منشورات جامعة دمشق
كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية

د. عاطف عامر



أسس انتقال الحرارة والكتلة

الدكتور عاطف عامر

أستاذ مساعد في قسم هندسة الميكانيك العام

جامعة دمشق

2019 - 2018
1440 - 1439

أسس انتقال الحرارة والكتلة

1440-1439
2019-2018

رقم الكتاب

مطبعة جامعة دمشق

سعر المبيع

أسس انتقال الحرارة والكتلة

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

منشورات جامعة دمشق
كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية

أسس انتقال الحرارة والكتلة

الدكتور عاطف عامر
أستاذ مساعد
فـي قسم هندسة الميكانيك العام

جامعة دمشق

1440 – 1439

2019 – 2018

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الفهرس

مقدمة 13

الفصل الأول – مقدمة في انتقال الحرارة 15

1 – 1 – انتقال الحرارة وكيفية حدوثه 15

1 – 2 – الأسس الفيزيائية للمعادلات العامة 16

1 – 2 – 1 – التوصيل 17

1 – 2 – 2 – الحمل 20

1 – 2 – 3 – الإشعاع 25

1 – 2 – 4 – العلاقة بين انتقال الحرارة والترموديناميك 30

1 – 2 – 5 – الحرارة والأشكال الأخرى للطاقة 31

1 – 2 – 6 – الحرارة المتولدة 32

1 – 3 – قانون انحفاظ الطاقة 33

1 – 3 – 1 – التوازن الطاقي لنظام مغلق 37

1 – 3 – 2 – التوازن الطاقي لنظام جريان مستقر 37

1 – 3 – 3 – التوازن الطاقي السطحي 39

الفصل الثاني – مقدمة في التوصيل الحراري **41**

2 – 1 – مقدمة 42

2 – 1 – 1 – قانون فوريه 42

2 – 1 – 2 – الخواص الحرارية للمادة 45

2 – 2 – معادلة الانتشار الحراري 52

2 – 2 – 1 – الإحداثيات الديكارتية 52

2 – 2 – 2 – الإحداثيات الاسطوانية 59

2 – 2 – 3 – الإحداثيات الكروية 60

2 – 3 – الشروط الحدية والابتدائية 61

2 – 3 – 1 – الشروط الحدية عند درجة حرارة محددة 62
2 – 3 – 2 – الشروط الحدية عند تدفق حراري محدد 63
2 – 3 – 3 – الشروط الحدية في حالة الحمل الحراري 67
2 – 3 – 4 – الشروط الحدية في حالة الإشعاع 70
2 – 3 – 5 – الشروط الحدية المعممة 71
الفصل الثالث – التوصيل الحراري المستقر أحادي البعد 75
3 – 1 – جدار مستو 75
3 – 1 – 1 – توزع درجة الحرارة 76
3 – 1 – 2 – المقاومة الحرارية 78
3 – 1 – 3 – الجدار المركب 79
3 – 1 – 4 – مقاومة التماس 88
3 – 2 – الأنظمة القطرية 93
3 – 2 – 1 – الأسطوانة 93
3 – 2 – 2 – جدار أسطواني مركب 96
3 – 2 – 3 – الكرة 99
3 – 2 – 4 – نصف القطر الحدي للعزل 104
3 – 3 – التوصيل الحراري بوجود طاقة حرارية متولدة 109
3 – 3 – 1 – جدار مستوٍ 109
3 – 3 – 2 – الأنظمة القطرية 118
3 – 4 – انتقال الحرارة من السطوح المريشة 120
3 – 4 – 1 – التحليل العام للتوصيل الحراري 122
3 – 4 – 2 – الريش ذات مساحة المقطع العرضي المنتظم 124
3 – 4 – 3 – أداء الريشة 137
3 – 4 – 4 – الكفاءة الكلية للسطح المريش 143
الفصل الرابع – أسس الحمل الحراري 151
4 – 1 – الآلية الفيزيائية للحمل 151

4 – 2 – تصنيف جريانات المائع 156
4 – 2 – 1 – الجريان اللزج وغير اللزج 156
4 – 2 – 2 – الجريان الداخلي والخارجي 157
4 – 2 – 3 – الجريان القابل وغير القابل للانضغاط 158
4 – 2 – 4 – الجريان الصفائحي والمضطرب 158
4 – 2 – 5 – الجريان المستقر وغير المستقر (العابر) 159
4 – 2 – 6 – الجريان الطبيعي والقسري 159
4 – 3 – الطبقة الحدية الحركية 159
4 – 4 – الطبقة الحدية الحرارية 163
4 – 5 – الجريانات الصفائحية والمضطربة 165
4 – 6 – المعادلات اللابعدية للحمل 167
4 – 7 – الأشكال التابعية لمعاملات الاحتكاك والحمل 168
4 – 8 – التشابه بين انتقال كمية الحركة وانتقال الحرارة 170
4 – 9 – الحمل القسري الخارجي 173
4 – 9 – 1 – السحب وانتقال الحرارة في الجريان الخارجي 173
4 – 9 – 2 – الاحتكاك وضغط السحب 174
4 – 9 – 3 – انتقال الحرارة 177
4 – 10 – الجريان الموازي على صفيحة مستوية 179
4 – 10 – 1 – معامل الاحتكاك 180
4 – 10 – 2 – معامل انتقال الحرارة 182
4 – 10 – 3 – صفيحة مستوية ذات طول ابتدائي غير مسخن 189
4 – 10 – 4 – تدفق حراري منتظم 190
4 – 11 – الجريان على الأسطوانات والكرات 193
4 – 11 – 1 – تأثير خشونة السطح 196
4 – 11 – 2 – معامل انتقال الحرارة 198
4 – 12 – الجريان على حزمة أنابيب 202

4 – 12 – 1 – هبوط الضغط 208
4 – 13 – انتقال الحرارة بالحمل القسري الداخلي 212
4 – 13 – 1 – مقدمة 212
4 – 13 – 2 – السرعة الوسطية ودرجة الحرارة الوسطية 213
4 – 13 – 3 – الجريان الصفائحي والمضطرب في الأنابيب 215
4 – 14 – منطقة الدخول 217
4 – 14 – 1 – أطوال الدخول 221
4 – 15 – التحليل الحراري العام 222
4 – 15 – 1 – تدفق حراري ثابت للسطح 223
4 – 15 – 2 – درجة حرارة السطح ثابتة 226
4 – 16 – الجريان الصفائحي في الأنابيب 231
4 – 16 – 1 – هبوط الضغط 234
4 – 16 – 2 – بروفايل درجة الحرارة وعدد نوسلت 237
4 – 16 – 3 – تدفق حراري سطحي ثابت 238
4 – 16 – 4 – درجة حرارة السطح ثابتة 240
4 – 16 – 5 – الجريان الصفائحي في الأنابيب غير الدائرية 240
4 – 16 – 6 – تطور الجريان الصفائحي في منطقة الدخول 240
4 – 17 – الجريان المضطرب في الأنابيب 244
الفصل الخامس – المبادلات الحرارية **247**
5 – 1 – أنواع المبادلات الحرارية 248
5 – 2 – معامل انتقال الحرارة الكلي 252
5 – 3 – تحليل المبادلات الحرارية 263
5 – 4 – طريقة فرق درجات الحرارة اللوغارتمي الوسطي 266
5 – 4 – 1 – المبادلات الحرارية ذات الجريان المتعاكس 269
5 – 4 – 2 – المبادلات الحرارية متعددة الأشواط وذات الجريان المتصالب 273

5 – 5 – طريقة عدد وحدات الانتقال – الفعّالة 277
الفصل السادس – انتقال الكتلة 289
6 – 1 – مقدمة 289
6 – 2 – التشابه بين انتقال الحرارة وانتقال الكتلة 293
6 – 2 – 1 – درجة الحرارة 294
6 – 2 – 2 – التوصيل 294
6 – 2 – 3 – الحرارة المتولدة 295
6 – 2 – 4 – الحمل 295
6 – 3 – الانتشار الكتلي 296
6 – 3 – 1 – أساس كتلي 296
6 – 3 – 2 – أساس مولي 297
6 – 3 – 3 – قانون فيك في الانتشار: وسط ساكن مكون من مادتين 299
6 – 4 – الشروط الحرارية 303
6 – 5 – الانتشار الكتلي المستقر عبر جدار 311
6 – 6 – الانتشار في وسط متحرك 319
6 – 6 – 1 – انتشار البخار في غاز ساكن: جريان ستيفان 326
6 – 6 – 2 – الانتشار المتعاكس المتكافئ مولياً 331
6 – 7 – الحمل الكتلي 333
6 – 7 – 1 – التشابه بين معاملات الاحتكاك وانتقال الحرارة وانتقال الكتلة 340
6 – 7 – 2 – حالة خاصة: تشابه رينولدز 342
6 – 7 – 3 – الحالة العامة: تشابه شيلتون – كولبرن 342
6 – 7 – 4 – علاقات الحمل الكتلي 344
6 – 8 – الانتقال المتزامن للحرارة والكتلة 346
الفصل السابع – أسس الإشعاع الحراري 353
7 – 1 – مقدمة 353

7 – 2 – الإشعاع الحراري 356
7 – 3 – إشعاع الجسم الأسود 358
7 – 4 – شدة الإشعاع 365
7 – 4 – 1 – الزاوية الصلبة 365
7 – 4 – 2 – شدة الإشعاع الصادر 367
7 – 4 – 3 – الإشعاع الوارد 369
7 – 4 – 4 – الإشعاع المغادر 370
7 – 4 – 5 – الكميات الطيفية 371
7 – 5 – الخواص الإشعاعية 377
7 – 5 – 1 – الإصدارية 377
7 – 5 – 2 – الامتصاصية والانعكاسية والنفاذية 383
7 – 5 – 3 – قانون كيرشوف 390
7 – 6 – الإشعاع الجوي والشمسي 391
7 – 7 – معامل الرؤية 399
7 – 8 – انتقال الحرارة بالإشعاع: السطوح السوداء 404
7 – 9 – انتقال الحرارة بالإشعاع: السطوح الرمادية الناشرة 407
7 – 9 – 1 – محصلة انتقال الحرارة بالإشعاع من أو إلى سطح ما 408
7 – 9 – 2 – محصلة انتقال الحرارة بالإشعاع بين أي سطحين 409
7 – 9 – 3 – انتقال الحرارة بالإشعاع في الإطارات المغلقة ذات السطحين 411
7 – 10 – التبادل الإشعاعي بوجود الغازات المصدرة والماصة 413
7 – 10 – 1 – الخواص الإشعاعية لوسط مشارك 415
7 – 10 – 2 – إصدارية الغازات والخلائط الغازية وامتصاصيتها 416

الفصل الثامن – انتقال الحرارة في محركات الاحتراق الداخلي 425
8 – 1 – توزع الطاقة في المحرك 425
8 – 2 – توزع درجات حرارة المحرك 428

8 – 3 – ارتفاع حرارة المحرك 429
8 – 4 – الانتقال الحراري في أثناء نظام السحب 430
8 – 5 – الانتقال الحراري في حجرة الاحتراق 432
8 – 6 – الانتقال الحراري في نظام العادم 439
8 – 6 – 1 – حجم المحرك 440
8 – 6 – 2 – تأثير مؤشرات عمل المحرك على الانتقال الحراري 440
8 – 6 – 3 – سرعة المحرك 441
8 – 6 – 4 – الحمل 442
8 – 6 – 5 – توقيت الإشعال 443
8 – 6 – 6 – التبريد التبخيري – حقن الماء 444
8 – 6 – 7 – درجة حرارة الهواء الداخل 444
8 – 6 – 8 – نسبة الانضغاط 445
8 – 7 – المحركات المبردة بالهواء 445
8 – 8 – المحركات المبردة بواسطة السائل 446
الرموز والمصطلحات **453**
المراجع **457**

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

مقدمة

يُعَدّ علم انتقال الحرارة والكتلة من العلوم الأساسية التي تلقى انتشاراً واسعاً في كافة المجالات الهندسية كافة.

إن دراسة انتقال الحرارة والكتلة يمكننا من حل المشاكل الهندسية التي لا نستطيع حلها باستخدام علم الترموديناميك بمفرده.

يُعَدُّ علم انتقال الحرارة الأساس في كل من:

* تصميم محطات الطاقة والتي تحوي محركات حرارية ومولدات بخار، فضلاً عن المكثفات والمبادلات الحرارية.
* تصميم محركات الاحتراق الداخلي.
* تصميم وحدات التبريد والتكييف.
* تصميم أنظمة تبريد المحركات الكهربائية والمحولات والمولدات.
* تسخين الموائع في العمليات الكيميائية وتبريدها.
* تصميم الأبنية وحساب الضياعات الحرارية والعوازل
* التحكم الحراري في السيارات والبرادات المتنقلة.
* المعالجة الحرارية للمعادن.

يحتوي هذا الكتاب على ثماني فصول تشرح الأسس النظرية والعملية لأشكال انتقال الحرارة والكتلة كافة مع الأمثلة العملية بحيث يكون الكتاب قاعدة أساسية لطلاب كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية في قسم هندسة السيارات والآليات الثقيلة.

الدكتور
عاطف عامر

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الفصل الأول
مقدمة في انتقال الحرارة
Introduction to Heat Transfer

كما نعلم من خلال تجربتنا اليومية، عندما نضع كأساً ساخناً من الشاي في غرفة، فإننا نلاحظ وبمرور الوقت أن الكأس يبرد تدريجياً، ومن ثم يصل إلى درجة حرارة مساوية لدرجة حرارة الغرفة. وبالمثل، إذا قمنا بوضع هذا الكأس في البراد المنزلي، سنجد بعد فترة أنه أصبح بارداً، وفي حال قمنا مرةً أخرى بوضعه في الغرفة نفسها، فإنه سوف يسخن تدريجياً. يعود سبب هذا التغير في درجة حرارة الكأس إلى ظاهرة فيزيائية هي انتقال الحرارة.

سنتعرف في هذا الفصل إلى انتقال الحرارة وشرط حدوثه، كما سنتعرف على الأشكال الثلاثة لانتقال الحرارة، وهي التوصيل Conduction، والحمل Convection، والإشعاع Radiation. ثم سنتطرق بعد ذلك إلى الأسس الفيزيائية للمعادلات الناظمة لأشكال انتقال الحرارة الثلاثة. ومن ثم سنوضح العلاقة بين علمي انتقال الحرارة والترموديناميك. وفي النهاية سنقوم بإجراء مراجعة للقانون الأول في الترموديناميك.

1 - 1 - انتقال الحرارة وكيفية حدوثه:

وجدنا في أثناء دراستنا لعلم الترموديناميك أن الطاقة تنتقل نتيجة تفاعلات النظام مع الوسط المحيط، وهذه التفاعلات تكون على شكل عمل وحرارة. يتعامل الترموديناميك مع انتقال الحرارة على أنه عملية ينتقل فيها النظام من حالة توازن إلى حالة توازن أخرى من دون تحديد الزمن اللازم لهذه العملية، بينما يربط علم انتقال الحرارة بين التحليل الترموديناميكي للإجراء وآليته وطبيعته.

سنضع في هذا الفصل الأساس لكثير من القضايا التي يناقشها الكتاب، وذلك من خلال الإجابة بدايةً على عددٍ من التساؤلات: ما هو انتقال الحرارة؟ كيف تتم علمية انتقال الحرارة؟ ما أهمية علم انتقال الحرارة؟ إن الإجابة عن هذه الأسئلة تهدف إلى إدراك المبادئ والمفاهيم الأساسية التي يقوم عليها علم انتقال الحرارة، وتوضيح آلية استخدام انتقال الحرارة مع القانون الأول في الترموديناميك (قانون انحفاظ الطاقة) في حل المسائل الهندسية.

انتقال الحرارة: هو عملية انتقال الطاقة الحرارية نتيجة وجود فرق في درجات الحرارة، حيث تنتقل الطاقة الحرارية من الوسط ذي درجة الحرارة المرتفعة إلى الوسط ذي درجة الحرارة المنخفضة، وتوقف عملية انتقال الحرارة عندما يصل الوسطان إلى درجة حرارة متساوية.

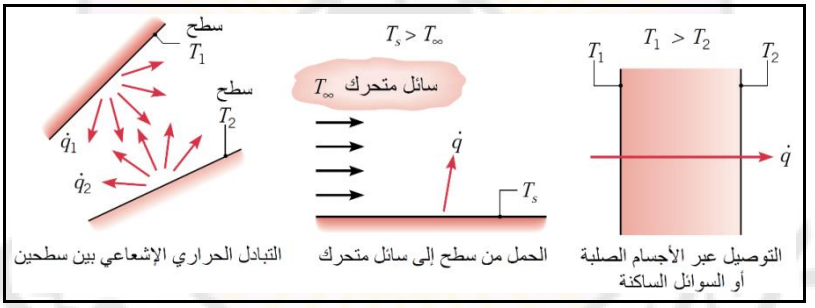
أشكال انتقال الحرارة ***Heat Transfer Modes***:

يبين الشكل (1 – 1) الأشكال المختلفة لانتقال الحرارة:

الانتقال بالتوصيل Conduction: يحدث نتيجة انتقال الطاقة من جزيئات المادة الأكثر نشاطاً إلى الجزيئات المجاورة لها الأقل نشاطاً، وذلك نتيجة التفاعلات بين جزيئات المادة.

الانتقال بالحمل Convection: يحدث عند وجود فرق في درجات الحرارة بين سطح صلب وسائل متحرك، وهو يتضمن التأثير المشترك للتوصيل ولحركة السائل.

التبادل الحراري بالإشعاع Radiation: تصدر كل الأجسام طاقة على شكل أمواج كهرطيسية (فوتونات)، نتيجة حدوث تغيرات في السوية الطاقية لإلكترونات الذرات أو الجزيئات.عندما يكون الوسط الفاصل بين جسمين لهما درجتا حرارة مختلفتين شفافاً، يحدث بالمحصلة انتقال للحرارة بالإشعاع بين الجسمين.



الشكل (1 – 1) أشكال انتقال الحرارة.

1 - 2 - الأسس الفيزيائية للمعادلات العامة

Physical Origins and Rate Equation:

إن من الأهمية بمكان فهم الآلية الفيزيائية التي ترتكز عليها الأشكال المختلفة لعملية انتقال الحرارة، مما يمكننا بالتالي من وضع المعادلات الناظمة لحساب معدل انتقال الحرارة، والذي يمثل كمية الطاقة الحرارية المنتقلة خلال واحدة الزمن.

1 – 2 – 1 – التوصيل *Conduction*:

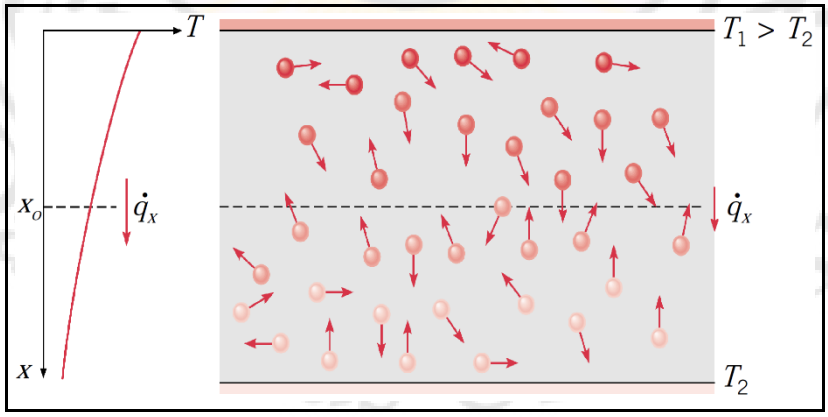
هو انتقال الطاقة من الجسيمات ذات الطاقة الأعلى في النظام إلى الجسيمات الملاصقة الأقل طاقةً، وذلك نتيجة التأثير المتبادل بين الجسيمات.

يمكن توضيح الآلية الفيزيائية لانتقال الحرارة بالتوصيل من خلال المثال التالي:

لنأخذ غازاً متوضعاً بين سطحين لهما درجتا حرارةٍ مختلفتان، كما يوضح الشكل (1 – 2). نتيجة الحركة العشوائية لجزيئات الغاز فإن الجزيئات ذات درجة الطاقة الحركية الأعلى، والتي ترتبط بدورها بدرجة حرارة أعلى، تتحرك نحو الأسفل بالاتجاه الموجب للمحور x، وبالتالي فإن انتقال الحرارة هو نتيجة التصادم بين الجزيئات بسبب الحركة العشوائية لها. يمكن أن نسمي انتقال الحرارة الكلي الناتج عن الحركة العشوائية للجزيئات بانتشار الطاقة Diffusion of Energy.

عند دراسة انتقال الحرارة بالتوصيل في الموائع، نجد الأمر مشابهاً لما هو عليه في الغازات، مع ملاحظة أن جزيئات المائع تكون أكثر تقارباً، وبالتالي فإن التفاعل المتبادل بين الجزيئات يكون أشد مما هو عليه في الغازات. بشكلٍ مشابه، تعزى عملية التوصيل الحراري في الأجسام الصلبة إلى نشاط الذرات المتمثل بالاهتزازات الشبكية، حيث تنسب عملية انتقال الطاقة في هذه الأجسام إلى الأمواج الشبكية الناتجة عن اهتزاز الذرات.

في الأجسام الصلبة العازلة للكهرباء يحدث انتقال الطاقة نتيجة الأمواج الشبكية، بينما في الأجسام الناقلة تحدث عملية انتقال الطاقة نتيجة حركة الإلكترونات، فضلاً عن الأمواج الشبكية.



الشكل (1 – 2) انتقال الحرارة بالتوصيل نتيجة حركة الجزيئات.

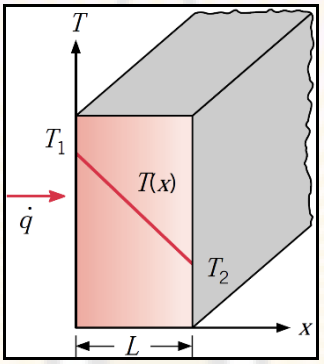
الأمثلة على انتقال الحرارة بالتوصيل كثيرة، ومنها:

* عند وضع ملعقة معدنية في فنجان شاي ساخن، فإن النهاية المكشوفة للملعقة سرعان ما سترتفع درجة حرارتها، وذلك نتيجة انتقال الطاقة بالتوصيل عبر الملعقة.
* في فصل الشتاء تحدث ضياعات حرارية من الغرفة إلى الوسط المحيط، ويحدث ذلك بشكل رئيس نتيجة التوصيل الحراري عبر الجدران التي تفصل هواء الغرفة عن الوسط الخارجي.

يمكن تقويم إجراءات انتقال الحرارة في ضوء معادلات حساب معدل انتقال الحرارة المناسبة، وتستخدم هذه المعادلات في حساب كمية الطاقة الحرارية المنتقلة خلال واحدة الزمن.

لحساب معدل انتقال الحرارة في حالة التوصيل يستخدم قانون فوريه.

من أجل الجدار المستوي المبين في الشكل (1 – 3)، والذي يمتلك توزع درجة حرارة $T(x)$، فإن قانون فوريه يعطى بالشكل:



الشكل (1 – 3) التوصيل الحراري أحادي البعد (انتشار الطاقة).

$$\dot{q}_x = -\lambda \frac{dT}{dx} \qquad (1-1)$$

$\dot{q}_x$: التدفق الحراري $\left[\mathrm{W/m^2}\right]$. أي معدل انتقال الحرارة باتجاه المحور x لواحدة المساحة للسطح العمودي على اتجاه الانتقال، وهو يتناسب طرداً مع تدرج درجة الحرارة $\mathrm{grad}T$ بالاتجاه x؛ أي مع dT/dx.

λ: الموصلية الحرارية، وهي إحدى المواصفات الفيزيائية للمادة، وواحدتها $\left[\mathrm{W/m.K}\right]$.

تدل الإشارة السالبة على حقيقة أن انتقال الحرارة يحدث في اتجاه تناقص درجة الحرارة.

يكون تدرج درجة الحرارة لنظام مستقر علي شكل توزع خطي لدرجة الحرارة، كالمبين في الشكل (1 – 3)، باستخدام العلاقة:

$$\frac{dT}{dx} = \frac{T_2 - T_1}{L}$$

ويحسب التدفق الحراري بإحدى العلاقتين:

$$\dot{q}_x = -\lambda \frac{T_2 - T_1}{L} \qquad \textbf{(2 - 1)}$$

$$\dot{q}_x = \lambda \frac{T_1 - T_2}{L} = \lambda \frac{\Delta T}{L}$$

يجب الانتباه إلى أن المعادلة السابقة تُعبِّر عن التدفق الحراري Heat flux؛ أي معدل انتقال الحرارة بالنسبة لواحدة المساحة، ولحساب معدل انتقال الحرارة بالتوصيل عبر جدارٍ مستوٍ مساحة سطحه A_s نستخدم العلاقة:

$$\dot{Q} = \dot{q}_x \, A_s$$

مثال 1 - 1:

يتكون جدار فرن صناعي من القرميد سماكته $0.15\,\mathrm{m}$، والموصلية الحرارية له $1.7\,[\mathrm{W/m.K}]$. أظهرت القياسات المأخوذة عند شروط التشغيل في الحالة المستقرة أن درجة حرارة السطح الداخلي للجدار $1400\,\mathrm{K}$، ودرجة حرارة السطح الخارجي $1150\,\mathrm{K}$. احسب معدل الضياع الحراري عبر جدار أبعاده $0.5\,\mathrm{m} \times 1.2\,\mathrm{m}$.

الحل:

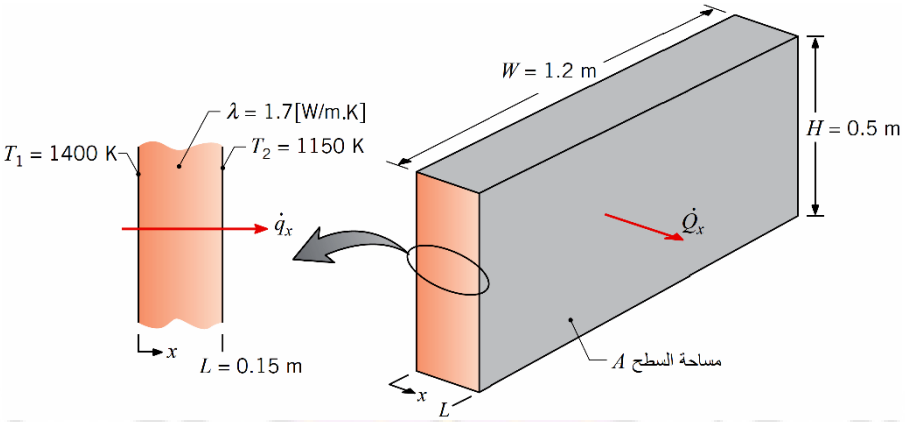
المعطيات: شروط الحالة المستقرة، سماكة الجدار، المساحة، الموصلية الحرارية، درجات الحرارة السطحية.

المطلوب: الضياع الحراري عبر الجدار.

الافتراضات:

1. شروط الحالة المستقرة.
2. توصيل حراري أحادي البعد عبر الجدار.
3. الموصلية الحرارية ثابتة.

الشكل:



التحليل: طالما أن انتقال الحرارة عبر الجدار يحدث بالتوصيل؛ بالتالي يمكن حساب التدفق الحراري من قانون فوريه (1 – 2):

$$\dot{q}_x = \lambda \frac{\Delta T}{L} = 1.7\,\mathrm{W/m.K} \times \frac{250\,\mathrm{K}}{0.15\,\mathrm{m}} = 2833\,\mathrm{W/m^2}$$

يعبر التدفق الحراري عن معدل انتقال الحرارة عبر واحدة المساحة، وهو منتظم على كامل سطح الجدار. بالتالي فإن معدل الضياع الحراري عبر جدار مساحته $A = H \times W$ هو:

$$\dot{Q}_x = (HW)\dot{q}_x = (0.5\,\mathrm{m} \times 1.2\,\mathrm{m}) \times 2833\,\mathrm{W/m^2} = 1700\,\mathrm{W}$$

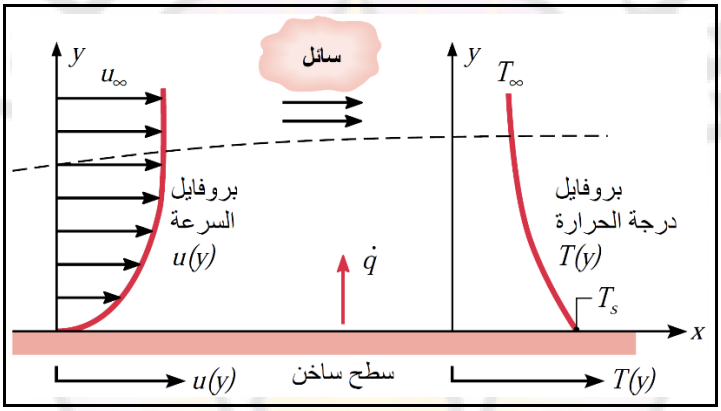
1 – 2 – 2 – الحمل *Convection*:

يتضمن الحمل آليتين لانتقال الحرارة؛ فضلاً عن انتقال الحرارة نتيجة الحركة العشوائية للجزيئات، يحدث انتقال الحرارة نتيجة الحركة الكلية للسائل Bulk Motion. ترتبط هذه الحركة مع حقيقة أن جزيئات السائل في كل لحظة تتحرك بشكل جماعي، أو على شكل مجموعات صغيرة. تسهم هذه الحركة، وبوجود تدرج في درجة الحرارة، في عملية انتقال الحرارة. نتيجة احتفاظ الجزيئات المتحركة في مجموعات بحركتها العشوائية، فإن الانتقال الكلي للحرارة يكون محصلة انتقال الحرارة الناتج عن الحركة العشوائية للجزيئات، والحركة الكلية للسائل.

يستخدم عادةً مصطلح الحمل Convection عندما يكون انتقال الحرارة ناتجاً عن مجموع الحركتين السابقتين (الحركة الكلية للسائل والحركة العشوائية للجزيئات)، بينما يستخدم مصطلح الحركة الحجمية Advection للدلالة على انتقال الحرارة بواسطة الحركة الكلية للسائل فقط.

سوف نهتم في دراستنا بانتقال الحرارة بالحمل Convection، والذي يحدث عندما يتحرك سائل على سطح ما، وبوجود فرق في درجات الحرارة بين السائل والسطح.

لنأخذ سائلاً يجري فوق سطح ساخن، كما هو مبين في الشكل (1 – 4). نتيجة التفاعلات بين السطح الساخن والسائل، تنشأ طبقة ضمن السائل تتغير فيها سرعة السائل من الصفر عند السطح وحتى u_∞، والتي هي سرعة التيار الحر للجريان، وتسمى هذه الطبقة بالطبقة الحدية الهيدروديناميكية. بشكل مشابه، في حال كانت درجتا حرارة السطح والسائل مختلفتين، فسوف تتشكل طبقة ضمن السائل تتغير فيها درجة حرارته من T_s عند السطح وحتى T_∞ خارج هذه الطبقة، وتسمى هذه الطبقة بالطبقة الحدية الحرارية، ويمكن لهذه الطبقة أن تكون أكبر أو أصغر أو تساوي الطبقة الحدية الهيدروديناميكية. عندما $T_s > T_\infty$ فإن انتقال الحرارة بالحمل يحدث من السطح إلى السائل.

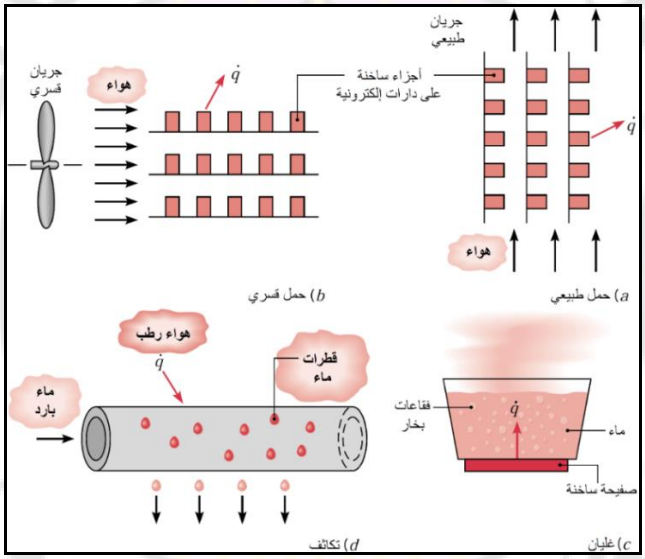


الشكل (1 – 4) تطورالطبقة الحدية في انتقال الحرارةبالحمل.

يتباين دور كل من الحركة العشوائية للجزيئات والحركة الكلية للسائل في انتقال الحرارة بالحمل ضمن الطبقة الحدية، حيث يعتمد الانتقال بالحمل بشكل أساسي على الحركة العشوائية للجزيئات بالقرب من السطح، حيث تكون سرعة السائل منخفضة. في الحقيقة عند الحد الفاصل بين السطح والسائل (y = 0) تكون سرعة السائل مساوية للصفر، ويحدث انتقال الحرارة بالحمل عن طريق الحركة العشوائية للجزيئات فقط. ينشأ تأثير الحركة الكلية للسائل في عملية الحمل الحراري نتيجة تطور الطبقة الحدية مع تقدم الجريان باتجاه x. نتيجة ذلك فإن الحرارة المنتقلة إلى الطبقة الحدية تنتشر ضمن الجريان، لتنتقل في نهاية المطاف إلى السائل خارج هذه الطبقة. إن استيعاب ظاهرة الطبقة الحدية أمر ضروري لفهم آلية انتقال الحرارة بالحمل، لذلك فإن ميكانيك السوائل سيؤدي دوراً أساسياً في دراستنا اللاحقة للحمل الحراري.

أشكال انتقال الحرارة بالحمل حسب طبيعة الجريان:

* **انتقال الحرارة بالحمل الطبيعي (الحر):** تحدث حركة السائل بتأثير قوى الطفو الناتجة عن فرق الكثافات، والذي ينتج بدوره عن فرق درجات الحرارة ضمن السائل، كما يبين الشكل (1 - 5 a).
* **انتقال الحرارة بالحمل القسري:** حيث يحدث الجريان بتأثير مروحة او مضخة، كما هو مبين في الشكل (1 - 5 b).
* **انتقال الحرارة بالحمل الناتج عن التحول الطوري:** ويحدث فيه انتقال للطاقة الحرارية الكامنة، وذلك في أثناء عمليتي التكاثف والغليان، ومثال ذلك الشكل (1 - 5 c)، (1 - 5 d).



الشكل (1 – 5) أشكال الحمل الحراري.

تحسب شدة التدفق الحراري بالحمل بواسطة قانون نيوتن للتبريد:

$$\dot{q} = \alpha\left(T_{\infty} - T_{s}\right) \qquad \textbf{(3 – 1)}$$

حيث:

$\dot{q}$: شدة التدفق الحراري بالحمل. $\left[\mathrm{W/m^2}\right]$

α: معامل انتقال الحرارة بالحمل. $\left[\mathrm{W/m^2.K}\right]$

T_s: درجة حرارة السطح. $\left[^{\circ}\mathrm{C}\right]$

T_{∞}: درجة حرارة السائل أو الوسط. $\left[^{\circ}\mathrm{C}\right]$

تعتمد قيمة α على شروط الطبقة الحدية، والتي ترتبط بشكل السطح وطبيعة الجريان والخواص الترموديناميكية للسائل.

ويبين الجدول (1 – 1) قيمة α في حالات الحمل الحراري المختلفة.

الجدول (1 – 1) القيم النموذجية لمعامل انتقال الحرارة بالحمل

الإجراء	$\alpha\left[\mathrm{W/m^2.K}\right]$
حمل حر:	
غازات	$2-25$
سوائل	$50-1000$
حمل قسري:	
غازات	$25-250$
سوائل	$100-20,000$
حمل مع عملية تحول طوري:	
غليان أو تكاثف	$2500-100,000$

عند استخدام المعادلة (1 – 3) تعد شدة التدفق الحراري موجبة إذا انتقلت الحرارة من السطح $\left(T_s > T_\infty\right)$ وسالبة في حال انتقلت الحرارة إلى السطح $\left(T_s < T_\infty\right)$، وعند ذلك لا مانع من استخدام قانون نيوتن بالشكل التالي:

$$\dot{q} = \alpha\left(T_\infty - T_s\right)$$

وفي هذه الحالة فإن التدفق الحراري يكون موجباً إذا كان باتجاه السطح.

مثال 1 – 2:

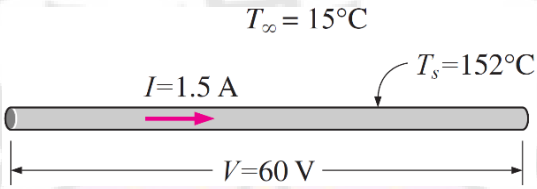
سلك ناقل كهربائي طوله $L = 2\,\mathrm{m}$ وقطره $D = 0.3\,\mathrm{cm}$، يمر عبر غرفة درجة حرارتها $T_\infty = 15\,^{o}\mathrm{C}$. تتولد حرارة ضمن السلك بسبب مقاومته الكهربائية، ودرجة حرارة السلك هي $T_s = 152\,^{o}\mathrm{C}$ عند شروط الحالة المستقرة. بفرض أن هبوط التوتر على طرفي السلك $V = 60\,[\mathrm{V}]$ وشدة التيار المار في السلك $I = 1.5\,[\mathrm{A}]$. بإهمال التبادل الحراري بالإشعاع، احسب معامل انتقال الحرارة بالحمل بين السطح الخارجي للسلك وهواء الغرفة.

الحل:

المعطيات: أبعاد السلك ودرجة حرارته، درجة حرارة هواء الغرفة، هبوط التوتر وشدة التيار في السلك.

المطلوب: معامل انتقال الحرارة بالحمل بين سطح السلك وهواء الغرفة.

الشكل:



الافتراضات:

شروط الحالة المستقرة.

التبادل الحراري بالإشعاع مهمل.

التحليل: عند الوصول إلى شروط الحالة المستقرة فإن معدل الفقد الحراري من السلك يساوي إلى الحرارة المتولدة في السلك نتيجة مقاومته الكهربائية، أي إن:

$$\dot{Q} = \dot{E}_{\text{gen}} = VI = 60\,\text{V} \times 1.5\,\text{A} = 90\,\text{W}$$

مساحة سطح السلك هي:

$$A_s = \pi DL = \pi \times 0.003\,\text{m} \times 2\,\text{m} = 18.85 \times 10^{-3}\,\text{m}^2$$

وفق قانون نيوتن في التبريد (1 – 3)، فإن:

$$\dot{Q}_{\text{conv}} = \alpha A_s \left(T_s - T_\infty\right)$$

وبالتالي فإن:

$$\alpha = \frac{\dot{Q}_{\text{conv}}}{A_s \left(T_s - T_\infty\right)} = \frac{90\,\text{W}}{18.85 \times 10^{-3}\,\text{m}^2 \times (152 - 15)\,^{\circ}\text{C}} = 34.9\,\text{W/m}^2.{}^{\circ}\text{C}$$

المناقشة: نلاحظ أنه يمكن تعميم الأسلوب المبسط المتبع في هذه المسألة في حساب معامل انتقال الحرارة الوسطي بالحمل للهواء من أجل عدد كبير من الأشكال الهندسية.

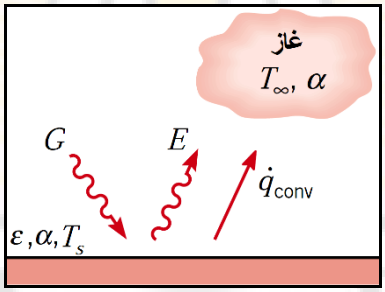
1 – 2 – 3 – الإشعاع *Radiation*:

الإشعاع الحراري هو الطاقة المنبعثة من جسم ما ذي درجة حرارة محددة. سنركز في دراستنا على الإشعاع الصادر عن السطوح الصلبة، كما يمكن أن يصدر الإشعاع عن السوائل والغازات.

تنتقل طاقة الإشعاع بواسطة الأمواج الكهرطيسية، في حين يحتاج انتقال الحرارة بالتوصيل والحمل إلى وجود وسط مادي، فإن انتقال الحرارة بالإشعاع لا يحتاج إلى مثل هذا الوسط لينتقل، بل على العكس تماماً تزداد فاعلية انتقال الحرارة بالإشعاع عندما يحدث في الفراغ.

تصدر الأجسام التي درجة حرارتها أعلى من الصفر المطلق أمواجاً كهرطيسية بطول يتراوح بين $0.8-40\,\text{mm}$ تشبه التدفقات الطاقية لموجات الضوء، مسببةً تغيراً في المحتوى الطاقي للجسم، ونسمي هذا التدفق الطاقي بالإشعاع الحراري.

لندرس الإشعاع الحراري الصادر عن السطح المبين في الشكل (1 – 6). ينشأ الإشعاع المنبعث عن السطح من الطاقة الحرارية للمادة، ويسمى معدل الطاقة المنبعثة من واحدة المساحة $\left[\text{W/m}^2\right]$ بشدة الإصدار للسطح E.



الشكل (1 – 6) التبادل الحراري بالإشعاع عند سطح ما.

تمتلك استطاعة الإصدار قيمة أعظمية لا تتجاوزها، ويتم تحديد هذه القيمة من خلال قانون ستيفن – بولتسمان Stefan - Boltzmann:

$$E_b = \sigma T_s^{\,4} \qquad (4-1)$$

T_s: درجة الحرارة المطلقة للسطح. $\left[\text{K}\right]$

σ: ثابت ستيفان – بولتسمان.

$$\sigma = 5.67\times10^{-8}\left[\text{W/m}^2.\text{K}^4\right]$$

ونسمي مثل هذا السطح بالمشع المثالي أو الجسم الأسود.

إن شدة التدفق الحراري الصادر عن السطح الحقيقي تكون أقل مما هي عليه في حالة الجسم الأسود عند درجة الحرارة نفسها، وتعطى بالعلاقة:

$$E = \varepsilon \sigma T_s^{\,4} \qquad \textbf{(5 - 1)}$$

ε : خاصية إشعاعية للسطح، وتسمى الإصدارية Emissivity.

تتراوح قيم الإصدارية بين $0 < \varepsilon < 1$، وتمثل الإصدارية مقياساً لمدى فاعلية السطح في إصدار الطاقة بالنسبة للسطح الأسود. تتأثر الإصدارية بشكل كبير بمادة السطح وخشونته.

يمكن أن يرد الإشعاع إلى السطح من محيطه، وقد ينشأ الإشعاع الوارد من مصدر معين مثل الشمس، أو من سطح آخر مقابل للسطح المعرض للإشعاع. بغض النظر عن مصدر هذا الإشعاع الوارد، فإننا نسمي معدل التدفق الإشعاعي الكلي الساقط على واحدة المساحة من السطح بالأشعة الواردة G Irradiation.

يمكن أن يمتص السطح جزءاً من الأشعة الواردة، أو قد يمتصه كاملاً، مما يؤدي إلى زيادة الطاقة الحرارية للمادة. يحسب معدل الطاقة الإشعاعية الممتصة من قبل واحدة المساحة للسطح G_{abs} بعد معرفة الخاصية الإشعاعية للسطح والمسماة بالامتصاصية absorptivity α، بالعلاقة التالية:

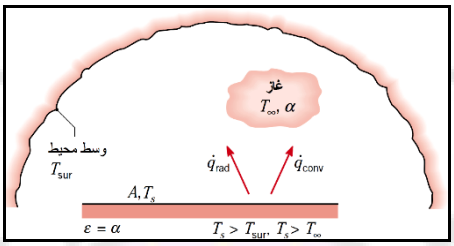
$$G_{\text{abs}} = \alpha G \qquad \textbf{(6 - 1)}$$

تتراوح قيمة الامتصاصية بين $0 < \alpha < 1$. إذا كان $\alpha < 1$ والسطح غير شفاف، فإن جزءاً من الأشعة الواردة سوف ينعكس. في حال كان السطح نصف شفاف فإن جزءاً من الأشعة الواردة سوف ينفذ عبر السطح. بينما يؤدي كل من الإشعاع الممتص والصادر، على التوالي، لزيادة الطاقة الحرارية للجسم وإنقاصها، فإن الإشعاع المنعكس والنافذ لا يؤثران على هذه الطاقة. يجب ملاحظة أن امتصاصية السطح α تعتمد على طبيعة الأشعة الواردة Eradiation؛ فضلاً عن نوعية السطح. فمثلاً تختلف امتصاصية السطح لأشعة الشمس عن امتصاصيته للأشعة الواردة من فرن صناعي.

توجد حالة خاصة تحدث عادةً، وتتضمن تبادلاً إشعاعياً بين سطح صغير درجة حرارته T_s، وسطح أكبر بكثير ذي درجة حرارة ثابتة يحيط بشكل كامل بالسطح الأول، ودرجة حرارته T_{sur} غير مساوية لدرجة حرارة السطح الصغير $\left(T_{\text{sur}} \neq T_s\right)$، ويمكن أن يكون السطح المحيط عبارة عن جدران غرفة أو فرن، كما في الشكل (1 - 7).

سنبين لاحقاً خلال دراستنا للإشعاع أنه من أجل ظروف مماثلة للحالة الخاصة السابقة، فإنه يمكن عَدُّ الأشعة الواردة بشكل تقريبي إشعاعاً صادراً عن جسم أسود درجة حرارته T_{sur}، أي:

$$G = \sigma T_{sur}^{4}$$



الشكل (1 – 7) التبادل الحراري بالإشعاع بين سطح صغير ومحيط كبير.

إذا افترضنا أن السطح رمادي، أي إن $\alpha = \varepsilon$، فإن معدل التدفق الحراري الكلي المحصل بالإشعاع لواحدة المساحة من السطح يحسب من العلاقة:

$$\dot{q}_{rad} = \frac{\dot{Q}}{A} = \varepsilon E_b(T_s) - \alpha G = \varepsilon\sigma\left(T_s^{4} - T_{sur}^{4}\right) \qquad \textbf{(7 – 1)}$$

إن هذه المعادلة تبين الفرق بين الطاقة الحرارية المتحررة بالإشعاع الصادر والطاقة المكتسبة بالإشعاع الممتص.

يمكن التعبير عن التبادل الحراري بالإشعاع من خلال العلاقة التالية:

$$\dot{q}_{rad} = \alpha_{rad} A\left(T_s - T_{sur}\right) \qquad \textbf{(8 – 1)}$$

حيث إن α_{rad} يمثل معامل انتقال الحرارة بالإشعاع، ويعطى بالعلاقة:

$$\alpha_{rad} = \varepsilon\sigma\left(T_s - T_{sur}\right).\left(T_s^{2} + T_{sur}^{2}\right) \qquad \textbf{(9 – 1)}$$

لقد قمنا من خلال المعادلتين (1 – 8) و (1 – 9) بوضع نموذج رياضي لانتقال الحرارة بالإشعاع مشابه لنموذج انتقال الحرارة بالحمل. ومن خلال هذا النموذج قمنا بتحويل علاقة حساب معدل التدفق بالإشعاع إلى معادلة خطية، حيث أصبح التدفق الحراري متناسباً مع فرق درجات الحرارة، عوضاً عن التناسب مع فرق درجتي الحرارة مرفوعتين إلى القوة من الدرجة الرابعة. نلاحظ هنا أن α_{rad} يعتمد بشكل كبير على درجة الحرارة، وذلك بخلاف حالة الحمل الحراري، حيث يكون تأثير درجة الحرارة بشكل عام ضعيفاً على معامل انتقال الحرارة بالحمل α.

ويعطى معدل انتقال الحرارة الكلي من السطح المبين في الشكل (1 – 7) إلى الوسط المحيط بالعلاقة:

$$\dot{Q} = \dot{Q}_{conv} + \dot{Q}_{rad} = \alpha A\left(T_s - T_\infty\right) + \varepsilon A\sigma\left(T_s^{\,4} - T_{sur}^{\,4}\right) \qquad \textbf{(10 - 1)}$$

مثال 1 – 3:

يمر أنبوب بخار غير معزول عبر غرفة درجة حرارة الهواء والجدران فيها $25\,^{o}\mathrm{C}$. القطر الخارجي للأنبوب $70\,\mathrm{mm}$ ، ودرجة حرارة سطحه $200\,^{o}\mathrm{C}$ ، وإصدارية السطح 0.8 . ما استطاعة الإصدار والأشعة الواردة للسطح؟ إذا كان معامل انتقال الحرارة بالحمل الحر من السطح إلى الهواء $15\left[\mathrm{W/m^2.K}\right]$, ما معدل الفقد الحراري من السطح من أجل واحدة الطول للأنبوب؟

الحل:

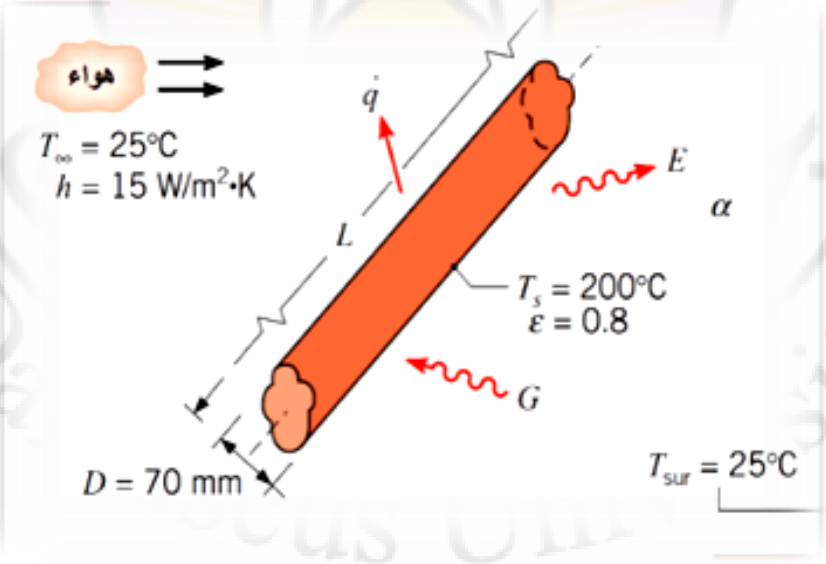
المعطيات: أنبوب غير معزول قطره معلوم، إصدارية سطح الأنبوب ودرجة حرارته، درجة حرارة سطح الغرفة والهواء داخلها ثابتة.

المطلوب:

شدة الإصدار للسطح، والأشعة الواردة.

معدل الفقد الحراري لواحدة الطول للأنبوب.

الشكل



الافتراضات:

شروط الحالة المستقرة.

التبادل الحراري بالإشعاع بين الأنبوب والغرفة

هو تبادل بين سطح صغير وإطار مغلق أكبر بكثير.

الإصدارية والامتصاصية متساويتان.

التحليل:

تحسب شدة الإصدار للسطح من العلاقة (1 – 5):

$$E = \varepsilon\sigma T_s^4 = 0.8\left(5.67\times10^{-8}\ \mathrm{W/m^2.K^4}\right)(473\mathrm{K})^4 = 2270\ \mathrm{W/m^2}$$

بينما تحسب الأشعة الواردة بالعلاقة:

$$G = \sigma T_{\mathrm{sur}}^4 = 5.67\times10^{-8}\ \mathrm{W/m^2.K^4}\,(298\mathrm{K})^4 = 447\ \mathrm{W/m^2}$$

يحدث الفقد الحراري من الأنبوب عن طريق الحمل إلى هواء الغرفة والتبادل الإشعاعي مع الجدران. بالتالي فإن $\dot{Q} = \dot{Q}_{\mathrm{conv}} + \dot{Q}_{\mathrm{rad}}$، وحيث إن مساحة الأنبوب $A = \pi DL$، فإننا نحسب معدل الفقد الحراري من الأنبوب بالعلاقة (1 – 10):

$$\dot{Q} = \alpha(\pi DL)(T_s - T_\infty) + \varepsilon(\pi DL)\sigma\left(T_s^4 - T_{\mathrm{sur}}^4\right)$$

وبالتالي فإن الفقد الحراري من أجل واحدة الطول للأنبوب, هو:

$$\dot{q} = \frac{\dot{Q}}{L} = 15\ \mathrm{W/m^2.K}(\pi\times0.07\ \mathrm{m})(200-25)\ ^{\circ}\mathrm{C}$$
$$+ 0.8(\pi\times0.07\ \mathrm{m})5.67\times10^{-8}\ \mathrm{W/m^2.K^4}\left(473^4 - 298^4\right)\mathrm{K}^4$$
$$\dot{q} = 577\ \mathrm{W/m} + 421\ \mathrm{W/m} = 998\ \mathrm{W/m}$$

المناقشة:

نلاحظ أنه يمكننا التعبير عن درجات الحرارة بواحدات $^{\circ}\mathrm{C}$ أو K عند حساب فرق درجات الحرارة من أجل تبادل انتقال الحرارة بالحمل أو التوصيل، في حين يجب أن تكون درجات الحرارة بالكلفن **K** عند حساب معدل انتقال الحرارة بالإشعاع.

يمكن التعبير عن محصلة معدل انتقال الحرارة بالإشعاع من الأنبوب بالعلاقة:

$$\dot{q}_{\mathrm{rad}} = \pi D\left(E - \alpha G\right)$$
$$\dot{q}_{\mathrm{rad}} = \pi\times0.07\ \mathrm{m}\left(2270 - 0.8\times447\right)\mathrm{W/m^2} = 421\ \mathrm{W/m}$$

في هذه الحالة فإن معدلي انتقال الحرارة بالحمل وبالإشعاع متقاربان؛ لأن T_s كبيرة بالمقارنة مع T_{sur} ومعامل انتقال الحرارة بالحمل الحر صغير. في حالة القيم المتوسطة لـ T_s، والقيم الكبيرة لـ α والتي تترافق مع الحمل القسري، يصبح بالإمكان إهمال تأثير الإشعاع. يمكن حساب معامل انتقال الحرارة بالإشعاع من العلاقة (1 – 9)، ومن أجل شروط هذه المسألة، فإنه يساوي إلى: $\alpha_{rad} = 11\left[\mathrm{W/m^2.K}\right]$.

1 – 2 – 4 – العلاقة بين انتقال الحرارة والترموديناميك

Relationship to Thermodynamics:

لقد تعلمنا سابقاً في الترموديناميك أن هناك عدة أشكال للطاقة، من بينها الحرارة، وهي الطاقة التي تنتقل من نظام إلى آخر نتيجة وجود فرق في درجات الحرارة بينهما.

إن ما يهم علم الترموديناميك في عملية انتقال الحرارة هو كمية الحرارة المنتقلة أثناء عملية انتقال نظام ما من حالة توازن إلى حالة توازن أخرى، كما أنه لا يهتم بالزمن اللازم لهذه العملية.

تتطلب معظم التطبيقات الهندسية حساب معدل انتقال الحرارة، وهو الأمر الذي لا يستطيع التحليل الترموديناميكي بمفرده الإجابة عنه. لذلك تبرز الحاجة لعلم انتقال الحرارة، والذي يحدد طرق انتقال الحرارة، والعلاقات الرياضية التي يتمكن من خلالها حساب معدل انتقال الحرارة.

يتعامل علم الترموديناميك مع حالة التوازن للنظام، أو الانتقال من حالة توازن إلى أخرى. في حين أن علم انتقال الحرارة يتعامل مع الحالات غير المتوازنة حرارياً؛ وبالتالي لا يمكن دراسة عملية انتقال الحرارة بالاعتماد على الترموديناميك فقط، وذلك بالرغم من أن قوانين الترموديناميك تمثل الإطار الناظم لانتقال الحرارة. حيث ينص القانون الأول في الترموديناميك على أن«**معدل الطاقة المنتقلة إلى النظام يساوي إلى معدل التغير في طاقة النظام**». بينما ينص القانون الثاني على أن «**الحرارة تنتقل في اتجاه تناقص درجة الحرارة**». ويمكن تشبيه هذا الأمر إلى عملية هبوط سيارة تقف على منحدر، ففي حال كانت المكابح لا تعمل، فإن السيارة ستتحرك في اتجاه تناقص الارتفاع. وهو يشابه أيضاً عملية انتقال التيار الكهربائي باتجاه تناقص التوتر، أو تدفق السائل في اتجاه تناقص الضغط.

كما ذكرنا سابقاً، فإن انتقال الحرارة لا يحدث إلا في حال وجود فرق في درجات الحرارة. حيث يمثل فرق درجات الحرارة القوة المحركة لعملية انتقال الحرارة؛ كما هو الحال بالنسبة إلى

فرق الكمون، والذي يمثل القوة المحركة لانتقال التيار الكهربائي؛ أو فرق الضغط، والذي يمثل القوة المحركة لجريان السوائل.

إنه من المهم عند هذه النقطة توضيح الفروق الأساسية بين انتقال الحرارة والترموديناميك. على الرغم من اهتمام الترموديناميك بتفاعلات الحرارة ودورها المهم في القانونين الأول والثاني، فإنه لا تعرض في دراسته لآليات انتقال الحرارة، أو إلى الأساليب الموجودة لحساب معدل التبادل الحراري. إن الترموديناميك يهتم بدراسة حالة التوازن للمسألة، في حين أن الحالة المتزنة تقتضي عدم وجود تدرج في درجة الحرارة.

1 – 2 – 5 – الحرارة والأشكال الأخرى للطاقة

Heat and Other Forms of Energy:

يمكن للطاقة أن تتواجد بأشكال عدة، كالطاقة الحرارية والميكانيكية والحركية والكامنة والمغناطيسية والكيميائية والنووية، ومجموع أشكال الطاقة يمثل الطاقة الكلية E للنظام. تسمى أشكال الطاقة المتعلقة بالبنية الجزيئية للنظام وبدرجة نشاط الجزيئات بالطاقة الميكروسكوبية microscopic energy. يمثل مجموع أشكال الطاقة الميكروسكوبية الطاقة الداخلية U internal energy للنظام.

إن الطاقة الداخلية هي مجموع شكلين من طاقة الجزيئات، الطاقة الحركية والطاقة الكامنة. تسمى الطاقة الحركية للجزيئات بالطاقة المحسوسة sensible energy، أو الحرارة المحسوسة sensible heat. تتناسب السرعة الوسطية للجزيئات ودرجة نشاطها طرداً مع درجة الحرارة؛ وبالتالي كلما كانت درجة الحرارة أعلى، كانت الطاقة الحركية التي تمتلكها الجزيئات أكبر، وبالتالي كانت الطاقة الداخلية للنظام أكبر.

تتعلق الطاقة الداخلية أيضاً بقوى التأثير المتبادل بين جزيئات النظام. هذه القوى هي التي تربط الجزيئات بعضها ببعض، وهذه القوى تكون أكبر ما يمكن في حالة الجسم الصلب وأضعف ما يمكن في حالة الغاز. في حال قمنا بإضافة كمية كافية من الطاقة لجزيئات جسم صلب أو مائع، فإن الجزيئات ستتمكن من التغلب على قوى الترابط، وبالتالي سيتحول النظام إلى الحالة المائعة أو الغازية. تسمى هذه العملية بالتحول الطوري phase change، وكنتيجة لكمية الطاقة التي تمت إضافتها في أثناء التحول الطوري، فإن أي نظام سيمتلك طاقة داخلية أكبر عندما يكون في الحالة الغازية من طاقته الداخلية في الحالة الصلبة أو المائعة. تسمى الطاقة الداخلية المتعلقة بحالة النظام بالطاقة الكامنة latent energy، أو الحرارة الكامنة latent heat.

يمكن أن تحدث عملية التحول الطوري من دون حدوث تغير في التركيبة الكيميائية للنظام. إن معظم عمليات انتقال الحرارة تحدث من دون تغير في التركيبة الكيميائية للنظام، وبالتالي فإننا لا نهتم بقوى الترابط بين الذرات المكون لجزيء ما. تسمى الطاقة الداخلية المتعلقة بالروابط الذرية في الجزيئات بالطاقة الكيميائية chemical energy، أو طاقة الارتباط bond energy. في حين أن الطاقة الداخلية المتعلقة بقوى الترابط بين نيكلونات الذرة تسمى الطاقة النووية nuclear energy. إن كلاً من الطاقتين الكيميائية أو النووية إما تصدر أو تُمتص في أثناء التفاعلات الكيميائية أو النووية، على الترتيب.

في تحليلنا للأنظمة التي تتضمن جريان سائل، فإننا عادةً ما نتعامل مع الطاقة الداخلية u وجداء الضغط والحجم Pv. من أجل تبسيط التحليل فإننا نعرف مجموع هذين الحدين على أنه الإنتالبي enthalpy h، حيث إن: $h = u + Pv$. ويمثل الحد Pv طاقة الجريان flow energy للسائل (وتسمى أيضاً عمل الجريان)، وهي تمثل الطاقة اللازمة لدفع السائل من أجل استمرار الجريان.

1 – 2 – 6 – الحرارة المتولدة *Heat Generation*:

عند دراسة التوصيل الحراري عبر وسطٍ ما، فإنه من الممكن أن يتحول أحد أشكال الطاقة الكهربائية أو الكيميائية أو النووية إلى طاقة حرارية. عند تحليل التوصيل الحراري لحالة مماثلة، فإن عملية تحول الطاقة هذه تسمى بالحرارة المتولدة. من الأمثلة على الحرارة المتولدة:

* **الطاقة الكهربائية:** ترتفع درجة حرارة سلك المقاومة الكهربائية بسرعة عند مرور تيار كهربائي فيه، كنتيجة لتحول الطاقة الكهربائية إلى حرارة بمعدل I^2R، حيث I شدة التيار، R المقاومة الكهربائية للسلك.
* **الطاقة النووية:** تمثل كمية الحرارة الكبيرة المتولدة من الوقود النووي كنتيجة لتفاعل الانشطار النووي، مصدراً للطاقة الحرارية في محطات الطاقة النووية. كما أن التفكك الطبيعي للعناصر المشعة في النفايات النووية والمواد المشعة الأخرى تمثل مصدراً للحرارة المتولدة في الأجسام. الحرارة المتولدة في الشمس نتيجة الاندماج النووي للهيدروجين وتحوله إلى هيليوم، مما يجعل الشمس مفاعلاً نووياً عملاقاً يغذي الأرض بالحرارة.
* **الطاقة الكيميائية:** تمثل التفاعلات الكيميائية الناشرة للحرارة والتي تحدث في وسطٍ ما مصدراً للحرارة في هذا الوسط. في حال كان التفاعل الكيميائي ماصاً للحرارة، فإن الحرارة تمتص بدلاً

عن أن تنطلق نتيجة للتفاعل، ويصبح التفاعل الكيميائي بمنزلة مصرف حراري Thermal Sink، وتصبح قيمة الحرارة المتولدة في هذه الحالة سالبة.

* **الطاقة الإشعاعية:** تمثل الطاقة الإشعاعية الممتصة كالإشعاع الشمسي وأشعة غاما مصدراً للحرارة المتولدة في الأجسام، حيث تخترق هذه الأشعة الجسم بينما يتم امتصاصها تدريجياً. كمثالٍ على ذلك، عملية امتصاص الطاقة الشمسية في المسطحات المائية الكبيرة يمكن أن تعامل كحرارة متولدة ضمن الماء، وبمعدل مساوٍ لمعدل الإشعاع الممتص، والذي يتغير بتغير العمق.

إن الحرارة المتولدة هي عبارة عن ظاهرة حجمية، أي إنها تحدث ضمن الوسط. لذلك فإن معدل الحرارة المتولدة في الوسط يؤخذ عادةً بالنسبة لواحدة الحجم [W/m^2] ، ويرمز له بالرمز $\dot{g}$.

إن معدل الحرارة المتولدة في وسطٍ ما يتغير تبعاً للزمن، والموضع ضمن الوسط. في حال كان التغير في الحرارة المتولدة بالنسبة للموضع معلوماً، فإن المعدل الكلي للحرارة المتولدة في وسطٍ ما حجمه V يمكن أن يحسب بالعلاقة:

$$\dot{E}_g = \int_V \dot{g}\, dV \qquad (11-1)$$

في حال كانت عملية توليد الحرارة منتظمة في الوسط (مقاومة كهربائية في مادة متجانسة)، فإن المعادلة السابقة تصبح بالشكل:

$$\dot{E}_g = \dot{g} V$$

1 - 3 - قانون انحفاظ الطاقة (القانون الأول في الترموديناميك):

The first law of thermodynamics:

ينص القانون الأول في الترموديناميك أو ما يعرف بقانون انحفاظ الطاقة على أن "**الطاقة لا تفنى ولا تخلق من العدم؛ وإنما تتحول من شكلٍ إلى آخر**". ويمكن التعبير عن مبدأ انحفاظ الطاقة (التوازن الطاقي) لنظامٍ ما خلال أي عملية على النحو الآتي:«"**إن التغير الكلي لطاقة النظام خلال إجراءٍ ما يساوي إلى الفرق بين الطاقة الكلية الداخلة إلى النظام والخارجة منه خلال هذا الإجراء**».

إن الطاقة تنتقل من النظام وإليه على شكل حرارة أو عمل أو تدفق كتلي، حيث أن الطاقة الكلية لنظام بسيط قابل للانضغاط تشمل الطاقة الداخلية والحركية والكامنة، وتكتب معادلة التوازن الطاقي لأي نظام خلال إجراءٍ ما بالشكل:

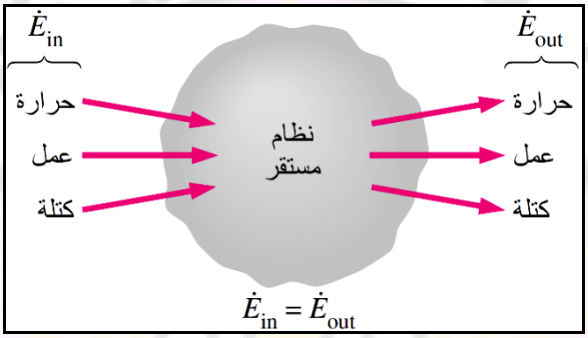
$$E_{in} - E_{out} = \Delta E_{sys} \qquad (12-1)$$

أو على شكل معدل:

$$\dot{E}_{in} - \dot{E}_{out} = dE_{sys}/dt \qquad (13-1)$$

إن الطاقة هي خاصية للنظام، وبذلك فهي لا تتغير حتى تتغير حالة النظام، حيث يكون التغير في الطاقة مساوياً للصفر $\left(\Delta E_{sys} = 0\right)$، ويكون النظام في حالة استقرار كما في الشكل (1 – 8)، وتختصر معادلة التوازن الطاقي إلى صيغتها في الحالة المستقرة:

$$\dot{E}_{in} = \dot{E}_{out} \qquad (14-1)$$



الشكل (1 – 8) التوازن الطاقي لنظام مستقر.

في حال عدم وجود أية تأثيرات كهربائية أو مغناطيسية أو تأثيرات ناتجة عن الحركة أو الجاذبية أو قوى التوتر السطحي (نظام بسيط ثابت قابل للانضغاط)، فإن تغير الطاقة الكلية للنظام خلال إجراءٍ ما يؤول إلى تغير الطاقة الداخلية للنظام:

$$\Delta E_{sys} = \Delta U_{sys}$$

عند دراستنا لانتقال الحرارة فإننا عادةً ما نهتم فقط بأشكال الطاقة التي تسبب تغيراً في درجة الحرارة، أي الطاقة الحرارية. في هذه الحالة فإنه من الأنسب كتابة معادلة التوازن الحراري بدلاً من التوازن الطاقي، وتحويل أشكال الطاقة النووية والكيميائية والكهربائية إلى شكلها الحراري، تحت مسمى الحرارة المتولدة. وتكتب معادلة التوازن الحراري بالشكل:

$$Q_{in} - Q_{out} + E_g = \Delta E_{sys} \qquad (15-1)$$

مثال 1 – 4:

سلك معدني ناقل قطره D ومقاومته الكهربائية من أجل واحدة الطول R_e، يوجد هذا السلك في حالة توازن حراري مع الهواء والوسط المحيط. يحدث تشويش لحالة التوازن السابقة

عندما يمر تيار كهربائي في السلك شدته I. استنتج علاقة يمكن استخدامها لحساب التغير في درجة حرارة السلك مع الزمن في أثناء مرور التيار.

الحل:

المعطيات: سلك ذو قطر ومقاومة كهربائية معلومين، تتغير درجة حرارته مع الزمن نتيجة مرور تيار كهربائي فيه.

المطلوب: علاقة تربط تغير درجة حرارة السلك مع الزمن.

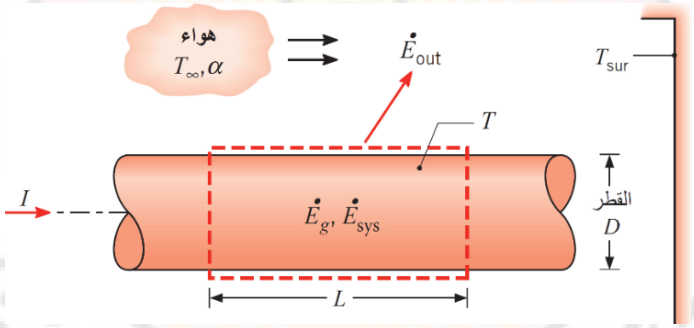
الافتراضات:

درجة حرارة السلك منتظمة عند أي لحظة زمنية t.

الخواص ثابتة.

التبادل الإشعاعي بين السطح الخارجي للسلك والمحيط هو بين سطح صغير وإطار مغلق كبير.

الشكل:



التحليل: بما أننا نريد حساب معدل التغير في درجة الحرارة، يجب تطبيق القانون الأول في الترموديناميك عند لحظة زمنية. بالتالي يجب تطبيق العلاقة (1 – 13) على حجم تحكم طوله L، من السلك، أي:

$$\dot{E}_g - \dot{E}_{out} = dE_{sys}/dt$$

حيث إن الطاقة الحرارية المتولدة ناتجة عن المقاومة الكهربائية للسلك:

$$\dot{E}_g = I^2 R_e L$$

يحدث التسخين بشكل منتظم ضمن حجم التحكم، ويمكن التعبير عنه بدلالة الحرارة المتولدة الحجمية $\dot{g}$، وبالتالي فإن معدل توليد الحرارة في كامل حجم التحكم هو:

$$\dot{E}_g = \dot{g}V \quad ; \quad \dot{g} = 4I^2R_e/\pi D^2$$

تنتقل الطاقة إلى خارج حجم التحكم عن طريق الحمل والإشعاع المحصل من السطح؛ بالتالي فإن كمية الطاقة المنتقلة خارج حجم التحكم تحسب بالعلاقة (1 – 10):

$$\dot{E}_{\text{out}} = \alpha(\pi DL)(T - T_\infty) + \varepsilon\sigma(\pi DL)(T^4 - T_{\text{sur}}^4)$$

أما التغير في المحتوى الطاقي لحجم التحكم فهو ناتج عن تغير درجة الحرارة:

$$\frac{d\dot{E}_{\text{sys}}}{dt} = \frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt}(\rho cVT) \quad ; \quad V = \frac{\pi D^2 L}{4}$$

وبالتبديل في معادلة التوازن الطاقي نجد:

$$I^2R_eL - \alpha(\pi DL)(T - T_\infty) - \varepsilon\sigma(\pi DL)(T^4 - T_{\text{sur}}^4) = \rho c\left(\frac{\pi D^2}{4}\right)L\frac{dT}{dt}$$

بالتالي:

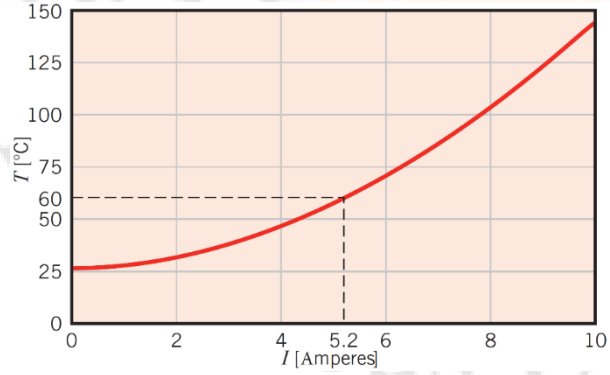
$$\frac{dT}{dt} = \frac{I^2R_e - \pi D\alpha(T - T_\infty) - \pi D\varepsilon\sigma(T^4 - T_{\text{sur}}^4)}{\rho c(\pi D^2/4)}$$

المناقشة:

1. يمكن حل المعادلة السابقة من أجل التغير الزمني لدرجة حرارة السلك عن طريق إجراء تكامل عددي. يصل السلك بالتدريج إلى شروط الحالة المستقرة، وعندها $dT/dt = 0$. تحسب درجة حرارة السلك عندها بعلاقة جبرية من الشكل:

$$\pi D\alpha(T - T_\infty) + \pi D\varepsilon\sigma(T^4 - T_{\text{sur}}^4) = I^2R_e$$

2. من أجل شروط وسط خارجي ثابتة $(\alpha, T_\infty, T_{\text{sur}})$، وأبعاد وخواص ثابتة للسلك (D, ε, R_e)، فإن درجة الحرارة في الحالة المستقرة تتعلق بمعدل الطاقة الحرارية المتولدة، وبالتالي تتعلق بشدة التيار الكهربائي. لنأخذ سلك غير معزول من النحاس $(D = 1\text{mm}, \varepsilon = 0.8, R_e = 0.4\Omega/m)$ ضمن محيط كبير نسبياً يتحرك ضمنه هواء $(\alpha = 100\,\text{W/m}^2.\text{K}, T_\infty = 300\,\text{K})$. بتعويض هذه القيم في



المعادلة السابقة، فإن الشكل التالي يوضح درجة حرارة الحالة المستقرة من أجل قيم لشدة التيار ضمن المجال $0 \le I \le 10\,\text{A}$.

3. بفرض أن درجة حرارة التشغيل محددة عند $T = 60\,^{\circ}\text{C}$ لأسباب تتعلق بالسلامة، بالتالي فإن شدة التيار يجب ألا تتجاوز $5.2\,\text{A}$. عند درجة الحرارة هذه فإن التبادل الحراري بالإشعاع $(0.6\,\text{W/m})$ أقل بكثير من انتقال الحرارة بالحمل $(10.4\,\text{W/m})$. بالتالي إذا أردنا التشغيل عند قيم كبيرة للتيار وأن نحافظ في الوقت نفسه على درجة حرارة السلك عند حدود آمنة يجب أن نزيد من معامل الحمل الحراري، ويحدث ذلك من خلال زيادة سرعة الهواء حول السلك. من أجل $\alpha = 250\,\text{W/m}^2.\text{K}$، فإن التيار الأعظمي المسموح به هو $8.1\,\text{A}$.

---

1 – 3 – 1 – التوازن الطاقي لنظام مغلق

Energy Balance for Closed Systems:

إن النظام المغلق هو الذي لا يحدث فيه أي تبادل للكتلة مع الوسط المحيط. وتعد الطاقة الكلية E لمعظم الأنظمة التي نجدها في الحياة العملية مساويةً إلى الطاقة الداخلية U، وخاصةً في الأنظمة الثابتة، حيث إنه لا يطرأ على هذه الأنظمة تغير في الارتفاع أو السرعة. وتختصر علاقة التوازن الطاقي لنظام مغلق ثابت إلى الشكل:

$$E_{\text{in}} - E_{\text{out}} = \Delta U = m\,c_v\,\Delta T \quad (\text{J}) \qquad \textbf{(16 – 1)}$$

في حال كانت العملية هي انتقال حرارة فقط من دون وجود عمل عند حدود النظام، فإن معادلة التوازن الطاقي تختصر أيضاً إلى الشكل:

$$Q = m\,c_v\,\Delta T \quad (\text{J}) \qquad \textbf{(17 – 1)}$$

c_v: الحرارة النوعية عند حجم ثابت. $[\text{kJ/kg.K}]$

1 – 3 – 2 – التوازن الطاقي لنظام جريان مستقر

***Energy Balance for Steady - Flow Systems*:**

إن الكثير من الأجهزة كمسخنات الماء ومشع السيارة تتضمن تدفقاً كتلياً داخلاً وخارجاً من النظام، وتدرس كحجم تحكم، ومعظم حجوم التحكم هذه تدرس عند شروط تشغيل مستقرة. نقصد بكلمة مستقر steady أن البارامترات المكانية (بارامترات نقطة محددة) لا تتغير مع الزمن. وعكس الاستقرار هو الحالة غير المستقرة unsteady أو العابرة transient. وأيضاً هناك

مصطلح الانتظام uniform، والذي يقصد به أنه في كل لحظة من الزمن يكون نقاط النظام كافة البارامترات نفسها، أي إن البارامترات في أية لحظة لا تتغير بتغير المكان.

إن الطاقة الكلية لحجم تحكم ما خلال جريان مستقر تبقى ثابتة، حيث إن التغير في الطاقة الكلية خلال الجريان المستقر يساوي الصفر، لذا فإن كمية الطاقة الداخلة إلى الحجم المدروس بأشكالها كافة (حرارة، عمل، انتقال كتلي) يجب أن تساوي إلى الطاقة الخارجة من الحجم.

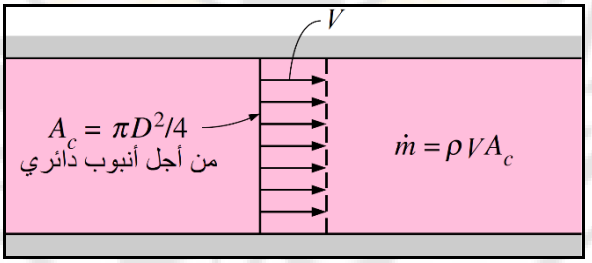
تسمى كمية الكتلة المتدفقة عبر مقطع عرضي خلال واحدة الزمن معدل التدفق الكتلي، ويرمز لها $\dot{m}$. إن معدل التدفق الكتلي عبر أنبوب أو مجرى يتناسب مع مساحة المقطع العرضي A_c للأنبوب أو المجرى، ومع كثافة المادة المتدفقة ρ، وسرعة الجريان V.

عند دراسة تدفق سائل في أنبوب أو مجرى، فإننا نفترض عادةً أن الجريان وحيد البعد، أي إن خواص الجريان تتغير باتجاه واحد هو اتجاه الجريان فقط. وبالتالي فإنه عند أي مقطع عرضي من الجريان فإن جميع الخواص تكون واحدة في نقاط هذا المقطع كافة، حيث تأخذ هذه الخواص قيماً وسطية على كامل المقطع، كما في الشكل (1 – 9). وبذلك تكتب معادلة التدفق الكتلي لجريان سائل في أنبوب أو مجرى بالشكل:

$$\dot{m} = \rho V A_c \qquad \textbf{(18 – 1)}$$

ويعطى التدفق الحجمي للجريان وفق العلاقة:

$$\dot{V} = \dot{m}/\rho = V A_c \qquad \textbf{(19 – 1)}$$



الشكل (1 – 9) التدفق الكتلي لسائل في أنبوب.

يجب التنويه هنا إلى أن التدفق الكتلي للسائل في حالة الجريان المستقر يبقى ثابتاً، بينما لا ينطبق هذا الأمر على التدفق الحجمي إلا في حال كانت كثافة السائل ثابتة. كما أنه في حالة جريان مستقر أحادي البعد، فإن التدفق الكتلي الداخل إلى حجم التحكم يساوي إلى التدفق الكتلي الخارج منه، حيث إن:

$$\dot{m}_{in} = \dot{m}_{out} = \dot{m}$$

في حال كانت التغيرات في الطاقة الحركية والمكانية صغيرة جداً بحيث يمكن إهمالها، وهي الحالة السائدة عادةً، وعند عدم وجود عمل، كما في الشكل (1 – 10)، فإن معادلة التوازن الحراري تصبح بالشكل:

$$\dot{Q} = \dot{m}\,\Delta h = \dot{m}\,C_p \Delta T \quad \text{(KJ/S)} \qquad \textbf{(20 – 1)}$$

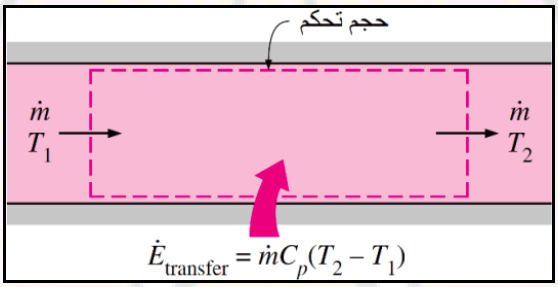
$\dot{Q}$: معدل التدفق الحراري الداخل أو الخارج من حجم التحكم.

$\dot{m}$: التدفق الكتلي للجريان.

Δh: تغير الإنتالبي.

c_p: الحرارة النوعية عند ضغط ثابت

ΔT: فرق درجات الحرارة.



الشكل (1 – 10) التدفق الطاقي في الجريان المستقر.

1 – 3 – 3 – التوازن الطاقي السطحي *Surface Energy Balance*:

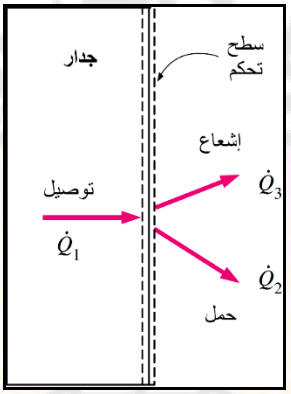
كما ذكرنا سابقاً، فإن الحرارة تنتقل بالتوصيل والحمل والإشعاع، حيث إن آلية انتقال الحرارة تتغير بحسب الوسط الذي تنتقل منه الحرارة والوسط الذي تنتقل إليه. فمثلاً، الحرارة المنتقلة بالتوصيل إلى السطح الخارجي للغرفة في الشتاء، تنتقل بالحمل إلى الهواء الخارجي البارد، بينما تنتقل بالإشعاع إلى المحيط. لذلك فإنه من المهم تتبع تفاعلات الحرارة عند السطح، وذلك من خلال تطبيق مبدأ انحفاظ الطاقة على السطح.

إن السطح لا يمتلك حجماً أو كتلة، وبالتالي فهو لا يمتلك طاقة. لذا فإننا نعد السطح نظاماً افتراضياً ذا كمية طاقة ثابتة خلال الإجراء المدروس (كما في الحالة المستقرة أو نظام الجريان المستقر)، وبالتالي فإن معادلة التوازن الطاقي للسطح يعبر عنها بالشكل:

$$\dot{E}_{in} = \dot{E}_{out} \qquad \textbf{(21 – 1)}$$

إن العلاقة السابقة صالحة لكل من الحالة المستقرة أو العابرة، كما أن السطح لا يمتلك طاقة حرارية متولدة لعدم امتلاكه حجماً. فمثلاً، معادلة التوازن الطاقي للسطح الخارجي للجدار المبين في الشكل (1 – 11)، هي:

$$\dot{Q}_1 = \dot{Q}_2 + \dot{Q}_3 \qquad \textbf{(22 – 1)}$$



الشكل (1 – 11) التفاعلات الطاقية عند السطح الخارجي لجدار مستوٍ.

في حال كانت اتجاهات التفاعلات الحرارية مجهولة، نفرض أنها باتجاه السطح، وتصبح معادلة التوازن الطاقي بالشكل: $\Sigma \dot{E}_{\text{in}} = 0$.

Damascus University

الفصل الثاني
مقدمة في التوصيل الحراري
Introduction to Conduction

لقد بيّنا في الفصل الأول أن التوصيل الحراري هو عملية انتقال الطاقة الحرارية في الوسط نتيجة وجود تدرج في درجة الحرارة، حيث يحدث هذا الانتقال نتيجة الحركة العشوائية للذرات والجزيئات. كما بيّنا أيضاً أن شدة التدفق الحراري بالتوصيل تحسب من خلال قانون فوريه. وقد تعاملنا حينها مع الحالة البسيطة للتوصيل الحراري، حيث درسنا التوصيل الحراري أحادي البعد لجدارٍ مستوٍ في الحالة المستقرة. ولكن في الحالة العامة، يعطى توزع درجة الحرارة ضمن الوسط بالشكل:

$$T = T(x, y, z, \tau)$$

وفي هذه الحالة تتغير درجة الحرارة بتغير المكان والزمن، حيث يكون التوصيل الحراري ثلاثي الأبعاد وغير مستقر، ويمكن أن نجد حالات خاصة عدة من هذه الحالة:

* **الحالة المستقرة:** وفي هذه الحالة فإن درجة الحرارة تتغير بتغير الإحداثيات, لكنها تبقى ثابتة مع الزمن، أي:

$$T = T(x, y, z) \quad ; \quad T \neq T(\tau)$$

* **التوصيل ثنائي البعد:** حيث يكون التوصيل الحراري مهملاً في أحد الاتجاهات، وبالتالي:

$$T = T(x, y)$$

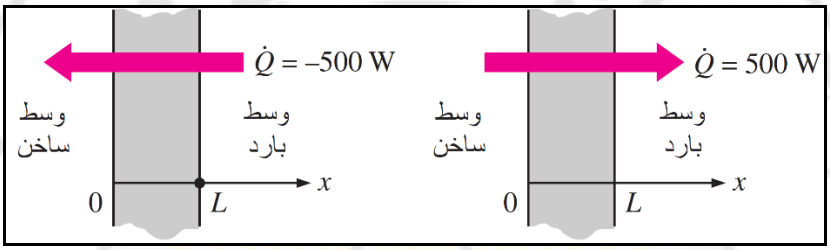
* **التوصيل أحادي البعد:** ويكون التدفق الحراري معدوماً في اتجاهين، بينما يكون ذا قيمة في الاتجاه الثالث، أي إن:

$$T = T(x)$$

ومن الممكن أن يكون التوصيل الحراري أحادي البعد أو متعدد الأبعاد، وفي الوقت نفسه مستقراً أو غير مستقر.

2 - 1 - مقدمة *Introduction*:

بالرغم من الترابط الوثيق بين درجة الحرارة وانتقال الحرارة، إلا أنهما من طبيعتين مختلفتين تماماً، حيث إن انتقال الحرارة، وبخلاف درجة الحرارة، يمتلك اتجاهاً بالإضافة للكمية، وبالتالي فهو كمية شعاعية، لذا فإنه من الواجب تحديد الشدة والاتجاه لتوصيف انتقال الحرارة عند نقطة ما بشكل كامل. لذلك فإننا نستعمل عند دراسة انتقال الحرارة جملة إحداثيات، حيث يأخذ معدل انتقال الحرارة إشارةً موجبة أو سالبة بحسب اتجاهه إن كان بالاتجاه الموجب لجملة الإحداثيات أو بالاتجاه السالب، كما في الشكل (2 – 1).



الشكل (2 – 1) انتقال الحرارة في جملة إحداثيات.

إن القوة المحركة لأي شكل من أشكال انتقال الحرارة هي الفرق في درجات الحرارة، وبزيادة الفرق في درجات الحرارة تزداد شدة انتقال الحرارة.

تتطلب بعض التطبيقات الهندسية في انتقال الحرارة معرفة توزع درجات الحرارة في الوسط المدروس، وذلك لحساب بعض القيم الضرورية (معدل انتقال الحرارة الموضعي، الإجهاد الحراري، التمدد الحراري)، ولتحديد درجة الحرارة عند نقطة معينة يجب علينا أولاً تحديد موضع هذه النقطة بشكل دقيق، وذلك من خلال استخدام جملة إحداثيات مناسبة (ديكارتية، أسطوانية، كروية)، وذلك تبعاً للشكل الهندسي المدروس والنقطة المرجعية.

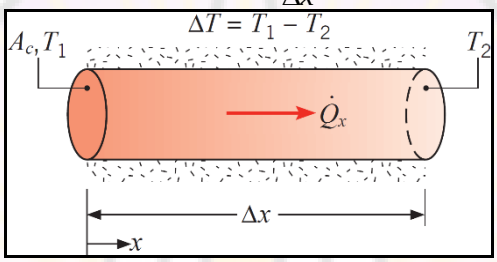
2 – 1 – 1 – قانون فورييه *Fourier's law*:

تحدثنا في الفصل الأول عن علاقة معدل انتقال الحرارة بالتوصيل، والمسماة بقانون فورييه، والآن سنتعرف إلى أساس هذا القانون. إن قانون فورييه يمثل توصيفاً لظاهرة التوصيل الحراري، أي إنه تم التوصل إلى هذا القانون عن طريق دراسة ظاهرة التوصيل الحراري، وليس من خلال اشتقاقه من مبادئ أولية. وبالتالي فإن علاقة معدل التوصيل الحراري تمثل شكلاً رياضياً معمماً مستنداً إلى نتائج تجريبية. فمثلاً، لندرس حالة التوصيل الحراري المستقر لسلك من مادة معروفة، سطحه الجانبي معزول، بينما يكون لنهايتيه درجتا حرارة مختلفتين $(T_1 > T_2)$،

كما يبين الشكل (2 – 2). إن الفرق في درجات الحرارة سيسبب انتقالاً للحرارة بالتوصيل في الاتجاه الموجب للمحور x. سندرس في هذه الحالة تأثير كل من فرق درجات الحرارة ΔT، وطول السلك Δx، ومساحة المقطع العرضي للسلك A_c، على معدل انتقال الحرارة بالتوصيل $\dot{Q}_x$.

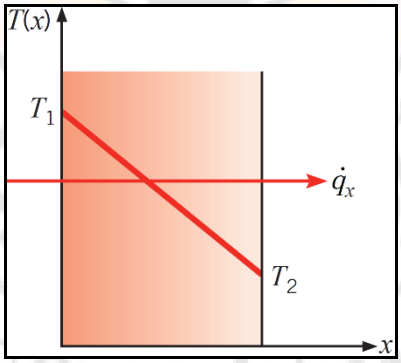
بفرض أن ΔT و Δx ثابتان، بينما A_c متغير، سنجد أن $\dot{Q}_x$ يتناسب طرداً مع A_c. بالمثل، في حال ثبتنا Δx و A_c، فإننا نجد أن $\dot{Q}_x$ يتناسب طرداً مع ΔT. وكذلك في حال فرضنا أن المتغير هو Δx، بينما ΔT و A_c ثابتان، فإن $\dot{Q}_x$ يتناسب عكساً مع Δx. وبالتالي يمكن أن نكتب:

$$\dot{Q}_x \propto A_c \frac{\Delta T}{\Delta x}$$



الشكل (2 – 2) التوصيل الحراري في سلك.

ونجد من خلال التجربة أن التناسب السابق يبقى صحيحاً عند استخدام مواد مختلفة. كما أنه من أجل قيم ثابتة لكل من ΔT، Δx، A_c، فإن قيمة $\dot{Q}_x$ ستتغير.



الشكل (2 – 3) العلاقة بين نظام الإحداثيات واتجاه التدفق الحراري وتدرج درجة الحرارة

بناءً على ما تقدم، نستنتج أنه بإمكاننا تحويل التناسب إلى مساواة، وذلك من خلال إدخال معامل تناسب عليه، بحيث يقيس قدرة المادة على توصيل الحرارة، وبالتالي نكتب:

$$\dot{Q}_x = \lambda A_c \frac{\Delta T}{\Delta x}$$

λ : الموصلية الحرارية. $[\mathrm{W/m.K}]$

عندما $\Delta x \to 0$: تصبح المعادلة السابقة بالشكل:

$$\dot{Q}_x = -\lambda A_c \frac{dT}{dx} \qquad \textbf{(1 - 2)}$$

ومن أجل حساب شدة التدفق الحراري:

$$\dot{q}_x = \frac{\dot{Q}_x}{A_c} = -\lambda \frac{dT}{dx} \qquad \textbf{(2 - 2)}$$

وتعبر الإشارة السالبة عن أن الحرارة تنتقل باتجاه تناقص درجة الحرارة، أي إن تدرج درجة الحرارة يكون سالباً في اتجاه انتقال الحرارة.

إن قانون فوريه المعبر عنه في العلاقة (2 – 2) ينص ضمنياً على أن التدفق الحراري $\dot{q}_x$ يمثل قيمة شعاعية. بعبارةٍ أدق، فإن التدفق الحراري $\dot{q}_x$ يكون ناظمياً على مساحة المقطع العرضي A_c. أي على سطح ذي درجة حرارة ثابتة يسمى السطح الإيزوترمي.

يوضح الشكل (2 – 3) اتجاه التدفق الحراري $\dot{q}_x$في جدارٍ مستوٍ، حيث أن تدرج درجة الحرارة dT/dx سالب. بالعودة إلى المعادلة (2 – 2) نجد أن التدفق الحراري لهذه الحالة يكون ذا قيمة موجبة. **كما نلاحظ أن السطوح الإيزوترمية هي مستويات عمودية على المحور** x.

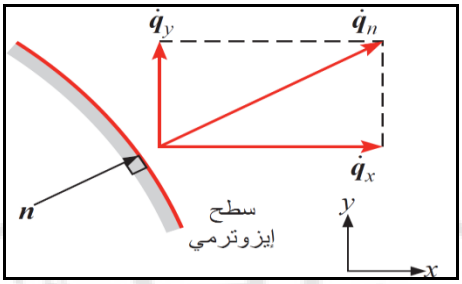
بما أن التدفق الحراري يمثل قيمة شعاعية، بالتالي يمكننا كتابة علاقة التدفق الحراري بالتوصيل (قانون فوريه) بشكل معمم كما يأتي:

$$\dot{\mathbf{q}} = -\lambda \nabla T = -\lambda \left(\mathbf{i} \frac{\partial T}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial T}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial T}{\partial z} \right) \qquad \textbf{(3 - 2)}$$

إن المعادلة (2 – 3) توضح أن شعاع التدفق الحراري ناظمي على السطوح الإيزوترمية (سطوح ثبات درجة الحرارة). من الممكن كتابة قانون فوريه بشكل آخر وهو:

$$\dot{\mathbf{q}} = \dot{q}_n \mathbf{n} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n} \mathbf{n} \qquad \textbf{(4 - 2)}$$

$\dot{q}_n$: شدة التدفق الحراري في الاتجاه n ، والذي يمثل الناظم على السطح كما في الشكل (2 - 4).



الشكل (2 – 4) شعاع التدفق الحراري في جملةإحداثيات مستوية.

ويمكن تحليل شعاع التدفق الحراري في جملة الإحداثيات الديكارتية إلى مركباته، بحيث يكتب بالشكل:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{i}\dot{q}_x + \mathbf{j}\dot{q}_y + \mathbf{k}\dot{q}_z$$

حيث إن:

$$\dot{q}_x = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \qquad \dot{q}_y = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \qquad \dot{q}_z = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \quad \textbf{(5 – 2)}$$

إن التعابير السابقة لمركبات شعاع التدفق الحراري تبين أن التدفق الحراري عبر سطحٍ ما مرتبط بالتدرج الحراري في الاتجاه العمودي على هذا السطح.

إن معظم المواد المستخدمة في التطبيقات الهندسية هي ذات طبيعة إيزوتروبية (خواص المادة ثابتة في كل الاتجاهات)؛ وبالتالي فإن قيم الموصلية الحرارية لا تتعلق بالمحاور الإحداثية.

2 – 1 – 2 – الخواص الحرارية للمادة

***The Thermal Properties of Matter*:**

2 – 1 – 2 – 1 – الخواص الحرارية الأخرى Other Relevant Properties:

عند تحليلنا لمسائل انتقال الحرارة فإننا نضطر دائماً إلى استخدام عدد من خواص المادة، تسمى هذه الخواص بالخواص الحرارية الفيزيائية للمادة Thermophilically Properties. وتقسم هذه الخواص إلى فئتين، خواص الانتقال والخواص الترموديناميكية. تتضمن خواص الانتقال معاملات الانتشار، مثل الموصلية الحرارية λ (لانتقال الحرارة)، واللزوجة الحركية ν (لانتقال كمية الحركة). من جهة أخرى، فإن الخواص الترموديناميكية تتعلق بحالة التوازن للنظام. فمثلاً، الكثافة ρ والحرارة النوعية عند ضغط ثابت c_p، هما خاصيتان للمادة تستخدمان بشكل كبير في التحليل الترموديناميكي.

يسمى الجداء $\rho c_p \left[\mathrm{J/m^3.K}\right]$ بالسعة الحرارية الحجمية للمادة، وهو يقيس قدرة المادة على تخزين الطاقة الحرارية. نتيجةً لكون المواد ذات الكثافة العالية تمتلك حرارة نوعية منخفضة، فإن العديد من المواد الصلبة والمائعة تعد أوساطاً جيدة جداً للتخزين الحراري، حيث إنها تمتلك سعة حرارية حجمية من رتبة $\rho c_p > 1\left[\mathrm{MJ/m^3.K}\right]$. بخلاف المواد الصلبة والمائعة، فإن الغازات تمتلك كثافة منخفضة، وبالتالي فهي لا تعد مناسبة للتخزين الحراري $\rho c_p \approx 1\left[\mathrm{kJ/m^3.K}\right]$.

في دراستنا لانتقال الحرارة، فإن نسبة الموصلية الحرارية إلى السعة الحرارية الحجمية تمثل خاصية مهمة من خواص المادة، وتسمى الانتشارية الحرارية a ، وواحدتها $[\mathrm{m^2/s}]$:

$$a = \frac{\lambda}{\rho c_p} \qquad \textbf{(6 - 2)}$$

وهي تقيس النسبة بين قدرة المادة على توصيل الطاقة الحرارية إلى قدرتها على تخزين هذه الطاقة. إن المواد التي تمتلك قيماً كبيرة للانتشارية الحرارية تستجيب بسرعة لتغيرات درجة الحرارة في الوسط المحيط بها، بينما تأخذ المواد التي تمتلك قيماً صغيرة للانتشارية الحرارية فترةً أطول لتصل إلى حالة توازن جديدة.

2 – 1 – 2 – 2 – الموصلية الحرارية Thermal Conductivity:

الموصلية الحرارية هي بارامتر فيزيائي يعبر عن قدرة المادة على توصيل الحرارة، وهي تتعلق بدرجة الحرارة والضغط وطبيعة المادة وحالتها الفيزيائية.

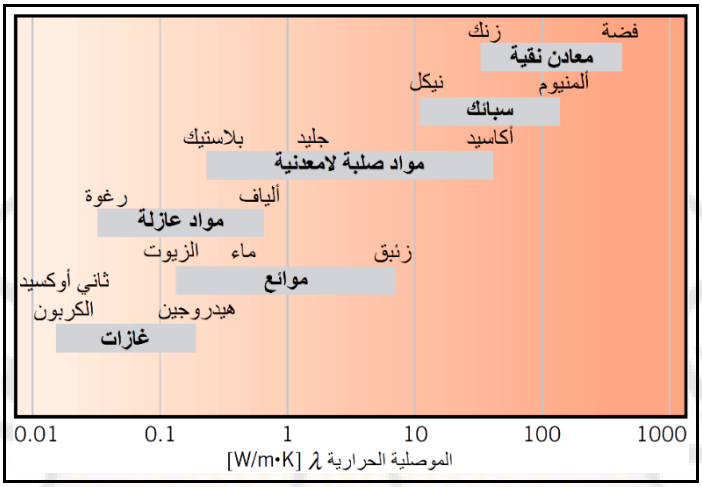
بالاستناد إلى قانون فورييه بشكله في المعادلة (2 – 5)، تعرف الموصلية الحرارية باتجاه المحور x بالعلاقة:

$$\lambda_x = \frac{\dot{q}_x}{\partial T / \partial x}$$

وبالمثل نجد كلاً من λ_y و λ_z . ولكن من أجل مادة إيزوتروبية، فإن الموصلية الحرارية لا تتعلق باتجاه انتقال الحرارة، وبالتالي $\lambda_x = \lambda_y = \lambda_z$. ومن هنا نجد أن قيمة الموصلية الحرارية تساوي إلى كمية الحرارة المنتقلة بالتوصيل عند تدرج درجة حرارة مساوٍ للواحد.

من العلاقة السابقة نجد أن شدة التوصيل الحراري من أجل تدرج درجة حرارة ثابت تزداد بزيادة الموصلية الحرارية. وبشكل عام فإن الموصلية الحرارية للمواد الصلبة تكون أكبر من

الموصلية الحرارية للموائع، والتي بدورها تكون أكبر من الموصلية الحرارية للغازات، ويبين الشكل (2 – 5) قيم الموصلية الحرارية لبعض المواد.



الشكل (2 – 5) مجال قيم الموصلية الحرارية لأطوار مختلفة من المادة عند درجة حرارة وضغط نظاميين.

تتغير قيم الموصلية الحرارية في الحالة العامة بتغير درجة الحرارة. بصورة عامة يكون هذا التغير طفيفاً لمعظم المواد في مجال درجات الحرارة المألوفة في التطبيقات الهندسية، ويمكن إهماله. في هذه الحالة يمكننا اعتماد قيمة وسطية للموصلية الحرارية، وعدها قيمة ثابتة.

في حال كان التغير في قيمة الموصلية الحرارية ضمن مجال درجات حرارة معين كبيراً، فإنه من الواجب أن نأخذ هذا التغير في الحسبان، وذلك بهدف التقليل من الخطأ الحسابي.

يمكن حساب قيمة الموصلية الحرارية للمواد في مجال درجات الحرارة المدروسة عادةً باستخدام العلاقة الخطية التالية:

$$\lambda(T) = \lambda_0 \left[1 + b\left(T - T_0\right)\right] \qquad \textbf{(7 – 2)}$$

λ_0 : الموصلية الحرارية عند درجة الحرارة T_0.

b: ثابت تجريبي.

2 – 1 – 2 – 3 – الموصلية الحرارية للغازات Thermal Conductivity Of Gases:

تحدث عملية التوصيل الحراري في الغازات عند الشروط النظامية نتيجة للتصادم العشوائي لجزيئات الغاز، وتحسب الموصلية الحرارية للغازات بالعلاقة:

$$\lambda = \tfrac{1}{3}\rho c_v W L \qquad \textbf{(8 – 2)}$$

W: السرعة الوسطية لحركة جزيئات الغاز.

L: الطول الوسطي (المسافة الحرة الوسطية لجزيئات الغاز في مجال الاصطدام).

c_v: الحرارة النوعية عند حجم ثابت.

ρ: كثافة الغاز.

إن ازدياد الضغط يؤدي إلى زيادة كثافة الغاز ρ، ومن جهةٍ أخرى فإنه يؤدي إلى تناقص المسافة الوسطية بين تصادمين متتاليين لجزيئات الغاز L، وبالتالي فإن حاصل جدائهما يبقى ثابتاً، أي إنّ الموصلية الحرارية لا تتأثر بشكل ملحوظ بتغييرات الضغط.

ترتبط السرعة الوسطية لجزيئات الغاز مع درجة الحرارة بالعلاقة:

$$W = \sqrt{\frac{3R_uT}{\mu}}$$

R_u: ثابت الغازات العام.

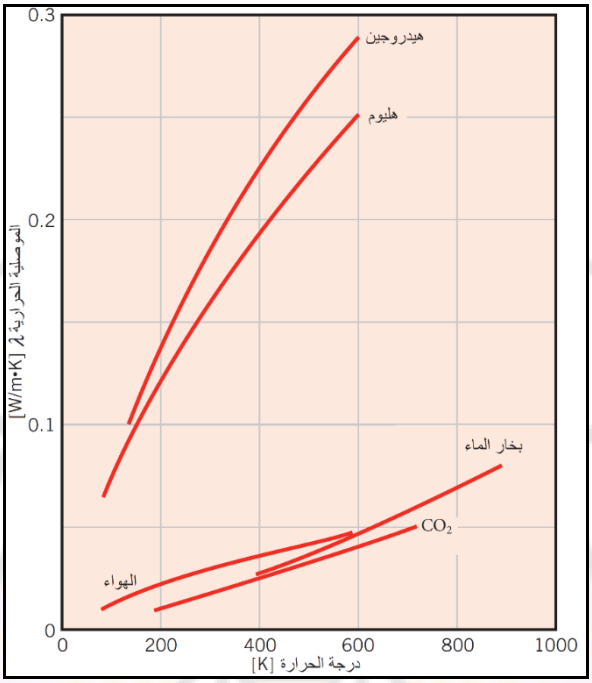
μ: الكتلة الجزئية للغاز.

T: درجة الحرارة المطلقة.

من هذه العلاقة نجد أن السرعة الوسطية لجزيئات الغاز تزداد بزيادة درجة الحرارة، كما أن الحرارة النوعية للغازات تزداد بزيادة درجة الحرارة، وبالتالي فإن قيمة الموصلية الحرارية للغازات تزداد بزيادة درجة الحرارة.

تقع قيم الموصلية الحرارية للغازات ضمن المجال $[0.06-0.6]$، ويبين الشكل (2 – 6) النتائج التجريبية لقياس الموصلية الحرارية للغازات المختلفة.

أثبتت التجارب أن الموصلية الحرارية للهيدروجين والهليوم أكبر بـ $(10-5)$ مرات من قيمته للغازات الأخرى، ويعود ذلك إلى كون الكتلة الجزيئية للهيدروجين والهليوم صغيرة، وبالتالي فإن جزيئات هذين الغازين تمتلك سرعة وسطية أكبر من بقية الغازات عند درجة الحرارة نفسها.



الشكل (2 – 6) تغير قيم الموصلية الحرارية لبعض الغازات بتغير درجة الحرارة.

2 – 1 – 2 – 4 – الموصلية الحرارية للموائع

Thermal Conductivity Of Liquids:

تنتقل الحرارة في الموائع عن طريق التصادمات المرنة العشوائية بين الجزيئات، حيث تنتقل الطاقة من الجزيئات ذات الطاقة الحركية العالية إلى الجزيئات الأقل طاقة حركية. وقد استخدم هذا التصور النظري لآلية انتقال الحرارة في الموائع لمعالجة النتائج التجريبية، وإيجاد العلاقة الرياضية لحساب الموصلية الحرارية:

$$\lambda = A\frac{c_p \rho^{4/3}}{\mu^{1/3}} \qquad (2\text{-}9)$$

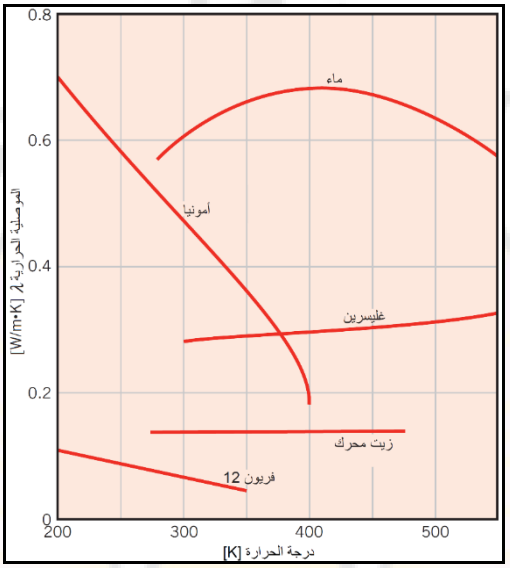
c_p : الحرارة النوعية للمائع بثبات الضغط.

ρ : كثافة المائع.

μ : الكتلة الجزيئية للمائع.

A : ثابت تناسب سرعة انتشار التصادمات المرنة في المائع. لا تتعلق قيمة A بطبيعة المائع ولكنها تتعلق بدرجة الحرارة، وعندئذٍ: $Ac_p \approx$ constant.

بما أن كثافة المائع تتناقص بزيادة درجة الحرارة، فإننا نستنتج وبحسب العلاقة (2 – 8)، أن زيادة درجة الحرارة تؤدي إلى تناقص قيمة الموصلية الحرارية، وهذه الظاهرة صحيحة لمعظم الموائع باستثناء الماء والغليسرين وزيت المحركات، كما هو مبين في الشكل (2 – 7). وعلى خلاف درجة الحرارة، فإن قيمة الموصلية الحرارية للموائع تزداد بزيادة الضغط.



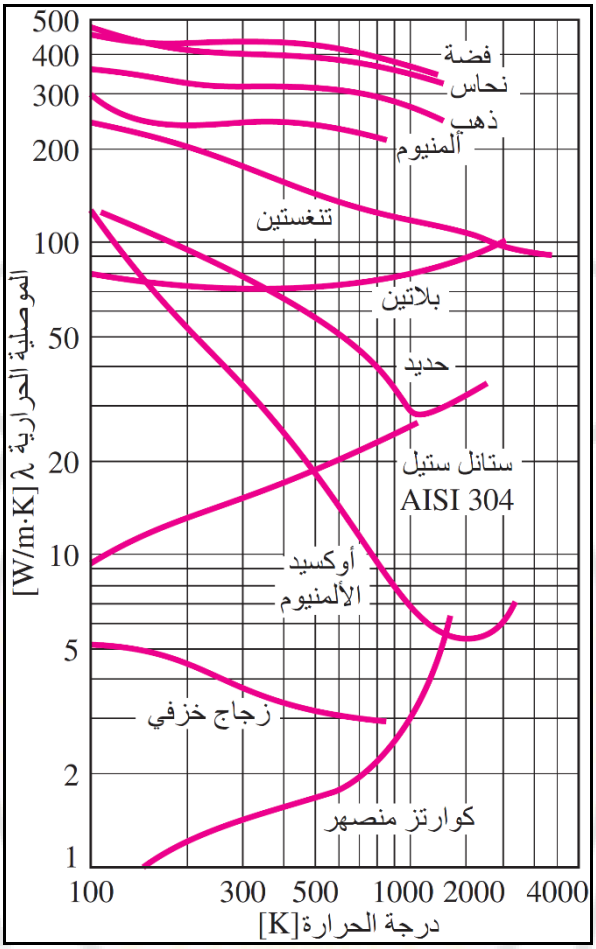
الشكل (2 – 7) تغير قيم الموصلية الحرارية لبعض الموائع بتغير درجة الحرارة.

2 – 1 – 2 – 5 – الموصلية الحرارية للأجسام الصلبة

Thermal Conductivity Of Solids:

تحدث عملية انتقال الحرارة في الأجسام الصلبة نتيجة التأثير المشترك لأمواج الاهتزازات الشبكية ولحركة الإلكترونات الحرة. تمثل حركة الإلكترونات الحرة في المعادن النقية المسبب الرئيس لانتقال الحرارة. في حين أن أمواج الاهتزازات الشبكية هي السبب وراء انتقال الحرارة في الأجسام الصلبة العازلة ونصف الناقلة، وفي السبائك المعدنية. يبين الشكل (2 – 8) تغير قيم الموصلية الحرارية لبعض المواد الصلبة مع تغير درجة الحرارة.

بشكل عام، فإن المواد ذات الكثافة العالية تمتلك موصلية حرارية كبيرة. وتتعلق قيمة λ ببنية المادة، كالمسامية ونسبة الرطوبة.



الشكل (2 – 8) تغير قيم الموصلية الحرارية لبعض المواد الصلبة بتغير درجة الحرارة.

إن معظم مواد العزل ومواد البناء ذات بنية مسامية (الآجر، البيتون، الصوف الصخري)، ولذلك فإن استخدام قانون فوريه لهذه المواد يعتبر شرطياً، وذلك نتيجة وجود المسامات في هذه المواد، حيث إنه من غير الممكن دراستها كوسط متجانس، وبالتالي فإن قيمة الموصلية الحرارية لهذه المواد تؤخذ بشكل شرطي.

تتعلق الموصلية الحرارية الفاعلة للمواد المسامية بشكل كبير بنسبة الرطوبة في المادة، حيث إن الموصلية الحرارية للمادة الرطبة أكبر من الموصلية الحرارية لكل من المادة الجافة والماء. ويعود السبب في هذه الظاهرة إلى حدوث انتقال للحرارة بالحمل ناتج عن خنق جريان الماء داخل مسامات المادة.

وتفسر ظاهرة ازدياد الموصلية الحرارية للمواد المسامية بازدياد درجة الحرارة، بازدياد الموصلية الحرارية للوسط المحيط بالمسامات، فضلاً عن ازدياد انتقال الحرارة بالإشعاع ضمن المادة المسامية.

2 - 2 - معادلة الانتشار الحراري: *The Heat Diffusion Equation*

عند تحليل عملية انتقال الحرارة يجب تحديد حقل درجات الحرارة للجسم المدروس $T = T(x, y, z)$ وعلاقته بالوسط المحيط. وهذا يعني إيجاد توزع درجة الحرارة Temperature Distribution في الجسم، والذي يمثل تغير درجة الحرارة بتغير الموضع ضمن الجسم. بمعرفة توزع درجة الحرارة في الجسم يصبح بالإمكان إيجاد شدة التدفق الحراري بالتوصيل في أية نقطة داخل الجسم أو على سطحه، وذلك باستخدام قانون فوريه.

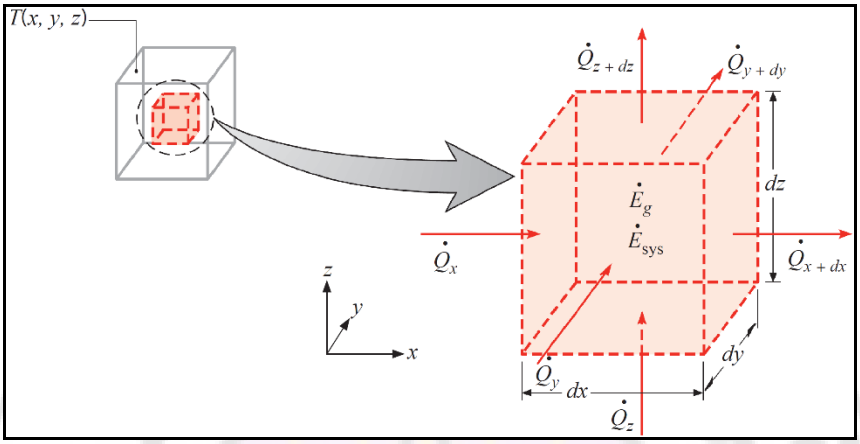
بالإضافة إلى إيجاد شدة التدفق الحراري بالتوصيل، فإن معرفة توزع درجة الحرارة تمكننا من تحديد قيم أخرى مهمة في التحليل الحراري. ففي حالة المواد الصلبة مثلاً، يستخدم توزع درجات الحرارة في تحديد قيم كل من الإجهادات والتمددات والانحرافات الحرارية، والتي تبقى عندها بنية المادة سليمة ولا تعاني من تشوهات. وكمثال آخر، فإن معرفة توزع درجة الحرارة يمكن أن يستخدم في تحديد السماكة المثلى لمواد العزل، أو تحديد طبقة الطلاء المناسبة.

من أجل إيجاد معادلة الانتشار الحراري، فإننا نعتمد على قانون انحفاظ الطاقة، ومن أجل تطبيق هذا القانون يجب اتباع الخطوات التالية:

1. نحدد العنصر المدروس، وذلك من خلال إحاطته بخط مقطع.
2. نحدد الطبيعة الزمنية للدراسة، فيما إذا كانت الدراسة تتم خلال فترة زمنية Δt ، أو عند لحظة زمنية معينة t.
3. نحدد أشكال التفاعلات الطاقية كافة المتعلقة بالمسألة المدروسة.
4. تطبيق قانون انحفاظ الطاقة.

2 – 2 – 1 – الإحداثيات الديكارتية *Rectangular Coordinates*:

بفرض أننا ندرس وسطاً متجانساً، وبحيث لا توجد حركة في الجسم، وتوزع درجة الحرارة في جملة إحداثيات ديكارتية معطى بالشكل $T(x, y, z)$. ندرس عنصراً حجمياً متناهياً في الصغر بشكل متوازي مستطيلات، أبعاده dx ، dy ، dz ، كما في الشكل (2 – 9)، وبفرض أن كثافة الجسم هي ρ ، وحرارته النوعية c_p.



الشكل (2 – 9) تحليل انتقال الحرارة بالتوصيل لعنصر حجمي في جملة إحداثيات ديكارتية.

بفرض وجود تدرج في درجة حرارة العنصر الحجمي، فإن ذلك سيؤدي إلى حدوث انتقال للحرارة بالتوصيل عبر كل سطح من سطوح التحكم للعنصر. ومعدل التوصيل الحراري ناظمي على كل سطح من السطوح عند المواضع الإحداثية x ، y ، z وهو بالترتيب $\dot{Q}_x$ ، $\dot{Q}_y$ ، $\dot{Q}_z$ ، يعرف معدل التوصيل الحراري عند كل سطح من السطوح المقابلة وفق منشور تايلور وبإهمال الحدود من المراتب العليا بالشكل:

$$\dot{Q}_{x+dx} = \dot{Q}_x + \frac{\partial \dot{Q}_x}{\partial x} dx$$

$$\dot{Q}_{y+dy} = \dot{Q}_y + \frac{\partial \dot{Q}_y}{\partial y} dy \qquad \textbf{(10 – 2)}$$

$$\dot{Q}_{z+dz} = \dot{Q}_z + \frac{\partial \dot{Q}_z}{\partial z} dz$$

وبفرض وجود حرارة متولدة داخل العنصر الحجمي المدروس، فإننا نعبر عن معدل هذه الحرارة بالعلاقة:

$$\dot{E}_g = \dot{g}\, dx\, dy\, dz$$

حيث إن حجم العنصر المدروس هو $V = dx\, dy\, dz$.

بفرض عدم حدوث عملية تحول طوري في المادة (بإهمال الحرارة الكامنة)، وأنه خلال الدراسة حدث تغير في المحتوى الطاقي للعنصر المدروس، فإننا نعبر عن معدل التغير في محتوى الطاقة للعنصر بالعلاقة:

$$\dot{E}_{\text{sys}} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} dx\, dy\, dz$$

وبالتالي يكتب قانون انحفاظ الطاقة للعنصر الحجمي بالشكل:

معدل التغير في محتوى الطاقة للعنصر الحجمي = معدل الحرارة المتولدة داخل العنصر الحجمي + معدل التوصيل الحراري عند: $z+dz$ ، $y+dy$ ، $x+dx$ − معدل التوصيل الحراري عند: x, y, z

أو:

$$\dot{E}_{in} - \dot{E}_{out} + \dot{E}_g = \dot{E}_{\text{sys}}$$

وبالاعتماد على المعادلات السابقة يمكن كتابة هذه المعادلة بالشكل:

$$\dot{Q}_x + \dot{Q}_y + \dot{Q}_z - \dot{Q}_{x+dx} - \dot{Q}_{y+dy} - \dot{Q}_{z+dz} + \dot{g}\, dx\, dy\, dz = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} dx\, dy\, dz \quad \textbf{(11 − 2)}$$

بالتعويض من المعادلة (2 − 10) تصبح المعادلة السابقة بالشكل:

$$-\frac{\partial \dot{Q}_x}{\partial x} dx - \frac{\partial \dot{Q}_y}{\partial y} dy - \frac{\partial \dot{Q}_z}{\partial z} dz + \dot{g}\, dx\, dy\, dz = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} dx\, dy\, dz \quad \textbf{(12 − 2)}$$

يعرف معدل التوصيل الحراري بحسب قانون فوريه بالعلاقة:

$$\dot{Q}_x = -\lambda\, dy\, dz \frac{\partial T}{\partial x}$$

$$\dot{Q}_y = -\lambda\, dx\, dz \frac{\partial T}{\partial y} \quad \textbf{(13 − 2)}$$

$$\dot{Q}_z = -\lambda\, dx\, dy \frac{\partial T}{\partial z}$$

بتعويض المعادلة (2 − 13) في المعادلة (2 − 12)، وبالتقسيم على حجم العنصر المدروس Vنحصل على المعادلة:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z}\right) + \dot{g} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad \textbf{(14 − 2)}$$

وهي المعادلة العامة للانتشار الحراري في الإحداثيات الديكارتية، أو المعادلة التفاضلية للتوصيل الحراري، وتعد الوسيلة الأساسية في تحليل عملية التوصيل الحراري، وبحل هذه المعادلة يمكننا معرفة توزع درجة الحرارة في الجسم $T(x, y, z)$ كتابع للزمن.

عند استخدام المعادلة العامة للانتشار الحراري فإنه من الواجب فهم المعنى الفيزيائي لكل حد من حدود المعادلة بشكل جيد، فمثلاً، الحد $\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right)$ يعبر عن معدل انتقال الحرارة بالتوصيل عبر العنصر الحجمي باتجاه المحور x، وبضرب هذا الحد بـ dx نحصل على شدة التدفق الحراري بالتوصيل:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right)dx=\dot{q}_x-\dot{q}_{x+dx} \qquad \textbf{(15 – 2)}$$

وبشكل مشابه نحصل على شدة التدفق الحراري بالتوصيل لباقي المحاور الإحداثية. بعبارة أخرى، فإن معادلة الحرارة تعبر عن أنه في أي نقطة من الوسط يكون:

معدل التوصيل الحراري لواحدة الحجم + معدل الطاقة الحرارية الحجمية المتولدة = معدل التغير في المحتوى الطاقي لواحدة الحجم

غالباً ما تستخدم المعادلة (2 – 14) بشكل مبسط، وبشكل خاص في حال كان معامل التوصيل الحراري ثابتاً، حيث تصبح بالشكل:

$$\frac{\partial^2T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2T}{\partial z^2}+\frac{\dot{g}}{\lambda}=\frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t} \qquad \textbf{(16 – 2)}$$

وتسمى هذه المعادلة بمعادلة فورييه – بيوت Fourier - Biot equation، وهي تعبر عن نظام حراري ثلاثي الأبعاد غير مستقر وبوجود حرارة متولدة، وتختصر هذه المعادلة إلى الأشكال التالية:

*** معادلة بواسون Poisson equation:** في الحالة المستقرة.

$$\frac{\partial^2T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2T}{\partial z^2}+\frac{\dot{g}}{\lambda}=0 \qquad \textbf{(17 – 2)}$$

*** معادلة الانتشار diffusion equation:** في الحالة العابرة ومن دون حرارة متولدة.

$$\frac{\partial^2T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2T}{\partial z^2}=\frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t} \qquad \textbf{(18 – 2)}$$

*** معادلة لابلاس Laplace equation:** في الحالة المستقرة ومن دون حرارة متولدة.

$$\frac{\partial^2T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2T}{\partial z^2}=0 \qquad \textbf{(19 – 2)}$$

مثال 2 – 1:

يعطى توزع درجة الحرارة عبر جدار سماكته 1m عند لحظة زمنية ما بالعلاقة:

$$T(x) = a + bx + cx^2$$

وتقاس T بالسيليزيوس، و x بالمتر، في حين أن: $a = 900\,^{\circ}\mathrm{C}$ ، $b = -300\,^{\circ}\mathrm{C/m}$ ، $c = -50\,^{\circ}\mathrm{C/m^2}$. يحدث ضمن الجدار توليد حرارة حجمية منتظمة $\dot{g} = 1000\,\mathrm{W/m^3}$. بفرض أن مساحة سطح الجدار $10\,\mathrm{m^2}$، وخواصه الفيزيائية: $\rho = 1600\,\mathrm{kg/m^3}$ ، $\lambda = 40\,\mathrm{W/m.K}$ ، $c_p = 4\,\mathrm{kJ/kg.K}$.

1. احسب معدل انتقال الحرارة الداخل إلى الجدار عند $(x = 0)$ والخارج منه عند $(x = 1\mathrm{m})$.
2. احسب معدل التغير في محتوى الطاقة المخزنة في الجدار.
3. احسب المعدل الزمني لتغير درجة الحرارة عند $x = 0, 0.25, 0.5\,\mathrm{m}$.

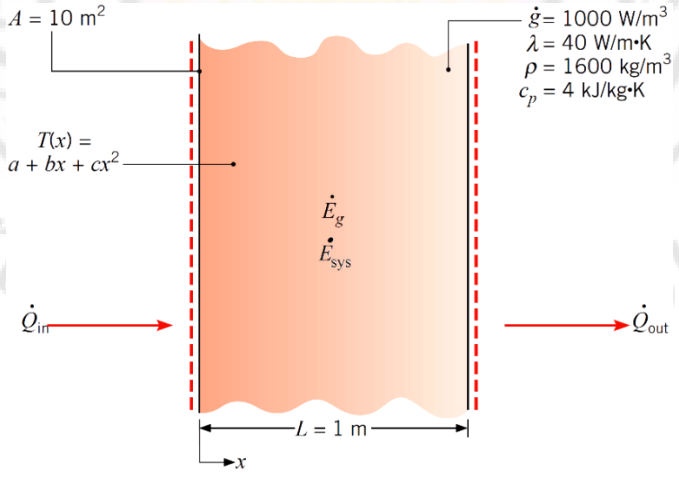
الحل:

المعطيات: توزع درجة الحرارة $T(x)$ عند لحظة زمنية ما t في جدار أحادي البعد بوجود حرارة حجمية متولدة منتظمة.

المطلوب:

1. معدلات الحرارة الداخلة للجدار $(\dot{Q}_{in}\ ;x = 0)$ والخارجة منه $(\dot{Q}_{out}\ ;x = 1\mathrm{m})$.
2. معدل تغير محتوى الطاقة المخزنة في الجدار $\dot{E}_{sys}$.
3. المعدل الزمني لتغير درجة الحرارة عند $x = 0, 0.25, 0.5\,\mathrm{m}$.

الشكل:



الافتراضات:

1. توصيل حراري أحادي البعد باتجاه المحور x.
2. وسط أيزوتروبي ذو خواص ثابتة.
3. توليد حراري داخلي منتظم $\dot{g}\left[\mathrm{W/m^3}\right]$.

التحليل:

1. كما نعلم، فإنه بمجرد معرفة توزع درجة الحرارة في وسط ما، يصبح من السهل حساب معدل انتقال الحرارة بالتوصيل في أية نقطة من هذا الوسط أو عند أي سطح من سطوحه من خلال استخدام قانون فوريه؛ بالتالي يمكن حساب معدلات انتقال الحرارة المطلوبة من خلال استخدام توزع درجة الحرارة المعطى مع قانون فوريه، كما يلي:

$$\dot{Q}_{\text{in}} = \dot{Q}_x(0) = -\lambda A \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0} = -\lambda A\left(b + 2cx\right)_{x=0}$$

$$= -b\lambda A = 300\,^{\circ}\mathrm{C/m} \times 40\,\mathrm{W/m.K} \times 10\,\mathrm{m^2} = 120\,\mathrm{kW}$$

وبشكل مشابه:

$$\dot{Q}_{\text{out}} = \dot{Q}_x(L) = -\lambda A \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=L} = -\lambda A\left(b + 2cx\right)_{x=L}$$

$$\dot{Q}_{\text{out}} = -\left(b + 2cL\right)\lambda A$$

$$= -\left[-300\,^{\circ}\mathrm{C/m} + 2\left(-50\,^{\circ}\mathrm{C/m^2}\right) \times 1\,\mathrm{m}\right] \times 40\,\mathrm{W/m.K} \times 10\,\mathrm{m^2}$$

$$= 160\,\mathrm{kW}$$

2. يحسب معدل التغير في الطاقة المخزنة في الجدار $\dot{E}_{\text{st}}$ من خلال إجراء موازنة طاقية للجدار. نكتب علاقة التوازن الطاقي لحجم تحكم يحيط بالجدار:

$$\dot{E}_{\text{in}} + \dot{E}_g - \dot{E}_{\text{out}} = \dot{E}_{\text{sys}}$$

حيث إن: $\dot{E}_g = \dot{g}AL$، وبالتالي تصبح معادلة التوازن الطاقي بالشكل:

$$\dot{E}_{\text{st}} = \dot{E}_{\text{in}} + \dot{E}_g - \dot{E}_{\text{out}} = \dot{Q}_{\text{in}} + \dot{g}AL - \dot{Q}_{\text{out}}$$

$$\dot{E}_{\text{st}} = 120\,\mathrm{kW} + 1000\,\mathrm{W/m^3} \times 10\,\mathrm{m^2} \times 2\,\mathrm{m} - 160\,\mathrm{kW}$$

$$\dot{E}_{\text{st}} - 30\,\mathrm{kW}$$

3. يحسب المعدل الزمني لتغير درجة الحرارة في أية نقطة من الوسط من المعادلة التفاضلية للتوصيل الحراري (2 – 16). يمكن إعادة كتابة المعادلة التفاضلية للتوصيل الحراري في الإحداثيات الديكارتية بالشكل:

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\lambda}{\rho c_p}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\dot{g}}{\rho c_p}$$

من توزع درجات الحرارة المعطى في نص المسألة، فإن:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(b+2cx\right)=2c=2\left(-50\,^{\circ}\mathrm{C/m^2}\right)=-100\,^{\circ}\mathrm{C/m^2}$$

نلاحظ أن هذا المشتق لا يتعلق بالموضع ضمن الوسط، بالتالي فإن المعدل الزمني لتغير درجة الحرارة مستقل أيضاً عن الموضع، ويعطى كما يلي:

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{40\,\mathrm{W/m.K}}{1600\,\mathrm{kg/m^3}\times 4\,\mathrm{kJ/kg.K}}\times\left(-100\,^{\circ}\mathrm{C/m^2}\right)$$

$$+\frac{1000\,\mathrm{W/m^3}}{1600\,\mathrm{kg/m^3}\times 4\,\mathrm{kJ/kg.K}}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}=-6.25\times10^{-4}\,^{\circ}\mathrm{C/s}+1.56\times10^{-4}\,^{\circ}\mathrm{C/s}$$

$$=-4.69\times10^{-4}\,^{\circ}\mathrm{C/s}$$

المناقشة:

1. بناءً على هذه النتيجة، فإن درجة الحرارة في نقاط الجدار كافة تتناقص مع الزمن.

2. يمكننا دائماً استخدام قانون فوريه لحساب معدل انتقال الحرارة بالتوصيل عند معرفة توزع درجة الحرارة، حتى عند شروط الحالة غير المستقرة وبوجود حرارة متولدة.

2 – 2 – 2 – الإحداثيات الأسطوانية *Cylindrical Coordinates*:

يأخذ شعاع التدفق الحراري في الإحداثيات الأسطوانية وبالاعتماد على قانون فوريه الشكل التالي:

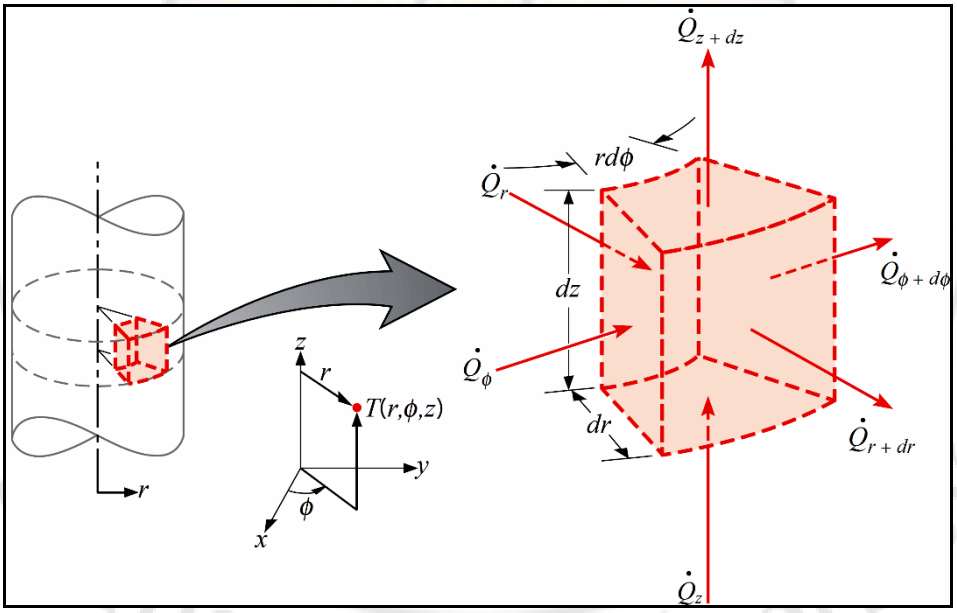
$$\dot{\mathbf{q}} = -\lambda \nabla T = -\lambda \left(\mathbf{i}\frac{\partial T}{\partial r} + \mathbf{j}\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial \phi} + \mathbf{k}\frac{\partial T}{\partial z} \right) \qquad \textbf{(20 – 2)}$$

حيث إن معدل التدفق الحراري باتجاه الإحداثيات الأسطوانية (r, ϕ, z) وحسب قانون فوريه، هو:

القطري:
$$\dot{q}_r = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r}$$

المحيطي:
$$\dot{q}_\phi = -\frac{\lambda}{r}\frac{\partial T}{\partial \phi}$$

المحوري:
$$\dot{q}_z = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z}$$



الشكل (2 – 10) تحليل التوصيل الحراري لعنصر حجمي في جملة إحداثيات أسطوانية.

وبتطبيق معادلة التوازن الطاقي على العنصر الحجمي المدروس في الشكل (2 – 10)، وباتباع الخطوات نفسها، كما في حالة الإحداثيات الديكارتية نحصل على المعادلة العامة للانتشار الحراري في الإحداثيات الأسطوانية:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial \phi}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial z}\right)+\dot{g}=\rho c_p\frac{\partial T}{\partial t} \qquad (21-2)$$

2 – 2 – 3 – الإحداثيات الكروية *Spherical Coordinates*:

يعبر عن شعاع التدفق الحراري وفق قانون فوريه في الإحداثيات الكروية بالشكل:

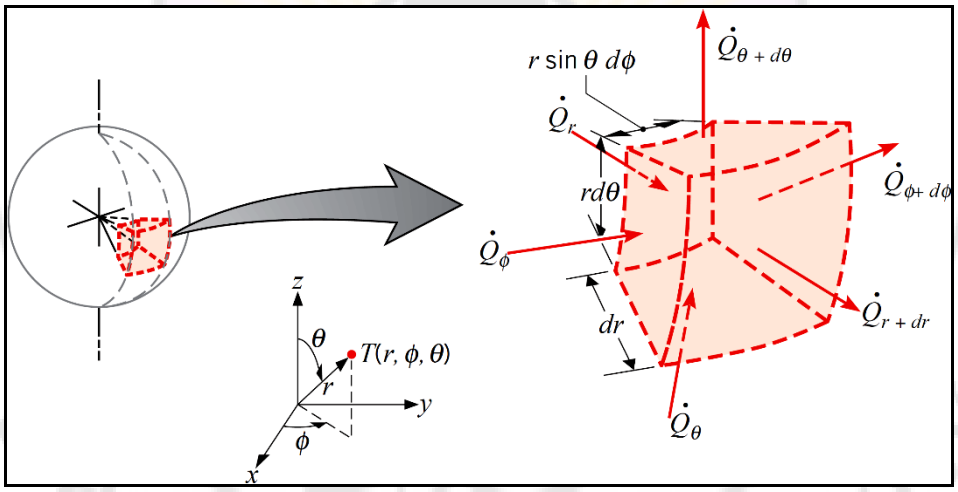
$$\dot{\mathbf{q}}=-\lambda\nabla T=-\lambda\left(\mathbf{i}\frac{\partial T}{\partial r}+\mathbf{j}\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial \theta}+\mathbf{k}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial T}{\partial \phi}\right) \qquad (22-2)$$

حيث إن معدل التدفق الحراري في باتجاه الإحداثيات الكروية (r,θ,ϕ) هو:

القطري:
$$\dot{q}_r=-\lambda\frac{\partial T}{\partial r}$$

القطبي:
$$\dot{q}_\theta=-\frac{\lambda}{r}\frac{\partial T}{\partial \theta}$$

السمتي:
$$\dot{q}_\phi=-\frac{\lambda}{r\sin\theta}\frac{\partial T}{\partial \phi}$$



الشكل (2 – 11) تحليل التوصيل الحراري لعنصر حجمي في جملة إحداثيات كروية.

وبتطبيق معادلة التوازن الطاقي على العنصر الحجمي المبين في الشكل (2 – 11)، وباتباع الخطوات نفسها، كما في حالة الإحداثيات الديكارتية، نحصل على المعادلة العامة للانتشار الحراري في الإحداثيات الكروية:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial \phi}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\lambda\sin\theta\frac{\partial T}{\partial \theta}\right)+\dot{g}=\rho c_p\frac{\partial T}{\partial t} \qquad (23-2)$$

من الجدير بالذكر أنه يجب استخراج المعادلتين (2 – 20)، (2 – 23) وذلك لنكون قادرين على تطبيق مبادئ انحفاظ الطاقة بشكل صحيح.

يجب أن نتنبه إلى أن واحدة تدرج درجة الحرارة في قانون فورييه هي $[\mathrm{K/m}]$، لذلك يجب التعبير عن تدرج درجة الحرارة في الإحداثيات الزاوية بدلالة التغير التفاضلي لنصف القطر. فمثلاً، مركبة التدفق الحراري في الاتجاه المحيطي في جملة إحداثيات أسطوانية هي: $\dot{q}_\phi=-\frac{\lambda}{r}\left(\frac{\partial T}{\partial \phi}\right)$، وليست $\dot{q}_\phi=-\lambda\left(\frac{\partial T}{\partial \phi}\right)$.

2 - 3 - الشروط الحدية والابتدائية *Boundary and Initial Conditions*:

إن المعادلة التفاضلية للتوصيل الحراري بأشكالها المختلفة، والتي حصلنا عليها من خلال تطبيق مبدأ التوازن الطاقي على عنصر حجمي من الوسط المدروس لا تتغير بتغير الشروط الحرارية على السطوح الخارجية للوسط، حيث إن هذه المعادلات التفاضلية لا يوجد فيها أية معطيات ذات صلة بالشروط الحرارية عند السطح الخارجي للوسط المدروس، كدرجة حرارة السطح، أو تدفق حراري محدد عند السطح. وكما نعلم فإن توزع درجة الحرارة داخل وسطٍ ما والتدفق الحراري يتعلقان بالشروط عند حدود الوسط، وبالتالي فإن التوصيف الكامل للانتقال الحراري في الوسط يفرض تحديد الشروط الحرارية عند حدود الوسط، وهي ما تسمى بالشروط الحدية.

من وجهة النظر الرياضية، فإن حل أية معادلة تفاضلية يتطلب التخلص من عمليات الاشتقاق والتكامل في المعادلة، حيث ينتج في الحل النهائي مجموعة من الثوابت الاختيارية، وهو ما يسمى بالحل العام للمعادلة التفاضلية. من أجل التوصل إلى حل وحيد للمعادلة التفاضلية لا يمكننا الاكتفاء بالحل العام؛ وإنما يجب تحديد بعض الشروط للحل (قيمة التابع أو أحد مشتقاته عند قيم معينة للمتحولات المستقلة)، حيث إن تطبيق هذه الشروط على الحل العام عند نقاط معينة يعطي قيماً محددة للثوابت، وهو ما يسمى بالحل الخاص.

إن درجة الحرارة في أية نقطة من الوسط عند لحظة معينة تتعلق بالشروط الحرارية للوسط عند بدء عملية التوصيل الحراري، وهذا ما يسمى بالشرط الابتدائي، والذي يؤخذ عادةً

عند $t = 0$، وهو يصف توزع درجة الحرارة في الوسط عند اللحظة الابتدائية. ويعطى الشرط الابتدائي في جملة إحداثيات ديكارتية بصيغته العامة بالعلاقة:

$$T(x, y, z, 0) = f(x, y, z)$$

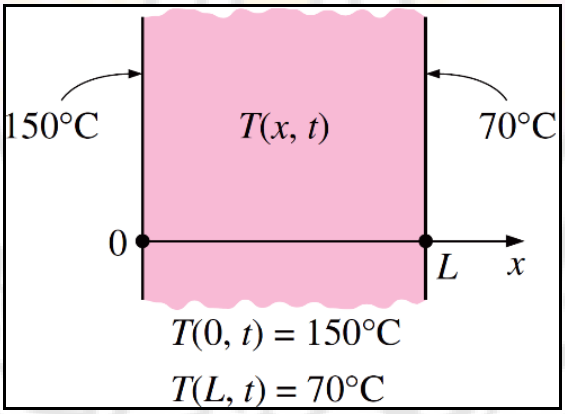
حيث $f(x, y, z)$ يوصف توزع درجة الحرارة في الوسط عند اللحظة الابتدائية $t = 0$.

في حال كانت درجة حرارة الوسط عند اللحظة الابتدائية واحدة في نقاطه كلها T_i، تصبح العلاقة السابقة بالشكل: $T(x, y, z, 0) = T_i$

في حال كانت الدراسة ذات طبيعة مستقرة، فإن معادلة الحرارة لن تحتوي على مشتق لدرجة الحرارة بالنسبة للزمن، وبالتالي لا توجد حاجة لتعريف الشرط الابتدائي.

بما أن المعادلة العامة للانتشار الحراري هي معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية بالنسبة للإحداثيات المكانية، فإنه من الواجب تحديد شرطين حديين لكل إحداثي مكاني لتوصيف النظام الحراري، وبما أن معادلة الحرارة تحتوي على مشتق من الدرجة الأولى بالنسبة للزمن، فإنه يجب تحديد شرط حدي واحد فقط.

إن معظم الشروط الحدية التي تواجهنا في التطبيقات العملية هي: درجة حرارة محددة، وتدفق حراري محدد، وانتقال حرارة بالحمل، وانتقال حرارة بالإشعاع.



الشكل (2 – 12) الشروط الحدية عند درجة حرارة محددة على جانبي جدار مستو.

2 – 3 – 1 – الشروط الحدية عند درجة حرارة محددة

***Specified Temperature Boundary Conditions*:**

إن أسهل طريقة لتعريف الشروط الحدية على سطحٍ ما هي تحديد درجة الحرارة عند هذا السطح، حيث إن قياس درجة الحرارة لسطح مكشوف هي عملية سهلة وتتم بشكل مباشر. فمثلاً،

من أجل الجدار المبين بالشكل (2 – 12)، ذي السماكة L، حيث يحدث انتقال حرارة أحادي البعد باتجاه المحور x، تعرف الشروط الحدية بالعلاقة:

$$T\left(0,t\right)=T_1$$
$$T\left(L,t\right)=T_2 \qquad \textbf{(24 – 2)}$$

T_2,T_1: درجتا حرارة سطحي الجدار عند $x=0$، $x=L$، على الترتيب. من الممكن أن تكون درجة الحرارة المعرفة ثابتة كما في الحالة المستقرة، أو قد تكون متغيرة مع الزمن.

2 – 3 – 2 – الشروط الحدية عند تدفق حراري محدد

***Specified Heat Flux Boundary Conditions*:**

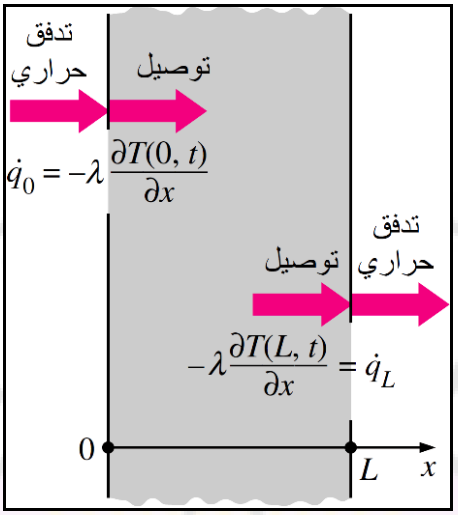
في حال وجود تحليل كافٍ للتفاعلات الطاقية عند السطح الخارجي للوسط، يصبح من الممكن عندها تحديد التدفق الحراري $\dot{q}$ عند هذا السطح، ويمكن استخدام هذا التدفق المحدد كأحد الشروط الحدية لحل المعادلة التفاضلية للتوصيل الحراري. حيث تعطى شدة التدفق الحراري في أية نقطة من الوسط وفق قانون فوريه بالعلاقة (1 – 1):

$$\dot{q}_x=-\lambda\frac{\partial T}{\partial x}$$

وبحل هذه المعادلة عند حدود الوسط نحدد أحد الشروط الحدية للمعادلة التفاضلية. فمثلاً، من أجل صفيحة سماكتها L، تتعرض لتدفق حراري شدته $\dot{q}=50\left[\mathrm{W/m^2}\right]$ ينتقل من الوسط المحيط عبر أحد سطحيها الجانبيين إلى داخلها، وبوجود تدفق حراري $\dot{q}$ من السطح الآخر للصفيحة إلى الوسط المحيط، كما هو مبين في الشكل (2 – 13)، تعطى الشروط الحدية بالعلاقة:

$$-\lambda\frac{\partial T\left(0,t\right)}{\partial x}=\dot{q}_x$$
$$-\lambda\frac{\partial T\left(L,t\right)}{\partial x}=\dot{q}_x \qquad \textbf{(25 – 2)}$$

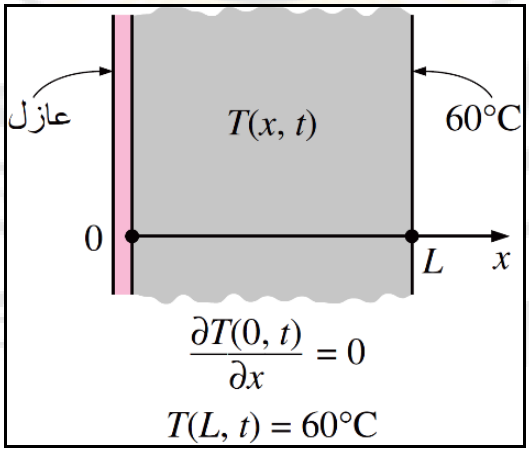
Damascus University



الشكل (2 – 13) الشروط الحدية عند تدفق حراري محدد على جانبي جدار مستو.

حالة خاصة أولى: السطح معزول Special Case: Insulated Surface

كثيراً ما نواجه في التطبيقات العملية سطوحاً معزولة بغرض التقليل من الفقد أو الكسب الحراري، حيث إن عملية العزل هذه تقلل من كمية الحرارة المنتقلة، لكنها لا توقف عملية انتقال الحرارة بشكل نهائي إلا في حال كانت سماكة العزل لانهائية. بناءً على ذلك، في حال كانت سماكة العازل مناسبة، فإنه من الممكن عد انتقال الحرارة عبر جدار معزول مهملاً. فمثلاً، من أجل السطح المعزول المبين بالشكل (2 – 14)، فإن التدفق الحراري يكون مساوياً للصفر، وتعطى الشروط الحدية عند هذا السطح بالعلاقة:



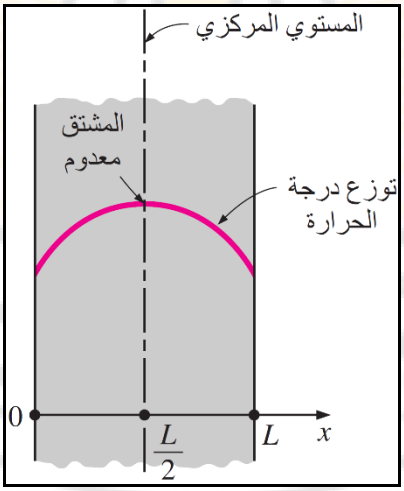
الشكل (2 – 14) الشروط الحدية لجدار مستوٍ معزول من أحد جانبيه،ودرجة حرارة محددة على الجانب الآخر.

$$\frac{\partial T\left(0,t\right)}{\partial x}=0$$

وبالتالي فإن تدرج درجة الحرارة عند السطح المعزول بالاتجاه العمودي على السطح يكون معدوماً، كما أن تابع درجة الحرارة يجب أن يكون عمودياً على السطح المعزول، وذلك لأن مشتق تابع درجة الحرارة عند هذا السطح يكون معدوماً.

حالة خاصة ثانية: التناظر الحراري Special Case: Thermal Symmetry

نصادف في بعض مسائل انتقال الحرارة، وكنتيجة لشروط حرارية مفروضة، حالة تناظر حراري. فمثلاً، بفرض وجود صفيحة ساخنة، سماكتها L ، معلقة شاقولياً في الهواء، كما في الشكل (2 – 15). سيتعرض سطحا الصفيحة لنفس الشروط الحرارية، وبالتالي فتوزع درجة الحرارة في أحد نصفي الصفيحة سيكون مطابقاً للتوزع الحراري في النصف الآخر. وبالتالي يكون النظام الحراري للصفيحة متناظراً بالنسبة للمستوي المركزي للصفيحة (المستوي العمودي على المحور x عند $x=L/2$)، كما أن انتقال الحرارة في أية نقطة من الصفيحة سيكون باتجاه السطح الأقرب للنقطة، ولن يكون هناك أي انتقال للحرارة عبر المستوي المركزي، وبالتالي يمكن عد المستوي المركزي كسطح معزول. وتكون الشروط الحدية عند سطح التناظر هي:



الشكل (2 – 15) الشروط الحدية في حالة تناظر حراري لجدارمستو.

$$\frac{\partial T\left(L/2,t\right)}{\partial x}=0$$

أما في حالة الأجسام الأسطوانية (أو الكروية)، فإن التناظر الحراري يحدث بالنسبة لمحور الأسطوانة (أو مركز الكرة)، ويتم تحديد الشروط الحدية في هذه الحالة بحيث يكون المشتق الأول لدرجة الحرارة بالنسبة إلى r (نصف القطر المتغير) معدوماً عند المحور (أو المركز).

مثال 2 – 2:

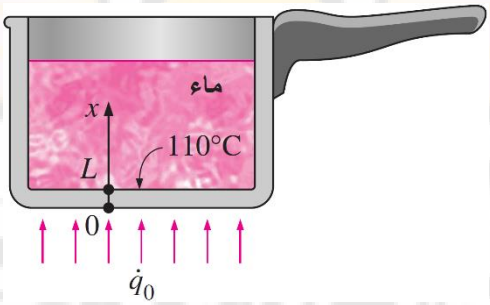
يوضع وعاء من النحاس على سخان كهربائي بغرض الطهي. سماكة الطبقة السفلية من الوعاء $L = 0.3\,\text{cm}$ وقطرها $D = 20\,\text{cm}$. تستهلك وحدة التسخين الكهربائي $P = 800\,[\text{W}]$ في أثناء التسخين، وينتقل 90% من الحرارة المتولدة في عنصر التسخين إلى الوعاء. درجة حرارة السطح الداخلي للوعاء عند شروط الحالة المستقرة هي $110\,^{\circ}\text{C}$. حدّد الشروط الحدية للقسم السفلي من الوعاء في أثناء عملية الطهي.

الحل:

المعطيات: أبعاد قاعدة الوعاء، معدل توليد الحرارة في عنصر التسخين ونسبة الحرارة المنتقلة إلى الوعاء، درجة حرارة السطح الداخلي للوعاء.

المطلوب: الشروط الحدية للقسم السفلي من الوعاء.

الشكل:



الافتراضات:

1. شروط الحالة المستقرة.
2. انتقال الحرارة من عنصر التسخين إلى أسفل الوعاء منتظم.
3. انتقال حرارة أحادي البعد بالتوصيل باتجاه المحور x.

التحليل: تنتقل الحرارة عبر السطح السفلي للوعاء نحو الأعلى، ويمكن عد انتقال الحرارة في هذه الحالة أحادي البعد. نأخذ المحور x بحيث يكون ناظمياً على السطح السفلي للوعاء

ونحو الأعلى، وبحيث يكون مبدأ الإحداثيات عند السطح السفلي. عند شروط الحالة المستقرة، فإن درجة الحرارة تتعلق فقط بـ x، أي إن $T = T(x)$.

بما أن التوصيل الحراري في أسفل الوعاء أحادي البعد وعند شروط الحالة المستقرة، فإن درجة الحرارة تتعلق بالإحداثي x فقط، وبالتالي $T = T(x)$.

بما أن انتقال الحرارة من عنصر التسخين إلى أسفل الوعاء منتظم، يمكن بالتالي عُدَّ الشرط الحدي عند أسفل الوعاء بأنه تدفق حراري محدد، وبالتالي يعطى بالعلاقة (2 – 25):

$$-\lambda \frac{dT(0)}{dx} = \dot{q}_0$$

حيث إن:

$$\dot{q}_0 = \frac{0.9 \times P}{A} = \frac{0.9 \times P}{\pi D^2/4} = \frac{0.9 \times 800\,\mathrm{W}}{\pi (20\,\mathrm{cm})^2/4} = 22.9\,\mathrm{kW/m^2}$$

إن درجة الحرارة عند السطح الداخلي لأسفل الوعاء هي $110\,^{\circ}\mathrm{C}$. بالتالي فإن الشرط الحدي عند هذا السطح هو:

$$T(L) = 110\,^{\circ}\mathrm{C}$$

المناقشة: نلاحظ أن تحديد الشروط الحدية قد يتطلب أحياناً بعض الاستنتاج والتقريب.

2 – 3 – 3 – الشروط الحدية في حالة الحمل الحراري

***Convection Boundary Condition*:**

إن تحديد الشروط الحرارية في حالة الحمل الحراري يعد أكثر الحالات الشائعة في التطبيقات الهندسية، حيث إن معظم سطوح انتقال الحرارة تكون مكشوفة على وسط محيط ذي درجة حرارة معينة، ونتوصل للشروط الحدية في حالة الحمل من التوازن الحراري للسطح، والذي يعبر عنه بالمساواة:

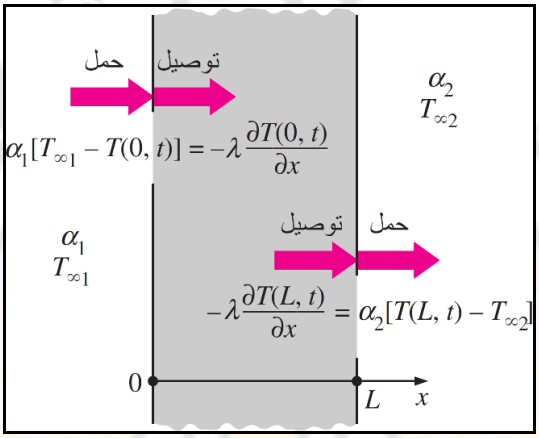
انتقال الحرارة بالتوصيل عند السطح في اتجاه معين = انتقال الحرارة بالحمل عند السطح في الاتجاه نفسه

بفرض لدينا صفيحة سماكتها L، يحدث فيها انتقال للحرارة أحادي البعد باتجاه المحور x، كما هو مبين في الشكل (2 – 16)، تعطى الشروط الحدية في حال وجود انتقال للحرارة بالحمل على جانبي الصفيحة بالعلاقة:

$$-\lambda\frac{\partial T(0,t)}{\partial x}=\alpha\left[T_{\infty,1}-T(0,t)\right]$$
$$-\lambda\frac{\partial T(L,t)}{\partial x}=\alpha\left[T(L,t)-T_{\infty,2}\right] \qquad \textbf{(26 – 2)}$$

α_2,α_1 : معاملا انتقال الحرارة بالحمل على جانبي الصفيحة، بالترتيب.

$T_{\infty,2},T_{\infty,1}$: درجتا الحرارة للوسطين المجاورين لجانبي الصفيحة بالترتيب.



الشكل (2 – 16) الشروط الحدية في حالة الحمل الحراري عند جانبي جدار مستو.

يجب أن ننتبه جيداً إلى أن سماكة السطح معدومة، كما أنه لا يمتلك أية كتلة، وبالتالي فهو غير قادر على تخزين الطاقة، أي إن كامل الحرارة الداخلة إلى السطح من أحد طرفيه، ستنفذ من الطرف الآخر.

تعبر الشروط الحدية في حالة الحمل عن أن الحرارة المنتقلة من جسم ما إلى وسط محيط تتابع تدفقها بالمعدل نفسه، ولكنها فقط تغير وسيلة الانتقال من التوصيل إلى الحمل (أو بالعكس في حال كان اتجاه انتقال الحرارة بالاتجاه المعاكس).

مثال 2 – 3:

يجري بخار عبر أنبوب عند درجة حرارة وسطية $T_\infty = 200\,^{\circ}\mathrm{C}$. نصفا القطرين الداخلي والخارجي للأنبوب هما $r_1 = 8\,\mathrm{cm}$ و $r_2 = 8.5\,\mathrm{cm}$، على الترتيب، والسطح الخارجي للأنبوب معزول بشكل جيد. إذا كان معامل انتقال الحرارة بالحمل على السطح الداخلي للأنبوب $\alpha = 65\left[\mathrm{W/m^2.{}^{\circ}C}\right]$، حدد الشروط الحدية على السطحين الداخلي والخارجي للأنبوب في أثناء فترات عابرة.

الحل:

وفق الشكل الآتي:



المعطيات: أنبوب يستخدم لنقل البخار.

المطلوب: الشروط الحدية عند السطحين الداخلي والخارجي للأنبوب كتابع للزمن.

التحليل: في أثناء الفترات العابرة الابتدائية، فإن انتقال الحرارة عبر مادة الأنبوب سيحدث بشكل رئيس في اتجاه القطر، وبالتالي يمكن تقريب الحالة إلى انتقال أحادي البعد. بالتالي فإن درجة الحرارة ستتغير ضمن جدار الأنبوب مع تغيّر القطر والزمن، أي إن $T = T(r,t)$.

تشير المسألة إلى أن انتقال الحرارة بين البخار والسطح الداخلي للأنبوب يحدث بالحمل. بالتالي بأخذ اتجاه انتقال الحرارة ليكون بالاتجاه الموجب لـ r، فإن الشرط الحدي عند السطح الداخلي يعطى بالعلاقة (2 – 26):

$$-\lambda \frac{\partial T(r_1,t)}{\partial r} = \alpha \left[T_\infty - T(r_1) \right]$$

ذكر نص المسألة أن السطح الخارجي للأنبوب معزول بشكل جيد، وبالتالي فإن الفقد الحراري عبر السطح الخارجي للأنبوب مهمل. بالتالي فإن الشرط الحدي عند السطح الخارجي للأنبوب، هو:

$$\frac{\partial T(r_2,t)}{\partial r} = 0$$

أي إن تدرج درجة الحرارة عند السطح الخارجي للأنبوب في أية لحظة زمنية يجب أن يكون مساوياً للصفر.

2 – 3 – 4 – الشروط الحدية في حالة الإشعاع

***Radiation Boundary Conditions*:**

في بعض الحالات، كما في الفضاء الخارجي أو تطبيقات التبريد العميق، يكون سطح انتقال الحرارة محاطاً بالخلاء، وبالتالي لا يوجد انتقال للحرارة بالحمل بين السطح والوسط المحيط، وفي هذه الحالة يصبح انتقال الحرارة بالإشعاع هو الآلية الوحيدة لانتقال الحرارة بين السطح المدروس والوسط المحيط. نحصل على الشروط الحدية في حالة الإشعاع من خلال التوازن الطاقي للسطح، والذي يعبر عنه بالمساواة:

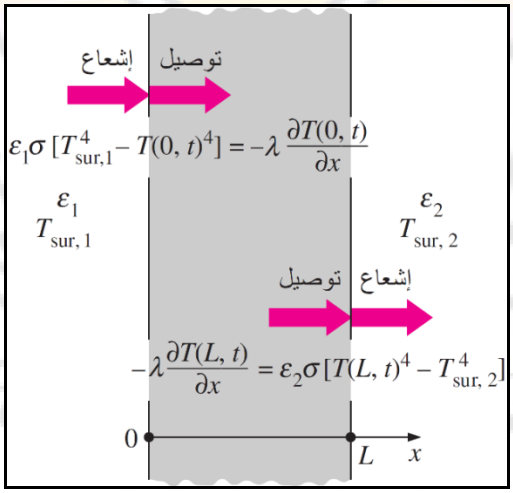
انتقال الحرارة بالتوصيل عند السطح في اتجاه معين = انتقال الحرارة بالإشعاع عند السطح في الاتجاه نفسه

بفرض أن الصفيحة المبينة في الشكل (2 – 17) تتعرض لانتقال حرارة أحادي البعد باتجاه المحور x ، تعطى الشروط الحدية عند سطحي الصفيحة بالعلاقة:

$$-\lambda\frac{\partial T(0,t)}{\partial x}=\varepsilon_1\sigma\left[T_{sur,1}^4-T^4(0,t)\right]$$
$$-\lambda\frac{\partial T(L,t)}{\partial x}=\varepsilon_2\sigma\left[T^4(L,t)-T_{sur,2}^4\right] \qquad \textbf{(27 – 2)}$$

$\varepsilon_2,\varepsilon_1$: إصداريتا السطحين الجانبيين للصفيحة.

$T_{sur,2},T_{sur,1}$: درجتا الحرارة المطلقة الوسطيتان للسطحين المقابلين لسطحي الصفيحة.



الشكل (2 – 17) الشروط الحدية في حالة الإشعاع الحراري عند جانبي جدار مستو.

كما نلاحظ من المعادلة (2 – 27)، فإن درجة الحرارة في حالة الإشعاع تكون مرفوعة للقوة من المرتبة الرابعة، وبالتالي فإن الشرط الحدي لحل المعادلة التفاضلية للتوصيل الحراري يكون لا خطياً، وكنتيجة لذلك فإن تطبيق هذا الشرط الحدي يجعل من الصعوبة بمكان تحديد الثوابت المجهولة في معادلة الحرارة، لذلك غالباً ما نلجأ إلى تجاهل التبادل الحراري بالإشعاع عند تحليل عملية انتقال الحرارة، لتجنب التعقيدات الناتجة عن اللاخطية في الحل، وخاصةً في حال كان التبادل الحراري عند السطح المدروس يتم بشكل أساسي بواسطة الحمل، وبحيث يكون تأثير الإشعاع طفيفاً.

2 – 3 – 5 – الشروط الحدية المعممة

***Generalized Boundary Conditions*:**

لقد افترضنا في أثناء دراستنا السابقة للشروط الحدية، أن السطوح تتعرض لشكل واحد من أشكال انتقال الحرارة (تدفق حراري محدد، حمل، إشعاع)، وذلك لتبسيط الدراسة. أما في الحالة العامة، فقد يتعرض السطح المدروس لأشكال عدة من انتقال الحرارة، كالحمل والإشعاع والتدفق الحراري في آنٍ معاً، وفي هذه الحالة تعرف الشروط الحدية من خلال التوازن الحراري للسطح بالمساواة:

انتقال الحرارة باتجاه السطح بكل أشكاله = انتقال الحرارة من السطح بكل أشكاله

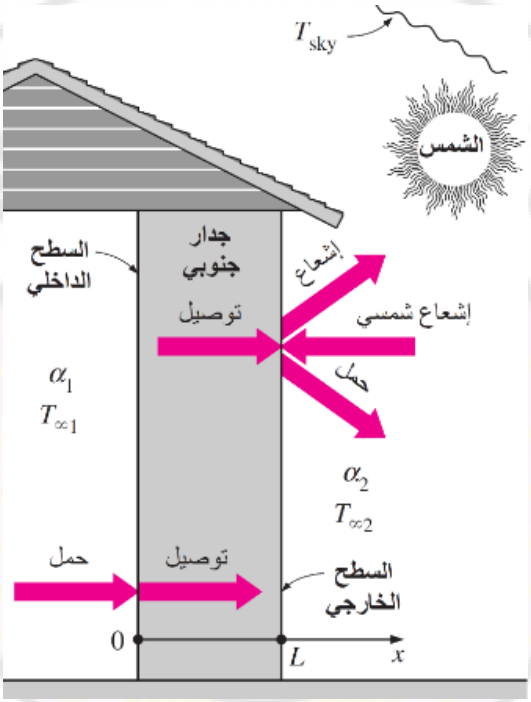
مثال 2 – 4:

لنأخذ الجدار الجنوبي لمنزل، وبفرض أن سماكة الجدار $L = 0.2\,\mathrm{m}$. يتعرض السطح الخارجي للجدار للإشعاع الشمسي، وامتصاصيته للإشعاع الشمسي $\alpha = 0.5$. يحافظ السطح الداخلي للجدار على درجة حرارة $T_{\infty,1} = 20\,^{\circ}\mathrm{C}$، في حين أن درجة حرارة الجو الخارجية ثابتة $T_{\infty,2} = 5\,^{\circ}\mathrm{C}$. يمكن عد السماء والأرض وسطوح الأبنية المحيطة على أنها سطح واحد درجة حرارته الفعالة $T_{\mathrm{sky}} = 255\,\mathrm{K}$ من أجل التبادل بالإشعاع على السطح الخارجي. بفرض أن التبادل بالإشعاع بين السطح الداخلي للجدار وسطوح جدران وسقف وأرضية المنزل مهمل. معاملا انتقال الحرارة بالحمل على السطحين الداخلي والخارجي للجدار هما $\alpha_1 = 6\left[\mathrm{W/m^2.{}^{\circ}C}\right]$، $\alpha_2 = 25\left[\mathrm{W/m^2.{}^{\circ}C}\right]$، على الترتيب. الموصلية الحرارية للجدار هي $\lambda = 0.7\left[\mathrm{W/m.{}^{\circ}C}\right]$، وإصدارية السطح الخارجي هي $\varepsilon_2 = 0.9$. بفرض أن

انتقال الحرارة عبر الجدار مستقر وأحادي البعد، حدد الشروط الحدية على السطحين الداخلي والخارجي للجدار.

الحل:

الشكل:



المعطيات: جدار جنوبي لمنزل، يتعرض لإشعاع شمسي، ويوجد حمل حراري على جانبيه.

المطلوب: الشروط الحدية عند السطحين الداخلي والخارجي للجدار.

التحليل: نحدد المحور x بحيث يكون عمودياً على الجدار، وبحيث تكون نقطة المبدأ عند السطح الداخلي للجدار. إن انتقال الحرارة عبر الجدار مستقر وأحادي البعد، وبالتالي فإن درجة الحرارة تتعلق فقط بـ x ولا تتعلق بالزمن، أي إن $T = T(x)$.

إن الشرط الحدي عند السطح الداخلي للجدار $(x = 0)$ هو حالة شرط الحمل السطحي، وذلك لعدم وجود تبادل حراري بالإشعاع أو وجود تدفق حراري محدد. بأخذ اتجاه انتقال الحرارة بالاتجاه الموجب للمحور x، فإن الشرط الحدي عند السطح الداخلي يعطى بالعلاقة (2 – 26):

$$-\lambda \frac{dT(0)}{dx} = \alpha_1 \left[T_{\infty,1} - T(0) \right]$$

إن الشرط الحدي عند السطح الخارجي $(x = L)$ هو شرط معمم، وذلك لوجود توصيل وحمل وإشعاع وتدفق حراري محدد. نأخذ في هذه الحالة أيضاً اتجاه انتقال الحرارة بحيث يكون بالاتجاه الموجب للمحور x، ويعبر عن الشرط الحدي عند السطح الخارجي في هذه الحالة بالعلاقة:

$$-\lambda \frac{dT(L)}{dx} = \alpha_2 \left[T(L) - T_{\infty,2}\right] + \varepsilon_2 \sigma \left[T^4(L) - T_{\text{sky}}^4\right] - \alpha q_{\text{solar}}$$

حيث إن الحد q_{solar} يشير إلى شدة التدفق الحراري الشمسي.

بفرض أننا أخذنا الاتجاه المعاكس من أجل انتقال الحرارة، فإننا سنحصل على النتيجة نفسها مضروبة بـ-1، وهي تكافئ هذه المعادلة.

إن القيم في هاتين العلاقتين جميعها معلومة، باستثناء درجات الحرارة ومشتقاتها عند السطحين الحديين.

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الفصل الثالث
التوصيل الحراري المستقر أحادي البعد
One Dimensional, Steady - State Conduction

عادةً ما نهتم في تحليلنا لانتقال الحرارة بحساب معدل انتقال الحرارة عبر وسط ما ودرجات الحرارة ضمنه عند شروط الحالة المستقرة. وفي الحالة العامة يكون انتقال الحرارة ثلاثي الأبعاد، ولكننا نقوم في أثناء التحليل بوضع بعض الافتراضات لتحويله إلى انتقال أحادي البعد، وذلك نظراً لصعوبة الدراسة في الحالة متعددة الأبعاد. ويمكننا حل هذا النوع من مسائل انتقال الحرارة (أي المستقرة أحادية البعد) من خلال استخدام الدارات الحرارية المكافئة، والتي تشبه إلى حد كبير الدارات الكهربائية. حيث إن المقاومة الحرارية للنظام تقابل المقاومة الكهربائية، وفرق درجات الحرارة يقابل فرق الكمون، ومعدل انتقال الحرارة يقابل التيار الكهربائي.

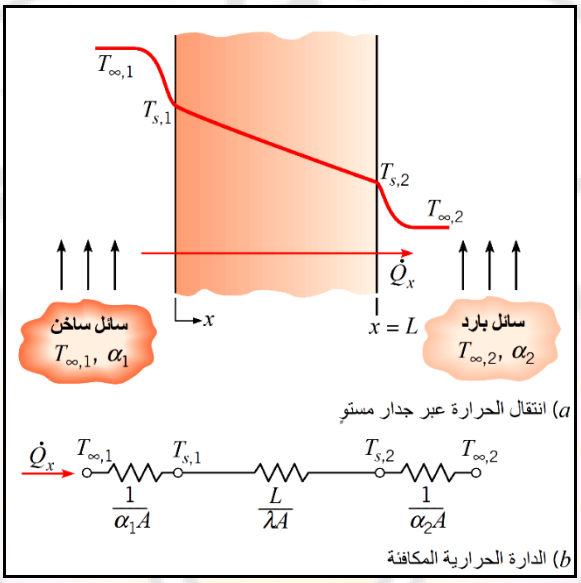
سندرس في هذا الفصل التوصيل الحراري المستقر أحادي البعد في جدارٍ مستوٍ، وفي الأسطوانة والكرة. كما سندرس حالة الجدران والأسطوانات والكرات المركبة، أي المؤلفة من طبقات عدة. وسنقوم بذلك بالطريقة المعيارية، أي من خلال إيجاد علاقة توزع درجة الحرارة من المعادلة التفاضلية للتوصيل الحراري، ومن ثم استخدامها مع قانون فوريه؛ وبالطريقة البديلة، حيث سنقوم بإجراء التكامل بشكل مباشر على قانون فوريه، وسوف نتعرف على شروط استخدام هذه الطريقة، سنناقش أيضاً مقاومة التماس الحرارية بين السطوح البينية. كما سنستنتج الدارات الحرارية المكافئة للأنظمة البسيطة والمركبة، وسنوجد علاقاتها في حالة وجود تبادل حراري بالحمل أو الإشعاع عند سطوح الجسم. وسنستنتج علاقة نصف القطر الحدي للعزل في حالة الأجسام الأسطوانية والكروية. سندرس بعد ذلك التوصيل الحراري في حال وجود حرارة متولدة داخل الجسم. وبعدها سننتقل إلى دراسة السطوح المريشة، وسنتعرف على العوامل المؤثرة في تصميم وكفاءة الريش. في نهاية الفصل سنقدم علاقات لحساب معدل انتقال الحرارة في بعض الأشكال الشائعة في التطبيقات الهندسية.

3 - 1 - جدار مستوٍ *Plane Wall*:

إن درجة الحرارة في حالة التوصيل الحراري المستقر أحادي البعد في جدار مستوٍ تابعة فقط للإحداثي x، كما أن الحرارة تنتقل في هذا الاتجاه فقط.

يبين الشكل (3 – 1) جداراً مستوياً يفصل بين سائلين عند درجتي حرارة مختلفتين، حيث تنتقل الحرارة بالحمل من السائل الساخن إلى سطح الجدار، ومن ثم بالتوصيل عبر الجدار، ومرة أخرى بالحمل من السطح الآخر للجدار إلى السائل البارد.

تبدأ الدراسة من خلال تحديد الشروط ضمن الجدار، حيث نقوم بإيجاد توزع درجة الحرارة، وهو الأمر الذي يمكننا بالتالي من تحديد معدل انتقال الحرارة بالتوصيل عبر الجدار.



الشكل (3 – 1) انتقال الحرارة عبر جدار مستوٍ

3 – 1 – 1 – توزع درجة الحرارة *Temperature Distribution*:

يمكن إيجاد توزع درجة الحرارة في الجدار من خلال حل المعادلة التفاضلية للتوصيل الحراري، من أجل الشروط الحدية المناسبة. تأخذ المعادلة التفاضلية للتوصيل الحراري في الحالة المستقرة عبر الجدار، ومن دون وجود منابع حرارية (أو مصارف حرارية) ضمن الجدار، الشكل:

$$\frac{d^2T}{dx^2} = 0 \qquad (1-3)$$

ومن قانون فوريه:

$$\dot{q}_x = -\lambda \frac{dT}{dx}$$

نجد أنه في حالة التوصيل الحراري المستقر أحادي البعد في جدارٍ مستوٍ ومن دون وجود حرارة متولدة، فإن شدة التدفق الحراري ثابتة، ولا تتعلق بالإحداثي x . إذا افترضنا أن الموصلية الحرارية للجدار ثابتة، وبإجراء التكامل للمعادلة (3 – 1) نجد:

$$\frac{dT}{dx}=C_1$$

وبإجراء التكامل مرةً أخرى نحصل على الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$\int dT=\int C_1 dx$$

$$T(x)=C_1x+C_2$$

لتحديد ثوابت التكامل C_1, C_2 نستخدم الشروط الحدية بثبات درجة الحرارة عند $x=0$ و $x=L$ ، حيث إن:

$$T(0)=T_{s,1} \quad , \quad T(L)=T_{s,2}$$

وبتطبيق هذه الشروط ينتج:

عند $x=0$: $T_{s,1}=C_2$

عند $x=L$: $T_{s,2}=C_1L+C_2=C_1L+T_{s,1}$

ومنه:

$$C_1=\frac{T_{s,2}-T_{s,1}}{L}$$

وبالتبديل في الحل العام نحصل على معادلة توزع درجة الحرارة في الجدار:

$$T(x)=(T_{s,2}-T_{s,1})\frac{x}{L}+T_{s,1} \qquad \textbf{(2 – 3)}$$

نستنتج أنه من أجل نظام توصيل حراري أحادي البعد ومستقر في جدار مستوٍ ومن دون حرارة متولدة، وموصلية حرارية ثابتة، فإن درجة الحرارة تتغير بشكل خطي مع الإحداثي x .

بعد الحصول على معادلة توزع درجة الحرارة، يمكننا استخدام قانون فوريه لإيجاد معدل كمية الحرارة المنتقلة بالتوصيل عبر الجدار:

$$\dot{Q}_x=-\lambda A\frac{dT}{dx}=\frac{\lambda A}{L}(T_{s,1}-T_{s,2}) \qquad \textbf{(3 – 3)}$$

A : مساحة مقطع الجدار العمودي على اتجاه انتقال الحرارة.

وتعطى شدة التدفق الحراري بالمعادلة:

$$\dot{q}_x=\frac{\dot{Q}_x}{A}=\frac{\lambda}{L}(T_{s,1}-T_{s,2}) \qquad \textbf{(4 – 3)}$$

نلاحظ من المعادلتين (3 – 3)، (3 – 4) أن معدل انتقال الحرارة $\dot{Q}_x$ وشدة التدفق الحراري $\dot{q}_x$ ثابتان ومستقلان عن x.

3 – 1 – 2 – المقاومة الحرارية *Thermal Resistance*:

من خلال دراسة التوصيل الحراري أحادي البعد ومن دون وجود حرارة متولدة وبثبات خواص المادة، يبرز لدينا مفهوم مهم توضحه المعادلة (3 – 3)، ألا وهو وجود تشابه بين الانتشار الحراري والشحن الكهربائي. فكما هو الحال في توصيل الكهرباء حيث توجد مقاومة كهربائية، فإنه يمكن افتراض وجود مقاومة حرارية مرتبطة بتوصيل الحرارة. وتعطى المقاومة الحرارية للتوصيل بالعلاقة:

$$\dot{Q}_x = \frac{\lambda A}{L}\left(T_{s,1} - T_{s,2}\right) = \frac{T_{s,1} - T_{s,2}}{R_{\text{cond}}}$$

$$R_{\text{cond}} = \frac{T_{s,1} - T_{s,2}}{\dot{Q}_x} = \frac{L}{\lambda A} \qquad \textbf{(5 – 3)}$$

وبشكل مشابه، في أثناء التوصيل الكهربائي وبحسب قانون أوم، تعطى المقاومة الكهربائية بالعلاقة:

$$R_e = \frac{E_{s,1} - E_{s,2}}{I} = \frac{L}{\sigma A} \qquad \textbf{(6 – 3)}$$

σ: الموصلية الكهربائية. $\left[1/\Omega.\text{m}\right]$

I: شدة التيار الكهربائي. $[\text{A}]$

تظهر المقاومة الحرارية في حالة انتقال الحرارة بالحمل عند سطح التبادل الحراري، وبحسب قانون نيوتن في التبريد:

$$\dot{Q}_{\text{conv}} = \alpha A\left(T_s - T_\infty\right) \qquad \textbf{(7 – 3)}$$

وتعطى المقاومة الحرارية في هذه الحالة بالعلاقة:

$$R_{\text{conv}} = \frac{T_s - T_\infty}{\dot{Q}_{\text{conv}}} = \frac{L}{\alpha A} \qquad \textbf{(8 – 3)}$$

α: معامل انتقال الحرارة بالحمل $[\text{W/m}^2.\text{k}]$.

A: سطح التبادل الحراري $[\text{m}^2]$.

يعد تمثيل الدارة الحرارية المكافئة وسيلة مهمة لحل مسائل انتقال الحرارة. يظهر الشكل (3 – 1) الدارة الحرارية المكافئة للتوصيل الحراري في الجدار المستوي بوجود انتقال للحرارة

بالحمل عند سطح الجدار. يحسب معدل انتقال الحرارة الكلي من خلال حساب كل جزء من أجزاء الدارة. بما أن $\dot{Q}_x$ ثابت في كل أجزاء الدارة، فإنه يعطى بالعلاقة:

$$\dot{Q}_x = \frac{T_{\infty,1} - T_{s,1}}{1/\alpha_1 A} = \frac{T_{s,1} - T_{s,2}}{L/\lambda A} = \frac{T_{s,2} - T_{\infty,2}}{1/\alpha_2 A} \qquad \textbf{(9 - 3)}$$

ويمكن التعبير عن معدل انتقال الحرارة الكلي بدلالة فرق درجات الحرارة الكلي $\left(T_{\infty,1} - T_{\infty,2}\right)$ والمقاومة الحرارية الكلية R_{tot}، وذلك وفق العلاقة:

$$\dot{Q}_x = \frac{T_{\infty,1} - T_{\infty,2}}{R_{\text{tot}}} \qquad \textbf{(10 - 3)}$$

بما أن المقاومات الحرارية للتوصيل والحمل على التسلسل، فإن المقاومة الحرارية الكلية تعطى بالعلاقة:

$$R_{\text{tot}} = \frac{1}{\alpha_1 A} + \frac{L}{\lambda A} + \frac{1}{\alpha_2 A} \qquad \textbf{(11 - 3)}$$

في حال كان معامل انتقال الحرارة بالحمل صغيراً (كما في حالة الحمل الحر في غاز)، يصبح من الواجب أخذ التبادل الحراري بالإشعاع بين السطح والمحيط بالحسبان. من علاقة التبادل الحراري بالإشعاع:

$$\dot{Q}_{\text{rad}} = \alpha_{\text{rad}} A \left(T_s - T_{\text{sur}}\right)$$

وتعطى المقاومة الحرارية في هذه الحالة بالعلاقة:

$$R_{\text{rad}} = \frac{T_s - T_{\text{sur}}}{\dot{Q}_{\text{rad}}} = \frac{1}{\alpha_{\text{rad}} A} \qquad \textbf{(12 - 3)}$$

حيث يعطى معامل انتقال الحرارة بالإشعاع بالعلاقة (1 - 9):

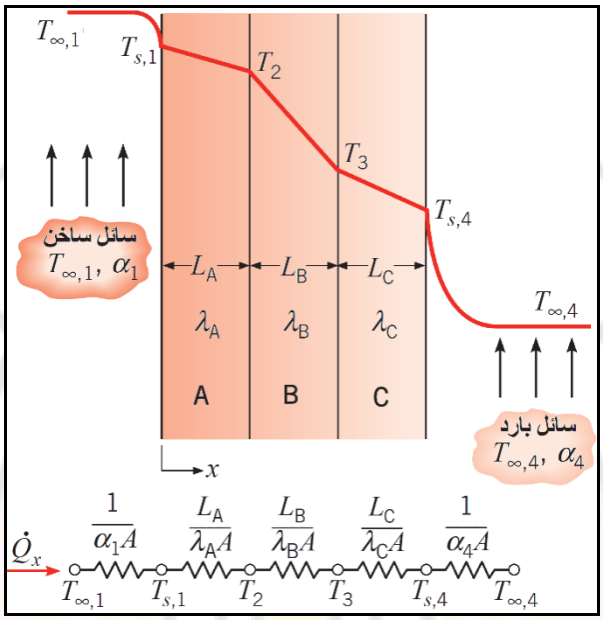
$$\alpha_{\text{rad}} = \varepsilon \sigma \left(T_s + T_{\text{sur}}\right)\left(T_s^2 + T_{\text{sur}}^2\right)$$

إن مقاومتي السطح لكل من انتقال الحرارة بالحمل والإشعاع تعملان بشكلٍ متوازٍ، وفي حال كان $T_\infty = T_{\text{sur}}$ يصبح من الممكن دمج هاتين المقاومتين للحصول على المقاومة الفعّالة للسطح.

3 - 1 - 3 - الجدار المركب *The Composite Wall*:

يمكن استخدام الدارات الحرارية المكافئة في تمثيل أنظمة أكثر تعقيداً من النظام الذي درسناه سابقاً، كما في حالة جدار مركب. إن نظاماً كهذا يمكن أن يحتوي على عدد من المقاومات الحرارية المتصلة ببعضها على التسلسل أو على التوازي (التفرع)، وذلك تبعاً

لتوضح الطبقات المكونة للجدار. لندرس الجدار المركب على التسلسل والمبين في الشكل (3 – 2).



الشكل (3 – 2) الدارة الحرارية المكافئة لجدار مركب على التسلسل.

يعطى معدل انتقال الحرارة في هذا النظام بالعلاقة:

$$\dot{Q}_x = \frac{T_{\infty,1} - T_{\infty,4}}{\Sigma R} \qquad \textbf{(13 – 3)}$$

$\left(T_{\infty,1} - T_{\infty,4}\right)$: فرق درجات الحرارة الكلي.

$\sum R$: مجموع المقاومات الحرارية.

وبالتالي تصبح العلاقة بالشكل:

$$\dot{Q}_x = \frac{T_{\infty,1} - T_{\infty,4}}{\left(1/\alpha_1 A\right) + \left(L_A/\lambda_A A\right) + \left(L_B/\lambda_B A\right) + \left(L_C/\lambda_C A\right) + \left(1/\alpha_4 A\right)} \qquad \textbf{(14 – 3)}$$

كما يمكن حساب معدل انتقال الحرارة الكلي من خلال فرق درجات الحرارة والمقاومة الحرارية لكل عنصر (طبقة) من النظام:

$$\dot{Q}_x = \frac{T_{\infty,1} - T_{s,1}}{1/\alpha_1 A} = \frac{T_{s,1} - T_2}{L_A/\lambda_A A} = \frac{T_2 - T_3}{L_B/\lambda_B A} = \ldots \qquad \textbf{(15 – 3)}$$

عند دراسة الأنظمة المركبة، فإنه من الأنسب التعامل مع معامل انتقال الحرارة الكلي U، والذي يعرف بطريقة مماثلة لقانون نيوتن للتبريد:

$$\dot{Q}_x = UA\Delta T \qquad \textbf{(16 - 3)}$$

ΔT : هو فرق درجات الحرارة الكلي.

يتعلق معامل انتقال الحرارة الكلي بالمقاومة الحرارية الكلية. من المعادلتين (3 – 13)، (3 – 16) نجد أن $UA = 1/R_{\text{tot}}$؛ وبالتالي فمن أجل الجدار المركب المبين في الشكل (3 – 2)، فإن:

$$U = \frac{1}{R_{\text{tot}}A} = \frac{1}{1/\alpha_1 + L_A/\lambda_A + L_B/\lambda_B + L_C/\lambda_C + 1/\alpha_4} \qquad \textbf{(17 - 3)}$$

وبشكل عام، يمكن أن نكتب:

$$R_{tot} = \Sigma R = \frac{\Delta T}{\dot{Q}} = \frac{1}{UA} \qquad \textbf{(18 - 3)}$$

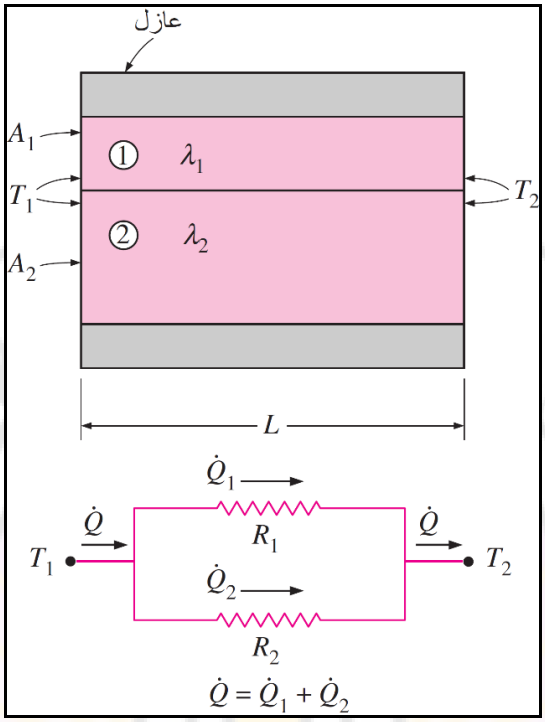
في بعض الحالات يكون الجدار المركب مؤلفاً من طبقات عدة متسلسلة ومتوازية، وفي هذه الحالة يصبح نظام انتقال الحرارة عبر الجدار متعدد الأبعاد (ثنائي أو ثلاثي)، ولكن من الممكن افتراض أن النظام أحادي البعد وتمثيل الدارة الحرارية المكافئة له. على سبيل المثال، من أجل جدار مؤلف من طبقتين متوازيتين، فإن الدارة الحرارية المكافئة تُمثل كما هو مبين في الشكل (3 – 3).

إن معدل انتقال الحرارة الكلي يساوي إلى حاصل جمع معدلات انتقال الحرارة في كل طبقة، وبالتالي فهو يعطى بالعلاقة:

$$\dot{Q}_x = \dot{Q}_{x,1} + \dot{Q}_{x,2} = \frac{T_1 - T_2}{R_1} + \frac{T_1 - T_2}{R_2} = (T_1 - T_2)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

وباستخدام التشابه الكهربائي نحصل على:

$$\dot{Q}_x = \frac{T_1 - T_2}{R_{\text{tot}}}$$



الشكل (3 – 3) الدارة الحرارية المكافئة لجدار مكون من طبقتين متوازيتين.

وتعطى المقاومة الحرارية في هذه الحالة بالعلاقة:

$$\frac{1}{R_{tot}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \longrightarrow R_{tot} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

أما من أجل الجدار المبين في الشكل (3 – 4)، والمؤلف من طبقات على التسلسل والتوازي، فان معدل انتقال الحرارة الكلي عبر النظام المركب يعطى بالعلاقة:

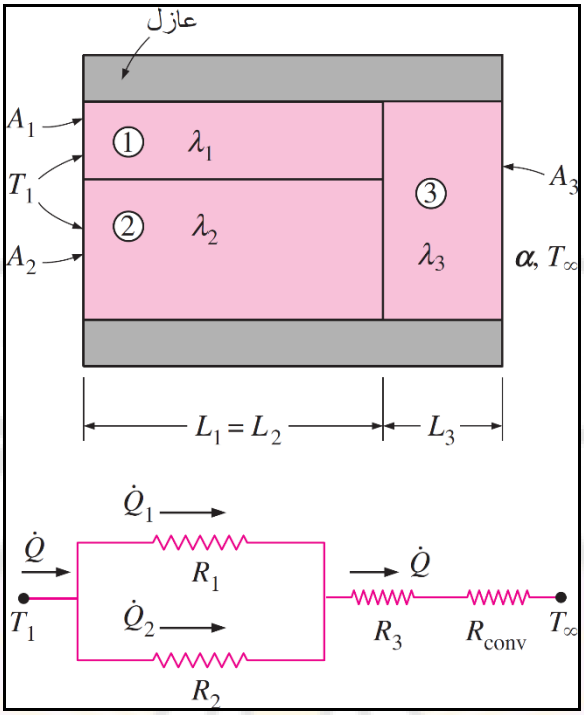
$$\dot{Q}_x = \frac{T_1 - T_\infty}{R_{tot}}$$

وتعطى المقاومة الحرارية الكلية بالعلاقة:

$$R_{tot} = R_{1,2} + R_3 + R_{conv} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3 + R_{conv}$$

وحيث إن:

$$R_1 = \frac{L_1}{\lambda_1 A_1} \ , \ R_2 = \frac{L_2}{\lambda_2 A_2} \ , \ R_3 = \frac{L_3}{\lambda_3 A_3} \ , \ R_{conv} = \frac{1}{\alpha A_3}$$



الشكل (3 – 4) الدارة الحرارية المكافئة لجدار مؤلف من طبقات على التسلسل والتوازي، وبوجود حمل عند أحد أسطح الجدار.

لقد افترضنا في أثناء تحويل انتقال الحرارة متعدد الأبعاد إلى أحادي البعد باستخدام الدارات الحرارية المكافئة أمرين:

* **السطوح المتعامدة مع المحور x إيزوترمية:** أي أننا نفترض أن درجة الحرارة تتغير في اتجاه المحور x فقط.
* **السطوح الموازية للمحور x أديباتية:** أي أننا نفترض أن انتقال الحرارة يحدث فقط في اتجاه المحور x.

مثال 3 – 1:

من أجل تقليل معدّل الفقد الحراري فإن الشخص يرتدي بذلة رياضية خاصة (ملابس خاصة بالثلج أو بذلة غطس) مصنوعة من مادة عازلة (السيليكا الهلامية ذات البنية النانوية) موصليتها الحرارية منخفضة جداً $0.014\,W/m.K$. إصدارية البذلة الرياضية 0.95. ما هي السماكة اللازمة لطبقة العزل لتخفيض معدل الفقد الحراري إلى $100\,W$ (بحيث يصبح مساوياً

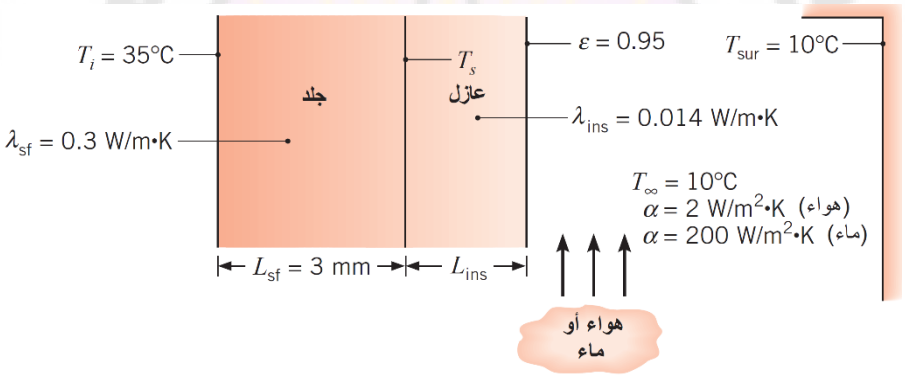
لمعدل التوليد الحراري بالاستقلاب) في كل من الهواء والماء؟ ما هي درجة حرارة الجلد في هذه الحالة؟ علماً بأن المعطيات الأخرى للمسألة موضحة على الشكل.

الحل:

المعطيات: درجة الحرارة الداخلية لطبقة من الجلد ذات سماكة معروفة، والموصلية الحرارية لهذه الطبقة ومساحة سطحها. الموصلية الحرارية والإصدارية للبذلة الرياضية. الشروط المحيطة.

المطلوب: سماكة العازل اللازمة لتخفيض معدل الفقد الحراري الى 100W ودرجة حرارة الجلد في هاه الحالة

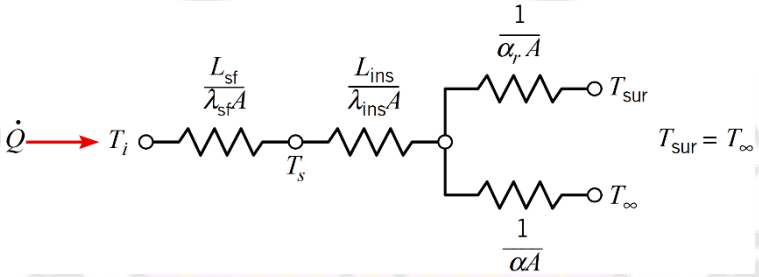
الشكل:



الافتراضات:

1. شروط الحالة المستقرة.
2. انتقال حرارة أحادي البعد بالتوصيل عبر طبقة الجلد وطبقة عازل.
3. مقاومة التماس مهملة.
4. الموصلية الحرارية منتظمة في كل طبقة.
5. التبادل بالإشعاع بين سطح الجلد والوسط المحيط هو بين سطح صغير وإطار مغلق كبير له درجة حرارة الهواء نفسها.
6. الماء المائع عاتم للإشعاع الحراري.
7. الإشعاع الشمسي مهمل.
8. في الطلب الثاني، فإن كامل الجسم مغمور بالماء.

التحليل: يمكن إنشاء الدارة الحرارية من خلال ملاحظة أن المقاومة للتدفق الحراري تترافق مع انتقال الحرارة بالتوصيل عبر طبقتي الجلد والعازل، ومع انتقال الحرارة بالحمل والإشعاع عند السطح الخارجي. بناءً على ذلك، فإن الدارة والمقاومات الحرارية تأخذ الشكل التالي (حيث إن $\alpha_r = 0$ للماء):



تحسب المقاومة الحرارية الكلية اللازمة لتحقيق معدل الفقد الحراري المطلوب بالعلاقة (3 – 18):

$$R_{tot} = \frac{T_i - T_\infty}{\dot{Q}} = \frac{(35-10)\,\mathrm{K}}{100\,\mathrm{W}} = 0.25\,\mathrm{K/W}$$

تتضمن المقاومة الحرارية الكلية بين السطح الداخلي لطبقة الجلد والوسط المحيط البارد كلاً من مقاومات التوصيل للجلد والعازل والمقاومة الفعالة المترافقة مع الحمل والإشعاع، والتي تعمل بشكل متوازٍ. بالتالي:

$$R_{tot} = \frac{L_{sf}}{\lambda_{sf} A} + \frac{L_{ins}}{\lambda_{ins} A} + \left(\frac{1}{1/\alpha A} + \frac{1}{1/\alpha_r A} \right)^{-1} = \frac{1}{A} \left(\frac{L_{sf}}{\lambda_{sf}} + \frac{L_{ins}}{\lambda_{ins}} + \frac{1}{\alpha + \alpha_r} \right)$$

حيث أن:

$$\alpha_r = \varepsilon \sigma \left(T_{s,o} + T_{sur} \right) \left(T_{s,o}^2 + T_{sur}^2 \right) \qquad \textbf{(1)}$$

ويمكن حل هذه المعادلة من أجل سماكة العازل.

*** الهواء:**

بالتبديل في العلاقة (1) نحصل على قيمة معامل انتقال الحرارة بالإشعاع: $\alpha_r = 5.9\,\mathrm{W/m^2.K}$.

$$L_{\text{ins}} = \lambda_{\text{ins}} \left[AR_{\text{tot}} - \frac{L_{\text{sf}}}{\lambda_{\text{sf}}} - \frac{1}{\alpha + \alpha_r} \right]$$

$$= 0.014\,\text{W/m.K} \left[1.8\,\text{m}^2 \times 0.25\,\text{K/W} - \frac{3\times10^{-3}\,\text{m}}{0.3\,\text{W/m.K}} \right.$$

$$\left. - \frac{1}{(2+5.9)\,\text{W/m}^2\text{.K}} \right] = 0.0044\,\text{m} = 4.4\,\text{mm}$$

*** الماء:**

$$L_{\text{ins}} = \lambda_{\text{ins}} \left[AR_{\text{tot}} - \frac{L_{\text{sf}}}{\lambda_{\text{sf}}} - \frac{1}{\alpha} \right]$$

$$= 0.014\,\text{W/m.K} \left[1.8\,\text{m}^2 \times 0.25\,\text{K/W} - \frac{3\times10^{-3}\,\text{m}}{0.3\,\text{W/m.K}} \right.$$

$$\left. - \frac{1}{200\,\text{W/m}^2\text{.K}} \right] = 0.0061\,\text{m} = 6.1\,\text{mm}$$

يمكن وضع هذه السماكة من العزل بسهولة ضمن بدلات الثلج أو بدلات الغطس.

تحسب درجة حرارة السطح الخارجي للجلد من خلال دراسة التوصيل الحراري عبر طبقة الجلد:

$$\dot{Q} = \frac{\lambda_{\text{sf}} A \left(T_i - T_s \right)}{L_{\text{sf}}}$$

وبحل هذه العلاقة من أجل T_s:

$$T_s = T_i - \frac{\dot{Q} L_{\text{sf}}}{\lambda_{\text{sf}} A} = 35\,^{\text{o}}\text{C} - \frac{100\,\text{W}\times3\times10^{-3}\,\text{m}}{0.3\,\text{W/m.K}\times1.8\,\text{m}^2} = 34.4\,^{\text{o}}\text{C}$$

المناقشة:

1. إن السيليكا الهلامية ذات البنية النانوية مادة مسامية وتحوي مادة صلبة بنسبة 5%. الموصلية الحرارية لهذه المادة أقل من الموصلية الحرارية للغاز الذي يملأ مساماتها. إن السبب في هذا الأمر، والذي قد يبدو مستحيلاً للوهلة الأولى، هو أن حجم المسام الواحد حوالي 20 nm، مما يقلل من المسار الحر الوسطي للغاز، وبالتالي يقلل من موصليته الحرارية.

2. من خلال تخفيض معدل الفقد الحراري إلى $100\,\mathrm{W}$، فإنه بإمكان الشخص أن يبقى في البيئة الباردة إلى ما لا نهاية دون أن يشعر بالبرد. إن درجة الحرارة $34.4\,^{\circ}\mathrm{C}$ للجلد مريحة للإنسان.
3. في حالة الماء، فإن المقاومة الحرارية للعازل هي الأكثر تأثيراً، ويمكن إهمال بقية المقاومات.
4. إن معامل الحمل الحراري في حالة الهواء يتعلق بحالة الريح، ويمكن أن يتغير ضمن نطاق واسع. نتيجة التغير في معامل الحمل الحراري، فإن درجة حرارة السطح الخارجي لطبقة العزل ستتغير أيضاً. بما أن معامل انتقال الحرارة بالإشعاع يتعلق بدرجة الحرارة هذه، فإنه سيتغير هو الآخر. يمكننا إجراء تحليل كامل بحيث نأخذ هذه التغيرات كلها بالحسبان.

إن $T_{s,o}$ تمثل درجة حرارة السطح الخارجي لطبقة العازل، والتي تحسب من العلاقة:

$$T_{s,o} = T_i - \dot{Q}\left[\frac{L_{\mathrm{sf}}}{\lambda_{\mathrm{sf}} A} + \frac{L_{\mathrm{ins}}}{\lambda_{\mathrm{ins}} A}\right] \qquad \textbf{(2)}$$

طالما أن هذه العلاقة تتعلق بسماكة العازل، فإننا نحتاج إلى استخدام علاقة حساب L_{ins}:

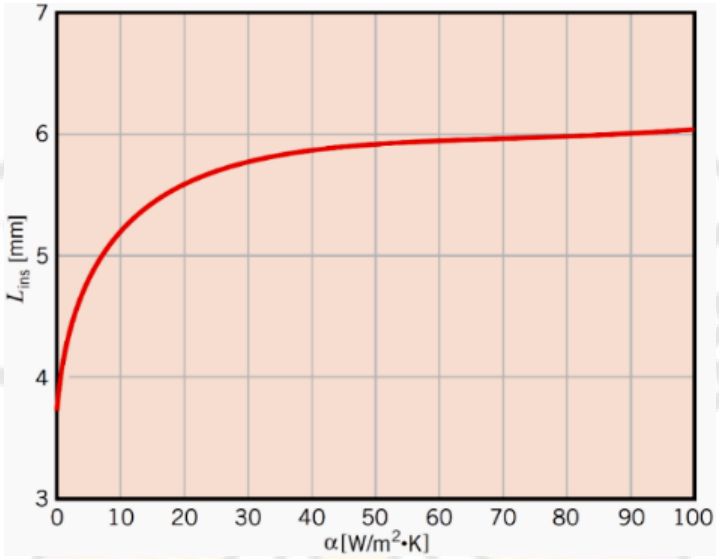
$$L_{\mathrm{ins}} = \lambda_{\mathrm{ins}}\left(AR_{\mathrm{tot}}\frac{L_{\mathrm{sf}}}{\lambda_{\mathrm{sf}}} - \frac{1}{\alpha + \alpha_r}\right) \qquad \textbf{(3)}$$

يمكن حل جملة المعادلات هذه من أجل سماكة العازل المطلوبة، حيث أن قيم المتغيرات الأخرى جميعها معلومة. باستخدام القيم المعطاة جميعها سابقاً، فإنه وبحل هذه العلاقات من أجل قيم لـ α ضمن المجال $0 \le \alpha \le 100\,\mathrm{W/m^2.K}$، نحصل على المخطط التالي.

إن زيادة α تقلل من مقاومة الحمل، مما يتطلب بالتالي زيادة في سماكة العازل للحفاظ على معدل انتقال الحرارة عند $100\,\mathrm{W}$. بمجرد أن يتجاوز معامل انتقال الحرارة بالحمل $60\,\mathrm{W/m^2K}$ تقريباً، فإن مقاومة الحمل تصبح مهملة، وأي زيادة في قيمة α سيكون لها تأثير طفيف على سماكة العزل المطلوبة.

يمكن أيضاً حساب درجة حرارة السطح الخارجي ومعامل انتقال الحرارة بالإشعاع. أثناء ازدياد قيمة α من 0 إلى $100\,\mathrm{W/m^2.K}$، فإن $T_{s,o}$ تتناقص من 294 إلى $284\,\mathrm{K}$، في حين أن α_r يتناقص من 5.2 إلى $4.9\,\mathrm{W/m^2.K}$. إن التقدير الأولي بأن $\alpha_r = 5.9\,\mathrm{W/m^2.K}$ لم يكن دقيقاً جداً. باستخدام النموذج الرياضي السابق لحساب قيمة

α_r من أجل $5.1\mathrm{W/m^2.K}$، فإن معامل انتقال الحرارة بالإشعاع هو $\alpha = 2\mathrm{W/m^2.K}$، وسماكة العزل المطلوبة هي $4.2\,\mathrm{mm}$، وهي قريبة من القيمة المحسوبة في القسم الأول من المسألة.

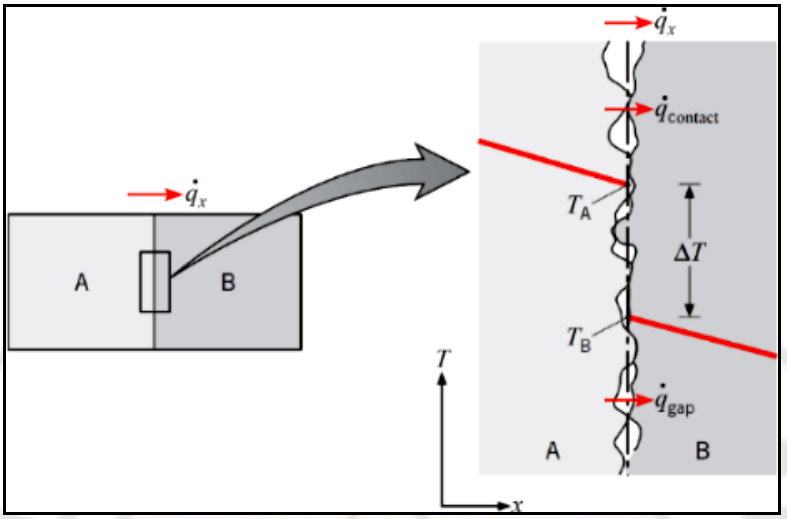


3 – 1 – 4 – مقاومة التماس *Contact Resistance*:

لقد أهملنا خلال دراستنا السابقة للجدار المركب مقاومة التماس بين الطبقات، لكن من المهم أن نعلم أن الهبوط في درجة الحرارة عبر السطح البيني بين المواد المكونة لطبقات الجدار المركب (الفرق في درجة الحرارة بين جانبي السطح البيني) يمكن أن يؤخذ بالحسبان في بعض الحالات بسبب قيمته الكبيرة نسبياً. وينسب هذا التغير الحاصل في درجة الحرارة إلى ما يعرف بمقاومة التماس الحرارية R_c. ويظهر الشكل (3 – 5) تأثير هذه المقاومة.

وتعطى مقاومة التماس لواحدة المساحة من السطح البيني بالعلاقة:

$$R_c = \frac{T_A - T_B}{\dot{q}_x} \qquad \textbf{(19 – 3)}$$



الشكل (3 – 5) الهبوط في درجة الحرارة بتأثير مقاومة التماس.

تحدث مقاومة التماس بسبب التماس غير التام بين السطوح والناتج عن تأثير خشونة السطح، حيث تتخلل نقاط التماس بين السطوح فجوات ممتلئة في أغلب الأحيان بالهواء. وفي هذه الحالة يحدث انتقال الحرارة بالتوصيل عبر نقاط التماس الفعلي، بينما يحدث بالتوصيل و/أو بالإشعاع عبر الفجوات.

يتم تقليل مقاومة التماس من خلال زيادة مساحة نقاط التماس، ويحدث ذلك من خلال زيادة ضغط الاتصال بين الطبقات، أو بزيادة نعومة سطح التماس، كما يمكن التقليل من مقاومة التماس بملء الفجوات بسائل بيني ذي معامل توصيل حراري كبير.

يبين الجدول (3 – 1) قيم مقاومة التماس لسطوح بينية معدنية متماثلة (المعدن نفسه)، في حالة وجود فراغ فاصل بينها، وذلك من أجل قيم مختلفة لضغط التماس. كما يبين قيم مقاومة التماس لسطوح بينية من الألمنيوم ممتلئةبسائل بينما يبين الجدول (3 – 2) قيم مقاومة التماس الحرارية لبعض السطوح البينية المعدنية، والتي يفصل بينها طبقة من الطلاء.

الجدول (3 – 1) مقاومة التماس الحرارية لسطوح معدنية متماثلة.

المقاومة الحرارية $R_c \times 10^4 \left[\mathrm{m^2.K/W}\right]$			
فراغ بيني*		سائل بيني**	
ضغط التماس	$100\left[\mathrm{kN/m^2}\right]$	$10,000\left[\mathrm{kN/m^2}\right]$	هواء	2.75
ستانل ستيل	6 – 25	0.7 – 4	هيليوم	1.05
نحاس	1 – 10	0.1 – 0.5	هيدروجين	0.72
مغنيزيوم	1.5 – 3.5	0.2 – 0.4	زيت السيليكون	0.525
ألمنيوم	1.5 – 5	0.2 – 0.4	غليسرين	0.265

*** سطوح بينية معدنية عند شروط الفراغ.**

**** سطح بيني من الألمنيوم بوجود سوائل بينية مختلفة (خشونة السطح [µm] 10، وضغط التماس $(10^5$ [kN])**

الجدول (3 – 2) مقاومة التماس الحرارية بين سطحين معدنيين بوجود طبقة طلاء.

السطح	$R_c \times 10^4 \left[\mathrm{m^2.K/W}\right]$
رقاقة من السليكون/ألمنيوم ملفوف بينهما هواء $\left(27 - 500\left[\mathrm{kN/m^2}\right]\right)$.	0.3 – 0.6
ألمنيوم/ألمنيوم بينهما حشوة رقيقة من الإنديوم $\left(\square\ 100\left[\mathrm{kN/m^2}\right]\right)$.	$\square$ 0.07
ستانل ستيل/ستانل ستيل بينهما حشوة رقيقة من الإنديوم $\left(\square\ 3500\left[\mathrm{kN/m^2}\right]\right)$.	$\square$ 0.04
ألمنيوم/ألمنيوم بينهما طلاء معدني من الرصاص.	0.01 – 0.1
رقاقة من السليكون/ألمنيوم بينهما طبقة إيبوكسي بسماكة $0.02\left[\mathrm{mm}\right]$.	0.2 – 0.9
نحاس أصفر/نحاس أصفر بينهما $15\left[\mu\mathrm{m}\right]$ لحام قصدير.	0.025 – 0.14

مثال 3 - 2:

رقاقة من السيليكون وقاعدة من الألمنيوم سماكتها 8mm، يفصل بينهما لحام من الإيبوكسي سماكته 0.02mm. طول ضلع كل من الرقاقة والقاعدة هو 10mm، وسطوحهما المكشوفة مبردة بواسطة الهواء، ودرجة حرارة الهواء $25\,^{o}C$ ومعامل الحمل الحراري $100\,W/m^2.K$. إذا كانت الرقاقة تبدد حرارة قدرها $10^4\,W/m^2$ عند الشروط العادية، فهل ستعمل عند درجة حرارة أقل من درجة الحرارة الأعظمية المسموح بها، والتي تساوي $85\,^{o}C$؟

الحل:

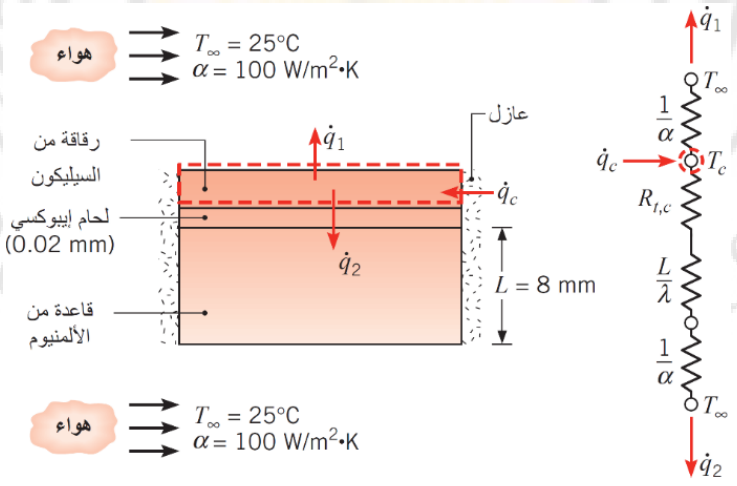
المعطيات: أبعاد رقاقة السيليكون، والحرارة المتبددة منها ودرجة الحرارة الأعظمية المسموح بها. سماكة قاعدة الألمنيوم ولحام الإيبوكسي. شروط الحمل عند السطوح المكشوفة لكل من الرقاقة والقاعدة.

المطلوب: هل سيتم تجاوز درجة الحرارة الأعظمية المسموح بها؟

الافتراضات:

1. شروط الحالة المستقرة.
2. توصيل حراري أحادي البعد.
3. المقاومة الحرارية للصفيحة مهملة (صفيحة إيزوترمية).
4. خواص ثابتة.
5. التبادل بالإشعاع مع الوسط المحيط مهمل.

الشكل:



الخواص:

الجدول (A3): الألمنيوم النقي (T=350K):

$$\lambda = 239 \text{W/m.K}$$

التحليل: تنتقل الحرارة المتبددة في الرقاقة إلى الهواء بشكل مباشر من السطوح المكشوفة وبشكل غير مباشر عبر اللحام والقاعدة. بإجراء التوازن الطاقي على سطح تحكم محيط بالرقاقة، فإننا نجد، ومن أجل واحدة السطح، ما يلي:

$$\dot{q}_c = \dot{q}_1 + \dot{q}_2$$

أو:

$$\dot{q}_c = \frac{T_c - T_\infty}{1/\alpha} + \frac{T_c - T_\infty}{R_{t,c} + L/\lambda + 1/\alpha}$$

من الجدول (3 – 2) فإن القيمة العظمى الممكنة لمقاومة التماس هي $R_{t,c} = 0.9\times10^{-4}\ \text{m}^2.\text{K/W}$. بالتالي:

$$T_c = T_\infty + \dot{q}_c \left[\alpha + \frac{1}{R_{t,c} + L/\lambda + 1/\alpha}\right]^{-1}$$

أو:

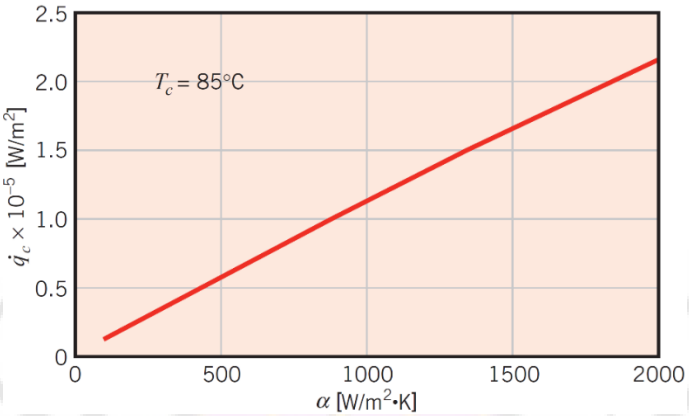
$$T_c = 25\,^{\circ}\text{C} + 10^4\ \text{W/m}^2 \times \left[100 + \frac{1}{(0.9 + 0.33 + 100)\times10^{-4}}\right]^{-1} \text{m}^2.\text{K/W}$$

$$T_c = 25\,^{\circ}\text{C} + 50.3\,^{\circ}\text{C} = 75.3\,^{\circ}\text{C}$$

وبالتالي فإن الرقاقة ستعمل عند درجة حرارة أقل من درجة الحرارة الأعظمية المسموح بها.

المناقشة:

1. إن مقاومة القاعدة واللحام أقل بكثير من مقاومة الحمل. حتى تتجاوز درجة حرارة الشريحة الدرجة الأعظمية المسموح بها، فإنه يجب أن تزداد مقاومة اللحام لتصل إلى $50\times10^{-4}\ \text{m}^2.\text{K/W}$، وهي قيمة كبيرة وغير معقولة.
2. يمكن زيادة الاستطاعة المتبددة المسموح بها من خلال زيادة معامل الحمل الحراري، من خلال زيادة سرعة الهواء و/أو من خلال استبدال الهواء بسائل أكثر كفاءة في نقل الحرارة. ندرس هذا الخيار من أجل $100 \le \alpha \le 2000\ \text{W/m}^2.\text{K}$ وعندما $T_c = 85\,^{\circ}\text{C}$، فنحصل على النتائج مبينة في الشكل التالي.



عندما $\alpha \to \infty$ فإن $\dot{q}_2 \to 0$، وستنتقل كامل استطاعة الشريحة عملياً بشكل مباشر إلى تيار السائل.

1. لنأخذ حالة معينة بحيث إن جريان الهواء على سطح الرقاقة (فوقها) أو القاعدة (تحتها) توقف، نتيجة وجود عائق في طريق تدفق الهواء. إذا كان انتقال الحرارة من أحد هذين السطحين مهملاً، فما هي درجة حرارة الرقاقة في هذه الحالة من أجل $\dot{q}_c = 10^4\ \mathrm{W/m^2}$؟ [الإجابة هي 125 °C أو 126 °C].

---

3 - 2 - الأنظمة القطرية *Radial Systems*:

عادةً ما تكون الأنظمة الحرارية الأسطوانية والكروية ذات توزع لدرجة الحرارة باتجاه القطر فقط، فإننا نتعامل معها كأنظمة أحادية البعد. عند شروط الحالة المستقرة ومن دون وجود حرارة متولدة، فإنه من الممكن تحليل التوصيل الحراري في هذه الأنظمة إما باستخدام الطريقة المعيارية من خلال تطبيق الصيغة المناسبة للمعادلة التفاضلية للتوصيل الحراري، أو باستخدام الطريقة البديلة من خلال مكاملة الصيغة المناسبة لقانون فوريه.

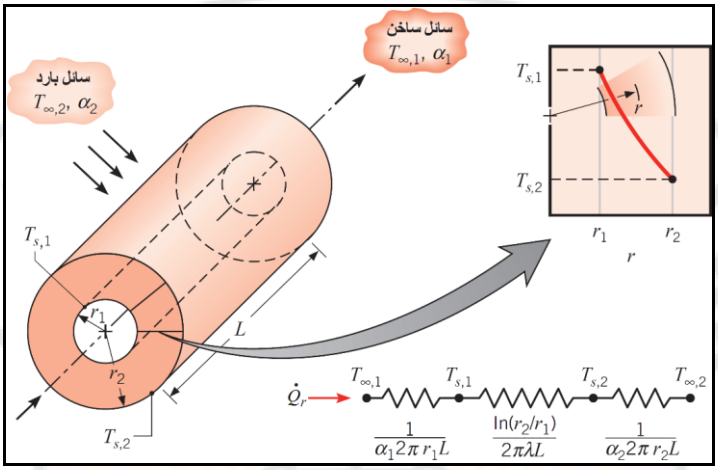
سنقوم خلال دراستنا اللاحقة في هذا القسم باستخدام الطريقة المعيارية لتحليل النظام الأسطواني، بينما سنعتمد الطريقة البديلة في تحليل النظام الكروي.

3 – 2 – 1 – الأسطوانة *Cylinder*:

لنأخذ الأسطوانة المجوفة المبينة في الشكل (3 – 6)، حيث إن كلاً من السطحين الداخلي والخارجي للأسطوانة معرض لسائل عند درجتي حرارة مختلفتين. تأخذ المعادلة التفاضلية

للتوصيل الحراري في أسطوانة لنظام مستقر أحادي البعد ومن دون وجود حرارة متولدة الصيغة التالية:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(\lambda r\frac{dT}{dr}\right)=0$$



الشكل (3 – 6) التوصيل الحراري في أسطوانة مجوفة بوجود انتقال للحرارة بالحمل عند سطحها.

وبفرض أن الموصلية الحرارية ثابتة، فإن المعادلة السابقة تصبح بالشكل:

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right)=0 \qquad \textbf{(20 – 3)}$$

نلاحظ من المعادلة (3 – 20) أن مشتق الحد $r\,(dT/dr)$ بالنسبة لنصف القطر r يساوي إلى الصفر، وبالتالي فإن هذا الحد ثابت ولا يتعلق بـ r. ويتضح المعنى الفيزيائي لهذه النتيجة من خلال تطبيق الصيغة المناسبة لقانون فوريه، حيث يعطى معدل انتقال الحرارة بالتوصيل في الاتجاه القطري لأي جسم أسطواني بالعلاقة:

$$\dot{Q}_r=-\lambda A\frac{dT}{dr}=-\lambda(2\pi rL)\frac{dT}{dr} \qquad \textbf{(21 – 3)}$$

$A=2\pi rL$: مساحة سطح الأسطوانة العمودي على اتجاه انتقال الحرارة.

بالاستعانة بالنتيجة التي توصلنا إليها من المعادلة (3 – 20)، وعلى اعتبار أن الموصلية الحرارية ثابتة، فإننا نجد أن معدل انتقال الحرارة بالاتجاه القطري $\dot{Q}_r$ ثابت مستقل عن r، وذلك بخلاف شدة التدفق الحراري بالاتجاه القطري $\dot{q}_r$، حيث:

$$\dot{q}_r=\frac{\dot{Q}_r}{A}=-\lambda\frac{dT}{dr}$$

وبإجراء التكامل لأول مرة على المعادلة (3 – 20) نجد:

$$r\frac{dT}{dr}=C_1 \Rightarrow \frac{dT}{dr}=\frac{C_1}{r}$$

وبالتعويض في علاقة شدة التدفق الحراري ينتج:

$$\dot{q}_r=-\lambda\frac{C_1}{r}$$

وبالتالي فإن شدة التدفق الحراري بالاتجاه القطري متغيرة وتتبع لنصف القطر.

لإيجاد علاقة توزع درجة الحرارة في الأسطوانة نقوم بإجراء التكامل مرة أخرى، وذلك لنحصل على الحل العام:

$$T(r)=C_1\ln r+C_2$$

نلاحظ من الشكل (3 – 6) أن درجتي الحرارة عند سطحي الأسطوانة ثابتتان، وبالتالي فإن الشروط الحدية في هذه الحالة هي:

$$T(r_1)=T_{s,1} \qquad T(r_2)=T_{s,2}$$

وبتطبيق هذه الشروط على الحل العام نحصل على المعادلتين:

$$T_{s,1}=C_1\ln r_1+C_2 \qquad T_{s,2}=C_1\ln r_2+C_2$$

$$\Rightarrow\begin{cases}C_1=\dfrac{T_{s,1}-T_{s,2}}{\ln r_1/r_2}\\ C_2=T_{s,1}\dfrac{T_{s,1}-T_{s,2}}{\ln r_1/r_2}\ln r_1=T_{s,2}-\dfrac{T_{s,1}-T_{s,2}}{\ln r_1/r_2}\ln r_2\end{cases}$$

وبالتبديل في الحل العام نحصل على علاقة توزع درجة الحرارة ضمن الأسطوانة:

$$T(r)=\frac{T_{s,1}-T_{s,2}}{\ln(r_1/r_2)}\ln\left(\frac{r}{r_2}\right)+T_{s,2}=\frac{T_{s,1}-T_{s,2}}{\ln(r_1/r_2)}\ln\left(\frac{r}{r_1}\right)+T_{s,1} \qquad \textbf{(22 – 3)}$$

نلاحظ أن علاقة توزع درجة الحرارة في حالة التوصيل بالاتجاه القطري لجدار أسطواني هي علاقة لوغاريتمية، وليست خطية، بخلاف حالة الجدار المستوي من أجل الشروط نفسها.

بتطبيق المعادلة (3 – 22) على قانون فوريه (3 – 21)، نحصل على علاقة حساب معدل انتقال الحرارة:

$$\dot{Q}_r=\frac{2\pi L\lambda\left(T_{s,1}-T_{s,2}\right)}{\ln(r_2/r_1)} \qquad \textbf{(23 – 3)}$$

من خلال هذه المعادلة، نجد أن المقاومة الحرارية للتوصيل الحراري في جدار أسطواني تأخذ الصيغة:

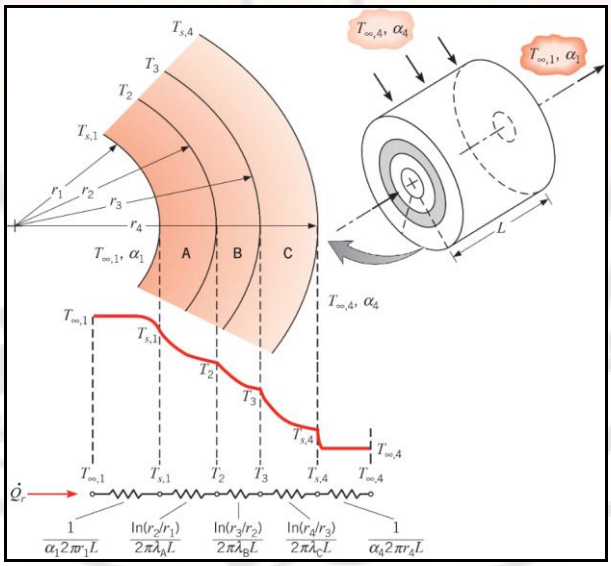
$$R_{\text{cond}} = \frac{\ln\left(r_2/r_1\right)}{2\pi L \lambda} \qquad \textbf{(24 – 3)}$$

وهذه المقاومة موضحة في الدارة الحرارية المكافئة في الشكل (3 – 6).

3 – 2 – 2 – جدار أسطواني مركب:

لندرس النظام المركب الموضح في الشكل (3 – 7). باتباع الخطوات نفسها التي اتبعناها عند دراسة الجدار المستوي المركب، وإهمال مقاومة التماس للسطوح البينية، فإن علاقة معدل الحرارة المنتقلة تأخذ الصيغة التالية:

$$\dot{Q}_r = \frac{T_{\infty,1} - T_{\infty,4}}{\frac{1}{2\pi r_1 L \alpha_1} + \frac{\ln\left(r_2/r_1\right)}{2\pi L \lambda_A} + \frac{\ln\left(r_3/r_2\right)}{2\pi L \lambda_B} + \frac{\ln\left(r_4/r_3\right)}{2\pi L \lambda_C} + \frac{1}{2\pi r_4 L \alpha_4}} \qquad \textbf{(25 – 3)}$$



الشكل (3 – 7) توزع درجة الحرارة لجدار أسطواني مركب.

كما يمكن صياغة النتيجة السابقة باستخدام مفهوم معامل انتقال الحرارة الكلي:

$$\dot{Q}_r = \frac{T_{\infty,1} - T_{\infty,4}}{R_{\text{tot}}} = UA\left(T_{\infty,1} - T_{\infty,4}\right) \qquad \textbf{(26 – 3)}$$

في حال كان U معرفاً بدلالة السطح الداخلي للأسطوانة $A_1 = 2\pi r_1 L$، فإنه من خلال المساواة بين المعادلتين (3 – 25)، (3 – 26) ينتج لدينا:

$$U_1 = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{r_1}{\lambda_A}\ln\frac{r_2}{r_1} + \frac{r_1}{\lambda_B}\ln\frac{r_3}{r_2} + \frac{r_1}{\lambda_C}\ln\frac{r_4}{r_3} + \frac{r_1}{r_4}\frac{1}{\alpha_4}} \qquad \textbf{(27 – 3)}$$

إن هذا التعريف هو أمر اختياري، حيث يمكن أن يعرف معامل انتقال الحرارة الكلي بدلالة مساحة السطح الخارجي A_4، أو أي سطح بيني، حيث إن:

$$U_1A_1 = U_2A_2 = U_3A_3 = U_4A_4 = \left(\Sigma R_{\text{tot}}\right)^{-1} \qquad \textbf{(28 – 3)}$$

ونحصل على صيغ كل من U_4, U_3, U_2 بواسطة المعادلتين (3 – 27)، (3 – 28).

مثال 3 – 3:

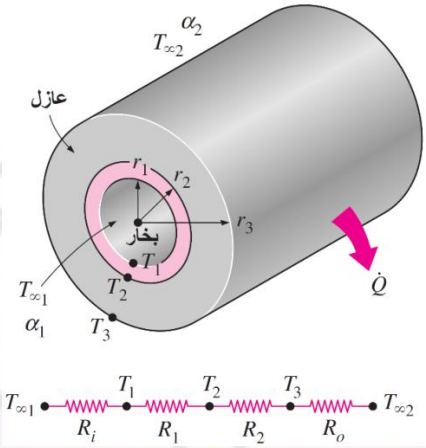
يتدفق بخار درجة حرارته $T_{\infty,1} = 320\,^{\circ}\text{C}$ في أنبوب من حديد الصب قطره الداخلي $D_1 = 5\text{cm}$ والخارجي $D_2 = 5.5\text{cm}$، والموصلية الحرارية للحديد الصب $\lambda_{\text{pipe}} = 80\,\text{W/m.K}$. يغطى الأنبوب بطبقة عازلة من الصوف الزجاجي سماكتها 3cm وموصليتها الحرارية $\lambda_{\text{ins}} = 0.05\,\text{W/m.K}$. درجة حرارة الوسط الخارجي $T_{\infty,2} = 5\,^{\circ}\text{C}$، ويحدث انتقال الحرارة إليه بالحمل الطبيعي وبالإشعاع بمعامل انتقال حرارة مركب $\alpha_2 = 18\,\text{W/m}^2\text{.K}$. باعتبار أن معامل الحمل الحراري داخل الأنبوب $\alpha_1 = 60\,\text{W/m}^2\text{.K}$، احسب معدل الفقد الحراري من البخار من أجل واحدة الطول من الأنبوب، واحسب الانخفاض في درجة الحرارة عبر جدار الأنبوب والعازل.

الحل:

المعطيات: درجة حرارة البخار. أبعاد الأنبوب وموصليته الحرارية. سماكة العازل وموصليته الحرارية. معامل الحمل الحراري داخل الأنبوب، ومعامل انتقال الحرارة المركب للحمل والإشعاع على السطح الخارجي.

المطلوب: معدل انتقال الحرارة من أجل واحدة الطول من الأنبوب، والانخفاض في درجة الحرارة عبر جدار الأنبوب والعازل.

الشكل:



الافتراضات:

1. شروط الحالة المستقرة.
2. انتقال الحرارة أحادي البعد، وذلك لوجود تناظر حراري حول محور الأنبوب، ولا يوجد أي تغير في الاتجاه المحوري.
3. الخواص ثابتة.
4. مقاومة التماس بين الأنبوب والعزل مهملة.

التحليل:

إن دارة المقاومة الحرارية تتألف من أربعة مقاومات على التسلسل، كما هو مبين في الشكل السابق. بأخذ الطول $L = 1\,\text{m}$ من الأنبوب، فإن مساحة السطوح المعرضة للحمل الحراري، هي:

$$A_1 = 2\pi r_1 L = 2\pi \times 0.025\,\text{m} \times 1\,\text{m} = 0.157\,\text{m}^2$$

$$A_3 - 2\pi r_3 L = 2\pi \times 0.0575\,\text{m} \times 1\,\text{m} = 0.361\,\text{m}^2$$

وبالتالي فإن المقاومات الحرارية الفردية هي:

$$R_i = R_{\text{conv},1} = \frac{1}{\alpha_1 A_1} = \frac{1}{60\,\text{W/m}^2.\text{K} \times 0.157\,\text{m}^2} = 0.106\,\text{K/W}$$

$$R_1 = R_{\text{pipe}} = \frac{\ln\left(r_2/r_1\right)}{2\pi\lambda_{\text{pipe}} L} = \frac{\ln\left(2.75/2.5\right)}{2\pi \times 80\,\text{W/m.K} \times 1\,\text{m}} = 2\times 10^{-4}\,\text{K/W}$$

$$R_2 = R_{\text{ins}} = \frac{\ln(r_3/r_2)}{2\pi\lambda_{\text{ins}}L} = \frac{\ln(5.75/2.75)}{2\pi \times 0.05\,\text{W/m.K} \times 1\text{m}} = 2.35\,\text{K/W}$$

$$R_o = R_{\text{conv},2} = \frac{1}{\alpha_2 A_3} = \frac{1}{18\,\text{W/m}^2\text{.K} \times 0.361\,\text{m}^2} = 0.154\,\text{K/W}$$

وبما أن المقاومات على التسلسل جميعها، فإن المقاومة الكلية هي:

$$\begin{aligned} R_{\text{tot}} &= R_i + R_1 + R_2 + R_o \\ &= 0.106 + 2\times10^{-4} + 2.35 + 0.154 \\ &= 2.61\,\text{K/W} \end{aligned}$$

وبالتالي فإن معدل انتقال الحرارة من أجل واحدة طول الأنبوب:

$$\dot{Q} = \frac{T_{\infty,1} - T_{\infty,2}}{R_{\text{tot}}} = \frac{(320-5)\,^{\circ}\text{C}}{2.61\,\text{K/W}} = 121\,\text{W}$$

ويمكن حساب معدل الفقد الحراري من أجل طول محدد من الأنبوب من خلال ضرب القيمة المحسوبة سابقاً بطول الأنبوب L.

يحسب الانخفاض في درجة الحرارة عبر الأنبوب والعازل من العلاقتين:

$$\Delta T_{\text{pipe}} = \dot{Q}R_{\text{pipe}} = 121\,\text{W} \times 2\times10^{-4}\,\text{K/W} = 0.02\,^{\circ}\text{C}$$

$$\Delta T_{\text{ins}} = \dot{Q}R_{\text{ins}} = 121\,\text{W} \times 2.35\,\text{K/W} = 284\,^{\circ}\text{C}$$

المناقشة:

1. إن المقاومة الحرارية بالتوصيل للأنبوب صغيرة جداً بالنسبة للمقاومات الأخرى ويمكن إهمالها من دون أن يؤثر ذلك بشكل ملحوظ على النتيجة.
2. نلاحظ أن انخفاض درجة الحرارة عبر الأنبوب يساوي الصفر عملياً، وبالتالي يمكن عد الأنبوب إيزوترمي.
3. إن المقاومة الأساسية لتدفق الحرارة ناتجة عن طبقة العزل.

3 – 2 – 3 – الكرة *Sphere*:

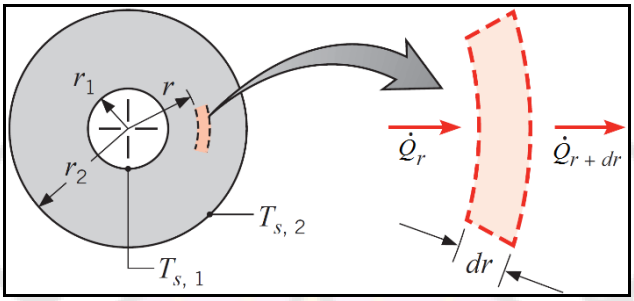
لنقم بتحليل التوصيل الحراري في الكرة المجوفة الموضحة بالشكل (3 – 8) باستخدام الطريقة البديلة، حيث إن انتقال الحرارة مستقر أحادي البعد ولا توجد حرارة متولدة. نطبق مبدأ انحفاظ الطاقة على العنصر الحجمي التفاضلي المبين في الشكل، والذي ينص على أن:

$$\dot{Q}_r = \dot{Q}_{r+dr}$$

ويأخذ قانون فوريه لهذه الحالة الصيغة التالية:

$$\dot{Q}_r = -\lambda A \frac{dT}{dr} = -\lambda\left(4\pi r^2\right)\frac{dT}{dr} \qquad \textbf{(29 – 3)}$$

$A = 4\pi r^2$: مساحة السطح العمودي على اتجاه انتقال الحرارة.



الشكل (3 – 8) التوصيل الحراري في كرة مجوفة.

من المعلوم أن $\dot{Q}_r$ ثابت ومستقل عن r، وبالتالي فإن المعادلة (3 – 29) تصبح بالصيغة التكاملية بالشكل:

$$\frac{\dot{Q}_r}{4\pi}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^2} = -\int_{T_{s,1}}^{T_{s,2}}\lambda(T)\,dT$$

وبفرض أن الموصلية الحراريةثابتة، تصبح المعادلة السابقة بالشكل:

$$\dot{Q}_r = \frac{4\pi\lambda\left(T_{s,1}-T_{s,2}\right)}{\left(1/r_1\right)-\left(1/r_2\right)} \qquad \textbf{(30 – 3)}$$

وبالتالي فإن المقاومة الحرارية للتوصيل تعطى بالعلاقة:

$$R_{\text{cond}} = \frac{1}{4\pi\lambda}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right) \qquad \textbf{(31 – 3)}$$

تتم معاملة السطوح الكروية المركبة بالأسلوب نفسه الذي درسنا فيه السطوح المركبة المستوية والأسطوانية، حيث يتم التوصل إلى معادلات كل من المقاومة الحرارية الكلية ومعامل انتقال الحرارة الكلي.

مثال 3 – 4:

خزان كروي الشكل قطره الداخلي $D_1 = 3\,\text{m}$، مصنوع من الستانل ستيل بسماكة $2\,\text{cm}$، والموصلية الحرارية له $\lambda = 15\,\text{W/m.K}$، يستخدم لحفظ الماء المثلج عند درجة حرارة $T_{\infty,1} = 0\,^{\circ}\text{C}$. يوضع الخزان في غرفة درجة حرارتها $22\,^{\circ}\text{C}$. السطح الخارجي للخزان أسود اللون، والتبادل الحراري بين السطح الخارجي للخزان ومحيطه يحدث بالحمل الطبيعي

وبالإشعاع. معاملا الحمل الحراري للسطحين الداخلي والخارجي للخزان $\alpha_1 = 80\,\mathrm{W/m^2.K}$ و $\alpha_2 = 10\,\mathrm{W/m^2.K}$ على الترتيب.

1. احسب معدل انتقال الحرارة إلى الماء المثلج في الخزان.
2. احسب كمية الثلج الذائب عند درجة حرارة $0\,^{\circ}\mathrm{C}$ خلال 24 ساعة.

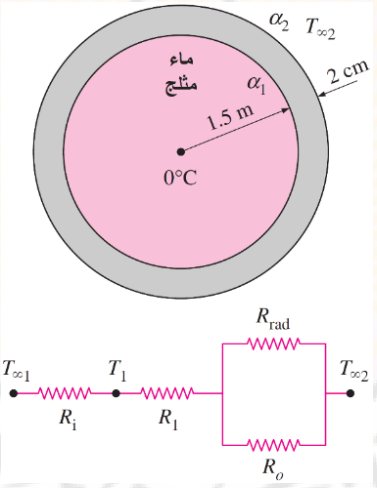
الحل:

المعطيات: قطر الخزان وسماكته والموصلية الحرارية لمعدنه، ولون سطحه الخارجي. درجة حرارة الماء والوسط المحيط. معاملا الحمل الحراري داخل وخارج الخزان.

المطلوب:

1. معدل انتقال الحرارة إلى الماء في الخزان.
2. كمية الثلج المذاب خلال 24 ساعة، بحيث تبقى درجة حرارته بعد الذوبان $0\,^{\circ}\mathrm{C}$.

الشكل:



الافتراضات:

1. شروط الحالة المستقرة.
2. انتقال حرارة أحادي البعد، وذلك لوجود تناظر حراري حول مركز الكرة.
3. الخواص ثابتة.

الخواص:

الحرارة الكامنة لانصهار الماء عند الضغط الجوي $h_{if} = 333.7\,\mathrm{kJ/kg}$.

السطح الخارجي للخزان أسود، وبالتالي فإن إصداريته $\varepsilon = 1$.

التحليل:

1. يبين الشكل السابق الدارة الحرارية. بما أن القطر الداخلي للخزان $D_1 = 3\,\text{m}$ وقطره الخارجي $D_2 = 3.04\,\text{m}$، فإن مساحة السطحين الداخلي والخارجي للخزان، هي:

$$A_1 = \pi D_1^2 = \pi\left(3\,\text{m}\right)^2 = 28.3\,\text{m}^2$$

$$A_2 = \pi D_2^2 = \pi\left(3.04\,\text{m}\right)^2 = 29\,\text{m}^2$$

ويعطى معامل انتقال الحرارة بالإشعاع بالعلاقة:

$$\alpha_r = \varepsilon\sigma\left(T_2^2 + T_{\infty,2}^2\right)\left(T_2 + T_{\infty,2}\right)$$

ولكننا لا نعلم درجة حرارة السطح الخارجي للخزان T_2، وبالتالي لا يمكننا حساب α_r. لذلك فإننا سنفرض قيمة T_2الآن ونتأكد من دقة هذا الافتراض لاحقاً. سنقوم بإعادة الحسابات في حال احتجنا لذلك باستخدام القيمة المعدلة لـ T_2.

نلاحظ أن T_2 يجب أن تكون بين $0\,^\circ\text{C}$ و $22\,^\circ\text{C}$، ولكن يجب أن تكون أقرب إلى $0\,^\circ\text{C}$، لأن معامل انتقال الحرارة بالحمل داخل الخزان أكبر بكثير منه خارج الخزان. بأخذ $T_2 = 5\,^\circ\text{C} = 278\,\text{K}$، فإن معامل انتقال الحرارة بالإشعاع هو:

$$\alpha_r = 1\times 5.68\times 20^{-8}\,\text{W/m}^2.\text{K}^4\left[\left(295\,\text{K}\right)^2 + \left(278\,\text{K}\right)^2\right]\left[295\,\text{K} + 278\,\text{K}\right]$$

$$= 5.34\,\text{W/m}^2.\text{K} = 5.34\,\text{W/m}^2.{}^\circ\text{C}$$

بالتالي فالمقاومات الفردية هي:

$$R_i = R_{\text{conv},1} = \frac{1}{\alpha_1 A_1} = \frac{1}{80\,\text{W/m}^2.\text{K}\times 28.3\,\text{m}^2} = 442\times 10^{-6}\,\text{K/W}$$

$$R_1 = R_{\text{sph}} = \frac{r_2 - r_1}{4\pi\lambda r_1 r_2} = \frac{\left(1.52 - 1.5\right)\text{m}}{4\pi\times 15\,\text{W/m.K}\times 1.52\,\text{m}\times 1.5\,\text{m}} = 47\times 10^{-6}\,\text{K/W}$$

$$R_0 = R_{\text{conv},2} = \frac{1}{\alpha_2 A_2} = \frac{1}{10\,\text{W/m}^2.\text{K}\times 29\,\text{m}^2} = 3450\times 10^{-6}\,\text{K/W}$$

$$R_{\text{rad}} = \frac{1}{\alpha_r A_2} = \frac{1}{5.34\,\text{W/m}^2.\text{K}\times 29\,\text{m}^2} = 6460\times 10^{-6}\,\text{K/W}$$

يمكن استبدال المقاومتين المتوازيتين R_o و R_{rad} بمقاومة مكافئة R_e، حيث:

$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_o} + \frac{1}{R_{\text{rad}}} = \frac{1}{3450\times 10^{-6}} + \frac{1}{6460\times 10^{-6}} = 444.7\,\text{W/K}$$

وبالتالي:

$$R_e = 2250\times10^{-6}\,\mathrm{K/W}$$

يمكننا الآن حساب المقاومة الكلية:

$$R_{\text{tot}} = R_i + R_1 + R_e$$
$$= (442 + 47 + 2250)\times10^{-6} = 2740\times10^{-6}\,\mathrm{K/W}$$

وبالتالي فإن معدل انتقال الحرارة إلى الماء المثلج، هو:

$$\dot{Q} = \frac{T_{\infty,2} - T_{\infty,1}}{R_{\text{tot}}} = \frac{(22-0)\,^{\circ}\mathrm{C}}{2740\times10^{-6}\,\mathrm{K/W}} = 8029\,\mathrm{W}$$

للتحقق من صحة افتراضنا لقيمة T_2، فإننا نحسب درجة حرارة السطح الخارجي للخزان من العلاقة:

$$\dot{Q} = \frac{T_{\infty,2} - T_2}{R_e} \rightarrow T_2 = T_{\infty,2} - \dot{Q}R_2$$
$$= 22\,^{\circ}\mathrm{C} - 8029\,\mathrm{W}\times 2250\times10^{-6}\,\mathrm{K/W} = 4\,^{\circ}\mathrm{C}$$

وهي قريبة جداً من $5\,^{\circ}\mathrm{C}$ التي افترضناها في حساب معامل انتقال الحرارة بالإشعاع. بالتالي لا حاجة لإعادة الحساب باستخدام القيمة $4\,^{\circ}\mathrm{C}$ لـ T_2.

2. إن كمية الحرارة الكلية المنتقلة خلال 24 ساعة هي:

$$Q = \dot{Q}\,\Delta t$$
$$= 8.029\,\mathrm{kW}(24\times3600\,\mathrm{s}) = 673,700\,\mathrm{kJ}$$

وبالتالي فإن كمية الثلج الذائب خلال 24 ساعة، دون أن ترتفع درجة حرارته عن $0\,^{\circ}\mathrm{C}$، هي:

$$m_{\text{ice}} = \frac{Q}{h_{if}} = \frac{673,700\,\mathrm{kJ}}{333.7\,\mathrm{kJ/kg}} = 2079\,\mathrm{kg}$$

المناقشة: إن الطريقة السهلة للتعامل مع انتقال الحرارة بالحمل والإشعاع معاً عند سطح ما، عندما يكون الوسط والسطوح المحيطة عند نفس درجة الحرارة، هي بجمع معاملي انتقال الحرارة بالحمل والإشعاع والتعامل مع النتيجة كمعامل انتقال الحرارة للحمل، أي إن نأخذ $\alpha = 10 + 5.34 = 15.36\,\mathrm{W/m^2.K}$ في مسألتنا هذه. يمكننا من خلال هذه الطريقة تجاهل الإشعاع، لأن تأثيره يؤخذ ضمن معامل الحمل الحراري. وتكون مقاومة الحمل عند السطح الخارجي في هذه الحالة:

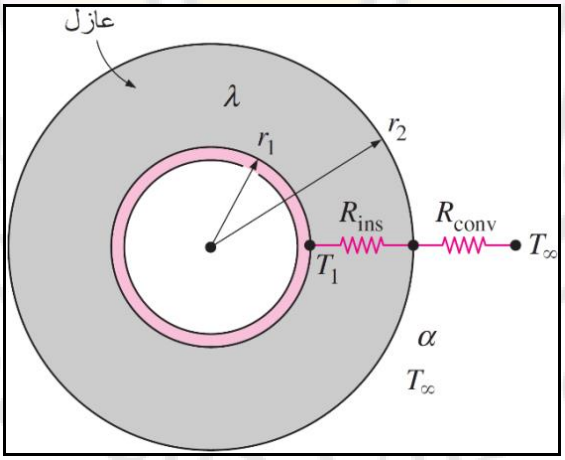
$$R_{\text{conv+rad}} = \frac{1}{\alpha A_2} = \frac{1}{15.34\,\text{W/m}^2.\text{K} \times 29\,\text{m}^2} = 2250\,\text{K/W}$$

وهي مطابقة لقيمة المقاومة المكافئة لمقاومتي الحمل والإشعاع المتوازيتين.

3 – 2 – 4 – نصف القطر الحدي للعزل *Critical Radius of Insulation*:

إن من البديهي القول إن زيادة سماكة العزل لجدار مما تؤدي دائماً إلى التقليل من انتقال الحرارة، أي إنه كلما زادت سماكة العزل انخفض معدل انتقال الحرارة، وذلك صحيح طالما أن مساحة سطح التبادل الحراري ثابتة، حيث إن زيادة سماكة العزل تؤدي إلى زيادة مقاومة التوصيل، في حين لا تزيد من مقاومة الحمل. إن عملية عزل الأنابيب الأسطوانية أو الأجسام الكروية هي أمر مختلف، حيث أن عملية العزل تؤدي كما هو الحال في عزل السطوح المستوية إلى زيادة مقاومة التوصيل، لكنها بالمقابل تقلل من مقاومة الحمل لطبقة العزل، نتيجة زيادة سطح التبادل الحراري مع الوسط الخارجي. وبالتالي فمن الممكن أن ينخفض معدل انتقال الحرارة أو يزداد، وذلك تبعاً لمعدل التغير في كل من مقاومتي التوصيل والحمل لطبقة العزل.

لندرس الأنبوب الأسطواني المبين في الشكل (3 – 9)، حيث إن القطر الخارجي للأنبوب r_1 ثابت، ودرجة حرارة سطحه الخارجي T_1 ثابتة. نقوم بعزل الأنبوب بطبقة عزل موصليتها الحرارية λ، وقطرها الخارجي r_2. بفرض أن انتقال الحرارة يحدث من الأنبوب باتجاه الوسط الخارجي والذي درجة حرارته T_∞، ومعامل انتقال الحرارة بالحمل α.



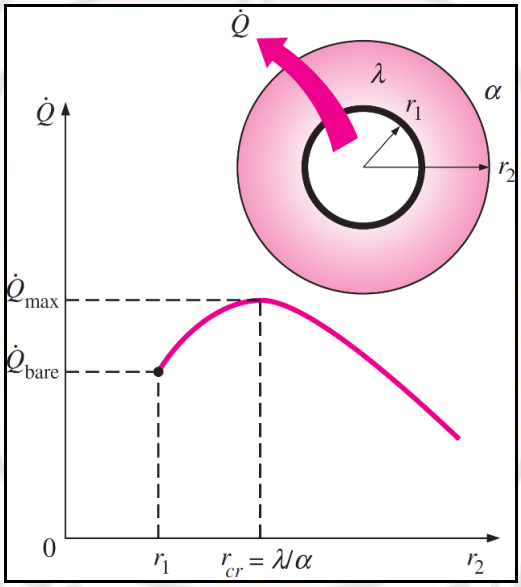
الشكل (3 – 9) أنبوب معزول بوجود انتقال حرارة بالحمل عند سطحه الخارجي.

يعطى معدل انتقال الحرارة من الأنبوب المعزول إلى الوسط الخارجي بالعلاقة:

$$\dot{Q} = \frac{T_1 - T_\infty}{R_{ins} + R_{conv}} = \frac{T_1 - T_\infty}{\frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi L \lambda} + \frac{1}{\alpha(2\pi r_2 L)}} \qquad (32-3)$$

يبين الشكل (3 – 10) تغيرات $\dot{Q}$ تبعاً لتغير نصف القطر الخارجي للعزل r_2. من خلال حل المعادلة $d\dot{Q}/dr_2 = 0$، يمكننا إيجاد قيمة r_2 التي يبلغ عندها معدل انتقال الحرارة من الأنبوب قيمة أعظمية $\dot{Q}_{max}$، وتسمى قيمة r_2 التي في هذه الحالة بنصف القطر الحدي للعزل r_{cr}، وتعطى هذه القيمة بالنسبة للأجسام الأسطوانية بالعلاقة:

$$r_{cr} = \frac{\lambda}{\alpha} \qquad (33-3)$$



الشكل (3 – 10) العلاقة بين نصف قطر العزل ومعدل انتقال الحرارة.

$\dot{Q}_{bare}$: معدل انتقال الحرارة في حالة عدم وجود عزل.

نلاحظ أن نصف القطر الحدي للعزل يتعلق بكل من الموصلية الحرارية للعازل λ، ومعامل انتقال الحرارة بالحمل α. يزداد معدل انتقال الحرارة من الأسطوانة بزيادة سماكة العزل طالما أن $r_2 < r_{cr}$ ويبلغ قيمة عظمى عندما $r_2 = r_{cr}$، ومن ثم يبدأ بالتناقص بزيادة سماكة العزل عندما $r_2 > r_{cr}$. نستنتج مما سبق أن عزل الأنابيب يمكن أن يزيد معدل انتقال الحرارة إلى الوسط المحيط بدل أن يخفضه عندما $r_2 < r_{cr}$، وذلك نتيجة الزيادة في سطح التبادل

الحراري مع الوسط الخارجي، مما يؤدي إلى انخفاض في المقاومة الحرارية للحمل، بشكل أكبر من الزيادة في المقاومة الحرارية للتوصيل.

وبالمثل، يمكننا إيجاد العلاقة التي تحدد نصف القطر الحدي في حالة الأجسام الكروية، وهي:

$$r_{cr} = \frac{2\lambda}{\alpha} \qquad \textbf{(34 - 3)}$$

مثال 3 - 5:

سلك كهربائي قطره 3mm وطوله 5m، محاط بغلاف بلاستيكي سماكته 2mm وموصليته الحرارية $\lambda = 0.15\text{W/m.K}$. تشير القياسات الكهربائية إلى أن شدة التيار المار في السلك هي $I = 10\text{A}$، وهبوط التوتر بين طرفي السلك $V = 8\text{V}$. بفرض أن السلك المعزول معرض لوسط درجة حرارته $T_\infty = 30\,^{\circ}\text{C}$، ومعامل الحمل الحراري $\alpha = 12\text{W/m}^2\text{.K}$.

1. احسب درجة حرارة السطح البيني بين السلك والغلاف البلاستيكي.
2. إذا ضاعفنا من سماكة الغلاف البلاستيكي، هل ستزداد درجة حرارة السطح البيني أم ستنقص؟

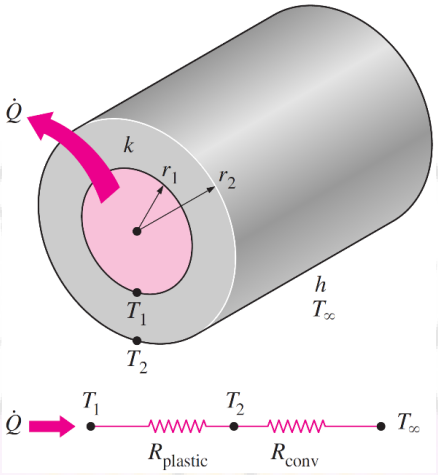
الحل:

المعطيات: أبعاد السلك، وسماكة الغلاف البلاستيكي وموصليته الحرارية، وشدة التيار المار في السلك وهبوط التوتر بين طرفيه، ودرجة حرارة الوسط المحيط، ومعامل الحمل الحراري.

المطلوب:

1. درجة حرارة السطح البيني بين السلك والغلاف البلاستيكي.
2. كيف ستتغير درجة حرارة السطح البيني في حالة ضاعفنا من سماكة الغلاف؟

الشكل:



الافتراضات:

1. شروط الحالة المستقرة.
2. انتقال الحرارة أحادي البعد في الاتجاه القطري، لوجود تناظر حراري حول محور السلك، وعدم وجود تغير في الاتجاه المحوري.
3. الحرارة المتولدة منتظمة.
4. الخواص ثابتة.
5. مقاومة التماس عند السطح البيني مهملة.
6. معامل الحمل الحراري يتضمن أية تأثيرات للإشعاع.

التحليل:

1. تتولد الحرارة ضمن السلك، وتزداد درجة حرارته كنتيجة لمقاومته الحرارية. عند شروط الحالة المستقرة، فإن معدل انتقال الحرارة إلى الوسط المحيط بالسلك يساوي إلى الحرارة المتولدة داخله، ويحسب من العلاقة:

$$\dot{Q} = \dot{W}_e = VI = 8\,\text{V} \times 10\,\text{A} = 80\,\text{W}$$

تتضمن الدارة الحرارية لهذه المسألة مقاومة التوصيل للغلاف البلاستيكي، ومقاومة الحمل عند السطح الخارجي، وهما على التسلسل. مساحة السطح الخارجي للغلاف، هي:

$$A_2 = 2\pi r_2 L = 2\pi \times 0.0035\,\text{m} \times 5\,\text{m} = 0.11\,\text{m}^2$$

وبالتالي فالمقاومات هي:

$$R_{\text{conv}} = \frac{1}{\alpha A_2} = \frac{1}{12\,\text{W/m}^2.\text{K} \times 0.11\,\text{m}^2} = 0.76\,\text{K/W}$$

$$R_{\text{plastic}} = \frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi\lambda L} = \frac{\ln(3.5/1.5)}{2\pi \times 0.15\,\text{W/m.K} \times 5\,\text{m}} = 0.18\,\text{K/W}$$

وبالتالي فالمقاومة الكلية:

$$R_{\text{tot}} = R_{\text{plastic}} + R_{\text{conv}} = 0.76 + 0.18 = 0.94\,\text{K/W}$$

ومنه، فإن درجة حرارة السطح البيني تحسب من العلاقة:

$$\dot{Q} = \frac{T_1 - T_\infty}{R_{\text{tot}}} \rightarrow T_1 = T_\infty + \dot{Q}R_{\text{tot}}$$

$$= 30\,^{\circ}\text{C} + 80\,\text{W} \times 0.94\,\text{K/W} = 105\,^{\circ}\text{C}$$

نلاحظ أننا لم نأخذ السلك الكهربائي بشكل مباشر ضمن الدارة الحرارية، وذلك لأن السلك يمثل مولد الحرارة.

2. حتى نتمكن من تحديد تأثير مضاعفة سماكة الغلاف البلاستيكي، يجب علينا أولاً أن نحسب نصف القطر الحدي للعزل من العلاقة (3 – 34):

$$r_{\text{cr}} = \frac{\lambda}{\alpha} = \frac{0.15\,\text{W/m.K}}{12\,\text{W/m}^2.\text{K}} = 0.0125\,\text{m} = 12.5\,\text{mm}$$

وهو أكبر من نصف قطر الغلاف البلاستيكي؛ بالتالي فإن الزيادة في سماكة الغلاف البلاستيكي ستعزز من انتقال الحرارة، ويستمر ذلك حتى يصل نصف القطر الخارجي للغلاف إلى 12.5mm. نتيجة ذلك فإن معدل انتقال الحرارة $\dot{Q}$ سيزداد عندما تبقى درجة حرارة السطح البيني ثابتة T_1، أو أن T_1 ستتناقص في حال بقي $\dot{Q}$ ثابتاً، وهي الحالة التي درسناها في هذه المسألة.

المناقشة: يمكننا من خلال إعادة الحسابات السابقة من أجل غلاف بلاستيكي سماكته 4mm أن نبين أن درجة حرارة السطح البيني تنخفض إلى $90.6\,^{\circ}\text{C}$، وهذه السماكة هي ضعف السماكة السابقة في المسألة. يمكننا بطريقة مشابهة أن نبين أن درجة حرارة السطح البيني تبلغ قيمة دنيا $83\,^{\circ}\text{C}$، عندما يصبح نصف القطر الخارجي للغلاف البلاستيكي مساوياً لنصف القطر الحدي.

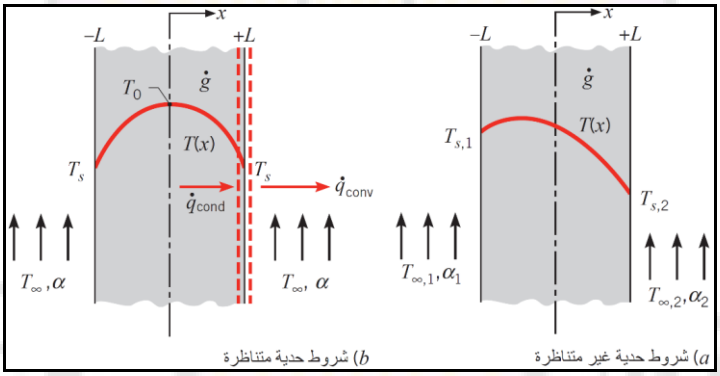
3 - 3 - التوصيل الحراري بوجود طاقة حرارية متولدة

Conduction with Thermal Heat Generation:

كما درسنا سابقاً، فإن الطاقة الحرارية المتولدة داخل وسطٍ ما ستؤثر على توزع درجة الحرارة داخل هذا الوسط. اعتمدنا في دراستنا السابقة لمسائل التوصيل الحراري على تحليل الأوساط التي يتعلق توزع درجة الحرارة فيها بالشروط السائدة عند الحدود الخارجية للوسط. سندرس الآن عملية التوصيل الحراري مع الأخذ بالحسبان الحرارة المتولدة داخل الوسط المدروس.

3 – 3 – 1 – جدار مستوٍ *The Plane Wall*:

لندرس الجدار المستوي المبين في الشكل (3 – 11 a). بفرض أن معدل الحرارة المتولدة بالنسبة لواحدة الحجم $\dot{g}$ ثابت ومنتظم في نقاط الوسط كلها، ودرجة حرارة كل من سطحي الجدار هي $T_{s,1}, T_{s,2}$ والموصلية الحرارية للجدار ثابتة λ.



الشكل (3 – 11) التوصيل الحراري في جدار مستو بوجود حرارة متولدة.

تأخذ المعادلة التفاضلية للتوصيل الحراري في هذه الحالة الصيغة التالية:

$$\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{\dot{g}}{\lambda} = 0 \qquad (35 - 3)$$

بإجراء التكامل لأول مرة نجد:

$$\frac{dT}{dx} = -\frac{\dot{g}}{\lambda} C_1$$

وبإجراء التكامل للمرة الثانية نحصل على الحل العام:

$$T = -\frac{\dot{g}}{2\lambda} x^2 + C_1 x + C_2 \qquad (36 - 3)$$

حيث أن C_1, C_2 هما ثوابت التكامل. نلاحظ من الشكل (3 – 11 a) أن درجتي الحرارة على جانبي الجدار ثابتتان، وبالتالي فالشروط الحدية هي:

$$T(-L) = T_{s,1} \qquad T(L) = T_{s,2}$$

بتطبيق الشروط الحدية على الحل العام نوجد قيمتي الثابتين:

$$C_1 = \frac{T_{s,2} - T_{s,1}}{2L} \qquad C_2 = \frac{\dot{g}}{2\lambda} L^2 + \frac{T_{s,1} + T_{s,2}}{2}$$

وبالتالي، فإن توزع درجة الحرارة ضمن الجدار يعطى بالعلاقة:

$$T(x) = \frac{\dot{g}L^2}{2\lambda}\left(1 - \frac{x^2}{L^2}\right) + \frac{T_{s,2} - T_{s,1}}{2}\frac{x}{L} + \frac{T_{s,1} + T_{s,2}}{2} \qquad \textbf{(37 – 3)}$$

باستخدام المعادلة (3 – 37) مع قانون فوريه يمكننا حساب شدة التدفق الحراري في أية نقطة من الجدار.

نلاحظ أنه بوجود حرارة متولدة، فإن التدفق الحراري يصبح تابعاً للإحداثي x.

في حال كانت درجة الحرارة على جانبي الجدار واحدة $T_{s,1} = T_{s,2} = T_s$، فإن المعادلة (3 – 37) تأخذ شكلاً مبسطاً، حيث إن توزع درجة الحرارة في هذه الحالة يكون متناظراً بالنسبة للمستوي المنصف للجدار، كما في الشكل (3 – 11 b)، ويعطى توزع درجة الحرارة عندها بالعلاقة:

$$T(x) = \frac{\dot{g}L^2}{2\lambda}\left(1 - \frac{x^2}{L^2}\right) + T_s \qquad \textbf{(38 – 3)}$$

وتأخذ درجة الحرارة قيمة عظمى عند المستوي المنصف للجدار:

$$T(0) \equiv T_0 = \frac{\dot{g}L^2}{2\lambda} + T_s \qquad \textbf{(39 – 3)}$$

من المعادلتين (3 – 38)، (3 – 39) يمكننا إيجاد توزع درجة الحرارة اللابعدي ضمن الجدار، والذي يعطى وفق العلاقة:

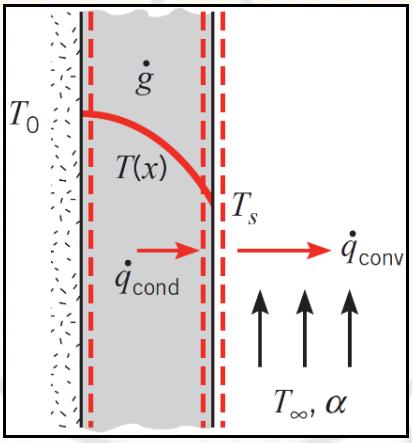
$$\frac{T(x) - T_0}{T_s - T_0} = \left(\frac{x}{L}\right)^2 \qquad \textbf{(40 – 3)}$$

نلاحظ من الشكل (3 – 11 b) أن تدرج درجة الحرارة معدوم عند مستوي التناظر للجدار $(dT/dx)_{x=0} = 0$. أي إنه لا يوجد انتقال للحرارة عبر هذا المستوي، وبالتالي يمكن عده سطحاً أديباتياً، كما هو مبين في الشكل (3 – 12).

إن هذا الاستنتاج يعني ضمناً أن المعادلة (3 – 40) قابلة للتطبيق في حالة الجدران المستوية المعزولة بشكل مثالي من أحد جوانبها $(x=0)$، وذات درجة حرارة ثابتة T_s عند الجانب الآخر $(x=L)$.

حتى نتمكن من استخدام المعادلات التي استنتجناها سابقاً يجب أن تكون درجة حرارة سطح الجدار T_s معلومة. كثيراً ما يكون هناك سائل مجاور للجدار، درجة حرارته T_∞ معلومة، في حين تكون T_s مجهولة، وبالتالي يلزم إيجاد علاقة T_s بالنسبة لـ T_∞. يتم إيجاد هذه العلاقة من خلال إجراء التوازن الطاقي عند سطح الجدار.

بفرض أن احداثي السطح هو $x=L$ في حالة الجدار المتناظر في الشكل (3 – 11 b)، أو الجدار المعزول في الشكل (3 – 12). بإهمال التبادل الحراري بالإشعاع، وباستخدام علاقات معدل انتقال الحرارة المناسبة عند شروط الحمل السطحي، تعطى علاقة التوازن الطاقي للسطح بالشكل:



الشكل (3 – 12) التوصيل الحراري في جدار مستو بوجود حرارة متولدة وباعتبار أحد سطحيه أديباتي.

$$-\lambda \left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=L} = \alpha\left(T_s - T_\infty\right) \qquad \textbf{(41 – 3)}$$

وبتعويض قيمة التدرج الحراري عند $x=L$ من العلاقة (3 – 41) نجد أن:

$$T_s = T_\infty + \frac{\dot{g}L}{\alpha} \qquad \textbf{(42 – 3)}$$

يمكن الوصول إلى النتيجة السابقة من خلال إجراء توازن طاقي على كامل الجدار في الشكل (3 – 11 b) أو الشكل (3 – 12). فمثلاً، بالنسبة لسطح تحكم محيط بالجدار، كما في

الشكل (3 – 12)، فإن معدل الطاقة الحرارية المتولدة ضمن الجدار يجب أن يساوي إلى معدل الطاقة الحرارية المنتقلة بالحمل من الجدار إلى الوسط المجاور؛ أي إن معادلة التوازن الحراري تأخذ الشكل:

$$\dot{E}_g = \dot{E}_{\text{out}}$$

$$\dot{g}V = \alpha A\left(T_s - T_\infty\right) \quad ;V = AL$$

ومن أجل واحدة المساحة من السطح:

$$\dot{g}L = \alpha\left(T_s - T_\infty\right)$$

وبإصلاح هذه المعادلة نحصل على المعادلة (3 – 42).

مثال 3 – 6:

جدار مستوٍ مؤلف من طبقتين A و B. يحدث ضمن الطبقة A توليد حرارة منتظم، شدته $\dot{g} = 1.5\times10^6\ \text{W/m}^3$، والموصلية الحرارية لهذه الطبقة $\lambda_A = 75\ \text{W/m.K}$، وسماكتها $L_A = 50\ \text{mm}$. أما الطبقة B فلا يحدث ضمنها توليد للحرارة، وموصليتها الحرارية $\lambda_B = 150\ \text{W/m.K}$، وسماكتها $L_B = 20\ \text{mm}$. السطح الداخلي للطبقة A معزول بشكل جيد، بينما يتعرض السطح الخارجي للطبقة B لتيار ماء درجة حرارته $T_\infty = 30\ ^\circ\text{C}$، ومعامل انتقال الحرارة بالحمل $\alpha = 1000\ \text{W/m}^2\text{.K}$.

1. ارسم منحنياً توزع درجة الحرارة ضمن الجدار من أجل شروط الحالة المستقرة.
2. احسب درجة حرارة السطح المعزول T_0، ودرجة حرارة السطح المبرد T_2.

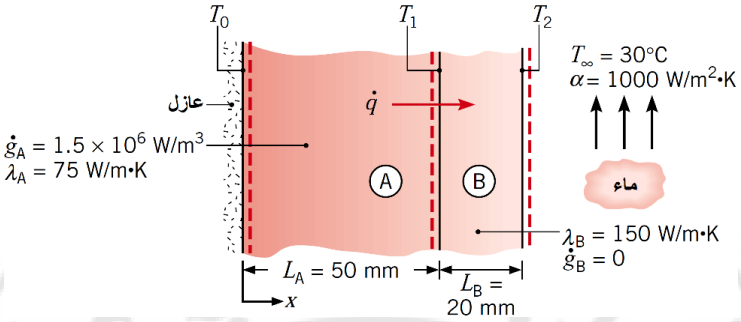
الحل:

المعطيات: جدار مستوٍ مؤلف من طبقتين. السطح الداخلي للطبقة A معزول، ويحدث ضمنها توليد منتظم للحرارة. السطح الخارجي للطبقة B معرض لتيار ماء، ولا يحدث ضمنها توليد للحرارة.

المطلوب:

1. رسم منحني توزع درجة الحرارة في الحالة المستقرة للجدار.
2. درجتا الحرارة الداخلية والخارجية للجدار.

الشكل:



الافتراضات:

1. شروط الحالة المستقرة.
2. التوصيل الحراري أحادي البعد وباتجاه المحور x.
3. مقاومة التماس الحرارية بين الجدران مهملة.
4. السطح الداخلي للطبقة A أديباتي.
5. الخواص ثابتة.

التحليل:

1. من أجل الشروط الفيزيائية المذكورة في المسألة، يمكننا أن نلاحظ أن توزع درجة الحرارة ضمن التركيبة مقسم إلى مناطق عدة:

أ) عند السطح المعزول: تدرج درجة الحرارة معدوم، أي إن:

$$\frac{dT}{dx} = 0$$

وبالتالي فإن ميل المماس لمنحني توزع درجة الحرارة عند السطح المعزول معدوم، أي إن المماس موازٍ للمحور x.

ب) ضمن الطبقة A: يعطى توزع درجة الحرارة في هذه الحالة بالعلاقة (3 – 40):

$$\frac{T(x) - T_0}{T_1 - T_0} = \left(\frac{x}{L_A}\right)^2$$

وبالتالي يأخذ منحني توزع درجة الحرارة ضمن الطبقة A شكل قطع.

ج) عند السطح البيني: بما أن التوصيل الحراري ضمن الجدار مستقر وأحادي البعد، بالتالي فإن شدة التدفق الحراري على جانبي السطح البيني بين الطبقتين A و B، هي نفسها:

$$\dot{q}_A = \dot{q}_b$$

$$-\lambda_A \left.\frac{dT_A}{dx}\right|_{x=L_A} = -\lambda_B \left.\frac{dT_B}{dx}\right|_{x=L_B}$$

وبما أن مشتق درجة الحرارة بالنسبة لـ x يمثل ميل المماس لمنحني توزع درجة الحرارة، فإن التغير في ميل المماس عند السطح البيني، هو:

$$\frac{dT_A/dx\,|_{x=L_A}}{dT_B/dx\,|_{x=L_A}} = \frac{\lambda_B}{\lambda_A} = \frac{150\,\mathrm{W/m.K}}{75\,\mathrm{W/m.K}} = 2$$

د) ضمن الطبقة *B*: يعطى توزع درجة الحرارة بالعلاقة (3 – 2):

$$T(x) = (T_2 - T_1)\frac{x}{L_B} + T_1$$

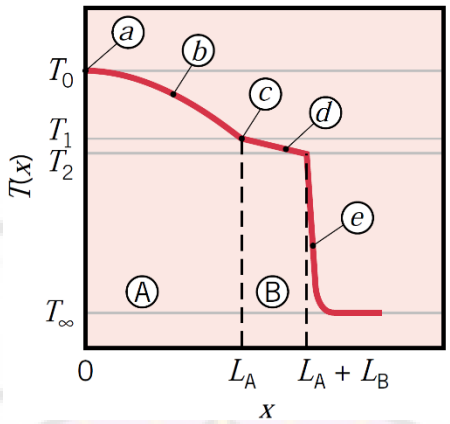
وبالتالي فإن توزع درجة الحرارة ضمن هذه الطبقة خطي.

هـ) ضمن الماء: يحدث تدرج كبير في درجة الحرارة بالقرب من السطح الخارجي للجدار حتى تصل درجة الحرارة إلى T_∞.

يمكننا بالاعتماد على ما سبق رسم منحني توزع درجة الحرارة ضمن التركيبة بشكل تقريبي.

2. يمكننا إيجاد درجة حرارة السطح الخارجي للجدار T_2 من خلال إجراء توازن طاقي لحجم تحكم محيط بالطبقة B. من أجل شروط الحالة المستقرة، وبما أنه لا يوجد توليد للحرارة في هذه الطبقة، فإن شدة التدفق الحراري الداخل إلى الطبقة B عند $x = L_A$ يجب أن يساوي إلى شدة التدفق الحراري الخارج من هذه الطبقة عن طريق انتقال الحرارة بالحمل عند $x = L_A + L_B$، وبالتالي:

$$\dot{q} = \alpha(T_2 - T_\infty) \qquad (1)$$



يمكن حساب شدة التدفق الحراري $\dot{q}$ من خلال إجراء عملية توازن طاقي على حجم تحكم محيط بالطبقة A. بما أن السطح عند $x = 0$ أديباتي، بالتالي لا يوجد أي تدفق للطاقة عبر هذا السطح، وبناءً على ذلك فإن معدل الحرارة المتولدة ضمن هذه الطبقة يجب أن يساوي إلى معدل الحرارة المنتقلة عبر السطح البيني إلى الطبقة B. ومنه، من أجل واحدة مساحة السطح نجد:

$$\dot{g} L_A = \dot{q} \qquad (2)$$

بالحل المشترك لجملة المعادلتين (1)، (2)، نحسب درجة حرارة السطح الخارجي:

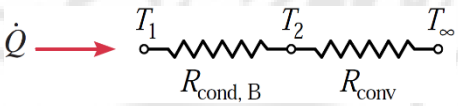
$$T_2 = T_\infty + \frac{\dot{g} L_A}{\alpha}$$

$$= 30\,^{\circ}\mathrm{C} + \frac{1.5\times10^{6}\ \mathrm{W/m^3}\times 0.05\,\mathrm{m}}{1000\ \mathrm{W/m^2.K}} = 105\,^{\circ}\mathrm{C}$$

نحسب درجة حرارة السطح المعزول من العلاقة (3 – 39):

$$T_o = T_1 + \frac{\dot{g} L^2}{2\lambda} \qquad (3)$$

ويمكن حساب T_1 من الدارة الحرارية المكافئة التالية:



أي إن:

$$T_1 = T_\infty + \left(R_{\mathrm{cond},B} + R_{\mathrm{conv}}\right)\dot{Q}$$

حيث إن:

$$R_{\text{cond},B} = \frac{L_B}{\lambda_B A} \qquad R_{\text{conv}} = \frac{1}{\alpha A} \qquad \dot{Q} = \dot{q}A$$

وبالتالي فإن درجة حرارة السطح البيني:

$$T_1 = T_\infty + \left(\frac{L_B}{\lambda_B} + \frac{1}{\alpha}\right)\dot{q}$$

$$= 30\,^{\circ}\text{C} + \left(\frac{0.02\,\text{m}}{150\,\text{W/m.K}} + \frac{1}{1000\,\text{W/m}^2\text{.K}}\right) \times 1.5\times10^6\,\text{W/m}^3 \times 0.05\,\text{m}$$

$$= 30\,^{\circ}\text{C} + 85\,^{\circ}\text{C} = 115\,^{\circ}\text{C}$$

بالتعويض في المعادلة (3):

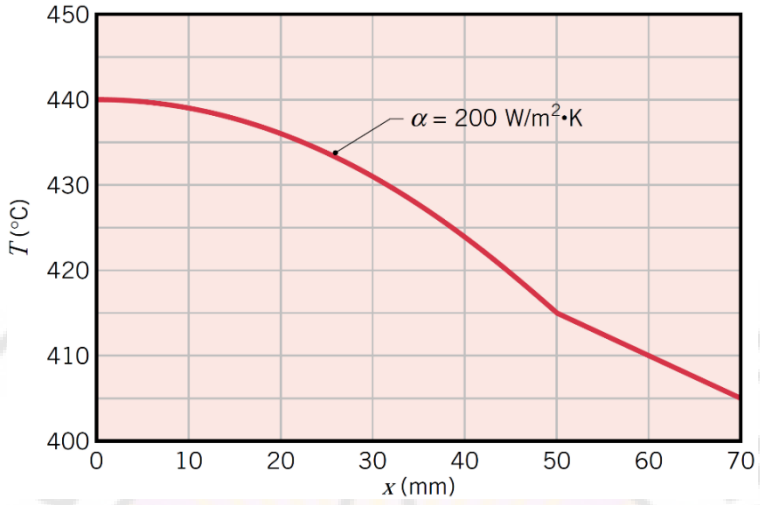
$$T_0 = \frac{1.5\times10^6\,\text{W/m}^3 \times (0.05\,\text{m})^2}{2\times75\,\text{W/m.K}} + 115\,^{\circ}\text{C}$$

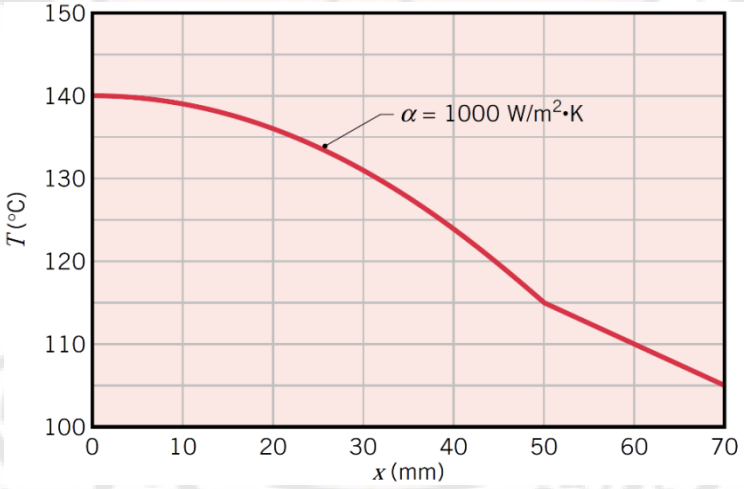
$$= 25\,^{\circ}\text{C} + 115\,^{\circ}\text{C} = 140\,^{\circ}\text{C}$$

المناقشة:

1. لا يمكن تمثيل الطبقة A في دارة حرارية مكافئة، وذلك لوجود حرارة متولدة ضمنها.
2. بما أن المقاومة الحرارية للحمل أكبر بكثير من المقاومة الحرارية للتوصيل ضمن الطبقة B، حيث $R_{\text{conv}}/R_{\text{cond},B} = 7.5$، فإن الفرق في درجات الحرارة بين السطح الخارجي للطبقة Bوالماء أكبر بكثير من هبوط درجة الحرارة ضمن المادة B، حيث $(T_2 - T_\infty)/(T_1 - T_2) = 7.5$. يمكننا ملاحظة هذه النتيجة بشكل جلي في مخطط توزع درجة الحرارة الذي رسمناه في الطلب الأول.
3. تتعلق درجات حرارة السطح الداخلي T_0 والبيني T_1 والخارجي T_2 بمعدل الحرارة المتولدة $\dot{g}$، والموصليات الحرارية λ_A و λ_B، ومعامل انتقال الحرارة بالحمل α.

تمتلك كل مادة حداً أعلى لدرجة الحرارة المسموح بها، وفي حال تجاوزت درجة حرارة المادة هذا الحد، فإن ذلك سيؤدي إلى فشل حراري في النظام. يبين الشكلان التاليان توزع درجة الحرارة ضمن الجدار المدروس، وذلك من أجل معامل انتقال حرارة بالحمل $\alpha = 200\,\text{W/m}^2\text{.K}$ والذي يمثل عملية التبريد بالهواء، ومن أجل $\alpha = 1000\,\text{W/m}^2\text{.K}$ والذي يمثل عملية التبريد بالماء.



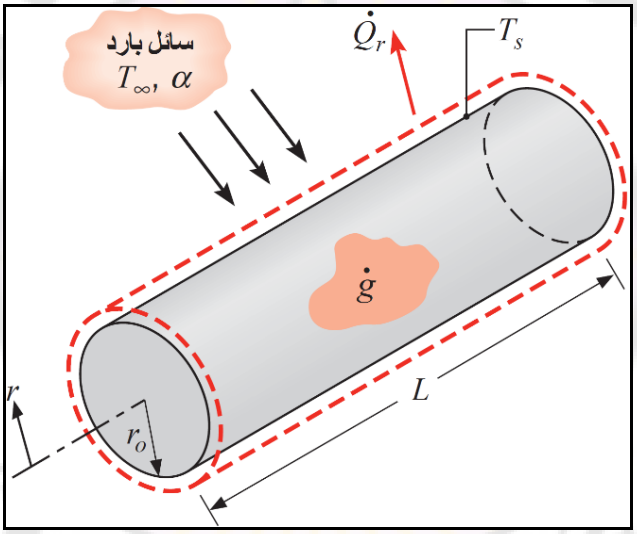


من أجل $\alpha = 200\,\mathrm{W/m^2.K}$، نلاحظ ارتفاعاً ملحوظاً في درجة الحرارة ضمن النظام عن حالة $\alpha = 1000\,\mathrm{W/m^2.K}$، ومن الممكن أن يؤدي ذلك إلى فشل حراري في النظام المدروس في حال كانت درجة الحرارة أعلى من الحد المسموح به للمواد المستخدمة. لقد افترضنا في أثناء تحليلنا أن مقاومة التماس الحرارية مهملة، وبالتالي فإن منحني توزع درجة الحرارة يبقى مستمراً عند السطح البيني ولا يعاني من انقطاع، بالرغم من تغير في ميل المماس للمنحني dT/dx عند السطح البيني $x = 50\,\mathrm{mm}$. أما في حال أخذنا مقاومة التماس الحرارية بالحسبان، فإن درجتي الحرارة على جانبي السطح البيني ستكونان مختلفتين، وبالتالي سيكون

هناك انقطاع في منحني توزع درجة الحرارة، كما أن مقاومة التماس عند السطح البيني ستخفض من شدة التوصيل الحراري، وبالتالي ستزداد درجة الحرارة ضمن الطبقة A إلى قيم أعلى من تلك الموجودة في المخططات.

3 – 3 – 2 – الأنظمة القطرية *Radial Systems*:

لنأخذ الأسطوانة المبينة في الشكل (3 – 13)، والتي يمكن أن تمثل سلك ناقل للكهرباء، أو قضيب وقود نووي. من أجل شروط الحالة المستقرة، فإن معدل الحرارة المتولدة ضمن الأسطوانة يجب أن يساوي إلى معدل الحرارة المنتقلة بالحمل من سطح الأسطوانة إلى السائل المجاور لها، وبالتالي يحافظ سطح الأسطوانة على درجة حرارة ثابتة T_s.



الشكل (3 – 13) التوصيل الحراري في أسطوانة مصمتة بوجود حرارة متولدة.

من أجل موصلية حرارية ثابتة، فإن المعادلة التفاضلية للتوصيل الحراري لأسطوانة تأخذ الشكل:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right)+\frac{\dot{g}}{\lambda}=0 \qquad (43-3)$$

بعزل المتحولات، وبفرض أن الحرارة المتولدة ذات قيمة ثابتة ومنتظمة في نقاط الأسطوانة كافة، وبإجراء التكامل للمعادلة السابقة نجد:

$$r\frac{dT}{dr}=-\frac{\dot{g}}{2\lambda}r^2+C_1 \qquad (44-3)$$

بإجراء عملية التكامل مرة ثانية نحصل على الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$T(r) = -\frac{\dot{g}}{4\lambda} r^2 + C_1 \ln r + C_2 \qquad \textbf{(45 - 3)}$$

نلاحظ من الشكل (3 – 13) وجود تناظر حراري بالنسبة لمحور الأسطوانة، وبالتالي فإن تدرج درجة الحرارة عند المحور معدوم، كما نلاحظ أن درجة حرارة سطح الأسطوانة ثابتة. ومنه، فإن الشروط الحدية لهذه المسألة, هي:

$$\left.\frac{dT}{dr}\right|_{r=0} = 0 \qquad T(r_0) = T_s$$

من شرط التناظر عند $r = 0$ والمعادلة (3 – 44)، نجد أن $C_1 = 0$. باستخدام الشرط الثاني وبالتعويض بالمعادلة (3 – 45) نجد أن:

$$C_2 = T_s + \frac{\dot{g}}{4\lambda} r_0^2$$

وبالتالي يعطى توزع درجة الحرارة بالعلاقة:

$$T(r) = \frac{\dot{g}\, r_0^2}{4\lambda}\left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right) + T_s \qquad \textbf{(46 - 3)}$$

بتطبيق المعادلة (3 – 46) عند محور الأسطوانة، وبقسمة المعادلة (3 – 46) على النتيجة التي حصلنا عليها نحصل على علاقة توزع درجة الحرارة اللابعدي:

$$\frac{T(r) - T_s}{T_0 - T_s} = 1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^2 \qquad \textbf{(47 - 3)}$$

T_0: درجة الحرارة عند محور الأسطوانة.

يمكن إيجاد شدة التدفق الحراري عند أي قطر للأسطوانة من خلال تطبيق المعادلة (3 – 46) مع قانون فوريه.

لإيجاد العلاقة بين درجة حرارة سطح الأسطوانة T_sودرجة حرارة السائل البارد T_∞، نقوم إما بإجراء موازنة طاقية لسطح الأسطوانة أو موازنة طاقية لكامل الأسطوانة. بإجراء موازنة طاقية لكامل الأسطوانة نجد:

$$\dot{E}_g = \dot{Q}_{\text{conv}}$$
$$\dot{g}V = \alpha A (T_s - T_\infty)$$
$$\dot{g}\left(\pi r_0^2 L\right) = \alpha\left(2\pi r_0 L\right)(T_s - T_\infty)$$

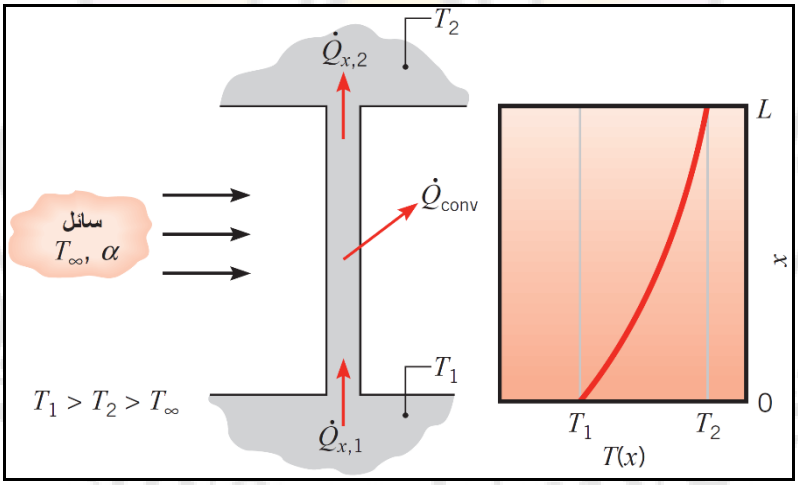
$$T_s = T_\infty + \frac{\dot{g} r_0}{2\alpha} \qquad (48 - 3)$$

3 - 4 - انتقال الحرارة من السطوح المريشة

Heat Transfer from Finned Surfaces:

لقد ركزنا في دراستنا حتى الآن على أن انتقال الحرارة من السطح الخارجي لجسم صلب يكون باتجاه انتقال الحرارة نفسه بالتوصيل ضمن الجسم. سندرس الآن حالة مغايرة، وهي حالة السطوح الممتدة extended surfaces، حيث يكون اتجاه انتقال الحرارة من سطح الجسم عمودياً على اتجاه انتقال الحرارة ضمن الجسم. ويمكن أن يكون انتقال الحرارة من السطوح الممتدة بالحمل و/أو بالإشعاع.

لنأخذ الدعامة المبينة في الشكل (3 – 14)، والتي تصل بين جدارين لهما درجتا حرارة مختلفتان، ويجري حول هذه الدعامة سائل. بما أن $T_1 > T_2$، فإن تدرج درجة الحرارة باتجاه المحور x سيؤدي إلى انتقال مستمر للحرارة بالتوصيل ضمن الدعامة. بالإضافة لذلك، وبما أن $T_1 > T_2 > T_\infty$، سيكون هنالك أيضاً انتقال للحرارة بالحمل من الدعامة إلى السائل، مما يؤدي بالتالي إلى تناقص معدل انتقال الحرارة ضمن الدعامة $\dot{Q}_x$ مع زيادة x، أي إن قيمة تدرج درجة الحرارة $|dT/dx|$ ستتناقص بازدياد x.

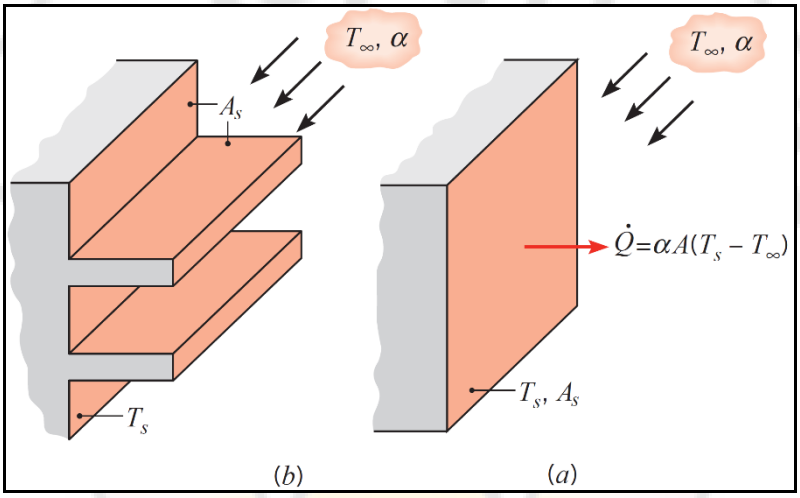


الشكل (3 – 14) انتقال الحرارة بالتوصيل والحمل في دعامة بين جدارين.

لندرس الجدار المستوي المبين في الشكل (3 – 15a). من علاقة نيوتن في التبريد:

$$\dot{Q}_{conv} = \alpha A_s (T_s - T_\infty)$$

بفرض أن T_s ثابتة، بالتالي لزيادة معدل انتقال الحرارة من الجدار إلى السائل المجاور يجب أن نزيد معامل انتقال الحرارة بالحمل α، ويتم ذلك من خلال زيادة سرعة السائل، ولكن زيادة قيمة α إلى أكبر قيمة ممكنة إما أن تكون غير كافية، أو غير مجدية اقتصادياً نتيجة الزيادة في الطاقة المصروفة على المضخات أو المراوح. من جانبٍ آخر، يمكننا تخفيض درجة حرارة السائل T_∞، وهو إجراء غير عملي. أما الخيار الثالث لدينا، فهو زيادة مساحة سطح التبادل الحراري A_s، وذلك من خلال إضافة ريش لسطح الجدار.

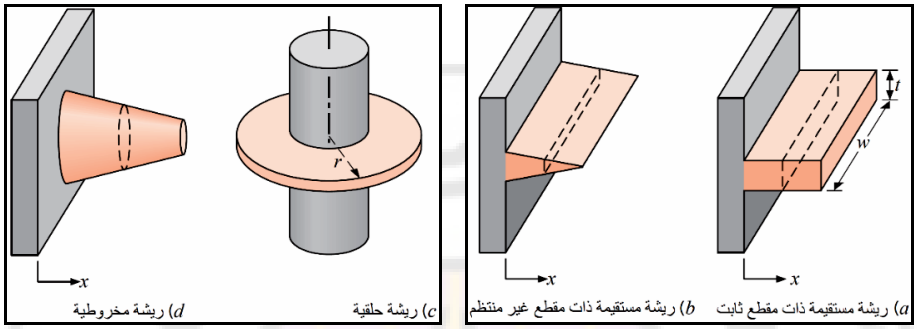


الشكل (3 – 15) استخدام الريش في زيادة معدل انتقال الحرارة من جدار مستوٍ. a) من دون تريش. b) مع تريش.

تؤثر الموصلية الحرارية لمادة الريشة بشكل كبير على توزع درجة الحرارة على طول الريشة، وبالتالي تؤثر في درجة الزيادة في معدل انتقال الحرارة. من الواجب عند التصميم اختيار مادة الريشة بحيث تكون موصليتها الحرارية كبيرة بشكل كافٍ لتخفيض التغير في درجة الحرارة بين قاعدة الريشة ونهايتها إلى أقل ما يمكن. في الحالة الحدية حيث الموصلية الحرارية لمادة الريشة تأخذ قيمة لانهائية، فإن كامل الريشة ستكون عند درجة حرارة مساوية لدرجة حرارة القاعدة، وبالتالي تحدث أكبر زيادة ممكنة في معدل انتقال الحرارة.

من الأمثلة على عملية التريش، الغطاء الخارجي لرأس محرك الدراجة النارية ولآلات جزِّ العشب، حيث يأخذ هذا الغطاء شكلاً يسمح بتسريع عملية تبريد المحرك، أيضاً نلاحظ عملية التريش في التجهيزات التي تضاف إلى المحولات الكهربائية لتبريدها. وأكثر الأمثلة شيوعاً هو

الأنابيب المريشة في مكيف الهواء، والتي تستعمل لزيادة التبادل الحراري بين وسيط التبريد والهواء. يبين الشكل (3 – 16) أشكالاً مختلفة من الريش.



الشكل (3 – 16) أشكال الريش.

3 – 4 – 1 – التحليل العام للتوصيل الحراري

***General Conduction Analysis*:**

لتحديد معدل انتقال الحرارة من سطح ريشة، يجب علينا أولاً أن نحدد توزع درجة الحرارة على طول الريشة، ويتم ذلك بطريقة مماثلة لما فعلناه مع بقية الأنظمة التي قمنا بدراستها، حيث نقوم بتطبيق مبدأ انحفاظ الطاقة على عنصر حجمي تفاضلي مناسب من الريشة. لندرس السطح المبين في الشكل (3 – 17)، حيث نقوم عند دراستنا هذه بوضع عدد من الفرضيات لتبسيط الدراسة.

نفرض أن انتقال الحرارة بالتوصيل ضمن الريشة مستقر أحادي البعد ولا توجد حرارة متولدة، وذلك بالرغم من أن التوصيل الحراري في الريشة ثنائي البعد في الواقع، وإهمال التبادل الحراري بالإشعاع بين سطح الريشة والسطوح المحيطة، وأن الموصلية الحرارية لمادة الريشة λ ثابتة، ومعامل انتقال الحرارة بالحمل α ثابت ومنتظم على كامل سطح الريشة.

من مبدأ انحفاظ الطاقة، إن معدل انتقال الحرارة بالحمل من أية نقطة على سطح الريشة يجب أن يكون مساوياً لمحصلة معدل الحرارة المنتقلة إلى هذه النقطة بالتوصيل في الاتجاه العرضي (y,z). إن سماكة الريشة في التطبيقات العملية صغيرة، كما أن التغير في درجة الحرارة ضمن الريشة في الاتجاه العرضي صغير بالمقارنة مع فرق درجات الحرارة بين الريشة والسائل المجاور. وبالتالي نستطيع أن نفرض أن درجة الحرارة منتظمة في أي مقطع عرضي من الريشة.

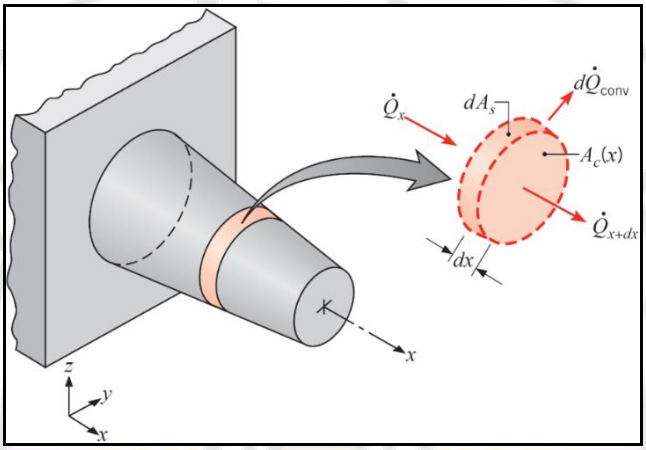
من خلال تطبيق مبدأ التوازن الطاقي على العنصر التفاضلي نحصل على المعادلة:

$$\dot{Q}_x = \dot{Q}_{x+dx} + d\dot{Q}_{\text{conv}} \qquad (49-3)$$

ومن قانون فوريه نعلم أن:

$$\dot{Q}_x = -\lambda A_c \frac{dT}{dx}$$

A_c: مساحة المقطع العرضي للعنصر الحجمي.



الشكل (3 – 17) التوازن الطاقي لعنصر حجمي تفاضلي من ريشة.

ويعطى معدل انتقال الحرارة بالتوصيل عند $(x+dx)$ بالعلاقة:

$$\dot{Q}_{x+dx} = \dot{Q}_x + \frac{d\dot{Q}_x}{dx}dx$$

وبالتالي:

$$\dot{Q}_{x+dx} = -\lambda A_c \frac{dT}{dx} - \lambda \frac{d}{dx}\left(A_c \frac{dT}{dx}\right)dx \qquad (50-3)$$

ويعطى معدل انتقال الحرارة بالحمل بالعلاقة:

$$d\dot{Q}_{conv} = \alpha\, dA_s \left(T - T_\infty\right)$$

dA_s: مساحة السطح الجانبي للعنصر الحجمي.

بتعويض المعادلات السابقة في المعادلة (3 – 49) نجد:

$$\frac{d^2T}{dx^2} = \left(\frac{1}{A_c}\frac{dA_c}{dx}\right)\frac{dT}{dx} - \left(\frac{1}{A_c}\frac{\alpha}{\lambda}\frac{dA_s}{dx}\right)\left(T - T_\infty\right) = 0 \qquad (51-3)$$

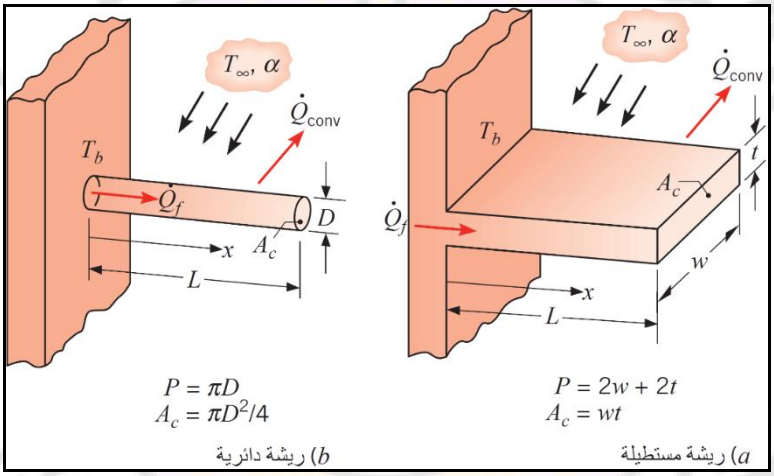
تمثل هذه النتيجة الشكل العام للمعادلة التفاضلية للتوصيل الحراري في السطوح المريشة بحل هذه المعادلة وفق الشروط الحدية المناسبة نحصل على توزع درجة الحرارة، والذي يمكننا

من خلال استخدامه مع قانون فوريه تحديد معدل التوصيل الحراري عند أي x على طول الريشة.

3 – 4 – 2 – الريش ذات مساحة المقطع العرضي المنتظم

***Fins of Uniform Cross - Sectional Area*:**

لحل المعادلة (3 – 51) يجب أن نحدد الشكل الهندسي للريشة بدقة. لنأخذ أبسط الحالات وهي الريش المستقيمة المستطيلة والدائرية ذات المقطع العرضي المنتظم، كما في الشكل (3 – 18). إن كل ريشة متصلة إلى قاعدة (السطح الأساسي) درجة حرارتها $T(0)=T_b$ وممتدة ضمن سائل درجة حرارته T_∞.



الشكل (3 – 18) ريش مستقيمة ذات مقطع عرضي ثابت.

إن مساحة المقطع العرضي A_c لهذه الريش ثابتة. كما أن مساحة السطح الجانبي A_s لهذا النوع من الريش هو: $A_s = P\,x$، حيث إن P هو محيط الريشة. وبالتالي فإن $dA_c/dx = 0$، فضلاً عن أن $dA_s/dx = P$. ومنه، تصبح المعادلة (3 – 51) بالشكل:

$$\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{\alpha P}{\lambda A_c}(T - T_\infty) = 0 \qquad \textbf{(52 – 3)}$$

لتبسيط هذه المعادلة نقوم بتعريف متحول جديد هو درجة الحرارة الزائدة θ excess temperature:

$$\theta(x) = T(x) - T_\infty \qquad \textbf{(53 – 3)}$$

وطالما أن T_∞ ثابتة فإن: $d\theta/dx = dT/dx$. وبتبديل المعادلة (3 – 53) في المعادلة (3 – 52) ينتج:

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - m^2\theta = 0 \qquad \textbf{(54 – 3)}$$

حيث:

$$m^2 = \frac{\alpha P}{\lambda A_c}$$

المعادلة (3 – 54) معادلة تفاضلية خطية متجانسة من المرتبة الثانية مع معاملات ثابتة. الحل العام لهذه المعادلة من الشكل:

$$\theta(x) = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx} \qquad \textbf{(55 – 3)}$$

لإيجاد قيمة الثوابت C_2, C_1 يجب أن نطبق الشروط الحدية المناسبة على الحل العام.

الشرط الحدي الأول: هو درجة حرارة الريشة عند القاعدة $(x = 0)$، حيث إن درجة الحرارة هذه معرفة مسبقاً، وبالتالي:

$$\theta(0) = T_b - T_\infty \equiv \theta_b \qquad \textbf{(56 – 3)}$$

وبتعويض هذا الشرط في معادلة الحل العام نجد:

$$\theta_b = C_1 + C_2 \qquad \textbf{(57 – 3)}$$

الشرط الحدي الثاني: عند نهاية الريشة $(x = L)$ هناك احتمالات عدة، وإن تكون درجة الحرارة معروفة، أو أن يكون التبادل الحراري عند نهاية الريشة معدوماً (سطح أديباتي)، أو أن يكون هناك تبادل حراري بالحمل. سنناقش كل حالة من هذه الحالات على حدي كونها تمثل أحد الشروط الحدية.

I. ريشة ذات طول لانهائي $(T_L = T_\infty)$:

من أجل ريشة ذات طول كبير جداً ومقطع عرضي ثابت، فإن درجة الحرارة عند نهاية الريشة ستكون مساوية لدرجة حرارة الوسط المحيط T_∞، أي إن:

$$\theta(L) = T(L) - T_\infty = 0 \qquad \textbf{(58 – 3)}$$

بالتعويض في المعادلة (3 – 55) نجد:

$$\theta(L) = C_1 e^{-mL} + C_2 e^{-mL} = 0 \quad ; \quad L \to \infty$$

$$C_1 = C_2 e^{-2mL}$$

$$\lim_{L\to\infty} C_1 = \lim_{L\to\infty} \left(C_2 e^{-2mL}\right) = 0$$

أي إن $C_1 = 0$. ولإيجاد قيمة C_2 نعوض قيمة C_1 في المعادلة (3 – 57) فنجد:

$$C_2 = \theta_b$$

وبالتالي فإن علاقة توزع درجة الحرارة، هي:

$$\frac{\theta(x)}{\theta_b} = e^{-mx} \qquad \textbf{(59 – 3)}$$

نلاحظ أن درجة الحرارة تتناقص من T_b إلى T_∞ بشكل أسي، وذلك بخلاف ما رأيناه في الأنظمة التي درسناها سابقاً، حيث تتناقص درجة الحرارة بشكل خطي، ويعود السبب في هذا الأمر إلى أن انتقال الحرارة بالحمل من سطح الريشة ستؤدي بشكل مستمر إلى تناقص تدرج درجة الحرارة بازدياد x، كما يبين الشكل (3 – 19).

نوجد علاقة حساب معدل انتقال الحرارة من الريشة من خلال تطبيق قانون فوريه عند قاعدة الريشة مع علاقة توزع درجة الحرارة (3 – 61):

$$\dot{Q}_f = \dot{Q}_b = -\lambda A_c \left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=0} = -\lambda A_c \left.\frac{d\theta}{dx}\right|_{x=0} = -\lambda A_c (-m) e^{-m(0)} \theta_b$$

$$\dot{Q}_f = \sqrt{\alpha P \lambda A_c}\, \theta_b \qquad \textbf{(60 – 3)}$$

كما يمكن التوصل إلى العلاقة (3 – 59) من خلال إيجاد معدل انتقال الحرارة بالحمل من عنصر حجمي تفاضلي من الريشة، ومكاملته على كامل سطح الريشة، بالشكل التالي:

$$\dot{Q}_f = \int_{A_f} \alpha \left[T(x) - T_\infty\right] dA_f$$

$$\dot{Q}_f = \int_{A_f} \alpha \theta(x)\, dA_f \qquad \textbf{(61 – 3)}$$

A_f: مساحة سطح الريشة، متضمناً نهايتها.

$$A_f = A_c + A_s = A_c + Px$$

$$\Rightarrow dA_f = dA_c + d(Px) = P dx$$

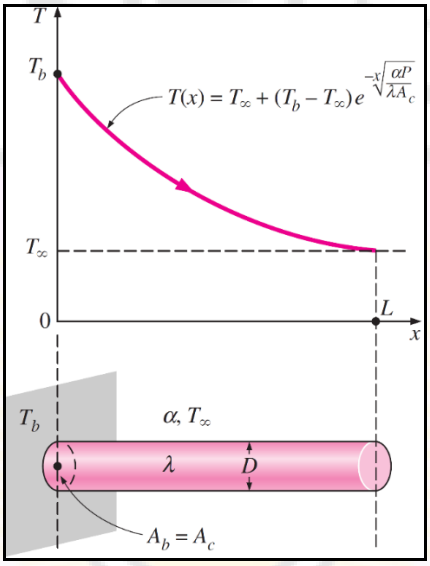
بالتبديل في المعادلة (3 – 61) نجد:

$$\dot{Q}_f = \int_{A_f} \alpha\theta(x)\,dA_f = \int_0^L \alpha\left(\theta_b e^{-mx}\right)P\,dx$$

$$\dot{Q}_f = -\frac{\alpha P}{m}\theta_b \lim_{L\to\infty}\left[e^{-mL} - e^{-m(0)}\right] = -\frac{\alpha P}{m}\theta_b\,(0-1)$$

$$\dot{Q}_f = \sqrt{\alpha P\,\lambda A_c}\;\theta_b$$

وهي النتيجة نفسها التي توصلنا إليها سابقاً.



الشكل (3 – 19) تغير درجة الحرارة على طول ريشة مستقيمة ذات مقطع دائري ثابت.

II. لا يحدث انتقال حرارة بالحمل عند نهاية الريشة (سطح أديباتي):

يتناسب معدل انتقال الحرارة من الريشة طرداً مع مساحة سطحها، وبما أن مساحة سطح نهاية الريشة عادةً ما تكون مهملة بالمقارنة مع مساحة السطح الجانبي لها، يمكننا أن نفرض أن انتقال الحرارة بالحمل من سطح نهاية الريشة معدوم، وبالتالي نعده سطحاً أديباتياً، ونتيجةً لذلك فإن تدرج درجة الحرارة عند هذا السطح معدوم:

$$\left.\frac{d\theta}{dx}\right|_{x=L} = 0 \qquad \textbf{(62 - 3):}$$

نشتق معادلة الحل العام بالنسبة لـ x:

$$\frac{d\theta}{dx} = mC_1 e^{mx} - mC_2 e^{-mx} \qquad \textbf{(63 - 3)}$$

وبتعويض علاقة الشرط الحدي الثاني (3 – 62) في العلاقة (3 – 63):

$$mC_1e^{mL} - mC_2e^{-mL} = 0 \qquad \textbf{(64 – 3)}$$

ومن المعادلة (3 – 59) فإن $C_1 = \theta_b - C_2$، بالتعويض في المعادلة (3 – 64):

$$\theta_b e^{mL} - C_1e^{mL} - C_2e^{-mL} = 0$$

$$C_2 = \theta_b \frac{e^{mL}}{e^{mL} + e^{-mL}}$$

وبالتالي فإن C_1، هو:

$$C_1 = \theta_b - \theta_b \frac{e^{mL}}{e^{mL} + e^{-mL}} = \theta_b \frac{e^{-mL}}{e^{mL} + e^{-mL}}$$

بتبديل قيمتي C_1, C_2 في معادلة الحل العام (3 – 55) نوجد علاقة توزع درجة الحرارة ضمن الريشة:

$$\theta(x) = \theta_b \frac{e^{-mL}}{e^{mL} + e^{-mL}} e^{mx} + \theta_b \frac{e^{mL}}{e^{mL} + e^{-mL}} e^{-mx}$$

$$\theta(x) = \theta_b \frac{e^{m(L-x)} + e^{-m(L+x)}}{e^{mL} + e^{-mL}}$$

$$\frac{\theta(x)}{\theta_b} = \frac{\cosh\left[m\left(L-x\right)\right]}{\cosh(mL)} \qquad \textbf{(65 – 3)}$$

حيث إن:

$$\cosh(x) = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} \qquad \frac{d}{dx}\sinh(x) = \cosh(x)$$

$$\sinh(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} \qquad \frac{d}{dx}\cosh(x) = \sinh(x)$$

$$\tanh(x)\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$$

نوجد علاقة حساب معدل انتقال الحرارة من الريشة بتطبيق قانون فورييه عند قاعدة الريشة مع علاقة توزع درجة الحرارة:

$$\dot{Q}_f = \dot{Q}_b = -\lambda A_c \left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=0} = -\lambda A_c \left.\frac{d\theta}{dx}\right|_{x=0}$$

$$\dot{Q}_f = -\lambda A_c \theta_b \left.\frac{(-m)\sinh\left[m(L-x)\right]\cosh(mL)}{\cosh^2(mL)}\right|_{x=0}$$

$$\dot{Q}_f = \lambda A_c m \theta_b \frac{\sinh(mL)\cosh(mL)}{\cosh^2(mL)}$$

$$\dot{Q}_f = \sqrt{\alpha P \lambda A_c}\,\theta_b \tanh(mL) \qquad \textbf{(66 - 3)}$$

نلاحظ أن علاقة معدل انتقال الحرارة للريشة ذات النهاية الأديباتية تختلف عنها للريشة اللامتناهية الطول بالمعامل $\left(\tanh\left[mL\right]\right)$، والذي يقارب 1عندما يكون L كبير جداً.

III. انتقال حرارة بالحمل عند نهاية الريشة:

بتطبيق مبدأ مصونية الطاقة على سطح تحكم محيط بنهاية الريشة، كما في الشكل (3 - 19)، نجد:

$$\alpha A_c \left[T(L) - T_\infty\right] = -\lambda A_c \left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=L}$$

وباستخدام درجة الحرارة الزائدة θ، تصبح معادلة التوازن الطاقي بالشكل:

$$\alpha\theta(L) = -\lambda \left.\frac{d\theta}{dx}\right|_{x=L} \qquad \textbf{(67 - 3)}$$

وبالتالي فإن معدل الطاقة الحرارية المنتقلة بالحمل من نهاية الريشة إلى السائل المجاور تساوي إلى معدل الطاقة الحرارية المنتقلة بالتوصيل إلى نهاية الريشة.

بتبديل قيم $x = L$ في معادلة الحل العام (3 - 55) وفي معادلة المشتق (3 - 63) نجد:

$$\alpha\left[C_1 e^{mL} + C_2 e^{-mL}\right] = -m\lambda\left[C_1 e^{mL} - C_2 e^{-mL}\right]$$

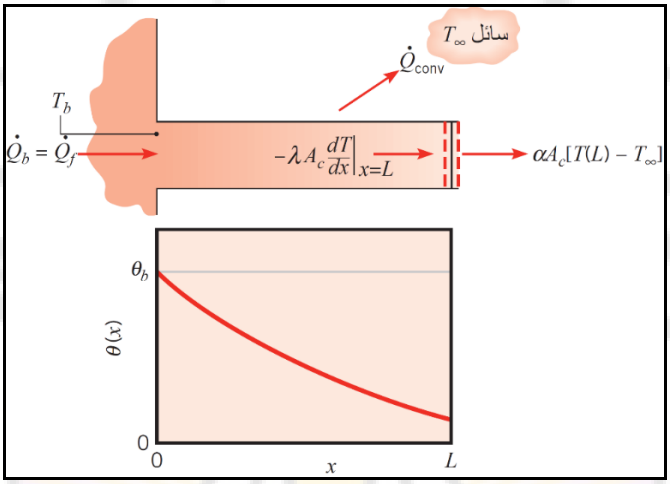
وبتعويض المعادلة (3 - 56) في المعادلة السابقة:

$$\alpha\left[\theta_b e^{mL} - C_2 e^{mL} + C_2 e^{-mL}\right] = -m\lambda\left[\theta_b e^{mL} - C_2 e^{mL} - C_2 e^{-mL}\right]$$

$$\alpha\left[\theta_b e^{mL} - C_2\left(e^{mL} - e^{-mL}\right)\right] = m\lambda\left[\theta_b e^{mL} + C_2\left(e^{mL} + e^{-mL}\right)\right]$$

$$C_2 = \theta_b \frac{\alpha e^{mL} + m\lambda e^{mL}}{m\lambda\left(e^{mL} + e^{-mL}\right) + \alpha\left(e^{mL} - e^{-mL}\right)}$$

$$C_1 = \theta_b \frac{m\lambda e^{-mL} - \alpha e^{-mL}}{m\lambda\left(e^{mL} + e^{-mL}\right) + \alpha\left(e^{mL} - e^{-mL}\right)}$$



الشكل (3 – 20) التوصيل والحمل الحراري في ريشة ذات مقطع ثابت.

بتعويض قيمتي الثابتين C_2, C_1 في معادلة الحل العام (3 – 55) نحصل على علاقة توزع درجة الحرارة ضمن الريشة:

$$\theta(x) = \theta_b \frac{\left(m\lambda e^{-mL} - \alpha e^{-mL}\right)e^{mx} + \left(\alpha e^{mL} + m\lambda e^{mL}\right)e^{-mx}}{m\lambda\left(e^{mL} + e^{-mL}\right) + \alpha\left(e^{mL} - e^{-mL}\right)}$$

$$\theta(x) = \theta_b \frac{m\lambda\left[e^{m(L-x)} + e^{-m(L-x)}\right] + \alpha\left[e^{m(L-x)} - e^{-m(L-x)}\right]}{m\lambda\left(e^{mL} + e^{-mL}\right) + \alpha\left(e^{mL} - e^{-mL}\right)}$$

$$\frac{\theta}{\theta_b} = \frac{\cosh\left[m(L-x)\right] + (\alpha/m\lambda)\sinh\left[m(L-x)\right]}{\cosh(mL) + (\alpha/m\lambda)\sinh(mL)} \qquad \textbf{(68 – 3)}$$

ويبين الشكل (3 – 20) التمثيل البياني لعلاقة توزع درجة الحرارة هذه. نلاحظ أن قيمة تدرج درجة الحرارة تتناقص بزيادة x ، والسبب في ذلك يعود إلى تناقص معدل التوصيل الحراري $\dot{Q}_x(x)$ بازدياد x نتيجة الفقد الحراري المستمر من سطح الريشة بالحمل.

لإيجاد معدل انتقال الحرارة من الريشة نطبق قانون فوريه عند قاعدة الريشة مع علاقة توزع درجة الحرارة:

$$\dot{Q}_f = \dot{Q}_b = -\lambda A_c \left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=0} = -\lambda A_c \left.\frac{d\theta}{dx}\right|_{x=0} \qquad \textbf{(69 - 3)}$$

ويمكننا إيجاد قيمة المشتق عند $x = 0$ بتعويض قيم C_1, C_2 في المعادلة (3 - 63)، حيث نجد:

$$\left.\frac{d\theta}{dx}\right|_{x=0} = m\theta_b \left[\frac{(m\lambda-\alpha)e^{-m(L-x)} - (m\lambda+\alpha)e^{m(L-x)}}{m\lambda\left(e^{mL}+e^{-mL}\right)+\alpha\left(e^{mL}-e^{-mL}\right)}\right]_{x=0}$$

$$\left.\frac{d\theta}{dx}\right|_{x=0} = -m\theta_b \frac{m\lambda\left(e^{mL}-e^{-mL}\right)+\alpha\left(e^{mL}+e^{-mL}\right)}{m\lambda\left(e^{mL}+e^{-mL}\right)+\alpha\left(e^{mL}-e^{-mL}\right)}$$

$$\left.\frac{d\theta}{dx}\right|_{x=0} = -m\theta_b \frac{\sinh(mL)+(\alpha/m\lambda)\cosh(mL)}{\cosh(mL)+(\alpha/m\lambda)\sinh(mL)}$$

وبالتعويض في المعادلة (3 - 69) تنتج علاقة حساب معدل انتقال الحرارة من الريشة:

$$\dot{Q}_f = \sqrt{\alpha P \lambda A_c}\,\theta_b \frac{\sinh(mL)+(\alpha/m\lambda)\cosh(mL)}{\cosh(mL)+(\alpha/m\lambda)\sinh(mL)} \qquad \textbf{(70 - 3)}$$

إن هذا الحل يعطي نتيجة دقيقة لحساب معدل انتقال الحرارة من الريشة. لكن كما رأينا فإن هذا الحل معقد، وفي المقابل فإن معدل انتقال الحرارة من نهاية الريشة صغير بالمقارنة مع معدل انتقال الحرارة من باقي سطح الريشة. وبالتالي فإن هذا التعقيد في الحل من أجل تحقيق زيادة طفيفة في الدقة غير مبرر.

إحدى الوسائل العملية لحساب معدل انتقال الحرارة من نهاية الريشة هي استبدال الريشة المدروسة بريشة مكافئة ذات نهاية أديباتية، طولها L_c يسمى الطول المصحح corrected length، بحيث يعوض قيمة انتقال الحرارة من نهاية الريشة الفعلية، ومن ثم تعويض الطول الجديد في علاقات الريشة ذات النهاية الأديباتية، كما هو مبين في الشكل (3 - 20):

$$L_c = L + \frac{A_c}{P} \qquad \textbf{(71 - 3)}$$

وبالتالي فإن مساحة السطح الجانبي للريشة المكافئة تساوي إلى مساحة السطح الجانبي للريشة الأصلية فضلاً عن مساحة نهايتها. وتصبح العلاقة (3 – 71) من أجل ريشة ذات مقطع مستطيل أو دائري بالشكل:

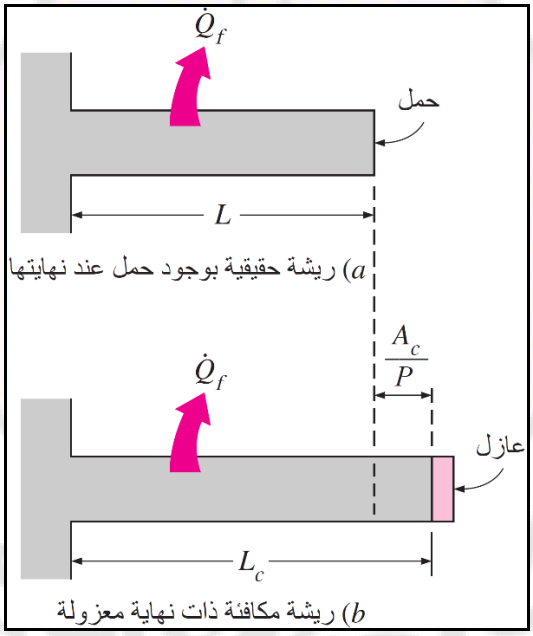
$$L_{c,\text{rec}} = L + t/2 \qquad L_{c,\text{cyr}} = L + D/4$$

وبالتالي تصبح علاقة توزع درجة الحرارة، هي:

$$\frac{\theta(x)}{\theta_b} = \frac{\cosh\left[m\left(L_c - x\right)\right]}{\cosh\left(mL_c\right)}$$

وعلاقة حساب معدل انتقال الحرارة في هذه الحالة:

$$\dot{Q}_f = \sqrt{\alpha P \lambda A_c}\,\theta_b \tanh\left(mL_c\right) \qquad \textbf{(72 – 3)}$$



الشكل (3 – 21) استبدال الريشة الحقيقية بريشة مكافئة.

تقدم طريقة الطول المصحح نتائج جيدة عندما يكون معامل انتقال الحرارة بالحمل عند نهاية الريشة مساوياً تقريباً إلى معامل انتقال الحرارة بالحمل على السطح الجانبي للريشة، وتغير درجة الحرارة بالقرب من نهاية الريشة صغيراً، ويتحقق الشرط الأخير عندما $mL \geq 1$.

IV. درجة الحرارة عند نهاية الريشة محددة $\left[\theta(L)=\theta_L\right]$:

إن الشرط الحدي في هذه الحالة، هو:

$$\theta(L)=\theta_L \qquad \textbf{(73 - 3)}$$

ومن العلاقة (3 - 57) فإن $C_1=\theta_b-C_2$. بتعويض هذين الشرطين في معادلة الحل العام (3 - 55) نجد:

$$\theta_L=\theta_b e^{mL}-C_2e^{mL}-C_2e^{-mL}$$

$$C_2=\frac{\theta_b e^{mL}-\theta_L}{e^{mL}-e^{-mL}}$$

وبالتالي فإن قيمة الثابت C_1، هي:

$$C_1=\theta_b-\frac{\theta_b e^{mL}-\theta_L}{e^{mL}-e^{-mL}}=-\frac{\theta_b e^{-mL}+\theta_L}{e^{mL}-e^{-mL}}$$

وبالتبديل في معادلة الحل العام (3 - 55) نوجد علاقة توزع درجة الحرارة في الريشة:

$$\theta(x)=-\frac{\theta_b e^{-mL}+\theta_L}{e^{mL}-e^{-mL}}e^{mx}+\frac{\theta_b e^{mL}-\theta_L}{e^{mL}-e^{-mL}}e^{-mx}$$

$$\theta(x)=\frac{\theta_L\left(e^{mx}-e^{-mx}\right)+\theta_b\left[e^{m(L-x)}-e^{-m(L-x)}\right]}{e^{mL}-e^{-mL}}$$

$$\frac{\theta(x)}{\theta_b}=\frac{(\theta_L/\theta_b)\sinh(mx)+\sinh\left[m(L-x)\right]}{\sinh(mL)} \qquad \textbf{(74 - 3)}$$

ولإيجاد علاقة حساب معدل انتقال الحرارة من الريشة، نطبق قانون فوريه عند قاعدة الريشة مع علاقة توزع درجة الحرارة:

$$\dot{Q}_f=-\lambda A_c\left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=0}=-\lambda A_c\left.\frac{d\theta}{dx}\right|_{x=0}$$

$$\dot{Q}_f=-\lambda A_c\left.\frac{\left\{m(\theta_L/\theta_b)\cosh(mx)-m\cosh\left[m(L-x)\right]\right\}\sinh(mL)}{\sinh^2(mL)}\right|_{x=0}$$

$$\dot{Q}_f=\sqrt{\alpha P\lambda A_c}\,\theta_b\frac{\cosh(mL)-\theta_L/\theta_b}{\sinh(mL)} \qquad \textbf{(75 - 3)}$$

الجدول (3 – 3) توزع درجة الحرارة في الريش المستقيمة ذات المقطع العرضي المنتظم.

الشرط الحدي عند نهاية الريشة	توزع درجة الحرارة
$L \longrightarrow \infty$	e^{-mx}
$\theta(L) = 0$	$\dfrac{\cosh\left[m(L-x)\right]}{\cosh(mL)}$
$\left.\dfrac{d\theta}{dx}\right\|_{x=L} = 0$	$\dfrac{\cosh\left[m(L-x)\right] + (\alpha/m\lambda)\sinh\left[m(L-x)\right]}{\cosh(mL) + (\alpha/m\lambda)\sinh(mL)}$
$\alpha\theta(L) = -\lambda \left.\dfrac{d\theta}{dx}\right\|_{x=L}$	$\dfrac{(\theta_L/\theta_b)\sinh(mx) + \sinh\left[m(L-x)\right]}{\sinh(mL)}$
$\theta(L) = \theta_L$	

الجدول (3 – 4) معدل انتقال الحرارة من الريش المستقيمة ذات المقطع العرضي المنتظم.

الشرط الحدي عند نهاية الريشة	معدل انتقال الحرارة
$L \longrightarrow \infty$	$\sqrt{\alpha P \lambda A_c}\,\theta_b$
$\theta(L) = 0$	$\sqrt{\alpha P \lambda A_c}\,\theta_b \tanh(mL)$
$\left.\dfrac{d\theta}{dx}\right\|_{x=L} = 0$	$\sqrt{\alpha P \lambda A_c}\,\theta_b \dfrac{\sinh(mL) + (\alpha/m\lambda)\cosh(mL)}{\cosh(mL) + (\alpha/m\lambda)\sinh(mL)}$
$\alpha\theta(L) = -\lambda \left.\dfrac{d\theta}{dx}\right\|_{x=L}$	$\sqrt{\alpha P \lambda A_c}\,\theta_b \tanh(mL_c)$
$\theta(L) = \theta_L$	$\sqrt{\alpha P \lambda A_c}\,\theta_b \dfrac{\cosh(mL) - \theta_L/\theta_b}{\sinh(mL)}$

مثال 3 – 8:

قضيب طويل قطره $5\,\text{mm}$، درجة حرارته عند القاعدة $100\,^{\circ}\text{C}$. سطح القضيب مكشوف على هواء درجة حرارته $25\,^{\circ}\text{C}$، ومعامل انتقال الحرارة بالحمل $100\,\text{W/m}^2.\text{K}$.

1. أوجد توزع درجة الحرارة على طول القضيب في حال كان القضيب من النحاس النقي، أو سبيكة ألمنيوم 2024، أو ستانل ستيل 316 AISI. ما هو الضياع الحراري من القضيب في كل من الحالات السابقة؟

2. أوجد الطول اللازم للقضيب حتى يكون افتراض أن القضيب لانهائي الطول صحيحاً.

الحل:

المعطيات: قضيب أسطواني طويل معرَّض للهواء.

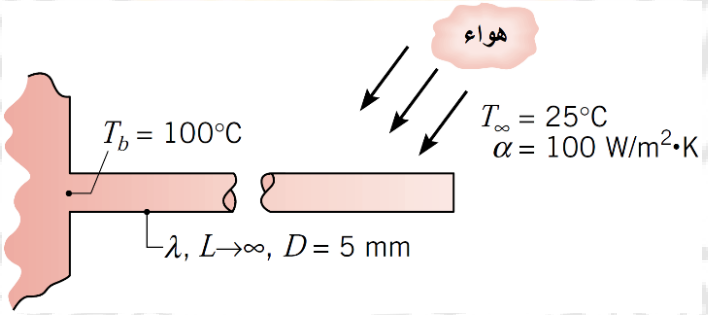
المطلوب:

1. إيجاد توزع درجة الحرارة على طول القضيب في حال كان مصنوعاً من النحاس النقي، أو سبيكة ألمنيوم 2024، أو ستانل ستيل 316 AISI. وحساب الفقد الحراري في كل حالة.
2. إيجاد الطول اللازم للقضيب حتى يكون افتراض أن القضيب لانهائي الطول صحيحاً.

الافتراضات:

1. شروط الحالة المستقرة.
2. توصيل أحادي البعد على طول القضيب.
3. خواص ثابتة.
4. التبادل الإشعاعي مع المحيط مهمل.
5. معامل انتقال الحرارة بالحمل منتظم على السطح.
6. القضيب لانهائي الطول.

الشكل:



الخواص:

الجدول (A3) نحاس نقي $\left[T = (T_b + T_\infty)/2 = 62.5\,^{\circ}C \approx 335K\right]$:

$$\lambda = 398 W/m.K$$

الجدول (A3) ألمنيوم $2024(335\,\mathrm{K})$:

$\lambda = 180\,\mathrm{W/m.K}$

الجدول (A3) ستانل ستيل $\mathrm{AISI\ 316}(335\,\mathrm{K})$:

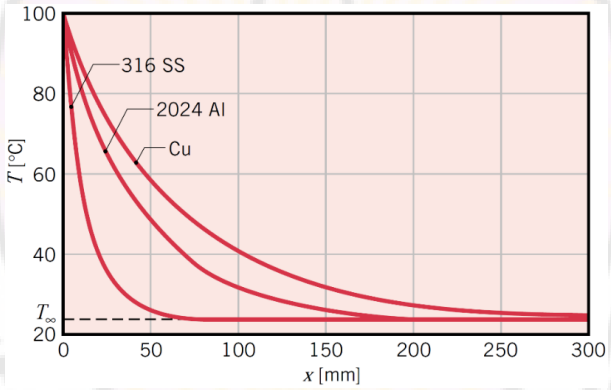
$\lambda = 14\,\mathrm{W/m.K}$

التحليل:

1. بناءً على فرضية بأن الريشة لانهائية الطول، يحسب توزع درجة الحرارة من العلاقة (3 – 61)، والتي تكتب بالشكل:

$$T = T_\infty + (T_b - T_\infty)e^{-mx} \qquad ;\ m = (\alpha P/\lambda A_c)^{1/2} = (4\alpha/\lambda D)^{1/2}$$

بتعويض المعطيات من أجل كل من النحاس والألمنيوم والستانل ستيل، نجد أن قيم m المقابلة هي على الترتيب 14.2، 21.2 ، 75.6 وبالتالي يمكن إيجاد توزع درجة الحرارة ورسمه كما في الشكل التالي.



نلاحظ من مخطط توزع درجة الحرارة أن هناك زيادة طفيفة في انتقال الحرارة تترافق مع زيادة طول القضيب أكثر من 50 mm للستانل ستيل، و 200 mm للألمنيوم، و 300 mm للنحاس.

من العلاقة (3 – 60)، فإن معدل الفقد الحراري:

$$\dot{Q}_f = \sqrt{\alpha P \lambda A_c}\,\theta_b$$

من أجل النحاس:

$$\dot{Q}_f = \Big[100\,\mathrm{W/m^2.K} \times \pi \times 0.005\,m \times 398\,\mathrm{W/m.K} \times \frac{\pi}{4}(0.005\,\mathrm{m})^2\Big]^{1/2} (100-25)\,^{\circ}\mathrm{C}$$

$$\dot{Q}_f = 8.3\,\mathrm{W}$$

وبشكل مماثل، من أجل الألمنيوم $\dot{Q}_f = 5.6\,\mathrm{W}$، ومن أجل الستانل ستيل $\dot{Q}_f = 1.6\,\mathrm{W}$.

2. بما أنه لا يحدث انتقال للحرارة من نهاية القضيب لانهائي الطول، يمكننا اختبار صحة افتراض القضيب لانهائي الطول من مقارنة العلاقتين (3 – 60)، (3 – 66). من أجل تقريب مقبول، فإن العلاقتين السابقتين تعطيان نتائج متساوية عندما $\tanh mL \geq 0.99$ أو $mL \geq 2.65$، وبالتالي يمكننا افتراض أن القضيب لانهائي الطول عندما:

$$L \geq L_\infty = \frac{2.65}{m} = 2.65\left(\frac{\lambda A_c}{\alpha P}\right)^{1/2}$$

من أجل النحاس:

$$L_\infty = 2.65\left[\frac{398\,\mathrm{W/m.K} \times (\pi/4)(0.005\,\mathrm{m})^2}{100\,\mathrm{W/m^2.K} \times \pi(0.005\,\mathrm{m})}\right]^{1/2} = 0.19\,\mathrm{m}$$

وبشكل مماثل، من أجل الألمنيوم $L_\infty = 0.13\,\mathrm{m}$، ومن أجل الستانل ستيل $L_\infty = 0.04\,\mathrm{m}$.

3 – 4 – 3 – أداء الريشة *Fin Performance*:

I. فعالية الريشة Fin Effectiveness ε_f:

كما ذكرنا سابقاً، تستخدم عملية الترييش لزيادة معدل انتقال الحرارة من السطح الأصلي من خلال زيادة مساحة سطح التبادل الحراري مع الوسط المجاور. لكن الريشة نفسها تبدي مقاومة حرارية لانتقال الحرارة بالتوصيل من السطح الأصلي إليها. ولهذا لا يمكن أن نجزم بأن معدل انتقال الحرارة سيزداد عند إجراء عملية الترييش. يتم تقويم هذا الأمر من خلال فعالية الريشة fin effectiveness ε_f. وتعرف فعالية الريشة أنها نسبة معدل الحرارة المنتقلة بواسطة الريشة إلى معدل الحرارة المنتقلة في حال عدم وجود الريشة، أي:

$$\varepsilon_f = \frac{\dot{Q}_f}{\alpha A_{c,b} \theta_b} \qquad (76-3)$$

$A_{c,b}$: مساحة المقطع العرضي للريشة عند قاعدتها.

عند تصميم الريش فإنه يتم العمل على أن تكون قيمة ε_f أكبر ما يمكن، وبشكل عام فإنه لا يتم إجراء عملية الترييش إلا إذا كان $\varepsilon_f \geq 2$.

إن وجود الريش على السطح الخارجي للجسم يؤدي إلى تغيير في قيمة معامل انتقال الحرارة بالحمل لكن هذ التغير يهمل. بفرض أن معامل انتقال الحرارة بالحمل للسطح المريش هو نفسه للسطح غير المريش، وأن المقطع العرضي للريشة منتظم $\left(A_{c,b} = A_c\right)$، فإنه من أجل حالة الريشة اللامتناهية الطول:

$$\varepsilon_f = \left(\frac{\lambda P}{\alpha A_c}\right)^{1/2} \qquad (77-3)$$

يمكننا أن نستخلص بناءً على هذه العلاقة استنتاجات عدة يجب أن تؤخذ بالحسبان عند تصميم واختيار الريش:

* يجب أن تكون الموصلية الحرارية لمادة الريشة λ أكبر ما يمكن. لذلك فإن الريش تصنع عادةً من المعدن، وبشكل خاص من النحاس والألمنيوم والحديد.
* نسبة محيط الريشة إلى مساحة مقطعها العرضي يجب أن تكون أكبر ما يمكن. ويتحقق هذا الأمر في حالة الريش المستطيلة الرقيقة أو الدائرية الرفيعة.
* إن عملية الترييش تكون أكثر فعالية في التطبيقات التي تمتلك قيماً صغيرة لمعامل انتقال الحرارة بالحمل. لذا فإننا عادةً ما نقوم بالترييش في الأوساط الغازية بدلاً من الأوساط المائعة، وفي حالة الحمل الحر بدلاً من الحمل القسري.

يمكن تقويم أداء الريشة أيضاً من خلال مفهوم المقاومة الحرارية؛ كون فرق درجات الحرارة بين قاعدة الريشة والسائل هو القوة المحركة لانتقال الحرارة، فإن المقاومة الحرارية للريشة تعرف بالعلاقة:

$$R_f = \frac{\theta_b}{\dot{Q}_f} \qquad (78-3)$$

وفي حالة الريشة اللامتناهية الطول، فإن $R_f = 1/\sqrt{\alpha P \lambda A_C}$.

إن هذه العلاقة مهمة للغاية، وبشكل خاص عند تمثيل السطح المريش بطريقة الدارات الحرارية المكافئة.

وبأخذ علاقة المقاومة الحرارية للحمل عند قاعدة الريشة في حال عدم إجراء الترييش:

$$R_b = \frac{1}{\alpha A_{c,b}} \qquad \textbf{(79 – 3)}$$

بتقسيم المعادلة (3 – 79) على المعادلة (3 – 78) والمقارنة مع العلاقة (3 – 76) نجد:

$$\varepsilon_f = \frac{R_b}{R_f} \qquad \textbf{(80 – 3)}$$

أي إنه لزيادة فعالية الريشة يجب أن نخفض من نسبة المقاومة الحرارية للتوصيل ضمن الريشة إلى المقاومة الحرارية للحمل على سطح الريشة. كما يجب ألا تكون المقاومة الحرارية للريشة أكبر من المقاومة الحرارية للسطح الأصلي في حال عدم وجود الريشة.

II. كفاءة الريشة Fin Efficiency η_f:

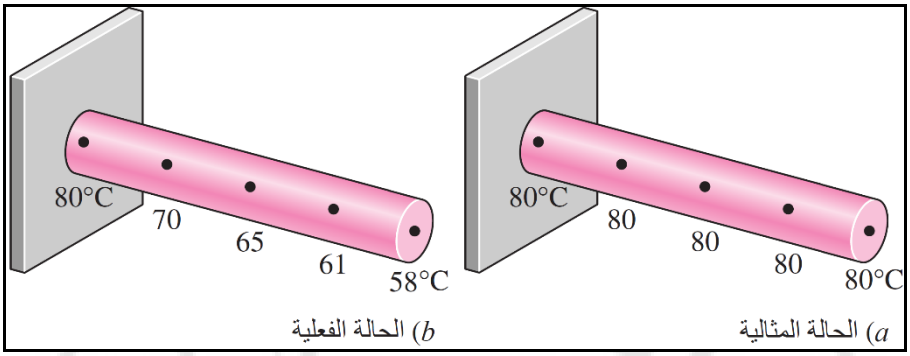
يمثل فرق درجات الحرارة بين قاعدة الريشة $(x=0)$والسائل $\left(\theta_b = T_b - T_\infty\right)$ القوة المحركة للانتقال الحراري بالحمل. نتيجةً لذلك فإن معدل انتقال الحرارة من الريشة يكون أكبر ما يمكن في حال كانت درجة حرارة سطح الريشة واحدة في نقاطه كلها ومساوية إلى درجة حرارة القاعدة، أي إن المقاومة الحرارية للريشة معدومة:

$$\dot{Q}_{f,\max} = \alpha A_f \theta_b$$

A_f : مساحة سطح كامل الريشة.

إن هذه الحالة المثالية غير موجودة في الواقع، حيث إن الريشة تمتلك مقاومة حرارية للتوصيل، وبالتالي فلا بد من وجود تدرج في درجة الحرارة على طول الريشة، أي إن درجة الحرارة تنخفض على طول الريشة، ونتيجة ذلك فإن معدل انتقال الحرارة من الريشة سيكون أقل منه في حال كانت المقاومة الحرارية للتوصيل ضمن الريشة معدومة، بسبب تناقص فرق درجات الحرارة $\left(T(x) - T_\infty\right)$ باتجاه نهاية الريشة، كما يبين الشكل (3 – 22). بناءً على ما سبق، نعرف كفاءة الريشةfin efficiency η_f بأنها نسبة معدل انتقال الحرارة الفعلي إلى معدل انتقال الحرارة الأعظمي (في حال كانت درجة حرارة كامل سطح الريشة ثابتة ومساوية لدرجة حرارة القاعدة):

$$\eta_f = \frac{\dot{Q}_f}{\dot{Q}_{f,\max}} \qquad \textbf{(81 – 3)}$$



الشكل (3 – 22) التوزع المثالي والفعلي لدرجة الحرارة في ريشة.

من أجل ريشة مستقيمة ذات مقطع عرضي ثابت ونهاية أديباتية فإن:

نهاية أديباتية: (3 – 82)
$$\eta_f = \frac{\sqrt{\alpha P \lambda A_c}\,\theta_b \tanh(mL)}{\alpha P L \theta_b} = \frac{\tanh(mL)}{mL}$$

أما في حالة الريشة ذات الطول اللانهائي فإن: $\left[\tanh(mL)\right] \to 1$ عندما $L \to \infty$

أي إن:

طول لانهائي: (3 – 83)
$$\eta_f = \frac{1}{mL}$$

وفي الحالة العامة، حيث يوجد انتقال حرارة بالحمل من نهاية الريشة، فإننا نستبدل طول الريشة L بالطول المصحح L_c ، وتصبح علاقة كفاءة الريشة بالشكل:

حمل عند النهاية: (3 – 84)
$$\eta_f = \frac{\tanh(mL_c)}{mL_c}$$

من أجل ريشة ذات مقطع مستطيل، إذا كان عرض الريشة أكبر بكثير من سماكتها $(w > t)$ ، فإن محيط الريشة يساوي تقريباً إلى $P = 2w$ ، وبناءً على ذلك:

$$m = \sqrt{\frac{\alpha P}{\lambda A_c}} = \sqrt{\frac{\alpha(2w)}{\lambda(wt)}} = \sqrt{\frac{2\alpha}{\lambda t}}$$

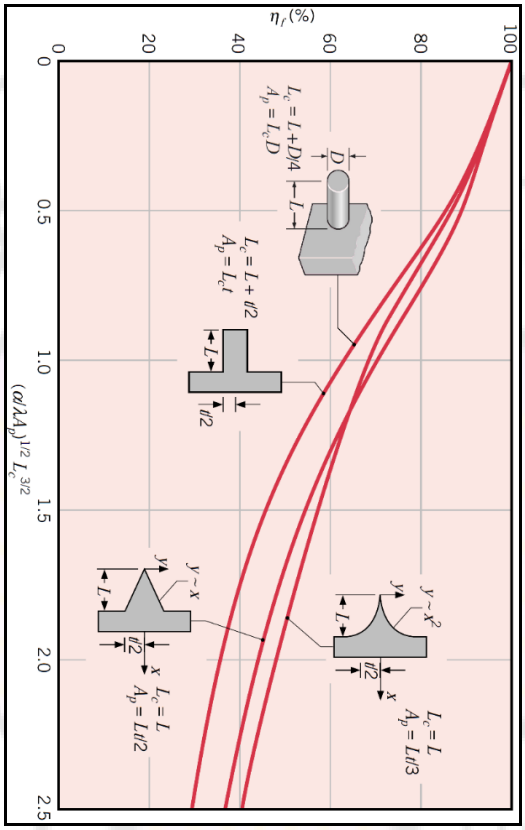
ومنه:

$$mL_c = \left(\frac{2\alpha}{\lambda L}\right)^{1/2} L_c$$

بضرب البسط والمقام بـ $L^{1/2}$ ، وتعريف مساحة المقطع الجانبي للريشة $A_p = L_c t$ ، تصبح العلاقة السابقة بالشكل:

$$mL_c = \left(\frac{2\alpha}{\lambda A_p} \right)^{1/2} L^{3/2}$$

ويبين الشكل (3 – 23) قيم كفاءة الريشة لبعض الريش المستقيمة كتابع لـ mL_c .

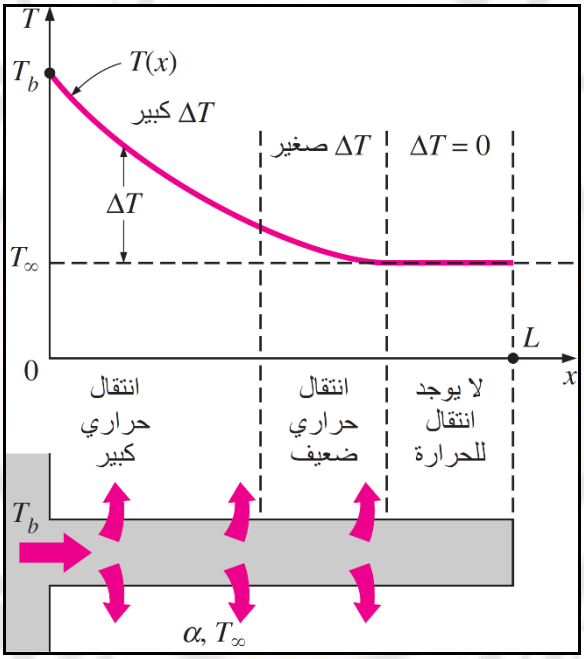


الشكل (3 – 23) كفاءة الريش المستقيمة عند أشكال مختلفة للمقطع الجانبي (مستطيل، مثلث، قطع مكافئ).

III. الطول الأنسب للريشة Proper Length of a Fin:

عند تصميم الريش فإن إحدى الخطوات المهمة في التصميم هي تحديد الطول المناسب للريشة، وذلك بعد تحديد المادة التي ستصنع منها الريشة ومقطعها العرضي. للوهلة الأول نتصور أنه كلما زاد طول الريشة كان زادت مساحة سطح التبادل الحراري، وبالتالي زاد معدل الانتقال الحرارة من الريشة، أي إنه من أجل الحصول على أكبر قدر من انتقال الحرارة يجب أن تكون الريشة لامتناهية الطول. في الواقع، تتناقص درجة حرارة سطح الريشة على طولها وفق تابع أسي، وبالتالي فإن درجة حرارة الريشة عند طول معين ستصل إلى قيمة مساوية لدرجة حرارة

الوسط المحيط، ومنه فإن أي زيادة في طول الريشة بعد هذه القيمة الحدية ستكون بلا فائدة، حيث إن هذا الجزء الزائد لن يشارك في عملية انتقال الحرارة كون درجة حرارته مساوية لدرجة حرارة الوسط المحيط، كما هو مبين في الشكل (3 – 24). لذا فإن تصميم ريشة بطول زائد أمر غير مبرّر، حيث ينجم عنه هدر في المواد، وزيادة في الوزن والحجم، من دون أي فائدة في المقابل. فضلاً عن، فإن الريش ذات الطول الكبير بحيث تكون درجة حرارة نهاية الريشة مقاربة لدرجة حرارة الوسط المحيط غير مفضلة أيضاً، حيث إن الزيادة الطفيفة في معدل انتقال الحرارة عند نهاية الريشة لا تبرّر الزيادة الكبيرة في الوزن والتكلفة.



الشكل (3 – 24) تناقص درجة الحرارة في الريشة وتأثيره على عملية انتقال الحرارة.

من أجل التوصل إلى الطول الأنسب للريشة، نقارن انتقال الحرارة من ريشة ذات طول محدد مع انتقال الحرارة من ريشة ذات طول لانهائي، عند الشروط نفسها. وتكون النسبة بين معدلي انتقال الحرارة للحالتين هي:

$$\frac{\dot{Q}_f}{\dot{Q}_{f,long}} = \frac{\sqrt{\alpha P \lambda A_c}\,\theta_b \tanh(mL)}{\sqrt{\alpha P \lambda A_c}\,\theta_b} = \tanh(mL) \qquad \textbf{(85 – 3)}$$

من الجدول (3 – 5)، نلاحظ أن معدل انتقال الحرارة من الريشة يزداد بشكل شبه خطي في البداية، ومن ثم يصبح هذا الازدياد أقل شدة، ونصل إلى حالة مكافئة لحالة الطول اللانهائي للريشة

من أجل $mL = 5$. بالتالي فإن الريش التي طولها $L = \frac{1}{5}m$ يمكن عدها كريشة ذات طول لانهائي. نلاحظ من الجدول أيضاً أن تخفيض طول الريشة بمقدار النصف $(mL = 2.5)$ يؤدي إلى انخفاض معدل انتقال الحرارة بنسبة 1%، أي إننا نخفض من حجم الريشة وكمية المواد اللازمة في تصنيعها وتكلفتها بنسبة 50% في مقابل انخفاض في معدل انتقال الحرارة قدره 1%، وبالتالي من غير المنطقي زيادة طول الريشة من أجل الحصول على هذا القدر الضئيل من انتقال الحرارة.

الجدول 3 – 5 التغير في نسبة معدل انتقال الحرارة من ريشة محدودة الطول بتغير طولها إلى أخرى لامتناهية في الطول.

mL	$\frac{\dot{Q}_f}{\dot{Q}_{f,long}} = \tanh(mL)$
0.1	0.1
0.2	0.197
0.5	0.462
1	0.762
1.5	0.905
2	0.964
2.5	0.987
3	0.995
4	0.999
5	1

3 – 4 – 4 – الكفاءة الكلية للسطح المريش

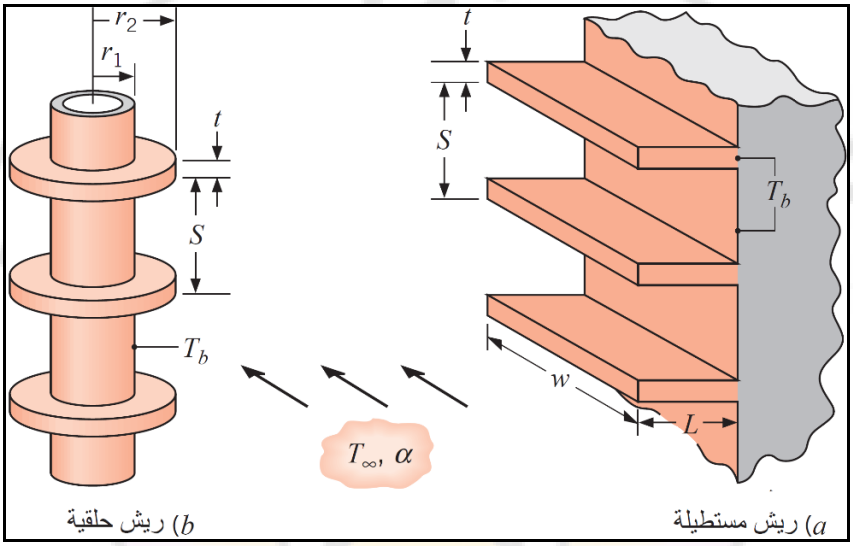
***Overall Finned Surface Efficiency*:**

بخلاف كفاءة الريشة η_f والتي توصّف أداء ريشة مفردة، فإن الكفاءة الكلية للسطح المريش η_0 توصف أداء مصفوفة من الريش فضلاً عن الجزء المكشوف من السطح الأصلي (القاعدة) الذي تستند إليه هذه الريش. يبين الشكل (3 – 23) تمثيلاً لمصفوفة من الريش، حيث S هي خطوة الترييش، أي المسافة الفاصلة بين مركزي ريشتين متتاليتين. وتعطى الكفاءة الكلية للسطح المريش بالعلاقة:

$$\eta_0 = \frac{\dot{Q}_t}{\dot{Q}_{\max}} = \frac{\dot{Q}_t}{\alpha A_t \theta_b} \qquad (86-3)$$

$\dot{Q}_t$: معدل انتقال الحرارة الكلي من السطح A_t.

A_t: المساحة الكلية للسطح؛ أي مساحة سطح الريش بالإضافة إلى مساحة الجزء المكشوف من القاعدة (والذي يسمى عادةً بالسطح الأولي).



الشكل (3 – 25) مخطط تمثيلي لمصوفة ريش.

إذا كان هناك N ريشة في المصفوفة، ومساحة سطح كل ريشة A_f، ومساحة السطح الأولي A_b، بالتالي فإن المساحة الكلية هي:

$$A_t = NA_f + A_b \qquad (87-3)$$

إن أعظم قيمة للتدفق الحراري تتحقق في حال كانت درجة حرارة كامل سطح الريشة والسطح الأساسي مساوية إلى درجة حرارة قاعدة الريشة T_b.

يعطى معدل انتقال الحرارة الكلي بالحمل من الريش والسطح الأساسي بالعلاقة:

$$\dot{Q}_t = N\eta_f \alpha A_f \theta_b + \alpha A_b \theta_b \qquad (88-3)$$

وبفرض أن معامل انتقال الحرارة بالحمل α هو نفسه للسطح المريش وغير المريش، بالتالي:

$$\dot{Q}_t = \alpha\left[N\eta_f A_f + (A_t - NA_f)\right]\theta_b$$

$$\dot{Q}_t = \alpha A_t \left[1 - \frac{NA_f}{A_t}(1-\eta_f)\right]\theta_b \qquad \textbf{(89 - 3)}$$

بتبديل المعادلة (3 – 89) في المعادلة (3 – 86) نحصل على علاقة الكفاءة الكلية للسطح المريش:

$$\eta_0 = 1 - \frac{NA_f}{A_t}(1-\eta_f) \qquad \textbf{(90 - 3)}$$

من تعريف المقاومة الحرارية للريشة، وباستخدام العلاقتين (3 – 78)، (3 – 86)، نوجد علاقة المقاومة الحرارية لسطح مريش:

$$R_0 = \frac{\theta_b}{Q_t} = \frac{1}{\eta_0 \alpha A_t} \qquad \textbf{(91 - 3)}$$

R_0 : المقاومة الفعالة للسطح المريش، وتأخذ بالحسبان المسارات المتوازية للانتقال الحراري توصيل/حمل في الريش، والانتقال بالحمل من السطح الأساسي. يوضح الشكل (3 – 24) الدارات الحرارية المكافئة المقابلة للمسارات المتوازية للانتقال الحراري من السطوح المريشة، وتمثيل هذه المسارات بدلالة المقاومة الفعالة.

إذا كانت الريش مصنعة كجزء من القاعدة، كما في الشكل (3 – 25 a)، فإن مقاومة الاتصال الحرارية في هذه الحالة معدومة عند قاعدة الريشة. بشكل عام، تصنع الريش بشكل منفصل ومن ثم تركب على القاعدة، كما في الشكل (3 – 25 b)، وفي هذه الحالة توجد مقاومة اتصال حرارية R_c تؤثر على الأداء الحراري الكلي. من أجل حالة كهذه، فإن المقاومة الفعّالة للسطح المريش يجب أن تأخذ في الحسبان مقاومة الاتصال:

$$R_{0(c)} = \frac{\theta_b}{\dot{Q}_t} = \frac{1}{\eta_{0(c)} \alpha A_t} \qquad \textbf{(92 - 3)}$$

وتكون الكفاءة الكلية في هذه الحالة:

$$\eta_{0(c)} = 1 - \frac{NA_f}{A_t}\left[1 - \frac{\eta_f}{1 + \eta_f \alpha A_f \left(R_c / A_{c,b}\right)}\right] \qquad \textbf{(93 - 3)}$$

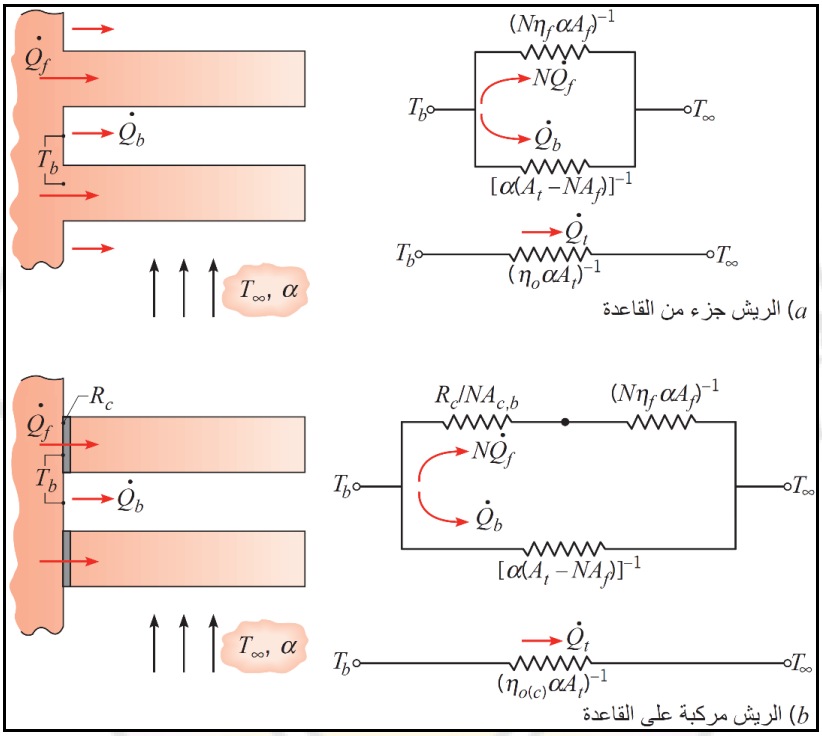
$A_{c,b}$: مساحة المقطع العرضي لقاعدة الريشة.

أما الفعالية الكلية للسطح المريش فتعطى بالعلاقة:

$$\varepsilon_0 = \frac{\dot{Q}_t}{\dot{Q}_0} = \frac{\alpha\left(A_b + \eta_f A_f\right)\theta_b}{\alpha A_0 \theta_b} \qquad \textbf{(94 - 3)}$$

$\dot{Q}_0$: معدل انتقال الحرارة من السطح في حالة عدم وجود ريش.

A_0 : مساحة السطح في حالة عدم وجود ريش.



الشكل (3 – 26) الدارة الحرارية المكافئة لمصفوفة ريش.

مثال 3 – 9:

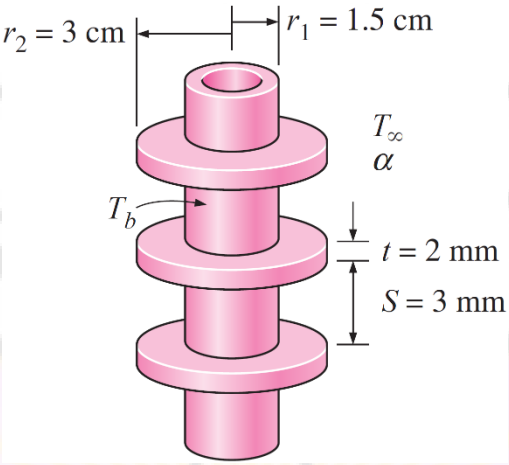
يتدفق بخار في نظام تسخين عبر أنابيب قطرها الخارجي $D_1 = 3\text{cm}$، ودرجة حرارة سطحها ثابتة $120\,^{\circ}\text{C}$. يركب على السطح الخارجي للأنابيب ريش دائرية من سبيكة الألمنيوم 2024، قطرها الخارجي $D_2 = 6\text{cm}$، وسماكتها ثابتة $t = 2\text{mm}$. المسافة بين الريش هي 3mm، وبالتالي يوجد 200 ريشة في كل متر من طول الأنابيب. تنتقل الحرارة للهواء المحيط والذي درجة حرارته $T_\infty = 25\,^{\circ}\text{C}$، ومعامل الحمل الحراري $\alpha = 60\,\text{W/m}^2.\text{K}$. احسب الزيادة في انتقال الحرارة من واحدة الطول من الأنابيب نتيجة وجود الريش، وكفاءة السطح المريش.

الحل:

المعطيات: أنابيب بخار على سطحها الخارجي ريش دائرية من الألمنيوم 2024 يتعرض للهواء المحيط.

المطلوب: حساب الزيادة في انتقال الحرارة من واحدة طول الأنابيب نتيجة تركيب الريش، وكفاءة السطح المريش.

الشكل:



الافتراضات:

1. شروط الحالة المستقرة.
2. معامل الحمل الحراري منتظم على كامل سطح الريش.
3. الخواص ثابتة.
4. التبادل الإشعاعي مع المحيط مهمل.

الخواص:

الجدول (A3) ألمنيوم $(T = 273+120 = 393\,\mathrm{K})$ 2024:

$$\lambda = 180\,\mathrm{W/m.K}$$

التحليل: في حال عدم وجود ريش، يحسب معدل انتقال الحرارة من الأنبوب وفق قانون نيوتن للتبريد:

$$\dot{Q}_0 = \alpha A_0 \theta_b = \alpha \pi D_1 L \theta_b$$
$$= 60\,\mathrm{W/m^2.{}^\circ C} \times \pi \times 0.03\,\mathrm{m} \times 1\,\mathrm{m} \times 95\,{}^\circ\mathrm{C} = 537\,\mathrm{W}$$

حيث إن:

$$\theta_b = T_b - T_\infty = 120 - 25 = 95\,{}^\circ\mathrm{C} = 95\,\mathrm{K}$$

نوجد كفاءة الريش الدائرية المركبة على سطح أنبوب أسطواني من الشكل (3 – 22)، حيث:

$$L = \frac{D_2 - D_1}{2} = \frac{0.06\,\text{m} - 0.03\,\text{m}}{2} = 0.015\,\text{m}$$

وفي هذه الحالة فإن:

$$r_{2c} = r_2 + \tfrac{1}{2}t = 0.03\,\text{m} + \tfrac{1}{2}\times 0.002\,\text{m} = 0.031\,\text{m}$$
$$L_c = L + \tfrac{1}{2}t = 0.015\,\text{m} + \tfrac{1}{2}\times 0.002\,\text{m} = 0.016\,\text{m}$$
$$A_p = L_c t = 0.016\,\text{m}\times 0.002\,\text{m} = 32\times 10^{-6}\,\text{m}^2$$

ومنه:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{r_{2c}}{r_1} = \frac{0.031\,\text{m}}{0.015\,\text{m}} = 2.07 \\ &L_c^{3/2}\left(\frac{\alpha}{\lambda A_p}\right)^{1/2} = (0.016\,\text{m})^{3/2}\left(\frac{60\,\text{W/m}^2.\text{K}}{180\,\text{W/m.K}\times 32\times 10^{-6}\,\text{m}^2}\right)^{1/2} \\ &\qquad = 0.207 \end{aligned}\right\} \eta_f = 0.95$$

ومساحة سطح الريشة هي:

$$\begin{aligned} A_f &= 2\pi\left(r_2^2 - r_1^2\right) + 2\pi r_2 t \\ &= 2\pi\left[(0.03\,\text{m})^2 - (0.015\,\text{m})^2\right] + 2\pi\times 0.03\,\text{m}\times 0.002\,\text{m} \\ &= 0.00462\,\text{m}^2 \end{aligned}$$

بما أنه يوجد 200 ريشة، وبالتالي 200 فراغ بين الريش، لكل متر واحد من طول الأنبوب، بالتالي فإن مساحة السطح غير المريش هي:

$$A_b = N\,\pi D_1 S = 200\times\pi\times 0.03\,\text{m}\times 0.003\,\text{m} = 0.00565\,\text{m}^2$$

ومنه، فإن معدل انتقال الحرارة الكلي من سطح الأنبوب بوجود ريش هو:

$$\begin{aligned} \dot{Q}_t &= N\,\eta_f\,\alpha A_f\,\theta_b + \alpha A_b\,\theta_b \\ &= 200\times 0.95\times 60\,\text{W/m}^2.\text{K}\times 0.00462\,\text{m}^2\times 95\,\text{K} \\ &\quad + 60\,\text{W/m}^2.\text{K}\times 0.00565\,\text{m}^2\times 95\,\text{K} \\ &= 5036\,\text{W} \end{aligned}$$

وبالتالي فإن الزيادة في معدل انتقال الحرارة من واحدة طول الأنبوب نتيجة إضافة الريش هي:

$$\Delta\dot{Q} = \dot{Q}_f - \dot{Q}_0 = 5036\,\mathrm{W} - 537\,\mathrm{W} = 4499\,\mathrm{W}$$

وتحسب كفاءة السطح المريش من العلاقة (3 – 86):

$$A_t = A_b + NA_f = 0.00566\,\mathrm{m}^2 + 0.00462\,\mathrm{m}^2 = 0.92965\,\mathrm{m}^2$$

$$\eta_0 = \frac{\dot{Q}_t}{\dot{Q}_{\max}} = \frac{\dot{Q}_t}{\alpha A_t \theta_b}$$

$$= \frac{5036\,\mathrm{W}}{60\,\mathrm{W/m^2.K} \times 0.92965\,\mathrm{m}^2 \times 95\,\mathrm{K}} = 95\%$$

المناقشة: الفعالية الكلية لسطح الأنبوب المريش هي:

$$\varepsilon_0 = \frac{\dot{Q}_t}{\dot{Q}_0} = \frac{5036\,\mathrm{W}}{537\,\mathrm{W}} = 9.4$$

وبالتالي فإن معدل انتقال الحرارة من أنبوب البخار ازداد 9.4 ضعف نتيجة تركيب الريش. هذا الأمر يفسر الاستخدام الواسع للسطوح المريشة.

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الفصل الرابع
أسس الحمل الحراري
Fundamentals of Convection

لقد درسنا حتى الآن التوصيل الحراري، وهي الآلية التي تنتقل بواسطتها الحرارة في الأجسام الصلبة والسوائل الساكنة. سندرس الآن الحمل الحراري، وهي الآلية التي تنتقل بواسطتها الحرارة ضمن السوائل عند وجود حركة كلية للسائل bulk fluid motion.

يصنف الحمل الحراري إلى طبيعي natural (حر free) وقسري forced، وذلك بحسب طبيعة حركة السائل. يتم تحريك السائل في الحمل القسري على سطح أو داخل مجرى بوسائل خارجية مثل المضخات أو المراوح، أما في الحمل الطبيعي فإن السائل يتحرك بطرق طبيعية كتأثير الطفو، أي إن السائل الساخن يصعد نحو الأعلى بينما يهبط السائل الأبرد نحو الأسفل. يصنف الحمل أيضاً إلى خارجي external وداخلي internal، ويعتمد ذلك على كون السائل يتحرك على سطح ما أو داخل مجرى.

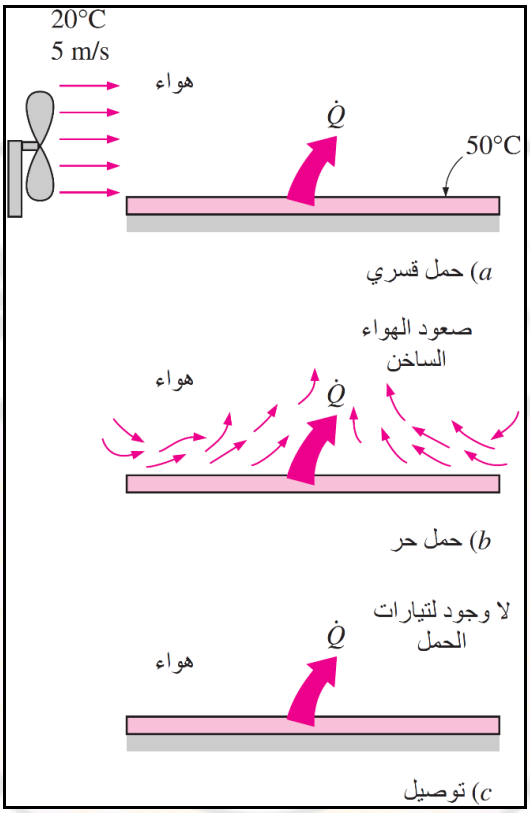
4 - 1 - الآلية الفيزيائية للحمل *Physical Mechanism of Convection*:

بينا سابقاً أن الحرارة تنتقل بثلاث آليات أساسية هي التوصيل والحمل والإشعاع. يتشابه التوصيل والحمل بأن كلاهما يتطلب وجود وسط مادي حتى تنتقل الحرارة عبره، ولكن الاختلاف يكمن في أن الحمل يتطلب وجود سائل متحرك.

يحدث انتقال الحرارة في الأجسام الصلبة بواسطة التوصيل فقط، حيث إن الأبعاد النسبية بين جزيئات الجسم ثابتة. أما ضمن السوائل (موائع وغازات) فإن الحرارة تنتقل بالتوصيل والحمل أيضاً، وذلك في حال وجود حركة كلية للسائل، ولكن في حال عدم وجود هذه الحركة فإن انتقال الحرارة يقتصر على التوصيل. وبناءً على ذلك يمكن اعتبار التوصيل الحراري في سائل حالة خاصة من الحمل، والتي تحدث في حالة سائل ساكن quiescent fluid، ويبين الشكل (4 – 1) ذلك.

إن عملية انتقال الحرارة بالحمل هي عملية معقدة؛ لكونها تتضمن حركة السائل وانتقال الحرارة بالتوصيل. إن حركة السائل تعزز من انتقال الحرارة، حيث تقوم وبشكل مستمر بمزج دفعات من السائل ذات درجات حرارة مختلفة، مما يزيد من معدلات التوصيل الحراري ضمن

السائل؛ بالتالي فإن معدل انتقال الحرارة بالحمل أكبر منه بالتوصيل، كما يجب أن ننوه إلى أنه بزيادة سرعة السائل يزداد معدل انتقال الحرارة.



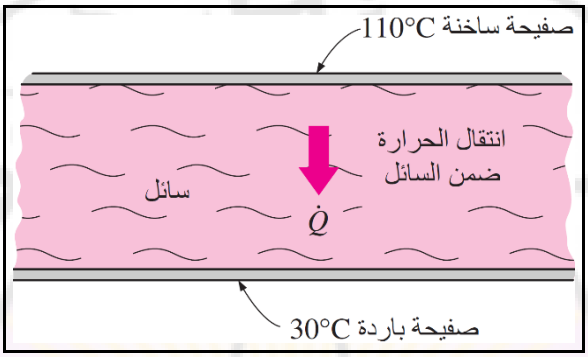
الشكل (4 – 1) انتقال الحرارة من سطح ساخن إلى سائل مجاور.

من أجل توضيح هذه النقطة، لنفترض وجود انتقال حرارة مستقر ضمن سائل محصور بين صفيحتين درجتا حرارتهما مختلفتان، كما في الشكل (4 – 2)، وكما نعلم فإن درجة حرارة السائل في مواضع التماس مع الصفيحة ستكون مساوية لدرجة حرارة الصفيحة.

بفرض أن السائل ساكن، بالتالي فإن الطاقة ستنتقل من جزيئات السائل الساخنة الواقعة على تماس مع الصفيحة الساخنة إلى الجزيئات الباردة المجاورة لها، ومن ثم ستنتقل هذه الطاقة من الجزيئات السابقة إلى الجزيئات الأبرد المجاورة لها، ويستمر الأمر على هذا المنوال حتى تصل الطاقة في النهاية إلى الصفيحة الباردة، وهذا هو ما يحدث في حالة انتقال الحرارة بالتوصيل ضمن سائل. لنفترض الآن أننا قمنا بسحب جزء من السائل الموجود بالقرب من الصفيحة الساخنة ومن ثم قمنا بحقنه بالقرب من الصفيحة الباردة، وكررنا هذه العملية بشكل

مستمر. يمكننا أن نتصور أن العملية السابقة ستسرع من عملية انتقال الحرارة بشكل كبير، حيث إن قسماً من الطاقة يتم حمله إلى الطرف الآخر بواسطة حركة السائل.

كما نعلم فإننا إذا أردنا تبريد قطعة معدنية ساخنة، فإننا نعرضها إلى هواء بارد يتحرك بواسطة مروحة، وفي حال أردنا تسريع التبريد، فإننا نزيد من سرعة المروحة، كما يمكننا تسريع هذه العملية بشكل كبير في حال استعضنا عن الهواء بالماء.



الشكل (4 – 2) انتقال الحرارة ضمن سائل محصور بين صفيحتين.

أظهرت التجارب أن انتقال الحرارة بالحمل يتعلق بشدة بخواص السائل؛ اللزوجة التحريكية dynamic viscosity μ، الموصلية الحرارية thermal conductivity λ، الكثافة density ρ، الحرارة النوعية specific heat c_p، كما يتعلق بسرعة السائل V. فضلاً عن ذلك فإن الحمل الحراري يتعلق بالشكل الهندسي للسطح الصلب وخشونته، فضلاً عن طبيعة الجريان. وبالتالي فإن تحليل انتقال الحرارة بالحمل أكثر تعقيداً من عملية التوصيل، حيث أن هذه العملية تتعلق بعدد كبير من المتحولات.

بغض النظر عن تعقيدات الحمل الحراري، فإن معدل انتقال الحرارة بالحمل يتناسب طرداً مع فرق درجات الحرارة، ويعطى وفق قانون نيوتن للتبريد:

$$\dot{q}_{conv} = \alpha (T_s - T_\infty) \quad \left[\mathrm{W/m^2}\right] \qquad (1-4)$$

$$\dot{Q}_{conv} = \alpha A_s (T_s - T_\infty) \quad [\mathrm{W}] \qquad (2-4)$$

α: معامل انتقال الحرارة بالحمل. $\left[\mathrm{W/m^2.^\circ C}\right]$

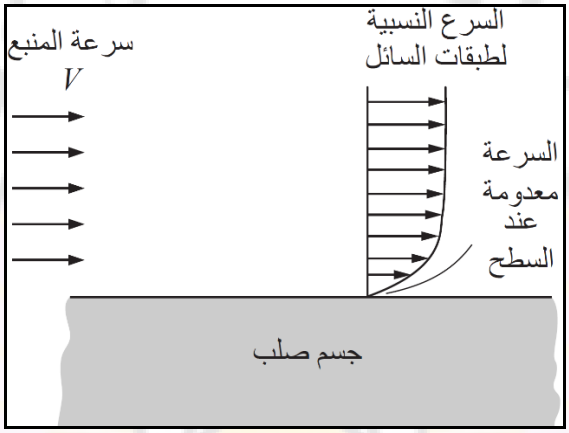
A_s: مساحة سطح التبادل الحراري. $\left[\mathrm{m^2}\right]$

T_s: درجة حرارة السطح. $\left[^\circ\mathrm{C}\right]$

T_∞: درجة حرارة التيار الحر للسائل. $\left[^\circ\mathrm{C}\right]$

ونعرّف معامل انتقال الحرارة بالحمل بأنه معدل انتقال الحرارة بين سائل وسطح صلب وذلك من أجل واحدة المساحة وعند فرق درجات حرارة مساوٍ للواحد.

في حال جريان سائل على سطح صلب غير مسامي (لا يسمح بنفاذ السائل) فإن السائل الملامس للسطح سيتوقف عن الحركة، وستتعدم سرعته بالنسبة للسطح، أي إن طبقة السائل الواقعة على تماس مباشر مع السطح ستلتصق به، ولن يحدث انزلاق فيما بينهما. تعرف هذه الظاهرة في جريان السوائل بشرط عدم الانزلاق non - slip condition، وينتج بسبب لزوجة السائل، كما يبين الشكل (4 – 3).



الشكل (4 – 3) شرط عدم الانزلاق عند جريان سائل على سطح ثابت.

يؤدي شرط عدم الانزلاق إلى تطور بروفايل السرعة في السائل. نتيجة الاحتكاك بين طبقات السائل فإن الطبقة الملاصقة للجدار ستبطئ طبقة السائل الملاصقة لها، والتي تقوم بدورها بإبطاء الطبقة المجاورة لها وهكذا.

بشكل مشابه لشرط عدم الانزلاق، عند تماس جسمين لهما درجتا حرارة مختلفتان سيحدث انتقال للحرارة بين الجسمين، ويستمر هذا الانتقال حتى تتساوى درجتا حرارة الجسمين في منطقة التماس؛ بالتالي فإنه عند جريان سائل على سطح صلب فإن درجتا حرارتهما ستكونان متساوية في منطقة التماس. تعرف هذه الظاهرة بشرط عدم قفز درجة الحرارة no - temperature - jump condition.

نتيجة وجود شرطي عدم الانزلاق وعدم قفز درجة الحرارة، فإن الانتقال الحراري بين السطح الصلب وطبقة السائل المجاورة له يحدث بالتوصيل الصافي pure conduction، ويمكن أن نعبر عن ذلك بالعلاقة:

$$\dot{q}_{\text{conv}} = \dot{q}_{\text{cond}} = -\lambda_{\text{fluid}} \left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=0} \quad \left[\text{W/m}^2\right] \qquad \textbf{(3 - 4)}$$

حيث تمثل T درجة حرارة السائل، ويمثل الحد $\left(\partial T/\partial y\right)_{y=0}$ تدرج درجة الحرارة عند السطح. بعد ذلك تنتقل هذه الحرارة بعيداً عن السطح نتيجة حركة السائل. يجب أن ننوه إلى أن الحرارة المنتقلة بالحمل من سطح صلب إلى سائل تقتصر فقط على الحرارة المنتقلة بالتوصيل من السطح إلى طبقة السائل المجاورة له؛ وبالتالي بالمساواة بين العلاقتين (4 - 1)، (4 - 3) نحصل على العلاقة:

$$\alpha = \frac{-\lambda_{\text{fluid}} \left(\partial T/\partial y\right)_{y=0}}{T_s - T_\infty} \qquad \textbf{(4 - 4)}$$

والتي تستخدم في تحديد معامل انتقال الحرارة بالحمل في حال كان توزع درجة الحرارة ضمن السائل معروفاً.

في الحالة العامة، فإن معامل انتقال الحرارة بالحمل يتغير على طول الجريان، وبالتالي فإن معامل الحمل الوسطي في هذه الحالة يؤخذ كمتوسط حسابي لمعاملات الحمل الموضعية على كامل السطح.

عدد نوسلت *Nusselt Number*:

في أثناء دراسة انتقال الحرارة بالحمل فإننا عادةً ما نقوم بتحويل المعادلات الناظمة إلى الشكل اللابعدي، وذلك باستخدام الأعداد اللابعدية، بهدف التقليل من عدد المتحولات في أثناء الدراسة. وبشكل مشابه فإننا نقوم بتحويل معامل انتقال الحرارة بالحمل إلى شكل لا بعدي عن طريق عدد نوسلت، والذي يعرف بالعلاقة:

$$\text{Nu} = \frac{\alpha L_c}{\lambda} \qquad \textbf{(5 - 4)}$$

λ : الموصلية الحرارية للسائل.

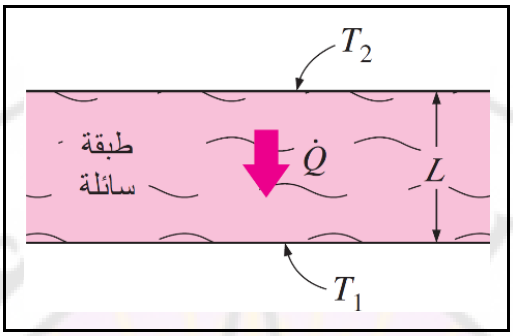
L_c : الطول المميز characteristic length.

وينظر إلى عدد نوسلت على أنه معامل الحمل الحراري اللابعدي.

لفهم المعنى الفيزيائي لعدد نوسلت ندرس طبقة من سائل ما، سماكتها L ، وتمتلك فرقاً في درجات الحرارة $\Delta T = T_2 - T_1$ ، كما في الشكل (4 - 4). في حال وجود حركة في السائل، فإن الحرارة ستنتقل ضمن هذه الطبقة بالحمل، أما في حال كان السائل ساكناً، فإن الحرارة ستنتقل بالتوصيل. وتعطى شدة التدفق الحراري في كلتا الحالتين بالعلاقات:

$$\dot{q}_{\text{conv}} = \alpha \Delta T$$

$$\dot{q}_{\text{cond}} = -\lambda \frac{\Delta T}{L}$$



الشكل (4 – 4) انتقال الحرارة في طبقة من سائل ما.

وبنسب العلاقتين السابقتين إلى بعضهما:

$$\frac{\dot{q}_{\text{conv}}}{\dot{q}_{\text{cond}}} = \frac{\alpha \Delta T}{\lambda \Delta T / L} = \frac{\alpha L}{\lambda} = \text{Nu}$$

أي إن عدد نوسلت يمثل الزيادة في انتقال الحرارة ضمن طبقة سائل بواسطة الحمل بالنسبة إلى الانتقال بواسطة التوصيل ضمن الطبقة نفسها؛ بالتالي فإنه كلما كان عدد نوسلت أكبر كان الحمل أكثر فاعلية. في حال كان $\text{Nu} = 1$ فإن الحرارة تنتقل بواسطة التوصيل الصافي.

4 - 2 - تصنيف جريانات المائع *Classification of Fluid Flows*:

يرتبط انتقال الحرارة بالحمل بشكل وثيق بميكانيك السوائل، وهو العلم الذي يدرس سلوك السوائل في حالة السكون أو الحركة، والتفاعلات المتبادلة بين السائل والأجسام الصلبة أو السوائل الأخرى الواقعة عند حدوده. توجد طرق عدة لتصنيف جريانات السوائل، وسنقوم بعرض بعض التصنيفات العامة.

4 – 2 – 1 – الجريان اللزج وغير اللزج *Viscous and Inviscid Flow*:

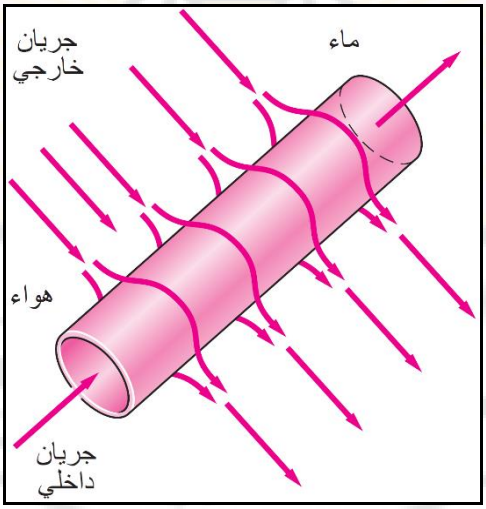
يؤدي حدوث حركة نسبية بين طبقتي سائل إلى نشوء قوى احتكاك بينهما، حيث تقوم الطبقة الأبطأ بإبطاء الطبقة الأسرع، وتسمى هذه المقاومة الداخلية باللزوجة viscosity، والتي

تقيس شدة الالتصاق في السائل. تنشأ اللزوجة بتأثير قوى الترابط بين الجزيئات في الموائع، بينما تنشأ بتأثير تصادم الجزيئات في الغازات.

لا يوجد في الواقع سائل غير لزج، حيث إن جريانات السوائل جميعها تتأثر باللزوجة بدرجة متفاوتة. في حال كان تأثير اللزوجة كبيراً على الجريان فإننا نسميه بالجريان اللزج viscous flow، أما في حال كان تأثير اللزوجة صغيراً جداً، فإننا نقوم بإهمال هذا التأثير، الأمر الذي يؤدي إلى تبسيط التحليل بشكل كبير من دون أن يؤثر كثيراً على الدقة، ويسمى هذا النوع من الجريانات المثالية بالجريان غير اللزج inviscid flow.

4 – 2 – 2 – الجريان الداخلي والخارجي *Internal and External Flow*:

يصنف الجريان على أنه داخلي أو خارجي استناداً إلى كون السائل يجري ضمن مجرى أو على سطح. في حال كان السائل يجري بشكل غير مقيد على سطح ما (صفيحة، سلك، أنبوب)، فإننا نسمي هذا الجريان خارجياًexternal flow. أما في حال كان جريان السائل مقيداً بسطح صلب (أنبوب، مجرى) فإن الجريان في هذه الحالة داخلي internal flow، كما في الشكل (4 – 5).



الشكل (4 – 5) الجريان الداخلي والخارجي.

4 – 2 – 3 – الجريان القابل وغير القابل للانضغاط

***Compressible and Incompressible Flow*:**

يصنف الجريان على أنه قابل أو غير قابل للانضغاط بناءً على تغير كثافة السائل في أثناء الجريان. تعد كثافة الموائع ثابتة، وبالتالي تصنف جريانات الموائع بأنها غير قابلة للانضغاط incompressible flow، وتصنف الموائع على أنها مواد غير قابلة للانضغاط incompressible substances. فعلى سبيل المثال، يؤدي تطبيق ضغط $210[atm]$ إلى تغير في كثافة الماء السائل الموجود عند ضغط $1[atm]$ بمقدار 1% فقط.

بعكس الموائع، فإن الغازات تمتلك قابلية كبيرة للانضغاط، حيث إن تغيراً في الضغط قدره $0.01[atm]$ سيسبب تغيراً في كثافة الهواء بمقدار 1%. بشكل عام يمكن معاملة جريان الغاز على أنه غير قابل للانضغاط إذا كان التغير في الكثافة أقل من 5%، وهي الحالة التي تكون فيها سرعة الجريان أقل من 30% من سرعة انتشار الصوت في الغاز المدروس (عدد ماخ Mach number أقل من 0.3). إن سرعة الصوت عند درجة حرارة الغرفة هي $346[m/s]$، وبالتالي فإن تأثير الانضغاط على جريان الهواء يمكن إهماله إذا كانت سرعة الجريان أقل من $100[m/s]$. بالتالي فإن جريان الغازات ليس بالضرورة قابلاً للانضغاط compressible flow.

4 – 2 – 4 – الجريان الصفائحي والمضطرب

***Laminar and Turbulent Flow*:**

بعض الجريانات تكون منظمة وهادئة، في حين أن البعض الآخر يكون فوضوياً. تسمى الجريانات الهادئة، والتي تتميز بأن خطوط الجريان فيها قليلة الانحناء بالجريانات الصفائحية laminar. في حال كان الجريان ذا لزوجة عالية، كما في حالة الزيوت، وكانت سرعة الجريان منخفضة، فهو يمثل جرياناً صفائحياً نموذجياً. أما الجريانات غير المنتظمة والتي تحدث عند سرعات عالية، وتتميز بتقلبات في السرعة فإنها تسمى بالجريانات المضطربة turbulent. يعد جريان السوائل ذات اللزوجة المنخفضة (مثل الهواء) عند سرعات عالية بأنه جريان مضطرب.

4 – 2 – 5 – الجريان المستقر وغير المستقر (العابر)

***Steady and Unsteady (transient) Flow*:**

تعمل الكثير من الأجهزة المستخدمة في التطبيقات الهندسية (العنفات، الضواغط، المراجل، المبادلات الحرارية) لفترات طويلة عند الظروف نفسها، وبالتالي فهي تصنف كأجهزة تعمل بالجريان المستقر steady - flow devices. يمكن لخصائص السائل أن تتغير في الجريان المستقر من نقطة إلى أخرى، ولكنها تبقى ثابتة من أجل كل نقطة على حدة.

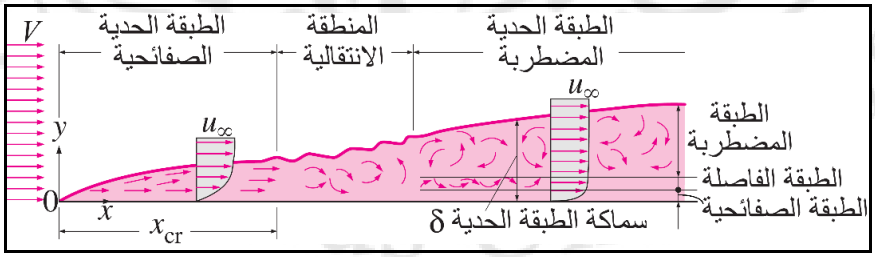
4 – 2 – 6 الجريان الطبيعي والقسري *Natural and Forced Flow*:

نقول عن الجريان بأنه طبيعي أو قسري تبعاً لكيفية تحريك السائل. يتم تحريك السائل في الجريان القسري forced flow بوسائل خارجية (مضخة، مروحة). بينما يتحرك السائل في الجريان الطبيعي natural flow بطرق طبيعية، مثل تأثير الطفو، والذي يوصف بأنه صعود السائل الأسخن (الأقل كثافة) إلى الأعلى، وهبوط السائل الأبرد (ا كثافة) إلى الأسفل.

يستخدم تأثير البالوعة الحرارية thermosiphon عادةً كبديل للمضخات في أنظمة التسخين الشمسية، حيث يوضع خزان الماء في مكان أعلى من المجمع الشمسي.

4 - 3 - الطبقة الحدية الحركية *Velocity Boundary Layer*:

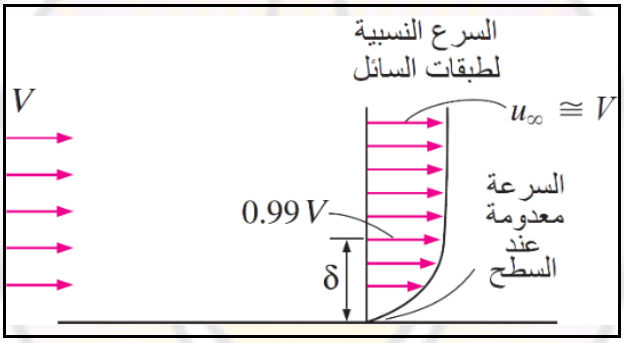
بفرض أن سائلاً ما يجري على صفيحة مستوية، كما في الشكل (4 – 6). باعتبار أن الإحداثي x يقيس المسافة باتجاه الجريان من بداية الصفيحة وعلى طولها، وأن الإحداثي y يقيس المسافة في الاتجاه العمودي على سطح الصفيحة. سوف يقترب السائل من الصفيحة بالاتجاه x بالسرعة المنتظمة للمنبع V، والتي تساوي تقريباً إلى سرعة التيار الحر u_∞ free stream velocity، أي سرعة الجريان فوق الصفيحة وبعيداً عن سطحها.



الشكل (4 – 6) تطور الطبقة الحدية لجريان سائل على صفيحة، والمناطق المختلفة للجريان.

من أجل تبسيط المناقشة، يمكننا عد السائل مؤلفاً من طبقات متجاورة مكدسة فوق بعضها. بتأثير شرط عدم الانزلاق، فإن جزيئات السائل المجاورة لسطح الصفيحة ستكون معدومة السرعة، وستقوم هذه الطبقة الساكنة بإبطاء حركة طبقة السائل المجاورة لها بسبب الاحتكاك بين جزيئات الطبقتين، وبدورها ستقوم هذه الطبقة بإبطاء حركة الطبقة المجاورة لها، وهكذا. وبالتالي فإن تأثير الصفيحة سيستمر حتى مسافة δ بعيداً عن سطح الصفيحة (باتجاه المحور y)، حيث تصبح السرعة مساوية لسرعة التيار الحر. نتيجة ذلك فإن المركبة بالاتجاه x للسرعة u سوف تتغير من 0 عند $y = 0$، وحتى u_∞ تقريباً عند $y = \delta$، كما يوضح الشكل (4 – 7).

تسمى المنطقة الواقعة فوق الصفيحة والمحصورة ضمن المسافة δ، والتي تتأثر بقوى القص الناتجة عن اللزوجة، بالطبقة الحدية الحركية. وتعرف سماكة الطبقة الحدية δ بأنها المسافة باتجاه المحور y والتي يكون عندها $u = 0.99u_\infty$.



الشكل (4 – 7) تطور الطبقة الحدية على سطح مستوٍ بتأثير عدم الانزلاق.

يقسم الخط الافتراضي $u = 0.99u_\infty$ الجريان إلى منطقتين: **منطقة الطبقة الحدية** وتكون فيها تأثيرات اللزوجة وتغيرات السرعة ذات قيمة لا يمكن إهمالها. **منطقة الجريان غير اللزج** وتكون تأثيرات الاحتكاك في هذه المنطقة مهملة، وتبقى السرعة ثابتة.

إجهاد القص السطحي *Surface Shear Stress*:

عند جريان سائل على سطح صفيحة، فإن طبقة السائل الملامسة للسطح ستحاول جر الصفيحة بالاحتكاك، حيث تطبق طبقة السائل قوى احتكاك على الصفيحة. بشكل مشابه فإن طبقة السائل الأسرع ستحاول جر الطبقة البطيئة المجاورة لها، مطبقة قوى احتكاك عليها بسبب الاحتكاك بين الطبقتين. نسمي قوة الاحتكاك من أجل واحدة المساحة بإجهاد القص shear stress، ويرمز له بـ τ. تشير الدراسات التجريبية إلى أن إجهاد القص لمعظم السوائل

يتناسب طرداً مع تدرج السرعة velocity gradient، ويعطى إجهاد القص عند السطح الصلب بالعلاقة:

$$\tau_s = \mu \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} \quad \left[N/m^2\right] \qquad \textbf{(6 - 4)}$$

μ : اللزوجة التحريكية dynamic viscosity للسائل، وواحدتها $\left[kg/m\right]$.

(ويكافئ $\left[N.s/m^2\right]$ أو $\left[Pa.s\right]$، كما تقاس اللزوجة بالبواز poise حيث $1\left[poise\right] = 0.1\left[Pa.s\right]$).

تسمى السوائل التي تنطبق عليها العلاقة الخطية السابقة بالسوائل النيوتونية Newtonian fluids. معظم السوائل التي نقابلها في التطبيقات العملية هي سوائل نيوتونية (ماء، هواء، البنزين، الزيوت)، بينما يعد الدم والسوائل البلاستيكية سوائل غير نيوتونية.

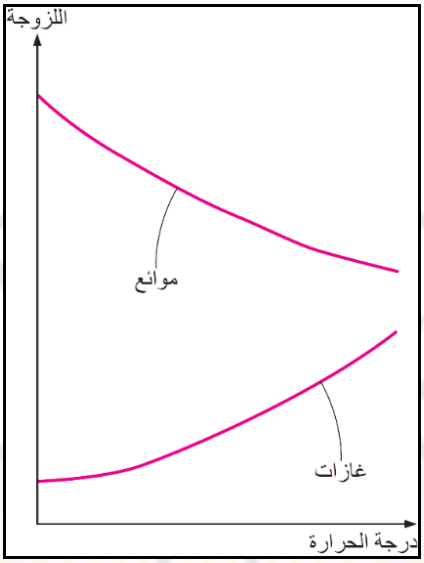
كثيراً ما نصادف في دراسات ميكانيك السوائل وانتقال الحرارة نسبة اللزوجة التحريكية إلى الكثافة، ومن أجل التبسيط فإننا نسمي هذه النسبة باللزوجة الحركية kinematic viscosity ν، والتي تعطى بالعلاقة:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad \left[m^2/s\right]$$

وهناك واحدة أخرى للزوجة الحركية هي الستوك

$\text{stoke}\left(1\text{stoke} = 1cm^2/s = 10^{-4}\, m^2/s\right)$.

تقيس اللزوجة مقاومة السائل للجريان، وهي تتعلق بشدة بدرجة الحرارة، حيث إن لزوجة الموائع تتناقص بزيادة درجة الحرارة، بينما تزداد لزوجة الغازات بزيادة درجة الحرارة، كما يوضح الشكل (4 - 8).



الشكل (4 – 8) تغير اللزوجة كتابع لدرجة الحرارة.

إن حساب إجهاد القص السطحي τ_s من العلاقة (4 – 6) يتطلب معرفة بروفايل السرعة للجريان، وبالتالي فليس من العملي حساب الإجهاد باستخدام هذه العلاقة. يحسب إجهاد القص السطحي في الجريان الخارجي من خلال ربطه بالسرعة المنتظمة للمنبع V بالعلاقة:

$$\tau_s = C_f \frac{\rho V^2}{2} \qquad \textbf{(7 – 4)}$$

C_f : معامل الاحتكاك اللابعدي dimensional fraction coefficient، وتحدد قيمته تجريبياً.

ρ : كثافة السائل.

يتغير معامل الاحتكاك من مكان إلى آخر على السطح؛ وبالتالي نستخدم القيمة الوسطية لمعامل الاحتكاك من أجل حساب قوة الاحتكاك على كامل السطح باستخدام العلاقة:

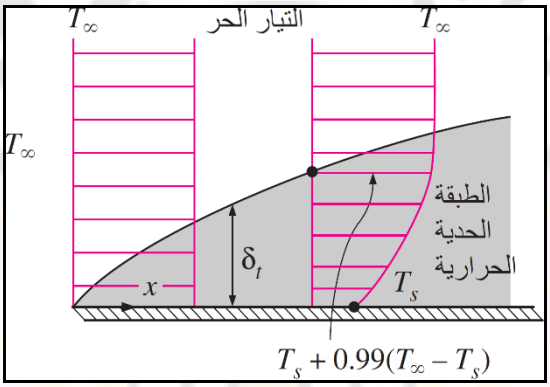
$$F_f = C_f A_s \frac{\rho V^2}{2} \qquad \textbf{(8 – 4)}$$

A_s : مساحة السطح.

يعد معامل الاحتكاك أحد المؤشرات المهمة في دراسات انتقال الحرارة، لكونه يرتبط بشكل مباشر بمعامل انتقال الحرارة، وبالطاقة المطلوبة لتشغيل المضخات أو المراوح.

4 - 4 - الطبقة الحدية الحرارية *Thermal Boundary Layer*:

رأينا سابقاً أن الطبقة الحدية الحركية تتطور عندما يجري سائل على سطح ما، وذلك نتيجة اكتساب طبقة السائل الملامسة للسطح سرعة السطح (سرعتها معدومة بالنسبة للسطح)، كما عرفنا الطبقة الحدية الحركية بأنها المنطقة التي تتغير فيها سرعة السائل من الصفر وحتى $0.99u_\infty$. بشكل مماثل، تتطور الطبقة الحدية الحرارية عندما يجري سائل ذو درجة حرارة معينة على سطح له درجة حرارة مختلفة، كما في الشكل (4 – 9) حيث أن درجة حرارة السائل أعلى من درجة حرارة الصفيحة.



الشكل (4 – 9) الطبقة الحدية الحرارية على صفيحة مستوية.

بفرض أن سائلاً ما درجة حرارته T_∞ يجري على سطح صفيحة إيزوترمية درجة حرارتها T_s ، في هذه الحالة فإن جزيئات السائل الملامسة لسطح الصفيحة ستأخذ درجة حرارة الصفيحة، وبالتالي تكون في حالة توازن حراري مع الصفيحة. بعد ذلك ستقوم جزيئات السائل السابقة بتبادل الطاقة مع الجزيئات في طبقة السائل المجاورة لها، وهكذا؛ وبالتالي سيتطور بروفايل لدرجة الحرارة في حقل الجريان ضمن مجال درجات حرارة T_s عند سطح الصفيحة، و T_∞ عند بعدٍ كافٍ عن السطح. تسمى المنطقة من الجريان والتي تتغير فيها درجة الحرارة بالاتجاه العمودي على سطح الصفيحة بالطبقة الحدية الحرارية. وتعرف سماكة الطبقة الحدية الحرارية عند أي مكان من سطح الصفيحة بأنها البعد عن سطح الصفيحة والذي يكون عنده فرق درجة الحرارة $T - T_s$ مساوياً إلى $0.99(T_\infty - T_s)$.

تزداد سماكة الطبقة الحدية الحرارية باتجاه الجريان، حيث إن انتقال الحرارة يزداد كلما ابتعدنا عن حافة الصفيحة باتجاه الجريان.

يتعلق معدل انتقال الحرارة بالحمل في أي موضع على السطح بشكل مباشر بتدرج درجة الحرارة، وبالتالي فإن شكل بروفايل درجة الحرارة ضمن الطبقة الحدية الحرارية هو الناظم لعملية انتقال الحرارة بالحمل بين السطح الصلب والسائل الذي يجري عليه.

يتأثر بروفايل درجة الحرارة بشدة بسرعة السائل، وبالتالي فإن تطور الطبقة الحدية الحرارية متعلق بتطور الطبقة الحدية الحركية، مما يقودنا إلى استنتاج أن تطور الطبقة الحدية الحركية يؤثر بشكل كبير على انتقال الحرارة بالحمل.

عدد براندل *Prandel Number*:

يعطي عدد براندل التوصيف الأفضل للعلاقة بين سماكة الطبقة الحدية الحركية والطبقة الحدية الحرارية، وهو عدد لا بعدي يوصف بالعلاقة:

$$\mathbf{Pr} = \frac{\text{الانتشارية الحركية للجزئيات}}{\text{الانتشارية الحرارية في الجزئيات}} = \frac{\nu}{a} = \frac{\mu c_p}{\lambda} \qquad \mathbf{(9-4)}$$

تتراوح قيم عدد براندل بين 0.01 من أجل المعادن السائلة، وأكثر من 100,000 للزيوت الثقيلة، وتكون قيمة عدد براندل للماء من مرتبة 10، كما يبين الجدول (4 – 1).

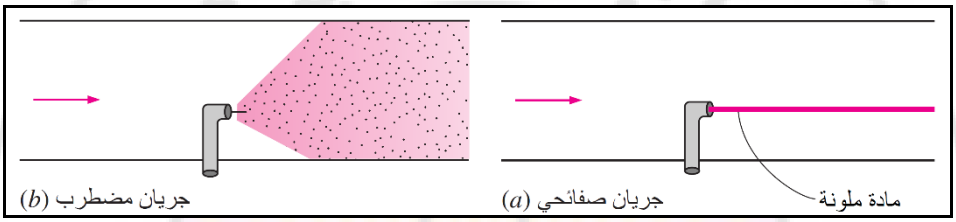
إن قيمة عدد براندل للغازات تساوي تقريباً 1، مما يشير إلى أن كلاً من كمية الحركة والحرارة تنتشر في الغاز بالمعدل نفسه. تنتشر الحرارة بسرعة كبيرة في المعادن السائلة ($\mathrm{Pr} < 1$) بينما تنتشر ببطء شديد في الزيوت ($\mathrm{Pr} > 1$) وذلك بالنسبة لانتشار كمية الحركة، ويترتب على ذلك أن سماكة الطبقة الحدية الحرارية أكبر بكثير من سماكة الطبقة الحدية الحرارية في المعادن السائلة، بينما تكون أصغر منها بكثير في الزيوت.

الجدول (4 – 1) قيم عدد براندل لبعض السوائل.

السائل	عدد براندل Pr
معادن سائلة	$0.004-0.03$
غازات	$0.7-1$
ماء	$1.7-13.7$
سوائل عضوية خفيفة	$5-50$
زيوت	$50-100,000$
غليسيرين	$2000-100,000$

4- 5 - الجريانات الصفائحية والمضطربة *Laminar and Turbulent Flows*:

عند مراقبة جريان سائل ما داخل أنبوب، ومن خلال استخدام مادة ملونة (صباغ) كما في الشكل (4 – 10)، نلاحظ أن أثر المادة الملونة سيكون على شكل خط مستقيم أو قليل التموج، وذلك عند السرعات المنخفضة، وعند زيادة السرعة أكثر من قيمة حدية نلاحظ حدوث بعض التموجات في خط الأثر السابق، وذلك قبل أن يتشتت الأثر بشكل عشوائي نتيجة التقلبات في الجريان واختلاط جزيئات السائل بسرعة بين الطبقات المتجاورة. ويمكننا تلخيص ملاحظاتنا السابقة بالنتائج التالية:



الشكل (4 – 10) مراقبة سلوك سائل أثناء الجريان باستخدام مادة ملونة.

– في الحالة الأولى حيث سرعة السائل منخفضة، تكون خطوط التيار قليلة التموج، وتكون حركة السائل منتظمة بشكل كبير، ويكون نظام الجريان في هذه الحالة صفائحياً laminar.

– في الحالة الثانية نلاحظ حدوث تموجات في السرعة، واضطرابات شديدة في حركة السائل، ويكون نظام الجريان مضطرباً turbulent.

– لا يحدث الانتقال من النظام الصفائحي إلى المضطرب بشكل مفاجئ، وإنما يحدث في منطقة يتقلب فيها الجريان بين الصفائحي والمضطرب، قبل أن يصبح مضطرباً بشكل كامل، ويسمى نظام الجريان في هذه الحالة بالنظام الانتقالي transition regime.

– يوضح الشكل (4 – 6) بروفايل السرعة في حالة الجريان الصفائحي والمضطرب، حيث نلاحظ أن بروفايل السرعة يكون على شكل قطع مكافئ تقريباً في الجريان الصفائحي، ويصبح أقل تحدباً في الجريان المضطرب، مع انخفاض حاد في قيمة السرعة قرب السطح.

– تتضمن الطبقة الحدية المضطربة ثلاث طبقات؛ طبقة رقيقة جداً بالقرب من السطح، حيث يكون تأثير اللزوجة كبيراً، وتسمى بالطبقة الصفائحية laminar sublayer. بعد الطبقة الصفائحية تتوضع الطبقة الفاصلة buffer layer، وفي هذه الطبقة يكون تأثير الاضطراب واضحاً ولكن ليس له التأثير الغالب على الانتشار. والطبقة الأخيرة هي الطبقة المضطربة turbulent layer، حيث يكون تأثير الاضطراب هو السائد.

إن الخلط الشديد لجزيئات السائل في الجريان المضطرب يعزز من انتقال الحرارة وكمية الحركة بين جزيئات السائل، مما يزيد من قوة الاحتكاك على السطح. ونلاحظ أن كلاً من انتقال الحرارة ومعامل الاحتكاك يأخذ قيمة أعظمية عندما يصبح الجريان مضطرباً بشكل كامل. وهذا يقودنا إلى نتيجة مفادها بأنه عند محاولتنا لزيادة معدل انتقال الحرارة من خلال زيادة معامل الحمل الحراري، فإننا نزيد من الطاقة المصروفة على تشغيل المضخات أو المراوح للتغلب على قوى الاحتكاك.

عدد رينولدز *Reynolds Number*:

يتعلق انتقال الجريان من النظام الصفائحي إلى المضطرب بشكل السطح، وخشونة السطح، والسرعة المنتظمة للمنبع، ودرجة حرارة السطح، وطبيعة السائل، فضلاً عن أمور أخرى. ثبت تجريبياً أن نظام الجريان يتعلق بشكل رئيس بنسبة قوى العطالة inertia إلى قوى اللزوجة viscous في السائل. تسمى هذه النسبة بعدد رينولدز، وهو قيمة لا بعدية، ويعطى من أجل جريان داخلي بالعلاقة:

$$\mathbf{Re} = \frac{\text{قوى العطالة}}{\text{قوة للزوجة}} = \frac{VL_c}{\nu} = \frac{pVL_c}{\mu} \qquad \mathbf{(10-4)}$$

V: السرعة المنتظمة للمنبع، وتساوي إلى سرعة التيار الحر u_∞ في حالة صفيحة مستوية.

L_c : الطول المميز للشكل، وهو يساوي في حالة صفيحة مستوية إلى البعد X عن حافة الصفيحة.

ν : اللزوجة الحركية للسائل.

عند القيم الكبيرة لعدد رينولدز فإن قوى العطالة تكون كبيرة بالنسبة لقوى اللزوجة، وحيث إن قوى العطالة تتناسب طرداً مع كثافة السائل وسرعته، بالتالي فإن قوى اللزوجة لا تستطيع منع التقلبات السريعة والعشوائية للسائل. أما عند القيم الصغيرة لعدد رينولدز فإن قوى اللزوجة تكون كبيرة بما فيه الكفاية للتغلب على تأثير قوى العطالة، ومنع الاضطرابات في السائل. أي إن الجريان مضطرب في الحالة الأولى، وصفائحي في الحالة الثانية.

تعرف القيمة الحرجة لعدد رينولدز critical Reynolds number بأنها القيمة التي يتحول عندها الجريان من صفائحي إلى مضطرب. تختلف القيمة الحرجة لعدد رينولدز باختلاف الشكل الهندسي، فمن أجل جريان على صفيحة مستوية:

$$\mathrm{Re}_{\mathrm{cr}} = \frac{V x_{cr}}{\nu} = \frac{u_\infty x_{cr}}{\nu} = 5.10^5$$

x_c : البعد عن حافة الصفيحة والذي يحدث عنده الانتقال من الجريان الصفائحي إلى المضطرب.

4 - 6 - المعادلات اللابعدية للحمل

Nondimensionalized Convection Equations:

في حالة جريان صفائحي مستقر غير قابل للانضغاط لسائل ذي خواص ثابتة، وبإهمال التبدد اللزج،يمكن تحويل معادلات الاستمرار والحركة والطاقة والشروط الحدية إلى الشكل اللابعدي من خلال تقسيم المتحولات المستقلة وغير المستقلة جميعها على قيم ثابتة لها علاقة بها؛ الأطوال جميعها على الطول المميز L_c (والذي هو الطول في حالة صفيحة) السرعات جميعها على سرعة مرجعية V (والتي هي سرعة التيار الحر في حالة صفيحة)؛ الضغط على ρV^2 (وهو ضعفي الضغط الديناميكي للتيار الحر في حالة صفيحة)؛ درجة الحرارة على فرق درجات حرارة مناسب (والذي هو $T_\infty - T_s$ في حالة صفيحة). وبالتالي نحصل على:

$$x^* = \frac{x}{L} \ , \ y^* = \frac{y}{L_c} \ , \ u^* = \frac{u}{V} \ , \ \mathrm{v}^* = \frac{\mathrm{v}}{V} \ , \ P^* = \frac{P}{\rho V^2} \ , \ T^* = \frac{T - T_s}{T_\infty - T_s}$$

وتستخدم النجمة للدلالة على المتحولات اللابعدية. بتعويض هذه المتحولات في المعادلات وبالتبسيط، نجد:

الاستمرار:
$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial \mathrm{v}^*}{\partial y^*} = 0 \qquad \textbf{(11 - 4)}$$

كمية الحركة:
$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \mathrm{v}^* \frac{\partial \mathrm{v}^*}{\partial y^*} = \frac{1}{\mathrm{Re}_L} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} - \frac{dP^*}{dx^*} \qquad \textbf{(12 - 4)}$$

الطاقة:
$$u^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + \mathrm{v}^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} = \frac{1}{\mathrm{Re}_L \ \mathrm{Pr}} \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}} \qquad \textbf{(13 - 4)}$$

والشروط الحدية، هي:

$$u^*(0, y^*) = 1 \ , \ u^*(x^*, 0) = 0 \ , \ u^*(x^*, \infty) = 1 \ , \ \mathrm{v}^*(x^*, 0) = 0$$
$$T^*(0, y^*) = 1 \ , \ T^*(x^*, 0) = 0 \ , \ T^*(x^*, \infty) = 1 \qquad \textbf{(14 - 4)}$$

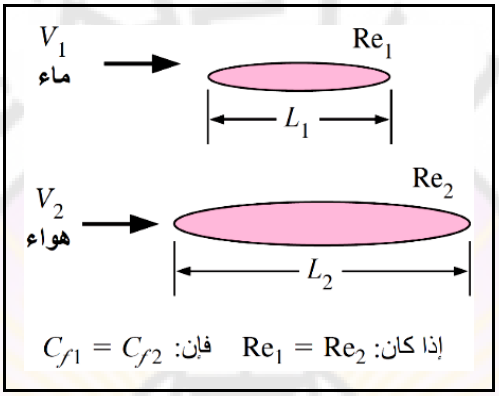
حيث:

Re_L : عدد رينولدز اللابعدي. $\mathrm{Re}_L = \frac{V L_c}{\nu}$

$$\mathrm{Pr} = \frac{\nu}{a}$$ Pr : عدد براندل.

من أجل شكل هندسي معين، فإن حلول المسائل التي لها نفس قيم عددي رينولدز Re ونوسلت Nu ، وبالتالي فإن عددي رينولدز وبراندل يمثلان بارامترات تشابه.

تتشابه ظاهراتنا فيزيائيتان إذا كان لهما نفس الأشكال اللابعدية للمعادلات الناظمة والشروط الحدية، كما هو مبين في الشكل (4 – 11).



الشكل (4 – 11) جسمان متشابهان لهما نفس قيمة معامل الاحتكاك عند نفس القيمة لعدد رينولدز.

الميزة الأهم للابعدية هي التخفيض الكبير في عدد البارامترات. فالمسألة الأصلية تتضمن 6 بارامترات $(L, V, T_\infty, T_s, \nu, a)$، بينما تتضمن المسألة اللابعدية بارامترين فقط $(\mathrm{Re}_L, \mathrm{Pr})$. من أجل شكل هندسي معين، فإن المسائل التي تمتلك القيم نفسها للبارامترات اللابعدية لها حلول متطابقة. على سبيل المثال، إن حساب معامل انتقال الحرارة بالحمل لجريان على سطح معين يتطلب حلولاً عددية أو قياسات تجريبية لعدد من السوائل، مع مجموعات عدة من السرعات، وأطوال السطح، ودرجات الحرارة للسطح وللتيار الحر. بالمقابل، يمكن الحصول على المعلومات نفسها بعدد أقل بكثير من القياسات، وذلك من خلال تجميع البيانات ضمن العددين اللابعديين Re و Pr. وإحدى المزايا الأخرى للابعدية هي أنها تمكننا من تجميع نتائج عدد كبير من التجارب، وإخراجها بدلالة عدد قليل من البارامترات اللابعدية.

4 - 7 - الأشكال التابعية لمعاملات الاحتكاك والحمل

Functional Forms of Friction and Convection Coefficients:

تتضمن المعادلات اللابعدية الثلاث للطبقة الحدية (4 – 11)، (4 – 12)، (4 – 13) ثلاثة توابع مجهولة $\left(u^*, \mathrm{v}^*, T^*\right)$، ومتحولين مستقلين $\left(x^*, y^*\right)$، وبارامترين $\left(\mathrm{Re}_L, \mathrm{Pr}\right)$. يتعلق الضغط $P^*\left(x^*\right)$ بالشكل الهندسي للمسألة (وهو ثابت في حالة صفيحة مستوية)، وله القيمة نفسها داخل الطبقة الحدية وخارجها عند قيمة محددة لـ x^*. وبالتالي يمكن حسابه بشكل منفصل من شروط التيار الحر، ويمكن معاملة الحد dP^*/dx^* في المعادلة (4 – 12) كتابع معلوم لـ x^*. يجب الانتباه إلى أن الشروط الحدية لا تقدم أي بارامترات جديدة.

من أجل شكل هندسي معين، يمكن التعبير عن الحل بالنسبة لـ u^* بالشكل:

$$u^* = f_1\left(x^*, y^*, \mathrm{Re}_L\right) \qquad \textbf{(15 – 4)}$$

وبالتالي فإن إجهاد القص عند السطح يصبح:

$$\tau_s = \mu \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = \frac{\mu V}{L_c} \left.\frac{\partial u^*}{\partial y^*}\right|_{y^*=0} = \frac{\mu V}{L_c} f_2\left(x^*, \mathrm{Re}_L\right) \qquad \textbf{(16 – 4)}$$

وبالتعويض في تعريف معامل الاحتكاك اللابعدي الموضعي نجد:

$$C_{f,x} = \frac{\tau_s}{\rho V^2/2} = \frac{\mu V/L_c}{\rho V^2/2} f_2\left(x^*, \mathrm{Re}_L\right) = \frac{2}{\mathrm{Re}_L} f_2\left(x^*, \mathrm{Re}_L\right) = f_3\left(x^*, \mathrm{Re}_L\right) \qquad \textbf{(17 – 4)}$$

وبالتالي نستنتج أنه يمكن التعبير عن معامل الاحتكاك اللابعدي لشكل هندسي ما بدلالة عدد رينولدز والمتحول المكاني x^* فقط، وذلك بدل التعبير عنه بدلالة $\left(x, L_c, V, \rho, \mu\right)$.

بالمثل، يمكن التعبير عن حل معادلة درجة الحرارة اللابعدية T^* لشكل هندسي معين بالصيغة:

$$T^* = g_1\left(x^*, y^*, \mathrm{Re}_L, \mathrm{Pr}\right) \qquad \textbf{(18 – 4)}$$

وباستخدام تعريف T^*، فإن معامل انتقال الحرارة بالحمل يصبح:

$$\alpha = \frac{-\lambda\left(\partial T/\partial y\right)\big|_{y=0}}{T_s - T_\infty} = \frac{-\lambda\left(T_\infty - T_s\right)}{L_c\left(T_s - T_\infty\right)} \left.\frac{\partial T^*}{\partial y^*}\right|_{y^*=0} = \frac{\lambda}{L_c} \left.\frac{\partial T^*}{\partial y^*}\right|_{y^*=0} \qquad \textbf{(19 – 4)}$$

وبتعويض هذه المعادلة في علاقة عدد نوسلت نجد:

$$\mathrm{Nu}_x = \frac{\alpha L_c}{\lambda} = \left.\frac{\partial T^*}{\partial y^*}\right|_{y^*=0} = g_2\left(x^*, \mathrm{Re}_L, \mathrm{Pr}\right) \qquad \textbf{(20 – 4)}$$

نلاحظ أن عدد نوسلت يكافئ تدرج درجة الحرارة اللابعدية عند السطح، ولذلك يشار إلى عدد نوسلت بأنه معامل انتقال الحرارة اللابعدي، كما يمكن التعبير عن عدد نوسلت لشكل هندسي معين بدلالة عددي رينولدز Re وبراندل Pr والمتحول المكاني x^*، ويمكن استخدام مثل هذه العلاقة من أجل سوائل مختلفة تجري بسرعات مختلفة على أشكال هندسية متشابهة لها أبعاد مختلفة.

يحسب كل من معامل الاحتكاك اللابعدي الوسطي ومعامل انتقال الحرارة الوسطي من خلال مكاملة علاقتي $C_{f,x}$ و Nu_x على كامل السطح بالنسبة لـ x^* من 0 إلى 1. وبالتالي يعبر عن معامل الاحتكاك اللابعدي الوسطي وعدد رينولدز كما يلي:

$$C_f = f_4(\mathrm{Re}_L) \quad , \quad \mathrm{Nu} = g_3(\mathrm{Re}_L, \mathrm{Pr}) \qquad \textbf{(21 - 4)}$$

4 - 8 - التشابه بين انتقال كمية الحركة وانتقال الحرارة

Analogies Between Momentum and Heat Transfer:

ما يهمنا في أثناء تحليل الحمل القسري هو حساب C_f لحساب إجهاد القص عند السطح، وعدد Nu لحساب معدل انتقال الحرارة. بالتالي من المفيد أن يكون هناك علاقة تربط C_f و Nu، بحيث يمكن حساب أحدهما من خلال معرفة الآخر. تم الوصول إلى هذه العلاقات بالاستفادة من التشابه بين انتقال كمية الحركة وانتقال الحرارة ضمن الطبقات الحدية، وتعرف هذه العلاقات باسم تشابه رينولدز Reynolds analogy وتشابه شيلتون – كولبرن Chilton - Colburn analogy.

باسترجاع المعادلات اللابعدية لكمية الحركة والطاقة لجريان صفائحي مستقر غير قابل للانضغاط لسائل ذي خواص ثابتة وبإهمال التبدد اللزج. عندما $\mathrm{Pr} = 1$ (كما هو الحال تقريباً بالنسبة للغازات) و $\partial P^*/\partial x^* = 0$ (كما هي الحال عندما $u = u_\infty = V = \text{constant}$ في التيار الحر، كما في الجريان على صفيحة مستوية)، فإن المعادلات اللابعدية تختصر إلى الشكل:

كمية الحركة:
$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \mathrm{v}^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = \frac{1}{\mathrm{Re}_L} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \qquad \textbf{(22 - 4)}$$

الطاقة:
$$u^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + \mathrm{v}^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} = \frac{1}{\mathrm{Re}_L} \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}} \qquad \textbf{(23 - 4)}$$

ونلاحظ أن هاتين المعادلتين تمتلكان صيغةً متطابقة من أجل السرعة اللابعدية u^* ودرجة الحرارة اللابعدية T^*. كما أن الشروط الحدية من أجل u^* و T^* متطابقة أيضاً. بالتالي

يجب أن يكون التابعان u^* و T^* متطابقين. ومنه، فإن المشتق الأول لكل من u^* و T^* عند السطح يجب أن يكونا متساويين:

$$\left.\frac{\partial u^*}{\partial y^*}\right|_{y^*=0} = \left.\frac{\partial T^*}{\partial y^*}\right|_{y^*=0} \qquad (24-4)$$

وبالتالي، من المعادلات (4 – 22)، (4 – 23)، (4 – 24) نجد:

$$C_{f,x}\,\frac{\mathrm{Re}_L}{2} = \mathrm{Nu}_x \quad ;\ \mathrm{Pr}=1 \qquad (25-4)$$

وتعرف هذه العلاقة بتشابه رينولدز. إن أهمية هذا التشابه تكمن في أنه يمكننا من حساب معامل انتقال الحرارة للسوائل التي تمتلك $\mathrm{Pr}\approx 1$ من خلال معرفة معامل الاحتكاك، والذي يمكن قياسه بسهولة أكبر من معامل انتقال الحرارة. يعبر عن تشابه رينولدز بصيغة أخرى:

$$\frac{C_{f,x}}{2} = \mathrm{St}_x \quad ;\ \mathrm{Pr}=1 \qquad (26-4)$$

حيث:

$$\mathrm{St} = \frac{\alpha}{\rho c_p V} = \frac{\mathrm{Nu}}{\mathrm{Re}_L\ \mathrm{Pr}} \qquad (27-4)$$

وهو عدد ستانتون Stanton number، وهو أيضاً معامل انتقال حرارة لا بعدي.

إن الشرطين $\left(\mathrm{Pr}=1, \partial P^*/\partial x^*=0\right)$ يحدان من صلاحية استخدام تشابه رينولدز، وبالتالي من المهم أن يكون هناك تشابه آخر صالح للتطبيق على مجال واسع من قيم Pr . تم الوصول إلى التشابه المطلوب من خلال إضافة تصحيح عدد براندل. لقد قمنا سابقاً بحساب معامل الاحتكاك وعدد نوسلت لصفيحة مستوية، وكانت النتيجة هي:

$$C_{f,x} = 0.664\,\mathrm{Re}_x^{-1/2} \quad ,\quad \mathrm{Nu}_x = 0.332\,\mathrm{Pr}^{1/3}\,\mathrm{Re}_x^{1/2} \qquad (28-4)$$

بأخذ نسبة هاتين العلاقتين وإعادة ترتيب النتيجة، نحصل على العلاقة المطلوبة، والتي تعرف بتشابه رينولدز المعدل modified Reynolds analogy أو تشابه شيلتون – كولبرن:

$$C_{f,x}\,\frac{\mathrm{Re}_L}{2} = \mathrm{Nu}_x\ \mathrm{Pr}^{-1/3}$$

$$;\ 0.6<\mathrm{Pr}<60 \quad \frac{C_{f,x}}{2} = \frac{\alpha_x}{\rho c_p V}\mathrm{Pr}^{2/3} = j_H \qquad (29-4)$$

حيث يسمى j_H بمعامل كولبرن Colburn j - factor. بالرغم من أنه تم التوصل إلى هذه العلاقة باستخدام علاقات الجريان الصفائحي على صفيحة مستوية (حيث

$\partial P^* / \partial x^* = 0$)، إلا أن الدراسات التجريبية تظهر أن هذه العلاقة صالحة بشكل تقريبي للجريان المضطرب على سطح ما، حتى في حال وجود تدرج في الضغط. على الرغم من ذلك، إلا أنه في حالة الجريان الصفائحي فإن هذا التشابه غير صالح للتطبيق إلا عندما $\partial P^* / \partial x^* \approx 0$. بالتالي فإن هذا التشابه غير صالح للجريان الصفائحي ضمن أنبوب.

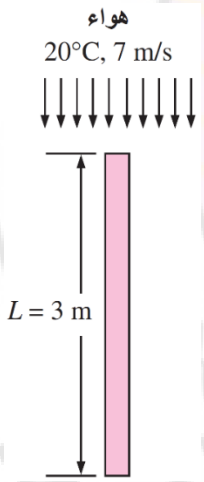
يمكن استخدام التشابهين الواردين أعلاه لحساب القيم الموضعية والوسطية.

مثال 4 – 1:

صفيحة مستوية أبعادها $2\,\text{m} \times 3\,\text{m}$ معلقة في غرفة، وتتعرض لجريان هواء موازٍ لسطحها لجهة الطرف الذي طوله $3\,\text{m}$. درجة حرارة وسرعة التيار الحر للهواء $20\,^{\circ}\text{C}$، $7\,\text{m/s}$. بينت القياسات أن قوة الجر المؤثرة على الصفيحة هي $0.86\,\text{N}$. احسب معامل الحمل الحراري الوسطي للصفيحة.

الحل:

المعطيات: صفيحة معلقة تتعرض لتيار هواء، مما يؤدي إلى نشوء قوة جر قدرها $0.86\,\text{N}$.



المطلوب: حساب معامل انتقال الحرارة بالحمل الوسطي للصفيحة.

الشكل:

الافتراضات:

1. شروط الحالة المستقرة.
2. التأثيرات الناتجة عن الحافة مهملة.
3. الضغط الجوي السائد 1atm.

الخواص:

الجدول (A16) هواء $(T = 293\,\text{K})$:

$$\rho = 1.204\,\text{kg/m}^3$$

$$c_p = 1.007\,\text{kJ/kg.K}$$

$$\text{Pr} = 0.7309$$

التحليل: يحدث الجريان من جهة الجانب الذي طوله $3\,\text{m}$، وبالتالي فإن الطول المميز هو $L = 3\,\text{m}$. كلا جانبي الصفيحة معرضان لجريان الهواء، وبالتالي المساحة الكلية للسطح:

$$A_s = 2WL = 2\times 2\,\text{m}\times 2\,\text{m} = 12\,\text{m}^2$$

من أجل الصفائح المستوية، فإن قوة الجر مساوية لقوة الاحتكاك. يحسب معامل الاحتكاك الوسطي C_f من العلاقة (4 – 8):

$$F_f = C_f A_s \frac{\rho V^2}{2}$$

بحل هذه المعادلة من أجل C_f والتعويض، نجد:

$$C_f = \frac{F_f}{\rho A_s V^2/2} = \frac{0.86\,\text{N}}{1.204\,kg/m^3\times 12\,m^2\times(7\,m/s)^2/2} = 0.00243$$

وبالتالي يحسب معامل الحمل الوسطي من تشابه رينولدز المعدل (4 – 29):

$$\alpha = \frac{C_f}{2}\frac{\rho c_p V}{\text{Pr}^{2/3}}$$

$$= \frac{0.00243}{2}\frac{1204\,\text{kg/m}^3\times 7\,\text{m/s}\times 1007\,\text{J/kg.K}}{0.7309^{2/3}} = 12.7\,\text{W/m}^2.\text{K}$$

المناقشة: يبين هذا المثال الفائدة الكبيرة لتشابهات انتقال كمية الحركة والحرارة، حيث يمكن إيجاد معامل انتقال الحرارة بالحمل من معرفة معامل الاحتكاك، حيث إن حساب الأخير أكثر سهولة.

---

4 - 9 - الحمل القسري الخارجي *External Forced Convection*:

سندرس في هذا الجزء الجوانب العملية للانتقال الحراري بالحمل من/إلى السطوح المستوية أو المنحنية التي تتعرض لجريان قسري خارجي، والذي يتميز بتطور الطبقات الحدية فيه بشكل حر، كما أن هذه الطبقات تكون محاطة بمنطقة بجريان حر لا يوجد ضمنها تدرج للسرعة أو درجة الحرارة.

4 – 9 – 1 – السحب وانتقال الحرارة في الجريان الخارجي

***Drag and Heat Transfer in External Flow*:**

كثيراً ما نصادف في الحياة العملية جريان السوائل على السطوح الصلبة، وهذه العملية مسؤولة عن كثير من الظواهر الفيزيائية. ولذلك فإن الفهم الجيد للجريان الخارجي وللحمل الحراري القسري الخارجي أمر مهم في أثناء التصميم الميكانيكي والحراري للكثير من الأنظمة الهندسية (الطائرات، السيارات، الأبنية ...).

يعد إيجاد الحل التحليلي لمسائل الجريان الخارجي أمراً معقداً، لذلك نلجأ إلى استخدام علاقات تجريبية.

تسمى سرعة السائل بالنسبة لجسم صلب مغمور فيه، وفي موضع بعيد بشكلٍ كافٍ عن الجسم (خارج الطبقة الحدية)، بسرعة التيار الحر، ويرمز لها u_∞. عادةً ما نعد أن هذه السرعة مساوية لسرعة المنبع V upstream velocity. وتسمى سرعة المنبع أيضاً بسرعة الاقتراب، وهي السرعة التي يمتلكها السائل قبل الوصول إلى الجسم الصلب وفي موضع بعيد عنه.

تتطابق السرعتان السابقتان بشكل تام تقريباً في حالة الأجسام الرقيقة جداً، مثل صفيحة مستوية موازية للجريان. ولكن يصبح التطابق بين السرعتين تقريبياً في حالة الأجسام غير الانسيابية، مثل أسطوانة طويلة. في الحالة العامة، فإن سرعة المنبع تتغير مع الزمن والمكان، لكننا وأثناء التصميم والتحليل نعدها مستقرة ومنتظمة.

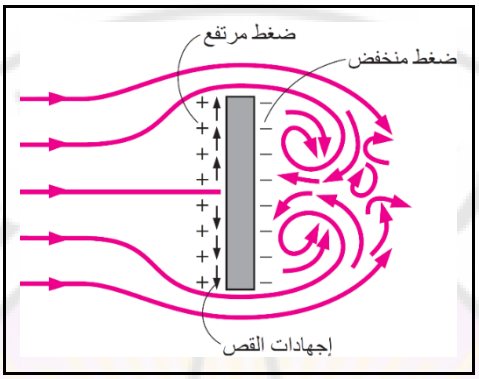
4 – 9 – 2 – الاحتكاك وضغط السحب *Friction and Pressure Drag*:

تسمى القوة التي يؤثر فيها سائل متحرك على جسم ما باتجاه الجريان بقوة السحب drag force. ونلاحظ تأثير هذه القوة عند هبوب رياح قوية تؤدي إلى اقتلاع الأشجار أو خطوط التيار الكهربائي، أو عندما نخرج يدنا من نافذة السيارة وهي تتحرك.

يؤثر السائل الموجود في حالة سكون بقوى ضغط ناظمية فقط على سطح الجسم المغمور فيه. بينما يؤثر السائل المتحرك بقوى قص مماسية على السطح بسبب شرط عدم الانزلاق الناتج عن لزوجة السائل، فضلاً عن قوى الضغط. في الحالة العامة، يمتلك هذان النوعان من القوى مركبات في اتجاه الجريان، وبالتالي تنشأ قوة السحب نتيجة التأثير المشترك لقوى الضغط والقص عند سطح الجسم في اتجاه الجريان. فضلاً عن مركبات قوى الضغط والقص باتجاه الجريان فإن هذه القوى تمتلك مركبات ناظمية على اتجاه الجريان تحاول تحريك الجسم باتجاهها، ويسمى مجموع هذه المركبات بقوة الرفع lift force.

تنشأ كل من قوة السحب وقوة الرفع في الحالة العامة نتيجة التأثير المشترك للاحتكاك (القص) والضغط. في الحالة الخاصة حيث توجد صفيحة مستوية رقيقة متوضّعة بشكل موازٍ لاتجاه الجريان، فإن قوة السحب تنشأ بتأثير الاحتكاك فقط، ولا تتأثر بالضغط. أما في حال كانت الصفيحة متوضّعة بشكل ناظمي على اتجاه الجريان، فإن قوة السحب تنشأ بتأثير الضغط فقط، وتكون مستقلة عن الاحتكاك، حيث إن إجهادات القص تؤثر بالاتجاه الناظمي في الجريان،

كما في الشكل (4 – 12). في حالة الأجسام الانسيابية مثل الأجنحة، فإن قوى القص تؤثر بشكل موازٍ تقريباً لاتجاه الجريان، وبالتالي فإن قوة السحب للأجسام الانسيابية تنشأ بشكل رئيس نتيجة تأثير قوى القص (الاحتكاك).



الشكل (4 – 12) قوة السحب المؤثرة على صفيحة ناظمية على اتجاه الجريان.

تتعلق قوة السحب F_D بكثافة السائل، وبسرعة المنبع V، وبحجم وشكل وتوضع الجسم، فضلاً عن عوامل أخرى، وتعطى قوة السحب المميزة لجسم ما من خلال معامل السحب اللابعدي C_D drag coefficient بالعلاقة:

$$C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho V^2 A} \qquad \textbf{(30 – 4)}$$

A : مساحة مسقط الجسم على مستوٍ عمودي على اتجاه الجريان (المساحة الجبهية)، وذلك من أجل الأجسام غير الانسيابية (أسطوانة، صفيحة ناظمية على الجريان). أما في حالة جريان موازٍ على صفيحة مستوية أو جناح فإن A هي مساحة سطح الصفيحة أو الجناح.

إن معامل السحب تابع بشكل أساسي لشكل الجسم، ولكن يمكن أن يتعلق أيضاً بعدد رينولدز وخشونة السطح.

كما ذكرنا سابقاً، تنشأ قوة السحب نتيجة التأثير المشترك لقوى الضغط واجهادات القص على سطح الجسم. تسمى مركبة قوة السحب الناتجة عن تأثير إجهاد القص عند السطح τ_w بسحب الاحتكاك drag friction، وتسمى المركبة الناتجة عن تأثير الضغط P بسحب الضغط pressure drag (أو سحب الشكل form drag)؛ لأنها تتأثر بصورة كبيرة بشكل الجسم، وبالتالي فإن معامل السحب هو مجموع معاملي كل من سحب الاحتكاك والضغط، كما في العلاقة:

$$C_D = C_{D,\text{friction}} + C_{D,\text{pressure}} \qquad \textbf{(31 – 4)}$$

سحب الاحتكاك هو مركبة قوة القص باتجاه الجريان، وبالتالي فهي تتعلق بتوضّع الجسم فضلاً عن إجهاد القص عند السطح τ_w، حيث أن سحب الاحتكاك يكون معدوماً في حال كان السطح ناظمياً على اتجاه الجريان، وأعظمياً إذا كان السطح موازياً للجريان، وبالتالي فمن أجل جريان موازٍ على صفيحة مستوية فإن معامل السحب يساوي إلى معامل الاحتكاك friction coefficient:

$$C_D = C_{D,\text{friction}} = C_f \qquad \textbf{(32 – 4)}$$

بمجرد معرفة معامل الاحتكاك الوسطي C_f فإن قوة السحب (أو الاحتكاك) تحسب من العلاقة (4 – 30)، حيث إن A في هذه الحالة تساوي إلى مساحة سطح الصفيحة المعرض للجريان. في حال كان السائل يجري على جانبي صفيحة رقيقة، فإن A هي مجموع مساحتي الوجه العلوي والوجه السفلي.

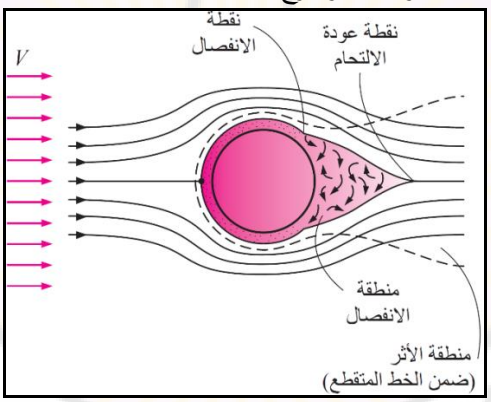
يتعلق سحب الاحتكاك بشكل كبير بلزوجة السائل، وبالتالي في حالة سائل مثالي (لزوجته معدومة)، فإن سحب الاحتكاك معدوم لعدم وجود إجهاد قص عند السطح؛ فضلاً عن ذلك فإن سحب الضغط أيضاً سيكون معدوماً في أثناء الجريان المستقر لسائل مثالي بغض النظر عن شكل الجسم، وذلك لعدم وجود فواقد في الضغط. فمثلاً من أجل جريان أفقي، فإن الضغط سيكون ثابتاً على طول الأفق (كما في حالة سائل ساكن) وذلك لأن سرعة الجريان ثابتة ومساوية لسرعة المنبع، وبالتالي لا توجد محصلة لقوى الضغط مؤثرة في الاتجاه الأفقي. ونستنتج أن قوة السحب معدومة في السوائل المثالية.

تنشأ قوة السحب عند القيم الصغيرة لعدد رينولدز بشكل أساسي نتيجة لسحب الاحتكاك، وبشكل خاص في حالة الأجسام ذات الانسيابية العالية مثل الأجنحة. يتناسب سحب الاحتكاك طرداً مع مساحة السطح، وبالتالي فإن الأجسام ذات السطح الكبير تتعرض لسحب احتكاك كبير. في حالة الجريان الصفائحي، فإن سحب الاحتكاك لا يتعلق بخشونة السطح surface roughness، لكنه يتعلق بشكل كبير بالخشونة في الجريان المضطرب، نتيجة التأثير الكبير لعناصر الخشونة في الطبقة الصفائحية السفلية laminar sublayer ذات اللزوجة العالية.

يتناسب سحب الضغط طرداً مع فرق الضغط بين مقدمة ومؤخرة الجسم المغمور في السائل، وبالمساحة الجبهية، وبالتالي فإن سحب الضغط يمثل الجزء الأكبر من قوة السحب في

حالة الأجسام الغير انسيابية، بينما يكون مهملاً في حالة الأجسام الانسيابية، ومعدوما في حالة صفيحة مستوية رقيقة موازية للجريان.

عند جريان سائل بسرعة كبيرة على سطح منحنٍ، فإن السائل سيحاول الانفصال عن الجسم. تسمى منطقة الضغط المنخفض خلف الجسم، والتي تحدث فيها الدوامات والتيارات الخلفية بمنطقة الانفصال separation region. كلما كانت منطقة الانفصال أكبر كان سحب الضغط أكبر. يستمر تأثير انفصال السائل لمسافة بعيدة في الجريان بعد الجسم على شكل انخفاض في سرعة الجريان (بالنسبة لسرعة المنبع) تسمى المنطقة الموجودة ضمن الجريان والتي يظهر فيها تأثير الجسم على سرعة الجريان منطقة الأثر wake، كما في الشكل (4 – 13). تنتهي منطقة الانفصال عندما يعود تيارا الجريان للالتقاء، ولكن يستمر تأثير منطقة الأثر بالنمو خلف الجسم إلى أن يستعيد السائل الموجود ضمن هذه المنطقة سرعته. يكون تأثير اللزوجة كبيراً في الطبقة الحدية ومنطقة الانفصال ومنطقة الأثر، في حين أنه يمكن اعتبار الجريان خارج هذه المناطق كجريان غير لزج.



الشكل (4 – 13) الانفصال وعودة الاتصال في جريان سائل على أسطوانة.

4 – 9 – 3 – انتقال الحرارة *Heat Transfer*:

إن الظاهرة التي تؤثر على قوة السحب تؤثر أيضاً على انتقال الحرارة، ويظهر هذا التأثير في عدد نوسلت. وجدنا سابقاً من خلال تحويل معادلات الطبقة الحدية إلى الشكل اللابعدي أن عدد نوسلت الموضعي (من أجل قيمة محددة لـ x) وعدد نوسلت الوسطي لهما الصيغة التابعية التالية:

$$\begin{aligned} \mathrm{Nu}_x &= f_1\left(x^*, \mathrm{Re}_x, \mathrm{Pr}\right) \\ \mathrm{Nu} &= f_2\left(\mathrm{Re}_L, \mathrm{Pr}\right) \end{aligned} \qquad \textbf{(33 – 4)}$$

عادةً ما تستخدم العلاقة التجريبية التالية في انتقال الحرارة، حيث إنها تعطي دقة مقبولة:

$$\mathrm{Nu} = C\ \mathrm{Re}_L^m \mathrm{Pr}^n \qquad \textbf{(34 – 4)}$$

حيث إن m و n ثوابت، كما أن قيمة الثابت C تتعلق بالشكل الهندسي وطبيعة الجريان.

تتغير درجة حرارة السائل ضمن الطبقة الحدية الحرارية من T_s عند السطح إلى T_∞ عند حافة الطبقة الحدية. تتغير خواص السائل بتغير درجة الحرارة، وبالتالي فإنها تتغير بتغير الموضع ضمن الطبقة الحدية. تحسب خواص السائل عادةً عند ما يسمى درجة حرارة الغشاء film temperature والتي تعطى بالعلاقة:

$$T_f = \frac{T_s + T_\infty}{2} \qquad \textbf{(35 – 4)}$$

وهي المتوسط الحسابي لدرجة حرارة السطح ودرجة حرارة التيار الحر، وفي هذه الحالة نفرض أن خواص السائل المحسوبة من أجل درجة الحرارة هذه ثابتة في كامل الجريان. توجد طريقة أخرى لحساب تغير خواص السائل مع درجة الحرارة، وذلك من خلال تحديد جميع خواص السائل عند درجة حرارة التيار الحر T_∞، ومن ثم ضرب علاقة عدد نوسلت في المعادلة (4 – 34) بالقيمة $\left(\mu_\infty/\mu_s\right)^r$ أو $\left(\mathrm{Pr}_\infty/\mathrm{Pr}_s\right)^r$.

يتغير كل من معامل قوة السحب ومعامل الحمل الحراري على طول السطح كنتيجة لتغير السرعة باتجاه الجريان وذلك ضمن الطبقة الحدية. ما يهمنا عادةً في التطبيقات الهندسية هو حساب قوة السحب ومعدل انتقال الحرارة من أجل كامل السطح، حيث يمكن حسابهما باستخدام معامل السحب الوسطي ومعامل الحمل الوسطي. من أجل ذلك توجد علاقة تربط بين القيمة الموضعية والوسطية لكل من معاملي السحب والحمل. عند معرفة علاقة المعامل الموضعي (سحب أو حمل)، فإننا نحسب القيمة الوسطية للمعامل من أجل كامل السطح بالعلاقة:

$$C_D = \frac{1}{L}\int_0^L C_{D,x}\,dx \qquad \textbf{(36 – 4)}$$

$$\alpha = \frac{1}{L}\int_0^L \alpha_x\,dx \qquad \textbf{(37 – 4)}$$

بمجرد تحديد القيمة الوسطية لكل من معامل السحب والحمل، فإننا نحسب قوة السحب باستخدام العلاقة (4 – 30)، ونحسب معدل انتقال الحرارة من/إلى السطح الإيزوترمي بالعلاقة:

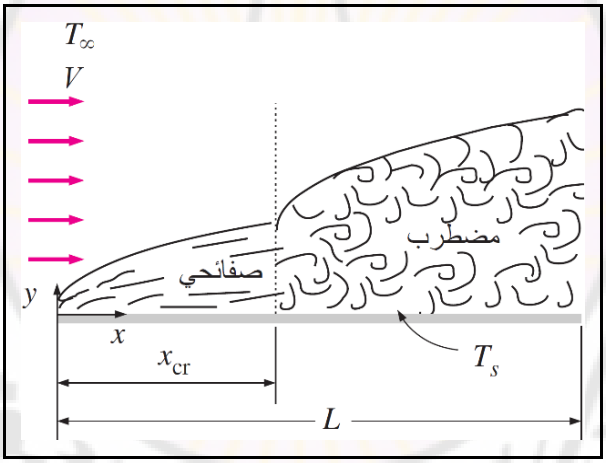
$$\dot{Q} = \alpha A_s \left(T_s - T_\infty\right) \qquad \textbf{(38 – 4)}$$

A_s : مساحة السطح.

4 - 10 - الجريان الموازي على صفيحة مستوية

Parallel Flow Over Flat Plate:

بفرض أن سائلاً ما يجري بشكلٍ موازٍ على صفيحة مستوية طولها L، كما في الشكل (4 – 14). الإحداثي x يقيس المسافة من حافة الدخول وعلى طول الصفيحة باتجاه الجريان. يقترب السائل من الصفيحة بسرعة منبع V، ودرجة حرارة T_∞. في البداية يكون الجريان ضمن الطبقة الحدية الحركية صفائحياً، ولكن في حال كانت الصفيحة طويلة بما فيه الكفاية، فإن الجريان ضمن الطبقة الحدية يتحول إلى جريان مضطرب عند مسافة x_{cr}، حيث يبلغ عدد رينولدز قيمة حرجة.



الشكل (4 – 14) المنطقتان الصفائحية والمضطربة ضمن الطبقة الحدية لجريان على صفيحة مستوية.

يتعلق تحول الجريان من صفائحي إلى مضطرب بالعديد من العوامل، منها شكل السطح، وخشونته، وسرعة المنبع، ودرجة حرارة السطح، ونوع السائل. توصف طبيعة الجريان بعدد رينولدز، والذي يعطى من أجل مسافة x من حافة دخول الصفيحة بالعلاقة:

$$\mathrm{Re}_x = \frac{\rho V x}{\mu} = \frac{V x}{\nu} \qquad \textbf{(39 – 4)}$$

حيث إن قيمة عدد رينولدز تتغير على طول الصفيحة لتصبح عند نهاية الصفيحة $\mathrm{Re}_L = VL/\nu$.

في حالة الجريان على صفيحة مستوية، فإن تحول الجريان من صفائحي إلى مضطرب يحدث عادةً عند قيمة حدية لعدد رينولدز مساوية إلى:

$$\mathrm{Re}_{\mathrm{cr}} = \frac{\rho V x_{\mathrm{cr}}}{\mu} = 5.10^5 \qquad \textbf{(40 – 4)}$$

تتراوح القيمة الحرجة لعدد رينولدز من أجل صفيحة مستوية بين 10^5 و 3.10^6، وذلك بحسب خشونة السطح ودرجة الاضطراب في التيار الحر.

4 – 10 – 1 – معامل الاحتكاك *Friction Coefficient*:

تعطى كل من سماكة الطبقة الحدية ومعامل الاحتكاك الموضعيان في حالة جريان صفائحي على صفيحة مستوية بالعلاقة:

$$\delta_{\mathrm{v},x} = \frac{5x}{\mathrm{Re}_x^{1/2}}$$

$$C_{f,x} = \frac{0.664}{\mathrm{Re}_x^{1/2}} \qquad ;\ \mathrm{Re}_x < 5.10^5 \qquad \textbf{(41 – 4)}$$

أما في حالة الجريان المضطرب، فيعطيان بالعلاقة:

$$\delta_{\mathrm{v},x} = \frac{0.382x}{\mathrm{Re}_x^{1/5}}$$

$$C_{f,x} = \frac{0.0592}{\mathrm{Re}_x^{1/5}} \qquad ;\ 5.10^5 \le \mathrm{Re}_x \le 10^7 \qquad \textbf{(42 – 4)}$$

نلاحظ أن $C_{f,x}$ في الجريان الصفائحي يتناسب طرداً مع $\mathrm{Re}_x^{-1/2}$، وبالتالي مع $x^{-1/2}$. أي إن $C_{f,x}$ يأخذ بشكل افتراضي قيمة لا نهائية عند حافة دخول الصفيحة (بدايتها)، ومن ثم يتناقص في اتجاه الجريان بمعدل $x^{-1/2}$. إن معامل الاحتكاك الموضعي في حالة الجريان المضطرب أكبر منه في الجريان الصفائحي، وذلك نتيجة المزج الشديد الذي يحدث في الطبقة الحدية المضطربة. يأخذ معامل الاحتكاك قيمه العظمى عندما يصبح الجريان مضطرباً بشكل كلي، ومن ثم يتناقص في اتجاه الجريان بمعدل $x^{-1/5}$.

يحسب معامل الاحتكاك الوسطي لكامل الصفيحة بتعويض العلاقات السابقة في المعادلة (4 – 36) ومن ثم إجراء المكاملة، حيث نحصل على العلاقتين:

جريان صفائحي:

$$C_f = \frac{1.328}{\mathrm{Re}_L^{1/2}} \qquad ;\mathrm{Re}_L < 5.10^5 \qquad \textbf{(43 – 4)}$$

جريان مضطرب:

$$C_f = \frac{0.074}{\mathrm{Re}_L^{1/5}} \quad ;5.10^5 \le \mathrm{Re}_L \le 10^7 \qquad \textbf{(44 – 4)}$$

يجب الانتباه إلى أن كلاً من هاتين العلاقتين تعطي معامل الاحتكاك الوسطي لكامل الصفيحة عندما يكون الجريان ذا طبيعة واحدة فقط (صفائحي أو مضطرب على كامل الصفيحة)، ولكن يمكن استخدام العلاقة الثانية في حال كانت منطقة الجريان الصفائحي صغيرة جداً بالمقارنة مع المنطقة المضطربة أي أن ($x_{\mathrm{cr}} < L$).

في حال كان الجريان على الصفيحة مؤلفاً من منطقتين، صفائحية ومضطربة، فإن معامل الاحتاك الوسطي يحسب من خلال مكاملة العلاقة (4 – 36) من أجل كل منطقة على حدة:

$$C_f = \frac{1}{L}\left(\int_0^{x_{\mathrm{cr}}} C_{f,x\ \mathrm{laminar}}\,dx + \int_{x_{\mathrm{cr}}}^{L} C_{f,x\ \mathrm{turbulent}}\,dx\right) \qquad \textbf{(45 – 4)}$$

يجب التنويه إلى أننا قمنا بحساب معامل الاحتكاك ضمن المنطقة الانتقالية كونها جزءاً من المنطقة المضطربة.

بفرض أن القيمة الحرجة لعدد رينولدز $\mathrm{Re}_{\mathrm{cr}} = 5.10^5$ وبإجراء التكامل للعلاقة (4 – 45)، فإن معامل الاحتكاك الوسطي لكامل الصفيحة يعطى بالعلاقة:

$$C_f = \frac{0.074}{\mathrm{Re}_L^{1/5}} - \frac{1742}{\mathrm{Re}_L} \quad ;5.10^5 \le \mathrm{Re}_L \le 10^7 \qquad \textbf{(46 – 4)}$$

تختلف قيمة الثابت في هذه العلاقة باختلاف القيمة الحرجة لعدد رينولدز. فضلاً عن ذلك فقد فرضنا أن السطوح ملساء، وأن التيار الحر ذو اضطراب حر turbulent free.

في حالة الجريان الصفائحي فإن معامل الاحتكاك يتعلق فقط بعدد رينولدز، بينما يكون تأثير خشونة السطح معدوماً. أما في الجريان المضطرب فإن خشونة السطح تتسبب بزيادة معامل الاحتكاك أضعافاً عدة، حيث إنه من أجل جريان مضطرب بشكل كامل، فإن معامل الاحتكاك يتعلق بخشونة السطح فقط، ولا يتعلق بعدد رينولدز.

يعطى معامل الاحتكاك الوسطي من أجل جريان مضطرب على سطح خشن لصفيحة مستوية وفق العلاقة التجريبية:

$$C_f = \left(1.89 - 1.62\log_{10}\frac{\varepsilon}{L}\right)^{-2.5} \qquad \textbf{(47 – 4)}$$

ε : خشونة السطح.

4 – 10 – 2 – معامل انتقال الحرارة *Heat Transfer Coefficient*:

يعطى عدد نوسلت الموضعي لجريان موازٍ على صفيحة مستوية بالعلاقة:

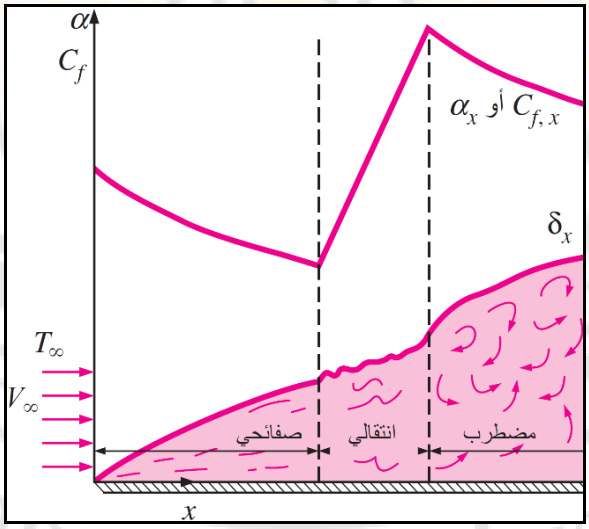
جريان صفائحي: **(4 – 48)**

$$\mathrm{Nu}_x = \frac{\alpha_x x}{\lambda} = 0.332\,\mathrm{Re}_x^{0.5}\mathrm{Pe}^{1/3} \qquad ;\mathrm{Pr} > 0.6$$

جريان مضطرب: **(4 – 49)**

$$\mathrm{Nu}_x = \frac{\alpha_x x}{\lambda} = 0.0296\,\mathrm{Re}_x^{0.8}\mathrm{Pr}^{1/3} \quad ; \quad \begin{matrix} 0.6 \le \mathrm{Pr} \le 60 \\ 5.10^5 \le \mathrm{Re}_x \le 10^7 \end{matrix}$$

نلاحظ أنه في حالة الجريان الصفائحي، فإن α_x يتناسب طرداً مع $\mathrm{Re}_x^{0.5}$، أي إنه يتناسب عكساً مع $x^{-0.5}$، وبالتالي فإن قيمة α_x تكون لا نهائية عند حافة دخول الصفيحة $(x=0)$ وتتناقص في اتجاه الجريان بمعدل $x^{-0.5}$. أما في الجريان المضطرب، فإن α_x يتناسب طرداً مع $\mathrm{Re}_x^{0.8}$، وبالنتيجة فإنه يتناسب طرداً مع $x^{-0.2}$. يأخذ معامل انتقال الحرارة α_x قيماً عظمى عندما يصبح الجريان مضطرباً بشكل كامل، ومن ثم يتناقص في اتجاه الجريان بمعدل $x^{-0.2}$. يظهر الشكل (4 – 15) التغيرات في كل من سماكة الطبقة الحدية δ، معامل السحب ومعامل انتقال الحرارة على طول صفيحة مستوية إيزوترمية.



الشكل (4 – 15) تغيرات معاملي الاحتكاك وانتقال الحرارة لجريان على صفيحة مستوية.

يحسب عدد نوسلت الوسطي لكامل الصفيحة من خلال تعويض المعادلات السابقة في العلاقة (4 – 37) وإجراء التكامل، حيث نحصل على العلاقتين التاليتين:

جريان صفائحي: $\mathrm{Nu} = \frac{\alpha L}{\lambda} = 0.664\,\mathrm{Re}_L^{0.5}\mathrm{Pr}^{1/3} \quad ;\mathrm{Re}_L < 5.10^5$ **(4 – 50)**

جريان مضطرب: $0.6 \le \mathrm{Pr} \le 60$, $5.10^5 \le \mathrm{Re}_L \le 10^7$ $\mathrm{Nu} = \frac{\alpha L}{\lambda} = 0.037\,\mathrm{Re}_L^{0.8}\mathrm{Pr}^{1/3}$; **(4 – 51)**

العلاقة الأولى تعبر عن معامل انتقال الحرارة الوسطي لكامل الصفيحة في حال كان الجريان صفائحياً على كامل الصفيحة، بينما تعبر العلاقة الثانية عن معامل انتقال الحرارة الوسطي لكامل الصفيحة في حال كان الجريان مضطرباً على كامل الصفيحة، أو كانت منطقة الجريان الصفائحي صغيرة جداً بالمقارنة مع منطقة الجريان المضطرب.

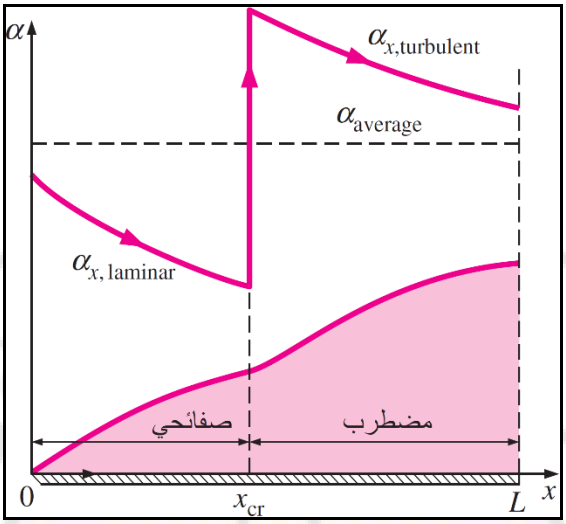
في حال كان الجريان على الصفيحة مؤلفاً من منطقتين صفائحية ومضطربة، فإن معامل انتقال الحرارة الوسطي لكامل الصفيحة يحسب من خلال إجراء التكامل في العلاقة (4 – 37) من أجل كل منطقة على حده:

$$\alpha = \frac{1}{L}\left(\int_0^{x_{cr}} \alpha_{x,\text{laminar}}\,dx + \int_{x_{cr}}^{L} \alpha_{x,\text{turbulent}}\,dx\right) \qquad \textbf{(4 – 52)}$$

من أجل قيمة حرجة لعدد رينولدز $\mathrm{Re}_{cr} = 5.10^5$ وبإجراء التكامل في العلاقة السابقة، فإن عدد نوسلت الوسطي لكامل الصفيحة يعطى بالعلاقة:

$$0.6 \le \mathrm{Pr} \le 60,\quad 5.10^5 \le \mathrm{Re}_L \le 10^7 \qquad \mathrm{Nu} = \frac{\alpha L}{\lambda} = \left(0.037\,\mathrm{Re}_L^{0.8} - 871\right)\mathrm{Pr}^{1/3} \quad ; \qquad \textbf{(4 – 53)}$$

يجب الانتباه إلى أن الثوابت في هذه العلاقة تختلف باختلاف القيمة الحرجة لعدد رينولدز. يبين الشكل (4 – 16) القيمة الوسطية لمعامل انتقال الحرارة بالنسبة لقيمته في الجريان الصفائحي والمضطرب.



الشكل (4 – 16) معامل انتقال الحرارة الوسطي لجريان على صفيحة مستوية.

تمتلك المعادن السائلة (مثل الزئبق) موصلية حرارية كبيرة، وتستخدم عادةً في التطبيقات التي تتطلب معدل انتقال حرارة عالٍ. تمتلك هذه المعادن السائلة قيماً صغيرة جداً لعدد براندل، حيث إن الطبقة الحدية الحرارية تتطور بشكل أسرع بكثير من تطور طبقة السرعة الحدية. لذلك نفرض أن السرعة ضمن الطبقة الحدية الحرارية ثابتة ومساوية لسرعة التيار الحر، وبحل معادلة الطاقة نجد:

$$\text{Nu}_x = 0.565(\text{Re}_x \text{Pr})^{1/2} \qquad ;\text{Pr} < 0.05 \qquad \textbf{(54 – 4)}$$

من الأنسب أن تكون هناك علاقة واحدة لعدد نوسلت يمكن تطبيقها من أجل السوائل جميعها، بما في ذلك المعادن السائلة. تستخدم العلاقة التالية لحساب عدد نوسلت من أجل قيم عدد براندل جميعها، حيث تعطي دقة تصل إلى $\pm 1\%$:

$$\text{Nu}_x = \frac{\alpha_x x}{\lambda} = \frac{0.3387\,\text{Pr}^{1/3}\text{Re}_x^{1/2}}{\left[1+(0.0468/\text{Pr})^{2/3}\right]^{1/4}} \qquad \textbf{(55 – 4)}$$

تم الحصول على هذه العلاقة للصفائح المستوية ذات السطوح الإيزوترمية، ويمكن استخدامها في حالة السطوح غير الإيزوترمية وذلك بافتراض أن درجة حرارة السطح ثابتة عند قيمة وسطية. كما أن العلاقة تفترض أن السطوح ملساء، وأن التيار الحر ذو اضطراب حر.

مثال 4 – 2:

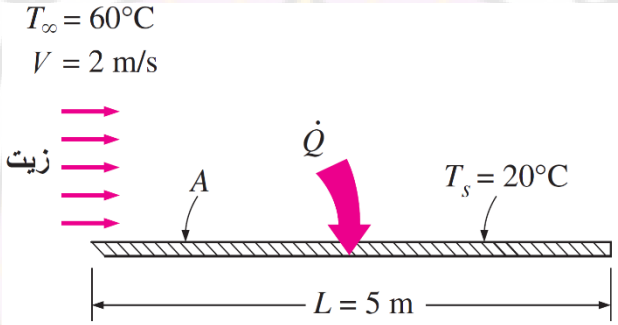
زيت محرك درجة حرارته $60\,^{\circ}\mathrm{C}$ يجري بسرعة $2\,\mathrm{m/s}$ على السطح العلوي لصفيحة مستوية، على طول $5\,\mathrm{m}$، ودرجة حرارة السطح $20\,^{\circ}\mathrm{C}$. احسب قوة السحب الكلية، ومعدل انتقال الحرارة من أجل واحدة العرض لكامل الصفيحة.

الحل:

المعطيات: زيت محرك يجري على صفيحة مستوية ذات درجة حرارة ثابتة.

المطلوب: حساب قوة السحب الكلية، ومعدل انتقال الحرارة من أجل واحدة العرض من الصفيحة.

الشكل:



الافتراضات:

1. الجريان مستقر وغير قابل للانضغاط.
2. القيمة الحرجة لعدد رينولدز $\mathrm{Re}_{cr} = 5\times10^5$.

الخواص:

الجدول (A14) زيت محرك عند درجة حرارة الغشاء $\left[T_f = \frac{1}{2}(T_s + T_\infty) = 40\,^{\circ}\mathrm{C}\right]$:

$$\rho = 876\,\mathrm{kg/m^3} \qquad \mathrm{Pr} = 2870$$
$$\lambda = 0.144\,\mathrm{W/m.K} \qquad \nu = 242\times10^{-6}\,\mathrm{m^2/s}$$

التحليل: بما أن طول الصفيحة هو $L = 5\,\mathrm{m}$، فإن عدد رينولدز عند نهاية الصفيحة هو:

$$\mathrm{Re}_L = \frac{VL}{\nu} = \frac{2\,\mathrm{m/s}\times5\,\mathrm{m}}{0.242\times10^{-5}\,\mathrm{m^2/s}} = 4.13\times10^4 < 5\times10^5$$

بالتالي، فإن الجريان صفائحي على كامل الصفيحة، ويحسب معامل الاحتكاك الوسطي من العلاقة (4 – 43):

$$C_f = 1.328\,\mathrm{Re}_L^{-0.5} = 1.328\times\left(4.13\times10^3\right)^{-0.5} = 0.0207$$

بملاحظة أن سحب الضغط معدوم، بالتالي فإن $C_D = C_f$ للصفيحة. من العلاقة (4 – 8) فإن قوة السحب المؤثرة في واحدة العرض من الصفيحة هي:

$$F_D = C_f A_s \frac{\rho V^2}{2} = 0.0207\times(5\times1)\,\mathrm{m}^2 \frac{876\,\mathrm{kg/m^3}\times 2\,\mathrm{m/s}}{2} = 181\,\mathrm{N}$$

وتحسب قوة السحب الكلية المؤثرة في كامل عرض الصفيحة بضرب القيمة السابقة بالعرض الكلي للصفيحة.

بشكل مشابه، فإننا نحسب عدد رينولدز باستخدام العلاقة (4 – 50):

$$\mathrm{Nu} = \frac{\alpha L}{\lambda} = 0.664\,\mathrm{Re}_L^{0.5}\,\mathrm{Pr}^{1/3} = 0.664\times\left(4.13\times10^4\right)^{0.5}\times 2870^{1/3} = 1918$$

ومنه:

$$\alpha = \frac{\lambda}{L}\mathrm{Nu} = \frac{0.144\,\mathrm{W/m.K}}{5\,\mathrm{m}}(1918) = 55.2\,\mathrm{W/m^2.K}$$

ومن قانون نيوتن في التبريد:

$$\dot{Q} = \alpha A_s\left(T_\infty - T_s\right) = 55.2\,\mathrm{W/m^2.K}\times(5\times1)\,\mathrm{m}^2\,(60-20)\,^{\circ}\mathrm{C} = 11,040\,\mathrm{W}$$

مثال 4 – 3:

يبلغ الضغط الجوي في مكان جغرافي معين $83.4\,\mathrm{kPa}$. يتدفق هواء عند هذا الضغط بدرجة حرارة $30\,^{\circ}\mathrm{C}$ وبسرعة $6\,\mathrm{m/s}$ على صفيحة مستوية درجة حرارتها $120\,^{\circ}\mathrm{C}$، وأبعادها $2.5\,\mathrm{m}\times8\,\mathrm{m}$. احسب معدل انتقال الحرارة من الصفيحة إذا كان الجريان موازياً لـ 1 – الجانب الذي طوله $8\,\mathrm{m}$. 2 – الجانب الذي طوله $2.5\,\mathrm{m}$.

الحل:

المعطيات: منطقة جغرافية ذات ضغط جوي معلوم، يجري هواء قسري بشكلٍ موازٍ على السطح العلوي لصفيحة مستوية من أجل تبريدها.

المطلوب:

1. معدل انتقال الحرارة من الصفيحة في أثناء الجريان باتجاه الطول.
2. معدل انتقال الحرارة من الصفيحة في أثناء الجريان باتجاه العرض.

الافتراضات:

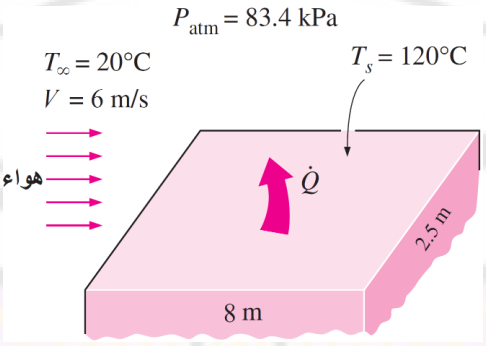
1. شروط الحالة المستقرة.

2. القيمة الحرجة لعدد رينولدز $\mathrm{Re}_{cr} = 5\times10^5$.

3. تأثير الإشعاع مهمل.

4. الهواء غاز مثالي ذو خواص ثابتة.

الشكل:



الخواص:

نحول الضغط إلى atm :

$$P = 83.4\,\mathrm{kPa}\,\frac{1\,\mathrm{atm}}{101.325\,\mathrm{kPa}} = 0.823\,\mathrm{atm}$$

من أجل غاز مثالي، فإن الموصلية الحرارية وعدد براندل لا يتعلقان بالضغط، لكن اللزوجة التحريكية تتناسب عكساً مع الضغط. بأخذ هذه الأمور بالحسبان، فإن خواص الهواء عند ضغط $0.823\,\mathrm{atm}$ ودرجة حرارة الغشاء $\left[T_f = \frac{1}{2}(T_s + T_\infty) = \frac{1}{2}(120+30) = 75\,^{\circ}\mathrm{C}\right]$ من الجدول (A18):

$$\lambda = 0.02917\,\mathrm{W/m.K} \quad , \quad \mathrm{Pr} = 0.7166$$

$$\nu = \mathrm{n}_{1\mathrm{atm}}/\mathrm{P}_{\mathrm{atm}} = 2.046\times10^{-5}\,\mathrm{m^2/s}/0.823 = 2.486\times10^{-5}\,\mathrm{m^2/s}$$

التحليل:

1. عندما يكون الجريان باتجاه الطول $8\,\mathrm{m}$ فإن قيمة عدد رينولدز هي:

$$\mathrm{Re}_L = \frac{V_\infty L}{\nu} = \frac{6\,\mathrm{m/s}\times8\,\mathrm{m}}{2.486\times10^{-5}\,\mathrm{m^2/s}} = 1.931\times10^6$$

وهي أكبر من القيمة الحرجة لعدد رينولدز، بالتالي لدينا جريان مشترك، صفائحي ومضطرب. ونحسب معامل الحمل الحراري الوسطي باستخدام العلاقة (4 – 53):

$$\mathrm{Nu} = \frac{\alpha L}{\lambda} = \left(0.037\,\mathrm{Re}_L^{0.8} - 871\right)\mathrm{Pr}^{1/3}$$

$$= \left[0.037\left(1.931\times10^{6}\right)^{0.8} - 871\right]\left(0.7166\right)^{1/3} = 2757$$

$$\alpha = \frac{\lambda}{L}\mathrm{Nu} = \frac{0.02917\,\mathrm{W/m.K}}{8\,\mathrm{m}}\left(2757\right) = 10.05\,\mathrm{W/m^2.K}$$

وبالتالي من قانون نيوتن للتبريد نحسب معدل انتقال الحرارة بالحمل من الصفيحة:

$$A_s = WL = 2.5\,\mathrm{m}\times 8\,\mathrm{m} = 20\,\mathrm{m^2}$$

$$\dot{Q} = \alpha A_s\left(T_\infty - T_s\right) = 10.05\,\mathrm{W/m^2.K}\times 20\,\mathrm{m^2}\left(120\text{-}30\right)^{\circ}\mathrm{C} = 18,096\,\mathrm{W}$$

2. إذا كان الجريان باتجاه العرض $2.5\,\mathrm{m}$ فإن قيمة عدد رينولدز:

$$\mathrm{Re}_L = \frac{V_\infty L}{\nu} = \frac{6\,\mathrm{m/s}\times 2.5\,\mathrm{m}}{2.486\times10^{-5}\,\mathrm{m^2/s}} = 6.034\times10^{5}$$

وهي أكبر من القيمة الحرجة لعدد رينولدز، وبالتالي لدينا جريان مشترك، صفائحي ومضطرب. نكرر خطوات الحل التي اتبعناها في الطلب الأول:

$$\mathrm{Nu} = \frac{\alpha L}{\lambda} = \left(0.037\,\mathrm{Re}_L^{0.8} - 871\right)\mathrm{Pr}^{1/3}$$

$$= \left[0.037\left(6.034\times10^{5}\right)^{0.8} - 871\right]\left(0.7166\right)^{1/3} = 615.1$$

$$\alpha = \frac{\lambda}{L}\mathrm{Nu} = \frac{0.029717\,\mathrm{W/m.K}}{2.5\,\mathrm{m}}\left(615.1\right) = 7.177\,\mathrm{W/m^2.K}$$

$$\dot{Q} = \alpha A_s\left(T_\infty - T_s\right) = 7.177\,\mathrm{W/m^2.K}\times 20\,\mathrm{m^2}\left(120\text{-}30\right)^{\circ}\mathrm{C} = 12,919\,\mathrm{W}$$

المناقشة:

1. نلاحظ أن لاتجاه الجريان تأثيراً مهماً على انتقال الحرارة بالحمل من أو إلى السطح. ففي هذا المثال يمكننا زيادة معدل انتقال الحرارة بالحمل من الصفيحة بمقدار 40% بمجرد توجيه الهواء للجريان باتجاه البعد الطويل.
2. في حال أهملنا منطقة الجريان الصفائحي، وافترضنا أن الجريان على كامل الصفيحة مضطرب، فإن ذلك سيؤثر بشكل كبير في قيمة عدد نوسلت، وبالتالي معامل الحمل الحراري ومعدل انتقال الحرارة بالحمل. ففي الطلب الأول، إذا اعتبرنا كامل الجريان

مضطرباً فإن قيمة عدد نوسلت $\mathrm{Nu} = 3536.6$ ، وهي أكبر بأكثر من 28% من القيمة المحسوبة سابقاً.

4 – 10 – 3 – صفيحة مستوية ذات طول ابتدائي غير مسخن

***Flat Plate with Unheated Starting Length*:**

لقد افترضنا خلال دراستنا السابقة أن الصفيحة مسخنة من حافتها وعلى كامل طولها (الصفيحة بأكملها تمتلك درجة حرارة أكبر من درجة حرارة السائل)، لكن الكثير من التطبيقات العملية تتضمن سطوحاً ذوات قسم ابتدائي غير مسخن طوله ξ، كما في الشكل (4 – 17)، وبالتالي لا يوجد انتقال حرارة من أجل $0 < x < \xi$. في هذه الحالة فإن الطبقة الحدية الحركية تتطور من الحافة $(x = 0)$، لكن الطبقة الحدية الحرارية لا تبدأ بالتطور إلا عند بداية التسخين $(x = \xi)$.

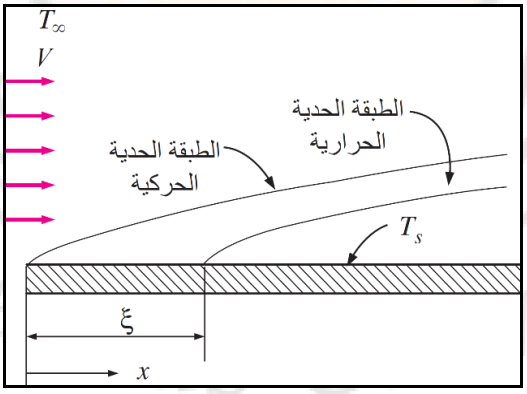
لندرس صفيحة مستوية ذات قسم مسخن $(x > \xi)$ درجة حرارته ثابتة $(T = T_s)$، باستخدام الطرائق التكاملية في الحل، فإن عدد نوسلت الموضعي يعطى بالعلاقة:

جريان صفائحي: **(4 – 56)**

$$\mathrm{Nu}_x = \frac{\mathrm{Nu}_{x(\xi=0)}}{\left[1-(\xi/x)^{3/4}\right]^{1/3}} = \frac{0.332\,\mathrm{Re}_x^{0.5}\mathrm{Pr}^{1/3}}{\left[1-(\xi/x)^{3/4}\right]^{1/3}}$$

جريان مضطرب: **(4 – 57)**

$$\mathrm{Nu}_x = \frac{\mathrm{Nu}_{x(\xi=0)}}{\left[1-(\xi/x)^{9/10}\right]^{1/9}} = \frac{0.0296\,\mathrm{Re}_x^{0.8}\mathrm{Pr}^{1/3}}{\left[1-(\xi/x)^{9/10}\right]^{1/9}}$$



الشكل (4 – 17) تطور الطبقتين الحديتين الحركية والحرارية لجريان على صفيحة مستوية ذات طول ابتدائي غير مسخن.

لحساب عدد نوسلت الوسطي للقسم المسخن من الصفيحة يجب إجراء التكامل لعلاقات عدد نوسلت الموضعي السابقة، وحيث إن هذا التكامل لا يمكن إجراؤه بالطرق التحليلية، فإننا نلجأ إلى إجرائه بالطرق العددية. بعد إجراء التكامل العددي، فإن معامل انتقال الحرارة الوسطي بالحمل يعطى بالعلاقة:

جريان صفائحي: (4 – 58)

$$\alpha = \frac{2\left[1-\left(\xi/x\right)^{3/4}\right]}{1-\xi/L}\alpha_{x=L}$$

جريان مضطرب: (4 – 59)

$$\alpha = \frac{5\left[1-\left(\xi/x\right)^{9/10}\right]}{4\left(1-\xi/L\right)}\alpha_{x=L}$$

تعطي العلاقة الأولى معامل انتقال الحرارة الوسطي بالحمل للقسم المسخن من الصفيحة عندما يكون الجريان صفائحياً على كامل الصفيحة، أما العلاقة الثانية، فتعطي معامل انتقال الحرارة بالحمل الوسطي للقسم المسخن في حال كان الجريان مضطرباً على كامل الصفيحة، أو عندما تكون منطقة الجريان الصفائحي صغيرة جداً بالنسبة للمنطقة المضطربة.

4 – 10 – 4 – تدفق حراري منتظم *Uniform Heat Flux*:

عندما توصف الصفيحة المستوية بأنها ذات تدفق حراري منتظم (ثابت على طولها) عوضاً عن توصيفها بأنها ذات درجة حرارة منتظمة، فإن عدد نوسلت الموضعي يعطى بالعلاقات:

جريان صفائحي: (4 – 60)

$$\mathrm{Nu}_x = 0.453\,\mathrm{Re}_x^{0.5}\mathrm{Pr}^{1/3}$$

جريان مضطرب: (4 – 61)

$$\mathrm{Nu}_x = 0.0308\,\mathrm{Re}_x^{0.8}\mathrm{Pr}^{1/3}$$

تعطي هذه العلاقات قيماً أعلى بـ 36%للجريان الصفائحي، وأعلى بـ 4% للجريان المضطرب، بالنسبة للنتائج في حالة صفيحة إيزوترمية.

في حال كانت الصفيحة ذات طول ابتدائي غير مسخن، يمكننا حينها استخدام علاقات السطح ذو درجة الحرارة المنتظمة، وذلك بعد استخدام العلاقات (4 – 56)، (4 – 67) من أجل قيم $\mathrm{Nu}_{x(\xi=0)}$.

في حال كان التدفق الحراري $\dot{q}_s$محدداً بشكل مسبق فإن معدل انتقال الحرارة من/إلى الصفيحة يعطى بالعلاقة:

$$\dot{Q} = \dot{q}_s A_s \qquad \textbf{(62 – 4)}$$

وتعطى درجة حرارة السطح عند مسافة x من حافة الصفيحة بالعلاقة:

$$\dot{q}_s = \alpha_x \left[T_s(x) - T_\infty \right] \longrightarrow T_s(x) = T_\infty + \frac{\dot{q}_s}{\alpha_x} \qquad \textbf{(63 - 4)}$$

A_s : مساحة سطح التبادل الحراري.

مثال 4 – 4:

لوحة إلكترونية $15\text{cm} \times 15\text{cm}$ تبدد استطاعة 15W بشكل منتظم. تبرد اللوحة عن طريق الهواء، حيث إن درجة حرارته $20\,^{\circ}\text{C}$ وسرعته 5m/s. بإهمال انتقال الحرارة من أسفل اللوحة، احسب درجة حرارة سطح اللوحة 1 – عند حافتها الابتدائية. 2 – عند نهايتها. وذلك بفرض أن الجريان مضطرب؛ لأن العناصر الإلكترونية على اللوحة تعمل كمولدات اضطراب.

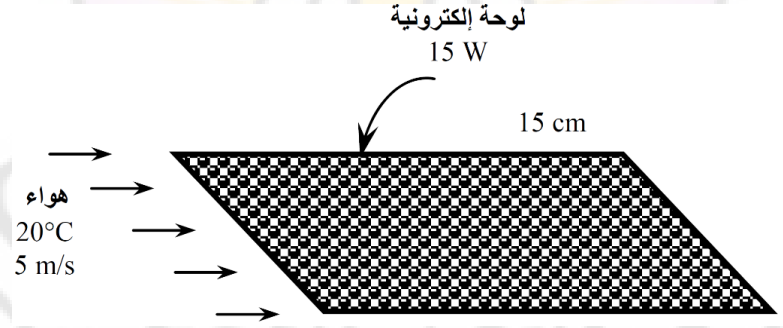
الحل:

المعطيات: لوحة إلكترونية تبدد استطاعة بشكل منتظم، تبرد بجريان هواء مضطرب.

المطلوب:

1. درجة حرارة سطح اللوحة عند الحافة.
2. درجة حرارة سطح اللوحة عند نهايتها.

الشكل:



الافتراضات:

1. شروط الحالة المستقرة.
2. القيمة الحرجة لعدد رينولدز $\text{Re}_{cr} = 5 \times 10^5$.
3. تأثير الإشعاع مهمل.
4. انتقال الحرارة من أسفل اللوحة مهمل.
5. الهواء غاز مثالي ذو خواص ثابتة.

الخواص:

بفرض أن درجة حرارة الغشاء تقريباً $35\,^{o}\mathrm{C}$:

الجدول (A16) هواء $\left(T = 35\,^{o}\mathrm{C}\right)$:

$$\lambda = 0.0265\,\mathrm{W/m.K}$$

$$\nu = 1.655\times10^{-5}\,\mathrm{m^2/s}$$

$$\mathrm{Pr} = 0.7268$$

التحليل:

1. إن معامل الحمل الحراري عند الحافة يقترب من اللانهاية، وبالتالي فإن درجة حرارة السطح عند الحافة يجب أن تقترب من درجة حرارة الهواء، والتي هي $20\,^{o}\mathrm{C}$.

2. قيمة عدد رينولدز:

$$\mathrm{Re}_x = \frac{V_\infty x}{\nu} = \frac{5\,\mathrm{m/s}\times0.15\,\mathrm{m}}{1.655\times10^{-5}\,\mathrm{m^2/s}} = 4.532\times10^4$$

وهي أقل من القيمة الحرجة لعدد رينولدز، ولكننا نفرض أن الجريان مضطرب لأن العناصر الإلكترونية على اللوحة تلعب دور مولدات اضطراب. نستخدم علاقة نوسلت من أجل تدفق حراري منتظم (4 – 61)، وذلك لحساب معامل الحمل الحراري الموضعي عند نهاية اللوحة:

$$\mathrm{Nu}_x = \frac{\alpha_x x}{\lambda} = 0.0308\,\mathrm{Re}_x^{0.8}\,\mathrm{Pr}^{1/3} = 0.0308\left(4.532\times10^4\right)^{0.8}\left(0.7268\right)^{1/3}$$

$$\mathrm{Nu}_x = 147$$

$$\alpha_x = \frac{\lambda}{x}\mathrm{Nu}_x = \frac{0.02625\,\mathrm{W/m.\,^{o}C}}{0.15\,\mathrm{m}}(147) = 25.73\,\mathrm{W/m^2.\,^{o}C}$$

ومن العلاقة (4 – 63)، فإن درجة حرارة السطح عند نهاية اللوحة:

$$T_s = T_\infty + \frac{\dot{q}}{\alpha_x} = 20\,^{o}\mathrm{C} + \frac{15\,\mathrm{W}/\left(0.15\,\mathrm{m}\right)^2}{25.73\,\mathrm{W/m^2.\,^{o}C}} = 45.9\,^{o}\mathrm{C}$$

المناقشة: يمكن حساب التدفق الحراري أيضاً باستخدام علاقة السطوح الإيزوترمية (4 – 49):

$$\mathrm{Nu}_x = \frac{\alpha_x x}{\lambda} = 0.0296\,\mathrm{Re}_x^{0.8}\,\mathrm{Pr}^{1/3} = 0.0296\left(45,320\right)^{0.8}\left(0.7268\right)^{1/3}$$

$$\mathrm{Nu}_x = 141.3$$

$$\alpha_x = \frac{\lambda}{x}\mathrm{Nu}_x = \frac{0.02625\,\mathrm{W/m.^oC}}{0.15}(141.3) = 24.73\,\mathrm{W/m^2.^oC}$$

وبالتالي فإن درجة حرارة السطح عند نهاية اللوحة هي:

$$T_s = T_\infty + \frac{\dot{q}}{\alpha_x} = 20\,^\circ\mathrm{C} + \frac{15\,\mathrm{W/(0.15m)^2}}{24.73\,\mathrm{W/m^2.^oC}} = 47\,^\circ\mathrm{C}$$

ونلاحظ أن النتيجتين قريبتان من بعضهما.

4 - 11 - الجريان على الأسطوانات والكرات

Flow Across Cylinders and Spheres:

كثيراً ما نصادف في التطبيقات جرياناً على أسطوانات أو كرات. فعلى سبيل المثال، في المبادل الحراري الأنبوبي، يحدث جريان داخلي ضمن الأنابيب، وجريان خارجي على سطح الأنابيب، ويجب أخذ هذين الجريانين في الحسبان عند إجراء التحليل للمبادل الحراري؛ فضلاً عن ذلك فإننا نصادف الجريان على سطح الأجسام الكروية في العديد من الرياضات مثل كرة القدم وكرة المضرب.

يُعَدُّ القطر الخارجي للأسطوانة أو الكرة هو الطول المميز لها، وبالتالي فإن عدد رينولدز لهذه الأجسام يعرف وفق العلاقة:

$$\mathrm{Re} = \frac{VD}{\nu}$$

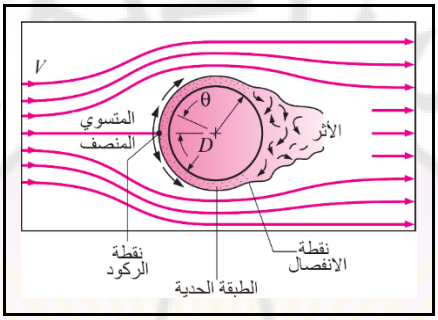
وتكون القيمة الحرجة لعدد رينولدز من أجل جريان على أسطوانة أو كرة حوالي $\mathrm{Re}_{cr} \approx 2.10^5$.

يظهر الجريان المتصالب على أسطوانة أنماطاً معقدة من الجريان، كما يبين الشكل (4 – 18). يتفرع السائل عند اقترابه من الأسطوانة ليحيط بها مشكلاً طبقة حدية تغلف الأسطوانة، بينما ترتطم جزيئات السائل الموجودة عند المستوي المنصف بالأسطوانة عند نقطة الركود، لتصبح سرعة السائل في هذه النقطة معدومة مما يؤدي إلى ازدياد الضغط عند هذه النقطة. يتناقص الضغط في اتجاه الجريان في حين تزداد سرعة السائل.

عند السرعات المنخفضة جداً للجريان $(\mathrm{Re} \le 1)$ فإن السائل يغلف كامل محيط الأسطوانة، حيث يلتقي فرعا السائل عند الجانب الخلفي للأسطوانة بشكل منتظم، وبالتالي فإن السائل يأخذ الشكل المنحني للأسطوانة. عند سرعات أعلى للجريان فإن السائل يحيط أيضاً بالأسطوانة عند مقدمتها، لكن سرعته العالية تمنعه من متابعة التصاقه بالسطح عند وصوله إلى أعلى الأسطوانة، وبالتالي فإن الطبقة الحدية تنفصل عن السطح مشكلةً منطقة انفصال خلف

الأسطوانة. يتميز الجريان في منطقة الأثر بتشكل عشوائي للدوامات، وضغط أقل بكثير من الضغط عند نقطة الركود.

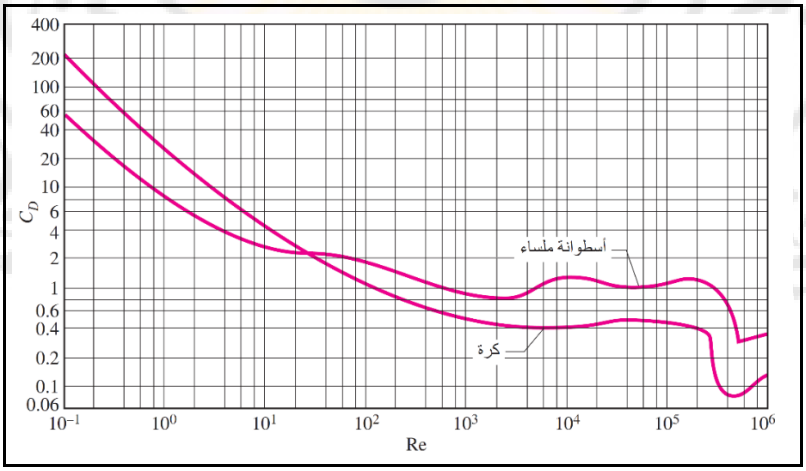
تؤثر طبيعة الجريان على أسطوانة أو كرة بشكل كبير في معامل السحب الكلي C_D، ويمكن أن يكون كل من سحب الاحتكاك وسحب الضغط ذا تأثير واضح. إن للفرق في الضغط بين المنطقة المجاورة لنقطة الركود والجانب المقابل لها في منطقة الأثر يؤدي إلى نشوء قوة محصلة تؤثر على الجسم في اتجاه الجريان.



الشكل (4 – 18) أنماط الجريان عند الجريان المتصالب لسائل على أسطوانة.

تنشأ قوة السحب عند القيم الصغيرة لعدد رينولدز $(\mathrm{Re} < 10)$ بشكل أساسي بسبب سحب الاحتكاك، بينما يكون سحب الضغط هو السبب الرئيس عند القيم الكبيرة لعدد رينولدز $(\mathrm{Re} > 5000)$، ويكون كلاهما ذا تأثير واضح عند القيم البينية لعدد رينولدز.

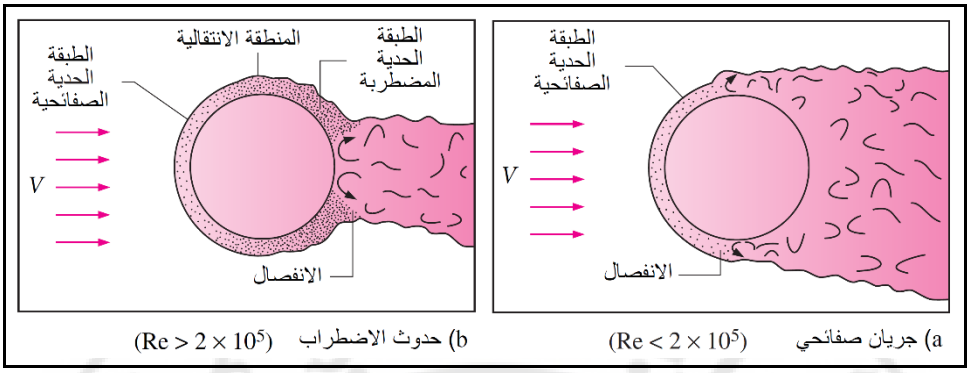
تعطى القيم الوسطية لمعامل السحب C_D من أجل جريان متصالب على أسطوانة ملساء أو كرة في الشكل (4 – 19). تظهر المنحنيات سلوكاً مختلفاً عند مجالات مختلفة لعدد رينولدز:



الشكل (4 – 19) معامل السحب الوسطي لجريان متصالب على أسطوانة وكرة ملساء.

* من أجل $\mathrm{Re} \le 1$، يكون الجريان بطيئاً جداً، ويتناقص معامل السحب بازدياد عدد رينولدز، حيث إنه في حالة الكرة فإن $C_D = 24/\mathrm{Re}$. لا يحدث في هذا النظام انفصال للجريان.
* يبدأ الانفصال خلف الجسم عند حوالي $\mathrm{Re} = 10$، ويبدأ تشكل الدوامات عند حوالي $\mathrm{Re} \approx 90$. تكبر منطقة الانفصال بازدياد عدد رينولدز حتى يصل إلى حوالي $\mathrm{Re} = 10^3$. عند هذه النقطة فإن معظم قوة السحب (حوالي 95%) تكون بسبب سحب الضغط. يستمر تناقص معامل السحب بازدياد عدد رينولدز ضمن المجال $10 < \mathrm{Re} < 10^3$. إن تناقص معامل السحب لا يعني بالضرورة تناقصاً في قوة السحب، حيث إن قوة السحب تتناسب طرداً مع مربع السرعة، بالتالي فإن ازدياد السرعة عند القيم الكبيرة لعدد رينولدز يؤدي عادةً إلى زيادة في قوة السحب أكبر من التناقص الناتج عن انخفاض معامل السحب.
* في المجال $10^3 < \mathrm{Re} < 10^5$ يبقى معامل السحب ثابتاً نسبياً، وهذه الحالة مميزة للأجسام غير الانسيابية. يكون الجريان في هذا المجال صفائحياً ضمن الطبقة الحدية، ولكنه يصبح شديد الاضطراب في منطقة الانفصال خلف الجسم، كما تكون منطقة الأثر ذات عرض كبير.
* يحدث انخفاض مفاجئ لمعامل السحب عند قيمة معينة ضمن المجال $10^5 < \mathrm{Re} < 10^6$ (عادةً عند حوالي $\mathrm{Re} = 2.10^5$). يحدث هذا الانخفاض الكبير في قيم C_D بسبب تحول نظام الجريان ضمن الطبقة الحدية إلى مضطرب، مما يؤدي إلى انتقال نقطة الانفصال بعيداً خلف الجسم، مسببةً تناقصاً في حجم منطقة الأثر، وبالتالي في شدة سحب الضغط. إن هذا الأمر معاكس لما يحدث في الأجسام الانسيابية، حيث يزداد معامل السحب عندما تتحول الطبقة الحدية من صفائحية إلى مضطربة، وتنتج هذه الزيادة بشكل رئيس من زيادة سحب الاحتكاك.

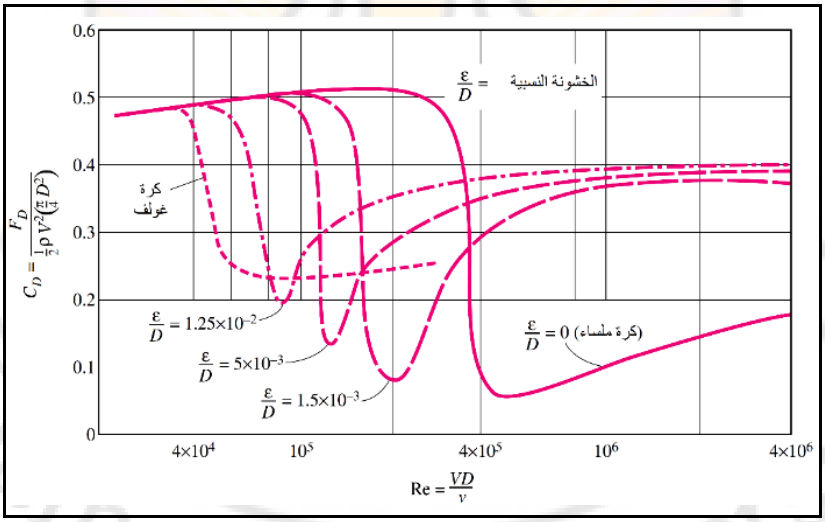
يحدث انفصال السائل عندما تكون الطبقة الحدية صفائحية تقريباً عند $\theta \approx 80^o$ (مبدأ القياس هو نقطة الركود)، أما في حالة الطبقة المضطربة فإنه يحدث عند حوالي $\theta \approx 140^o$، كما يظهر الشكل (4 – 20). يعود سبب التأخر في الانفصال في الجريان المضطرب إلى التقلبات السريعة ضمن السائل في الاتجاه العرضي، والتي تسمح بانتقال الطبقة الحدية المضطربة بعيداً على طول السطح قبل أن يحدث الانفصال، وينتج عن ذلك منطقة أثر أضيق، وسحب ضغط أصغر. ضمن مجال قيم عدد رينولدز التي يحدث عندها الانتقال من النظام الصفائحي إلى المضطرب فإن قوة السحب F_D تتناقص بزيادة السرعة.



الشكل (4 – 20) تأثير الاضطراب في تأخير انفصال الجريان.

4 – 11 – 1 – تأثير خشونة السطح *Effect of Surface Roughness*:

لقد ذكرنا سابقاً أن خشونة السطح بشكل عام تزيد من معامل السحب، وخصوصاً في حالة الأجسام الانسيابية. لكن في حالة الأجسام غير الانسيابية مثل، الأسطوانات أو الكرات، فإن ازدياد خشونة السطح يؤدي إلى تناقص في معامل السحب، كما يبين الشكل (4 – 21) من أجل الاجسام الكروية.



الشكل (4 – 21) تأثير خشونة السطح على معامل السحب لكرة.

ويفسر ذلك بأن السائل يدخل في حالة اضطراب عند قيم صغيرة لعدد رينولدز (عند سرعات منخفضة)، مما يؤدي إلى التفاف السائل حول الجسم وتراجع نقطة الانفصال إلى الخلف، وبالتالي تصبح منطقة الأثر أضيق وينخفض معامل سحب الضغط بشكل كبير. يؤدي هذا الأمر

إلى انخفاض كبير في معامل السحب الكلي وبالتالي انخفاض قوة السحب ضمن مجال معين لعدد رينولدز، وذلك في حالة الأسطوانات أو الكرات ذات السطوح الخشنة بالمقارنة مع أجسام ملساء لها الحجم نفسه ومن أجل سرعة الجريان نفسها. يجب الانتباه إلى أن معامل السحب للأجسام الخشنة يصبح أكبر منه في حالة الأجسام الملساء ضمن مجال معين لعدد رينولدز، ونلاحظ ذلك أيضاً في الشكل (4 – 21). نستنتج مما سبق أن تخشين السطوح قد يؤدي إلى تخفيض كبير في قوة السحب، ولكن في حال كان التصميم خاطئاً ولم يؤخذ مجال قيم عدد رينولدز في الحسبان، فإن تخشين السطح سيؤدي إلى زيادة كبيرة في قوة السحب.

مثال 4 – 5:

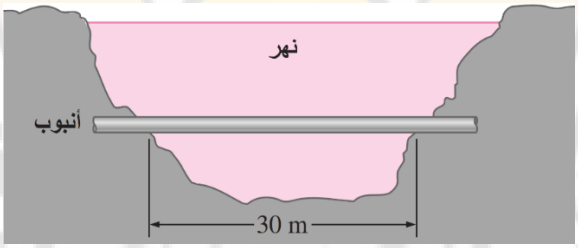
أنبوب قطره الخارجي $2.2\,\text{cm}$ يمر عبر نهر عند مقطع عرضه $30\,\text{m}$ بحيث يكون مغموراً بالماء بشكل كامل. بفرض أن السرعة الوسطية للماء $4\,\text{m/s}$ ودرجة حرارته $15\,^{\circ}\text{C}$، احسب قوة السحب المؤثرة على الأنبوب من قبل النهر.

الحل:

المعطيات: أنبوب يمر عبر نهر بحيث يكون مغموراً بالكامل بالماء.

المطلوب: قوة السحب التي يؤثر بها النهر على الأنبوب.

الشكل:



الافتراضات:

1. السطح الخارجي للأنبوب أملس، وبالتالي يمكن استخدام الشكل (4 – 21) لحساب معامل السحب.
2. جريان الماء في النهر مستقر.
3. اتجاه جريان الماء ناظمي على الأنبوب.
4. الاضطراب في جريان النهر غير مأخوذ بالحسبان.

الخواص:

الجدول (A10) ماء $(T = 288\,\mathrm{K})$:

$$\rho = 999.1\,\mathrm{kg/m^3} \quad , \quad \mu = 1.138\times 13^{-3}\,\mathrm{kg/m.s}$$

التحليل: إن عدد رينولدز للجريان على الأنبوب هو:

$$\mathrm{Re} = \frac{VD}{\nu} = \frac{\rho VD}{\mu} = \frac{999.1\,\mathrm{kg/m^3}\times 4\,\mathrm{m/s}\times 0.022\,\mathrm{m}}{1.138\times 10^{-3}\,\mathrm{kg/m.s}} = 7.73\times 10^4$$

من الشكل (4 – 21)، فإن معامل السحب المقابل لهذه القيمة لعدد رينولدز $C_D = 1$.
فضلاً عن ذلك، فإن مساحة مسقط الأنبوب على الاتجاه الناظمي على الجريان $A = LD$.
بالتالي فإن قوة السحب المؤثرة في الأنبوب، هي:

$$F_D = C_D A\,\frac{\rho V^{\,2}}{2} = 1\times(30\times 0.022)\,\mathrm{m}^2\,\frac{999.1\,\mathrm{kg/m^3}\times(4\,\mathrm{m/s})^2}{2}$$

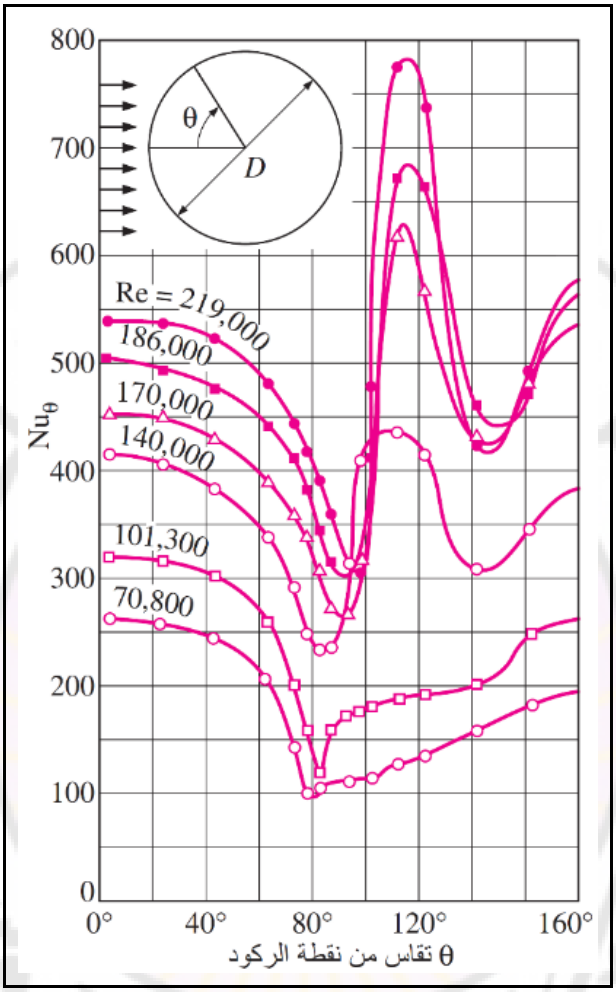
$$F_D = 5,275\,\mathrm{N}$$

---

4 – 11 – 2 – معامل انتقال الحرارة *Heat Transfer Coefficient*:

تتضوي الدراسة التحليلية للجريان على أسطوانة أو كرة على صعوبة بالغة، حيث إن الجريان في الحالة العامة يتضمن انفصالاً للسائل، لذلك فإن دراسة هذا النوع من الجريانات تتم بالطرق التجريبية أو العددية.

تؤثر الأنماط المعقدة للجريان على أسطوانة بشكل كبير على انتقال الحرارة. يبين الشكل (4 – 22) تغيرات عدد نوسلت الموضعي Nu_θ على محيط أسطوانة تتعرض لجريان هواء بشكل متصالب.



الشكل (4 – 22) تغيرات معامل انتقال الحرارة الموضعي على محيط أسطوانة تتعرض لجريان هوائي متصالب.

نلاحظ أن عدد نوسلت يأخذ قيمة ابتدائية كبيرة نسبياً عند نقطة الركود $(\theta = 0)$، ولكنه يتناقص بازدياد θ نتيجة الزيادة في سماكة الطبقة الحدية الصفائحية.

نلاحظ في المنحنيين السفليين (Re = 101.300 و Re = 70.800) أن عدد نوسلت Nu_θ يبلغ أصغر قيمة له عند $\theta \approx 80^o$، أي عند نقطة الانفصال في الجريان الصفائحي، ومن ثم يزداد Nu_θ بازدياد θ نتيجة المزج الشديد في منطقة السائل المنفصل (الأثر).

تختلف المنحنيات التي في الأعلى (Re = 140.00 حتى 219.000) عن المنحنيين السابقين بأن عدد رينولدز Nu_θ يمتلك قيمتين أصغريتين. تعود الزيادة الحادة في Nu_θ عند

$\theta \approx 90^o$ إلى الانتقال من النظام الصفائحي إلى المضطرب، ويفسر الانخفاض بعد ذلك كما في المنحيين السفليين، إلى زيادة سماكة الطبقة الحدية.

يبلغ Nu_θ قيمته الدنيا الثانية عند $\theta \approx 140^o$، وهي نقطة الانفصال في الجريان المضطرب، ومن ثم تزداد قيمة Nu_θ بازدياد θ نتيجة المزج الشديد في منطقة الأثر المضطربة.

إن المناقشة السابقة لمعامل انتقال الحرارة الموضعي دقيقة للغاية، لكنها لا تستعمل في حسابات انتقال الحرارة، لأن هذه الحسابات تتطلب تحديد معامل انتقال الحرارة الوسطي لكامل السطح. تستخدم العلاقة التالية لحساب عدد نوسلت الوسطي لجريان متصالب على أسطوانة:

$$\mathrm{Nu}_{\mathrm{cyl}} = \frac{\alpha D}{\lambda} = 0.3 + \frac{0.62\,\mathrm{Re}^{1/2}\,\mathrm{Pr}^{1/3}}{\left[1+\left(0.4/\mathrm{Pr}\right)^{2/3}\right]^{1/4}}\left[1+\left(\frac{\mathrm{Re}}{282,000}\right)^{5/8}\right]^{4/5} \qquad \textbf{(64 - 4)}$$

يمكن تعميم العلاقة السابقة من أجل $\mathrm{Re}.\mathrm{Pr} > 0.2$، وتحسب خواص السائل عند درجة حرارة الغشاء film temperature، $T_f = \frac{1}{2}\left(T_s + T_\infty\right)$.

من أجل الجريان على كرة، نستخدم العلاقة المعممة التالية:

$$\mathrm{Nu}_{\mathrm{sph}} = \frac{\alpha D}{\lambda} = 2 + \left[0.4\,\mathrm{Re}^{1/2} + 0.06\,\mathrm{Re}^{2/3}\right]\mathrm{Pr}^{0.4}\left(\frac{\mu_\infty}{\mu_s}\right)^{1/4} \qquad \textbf{(65 - 4)}$$

وهي صالحة من أجل $\left(3.5 \le \mathrm{Re} \le 80,000\right)$ و $\left(0.7 \le \mathrm{Pr} \le 380\right)$. وتؤخذ خواص السائل في هذه الحالة عند درجة حرارة التيار الحر T_∞، باستثناء μ_s والتي تؤخذ عند درجة حرارة السطح T_s.

إن العلاقتين السابقتين تعطيان نتائج مقبولة إلى حدٍ ما، حيث أن نسبة الخطأ في النتائج تصل إلى حوالي 30%.

يعطى عدد نوسلت لجريان على أسطوانة بشكل عام بالعلاقة:

$$\mathrm{Nu}_{\mathrm{cyl}} = \frac{\alpha D}{\lambda} = C\,\mathrm{Re}^m\,\mathrm{Pr}^n \qquad \textbf{(66 - 4)}$$

حيث إن $n = \frac{1}{3}$، ويتم تحديد الثابتين C و m بشكل تجريبي. يعطي الجدول (C4) قيم الثوابت السابقة للأسطوانة وبعض الأشكال المخروطية القائمة. يجب الانتباه إلى أن خواص السائل جميعها في العلاقة السابقة تحسب عند درجة حرارة الغشاء. إن العلاقة (4 – 66) تمثل

بديلاً للعلاقة (4 – 64)، لكن العلاقة (4 – 64) أكثر دقة، وبالتالي فمن الأفضل استخدامها عند إجراء الحسابات.

تستخدم العلاقات السابقة لحساب معامل انتقال الحرارة لأسطوانة واحدة، أو مجموعة أسطوانات متوضعة بحيث إن الجريان حول كل منها لا يتأثر بوجود الأسطوانات الأخرى. فضلاً عن ذلك فإن هذه المعادلات صالحة للسطوح الملساء، حيث تجدر الإشارة إلى تأثير كل من خشونة السطح والاضطراب في التيار الحر على معاملي السحب وانتقال الحرارة.

مثال 4 – 6:

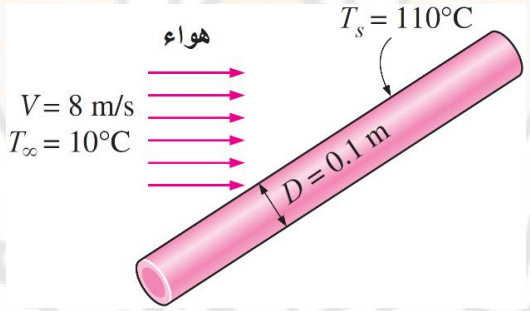
أنبوب بخار طويل، قطره $10\,\text{cm}$، درجة حرارة سطحه الخارجي $110\,^{\circ}\text{C}$، يمر عبر منطقة مكشوفة للرياح. احسب معدل الفقد الحراري من واحدة الطول للأنبوب عندما يكون ضغط الهواء 1atm ودرجة حرارته $10\,^{\circ}\text{C}$، وسرعة الرياح $8\,\text{m/s}$.

الحل:

المعطيات: أنبوب بخار طويل معرض لتيار هوائي بارد.

المطلوب: حساب معدل الفقد الحراري لواحدة الطول من الأنبوب.

الشكل:



الافتراضات:

1. شروط الحالة المستقرة.
2. تأثير الإشعاع مهمل.
3. الهواء غاز مثالي خواصه ثابتة.

الخواص:

الجدول (A16) هواء $\left[T_f = (T_s + T_\infty)/2 = 60\,^{\circ}\text{C}\right]$:

$$\lambda = 0.02808\,\mathrm{W/m.^oC} \quad , \quad \nu = 1.896\times10^{-5}\,\mathrm{m^2/s}$$
$$\mathrm{Pr} = 0.7202$$

التحليل: نحسب عدد رينودلز:

$$\mathrm{Re} = \frac{VD}{\nu} = \frac{8\,\mathrm{m/s}\times0.1\,\mathrm{m}}{1.896\times10^{-5}\,\mathrm{m^2/s}} = 4.219\times10^4$$

نحسب عدد نوسلت من العلاقة (4 – 64):

$$\mathrm{Nu} = \frac{\alpha D}{\lambda} = 0.3 + \frac{0.62\,\mathrm{Re}^{0.5}\,\mathrm{Pr}^{1/2}}{\left[1+(0.4/\mathrm{Pr})^{2/3}\right]^{0.25}}\left[1+\left(\frac{\mathrm{Re}}{282{,}000}\right)^{5/8}\right]^{0.8}$$

$$= 0.3 + \frac{0.62\left(4.219\times10^4\right)^{0.5}(0.7202)^{1/3}}{\left[1+(0.4/0.7202)^{2/3}\right]^{0.25}}\left[1+\left(\frac{4.219\times10^4}{282{,}000}\right)^{5/8}\right]^{0.25}$$

$$= 124$$

ومنه:

$$\alpha = \frac{\lambda}{D}\mathrm{Nu} = \frac{0.02808\,\mathrm{W/m.^oC}}{0.1\,\mathrm{m}}\times124 = 34.8\,\mathrm{W/m^2.^oC}$$

نحسب مساحة واحدة الطول من سطح الأنبوب، ومن ثم نحسب معدل الفقد الحراري لواحدة الطول:

$$A_s = \pi DL = \pi\times0.1\,\mathrm{m}\times1\,\mathrm{m} = 0.314\,\mathrm{m^2}$$

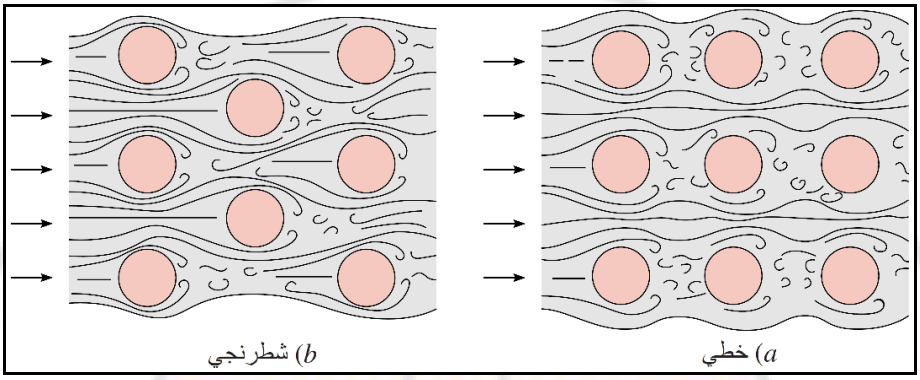
$$\dot{Q} = \alpha A_s\left(T_s - T_\infty\right) = 34.8\,\mathrm{W/m^2.^oC}\times0.314\,\mathrm{m^2}\,(110\text{-}10)\,^\mathrm{o}\mathrm{C}$$
$$= 1{,}093\,\mathrm{W}$$

4 - 12 - الجريان على حزمة أنابيب *Flow Over Tube Banks*:

نصادف الجريان المتصالب على حزمة من الأنابيب في كثير من تجهيزات انتقال الحرارة (المبادل الحراري الأنبوبي shell - and - tube)، مثل المكثفات والمبخرات في محطات الطاقة والبرادات ومكيفات الهواء، حيث يتدفق سائل ضمن الأنابيب، بينما يجري سائل آخر على السطح الخارجي للأنابيب بشكل عمودي على محورها.

عند دراسة الجريان ضمن الأنابيب في المبادلات الحرارية (مثل المبادل الحراري الأنبوبي) يكفي أن ندرس الجريان ضمن أنبوب واحد، ومن ثم نعمم النتائج على بقية الأنابيب،

وذلك بخلاف دراسة الجريان على السطح الخارجي للأنابيب، حيث تؤثر الأنابيب على نمط الجريان ودرجة الاضطراب في الجريان، وبالتالي تؤثر في عملية انتقال الحرارة، كما يبين الشكل (4 – 23). وبالتالي فعند تحليل انتقال الحرارة من/إلى حزمة أنابيب تتعرض لجريان متصالب يجب علينا أخذ الأنابيب جميعها ضمن الحزمة بالحسبان.

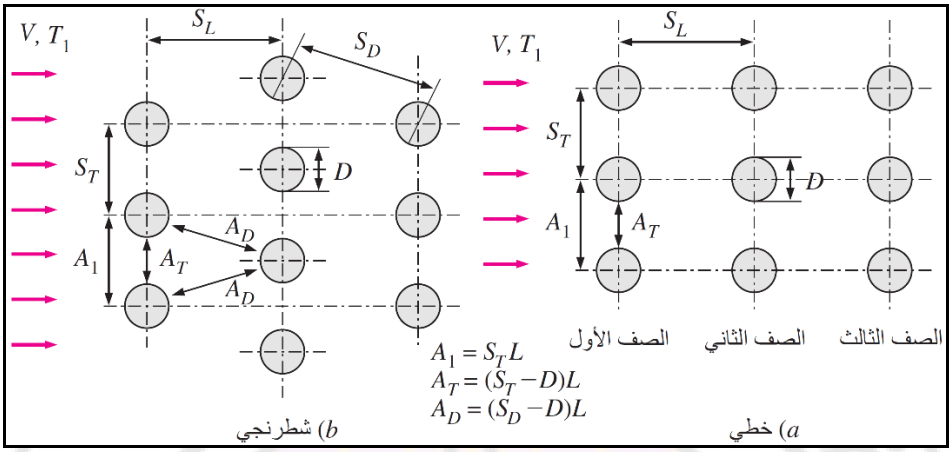


الشكل (4 – 23) تأثير توضع الأنابيب ضمن الحزمة على نظام الجريان.

تتوضع الأنابيب ضمن الحزمة إما بشكل خطي aligned أو شطرنجي staggered، كما في الشكل (4 – 24). يمثل القطر الخارجي للأنبوب D البعد المميز له. يوصف توضع الأنابيب ضمن الحزمة بالخطوة العرضية transverse pitch S_T ، والخطوة الطولية longitudinal pitch S_L ، والخطوة القطرية diagonal pitch S_D ، حيث تقيس هذه الخطوات المسافة بين مراكز الأنابيب. تحسب الخطوة القطرية من العلاقة:

$$S_D = \sqrt{S_L^2 + (S_T/2)^2} \qquad \textbf{(67 – 4)}$$

عند دخول السائل بين حزمة الأنابيب تقل مساحة الجريان من $A_1 = S_T L$ إلى $A_T = (S_T - D)L$ بين الأنابيب، مما يؤدي إلى ازدياد سرعة الجريان، كما يمكن أن تزداد السرعة أكثر في المنطقة القطرية في حالة التوضع الشطرنجي إذا كانت الأنابيب قريبة من بعضها. حيث L هو طول الأنبوب في الحزمة.



الشكل (4 – 24) التوضع الخطي والشطرنجي للأنابيب ضمن الحزمة.

تسود في الجريان بين حزمة الأنابيب سرعة مغايرة لسرعة المنبع V التي يقترب بها السائل من الحزمة، وهذه السرعة هي السرعة العظمى $V_{\max}$. بالتالي يحسب عدد رينولدز على أساس السرعة العظمى:

$$\mathrm{Re}_D = \frac{\rho V_{\max} D}{\mu} = \frac{V_{\max} D}{\nu} \qquad \textbf{(68 – 4)}$$

وتحسب السرعة الأعظمية من علاقة الاستمرار (انحفاظ الكتلة) لجريان مستقر غير قابل للانضغاط. فمن أجل حزمة أنابيب ذات توضع خطي، تأخذ السرعة قيمتها الأعظمية عند أصغر مساحة للجريان بين الأنابيب، وبالتالي باستخدام علاقة الاستمرار والاستعانة بالشكل (a24 – 4) نجد:

$$VA_1 = V_{\max} A_T$$
$$VS_T = V_{\max}\left(S_T - D\right)$$
$$V_{\max} = \frac{S_T}{S_T - D} V \qquad \textbf{(69 – 4)}$$

في حالة التوزع الشطرنجي، يمر السائل عبر المساحة A_1 كما يوضح الشكل (b 24 – 4)، ومن ثم يعبر خلال المساحة A_T، ومن ثم يلتف حول الأنبوب الموجود في الصف الثاني ويعبر المساحة $2A_D$. إذا كانت $2A_D > A_T$، فإن السرعة العظمى للجريان تحدث كما في التوضع الخطي عند المساحة A_T، وبالتالي فإن العلاقة (4 – 69) تستخدم لحساب السرعة العظمى في

التوزع الشطرنجي، أما إذا كانت $2A_D < A_T$ ، فإن السائل يبلغ سرعته الأعظمية عند المقطع العرضي القطري، وتحسب السرعة العظمى من علاقة الاستمرار:

$$VA_1 = V_{\max}\left(2A_D\right)$$

$$VS_T = 2V_{\max}\left(S_D - D\right)$$

$$V_{\max} = \frac{S_T}{2\left(S_D - D\right)}V \quad ; \; S_D < \tfrac{1}{2}\left(S_T + D\right) \qquad \textbf{(70 - 4)}$$

إن طبيعة الجريان حول أي أنبوب في الصف الأول من الحزمة تشابه الجريان حول أنبوب مفرد، كالذي درسناه في القسم السابق من هذا الفصل (4 – 3)، وبشكل خاص إذا لم تكن الأنابيب قريبة كثيراً من بعضها البعض. بالتالي إذا كانت الحزمة مؤلفة من صف واحد من الأنابيب متوضع بشكل عرضي، فبالإمكان أن ندرس كل أنبوب على حدة كأنه أنبوب مفرد يتعرض لجريان متصالب.

تختلف طبيعة الجريان حول الأنابيب في الصف الثاني والصفوف التي تليه عن طبيعته حول أنابيب الصف الأول، وذلك بسبب مناطق الأثر والاضطراب الذي يحدث خلف الأنابيب. تزداد درجة الاضطراب ضمن الجريان بازدياد عدد الصفوف، وبالتالي يزداد معامل انتقال الحرارة، وذلك نتيجة للتأثير التراكمي الذي تسببه صفوف الأنابيب. يتناقص تأثير عدد الصفوف على درجة الاضطراب بعد الصفوف الأولى، وبالنتيجة يبقى معامل انتقال الحرارة ثابتاً.

عند دراسة الجريان على حزمة أنابيب فإننا نلجأ إلى الدراسات التجريبية، وذلك لكون الجريان معقداً جداً بحيث تصعب دراسته تحليلياً. إن ما يهمنا من دراسة الجريان بالدرجة الأولى هو معامل انتقال الحرارة الوسطي لكامل حزمة الأنابيب، والذي يتعلق بعدد الصفوف في اتجاه الجريان، وعلى توضع الأنابيب وحجمها. إحدى العلاقات التجريبية المقترحة لحساب عدد نوسلت الوسطي من أجل جريان متصالب على حزمة أنابيب هي العلاقة الآتية:

$$\mathrm{Nu}_D = \frac{\alpha D}{\lambda} = C\,\mathrm{Re}_D^m\,\mathrm{Pr}^n\left(\frac{\mathrm{Pr}}{\mathrm{Pr}_s}\right)^{0.25} \qquad \textbf{(71 - 4)}$$

حيث أن قيمة الثوابت n, m, C تتعلق بعدد رينولدز، وتعطى قيم هذه الثوابت في الجدول (4 – 2). وهذه العلاقة صالحة من أجل $\left(0.7 < \mathrm{Pr} < 500\right)$ و $\left(0 < \mathrm{Re}_D < 2.10^6\right)$. وتصل نسبة الخطأ في النتائج التي تعطيها هذه العلاقة إلى $\pm 15\%$. يجب أن ننتبه إلى أن خواص السائل

جميعها تؤخذ عند درجة الحرارة الوسطية للسائل، باستثناء Pr_s والذي يحسب عند درجة حرارة جدار الأنابيب T_s. تحسب درجة الحرارة الوسطية للسائل بالعلاقة:

$$T_m = \frac{T_i + T_e}{2} \qquad \textbf{(72 - 4)}$$

T_i: درجة حرارة دخول السائل إلى الحزمة.

T_e: درجة حرارة خروج السائل من الحزمة.

الجدول (4 – 2) معادلات عدد نوسلت لجريان متصالب على حزمة أنابيب عدد صفوفها $N \geq 16$.

توضع الأنابيب	مجال عدد رينولدز $\mathbf{Re}_D$	عدد نوسلت $\mathbf{Nu}_D = C\mathbf{Re}_D^m \mathbf{Pr}^n \left(\mathbf{Pr}/\mathbf{Pr}_s\right)^{0.25}$
خطي	$0-100$	$C=0.9,\ m=0.4,\ \mathrm{n}=0.36$
	$100-1000$	$C=0.52,\ m=0.5,\ \mathrm{n}=0.36$
	$1000-2.10^5$	$C=0.27,\ m=0.63,\ \mathrm{n}=0.36$
	$2.10^5-2.10^6$	$C=0.033,\ m=0.8,\ \mathrm{n}=0.4$
شطرنجي	$0-500$	$C=1.04,\ m=0.4,\ n=0.36$
	$500-1000$	$C=0.71,\ m=0.5,\ n=0.36$
	$1000-2.10^5$	$C=0.35\left(S_T/S_L\right)^{0.2},\ \mathrm{m}=0.5,\ n=0.36$
	$2.10^5-2.10^6$	$C=0.031\left(S_T/S_L\right)^{0.2},\ \mathrm{m}=0.8,\ \mathrm{n}=0.36$

إن العلاقات السابقة في الجدول (4 – 2) تستخدم لحساب عدد نوسلت الوسطي لحزمة أنابيب عدد صفوفها $N \geq 16$ أو أكثر. يمكن استخدام العلاقات السابقة من أجل حزمة أنابيب عدد صفوفها $N_L < 16$ ، وذلك بإدخال معامل تصحيح إلى هذه العلاقات:

$$\mathrm{Nu}_{D,N_L} = F\,\mathrm{Nu}_D \qquad \textbf{(73 - 4)}$$

F : معامل تصحيح. تعطى قيم F في الجدول (4 – 3)، حيث إن قيم معامل التصحيح صالحة من أجل $(\mathrm{Re} > 1000)$.

الجدول (4 – 3) معامل التصحيح F لحساب عدد نوسلت لحزمة أنابيب عدد صفوفها NL.

N_L	1	2	3	4	4	7	10	13
توضع خطي	0.7	0.8	0.86	0.9	0.93	0.96	0.98	0.99
توضع شطرنجي	0.64	0.76	0.84	0.89	0.93	0.96	0.98	0.99

بمجرد معرفة عدد نوسلت الوسطي لحزمة الأنابيب يمكننا حساب معامل انتقال الحرارة الوسطي للحزمة، ومن ثم نحسب معدل انتقال الحرارة بواسطة قانون نيوتن في التبريد، وذلك باستخدام فرق درجات حرارة ΔT مناسب.

إن أول ما يتبادر إلى أذهاننا, هو أن:

$$\Delta T = T_s - T_m = T_s - \tfrac{1}{2}\left(T_i + T_e\right)$$

ولكن ذلك سيؤدي إلى الحصول على نتائج أكبر من النتائج الفعلية لمعدل انتقال الحرارة. سنقوم في الفصل القادم بتبيان أن فرق درجات الحرارة الأمثل للجريان الداخلي (حيث إن الجريان على الأنابيب يحدث ضمن غلاف المبادل الحراري the shell، وبالتالي فإنه يصنف كجريان داخلي) هو فرق درجات الحرارة اللوغاريتمي الوسطي logarithmic mean temperature difference $\Delta T_{\ln}$ والذي يعرف بالعلاقة:

$$\Delta T_{\ln} = \frac{\left(T_s - T_e\right) - \left(T_s - T_i\right)}{\ln\left[\left(T_s - T_e\right)/\left(T_s - T_i\right)\right]} = \frac{\Delta T_e - \Delta T_i}{\ln\left(\Delta T_e / \Delta T_i\right)} \qquad \textbf{(74 - 4)}$$

كما سنبين أيضاً أن درجة حرارة خروج السائل من الحزمة تحسب باستخدام العلاقة التالية:

$$T_e = T_s - \left(T_s - T_i\right)\exp\left(-\frac{A_s \alpha}{\dot{m} c_p}\right) \qquad \textbf{(75 - 4)}$$

A_s : مساحة سطح التبادل الحراري. $\quad A_s = N\pi DL$

$\dot{m}$: معدل التدفق الكتلي للسائل. $\quad \dot{m} = \rho V\left(N_T S_T L\right)$

N : عدد الأنابيب في الحزمة.

N_T : عدد الأنابيب في مستوٍ عرضي (عمودي على اتجاه الجريان)، أي عدد الأنابيب في صف واحد.

L : طول الأنبوب.

V : سرعة السائل قبل دخول الحزمة.

ويحسب معدل انتقال الحرارة من العلاقة:

$$\dot{Q} = \alpha A_s \Delta T_{\ln} = \dot{m} c_p \left(T_e - T_i\right) \qquad \textbf{(76 - 4)}$$

4 – 12 – 1 – هبوط الضغط *Pressure Drop*:

عند دراسة الجريان على حزمة أنابيب، فإنه من المهم حساب هبوط الضغط ΔP، والذي يمثل الفرق في الضغط بين مدخل حزمة الأنابيب ومخرجها. إن هبوط الضغط يقيس مقاومة الأنابيب للجريان على سطحها، ويعطى بالعلاقة:

$$\Delta P = N_L f \chi \frac{\rho V_{\max}^2}{2} \qquad (77-4)$$

f: معامل الاحتكاك.

χ : معامل التصحيح.

ويعطى المعاملان السابقان في الشكلين (D10)، (D11) كتابع لعدد رينولدز، حيث يحسب عدد رينولدز على أساس السرعة الأعظمية $V_{\max}$. يعطي الشكل (D10) قيم معامل الاحتكاك لحزمة أنابيب خطية مربعة $(S_T = S_L)$، ويستخدم معامل التصحيح لحساب تأثيرات الانحراف عن التوزع المربع. وبصورة مشابهة فإن الشكل (D11) يعطي قيم معامل الاحتكاك من أجل توزع شطرنجي متساوي الأضلاع $(S_T = S_D)$، ويستخدم معامل التصحيح لحساب تأثير الانحراف عن التوزع متساوي الأضلاع.

بالإضافة للهبوط الحاصل على كل أنبوب، فإن هبوط الضغط يحدث أيضاً باتجاه الجريان، لذلك قمنا بإدخال عدد الصفوف N_L في معادلة ΔP.

تتناسب استطاعة المضخة اللازمة لتحريك السائل ضمن حزمة الأنابيب (على سطحها الخارجي) مع هبوط الضغط، وتحسب من العلاقة:

$$\dot{W}_{\text{pump}} = \dot{V}\,\Delta P = \frac{\dot{m}\,\Delta P}{\rho}$$

$\dot{V}$: معدل التدفق الحجمي للسائل. $\dot{V} = V\,(N_T S_T L)$

$\dot{m}$: معدل التدفق الكتلي للسائل. $\dot{m} = \rho \dot{V}$

كما ذكرنا فإن استطاعة المضخة اللازمة لإبقاء السائل متحركاً ضمن حزمة الأنابيب (وبالتالي كلفة التشغيل) تتناسب مع هبوط الضغط. بالتالي يجب علينا عند إجراء الحسابات التصميمية لحزمة الأنابيب وتوضعها أن نوازن بين الزيادة الحاصلة في معدل انتقال الحرارة في الحزمة والزيادة في الاستطاعة المطلوبة لتشغيل المضخة.

مثال 4 – 7:

يسخن الهواء بشكل ابتدائي في منشأة صناعية قبل الدخول إلى فرن بواسطة مياه جوفية من نبع مياه ساخن، حيث إن درجة حرارة المياه $120\,^{o}\mathrm{C}$، وتتدفق عبر حزمة أنابيب موجودة ضمن مجرى. يدخل الهواء إلى المجرى بدرجة حرارة $20\,^{o}\mathrm{C}$ وضغط $1\mathrm{atm}$ وبسرعة وسطية $4.5\mathrm{m/s}$، ويجري بشكل ناظمي على الأنابيب. القطر الخارجي للأنابيب $1.5\mathrm{cm}$، وتتوضع الأنابيب بشكل خطي، وبخطوتين طولية وعرضية متساويتين $S_L = S_T = 5\mathrm{cm}$. يوجد 6 صفوف من الأنابيب في اتجاه الجريان، وكل صف يحوي 10 أنابيب. احسب معدل انتقال الحرارة لواحدة الطول من الأنابيب، وهبوط الضغط على حزمة الأنابيب.

الحل:

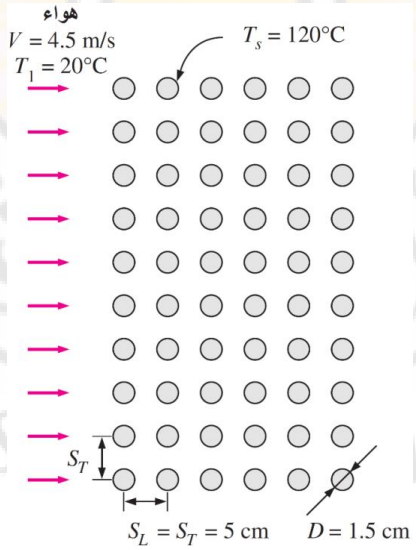
المعطيات: هواء يسخن بواسطة مياه جوفية ساخنة في حزمة أنابيب.

المطلوب: معدل انتقال الحرارة للهواء، وهبوط ضغط الهواء.

الافتراضات:

1. شروط الحالة المستقرة.
2. درجة حرارة سطح الأنابيب مساوية لدرجة حرارة المياه الجوفية.

الشكل:



الخواص:

إن درجة حرارة الهواء الخارج، وبالتالي درجة الحرارة الوسطية للهواء، غير معلومة. نوجد خواص الهواء عند درجة حرارة وسطية سنفرضها $60\,^{o}\mathrm{C}$ (سنتأكد من صحة هذا الافتراض لاحقاً) وضغط $1\mathrm{atm}$:

الجدول (A16) هواء $\left(T=60\,^{o}\mathrm{C}, P=1\mathrm{atm}\right)$:

$$\lambda = 0.02808\,\mathrm{W/m.K} \quad , \quad \rho = 1.06\,\mathrm{kg/m^3}$$
$$c_p = 1.007\,\mathrm{kJ/kg.K} \quad , \quad \mathrm{Pr} = 0.7202$$
$$\mu = 2.008\times10^{-5}\,\mathrm{kg/m.s} \quad , \quad \mathrm{Pr}_s = \mathrm{Pr}_{T_s} = 0.7073$$

فضلاً عن ذلك فإن كثافة الهواء عند درجة حرارة المدخل $\left(T=20\,^{o}\mathrm{C}\right)$، سوف تُستخدم في حساب معدل التدفق الكتلي عند المدخل، هي:

$$\rho_1 = 1.204\,\mathrm{kg/m^3}$$

التحليل: نحسب السرعة الأعظمية من العلاقة (4 – 70)، وعدد رينولدز من أجلها:

$$V_{\max} = \frac{S_T}{S_T - D}V = \frac{0.05}{0.05-0.015}\times 4.5\,\mathrm{m/s} = 6.43\,\mathrm{m/s}$$

$$\mathrm{Re}_D = \frac{\rho V_{\max} D}{\mu} = \frac{1.06\,\mathrm{kg/m^3}\times 6.43\,\mathrm{m/s}\times 0.015\,\mathrm{m}}{2.008\times10^{-5}\,\mathrm{kg/m.s}} = 5,091$$

يحسب عدد نوسلت الوسطي باستخدام العلاقة المناسبة من الجدول (4 – 2):

$$\mathrm{Nu}_D = 0.27\,\mathrm{Re}_D^{0.63}\,\mathrm{Pr}^{0.36}\left(\mathrm{Pr}/\mathrm{Pr}_s\right)^{0.25}$$
$$= 0.27\left(5,091\right)^{0.63}\left(0.7202\right)^{0.36}\left(0.7202/0.7073\right)^{0.25} = 52.2$$

إن القيمة المحسوبة لعدد نوسلت هي من أجل حزمة أنابيب ذات عدد صفوف $N_L \geq 16$. في حالتنا المدروسة فإن عدد الصفوف هو $N_L = 6$، ومعامل التصحيح المقابل من الجدول (4 – 3) هو $F = 0.945$. بالتالي فإن عدد نوسلت الوسطي ومعامل الحمل الحراري الوسطي من أجل جميع الأنابيب في الحزمة هما:

$$\mathrm{Nu}_{D,N_L} = F\,\mathrm{Nu}_D = 0.945\times 52.2 = 49.3$$

$$\alpha = \frac{\mathrm{Nu}_{D,N_L}\,\lambda}{D} = \frac{49.3\times 0.02808\,\mathrm{W/m.\,^{o}C}}{0.015\,\mathrm{m}} = 92.2\,\mathrm{W/m^2.\,^{o}C}$$

إن العدد الكلي للأنابيب هو $N = N_L \times N_T = 6\times 10 = 60$. من أجل $\left(L = 1\mathrm{m}\right)$، فإن مساحة سطح التبادل الحراري ومعدل التدفق الكتلي للهواء (يحسب عند المدخل) يكونان:

$$A_s = N\,\pi DL = 60\pi \times 0.015\,\text{m} \times 1\,\text{m} = 2.827\,\text{m}^2$$

$$\dot{m} = \dot{m}_1 = \rho_1 V\,(N_T S_T L)$$

$$= 1.204\,\text{kg/m}^3 \times 4.5\,\text{m/s} \times (10 \times 0.05\,\text{m} \times 1\,\text{m}) = 2.709\,\text{kg/s}$$

بالتالي فإن درجة حرارة الهواء عند المخرج (4 – 75)، وفرق درجات الحرارة اللوغاريتمي الوسطي (4 – 74)، ومعدل انتقال الحرارة:

$$T_e = T_s - (T_s - T_i)\exp\left(-\frac{A_s \alpha}{\dot{m} c_p}\right)$$

$$T_e = 120 - (120 - 20)\exp\left(-\frac{2.827\,\text{m}^2 \times 92.2\,\text{W/m}^2.^{\circ}\text{C}}{2.709\,\text{kg/s} \times 1007\,\text{J/kg}.^{\circ}\text{C}}\right) = 29.11\,^{\circ}\text{C}$$

$$\Delta T_{\ln} = \frac{(T_s - T_e) - (T_s - T_i)}{\ln\left[(T_s - T_e)/(T_s - T_i)\right]} = \frac{(120 - 29.11) - (120 - 20)}{\ln\left[(120 - 29.11)/(120 - 20)\right]}$$

$$= 95.4\,^{\circ}\text{C}$$

$$\dot{Q} = \alpha A_s \Delta T_{\ln} = \dot{m} c_p (T_e - T_i)$$

$$= 92.2\,\text{W/m}^2.^{\circ}\text{C} \times 2.827\,\text{m}^2 \times 95.4\,^{\circ}\text{C} = 2.49 \times 10^4\,\text{W}$$

من المخطط (D10)، من أجل حزمة الأنابيب الخطية المدروسة، والتي تمتلك شكلاً مربعاً، فإن معامل الاحتكاك المقابل لـ $\text{Re}_D = 5,088$ و $S_L/D = 5/1.5 = 3.33$، هو $f = 0.16$. وأيضاً من أجل التوضع المربع، فإن $\chi = 1$. بالتالي فإن هبوط الضغط على حزمة الأنابيب، هو:

$$\Delta P = N_L f\,\chi \frac{\rho V_{\max}^{\,2}}{2}$$

$$= 6 \times 0.16 \times 1 \times \frac{1.06\,\text{kg/m}^3 \times (6.43\,\text{m/s})^2}{2} = 21\,\text{Pa}$$

المناقشة: إن درجة الحرارة الوسطية للهواء هي:

$$\tfrac{1}{2}(T_i + T_e) = \tfrac{1}{2}(20 + 110.9) = 65.4\,^{\circ}\text{C}$$

وهي قريبة من القيمة المفروضة $(60\,^{\circ}\text{C})$. بالتالي لا حاجة لإعادة الحسابات من أجل خواص الهواء عند $65.4\,^{\circ}\text{C}$.

4 – 13 – انتقال الحرارة بالحمل القسري الداخلي

Internal Forced Convection:

تستخدم جريانات السوائل في الأنابيب والمجاري بشكل واسع في تطبيقات التسخين والتبريد، ويتم تحريك السائل ضمن أنبوب ذي طول كافٍ لتحقيق عملية انتقال الحرارة المطلوبة، وذلك بواسطة مضخة أو مروحة. سنركز في هذا الفصل على معامل الاحتكاك ومعامل الحمل الحراري، وذلك لصلتهما الوثيقة بهبوط الضغط وانتقال الحرارة.

يكمن الفارق الرئيس بين الجريان الخارجي والداخلي بأن الطبقة الحدية في حالة الجريان الخارجي تنمو بشكل حر وغير محدود على السطح، حيث إن السائل يمتلك سطحاً حراً. أما في حالة الجريان الداخلي فإن السائل محاط بشكل كامل بالسطح الداخلي للأنبوب، وبالتالي فإن نمو الطبقة الحدية محدود.

4 – 13 – 1 – مقدمة ***Introduction***:

تستخدم الأنابيب عادةً في ضخ السوائل وبشكل خاص الموائع، بينما تستخدم المجاري ذات المقطع المستطيل في أنظمة التدفئة والتكييف للمباني. ويفسر استخدام الأنابيب في تجهيزات انتقال الحرارة بأن الأنابيب الدائرية تؤمن أكبر قدر من انتقال الحرارة من أجل أقل هبوط في الضغط بالمقارنة مع بقية المجاري، وذلك من أجل نفس مساحة المقطع العرضي.

بالرغم من أننا نمتلك فهماً جيداً لجريان السوائل، فإن الأسلوب التحليلي لإيجاد حل لهذا النوع من المسائل يستخدم فقط لبعض الحالات البسيطة، مثل الجريان الصفائحي المتطور في أنبوب. وبالتالي فإننا نعتمد على النتائج والعلاقات التجريبية لإيجاد حلول لمسائل الجريان عوضاً عن الحلول التحليلية. يجب أن ننتبه إلى أنه تم التوصل إلى النتائج والعلاقات التجريبية في مختبرات ذات شروط متحكم بها بدقة شديدة، وبالتالي فإن هذه النتائج لا تعطينا دقة تامة عند استخدامها في التطبيقات العملية، حيث أن نسبة الخطأ تصل إلى 10% في كل من معامل الاحتكاك ومعامل الحمل الحراري عند حسابهما بواسطة هذه العلاقات.

يؤدي الاحتكاك بين طبقات السائل ضمن الأنبوب إلى ارتفاع طفيف في درجة حرارة السائل كنتيجة لتحول الطاقة الميكانيكية إلى حرارية، ولكن مقدار التسخين الاحتكاكي fractional heating ضئيل جداً لذلك يهمل. وبالتالي نفترض أن التغير في درجة حرارة السائل ناتج فقط عن عمليات انتقال الحرارة. بالرغم من ذلك، فإنه في حالة السوائل ذات اللزوجة العالية وعند السرعات العالية يتوجب علينا أخذ التسخين الاحتكاكي بالحسبان.

في معظم التطبيقات العملية، يمكننا تقريب جريان السائل ضمن أنبوب أو مجرى إلى جريان أحادي البعد one - dimensional flow، وبالتالي فإن خواص الجريان تتغير باتجاه وحيد فقط هو اتجاه الجريان. نتيجة لهذا التقريب، فإن الخواص جميعها تكون منتظمة في أي مقطع عرضي عمودي على اتجاه الجريان، حيث تأخذ هذه الخواص قيمة وسطية واحدة في كامل المقطع العرضي، ويمكن أن تتغير هذه الخواص في كامل المقطع مع الزمن في حال كان الجريان غير مستقر.

4 – 13 – 2 – السرعة الوسطية ودرجة الحرارة الوسطية

***Mean Velocity and Mean Temperature*:**

تستخدم سرعة التيار الحر في حالة الجريان الخارجي كقيمة مرجعية لحساب عدد رينولدز ومعامل الاحتكاك. أما في الجريان الداخلي، فإنه لا وجود للتيار الحر، وبالتالي فإننا بحاجة لبديل عن سرعة التيار الحر. تتغير سرعة السائل ضمن الأنبوب من الصفر عند جدار الأنبوب كنتيجة لشرط عدم الانزلاق، إلى قيمة أعظمية عند مركز الأنبوب؛ وبالتالي نستخدم مفهوم السرعة الوسطية V_m mean velocity، حيث تبقى هذه السرعة ثابتة في الجريان غير القابل للانضغاط، في حال كانت مساحة مقطع الأنبوب ثابتة.

في الواقع، إن السرعة الوسطية تتغير في تطبيقات انتقال الحرارة بسبب تغير الكثافة مع درجة الحرارة، لذلك نقوم بتحديد خواص السائل عند قيمة وسطية لدرجة الحرارة، ونتعامل مع هذه القيم كونها ثابتة.

تحسب السرعة الوسطية V_m داخل الأنبوب من علاقة الاستمرار، كما في الشكل (4 – 25):

$$\dot{m} = \rho V_m A_c = \int_{A_c} \rho V\,(r,x)\,dA_c \qquad \textbf{(78 – 4)}$$

$\dot{m}$: معدل التدفق الكتلي.

ρ : الكثافة.

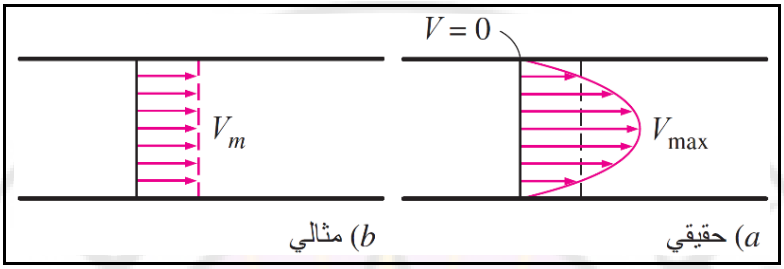
A_c : مساحة مقطع الجريان.

$V(r,x)$: بروفايل السرعة.

وبالتالي تحسب السرعة الوسطية لجريان غير قابل للانضغاط ضمن أنبوب نصف قطره R من العلاقة:

$$V_m = \frac{\int_{A_c} \rho V\,(r,x)\,dA_c}{\rho A_c} = \frac{\int_0^R \rho V\,(r,x)\,2\pi r\,dr}{\rho \pi R^2} = \frac{2}{R^2}\int_0^R V\,(r,x)\,r\,dr$$

(79 – 4)



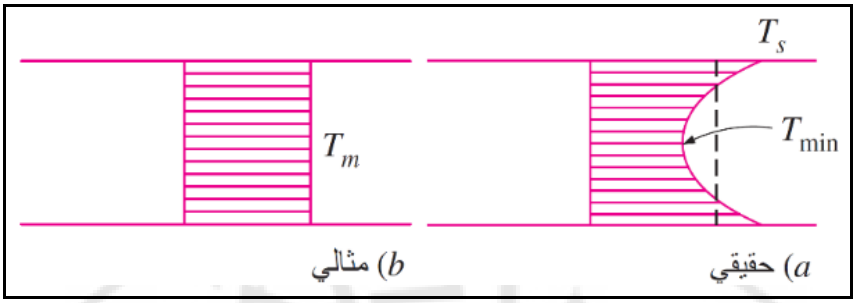
الشكل (4 – 25) بروفايل السرعة للجريان الحقيقي والمثالي.

عند وجود انتقال حرارة من/إلى السائل الموجود في الأنبوب، فإن درجة حرارة السائل تتغير في أي مقطع عرضي للجريان من T_s عند السطح إلى قيمة أعظمية في حالة التبريد أو أصغرية في حالة التسخين عند مركز الأنبوب. لذلك نلجأ إلى مفهوم درجة الحرارة الوسطية T_m والتي تبقى منتظمة في أي مقطع عرضي. بخلاف السرعة الوسطية، فإن درجة الحرارة الوسطية تتغير باتجاه الجريان في حالة وجود انتقال حرارة من/إلى الأنبوب.

تحدد قيمة درجة الحرارة الوسطية T_m من مبدأ انحفاظ الطاقة. حيث ينص على أن الطاقة المنتقلة بواسطة السائل عبر مقطع عرضي ما في حالة الجريان الفعلي يجب أن تساوي إلى الطاقة المنتقلة بواسطة السائل عبر المقطع نفسه، فيما لو كانت درجة حرارة السائل ثابتة T_m، كما يبين الشكل (4 – 26). ويعبر عن ذلك رياضياً بالمعادلة:

$$\dot{E} = \dot{m} c_p T_m = \int_{\dot{m}} c_p T \delta \dot{m} = \int_{A_c} \rho c_p T V dA_c \qquad \textbf{(80 – 4)}$$

c_p : الحرارة النوعية للسائل.



الشكل (4 – 26) بروفايل درجة الحرارة للجريان الحقيقي والمثالي.

نلاحظ أن الجداء $\left(\dot{m}c_pT_m\right)$ عند أي مقطع عرضي على طول الأنبوب يمثل تدفق الطاقة بواسطة السائل عند هذا المقطع العرضي، وبالتالي فإن درجة الحرارة الوسطية لسائل ذي كثافة وحرارة نوعية ثابتين يجري ضمن أنبوب نصف قطره R تحسب من العلاقة:

$$T_m=\frac{\int_{\dot{m}}c_pT\delta\dot{m}}{\dot{m}c_p}=\frac{\int_0^R c_pT\left(\rho V2\pi rdr\right)}{\rho V_m\left(\pi R^2\right)c_p}=\frac{2}{V_mR^2}\int_0^R T\left(r,x\right)V\left(r,x\right)rdr \quad \textbf{(81 – 4)}$$

يجب الانتباه إلى أن درجة الحرارة الوسطية T_m للسائل تتغير في أثناء عمليات التسخين أو التبريد. عادةً ما تحدد خواص السائل في حالة الجريان الداخلي عند درجة حرارة وسطية كلية للسائل bulk mean fluid temperature، والتي تمثل المتوسط الحسابي لدرجتي الحرارة الوسطية عند المدخل والمخرج:

$$T_b=\frac{T_{m,i}+T_{m,e}}{2}$$

4 – 13 – 3 – الجريان الصفائحي والمضطرب في الأنابيب

***Laminar and Turbulent Flow in Tubes*:**

يمكن للجريان في الأنابيب أن يكون صفائحياً أو مضطرباً، وذلك بناءً على شروط الجريان. يكون الجريان صفائحياً عند السرعات المنخفضة حيث تكون خطوط التيار منتظمة وانسيابية، ولكنه يتحول إلى النظام المضطرب عندما تزداد السرعة فوق قيمة حدية. لا يحدث الانتقال من الجريان الصفائحي إلى المضطرب بشكل مفاجئ، وإنما يحدث الانتقال عند مجال معين لقيم السرعة، حيث يتقلب الجريان بين الصفائحي والمضطرب قبل أن يتحول بشكل كامل إلى مضطرب. إن معظم الجريانات الداخلية التي نصادفها في التطبيقات العملية هي جريانات

مضطربة، في حين أن الجريان الصفائحي يحدث عند جريان السوائل ذات اللزوجة العالية (مثل الزيوت) ضمن أنابيب ذات أقطار صغيرة أو ضمن مجارٍ ضيقة.

يعرف عدد رينولدز من أجل الجريان في أنبوب دائري المقطع بالعلاقة:

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho V_m D}{\mu} = \frac{V_m D}{\nu} \qquad \textbf{(82 – 4)}$$

V_m : السرعة الوسطية للسائل.

D : قطر الأنبوب.

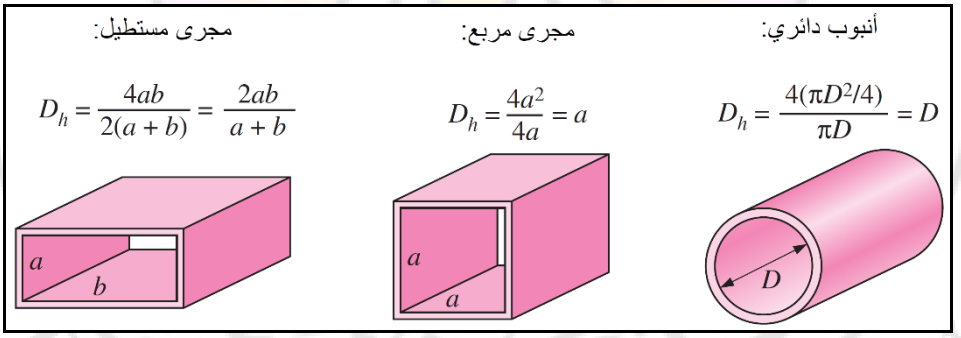
ν : اللزوجة الحركية للسائل. $\nu = \mu/\rho$

في حالة الجريان ضمن الأنابيب غير الدائرية، فإن كلاً من عدد رينولدز وعدد نوسلت ومعامل الاحتكاك يحسب على أساس القطر الهيدروليكي D_h hydraulic diameter ، كما يبين الشكل (4 – 27) والذي يعرف وفق العلاقة:

$$D_h = \frac{4A_c}{p} \qquad \textbf{(83 – 4)}$$

A_c : مساحة المقطع العرضي للأنبوب.

p : محيط الأنبوب.



الشكل (4 – 27) القطر الهيدروليكي لبعض الأشكال البسيطة.

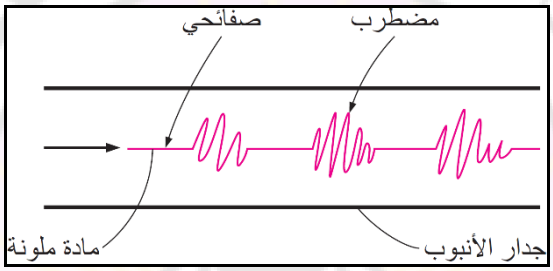
كما نعلم، فإنه من الأفضل أن تكون لدينا قيم محددة لعدد رينولدز من أجل الجريان الصفائحي والانتقالي والمضطرب، لكن هذا الأمر غير ممكن في التطبيقات العملية. يعود سبب ذلك إلى أن الانتقال من الجريان الصفائحي إلى المضطرب يتعلق بدرجة التشويش في الجريان والناتج عن خشونة السطح، واهتزازات الأنابيب، والتقلبات في الجريان. من أجل الشروط العملية الشائعة، فإن قيم عدد رينولدزللجريانات المختلفة، هي:

جريان صفائحي: $\mathrm{Re} < 2300$

جريان انتقالي: $2300 \le \mathrm{Re} \le 10,000$

جريان مضطرب: $\mathrm{Re} > 10,000$

يتقلب الجريان ضمن الجريان الانتقالي بين الصفائحي والمضطرب بشكل عشوائي، كما يبين الشكل (4 – 28). يجب أن نعلم أنه من الممكن تحقيق الجريان الصفائحي عند قيم عدد رينولدز أكبر بكثير من 2300 وذلك ضمن الأنابيب شديدة النعومة من خلال تجنب التشويش في الجريان واهتزازات الأنبوب، حيث تصل قيم عدد رينولدز في حالة الجريان الصفائحي لمثل هذه التجارب شديدة الدقة إلى قيم أكبر من 100,000.



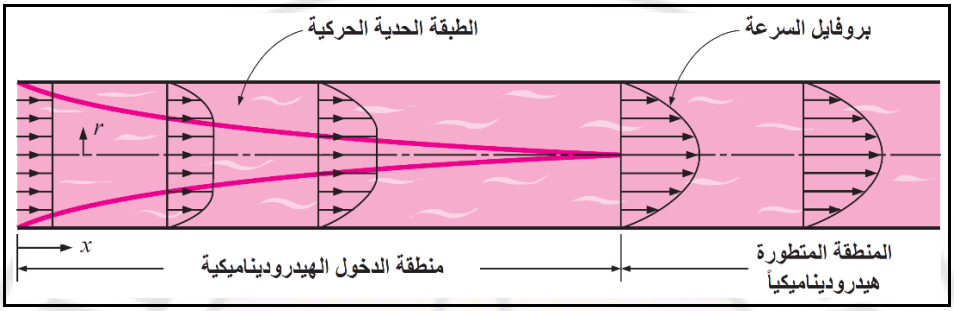
الشكل (4 – 28) تقلبات الجريان بين الصفائحي والمضطرب ضمن منطقة الجريان الانتقالي.

4 - 14 - منطقة الدخول *The Entrance Region*:

بفرض أن سائلاً ما يدخل أنبوباً دائرياً بسرعة منتظمة. كنتيجة لشرط عدم الانزلاق فإن جزيئات السائل الملاصقة لسطح الأنبوب ستتوقف عن الحركة بشكل كامل، كما أن هذه الطبقة ستتسبب في إبطاء جزيئات السائل في الطبقات الملاصقة لها بشكل تدريجي نتيجة الاحتكاك. من أجل تعويض هذا الانخفاض في السرعة، فإن سرعة السائل في وسط الأنبوب ستزداد للحفاظ على معدل تدفق كتلي ثابت ضمن الأنبوب (شرط الاستمرار). نتيجةً لذلك تنشأ طبقة حدية حركية على طول الأنبوب. تزداد سماكة هذه الطبقة الحدية باتجاه الجريان حتى تصل الطبقة الحدية إلى مركز الأنبوب، وبالتالي تملأ الطبقة الحدية كامل الأنبوب، كما يوضح الشكل (4 – 29).

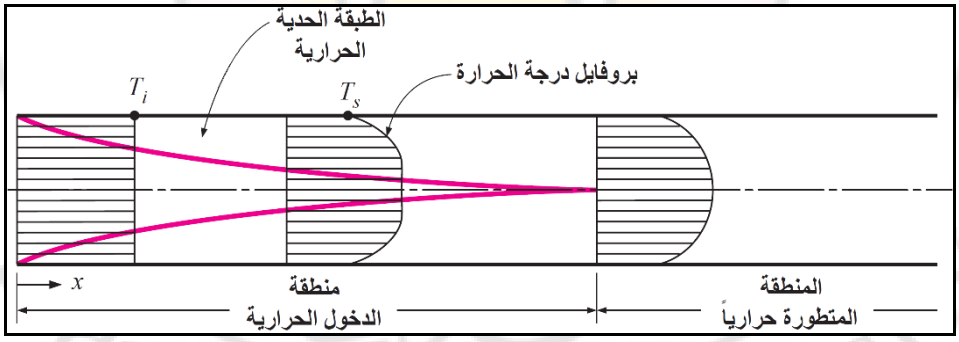
تسمى المنطقة من بداية الأنبوب وحتى نقطة اندماج الطبقة الحدية عند محور الأنبوب بمنطقة الدخول الهيدروديناميكية، ويسمى طول هذه المنطقة بطول الدخول الهيدروديناميكي L_h. يسمى الجريان في منطقة الدخول بالجريان النامي هيدروديناميكياً hydrodynamically developing flow، وذلك لأن منطقة الدخول هي المنطقة التي يتطور فيها بروفايل السرعة.

تسمى المنطقة التي تلي منطقة الدخول والتي يكون فيها بروفايل السرعة متطوراً بالمنطقة المتطورة هيدروديناميكياً، ويبقى بروفايل السرعة ثابتاً في هذه المنطقة. يأخذ بروفايل السرعة في المنطقة المتطورة شكل قطع مكافئ في حالة الجريان الصفائحي، بينما يكون أكثر تسطحاً في الجريان المضطرب، وذلك بسبب حركة الدوامات بالاتجاه القطري.



الشكل (4 – 29) تطور الطبقة الحدية الحركية ضمن أنبوب.

لنفرض الآن أن سائلاً ذو درجة حرارة منتظمة يدخل أنبوباً دائرياً درجة حرارة سطحه مغايرة لدرجة حرارة السائل. في هذه الحالة ستأخذ جزيئات السائل في الطبقة الملاصقة لسطح الأنبوب درجة حرارة السطح، مما سيؤدي بالتالي إلى انتقال الحرارة بالحمل ضمن الأنبوب وتطور طبقة حدية حرارية على طول الأنبوب. تزداد سماكة الطبقة الحدية باتجاه الجريان حتى تصل الطبقة الحدية إلى محور الأنبوب، أي حتى تملأ كامل الأنبوب، كما يوضح الشكل (4 – 30).



الشكل (4 – 30) تطور الطبقة الحدية الحرارية في أنبوب.

تسمى المنطقة التي تنمو ضمنها الطبقة الحدية وحتى تصل إلى محور الأنبوب بمنطقة الدخول الحرارية، كما ويسمى طول هذه المنطقة بطول الدخول الحراري L_t. يسمى الجريان ضمن منطقة الدخول الحرارية بالجريان النامي حرارياً thermally developing flow، حيث أن بروفايل درجة الحرارة يتطور ضمن هذه المنطقة، وتسمى المنطقة التي تلي منطقة الدخول

الحرارية بالمنطقة المتطورة حرارياً، ويوصف بروفايل درجة الحرارة اللابعدية في هذه المنطقة بالصيغة $\left[(T_s - T)/(T_s - T_m)\right]$ ويبقى ثابتاً من دون تغير.

تسمى المنطقة التي يكون فيها الجريان متطوراً هيدروديناميكياً وحرارياً بالجريان المتطور، حيث إن كلاً من بروفايل السرعة ودرجة الحرارة اللابعدية يبقى من دون تغير، وبالتالي:

$$\frac{\partial V(r,x)}{\partial x} = 0 \quad \longrightarrow \quad V = V(r) \qquad \textbf{(84 - 4)}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{T_s(x) - T(r,x)}{T_s(x) - T_m(x)}\right] = 0 \qquad \textbf{(85 - 4)}$$

يتعلق معامل الاحتكاك بإجهاد القص عند السطح، والذي يتعلق بدوره بالمماس لبروفايل السرعة عند السطح. كما ذكرنا سابقاً، فإن بروفايل السرعة يبقى من دون تغير في المنطقة المتطورة هيدروديناميكياً، وبالتالي فإن معامل الاحتكاك يبقى ثابتاً في هذه المنطقة. بمناقشة مشابهة للمناقشة السابقة نجد أن معامل انتقال الحرارة يبقى ثابتاً في المنطقة المتطورة حرارياً.

من تعريف المنطقة المتطورة حرارياً فإن مشتق بروفايل درجة الحرارة اللابعدي $\left[(T_s - T)/(T_s - T_m)\right]$ بالنسبة لـ x يساوي إلى الصفر، أي إن $\left[(T_s - T)/(T_s - T_m)\right]$ مستقل عن x. بالتالي فإن مشتق الحد $\left[(T_s - T)/(T_s - T_m)\right]$ بالنسبة لـ r يجب أن يكون مستقلاً عن x، أي إن:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{T_s - T}{T_s - T_m}\right)\bigg|_{r=R} = \frac{-\left(\partial T/\partial r\right)\big|_{r=R}}{T_s - T_m} \neq f(x) \qquad \textbf{(86 - 4)}$$

يعطى التدفق الحراري السطحي بالعلاقة:

$$\dot{q}_s = \alpha_x (T_s - T_m) = \lambda \frac{\partial T}{\partial r}\bigg|_{r=R} \quad \longrightarrow \quad \alpha_x = \frac{\lambda\left(\partial T/\partial r\right)\big|_{r=R}}{T_s - T_m} \qquad \textbf{(87 - 4)}$$

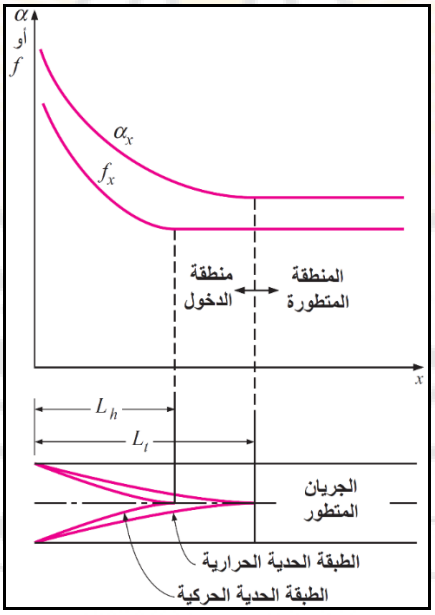
من العلاقة (4 – 87) نجد أن التدفق الحراري مستقل عن x. بالتالي نستنتج أن معامل انتقال الحرارة الموضعي ضمن المنطقة المتطورة حرارياً في أنبوب، ثابت ولا يتعلق بـ x. بالتالي فإن كلاً من معاملي الاحتكاك والحمل يبقيان ثابتين في منطقة الجريان المتطور للأنبوب.

يجب الانتباه إلى أن بروفايل درجة الحرارة ضمن المنطقة المتطورة حرارياً قد يتغير في اتجاه الجريان مع x. أي إنه وبخلاف بروفايل السرعة، فإن بروفايل درجة الحرارة عادةً ما يختلف من مقطع عرضي إلى آخر ضمن المنطقة المتطورة في الأنبوب. بالرغم من ذلك فإن

بروفايل درجة الحرارة اللابعدية يبقى دون تغير ضمن المنطقة المتطورة حرارياً، في حال بقاء درجة حرارة سطح الأنبوب أو التدفق الحراري للسطح ثابتان.

أثناء الجريان الصفائحي في أنبوب، تمثل قيمة عدد براندل Pr مقياساً لنسبة نمو الطبقتين الحديتين الحركية والحرارية. عندما $\Pr \approx 1$ كما في الغازات، فإن الطبقتين الحديتين تنموان بشكل متزامن. عندما $\Pr > 1$ كما في حالة الزيوت فإن الطبقة الحدية الحركية تنمو بسرعة أكبر من الطبقة الحدية الحرارية، وكنتيجة لذلك فإن طول الدخول الهيدروديناميكي أصغر من طول الدخول الحراري. يحدث العكس تماماً في حالة السوائل التي لها عدد براندل $\Pr < 1$ كما في المعادن السائلة.

بفرض أن سائلاً يتعرض لتسخين (أو تبريد) في أثناء جريانه في أنبوب. يأخذ كل من معامل الاحتكاك ومعامل انتقال الحرارة أكبر قيمة له عند مدخل الأنبوب، حيث تكون سماكة الطبقة الحدية مساوية للصفر، وتتناقص قيمتهما بشكل تدريجي وصولاً إلى قيم المنطقة المتطورة، كما يبين الشكل (4 – 31)؛ بالتالي فإن هبوط الضغط والتدفق الحراري يكونان أكبر ما يمكن عند منطقة الدخول للأنبوب، أي إن تأثير منطقة الدخول يزيد من القيمة الوسطية لكل من معامل الاحتكاك ومعامل انتقال الحرارة لكامل الأنبوب. في حال كان الأنبوب قصيراً، فإن تأثير منطقة الدخول يكون مهماً، في حين يهمل هذا التأثير في الأنابيب الطويلة.



الشكل (4 – 31) تغير كل من معامل الاحتكاك وانتقال الحرارة باتجاه الجريان لجريان ضمن أنبوب (Pr>1).

4 – 14 – 1 – أطوال الدخول *Entry lengths*:

يؤخذ طول الدخول الهيدروديناميكي عادةً؛ ليكون المسافة من مدخل الأنبوب حيث يكون معامل الاحتكاك مساوياً لحوالي 2% من قيمته في المنطقة المتطورة. يعطى طولا الدخول الهيدروديناميكي والحراري في الجريان الصفائحي بشكل تقريبي بالعلاقة:

$$L_{h,\text{lamianr}} \approx 0.5\,\text{Re}\,D \qquad \textbf{(88 – 4)}$$

$$L_{t,\text{laminar}} \approx 0.05\,\text{Re}\,\text{Pr}\,D = \text{Pr}\,L_{h,\text{laminar}} \qquad \textbf{(89 – 4)}$$

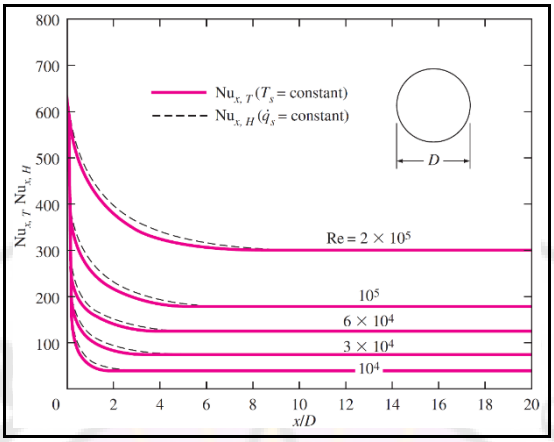
عادةً ما يطغى تأثير المزج الشديد في أثناء التقلبات العشوائية للسائل في الجريان المضطرب على تأثيرات الانتشار الحركي والانتشار الحراري، وبالتالي فإن طولي الدخول الهيدروديناميكي والحراري متساويان تقريباً ومستقلان عن عدد براندل. فضلاً عن ذلك فإن معامل الاحتكاك ومعامل انتقال الحرارة يبقيان ثابتين في الجريان المتطور سواءً الصفائحي أو المضطرب، وذلك لأن بروفايل كل من السرعة ودرجة الحرارة اللابعدية لا يتغير باتجاه الجريان. يحسب طول الدخول للجريان المضطرب بالعلاقة:

$$L_{h,\text{turbulent}} = 1.359\,\text{Re}^{1/4} \qquad \textbf{(90 – 4)}$$

إن طول الدخول الهيدروديناميكي في الجريان المضطرب أقصر بكثير من الجريان الصفائحي، كما أنه أقل ارتباطاً بعدد رينولدز. يؤخذ طولا الدخول الهيدروديناميكي والحراري في التطبيقات العملية بشكل تقريبي ليكونا:

$$L_{h,\text{turbulent}} \approx L_{t,\text{turbulent}} \approx 10D \qquad \textbf{(91 – 4)}$$

يبين الشكل (4 – 32) تغيرات عدد رينولدز الموضعي على طول أنبوب في حالة الجريان المضطرب عند درجة حرارة منتظمة لسطح الأنبوب أو تدفق حراري منتظم للسطح، وذلك من أجل مجال قيم عدد رينولدز التي تصادفنا في تجهيزات انتقال الحرارة.



الشكل (4 – 32) تغيرات عدد نوسلت الموضعي على طول أنبوب في حالة الجريان المضطرب.

من الشكل نلاحظ ما يلي:

* إن قيم عدد نوسلت، وبالتالي معامل انتقال الحرارة بالحمل تكون أكبر ما يمكن عند منطقة الدخول.
* يبلغ عدد رينولدز قيمة ثابتة عند مسافة أقل من $10D$، بالتالي نفرض أن الجريان يصبح متطوراً من أجل $x > 10D$.
* إن قيم عدد نوسلت من أجل شروط درجة الحرارة المنتظمة للسطح والتدفق الحراري المنتظم تتطابق في المنطقة المتطورة، وهي شبه متطابقة في منطقة الدخول. بالتالي فإن عدد نوسلت لا يتأثر بطبيعة الشروط الحدية الحرارية، كما يمكن استخدام علاقات الجريان المضطرب من أجل كلا نوعي الشروط الحدية.

4 - 15 - التحليل الحراري العام *General Thermal Analysis*:

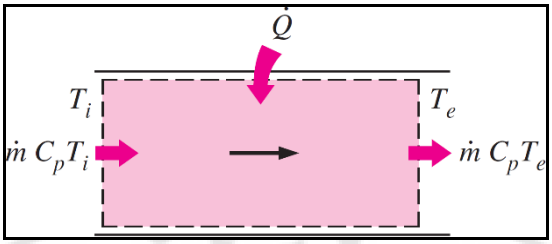
تعطى معادلة انحفاظ الطاقة لجريان مستقر لسائل ضمن أنبوب في حال عدم وجود عمل، كما في الشكل (4 – 33)، وفق:

$$\dot{Q} = \dot{m}\, c_p \left(T_e - T_i\right) \qquad \textbf{(92 – 4)}$$

T_i: درجة حرارة الدخول الوسطية.

T_e: درجة حرارة الخروج الوسطية.

$\dot{Q}$: معدل انتقال الحرارة إلى/من السائل.



الشكل (4 – 33) انحفاظ الطاقة في جريان مستقر ضمن أنبوب.

في حال عدم وجود أية تفاعلات طاقية عبر جدار الأنبوب، فإن درجة حرارة السائل تبقى ثابتة.

تؤخذ الشروط الحرارية عند سطح الأنبوب عادةً بشكل تقريبي بحيث نعدُّ أن درجة حرارة السطح ثابتة $(T_s = \text{constant})$، أو أن التدفق الحراري للسطح ثابت $(\dot{q}_s = \text{constant})$. فمثلاً يتحقق شرط ثبات درجة الحرارة عندما تكون هناك عملية تحول طوري (غليان، تكاثف) على السطح الخارجي للأنبوب. يتحقق شرط التدفق الحراري الثابت من السطح عندما يتعرض الأنبوب لتسخين منتظم في الاتجاهات كافة بواسطة إشعاع أو مقاومة كهربائية.

يعطى التدفق الحراري للسطح بالعلاقة:

$$\dot{q}_s = \alpha_x (T_s - T_m) \qquad \textbf{(93 – 4)}$$

α_x : معامل انتقال الحرارة الموضعي.

T_s : درجة حرارة سطح الأنبوب.

T_m : درجة الحرارة الوسطية للسائل.

تتغير درجة الحرارة الوسطية T_m لسائل يجري ضمن أنبوب في حال وجود تسخين أو تبريد؛ بالتالي عندما $(\alpha_x = \alpha = \text{constant})$، فإن درجة حرارة السطح T_s يجب أن تتغير عندما $(\dot{q}_s = \text{constant})$، كما أن التدفق الحراري السطحي يجب أن يتغير عندما $(T_s = \text{constant})$؛ أي إن الشروط الحرارية عند السطح إما أن تكون درجة حرارة ثابتة أو تكون تدفقاً حرارياً ثابتاً، لكن لا يمكن أن يجتمع الشرطان معاً.

4 – 15 – 1 – تدفق حراري ثابت للسطح

$(\dot{q}_s = \text{constant})$ *Constant Surface Heat Flux*:

إذا كان $\dot{q}_s$ ثابتاً، فإن معدل انتقال الحرارة يعطى بالعلاقة:

$$\dot{Q} = \dot{q}_s A_s = \dot{m} c_p (T_e - T_i) \qquad \textbf{(94 – 4)}$$

A_s : مساحة السطح الداخلي للأنبوب. $A_s = pL$

p : محيط الأنبوب.

L : طول الأنبوب.

وبالتالي فإن درجة الحرارة الوسطية للسائل عند مخرج الأنبوب تعطى بالعلاقة:

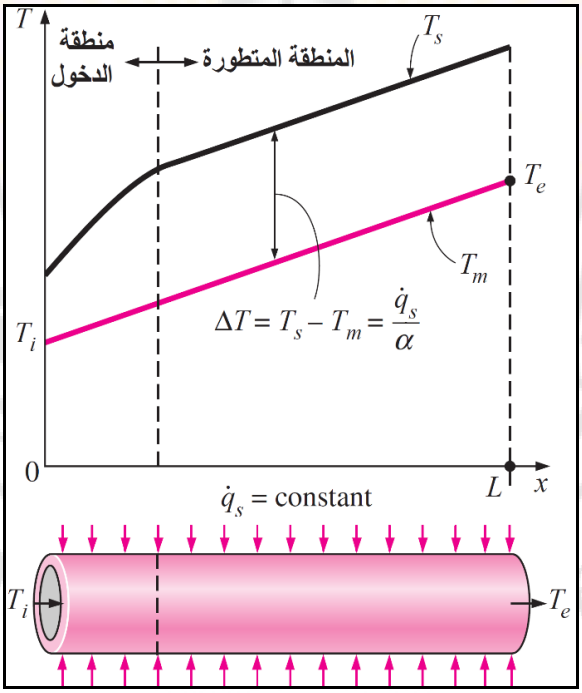
$$T_e = T_i + \frac{\dot{q}_s A_s}{\dot{m} c_p} \qquad \textbf{(95 – 4)}$$

نلاحظ أن درجة الحرارة الوسطية للسائل تزداد بشكل خطي باتجاه الجريان في حالة التدفق الحراري الثابت، ويعود ذلك إلى أن مساحة السطح الداخلي للأنبوب تزداد بشكل خطي باتجاه الجريان.

تحدد درجة حرارة سطح الأنبوب في حالة التدفق الحراري الثابت $\dot{q}_s$ من العلاقة:

$$\dot{q}_s = \alpha (T_s - T_m) \longrightarrow T_s = T_m + \frac{\dot{q}_s}{\alpha} \qquad \textbf{(96 – 4)}$$

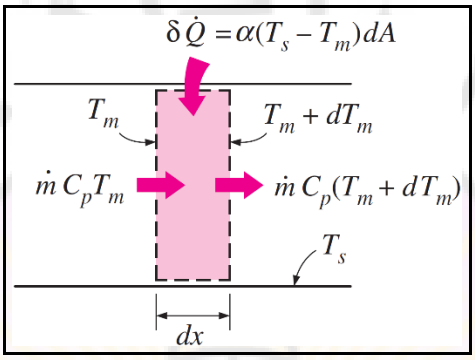
تزداد درجة حرارة السطح T_s في المنطقة المتطورة بشكل خطي باتجاه الجريان، حيث إن α ثابت، وبالتالي فإن $T_s - T_m = \text{constant}$، كما يوضح الشكل (4 – 34).



الشكل (4 – 34) تغيرات درجة حرارة السطح ودرجة الحرارة الوسطية للسائل في حالة تدفق حراري ثابت.

يحسب ميل درجة الحرارة الوسطية للسائل T_m على مخطط $(T - x)$ من خلال تطبيق علاقة التوازن الطاقي لجريان مستقر على شريحة من الأنبوب سماكتها dx، كما في الشكل (4 – 35)، وتكون العلاقة:

$$\dot{m}\, c_p dT_m = \dot{q}_s\,(p\,dx) \longrightarrow \frac{dT_m}{dx} = \frac{\dot{q}_s p}{\dot{m}\, c_p} = \text{constant} \qquad \textbf{(97 – 4)}$$



الشكل (4 – 35) التفاعلات الطاقية لحجم تحكم تفاضلي في أنبوب.

بما أن $\dot{q}_s$ وα ثابتان، فإن مشتق العلاقة (4 – 96) بالنسبة لـ x يعطي:

$$\frac{dT_m}{dx} = \frac{dT_s}{dx} \qquad \textbf{(98 – 4)}$$

فضلاً عن ذلك فإن شرط الحفاظ على بروفايل درجة الحرارة اللابعدية من دون تغير في المنطقة المتطورة يعطي:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{T_s - T}{T_s - T_m}\right) = 0$$

$$\frac{\left[\dfrac{\partial}{\partial x}(T_s - T)\right](T_s - T_m) - \left[\dfrac{\partial}{\partial x}(T_s - T_m)\right](T_s - T)}{(T_s - T_m)^2} = 0$$

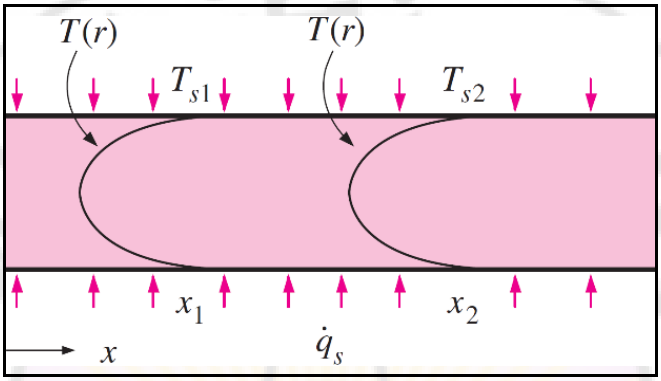
$$T_s - T_m = \text{constant} \longrightarrow \frac{1}{T_s - T_m}\left(\frac{\partial T_s}{\partial x} - \frac{\partial T}{\partial x}\right) = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{dT_s}{dx} \qquad \textbf{(99 – 4)}$$

بمساواة العلاقات (4 – 97)، (4 – 98)، (4 – 99) نجد:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{dT_s}{dx} = \frac{dT_m}{dx} = \frac{\dot{q}_s p}{\dot{m} c_p} = \text{constant} \qquad \textbf{(100 – 4)}$$

نستنتج أنه في منطقة الجريان المتطور في أنبوب يتعرض لتدفق حراري سطحي ثابت، فإن تدرج درجة الحرارة لا يتعلق بـ x ، وبالتالي فإن شكل بروفايل درجة الحرارة لا يتغير على طول الأنبوب، كما يوضح الشكل (4 – 36).



الشكل (4 – 36) ثبات بروفايل درجة الحرارة في المنطقة المتطورة في حالة تدفق حراري سطحي ثابت.

4 – 15 – 2 – درجة حرارة السطح ثابتة *(T_s = constant)*

***Constant Surface Temperature*:**

من قانون نيوتن في التبريد، فإن معدل انتقال الحرارة من سائل يتدفق في أنبوب يحسب من العلاقة:

$$\dot{Q} = \alpha A_s \Delta T_{\text{ave}} = \alpha A_s \left(T_s - T_m\right)_{\text{ave}} \qquad \textbf{(101 – 4)}$$

ΔT_{ave} : فرق مناسب في درجات الحرارة بين السائل والسطح.

في حال كانت T_s ثابتة، فإن T_{ave} يساوي تقريباً إلى المتوسط الحسابي لفرق درجات الحرارة ΔT_{am} ، ويعطى وفق العلاقة:

$$\Delta T_{\text{ave}} \approx \Delta T_{\text{am}} = \frac{\Delta T_i + \Delta T_e}{2} = \frac{\left(T_s - T_i\right) + \left(T_s - T_e\right)}{2} = T_s - \frac{T_i + T_e}{2}$$

$$\Delta T_{\text{ave}} = T_s - T_b \qquad \textbf{(102 – 4)}$$

T_b : درجة الحرارة الوسطية الكلية للسائل. $T_b = \frac{1}{2}\left(T_i - T_e\right)$

إن المتوسط الحسابي لفرق درجات الحرارة ΔT_{am} هو ببساطة الفرق في درجة الحرارة بين السطح والسائل عند مدخل الأنبوب، وبين السطح والسائل عند مخرجه. إن هذا الفرق في درجات الحرارة يفترض أن درجة حرارة السائل تتغير بشكل خطي باتجاه الجريان، وهو أمر صعب التحقق في حالة ثبات درجة حرارة السطح T_s. إن هذا التقريب يعطي نتائج مقبولة عادةً، ولكن ليس دائماً؛ بالتالي فإننا بحاجة إلى إيجاد طريقة أفضل في تحديد ΔT_{ave}.

بفرض أن سائلاً ما يتعرض للتسخين في أنبوب ذي مقطع عرضي ثابت، ودرجة حرارة سطحه الداخلي ثابتة T_s. نتيجةً لفرق درجات الحرارة بين السائل والأنبوب سيحدث انتقال للحرارة من الأنبوب للسائل، وبالتالي ستزداد درجة الحرارة الوسطية للسائل T_m باتجاه الجريان. يعطى التوازن الطاقي لحجم تحكم تفاضلي كالمبين في الشكل (4 – 35) وفق العلاقة:

$$\dot{m}c_p dT_m = \alpha\left(T_s - T_m\right)dA_s \qquad \textbf{(103 – 4)}$$

بما أن T_s ثابتة، فإن:

$$dT_m = -d\left(T_s - T_m\right)$$

وبالتالي بإصلاح العلاقة (4 – 103) نجد:

$$\frac{d\left(T_s - T_m\right)}{T_s - T_m} = -\frac{\alpha p}{\dot{m}c_p}dx \qquad \textbf{(104 – 4)}$$

بإجراء التكامل للعلاقة السابقة:

$$\int_{T_i}^{T_e}\frac{d\left(T_s - T_m\right)}{T_s - T_m} = \int_0^L -\frac{\alpha p}{\dot{m}c_p}dx$$

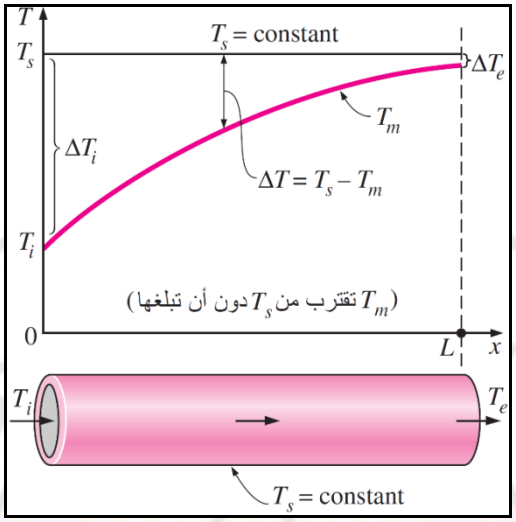
$$\ln\frac{T_s - T_e}{T_s - T_i} = -\frac{\alpha A_s}{\dot{m}c_p} \qquad \textbf{(105 – 4)}$$

بأخذ التابع اللوغاريتمي للعلاقة السابقة، وعزل T_e لوحدها نحصل على العلاقة التالية، والتي تستخدم لحساب درجة الحرارة الوسطية للسائل عند مخرج الأنبوب:

$$T_e = T_s - \left(T_s - T_i\right)\exp\left[\left(-\alpha A_s\right)/\left(\dot{m}c_p\right)\right] \qquad \textbf{(106 – 4)}$$

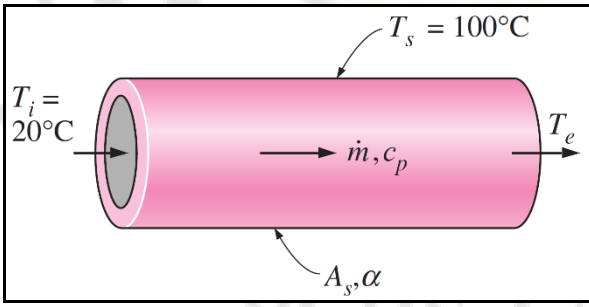
كما تستخدم هذه العلاقة في حساب درجة الحرارة الوسطية للسائل $T_m\left(x\right)$ من أجل أي قيمة لـ x، وذلك بتعويض $A_s = px$.

نلاحظ أن الفرق بين درجة حرارة السائل، ودرجة حرارة السطح يتناقص بشكل أسي باتجاه الجريان، حيث أن معدل التناقص يتعلق بالأس $\left(\alpha A_x/\dot{m}c_p\right)$، كما يبين الشكل (4 – 37).



الشكل (4 – 37) تغير درجة الحرارة الوسطية للسائل على طول الأنبوب في حال ثبات درجة حرارة السطح.

يسمى هذا المعامل اللابعدي بعدد وحدات الانتقال number of transfer units، ويرمز له بـ NTU وهو يقيس فعالية أنظمة انتقال الحرارة. من أجل $NTU > 5$ فإن درجة حرارة السائل عند المخرج تكون مساوية تقريباً لدرجة حرارة السطح $T_e \approx T_s$، كما يبين الشكل (4 – 38). إن درجة حرارة السائل تقترب من درجة حرارة السطح، ولكن لا يمكن أن تتجاوزها. فضلاً عن ذلك، عندما يكون NTU حوالي 4، فإن انتقال الحرارة بلغ حده الأقصى ولا يمكن أن يزداد معدل انتقال الحرارة بحالٍ من الأحوال مهما زدنا من طول الأنبوب. بالمقابل، فإن القيم الصغيرة لـ NTU تشير إلى إمكانية حدوث انتقال حرارة، وبالتالي فإن معدل انتقال الحرارة سيزداد بزيادة طول الأنبوب.



$NTU = \alpha A_s / \dot{m} c_p$	T_e, °C
0.01	20.8
0.05	23.9
0.10	27.6
0.50	51.5
1.00	70.6
5.00	99.5
10.00	100.0

الشكل (4 – 38) تغير درجة حرارة السائل عند المخرج بتغير قيم NTU.

بحل المعادلة (4 – 105) من أجل $\dot{m}c_p$ نجد:

$$\dot{m}c_p = -\frac{\alpha A_s}{\ln\left[(T_s - T_e)/(T_s - T_i)\right]} \qquad \textbf{(107 – 4)}$$

بتعويض هذه العلاقة في العلاقة (4 – 101) نجد:

$$\dot{Q} = \alpha A_s \Delta T_{\ln} \qquad \textbf{(108 – 4)}$$

حيث:

$$\Delta T_{\ln} = \frac{(T_s - T_i) - (T_s - T_e)}{\ln\left[\dfrac{(T_s - T_e)}{(T_s - T_i)}\right]} = \frac{\Delta T_e - \Delta T_i}{\ln\left(\dfrac{\Delta T_e}{\Delta T_i}\right)} \qquad \textbf{(109 – 4)}$$

$\Delta T_{\ln}$: فرق درجات الحرارة اللوغاريتمي الوسطي.

إن التوصل إلى علاقة $\Delta T_{\ln}$ تم من خلال تتبع بروفايل درجة الحرارة الفعلي للسائل على طول الأنبوب، وبالتالي فهي تعكس بدقة متوسط فرق درجات الحرارة بين السائل وسطح الأنبوب.

مثال 4 – 8:

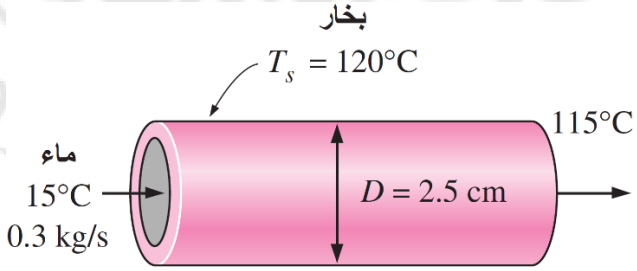
يدخل الماء إلى أنبوب رقيق من النحاس قطره $2.5\,\text{cm}$ بدرجة حرارة $15\,^{\circ}\text{C}$، وتدفق $0.3\,\text{kg/s}$، ويُسخن عن طريق تكاثف البخار على السطح الخارجي للأنبوب عند درجة حرارة $120\,^{\circ}\text{C}$. إذا كان معامل انتقال الحرارة بالحمل الوسطي $800\,\text{W/m}^2.^{\circ}\text{C}$، احسب الطول اللازم للأنبوب لتسخين الماء إلى $115\,^{\circ}\text{C}$.

الحل:

المعطيات: ماء يتدفق ضمن أنبوب ويسخن عن طريق تكاثف البخار على السطح الخارجي للأنبوب، وذلك من أجل معامل انتقال حرارة وسطي ثابت.

المطلوب: حساب طول الأنبوب حتى يسخن الماء من $15\,^{\circ}\text{C}$ إلى $115\,^{\circ}\text{C}$.

الشكل:



الافتراضات:

1. شروط الحالة المستقرة.
2. خواص السائل ثابتة.
3. معامل انتقال الحرارة بالحمل ثابت.
4. مقاومة التوصيل لأنبوب النحاس مهملة، وبالتالي فإن درجة حرارة السطح الداخلي للأنبوب تساوي إلى درجة حرارة تكاثف البخار.

الخواص:

الجدول (A10) ماء $\left[T=(15+115)/2=65\,^{\circ}\mathrm{C}\right]$:

$$c_p = 4{,}187\,\mathrm{J/kg.}\,^{\circ}\mathrm{C}$$

الجدول (A10) بخار ماء $\left(T=120\,^{\circ}\mathrm{C}\right)$:

$$h_{fg} = 2{,}203\,\mathrm{kJ/kg}$$

التحليل: بمعرفة درجة حرارة الدخول والخروج للماء، فإن معدل انتقال الحرارة المطلوب، هو:

$$\dot{Q} = \dot{m}c_p\left(T_e - T_i\right) = 0.3\,\mathrm{kg/s}\times 4.187\,\mathrm{kJ/kg.}\,^{\circ}\mathrm{C}\times(115\text{-}15)\,^{\circ}\mathrm{C}$$
$$= 125.6\,\mathrm{kW}$$

وفرق درجات الحرارة اللوغاريتمي الوسطي, هو:

$$\Delta T_e = T_s - T_e = 120\,^{\circ}\mathrm{C}\text{-}115\,^{\circ}\mathrm{C} = 5\,^{\circ}\mathrm{C}$$

$$\Delta T_i = T_s - T_i = 120\,^{\circ}\mathrm{C}\text{-}15\,^{\circ}\mathrm{C} = 105\,^{\circ}\mathrm{C}$$

$$\Delta T_{\ln} = \frac{\Delta T_e - \Delta T_i}{\ln\left(\Delta T_e/\Delta T_i\right)} = \frac{5-105}{\ln\left(5/105\right)} = 32.85\,^{\circ}\mathrm{C}$$

ومساحة سطح التبادل الحراري, هي:

$$\dot{Q} = \alpha A_s \Delta T_{\ln} \longrightarrow A_s = \frac{\dot{Q}}{\alpha \Delta T_{\ln}} = \frac{125.6\,\mathrm{kW}}{0.8\,\mathrm{kW/m^2.}\,^{\circ}\mathrm{C}\times 32.85\,^{\circ}\mathrm{C}} = 4.78\,\mathrm{m^2}$$

ومنه، فإن الطول المطلوب للأنبوب, هو:

$$A_s = \pi DL \longrightarrow L = \frac{A_s}{\pi D} = \frac{4.78\,\mathrm{m^2}}{\mathrm{p}\times 0.025\,\mathrm{m}} = 61\mathrm{m}$$

المناقشة: إن درجة الحرارة الوسطية الكلية للماء في أثناء عملية التسخين هي $65\,^{\circ}\mathrm{C}$، وبالتالي فإن فرق درجات الحرارة الوسطي هو $\Delta T_{\mathrm{am}} = 120-65 = 55\,^{\circ}\mathrm{C}$. باستخدام ΔT_{am}

بدلاً عن $\Delta T_{\ln}$ فإن الطول الناتج هو $L = 36\,\mathrm{m}$، وهي نتيجة خاطئة تماماً. إن هذا المثال يبين أهمية استخدام فرق درجات الحرارة اللوغاريتمي الوسطي في الحسابات.

4 - 16 - الجريان الصفائحي في الأنابيب *Laminar Flow in Tubes*:

لقد ذكرنا سابقاً أن الجريان في الأنابيب يكون صفائحياً من أجل $\mathrm{Re} < 2300$، كما أننا نعد الجريان بأكمله متطوراً إذا كان طول الأنبوب كبيراً بالنسبة لطول الدخول؛ وبالتالي فإننا نهمل تأثير الدخول.

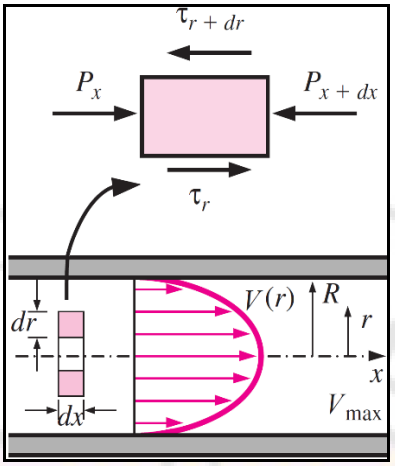
في الجريان الصفائحي المتطور، تتحرك كل جزيئة من جزيئات السائل بسرعة محورية ثابتة على طول خط الجريان، كما أن بروفايل السرعة $V(r)$ يحافظ على شكله من دون تغير. فضلاً عن ذلك لا توجد حركة في الاتجاه القطري، أي إن مركبة السرعة الناظمية على اتجاه الجريان v معدومة، كما أن التسارع معدوم، لأن الجريان مستقر.

بفرض أن سائلاً ما غير قابل للانضغاط وذو خواص ثابتة يجري ضمن أنبوب دائري مستقيم، وأن الجريان صفائحي مستقر. لنأخذ عنصراً حجمياً تفاضلياً على شكل حلقة (خاتم) في منطقة الجريان المتطور، بفرض قطره r، وسماكته dr، وطوله x، كما في الشكل (4 – 39).

إن قوة الضغط المؤثرة على سطحٍ مستوٍ مغمور تساوي إلى جداء الضغط عند مركز الضغط للسطح في مساحة السطح.

يتعرض العنصر الحجمي لتأثيرات الضغط واللزوجة فقط، وبالتالي فإن قوى الضغط والقص يجب أن تكون متوازنة فيما بينها. يعبر عن توازن القوى التي يتعرض لها العنصر الحجمي في اتجاه الجريان بالعلاقة:

$$(2\pi r dr P)_x - (2\pi r dr P)_{x+dx} + (2\pi r dx \tau)_r - (2\pi r dx \tau)_{r+dr} = 0 \quad \textbf{(110 - 4)}$$



الشكل (4 – 39) مخطط الجسم الحر لعنصر حجمي أسطواني من سائل.

وبالتالي، في منطقة الجريان المتطور تكون قوى الضغط واللزوجة متوازنة فيما بينها. بالقسمة على $(2\pi r\,dr\,dx)$ وإصلاح المعادلة نجد:

$$r\frac{P_{x+dx}-P_x}{dx}+\frac{(r\tau)_{x+dx}-(r\tau)_r}{dr}=0 \qquad \textbf{(111 – 4)}$$

بأخذ نهاية العلاقة من أجل $dr, dx \to 0$ نجد:

$$r\frac{dP}{dx}+\frac{d(r\tau)}{dr}=0 \qquad \textbf{(112 – 4)}$$

وحيث أن $\tau=-\mu(dV/dr)$، بالتعويض والإصلاح نجد:

$$\frac{\mu}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dV}{dr}\right)=\frac{dP}{dx} \qquad \textbf{(113 – 4)}$$

إن المقدار (dV/dr) سالب في حالة الجريان ضمن الأنابيب، لذلك تظهر الإشارة السالبة في علاقة τ. إن الطرف الأيسر من العلاقة (4 – 113) تابع لـ r، بينما الطرف الأيمن تابع لـ x. من الواجب أن تكون المساواة صحيحة من أجل أية قيمة لكل من r و x، وحيث إن مساواة من الشكل $f(r)=g(x)$ تكون صحيحة فقط في حال كان كل من التابعين يساوي ثابتاً. بالتالي نستنتج أن dP/dx ثابت. ويمكن التحقق من ذلك بكتابة معادلة توازن القوى لعنصر حجمي في منطقة الجريان المتطور على شكل شريحة من الأنبوب قطرها R وسماكتها dx.

يمكن حل المعادلة (4 – 113) من خلال إجراء التكامل مرتين، حيث نحصل على:

$$V(r)=\frac{1}{4\mu}\left(\frac{dP}{dx}\right)+C_1\ln r+C_2 \qquad \textbf{(114 – 4)}$$

يمكن إيجاد بروفايل السرعة من خلال تطبيق الشروط الحدية التالية:

بسبب التناظر بالنسبة لمحور الأنبوب: $\frac{\partial V}{\partial r}=0 \quad ; \quad r=0$

بسبب شرط عدم الانزلاق عند سطح الأنبوب: $V=0 \quad ; \quad r=R$

حيث نحصل على العلاقة:

$$V(r)=-\frac{R^2}{4\mu}\left(\frac{dP}{dx}\right)\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right) \qquad \textbf{(115 – 4)}$$

وبالتالي فإن بروفايل السرعة في الجريان الصفائحي المتطور في أنبوب يأخذ شكل قطع مكافئ، حيث تكون السرعة أعظمية عند محور الأنبوب وأصغرية عند سطحه. فضلاً عن ذلك فإن السرعة المحورية V تأخذ قيمة موجبة من أجل أية قيمة لـ r، وبالتالي فإن تدرج الضغط المحوري dP/dx يجب أن يكون سالباً، وذلك لأن تأثير اللزوجة يزداد باتجاه الجريان مما يؤدي إلى تناقص الضغط.

ويتم تحديد السرعة الوسطية من خلال تبديل المعادلة (4 – 115) في المعادلة (4 – 2)، وإجراء التكامل:

$$V_m=\frac{2}{R^2}\int_0^R Vrdr=\frac{-2}{R^2}\int_0^R\frac{R^2}{4\mu}\left(\frac{dP}{dx}\right)\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)r\,dr$$

$$V_m=-\frac{R^2}{8\mu}\left(\frac{dP}{dx}\right) \qquad \textbf{(116 – 4)}$$

بدمج المعادلتين (4 – 115)، (4 – 116) تصبح علاقة بروفايل السرعة بالشكل:

$$V(r)=2V_m\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right) \qquad \textbf{(117 – 4)}$$

وحيث أن السرعة الأعظمية تحدث عند محور الأنبوب حيث يتم ايجادها بوضع r=0 بالمعادلة (4 – 117):

$$V_{\max}=2V_m \qquad \textbf{(118 – 4)}$$

أي أن السرعة الوسطية تساوي إلى نصف السرعة الأعظمية.

4 – 16 – 1 – هبوط الضغط *Pressure Drop*:

يعد هبوط الضغط أحد الجوانب المهمة في تحليل الجريان في الأنابيب، وذلك لصلته المباشرة باستطاعة المضخة أو المروحة المطلوبة لاستمرار الجريان. كما ذكرنا سابقاً، فإن dP/dx ثابت، وبإجراء التكامل على هذا المقدار من $x=0$ حيث الضغط P_1، إلى $x=L$ حيث الضغط P_2، نجد:

$$\frac{dP}{dx}=\frac{P_2-P_1}{L}=-\frac{\Delta P}{L} \qquad \textbf{(119 – 4)}$$

بتعويض المعادلة (4 – 119) في المعادلة (4 – 116)، فإن هبوط الضغط يعطى بالشكل:

$$\Delta P=\frac{8\mu LV_m}{R^2}=\frac{32\mu LV_m}{D^2} \qquad \textbf{(120 – 4)}$$

من الأنسب بالتطبيقات العملية التعبير عن هبوط الضغط بعلاقة واحدة لأنواع الجريان الداخلي كافة، سواءً كان الجريان ضمن أنابيب دائرية أو غير دائرية، وبغض النظر عن نظام الجريان وخشونة السطح، وذلك وفق العلاقة:

$$\Delta P=f\,\frac{L}{D}\,\frac{\rho V_m^2}{2} \qquad \textbf{(121 – 4)}$$

f : معامل الاحتكاك أو معامل دارسي Darcy friction factor، وهو معامل لا بعدي.

يجب ألاَّ نخلط بين معامل دارسي f للاحتكاك، ومعامل الاحتكاك C_f والذي يسمى أيضاً بمعامل فانينغ Fanning friction coefficient، ويرتبط المعاملان بالعلاقة التالية:

$$C_f=\tau_s\frac{\rho V_m^2}{2}=\frac{f}{4} \qquad \textbf{(122 – 4)}$$

إن المعادلة (4 – 121) تعطي هبوط الضغط لجزء من جريان طوله L، وهي تشترط ما يلي:

* الجزء المدروس من الجريان أفقي، وبالتالي لا يوجد تأثيرات هيدروستاتيكية أو تأثير للجاذبية.
* الجزء المدروس لا يحوي أي أجهزة تقوم بعمل (مضخة، عنفة) حيث إن هذه الأجهزة تؤدي إلى تغير في ضغط السائل.
* مساحة المقطع العرضي للجريان ثابتة، وبالتالي فالسرعة الوسطية للجريان ثابتة.

بالمساواة بين العلاقتين (4 – 120)، (4 – 121)، وحلهما من أجل f نحصل على علاقة معامل الاحتكاك للجريان الصفائحي المتطور في أنبوب دائري، وهي:

$$f = \frac{64\mu}{\rho D V_m} = \frac{64}{\mathrm{Re}} \qquad \textbf{(123 – 4)}$$

تظهر هذه المعادلة أن معامل الاحتكاك في الجريان الصفائحي تابع لعدد رينولدز فقط ولا يتعلق بخشونة سطح الأنبوب.

وتحسب استطاعة الضخ المطلوبة بالعلاقة:

$$\dot{W}_{\text{pump}} = \dot{V}\Delta P \qquad \textbf{(124 – 4)}$$

$\dot{V}$: معدل التدفق الحجمي للجريان. ويعطى وفق العلاقة:

$$\dot{V} = V_{\text{ave}} A_c = \frac{\Delta P R^2}{8\mu L}\pi R^2 = \frac{\pi R^2 \Delta P}{8\mu L} = \frac{\pi D^2 \Delta P}{128\mu L} \qquad \textbf{(125 – 4)}$$

وتعرف هذه المعادلة باسم قانون بوازيPoiseuille's Law.

من العلاقة (4 – 125)، نلاحظ أنه من أجل معدل تدفق حجمي ثابت، فإن الهبوط في الضغط يتناسب طرداً مع طول الأنبوب ولزوجة السائل، ولكنه يتناسب عكساً مع القوة من الدرجة الرابعة لنصف قطر الأنبوب. بالتالي فإن استطاعة الضخ المطلوبة لنظام أنابيب يمكن تخفيضها إلى 1/16وذلك من خلال مضاعفة قطر الأنبوب.

مثال 4 – 9:

يتدفق الماء بدرجة حرارة $10\,^{o}\mathrm{C}$ في أنبوب قطره $0.2\,\mathrm{cm}$ وطوله $15\,\mathrm{m}$ بشكل مستقر، وبسرعة وسطية $1.2\,\mathrm{m/s}$. احسب 1 – هبوط الضغط. 2 – استطاعة الضخ المطلوبة للتغلب على هبوط الضغط.

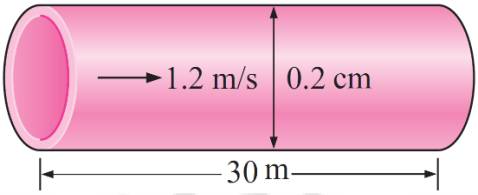
الحل:

المعطيات: جريان مستقر للماء ضمن أنبوب.

المطلوب:

1. هبوط الضغط.
2. استطاعة الضخ المطلوبة للتغلب على هبوط الضغط.

الشكل:



الافتراضات:

1. الجريان مستقر وغير قابل للانضغاط.
2. تأثيرات الدخول مهملة، وبالتالي فالجريان متطور.
3. الأنبوب لا يحتوي على انحناءات أو صمامات أو وصلات.
4. لا يوجد على الأنبوب أجهزة عمل، كالمضخات أو العنفات.

الخواص:

الجدول (A10) ماء $T = 20\,^{\circ}\mathrm{C}$:

$$\rho = 999.7\,\mathrm{kg/m^3} \quad , \quad \mu = 1.307\times10^{-3}\,\mathrm{kg/m.s}$$

التحليل:

1. 1. يجب علينا أولاً أن نحدد نظام الجريان، وذلك بحساب عدد رينولدز من العلاقة (4 – 10):

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho V_m D}{\mu} = \frac{999.7\,\mathrm{kg/m^3}\times1.2\,\mathrm{m/s}\times2\times10^{-3}\,\mathrm{m}}{1.307\times10^{-3}\,\mathrm{kg/m.s}} = 1836$$

وهو أقل من 2300 ، وبالتالي فإن الجريان صفائحي. ومنه فإن معامل الاحتكاك للجريان الصفائحي يحسب من العلاقة (4 – 123):

$$f = \frac{64}{\mathrm{Re}} = \frac{64}{1836} = 0.0349$$

وبالتالي فهبوط الضغط يحسب من العلاقة (4 – 121):

$$\Delta P = f\,\frac{L}{D}\,\frac{\rho V_m^{\,2}}{2} = 0.0349\,\frac{15\,\mathrm{m}}{0.002\,\mathrm{m}}\,\frac{999.7\,\mathrm{kg/m^3}\times(1.2\,\mathrm{m/s})^2}{2}$$

$$= 188\,\mathrm{kPa}$$

2. 2. نحسب معدل التدفق الحجمي من العلاقة (4 – 125):

$$\dot{V} = V_m A_c = V_m \left(\pi D^2/4\right) = 1.2\,\mathrm{m/s} \times \left[\mathrm{p}\left(0.002\,\mathrm{m}\right)^2/4\right]$$
$$= 3.77 \times 10^{-6}\,\mathrm{m}^3/\mathrm{s}$$

وتحسب استطاعة الضخ اللازمة للتغلب على الهبوط في الضغط بالعلاقة (4 – 124):

$$\dot{W}_{\mathrm{pump}} = \dot{V}\,\Delta P = 3.77 \times 10^{-6}\,\mathrm{m}^3/\mathrm{s} \times 188\,\mathrm{kPa} = 0.71\mathrm{W}$$

وبالتالي فإننا نحتاج إلى استطاعة قدرها $0.71\mathrm{W}$ للتغلب على فواقد الاحتكاك في الجريان، والتي تنتج عن اللزوجة.

4 – 16 – 2 – بروفايل درجة الحرارة وعدد نوسلت

***Temperature Profile and the Nusselt Number*:**

بفرض أن سائلاً ما ذو خواص ثابتة يجري ضمن أنبوب دائري نصف قطره R، وأن الجريان صفائحي مستقر، وأن العمل الناتج عن إجهادات اللزوجة مهمل، وبفرض أن السائل يجري باتجاه المحور x بسرعة. بما أن الجريان متطور، فإن السرعة V لا تتعلق بـ x وبالتالي $V = V(r)$.

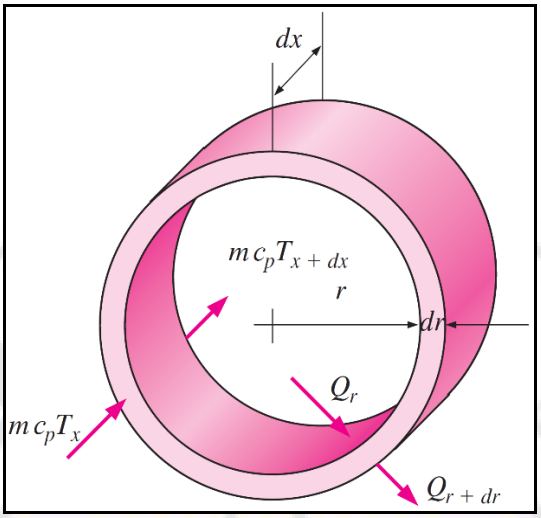
تنتقل الطاقة باتجاه المحور x بواسطة الكتلة، بينما تنتقل باتجاه r عن طريق التوصيل (انتقال الحرارة بالتوصيل في اتجاه x مهمل)، وبالتالي تعطى معادلة انحفاظ الطاقة في جريان مستقر لعنصر حجمي على شكل أسطوانة مفرغة سماكتها dr وطولها dx كالمبينة في الشكل (4 – 40) بالعلاقة:

$$\dot{m}c_p T_x - \dot{m}c_p T_{x+dx} + \dot{Q}_r - \dot{Q}_{r+dr} = 0 \qquad \textbf{(126 – 4)}$$

$$\dot{m} = \rho V A_c = \rho V \left(2\pi r dr\right)$$

بالتبديل والقسمة على $\left(2\pi r dr dx\right)$ وإصلاح المعادلة نحصل على:

$$\rho c_p V \frac{T_{x+dx} - T_x}{dx} = -\frac{1}{2\pi r dx}\frac{\dot{Q}_{r+dr} - \dot{Q}_r}{dr} \qquad \textbf{(127 – 4)}$$



الشكل (4 – 40) التوازن الطاقي لعنصر حجمي تفاضلي على شكل أسطوانة مفرغة.

أو المعادلة:

$$V\frac{dT}{dx} = -\frac{1}{2\rho c_p \pi r\,dr\,dx}\frac{\partial \dot{Q}}{\partial r} \qquad \textbf{(128 – 4)}$$

ولكن:

$$\frac{\partial \dot{Q}}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\left(-\lambda 2\pi r\,dx\,\frac{\partial T}{\partial r}\right) = -2\pi\lambda\,dx\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\frac{\partial T}{\partial r}\right) \qquad \textbf{(129 – 4)}$$

بالتعويض في المعادلة (4 – 128) واستخدام الانتشارية الحرارية نجد:

$$V\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{a}{r}\frac{\partial}{dr}\left(r\,\frac{\partial T}{\partial r}\right) \qquad \textbf{(130 – 4)}$$

وهذه المعادلة تعبر عن أن محصلة معدل الطاقة المنتقلة إلى حجم التحكم عن طريق تدفق الكتلة يساوي إلى محصلة انتقال الحرارة بالتوصيل في الاتجاه القطري.

4 – 16 – 3 – تدفق حراري سطحي ثابت *Constant Surface Heat Flux*:

من أجل جريان متطور في أنبوب دائري يتعرض لتدفق حراري سطحي ثابت، فإن المعادلة (4 – 100) تصبح بالشكل:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{dT_s}{dx} = \frac{dT_m}{dx} = \frac{2\dot{q}_s}{\rho V_m c_p R} = \text{constant} \qquad \textbf{(131 – 4)}$$

في أثناء اشتقاقنا للعلاقة (4 – 131) افترضنا أن التوصيل الحراري باتجاه x مهمل، ولكن في حال أخذناه بالحسبان، فإن ذلك سيؤدي إلى ظهور حد إضافي في المعادلة هو $\left(a\,\partial^2T/\partial x^2\right)$، وهو مساوٍ إلى الصفر في حالة التدفق الحراري السطحي الثابت لأن $\left(\partial T/\partial x=\text{constant}\right)$، وبالتالي فإن افتراضنا السابق دقيق تماماً في هذه الحالة.

بتعويض المعادلة (4 – 131) ومعادلة بروفايل السرعة (4 – 116) في المعادلة (4 – 130) نجد:

$$\frac{4\dot{q}_s}{\lambda R}\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)=\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) \qquad \textbf{(132 – 4)}$$

وهي معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية، يتم التوصل إلى حلها العام من خلال عزل المتحولات وإجراء التكامل مرتين، لتصبح بالشكل:

$$T=\frac{\dot{q}_s}{\lambda R}\left(r^2-\frac{r^2}{4R^2}\right)+C_1r+C_2 \qquad \textbf{(133 – 4)}$$

يتم تحديد الثوابت C_2,C_1، وبالتالي إيجاد الحل الخاص لهذه المعادلة من خلال تطبيق الشروط الحدية التالية:

$$\frac{\partial T}{\partial r}=0 \quad ;\ r=0$$
$$T=T_s \quad ;\ r=R$$

نجد:

$$T=T_s-\frac{\dot{q}_sR}{\lambda}\left(\frac{3}{4}-\frac{r^2}{R^2}+\frac{r^4}{4R^4}\right) \qquad \textbf{(134 – 4)}$$

ويتم التوصل إلى علاقة درجة الحرارة الوسطية الكلية T_m من خلال تعويض معادلة بروفايل السرعة (4 – 117) ومعادلة بروفايل درجة الحرارة (4 – 134) في المعادلة (4 – 4) وإجراء التكامل، حيث نجد:

$$T_m=T_s-\frac{11}{24}\frac{\dot{q}_sR}{\lambda} \qquad \textbf{(135 – 4)}$$

وبدمج هذه المعادلة مع $\dot{q}=\alpha\left(T_s-T_m\right)$ نحصل على العلاقة:

$$\alpha=\frac{24}{11}\frac{\lambda}{R}=\frac{48}{11}\frac{\lambda}{D}=4.36\frac{\lambda}{D} \qquad \textbf{(136 – 4)}$$

أو المعادلة:

$$\mathrm{Nu} = \frac{\alpha D}{\lambda} = 4.36 \qquad \textbf{(137 - 4)}$$

أي إنه في حالة الجريان الصفائحي المتطور في أنبوب دائري يتعرض لتدفق حراري سطحي ثابت، فإن عدد نوسلت ثابت القيمة، ولا يتعلق بعدد رينولدز أو عدد براندل.

4 - 16 - 4 - درجة حرارة السطح ثابتة *Constant Surfase Temperature*:

يمكن إجراء تحليل مماثل للتحليل السابق من أجل جريان صفائحي متطور في أنبوب دائري، وذلك في حال كانت درجة حرارة السطح T_s ثابتة. إن إيجاد الحل في هذه الحالة أصعب من الحالة السابقة؛ لكونه يتطلب إجراء عمليات تكرار Iterations، لكن علاقة عدد نوسلت الناتج تعبر عن مساواة بسيطة، وهي:

$$\mathrm{Nu} = \frac{\alpha D}{\lambda} = 3.66 \qquad \textbf{(138 - 4)}$$

4 - 16 - 5 - الجريان الصفائحي في الأنابيب غير الدائرية

***Laminar Flow in Noncircular Tubes*:**

يبين الجدول (C5) معادلات معامل الاحتكاك f وعدد نوسلت للجريان الصفائحي المتطور، وذلك من أجل بعض أشكال المقطع العرضي للأنابيب. يجب أن ننوه إلى أن عدد نوسلت وعدد رينولدز في هذه المعادلات يتم حسابهما على أساس نصف القطر الهيدروليكي D_h.

4 - 16 - 6 - تطور الجريان الصفائحي في منطقة الدخول

***Developing Laminar Flow in the Entrance Region*:**

من أجل أنبوب دائري طوله L ودرجة حرارة سطحه ثابتة، فإن عدد رينولدز لمنطقة الدخول الحرارية يعطى بالعلاقة:

$$\mathrm{Nu} = 3.66 + \frac{0.065(D/L)\,\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}}{1 + 0.04\left[(D/L)\,\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}\right]^{2/3}} \qquad \textbf{(139 - 4)}$$

نلاحظ أن عدد نوسلت الوسطي يكون أكبر ما يمكن عند منطقة الدخول، ويساوي تقريباً إلى قيمته في المنطقة المتطورة 3.66، وذلك من أجل $L \to \infty$. إن هذه العلاقة تفترض أن الجريان متطور هيدروديناميكياً عند دخوله إلى الجزء المسخن من الأنبوب، ولكن يمكن استعمالها للحصول على نتائج تقريبية للجريان النامي هيدروديناميكياً.

عندما يكون فرق درجات الحرارة بين السطح والسائل كبيراً، يصبح من الضروري أخذ تغير الكثافة مع درجة الحرارة بالحسبان. في هذه الحالة يعطى عدد نوسلت الوسطي لجريان صفائحي متطور في أنبوب دائري بالعلاقة:

$$\mathrm{Nu} = 1.86\left(\frac{\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}\,D}{L}\right)^{1/3}\left(\frac{\mu_b}{\mu_s}\right)^{0.14} \qquad \textbf{(140 - 4)}$$

حيث إن خواص السائل جميعها تحسب من أجل درجة الحرارة الوسطية لكامل السائل T_b باستثناء μ_s ، والتي تحسب عند درجة حرارة السطح.

يعطى عدد نوسلت الوسطي لمنطقة الدخول الحرارية لجريان بين صفيحتين إيزوترميتين متوازيتين طول كل منهما L بالعلاقة:

$$\mathrm{Nu} = 7.54 + \frac{0.03\left(D_h/L\right)\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}}{1+0.016\left[\left(D_h/L\right)\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}\right]^{2/3}} \qquad \textbf{(141 - 4)}$$

D_h : القطر الهيدروليكي، وهو يساوي إلى ضعفي المسافة الفاصلة بين الصفيحتين.

إن هذه العلاقة صالحة من أجل $\mathrm{Re} \le 2800$.

مثال 4 – 10:

ندرس جريان نفط درجة حرارته $20\,^{o}\mathrm{C}$ في خط أنابيب قطره $30\,\mathrm{cm}$ وبسرعة وسطية $2\,\mathrm{m/s}$. يمر جزء من خط الأنابيب عبر بحيرة متجمدة درجة حرارتها $0\,^{o}\mathrm{C}$. تشير القياسات إلى أن درجة حرارة سطح الأنبوب هي $0\,^{o}\mathrm{C}$ تقريباً. بإهمال المقاومة الحرارية لمادة الأنبوب، احسب: 1 – درجة حرارة النفط عندما يخرج الأنبوب من البحيرة. 2 – معدل انتقال الحرارة من النفط. 3 – استطاعة الضخ اللازمة للتخلص من فواقد الضغط والحفاظ على تدفق النفط في الأنبوب.

الحل:

المعطيات: نفط يتدفق ضمن أنبوب عبر بحيرة متجمدة درجة حرارتها $0\,^{o}\mathrm{C}$.

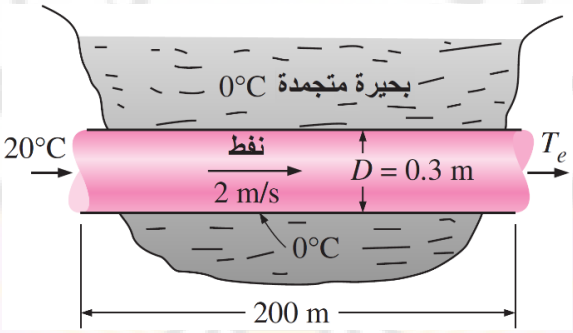
المطلوب:

1. درجة حرارة النفط عند نهاية البحيرة.
2. معدل انتقال الحرارة من النفط.
3. استطاعة الضخ اللازمة للتغلب على فواقد الضغط.

الافتراضات:

1. شروط الحالة المستقرة.
2. درجة حرارة سطح الأنبوب $0\ ^{o}\mathrm{C}$ تقريباً.
3. المقاومة الحرارية للأنبوب مهملة.
4. السطح الداخلي للأنبوب أملس.
5. عند وصول الأنبوب إلى البحيرة فإن الجريان يكون متطوراً هيدروديناميكياً.

الشكل:



الخواص:

إننا لا نعلم درجة حرارة الخروج للنفط، وبالتالي لا يمكننا حساب درجة الحرارة الوسطية الكلية، والتي يجب أن نحسب خواص النفط عندها. إن درجة حرارة النفط عند المدخل هي $20\ ^{o}\mathrm{C}$ ، وسوف تنخفض هذه الدرجة نتيجة الفقد الحراري إلى المياه المتجمدة في البحيرة. نحدد خواص النفط عند درجة حرارة المدخل، ولكننا سنعيد الحسابات، في حال الضرورة، من أجل الخواص عند درجة الحرارة الوسطية الكلية للنفط.

الجدول (A14) نفط $\left(T = 20\ ^{o}\mathrm{C}\right)$ (نستخدم خواص الزيت):

$$\rho = 888\,\mathrm{Kg/m^3} \quad , \quad \nu = 901\times10^{-6}\ \mathrm{m^2/s}$$

$$\lambda = 0.145\,\mathrm{W/m.^{o}C} \quad , \quad c_p = 1880\,\mathrm{J/kg.^{o}C}$$

$$\mathrm{Pr} = 10,400$$

التحليل:

1. نحسب عدد رينولدز من العلاقة :

$$\mathrm{Re} = \frac{V_m D_h}{\nu} = \frac{2\,\mathrm{m/s}\times 0.3\,\mathrm{m}}{901\times10^{-6}\ \mathrm{m^2/s}} = 666$$

وهي أقل من القيمة الحرجة لعدد رينولدز في الأنابيب الملساء $\mathrm{Re}_{cr} = 2300$ ، وبالتالي فالجريان صفائحي. نحسب طول الدخول الحراري التقريبي من العلاقة (4 – 89):

$$L_t \approx 0.05\,\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}\,D = 0.05\times 666\times 10,400\times 0.3\mathrm{m} \approx 104,000\mathrm{m}$$

وهو أكبر بكثير من طول الأنبوب. بالتالي نفرض أن الجريان نامٍ حرارياً، ونحسب عدد نوسلت من العلاقة (4 – 139):

$$\mathrm{Nu} = \frac{\alpha D}{\lambda} = 3.66 + \frac{0.065\left(D/L\right)\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}}{1+0.04\left[\left(D/L\right)\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}\right]^{2/3}}$$

$$= 3.66 + \frac{0.065\left(0.3/200\right)\times 666\times 10,400}{1+0.04\left[\left(0.3/200\right)\times 666\times 10,400\right]^{2/3}} = 37.3$$

نلاحظ أن عدد نوسلت أكبر بكثير من قيمته في حالة الجريان المتطور، والتي هي $\mathrm{Nu} = 3.66$. نحسب معامل انتقال الحرارة بالحمل:

$$\alpha = \frac{\lambda}{D}\mathrm{Nu} = \frac{0.145\,\mathrm{W/m}}{0.3\mathrm{m}}\times 37.3 = 18\,\mathrm{W/m^2.{}^oC}$$

ولدينا أيضاً:

$$A_s = pL = \pi DL = \pi\times 0.3\mathrm{m}\times 200\,\mathrm{m} = 188.5\mathrm{m}^2$$

$$\dot{m} = \rho A_c V_m = 888\,\mathrm{kg/m^3}\times\left[\pi\left(0.3\mathrm{m}\right)^2/4\right]\times 2\,\mathrm{m/s} = 125.5\ \mathrm{kg/s}$$

نحسب بعد ذلك درجة الحرارة عند المخرج من العلاقة (4 – 106):

$$T_e = T_s - \left(T_s - T_i\right)\exp\left(-\alpha A_s/\dot{m}c_p\right)$$

$$= 0\,{}^o\mathrm{C} - \left[\left(0-20\right){}^o\mathrm{C}\right]\exp\left[-\frac{18\,\mathrm{W/m^2.{}^oC}\times 188.5\mathrm{m}^2}{125.5\,\mathrm{kg/s}\times 1880\,\mathrm{J/kg.{}^oC}}\right]$$

$$= 19.71\,{}^o\mathrm{C}$$

وبالتالي, فإن درجة الحرارة الوسطية للنفط تنخفض تقريباً بمقدار $0.29\,{}^o\mathrm{C}$ في أثناء عبوره للبحيرة. وبالتالي, فإن درجة الحرارة الوسطية الكلية للنفط هي $19.86\,{}^o\mathrm{C}$، وهي مطابقة عملياً لدرجة حرارة الدخول $20\,{}^o\mathrm{C}$ ، أي لا حاجة لإعادة إيجاد خواص النفط عند هذه الدرجة.

2. نحسب فرق درجات الحرارة اللوغاريتمي الوسطي من العلاقة (4 – 109):

$$\Delta T_{\ln} = \frac{T_i - T_e}{\ln\left(T_s - T_e/T_s - T_i\right)} = \frac{20-19.71}{\ln\left[\left(0-19.71\right)/\left(0-20\right)\right]} = -19.85\,{}^oC$$

ومنه، نحسب معدل الفقد الحراري من النفط بالعلاقة (4 – 108):

$$\dot{Q} = \alpha A_s \Delta T_{\ln} = 18\,\mathrm{W/m^2.^oC} \times 188.5\,\mathrm{m^2} \times \left(-19.85\,^{\circ}\mathrm{C}\right)$$
$$= -6.74 \times 10^4\ \mathrm{W}$$

وبالتالي, فإن النفط يفقد حرارة بمعدل $67.4\,\mathrm{kW}$ في أثناء تدفقه في الأنبوب عبر البحيرة المتجمدة. نلاحظ أن $\Delta T_{\ln}$ مطابقة للمتوسط الحسابي لدرجة الحرارة في هذه الحالة، لأن $\Delta T_i \approx \Delta T_e$.

إن جريان النفط متطور هيدروديناميكياً، وبالتالي يحسب معامل الاحتكاك من العلاقة (4 – 123):

$$f = \frac{64}{\mathrm{Re}} = \frac{64}{666} = 0.0961$$

وبالتالي, فإن هبوط الضغط في الأنبوب يحسب بالعلاقة (4 – 121):

$$\Delta P = f\ \frac{L}{D}\frac{\rho V_m^{\,2}}{2} = 0.0961 \frac{200\,\mathrm{m}}{0.3\,\mathrm{m}} \frac{888\,\mathrm{kg/m^3} \times \left(2\,\mathrm{m/s}\right)^2}{2}$$
$$= 1.14 \times 10^5\ \mathrm{N/m^2}$$

وتحسب استطاعة الضخ المطلوبة من العلاقة (4 – 125)، حيث إن $\dot{m} = \rho \dot{V}$:

$$\dot{W}_{\mathrm{pump}} = \frac{\dot{m}\Delta P}{\rho} = \frac{125.5\,\mathrm{kg/s} \times 1.14 \times 10^5\ \mathrm{N/m^2}}{888\,\mathrm{kg/m^3}} = 16.1\,\mathrm{kW}$$

4 - 17 - الجريان المضطرب في الأنابيب *Turbulent Flow in Tubes*:

ذكرنا سابقاً أن الجريان في الأنابيب الملساء يصبح مضطرباً بشكل كامل من أجل $\mathrm{Re} > 10,000$. عادةً ما نتعامل في التطبيقات العملية مع الجريان المضطرب بسبب معامل انتقال الحرارة الكبير لهذا النظام. إن معظم العلاقات التي تحسب معامل الاحتكاك أو معامل انتقال الحرارة في الجريان المضطرب تستند إلى الدراسات التجريبية، وذلك بسبب صعوبة التعامل مع الجريان المضطرب تحليلاً.

يعطى معامل الاحتكاك للجريان المضطرب في الأنابيب الملساء بشكل مباشر من معادلة بيتكوف الأولى first Petukhov equation:

$$f = \left(0.790 \ln \mathrm{Re} - 1.64\right)^{-2} \quad ; \ 10^4 < \mathrm{Re} < 10^6 \qquad \textbf{(142 – 4)}$$

يرتبط عدد نوسلت في الجريان المضطرب بمعامل الاحتكاك عن طريق تشابه شيلتون – كولبرن Chilton - Colburn analogy، وذلك وفق العلاقة:

$$\mathrm{Nu} = 0.125 f\ \mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}^{1/3} \qquad \textbf{(143 - 4)}$$

تستخدم هذه العلاقة في حساب عدد نوسلت للأنابيب الملساء والخشنة على حدٍ سواء، وذلك بعد حساب معامل الاحتكاك f.

من أجل الجريان المضطرب المتطور في الأنابيب الملساء، فإننا نستخدم علاقة مبسطة لعدد نوسلت، حيث نتوصل إليها بتعويض علاقة معامل الاحتكاك البسيطة ($f = 0.184\,\mathrm{Re}^{-0.2}$) في المعادلة (4 - 143)، وبذلك تنتج المعادلة المطلوبة (4 - 68):

$$\mathrm{Nu} = 0.023\,\mathrm{Re}^{0.8}\,\mathrm{Pr}^{1/3} \quad ; \begin{pmatrix} 0.7 \le \mathrm{Pr} \le 160 \\ \mathrm{Re} > 10,000 \end{pmatrix} \qquad \textbf{(144 - 4)}$$

وتسمى المعادلة أيضاً بمعادلة كولبرن. يمكن تحسين دقة النتائج التي تعطيها هذه المعادلة عن طريق تعديلها؛ لتصبح من الشكل:

$$\mathrm{Nu} = 0.023\,\mathrm{Re}^{0.8}\,\mathrm{Pr}^{n} \qquad \textbf{(145 - 4)}$$

حيث إن $n = 0.4$ في حالة تسخين السائل، و $n = 0.3$ عند تبريد السائل في أثناء جريانه داخل الأنبوب تسمى هذه المعادلة بمعادلة ديتوس – بولتر Dittus - Boelter equation، ويفضل استخدامها بدلاً عن علاقة كولبرن.

تحسب خواص السائل في المعادلات السابقة من أجل درجة الحرارة الوسطية الكلية للسائل T_b. في حال كان فرق درجات الحرارة بين السائل والجدار كبيراً جداً يصبح من الضروري استخدام معامل تصحيح، وذلك للتعبير عن تغيرات اللزوجة في السائل بين سطح الأنبوب ووسطه.

إن العلاقات المبسطة السابقة لحساب عدد نوسلت قد تعطي نتائج تصل نسبة الخطأ فيها إلى 24%. يمكن زيادة الدقة بشكل كبير في النتائج وصولاً إلى نسبة خطأ أقل من 10% من خلال استخدام علاقات أكثر تعقيداً ولكنها أكثر دقة، ومنها معادلة بيتكوف الثانية second Petukhov equation:

$$\mathrm{Nu} = \frac{(f/8)\,\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}}{1.07 + 12.7\,(f/8)^{0.5}\left(\mathrm{Pr}^{2/3} - 1\right)} \quad ; \begin{pmatrix} 0.5 \le \mathrm{Pr} \le 2000 \\ 10^4 < \mathrm{Re} < 5.10^6 \end{pmatrix} \qquad \textbf{(146 - 4)}$$

يتم تحسين دقة هذه العلاقة عند القيم الصغيرة لعدد رينولدز من خلال تعديلها, لتصبح بالشكل:

$$\mathrm{Nu}=\frac{(f/8)(\mathrm{Re}-1000)\,\mathrm{Pr}}{1+12.7(f/8)^{0.5}\left(\mathrm{Pr}^{2/3}-1\right)}\quad ;\begin{pmatrix}0.5\le \mathrm{Pr}\le 2000\\ 3.10^{3}<\mathrm{Re}<5.10^{6}\end{pmatrix} \qquad \textbf{(147 - 4)}$$

وتسمى هذه العلاقة بمعادلة جنيلنسكي Gnielinski، ويفضل استخدامها عند إجراء الحسابات بدل معادلة بيتكوف الثانية.

إن المعادلات السابقة لا تتعلق كثيراً بالشروط الحرارية عند سطح الأنبوب، وبالتالي يمكن استخدامها في حال كانت T_s ثابتة، أو كان $\dot{q}_s$ ثابتاً.

بالرغم من بساطة العلاقات السابقة، فإنها تعطي نتائج ذات دقة كافية لمعظم التطبيقات الهندسية؛ فضلاً عن ذلك فإنها تعطي تقديرات جيدة لقيم معامل الاحتكاك ومعامل انتقال الحرارة في منطقة الجريان الانتقالي $(2300\le \mathrm{Re}\le 10,000)$، وخاصةً في حال كانت قيمة عدد رينولدز أقرب إلى $10,000$ منها إلى 2300.

إن العلاقات السابقة غير صالحة للتطبيق من أجل المعادن السائلة بسبب القيم الصغيرة جداً لعدد براندل لهذه المعادن. في حالة المعادن السائلة، فإن قيم عدد براندل هي $(0.004<\mathrm{Pr}<0.01)$، وبالتالي فإنه من المناسب استخدام العلاقات التالية:

$$\mathrm{Nu}=4.8+0.0156\,\mathrm{Re}^{0.85}\,\mathrm{Pr}_s^{0.93}\quad ;\ T_s=\text{constant} \qquad \textbf{(149 - 4)}$$

$$\mathrm{Nu}=6.3+0.0167\,\mathrm{Re}^{0.85}\,\mathrm{Pr}_s^{0.93}\quad ;\ \dot{q}_s=\text{constant} \qquad \textbf{(150 - 4)}$$

ويحسب عدد براندل في هذه العلاقات من أجل درجة حرارة سطح الأنبوب.

الفصل الخامس
المبادلات الحرارية
Heat Exchangers

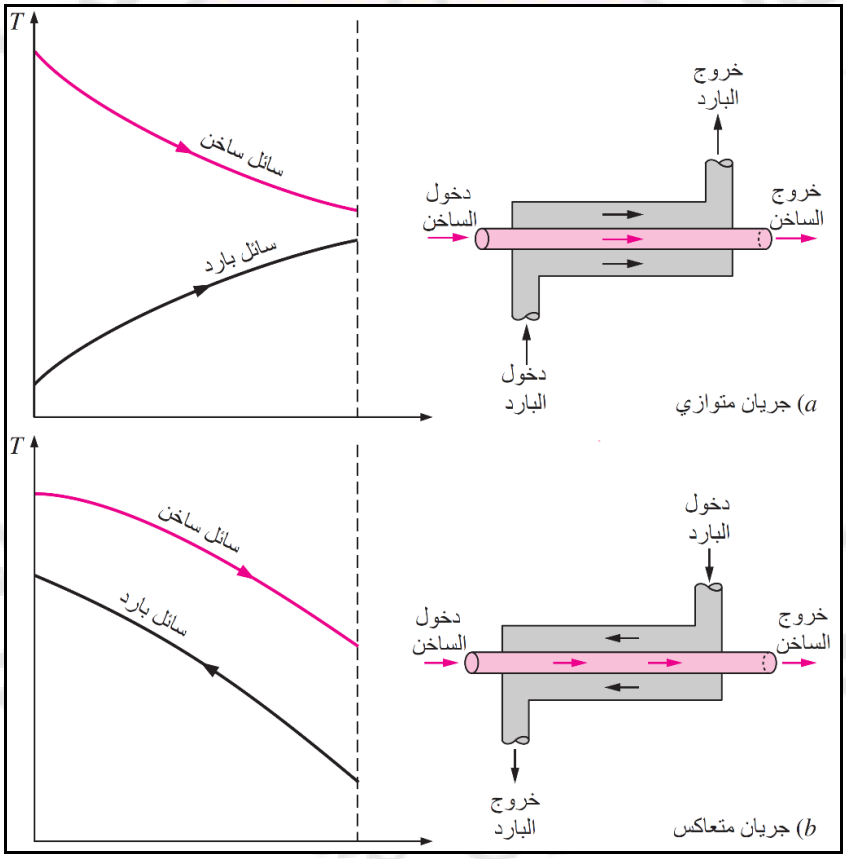
المبادلات الحرارية هي الأجهزة التي يتم فيها تبادل الحرارة بين سائلين مختلفين في درجة الحرارة من دون أن يحدث امتزاج بين السائلين. تستخدم المبادلات الحرارية على نطاق واسع في التطبيقات العملية، من أنظمة التدفئة والتكييف في المنازل إلى العمليات الكيميائية ومحطات توليد الطاقة ومبردات الآليات. تختلف المبادلات الحرارية عن غرف المزج من حيث إنها تمنع امتزاج السائلين، فعلى سبيل المثال تنتقل الحرارة في مشع السيارة من الماء الساخن المتدفق في أنابيب المشع إلى الهواء الذي يجري عبر الفراغات الضيقة بين الصفائح الرقيقة المركبة على السطح الخارجي للأنابيب.

يتضمن انتقال الحرارة في المبادلات الحرارية عادةً؛ انتقال الحرارة بالحمل في كل من السائلين، وبالتوصيل عبر الجدار الفاصل بينهما. نستخدم في تحليل المبادلات الحرارية معامل انتقال الحرارة الكلي U، وهو يحسب تأثير الأجزاء جميعها على انتقال الحرارة. يتعلق انتقال الحرارة بين السائلين في موضع ما من المبادل الحراري بفرق درجات الحرارة عند هذا الموضع، حيث إن هذا الفرق يتغير على طول المبادل الحراري. نستخدم عادةً في تحليل المبادلات الحرارية فرق درجات الحرارة اللوغاريتمي الوسطي LMTD logarithmic mean temperature difference بين السائلين من أجل كامل المبادل الحراري.

تصنع المبادلات الحرارية بأنواع عدة، وبالتالي سنبدأ هذا الفصل بتصنيف المبادلات الحرارية. نناقش بعد ذلك حساب معامل انتقال الحرارة الكلي في المبادلات الحرارية وفرق درجات الحرارة اللوغاريتمي الوسطي LMTD لبعض الأشكال. نتعرف بعدها إلى معامل التصحيح F correction factor لحساب انحراف فرق درجات الحرارة الوسطية عن LMTD في الأشكال المعقدة. نناقش بعدها طريقة عدد وحدات الانتقال – الفعّالة effectiveness - NTU، والتي تسمح لنا بتحليل المبادلات الحرارية عندما تكون درجة حرارة المخرج للسوائل مجهولة. وفي نهاية هذا الفصل سنناقش اختيار المبادلات الحرارية.

5 - 1 - أنواع المبادلات الحرارية *Types of Heat Exchangers*:

يتألف أبسط أنواع المبادلات الحرارية من أنبوبين متداخلين قطراهما مختلفان، كما في الشكل (5 – 1)، ويسمى المبادل الحراري ذو الأنبوب المضاعف double - pipe. في هذا النوع من المبادلات الحرارية يتدفق السائل الأول عبر الفراغ الحلقي بين الأنبوبين، بينما يتدفق السائل الثاني في الأنبوب الداخلي. هناك شكلان لتدفق السائلين في المبادل الحراري ذي الأنبوب المضاعف: في الجريان المتوازي parallel flow يدخل كلا السائلين الساخن والبارد إلى المبادل الحراري من نفس الطرف، ويتحركان بالاتجاه نفسه. في الجريان المتعاكس counter flow فإن السائلين يدخلان المبادل الحراري من طرفين متعاكسين، ويجريان باتجاهين متعاكسين.

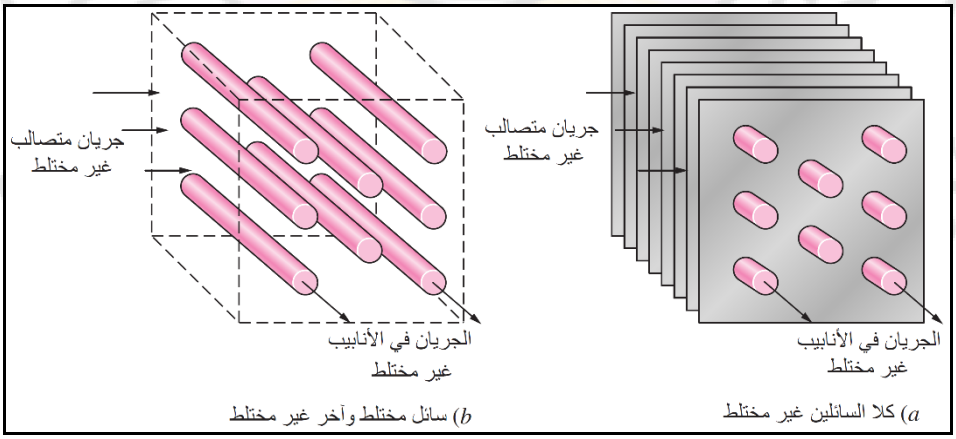


الشكل (5 – 1) أنظمة الجريان وبروفايلات درجات الحرارة في مبادل حراري ذي أنبوب مضاعف.

هناك نوع آخر من المبادلات الحراري مصمم خصيصاً؛ ليحقق مساحة سطح تبادل حراري كبيرة من أجل واحدة الحجم، وهو المبادل الحراري المدمج compact. تسمى نسبة مساحة سطح التبادل الحراري لمبادل حراري ما إلى حجمه بكثافة المساحة area density β. يصنف المبادل الحراري الذي يحقق $\beta > 700\,\mathrm{m^2/m^3}$ كمبادل حراري مدمج. تسمح لنا المبادلات الحرارية المدمجة بتحقيق معدل انتقال حرارة عالٍ بين سائلين في حجم صغير، وتستخدم عادةً في التطبيقات التي تقتضي أن يكون وزن المبادل الحراري وحجمه محدودين.

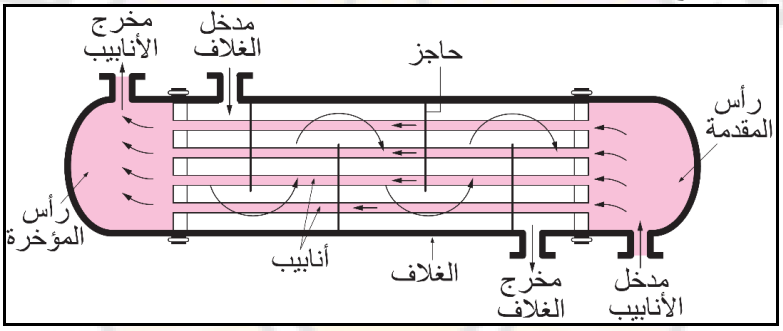
يتم تحقيق المساحة الكبيرة للسطح في المبادلات الحرارية المدمجة من خلال تركيب صفائح رقيقة متقاربة أو ريش متموجة على الجدران الفاصلة بين السائلين. تستخدم المبادلات المدمجة عادةً في المبادلات الحرارية بين غازين أو بين غاز ومائع، وذلك لتعويض معامل انتقال الحرارة المنخفض لجريان الغاز من خلال زيادة سطح التبادل.

عادةً ما يتحرك السائلان في المبادلات الحرارية المدمجة بشكل متصالب، ويسمى هذا الشكل من الجريان بالجريان المتصالب cross - flow. يصنف الجريان المتصالب أيضاً إلى جريان مختلط mixed وغير مختلط unmixed، وذلك بحسب شكل الجريان لكل سائل على حدة، كما في الشكل (5 – 2). في الشكل (a) يكون الجريان المتصالب غير مختلط لأن الريش المستوية تجبر السائل على الجريان عبر فراغات محددة وتمنعه من الحركة في الاتجاه العرضي (بالاتجاه الموازي للأنابيب). أما في الشكل (b) فإن الجريان المتصالب مختلط، حيث إن السائل يملك حرية الحركة في الاتجاه العرضي. إن وجود الخلط في السائل يؤثر بشكل كبير في خصائص انتقال الحرارة في المبادل الحراري.



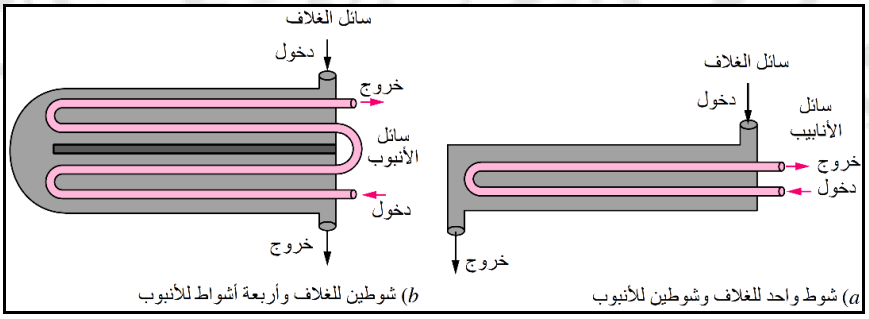
الشكل (5 – 2) الأشكال المختلفة للجريان في المبادلات الحرارية ذات الجريان المتعاكس.

إن أحد أكثر أنواع المبادلات الحرارية شيوعاً في التطبيقات الصناعية هو المبادل الحراري الصندوقي shell - and - tube، المبين في الشكل (5 – 3). يحتوي المبادل الحراري الصندوقي على عدد كبير من الأنابيب الموضوعة ضمن غلاف shell بحيث يكون محور الأنابيب موازياً لمحور الغلاف. يحدث انتقال الحرارة نتيجة تدفق أحد السائلين في الأنابيب بينما يتدفق السائل الآخر خارج الأنابيب ضمن الغلاف. عادةً ما توضع حواجز baffles داخل الغلاف لإجبار السائل الذي يجري في الغلاف على الحركة عبر الغلاف (بشكل موازٍ لمحور الغلاف) لزيادة انتقال الحرارة، والحفاظ على فراغات منتظمة بين الأنابيب. بالرغم من الانتشار الواسع للمبادلات الصندوقية إلا أنها غير مناسبة للاستخدام في تطبيقات الآليات والطائرات بسبب حجمها ووزنها الكبيرين نسبياً. نلاحظ أن الأنابيب في المبادلات الحرارية الصندوقية تصب في مناطق واسعة تسمى الرؤوس headersعند نهايتي الغلاف، حيث إن السائل المتدفق في الأنابيب يجتمع في هذه المناطق قبل الدخول إلى الأنابيب وبعد الخروج منها.



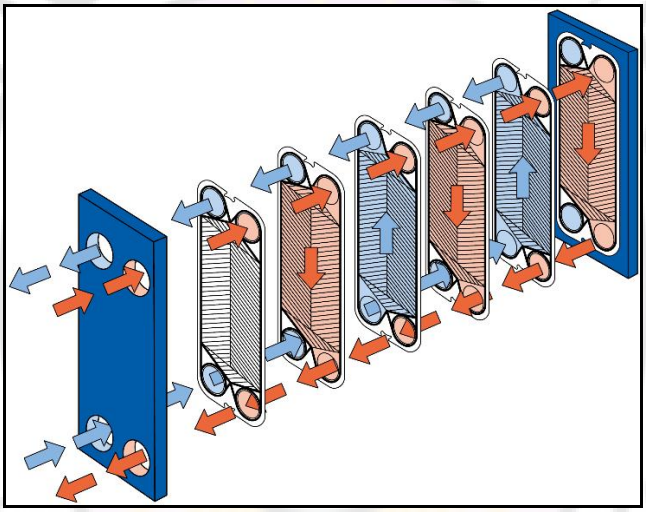
الشكل (5 – 3) الشكل التخطيطي لمبادل حراري صندوقي.

تصنف المبادلات الحرارية الصندوقية بحسب عدد الأشواط لكل من الغلاف والأنبوب. على سبيل المثال نقول عن المبادلات الحرارية التي تصنع فيها الأنابيب جميعها لفة واحدة في الغلاف بأنها ذات شوط واحد للغلاف وشوطين للأنبوب، كما في الشكل (5 – 4).



الشكل (5 – 4) أشكال الجريان متعدد الأشواط في المبادلات الحرارية الصندوقية.

أحد الأنواع المبتكرة للمبادلات الحرارية، والذي لاقى استخداماً واسعاً، هو المبادل الحراري الصفائحي plate heat exchanger أو المبادل الحراري ذو الصفيحة والإطار plate and frame، والذي يتألف من سلسلة من الصفائح التي تحصر بينها مسارات متموجة، كما في الشكل (5 – 5). يجري السائلان الساخن والبارد في مسارات متناوبة، وبالتالي فإن كل تيار من السائل البارد يكون محاطاً بتيارين من السائل الساخن والعكس صحيح، مما ينتج عنه فعالية كبيرة في انتقال الحرارة. فضلاً عن ذلك يمكن توسيع المبادلات الحرارية الصفائحية من خلال إضافة صفائح جديدة. إن هذا النوع من المبادلات الحرارية مناسب لتطبيقات التبادل الحراري بين مائعين، بشرط أن يكون الضغط متساوياً تقريباً في المائعين.



الشكل (5 – 5) الجريان في مبادل حراري صفائحي.

نوع آخر من المبادلات الحرارية التي تحتوي على مسارات متناوبة لتيارات السائل الساخن والبارد عبر مساحة الجريان نفسها هي المبادلات الحرارية الاسترجاعية regenerative. إن النوع السكوني static من المبادلات الحرارية الاسترجاعية هو عبارة عن كتلة مسامية ذات سعة تخزين حراري كبيرة، مثل سلك شبكي من الخزف ceramic wire mesh. يتدفق السائلان الساخن والبارد عبر الكتلة المسامية بشكل متناوب. تنتقل الحرارة من السائل الساخن إلى مصفوفة المسترجع أثناء جريان السائل الساخن، ومن المصفوفة إلى السائل البارد في أثناء جريانه. بالتالي فإن المصفوفة تشكل وسط تخزين حراري مؤقت.

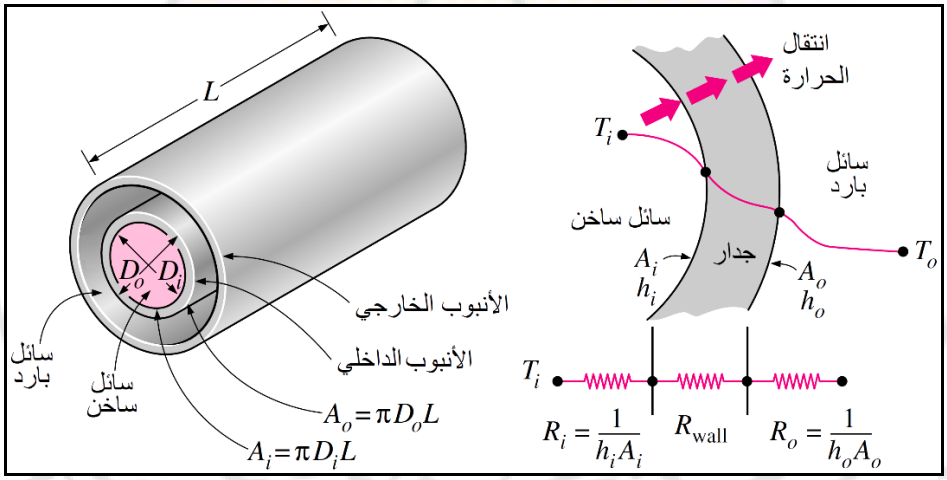
يحتوي النوع الحركي dynamic من المسترجعات على طبل دوار وجريان مستمر للسائلين الساخن والبارد عبر أجزاء مختلفة من الطبل، بحيث أن أي جزء من الطبل يمر بشكل

دوري عبر السائل الساخن، فيخزن حرارة، ومن ثم يمر عبر السائل البارد طارحاً الحرارة التي خزنها. نلاحظ هنا أيضاً أن الطبل أدى دوراً وسط ناقل للحرارة من تيار السائل الساخن إلى تيار السائل البارد.

تعطى المبادلات الحرارية عادةً تسميات تدل على التطبيق المستخدمة فيه. فعلى سبيل المثال المكثف condenser هو مبادل حراري يتكاثف فيه أحد السائلين في أثناء جريانه عبر المبادل الحراري. المرجل boiler هو أيضاً مبادل حراري يمتص فيه أحد السائلين حرارة ويتبخر.

5 - 2 - معامل انتقال الحرارة الكلي *The Overall Heat Transfer Coefficient*:

يتضمن أي مبادل حراري عادةً سائلين متحركين يفصل بينهما جدار صلب. تنتقل الحرارة في البداية من السائل الساخن إلى الجدار بالحمل، وتنتقل عبر الجدار بالتوصيل، ومن ثم تنتقل من الجدار إلى السائل البارد بالحمل. عادةً ما تؤخذ تأثيرات الإشعاع في معامل انتقال الحرارة بالحمل.



الشكل (5 – 6) الدارة الحرارية المكافئة لانتقال الحرارة في أنبوب مضاعف.

يبين الشكل (5 – 6) الدارة الحرارية المكافئة لعملية انتقال حرارة تتضمن انتقالين بالحمل وانتقال بالتوصيل. في حالة مبادل حراري ذي أنبوب مضاعف، فإن $(A_i = \pi D_i L, A_o = \pi D_o L)$، وبالتالي فالمقاومة الحرارية لجدار الأنبوب في هذه الحالة:

$$R_{wall} = \frac{\ln(D_o/D_i)}{2\pi\lambda L} \qquad (1-5)$$

λ : الموصلية الحرارية لمادة الجدار.

L: طول الأنبوب.

وبالتالي تصبح المقاومة الحرارية الكلية:

$$R = R_{\text{total}} = R_i + R_{\text{wall}} + R_o = \frac{1}{\alpha_i A_i} + \frac{\ln(D_o/D_i)}{2\pi\lambda L} + \frac{1}{\alpha_o A_o} \qquad \textbf{(2 - 5)}$$

يفضل عند تحليل المبادلات الحرارية جمع المقاومات الحرارية الموجودة جميعها في مسار تدفق الحرارة من السائل الساخن إلى السائل البارد في مقاومة وحيدة R، والتعبير عن معدل انتقال الحرارة بين السائلين كما يلي:

$$\dot{Q} = \frac{\Delta T}{R} = UA\Delta T = U_i A_i \Delta T = U_o A_o \Delta T \qquad \textbf{(3 - 5)}$$

U: معامل انتقال الحرارة الكلي. $\left[\text{W/m}^2.^{\circ}\text{C}\right]$

وبالتخلص من ΔT نجد:

$$\frac{1}{U A_s} = \frac{1}{U_i A_i} = \frac{1}{U_o A_o} = R = \frac{1}{\alpha_i A_i} + R_{\text{wall}} + \frac{1}{\alpha_o A_o} \qquad \textbf{(4 - 5)}$$

قد يتبادر إلى ذهننا هنا: لماذا هناك معاملا انتقال حرارة كليان U_i، U_o للمبادل الحراري؟

والسبب يعود إلى أن كل مبادل حراري يمتلك سطحي تبادل حراري مساحتاهما A_i، A_o، ومساحتا هذين السطحين ليستا متساويتين في الأغلب.

نلاحظ أن $U_i A_i = U_o A_o$، لكن $U_i \neq U_o$ إلا إذا كان $A_i = A_o$. بالتالي فإن معامل انتقال الحرارة الكلي U ليس له معنى إلا في حال كانت المساحة التي يتعلق بها محددة. يظهر هذا الأمر جلياً في حال كان أحد جانبي جدار الأنبوب مريشاً والجانب الآخر ليس مريشاً، حيث إن مساحة السطح المريش تساوي إلى أضعاف عدة من مساحة السطح غير المريش.

عندما تكون سماكة جدار الأنبوب صغيرة والموصلية الحرارية لمادة الأنبوب كبيرة، كما هو الحال عادةً، فإن المقاومة الحرارية للأنبوب تكون مهملة $\left(R_{\text{wall}} \approx o\right)$، ومساحة السطح الداخلي للأنبوب تساوي إلى مساحة السطح الخارجي $\left(A_i \approx A_o \approx A_s\right)$. بالتالي فإن العلاقة (4 - 5) تصبح بالشكل:

$$\frac{1}{U} \approx \frac{1}{\alpha_i} + \frac{1}{\alpha_o} \quad ; U \approx U_i \approx U_o \qquad \textbf{(5 - 5)}$$

ويحسب معاملا انتقال الحرارة بالحمل للسطح الداخلي والخارجي للأنبوب α_i، α_o من علاقات الحمل التي تعرفنا إليها في فصول سابقة.

يتأثر معامل انتقال الحرارة الكلي U في العلاقة (5 – 5) بشكل كبير بمعامل الحمل الحراري الأصغر، لأن مقلوب العدد الكبير صغير. عندما يكون أحد معاملي الحمل أصغر بكثير من الآخر (لنفرض أن $\alpha_0 << \alpha_i$)، فإن $1/\alpha_0 >> 1/\alpha_i$ ، ومنه فإن $U \approx \alpha_i$. بالتالي فإن معامل انتقال الحرارة الأصغر يشكل عائقاً في طريق تدفق الحرارة ويخفض من انتقال الحرارة بشكل كبير. عادةً ما نلاحظ هذه الحالة عندما يكون أحد السائلين غازاً والآخر مائعاً، وفي هذه الحالة نستخدم التريش على جانب الغاز لزيادة قيمة الجداء UA_s وبالتالي زيادة انتقال الحرارة في هذا الجانب.

يقدم الجدول (5 – 1) بعض القيم القياسية لمعامل انتقال الحرارة الكلي U في المبادلات الحرارية. نلاحظ أن قيم معامل انتقال الحرارة الكلي تتراوح بين $10\ \mathrm{W/m^2.^oC}$ في المبادلات الحرارية غاز – غاز، وحوالي $10,000\ \mathrm{W/m^2.^oC}$ للمبادلات الحرارية التي تتضمن عمليات تحول طوري. يعود هذا الأمر إلى أن الغازات تمتلك موصلية حرارية منخفضة جداً، في حين أن عمليات التحول الطوري تترافق مع قيم كبيرة جداً لمعاملات انتقال الحرارة.

الجدول (5 – 1) قيم معامل انتقال الحرارة الكلي في المبادلات الحرارية.

نوع المبادل الحراري	$U\ \left[\mathrm{W/m^2.^oC}\right]$
ماء إلى ماء	850 - 1700
ماء إلى زيت	100 - 350
ماء إلى بنزين أو كيروسين	300 - 1000
مسخنات مياه التغذية	1000 - 8500
بخار إلى وقود خفيف	200 - 400
بخار إلى وقود ثقيل	50 - 200
مكثف بخار	1000 - 6000
مكثف فريون (تبريد ماء)	300 - 1000
مكثف أمونيا (تبريد ماء)	800 - 1400
مكثف كحول (تبريد ماء)	250 - 700
غاز إلى غاز	10 - 40
ماء إلى هواء في أنابيب مريشة (الماء في الأنابيب)	30 - 60* 400 - 850**
بخار إلى هواء في أنابيب مريشة (الهواء في الأنابيب)	30 - 300* 400 - 4000**

$U\left[\mathrm{W/m^2.^oC}\right]$	نوع المبادل الحراري

*** على أساس مساحة سطح جانب الهواء**

**** على أساس مساحة سطح الماء أو البخار**

عندما يكون الأنبوب مريشاً من أحد جانبيه لتعزيز انتقال الحرارة، فإن المساحة الكلية لسطح التبادل الحراري على الجانب المريش تصبح:

$$A_s = A_{\text{total}} = A_{\text{fin}} + A_{\text{unfinned}} \qquad \textbf{(6 - 5)}$$

A_{fin}: مساحة سطح الريش.

A_{unfinned}: مساحة الجزء غير المريش من الأنبوب.

في حال كانت الريش قصيرة والموصلية الحرارية لمادتها عالية، يمكننا استخدام المساحة الكلية في علاقة مقاومة الحمل $R_{\text{conv}} = 1/\alpha A_s$، لأن الريش في هذه الحالة قريبة جداً من أن تكون إيزوترمية. باستثناء الحالة السابقة فإنه من الواجب حساب مساحة السطح الفعّال A من العلاقة:

$$A_s = A_{\text{unfinned}} + \eta_{\text{fin}} A_{\text{fin}} \qquad \textbf{(7 - 5)}$$

η_{fin}: كفاية الريشة.

بهذه الطريقة فإننا نأخذ بالحسبان هبوط درجة الحرارة على طول الريشة.

مثال 5 – 1:

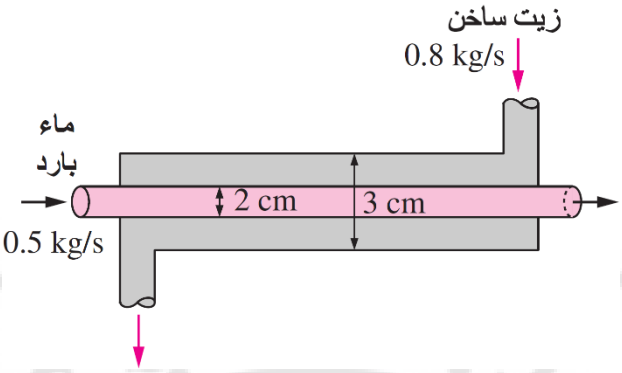
يبرد زيت ساخن في مبادل حراري ذي أنبوب مضاعف وجريان متعاكس. الأنابيب الداخلية من النحاس، قطرها $2\,\text{cm}$ وسماكتها مهملة. القطر الداخلي للأنبوب الخارجي (الغلاف) هو $3\,\text{cm}$. يتدفق الماء عبر الأنبوب بمعدل $0.5\,\text{kg/s}$، ويتدفق الزيت عبر الغلاف بمعدل $0.8\,\text{kg/s}$. كون أن درجة الحرارة الوسطية للماء $45\,^{\text{o}}\text{C}$ وللزيت $80\,^{\text{o}}\text{C}$، احسب معامل انتقال الحرارة الكلي للمبادل الحراري.

الحل:

المعطيات: زيت ساخن يبرد بواسطة الماء في مبادل حراري ذي أنبوب مضاعف وجريان متعاكس.

المطلوب: معامل انتقال الحرارة الكلي للمبادل الحراري.

الشكل:



الافتراضات:

1. المقاومة الحرارية للأنبوب الداخلي مهملة، لأن مادة الأنبوب ذات موصلية عالية وسماكته مهملة.
2. جريانا الماء والزيت متطوران.
3. خواص الماء والزيت ثابتة.

الخواص:

الجدول (A10) ماء $(T = 45\,^{\circ}\text{C})$:

$$\rho = 990\,\text{kg/m}^3 \quad , \quad \lambda = 0.637\,\text{W/m.}^{\circ}\text{C}$$
$$\text{Pr} = 3.91 \quad , \quad \nu = \mu/\rho = 0.602\times10^{-6}\,\text{m}^2/\text{s}$$

الجدول(A16) زيت $(T = 80\,^{\circ}\text{C})$:

$$\rho = 852\,\text{kg/m}^3 \quad , \quad \lambda = 0.138\,\text{W/m.}^{\circ}\text{C}$$
$$\text{Pr} = 490 \quad , \quad \nu = 37.5\times10^{-6}\,\text{m}^2/\text{s}$$

التحليل: يحسب معامل انتقال الحرارة الكلي U من العلاقة (5 – 5):

$$\frac{1}{U} \approx \frac{1}{\alpha_i} + \frac{1}{\alpha_o}$$

ونحسب α_i ، α_o من علاقات الحمل القسري.

إن القطر الهيدروليكي لأنبوب دائري هو نفسه قطر الأنبوب $D_h = D = 0.02\,\text{m}$ ، وبالتالي فالسرعة الوسطية للماء في الأنبوب وعدد رينولدز هما:

$$V_m = \frac{\dot{m}}{\rho A_c} = \frac{4\dot{m}}{\rho\pi D^2} = \frac{4\times0.5\,\text{kg/s}}{990\,\text{kg/m}^3\times\pi\,(0.02\,\text{m})^2} = 1.61\,\text{m/s}$$

$$\mathrm{Re} = \frac{V_m D_h}{\nu} = \frac{1.61\,\mathrm{m/s} \times 0.02\,\mathrm{m}}{0.602 \times 10^{-6}\,\mathrm{m^2/s}} = 53,490$$

وهذه القيمة لعدد رينولدز أكبر من 4000، وبالتالي فجريان الماء مضطرب. نفرض أن الجريان متطور، وبالتالي فإن عدد نوسلت يحسب من العلاقة (4 – 145):

$$\mathrm{Nu} = \frac{\alpha D_h}{\lambda} = 0.023\,\mathrm{Re}^{0.8}\,\mathrm{Pr}^{0.4} = 0.023(53,490)^{0.8}\,(3.91)^{0.4} = 240.6$$

وبالتالي:

$$\alpha = \frac{\lambda}{D_h}\,\mathrm{Nu} = \frac{0.637\,\mathrm{W/m.^oC}}{0.02\,\mathrm{m}} \times 240.6 = 7663\,\mathrm{W/m^2.^oC}$$

ونعيد التحليل السابق من أجل الزيت.

نصف القطر الهيدروليكي للفراغ الحلقي هو:

$$D_h = D_o - D_i = 0.03 - 0.02 = 0.01\mathrm{m}$$

والسرعة الوسطية وعدد رينولدز في هذه الحالة هما:

$$V_m = \frac{\dot{m}}{\rho A_c} = \frac{4\dot{m}}{\rho\pi\left(D_o^2 - D_i^2\right)}$$

$$= \frac{4 \times 0.8\,\mathrm{kg/s}}{852\,\mathrm{kg/m^3} \times \pi\left(0.03^2 - 0.02^2\right)\mathrm{m^2}} = 2.39\,\mathrm{m/s}$$

$$\mathrm{Re} = \frac{V_m D_h}{\nu} = \frac{2.39\,\mathrm{m/s} \times 0.01\,\mathrm{m}}{37.5 \times 10^{-6}\,\mathrm{m^2/s}} = 637$$

وهذه القيمة أقل من 400، وبالتالي فإن جريان الزيت صفائحي. نفرض أن الجريان متطور، وبالتالي فإن عدد نوسلت على سطح الأنبوب من جانب الفراغ الحلقي Nu_i الموافق لـ $D_i/D_o = 0.02/0.03 = 0.667$ يحسب من الجدول (4 – 2) بالاستيفاء:

$$\mathrm{Nu} = 5.45$$

ومنه فإن:

$$\alpha_o = \frac{\lambda}{D_h}\,\mathrm{Nu} = \frac{0.138\,\mathrm{W/m.^oC}}{0.01\mathrm{m}} \times 5.45 = 75.2\,\mathrm{W/m^2.^oC}$$

وبالتالي فإن معامل انتقال الحرارة الكلي للمبادل الحراري هو:

$$U = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_i} + \frac{1}{\alpha_o}} = \frac{1}{\frac{1}{7663\,\mathrm{W/m^2.^oC}} + \frac{1}{75.2\,\mathrm{W/m^2.^oC}}} = 74.5\,\mathrm{W/m^2.^oC}$$

المناقشة:

1. نلاحظ أن $U \approx \alpha_o$ في هذه الحالة، وذلك لأن $\alpha_i > \alpha_0$. وهذا يؤكد ما أشرنا إليه سابقاً بأن معامل انتقال الحرارة الكلي في مبادل حراري شديد التعلق بمعامل انتقال الحرارة الأصغر عندما يكون الفرق بين القيمتين كبيراً.

لزيادة معامل انتقال الحرارة الكلي، وبالتالي انتقال الحرارة في المبادل الحراري، يجب أن نستخدم بعض التقنيات لتعزيز انتقال الحرارة على جانب الزيت، كترييش السطح.

معامل الاتساخ *Fouling Factor*:

ينخفض أداء المبادلات الحرارية مع مرور الزمن؛ نتيجة تجمع الرواسب على سطوح التبادل الحراري. تسبب طبقة الرواسب مقاومة إضافية لانتقال الحرارة، وتؤدي إلى انخفاض معدل انتقال الحرارة في المبادل الحراري. نعبر عن محصلة تأثير الرواسب في انتقال الحرارة بواسطة معامل الاتساخ fouling factor R_f، والذي يقيس المقاومة الحرارية الناتجة عن اتساخ سطوح التبادل الحراري.

إن أكثر أشكال الاتساخ شيوعاً هو ترسب الشوائب الصلبة الموجودة في السوائل على سطوح التبادل الحراري. يبين الشكل (5 – 7) الترسبات المتشكلة على السطح الخارجي لأنبوب في مبادل حراري. إن هذه الترسبات تؤثر بشكل كبير في جريان السائل وانتقال الحرارة. لتجنب هذه المشكلة المحتملة يتم معالجة المياه في محطات الطاقة ومحطات المعالجة، وتزال المحتويات الصلبة جميعها الموجودة في المياه قبل أن يتم تدوير هذه المياه عبر النظام. نلاحظ هذه المشكلة أيضاً في المسخنات الأولية للهواء، حيث تتجمع جزيئات الرماد الموجودة في غازات العادم على سطوح التبادل الحراري.



الشكل (5 – 7) ترسب جزيئات الرماد على أنابيب المحمص في مولد بخار.

هناك شكل آخر للاتساخ وهو شائع في الصناعات الكيميائية، وهو التآكل corrosion؛ فضلاً عن عوامل اتساخ كيميائية chemical fouling أخرى. وفي هذه الحالة فإن السطوح تتسخ نتيجة تجمع نواتج التفاعلات الكيميائية على السطوح. يمكن تجنب هذا النوع من الاتساخ من خلال تبطين الأنابيب المعدنية بالزجاج أو استبدال الأنابيب المعدنية بأخرى بلاستيكية. يمكن أيضاً أن تتسخ المبادلات الحرارية نتيجة نمو الطحالب في السوائل الدافئة، ويسمى هذا النوع بالاتساخ البيولوجي biological fouling، ويمكن تجنبه من خلال المعالجة الكيميائية.

يجب في التطبيقات التي من المحتمل حدوث الاتساخ فيها أن نأخذ تأثيره في تصميم المبادلات الحرارية واختيارها. من الضروري في هذه التطبيقات اختيار مبادل حراري أكبر، وبالتالي اختيار مبادل ذي كلفة أعلى، وذلك لضمان أن يحقق المبادل الحراري الشروط التصميمية لانتقال الحرارة حتى بعد حدوث الاتساخ.

إن معامل الاتساخ لأي مبادل حراري جديد يساوي إلى الصفر، وتزداد قيمته مع الزمن نتيجة تجمع الرواسب الصلبة على سطح المبادل الحراري. يتعلق معامل الاتساخ بدرجة حرارة التشغيل وسرعة السوائل، كما يتعلق بفترة الخدمة. يزداد معامل الاتساخ بارتفاع درجة الحرارة وانخفاض السرعة.

إن علاقات معامل انتقال الحرارة الكلي المعطاة سابقاً صالحة من أجل السطوح النظيفة، ولكنها تحتاج إلى تعديل لحساب تأثيرات الاتساخ على السطحين الداخلي والخارجي للأنبوب. من أجل مبادل حراري صندوقي غير مريش، تعطى علاقة معامل انتقال الحرارة الكلي بالشكل:

$$\frac{1}{UA_s}=\frac{1}{U_iA_i}=\frac{1}{U_oA_o}=R=\frac{1}{\alpha_iA_i}+\frac{R_{f,i}}{A_i}+\frac{\ln(D_o/D_i)}{2\pi\lambda L}+\frac{R_{f,o}}{A_o}+\frac{1}{\alpha_oA_o} \quad (7-5)$$

$R_{f,i}$: معامل الاتساخ للسطح الداخلي.

$R_{f,o}$: معامل الاتساخ للسطح الخارجي.

يقدم الجدول (5 – 2) قيم معامل الاتساخ. إن هذه القيم تشتمل على قدر كبير من انعدام الدقة، وتستخدم هذه القيم كدليل عند اختيار المبادلات الحرارية وتصميمها لحساب التأثير المحتمل للاتساخ على انتقال الحرارة. نلاحظ أن معظم قيم معامل الاتساخ الواردة في الجدول هي من مرتبة $10^{-4}\ \mathrm{m^2.^oC/W}$، وهي تكافئ مقاومة طبقة من الكلس سماكتها $0.2\ \mathrm{mm}$ من أجل واحدة مساحة السطح، حيث إن الموصلية الحرارية للكلس $\lambda = 2.9\ \mathrm{W/m.^oC}$. بالتالي وفي ظل غياب بيانات محددة، يمكننا افتراض أن السطوح مبطنة بطبقة من الكلس سماكتها $0.2\ \mathrm{mm}$ كنقطة بداية لحساب تأثير الاتساخ.

الجدول (5 – 2) قيم معامل الاتساخ.

السائل	$R_f\ \left[\mathrm{m^2.^oC/W}\right]$
ماء مقطر، ماء البحر، مياه الأنهار، مياه تغذية المرجل:	
تحت $50\ ^oC$	0.0001
فوق $50\ ^oC$	0.0002
وقود	0.0009
بخار (خالي من الزيت)	0.0001
مائع وسيط تبريد	0.0002
بخار وسيط تبريد	0.0004
أبخرة كحولية	0.0001
هواء	0.0004

مثال 5 – 2:

مبادل حراري ذو أنبوب مضاعف مصنوع من الستانل ستيل $\left(\lambda = 15.1\mathrm{W/m.^oC}\right)$، القطر الداخلي للأنبوب الداخلي $D_i = 1.5\mathrm{cm}$، وقطره الخارجي $D_o = 1.9\mathrm{cm}$، والقطر الداخلي للغلاف (الأنبوب الخارجي) $3.2\mathrm{cm}$. معامل انتقال الحرارة بالحمل على السطح الداخلي للأنبوب $\alpha_i = 800\ \mathrm{W/m^2.^oC}$، ومعامل انتقال الحرارة بالحمل على السطح الخارجي للأنبوب

$\alpha_o = 1200\,\mathrm{W/m^2.^oC}$. من أجل معامل اتساخ $R_{f,i} = 4\times10^{-4}\,\mathrm{m^2.^oC/W}$ على السطح الداخلي للأنبوب، ومعامل اتساخ $R_{f,o} = 10^{-4}\,\mathrm{m^2.^oC/W}$ على السطح الخارجي، احسب:

1 – المقاومة الحرارية للمبادل الحراري من أجل واحدة الطول.

2 – معاملي انتقال الحرارة الكليان U_i و U_o على أساس مساحتي السطحين الداخلي والخارجي للأنبوب على الترتيب.

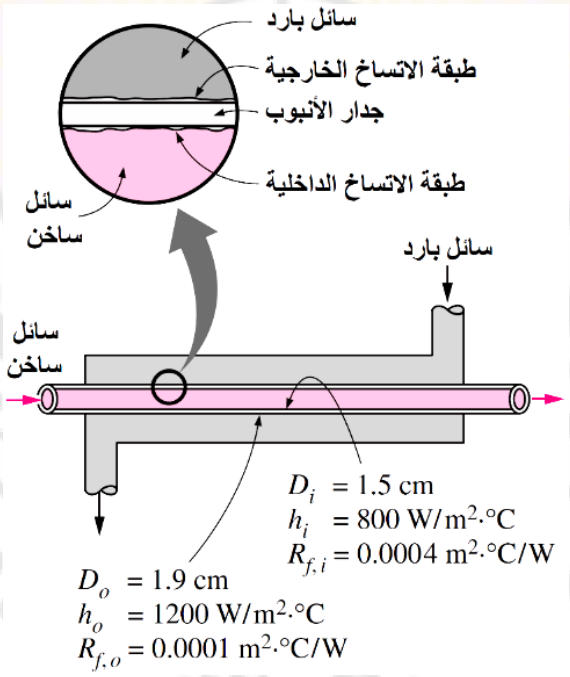
الحل:

المعطيات: أبعاد المبادل الحراري, ومعاملات انتقال الحرارة بالحمل، معاملات الاتساخ.

المطلوب:

1. المقاومة الحرارية للمبادل الحراري.
2. معاملا انتقال الحرارة الكليان على أساس مساحتي السطحين الداخلي والخارجي للأنبوب.

الشكل:



الافتراضات: معاملات انتقال الحرارة ومعاملات الاتساخ ثابتة ومنتظمة على السطح.

التحليل:

1. تحسب المقاومة الحرارية لمبادل حراري صندوقي غير مريش، وبوجود اتساخ على سطحي التبادل الحراري بالعلاقة (5 – 8):

$$R = \frac{1}{UA_s} = \frac{1}{U_i A_i} = \frac{1}{U_o A_o} = \frac{1}{\alpha_i A_i} + \frac{R_{f,i}}{A_i} + \frac{\ln(D_o/D_i)}{2\pi\lambda L} + \frac{R_{f,o}}{A_o} + \frac{1}{\alpha_o A_o}$$

حيث:

$$A_i = \pi D_i L = \pi \times 0.015\,\text{m} \times 1\,\text{m} = 0.0471\,\text{m}^2$$

$$A_o = \pi D_o L = \pi \times 0.019\,\text{m} \times 1\,\text{m} = 0.0597\,\text{m}^2$$

وبالتعويض:

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{800\,\text{W/m}^2.^\circ\text{C} \times 0.0471\,\text{m}^2} + \frac{4\times10^{-4}\,\text{m}^2.^\circ\text{C/W}}{0.0471\,\text{m}^2} \\ &\quad + \frac{\ln(0.019/0.015)}{2\text{p} \times 15.1\,\text{W/m}.^\circ\text{C} \times 1\,\text{m}} + \frac{10^{-4}\,\text{m}^2.^\circ\text{C/W}}{0.0597\,\text{m}^2} \\ &\quad + \frac{1}{1200\,\text{W/m}^2.^\circ\text{C} \times 0.0597\,\text{m}^2} \\ &= (0.02654 + 0.00849 + 0.0025 + 0.00168 + 0.01396)\,^\circ\text{C/W} \\ &= 0.0532\,^\circ\text{C/W} \end{aligned}$$

2. بما أننا نعلم المقاومة الحرارية ومساحة سطح التبادل الحراري، فإن معاملي انتقال الحرارة الكليّين على السطحين الداخلي والخارجي للأنبوب يحسبان من العلاقة:

$$U_i = \frac{1}{RA_i} = \frac{1}{0.0532\,^\circ\text{C/W} \times 0.0471\,\text{m}^2} = 399\,\text{W/m}^2.^\circ\text{C}$$

$$U_o = \frac{1}{RA_o} = \frac{1}{0.0532\,^\circ\text{C/W} \times 0.0597\,\text{m}^2} = 315\,\text{W/m}^2.^\circ\text{C}$$

المناقشة:

1. نلاحظ أن حوالي 19% من المقاومة الحرارية في هذه الحالة ناتجة عن الاتساخ، وحوالي 5% ناتجة عن الأنبوب الفولاذي الفاصل بين الجريانين. أما البقية (76%) فإنها ناتجة عن مقاومتي الحمل على جانبي الأنبوب.

2. نلاحظ أن معاملي انتقال الحرارة الكليين يختلفان بشكل ملحوظ (حوالي 27%) في هذه الحالة، وذلك بسبب الفرق الواضح بين مساحة سطحي التبادل الحراري على الجانبين الداخلي والخارجي للأنبوب. من أجل أنابيب ذات سماكة مهملة، فإن الفرق بين معاملي انتقال الحرارة الكليين يكون مهملاً.

5 - 3 - تحليل المبادلات الحرارية *Analysis of Heat Exchangers*:

عند اختيار مبادل حراري ما فإننا إما نسعى للحصول على تغير محدد في درجة الحرارة لتيار سائل تدفقه الكتلي معلوم، أو التنبؤ بدرجة حرارة المخرج للسائلين الساخن والبارد في مبادل حراري محدد. من أجل الحالة الأولى فإننا نستخدم طريقة فرق درجات الحرارة اللوغاريتمي الوسطي LMTD ، أما من أجل الحالة الثانية فإننا نستخدم طريقة عدد وحدات الانتقال – الفعّالة effectiveness - NTU، وهو ما سنناقشه لاحقاً. ولكن سنقدم في البداية بعض الاعتبارات العامة التي تؤخذ في الحسبان عند تحليل المبادلات الحرارية.

تعمل المبادلات الحرارية عادةً لفترات طويلة من دون تغير في شروط التشغيل، وبالتالي يمكن عدها أجهزة تدفق مستقر steady - flow. حيث أن التدفق الكتلي يبقى ثابتاً لكلا السائلين، كما أن خصائص السائل مثل درجة الحرارة والسرعة المدخل والمخرج تبقى نفسها؛ فضلاً عن ذلك فإن تيارات السائل تتعرض لتغير بسيط في السرعة والارتفاع (يمكن ألا يكون هناك أي تغير)، وبالتالي فإن تغيرات الطاقة الكامنة والحركية مهملة. في الحالة العامة، تتغير الحرارة النوعية للسائل مع درجة الحرارة. ولكن ضمن مجال درجات حرارة محدد يمكن التعامل مع الحرارة النوعية بعدها ثابتة عند قيمة وسطية، مما ينتج عنه انخفاض ضئيل في الدقة. عادةً ما يكون التوصيل الحراري في الاتجاه المحوري على طول الأنبوب ضئيل ويمكن عده مهمل. في النهاية، فإننا نفرض أن السطح الخارجي للمبادل الحراري معزول بشكل مثالي، بحيث أنه لا وجود لتبادل حراري مع الوسط المحيط، وأي انتقال للحرارة يحدث بين السائلين فقط.

إن الافتراضات السابقة قريبة من الواقع التطبيقي، وتسهل من تحليل المبادل الحراري بشكل كبير مقابل فقد بسيط في الدقة. في ضوء هذه الافتراضات فإن القانون الأول في الترموديناميك يقتضي أن يكون معدل الحرارة المنتقلة من السائل الساخن مساوٍ إلى معدل الحرارة المنتقلة إلى السائل البارد. أي إن:

$$\dot{Q} = \dot{m}_c \, c_{p,c} \left(T_{c,\text{out}} - T_{c,\text{in}} \right) \qquad \textbf{(8 – 5)}$$

$$\dot{Q} = \dot{m}_h \, c_{p,h} \left(T_{h,\text{in}} - T_{h,\text{out}} \right) \qquad \textbf{(9 – 5)}$$

يعبر الرمز السفلي c عن السائل البارد، بينما يعبر الرمز السفلي h عن السائل الساخن.

$\dot{m}_h, \dot{m}_c$: معدل التدفق الكتلي.

$c_{p,h}, c_{p,c}$: الحرارة النوعية.

$T_{h,\text{out}}, T_{c,\text{in}}$: درجة حرارة المخرج.

$T_{h,\text{in}}, T_{c,\text{in}}$: درجة حرارة المدخل.

نلاحظ أن معدل انتقال الحرارة $\dot{Q}$ يأخذ قيمة موجبة، واتجاهه من السائل الساخن إلى البارد بحسب القانون الثاني في الترموديناميك.

من الإجراءات المعتادة عند تحليل المبادلات الحرارية هو دمج جداء معدل التدفق الكتلي والحرارة النوعية للسائل في كمية واحدة تسمى معدل السعة الحرارية heat capacity rate، وتعرف كما يلي:

$$C_h = \dot{m}_h c_{p,h} \qquad C_c = \dot{m}_c c_{p,c} \qquad \textbf{(10 - 5)}$$

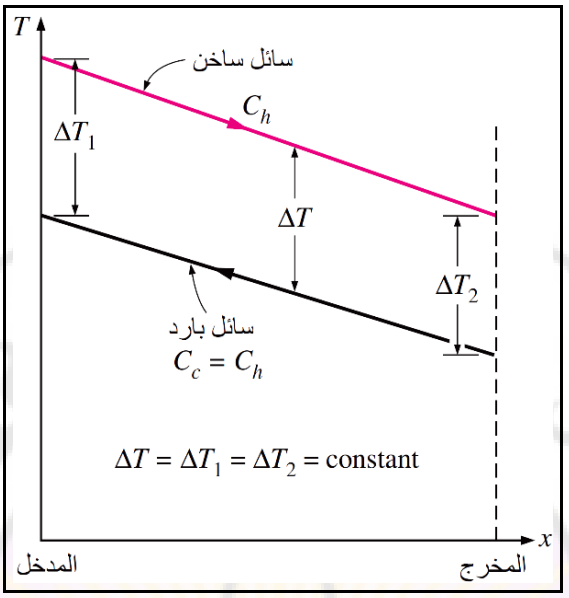
يعبر معدل السعة الحرارية لتيار سائل عن معدل انتقال الحرارة اللازم لتغيير درجة حرارة تيار السائل درجة واحدة $(1\,^{\circ}\text{C})$ في أثناء جريانه في مبادل حراري. بالتالي، في المبادلات الحرارية، يتعرض السائل الذي يمتلك معدل سعة حرارية كبيراً إلى تغير صغير في درجة حرارته، بينما يتعرض السائل ذو معدل السعة الحرارية المنخفض إلى تغير كبير في درجة الحرارة. بالتالي فإن مضاعفة التدفق الحراري لأحد السائلين، مع الإبقاء على كل شيء آخر من دون تغيير، سيؤدي إلى تخفيض التغير في درجة حرارة السائل إلى النصف.

ويعبر عن العلاقتين (5 – 9)، (5 – 10) بدلالة معدل السعة الحرارية كما يلي:

$$\dot{Q} = C_c \left(T_{c,\text{out}} - T_{c,\text{in}}\right) \qquad \textbf{(11 - 5)}$$

$$\dot{Q} = C_h \left(T_{h,\text{in}} - T_{h,\text{out}}\right) \qquad \textbf{(12 - 5)}$$

أي أن معدل انتقال الحرارة في مبادل حراري يساوي إلى معدل السعة الحرارية لأحد السائلين مضروب بتغير درجات الحرارة لهذا السائل. نلاحظ أن الارتفاع في درجة حرارة السائل البارد يساوي إلى الهبوط في درجة حرارة السائل الساخن، فقط عندما يكون معدلا السعة الحرارية للسائلين متساويين، كما يبين الشكل (5 – 8).



الشكل (5 – 8) تغير درجات الحرارة في مبادل حراري لسائلين لهما معدل السعة الحرارية نفسه.

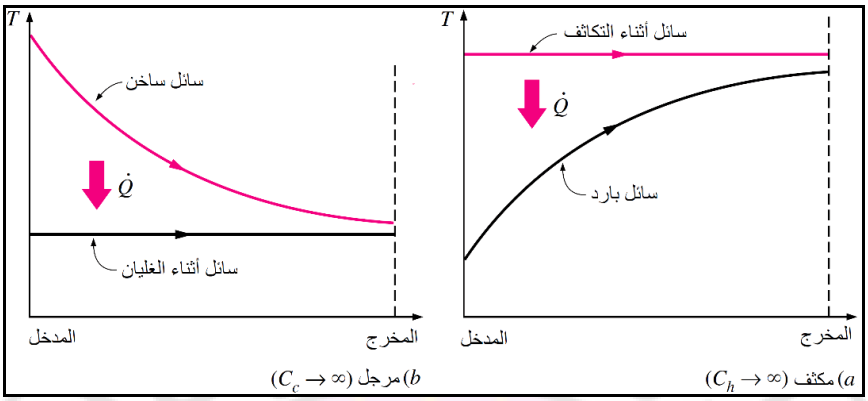
هناك نوعان مميزان من المبادلات الحرارية شائعا الاستخدام في التطبيقات هما المكثف condenser والمرجل boiler. يتعرض أحد السائلين في المكثف أو المرجل إلى عملية تحول طوري، ويعبر عن معدل انتقال الحرارة بالعلاقة:

$$\dot{Q} = \dot{m} h_{fg} \qquad \textbf{(13 – 5)}$$

$\dot{m}$: معدل التبخر أو التكاثف للسائل.

h_{fg} : إنتالبي التبخر للسائل عند درجة حرارة أو ضغط محدد.

إن السوائل العادية تمتص أو تطرح كمية كبيرة من الحرارة عند درجة حرارة ثابتة في أثناء عملية التحول الطوري، كما يوضح الشكل (5 – 9). يسعى معدل السعة الحرارية في أثناء عمليات التحول نحو اللانهاية، لأن التغير في درجة الحرارة يساوي عملياً إلى الصفر. أي إن $C = \dot{m} c_p \to \infty$ عندما $\Delta T \to 0$ ، وبالتالي فإن معدل انتقال الحرارة $\dot{Q} = \dot{m} c_p \Delta T$ هو قيمة محدودة؛ بالتالي في تحليل المبادلات الحرارية فإن السائل الذي يتعرض للتكاثف أو الغليان يعد كسائل معدل سعته الحرارية لانهائي.



الشكل (5 – 9) تغير درجات حرارة السوائل داخل المبادل الحراري في أثناء التحولات الطورية.

ويمكن أن نعبر عن معدل انتقال الحرارة في مبادل حراري أيضاً بشكل مشابه لقانون نيوتن في التبريد وفق العلاقة:

$$\dot{Q} = UA_s \Delta T_m \qquad (14 - 5)$$

U: معامل انتقال الحرارة الكلي.

A_s: مساحة سطح التبادل الحراري.

ΔT_m: فرق درجات حرارة وسطي مناسب بين السائلين.

يمكننا حساب مساحة سطح التبادل الحراري A_s بدقة باستخدام أبعاد المبادل الحراري. إلا أن معامل انتقال الحرارة الكلي U وفرق درجات الحرارة ΔT بين السائلين يتغيران في الحالة العامة على طول المبادل الحراري. تحسب القيمة الوسطية لمعامل انتقال الحرارة الكلي كما شرحنا في القسم السابق من هذا الفصل، وذلك باستخدام المعاملات الوسطية في انتقال الحرارة بالحمل لكل سائل.

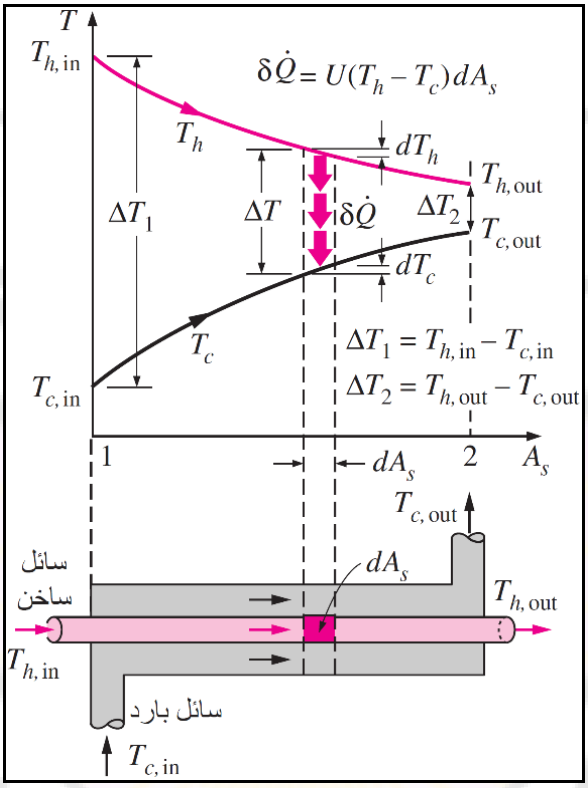
5 - 4 - طريقة فرق درجات الحرارة اللوغاريتمي الوسطي

The Log Mean Temperature Difference Method:

ذكرنا سابقاً أن فرق درجات الحرارة بين السائل الساخن والبارد يتغير على طول المبادل الحراري، وبالتالي يجب أن نوجد فرق درجات حرارة وسطي ΔT_m لنستخدمه في العلاقة $\dot{Q} = UA_s \Delta T_m$.

في سبيل إيجاد علاقة لفرق درجات الحرارة الوسطي المكافئ بين سائلين، ندرس الجريان المتوازي في مبادل حراري ذي أنبوب مضاعف، كالمبين في الشكل (5 – 10). نلاحظ أن فرق درجات الحرارة بين السائلين ΔT يكون كبيراً عند مدخل المبادل الحراري، ولكنه يتناقص بشكل أسي

نحو المخرج، حيث أن درجة حرارة السائل البارد تزداد بينما تتناقص درجة حرارة السائل الساخن على طول المبادل الحراري، لكن لا يمكن أن تتجاوز درجة حرارة السائل البارد درجة حرارة السائل الساخن بحالٍ من الأحوال مهما زدنا من طول المبادل الحراري.



الشكل (5 – 10) تغير درجات الحرارة في جريان متوازٍ لمبادل حراري ذي أنبوب مضاعف.

بفرض أن السطح الخارجي للمبادل الحراري معزول بشكل مثالي بحيث إن أي تبادل حراري يحدث فقط بين السائلين، وبإهمال التغيرات في الطاقة الحركية والكامنة، فإن معادلة التوازن الطاقي لكل من السائلين في مقطع تفاضلي من المبادل الحراري هي:

$$\delta\dot{Q} = -\dot{m}_h\, c_{p,h} dT_h \qquad \textbf{(15 – 5)}$$

$$\delta\dot{Q} = \dot{m}_c\, c_{p,c} dT_c \qquad \textbf{(16 – 5)}$$

أي إن معدل الفقد الحراري من السائل الساخن عند أي مقطع من المبادل الحراري يساوي إلى معدل الكسب الحراري للسائل البارد عند المقطع نفسه. إن تغير درجة الحرارة للسائل الساخن

ذو قيمة سالبة، لذلك تضاف إشارة سالبة إلى المعادلة (5 – 16) لكي يكون معدل انتقال الحرارة $\dot{Q}$ قيمة موجبة.

بحل العلاقتين السابقتين من أجل dT_h و dT_c نجد:

$$dT_h = -\frac{\delta\dot{Q}}{\dot{m}_h c_{p,h}} \qquad \textbf{(17 – 5)}$$

$$dT_c = \frac{\delta\dot{Q}}{\dot{m}_c c_{p,c}} \qquad \textbf{(18 – 5)}$$

بطرح العلاقتين من بعضهما:

$$dT_h - dT_c = d\left(T_h - T_c\right) = -\delta\dot{Q}\left(\frac{1}{\dot{m}_h c_{p,h}} + \frac{1}{\dot{m}_c c_{p,c}}\right) \qquad \textbf{(19 – 5)}$$

يمكن كتابة معدل انتقال الحرارة في مقطع تفاضلي في المبادل الحراري كما يلي:

$$\delta\dot{Q} = U\left(T_h - T_c\right)dA_s \qquad \textbf{(20 – 5)}$$

بتعويض العلاقة (5 – 19) في المعادلة (5 – 20) وإعادة الترتيب نجد:

$$\frac{d\left(T_h - T_c\right)}{T_h - T_c} = -UdA_s\left(\frac{1}{\dot{m}_h c_{p,h}} + \frac{1}{\dot{m}_c c_{p,c}}\right) \qquad \textbf{(21 – 5)}$$

بمكاملة هذه المعادلة من مدخل المبادل الحراري إلى مخرجه نجد:

$$\ln\frac{T_{h,\text{out}} - T_{c,\text{out}}}{T_{h,\text{in}} - T_{c,\text{in}}} = -UA_s\left(\frac{1}{\dot{m}_h c_{p,h}} + \frac{1}{\dot{m}_c c_{p,c}}\right) \qquad \textbf{(22 – 5)}$$

بتعويض قيمة $\dot{m}_c c_{p,c}$ من العلاقة (5 – 9) وقيمة $\dot{m}_h c_{p,h}$ من العلاقة (5 – 10) في المعادلة (5 – 22) وبعد إصلاح المعادلة نجد:

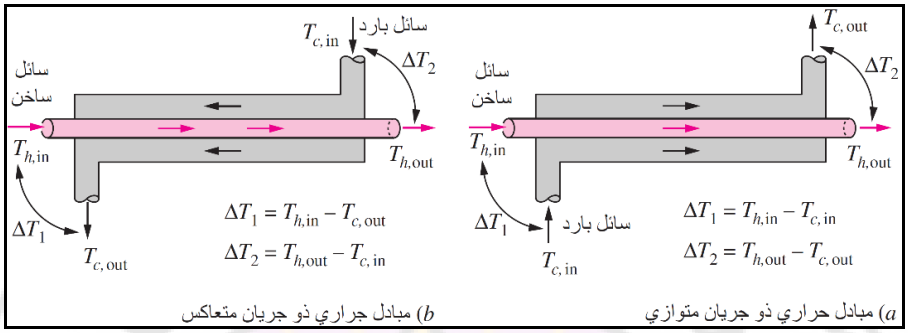
$$\dot{Q} = UA_s\Delta T_{\text{lm}} \qquad \textbf{(23 – 5)}$$

ΔT_{lm} : فرق درجات الحرارة اللوغاريتمي الوسطي، حيث:

$$\Delta T_{\text{lm}} = \frac{\Delta T_1 - \Delta T_2}{\ln\left(\Delta T_1/\Delta T_2\right)} \qquad \textbf{(24 – 5)}$$

إن فرق درجات الحرارة اللوغاريتمي الوسطي هو الشكل الأنسب لفرق درجات الحرارة الوسطي لاستخدامه في تحليل المبادلات الحرارية. يقصد هنا بـ ΔT_1 و ΔT_2 بأنهما فرق درجات الحرارة بين السائلين عند مدخل ومخرج المبادل الحراري على الترتيب. إن التحليل السابق

صحيح بغض النظر أي من نهايتي المبادل الحراري هي المدخل وأيهما المخرج، كما هو موضح في الشكل (5 – 11).



الشكل (5 – 11) فرق درجات الحرارة للجريان المتوازي والمتعاكس في المبادلات الحرارية.

ينخفض فرق درجات الحرارة بين السائلين عند المدخل ΔT_1 إلى ΔT_2 عند المخرج. بالتالي فإننا وللوهلة الأولى سنحاول استخدام المتوسط الحسابي لفرق درجات الحرارة $\Delta T_{am} = \frac{1}{2}(\Delta T_1 + \Delta T_2)$ كفرق وسطي لدرجات الحرارة. لقد توصلنا إلى علاقة فرق درجات الحرارة اللوغاريتمي الوسطي ΔT_{lm} من خلال تتبع التغير الفعلي لبروفايل درجة الحرارة لكل من السائلين على طول المبادل الحراري، وهو يعبر بدقة عن الفرق الوسطي لدرجات الحرارة بين سائلين ساخن وبارد، وهو يعكس التناقص الأسي للفرق الموضعي لدرجات الحرارة.

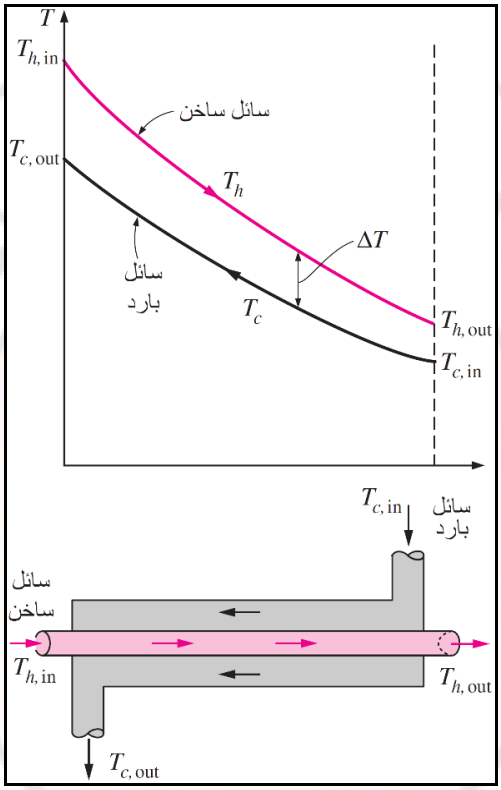
نلاحظ أن ΔT_{lm} دائماً أقل من ΔT_{am}؛ بالتالي فإن استخدام ΔT_{am} في الحساب بدلاً عن ΔT_{lm} سيعطي نتائج أكبر من الواقعية لمعدل انتقال الحرارة بين السائلين في المبادل الحراري. عندما يكون الفرق بين ΔT_1 و ΔT_2 أقل من 40% فإن الخطأ الناتج عن استخدام المتوسطي الحسابي لفرق درجات الحرارة أقل من 1%، ولكن الخطأ يزداد إلى مستويات غير مرغوبة عندما يكون الفرق بين ΔT_1 و ΔT_2 أكبر من ذلك. بالتالي يجب علينا أن نستخدم LMTD دائماً عند حساب معدل انتقال الحرارة في مبادل حراري.

5 – 4 – 1 – المبادلات الحرارية ذات الجريان المتعاكس

***Counter - Flow Heat Exchangers*:**

يبين الشكل (5 – 12) تغير درجات الحرارة لكل من السائل الساخن والبارد في مبادل حراري ذي جريان متعاكس. نلاحظ أن السائلين الساخن والبارد يدخلان المبادل الحراري من طرفين متعاكسين، وفي هذه الحالة فإن درجة حرارة خروج السائل البارد يمكن أن تتجاوز درجة حرارة الخروج

للسائل الساخن. وفي الحالة الحدية فإن السائل البارد سيسخن إلى درجة حرارة الدخول للسائل الساخن. إلا أن درجة حرارة خروج السائل البارد لا يمكن أن تتجاوز درجة حرارة دخول السائل الساخن بأي حال من الأحوال، لأن ذلك مخالف للقانون الثاني في الترموديناميك.



الشكل (5 – 12) تغير درجات حرارة السوائل في مبادل حراري ذو أنبوب مضاعف وجريان متعاكس.

إن علاقة فرق درجات الحرارة اللوغاريتمي الوسطي التي توصلنا إليها سابقاً كانت نتيجة تحليل مبادل حراري ذي جريان متوازٍ، لكن بتكرار التحليل السابق من أجل مبادل حراري ذي جريان متعاكس، فإن النتيجة هي نفسها. لكن الفرق بين التحليلين هو ΔT_1 و ΔT_2 حيث يعبر عنهما كما في الشكل (5 – 11).

من أجل درجات حرارة محددة عند المدخل والمخرج، فإن قيمة LMTD لمبادل حراري ذي جريان متعاكس دائماً أكبر من قيمتها لمبادل حراري ذي جريان متوازٍ، أي إن $\Delta T_{\text{lm},CF} > \Delta T_{\text{lm},PF}$، وبالتالي فإن المساحة المطلوبة لتحقيق معدل انتقال حرارة محدد تكون أقل

في حالة الجريان المتعاكس منها في حالة الجريان المتوازي، لذلك فإن المبادل الحراري المطلوب أصغر؛ بالتالي فإنه من الشائع في التطبيقات استخدام المبادلات الحرارية ذات الجريان المتعاكس.

في المبادل الحراري ذي الجريان المتعاكس، يبقى فرق درجات الحرارة بين السائل الساخن والبارد ثابتاً على طول المبادل الحراري إذا كان معدلا السعة الحرارية للسائلين متساويين، أي إن $C_h = C_c$. وبالتالي فإن $\Delta T_1 = \Delta T_2$ والعلاقة الأخيرة لفرق $\Delta T = \text{constant}$ عندما درجات الحرارة اللوغاريتمي الوسطي تعطي $\Delta T_{lm} = \frac{0}{0}$، وهي حالة عدم تعيين. بتطبيق قاعدة لوبيتال l'Hôpital's rule من الرياضيات في هذه الحالة نجد أن $\Delta T_{lm} = \Delta T_1 = \Delta T_2$.

يمكن عد المكثف والمرجل كمبادلات ذات جريان متوازٍ أو متعاكس، لأن كلا الطريقتين تعطي النتيجة نفسها.

مثال 5 – 3:

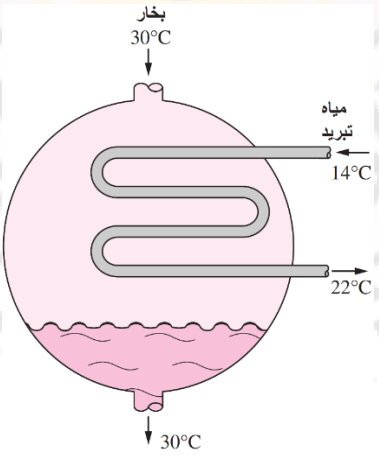
يتكاثف البخار في مكثف محطة طاقة عند درجة حرارة $30\,^{o}\text{C}$، وذلك بواسطة ماء تبريد من بحيرة قريبة، حيث تدخل مياه التبريد إلى أنابيب المكثف بدرجة حرارة $14\,^{o}\text{C}$ وتخرج بدرجة حرارة $22\,^{o}\text{C}$. إذا كانت مساحة سطح الأنابيب $45\,\text{m}^2$، ومعامل انتقال الحرارة الكلي $2100\,\text{W/m}^2.\,^{o}\text{C}$، احسب معدل التدفق الكتلي اللازم لمياه التبريد، ومعدل تكاثف البخار.

الحل:

المعطيات: بخار يتكاثف بواسطة مياه تبريد في مكثف محطة طاقة.

المطلوب: معدل التدفق الكتلي لمياه التبريد ومعدل تكاثف البخار.

الشكل:



الافتراضات:

1. شروط الحالة المستقرة.
2. المبادل الحراري معزول بشكل جيد، أي إن الفقد الحراري نحو المحيط مهمل، وبالتالي فإن كامل الحرارة تنتقل من السائل الساخن إلى السائل البارد.
3. التغيرات في الطاقة الحركية والكامنة لتيارات السائل مهملة.
4. لا يوجد اتساخ.
5. خواص السائل ثابتة.

الخواص:

الجدول (A10) ماء $(T = 30\,^{\circ}\text{C})$:

$$h_{fg} = 2431\,\text{kJ/kg}$$

الجدول (A10) ماء $\left[T_{\text{ave}} = (22+14)/2 = 18\,^{\circ}\text{C}\right]$:

$$c_p = 4184\,\text{J/kg.}\,^{\circ}\text{C}$$

التحليل: يمكن عد المكثف على أنه مبادل حراري ذو جريان متعاكس، لأن درجة حرارة أحد السائلين (البخار) تبقى ثابتة.

فرق درجات الحرارة بين البخار ومياه التبريد عند نهايتي المكثف هو:

$$\Delta T_1 = T_{h,\text{in}} - T_{c,\text{out}} = 30 - 22 = 8\,^{\circ}\text{C}$$

$$\Delta T_2 = T_{h,\text{out}} - T_{c,\text{in}} = 30 - 14 = 16\,^{\circ}\text{C}$$

أي إن فرق درجات الحرارة بين السائلين يتغير من $8\,^{\circ}\text{C}$ عند إحدى النهايتين إلى $16\,^{\circ}\text{C}$ عند النهاية الأخرى. إن فرق درجات الحرارة الوسطي المناسب بين السائلين هو فرق درجات الحرارة اللوغاريتمي الوسطي، ويحسب من العلاقة (5 – 24):

$$\Delta T_{\text{lm}} = \frac{\Delta T_1 - \Delta T_2}{\ln(\Delta T_1/\Delta T_2)} = \frac{8-16}{\ln(8/16)} = 11.5\,^{\circ}\text{C}$$

وهو أقل بقليل من المتوسط الحسابي لفرق درجات الحرارة $\left[\frac{1}{2}(8+16) = 12\,^{\circ}\text{C}\right]$.

يحسب معدل انتقال الحرارة في المكثف من العلاقة (5 – 23):

$$\dot{Q} = UA_s\Delta T_{\text{lm}} = 2100\,\text{W/m}^2\,.\,^{\circ}\text{C} \times 45\,\text{m}^2 \times 11.5\,^{\circ}\text{C} = 1087\,\text{kW}$$

بالتالي فإن البخار يفقد حرارة بمعدل $1087\,\text{kW}$ أثناء جريانه عبر المكثف، فيما تكتسب مياه التبريد عملياً كامل هذه الطاقة، لأن المكثف معزول بشكل جيد.

يحسب معدل التدفق الكتلي لمياه التبريد ومعدل التكاثف من العلاقة:

$$\dot{Q} = \dot{m}_c c_p \left(T_{c,\text{out}} - T_{c,\text{in}}\right) = \dot{m}_h h_{fg}$$

$$\dot{m}_c = \frac{\dot{Q}}{c_p \left(T_{c,\text{out}} - T_{c,\text{in}}\right)} = \frac{1087\,\text{kW}}{4.184\,\text{kJ/kg.}^{\circ}\text{C} \times (22\text{-}14)^{\circ}\text{C}} = 32.5\,\text{kg/s}$$

ويحسب معدّل التكاثف من العلاقة:

$$\dot{m}_h = \frac{\dot{Q}}{h_{fg}} = \frac{1087\,\text{kW}}{2431\,\text{kJ/kg}} = 0.45\,\text{kg/s}$$

5 – 4 – 2 – المبادلات الحرارية متعددة الأشواط وذات الجريان المتصالب

***Multipass and Cross - Flow Heat Exchangers*:**

إن علاقة فرق درجات الحرارة اللوغاريتمي الوسطي ΔT_{lm} التي استنتجناها سابقاً صالحة فقط من أجل المبادلات الحرارية ذات الجريان المتوازي والجريان المتعاكس. هناك علاقات أخرى للجريان المتصالب cross - flow والمبادلات الحرارية الصندوقية متعددة الأشواط Multipass shell - and - tube، لكن العلاقات الناتجة شديدة التعقيد بسبب الظروف المعقدة للجريان.

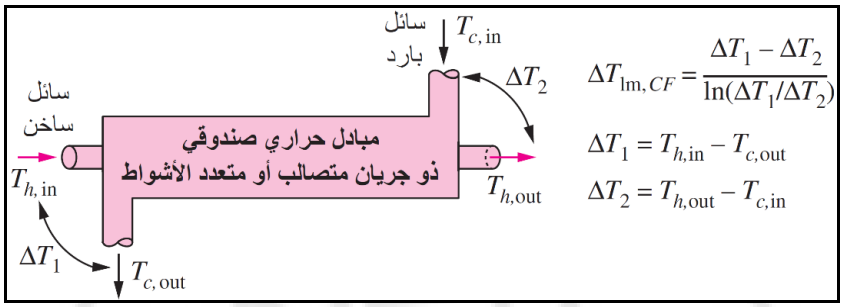
من الأنسب في مثل هذه الحالات ربط فرق درجات الحرارة المكافئ لجريان متصالب بعلاقة فرق درجات الحرارة اللوغاريتمي الوسطي وفق العلاقة:

$$\Delta T_{\text{lm}} = F \Delta T_{\text{lm},CF} \qquad \textbf{(25 – 5)}$$

F : معامل التصحيح، ويتعلق بالشكل الهندسي للمبادل الحراري ودرجات حرارة الدخول والخروج للسائلين الساخن والبارد.

$\Delta T_{\text{lm},CF}$: فرق درجات الحرارة اللوغاريتمي الوسطي لمبادل حراري ذي جريان متعاكس له درجات الحرارة نفسها عند المدخل والمخرج، وتحسب من العلاقة (5 – 25)، حيث من الشكل (5 – 13):

$$\Delta T_1 = T_{h,\text{in}} - T_{c,\text{out}} \qquad \Delta T_2 = T_{h,\text{out}} - T_{c,\text{in}}$$



الشكل (5 – 13) فرق درجات الحرارة للمبادلات الحرارية الصندوقية متعددة الأشواط وذات الجريان المتصالب.

إن معامل التصحيح أقل من واحد من أجل المبادلات الحرارية الصندوقية المتعددة الأشواط وذات الجريان المتصالب، أي إن $F \leq 1$. إن القيمة الحدية $F = 1$ هي من أجل المبادل الحراري ذي الجريان المتعاكس. بالتالي فإن معامل التصحيح F لمبادل حراري هو مقياس لانحراف ΔT_{lm} عن القيم المقابلة في حالة الجريان المتعاكس.

يعطي الشكل (D22) قيم معامل التصحيح F للجريان المتصالب ولأشكال المبادلات الحرارية الصندوقية كتابع لنسبتي درجات حرارة P و R حيث:

$$P = \frac{t_2 - t_1}{T_1 - t_1} \qquad \textbf{(26 – 5)}$$

$$R = \frac{T_1 - T_2}{t_2 - t_1} = \frac{\left(\dot{m}\, c_p\right)_{\text{tube side}}}{\left(\dot{m}\, c_p\right)_{\text{shell side}}} \qquad \textbf{(27 – 5)}$$

حيث يشير الرمزان السفليان 1 و2 إلى المدخل والمخرج على الترتيب. من أجل مبادل حراري صندوقي فإن T تعبر عن درجة الحرارة على جانب الغلاف، بينما تعبر t عن درجة الحرارة على جانب الأنبوب، كما هو مبين في مخططات معامل التصحيح. يتطلب حساب معامل التصحيح معرفة درجات حرارة الدخول والخروج لكل من السائلين الساخن والبارد.

نلاحظ أن قيم P تتراوح بين 0 و1، في حين أن قيم R تتراوح بين 0 واللانهاية، حيث إن $R = 0$ من أجل عمليات التحول الطوري (التكاثف أو الغليان) على جانب الغلاف، بينما $R \to \infty$ من أجل التحول الطوري على جانب الأنبوب. إن معامل التصحيح لكلتا هاتين الحالتين هو $F = 1$، بغض النظر عن تكوين المبادل الحراري.

مثال 5 – 4:

تجرى تجربة لحساب معامل انتقال الحرارة الكلي في مشع سيارة، حيث إن المشع عبارة عن مبادل حراري مدمج ذو جريان متصالب ماء – هواء، وحيث إن كلا السائلين غير مختلطين. يتألف المشع من 40 أنبوباً، القطر الداخلي لكل منها $0.5\,\text{cm}$، وطوله $65\,\text{cm}$، وهذه الأنابيب مريشة بمصفوفة من الصفائح المتقاربة. يدخل الماء الساخن إلى الأنابيب بدرجة حرارة $90\,^{\circ}\text{C}$ وتدفق $0.6\,\text{kg/s}$، ويخرج بدرجة حرارة $65\,^{\circ}\text{C}$. يجري الهواء في المشع ضمن الفراغات الموجودة بين الصفائح، وترتفع درجة حرارته من $20\,^{\circ}\text{C}$ إلى $40\,^{\circ}\text{C}$. احسب معامل انتقال الحرارة الكلي U_i على أساس مساحة السطح الداخلي للأنابيب.

الحل:

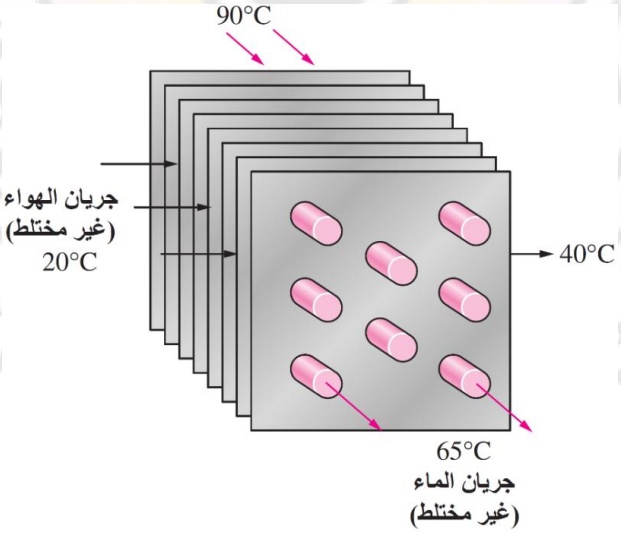
المعطيات: درجات حرارة دخول الماء وخروجه ومعدل تدفقه الكتلي؛ درجات حرارة دخول الهواء وخروجه، عدد الأنابيب وأبعادها.

المطلوب: معامل انتقال الحرارة الكلي على أساس مساحة السطح الداخلي للأنابيب U_i.

الافتراضات:

1. شروط الحالة المستقرة.
2. التغيرات في الطاقة الحركية والكامنة مهملة.
3. خواص السائل ثابتة.

الشكل:



الخواص:

الجدول (A10) ماء $\left[T=(90+65)/2=77.5\,^{\circ}\mathrm{C}\right]$:

$$c_p = 4.195\,\mathrm{kJ/kg.}^{\circ}\mathrm{C}$$

التحليل: نحسب معدل انتقال الحرارة في المشع من الماء الساخن إلى الهواء من علاقة التوازن الطاقة لجريان الماء (5 – 10):

$$\dot{Q} = \dot{m}_h c_{p,h}\left(T_{h,\mathrm{in}} - T_{h,\mathrm{out}}\right)$$
$$= 0.6\,\mathrm{kg/s} \times 4.195\,\mathrm{kJ/kg.}^{\circ}\mathrm{C} \times (90-65)\,^{\circ}\mathrm{C} = 62.93\,\mathrm{kW}$$

إن مساحة سطح التبادل الحراري على السطح الداخلي للأنبوب تساوي إلى مجموع المساحات الداخلية للأنابيب، وتحسب كما يلي:

$$A_i = n\pi D_i L = 40 \times \pi \times 0.005\,\mathrm{m} \times 0.65\,\mathrm{m} = 0.408\,\mathrm{m}^2$$

وبمعرفة معدل انتقال الحرارة ومساحة سطح التبادل، فإن معامل انتقال الحرارة الكلي يحسب باستخدام العلاقتين (5 – 24)، (5 – 26):

$$\dot{Q} = U_i A_i F \Delta T_{\mathrm{lm},CF} \longrightarrow U_i = \frac{\dot{Q}}{A_i F \Delta T_{\mathrm{lm},CF}}$$

حيث إن $\Delta T_{\mathrm{lm},CF}$ هو فرق درجات الحرارة اللوغايتمي الوسطي من أجل جريان متعاكس، ويحسب من العلاقة (5 – 25):

$$\Delta T_1 = T_{h,\mathrm{in}} - T_{c,\mathrm{out}} = 90 - 40 = 50\,^{\circ}\mathrm{C}$$
$$\Delta T_2 = T_{h,\mathrm{out}} - T_{c,\mathrm{in}} = 65 - 20 = 45\,^{\circ}\mathrm{C}$$
$$\Delta T_{\mathrm{lm},CF} = \frac{\Delta T_1 - \Delta T_2}{\ln\left(\Delta T_1/\Delta T_2\right)} = \frac{50-45}{\ln(50/45)} = 47.6\,^{\circ}\mathrm{C}$$

ونوجد معامل التصحيح F من المخطط (D22 - c)، حيث من العلاقتين (5 – 26)، (5 – 27):

$$\left.\begin{aligned} P &= \frac{t_2 - t_1}{T_1 - t_1} = \frac{65-90}{20-90} = 0.36 \\ R &= \frac{T_1 - T_2}{t_2 - t_1} = \frac{20-40}{65-90} = 0.8 \end{aligned}\right\} \Rightarrow F = 0.97$$

بالتعويض في علاقة معامل انتقال الحرارة الكلي:

$$U_i = \frac{62,930\,\mathrm{W}}{0.408\,\mathrm{m}^2 \times 0.97 \times 47.6\,^{\circ}\mathrm{C}} = 3341\,\mathrm{W/m}^2.{}^{\circ}\mathrm{C}$$

المناقشة: يجب أن ننتبه إلى أن معامل انتقال الحرارة الكلي من جهة الهواء سيكون أقل من هذه القيمة بكثير، وذلك بسبب المساحة الكبيرة للسطح من جهة الهواء.

5 - 5 - طريقة عدد وحدات الانتقال – الفعالة

The Effectiveness - NTU Method:

إن طريقة فرق درجات الحرارة اللوغاريتمي الوسطي LMTD سهلة الاستخدام في تحليل المبادلات الحرارية عندما تكون درجات حرارة دخول السائل الساخن والبارد وخروجهما معروفة أو يمكن حسابها من التوازن الطاقي، فبمجرد معرفة ΔT_{lm} ومعدلات التدفق الكتلي ومعامل انتقال الحرارة الكلي يصبح بالإمكان حساب مساحة سطح التبادل الحراري من العلاقة:

$$\dot{Q} = UA_s \Delta T_{\mathrm{lm}}$$

بالتالي فإن طريقة LMTD مناسبة جداً لحساب حجم المبادل الحراري الذي يحقق درجات حرارة خروج محددة مسبقاً، وذلك عندما تكون معدلات التدفق الكتلي ودرجات حرارة دخول السائل الساخن والبارد وخروجهما محددة.

بالتالي طريقة LMTD تطبق عندما يكون المطلوب هو اختيار مبادل حراري يحقق متطلبات انتقال الحرارة المحددة مسبقاً. من أجل اختيار المبادل الحراري فإننا نتبع الإجراءات التالية:

1. اختيار نوع المبادل الحراري المناسب للتطبيق.
2. حساب درجات حرارة الدخول والخروج المجهولة ومعدل انتقال الحرارة عن طريق التوازن الطاقي.
3. حساب فرق درجات الحرارة اللوغاريتمي الوسطي ΔT_{lm}، ومعامل التصحيح إذا لزم.
4. تحديد قيمة معامل انتقال الحرارة الكلي U من خلال الحساب أو الاختيار.
5. حساب مساحة سطح التبادل الحراري A_s.

وينتهي العمل باختيار مبادل حراري له مساحة سطح تبادل حراري تساوي A_s أو أكبر منها.

هناك نوع آخر من المسائل التي تواجهنا في تحليل المبادلات الحرارية، وهو حساب معدل انتقال الحرارة ودرجات حرارة الخروج للسائل الساخن والبارد من أجل تدفقات كتلية ودرجات حرارة دخول محددة وذلك عندما يكون نوع المبادل الحراري وحجمه محددين. في هذه الحالة فإن مساحة

سطح التبادل الحراري للمبادل الحراري A محددة، لكم درجات حرارة الخروج مجهولة. إن المطلوب في هذا النوع من المسائل هو تقييم أداء انتقال الحرارة لمبادل حراري محدد، أو تحديد ما إذا كان المبادل الحراري الموجود في الاستثمار صالحاً للعمل المطلوب.

إن طريقة LMTD صالحة للتطبيق في هذا النوع من المسائل أيضاً، لكن الإجراء يتطلب عمليات تكرار iterations عديدة، وبالتالي فهذه الطريقة ليست عملية. نستخدم لحل هذا النوع من المسائل طريقة عدد وحدات الانتقال – الفعالة effectiveness - NTU، والتي تبسط تحليل المبادلات الحرارية بشكل كبير.

تستند هذه الطريقة إلى بارامتر لابعدي يسمى فعالية انتقال الحرارة heat transfer effectiveness ε، ويعرف بالعلاقة:

$$\varepsilon = \frac{\text{معدل انتقال الحرارة الفعلي}}{\text{معدل انتقال الحرارة الأعظمي الممكن}} = \frac{\dot{Q}}{\dot{Q}_{\max}} \qquad (28-5)$$

يحسب معدل انتقال الحرارة الفعلي في مبادل حراري من التوازن الطاقي للسائل البارد أو الساخن، وذلك وفق العلاقة:

$$\dot{Q} = C_c\left(T_{c,\text{out}} - T_{c,\text{in}}\right) = C_h\left(T_{h,\text{in}} - T_{h,\text{out}}\right) \qquad (29-5)$$

لحساب معدل انتقال الحرارة الأعظمي الممكن في مبادل حراري، فإننا نلاحظ في البدء أن فرق درجات الحرارة الأعظمي في أي مبادل حراري هو الفرق بين درجتي حرارة الدخول للسائل الساخن والسائل البارد، أي أن:

$$\Delta T_{\max} = T_{h,\text{in}} - T_{c,\text{in}} \qquad (30-5)$$

يبلغ معدل انتقال الحرارة في المبادل الحراري قيمته الأعظمية عندما:

* يسخن السائل البارد إلى درجة حرارة دخول السائل الساخن.
* يبرد السائل الساخن إلى درجة حرارة دخول السائل البارد.

إن هاتين الحالتين الحديتين لا يمكن بلوغهما في آنٍ واحد إلا عندما يكون معدلا السعة الحرارية للسائلين متساويين $\left(C_c = C_h\right)$. عندما $C_c \neq C_h$، فإن السائل ذو معدل السعة الحرارية الأصغر سيتعرض للتغير الأكبر في درجة الحرارة، وبالتالي فهو الذي سيصل أولاً إلى درجة الحرارة الأعظمية، وعندها يتوقف انتقال الحرارة. بالتالي فإن معدل انتقال الحرارة الأعظمي في مبادل حراري هو:

$$\dot{Q}_{\max} = C_{\min}\left(T_{h,\text{in}} - T_{c,\text{in}}\right) \qquad (31-5)$$

حيث أن $C_{\min}$ هو معدل السعة الحرارية الأصغر بين C_h و C_c.

مثال 5 – 5:

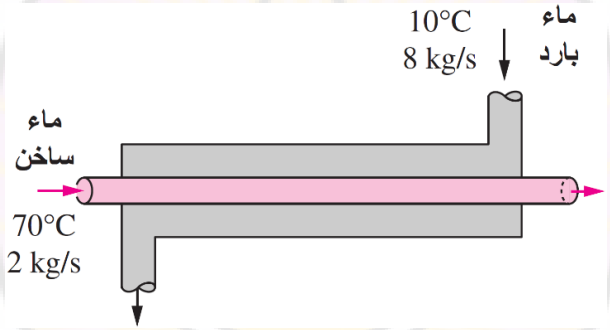
يدخل ماء بارد إلى مبادل حراري ذو جريان متعاكس بدرجة حرارة $10\,^{o}C$ وتدفق $8\,kg/s$، حيث يسخن بواسطة تيار ماء ساخن يدخل إلى المبادل بدرجة حرارة $70\,^{o}C$ وتدفق $2\,kg/s$. بفرض أن الحرارة النوعية للماء تبقى ثابتة $c_p = 4.18\,kJ/kg.^{o}C$، احسب معدل انتقال الحرارة الأعظمي ودرجة حرارة خروج تياري الماء البارد والساخن من أجل الحالة الحدية.

الحل:

المعطيات: درجات حرارة تياري الماء، ومعدلي التدفق.

المطلوب: معدل انتقال الحرارة الأعظمي، ودرجة حرارة الخروج لكل من تياري الماء.

الشكل:



الافتراضات:

1. شروط الحالة المستقرة.
2. المبادل الحراري معزول بشكل جيد، بحيث لا يوجد تسرب حراري نحو المحيط.
3. التغيرات في الطاقة الكامنة والحركية لتياري السائل مهملة.
4. معاملات انتقال الحرارة ومعاملات الاتساخ ثابتة ومنتظمة على السطح.
5. المقاومة الحرارية للأنبوب الداخلي مهملة؛ لأن جداره رقيق وموصليته عالية.

التحليل: يحسب معدل السعة الحرارية لكل من السائلين الساخن والبارد من العلاقة (5 – 10):

$$C_h = \dot{m}_h c_{p,h} = 2\,kg/s \times 4.18\,kJ/kg.^{o}C = 8.36\,kW/^{o}C$$

$$C_c = \dot{m}_c c_{p,c} = 8\,kg/s \times 4.18\,kJ/kg.^{o}C = 33.4\,kW/^{o}C$$

ومنه فإن:

$$C_{\min} = C_h = 8.36\,kW/^{o}C$$

وبالتالي فإن معدل انتقال الحرارة الأعظمي يحسب من العلاقة (5 – 31):

$$\dot{Q}_{\max} = C_{\min}\left(T_{h,\text{in}} - T_{c,\text{in}}\right)$$
$$= 8.36\,\text{kW/}^{\circ}\text{C} \times (70\text{-}10)\,^{\circ}\text{C} = 502\,\text{kW}$$

أي إن الحد الأعلى لمعدل انتقال الحرارة في هذا المبادل الحراري هو $502\,\text{kW}$. يمكن الاقتراب من هذه القيمة في مبادل حراري ذي جريان متعاكس إذا كانت مساحة سطح التبادل الحراري كبيرة جداً.

يحسب فرق درجات الحرارة الأعظمي في المبادل الحراري من العلاقة (5 – 30):

$$\Delta T_{\max} = T_{h,\text{in}} - T_{c,\text{in}} = (70\text{-}10)\,^{\circ}\text{C} = 60\,^{\circ}\text{C}$$

بالتالي لا يمكن أن تنخفض درجة حرارة الماء الساخن أكثر من $60\,^{\circ}\text{C}$، كما لا يمكن أن ترتفع درجة حرارة الماء البارد أكثر من $60\,^{\circ}\text{C}$، في هذا المبادل الحراري مهما فعلنا.

تحسب درجات حرارة الخروج للتيارين البارد والساخن في الحالة الحدية من العلاقة (5 – 31):

$$\dot{Q}_{\max} = C_c\left(T_{c,\text{out}} - T_{c,\text{in}}\right) \longrightarrow T_{c,\text{out}} = T_{c,\text{in}} + \frac{\dot{Q}_{\max}}{C_c}$$

$$T_{c,\text{out}} = 10\,^{\circ}\text{C} + \frac{502\,\text{kW}}{33.4\,\text{kW/}^{\circ}\text{C}} = 25\,^{\circ}\text{C}$$

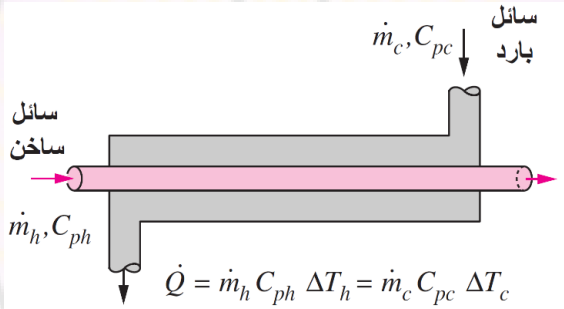
$$\dot{Q}_{\max} = C_h\left(T_{h,\text{in}} - T_{h,\text{out}}\right) \longrightarrow T_{h,\text{out}} = T_{h,\text{in}} - \frac{\dot{Q}_{\max}}{C_h}$$

$$T_{h,\text{out}} = 70\,^{\circ}\text{C} - \frac{502\,\text{kW}}{8.38\,\text{kW/}^{\circ}\text{C}} = 10\,^{\circ}\text{C}$$

المناقشة:

1. نلاحظ أن الماء الساخن قد برد إلى درجة الحرارة الحدية $10\,^{\circ}\text{C}$ (درجة حرارة دخول تيار الماء البارد)، ولكن الماء البارد سخن إلى درجة حرارة $25\,^{\circ}\text{C}$ فقط، وذلك عند حدوث انتقال الحرارة الأعظمي في المبادل الحراري. وهذا الأمر ليس بالغريب، لأن معدل التدفق الكتلي للماء الساخن يساوي إلى ربع معدل التدفق الكتلي للماء البارد، ونتيجة ذلك فإن درجة حرارة الماء البارد ترتفع بمقدار $0.25\,^{\circ}\text{C}$ من أجل كل انخفاض قدره $1\,^{\circ}\text{C}$ في درجة حرارة الماء الساخن.

2. قد يتبادر إلى ذهننا أن الماء البارد سيسخن إلى درجة حرارة $70\,^{o}\mathrm{C}$ في حالة انتقال الحرارة الأعظمي. ولكن هذا الأمر يتطلب أن تنخفض درجة حرارة الماء الساخن إلى $-170\,^{o}\mathrm{C}$، وهذا الأمر مستحيل، لأنه لا يمكن أن تنخفض درجة حرارة الماء الساخن إلى ما دون درجة حرارة دخول الماء البارد؛ بالتالي فإن انتقال الحرارة في أي مبادل حراري يبلغ قيمته العظمى عندما يصل فرق درجات الحرارة للسائل ذي معدل السعة الحرارية الأصغر إلى فرق درجات الحرارة الأعظمي.
3. في حالتنا هذه، في حال كان معدل التدفق الكتلي للسائلين هو نفسه، فإن الماء الساخن سيخرج بدرجة حرارة دخول الماء البارد، والعكس بالعكس، وذلك في حالة انتقال الحرارة الأعظمي. ويمكننا أيضاً أن نبين أن الماء البارد سيخرج بدرجة حرارة $70\,^{o}\mathrm{C}$ في حالة انتقال الحرارة الأعظمي، وذلك إذا كان معدل التدفق الكتلي للماء الساخن أكبر منه للماء البارد.



$$\dot{Q} = \dot{m}_h C_{ph}\,\Delta T_h = \dot{m}_c C_{pc}\,\Delta T_c$$

عندما: $\dot{m}_c C_{pc} = \dot{m}_h C_{ph}$

فإن: $\Delta T_h = \Delta T_c$

إن حساب $\dot{Q}_{\max}$ يتطلب معرفة درجات حرارة الدخول للسائل الساخن والبارد ومعدل التدفق الكتلي لكلا السائلين، وهذه المعلومات متوفرة عادةً؛ بالتالي، فإنه بمجرد معرفة فعالية المبادل الحراري فإن معدل انتقال الحرارة الفعلي $\dot{Q}$ يحسب من العلاقة:

$$\dot{Q} = \varepsilon \dot{Q}_{\max} = \varepsilon C_{\min}\left(T_{h,\mathrm{in}} - T_{c,\mathrm{in}}\right) \qquad \textbf{(32 - 5)}$$

بالتالي فإن فعالية المبادل الحراري تمكننا من حساب معدل انتقال الحرارة من دون الحاجة لمعرفة درجات حرارة خروج السوائل.

تتعلق فعالية المبادل الحراري بالشكل الهندسي للمبادل كما تتعلق بنوعية الجريان. بالتالي فإن الأنواع المختلفة للمبادلات الحرارية تمتلك علاقات مختلفة للفعالية.

سنحاول الآن استنتاج علاقة الفعالية ε لمبادل حراري ذي أنبوب مضاعف بجريان متوازٍ؛ من العلاقة (5 – 22):

$$\ln\frac{T_{h,\text{out}}-T_{c,\text{out}}}{T_{h,\text{in}}-T_{c,\text{in}}}=-UA_s\left(\frac{1}{\dot{m}_h c_{p,h}}+\frac{1}{\dot{m}_c c_{p,c}}\right)$$

يمكن إعادة ترتيب هذه العلاقة لتصبح بالشكل:

$$\ln\frac{T_{h,\text{out}}-T_{c,\text{out}}}{T_{h,\text{in}}-T_{c,\text{in}}}=-\frac{UA_s}{C_c}\left(1+\frac{C_c}{C_h}\right) \qquad \textbf{(33 – 5)}$$

ومن العلاقة (5 – 29) نجد:

$$T_{h,\text{out}}=T_{h,\text{in}}-\frac{C_c}{C_h}\left(T_{c,\text{out}}-T_{c,\text{in}}\right) \qquad \textbf{(34 – 5)}$$

بتعويض هذه المعادلة في المعادلة (5 – 33):

$$\ln\frac{T_{h,\text{in}}-\frac{C_c}{C_h}\left(T_{c,\text{out}}-T_{c,\text{in}}\right)-T_{c,\text{out}}}{T_{h,\text{in}}-T_{c,\text{in}}}=-\frac{UA_s}{C_c}\left(1+\frac{C_c}{C_h}\right)$$

بإضافة $T_{c,\text{in}}$ وطرحها إلى بسط اللوغاريتم:

$$\ln\frac{T_{h,\text{in}}-T_{c,\text{in}}+T_{c,\text{in}}-T_{c,\text{out}}-\frac{C_c}{C_h}\left(T_{c,\text{out}}-T_{c,\text{in}}\right)}{T_{h,\text{in}}-T_{c,\text{in}}}=-\frac{UA_s}{C_c}\left(1+\frac{C_c}{C_h}\right)$$

وتبسط هذه العلاقة إلى:

$$\ln\left[1-\left(1+\frac{C_c}{C_h}\right)\frac{T_{c,\text{out}}-T_{c,\text{in}}}{T_{h,\text{in}}-T_{c,\text{in}}}\right]=-\frac{UA_s}{C_c}\left(1+\frac{C_c}{C_h}\right) \qquad \textbf{(35 – 5)}$$

من تعريف الفعالية فإن:

$$\varepsilon=\frac{\dot{Q}}{\dot{Q}_{\max}}=\frac{C_c\left(T_{c,\text{out}}-T_{c,\text{in}}\right)}{C_{\min}\left(T_{h,\text{in}}-T_{c,\text{in}}\right)} \longrightarrow \frac{T_{c,\text{out}}-T_{c,\text{in}}}{T_{h,\text{in}}-T_{c,\text{in}}}=\varepsilon\frac{C_{\min}}{C_c}$$

بتبديل هذه النتيجة في المعادلة (5 – 35) وحل النتيجة من أجل ε نحصل على علاقة الفعالية لمبادل حراري بجريان متوازٍ:

$$\varepsilon_{\text{parallel flow}} = \frac{1-\exp\left[-\frac{UA_s}{C_c}\left(1+\frac{C_c}{C_h}\right)\right]}{\left(1+\frac{C_c}{C_h}\right)\frac{C_{\min}}{C_c}} \qquad \textbf{(36 - 5)}$$

سواء كانت C_c أو C_h هي $C_{\min}$ فإن النتيجة ستكون واحدة؛ بالتالي يمكن التعبير عن العلاقة السابقة بشكل معمم كما يلي:

$$\varepsilon_{\text{PF}} = \frac{1-\exp\left[-\frac{UA_s}{C_{\min}}\left(1+\frac{C_{\min}}{C_{\max}}\right)\right]}{1+\frac{C_{\min}}{C_{\max}}} \qquad \textbf{(37 - 5)}$$

إن علاقات فعالية المبادلات الحرارية تتضمن الحد اللابعدي $UA_s/C_{\min}$. تسمى هذه القيمة عدد وحدات الانتقال number of transfer units NTU، وتعطى بالعلاقة:

$$\text{NTU} = \frac{UA_s}{C_{\min}} = \frac{UA_s}{\left(\dot{m}\,c_p\right)_{\min}} \qquad \textbf{(38 - 5)}$$

نلاحظ أن NTU تتناسب طرداً مع A_s، وبالتالي فمن أجل قيم محددة لكل من U و $C_{\min}$، فإن قيمة NTU هي مقياس لمساحة سطح التبادل الحراري A_s. أي إنه كلما كانت NTU أكبر كان المبادل الحراري أكبر.

نستخدم في تحليل المبادلات الحرارية قيمة لابعدية أخرى هي نسبة السعات capacity ratio C_r وتعرف بالعلاقة:

$$C = \frac{C_{\min}}{C_{\max}} \qquad \textbf{(39 - 5)}$$

إن فعالية المبادل الحراري هي تابع لعدد وحدات الانتقال NTU ونسبة السعات C، أي إن:

$$\varepsilon = f(\text{NTU}, C)$$

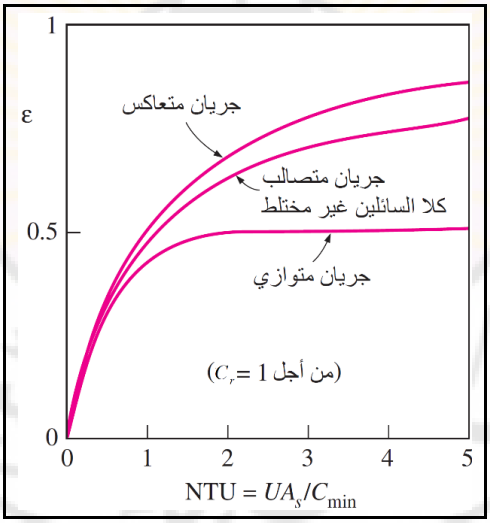
يعطي الجدول (C9) علاقات الكفاءة لبعض المبادلات الحرارية، كما يمكننا أن نجد كفاءة بعض الأنواع الشائعة من المبادلات الحرارية في الشكل (D23).

تشير الخطوط المتقطعة في الشكل (D23 - F) إلى أن $C_{\min}$ للسائل غير المختلط و $C_{\max}$ للسائل المختلط، بينما تشير الخطوط المتصلة إلى الحالة المعاكسة. تعطي العلاقات

التحليلية نتائج أدق من المخططات وذلك بسبب أخطاء القراءة، كما أن العلاقات التحليلية مناسبة لاستخدامها في تحليل المبادلات الحرارية باستخدام الحاسوب.

يمكننا من خلال العلاقات والمخططات السابقة استقراء ما يلي:

* تتراوح قيمة الفعالية بين 0 و1. تزداد الفعالية بسرعة من أجل القيم الصغيرة لـ NTU حتى تصل إلى حوالي NTU = 1.5 ، ولكنها تتزايد ببطء عند القيم الأكبر. بالتالي فإن استخدام المبادلات الحرارية ذات القيم الكبيرة لـ NTU (أكبر من 3) ليس اقتصادياً بسبب زيادة حجم المبادل الحراري، حيث الزيادة الكبيرة في قيمة NTU في هذه الحالة تقابلها زيادة طفيفة في الفعالية. بالتالي فإن المبادل الحراري ذي الكفاءة العالية جداً مرغوب من وجهة نظر انتقال الحرارة، إلا أنه غير مناسب من الناحية المادية.
* من أجل قيم محددة لـ NTU ونسبة السعات C، فإن المبادلات الحرارية ذات الجريان المتعاكس تمتلك أعلى فعالية، يتبعها مباشرةً وبشكل قريب منها المبادلات الحرارية ذات الجريان المتصالب من أجل سائلين غير مختلطين. أقل المبادلات الحرارية كفاءة هي ذات الجريان المتوازي، كما يبين الشكل (5 – 14).



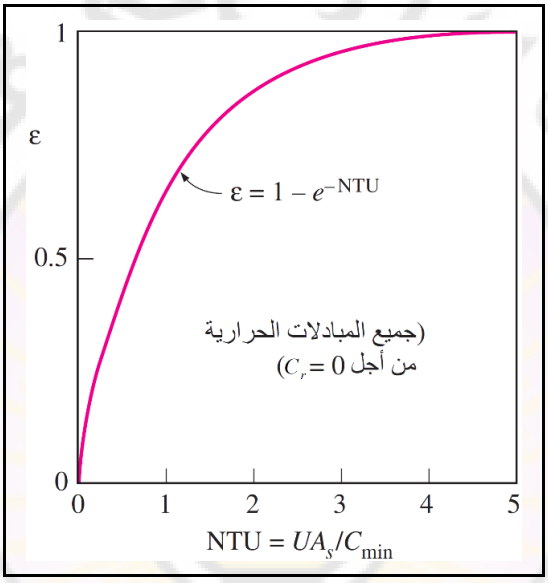
الشكل (5 – 14) فعالية الجريانات المختلفة من أجل قيم محددة لـ NTU و C.

* من أجل قيم NTU أقل من 0.3، فإن فعالية المبادل الحراري لا تتعلق بنسبة السعات C.
* تتراوح قيم نسبة السعات بين 0 و1. من أجل NTU محددة، فإن الفعالية تكون أعظمية من أجل $C = 0$ وأصغرية من أجل $C = 1$. إن الحالة $C = C_{min} / C_{max} \rightarrow 0$ تترافق مع

$C_{\max} \to \infty$، والتي تعني حدوث عملية تحول طوري في مكثف أو مرجل. في هذه الحالة، فإن علاقات الفعالية جميعها تختصر إلى العلاقة:

$$\varepsilon = \varepsilon_{\max} = 1 - \exp(-\text{NTU}) \qquad \textbf{(40 - 5)}$$

وذلك بغض النظر عن نوع المبادل الحراري، كما يوضح الشكل (5 – 15). وفي الحالة الحدية الأخرى عندما $C_r = C_{\min}/C_{\max} = 1$ فإن الفعالية تكون أقل ما يمكن، وتحدث هذه الحالة عندما يكون معدلا السعة الحرارية للسائلين متساويين.



الشكل (5 – 15) الفعالية في حالة التحولات الطورية.

بمجرد معرفة C_r و NTU فإن الفعالية ε تحسب إما من المخططات أو علاقات الكفاءة من أجل نوع المبادل الحراري المطلوب. بعد ذلك يحسب معدل انتقال الحرارة من العلاقة (5 – 32)، بينما تحسب درجتا حرارة الخروج $T_{h,\text{out}}$ و $T_{i,\text{out}}$ من العلاقة (5 – 30).

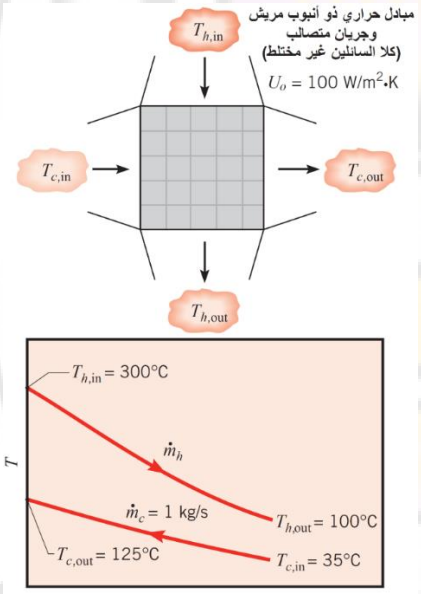
نلاحظ أنه عندما تكون درجات الحرارة مجهولة، فإن تحليل المبادلات الحرارية ممكن بشكل مباشرة بطريقة ε–NTU، لكنه يتطلب إجراءات تقريب عند استخدام طريقة LMTD.

أشرنا سابقاً إلى أنه عندما تكون درجات حرارة الدخول والخروج جميعها محددة، فيمكن حساب حجم المبادل الحراري بسهولة باستخدام طريقة LMTD. يمكن أيضاً حساب حجم المبادل الحراري بطريقة ε–NTU من خلال حساب الفعالية ε في البدء من العلاقة (5 – 28)، ومن ثم حساب NTU من العلاقة المناسبة لها من الجدول (C10).

نلاحظ أن العلاقات في الجدول (C10) تكافئ العلاقات في الجدول (C9). تعطي العلاقات في الجدول (C9) قيم الفعالية بشكل مباشر عندما تكون NTU معلومة، بينما تعطي العلاقات في الجدول (C10) قيم NTU مباشرةً عندما تكون الفعالية ε معلومة.

مثال 5 – 6:

تستخدم غازات عادم في مبادل حراري ذي أنبوب مريش وجريان متصالب لتسخين الماء. تدخل غازات العادم إلى المبادل الحراري بدرجة حرارة $300\,^{o}\mathrm{C}$ وتخرج بدرجة حرارة $100\,^{o}\mathrm{C}$، بينما يتم تسخين الماء من $35\,^{o}\mathrm{C}$ إلى $125\,^{o}\mathrm{C}$، ومعدل التدفق الكتلي للماء $1\mathrm{kg/s}$. معامل انتقال الحرارة الكلي على أساس مساحة السطح من جانب الغاز هو $U_o = 100\,\mathrm{W/m^2.K}$. احسب مساحة السطح اللازمة من جهة الغاز A_o باستخدام طريقة عدد وحدات الانتقال – الفعالة.



الحل:

الشكل:

المعطيات: درجات حرارة الدخول والخروج للغازات الساخنة والماء المستخدمين في مبادل حراري ذي أنبوب مريش وجريان متصالب، معدل تدفق الماء، معامل انتقال الحرارة الكلي من جهة الغاز.

المطلوب: مساحة السطح المطلوب من جهة الغاز.

الافتراضات:

1. شروط الحالة المستقرة.
2. الفقد الحراري إلى الوسط المحيط مهمل.
3. التغيرات في الطاقة الكامنة والحركية مهملة.
4. معاملات انتقال الحرارة ثابتة ومنتظمة على السطح.
5. الخواص ثابتة.

الخواص:

الجدول (A10) ماء $\left(T_{c,\mathrm{ave}} = 80\,^{o}\mathrm{C}\right)$:

$$c_{p,c} = 4197\,\mathrm{J/kg.K}$$

التحليل: يمكن حساب مساحة السطح المطلوبة من خلال معرفة عدد وحدات الانتقال، والتي تحسب بدورها من معرفة نسبة السعات والفعالية.

نحسب معدلات السعة الحرارية من العلاقة (5 – 10)، وذلك لإيجاد معدل السعة الحرارية الأصغري:

$$C_c = \dot{m}_c c_{p,c} = 1\text{kg/s} \times 4197\,\text{J/kg.K} = 4197\,\text{W/K}$$

بما أن $\dot{m}_h$ غير معلومة، فإننا نحسب C_h من خلال علاقة التوازن الطاقي الكلية:

$$\dot{Q} = C_c\left(T_{c,\text{out}} - T_{c,\text{in}}\right) = C_h\left(T_{h,\text{in}} - T_{h,\text{out}}\right) \longrightarrow C_h = C_c\frac{T_{c,\text{out}} - T_{c,\text{in}}}{T_{h,\text{in}} - T_{h,\text{out}}}$$

$$C_h = 4197 \times \frac{125-35}{300-100} = 1889\,\text{W/K} = C_{\min}$$

ويحسب معدل انتقال الحرارة الأعظمي من العلاقة (5 – 31):

$$\dot{Q}_{\max} = C_{\min}\left(T_{h,\text{in}} - T_{c,\text{out}}\right) = 1889\,\text{W/K} \times (300-35)\,^{\circ}\text{C} = 5\times10^5\,\text{W}$$

ويحسب معدل انتقال الحرارة الفعلي من العلاقة (5 – 8):

$$\dot{Q} = C_c\left(T_{c,o} - T_{c,i}\right) = 4197\,\text{W/K} \times (125-35)\,^{\circ}\text{C} = 3.78\times10^5\,\text{W}$$

وبالتالي تحسب الفعالية من العلاقة (5 – 28):

$$\varepsilon = \frac{\dot{Q}}{\dot{Q}_{\max}} = \frac{3.78\times10^5\,\text{W}}{5\times10^5\,\text{W}} = 0.755$$

وتحسب نسبة السعات من العلاقة (5 – 39):

$$C_r = \frac{C_{\min}}{C_{\max}} = \frac{1889}{4197} = 0.45$$

ومن الشكل (D23 - e)، فإن عدد وحدات الانتقال هو:

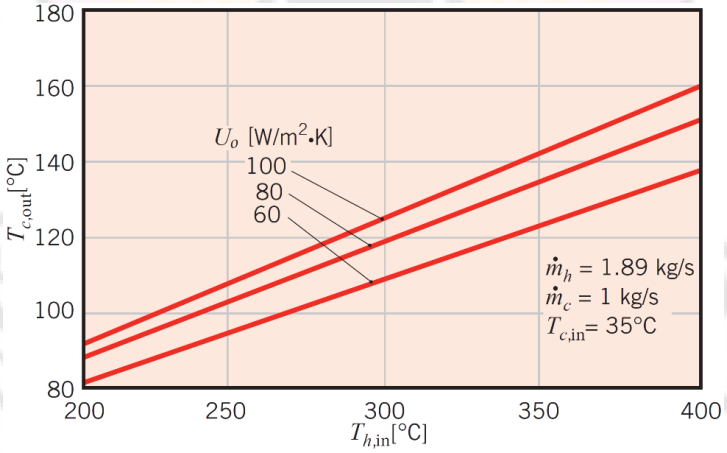
$$\text{NTU} = \frac{U_o A_o}{C_{\min}} \approx 2$$

وبالتالي فإن مساحة السطح الخارجي للمبادل الحراري هي:

$$A_o = \frac{2\times1889\,\text{W/K}}{100\,\text{W/m}^2\text{.K}} = 37.8\,\text{m}^2$$

المناقشة:

1. يمكن حساب عدد وحدات الانتقال بشكل تحليلي، وذلك بحل العلاقة المناسبة من الجدول (C10) بالتكرار أو التجربة والخطأ، حتى نحصل على $\mathrm{NTU} = 2$ ، وهي تتوافق مع النتيجة التي حصلنا عليها باستخدام المخططات.
2. بما أن مساحة المبادل الحراري تم تحديدها $\left(A_o = 37.8\,\mathrm{m}^2\right)$ ووضع قيد التشغيل، يجب التنويه إلى أن أداءه الفعلي عرضة لتغيرات غير قابلة للضبط في درجة حرارة دخول غازات العادم $\left(200 \le T_{h,\mathrm{in}} \le 400\,^{\circ}\mathrm{C}\right)$، وإلى الانخفاض التدريجي في مساحة سطوح التبادل الحراري نتيجة الاتساخ (تنخفض قيمة U_o من 100 إلى $60\,\mathrm{W/m^2.K}$). من أجل قيمة ثابتة لـ $C_{\min} = C_h = 1889\,\mathrm{W/K}$، فإن الانخفاض في قيمة U_o يقابله انخفاض في NTU (تصل قيمتها إلى $\mathrm{NTU} \approx 1.2$)، وبالتالي انخفاض في فعالية المبادل الحراري، والتي يمكن حسابها باستخدام العلاقة المناسبة من الجدول (C9). يبين المخطط التالي تأثير التغيرات في درجة حرارة خروج الماء.



في حال أردنا الحفاظ على درجة حرارة خروج ثابتة للماء $T_{c,\mathrm{out}} = 125\,^{\circ}\mathrm{C}$، يجب علينا زيادة معدلات التدفق $\dot{m}_c$ و $\dot{m}_h$ لتعويض الانخفاض الناتج عن التغيرات.

الفصل السادس
انتقال الكتلة
Mass Transfer

إن العديد من مسائل انتقال الحرارة التي تواجهنا في التطبيقات تتضمن انتقالاً للكتلة. على سبيل المثال، فإن ثلث الفقد الحراري من شخص في وضعية الراحة ناتج عن التبخر. إن انتقال الكتلة مشابه لانتقال الحرارة في العديد من النواحي، كما إن هناك تشابهاً شديداً بين علاقات انتقال الكتلة وانتقال الحرارة. سندرس في هذا الفصل آليات انتقال الكتلة ونتوصل إلى علاقات لحساب معدل انتقال الكتلة لبعض الحالات الشائعة في التطبيقات.

يجب الانتباه إلى الفرق بين انتقال الكتلة mass transfer والحركة الكلية للسائل bulk fluid motion أو جريان السائل fluid flow، والذي يحدث على المستوى الماكروسكوبي (المرئي) macroscopic نتيجة انتقال السائل من مكان إلى آخر. يتطلب انتقال الكتلة وجود منطقتين لهما تركيب كيميائي مختلف، وينسب انتقال الكتلة إلى حركة إحدى المواد من المنطقة ذات التركيز المرتفع إلى المنطقة ذات التركيز المنخفض بالنسبة لبقية المواد الموجودة في الوسط. إن المسبب الرئيس لجريان السوائل هو فرق الضغط، في حين إن المسبب الرئيس لانتقال الكتلة هو فرق التركيز concentration difference؛ بالتالي فإننا لا نتحدث عن انتقال الكتلة في وسط متجانس.

6 - 1 - مقدمة *Introduction*:

من المعلوم أنه حيثما يوجد عدم توازن في مواصفة فيزيائية ما في وسط ما (مثل درجة الحرارة، مادة كيميائية، ...)، فإنه من الطبيعي إن يحدث إعادة توزيع لهذه المواصفة في الوسط حتى يتم الوصول إلى حالة توازن. يشار إلى هذا السلوك بالقوة المسببة driving force، إن هذه الآلية هي السبب وراء العديد من ظواهر الانتقال الطبيعية.

إذا عرفنا كمية مواصفة ما من أجل واحدة الحجم على أنها تركيز concentration هذه المواصفة، فيمكننا القول إن تدفق مواصفة ما يحدث دائماً باتجاه تناقص التركيز، أي من المنطقة ذات التركيز المرتفع إلى المنطقة ذات التركيز المنخفض، كما يبين الشكل (6 – 1).

تنتقل المواصفة في أثناء عملية إعادة التوزيع ببطء، وبالتالي فإن التدفق هو عملية انتشار diffusion process.

يتناسب معدل تدفق المواصفة مع تدرج التركيز concentration gradient dC/dx، ومساحة المقطع العرضي للجريان A، أي إن:

معدل التدفق = مساحة المقطع العرضي للجريان × تدرج التركيز

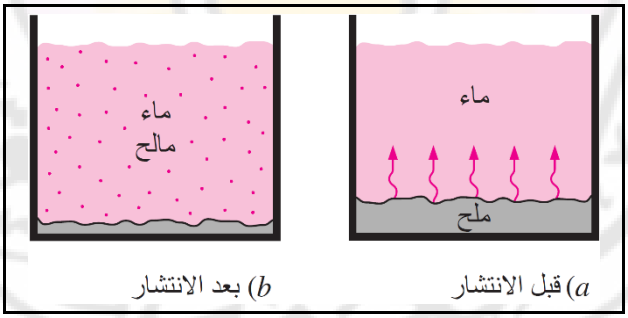
$$\dot{Q} = -\lambda_{\text{diff}} A \frac{dC}{dx} \qquad (1-6)$$

λ_{diff}: معامل الانتشار diffusion coefficient للوسط، وهو يقيس سرعة انتشار مواصفة ما في الوسط.

dC/dx: تدرج التركيز، وهو التغير في التركيز C من أجل واحدة الطول في اتجاه الجريان x.

الإشارة السالبة هي لجعل قيمة التدفق موجبة حيث أن dC/dx هو قيمة سالبة في اتجاه الجريان.

إن هذه العلاقة تذكرنا بقانون فوريه في التوصيل الحراري، وقانون أوم في التوصيل الكهربائي وقانون نيوتن في التبريد، حيث إن هذه القوانين جميعها تأخذ نفس صيغة العلاقة (1 – 6).

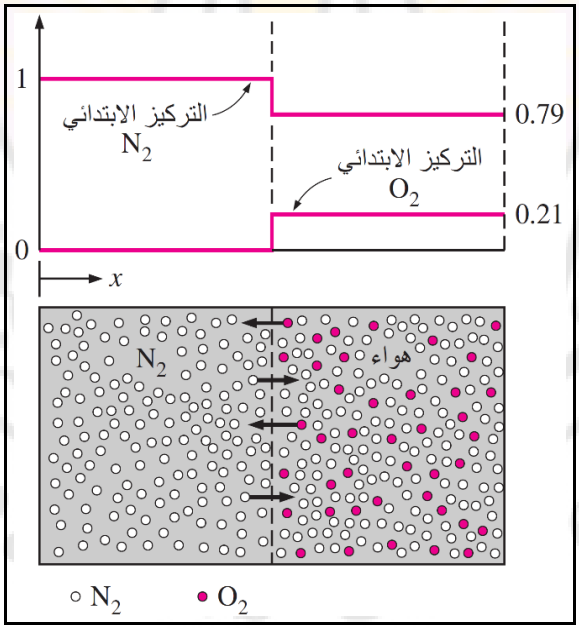


الشكل (6 – 1) الانتشار الطبيعي نتيجة وجود فرق في التركيز لمواصفة فيزيائية.

لفهم عملية الانتشار بشكل أفضل، سنفرض إن لدينا خزاناً مقسوماً إلى جزئين متساويين بواسطة حاجز. في البدء يحتوي النصف الأيسر من الخزان على غاز النيتروجين N_2، بينما يحتوي النصف الأيسر على الهواء (حوالي 21% أوكسجين O_2، و 79% نيتروجين N_2)، ودرجة الحرارة والضغط متساويان في الطرفين. يشار إلى جزيئات الأوكسجين بالدوائر الداكنة

وإلى جزيئات النيتروجين بالدوائر البيضاء، كما يوضح الشكل (6 – 2). تبدأ جزيئات النيتروجين عند إزالة الحاجز بالانتشار في الهواء بينما تنتشر جزيئات الأوكسجين في النيتروجين. إذا انتظرنا لفترة كافية فإننا سنحصل على مزيج متجانس من N_2 وO_2 في الخزان. يمكننا تفسير عملية الانتشار الكتلي هذه كما يلي:

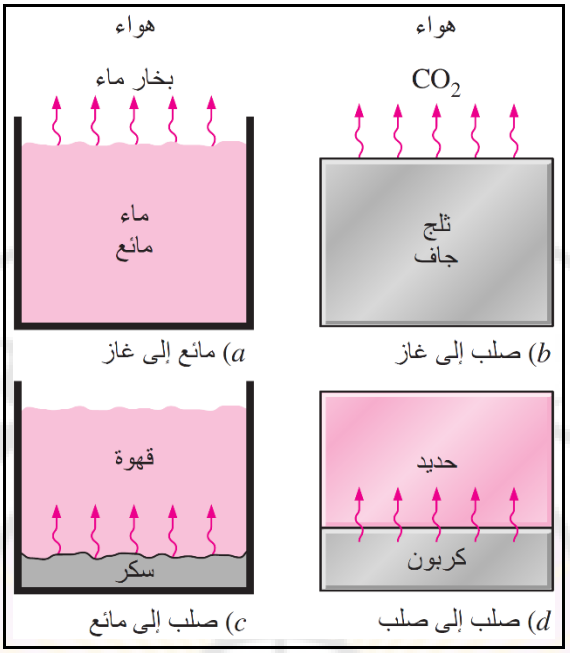
لنفرض وجود مستوٍ تخيلي (يشار إليه بخط متقطع على الشكل). تتحرك الجزيئات الغازية بشكل عشوائي، وبالتالي فإن احتمالية إن تتحرك أي جزيئة إلى اليمين أو اليسار هي نفسها. نتيجة ذلك فإن نصف الجزيئات الموجودة على أحد جانبي الخط المتقطع ستنتقل إلى الجانب الآخر عند أي لحظة زمنية. بما إن تركيز N_2 في الجانب الأيسر أكبر من تركيزه في الجانب الأيمن، فإن عدد جزيئات N_2 التي ستتحرك نحو اليمين أكبر من عدد جزيئات N_2 التي ستتحرك نحو اليسار، وبالتالي فإن محصلة تدفق N_2 تتجه نحو اليمين. نتيجة ذلك، يمكن القول إن N_2 ينتقل نحو اليمين. من خلال مناقشة مماثلة يمكننا القول إن O_2 ينتقل نحو اليسار. تستمر هذه العملية حتى يتم الوصول إلى تركيز منتظم لكل من N_2 وO_2 في كامل الخزان، حيث يصبح عدد جزيئات N_2 أو O_2 المنتقلة إلى اليسار مساوياً لعدد الجزيئات المنتقلة نحو اليمين، بحيث تصبح محصلة الانتقال لـ N_2 أو O_2 عبر المستو التخيلي مساوية للصفر.



الشكل (6 – 2) الانتشار الكتلي في خزان يحوي هواء ونيتروجين.

تصطدم الجزيئات الغازية بشكل مستمر مع بعضها ببعض، وتؤثر عملية التصادم هذه بشكل كبير في عميلة الانتشار. إن تصادم الجزيئات المتشابهة يؤثر بشكل طفيف على الانتشار لأن الجزيئين المتصادمين متماثلان، وبالتالي فإن عبور أحدهما لمستوٍ معين لا يختلف عن عبور الجزيء الآخر للمستوى نفسه. يؤثر تصادم الجزيئات المختلفة في معدل الانتشار لأن الجزيئات المختلفة تمتلك كتلاً مختلفة وبالتالي كمية حركة مختلفة، وبالتالي فإن عملية الانتشار ستكون في الأساس للجزيئات ذات الكتلة الأكبر. تتعلق معاملات الانتشار (وبالتالي معدلات الانتشار) بشدة بدرجة الحرارة، حيث إن درجة الحرارة هي مقياس للسرعة الوسطية لجزيئات الغاز. وبالتالي بارتفاع درجة الحرارة تزداد معدلات الانتشار.

يحدث انتشار الكتلة أيضاً في الموائع والمواد الصلبة كما يحدث بالغازات. على سبيل المثال فإن كأس ماء موضوعاً في غرفة سيتبخر تدريجياً نتيجة انتشار جزيئات الماء في الهواء (انتقال مائع إلى غاز). مثال آخر، فإن قطعة من ثاني أوكسيد الكربون CO_2 الصلب (الثلج الجاف) سيتضاءل حجمها مع الزمن نتيجة انتشار جزيئات CO_2 في الهواء (انتقال صلب إلى غاز). إن ملعقة من السكر في فنجان قهوة ستتحرك تدريجياً وتؤدي إلى تحلية القهوة بالرغم من إن جزيئات السكر أثقل بكثير من جزيئات الماء، كما إن جزيئات الحبر في قلم موضوع في كأس ماء ستنتشر في الماء نتيجة الانتشار التدريجي للون في الماء (انتقال صلب إلى مائع). بالطبع يمكن إن يحدث انتقال الكتلة من غاز إلى مائع أو صلب إذا كان تركيز المادة في الطور الغازي أعلى. على سبيل المثال، فإن نسبة قليلة من O_2 في الهواء تنتشر في الماء وتلبي احتياجات الكائنات البحرية للأوكسجين (انتقال غاز إلى مائع). إن انتشار الكربون في الحديد في أثناء عملية التقسية السطحية، وعملية إشابة (إضافة الشوائب) الترانزستورات بأنصاف النواقل، وهجرة جزيئات الشوائب في أنصاف النواقل عند درجات الحرارة العالية، كلها أمثلة على عمليات انتشار صلب إلى صلب، كما يبين الشكل (6 – 3).



الشكل (6 – 3) أشكال الانتشار الكتلي.

هناك عامل آخر يؤثر في عملية الانتشار هو الفراغ الجزيئي molecular spacing. بشكل عام كلما كان الفراغ الجزيئي أكبر كان معدل الانتشار أكبر. بالتالي فإن معدلات الانتشار تكون أكبر بكثير في الغازات منها في الموائع، وتكون في الموائع أكبر بكثير منها في المواد الصلبة.

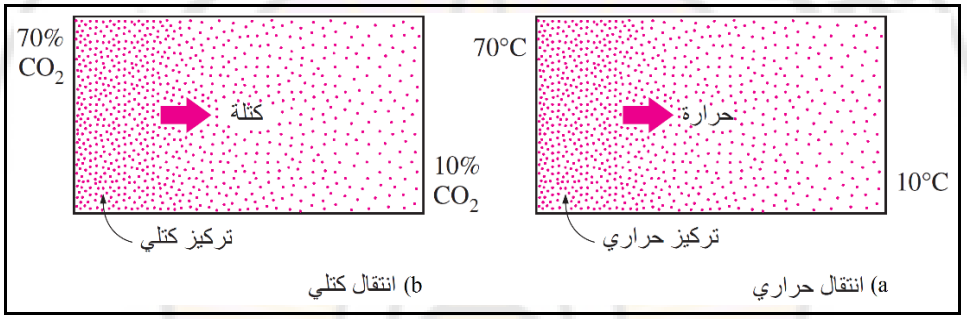
6 - 2 - التشابه بين انتقال الحرارة وانتقال الكتلة

Analogy between Heat and Mass Transfer:

إن آليات انتقال كل من الحرارة والكتلة متشابهة، وبالتالي يمكننا فهم انتقال الكتلة في ضوء معرفتنا السابقة لانتقال الحرارة من خلال توضيح التشابه بينهما. كما إن فهمنا لانتقال الكتلة سيمكننا من فهم عمليات انتقال الحرارة بشكل أفضل، من خلال النظر إلى الحرارة كمادة عديمة الكتلة، مثلما كان الاعتقاد سائداً في القرن التاسع عشر. إن المادة في جوهرها طاقة، حيث إن المادة يمكن أن تتحول إلى طاقة والعكس صحيح بحسب صيغة أينشتاين $E = mc^2$، حيث c هي سرعة الضوء. بالتالي يمكننا النظر إلى الكتلة والحرارة كشكلين مختلفين للطاقة واستثمار هذا الأمر دون الخوض في تفاصيله.

6 – 2 – 1 – درجة الحرارة *Temperature*:

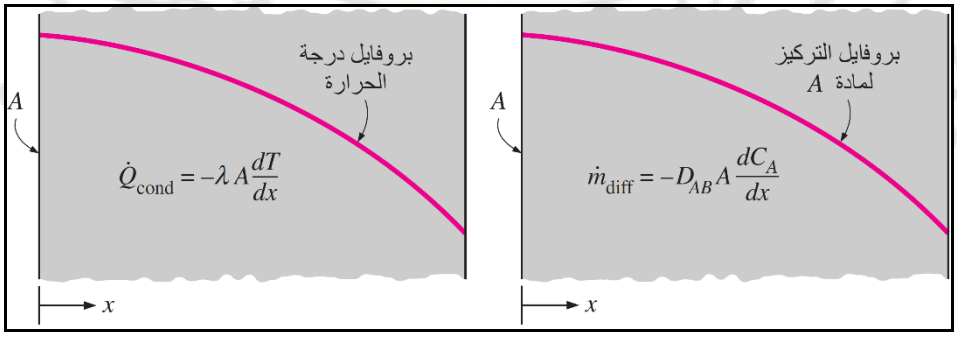
إن القوة المسببة لانتقال الحرارة هي فرق درجات الحرارة. في المقابل فإن القوة المسببة لانتقال الكتلة هي فرق التركيز. يمكننا النظر إلى درجة الحرارة كمقياس للتركيز الحراري، ومنه فإن المنطقة ذات درجة الحرارة المرتفعة هي منطقة ذات تركيز حراري مرتفع، كما في الشكل (6 – 4). بالتالي فإن الحرارة والكتلة تنتقلان من المناطق ذات التركيز المرتفع إلى تلك الأقل تركيزاً. في حال عدم وجود فرق في درجات الحرارة فلا وجود لانتقال الحرارة. بالمثل فإنه في حال عدم وجود فرق في تراكيز مادة ما الأجزاء المختلفة من الوسط المدروس فلن يكون هناك انتقال للكتلة.



الشكل (6 – 4) التشابه بين انتقال الحرارة وانتقال الكتلة.

6 – 2 – 2 – التوصيل *Conduction*:

كما نذكر، فإن الحرارة تنتقل بالتوصيل والحمل والإشعاع. أما بالنسبة للكتلة فإنها تنتقل بالتوصيل (ويسمى الانتشار Diffusion) والحمل فقط، وليس هناك إشعاع كتلي.



الشكل (6 – 5) بروفايل درجة الحرارة وبروفايل التركيز.

إن معدل الانتشار الكتلي $\dot{m}_{\text{diff}}$ لمادة كيميائية ما A في وسط ساكن باتجاه المحور x يتناسب طرداً مع تدرج التركيز dC/dx في نفس الاتجاه، ويعبر عنه وفق قانون فيك Fick's law للانتشار، كما في الشكل (6 – 5):

$$\dot{m}_{\text{diff}} = -D_{AB} A \frac{dC_A}{dx} \qquad \textbf{(2 – 6)}$$

D_{AB}: معامل الانتشار diffusion coefficient

أو الانتشارية الكتلية mass diffusivity للمادة في المزيج.

C_A: تركيز المادة في المزيج في نقطة معينة.

تمتلك المعادلات التفاضلية لكل من التوصيل الحراري والانتشار الكتلي الشكل نفسه. وبالتالي يمكن حل معادلات الانتشار الكتلي من خلال حل معادلات التوصيل الحراري المقابلة لها من أجل الشروط الحدية نفسها، وذلك باستبدال المعاملات والمتحولات المتقابلة.

6 – 2 – 3 – الحرارة المتولدة *Heat Generation*:

تنشأ الحرارة المتولدة عن تحول بعض أشكال الطاقة (الكهربائية، الكيميائية، النووية) إلى طاقة حرارية محسوسة sensible heat في الوسط. يحدث توليد الحرارة في كامل الوسط ويظهر على شكل ارتفاع في درجة الحرارة. بشكل مشابه فإن بعض مسائل انتقال الكتلة تتضمن تفاعلات كيميائية تحدث ضمن الوسط وينتج عنها توليد مادة ما في كامل الوسط. بالتالي فإن توليد المواد هو ظاهرة حجمية، ويمكن أن يتغير معدل التوليد من نقطة إلى أخرى في الوسط. تسمى مثل هذه التفاعلات والتي تحدث ضمن الوسط بالتفاعلات المتجانسة homogeneous reactions، وهي مشابهة لتوليد الحرارة الداخلي. من ناحية أخرى فإن بعض التفاعلات الكيميائية تؤدي إلى نشوء مادة ما عند السطح نتيجة حدوث التفاعلات عند السطح، وذلك بسبب التماس بين الوسط والوسط المحيط. إن مثل هذه التفاعلات هي ظاهرة سطحية، ويجب معاملتها كشروط حدية. تسمى مثل هذه التفاعلات في انتقال الكتلة بالتفاعلات غير المتجانسة heterogeneous reactions، وهي مشابهة لحالة تدفق حراري سطحي محدد.

6 – 2 – 4 – الحمل *Convection*:

كما نذكر، فإن الحمل الحراري هو إحدى آليات انتقال الحرارة والتي تتضمن التوصيل الحراري نتيجة الانتشار الجزيئي molecular diffusion، والحركة الكلية للسائل bulk fluid motion. تعزز حركة السائل من انتقال الحرارة بشكل ملحوظ وتبعد السائل الساخن عن السطح

وتستبدله بسائل أبرد. في الحالة الحدية، عند عدم وجود حركة كلية للسائل، فإن الحمل الحراري يقتصر على التوصيل فقط. بالمثل، فإن الحمل الكتلي mass convection هو الآلية التي تنتقل بها الكتلة بين سطح وسائل متحرك، وهي تتضمن كلاً من الانتشار الكتلي والحركة الكلية للسائل. إن حركة السائل تعزز أيضاً من انتقال الكتلة بشكل ملحوظ، حيث تبعد السائل ذا التركيز المرتفع والقريب من السطح ليحل محله السائل ذو التركيز المنخفض البعيد عن السطح. نعرف في الحمل الكتلي طبقة تركيز حدية concentration boundary layer، بشكل مشابه للطبقة الحدية الحرارية، كما نعرف أعداداً لابعدية جديدة مناظرة لعدد براندل وعدد نوسلت.

يعبر عن معدل الانتقال الكتلي بشكل مشابه لمعدل الحمل الحراري لجريان خارجي كالتالي:

$$\dot{m}_{\text{conv}} = \alpha_{\text{mass}} A_s \left(C_s - C_\infty\right) \qquad \textbf{(3 - 6)}$$

α_{mass}: معامل انتقال الكتلة.

A_s: مساحة السطح.

$C_s - C_\infty$: فرق تركيز مناسب عبر الطبقة الحدية للتركيز.

إن هذا التشابه صحيح من أجل معدلات انتقال الكتلة المنخفضة، حيث إن نسبة الجريان للمادة التي تتعرض لتدفق كتلي أقل من 10%من معدل الجريان الكلي للمزيج السائل.

6 - 3 - الانتشار الكتلي *Mass Diffusion*:

ينص قانون فيك في الانتشار على إن معدل انتشار مادة كيميائية في أي موضع من مزيج غازي أو محلول مائع أو صلب يتناسب طرداً مع تدرج تركيز المادة في هذا الموضع. بالرغم من إن التركيز العالي لمادة ما يعني إن هنالك عدداً أكبر من جزيئات هذه المادة في واحدة الحجم، فإنه بالإمكان التعبير عن التركيز بطرق عدة.

6 – 3 – 1 – أساس كتلي *Mass Basis*:

يعبر عن التركيز على أساس كتلي من خلال الكثافة density (أو التركيز الكتلي)، وهي الكتلة من أجل واحدة الحجم. لنأخذ حجماً صغيراً V في موضع ما من مزيج. تعطى كثافات المواد وكثافة المزيج في هذا الموضع وفق ما يلي:

الكثافة الجزئية لمادة *i*: $\rho_i = m_i / V \qquad \left[\text{kg/m}^3\right]$

الكثافة الكلية للمزيج: $\rho = m/V = \sum m_i / V = \sum \rho_i$

بالتالي فإن كثافة مزيج في موضع ما منه تساوي إلى مجموع الكثافات لمكونات المزيج في هذا الموضع. يمكن التعبير عن التركيز الكتلي أيضاً بشكل لا بعدي بدلالة النسبة الكتلية mass fraction: w

النسبة الكتلية للمادة i: (6 – 4)

$$w_i = \frac{m_i}{m} = \frac{m_i/V}{m/V} = \frac{\rho_i}{\rho}$$

نلاحظ إن النسبة الكتلية لمادة ما تتراوح بين 0 و1، ويقتضي قانون انحفاظ الكتلة أن يكون مجموع النسب الكتلية لمكونات مزيج ما مساوياً للواحد، أي إن $\sum w_i = 1$. كما نلاحظ إن الكثافة والنسبة الكتلية لمكون من مكونات مزيج ما تتغير مع الموضع، إلا في حال كان تدرج التركيز مساوياً للصفر.

6 – 3 – 2 – أساس مولي *Mole Basis*:

يعبر عن التركيز على أساس عدد المولات بدلالة التركيز المولي molar concentration (أو الكثافة المولية)، وهي كمية المادة مقدرة بالكيلو مول من أجل واحدة الحجم. لنأخذ حجماً صغيراً V في موضع ما من مزيج، تعطى التراكيز المولية للمواد والتركيز المولي للمزيج وفق ما يلي:

التركيز المولي الجزئي لمادة i:

$$C_i = N_i/V \qquad \left[\mathrm{kmol/m^3}\right]$$

التركيز المولي الكلي للمزيج:

$$C = N/V = \sum N_i/V = \sum C_i$$

بالتالي فإن التركيز المولي في موضع ما من مزيج يساوي إلى مجموع التراكيز المولية لمكونات المزيج في هذا الموضع. كما يمكن التعبير عن التركيز المولي أيضاً بشكل لا بعدي بدلالة النسبة المولية mole fraction: y_i

النسبة المولية لمادة i: (6 – 5)

$$y_i = \frac{N_i}{N} = \frac{N_i/V}{N/V} = \frac{C_i}{C}$$

تتراوح النسبة المولية لمادة ما بين 0 و1، ومجموع النسب المولية لمكونات المزيج يساوي الواحد، أي إن: $\sum y_i = 1$.

ترتبط الكتلة m وعدد المولات N لمادة ما بالعلاقة $m = NM$ أو من أجل واحدة الحجم $\rho = CM$ حيث M هي الكتلة المولية molar mass أو الوزن المولي molar weight للمادة. وبالتالي فإن التركيز الكتلي والتركيز المولي مرتبطان وفق العلاقة:

لمادة i: $$C_i = \frac{\rho_i}{M_i} \qquad (6-6)$$

للمزيج: $$C = \frac{\rho}{M} \qquad (6-7)$$

حيث أن M هي الكتلة المولية للمزيج، وتعطى بالعلاقة:

$$M = \frac{m}{N} = \frac{\sum N_i M_i}{N} = \sum \frac{N_i}{N} M_i = \sum y_i M_i \qquad (6-8)$$

وترتبط النسبة الكتلية بالنسبة المولية لمادة iفي مزيج بالعلاقة:

$$w_i = \frac{\rho_i}{\rho} = \frac{C_i M_i}{CM} = y_i \frac{M_i}{M} \qquad (6-9)$$

مثال 6 – 1:

أظهر التحليل المولي لمزيج غازي درجة حرارته 290 K وضغطه 250 kPa أنه مكون من: 65% نيتروجين، 20% أوكسجين، 15% ثاني أوكسيد الكربون. احسب النسبة الكتلية والضغط الجزئي لكل غاز.

الحل:

المعطيات: درجة حرارة وضغط المزيج الغازي، والنسب المولية للغازات في المزيج.

المطلوب: النسبة الكتلية والضغوط الجزئية للغازات في المزيج.

الافتراضات: الغازات تسلك سلوك غازات مثالية.

الخواص:

الجدول (A1) الكتل المولية:

$$N_2: \quad M_{N_2} = 28\,\text{kg/kmol}$$

$$O_2: \quad M_{O_2} = 32\,\text{kg/kmol}$$

$$CO_2: \quad M_{CO_2} = 44\,\text{kg/kmol}$$

التحليل: إذا كانت النسبة المولية لمزيج غازي معلومة، فإن النسب الكتلية تحسب من العلاقة (6 – 4):

$$w_i = \frac{m_i}{m_m} = \frac{N_i M_i}{N_m M_m} = y_i \frac{M_i}{M_m}$$

الكتلة المولية الظاهرية للمزيج هي:

$$M_m = \sum y_i M_i = 0.65\times 28 + 0.2\times 32 + 0.15\times 44 = 31.2\,\text{kg/kmol}$$

وبالتالي فالنسب الكتلية للغازات هي:

$$N_2: \qquad w_{N_2} = y_{N_2}\frac{M_{N_2}}{M} = 0.65\times\frac{28}{31.2} = 0.583 \qquad (58.3\%)$$

$$O_2: \qquad w_{O_2} = y_{O_2}\frac{M_{O_2}}{M} = 0.2\times\frac{32}{31.2} = 0.205 \qquad (20.5\%)$$

$$CO_2: \qquad w_{CO_2} = y_{CO_2}\frac{M_{CO_2}}{M} = 0.15\times\frac{44}{31.2} = 0.212 \qquad (21.2\%)$$

إن الضغط الكلي للمزيج هو 250 kPa ، وفي حالة الغاز المثالي فإن نسب الضغوط مساوية للنسب المولية.

$$P_{N_2} = y_{N_2}P = 0.65\times 250\,\text{kPa} = 162.5\,\text{kPa}$$
$$P_{O_2} = y_{O_2}P = 0.2\times 250\,\text{kPa} = 50\,\text{kPa}$$
$$P_{CO_2} = y_{CO_2}P = 0.15\times 250\,\text{kPa} = 37.5\,\text{kPa}$$

6 – 3 – 3 – قانون فيك في الانتشار: وسط ساكن مكون من مادتين

***Fick's Law of Diffusion: Stationary Medium Consisting of Two Species*:**

لقد ذكرنا سابقاً إن معدل الانتشار الكتلي لمادة كيميائية في وسط ساكن في اتجاه معين يتناسب طرداً مع التدرج الموضعي للتركيز في الاتجاه نفسه. تعرف هذه العلاقة الخطية باسم قانون فيك في الانتشار Fick's law of diffusion، ويمكن أن نعبر عنه كما يلي:

التدفق الكتلي = ثابت التناسب × تدرج التركيز

لكن تركيز مادة ما في مزيج غازي أو محلول مائع أو صلب يمكن إن يعرف بطرق عدة، مثل الكثافة، أو النسبة الكتلية، أو التركيز المولي، أو النسبة المولية، كما شرحنا سابقاً، وبالتالي يمكن التعبير عن قانون فيك رياضياً بطرق عدة. من الواضح أنه من الأفضل أن نعبر عن تدرج التركيز بدلالة النسبة الكتلية أو النسبة المولية، والصيغة الأنسب لقانون فيك في الانتشار لمادة A في مزيج ثنائي ساكن مؤلف من مادتين A وB في اتجاه محدد x ، كما في الشكل (6 – 6) هي:

أساس كتلي:

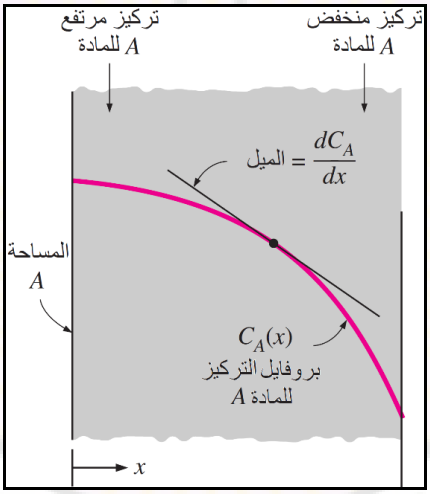
$$j_{\text{diff},A} = \frac{\dot{m}_{\text{diff},A}}{A} = -\rho D_{AB} \frac{d\left(\rho_A/\rho\right)}{dx} = -\rho D_{AB} \frac{dw_A}{dx} \quad \left[\text{kg/s.m}^2\right] \quad \textbf{(10 - 6)}$$

أساس مولي:

$$\overline{j}_{\text{diff},A} = \frac{\dot{N}_{\text{diff},A}}{A} = -CD_{AB} \frac{d\left(C_A/C\right)}{dx} = -CD_{AB} \frac{dy_A}{dx} \quad \left[\text{mol/s.m}^2\right] \textbf{(11 - 6)}$$

$j_{\text{diff},A}$: التدفق الكتلي الانتشاري diffusive mass flux للمادة A، أي الكتلة المنتقلة بالانتشار من أجل واحدة الزمن ومن أجل واحدة المساحة للسطح العمودي على اتجاه انتقال الكتلة.

$\overline{j}_{\text{diff},A}$: التدفق المولي الانتشاري diffusive molar flux.



الشكل (6 – 6) بروفايل التركيز للمادة A في مزيج ساكن.

يتناسب التدفق الكتلي لمادة ما في أي موضع من المزيج طرداً مع كثافة المزيج في هذا الموضع. بشكل عام فإن كثافة المزيج وتركيزه المولي متغيران مع الموضع. بالتالي $\rho d\left(\rho_A/\rho\right) \neq d\rho_A$ ،كما أن $C\,d\left(C_A/C\right) \neq dC_A$، لكن في الحالة الخاصة عندما تكون كثافة المزيج ثابتة أو عندما يكون التركيز المولي ثابتاً فإن العلاقات السابقة تصبح بالشكل:

أساس كتلي $(\rho = \text{constant})$:

$$j_{\text{diff},A} = -D_{AB} \frac{d\rho_A}{dx} \qquad \textbf{(12 - 6)}$$

أساس مولي $(C = \text{constant})$:

$$\bar{j}_{\text{diff},A} = -D_{AB}\frac{dC_A}{dx} \qquad \textbf{(13 - 6)}$$

إن فرضية ثبات الكثافة أو التركيز المولي مناسبة في حالة المحاليل الصلبة أو المائعة المخففة dilute liquid، لكن ذلك لا ينطبق على المزائج الغازية والمحاليل المائعة المركزة، وبالتالي يجب استخدام العلاقتين (6 - 9)، (6 - 13) في هذه الحالة. سنركز في كتابنا على دراسة الانتشار الكتلي أحادي البعد، أما من أجل الانتشار ثنائي أو ثلاثي الأبعاد فيجب التعبير عن قانون فيك بالصيغة الشعاعية وذلك من خلال استبدال المشتقات في العلاقات السابقة بالتدرجات المقابلة لها، مثل $\mathbf{j}_A = -\rho D_{AB}\nabla w_A$.

كما نذكر، فقد عرفنا ثابت التناسب في قانون فوريه بأنه خاصية الانتقال وأسميناه الموصلية الحرارية. بشكل مشابه، يعرف ثابت التناسب في قانون فيك بأنه خاصية انتقال أخرى وتسمى معامل الانتشار الثنائي binary diffusion coefficient D_{AB}، أو الانتشارية الكتلية mass diffusivity. إن واحدة الانتشارية الكتلية هي $\left[\text{m}^2/\text{s}\right]$، وهي نفسها واحدة الانتشارية الحرارية thermal diffusivity، والانتشارية الحركية momentum diffusivity والتي تسمى أيضاً اللزوجة الحركية kinematic viscosity.

بسبب الطبيعة المعقدة للانتشار الكتلي، تحسب معاملات الانتشار في الحالة العامة بشكل تجريبي. تشير النظرية الحركية للغازات إلى إن معامل الانتشار للغازات المخففة عند الضغوط العادية لا يتعلق بتركيبة المزيج، ويزداد معامل الانتشار بارتفاع درجة الحرارة بينما ينخفض مع ارتفاع الضغط، أي إن:

$$D_{AB} \propto \frac{T^{3/2}}{P} \quad \Rightarrow \quad \frac{D_{AB,1}}{D_{AB,2}} = \frac{P_2}{P_1}\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{3/2} \qquad \textbf{(14 - 6)}$$

إن هذه العلاقة مفيدة في حساب معامل الانتشار للغازات عند درجات حرارة وضغوط مختلفة، وذلك من خلال معرفة معامل الانتشار عند درجة حرارة وضغط محددين. نقطة بشكل عام، تأخذ معاملات الانتشار أكبر قيم لها في الغازات، في حين تأخذ أصغر قيم في المواد الصلبة. إن معاملات الانتشار للغازات أكبر بمرات عدة منها في الموائع.

تزداد معاملات الانتشار بارتفاع درجة الحرارة. على سبيل المثال يزداد معامل الانتشار؛ وبالتالي معدل الانتشار الكتلي للكربون عبر الحديد في أثناء عملية التقسية بمقدار 6000 ضعف عند ارتفاع درجة الحرارة من $500\,^{\circ}\text{C}$ إلى $1000\,^{\circ}\text{C}$.

لقد كان انتشار بخار الماء في الهواء محور اهتمام العديد من الدراسات بسبب أهميته العملية، وتم تطوير العديد من الصيغ التجريبية لحساب معامل الانتشار D_{H_2O-air}. إحدى هذه الصيغ هي التالية:

$$D_{H_2O-air} = 1.87\times10^{-10}\frac{T^{2.072}}{P}\ \left[\mathrm{m^2/s}\right]\ ;\ 280[\mathrm{K}]<T<450[\mathrm{K}] \quad \textbf{(15 - 6)}$$

P: الضغط الكلي. $[\mathrm{atm}]$

T: درجة الحرارة المطلقة. $[\mathrm{K}]$

إن الآلية الرئيسة المسببة للانتشار الكتلي هي تدرج التركيز، ويسمى الانتشار الكتلي الناتج عن تدرج التركيز باسم الانتشار العادي ordinary diffusion، ويمكن أن يحدث الانتشار لأسباب أخرى. يمكن لتدرج درجة الحرارة أن يسبب الانتشار الحراري thermal diffusion، ويسمى أيضاً بتأثير سوريه Soret effect، كما إن تدرج الضغط يسبب انتشار الضغط pressure diffusion. إن كلا هذين التأثيرين مهمل إلا في حال كان التدرج كبيراً جداً. يستخدم تدرج الضغط المتولد عن تأثير الطرد المركزي (قوة العطالة النابذة المركزية) في أجهزة الطرد المركزي لفصل المحاليل المائعة والنظائر الغازية. يمكن استخدام حقول القوى الخارجية (مثل الحقل الكهربائي أو الحقل المغناطيسي) من خلال تطبيقها على مزيج أو محلول ما في فصل الجزيئات المشحونة كهربائياً أو الممغنطة (مثل المحاليل الكهربائية أو الغازات المتشردة) من المزيج. يسمى هذا الأمر بالانتشار القسري forced diffusion. في حال كانت أبعاد المسامات لمادة صلبة مسامية (مثل السيلكا جيل silica - gel) أصغر من المسار الحر الوسطي للجزيئات الغازية، فيمكن إهمال تصادم الجزيئات، ويمكن الوصول إلى تدفق جزيئي حر، ويعرف هذا الأمر بانتشار كنودسنKnudsen diffusion. عندما يكون حجم الجزيئات الغازية مماثلاً لحجم المسامات فإن الجزيئات الممتزة تتحرك على طول مسامات الجدران، ويعرف هذا بالانتشار السطحي surface diffusion. في حالة الجزيئات التي قطرها أقل من $0.1\mu\mathrm{m}$ (مثل جزيئات الضباب والهباب) فإن هذه الجزيئات تتصرف كجزيئات كبيرة، وتسمى عملية الانتشار لهذه الجزيئات والناتجة عن تدرج التركيز بالحركة البراونية Brownian motion. إن الجزيئات الكبيرة، أي التي قطرها أكبر من $0.1\mu\mathrm{m}$، لا تتأثر بالانتشار، لأن حركتها محكومة بقوانين نيوتن. سنفرض في أثناء دراستنا في هذا الكتاب إن هذه التأثيرات الإضافية غير موجودة أو مهملة، وهي الحالة الشائعة عادةً.

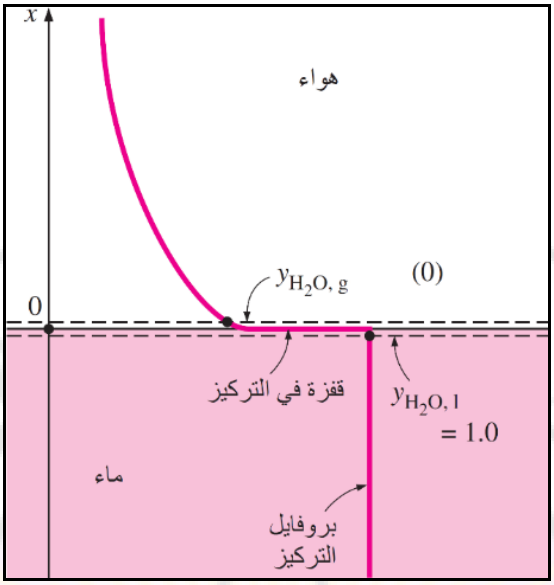
6 - 4 - الشروط الحدية *Boundary Conditions*:

لقد ذكرنا سابقاً إن معادلة الانتشار الكتلي مشابهة لمعادلة انتشار الحرارة (أو المعادلة التفاضلية للتوصيل الحراري)، وبالتالي يلزمنا شروطاً حدية مماثلة لتحديد توزع تركيز المواد في وسط ما. هناك نوعان شائعان من الشروط الحدية، الأول هو تركيز محدد للمواد وهو يناظر درجة حرارة محددة، والآخر هو تدفق محدد للمواد ويناظر تدفق حراري محدد.

بالرغم من التشابه الظاهري بينهما، إلا أنه يوجد فرق جوهري بين درجة الحرارة والتركيز، فدرجة الحرارة تابع مستمر بالضرورة، لكن التركيز بشكل عام ليس تابعاً مستمراً. على سبيل المثال فإن الجدار والهواء الملاصق لسطح الجدار لهما درجة الحرارة نفسها دائماً. إن تركيز الهواء على جانبي السطح البيني ماء – هواء مختلفان كلياً، حيث إن تركيز الهواء في الماء مساوٍ تقريباً للصفر. بالمثل، فإن تركيز الماء على جانبي السطح البيني ماء – هواء مختلف هو الآخر حتى في حال كان الهواء مشبعاً، كما يبين الشكل (6 – 7).

بالتالي، عند تحديد شرط حدي، فإن تحديد الموضع ليس كافياً، حيث يجب أن نحدد أي طرف من الحد ينطبق عنده الشرط الحدي. لفعل ذلك فإننا نفرض وجود سطحين تخيليين على جانبي السطح البيني بحيث يكونا متقاربين بشكلٍ متناهٍ في الصغر مع السطح البيني، ونعبر عن طرف السطح البيني من خلال إضافة رمز سفلي يرمز لحالة (طور) المزيج عند هذا الطرف (s للطرف الصلب، l للطرف المائع، وg للطرف الغازي). فمثلاً نعبر عن تركيز الماء على أساس مولي على جانبي السطح البيني ماء – هواء عند $x = 0$ كما يلي:

$$y_{H_2O,l}(0) = y_1$$
$$y_{H_2O,g}(0) = y_2 \qquad \textbf{(16 – 6)}$$



الشكل (6 – 7) بروفايل تركيز الماء عند السطح البيني ماء – هواء.

يعبر عن قانون فيك عند الشرط الحدي (تدفق كتلي ثابت لمادة A عند $x = 0$)، وفي حال عدم وجود نفخ أو امتصاص، بإحدى الصيغتين:

$$-CD_{AB}\left.\frac{dy_A}{dx}\right|_{x=0} = \overline{j}_{A,0}$$

$$-\rho D_{AB}\left.\frac{dw_A}{dx}\right|_{x=0} = j_{A,0} \qquad \textbf{(17 – 6)}$$

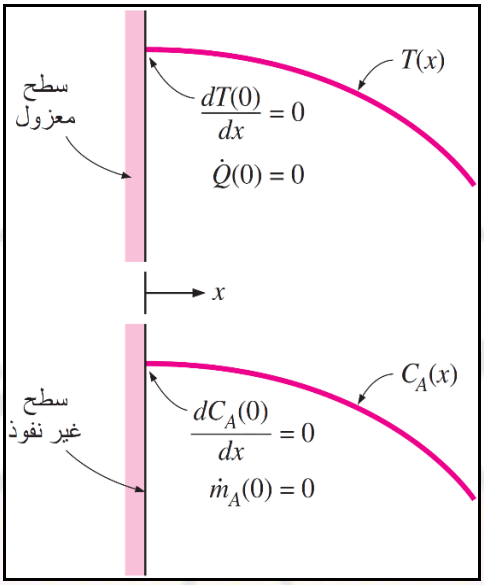
$\overline{j}_{A,0}$: التدفق المولي المحدد للمادة A عند الحد الخارجي للجملة.

$j_{A,0}$: التدفق الكتلي المحدد للمادة A عند الحد الخارجي للجملة.

في الحالة الخاصة $\left(\overline{j}_{A,0} = j_{A,0} = 0\right)$ والتي تعني إن السطح غير نفوذ، كما في الشكل (6 – 8)، فإن:

$$dy_A(0)/dx = dw_A(0)/dx = 0$$

لتطبيق شرط التركيز المحدد؛ يجب أن نعلم تركيز مادة ما عند الحد الخارجي للجملة. يتم الحصول على هذه المعلومة من شرط وجود توازن ترموديناميكي عند السطح البيني لطوري أية مادة. في حالة سطح بيني ماء – هواء, فإن الهواء عند السطح البيني مشبع بالبخار، وبالتالي تحسب قيم تركيز بخار الماء في الهواء بالاستناد إلى هذه المعلومة.



الشكل (6 – 8) التشابه بين السطح المعزول في انتقال الحرارة والسطح غير النفوذ في انتقال الكتلة.

في حالة السطح البيني صلب – مائع فإن الأمر هو نفسه، حيث إنه عند درجة حرارة محددة فإن كمية محددة من المادة الصلبة يمكن أن تنحل في المائع، وتحسب الانحلالية للصلب في المائع من شرط وجود توازن ترموديناميكي بين الصلب والمحلول عند السطح البيني. تعبر الانحلالية solubility عن أكبر كمية من الصلب يمكن أن تنحل في مائع ما عند درجة حرارة محددة. يبين الجدول (6 – 1) بعض قيم الانحلالية لكلوريد الصوديوم NaCl وبيكربونات الكالسيوم $Ca(HCO_3)_2$ في الماء عند درجات حرارة مختلفة. على سبيل المثال فإن انحلالية ملح الطعام NaCl في الماء عند $310\,K$ هي $36.5\,kg$ لكل $100\,kg$ ماء. بالتالي فإن النسبة الكتلية للملح في المحلول عند السطح البيني هي:

$$w_1 = \frac{m_{salt}}{m} = \frac{36.5\,kg}{(100+36.5)\,kg} = 0.267$$

في حين أن النسبة الكتلية للملح الصلب النقي، هي $w = 1$. نلاحظ إن الماء يصبح مشبعاً بالملح عند انحلال $36.5\,kg$ من الملح في $100\,kg$ من الماء عند درجة حرارة $310\,K$.

الجدول (6 – 1) انحلالية كلوريد الصوديوم وبيكربونات الكالسيوم في 100 kg من الماء عند درجات حرارة مختلفة.

$Ca(HCO_3)_2$	NaCl	درجة الحرارة $[K]$
16.15	35.7	273.15
16.3	35.8	280
16.53	35.9	290
16.75	36.2	300
16.98	36.5	310
17.2	36.9	320
17.43	37.2	330
17.65	37.6	340
17.88	38.2	350
18.1	38.8	360
18.33	39.5	370
18.4	39.8	373.15

تتضمن العديد من العمليات امتصاص لغاز في مائع. إن معظم الغازات ضعيفة الانحلال في الموائع (مثل الهواء في الماء)، وفي مثل هذه المحاليل المخففة، فإن النسب المولية لمادة iفي الطورين السائل والغازي عند السطح البيني متناسبتان طرداً فيما بينهما. أي إن $y_{i,g} \propto y_{i,l}$ أو $P_{i,g} \propto P_{i,l}$، لأن $y_{i,g} = P_{i,l}/P$ في حالة المزيج الغازي المثالي. وهو ما يعرف بقانون هنري Henry's law، ويعبر عنه كما يلي:

عند السطح البيني: (6 – 18)

$$y_{i,l} = \frac{P_{i,g}}{H}$$

H: ثابت هنري، وهو حاصل جداء الضغط الكلي للمزيج الغازي بثابت التناسب.

من أجل مادة معينة، فإن ثابت هنري تابع لدرجة الحرارة فقط، وهو مستقل عملياً عن الضغط من أجل ضغوط أقل من حوالي 5atm. يعطي الجدول (6 – 2) قيم ثابت هنري لعدد من المحاليل المائية عند درجات حرارة مختلفة.

الجدول (6 – 2) قيم ثابت هنري لبعض الغازات في الماء عند ضغوط منخفضة إلى متوسطة.

المحلول	290 K	300 K	310 K	320 K	330 K	340 K
H_2S	440	560	700	830	980	1140
CO_2	1280	1710	2170	2720	3220	—
O_2	38,000	45,000	52,000	57,000	61,000	65,000
H_2	67,000	72,000	75,000	76,000	77,000	76,000
CO	51,000	60,000	67,000	74,000	80,000	84,000
هواء	62,000	74,000	84,000	92,000	99,000	104,000
N_2	76,000	89,000	101,000	110,000	118,000	124,000

من خلال العلاقة السابقة والجدول، يمكننا استنتاج ما يلي:

* يتناسب تركيز الغاز المنحل في المائع عكساً مع ثابت هنري. بالتالي كلما كان ثابت هنري أكبر كان تركيز الغازات المنحلة في المائع أقل.
* يزداد ثابت هنري، وبالتالي تتناقص نسبة الغاز المنحل في المائع، مع ارتفاع درجة الحرارة. أي إنه يمكن التخلص من الغازات المنحلة في مائع ما من خلال تسخين المائع.
* يتناسب تركيز الغاز المنحل في المائع مع الضغط الجزئي للغاز. بالتالي تزداد كمية الغاز المنحلة في المائع بازدياد ضغط البخار. تستخدم هذه التقنية في إضافة غاز CO_2 إلى المشروبات الغازية.

إن قيم النسبة المولية للغاز المنحل والتي نحصل عليها من العلاقة (6 – 19) صالحة فقط من أجل طبقة المائع عند السطح البيني، وليست صحيحة بالضرورة لكامل المائع. يمكن تعميم النتائج على كامل المائع فقط في حال كان كامل جسم المائع في حالة توازن ترموديناميكي.

لقد ذكرنا إن استخدام قانون هنري محصور في المحاليل المخففة غاز – مائع، أي إن كمية قليلة من الغاز منحلة في المائع. بالتالي فإن العلاقة الخطية لقانون هنري لا تصلح في حالة الغازات شديدة الانحلال في المائع أو الصلب (مثل الأمونيا في الماء)، ويعبر عن النسبة المولية للغاز المنحل في المائع أو الصلب عادةً كتابع للضغط الجزئي للغاز في الطور الغازي ودرجة الحرارة. تعطى النسب المولية لمادة ما في الجانبين المائع والغازي للسطح البيني بعلاقة تقريبية وفق قانون راولت Raoult's law:

$$P_{i,g} = y_{i,g}P = y_{i,l}P_{i,\text{sat}}(T) \qquad \textbf{(19 – 6)}$$

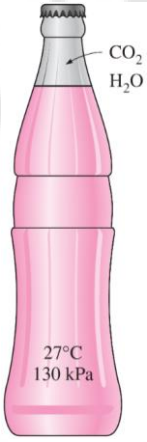
$P_{i,\text{sat}}(T)$: ضغط الإشباع للمادة i عند درجة حرارة السطح البيني.

P : الضغط الكلي على جانب الطور الغازي.

مثال 6 – 2:

مشروب غازي موضوع في قارورة، درجة حرارته $27\,^{o}\text{C}$ والضغط داخل القارورة $130\,\text{kPa}$. بفرض إن الحيز الغازي فوق المائع يحوي مزيجاً من CO_2 وبخار الماء، وبمعاملة المشروب على أنه ماء، احسب: 1 – النسبة المولية لبخار الماء في CO_2.

2 – كتلة الـ CO_2 المنحلة في $200\,\text{ml}$ من المشروب.



الحل:

المعطيات: مشروب غازي موجود ضمن قارورة، وفوقه مزيج من CO_2 وبخار الماء.

المطلوب:

1. النسبة المولية لبخار الماء في CO_2.
2. كتلة CO_2 المنحلة في $200\,\text{ml}$ من المشروب.

الشكل:

الافتراضات:

1. يمكن معاملة المشروب على أنه ماء.
2. كل من CO_2 وبخار الماء غاز مثالي.
3. يشكل CO_2 وبخار الماء في القارورة مزيجاً مشبعاً.
4. إن انحلالية CO_2 في الماء ضعيفة، وبالتالي يمكن تطبيق قانون هنري.

الخواص:

الجدول (A10) ماء $(T = 27\,^{o}\text{C})$:

$$P_{\text{sat}} = 3.6\,\text{kPa}$$

من الجدول (6 – 2)، ثابت هنري لـ CO_2 المنحل في الماء عند درجة $27\,^{o}\text{C} = 300\,\text{K}$:

$$H = 1710\,\text{bar}.$$

الجدول (A1) الكتل المولية لـ CO_2 والماء:

$$M_{CO_2} = 44\,\text{kg/kmol} \quad , \quad M_{H_2O} = 18\,\text{kg/kmol}$$

التحليل:

1. بما أن CO_2 الموجود في القارورة مشبع، فإن الضغط الجزئي لبخار الماء في CO_2 سيكون مساوياً لضغط الإشباع للماء عند $27\,^{o}C$:

$$P_{\text{vapor}} = P_{\text{sat},27\,^{o}\text{C}} = 3.6\,\text{kPa}$$

باعتبار CO_2 وبخار الماء غازان مثاليان، تحسب النسبة المولية لبخار الماء في CO_2 من العلاقة التالية:

$$y_{\text{vapor}} = \frac{P_{\text{vapor}}}{P} = \frac{3.6\,\text{kPa}}{130\,\text{kPa}} = 0.0277$$

2. بما إن الضغط الكلي هو $130\,\text{kPa}$، فإن الضغط الجزئي لـ CO_2 هو:

$$P_{CO_2\,\text{gas}} = P - P_{\text{vapor}} = 130 - 3.6 = 126.4\,\text{kPa} = 1.264\,\text{bar}$$

تحسب النسبة المولية لـ CO_2 في المشروب من قانون هنري (6 – 19):

$$y_{CO_2,l} = \frac{P_{CO_2,g}}{H} = \frac{1.264\,\text{bar}}{1710\,\text{bar}} = 7.39\times10^{-4}$$

وبالتالي فإن النسبة المولية للماء في الشراب هي:

$$y_{H_2O,l} = 1 - y_{CO_2,l} = 1 - 7.39\times10^{-4} = 0.9993$$

ترتبط النسب الكتلية للمزيج بالنسب المولية بالعلاقة (6 – 4):

$$w_i = \frac{m_i}{m_m} = \frac{N_i M_i}{N_m M_m} = y_i \frac{M_i}{M_m}$$

وتحسب الكتلة المولية الظاهرية للمشروب (مزيج ماء مائع – CO_2) من العلاقة:

$$M_m = \sum y_i M_i = y_{H_2O,l} M_{H_2O} + y_{CO_2,l} M_{CO_2}$$
$$= 0.9993\times18 + 7.39\times10^{-4}\times44 = 18.02\,\text{kg/kmol}$$

وبالتالي فإن النسبة الكتلية لغاز CO_2 المنحل في الماء المائع تساوي إلى:

$$w_{CO_2,l} = y_{CO_2,l}\,(0)\frac{M_{CO_2}}{M_m} = 7.39\times10^{-4}\times\frac{44}{18.02} = 0.0018$$

وتحسب كتلة CO_2 المنحل في $200\,\text{ml} \approx 200\,\text{g}$ من المشروب بالعلاقة:

$$m_{CO_2} = w_{CO_2} m_m = 0.0018\times200\,\text{g} = 0.36\,\text{g}$$

يمكن للغازات أن تنحل في المواد الصلبة أيضاً، لكن عملية الانتشار في هذه الحالة معقدة جداً. يمكن أن يكون انحلال الغاز مستقلاً عن بنية المادة الصلبة، أو يمكن أن يتعلق بشدة بمسامية المادة الصلبة. إن بعض عمليات الانحلال عكوسة reversible (كانحلال الهيدروجين في التيتانيوم، وهو مشابه لانحلال CO_2 في الماء)، وبالتالي يتطلب الحفاظ على المحتوى الغازي في المادة الصلبة إن يكون الجسم الصلب في حالة تماس دائم مع الغاز. بعض عمليات الانحلال الأخرى غير عكوسة irreversible، فعلى سبيل المثال، يؤدي انحلال غاز الأوكسجين في التيتانيوم إلى تشكل TiO_2 على السطح، وهذه العملية لا تعكس نفسها بشكل تلقائي.

يتناسب تركيز المادة الغازية i في المادة الصلبة عند السطح البيني $C_{i,s}$ طرداً مع الضغط الجزئي للمادة iفي الطرف الغازي من السطح البيني $P_{i,g}$، ويعبر عنه كما يلي:

$$C_{i,s} = \varpi P_{i,g} \quad \left[\text{kmol/m}^3\right] \qquad \textbf{(20 - 6)}$$

ϖ: الانحلالية solubility.

باعتبار أن الضغط بالبار فإن واحدة الانحلالية هي $\left[\text{kmol/m}^3\text{.bar}\right]$. يعطي الجدول (6 – 3) قيم الانحلالية لبعض التركيبات (غاز – صلب).

يسمى جداء الانحلالية للغاز بمعامل الانتشار للغاز في مادة صلبة بالنفاذية permeability ς، وهي مقياس لقدرة الغاز على اختراق المادة الصلبة. أي إن $\varsigma = \varpi D_{AB}$، حيث إن D_{AB} هي انتشارية الغاز في الصلب. تتناسب النفاذية عكساً مع السماكة، وواحدتها $\left[\text{kmol/m.s.bar}\right]$.

الجدول (6 – 3) الانحلالية لبعض الغازات والمواد الصلبة.

الغاز	الصلب	T [K]	$\varpi \left[\text{kmol/m}^3\text{.bar}\right]$
O_2	مطاط	298	3.12×10^{-3}
N_2	مطاط	298	1.56×10^{-3}
CO_2	مطاط	298	40.15×10^{-3}
He	SiO_2	293	0.45×10^{-3}
H_2	Ni	358	9.01×10^{-3}

في العمليات التي تتضمن التصعيد sublimation لمادة صلبة نقية (مثل الجليد أو CO_2 الصلب)، أو التبخر evaporation لمائع نقي (مثل الماء)، في وسط مغاير (مثل الهواء)، فإن النسبة المولية أو الكتلية للمادة في الطور المائع أو الصلب تساوي إلى 1، ويحسب الضغط الجزئي، وبالتالي النسبة المولية، للمادة في الطور الغازي من خلال بيانات المادة في الحالة المشبعة عند درجة حرارة محددة. فضلاً عن ذلك يمكن استخدام فرضية التوازن الترموديناميكي عند السطح البيني للمواد الصلبة النقية، والموائع النقية، والمحاليل، إلا في حال كان هناك تفاعل كيميائي يحدث عند السطح البيني.

6 - 5 - الانتشار الكتلي المستقر عبر جدار

Steady Mass Diffusion Through a Wall:

تتضمن الكثير من مسائل انتقال الكتلة انتشار مادة ما عبر وسطٍ مستوٍ لا يحدث ضمنه أية تفاعلات كيميائية متجانسة، وذلك عند شروط الحالة المستقرة أحادية البعد. إن مثل هذه المسائل في انتقال الكتلة مشابهة لمسائل التوصيل الحراري المستقر أحادي البعد في جدار مستو مع عدم وجود حرارة متولدة، ويمكن تحليلها بشكل مشابه. يمكننا استخدام العديد من العلاقات التي استنتجناها في الفصل الثالث لحل مسائل انتقال الكتلة، وذلك باستبدال درجة الحرارة بالنسبة الكتلية (أو المولية)، والموصلية الحرارية بـ ρD_{AB} (أو CD_{AB})، والتدفق الحراري بالتدفق الكتلي (أو التدفق المولي)، كما هو موضح في الجدول (6 – 4).

الجدول (6 – 4) التشابه بين التوصيل الحراري والانتشار الكتلي في وسط ساكن.

التوصيل الحراري	الانتشار الكتلي	
	أساس كتلي	أساس مولي
T	w_i	y_i
λ	ρD_{AB}	CD_{AB}
$\dot{q}$	j_i	$\overline{j}_i$
a	D_{AB}	D_{AB}
L	L	L

بفرض إن جدار صلب مستوٍ (الوسط B) مساحته A وسماكته L وكثافته ρ. يتعرض الجدار من جانبيه إلى تراكيز مختلفة لمادة A تستطيع النفاذ عبر الجدار. نحدد السطوح الحدية عند $x = 0$ و $x = L$ بحيث تكون ملاصقة للسطح البيني ومن جهة الجدار الصلب، كما يبين

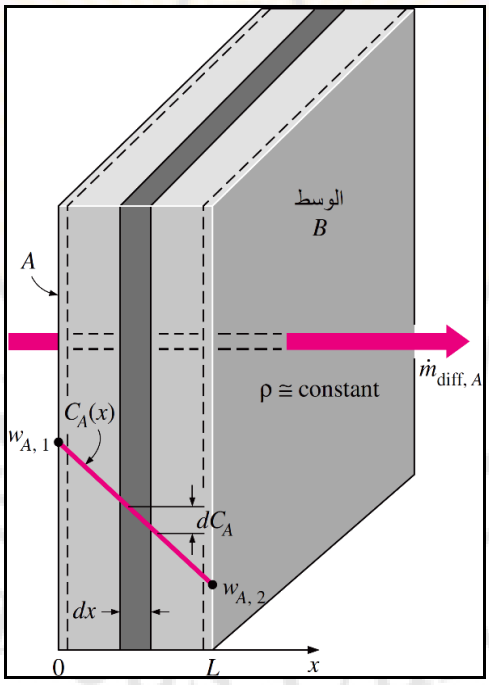
الشكل (6 – 9). ستتغير النسبة الكتلية للمادة A في الجدار باتجاه x فقط، ويمكن التعبير عنها بـ $w_A(x)$؛ بالتالي فإن انتقال الكتلة عبر الجدار في هذه الحالة مستقر أحادي البعد. نحسب معدل الانتشار الكتلي للمادة A عبر الجدار بأسلوب مماثل لما قمنا به في الفصل الثالث في حالة التوصيل الحراري.

بما إن العملية مستقرة، ولا يوجد أي تشكل أو فناء للمادة A لعدم وجود أية تفاعلات كيميائية تحدث في الوسط، فإن تركيز المادة A في أية نقطة لا يتغير مع الزمن؛ بالتالي يمكن التعبير عن مبدأ انحفاظ الكتلة للمادة A بأن معدل التدفق الكتلي للمادة A عبر الجدار عند أي مقطع عرضي هو نفسه، أي إن:

$$\dot{m}_{\text{diff},A} = j_A A = \text{constant}$$

وبالتالي يصبح قانون فيك في الانتشار بالشكل:

$$j_A = \frac{\dot{m}_{\text{diff},A}}{A} = -\rho D_{AB}\frac{dw_A}{dx} = \text{constant}$$



الشكل (6 – 9) الانتشار الكتلي المستقر أحادي البعد لمادة A عبر جدار مستوٍ.

بفصل المتحولات في هذه المعادلة وإجراء التكامل عبر الجدار من $x=0$ حيث $w\left(0\right)=w_{A,1}$ إلى $x=L$ حيث $w_A\left(L\right)=w_{A,2}$ نجد:

$$\frac{\dot{m}_{\text{diff},A}}{A}\int_0^L dx=-\int_{w_{A,1}}^{w_{A,2}}\rho D_{AB}dw_A \qquad \textbf{(21 – 6)}$$

حيث وضعنا معدل التدفق الكتلي $\dot{m}_{\text{diff},A}$ ومساحة سطح الجدار A خارج التكامل لأنهما ثابتان. إذا كان تغير الكثافة ρ ومعامل الانتشار الكتلي D_{AB} صغيراً عبر الجدار، فيمكننا أن نفرض أنهما ثابتان. بإجراء التكامل في هذه الحالة نجد:

$$\dot{m}_{\text{diff},A,\text{wall}}=\rho D_{AB}A\frac{w_{A,1}-w_{A,2}}{L}=D_{AB}A\frac{\rho_{A,1}-\rho_{A,2}}{L} \qquad \textbf{(22 – 6)}$$

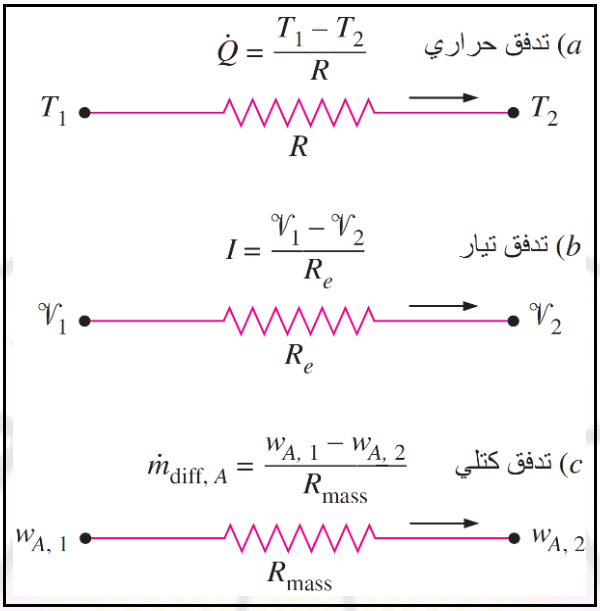
ويمكن إعادة ترتيب هذه المعادلة لتكتب بالشكل:

$$\dot{m}_{\text{diff},A,\text{wall}}=\frac{w_{A,1}-w_{A,2}}{L/\rho D_{AB}A}=\frac{w_{A,1}-w_{A,2}}{R_{\text{diff,wall}}} \qquad \textbf{(23 – 6)}$$

$R_{\text{diff,wall}}$: مقاومة الانتشار diffusion resistance للجدار، وهي مشابهة للمقاومة الكهربائية أو مقاومة التوصيل الحراري لجدار مستوٍ سماكته L ومساحته A، كما هو موضح في الشكل (6 – 10).

$$R_{\text{diff,wall}}=\frac{L}{\rho D_{AB}A} \qquad \left[\text{s/kg}\right]$$

وبالتالي نستنتج أن معدل الانتشار الكتلي عبر جدار مستوٍ يتناسب طرداً مع الكثافة الوسطية، ومساحة سطح الجدار، وفرق التركيز عبر الجدار، ولكنه يتناسب عكساً مع سماكة الجدار. بمجرد حساب معدل التدفق الكتلي يمكن حساب النسبة الكتلية $w_A\left(x\right)$ في أي موضع xمن الجدار من خلال استبدال $w_{A,2}$ في العلاقة (6 – 22) بـ $w_A\left(x\right)$ واستبدال L بـ x.



الشكل (6 – 10) التشابه بين المقاومة الحرارية والكهربائية ومقاومة الانتشار.

يمكن تكرار التحليل السابق من أجل الحساب على أساس مولي، والنتيجة هي:

$$\dot{N}_{\text{diff,A,wall}} = CD_{AB}A\frac{y_{A,1} - y_{A,2}}{L} = D_{AB}A\frac{C_{A,1} - C_{A,2}}{L} = \frac{y_{A,1} - y_{A,2}}{\overline{R}_{\text{diff,wall}}} \quad \textbf{(24 – 6)}$$

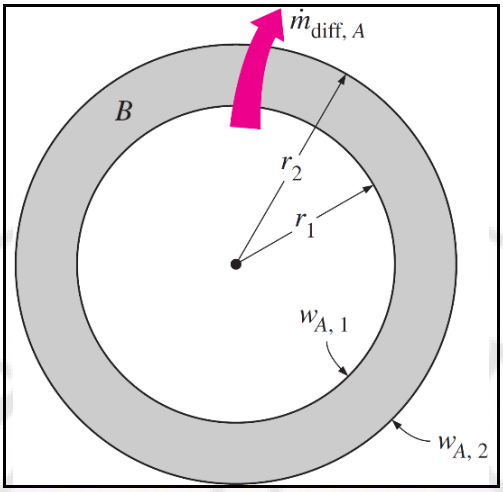
$\overline{R}_{\text{diff,wall}}$: مقاومة الانتشار المولية molar diffusion resistance للجدار.

$$\overline{R}_{\text{diff,wall}} = \frac{L}{CD_{AB}A} \qquad [\text{s/kmol}]$$

يمكن استخدام أي من العلاقات السابقة لحساب معدل الانتشار للمادة A عبر الجدار، وذلك بحسب المعطيات عند حدود الجدار.

إن تدرج التركيز مختلف على جانبي السطح البيني، وبالتالي لا يمكن إنشاء دارات لمقاومة الانتشار مثلما كنا نفعل في دارات المقاومة الحرارية المكافئة.

لقد افترضنا في أثناء استنتاجنا لهذه العلاقات أن الكثافة ومعامل الانتشار للجدار ثابتان تقريباً. إن هذا الافتراض مناسب في حال انتشار كميات قليلة من المادة A عبر الجدار، وبالتالي فإن تركيز A صغير. يمكن أن تكون المادة A غازاً أو مائعاً أو صلباً، كما يمكن أن يكون الجدار طبقة مستوية من مائع أو غاز بشرط أن يكون ساكناً.



الشكل (6 – 11) الانتشار الكتلي أحادي البعد عبر أسطوانة مفرغة أو كرة مفرغة.

يمكن الاستفادة من التشابه بين انتشار الحرارة والكتلة في حالة الأسطوانات والكرات أيضاً. بتكرار التحليل المذكور في الفصل الثالث من أجل التوصيل الحراري، يمكننا التوصل إلى علاقات الانتشار الكتلي المستقر أحادي البعد عبر طبقة أسطوانية أو كروية لا يحدث ضمنها أي تفاعل كيميائي، كما في الشكل (6 – 11):

$$\dot{m}_{\text{diff},A,\text{cyl}} = 2\pi L\,\rho D_{AB}\,\frac{w_{A,1}-w_{A,2}}{\ln\left(r_2/r_1\right)} = 2\pi L D_{AB}\,\frac{\rho_{A,1}-\rho_{A,2}}{\ln\left(r_2/r_1\right)} \qquad \textbf{(25 – 6)}$$

$$\dot{m}_{\text{diff},A,\text{sph}} = 4\pi r_1 r_2 \rho D_{AB}\,\frac{w_{A,1}-w_{A,2}}{r_2-r_1} = 4\pi r_1 r_2 D_{AB}\,\frac{\rho_{A,1}-\rho_{A,2}}{\ln\left(r_2/r_1\right)} \qquad \textbf{(26 – 6)}$$

أو على أساس مولي:

$$\dot{N}_{\text{diff},A,\text{cyl}} = 2\pi L C D_{AB}\,\frac{y_{A,1}-y_{A,2}}{\ln\left(r_2/r_1\right)} = 2\pi L D_{AB}\,\frac{C_{A,1}-C_{A,2}}{\ln\left(r_2/r_1\right)} \qquad \textbf{(27 – 6)}$$

$$\dot{N}_{\text{diff},A,\text{sph}} = 4\pi r_1 r_2 C D_{AB}\,\frac{y_{A,1}-y_{A,2}}{r_2-r_1} = 4\pi r_1 r_2 D_{AB}\,\frac{C_{A,1}-C_{A,2}}{r_2-r_1} \qquad \textbf{(28 – 6)}$$

L: طول الأسطوانة.

r_2, r_1: نصفا القطر الداخلي والخارجي للأسطوانة أو الكرة.

هنا أيضاً فإن السطوح الحدية عند $r = r_1$ و $r = r_2$ موجودة ضمن الطبقة الصلبة الملاصقة للسطح البيني، والنسب الكتلية للمادة A عند هذين السطحين هي $w_{A,1}$ و $w_{A,2}$ على

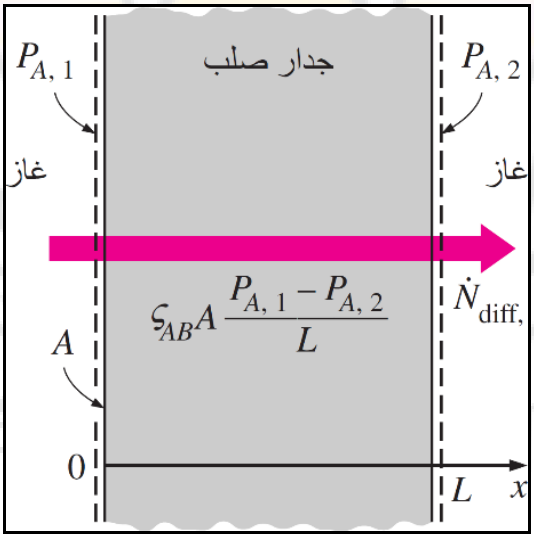
الترتيب، في أية لحظة من الزمن. نعرف الكثافة والتركيز المولي والنسبة المولية للمادة A عند السطوح الحدية بشكل مماثل.

ذكرنا سابقاً أن تركيز مادة غازية في مادة صلبة عند السطح البيني يتناسب طرداً مع الضغط الجزئي للغاز المجاور، وعبرنا عنه $C_{A,s} = \varpi_{AB} P_{A,g}$، حيث إن ϖ_{AB} هي انحلالية الغاز A في المادة الصلبة B وواحدتها $\left[\text{kmol/m}^3.\text{bar}\right]$. ذكرنا أيضاً إن جداء الانحلالية بمعامل الانتشار هي النفاذية $\varsigma_{AB} = \varpi_{AB} D_{AB}$ وواحدتها $\left[\text{kmol/m.s.bar}\right]$. بالتالي يمكن التعبير عن معدل التدفق المولي لغاز عبر مادة صلبة عند شروط مستقرة أحادية البعد بدلالة الضغط الجزئي للغاز الملاصق لجانبي المادة الصلبة، وذلك باستبدال C_A في المعادلات السابقة بـ $\varpi_{AB} P_A$ أو $\varsigma_{AB} P_A / D_{AB}$. على سبيل المثال في حالة جدار مستوٍ كالذي في الشكل (6 – 12)، فإن:

$$\dot{N}_{\text{diff},A,\text{wall}} = D_{AB} \varpi_{AB} A \frac{P_{A,1} - P_{A,2}}{L} = \varsigma_{AB} A \frac{P_{A,1} - P_{A,2}}{L} \qquad \textbf{(29 – 6)}$$

$P_{A,2}, P_{A,1}$: الضغط الجزئي للغاز A على جانبي الجدار.

يمكن التوصل إلى علاقات مشابهة من أجل جدران أسطوانية وكروية باتباع الإجراء السابق نفسه. في حال كانت النفاذية معطاة على أساس كتلي (أي بـ $\left[\text{kg/m.s.bar}\right]$)، فإن العلاقة (6 – 29) ستعطي معدل الانتشار الكتلي.



الشكل (6 – 12) معدل الانتشار لغاز عبر جدار صلب بدلالة الضغوط الجزئية للغاز على جانبي الجدار.

كما نعلم فإن حجم 1kmol من غاز مثالي عند الشروط النظامية حيث $0\,^{\circ}\text{C}$ و 1atm يساوي إلى $22.414\,\text{m}^3$، وبالتالي يحسب معدل التدفق الحجمي للغاز بالانتشار عبر الجدار بالشكل:

$$\dot{V}_{\text{diff},A} = 22.414\dot{N}_{\text{diff},A}$$

ومن أجل شروط أخرى، يحسب معدل التدفق الحجمي من قانون الغازات العام وفق:

$$P_A\dot{V} = \dot{N}_A R_u T$$

مثال 6 – 3:

ينقل الغاز الطبيعي في أنبوب من حديد الصب سماكته 1cm وقطره الداخلي 3m، وبضغط $500\,\text{kPa}$. النسبة المولية للهيدروجين في الغاز الطبيعي هي 8%، وانتشارية غاز الهيدروجين في حديد الصب $2.9\times10^{-13}\,\text{m}^2/\text{s}$، بينما تعطى انحلالية غاز الهيدروجين في حديد الصب بدلالة نسبته الكتلية بالعلاقة التالية:

$$w_{H_2} = 2.09\times10^{-4}\exp(-3950/T)\,P_{H_2}^{0.5}$$

حيث إن الضغط الجزئي للهيدروجين P_{H_2} بالبار، ودرجة حرارته T بالكلفن.

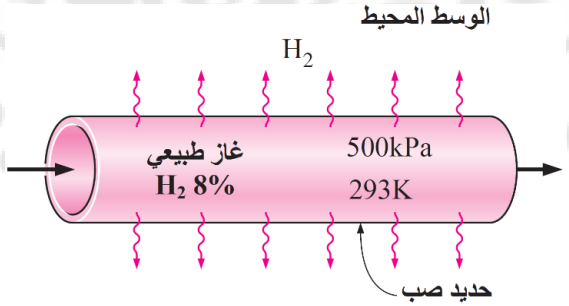
احسب أعلى معدل لفقد الهيدروجين عبر جزء من الأنبوب طوله $100\,\text{m}$ عند شروط الحالة المستقرة، حيث درجة الحرارة 293K، إذا كان الأنبوب معرضاً للهواء.

الحل:

المعطيات: غاز طبيعي يحوي 8% هيدروجين، ينقل بواسطة أنبوب من حديد الصب معرض للهواء.

المطلوب: أعلى معدل لفقد الهيدروجين عبر الأنبوب عند شروط الحالة المستقرة.

الشكل:



الافتراضات:

1. الانتشار الكتلي مستقر وأحادي البعد، لأن تركيز الهيدروجين في الأنبوب، وبالتالي عند السطح الداخلي للأنبوب، ثابت عملياً، وتركيز الهيدروجين في الجو مهمل. كما يوجد تناظر حول محور الأنبوب.
2. لا توجد تفاعلات كيميائية في الأنبوب تؤدي إلى توليد أو اختفاء النيتروجين.
3. كل من H_2 و CH_4 غاز مثالي.

الخواص:

الجدول (A1) الكتل المولية لـ H_2 و CH_4 هي:

$$H_2: \quad M_{H_2} = 2\,\text{kg/kmol}$$

$$CH_4: \quad M_{CH_4} = 16\,\text{kg/kmol}$$

الجدول (A3) كثافة حديد الصب: $\rho = 7854\,\text{kg/m}^3$

معامل الانتشار الثنائي للهيدروجين في حديد الصب عند درجة حرارة التشغيل معطى في نص المسألة: $D_{AB} = 2.9\times10^{-13}\,\text{m}^2/\text{s}$.

انحلالية غاز الهيدروجين في حديد الصب هي:

$$w_{H_2} = 2.09\times10^{-4}\exp(-3950/T)\,P_{H_2}^{0.5}$$

التحليل: يمكننا اعتبار التركيز المولي الكلي ثابتاً $(C = C_A + C_B \cong C_B = \text{constant})$ وأن الأنبوب وسط ساكن، لعدم وجود أي انتشار لجزيئات الحديد $(\dot{N}_B = 0)$، ولأن تركيز الهيدروجين ضمن مادة الأنبوب منخفض جداً ($C_A<1$).

تحسب الكتلة الظاهرية لمزيج H_2 و CH_4 في الأنبوب من العلاقة (6 - 8):

$$M = \sum y_i M_i = 0.08\times2 + 0.92\times16 = 14.88\,\text{kg/kmol}$$

بما إن النسبة المولية للهيدروجين هي 0.08، يحسب الضغط الجزئي للهيدروجين بالعلاقة (6 - 10):

$$y_{H_2} = \frac{P_{H_2}}{P} \Rightarrow P_{H_2} = 0.08\times500\,\text{kPa} = 40\,\text{kPa} = 0.4\,\text{bar}$$

وبالتالي فالنسبة الكتلية للهيدروجين هي:

$$w_{H_2} = 2.09\times10^{-4}\exp\left(-3950/T\right)P_{H_2}^{0.5}$$
$$= 2.09\times10^{-4}\exp\left(-3950/293\right)\times\left(0.4\right)^{0.5}$$
$$= 1.85\times10^{-10}$$

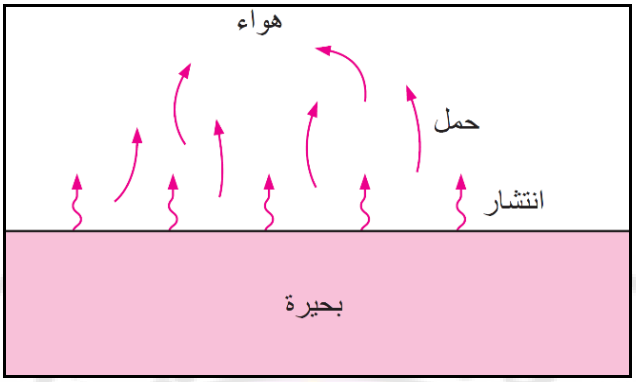
إن تركيز الهيدروجين في الهواء مساوٍ عملياً للصفر. بالتالي، في الحالة الحدية فإن تركيز الهيدروجين عند السطح الخارجي للأنبوب صفر. ومنه فإن المعدل الأعلى لفقد الهيدروجين عبر 100 m من الأنبوب عند شروط الحالة المستقرة يحسب بالعلاقة (6 – 27):

$$\dot{m}_{\text{diff},A,\text{cyl}} = 2\pi L\,\rho D_{AB}\,\frac{w_{A,1}-w_{A,2}}{\ln\left(r_2/r_1\right)}$$
$$= 2\pi\times100\,\text{m}\times7854\,\text{kg/m}^3\times1.9\times10^{-13}\times\frac{1.85\times10^{-10}-0}{\ln\left(1.51/1.5\right)}$$
$$= 3.98\times10^{-14}\,\text{kg/s}$$

6 - 6 - الانتشار في وسط متحرك *Diffusion in a Moving Medium*:

لقد ركزنا حتى الآن على الانتشار الكتلي في وسط ساكن، وبالتالي فإن الحركة الوحيدة التي تحدث هي الحركة البطيئة للجزيئات في اتجاه تناقص التركيز، ولم يكن هناك حركة للمزيج ككل. إن العديد من المسائل، مثل تبخر الماء من بحيرة تحت تأثير حركة الرياح أو امتزاج سائلين في أثناء جريانهما في أنبوب، تتضمن انتشاراً كتلياً في وسط متحرك، حيث تنتج الحركة الكلية للسائلين بتأثير قوة خارجية. إن الانتشار الكتلي في مثل هذه الحالة معقد لأن المواد الكيميائية تنتقل نتيجة الانتشار والحركة الكلية للوسط (أي الحمل). تتألف السرعة ومعادلات التدفق الكتلي لمادة في وسط متحرك من مركبتين: الأولى ناتجة عن الانتشار الجزيئي molecular diffusion، والثانية ناتجة عن الحمل convection، كما في الشكل (6 – 13).

إن تحليل الانتشار في وسط متحرك صعب للغاية، وذلك لوجود مواد مختلفة تتحرك بسرعات مختلفة وفي اتجاهات مختلفة، وفي حال وجود اضطراب، فإن التحليل سيصبح أكثر تعقيداً. من أجل فهم الآلية الفيزيائية بشكل جيد، وإبقاء التعقيدات الرياضية عند حدها الأدنى فإننا سنحصر دراستنا في الأنظمة التي تحوي مكونين فقط، وجريانا أحادي البعد (تتغير السرعة والخواص الأخرى في اتجاه واحد فقط). نفرض أيضاً أن الكثافة الكلية (أو التركيز المولي) للوسط تبقى ثابتة، أي إن $\rho = \rho_A + \rho_B = \text{constant}$ (أو $C = C_A + C_B = \text{constant}$)، لكن كثافتي A و B تتغيران في الاتجاه x.



الشكل (6 – 13) انتقال الكتلة بالانتشار والحمل في وسط متحرك.

يبين الجدول (6 – 5) العديد من الحالات الممكنة. في الحالة العادية (a) لمزيج متجانس ساكن، لن يحدث انتقال للكتلة لا بالانتشار ولا بالحمل، وذلك لعدم وجود تدرج في التركيز أو حركة كلية للمزيج. في الحالة التي تليها (b) وهي حالة جريان مزيج سائل ممزوج بشكل جيد ضمن أنبوب، نلاحظ عدم وجود تدرج في التركيز وبالتالي لا يوجد انتشار جزيئي في هذه الحالة. في الحالة الثالثة (c) حيث إن المزيج ساكن $(V = 0)$، وهي تمثل حالة انتشار كتلي عادي في أوساط ساكنة، والتي تعرفنا إليها سابقاً. نلاحظ إن سرعة المادة في موضع هي سرعة الانتشار diffusion velocity، والتي تساوي إلى السرعة الوسطية لمجموعة من الجزيئات عند هذا الموضع تتحرك تحت تأثير تدرج التركيز. في الحالة الأخيرة (d) والتي تتضمن كلاً من الانتشار الجزيئي والحمل، فإن سرعة أي مادة في هذه الحالة تساوي إلى مجموع سرعة الجريان الكلي وسرعة الانتشار. من الممكن أن تكون سرعتا الجريان والانتشار في الاتجاه نفسه أو في اتجاهين متعاكسين، وذلك يتعلق باتجاه درجة التركيز. تكون سرعة الانتشار لمادة ما سالبة إذا كان التدفق في الاتجاه الموجب للمحور x وكان تدرج التركيز موجباً (أي إن تركيز المادة يزداد في اتجاه المحور x).

بما أن معدل التدفق الكتلي عند أي مقطع عرضي في الجريان يساوي إلى $\dot{m} = \rho VA$، فإن علاقة انحفاظ الكتلة لجريان مزيج مكون من مادتين A وB تكتب بالشكل:

$$\dot{m} = \dot{m}_A + \dot{m}_B$$

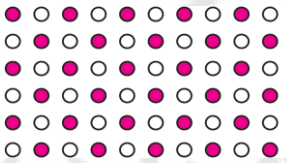
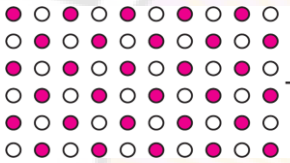
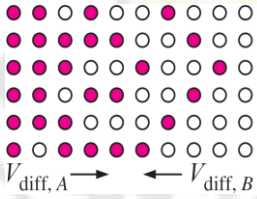
$$\rho VA = \rho_A V_A A + \rho_B V_B A$$

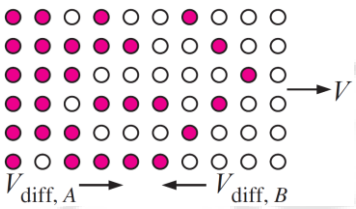
بالقسمة على A وحل العلاقة من أجل V، نجد:

$$V = \frac{\rho_A V_A + \rho_B V_B}{\rho} = \frac{\rho_A}{\rho} V_A = \frac{\rho_A}{\rho} V_B = w_A V_A + w_B V_B \qquad \textbf{(30 – 6)}$$

V: السرعة الكتلية الوسطية mass - average velocity للجريان.

الجدول (6 – 5) الأشكال المختلفة للانتشار الكتلي في مزيج ثنائي.

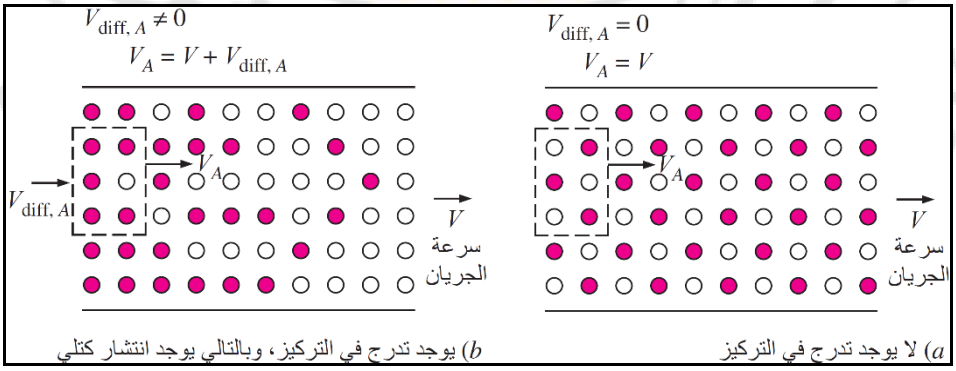
الحالة	$\bullet A \quad \circ B$		
الكثافة	**السرعة**	**معدل التدفق الكتلي**	
a) مزيج متجانس من دون حركة كلية (لا يوجد تدرج في التركيز، وبالتالي لا يحدث انتشار).	$V=0$		
$\rho_A = \text{constant}$	$V_A = 0$	$\dot{m}_A = 0$	
$\rho_B = \text{constant}$	$V_B = 0$	$\dot{m}_B = 0$	
$\rho = \rho_A + \rho_B = \text{constant}$	$V = 0$	$\dot{m} = 0$	
b) مزيج متجانس بوجود حركة كلية (لا يوجد تدرج في التركيز، وبالتالي لا يحدث انتشار)	$\rightarrow V$		
$\rho_A = \text{constant}$	$V_A = V$	$\dot{m}_A = \rho_A V_A A$	
$\rho_B = \text{constant}$	$V_B = V$	$\dot{m}_B = \rho_B V_B A$	
$\rho = \rho_A + \rho_B = \text{constant}$	$V = V$	$\dot{m} = \rho V A = \dot{m}_A + \dot{m}_B$	
c) مزيج غير متجانس من دون حركة كلية (وسط ساكن يحوي تدرج في التركيز)	$V=0$		
$\rho_A \neq \text{constant}$	$V_A = V_{\text{diff},A}$	$\dot{m}_A = \rho_A V_{\text{diff},A} A$	
$\rho_B \neq \text{constant}$	$V_B = V_{\text{diff},B}$	$\dot{m}_B = \rho_B V_{\text{diff},B} A$	
$\rho = \rho_A + \rho_B = \text{constant}$	$V = 0$	$\dot{m} = \rho V A = 0$	
		$\dot{m}_A = -\dot{m}_B$	

الحالة		$\bullet A \quad \circ B$
الكثافة	السرعة	معدل التدفق الكتلي
d) مزيج غير متجانس بوجود حركة كلية (وسط متحرك يحوي تدرجاً في التركيز)		
$\rho_A \neq \text{constant}$	$V_A = V + V_{\text{diff},A}$	$\dot{m}_A = \rho_A V_{\text{diff},A} A$
$\rho_B \neq \text{constant}$	$V_B = V + V_{\text{diff},B}$	$\dot{m}_B = \rho_B V_{\text{diff},B} A$
$\rho = \rho_A + \rho_B = \text{constant}$		$\dot{m} = \rho V A = \dot{m}_A + \dot{m}_B$

في الحالة الخاصة $V = 0$ وهي حالة وسط ساكن، ويمكن تعريف هذا الوسط بشكل أكثر دقة بأنه وسط سرعته الكتلية الوسطية معدومة؛ بالتالي فإن انتقال الكتلة في وسط ساكن يحدث بالانتشار فقط، وتشير السرعة الكتلية المعدومة إلى عدم وجود حركة كلية للسائل.

في حال عدم وجود تدرج تركيز في السائل، وبالتالي لا يوجد انتشار جزيئي للكتلة، فإن سرعة المواد جميعها في الوسط تساوي إلى السرعة الكتلية الوسطية للجريان، أي إن $V = V_A = V_B$. أما في حال كان هنالك تدرج في التركيز، فسيكون هناك جريان للمواد في اتجاه تناقص التركيز متزامناً مع الجريان الكلي للسائل، وسرعة هذا الجريان هي سرعة الانتشار V_{diff}. بالتالي فإن السرعة الوسطية للمادة A والمادة B تحسب من تراكب السرعة الوسطية للجريان مع سرعة الانتشار، كما يبين الشكل (6 – 16):

$$V_A = V + V_{\text{diff},A}$$
$$V_B = V + V_{\text{diff},B} \qquad \textbf{(31 – 6)}$$



الشكل (6 – 14) سرعة مادة ما في مزيج متحرك وبوجود تدرج في التركيز.

بشكل مشابه، من خلال تطبيق مبدأ التراكب على معدلات التدفق الكتلي للمواد، نجد:

$$\dot{m}_A = \rho_A V_A A = \rho_A \left(V + V_{\text{diff},A}\right)A = \rho_A VA + \rho_A V_{\text{diff},A} A = \dot{m}_{\text{conv},A} + \dot{m}_{\text{diff},A}$$
$$\dot{m}_B = \rho_B V_B A = \rho_B \left(V + V_{\text{diff},B}\right)A = \rho_B VA + \rho_B V_{\text{diff},B} A = \dot{m}_{\text{conv},B} + \dot{m}_{\text{diff},B} \quad \textbf{(32 - 6)}$$

باستخدام قانون فيك في الانتشار، يمكن التعبير عن التدفقات الكتلية $j = \dot{m}/A$ بالعلاقة التالية:

$$j_A = \rho_A V + \rho_A V_{\text{diff},A} = \frac{\rho_A}{\rho}\rho V - \rho D_{AB}\frac{dw_A}{dx} = w_A\left(j_A + j_B\right) - \rho D_{AB}\frac{dw_A}{dx}$$
$$j_B = \rho_B V + \rho_B V_{\text{diff},B} = \frac{\rho_B}{\rho}\rho V - \rho D_{BA}\frac{dw_B}{dx} = w_B\left(j_A + j_B\right) - \rho D_{BA}\frac{dw_B}{dx} \quad \textbf{(33 - 6)}$$

تكون سرعة الانتشار لمادة ما سالبة إذا كان الانتشار الجزيئي يحدث في الاتجاه السالب للمحور x. يمكن التعبير عن معدلات الانتشار الكتلي للمادتين A وB عند موضع محدد x بالعلاقة:

$$\dot{m}_{\text{diff,A}} = \rho_A V_{\text{diff},A} A = \rho_A \left(V_A - V\right)A$$
$$\dot{m}_{\text{diff},B} = \rho_A V_{\text{diff},B} A = \rho_B \left(V_B - V\right)A \quad \textbf{(34 - 6)}$$

من خلال تبديل قيمة V من العلاقة (6 - 30) في العلاقة (6 - 34)، يمكننا أن نبين أنه عند أي مقطع عرضي فإن:

$$\dot{m}_{\text{diff},A} + \dot{m}_{\text{diff},B} = 0 \Rightarrow \dot{m}_{\text{diff},A} = \dot{m}_{\text{diff},B} \Rightarrow -\rho A D_{AB}\frac{dw_A}{dx} = \rho A D_{BA}\frac{dw_B}{dx} \quad \textbf{(35 - 6)}$$

وتشير هذه العلاقة إلى أن معدلي الانتشار للمادتينA وB يجب أن يكونا متساويين في القيمة ومتعاكسان في الاتجاه. إن هذا الأمر هو نتيجة الفرضية $\rho = \rho_A + \rho_B = \text{constant}$، وهي تشير إلى أنه عندما تنتشر المادة A في اتجاه ما، فإن كمية مكافئة من المادة B يجب أن تنتشر في الاتجاه المعاكس، وذلك للحفاظ على الكثافة (أو التركيز المولي) ثابتة. يتحقق هذا الفرض بشكل تقريبي في المزائج الغازية المخففة والمحاليل المائعة والصلبة المخففة. على سبيل المثال عند انتشار كمية قليلة من غاز ما في مائع، فإنه من الممكن القول إن كثافة المائع تبقى ثابتة.

عند أي موضع x في مزيج ثنائي، فإن: $w_A + w_B = 1$. بأخذ المشتق بالنسبة لـ x نجد:

$$\frac{dw_A}{dx} = -\frac{dw_B}{dx} \quad \textbf{(36 - 6)}$$

وبالتالي نستنتج من العلاقة (6 – 36) أن:

$$D_{AB} = D_{BA} \qquad \textbf{(37 – 6)}$$

أي إنه في حالة ثبات التركيز الكلي، فإن معامل الانتشار للمادة A في B يساوي إلى معامل انتشار B في A.

سنكرر الآن التحليل السابق من أجل التركيز المولي C ومعدل التدفق المولي $\dot{N}$. تكتب علاقة انحفاظ المادة في هذه الحالة كما يلي:

$$\dot{N} = \dot{N}_A + \dot{N}_B$$

$$\rho \overline{V} A = \rho_A \overline{V}_A A + \rho_B \overline{V}_B A \qquad \textbf{(38 – 6)}$$

بالقسمة على A وحل العلاقة من أجل $\overline{V}$ نجد:

$$\overline{V} = \frac{C_A \overline{V}_A + C_B \overline{V}_B}{C} = \frac{C_A}{C}\overline{V}_A + \frac{C_B}{C}\overline{V}_B = y_A \overline{V}_A + y_B \overline{V}_B \qquad \textbf{(39 – 6)}$$

$\overline{V}$: السرعة المولية الوسطية molar - average velocity للجريان. يجب أن ننتبه إلى أن $V \neq \overline{V}$ إلا في حال كانت النسبة الكتلية والمولية هي نفسها.

تحسب معدلات التدفق المولي للمواد من العلاقة:

$$\dot{N}_A = C_A V_A A = C_A \left(\overline{V} + \overline{V}_{\text{diff},A}\right) A = C_A \overline{V} A + C_A \overline{V}_{\text{diff},A} A = \dot{N}_{\text{conv},A} + \dot{N}_{\text{diff},A}$$

$$\dot{N}_B = C_B V_B A = C_B \left(\overline{V} + \overline{V}_{\text{diff},A}\right) B = C_B \overline{V} A + C_B \overline{V}_{\text{diff},B} A = \dot{N}_{\text{conv},B} + \dot{N}_{\text{diff},B} \qquad \textbf{(40 – 6)}$$

باستخدام قانون فيك في الانتشار، يمكن التعبير عن التدفق المولي الكلي $\overline{j} = \dot{N}/A$ ومعدل التدفق المولي $\dot{N}_{\text{diff}}$ وفق العلاقة:

$$\overline{j}_A = C_A \overline{V} + C_A \overline{V}_{\text{diff},A} = \frac{C_A}{C} C\overline{V} - CD_{AB}\frac{dy_A}{dx} = y_A\left(\overline{j}_A + \overline{j}_B\right) - CD_{AB}\frac{dy_A}{dx}$$

$$\overline{j}_B = C_B \overline{V} + C_B \overline{V}_{\text{diff},B} = \frac{C_B}{C} C\overline{V} - CD_{BA}\frac{dy_B}{dx} = y_B\left(\overline{j}_A + \overline{j}_B\right) - CD_{BA}\frac{dy_B}{dx} \qquad \textbf{(41 – 6)}$$

$$\dot{N}_{\text{diff},A} = C_A \overline{V}_{\text{diff},A} A = C_A\left(V_A - \overline{V}\right) A$$

$$\dot{N}_{\text{diff},B} = C_B \overline{V}_{\text{diff},B} A = C_B\left(V_B - \overline{V}\right) A \qquad \textbf{(42 – 6)}$$

بتبديل قيمة $\overline{V}$ من العلاقة (6 – 39) في هاتين العلاقتين، يمكننا أن نبين أن:

$$\dot{N}_{\text{diff},A} + \dot{N}_{\text{diff},B} = 0 \Rightarrow \dot{N}_{\text{diff},A} = -\dot{N}_{\text{diff},B} \qquad \textbf{(43 – 6)}$$

وتظهر هذه النتيجة أيضاً أن معدلي الانتشار للمادتين A وB يجب أن يكونا متساويين في القيمة ومتعاكسين في الاتجاه.

من المهم أن ننتبه إلى أنه عند العمل مع الواحدات المولية، فإننا نقول عن الوسط أنه ساكن عندما تكون السرعة المولية الوسطية مساوية للصفر. في هذه الحالة فإن السرعة الوسطية للجزيئات معدومة، ولكن عند قياس السرعة الظاهرية للمزيج بواسطة مقياس للسرعة موضوع ضمن التيار فليس من الضروري أن تكون السرعة معدومة، وذلك بسبب اختلاف الكتل للجزيئات المختلفة. في وسط ساكن على أساس كتلي mass - based stationary medium، فإنه من أجل كل واحدة كتلة من المادة A تتحرك في اتجاه معين، فإن واحدة كتلة من المادة B تتحرك في الاتجاه المعاكس. في الوسط الساكن على أساس مولي molar - based stationary medium، فإنه من أجل كل مول من المادة A يتحرك في اتجاه ما، فإن مول من المادة B يتحرك في الاتجاه المعاكس، وقد ينتج عن هذا الأمر محصلة انتقال كتلة في اتجاه معين، ويمكن قياس هذه المحصلة بواسطة مقياس للسرعة، وذلك لأن الجزيئات المختلفة تمتلك كتلاً مختلفة.

إن التحليلين الكتلي والمولي متكافئان، ويمكن استخدام أي منهما في حل المسائل، ويتعلق اختيارنا لأحدهما على أساس المعطيات التي نمتلكها.

حالة خاصة: مزائج غازية ذات درجة حرارة وضغط ثابتين:

لنأخذ مزيجاً غازياً ضغطه الكلي ودرجة حرارته ثابتان في النقاط كافة. عندما يكون المزيج متجانساً فإن الكثافة الكتلية ρ والكثافة المولية (أو التركيز) C وثابت الغاز R والكتلة المولية M للمزيج هي نفسها على كامل المزيج. في حال كان تركيز أحد الغازات (أو أكثر من غاز واحد) في المزيج غير ثابت، فإن النسب المولية y_i للمواد ستتغير عبر المزيج. نتيجة ذلك فإن ثابت الغاز R والكتلة المولية M والكثافة الكتلية ρ للمزيج ستتغير أيضاً، بفرض إن المزيج يتصرف كغاز مثالي:

$$M = \sum y_i M_i \qquad R = \frac{R_u}{M} \qquad \rho = \frac{P}{RT}$$

R_u : ثابت الغازات العام. $R_u = 8.314 [\text{kJ/kmol.K}]$

بالتالي فإن افتراض أن كثافة المزيج ثابتة غير صحيح في هذه الحالة، إلا في حال كان الغاز أو الغازات المتغيرة التركيز تشكل نسبة قليلة جداً من المزيج. بالرغم من ذلك فإن الكثافة المولية C للمزيج تبقى ثابتة بثبات ضغط المزيج P ودرجة حرارته T لأن:

$$P = \rho RT = \rho \frac{R_u}{M} T = C R_u T \qquad \textbf{(44 - 6)}$$

إن الشرط $C = \text{constant}$ يبسط تحليل انتقال الكتلة بشكل ملحوظ، ومن الأنسب استخدام الصيغ المولية عند التعامل مع مزيج غازي ذي درجة حرارة وضغط ثابتين.

6 – 6 – 1 انتشار البخار في غاز ساكن: جريان ستيفان

***Diffusion of Vapor through a Stationary Gas: Stefan Flow*:**

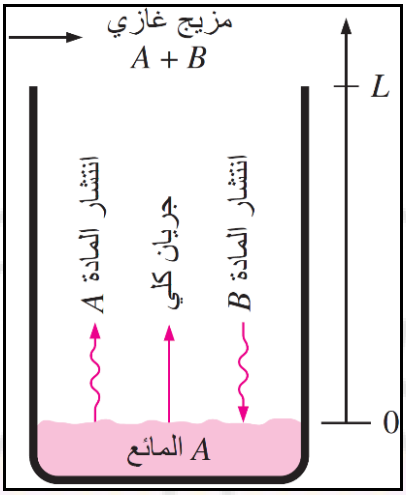
إن العديد من التطبيقات الهندسية (مثل الأنابيب الحرارية، بحيرات التبريد، عمليات النتح) تتضمن التكاثف والتبخر والرشح transpiration بوجود غازات غير قابلة للتكاثف، وبالتالي انتشاراً للبخار عبر غاز ساكن. لفهم وتحليل مثل هذه العمليات نأخذ طبقة من مائع ما A في خزان محاط بغاز B، مثل طبقة ماء مائع في خزان مفتوح على الهواء الجوي، كما في الشكل (6 – 15)، عند ضغط P ودرجة حرارة T ثابتين. نفرض أن الغاز غير قابل للانحلال في المائع، وأن كلاً من الغاز والبخار يسلكان سلوك غاز مثالي.

إذا كان الغاز الموجود عند أعلى الخزان $(x = L)$ غير مشبع، فإن ضغط البخار عند السطح البيني سيكون أكبر من ضغط البخار عن أعلى الخزان $\left(P_{A,0} > P_{A,L}\right)$، وبالتالي فإن $\left(y_{A,0} > y_{A,0}\right)$ لأن $\left(y_A = P_A / P\right)$، ويؤدي فرق الضغط (أو التركيز) هذا إلى صعود البخار من السطح البيني ماء – هواء إلى الأعلى عبر الغاز الراكد. إن تدفق البخار نحو الأعلى سيكون مصحوباً بتبخر مستمر للماء عند السطح البيني. عند شروط الحالة المستقرة، فإن معدل التدفق المولي (أو الكتلي) للبخار عبر عمود الغاز الراكد يبقى ثابتاً، أي إن:

$$\overline{j} = \dot{N}_A / A = \text{constant}$$

$$j_A = \dot{m}_A / A = \text{constant}$$

لقد قلنا في البدء إن ضغط المزيج ودرجة حرارته غاز – بخار ثابتان، وبالتالي فإن الكثافة المولية للمزيج يجب أن تكون ثابتة عبر المزيج، كما بينا سابقاً. أي إن $C = C_A + C_B = \text{constant}$، ومن الأنسب العمل مع النسبة المولية أو التراكيز المولية في هذه الحالة بدل العمل مع النسب أو الكثافات الكتلية، لأن $\rho \neq \text{constant}$.



الشكل (6 – 15) انتشار البخار A في الغاز الراكد B.

كما نعلم فإن $y_A + y_B = 1$، كما أن $y_{A,0} > y_{A,L}$، وبالتالي يجب أن يكون $y_{B,0} < y_{B,L}$. أي إن النسبة المولية للغاز يجب أن تتناقص نحو الأسفل بمقدار ازدياد النسبة المولية للبخار نفسه؛ بالتالي يجب أن ينتشر الغاز من أعلى العمود نحو الأسفل باتجاه السطح البيني. لقد ذكرنا أن الغاز عديم الانحلال في المائع، وبالتالي لا يمكن أن يكون هناك تدفق كتلي محصل للغاز نحو الأسفل. عند شروط الحالة المستقرة، يجب أن يكون هناك حركة كلية للمزيج نحو الأعلى بسرعة وسطية V، بحيث تكون هذه الحركة كبيرة كفاءة لتعادل انتشار الهواء نحو الأسفل بحيث يبقى معدل التدفق المولي (أو الكتلي) للغاز في أية نقطة مساوياً للصفر. وبكلمات أخرى فإن الحركة الكلية للمزيج تعوض الانتشار نحو الأسفل، ومن أجل كل جزيئة هواء تتحرك نحو الأسفل، فإن جزيئة هواء أخرى تتحرك نحو الأعلى. نتيجة ذلك يبدو الهواء ساكناً، أي إن:

$$\bar{j}_B = \dot{N}_B / A = 0$$
$$j_B = \dot{m}_B / A = 0$$

نتيجة الحركة الكلية، فإن وسط الانتشار لا يبقى ساكناً. إن تأويل الحركة الكلية للغاز هو أنها تنقل البخار كما تنقل الغاز نحو الأعلى بسرعة V، وينتج عنها تدفق كتلي إضافي للبخار نحو الأعلى. بالتالي يمكن التعبير عن التدفق المولي للبخار بالعلاقة:

$$\bar{j}_A = \dot{N}_A / A = \bar{j}_{A,\text{diff}} = y_A \left(\bar{j}_A + \bar{j}_B \right) - CD_{AB} \frac{dy_A}{dx} \qquad \textbf{(45 – 6)}$$

وكما نعلم فإن $\bar{j}_B = 0$ ، فتصبح العلاقة بالشكل:

$$\bar{j}_A = y_A \bar{j}_A - CD_{AB} \frac{dy_A}{dx} \qquad \textbf{(46 - 6)}$$

وبحل هذه المعادلة من أجل $\bar{j}_A$ نجد:

$$\bar{j}_A = -\frac{CD_{AB}}{1-y_A} \frac{dy_A}{dx} \Rightarrow -\frac{1}{1-y_A} \frac{dy_A}{dx} = \frac{\bar{j}_A}{CD_{AB}} = \text{constant} \qquad \textbf{(47 - 6)}$$

لأن $\bar{j}_A$ و C و D_{AB} ثوابت. بفصل المتحولات وإجراء التكامل من $x = 0$ حيث $y_A(0) = y_{A,0}$ إلى $x = L$ حيث $y_A(L) = y_{A,L}$ ، نجد:

$$-\int_{y_{A,0}}^{y_{A,L}} \frac{dy_A}{1-y_A} = \int_0^L \frac{\bar{j}_A}{CD_{AB}} dx \qquad \textbf{(48 - 6)}$$

ونتيجة التكامل هي:

$$\ln \frac{1-y_{A,L}}{1-y_{A,0}} = \frac{\bar{j}_A}{CD_{AB}} L \qquad \textbf{(49 - 6)}$$

وبالتالي فإن التدفق المولي للبخار A ، والذي هو معدل التبخر للمادة Aمن أجل واحدة المساحة من السطح البيني هو:

$$\bar{j}_A = \dot{N}_A / A = \frac{CD_{AB}}{L} \ln \frac{1-y_{A,L}}{1-y_{A,0}} \qquad \left[\text{kmol/s.m}^2\right] \qquad \textbf{(50 - 6)}$$

تعرف هذه العلاقة باسم قانون ستيفان Stefan's law، ويسمى جريان الحمل الناشئ في هذه الحالة والذي يعزز من الانتشار الكتلي بجريان ستيفان Stefan flow.

يمكن التوصل إلى علاقة لحساب تغير النسبة المولية للمادة Aمع xمن خلال إجراء التكامل في العلاقة (6 – 48) بحيث يكون الحد الأعلى هو x حيث $y_A(x) = y_A$ بدل L حيث $y_A(L) = y_{A,L}$ ، وينتج:

$$\ln \frac{1-y_A}{1-y_{A,0}} = \frac{\bar{j}_A}{CD_{AB}} x \qquad \textbf{(51 - 6)}$$

بتبديل $\bar{j}_A$ من العلاقة (6 – 50) في هذه العلاقة وإعادة الترتيب، نجد:

$$\frac{1-y_A}{1-y_{A,0}} = \left(\frac{1-y_{A,L}}{1-y_{A,0}}\right)^{x/L} \qquad \textbf{(52 - 6)}$$

وبما أن $y_A + y_B = 1$ ، نجد:

$$\frac{y_B}{y_{B,0}} = \left(\frac{y_{B,L}}{y_{B,0}}\right)^{x/L} \qquad \textbf{(53 - 6)}$$

من أجل الحفاظ على الحالة الإيزوترمية للخزان في أثناء التبخر، يجب إعطاء حرارة للخزان بمعدل:

$$\dot{Q} = \dot{m}_A h_{fg,A} = \bar{j}_A A_S h_{fg,A} = \left(\bar{j}_A M_A\right) A_S h_{fg,A} \qquad \textbf{(54 - 6)}$$

A_s: مساحة السطح البيني.

$h_{fg,A}$: الحرارة الكامنة للتبخر للمادة A.

M_A: الكتلة المولية للمادة A.

مثال 6 – 4:

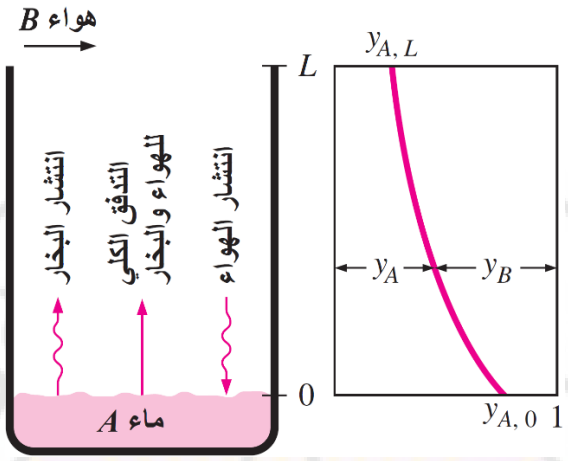
يستخدم أنبوب ستيفان قطره 3cm لقياس معامل الانتشار الثنائي لبخار الماء في الهواء عند درجة حرارة $20\,^{\circ}\text{C}$ وارتفاع 1600m، حيث الضغط 83.5kPa. يملأ الماء جزءاً من الأنبوب، والمسافة بين سطح الماء وفتحة الأنبوب 40cm. يتم نفخ هواء جاف على فتحة الأنبوب، بحيث تتم إزالة بخار الماء الصاعد نحو الفتحة بشكل مباشر، وبحيث يبقى تركيز البخار عند أعلى الأنبوب مساوياً للصفر. بعد 15 يوماً من بدء العملية، واستمرارها عند ضغط ودرجة حرارة ثابتين، فإن كامل كمية الماء المتبخرة هي 1.23g. احسب معامل الانتشار لبخار الماء عند شروط التجربة.

الحل:

المعطيات: أنبوب ستيفان يستخدم لقياس معامل الانتشار الثنائي لبخار الماء في الهواء.

المطلوب: معامل انتشار بخار الماء في الهواء.

الشكل:



الافتراضات:

1. بخار الماء والهواء غازان مثاليان.
2. كمية الهواء المنحلة في الماء المائع مهملة.
3. تنتقل الحرارة من الوسط المحيط إلى الماء لتأمين الحرارة الكامنة للتبخر، بيحث تبقى درجة حرارة الماء ثابتة $20\,^{\circ}\mathrm{C}$.

الخواص:

الجدول (A10) ماء $(T = 20\,^{\circ}\mathrm{C})$:

$$P_{\text{sat}} = 2.34\,\text{kPa}$$

التحليل: إن ضغط البخار عند السطح البيني هواء – ماء هو ضغط الإشباع للماء عند $20\,^{\circ}\mathrm{C}$، وتحسب النسبة المولية لبخار الماء (المادة A) عند السطح البيني من العلاقة:

$$y_{\text{vapor},0} y_{A,0} = \frac{P_{\text{vapor},0}}{P} = \frac{2.34\,\text{kPa}}{83.5\,\text{kPa}} = 0.028$$

يتم عند أعلى الأنبوب نفخ للهواء الجاف، وبالتالي $y_{\text{vapor},L} = y_{A,L} = 0$. فضلاً عن ذلك فإن التركيز المولي الكلي ضمن الأنبوب يبقى ثابتاً بسبب ثبات درجة الحرارة والضغط، ويحسب من العلاقة:

$$C = \frac{P}{R_u T} = \frac{83.5\,\text{kPa}}{8.314\,\text{kPa.m}^3/\text{kmol.K} \times 293\,\text{K}} = 0.0343\,\text{kmol/m}^3$$

مساحة المقطع العرضي للأنبوب، هي:

$$A = \pi D^4/4 = \pi\left(0.03\,\mathrm{m}\right)^2/4 = 7.069\times10^{-4}\,\mathrm{m}^2$$

إن كمية الماء المتبخرة خلال 15 يوماً هي $1.23\,\mathrm{g}$، وبالتالي يحسب معدل التدفق المولي للبخار كما يلي:

$$\dot{N}_A = \dot{N}_{\text{vapor}} = \frac{\dot{m}_{\text{vapor}}}{M_{\text{vapor}}} = \frac{m_{\text{vapor}}/t}{M_{\text{vapor}}}$$

$$= \frac{1.23\times10^{-3}\,\mathrm{kg}/\left(15\times24\times3600\right)\mathrm{s}}{18\,\mathrm{kg/kmol}} = 5.27\times10^{-11}\,\mathrm{kmol/s}$$

بتعويض هذه القيم في العلاقة (6 – 50):

$$\bar{j}_A = \dot{N}_A/A = \frac{CD_{AB}}{L}\ln\frac{1-y_{A,L}}{1-y_{A,0}}$$

$$\frac{5.27\times10^{-11}\,\mathrm{kmol/s}}{7.069\times10^{-4}\,\mathrm{m}^2} = \frac{0.0343\,\mathrm{kmol/m^3}\times\mathrm{D_{AB}}}{0.4\,\mathrm{m}}\ln\frac{1-0}{1-0.028}$$

$$\Rightarrow\ D_{AB}\,3.06\times10^{-5}\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}$$

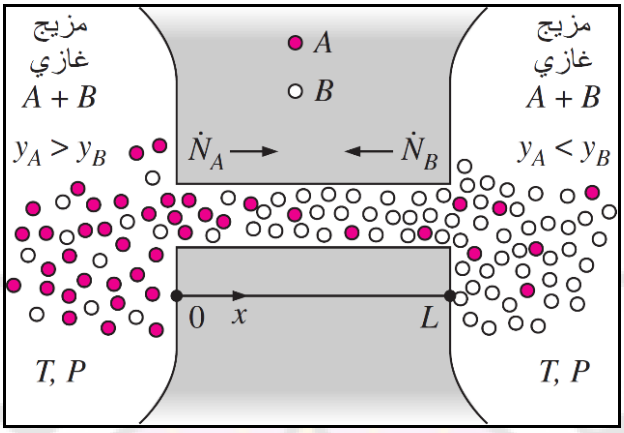
وهو معامل الانتشار الثنائي لبخار الماء في الهواء عند درجة حرارة $20\,^{\circ}\mathrm{C}$ وضغط $83.5\,\mathrm{kPa}$.

6 – 6 – 2 – الانتشار المتعاكس المتكافئ مولياً

***Equimolar Counterdiffusion*:**

بفرض إن وسطين كبيرين متصلان بقناة طولها L، كما في الشكل (6 – 16). يحتوي النظام بأكمله على مزيج ثنائي لغازين A و B عند درجة حرارة واحدة وضغط واحد على كامل المزيج. تبقى تراكيز المواد في كل من الوسطين ثابتة بحيث $y_{A,0} > y_{A,L}$ و $y_{B,0} < y_{B,L}$. يؤدي تدرج التركيز الناتج إلى انتشار المادة A في الاتجاه الموجب للمحور x وانتشار المادة B في الاتجاه المعاكس. بفرض إن الغازات مثالية، وبالتالي $P = CR_uT$، فإن التركيز المولي للمزيج C يبقى ثابتاً على كامل المزيج، لأن P و T ثابتان، أي إن:

$$C = C_A + C_B = \text{constant}$$



الشكل (6 – 16) الانتشار المتعاكس المتكافئ مولياً لغازين.

وهذا يقتضي أنه من أجل كل مول من المادة Aيتحرك نحو اليمين، فإن مول من المادة B يتحرك نحو اليسار، وبالتالي فمعدلا التدفق المولي للمادتين A وB يجب أن يكونا متساويين في القيمة ومتعاكسين في الإشارة، أي إن:

$$\dot{N}_A = -\dot{N}_B \quad \Rightarrow \quad \dot{N}_A + \dot{N}_B = 0$$

ولهذا السبب تسمى العملية بالانتشار المتعاكس المتكافئ مولياً equimolar counterdiffusion. إن معدل التدفق المولي المحصل للمزيج في مثل هذا النوع من العلميات، وبالتالي السرعة المولية الوسطية، مساوٍ للصفر لأن:

$$\dot{N} = \dot{N}_A + \dot{N}_B = 0 \Rightarrow CA\overline{V} = 0 \Rightarrow \overline{V} = 0$$

بالتالي فإن المزيج ساكن على أساس مولي، ويحدث انتقال الكتلة بالانتشار فقط (لا يوجد انتقال للكتلة بالحمل)، ولذلك فإن:

$$\overline{j}_A = \dot{N}_A / A = -CD_{AB} \frac{dy_A}{dx}$$
$$\overline{j}_B = \dot{N}_B / A = -CD_{BA} \frac{dy_B}{dx} \qquad \textbf{(55 – 6)}$$

يمكن حساب معدلي التدفق المولي للمادتين A وB عند شروط الحالة المستقرة مباشرةً من العلاقة (6 – 24) التي استنتجناها سابقاً من أجل انتشار مستقر أحادي البعد في وسط ساكن، مع الانتباه إلى أن $P = CR_uT$، وبالتالي $C = P/R_uT$ لكل مكون غازي من مكونات المزيج.

من أجل تدفق أحادي البعد عبر قناة ذات مقطع عرضي منتظم مساحته A ومن دون وجود تفاعلات كيميائية متجانسة، فإن العلاقة هي:

$$\dot{N}_{\text{diff},A} = CD_{AB}A\frac{y_{A,1}-y_{A,2}}{L} = D_{AB}A\frac{C_{A,1}-C_{A,2}}{L} = \frac{D_{AB}}{R_uT}A\frac{P_{A,0}-P_{A,L}}{L} \quad \textbf{(56 - 6)}$$

$$\dot{N}_{\text{diff},B} = CD_{BA}A\frac{y_{B,1}-y_{B,2}}{L} = D_{BA}A\frac{C_{B,1}-C_{B,2}}{L} = \frac{D_{BA}}{R_uT}A\frac{P_{B,0}-P_{B,L}}{L}$$

وتعني هذه العلاقة ضمناً إن كلاً من النسبة المولية والتركيز المولي والضغط الجزئي لكلا الغازين تتغير بشكل خطي في أثناء الانتشار المتعاكس المتكافئ مولياً.

من المهم أن ننتبه إلى إن المزيج ساكن على أساس مولي، ولكنه ليس ساكناً على أساس كتلي إلا إذا كانت الكتل المولية للمادتين A وB متساوية. بالرغم من إن معدل التدفق المولي المحصل عبر القناة مساوٍ للصفر، فإن معدل التدفق الكتلي المحصل للمزيج عبر القناة لا يساوي الصفر، ويحسب من العلاقة:

$$\dot{m} = \dot{m}_A + \dot{m}_B = \dot{N}_A M_A + \dot{N}_B M_B = \dot{N}_A\left(M_A - M_B\right) \quad \textbf{(57 - 6)}$$

حيث إن: $\dot{N}_B = -\dot{N}_A$

نلاحظ أن اتجاه معدل التدفق الكتلي المحصل هو اتجاه تدفق الغاز نفسه ذي الكتلة المولية الأكبر. في حال وضعنا مقياساً للسرعة في القناة، فإنه سيشير إلى سرعة $V = \dot{m}/\rho A$، حيث ρ هي الكثافة الكلية للمزيج في موضع القياس.

6 - 7 - الحمل الكتلي *Mass Convection*:

لقد درسنا حتى الآن الانتشار الكتلي، وهو انتقال الكتلة نتيجة تدرج التركيز. سندرس الآن الحمل الكتلي (انتقال الكتلة بالحمل)، وهو انتقال الكتلة بين سطح وسائل متحرك بتأثير الانتشار الكتلي والحركة الكلية للسائل. لقد ذكرنا في أثناء دراستنا لانتقال الحرارة إن حركة السائل تعزز من انتقال الحرارة بشكل ملحوظ، وذلك من خلال إبعاد السائل الساخن القريب من السطح واستبداله بسائل أبرد بعيد عن السطح. بالمثل فإن حركة السائل تعزز من انتقال الكتلة بشكل ملحوظ من خلال إبعاد السائل ذو التركيز المرتفع والقريب من السطح واستبداله بسائل أقل تركيزاً بعيد عن السطح. في الحالة الحدية، حيث لا توجد حركة كلية للسائل فإن، انتقال الكتلة يقتصر على الانتشار الكتلي، مثلما هو الحال في انتقال الحرارة، حيث يقتصر الأمر على التوصيل من دون وجود حمل حراري. إن التشابه بين الحمل الحراري والكتلي صحيح من أجل الحمل الطبيعي والقسري، والجريان الصفائحي والمضطرب، والجريان الداخلي والخارجي.

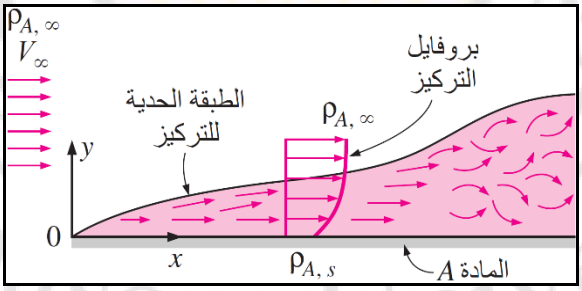
مثلما هو الحال في الحمل الحراري، فإن الحمل الكتلي معقد بسبب كثرة العوامل المؤثرة في جريان السائل، مثل الشكل الهندسي للجسم ونظام الجريان وسرعة الجريان والتغير في خواص السائل والانضغاط؛ بالتالي وكما هو الأمر بالنسبة للحمل الحراري، فإننا سنعتمد على علاقات تجريبية من أجل الحمل الكتلي، حيث إن هذه العلاقات ترتكز في أثناء التحليل على أساس كتلي بدلاً من أساس مولي. ويمكن التوصل إلى العلاقات على أساس مولي باستخدام العلاقة $C = \rho/M$، حيث إن M هي الكتلة المولية. من أجل تبسيط التحليل فإننا سنركز على الحمل في المزائج الثنائية، أو التي يمكن التعامل معها على هذا الأساس.

لنأخذ تيار هواء على السطح الحر لجسم مائي (مثل بحيرة) عند شروط أيزوترمية. إذا كان الهواء غير مشبع فإن تركيز بخار الماء سيتغير من قيمة عظمى عند سطح الماء حيث يكون الهواء مشبعاً إلى قيمة التركيز في التيار الحر بعيداً عن السطح. لقد عرفنا في الحمل الحراري المنطقة التي يوجد فيها تدرج في درجة الحرارة بأنها الطبقة الحدية الحرارية thermal boundary layer. بشكل مماثل، فإننا نعرف في الحمل الكتلي المنطقة التي يوجد فيها تدرج في التركيز بأنها الطبقة الحدية للتركيز concentaration boundary layer، كما في الشكل (6 – 17). تعرف سماكة الطبقة الحدية للتركيز δ_c في حالة جريان خارجي لمادة A في أي موضع على السطح بأنها المسافة y الناظمية على السطح، بحيث:

$$\frac{\rho_{A,s} - \rho_A}{\rho_{A,s} - \rho_{A,\infty}} = 0.99$$

$\rho_{A,s}$: كثافة المادة A عند السطح من جهة السائل.

$\rho_{A,\infty}$: كثافة المادة A في التيار الحر.

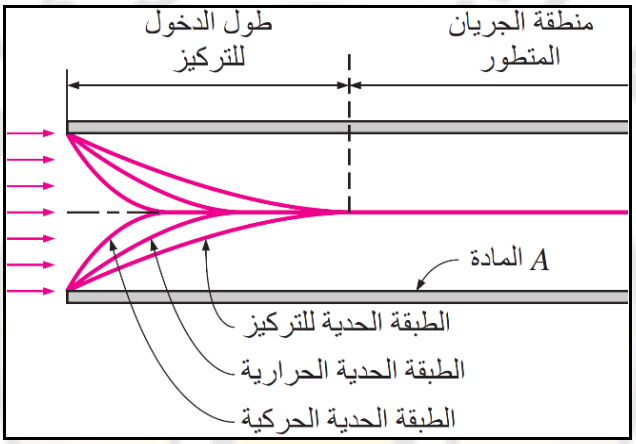


الشكل (6 – 17) تطور الطبقة الحدية للتركيز في أثناء جريان خارجي على سطح مستوٍ.

في حالة الجريان الداخلي، هنالك منطقة دخول للتركيز concentration entrance region، وهي المنطقة التي يتطور فيها بروفايل التركيز، وذلك فضلاً عن منطقتي الدخول الحرارية

والحركية، كما يبين الشكل (6 – 18). يستمر تطور الطبقة الحدية للتركيز باتجاه الجريان حتى تصل سماكتها إلى مركز الأنبوب حيث تتحد الطبقات الحدية. تسمى المسافة من بداية مدخل الأنبوب إلى الموضع الذي تتحد فيه الطبقات الحدية بطول الدخول للتركيز concentration entry length L_c، وتسمى المنطقة بعد نقطة الاتحاد منطقة الجريان المتطور fully developed region، وتوصف بالعلاقة:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\rho_{A,s}-\rho_A}{\rho_{A,s}-\rho_{A,b}}\right)=0 \qquad \textbf{(58 – 6)}$$



الشكل (6 – 18) تطور الطبقات الحدية الحركية والحرارية والتركيز في جريان داخلي.

$\rho_{A,b}$: الكثافة الوسطية الكلية للمادة A، وتعرف بالعلاقة:

$$\rho_{A,b}=\frac{1}{A_c V_{\text{ave}}}\int_{A_c}\rho_A V dA_c \qquad \textbf{(59 – 6)}$$

بالتالي فإن بروفايل فرق التركيز اللابعدي ومعامل انتقال الكتلة يبقيان ثابتين في منطقة الجريان المتطور. هذا الأمر مشابه لثبات معاملي الاحتكاك وانتقال الحرارة في منطقة الجريان المتطور.

عرفنا في انتقال الحرارة نسبة انتشار كمية الحركة إلى انتشار الحرارة في الطبقتين الحديتين الحركية والحرارية على أنها عدد لابعدي هو عدد براندل Pr Prandtl number، وذلك وفق العلاقة:

$$\textbf{عدد براندل:}\quad \textbf{Pr}=\frac{\text{الانتشارية الحركية}}{\text{الانتشارية الحرارية}}=\frac{\nu}{a} \qquad \textbf{(60 – 6)}$$

ويقابله في انتقال الكتلة عدد شميت Schmidt number اللابعدي، والذي يعرف بالعلاقة:

$$\textbf{Sc} = \frac{\text{الانتشارية الحركية}}{\text{الانتشارية الكتلية}} = \frac{\nu}{D_{AB}} \qquad \textbf{(6 - 61)}$$ **عدد شميث:**

ويعبر عن نسبة الانتشار الحركي إلى الانتشار الكتلي للجزيئات ضمن الطبقة الحدية للتركيز والطبقة الحدية الحركية، على الترتيب.

يتعلق التطور النسبي للطبقتين الحديتين الحركية والحرارية في الجريان الصفائحي بعدد براندل، في حين يتعلق التطور النسبي للطبقة الحدية الحركية والطبقة الحدية للتركيز بعدد شميت. عندما $(\text{Pr} \approx 1)$ فإن الانتشار الحركي والحراري متكافئان، وبالمثل إذا كان $(\text{Sc} \approx 1)$ فإن ذلك يدل على إن الانتشار الحركي والكتلي متكافئان، وتكون الطبقتان الحدية الحركية والحدية للتركيز متطابقتين تقريباً.

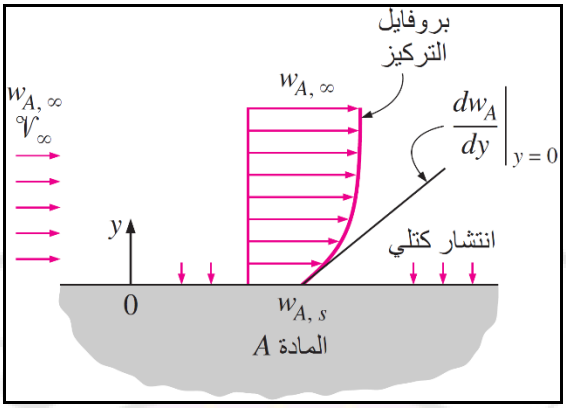
بالإضافة لعدد شميت، فإننا نحتاج لعدد لابعدي آخر للتعبير عن النسبة بين الانتشار الحراري والكتلي في الطبقتين الحدية الحرارية والحدية للتركيز، وهذا العدد هو عدد لويس Lewis Number، ويعرف بالعلاقة:

$$\textbf{Le} = \frac{\text{الانتشارية الحركية}}{\text{الانتشارية الكتلية}} = \frac{\textbf{Sc}}{\textbf{Pr}} = \frac{A}{D_{AB}} \qquad \textbf{(6 - 62)}$$ **عدد لويس:**

ويعبر عن السماكة النسبية بين الطبقات الحدية الحرارية والحركية والتركيز في الجريان الصفائحي بالعلاقات:

$$\frac{\delta_{\text{vel}}}{\delta_{\text{the}}} = \text{Pr}^n \qquad \frac{\delta_{\text{vel}}}{\delta_{\text{con}}} = \text{Sc}^n \qquad \frac{\delta_{\text{the}}}{\delta_{\text{con}}} = \text{Le}^n \qquad \textbf{(6 - 63)}$$

حيث إن $n = 1/3$ من أجل معظم التطبيقات. في الحالة العامة، فإن هذه العلاقات الثلاث غير صالحة للتطبيق على الطبقات الحدية المضطربة، حيث إن المزج الناتج عن الاضطراب في هذه الحالة يعد المؤثر الأساسي على عمليات الانتشار.



الشكل (6 – 19) انتقال الكتلة عند سطح ما.

عندما $(y = 0)$، كما في الشكل (6 – 19)، يحدث انتقال الكتلة بالانتشار فقط، وذلك بسبب شرط عدم الانزلاق no - slip condition، ويعطى التدفق الكتلي للمادة A عند السطح وفق قانون فيك:

$$j_A = \dot{m}_A / A = -\rho D_{AB} \left.\frac{dw_A}{dy}\right|_{y=0} \qquad \textbf{(64 – 6)}$$

وهي حالة مشابهة لانتقال الحرارة عند السطح، حيث يحدث انتقال الحرارة بالتوصيل فقط ويعبر عنه وفق قانون فوريه.

كما نعلم، فإن معدل الحمل الحراري لجريان خارجي يحسب وفق قانون نيوتن للتبريد. بشكل مشابه فإن معدل الحمل الكتلي يحسب وفق العلاقة:

$$\dot{m}_{\text{conv}} = \alpha_{\text{mass}} A \left(\rho_{A,s} - \rho_{A,\infty}\right) = \alpha_{\text{mass}} \rho A \left(w_{A,s} - w_{A,\infty}\right) \ [\text{kg/s}] \qquad \textbf{(65 – 6)}$$

α_{mass} : معامل انتقال الكتلة mass transfer coefficient. $[\text{m/s}]$

A : مساحة السطح. $[\text{m}^2]$

$\rho_{A,s} - \rho_{A,\infty}$: فرق التركيز الكتلي للمادة A عبر الطبقة الحدية للتركيز.

ρ : الكثافة الوسطية للسائل في الطبقة الحدية.

$w_{A,s} - w_{A,\infty}$: فرق النسبة الكتلية للمادة A في السائل عبر الطبقة الحدية.

يسمى الجداء $\alpha_{\text{mass}}\rho$ موصلية انتقال الكتلة mass transfer conductance، وواحدتها $[\text{kg/m}^2]$. في حال كان معامل انتقال الكتلة الموضعي متغيراً في اتجاه الجريان، فيحسب معامل انتقال الكتلة الوسطي بالعلاقة:

$$\alpha_{\text{mass,ave}} = \frac{1}{A}\int_A \alpha_{\text{mass}} dA \qquad \textbf{(66 – 6)}$$

لقد عبرنا كثيراً في أثناء تحليلنا للحمل الحراري عن معامل انتقال الحرارة بالحمل بصيغة عدد نوسلت اللابعدي، والذي يعرف وفق العلاقة:

$$\text{Nu} = \frac{\alpha_{\text{conv}} L}{\lambda} \qquad \textbf{(67 – 6)}$$

L: الطول المميز.

λ: الموصلية الحرارية للسائل.

ويقابل عدد نوسلت في الحمل الكتلي عدد شيروود Sherwood number اللابعدي، ويعرف بالعلاقة:

$$\text{Sh} = \frac{\alpha_{\text{mass}} L}{D_{AB}} \qquad \textbf{(68 – 6)}$$

α_{mass}: معامل انتقال الكتلة.

D_{AB}: الانتشارية الكتلية.

يعبر عددا نوسلت وشيروود عن فعالية الحمل الحراري والكتلي عند السطح، على الترتيب.

من الأمثل في بعض الأحيان التعبير عن معاملي انتقال الحرارة والكتلة بدلالة عدد ستانتون Stanton number اللابعدي:

عدد ستانتون لانتقال الحرارة: $$\text{St} = \frac{\alpha_{\text{conv}}}{\rho V c_p} = \text{Nu}\frac{1}{\text{Re}\,\text{Pr}} \qquad \textbf{(69 – 6)}$$

عدد ستانتون لانتقال الكتلة: $$\text{St}_{\text{mass}} = \frac{\alpha_{\text{mass}}}{V} = \text{Sh}\frac{1}{\text{Re}\,\text{Sc}} \qquad \textbf{(70 – 6)}$$

V: سرعة التيار الحر في الجريان الخارجي، أو السرعة الوسطية الكلية للسائل في الجريان الداخلي.

من أجل شكل هندسي معين، فإن عدد نوسلت الوسطي في الحمل القسري يتعلق بعددي رينولدز وبراندل، في حين إن عدد شيروود الوسطي يتعلق بعددي رينولدز وشميت، أي إن:

$$\text{Nu} = f\left(\text{Re}, \text{Pr}\right)$$

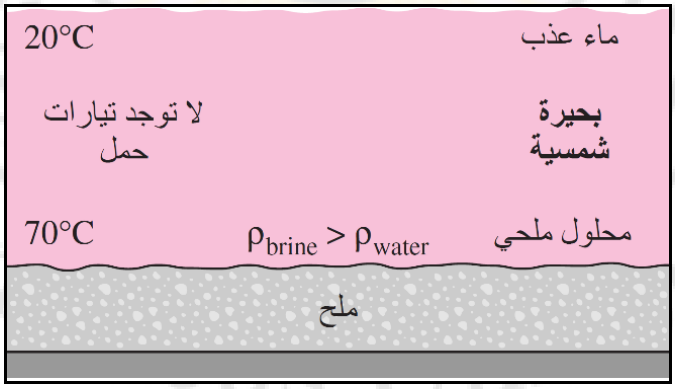
$$\text{Sh} = f\left(\text{Re}, \text{Sc}\right)$$

حيث إن الشكل التابعي هو نفسه لعددي نوسلت وشيروود من أجل شكل هندسي معين، بشرط أن تكون الطبقتان الحدية الحرارية والحدية للتركيز من النوع نفسه. بالتالي يحسب عدد شيروود من علاقات عدد نوسلت بعد استبدال عدد براندل بعدد شميت.

يبقى التشابه في حالة الحمل الكتلي الطبيعي قائماً بين عدد نوسلت وعدد شيروود، وبالتالي فإن $\mathrm{Sh} = f\left(\mathrm{Gr}, \mathrm{Sc}\right)$. ولكن تختلف صيغة عدد غراشوف في هذه الحالة:

$$\mathrm{Gr} = \frac{g\left(\rho_\infty - \rho_s\right)L_c^3}{\rho\nu^2} = \frac{g\left(\Delta\rho/\rho\right)L_c^3}{\nu^2} \qquad \textbf{(71 - 6)}$$

وهذه العلاقة صحيحة من أجل تيارات الحمل الطبيعي الناتجة عن درجة الحرارة و/أو التركيز. يجب أن ننتبه إلى أنه في السوائل المتجانسة (أي التي لا تحوي تدرجاً في التركيز) فإن فرق الكثافة ناتج عن فرق درجات الحرارة فقط، وبالتالي يمكننا استبدال $\Delta\rho/\rho$ بـ $\beta\Delta T$، كما كنا نفعل في الحمل الحراري الطبيعي. أما في السوائل غير المتجانسة، فإن فرق الكثافة ناتج عن التأثير المركب لفرق درجات الحرارة وفرق التراكيز، وبالتالي لا يمكننا استبدال $\Delta\rho/\rho$ بـ $\beta\Delta T$ في مثل هذه الحالة، حتى في حال كنا نهتم بانتقال الحرارة فقط ولا نولي أي اهتمام لانتقال الكتلة. على سبيل المثال، فإن الماء الساخن في قاع بحيرة ما سيصعد إلى الأعلى، ولكن عند إضافة الملح إلى قاع البحيرة، كما هو الحال في البحيرات الشمسية، فإن محلول الماء المالح الموجود في القاع لن يصعد إلى الأعلى لأنه أصبح أثقل من الماء العذب الموجود في الأعلى، كما يوضح الشكل (6 – 20). يبين الجدول (6 – 6) التشابه في القيم بين الحمل الحراري والكتلي.



الشكل (6 – 20) تأثير فرق الكثافة على تيارات الحمل الطبيعي.

تنشأ تيارات الحمل الطبيعي الناتجة عن فرق التركيز بسبب الكثافات المختلفة للمواد المختلفة في المزيج. بالتالي، فعند شروط إيزوترمية لن يكون هناك حمل طبيعي في مزيج غازي مكون من غازات ذات كتل مولية متساوية.

الجدول (6 – 6) لتشابه بين الحمل الحراري والكتلي.

الحمل الحراري	الحمل الكتلي
T	C, y, ρ, w
α_{conv}	α_{mass}
δ_{the}	δ_{con}
$\text{Re} = \frac{VL_c}{\nu}$	$\text{Re} = \frac{VL_c}{V}$
$\text{Gr} = \frac{g\beta(T_s - T_\infty)L_c^3}{\nu^2}$	$\text{Gr} \frac{g(\rho_\infty - \rho_s)L_c^3}{\rho\nu^2}$
$\text{Pr} = \frac{\nu}{a}$	$\text{Sc} = \frac{\nu}{D_{AB}}$
$\text{St} = \frac{\alpha_{\text{conv}}}{\rho V c_p}$	$\text{St}_{\text{mass}} = \frac{\alpha_{\text{mass}}}{V}$
$\text{Nu} = \frac{\alpha_{\text{conv}} L_c}{\lambda}$	$\text{Sh} = \frac{\alpha_{\text{mass}} L_c}{D_{AB}}$
$\text{Nu} = f(\text{Re}, \text{Pr})$	$\text{Sh} = f(\text{Re}, \text{Sc})$
$\text{Nu} = f(\text{Gr}, \text{Pr})$	$\text{Sh} = f(\text{Gr}, \text{Sc})$

6 – 7 – 1 – التشابه بين معاملات الاحتكاك وانتقال الحرارة وانتقال الكتلة:

***Analogy between Friction, Heat Transfer, and Mass Transfer Coefficients*:**

لنأخذ جريانـاً سـائلاً مـا علـى صـفيحة مستوية طولهـا L، وعنـد شـروط تيـار حـر $T_\infty, V_\infty, w_\infty$، كما في الشكل (6 – 21). كما نعلم فإن الحمل عند السطح $(y = 0)$ يساوي إلى الانتشار بسبب شرط عدم الانزلاق، ونعبر عن الاحتكاك وانتقال الحرارة وانتقال الكتلة عند السطح بالعلاقات:

الاحتكاك السطحي:(6 – 73)

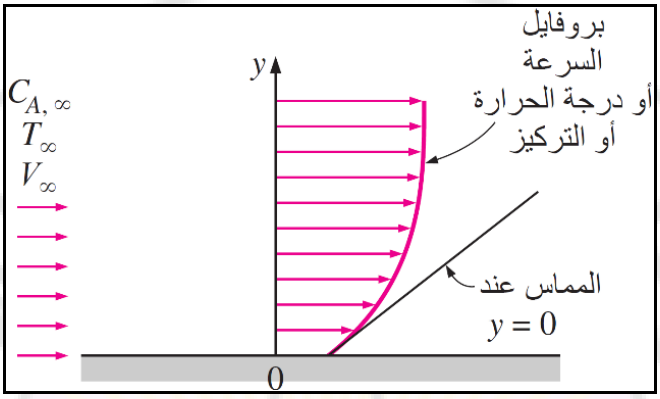
$$\tau_s = \mu \left.\frac{\partial V}{\partial y}\right|_{y=0} = \frac{f}{2}\rho V_\infty^2$$

انتقال الحرارة:

$$\dot{q}_s = -\lambda \left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=0} = \alpha_{\text{conv}} \left(T_s - T_\infty\right) \qquad (74-6)$$

انتقال الكتلة:

$$j_{A,s} = -D_{AB} \left.\frac{\partial w_A}{\partial y}\right|_{y=0} = \alpha_{\text{mass}} \left(w_{A,s} - w_{A,\infty}\right) \qquad (75-6)$$



الشكل (6 – 21) بروفايل السرعة ودرجة الحرارة والتركيز في جريان على صفيحة مستوية.

يمكن كتابة هذه العلاقات من أجل جريان داخلي باستخدام الخواص الوسطية الكلية بدل خواص التيار الحر. بعد إجراء بعض العمليات الرياضية على العلاقات الثلاث، تصبح بالشكل:

الاحتكاك السطحي:

$$\left.\frac{d\left(V/V_\infty\right)}{d\left(y/L\right)}\right|_{y=0} = \frac{f}{2}\frac{\rho V_\infty L}{\mu} = \frac{f}{2}\,\text{Re} \qquad (76-6)$$

انتقال الحرارة:

$$\left.\frac{d\left[\left(T - T_s\right)/\left(T_\infty - T_s\right)\right]}{d\left(y/L\right)}\right|_{y=0} = \frac{\alpha_{\text{conv}} L}{\lambda} = \text{Nu} \qquad (77-6)$$

انتقال الكتلة:

$$\left.\frac{d\left[\left(w_A - w_{A,s}\right)/\left(w_{A,\infty} - w_{A,s}\right)\right]}{d\left(y/L\right)}\right|_{y=0} = \frac{\alpha_{\text{mass}} L}{D_{AB}} = \text{Sh} \qquad (78-6)$$

يمثل الطرف الأيسر في كل من هذه العلاقات الثلاث ميل المماس عند السطح لبروفايلات السرعة ودرجة الحرارة والتركيز اللابعدية، بينما يمثل الطرف الأيمن الأعداد اللابعدية التي ناقشناها سابقاً.

6 – 7 – 2 – حالة خاصة: تشابه رينولدز ($\mathbf{Pr \approx Sc \approx 1}$)

***Special Case: Reynolds Analogy*:**

لنأخذ الحالة الافتراضية، حيث إن الانتشارية الجزيئية للحركة والحرارة والكتلة هي نفسها، أي إن $\nu = a = D_{AB}$، وبالتالي $\mathrm{Pr} = \mathrm{Sc} = \mathrm{Le} = 1$. في هذه الحالة فإن البروفايلات اللابعدية لكل من السرعة ودرجة الحرارة والتركيز ستكون متطابقة، وبالتالي فإن ميل المماس للمنحنيات الثلاثة عند السطح (أي الطرف الأيسر من العلاقات الثلاث السابقة) سيكون نفسه. ومنه، يمكننا القول إن الطرف الأيمن للعلاقات الثلاث هو نفسه:

$$\frac{f}{2}\mathrm{Re} = \mathrm{Nu} = \mathrm{Sh}$$

$$\frac{f}{2}\frac{V_\infty L}{\nu} = \frac{\alpha_{\mathrm{conv}} L}{\lambda} = \frac{\alpha_{\mathrm{mass}} L}{D_{AB}} \qquad \textbf{(79 – 6)}$$

وبما أن $\mathrm{Pr} = \mathrm{Sc} = 1$ فيمكننا أن نكتب هذه العلاقة بالشكل:

$$\frac{f}{2} = \frac{\mathrm{Nu}}{\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}} = \frac{\mathrm{Sh}}{\mathrm{Re}\,\mathrm{Sc}}$$

$$\frac{f}{2} = \mathrm{St} = \mathrm{St}_{\mathrm{mass}} \qquad \textbf{(80 – 6)}$$

وتعرف هذه العلاقة بتشابه رينولدز Reynolds Analogy، وتسمح لنا بحساب معاملات الاحتكاك وانتقال الحرارة وانتقال الكتلة، والتي قد تبدو غير مرتبطة ببعضها ظاهرياً، بمجرد معرفة أحدها. ومن المهم أن ننتبه إلى أن هذا التشابه صحيح فقط عندما $\mathrm{Pr} \approx \mathrm{Sc} \approx 1$. يمكننا استخدام الطرف الأول من التشابه بين معاملي الاحتكاك وانتقال الحرارة بشكل دائم من أجل الغازات، لأن عدد رينولدز للغازات قريب من الواحد.

6 – 7 – 3 – الحالة العامة: تشابه شيلتون – كولبرن ($\mathbf{Pr \neq Sc \neq 1}$)

***General Case: Chilton - Colburn Analogy*:**

يمثل تشابه رينولدز علاقة مفيدة للغاية، ومن الجيد تطويره ليشمل مجالاً أوسع من قيم عددي براندل وسميت. كان هناك العديد من المحاولات لتحقيق هذه الغاية، ولكن الصيغة الأبسط والأوسع انتشاراً هي المقترحة من قبل شيلتون وكولبرن:

$$\frac{f}{2} = \mathrm{St}\,\mathrm{Pr}^{2/3} = \mathrm{St}_{\mathrm{mass}}\,\mathrm{Sc}^{2/3} \quad ; \quad \begin{matrix} 0.6 < \mathrm{Pr} < 60 \\ 0.6 < \mathrm{Sc} < 3000 \end{matrix} \qquad \textbf{(81 – 6)}$$

تسمى هذه العلاقة تشابه شيلتون – كولبرن Chilton - Colburn analogy. باستخدام تعريف عددي ستانتون الحراري والكتلي، يمكن التعبير عن التشابه بين انتقال الحرارة والكتلة وفق العلاقة:

$$\frac{\mathrm{St}}{\mathrm{St}_{\mathrm{mass}}} = \left(\frac{\mathrm{Sc}}{\mathrm{Pr}}\right)^{2/3} \qquad \textbf{(82 – 6)}$$

$$\frac{\alpha_{\mathrm{conv}}}{\alpha_{\mathrm{mass}}} = \rho c_p \left(\frac{\mathrm{Sc}}{\mathrm{Pr}}\right)^{2/3} = \rho c_p \left(\frac{a}{D_{AB}}\right)^{2/3} = \rho c_p \,\mathrm{Le}^{2/3}$$

$$\frac{\alpha_{\mathrm{conv}}}{\alpha_{\mathrm{mass}}} = \rho c_p \left(\frac{a}{D_{AB}}\right)^{2/3} = \frac{2}{fV}\left(\frac{\nu}{D_{AB}}\right)^{2/3} \qquad \textbf{(83 – 6)}$$

من أجل مزيج هواء – بخار ماء عند درجة حرارة $298\,\mathrm{K}$، فإن $D_{AB} = 2.5\times10^{-5}\,\mathrm{m^2/s}$، $a = 2.18\times10^{-5}\,\mathrm{m^2/s}$ (نستخدم قيمة a للهواء الجاف بدل الهواء الرطب، لأن نسبة البخار في الهواء عند الشروط الجوية قليلة)؛ بالتالي فإن $\left(a/D_{AB}\right)^{2/3} = 0.913$ وهي تقريباً تساوي الواحد. وفضلاً عن ذلك فإن عدد لويس غير حساس لتغيرات درجة الحرارة. بالتالي، فمن أجل مزائج هواء – بخار ماء، فإن معاملي انتقال الحرارة والكتلة يرتبطان بالعلاقة التقريبية التالية، والتي تعطي دقة جيدة:

$$\alpha_{\mathrm{conv}} \cong \rho c_p \alpha_{\mathrm{mass}} \qquad \textbf{(84 – 6)}$$

ρ : كثافة الهواء عند شروط وسطية.

c_p: الحرارة النوعية للهواء عند شروط وسطية.

تعرف العلاقة (6 – 84) بعلاقة لويس Lewis relation، وتستخدم في تطبيقات تكييف الهواء. نتيجة أخرى مهمة لـ $\mathrm{Le} \cong 1$ هي أن درجة الحرارة الرطبة ودرجة حرارة الإشباع للهواء الرطب متطابقتان تقريباً. يمكن استخدام علاقة لويس في الجريان المضطرب حتى في حال كان عدد لويس غير مساوٍ للواحد، لأن المزج الناتج عن الدوامات في الجريان المضطرب يفوق أي انتشار جزيئي، وتنتقل الحرارة والكتلة عند المعدل نفسه.

إن تشابه شيلتون – كولبرن قائم بشكل جيد في الجريان الصفائحي أو المضطرب على السطوح المستوية. لكن هذا لا ينطبق دائماً في حالة الجريان الداخلي والجريان على الأشكال الهندسية غير المنتظمة، وفي مثل هذه الحالات يجب استخدام علاقات محددة طورت لمثل هذا الغرض. عند التعامل مع الأجسام غير الانسيابية blunt يجب الانتباه إلى أنه f في هذه

العلاقات هو معامل الاحتكاك السطحي skin friction coefficient، وليس معامل الجر الكلي، والذي يتضمن معامل جر الضغط.

6 – 7 – 4 – علاقات الحمل الكتلي *Mass Convection Relations*:

عند شرط التدفق الكتلي المنخفض، يمكن حساب معاملات الحمل الكتلي بإحدى الطرق التالية:

* حساب معامل الاحتكاك أو معامل انتقال الحرارة، ومن ثم تطبيق تشابه شيلتون – كولبرن.
* اختيار علاقة نوسلت المناسبة للشكل الهندسي والشروط الحدية المعطاة، ومن ثم استبدال عدد نوسلت بعدد شيروود، واستبدال عدد براندل بعدد شميت، كما هو مبين في الجدول (6 – 7).

إن الطريقة الأولى أنسب في حال كنا نعلم قيمة معامل الاحتكاك أو معامل انتقال الحرارة. بخلاف ذلك، فإنه من الأفضل استخدام الطريقة الثانية لأنها أكثر دقة. يمكن العودة إلى الفصل الرابع واستخدام علاقات الحمل، وذلك لإيجاد العلاقات غير الواردة في الجدول (6 – 7)، وذلك من أجل تطبيق الطريقة الأولى في حساب معاملات الحمل الكتلي.

الجدول (6 – 7) علاقات عدد شيروود في الحمل الكتلي من أجل تركيز محدد عند السطح.

الحالة	عدد شيروود
1. حمل قسري على صفيحة مستوية:	
a) جريان صفائحي $\left(\mathrm{Re} < 5\times10^5\right)$	$\mathrm{Sh} = 0.664\,\mathrm{Re}_L^{0.5}\,\mathrm{Sc}^{1/3} \quad ;\ \mathrm{Sc} > 0.5$
b) جريان مضطرب $\left(5\times10^5 < \mathrm{Re} < 10^7\right)$	$\mathrm{Sh} = 0.037\,\mathrm{Re}_L^{0.8}\,\mathrm{Sc}^{1/3} \quad ;\ \mathrm{Sc} > 0.5$
2. جريان متطور في أنابيب ملساء:	
a) جريان صفائحي $\left(\mathrm{Re} < 2300\right)$	$\mathrm{Sh} = 3.66$
b) جريان مضطرب $\left(\mathrm{Re} > 10{,}000\right)$	$\mathrm{Sh} = 0.023\,\mathrm{Re}^{0.8}\,\mathrm{Sc}^{0.4} \quad ;\ 0.7 < \mathrm{Sc} < 160$
3. حمل طبيعي:	
a) صفيحة شاقولية	$\mathrm{Sh} = 0.59\left(\mathrm{Gr}\,\mathrm{Sc}\right)^{1/4} \quad ;\ 10^5 < \mathrm{Gr}\,\mathrm{Sc} < 10^9$ $\mathrm{Sh} = 0.1\left(\mathrm{Gr}\,\mathrm{Sc}\right)^{1/3} \quad ;\ 10^9 < \mathrm{Gr}\,\mathrm{Sc} < 10^{13}$
b) السطح العلوي لصفيحة أفقية $\left(\rho_s < \rho_\infty\right)$	$\mathrm{Sh} = 0.54\left(\mathrm{Gr}\,\mathrm{Sc}\right)^{1/4} \quad ;\ 10^4 < \mathrm{Gr}\,\mathrm{Sc} < 10^7$ $\mathrm{Sh} = 0.15\left(\mathrm{Gr}\,\mathrm{Sc}\right)^{1/3} \quad ;\ 10^7 < \mathrm{Gr}\,\mathrm{Sc} < 10^{11}$
c) السطح السفلي لصفيحة أفقية $\left(\rho_s < \rho_\infty\right)$	$\mathrm{Sh} = 0.27\left(\mathrm{Gr}\,\mathrm{Sc}\right)^{1/4} \quad ;\ 10^5 < \mathrm{Gr}\,\mathrm{Sc} < 10^{11}$

مثال 6 – 5:

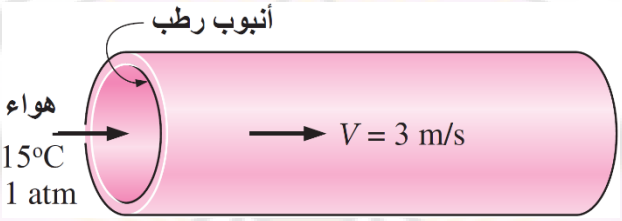
أنبوب قطره الداخلي 15 cm وطوله 10 m، سطحه الداخلي رطب. يتم تجفيف الأنبوب بواسطة تيار هواء ضغطه 1 atm ودرجة حرارته 15 °C، حيث يتم تمرير الهواء بشكل قسري، وبسرعة وسطية 3 m/s. يمر الأنبوب عبر غرفة مبردة، ويحافظ على درجة حرارة وسطية 15 °C بشكل دائم. احسب معامل انتقال الكتلة داخل الأنبوب.

الحل:

المعطيات: تيار هواء قسري يستخدم لتجفيف طبقة مائع على السطح الداخلي لأنبوب.

المطلوب: معامل انتقال الكتلة داخل الأنبوب.

الشكل:



الافتراضات:

1. النسبة الكتلية للبخار في الهواء منخفضة (حوالي 2% من أجل الهواء المشبع عند 300 K)، أي إن حالة التدفق الكتلي المنخفض، وبالتالي التشابه بين انتقال الحرارة والكتلة، صالحة للتطبيق.
2. الجريان متطور.

الخواص:

بسبب حالة التدفق الكتلي المنخفض، يمكننا استخدام خواص الهواء الجاف للمزيج عند درجة حرارة وضغط محددين.

الجدول (A16) هواء جاف $(T = 15\,^{\circ}\text{C}, P = 1\text{atm})$:

$$\nu = 1.47\times10^{-5}\ \text{m}^2/\text{s}$$

نحسب الانتشارية الكتلية لبخار الماء في الهواء عند 288 K من العلاقة (6 – 15):

$$D_{AB} = D_{\text{H}_2\text{O–air}} = 1.87\times10^{-10}\frac{T^{2.072}}{P}$$

$$= 1.87\times10^{-10}\times\frac{(288\,\text{K})^{2.072}}{1} = 2.33\times10^{-5}\ \text{m}^2/\text{s}$$

التحليل: نحسب عدد رينولدز للجريان:

$$\mathrm{Re} = \frac{VD}{\nu} = \frac{3\,\mathrm{m/s} \times 0.15\,\mathrm{m}}{1.47 \times 10^{-5}\,\mathrm{m^2/s}} = 30,612$$

وهذه القيمة أكبر من $10,000$، وبالتالي فالجريان مضطرب، ويحسب عدد شميت من العلاقة (6 – 61):

$$\mathrm{Sc} = \frac{\nu}{D_{AB}} = \frac{1.47 \times 10^{-5}\,\mathrm{m^2/s}}{2.33 \times 10^{-5}\,\mathrm{m^2/s}} = 0.631 \quad ; \quad 0.7 < \mathrm{Sc} < 160$$

وبالتالي فإن عدد شيروود في هذه الحالة يحسب من العلاقة المناسبة من الجدول (6 – 7):

$$\mathrm{Sh} = 0.023\,\mathrm{Re}^{0.8}\,\mathrm{Sc}^{0.4}$$
$$= 0.023(30,612)^{0.8}\,(0.631)^{0.4} = 74.2$$

ومن تعريف عدد شيروود، فإن معامل انتقال الكتلة، هو:

$$\alpha_{\mathrm{mass}} = \frac{D_{AB}}{D}\,\mathrm{Sh} = \frac{2.33 \times 10^{-5}\,\mathrm{m^2/s}}{0.15\,\mathrm{m}} \times 74.2 = 0.0115\,\mathrm{m/s}$$

المناقشة: في حال كانت قيمة عدد رينولدز أقل من 2300، فإن الجريان صفائحي، وفي هذه الحالة فإن عدد شيروود $\mathrm{Sh} = 3.66$، كما هو الأمر بالنسبة لعدد نوسلت في حالة الحمل الحراري.

6 - 8 - الانتقال المتزامن للحرارة والكتلة

Simultaneous Heat and Mass Transfer:

إن العديد من عمليات انتقال الكتلة التي نصادفها في التطبيقات تحدث بشكل إيزوترمي، وبالتالي فإنها لا تتضمن أي انتقال للحرارة. لكن بعض التطبيقات الهندسية تتضمن تبخر المائع، وانتشار البخار في الغاز المحيط. تتطلب مثل هذه العمليات انتقال الحرارة الكامنة للتبخر h_{fg} إلى المائع من أجل تبخره، وبالتالي فإن هذه المسائل تتضمن انتقالاً متزامناً للحرارة والكتلة. من أجل التعميم، فإن أي مسألة انتقال كتلة تتضمن تحولاً طورياً (تبخر، تصعد، تكاثف، ذوبان، ...) يجب أن تتضمن أيضاً انتقالاً للحرارة، ويتطلب حل مثل هذه المسائل أخذ الانتقال المتزامن للحرارة والكتلة بالحسبان. من الأمثلة على الانتقال المتزامن للحرارة والكتلة: التجفيف، التبريد التبخيري، التبريد بالتعرق، التبريد بالثلج الجاف، احتراق قطرات الوقود، وحتى الأحداث الاعتيادية

مثل المطر والثلج والبَرَد. ففي الأماكن الدافئة على سبيل المثال، فإن الثلج يذوب والمطر يتبخر قبل الوصول إلى الأرض.

لفهم آلية الانتقال المتزامن للحرارة والكتلة، سندرس تبخر الماء من حوض سباحة إلى الهواء. لنفرض أن الماء والهواء في البداية عند درجة الحرارة نفسها. إذا كان الهواء مشبعاً (أي إن الرطوبة النسبية $\phi = 100\%$)، فلن يكون هناك انتقال للحرارة أو للكتلة طالما إن الشروط الإيزوترمية ما زالت سائدة. لكن إذا كان الهواء غير مشبع $(\phi < 100\%)$، سيكون هناك فرق في تركيز بخار الماء عند السطح البيني هواء – ماء (حيث الهواء مشبع دائماً) وتركيز بخار الماء عند مسافة ما فوق السطح (ضمن الطبقة الحدية للتركيز). يمثل فرق التركيز القوة المسببة لانتقال الكتلة، وبالتالي فإن فرق التركيز هذا سيؤدي إلى انتقال الماء إلى الهواء. لكن يجب على الماء قبل أن ينتقل أن يتبخر، وبالتالي يجب أن يمتص حرارة مساوية للحرارة الكامنة للتبخر لكي يتبخر. في البداية، سيأتي كامل حرارة التبخر من الماء القريب من السطح البيني، وذلك لعدم وجود فرق في درجات الحرارة بين الماء والوسط المحيط، وبالتالي لا يمكن أن يكون هناك أي انتقال للحرارة. نتيجة الفقد في الحرارة المحسوسة، فإن درجة حرارة الماء القريب من السطح البيني يجب أن تنخفض، مما يؤدي أيضاً إلى انخفاض ضغط الإشباع، وبالتالي انخفاض تركيز البخار عند السطح البيني.

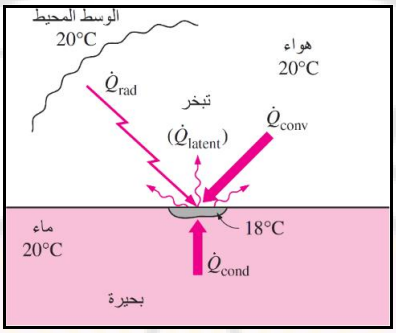
يؤدي هبوط درجة الحرارة في الماء القريب من السطح البيني إلى ظهور فرق في درجات الحرارة ضمن الماء الموجود في أعلى الحوض، كما يظهر فرق في درجات الحرارة بين الماء والهواء المحيط. يؤدي فرق درجات الحرارة هذا إلى انتقال الحرارة من كل من الهواء والماء الموجود في عمق الحوض إلى الماء عند السطح، كما يبين الشكل (6 – 22). إذا كان معدل التبخر مرتفعاً فإن الحاجة إلى حرارة التبخر ستكون أكبر من كمية الحرارة التي تقدمها الأجزاء السفلية من الجسم المائي والوسط المحيط، وسيتم تعويض العجز من الحرارة المحسوسة للماء عند السطح، وبالتالي ستنخفض درجة حرارة الماء عند السطح بشكل إضافي. تستمر هذه العملية حتى تصبح الحرارة الكامنة للتبخر مساوية لمعدل انتقال الحرارة إلى الماء عند السطح. بمجرد الوصول إلى شروط العملية المستقرة واستقرار درجة حرارة السطح البيني، فإننا نعبر عن التوازن الطاقي لطبقة رقيقة من المائع عند السطح وفق العلاقة:

الحرارة الكامنة الممتصة = الحرارة المحسوسة المنتقلة

$$\dot{Q}_{\text{sensible, tra}} = \dot{Q}_{\text{latent, abs}}$$
$$\dot{Q} = \dot{m}_v h_{fg} \qquad \textbf{(85 – 6)}$$

$\dot{m}_v$: معدل التبخر.

h_{fg} : الحرارة الكامنة لتبخر الماء عند درجة حرارة السطح.



الشكل (6 – 22) الآليات المختلفة لانتقال الحرارة في أثناء تبخر الماء من سطح بحيرة.

يعطي الجدول (6 – 8) علاقات مختلفة لـ $\dot{m}_v$ من أجل فرضيات مختلفة. تحسب خواص المزيج (مثل الحرارة النوعية c_p، الكتلة المولية M) عند التركيب الوسطي للغشاء mean film composition ودرجة الحرارة الوسطية للغشاء mean film temperature. بالرغم من ذلك، عند التعامل مع مزيج هواء – بخار ماء عند الشروط الجوية أو أية عمليات ذات تدفق كتلي مخفض، يمكننا استخدام خواص الغاز من دون أن يكون هناك تأثير كبير على الدقة.

تعبر $\dot{Q}$ في العلاقة (6 – 85) عن أشكال الحرارة جميعها المنتقلة إلى السطح من المنابع كافة، وتتضمن الحمل والإشعاع من الوسط المحيط والتوصيل من الأجزاء السفلية للجسم المائي الناتج عن الطاقة المحسوسة للماء نفسه أو نتيجة تسخين الجسم المائي بواسطة وشيعة تسخين أو مقاومة تسخين كهربائية أو حتى تفاعلات كيميائية في الماء. إذا كان انتقال الحرارة من الجسم المائي إلى السطح والإشعاع من الوسط المحيط مهملين، وهي الحالة التي نتعامل معها عادةً، بالتالي فإن الفقد الحراري بالتبخر يساوي إلى الكسب الحراري بالحمل، أي أن:

$$\dot{Q}_{\text{conv}} = \dot{m}_v h_{fg}$$
$$\alpha_{\text{conv}} A_s \left(T_\infty - T_s\right) = \frac{\alpha_{\text{conv}} A_s h_{fg}}{c_p \, \text{Le}^{2/3}} \frac{M_v}{M} \frac{P_{v,s} - P_{v,\infty}}{P}$$

بالقسمة على $\alpha_{\text{conv}} A_s$ في المعادلة الثانية نجد:

$$T_s = T_\infty - \frac{h_{fg}}{c_p \, \mathrm{Le}^{2/3}} \frac{M_v}{M} \frac{P_{v,s} - P_{v,\infty}}{P} \qquad \textbf{(86 - 6)}$$

وهي علاقة فرق درجات الحرارة بين المائع والغاز المحيط عند شروط الحالة المستقرة.

الجدول (6 – 8) علاقات معدل التبخر لمائع في غاز عبر السطح البيني.

الفرضية	معدل التبخر
الحالة العامة:	$\dot{m}_v = \alpha_{\text{mass}} A_s \left(\rho_{v,s} - \rho_{v,\infty} \right)$
بفرض إن البخار غاز مثالي: $P_v = \rho_v R_v T$	$\dot{m}_v = \frac{\alpha_{\text{mass}} A_s}{R_v} \left(\frac{P_{v,s}}{T_s} - \frac{P_{v,\infty}}{T_\infty} \right)$
باستخدام تشابه شيلتون – كولبرن: $\alpha_{\text{conv}} = \rho c_p \alpha_{\text{mass}} \, \mathrm{Le}^{2/3}$	$\dot{m}_v = \frac{\alpha_{\text{mass}} A_s}{\rho c_p \, \mathrm{Le}^{2/3} R_v} \left(\frac{P_{v,s} - P_{v,\infty}}{T_s - T_\infty} \right)$
باستخدام: $\frac{1}{T_s} - \frac{1}{T_\infty} \approx \frac{1}{T} \quad ; T = \frac{T_s + T_\infty}{2}$ $P = \rho R T = \rho \left(R_u / M \right) T$	$\dot{m}_v = \frac{\alpha_{\text{mass}} A_s}{\rho c_p \, \mathrm{Le}^{2/3}} \frac{M_v}{M} \frac{P_{v,s} - P_{v,\infty}}{P}$

مثال 6 – 6:

في الماضي، كانت تستخدم الجرار المصنوعة من الفخار بشكل كبير في تبريد الماء. حيث إن كمية صغيرة من الماء تتسرب عبر مسامات الفخار وتبقي السطح الخارجي للجرة رطباً، ويؤدي تدفق الهواء الجاف والساخن نسبياً على الجرة إلى تبخر هذا الماء. يقدم الماء الموجود داخل الجرة جزءاً من طاقته من أجل تبخر الماء على السطح الخارجي، مما يؤدي إلى انخفاض درجة حرارته. إذا كان الضغط الجوي 1atm ودرجة الحرارة $30\,^{\circ}\mathrm{C}$ والرطوبة النسبية 35%، احسب درجة حرارة الماء عند الوصول إلى شروط الحالة المستقرة.

الحل:

المعطيات: جرة فخارية تستخدم لتبريد الماء، عن طريق تبخر الماء المتسرب إلى سطحها الخارجي عند تعرضه لتيار هواء ساخن وجاف.

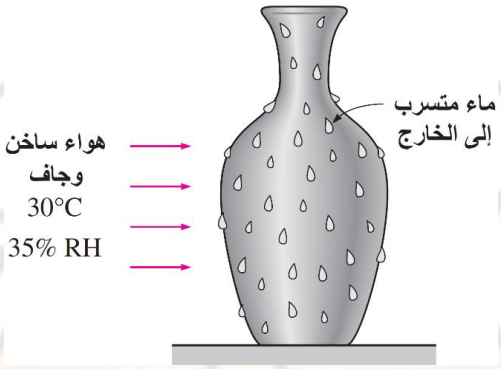
المطلوب: درجة حرارة الماء داخل الجرة عند الوصول إلى الحالة المستقرة.

الافتراضات:

1. نسبة بخار الماء في الهواء منخفضة، وبالتالي فإن شرط التدفق الكتلي المنخفض محقق، ويمكن تطبيق تشابه شيلتون – كولبرن بين انتقال الحرارة والكتلة.

2. الهواء وبخار الماء غازان مثاليان.
3. تأثير الإشعاع مهمل.

الشكل:



الخواص:

بما أن شرط التدفق الكتلي المنخفض محقق، يمكننا استخدام خواص الهواء الجاف من أجل المزيج، وذلك عند درجة الحرارة الوسطية $\left[T_{\text{ave}} = (T_\infty + T_s)/2\right]$، والتي لا يمكن حسابها الآن لأن درجة حرارة السطح T_s مجهولة. نعلم أن $T_s < T_\infty$، ومن أجل تحديد الخواص نعد أن $T_s = 20\,^{\circ}\text{C}$.

الجدول (A10) ماء $\left(T = 20\,^{\circ}\text{C}\right)$:

$$h_{fg} = 2454\,\text{kJ/kg} \quad , \quad P_v = 2.34\,\text{kPa}$$

الجدول (A10) ماء $\left(T = 30\,^{\circ}\text{C}\right)$:

$$P_{\text{sat}} = 4.25\,\text{kPa}$$

الجدول (A16) هواء جاف $\left(T_{\text{ave}} = 25\,^{\circ}\text{C}, P = 1\text{atm}\right)$:

$$c_p = 1.007\,\text{kJ/kg.}^{\circ}\text{C} \quad , \quad a = 2.141\times10^{-5}\,\text{m}^2/\text{s}$$

من الجدول (2 – 6)، الانحلالية الكتلية لبخار الماء في الهواء عند $25\,^{\circ}\text{C}$:

$$D_{AB} = 2.5\times10^{-5}\,\text{m}^2/\text{s}$$

الجدول (A1) الكتل المولية للماء والهواء:

$$M_{\text{H}_2\text{O}} = 18\,\text{kg/kmol} \quad , \quad M_{\text{air}} = 29\,\text{kg/kmol}$$

التحليل: تحسب درجة حرارة سطح الجرة من العلاقة (6 – 86):

$$T_s = T_\infty - \frac{h_{fg}}{c_p\,\mathrm{Le}^{2/3}}\frac{M_{\mathrm{H_2O}}}{M_{\mathrm{air}}}\frac{P_{v,s}-P_{v,\infty}}{P}$$

حيث يحسب عدد لويس من العلاقة (6 – 62):

$$\mathrm{Le} = \frac{a}{D_{AB}} = \frac{2.141\times10^{-5}\,\mathrm{m^2/s}}{2.5\times10^{-5}\,\mathrm{m^2/s}} = 0.856$$

إن الهواء عند السطح مشبع، وبالتالي فإن ضغط البخار عند السطح مساوٍ لضغط إشباع الماء عند درجة حرارة السطح $\left(P_{v,s} = 2.34\,\mathrm{kPa}\right)$. أما ضغط البخار بعيداً عن السطح فيحسب من العلاقة التالية:

$$P_{v,\infty} = \phi P_{\mathrm{sat},T_\infty} = 0.35P_{\mathrm{sat},30\,^\circ\mathrm{C}} = 0.35\times4.25\,\mathrm{kPa} = 1.488\,\mathrm{kPa}$$

إن الضغط الجوي هو $1\mathrm{atm} = 101.3\,\mathrm{kPa}$. بالتعويض العددي في علاقة درجة الحرارة:

$$T_s = 30^\circ C - \frac{2454\,\mathrm{kJ/kg}}{1.007\,\mathrm{kJ/kg.^\circ C}\times(0.856)^{2/3}}\frac{18\,\mathrm{kg/kmol}}{29\,\mathrm{kg/kmol}}\frac{(2.34-1.488)\,\mathrm{kPa}}{101.3\,\mathrm{kPa}}$$

$$= 15.9\,^\circ\mathrm{C}$$

وبالتالي يمكن تخفيض درجة حرارة الماء إلى $15.9\,^\circ\mathrm{C}$ في هذه العملية.

المناقشة: يمكن تحسين دقة النتائج من خلال تكرار الحسابات من أجل خواص الهواء عند $\left[T_{\mathrm{ave}} = (30+16)/2 = 18\,^\circ\mathrm{C}\right]$، وخواص الماء عند $16\,^\circ\mathrm{C}$. لكن التغير في النتائج سيكون صغيراً.

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الفصل السابع
أسس الإشعاع الحراري
Fundamentals of Thermal Radiation

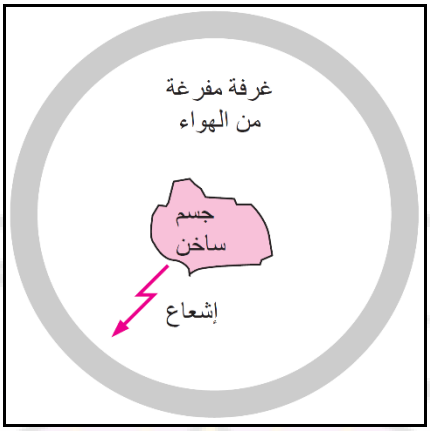
لقد درسنا حتى الآن انتقال الحرارة بالتوصيل والحمل، وهذان الشكلان لانتقال الحرارة مرتبطان بطبيعة المواد وبوجود حركة للسائل، فضلاً عن أمور أخرى. سندرس الآن الآلية الثالثة لانتقال الحرارة وهي الإشعاع radiation، والتي تختلف في خصائصها عن التوصيل والحمل.

سنبدأ هذا الفصل بالتعرف على الأمواج الكهرطيسية والطيف الكهرطيسي، مع التركيز بشكل خاص على الإشعاع الحراري thermal radiation. سنستعرض بعد ذلك مفاهيم الجسم الأسود المثالي idealized blackbody، وإشعاع الجسم الأسود blackbody radiation، وتابع إشعاع الجسم الأسود، وذلك مع قانون ستيفان – بولتسمان Steafan - Boltzman law، وقانون بلانك Planck law، وقانون فين في الإزاحة Wien's displacement law.

يصدر الإشعاع عن كل نقطة على سطحٍ مستوٍ في كافة الاتجاهات ضمن الفضاء نصف الكروي فوق السطح. تعرف شدة الإشعاع radiation intensity بأنها كمية الإشعاع الصادر أو الوارد في اتجاه محدد في الفراغ. سنناقش بعد ذلك الخواص الإشعاعية للمادة كالإصدارية emissivity، والامتصاصية absorptivity، والانعكاسية reflectivity، والنفاذية transmissivity، وارتباط هذه الخواص بالطول الموجي والاتجاه ودرجة الحرارة.

7 - 1 - مقدمة *Introduction*:

لنأخذ جسماً ساخناً معلقاً في غرفة مفرغة من الهواء، درجة حرارة جدرانها هي درجة حرارة الغرفة العادية، كما في الشكل (7 – 1). نلاحظ أن الجسم يبرد تدريجياً حتى يصل إلى توازن حراري مع المحيط. أي أنه سيفقد طاقة على شكل حرارة حتى تصل درجة حرارته إلى درجة حرارة جدران الغرفة. لا يمكن أن يحدث انتقال الحرارة بين الجسم والجدران بالتوصيل أو بالحمل، لأن هاتين الآليتين لا تحدثان في الفراغ؛ بالتالي يجب أن يحدث انتقال الحرارة بواسطة آلية أخرى تتضمن إصدار الجسم لجزء من طاقته الداخلية، هذه الآلية هي الإشعاع.



الشكل (7 – 1) انتقال الحرارة بالإشعاع من جسم ساخن في غرفة مفرغة.

يختلف انتقال الحرارة بالإشعاع عن التوصيل والحمل بأنه لا يحتاج إلى وسط مادي ليحدث. في الحقيقة فإن انتقال الطاقة بالإشعاع يكون أسرع في الفراغ، حيث تنتقل الطاقة بسرعة الضوء. يحدث الإشعاع أيضاً في الأجسام الصلبة والمائعة والغازية. في معظم التطبيقات العملية فإن أشكال انتقال الحرارة الثلاثة تحدث بشكل متزامن، ولكن بدرجات مختلفة. في حين أن الحرارة لا تنتقل في وسط مفرغ إلا بالإشعاع. فعلى سبيل المثال، تصل طاقة الشمس إلى الأرض عبر الفضاء بالإشعاع.

كما نذكر فإن انتقال الحرارة بالتوصيل والحمل يحدث باتجاه تناقص درجة الحرارة، أي إن الحرارة تنتقل من الجسم الأعلى درجة حرارة إلى الجسم الأقل درجة حرارة. في حين أن انتقال الحرارة بالإشعاع يمكن أن يحدث بين جسمين يفصل بينهما وسط أبرد من كليهما. فمثلاً، يصل الإشعاع الشمسي إلى سطح الأرض بعد أن يمر خلال طبقات الهواء الباردة الموجودة على الارتفاعات الكبيرة. وكمثال آخر، فإن سطوح امتصاص الإشعاع في البيوت البلاستيكية تصل إلى درجة حرارة عالية بالرغم من أن غطاءها الزجاجي أو البلاستيكي يبقى بارد نسبياً.

وضعت الأسس النظرية للإشعاع في العام 1864م من قبل ماكسويل James Clerk Maxwell، الذي افترض أن الشحنات المتسارعة أو التغيرات في التيار الكهربائي ستؤدي إلى زيادة في شدة الحقول الكهربائية والمغناطيسية. تسمى هذه الحقول المتحركة بسرعة بالأمواج الكهرطيسية أو الإشعاع الكهرطيسي، وهي تمثل الطاقة الصادرة عن المادة كنتيجة لتغير توضع الإلكترونات في الذرات والجزيئات. وفي العام 1887 أثبت هيرتز Heinrich Hertz تجريبياً وجود هذه الأمواج. تنقل الأمواج الكهرطيسية الطاقة كما هو الحال في باقي الأمواج، وتنتقل

الأمواج الكهرطيسية في الفراغ بسرعة الضوء $c_0 = 2.9979\times10^8\ \text{m/s}$. تتصف الأمواج الكهرطيسية بخاصيتين هما التردد frequency ν، والطول الموجي wavelength λ، وترتبط هاتان الخاصيتان لوسط ما بالعلاقة:

$$\lambda = \frac{c}{\nu} \qquad \textbf{(1 - 7)}$$

c: سرعة انتشار موجة في الوسط حيث إنها ترتبط بسرعة الضوء بالعلاقة $c = c_0/n$، حيث n هي مؤشر الانكسار (الانحراف) لهذا الوسط. إن مؤشر الانكسار للهواء ولمعظم الغازات يساوي إلى الواحد، ويساوي 1.5 للزجاج، وحوالي 1.33 للماء.

إن الواحدة المستخدمة عادةً لطول الموجة هي المايكرومتر micrometer أو الميكرون. بخلاف الطول الموجي وسرعة الانتشار فإن تردد الأمواج الكهرطيسية يتعلق فقط بمصدر الأمواج ولا يتعلق بالوسط الذي تنتقل عبره الأمواج. يمكن أن يتراوح تردد موجة كهرطيسية (عدد التذبذبات في الثانية) ما بين أقل من مليون هيرتز وسبتليون septillion هيرتز $\left(10^{24}\ \text{Hz}\right)$ أو أكثر، وذلك بحسب مصدر الأمواج. نلاحظ من المعادلة (7 – 1) أن طول الموجة للإشعاع الكهرطيسي يتناسب عكساً مع تردد الإشعاع.

من الملائم أن ننظر إلى الإشعاع الكهرطيسي كانتشار لمجموعة حزم منفصلة من الطاقة تسمى الفوتونات photons أو الكمات quanta، كما اقترح ماكس بلانك Max Planck عام 1900 بالتوافق مع نظرية الكم quantum theory التي وضع أسسها. بناءً على هذه الرؤية فإن كل فوتون ذو تردد ν يمتلك طاقة:

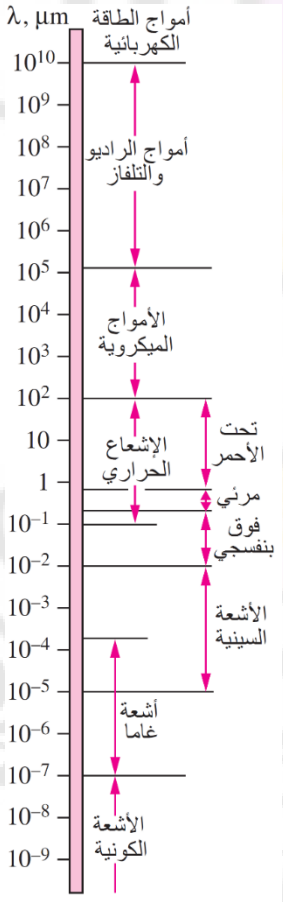
$$e = h\nu = \frac{hc}{\lambda} \qquad \textbf{(2 - 7)}$$

h: ثابت بلانك $h = 6.6256\times10^{-34}\ \text{J.s}$.

نلاحظ من العلاقة (7 – 2) أن طاقة الفوتون تتناسب عكساً مع طول موجته؛ بالتالي فإن الإشعاع قصير الموجة يمتلك فوتونات ذات طاقة أكبر، ولهذا السبب فإننا نتجنب التعرض للإشعاع ذي الأمواج القصيرة جداً كأشعة غاما gamma rays والأشعة السينية X - rays لكونها مؤذية جداً.

7 - 2 - الإشعاع الحراري *Thermal Radiation*:

بالرغم من أن الأمواج الكهرطيسية تمتلك الخصائص العامة نفسها، إلا أن الاختلاف في الطول الموجي يترافق مع اختلاف كبير في سلوك الأمواج. يغطي الإشعاع الذي نصادفه في التطبيقات العملية مجالاً كبيراً من أطوال الأمواج، حيث يتراوح بين أقل من $10^{-10}\ \mu m$ للأشعة الكونية، وأكثر من $10^{10}\ \mu m$ لأمواج الطاقة الكهربائية. يشمل الطيف الكهرطيسي أيضاً أشعة غاما، والأشعة السينية، والأشعة فوق البنفسجية ultraviolet، والضوء المرئي، والأشعة تحت الحمراء infrared، والإشعاع الحراري thermal radiation، والأمواج الميكروية microwaves، وأمواج الراديو radio waves، كما هو مبين في الشكل (7 – 2).



الشكل (7 – 2) طيف الأشعة الكهرطيسية

يعود التنوع في الإشعاع الكهرطيسي إلى اختلاف الآليات التي ينشأ عنها هذا الإشعاع. فعلى سبيل المثال، تنشأ أشعة غاما عن التفاعلات النووية، في حين تنشأ الأشعة السينية عن صدم المعادن بإلكترونات ذات طاقة عالية، أما الأمواج الميكروية فتنشأ بواسطة أنواع خاصة من الأنابيب الإلكترونية.

إن الأمواج القصيرة (أشعة غاما والأشعة السينية) هي من اختصاص مهندسي الطاقة النووية بشكل أساسي، في حين أن الأمواج الطويلة (الأمواج الميكروية وأمواج الراديو) فإنها من اختصاص مهندسي الكهرباء. ما يهمنا في انتقال الحرارة هو الإشعاع الحراري الذي يصدر نتيجة انتقال طاقة الجزيئات والذرات والإلكترونات لمادة ما. تمثل درجة الحرارة مقياساً لشدة هذه الأنشطة المايكروسكوبية، ويزداد معدل إصدار الإشعاع الكهرطيسي بازدياد درجة الحرارة. يصدر الإشعاع الحراري بشكل مستمر من المواد التي درجة حرارتها جميعها أعلى من الصفر المطلق، أي إن كل ما يحيط بنا يصدر ويمتص الإشعاع. يعرف الإشعاع الحراري أيضاً بأنه الطيف الكهرطيسي الذي يتراوح الطول الموجي له من $0.1-100\ \mu m$، وذلك لأن الإشعاع الصادر عن الأجسام بسبب درجة حرارتها يقع ضمن هذا المجال.

بالتالي فإن الإشعاع الحراري يشمل الإشعاع المرئي والأشعة تحت الحمراء (IR)؛ فضلاً عن جزء من الأشعة فوق البنفسجية (UV).

يسمى الجسم الذي يصدر إشعاعاً ضمن المجال المرئي منبعاً ضوئياً، وتمثل الشمس المنبع الأساسي للضوء بالنسبة لنا. يعرف الإشعاع الصادر عن الشمس بالإشعاع الشمسي solar radiation، ومعظم هذا الإشعاع يقع ضمن مجال الطول الموجي $0.3-3\,\mu\text{m}$. إن نصف الإشعاع الشمسي تقريباً هو عبارة عن ضوء، في حين أن بقية هذا الإشعاع هي عبارة عن أشعة فوق بنفسجية وتحت حمراء.

يقع الإشعاع الصادر عن الأجسام عند درجة حرارة الغرفة ضمن مجال الأشعة تحت الحمراء. تبدأ الأجسام بإصدار إشعاع قابل للرؤية عند درجات حرارة أعلى من $800\,\text{K}$. فعلى سبيل المثال، يجب أن يسخن سلك التنغستين في المصابيح إلى درجة حرارة أعلى من $2000\,\text{K}$ قبل أن يكون قادراً على إصدار إشعاع مرئي ذي قيمة.

تشمل الأشعة فوق البنفسجية الأمواج القصيرة في نهاية طيف الإشعاع الحراري والتي تقع ضمن المجال $0.01-0.4\,\mu\text{m}$.

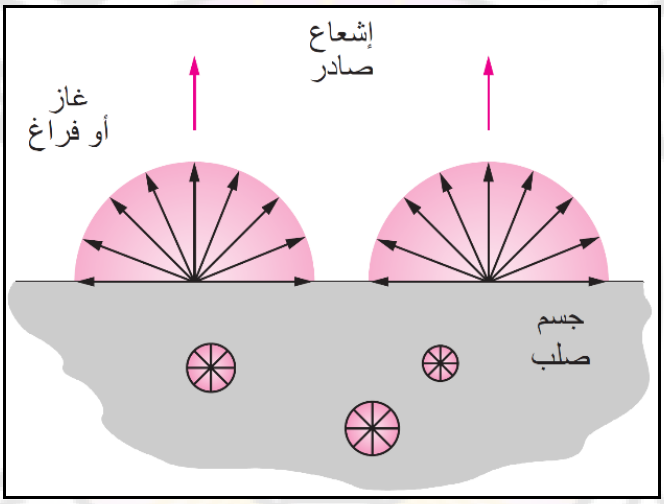
إن المصدر الرئيس للأشعة فوق البنفسجية هو الشمس، حيث إن 12% من الإشعاع الشمسي هو عبارة عن أشعة فوق بنفسجية، وتعد هذه الأشعة مؤذية جداً للكائنات الحية، وتقوم طبقة الأوزون في الغلاف الجوي بامتصاص الجزء الأكبر من هذه الأشعة. يمكن أيضاً توليد هذه الأشعة بشكل اصطناعي ضمن مصابيح الفلوريسنت fluorescent للاستخدام الطبي لقتل الجراثيم، وفي معامل الدباغة كصباغ اصطناعي.

تستخدم أفران المايكروويف الأشعة الكهرطيسية الواقعة في منطقة الأشعة الميكروية من الطيف المتولد ضمن أنابيب المايكروويف والتي تسمى ماغنيترونات magnetrons.

تستخدم الأمواج الكهرطيسية في الرادارات والهواتف اللاسلكية وذلك ضمن منطقة الأمواج الميكروية. يقع الطول الموجي للأمواج المستخدمة في البث الإذاعي والتلفزيوني ضمن المجال $1-1000\,\text{m}$ في منطقة أمواج الراديو من الطيف الكهرطيسي.

ما يهمنا في تطبيقات انتقال الحرارة هو الطاقة الصادرة عن الأجسام بسبب درجة حرارتها فقط؛ بالتالي فإن اهتمامنا ينحصر بالإشعاع الحراري فقط، والذي سنعبر عنه من الآن فصاعداً بالإشعاع radiation فقط. إن العلاقات التي سنوجدها لاحقاً تستخدم فقط للإشعاع الحراري، حيث يمكن أن تكون غير صالحة للتطبيق من أجل أشكال الإشعاع الكهرطيسي الأخرى.

إن الإلكترونات والذرات والجزيئات جميعها في الأجسام الصلبة والمائعة والغازية، والتي درجة حرارتها أعلى من الصفر المطلق هي في حالة حركة دائمة، وبالتالي فإنها تصدر إشعاعاً بشكل مستمر، كما أنها تمتص الإشعاع أو تسمح بنفاذه عبر كامل حجم المادة. ولذلك فإن الإشعاع ظاهرة حجمية volumetric phenomenon. بالرغم من ذلك، فإن الإشعاع في حالة الأجسام الصلبة العاتمة (غير النفوذة) كالمعادن والخشب والحجارة، يعدُّ ظاهرة سطحية surface phenomenon، وذلك لأن الإشعاع الصادر من داخل الجسم لا يصل أبداً إلى السطح، كما أن الإشعاع الوارد يمتص ضمن بضع ميكرونات من السطح، كما هو موضح في الشكل (7 – 3).

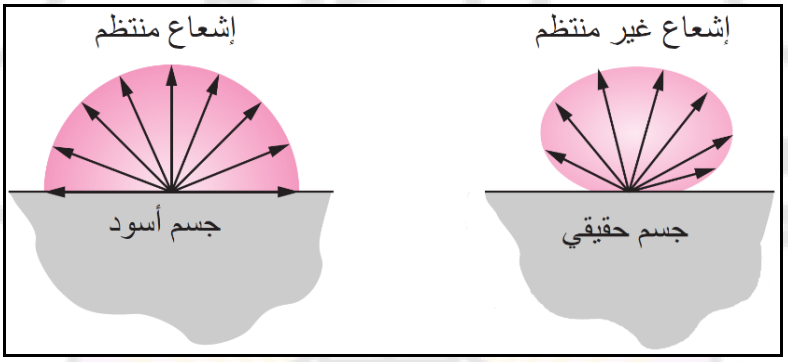


الشكل (7 – 3) الإشعاع داخل الأجسام العاتمة.

7 - 3 - إشعاع الجسم الأسود *Blackbody Radiation*:

إن كل جسم درجة حرارته أعلى من الصفر المطلق يصدر إشعاعاً في الاتجاهات جميعها، وعلى مجال واسع من الطول الموجي. تتعلق كمية الطاقة الإشعاعية الصادرة عن سطح ما عند طول موجي محدد بمادة الجسم وحالة السطح ودرجة حرارة السطح؛ بالتالي فإن الأجسام المختلفة والتي تمتلك درجة الحرارة نفسها تصدر كميات مختلفة من الإشعاع بالنسبة لواحدة مساحة السطح. ولمعرفة كمية الإشعاع الأعظمية التي يمكن للسطح أن يصدرها عند درجة حرارة محددة، فإننا نعرف جسماً مثالياً نسميه الجسم الأسود، والذي يمثل مرجعاً قياسياً نقارن به الخواص الإشعاعية للسطوح الحقيقة.

الجسم الأسود: هو مشع وماص مثالي للإشعاع؛ بالتالي لا يمكن لأي سطح أن يصدر إشعاعاً أكثر من الجسم الأسود، وذلك من أجل درجة حرارة وطول موجي محددين. يمتص الجسم الأسود كامل الإشعاع الساقط عليه بغض النظر عن الطول الموجي والاتجاه، كما أن الجسم الأسود يصدر طاقة إشعاعية في الاتجاهات كلها، وبشكل منتظم من أجل واحدة مساحة السطح العمودي على اتجاه الإصدار، كما يوضح الشكل (7 – 4)؛ أي إن الجسم الأسود هو مشع ناشر diffuse emitter، ونقصد بالناشر diffuse أن الإشعاع الصادر عنه لا يتعلق بالاتجاه.



الشكل (7 – 4) الإشعاع الصادر عن جسم أسود وجسم حقيقي.

قام ستيفان بحساب كمية الطاقة الإشعاعية الصادرة عن جسم أسود بالنسبة لواحدة المساحة وواحدة الزمن معاً بشكل تجريبي، وذلك وفق العلاقة:

$$E_b(T) = \sigma T^4 \quad \left[\mathrm{W/m^2}\right] \qquad (3-7)$$

E_b: استطاعة الإصدار للجسم الأسود blackbody emissive power.

σ: ثابت ستيفان – بولتسمان. $\sigma = 5.67\times10^{-8} \left[\mathrm{W/m^2.K^4}\right]$

T: درجة الحرارة المطلقة للسطح.

وتم إثبات هذه العلاقة بشكل نظري من قبل بولتسمان في العام 1884، وتعرف هذه العلاقة باسم قانون ستيفان – بولتسمان Stefan - Boltzmann law. نلاحظ أن إصدار الإشعاع الحراري يتناسب طرداً مع الأس الرابع لدرجة الحرارة المطلقة.

يجب التمييز بين الجسم الأسود المثالي والجسم الأسود العادي، حيث إن أي جسم يمتص الإشعاع الضوئي (الجزء المرئي من الإشعاع) سيبدو أسود اللون، كما أن أي جسم يعكس كامل الإشعاع الضوئي سيبدو أبيض. بما أن الإشعاع المرئي يحتل جزءاً صغيراً من الطيف الكهرطيسي، فإنه ليس بالإمكان الحكم على سطح ما بأنه أسود بناءً على الملاحظة البصرية.

فمثلاً الثلج (أو الطلاء الأبيض) يعكس الضوء، ولذلك فهو يبدو أبيض، لكنه أسود تماماً بالنسبة للأشعة تحت الحمراء حيث أنه يمتص الإشعاع طويل الموجة بشكل كبير. تبدي السطوح المطلية بالهباب lampblack paint سلوكاً قريباً من الجسم الأسود المثالي.

إن قانون ستيفان – بولتسمان في المعادلة (7 – 3) يعطينا استطاعة الإصدار الكلية للجسم الأسود E_b والتي تساوي إلى مجموع الإشعاع الصادر عند الأطوال الموجية جميعها. أحياناً نحتاج لمعرفة استطاعة الإصدار الطيفية للجسم الأسود، أي كمية الطاقة الصادرة عن جسم أسود عند درجة حرارة مطلقة T بالنسبة لواحدة الزمن، وواحدة المساحة، وواحدة الطول الموجي عند الطول الموجي λ. فمثلاً ما يهمنا في الإشعاع الصادر عن مصباح إنارة هو الإشعاع الواقع ضمن طيف الطول الموجي المرئي، وليس كمية الإصدار الكلية.

قام ماكس بلانك Max Planck بوضع علاقة استطاعة الإصدار الطيفية للجسم الأسود $E_{b\lambda}$ وبشكل متوافق مع نظريته الكمومية.quantum theory تعرف هذه العلاقة بقانون بلانك Plank's law، وهي:

$$E_{b\lambda}(\lambda,T)=\frac{C_1}{\lambda^5\left[\exp\left(C_2/\lambda T\right)-1\right]} \qquad \left[\mathrm{W/m^2.\mu m}\right] \quad \textbf{(4 – 7)}$$

حيث:

$$C_1=2\pi hc_0^2=3.742\times10^8\left[\mathrm{W.mm^4/m^2}\right]$$

$$C_2=hc_0/k=1.439\times10^4 \qquad [\mu\mathrm{m.K}]$$

k: ثابت بولتسمان. $k=1.38065\times10^{-23}\left[\mathrm{J/K}\right]$

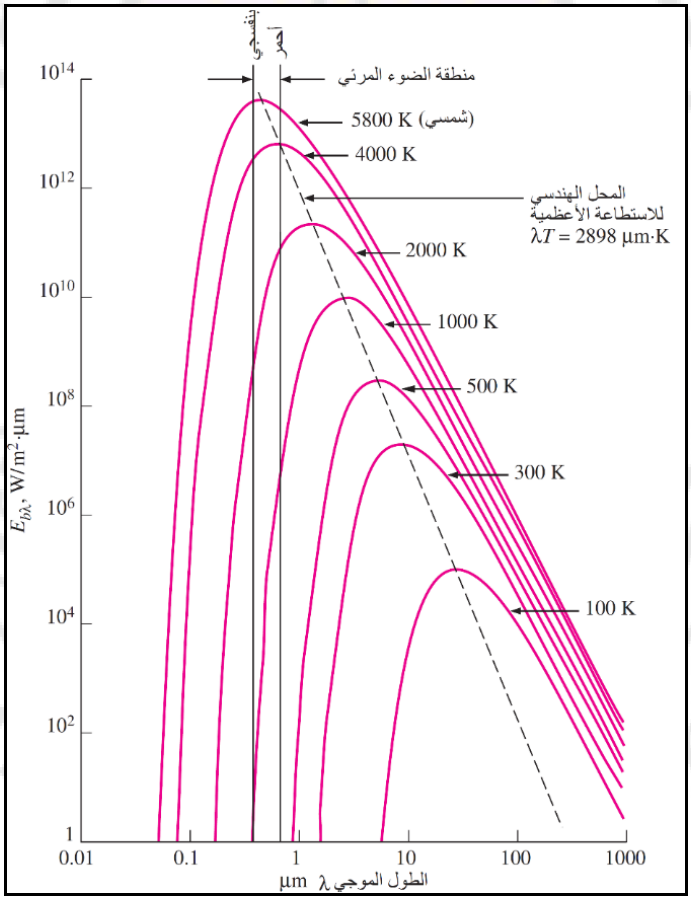
إن هذه العلاقة صالحة للسطوح الموجودة في الفراغ أو في وسط غازي. من أجل بقية الأوساط فإن هذه المعادلة بحاجة للتعديل، وذلك باستبدال C_1 بـ C_1/n^2، حيث n مؤشر الانكسار للوسط.

يجب الانتباه إلى أن مصطلح "طيفي" يعبر عن الارتباط بالطول الموجي.

يعطي الشكل (7 – 5) تغير استطاعة الإصدار الطيفية للجسم الأسود مع الطول الموجي من أجل درجات حرارة مختلفة. من الشكل يمكننا استنتاج ما يلي:

* الإشعاع الصادر تابع مستمر للطول الموجي. فمن أجل أي درجة حرارة، فإن الإشعاع الصادر يزداد مع الطول الموجي، ومن ثم يصل إلى قيمة حدية، وبعدها يتناقص مع ازدياد الطول الموجي.

* من أجل أي طول موجي، فإن كمية الإشعاع الصادر تزداد مع ازدياد درجة الحرارة.
* بازدياد درجة الحرارة، فإن المنحنيات تنسحب نحو اليسار، أي نحو منطقة الطول الموجي الأقصر. نتيجة ذلك فإن النسبة الأكبر من الإشعاع تصدر عند الأطوال الموجية الأقصر وذلك عند درجات الحرارة العالية.
* إن الإشعاع الصادر عن الشمس، والتي تعدُّ جسماً أسود عند درجة الحرارة 5780 K (تقريباً 5800 K)، يأخذ قيمة أعظمية في منطقة الإشعاع المرئي من الطيف؛ بالتالي فإن الشمس متناغمة مع أعيننا. من ناحية أخرى، فإن الإشعاع الصادر عن السطوح عند درجة حرارة $T \leq 800\,\mathrm{K}$ يقع تقريباً في مجال الأشعة تحت الحمراء، لذلك فإن الأجسام تكون غير مرئية لأعيننا إلا عندما تعكس الضوء الساقط عليها من منابع أخرى.



الشكل (7 – 5) تغير استطاعة الإصدار للجسم الأسود مع الطول الموجي.

بازدياد درجة الحرارة، فإن القيمة الحدية للمنحني في الشكل (7 – 5) تتجه نحو الطول الموجي الأقصر. يعطى الطول الموجي الذي تحدث عنده القيمة الأعظمية من أجل درجة حرارة محددة بقانون فين للإزاحة Wien's displacement law:

$$(\lambda T)_{\max \text{power}} = 2897.8 \ [\mu \text{m.K}] \qquad \textbf{(5 – 7)}$$

من خلال إجراء التكامل لاستطاعة الإصدار الطيفية للجسم الأسود $E_{b\lambda}$، من العلاقة (7 – 4)، على كامل الطول الموجي للطيف نحصل على استطاعة الإصدار الكلية للجسم الأسود:

$$E_b(T) = \int_0^\infty E_{b\lambda}(\lambda, T)\, d\lambda = \sigma T^4 \qquad \left[\text{W/m}^2\right] \qquad \textbf{(6 – 7)}$$

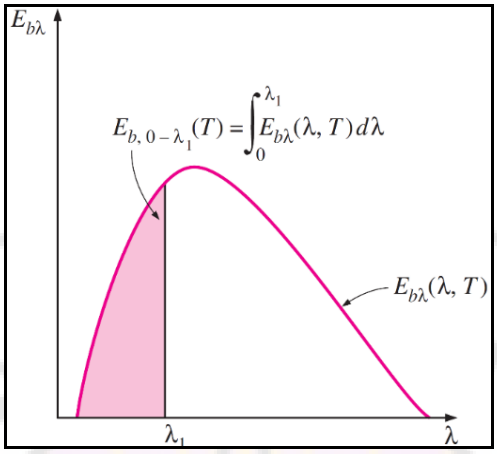
بالتالي فقد توصلنا إلى قانون ستيفان – بولتسمان من خلال مكاملة قانون بلانك على كامل الطول الموجي للطيف. يجب أن ننتبه إلى أنه في مخطط $(E_{b\lambda} - \lambda)$ فإن $E_{b\lambda}$ تعبر عن قيمة محددة على المنحني، في حين أن E_b تمثل كامل المساحة الواقعة تحت المنحني، وذلك عند درجة حرارة محددة.

يعطي قانون ستيفان – بولتسمان كامل الإشعاع الصادر عن جسم أسود وذلك من أجل الأطوال الموجية جميعها. عادةً ما نهتم بكمية الإشعاع الصادر من أجل حزمة محددة من الطول الموجي. تعطى الطاقة الإشعاعية الصادرة عن جسم أسود من أجل واحدة المساحة، وذلك لحزمة أطوال موجية من $\lambda = 0$ إلى λ، كما في الشكل (7 – 6)، بالعلاقة:

$$E_{b,0-\lambda}(T) = \int_0^\lambda E_{b\lambda}(\lambda, T)\, d\lambda \ \left[\text{W/m}^2\right] \qquad \textbf{(7 – 7)}$$

بالتالي يمكننا حساب $E_{b,0-\lambda}$ بتعويض $E_{b\lambda}$ من العلاقة (7 – 4)، وإجراء التكامل. إنه من الصعوبة بمكان التوصل إلى حل بسيط لهذا التكامل، كما أن إجراء تكامل عددي في كل مرة نحتاج فيها إلى قيمة $E_{b,0-\lambda}$ ليس أمراً عملياً. لذلك نعرف كمية لابعدية f_λ وفق العلاقة التالية، وتسمى تابع إشعاع الجسم الأسود f_λ blackbody radiation function:

$$f_\lambda(T) = \frac{\int_0^\lambda E_{b\lambda}(\lambda, T)\, d\lambda}{\sigma T^4} \qquad \textbf{(8 – 7)}$$

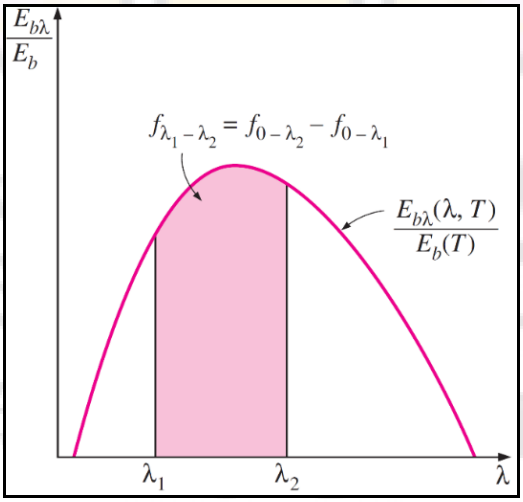


الشكل (7 – 6) استطاعة الإصدار لجسم أسود ضمن حزمة أطوال موجية من $\lambda = 0$ إلى λ.

يعبر التابع f_λ عن نسبة الإشعاع الصادر عن جسم أسود عند درجة حرارة T ضمن حزمة من الطول الموجي من $\lambda = 0$ إلى λ. يعطي الجدول (7 – 1) ملحق قيم f_λ كتابع لـ λT.

تعطى نسبة الطاقة الإشعاعية الصادرة عن جسم أسود عند درجة حرارة T ضمن حزمة منتهية للطول الموجي من $\lambda = \lambda_1$ إلى $\lambda = \lambda_2$، كما في الشكل (7 – 7)، بالعلاقة:

$$f_{\lambda_1-\lambda_2}(T)=f_{\lambda_2}(T)-f_{\lambda_1}(T) \qquad (9-7)$$



الشكل (7 – 7) استطاعة الإصدار لجسم أسود ضمن حزمة أطوال موجية من $\lambda_1 = \lambda$ إلى $\lambda_2 = \lambda$.

مثال 7 – 1:

تبلغ درجة حرارة سلك مصباح كهربائي $3200\,\mathrm{K}$. بفرض أن السلك جسم أسود، احسب نسبة الطاقة الإشعاعية الصادرة عن السلك والتي تقع ضمن مجال الإشعاع المرئي. احسب أيضاً الطول الموجي الذي تكون عنده استطاعة الإصدار أعظمية.

الحل:

المعطيات: درجة حرارة السلك.

المطلوب: نسبة الطاقة الإشعاعية الصادرة عن السلك، والواقعة ضمن مجال الإشعاع المرئي، والطول الموجي الذي تكون عنده استطاعة الإصدار أعظمية.

الافتراضات: السلك جسم أسود.

التحليل: يقع الطيف الكهرطيسي المرئي ضمن مجال الأطوال الموجية من $\lambda_1 = 0.4\,\mu\mathrm{m}$ إلى $\lambda_2 = 0.76\,\mu\mathrm{m}$. من الجدول (7 – 1) ملحق، نوجد توابع الإشعاع المقابلة لـ $\lambda_1 T$ و $\lambda_2 T$ ، حيث أن $T = 3200\,\mathrm{K}$:

$$\lambda_1 T = 0.4\,\mu m \times 3200\,K = 1280\,\mu m.K \longrightarrow f_{\lambda_1} = 0.0043964$$

$$\lambda_2 T = 0.76\,\mu m \times 3200\,K = 2432\,\mu m.K \longrightarrow f_{\lambda_2} = 0.147114$$

أي إن حوالي 0.04% من الإشعاع يصدر عند أطوال موجية أقل من $0.4\,\mu\mathrm{m}$ ، وحوالي 14.7% يصدر عند أطوال موجية أقل من $0.76\,\mu\mathrm{m}$ ؛ بالتالي فإن نسبة الإشعاع الصادر بين هذين الطولين الموجيين تحسب من العلاقة (7 – 9):

$$f_{\lambda_1-\lambda_2} = f_{\lambda_2} - f_{\lambda_1} = 0.147114 - 0.0043964 = 0.142718$$

بالتالي فإن أكثر من 14% من الإشعاع الصادر عن السلك يقع ضمن مجال الإشعاع المرئي. بينما يقع حوالي 85% من الإشعاع ضمن مجال الأشعة تحت الحمراء.

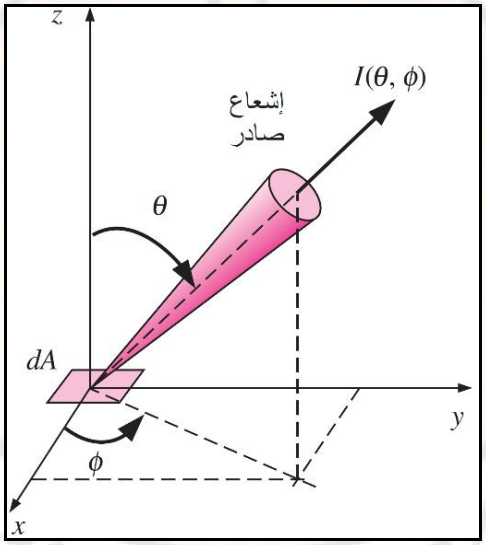
يحسب الطول الموجي الذي تبلغ عنده استطاعة الإصدار قيمة أعظمية من قانون فين (5 – 7):

$$(\lambda T)_{\max\,\mathrm{power}} = 2{,}897.8\,\mu\mathrm{m.K} \Rightarrow$$

$$\lambda_{\max\,\mathrm{power}} = \frac{2{,}897.8\,\mu\mathrm{m.K}}{3200\,\mathrm{K}} = 0.905\,\mu\mathrm{m}$$

7 - 4 - شدة الإشعاع *Radiation Intensity*:

يصدر الإشعاع عن جميع أجزاء أي سطحٍ مستوٍ في الاتجاهات كافة على شكل نصف كرة فوق السطح، وعادةً ما يكون توزع الإشعاع الصادر (أو الوارد) في الاتجاهات غير منتظم. بالتالي فإننا نحتاج إلى قيمة تعبر عن كمية الإشعاع الصارد (أو الوارد) في اتجاه معين في الفراغ، تسمى هذه القيمة شدة الإشعاع radiation intensity، ويرمز لها I. قبل أن نكون قادرين على التعبير عن كمية شعاعية، فإننا نحتاج إلى تحديد الاتجاه في الفراغ. للتعبير عن اتجاه الإشعاع الذي يمر في نقطة ما، فإنه من الأفضل استخدام الإحداثيات الكروية، كما يبين الشكل (7 – 8). تستخدم شدة الإشعاع للتعبير عن تغير الإشعاع الصادر مع زاويتي الذروة θ والسمت ϕ.

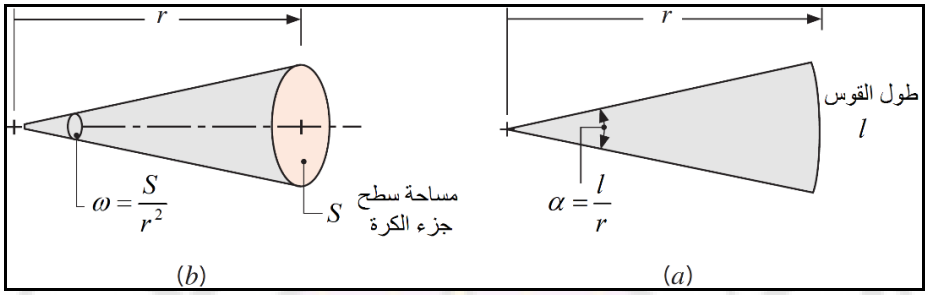


الشكل (7 – 8) شدة الاشعاع الصادر في جملة الإحداثيات الكروية.

7 – 4 – 1 – الزاوية الصلبة *Solid Angle*:

كما نعلم سابقاً، فإن الزاوية المستوية تعرف بأنها المنطقة المحصورة بين شعاعين من دائرة، وتساوي إلى نسبة طول القوس المقابل إلى نصف قطر الدائرة. بشكل مماثل فإن الزاوية الصلبة ω هي المنطقة المحصورة بين أشعة كرة، وتساوي إلى نسبة مساحة سطح الكرة المقابل S إلى مربع نصف قطر الكرة r^2، وواحدتها ستيراديان steradian $[\mathrm{sr}]$، كما في الشكل (7 – 9)، أي:

$$\omega = \frac{S}{r^2} \qquad \textbf{(9 – 7)}$$



الشكل (7 – 9) الزاوية المستوية والزاوية الصلبة.

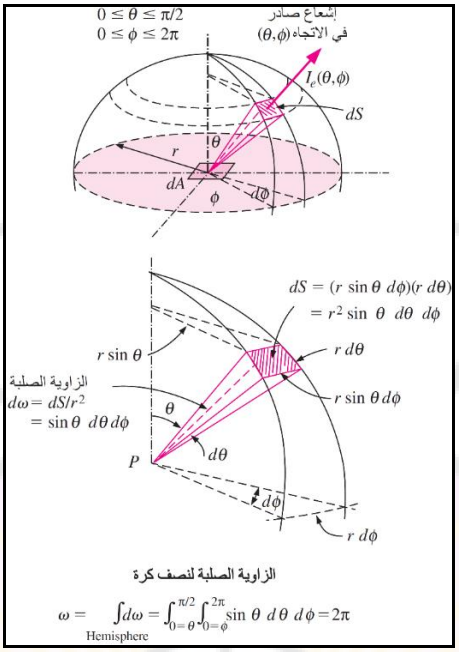
ويمكن تبسيط ذلك بأخذ مساحة تفاضلية على سطح كرة $dS = r^2 \sin\theta d\theta d\phi$، كما في الشكل (7 – 10)، وإجراء التكامل لها من $\theta = 0$ إلى $\theta = \pi$، ومن $\phi = 0$ إلى $\phi = 2\pi$، حيث نجد:

$$S = \int_{\text{sphere}} dS = \int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi} r^2 \sin\theta d\theta d\phi = 2\pi r^2 \int_{\theta=0}^{\pi} \sin\theta d\theta = 4\pi r^2 \qquad \textbf{(11 – 7)}$$

وهي علاقة مساحة سطح الكرة. من أجل $r = 1$ فإن $S = 4\pi$، وبالتالي فإن الزاوية الصلبة المقابلة لكرة تساوي إلى $\omega = 4\pi\,[\text{sr}]$. في حالة نصف كرة، وهي الحالة التي عادةً ما نصادفها عند دراسة الإشعاع الصادر، فإن الزاوية الصلبة $\omega = 2\pi\,[\text{sr}]$.

تعطى الزاوية الصلبة التفاضلية $d\omega$ المقابلة لمساحة تفاضلية dS من سطح كرة نصف قطرها r بالعلاقة:

$$d\omega = \frac{dS}{r^2} = \sin\theta d\theta d\phi \qquad \textbf{(12 – 7)}$$



الشكل (7 – 10) الإشعاع الصادر من عنصر سطح تفاضلي إلى الفضاء النصف كروي المحيط عبر زاوية صلبة تفاضلية.

نلاحظ أن المساحة dS عمودية على اتجاه الرؤية، وذلك عند النظر إلى dS من مركز الكرة. بشكل عام فإن الزاوية الصلبة التفاضلية $d\omega$ تقابل مساحة سطح تفاضلي dA وذلك عند النظر إلى هذا السطح التفاضلي من نقطة تبعد عنه مسافة r، ويعبر عن ذلك بالعلاقة:

$$d\omega = \frac{dA_n}{r^2} = \frac{dA\cos\alpha}{r^2} \qquad \textbf{(13 – 7)}$$

α: الزاوية بين الناظم على السطح واتجاه الرؤية (بين الناظم والمستقيم الواصل بين السطحين)؛ بالتالي فإن $dA_n = dA\cos\alpha$ هي مسقط المساحة dA على السطح الناظمي على اتجاه الرؤية.

7 – 4 – 2 – شدة الإشعاع الصادر *Intensity of Emitted Radiation*:

لنأخذ الإشعاع الصادر عن عنصر مساحة تفاضلي dA من سطح ما، كما في الشكل (7 – 10). سيصدر الإشعاع في الاتجاهات كافة ضمن الفضاء نصف الكروي فوق عنصر المساحة. يتناسب الإشعاع المتدفق عبر المساحة dS طرداً مع الزاوية الصلبة $d\omega$ المقابلة

لـ dS، كما أنه يتناسب طرداً مع مساحة مسقط سطح الإصدار على المستوي العمودي على θ والذي يساوي إلى $dA\cos\theta$. إن شدة الإشعاع في اتجاهٍ ما تعطى من أجل واحدة المساحة العمودية على هذا الاتجاه.

تعرف شدة الإشعاع الصادر $I_e(\theta,\phi)$ بأنها معدل الطاقة الإشعاعية $d\dot{Q}_e$ الصادرة في الاتجاه (θ,ϕ) من أجل واحدة المساحة العمودية على هذا الاتجاه ومن أجل واحدة الزاوية الصلبة عند هذا الاتجاه، بالتالي فإنها تعطى بالعلاقة:

$$I_e(\theta,\phi)=\frac{d\dot{Q}_e}{dA\cos\theta d\omega}=\frac{d\dot{Q}_e}{dA\cos\theta\sin\theta d\theta d\phi}\left[\mathrm{W/m^2.sr}\right] \quad \textbf{(14 - 7)}$$

التدفق الإشعاعي radiation flux لإشعاع صادر هو استطاعة الإصدار emissive power E والتي تساوي إلى معدل الطاقة الإشعاعية الصادرة من أجل واحدة المساحة من سطح الإصدار، وتعطى بالصيغة التفاضلية:

$$dE=\frac{d\dot{Q}_e}{dA}=I_e(\theta,\phi)\cos\theta\sin\theta d\theta d\phi \quad \textbf{(15 - 7)}$$

يضم الفضاء نصف الكروي فوق سطح الإصدار كامل الإشعاع الصادر عن السطح، بالتالي يمكن حساب استطاعة الإصدار من السطح إلى نصف الكرة فوقه من خلال إجراء التكامل كما يلي:

$$E=\int_{\text{hemisphere}}dE=\int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi/2}I_e(\theta,\phi)\cos\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi \quad \left[\mathrm{W/m^2}\right] \quad \textbf{(16 - 7)}$$

بشكل عام، فإن شدة الإشعاع الصادر عن سطح ما تتغير مع الاتجاه (بشكل خاص مع زاوية الذروة θ)، لكن العديد من السطوح في التطبيقات العملية يمكن عدّها تقريباً سطوحاً ناشرة. من أجل سطح إصدار ناشر، فإن شدة الإشعاع الصادر لا تتعلق بالاتجاه، وبالتالي فإن I_e ثابتة، ونلاحظ أن:

$$\int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\theta/2}\cos\theta\sin\theta d\theta d\phi=\pi$$

وبالتالي، فإن علاقة استطاعة الإصدار (7 – 16) تختصر في هذه الحالة إلى:

$$E=\pi I_e \quad \textbf{(17 - 7)}$$

نلاحظ هنا أن المعامل هو π وليس 2π، بالرغم من أن شدة الإشعاع هي الطاقة الإشعاعية من أجل واحدة الزاوية الصلبة، والزاوية الصلبة المقابلة لنصف الكرة هي 2π. يعود

السبب في ذلك إلى أن استطاعة الإصدار تتعلق بالمساحة الفعلية لسطح الإصدار، في حين تتعلق شدة الإشعاع بمسقط سطح الإصدار على اتجاه الإصدار، وبالتالي فهي تتعلق بـ $\cos\theta$. أما في حالة الجسم الأسود، والذي يمثل سطح إصدار ناشر، فإن العلاقة (7 – 16) تصبح:

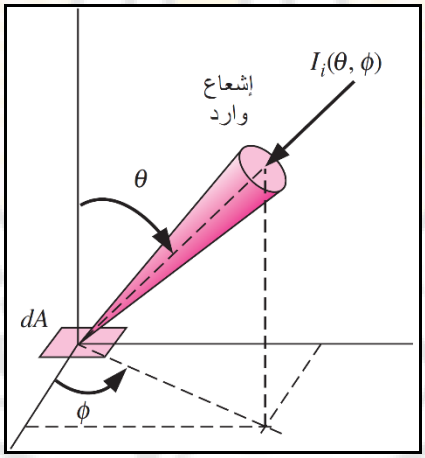
$$E_b = \pi I_b \qquad \textbf{(18 – 7)}$$

حيث إن استطاعة الإصدار للجسم الأسود هي $E_b = \sigma T^4$، وبالتالي فإن شدة الإشعاع الصادر عن جسم أسود عند درجة حرارة مطلقة T هي:

$$I_b(T) = \frac{E_b(T)}{\pi} = \frac{\sigma T^4}{\pi} \qquad \textbf{(19 – 7)}$$

7 – 4 – 3 – الإشعاع الوارد *Incident Radiation*:

إن السطوح جميعها تصدر إشعاعاً، لكنها أيضاً تستقبل إشعاعاً صادراً عن سطوح أخرى أو منعكساً عنها. تعرف شدة الإشعاع الوارد $I_i(\theta,\phi)$ بأنها معدل الطاقة الإشعاعية dG الواردة من الاتجاه (θ,ϕ) من أجل واحدة مساحة سطح الاستقبال العمودي على هذا الاتجاه، ومن أجل واحدة الزاوية الصلبة عند هذا الاتجاه، كما يبين الشكل (7 – 11). إن الزاوية θ في هذه الحالة هي الزاوية بين اتجاه الإشعاع الوارد والناظم على السطح.



الشكل (7 – 11) الإشعاع الوارد على سطح ما في الاتجاه (θ, ϕ).

يسمى التدفق الإشعاعي الوارد على سطح ما من الاتجاهات كافة بالتشعع irradiation G، ويعطى بالعلاقة:

$$G = \int_{\text{hemisphere}} dG = \int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi/2} I_i(\theta,\phi)\cos\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi \quad \left[\mathrm{W/m^2}\right] \quad \textbf{(20 – 7)}$$

وبالتالي، فإن التشعع يعبر عن معدل الطاقة الإشعاعية الواردة على سطح ما من أجل واحدة المساحة من السطح.

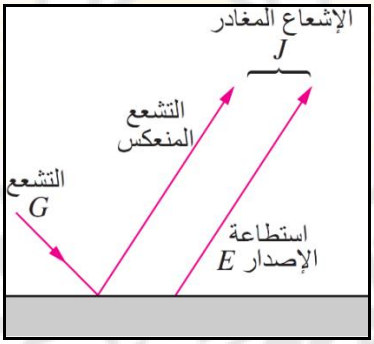
في حال كان الإشعاع الوارد منتشراً، أي إن I_i ثابت، فإن العلاقة (7 – 20) تصبح:

$$G = \pi I_i \qquad \textbf{(21 – 7)}$$

نلاحظ مجدداً أن التشعع يتعلق بمساحة السطح الفعلي، في حين أن شدة الإشعاع الوارد تتعلق بمساحة المسقط على اتجاه الورود.

7 – 4 – 4 – الإشعاع المغادر *Radiosity*:

إن السطوح تصدر الإشعاع، كما أنها تعكسه، بالتالي فإن الإشعاع المغادر لسطح ما يشمل الإشعاع الصادر والمنعكس، كما في الشكل (7 – 12). تشمل حسابات انتقال الحرارة بين السطوح الطاقة الإشعاعية الكلية المتدفقة بعيداً عن السطح، وذلك بغض النظر عن أصل هذه الأشعة. لذلك فإننا نحتاج لتعريف قيمة تعبر عن معدل الطاقة الإشعاعية التي تغادر واحدة المساحة من سطح ما في الاتجاهات كافة. تسمى هذه القيمة بالإشعاع المغادر J radiosity، وتعطى وفق العلاقة:



الشكل (7 – 12) التدفق الإشعاعي لسطح.

$$J = \int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi/2} I_{e+r}(\theta,\phi)\cos\theta\sin\theta d\theta d\phi \qquad \left[\mathrm{W/m^2}\right] \qquad \textbf{(22 – 7)}$$

I_{e+r}: مجموع شدتي الإشعاع الصادر والمنعكس.

من أجل سطح ناشر لكل من الإشعاع الصادر والمنعكس، فإن I_{e+r} ثابتة، وبالتالي فإن العلاقة (7 – 22) تصبح بالشكل:

$$J = \pi I_{e+r} \qquad \textbf{(23 - 7)}$$

من أجل جسم أسود، فإن الإشعاع المغادر J يساوي إلى استطاعة الإصدار E_b، وذلك لأن الجسم الأسود يمتص كامل الإشعاع الوارد إليه، وبالتالي لا توجد مركبة انعكاس في الإشعاع المغادر.

7 - 4 - 5 - الكميات الطيفية *Spectral Quantities*:

لقد درسنا حتى الآن كميات كلية للإشعاع (كميات محسوبة من خلال إجراء التكامل على كامل الأطوال الموجية). إن هذه المقاربة الشاملة مناسبة في كثير من مسائل الإشعاع التي تصادفنا في التطبيقات العملية. لكن بعض الحالات تتطلب الأخذ بالحسبان تغير الإشعاع مع الطول الموجي فضلاً عن تغيّره مع الاتجاه، والتعبير عن كميات الإشعاع عند قيمة محددة للطول الموجي λ أو من أجل فاصلٍ مساوٍ إلى واحدة الطول الموجي λ. تسمى هذه الكميات بالكميات الطيفية.

لنأخذ مثلاً شدة الإشعاع الطيفية $I_\lambda(\lambda,\theta,\phi)$، تمثل هذه الشدة ببساطة الشدة الكلية للإشعاع $I(\theta,\phi)$ من أجل واحدة الطول الموجي λ. تعرف الشدة الطيفية spectral intensity لإشعاع صادر $I_{\lambda,e}(\lambda,\theta,\phi)$ بأنها معدل إصدار الطاقة الإشعاعية $d\dot{Q}_e$ عند الطول الموجي λفي الاتجاه (θ,ϕ) من أجل واحدة المساحة الناظمية وواحدة الزاوية على هذا الاتجاه، ويعبر عنها بالعلاقة:

$$I_{\lambda,e}(\lambda,\theta,\phi) = \frac{d\dot{Q}_e}{dA\cos\theta\, d\omega\, d\lambda} \qquad \left[\mathrm{W/m^2.sr.}\mu\mathrm{m}\right] \qquad \textbf{(24 - 7)}$$

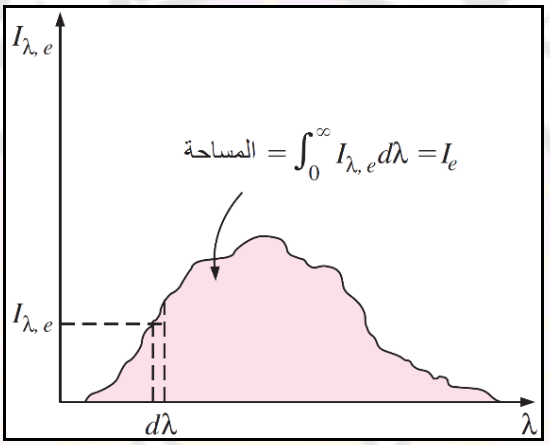
وبالتالي تصبح استطاعة الإصدار الطيفية:

$$E_\lambda = \int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi/2} I_{\lambda,e}(\lambda,\theta,\phi)\cos\theta\sin\theta\, d\theta\, d\phi \qquad \left[\mathrm{W/m^2}\right] \qquad \textbf{(25 - 7)}$$

ويمكن الحصول على معادلات مشابهة من أجل التشعع الطيفي G_λ، والإشعاع المغادر الطيفي J_λ، وذلك باستبدال $I_{\lambda,e}$ في هذه المعادلة بـ $I_{\lambda,i}$ و $I_{\lambda,e+r}$ على الترتيب.

عند معرفة تغير شدة الإشعاع الطيفية I_λ مع الطول الموجي λ، فإن شدة الإشعاع الكلية I للإشعاع الصادر والوارد والمغادر تعطى من خلال إجراء التكامل على كامل طيف الطول الموجي، كما يبين الشكل (7 – 13):

$$I_e = \int_0^\infty I_{\lambda,e} d\lambda$$
$$I_i = \int_0^\infty I_{\lambda,i} d\lambda \qquad \textbf{(26 – 7)}$$
$$I_{e+r} = \int_0^\infty I_{\lambda,e+r} d\lambda$$



الشكل (7 – 13) كامل الكميات الطيفية على كامل طيف الطول الموجي للإشعاع الصادر.

وبشكل مشابه، فعند معرفة تغير التدفقات الإشعاعية الطيفية $J_\lambda, G_\lambda, E_\lambda$ مع الطول الموجي λ، فإن التدفقات الإشعاعية الكلية تحسب من خلال إجراء التكامل على كامل طيف الطول الموجي:

$$E = \int_0^\infty E_\lambda d\lambda$$
$$G = \int_0^\infty G_\lambda d\lambda \qquad \textbf{(27 – 7)}$$
$$J = \int_0^\infty J_\lambda d\lambda$$

إذا كانت السطوح ناشرة، وكان الإشعاع الوارد منتشراً أيضاً، فإن التدفقات الإشعاعية الطيفية ترتبط مع الشدات الطيفية بالعلاقات التالية:

$$E_\lambda = \pi I_{\lambda,e}$$
$$G_\lambda = \pi I_{\lambda,i} \qquad \textbf{(28 – 7)}$$
$$J_\lambda = \pi I_{\lambda,e+r}$$

قام ماكس بلانك بحساب الشدة الطيفية للإشعاع الصادر عن جسم أسود عند درجة حرارة مطلقة T وطول موجي λ، وذلك وفق العلاقة:

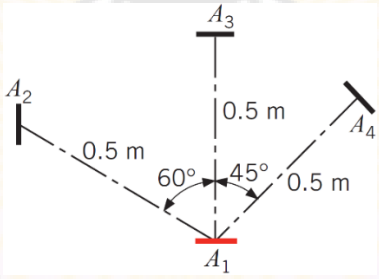
$$I_{b\lambda} = (\lambda,T) = \frac{2hc_0^2}{\lambda^5\left[\exp\left(hc_0/\lambda kT\right)-1\right]} \qquad \left[\mathrm{W/m^2.sr.}\mu\mathrm{m}\right] \textbf{(29 – 7)}$$

وبالتالي، فإن استطاعة الإصدار الطيفية للجسم الأسود تعطى بالعلاقة:

$$E_{b\lambda}(\lambda,T) = \pi I_{b\lambda}(\lambda,T) \qquad \textbf{(30 – 7)}$$

مثال 7 – 2:

سطح صغير مساحته $A_1 = 10^{-3}\,\mathrm{m}^2$ يصدر الإشعاع بشكل ناشر. تبين القياسات أن شدة الإشعاع الكلية الصادرة في الاتجاه الناظمي على السطح، هي $I_n = 7000\,\mathrm{W/m^2.sr}$.



يسقط الإشعاع الصادر عن السطح على ثلاثة سطوح أخرى مساحاتها متساوية $A_2 = A_3 = A_4 = 10^{-3}\,\mathrm{m}^2$، وتبعد عن السطح A_1 مسافة $0.5\,\mathrm{m}$، وتتوضع كما هو مبين في الشكل. ما شدة الإشعاع في كل من الاتجاهات الثلاثة؟ ما هي الزوايا الصلبة المقابلة للسطوح الثلاثة عند النظر إليها من A_1؟ ما معدل الإشعاع الصادر عن A_1 والساقط على كل من السطوح الثلاثة؟

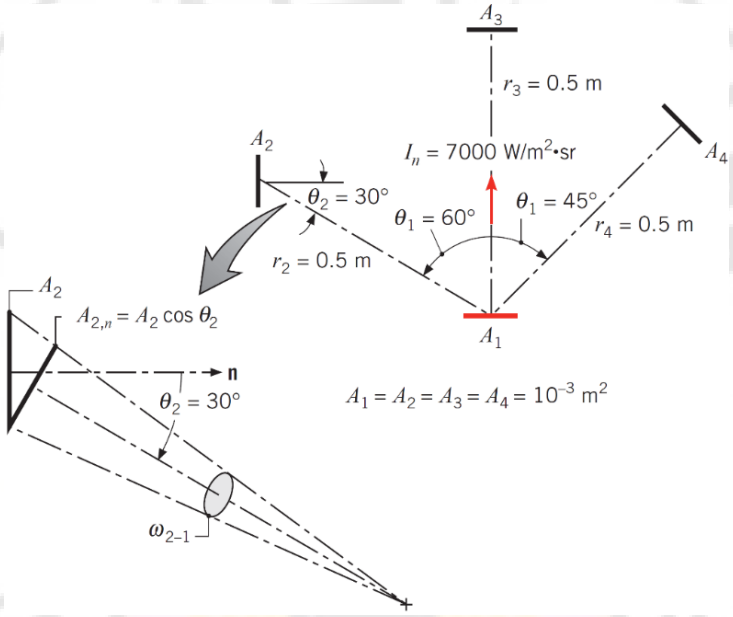
الحل:

المعطيات: شدة الإشعاع الصادر عن السطح A_1 في الاتجاه الناظمي، وتوضع السطوح الثلاثة بالنسبة لـ A_1.

المطلوب:

1. شدة الإصدار في كل من الاتجاهات الثلاثة.
2. الزوايا الصلبة المقابلة للسطوح الثلاثة.
3. معدل الإشعاع الساقط على كل من السطوح الثلاثة.

الشكل:



الافتراضات:

1. السطح A_1 يصدر الإشعاع بشكل ناشر.
2. يمكن اعتبار السطوح A_1, A_2, A_3, A_4 كسطوح تفاضلية، حيث إن مساحتها أصغر بكثير من مربع البعد فيما بينها (أي بين السطح A_1 وكل من السطوح الثلاثة الأخرى).

التحليل:

1. من تعريف سطح الإصدار الناشر، نعلم أن شدة الإشعاع الصادر لا تتعلق بالاتجاه، وبالتالي فإن:

$$I = 7000\,\mathrm{W/m^2.sr}$$

في الاتجاهات كافة.

2. بما أن السطوح الثلاثة هي سطوح تفاضلية، بالتالي تحسب الزاوية الصلبة من العلاقة (7 – 13):

$$d\omega = \frac{dA_n}{r^2}$$

حيث إن dA_n هو مسقط السطح على المستوي العمودي على الإشعاع.

بما أن السطحين A_3 و A_4 عموديان على اتجاه الإشعاع، يمكننا حساب الزاويتين الصلبتين المقابلتين لهذين السطحين مباشرةً من العلاقة:

$$\omega_{3-1} = \omega_{4-1} = \frac{A_3}{r^2} = \frac{10^{-3}\,\mathrm{m}^2}{(0.5\,\mathrm{m})^2} = 4\times10^{-3}\,\mathrm{sr}$$

بما أن السطح A_2 يميل على اتجاه الإشعاع بزاوية θ_2، فإننا نحسب الزاوية الصلبة المقابلة له من العلاقة:

$$\omega_{2-1} = \frac{A_2\cos\theta_2}{r^2} = \frac{10^{-3}\,\mathrm{m}^2\times\cos 30^\circ}{(0.5\,\mathrm{m})^2} = 3.46\times10^{-3}\,\mathrm{sr}$$

3. كون السطح A_1 هو سطح تفاضلي، وشدة الإشعاع هي في كافة الاتجاهات نفسها، فإن معدل الطاقة الإشعاعية الصادرة عن السطح A_1 في أي اتجاه θ عبر زاوية صلبة ω_{n-1} يحسب من خلال ضرب شدة الإشعاع I بمساحة مسقط السطح A_1 على المستوي العمودي على الإشعاع بالزاوية الصلبة ω_{n-1}، أي إن:

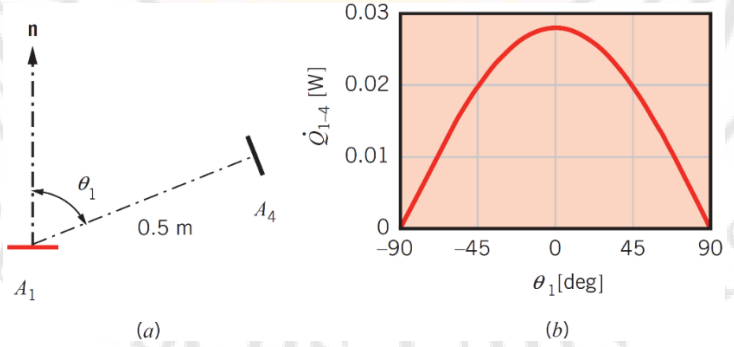
$$\dot{Q}_{1-n} = I\,(A_1\cos\theta_1)\,\omega_{n-1}$$

حيث إن θ_1 هي الزاوية بين الناظم للسطح A_1واتجاه الإشعاع، وهي تتغير بتغير السطح المراد حساب الإشعاع الساقط عليه؛ بالتالي فإن:

$$\dot{Q}_{1-2} = 7000\,\mathrm{W/m^2.sr} \times \left(10^{-3}\,\mathrm{m^2} \times \cos 60^\circ\right) \times 3.46 \times 10^{-3}\,\mathrm{sr}$$
$$= 12.1 \times 10^{-3}\,\mathrm{W}$$
$$\dot{Q}_{1-3} = 7000\,\mathrm{W/m^2.sr} \times \left(10^{-3}\,\mathrm{m^2} \times \cos 0^\circ\right) \times 4 \times 10^{-3}\,\mathrm{sr}$$
$$= 28 \times 10^{-3}\,\mathrm{W}$$
$$\dot{Q}_{1-4} = 7000\,\mathrm{W/m^2.sr} \times \left(10^{-3}\,\mathrm{m^2} \times \cos 45^\circ\right) \times 4 \times 10^{-3}\,\mathrm{sr}$$
$$= 19.8 \times 10^{-3}\,\mathrm{W}$$

المناقشة:

1. يجب ملاحظة أن قيم الزاوية θ_1 لسطح الإصدار تختلف عن قيم الزوايا $\theta_2, \theta_3, \theta_4$ للسطوح المستقبلة.
2. في حال لم تكن مساحة السطوح صغيرة بالنسبة لمربع المسافة الفاصلة بينها، فإن كلاً من الزوايا الصلبة ومعدلات التبادل الإشعاعي تحسب من خلال إجراء التكامل لكل من العلاقتين (7 – 12)، (7 – 14) على الترتيب، وذلك على كامل مساحة السطح.
3. على الرغم من أن شدة الإشعاع الصادر مستقلة عن الاتجاه، إلا أن معدل الإشعاع الساقط على كل من السطوح الثلاثة يختلف بشكل واضح نتيجة الاختلاف في الزوايا الصلبة ومساحة مساقط السطوح. فعلى سبيل المثال، بفرض أننا حركنا السطح A_4 إلى مواضع مختلفة θ_1، مع الحفاظ على A_4 عمودياً على اتجاه الإشعاع، والحفاظ على المسافة $r = 0.5\,\mathrm{m}$، كما هو مبين في الشكل (a).



عند هذه الشروط فإن الزاوية الصلبة تبقى ثابتة:

$$\omega_{4-1} = 4 \times 10^{-3}\,\mathrm{sr}$$

وبالتالي، فإن معدل الطاقة الإشعاعية الساقطة على السطح A_4، هو:

$$\dot{Q}_{1-4} = IA_1\omega_{4-1}\cos\theta_1 = \left[7000\,\mathrm{W/m^2.sr}\times 10^{-3}\,\mathrm{m^2}\times 4\times 10^{-3}\,\mathrm{sr}\right]\cos\theta_1$$

يبين المخطط (b) معدل الطاقة الصادرة عن السطح A_1 والساقطة على السطح A_4. كما يمكننا أن نتوقع مسبقاً، فإن الطاقة الإشعاعية الواردة إلى السطح A_4 تكون أعظمية عندما $\theta_1 = 0^o$ $\left(\dot{Q}_{1-4} = 28\times 10^{-3}\,\mathrm{W}\right)$، حيث إنه إذا كان هنالك مراقب على السطح A_4، فإنه سيرى أكبر مسقط لسطح A_1. وأيضاً كما يمكن أن نتنبأ مسبقاً، فإن الطاقة الإشعاعية الساقطة على A_4 تكون مساوية للصفر عندما $\theta_1 = \pm 90^o$، وذلك بالرغم من أن الإشعاع الصادر عن A_1 مستقل عن θ. عندما $\theta_1 = \pm 90^o$، فإنه في حال كان هناك مراقب على السطح A_4، فإنه سيكون عاجزاً عن رؤية السطح A_1، وبالتالي فإنه لن يتلقى أي قدر من الطاقة الصادرة عن A_1.

7 - 5 - الخواص الإشعاعية *Radiative Properties*:

إن معظم المواد المستخدمة في التطبيقات العملية هي مواد عاتمة للإشعاع الحراري (معادن، خشب،...)، ويعد الإشعاع بالنسبة لمثل هذه المواد ظاهرة سطحية. أي إن الإشعاع الحراري يصدر أو يتم امتصاصه ضمن الميكرونات الأولى القريبة من السطح، وبالتالي فإننا نتحدث عن الخواص الإشعاعية لسطوح المواد العاتمة.

هناك مواد أخرى (مثل الزجاج أو الماء) تسمح للإشعاع المرئي باختراقها حتى عمق كبير قبل أن يحدث أي امتصاص ملحوظ للإشعاع. وبالتالي لا يمكن أن نعد الإشعاع عبر مثل هذه المواد نصف الشفافة semitransparent ظاهرة سطحية، حيث إن كامل حجم المادة يتفاعل مع الإشعاع. بالمقابل فإن كلاً من الزجاج والماء عاتم جزئياً بالنسبة للأشعة تحت الحمراء. بالتالي يمكن للمواد أن تبدي سلوكاً مختلفاً باختلاف الطول الموجي، كما تمثل العلاقة بالطول الموجي أحد الاعتبارات المهمة في دراسة الخصائص الإشعاعية للمواد، كالإصدارية والامتصاصية والانعكاسية والنفاذية.

7 – 5 – 1 – الإصدارية *Emissivity*:

تعبر إصدارية السطح عن نسبة الإشعاع الصادر عن السطح عند درجة حرارة معينة إلى الإشعاع الصادر عن جسم أسود عند درجة الحرارة نفسها، ويرمز للإصدارية ε، وتأخذ قيمها ضمن المجال $0 \le \varepsilon \le 1$. تقيس الإصدارية درجة اقتراب السطح من الجسم الأسود.

إن الإصدارية لسطح حقيقي ما ليست ثابتة. بالأحرى فإن إصدارية السطح الحقيقي تتغير مع درجة حرارة السطح، كما تتغير مع الطول الموجي واتجاه الإشعاع الصادر. بالتالي يمكن تمييز إصداريات مختلفة لسطح ما، وذلك بناءً على العوامل المؤثرة المعتبرة. عند ثبات درجة حرارة السطح فإن الإصدارية الأساسية له هي الإصدارية الطيفية الموجهة spectral directional emissivity، والتي تمثل نسبة شدة الإشعاع الصادر عن السطح عند طول موجي محدد وفي اتجاه محدد إلى شدة الإشعاع الصادر عن جسم أسود له درجة الحرارة نفسها، وعند الطول الموجي نفسه، أي إن:

$$\varepsilon_{\lambda,\theta}\left(\lambda,\theta,\phi,T\right)=\frac{I_{\lambda,e}\left(\lambda,\theta,\phi,T\right)}{I_{b\lambda}\left(\lambda,T\right)} \qquad \textbf{(31 - 7)}$$

تعرف الإصدارية الموجهة الكلية total directional emissivity من خلال استخدام الشدات الكلية (الشدات الناتجة عن إجراء التكامل على كامل الأطوال الموجية)، وذلك كما يلي:

$$\varepsilon_{\theta}\left(\theta,\phi,T\right)=\frac{I_{e}\left(\theta,\phi,T\right)}{I_{b}\left(T\right)} \qquad \textbf{(32 - 7)}$$

يفضل في التطبيقات العملية التعامل مع خواص إشعاعية وسطية في الاتجاهات كافة، وتسمى بالخواص نصف الكروية hemispherical properties. نلاحظ أن تكامل معدل الطاقة الإشعاعية الصادرة عند طول موجي محدد من أجل واحدة السطح ضمن كامل نصف الكرة (من أجل كافة الاتجاهات) هو استطاعة الإصدار الطيفية، وتعطى الإصدارية نصف الكروية الطيفية spectral hemispherical emissivity وفق العلاقة:

$$\varepsilon_{\lambda}\left(\lambda,T\right)=\frac{E_{\lambda}\left(\lambda,T\right)}{E_{b\lambda}\left(\lambda,T\right)} \qquad \textbf{(33 - 7)}$$

نلاحظ أن إصدارية سطح ما عند طول موجي محدد تختلف باختلاف درجة الحرارة، وذلك لأن التوزع الطيفي للإشعاع الصادر (وبالتالي كمية الإشعاع الصادر عند طول موجي محدد) يتغير مع درجة الحرارة.

وتعرف الإصدارية نصف الكروية الكلية total hemispherical emissivity بدلالة الطاقة الإشعاعية الصادرة على كامل الأطوال الموجية في الاتجاهات كلها، وذلك وفق العلاقة:

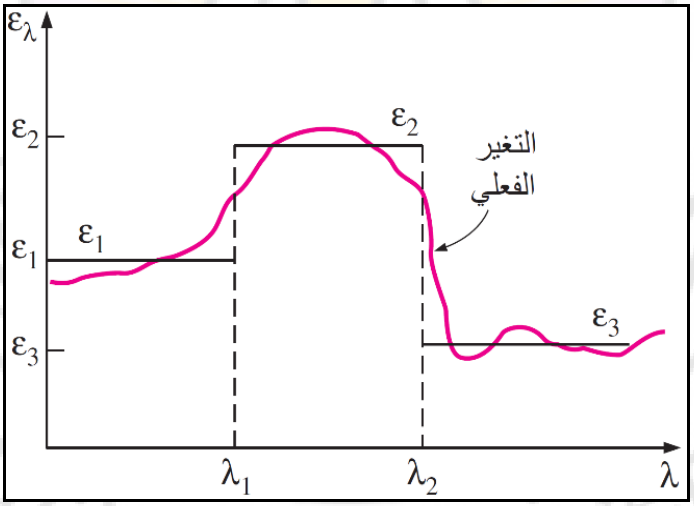
$$\varepsilon\left(T\right)=\frac{E\left(T\right)}{E_{b}\left(T\right)} \qquad \textbf{(34 - 7)}$$

بالتالي فإن الإصدارية نصف الكروية الكلية (أو الإصدارية الوسطية) لسطح ما عند درجة حرارة معينة تعبر عن نسبة الطاقة الإشعاعية الصادرة الكلية عن السطح إلى الإشعاع الصادر عن جسم أسود له مساحة السطح نفس، ودرجة الحرارة نفسها.

بتعويض العلاقة (7 – 33) في العلاقة(7 – 27)، نجد أن الإصدارية نصف الكروية الكلية تعطى بالعلاقة:

$$\varepsilon(T)=\frac{E(T)}{E_b(T)}=\frac{\int_0^\infty \varepsilon_\lambda(\lambda,T)E_{b\lambda}(\lambda,T)d\lambda}{\sigma T^4} \qquad \textbf{(35 – 7)}$$

لإجراء هذا التكامل، فإننا نحتاج إلى معرفة تغير الإصدارية الطيفية مع الطول الموجي عند درجة حرارة محددة. عادةً ما يكون تابع التكامل معقداً، وبالتالي يجب إجراء التكامل بشكل عددي، إلا أنه من الممكن إجراء هذا التكامل بشكل سهل نسبياً، وذلك من خلال تقسيم الطيف إلى عدد كافٍ من حزم الطول الموجي وافتراض أن الإصدارية تبقى ثابتة ضمن كل حزمة، أي بالتعبير عن التابع $\varepsilon_\lambda(\lambda,T)$ كتابع خطوة. إن هذا التبسيط يسهل الإجراءات الرياضية بشكل كبير دون أن يؤثر بشكل كبير في دقة النتائج، حيث يسمح لنا بتحويل التكامل إلى عملية جمع بدلالة توابع الإصدار للجسم الأسود.



الشكل (7 – 14) تقريب التغير الفعلي في الإصدارية مع الطول الموجي إلى تابع خطوة.

لنأخذ مثلاً تابع الإصدارية المبين في الشكل (7 – 14). من الواضح أنه يمكن تقريب هذا التابع بشكل مقبول إلى تابع خطوة من الشكل:

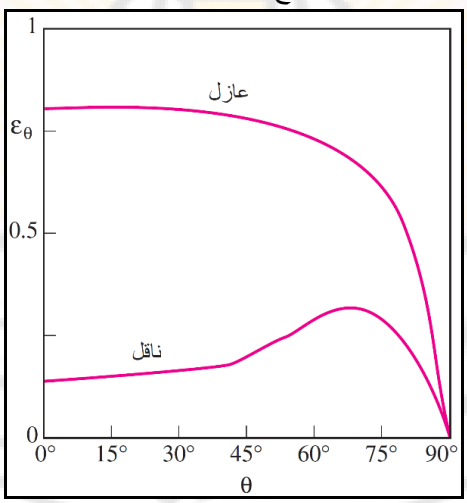
$$\varepsilon_\lambda = \begin{cases} \varepsilon_1 = \text{constant} \quad ; & 0 \le \lambda \le \lambda_1 \\ \varepsilon_2 = \text{constant} \quad ; & \lambda_1 \le \lambda \le \lambda_2 \\ \varepsilon_3 = \text{constant} \quad ; & \lambda_2 \le \lambda \le \infty \end{cases} \qquad \textbf{(36 – 7)}$$

وبالتالي يمكن حساب الإصدارية الوسطية من العلاقة (7 – 35) بتقسيم التكامل إلى ثلاثة أقسام، واستخدام تعريف تابع الإصدار للجسم الأسود، كما يلي:

$$\varepsilon(T) = \frac{\varepsilon_1 \int_0^{\lambda_1} E_{b\lambda} d\lambda}{E_b} + \frac{\varepsilon_2 \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} E_{b\lambda} d\lambda}{E_b} + \frac{\varepsilon_3 \int_{\lambda_2}^{\infty} E_{b\lambda} d\lambda}{E_b} \qquad \textbf{(37 – 7)}$$

$$\varepsilon(T) = \varepsilon_1 f_{0-\lambda_1}(T) + \varepsilon_2 f_{\lambda_1-\lambda_2}(T) + \varepsilon_3 f_{\lambda_2-\infty}(T)$$

إن الإشعاع ظاهرة معقدة بطبيعتها، وتزداد تعقيداً عندما نأخذ علاقة الخواص الإشعاعية بالطول الموجي والاتجاه بالحسبان. لذلك فإننا عادةً ما نلجأ إلى تقريب السطوح إلى سطوح رمادية ناشرة، ونقصد بالسطح الناشر أن خواص السطح لا تتعلق بالاتجاه، أما السطح الرمادي فيعني أن خواصه مستقلة عن الطول الموجي. بالتالي فإن الإصدارية لسطح رمادي ناشر هي الإصدارية نصف الكروية الكلية لهذا السطح؛ لأنها مستقلة عن الطول الموجي والاتجاه.

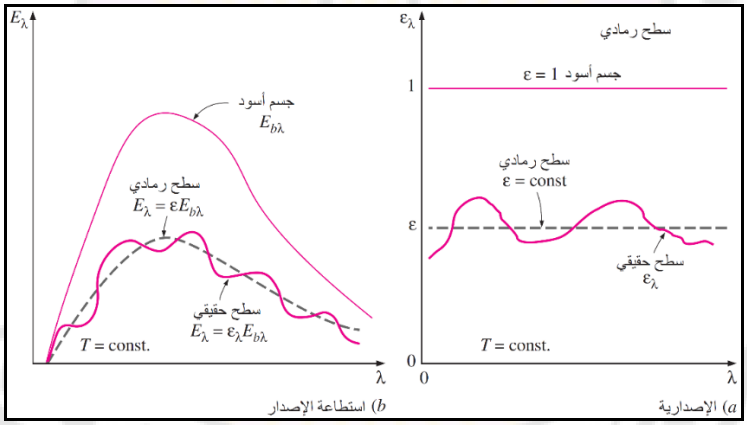


الشكل 7 – 15) الإصدارية مع الاتجاه للأجسام الناقلة والعازلة كهربائياً.

بالرغم من أن السطوح الحقيقية لا تصدر الإشعاع بشكل ناشر مثالي، كما في حالة الجسم الأسود، إلا أنها تقترب من المثالية في معظم الأحيان. يوضح الشكل (7 – 15) تغير الإصدارية مع الاتجاه للأجسام الناقلة والعازلة للكهرباء. تمثل θ الزاوية بين الناظم على السطح

واتجاه الإصدار. نلاحظ من الشكل أن ε_θ تبقى ثابتة تقريباً من أجل $\theta < 40^o$ في حالة النواقل الكهربائية كالمعادن، ومن أجل $\theta < 70^o$ في حالة العوازل الكهربائية كالبلاستيك. بالتالي فإن الإصدارية الموجهة لسطح ما في الاتجاه الناظمي على السطح تمثل الإصدارية نصف الكروية للسطح. في أثناء تحليل الإشعاع فإننا نفرض عادةً أن السطوح ناشرة، وأن الإصدارية تساوي إلى قيمتها في الاتجاه الناظمي على السطح $(\theta = 0)$.

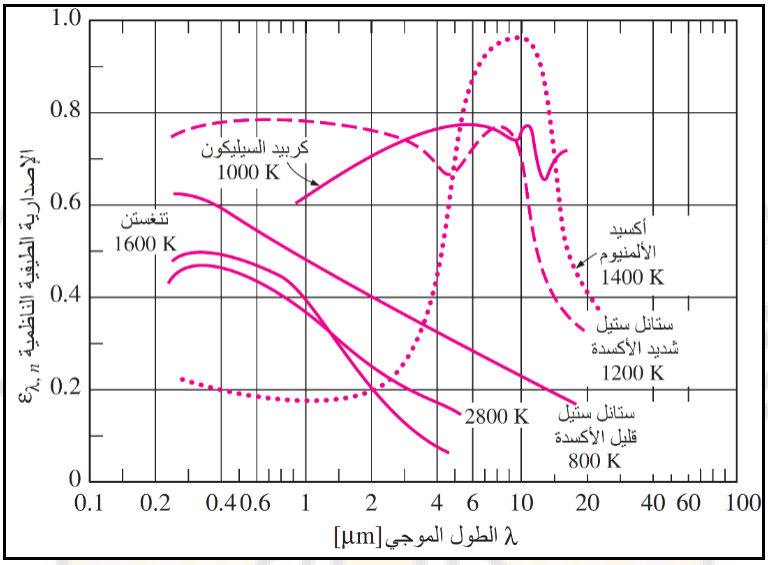
يوضح الشكل (7 – 16) تأثير التقريب الرمادي للسطوح على الإصدارية واستطاعة الإصدار لسطح حقيقي. نلاحظ أن إصدار الإشعاع من سطح حقيقي بشكل عام يختلف عن توزع بلانك، وأن منحني الإصدار يمتلك عدة قيم عليا ودنيا. يجب على السطح الرمادي أن يصدر إشعاعاً مساوياً لذاك الذي يصدره السطح الحقيقي عند درجة الحرارة نفسها؛ بالتالي فإن المساحات الواقعة تحت كل من منحني الإصدار للجسم الحقيقي والرمادي يجب أن تكون متساوية.



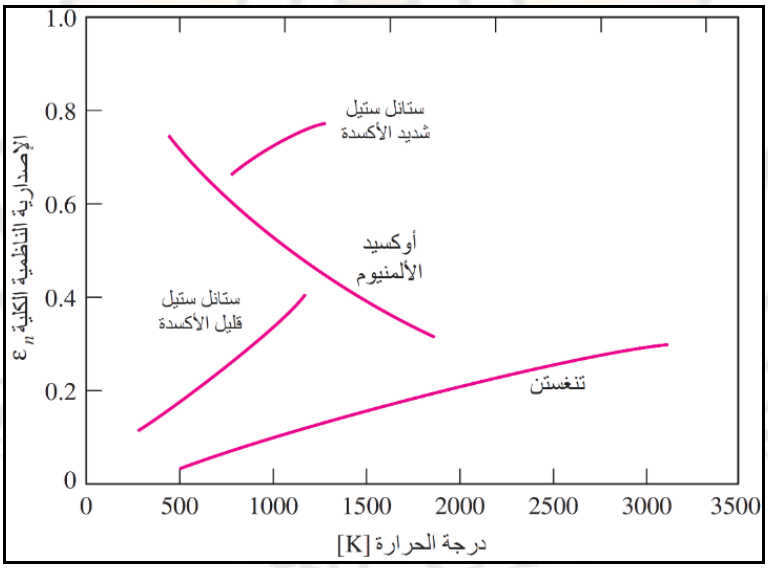
الشكل (7 – 16) مقارنة الإصدارية واستطاعة الإصدار لسطح حقيقي مع سطح رمادي وجسم أسود عند درجة الحرارة نفسها.

نجد قيم الإصدارية لبعض المواد الشائعة في الجدولين (A19 - 20)، ويوضح الشكل (7 – 17) تغيرات الإصدارية مع الطول الموجي؛ في حين يبين الشكل (7 – 18) هذه التغيرات مع درجة الحرارة. يعطي الشكل (7 – 19) مجالات قيم الإصدارية لبعض المواد. نلاحظ أن المعادن بشكل عام تمتلك قيماً منخفضة للإصدارية، وتنخفض هذه القيم إلى حوالي 0.02 للسطوح المطلية، في حين أن الأجسام اللامعدنية (الخزف، المواد العضوية، ...) تمتلك قيماً كبيرة للإصدارية. نلاحظ أيضاً أن إصدارية المعادن تزداد بازدياد درجة الحرارة، وأن الأكسدة

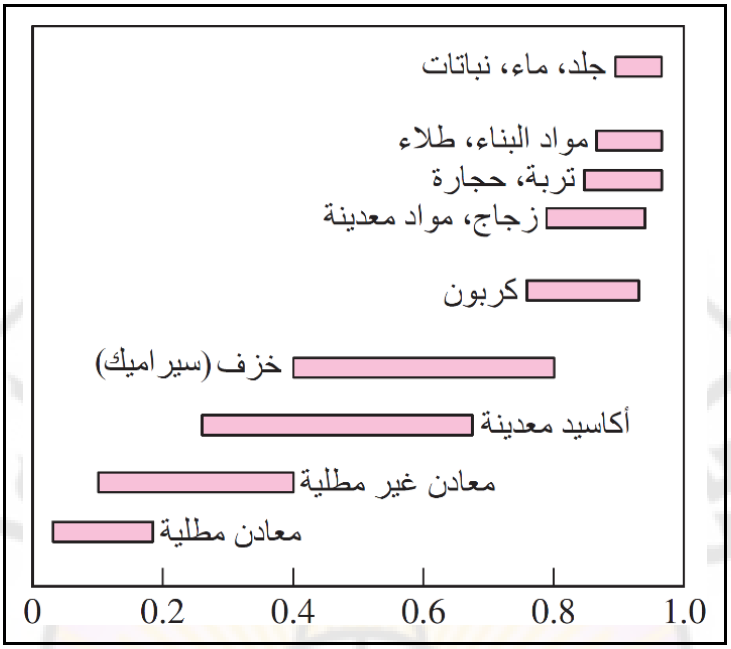
تسبب ازدياداً ملحوظاً في إصدارية المعادن. قد تؤدي الأكسدة الشديدة للمعادن إلى ازدياد الإصدارية إلى قيم مماثلة لما هي عليه في حالة الأجسام اللامعدنية.



الشكل (7 – 17) تغير الإصدارية مع الطول الموجي لبعض المواد.



الشكل (7 – 18) تغير الإصدارية مع درجة الحرارة.



الشكل (19 – 7) مجالات قيم الإصدارية لمواد مختلفة.

7 – 5 – 2 – الامتصاصية والانعكاسية والنفاذية

***Absorptivity, Reflectivity, and Transmissivity*:**

تصدر الأجسام جميعها إشعاعاً بشكل مستمر. وبالمقابل فإن كل الأجسام تتعرض لإشعاع قادم من الاتجاهات كلها ضمن مجال للأطوال الموجية. عرفنا سابقاً التدفق الإشعاعي الوارد على سطح ما بأنه التشعع irradiation، ورمزنا له بـ G.

عندما يسقط الإشعاع على سطحٍ ما، فإن جزءاً منه يتم امتصاصه، وينعكس جزء آخر، وفي حال بقاء أي جزء من الإشعاع، فإنه يعبر خلال السطح، كما هو مبين في الشكل (7 – 20). تسمى نسبة الإشعاع الوارد الممتص من قبل السطح بالامتصاصية absorptivity α، والنسبة من الإشعاع الوارد أو المنعكس تسمى الانعكاسية reflectivity ρ، ونسبة الإشعاع الوارد والنافذ تسمى النفاذية transmissivity τ:

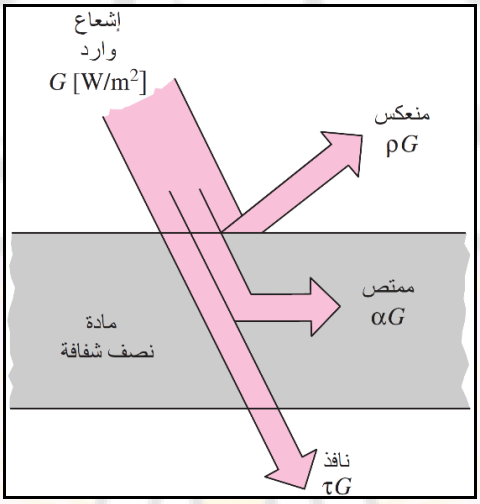
الامتصاصية: (7 – 38)
$$\alpha = \frac{G_{abs}}{G} \quad ; \quad 0 \le \alpha \le 1$$

الانعكاسية: (7 – 39)
$$\rho = \frac{G_{ref}}{G} \quad ; \quad 0 \le \rho \le 1$$

النفاذية: $\tau = \frac{G_{tr}}{G} \quad ; \quad 0 \le \tau \le 1$ **(40 – 7)**

G: الطاقة الإشعاعية الواردة إلى السطح.

G_{abs}, G_{ref}, G_{tr}: الجزء الممتص والمنعكس والنافذ من الطاقة الإشعاعية الواردة إلى السطح، على الترتيب.



الشكل (7 – 20) الإشعاع الوارد إلى مادة نصف شفافة.

يقتضي القانون الأول في الترموديناميك أن يكون مجموع الطاقة الإشعاعية الممتصة والمنعكسة والنافذة مساوياً إلى الإشعاع الوارد، أي إن:

$$G_{abs} + G_{ref} + G_{tr} = G \qquad \textbf{(41 – 7)}$$

بالقسمة على G:

$$\alpha + \rho + \tau = 1 \qquad \textbf{(42 – 7)}$$

ومن أجل السطوح العاتمة فإن $\tau = 0$، وبالتالي:

$$\alpha + \rho = 1 \qquad \textbf{(43 – 7)}$$

إن التعريفات السابقة هي للخواص نصف الكروية الكلية، حيث إن G تمثل التدفق الإشعاعي الوارد على السطح من الاتجاهات كافة، وعلى كامل الأطوال الموجية. بالتالي فإن τ, ρ, α هي الخواص الوسطية لوسط ما من أجل كافة الاتجاهات والأطوال الموجية. كما هو الحال بالنسبة للإصدارية فإن هذه الخواص يمكن أن تعطى من أجل طول موجي أو اتجاه محدد أو من أجل الاثنين معاً. فمثلاً تعرف الامتصاصية الطيفية الموجهة spectral directional

absorptivity بأنها النسبة الممتصة من شدة الإشعاع الوارد عند طول موجي محدد وفي اتجاه محدد، كما تعرف الانعكاسية الطيفية الموجهة spectral directional reflectivity بأنها النسبة المنعكسة من شدة الإشعاع الوارد عند طول موجي واتجاه محددين.

$$\alpha_{\lambda,\theta}(\lambda,\theta,\phi)=\frac{I_{\lambda,\text{abs}}(\lambda,\theta,\phi)}{I_{\lambda,i}(\lambda,\theta,\phi)}$$
$$\rho_{\lambda,\theta}(\lambda,\theta,\phi)=\frac{I_{\lambda,\text{ref}}(\lambda,\theta,\phi)}{I_{\lambda,i}(\lambda,\theta,\phi)} \qquad \textbf{(44 – 7)}$$

بشكل مماثل، فإن الامتصاصية نصف الكروية الطيفية والانعكاسية نصف الكروية الطيفية لسطح ما تعرفان بالعلاقة:

$$\alpha_\lambda(\lambda)=\frac{G_{\lambda,\text{abs}}(\lambda)}{G_\lambda(\lambda)} \qquad \rho_\lambda(\lambda)=\frac{G_{\lambda,\text{ref}}(\lambda)}{G_\lambda(\lambda)} \qquad \textbf{(45 – 7)}$$

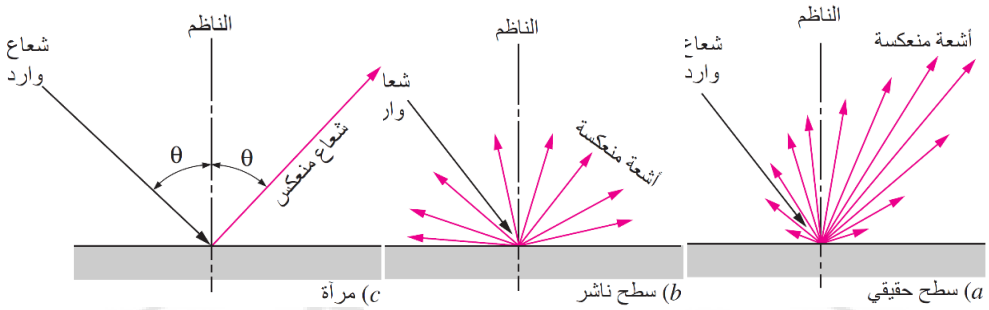
ويمكن تعريف قيم مشابهة للنفاذية في حالة المواد نصف الشفافة. فمثلاً تعطى النفاذية نصف الكروية الطيفية spectral hemispherical transmissivity لوسط ما بالعلاقة:

$$\tau_\lambda(\lambda)=\frac{G_{\lambda,\text{tr}}(\lambda)}{G_\lambda(\lambda)} \qquad \textbf{(46 – 7)}$$

يمكن تعريف كل من الامتصاصية والانعكاسية والنفاذية الوسطية لسطح ما بدلالة نظيرتها الطيفية:

$$\alpha=\frac{\int_0^\infty \alpha_\lambda G_\lambda d\lambda}{\int_0^\infty G_\lambda d\lambda} \qquad \rho=\frac{\int_0^\infty \rho_\lambda G_\lambda d\lambda}{\int_0^\infty G_\lambda d\lambda} \qquad \tau=\frac{\int_0^\infty \tau_\lambda G_\lambda d\lambda}{\int_0^\infty G_\lambda d\lambda} \qquad \textbf{(47 – 7)}$$

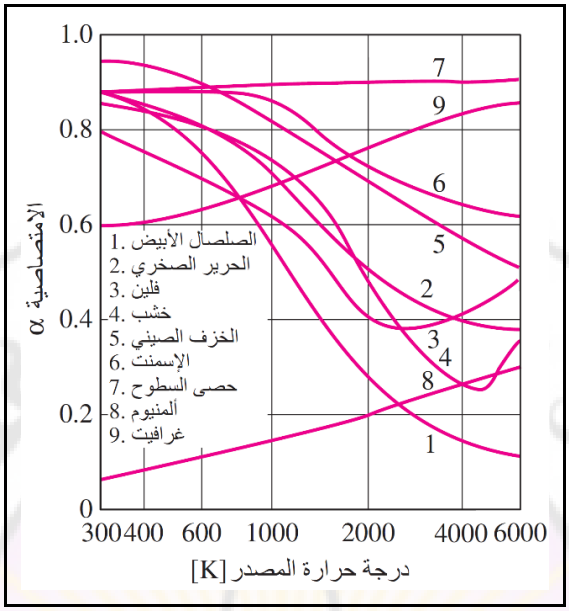
تختلف الانعكاسية بعض الشيء عن الخواص الأخرى في طبيعتها ثنائية الاتجاه bidirectional. أي إن قيمة الانعكاسية لسطح ما لا تتعلق باتجاه الورود فقط، وإنما تتعلق أيضاً باتجاه الانعكاس. بالتالي فإن الأشعة المنعكسة لشعاع وارد على سطح حقيقي في اتجاه محدد، ستعطي شكلاً غير منتظم عند انعكاسها، كما في الشكل (7 – 21). من الجدير بالذكر أنه لا توجد بيانات دقيقة عن الانعكاسية لمعظم السطوح، وحتى في حال وجود مثل هذه البيانات فإننا لا نأخذها بالحسبان في حسابات الإشعاع؛ لأنها ستزيد من تعقيد التحليل دون أن تؤثر بشكل كبير على النتائج.



الشكل (7 – 21) الأشكال المختلفة للانعكاس عن السطوح.

بشكل عام ومن أجل التبسيط، فإننا نفرض أن السطوح تعكس الإشعاع إما كمرآة مثالية أو بشكل ناشر. في حالة الانعكاس عن مرآة specular reflection فإن زاوية الانعكاس تساوي إلى زاوية الورود. أما في حالة الانعكاس الناشر diffuse reflection فإن الإشعاع ينعكس بشكلٍ متساوٍ في كافة الاتجاهات. يقترب الانعكاس عن السطوح الملساء والمطلية من حالة الانعكاس عن مرآة، في حين أن الانعكاس عن السطوح الخشنة يقترب من الانعكاس الناشر. تعرف نعومة السطح في تحليل الإشعاع بالنسبة للطول الموجي، حيث نقول عن سطح أنه أملس، إذا كان ارتفاع خشونة السطح أصغر بكثير من الطول الموجي للإشعاع الوارد.

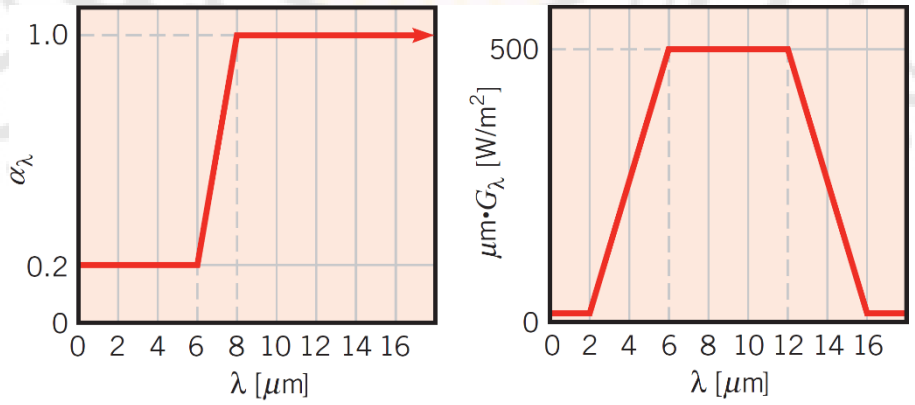
بخلاف الإصدارية، فإن امتصاصية مادة ما مستقلة عملياً عن درجة حرارة السطح. ولكن من ناحية أخرى فإن الامتصاصية تتعلق بشدة بدرجة حرارة مصدر الإشعاع الوارد. يظهر الشكل (7 – 22) قيم الامتصاصية لمواد مختلفة عند درجة حرارة الغرفة كتابع لدرجة حرارة مصدر الإشعاع. فعلى سبيل المثال فإن امتصاصية السطح الإسمنتي لمنزل هي حوالي 0.6 من أجل الإشعاع الشمسي (درجة حرارة المصدر 5780K)، في حين أن الامتصاصية من أجل الإشعاع الصادر عن الأشجار والمباني المحيطة هي حوالي 0.9 (درجة حرارة المصدر 300K).



الشكل (7 – 22) تغير الامتصاصية لبعض المواد مع درجة حرارة مصدر الإشعاع.

نلاحظ أن امتصاصية الألمنيوم تزداد بازدياد درجة حرارة مصدر الإشعاع، وهي صفة مميزة للمعادن، في حين أن امتصاصية المواد العازلة للكهرباء بشكل عام تتناقص مع ازدياد درجة حرارة المصدر، ويبدو هذا التناقص واضحاً في حالة الأجسام التي تبدو بيضاء للعين. فعلى سبيل المثال فإن امتصاصية سطح مطلي بالأبيض منخفضة للإشعاع الشمسي، لكنها عالية للإشعاع تحت الأحمر.

مثال 7 – 3:



يبين الشكل كلاً من الامتصاصية الطيفية نصف الكروية لسطح عاتم والتشعع الطيفي عند السطح.

كيف تتغير الانعكاسية الطيفية نصف الكروية مع الطول الموجي؟ ما الامتصاصية نصف الكروية الكلية للسطح؟ إذا كانت درجة الحرارة الابتدائية للسطح 500K وكانت إصداريته نصف الكروية الكلية 0.8 كيف تتغير درجة حرارة السطح بعد التعرض للتشعع.

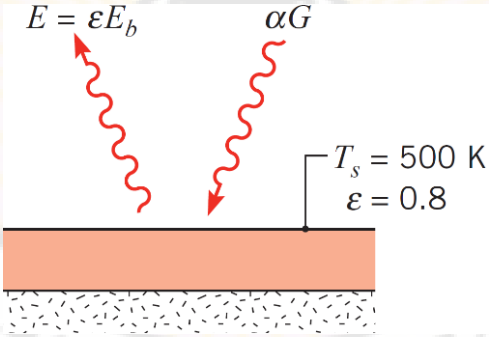
الحل:

المعطيات: الإصدارية الطيفية نصف الكروية والتشعع الطيفي نصف الكروي للسطح. درجة حرارة السطح، والإصدارية نصف الكروية الكلية.

المطلوب:

1. التوزع الطيفي للانعكاسية.
2. الامتصاصية نصف الكروية الكلية.
3. طبيعة التغير في درجة حرارة السطح.

الشكل:

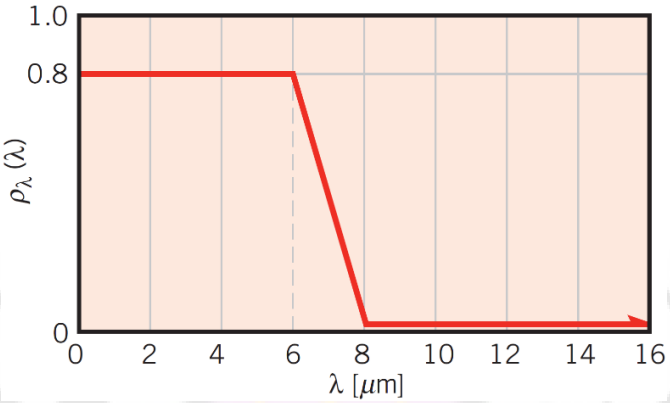


الافتراضات:

1. السطح عاتم.
2. تأثير الحمل الحراري مهمل.
3. السطح معزول من أسفله.

التحليل:

1. كما نعلم، فإن $\rho_\lambda = 1 - \alpha_\lambda$ ، وبالتالي يمكننا معرفة التوزع الطيفي لـ ρ_λ من معرفة $\alpha_\lambda(\lambda)$:



2. نحسب الامتصاصية من العلاقة (7 – 45):

$$\alpha = \frac{G_{abs}}{G} = \frac{\int_0^\infty \alpha_\lambda G_\lambda d\lambda}{\int_0^\infty G_\lambda d\lambda}$$

أو من خلال تقسيم مجال التكامل:

$$\alpha = \frac{0.2\int_2^6 G_\lambda d\lambda + 500\int_6^8 \alpha_\lambda d\lambda + 1\int_{12}^{16} G_\lambda d\lambda}{\int_2^6 G_\lambda d\lambda + \int_6^{12} G_\lambda d\lambda + \int_{12}^{16} G_\lambda d\lambda}$$

حيث إن:

$$\begin{aligned}\alpha = &\left\{0.2\times\tfrac{1}{2}\left[500\,\mathrm{W/m^2}.\mu\mathrm{m}\times(6-2)\,\mu\mathrm{m}\right]\right.\\ &+500\,\mathrm{W/m^2}.\mu\mathrm{m}\times\left[0.2\times(8-6)\,\mu\mathrm{m}+\tfrac{1}{2}(1-0.2)(8-6)\,\mu\mathrm{m}\right]\\ &+1\times\left[500\,\mathrm{W/m^2}.\mu\mathrm{m}\times(12-8)\,\mu\mathrm{m}\right.\\ &\left.\left.+\tfrac{1}{2}\times500\,\mathrm{W/m^2}.\mu\mathrm{m}\times(16-12)\,\mu\mathrm{m}\right]\right\}\\ &\div\left\{\left[\tfrac{1}{2}\times500\,\mathrm{W/m^2}.\mu\mathrm{m}\times(6-2)\,\mu\mathrm{m}\right]\right.\\ &+\left[500\,\mathrm{W/m^2}.\mu\mathrm{m}\times(12-6)\,\mu\mathrm{m}\right]\\ &\left.+\left[\tfrac{1}{2}\times500\,\mathrm{W/m^2}.\mu\mathrm{m}\times(16-12)\,\mu\mathrm{m}\right]\right\}\end{aligned}$$

وبالتالي، فإن:

$$\alpha = \frac{G_{abs}}{G} = \frac{(200+600+3000)\,\mathrm{W/m^2}}{(1000+3000+1000)\,\mathrm{W/m^2}} = \frac{3800\,\mathrm{W/m^2}}{5000\,\mathrm{W/m^2}} = 0.76$$

3. بإهمال تأثير الحمل الحراري، فإن محصلة التدفق الحراري إلى السطح هي:

$$\dot{q}_{\text{net}} = \alpha G - E = \alpha G - \varepsilon\sigma T^4$$
$$= 0.76\times 5000\,\text{W/m}^2 - 0.8\times 5.67\times 10^{-8}\,\text{W/m}^2.\text{K}^4\times(500\,\text{K})^4$$
$$= 3800 - 2835 = 965\,\text{W/m}^2$$

بما أن $\dot{q}_{\text{net}} > 0$، فإن درجة حرارة السطح سترتفع بمرور الزمن.

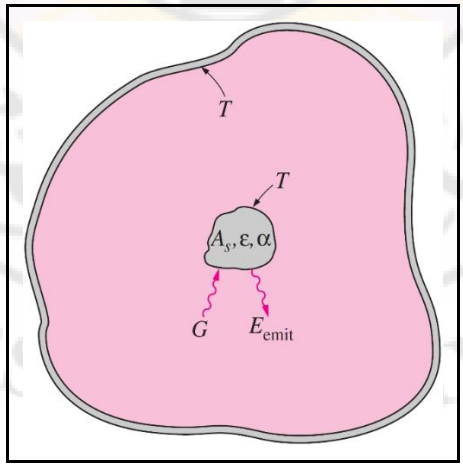
7 – 5 – 3 – قانون كيرشوف *Kirchhoff's Law*:

لنأخذ جسماً صغيراً مساحة سطحه A_s، إصداريته ε، وامتصاصيته α، ودرجة حرارته T، موجوداً ضمن وعاء أيزوترمي كبير له درجة الحرارة نفسها T، كما يوضح الشكل (7 – 23). كما نذكر فإن أي وعاء أيزوترمي كبير يشكل جسماً أسوداً مجوفاً، وذلك بغض النظر عن الخواص الإشعاعية لسطح الوعاء، كما أن الجسم الموجود ضمن الوعاء صغير جداً بحيث إنه لا يؤثر في الطبيعة السوداء للتجويف. بالتالي فإن الإشعاع الوارد على أي جزء من سطح الجسم الصغير يساوي إلى الإشعاع الصادر عن جسم أسود درجة حرارته T. أي أن $G = E_b(T) = \sigma T^4$، والإشعاع الممتص من قبل الجسم الصغير من أجل واحدة المساحة من سطحه، هو:

$$G_{\text{abs}} = \alpha G = \alpha\sigma T^4$$

والإشعاع الصادر عن الجسم الصغير، هو:

$$E_{\text{emit}} = \varepsilon\sigma T^4$$



الشكل (7 – 23) وعاء إيزوترمي كبير يحوي جسماً صغيراً.

كون الجسم الصغير في حالة توازن حراري مع الوعاء، فإن محصلة انتقال الحرارة من الجسم وإليه يجب أن تساوي الصفر. بالتالي فإن الإشعاع الصادر عن الجسم يساوي إلى الإشعاع الممتص:

$$A_s \varepsilon \sigma T^4 = A_s \alpha \sigma T^4$$

وبالتالي نستنتج أن:

$$\varepsilon(T) = \alpha(T) \qquad \textbf{(48 - 7)}$$

أي إن الإصدارية نصف الكروية الكلية لسطح ما عند درجة حرارة T تساوي إلى الامتصاصية نصف الكروية الكلية لإشعاع قادم من جسم أسود له درجة الحرارة نفسها. إن هذه العلاقة أدت إلى تبسيط تحليل الإشعاع بشكل كبير، وتم التوصل إليها من قبل غوستاف كيرشوف Gustav Kirchhoff، وتسمى قانون كيرشوف.

يمكن تكرار العملية السابقة من أجل إشعاع ذي طول موجي محدد، وذلك لإيجاد الصيغة الطيفية لقانون كيرشوف:

$$\varepsilon_\lambda(T) = \alpha_\lambda(T) \qquad \textbf{(49 - 7)}$$

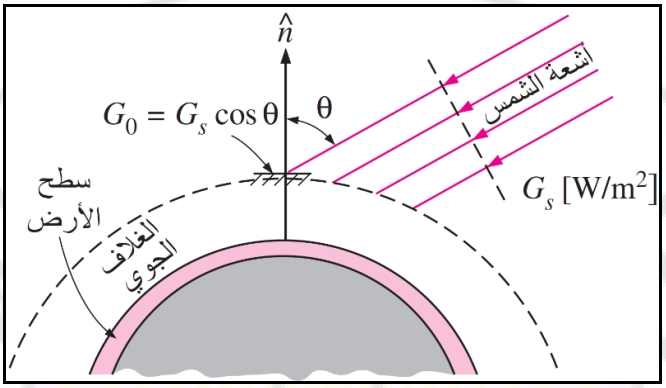
إن هذه العلاقة صالحة في حال كان الإشعاع الوارد أو الصادر مستقلاً عن الاتجاه. إن صيغة قانون كيرشوف التي لا تمتلك أية شروط هي الصيغة الطيفية الموجهة $\left[\varepsilon_{\lambda,\theta}(T) = \alpha_{\lambda,\theta}(T)\right]$. أي إن إصدارية سطح ما من أجل طول موجي واتجاه ودرجة حرارة محددين تساوي إلى امتصاصيته عند الطول الموجي والاتجاه ودرجة حرارة المنبع نفسه.

7 - 6 - الإشعاع الجوي والشمسي *Atmospheric and Solar Radiation*:

تمثل الشمس مصدرنا الرئيس للطاقة، وتسمى الطاقة الآتية من الشمس بالطاقة الشمسية solar energy، وتصل إلينا على شكل أمواج كهرطيسية بعد أن تتعرض لتفاعلات كبيرة مع الغلاف الجوي. تشكل الطاقة الإشعاعية الصادرة أو المنعكسة عن مكونات الغلاف الجوي ما يسمى الإشعاع الجوي atmospheric radiation.

الشمس جسم شبه كروي، ونصف قطرها $D \approx 1.39\times10^9$ m وكتلتها $m \approx 2\times10^{30}$ kg، وتبعد عن الأرض مسافة وسطية $L = 1.5\times10^{11}$ m. تصدر الشمس طاقة إشعاعية بشكل مستمر بمعدل $E_{\text{sun}} = 3.8\times10^{26}$ W. يصل من هذه الطاقة إلى الأرض حوالي 1.7×10^{17} W، وهي كمية كافية لإبقاء الأرض دافئة والحفاظ على الحياة عن طريق عملية التركيب الضوئي. تنتج طاقة الشمس عن تفاعل الاندماج النووي، حيث تندمج ذرتا

هيدروجين لتشكلا ذرة هيليوم وحيدة. بالتالي فإن الشمس عبارة عن مفاعل نووي، وتصل درجة حرارتها في منطقة النواة إلى حوالي 40×10^6 K ، وتنخفض درجة حرارتها إلى حوالي 5800K عند سطحها، وتسمى هذه المنطقة بالمنطقة الحملية convective zone نتيجة تبدد الطاقة على شكل إشعاع.



الشكل (7 – 24) التشعع الشمسي الكلي.

تسمى الطاقة الشمسية التي تصل إلى الغلاف الجوي للأرض التشعع الشمسي الكلي total solar irradiance G_s الشكل (7 – 24)، وقيمتها هي: G_s = 1373 W/m3.

ويسمى التشعع الشمسي الكلي بالثابت الشمسي solar constant، وهو يعبر عن معدل الطاقة الشمسية الواردة على سطح عمودي على أشعة الشمس وموجود عند الطبقة الخارجية للغلاف الجوي وذلك عندما تكون الأرض على مسافة من الشمس مساوية للبعد الوسطي بينهما، كما في الشكل (7 – 25).

تستخدم قيمة التشعع الشمسي الكلي في تقدير درجة الحرارة الفعالة لسطح الشمس، وذلك من الشرط:

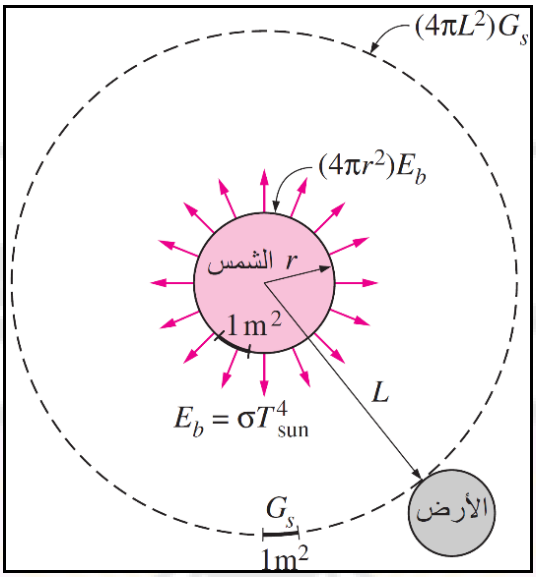
$$\left(4\pi L^2\right)G_s = \left(4\pi r^2\right)\sigma T_{\text{sun}}^4 \qquad \textbf{(50 – 7)}$$

L : المسافة الوسطية بين مركز الشمس والأرض.

r : نصف قطر الشمس.

يمثل الطرف الأيسر من هذه العلاقة الطاقة الشمسية الكلية التي تعبر خلال سطح كروي نصف قطره يساوي إلى المسافة الوسطية بين الشمس والأرض، بينما يمثل الطرف الأيمن الطاقة الكلية التي تصدر عن السطح الخارجي للشمس. يقتضي مبدأ انحفاظ الطاقة أن تكون هاتان

الكميتان متساويتين، طالما أن الطاقة الشمسية لا تتعرض لأي تخامد أو تقوية في طريقها عبر الفراغ، كما في الشكل (7 – 25).



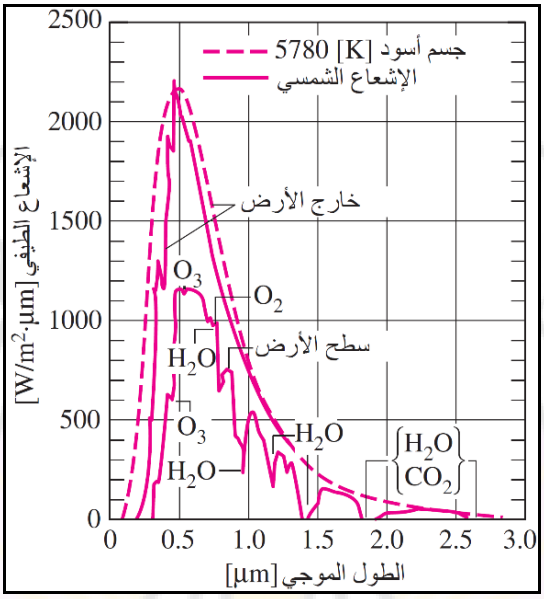
الشكل (7 – 25) الإشعاع الشمسي الصادر عن الشمس والوارد على الأرض.

تحسب درجة الحرارة الفعالة للشمس من العلاقة (7 – 51)، وتساوي إلى $T_{\text{sun}} = 5780\,\mathrm{K}$. أي يمكن أن نعامل الشمس كجسم أسود درجة حرارته 5780K. وتم التحقق من صحة هذا الافتراض عن طريق قياسات التوزع الطيفي للإشعاع الشمسي المأخوذة عند الطبقة الخارجية للغلاف الجوي، والمبينة في الشكل (7 – 26) والتي تظهر وجود انحرافات طفيفة عن سلوك الجسم الأسود المثالي.

يظهر التوزع الطيفي عند سطح الأرض أن الإشعاع الشمسي يتعرض لتخامد كبير في أثناء عبوره للغلاف الجوي، وذلك نتيجة الامتصاص والتشتت الذين يتعرض لهما. إن طبقة الأوزون الموجودة في المنطقة العلوية من الغلاف الجوي تحمي الأنظمة الحيوية على الارض من الأشعة فوق البنفسجية المؤذية. يحدث الامتصاص في منطقة الأشعة تحت الحمراء بشكل رئيسي من قبل بخار الماء وثاني أوكسيد الكربون. تقوم جزيئات الغبار والملوثات الأخرى في الغلاف الجوي أيضاً بامتصاص الإشعاع عند أطوال موجية مختلفة.

نتيجة الامتصاص، فإن الطاقة الشمسية التي تصل إلى سطح الأرض تكون أضعف من الإشعاع الشمسي الكلي، حيث تساوي حوالي $950\,\mathrm{W/m^2}$ في يوم صحو، وتكون أقل من ذلك

بكثير في الأيام الغائمة أو الضبابية. فضلاً عن ذلك، فإن كامل الإشعاع الشمسي الذي يصل على سطح الأرض يقع عملياً ضمن حزمة الأطوال الموجية $0.3-2.5\,\mu\text{m}$.

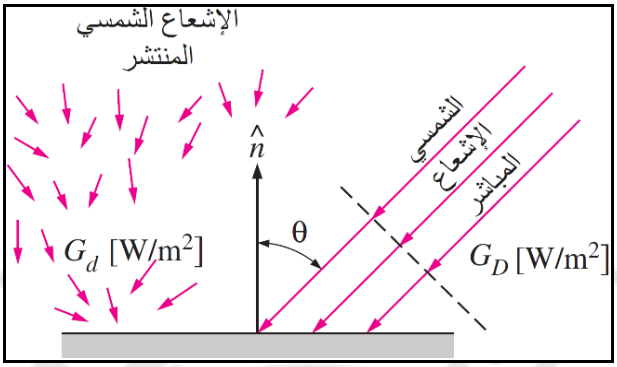


الشكل (7 – 26) مقارنة بين التوزع الطيفي للإشعاع الشمسي عند الطبقة الخارجية للغلاف الجوي وعند سطح الأرض، مع إشعاع جسم أسود درجة حرارته 5780K.

يُعَدُّ الإشعاع الشمسي الوارد إلى سطح الأرض مؤلفاً من جزئين. الجزء الأول هو الإشعاع الذي يصل إلى سطح الأرض من دون أن يتعرض للتشتت أو الامتصاص من قبل الغلاف الجوي ويسمى الإشعاع الشمسي المباشر direct solar radiation G_D. نفرض أن الإشعاع المتشتت يصل إلى سطح الأرض بشكل منتظم من الاتجاهات كافة، ويسمى الإشعاع الشمسي المنتشر diffuse solar radiation G_d. وبالتالي فإن الإشعاع الشمسي الكلي الوارد على واحدة المساحة من سطح أفقي على سطح الأرض، كالمبين في الشكل (7 – 27)، يعطى بالعلاقة:

$$G_{\text{solar}} = G_D \cos\theta + G_d \qquad \textbf{(51 – 7)}$$

θ: زاوية ورود الإشعاع الشمسي المباشر.



الشكل (7 – 27) الإشعاع الشمسي المباشر والمنتشر والوارد على سطح أفقي عند سطح الأرض.

يتراوح الإشعاع المنتشر بين 10% تقريباً من الإشعاع الكلي في يوم صحو، وتقريباً 100% في يوم غائم كلياً.

إن الجزيئات الغازية والجزيئات العالقة في الغلاف الجوي تصدر إشعاعاً كما تمتصه. يعود الإشعاع الجوي بشكل رئيس إلى جزيئات CO_2 و H_2O، ويتركز في المنطقة $5-8\,\mu m$، والمنطقة فوق $13\,\mu m$. بالرغم من أن هذا الإصدار بعيد كل البعد عن توزع الإشعاع الصادر عن جسم أسود، فقد وجد أنه من المناسب في أثناء حسابات الإشعاع أن نعامل الغلاف الجوي كجسم أسود ذو درجة حرارة افتراضية أقل من درجة حرارة الغلاف الجوي ويصدر الكمية نفسها من الطاقة الإشعاعية، وتسمى درجة الحرارة الافتراضية بدرجة الحرارة الفعالة للسماء effective sky temperature T_{sky}. وبالتالي فإن الإشعاع الصادر من الغلاف الجوي إلى سطح الأرض يعطى بالعلاقة:

$$G_{sky} = \sigma T_{sky}^4 \qquad \textbf{(52 – 7)}$$

تتعلق قيمة T_{sky} بالأحوال الجوية، وتتراوح قيمتها بين 230K من أجل سماء صافية وباردة، وحوالي 285K من أجل سماء دافئة وغائمة.

نلاحظ أن درجة الحرارة الفعالة للسماء لا تختلف كثيراً عن درجة حرارة الغرفة. بالتالي وفي ضوء قانون كيرشوف، يمكننا القول إن امتصاصية سطح ما تساوي إلى إصداريته وذلك عند درجة حرارة الغرفة $(\alpha = \varepsilon)$. بالتالي، فإن الإشعاع الجوي الممتص من قبل سطح ما يعطى بالعلاقة:

$$E_{sky,abs} = \alpha G_{sky} = \alpha \sigma T_{sky}^4 = \varepsilon \sigma T_{sky}^4 \qquad \left[\mathrm{W/m^2}\right] \qquad \textbf{(53 – 7)}$$

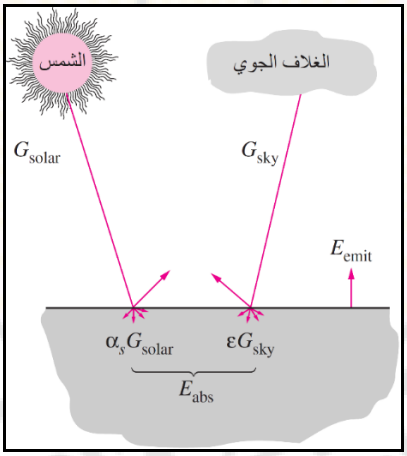
تحسب محصلة انتقال الحرارة بالإشعاع إلى سطح معرض للإشعاع الشمسي والجوي من علاقة التوازن الطاقي، كما في الشكل (7 – 28):

$$\begin{aligned}\dot{q}_{\text{net,rad}} &= \sum E_{\text{abs}} - \sum E_{\text{emit}} \\ &= E_{\text{solar,abs}} + E_{\text{sky,abs}} - E_{\text{emit}} \\ &= \alpha_s G_{\text{sloar}} + \varepsilon\sigma T_{\text{sky}}^{\,4} - \varepsilon\sigma T_s^{\,4} \\ \dot{q}_{\text{net,rad}} &= \alpha_s G_{\text{solar}} + \varepsilon\sigma\left(T_{\text{sky}}^{\,4} - T_s^{\,4}\right) \qquad \textbf{(54 – 7)}\end{aligned}$$

T_s: درجة الحرارة المطلقة للسطح.

ε: إصدارية السطح عند درجة حرارة الغرفة.

إن إصدار الإشعاع وامتصاصه من قبل الغازات العنصرية (مثل H_2, O_2, N_2) مهمل عند درجات الحرارة العادية، ويعامل الوسط الممتلئ بهذه الغازات كفراغ في أثناء تحليل الإشعاع. إن إصدار وامتصاص الغازات ذات الجزيئات الأكبر (مثل H_2O, CO_2) ذو قيمة مهمة، وبالتالي يجب أخذه بالحسبان في حال وجود كميات كبيرة من هذه الغازات في الوسط.



الشكل (7 – 28) تفاعلات الإشعاع لسطح معرض للإشعاع الشمسي والجوي.

يختلف التوزع الطيفي للإشعاع الشمسي الوارد في تطبيقات الطاقة الشمسية بشكل كبير عن التوزع الطيفي للإشعاع الصادر عن السطوح، حيث إن الأول يتركز ضمن منطقة الأطوال الموجية القصيرة، بينما يتركز الثاني في منطقة الأشعة تحت الحمراء. بالتالي فإن الخواص الإشعاعية للسطوح تختلف بشكل كبير من أجل كل من الإشعاع الوارد والصادر، ولا يمكن أن نفرض أن السطوح رمادية. وعوضاً عن ذلك فإننا نفرض أن السطوح ذات مجموعتين من

الخواص، الأولى من أجل الإشعاع الشمسي والأخرى من أجل الأشعة تحت الحمراء عند درجة حرارة الغرفة. يعطي الجدول (7 – 1) قيم الإصدارية ε والامتصاصية الشمسية α_s لسطوح بعض المواد.

الجدول (7 – 1) قيم الإصدارية والامتصاصية الشمسية لسطوح بعض المواد.

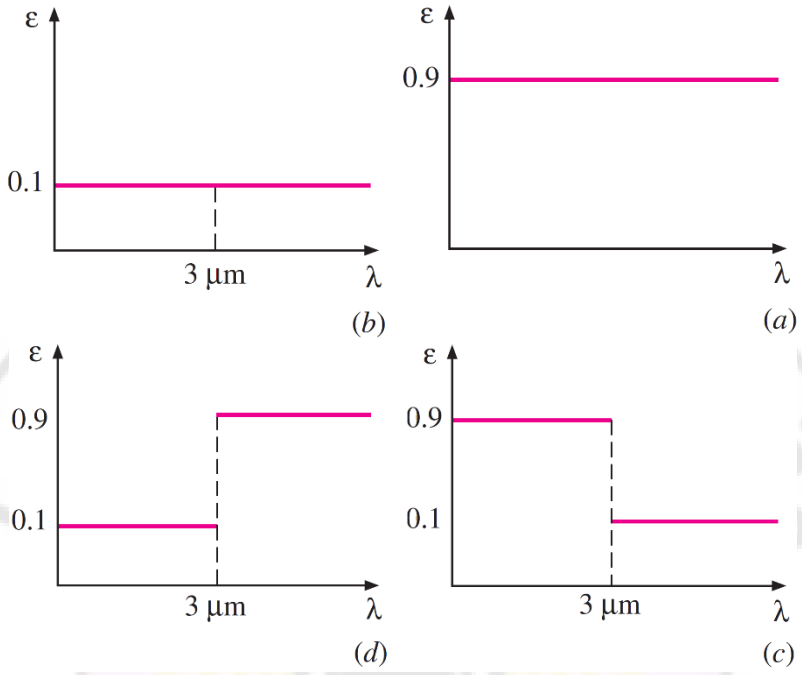
السطح	α_s	ε	السطح	α_s	ε
إسمنت	0.6	0.88	**ألمنيوم:**		
رخام أبيض	0.46	0.95	مطلي	0.09	0.03
قرميد أحمر	0.63	0.93	مؤكسد	0.14	0.84
أسفلت	0.9	0.9	رقائق	0.15	0.05
طلاء أسود	0.97	0.97	**نحاس:**		
طلاء أبيض	0.14	0.93	مطلي	0.18	0.03
ثلج	0.28	0.97	متسخ	0.65	0.75
جلد بشري	0.62	0.97	**صفائح معدنية:**		
ستانل ستيل:			أوكسيد النيكل الأسود	0.92	0.08
مطلي	0.37	0.6	الكروم الأسود	0.87	0.09
باهت	0.5	0.21			

مثال 7 – 4:

لنأخذ سطحاً معرضاً للإشعاع الشمسي. عند لحظة زمنية معينة كان الإشعاع الشمسي المباشر $G_D = 400\,\mathrm{W/m^2}$ والإشعاع الشمسي المنتشر $G_d = 300\,\mathrm{W/m^2}$، واتجاه الإشعاع يصنع زاوية 20^o مع الناظم للسطح. بينت القياسات أن درجة حرارة السطح 320K، وبفرض أن درجة الحرارة الفعالة للسماء 260K، احسب محصلة التبادل الحراري بالإشعاع من أجل كل من الحالات التالية:

1. سطح ماص رمادي: $\alpha_s = 0.9, \varepsilon = 0.9$
2. سطح عاكس رمادي: $\alpha_s = 0.1, \varepsilon = 0.1$
3. سطح ماص انتقائي: $\alpha_s = 0.9, \varepsilon = 0.1$
4. سطح عاكس انتقائي: $\alpha_s = 0.1, \varepsilon = 0.9$

ويبين الشكل الإصدارية الطيفية لكل من السطوح الأربعة المدروسة.



الحل:

المعطيات: درجة حرارة السطح ودرجة الحرارة الفعالة للسماء. مركبتا الإشعاع الشمسي المباشر والمنتشر. امتصاصية السطح وانعكاسيته.

المطلوب: محصلة انتقال الحرارة بالإشعاع في الحالات الأربع.

التحليل: تحسب كامل الطاقة الإشعاعية الواردة على السطح بالعلاقة (7 – 51):

$$G_{\text{solar}} = G_D \cos\theta + G_d$$
$$= 400\,\text{W/m}^2 \times \cos 20^\circ + 300\,\text{W/m}^2$$
$$= 676\,\text{W/m}^2$$

وبالتالي تحسب محصلة انتقال الحرارة بالإشعاع في كل من الحالات الأربع بالعلاقة (7 – 54):

$$\dot{q}_{\text{net,rad}} = \alpha_s G_{\text{solar}} + \varepsilon\sigma\left(T_{\text{sky}}^4 - T_s^4\right)$$

1. سطح ماص رمادي $(\alpha_s = 0.9, \varepsilon = 0.9)$:

$$\dot{q}_{\text{net,rad}} = 0.9\times 676 + 0.9\times 5.67\times 10^{-8}\times\left[(260\,\text{K})^4 - (320\,\text{K})^4\right]$$
$$= 307\,\text{W/m}^2$$

2. سطح عاكس رمادي $(\alpha_s = 0.1, \varepsilon = 0.1)$:

$$\dot{q}_{\text{net,rad}} = 0.1\times 676 + 0.1\times 5.67\times 10^{-8}\times\left[(260\,\text{K})^4 - (320\,\text{K})^4\right]$$
$$= 34\,\text{W/m}^2$$

3. سطح ماص انتقائي $(\alpha_s = 0.9, \varepsilon = 0.1)$:

$$\dot{q}_{\text{net,rad}} = 0.9\times 676 + 0.1\times 5.67\times 10^{-8}\times\left[(260\,\text{K})^4 - (320\,\text{K})^4\right]$$
$$= 575\,\text{W/m}^2$$

4. سطح عاكس انتقائي $(\alpha_s = 0.1, \varepsilon = 0.9)$:

$$\dot{q}_{\text{net,rad}} = 0.1\times 676 + 0.9\times 5.67\times 10^{-8}\times\left[(260\,\text{K})^4 - (320\,\text{K})^4\right]$$
$$= -234\,\text{W/m}^2$$

المناقشة: نلاحظ أنه في حال كان السطح مصنوعاً من مواد رمادية عادية ذات امتصاصية عالية، فإنه سيكتسب حرارة بمعدل $307\,\text{W/m}^2$. ويزداد معدل اكتساب الحرارة ليصل إلى $575\,\text{W/m}^2$ عند تغطية السطح بمادة انتقائية لها نفس الامتصاصية للإشعاع الشمسي، ولكن إصداريتها للأشعة تحت الحمراء منخفضة.

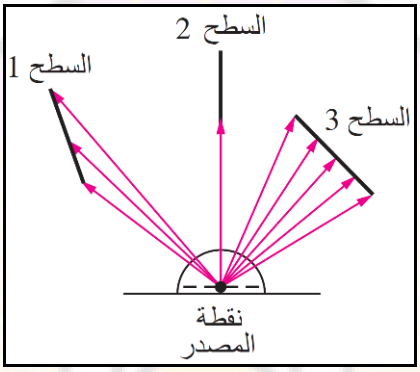
كما نلاحظ أيضاً أن السطح المصنوع من مواد رمادية عادية ذات انعكاسية عالية سيكتسب حرارة أيضاً بمعدل $34\,\text{W/m}^2$. ولكن عند تغطية هذا السطح بمادة انتقائية لها نفس انعكاسيته للإشعاع الشمسي، ولكن إصداريتها للأشعة تحت الحمراء عالية، فإن السطح سيفقد حرارة بمعدل $234\,\text{W/m}^2$. بالتالي فإن درجة حرارة السطح ستنخفض عند استخدام سطح عاكس انتقائي.

---

7 - 7 - معامل الرؤية *The View Factor*:

يتعلق انتقال الحرارة بالإشعاع بين السطوح بتوجيه السطوح بالنسبة لبعضها بعضاً، كما يتعلق بالخواص الإشعاعية لهذه السطوح ودرجات حرارتها، كما هو موضح في الشكل (7 – 30).

لحساب تأثير التوجيه على انتقال الحرارة بالإشعاع بين سطحين، نعرف بارامتراً جديداً نسميه معامل الرؤية، وهو يتعلق بالتصميم الهندسي فقط، ولا يتعلق بالخواص الفيزيائية للسطح أو درجة حرارته. يسمى أيضاً معامل الشكل، ومعامل التوجيه، ومعامل الزاوية. يسمى معامل الرؤية الذي يستند إلى فرضية، أن السطوح مصدرة ناشرة وعاكسة ناشرة بمعامل الرؤية الانتشاري diffuse view factor، بينما يسمى معامل الرؤية المستند على فرضية أن السطوح مصدرة ناشرة ولكنها عاكسة مركزة بمعامل الرؤية المركز specular view factor. سنعتبر في دراستنا أن التبادل الإشعاعي يحدث بين سطوح ناشرة فقط، وبالتالي فإن مصطلح معامل الرؤية يشير إلى معامل الرؤية الانتشاري.



الشكل (7 – 29) تأثير توجيه السطوح على تبادل الحرارة بالإشعاع.

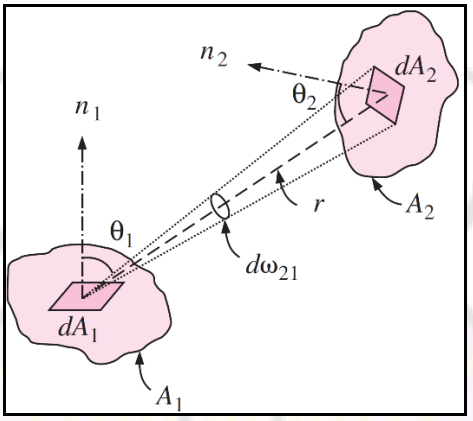
يرمز لمعامل الرؤية من سطح i إلى سطح j بالرمز $F_{i\to j}$، أو فقط F_{ij}، ويعرف كما يلي:

F_{ij}: هو نسبة الإشعاع المغادر للسطح iوالتي تصل إلى السطح j مباشرةً.

بالتالي فإن معامل الرؤية F_{12} يعبر عن نسبة الإشعاع المغادر للسطح 1 والواصلة إلى السطح 2 بشكل مباشر، بينما يعبر F_{21} عن نسبة الإشعاع المغادر للسطح 2 والواصلة إلى السطح 1. يجب الانتباه إلى أن الإشعاع الوارد إلى سطح ما ليس من الضروري أن يمتص من قبل هذا السطح، وننتبه أيضاً إلى أن الإشعاع المنعكس عن السطوح الأخرى والوارد بعدها إلى السطح لا يؤخذ بالحسبان عند حساب معامل الرؤية، كما أننا نشير بالإشعاع المغادر للسطح إلى كل من الإشعاع الصادر والمنعكس عن هذا السطح.

من أجل الحصول على تعبير عام لمعامل الرؤية نأخذ سطحين تفاضليين dA_1، dA_2 من سطحين موجهين بشكل اعتباطي A_1، A_2 بالترتيب، كما في الشكل (7 – 30). المسافة الفاصلة

dA_1، dA_2 هي r والزاويتان بين ناظمي كل من السطحين والخط الواصل بين dA_1 و dA_2 هما θ_1، θ_2 على الترتيب. يصدر السطح الأول الإشعاع ويعكسه بشكل ناشر في الاتجاهات كافة، وبشدة ثابتة I_1، والزاوية الصلبة المقابلة لـ dA_2 عند النظر إليه من dA_1 هي $d\omega_{21}$.



الشكل (7 – 30) استنتاج معامل الرؤية بين سطحين.

إن معدل الإشعاع المغادر لـ dA_1 في اتجاه θ_1 يساوي إلى $I_1 \cos\theta_1 dA_1$. نلاحظ أن $d\omega_{21} = \left(dA_2 \cos\theta_2\right)/r^2$، وبالتالي فإن كمية الإشعاع التي تصل إلى dA_2 هي:

$$\dot{Q}_{dA_1 \to dA_2} = I_1 \cos\theta_1 dA_1 d\omega_{21} = I_1 \cos\theta_1 dA_1 \frac{dA_2 \cos\theta_2}{r^2} \qquad (55-7)$$

وكما نعلم سابقاً، فإن المعدل الكلي للإشعاع الذي يغادر dA_1 بالإصدار والانعكاس في كافة الاتجاهات هو الإشعاع المغادر $J_1 = \pi I_1$ مضروباً بمساحة السطح:

$$\dot{Q}_{dA_1} = J_1 dA_1 = \pi I_1 dA_1 \qquad (56-7)$$

بالتالي فإن معامل الرؤية التفاضلي $dF_{dA_1 \to dA_2}$، والذي يعبر عن نسبة الإشعاع المغادر لـ dA_1 والواصلة إلى dA_2 مباشرةً يعطى بالعلاقة:

$$dF_{dA_1 \to dA_2} = \frac{\dot{Q}_{dA_1 \to dA_2}}{\dot{Q}_{dA_1}} = \frac{\cos\theta_1 \cos\theta_2}{\pi r^2} dA_2 \qquad (57-7)$$

يحسب معامل الرؤية من مساحة تفاضلية dA_1 إلى سطح ذي مساحة محددة A_2 من حقيقة أن كمية الإشعاع المغادر لـ dA_1، والتي تصل إلى A_2 هي مجموع كميات الإشعاع الواردة إلى المساحات التفاضلية dA_2؛ بالتالي فإن معامل الرؤية $F_{dA_1 \to A_2}$ يحسب من تكامل $dF_{dA_1 \to dA_2}$ على كامل المساحة A_2:

$$F_{dA_1 \to A_2} = \int_{A_2} \frac{\cos\theta_1 \cos\theta_2}{\pi r^2} dA_2 \qquad \textbf{(58 - 7)}$$

معدل الإشعاع الكلي المغادر لكامل المساحة A_1 في كل الاتجاهات هو:

$$\dot{Q}_{A_1} = J_1 A_1 = \pi I_1 A_1 \qquad \textbf{(59 - 7)}$$

تحسب كمية الإشعاع الوارد إلى dA_2 بأخذ الإشعاع المغادر لـ dA_1 والذي يرد إلى dA_2 من العلاقة (11 - 1) ومكاملته على كامل المساحة A_1:

$$\dot{Q}_{A_1 \to dA_2} = \int_{A_1} \dot{Q}_{dA_1 \to dA_2} = \int_{A_1} \frac{I_1 \cos\theta_1 \cos\theta_2 dA_2}{r^2} dA_1 \qquad \textbf{(60 - 7)}$$

بمكاملة هذه العلاقة على كامل A_2 نحصل على الإشعاع الوارد إلى A_2:

$$\dot{Q}_{A_1 \to A_2} = \int_{A_2} \dot{Q}_{A_1 \to A_2} = \int_{A_2} \int_{A_1} \frac{I_1 \cos\theta_1 \cos\theta_2}{r^2} dA_1 dA_2 \qquad \textbf{(61 - 7)}$$

بتقسيم هذه العلاقة على الإشعاع المغادر لـ A_1 في العلاقة (7 - 59) نحصل على نسبة الإشعاع المغادر لـ A_1 والوارد إلى A_2، والتي تمثل معامل الرؤية $F_{A_1 \to A_2}$:

$$F_{12} = F_{A_1 \to A_2} = \frac{\dot{Q}_{A_1 \to A_2}}{\dot{Q}_{A_1}} = \frac{1}{A_1} \int_{A_2} \int_{A_1} \frac{\cos\theta_1 \cos\theta_2}{\pi r^2} dA_1 dA_2 \qquad \textbf{(62 - 7)}$$

وبالمقابل فإن معامل الرؤية $F_{A_2 \to A_1}$ يعطى بالعلاقة:

$$F_{21} = F_{A_2 \to A_1} = \frac{\dot{Q}_{A_2 \to A_1}}{\dot{Q}_{A_2}} = \frac{1}{A_2} \int_{A_2} \int_{A_1} \frac{\cos\theta_1 \cos\theta_2}{\pi r^2} dA_1 dA_2 \qquad \textbf{(63 - 7)}$$

نلاحظ أن I_1 ثابتة، بينما (θ_2, θ_1, r) متغيرات، كما يمكن أن نجري التكاملات السابقة بأي ترتيب نريد طالما أن حدود التكامل ثابتة. إن هذه العلاقات تثبت أن معامل الشكل بين سطحين يتعلق بتوجيه كل منهما بالنسبة للآخر والمسافة الفاصلة بينهما.

من العلاقتين (7 - 62)، (7 - 63) وبعد ضرب الأولى بـ A_1 والثانية بـ A_2 نجد:

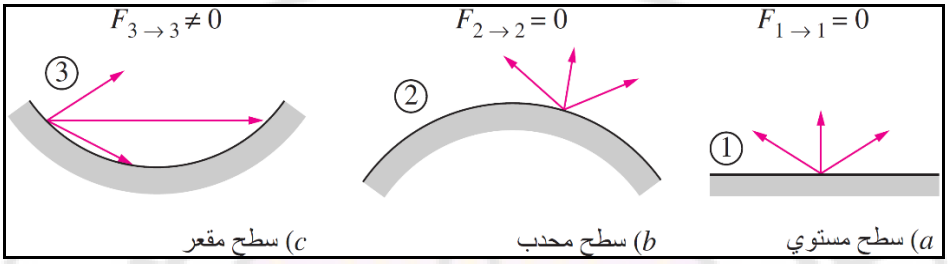
$$A_1 F_{12} = A_2 F_{21} \qquad \textbf{(64 - 7)}$$

والتي تعرف بالعلاقة التبادلية لمعاملات الرؤية، وهي تسمح بحساب معامل رؤية من خلال معرفة الآخر.

إن علاقات معامل الرؤية السابقة صالحة من أجل أي سطحين i و j بشرط أن السطوح مصدرة ناشرة وعاكسة ناشرة. من أجل الحالة الخاصة عندما $j = i$ فإن:

$F_{i \to j}$: يساوي إلى نسبة الإشعاع المغادر للسطح i والذي يرد إلى السطح نفسه مباشرةً.

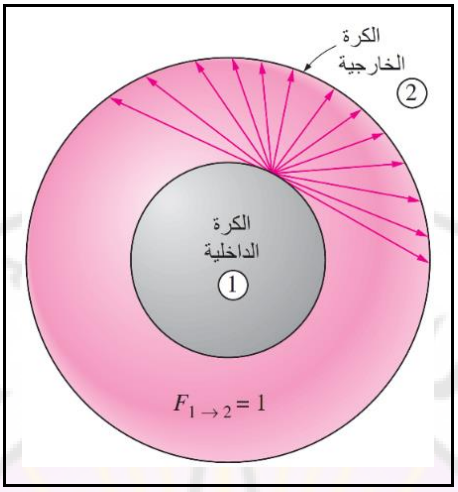
في حال عدم وجود أية حقول كهرطيسية قوية فإن الإشعاعات تنتقل في مسارات مستقيمة، وبالتالي فإن معامل الرؤية الذاتي للسطح سيكون مساوياً للصفر، إلا في حال كان السطح يرى نفسه. بالتالي فإن $F_{i\to j}=0$ من أجل السطوح المستوية أو المحدبة، بينما $F_{i\to j}\neq 0$ من أجل السطوح المقعرة، كما يبين الشكل (7 – 31).



الشكل (7 – 31) معامل الرؤية الذاتي.

تتراوح قيمة معامل الرؤية بين 0 و1. تشير الحالة الحدية $F_{i\to j}=0$ إلى أن السطحين لا يريان بعضهما بشكل مباشر، وبالتالي فإن الإشعاع المغادر للسطح i لا يمكن أن يرد إلى السطح j مباشرةً. تشير الحالة الحدية الأخرى $F_{i\to j}=1$ إلى أن السطح j يحيط بالسطح i بشكل كامل، بحيث أن كامل الإشعاع المغادر للسطح i يتم استقباله من قبل السطح j ، كما في حالة كرتين متحدتين بالمركز المبينة في الشكل (7 – 32).

إن معامل الرؤية مفيد جداً في تحليل الإشعاع؛ لأنه يسمح لنا بالتعبير عن نسبة الإشعاع المغادر لسطح ما والوارد إلى سطح آخر بدلالة توجيه هذين السطحين بالنسبة لبعضهما. إن الفرضية التي تكمن في هذه العملية هي أن الإشعاع الذي يستقبله سطح ما من مصدر ما يتناسب طرداً مع الزاوية المقابلة لهذا السطح عند النظر إليه من المصدر. وهذه هي الحالة عندما يكون الإشعاع المغادر لسطح المصدر منتظماً في الاتجاهات كافة، والوسط الفاصل بين السطحين لا يمتص الإشعاع أو يصدره أو يشتته. أي إن السطوح في هذه الحالة إيزوترمية وذات طبيعة إصدار وانعكاس ناشرة، ويفصل بين السطوح وسط غير مشارك في العملية الإشعاعية (مثل الخلاء أو الهواء).



الشكل (7 – 32) معامل الرؤية لكرتين متحدتين بالمركز.

يقدم الجدولان (C6)، (C7) معاملات الرؤية لبعض الأشكال الهندسية بصيغة تحليلية، بينما تقدم الأشكال من (D12) وحتى (D16) معاملات الرؤية بصيغة مخططات.

7 - 8 - انتقال الحرارة بالإشعاع: السطوح السوداء

Radiation Heat Transfer: Black Surfaces:

بشكل عام؛ إن تحليل التبادل الإشعاعي بين السطوح أمر معقد بسبب الانعكاس، حيث إن حزمة من الإشعاع المغادر لسطح ما يمكن أن تنعكس عدة مرات قبل أن يتم امتصاصها بشكل كامل، حيث يحدث انعكاس جزئي للحزمة على كل سطح. يمكن تبسيط التحليل بشكل كبير في حال افترضنا أنه يمكن تقريب السطوح الداخلة في التحليل إلى أجسام سوداء، وذلك لعدم حدوث الانعكاس.

لنأخذ سطحين أسودين لهما شكل اعتباطي، ودرجتا حرارتهما T_1 و T_2، كما في الشكل (7 – 33). إن معدل الإشعاع المغادر لسطح أسود ما هو $E_b = \sigma T^4$ من أجل واحدة المساحة من السطح، كما أن معامل الرؤية $F_{1\to 2}$ يعبر عن نسبة الإشعاع المغادر للسطح 1 والوارد إلى السطح 2، يمكن التعبير عن محصلة الانتقال الحراري بالإشعاع من السطح 1 إلى السطح 2 كما يلي:

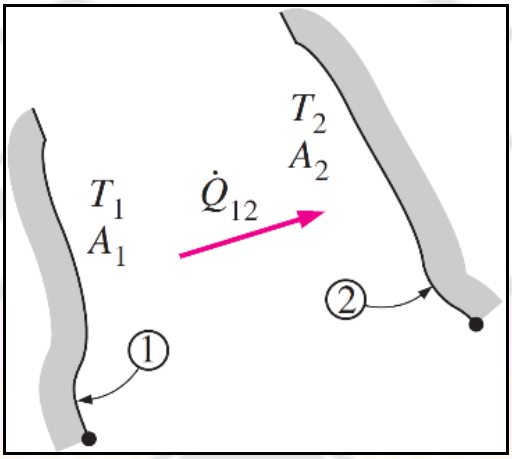
$$\dot{Q}_{1\to 2} = \begin{matrix}\text{كامل الإشعاع المغادر للسطح 2 والوارد}\\ \text{إلى السطح 1}\end{matrix} - \begin{matrix}\text{كامل الإشعاع المغادر للسطح 1 والوارد}\\ \text{إلى السطح 2}\end{matrix}$$

$$\dot{Q}_{1\to 2} = A_1 E_{b1} F_{1\to 2} - A_2 E_{b2} F_{2\to 1} \qquad \textbf{(65 – 7)}$$

وبتطبيق العلاقة التبادلية $A_1F_{1\to2}=A_2F_{2\to1}$ نجد:

$$\dot{Q}_{1\to2}=A_1F_{1\to2}\sigma\left(T_1^{\,4}-T_2^{\,4}\right) \qquad (66-7)$$

وهي العلاقة المطلوبة. تشير القيمة السالبة إلى أن محصلة انتقال الحرارة بالإشعاع هي من السطح 2 إلى السطح 1.



الشكل (7 – 33) التبادل الحراري بالإشعاع بين سطحين أسودين.

لنأخذ الآن حالة إطار مغلق له N سطح أسود لكل من هذه السطوح درجة حرارة محددة. يحسب معدل الانتقال الحراري بالإشعاع من أحد سطوح الإطار i بجمع محصلات انتقال الحرارة بالإشعاع من السطح i إلى كل سطح من سطوح الإطار المغلق:

$$\dot{Q}_i=\sum_{j=1}^{N}\dot{Q}_{i\to j}=\sum_{j=1}^{N}A_iF_{i\to j}\sigma\left(T_i^{\,4}-T_j^{\,4}\right) \qquad (67-7)$$

تدل القيمة السالبة إلى أن العملية هي كسب حراري للسطح i.

مثال 7 – 5:

فرن على شكل مكعب أبعاده $5\text{m}\times5\text{m}\times5\text{m}$، ويمكن عدّ سطوحه سطوحاً سوداء. درجات حرارة سطوح الفرن جميعاً ثابتة ومنتظمة، وهي 800K للقاعدة، و1500K للسطح، و500K لجوانب الفرن. احسب:

1 – محصلة التبادل الحراري بالإشعاع بين القاعدة والسطوح الجانبية.

2 – محصلة التبادل الحراري بالإشعاع بين القاعدة وسقف الفرن.

3 – محصلة انتقال الحرارة بالإشعاع من القاعدة.

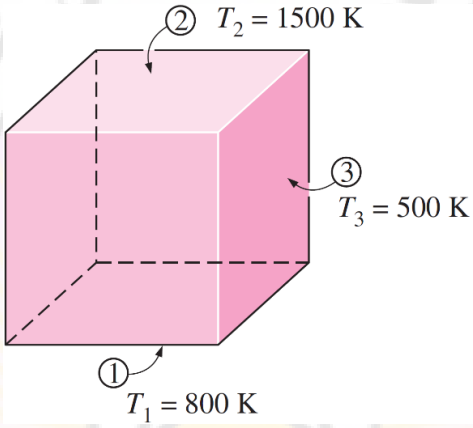
الحل:

المعطيات: فرن مكعب الشكل ذو سطوح سوداء، ودرجات حرارتها ثابتة ومنتظمة.

المطلوب:

1. محصلة التبادل الإشعاعي بين القاعدة والسقف.
2. محصلة التبادل الإشعاعي بين القاعدة والسطوح الجانبية.
3. محصلة انتقال الحرارة بالإشعاع من القاعدة.

الشكل:



الافتراضات: السطوح سوداء وإيزوترمية.

التحليل:

1. باعتبار أن الفرن مؤلف من ستة أسطح، فإننا وللوهلة الأولى سنحاول معاملته باعتباره إطاراً مغلقاً سداسي السطوح. ولكن الأسطح الجانبية الأربعة تمتلك الخواص نفسها، وبالتالي يمكن معاملتهم باعتبارهم سطحاً واحداً في أثناء تحليل الإشعاع. نعتبر القاعدة بأنها السطح 1، والسقف السطح 2، والسطوح الجانبية على أنها السطح 3. بالتالي فقد اختصرنا المسألة لتصبح حساب $\dot{Q}_{1\to 3}$ و $\dot{Q}_{1\to 2}$و $\dot{Q}_1$.

بما أن السطحين 1 و 3 أسودان، فإن محصلة التبادل الإشعاعي $\dot{Q}_{1\to 3}$ تحسب من العلاقة:

$$\dot{Q}_{1\to 3} = A_1 F_{1\to 3}\sigma\left(T_1^{\,4} - T_3^{\,4}\right)$$

ولكن يلزمنا أولاً إيجاد معامل الرؤية $F_{1\to 3}$. بعد التحقق من مخططات وجداول معاملات الرؤية، يتبين لنا أنه لا يمكننا حساب معامل الرؤية بشكل مباشر. بالرغم من ذلك، يمكننا حساب

معامل الرؤية $F_{1\to2}$ من المخطط (D12)، وهو $F_{1\to2}=0.2$. كما نعلم أيضاً أن $F_{1\to1}=0$ لأن السطح 1 مستوٍ. بتطبيق مبدأ الجمع على السطح 1 نجد:

$$F_{1\to1}+F_{1\to2}+F_{1\to3}=1$$

$$\Rightarrow F_{1\to3}=1-F_{1\to1}-F_{1\to2}=1-0-0.2=0.8$$

بالتعويض في علاقة محصلة التبادل الإشعاعي:

$$\dot{Q}_{1\to3}=25\,\mathrm{m^2}\times0.8\times5.67\times10^{-8}\,\mathrm{W/m^2.K^4}\times\left[(800\,\mathrm{K})^4-(500\,\mathrm{K})^4\right]$$

$$=394\times10^3\,\mathrm{W}=394\,\mathrm{kW}$$

2. تحسب محصلة التبادل الحراري بالإشعاع $\dot{Q}_{1\to2}$ من السطح 1 إلى السطح 2 بشكل مماثل، وذلك بالعلاقة:

$$\dot{Q}_{1\to2}=A_1F_{1\to2}\sigma\left(T_1^{\,4}-T_2^{\,4}\right)$$

$$=25\,\mathrm{m^2}\times0.2\times5.67\times10^{-8}\,\mathrm{W/m^2.K^4}\times\left[(800\,\mathrm{K})^4-(1500\,\mathrm{K})^4\right]$$

$$=-1319\times10^3\,\mathrm{W}=-1319\,\mathrm{kW}$$

وتدل الإشارة السالبة إلى أن محصلة التبادل الإشعاعي هي من السطح 2 إلى السطح 1.

3. تحسب محصلة التبادل الحراري بالإشعاع من القاعدة $\dot{Q}_1$ من العلاقة:

$$\dot{Q}_1=\sum_{j=1}^{3}\dot{Q}_{1\to j}=\dot{Q}_{1\to1}+\dot{Q}_{1\to2}+\dot{Q}_{1\to3}$$

$$=0+(-1319\,\mathrm{kw})+(394\,\mathrm{kW})$$

$$=-925\,\mathrm{kW}$$

وتدل الإشارة السالبة أيضاً إلى أن محصلة التبادل الحراري بالإشعاع هي إلى السطح 1. أي إن قاعدة الفرن تكتسب طاقةً إشعاعية بمعدل $925\,\mathrm{kW}$.

7 - 9 - انتقال الحرارة بالإشعاع: السطوح الرمادية الناشرة

Radiation Heat Transfer: Diffuse, Gray Surfaces:

إن تحليل التبادل الإشعاعي في الإطارات المغلقة المكونة من سطوح سوداء سهل نسبياً، كما لاحظنا سابقاً، لكن معظم الإطارات التي نتعامل معها في التطبيقات تحتوي على سطوح غير سوداء، والتي تسمح بدورها بحدوث العديد من الانعكاسات للإشعاع. إن تحليل الإشعاع في مثل هكذا حالة معقد جداً، إلا في حال قمنا بوضع بعض الفرضيات للتبسيط.

لتبسيط تحليل الإشعاع فإننا عادةً ما نفرض أن سطوح الإطار المغلق رمادية عاتمة ناشرة؛ أي إن السطوح لا تسمح للإشعاع بالنفاذ عبرها، كما أنها تصدر الإشعاع وتعكسه بشكل ناشر، والخواص الإشعاعية للسطوح لا تتعلق بالطول الموجي. فضلاً عن ذلك، فإن كل سطح من الإطار إيزوترمي، والإشعاع المغادر والوارد إلى كل سطح من السطوح منتظم.

7 – 9 – 1 – محصلة انتقال الحرارة بالإشعاع من أو إلى سطح ما

***Net Radiation Heat Transfer to or from a Surface*:**

خلال التبادل الإشعاعي يخسر الجسم طاقة على شكل إشعاع صادر، ويكتسب طاقة من خلال امتصاص إشعاع صادر عن سطوح أخرى. يرمز لمحصلة انتقال الحرارة بالإشعاع من سطح i مساحته A_i بالرمز $\dot{Q}_i$، ويعبر عنها بالعلاقة:

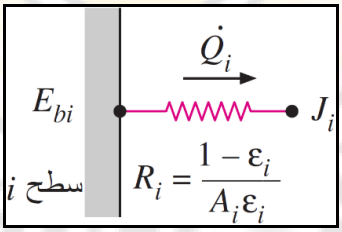
$\dot{Q}_i$ = الإشعاع الوارد إلى كامل السطح i – الإشعاع المغادر لكامل السطح i

$$\dot{Q}_i = A_i \left(J_i - G_i \right) \qquad (68-7)$$

بتعويض قيمة G_i من العلاقة (34 - 7) ينتج:

$$\dot{Q}_i = A_i \left(J_i - \frac{J_i - \varepsilon_i E_{bi}}{1-\varepsilon_i} \right) = \frac{A_i \varepsilon_i}{1-\varepsilon_i} \left(E_{bi} - J_i \right) \qquad (69-7)$$

من خلال التشابه الكهربائي مع قانون أوم Ohm's law، يمكننا كتابة العلاقة السابقة بالشكل:



الشكل (7 – 34) التشابه الكهربائي المقاومة الإشعاعية للسطح.

$$\dot{Q}_i = \frac{E_{bi} - J_i}{R_i} \qquad (70-7)$$

R_i : المقاومة الإشعاعية للسطح.

$$R_i = \frac{1-\varepsilon_i}{A_i \varepsilon_i} \qquad (71-7)$$

إن الكمية $\left(E_{bi}-J_i\right)$ تقابل فرق الكمون، ومحصلة انتقال الحرارة بالإشعاع تقابل التيار في التشابه الكهربائي، كما هو مبين في الشكل (7 – 34).

يتعلق اتجاه محصلة انتقال الحرارة بالإشعاع على فرق الشدتين J_i ، E_{bi} . تكون محصلة انتقال الحرارة بالإشعاع من السطح إذا كان $E_{bi} > J_i$ ، وتكون إلى السطح إذا كان $J_i > E_{bi}$. في حال كانت إشارة $\dot{Q}_i$ سالبة (محصلة انتقال الحرارة إلى السطح)، فيجب التخلص من الكسب الحراري بالإشعاع من الجوانب الأخرى للسطح بطريقة ما من أجل الحفاظ على درجة حرارة ثابتة للسطح.

المقاومة الإشعاعية للسطح من أجل جسم أسود تساوي إلى الصفر لأن $\varepsilon_i = 1$ و $J_i = E_{bi}$. وتحسب محصلة انتقال الحرارة بالإشعاع في هذه الحالة من العلاقة (7 - 69) مباشرةً.

تعتبر بعض السطوح في العديد من تطبيقات انتقال الحرارة أديباتية، حيث تكون الجوانب الخلفية لهذه السطوح معزولة جيداً، وانتقال الحرارة عبر هذه الجوانب معدوم. إذا كان تأثير الحمل الحراري على الجانب الأمامي للسطح (الجانب الذي يحدث عنده الإشعاع) مهملاً، وكان السطح في الحالة المستقرة steady state، فيجب أن يفقد السطح طاقة إشعاعية مساوية لتلك التي يكتسبها، أي $\dot{Q}_i = 0$. في مثل هذه الحالة نقول إن السطح يعيد إشعاع كامل الطاقة الإشعاعية التي يستقبلها، ويسمى مثل هذا السطح بسطح إعادة الإشعاع reradiating surface. بتعويض $\dot{Q}_i = 0$ في العلاقة (7 - 70) نجد:

$$J_i = E_{bi} = \sigma T_i^{\,4} \qquad \textbf{(72 – 7)}$$

بالتالي يمكن حساب درجة حرارة سطح إعادة الإشعاع عند شروط الحالة المستقرة من خلال المعادلة السابقة، وذلك بمجرد معرفة الإشعاع المغادر للسطح. من العلاقة السابقة واضح بأن درجة حرارة سطح إعادة الإشعاع لا تتعلق بإصدارية السطح.

7 – 9 – 2 – محصلة انتقال الحرارة بالإشعاع بين أي سطحين

***Net Radiation Heat Transfer between Any Two Surfaces*:**

لنأخذ سطحين ناشرين رماديين عاتمين لهما شكل اعتباطي، ودرجة حرارة كل منهما ثابتة ومنتظمة على كامل السطح، كما في الشكل (7 – 35). كما نعلم إن الإشعاع المغادر J يعبر عن معدل الإشعاع المغادر للسطح من أجل واحدة المساحة من السطح، وأن معامل

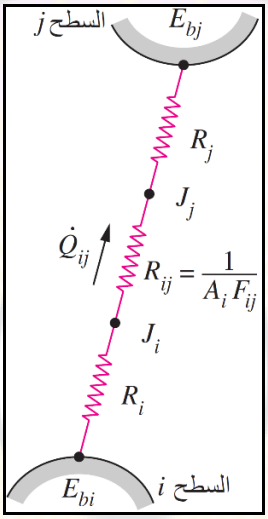
الرؤية $F_{i\to j}$ يعبر عن نسبة الإشعاع المغادر للسطح iوالوارد إلى السطح j . تعطى محصلة انتقال الحرارة بالإشعاع من السطح iإلى السطح j بالعلاقة:

$$\dot{Q}_{i\to j} = \begin{matrix}\textbf{الإشعاع المغادر لكامل}\\ \textbf{السطح }\boldsymbol{j}\textbf{والوارد إلى السطح }\boldsymbol{i}\end{matrix} - \begin{matrix}\textbf{الإشعاع المغادر لكامل}\\ \textbf{السطح }\boldsymbol{i}\textbf{والوارد إلى السطح }\boldsymbol{j}\end{matrix}$$

$$\dot{Q}_{i\to j} = A_i J_i F_{i\to j} - A_j J_j F_{j\to i} \qquad (73-7)$$

وبتطبيق العلاقة التبادلية $\left(A_i F_{i\to j} = A_j F_{j\to i}\right)$ نجد:

$$\dot{Q}_{i\to j} = A_i F_{i\to j}\left(J_i - J_j\right) \qquad (74-7)$$



الشكل (7 – 35) التشابه الكهربائي مقاومة الفراغ للاشعاع

وبالتشابه مع قانون أوم، فإن المعادلة السابقة تكتب بالشكل:

$$\dot{Q}_{i\to j} = \frac{J_i - J_j}{R_{i\to j}} \qquad (75-7)$$

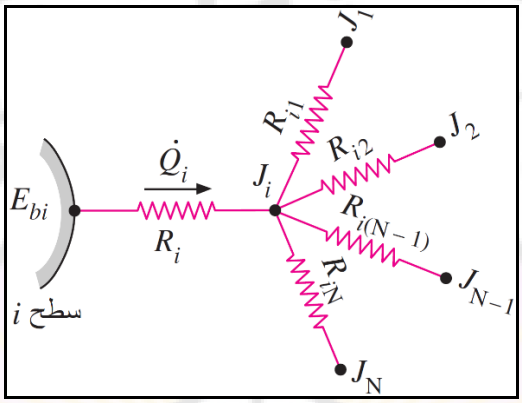
تعطى مقاومة الفراغ للإشعاع $R_{i\to j}$: space resistance for radiation بالشكل التالي:

$$R_{i\to j} = \frac{1}{A_i F_{i\to j}} \qquad (76-7)$$

مجدداً، فإن الكمية $\left(J_i - J_j\right)$ تقابل فرق الكمون، ومحصلة انتقال الحرارة بالإشعاع بين السطحين تقابل التيار في التشابه الكهربائي، كما هو موضح في الشكل (7 – 35).

في حالة إطار مغلق له N سطح، فإن مبدأ انحفاظ الطاقة يقتضي أن محصلة انتقال الحرارة من السطح i يجب أن تساوي إلى مجموع محصلات انتقال الحرارة من السطح i إلى كافة سطوح الإطار، أي إن:

$$\dot{Q}_i = \sum_{j=1}^{N} \dot{Q}_{i\to j} = \sum_{j=1}^{N} A_i F_{i\to j} \left(J_i - J_j\right) = \sum_{j=1}^{N} \frac{J_i - J_j}{R_{i\to j}} \qquad (77-7)$$



الشكل (7 – 36) التمثيل الشبكي لمحصلة انتقال الحرارة بالإشعاع من سطح في إطار مغلق إلى بقية السطوح.

يبين الشكل (7 – 36) شبكة محصلة انتقال الحرارة من السطح i إلى بقية السطوح في إطار مغلق له N سطح. بالمساواة بين العلاقتين (70 - 7)، (77 - 7) نجد:

$$\frac{E_{bi} - J_i}{R_i} = \sum_{j=1}^{N} \frac{J_i - J_j}{R_{i\to j}} \qquad (78-7)$$

وتؤول هذه العلاقة في ضوء التشابه الكهربائي إلى أن محصلة الإشعاع المتدفق من سطح ما عبر مقاومته الإشعاعية يساوي إلى مجموع التدفقات الإشعاعية من هذا السطح إلى السطوح الأخرى جميعها عبر مقاومات الفراغ المقابلة.

7 – 9 – 3 – انتقال الحرارة بالإشعاع في الإطارات المغلقة ذات السطحين

***Radiation Heat Transfer in Two - Surface Enclosures*:**

لنأخذ إطاراً مغلقاً يتألف من سطحين عاتمين درجتا حرارتهما T_1، T_2، كما في الشكل (7 – 37)، ولنحاول حساب محصلة انتقال الحرارة بالإشعاع بين السطحين بطريقة الشبكة. إصداريتا السطحين ε_1، ε_2 ومساحتاهما A_1، A_2 ودرجتا حرارتهما ثابتتان ومنتظمتان على كامل كل من السطحين. بما أنه يوجد سطحان فقط في الإطار، فيمكننا أن نكتب:

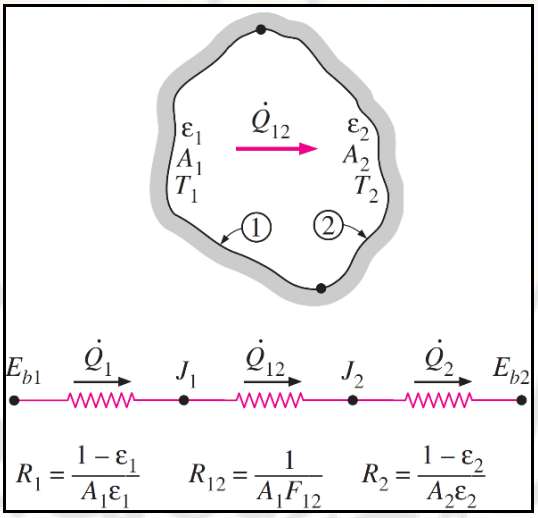
$$\dot{Q}_{12} = \dot{Q}_1 = -\dot{Q}_2$$

يبين الشكل (7 – 37) الشبكة الإشعاعية لإطار ذي سطحين يحوي مقاومتين سطحيتين ومقاومة فراغ واحدة. يحسب التيار المتدفق في أية شبكة كهربائية عبر مجموعة من المقاومات من خلال تقسيم فرق الكمون بين نقطتين A وB على المقاومة الكلية بين النقطتين نفسهما. بطريقة مماثلة فإن محصلة انتقال الحرارة بالإشعاع تحسب كما يلي:

$$\dot{Q}_{12} = \frac{E_{b1} - E_{b2}}{R_1 + R_{12} + R_2} = \dot{Q}_1 = -\dot{Q}_2$$

أو بالشكل:

$$\dot{Q}_{12} = \frac{\sigma\left(T_1^{\,4} - T_2^{\,4}\right)}{\dfrac{1-\varepsilon_1}{A_1\,\varepsilon_1} + \dfrac{1}{A_1 F_{12}} + \dfrac{1-\varepsilon_2}{A_2\,\varepsilon_2}} \qquad \textbf{(79 – 7)}$$



الشكل (7 – 37) الشبكة الإشعاعية الموافقة لإطار ذو سطحين.

إن هذه النتيجة صالحة للتطبيق من أجل أي مجموعة سطوح رمادية عاتمة ناشرة في إطار مغلق. يتعلق معامل الرؤية F_{12} بالشكل الهندسي، ويجب حسابه في البداية. يعطي الجدول (C8) بعض الصيغ المبسطة للمعادلة (7 – 79) من أجل بعض الأشكال المألوفة للإطارات ذات السطحين، ويجب الانتباه إلى أن $F_{12} = 1$ من أجل هذه الحالات الخاصة جميعها.

مثال 7 – 6:

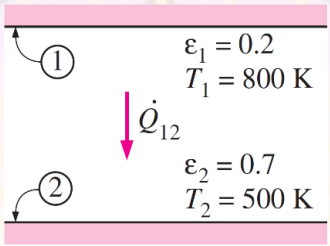
صفيحتان متوازيتان كبيرتان جداً، لهما درجتا حرارة ثابتتين ومنتظمتين $T_1 = 800\,\mathrm{K}$ و $T_2 = 500\,\mathrm{K}$ على الترتيب، وإصداريتاهما $\varepsilon_1 = 0.2$ و $\varepsilon_2 = 0.7$. احسب محصلة انتقال الحرارة بين هاتين الصفيحتين من أجل واحدة المساحة.

الحل:

المعطيات: درجتا حرارة الصفيحتين وإصداريتاهما.

المطلوب: محصلة تبادل الحرارة بين الصفيحتين من أجل واحدة المساحة.

الشكل:



الافتراضات: السطحان عاتمان رماديان ناشران.

التحليل: تحسب محصلة التبادل الإشعاعي بين الصفيحتين من العلاقة (80 - 7):

$$\dot{q}_{12} = \frac{\dot{Q}_{12}}{A} = \frac{\sigma\left(T_1^{\,4} - T_2^{\,4}\right)}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1}$$

$$= \frac{5.67\times10^{-8}\,\mathrm{W/m^2.K^4}\times\left[(800\,\mathrm{K})^4 - (500\,\mathrm{K})^4\right]}{\frac{1}{0.2} + \frac{1}{0.7} - 1}$$

$$= 3625\,\mathrm{W/m^2}$$

7 - 10 - التبادل الإشعاعي بوجود الغازات المصدرة والماصة

Radiation Exchange with Emitting and Absorbing Gases:

لقد درسنا حتى الآن انتقال الحرارة بالإشعاع بين سطوح يفصل بينها وسط لا يصدر الإشعاع ولا يمتصه ولا يشتته، أي إن الوسط لا يشترك في عملية التبادل الإشعاعي وهو نفوذ بشكل كامل للإشعاع الحراري. إن الفراغ يحقق هذه الحالة بشكل مثالي، كما أن الهواء يقترب من هذه الحالة عند درجات الحرارة والضغوط العادية. إن الغازات المؤلفة من جزيئات أحادية الذرة

مثل الأرغون Ar والهليوم He ، والغازات المؤلفة من جزيئات ذات ذرتين متماثلتين مثل النيتروجين N_2 والأوكسجين O_2 نفوذة للإشعاع، إلا في حالة درجات الحرارة المرتفعة جداً، حيث تتحول الجزيئات إلى شوارد. بالتالي يمكن اعتبار الهواء الجوي كوسط غير مشارك في التبادل الإشعاعي.

إن الغازات ذات الجزيئات غير المتناظرة مثل H_2O ، CO_2 ، CO ، SO_2 ، والهيدروكربونات H_nC_m تشارك في عملية الإشعاع من خلال امتصاص الإشعاع عند درجات الحرارة المعتدلة، وإصدار الإشعاع وامتصاصه عند درجات الحرارة العالية، كما في حالة الغازات الموجودة في غرف الاحتراق. وبالتالي عندما يحتوي الهواء أو أي غاز آخر على تراكيز ذات قيمة مهمة للغازات ذات الجزيئات غير المتناظرة، يجب أن نعامل الغاز على أنه وسط مشارك في التبادل الإشعاعي. فعلى سبيل المثال تحتوي غازات الاحتراق في الأفران وحجر الاحتراق على كميات كبيرة نسبياً من H_2O و CO_2 ، وبالتالي يجب أخذ إصدار الغازات وامتصاصها في الحساب من أجل الأفران.

إن وجود وسط مشارك في التبادل الإشعاعي يعقد من تحليل الإشعاع بشكل كبير لعدة أسباب:

* يصدر الوسط المشارك الإشعاع، ويمتصه عبر كامل حجمه. أي إن الإشعاع الغازي ظاهرة حجمية، وبالتالي فهو يتعلق بحجم الجسم وشكله، وحتى إن كانت درجة الحرارة منتظمة على كامل الوسط.
* تصدر الغازات الإشعاع، وتمتصه عند عدد من الحزم ضيقة الطول الموجي، وذلك على عكس الأجسام الصلبة، والتي تصدر الإشعاع وتمتصه على كامل الطيف. بالتالي لا يمكن دائماً أن نفترض أن الغاز رمادي حتى وإن كانت السطوح المحيطة بالغاز رمادية.
* إن خواص الإصدار والامتصاص لمكونات مزيج غازي تتعلق بدرجة حرارة المزيج الغازي وضغطه، وتركيبته؛ بالتالي فإن وجود غازات أخرى مشاركة في العملية الإشعاعية سيؤثر على خواص الإشعاع لغاز محدد.

إن انتشار الإشعاع في وسط ما يمكن أن يصبح أكثر تعقيداً في حال وجود بعض المتعلقات الجوية (الشوائب) كالغبار وجزيئات الثلج وقطرات الموائع وهباب الفحم (الفحم غير المحترق)، حيث إن هذه الجزيئات تقوم بتشتيت الإشعاع. يقصد بالتشتيت التغير في اتجاه الإشعاع الناتج عن الانعكاس reflection والانكسار refraction والانحراف diffraction.

يسمى التشتيت الناتج عن جزيئات الغاز نفسه بتشتت رايلي Rayleigh scattering، وتأثيره على انتقال الحرارة مهمل.

يمكن أيضاً أن يكون الوسط المشارك في التبادل الإشعاعي مائعاً أو جسماً صلباً نصف نفوذ (الماء، الزجاج، البلاستيك). سنقتصر في دراستنا على الغازات التي تصدر الإشعاع وتمتصه. سندرس على وجه التحديد إصدار الإشعاع وامتصاصه من قبل بخار الماء H_2O وثاني أوكسيد الكربون CO_2، حيث أنهما أكثر الغازات المشاركة في التبادل الإشعاعي التي نصادفها في التطبيقات.

7 – 10 – 1 – الخواص الإشعاعية لوسط مشارك

***Radiation Properties of a Participating Medium*:**

باعتبار أن وسط ما مشارك في التبادل الإشعاعي سماكته L. ترد حزمة طيفية من الإشعاع شدتها $I_{\lambda,0}$ على الوسط، حيث إنها تتخامد أثناء انتشارها في الوسط نتيجة الامتصاص كما في الشكل (7 – 38). يتناسب التناقص في شدة الإشعاع في أثناء مروره عبر طبقة سماكتها dx طرداً مع الشدة نفسها والسماكة dx. ويعرف هذا بقانون بير Beer's law، ويعبر عنه بالعلاقة:

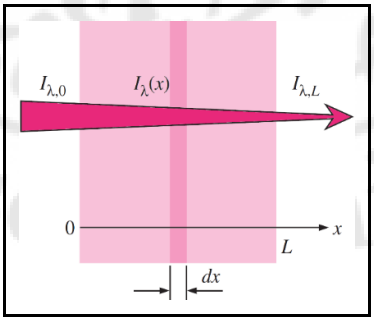
$$dI_\lambda(x) = -\kappa_\lambda I_\lambda(x)\,dx \qquad \textbf{(80 – 7)}$$

κ_λ: معامل الامتصاص الطيفي spectral absorption coefficient للوسط $\left[\mathrm{m}^{-1}\right]$.

بفصل المتحولات وإجراء التكامل من $x=0$ إلى $x=L$ ينتج:

$$\frac{I_{\lambda,L}}{I_{\lambda,0}} = e^{-\kappa_\lambda L} \qquad \textbf{(81 – 7)}$$

حيث فرضنا أن امتصاصية الوسط لا تتعلق بـ x. نلاحظ أن شدة الإشعاع تتناقص بشكل أسي وفق قانون بير.



الشكل (7 – 38) تخامد حزمة إشعاع في أثناء عبورها لوسط ماص.

تعرف النفاذية الطيفية spectral transmissivity لوسط ما بأنها نسبة شدة الإشعاع المغادر للوسط إلى الشدة الداخلة إليه، أي:

$$\tau_\lambda = \frac{I_{\lambda,L}}{I_{\lambda,0}} = e^{-\kappa_\lambda L} \qquad \textbf{(82 - 7)}$$

عندما لا يحدث امتصاص للإشعاع، فإن $\tau_\lambda = 1$. تعبر النفاذية الطيفية لوسط ما أيضاً عن نسبة الإشعاع النافذ عبر الوسط عند طول موجي محدد.

عند عبور الإشعاع لوسط لا يسبب تشتتاً (وبالتالي وسط غير عاكس)، فإن الإشعاع إما يمتص، وإما ينفذ. بالتالي $\alpha_\lambda + \tau_\lambda = 1$، وتعطى الامتصاصية الطيفية spectral absorptivity لوسط ما بالعلاقة:

$$\alpha_\lambda = 1 - \tau_\lambda = 1 - e^{-\kappa_\lambda L} \qquad \textbf{(83 - 7)}$$

ومن قانون كيرشوف، فإن الإصدارية الطيفية للوسط، هي:

$$\varepsilon_\lambda = \alpha_\lambda = 1 - e^{-\kappa_\lambda L} \qquad \textbf{(84 - 7)}$$

نلاحظ أن الامتصاصية الطيفية والنفاذية والإصدارية لوسط ما هي كميات لابعدية، وقيمتها أقل أو تساوي إلى 1. بشكل عام يتغير معامل الامتصاص الطيفي لوسط ما، وبالتالي ε_λ و α_λ و τ_λ، مع الطول الموجي ودرجة الحرارة والضغط وتركيبة الوسط.

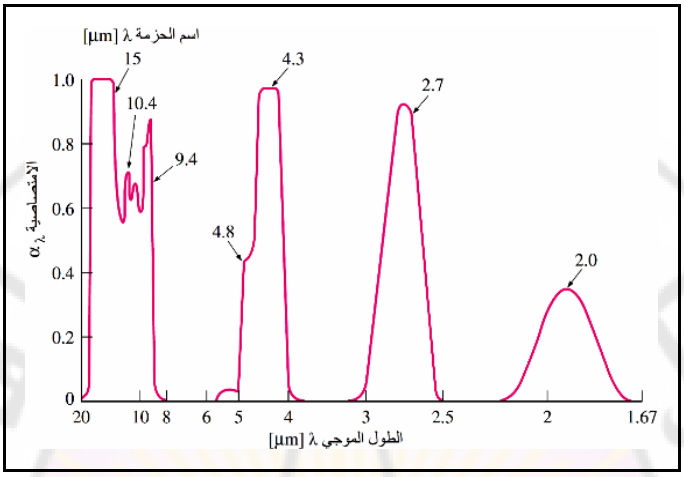
من أجل وسط سميك بصرياً optically thick، أي إن قيمة $\kappa_\lambda L$ للوسط كبيرة، فإن العلاقة (7 – 84) تعطي $\varepsilon_\lambda \approx \alpha_\lambda \approx 1$. على سبيل المثال عندما $\kappa_\lambda L = 5$، فإن $\varepsilon_\lambda = \alpha_\lambda = 0.993$؛ بالتالي فإن أي وسط سميك بصرياً يصدر الإشعاع كجسم أسود عند الطول الموجي المعطى. نتيجة ذلك فإن أي وسط سميك بصرياً يصدر الإشعاع ويمتصه ولا يشتته ودرجة حرارته T_g، يمكن النظر إليه كسطح أسود عند درجة حرارة T_g، حيث إنه سيمتص كامل الإشعاع المار خلاله، ويصدر أعظم إشعاع يمكن إصداره من سطح درجة حرارته T_g، والذي يساوي إلى $E_{b\lambda}(T_g)$.

7 – 10 – 2 – إصدارية الغازات والخلائط الغازية وامتصاصيتها

***Emissivity and Absorptivity of Gases and Gas Mixtures*:**

يبين الشكل (7 – 39) الامتصاصية الطيفية لـ CO_2 كتابع للطول الموجي. تظهر القيم العليا والدنيا والانقطاعات بوضوح الطبيعة الموجية للامتصاص، والخواص شديدة البعد عن الرمادية لـ CO_2. يتغير شكل حزم الامتصاص وعرضها مع درجة الحرارة والضغط، ولكن قيمة

الامتصاصية تتغير أيضاً مع سماكة الطبقة الغازية؛ بالتالي فإن قيم الامتصاصية لا معنى لها بدون سماكة وضغط محددين.



الشكل (7 – 39) الامتصاصية الطيفية لـCO_2 عند درجة حرارة 830 [K] ومسار طوله 38.8 [cm].

يجب أخذ الخواص اللارمادية في الحسبان في حسابات الإشعاع للحصول على نتائج عالية الدقة، ويمكن القيام بذلك من خلال استخدام نموذج حُزَمي، أي إجراء الحسابات من أجل كل حزمة امتصاص. لكن يمكن الحصول على نتائج مرضية من خلال فرض أن الغاز رمادي، واستخدام قيم الفعالية الكلية للامتصاصية والإصدارية المحسوبة كقيم وسطية.

حتى في حال فرضنا أن الغاز رمادي، فإن الإصدارية والامتصاصية الكلية لغاز ما تتعلق بالشكل الهندسي لجسم الغاز ككل، فضلاً عن تعلقها بدرجة الحرارة والضغط وتركيبة الغاز. تتواجد الغازات المشاركة في التبادل الإشعاعي $(H_2O\,،CO_2)$ عادةً مع غازات لا تشارك في التبادل الإشعاعي $(O_2\,،N_2)$، وبالتالي فإن الخواص الإشعاعية لغاز مصدر وماص توجد عادةً من أجل مزيج من الغاز مع غازات غير مشاركة في التبادل الإشعاعي، بدلاً من أن تكون لغاز صافٍ. تتعلق الإصدارية والامتصاصية لغاز في مزيج بشكل رئيس بكثافته، والتي تتبع لدرجة الحرارة والضغط الجزئي للغاز.

يبين الشكل (D17) إصدارية بخار الماء في مزيج من الغازات غير المشاركة في التبادل الإشعاعي عند ضغط كلي $P=1[\text{atm}]$، كتابع لدرجة حرارة الغاز T_g من أجل مجال قيم لـ P_wL، حيث P_w هو الضغط الجزئي لبخار الماء، و L، هي المسافة الوسطية التي تقطعها حزمة الإشعاع.

تحسب الإصدارية عند ضغط كلي P لا يساوي إلى الواحد $P \neq 1$؛ بضرب قيمة الإصدارية عند $1[\text{atm}]$ بمعامل تصحيح الضغط pressure correction factor C_w، والذي نحصل عليه من الشكل (D18) من أجل بخار الماء. أي إن:

$$\varepsilon_w = C_w \varepsilon_{w,1\text{atm}} \qquad \textbf{(85 - 7)}$$

ونجد قيماً مشابهة من أجل الإصدارية، ومعامل تصحيح الضغط من أجل CO_2 في مزيج من الغازات غير المشاركة في التبادل الإشعاعي في الشكلين (D19)، (D20).

في حال وجود CO_2 و H_2O معاً في مزيج مع غازات غير مشاركة في التبادل الإشعاعي، فإن إصدارية كل منهما تحسب بشكل مستقل، كما شرحنا سابقاً باستخدام الضغط الجزئي لكل غاز، لكن الإصدارية الفعالة للمزيج لا تحسب بجمع إصداريات الغازات (لكن يمكن ذلك عندما تصدر الغازات المختلفة عند أطوال موجية مختلفة). تحسب الإصدارية الفعالة للمزيج من العلاقة:

$$\begin{aligned} \varepsilon_g &= \varepsilon_c + \varepsilon_w - \Delta\varepsilon \\ \varepsilon_g &= C_c \varepsilon_{c,1\text{atm}} + C_w \varepsilon_{w,1\text{atm}} - \Delta\varepsilon \end{aligned} \qquad \textbf{(86 - 7)}$$

$\Delta\varepsilon$: معامل تصحيح الإصدارية emissivity correction factor، وهو يحسب تأثير تداخل حزم الإصدار. وتعطى قيمه من أجل مزيج غازي يحوي كلاً من CO_2 و H_2O في الشكل (D21).

تتعلق إصدارية أي غاز بالمسافة الوسطية التي تعبرها حزمة من الإشعاع الصادر عن الغاز قبل أن تصل إلى أحد السطوح المحيطة، وبالتالي فإن شكل الجسم الغازي وحجمه يؤثران في الإصدارية.

إن مخططات الإصدارية التي بيناها سابقاً؛ تم إنشاؤها بشكل تجريبي من خلال دراسة الإشعاع الصادر عن جسم غازي نصف كروي إلى سطح صغير موجود في مركز قاعدة نصف الكرة. بالتالي فإن هذه المخططات تمثل بيانات الإشعاع الصادر من جسم غازي نصف كروي نصف قطره L نحو مركز قاعدة نصف الكرة. يستخدم الطول الوسطي للحزمة L mean beam length في تصحيح هذه القيم من أجل أشكال هندسية أخرى، حيث يمثل نصف القطر لنصف كرة مكافئة. تعطى قيم الطول الوسطي للحزمة من أجل بعض الأشكال الهندسية في الجدول (7 - 1). تحسب قيم الإصدارية لهذه الأشكال الهندسية باستخدام المخططات من (D17) وحتى (D21) بتعويض الطول الوسطي للحزمة.

يمكن حساب امتصاصية غاز يحوي CO_2 و H_2O للإشعاع الصادر عن سطح درجة حرارته T_s بشكل مشابه من العلاقة:

$$\alpha_g = \alpha_c + \alpha_w - \Delta\alpha \qquad \textbf{(87 - 7)}$$

حيث إن $\Delta\alpha = \Delta\varepsilon$، وتحسب من الشكل (D21) عند درجة حرارة مصدر الإشعاع T_s. تحسب امتصاصية CO_2 و H_2O من مخططات الإصدارية، أي الأشكال من (D17) إلى (D20)، وفق:

$$\alpha_c = C_c \left(T_g / T_s\right)^{0.65} \varepsilon_c \left(T_s, P_c L T_s / T_g\right) \qquad \textbf{(88 - 7)}$$

$$\alpha_w = C_w \left(T_g / T_s\right)^{0.45} \varepsilon_w \left(T_s, P_w L T_s / T_g\right) \qquad \textbf{(89 - 7)}$$

نلاحظ أن امتصاصية الغاز تتعلق بدرجة حرارة مصدر الإشعاع T_s ودرجة حرارة الغاز T_g. تحسب معاملات تصحيح الضغط C_c، C_w باستخدام $P_c L$ و $P_w L$ كما في حسابات الإصدارية.

عندما تكون الإصدارية الكلية لغاز ما ε_g عند درجة حرارة T_g معلومة، فإن استطاعة الإصدار للغاز تحسب وفق العلاقة:

$$E_g = \varepsilon_g \sigma T_g^4$$

بالتالي، فإن معدل الطاقة الإشعاعية الصادرة عن الغاز إلى سطح مجاور مساحته A_s، هي:

$$\dot{Q}_{g,e} = \varepsilon_g A_s \sigma T_g^4 \qquad \textbf{(90 - 7)}$$

إذا كان السطح المجاور أسود ودرجة حرارته T_s، فإن السطح سيصدر إشعاعاً نحو الغاز بمعدل $A_s \sigma T_s^4$ من دون أن يعكس أي إشعاع، وسيمتص الغاز هذا الإشعاع بمعدل $\alpha_g A_s \sigma T_s^4$، حيث α_g هي امتصاصية الغاز؛ بالتالي فإن محصلة انتقال الحرارة بالإشعاع بين الغاز وسطح أسود محيط به تصبح:

$$\dot{Q}_{\text{net}} = A_s \sigma \left(\varepsilon_g T_g^4 - \alpha_g T_s^4\right) \qquad \textbf{(91 - 7)}$$

في حال لم يكن السطح أسود، فإن التحليل يصبح أكثر تعقيداً بسبب الإشعاع المنعكس عن السطح. من أجل السطوح القريبة من السوداء ذات الإصدارية $\varepsilon_s > 0.7$ يمكن استخدام العلاقة التالية:

$$\dot{Q}_{\text{net,grey}} = \frac{\varepsilon_s + 1}{2} \dot{Q}_{\text{net,black}} = \frac{\varepsilon_s + 1}{2} A_s \sigma \left(\varepsilon_g T_g^4 - \alpha_g T_s^4\right) \qquad \textbf{(92 - 7)}$$

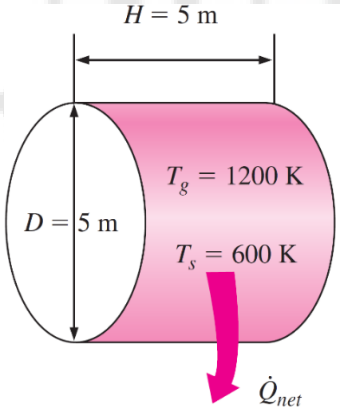
تمتلك سطوح جدران الأفران وغرف الاحتراق عادةً إصدارية أكبر من 0.7، وبالتالي فإن العلاقة السابقة تقدم نتائج جيدة من أجل الحسابات الأولية لانتقال الحرارة بالإشعاع.

الجدول (7 – 1) الطول الوسطي للحزمة L لبعض الأشكال الهندسية لجسم الغاز.

الشكل الهندسي لجسم الغاز	L
نصف كرة نصف قطرها R تشع نحو مركز قاعدتها	R
كرة قطرها D تشع نحو سطحها	$0.65D$
أسطوانة دائرية لامنتهية قطرها D تشع نحو سطح منحنٍ	$0.95D$
أسطوانة دائرية نصف منتهية قطرها D تشع نحو قاعدتها	$0.65D$
أسطوانة دائرية نصف منتهية قطرها D تشع نحو مركز قاعدتها	$0.9D$
أسطوانة نصف دائرية لامنتهية نصف قطرها R تشع نحو مركز قاعدتها	$1.26R$
أسطوانة دائرية ارتفاعها يساوي قطرها D تشع إلى كامل سطحها	$0.6D$
أسطوانة دائرية ارتفاعها يساوي قطرها D تشع نحو مركز قاعدتها	$0.71D$
صفيحة لامنتهية سماكتها D تشع نحو أحد سطحيها	$1.8D$
مكعب طول ضلعه L يشع نحو أحد وجوهه	$0.66L$
شكل اعتباطي حجمه V ومساحة سطحه A_s يشع نحو سطحه	$3.6V\,/A_s$

مثال 7 – 7:

فرن أسطواني طوله وقطره متساويان 5 m، ودرجة حرارة جدرانه 600 K، يحوي غازات احتراق درجة حرارتها 1200 K وضغطها الكلي 2 atm. تبين من التحليل الحجمي أن تركيبة غازات الاحتراق هي: 80% نيتروجين، 8% بخار ماء، 7% أوكسجين، 5% ثاني أكسيد الكربون. احسب الإصدارية الفعالة لغازات الاحتراق، والامتصاصية الفعالة للغازات، واحسب معدل انتقال الحرارة بالإشعاع من غازات الاحتراق إلى جدران الفرن.



الحل:

الشكل:

المعطيات: درجة حرارة المزيج الغازي وضغطه وتركيبته. درجة حرارة جدران الفرن.

المطلوب:

1. الإصدارية الفعالة لغازات الاحتراق.
2. الامتصاصية الفعالة لغازات الاحتراق.
3. معدل انتقال الحرارة بالإشعاع من غازات الاحتراق إلى جدران الفرن.

الافتراضات:

1. الغازات في المزيج جميعها هي غازات مثالية.
2. الإصدارية المحسوبة هي الإصدارية الوسطية للإشعاع الصادر نحو سطوح الإطار الأسطواني جميعها.
3. السطوح الداخلية لجدران الفرن سوداء.
4. تشتت الإشعاع الناتج عن الهباب والجزيئات الأخرى مهمل.

التحليل:

1. إن التحليل الحجمي لمزيج غازي يعطي النسب المولية y_i لمكونات هذا المزيج، والتي تساوي إلى نسب الضغوط من أجل مزيج غازي مثالي. بالتالي فالضغط الجزئي لـ CO_2 و H_2O، هو:

$$P_c = y_{CO_2} P = 0.05 \times 2\,\text{atm} = 0.1\,\text{atm}$$

$$P_w = y_{H_2O} P = 0.08 \times 2\,\text{atm} = 0.16\,\text{atm}$$

من الجدول (7 – 1)، طول الحزمة الوسطي الإسطوانة قطرها مساوٍ لارتفاعها وتصدر إشعاعاً نحو السطوح جميعها، هو:

$$L = 0.6D = 0.6 \times 5\,\text{m} = 3\,\text{m}$$

وبالتالي، فإن:

$$P_c L = 0.1\,\text{atm} \times 3\,\text{m} = 0.3\,\text{m.atm} = 0.98\,\text{ft.atm}$$

$$P_w L = 0.16\,\text{atm} \times 3, = 0.48\,\text{m.atm} = 1.57\,\text{ft.atm}$$

من المخططين (D17) و(D19)، فإن قيم الإصدارية لكل من CO_2 و H_2O المقابلة لهذه القيم عند درجة حرارة الغاز $T_g = 1200\,\text{K}$ وضغط 1atm، هي:

$$\varepsilon_{c,1\text{atm}} = 0.16 \qquad \varepsilon_{w,1\text{atm}} = 0.23$$

وهي قيم الإصدارية الأساسية عند 1atm، ويجب تصحيح هذه القيم من أجل ضغط $2\,\text{atm}$. نوجد قيم معاملات التصحيح من المخططين (D18) و(D20)، حيث إن:

$$(P_w + P)/2 = (0.16 + 2)/2 = 1.08\,\text{atm}$$

وبالتالي:

$$C_c = 1.1 \qquad C_w = 1.4$$

إن CO_2 و H_2O موجودان في المزيج نفسه، وبالتالي فإننا نحتاج إلى تصحيح الإصدارية من أجل حزم الإصدار المتداخلة. من المخطط (D21)، معامل تصحيح الإصدارية عند درجة حرارة $T = T_g = 1200\,\mathrm{K}$، هو:

$$\left.\begin{aligned} P_c L + P_w L &= 0.98 + 1.57 = 2.55 \\ \frac{P_w}{P_w + P_c} &= \frac{0.16}{0.16 + 0.1} = 0.615 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \Delta\varepsilon = 0.048$$

وبالتالي، فإن الإصدارية الفعالة لمزيج غازات الاحتراق تحسب بالعلاقة (7 – 86):

$$\varepsilon_g = C_c \varepsilon_{c,1\mathrm{atm}} + C_w \varepsilon_{w,1\mathrm{atm}} - \Delta\varepsilon = 1.1 \times 0.16 + 1.4 \times 0.23 - 0.048 = 0.45$$

2. من أجل مصدر ذي درجة حرارة $T_s = 600\,\mathrm{K}$، فإن إصدارية الغازات تحسب أيضاً باستخدام مخططات الإمتصاصية كما يلي:

$$P_c L \frac{T_s}{T_g} = 0.1\,\mathrm{atm} \times 3\,\mathrm{m} \frac{600\,\mathrm{K}}{1200\,\mathrm{K}} = 0.15\,\mathrm{m.atm} = 0.49\,\mathrm{ft.atm}$$

$$P_w L \frac{T_s}{T_g} = 0.16\,\mathrm{atm} \times 3\,\mathrm{m} \frac{600\,\mathrm{K}}{1200\,\mathrm{K}} = 0.24\,\mathrm{m.atm} = 0.79\,\mathrm{ft.atm}$$

من المخططين (D17) و(D19)، إن قيم الإصدارية لكل من CO_2 و H_2O المقابلة لهذه القيم عند درجة حرارة $T_s = 600\,\mathrm{K}$ وضغط $1\mathrm{atm}$، هي:

$$\varepsilon_{c,1\mathrm{atm}} = 0.11 \qquad \varepsilon_{w,1\mathrm{atm}} = 0.25$$

إن معاملات تصحيح الضغط هي نفسها المحسوبة في الطلب الأول $C_c = 1.1, C_w = 1.4$، وهي لا تتغير مع درجة حرارة السطح. بالتالي فإن امتصاصيتي CO_2 و H_2O تحسبان من العلاقتين (88 - 7)، (89 - 7):

$$\alpha_c = C_c \left(\frac{T_g}{T_s}\right)^{0.65} \varepsilon_{c,1\mathrm{atm}} = 1.1 \times \left(\frac{1200\,\mathrm{K}}{600\,\mathrm{K}}\right)^{0.65} \times 0.11 = 0.19$$

$$\alpha_w = C_w \left(\frac{T_g}{T_s}\right)^{0.45} \varepsilon_{w,1\mathrm{atm}} = 1.4 \times \left(\frac{1200\,\mathrm{K}}{600\,\mathrm{K}}\right)^{0.45} \times 0.25 = 0.48$$

فضلاً عن ذلك، فإن $\Delta\alpha = \Delta\varepsilon$. ولكن يجب إيجاد معامل تصحيح الإصدارية من جديد، وذلك من المخطط (D21)، عند درجة حرارة $T = T_s = 600\,\mathrm{K}$ بدلاً من

$T_g = 1200\,\mathrm{K}$. لا يوجد في الشكل (D21) منحنٍ من أجل $600\,\mathrm{K}$، ولكن يمكننا أخذ قيم $\Delta\varepsilon$ عند $400\,\mathrm{K}$ و $800\,\mathrm{K}$، ومن ثم أخذ متوسطهما الحسابي:

$$\left.\begin{aligned} P_c L + P_w L &= 2.55 \\ \frac{P_w}{P_w + P_c} &= 0.615 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \Delta\varepsilon = 0.027$$

وبالتالي، فإن إمتصاصية غازات الاحتراق تحسب بالعلاقة (87 - 7):

$$\alpha_g = \alpha_c + \alpha_w - \Delta\alpha = 0.19 + 0.48 - 0.027 = 0.64$$

3. نحسب مساحة سطح التبادل الحراري بالإشعاع للأسطوانة:

$$A_s = \pi DH + 2\frac{\pi D^4}{4} = \pi \times 5\,\mathrm{m} \times 5\,\mathrm{m} + 2 \times \frac{\pi (5\,\mathrm{m})^2}{4} = 118\,\mathrm{m}^2$$

وبالتالي، فإن محصلة انتقال الحرارة بالإشعاع من غازات الاحتراق إلى جدران الفرن تحسب بالعلاقة (90 - 7):

$$\begin{aligned} \dot{Q}_{\mathrm{net}} &= A_s \sigma \left(\varepsilon_g T_g^{\,4} - \alpha_g T_s^{\,4} \right) \\ &= 118\,\mathrm{m}^2 \times 5.67 \times 10^{-8}\,\mathrm{W/m^2.K^4} \times \left[0.45 (1200\,\mathrm{K})^4 - 0.64 (600\,\mathrm{K})^4 \right] \\ &= 2.79 \times 10^4\,\mathrm{W} \end{aligned}$$

المناقشة:

1. إن الإصدارية المحسوبة هي الإصدارية الوسطية من أجل إشعاع صادر عن كامل أسطح الإطار الأسطواني. أما من أجل إشعاع صادر نحو مركز قاعدة الأسطوانة، فإن الطول الوسطي للحزمة هو $0.71D$ بدلاً عن $0.6D$، وبالتالي فإن قيمة الإصدارية ستختلف.
2. إن معدل انتقال الحرارة المحسوب هو من أجل حالة سطوح سوداء. في حال لم تكن السطوح سوداء، ولكن كانت إصدارية السطح ε_s أكبر من0.7، فإن معدل انتقال الحرارة بالإشعاع يحسب من خلال ضرب معدل انتقال الحرارة بالإشعاع المحسوب بـ $(\varepsilon_s + 1)/2$.

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الفصل الثامن
انتقال الحرارة في محركات الاحتراق الداخلي
Heat Transfer in Engine

ندرس في هذا الفصل الانتقال الحراري ضمن محرك وحيد الأسطوانة، حيث من الأهمية بمكان دراسة هذا الانتقال في أثناء العمل الحقيقي للمحرك. إن نسبة 35% من الطاقة الكيميائية الكلية الداخلة إلى المحرك من خلال الوقود تتحول إلى عمل نافع في العمود المرفقي، وكذلك حوالي 30% من طاقة الوقود تخرج من خلال العادم على شكل إنتالبيا وطاقة كيميائية؛ وبالتالي حوالي ثلث الطاقة الكلية الداخلة إلى المحرك سوف تتبدد على شكل انتقال حراري إلى الوسط المحيط.

إن درجات الحرارة في حجرة احتراق المحرك تصل إلى 2700k وما فوق. إن المواد المصنع منها المحرك لا تتحمل مثل درجات الحرارة هذه، وسوف يحدث فيها خلل إذا لم يتم انتقال حرارة حقيقي. إن إزالة الحرارة تحفظ المحرك والزيت من الخلل. ومن ناحية أخرى من المفضل أن يعمل المحرك عند درجة حرارة معتدلة للحصول على مردود حراري أعظمي.

توجد طريقتان لتبريد حجرة احتراق المحرك:

* من خلال قميص مائي يمر فيه وسيط تبريد، يتم تدويره في المحرك.

* تبريد هوائي للمحرك، حيث يكون السطح الخارجي للمحرك مريَّشاً لزيادة فعالية التبادل الحراري مع الوسط الخارجي.

8 - 1 - توزع الطاقة في المحرك *Energy Distribution*:

تعطى كمية الطاقة الكلية المتوفرة للاستخدام في المحرك بالعلاقة الآتية:

$$\dot{W} = \dot{m}_f Q_{HV} \qquad (1-8)$$

حيث: $\dot{m}_f$: معدل التدفق الكتلي للوقود الداخل إلى المحرك.

Q_{HV}: القيمة الحرارية للوقود.

إن التدفق الكتلي للوقود يحدد من خلال التدفق الكتلي للهواء اللازم الذي يتفاعل مع الوقود. يُعدُّ المردود الحراري للمكبح (Brake Thermal Efficiency) كنسبة من الطاقة الكلية التي يتم تحويلها إلى عمل نافع على عمود المرفق، ويعطى بالعلاقة:

$$(\eta_t)_{brake} = \dot{W}_b / \dot{m}_f Q_{HV} \eta_c \qquad \textbf{(2 - 8)}$$

حيث: η_t: المردود الحراري.

η_c: مردود الاحتراق.

$\dot{W}_b$: استطاعة المكبح – مقاومة الاحتكاك Brake Power.

يمكن تقسيم الطاقة المتبقية إلى ضياعات حرارية، وأحمال زائدة (Parasitic Loads)، والطاقة الضائعة في العادم. يبين الشكل (8 – 1) توزع الطاقة المثالي في المحرك وحيد الأسطوانة والذي يعطى كنسبة من طاقة الوقود والكلية.

إن المجموع الكلي يزيد على 100%، وذلك لأن ضياعات الاحتكاك تحسب مرتين، حيث في البداية تكون ضياعات أساسية، ومن ثم مرة أخرى كنتيجة للضياعات الحرارية. ولأي محرك يمكن كتابة المعادلة الآتية:

$$\dot{W}_{acc} + \dot{Q}_{loss} + \dot{Q}_{exhaust} + \dot{W}_{shaft} = Power\ \ generated \qquad \textbf{(3 - 8)}$$

حيث: $\dot{W}_{shaft}$: الاستطاعة المطبقة على العمود المرفقي.

$\dot{Q}_{exhaust}$: الطاقة الضائعة في العادم.

$\dot{Q}_{loss}$: ضياعات مختلفة إلى الوسط الخارجي عن طريق الانتقال الحراري.

$\dot{W}_{acc}$: الاستطاعة اللازمة لعمل ملحقات المحرك.

بناء على الحجم الهندسي للمحرك وظروف عمله، فإن الاستطاعة المطبقة على العمود المرفقي تشكل: $\dot{W}_{shaft} \approx 25 - 40\%$

حيث للمحركات CI تكون القيمة الكبرى وللمحركات SI تأخذ القيمة الصغرى، وتشكل الطاقة الضائعة في العادم: $\dot{Q}_{exhaust} \approx 20 \div 45\%$

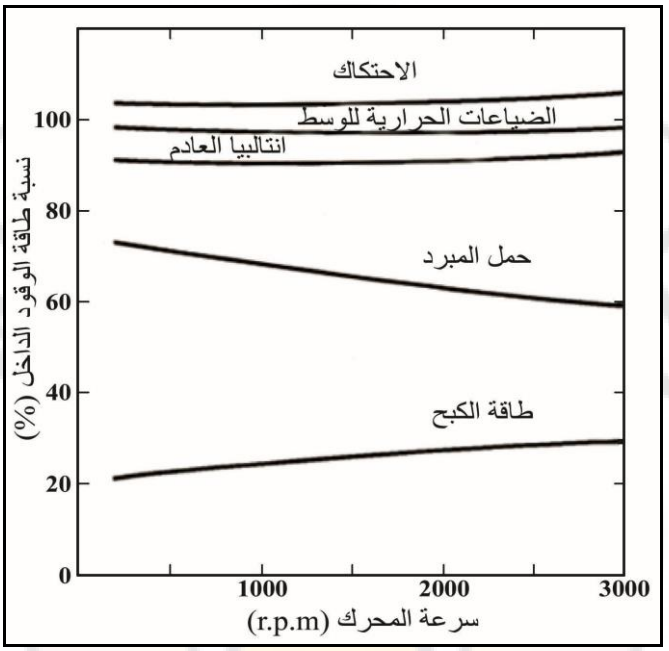
حيث النسبة الكبرى من الطاقة الضائعة تكون في عادم المحركات SI، وذلك بسبب ارتفاع درجة حرارة العادم.

وتقسم الضياعات في العادم إلى جزئين: الإنتالبيا (الحرارة) والطاقة الكيميائية.

عندما يعمل المحرك على الحمل الأعظمي، فإن الطاقة الكيميائية تشكل نصف الضياعات في العادم.

وعند شروط عمل للمحرك، فإن الطاقة الضائعة في العادم تزيد على طاقة الكبح الخارجة من المحرك. ويعبر عن الضياعات الأخرى كما في الشكل الآتي:

$$\dot{Q}_{loss} \approx 10-35\%$$



الشكل (8 – 1) توزع الطاقة في المحرك النموذجي SI كتابع لسرعة المحرك، الضياعات الناتجة عن الاحتكاك والتي تشكل 10% والتي تضاف إلى الضياعات الأخرى، مما يجعل توزع الطاقة الكلية أكبر من 100%.

يمكن التعبير عن الضياعات الحرارية لمحركات مختلفة على الشكل الآتي:

$$\dot{Q}_{loss} = \dot{Q}_{coolant} + \dot{Q}_{oil} + \dot{Q}_{ambient} \qquad \textbf{(4 – 8)}$$

عندما تكون المحركات CI في النهاية العلوية، فالتدفق الحراري إلى وسيط التبريد حوالي: $\dot{Q}_{coolant} \approx 10-30\%$

عند حمل أعظمي، فإن الطاقة الضائعة والذاهبة إلى وسيط التبريد يمكن حسابها كنصف الطاقة المطبقة على المكبح، وتزداد مرتين بالنسبة للطاقة المطبقة عندما يكون الحمل أصغرياً.

فحسب نوع الزيت وسرعة المحرك فهي تشكل: $\dot{Q}_{oil} \approx 5-15\%$

الضياعات المباشرة إلى الوسط المحيط: $\dot{Q}_{ambient} \approx 2-10\%$

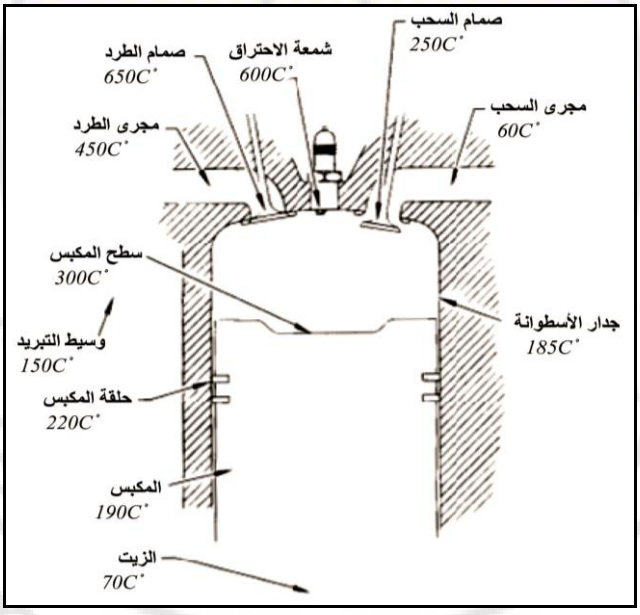
الضياعات الناتجة عن الاحتكاك: $\dot{W}_{friction} \approx 10\%$

8 - 2 - توزع درجات حرارة المحرك *Engine Temperatures*:

يوجد ثلاث مناطق ساخنة حول شمعة الاشتعال (البوجي) (spark plug): صمام العادم . الفتحة (port) وواجهة المكبس (face of the piston). ومن الصعب جداً تبريد هذه المناطق المعرضة لدرجات حرارة عالية كما في الشكل (8 – 2).

إن درجات حرارة احتراق الغاز العالية في حجرة الاحتراق حول شمعة الاحتراق تؤدي إلى انتقال حراري أعظمي في هذه المساحة. وكذلك إلى تصدع جدران حجرة الاحتراق؛ لذلك نلجأ إلى تبريدها بالماء من خلال قمصان التبريد. وعندما يكون المحرك مبرّداً بالهواء من خلال ترييش السطح الخارجي.

إن صمام العادم والبوابة اللذين يعملان عند درجات حرارة عالية، وذلك لأنهما متوضعان عند جريان غير مستقر للهواء الساخن يجعلان من الصعوبة بمكان وصول وسيط التبريد والسطح المريش لسحب الحرارة.



يبين الشكل (8 – 2) توزع درجة الحرارة النموذجي المتواجد في المحرك CI في أثناء عمله في النظام المستقر.

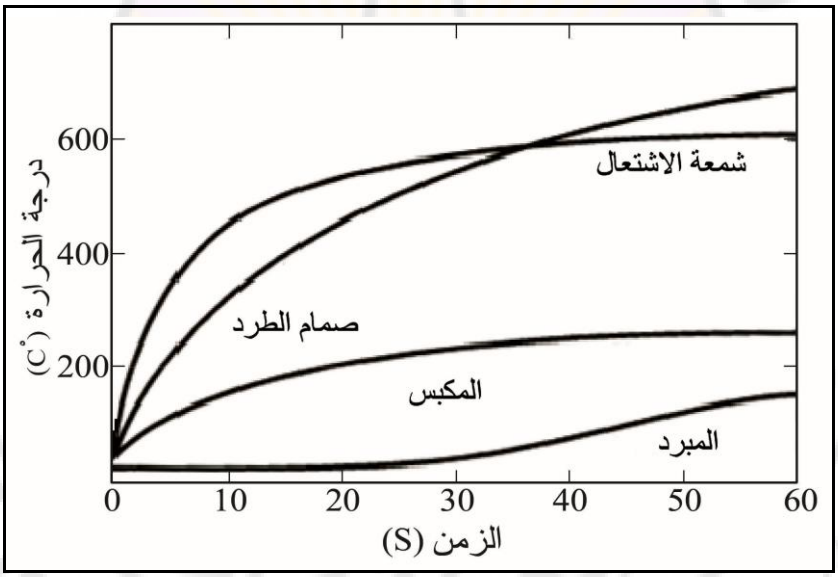
وهناك صعوبة في تبريد المكبس، وذلك لأنه مفصول عن قميص ماء التبريد، وكذلك عن السطح الخارجي المريش.

8 - 3 - ارتفاع حرارة المحرك *Engine Warm - up* :

عندما ترتفع حرارة المحرك البارد إلى حالة نظام درجة الحرارة المستقر يحدث تمدد حراري في أجزائه كافة، وتكون درجة التمدد مختلفة في كل جزء، وهذا يتعلق بدرجة الحرارة والمواد التي تصنع منها هذه الأجزاء.

إن الحجم الفعّال يحد من التمدد الحراري للمكبس ودرجات حرارة تشغيل المحرك.هناك قوى ناتجة بين حلقات المكبس وحوافه وجدران الأسطوانات، وهذا يؤدي إلى ارتفاع حرارة لزوجة غشاء الزيت في جدران الأسطوانات في أثناء عمل المحرك.

يبين الشكل (8 – 3) كيفية ازدياد درجات حرارة أجزاء المحرك البارد بعد الإقلاع. عندما يكون الجو بارداً، فإن زمن الإقلاع للوصول إلى نظام حراري مستقل يستغرق (30 – 20) دقيقة. ولكن بعض الأجزاء تصل إلى النظام الحراري المستقر بأقل من هذا الزمن.



الشكل (8 – 3) درجات حرارة مكونات المحرك كتابع للزمن بعد إقلاع المبرد

وعادة تصمم المحركات من حيث مصروف الوقود والعمل الأمثل عند نظام حراري مستقر.

8 - 4 - الانتقال الحراري في أثناء نظام السحب *Heat transfer in intake system*:

عندما يدخل مزيج من الوقود والهواء إلى المحرك عبر نظام السحب، فإن درجة حرارته تزداد من درجة حرارة الجو المحيط إلى درجة حرارة $60^{\circ}c$, وهذا يتعلق ببعض الإجراءات الترموديناميكية التي يخضع لها الهواء الداخل.

إن جدران مجرى السحب (المشعب) (Intake manifold) تكون أكثر سخونة من المزيج الداخل، نتيجة لتسخينه من خلال الانتقال الحراري بالحمل، والذي يعطى بالعلاقة الآتية:

$$Q = \alpha A(T_{wall} - T_{gas}) \qquad (5-8)$$

حيث: T_{wall} درجة حرارة مجرى السحب.

T_{gas} : درجة حرارة الغاز (المزيج الداخل)

α : معامل الانتقال الحراري بالحمل.

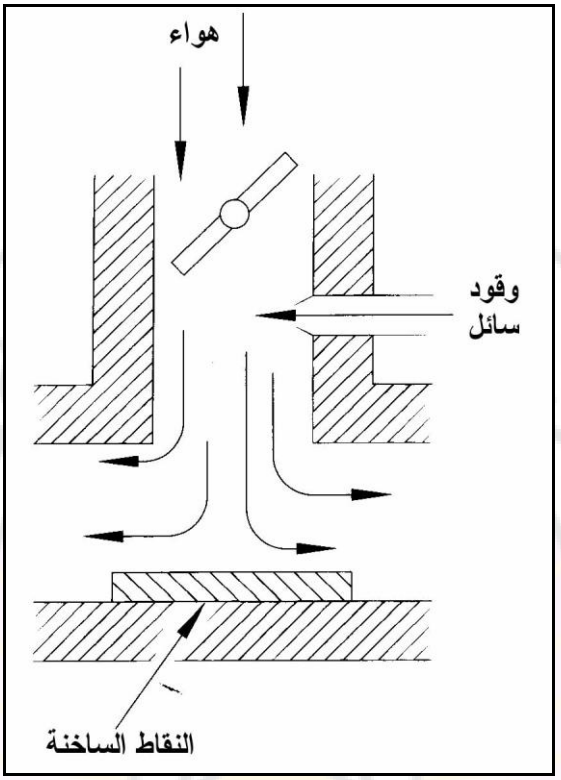
A : مساحة السطح الداخلي لمجرى السحب.

يكون المشعب عادة أسخن نتيجة قربه من الأجزاء الساخنة في محركات الديزل، والمحركات ذات نظام التغذية بالحقن، حيث يتم طرح الوقود أولاً في مجرى السحب، وذلك لكي يسخن وفي الوقت نفسه يساعد في عملية تبخر الوقود.

تستخدم طرق عدّة لتسخين المشعب:

* من خلال جريان المزيج بتماس حراري مغلق مع مجرى العادم.
* من خلال استخدام جريان وسيط ساخن حول القميص المائي.
* من خلال استخدام التسخين الكهربائي لمجرى السحب.

يوجد في بعض الأنظمة مواقع خاصة ساخنة تسمى النقاط الساخنة (Hot spots)، حيث في المواقع المثلى بعد التغذية بالوقود من خلال وصلة (Tee) يحدث التبادل الحراري الأعظمي بالحمل، كما في الشكل(8 – 4):



الشكل (8 – 4) النقاط الساخنة في مجرى السحب والمتوضعة على سطوح جدران المحرك

هناك تأثيرات عدة ناتجة عن التسخين بالحمل في مجرى السحب، وبعضها جيد وبعضها سيئ. قسم من الوقود في البداية يتبخّر، والقسم الآخر يمتزج مع الهواء، وذلك حسب طبيعة المزيج، وعلى كل حال إن ارتفاع درجة الحرارة يقلل من المعامل الحجمي للمحرك من خلال الآلية الآتية:

تقلل درجة الحرارة العالية من كثافة الهواء، ويؤدي إلى أن الوقود المتبخِّر يحلّ مكان الهواء، وبالتالي إن هذه الزيادة في درجة الحرارة تقلل من كمية الهواء الواصل إلى الأسطوانة. إن الحالة الوسطية (المثلى) هو أن يتم تبخُّر جزءٍ من الوقود في مجرى السحب، ويتم الجزء المتبقي في الأسطوانة في أثناء عملية الانضغاط. في المحركات المكربنة يتم تبخّر 60% من الوقود في مجرى السحب، وذلك لقصر الوقت الذي يتم فيه الجريان في مجرى السحب حيث لا يصل إلى نظام درجات حرارة مستقر.

عندما يتبخّر الوقود في مجرى السحب يؤدي إلى تبريد المتدفق الذي يحيط به من خلال التبريد التبخيري والذي يعادل التسخين بالحمل، وعندما تدخل شحنة الوقود والهواء إلى الأسطوانة تُسخَّن من خلال جدرانها الساخنة، وهذا يساعد في تبريد جدران الأسطوانة وتحميها من زيادة التسخين.السبب الآخر لتحديد سخونة الهواء الداخل هو المحافظة على درجات حرارة صغرى في بداية شوط الانضغاط. فيما إذا كانت درجة الحرارة عالية في بداية الانضغاط فعندئذٍ سوف تكون درجات الحرارة عالية في باقي الدارة (Cycle) وفي هذه الحالة يمكن حدوث مشكلة ظاهرة الصفع في المحرك (Engine knock).

في المحركات المستخدمة لأنظمة الخوانق متعددة النقاط تحتاج فقط لتسخين مشعب الدخول (مجرى السحب Intake manifold) بالاعتماد على قطرات الوقود الدقيقة ودرجة الحرارة العالية حول صمام الدخول حسب حاجة الوقود للتبخر، ونتيجة لذلك تملك هذه المحركات مردود حجمي مرتفع.

يتم بخُّ الوقود عادة بشكل مباشر إلى الواجهة الخلفية من صمام السحب، وهذا يسرع في التبخّر، وكذلك يقوم بتبريد صمام السحب الذي تصل درجة حرارته إلى درجة حرارة الدارة البالغة أكثر من $400^{\circ}c$.

يكون نظام درجة الحرارة المستقر عادة في صمام السحب في مجال $200-300^{\circ}c$. وإذا كان المحرك زائد الشحنة (Super charged) أو توربينيّاً (Turbo charged) فإن درجة حرارة الهواء الداخل تتأثر نتيجة لحرارة الانضغاط، ولتفادي ذلك تُزوَّد معظم هذه المحركات بمبادلات حرارية، حيث يدخل من خلالها الهواء المضغوط، ويُبرَّد من خلال مرور وسيط التبريد الذي يجري في الاتجاه المعاكس.

8 - 5 - الانتقال الحراري في حجرة الاحتراق

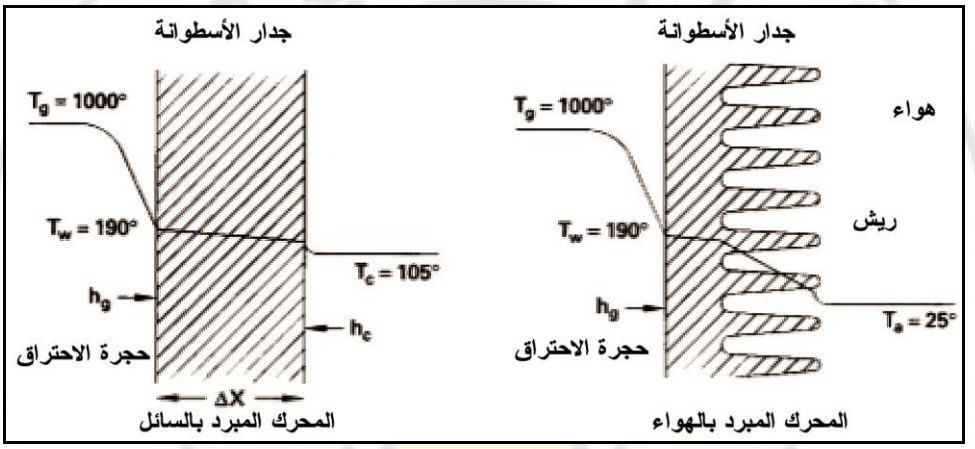
Heat transfer in combustion chambers :

عندما يدخل مزيج الوقود والهواء إلى أسطوانات المحرك يحدث الانتقال الحراري بأشكاله الثلاثة: توصيل، حمل، وإشعاع، فضلاً عن ذلك فإن درجة الحرارة ضمن الأسطوانة تتأثر بالتحول الطوري في أثناء تبخر السائل المتبقي.

إن مزيج الوقود والهواء الداخل إلى الأسطوانة في أثناء شوط السحب (الدخول) يمكن أن يكون أسخن أو أبرد من جدران الأسطوانة بحيث يمكن أن يكون الانتقال الحراري في كلا الاتجاهين.

في أثناء شوط السحب تزداد درجة حرارة الغاز مع بداية زمن الاحتراق بحيث يكون هناك انتقال حرارة بالحمل إلى جدران الأسطوانة. إن الحرارة الناتجة عن الانضغاط يمكن تخفيضها من خلال التبريد التبخيري الذي يحدث نتيجة لنقاط السائل المتبقية والتي تبدأ بالتبخر.

في أثناء الاحتراق تصل درجة حرارة الغاز داخل الأسطوانة إلى الذروة عند قيمة 3000k، وهنا نحتاج إلى انتقال حرارة فاعل للحفاظ على جدران الأسطوانة من زيادة التسخين.ويحدث هناك الانتقال الحراري بشكل رئيس من خلال الحمل والموصلية لنقل الطاقة من حجرة الاحتراق والمحافظة على جدران الأسطوانة من عدم الانصهار الشكل (8 – 5).



يبين الشكل (8 – 5) الانتقال الحراري عبر جدار الأسطوانة.

تعطى كمية الحرارة المنتقلة بالنسبة لمساحة واحدة السطح بالعلاقة التالية:

$$q = Q/A = (T_g - T_c)/[(1/\alpha_g) + (L/\lambda) + (1/\alpha_c)] \qquad \textbf{(6 – 8)}$$

حيث: T_g: درجة حرارة غاز حجرة الاحتراق.

T_c: درجة حرارة وسيط التبريد.

α_g: معامل الانتقال الحراري بالحمل من جهة الغاز.

α_c: معامل الانتقال الحراري بالحمل من جهة وسيط التبريد.

L: سماكة جدار حجرة الاحتراق.

λ: معامل الموصلية الحرارية لجدار الأسطوانة.

إن الانتقال الحراري في المعادلة (8 – 6) يكون بشكل دوري. يتبين من خلال الشكل **(8 – 5)** مايلي:

- درجة حرارة الغاز T_g في حجرة الاحتراق متغيرة في أثناء دورة المحرك من قيمة عظمى أثناء الاحتراق إلى قيمة دنيا في أثناء السحب، ويمكن أن تكون أقل من درجة حرارة الجدار قبل شوط السحب وبعكس اتجاه الانتقال الحراري.
- إن درجة حرارة وسيط التبريد يجب أن تكون ثابتة بالنسبة للمحركات المبردة بالهواء أو بالماء. وإن معامل الانتقال الحراري بالحمل للغاز من جهة جدران الأسطوانة متغير بحسب دورة المحرك وحسب حركة الغاز: مضطربة، دوامية، السرعة.. إلخ. وكذلك معامل الانتقال الحراري بالحمل من جهة وسيط التبريد يجب أن يكون ثابتاً ويتعلق بسرعة جريان وسيط التبريد.

إن معامل الموصلية الحرارية لجدار الأسطوانة يكون تابعاً لدرجة حرارة الجدار ويكون تقريبا ثابتاً.

يتم حساب الانتقال الحراري بالحمل للسطح الداخلي للأسطوانة بالعلاقة:

$$\dot{q} = \dot{Q}/A = \alpha_g (T_g - T_w) \qquad \textbf{(7 - 8)}$$

T_w: درجة حرارة الجدار (يجب ألا تتجاوز $180-200^{\circ}c$ لكي تحافظ على الاستقرار الحراري لزيت التشحيم وقوة الجدار structural strength).

يوجد طرق عدة لحساب عدد رينولدز Re حسب مواصفات الجريان والانتقال الحراري في المحركات ذات الأحجام والسرعات المختلفة.

إن اختيار الطول المميز والسرعة المحددة عادة يلقى صعوبة، لذلك يتم حساب عدد Re للمحركات من العلاقة التجريبية الآتية:

$$\mathrm{Re} = [(\dot{m}_a + \dot{m}_f)B]/(A_p \mu_g) \qquad \textbf{(8 - 8)}$$

حيث: $\dot{m}_a$: معدل التدفق الكتلي للهواء الداخل إلى الأسطوانة.

$\dot{m}_f$: معدل التدفق الكتلي للوقود الداخل إلى الأسطوانة.

B: جوف المحرك.

A_p: مساحة واجهة المكبس.

μ_g: اللزوجة الديناميكية للغاز الداخل إلى الأسطوانة.

من خلال عدد رينولدز يمكن حساب عدد نوسلت Nu داخل حجرة الاحتراق بالعلاقة الآتية:

$$Nu = \alpha_g B/\lambda_g = C_1 (\mathrm{Re})\, C_2 \qquad \textbf{(9 - 8)}$$

حيث: C_1 وC_2: ثوابت.

λ_g: الموصلية الحرارية لغاز الأسطوانة.

α_g: القيمة الوسطية لمعامل الانتقال الحراري بالحمل.

يمكن حساب عدد Nu ومعامل الانتقال الحراري بالحمل α من جهة وسيط التبريد لجدران الأسطوانة من خلال العلاقات المستخدمة في أثناء الانتقال الحراري بالحمل القسري.

يتم حساب الانتقال الحراري بالإشعاع بين غاز الأسطوانة وجدران حجرة الاحتراق بالعلاقة الآتية:

$$\dot{q} = \dot{Q}/A = [(\sigma(T_g^4 - T_w^4)]/\{[(1-E_g)/E_g] + [1/F_{1-2}] + [(1-E_w)/E_w]\} \qquad \textbf{(10 - 8)}$$

حيث: T_g: درجة حرارة الغاز.

T_w: درجة حرارة الجدار.

σ: ثابت ستيفان – بولتسمان Stefan - Boltzman.

E_g: إصدارية الغاز.

E_w: إصدارية الجدار.

F_{1-2}: معامل الشكل (view factor) بين الغاز والجدار.

إن نسبة الانتقال الحراري بالإشعاع من الغاز إلى الجدران تشكل 10% من الانتقال الحراري الكلي في محركات SI، وذلك يعود إلى خواص الغازات المحددة من خلال طول الأمواج النوعية لـ N_2 وO_2 قبل الاحتراق حيث الإشعاع يكون ضعيفاً بينما بعد الاحتراق، فإن Co_2 وH_2O يزيد من الانتقال الحراري بالإشعاع.

تُعدُّ جزيئات الكربون الصلبة المتولدة في حجرة الاحتراق في نظام المحركاتCI مشعات جيدة عند أطوال الموجات كافة، والانتقال الحراري بالإشعاع إلى جدران هذه المحركات يشكل 35% – 20 من مجموع الانتقال الحراري الكلي.

النسبة الكبيرة من الانتقال الحراري بالإشعاع إلى الجدران تحدث في البداية في شوط الطاقة (Power stroke) حيث درجة الحرارة في حجرة الاحتراق تكون عظمى، والإشعاع الحراري تساوي إلى T^4، وكذلك يتولد شدة تدفق حراري كبير وفي هذه اللحظة الزمنية يكون تشكل الكربون (Carbon soot) في المحركات Ci أعظمياً، حيث يؤدي إلى زيادة التدفق الحراري بالإشعاع ويصل إلى $10MW/m^2$.

بما أن المحرك يعمل ضمن دورة (Cycle)، فإن درجة حرارة الغاز ضمن الأسطوانة في الشكل (8 – 7) والمعادلة (8 – 6) تعبر عن نظام غير مستقر تؤدي درجة الحرارة إلى انتقال دوري في جدران الأسطوانة.

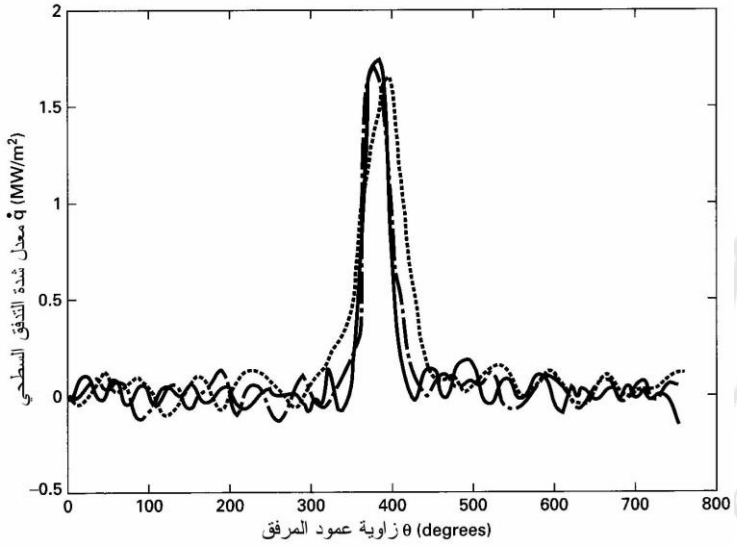
عندما يكون زمن الانتقال الدوري قصيراً، يحدث انتقال الحرارة فقط في النقاط ذات السطوح الصغيرة. وفي 90% من المحركات عند سرعات معتدلة يحدث الانتقال الحراري على عمق حوالي 1mm من سطح الأسطوانة المصنعة من الحديد الصلب.

في حال كانت الأسطوانة مصنعة من الألمنيوم، فإن الانتقال الحراري يحدث على عمق 2mm. ويستمر خلال شوط التمدد، ولكن معدل هذا الانتقال يتناقص.

إن درجة حرارة الغاز أثناء هذا الشوط تتناقص نتيجة للضياعات الحرارية، ولإجراء التبريد من القيمة العظمى 2700k حتى قيمة درجة حرارة غاز العادم 800k.

يستمر الانتقال الحراري إلى جدران الأسطوانة بمعدل ضعيف أثناء شوط الانفلات (Exhaust Stroke)، وعند هذه اللحظة تكون درجة حرارة غاز الأسطوانة منخفضة جداً، وكذلك لا يوجد حركة دوَّاميَّة (swiras motion) ويتناقص الاضطراب. وكل هذا نتيجة لانخفاض معامل الانتقال الحراري بالحمل.

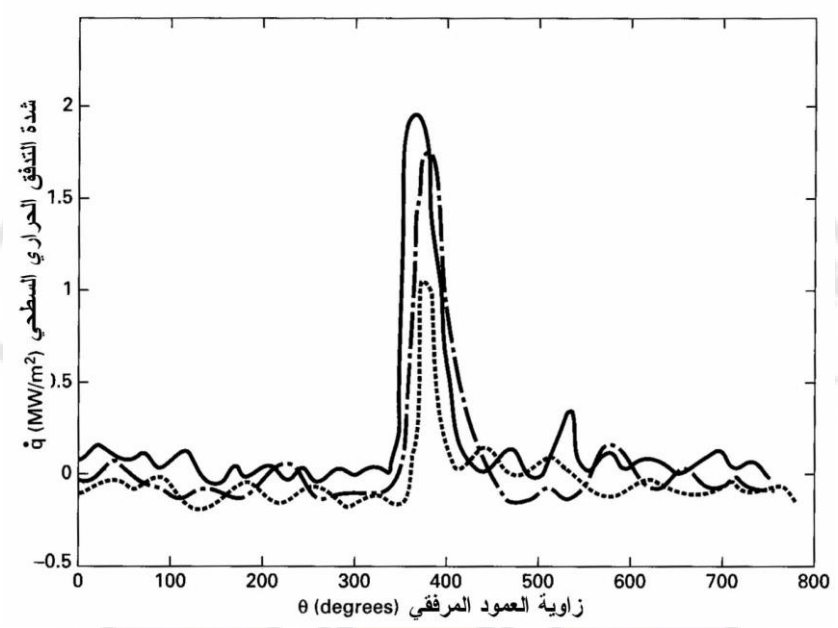
إن تغير الدورة إلى أخرى (Cycle - to - Cycle) للاحتراق الذي يحدث في جدران الأسطوانة يؤدي إلى تغير درجة حرارة جدران الأسطوانة كما في الشكل (8 – 6).



الشكل (8 – 6) تغير شدة التدفق الحراري الموضعي حسب زوايا العمود المرفقي

لاحظ أنّ زمن التغير يعطى فقط في النقاط المحددة، بينما نلاحظ أنه يوجد فارق في التغيرات من نقطة إلى أخرى لجدران حجرة الاحتراق.

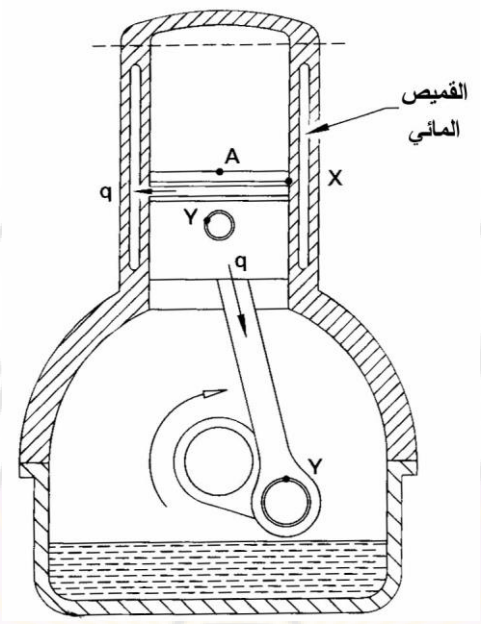
يحدث الانتقال الحراري خلال الأشواط الأربعة للدورة وشدة التدفق الحراري يتغير من قيمة عظمى حتى صفر، وذلك بتغير اتجاه التدفق الحراري (أي يكون اتجاه التدفق الحراري من الجدران إلى مزيج الغاز في الأسطوانة).



الشكل (8 – 7) شدة التدفق الحراري السطحي بالنسبة لزاوية العمود المرفقي

يمكن أن يتغير اتجاه التدفق الحراري في المحركات ذات الشفط الطبيعي (natural aspirated engine) أثناء شوط السحب (Intake stroke) وعند موضع محدد للأسطوانة. يوجد صعوبة في تبريد نتوءات شمعة الاشتعال وفالات ترذيذ الوقود والصمامات، وكذلك وجه المكبس، حيث وجه المكبس مُعرّضٌ إلى جهة غرفة الاحتراق ومن الصعب تبريده من خلال قميص الماء البارد للمحرك، ولهذا السبب نلاحظ أن ذروة المكبس تكون من المناطق الأكثر سخونة في المحرك.

إحدى الطرق المستخدمة لتبريد المكبس هي من خلال رش زيت التشحيم على السطح الخلفي لذروته، فضلاً عن زيت التشحيم فإن زيت المحرك كوسيط تبريد بعد أن يمتص الزيت حرارة المكبس يعود إلى خزان زيت العمود المرفقي.



الشكل (8 – 8) تبريد المكبس

يتم انتقال الحرارة بالموصلية من سطح المكبس وعندئذٍ تكون المقاومة الحرارية عالية، يتم الانتقال الحراري بالموصلية من خلال:

* إلى الأسفل عبر قناة إلى خزان الزيت.
* عبر أساور المكبس إلى جدران الأسطوانة، وكذلك إلى القميص المائي حول المحرك. وبما أن المكبس وذراع الوصل مصنعان من المعدن، فإن المقاومة الحرارية تكون منخفضة، ولكنها تكون عالية بين المكبس وطرف ذراع التوصيل نتيجة لتشكل غشاء الزيت بين السطوح.

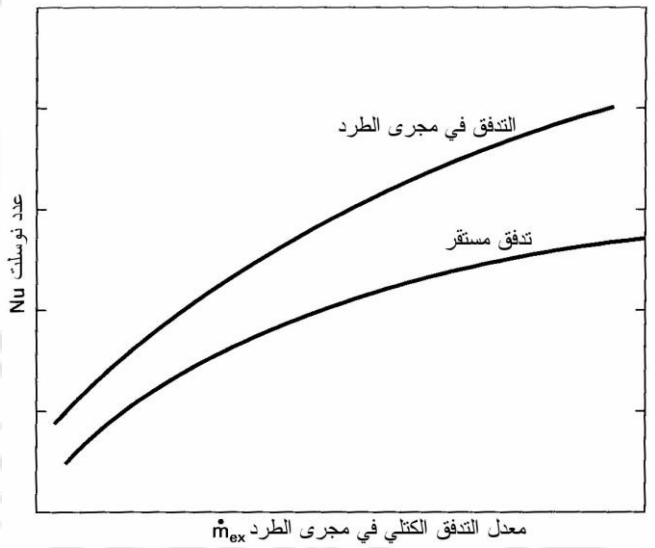
إن المكابس المصنعة من الألمنيوم تعمل عند ظروف أقل بـ $30-80^{\circ}c$ بالمقارنة مع المكابس المصنعة من الحديد الصلب، وعندئذٍ تكون مشاكل الطرق أقل، ولكن تظهر مشكلة التمدد الحراري بين المواد غير المتشابهة.

يوجد في الوقت الحاضر مكابس ذات سطح مصنع من السيراميك حيث معامل الانتقال الحراري بالتوصل صغير وتعمل عند نظام درجات حرارة عالية. وفي بعض المحركات الكبيرة هناك دارة تبريد مائية. ومن أجل المحافظة على لزوجة زيت التشحيم يجب ألا تزيد درجة حرارة جدران الأسطوانة على $180\div200^{\circ}c$.

في الوقت الحالي يوجد محركات تستخدم الأنابيب الحرارية، لكي تساعد على تبريد المناطق ذات الدرجات الحرارية العالية والتي من الصعب الوصول إليها من خلال التبريد بالموصلية أو من خلال تدفق وسيط التبريد حيث النهاية الأولى للأنابيب موصولة في المنطقة الساخنة الداخلية ضمن المحرك والنهاية الثانية بتلامس مع وسيط التبريد المعرض لتدفق هواء خارجي.

8 - 6 - الانتقال الحراري في نظام العادم *Heat Transfer in Exhaust System*:

من أجل حساب الضياعات الحرارية داخل أنبوب العادم، يمكن استخدام معادلات انتقال الحرارة بالحمل الداخلي مع تعديل رئيس وهو في أثناء الجريان الحلقي النبضي الدوري، فإن عدد نوسلت يُؤخذ ضعف القيمة في أثناء التدفق الكتلي في الأنبوب نفسه عند شروط جريان مستقر. وإن الحالة غير الحقيقية المستقرة (pseudo – steady – state) لدرجة حرارة العادم لمحرك بنزين تقع بين ($200-500\,^{\circ}C$).



الشكل (8 – 9) عدد نوسلت الوسطي في مجرى طرد المحرك وحيد الشوط

تحتوي بعض محركات الآليات الضخمة الثانية على صمام عادم وجذع أجوف يحتوي على مادة الصوديوم، وهو يعمل مثل الأنابيب حرارية ويساعد في زيادة فاعلية انتقال الحرارة من السطح الساخن للصمام، بينما الجذع الصلب ينقل الحرارة فقط بالتوصيل.

تستخدم الأنابيب الحرارية مبدأ التحول الطوري لإزالة أكبر قدر من الطاقة حيث تصل إلى أكثر من $4000 W/cm^2$ من مساحة السطح. حيث يتبخر الصوديوم السائل (درجة حرارة

الانصهار $98\ ^{\circ}C$) في النهاية الساخنة من جوف صمام الجذع، ومن ثم يتكاثف ويتحول إلى سائل في النهاية الباردة.

إن انتقال الحرارة الفعّال بالموصلية داخل الجذع يكون أكبر بمرات عدة من الانتقال الصافي بالموصلية من دون وجود تجاويف.

إن الدورة النبضية التي تحدث بالعادم تزيد من عدد نوسلت، ومن انتقال الحرارة بالحمل بأنابيب العادم.

إن وظيفة الصوديوم سابق الذكر هو المساعدة في عملية تبريد الطرف الساخن من الصمام، وهي فاعلة أكثر من الجذوع غير المجوفة المصمتة، فيتم انتزاع الحرارة فقط بالتوصيل.

8 – 6 – 1 – حجم المحرك *Engine Size*:

إذا كان لدينا محركان متشابهان هندسياً، ولكنهما بحجمين مختلفين، ويعملان عند الشروط نفسها، فإن الضياع الحراري المطلق سوف يكون أكبر في المحرك الأكبر، وكذلك المردود الحراري. ولكن شدة التدفق الحراري بالنسبة لواحدة السطح إلى الوسط المحيط سوف تكون نفسها. وبزيادة البعد الخطي، فإن الحجم سوف يزداد بنسبة مكعب البعد الخطي، فإذا كإن أحد المحركين أكبر بنسبة 50% بالنسبة للبعد الخطي، فإن الحجم يصبح أكبر بمقدار 3.75 والمحرك الكبير سوف يصدر طاقة حرارية أكبر من المحرك الصغير بمقدار 3.75 مرة، ومساحة السطح للمحرك الكبير يتناسب طرداً مع مربع الطول، وبالتالي فإن الضياعات الحرارية تكون أكبر بمقدار 2.25 مرة أكبر من المحرك الصغير، وبالتالي نستنتج أن الطاقة الحرارية المتولدة تزداد بازدياد مربع الطول. ومن أجل الحصول على فاعلية حرارية عالية يجب أن تكون حجرة الاحتراق كبيرة بالنسبة لمساحة السطح.لذلك إن المحركات الحديثة ذات الصمام العلوي هي أكثر فاعلية من المحركات القديمة والتي يكون فيها القسم العلوي على شكل حرف L.

8 – 6 – 2 – تأثير مؤشرات عمل المحرك على الانتقال الحراري

***Effect of Engine Operating Variables on Heat Transfer*:**

يعتمد الانتقال الحراري داخل المحركات على متحولات عديدة ومختلفة، حيث يوجد صعوبة بربطها بالنسبة لمحرك مع محرك آخر. وهذه المتحولات تتضمن نسبة (هواء – وقود)، والسرعة، والحمل، وضغط الكبح الفعال، وتوقيت الإشعال، ونسبة الانضغاط، المواد، والحجم.

8 – 6 – 3 – سرعة المحرك *Engine Speed*:

كلما ازدادت سرعة المحرك، فإن تدفق الغاز الداخل والخارج من المحرك يزداد نتيجة لزيادة الاضطراب ومعاملات انتقال الحرارة. ونتيجة لذلك فإن انتقال الحرارة يزداد خلال شوطي السحب والطرد.

إن سرعة الغاز خلال الاحتراق وشوط القدرة مستقلة عن سرعة المحرك. وعندئذٍ فإن معامل انتقال الحرارة بالحمل مستقل عن سرعة المحرك، وفي هذه الحالة يأخذ دوراً مهماً في انتقال الحرارة بالإشعاع؛ مما يعطي المحرك فاعلية حرارية عند السرعات العالية.

يحدث مزيد من الدورات خلال واحدة الزمن في أثناء السرعات العالية، وكل دورة تأخذ فترة زمنية أقل، ونتيجة لذلك تحصل زيادة بالضياع الحراري من المحرك.

ترتفع درجات الحرارة في الحالة المستقرة ضمن المحرك بازدياد السرعة ومعدل انتقال الحرارة إلى مبرد المحرك، كذلك يزداد وفق المعادلة:

$$\dot{Q} = \alpha A(T_W - T_C) \qquad (11-8)$$

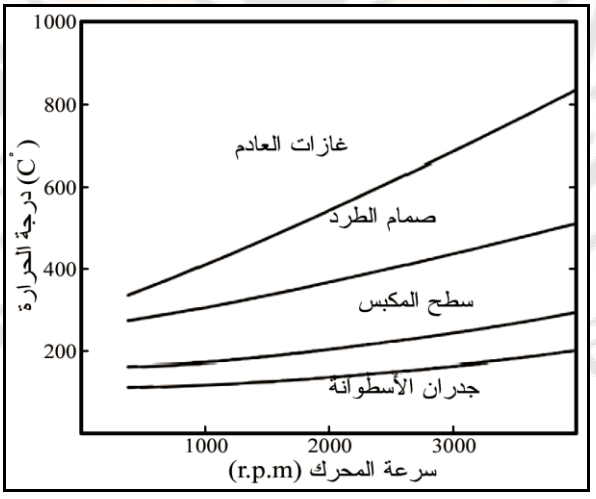
حيث: α: معامل انتقال الحرارة بالحمل والذي يبقى تقريباً ثابتاً.

A: مساحة السطح والتي تبقى ثابتة.

T_c: درجة حرارة وسيط التبريد والتي تبقى تقريباً ثابتة.

T_w: درجة حرارة الجدار والتي تزداد بزيادة السرعة.

والشكل التالي (8 – 10) يوضح العلاقة ما بين درجات حرارة المحرك حسب السرعة.



الشكل (8 – 10) العلاقة ما بين درجات حرارة المحرك حسب السرعة.

من أجل الحفاظ على نظام درجات حرارة مستقر في أثناء زيادة سرعة المحرك يجب طرح الحرارة من مبرد محرك السيارة إلى الوسط المحيط، والجدير بالذكر أنه في كل المحركات ذات السرعات العالية تحدث الدورة بزمن أقل، وبالتالي فإن زمن الاحتراق كذلك يكون أقل، وكذلك زمن الإشعال الذاتي. وهذا يؤدي إلى أن درجة حرارة المحرك سوف ترتفع وتتفاقم مشكلة الصفع بالمحرك. وعند السرعات العالية فإن العمليات التي تحصل بالعادم اعتماداً على الضغط سوف تزداد عند زاوية دوران أكبر للمحرك. وهذا يؤدي إلى ارتفاع درجة حرارة العادم والبوابات؛ نتيجة زيادة معدل الجريان والاضطراب.

8 – 6 – 4 – الحمل *Load*:

كلما ازداد الحمل على المحرك (صعود مرتفع، سحب مقطورة)، فإن الخانق يفتح بشكل أكبر لكي يحافظ على سرعة ثابتة، وهذا يؤدي لهبوط الضغط في الخانق، وضغط عالٍ وكذلك كثافة عالية ضمن نظام السحب.

يزداد في هذه الحالة معدل الجريان الكتلي للهواء والوقود مع زيادة الحمل عند سرعة محددة، وبالتالي فإن معدل انتقال الحرارة في المحرك يزداد وفق المعادلة الآتية:

$$\dot{Q} = \alpha A \Delta T \qquad (12-8)$$

حيث: α: معامل انتقال الحرارة بالحمل.

A: مساحة السطح عند نقطة محددة.

ΔT: فرق درجات الحرارة عند نقطة محددة.

وبناءً على ألية الجريان، فإن معامل انتقال الحرار بالحمل يتناسب طرداً مع عدد رينولدز وفق العلاقة الآتية:

$$\alpha \propto Re^{c} \qquad (13-8)$$

حيث c: ثابت وعادة تؤخذ قيمته 0.8.

وبما أن عدد رينولدز يتناسب طرداً مع معدل التدفق الكتلي $\dot{m}$، وبالتالي فإن معدل انتقال الحرارة يزداد بالقيمة $m^{0.8}$. وكثافة الوقود تزداد بنسبة $\dot{m}$، وبالتالي فإن الطاقة ضمن المحرك تزداد مع $\dot{m}$.

نتيجة لظاهرة الصفع في المحرك تنخفض النسبة المئوية للضياعات الحرارية بشكل ضئيل كلما ازداد حمل المحرك $(^{kJ}/_{cycle})$.

تعمل محركات البنزين من دون خنق، والتدفق الكتلي الكلي تقريباً مستقلاً عن الحمل. وعندما يزداد الحمل أو السرعة، فإن الطاقة سوف تزداد، وبالتالي ستزداد كمية الوقود المحقونة، مما يؤدي إلى زيادة التدفق الكتلي بالجزء الذي يليه من كل دورة بشكل ضئيل حوالي 5%، وهذا يعني أن معامل انتقال الحرارة بالحمل ضمن المحرك هو مستقل عن الحمل.

عندما يعمل المحرك على حمل خفيف، فإن الوقود وحرقها سوف تكون أقل مما يؤدي إلى حالة مستقرة في درجات الحرارة. وهذا يقلل من انتقال الحرارة. أثناء عمل المحرك على أحمال كبيرة، فإن كمية الوقود التي يتم حقنها وإحراقها سوف تزداد، وبالتالي يؤدي إلى ارتفاع في درجات الحرارة وانتقال الحرارة بالحمل، وكذلك إن احتراق المزيج الغني يولد كمية كبيرة من الفحم، مما يزيد انتقال الحرارة بالإشعاع لأن الفحم الصلب يُعدُّ مصدراً جيداً للإشعاع.

8 – 6 – 5 – توقيت الاشعال *Spark Timing*:

يتولّد مزيد من الطاقة وارتفاع في درجات الحرارة عندما يتم ضبط الشرارة لإعطاء قيمة عظمى للضغط ودرجات الحرارة حوالي($5-10\,^{\circ}C$)عند النقطة الميتة العليا. وفي هذه الحالة سوف تتولد ضياعات حرارية لحظية، ويحدث ذلك خلال فترة زمنية قصيرة وعندما يتم ضبط الشرارة بشكل مبكر أو متأخر، فإن فاعلية الاحتراق ودرجات الحرارة الوسطية سوف تكون أخفض؛ مما يؤدي إلى الحصول على أقل قيمة للضياعات الحرارية، ولكن هذه الضياعات سوف تستمر لفترة زمنية أطول، والطاقة الكلية المفقودة سوف تكون أكبر وفي حال عدم ضبط الإشعال بالشكل الصحيح سوف يزيد زمن الاحتراق خلال شوط التمدد؛ مما يؤدي إلى ارتفاع درجة حرارة العادم، وكذلك درجة حرارة البوابات.

نسبة الوقود المكافئ:

يتم الحصول على الاستطاعة العظمى في محركات البنزين عندما تكون نسبة الوقود المكافئ $\phi = 1.1$ وهذه النسبة من الضياعات تكون عظمى أو صغرى، ويتطلب المحرك عند هذه النسبة أكبر عدد أوكتان للوقود في أثناء التشغيل في الحالات المكافئة. ويمكن التسامح عن نقص الأوكتان عندما يعمل المحرك بشكل غني

8 – 6 – 6 – التبريد التبخيري – حقن الماء

***Evaporative Cooling - Water Injection*:**

عندما يتبخر الوقود خلال السحب وبداية الانضغاط، فإن التبريد التبخيري سوف يخفض من درجة حرارة ونظام السحب وكثافته، وهذا يؤدي إلى زيادة الفاعلية الحجمية للمحرك.

إن الوقود الذي يملك حرارة كامنة عالية مثل الغول لديه القدرة على التبريد التبخيري، ويجعل المحرك يعمل بسرعة، وبالتالي يؤدي إلي خفض درجات حرارة الدورة.

يستخدم في الوقت الحالي تقنية إضافة الماء لأنظمة السحب في محركات المركبات والسفن الكبيرة والمحركات الثابتة..

نتيجة لإضافة الماء، فإن الفعّالية الحجمية تزداد وكذلك الاستطاعة وتنخفض انبعاثات أكاسيد النتروجين NOx . من خلال تخفيض درجات حرارة الدورة يتم إضافة الماء بإحدى ثلاث طرق:

* حقن الماء بالهواء القادم أو عبر نظام سحب أو مباشرة في حجرة الاحتراق.
* عن طريق استحلاب الماء مع الوقود.
* استخدام الرطوبة العالية للهواء الداخل.

تستخدم طريقة الحقن المباشر بالماء بالعديد من الأنظمة، بينما تخزين المياه وإمكانية تجمدها هي من بعض المشاكل الممكنة وخاصة بالمركبات المسيرة في الطرقات. أما طريقة مزج الماء مع الوقود كمستحلب يمكن أن يشكل مزيجاً محتملاً، ولكن وجود كميات كبيرة من الرطوبة العالية يمكن أن تسبب مشاكل صدأ بنظام السحب.

8 – 6 – 7 – درجة حرارة الهواء الداخل ***Intel Air Temperature*:**

تؤدي الزيادة في درجة حرارة الهواء الداخل إلى المحرك إلى زيادة درجات الحرارة في كامل الدورة، وهدا بدوره يؤدي إلى زيادة بالضياعات الحرارية. وعلى سبيل المثال فإن زيادة درجة الحرارة الهواء الداخل حتى $100\ ^{\circ}C$ سوف ينتج عنها زيادة الضياعات الحرارية بنسبة $10\ ^{\circ}C$ حتى $15\ ^{\circ}C$، وهذا يزيد من فرصة حدوث ظاهرة الصفع بالمحركات المزودة بشاحن توربيني.

درجة حرارة المبرد ***Coolant Temperature*:**

إن الزيادة في درجة حرارة مبرد المحرك تؤدي إلى زيادة في درجة حرارة كل المكونات المبردة وتحدث تغيّرٌ بسيطٌ في درجات حرارة شمعة الإشعال وصمامات العادم .

تزداد الفاعلية الحرارية ولكن تتواجد ظاهرة الصفع بالمحركات ذات درجات حرارة العالية.

مواد المحرك *Engine Materials*:

تستخدم مواد مختلفة في تصنيع الأسطوانات ومكونات المكابس، مما يؤدي إلى اختلاف في درجات حرارة التشغيل حيث المكابس المصنعة من الألمنيوم والتي تملك معامل موصلية حرارية مرتفعة تكون أبرد من المكابس المصنفة من الحديد الزهر بنسبة حوالي $30-80^{\circ}C$. أما بالنسبة للمكابس المزودة بطبقة من السيراميك ذات الموصلية الحرارية المنخفضة فإن درجة الحرارة سوف تزداد، ولكن طبقة السيراميك قادرة على تحمل درجات حرارة عالية.حيث تستخدم صمامات العادم المصنعة من السيراميك؛ لأنها تتحمل درجات حرارة مرتفعة، وتملك عطالة كتلية منخفضة.

8 – 6 – 8 – نسبة الانضغاط *Compression Ratio*:

إن التغير في نسبة انضغاط المحرك يؤدي إلى التغير في انتقال الحرارة إلى المبرد بشكل ضئيل.

إن الزيادة في نسبة الانضغاط أعلى من القيمة $r_C = 10$ تؤدي إلى الزيادة في انتقال الحرارة بشكل ضئيل.

إن ازدياد نسبة الانضغاط من 7 إلى 8 يقابلها انخفاض في انتقال الحرارة.

تحدث هذه التغيرات في انتقال الحرارة، بسبب خصائص الاحتراق التي تتغير بتغير نسبة الانضغاط، وكذلك بسبب التبريد الناتج عن التمدد خلال شوط القدرة، مما يؤدي إلى تبريد العادم بمحركات الديزل والتي تملك نسبة انضغاط عالية بالمقارنة مع محركات البنزين. وتزداد درجات حرارة المكبس بشكل خفيف مع زيادة نسبة الانضغاط.

ظاهرة الصفع:

عندما تحدث ظاهرة الصفع بالمحرك تزداد درجة الحرارة والضغط بنقاط معينة ضمن حجرة الاحتراق، ونتيجة لذلك يمكن أن يؤدي إلى تصدع في سطوح المكابس والصمامات.

8 - 7 - المحركات المبرَّدة بالهواء *Air - cooled Engines*:

تُبرَّد المحركات الصغيرة والمتوسطة الحجم بالهواء وهذا يتضمن معظم أدوات المحركات الصغيرة مثال على ذلك (آلة جز العشب، محركات نماذج الطائرات) وهذا يسمح

بالإبقاء على الوزن والسعر لهذه المحركات منخفضين، وتعتمد هذه المحركات في تبريدها على تدفق الهواء عبر سطوحها الخارجية من أجل انتزاع الحرارة الزائدة من المحرك.

إن حركة بعض المركبات مثل الدراجات والطائرات نحو الأمام تدعم تدفق الهواء عبر سطوحها، وتزوّد هذه المركبات بنظام مجارٍ وأنابيب من أجل توجيه الجريان إلى مواقع أساسية في المحرك بهدف انتزاع الحرارة.

يصنع السطح الخارجي للمحرك من معادن ذات موصلية حرارية عالية، ويكون السطح الخارجي مدمجاً من أجل زيادة فاعلية التبادل الحراري، أو تزود بعض المحركات بمراوح من أجل زيادة فاعلية التبادل الحراري بالحمل القسري.

من الصعب الحصول على تبريد نظامي لأسطوانات المحركات التي تُبرَّد بواسطة الهواء مقارنة مع تلك التي تُبرَّد بواسطة السائل المُبرَّد.

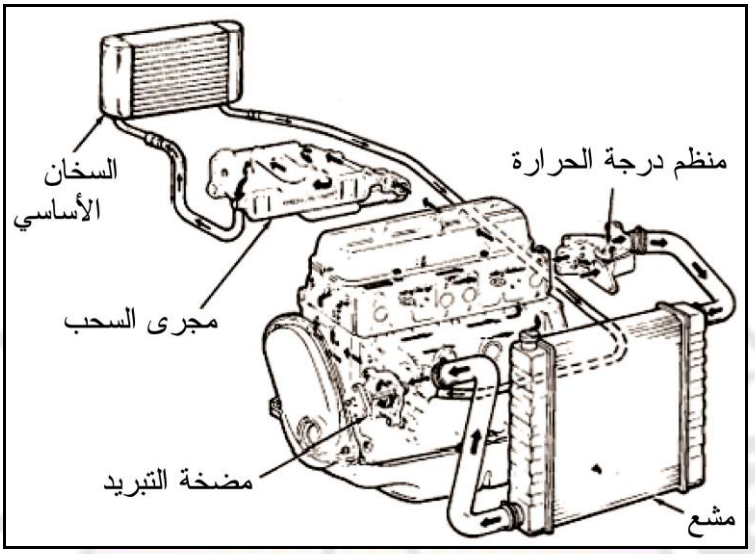
يمكن التحكم بتدفق السائل المُبرَّد وتوجيهه إلى النقاط الساخنة. كذلك سوائل التبريد تمتلك خصائص حرارية أفضل من الهواء، تختلف الأماكن التي تحتاج إلى تبريد على سطح المحرك.

إن المناطق الساخنة التي حول صمام العادم والمشعب تحتاج إلى شدة برودة أكثر؛ بينما مقدمة المحرك يتم تبريدها بواسطة الهواء الذي يقابل الحركة نحو الأمام للمركبة. وهذا أكثر فاعلية وسهولة من تبريد السطح الخلفي للمحرك. وهذا الاختلاف يمكن أن يؤدي إلى فارق في درجات الحرارة ومشاكل في التمدد الحراري.

يمكن من خلال المعادلات الناظمة لانتقال الحرارة من السطوح المريشة حساب معدل كمية الحرارة المنتقلة عبر سطح المحرك.

8 - 8 - المحركات المُبرَّدة بواسطة السائل:

تحاط كتلة المحرك المُبرَّدة بالماء بقمصان التبريد والتي يتدفق ضمنها سائل التبريد. الشكل (8 – 11).



الشكل (8 – 11) تبريد المحرك بالسائل.

وهذا يسمح بالتحكم بالحرارة المنتزعة حسب الوزن ومواصفات الماء اللازمة. إن وزن نظام التبريد وسعره يجعلان هذا النمط من التبريد نادرا جداً بالمحركات الصغيرة والمحركات رخيصة الثمن.

إن الخواص الفيزيائية للماء تجعله سائلاً لنقل الحرارة، لكن يوجد صعوبات عدة في أثناء استخدامه، حيث يتجمد الماء النقي عند درجة حرارة $0\,℃$ ، وكذلك وجود الماء مع بعض الإضافات يتسبب بحدوث الصدأ، ومعظم المحركات تستخدم مزيجاً من الماء والإيثلين غليكول، حيث الخصائص الفيزيائية لهذا المحلول تعمل كمانع تجمد للصدأ، وكذلك ترفع من درجة حرارة الغليان، وتركيز هذا المزيج تحدد العلاقة بين درجة الحرارة والتركيز والتي تحدد نسب مادة الإيثلين غليكول المضافة للماء، وهي:

* درجة حرارة التجمد ترتفع عند زيادة التركيز.
* الخواص المرغوبة لانتقال الحرارة للماء يتم فقدانها في حالة التركيز العالي.

إن الإيثلين غليكول قابل للانحلال بالماء حيث درجة حرارة غليانه $197\,℃$ ودرجة حرارة تجمده $11\,℃$ عند ضغط جوي نظامي.

يبين الجدول (8 – 1) خواص الإيثلين غليكول الممزوج بالماء، ويحدد تركيزه من خلال درجة الوسط الخارجي في فصل الشتاء.

من غير المسموح به أن يترك مبرد المحرك يتجمد وفي حالة تجمده؛ فإن الماء لا يتدفق عبر مشع نظام التبريد، وبالتالي فإن درجة حرارة المحرك سوف ترتفع، ويتجمد الماء ضمن المشع، وهذا يسبب تصدع جدران قمصان التبريد أو مضخة المياه.

الخواص التي يجب أن يتمتع بها المزيج ضمن المبرد:

1. ثابت كيميائياً تحت الظروف التشغيلية المختلفة.
2. لا يسبب الصدأ.
3. غير قابل للاشتعال وذو سمية قليلة.
4. منخفض السعر.

إن معظم مضادات التجمد التجارية تستوفي الشروط سابقة الذكر. يستخدم الهدرومتر من أجل تحديد تركيز الإثيلين غليكول في أثناء مزجه مع الماء.

تُحدّد الجاذبية النوعية للمزيج بواسطة الارتفاع الذي نعاير عنده عوامات الهدرومتر ويمكن من خلال الجدول (8 – 1) تحديد التركيز المطلوب ..

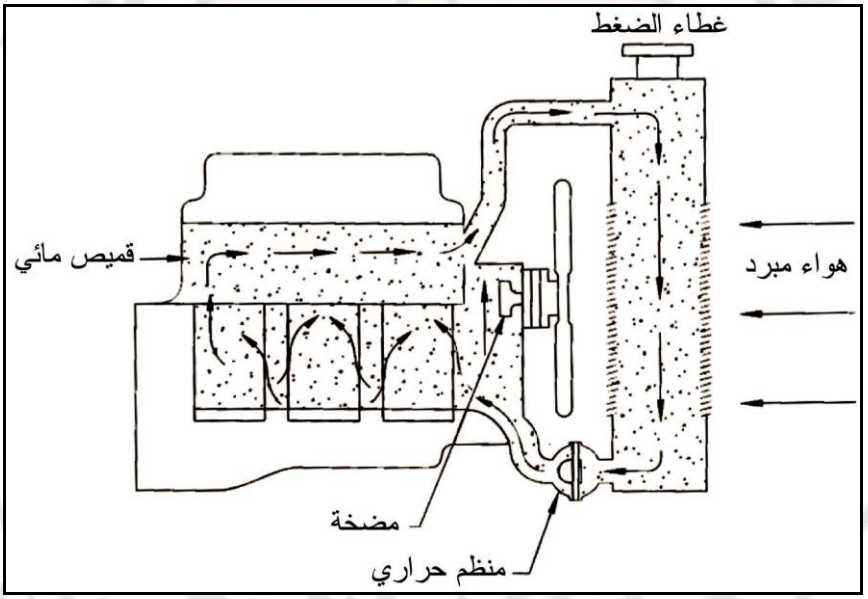
الجدول (8 – 1)

حجم الإثيلين كليكول	الجاذبية الخاصة	نقطة التجمد (c)	نقطة الغليان (c)
0	1	0	100
10	1.014	- 4	
20	1.029	- 9	
30	1.043	- 16	
40	1.056	- 25	
50	1.07	- 38	111
60	1.081	- 53	
100	1.119	- 11	197

حجم البروبلين كليكول	الجاذبية الخاصة	نقطة التجمد (c)	نقطة الغليان (c)
0	1	0	100
10	1.006	- 2	
20	1.017	- 7	
30	1.024	- 13	
40	1.032	- 21	

حجم البروبلين كليكول	الجاذبية الخاصة	نقطة التجمد (c)	نقطة الغليان (c)
50	1.040	- 33	108
60	1.048	- 48	
100	1.080	- 14	188

في نظام تبريد المحرك (Coolant System of a typical automobile engine) يدخل السائل إلى قمصان التبريد من أسفل المحرك الشكل (8 – 12) حيث يتدفق عبر كتلة المحرك وينتزع حرارة جدران الأسطوانات الساخنة، ويستمر داخل قمصان التبريد المصممة لتوجيه الجريان إلى السطوح الخارجية التي تحتاج إلى تبريد. وهذا الجريان الذي يخرج من كتلة المحرك يحتوي محتوىً حرارياً، وذلك نتيجة للطاقة التي انتزعها في أثناء تبريد المحرك.



الشكل (8 – 12) يبين المشع المثبت في مقدمة محرك المركبة .يتم تزويد الدارة بمضخة مياه وتقاد إما كهربائياً أو ميكانيكياً عن طريق المحرك

يمكن استخدام وسيط التبريد الذي يخرج من المحرك بحالة ساخنة لتدفئة مقصورة المركبة عند الحاجة، ولابد من إزالة المحتوى الحراري في أثناء جريان سائل التبريد؛ لكي تعمل الدارة بشكل مغلق. ويتم ذلك من خلال استعمال مبادل حراري يسمى بالمشع

(Radiator) وهو عبارة عن مجموعة أنابيب مُريَّشة حيث السائل الحار يدخل من الأعلى، ويتم تبادل الحرارة مع الهواء المتدفق من الأمام للخلف. ويمكن تلخيص كل ما سبق كالتالي:

يمكن أن تصل درجات حرارة الاحتراق في أسطوانات محرك الاحتراق الداخلي إلى قيم حوالي 2700k ، وهذا يؤدي إلى إمكانية تدمير المحرك كمكونات وزيوت، وإذا وصلت درجات حرارة جدران الأسطوانات إلى درجات حرارة أعلى من *200 ℃* سوف يحصل فشل بالمواد. ومن أجل حماية الأسطوانات من التسخين الزائد يتم إحاطتها بقمصان التبريد للمحركات المبردة بسائل التبريد، أو بواسطة مروحة تبريد للمحركات التي يتم تبريدها بواسطة الهواء، ومن ناحية أخرى من أجل الحصول على فاعلية حرارية عظمى للمحرك من المفضل أن يُشغّل المحرك حتى يصل لأعلى درجة حرارة ممكنة، ولقد حصل تطورات وتحسينات عدة على المواد المصنع فيها المحركات، وكذلك على زيوت التزليق، وبإمكان هذه المحركات أن تعمل عند درجات حرارة عالية، ويتم نبذ الحرارة المزالة من أسطوانات المحرك للمحيط من أجل الحفاظ على المحرك ووقايته من التسخين الزائد، وبالتالي فإن نسبة كبيرة من الطاقة المتولدة ضمن المحرك يتم تبريدها، حيث أن فاعلية الكبح الحراري لمعظم المحركات تتراوح بين (40% - 30). لقد تم تطوير أنظمة تبريد مبتكرة، ولكن بالوقت الحاضر معظم المركبات تستخدم المحركات المبردة بالماء مع الإيثلين غليكول

<u>مثال 8 – 1:</u>

يتألف سائل نظام بطارية حرارية لمركبة من 2.81kg محلول ملحي والذي يطرأ عليه تحول طوري من الحالة السائلة إلى الصلبة عند درجة حرارة *79 ℃* ، يعمل محرك المركبة عند نظام درجة حرارة وبحالة مستقرة *101 ℃*، ومعدل تدفق سائل التبريد عبر البطارية الحرارية *0.0112kg/s*، وبما أن البطارية معزولة بشكل جيد يوجد ضياعات حرارية بكمية ثابتة حوالي *11.6Kj/h*، وبعد توقف المحرك لفترة زمنية أصبحت درجة حرارة سائل التبريد *24°C*، وأصبح المحلول الملحي في البطارية على الشكل التالي (60% سائل و40% صلب) من الكتلة، وبعد تشغيل المحرك دخل سائل التبريد إلى البطارية الحرارية عند درجة حرارة *24°C*، وخرج عند درجة حرارة *74°C* يمكن استخدام الماء كسائل تبريد، ومواصفات المحلول الملحي، هي:

الحرارة الكامنة للتحول الطوري: $h_{if} = 290 \frac{Kj}{Kg}$

السعة الحرارية بثبات الضغط في الطور السائل: $c_p = 0.921 \frac{Kj}{Kg.^\circ C}$

السعة الحرارية بثبات الضغط في الطور الصلب: $c_p = 0.351 \frac{Kj}{Kg.^\circ C}$

أوجد ما يلي:

1. الزمن اللازم لتبريد البطارية الحرارية لكي تزود سائل التبريد عند درجة حرارة $73°C$.
2. الزمن اللازم لتبريد البطارية الحرارية من $101°C$ حتى $24\,°C$ بعد توقف المحرك.

المعطيات: كل من درجة الحرارة سائل التبريد قبل دخوله إلى البطارية الحرارية وبعده.

الحل:

الطلب الأول: التحليل والحساب:

يمكن أن نزود البطارية بسائل التبريد عند درجة حرارة $73°C$ حتى يتم تحويل كل السائل إلى صلب، وتكون طاقة التحول الطوري (كمية الحرارة).

$$Q_{cp} = mX0.6Xh_{if} = [(2.81)(0.6)]290 = 488.94Kj$$

ويكون معدل كمية الحرارة المنتقلة لتسخين سائل التبريد، هو:

$$\dot{Q} = \dot{m} c_p \Delta T = 0.0112X\,4.18X\,(74-24) = 2.34 \frac{Kj}{S}$$

وبالتالي يكون الزمن:

$$t = \frac{Q_{cp}}{\dot{Q}} = \frac{488.94}{2.34} = 209s = 3\min, 48s$$

الطلب الثاني: التحليل والحساب:

$$Q_{lia} = m.c_p.\Delta T = (2.81)(0.921)(101-79) = 56.96Kj$$

وكمية الحرارة الضائعة في أثناء التحول الطوري:

$$Q_{cp} = mh_{if} = (2.81)(290) = 518\ Kj$$

وكمية الحرارة الضائعة لتبريد الصلب من 79°C حتى 24°C.

$$Q_{solid} = m.\ c_p.\ \Delta T = (2.81)(0.351)(79-24) = 54.24\ Kj$$

وتكون كمية الحرارة الضائعة الكلية للتبريد من 101°C حتى 24°C.

Q_{tot} = (56.96) + (815) + (54.24) = 926.2 *Kj*

والزمن اللازم لتبريد البطارية من درجة حرارة 101°C حتى 24°C.

$$t = \frac{Q_{tot}}{\dot{Q}} = \frac{926.2}{11.6} = 79.84hr = 3 \ \ days, \ \ 3he$$

الرموز والمصطلحات

الرموز اللاتينية:

A	مساحة السطح m^2	G	التشعع W/m^2
a	الانتشارية الحرارية m^2/s	Gr	عدد غراتشوف
a	التسارع m/s^2	g	تسارع الجاذبية m/s^2
Bi	عدد بيوت	$\dot{g}$	معدل الحرارة المتولدة w/m^3
C	التركيز المولي $kmol/m^3$	h	ثابت بلانك J.s
C_p	معامل الجر اللابعدي	h	الانتالبي J/kg
C_f	معامل الاحتكاك اللابعدي	h_{fg}	الحرارة الكامنة للتبخر J/kg
C_r	نسبة السعات الحرارية	h^*_{fg}	حرارة التبخر الكامنة المعدلة
C_t	السعة الحرارة المجمّعة للجسم الصلب J/K	I	شدة الإشعاع $W/m^2.sr$
c	الحرارة النوعية J/kg.K	I_0	دالة بيسل المعدّلة من النوع الأول من الدرجة صفر
c	سرعة الضوء m/s	I_1	دالة بيسل المعدّلة من النوع الأول من الدرجة واحد
D	القطر m	J	الإشعاع المغادر W/m^2
D_{AB}	معامل الانتشارية.	J_0	دالة بيسل من النوع الأول من الدرجة صفر
E	الطاقة J	J_1	دالة بيسل من النوع الأول من الدرجة واحد
E	استطاعة الإصدار W/m^2	$\bar{j}_{diff}$	التدفق المولي الانتشاري
F	القوة N	K_0	دالة بيسل المعدّلة من النوع الثاني من الدرجة صفر
F_D	قوة الجر N	K_1	دالة بيسل المعدّلة من النوع الثاني

			من الدرجة واحد
$F_{i\to j}$	معامل الرؤية	k	ثابت بولتسمان J/K
Fo	عدد فوريه	L	الطول m
Fr	عدد فرود	Le	عدد لويس
f	معامل دارسي للاحتكاك	M	الكتلة المولية kg/kmol
f_λ	ثابت إشعاع الجسم الأسود	m	الكتلة kg
$\dot{m}$	معدل التدفق الكتلي kg/s	S	معامل الشكل في التوصيل الحراري ثنائي البعد m
NTU	عدد وحدات الانتقال	Sc	عدد سميث
Nu	عدد نوسلت	Sh	عدد شيروود
P	الضغط Pa	St	عدد ستانتون
P	المحيط m	T	درجة الحرارة K
Pr	عدد براندل	t	الزمن s
$\dot{Q}$	معدل انتقال الحرارة W	U	معامل انتقال الحرارة الكلي $W/m^2.°c$
$\dot{q}$	التدفق الحراري W/m^2	u	الطاقة الداخلية J/kg
R	نصف القطر m	V	الحجم m^3
R	المقاومة الحرارية °c/W	V	السرعة المنتظمة للمنبع m/s
R_0	المقاومة الحرارية الفاعلة للسطح المرّيش $m^2.K/W$	$V^\bullet$	معدل التدفق الحجمي m^3/s
R_c	مقاومة التماس الحرارية $m^2.K/W$	$\overline{V}$	السرعة الموالية الوسطية m/s
R_{diff}	مقاومة الانتشار الكتلية s/kg	v	الحجم النوعي m^3/kg
$\overline{R}_{diff}$	مقاومة الانتشار المولية s/kmol	We	عدد ويبر
R_f	معامل الاتساخ للمبادلات الحرارية $m^2.K/W$	w	النسبة الكتلية
R_u	ثابت غازات العام kJ/kmol.K	X	المسافة اللابعدية في تحليل الأنظمة المجمّعة
R_v	مقاومة البخار $s.m^2.pa/kg$	X	كسر جفاف البخار

Ra	عدد رايلي	X_{tt}	عدد مارتينيلي
Re	عدد رينولدز	y	النسبة المولية.
X, y, z	الإحداثيات الديكارتية	r, θ, z	الإحداثيات الأسطوانية
r, θ, ϕ	الإحداثيات الكروية	u, v, w	مركبات السرعة m/s

الرموز اليونانية:

α	الامتصاصية	ν	اللزوجة الحركية m^2/s
α	معامل انتقال الحرارة بالحمل $W/m^2.K$	ν	التردد Hz
α_{mass}	معامل انتقال الكتلة بالحمل m/s	θ	درجة الحرارة الزائدة K
β	معامل التمدد الحجمي 1/K	θ^*	درجة الحرارة اللابعدية في تحليل الأنظمة المجمّعة
δ	سماكة الطبقة الحدية m	ρ	الكثافة kg/m^3
ε	الإصدارية	ρ	الانعكاسية
ε	خشونة السطح mm	σ	ثابت ستيفان – بولتسمان $W/m^2.K^4$
ε	فاعلية انتقال الحرارة في تحليل المبادلات الحرارية	σ	التوتر السطح N/m
ε_f	فاعلية الريشة	τ	إجهاد القص N/m^2
ϕ	الرطوبة النسبية	τ	النفاذية
η_0	الكفاية الكلية للسطح المرّيش	τ_1	ثابت حراري زمني في تحليل الأنظمة المجمّعة s
η_f	كفاية الريشة	ς	النفاذية على أساس مولي kmol/m.s.Pa
k_λ	معامل الامتصاص الطيفي للوسط m^{-1}	$\bar{\omega}$	الانحلالية على أساس مولي $kmol/m^3.Pa$
λ	الموصلية الحرارية W/m.K	Ω	النفاذية على أساس كتلي $kg/s.m^2.Pa$
λ	الطول الموجي µm	ω	الزاوية الصلبة sr
μ	اللزوجة التحريكية $N.s/m^2$		

الرموز السفلية:

abs	الممتص	p	ثابت ضغط
b	الجسم الأسود	rad	إشعاع
c	المقطع العرضي	ref	منعكس
cond	توصيل	s	صلب , السطح
conv	حمل	sat	إشباع
cr	الحرج	sph	كرة
eff	الفعال	sur	المحيط
cyl	أسطوانة	sys	النظام
e	خروج	T	حراري
g	المتولد	tot	الكلي
h	هيدروليكي	tr	نافذ
v	بخار	v	ثابت حجم
i	دخول	λ	طيفي
l	مائع	∞	شروط التيار الحر
ln	لوغارتمي	m	وسطي

Damascus University

المراجع العلمية

- Foundamentals of Heat and Mass Transfer, by Frank P. Incropera and David P. Dew Witt6th Edition April 12, 2011.
- Heat & Mass Transfer: A Practical Approach by Yungus A. Cengel 5th Edition, 2006.
- Convective Heat and Mass Transfer 1st Edition by S. Mostafa Ghiaasiaan Cambridge University, Press, June 20, 2011.
- Heat Transfer by Gregory Nellis and Sanford Klein, Cambridge University, August 20, 2012.
- Heat and Mass Transfer by Er. R.K. Rajput ISBN: 81-219-2617-3 India University, 2012.
- Engineering Fundamental of the Internal Combustion Engine, by Willard W. Pulk Rabek. University of Wisconsin.

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

المدققون العلميون

الاستاذ الدكتور المهندس جمال العباس
الاستاذ الدكتور حسين تينة
الاستاذ الدكتور جابر دیبة

المدقق اللغوي

الاستاذ الدكتور حمود يونس

حقوق الطبع والترجمة محفوظة لمديرية الكتب والمطبوعات