيرة تكون متباعدة عندما $x>1$، ومن ثم فليس لها مجموع . [يمكن استعمال اختبار دالامبير] . ومن جهة أخرى ، بوضع $-x$ بدلاً من x في المساواة الأخيرة ينتج أن :

$$\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\cdots-\frac{x^n}{n}-\cdots$$

حيث $|x|<1$.

إذن:

$$Argthx=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}=\frac{1}{2}[\ln(1+x)-\ln(1-x)]=$$
$$=x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\cdots$$

حيث $|x|<1$.

بفرض أن p و q عددان طبيعيان مغايران للصفر . عندئذٍ يكون $\left|\frac{p-q}{p+q}\right|<1$ ولذلك يمكن وضع $x=\frac{p-q}{p+q}$ في المساواة الأخيرة . وبما أن $\frac{1+x}{1-x}=\frac{p}{q}$ ينتج أن:

$$\ln\frac{p}{q}=2\left[\frac{p-q}{p+q}+\frac{1}{3}\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^5+\cdots\right]$$

ومن هذه العلاقة يمكن حساب اللوغاريتمات الطبيعية . فمثلاً ، إذا كان $p=2$ و $q=1$ فإن:

$$\ln 2=2\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 3^3}+\frac{1}{5\cdot 3^5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)\cdot 3^{2n-1}}+\cdots\right]$$

ومن هنا يتم حساب قيمة تقريبية لـ $\ln 2$ بالدقة المطلوبة .

بفرض $p=3$ و $q=2$ ينتج أن :

$$\ln 3 = \ln 2 + 2\left[\frac{1}{5} + \frac{1}{3\cdot 5^3} + \frac{1}{5\cdot 5^5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)\cdot 5^{2n-1}} + \cdots\right]$$

وهكذا يمكن كتابة الآتي:

$$\ln(n+1) = \ln n + 2\left[\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3\cdot(2n+1)^3} + \frac{1}{5\cdot(2n+1)^5} + \cdots\right]$$

وكان من الممكن الحصول على هذه المساواة من نشر $\ln\frac{1+x}{1-x}$ بوضع $\frac{1}{2n+1}$ بدلاً من x حيث يكون $\frac{1+x}{1-x} = \frac{n+1}{n}$. وبناءً على ذلك فحساب $\ln 5$ ينتج من :

$$\ln 5 = 2\ln 2 + \frac{2}{9}\left[1 + \frac{1}{3\cdot 81} + \frac{1}{5\cdot 81^2} + \cdots\right]$$

وحساب $\ln 10$ ينتج من : $\ln 10 = \ln 2 + \ln 5$

هذا وإذا أخذت لـ $\ln(n+1)$ القيمة التقريبية :

$$\ln n + 2\left[\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3\cdot(2n+1)^3} + \cdots + \frac{1}{(2m-1)(2n+1)^{2m-1}}\right]$$

فإن الخطأ المرتكب يكون :

$$2\left[\frac{1}{(2m+1)\cdot(2n+1)^{2m+1}}+\frac{1}{(2m+3)(2n+1)^{2m+3}}+\cdots\right]<$$

$$<\frac{2}{(2m+1)(2n+1)^{2m+1}}\left[1+\frac{1}{(2n+1)^2}+\cdots\right]=$$

$$=\frac{2}{(2m+1)(2n+1)^{2m+1}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{(2n+1)^2}}<$$

$$<\frac{1}{(2m+1)n\cdot(2n+1)^{2m}}$$

فمثلاً، إذا كان $n=10$ و $m=2$ فإن :

$$\ln 11=\ln 10+2\left[\frac{1}{21}+\frac{1}{3\cdot 21^3}\right]$$

و إن الخطأ المرتكب يكون أقل من :

$$\frac{1}{5\cdot 10\cdot 21^4}<\frac{1}{5\cdot 10\cdot 20^4}=\frac{1}{2^3\cdot 10^6}<2\cdot 10^{-7}$$

وتجدر الملاحظة إلى أنه بعد حساب اللوغاريتمات الطبيعية ، يمكن حساب اللوغاريتمات من أي أساس آخر : $\log_a x=\frac{1}{\ln a}.\ln x$

[6] نشر ثنائي حد نيوتن في متسلسلة ماكلورين :

ليكن $f(x)=(1+x)^\alpha$ ، حيث $\alpha\in\Re$. عندئذٍ توجد حالتان :

(i) إذا كان α عدداً طبيعياً مثل n فإن $f(x)$ يكون كثير حدود وذلك استناداً إلى دستور الكرخي - نيوتن :

$$f(x)=(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\cdots+x^n$$

(*ii*) إذا كان العدد الحقيقي α لا ينتمي إلى N فإن نشر $f(x)$ يتم وفق الآتي:

إنّ: $f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} = \dfrac{\alpha f(x)}{1+x}$

ومن ثم فإنّ: $(1+x)\cdot f'(x) = \alpha \cdot f(x)$

والمطلوب، الآن، هو البحث عن تابع $y(x)$ يحقق المعادلة :

$$(1+x)\cdot y'(x) = \alpha \cdot y(x)$$

وبحيث يكون $y(0) = 1$. [إن هذا الشرط الأخير يسمح بأخذ ذلك الحل ، من بين حلول هذه المعادلة التفاضلية ، الذي يطابق $f(x)$ عندما $x = 0$] .

وسيتم البحث عن التابع $y(x)$ على صورة متسلسلة قوى :

$$1 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots$$

[أخذ $c_0 = 1$ كي يتحقق الشرط $y(0) = 1$] . ولذلك يكون :

$$(1+x)(c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^3 + \cdots) = \alpha(1 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots)$$

ومنه ، بالمطابقة ، يكون:

$c_1 = \alpha$ و $c_1 + 2c_2 = \alpha c_1$ ومن ثم فإن $c_2 = \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2}$.

$2c_2 + 3c_3 = \alpha c_2$ ومن ثم فإن $c_3 = \dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}$

.....

وهكذا ، بالاستقراء ، يمكن كتابة :

$$c_n = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$$

ومنه تأخذ متسلسلة القوى ، المبحوث عنها ، الصورة الآتية :

$$1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots=$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$$

ومنه بتطبيق اختبار دالامبير يكون : $D=\lim_{n\to\infty}\frac{|\alpha-n|}{n+1}\cdot|x|=|x|$.

ومنه فإن هذه المتسلسلة تتقارب بالإطلاق من أجل $|x|<1$ وتتباعد من أجل $|x|>1$. كما يمكن القول إن نصف قطر تقارب هذه المتسلسلة يساوي 1 .

بفرض أن $\varphi(x)$ هو مجموع هذه المتسلسلة على المجال $]-1,1[$. عندئذٍ يكون التابع $\varphi(x)$ معرفاً ومستمراً وقابلاً للاشتقاق على المجال $]-1,1[$ ويحقق العلاقتين :

$$(1+x)\cdot y'(x)=\alpha\cdot y(x) \qquad , \qquad y(0)=1$$

ثم بفرض $\psi(x)=\frac{\varphi(x)}{(1+x)^{\alpha}}$ فإنه يكون :

$$\psi'(x)=\frac{(1+x)\cdot\varphi'(x)-\alpha\cdot\varphi(x)}{(1+x)^{\alpha+1}}=0$$

لأن البسط يكون معدوماً من أجل جميع قيم x من المجال $]-1,1[$.

إذن ثابت $\psi(x)=k=\frac{\varphi(0)}{1}=1$. ولما كان $\psi(0)=1$ فإن $\psi(x)=1$ على المجال $]-1,1[$. ومنه $\varphi(x)=(1+x)^{\alpha}$ على المجال $]-1,1[$.

وبذلك فإن نشر التابع $(1+x)^{\alpha}$ في متسلسلة ماكلوران هو :

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n \quad , \quad |x| < 1$$

وهذا النشر يمثل تعميماً لدستور كرخي - نيوتن لأجل أي أس α .

هذا و إن تقارب أو تباعد المتسلسلة الموجودة في المساواة الأخيرة عندما $x = \mp 1$ يجب أن يدرس بشكل منفرد من أجل كل قيمة لـ α.

كحالات خاصة :

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2\cdot 4}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 + \cdots$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \cdots$$

$$\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{2}{2!3^2}x^2 + \frac{2\cdot 5}{3!3^3}x^3 + \cdots$$

[7] نشر التابع $f(x) = \arcsin x = \sin^{-1} x$ في متسلسلة ماكلوران :

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4 + \cdots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}x^{2n} + \cdots$$

حيث $|x| < 1$. ومنه :

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = [\arcsin t]_0^x = \arcsin x =$$

$$= x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{3!!}{4!!}\cdot\frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$$

ومن ثم (من أجل $|x|<1$) يكون :

$$\arcsin x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

هذا ويمكن التحقق من أن المساواة الأخيرة تبقى صحيحة من أجل $x = \mp 1$.

[8] نشر التابع $f(x) = arctgx = \tan^{-1} x$ في متسلسلة ماكلوران :

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots$$

حيث $|x|<1$. ومنه :

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = [arctgt]_0^x = arctgx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$$

من أجل $|x|<1$.

هذا ويمكن التحقق من أن المساواة الأخيرة تكون صحيحة من أجل $x = \mp 1$.

[9] نشر التابع $f(x) = \frac{1}{x}$ في متسلسلة تايلور بجوار النقطة $a = -2$:

طريقة أولى للحل:

$$f(x)=\frac{1}{x} \quad , \quad f(-2)=-\frac{1}{2}=-\frac{0!}{2}$$

$$f'(x)=-\frac{1}{x^2} \quad , \quad f'(-2)=-\frac{1}{2^2}=-\frac{1!}{2^2}$$

$$f''(x)=\frac{2}{x^3} \quad , \quad f''(-2)=-\frac{2!}{2^3}$$

$$f'''(x)=-\frac{3\cdot 2}{x^4} \quad , \quad f'''(-2)=-\frac{3!}{2^4}$$

$$\cdots\cdots \quad , \quad \cdots\cdots$$

$$f^{(n)}(x)=(-1)^n\cdot\frac{n!}{x^{n+1}} \qquad f^{(n)}(-2)=-\frac{n!}{2^{n+1}}$$

$$\cdots\cdots\cdots \quad , \quad \cdots\cdots\cdots$$

إذن فمتسلسلة تايلور للتابع $f(x)$ حسب قوى $(x+2)$ هي :

$$-\frac{1}{2}-\frac{(x+2)}{2^2}-\frac{(x+2)^2}{2^3}-\cdots-\frac{(x+2)^n}{2^{n+1}}-\cdots$$

ومن الملاحظ أن هذه المتسلسلة هي متسلسلة هندسية ، حدها الأول $-\frac{1}{2}$ وأساسها $\frac{x+2}{2}$ ولذلك فهي تكون متقاربة عندما $\left|\frac{x+2}{2}\right|<1$ ، أي عندما $-4<x<0$

ومجموعها هو التابع $S(x)=\frac{-\frac{1}{2}}{1-\frac{x+2}{2}}=\frac{1}{x}$ ومن ثم فإن :

$$\frac{1}{x}=-\frac{1}{2}-\frac{x+2}{2^2}-\frac{(x+2)^2}{2^3}-\cdots-\frac{(x+2)^n}{2^{n+1}}-\cdots$$

طريقة ثانية للحل:

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{(x+2)-2}=-\frac{1}{2-(x+2)}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{x+2}{2}}=$$

$$=-\frac{1}{2}\left[1+\frac{x+2}{2}+\left(\frac{x+2}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{x+2}{2}\right)^n+\cdots\right]$$

ومنه :

$$\frac{1}{x}=-\frac{1}{2}-\frac{x+2}{2^2}-\frac{(x+2)^2}{2^3}-\cdots-\frac{(x+2)^n}{2^{n+1}}-\cdots$$

حيث $\frac{|x+2|}{2}<1$ ، أي : $-4<x<0$.

وإن المتسلسلة الناتجة هي متسلسلة تايلور للتابع المعطى بسبب وحدانية النشر في متسلسلة القوى .

4-10- تمارين للحل :

[1] انشر في متسلسلة ماكلوران كلاً من التوابع الأتية واذكر مجال التقارب :

$$(a)\ f(x)=\frac{3-x}{2-x-x^2}\qquad (b)\ f(x)=\frac{2-x+x^2}{(1-x)^3}$$

$$(c)\ f(x)=\frac{3-8x}{1-5x+6x^2}\qquad (d)\ f(x)=a^x \text{ حيث } a>0 \text{ (ثابت).}$$

الأجوبة :

$$(a)\ f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{2}{3}+\frac{5\cdot(-1)^n}{3\cdot 2^{n+1}}\right]x^n\ ,\qquad |x|<1 .$$

(b) $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(n^2+2n+2\right)x^n$ ، $|x|<1$.

(c) $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(3^n+2^{n+1}\right)x^n$ ، $|x|<\frac{1}{3}$.

(d) $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n\cdot(\ln a)^n}{n!}$ ، $]-\infty,+\infty[$.

[2] انشر في متسلسلة ماكلوران كلاً من التابعين الآتين واذكر نصف قطر التقارب:

$$(a)\ f(x)=\frac{1}{\sqrt{e^x}}\quad (b)\ f(x)=\cos^3 x$$

الأجوبة :

(a) $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot x^n}{n!2^n}$ ، $p=+\infty$.

(b) $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3+3^{2n})\cdot x^{2n}}{4(2n)!}$ ، $\rho=+\infty$.

(إرشاد: $\cos^3 x=\cos x\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}$) .

[3] أوجد مجال تقارب ، ومجموع المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{n!(n+2)}$.

الجواب : $S(x)=(x-1)e^x+1$ ، $]-\infty,+\infty[$.

[4] أوجد مجال التقارب ، والمجموع للمتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!(n+3)}$.

الجواب: المجال هو $]-\infty,+\infty[$. والمجموع هو $S(x)=\frac{(x^2-2x+2)e^x-2}{x^3}$

(إرشاد : اضرب بـ x^3 ثم اشتق حدا فحدا) .

[5] انشر في متسلسلة ماكلوران التابع $f(x)=\ln(x^2-3x+2)$ وبين مجال التقارب .

الجواب : $f(x)=\ln 2-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2^n+1)\cdot x^n}{n\cdot 2^n}$, $|x|<1$.

(إرشاد : استفد من تحليل كثير الحدود x^2-3x+2 إلى جداء مضاريب).

[6] انشر في متسلسلة تايلور [حسب قوى $(x-1)$] التابع $f(x)=\ln x$.

الجواب: $\ln x=(x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}-\cdots+(-1)^n\frac{(x-1)^n}{n}+\cdots$.

[7] انشر في متسلسلة ماكلوران التابع $f(x)=x^3\cdot\cos x$.

الجواب: $x^3\cdot\cos x=x^3-\frac{x^5}{2!}+\frac{x^7}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+3}}{(2n)!}+\cdots$

حيث $x\in\ ]-\infty,+\infty[$.

[8] انشر التابع $\ln x$ بجوار العدد 2 حسب متسلسلة تايلور .

الجواب: $\ln x=\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^n}\cdot\frac{(x-2)^n}{n}$, $0<x\le 4$

[9] انشر في متسلسلة ماكلوران التابع $y=\sqrt{1+\sin x}$.

إرشاد : $\sqrt{1+\sin x} = \cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}$.

[10] بفرض أن التابع العقدي e^{iz} ، حيث z متغير حقيقي و $i = \sqrt{-1}$ ، قد

عُرف بأنه : $e^{iz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!}$.

فالمطلوب :

(1) أثبت أن : $e^{iz} = \cos z + i \sin z$

(2) استنتج من (1) أن :

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad , \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$e^{x+iy} = e^x \cdot (\cos y + i \sin y)$ حيث $x, y \in \Re$.

الفصل الخامس

التكاملات المعتلة

- التكاملات المعتلة من النوع الأول
- معايير التقارب للتكاملات المعتلة من النوع الأول
- القيمة الرئيسة للتكامل المعتل من النوع الأول
- تمارين محلولة
- التكاملات المعتلة من النوع الثاني
- معايير التقارب للتكاملات المعتلة من النوع الثاني
- القيمة الرئيسة للتكامل المعتل من النوع الثاني
- التكاملات الأولرية
- تمارين محلولة
- تمارين للحل

Damascus University

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الفصل الخامس

التكاملات المعتلة

5-1- التكاملات المعتلة من النوع الأول :

تعاريف : ليكن a أي عدد حقيقي . وليكن $f(x)$ تابعاً معرفاً على المجال $[a,+\infty[$. وبفرض أن $f(x)$ قابل للمكاملة على أي مجال محدود من الشكل $[a,A]$ أي بحيث يكون للتكامل $\int_a^A f(x)dx$ معنى من أجل أية قيمة لـ A ، حيث $a \le A$.

يقال عن التكامل $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ إنه **تكامل معتل من النوع الأول** ، ويقال عنه إنه **متقارب** إذا كانت النهاية ، المذكورة في العلاقة (1) الآتية ، موجودة ومحدودة (أي موجودة ومنتهية):

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A\to+\infty} \int_a^A f(x)dx \quad (1)$$

ويقال عن قيمة هذه النهاية الموجودة والمحدودة إنها قيمة هذا التكامل المتقارب $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ ، كما يقال ، في الوقت ذاته ، إن $f(x)$ قابل للمكاملة على $[a,+\infty[$.

أما إذا كانت النهاية المذكورة في (1) غير موجودة بتاتاً أو موجودة و غير محدودة فيقال عن التكامل المعتل $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ إنه **متباعد** . ومنه فكل تكامل معتل يكون إما متقارباً أو متباعداً ، وتكون له قيمة في حالة تقاربه .

إن التكامل المعتل المذكور في (1) يشكل صنفاً من بين ثلاثة أصناف لمثل هذه التكاملات . ولهذا يمكن إيراد التعريفين الآتيين للصنفين الآخرين للتكاملات المعتلة من النوع الأول :

$$\lim_{A' \to -\infty} \int_{A'}^{a} f(x)dx \int_{-\infty}^{a} f(x)dx = (2) \qquad \text{حيث} \quad -\infty < A' \le a$$

$$\lim_{\substack{A \to +\infty \\ A' \to -\infty}} \int_{A'}^{A} f(x)dx \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = (3) \qquad \text{حيث} \quad -\infty < A' < A < +\infty$$

وحيث يسعى كل من A و A' إلى نهايته ، أي : $A \to +\infty$ و $A' \to -\infty$ ، وذلك بشكل مستقل عن الآخر .

هذا ويمكن تعريف (3) استنادا إلى (1) و (2) كما يأتي :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)dx \qquad (*)$$

حيث a عدد حقيقي ما ، ويفضل ، عادة ، أخذ $a = 0$ ، فإذا كان كل من التكاملين، المذكورين في الطرف الأيمن من (*) ، متقاربا ، فيقال إن التكامل المذكور في الطرف الأيسر من (*) **متقارب** . وعندئذٍ تعرف قيمته بأنها حاصل جمع قيمتي التكاملين المذكورين في الطرف الأيمن من (*) .

وإن قيمة التكامل (3) لا تتأثر بطريقة اختيار العدد a في (*) بملاحظة الآتي :

إذا كان c عددا آخر (غير a) بحيث يكون التكاملان $\int_{c}^{+\infty} f(x)dx$ و $\int_{-\infty}^{c} f(x)dx$

متقاربين فإنّ : $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx = \int_{a}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx$

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{a} f(x)dx$$

ومن ثم ينتج المطلوب بجمع العلاقتين طرفا إلى طرف .

وكذلك يُقال عن التكامل $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ إنه **متباعد**، إذا كان أحد التكاملين في الطرف الأيمن من (*) متباعداً .

وبالإضافة إلى ذلك يمكن أن يرد الصنف (2) من التكاملات المعتلة إلى الصنف (1) منها بإجراء التغيير $t = -x$ وملاحظة العلاقة الآتية التي يمكن قبولها ضمن الشروط الضرورية :

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = -\int_{+\infty}^{-a} f(-t)dt = \int_{-a}^{+\infty} f(-t)dt$$

ومنه ، لما كان الصنف (3) يمكن أن يعرف استناداً إلى الصنفين (1) و (2) فيمكن القول إنه يمكن أن يعرف استناداً إلى الصنف (1) .

ولذلك كلّه سوف يتم الاكتفاء بإيراد القواعد للصنف (1) ، مع العلم بأنه يمكن ذكر قواعد مماثلة للصنفين (2) و (3) حتى ولو لم يتم القيام بردهما إلى الصنف (1) .

مثال (1) : ادرس التكامل المعتل $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ واحسب قيمته في حالة تقاربه .

الحل: (*) $I = \int_{-\infty}^{+\infty} = \int_{-\infty}^{0} + \int_{0}^{+\infty}$

$$J_1 = \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A\to+\infty} \int_{0}^{A} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A\to\infty} [arctgx]_0^A = \lim_{A\to\infty} arctgA = \frac{\pi}{2}$$

$$J_2 = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A'\to-\infty} \int_{A'}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A'\to-\infty} [arctgx]_{A'}^{0} = \lim_{A'\to-\infty} [-arctgA'] = \frac{\pi}{2}$$

ومنه ، حسب (*) ، يكون : $I = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$ ، فالتكامل المعتل I متقارب ، وقيمته π .

مثال (2*) : ادرس التكامل المعتل الآتي وبين متى يكون متقارباً ومتى يكون متباعداً :

$$I=\int_{a}^{+\infty}\frac{dx}{x^{\lambda}} \quad , \quad (a>0)$$ حيث λ عدد حقيقي ما .

الحل: ليكن $\lambda\neq 1$. عندها [بأخذ $A>a$] :

$$I=\lim_{A\to\infty}\int_{a}^{A}\frac{dx}{x^{\lambda}}=\lim_{A\to\infty}\left[\frac{x^{-\lambda+1}}{-\lambda+1}\right]_{a}^{A}=\lim_{A\to\infty}\frac{1}{1-\lambda}\left(A^{1-\lambda}-a^{1-\lambda}\right)=$$

$$=\begin{cases}\infty & (\lambda<1 \text{ عندما})\\ \dfrac{1}{\lambda-1}a^{1-\lambda} & (\lambda>1 \text{ عندما})\end{cases}$$

ليكن $\lambda=1$. عندئذٍ :

$$I=\lim_{A\to\infty}\left[\ln|x|\right]_{a}^{A}=\lim_{A\to\infty}\left[\ln A-\ln a\right]=\infty$$

إذن فالتكامل I المدروس يكون متقارباً عندما $\lambda>1$ وقيمته ، حينئذٍ ، هي $\frac{1}{\lambda-1}\left(a^{1-\lambda}\right)$ ، ويكون متباعداً عندما $\lambda\leq 1$.

وكحالة خاصة ، فإن الشرط اللازم والكافي كي يتقارب التكامل $\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{x^{\lambda}}$ هو أن يكون $\lambda>1$. وقيمته ، حينئذٍ ، هي $\frac{1}{\lambda-1}$.

ملاحظات :

(1) بفرض أن $F(x)$ تابع أصلي للتابع $f(x)$. فعندئذٍ يكون :

$$\int_a^{\Lambda} f(x)dx = [F(x)]_a^{\Lambda} = F(A) - F(a) \quad , \quad (A > a)$$

وبوضع $\lim_{A\to+\infty} F(A) = F(\infty)$ يكون :

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = [F(x)]_a^{\infty} = F(+\infty) - F(a)$$

وبصورة مشابهة :

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = [F(x)]_{-\infty}^{a} = F(a) - F(-\infty)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = [F(x)]_{-\infty}^{\infty} = F(+\infty) - F(-\infty)$$

(2) الخواص الآتية محققة (بفرض أن التكاملات المعتلة متقاربة):

$$\lim_{\Lambda\to+\infty} \int_{\Lambda}^{+\infty} f(x)dx = 0 \quad \text{و} \quad \int_a^{\infty} = \int_a^{\Lambda} + \int_{\Lambda}^{\infty}$$

$$\int_a^{\infty} k \cdot f(x)dx = k \cdot \int_a^{\infty} f(x)dx \ , \ \int_a^{\infty} [f(x) \mp g(x)]dx = \int_a^{\infty} f(x)dx \mp \int_a^{\infty} g(x)dx$$

(3) يمكن نقل كل تكامل معتل إلى متسلسلة بحيث أنه مهما تكن المتتالية $\{A_n\}$ التي تسعى إلى اللانهاية فإن نهاية التكامل $\int_a^{\Lambda_n} f(x)dx$ يمكن التعبير عنها بالشكل :

$$\lim \int_a^{\Lambda_n} = \int_a^{\Lambda_1} + \left[\int_a^{\Lambda_2} - \int_a^{\Lambda_1}\right] + \left[\int_a^{\Lambda_3} - \int_a^{\Lambda_2}\right] + \cdots = \int_a^{\Lambda_1} + \int_{\Lambda_1}^{\Lambda_2} + \int_{\Lambda_2}^{\Lambda_3} + \cdots$$

والحديث عن التكامل المعتل يؤول إلى الحديث عن المتسلسلة :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_{n-1}}^{A_n} f(x)dx \quad , \quad (A_0 = a) \qquad (*)$$

مثال (3) : ادرس التكامل المعتل $I = \int_0^{\infty} e^{-ax}\cdot \sin bx dx$ ، حيث $a > 0$.

الحل: باستخدام التكامل بالتجزئة ينتج أن I متقارب وقيمته :

$$I = [F(x)]_0^{\infty} = F(\infty) - F(0) = 0 - \left(\frac{-b}{a^2+b^2}\right) = \frac{b}{a^2+b^2}$$

مثال (4) : أثبت أن التكامل $I = \int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ متقارب .

الحل : بملاحظة أن $\sin x$ يأخذ ، مع تزايد x ، قيماً موجبة وقيماً سالبة مغيّراً إشارته في النقاط $n\pi$ ، حيث $n = 1,2,3,\cdots$ ، فإنه يمكن أخذ المتتالية $\{A_n\}$ التي حدها العام $A_n = \pi(n+1)$ والتي تسعى إلى اللانهاية ، ومن ثم يتم الحصول على المتسلسلة (**) الآتية :

$$\sum_{n=1}^{\infty} w_n = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_{n-1}}^{A_n} f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{n\pi}^{\pi(n+1)} \frac{\sin x}{x} dx \qquad (**)$$

ومنه ، بوضع $x = n\pi + t$ يكون :

$$\sin(n\pi + t) = \begin{cases} \sin t & (\text{عندما } n \text{ زوجي}) \\ -\sin t & (\text{عندما } n \text{ فردي}) \end{cases}$$

ومن ثم فإنّ :

$$w_n = (-1)^n \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{n\pi + t}\, dt$$

أي أن هذا الحد العام للمتسلسلة المتناوبة $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ يسعى إلى الصفر عندما $n \to \infty$ ، وذلك بملاحظة العلاقتين (1) و(2) الآتيتين :

$$0 \le \left| \frac{\sin t}{n\pi + t} \right| \le \frac{1}{n\pi} \qquad (1)$$

$$0 \le |w_n| \le \int_0^{\pi} \left| \frac{\sin t}{n\pi + t} \right| dt \le \int_0^{\pi} \frac{1}{n\pi}\, dt = \frac{1}{n} \qquad (2)$$

وأيضاً ، $|w_n| = \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{n\pi + t} dt \ge \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{(n+1)\pi + t} dt = |w_{n+1}|$.

وبذلك كله تكون المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ متقاربة حسب اختبار ليبنتز . إذن فالتكامل المدروس يكون متقارباً .

مثال (5) : ادرس التكامل $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|} \cdot dx$ ، حيث $a > 0$.

الحل: بفرض أن $b > 0$ فيكون :

$$\int_0^b e^{-a|x|} \cdot dx = \int_0^b e^{-ax} dx = \frac{e^{-ab} - 1}{-a} \xrightarrow[b \to \infty]{} \frac{1}{a}$$

ومن ثم فإن هذا التكامل متقارب وقيمته : $\int_0^{\infty} e^{-a|x|} \cdot dx = \frac{1}{a}$

Damascus University

وأيضاً ، (متقارب) $\int_{-\infty}^{0} e^{-a|x|}\cdot dx = \int_{0}^{\infty} e^{-at}dt = \frac{1}{a}$

إذن I متقارب وقيمته : $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|}\cdot dx = \frac{2}{a}$ وهو المطلوب .

ملاحظة : (1) إن التكامل $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax}dx$ متباعد ، لأن $\int_{-\infty}^{0} e^{-ax}dx$ متباعد ، حيث $a>0$.

(2) إن التكامل $\int_{0}^{\infty} \sin x dx$ متباعد ، لأن المقدار $1-\cos b$ لايسعى إلى أية نهاية عندما $b\to+\infty$.

2-5- معايير التقارب للتكاملات المعتلة من النوع الأول في حالة التوابع غير السالبة :

(1) ليكن $f(x)$ تابعاً غير سالب . عندئذٍ يكون التكامل $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ متقارباً عندما وفقط عندما يكون التكامل $\int_{a}^{A} f(x)dx$ محدوداً ، أي عندما وفقط عندما يوجد عدد ثابت موجب مثل L بحيث يكون :

$$\phi(A) = \int_{a}^{A} f(x)dx \le L \qquad (*)$$

وذلك أياً كان A الذي يحقق الشرط $A \ge a$.

(2) [معيار المقارنة] : بفرض أن التكاملين $\int_a^b g(x)dx$ و $\int_a^b f(x)dx$ موجودان من أجل جميع قيم b المحققة للشرط $b \geq a$ ، وأن $0 \leq f(x) \leq c \cdot g(x)$ عندما $x \geq a$ ، حيث $c > 0$ (عدد موجب) . عندئذٍ :

(i) إذا كان التكامل $\int_a^{\infty} g(x)dx$ متقارباً فإن التكامل $\int_a^{\infty} f(x)dx$ يكون متقارباً ، ويكون $\int_a^{\infty} f(x)dx \leq c \cdot \int_a^{\infty} g(x)dx$.

(ii) إذا كان التكامل $\int_a^{\infty} f(x)dx$ متباعداً فإن التكامل $\int_a^{\infty} g(x)dx$ يكون متباعداً .

(3) [معيار نهاية النسبة] : بفرض أن $\int_a^b g(x)dx$ و $\int_a^b f(x)dx$ موجودان من أجل جميع قيم b المحققة للشرط $b \geq a$ ، وأن $f(x) \geq 0$ و $g(x) > 0$ عندما $x \geq a$.

وبفرض أن $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = c$. عندئذٍ :

(i) إذا كان $c > 0$ فإن التكاملين $\int_a^{\infty} g(x)dx$ و $\int_a^{\infty} f(x)dx$ يتقاربان معاً أو يتباعدان معاً .

(ii) إذا كان $c = 0$ فإن تقارب $\int_a^{\infty} g(x)dx$ يقتضي تقارب $\int_a^{\infty} f(x)dx$.

(4) ليكن $f(x) = \frac{\varphi(x)}{x^{\lambda}} \geq 0$ حيث $\lambda > 0$. عندئذٍ :

(i) إذا كان $\lambda > 1$ و $0 \le \varphi(x) \le k < +\infty$ فإن $\int_a^{\infty} f(x)dx$ يكون متقارباً .

(ii) إذا كان $0 < \lambda \le 1$ و $\varphi(x) \ge k > 0$ فإن $\int_a^{\infty} f(x)dx$ يكون متباعداً .

(5) إذا كان التابع غير السالب $f(x)$ لا متناهياً في الصغر من المرتبة $\lambda > 0$ وذلك عندما $x \to \infty$ فإن التكامل $\int_a^{\infty} f(x)dx$ يكون متقارباً عندما $\lambda > 1$ ويكون متباعداً عندما $\lambda \le 1$.

البرهان:

(1) بفرض أن $\int_a^{\infty} f(x)dx$ متقارب ، حيث $f(x) \ge 0$ عندما $x \ge a$. إن هذا يعني أن $\lim_{A\to\infty} \phi(A)$ موجودة ، حيث $\phi(A) = \int_a^{A} f(x)dx$. ولما كان $\phi(A) \ge 0$ عندما $A \ge a$ ، فإن $\lim_{A\to\infty} \phi(A) = \int_a^{\infty} f(x)dx \ge 0$.

إذن هنالك عدد غير سالب مثل p بحيث يكون $\int_a^{\infty} f(x)dx = p$. ومن ثم فإذا كان L عدداً موجباً بحيث $L \ge p$ فإن $\int_a^{\infty} f(x)dx \le L$. ولما كان التابع $\phi(A)$ متزايداً على $[a,\infty[$ فإن :

$$\phi(A) = \int_a^{A} f(x)dx \le \int_a^{\infty} f(x)dx \le L$$

وبالعكس ، بفرض أن الشرط (*) محقق . فبما أن التابع $\phi(A)$ متزايد على $[a,\infty[$ ومحدود من الأعلى بالعدد L ، فإن النهاية $\lim_{A\to\infty}\phi(A)$ موجودة (وتساوي $\sup\{\phi(A)/A\geq a\}$) . وهذا يؤدي إلى تقارب التكامل $\int_a^{\infty} f(x)dx$.

(2) لإثبات صحة المطلوب يكفي ملاحظة أن :

$$\int_a^b f(x)dx \leq c\cdot\int_a^b g(x)dx \leq c\cdot\int_a^{\infty} g(x)dx$$

والاستفادة من (1) .

(3) ينتج من تعريف نهاية تابع أنه يقابل العدد الموجب $\frac{c}{2}$ عدد موجب مثل k بحيث أنه إذا كان $x\geq k$ فإن $\left|\frac{f(x)}{g(x)}-c\right|<\frac{c}{2}$. يترتب على هذا أنه إذا كان $x\geq k$ فإن $0<\frac{c}{2}\cdot g(x)<f(x)<\frac{3c}{2}\cdot g(x)$. ومن الممكن افتراض (دوماً) أن $k\geq a$.

وحسب النص (2)يكون التكاملان $\int_k^{\infty} g(x)dx$ و $\int_k^{\infty} f(x)dx$ من نوع واحد (من حيث التقارب أو التباعد) . ولما كان :

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \int_a^k f(x)dx + \int_k^{\infty} f(x)dx$$

$$\int_a^{\infty} g(x)dx = \int_a^k g(x)dx + \int_k^{\infty} g(x)dx$$

فإن التكاملين $\int_a^{\infty} g(x)dx$ و $\int_a^{\infty} f(x)dx$ متقاربان معاً أو متباعدان معاً .

هذا وإن إثبات الحالة التي يكون فيها $c = 0$ يترك للقارئ .

(4) بالاستفادة من مضمون المثال (2) ومن النص (2) يمكن إثبات المطلوب وذلك بعد ملاحظة الآتي :

$f(x) = \frac{\varphi(x)}{x^{\lambda}} \le \frac{k}{x^{\lambda}}$ عندما $\lambda > 1$.

$f(x) = \frac{\varphi(x)}{x^{\lambda}} \ge \frac{k}{x^{\lambda}}$ عندما $0 < \lambda \le 1$.

(5) بالمقارنة مع $\frac{1}{x^{\lambda}}$ والاستفادة من المثال (2) يمكن إثبات المطلوب بعد ملاحظة الآتي :

بأخذ $1 > \varepsilon > 0$ فيوجد $M > 0$ بحيث يكون :

$$x > M \Rightarrow \left| \frac{f(x)}{\frac{1}{x^{\lambda}}} - 1 \right| < \varepsilon \Rightarrow \left| f(x) - \frac{1}{x^{\lambda}} \right| < \frac{\varepsilon}{x^{\lambda}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{\varepsilon}{x^{\lambda}} < f(x) - \frac{1}{x^{\lambda}} < \frac{\varepsilon}{x^{\lambda}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 \le f(x) < (1+\varepsilon) \cdot \frac{1}{x^{\lambda}} \ , \ (1-\varepsilon) \cdot \frac{1}{x^{\lambda}} < f(x)$$

مثال (6) : التكامل المعتل $I=\int_0^{+\infty}\frac{x^{\frac{3}{2}}}{1+x^2}dx$ متباعد لأن التابع $f(x)=\frac{x^{\frac{3}{2}}}{1+x^2}$ لا متناهٍ في الصغر من المرتبة $\lambda=\frac{1}{2}<1$ عندما $x\to\infty$ ، وذلك بملاحظة أن :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^{3/2}}{1+x^2}\div\frac{1}{x^{1/2}}=1$$

مثال (7) : التكامل المعتل $I=\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$ متقارب لأن التابع المكامل $f(x)=\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}$ لا متناهٍ في الصغر من المرتبة $\lambda=2>1$ عندما $x\to\infty$ ، وذلك بملاحظة أن :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}\div\frac{1}{x^2}=1$$

مثال (8) : ادرس التكامل $I=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty}\frac{2+\sin x}{x^2}dx$.

الحل: أيا كان b من $\left[\frac{\pi}{2},\infty\right[$ فإن التكاملين $\int_{\frac{\pi}{2}}^{b}\frac{dx}{x^2}$ و $\int_{\frac{\pi}{2}}^{b}\frac{2+\sin x}{x^2}dx$ موجودان من أجل جميع قيم x التي تحقق الشرط $x\geq\frac{\pi}{2}$ لأن التابعين $\frac{2+\sin x}{x^2}$ و $\frac{1}{x^2}$ مستمران على $\left[\frac{\pi}{2},b\right]$. وكذلك فإن : $0<\frac{2+\sin x}{x^2}\leq\frac{3}{x^2}$.

ولما كان التكامل $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ متقارباً [انظر المثال (2)] فإن التكامل I يكون متقارباً

. كما إن : $I \le 3\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{6}{\pi}$

مثال (9) : ادرس التكامل $I = \int_{1}^{\infty} e^{-x} \cdot x' dx$ ، حيث t عدد حقيقي .

الحل: أيا كان b من $[1,\infty[$ فإن التكاملين $\int_{1}^{b} e^{-x} \cdot x' dx$ و $\int_{1}^{b} \frac{dx}{x^2}$ موجودان ، وإن التابعين $\frac{1}{x^2}$ و $e^{-x} \cdot x'$ موجبان عندما $x \ge 1$. ومنه ، بملاحظة أن $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x}x'}{x^{-2}} = 0$ وان التكامل $\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ متقارب ، ينتج أن التكامل I متقارب .

مثال (10) : ادرس التكامل $I = \int_{1}^{+\infty} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{1+x^2} dx$.

الحل: إن التكاملين $\int_{1}^{b} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{1+x^2} dx$ و $\int_{1}^{b} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ موجودان من أجل جميع قيم b المنتمية إلى المجال $[1,\infty[$. كما إن التابعين $\frac{x^{\frac{3}{2}}}{1+x^2}$ و $\frac{1}{\sqrt{x}}$ موجبان في هذا المجال . ولما كان :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^{\frac{3}{2}}}{1+x^2}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim \frac{x^2}{1+x^2} = 1$$

وكان التكامل $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ متباعداً ، فإن التكامل I يكون متباعداً .

5-3- معايير التقارب للتكاملات المعتلة من النوع الأول في الحالة العامة :

(1) معيار كوشي : الشرط اللازم والكافي كي يكون التكامل المعتل $I = \int_a^{+\infty} f(x)dx$ متقارباً هو أن يوجد ، لكل $\varepsilon > 0$ ، عدد موجب تماماً مثل A_0 بحيث يكون $A_0 > a$ وبحيث يتحقق الآتي :

أياً كان العددان A' و A المحققان للشرط $A' \geq A \geq A_0$ فإن :

$$|\phi(A') - \phi(A)| = \left| \int_a^{A'} f(x)dx - \int_a^{A} f(x)dx \right| = \left| \int_A^{A'} f(x)dx \right| < \varepsilon$$

حيث $\phi(A) = \int_a^{A} f(x)dx$.

الإثبات : من تقارب التكامل المعتل المدروس ينتج أن النهاية $\lim_{A\to\infty} \phi(A) = \phi(\infty)$ تكون موجودة ومحدودة ، وهذا يعني أنه لكل $\varepsilon > 0$ يوجد عدد حقيقي موجب تماماً مثل $A_0 > a$ بحيث يكون $|\phi(A') - \phi(A)| < \varepsilon$ عندما $A' \geq A \geq A_0$

وبالعكس ، ليكن $\varepsilon > 0$. عندئذٍ يوجد $A_0 > \max(a,0)$ بحيث يكون $|\phi(A') - \phi(A)| < \frac{\varepsilon}{2}$ عندما $A' \geq A \geq A_0$. ومنه ، بتثبيت A وجعل A' تسعى إلى $+\infty$ ، ينتج أن : $|\phi(\infty) - \phi(A)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ ، ومن ثم فإن : $\left| \int_A^{\infty} f(x)dx \right| < \varepsilon$ ، ومن ثم فالتكامل I يكون متقارباً .

(2) معيار آبل : بفرض أن $f(x)$ ، $g(x)$ تابعان معرفان على $[a,\infty[$ ويحققان الآتي :

(i) التكامل المعتل $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ متقارب .

(ii) التابع $g(x)$ مطرد ، ومحدود $[|g(x)| < L$ من أجل جميع قيم $x]$.

عندئذٍ يكون التكامل $J = \int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ متقارباً .

الإثبات : من مبرهنة القيمة الوسطى الثانية ولأي $A' \geq A \geq a$ يكون :

$$\int_A^{A'} f(x)g(x)dx = g(A)\int_A^{l} f(x)dx + g(A')\int_l^{A'} f(x)dx$$

حيث $A \leq l \leq A'$.

ليكن $\varepsilon > 0$. بحسب الشرط (i) يوجد $A_0 > \max(a,0)$ بحيث يكون :

$$\left|\int_A^{l} f(x)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2L} \quad \text{و} \quad \left|\int_l^{A'} f(x)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2L}$$

وذلك لأن $l \geq A \geq A_0$.

ومنه ، حسب الشرط (ii) ، ينتج أن :

$$\left|\int_A^{A'} f(x)g(x)dx\right| = |g(x)| \cdot \left|\int_A^{l} f(x)dx\right| + |g(A')| \cdot \left|\int_l^{A'} f(x)dx\right| <$$

$$< L \cdot \frac{\varepsilon}{2L} + L \cdot \frac{\varepsilon}{2L} = \varepsilon$$

وذلك من أجل $A' \geq A \geq A_0$.

إذن فالتكامل J يكون متقارباً .

(3) معيار ديريكليه : بفرض أن $f(x)$ تابع معرف على $[a,\infty[$ ويحقق الآتي :

(i) التابع $f(x)$ قابل للمكاملة في أي مجال محدود $[a,A]$، حيث $a<A$ ، ومن ثم فالتكامل $\int_a^A f(x)dx$ محدود ، أي : $\left|\int_a^A f(x)dx\right|<L$ ، من أجل جميع قيم A .

(ii) التابع $g(x)$ مطرد ، ويحقق الشرط $\lim_{x\to\infty} g(x)=0$.

عندئذٍ يكون التكامل $J=\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ متقارباً .

الإثبات : من شرط النهاية للتابع $g(x)$ يمكن جعل $|g(A)|$ و $|g(A')|$ صغيرين بقدر كاف وذلك باختيار A و A' كبيرين بكفاية ، أي أن :

$$|g(A)|<\frac{\varepsilon}{2L} \quad \text{و} \quad |g(A')|<\frac{\varepsilon}{2L}$$

و إضافة إلى أن : $\left|\int_a^A f(x)dx\right|\le L$ و $\left|\int_a^{A'} f(x)dx\right|\le L$

ولذلك فإن : $\left|\int_A^{A'} f(x)g(x)dx\right|\le \frac{\varepsilon}{2L}L+\frac{\varepsilon}{2L}L=\varepsilon$.

(4) نتيجة : إن معيار آبل ينتج من معيار ديريكليه .

البرهان : يكفي ملاحظة أن التابع المطرد والمحدود $g(x)$ له نهاية عددية $g(\infty)=\lim_{x\to\infty} g(x)$.

وملاحظة أن :

$$f(x)\cdot g(x)=f(x)\cdot g(\infty)+f(x)\cdot[g(x)-g(\infty)]=$$
$$=f(x)\cdot g(\infty)+f(x)\cdot g_1(x)$$

حيث التكامل للحد $f(x)\cdot g(\infty)$ متقارب والتكامل للحد $f(x)\cdot g_1(x)$ متقارب حسب معيار ديريكليه .

(5) مثال : بفرض أن $a>0$ وأن $\lambda>0$. عندئذٍ يكون كل من التكاملين $I=\int_a^{+\infty}\frac{\sin x}{x^\lambda}dx$ و $J=\int_a^{+\infty}\frac{\cos x}{x^\lambda}dx$ متقاربا .

الحل: باستخدام معيار ديريكليه يمكن الوصول إلى التقارب . فمن أجل التكامل I يمكن فرض $f(x)=\sin x$ و $g(x)=\frac{1}{x^\lambda}$ فيكون :

$g(x)$ مطرد ويحقق الشرط :

$$\left|\int_a^A \sin x dx\right|=|\cos a-\cos A|\le 2\ ,\ g(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$$

ومن أجل التكامل J فيمكن فرض $f(x)=\cos x$ و $g(x)=\frac{1}{x^\lambda}$.

(6) تعريف التقارب بالإطلاق : يقال عن التكامل $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ إنه متقارب بالإطلاق عندما وفقط عندما يكون التكامل $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ متقاربا .

(7) نتيجة : كل تكامل متقارب بالإطلاق يكون متقاربا ، إلا أن العكس غير صحيح بالضرورة .

البرهان : أيا كان A بحيث $A > a$ فإن $\left|\int_a^A f(x)dx\right| \le \int_a^A |f(x)|dx$. ومنه ، بأخذ النهايات عندما $A \to \infty$ ينتج المطلوب الأول .

ومن جهة أخرى ، فإن التكامل $\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ متقارب ، حيث $a > 0$ ، ولكن هذا التقارب ليس بالإطلاق بملاحظة الآتي :

بفرض أن التكامل $\int_a^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx$ متقارب . لما كان $0 \le \sin^2 x = |\sin^2 x| \le |\sin x|$ فإن التكامل $\int_a^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx$ يكون متقارباً ، ومن ثم فإن التكامل $\int_a^{+\infty} \frac{1-\cos 2x}{x} dx$ يكون متقارباً . ولكن التكامل $\int_a^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x} dx$ متقارب [انظر المثال (5)] ، إذن (بالجمع) ينتج أن التكامل $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x}$ يكون متقارباً وهذا غير صحيح [انظر المثال (2) في الفقرة الأولى] .

(8) مثال : التكاملان $\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{k^2+x^2} dx$ و $\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{k^2+x^2} dx$ ، حيث $k \neq 0$ ،متقاربان بالإطلاق .

الحل : يكفي ملاحظة أن :

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\sin ax|}{k^2+x^2} dx \le \int_0^{\infty} \frac{dx}{k^2+x^2}$$ (متقارب)

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\cos ax|}{k^2+x^2} dx \le \int_0^{\infty} \frac{dx}{k^2+x^2}$$ (متقارب)

(9) مثال : إذا كان التابع $g(x)$ مستمراً ، وقابلاً للاشتقاق ، ومطرداً على $[a,\infty[$ بحيث $\lim_{x\to\infty} g(x)=0$ فإن كلاً من التكاملين :

$$I=\int_a^{\infty} g(x)\sin kx\,dx \quad \text{و} \quad J=\int_a^{\infty} g(x)\cos kx\,dx$$

،حيث $k>0$ ، يكون متقارباً .

الحل : بالاستفادة من معيار ديريكليه وبملاحظة الأتي :

$$\left|\int_a^{A}\sin kx\,dx\right|=\left|\frac{\cos Ak-\cos ak}{k}\right|\le\frac{2}{k}$$

$$\left|\int_a^{A}\cos kx\,dx\right|=\left|\frac{\sin Ak-\sin ak}{k}\right|\le\frac{2}{k}$$

(10) نتيجة : إن إهمال مجال محدود في بداية مجال التكامل لا يؤثر في نوع التكامل ، أي :

إذا كان $a'>a$ فإن التكاملين $\int_a^{\infty} f(x)dx$ و $\int_{a'}^{\infty} f(x)dx$ من نوع واحد .

(11) التكامل بالتجزئة وتغيير المتحول في التكاملات المعتلة :

(i) إذا كان كل من التابعين $v=v(x)$ و $u=u(x)$ معرفاً ومستمراً مع مشتقه الأول في كل نقطة من المجال $[a,\infty[$ ، فإن :

$$\int_a^{\infty} u(x)dv(x)=\int_a^{\infty} udv=[u\cdot v]_a^{\infty}-\int_a^{\infty} v\cdot du=$$

$$=u(\infty)\cdot v(\infty)-u(a)\cdot v(a)-\int_a^{\infty} v(x)du(x)$$

(*ii*) ليكن $f(x)$ تابعاً معرفاً ومستمراً على $[a,\infty[$. وليكن $x=\varphi(t)$ تابعاً مطرداً ومستمراً هو ومشتقه $\varphi'(t)$ على $[\alpha,\beta[$ حيث β محدود او $+\infty$. وبفرض أن : $a=\varphi(\alpha)$ و $\infty=\varphi(\beta)$.

عندئذٍ : $$\int_a^{\infty} f(x)dx=\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt$$

(*iii*) أمثلة :

(1) بفرض $a>0$. إن التكامل $\int_a^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ متقارب بملاحظة الآتي :

$$\int_a^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\left[-\frac{\cos x}{x}\right]_a^{\infty}-\int_a^{\infty}\frac{\cos x}{x^2}dx=\frac{\cos a}{a}-\int_a^{\infty}\frac{\cos x}{x^2}dx$$

والتكامل الموجود في الطرف الأيمن متقارب بالإطلاق ، وبالتالي متقارب ، وذلك لأن $|\cos x|\le 1$ وبالمقارنة مع $\frac{1}{x^2}$.

ملاحظة : من المعروف سابقاً أن هذا التكامل المدروس متقارب وذلك بطرائق أخرى .

(2) احسب $I_n=\int_0^{\infty}t^n\cdot e^{-t}dt$ حيث n عدد طبيعي .

الحل : $$I_n=\left[-e^{-t}\cdot t^n\right]_0^{\infty}+n\int_0^{\infty}e^{-t}\cdot t^{n-1}dt=\cdots=n!$$

(3) احسب $E_n=\int_0^{\infty}e^{-ax}\cdot\sin^n x\,dx$ حيث $a>0$ و $n\ge 0$.

الحل :

$$E_n = \left[-\frac{1}{a}e^{-ax}\cdot\sin^n x\right]_0^{\infty} + \frac{n}{a}\int_0^{\infty} e^{-ax}\cdot\sin^{n-1}x\cos x\,dx =$$

$$= \cdots\cdots = \frac{n(n-1)}{n^2+a^2}\cdot E_{n-2}$$

وبصورة خاصة يكون : $E_0 = \frac{1}{a}$ و $E_1 = \frac{1}{1+a^2}$.

فإذا كان n زوجياً فيتم الوصول إلى E_0 ، وإذا كان n فردياً فيتم الوصول إلى E_1 ، كل ذلك من الدستور التدريجي $E_n = \frac{n(n-1)}{n^2+a^2}\cdot E_{n-2}$.

(4) إن التكاملين $J = \int_0^{\infty}\sin x^2 dx$ و $I = \int_0^{\infty}\cos x^2 dx$ متقاربان وذلك بإجراء التبديل $x = \sqrt{t}$ فيأخذان الشكلين الآتيين :

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt \quad \text{و} \quad I = \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{\cos t}{\sqrt{t}}dt$$

ومن المعلوم أن هذين التكاملين متقاربان .

(5) احسب $I = \int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^4}$.

الحل : بفرض أن $x = \frac{1}{t}$ فعندئذٍ يكون : $I = \int_0^{\infty}\frac{t^2 dt}{1+t^4}$ ، ومن ثم فإن :

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx \quad \text{: ومن ثم فإن} \quad I = \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{1+x^2}{1+x^4}dx$$

ومنه ، بفرض $z = x - \frac{1}{x}$ ، يكون :

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dz}{2+z^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\tan^{-1}\frac{z}{2}\right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

ملاحظة : قد تتحول بعض التكاملات المعتلة إلى تكاملات غير معتلة عند إجراء تغيير في المتحول أو استخدام التكامل بالتجزئة .

فمثلاً ، بوضع $x = \frac{1}{t^2}$ في التكامل المعتل $I = \int_{x_0}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-k^2)}}$ ، حيث $1 < k^2 < x_0$ ، فعندها ينتج أن :

$$I = -2\int_{\frac{1}{\sqrt{x_0}}}^{0}\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = 2\int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{x_0}}}\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$

وهذا التكامل الأخير هو تكامل غير معتل .

5-4- القيمة الرئيسة والقيمة المعممة (للتكامل المعتل من النوع الأول) :

(1) تعريف : ليكن $f(x)$ تابعاً معرفاً على المجال المتناظر $]-\infty,+\infty[$. يرمز **للقيمة الرئيسة للتكامل** $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx$ بالرمز $V\cdot P\cdot\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx$.

وتعرف وفق الآتي :

$$V\cdot P\cdot\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx = \lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A}f(x)dx$$

(2) نتيجة : إذا وجد التكامل المعتل $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ فإن القيمة الرئيسة له تكون موجودة ، ولكن العكس غير صحيح بالضرورة .

مثال : التكامل $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x}$ غير موجود بملاحظة الأتي :

$$\int_{-A}^{A} \frac{dx}{x} = \ln \frac{A}{|A'|}$$

فإذا كان $A = 2|A'|$ يكون : $\lim_{A\to+\infty} \ln \frac{A}{|A'|} = \ln 2$ ،

وإذا كان $A = 3|A'|$ يكون : $\lim_{A\to\infty} \ln \frac{A}{|A'|} = \ln 3$ ، وهكذا كل علاقة بين $A , |A'|$ تعطي قيمة موافقة لها وتابعة لها .

أما القيمة الرئيسة للتكامل فهي :

$$V \cdot P \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{A\to+\infty} \ln \left|\frac{A}{A}\right| = 0$$

(3) نتيجة : إذا كان التابع $f(x)$ فردياً فإن **القيمة الرئيسة للتكامل**المعتل $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ تساوي الصفر . أما إذا كان التابع $f(x)$ زوجياً فإن :

$$V \cdot P \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2 \lim_{A\to+\infty} \int_{0}^{A} f(x)dx$$

(4) تعاريف : ليكن $f(x)$ تابعاً معرفاً من أجل $x > 0$ ، وقابلاً للمكاملة على أي مجال $[0,x]$ حيث $x > 0$ ، وغير قابل للمكاملة على $]0,+\infty[$.

وبفرض أن $F(x)=\int_0^x f(t)dt$. عندئذٍ تعرف **القيمة الوسطى للتابع** $f(x)$ بأنها

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=\lim_{x\to\infty}\frac{F(x)}{x}$$

وتعرف **القيمة المعمّمة لتكاملالتابع** في المجال $[0,+\infty[$ بأنها :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_0^x F(t)dt$$

(5) أمثلة :

[1] (لاحظ أن التابع المكامل فردي) $V\cdot P\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x}=\lim_{A\to+\infty}\left[\ln|x|\right]_{-A}^{A}=0$

والتكامل $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x}$ متباعد .

[2] (لأن التابع المكامل فردي) $V\cdot P\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xdx}{1+x^2}=0$

[3] $V\cdot P\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1+x}{1+x^2}dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\pi$

وذلك لأن القيمة الرئيسة للجزء الفردي معدومة . بينما التكامل $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1+x}{1+x^2}dx$ متباعد ، لأن النهاية $\lim_{\substack{A\to+\infty\\A'\to-\infty}}\left[\ln\sqrt{1+x^2}\right]_{-A}^{A}$ غير موجودة فمن أجل $A=A'\to\infty$ تكون النهاية الجزئية تساوي الصفر ومن أجل $A=2A'\to\infty$ تكون النهاية الجزئية مختلفة عن ذلك .

[4] التكامل $\int_0^{\infty}\sin x\,dx$ متباعد (غير موجود) . وكذلك :

$$F(x)=\int_0^{x}\sin t\,dt=1-\cos x$$

والقيمة الوسطى للتابع $f(x)=\sin x$ هي :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{F(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\cos x}{x}=0$$

والقيمة المعممة للتكامل المدروس هي :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_0^{x}F(t)dt=\lim_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x}=1$$

[5] التكامل $\int_0^{\infty}(\sin^2 x+\cos^2\sqrt{2}x)dx$ متباعد . وكذلك :

$$F(x)=\int_0^{\infty}(\sin^2 t+\cos^2\sqrt{2}t)dt=x+\frac{\sin 2\sqrt{2}x}{4\sqrt{2}}-\frac{\sin 2x}{4}$$

والقيمة الوسطى هي : $\lim_{x\to\infty}\frac{F(x)}{x}=1$.

والقيمة المعممة هي : $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_0^{x}F(t)dt=\infty$.

5-5- تمارين محلولة :

$$\int_2^{\infty}\frac{dx}{x^2+x-2}=\frac{1}{3}\left[\ln\frac{x-1}{x+2}\right]_2^{\infty}=\frac{2}{3}\ln 2$$ **(1)**

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+x+1)^2}=\left[\frac{2x+1}{3(x^2+x+1)}+\frac{4}{3\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2x+1}{\sqrt{2}}\right]_{-\infty}^{\infty}=\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$$ **(2)**

(3) $V\cdot P\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\cos x dx=0$ موجودة غير و $V\cdot P\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\sin x dx=0$

(4) بفرض $a>0$ و $b^2-ac<0$ احسب $I_n=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(ax^2+2bx+c)^n}$ ، حيث $n\geq 1$.

الحل : إن : $ax^2+2bx+c=a(x+\frac{b}{a})^2+\frac{ac-b^2}{a}=at^2+B$

حيث $x+\frac{b}{a}=t$ و $B=\frac{ac-b^2}{a}$ ، ومن ثم فإن :

$$I_{n-1}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{(at^2+B)^{n-1}}=\left[\frac{t}{(at^2+B)^{n-1}}\right]_{-\infty}^{\infty}+2(n-1)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{at^2dt}{(at^2+B)^n}$$

ومنه : $I_{n-1}=2(n-1)\cdot(I_{n-1}-BI_n)$

ومن ثم فإن : $I_n=\frac{2n-3}{2(n-1)B}I_{n-1}=\cdots=\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!B^{n-1}}$

حيث $n\geq 2$.

وكذلك فإن : $I_1=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{at^2+B}=\sqrt{\frac{1}{aB}}\left[\tan^{-1}\sqrt{\frac{a}{B}}t\right]_{-\infty}^{\infty}=\frac{\pi}{\sqrt{aB}}$

(5) بفرض $n\geq 0$ احسب $I_n=\int_0^{\infty}\frac{dx}{ch^{n+1}x}$.

الحل : بأخذ $dv = \frac{dx}{ch^2 x}$ و $u = \frac{1}{ch^{n-1} x}$ يكون :

$$I_n = \left[\frac{thx}{ch^{n-1} x}\right]_0^{\infty} + (n-1)\int_0^{\infty} \frac{sh^2 x}{ch^{n+1} x} dx$$

ولكن $sh^2 x = ch^2 x - 1$ والحد الأول (في الطرف الأيمن) معدوم ، إذن :

$$I_n = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$$

ومن ثم فإن : $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ حيث $n \geq 2$.

وكذلك فإن : $I_0 = \int_0^{\infty} \frac{dx}{chx} = \left[2\tan^{-1} e^x\right]_0^{\infty} = 2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$

$$I_1 = \int_0^{\infty} \frac{dx}{ch^2 x} = [thx]_0^{\infty} = 1$$

5-6- التكاملات المعتلة من النوع الثاني :

(1) تعريف : بفرض أن التابع $f(x)$ غير محدود على $[a,b]$ ولكنه محدود في أي مجال $[a+\zeta, b]$ ، حيث $\zeta > 0$ و $a + \zeta < b$ ، أي أنه غير محدود على $[a, a+\zeta]$. وضمن هذه الشروط يقال عن النقطة a إنها **نقطة شاذة للتابع** $f(x)$ ، و هذا يعني بكلمات أخرى أن النهاية $\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$ تساوي $+\infty$ أو $-\infty$. ويعرف **التكامل المعتل من النوع الثاني** بأنه :

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\zeta \to 0} \int_{a+\zeta}^b f(x)dx \qquad (*)$$

هذا ويقال عن التكامل (*) إنه **متقارب** أو **موجود** إذا كانت النهاية المذكورة في الطرف الأيمن من (*) موجودة ومحدودة .

أما إذا كانت هذه النهاية هي $+\infty$ أو $-\infty$ أو غير موجودة ، فيقال عن التكامل (*) إنه **متباعد** أو **غير موجود** . ثم بفرض أن A تساوي قيمة النهاية في حالة التقارب فيقال إن A هي قيمة التكامل المعتل من النوع الثاني المدروس ، ويمكن اعتماد إحدى الكتابتين الأتيتين :

$$\int_{a+0}^{b} f(x)dx = \int_{a+}^{b} f(x)dx = A$$

وبصورة مشابهة ، إذا كان $f(x)$ غير محدود على $]a,b]$ ولكنه محدود في أي مجال $[a,b-\zeta]$ ، حيث $\zeta > 0$ و $a < b-\zeta$ ، أي أنه غير محدود على $]b-\zeta,b]$ وضمن هذه الشروط يقال عن النقطة b إنها **نقطة شاذة** للتابع $f(x)$ ، وهذا يعني أن النهاية $\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}} f(x)$ تساوي $+\infty$ أو $-\infty$. ويعرّف **التكامل المعتل من النوع الثاني** بأنه :

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\zeta\to 0} \int_{a}^{b-\zeta} f(x)dx$$

الذي يكون متقارباً عندما وفقط عندما تكون النهاية المذكورة في الطرف الأيمن من العلاقة السابقة موجودة ومحدودة ، ولتكن B . ويمكن اعتماد إحدى الكتابتين الأتيتين :

$$\int_{a}^{b-0} f(x)dx = \int_{a}^{b-} f(x)dx = B$$

وبأسلوب مماثل فإن نقطة مثل c ، حيث $a < c < b$ ، تكون نقطة شاذة للتابع $f(x)$ إذا كان $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \infty$ ، ويكون التكامل الأتي تكاملاً معتلاً من النوع الثاني :

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\substack{\zeta_1\to 0\\ \zeta_2\to 0}} \left[\int_{a}^{c-\zeta_1} f(x)dx + \int_{c+\zeta_2}^{b} f(x)dx \right]$$

حيث يكون هذا التكامل متقارباً عندما وفقط عندما تكون النهاية المذكورة في الطرف الأيمن من العلاقة السابقة موجودة ومحدودة .

وبالإضافة إلى ذلك كله يمكن قول الآتي :

إذا كان كل من التكاملين $\int_{a+}^{c} f(x)dx$, $\int_{c}^{b-} f(x)dx$ متقارباً فإن :

$$\int_{a+}^{b-} f(x)dx = \int_{a+}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{b-} f(x)dx$$

وأيضاً ، إذا كان التابع $f(x)$ غير معرف في نقطتين مثل c,d ، حيث $c<d$ ، واقعتين داخل المجال $[a,b]$ فيقال إن التكامل المعتل $\int_{a+}^{b-} f(x)dx$ متقارب وقيمته هي $\int_{a+}^{c-} f(x)dx + \int_{c+}^{d-} f(x)dx + \int_{d+}^{b-} f(x)dx$ شريطة أن يكون كل من التكاملات الثلاثة الواردة في هذه العبارة متقارباً .

وكذلك ، يمكن تعريف مجموع مختلط من التكاملات المعتلة من النوعين الأول والثاني ، مثل المجموع : $\int_{a+}^{b} f(x)dx + \int_{b}^{\cdots} f(x)dx$

الذي يرمز له بالرمز : $\int_{a+}^{\cdots} f(x)dx$.

وكذلك ، يمكن النظر إلى مجموع من النمط :

$$\int_{a}^{b-} f(x)dx + \int_{b+}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{\cdots} f(x)dx$$

والذي يرمز له بالرمز : $\int_{a}^{\cdots} f(x)dx$.

وأيضاً ، وبشكل عام إذا وجد في المجال $[a,b]$ عدد منته من النقط الشاذة $c_0,c_1,\cdots,c_m$ ، حيث بجوار كل منها لا يكون التابع محدوداً ، ولكنه يكون محدوداً في كل مجال لا يحوي نقطة شاذة . فمن أجل ثلاث نقط شاذة a,b,c يعرف التكامل المعتل من النوع الثاني وفق الأتي :

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\zeta_1\to 0\\ \zeta_2\to 0\\ \zeta_3\to 0\\ \zeta_4\to 0}} \left[\int_{a+\zeta_1}^{c-\zeta_2} f(x)dx + \int_{c+\zeta_3}^{b-\zeta_4} f(x)dx \right]$$

ومن أجل النقاط الشاذة $c_0,c_1,\cdots,c_m$ يتم الحصول على تكاملات مشابهة للتكاملات في العلاقة السابقة بحيث تدخل كل نقطة شاذة في حدود التكامل بحذف جوارها وإنهاء هذه الجوارات إلى الصفر .

(2) أمثلة : [1] إذا كان $s>0$ فإن التكامل $I=\int_{0+}^{\infty} e^{-x}x^{s-1}dx$ متقارب ، لأن :

$$I=\int_{0+}^{1} e^{-x}x^{s-1}dx+\int_{1}^{\infty} e^{-x}x^{s-1}dx$$

حيث التكامل الأيمن متقارب أياً كان s [انظر المثال (9)] . أما التكامل الأيسر فهو متقارب بوضع $x=\frac{1}{u}$ حيث يكون :

$$\int_{\varepsilon}^{1} e^{-x}x^{s-1}dx=\int_{1}^{\frac{1}{\varepsilon}} e^{-\frac{1}{u}}x^{-s-1}du$$

لكن $\int_1^{\infty} e^{-\frac{1}{u}} \cdot x^{-s-1} du$ متقارب عندما $s > 0$ وذلك بمقارنته مع التكامل

$\int_1^{\infty} x^{-s-1} du$ إذن فالتكامل I متقارب عندما $s > 0$.

[2] بأخذ التابع $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ المعرف على المجال $[0,1[$ ، وغير المحدود بجوار الواحد ، والمحدود والقابل للمكاملة في المجال $[0,1-\zeta]$ ، حيث $0 < \zeta < 1$ فيكون :

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\zeta \to 0} \int_0^{1-\zeta} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\zeta \to 0} \left[\sin^{-1} x\right]_0^{1} = \frac{\pi}{2}$$

أي أن هذا التكامل متقارب .

وكذلك فإن :

$$\int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\zeta' \to 0} \int_{-1+\zeta'}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\zeta' \to 0} \left[+\sin^{-1} x\right]_{-1+\zeta'}^{0} = \frac{\pi}{2}$$

ومنه فالتكامل الآتي متقارب وقيمته :

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{-1}^{0} + \int_{0}^{1} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{\zeta \to 0} \int_0^{1-\zeta} \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{\zeta \to 0} \left[-2\sqrt{1-x}\right]_0^{1-\zeta} = \lim_{\zeta \to 0} \left[-2\sqrt{\zeta} + 2\right] = 2 \quad \textbf{[3]}$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\substack{\zeta_1 \to 0 \\ \zeta_2 \to 0}} \int_{-1+\zeta_1}^{1-\zeta_2} \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\substack{\zeta_1 \to 0 \\ \zeta_2 \to 0}} \left[-\sqrt{1-x^2}\right]_{-1+\zeta_1}^{1-\zeta_2} = 0 \quad \textbf{[4]}$$

[5*] بفرض $b > a$ و $\lambda > 0$ ادرس التكامل : $I = \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\lambda}$.

الحل : بفرض $\lambda \neq 1$ يكون :

$$I = \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\lambda} = \lim_{\zeta \to 0} \int_{a+\zeta}^b \frac{dx}{(x-a)^\lambda} = \lim_{\zeta \to 0} \frac{1}{1-\lambda}\left[(b-a)^{1-\lambda} - \zeta^{1-\lambda}\right]$$

فإذا كان $1-\lambda < 0$ أي $\lambda > 1$ فإن $I = -\infty$ والتكامل متباعد . وإذا كان $1-\lambda > 0$ أي $\lambda < 1$ فإن $I = \frac{1}{1-\lambda}(b-a)^{1-\lambda}$. أما إذا كان $\lambda = 1$ فإن

$$I = \int_a^b \frac{dx}{x-a} = \ln(b-a) - \ln\zeta \xrightarrow[\zeta \to 0]{} \infty \quad .$$

إذن فالتكامل I متقارب عندما $\lambda < 1$ ومتباعد عندما $\lambda \geq 1$ ، حيث $\lambda > 0$.

[6*] أثبت ، بشكل مماثل ، أن التكامل $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\lambda}$ ، حيث $b > a$ و $\lambda > 0$ ، يكون متقارباً عندما $\lambda < 1$ ويكون متباعداً عندما $\lambda \geq 1$.

(3) بعض معايير تقارب التكاملات المعتلة من النوع الثاني :

[1] بافتراض أن التكامل $\int_x^b f(t)dt$ موجود من أجل جميع قيم x التي تحقق الشرط $a < x \leq b$ ، وأن $f(t) \geq 0$ عندما $a < t \leq b$ ، فإن الشرط اللازم والكافي كي يتقارب التكامل $\int_{a+}^b f(t)dt$ هو أن يوجد عدد ثابت موجب مثل M بحيث يكون : $I(x) = \int_x^b f(t)dt \leq M$

وذلك أيا كان x الذي يحقق الشرط $a < x \leq b$.

[2] بفرض أن التكاملين $\int_x^b f(t)dt$ و $\int_x^b g(t)dt$ موجودان من أجل جميع قيم x التي تحقق الشرط $a<x\le b$ ، وأن $g(t)\ge 0$ و $f(t)\ge 0$ عندما $a<t\le b$.

فإذا وجد عدد موجب مثل c بحيث يكون $f(t)\le c\cdot g(t)$ أيا كان t من $]a,b]$ ، فإن تقارب $\int_{a+}^b g(t)dt$ يقتضي تقارب $\int_{a+}^b f(t)dt$ ، كما يكون :

$$\le c\int_{a+}^b g(t)dt \quad \int_{a+}^b f(t)dt$$

[3*] بفرض أن التكاملين $\int_x^b f(t)dt$ و $\int_x^b g(t)dt$ موجودان من أجل جميع قيم x المحققة للشرط $a<x\le b$ ، حيث $g(t)>0$ و $f(t)\ge 0$ عندما $a<t\le b$.

فإذا كان :

$$\lim_{t\to a+}\frac{f(t)}{g(t)}=c$$

فإن التكاملين $\int_{a+}^b g(t)dt$ و $\int_{a+}^b f(t)dt$ يتقاربان معاً أو يتباعدان معاً إذا كان $c>0$.

أما إذا كان $c=0$ فإن تقارب $\int_{a+}^b g(t)dt$ يقتضي تقارب $\int_{a+}^b f(t)dt$.

ملاحظة مهمة : بفرض أن $F(x)$ تابع أصلي ما للتابع $f(x)$. فإذا كان $f(x)$ غير محدود بجوار a فإن :

$$\int_a^b f(x)dx=\int_{a+0}^b f(x)dx=[F(x)]_{a+0}^b=F(b)-F(a+0)=F(b)-F(a)$$

وذلك عند وجود النهاية $F(a+0)$ التي إذا كانت منتهية (محدودة) فإن التكامل يكون متقارباً . أما إذا كانت تلك النهاية غير منتهية أو غير موجودة فإن التكامل يكون متباعداً . وبالأسلوب نفسه يمكن الحديث عن التكامل إذا كان $f(x)$ غير محدود بجوار b ، وكذلك إذا كان $f(x)$ غير محدود في نقطة داخلية مثل c حيث $a < c < b$.

وتجدر الإشارة إلى ما يأتي :

إذا كان التابع $F(x)$ مستمراً في النقط الشاذة ، بمعنى أنه مستمر في كل نقطة داخلية ومستمر من اليمين في a ومن اليسار في b ، فإن التكامل المعتل من النوع الثاني يكون متقارباً .

أمثلة :

[1] بأخذ التكامل $\int_{-1}^{8} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ يمكن القول إن النقطة $x = 0$ هي نقطة شاذة للتابع $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ ، وإن $F(x) = \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}}$ تابع أصلي للتابع $f(x)$. وبملاحظة أن $F(x)$ مستمر في النقطة $x = 0$ ينتج أن هذا التكامل متقارب ، وقيمته :

$$\int_{-1}^{8} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = [F(x)]_{-1}^{8} = \frac{9}{2} .$$

[2] بأخذ التكامل $\int_{0}^{1} \frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ يمكن القول إن $x = 1$ شاذة للتابع المكامل $f(x)$. وبملاحظة أن $F(x) = \frac{(\sin^{-1} x)^2}{2}$ وأن $F(x)$ مستمر في $x = 1$ فإنه ينتج أن التكامل متقارب ، وقيمته :

$$\int_{0}^{1} f(x)dx = \frac{\pi^2}{8}$$

[3] النقطتان $x=\mp 1$ شاذتان للتابع $f(x)=\dfrac{2x}{x^2-1}$. والتابع $F(x)=\ln|x^2-1|$ تابع أصلي له . ومنه ، بملاحظة أن $F(x)$ غير مستمر في النقطتين $x=\mp 1$ ، فإن التكامل $\int_{-1}^{1} f(x)dx$ يكون متباعداً ، حيث $F(1)-F(-1)=-\infty$.

كما إن التكامل $\int_{-2}^{2} f(x)dx$ يكون متباعداً أيضاً .

[4] النقطة $x=1$ شاذة للتابع $f(x)=\dfrac{1}{x\ln x}$. والتابع $F(x)=\ln\ln x$ تابع أصلي له . ومنه، بملاحظة أن $F(x)$ غير مستمر في $x=1$ ، ينتج أن التكامل $\int_{1}^{2} \dfrac{dx}{x\ln x}$ متباعد .

[5] التابع $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[4]{1-x^4}}$ معرف على $I=[0,1[$ والنقطة $x=1$ نقطة شاذة له. والتابع $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt[4]{1-x}}$ معرف على I وله النقطة الشاذة نفسها . والتابعان $f(x)\ ,\ g(x)$ موجبان ويحققان العلاقة $c=\lim_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{1}{\sqrt[4]{4}}>0$ فالتكاملان $J=\int_{0}^{1} \dfrac{dx}{\sqrt[4]{1-x^4}}$ و $K=\int_{0}^{1} \dfrac{dx}{\sqrt[4]{1-x}}$ من نوع واحد . ولكن K متقارب لأنه من الشكل $\int_{0}^{1} \dfrac{dx}{(1-x)^{\frac{1}{4}}}$ و $\lambda=\dfrac{1}{4}<1$ إذن $0<\lambda<1$ متقارب .

[6] التابع $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$ ، حيث $k^2<1$ له النقطة الشاذة $x=1$ في المجال $I=[0,1[$ ، والتابع $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ ، يحققان العلاقة :

$$c=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{1}{\sqrt{2(1-k^2)}}>0$$

فالتكاملان $I=\int_0^1 f(x)dx$ و $J=\int_0^1 g(x)dx$ من نوع واحد . ولكن J متقارب إذن I متقارب .

[7] التكامل المعتل $\int_0^2 f(x)dx$ ، حيث $f(x)=2x\sin\frac{\pi}{x^2}-\frac{2\pi}{x}\cos\frac{\pi}{x^2}$ ، متقارب بملاحظة الآتي :

للتابع $f(x)$ نقطة شاذة وحيدة هي $x=0$ في المجال $[0,2]$ ، والتابع الأصلي له هو $F(x)=x^2\sin\frac{\pi}{x^2}$ والذي توجد له نهاية عندما $x\to 0$ وهي $F(0+0)=0$.

وإذا فإن :

$$\int_0^2 f(x)dx=\left[x^2\sin\frac{\pi}{x^2}\right]_0^2=2\sqrt{2}$$

5-7- القيمة الرئيسة للتكامل المعتل من النوع الثاني :

(1) تعريف : بفرض أن التابع $f(x)$ معرف في $[a,b]$ باستثناء النقطة $x=c$ ، حيث $a<c<b$، والتي هي نقطة شاذة للتابع $f(x)$. عندها تعرف **القيمة الرئيسة للتكامل** $\int_a^b f(x)dx$ بانها :

$$V\cdot P\cdot\int_a^b f(x)dx=\lim_{\zeta\to 0}\left[\int_a^{c-\zeta} f(x)dx+\int_{c+\zeta}^b f(x)dx\right]$$

وواضح أنه إذا تقارب التكامل المعتل فالقيمة الرئيسة له تكون موجودة وقيمتها تساوي قيمة هذا التكامل المعتل ، إلا أن العكس غير صحيح بالضرورة ، أي قد توجد القيمة الرئيسة ولا يوجد التكامل المعتل .

مثال :بفرض $a<c<b$. إن التكامل $I=\int_a^b \frac{dx}{x-c}$ غير موجود ، ولكن قيمته الرئيسة موجودة .

الحل:

$$I=\lim_{\substack{\zeta\to 0\\ \xi\to 0}}\left[\int_a^{c-\zeta}\frac{dx}{x-c}+\int_{c+\xi}^{b}\frac{dx}{x-c}\right]=\ln\left|\frac{b-c}{a-c}\right|+\lim_{\substack{\zeta\to 0\\ \xi\to 0}}\ln\left|\frac{\zeta}{\xi}\right|$$

والنهاية الأخيرة غير موجودة عندما ξ,ζ تنتهيان إلى الصفر بشكل مستقل أحدهما عن الآخر ، فهي متعلقة بهما ، فإن كانا متساويين يتم الحصول على نتيجة ، وإن كان أحدهما ضعف الآخر (مثلاً) فيتم الحصول على نتيجة أخرى ..... وهكذا .

ومن جهة ثانية فإن :

$$V\cdot P\cdot I=\lim_{\zeta\to 0}\left[\int_a^{c-\zeta}f(x)dx+\int_{c+\zeta}^{b}f(x)dx\right]=\ln\left|\frac{b-c}{a-c}\right|=\ln\frac{b-c}{c-a}$$

مثال آخر : التكامل $\int_a^b \frac{dx}{(x-c)^n}$ ، حيث $n\geq 1$ و $a<c<b$ ، متباعد .

أما قيمته الرئيسة :

$$\lim_{\zeta\to 0}\left[\int_a^{c-\zeta}\frac{dx}{(x-c)^n}+\int_{c+\zeta}^{b}\frac{dx}{(x-c)^n}\right]$$

فهي غير موجودة عندما يكون n زوجياً ، وهي موجودة عندما يكون n فردياً ، حيث قيمتها في هذه الحالة تساوي :

$$\frac{1}{n-1}\left[\frac{1}{(a-c)^{n-1}}-\frac{1}{(b-c)^{n-1}}\right]$$

ملاحظة : تبقى الخواص الخطية وخواص المقارنة المألوفة محققة .

أمثلة :

[1] احسب كلاً من التكاملين : $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos x dx$ و $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x dx$ اللذين يدعيان **تكاملي أولر** .

الحل: للتابع $\ln\sin x$ نقطة شاذة هي $x=0$ ، وللتابع $\ln\cos x$ نقطة شاذة هي $x=\frac{\pi}{2}$.

وبوضع $x=\frac{\pi}{2}-u$ يرد التكامل J إلى التكامل I ، ومن ثم $J=I$. ومنه

$$2I=I+J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\cos x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\frac{\sin 2x}{2}dx=$$

$$=-\frac{\pi}{2}\ln 2+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin 2x dx$$

ثم ، بوضع $t=2x$ في التكامل الأخير ، ينتج أن :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin 2x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln\sin t\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin t\,dt + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln\sin t\,dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin t\,dt = I$$

وبذلك يكون $2I = -\frac{\pi}{2}\ln 2 + I$ ومن ثم فإن : $J = I = -\frac{\pi}{2}\ln 2$ وهو المطلوب

ملاحظة : بالاستفادة من نتيجة المثال السابق يمكن الحصول على قيم لتكاملات أخرى وفق الأتي :

بإجراء التكامل بالتجزئة لتكامل أولر I ينتج أن :

$$-\frac{\pi}{2}\ln 2 = I = [x\ln\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\frac{\cos x}{\sin x}\,dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\tan x}\,dx$$

ومن ثم فإن : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\tan x}\,dx = \frac{\pi}{2}\ln 2$.

[2] لحساب التكامل $I = \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx$ حيث $x = 0$ نقطة شاذة لتابعه المكامل $f(x)$ تستعمل طريقة التكامل بالتجزئة فيكون :

$$I = \left[\ln x\tan^{-1} x\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\tan^{-1} x}{x}\,dx = -\int_0^1 \frac{\tan^{-1} x}{x}\,dx$$

وبملاحظة أن : $\lim_{x\to 0}\frac{\tan^{-1}x}{x}=1$ يمكن القول إن التابع المكامل في التكامل الأخير والذي هو $\frac{\tan^{-1}x}{x}$ يكون تابعاً مستمراً على $[0,1]$ ، ومن ثم فهو قابل للمكاملة .

وبالإضافة إلى ذلك فإن التكامل الأخير لم يعد تكاملاً معتلاً .

[3] التكامل $I=\int_0^2\frac{dx}{x\ln x}$ لتابعه المكامل $f(x)$ نقطة شاذة هي $x=1$ ، وتابعه الأصلي هو $F(x)=\ln\ln x$ ، ومن ثم فإن $I=\infty$ ، فهو متباعد .

[4] التكامل $I=\int_1^{\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}dx$ متقارب ، وذلك بوضع $x=\frac{1}{t}$ حيث يكون :

$I=-\int_0^1\frac{\ln t}{1+t^2}dt$ ، وهذا تكامل متقارب حسب المثال [2] .

5-8- التكاملات الأولرية :

(1) تعريف : يعرف **تكامل أولر من النوع الأول** ، والذي رمزه $B(p,q)$ ، بأنه التكامل المعتل :

$$B(p,q)=\int_{0+}^{1-}x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$$

وهو يمثل تابعاً يتعلق بوسيطين (أي يتبع لمتغيرين) هما p,q . ويسمى هذا التكامل ، عادةً ، **التكامل البتّاوي** ، ويكتب اختصاراً بالشكل :

$$B(p,q)=\int_0^1x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx \qquad (*)$$

وتجدر الإشارة إلى أن هذا التكامل لا يكون موجوداً إلا إذا كان $p>0,q>0$ ، وذلك بملاحظة الآتي : بفرض $0<a<1$ يمكن كتابة العلاقة (*) بالشكل :

$$B(p,q)=\int_0^a x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx+\int_a^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$$

ومنه ، فإن التكامل الأول من الطرف الأيمن يكون متقارباً عندما $1-p<1$ ، أي عندما $p>0$ ، وإن التكامل الثاني من الطرف الأيمن يكون متقارباً عندما $1-q<1$ ، أي عندما $q>0$ ، وذلك بالاستفادة من المثالين [5*] و [6*] والمعيار [3*] بعد ملاحظة أن :

$$\lim_{x\to 0+}\frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{x^{p-1}}=1 \quad , \quad \lim_{x\to 1-}\frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{(1-x)^{q-1}}=1$$

وبذلك يمكن القول إن التكامل (*) يكون متقارباً عندما $q>0$ و $p>0$ ، ويكون متباعداً عندما $p\le 0$ أو $q\le 0$.

(2) بعض خواص التكامل البتّاوي :

[1] خاصة التناظر : $B(p,q)=B(q,p)$ أي أن التابع B متناظر بالنسبة إلى p,q .

البرهان : إن تحويل المتغير $t=1-x$ يؤدي مباشرة صحة التناظر.

[2] خاصة تغيير الوسيط :

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$$

ومنه : $$B(p,q)=\int_0^1 (1-x)^{q-1}\frac{dx^p}{p}$$

ثم بالتكامل بالتجزئة يكون : $$B(p,q)=\frac{q-1}{p}\int_0^1 x^p(1-x)^{q-2}dx$$

ومنه ، بملاحظة أن $x^p = x^{p-1} - x^{p-1}(1-x)$ ، يكون :

$$B(p,q) = \frac{q-1}{p}\left[B(p,q-1) - B(p,q)\right]$$

ومن ثم يكون : $\frac{p+q-1}{p}B(p,q) = \frac{q-1}{p}B(p,q-1)$

أي : $B(p,q-1) = \frac{p+q-1}{q-1}B(p,q)$

أي : $B(p,q) = \frac{q-1}{p+q-1}B(p,q-1)$.

وأيضاً : $B(p,q) = \frac{p-1}{p+q-1}B(p-1,q)$.

واعتماداً على ما سبق يمكن كتابة الآتي :

$$B(p,q) = \frac{q-1}{q-1+p}B(p,q-1) = \frac{q-1}{q-1+p}\cdot\frac{q-2}{p+q-2}B(p,q-2)$$

وبمتابعة هذا العمل يمكن الحصول على العلاقة :

$$B(p,q) = \frac{p-1}{p+q-1}\cdot\frac{q-2}{p+q-2}\cdot\frac{q-3}{p+q-3}\cdots\cdots\frac{1}{p+1}B(p,1)$$

ومنه ، عندما يكون $p = m$ و $q = n$ عددين طبيعيين مغايرين للصفر ، يمكن كتابة الآتي :

$$B(m,n) = \frac{(n-1)!}{(n+m-1)\cdots(m+1)}B(m,1) = \frac{(n-1)!}{(n+m-1)\cdots(m+1)m}$$

أي : $B(m,n) = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}$

[3] خاصة تغيير المتحول : بوضع $x=\frac{y}{1+y}$ في التكامل $B(p,q)$ يمكن الحصول على شكل جديد للتكامل البتاوي :

$$B(p,q)=\int_0^{\infty}\frac{y^{p-1}}{(1+y)^{p+q}}dy$$

ومن الملاحظ أن هذا التكامل هو تكامل معتل من النوع الأول ، وله قيمة معلومة عندما $q=1-p$ تعطى **بالدستور المهم** الآتي : $B(p,1-p)=\frac{\pi}{\sin p\pi}$.

[4] خاصة أخرى تعبر عن الشكل المثلثي للتكامل البتاوي :

بوضع $x=\sin^2\varphi$ يمكن الحصول على الشكل المثلثي المطلوب :

$$B(p,q)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2p-1}\varphi\cdot\cos^{2q-1}\varphi d\varphi$$

(3) تعريف : يعرف **تكامل أولر من النوع الثاني** ، والذي رمزه $\Gamma(p)$ ، بأنه التكامل المعتل :

$$\Gamma(p)=\int_{0+}^{\infty}e^{-t}\cdot t^{p-1}dt$$

وهو يمثل تابعاً يتعلق بوسيط واحد (أي يتبع لمتغير) هو p . ويسمى هذا التكامل ، عادة ، التكامل الغمّاوي ، ويكتب اختصاراً بالشكل :

$$\Gamma(p)=\int_0^{\infty}e^{-t}\cdot t^{p-1}dt \qquad (**)$$

وتجدر الإشارة إلى أن هذا التكامل لا يكون موجوداً إلا إذا كان $p>0$ ، وذلك بملاحظة الآتي :

$$+\int_1^{\infty} e^{-t}\cdot t^{p-1}dt\ \Gamma(p)=\int_0^1 e^{-t}\cdot t^{p-1}dt$$

حيث التكامل الأيمن متقارب دوماً مهما يكن p بينما التكامل الأيسر يمثل تكاملاً معتلاً من النوع الأول عندما $p-1<0$ وهو متقارب عندما $1-p<1$ ، أي عندما $p>0$.

ملاحظة : إذا تم أخذ a بدلاً من 1 ، حيث $0<a<\infty$ ، فيكون : $\Gamma(p)=\int_0^a +\int_a^{\infty}$ ولا يختلف النقاش السابق .

(4) بعض خواص التكامل الغمّاوي :

[1] $\Gamma(p+1)=p\cdot\Gamma(p)$ **:** يمكن الحصول على هذه الخاصة بمكاملة الطرف الأيمن من (**) بالتجزئة . وتسمح هذه الخاصة برد حساب $\Gamma(p)$ ، حيث $p>0$ ، إلى حساب $\Gamma(q)$ ، حيث $0<q<1$:

بفرض أن p محصورة بين العددين الصحيحين الموجبين $n+1,n$ فعندئذٍ يكون:

$$\Gamma(p)=(p-1)\cdot\Gamma(p)=(p-1)(p-2)\Gamma(p-2)=\cdots\cdots=$$
$$=(p-1)(p-2)\cdots(p-n)\Gamma(p-n)$$

حيث $p-n$ محصور بين الصفر والواحد . وبوجه خاص ، إذا كان $p=n+1$ فبعد ملاحظة أن $\Gamma(1)=1$ يكون $\Gamma(n+1)=n!$ **وهو دستور مهم** ، حيث n عدد طبيعي ما .

[2] $\Gamma(p)=2\int_0^{\infty} e^{-x^2}\cdot x^{2p-1}dx$ **:** يمكن الحصول على هذه الخاصة بإجراء التبديل أو التغيير في المتحول $t=x^2$ في (**) .

[3] بوضع $t=\ln\frac{1}{x}$ في (**) ينتج أن : $\Gamma(p)=\int_0^1(\ln(\frac{1}{x}))^{p-1}dx$. ثم ،

بملاحظة أن $\lim_{n\to\infty}n\cdot(1-x^{\frac{1}{n}})=\ln\frac{1}{x}$ ، ينتج أن :

$$\Gamma(p)=\lim_{n\to\infty}n^{p-1}\cdot\int_0^1(1-x^{\frac{1}{n}})^{p-1}dx$$

ثم ، بفرض $x=y^n$ ، ينتج أن :

$$\Gamma(p)=\lim_{n\to\infty}n^p\cdot\int_0^1(1-y)^{p-1}\cdot y^{n-1}dy=$$

$$=\lim_{n\to\infty}n^p\cdot B(n,p)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^p\cdot(n-1)!}{p(p+1)\cdots(p+n-1)}$$

[4] العلاقة بين تكاملي أولر : إذا كان q,p عددين موجبين فإن :

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

البرهان : بضرب $\Gamma(p)=2\int_0^\infty x^{2p-1}\cdot e^{-x^2}dx$ في $\Gamma(q)=2\int_0^\infty y^{2q-1}\cdot e^{-y^2}dy$

يكون :

$$\Gamma(p)\Gamma(q)=4\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}\cdot x^{2p-1}\cdot y^{2q-1}dxdy$$

و لإنجاز حساب هذا التكامل المضاعف نوخذ الإحداثيات القطبية :

$x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, $dxdy=rdrd\theta$ وحدود التكامل :

$0 \le r \le \infty$, $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ [لأن الساحة هي الربع الأول] .

أي :

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = 2\int_0^{\infty} e^{-r^2} \cdot r^{2(p+q)-1} dr \cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p-1}\theta \cdot \sin^{2q-1}\theta \cdot d\theta =$$
$$= \Gamma(p+q) \cdot B(p,q)$$

[5] بوضع $p = \frac{1}{2}$ في الدستور $B(p,1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}$ ينتج أن :

$$\pi = B(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(1)} = \left[\Gamma(\frac{1}{2})\right]^2$$

ومن ثم فإن : $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ وهذا دستور مهم .

وأيضاً : $I = \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

وذلك بوضع $t^2 = u$.

ومنه يمكن حساب التكامل : $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}\varphi d\varphi$ ، حيث n عدد صحيح موجب ،

بوضع $\sin\varphi = t^{\frac{1}{2}}$ فيكون :

$$J = \frac{1}{2}\int_0^1 t^{n-\frac{1}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{2}B(n+\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(n+\frac{1}{2})}{2\Gamma(n+1)}$$

ولكن $\Gamma(n+1)=n!$ وأيضاً :

$$\Gamma(n+\frac{1}{2})=(n-\frac{1}{2})\cdot\Gamma(n-\frac{1}{2})=\cdots\cdots=(n-\frac{1}{2})(n-\frac{3}{2})\cdots\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})$$

إذن : $$J=\frac{1}{2}\cdot\frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1\cdot\left[\Gamma(\frac{1}{2})\right]^2}{2^n\cdot n!}$$

أي : $$J=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}$$

[6] قاعدة ليجاندر : $\Gamma(p)\Gamma(p+\frac{1}{2})=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2p-1}}\cdot\Gamma(2p)$.

البرهان : $$B(p,p)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{p-1}dx=2\int_0^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{4}-(\frac{1}{2}-x)^2\right]^{p-1}dx$$

ثم بوضع $\frac{1}{2}-x=\frac{1}{2}t^{\frac{1}{2}}$ ينتج أن :

$$B(p,p)=\frac{1}{2^{2p-1}}\int_0^1 t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{p-1}dt=\frac{1}{2^{2p-1}}B(\frac{1}{2},p)=\frac{1}{2^{2p-1}}\cdot\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(p)}{\Gamma(p+\frac{1}{2})}$$

ومنه : $$\frac{\Gamma(p)\Gamma(p)}{\Gamma(2p)}=\frac{1}{2^{2p-1}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}\cdot\Gamma(p)}{\Gamma(p+\frac{1}{2})}$$

إذن : $$\Gamma(p)\Gamma(p+\frac{1}{2})=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2p-1}}\cdot\Gamma(2p)$$

(3) تمارين محلولة :

[1] أوجد التكامل $I=\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ حيث $a>0$.

الحل : بوضع $x=a\sqrt{t}$ ، حيث $t>0$ ، يكون : $dx=\frac{a}{2}t^{-\frac{1}{2}}dt$ ومن ثم فإن :

$$I=\frac{a^4}{2}\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}dt=$$

$$=\frac{a^4}{2}B(\frac{3}{2},\frac{3}{2})=\frac{a^4\pi}{16}$$

[2] أوجد التكامل $J=\int_0^{\infty}\frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}dx$.

الحل :حسب الخاصة [3] للتكامل البتاوي يمكن استنتاج أن :

$p+q=2$ و $p-1=\frac{1}{4}$. ومن ثم فإن $q=\frac{3}{4}$, $p=\frac{5}{4}$ ، ومن ثم فإن :

$$J=B(\frac{5}{4},\frac{3}{4})=\frac{\Gamma(\frac{1}{4}+1)\Gamma(\frac{3}{4})}{\Gamma(2)}=\frac{1}{4}\cdot\Gamma(\frac{1}{4})\cdot\Gamma(\frac{3}{4})=\frac{\pi}{4\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

[3] أوجد التكامل $K=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}}$.

الحل : بوضع $x^n=t$ أي $x=t^{\frac{1}{n}}$ فيكون :

$$K=\frac{1}{n}\int_0^1 t^{\frac{1}{n}-1}(1-t)^{-\frac{1}{n}}dt=\frac{1}{n}B(\frac{1}{n},\frac{-1}{n})=\frac{\pi}{n\sin\frac{\pi}{n}}$$

[4] أوجد التكامل $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\cdot\cos^n x dx$.

الحل : حسب الخاصة [4] التكامل البتاوي يمكن استنتاج أن :

$2p-1=m, 2q-1=n$ ومن ثم فإن : $q=\frac{n+1}{2}$, $p=\frac{m+1}{2}$ ومن ثم فإن :

$$I=\frac{1}{2}B(\frac{m+1}{2},\frac{n+1}{2})$$

حالة خاصة : أوجد $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 x\cdot\cos^4 x dx$

الحل : $I=\frac{1}{2}B(\frac{7}{2},\frac{5}{2})=\frac{15\pi}{512}$.

[5] أوجد التكامل $I=\int_0^{\infty}\frac{x^m}{(a+bx^n)^p}dx$ ، حيث a,b,p و m,n أعداد موجبة .

الحل : بوضع $\frac{b}{a}x^n=t$ فيكون : $x=(\frac{a}{b}t)^{\frac{1}{n}}$ ومن ثم فإن :

$$I=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}}\cdot\frac{1}{na^p}\int_0^{\infty}\frac{t^{\frac{m+1}{n}-1}}{(1+t)^p}dt=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}}\cdot\frac{1}{na^p}B\left(\frac{m+1}{n},p-\frac{m+1}{n}\right)$$

والذي هو متقارب من أجل $p>\frac{m+1}{n}$.

[6] أوجد التكامل $I=\int_0^{\infty}\frac{x^{m'-1}}{1+x^n}dx$

الحل : ينتج من [5] بوضع $m'-1=m, a=b=1=p$ حيث يكون :

$$J=\frac{1}{n}B\left(\frac{m'}{n},1-\frac{m'}{n}\right)=\frac{\pi}{n\sin\frac{m'}{n}\pi}$$

[7] أوجد التكامل $K=\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^3}$.

الحل : ينتج من [6] بوضع $n=3, m'-1=0$ حيث يكون :

$$K=\frac{1}{3}B\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)=\frac{\pi}{3\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

[8] أوجد التكامل $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan^n x\cdot dx$.

الحل : بوضع $\tan x=t^{\frac{1}{2}}$ يكون : $x=\tan^{-1}t^{\frac{1}{2}}$, $dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{t^{-\frac{1}{2}}}{1+t}dt$.

$$I=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{t^{\frac{n-1}{2}}}{1+t}dt=\frac{1}{2}B\left(\frac{n+1}{2},1-\frac{n+1}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{n+1}{2}\pi}$$

[9] أوجد التكامل $J=\int_0^{\pi}\frac{\sin^{n-1}x}{(1+k\cos x)^n}dx$ حيث $0<|k|<1$.

الحل : بوضع $t=\tan\frac{x}{2}$ يكون :

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2}\ ,\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}\ ,\ dx=\frac{2dt}{1+t^2}$$

$$I=\frac{2^n}{(1+k)^n}\int_0^{\infty}\frac{t^{n-1}}{(1+\frac{1-k}{1+k}t^2)^n}dt$$

ثم بوضع $z=\frac{1-k}{1+k}t^2$ يتحول إلى تكامل بتاوي ويكون متقارباً عندما $n>0$ ويترك الحساب للقارئ .

[10] أوجد التكامل $K=\int_a^b\frac{(x-a)^m(b-x)^n}{(x+c)^{m+n+2}}dx$ حيث $b>a>0\ ,\ c>0$.

الحل : بوضع $\frac{x-a}{x+c}=\frac{b-a}{b+c}t$ يكون :

$$K=\frac{(b-a)^{m+n+1}}{(b+c)^{m+1}\cdot(a+c)^{n+1}}\cdot\int_0^1 t^m\cdot(1-t)^n\,dt$$

والتكامل الموجود في الطرف الأيمن ليس إلا $B(m+1,n+1)$ وهو متقارب عندما

$$m+1>0\ ,\ n+1>0\ .$$

[11] أوجد التكامل $I=\int_0^{\infty}x^m e^{-x^n}dx$.

الحل : بوضع $x^n=t$ وافتراض أن $n>0$ فيكون :

$I=\frac{1}{n}\int_0^{\infty} t^{\frac{m+1}{n}-1}e^{-t}dt=\frac{1}{n}\Gamma(\frac{m+1}{n})$ ، حيث $\frac{m+1}{n}>0$.

ثم بافتراض أن $n<0$ يكون : $I=-\frac{1}{n}\Gamma(\frac{m+1}{n})$ ، حيث $\frac{m+1}{n}>0$.

وبذلك يمكن القول إنه أياً كان $n\neq 0$ فإن $I=\frac{1}{|n|}\Gamma(\frac{m+1}{n})$ ،حيث $\frac{m+1}{n}>0$.

[12] أوجد التكامل $I=\int_0^1\left(\ln\frac{1}{x}\right)^p dx$.

الحل : بالاستفادة من الخاصة [3] يكون $I=\Gamma(p+1)$.

[13] تكامل فرولاني : هو التكامل المعتل $\int_0^{\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx$ ، حيث $b>a>0$ والتابع $f(x)$ معرف ومستمر من أجل $x>0$. وتتم دراسة هذا التكامل وفق الآتي :

(i) إذا كانت النهايتان $\lim_{x\to\infty}f(x)=f(\infty)$ و $\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$ موجودتين ومحدودتين فإن :

$$\int_0^{\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=[f(0)-f(\infty)]\cdot\ln\frac{b}{a}$$

مثال (1) : من أجل التكامل $I=\int_0^{\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx$ يكون $f(x)=e^{-x}$ ويحقق الشروط ، حيث $f(\infty)=0$ و $f(0)=1$. ومنه : $I=\ln\frac{b}{a}$.

مثال (2) : من أجل التكامل $I=\int_0^{\infty}\frac{\tan^{-1}ax-\tan^{-1}bx}{x}dx$ يكون

$f(x)=\tan^{-1}x$ ومن ثم $I=-\frac{\pi}{2}\ln\frac{b}{a}$.

(ii) إذا لم تكن النهاية $\lim_{x\to\infty}f(x)$ موجودة لكن التكامل $\int_A^{\infty}\frac{f(t)}{t}dt$ ، حيث

$A>0$ ، موجود ، فإن :

$$\int_0^{\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=f(0)\cdot\ln\frac{b}{a}$$

مثال (1): للتكامل $I=\int_0^{\infty}\frac{\cos ax-\cos bx}{x}dx$ تكون النهاية $\lim_{x\to\infty}\cos x$ غير

موجودة ، ولكن التكامل $\int_A^{\infty}\frac{\cos t}{t}dt$ ، حيث $A>0$ ، موجود، ومن ثم فإن :

$I=\ln\frac{b}{a}$ [لاحظ $f(0)=1$].

مثال (2) : للتكامل $J=\int_0^{\infty}\frac{\sin ax-\sin bx}{x}dx$ تكون النهاية $\lim_{x\to\infty}\sin x$ غير

موجودة ، ولكن التكامل $\int_A^{\infty}\frac{\sin t}{t}dt$ ، حيث $A>0$ ، موجود ، ومن ثم فإن :

$I=0$ [لاحظ أن $f(0)=0$] .

(iii) إذا لم تكن النهاية $\lim_{x\to 0}f(x)$ موجودة لكن التكامل $\int_0^{A}\frac{f(t)}{t}dt$ ، حيث

$A>0$ ، موجود ، فإنّ :

$$\int_0^{\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx = -f(\infty)\cdot \ln\frac{b}{a}$$

وتجدر الإشارة إلى أن هذه الحالة ترد إلى الحالة السابقة بوضع $x=\frac{1}{t}$.

تمرين : أوجد التكامل $I=\int_0^{\infty} \ln\frac{p+qe^{-ax}}{p+qe^{-bx}}dx$ حيث $p>0, q>0$.

الحل : إن التابع $f(x)=\ln(p+qe^{-x})$ مستمر من أجل $x\geq 0$ و إن :

$f(\infty)=\ln p$ و $f(0)=\ln(p+q)$. ومنه $I=\ln\frac{p+q}{p}\ln\frac{b}{a}$.

[14] تكاملات لوباتشفسكي : هي التكاملات ذات الشكل :

$$\int_0^{\infty} f(x)\cdot\frac{\sin^2 x}{x^2}dx \quad , \quad \int_0^{\infty} f(x)\cdot\frac{\sin x}{x}dx$$

حيث $f(x)$ تابع معرف من أجل $x\geq 0$ ويحقق الشرطين :

$$f(\pi+x)=f(x) \quad \text{و} \quad f(\pi-x)=f(x)$$

فإذا وجد التكامل $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$ فإن :

$$\int_0^{\infty} f(x)\frac{\sin x}{x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$$

$$\int_0^{\infty} f(x)\frac{\sin^2 x}{x^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$$

مثال (1) : أوجد كلاً من التكاملين : $\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ ، $\int_0^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx$

الحل : إن هذين التكاملين هما تكاملا لوباتشفسكي ، حيث $f(x)=1$ ومن ثم فإن

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=\frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=\frac{\pi}{2}$$

مثال (2) : أوجد التكامل $I=\int_0^{\infty}\frac{\sin^{2n+1}x}{x}dx$ حيث $n\geq 1$.

الحل : يمكن ملاحظة أن : $I=\int_0^{\infty}\sin^{2n}x\cdot\frac{\sin x}{x}dx$

ومن ثم يؤخذ التابع $f(x)=\sin^{2n}x$ الذي يحقق شروط تكاملات لوباتشفسكي .

ومن ثم يكون :

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}x\,dx=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{\pi}{2}$$

مثال (3) : أوجد التكامل $I=\int_0^{\infty}\frac{\tan^{-1}(a\sin x)}{x}dx$

الحل : يمكن أخذ $f(x)=\frac{\tan^{-1}(a\sin x)}{\sin x}$ ويكون :

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\tan^{-1}(a\sin x)}{\sin x}dx$$

الذي يمكن حسابه بوضع $\sin x=t$ فيكون :

$$I=\int_0^1\frac{\tan^{-1}at}{t\sqrt{1-t^2}}dt=\frac{\pi}{2}\ln\left(a+\sqrt{1+a^2}\right)$$

5-9- تمارين للحل :

[1] أثبت أن : $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{\sqrt{\tan t}}=2\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^4}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$

[2] أثبت أن : $\int_0^{\infty}\frac{\sin ax\cdot\sin bx}{x}dx=\frac{1}{2}\ln\frac{a+b}{a-b}$

[3] أثبت أن : $\int_0^{\infty}\frac{e^{-ax^2}-e^{-bx^2}}{x}dx=\frac{1}{2}\ln\frac{b}{a}$

[4] أثبت أن : $\int_0^1\frac{x^{a-1}-x^{b-1}}{\ln x}dx=\ln\frac{a}{b}$

[5] أثبت أن : $\int_0^1\sqrt{x-x^2}\,dx=B(\frac{3}{2},\frac{3}{2})=\frac{\pi}{8}$

[6] أثبت أن : $\int_0^{\infty}x^2\cdot e^{-2x^2}dx=\frac{1}{8}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

إرشاد : ضع $t=2x^2$.

[7] أثبت أن : $\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{a^4\pi}{16}$ حيث $a>0$.

[8] أثبت أن : $\int_0^{\infty} \frac{x}{1+x^4}dx = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$

إرشاد : ضع $x^4 = u$.

[9] تكامل راب: $R(a) = \int_a^{a+1} \ln\Gamma(a)da$ حيث $1>a>0$ وحيث

$$R_0 = \int_0^1 \ln\Gamma(a)da$$

المطلوب : (1) ضع $1-a$ بدلاً من a واستنتج أن $R_0 = \int_0^1 \ln\Gamma(1-a)da$.

(2) اجمع العلاقتين اللتين تعطيان R_0 كي تستنتج أن :

$$2R_0 = \int_0^1 \ln\frac{\pi}{\sin a\pi}da = \ln\pi - \int_0^1 \ln\sin a\pi\, da$$

(3) ضع $x = a\pi$ كي تستنتج أن :

$$2R_0 = \ln\pi - \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x\,dx$$

$$= \ln\pi + \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}\ln 2$$

ومن ثم فإن $R_0 = \frac{1}{2}\ln 2\pi = \ln\sqrt{2\pi}$.

(4) استنتج ، بإضافة وطرح $\int_0^a \ln\Gamma(a)da$ إلى $R(a)$ ، أن :

$$R(a)=\int_0^{a+1}\ln\Gamma(a)da-\int_0^a\ln\Gamma(a)da$$

(5) استنتج ، باشتقاق طرفي المساواة المذكورة في الطلب (4) بالنسبة إلى a ، أن :

$$R'(a)=\ln\Gamma(a+1)-\ln\Gamma(a)=\ln\frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a)}$$

أيْ : $R'(a)=\ln a$

(6) بالمكاملة $R(a)=\int \ln a\,da$ وذلك بالتجزئة استنتج أن $R(a)=a\ln a-a+c$

حيث c هو ثابت كيفي (ثابت التكامل) .

(7) باختيار $c=R_0$ استنتج أنّ $R(a)=a(\ln a-1)+\ln\sqrt{2\pi}$.

[10]أثبت أن : $\int_0^{\infty}\frac{x^{m-1}}{1+x^n}dx=\frac{\pi}{n\cdot\sin\frac{m\cdot\pi}{n}}$ ثم استنتج قيمة التكامل :

$$I=\int_0^{\infty}\frac{x}{1+x^4}dx$$

[11]أثبت أن : $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt[m]{1-x^m}}=\frac{1}{m}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{m}}$ حيث $m>1$.

إرشاد : ضع $y=x^m$ ثم استخدم التكامل البتاوي .

[12] أثبت أن : $\int_0^{\infty} \frac{x dx}{1+x^6} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$ باستخدام التكاملين البتاوي والغماوي بعد فرض أن $u = x^6$.

[13] أثبت أن : $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \cdot \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{\pi}{4}$ باستخدام التكاملين البتاوي والغماوي بعد فرض أن $x^4 = t$.

[14] أثبت أن : $\int_0^1 x^4 (1-x)^3 dx = \frac{1}{280}$

$$\int_0^2 \frac{x^2 dx}{\sqrt{2-x}} = \frac{64\sqrt{2}}{15}$$

[15] أثبت أن : $\int_0^b x^4 \sqrt{b^2 - x^2}\, dx = \frac{\pi b^6}{32}$ حيث $b > 0$.

[16] أثبت أن: $\int_0^{\infty} x^m e^{-ax^n} dx = \frac{1}{n \cdot a^{\frac{m+1}{n}}} \Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right)$ حيث m, n, a أعداد موجبة

إرشاد : ضع $y = ax^n$.

[17] أثبت أن : $\int_0^1 x^m (\ln x)^n dx = \frac{(-1)^n n!}{(m-1)^{n+1}}$ حيث n عدد طبيعي مغاير للصفر وحيث $m > 1$.

إرشاد : ضع $y = \ln x$ ثم $(m-1)y = z$.

الفصل السادس

التكاملات التابعة لوسيط

- تعريف وخواص
- تمارين محلولة
- تمارين للحل

Damascus University

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الفصل السادس

التكاملات التابعة لوسيط

ليكن $f(x,t)$ تابعاً معرفاً بحيث أن $x \in [a,b]$ و $t \in Y$. وبفرض أنه من أجل كل قيمة مثبتة لـ t من المجموعة Y يكون التابع $f(x,t)$ قابلاً للمكاملة بمفهوم ريمان أو كتكامل معتل .

1-6- تعريف : إن كل تكامل من النمط $F(t)=\int_a^b f(x,t)dx$ ، حيث الحدان a,b تابعان (في الحالة العامة) للوسيط t ، يسمى **تكاملاً تابعاً للوسيط** t.

مثال: التابع $\int_a^t f(x)dx$ ممثل بتكامل تابع للوسيط t ، حيث من الواضح أن الحد الأعلى لهذا التكامل عبارة عن تابع للوسيط t.

2-6- خواص التكاملات التابعة لوسيط :

[1] مبرهنة : إذا كان التابع المكامل $f(x,t)$ مستمراً على المستطيل المغلق :

$$[a,b]\times[t_1,t_2]=\{(x,t) \setminus a\le x\le b\ ,\ t_1\le t\le t_2\}$$

حيث a,b,t_1,t_2 ثوابت حقيقية ، فإن التكامل : $F(t)=\int_a^b f(x,t)dx$ يكون تابعاً مستمراً بالنسبة للوسيط t في المجال $[t_1,t_2]$.

الإثبات : ليكن $t_0 \in [t_1,t_2]$. عندئذٍ $F(t)-F(t_0)=\int_a^b [f(x,t)-f(x,t_0)]dx$.

ثم ، بفرض $\varepsilon>0$. بما أن التابع $f(x,t)$ مستمر بالنسبة إلى t على $[t_1,t_2]$ فإنه يقابل العدد الموجب $\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ عدد موجب مثل δ بحيث يتحقق الآتي :

$$t \in [t_1, t_2],\ |t - t_0| < \delta \Rightarrow |f(x,t) - f(x,t_0)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

ولما كان التابع $f(x,t)$ مستمراً على المستطيل المغلق المفروض فإنه من المعلوم أن $f(x,t)$ يكون تابعاً مستمراً بانتظام على المستطيل المغلق المذكور ، ومن ثم فإن δ يمكن اختيارها بحيث تكون مستقلة عن x عندما تتغير x في المجال $x \in [a,b]$.

إذن ، إذا كان t عنصراً من $[t_1, t_2]$ ، يحقق الشرط $|t - t_0| < \delta$ ، فإن :

$$|F(t) - F(t_0)| \le \int_a^b |f(x,t) - f(x,t_0)|dx \le \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

لذا فإن $F(t)$ مستمر في النقطة t_0. وبما أن t_0 عنصر اختياري من $[t_1, t_2]$ فإن $F(t)$ مستمر على المجال $[t_1, t_2]$.

[2] نتيجة : يمكن التعبير عن المبرهنة السابقة وفق الآتي :

$$\lim_{t \to t_0} \int_a^b f(x,t)dx = \int_a^b f(x,t_0)dx = \int_a^b \lim_{t \to t_0} f(x,t)dx$$

أي أنه إذا كان التابع المكامل مستمراً ، فمن الممكن المبادلة ما بين رمزي النهاية و التكامل .

[3] قاعدة ليبنتز : إذا كان التابع $f(x,t)$ مستمراً ، وكان له مشتق جزئي مستمر $\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}$ في المستطيل المغلق $[a,b] \times [t_1, t_2]$ ، فإن التابع $F(t) = \int_a^b f(x,t)dx$ يكون قابلاً للاشتقاق في أية نقطة t من $[t_1, t_2]$ ، كما تكون :

$$\frac{dF(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\int_a^b f(x,t)dx = \int_a^b \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}dx$$

الإثبات : لتكن $t, t+\Delta t$ نقطتين من $[t_1, t_2]$. عندئذٍ :

$$F(t+\Delta t) - F(t) = \int_a^b [f(x,t+\Delta t) - f(x,t)]dx$$

وحسب دستور التزايدات المنتهية يكون :

$$f(x,t+\Delta t) - f(x,t) = \Delta t \cdot \frac{\partial f(x,t+\theta\cdot\Delta t)}{\partial t} \quad 0<\theta<1$$

ومن ثم فإن : $$\frac{F(t+\Delta t)-F(t)}{\Delta t} = \int_a^b \frac{\partial f(x,t+\theta\cdot\Delta t)}{\partial t}dx$$

ثم ، بجعل $\Delta t \to 0$ يكون :

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{F(t+\Delta t)-F(t)}{\Delta t} = \int_a^b \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\partial f(x,t+\theta\cdot\Delta t)}{\partial t}dx$$

وذلك استناداً إلى استمرار التابع $\frac{\partial f}{\partial t}$ وإلى النتيجة [2] السابقة .

إذن : $\frac{dF}{dt} = \int_a^b \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}dx$ وبذلك يتم إثبات المطلوب .

[4] ملاحظة : تجدر الإشارة إلى أن قاعدة ليبنز يمكن تطبيقها على التكامل الذي حداه a, b ثابتان . بيد أنه يمكن تطبيقها أيضاً عندما يكون الحدان متغيرين غير تابعين (للوسيط t أو للمتغير x) .

ولكن تطبيق قاعدة ليبنتز على التكاملات المعتلة التابعة لوسيط غير صحيح في الحالة العامة ، حيث أنه يستوجب فرض شرط إضافي ألا وهو التقارب المنتظم للتكامل المعتل الذي تعريفه كما يأتي :

[5] تعريف : يقال عن التكامل المعتل التابع للوسيط t $(t_1 \le t \le t_2)$

$$F(t) = \int_a^{+\infty} f(x,t)dx$$

إنه **متقارب بانتظام بالنسبة إلى t في المجال** $[t_1,t_2]$ ، إذا وجد لكل عدد موجب ε ،عدد موجب k_ε ، تابع إلى ε فقط ، بحيث تتحقق العلاقة

$$\left|\int_a^{+\infty} f(x,t)dx - \int_a^{\eta} f(x,t)dx\right| = \left|\int_{\eta}^{+\infty} f(x,t)dx\right| < \varepsilon$$

في كل النقاط η المحققة للشرط $\eta > k_\varepsilon$ ، وكل النقاط t المحققة للشرط $t_1 \le t \le t_2$.

هذا وتقبل المبرهنة الآتية بدون برهان [ويترك ذلك للقارئ] :

[6] مبرهنة :

(1) إذا كان التابع $f(x,t)$ مستمراً عندما $x \ge a$ و $t_1 \le t \le t_2$ ، وكان التكامل المعتل $F(t) = \int_a^{+\infty} f(x,t)dx$ متقارباً بانتظام بالنسبة إلى الوسيط t في المجال $[t_1,t_2]$ ، فإنه يكون تابعاً مستمراً بالنسبة إلى t في هذا المجال .

(2) إذا كان التابعان $f(x,t)$ و $\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}$ مستمرين عندما $x \ge a$ و $t_1 \le t \le t_2$، وكان التكامل المعتل $F(t)$ متقارباً ، فإن قاعدة ليبنتز

$$\frac{d}{dt}\int_a^{+\infty} f(x,t)dx = \int_a^{+\infty} \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}dx$$ ، حيث $t_1 \le t \le t_2$، تكون صحيحة ، شريطة أن يكون التكامل المعتل الوارد في الطرف الأيمن متقارباً بانتظام بالنسبة إلى t في المجال $[t_1,t_2]$.

3-6- امثلة :

[1] يمثل التكامل $\int_0^1 \ln(x^2+t^2)dx$ تابعاً مستمراً بالنسبة إلى t في أي مجال $[t_1,t_2]$ ، بفرض $t_1 > 0$ ، دونما حاجة لحساب هذا التكامل ، ذلك أن التابع المكامل $\ln(x^2+t^2)$ مستمر على المستطيل $[0,1]\times[t_1,t_2]$.

كذلك فإن المشتق (الجزئي) هو $\frac{\partial}{\partial t}\ln(x^2+t^2)=\frac{2t}{x^2+t^2}$.

وهذا تابع مستمر على المستطيل المذكور . أي أن شروط قاعدة ليبنتز محققة ، ومن ثم يكون :

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 \ln(x^2+t^2)dx=\int_0^1 \frac{2t}{x^2+t^2}dx=2\tan^{-1}\frac{1}{t}$$

ملاحظة : كان من الممكن الحصول على النتيجة ذاتها بحساب التكامل المعطى ثم باشتقاق الناتج بالنسبة إلى t . وفي الحقيقة ، فإن :

$$\int_0^1 \ln(x^2+t^2)dx=\ln(1+t^2)-2+2t\tan^{-1}\frac{1}{t}$$

ومنه ، باشتقاق طرفي العلاقة السابقة بالنسبة إلى t ينتج أن :

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 \ln(x^2+t^2)dx=2\tan^{-1}\frac{1}{t}$$

ولكن ، في حالات عددها لا بأس به ، يكون حساب التكامل صعباً فيبقى استخدام قاعدة ليبنتز أسهل نسبياً .

[2] إن التابع $F(t)=\int_1^{\infty}\frac{t^2-x^2}{(x^2+t^2)^2}dx$ مستمر على مجموعة الأعداد الحقيقية ℜ بملاحظة الآتي :

إن هذا التكامل المعتل متقارب بانتظام بالنسبة إلى t لأن :

$$\left|\int_{\eta}^{\infty}\frac{t^2-x^2}{(x^2+t^2)^2}dx\right|=\left[\frac{x}{x^2+t^2}\right]_{\eta}^{\infty}=\frac{\eta}{\eta^2+t^2}\le\frac{1}{\eta}$$

ومن ثم ، إذا كان $\varepsilon>0$ ، يمكن اختيار k_ε بحيث يكون $k_\varepsilon>\frac{1}{\varepsilon}$. ومنه ، إذا كان $\eta>k_\varepsilon$ و كان $t\in\Re$ فإن : $\left|\int_{\eta}^{\infty}\frac{t^2-x^2}{(x^2+t^2)^2}dx\right|<\varepsilon$.

وكذلك فإن التابع المكامل مستمر عندما $x\ge 1$ ، وأياً كان t من $\Re$.

ومنه ، حسب (1) من المبرهنة [6] ، ينتج أن $F(t)$ تابع مستمر على $\Re$.

[3] إن التكامل $I(\alpha,\beta)=\int_0^{\infty}e^{-\alpha x}\cdot\frac{\sin\beta x}{x}dx$ التابع للوسيطين α,β حيث $\alpha>0$ يكون متقارباً بانتظام بالنسبة لـ α,β بملاحظة الآتي :

إذا كان β عدداً ما ، وكان $\varepsilon>0$ ، فإنه يوجد $k_\varepsilon>\frac{1}{\varepsilon}$ بحيث يكون :

$$\left|\int_{\eta}^{\infty}e^{-\alpha x}\cdot\frac{\sin\beta x}{x}dx\right|\le\int_{\eta}^{\infty}\frac{e^{-\alpha x}}{\eta}dx=\frac{1}{\alpha\cdot\eta\cdot e^{\alpha\eta}}<\varepsilon$$

في كل النقاط η المحققة للشرط $\eta>k_\varepsilon$ ، وحيث $\alpha\ge\alpha_1>0$ و α_1 عدد موجب يتم اختياره بصورة مناسبة . ومنه ، حسب قاعدة ليبنتز ، يكون المشتق مساوياً :

$$\frac{\partial I(\alpha,\beta)}{\partial\beta}=\int_0^{\infty}e^{-\alpha x}\cdot\cos\beta x dx$$

ويكون هذا التكامل متقارباً بانتظام بملاحظة الآتي :

$$\left|\int_{\eta}^{\infty} e^{-\alpha x}\cdot\cos\beta x\,dx\right| \le \int_{\eta}^{\infty} e^{-\alpha}dx = \frac{1}{\alpha\cdot e^{\alpha\eta}}$$

وواضح أن هذا المقدار ، عندما $\alpha \ge \alpha_1 > 0$ ، يمكن جعله أصغر من $\varepsilon > 0$ ، من أجل جميع قيم η المحققة للشرط $\eta > k_1$ عند اختيار k_1 بصورة مناسبة .

هذا و إن التكامل المعتل الذي يساوي المشتق $\frac{\partial I}{\partial\beta}$ يمكن أن يحسب بسهولة ، حيث يكون :

$$\frac{\partial I}{\partial\beta} = \left[e^{-\alpha x}\cdot\frac{\beta\sin\beta x - \alpha\cos\beta x}{\alpha^2+\beta^2}\right]_0^{\infty} = \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}$$

ومنه ، بالمكاملة بالنسبة إلى β ، يكون :

$$I(\alpha,\beta) = \int\frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}d\beta = \tan^{-1}\frac{\beta}{\alpha} + c$$

حيث c تابع إلى β . ولكن ، عندما $\beta = 0$ ، يكون : $I(\alpha,0) = 0$ لأن التابع المكامل في التكامل الأصلي يغدو صفراً عندما $\beta = 0$ ، إذن $c = 0$ ،ومن ثم فإن:

$$I(\alpha,\beta) = \tan^{-1}\frac{\beta}{\alpha}$$

ومنه يتم الحصول على النتائج الآتية :

أولاً :

$$\lim_{\alpha\to+0}\tan^{-1}\frac{\beta}{\alpha}=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2} & (\beta>0 \text{ عندما })\\ -\dfrac{\pi}{2} & (\beta<0 \text{ عندما })\\ 0 & (\beta=0 \text{ عندما })\end{cases}$$

ثانياً : التكامل $I(0,\beta)=\int_0^\infty \frac{\sin\beta x}{x}dx$ متقارب ويساوي $\lim_{\alpha\to0}I(\alpha,\beta)$ أي :

$$I(\beta)=\int_0^\infty\frac{\sin\beta x}{x}dx=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2} & (\beta>0 \text{ عندما })\\ -\dfrac{\pi}{2} & (\beta<0 \text{ عندما })\\ 0 & (\beta=0 \text{ عندما })\end{cases}$$

ثالثاً :تكامل ديريكليه : $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$ لأن $\beta=1>0$.

4-6- خواص :

[1] مبرهنة : إذا كان التابع $f(x,t)$ مستمراً على المستطيل المغلق $[a,b]\times[t_1,t_2]$، وكان $a(t)$, $b(t)$ تابعين مستمرين في المجال $[t_1,t_2]$ ، فإن التكامل $F(t)=\int_{a(t)}^{b(t)}f(x,t)dx$ يكون تابعاً مستمراً بالنسبة إلى الوسيط t في المجال $[t_1,t_2]$.

الإثبات : بوضع $x=a(t)+[b(t)-a(t)]\cdot y$ فإن : $F(t)=\int_0^1 g(y,t)dy$.

حيث $g(y,t) = f(a(t) + [b(t) - a(t)] \cdot y, t)$.

ولما كان $g(y,t)$ تابعاً مستمراً على المستطيل $[0,1] \times [t_1, t_2]$، فإنه ، حسب المبرهنة [1] من الفقرة 6-2 ، ينتج أن $F(t)$ تابع مستمر بالنسبة إلى الوسيط t في المجال $[t_1, t_2]$.

[2] مبرهنة (تعميم قاعدة ليبنتز) : إذا كان التابع $f(x,t)$ مستمراً ، وكان له مشتق جزئي مستمر $\frac{\partial f}{\partial t}$ في المستطيل المغلق $[a,b] \times [t_1, t_2]$، وكان التابعان $a = a(t)$, $b = b(t)$ معرفين على المجال $[t_1, t_2]$، وكان لهما مشتقان مستمران على هذا المجال ، فإن مشتق التابع $F(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} f(x,t)dx$ يعطى بالدستور الآتي :

$$\frac{dF(t)}{dt} = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f(x,t)}{\partial t} dx + f[a(t),t] \frac{db(t)}{dt} - f[a(t),t] \frac{da(t)}{dt}$$

الإثبات : إن F تابع للوسيط t عن طريق تبعية التابع المكامل f لهذا الوسيط وتبعية كل من حدي التكامل a, b للوسيط t أيضاً .

إذا رمز لهذا التكامل بالرمز $\varphi(t,a,b)$ فحسب قاعدة اشتقاق التوابع المركبة يكون:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial a}\frac{da}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial b}\frac{db}{dt} \quad \text{ولكن} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f(x,t)}{\partial t} dx \ .$$

وأيضاً (حسب قاعدة اشتقاق التكامل بالنسبة لحده الأعلى)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial b} = f[b(t),t] \ , \ \frac{\partial \varphi}{\partial a} = -f[a(t),t]$$

إذن ، بالتعويض في الطرف الأيمن من العلاقة التي طرفها الأيسر $\frac{dF}{dt}$ ، يتم إثبات المطلوب .

5-6- تمارين محلولة :

[1] احسب التكامل $J = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$.

الحل : لحساب هذا التكامل J يتم النظر في التكامل التابع لوسيط $I(t) = \int_0^t \frac{\ln(1+tx)}{1+x^2}dx$ وذلك بعد إدخال الوسيط t (على التكامل J) بالأسلوب المذكور في $I(t)$. وهنا تجدر الإشارة إلى أن $I(1) = J$, $I(0) = 0$. ومنه ، حسب المبرهنة السابقة (التي هي تعميم قاعدة ليبنتز) ، يكون :

$$\frac{dI(t)}{dt} = \int_0^t \frac{x}{(1+tx)\cdot(1+x^2)}dx + \frac{\ln(1+t^2)}{1+t^2}\cdot 1 - 0$$

ولكن $\frac{x}{(1+tx)(1+x^2)} = \frac{1}{1+t^2}\left[-\frac{t}{1+tx} + \frac{x}{1+x^2} + \frac{t}{1+x^2}\right]$

إذن ، بإجراء المكاملة ، يكون :

$$\int_0^t \frac{x}{(1+tx)(1+x^2)}dx = -\frac{\ln(1+t^2)}{2(1+t^2)} + \frac{t\cdot\tan^{-1}t}{1+t^2}$$

ومن ثم يكون : $\frac{dI(t)}{dt} = \frac{\ln(1+t^2)}{2(1+t^2)} + \frac{t\cdot\tan^{-1}t}{1+t^2}$.

ومنه ، بالمكاملة ، ينتج أن :

$$I(t)=\frac{1}{2}\int_0^t \frac{\ln(1+t^2)}{1+t^2}dt+\int_0^t \frac{t\cdot\tan^{-1}t}{1+t^2}dt$$

ولا حاجة ، بالطبع ، لإضافة ثابت ما دام $I(0)=0$. ثم بحساب التكامل الأيمن بالتجزئة ينتج أن :

$$\int_0^t \frac{t\cdot\tan^{-1}t}{1+t^2}dt=\left[\frac{1}{2}\tan^{-1}t\cdot\ln(1+t^2)\right]_0^t-\frac{1}{2}\int_0^t \frac{\ln(1+t^2)}{1+t^2}dt$$

ومن ثم فإن $I(t)=\frac{1}{2}\tan^{-1}t\cdot\ln(1+t^2)$.

ومنه ، بوضع $t=1$ ، ينتج أن : $J=I(1)=\frac{\pi}{8}\cdot\ln 2$ وهو المطلوب .

[2] احسب التكامل $I=\int_0^\infty x^{a-1}(\ln x)^n\cdot e^{-x}dx$ ، حيث $a>0$ وحيث n عدد طبيعي .

الحل : من المعلوم أن $\Gamma(a)=\int_0^\infty x^{a-1}\cdot e^{-x}dx$. ومنه ، بالاشتقاق المتتالي بالنسبة إلى الوسيط a ، يكون :

$$\Gamma'(a)=\int_0^\infty x^{a-1}\cdot\ln x\cdot e^{-x}dx$$

$$\Gamma''(a)=\int_0^\infty x^{a-1}\cdot(\ln x)^2\cdot e^{-x}dx$$

.....

$$\Gamma^{(n)}(a)=\int_0^\infty x^{a-1}\cdot(\ln x)^n\cdot e^{-x}dx$$

[3] احسب التكامل $I=\int_0^1 (\ln x)^n \cdot x^\alpha dx$ ، حيث $\alpha \neq -1$ وحيث n عدد طبيعي .

الحل : إن $J(\alpha)=\int_0^1 x^\alpha dx=\frac{1}{\alpha+1}$

ومنه ، بالاشتقاق المتتالي بالنسبة إلى α ، يكون :

$$J'(\alpha)=\int_0^1 \ln x \cdot x^\alpha dx=-\frac{1}{(\alpha+1)^2}$$

$$J''(\alpha)=\int_0^1 (\ln x)^2 \cdot x^\alpha dx=\frac{2}{(\alpha+1)^3}$$

.....

$$J^{(n)}(\alpha)=\int_0^1 (\ln x)^n \cdot x^\alpha dx=\frac{(-1)^n \cdot n!}{(\alpha+1)^{n+1}}=I$$

[4] إذا كان $I(\alpha)=\frac{1}{w}\int_0^\alpha f(x)\cdot \sin w(\alpha-x)dx$ فاثبت أن :

$$I''(\alpha)+w^2 \cdot I(\alpha)=f(\alpha)$$

الحل : $I'(\alpha)=\frac{1}{w}\int_0^\alpha f(x)w\cos w(\alpha-x)dx+f(\alpha)\sin 0+0$

$$I''(\alpha)=\int_0^\alpha -f(x)w\sin w(\alpha-x)dx+f(\alpha)\cos 0+0$$

ومنه : $I''(\alpha)+w^2 \cdot I(\alpha)=f(\alpha)$.

[5] انطلاقاً من المساواة : $\int_0^{\infty} e^{-ax^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$ ، حيث $a>0$ ، احسب التكامل

$\int_0^{\infty} e^{-ax^2}x^{2n}dx$.

الحل : حسب قاعدة لايبنتز وبالمفاضلة n مرة بالنسبة للوسيط a ينتج أن :

$$\int_0^{\infty} x^2 e^{-ax^2}dx = \frac{1}{2^2 a}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$\int_0^{\infty} x^4 e^{-ax^2}dx = \frac{1\cdot 3}{2^3 a^2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

.....

$$\int_0^{\infty} x^{2n} e^{-ax^2}dx = \frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}a^n}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

[6] انطلاقاً من المساواة : $\int_0^{\infty} \frac{dx}{a+x^2} = \frac{1}{2}\frac{\pi}{\sqrt{a}}$ ،حيث $a>0$ ، احسب التكامل

$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(a+x^2)^{n+1}}$.

الحل :

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(a+x^2)^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a}\cdot\frac{\pi}{\sqrt{a}}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(a+x^2)^3} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{a^2}\cdot\frac{\pi}{\sqrt{a}}$$

.....

$$\int_0^{\infty}\frac{dx}{(a+x^2)^{n+1}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{1}{a^n}\cdot\frac{\pi}{\sqrt{a}}$$

[7] انطلاقاً من المساواة : $\int_0^1 x^{a-1}dx=\frac{1}{a}$ ، حيث $a>0$ ، احسب التكامل

$$\int_0^1 x^{a-1}(\ln x)^n dx \quad .$$

الحل :

$$\int_0^1 x^{a-1}\ln x dx=-\frac{1}{a^2}$$

$$\int_0^1 x^{a-1}(\ln x)^2 dx=\frac{2!}{a^3}$$

.....

$$\int_0^1 x^{a-1}(\ln x)^n dx=(-1)^n\frac{n!}{a^{n+1}}$$

[8] بفرض $\alpha,k>0$ أوجد : $I=\int_0^{\infty}e^{-kx}\cdot\frac{1-\cos\alpha x}{x}dx$.

الحل : باشتقاق I بالنسبة لـ α ينتج أن :

$$\frac{\partial I}{\partial\alpha}=\int_0^{\infty}\frac{e^{-kx}}{x}\cdot x\sin\alpha x\,dx=\int_0^{\infty}e^{-kx}\cdot\sin\alpha x\,dx=H$$

وبإجراء التكامل بالتجزئة مرتين متتاليتين ينتج أن :

$$H=\frac{1}{\alpha}-\frac{k^2}{\alpha^2}H$$

ومن ثم فإن : $H=\dfrac{\alpha}{\alpha^2+k^2}$.

إذن يكون صحيحاً يأتي :

$$\frac{\partial I}{\partial \alpha}=\frac{\alpha}{\alpha^2+k^2}\Rightarrow \partial I=\frac{\alpha}{\alpha^2+k^2}\partial\alpha\Rightarrow$$

$$I=\frac{1}{2}\int\frac{2\alpha}{\alpha^2+k^2}d\alpha=\frac{1}{2}\ln(\alpha^2+k^2)+c$$

$$I=\frac{1}{2}\ln(\alpha^2+k^2)+c \qquad (*)$$

ولكن ، عندما $\alpha\to 0$ يكون $I=0$ ، ومن ثم يكون [حسب (*)] :

$0=\dfrac{1}{2}\ln k^2+c$: أي ، $c=-\dfrac{1}{2}\ln k^2$ ، ومن ثم يكون [حسب (*)] :

$$I=\frac{1}{2}\ln(\alpha^2+k^2)-\frac{1}{2}\ln k^2=\frac{1}{2}\ln\frac{\alpha^2+k^2}{k^2}=\frac{1}{2}\ln(1+\frac{\alpha^2}{k^2})$$

[9] اثبت أن : $I=\int_0^{\infty}e^{-x^2}\cdot\cos 2\alpha x\,dx=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\alpha^2}$.

الحل : باشتقاق I بالنسبة لـ α يكون :

$$\frac{dI}{d\alpha}=-\int_0^{\infty}e^{-x^2}2x\cdot\sin 2\alpha x\,dx=H$$

وبإجراء التكامل بالتجزئة مرة واحدة ينتج أن : $H=-2\alpha I$.

وبذلك يتم الحصول على المعادلة التفاضلية :

$\dfrac{dI}{d\alpha}=-2\alpha I$ التي حلها العام هو : $I=ce^{-\alpha^2}$ (**)

ولكن ، عندما $\alpha = 0$ ، يكون : $I = \int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

ومن ثم حسب (**) ، يكون : $c = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ ولهذا فإن : $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\alpha^2}$.

[10] اثبت أن : $I = \int_0^{\infty} e^{-ax^2 - \frac{b}{x^2}}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \cdot e^{-2\sqrt{ab}}$.

الحل : بفرض $c = \sqrt{ab}$ يكون $c^2 = ab$. وباجراء التبديل $y = \sqrt{a}\,x$ يكون :

$(x \to \infty \Rightarrow y \to \infty), (x \to 0 \Rightarrow y \to 0)$ ، $dx = \frac{1}{\sqrt{a}}dy$ ، $x = \frac{1}{\sqrt{a}}y$ ومن ثم:

$$I = \int_0^{\infty} e^{-a\frac{1}{a}y^2 - \frac{b}{\frac{1}{a}y^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{a}}dy = \frac{1}{\sqrt{a}}\int_0^{\infty} e^{-y^2 - \frac{ab}{y^2}}dy =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}}\int_0^{\infty} e^{-y^2 - \frac{c^2}{y^2}}dy = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot J \qquad (*)$$

$$J = \int_0^{\infty} e^{-y^2 - \frac{c^2}{y^2}}dy \Rightarrow \frac{dJ}{dc} = \int_0^{\infty} e^{-y^2 - \frac{c^2}{y^2}} \cdot \frac{-2c}{y^2}dy$$

$$z = \frac{c}{y} \Rightarrow dy = -\frac{c}{z^2}dz \Rightarrow \frac{dJ}{dc} = \int_{\infty}^{0} e^{-\frac{c^2}{z^2} - z^2} \cdot 2 \cdot dz$$

$$\Rightarrow \frac{dJ}{dc} = -2\int_0^{\infty} e^{-z^2 - \frac{c^2}{z^2}} \cdot dz = -2J \Rightarrow \frac{dJ}{J} = -2dc$$

$$\Rightarrow \ln\frac{J}{k} = -2c = \ln e^{-2c} \Rightarrow J = k \cdot e^{-2c} \qquad (**)$$

ولكن ، عندما $c=0$ يكون $J=\int_0^{\infty} e^{-y^2}\,dy=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ ومن ثم $k=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ في (**)

. إذا حسب (**) : $J=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2c}$. ومنه : $I=\frac{1}{\sqrt{a}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2\sqrt{ab}}$ أي :

$$I=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\cdot e^{-2\sqrt{ab}}$$

[11] بفرض أن X,Y مجموعتان غير خاليتين من الأعداد الحقيقية ، وأن $y_0\in Y$. وبفرض أن التابع $f(x,y)$ معرف لجميع القيم $x\in X, y\in Y$ وأن التابع $f(x,y)$ قابل للمكاملة على X من أجل كل $y\in Y$.

يقال عن التابع $I(y)=\int_a^b f(x,y)dx$ ، حيث $[a,b]\subseteq X$ ، إنه متعلق بالمتغير y ويقال عن هذا التكامل إنه متعلق بوسيط . ثم ، إذا كان $X=]-\infty,+\infty[$ أو $X=[a,\infty[$ أو $X=]-\infty,b]$ فإن التكامل يكون معتلاً من النوع الأول .

إذا كان التابع $f(x,y)$ معرفاً لجميع $(x,y)\in X\times Y$ فعندئذٍ :

إذا كانت النهاية الآتية موجودة $\lim_{y\to y_0} f(x,y)=\varphi(x)$ ، وكان ، لكل $\varepsilon>0$ ، يوجد عدد (يتعلق بـ ε فقط) مثل δ بحيث يكون $|f(x,y)-\varphi(x)|<\varepsilon$ ، لجميع عناصر $x\in X$ ، عندما $|y-y_0|<\delta$ ، فعندها يقال عن التابع $f(x,y)$ إنه متقارب بانتظام من التابع $\varphi(x)$ على المجموعة X .

أما عندما y_0 هي اللانهاية ، حيث $Y=[a,\infty[$ أو $Y=]-\infty,+\infty[$ فيوضع الشرط $Y>\Delta$ ، حيث Δ كبير بكفاية ، بدلاً من الشرط $|y-y_0|<\delta$.

من المعلوم أنه لتكون للتابع $f(x,y)$ نهاية مثل $\varphi(x)$ عندما $y\to y_0$ ويتقارب

منها بانتظام بالنسبة للمتغير x على المجموعة X يلزم ويكفي أن يتحقق أنه ،

لكل $\varepsilon > 0$ ، يوجد $\delta > 0$ غير متعلق بـ x بحيث يكون
$|f(x,y') - f(x,y)| < \varepsilon$ عندما $|y' - y_0| < \delta$ و $|y - y_0| < \delta$ ، حيث
$y, y' \in Y$.

وعندما $y_0 = +\infty$ تصبح المتراجحتان الأخيرتان بالشكل $Y' > \Delta$ و $Y > \Delta$ ، حيث Δ كبير بكفاية .

إذا كان التابع $f(x,y)$ مستمراً بالنسبة للمتغير x (حيث $a \le x \le b$) ولأي $y \in Y$ ومن أجل $y \to y_0$ يتقارب بانتظام من تابع $\varphi(x)$ فإن التابع $\varphi(x)$ يكون مستمراً بالنسبة للمتغير x .

إذا وجدت لكل $x \in X$ النهاية $\lim_{y \to y_0} f(x,y) = \varphi(x)$ ، ووجدت لكل $y \in Y$ النهاية $\lim_{x \to x_0} f(x,y) = \psi(y)$ ، وكان تقارب $f(x,y)$ من $\varphi(x)$ منتظماً على X ، فإن النهايتين المكررتين موجودتان ومتساويتان :

$$\lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x,y) \quad \lim_{x \to x_0} \lim_{y \to y_0} f(x,y) =$$

ويمكن الحديث أيضاً عن النهايات لمتتاليات التوابع ذات المتغير الواحد :

$$\lim_{n \to \infty} \lim_{x \to x_0} f_n(x) \quad \lim_{x \to x_0} \lim_{n \to \infty} f_n(x) ,$$

إذا كان التابع $f(x,y)$ قابلاً للمكاملة لكل $y \in Y$ بالنسبة للمتغير x على $[a,b]$ ومن أجل $y \to y_0$ كانت $\lim_{y \to y_0} f(x,y) = \varphi(x)$ بشكل منتظم بالنسبة لـ x من X ، فإن :

$$\lim_{y \to y_0} I(y) = \int_a^b \lim_{y \to y_0} f(x,y)dx = \int_a^b \varphi(x)dx$$

إذا كان التابع $f(x,y)$ مستمراً كتابع لمتغيرين في المستطيل المغلق

$a \le x \le b\ ,\ c \le y \le d$ فإن التكامل $I(y) = \int_a^b f(x,y)dx$ يمثل تابعاً مستمراً

للمتغير y حيث $c \le y \le d$.

المطلوب :

(i) أوجد النهايات :

$$I = \lim_{\alpha \to 0} \int_{-1}^{1} \sqrt{x^2 + \alpha^2}\, dx\ ,\ J = \lim_{\alpha \to 0} \int_{\alpha}^{1+\alpha} \frac{dx}{1 + x^2 + \alpha^2}\ ,\ K = \lim_{\alpha \to 0} \int_{1}^{2} \frac{\ln(x + |\alpha|)}{\ln(x^2 + \alpha^2)} dx$$

(ii) إذا كان $F(y) = \int_0^1 \frac{x}{y^2} \cdot e^{-\frac{x^2}{y^2}}\, dx$ فهل $\lim_{y \to 0} F(y) = \int_0^1 \lim_{y \to 0} \frac{x}{y^2} \cdot e^{-\frac{x^2}{y^2}}\, dx = F$.

(iii) بيّن بطريقتين مختلفتين استمرار كل من التابعين (حيث $y > 0$) :

$$I(y) = \int_0^1 \ln(x^2 + y^2)\, dx\ ,\ J(y) = \int_0^1 arctg \frac{x}{y} dx$$

الحل :

(i) إن التوابع الموجودة تحت إشارة التكامل مستمرة بالنسبة للمتغير x في مجال تعريفها والوسيط α ولذلك فإن :

$$I = \int_{-1}^{1} |x| dx = 2\int_0^1 x dx = 1\ ,\ J = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$$

إذا كان $\alpha \to 0$ فإن : $\lim_{\alpha \to 0} \frac{\ln(x + |\alpha|)}{\ln(x^2 + \alpha^2)} = \frac{1}{2}$

ومن ثم فإن : $K=\int_1^2 \lim_{\alpha\to 0}\frac{\ln(x+|\alpha|)}{\ln(x^2+\alpha^2)}dx=\int_1^2 \frac{1}{2}dx=\frac{1}{2}$

$$\lim_{y\to 0}F(y)=\lim_{y\to 0}\int_0^1 \frac{x}{y^2}\cdot e^{-\frac{x^2}{y^2}}dx=\lim_{y\to 0}\frac{1}{2}\left[1-e^{-\frac{1}{y^2}}\right]=\frac{1}{2}\ (ii)$$

$$F=\int_0^1 \lim_{y\to 0}\frac{x}{y^2}\cdot e^{-\frac{x^2}{y^2}}dx=\int_0^1 0dx=0$$

إذن $\lim_{y\to 0}F(y)\neq F$.

أي أن النهاية لا تنتقل إلى تحت رمز التكامل ، والسبب في ذلك أن التابع يعاني انقطاعاً في النقط التي من أجلها $y=0$.

(iii) التابع $f_1(x,y)=\ln(x^2+y^2)$ مستمر من أجل $0\le x\le 1\ ,\ y>0$.

والتابع $f_2(x,y)=arctg\frac{x}{y}$ مستمر من أجل $0\le x\le 1\ ,\ y>0$.

ولذلك فإن كلاً من $J(y)\ ,\ I(y)$ يمثل تابعاً مستمراً .

وبطريقة أخرى ، يمكن حساب كل من $J(y)\ ,\ I(y)$ بشكل مباشر بالتجزئة وملاحظة أن التابعين المذكورين مستمران من أجل $0\le x\le 1\ ,\ y>0$:

$$I(y)=\ln(1+y^2)-2+2y\,arctg\frac{1}{y}$$

$$J(y)=arctg\frac{1}{y}-\frac{1}{2}y\ln\frac{1+y^2}{y^2}$$

[12] من المعلوم أنه إذا كان $f(x,y)$ تابعاً مستمراً في المستطيل :

$a \le x \le b\ ,\ c \le y \le d$، فلأي $c \le \eta \le d$ تكون العلاقة الآتية صحيحة :

$$\int_c^{\eta} dy \int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b dx \int_c^{\eta} f(x,y)dy$$

وهذا يعني دراسة مكاملة التابع $I(y) = \int_a^b f(x,y)dx$ من أجل $c \le y \le d$.

المطلوب :

(i) أوجد التكامل : $I = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx$

(ii) أوجد التكاملين :

$$I = \int_0^1 \sin(\ln\frac{1}{x}) \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx$$

$$J = \int_0^1 \cos(\ln\frac{1}{x}) \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx$$

الحل : (i) بفرض $a > 0\ ,\ b > 0$. وبأخذ العلاقة :

$$\int_a^b x^y dy = \frac{x^b - x^a}{\ln x}$$

الصحيحة لأن التابع $f(x,y) = x^y$ في المستطيل : $0 \le x \le 1\ ,\ a \le y \le b$ يحقق شروط النص المذكور في الفرض . لذلك :

$$I=\int_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx=\int_0^1 dx\int_a^b x^y dy=\int_a^b dy\int_0^1 x^y dx=$$

$$=\int_a^b\left[\frac{x^{y+1}}{y+1}\right]_0^1 dy=\int_a^b\frac{dy}{y+1}=\ln\frac{b+1}{a+1}$$

(ii) بالاستفادة من العلاقة المذكورة في (i) وبفرض $x=e^{-t}$ ينتج أن :

$$I=\int_0^1 dx\int_a^b x^y\sin(\ln\frac{1}{x})dy=\int_a^b dy\int_0^\infty e^{-t(y+1)}\sin t dt=$$

$$=\int_a^b\frac{dy}{(y+1)^2+1}=arctg\frac{b-a}{1+(a+1)(b+1)}$$

$$J=\int_0^1 dx\int_a^b x^y\cos(\ln\frac{1}{x})dy=\int_a^b dy\int_0^\infty e^{-t(y+1)}\cos t dy=$$

$$=\int_a^b\frac{y+1}{(y+1)^2+1}dy=\frac{1}{2}\ln\frac{b^2+2b+2}{a^2+2a+2}$$

[13] بيّن أن شروط النص المذكور في (2) غير محققة واستنتج عدم صحة العلاقة المذكورة في النص المذكور ، وذلك للتابع :

$f(x,y)=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$ حيث $0\le x\le 1\,,\,0\le y\le 1$.

الحل : إن هذا التابع يعاني انقطاعا في النقطة (0,0) فلا تتحقق شروط النص (2) ولهذا يتم الحصول على قيمتين مختلفتين :

$$\int_0^1 dy\int_0^1 f(x,y)dx=\int_0^1\left[\frac{x}{x^2+y^2}\right]_0^1 dy=\int_0^1\frac{dy}{1+y^2}=\frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)dy = \int_0^1 \left[\frac{-y}{x^2+y^2} \right]_0^1 dx = -\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = -\frac{\pi}{4}$$

[14] أوجد التكامل $I = \int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx$ حيث $a,b > 0$.

الحل : إن التكامل $\int_0^\infty e^{-yx} dx = \frac{1}{y}$ ، حيث $y > 0$ ، متقارب بانتظام على المجموعة لـ $y \geq y_0 > 0$. ومنه يكون :

$$\int_0^\infty dx \int_a^b e^{-yx} dy = \int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \int_a^b dy \int_0^\infty e^{-yx} dx = \int_a^b \frac{dy}{y} = \ln \frac{b}{a} = I$$

[15] أوجد التكامل $I = \int_0^\infty \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2} dx$ حيث $a,b > 0$.

الحل : من المعلوم أن التكامل $\int_0^\infty \frac{\sin yx}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ ، حيث $y > 0$ ، متقارب بانتظام على المجموعة $y \geq y_0 > 0$. وبالمكاملة من a إلى b بالنسبة إلى y يكون :

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x} \int_a^b \sin yx dy = \int_0^\infty \frac{dx}{x} \cdot \frac{-1}{x} [\cos yx]_a^b = \int_0^\infty \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2} dx =$$

$$= \int_a^b dy \int_0^\infty \frac{\sin yx}{x} dx = \frac{\pi}{2}(b-a) = I$$

[16] (i) أثبت أن $\int_0^\infty e^{-xy} \sin y dy = \frac{1}{1+x^2}$.

(ii) احسب التكاملين : $J=\int_0^{\infty}\frac{x\cdot\sin\beta x}{\alpha^2+x^2}dx$ و $I=\int_0^{\infty}\frac{\cos\beta x}{\alpha^2+x^2}dx$ ، حيث

$\alpha,\beta>0$ ، واستنتج تساويهما من أجل $\alpha=1$.

(iii) أثبت التساوي بين I,J المذكورين في (ii) من أجل $\alpha=1$ وذلك بطريقة أخرى غير المذكورة في (ii) ولكن بالاستفادة من (i) ، ثم استنتج قيمة I من جديد .

الحل : (i) من المعلوم أن $\int_0^{\infty}e^{-ax}\sin bxdx=\frac{b}{a^2+b^2}$ ، حيث $a>0$ ، وذلك بالتكامل بالتجزئة . ومنه :

$$\int_0^{\infty}e^{-xy}\sin ydy=\frac{1}{x^2+1}$$

$$(ii)\ \text{إنّ}: \frac{dI}{d\beta}=-\int_0^{\infty}\frac{x\cdot\sin\beta x}{\alpha^2+x^2}dx=-J$$

$$\text{ولكن}: \int_0^{\infty}\frac{\sin\beta x}{x}dx=\frac{\pi}{2}\ \text{إذن}: \frac{dI}{d\beta}+\frac{\pi}{2}=\alpha^2\cdot\int_0^{\infty}\frac{\sin\beta x}{x.(\alpha^2+x^2)}dx$$

$$\text{ومنه}: \frac{d^2I}{d\beta^2}=\alpha^2\cdot\int_0^{\infty}\frac{\cos\beta x}{\alpha^2+x^2}dx=\alpha^2 I$$

وبحل المعادلة التفاضلية الناتجة يكون : $I=c_1e^{\alpha\beta}+c_2e^{-\alpha\beta}$.

وبملاحظة أن I محدود لأن :

$$|I|\le\int_0^{\infty}\frac{|\cos\beta x|}{\alpha^2+x^2}dx\le\int_0^{\infty}\frac{dx}{\alpha^2+x^2}=\frac{\pi}{2\alpha}$$

فإنه ينتج ، من أجل $\beta \to \infty$ ، أن $c_1 = 0$.

أما c_2 فيمكن إيجاده بجعل $\beta = 0$ حيث يكون :

$$c_2 = \int_0^{\infty} \frac{dx}{\alpha^2 + x^2} = \frac{\pi}{2\alpha}$$

إذن : $I = \frac{\pi}{2\alpha} e^{-\alpha\beta}$.

ومنه : $-J = \frac{dI}{d\beta} = -\frac{\pi}{2} e^{-\alpha\beta}$

أيْ : $J = \frac{\pi}{2} e^{-\alpha\beta}$.

ومن الملاحظ أنه عندما $\alpha = 1$ يكون $I = J$.

(iii) بالاستفادة من(i) يمكن كتابة : $\int_0^{\infty} e^{-xy} \sin y dy = \frac{1}{x^2 + 1}$

$$I = \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} \cos \beta x dx = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-xy} \sin y \cos \beta x dx dy =$$

$$= \int_0^{\infty} \sin y dy \int_0^{\infty} e^{-xy} \cos \beta x dx = \int_0^{\infty} \frac{y \sin y}{y^2 + \beta^2} dy$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{t \cdot \sin \beta t}{1+t^2} dt$$ (وذلك بعد وضع $t = \frac{y}{\beta}$ في التكامل السابق)

$$= \int_0^{\infty} \frac{x \sin \beta x}{1+x^2} dx = J$$

إذن فالكتابة الأتية ممكنة :

$$\frac{dI}{d\beta}=-I \quad [I=J \text{ انظر}(ii) \text{ وخذ بعين الاعتبار أن}]$$

ومنه $I=ce^{-\beta}$.

ولكن ، من أجل $\beta=0$ ، يكون :

$$c=I=\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}$$

ومن ثم فإن : $I=\frac{\pi}{2}e^{-\beta}$.

6-6- تمارين للحل :

(1) احسب كلاً من المشتقات الآتية :

$$\frac{d}{dt}\int_{t^3}^{2}\ln(1+x^2)dx\,(b)\quad \frac{d}{dt}\int_{1}^{x}t^2dt\;(a)$$

$$\frac{d}{dx}\int_{x}^{\tan x}e^{-t^2}dt\;(d)\quad \frac{d}{dt}\int_{1}^{t^2}\sin x^2dx\;(c)$$

(2) أثبت صحة كل مما يأتي :

(i)

$$\frac{d}{d\alpha}\int_{\sin\alpha}^{\cos\alpha}\ln(x+\alpha)dx=$$

$$=\ln\frac{\cos\alpha+\alpha}{\sin\alpha+\alpha}-[\sin\alpha\cdot\ln(\cos\alpha+\alpha)+\cos\alpha\cdot\ln(\sin\alpha+\alpha)]$$

$$\frac{d}{du}\int_0^{\frac{\pi}{2u}} u\cdot\sin ux dx = 0 \quad (ii)$$

$$\frac{d}{dy}\int_y^{y^2} e^{-x^2y^2}dx = 2ye^{-y^6} - e^{-y^4} - 2y\int_y^{y^2} x^2 e^{-x^2y^2}dx \quad (iii)$$

(3) احسب التكامل $\int_0^{\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$ [حيث n عدد طبيعي] وذلك انطلاقاً من المساواة $\int_0^{\infty}\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{\pi}{2a}$.

(4) انطلاقاً من المساواة $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}=\frac{\pi}{2|ab|}$

[حيث $ab\neq 0$] أوجد قيمة التكامل :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{(a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x)^2}$$

(5) احسب كلاً من التكاملات الآتية استناداً إلى دساتير اشتقاق التكاملات التابعة لوسيط :

(a) $\int_0^{\infty}\frac{1-e^{-ax}}{x\cdot e^x}dx$ حيث $a>-1$.

(b) $\int_0^1\frac{arctgax}{x\sqrt{1-x^2}}dx$ حيث $0<a<1$.

$$(c)\ \int_0^{\infty}\frac{arctg\,ax}{x(1+x^2)}\,dx \quad \text{حيث } 0<a<1.$$

$$(d)\ \int_0^{\pi}\frac{\ln(1+a\cos x)}{\cos x}\,dx \quad \text{حيث } a^2<1.$$

$$(e)\ \int_0^{\infty}\frac{1-e^{-ax^2}}{x^2}\,dx \quad \text{، حيث } a>0 \text{ إذا علمت أن } \int_0^{\infty}e^{-ax^2}\,dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\ .$$

$$(f)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{\tan x}\,dx$$

[إرشاد : احسب التكامل $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{arctg(atgx)}{tgx}\,dx$] .

(6) بفرض $F(\alpha)=\int_0^{\alpha}\frac{\ln(1+\alpha x)}{x}\,dx$. بيّن أن $F'(\alpha)=\frac{2}{\alpha}\ln(1+\alpha^2)$.

(7) أوجد $F'(\alpha)$ إذا علمت أن :

$$F(\alpha)=\int_{\sin\alpha}^{\cos\alpha}e^{\alpha\sqrt{1-x^2}}\,dx\,(i)$$

$$F(\alpha)=\int_{a+\alpha}^{b+\alpha}\frac{\sin\alpha x}{x}\,dx\,(ii)$$

Damascus University

الفصل السابع

تحويلات لابلاس

- تعاريف وخواص ومبرهنات
- تحويلات لابلاس لبعض التوابع الشهيرة
- بعض القوانين لتحويلات لابلاس
- تحويلات لابلاس العكسية
- مبرهنة القيمة البدائية
- مبرهنة القيمة النهائية
- مبرهنة الطيّ
- تمارين محلولة
- ملخص لأهم قوانين تحويلات لابلاس
- تمارين للحل

Damascus University

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الفصل السابع

تحويلات لابلاس

7-1- مقدمة :

إن لموضوع تحويلات لابلاس أهمية بالغة في كثير من مسائل الرياضيات والفيزياء والهندسة وغيرها . فقد ظهر استخدامها في حل المشكلات العلمية التي تظهر كل يوم في سياق التطور العلمي الكبير والسريع .

هذا وتعد تحويلات لابلاس واسطة لحل بعض المعادلات التفاضلية العادية والجزئية التي تحقق شروطاً ابتدائية . ولكن من الجدير ذكره هو أن تحويلات لابلاس لا تعطي الحل العام للمعادلة التفاضلية بل تعطي حلاً خاصاً لها يوافق شروط البدء المفروضة . ولذلك يجب الإلمام بمفهوم تحويل لابلاس وخواصه وطرائق استخدامه .

7-2- تعريف تحويل لابلاس :

ليكن $f(t)$ تابعاً معرفاً من أجل $t \geq 0$، حيث يدل t، عادةً ، على الزمن . وليكن s متغيراً (متحولاً) عقدياً (مركباً) ، أيْ $s = \alpha + j\beta$ ، $\alpha, \beta \in \Re$, $j = \sqrt{-1}$. وبالإضافة إلى ذلك يفترض أنه من الممكن في كثير من الأحيان التحكم بقيم الوسيط s بحيث يكون α كبيراً بكفاية لضمان تقارب التكامل المعتل الذي سيظهر في التعريف . وليكن التابع $F(s)$ الآتي :

$$F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt \quad (7\text{-}1)$$

يقال عن $F(s)$ إنه تحويل لابلاس للتابع $f(t)$ ، ويرمز له ،عادةً، باستخدام الرمز L، الذي يدل على مؤثر تحويل لابلاس ، وفق الآتي :

$$L[f(t)] = F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt \quad (7\text{-}2)$$

اصطلاحاً ، سوف يستعمل الحرف الصغير كرمز للتابع ، والحرف الكبير المقابل له كرمز لتحويل لابلاس لهذا التابع . فمثلاً :

$$G(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} g(t)dt$$

كما إنه سوف يستعمل الرمز L^{-1} كي يدل على مؤثر لابلاس العكسي (المعاكس)، أيْ : $f(t) = L^{-1}[F(s)]$.

هذا وقد يستخدم الرمز $\tilde{f}(s)$ للتعبير عن تحويل لابلاس للتابع $f(t)$. وأيضاً قد يستخدم الحرف p بدلاً من الحرف s .

ينتج من التعريف أن مؤثر لابلاس ينقل التابع $f(t)$ من مجال الزمن إلى التابع $F(s)$ في مجال التواتر .

يقال ، بالتعريف ، عن التكامل المعتل المذكور في الطرف الأيمن من (7-1) إنه **تكامل لابلاس للتابع** $f(t)$. ومن الملاحظ أن هذا التكامل قد لا يكون متقارباً ، أي قد يكون متباعداً ، فيقال ، حينئذٍ ، إن تحويل لابلاس للتابع $f(t)$ غير موجود ، أو يقال إن التابع $f(t)$ لا يملك تحويلاً لابلاسياً له . أما في الحالة المعاكسة ، أي إذا كان تكامل لابلاس للتابع $f(t)$ متقارباً فيقال إن تحويل لابلاس لهذا التابع موجود ، أو يقال إن التابع $f(t)$ يملك تحويلاً لابلاسياً له .

يقال عن مجموعة جميع قيم s التي تجعل تحويل لابلاس موجوداً إنها **مجموعة تعريف هذا التحويل** . ومنه فمتممة هذه المجموعة هي مجموعة القيم التي يكون التحويل غير موجود من أجلها .

هذا وقد يحدث أن لا توجد أية قيمة لـ s يكون تحويل لابلاس لتابع من أجلها موجوداً . فمثلاً ، تحويل لابلاس للتابع $f(t)=e^{t^2}$ غير موجود مهما تكن قيمة s ، ولهذا يقال إنه لا يوجد تحويل لابلاس للتابع e^{t^2} .

ثم ، إذا كان سلوك التابع $f(t)$ مهما من أجل $t<0$ (إلى جانب $t\geq 0$) فإن تحويل لابلاس له يكون :

$$L[f(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st}\cdot f(t)dt \quad (7\text{-}3)$$

إلا أن التعامل يكون ، عادة ، مع توابع سببية ، أي مع توابع مثل $f(t)$ ، حيث $f(t)=0$ من أجل $t<0$. وتجدر الإشارة إلى انه يمكن تحويل أي تابع مثل $f(t)$ إلى تابع سببي وذلك بضرب $f(t)$ بتابع الخطوة الواحدة

$$h(t)=\begin{cases}0 & (t<0)\\ 1 & (t\geq 0)\end{cases}$$

حيث يكون عندئذٍ :

$$f(t)\cdot h(t)=\begin{cases}0 & (t<0)\\ f(t) & (t\geq 0)\end{cases}$$

هذا ويستخدم أيضاً الرمز $u(t)$ لتابع الخطوة الواحدة ولكن الرمز المستعمل في هذا الكتاب هو $h(t)$.

وأخيراً ، فيما يتعلق بالصفر الذي يمثل الحد الأدنى من حدود تكامل لابلاس فمن الممكن أخذ 0^- أو 0^+ بدلاً من 0 وذلك من أجل أهداف مثل ضمان وجود تكامل لابلاس بشكل خاص ، وإبعاد أية صفة غير معتادة بشكل عام .

مبرهنة (1-7) : ليكن التكامل $I = \int_0^{+\infty} e^{-st} \cdot f(t)dt$ متقارباً بالإطلاق من أجل $s = s_0$. عندئذٍ يكون هذا التكامل متقارباً بالإطلاق من أجل أية قيمة s تحقق الشرط $s \geq s_0$.

الإثبات : لما كان $t \geq 0$, $s \geq s_0$ فإن $e^{-st} \leq e^{-s_0 t}$ ، ومن ثم فإن :

$$\left|e^{-st} \cdot f(t)\right| \leq \left|e^{-s_0 t} \cdot f(t)\right|$$

وحيث أن التكامل I متقارب بالإطلاق من أجل $s = s_0$ فإن المتراجحة السابقة تسمح باستنتاج التقارب المطلق للتكامل I من أجل s التي تحقق الشرط $s \geq s_0$.

نتيجة : إذا كان s عقدياً ، أيْ $s = \alpha + j\beta$ ، حيث $\alpha, \beta \in \Re$, $j = \sqrt{-1}$ ، فإن وجود تحويل لابلاس يتعلق بقيم الجزء الحقيقي $\mathrm{Re}(s) = \alpha$ للوسيط s فقط .

البرهان : إن $e^{-st} = e^{-\alpha t} \cdot e^{-j\beta t}$ ومن ثم فإن :

$$\left|e^{-st}\right| = e^{-\alpha t} = \left|e^{-\mathrm{Re}(s)t}\right|$$

ومنه فالتقارب المطلق للتكامل $\int_0^{+\infty} e^{-\mathrm{Re}(s)t} \cdot f(t)dt$ يقتضي التقارب المطلق للتكامل $\int_0^{+\infty} e^{-st} \cdot f(t)dt$ وبهذا يتم إثبات المطلوب .

7-3- تعريف الاستمرار القطعي :

يقال عن تابع مثل $f(t)$ إنه مستمر **قطعياً** في مجال مثل $I = [a,b]$ إذا أمكن إيجاد تجزئة منتهية للمجال I بحيث يكون التابع $f(t)$ مستمراً في كل مجال جزئي مفتوح من مجالات التجزئة ، وبحيث تكون نهايات هذا التابع من اليمين ومن اليسار في نقاط التجزئة موجودة .

4-7- تعريف المرتبة الأسيّة :

يقال عن تابع مثل $f(t)$ إنه من **مرتبة أسيّة** عندما $t \to \infty$ ، أي من أجل القيم الكبيرة لـ t ، إذا وجد عدد حقيقي مثل σ وثابتان موجبان T, M بحيث يكون $|f(t)| < Me^{\sigma t}$ من أجل جميع قيم t التي تحقق المتراجحة $t > T$.

وتجدر الملاحظة أن اختيار σ ليس وحيداً في الحالة العامة . ولهذا يعرف أكبر حد أدنى σ_c لمجموعة القيم الممكنة لـ σ بأنه **فاصلة نقطة الحد الأيسر لمجموعة تعريفتحويل لابلاس** على المحور الأفقي ، حيث يكون المستقيم الشاقولي المار من هذه النقطة هو الحد الأيسر لمجموعة تعريف التحويل في مستوي s .

أمثلة : (1) التابع $f(t) = t^3$ ، حيث $t \geq 0$ ، هو من مرتبة أسية بملاحظة الآتي :

إن العلاقة $e^{\alpha t} = 1 + \alpha t + \frac{1}{2}\alpha^2 t^2 + \frac{1}{6}\alpha^3 t^3 + \cdots$ تقتضي ، من أجل أي $\alpha > 0$ ،

أن : $t^3 < \frac{6}{\alpha^3} e^{\alpha t}$ ومن ثم فإن t^3 هو من مرتبة أسية ، حيث $\sigma > 0$. ومنه $\sigma_c = 0$.

(2) التابع $f(t) = e^{t^3}$ هو ليس من مرتبة أسية لأنه يتزايد أكثر سرعة من $Me^{\alpha t}$ عندما $t \to \infty$ وذلك مهما تكن قيمتا σ, M.

(3) التابع $f(t) = e^{3t}$ هو من مرتبة أسية ، حيث $\sigma \geq 3$ ومنه $\sigma_c = 3$.

5-7- مبرهنة الوجود لتحويل لابلاس : ليكن $f(t)$ تابعاً مستمراً قطعياً في المجال $I = [0,+\infty[$. وبفرض أن $f(t)$ هو من مرتبة أسية من أجل القيم الكبيرة لـ t . عندئذٍ يكون تحويل لابلاس لهذا التابع موجوداً وذلك أياً كانت s التي تحقق الشرط $\mathrm{Re}(s) > \sigma_c$.

الإثبات : لما كان $f(t)$ مستمراً قطعياً في I فإن التابع $e^{-st} \cdot f(t)$ يكون قابلاً للمكاملة في أي مجال جزئي من I . وبفرض

فإن $s = \mathrm{Re}(s) + j\ \mathrm{Im}(s) = \alpha + j\beta$. $\left|e^{-st}\right| = e^{-\alpha t}$. وحيث أن $f(t)$ هو من مرتبة أسية من أجل القيم الكبيرة لـ t فإن:

$$|L[f(t)]| = \left|\int_0^{+\infty} e^{-st} \cdot f(t)dt\right| \le \int_0^{\infty} \left|e^{-st}\right| \cdot |f(t)|dt \le \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} \cdot Me^{\alpha t}dt$$

$$|L[f(t)]| \le M\int_0^{\infty} e^{-(\alpha-\sigma)t}dt$$: ومنه . $\sigma \ge \sigma_c$ حيث

$$|L[f(t)]| \le \frac{M}{\alpha-\sigma}$$: فإن $\alpha > \sigma$ ومن ثم فإنه إذا كان

إذا فالتحويل $|L[f(t)]|$ يكون موجوداً ما دام $\alpha > \sigma$. ولكن σ يمكن اختياره بصورة كيفية بحيث يكون $\sigma > \sigma_c$ ، إذا فالتحويل $L[f(t)]$ يكون موجوداً وذلك أياً كانت s التي تحقق الشرط $\mathrm{Re}(s) = \alpha > \sigma_c$.

ملاحظة : إن شروط مبرهنة الوجود السابقة هي شروط كافية ولكنها ليست لازمة من أجل وجود تحويلات لابلاس . أي أنه إذا لم تتحقق هذه الشروط في تابع فإنه من الممكن أن يوجد تحويل لابلاس لهذا التابع . فمثلاً ، التابع $f(t) = t^{-\frac{1}{2}}$ ليس مستمراً قطعياً في المجال $]0,+\infty[$ ولكن يوجد له تحويل لابلاس ، حيث

$$L[t^{-\frac{1}{2}}] = \sqrt{\frac{\pi}{s}}$$.

نتيجة : إذا كان التابع $f(t)$ يحقق شروط مبرهنة الوجود فإن تحويل لابلاس له $|L[f(t)]|$ يسعى إلى الصفر عندما يسعى $\alpha = \mathrm{Re}(s)$ إلى اللانهاية .

البرهان : حسب مبرهنة الوجود يكون : $|L[f(t)]| \le \frac{M}{\alpha-\sigma}$ ومن ثم فإن

$$\lim_{t\to\infty}|L[f(t)]| = 0$$.

7-6- تعريف تحويل لابلاس العكسي : إذا كان $L[f(t)] = F(s)$ فإن التابع $f(t)$ يدعى تحويل لابلاس العكسي (أو المعاكس) للتابع $F(s)$ ، اي أن :

$$f(t) = L^{-1}[L[f(t)]] = L^{-1}[F(s)]$$

ويستعمل ، أحياناً ، الترميز $f(t) \leftrightarrow F(s)$ الذي يبين أن تحويل لابلاس لـ $f(t)$ هو $F(s)$ ، وأن تحويل لابلاس المعاكس لـ $F(s)$ هو $f(t)$.

ملاحظة : عند كتابة $L^{-1}[F(s)] = f(t)$ فإنه من المفروض أن يكون $t \geq 0$ وإلا يجب كتابة $L^{-1}[F(s)] = f(t) \cdot h(t)$.

7-7- الخاصة الخطية لتحويل لابلاس : ليكن $f(t), g(t)$ تابعين يملكان تحويلين لابلاسيين لهما . وليكن α, β أي عددين . عندئذٍ :

$$L[\alpha f(t) + \beta g(t)] = \alpha L[f(t)] + \beta L[g(t)]$$

ملاحظة : إن مضمون هذا النص يسمح بالقول إن مؤثر لابلاس L **هو مؤثر خطي .**

كما يمكن تعميم هذه الخاصة الخطية إلى أي عدد منته من التوابع التي تملك تحويلات لابلاسية لها .

برهان الخاصة الخطية :

$$L[\alpha f(t) + \beta g(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st}[\alpha f(t) + \beta g(t)]dt =$$

$$= \alpha \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt + \beta \int_0^{\infty} e^{-st} g(t)dt = \alpha L[f(t)] + \beta L[g(t)]$$

ملاحظة بخصوص مجموعة التعريف (أي منطقة التقارب) : إذا كانت σ_f فاصلة نقطة الحد الأيسر لمجموعة تعريف تحويل لابلاس $L[f(t)]$ وكانت σ_g

فاصلة نقطة الحد الأيسر لمجموعة تعريف تحويل لابلاس $L[g(t)]$ ، وإذا كان $\sigma_2 > \sigma_g$, $\sigma_1 > \sigma_f$ فإن :

$|f(t)| < M_1 e^{\sigma_1 t}$ و $|g(t)| < M_2 e^{\sigma_2 t}$. ومنه ينتج أن :

$$|\alpha f(t) + \beta g(t)| \le |\alpha| \cdot |f(t)| + |\beta| \cdot |g(t)| \le$$

$$\le |\alpha| \cdot M_1 e^{\sigma_1 t} + |\beta| \cdot M_2 e^{\sigma_2 t} \le (|\alpha| \cdot M_1 + |\beta| \cdot M_2) e^{\sigma t}$$

حيث $\sigma = \max(\sigma_1, \sigma_2)$ ، ومن ثم فإن فاصلة نقطة الحد الأيسر لمجموعة تعريف تحويل لابلاس $L[\alpha f(t) + \beta g(t)]$ تكون أصغر أو تساوي $\sigma = \max(\sigma_1, \sigma_2)$.

7-8- الخاصة الخطية لتحويل لابلاس العكسي : ليكن $f_1(t)$ هو تحويل لابلاس العكسي للتابع $F_1(s)$. وليكن $f_2(t)$ هو تحويل لابلاس العكسي للتابع $F_2(s)$. وليكن c_1, c_2 أي عددين . عندئذٍ :

$$L^{-1}[c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)] = c_1 L^{-1}[F(s)] + c_2 L^{-1}[F_2(s)]$$

ملاحظة : إن مضمون هذا النص يسمح بالقول إن مؤثر لابلاس العكسي L^{-1} هو **مؤثر خطي .**

برهان النص :

$$L[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)] = c_1 L[f_1(t)] + c_2 L[f_2(t)] = c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)$$

ومن ثم فإن :

$$L^{-1}[c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)] = c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) = c_1 L^{-1}[F_1(s)] + c_2 L^{-1}[F_2(s)]$$

7-9- تحويلات لابلاس لبعض التوابع الشهيرة :

(1) إذا كان $f(t)=c$ تابعاً ثابتاً فإن $L[c]=\frac{c}{s}=F(s)$ بشرط $\mathrm{Re}(s)>0$.

البرهان :

$$L[c]=\int_0^{\infty}e^{-st}c\,dt=\left[-\frac{c}{s}e^{-st}\right]_0^{\infty}=$$

$$=\left[-\frac{c}{s}e^{-(\alpha+j\beta)t}\right]_0^{\infty}=\left[-\frac{c}{s}e^{-\alpha t}(\cos\beta t-j\sin\beta t)\right]_0^{\infty}=$$

$$=\left[-\frac{c}{s}\cdot\frac{1}{e^{\alpha t}}(\cos\beta t-j\sin\beta t)\right]_0^{\infty}=-\frac{c}{s}(0-1)=\frac{c}{s}$$

بشرط $\mathrm{Re}(s)=\alpha>0$.

(2) حالة خاصة : $L[t^0]=L[1]=\frac{1}{s}$ بشرط $\mathrm{Re}(s)>0$.

(3) إذا كان $f(t)=t^n$ ، حيث $n\geq 0$ عدد طبيعي ، فإن $L[t^n]=\frac{n!}{s^{n+1}}=F(s)$ بشرط $\mathrm{Re}(s)>0$.

البرهان : بالمكاملة بالتجزئة يكون [بعد افتراض $n\geq 1$ ، $\mathrm{Re}(s)>0$] :

$$L[t^n]=\int_0^{\infty}t^n e^{-st}dt=\left[-\frac{t^n}{s}e^{-st}\right]_0^{\infty}+\frac{n}{s}\int_0^{\infty}t^{n-1}e^{-st}dt$$

أي أن : $L[t^n]=\frac{n}{s}L[t^{n-1}]$.

ومنه ، فتكرار تطبيق هذه العلاقة من أجل الأعداد $n-1, n-2, n-3, \ldots\ldots$

بالتتالي ، يقود إلى العلاقة : $L[t^n] = \frac{n}{s} \cdot \frac{n-1}{s} \cdots \frac{1}{s} L[t^0] = \frac{n!}{s^n} \cdot \frac{1}{s} = \frac{n!}{s^{n+1}}$

حيث $n \geq 0$ ، $\mathrm{Re}(s) > 0$.

(4) إذا كان $f(t) = e^{kt}$ ، حيث k عدد عقدي (مركب) ، فإن :

$L[e^{kt}] = \frac{1}{s-k}$ بشرط $\mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(k)$.

البرهان :

$$L[e^{kt}] = \int_0^\infty e^{-st} e^{kt} dt = \int_0^\infty e^{-(s-k)t} dt = \frac{-1}{s-k} \left[e^{-(s-k)t} \right]_0^\infty =$$

$$= \frac{-1}{s-k} \left[e^{-(\alpha + j\beta - a - jb)t} \right]_0^\infty = \frac{-1}{s-k} \left[e^{-(\alpha-a)t} e^{-j(\beta-b)t} \right]_0^\infty =$$

$$= \frac{-1}{s-k} [0-1] = \frac{1}{s-k}$$

بشرط $\alpha = \mathrm{Re}(s) > a = \mathrm{Re}(k)$

(5) $L[chkt] = \frac{s}{s^2 - k^2}$ ، $L[shkt] = \frac{k}{s^2 - k^2}$.

بشرط $\mathrm{Re}(s) > |\mathrm{Re}(k)|$ ، حيث s, k عقديان .

البرهان : باستخدام (4) واستخدام الخاصة الخطية لتحويل لابلاس على كل من العلاقتين الآتيتين ينتج المطلوب :

$$shkt = \frac{e^{kt} - e^{-kt}}{2} \quad , chkt = \frac{e^{kt} + e^{-kt}}{2}$$

$$L[\sin kt]=\frac{k}{s^2+k^2}\ ,\ L[\cos kt]=\frac{s}{s^2+k^2}\quad \textbf{(6)}$$

بشرط $\mathrm{Re}(s)>\max[\mathrm{Re}(jk),\mathrm{Re}(-jk)]$

البرهان : باستخدام (4) واستخدام الخاصة الخطية لتحويل لابلاس على كل من العلاقتين الأتيتين ينتج المطلوب :

$$\sin kt=\frac{e^{jkt}-e^{-jkt}}{2j}\ ,\cos kt=\frac{e^{jkt}+e^{-jkt}}{2}$$

7-10- بعض القوانين لتحويلات لابلاس :

قانون (1) : إذا كان $L[f(t)]=F(s)\ ,k>0,t\geq 0\ \ ,\ \ s>0$ ، فإن :

$$L[f(kt)]=\frac{1}{k}F(\frac{s}{k})$$

البرهان : إن $L[f(kt)]=\int_0^{+\infty}e^{-st}\cdot f(kt)dt$. ومنه ، بوضع $u=kt$ ، يكون :

$$L[f(kt)]=\frac{1}{k}\int_0^{+\infty}e^{-(\frac{s}{k})u}f(u)du=\frac{1}{k}F(\frac{s}{k})$$

قانون (2) : قانون الضرب بـ e^{kt} : إذا كان $L[f(t)]=F(s)$ حيث $\mathrm{Re}(s)>\sigma_c$ فإن : $\mathrm{Re}(s)>\sigma_c+\mathrm{Re}(k)$ و $L[e^{kt}\cdot f(t)]=F(s-k)$.

البرهان : إن $L[e^{kt}\cdot f(t)]=\int_0^{\infty}f(t)e^{-(s-k)t}dt=F(s-k)$ حيث $\mathrm{Re}(s-k)>\sigma_c$ مادام $L[f(t)]=F(s)$ ، حيث $\mathrm{Re}(s)>\sigma_c$. ومنه :

$$L[e^{kt}\cdot f(t)] = F(s-k) \quad \text{و} \quad \mathrm{Re}(s) > \sigma_c + \mathrm{Re}(k)$$

نتيجة :(1) إن ضرب التابع $f(t)$ بـ e^{kt} يكافئ وضع $s-k$ بدلاً من s في $F(s)$ الذي يمثل تحويل لابلاس للتابع $f(t)$.

(2) $L^{-1}[F(s-k)] = e^{kt} f(t)$

أمثلة :

1- أوجد $F(s) = L[5 - 3t + 4\sin 2t - 6e^{4t} + \cos t]$

الحل : $F(s) = 5L[1] - 3L[t] + 4L[\sin 2t] - 6L[e^{4t}] + L[\cos t]$

$$= \frac{5}{s} - \frac{3}{s^2} + \frac{8}{s^2+4} - \frac{6}{s-4} + \frac{s}{s^2+1} \quad , \ \mathrm{Re}(s) > 4$$

2- أوجد $L[t\cdot e^{-2t}]$.

الحل : $L[t] = \frac{1}{s^2} = F(s) \quad , \quad \mathrm{Re}(s) > 0$

$$L[e^{-2t}\cdot t] = F(s+2) = \frac{1}{(s+2)^2} \quad , \ [\mathrm{Re}(s) > -2]$$

3- أوجد $L[e^{-3t}\cdot \sin 2t]$

الحل : $L[\sin 2t] = \frac{2}{s^2+4} = F(s) \quad , \ \mathrm{Re}(s) > 0$

$$L[e^{-3t}\cdot \sin 2t] = F(s+3) = \frac{2}{(s+3)^2+4} = \frac{2}{s^2+6s+13} \quad , \ \mathrm{Re}(s) > -3$$

4- بفرض أن k و a ثابتان حقيقيان ، أثبت أن :

$$L[e^{-kt}\cdot \sin at] = \frac{a}{(s+k)^2+a^2} \ ; \ L[e^{-kt}\cdot \cos at] \frac{s+k}{(s+k)^2+a^2}$$

حيث $\mathrm{Re}(s) > -k$.

الحل يترك للقارئ كتمرين .

5- أوجد $L[\cos(3t + \frac{\pi}{6})]$.

الحل :

$$L[\cos(3t + \frac{\pi}{6})] = L[\cos\frac{\pi}{6}\cos 3t - \sin\frac{\pi}{6}\sin 3t] =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}L[\cos 3t] - \frac{1}{2}L[\sin 3t] =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{s}{s^2+9} - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{s^2+9} = \frac{\sqrt{3}s-3}{2(s^2+9)} \quad , \quad \mathrm{Re}(s) > 0$$

6- أوجد $L[5\sin t\cos t]$

الحل : $L[5\sin t\cos t] = \frac{5}{2}L[\sin 2t] = \frac{5}{s^2+4}$, $\mathrm{Re}(s) > 0$

7- أوجد $L[\cos^2 t]$

الحل :

$$L[\cos^2 t] = L[\frac{1}{2}(1+\cos 2t)] = \frac{1}{2}L[1] + \frac{1}{2}L[\cos 2t] =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s} + \frac{1}{2}\cdot\frac{s}{s^2+4} \quad , \quad \mathrm{Re}(s) > 0$$

8- أوجد $L[f(t)]$ ، حيث :

$$f(t)=\begin{cases}3 & 0<t<2\\ -1 & 2<t<4\\ 0 & t\geq 4\end{cases}$$

الحل :

$$L[f(t)]=\int_0^{\infty}e^{-st}f(t)dt=\int_0^{2}3e^{-st}dt+\int_2^{4}(-1)e^{-st}dt+\int_4^{\infty}0e^{-st}dt=$$

$$=\frac{3}{-s}\left[\frac{1}{e^{st}}\right]_0^2+\frac{1}{s}\left[\frac{1}{e^{st}}\right]_2^4+0=$$

$$=\frac{3}{-s}\left[\frac{1}{e^{2s}}-1\right]+\frac{1}{s}\left[\frac{1}{e^{4s}}-\frac{1}{e^{2s}}\right]=\frac{3-4e^{-2s}+e^{-4s}}{s}$$

حيث $\mathrm{Re}(s)>0$.

قانون (3) : تذكرة بالتابع الغماوي $\Gamma(x)$ وبالتابع البتاوي $B(p,q)$:

$$\Gamma(x)=\int_0^{\infty}t^{x-1}e^{-t}dt \quad , \quad x>0$$

$$B(p,q)=\int_0^{1}t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt \quad , \quad p>0\,,\,q>0$$

ويبرهن أن : $\Gamma(1)=1$ و $\Gamma(x)=(x-1)\Gamma(x-1)$ ، حيث $x>1$ و

$\Gamma(n)=(n-1)!$ ، حيث n عدد صحيح موجب تماماً و

$\Gamma(n)=(n-1)(n-2)\cdots\alpha\cdot\Gamma(\alpha)$ ، حيث n عدد عادي موجب تماماً ،

$n=k+\alpha$ ، k عدد صحيح غير سالب ، $0<\alpha<1$ ، $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$ ، $\Gamma(x)>0$

، حيث $x>0$.

$B(p,q) = \dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$ ، $B(p,q) = \int_0^{\infty} \dfrac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}} dx$ حيث $p,q > 0$.

$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \dfrac{\pi}{\sin \alpha\pi}$ حيث $0 < \alpha < 1$.

نص القانون : إذا كان n عدداً حقيقياً غير سالب ، فإن :

$L[t^n] = \dfrac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}$ حيث $s > 0$, $t \geq 0$.

مثال (*) : استنتج $L[t^{\frac{5}{2}}]$.

البرهان : $L[t^n] = \int_0^{\infty} t^n e^{-st} dt$

بفرض $st = x$ يكون $dt = \dfrac{1}{s} dx$ ومن ثم فإن :

$$L[t^n] = \int_0^{\infty} \left(\frac{x}{s}\right)^n e^{-x} \frac{1}{s} dx = \frac{1}{s^{n+1}} \int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx = \frac{1}{s^{n+1}} \Gamma(n+1)$$

حل المثال (*) :

$$L[t^{\frac{5}{2}}] = \frac{1}{s^{\frac{7}{2}}} \Gamma(\frac{5}{2}+1) = \frac{\frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \Gamma(\frac{1}{2})}{\sqrt{s^7}} = \frac{15\sqrt{\pi}}{8\sqrt{s^7}}$$

مثال : أوجد $L[\sin at]$ ، $L[\cos at]$ حيث $(a \in \Re \ , s)$ و $s > 0$ ، وذلك بطريقة أخرى غير الطريقة التي كانت سابقاً .

الحل : من المعلوم أن : $e^{jat} = \cos at + j \sin at$ ، $j = \sqrt{-1}$

وحيث أن : $L[e^{jat}] = \int_0^\infty e^{-st} e^{jat} dt = \frac{1}{s-ja} = \frac{s}{s^2+a^2} + j\frac{a}{s^2+a^2}$

و $L[e^{jat}] = L[\cos at] + jL[\sin at]$

فإن : $L[\cos at] = \frac{s}{s^2+a^2}$, $L[\sin at] = \frac{a}{s^2+a^2}$

كما إنه كان من الممكن الوصول إلى مثل هذه النتائج بالحساب المباشر حيث يتم إجراء التكامل بالتجزئة مرتين متتاليتين ، فمثلاً :

$$L[\sin at] = \int_0^\infty \sin at \cdot e^{-st} dt = \left[-\frac{e^{-st}}{s} \cdot \sin at \right]_0^\infty + \frac{a}{s} \int_0^\infty \cos at \cdot e^{-st} dt =$$

$$= \frac{a}{s} \left[\frac{-e^{-st}}{s} \cos at \right]_0^\infty - \frac{a^2}{s^2} \int_0^\infty e^{-st} \sin at dt = \frac{a}{s^2} - \frac{a^2}{s^2} L[\sin at]$$

ومنه : $L[\sin at] = \frac{a}{s^2+a^2}$

وبطريقة مشابهة يمكن إيجاد أن : $L[\cos at] = \frac{s}{s^2+a^2}$

قانون (4) : قانون الضرب بـ t^n حيث $n = 1,2,3,\cdots$: إذا كان

$L[f(t)] = F(s)$ حيث $\mathrm{Re}(s) > \sigma_c$ فإن :

$$\mathrm{Re}(s) > \sigma_c \quad L[t^n \cdot f(t)] = (-1)^n \cdot \frac{d^n F(s)}{ds^n} ,$$

البرهان : من المعلوم ، حسب التعريف ، أن :

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} \cdot f(t) dt$$

فمن أجل $n = 1$ يكون :

$$\frac{dF}{ds} = F'(s) = \frac{d}{ds}\int_0^{\infty} e^{-st} \cdot f(t)dt = \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial s}[e^{-st} \cdot f(t)]dt =$$

$$= \int_0^{\infty} [tf(t)]e^{-st}dt = -L[t \cdot f(t)]$$

أي أن : $L[t \cdot f(t)] = -F'(s)$.

وهذا يعني أنه في كل مرة يتم فيها اشتقاق $F(s)$ بالنسبة لـ s فإن هذا يكافئ ضرب التابع المدروس $f(t)$ بـ $-t$.

ومنه يمكن بالتدريج (باستخدام الاستقراء الرياضي) الوصول إلى الهدف المنشود أو يمكن فوراً العمل كالآتي :

$$\frac{d^n F(s)}{ds^n} = \frac{d^n}{ds^n}\int_0^{\infty} e^{-st} \cdot f(t)dt = \int_0^{\infty} \frac{\partial^n}{\partial s^n}[e^{-st} \cdot f(t)]dt =$$

$$= (-1)^n \int_0^{\infty} [t^n f(t)]e^{-st}dt = (-1)^n L[t^n \cdot f(t)]$$

ومنه يتم إثبات المطلوب ، حيث $\mathrm{Re}(s) > \sigma_c$.

مثال : أوجد $L[t^2 \sin 2t]$

الحل : من المعلوم أن : $L[\sin 2t] = \frac{2}{s^2+4}$ حيث $\mathrm{Re}(s) > 0$. ولكن :

$\frac{dF(s)}{ds} = \frac{-4s}{(s^2+4)^2}$ ومن ثم فإن : $\frac{d^2F(s)}{ds^2} = \frac{12s^2-16}{(s^2+4)^3}$ ، إذاً :

$$L[t^2 \sin 2t] = (-1)^2 \frac{d^2F(s)}{ds^2} = \frac{12s^2-16}{(s^2+4)^3} \quad , \ \mathrm{Re}(s) > 0$$

مثال : أوجد $L[t^n]$ ، حيث $n = 1,2,3,\cdots$ ، وذلك بطريقة أخرى غير الطريقة التي

كانت سابقاً .

الحل : من المعلوم أن $L[1] = \frac{1}{s} = F(s)$ حيث $\mathrm{Re}(s) > 0$. ومنه :

$$L[t^n] = (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n} = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad , \quad \mathrm{Re}(s) > 0$$

حالة خاصة : $L[t\sin kt] = \frac{2ks}{(s^2+k^2)^2}$ ، $L[t\cos kt] = \frac{s^2-k^2}{(s^2+k^2)^2}$

حيث $\mathrm{Re}(s) > 0$.

مثال : أوجد $L[t^3 \cdot e^{-3t}]$ بثلاث طرائق مختلفة .

الحل : طريقة أولى : $L[t^3] = \frac{6}{s^4}$ ومن ثم : $L[e^{-3t}t^3] = \frac{6}{(s+3)^4}$.

طريقة ثانية : $L[e^{-3t}] = \frac{1}{s+3} = F(s)$ ومن ثم :

$$L[t^3 \cdot e^{-3t}] = (-1)^3 \frac{d^3 F(s)}{ds^3} = \frac{6}{(s+3)^4}$$

طريقة ثالثة : $L[t^3 \cdot e^{-3t}] = \int_0^{\infty} t^3 \cdot e^{-(s+3)t} dt = \frac{6}{(s+3)^4}$

11-7- حساب تحويلات لابلاس العكسية :

إن الطريقة العامة لإيجاد التحويل العكسي للتابع $F(s)$ ، والذي يتعين بشكل وحيد ضمن الشروط الواجب تحققها ، هي استعمال التعاريف والنتائج والقوانين التي تم الحصول عليها في الفقرات السابقة . فأحياناً يمكن الوصول إلى الجواب مباشرة ،

وأحياناً يقتضي الأمر إلى تنفيذ بعض العمليات المنطقية الجبرية على $F(s)$ ثم الوصول إلى الهدف المنشود . ففي الحالات التي يكون فيها $F(s)=\frac{p(s)}{q(s)}$ ، حيث $p(s)$, $q(s)$ كثيرا حدود في s ، ينبغي تفريق $F(s)$ إلى مجموع كسور بسيطة ثم الحصول على الجواب .

امثلة :

(1) أوجد $L^{-1}[\frac{1}{s(s+1)}]$.

الحل :

$$L^{-1}[\frac{1}{s(s+1)}]=L^{-1}[\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}]=L^{-1}[\frac{1}{s}]-L^{-1}[\frac{1}{s+1}]=1-e^{-t}$$

(2) أوجد $L^{-1}[\frac{s+1}{s^3+4s}]$.

الحل :أولاً - تفريق الكسر إلى مجموع كسور بسيطة :

$$\frac{s+1}{s(s^2+4)}=\frac{A}{s}+\frac{Bs+c}{s^2+4}$$

ومن ثم فإن : $A=\frac{1}{4}$, $B=-\frac{1}{4}$, $c=1$. أي أن :

$$\frac{s+1}{s(s^2+4)}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{s}-\frac{1}{4}\cdot\frac{s}{s^2+4}+\frac{1}{s^2+4}$$

ثانياً ـ استخدام الخاصة الخطية و القوانين :

$$L^{-1}\left[\frac{s+1}{s(s^2+4)}\right]=\frac{1}{4}L^{-1}[\frac{1}{s}]-\frac{1}{4}L^{-1}[\frac{s}{s^2+4}]+\frac{1}{2}L^{-1}[\frac{2}{s^2+4}]$$

$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cos 2t+\frac{1}{2}\sin 2t$$

(3) أوجد $L^{-1}[\frac{2s-7}{s^2}]$

الحل : $L^{-1}[\frac{2s-7}{s^2}]=2L^{-1}[\frac{1}{s}]-7L^{-1}[\frac{1}{s^2}]=2-7t$

(4) أوجد $L^{-1}[F(s)]$ ، حيث $F(s)=\frac{1}{(s+2)^3(s+3)}$

الحل : إن $F(s)=\frac{A}{(s+2)^3}+\frac{B}{(s+2)^2}+\frac{c}{s+2}+\frac{D}{s+3}$

ومنه $A=1\ ,\ B=-1\ ,\ c=1\ ,\ D=-1$

ومن ثم فإن :

$$L^{-1}[F(s)]=L^{-1}[\frac{1}{(s+2)^3}]-L^{-1}[\frac{1}{(s+2)^2}]+L^{-1}[\frac{1}{s+2}]-L^{-1}[\frac{1}{s+3}]=$$

$$=\frac{t^2}{2}e^{-2t}-te^{-2t}+e^{-2t}-e^{-3t}$$

(5) أوجد $L^{-1}[F(s)]$ ، حيث $F(s)=\frac{s-1}{(s+1)(s^2-4s+5)}$.

الحل : إن $F(s)=\frac{A}{s+1}+\frac{Bs+c}{s^2-4s+5}$

ومنه $A=-\frac{1}{5}\ ,\ B=\frac{1}{5}\ ,\ c=0$ ، ومن ثم فإن :

$$F(s)=-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{s+1}+\frac{1}{5}\cdot\frac{s}{s^2-4s+5}=$$
$$=-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{s+1}+\frac{1}{5}\cdot\frac{s-2}{(s-2)^2+1}+\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{(s-2)^2+1}$$

ومنه :

$$L^{-1}[F(s)]=-\frac{1}{5}L^{-1}[\frac{1}{s+1}]+\frac{1}{5}L^{-1}[\frac{s-2}{(s-2)^2+1}]+\frac{2}{5}L^{-1}[\frac{1}{(s-2)^2+1}]=$$
$$=-\frac{1}{5}e^{-t}+\frac{1}{5}e^{2t}\cos t+\frac{2}{5}e^{2t}\sin t$$

ملاحظة : في المثال السابق تم استخدام أن : $L^{-1}[F(s-a)]=e^{at}\cdot f(t)$ بعد الإتمام إلى مربع كامل وهذا ما يمكن ملاحظته أيضاً في المثال الآتي حيث يعد مثل هذا العمل بمثابة خوارزمية لحل مسائل من هذا القبيل .

(6) أوجد $L^{-1}[F(s)]$ ، حيث $F(s)=\frac{3s+2}{s^2+2s+2}$.

الحل : بالاستفادة من الإتمام إلى مربع كامل يكون $F(s)=\frac{3(s+1)-1}{(s+1)^2+1}$.

ثم بأخذ الكسر $\frac{3s-1}{s^2+1}$ [الذي يتم الحصول عليه من الكسر السابق بوضع s بدلاً من $s+1$ فيه] يكون :

$$L^{-1}[\frac{3s-1}{s^2+1}]=3L^{-1}[\frac{s}{s^2+1}]-L^{-1}[\frac{1}{s^2+1}]=3\cos t-\sin t$$

ومن ثم فإن :

$$L^{-1}[F(s)]=L^{-1}[\frac{3(s+1)-1}{(s+1)^2+1}]=e^{-t}\cdot(3\cos t-\sin t)$$

12-7- قوانين أخرى لتحويلات لابلاس :

قانون (1) : إذا كان تابع مثل $f(t)$ يحقق هو ومشتقاته شروط مبرهنة الوجود ، وكان $F(s) = L[f(t)]$ فإن : $L[\frac{df(t)}{dt}] = sF(s) - f(0)$

$$L[f''(t)] = s^2 \cdot F(s) - s \cdot f(0) - f'(0)$$

وهكذا فإن : $L[f^{(n)}(t)] = s^n F(s) - \sum_{i=1}^{n} s^{n-i} f^{(i-1)}(0)$

حيث $f_{(t)}^{(j)} = \frac{d^j f(t)}{dt^j}$ ، $[j = 1,2,\cdots,n]$.

البرهان :

$$L[f'(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} f'(t)dt = [e^{-st} f(t)]_0^{\infty} + s\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt =$$
$$= -f(0) + sF(s) = sF(s) - f(0) = sL[f(t)] - f(0)$$

وبتطبيق (ما تم الحصول عليه) مرات عديدة يكون :

$$L[f''(t)] = L[[f'(t)]'] = sL[f'(t)] - f'(0) =$$
$$= s^2 L[f(t)] - sf(0) - f'(0)$$

$$L[f'''(t)] = L[[f''(t)]'] = sL[f''(t)] - f''(0) =$$
$$= s^3 L[f(t)] - s^2 f(0) - sf'(0) - f''(0)$$

وهكذا يمكن بالتدريج (بالاستقراء) الحصول على تحويل لابلاس للمشتق النوني للتابع $f(t)$ بالنسبة لـ t .

ملاحظة : لقد تم افتراض أن $f(t)$ مستمر عند $t = 0$ ، ومن ثم فإن $f(0-0) = f(0) = f(0+0)$ ، وأيضاً تم افتراض أن $f^{(n-1)}(t)$ مستمر عند حساب تحويل لابلاس للتابع $f^{(n)}(t)$ ، حيث $n \geq 1$.

قانون (2) : إذا كان $L[f(t)]=F(s)$ فإن $L[\int_0^t f(u)du]=\frac{F(s)}{s}$.

البرهان : بفرض $g(t)=\int_0^t f(u)du$ فيكون $g(0)=0$, $g'(t)=f(t)$ لكن

$L[g'(t)]=sL[g(t)]-g(0)=sL[g(t)]$ إذاً :

$$L[g(t)]=G(s)=\frac{1}{s}L[f(t)]=\frac{1}{s}F(s)$$

أمثلة :

(1) أوجد $L[\sin^2 t]$ بطريقتين .

الحل : طريقة أولى : التابع هو $f(t)=\sin^2 t$ ومشتقه هو

$f'(t)=2\sin t\cos t=\sin 2t$ ومن ثم فإن :

$$L[f'(t)]=L[\sin 2t]=\frac{2}{s^2+4}$$

ولكن $L[f'(t)]=s\cdot L[f(t)]-f(0)$ و $f(0)=0$

إذاً $L[f(t)]=\frac{1}{s}L[f'(t)]=\frac{2}{s(s^2+4)}$.

طريقة ثانية :

$$f(t)=\sin^2 t=\frac{1}{2}(1-\cos 2t)$$

$$L[f(t)]=\frac{1}{2}L[1]-\frac{1}{2}L[\cos 2t]=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s}-\frac{1}{2}\cdot\frac{s}{s^2+4}=\frac{2}{s(s^2+4)}$$

(2) أوجد $L[\sin 2t]$.

الحل : $\int_0^t \cos 2u\,du = \frac{1}{2}\sin 2t$ ومن ثم :

$$L[\sin 2t] = 2L[\int_0^t \cos 2u\,du] = \frac{2}{s}L[\cos 2t] =$$

$$= \frac{2}{s}\cdot\frac{s}{s^2+4} = \frac{2}{s^2+4}$$

(3) أوجد $L[\int_0^t (u^3 + \sin 2u)du]$.

الحل : $F(s) = L[f(t)] = L[t^3 + \sin 2t] = \frac{6}{s^4} + \frac{2}{s^2+4}$

ومنه : $\frac{1}{s}F(s) = \frac{6}{s^5} + \frac{2}{s^3+4s}$ $L[\int_0^t (u^3 + \sin 2u)du] =$

(4) إذا كان $f(t) = t\cos t$ و $g(t) = t\sin t$ وكان $L[f(t)] = F(s)$ و

$L[g(t)] = G(s)$ فأوجد $F(s)$ و $G(s)$.

الحل : بعد التكامل بالتجزئة يكون :

$$\int_0^t f(u)du = g(t) + \cos t - 1$$

$$\int_0^t g(u)du = \sin t - f(t)$$

ومنه بأخذ تحويل لابلاس لطرفي كل مساواة يكون :

$$\frac{1}{s}F(s) = G(s) + \frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{s}$$

$$\frac{1}{s}G(s) = \frac{1}{s^2+1} - F(s)$$

وبحل هاتين المعادلتين الجبريتين ينتج أن :

$$F(s) = \frac{s^2-1}{(s^2+1)^2} \quad \text{و} \quad G(s) = \frac{2s}{(s^2+1)^2}$$

نتيجة : ليكن $L[f(t)] = F(s)$ عندئذٍ :

(1) $$L^{-1}[\frac{F(s)}{s}] = \int_0^t f(u)du$$

(2) $$L^{-1}[F(s-a)] = e^{at} \cdot f(t)$$

(5) بفرض $x = x(t)$ فأوجد تحويل لابلاس للعبارة $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 3x$ إذا كان

$x = 4$ و $\frac{dx}{dt} = 5$ من أجل $t = 0$.

الحل : بفرض $L[x] = L[x(t)] = X(s)$. عندئذٍ :

$$L[\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 3x] = L[\frac{d^2x}{dt^2}] + 2L[\frac{dx}{dt}] + 3L[x] =$$
$$= s^2X(s) - s \cdot x(0) - x'(0) + 2[s \cdot X(s) - x(0)] + 3X(s) =$$
$$= s^2X(s) - 4s - 5 + 2[s \cdot X(s) - 4] + 3X(s) =$$
$$= (s^2 + 2s + 3) \cdot X(s) - 4s - 13$$

(6) أوجد ذلك الحل للمعادلة التفاضلية $\frac{dx}{dt} + 2x = e^{-t}$ الذي يوافق الشرط

$x = 3$ عندما $t = 0$ [أي : $x(0) = 3$] .

الحل : $$L[\frac{dx}{dt}] + 2L[x] = L[e^{-t}]$$

وبفرض أن $L[x] = L[x(t)] = X(s) = X$ يكون $sX - 3 + 2X = \frac{1}{s+1}$ وذلك بعد وضع $x(0) = 3$. ومنه :

$$X(s) = \frac{3s+4}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s+1} + \frac{2}{s+2}$$

ومن ثم فإن : $x = x(t) = e^{-t} + 2e^{-2t}$ وهو المطلوب .

(7) أوجد ذلك الحل للمعادلة التفاضلية $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 4x = 1$ الذي يوافق شروط البدء $x(0) = x'(0) = 0$.

الحل : بفرض $L[x(t)] = X(s)$ يكون :

$$s^2X + 2sX + 4X = \frac{1}{s}$$

ومن ثم يكون :

$$X = \frac{1}{s(s^2+2s+4)} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{s} - \frac{1}{4}\cdot\frac{s+2}{s^2+2s+4} =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{s} - \frac{1}{4}\cdot\frac{(s+1)+1}{(s+1)^2+3} =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{s} - \frac{1}{4}\cdot\frac{s+1}{(s+1)^2+(\sqrt{3})^2} - \frac{1}{4\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{(s+1)^2+(\sqrt{3})^2}$$

$$x(t) = L^{-1}[X] = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}e^{-t}\cdot\cos\sqrt{3}t - \frac{1}{4\sqrt{3}}\cdot e^{-t}\cdot\sin\sqrt{3}t$$

(8) حل المعادلة التفاضلية $\frac{d^2x}{dt^2} + w_0^2 x = a$ ضمن الشرط $x(0) = x'(0) = 0$.

الحل : بفرض $L[x(t)] = X(s)$ يكون : $s^2 X + w_0^2 X = \frac{as}{s^2 + w_0^2}$

ومن ثم فإن : $X = \frac{as}{(s^2 + w_0^2)^2}$ ومن ثم فإن :

$$x(t) = \frac{a}{2w_0} \cdot t \cdot \sin w_0 t$$

(9) حل جملة المعادلتين : $\frac{dy}{dt} = x + y$ ، $\frac{dx}{dt} = x - y$

ضمن شروط البدء $x(0) = 1$ ، $y(0) = 0$.

الحل : بفرض $L[x(t)] = X(s)$ ، $L[y(t)] = Y(s)$ يكون :

$$sX - 1 = X - Y \quad , \quad sY = X + Y$$

ومنه :

$$(1 - s)X - Y = -1$$
$$X + (1 - s)Y = 0$$

ومن ثم فإن :

$$X = \frac{-1 + s}{s^2 - 2s + 2} \quad , \quad Y = \frac{1}{s^2 - 2s + 2}$$

أي [طالما أن المميز سالب في كل مقام للكسرين السابقين] :

$$X = \frac{s - 1}{(s - 1)^2 + 1} \quad , \quad Y = \frac{1}{(s - 1)^2 + 1}$$

ومن ثم فإن :

$$x(t) = e^t \cdot \cos t \quad , \quad y(t) = e^t \cdot \sin t$$

(10) أوجد ذلك الحل للمعادلة التفاضلية $y'' + y = 1$ الذي يوافق الشروط الابتدائية $y(0) = 1 \ , \ y'(0) = 0$.

الحل : بفرض $L[y(t)] = Y(s)$ يكون : $s^2Y - s + Y = \frac{1}{s}$ ومن ثم فإن :

$Y = Y(s) = \frac{1}{s}$ ومن ثم فإن : $y(t) = L^{-1}[Y] = L^{-1}[\frac{1}{s}] = 1$.

(11) أوجد ذلك الحل للمعادلة التفاضلية $y'' + 4y' + 4y = e^{-2t}$ الذي يوافق الشروط الابتدائية $y(0) = y'(0) = 1$.

الحل : بتطبيق تحويل لابلاس على طرفي هذه المعادلة مع أخذ شروط البدء بعين الاعتبار يكون : $Y = \frac{s+5}{(s+2)^2} + \frac{1}{(s+2)^3}$ ثم بتطبيق تحويل لابلاس العكسي يكون :

$y(t) = e^{-2t}(1 + 3t + \frac{1}{2}t^2)$ [يطلب التحقق من كل ذلك] .

(12) أوجد ذلك الحل للمعادلة التفاضلية $y''' - 3y'' + 3y' - y = t^2e^t$ الذي يوافق شروط البدء $y(0) = 1 \ , \ y'(0) = 0 \ , \ y''(0) = -2$.

الحل : يمكن استنتاج أن :

$$Y = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{(s-1)^2} - \frac{1}{(s-1)^3} + \frac{2}{(s-1)^6}$$

ومن ثم يمكن استنتاج أن : $y(t) = e^t \cdot (1 - t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^5}{60})$

[يطلب التحقق من كل ذلك] .

(13) أوجد ذلك الحل المشترك لجملة المعادلتين التفاضليتين :

$$x'(t) = x - y \quad , \quad y'(t) = -2x$$

الذي يوافق شروط البدء $y(0) = 1$, $x(0) = 2$.

الحل : بتطبيق تحويل لابلاس على طرفي كل معادلة مع أخذ شروط البدء بعين الاعتبار يكون :

$$(s-1)X + Y = 2 \quad , \quad 2X + sY = 1$$

وبحل جملة المعادلتين الجبريتين بإحدى الطرائق المعروفة يكون :

$$X = \frac{2s-1}{s^2-s-2} \quad , \quad Y = \frac{s-5}{s^2-s-2}$$

ثم ، بتطبيق تحويل لابلاس العكسي يكون الحل المشترك المطلوب هو :

$$x(t) = e^{-t} + e^{2t} \quad , \quad y(t) = 2e^{-t} - e^{2t}$$

[بمثابة تمرين يطلب التحقق من كل ذلك] .

(14) أوجد ذلك الحل للمعادلة التفاضلية $y'' + 3y' + 2y = 1$ الذي يوافق شروط البدء $y(0) = 1$, $y'(0) = -2$.

الحل : بالتأثير على طرفي المعادلة بالمؤثر L وبالاستفادة من شروط البدء ينتج أن :

$$Y = \frac{1}{2s} - \frac{1}{s+1} + \frac{3}{2(s+2)}$$

ثم بالتأثير على طرفي المساواة الأخيرة بالمؤثر L^{-1} ينتج أن :

$$y = \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{3}{2}e^{-2t}$$

(15) أوجد ذلك الحل للمعادلة التفاضلية : $y''' - y'' - 4y' + 4y = 0$

الذي يوافق الشروط الابتدائية $y''(0) = 34$ ، $y'(0) = 6$ ، $y(0) = 10$.

الحل : تطبيق L يعطي : $Y = \frac{2}{s-1} + \frac{5}{s-2} + \frac{3}{s+2}$

ثم تطبيق L^{-1} يعطي : $y = 2e^{t} + 5e^{2t} + 3e^{-2t}$.

(16) أوجد ذلك الحل للمعادلة التفاضلية : $y'' + 4y = e^{t}$

الذي يوافق شروط البدء $y'(0) = 0$ ، $y(0) = 0$.

الحل :

$$Y = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{s-1} - \frac{1}{5} \cdot \frac{s+1}{s^2+4}$$

$$y = \frac{1}{5}e^{t} - \frac{1}{5}\cos 2t - \frac{1}{10}\sin 2t$$

(17) أوجد ذلك الحل للمعادلة التفاضلية $y'' - 3y' + 2y = 4e^{2t}$ الذي يوافق الشروط الابتدائية $y'(0) = 5$ ، $y(0) = -3$

الحل :

$$Y = \frac{-7}{s-1} + \frac{4}{(s-2)^2} + \frac{4}{s-2}$$

$$y = -7e^{t} + 4te^{2t} + 4e^{2t}$$

(18) أوجد ذلك الحل للمعادلة التفاضلية $\frac{d^2x}{dt^2}+5\frac{dx}{dt}+6x=2e^{-t}$ ، حيث $t\geq 0$ ، الذي يوافق الشروط الابتدائية $x=1$ ، $\frac{dx}{dt}=0$ عند $t=0$.

الحل :

$$X=\frac{2}{(s+1)(s+2)(s+3)}+\frac{s+5}{(s+3)(s+2)}$$

$$x=e^{-t}+e^{-2t}-e^{3t} \quad (t\geq 0)$$

(19) أوجد ذلك الحل للمعادلة التفاضلية $\frac{d^2x}{dt^2}+6\frac{dx}{dt}+9x=\sin t$ ، حيث $t\geq 0$ ، الذي يوافق الشروط الابتدائية $x=0$ ، $\frac{dx}{dt}=0$ عند $t=0$.

الحل : $$X=\frac{3}{50}\frac{1}{s+3}+\frac{1}{10}\frac{1}{(s+3)^2}+\frac{2}{25}\frac{1}{s^2+1}-\frac{3}{50}\frac{s}{s^2+1}$$

$$x=\frac{3}{50}e^{-3t}+\frac{1}{10}te^{-3t}+\frac{2}{25}\sin t-\frac{3}{50}\cos t \quad (t\geq 0)$$

(20) أوجد ذلك الحل للمعادلة التفاضلية $\frac{d^3x}{dt^3}+5\frac{d^2x}{dt^2}+17\frac{dx}{dt}+13x=1$ ، حيث $t\geq 0$ ، الذي يوافق الشروط الابتدائية $x=\frac{dx}{dt}=1$ ، $\frac{d^2x}{dt^2}=0$ عند $t=0$.

الحل : $$X=\frac{s^3+6s^2+22s+1}{s(s+1)(s^2+4s+13)}$$

$$x=\frac{1}{13}+\frac{8}{5}e^{-t}-\frac{1}{65}e^{-2t}(44\cos 3t-27\sin 3t)$$

حيث $t\geq 0$.

(21) أوجد ذلك الحل المشترك للمعادلتين التفاضليتين :

$$\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}+5x+3y=e^{-t}$$

$$2\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}+x+y=3$$

، حيث $t\geq 0$ ، الذي يوافق الشروط الابتدائية $x=2\ ,\ y=1$ عند $t=0$.

الحل :

$$X=-\frac{9}{2}\frac{1}{s}-\frac{11}{6}\frac{1}{s+2}+\frac{25}{3}\frac{1}{s-1}$$

$$Y=\frac{15}{2}\frac{1}{s}+\frac{1}{2}\frac{1}{s+1}+\frac{11}{2}\frac{1}{s+2}-\frac{25}{2}\frac{1}{s-1}$$

ومنه :

$$x=-\frac{9}{2}-\frac{11}{6}e^{-2t}+\frac{25}{3}e^{t}$$

$$y=\frac{15}{2}+\frac{1}{2}e^{-t}+\frac{11}{2}e^{-2t}-\frac{25}{3}e^{t}$$

حيث $t\geq 0$.

7-13- بعض الخواص الإضافية :

من تابع الخطوة الواحدة $h(t)$ ، مع فرض $a\geq 0$ ، يمكن تعريف التابع :

$$h(t-a)=\begin{cases}0 & (t<a)\\ 1 & (t\geq a)\end{cases}$$

ومن ثم فإن :

$$f(t)\cdot h(t-a)=\begin{cases}0 & (t<a)\\ f(t) & (t\geq a)\end{cases}$$

ومنه يمكن التعبير عن التابع المستمر قطعياً بدلالة توابع الخطوة الواحدة وفق الآتي :

إذا كان :

$$f(t)=\begin{cases}f_1(t) & (0\leq t<t_1)\\ f_2(t) & (t_1\leq t<t_2)\\ f_3(t) & (t\geq t_2)\end{cases}$$ ، على سبيل المثال ، فإن :

$$f(t)=f_1(t)h(t)+[f_2(t)-f_1(t)]H(t-t_1)+[f_3(t)-f_2(t)]H(t-t_2)$$

حيث يتم بناء $f(t)$ باستعمال التابع :

$$[h(t-a)-h(t-b)]=\begin{cases}1 & (a\leq t<b)\\ 0 & (\text{في الحالات الأخرى})\end{cases}$$

الذي يعطي :

$$f(t)[h(t-a)-h(t-b)]=\begin{cases}f(t) & (a\leq t<b)\\ 0 & (\text{في الحالات الأخرى})\end{cases}$$

ومن ثم يكون :

$$f(t)=f_1(t)[h(t)-h(t-t_1)]+f_2(t)[h(t-t_1)-h(t-t_2)]+f_3(t)h(t-t_2)$$

ويمكن ، بسهولة ، التأكد من أن هذا التابع $f(t)$ يساوي كل فرع من الفروع الثلاثة $f_1(t), f_2(t), f_3(t)$ ، على المجال الموافق ، والواردة في تعريفه .

مثال (1) : عبّر ، بدلالة توابع الخطوة الواحدة ، عن التابع :

$$f(t)=\begin{cases}2t^2 & (0\le t<3)\\ t+4 & (3\le t<5)\\ 9 & (t\ge 5)\end{cases}$$

الحل :

$$f(t)=2t^2[h(t)-h(t-3)]+(t+4)[h(t-3)-h(t-5)]+9h(t-5)$$

$$f(t)=2t^2h(t)+(4+t-2t^2)h(t-3)+(5-t)h(t-5)$$

مثال (2) : عبّر ، بدلالة توابع الخطوة ، عن التابع :

$$f(t)=\begin{cases}0 & (t<1)\\ 1 & (1\le t<3)\\ 3 & (3\le t<5)\\ 2 & (5\le t<6)\\ 0 & (t\ge 6)\end{cases}$$

الحل :

$$f(t)=[h(t-1)-h(t-3)]+3[h(t-3)-h(t-5)]+2[h(t-5)-h(t-6)]$$

$$f(t)=h(t-1)+2h(t-3)-h(t-5)-2h(t-6)$$

مثال (3) [مهم] :

$$L[h(t-a)]=\int_0^{\infty}h(t-a)e^{-st}dt=\int_0^{a}0e^{-st}dt+\int_a^{+\infty}1e^{-st}dt=\frac{e^{-as}}{s}$$

إذاً : $L[h(t-a)]=\frac{e^{-as}}{s}$ حيث $a\ge 0$.

وبصورة خاصة ، عندما $a=0$ ، يكون : $L[h(t)]=\frac{1}{s}$.

مثال (4) : أوجد تحويل لابلاس للتابع :

$$f(t)=\begin{cases}0 & (t<a)\\ k & (a\le t<b)\\ 0 & (t\ge b)\end{cases}$$

$b>a>0$ ، $k\ cons\tan t$.

الحل :

$$f(t)=k[h(t-a)-h(t-b)]$$

$$L[f(t)]=kL[h(t-a)]-kL[h(t-b)]=k\frac{e^{-as}}{s}-k\frac{e^{-bs}}{s}$$

مثال (5) : أوجد تحويل لابلاس للتابع $f(t)$ المذكور في المثال (2) .

الحل :

$$L[f(t)]=L[h(t-1)]+2L[h(t-3)]-L[h(t-5)]-2L[h(t-6)]$$

$$=\frac{1}{s}(e^{-s}+2e^{-3s}-e^{-5s}-2e^{-6s})$$

مبرهنة (1) : ليكن $L[f(t)]=F(s)$ ، $a\ge 0$. عندئذٍ :

$$L[f(t-a)h(t-a)]=e^{-as}F(s) \quad (1)$$

$$L^{-1}[e^{-as}F(s)]=f(t-a)h(t-a) \quad (2)$$

حيث $h(t)$ هو تابع الخطوة الواحدة .

الإثبات :

$$L[f(t-a)h(t-a)]=\int_0^{\infty}f(t-a)h(t-a)e^{-st}dt=\int_a^{\infty}f(t-a)e^{-st}dt$$

وبإجراء التغيير في المتحول $u = t - a$ يكون :

$$L[f(t-a)h(t-a)] = \int_0^{\infty} f(u)e^{-s(u+a)}du = e^{-sa}\int_0^{\infty} f(u)e^{-su}du = e^{-sa}F(s)$$

حالة خاصة : $L[f(t)h(t)] = F(s)$ ، حيث $L[f(t)] = F(s)$.

مثال (6) : أوجد [بطريقتين] تحويل لابلاس للتابع :

$$f(t) = \begin{cases} t & (0 \le t < b) \\ 0 & (t \ge b) \end{cases}$$

الحل :طريقة أولى :

$$\begin{aligned} f(t) &= t[h(t) - h(t-b)] \\ &= th(t) - th(t-b) = th(t) - (t-b+b)h(t-b) \\ &= th(t) - (t-b)h(t-b) - bh(t-b) \end{aligned}$$

ومنه ، بالاستفادة من المبرهنة (1) ، يكون :

$$\begin{aligned} L[f(t)] &= L[th(t)] - L[(t-b)h(t-b)] - bL[h(t-b)] \\ &= \frac{1}{s^2} - e^{-bs}\frac{1}{s^2} - b\frac{1}{s}e^{-bs} \end{aligned}$$

طريقة ثانية :

$$L[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt = \int_0^{b} te^{-st}dt + \int_b^{\infty} 0e^{-st}dt = \frac{1}{s^2}(1 - e^{-bs}) - \frac{b}{s}e^{-bs}$$

مثال (7) : أوجد تحويل لابلاس للتابع $f(t)$ المذكور في المثال (1) .

الحل : من المثال (1) يكون :

$$f(t) = 2t^2h(t) - (2t^2 - t - 4)h(t-3) - (t-5)h(t-5)$$

ولكن ، بفرض $z = t - 3$ ، يكون :

$$2t^2 - t - 4 = 2(z+3)^2 - (z+3) - 4 = 2z^2 + 11z + 11$$
$$= 2(t-3)^2 + 11(t-3) + 11$$

ومنه :

$$f(t) = 2t^2 h(t) - [2(t-3)^2 + 11(t-3) + 11]h(t-3) - (t-5)h(t-5)$$

ومن ثم فإن :

$$L[f(t)] = 2L[t^2 h(t)] - L[[2(t-3)^2 + 11(t-3) + 11]h(t-3)]$$
$$- L[(t-5)h(t-5)]$$

إذاً :

$$L[f(t)] = 2\frac{2}{s^3} - e^{-3s}L[2t^2 + 11t + 11] - e^{-5s}L[t]$$
$$= \frac{4}{s^3} - e^{-3s}\left(\frac{4}{s^3} + \frac{11}{s^2} + \frac{11}{s}\right) - e^{-5s}\frac{1}{s^2}$$

ملاحظة : يمكن الحصول على النتيجة ذاتها بتطبيق تعريف تحويل لابلاس ، إلا أن ذلك يتطلب إجراء المكاملة بالتجزئة بزمن أطول نسبياً من زمن الحل السابق بالطريقة السابقة .

مثال (8) : أوجد تحويل لابلاس للتابع :

$$f(t) = \begin{cases} 8 & (t < 2) \\ 6 & (t > 2) \end{cases}$$

الحل :

$$f(t) = 8[h(t) - h(t-2)] + 6h(t-2) = 8h(t) - 2h(t-2)$$

$$L[f(t)] = 8L[h(t)] - 2L[h(t-2)] = \frac{8}{s} - 2e^{-2s}\frac{1}{s}$$

مثال (9) : أوجد تحويل لابلاس للتابع :

$$f(t)=\begin{cases}\sin t & (t<\pi)\\ t & (t>\pi)\end{cases}$$

الحل :

$$f(t)=\sin t[h(t)-h(t-\pi)]+th(t-\pi)$$

$$f(t)=\sin t\,h(t)+(t-\sin t)h(t-\pi)$$

$$=\sin t\cdot h(t)+[\pi+(t-\pi)+\sin(t-\pi)]\cdot h(t-\pi)$$

$$L[f(t)]=L[\sin t\cdot h(t)]+\pi L[h(t-\pi)]+L[(t-\pi)h(t-\pi)]$$
$$+L[\sin(t-\pi)\cdot h(t-\pi)]$$
$$=\frac{1}{s^2+1}+\pi\cdot\frac{1}{s}\cdot e^{-\pi s}+e^{-\pi s}\cdot\frac{1}{s^2}+e^{-\pi s}\cdot\frac{1}{s^2+1}$$

مثال (10) : أوجد $L^{-1}[\frac{4e^{-4s}}{s(s+2)}]$.

الحل : إن المطلوب يكتب بالشكل $L^{-1}[e^{-4s}F(s)]$ ، حيث $F(s)=\frac{4}{s(s+2)}$.

إن $f(t)=L^{-1}[F(s)]=L^{-1}[\frac{4}{s(s+2)}]=2-2e^{-2t}$. ومنه ، حسب النتيجة السابقة ، يكون :

$$L^{-1}[\frac{4e^{-4s}}{s(s+2)}]=L^{-1}[e^{-4s}F(s)]=f(t-4)h(t-4)=$$
$$=(2-2e^{-2(t-4)})h(t-4)$$

مثال (11) : أوجد $L^{-1}[\frac{e^{-s\pi}(s+3)}{s(s^2+1)}]$.

الحل : المطلوب إيجاد $L^{-1}[e^{-s\pi}\cdot F(s)]$ ، حيث $F(s)=\frac{s+3}{s(s^2+1)}$.

ومنه $f(t)=L^{-1}[F(s)]=3-3\cos t+\sin t$. ومنه :

$$L^{-1}[\frac{e^{-s\pi}(s+3)}{s(s^2+1)}]=f(t-\pi)h(t-\pi)=$$
$$=[3-3\cos(t-\pi)+\sin(t-\pi)]h(t-\pi)$$
$$=(3+3\cos t-\sin t)h(t-\pi)$$

وإذا كانت توجد رغبة في كتابة النتيجة بدون ظهور $h(t-\pi)$ فيها ، فإن :

$$L^{-1}[\frac{e^{-s\pi}(s+3)}{s(s^2+1)}]=\begin{cases}0 & (t<\pi)\\ 3+3\cos t-\sin t & (t\geq\pi)\end{cases}$$

مثال (12) : أوجد ذلك الحل $x(t)$ ، $t\geq 0$ ، للمعادلة التفاضلية :

$$\frac{d^2x}{dt^2}+5\frac{dx}{dt}+6x=f(t)$$

حيث : $f(t)=\begin{cases}3 & (0\leq t<6)\\ 0 & (t\geq 6)\end{cases}$

وحيث أن هذا الحل يوافق شروط البدء $x(0)=0$, $x'(0)=2$.

الحل : طريقة أولى : من أجل $0\leq t<6$ تصبح المعادلة :

$$\frac{d^2x}{dt^2}+5\frac{dx}{dt}+6x=3 \quad , \quad x(0)=0 \quad , \quad x'(0)=2$$

ومنه :

$$X(s) = \frac{1}{2}\frac{1}{s} + \frac{1}{2}\frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+3}$$

$$x(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2t} - e^{-3t} \qquad , \ 0 \le t < 6$$

وسيتم تعيين القيم $x(6)$, $x'(6)$ التي تكون شروط البدء للمرحلة اللاحقة :

$$x(6) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-12} - e^{-18} = \alpha$$

$$x'(t) = -e^{-2t} + 3e^{-3t}$$

$$x'(6) = -e^{-12} + 3e^{-18} = \beta$$

ثم من أجل $t \ge 6$ يتم تغيير المتحول بوضع $T = t - 6$ فتصبح المعادلة :

$$\frac{d^2x}{dT^2} + 5\frac{dx}{dT} + 6x = 0$$

التي يراد إيجاد حلها الموافق للشروط $x(T=0) = \alpha$, $x'(T=0) = \beta$.

ومنه ، بأخذ تحويل لابلاس للطرفين ، ينتج أن :

$$(s^2 + 5s + 6)X(s) = sx(T(0)) + x'(T=0) + 5x(T=0) = \alpha s + 5\alpha + \beta$$

أي :

$$X(s) = \frac{\beta + 3\alpha}{s+2} - \frac{\beta + 2\alpha}{s+3}$$

ومن ثم فإن :

$$x(T) = (\beta + 3\alpha)e^{-2T} - (\beta + 2\alpha)e^{-3T}$$

ومنه ، بتعويض β, α بقيمتيهما وبالعودة إلى المتغير t ، يكون :

$$x(t) = (\frac{3}{2} + \frac{1}{2}e^{-12})e^{-2(t-6)} - (1 + e^{-18})e^{3(t-6)}$$

حيث $t \geq 6$ ، ومن ثم فإن :

$$x(t) = (\frac{1}{2}e^{-2t} - e^{-3t}) + (\frac{3}{2}e^{-2(t-6)} - e^{-3(t-6)})$$

إذاً فالحل المطلوب للمعادلة التفاضلية هو :

$$x(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2t} - e^{-3t} & (0 \leq t < 6) \\ (\frac{1}{2}e^{-2t} - e^{-3t}) + (\frac{3}{2}e^{-2(t-6)} - e^{-3(t-6)}) & (t \geq 6) \end{cases}$$

طريقة ثانية :

$$f(t) = 3h(t) - 3h(t-6)$$

$$L[f(t)] = \frac{3}{s} - \frac{3}{s}e^{-6s}$$

ومنه بأخذ تحويل لابلاس لطرفي المعادلة التفاضلية :

$$(s^2 + 5s + 6)X(s) = sx(0) + x'(0) + 5x(0) + L[f(t)]$$

$$= 2 + \frac{3}{s} - \frac{3}{s}e^{-6s}\ (s^2 + 5s + 6)X(s)$$

ومن ثم فإن :

$$X(s) = (\frac{1}{2}\frac{1}{s} + \frac{1}{2}\frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+3}) - e^{-6s}(\frac{1}{2}\frac{1}{s} - \frac{3}{2}\frac{1}{s+2} + \frac{1}{s+3})$$

$$x(t) = (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2t} - e^{-3t}) - (\frac{1}{2} - \frac{3}{2}e^{-2(t-6)} + e^{-3(t-6)})h(t-6)$$

مثال (13) : أوجد ذلك الحل $x(t)$ ، $t \geq 0$ ، للمعادلة التفاضلية :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 5x = f(t)$$

حيث:

$$f(t) = \begin{cases} t & (0 \leq t \leq \pi) \\ 0 & (t \geq \pi) \end{cases}$$

وحيث أن هذا الحل يوافق الشروط الابتدائية $x(0) = 0$, $x'(0) = 3$.

الحل :

$$f(t) = t \cdot h(t) - t\ h(t-\pi)$$

$$= t \cdot h(t) - (t-\pi)\ h(t-\pi) - \pi\ h(t-\pi)$$

$$L[f(t)] = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2}e^{-\pi s} - \frac{\pi}{s}e^{-\pi s}$$

ثم ، بتطبيق المؤثر L على طرفي المعادلة ، ينتج أن :

$$(s^2 + 2s + 5)X(s) = sx(0) + x'(0) + 2x(0) + L[f(t)]$$

$$= 3 + \frac{1}{s^2} - e^{-\pi s}\left(\frac{1}{s^2} + \frac{\pi}{s}\right)$$

ومنه :

$$X(s) = \frac{1}{25}\left(-\frac{2}{s} + \frac{5}{s^2} + \frac{2s+74}{s^2+2s+5}\right)$$

$$- \frac{e^{-\pi s}}{25}\left[\frac{5\pi - 2}{s} + \frac{5}{s^2} - \frac{(5\pi - 2)s + (10\pi + 1)}{s^2 + 2s + 5}\right]$$

$$x(t)=\frac{1}{25}(-2+5t+2e^{-t}\cos 2t+36e^{-t}\sin 2t)$$
$$-\frac{1}{25}[(5\pi-2)+5(t-\pi)-(5\pi-2)e^{-(t-\pi)}\cos 2(t-\pi)$$
$$-\frac{1}{2}(5\pi+3)e^{-(t-\pi)}\sin 2(t-\pi)]\cdot h(t-\pi)$$

اي ان :

$$x(t)=\frac{1}{25}[5t-2+2e^{-t}(\cos 2t+18\sin 2t)]$$
$$-\frac{1}{25}\{5t-2-e^{\pi}e^{-t}[(5\pi-2)\cos 2t+\frac{1}{2}(5\pi+3)\sin 2t]\}\cdot h(t-\pi)$$

أي :

$$x(t)=\begin{cases}\frac{1}{25}[5t-2+2e^{-t}(\cos 2t+18\sin 2t)] & (0\le t<\pi)\\ \frac{1}{25}e^{-t}\{(2+(5\pi-2)e^{\pi})\cos 2t+[36+\frac{1}{2}(5\pi+3)e^{\pi}]\sin 2t\} & (t\ge\pi)\end{cases}$$

نتائج :

(1) بفرض $L[f(t)]=F(s)$ ، $b>0$ ، فعندها $L[f(\frac{t}{b})]=b\cdot F(bs)$.

(2) ليكن $f(t)$ تابعاً يملك تحويلا لابلاسياً $F(s)$. وليكن $a>0$. وليكن

$$\varphi(t)=\begin{cases}f(t-a) & (t>a)\\ 0 & (t<a)\end{cases}$$

عندئذٍ : $\phi(s)=L[\varphi(t)]=e^{-as}F(s)$.

أمثلة متنوعة : **(1)** من المعلوم أن التابع $h(t)=\begin{cases}1 & (t>0)\\ 0 & (t<0)\end{cases}$ يملك تحويلاً لابلاسياً هو $H(s)=\frac{1}{s}$. عندها ، إذا كان $a>0$ ، فإن التابع

$\varphi(t)=\begin{cases}1 & (t>a)\\ 0 & (t<a)\end{cases}$ يملك تحويلاً لابلاسياً هو : $\phi(s)=e^{-as}H(s)=\frac{1}{s}e^{-as}$

(2) $L[h(t-a)]=\frac{1}{s}e^{-as}$ حيث $a>0$. وأيضاً ،

$L[f(t-a)h(t-a)]=e^{-as}F(s)$ ، حيث $F(s)=L[f(t)]$. $a>0$

(3) أوجد $L[f(t)]$ إذا علمت أن :

$$f(t)=\begin{cases}2 & (0<t<\pi)\\ 0 & (\pi<t<2\pi)\\ \sin t & (t>2\pi)\end{cases}$$

الحل : من المعلوم أن : $h(t-a)=\begin{cases}0 & (t<a)\\ 1 & (t>a)\end{cases}$ ، حيث $a\geq 0$.

ومنه :

$$\begin{aligned}f(t)&=2[h(t)-h(t-\pi)]+\sin t\cdot h(t-2\pi)\\&=2h(t)-2h(t-\pi)+\sin(t-2\pi)h(t-2\pi)\end{aligned}$$

ومن ثم فإن : $L[f(t)]=\frac{2}{s}-2e^{-\pi s}\cdot\frac{1}{s}+e^{-2\pi s}\cdot\frac{1}{s^2+1}$.

(4) أوجد $L[f(t)]$ إذا علمت أن $f(t)=e^{\lambda t}\cdot shwt$ ثم $f(t)=e^{\lambda t}\cdot chwt$.

الحل :

$L[e^{\lambda t}\cdot chwt]=\frac{s-\lambda}{(s-\lambda)^2-w^2}$ ، $L[e^{\lambda t}\cdot shwt]=\frac{w}{(s-\lambda)^2-w^2}$

(5) أوجد $L[e^{-ut}\cdot \sin 3t\cos 2t]$

الحل :

$$L[e^{-ut}\cdot \sin 3t\cos 2t]=\frac{1}{2}L[e^{-ut}\sin 5t]+\frac{1}{2}L[e^{-ut}\sin t]$$
$$=\frac{1}{2}\frac{5}{(s+u)^2+25}+\frac{1}{2}\frac{1}{(s+u)^2+1}$$

(6) أوجد تحويل لابلاس للتابع $f(t)=\frac{shwt}{\sqrt{t}}$.

الحل : إن : $f(t)=\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}(e^{wt}-e^{-wt})$

ومنه : $L[f(t)]=\frac{1}{2}L[t^{-\frac{1}{2}}e^{wt}]-\frac{1}{2}L[t^{-\frac{1}{2}}e^{-wt}]$

ولكن : $L[t^{-\frac{1}{2}}]=\int_0^{\infty}t^{-\frac{1}{2}}e^{-st}dt$

ومنه ، بفرض $st=x$ يكون $t=\frac{x}{s}$, $dt=\frac{dx}{s}$ ومن ثم فإن :

$$L[t^{-\frac{1}{2}}]=\frac{\sqrt{s}}{s}\int_0^{\infty}x^{-\frac{1}{2}}e^{-x}dx=\frac{1}{\sqrt{s}}\Gamma(\frac{1}{2})=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}}$$

ومنه :

$$L[f(t)]=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s-w}}-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s+w}}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}(\frac{1}{\sqrt{s-w}}-\frac{1}{\sqrt{s+w}})$$

(7) أوجد $L[t\cdot e^{-5t}\sin 2t]$.

الحل : إن : $L[\sin 2t]=\frac{2}{s^2+4}$

ومنه : $L[e^{-5t}\sin 2t]=\frac{2}{(s+5)^2+4}$

$$L[t\cdot e^{-5t}\cdot\sin 2t]=-\frac{d}{ds}[\frac{2}{(s+5)^2+4}]=-\frac{-2\cdot 2(s+5)}{[(s+5)^2+4]^2}=\frac{4s+20}{(s^2+10s+29)^2}$$

(8) إذا كان $L[f(t)]=F(s)$ فإن $L[\frac{f(t)}{t}]=\int_s^{\infty}F(u)du$

الحل : بفرض $\varphi(t)=\frac{f(t)}{t}$ فيكون $\phi(s)=L[\varphi(t)]=L[\frac{f(t)}{t}]$

حيث $\lim_{\mathrm{Re}(s)\to\infty}\phi(s)=0$. عندئذٍ :

$$F(s)=L[f(t)]=L[t\frac{f(t)}{t}]=-\phi'(s)$$

ومنه : $\int_s^b\phi'(u)du=-\int_s^b F(u)du$

ومن ثم فإن : $[\phi(u)]_s^b=-\int_s^b F(u)du$

أي : $-[\phi(b)-\phi(s)]=\int_s^b F(u)du$

ولكن $\phi(b)\to 0$ عندما $\mathrm{Re}(b)\to\infty$ ، إذن : $\phi(s)=\int_s^{\infty}F(u)du$

(9) إذا علمت صحة النص الآتي :

" لتكن $L[f(t)]=F(s)$. عندئذٍ : $L[\int_t^{\infty}\frac{f(u)}{u}du]=\frac{1}{s}\int_0^s F(u)du$ "

فأوجد ، بالاستفادة من النص (8) عند اللزوم ، تحويل لابلاس لكل من التوابع الآتية :

$$f_1(t)=\int_0^t \frac{\sin u}{u}du \quad ، \quad f_2(t)=\int_t^{\infty} \frac{\cos u}{u}du$$

$$f_3(t)=\int_t^{\infty} \frac{e^{-u}}{u}du \quad ، \quad f_4(t)=\int_0^t \frac{e^{-au}-e^{-bu}}{u}du$$

الحل :

$$L[f_1(t)]=L[\int_0^t \frac{\sin u}{u}du]=\frac{1}{s}L[\frac{\sin t}{t}]=$$

$$=\frac{1}{s}\int_s^{\infty}\frac{1}{u^2+1}du=\frac{1}{s}[\tan^{-1}u]_s^{\infty}=\frac{1}{s}(\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}s)$$

$$L[f_2(t)]=L[\int_t^{\infty}\frac{\cos u}{u}du]=\frac{1}{s}\int_0^s\frac{u}{u^2+1}du=\frac{1}{2s}[\ln|u^2+1|]_0^s=\frac{1}{2s}\ln|s^2+1|$$

$$L[f_3(t)]=L[\int_t^{\infty}\frac{e^{-u}}{u}du]=\frac{1}{s}\int_0^s\frac{1}{v+1}dv=\frac{1}{s}[\ln|v+1|]_0^s=\frac{1}{s}\ln|s+1|$$

$$L[f_4(t)]=L[\int_0^t\frac{e^{-au}-e^{-bu}}{u}du]=\frac{1}{s}[\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}]=$$

$$=\frac{1}{s}\int_s^{\infty}(\frac{1}{v+a}-\frac{1}{v+b})dv=\frac{1}{s}\left[\ln\left|\frac{v+a}{v+b}\right|\right]_s^{\infty}=$$

$$=-\frac{1}{s}\ln\left|\frac{s+a}{s+b}\right|=\frac{1}{s}\ln\left|\frac{s+b}{s+a}\right|$$

(10) أوجد $L[f(t)]$ إذا علمت أن $f(t)=e^t[h(t-1)-h(t-2)]$.

الحل :

$$L[f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{t}[h(t-1) - h(t-2)]dt$$

$$= \int_1^2 e^{-(s-1)t} dt = -\frac{1}{s-1}\left[\frac{1}{e^{(s-1)t}}\right]_1^2 = -\frac{1}{s-1}\left[e^{-2(s-1)} - e^{-(s-1)}\right]$$

(11) ليكن التابع الدوري $f(t)$ الذي دوره $T = 2$ والمعرف على المجال $[0,+\infty[$ وفق الآتي :

$$f(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t < 1 \\ -1 & 1 \le t < 2 \end{cases}$$

أوجد $L[f(t)]$ على $[0,+\infty[$.

الحل :

$$f(t) = [h(t) - h(t-1)] - [h(t-1) - h(t-2)] + [h(t-2) - h(t-3)] - \cdots$$
$$= h(t) - 2h(t-1) + 2h(t-2) - \cdots$$

$$L[f(t)] = \frac{1}{s} - \frac{2}{s}(e^{-s} - e^{-2s} + e^{-3s} - \cdots)$$

لأن : $L[h(t-a)] = \frac{1}{s}e^{-as}$ ، حيث $a > 0$. ومنه :

$$L[f(t)] = \frac{1}{s} - \frac{2}{s} \cdot \frac{e^{-s}}{1+e^{-s}} = \frac{1-e^{-s}}{s(1+e^{-s})}$$

(12) ليكن التابع الدوري $f(t)$ الذي دوره T والمعرف على المجال $[0,+\infty[$ وفق الآتي :

$$f(t)=\begin{cases} k & 0\le t<\frac{1}{2}T \\ -k & \frac{1}{2}T\le t<T \end{cases}$$

أوجد $L[f(t)]$.

الحل :

$$f(t)=k[h(t)-h(t-\frac{T}{2})]-k[h(t-\frac{T}{2})-h(t-T)]$$

$$+k[h(t-T)-h(t-\frac{3}{2}T)]-k[h(t-\frac{3T}{2})-h(t-2T)]+\cdots=$$

$$=k[h(t)-2h(t-\frac{T}{2})+2h(t-T)-2h(t-\frac{3T}{2})+\cdots]$$

$$L[f(t)]=k\left(\frac{1}{s}-\frac{2}{s}e^{-s\frac{T}{2}}+\frac{2}{s}e^{-sT}-\frac{2}{s}e^{-3s\frac{T}{2}}+\cdots\right)=$$

$$=\frac{2k}{s}\left(1-e^{-s\frac{T}{2}}+(e^{-s\frac{T}{2}})^2-(e^{-s\frac{T}{2}})^3+\cdots\right)-\frac{k}{s}=$$

$$=\frac{2k}{s}\frac{1}{1+e^{-s\frac{T}{2}}}-\frac{k}{s}=\frac{k}{s}\cdot\frac{1-e^{-\frac{sT}{2}}}{1+e^{-\frac{sT}{2}}}=\frac{k}{s}th\frac{1}{4}sT$$

مبرهنة (2) : ليكن التابع $f(t)$ دورياً ، دوره T ، ومعرفاً على المجال $[0,+\infty[$ ، وله تحويل لابلاسي . عندئذٍ :

$$L[f(t)]=\frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-st}f(t)dt$$

الإثبات : حسب تعريف تحويل لابلاس يكون : $L[f(t)]=\int_0^{\infty} e^{-st}f(t)dt$

وحيث أن $f(t)$ دوري فإن :

$$f(t) = f(t+T) = f(t+2T) = f(t+3T) = \cdots = f(t+nT) = \cdots$$

ومن ثم فإنه يكون :

$$L[f(t)] = \int_0^T f(t)e^{-st}dt + \int_T^{2T} f(t)e^{-st}dt + \int_{2T}^{3T} f(t)e^{-st}dt + \cdots + \int_{nT}^{(n+1)T} f(t)e^{-st}dt + \cdots$$

ومنه ، بفرض $t = x + nT$, $n \geq 0$ ، يكون $dt = dx$ وأيضاً :

$$L[f(t)] = \int_0^T f(x)e^{-sx}dx + \int_0^T f(x+T)e^{-s(x+T)}dx + \cdots$$
$$+ \int_0^T f(x+nT)e^{-s(x+nT)}dx + \cdots$$

ولكن $f(x+nT) = f(x)$, $(n \geq 0)$ ، إذاً :

$$L[f(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^T f(x)e^{-sx}e^{-snT}dx = (\sum_{n=0}^{\infty} e^{-snT}) \int_0^T f(x)e^{-sx}dx$$
$$= \frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T f(x)e^{-sx}dx$$

نتيجة : إذا كان $f(t)$ تابعاً دورياً ، دوره T ، ومعرفاً على المجال $[0,+\infty[$ ، وكان $f_1(t) = f(t)[h(t) - h(t-T)]$ فإن :

$$L[f(t)] = (1-e^{-sT})^{-1} L[f_1(t)]$$

البرهان : ينتج من كون أن $f(t)$ دوري وأن $f_1(t) = 0$ من أجل $t > T$.

(13) استخدم المبرهنة (2) والنتيجة السابقة في الحصول على تحويل لابلاس المذكور في (12) .

الحل : بفرض $f_1(t) = k[h(t) - 2h(t-\frac{T}{2}) + h(t-T)]$ ينتج أن :

$$L[f_1(t)] = k\left(\frac{1}{s} - \frac{2}{s}e^{-s\frac{T}{2}} + \frac{1}{s}e^{-sT}\right) = \frac{k}{s}(1-e^{-s\frac{T}{2}})^2$$

ومنه ، حسب المبرهنة و النتيجة ، يكون :

$$L[f(t)] = \frac{k(1-e^{-s\frac{T}{2}})^2}{s(1-e^{-sT})} = \frac{k(1-e^{-s\frac{T}{2}})^2}{s(1-e^{-s\frac{T}{2}})(1+e^{-s\frac{T}{2}})} = \frac{k}{s}th\frac{1}{4}sT$$

(14) احسب تحويل لابلاس للتابع :

$$f(t) = \begin{cases} \sin wt & 0 < t < \dfrac{\pi}{w} \\ 0 & \dfrac{\pi}{w} < t < \dfrac{2\pi}{w} \end{cases}$$

حيث $f(t+2n\frac{\pi}{w}) = f(t)$ من أجل جميع الأعداد الصحيحة n .

الحل : إن $f(t)$ دوري ، دوره $T = \frac{2\pi}{w}$. وبذلك يمكن التعبير عن $f_1(t)$ وفق الأتي :

$$f_1(t) = \sin wt[h(t) - h(t-\frac{\pi}{w})] = \sin wth(t) + \sin w(t-\frac{\pi}{w})h(t-\frac{\pi}{w})$$

ومنه :

$$L[f_1(t)] = \frac{w}{s^2+w^2} + e^{-s\frac{\pi}{w}}\frac{w}{s^2+w^2} = \frac{w}{s^2+w^2}(1+e^{-\frac{s\pi}{w}})$$

إذاً :

$$L[f(t)] = \frac{w}{s^2 + w^2} \cdot \frac{1 + e^{-s\frac{\pi}{w}}}{1 - e^{-2s\frac{\pi}{w}}} = \frac{w}{(s^2 + w^2)(1 - e^{-s\frac{\pi}{w}})}$$

(15) أوجد تحويل لابلاس للتابع الدوري $f(t)$ ، الذي دوره 2π ، والمعرف وفق الأتي :

$$f(t) = \begin{cases} \sin t & 0 \le t \le \pi \\ 0 & \pi \le t \le 2\pi \end{cases}$$

الحل :

$$L[f(t)] = \frac{1}{1 - e^{-2\pi s}} [\int_0^{\pi} e^{-st} \sin t dt + \int_{\pi}^{2\pi} e^{-st} 0 dt]$$

$$= \frac{1}{1 - e^{-2\pi s}} \cdot \frac{1 + e^{-\pi s}}{1 + s^2} = \frac{1}{(1 + s^2)(1 - e^{-\pi s})}$$

(16) أوجد تحويل لابلاس للتابع الدوري $f(t)$ ، الذي دوره $2T$ ، والمعرف وفق الأتي :

$$f(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < T \\ 0 & T < t < 2T \end{cases}$$

الحل :

$$L[f(t)] = \frac{1}{1 - e^{-2sT}} \int_0^{2T} e^{-st} f(t) dt$$

$$= \frac{1}{1 - e^{-2sT}} \int_0^{T} e^{-st} dt = \frac{1 - e^{-sT}}{s(1 - s^{-2sT})} = \frac{1}{s(1 + e^{-Ts})}$$

المشتق المعمم للتابع المستمر قطعياً $f(t)$ والذي له قفزات $d_1, d_2, \cdots, d_n$ في نقاطالانقطاع $t_1, t_2, \cdots, t_n$ (على الترتيب) :

يمكن أن يعرف تابع النبضة أو التابع الدلتاوي $\delta(t)$ بأنه $\delta(t)=\frac{d}{dt}h(t)=h'(t)$

حيث يعبر هذا عن حقيقة أن $h'(t)$ يكون صفراً في كل مكان عدا عند $t=0$ حينما تحصل القفزة للتابع $h(t)$. وأيضاً :

$$\delta(t-a)=\frac{d}{dt}h(t-a)=h'(t-a)$$

حيث $a\geq 0$. كما إن $\delta(t-a)=0$ عندما $t\neq a$ ، وأيضاً $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-a)dt=1$.

خاصة التمحيص : إذا كان $f(t)$ مستمراً عند $t=a$ فإن :

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\delta(t-a)dt=f(a)$$

إن هذه الخاصة تعزل قيمة تابع عند أية نقطة خاصة .

ولأسباب نظرية من الملائم استخدام الحدود اللانهائية للتكامل السابق بينما ، في الواقع ، من الممكن وضع حدود منتهية . وينتج هذا لأن :

$\int_{\alpha}^{\beta}f(t)\delta(t-a)dt=f(a)$ من أجل $\alpha<a<\beta$ ، حيث β,α ثابتان .

فمثلاً : $\int_{0}^{2\pi}\cos t\cdot\delta(t-\frac{\pi}{3})dt=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$

ومنه ، من أجل $a>0$ ، يكون :

$$L[\delta(t-a)]=\int_{0}^{\infty}\delta(t-a)e^{-st}dt$$

ومن ثم ، باستعمال خاصة التمحيص ، فإن : $L[\delta(t-a)]=e^{-as}$

أو $L^{-1}[e^{-as}] = \delta(t-a)$.

وكذلك ، بوضع : $L_+[f(t)] = \int_{0^+}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$

$$L_-[f(t)] = \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

يكون : $L_-[f(t)] = \int_{0^-}^{0^+} f(t)e^{-st}dt + \int_{0^+}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$

فإذا كان $f(t)$ لا يتضمن تابع نبضة عند $t=0$ فإن $L_+[f(t)] = L_-[f(t)]$.

أما إذا كان $f(t)$ يتضمن تابع نبضة عند $t=0$ فإن $\int_{0^-}^{0^+} f(t)dt \neq 0$ ومن ثم فإن

$L_+[f(t)] \neq L_-[f(t)]$.

ومنه ، ضمن ما أشير إليه في بداية البحث ، فإن : $L[f(t)] = L_-[f(t)]$

ومن ثم ، عندما $a=0$ ، يكون :

$$L[\delta(t)] = \int_{0^+}^{\infty} \delta(t)e^{-st}dt = e^{-s0} = 1$$

إذاً $L[\delta(t)] = 1$ أو $L^{-1}[1] = \delta(t)$.

مثال : أوجد $L^{-1}[\frac{s^2}{s^2+4}]$.

الحل :

$$L^{-1}[\frac{s^2}{s^2+4}] = L[1 - \frac{4}{s^2+4}] = L^{-1}[1] - 2L^{-1}[\frac{2}{s^2+4}] = \delta(t) - 2\sin 2t$$

مثال آخر : أوجد ذلك الحل للمعادلة التفاضلية :

$$\frac{d^2x}{dt^2}+3\frac{dx}{dt}+2x=1+\delta(t-4)$$

الذي يوافق الشروط الابتدائية $x(0)=x'(0)=0$.

الحل : سوف يستخدم القانون : $L^{-1}[e^{-as}F(s)]=f(t-a)h(t-a)$ حيث $F(s)=L[f(t)]$.

والآن ، وبالتأثير على طرفي المعادلة بالمؤثر L يكون :

$$[s^2X(s)-sx(0)-x'(0)]+3[sX(s)-x(0)]+2X(s)=L[1]+L[\delta(t-4)]$$

ومن ثم فإن :

$$X(s)=\frac{1}{2}(\frac{1}{s}+\frac{1}{s+2}-\frac{2}{s+1})+e^{-4s}(\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2})$$

ومنه :

$$x(t)=\frac{1}{2}(1+e^{-2t}-2e^{-t})+(e^{-(t-4)}-e^{-2(t-4)})h(t-4)$$

أي :

$$x(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}(1+e^{-2t}-2e^{-t}) & (0\le t<4)\\ \frac{1}{2}+(e^{4}-1)e^{-t}-(e^{8}-\frac{1}{2})e^{-2t} & (t\ge 4)\end{cases}$$

قاعدة المشتق المعمم : إذا كان $f(t)$ تابعاً مستمراً قطعياً وله قفزات $d_1,d_2,\cdots,d_n$ في نقاط الانقطاع $t_1,t_2,\cdots,t_n$ (على الترتيب) فإن :

$$f'(t) = g'(t) + \sum_{i=1}^{n} d_i \delta(t - t_i)$$

حيث $g'(t)$ يشير إلى المشتق العادي للتابع $f(t)$ حيثما يكون موجوداً .

إن هذه القاعدة تبين أن مشتق التابع المستمر قطعياً مع قفزات معينة في نقاط الانقطاع هو المشتق العادي له حيثما يكون موجوداً يضاف إليه مجموع التوابع الدلتاوية عند نقاط الانقطاع بعد ضرب كل منها بالقفزة المناسبة .

هذا وتكون القفزة **موجبة** إذا كانت قطعة المنحني أدنى من القطعة التي تليها عند القفزة ، وتكون القفزة **سالبة** إذا كانت قطعة المنحني أعلى من القطعة التي تليها عند القفزة .

مثال : احسب المشتق المعمم للتابع المستمر قطعياً :

$$f(t) = \begin{cases} 2t^2 + 1 & (0 \le t < 3) \\ t + 4 & (3 \le t < 5) \\ 4 & (5 \le t) \end{cases}$$

الحل : إن نقاط الانقطاع هي : $t_1 = 0$, $t_2 = 3$, $t_3 = 5$ والقفزات فيها هي(على الترتيب) : $d_1 = 1$, $d_2 = -12$, $d_3 = -5$. ومنه :

$$f'(t) = g'(t) + 1 \cdot \delta(t) - 12\delta(t-3) - 5\delta(t-5)$$

حيث :

$$g'(t) = \begin{cases} 4t & (0 \le t < 3) \\ 1 & (3 \le t < 5) \\ 0 & (5 \le t) \end{cases}$$

مثال : أوجد الحل الذي يحقق الشرط الابتدائية التي جميعها صفرية وذلك للمعادلة التفاضلية :

$\frac{d^2x}{dt^2}+5\frac{dx}{dt}+6x=u+3\frac{du}{dt}$ ، حيث $u(t)=e^{-t}$ يطبق في الزمن $t=0$.

الحل : بالتأثير بـ L على طرفي المعادلة يكون :

$$(s^2+5s+6)X(s)=(1+3s)U(s)$$

ومن ثم فإن : $X(s)=\frac{3s+1}{s^2+5s+6}U(s)$

ولكن $u(t)=e^{-t}$ إذاً $U(s)=\frac{1}{s+1}$ ، ومن ثم فإن :

$$X(s)=\frac{3s+1}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

ومنه : $x(t)=-e^{-t}+5e^{-2t}-4e^{-3t}\quad (t\geq 0)$.

طريقة ثانية للحل : $u(t)=e^{-t}h(t)$ لأن التعامل مع التوابع السببية .

ومنه : $\frac{du}{dt}=-e^{-t}h(t)+e^{-t}\frac{d}{dt}h(t)$

$$=-e^{-t}h(t)+e^{-t}\delta(t)$$

وبوضع هذه النتيجة في المعادلة التفاضلية المفروضة وتطبيق L على الطرفين ينتج ، بالاستفادة من كون $L[\delta(t)]=1$ أن :

$$(s^2+5s+6)X(s)=\frac{1}{s+1}+3(\frac{-1}{s+1}+1)$$

$$=\frac{3s+1}{s+1}$$

وهذه تعطي الجواب ذاته . $X(s)=\frac{3s+1}{(s+1)(s^2+5s+6)}$

مثال : بفرض أن شروط البدء جميعها مساوية الصفر أوجد $G(s)=\frac{X(s)}{U(s)}$ إذا علمت أن $x(t)$, $u(t)$ معينان بالمعادلة التفاضلية :

$$9\frac{d^2x}{dt^2}+12\frac{dx}{dt}+13x=2\frac{du}{dt}+3u$$

الحل : بتطبيق تحويل لابلاس على طرفي المعادلة ينتج أن :

$$(9s^2+12s+13)X(s)=(2s+3)U(s)$$

ومن ثم فإن : $\frac{X(s)}{U(s)}=\frac{2s+3}{9s^2+12s+13}$

مثال : أوجد ذلك الحل للمعادلة التفاضلية $\frac{d^2x}{dt^2}+5\frac{dx}{dt}+6x=5\delta(t)$ الذي يوافق الشروط الابتدائية $x(0)=x'(0)=0$.

الحل : بتطبيق تحويل لابلاس على الطرفين ينتج أن :

$$(s^2+5s+6)X(s)=5L[\delta(t)]=5$$

ومن ثم فإن : $X(s)=\frac{5}{s+2}-\frac{5}{s+3}$

ومنه : $x(t)=5(e^{-2t}-e^{-3t})$

14-7- مبرهنة القيمة البدائية :

إذا كان كل من $f(t)$, $f'(t)$ يملك تحويلاً لابلاسياً ، وكانت النهاية $\lim_{s\to\infty} s\cdot F(s)$ موجودة فإن : $\lim_{t\to 0^+} f(t)=f(0^+)=\lim_{s\to\infty} s\cdot F(s)$.

الإثبات : إن : $L[f'(t)]=\int_{0^-}^{\infty} f'(t)e^{-st}dt=sF(s)-f(0^-)$

ومنه :

$$\lim_{s\to\infty}[sF(s)-f(0^-)]=\lim_{s\to\infty}\int_{0^-}^{\infty}f'(t)e^{-st}dt$$

$$=\lim_{s\to\infty}\int_{0^-}^{0^+}f'(t)e^{-st}dt+\lim_{s\to\infty}\int_{0^+}^{\infty}f'(t)e^{-st}dt \quad (*)$$

إذا كان $f(t)$ منقطعاً عند نقطة الأصل ، أي $f(0^+)\neq f(0^-)$ ، فإن $f'(t)$ يحوي حداً من الشكل $[f(0^+)-f(0^-)]\delta(t)$ بالاستفادة من عبارة المشتق المعمم للتابع $f(t)$ ، ومن ثم فإن : $\lim_{s\to\infty}\int_{0^-}^{0^+}f'(t)e^{-st}dt=f(0^+)-f(0^-)$ وأيضاً ، لما كان تحويل لابلاس للتابع $f'(t)$ موجوداً فإنه من مرتبة أسية ويكون :

$$\lim_{s\to\infty}\int_{0^+}^{\infty}f'(t)e^{-st}dt=0$$

ومن ثم ينتج من (*) أن : $\lim_{s\to\infty}[sF(s)-f(0^-)]=f(0^+)-f(0^-)$

أي : $\lim_{s\to\infty}sF(s)=f(0^+)$

أما إذا كان $f(t)$ مستمراً عند نقطة الأصل فإن $f'(t)$ لا يحوي حداً من الشكل $[f(0^+)-f(0^-)]\delta(t)$ ومن ثم فإن الطرف الأيمن من (*) يكون مساوياً الصفر . ومنه :

$$\lim_{s\to\infty}sF(s)=f(0^-)=f(0^+)$$

وبذلك يتم إثبات المطلوب .

15-7- مبرهنة القيمة النهائية :

إذا كان كل من $f(t)$ و $f'(t)$ يملك تحويلاً لابلاسياً وكانت النهاية $\lim_{t\to\infty} f(t)$ موجودة فإن : $\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} s\cdot F(s)$

الإثبات : إن $L[f'(t)] = \int_{0^-}^{\infty} f'(t)e^{-st}dt = sF(s) - f(0^-)$

ومنه :

$$\lim_{s\to 0}\int_{0^-}^{\infty} f'(t)e^{-st}dt \lim_{s\to 0}[sF(s) - f(0^-)] =$$

$$= \int_{0^-}^{\infty} f'(t)dt = [f(t)]_{0^-}^{\infty} =$$

$$= \lim_{t\to\infty} f(t) - f(0^-)$$

ومن ثم فإن : $\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$ وهو المطلوب .

ملاحظة : إن شرط وجود $\lim_{t\to\infty} f(t)$ المطلوب في المبرهنة هو شرط لابد منه إذ أنه يعني أن المبرهنة لا تكون صحيحة من أجل توابع مثل e^t التي تسعى إلى اللانهاية عندما $t\to\infty$ ، ولا تكون صحيحة من أجل توابع مثل $\sin wt$ التي نهايتها غير موجودة . وحيث أن مبرهنة القيمة النهائية تستعمل ، عملياً ، للحصول على سلوك $f(t)$ عندما $t\to\infty$ بعد معرفة $F(s)$ ، فمن الممكن ، في حالة أكثر عمومية ، التعبير عن الشرط المذكور بدلالة شروط على $F(s)$ وهي أن $sF(s)$ يجب أن تكون جميع أقطابه [أي جميع قيم s التي تعدم المقام في $sF(s)$] تقع في النصف الأيسر من مستوي المتغير s .

كما يجب التأكيد على أن وجود $\lim_{s\to 0} sF(s)$ لا يقتضي أن $f(t)$ يملك نهاية عندما $t \to \infty$.

مثال : بفرض $F(s) = \dfrac{1}{(s+2)(s-3)}$ ، فإن $\lim_{s\to 0} sF(s) = \lim_{s\to 0} \dfrac{s}{(s+2)(s-3)} = 0$ ، وهذا يقتضي ، بتطبيق مبرهنة القيمة النهائية ، أن : $\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$.

ولكن $L^{-1}[F(s)] = f(t) = \dfrac{1}{5}(e^{3t} - e^{-2t})$ إذا : $\lim_{t\to\infty} f(t) = \infty$.

وبذلك تم الحصول على تناقض لأن المبرهنة غير صحيحة في هذه الحالة ، فالبرغم من أن $\lim_{s\to 0} sF(s)$ موجودة إلا أن أحد أقطاب $sF(s)$ ، وهو $s = 3$ ، لا يقع في النصف الأيسر من مستوي المتغير s .

16-7- التفاف التوابع :

تعريف : بفرض $f(t)$, $g(t)$ تابعين مستمرين قطعياً فيستخدم الرمز $f * g(t)$ للتعبير عن **الالتفاف** أو **الجداء الالتفافي** أو **الطيّ** لهذين التابعين $f(t)$, $g(t)$ ويعرف وفق الآتي :

$$f * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(t-u)du$$

وفي الحالة الخاصة التي يكون فيها التابعان $f(t)$, $g(t)$ سببيين ، أي :

[$f(u) = g(u) = 0$ عندما $u < 0$] ، [$g(t-u) = 0$ عندما $u > t$] ،فإنه يكون :

$$f * g(t) = \int_{0}^{t} f(u)g(t-u)du$$

إن الرمز $f * g(t)$ يشير إلى أن الالتفاف $f * g$ يكون تابعاً للمتغير t . وكان من الممكن أن يكتب بالشكل $(f * g)(t)$.

يقال عن التكامل $\int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(t-u)du$ إنه التكامل الالتفافي أو تكامل دو هاميل .

هذا وإن الجداء الالتفافي تبديلي ، أي : $f*g(t)=g*f(t)$ ، أو من أجل التوابع السببية :

$$\int_0^t f(u)g(t-u)du = \int_0^t f(t-u)g(u)du$$

ويبرهن على صحة هذه المساواة بفرض $t-u=z$ فيكون :

$$f*g(t)=\int_t^0 f(t-z)g(z)(-dz)=\int_0^t f(t-z)g(z)dz=g*f(t)$$

مثال : لتكن $f(t)=t\cdot h(t)$ ، $g(t)=\sin 2t\,h(t)$ تابعين سببيين ، حيث $h(t)$ هو تابع الخطوة الواحدة . بين أن $f*g(t)=g*f(t)$.

الحل :

$$f*g(t)=\int_0^t f(u)g(t-u)du=\int_0^t u\sin 2(t-u)du$$

ثم بالمكاملة بالتجزئة يكون :

$$f*g(t)=[\frac{1}{2}u\cos 2(t-u)+\frac{1}{4}\sin 2(t-u)]_0^t=$$

$$=\frac{1}{2}t-\frac{1}{4}\sin 2t$$

$$g*f(t)=\int_0^t f(t-u)g(u)du=\int_0^t (t-u)\sin 2udu$$

$$= [-\frac{1}{2}(t-u)\cos 2u - \frac{1}{4}\sin 2u]_0^t =$$

$$= \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\sin 2t$$

ولذلك فإن : $f * g(t) = g * f(t)$.

مبرهنة الطي أو الجداء الالتفافي :

إذا كان $f(t)$, $g(t)$ تابعين من مرتبة أسية σ ، ومستمرين قطعياً على المجال المعين بالمتراجحة $t \geq 0$ ، وكل منهما يملك تحويلاً لابلاسيا ، حيث $F(s) = L[f(t)]$, $G(s) = L[g(t)]$ ، فإن :

$$L[\int_0^t f(u)g(t-u)du] = L[f * g(t)] = F(s) \cdot G(s) = L[f(t)] \cdot L[g(t)]$$

أو بالشكل (المفيد كثيراً) :

$$L^{-1}[F(s)G(s)] = f * g(t) = \int_0^t f(u)g(t-u)du$$

الإثبات :

$$F(s) \cdot G(s) = L[f(t)] \cdot L[g(t)] = [\int_0^{\infty} e^{-sx} f(x)dx][\int_0^{\infty} e^{-sy} g(y)dy]$$

حيث تم استعمال المتغيرين x, y بدلاً من t في التكاملات لتجنب الالتباس .

وهذه النتيجة الأخيرة يمكن التعبير عنها بدلالة التكامل الثنائي :

$$F(s) \cdot G(s) = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-s(x+y)} f(x)g(y)dxdy$$

$$= \iint_{\Re} e^{-s(x+y)} f(x)g(y)dxdy$$

حيث ساحة المكاملة (أو منطقة المكاملة) $\Re$ هي الربع الأول من المستوي xoy .

ثم بوضع $x+y=t$ و $y=u$ يصبح التكامل الثنائي وفق الآتي :

إن منطقة المكاملة الجديدة $\Re_1$ تكون في المستوي tou وتتعين بأنها محدودة بالمستقيمين $u=0$, $u=t$. وإن $dxdy=|J|dudt$ حيث J هو يعقوبي هذا التغيير في المتحولات (المتغيرات) :

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(t,u)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial u}\\ \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial u}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1 \quad , \quad y=u \ , \ x=t-u$$

أي أن : $dxdy=dudt$. ومنه :

$$F(s)\cdot G(s)=\iint_{\Re_1} e^{-st}f(t-u)g(u)dudt=$$

$$=\int_0^{\infty}e^{-st}\left(\int_0^{t}f(t-u)g(u)du\right)dt$$

$$=\int_0^{\infty}e^{-st}[g*f(t)]dt=L[g*f(t)]=L[f*g(t)]$$

مثال : باستخدام مبرهنة الطي أوجد $L^{-1}[\frac{1}{s^2(s+2)^2}]$.

الحل : إن : $\frac{1}{s^2(s+2)^2}=\frac{1}{s^2}\cdot\frac{1}{(s+2)^2}$

وحيث أن $L[te^{-2t}]=\frac{1}{(s+2)^2}$, $L[t]=\frac{1}{s^2}$

فإنه ، بأخذ $f(t)=t$, $g(t)=te^{-2t}$ وبحسب مبرهنة الطي ، يكون :

$$L^{-1}[\frac{1}{s^2}\cdot\frac{1}{(s+2)^2}]=\int_0^t f(t-u)g(u)du=\int_0^t (t-u)ue^{-2u}du$$

$$=\frac{1}{4}[t-1+(t+1)e^{-2t}]$$

طريقة ثانية (دون استخدام مبرهنة الطي) :

$$=-\frac{1}{4}\frac{1}{s}+\frac{1}{4}\frac{1}{s^2}+\frac{1}{4}\frac{1}{s+2}+\frac{1}{4}\frac{1}{(s+2)^2}\cdot\frac{1}{s^2(s+2)^2}$$

$$=-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}t+\frac{1}{4}e^{-2t}+\frac{1}{4}te^{-2t}\ L^{-1}[\frac{1}{s^2(s+2)^2}]$$

مثال : أوجد $L^{-1}[\frac{s}{(s^2+a^2)^2}]$ ، $L^{-1}[\frac{1}{s^2(s+1)^2}]$

الحل : إن $\frac{s}{(s^2+a^2)^2}=\frac{s}{s^2+a^2}\cdot\frac{1}{s^2+a^2}$

وإن : $L[\cos at]=\frac{s}{s^2+a^2}$ ، $L[\frac{\sin at}{a}]=\frac{1}{s^2+a^2}$

إذاً :

$$L^{-1}[\frac{s}{(s^2+a^2)^2}]=\int_0^t \cos ax\frac{\sin a(t-x)}{a}dx=$$

$$=\frac{1}{a}\int_0^t \cos ax(\sin at\cos ax-\cos at\sin ax)dx$$

$$=\frac{1}{a}\sin at\int_0^t \cos^2 axdx-\frac{1}{a}\cos at\int_0^t \sin ax\cos axdx$$

يطلب من القارئ حساب التكاملين والوصول إلى الجواب وذلك بمثابة تمرين .

$$\frac{1}{s^2(s+1)^2}=\frac{1}{s^2}\cdot\frac{1}{(s+1)^2}$$

$$L^{-1}[\frac{1}{s^2}] = t \quad , \quad L^{-1}[\frac{1}{(s+1)^2}] = te^{-t}$$

$$L^{-1}[\frac{1}{s^2(s+1)^2}] = \int_0^t xe^{-x}(t-x)dx =$$

$$= \int_0^t (xt - x^2)e^{-x}dx$$

يطلب من القارئ حساب التكامل والوصول إلى الجواب بمثابة تمرين [انظر المثال السابق] .

مثال : أوجد $L^{-1}[F(s)]$ إذا علمت أن $F(s) = \frac{1}{s(s^2+1)}$.

الحل : إن :

$$\frac{1}{s(s^2+1)} = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{(s^2+1)}$$

$$L^{-1}[\frac{1}{s}] = 1 \quad , \quad L^{-1}[\frac{1}{s^2+1}] = \sin t$$

$$L^{-1}[\frac{1}{s(s^2+1)}] = \int_0^t 1 \cdot \sin(t-x)dx = [\cos(t-x)]_0^t = 1 - \cos t$$

مثال : احسب $L^{-1}[\frac{1}{s^2(s^2+1)}]$.

الحل :

$$\frac{1}{s^2(s^2+1)} = \frac{1}{s^2} \cdot \frac{1}{(s^2+1)}$$

$$L^{-1}[\frac{1}{s^2}] = t \quad , \quad L^{-1}[\frac{1}{s^2+1}] = \sin t$$

$$L^{-1}[\frac{1}{s^2(s^2+1)}] = \int_0^t \sin x(t-x)dx = t - \sin t$$

مثال : أوجد $L^{-1}[\frac{1}{(s^2+1)^2}]$.

الحل : $\frac{1}{(s^2+1)^2} = \frac{1}{s^2+1} \cdot \frac{1}{s^2+1}$

$$L^{-1}[\frac{1}{s^2+1}] = \sin t$$

$$L^{-1}[\frac{1}{(s^2+1)^2}] = \int_0^t \sin x \sin(t-x)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^t [\cos(t-2x) - \cos t]dx$$

$$= \frac{1}{2}(\sin t - t\cos t)$$

مثال : أوجد $L^{-1}[\frac{1}{s^2(s-1)}]$.

الحل : $L^{-1}[\frac{1}{s-1}] = e^t$ ، $L^{-1}[\frac{1}{s^2}] = t$

$$L^{-1}[\frac{1}{s^2(s-1)}] = \int_0^t xe^{t-x}dx = e^t \int_0^t xe^{-x}dx = e^t - t - 1$$

طريقة ثانية لحل المثال السابق [دون استخدام مبرهنة الطي] :

بتفريق الكسر إلى مجموع كسور بسيطة يكون :

$$\frac{1}{s^2(s-1)} = \frac{A}{s^2} + \frac{B}{s} + \frac{c}{s-1} = \frac{-1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s-1}$$

ومنه :

$$L^{-1}[\frac{1}{s^2(s-1)}] = -L^{-1}[\frac{1}{s^2}] - L^{-1}[\frac{1}{s}] + L^{-1}[\frac{1}{s-1}] =$$

$$= -t - 1 + e^t$$

مثال : أوجد $L^{-1}[\frac{1}{(s^2+k^2)^2}]$.

الحل : $f(t) = L^{-1}[\frac{1}{s^2+k^2}] = \frac{1}{k}\sin kt$

$$L^{-1}[\frac{1}{(s^2+k^2)^2}] = \int_0^t f(u)f(t-u)du$$

$$= \frac{1}{k^2}\int_0^t \sin ku \sin(kt-ku)du$$

$$= \frac{1}{2k^2}\int_0^t [\cos(kt-2ku) - \cos kt]du$$

$$= \frac{1}{2k^2}(\frac{1}{k}\sin kt - t\cos kt)$$

ملاحظة :

(1) ضع $k=1$ في هذا المثال فتحصل على المثال قبل السابق .

(2) يمكن الحصول على الجواب أيضاً بملاحظة أن :

$$\frac{1}{(s^2+k^2)^2} = \frac{s^2+k^2+k^2-s^2}{k^2}\cdot\frac{1}{2k^2} = \frac{1}{2k^2}[\frac{1}{k}\frac{k}{s^2+k^2} + \frac{k^2-s^2}{(s^2+k^2)^2}] =$$

$$= \frac{1}{2k^2}\{\frac{1}{k}\frac{k}{s^2+k^2} - [-\frac{d}{ds}(\frac{s}{s^2+k^2})]\}$$

نتيجة : بفرض أن $F(s)=\frac{G(s)}{P(s)}$. وبفرض أن جذور المعادلة $P(s)=0$ جميعها بسيطة [حقيقية أو عقدية] .

فإذا كانت $s_1,s_2,\cdots,s_n$ هي جذور هذه المعادلة $P(s)=0$ فإن :

$$f(t)=L^{-1}[F(s)]=\sum_{i=1}^{n} f_i(t)$$

حيث : $f_i(t)=\lim_{s\to s_i}[\frac{G(s)}{P(s)}e^{st}(s-s_i)]$

وذلك من أجل كل i من $\{1,2,\cdots,n\}$.

مثال : أوجد $L^{-1}[F(s)]$ إذا علمت أن $F(s)=\frac{se^{-s}}{s^2-3s+2}$.

الحل : للمعادلة $s^2-3s+2=0$ الجذران البسيطان $s_1=1$, $s_2=2$. وإن :

$$f_1(t)=\lim_{s\to 1}[\frac{se^{-s}}{(s-1)(s-2)}e^{st}(s-1)]=\frac{e^{-1}\cdot e^{t}}{-1}=-e^{t-1}$$

$$f_2(t)=\lim_{s\to 2}[\frac{se^{-s}}{(s-1)(s-2)}e^{st}(s-2)]=2e^{-2}e^{2t}=2e^{2t-2}$$

ومنه ، حسب النتيجة السابقة ، يكون :

$$L^{-1}[F(s)]=f(t)=f_1(t)+f_2(t)=-e^{t-1}+2e^{2t-2}$$

مثال : أوجد $L^{-1}[F(s)]$ إذا علمت أن $F(s)=\frac{1}{s(s^2+4)}$.

الحل : للمعادلة $s(s^2+4)=0$ الجذور البسيطة $s=-2j$ ، $s_1=0$, $s_2=2j$ حيث $j=\sqrt{-1}$. وإن :

$$f_1(t)=\lim_{s\to 0}[\frac{1}{s(s^2+4)}e^{st}s]=\frac{1}{4}$$

$$f_2(t)=\lim_{s\to 2j}[\frac{1}{s(s-2j)(s+2j)}e^{st}(s-2j)]=\frac{e^{2jt}}{2j\cdot 4j}=-\frac{1}{8}e^{2jt}$$

$$f_3(t)=\lim_{s\to -2j}[\frac{1}{s(s-2j)(s+2j)}e^{st}(s+2j)]=\frac{e^{-2jt}}{(-2j)\cdot(-4j)}=-\frac{1}{8}e^{-2jt}$$

إذاً :

$$f(t)=L^{-1}[F(s)]=\sum_{i=1}^{3}f_i(t)=\frac{1}{4}-\frac{1}{8}e^{2jt}-\frac{1}{8}e^{-2jt}$$

$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}(\frac{e^{2jt}+e^{-2jt}}{2})=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cos 2t=\frac{1}{2}\sin^2 t$$

مثال : أوجد $L^{-1}[F(s)]$ إذا علمت أن $F(s)=\dfrac{2+s+s^2}{s(s-3)(s+2)}$.

الحل : للمعادلة $s(s-3)(s+2)=0$ الجذور البسيطة
$s_1=0\ ,\ s_2=3\ ,\ s_3=-2$. وإن :

$$f_1(t)=\lim_{s\to 0}[\frac{2+s+s^2}{s(s-3)(s+2)}e^{st}s]=-\frac{2}{6}=-\frac{1}{3}$$

$$f_2(t)=\lim_{s\to 3}[\frac{2+s+s^2}{s(s-3)(s+2)}e^{st}(s-3)]=\frac{14}{15}e^{3t}$$

$$f_3(t)=\lim_{s\to -2}[\frac{2+s+s^2}{s(s-3)(s+2)}e^{st}(s+2)]=\frac{4}{10}e^{-2t}=\frac{2}{5}e^{-2t}$$

ومنه : $L^{-1}[F(s)]=f(t)=f_1(t)+f_2(t)+f_3(t)=-\frac{1}{3}+\frac{14}{15}e^{3t}+\frac{2}{5}e^{-2t}$

17-7- تمارين محلولة :

1- أوجد $L^{-1}[e^{-2s}/s^2]$.

الحل : بفرض $G(s)=\frac{1}{s^2}$. عندئذٍ $g(t)=L^{-1}[G(s)]=t$.

ومنه :

$$L^{-1}[\frac{e^{-2s}}{s^2}]=L^{-1}[e^{-cs}G(s)]=g(t-c)h(t-c)=g(t-2)h(t-2)=$$
$$=(t-2)h(t-2)$$

2- أوجد $L^{-1}[\frac{e^{-2(s+1)}}{(s+1)(s+2)}]$.

الحل : بفرض $G(s)=\frac{1}{(s+1)(s+2)}$ فيكون ، بعد تفريق الكسر إلى مجموع كسور بسيطة ، $g(t)=e^{-t}-e^{-2t}$. ومنه :

$$L^{-1}[e^{-2(s+1)}G(s)]=e^{-2}\cdot L^{-1}[e^{-2s}G(s)]=e^{-2}g(t-2)h(t-2)$$

$$=e^{-2}[e^{-(t-2)}-e^{-2(t-2)}]h(t-2)$$

$$=(e^{-t}-e^{-2t+2})h(t-2)$$

3- أوجد ذلك الحل للمعادلة التفاضلية :

$$\frac{dx}{dt}+2x=f(t)$$

الذي يحقق شرط البدء $x(0)=0$ ، حيث :

$$f(t)=\begin{cases}0 & when\ \ t<1\\ e^{-t} & when\ \ 1\le t\le 2\\ 0 & when\ \ t>2\end{cases}$$

الحل : بفرض أن $L[x(t)]=X(s)$ وأن $L[f(t)]=F(s)$. عندئذٍ :

$$F(s)=\int_0^{\infty}e^{-st}f(t)dt=\int_1^2 e^{-st}e^{-t}dt=\int_1^2 e^{-(s+1)t}dt$$

$$=\frac{1}{s+1}[e^{-(s+1)}-e^{-2(s+1)}]$$

ومنه : $sX+2X=F(s)$

ومن ثم فإن : $X(s)=\dfrac{F(s)}{s+2}=$

$$=[e^{-(s+1)}-e^{-2(s+1)}][\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2}]$$

$$=e^{-1}e^{-s}(\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2})-e^{-2}e^{-2s}(\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2})$$

ولكن $g(t)=L^{-1}[G(s)]=L^{-1}[\dfrac{1}{s+1}-\dfrac{1}{s+2}]=e^{-t}-e^{-2t}$

إذاً :

$$x(t)=L^{-1}[X(s)]=e^{-1}\cdot g(t-1)h(t-1)-e^{-2}g(t-2)h(t-2)$$

$$=(e^{-t}-e^{-2t+1})h(t-1)-(e^{-t}-e^{-2t+2})h(t-2)$$

4- تمرين مشهور : بفرض أن التابعين $f(t)$, $\dfrac{f(t)}{t}$ مستمران على المجال $]0,+\infty[$. وبفرض أن $L[f(t)]=F(s)$. عندئذٍ :

$$\int_0^{\infty} f(t)dt = F(0)$$

بشرط أن يكون هذا التكامل المعتل متقارباً .

كما إن : $\int_0^{\infty} \frac{f(t)}{t} dt = \int_0^{\infty} F(s)ds$

بشرط أن يكون التكامل المعتل ، المذكور في الطرف الأيسر ، متقارباً .

تطبيقات :

(1) احسب التكامل المعتل : $\int_0^{\infty} \frac{\sin at}{t} dt$ حيث $a > 0$.

الحل : $f(t) = \sin at$ ومن ثم :

$$F(s) = L[f(t)] = L[\sin at] = \frac{a}{s^2 + a^2}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{f(t)}{t} dt = \int_0^{\infty} F(s)ds = \int_0^{\infty} \frac{\sin at}{t} dt =$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{a}{s^2 + a^2} ds = [\tan^{-1} \frac{s}{a}]_0^{\infty} = \frac{\pi}{2}$$

(2) احسب التكامل المعتل : $\int_0^{\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt$.

الحل : $f(t) = e^{-at} - e^{-bt}$ ومن ثم : $F(s) = L[f(t)] = \frac{1}{s+a} - \frac{1}{s+b}$

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt = \int_0^{\infty} (\frac{1}{s+a} - \frac{1}{s+b}) ds =$$

$$= \left[\ln \left| \frac{s+a}{s+b} \right| \right]_0^{\infty} = -\ln \left| \frac{a}{b} \right|$$

(3) احسب التكامل المعتل : $\int_0^{\infty} te^{4t} \sin 2t dt$.

الحل : $f(t) = te^{4t} \sin 2t$ ومن ثم :

$$F(s) = L[f(t)] = \frac{4s - 16}{(s^2 - 8s + 20)^2}$$

$$\int_0^{\infty} e^{4t} t \cdot \sin 2t dt = F(0) = \frac{-16}{400} = -\frac{1}{25}$$

(4) احسب التكامل المعتل : $\int_0^{\infty} e^{-5t} sh3t dt$.

الحل : $f(t) = e^{-5t} sh3t$ ومن ثم :

$$F(s) = L[f(t)] = \frac{3}{s^2 + 10s + 16}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-5t} \cdot sh3t dt = F(0) = \frac{3}{16}$$

5- تمرين مشهور : بفرض أن $L[f(t)] = F(s)$, $L[g(t)] = G(s)$ وبفرض أن التكاملين المعتلين الأتيين متقاربان :

$$\int_0^{\infty} g(t)F(t)dt \quad \text{و} \quad \int_0^{\infty} f(t)G(t)dt$$

عندئذٍ تكون المساواة الآتية صحيحة :

$$\int_0^{\infty} g(t)F(t)dt \int_0^{\infty} f(t)G(t)dt =$$

[تدعى هذه المساواة علاقة بارسفال للتكاملات المعتلة] .

تطبيقات لعلاقة بارسيفال للتكاملات المعتلة:

(1) احسب التكامل المعتل : $I = \int_0^{\infty} \frac{\cos at - \cos bt}{t} dt$.

الحل : $f(t) = \cos at - \cos bt$ ومن ثم : $F(s) = \frac{s}{s^2 + a^2} - \frac{s}{s^2 + b^2}$ ومن ثم:

$g(t) = 1 , G(t) = \frac{1}{t}$ ومن ثم : $G(s) = \frac{1}{s}$ وأيضاً : $F(t) = \frac{t}{t^2 + a^2} - \frac{t}{t^2 + b^2}$.

ومنه :

$$\int_0^{\infty} g(t)F(t)dt = \int_0^{\infty} (\frac{t}{t^2 + a^2} - \frac{t}{t^2 + b^2})dt \; I = \int_0^{\infty} f(t)G(t)dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\ln\left|\frac{t^2 + a^2}{t^2 - b^2}\right| \right]_0^{\infty} = \frac{-1}{2} \ln\left|\frac{a^2}{b^2}\right|$$

(2) احسب التكامل المعتل : $I = \int_0^{\infty} \frac{\sin^3 t}{t} dt$.

الحل :

$$f(t) = \sin^3 t = \frac{1}{4}(3\sin t - \sin 3t) = \frac{3}{4}\sin t - \frac{1}{4}\sin 3t$$

ومن ثم : $F(s) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{s^2 + 1} - \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{s^2 + 9}$

ومن ثم : $F(t)=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{t^2+1}-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{t^2+9}$

وأيضاً : $G(s)=\frac{1}{s}$ ومن ثم : $g(t)=1\ ,\ G(t)=\frac{1}{t}$

ومنه :

$$I=\int_0^\infty f(t)G(t)dt=\int_0^\infty g(t)F(t)dt$$

$$=\int_0^\infty (\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{t^2+1}-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{t^2+9})dt=$$

$$=\left[\frac{3}{4}\tan^{-1}t-\frac{1}{4}\tan^{-1}(\frac{t}{3})\right]_0^\infty=$$

$$=\frac{3}{4}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}$$

(3) احسب التكامل المعتل : $I=\int_0^\infty \frac{t-\sin t}{t^3}dt$.

الحل : $f(t)=t-\sin t$ ومن ثم : $F(s)=\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2+1}$ ومن ثم :

$F(t)=\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t^2+1}$. وأيضاً : $G(s)=\frac{1}{s^3}$ ومن ثم : $g(t)=\frac{t^2}{2}, G(t)=\frac{1}{t^3}$.

ومنه :

$$I=\int_0^\infty f(t)G(t)dt=\int_0^\infty g(t)F(t)dt=$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{t^2}{2}\left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^2+1}\right)dt = \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\left(1 - \frac{t^2}{t^2+1}\right)dt =$$

$$= \frac{1}{2}[\tan^{-1} t]_0^{\infty} = \frac{\pi}{4}$$

(4) احسب التكامل المعتل : $I = \int_0^{\infty} \frac{1-e^{-at}}{t \cdot e^t} dt$.

الحل : $f(t) = e^{-t} - e^{-(a+1)t}$ ومن ثم : $F(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+a+1}$ ومن ثم :

$F(t) = \frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+a+1}$. وأيضاً : $G(s) = \frac{1}{s}$ ومن ثم : $g(t) = 1,\ G(t) = \frac{1}{t}$.

ومنه :

$$I = \int_0^{\infty} f(t)G(t)dt = \int_0^{\infty} F(t)g(t)dt =$$

$$= \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+a+1}\right)dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\ln\left|\frac{t+1}{t+a+1}\right|\right]_0^{\infty} = \ln|a+1|$$

6- أوجد ذلك الحل للمعادلة التفاضلية : $y'' + 2y' + y = t \cdot e^{-t}$ ،

الذي يحقق الشروط الابتدائية : $y'(0) = 2$ ، $y(0) = 1$ ،

الحل : بفرض $L[y(t)] = Y(s)$ فيكون بأخذ L لطرفي المعادلة :

$$s^2Y(s) - s \cdot y(0) - y'(0) + 2sY(s) - 2y(0) + Y(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$$

$$(s^2 + 2s + 1) \cdot Y(s) - s - 2 - 2 = \frac{1}{(s+1)^2}$$

$$(s+1)^2 \cdot Y(s) = s + 4 + \frac{1}{(s+1)^2}$$

$$Y(s) = \frac{s+4}{(s+1)^2} + \frac{1}{(s+1)^4}$$

$$y(t) = e^{-t} + 3te^{-t} + \frac{1}{6}t^3e^{-t}$$

7- أوجد ذلك الحل للمعادلة التفاضلية : $y'' - y' - 6y = 2$.

الذي يحقق الشروط الابتدائية : $y'(0) = 2$ ، $y(0) = 1$.

الحل :

$$s^2Y(s) - s \cdot y(0) - y'(0) - sY(s) + y(0) - 6Y(s) = \frac{2}{s}$$

$$(s^2 - s - 6) \cdot Y(s) - s - 2 + 1 = \frac{2}{s}$$

$$Y(s) = \frac{s^2 + s + 2}{s(s-3)(s+2)}$$

$$y(t) = -\frac{1}{3} + \frac{14}{15}e^{3t} + \frac{2}{5}e^{-2t}$$

8- أوجد ذلك الحل لجملة المعادلتين التفاضليتين :

$$y'' - 4z' + 3y = 15\sin 2t$$

$$z'' + y' + 3z = 15e^{-t}$$

الذي يحقق الشروط الابتدائية :

$$y(0) = 27 \ , \ y'(0) = -55$$

$$z(0) = 35 \ , \ z'(0) = -48$$

الحل :

$$s^2Y(s) - s \cdot y(0) - y'(0) - 4sZ(s) + 4z(0) + 3Y(s) = \frac{30}{s^2+4}$$

$$s^2Z(s) - s \cdot z(0) - z'(0) + sY(s) - y(0) + 3Z(s) = \frac{15}{s+1}$$

ومنه :

$$Y(s) = \frac{30\,s}{s^2+9} - \frac{60}{s^2+1} - \frac{3}{s+1} + \frac{2}{s^2+4}$$

$$Z(s) = \frac{30\,s}{s^2+1} - \frac{45}{s^2+9} + \frac{3}{s+1} + \frac{2s}{s^2+4}$$

ومن ثم فإن :

$$y(t) = 30\cos 3t - 60\sin t - 3e^{-t} + \sin 2t$$

$$z(t) = 30\cos t - 15\sin 3t + 3e^{-t} + 2\cos 2t$$

9- تمرين مشهور : إذا كانت

$f_0(t)\frac{d^n y}{dt^n} + f_1(t)\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots + f_n(t)y(t) = f(t)$ معادلة تفاضلية ذات أمثال تابعة لـ t مثل $f_i(t)$ ، حيث $f_i(t)$ كثير حدود من أجل $i = 0,1,2,\cdots,n$ ، فإنه ، بالتأثير على طرفيها بتحويل لابلاس L ، يتم الحصول على معادلة تفاضلية أخرى يمكن حلها باستخدام تحويل لابلاس أو بإحدى الطرق الأخرى ، علماً بأن تحويلات لابلاس للتوابع :

$$y(t) \ , \ t \cdot y(t) \ , \ t^2 y(t) \ , \ \cdots$$

$$y'(t) \ , \ t \cdot y'(t) \ , \ t^2 y'(t) \ , \ \cdots$$

$$y''(t)\ ,\ t\cdot y''(t)\ ,\ t^2 y''(t)\ ,\ \cdots$$
$$\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots$$

هي من الشكل :

$$L[y(t)]=Y(s)\ ,\ L[t\cdot y(t)]=-Y'(s)\ ,L[t^2 y(t)]=Y''(s)\ ,\ \cdots$$

$$L[y'(t)]=sY(s)-y(0)\ ,\ L[t\cdot y'(t)]=-sY'(s)-Y(s)\ ,\ \cdots$$

$$L[y''(t)]=s^2Y(s)-sy(0)-y'(0), L[ty''(t)]=-s^2Y'(s)-2sY(s)+y(0),\cdots$$

$$\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots$$

تطبيقات : (1) أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية :

$$ty''(t)-(1+t)y'+2(1-t)y=0$$

الحل : ليكن $y(t)$ الحل العام للمعادلة المدروسة فيكون $L[y(t)]=Y(s)$.

وأيضاً : $L[ty''(t)]=-s^2Y'(s)-2sY(s)+y(0)$

$$L[y'(t)]=sY(s)-y(0)$$

$$L[ty']=-sY'(s)-Y(s)$$

$$L[ty]=-Y'(s)$$

ومنه ، بالتعويض في المعادلة التفاضلية المدروسة ، فيكون :

$$-s^2Y'(s)-2sY(s)+y(0)-sY(s)+y(0)+sY'(s)$$
$$+Y(s)+2Y(s)+2Y'(s)=0$$

ومنه : $(-s^2+s+2)Y'(s)-3(s-1)Y(s)+2y(0)=0$

ومن ثم : $\dfrac{dY(s)}{ds}+\dfrac{3(s-1)}{s^2-s-2}Y(s)=\dfrac{2y(0)}{s^2-s-2}$

وهذه ليست إلا معادلة تفاضلية خطية من المرتبة الأولى بطرف ثان . ولحلها نوخذ المعادلة التي بدون طرف ثان :

$$\frac{dY(s)}{Y(s)} = -\frac{3(s-1)}{(s-2)(s+1)}ds$$

والتي حلها العام هو : $Y(s) = \frac{c}{(s-2)(s+1)^2}$ حيث c ثابت كيفي .

ثم بعد تحويل الثابت c والتعويض في المعادلة بطرف ثان نجد

$c = y(0)(s+1)^2 + k$ حيث k ثابت كيفي . ومنه يكون :

$$Y(s) = \frac{y(0)}{s-2} + \frac{k}{(s-2)(s+1)^2}$$

ومنه : $y(t) = L^{-1}[Y(s)]$ أي :

$$y(t) = y(0)e^{2t} + \frac{k}{9}e^{2t} - \frac{k}{9}e^{-t} + \frac{k}{3}te^{-t}$$

أي : $y(t) = [y(0) + \frac{k}{9}]e^{2t} + [-\frac{k}{9} + \frac{3k}{9}t]e^{-t}$

أي : $y(t) = [y(0) + \frac{k}{9}]e^{2t} + (-\frac{k}{9})(1-3t)e^{-t}$

أي : $y(t) = a_1 e^{2t} + a_2(1-3t)e^{-t}$

حيث $a_2 = -\frac{k}{9}$ ، $a_1 = y(0) + \frac{k}{9}$.

(2) أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية : $ty'' + y' + y = t$.

الحل :

$$L[ty''] + L[y'] + L[y] = L[t]$$

$$-s^2Y'(s)-2sY(s)+y(0)+sY(s)-y(0)+Y(s)=\frac{1}{s^2}$$

$$-s^2Y'(s)+(1-s)Y(s)=\frac{1}{s^2}$$

$$Y(s)=\frac{c}{s}e^{-\frac{1}{s}}+\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s}$$

$$y(t)=cL^{-1}[\frac{1}{s}e^{-\frac{1}{s}}]+t-1$$

$$y(t)=cJ_0(2\sqrt{t})+t-1$$

لأن $J_0(x)$ هو تابع بيسل من أجل $k=0$ ، أيْ :

$$J_0(2\sqrt{t})=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2\sqrt{t})^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n2^{2n}t^n}{2^{2n}(n!)^2}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}t^n$$

ومن ثم :

$$L[J_0(2\sqrt{t})]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}\cdot\frac{n!}{s^{n+1}}=\frac{1}{s}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}(\frac{1}{s})^n=\frac{1}{s}e^{-\frac{1}{s}}$$

10- تمرين مشهور : يقال عن المساواة :

$$x(t)y(t)-\lambda\int_0^t k(t,u)y(u)du=f(t)$$

إنها **معادلة تكاملية خطية** يكون فيها التابع المجهول هو $y(t)$ والمتغير المستقل هو t .

أما $f(t)$, $x(t)$ فهما تابعان معرفان ومستمران على مجال ما .

هذا ويدعى $k(t,u)$ **نواة المعادلة التكاملية** .

يقال عن المعادلة التكاملية ذات الشكل : $\int_0^t k(t,u)y(u)du = f(t)$ إنها معادلة فولتيرا الأولى .

ويقال عن المعادلة التكاملية ذات الشكل : $y(t) - \lambda \int_0^t k(t,u)y(u)du = f(t)$ ، حيث λ وسيط معلوم ، إنها معادلة فولتيرا الثانية .

تطبيقات :

(1) أوجد حل المعادلة التكاملية الآتية :

$$\int_0^t \sin(t-u)y(u)du = \sin^2 t$$

الحل :

$$L[\int_0^t \sin(t-u)y(u)du] = L[\sin^2 t]$$

$$L[\sin t]\cdot L[y(t)] = \frac{1}{2}L[1-\cos 2t] \quad \text{(مبرهنة الطي)}$$

$$\frac{1}{s^2+1}\cdot L[y(t)] = \frac{1}{2}(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+4})$$

$$L[y(t)] = \frac{2(s^2+1)}{s(s^2+4)} = \frac{1}{2s} + \frac{3s}{s(s^2+4)}$$

$$y(t) = L^{-1}[\frac{1}{2s} + \frac{3s}{2(s^2+4)}] = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\cos 2t$$

(2) أوجد حل المعادلة التكاملية الآتية :

$$y(t) - \int_0^t (t-u)y(u)du = \sin t$$

الحل : بالتأثير على طرفي المعادلة بمؤثر لابلاس L وباستخدام مبرهنة الطي يكون :

$$L[y(t)] - L[t]L[y(t)] = L[\sin t]$$

$$L[y(t)](1 - \frac{1}{s^2}) = \frac{1}{s^2+1}$$

$$L[y(t)] = \frac{s^2}{(s^2+1)(s^2-1)} = \frac{1}{2(s^2+1)} + \frac{1}{2(s^2-1)}$$

$$y(t) = \frac{1}{2}L^{-1}[\frac{1}{s^2+1} + \frac{1}{s^2-1}] = \frac{1}{2}(\sin t + sht)$$

(3) أوجد حل المعادلة التفاضلية ـ التكاملية الآتية :

$$y'' - 4\int_0^1 e^{-(t-u)}[y'(u) + y(u)]du = 0$$

وذلك بفرض أن الشروط الابتدائية هي : $y'(0) = 12$, $y(0) = 0$.

الحل : $L[y''] - 4L[e^{-t}]L[y' + y] = 0$

$$s^2L[y] - sy(0) - y'(0) - 4\frac{1}{s+1}\{sL[y] - y(0) + L[y]\} = 0$$

$$L[y] = \frac{12}{s^2-4}$$

$$y = 6sh2t$$

(4) أوجد حل المعادلة الآتية :

$$y'(t) + \int_0^t y(u)[\cos(t-u) - 2]du = 0$$

الحل : بالتأثير على الطرفين بـ L يكون :

$$sL[y] - y(0) + L[y] \cdot L[\cos t - 2] = 0$$

$$sL[y] + L[y][\frac{s}{s^2+1} - \frac{2}{s}] = y(0) = c$$

$$L[y][s + \frac{-s^2-2}{s(s^2+1)}] = c$$

$$L[y] = \frac{cs(s^2+1)}{s^4-2} = \frac{c}{4}[\frac{(2-\sqrt{2})s}{s^2+\sqrt{2}} + \frac{(2+\sqrt{2})s}{s^2-\sqrt{2}}]$$

$$y(t) = \frac{c}{4}(2-\sqrt{2})\cos\sqrt[4]{2}t + \frac{c}{4}(2+\sqrt{2})ch\sqrt[4]{2}t$$

11- تمرين مشهور : يقال عن المساواة :

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + c\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + d\frac{\partial u}{\partial t} + e\frac{\partial u}{\partial t} + Mu = g(x,t)$$

إنها **معادلة تفاضلية جزئية خطية** من المرتبة الثانية ، حيث :

a,b,c,d,e,M ثوابت عددية ، وحيث $u(x,t)$ هو التابع المجهول الذي يطلب تعيينه ضمن شروط معطاة ، ومن الواضح أنه يتبع للمتغيرين x,t ، أما $g(x,t)$ فهو تابع معلوم .

هذا وتجدر الإشارة إلى أنه إذا كان المراد هو إيجاد تحويل لابلاس للتابع $u(x,t)$ بالنسبة للمتغير x فيجب أن يعد t بمثابة ثابت ويكون عند ذلك :

$$L[u(x,t)] = U(s,t) = \int_0^{\infty} e^{-sx} u(x,t)dx$$

أما إذا كان المراد هو إيجاد تحويل لابلاس للتابع $u(x,t)$ بالنسبة للمتغير t فيجب أن يعد x بمثابة ثابت ويكون عند ذلك :

$$L[u(x,t)] = U(x,s) = \int_0^{\infty} e^{-st} u(x,t)dt$$

والآن ، إذا أخذ تحويل لابلاس لطرفي المعادلة التفاضلية المدروسة ، وبفرض $L[g(x,t)] = G(x,s)$ ، فمن الملاحظ أنه تلزم الحسابات الآتية :

$$L[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}] = \int_0^{\infty} e^{-st} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} dt = \frac{d^2}{dx^2} \int_0^{\infty} e^{-st} u(x,t)dt = \frac{d^2}{dx^2} U(x,s)$$

$$L[\frac{\partial u}{\partial x}] = \int_0^{\infty} e^{-st} \frac{\partial u}{\partial x} dt = \frac{d}{dx} \int_0^{\infty} e^{-st} u(x,t)dt = \frac{d}{dx} U(x,s)$$

$$L[\frac{\partial u}{\partial t}] = \int_0^{\infty} e^{-st} \frac{\partial u}{\partial t} dt = -u(x,0) + sU(x,s)$$

$$L[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}] = \int_0^{\infty} e^{-st} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dt = -\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} - su(x,0) + s^2 U(x,s)$$

$$L[\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}] = \int_0^{\infty} e^{-st} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} dt = -\frac{du}{dx}\Big|_{t=0} + s\frac{d}{dx} U(x,s)$$

ثم بتعويض نتائج هذه الحسابات في المعادلة التفاضلية الجزئية المدروسة وبتعويض القيم المأخوذة من الشروط المفروضة التي تكون معطاة يتم الحصول على معادلة تفاضلية خطية من المرتبة الثانية ذات أمثال ثابتة . ثم بعد الحصول على حل هذه المعادلة الأخيرة يؤخذ تحويل لابلاس المعاكس فيتم الحصول على حل المعادلة التفاضلية المدروسة .

ملاحظة : إذا وجد أنه من الأفضل أخذ تحويل لابلاس لطرفي المعادلة بالنسبة للمتغير x فإن :

$$L[g(x,t)] = G(s,t)$$

$$L[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}] = \frac{d^2 U}{dt^2} \quad , \quad L[\frac{\partial u}{\partial t}] = \frac{dU}{dt}$$

$$L[\frac{\partial u}{\partial x}] = -u(0,t) + sU(s,t)$$

$$L[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}] = -\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} - su(0,t) + s^2 U(x,s)$$

$$L[\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}] = -\left.\frac{dU}{dt}\right|_{x=0} + s\frac{dU}{dt}$$

تطبيقات :

(1) أوجد حل المعادلة التفاضلية الجزئية الآتية :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \sin x$$

، حيث $t > 0$ ، وذلك ضمن الشروط الآتية :

الشروط الابتدائية هي : $u(x,0) = 0$ ، $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$

الشروط الحدية هي : $u(0,t) = 0$ ، $u(\pi,t) = \pi$

الحل :

$$L[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}] = L[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}] - L[\sin x]$$

ولكن $L[u(x,0)] = U(x,s)$ ، $L[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}] = \frac{d^2U}{dx^2}$

$L[\sin x] = \frac{\sin x}{s}$ ، $L[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}] = s^2U(x,s) - su(x,0) - \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}$

إذاً : $s^2U(x,s) = \frac{d^2U(x,s)}{dx^2} - \frac{\sin x}{s}$

أي أن : $\frac{d^2U}{dx^2} - s^2U = \frac{\sin x}{s}$

وهذه معادلة تفاضلية خطية من المرتبة الثانية ذات أمثال ثابتة . ولحلها يجب أخذ المعادلة بدون طرف ثان ، أي :

$$\frac{d^2U}{dx^2} - s^2U = 0$$

والمعادلة المميزة لها هي : $\lambda^2 - s^2 = 0$ ، ومن ثم $\lambda = \mp s$ ، ومن ثم فالحل العام للمعادلة بدون طرف ثان هو :

$$U(x,s) = c_1e^{sx} + c_2e^{-sx}$$

بوضع $U(x,s) = A\cos x + B\sin x$ لأجل البحث عن حل خاص للمعادلة بطرف ثان يكون :

$$-(s^2+1)A\cos x - B(s^2+1)\sin x = \frac{\sin x}{s}$$

ومن ثم فإن : $A = 0$ ، $B = \frac{-1}{s(s^2+1)}$ ، أي أن الحل الخاص المذكور هو :

$$U = -\frac{1}{s(s^2+1)}\sin x$$

إذن فالحل العام للمعادلة المذكورة هو : $U(x,s)=c_1e^{sx}+c_2e^{-sx}-\frac{\sin x}{s(s^2+1)}$

ولتحديد الثوابت c_1,c_2 يمكن ، استناداً إلى الشروط الحدية المذكورة في النص ، يمكن كتابة أن :

$$U(\pi,s)=L[u(\pi,t)]=L[\pi]=\frac{\pi}{s}$$

$$U(0,s)=L[u(0,t)]=0$$

ومن ثم فإن : $c_1+c_2=0$ أي أن :

$$c_1=\frac{\pi}{s(e^{\pi s}-e^{-\pi s})}=-c_2$$

وبأخذ معكوس تحويل لابلاس لطرفي العلاقة الناتجة بعد التعويض النهائي يتم الحصول على $u(x,t)$.

(2) أوجد حل المعادلة التفاضلية : $\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}+\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=x+t$.

ضمن الشروط الابتدائية والحدية : $u(0,t)=u(x,0)=1$.

الحل : بفرض $L[u(x,t)]=U(x,s)$ وبتطبيق تحويل لابلاس على طرفي المعادلة المدروسة يكون :

$$\frac{dU(x,s)}{dx}+sU(x,s)-u(x,0)=\frac{x}{s}+\frac{1}{s^2}$$

وحسب الشرط الابتدائي يكون :

$$U'+sU=1+\frac{x}{s}+\frac{1}{s^2}$$

وهذه معادلة تفاضلية حلها العام هو : $U(x,s) = ce^{-ax} + (\frac{x}{s^2} + \frac{1}{s})$ ولكن

$L[u(0,t)] = U(0,s)$ ، $L[u(0,t)] = L[1] = \frac{1}{s}$ حسب الشرط الحدي ، إذا

$U(0,s) = c + \frac{1}{s} = \frac{1}{s}$ ومن ثم فإن $c = 0$ ومن ثم فإن : $U(x,s) = \frac{x}{s^2} + \frac{1}{s}$ ومن ثم

فإن : $u(x,t) = xt + 1$ وذلك بعد التأثير بالمؤثر L^{-1} .

(3) أوجد الحل للمعادلة التفاضلية الجزئية : $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

ضمن الشروط الابتدائية : $\frac{\partial u(x,0)}{\partial x} = 0$ ، $u(x,0) = E \sin \frac{\pi x}{l}$

وضمن الشروط الحدية : $u(0,t) = u(l,t) = 0$ ، حيث l, E, a ثوابت .

الحل : بالتأثير على طرفي المعادلة بالمؤثر L وباستخدام الشروط الابتدائية يكون :

$$s^2 U(x,s) - sE \sin \frac{\pi x}{l} = a^2 \frac{d^2 U(x,s)}{dx^2}$$

أي : $$\frac{s^2}{a^2} U(x,s) = -\frac{sE}{a^2} \sin \frac{\pi x}{l} \frac{d^2 U(x,s)}{dx^2}$$

وهذه المعادلة حلها العام هو :

$$U(x,s) = a_1 e^{\frac{s}{a}x} + a_2 e^{-\frac{s}{a}x} + \frac{l^2 sE}{a^2 \pi^2 + l^2 s^2} \sin \frac{\pi x}{l}$$

ويمكن تعيين الثوابت a_1, a_2 من الشروط الحدية التي لها الشكل :

$$L[u(0,t)] = U(0,t) = 0 \ , \ L[u(l,t)] = U(l,t) = 0$$

التي تعطي $a_1 = a_2 = 0$. ومنه :

$$U(x,s)=\frac{l^2 sE}{a^2\pi^2+l^2 s^2}\sin\frac{\pi x}{l}$$

حسب L^{-1} يكون : $u(x,t)=E\cos\frac{\pi a}{l}t\cdot\sin\frac{\pi x}{l}$.

(4) حل المعادلة التفاضلية : $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

ضمن الشروط الحدية :

$$u(0,t)=f(t)\ ,\ f(t)=\begin{cases}\sin t & (0\le t\le 2\pi)\\ 0 & (\text{في الحالات الأخرى})\end{cases}$$

وضمن الشروط الابتدائية : $u(x,0)=0\ ,\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0$

الحل : يترك للقارئ .

18-7- ملخص لأهم قوانين تحويلات لابلاس (الحقيقية) :

التابع	تحويل لابلاس
$f(t)$	$L[f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt = F(s)$
1	$\frac{1}{s} \quad (s>0)$
t	$\frac{1}{s^2} \quad (s>0)$
$\sqrt{t}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2s\sqrt{s}} \quad (s>0)$
$\frac{1}{\sqrt{t}}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}} \quad (s>0)$
t^{n-1} (n عدد حقيقي موجب)	$\frac{\Gamma(n)}{s^n} \quad (s>0)$
t^n (n عدد صحيح موجب)	$\frac{n!}{s^{n+1}} \quad (s>0)$
e^{at}	$\frac{1}{s-a} \quad (s>a)$
$\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2} \quad (s>0)$
$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2} \quad (s>0)$
$t\sin at$	$\frac{2as}{(s^2+a^2)^2} \quad (s>0)$
$t\cos at$	$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2} \quad (s>0)$
te^{at}	$\frac{1}{(s-a)^2} \quad (s>a)$
$t^{n-1}e^{at}$ (n عدد حقيقي موجب)	$\frac{\Gamma(n)}{(s-a)^n} \quad (s>a)$

$t^{n-1}e^{at}$ (n عدد صحيح موجب)	$\frac{n!}{(s-a)^n} \quad (s>a)$
$e^{at}\sin bt$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2} \quad (s>a)$
$e^{at}\cos bt$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2} \quad (s>a)$
$e^{at}f(t)$	$F(s-a) \quad (s>a)$
$t^n f(t)$ (n عدد صحيح موجب)	$(-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}$
$\frac{df(t)}{dt}$	$sF(s)-f(0)$
$\frac{d^2 f(t)}{dt^2}$	$s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$
$\frac{d^3 f(t)}{dt^3}$	$s^3F(s)-s^2f(0)-sf'(0)-f''(0)$
$\int_0^t f(u)du$	$\frac{1}{s}F(s)$

المؤثر L خطي و المؤثر L^{-1} خطي .

19-7- تمارين للحل :

[1] أثبت صحة كل مما يأتي ، حيث L هو المؤثر الذي يدل على تحويل لابلاس:

$$L[te^{-at}] = \frac{1}{(s+a)^2} \quad (1)$$

$$L[e^{-t}\cos 2t + 2e^{-t}\sin 2t] = \frac{s+5}{s^2+2s+5} \quad (2)$$

$$L[-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}e^{-2t}]=\frac{s-1}{s(s+2)} \quad (3)$$

$$L[-\frac{1}{6}+\frac{3}{10}e^{2t}-\frac{2}{15}e^{-3t}]=\frac{s+1}{s(s^2+s-6)} \quad (4)$$

$$L[\frac{e^{at}-e^{bt}}{a-b}]=\frac{1}{(s-a)(s-b)} \quad (5)$$

$$L[\frac{1}{a^2}(1-\cos at)]=\frac{1}{s(s^2+a^2)} \quad (6)$$

$$L[(3t-8)e^{t}+(t^2+5t+8)]=\frac{s+2}{s^2(s-1)^2} \quad (7)$$

$$L[kt-\sin kt]=\frac{k^3}{s^2(s^2+k^2)} \quad (8)$$

$$L[(2t+1)e^{-t}-e^{-3t}]=\frac{4s+8}{(s+3)(s+1)^2} \quad (9)$$

$$L[(-1+2e^{-at})]=\frac{s-a}{s(s+a)} \quad (10)$$

$$L[\frac{1}{2a}(\sin at+at\cos at)]=\frac{s^2}{(s^2+a^2)^2} \quad (11)$$

$$L[\frac{1}{2a^3}(\sin at-at\cos at)]=\frac{1}{(s^2+a^2)^2} \quad (12)$$

[2] أوجد تحويل لابلاس لكل من التوابع الآتية :

$3e^{t}-e^{-t}$, $3t^2-1$, $\frac{1}{2}t^3+2t^2-3$, $3\sin t-2\cos t$

(يتم الحصول هنا على متسلسلة هندسية) $1+\frac{1}{1!}t+\frac{1}{2!}t^2+\cdots+\frac{1}{n!}t^n$

(اكتب هذا التابع بدلالة $\cos 2t$) $3\cos 2t-2\cos 5t+1\ ,\ \cos^2 t$

$$\sin^2 t\ ,\ t^2e^t\ ,\ e^{-2t}t\ ,\ t^2e^{-t}$$

$$e^{2t}\cos t-e^{-t}\sin t\ ,\ e^t\sin 3t+t\cos 3t$$

$$e^{-3t}\cos 2t+t^2\sin t-t\sin 3t$$

$t^4\cdot e^{-t}$ (باستخدام ثلاث طرائق هي : الضرب بـ t^4 ، الضرب بـ e^{-t} ، الحساب المباشر).

$$\cos(3t+\frac{\pi}{4})\ ,\ \sin(2t-\frac{\pi}{6})\ ,\ \cos(t-\frac{\pi}{3})\ ,\ \sin(\frac{\pi}{3}-t)$$

[3] (i) أثبت ان : $L^{-1}[\frac{s-1}{s\sqrt{s}}]=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}-2\sqrt{\frac{t}{\pi}}$ ، حيث L^{-1} هو المؤثر الذي يدل على تحويل لابلاس العكسي .

(ii) استنتج تحويل لابلاس للتابع $t\sin kt$ باشتقاق تحويل لابلاس للتابع $\cos kt$ بالنسبة إلى k.

[4] أوجد تحويل لابلاس العكسي لكل من التوابع الأتية :

$$\frac{1}{s^2+s-1}\ ,\ \frac{s}{s^2-1}\ ,\ \frac{(2s-1)}{s^2-1}\ ,\ \frac{1}{s^2+4}\ ,\ \frac{3s-1}{s^2+2}\ ,\ \frac{s^2-1}{s(s-1)(s+2)(s+3)}$$

$$\frac{2s+1}{s^2-2s+2}\ ,\ \frac{s}{(s^2+1)(s^2+4)}\ ,\ \frac{1}{s}-\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s^3}-\frac{1}{s^4}\ ,\ \frac{6}{s^3}+\frac{2}{s+1}-\frac{5s}{s^2+1}$$

$$\frac{2}{s^2+6s+13}\ ,\ \frac{6}{(s-4)^4}\ ,\ \frac{1}{(s+3)^4}\ ,\ \frac{1}{s^2+s}\ ,\ \frac{s+1}{s^3+4s}\ ,\ \frac{3s+2}{s^2+2s+2}$$

[5] بفرض $L[x(t)] = X(s)$ فأوجد تحويل لابلاس للعبارة :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 3x$$

وذلك إذا علمت أن $x = 4$, $\frac{dx}{dt} = 5$ عندما $t = 0$.

[6] أوجد الحل الخاص $x(t)$ للمعادلة التفاضلية $\frac{dx}{dt} + 2x = e^{-t}$ الذي يحقق الشرط $x = 3$ عندما $t = 0$ ، وذلك باستخدام تحويلات لابلاس .

[إرشاد : افرض $L[x(t)] = X(s)$ ، ثم قم بتأثير L على طرفي المعادلة وعوض بناء على الشرط المفروض و استنتج $X(s)$ ، ثم استنتج أن الجواب هو : $x(t) = e^{-t} + 2e^{-2t}$] .

[7] بفرض $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 4x = 1$. أوجد ذلك الحل الخاص $x(t)$ الذي يحقق شروط البدء $x(0) = x'(0) = 0$.

[إرشاد : افرض $L[x(t)] = X(s)$ واستنتج أن :

$$x(t) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}(e^{-t}\cos\sqrt{3}t + \frac{1}{3}\sqrt{3}e^{-t}\sin\sqrt{3}t)$$]

[8] أوجد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية $\frac{d^2x}{dt^2} + w_0^2 x = a\cos w_0 t$ والذي يحقق الشرط $x(0) = x'(0) = 0$.

[الجواب : $x(t) = \frac{a}{2w_0} t\sin w_0 t$] .

[9] أوجد حل الجملة : $\frac{dy}{dt} = x + y$, $\frac{dx}{dt} = x - y$

الذي يحقق شروط البدء $x(0)=1\ ,\ y(0)=0$.

[إرشاد : افرض $L[x(t)]=X(s)$ و $L[y(t)]=Y(s)$ ثم استنتج أن الجواب هو :

$x(t)=e^t\cos t\ ,\ y(t)=e^t\sin t$.]

[10] بفرض أن $h(t)$ هو تابع الخطوة الواحدة وأن :

$$x(t)=h(t)-2h(t-1)+2h(t-2)-2h(t-3)+\cdots$$

فاثبت أن $L[x(t)]=\dfrac{1-e^{-s}}{s(1+e^{-s})}$.

[11] استعمل تحويل لابلاس لحل المسائل الآتية :

$$\frac{d^2x}{dt^2}-x=te^t\ ,\ x(0)=1\ ,\ \frac{dx}{dt}(0)=1$$

$$\frac{d^3x}{dt^3}-2\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{dx}{dt}+2x=e^{-2t}\ ,\ x=\frac{dx}{dt}=0\ ,$$

$\dfrac{d^2x}{dt^2}=2$ وكل ذلك عندما $t=0$.

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\frac{dx}{dt}+2x=3\ ,\ x=1\ ,\ \frac{dx}{dt}=0 \qquad (\text{عندما } t=0)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}+w_0x=c\cos wt\ ,\ x=x_0\ \ \frac{dx}{dt}=y_0 \qquad (\text{عندما } t=0)$$

[12] (i) إذا كان $f(t)=\dfrac{A(t)}{B(t)}$ ، حيث $A(t)$ كثير حدود من الدرجة m و $B(t)$ كثير حدود من الدرجة n ، $(n>m)$ ، وذات أصفار بسيطة ، [أي :

$B(t)=(t-a_1)\cdots(t-a_n)$ ، $a_i\neq a_j$ $(i\neq j)$] وكان $A(t)$ و $B(t)$ لا يملكان

عوامل مشتركة ، ومن ثم فإن : $f(t)=\sum_{i=1}^{n}\frac{k_i}{t-a_i}$ ، فالمطلوب :

أثبت أن : $k_i=\frac{A(a_i)}{B'(a_i)}$

[إرشاد : اضرب طرفي المساواة بكثير الحدود $B(t)$ ثم احسب نهاية الطرفين عندما $x\to a_i$].

(ii) إذا كان $F(s)=\frac{A(s)}{B(s)}$ تحويل لابلاس للتابع $f(t)$ فاثبت أن :

$$L^{-1}[F(s)]=\sum_{i=1}^{n}\frac{A(a_i)}{B(a_i)}e^{a_i t}$$

(iii) أثبت أن : $L^{-1}[\frac{30(s+1)}{s(s^2+s-6)}]=-5+9e^{2t}-4e^{-3t}$.

[13] أثبت صحة الأتي :

$$L^{-1}[\frac{s^3+2s-1}{(s^2-3s+2)(s^2-7s+12)}]=-\frac{1}{3}e^{t}+\frac{11}{2}e^{2t}-16e^{3t}+\frac{71}{6}e^{4t}$$

$$L^{-1}[\frac{s+1}{s(s^2+1)}]=1-\frac{i+1}{2}e^{it}-\frac{1-i}{2}e^{-it}=1-\cos t+\sin t$$

[14] أوجد قيمة كل من التكاملات الأتية :

$$\int_0^{\infty}e^{-2t}\cos 3t\,dt\ ,\ \int_0^{\infty}e^{-\frac{1}{2}t}t\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\,dt\ ,\ \int_0^{\infty}e^{-\frac{1}{4}t}\frac{1}{\sqrt{t}}\,dt$$

[إرشاد : استفد من تعريف تحويل لابلاس للتابع $f(t)$ وعوّض فيه s بما يناسب].

الفصل الثامن

متسلسلات فوريه وتكاملات فوريه

- التوابع الدورية وخواصها.
- المتسلسلات المثلثية.
- متسلسلة فوريه وتقاربها.
- الشكل العقدي لمتسلسلة فوريه.
- نشر التابع المعطى على جزء من المجال $[-\pi,\pi]$ في متسلسلة مثلثية.
- نشر التوابع في متسلسلات فوريه في الحالات المختلفة.
- اشتقاق متسلسلة فوريه وتكاملها.
- تكامل فوريه.
- تمثيل التابع المعرف في المجال $[0,\infty[$ بتكامل فوريه.
- تمارين محلولة.
- تمارين للحل.

Damascus University

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الفصل الثامن

متسلسلات فوريه وتكاملات فوريه

8-1- التوابع (الدوال) الدورية : ليكن $y = f(x)$ تابعاً معرفاً على $\mathbb{R}$.

تعريف (1) : يقال عن $f(x)$ إنه تابع دوري إذا وجد عدد مغاير للصفر مثل T بحيث يكون $f(x+T) = f(x)$ من أجل جميع قيم x.

ينتج من هذا أنه إذا كان T عدداً يحقق شروط التعريف (1)، وكان n عدداً صحيحاً كيفياً ومغايراً للصفر، فإن العدد nT يحقق شروط التعريف (1).

تعريف(2) : ليكن $f(x)$ تابعاً دورياً. يقال عن أصغر عدد حقيقي موجب تماماً مثل T (إن وجد) بحيث يكون $f(x+T) = f(x)$ من أجل جميع قيم x إنه دور التابع $y = f(x)$.

أمثلة :

(1) إن كلاً من التابعين $y = \sin x$ و $y = \cos x$ يكون تابعاً دورياً، دوره $T = 2\pi$.

(2) إن كلاً من التابعين $y = tgx$ و $y = \cot gx$ يكون تابعاً دورياً، دوره $T = \pi$.

(3) التابع الثابت (مثل $y = k$) دوري، دوره غير معيّن.

بعض خواص التوابع الدورية:

(1) إن كلاً من حاصل جمع أو حاصل طرح أو حاصل ضرب أو حاصل قسمة تابعين دوريين، لهما الدور T نفسه، يكون تابعاً دورياً، له الدور T ذاته، بشرط عدم القسمة على صفر طبعاً.

وتجدر الإشارة إلى أنه إذا كانت التوابع الدورية ذات أدوار مختلفة، فإن حاصل جمعها أو طرحها أو ضربها أو قسمتها يكون أيضاً تابعاً دورياً، يتعين دوره بشكل منطقي مناسب.

(2) إذا كان التابع $f(x)$ دورياً، دوره T، وكان a عدداً حقيقياً مغايراً للصفر، فإن التابع $\varphi(x)=f(ax)$ يكون دورياً، دوره $\frac{T}{|a|}$.

البرهان : يكفي ملاحظة أنّ:

$$\varphi(x+\frac{T}{|a|})=f[a(x+\frac{T}{|a|})]=f(ax\mp T)=f(ax)=\varphi(x)$$

من أجل جميع قيم x، لأن $f(x\mp T)=f(x)$ مادام (دور $f(x)$ هو T).

(3) ليكن $y=f(x)$ تابعاً دورياً، دوره T. عندئذ:

$$\int_{c}^{c+T} f(x)dx=\int_{0}^{T} f(x)dx$$ وذلك من أجل أي عدد c.

البرهان : يكفي ملاحظة أنه بوضع $x=u+T$ ، يكون:

$$\int_{T}^{c+T} f(x)dx=\int_{0}^{c} f(u+T)du=\int_{0}^{c} f(u)du=\int_{0}^{c} f(x)dx$$

ومن ثم :

$$\int_{c}^{c+T} f(x)dx=\int_{c}^{T} f(x)dx+\int_{T}^{c+T} f(x)dx=$$

$$=\int_{c}^{T} f(x)dx+\int_{0}^{c} f(x)dx=\int_{0}^{T} f(x)dx$$

ملاحظة:

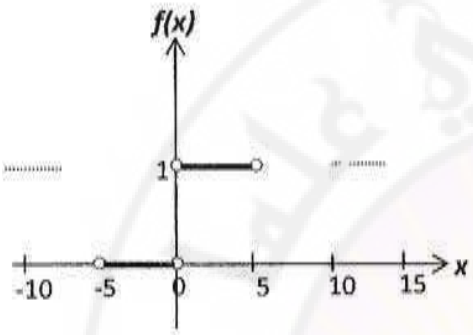
يمكن تعريف التابع الدوري، من وجهة نظر هندسية تخص بيانه، بأنه ذلك التابع الذي له شكل معين يتكرر بانتظام على مجالات (فترات) طول كل منها ثابت

مثل T، حيث يدعى T دور هذا التابع المدروس.

كما إن كل شكل تام، يشغل طولاً معادلاً للدور،

يمكن أن يقال عنه إنه " دورة ".

مثال(1):



يبيّن الشكل المجاور تابعاً دورياً مرسوماً

في جملة المحورين $x, f(x)$

حيث يقاس x بالميلي ثانية. عندئذ:

(i) دور هذا التابع هو $T = 10$ (مقدر بالميلي ثانية).
(ii) يمكن ملاحظة 100 دورة في 1 ثانية.

مثال(2):

التابع $f(x) = -5 + 2\sin 3x$ دوري، دوره $T = \frac{2\pi}{3}$، لأنّ:

$$f(x+T) = -5 + 2\sin 3(x + \frac{2\pi}{3}) = -5 + 2\sin(3x + 2\pi) =$$
$$= -5 + 2\sin 3x = f(x)$$

تمارين للحل:

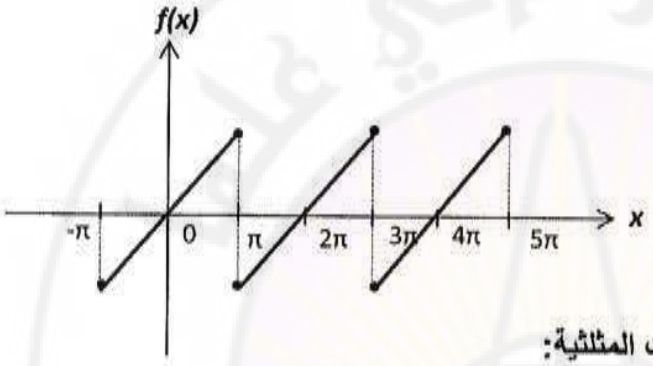
(1) ارسم بيان تابع دوري مستمر.
(2) ارسم بيان تابع دوري له نقاط انقطاع.

(3)ليكن $f(x)$ تابعاً دورياً، دوره 0.01 ثانية. كم مرة سيتكرر شكله في مجال طوله 10 ثوان؟ [الجواب : 1000]

(4)اختر (من عندك) تابعاً دورياً زوجياً، دوره $T=2$ وارسم بيانه.

(5)اختر (من عندك) تابعاً دورياً فردياً، دوره $T=1$، وارسم بيانه.

(6)تأكد من أن التابع الذي بيانه مرسوم في الشكل المجاور هو تابع دوري ثم اوجد دوره Tواذكر فيما إذا كان زوجياً أم فردياً:



8-2- المتسلسلات المثلثية:

تعريف(1): يقال عن متسلسلة التوابع :

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{2n\pi}{T}x+b_n\sin\frac{2n\pi}{T}x)$$

حيث T, b_n, a_n, a_0 أعداد، إنها متسلسلة مثلثية.

والشكل المفصل (التفصيلي) لهذه المتسلسلة هو:

$$\frac{a_0}{2}+(a_1\cos\frac{2\pi}{T}x+b_1\sin\frac{2\pi}{T}x)+(a_2\cos\frac{4\pi}{T}x+b_2\sin\frac{4\pi}{T}x)+.....$$

يُلاحظ من التعريف(1) أن العدد Tهو دور مشترك لحدود المتسلسلة المثلثية المدروسة لأنّ:

$$\sin\frac{2n\pi}{T}(x+T)=\sin(\frac{2n\pi}{T}x+2\pi n)=\sin\frac{2n\pi}{T}x$$
$$\cos\frac{2n\pi}{T}(x+T)=\cos(\frac{2n\pi}{T}x+2\pi n)=\cos\frac{2n\pi}{T}x$$

ومنه، إذا تقاربت المتسلسلة المثلثية المدروسة، وكان مجموعها مساوياً $f(x)$، فإن هذا التابع $f(x)$ يكون دورياً، دوره العدد T.

ملاحظة:

سنُذكر الآن بعض التكاملات التي يستفاد منها في سرعة حساب أمثال المتسلسلة المثلثية، وذلك بافتراض أنّ n,m عددان طبيعيان مغايران للصفر:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin\frac{2n\pi}{T}xdx=0 \quad , \quad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\frac{2n\pi}{T}xdx=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin\frac{2n\pi}{T}xdx=0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nxdx=0 \quad , \quad \int_{-\pi}^{\pi}\cos nxdx=0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nxdx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(m-n)xdx+\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(m+n)xdx=\begin{cases}0 & (m\neq n)\\ \pi & (m=n)\end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nxdx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(m-n)xdx-\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(m+n)xdx=\begin{cases}0 & (m\neq n)\\ \pi & (m=n)\end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cos nxdx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(m-n)xdx+\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(m+n)xdx=0$$

وتجدر الإشارة إلى أن قيم التكاملات السابقة لاتتغير عندما يؤلف حدا التكامل مجالاً طوله 2π استناداً إلى الخاصة (3) من خواص التوابع الدورية. ومن ثم فإنه إذا حسب التكامل $\int_{0}^{2\pi}$ بدلاً من $\int_{-\pi}^{\pi}$ فإن الناتج يبقى ذاته (وهذا أمر مهم).

3-8- متسلسلة فوريه: ليكن $f(x)$ تابعاً دورياً، دوره T.

تعريف(1): إن متسلسلة فوريه للتابع $f(x)$ على المجال $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ هي متسلسلة مثلثية، أمثالها (معاملاتها) a_0, a_n, b_n تعطى بدساتير أولر- فوريه الآتية:

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)dx$$

$$(n \geq 1) \qquad a_n = \frac{2}{T}\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\cos\frac{2n\pi}{T}xdx$$

$$(n \geq 1) \qquad b_n = \frac{2}{T}\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\sin\frac{2n\pi}{T}xdx$$

وتدعى هذه الأعداد a_0, a_n, b_n ثوابت فرريه للتابع $y = f(x)$ على المجال المدروس.

ولحساب هذه الثوابت يجب ان يكون التابع $f(x)$ قابلاً للمكاملة على المجال المدروس. وبعد حساب هذه الثوابت يمكن كتابة متسلسلة فورييه لهذا التابع $f(x)$ على المجال المدروس وفق الآتي:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \frac{2n\pi}{T} x + b_n \sin \frac{2n\pi}{T} x)$$

حيث استعمل الرمز $\sim$ بدلاً من $=$ لأنه لاتتم فوراً معرفة فيما إذا كان $f(x)$ يمثل مجموع المتسلسلة المذكورة أم لا.

حالة خاصة مهمة: عندما يكون $f(x)$ دورياً، دوره $T = 2\pi$ ومعرفاً على المجال $[-\pi, \pi]$ تكون ثوابت فورييه للتابع $f(x)$ على المجال المدروس هي :

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \quad , a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad , b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

حيث $n \geq 1$.

توطئة: لتكن $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ متسلسلة توابع متقاربة بانتظام على مجال مثل $I = [a,b]$، وليكن $\psi(x)$ تابعاً محدوداً على المجال I. عندئذ تكون المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \psi(x) u_n(x)$ متقاربة بانتظام على المجال I.

البرهان: حيث أن $\psi(x)$ محدود على I فيوجد عدد حقيقي موجب مثل M بحيث يكون $|\psi(x)| < M$ من أجل جميع قيم x من المجال I.

ليكن $\varepsilon > 0$. عندها $\frac{\varepsilon}{M} > 0$. وحيث أن $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ متقاربة بانتظام على I فيوجد عدد طبيعي مغاير للصفر مثل N بحيث يكون :

$$n \geq N, x \in I \Rightarrow \left|\sum_{k=n}^{\infty} u_k(x)\right| < \frac{\varepsilon}{M}$$

وبذلك يوجد N بحيث يكون:

$$n \geq N, x \in I \Rightarrow \left|\sum_{k=n}^{\infty} \psi(x).u_k(x)\right| = \left|\psi(x)\sum_{k=n}^{\infty} u_k(x)\right| = |\psi(x)|.\left|\sum_{k=n}^{\infty} u_k(x)\right| < \varepsilon$$

وبذلك يتم إثبات المطلوب.

مبرهنة:

ليكن $f(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}(\alpha_m \cos mx + \beta_m \sin mx)$ ، حيث تتقارب المتسلسلة المثلثية، المذكورة في الطرف الأيمن، بانتظام على المجال $I = [-\pi, \pi]$ ، ومجموعها على هذا المجال هو التابع $f(x)$. عندها تكون هذه المتسلسلة المثلثية هي متسلسلة فوريه للتابع $f(x)$ (على المجال I).

الإثبات:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\alpha_0}{2} dx + \sum_{m=1}^{\infty}(\alpha_m \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx dx + \beta_m \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx dx) = \alpha_0 \pi$$

ومن ثم: $\alpha_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = a_0$.

وبالاستفادة من التوطئة تكون المتسلسلة الأتية متقاربة بانتظام على المجال I:

$$f(x)\cos nx = \frac{\alpha_0}{2}\cos nx + \sum_{m=1}^{\infty}(\alpha_m \cos mx\cos nx + \beta_m \sin mx\cos nx)$$

حيث $n \geq 1$.

ومنه:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx = \frac{\alpha_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nxdx +$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}(\alpha_m \int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nxdx + \beta_m \int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cos nxdx)$$

ومن ثم : $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx = \alpha_n \int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos nxdx = \alpha_n.\pi$

ويعني هذا أن : $\alpha_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx = a_n$.

وبطريقة مماثلة (تترك للقارئ) يمكن استنتاج أنّ :

$\beta_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx = b_n$ وبذلك يتم المطلوب.

متسلسلات فوريه للتوابع الزوجية:

ليكن $y = f(x)$ تابعاً زوجياً، معرفاً على المجال $I = [-\pi,\pi]$. عندها يكون التابع $f(x).\sin nx$ فردياً ومن ثم : $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx = 0$ $(n \geq 1)$

كمايكونالتابع $f(x).\cos nx$ زوجياً،ومنثم:

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \quad (n \geq 0).$$

وبذلك ينتج أن متسلسلة فورييه للتابع الزوجي $f(x)$ لا تحوي إلا جيوب تمام، أي:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

وفي الحالة العامة تبقى هذه النتيجة صحيحة، لأنه عندما يكون $f(x)$ زوجياً، معرفاً على المجال $J = [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ ، فإن $b_n = 0 \quad (n \geq 1)$.

متسلسلات فورييه للتوابع الفردية :

ليكن $y = f(x)$ تابعاً فردياً، معرفاً على المجال $I = [-\pi, \pi]$. عندها يكون

[بطريقة مشابهة لما ذكر من أجل التوابع الزوجية]:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \quad , \quad (n \geq 1) \quad , \quad a_n = 0 \quad , \quad a_0 = 0.$$

ومنه ينتج أن متسلسلة فورييه للتابع الفردي $f(x)$ لا تحوي إلا جيوباً،

أي:
$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

وفي الحالة العامة، تبقى هذه النتيجة صحيحة، لأنه عندما يكون $f(x)$ فردياً، معرفاً على المجال $J = [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ ، فإن $a_n = 0, a_0 = 0 \quad (n \geq 1)$.

مثال :

ليكن $f(x)=\begin{cases}0 & (-5<x<0)\\ 1 & (0<x<5)\end{cases}$ تابعاً دورياً، دوره $T=10$. المطلوب:

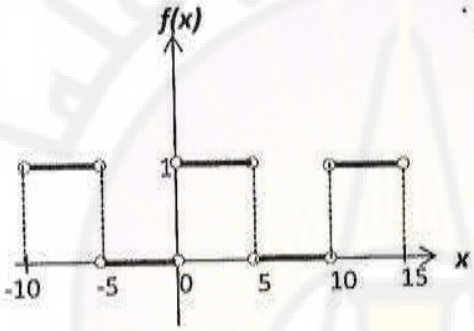
(1) ارسم بيان هذا التابع من $x=-10$ حتى $x=15$.

(2) احسب ثوابت فوريه لهذا التابع $f(x)$.

(3) اكتب متسلسلة فوريه لهذا التابع $f(x)$.

الحل :

(1) بيان هذا التابع هو :



(2)

$$a_0=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(x)dx=\frac{2}{10}\int_{-5}^{5}f(x)dx=\frac{1}{5}\left[\int_{-5}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{5}f(x)dx\right]$$

$$=\frac{1}{-5}\left[0+\int_{0}^{5}dx\right]=\frac{1}{5}.5=1$$

Damascus University

$$(n \geq 1) \quad a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\cos\frac{2n\pi}{T}xdx = \frac{2}{10}\int_{-5}^{5} f(x).\cos\frac{n\pi}{5}xdx =$$

$$= \frac{1}{5}\left[0 + \int_0^5 \cos\frac{n\pi}{5}xdx\right] = \frac{1}{5}\left[\frac{5}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{5}x\right]_0^5 =$$

$$= \frac{1}{n\pi}[\sin n\pi - \sin 0] = 0.$$

$$(n \geq 1) \quad b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x).\sin\frac{2n\pi}{T}xdx = \frac{2}{10}\int_{-5}^{5} f(x).\sin\frac{n\pi}{5}xdx =$$

$$= \frac{1}{5}\left[0 + \int_0^5 \sin\frac{n\pi}{5}xdx\right] = \frac{1}{5}\left[\frac{-5}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{5}x\right]_0^5 =$$

$$= -\frac{1}{n\pi}[\cos n\pi - \cos 0] = -\frac{1}{n\pi}[(-1)^n - 1] = \frac{1}{n\pi}[(-1)^{n+1} + 1]$$

(3)

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{2n\pi}{T}x + b_n\sin\frac{2\pi n}{T}x) =$$

$$= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\pi}\left[(-1)^{n+1} + 1\right]\sin\frac{n\pi}{5}x =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi}{5}x + \frac{2}{3\pi}\sin\frac{3\pi}{5}x + \frac{2}{5\pi}\sin\frac{5\pi}{5}x + \ldots\ldots$$

ملاحظة مهمة جداً: ثمة قوانين يجب معرفتها (حيث n عدد طبيعي):

$$\sin n\pi = 0, \qquad \cos n\pi = (-1)^n$$

$$\sin\frac{n\pi}{2}=\begin{cases}0 & (n\ \text{زوجي})\\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} & (n\ \text{فردي})\end{cases}\quad ,\cos\frac{n\pi}{2}=\begin{cases}(-1)^{\frac{n}{2}} & (n\ \text{زوجي})\\ 0 & (n\ \text{فردي})\end{cases}$$

مثال آخر :

ليكن $f(x)=\begin{cases}-x & (-\pi<x\le 0)\\ 0 & (0\le x<\pi)\end{cases}$ تابعاً دورياً، دوره $T=2\pi$.

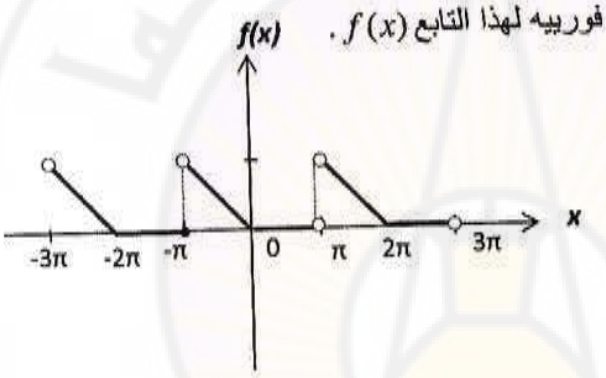
المطلوب:

(1) ارسم بيان هذا التابع من -3π حتى 3π.

(2) اكتب متسلسلة فوريه لهذا التابع $f(x)$.

الحل:

(1)



(2)

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{\pi}f(x)dx\right]=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}-xdx+0\right]$$

$$=\frac{-1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-\pi}^{0}=\frac{-1}{\pi}\left[0-\frac{\pi^2}{2}\right]=\frac{\pi}{2}$$

Damascus University

$$(n \geq 1) \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} -x\cos nx\,dx + 0\right]$$

$$= \frac{-1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\cos nx\,dx = \frac{-1}{\pi}\left\{\left[\frac{x}{n}\sin nx\right]_{-\pi}^{0} - \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{0}\sin nx\,dx\right\}$$

$$= \frac{-1}{n^2\pi}\left[\cos nx\right]_{-\pi}^{0} = -\frac{1}{n^2\pi}\left[\cos 0 - \cos n\pi\right]$$

$$= -\frac{1}{n^2\pi}\left[1 - (-1)^n\right] = \frac{1}{n^2\pi}\left[(-1)^n - 1\right]$$

ولحساب b_n يُستخدم أيضا التكامل بالتجزئة حيث يكون:

$$(n \geq 1) \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} -x\sin nx\,dx + 0\right]$$

$$= \frac{-1}{\pi}\left\{-\frac{\pi}{n}\cos nx + \frac{1}{n^2}\left[\sin nx\right]_{-\pi}^{0}\right\} =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\left\{\frac{(-1)^{n+1}.\pi}{n}\right\} = \frac{(-1)^n}{n}.$$

ومنه:

$$f(x) \sim \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{n^2\pi}\left[(-1)^n - 1\right]\cos nx + \frac{(-1)^n}{n}\sin nx\right\} =$$

$$= \frac{\pi}{4} + \left(\frac{-2}{\pi}\cos x - \sin x\right) + \left(\frac{1}{2}\sin 2x\right) + \left(\frac{-2}{9\pi}\cos 3x - \frac{1}{3}\sin 3x\right) + \ldots.$$

تقارب متسلسلات فورييه :

تعريف : يقال عن نقطة انقطاع مثل x_0 لتابع $f(x)$ إنها نقطة انقطاع من النوع الأول إذا كانت توجد لـ $f(x)$ نهايتان محدودتان في النقطة x_0 ، إحداهما من اليمين $\lim_{x \xrightarrow{>} x_0} f(x) = f(x_0 + 0)$ ، والأخرى من اليسار $\lim_{x \xrightarrow{<} x_0} f(x) = f(x_0 - 0)$.

تعريف: يقال عن تابع مثل $f(x)$ إنه مستمر قطعياً في المجال $]-\pi,\pi[$ إذا كان $f(x)$ مستمراً في كل نقطة من نقاط هذا المجال باستثناء عدد محدود من نقاط الانقطاع (من النوع الأول).

تعريف : يقال عن $f(x)$ إنه مطرد قطعياً على المجال $I=[-\pi,\pi]$ إذا أمكن تقسيم المجال I إلى عدد محدود من الأجزاء (مجالات مغلقة) بحيث يكون $f(x)$ مطرداً (متزايداً أو متناقصاً) في كل جزء من هذه الأجزاء.

هذا وتوجد شروط معينة كي يكون التابع $f(x)$ مساوياً مجموع متسلسلة فورييه له على المجال المدروس وهي :

(i) أن يكون التكامل $\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(x)|dx$ محدوداً (منتهياً).

(ii) أن لا يوجد للتابع $f(x)$ سوى عدد محدود من نقاط الانقطاع (من النوع الأول) في أي مجال محدود ضمن المجال المدروس.

وبصورة أدق، تظهر مثل هذه الشروط في المبرهنة الآتية التي تقبل دون برهان

مبرهنة ديريكليه : ليكن $y=f(x)$ تابعاً معرفاً على المجال $I=[-\pi,\pi]$ بحيث تتحقق الشروط الثلاثة الآتية :

(1) التابع $f(x)$ مستمر قطعياً في المجال $]-\pi,\pi[$.

(2) توجد للتابع $f(x)$ نهاية محدودة من اليمين $f(-\pi+0)$ في النقطة $x=-\pi$ ، وتوجد أيضاً لـ $f(x)$ نهاية محدودة من اليسار $f(\pi-0)$ في النقطة $x=\pi$.

(3) التابع $f(x)$ مطرد قطعياً على المجال I .

عندها تكون متسلسلة فوريه للتابع $f(x)$ متقاربة على المجال $I=[-\pi,\pi]$. ثم بفرض أن مجموعها هو $S(x)$ فإن هذا المجموع يحقق الآتي :

(i) $S(x_0)=\dfrac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}$ إذا كان $x_0\in]-\pi,\pi[$.

(ii) $S(\mp\pi)=\dfrac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$ من أجل $x=-\pi$ ومن أجل $x=\pi$.

4-8- الشكل العقدي لمتسلسلة فوريه:

يقال، أحياناً، عن هذا الشكل إنه **الشكل المركب** أو **الشكل الأسي** لمتسلسلة فوريه لتابع دوري :

بفرض أن : $f(t)=\dfrac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nwt+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nwt$

حيث $f(t)$ تابع دوري، دوره T.

إن تعويض النتائج :

$$\cos nwt=\frac{1}{2}(e^{jnwt}+e^{-jnwt}),\sin nwt=\frac{1}{2j}(e^{jnwt}-e^{-jnwt})$$

في متسلسلة فوريه يعطي :

$$f(t)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2}(a_n-jb_n)e^{jnwt}+\frac{1}{2}(a_n+jb_n)e^{-jnwt}\right]$$

ومنه، بوضع

$$c_{-n}=\frac{1}{2}(a_n+jb_n)\ ,\ c_n=\frac{1}{2}(a_n-jb_n)\ ,\ c_0=\frac{1}{2}a_0$$

يتنج أن :

$$\begin{aligned}f(t)&=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\cdot e^{jnwt}+\sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}e^{-jnwt}\\&=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\cdot e^{jnwt}+\sum_{n=-1}^{\infty}c_n e^{jnwt}\\&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{jnwt}\end{aligned}$$

وهذا هو الشكل المطلوب، حيث $j=\sqrt{-1}$.

أما حساب الأمثال c_n فيتم من الدساتير التي ستظهر فيما يأتي :

$$c_0=\frac{1}{2}a_0=\frac{1}{T}\int_{d}^{d+T}f(t)dt$$

Damascus University

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n) = \frac{1}{T}\left[\int_d^{d+T} f(t)\cos nwtdt - j\int_d^{d+T} f(t)\sin nwtdt\right]$$

$$= \frac{1}{T}\int_d^{d+T} f(t).(\cos nwt - j\sin nwt)dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_d^{d+T} f(t).e^{-jnwt}dt$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + jb_n) = \frac{1}{T}\int_d^{d+T} f(t).(\cos nwt + j\sin nwt)dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_d^{d+T} f(t).e^{jnwt}dt$$

ومنه، من أجل جميع القيم الصحيحة n يكون :

$$c_n = \frac{1}{T}\int_d^{d+T} f(t).e^{-jnwt}dt$$

وهذه الأمثال c_n حيث : $n = 0,\mp1,\mp2,.....$ ، هي أعداد عقدية في الحالة العامة ويمكن أن تكتب بالشكل : $c_n = |c_n|.e^{j\theta_n}$ حيث $|c_n| = \frac{1}{2}\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ هي طويلة c_n وحيث θ_n هي زاوية c_n.

مثال:

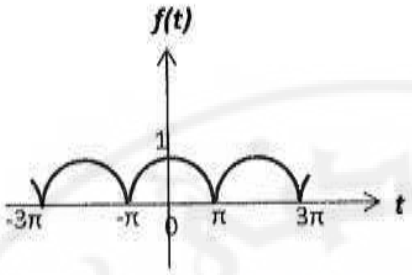
أوجد الشكل الأسي لمتسلسلة فوريه للتابع الدوري $f(t)$ المعرف بالعلاقة:

$f(t) = \cos\frac{1}{2}t$ ، حيث : $f(t+2\pi) = f(t)$, $-\pi < t < \pi$

وارسم بيان هذا التابع على المجال $[-3\pi,3\pi]$.

الحل :

إن البيان هو :



وإن التابع $f(t)$ دوري، دوره $T = 2\pi$ ، ومن ثم فإنّ :

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos\frac{1}{2}t.e^{-jnt}\,dt = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{-2e^{-j(2n-1)1/2}}{j(2n-1)} - \frac{2e^{-j(2n+1)1/2}}{j(2n+1)}\right]_{-\pi}^{\pi}$$

ومنه، بعد ملاحظة أن :

$$e^{jn\pi} = e^{-jn\pi} = \cos n\pi = (-1)^n \quad , \quad e^{-j\pi/2} = -j \quad , e^{j\pi/2} = j$$

ينتج أن : $$c_n = \frac{-2.(-1)^n}{(4n^2-1)\pi}$$

ومن الواضح أن c_n حقيقي، وكان هذا متوقعاً، لأن $f(t)$ تابع زوجي. ومنه فالشكل المطلوب هو :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{2.(-1)^{n+1}}{(4n^2-1)\pi}e^{jnt}$$

ملاحظة:

يمكن رد الشكل الذي تم الحصول عليه (قبل قليل) إلى الشكل المثلثي لأن :

$$a_n = c_n + c_{-n} = \frac{4.(-1)^{n+1}}{\pi(4n^2-1)}\ ,\ a_0 = 2c_0 = \frac{4}{\pi}\ ,\ b_n = j(c_n - c_{-n}) = 0$$

ومن ثم : $f(t) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}\cos nt$

مثال:

أوجد الشكل العقدي لمتسلسلة فوريه للتابع الدوري $f(t)$ المعرف بالعلاقة :

$f(t) = \frac{2t}{T}$ حيث $0 < t < 2T$, $f(t+2T) = f(t)$.

الحل:

إن التابع $f(t)$ دوري، دوره $2T$ ، ومن ثم فإن : $w = \frac{\pi}{T}$ ، ومن ثم فإن:

$$(n \neq 0)\quad c_n = \frac{1}{2T}\int_0^{2T} f(t)e^{-jn\pi t/T}dt =$$

$$= \frac{1}{T^2}\left[\frac{Tt}{-jn\pi}e^{-jn\pi t/T} - \frac{T^2}{(jn\pi)^2}e^{-jn\pi t/T}\right]_0^{2T} =$$

$$= \frac{2j}{n\pi}\quad ,\ (e^{-jn2\pi} = 1)$$

$$c_0 = \frac{1}{2T}\int_0^{2T} f(t)dt = \frac{1}{T^2}\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^{2\pi} = 2$$

ومنه:

$$f(t)=2+\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{2j}{n\pi}e^{jn\pi t/T}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2j}{n\pi}e^{jn\pi t/T}=$$

$$=2+\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{+\infty}\frac{2j}{n\pi}e^{jn\pi t/T}$$

ولكن : $j=e^{\frac{\pi}{2}j}$ إذن : $f(t)=2+\frac{2}{\pi}\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{+\infty}\frac{1}{n}e^{j(n\pi t/T+\frac{\pi}{2})}$

هذا ويمكن رد الشكل الأسي المحصول عليه قبل قليل إلى الشكل المثلثي بملاحظة أن : $a_0=2c_0=4$ ، $a_n=c_n+c_{-n}=0$ ، $b_n=j(c_n-c_{-n})=\frac{-4}{n\pi}$

ينتج أن : $f(t)=2-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi t}{T}$

تمرين :

بين أن الشكل العقدي لمتسلسلة فوريه للتابع الدوري $f(t)=t^2$ ، حيث $-\pi<t<\pi$ ، $f(t+2\pi)=f(t)$ هو $f(t)=\frac{\pi^2}{6}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2}(-1)^n e^{jnt}$.

ثم استنتج الشكل المثلثي الموافق.

8-5- ملاحظات مهمة:

إن الملاحظات الآتية تتضمن معلومات حول استخدام نص مبرهنة ديريكليه في التطبيقات المختلفة:

ملاحظة (1):

ينتج من (i) في نص مبرهنة ديريكليه أنه إذا كان التابع $f(x)$ مستمراً في النقطة x_0 ، حيث $x_0 \in]-\pi,\pi[$ ، فإن مجموع متسلسلة فورييه لهذا التابع يساوي $f(x_0)$ من أجل هذه النقطة، أي: $S(x_0) = f(x_0)$.

بالحقيقة تكفي ملاحظة أن $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0)$ طالما أن التابع $f(x)$ مستمر في النقطة x_0.

إذن فمجموع متسلسلة فورييه يتطابق مع $f(x)$ حيثما يكون التابع $f(x)$ مستمراً، وذلك على المجال المفتوح $]-\pi,\pi[$.

ملاحظة (2) :

لما كانت حدود متسلسلة فورييه هي توابع دورية [ذات دور قدره 2π] فينتج من مبرهنة ديريكليه أن متسلسلة فورييه ، ضمن الشروط المذكورة، تتقارب على $\mathbb{R}$.

ملاحظة (3) :

بأخذ متسلسلة فورييه للتابع $f(x)$ بعد افتراض أن $f(x)$ تابع دوري ذو دور قدره 2π (ويحقق شروط مبرهنة ديريكليه) فإنّ (i) و (ii) يكونان صحيحين ليس فقط في المجال $[-\pi,\pi]$ بل في أي مجال من الشكل $[(2k-1)\pi,(2k+1)\pi]$، حيث k عدد صحيح.

إذن مجموع متسلسلة فورييه من أجل أية نقطة x_0 من $\mathbb{R}$ مغايرة لـ $(2k+1)\pi$، حيث k عدد صحيح، يساوي $\frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}$ [إذا كان التابع $f(x)$ مستمراً في النقطة x_0 فإنّ قيمة هذا الكسر تساوي $f(x_0)$ ومن

ثم فالمجموع يساوي $f'(x_0)$ حينئذ] . أما مجموع متسلسلة فورييه من أجل النقطة $(2k+1)\pi$ ، حيث k عدد صحيح، فيساوي $\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$

ملاحظة (4) :

بأخذ متسلسلة فورييه للتابع $f(x)$ بعد افتراض أن $f(x)$ تابع معطى على $\mathbb{R}$ وغير دوري، فإن مبرهنة ديريكليه تصبح غير صحيحة خارج المجال $[-\pi,\pi]$. كما أنه لايوجد خارج المجال $[-\pi,\pi]$ أي شيء مشترك بين التابع غير الدوري $f(x)$ وبين التابع الدوري الذي هو مجموع متسلسلة فورييه، وهذا ما يمكن رؤيته في الأمثلة.

مثال (1) :

إنّ التابع $F(x)=x$ فردي ويحقق شروط مبرهنة ديريكليه ومنه فأمثال فورييه لهذا التابع هي $a_n=0$ من أجل كل عدد طبيعي n و

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x.\sin x dx=\frac{2}{n}(-1)^{n+1} \quad , \quad n\geq 1$$

وبما أن التابع $F(x)=x$ مستمر على المجال $]-\pi,\pi[$ فإن مجموع متسلسلة فورييه لهذا التابع يساوي $F(x)$ ، أيّ x ، على المجال $]-\pi,\pi[$ ، ومن ثم يكون

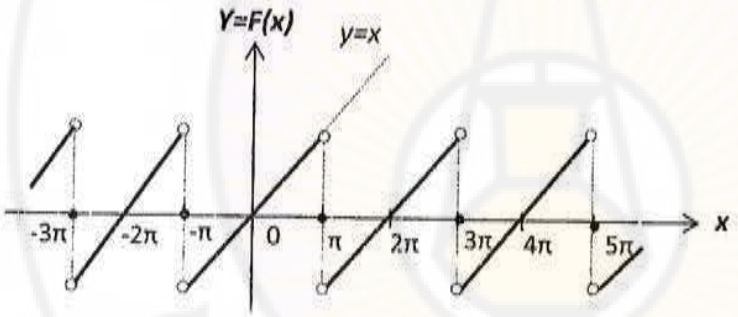
$$x=2\left(\sin x-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\frac{\sin 4x}{4}+.....\right)$$

وذلك من أجل كل x من المجال $]-\pi,\pi[$.

أما مجموع متسلسلة فوريه للتابع $F(x)=x$ من أجل كل من النقطتين $x=\mp\pi$ فيساوي، حسب مبرهنة ديريكليه، $\frac{F(-\pi+0)+F(\pi-0)}{2}=\frac{-\pi+\pi}{2}=0$

[لاحظ، من جهة أخرى، أنه من أجل $x=\mp\pi$ يصبح كل حد من حدود المتسلسلة $\frac{2}{n}\sin nx.(-1)^{n+1}$ مساوياً للصفر، ومن ثم فمجموع هذه المتسلسلة يساوي $\sum_{n=1}^{\infty}$ الصفر من أجل $x=\mp\pi$].

ومن ذلك ينتج أنه عندما $x=\mp\pi$ فإن مجموع متسلسلة فوريه للتابع $F(x)=x$ لا يتطابق مع كل من قيمتي هذا التابع عندما $x=\mp\pi$. ومنه فمنحني تابع المجموع $S(x)$ [لمتسلسلة فوريه للتابع $F(x)=x$] هو المنحني الآتي :



ومنه يبدو أن منحنيي التابعين $y=F(x)=x$ و $y=S(x)$ يتطابقان على المجال $]-\pi,\pi[$ بينما لاتوجد أية نقطة مشتركة بينهما خارج هذا المجال. وبما أن $x=\frac{\pi}{2}\in]-\pi,\pi[$ فاستناداً إلى نتيجة نشر التابع $F(x)=x$ فيمتسلسلةفوريه ينتج أن :

$$\frac{\pi}{2}=2(\sin\frac{\pi}{2}-\frac{\sin\pi}{2}+\frac{\sin\frac{3\pi}{2}}{3}+.....)$$

ومنه : $$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+.....=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$$

مثال (2) :

إن التابع $F(x)=x^2$ زوجي يحقق شروط مبرهنة ديريكليه. ومنه فامثال فوريه لهذا التابع هي $b_n=0$ عندما $n\geq 1$ و $a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2dx=\frac{2\pi^2}{3}$ و

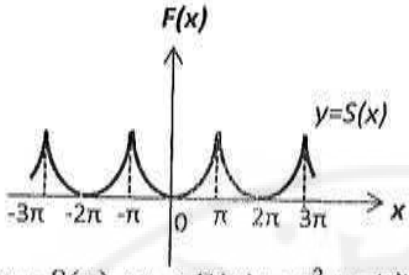
$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos nxdx=\frac{4}{n^2}(-1)^n$ عندما $n\geq 1$.

وبما أن التابع $F(x)=x^2$ مستمر على المجال $]-\pi,\pi[$ فإن مجموع متسلسلة فوريه لهذا التابع يساوي : $F(x)=x^2$ على المجال $]-\pi,\pi[$. اما مجموع متسلسلة فوريه للتابع $F(x)=x^2$ من أجل كل من النقطتين $x=\mp\pi$ فيساوي :

$$\frac{F(-\pi+0)+F(\pi-0)}{2}=\frac{\pi^2+\pi^2}{2}=\pi^2=F(\pi)=F(-\pi)$$

إذن : $x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$ وذلك من أجل جميع قيم x من المجال $[-\pi,\pi]$.

هذا ويمكن ملاحظة أن منحني تابع المجموع $S(x)$ [لمتسلسلة فوريه للتابع $F(x)=x^2$] هو المنحني الآتي :



ومنه يبدو أن منحنيي التابعين $y = F(x) = x^2$ و $y = S(x)$ يتطابقان على المجال $[-\pi, \pi]$ بينما لاتوجد أية نقطة مشتركة بينهما خارج هذا المجال.

ملاحظة : يمكن استخدام نشر فوريه في إيجاد مجاميع بعض المتسلسلات العددية المتقاربة :

1- بوضع $x = \pi$ في طرفي المساواة التي تمثل نشر فورييه، حيث $\pi \in [-\pi, \pi]$، ينتج أنّ :

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}(-1)^n$$

ومن ثم فإنّ : $\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

2- بوضع $x = 0$ ، حيث $0 \in [-\pi, \pi]$ ، ينتج أنّ : $0 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$

ومن ثم فإنّ : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$.

3- من الواضح أنّ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{3}{4}.\frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{8}$$

$$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\ldots\ldots=\frac{\pi^2}{8}$$: أيْ أنّ

4- من الواضح أن :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{4}.\frac{\pi^2}{6}=\frac{\pi^2}{24}$$

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{8^2}\ldots\ldots=\frac{\pi^2}{24}$$: أيْ أنّ

مثال(3) :

انشر في متسلسة فورييه التابع المعطى على المجال $[-\pi,\pi]$ وفق الآتي:

$$f(x)=\begin{cases}0 & (-\pi\le x\le 0 \quad \text{عندما} \quad)\\ x & (0\le x\le \pi \quad \text{عندما} \quad)\end{cases}$$

الحل:

إن هذا التابع مستمر ومطرد في المجال $[-\pi,\pi]$ ومن ثم فهو ينشر في متسلسلة فورييه على المجال $]-\pi,\pi[$ استناداً إلى مبرهنة ديريكليه. ولما كان هذا التابع $f(x)$ معطى بصورتين مختلفتين على المجالين $[-\pi,0]$ و $[0,\pi]$ فإنه لحساب أمثال فورييه لهذا التابع ينبغي حساب التكاملات على المجالين وفق الآتي :

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}0dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}xdx=\frac{\pi}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 0dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos nx dx = \frac{1}{\pi n^2}\left[(-1)^n - 1\right]$$

وذلك من أجل كل n يحقق الشرط $n \geq 1$. [يتم إنجاز هدا التكامل بالتجزئة مع ملاحظة أن $\sin n\pi = 0, \cos n\pi = (-1)^n$]. ويمكن استنتاج أن $a_n = 0$ عندما يكون n زوجياً، وأن $a_n = \frac{-2}{\pi n^2}$ عندما يكون n فردياً،

اي أن $a_{2k-1} = \frac{-2}{\pi(2k-1)^2}$ من أجل كل k.

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 0dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin nx dx = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

وذلك من أجل كل n.

وبما أن التابع المعطى $f(x)$ مستمر على المجال $]-\pi,\pi[$ فإن مجموع متسلسلة فوريه لهذا التابع يساوي $f(x)$ على هذا المجال، ومن ثم تنتج المساواة الآتية:

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2}\cos nx + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx\right]$$

اي:

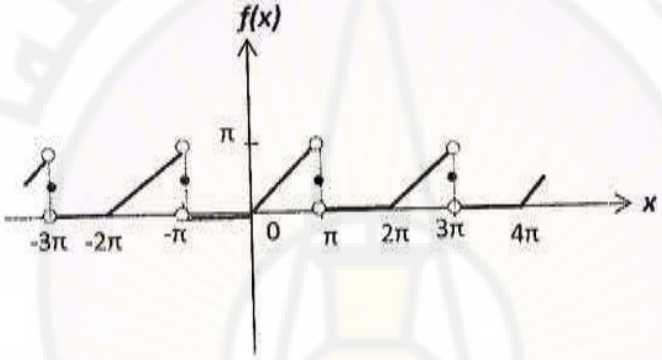
$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{-2}{\pi(2k-1)^2}\cos(2k-1)x + \frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin kx\right] \quad (*)$$

وذلك من أجل كل x من المجال $]-\pi,\pi[$.

أما مجموع متسلسلة فوريه لهذا التابع $f(x)$ من أجل كل من النقطتين $x=\mp\pi$ فيساوي: $\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}=\frac{0+\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$

وبملاحظة أنّ: $f(-\pi)=0\neq\frac{\pi}{2}$ وأن $f(\pi)=\pi\neq\frac{\pi}{2}$ فإن النشر المطلوب تمثله العلاقة (*).

وتجدر الإشارة إلى أن منحني تابع المجموع $S(x)$ ، لمتسلسلة فوريه للتابع $f(x)$ المفروض، هو المنحني المرسوم كما يأتي:



هذا وثمة شروط كافية لنشر التوابع في متسلسلات فوريه، ومثل هذه الشروط يكون مفيداً، وربما يكون تحقيقها أكثر سهولة من أجل التطبيقات. ولذلك تقبل صحة النصوص الآتية دون إثبات:

مبرهنة:

ليكن $f(x)$ تابعاً معطى على المجال $[-\pi,\pi]$. وبفرض أنه يوجد له مشتق محدود $f'(x)$ في كل نقطة x من نقاط المجال $[-\pi,\pi]$. عندئذ تكون متسلسلة فوريه لهذا التابع متقاربة على $\mathbb{R}$ ومجموعها $S(x)$ يساوي $f(x)$ في النقاط x

التي تحقق الشرط $\pi > \cdot$ ، π في كل $S(\mp\pi) = \frac{f(\cdot\pi) + f(\pi)}{2}$

من النقطتين $x = \mp\pi$.

مبرهنة:

إذا كان التابع $f(x)$ مستمراً قطعياً (أي مستمراً في كل نقطة ما عدا عدداً محدوداً منقاط انقطاع من النوع الأول) على المجال $[-\pi, \pi]$ ، فإن متسلسلة فوريه لهذا التابع تتقارب في كل نقطة x_0 من المجال $]-\pi, \pi[$ حيث توجد النهايات المحدودة الأربع الاتية:

$$f(x_0 + 0),\ f(x_0 - 0),$$

$$\alpha = \lim_{x \to x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0 + 0)}{x - x_0},\ \beta = \lim_{x \to x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0 - 0)}{x - x_0}$$

كما ويكون المجموع $S(x)$ لمتسلسلة فوريه لهذا التابع مساوياً :

$$S(x_0) = \frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2}$$

من أجل كل نقطة x_0 تحقق الشروط السابقة، وبالإضافة إلى هذا، فإن متسلسلة فوريه لهذا التابع تكون متقاربة ومجموعها $\frac{f(-\pi + 0) + f(\pi - 0)}{2}$ من أجل كل من النقطتين $x = \mp\pi$ وذلك إذا كانت توجد النهايات المحدودة :

$$\lim_{x \to \pi - 0} \frac{f(x) - f(\pi - 0)}{x - \pi},\ \lim_{x \to -\pi + 0} \frac{f(x) - f(-\pi + 0)}{x + \pi}$$

$$f(\pi - 0),\ f(-\pi + 0)$$

مثال (4):

بفرض أن التابع $f(x)=2x^2+3x+1$ ، المعطى على المجال $I=[-\pi,\pi]$ ، نشر في متسلسلة فورييه على I. وبفرض أن $S(x)$ هو مجموع هذه المتسلسلة ، الذي يكون دوره 2π. أوجد $S(1)$, $S(\pi)$, $S(\frac{7\pi}{3})$, $S(\frac{15\pi}{2})$, $S(10)$

الحل :

بما أن $x=1\in]-\pi,\pi[$ فإن : $S(1)=f(1)=6$.

وكذلك، $2S(\pi)=f(\pi)+f(-\pi)$ ومنه : $S(\pi)=2\pi^2+1$.

وأيضاً: $S(\frac{7\pi}{3})=S(\frac{\pi}{3}+2\pi)=S(\frac{\pi}{3})=f(\frac{\pi}{3})=\frac{2\pi^2}{9}+\pi+1$ وذلك لأن : $\frac{\pi}{3}\in]-\pi,\pi[$.

وأيضاً : $S(\frac{15\pi}{2})=S(\frac{-\pi}{2}+8\pi)=S(\frac{-\pi}{2})=f(-\frac{\pi}{2})=\frac{\pi^2}{2}-\frac{3\pi}{2}+1$

وأخيرا :

$$S(10)=S(10-4\pi)=S(-2,566.....)=f(-2.566.....)=6.47....$$

مثال(5):

بفرض أن:

$$f(x)=\begin{cases}0 & (-\pi\le x\le 0 \quad \text{عندما})\\ h & (x=0 \quad \text{عندما})\\ 1 & (0<x\le\pi \quad \text{عندما})\end{cases} \quad ,0<h<1, \ (h \text{ ثابت})$$

أوجد متسلسلة فورييه لهذا التابع .

الحل:

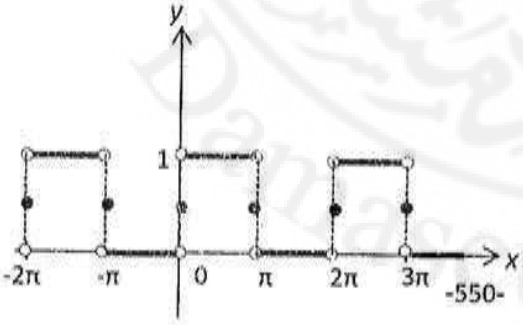
$$a_0 = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} o dx + \int_{0}^{\pi} dx \right) = 1$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \cos nx dx = \frac{1}{n\pi}[\sin nx]_0^{\pi} = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int \sin nx dx = \frac{-1}{n\pi}[\cos nx]_0^{\pi} = \frac{1-(-1)^n}{n\pi}$$

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + ...\right)$$

إن المساواة الأخيرة صحيحة من أجل $-\pi < x < 0$ (حيث هذا المجموع يساوي الصفر)، ومن أجل $0 < x < \pi$ (حيث هذا المجموع يساوي الواحد). وبصورة خاصة، عندما $x = \frac{\pi}{2}$ يتم الحصول من جديد على المساواة $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + ...$ التي يمكن الحصول عليها أيضا من أجل $x = -\frac{\pi}{2}$. أما من أجل $x = 0$ و $x = \mp\pi$ فإن مجموع المتسلسلة يساوي $\frac{1}{2}$ وهذا يتوافق مع المبرهنة. هذا وإن منحني تابع المجموع هو المنحني المرسوم على الشكل الآتي :



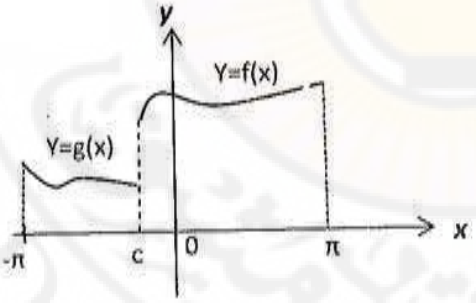
6-8- نشر التابع $f(x)$ المعطى على جزء من المجال $[-\pi,\pi]$ في متسلسلةمثلثية :

ليكن التابع $f(x)$ المعطى على المجال $[c,\pi]$ حيث $-\pi < c < \pi$. وبفرض أن هذا التابع **قابل** للمفاضلة على هذا المجال. عندها يتم تمديد هذا التابع إلى المجال $[-\pi,\pi]$ بأخذ تابع كيفي مثل $g(x)$ معطى على المجال $[-\pi,c]$ وقابل للمفاضلة على هذا المجال. وبذلك يتم تعريف، على المجال $[-\pi,\pi]$ ، التابع $F(x)$ وفق الأتي :

$$F(x)=\begin{cases} g(x) & (-\pi \le x < c \quad \text{عندما} \quad) \\ f(x) & (c \le x \le \pi \quad \text{عندما} \quad) \end{cases}$$

والشكل المجاور يعطي تصوراً لمنحني

مثل هذا التابع $F(x)$:



إن التابع $F(x)$ يمكن أن ينشر في متسلسلة فوريه على المجال $[-\pi,\pi]$ ما عدا (ربما) النقاط $x=\mp\pi$ و $x=c$ حيث يكون مجموع هذه المتسلسلة مساوياً $\frac{g(-\pi)+f(\pi)}{2}$ من أجل $x=\mp\pi$ ، ومساوياً $\frac{g(c)+f(c)}{2}$ من أجل $x=c$.

إذا كان $c<x<\pi$ فإن $F(x)=f(x)$ ومن ثم يكون :

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

وتجدر الإشارة إلى أنه إذا أخذ التابع $g(x)$ بحيث يكون $g(-\pi)=f(\pi)$ فإن $F(-\pi)=F(\pi)$ وإنّ :

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

من أجل جميع قيم x من المجال $]c,\pi]$.

أما إذا أخذ التابع $g(x)$ بحيث يكون $g(c)=f(c)$ فإنّ :

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

من أجل جميع قيم x من المجال $[c,\pi[$.

وبذلك يمكن قول الآتي :

يمكن نشر التابع، المعطى على جزء من المجال $[-\pi,\pi]$ ، في متسلسلة مثلثية، إلا أن هذا النشر ليس وحيداً، لأنه يمكن أخذ التابع $g(x)$ بطرائق كثيرة جداً ما يؤثر على أمثال المتسلسلة المثلثية. فمثلاً، تكفي ملاحظة أن :

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{c} g(x)dx + \frac{1}{\pi}\int_{c}^{\pi} f(x)dx$$

وتجدر الإشارة أيضاً إلى أن المتسلسلة المثلثية التي يتم الحصول عليها والتي مجموعها $f(x)$ ، أي : $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ ، يفضّل أن لاتسمى متسلسلة فورييه للتابع $f(x)$ لأن مفهوم متسلسلة فورييه لا يستعمل للتابع المعطى على المجال $[c,\pi]$ باعتبار أنه لحساب أمثال فورييه يفترض أن يكون التابع معطى على المجال $[-\pi,\pi]$. فالأعداد a_0, a_n, b_n تكون أمثال فورييه للتابع $F(x)$ ، إلا أن هذه الأعداد تُعَدُّ مجرد أمثال عددية للمتسلسلة المثلثية :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

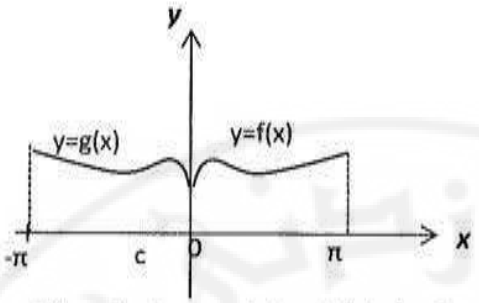
هذا وإن كل ما قيل أعلاه يتعلق، بصورة خاصة، بالمجال $[0,\pi]$ ، أي عندما $c = 0$.

ولكن، في هذه الحالة، يمكن أخذ التابع $g(x)$ بحيث يكون التابع $F(x)$ زوجياً، ويقال، حينئذ، إنه تم القيام **بتمديد التابع $f(x)$ زوجياً إلى المجال $[-\pi,\pi]$** وهذا يعطي النشر :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

حيث $a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx$ ، $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nxdx$ ، $n \geq 1$

وهذا النشر يكون صحيحاً على المجال $[0,\pi]$. (انظر الشكل المجاور) :

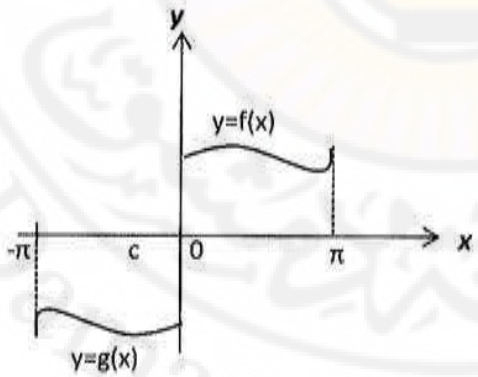


ومن جهة أخرى، يمكن أخذ التابع $g(x)$ بحيث يكون التابع $F(x)$ فردياً، فيقال، حينئذ، إنه تم القيام بتمديد التابع $f(x)$ فردياً إلى المجال $[-\pi,\pi]$ ، وهذا يعطي النشر :

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

حيث : $$n\geq 1\ ,\ b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

وهذا النشر يكون صحيحاً على المجال $]0,\pi[$. (انظر الشكل المجاور):



ومن الملاحظ أنه إذا كان $f(0)\neq 0$ فإن التابع $F(x)$ يكون منقطعاً في النقطة $x=0$.

فلتكون المساواة $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$ صحيحة من أجل $x=0$ يجب أن يكون $f(0)=0$ وذلك بملاحظة أن الطرف الأيمن من المساواة المذكورة يساوي الصفر من أجل $x=0$. وبصورة مماثلة، كي تكون المساواة : $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$ محققة من أجل $x=\pi$ يجب أن يكون $f(\pi)=0$.

وبذلك يمكن صياغة النص الأتي :

مبرهنة :

يمكن بطرائق كثيرة جداً نشر التابع $f(x)$، المعطى والقابل للمفاضلة على المجال $[0,\pi]$ ، في متسلسلة مثلثية. ويمكن بصورة خاصة، نشر هذا التابع في متسلسلة مثلثية لاتحوي سوى جيوب تمام، أي:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$$ ، حيث :

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx \quad , \quad a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nxdx \quad , \quad n\geq 1$$

كما يمكن نشر التابع $f(x)$ في متسلسلة مثلثية لاتحوي إلا جيوباً، أي:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$$ ، حيث : $\quad b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nxdx \quad , \quad n\geq 1$

مثال (1) :

انشر التابع $f(x)=x$ في متسلسلة مثلثية لا تحوي إلا جيوب تمام وذلك على المجال $[0,\pi]$.

الحل : $a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}xdx=\pi$

$$(n\geq 1)\ ,\ a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nxdx=\frac{2}{n^2\pi}\left[(-1)^n-1\right]$$

أي أن : $k\geq 1$, $a_k=\frac{-4}{(2k-1)^2.\pi}$

ومنه: $x=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}$

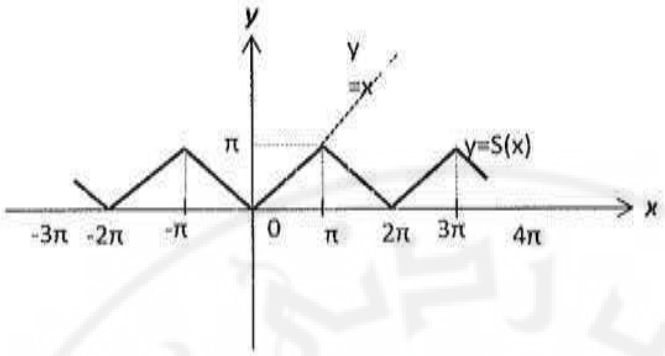
وذلك من أجل كل x من المجال $[0,\pi]$.

ملاحظات :

[1] بوضع $x=0$ في العلاقة السابقة ينتج (من جديد) أنّ :

$$\frac{\pi^2}{8}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+.....+\frac{1}{(2k-1)^2}+.....$$

[2] إن مجموع المتسلسلة المثلثية التي تم الحصول عليها في المثال (1) السابق يساوي π من أجل $x=\pi$ ، وبذلك فإن منحني المجموع $S(x)$ لهذه المتسلسلة هو المنحني المرسوم في الشكل المجاور :



[3] لقد تم نشر التابع $F(x)$ في متسلسلة فوريه في المجال $[-\pi,\pi]$. وبما أن $[0,\pi]\subset[-\pi,\pi]$ فإنه يمكن أن يعدّ ذلك النشر نشراً للتابع $F(x)=x$ في المجال $[0,\pi]$ في متسلسلة مثلثية لا تحوي إلا جيوبا، أيْ :

$$x=2\left(\sin x-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\frac{\sin 4x}{4}+\ldots\ldots\right)$$

[4] لقد تم نشر التابع :

$$f(x)=\begin{cases}0 & (-\pi\le x\le 0 \quad \text{عندما} \quad)\\ x & (0<x\le\pi \quad \text{عندما} \quad)\end{cases}$$

في متسلسلة فوريه في المجال $[-\pi,\pi]$ ، وكان :

$$f(x)=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n-1}{\pi n^2}\cos nx+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx\right]$$

حيث $-\pi<x<\pi$.

ولما كان $[0,\pi[\subset]-\pi,\pi[$ فإنه ينتج :

$$x=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n-1}{\pi n^2}\cos nx+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx\right]$$

وذلك من أجل كل x من المجال $[0,\pi[$.

[5] بمقارنة النتائج اتي تم الحصول عليها في المثال (1) السابق وفي الملاحظتين [3] و [4] يمكن القول إنه تم الحصول على ثلاث طرائق مختلفة لنشر التابع $f(x)=x$ في متسلسلة مثلثية في المجال $[0,\pi]$.

مثال (2):

انشر التابع $f(x)=x^2$ في متسلسلة مثلثية لا تحوي إلا جيوباً وذلك على المجال $[0,\pi]$.

الحل:

$$n\geq 1\ ,\ b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\sin nxdx=\frac{2\pi(-1)^{n+1}}{n}+\frac{4}{\pi n^3}\left[(-1)^n-1\right]$$

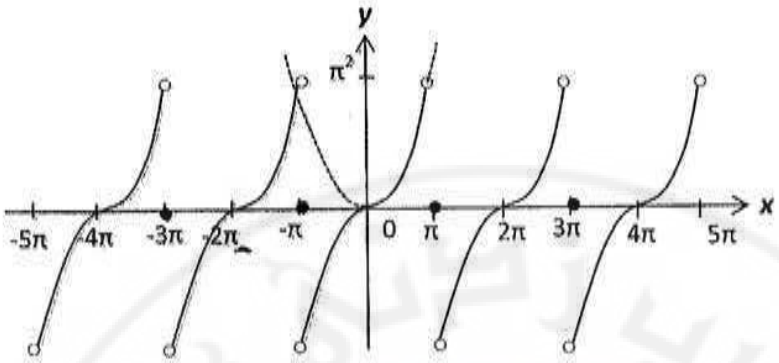
ومنه :

$$x^2=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{2\pi(-1)^{n+1}}{n}+\frac{4}{\pi n^3}\left[(-1)^n-1\right]\right\}\sin nx=$$

$$=\left(2\pi-\frac{8}{\pi}\right)\sin x-\pi\sin 2x+\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{8}{27\pi}\right)\sin 3x-\frac{\pi}{2}\sin 4x+.....$$

وذلك من أجل كل x من $[0,\pi[$.

ومن الملاحظ أن مجموع المتسلسلة المثلثية الناتجة يساوي الصفر من أجل $x=\pi$ وبذلك فإن منحني تابع المجموع $S(x)$ لهذه المتسلسلة هو المنحني المرسوم على الشكل المجاور :



ملاحظة:

لقد تم نشر التابع $F(x)=x^2$ في متسلسلة فورييه على المجال $[-\pi,\pi]$ وتم الحصول على المساواة : $x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$ من أجل كل x من المجال $[-\pi,\pi]$. وبما أن $[0,\pi]\subset[-\pi,\pi]$ فإن هذا النشر يعدّ نشراً للتابع $f(x)=x^2$ في المجال $[0,\pi]$ في متسلسلة مثلثية لا تحوي إلا جيوب تمام.

مثال (3) :

انشر في متسلسلة فورييه التابع :

$$F(x)=\begin{cases}0 & (-\pi\le x<0 \quad \text{عندما})\\ x^2 & (0\le x\le\pi \quad \text{عندما})\end{cases}$$

وذلك على المجال $[-\pi,\pi]$.

الحل :

هذا التابع ليس فردياً وليس زوجياً. ومنه :

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 0dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^2 dx = \frac{\pi^2}{3}$$

$$n \geq 1 \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 0dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^2 \cos nx dx = \frac{(-1)^n .2}{n^2}$$

$$n \geq 1 \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 0dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^2 \sin nx dx = \frac{\pi.(-1)^{n+1}}{-n} + \frac{2}{\pi n^3}\left[(-1)^n - 1\right]$$

$$\frac{F(-\pi+0)+F(\pi-0)}{2} = \frac{0+\pi^2}{2} = \frac{\pi^2}{2}$$

إذن :

$$F(x) = \frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2(-1)^n}{n^2}\cos nx + \left\{\frac{\pi(-1)^{n-1}}{n} + \frac{2}{\pi n^3}\left[(-1)^n - 1\right]\right\}\sin nx\right)$$

و ذلك من أجل كل x من المجال $]-\pi,\pi[$.

ملاحظة : يمكن الاستفادة من النشر السابق للحصول على نشر التابع $f(x) = x^2$ في متسلسلة مثلثية في المجال $[0,\pi]$ وذلك بملاحظة أن $[0,\pi] \subset [-\pi,\pi]$ وأن $F(x) = f(x) = x^2$ من أجل $0 \leq x \leq \pi$.

ومن الملاحظ أن هذه المتسلسلة المثلثية تحوي جيوبا وجيوب تمام.

مثال (4) :

بفرض أن التابع $f(x) = 3x^2 + x + 1$ المعطى في المجال $[0,\pi]$ قد نشر في هذا المجال في متسلسلة مثلثية لا تحوي إلا جيوبا. أوجد المجموع $S(x)$ لهذه المتسلسلة المثلثية وذلك من أجل

$$x = \frac{\pi}{2},\ x = -\frac{\pi}{3},\ x = 6\pi,\ x = \frac{29}{4}\pi,\ x = 12 .$$

الحل :

بما أن $0 < \frac{\pi}{2} < \pi$ فإن : $S(\frac{\pi}{2}) = f(\frac{\pi}{2}) = \frac{3\pi^2}{4} + \frac{\pi}{2} + 1$.

وأيضاً، لما كانت المتسلسلة لاتحوي إلا جيوباً فإن التابع $S(x)$ يكون فردياً ومن ثم :

$$S(-\frac{\pi}{3}) = -S(\frac{\pi}{3}) = -f(\frac{\pi}{3}) = -\frac{\pi^2}{3} - \frac{\pi}{3} - 1$$

وأيضاً، إن $S(6\pi) = 0$ لأنه من أجل $x = 6\pi$ تكون قيمة كل حد، من حدود المتسلسلة المثلثية، مساوية للصفر.

وأيضاً،

$$S(\frac{29}{4}\pi) = S(\frac{29}{4}\pi - 8\pi) = S(\frac{-3\pi}{4}) = -S(\frac{3\pi}{4}) =$$

$$= -f(\frac{3\pi}{4}) = -\frac{27}{16}\pi^2 - \frac{3}{4}\pi - 1$$

وأخيراً :

$$S(12) = S(12 - 4\pi) = S(-0.566.....) = -S(0.566.....) = -2.527.....$$

7-8- نشر التابع $f(x)$، ذي الدور 2π، في متسلسلة فوريه على المجال $[c, c + 2\pi]$، حيث $c \in \mathbb{R}$:

إن العدد 2π هو دور للتوابع $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, ...$ واستناداً إلى إحدى خواص التوابع الدورية يمكن كتابة الآتي :

$$\int_{c}^{c+2\pi} f(x)dx = \int_{0}^{2\pi} f(x)dx$$

$$\int_{c}^{c+2\pi} \cos^2 nxdx = \int_{c}^{c+2\pi} \sin^2 nxdx$$

ولهذا فإن نظرية متسلسلات فوريه التي درست من أجل التوابع المعطاة على المجال $[-\pi,\pi]$ يمكن تطبيقها على أي مجال $[a,a+2\pi]$ ذي طول قدره 2π.
فمثلاً تكون المبرهنة الآتية صحيحة :

مبرهنة:

إذا كان التابع $f(x)$ قابلاً للمفاضلة على المجال $[0,2\pi]$ فإنه، على المجال $]0,,2\pi[$ ، يكون :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

حيث :

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} f(x)dx \ , \ a_n = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} f(x)\cos nxdx \ , \quad n \geq 1$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} f(x)\sin nxdx \ , \ n \geq 1$$

كما وإن المتسلسلة المذكورة تكون متقاربة من أجل كل من النقطتين $x=0$ و $x=2\pi$ ، ويكون مجموعها في كل من هاتين النقطتين هو $\frac{f(0)+f(2\pi)}{2}$.

مثال :

انشر في متسلسلة فوريه التابع $f(x)=x$ على المجال $[0,2\pi]$.

الحل :

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}xdx=2\pi$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x\cos nxdx=0 \quad , \quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x\sin nxdx=\frac{-2}{n} \quad , \quad n\geq 1$$

إذن :

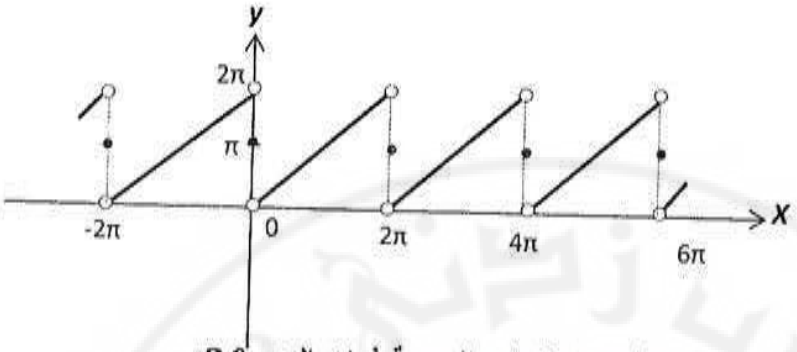
$$x=\pi-2\left(\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}+.....\right)$$

من أجل كل x من المجال $]0,2\pi[$.

وكحالة خاصة، من أجل $x=\frac{\pi}{2}$ تنتج المساواة المعروفة سابقا :

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+.....$$

ومن الملاحظ أن المجموع $S(x)$ لمتسلسلة فوريه الناتجة يساوي π من أجل كل من النقطتين $x=0$ و $x=2\pi$. وكذلك يمكن بسهولة ملاحظة أن : $S(\frac{28}{3}\pi)=S(\frac{4}{3}\pi)=\frac{4}{3}\pi$ وأن منحني تابع المجموع $S(x)$ لمتسلسلة فوريه الناتجة هو الآتي :



8-8 متسلسلات فوريه للتوابع الدورية ذوات الدور 2ℓ:

ليكن $f(x)$ تابعاً معطى غلى المجال $[-\ell,\ell]$ والقابل للمفاضلة على هذا المجال، حيث ℓ هو عدد حقيقي موجب مغاير، في الحالة العامة، للعدد π. بوضع $x=\frac{\ell z}{\pi}$ ينتج التابع $\varphi(z)=f(\frac{\ell z}{\pi})$ المعطى والقابل للمفاضلة على المجال $[-\pi,\pi]$. وهذا يعني أن نظرية متسلسلات فوريه التي درست في الفقرات السابقة تكون قابلة للاستعمال من أجل التابع $\varphi(z)$ ، ولهذا يكون :

$$\varphi(z)=f(\frac{\ell z}{\pi})=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nz+b_n\sin nz)$$

وذلك من أجل كل z من المجال $]-\pi,\pi[$. ومنه بوضع $z=\frac{\pi x}{\ell}$ في المساواة السابقة ينتج أن :

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi x}{\ell}+b_n\sin\frac{n\pi x}{\ell})$$ وذلك من أجل كل x منالمجال $]-\ell,\ell[$.

هذا وإن مجموع هذه المتسلسلة يساوي $\frac{f(-\ell)+f(\ell)}{2}$ من أجل كل من النقطتين $x=\mp\ell$. أما العلاقات التي تعطي الأمثال a_0,a_n,b_n، حيث $n\geq 1$ ، لهذه المتسلسلة فيتم الحصول عليها وفق الآتي :

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(z)\cos nz\,dz=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\frac{\ell z}{\pi})\cos nz\,dz$$

وبفرض $z=\frac{\pi x}{\ell}$ يكون :

$$a_n=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}dx : \text{ومن ثم } dz=\frac{\pi}{\ell}dx$$

وبطريقة مماثلة يمكن استنتاج أن :

$$b_n=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx$$

$$a_0=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)dx$$

إن النشر الذي تم الحصول عليه يكون صحيحاً على كل المحور إذا كان التابع دورياً، وفي المجال $]-\ell,\ell[$ إذا كان التابع غير دوري.

ملاحظة:

فيما يتعلق بالتابع $f(x)$ المعطى والقابل للمفاضلة على المجال $[0,\ell]$ ، فإنه يمكن نشره في متسلسلة مثلثية بطرائق كثيرة جداً. ويمكن، بصورة خاصة، نشره في متسلسلة مثلثية لاتحوي إلا جيوب تمام أو لا تحوي إلا جيوباً. فمثلاً، عند نشر التابع $f(x)$ في المجال $[0,\ell]$ في متسلسلة جيوب يكون :

$$n\geq 1,\quad b_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx \text{ حيث } f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{\ell}$$

وعند نشر التابع في متسلسلة جيوب تمام يكون :

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{\ell}$$

حيث : $a_0=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}f(x)dx$, $a_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}dx$, $n\geq 1$

مثال :

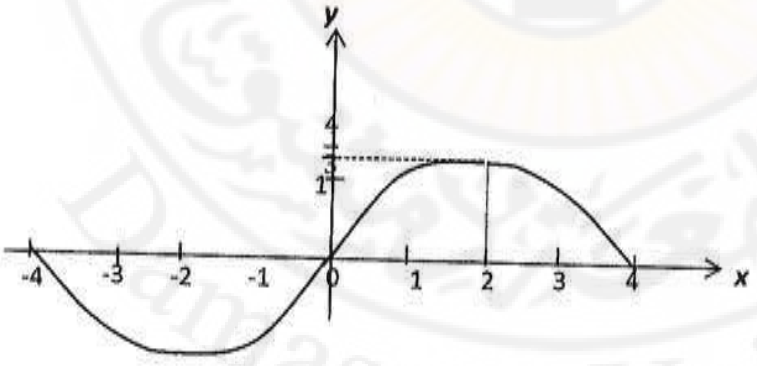
انشر (في متسلسلة مثلثية) التابع :

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}x(4+x) & (-4\leq x<0 \quad \text{عندما} \quad)\\ \frac{1}{3}x(4-x) & (0\leq x\leq 4 \quad \text{عندما} \quad)\end{cases}$$

وذلك في المجال $[-4,4]$.

الحل:

إن هذا التابع مستمر، وفردي، في المجال $[-4,4]$ ، ومنحنيه هو :



حساب الأمثال :

$$n \geq 0,\ a_n = 0,$$

$$n \geq 1,\ b_n = \frac{2}{4}\int_0^4 \frac{1}{3}x(4-x)\sin\frac{n\pi x}{4}dx = \frac{128}{3n^3\pi^2}\left[1+(-1)^{n-1}\right]$$

إذن :

$$f(x) = \frac{128}{3\pi^2}(\sin\frac{\pi}{4}x + \frac{1}{3^3}\sin\frac{3\pi}{4}x + \frac{1}{5^3}\sin\frac{5\pi}{4}x + ...)$$

من أجل كل x من المجال $]-4,4[$.

وبملاحظة أن مجموع هذه المتسلسلة المثلثية يساوي الصفر من أجل كل من النقطتين $x = \mp 4$ ، وبملاحظة أن قيمة التابع $f(x)$ تساوي الصفر من أجل كل من النقطتين $x = \mp 4$ ينتج أن المساواة تكون محققة من أجل كل نقطة x من المجال $[-4,4]$.

8-9- اشتقاق متسلسلة فوريه وتكاملها:

لما كانت متسلسلات فوريه هي متسلسلات توابع فإنه يمكن استخدام المبرهنات المتعلقة باشتقاق وتكامل متسلسلات التوابع حداً فحداً. وإلى جانب ذلك تكون النصوص الآتية مفيدة:

[1] إذا كانت المتسلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)$ متقاربة فإن المتسلسلة المثلثية $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx + b_n\sin nx)$ تكون متقاربة بانتظام، وبالإطلاق، على $\mathbb{R}$.

لبرهان ذلك يكفي تطبيق اختبار فايرشتراس بعد ملاحظة أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ وكل عدد طبيعي مغاير للصفر n يكون :

$$|a_n \cos nx + b_n \sin nx| \le |a_n|.|\cos nx| + |b_n|.|\sin nx| \le |a_n| + |b_n|$$

[2] إذا كانت a_0, a_n, b_n ، حيث $n \ge 1$، هي أمثال فوريه لتابع مستمر قطعياً فإن المتسلسلة العددية :

$$\frac{a_0}{2} + (a_1 + b_1) + (\frac{a_2}{2} + \frac{b_2}{2}) + \ldots\ldots + (\frac{a_n}{n} + \frac{b_n}{n}) + \ldots\ldots$$

تكون متقاربة بالإطلاق.

[3] إذا كان التابع الدوري $f(x)$ مستمراً وله مشتق مستمر قطعياً، فإنّ متسلسلة فوريه لها تكون متقاربة من $f(x)$ في المجال $]-\infty,\infty[$.

[4] إذا كان $f(x)$ ومشتقه $f'(x)$ تابعين مستمرين قطعياً، فإنّ متسلسلة فوريه للتابع $f(x)$ تتقارب بانتظام على أيّ مجال مغلق غير حاو نقاط انقطاع للتابع $f(x)$.

مثال :انشر التابع $f(x) = x$ ، المعطى في المجال $]0,2[$ ، في متسلسلة مثلثية لا تحوي إلا جيوباً ثم استخدم الناتج في نشر التابع $F(x) = x^2$ ، المعطى في الفترة $]0,2[$ ، في متسلسلة مثلثية، ثم استنتج قيمة مجموع المتسلسلة العددية المتقاربة :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}.$$

الحل:

نلاحظ أن $\ell = 2$ ، وأنه من أجل كل n ، حيث $n \ge 1$، يكون :

$$b_n = \frac{2}{2}\int_0^2 x\sin\frac{n\pi x}{2}dx = \frac{-4}{n\pi}\cos n\pi = \frac{(-1)^{n+1}.4}{n\pi}$$

ومنه: $$x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}.4}{n\pi}.\sin n\frac{\pi}{2}x$$

اي: $$x = \frac{4}{\pi}(\sin\frac{\pi x}{2} - \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi x}{2} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{2} + ...)$$

وبمكاملة الطرفين من الصفر إلى x ثم ضرب الطرفين بـ 2 يمكن استنتاج أنّ:

$$x^2 = C - \frac{16}{\pi^2}(\cos\frac{\pi x}{2} - \frac{1}{2^2}\cos\frac{2\pi x}{2} + \frac{1}{3^2}\cos\frac{3\pi x}{2} + ...) \qquad [*]$$

حيث : $$C = \frac{16}{\pi^2}(1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + ...)$$

وبما أن العلاقة [*] تعطي نشرا لـ x^2 في متسلسلة مثلثية لاتحوي إلا جيوب تمام وذلك في المجال $]0,2[$ فإنه ينتج أنّ:

$$C = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{\ell}\int_0^{\ell}F(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^2 x^2dx = \frac{4}{3}$$

ومن ثم فإنّ :

$$x^2 = \frac{4}{3} - \frac{16}{\pi^2}(\cos\frac{\pi}{2}x - \frac{1}{2^2}\cos\frac{2\pi}{2}x + \frac{1}{3^2}\cos\frac{3\pi}{2}x - + ...)$$

وأخيرا يكون :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\ldots\ldots=\frac{\pi^2}{16}C=\frac{\pi^2}{16}.\frac{4}{3}=\frac{\pi^2}{12}$$

ملاحظة :

لقد تم استخدام أحد النصوص المشار إليها في هذه الفقرة، وتمت مكاملة المتسلسلة المثلثية حداً فحداً من الصفر إلى x فتم الحصول على نشر x^2 في متسلسلة مثلثية في المجال $]0,2[$ ، إلا أنه لايمكن اشتقاق هذه المتسلسلة المثلثية حداً فحداً، لأنّ المتسلسلة الناتجة عن الاشتقاق حداً فحداً هي المتسلسلة:

$2\left(\cos\frac{\pi x}{2}-\cos\frac{2\pi x}{2}+\cos\frac{3\pi x}{2}-\ldots\ldots\right)$ التي حدها العام لا يسعى إلى الصفر عندما $n\to\infty$ ، ومن ثم فهي متباعدة من أجل كل قيمة لـ x.

8-10- تكامل فوريه:

ثمة إشارات في الحياة العملية لا تكون دورية كإشارات الضجيج على سبيل المثال.ومن الممكن، ضمن شروط معينة، تبيان أن تابعاً غير دوري مثل $f(x)$ يمكن التعبير عنه ليس فقط كمجموع أمواج جيبية وتجيبية وإنما كتكامل.

فلدى دراسة هذا التابع غير الدوري $f(x)$ ، في المجال $]-\ell,\ell[$ ، عندما $\ell\to\infty$ فإنه عند الانتقال إلى النهاية تتحول متسلسلة فوريه إلى مايسمى تكامل فوريه. وسوف نُذكر شروط كافية لتمثيل التابع بتكامل فوريه وفق الآتي :

بفرض أن التابع $f(x)$ ، المعرف على $\mathbb{R}=]-\infty,+\infty[$، يحقق الشروط الأتية :

(1) التكامل المعتل $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx$ متقارب، أو بعبارة أخرى: التابع $f(x)$ قابل للمكاملة بالإطلاق على $\mathbb{R}$.

(2) يمكن نشر التابع $f(x)$ في متسلسلة فوريه في أي مجال مغلق محدود [يكفي عملياً أن يحقق التابع $f(x)$ في كل مجال مغلق محدود الشروط الآتية

(i) التابع $f(x)$ مستمر قطعياً.

(ii) التابع $f(x)$ مطرد قطعياً.

(iii) التابع $f(x)$ محدود.].

لنثبّت عدداً موجباً اختيارياً ℓ. ولننشر التابع $f(x)$ في متسلسلة فوريه في المجال $[-\ell,\ell[$:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi}{\ell}x+b_n\sin\frac{n\pi}{\ell}x)$$ حيث تتعين الأمثال بالعلاقات الآتية :

$$a_0=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(t)dt\ ,\ a_n=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(t)cos\frac{n\pi}{\ell}tdt\ ,\ b_n=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(t)sin\frac{n\pi}{\ell}tdt$$

حيث $n\geq 1$. من الواضح أن الأمثال a_n,b_n لا ترتبط بالتابع $f(x)$ فحسب، بل ترتبط أيضاً بالوسيط ℓ. ومنه :

$$f(x)=\frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(t)dt+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(t)cos\frac{n\pi}{\ell}tdt\right)cos\frac{n\pi}{\ell}x+\left(\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(t)sin\frac{n\pi}{\ell}tdt\right)sin\frac{n\pi}{\ell}x\right]$$

إذن :

$$f(x)=\frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(t)dt+\frac{1}{\ell}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\ell}^{\ell}f(t)cos\frac{n\pi}{\ell}(x-t)dt$$

وبإدخال متغير $\alpha_n = \alpha$ مرتبط بـ $\alpha_n = \alpha : n$ ثم بوضع $\frac{n\pi}{\ell} = \alpha_n = \alpha : n$

ينتج أن : $\alpha_{n+1} - \alpha_n = \frac{\pi}{\ell} = \Delta\alpha$

$$f(x) = \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(t)dt + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_{-\ell}^{\ell} f(t)\cos\alpha_n(x-t)dt\right].\Delta\alpha$$

من الملاحظ أن قيمة التكامل $\int_{-\ell}^{\ell} f(t)\cos\alpha(x-t)dt$ تقترب من قيمة التكامل المعتل $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\alpha(x-t)dt$ وذلك عندما تزداد ℓ إلى اللانهاية.

كما أنه من الملاحظ أيضاً أن المجموع $\sum$، الموجود في الطرف الأيمن من المساواة الأخيرة، يُذكر بالمجموع التكاملي.

ولذلك يعدّ هذا المجموع بأنه يسعى، عندما $\ell \to \infty$ ، إلى التكامل :

$$\int_{0}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\alpha(x-t)dt\right]d\alpha$$

كما وإنّ الحد الأول الموجود في الطرف الأيمن من المساواة الأخيرة (المذكورة أعلاه) يسعى إلى الصفر عنما $\ell \to \infty$ وذلك بملاحظة أن :

$$\left|\frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(t)dt\right| \le \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell}|f(t)|dt \to 0$$

وبذلك فإن المساواة الأخيرة (المذكورة أعلاه) تصبح كالآتي :

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\alpha(x-t)dt\right]d\alpha$$

تعبر هذه العلاقة عن " **العلاقة التكاملية لفورييه** "، ويسمى التكامل الموجود فيها بـ " **تكامل فورييه** ". ويقال أيضاً إن هذه العلاقة تعبّر عن **تمثيل التابع بتكامل فورييه** أو ما يسمى، عادة، **نشر هذا التابع في تكامل فورييه**.

هذا ومن الواضح أن كل ما تم قوله قبل قليل يخص النقاط x التي فيها يكون التابع $f(x)$ مستمراً. أما من أجل نقاط الانقطاع، فإن العلاقة الآتية تكون صحيحة (كما في حالة متسلسلات فورييه) :

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\alpha(x-t)dt\right]d\alpha$$

وبذلك يمكن كتابة النص الآتي :

مبرهنة فورييه :

إذا كان التابع $f(x)$ محدوداً وقابلاً للمكاملة بالإطلاق على المجال $]-\infty,+\infty[$، وكان هذا التابع يحقق الشروط (i),(ii),(iii) في كل مجال مغلق محدود، فإنه يكون، من أجل كل x ، صحيحاً الآتي :

[1] إذا كانت x نقطة استمرار للتابع $f(x)$ فإنّ :

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\alpha(x-t)dt\right]d\alpha$$

[2] إذا كانت x نقطة انقطاع للتابع $f(x)$ فإنّ:

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\alpha(x-t)dt\right]d\alpha$$

ملاحظة (1) :

إن المناقشة، التي وردت قبل كتابة نص هذه المبرهنة، تؤكد صحة هذه المبرهنة ولكنها لا تعدّ الإثبات الكامل لها. ومع ذلك تقبل صحة هذه المبرهنة دون كتابة إثباتها بصورة كاملة.

ملاحظة (2) :

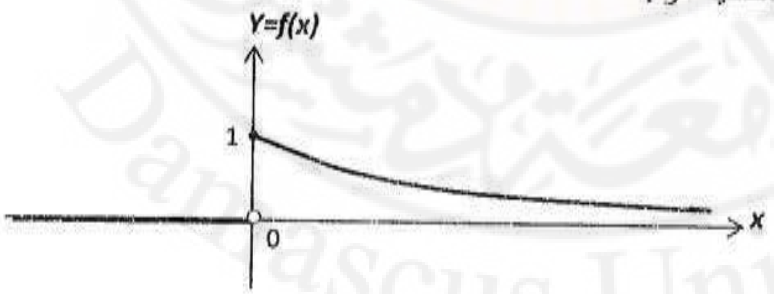
إن التكامل $\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\alpha(x-t)dt$ يعدّ تابعاً لـ α ومن الواضح أن هذا التابعهو تابع زوجي. ولذلك يمكن كتابة الآتي :

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\alpha(x-t)dt\right]d\alpha$$

مثال(1): ليكن التابع :

$$f(x)=\begin{cases}e^{-x} & (x\geq 0 \quad \text{عندما})\\ 0 & (x<0 \quad \text{عندما})\end{cases}$$

فيكون منحنيه هو :



كما أن هذا التابع محدود وقابل للمكاملة بالإطلاق على المجال $]-\infty,\infty[$ بملاحظة الآتي :

$|f(x)| \le 1 < 2$ من أجل جميع قيم x.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx = \int_{0}^{\infty} e^{-x}dx = 1$$

زد على ذلك فإن هذا التابع يحقق الشروط (i),(ii),(iii) في كل مجال مغلق محدود.

وبذلك تكون شروط مبرهنة فوريه قد تحققت، ومن ثم يمكن نشر هذا التابع في تكامل فوريه وفق الآتي :

$$I(x,\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\alpha(x-t)dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-t}\cos\alpha(x-t)dt$$

أي:

$$I(x,\alpha) = \frac{1}{1+\alpha^2}(\cos\alpha x + \alpha.\sin\alpha x)$$

إذن : $$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\cos\alpha x + \alpha.\sin\alpha x}{1+\alpha^2}d\alpha$$

وذلك من أجل كل x.

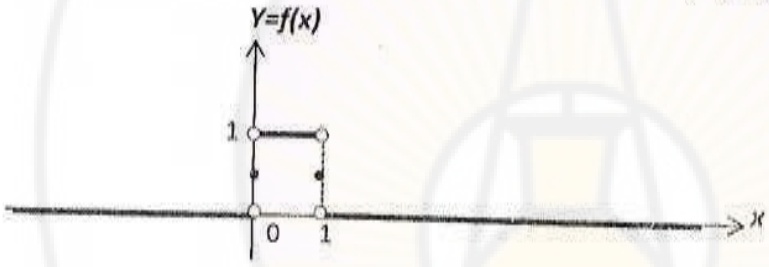
مثال (2) :

مثل، بتكامل فوريه، التابع :

$$f(x)=\begin{cases}1 & (0<x<1 \quad \text{عندما} \quad)\\ \frac{1}{2} & (x=0 \text{ أو } x=1 \quad \text{عندما} \quad)\\ 0 & (x<0 \text{ أو } x>1 \quad \text{عندما} \quad)\end{cases}$$

الحل :

إن $|f(x)|<2$ من أجل جميع قيم x وهذا يعني أن التابع $f(x)$ محدود على $\mathbb{R}$.
ومن الملاحظ أن هذا التابع $f(x)$ قابل للمكاملة بالإطلاق على $\mathbb{R}$ لأن هذا التابع يساوي الصفر على خارج المجال $[0,1]$ ومن ثم فإن تكامله على $\mathbb{R}$ يؤول إلى التكامل على المجال $[0,1]$. ومن الملاحظ أيضاً أن التابع $f(x)$ يحقق الشروط (i),(ii),(iii) في كل مجال مغلق محدود، حيث أن منحنيه هو الآتي :



إذن يمكن تمثيل التابع $f(x)$ بتكامل فوريه، أي:

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}d\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\alpha(x-t)dt=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}d\alpha\int_0^{1}\cos\alpha(x-t)dt$$

ومنه :

$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin\frac{\alpha}{2}.\cos\frac{\alpha(1-2x)}{2}}{\alpha}d\alpha$ من أجل جميع قيم x،

وذلكبملاحظة أنّ: $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\frac{1}{2}=f(x)$ في كل من نقطتي الانقطاع $x=0$ و $x=1$.

ملاحظة :

بوضع $x=0$ في طرفي المساواة، التي تعطي تمثيل التابع $f(x)$ بتكامل فوريه، ينتج :

$$f(0)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin\frac{\alpha}{2}.\cos\frac{\alpha}{2}}{\alpha}d\alpha$$ ومنه:

$\frac{1}{2}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin\alpha}{\alpha}d\alpha$ ومن ثم : $\int_0^{\infty}\frac{\sin\alpha}{\alpha}d\alpha=\frac{\pi}{2}$ وهذا يعني أنه تم حسابتكامل ليس بالمستطاع، عادة، حسابه بأساليب المكاملة الكلاسيكية.

11-8- تكامل فوريه للتوابع الزوجية:

إنّ : $\int_{-\ell}^{\ell}|f(t).\cos t\alpha|dt\le\int_{-\ell}^{\ell}|f(t)|dt$ ومنه، إذا كان التابع $f(x)$ قابلاً للمكاملة بالإطلاق على المجال $]-\infty,\infty[$، فإنّ التكامل المعتل $\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\alpha t dt$ يكون موجوداً. وبصورة مماثلة، يكون التكامل المعتل $\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\sin\alpha t dt$ موجوداً من أجل أيّ α

وبالإضافة إلى ذلك يكون :

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(t).\cos\alpha(x-t)dt\right]d\alpha=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\alpha t dt\right]\cos\alpha x d\alpha+\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\sin\alpha t dt\right]\sin\alpha x d\alpha$$

ومنه، بفرض أن التابع $f(x)$ زوجي، يكون :

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t).\cos\alpha t dt=2\int_0^{\infty}f(t)\cos\alpha t dt\ ,\quad \int_{-\infty}^{\infty}f(t)\sin\alpha t dt=0$$

ومن ثم يكون :

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\int_0^{\infty}f(t).\cos\alpha t dt\right]\cos\alpha x d\alpha$$

وذلك من أجل كل نقطة x يكون التابع $f(x)$ مستمرا فيها

وتجدر الإشارة إلى أنه في كل نقطة انقطاع x للتابع $f(x)$ يجب ان يوضع $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ بدلا من $f(x)$ في الطرف الأيسر من المساواة السابقة.

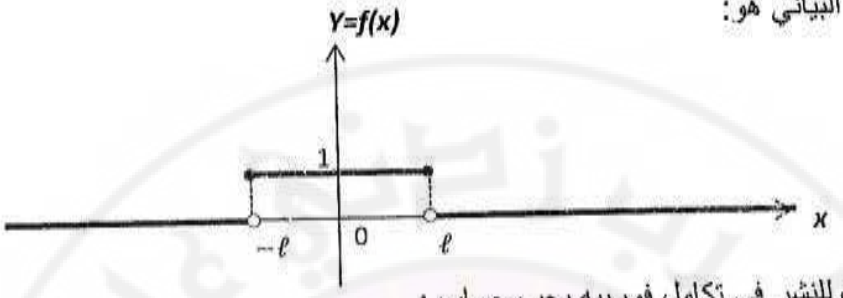
مثال:

انشر في تكامل فوريه التابع الزوجي الآتي :

$$f(x)=\begin{cases}1 & (|x|\le \ell \quad \text{عندما}\quad)\\ 0 & (|x|>\ell \quad \text{عندما}\quad)\end{cases},\ \ell>0$$

الحل :

يمكن التأكد بسهولة أن هذا التابع يحقق شروط مبرهنة فوريه حيث أن منحنيه البياني هو:



وللنشر في تكامل فوريه يجب حساب :

$$\int_0^{\infty} f(t).\cos\alpha t dt = \int_0^{\ell} \cos\alpha t dt = \frac{1}{\alpha}\sin\alpha\ell$$

ومنه فالنشر المطلوب هو :

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\sin\alpha\ell}{\alpha}\cos\alpha x d\alpha$$

وذلك من أجل جميع قيم x من $]-\infty,\infty[$ باستثناء القيمتين $x = \mp\ell$.

[لاحظ أنه في كل من النقطتين $x = \mp\ell$ تكون قيمة تكامل فوريه مساوية $\frac{1}{2}$].

12-8- تكامل فوريه للتوابع الفردية:

بفرض أن التابع $f(x)$ فردي. عندئذ يكون:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t).\sin\alpha t dt = 2\int_0^{\infty} f(t)\sin\alpha t dt \ , \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\alpha t dt = 0$$

ومنه : $f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\int_0^{\infty}f(t).\sin\alpha t dt\right]\sin\alpha x d\alpha$

وذلك من أجل جميع نقاط استمرار التابع $f(x)$.

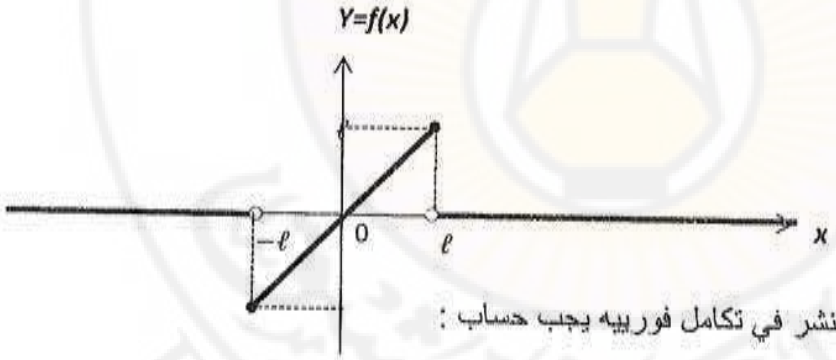
أما من أجل كل نقطة انقطاع x للتابع $f(x)$ فإنه يكون:

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\int_0^{\infty}f(t).\sin\alpha t dt\right]\sin\alpha x d\alpha$$

مثال:انشر في تكامل فوريه التابع الفردي الآتي :

$$f(x)=\begin{cases}1 & (|x|\le \ell \quad \text{عندما} \quad)\\ 0 & (|x|>\ell \quad \text{عندما} \quad)\end{cases}\quad ,\quad \ell>0$$

إن هذا التابع يحقق شروط مبرهنة فوريه و منحنيه البياني هو:



وللنشر في تكامل فوريه يجب حساب :

$$I(\alpha)=\int_0^{\infty}f(t).\sin\alpha t dt=\int_0^{\ell}t.\sin\alpha t dt=$$

$$=\left[-\frac{1}{\alpha}t\cos\alpha t\right]_0^{\ell}+\frac{1}{\alpha}\int_0^{\ell}\cos\alpha t dt=-\frac{\ell\cos\alpha\ell}{\alpha}+\frac{\sin\alpha\ell}{\alpha^2}$$

ومنه فالنشر المطلوب هو :

$$f(x)=-\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\alpha\ell\cos\alpha\ell-\sin\alpha\ell}{\alpha^2}\sin\alpha x d\alpha$$

وذلك من أجل جميع قيم x ماعدا القيمتين $x=\mp\ell$.

[لاحظ أنه من أجل $x=\ell$ تكون قيمة الطرف الأيمن من العلاقة السابقة مساوية $\frac{\ell}{2}$ بينما تكون $f(\ell)=\ell$ ؛ أما من أجل $x=-\ell$ تكون قيمة الطرف الأيمن مساوية $\frac{-\ell}{2}$ بينما تكون $f(-\ell)=-\ell$].

8-13- تمثيل التابع المعرف في المجال $[0,\infty[$ بتكامل فوريه :

إذا أعطي تابع مثل $f(x)$ ، معرف في المجال $[0,,\infty[$ ، فإنه يمكن تمديده زوجياً أو فردياً إلى المجال $]-\infty,\infty[$ بحسب المتطلبات.

مثال(1):

مثل بتكامل فوريه التابع :

$$f(x)=\begin{cases}1-\frac{x}{2} & (0\le x\le 2 \text{ عندما})\\ 0 & (x>2 \text{ عندما})\end{cases}$$ وذلك بتمديد هذا التابع

زوجياً إلى المجال $]-\infty,\infty[$.

الحل:

إن الشروط التي يتضمنها هذا المثال تعني أنه يجب استخدام العلاقة:

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\int_0^{\infty}f(t).\cos\alpha t dt\right]\cos\alpha x d\alpha$$

أي: $f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\cos\alpha x d\alpha\int_0^{2}(1-\frac{t}{2})\cos\alpha t dt$

ولكن (بالمكاملة بالتجزئة) :

$$\int_0^{2}(1-\frac{t}{2})\cos\alpha t dt=\frac{\sin^2\alpha}{\alpha^2}$$

إذن : $f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin^2\alpha}{\alpha^2}.\cos\alpha x d\alpha$ وذلك من أجل كل x من المجال $[0,\infty[$.

نتيجة :

بوضع $x=0$ في طرفي العلاقة الأخيرة ينتج أن :

$$1=f(0)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin^2\alpha}{\alpha^2}d\alpha$$

ومن ثم فإن : $\int_0^{\infty}(\frac{\sin\alpha}{\alpha})^2 d\alpha=\frac{\pi}{2}$

مثال(2):

مثل بتكامل فوريه التابع :

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cos x & (0\le x<\pi \quad \text{عندما} \quad)\\ -\frac{1}{2} & (x=\pi \quad \text{عندما} \quad)\\ 0 & (x>\pi \quad \text{عندما} \quad)\end{cases}$$

وذلك بتمديد هذا التابع فردياً إلى المجال $]-\infty,\infty[$.

الحل:

إن شروط هذا المثال تستوجب استخدام العلاقة:

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\int_0^{\infty}f(t).\sin\alpha t dt\right]\sin\alpha x d\alpha$$

$$\text{أي: } f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\sin\alpha x d\alpha\int_0^{\pi}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cos t\sin\alpha t dt$$

$$\text{ولكن: } \int_0^{\pi}(\sin\alpha t\cos t dt=\frac{\alpha}{\alpha^2-1}(\cos\alpha\pi+1)$$

إذن: $f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\frac{\alpha}{\alpha^2-1}(\cos\alpha\pi+1).\sin\alpha x d\alpha$ وذلك من أجل جميع قيم x من المجموعة $[0,+\infty[-\{\pi\}$.

14-8- تمارين محلولة:

(1) أوجد دستوراً يمكن استخدامه في إيجاد التكامل الآتي بالتجزئة بشكل متتال : $I=\int g(x)f(x)dx$ ؛ ثم طبّقه عندما $f(x)=\cos kx,\ g(x)=x^r$

و عندما $f(x)=\sin kx,\ g(x)=x^r$

حيث k,r عدان صحيحان موجبان، ثم انشر (في متسلسلة فوريه) التابع الدوري $f(x)$ الذي دوره 2π والمعرف كالآتي :

$$f(x)=x^3\ ,\ -\pi<x<\pi\ .$$

الحل :

$$I=\int g(x)f(x)dx=g(x).\int f(x)dx-\int[g'(x)\int f(x)dx]dx$$

وبفرض :

$$F_1(x)=\int f(x)dx\ ,\ F_2(x)=\int F_1(x)dx\ ,\ .....,\ F_n(x)=\int F_{n-1}(x)dx,....$$

فإنه ينتج :

$$\int g(x)f(x)dx=g(x).F_1(x)-\int g'(x).F_1(x)dx=$$
$$=g(x).F_1(x)-g'(x).F_2(x)+\int g''(x).F_2(x)=.....=$$
$$=g(x).F_1(x)-g'(x).F_2(x)+g''(x).F_3(x)+.....+(-1)^n.\int g^{(n)}(x)F_n(x)dx$$

فإذا كان $f(x)=\cos kx,\ g(x)=x^r$ فإنّ:

$$I_1=\int x\cos kxdx=\frac{x}{k}\sin kx+\frac{1}{k^2}\cos kx$$

$$I_2 = \int x^2 \cos kx dx = \frac{x^2}{k}\sin kx + \frac{2x}{k^2}\cos kx - \frac{2}{k^3}\sin kx$$

$$I_3 = \int x^3 \cos kx dx = \frac{x^3}{k}\sin kx + \frac{3x^2}{k^2}\cos kx - \frac{6x}{k^3}\sin kx - \frac{6}{k^4}\cos kx$$

.....

أما إذا كان $f(x) = \sin kx,\ g(x) = x^r$ فإن :

$$J_1 = \int x \sin kx dx = -\frac{x}{k}\cos kx + \frac{1}{k^2}\sin kx$$

$$J_2 = \int x^2 \sin kx dx = -\frac{x^2}{k}\cos kx + \frac{2x}{k^2}\sin kx + \frac{2}{k^3}\cos kx$$

$$J_3 = \int x^3 \sin kx dx = -\frac{x^3}{k}\cos kx + \frac{3x^2}{k^2}\sin kx + \frac{6x}{k^3}\cos kx - \frac{6}{k^4}\sin kx$$

.....

ولنشر $f(x) = x^3$ في متسلسلة فوريه يمكن ملاحظة أن $f(x)$ فردي، ومن ثم فإنّ $a_0 = a_n = 0$ وأيضا :

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^3 \sin nx dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{x^3}{n}\cos nx + \frac{3x^2}{n^2}\sin nx + \frac{6x}{n^3}\cos nx - \frac{6}{n^4}\sin nx\right]_0^{\pi} =$$

$$= \frac{2(-1)^n}{n^3}\left[6 - n^2\pi^2\right]$$

ومنه، بسبب الاستمرار، ينتج أن :

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{n^3}\left[6-n^2\pi^2\right]\sin nx$$

(2) انشر التابع الدوري $f(x)=\frac{\pi^2}{12}-\frac{x^2}{4}$ ، حيث $x\in[-\pi,\pi]$ ، على متسلسلة فورييه، ثم استنتج مجموع كل من المتسلسلتين $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

الحل:

إن التابع $f(x)$ زوجي، ومن ثم فإنّ: $b_n=0$. وأيضاً:

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\frac{\pi^2}{12}-\frac{x^4}{4})dx=0$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\frac{\pi^2}{12}-\frac{x^4}{4})\cos nxdx=\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$$

ومنه، بسبب الاستمرار، $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\cos nx$ ، حيث $x\in]-\pi,\pi[$.

وكذلك تكون هذه المساواة صحيحة عندما $x=\mp\pi$.

ومنه $\frac{\pi^2}{12}=f(0)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$

وأيضاً : $\frac{-\pi^2}{6}=f(\pi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{n^2}$ ومن ثم فإنّ : $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

(3) أوجد متسلسلة فوريه للتابع الدوري

$$f(x)=\begin{cases}\sin x & (0\le x\le \pi)\\ 0 & (\pi\le x\le 2\pi)\end{cases}$$

ثم استنتج مجموع كل من المتسلسلتين $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4n^2-1}$

الحل:

إن دور هذا التابع هو 2π وقد عرف على المجال $[0,2\pi]$ ولكن من السهل إعادة تعريفه على المجال $[-\pi,\pi]$ بالشكل :

$$f(x)=\begin{cases}0 & (-\pi\le x\le 0)\\ \sin x & (0\le x\le \pi)\end{cases}$$

ومنه يكون :

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x dx=\frac{2}{\pi}$$

$$n\ge 1,\ a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos nx dx=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}[\sin(x+nx)+\sin(x-nx)]dx$$

(i) عندما $n\neq 1$:

$$a_n=-\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\cos(n+1)x}{n+1}-\frac{\cos(n-1)x}{n-1}\right]_0^{\pi}$$

$$=\frac{1}{\pi(n^2-1)}\left[(-1)^{n+1}-1\right]$$

(ii) عندما $n=1$:

$$a_1=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\sin 2x dx=0$$

$$n\geq 1,\ b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\sin nx dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}[-\cos(n+1)x+\cos(n-1)x]dx$$

(i) عندما $n=1$:

$$b_1=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}(-\cos 2x+1)dx=\frac{1}{2}$$

(ii) عندما $n\neq 1$: $b_n=0$.

وبسبب الاستمرار تكون متسلسلة فوريه لهذا التابع هي :

$$f(x)=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}-1}{n^2-1}\cos nx$$

حيث $x\in[-\pi,\pi]$.

$$0=f(0)=\frac{1}{\pi}-\frac{1}{\pi}\left[\frac{2}{4-1}-\frac{2}{16-1}+\frac{2}{36-1}+\ldots\ldots+\frac{2}{4n^2-1}+\ldots\ldots\right]$$

$$\frac{1}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$$

$$1 = f(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{4-1} - \frac{1}{16-1} + \frac{1}{36-1} + \ldots\ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)^2-1} + \ldots\ldots\right]$$

$$-\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1}$$

ملاحظة : كان من الممكن النشر مباشرة على المجال $[0,2\pi]$.

(4) عين تابعاً دورياً مثل $f(t)$ دوره 4 ، بحيث تكون متسلسلة فوريه [أي المتسلسلة المثلثية] الممثلة له متسلسلة جيوب فقط. ثم عين تابعاً دورياً آخر مثل $g(t)$ بحيث تكون المتسلسلة المثلثية الممثلة له متسلسلة جيوب تمام فقط.

الحل :

حتى تكون متسلسلة فوريه متسلسلة جيوب فقط يجب أن يكون التابع فردياً. فباختيار مناسب للمحورين الإحداثيين $t, f(t)$ يحقق التناظر بالنسبة للمركز يتم المطلوب.

فباختيار اللحظة $t=0$ كمركز يمكن تعيين $f(t)$ على مجال، طوله دور واحد، وفق الآتي :

$f(t) = \begin{cases} -2 & (-2 < t < 0) \\ 2 & (0 < t < 2) \end{cases}$ وهذا يعني ان $f(t)$ تابع فردي، دوره 4،

ومن ثم فإن : $a_0 = a_n = 0$ وأيضاً :

$b_n = \frac{2}{2}\int_0^2 2\sin\frac{n\pi}{2}t\,dt = \frac{-4}{n\pi}\left[(-1)^n - 1\right]$، ومن ثم فالمتسلسلة المثلثية التي لا تحوي سوى جيوب فقط هي :

$$\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n}\sin\frac{n\pi}{2}t$$

أي أن : $$f(t) \sim \frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}\sin(2k-1)\frac{\pi}{2}t$$

أما إذا تم اختيار المركز $t=0$ بحيث يتعين $g(t)$ على مجال ، طوله دور واحد، وفق الآتي :

$$g(t)=\begin{cases}-2 & (-2<t<-1)\\ 2 & (-1\le t\le 1)\\ -2 & (1<t<2)\end{cases}$$

فإن هذا التابع الدوري $g(t)$ ، الذي دوره 4، يكون زوجياً، ومن ثم فإنّ : $b_n=0$. وأيضاً :

$$a_0=\frac{2}{2}\int_0^2 g(t)dt=\int_0^1 2dt+\int_1^2(-2)dt=0$$

$$a_n=\frac{2}{2}\int_0^2 g(t)\cos\frac{n\pi}{2}tdt=\int_0^1 2\cos\frac{n\pi}{2}tdt+\int_1^2(-2)\cos\frac{n\pi}{2}tdt$$

$$=\frac{8}{n\pi}\sin n\frac{\pi}{2}=\begin{cases}0 & (n \text{ زوجي})\\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}.\frac{8}{n\pi} & (n \text{ فردي})\end{cases}$$

ومنه فالمتسلسلة المثلثية التي لاتحوي سوى جيوب تمام فقط هي :

$$g(t)\sim\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}\cos(2k-1)\frac{\pi}{2}t$$

ملاحظة :

إن التابعين $f(t), g(t)$ يمثلان الشكل نفسه ولكن بانسحاب بسيط للمحاور.

وبسهولة يمكن التأكد من أن $f(t+1) = g(t)$.

من المعلوم أنه إذا كان $f(x)$ تابعاً مستمراً قطعياً على المجال $[-\ell, \ell]$ حيث $[f(x)]^2$ قابل للمكاملة على المجال $[-\ell, \ell]$ ، وكانت a_n, b_n هي أمثال فوريه للتابع $f(x)$ فإن متطابقة (مساواة) بارسيفال الآتية تكون صحيحة

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}[f(x)]^2 dx$$

المطلوب :

(i) انشر [في متسلسلة فوريه] التابع $f(x) = x^2$ على المجال $[-\pi, \pi]$.

(ii) استنتج قيمة المجموع لكل من : $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ ثم $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ ثم $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$.

الحل:

(i) $b_n = 0$ لأن $f(x)$ زوجي. وكذلك :

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2\pi^2}{3}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx = \frac{4}{n^2}(-1)^n$$

ومنه، بسبب الاستمرار، يكون :

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} - 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\cos nx \quad , \quad x \in [-\pi, \pi]$$

(ii) إنّ : $0 = f(0) = \frac{\pi^2}{3} - 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ ومنه : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$

وإنّ : $(-1)^n$. $\pi^2 = f(\pi) = \frac{\pi^2}{3} - 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ ومنه : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

واعتماداً على متطابقة بارسيفال يكون :

$$\frac{1}{2}(\frac{2\pi^2}{3})^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{4}{n^2})^2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^4 dx$$

ومنه : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$

(5) بفرض أنّ $f(x)$ تابع قابل للاشتقاق على المجال $]-\ell, \ell[$ وأنّ $f'(x)$ مستمر قطعياً على هذا المجال فمن المعلوم أنه يمكن الوصول إلى متسلسلة فوريه للتابع $f'(x)$ بالاشتقاق حدا فحدا لمتسلسلة فوريه للتابع $f(x)$، شريطة أن يكون $f(-\ell + 0) = f(\ell - 0)$ عند حدي المجال المدروس $]-\ell, \ell[$، أي أنّ :

$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos wx + b_n \sin wx)$ ، حيث $w = \frac{\pi}{\ell}$ ، يقصى

بأنّ : $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nw(b_n \cos nwx - a_n \sin nwx)$

المطلوب :

(i) انشر [في متسلسلة فوريه] التابع الدوري $f(x) = x.\sin x$ على المجال $]-\pi, \pi[$.

(ii) أوجد متسلسلة فوريه للتابع $g(x)=\sin x+x\cos x$ ، حيث $x\in\left]-\pi,+\pi\right[$

الحل :

(i) إنّ $f(x)$ زوجي، ودوره 2π، ومن ثم :

$$b_n=0$$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x.\sin x\,dx=2$$

$$(n\geq 1)\quad a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x\sin x)\cos nx\,dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\left[\sin(n+1)x-\sin(n-1)x\right]dx$$

فإذا كان $n\neq 1$ فإن :

$$a_n=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{x}{n+1}\cos(n+1)x+\frac{1}{(n+1)^2}\sin(n+1)x+\frac{x}{n-1}\cos(n+1)x-\frac{1}{(n-1)^2}\sin(n-1)x\right]_0^{\pi}$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{\pi}{n+1}(-1)^{n+1}+\frac{\pi}{n-1}(-1)^{n-1}\right]=\frac{2(-1)^{n-1}}{n^2-1}$$

وإذا كان $n=1$ فإن :

$$a_1=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin 2x\,dx=-\frac{1}{2}$$

ومنه : $$f(x)=1-\frac{1}{2}\cos x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2(-1)^{n-1}}{n^2-1}\cos nx$$

(ii) إنّ $f'(x) = x\cos x + \sin x = g(x)$

وإنّ : $f(-\pi + 0) = 0 = f(\pi - 0)$

ومن ثم فإنّ : $g(x) = \frac{1}{2}\sin x + 2\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n.(-1)^n}{n^2 - 1}\sin nx$

(6) بفرض أن $f(x)$ تابع دوري، دوره 2ℓ، ويحقق شروط ديريكليه على المجال المدروس $]-\ell, \ell[$. وبفرض أن :

حيث $w = \frac{\pi}{\ell}$، وحيث $a_0 = 0$ وحيث الطرف الأيمن من هذه العلاقة يمثل متسلسلة فوريه للتابع $f(x)$ على المجال المدروس. فمن المعلوم أنه من أجل x, y من $]-\ell, \ell[$ يكون :

$$\int_y^x f(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nw}[b_n(\cos nwy - \cos nwx) + a_n(\sin nwx - \sin nwy)]$$

المطلوب :

[1] ماذا تستنتج من هذا النص المذكور في الفرض بوضع $y = 0$ ؟

[2] بفرض أن $F(x)$ هو التابع الأصلي للتابع $f(x)$ ، وأن $F(x)$ قد نشر في متسلسلة فوريه له وهي :

$$F(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \cos nwx + B_n \sin nwx) \quad , w = \frac{\pi}{\ell}$$

فاستنتج قيمة $\frac{A_0}{2}, A_n, B_n$.

[3] لاحظت أن المكاملة حداً فحداً تصح فقط عندما $a_0 = 0$. أما إذا كان $a_0 \neq 0$ فإن هذا الشرط يمكن التغلب عليه بطريقة يطلب إيجادها وشرحها

بالاستفادة من نشر التابع $\varphi(x) = x$ على المجال $[-\ell, \ell]$ في متسلسلة فوريه.

[4] استنتج متسلسلة فوريه للتابع $g(x) = x^2$ على المجال $[-\ell, \ell]$.

[5] أوجد، مستفيداً من الطلب السابق، متسلسلة فوريه للتابع $\psi(x) = x^3$ حيث $-T \leq x \leq T$.

الحل :

[1] بوضع $y = 0$ ينتج أنّ :

$$\int_0^x f(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{nw} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{b_n}{nw} \cos nwx + \frac{a_n}{nw} \sin nwx \right)$$

[2] بالمقارنة بين منشور $F(x)$ والطرف الأيمن من العلاقة في [1] يمكن القول إنّ :

$$\frac{A_0}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{nw} \quad , A_n = -\frac{b_n}{nw} \quad , B_n = \frac{a_n}{nw}$$

[3] إن التابع $\varphi(x) = x$ فردي، ودوري (دوره 2ℓ)، ومن ثم فإنّ :

$$a_0 = a_n = 0 \ , \ b_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} x \sin \frac{n\pi}{\ell} x dx = \frac{2\ell}{n\pi} (-1)^{n-1}$$

ومنه، بسبب الاستمرار، يكون :

$$x = \frac{2\ell}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin \frac{n\pi}{\ell} x \qquad (*)$$

ثم بفرض $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nwx+b_n\sin nwx)$ حيث $w=\frac{\pi}{\ell}$

وحيث $a_0\neq 0$ ، فإن المساواة الآتية تدل على نشر التابع $f(x)-\frac{a_0}{2}$ في متسلسلة فوريه على المجال المدروس، أيْ أن :

$$f(x)-\frac{a_0}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nwx+b_n\sin nwx)$$

ما يسمح بالمكاملة حداً فحداً، ويكون :

$$F(x)-\frac{a_0}{2}x=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-\frac{b_n}{nw}\cos nwx+\frac{a_n}{nw}\sin nwx)$$

ومنه، حسب (*) ، ينتج أنّ :

$$F(x)=\frac{A_0}{2}+\frac{a_0\ell}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\cdot\sin nwx+\sum_{n=1}^{\infty}(-\frac{b_n}{nw}\cos nwx+\frac{a_n}{nw}\sin nwx)$$

حيث يمكن حساب A_0 من الدستور : $A_0=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}F(x)dx$.

[4] في الطرف الأيمن من (*) يبدو أن $a_0=0$ ومن ثم فإنه يمكن المكاملة حداً فحداً وكتابة :

$$\int_0^x t\,dt = \frac{2\ell}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x \frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin\frac{n\pi}{\ell}t\,dt$$

$$\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x = \frac{2\ell}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n.\ell}{n^2.\pi}\cos\frac{n\pi}{\ell}t\right]_0^x$$

$$\frac{x^2}{2} = \frac{2\ell^2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{n^2}\cos\frac{n\pi}{\ell}x - \frac{(-1)^n}{n^2}\right]$$

$$x^2 = \frac{4\ell^2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2} + \frac{4\ell^2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos\frac{n\pi}{\ell}x$$

ولكن $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$ [يمكن، مثلاً، العودة إلى التمرين المحلول (2)].

إذن : $$x^2 = \frac{\ell^2}{3} + \frac{4\ell^2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos\frac{n\pi}{\ell}x$$

ملاحظة : يمكن حساب الثابت $\frac{4\ell^2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ بطريقة أخرى وذلك بملاحظة أن هذا الثابت هو $\frac{A_0}{2}$ في متسلسلة فوريه للتابع x^2 حيث ينتج أنّ : $A_0 = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} x^2\,dx = \frac{2\ell^2}{3}$ ومن ثم فهذا الثابت يساوي $\frac{\ell^2}{3}$.

[5] من الطلب [4] يكون (حيث $\ell = T$) :

$$x^2 - \frac{T^2}{3} = \frac{4T^2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos\frac{n\pi}{T}x$$

ولما كان الثابت $a_0 = 0$ بالنسبة للتابع $x^2 - \frac{T^2}{3}$ فإنه يمكن المكاملة حداً فحداً،

$$\int_0^x (x^2 - \frac{T^2}{3})dx = \frac{4T^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x \frac{(-1)^n}{n^2} \cos\frac{n\pi}{T} x dx$$ ومن ثم ينتج أن :

$$\frac{x^3}{3} - \frac{T^2}{3}x = \frac{4T^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n . T}{n^3 . \pi} \sin\frac{n\pi}{T} x \right]_0^x$$

$$x^3 = T^2 x + \frac{12T^3}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \sin\frac{n\pi}{T} x$$

$$x^3 = T^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2T}{\pi n} (-1)^{n-1} \sin\frac{n\pi}{T} x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12T^3}{\pi^3 n^3} (-1)^n \sin\frac{n\pi}{T} x$$

$$x^3 = \frac{2T^3}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6 - n^2 . \pi^2}{n^3} (-1)^n \sin\frac{n\pi}{T} x$$

(7) إذا كان $f(x)$ تابعاً معرفاً على المجال $]-\infty, \infty[$ ، وكان مستمراً قطعياً على كل مجال محدود $[a,b]$ من $\mathbb{R}$، وكان $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$ متقارباً، فمن المعلوم ان التكامل الآتي [الذي يسمى تكامل فوريه للتابع $f(x)$] :

$$\int_0^{\infty} [a(u).\cos ux + b(u).\sin ux] du$$

حيث

$$a(u)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\cos uxdx$$

$$b(u)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\sin uxdx$$

يمثل التابع $f(x)$ في كل نقطة من نقاط الاستمرار التي يملك التابع مشتقاً عندها؛ بينما يساوي $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$ في نقاط الانقطاع التي يملك التابع عندها مشتقاً من اليمين وآخر من اليسار. " أيّ أن تكامل فوريه للتابع $f(x)$ يساوي $f(x)$ في نقاط الاستمرار، ويساوي $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$ في نقاط الانقطاع"

المطلوب :

(i) أوجد تكامل فوريه للتابع :

$$f(x)=\begin{cases}e^{-x} & (x\geq 0)\\ 0 & (x<0)\end{cases}$$

(ii) أوجد تكامل فوريه للتابع :

$$f(x)=\begin{cases}|x| & (-1<x<2)\\ 0 & (x<-1)\\ 0 & (x\geq 2)\end{cases}$$

الحل :

(i)

$$a(u)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0}0\cos uxdx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}e^{-x}\cos uxdx=\frac{1}{\pi u^2}-\frac{1}{u^2}.a(u)$$

$$a(u)=\frac{1}{\pi(1+u^2)}$$

$$b(u)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}e^{-x}\sin uxdx=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{u}\right]-\frac{1}{\pi u(1+u^2)}=\frac{u}{\pi(1+u^2)}$$

إذن فتكامل فوريه الممثل للتابع المدروس من أجل جميع قيم x (عدا $x=0$ حيث أنها نقطة انقطاع) هو:

$$f(x)=\int_{0}^{\infty}[a(u).\cos ux+b(u).\sin ux]du$$

$$e^{-x}=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\cos ux+u\sin ux}{1+u^2}du \quad , \quad x\neq 0$$ أيْ أن :

أما عندما $x=0$ فإنّ :

$$f(x+0)=f(0+0)=1 \quad , \quad f(x-0)=f(0-0)=0$$

أي أن هذا التكامل يكون، عند الصفر، مساوياً $\frac{1}{2}[1+0]=\frac{1}{2}$.

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{1}{1+u^2}du$$ أيْ أن :

ملاحظة : من المعلوم أن : $\int_{0}^{\infty}\frac{du}{1+u^2}=\frac{\pi}{2}$

(ii)

$$a(u)=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\infty}^{-1}0dx+\int_{-1}^{0}-x\cos uxdx+\int_{0}^{2}x\cos uxdx+\int_{2}^{\infty}0dx\right]=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{u}\sin u+\frac{1}{u^2}\cos u+\frac{2}{u}\sin 2u+\frac{1}{u^2}\cos 2u-\frac{2}{u^2}\right]$$

$$b(u)=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-1}^{0}-x\sin uxdx+\int_{0}^{2}x\sin uxdx\right]=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{u}\cos u-\frac{1}{u^2}\sin u-\frac{2}{u}\cos 2u+\frac{1}{u^2}\sin 2u\right]$$

ومن ثم فمن أجل جميع قيم x (عدا نقاط الانقطاع $x=-1$ و $x=2$) يكون :

$$f(x)=\int_{0}^{\infty}[a(u)\cos ux+b(u)\sin ux]du$$

أما من أجل $x=-1$ فإن : $f(-1-0)=0$ ، $f(-1+0)=1$.

إذن : $$\frac{1}{2}(1+0)=\frac{1}{2}=\int_{0}^{\infty}[a(u)\cos u+b(u)\sin u]du$$

ومن ثم فإنّ : $$\frac{\pi}{2}=\int_{0}^{\infty}\frac{1}{u^2}\left[1+2u\sin 3u+\cos 3u-\frac{2}{u^2}\cos u\right]du$$

كذلك من أجل $x=2$ فإن : $f(2-0)=2$ ، $f(2+0)=0$.

إذن : $$\frac{1}{2}(0+2)=1=\int_{0}^{\infty}[a(u)\cos 2u+b(u)\sin 2u]du$$

ومن ثم فإنّ : $\pi = \int_0^{\infty}\left[\frac{1}{u}\sin 3u + \frac{1}{u^2}\cos 3u + \frac{1}{u^2} - \frac{2}{u^2}\cos 2u\right]du$

(8) إذا كان $f(x)$ تابعاً معرفاً على $]-\infty,\infty[$ ومحققاً للشروط الواردة في التمرين المحلول (8)، وكان $f(x)$ فردياً فمن المعلوم أنّ :

$$b(u) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f(x)\sin uxdx \quad , \quad a(u) = 0$$

$$f(x) = \int_0^{\infty} b(u)\sin uxdu$$

وهذا يعطي التمثيل الجيبي للتابع $f(x)$ والتكامل يدعى تكامل فوريه الجيبي للتابع $f(x)$.

أما إذا كان $f(x)$ زوجياً فمن المعلوم أنّ :

$$a(u) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f(x)\cos uxdx \quad , \quad b(u) = 0$$

$$f(x) = \int_0^{\infty} a(u)\cos uxdu$$

وهذا يعطي التمثيل التجيبي للتابع $f(x)$ والتكامل يدعى تكامل فوريه التجيبي للتابع $f(x)$.

أما إذا كان التابع $f(x)$ معرفاً على المجال $]0,\infty[$ فإنه يمكن تمديد التابع على المجال $]-\infty,0[$ إما بشكل تابع زوجي أو تابع فردي؛ ولكن يجب الانتباه أنه في كلتا الحالتين فإن قيمة تكامل فوريه في كل من الحالتين على المجال $]0,\infty[$ يمثل

التابع $f(x)$ ؛ أيْ أنه يمكن تمثيل التابع $f(x)$ المعرف على المجال $[0,\infty[$ بتكامل فورييه الجيبي :

$$f(x)=\int_0^{\infty} b(u)\sin uxdu \text{ حيث: } b(u)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f(x)\sin uxdx$$

أو تمثيلهبتكامل فورييه التجيبي :

$$f(x)=\int_0^{\infty} a(u)\cos uxdu \text{ حيث : } a(u)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f(x)\cos uxdx$$

المطلوب :

(i) مثل التابع $f(x)=\begin{cases}1 & (0<x<a)\\ 0 & (x\geq a)\end{cases}$ بتكامل فورييه الجيبي ثم بتكامل فورييه التجيبي.

(ii) أوجد تكامل فورييه الجيبي ثم تكامل فورييه التجيبي، وذلك للتابع :

$$f(x)=e^{-ax} \quad , a>0\ , x\geq 0$$

الحل: (i) $b(u)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f(x)\sin uxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{a}\sin uxdx=\frac{2}{\pi u}[1-\cos au]$

ومنه : $f(x)=\int_0^{\infty} b(u)\sin uxdu=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{1-\cos au}{u}\sin uxdu$

حيث : $x\neq a$ و $x\neq 0$.

وأيضا : $a(u)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f(x)\cos uxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{a}\cos uxdx=\frac{2}{\pi u}\sin au$

$$f(x)=\int_0^{\infty}a(u)\cos uxdu=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin au}{u}\cos uxdu$$ ومنه :

حيث : $x\neq a$.

(ii) إنّ:

$$b(u)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}f(x)\sin uxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}e^{-ax}\sin uxdx=\frac{2u}{\pi(a^2+u^2)}$$

$$a(u)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}e^{-ax}\cos uxdx=\frac{2a}{\pi(a^2+u^2)}$$

إذن فتكامل فوريه الجيبي للتابع $f(x)$ هو :

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{u}{a^2+u^2}\sin uxdu$$

أما تكامل فوريه التجيبي للتابع $f(x)$ فهو :

$$f(x)=\frac{2a}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{1}{a^2+u^2}\cos uxdu$$

(9) بفرض $x\in[0,\infty[$ ، فيقال عن التكامل $F_1(\lambda)=\int_0^{\infty}f(x).\sin\lambda xdx$ إنه تحويل فوريه الجيبي للتابع $f(x)$ ، ويقال عن التكامل : $F_2(\lambda)=\int_0^{\infty}f(x).\cos\lambda xdx$ إنه تحويل فوريه التجيبي للتابع $f(x)$.

ثم بفرض $x \in]-\infty,\infty[$ ، فيقال عن التكامل : $F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} . f(x)dx$ إنه تحويل فورييه للتابع $f(x)$ ، حيث $i = \sqrt{-1}$ ، وهو يتصف بأنه خطي.

المطلوب :

(i) أوجد تحويل فورييه الجيبي ثم تحويل فورييه التجيبي ثم تحويل فورييه للتابع :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (0 < x < a) \\ 0 & (x > a \text{ أو } x < 0) \end{cases}$$

(ii) أوجد تحويل فورييهالجيبي ثم تحويل فورييه التجيبي ثم تحويل فورييه وذلك للتابع :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-5x} & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

الحل :

(i) $F_1(\lambda) = \int_0^{\infty} f(x).\sin \lambda x dx = \int_0^{\infty} \sin \lambda x dx = \frac{1 - \cos \lambda a}{\lambda}$ (تحويل فورييه الجيبي للتابع المدروس)

و هذا هو تحويل $F_2(\lambda) = \int_0^{\infty} f(x).\cos \lambda x dx = \int_0^{\infty} \cos \lambda x dx = \frac{\sin a\lambda}{\lambda}$

فورييه التجيبي للتابع المدروس .

$$F(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\lambda x}.f(x)dx=\int_{0}^{a}e^{-i\lambda x}dx=\left[\frac{1}{-i\lambda}e^{-i\lambda x}\right]_0^a=$$

$$=\frac{1}{-i\lambda}\left[e^{-i\lambda a}-1\right]=\frac{1}{i\lambda}-\frac{e^{-i\lambda a}}{i\lambda}=\frac{-i+e^{-i\lambda a}}{\lambda}$$

(تحويل فوريه للتابع المدروس)

(ii) $F_1(\lambda)=\int_{0}^{\infty}f(x).\sin\lambda x dx=\int_{0}^{\infty}e^{-5x}\sin\lambda x dx=\frac{\lambda}{25+\lambda^2}$ (تحويل فوريه الجيبي للتابع المدروس)

و هذا هو $F_2(\lambda)=\int_{0}^{\infty}f(x).\cos\lambda x dx=\int_{0}^{\infty}e^{-5x}\cos\lambda x dx=\frac{5}{25+\lambda^2}$

تحويل فوريه التجيبي للتابع المدروس .

$$F(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x).e^{-i\lambda x}dx=\int_{0}^{\infty}e^{-5x}.e^{-i\lambda x}dx=F_2(\lambda)-iF_1(\lambda)=\frac{5-i\lambda}{25+\lambda^2}$$

(تحويل فوريه للتابع المدروس)

(10)

(i) أوجد تحويل فوريه للتابع المعرف وفق الآتي :

$$f_1(t)=\begin{cases}3 & (-1<t<1 \text{ عندما})\\ 0 & (\text{في الحالات الأخرى})\end{cases}$$

(ii) أوجد تحويل فوريه للتابع $f_2(t)=h(t).e^{-t}$ حيث $h(t)$ هو تابع الخطوة الواحدة الآتي :

$$h(t)=\begin{cases}1 & (t\geq 0 \text{ عندما }) \\ 0 & (t<0 \text{ عندما }) \end{cases}$$

(iii) إذا كان $f(t)$ تابعاً غير دوري، وكان $F(\lambda)$ تحويل فوريه له فإن $f(t)$ يمكن أن يعبّر عنه بالتمثيل الآتي :

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\lambda)e^{i\lambda t}dt$$

حيث $i=\sqrt{-1}$، ويقال أيضاً عن هذا التمثيل إنه " **تمثيل $f(t)$ بتكامل فوريه**".

أوجد تمثيل $f_1(t)$ بتكامل فوريه (وفقاً لما ذكر).

الحل :

$$F_1(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(t).e^{-i\lambda t}dt=\int_{-1}^{1}3.e^{-i\lambda t}dt=\frac{6}{\lambda}.\frac{e^{i\lambda}-e^{-i\lambda}}{2i}=6.\frac{\sin\lambda}{\lambda} \qquad \text{(i)}$$

(ii) إنّ التابع $f_2(t)$ يُعطى بالشكل الآتي:

$$f_2(t)=\begin{cases}e^{-t} & (t\geq 0 \text{ عندما }) \\ 0 & (t>0 \text{ عندما }) \end{cases}$$

ومنه : $$F_2(\lambda)=\int_{0}^{\infty}e^{-t}.e^{-i\lambda t}dt=\int_{0}^{\infty}e^{-(1+\lambda i)t}dt=\frac{1}{1+\lambda i}$$

(iii) حسب (i) يكون $F_1(\lambda)=6.\frac{\sin\lambda}{\lambda}$. ومنه يكون :

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}6.\frac{\sin\lambda}{\lambda}.e^{i\lambda t}\,dt$$

15-8- تمارين للحل .

1- أوجد متسلسلة فوريه للتابع الدوري الآتي الذي دوره 2π :

$$f(x)=\begin{cases}-k & (0<x<\pi \text{ عندما})\\ k & (\pi<x<2\pi \text{ عندما})\end{cases}$$

حيث $k>0$ ، ثم استنتج أن $\frac{\pi}{4}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$

الجواب : $f(x)=\frac{4k}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$.

2- أوجد متسلسلة فوريه للتابع الدوري الآتي الذي دوره 4 :

$$f(x)=\begin{cases}0 & (-2<x<-1 \text{ عندما})\\ k & (-1<x<1 \text{ عندما})\\ 0 & (1<x<2 \text{ عندما})\end{cases}$$

الجواب : $f(x)=\frac{k}{2}+\frac{2k}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\cos(2n-1)\frac{\pi}{2}x$.

3- أوجد متسلسلة فوريه للتابع الدوري الآتي الذي دوره 2π :

$$f(x)=\begin{cases}-1 & (-\pi<x<0 \text{ عندما})\\ x & (0<x<\pi \text{ عندما})\end{cases}$$

الجواب :

$$f(x)=-\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}(\frac{\cos x}{1}+\frac{\cos 3x}{9}+\frac{\cos 5x}{25}+.....)-$$
$$-\frac{\sin 2x}{2}+(\frac{2}{3\pi}+\frac{1}{3})\sin 3x+.....$$

4- أوجد متسلسلة فوريه للتابع الدوري الأتي الذي دوره 2π :

$$f(x)=\begin{cases}c_1 & (-\pi<x<0 \text{ عندما})\\ c_2 & (0<x<\pi \text{ عندما})\end{cases}$$

حيث $c_1<0$ و $c_2>0$.

الجواب : $f(x)=\frac{c_1+c_2}{2}+\frac{2(c_2-c_1)}{\pi}(\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 3x}{3}+.....)$.

5- أوجد متسلسلة فوريه للتابع $f(x)=5x+2$ المعرف في المجال $[-\pi,\pi]$ والدوري بدور $T=2\pi$.

الجواب : $f(x)=2+10\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$.

6- أوجد متسلسلة فوريه للتابع $f(x)=x^2$ المعرف في المجال $[0,2\pi]$ والدوري بدور $T=2\pi$.

الجواب : $f(x)=\frac{4\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}-4\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$.

7- أوجد متسلسلة فوريه للتابع الدوري $f(x)=e^{ax}$ الذي دوره 2π ، حيث $a>0$ وذلك في المجال $[-\pi,\pi]$.

الجواب : $f(x)=\frac{2sha\pi}{\pi}\left[\frac{1}{2a}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+a^2}(a\cos nx-n\sin nx)\right]$.

8- أوجد متسلسلة فوريه للتابع الدوري الآتي الذي دوره 2ℓ :

$$f(x)=\begin{cases}0 & (-\ell<x<0 \text{ عندما})\\ x & (0\le x<\ell \text{ عندما})\end{cases}$$

الجواب :

$$f(x)=\frac{\ell}{4}-\frac{2\ell}{\pi^2}(\cos\frac{\pi x}{\ell}+\frac{1}{3^2}\cos\frac{3\pi}{\ell}x+.....)+$$
$$+\frac{1}{\pi}(\sin\frac{\pi x}{\ell}-\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi x}{\ell}+.....)$$

9- أوجد متسلسلة فوريه للتابع الدوري الآتي الذي دوره 2ℓ، حيث $-\ell\le x\le\ell$:

$$f(x)=\begin{cases}\cos\frac{\pi x}{\ell} & (-\frac{\ell}{2}\le x<\frac{\ell}{2} \text{ عندما})\\ 0 & (\frac{\ell}{2}\le x\le\ell \text{ او } -\ell\le x<-\frac{\ell}{2} \text{ عندما})\end{cases}$$

الجواب :

$$f(x)=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\cos\frac{\pi x}{\ell}+\frac{2}{\pi}(\frac{1}{3}\cos\frac{2\pi}{\ell}x-\frac{1}{15}\cos\frac{4\pi}{\ell}x+.....)$$

10- ليكن μ عددا حقيقيا ولكنه ليس بعدد صحيح. انشر (في متسلسلة فوريه) التابع $f(x)=\cos\mu x$ في المجال $[-\pi,\pi]$ ثم استنتج صحة كل من العلاقتين الأتيتين :

$$\cot t=\frac{1}{t}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2t}{t^2-(n\pi)^2}$$

$$\frac{\pi}{\mu\sin\mu\pi}=\frac{1}{\mu^2}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\mu^2-n^2}$$

الجواب :

$$\cos\mu x=\frac{2\mu\sin\mu\pi}{\pi}\left(\frac{1}{2\mu^2}-\frac{1}{\mu^2-1}\cos x+\frac{1}{\mu^2-2^2}\cos 2x+.....\right)$$

11- بفرض أن متسلسلة فوريه للتابع $f(x)$ تتقارب بانتظام على المجال $[-\ell,\ell]$، ومجموعها يساوي $f(x)$ على هذا المجال. برهن على صحة متطابقة بارسيفال الأتية :

$$\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}[f(x)]^2dx=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$$

حيث a_0, a_n, b_n ، $n\geq 1$، هي أمثال فوريه للتابع $f(x)$.

وكتطبيق احسب أمثال فوريه للتابع $f(x)=x^2$ على المجال $[-\pi,\pi]$ ثم استخدم متطابقة بارسيفال على هذا المجال لإيجاد مجموع المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ ثم استنتج مجموع المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}$.

إرشاد لبرهان متطابقة بارسيفال :

اكتب منشور $f(x)$ في متسلسلة فوريه :

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{\pi n}{\ell}x+b_n\sin\frac{\pi n}{\ell}x)$$

ثم اضرب الطرفين بـ $f(x)$ وبعدئذ خذ تكامل الطرفين من $-\ell$ إلى $+\ell$ ثم استفد من دساتير فوريه التي تعطي a_0,a_n,b_n للوصول إلى الهدف المنشود.

12- انشر في متسلسلة فوريه التابع $f(x)=|x|$ على المجال $[-\pi,\pi]$ ثم استنتج أن : $\frac{\pi^2}{8}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$

الجواب : $f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}(\cos x+\frac{1}{9}\cos 3x+\frac{1}{25}\cos 5x+.....)$

13- انشر في متسلسلة فوريه التابع الدوري $f(x)=|\sin x|$ ، الذي دوره $2\ell=\pi$ ، ثم استنتج أن : $\frac{1}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$

الجواب : $|\sin x|=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}(\frac{1}{3}\cos 2x+\frac{1}{15}\cos 4x+\frac{1}{35}\cos 6x+.....)$

14- انشر في متسلسلة فوريه التابع $f(x)=e^x$ في المجال $]-1,1[$.

الجواب :

$$e^x=(e-\frac{1}{e})\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+n^2\pi^2}\cos n\pi x+\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n.(-1)^{n+1}}{1+n^2\pi^2}\sin n\pi x\right]$$

15- انشر في متسلسلة فوريه التابع $f(x)=x^3$ في المجال $]-1,1[$.

الجواب : $$x^3=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n+1}}{n}+(-1)^n.\frac{6}{n^3\pi^2}\right]\sin n\pi x$$

16- انشر في متسلسلة فوريه التابع الآتي في المجال $[-\pi,\pi]$:

$$f(x)=\begin{cases}-\frac{\pi}{4} & (-\pi<x<0 \text{ عندما})\\ 0 & (x=-\pi \text{ و/ } x=\pi \text{ و/ } x=0 \text{ عندما})\\ \frac{\pi}{4} & (0<x<\pi \text{ عندما})\end{cases}$$

الجواب : $$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$$

17- انشر في متسلسلة فوريه التابع :

$$f(x)=\begin{cases}2x & (-\pi\le x\le 0 \text{ عندما})\\ 3x & (0<x\le\pi \text{ عندما})\end{cases}$$

الجواب : $$f(x)=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1-(-1)^n}{\pi n^2}\cos nx+\frac{5(-1)^{n-1}}{n}\sin nx\right]$$

حيث $x\in]-\pi,\pi[$.

18- انشر في متسلسلة فوريه التابع $f(x)=|x|$ على المجال $I=[-2,2]$. ثم استنتج مجموع المتسلسلة : $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$ بعد أن تبرهن انها متقاربة.

19- بفرض أن التابع $f(x)$ معطى على المجال $I=]0,4[$ وفق الآتي :

$$f(x)=\begin{cases} x & (0<x<2 \text{ عندما }) \\ 4-x & (2<x<4 \text{ عندما }) \end{cases}$$

فالمطلوب :

(1) انشر هذا التابع $f(x)$ في متسلسلة لا تحوي سوى جيوب تمام على المجال I.

(2) انشر هذا التابع $f(x)$ في متسلسلة لا تحوي سوى جيوب على المجال I.

إرشاد :

(1) مدد $f(x)$ زوجياً إلى المجال $]-4,4[$ أيْ بحيث تحصل على تابع زوجي على المجال $]-4,4[$ ثم احسب أمثال فوريه التي هي

$$a_0=\frac{2}{4}\int_0^4 f(x)dx \ , \ b_n=0$$

$$(n\geq 1),\ a_n=\frac{2}{4}\int_0^4 f(x)\cos\frac{\pi nx}{4}dx$$

ثم اكتب المتسلسلة المطلوبة.

(2) مدد $f(x)$ فردياً إلى المجال $]-4,4[$ ثم احسب أمثال فوريه التي هي

$$a_0=a_n=0 \quad , (n\geq 1),\ b_n=\frac{2}{4}\int_0^4 f(x)\sin\frac{\pi nx}{4}dx$$

ثم اكتب المتسلسلة المطلوبة.

الجواب :

$$f(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{n^2\pi^2}\left[2\cos\frac{n\pi}{2}-1-(-1)^n\right]\cos\frac{n\pi}{4}x \quad (1)$$

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}\sin\frac{n\pi}{4}x \quad (2)$$

20- انشر في متسلسلة فوريه التابع :

$$f(x)=\begin{cases}0 & (-\pi\le x<0 \text{ عندما})\\ \sin x & (0\le x\le\pi \text{ عندما})\end{cases}$$

ثم، بملاحظة أن التابع $F(x)$ هو ممدود التابع $f(x)=\sin x$ ، المعرف على المجال $[0,\pi]$ إلى المجال $[-\pi,\pi]$ بين أن التابع $F(x)$ هو تمديد غير زوجي وغير فردي للتابع $f(x)$ مايدل على أن متسلسلة فوريه للتابع $F(x)$ تحوي جيوباً وجيوب تمام، ثم استنتج أنه من أجل كل x من المجال $[0,\pi]$ يكون :

$$\sin x=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{4n^2-1}$$

الجواب :

$$F(x)=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\sin x-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{4n^2-1}$$

21- انشر التابع $f(x)=\cos x$ في متسلسلة مثلثية لاتحوي إلا جيوباً، وذلك في المجال $[0,\pi]$.

الجواب : $\cos x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8n}{\pi(4n^2-1)}\sin 2nx$ حيث $x\in]0,\pi[$.

22- انشر التابع $f(x)=\frac{x-\pi}{2}$ في متسلسلة مثلثية لاتحوي إلا جيوبتمام، وذلك في المجال $[0,\pi]$.

الجواب : $\frac{x-\pi}{2}=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}-\frac{\pi}{4}$

23- انشر التابع $f(x)=x$ في متسلسلة مثلثية لاتحوي إلا جيوباً، وذلك في المجال $]0,\ell[$.

الجواب : $f(x)=\frac{2\ell}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{n\pi}{\ell}x$

24- مثل بتكامل فوريه التابع :

$$f(x)=\begin{cases}e^{-x} & (x>0 \text{ عندما})\\ 0 & (x=0 \text{ عندما})\\ -e^{x} & (x<0 \text{ عندما})\end{cases}$$

الجواب : $f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\alpha\sin\alpha x}{1+\alpha^2}d\alpha$

25- مثل بتكامل فوريه التابع :

$$f(x)=\begin{cases}\sin x & (|x|\le\pi \text{ عندما})\\ 0 & (|x|>\pi \text{ عندما})\end{cases}$$

الجواب : $f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin\pi\alpha}{1-\alpha^2}\sin\alpha x d\alpha$

26- مثل بتكامل فوريه التابع $f(x)=e^{-\beta x}$ ، حيث $0<x<\infty, \beta>0$: وذلك بأن تقوم بتمديده زوجياً ثم فردياً.

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}\cos\alpha x d\alpha$$

الجواب :

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}\sin\alpha x d\alpha$$

27- مثل بتكامل فوريه التابع :

$$f(x)=\begin{cases}1 & (0<x<a \text{ عندما})\\ -1 & (-a<x<0 \text{ عندما})\\ 0 & (|x|>a \text{ عندما})\end{cases}$$

الجواب : $f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}(1-\cos\alpha a)\frac{\sin\alpha x}{\alpha}d\alpha$

28- مثل بتكامل فوريه التابع :

$$f(x)=\begin{cases}1 & (|x|<1 \text{ عندما})\\ \frac{1}{2} & (|x|=1 \text{ عندما})\\ 0 & (|x|>1 \text{ عندما})\end{cases}$$

الجواب : $f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin\alpha}{\alpha}\cos\alpha x d\alpha$

29- انطلاقاً من العلاقتين :

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\alpha(x-t)dt\right]$$

$$\cos\alpha(x-t)=\frac{1}{2}\left[e^{i\alpha(x-t)}+e^{-i\alpha(x-t)}\right]\quad ,\ i=\sqrt{-1}$$

استنتج العلاقة الآتية، التي تدعى الشكل العقدي (المركب) لتكامل فوريه :

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{i\alpha(x-t)}dt\right]d\alpha$$

ثم، بوضع $F(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{i\alpha t}dt$ استنتج أنّ :

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(\alpha)e^{-i\alpha x}d\alpha$$

حيث يقال عن التابع $F(\alpha)$ إنه تحويل فوريه للتابع $f(x)$.

تطبيق :

بفرض أن $f(x)$ هو التابع :

$$f(x)=\begin{cases}1 & (|x|<b \text{ عندما})\\ 0 & (|x|>b \text{ عندما})\end{cases}$$ فاوجد $F(\alpha)$

الجواب :

$$F(\alpha)=\begin{cases}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin\alpha b}{\alpha} & (\alpha\neq 0 \text{ عندما })\\ \sqrt{\frac{2}{\pi}}b & (\alpha=0 \text{ عندما })\end{cases}$$

30- يقال عن متتالية من التوابع $\varphi_1(x),.....,\varphi_n(x),.....$ المعرفة على المجال $[a,b]$ إنها متعامدة على هذا المجال إذا تحقق الآتي :

$$\int_a^b[\varphi_n(x)]^2dx\neq 0 \quad , \quad \int_a^b\varphi_n(x).\varphi_k(x)dx=0 \ (n\neq k)$$

والمطلوب :

(1) أثبت أن التوابع $1,\cos x,\sin x,\cos 2x,\sin 2x,.....$ متعامدة على المجال $[-\pi,\pi]$.

(2) أثبت أن التوابع $\sin x,\sin 2x,\sin 3x,.....,\sin nx,.....$ متعامدة على المجال $[0,\pi]$.

31- أثبت أن متسلسلة فوريه الموافقة للتابع الحقيقي $g(x)=\frac{\pi-x}{2}$ هي :

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin nx$ وذلك بفرض $x\in]0,2\pi[$ و $g(x+2\pi)=g(x)$ من أجل كل x من $]-\infty,\infty[$.

32- أوجد تكامل فوريه لكل من التوابع الآتية وأوجد قيمة هذا التكامل في كل من نقاط الانقطاع ثم أوجد تحويل فوريه الجيبي وتحويل فوريه التجيبي وتحويل فوريه لجميع هذه التوابع :

$$f(x)=\begin{cases}100 & (0\leq x\leq 2)\\ 1 & (\text{خلاف ذلك})\end{cases} \quad (1)$$

$$f(x)=\begin{cases} x & (0\le x<a) \\ 0 & (\text{خلاف ذلك}) \end{cases} \quad (2)$$

$$f(x)=\begin{cases} x & (|x|\le b) \\ 0 & (|x|>a) \end{cases} \quad (3)$$

$$f(x)=\begin{cases} -x & (-5<x\le 0) \\ 0 & (x\le -5 \text{ أو } x>0) \end{cases} \quad (4)$$

$$f(x)=\begin{cases} |x| & (-1<x<2) \\ 0 & (\text{خلاف ذلك}) \end{cases} \quad (5)$$

$$f(x)=\begin{cases} 10 & (0\le x\le 3) \\ 5 & (6\le x\le 9) \\ 0 & (\text{خلاف ذلك}) \end{cases} \quad (6)$$

$$f(x)=\begin{cases} e^{-2x} & (x\ge 0) \\ 0 & (x<0) \end{cases} \quad (7)$$

$$f(x)=\begin{cases} e^{x} & (x\le 0) \\ 0 & (x>0) \end{cases} \quad (8)$$

Damascus University

بعض المصطلحات العلمية

Union	اجتماع (اتحاد)
Coordinates	إحداثيات
Test	اختبار
Continuity	استمرار
Discontinuity	انقطاع
Remainder of a Series	باقي متسلسلة
Function	تابع (دالة)
Beta Function	تابع بتّاوي
Gamma Function	تابع غمّاوي
Exponential Function	تابع أسي
Real Function	تابع حقيقي
Periodic Function	تابع دوري
Even Function	تابع زوجي
Logarithmic Function	تابع لوغاريتمي
Trigonometric Function	تابع مثلثي
Bounded Function	تابع محدود
Divergence	تباعد
Transformations	تحويلات
Change of Variable	تغيير متحول

Convergence	تقارب
Absolutely Convergence	تقارب بالإطلاق
Uniformly Convergence	تقارب بانتظام
Conditionally Convergence	تقارب شرطي
Pointwise Convergence	تقارب (نقطي)
Evaluation of Errors	تقدير الأخطاء
Integral	تكامل
Integral by parts	تكامل بالتجزئة
Fourier Integral	تكامل فورييه
Improper Integral	تكامل معتل
Constant	ثابت
Neighborhood	جوار
Real	حقيقي
Polynomial	حدودية (كثير حدود)
Negative	سالب
Chain	سلسلة
Natural	طبيعي
Rule	قاعدة (قانون)
Principal Value	قيمة رئيسة
Theorem	مبرهنة

Sequence	متتالية
Monotonic Sequence	متتالية مطردة
Series	متسلسلة
Power Series	متسلسلة قوى
Sum	مجموع
Set	مجموعة
Open Set	مجموعة مفتوحة
Closed Set	مجموعة مغلقة
Derivative	مشتق
Partial Derivative	مشتق جزئي
Identity	مطابقة
Equation	معادلة
Criterion	معيار
Curve	منحن
Radius	نصف قطر
Point	نقطة
Limit	نهاية

Damascus University

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

بعض المراجع العلمية الأجنبية

1. Athanasios P., The Fourier Integral Applications.
2. Croft D., Mathematics for Engineers.
3. Demidovich B., Problems in Mathematical Analysis.
4. Dieudonne J., Foundations of Modern Analysis.
5. Fikhtengolts G., Course in Differential and Integral Calculus.
6. Glyn J.,Advanced Modern Engineering Mathematics.
7. Hyslop J., Infinite Series.
8. Kelley J., General Topology.
9. Mathews J., Walker R., Mathematical Methods of Physics.
10. Pipes L., Applied Mathematics for Engineers and Physicists.
11. Rainville D., The Laplace Transform.
12. Rudin W., Principles of Mathematical Analysis.
13. Smirnov V., Course in Higher Mathematics.
14. Spiegel M.,Advanced Calculus.
15. Tylor H., Wade T., University calculus and subsets of the Plane.
16. Tolstov P., Fourier Series.
17. Weinberger H., Partial Differential Equations.

بعض المراجع العلمية العربية

(1) أ.د. عبد الواحد أبو حمدة – كتاب التحليل (1) – جامعة دمشق.

(2) أ.د. عبد الواحد أبو حمدة – كتاب الرياضيات العامة (4) – جامعة دمشق.

(3) أ.د. عبد الواحد أبو حمدة – كتاب الطبولوجيا (1) – جامعة دمشق.

(4) أ.د. عبد الواحد أبو حمدة – كتاب الجبر المجرد – جامعة دمشق.

وقل رب زدني علما
Damascus University

التدقيق العلمي :
أ.د.محمد بشير قابيل
أ.د.محمد صبح
أ.م.د.عبد اللطيف هنانو

التدقيق اللغوي :
أ.م.د.غسان غنيم

حقوق الطبع والترجمة و النشر محفوظة لمديرية
الكتب والمطبوعات في جامعة دمشق

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University