جامعة دمشق

كلية السياحة

محاضرات مقرر بحوث العمليات

لطلاب السنة الثانية سياحة

إعداد: د. غزوة الصرن

العام الدراسي: 2018-2019

مفهوم بحوث العمليات: نورد التعاريف التالية لهذا المفهوم:

- فن وعلم في آن واحد، حيث يتمثل الفن في القدرة على التعبير عن مفاهيم الكفاءة والندرة في نموذج رياضي محدد تحديداً علمياً بالنسبة لموقف أو نظام معين، أما العلم فيتمثل في اشتقاق الطرق الحسابية لحل هذه النماذج. والنظام المدروس قد يكون موجود فعلاً، ويهدف في هذه الحالة بناء أو حل النموذج إلى تحديد سلوك أمثل للنظام لتحسين أدائه، أو قد يكون مجرد فكرة تنتظر التنفيذ وتتجه غاية النموذج في هذا الوضع نحو تمييز البنية الأفضل للنظام في المستقبل.
- عملية صنع القرار المبنية على المنهج العلمي مع الاعتماد بصفة رئيسية على أساليب التحليل الكمي في حل المشكلة الادارية بهدف الوصول إلى البديل الأمثل في حدود الامكانيات المتاحة، وذلك بناء على بيانات تفصيلية ودراسة دقيقة للمخرجات وتقدير المخاطر لكل من البدائل المتاحة.
- علم التمثيل الرياضي لعملية اتخاذ القرار، وإيجاد طرق حل لهذه النماذج الرياضية.

نماذج بحوث العمليات: يوجد ثلاثة أنواع هي: النماذج الرياضية، نماذج البحث والاستقصاء، نماذج المحاكاة.

مفهوم الأمثلية: أمثلية نموذج تعني حله الأفضل فأمثلية نظام تعني وضعه الأفضل فقط بالنسبة للمشكلة أو الهدف المدروس في النظام. والأمثلة تتحقق عادة إما بتصغير أو تعظيم قيمة رائز النظام المدروس.

مراحل دراسة بحوث العمليات: يمر أي فريق عمل لإعداد دراسات بحوث العمليات بالمراحل الأساسية التالية:

أولاً: تعريف المشكلة: تتطلب هذه المرحلة تعريف المسألة، ويتضمن التعريف ثلاثة عناصر أساسية هي: وصف دقيق لهدف الدراسة، تشخيص بدائل القرار للنظام، تمييز حدود وقيود ومتطلبات النظام. والخطأ الشائع الذي يقع به الباحث هو تحديد هدف يمثل جزءاً من النظام، وهذا قد يضر النظام. فأي دراسة لا تحسب جيداً جميع مشاكل بدائل القرار وحدود النظام تقود لإعطاء حل غير دقيق.

ثانياً: صياغة النموذج: يتم الانطلاق من تعريف المشكلة إلى تقرير النموذج الأكثر ملائمة لتمثيل النظام. يتم في هذه المرحلة تحديد التعابير الكمية لهدف وقيود المسألة بدلالة متغيرات القرار. وإذا كانت النماذج من النماذج الرياضية الشائعة (نماذج البرمجة الخطية) تستخدم التقنيات الرياضية لحلها، أما إذا كان النموذج معقداً لا يمكن الحصول على حلول تحليلية تستخدم نماذج المحاكاة في هذه الحالة، أو قد يضطر الباحث إلى استخدام توليفة من النماذج الرياضية، وذلك حسب درجة تعقيد النظام.

ثالثاً: حل النموذج: فيتم حل النماذج الرياضية باستخدام تقنيات الأمثلة المشهورة، ويكون حل النموذج أمثلاً. أما في حال استخدام نماذج المحاكاة

ونماذج البحث والاستقصاء فإن مفهوم الأمثلة لا يمكن تحديده بدقة. ويتم البحث عن معلومات إضافية. إضافة إلى حل النموذج، وذلك حول السلوك المتوقع لهذا الحل إذا طرأت أي تغييرات على معالم النظام. وهذا ما يسمى تحليل الحساسية.

رابعاً: فحص فعالية النموذج (صحة النموذج): يكون النموذج صحيحاً إذا أعطى تنبؤاً موثوقاً لأداء النظام والطريقة الشائعة لاختبار صحة النموذج هي مقارنة أداء النظام الحالي مع أداء النظام في الماضي بفرض ثبات جميع المدخلات للنظام، وإذا كان أداء النظام حالياً هو نفس أدائه في الماضي يكون صحيحاً.

خامساً: تطبيق النتائج الكلية المنجزة للنموذج: وتنفذ مرحلة التطبيق من خلال التعاون بين فريق بحوث العمليات مع فريق إدارة وعمل النظام، حيث يضع فريق البحوث خطة التطبيق العملي، وهي ترجمة نتائج النموذج إلى سلسلة من التعليمات العملية المتصلة. أما فريق إدارة وتشغيل النظام فيقوم بتنفيذ هذه الخطة.

نماذج البرمجة الخطية

تعريف البرمجة الخطية: هي إحدى نماذج البرمجة الرياضية التي تهتم بالتوزيع أو التخصيص الفعال لموارد محدودة على أنشطة معروفة بقصد الوصول إلى هدف مرغوب. وتبنى المسائل أو النماذج الخطية من علاقات رياضية تكون جميعها خطية وهي تتضمن عادة:

1- هدف نسعى إلى تحقيقه مثل ربح أعظمي او تكلفة دنيا.
2- متغيرات قرار يجب تحديدها للوصول إلى الهدف المطلوب والمرغوب.
3- قيود فنية تفرض على متغيرات القرار.

رياضياً: البرمجة الخطية تبحث عن الحل الأمثل للتابع الخطي الذي تدخل في تركيبته عدة متغيرات x_j حيث $j=1,2,.....n$ وتقيد هذه المتغيرات مجموعة مساويات (معادلات) أو متباينات(متراجحات) تسمى قيود أو شروط المسألة.

أمثلية تابع هدف $\text{optimize } Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots c_nx_n$

ضمن القيود: $a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n(\leq, =, \geq)d_i$

$i=1,2,.....m$

قيود عدم السلبية: $x_j \geq 0$ حيث $j=1,2,....n$

حيث c_j، d_i، a_{ij} هي معطيات أو معالم تفرضها طبيعة المسالة المدروسة.

يسمى التابع Z بتابع الهدف (دالة الهدف) لأنه يحدد أمثلية المسألة المدروسة(تصغيرMin، تعظيم Max). أما القيود فهي قيود فنية تفرض على متغيرات القرار وكل منها يكون له إشارة واحدة من الإشارات = أو ≥ أو ≤. أما قيود عدم السلبية فتفرض على متغيرات القرار وتعتبر غالباً ضرورية لتطوير أساليب الحل للمسألة.

يشير d_i إلى الكمية المتاحة من المورد**i**. ويقيس a_{ij} الكمية من المورد i التي تخصص لكل وحدة واحدة من النشاط**j**. ويمثلc_j سعر(البيع أو الربح أو التكلفة) للوحدة الواحدة التي ينتجها النشاط j.

بعض تطبيقات البرمجة الخطية:

1. **مسألة تركيب وجبة غذائية:** وجد أن كل فرد يحصل على 70 وحدة من البروتين، 100وحدة من الكربوهيدرات، 20 وحدة من الدهون يومياً. فإذا توفر لدينا الأنواع التالية من الغذاء فما هو الخليط الذي يحقق أقل كلفة.

الغذاء	بروتين وحدة/كغ	كربوهيدرات وحدة /كغ	دهون وحدة/كغ	تكلفة ل.س/كغ
A	20	50	4	2
B	30	30	9	3
C	40	20	11	5
D	40	25	10	6
E	45	50	9	8
F	30	20	10	9

يأخذ نموذج البرمجة الخطية لهذه المسألة الصيغة التالية:

متغيرات القرار $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$

$$\min z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 8x_5 + 9x_6$$

ضمن القيود التالية:

$$20x_1 + 30x_2 + 40x_3 + 40x_4 + 45x_5 + 30x_6 \geq 70$$
$$50x_1 + 30x_2 + 20x_3 + 25x_4 + 50x_5 + 20x_6 \geq 100$$
$$4x_1 + 9x_2 + 11x_3 + 10x_4 + 9x_5 + 10x_6 \geq 20$$

قيود عدم السلبية $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$

مسألة إنتاج شركة صناعية:

تصنع إحدى الشركات الصناعية أربعة منتجات معدنية يحتاج كل منها إلى تشغيل وتلميع وتجميع كما يحتاج إلى الأزمنة التالية:

المنتجات	تشغيل بالساعة	تلميع بالساعة	تجميع بالساعة
منتج1	3	1	2
منتج2	2	1	1
منتج3	2	2	2
منتج4	4	3	1

ويقدر الوقت المتاح اسبوعياً كالآتي:

480 ساعة للتشغيل، 400 ساعة للتلميع، 400 ساعة للتجميع، وأرباح الشركة من الوحدة الواحدة هي: 8,6,4,6 دولار على التوالي. وقد وقعت الشركة عقداً مع أحد الموزعين لإمداده بالأعداد 50 وحدة من المنتج /1/، 100 وحدة من أي مجموعة من المنتجات، 2 و3 كل أسبوع. ومع عميل آخر تستطيع الشركة بيعه أية كميات

منتجة من المنتجات(1 و2 و3)، ولكن بحد أقصى 25 وحدة فقط من المنتج4، كم عدد الوحدات من كل منتج يجب أن تنتجها الشركة كل اسبوع لمواجهة الالتزامات التعاقدية. ولتعظيم الربح الكلي مع افتراض أن أي منتجات غير كاملة سيتم استكمالها في الاسبوع المقبل.

نموذج البرمجة الخطية لتلك المسألة:

$$Max\ Z = 6x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 8x_4$$

القيود: ضمن الشروط التالية:

$$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 \leq 480$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 \leq 400$$

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 400$$

$$x_1 \geq 50$$

$$x_2 + x_3 \geq 100$$

$$x_4 \leq 25$$

قيود عدم السلبية $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

صيغ وتحويلات النماذج الخطية:

1- **الصيغة النظامية(القانونية):** تأخذ مسألة البرمجة الخطية صيغة نظامية إذا تحقق: $Max(Min)Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

ضمن الشروط التالية:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq \left(\geq \text{أو}\right) d_i$$

i=1,2,.....m

قيود عدم السلبية: $x_j \geq 0$ حيث j=1,2,....n

أي أن:

- جميع متغيرات القرار تكون غير سالبة.
- جميع متباينات(متراجحات) القيود هي من إشارة واحدة $(\leq, \geq)$، و d_i غير محددة الاشارة.
- تابع الهدف من نوع التعظيم في حالة$(\leq)$.
- تابع الهدف من نوع التصغير في حالة$(\geq)$.

2- **الصيغة القياسية(النموذجية):** تأخذ مسألة البرمجة الخطية صيغة قياسية نموذجية إذا تحقق:

$$Max(\min)\, Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

ضمن القيود التالية:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = d_i$$

i=1,2,.....m

قيود عدم السلبية: $x_j \geq 0$ حيث j=1,2,....n

أي أن:

- جميع متغيرات القرار تكون غير سالبة.
- جميع القيود هي معادلات(مساويات) ويستثنى من ذلك قيود عدم السلبية.
- الطرف الأيمن لكل قيد d_i يكون غير سالب.
- تابع الهدف يكون تعظيم أو تصغير.

3- **الصيغة المختلطة:** يقال عن مسألة برمجة خطية بأنها ذات صيغة مختلطة إذا لم تأخذ هذه المسألة صيغة نظامية، وصيغة قياسية نموذجية، ويمكن الانتقال من الصيغة المختلطة إلى الصيغة النظامية أو الصيغة القياسية باستخدام بعض التحويلات الأولية التالية:

تحويلة(1): تصغير تابع الهدف Z يكافئ رياضياً تعظيم الصيغة السالبة لهذا التابع: W=-Z ومنه Min=Max W.

تحويلة(2): إن أية متباينة من إشارة معينة يمكن أن تستبدل بمتباينة من إشارة معاكسة بضرب طرفيها بـــ(−1).

$ax \geq d$ تكافئ $-ax \leq -d$

تحويلة(3): كل مساواة يمكن أن تستبدل بمتباينتين متعاكستين.

$ax = d$ تكافئ:

$ax \leq d$

$ax \geq d$

تحويلة (4): كل متغير غير محدد الاشارة (قيمته موجبة أو سالبة أو صفرية) يمكن أن يستبدل بتفاضل متغيرين غير سالبين إذا كان x غير محدد الاشارة و $x^+, x^- \geq 0$ فإن x يستبدل بـــ $(x^+ - x^-)$.

تحويلة(5): كل متباينة طرفها الأيسر يشكل قيمة مطلقة يمكن أن يستبدل بمتباينتين نظاميتين إذا كان $p, q \geq 0$ فإن:

$|ax| \leq p$، تستبدل بـــ $\begin{bmatrix} ax \leq p \\ ax \geq -p \end{bmatrix}$

$|ax| \geq q$، تستبدل بـــ $\begin{bmatrix} ax \geq q \\ ax \leq -q \end{bmatrix}$

تحويلة(6): كل متباينة يمكن أن تحول إلى مساواة بالإضافة إلى (أو بالطرح من) طرفها الأيسر متغير جديد غير سالب يسمى متغير فروق أو متغير مساعد. ويجب أن تنسجم عملية الإضافة أو الطرح مع إشارة المتباينة.

مثال: لتكن معطاة مسألة البرمجة الخطية التالية:

$$\text{Max } Z = 3x_1 - 3x_2 + 7x_3$$

القيود: ضمن الشروط التالية:

$$x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 40$$

$$x_1 + 9x_2 - 7x_3 \geq 50$$

$$5x_1 + 3x_2 = 20$$

$$|5x_2 + 8x_3| \leq 100$$

قيود عدم السلبية $x_1, x_2 \geq 0$. مع العلم بأن x_3 غير محدد الاشارة.

استخدم التحويلات المناسبة للوصول إلى الصيغة النظامية للمسألة.

يمكن الحل بطريقتين:

الطريقة الأولى: المحافظة على تابع الهدف من النوع max وتحويل القيود كلها لتكون إشارتها من $\leq$، وجعل جميع متغيرات القرار غير سالبة كما يلي:

المتغير x_3 غير محدد الاشارة يستبدل بتفاضل المتغيرين $(x_3^+ - x_3^-)$ وذلك في تابع الهدف وفي القيود أينما ورد.

يصبح النموذج بالصيغة النظامية كما يلي:

$$\text{Max } Z = 3x_1 - 3x_2 + 7(x_3^+ - x_3^-)$$

القيد الأول: $x_1 + x_2 + 3(x_3^+ - x_3^-) \leq 40$

القيد الثاني نضرب الطرفين بـــ-1 يصبح:

$$-x_1 - 9x_2 + 7(x_3^+ - x_3^-) \leq -50$$

القيد الثالث: معادلة تحول إلى متراجحتين حيث يتم تحويل المتراجحة التي إشارتها $\geq$ إلى متراجحة إشارتها $\leq$ وذلك بضرب طرفيها بـــ-1 فنحصل على:

$$5x_1 + 3x_2 \leq 20$$

$$-5x_1 - 3x_2 \leq -20$$

القيد الرابع: يحول إلى متراجحتين كما يلي:

$$5x_2 + 8(x_3^+ - x_3^-) \leq 100$$

$$-5x_2 - 8(x_3^+ - x_3^-) \leq 100$$

قيود عدم السلبية: $x_1, x_2, x_3^+, x_3^- \geq 0$

الطريقة الثانية: تحويل تابع الهدف إلى نوع الـــmin والقيود تكون إشارتها $\geq$ وجميع متغيرات القرار غير سالبة. يصبح النموذج بالصيغة النظامية كما يلي:

$$\text{Min} = \max w = \max(-z) = -3x_1 + 3x_2 - 7(x_3^+ - x_3^-)$$

المتغير x_3 غير محدد الاشارة يستبدل بتفاضل المتغيرين $(x_3^+ - x_3^-)$ وذلك في تابع الهدف وفي القيود أينما ورد.

القيد الأول نضرب بـــ-1 يصبح كالآتي:

$$-x_1 - x_2 - 3(x_3^+ - x_3^-) \geq -40$$

القيد الثاني:

$$x_1 + 9x_2 - 7(x_3^+ - x_3^-) \geq 50$$

القيد الثالث: معادلة تحول إلى متراجحتين حيث يتم تحويل المتراجحة التي إشارتها $\leq$ إلى متراجحة إشارتها $\geq$ وذلك بضرب طرفيها بـــ-1 فنحصل على:

$$-5x_1 - 3x_2 \geq -20$$
$$5x_1 + 3x_2 \geq 20$$

القيد الرابع: يحول إلى متراجحتين كما يلي:

$$-5x_2 - 8(x_3^+ - x_3^-) \geq -100$$
$$5x_2 + 8(x_3^+ - x_3^-) \geq -100$$

قيود عدم السلبية: $x_1, x_2, x_3^+, x_3^- \geq 0$

مثال(2): حول النموذج في المثال السابق إلى الصيغة القياسية النموذجية:

المتغير x_3 غير محدد الاشارة يستبدل بتفاضل المتغيرين $(x_3^+ - x_3^-)$ وذلك في تابع الهدف وفي القيود أينما ورد.

$$\text{Max } Z = 3x_1 - 3x_2 + 7(x_3^+ - x_3^-) + 0s_1 - 0s_2 + 0s_4 + 0s_5$$

القيود: ضمن الشروط التالية:

$$x_1 + x_2 + 3(x_3^+ - x_3^-) + s_1 = 40$$
$$x_1 + 9x_2 - 7(x_3^+ - x_3^-) - s_2 = 50$$
$$5x_1 + 3x_2 = 20$$
$$5x_2 + 8(x_3^+ - x_3^-) + s_4 = 100$$
$$-5x_2 - 8(x_3^+ - x_3^-) + s_5 = 100$$

قيود عدم السلبية: $x_1, x_2, x_3^+, x_3^-, s_1, s_2, s_4, s_5 \geq 0$

الحل البياني لمسألة البرمجة الخطية:

تستخدم هذه الطريقة عندما تتضمن المسألة متغيرين اثنين فقط، ومع ذلك تعتبر هذه الطريقة مفيدة لأنها توضح المفاهيم الأساسية اللازمة لتطوير خوارزميات حل المسألة.

مثال(1): المطلوب إيجاد الحل الأمثل لمسألة البرمجة الخطية التالية:

$Max\ Z = 4x_1 + 3x_2$ ضمن القيود

$$2x_1 + 3x_2 \leq 6$$
$$-3x_1 + 2x_2 \leq 3$$
$$2x_2 \leq 5$$
$$2x_1 + x_2 \leq 4$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

المطلوب: تحديد فراغ الحل الممكن والحل الأمثل للمسألة.

الحل:

ملاحظة: بعد رسم القيد على محوري الاحداثيات يجب أن نحدد منطقة الحلول الممكنة لهذا القيد ولدينا ثلاث حالات:

1 إذا كان القيد متراجحة من نوع أصغر أو يساوي فإن منطقة الحلول الممكنة (التي تحقق المعادلة) تكون متجهة نحو الداخل نحو مبدأ الاحداثيات.

2 إذا كان القيد متراجحة من نوع أكبر أو يساوي فإن منطقة الحلول الممكنة (التي تحقق المعادلة) تكون متجهة نحو الخارج مبتعدة عن مبدأ الاحداثيات.

3 إذا كان القيد من نوع يساوي(معادلة) فإن منطقة الحلول الممكنة (التي تحقق المعادلة) هي النقاط الواقعة على الخط المستقيم فقط والموجودة في الربع الأول.

لحل المسألة نرسم المستقيمات الممثلة للقيود ونحدد منطقة حلول كل منها كما يلي:

القيد الأول: $x_1 = 0 \Longrightarrow 3x_2 = 6 \Longrightarrow x_2 = \frac{6}{3} = 2$ أي يتقاطع المستقيم مع المحور العمودي في النقطة (0,2). أما نقطة تقاطعه مع المحور الأفقي فهي: $x_2 = 0 \Longrightarrow 2x_1 = 6 \Longrightarrow x_1 = \frac{6}{2} = 3$ أي في النقطة (3,0). ونرسم المستقيم (1).

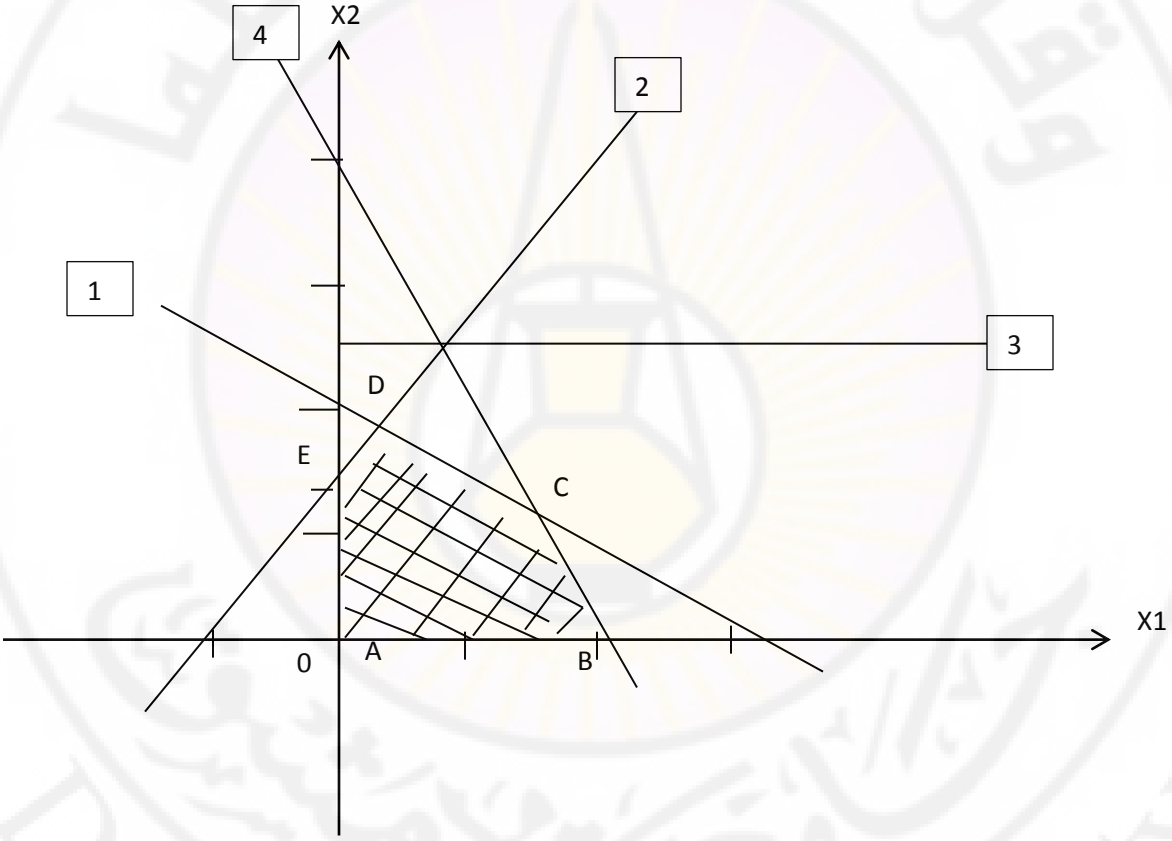
القيد الثاني: $x_1 = 0 \Longrightarrow 2x_2 = 3 \Longrightarrow x_2 = \frac{3}{2}$ أي يتقاطع المستقيم مع المحور العمودي في النقطة (0,3/2). أما نقطة تقاطعه مع المحور الأفقي فهي:

$$x_2 = 0 \Longrightarrow -3x_1 = 3 \Longrightarrow x_1 = \frac{-3}{3} = -1$$

أي في النقطة (-1,0). ونرسم المستقيم (2).

القيد الثالث: $2x_2 = 5 \Longrightarrow x_2 = \frac{5}{2} = 2.5$ ونرسم المستقيم (3).

القيد الرابع: $x_1 = 0 \Longrightarrow x_2 = 4$ أي يتقاطع المستقيم مع المحور العمودي في النقطة $(0,4)$. أما نقطة تقاطعه مع المحور الأفقي فهي: $x_2 = 0 \Longrightarrow 2x_1 = 4 \Longrightarrow x_1 = \frac{4}{2} = 2$ أي في النقطة $(2,0)$. ونرسم المستقيم (4).



بعد رسم المستقيمات وتعيين منطقة الحلول المشتركة يتحدد مضلع الحل ABCDE نقوم بتحديد إحداثيات كل نقطة من نقاطه بالحل المشترك لمعادلتي المستقيمن المتقاطعين في تلك النقطة كما يلي:

النقاط	X1	X2	Z
A	0	0	0
B	2	0	8
C	1.5	1	9
D	3/13	24/13	84/13=6.5
E	0	1.5	4.5

مثلاً إحداثيات النقطة C تنتج عن الحل المشترك لمعادلتي المستقيمين 4 و1 كما يلي:

$$2x_1 + 3x_2 = 6 \quad (1)$$
$$2x_1 + x_2 = 4 \quad (2)$$

بطرح المعادلة (2) من (1) ينتج لدينا $2x_2 = 2$ ومنه $x_2 = 1$ نعوض في (2) فنجد أن $2x_1 + 1 = 4$ ومنه $2x_1 = 3$ أي $x_1 = \frac{3}{2} = 1.5$

بالحل المشترك لمعادلتي المستقيمين 2 و1 تنتج إحداثيات النقطة D وهي (3/13,24/13)

نجد من الجدول أن القيمة العظمى لـــZ هي 9 أي الحل الأمثل هو في النقطة C التي إحداثياتها X_1=1.5, X_2=1.

مثال(2): المطلوب إيجاد الحل الأمثل لمسألة البرمجة الخطية التالية:

$Min\ Z = x_1 + x_2$ ضمن القيود

$$2x_1 + x_2 \geq 12$$
$$5x_1 + 8x_2 \geq 40$$
$$x_1 + 6x_2 \geq 24$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

المطلوب: تحديد فراغ الحل الممكن والحل الأمثل للمسألة.

رسم المستقيمات:

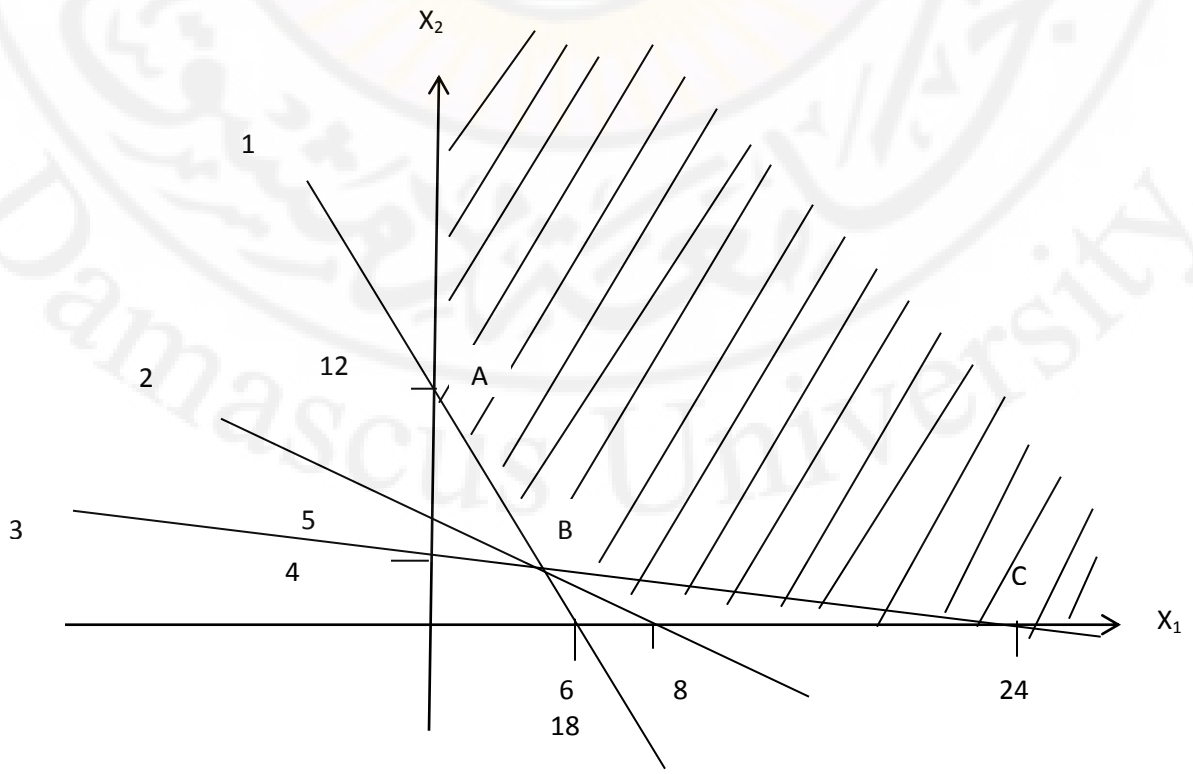
1- $2x_1 + x_2 = 12$ نجعل $x_1=0$ فنجد $x_2=12$ يتقاطع المستقيم مع المحور العمودي بالنقطة (0,12)، وعندما $x_2=0$ نجد أن $x_1=12/2=6$ أي يتقاطع المستقيم مع المحور الافقي في النقطة (6,0)

2- $5x_1 + 8x_2 = 40$ وبنفس الطريقة نجد أن نقطتي التقاطع مع المحاور هما $x_1 = 0 \Longrightarrow x_2 = \frac{40}{8} = 5$ وتكون نقطة التقاطع مع المحور العمودي (0,5).

$x_2 = 0 \Longrightarrow x_1 = \frac{40}{5} = 8$ وتكون نقطة التقاطع مع المحور الأفقي (8,0).

3- $x_1 + 6x_2 = 24$ وبنفس الطريقة نجد أن نقطتي التقاطع مع المحاور هما $x_1 = 0 \Longrightarrow x_2 = \frac{24}{6} = 4$ وتكون نقطة التقاطع مع المحور العمودي (0,4).

$x_2 = 0 \Longrightarrow x_1 = \frac{24}{1} = 24$ وتكون نقطة التقاطع مع المحور الأفقي (24,0).



—

النقاط	X1	X2	Z
A	0	12	12
B	4.3	3.4	7.7
C	24	0	24

لتحديد إحداثيات النقطة B نحل معادلتي المستقيمين 1 و 3 حلاً مشتركاً فينتج لدينا:

$$2x_1 + x_2 = 12 \quad (1)$$

$$x_1 + 6x_2 = 24 \quad (3)$$

من (1) لدينا $X_2=12-2X_1$ نعوض في (3) فنجد:

$$x_1 + 6(12 - 2x_1) = 24$$
$$x_1 + 72 - 12x_1 = 24$$
$$-11x_1 = 24 - 72 = -48$$

ومنه

$$x_1 = -\frac{48}{-11} = 4.3$$

ومنه

$$x_2 = 12 - 2(4.3) = 3.4$$

يتضح من الجدول بأن أدنى قيمة لتابع الهدف هي 7.7 فإحداثيات النقطة B هي التي تحقق أدنى قيمة له أي $x_1 = 4.3$ و$x_2 = 3.4$

طريقة السمبلكس الشاملة

مثال(1):

لتكن لدينا مسألة البرمجة الخطية التالية:

$Min\ Z = 4x_1 + x_2$ ضمن القيود

$$3x_1 + x_2 = 3$$
$$4x_1 + 3x_2 \geq 6$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 4$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

طريقة الحل:

1- نجعل تابع الهدف على شكل معادلة =0

$$Min\ Z = 4x_1 + x_2 \rightarrow\ Z - 4x_1 - x_2 = 0$$

2- نحول القيود ونجعلها من نوع واحد وهو أصغر أو يساوي دائماً وهنا نصادف الآتي:

أ- القيد من نوع أصغر أو يساوي: ليس بحاجة إلى تحويل

ب- القيد من نوع أكبر أو يساوي: نضرب طرفي المتراجحة بـــ(-1) ونعكس الاشارة للمتراجحة.

ت- القيد من نوع يساوي (معادلة): يكتب على شكل قيدين أو يشتق منه قيدين مرة أكبر أو يساوي ومرة أصغر أو يساوي.

أي تصبح القيود على الشكل التالي:

القيد الأول: $3x_1 + x_2 = 3$ ويصبح قيدين الأول $3x_1 + x_2 \leq 3$ والثاني $3x_1 + x_2 \geq 3$ حيث يتم تحويل القيد الثاني ليصبح من النوع أصغر ويساوي بضرب الطرفين بـــ(-1). فيصبح:

$$-3x_1 - x_2 \leq -3$$

القيد الثاني: $4x_1 + 3x_2 \geq 6$ نضربه بـــ (-1) فيصبح: $-4x_1 - 3x_2 \leq -6$

القيد الثالث: يبقى كما هو:

$$x_1 + 2x_2 \leq 4$$

قيود عدم السلبية $x_1, x_2 \geq 0$

وبالتالي يكون النموذج بشكله النهائي:

$$Z - 4x_1 - x_2 = 0$$

$$3x_1 + x_2 \leq 3 \qquad y_1$$

$$-3x_1 - x_2 \leq -3 \qquad y_2$$

$$-4x_1 - 3x_2 \leq -6 \qquad y_3$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 4 \qquad y_4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

نرسم جدول السمبلكس عدد أسطره هو بعدد القيود في النموذج وهناك سطر خاص لتابع الهدف z أما الاعمدة تساوي عدد المتغيرات x وهناك عمود خاص يسمى عمود الحل.

الجدول (1)

المتغير / القيد	**عمود محوري x_1**	x_2	قيم الحل
Y_1	-3	-1	-3
Y_2	3	1	3
Y_3سطر محوري	**4- عنصر محوري**	-3	-6
Y_4	1	2	4
z	-4	-1	0

يتم الحل على مرحلتين بغض النظر عن تابع الهدف:

1- اختبار مسموحية الحل: الامر يتعلق بالارقام الموجودة في عمود الحل. حتى يكون الحل مسموحاً يجب أن تكون جميع قيم عمود الحل كلها قيماً موجبة أو أصفاراً وفي الجدول(1) يوجد قيم سالبة يجب تطوير مسموحية الحل.

- ننظر إلى عمود الحل ونختار القيمة الأشد سلبية وهي(-6) ونسمي سطرها سطر محوري والمتغير التابع لها سيخرج من الحل. وفي حال وجود قيمتين سالبتين متساويتين نختار إحداهما.
- ولاختيار وتحديد العمود المحوري نختار القيمة الأشد سلبية في السطر المحوري ليكون عمودها هو العمود المحوري وهذه القيمة هي العنصر المحوري وفي مثالنا هي (-4).

- لا يمكن أن يكون عمود الحل هو عمود محوري. ولا يمكن أن يكون سطر z هو سطر محوري.
- يوجد أربع قواعد لملء جدول جديد هي:

أ- نضع مكان العنصر المحوري مقلوبه.

ب- نضع مكان قيم السطر المحوري قيمها الجديدة والتي تساوي القيمة القديمة مقسومة على العنصر المحوري السابق(-4) في الجدول (1) مهما كانت قيمته ودوماً تؤخذ من الجدول السابق للجدول الجديد.

ت- نضع مكان قيم العمود المحوري قيمها الجديدة الناتجة عن تقسيم القيمة القديمة على العنصر المحوري والضرب بـــ (-1).

ث- أما باقي خلايا الجدول فتنتج من خلال العلاقة التالية:

القيمة الجديدة= القيمة القديمة-[(القيمة المقابلة في السطر المحوري × القيمة المقابلة في العمود المحوري)÷ العنصر المحوري].

ج- بعد الانتهاء من ملء أي جدول جديد أول ما ننظر إلى عمود الحل للاختبار والتأكد من مسموحية الحل.

بتطبيق هذه القواعد نحصل على الجدول الجديد (2) التالي:

الجدول (2):

المتغير / القيد	y_3	عمود محوري x_2	قيم الحل
Y_1	(-3/-4)(-1)= -3/4	$-1-\frac{-3\times-3}{-4}=\frac{5}{4}$	$-3-\frac{-3\times-6}{-4}=\frac{6}{4}$
Y_2 سطر محوري	(¾-)(-1)=3/4	$1-\frac{3\times-3}{-4}=-\frac{5}{4}$ عنصر محوري	$3-\frac{3\times-6}{-4}=-\frac{6}{4}$
x_1	**-1/4**	-3/-4=3/4	-6/-4=6/4
Y_4	(-1/4)(-1)=1/4	$2-\frac{-3\times1}{-4}=\frac{5}{4}$	$4-\frac{1\times-6}{-4}=\frac{10}{4}$
z	(-4/-4)(-1)= -1	$-1-\frac{-3\times-4}{-4}=2$	$0-\frac{-4\times-6}{-4}=6$

نجري اختبار المسموحية والذي يتعلق بعمود الحل حيث يوجد قيماً سالبة فيجب تطوير مسموحية الحل فنختار القيمة الأشد سلبية وهي (6/4-) فيكون سطرها هو سطر محوري، والقيمة الأشد سلبية في السطر المحوري باستثناء عمود الحل الذي لا يمكن أن يكون عمود محوري هي 5/4- فتكون هي العنصر المحوري

وعمودها هو عمود محوري. ونبدأ بملء جدول جديد(الجدول3) بتطبيق القواعد السابقة كما يلي:

الجدول(3):

المتغير / القيد	y_3	y_2	قيم الحل
Y_1	$\frac{-3}{4}-\frac{\frac{5}{4}\times\frac{3}{4}}{\frac{-5}{4}}=0$	$\frac{\frac{5}{4}}{\frac{-5}{4}}\times-1=\frac{5}{4}\times\frac{+4}{5}=1$	$\frac{6}{4}-\frac{\frac{5}{4}\times\frac{-6}{4}}{\frac{-5}{4}}=0$
x_2	$\frac{\frac{3}{4}}{\frac{-5}{4}}=\frac{3}{4}\times\frac{-4}{5}=-\frac{3}{5}$	$\frac{-4}{5}$	$\frac{\frac{-6}{4}}{\frac{-5}{4}}=\frac{-6}{4}\times\frac{-4}{5}=\frac{6}{5}$
x_1	$\frac{-1}{4}-\frac{\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}}{\frac{-5}{4}}=\frac{1}{5}$	$\frac{\frac{3}{4}}{\frac{-5}{4}}\times-1=\frac{3}{4}\times\frac{+4}{5}=\frac{3}{5}$	$\frac{6}{4}-\frac{\frac{3}{4}\times\frac{-6}{4}}{\frac{-5}{4}}=\frac{3}{5}$
Y_4سطر محوري	$\frac{1}{4}-\frac{\frac{5}{4}\times\frac{3}{4}}{\frac{-5}{4}}=1$	$\frac{\frac{5}{4}}{\frac{-5}{4}}\times-1=\frac{5}{4}\times\frac{+4}{5}=1$عنصر محوري	$\frac{10}{4}-\frac{\frac{-6}{4}\times\frac{5}{4}}{\frac{-5}{4}}=1$
z	$-1-\frac{2\times\frac{3}{4}}{\frac{-5}{4}}=\frac{1}{5}$	$\frac{2}{\frac{-5}{4}}\times-1=2\times\frac{+4}{5}=\frac{8}{5}$**عمود محوري**	$6-\frac{\frac{-6}{4}\times2}{\frac{-5}{4}}=\frac{18}{5}$

بالنظر إلى الجدول(3) نجد أن جميع قيم عمود الحل موجبة وبالتالي ننتقل إلى الاختبار الثاني وهو:

اختبار مثالية الحل:

- في حال كان تابع الهدف من نوع max حتى يكون الحل مثالياً يجب أن تكون قيم سطرz كلها أصفار أو موجبة، وفي حال وجود قيم سالبة في سطر

z نقوم باختيار القيمة الأشد سلبية ونسمي عمودها بالعمود المحوري، ولتحديد واختيار السطر المحوري نقوم بقسمة قيم عمود الحل على القيم المقابلة لها في العمود المحوري ونختار أصغر ناتج قسمة.

ملاحظة: نهمل القسمة على صفر أو قيم سالبة.

- في حال كان تابع الهدف من نوع min حتى يكون الحل مثالياً يجب أن تكون قيم سطرz كلها قيم سالبة، وفي حال وجود قيم موجبة في سطر z نقوم باختيار القيمة الأشد ايجابية ونسمي عمودها بالعمود المحوري، ولتحديد واختيار السطر المحوري نقوم بقسمة قيم عمود الحل على القيم المقابلة لها في العمود المحوري ونختار أصغر ناتج قسمة.
- نختار القيمة الاشد سلبية في سطر z في حال max بينما نختار القيمة الاكثر ايجابية في حال min.
- ننظر إلى الجدول (3) نجد أن قيم سطر z موجبة وتابع الهدف من النوع min نختار القيمة الأكثر إيجابية وهي /1/

الجدول (4)

المتغير / القيد	عمود محوري y_3	y_4	قيم الحل
Y_1 سطر محوري	0عنصر $-\frac{1\times1}{1}$= -1 محوري	-1	$0-\frac{1\times1}{1}$= -1
x_2	$-\frac{3}{5}-\frac{1\times\frac{-4}{5}}{1}=\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{6}{5}-\frac{1\times\frac{-4}{5}}{1}=2$

x_1	$\frac{1}{5}-\frac{1\times\frac{3}{5}}{1}=\frac{-2}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}-\frac{1\times\frac{3}{5}}{1}=0$
Y_2	1	1	1
z	$\frac{1}{5}-\frac{1\times\frac{8}{5}}{1}=\frac{-7}{5}$	$-\frac{8}{5}$	$\frac{18}{5}-\frac{1\times\frac{8}{5}}{1}=2$

نعود إلى عمود الحل لنختبر المسموحية فنجد لدينا قيمة سالبة فسطرها هو سطر محوري. وليكن العمود الأول هو عمود محوري.

الجدول(5):

المتغير / القيد	y_1	y_4	قيم الحل
y_3	-1	1	1
x_2	$\frac{1}{5}\times-1\times-1=\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}-\frac{-1\times\frac{1}{5}}{-1}=\frac{3}{5}$	$2-\frac{-1\times\frac{1}{5}}{-1}=\frac{9}{5}$
x_1	$\frac{-2}{5}$	$\frac{-3}{5}-\frac{-1\times\frac{-2}{5}}{-1}=\frac{-1}{5}$	$0-\frac{-1\times\frac{-2}{5}}{-1}=\frac{2}{5}$
Y_2	1	$1-\frac{-1\times1}{-1}=0$	$1-\frac{-1\times1}{-1}=0$
z	$\frac{-7}{5}$	$\frac{-8}{5}-\frac{-1\times\frac{-7}{5}}{-1}=\frac{-1}{5}$	$2-\frac{-1\times\frac{-7}{5}}{-1}=\frac{17}{5}$

بالنظر الى عمود الحل جميع قيمه موجبة او صفر. ونلاحظ من قيم سطر z أن جميعها سالبة وبالتالي الحل مثالي والتكلفة الاجمالية هي:

$$z=\frac{17}{5}\ ,\ x_1=\frac{2}{5}\ ,\ x_2=\frac{9}{5}$$ للتأكد نعوض في تابع الهدف:

$$\min z=4x_1+x_2=4(\frac{2}{5})+\frac{9}{5}=\frac{17}{5}$$

الحل مسموح ومثالي ونهائي والتكلفة الاجمالية الكلية المثلى والأدنى هي $\frac{17}{5}$

مثال (2): لتكن لدينا مسألة البرمجة الخطية التالية:

$Max\ Z = 5x_1 + 7x_2 + 5x_3$ ضمن القيود

$$2x_1 - 3x_2 + 4x_3 \leq 10$$
$$6x_1 + x_2 - 2x_3 \geq 12$$
$$5x_1 + 3x_2 + x_3 = 18$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

الحل: $Z - 5x_1 - 7x_2 - 5x_3 = 0$

$$2x_1 - 3x_2 + 4x_3 \leq 10 \qquad (y_1)$$
$$-6x_1 - x_2 + 2x_3 \leq -12 \qquad (y_2)$$

المعادلة تحول الى القيدين:

$$5x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 18 \Longrightarrow$$
$$-5x_1 - 3x_2 - x_3 \leq -18 \qquad (y_3)$$
$$5x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 18 \qquad (y_4)$$

جدول السمبلكس الأول:

المتغير / القيد	عمود x_1 محوري	x_2	x_3	قيم الحل
Y_1	2	3−	4	10
Y_2	6−	1−	2	12−
Y_3 سطر محوري	**عنصر محوري 5−**	3−	1−	18−
Y_4	5	3	1	18
z	5−	7−	5−	0

الجدول (2):

المتغير / القيد	y_3	عمود محوري x_2	x_3	قيم الحل
Y_1	2/5	-21/5	18/5	14/5
Y_2 سطر محوري	-6/5	**13/5** عنصر محوري	16/5	48/5
x_1	-1/5	3/5	1/5	18/5
Y_4	1	0	0	0
z	-1	-4	-4	18

الجدول (3):

المتغير / القيد	عمود y_3 محوري	y_2	x_3	قيم الحل
Y_1	-20/13	21/13	114/13	238/13
x_2	-6/13	5/13	16/13	48/13
سطر محوري x_1	**1/13 عنصر محوري**	-3/13	-7/13	18/13
Y_4	1	0	0	0
z	-37/13	20/13	12/13	426/13

الجدول(4):

المتغير / القيد	عمود محوري x_1	y_2	x_3	قيم الحل
Y_1	20	-3	-2	46
x_2	6	-1	-2	12
y_3	13	-3	-7	18
Y_4 سطر محوري	عنصر محوري-13	3	7	-18
z	37	-7	-19	84

الجدول (5):

المتغير / القيد	y_4	y_2	x_3	قيم الحل
Y_1	20/13	21/13	114/13	238/13
x_2	6/13	5/13	16/13	48/13
y_3	1	0	0	0
x_1	-1/13	-3/13	-7/13	18/13
z	37/13	20/13	12/13	426/13

الحل الأمثل:

$$Z=426/13$$
$$x_1 = 18/13$$
$$x_2 = 48/13$$
$$x_3 = 0$$

تطبيقات عملية

المسألة الأولى: أ- ليكن لدينا نموذج البرمجة الخطية التالي:

$\min Z = 5x_1 - 2x_2 + 3x_3$ ضمن القيود التالية:

$$x_1 - x_2 + 3x_3 \leq 30$$
$$x_1 + 9x_2 - 6x_3 \geq 40$$
$$7x_1 - 3x_2 + x_3 = 20$$
$$|2x_2 + 10x_3| \leq 90$$

قيود عدم السلبية $x_1, x_2, x_3 \geq 0$. مع العلم بأن x_2 غير محدد الاشارة.

استخدم التحويلات المناسبة للوصول إلى الصيغة النظامية للمسألة.

الحل:

يوجد طريقتين للحل: **الطريقة الأولى:** تابع الهدف من النوع Min فتكون القيود كلها(≤) أكبر أو يساوي وجميع متغيرات القرار غير سالبة يصبح النموذج بالصيغة النظامية كما يلي:

يستبدل x_2 بتفاضل $(x_2^+ - x_2^-)$ وذلك في تابع الهدف وكافة القيود.

$$MinZ = 5X_1 - 2(X_2^+ - X_2^-) + 3X_3$$

القيد الأول يضرب بـــ(-1)

$$-X_1 + (X_2^+ - X_2^-) - 3X_3 \geq -30$$

القيد الثاني يبقى كما هو:

$$X_1 + 9(X_2^+ - X_2^-) - 6X_3 \geq 40$$
$$7X_1 - 3(X_2^+ - X_2^-) + X_+ \geq 20$$
$$-7X_1 + 3(X_2^+ - X_2^-) - X_3 \geq -20$$

القيد الرابع :

$$2X_2 + 10X_3 \leq 90 \Longrightarrow -2(X_2^+ - X_2^-) - 10X_3 \geq -90 \text{ ،(درجتان)}$$
$$2(X_2^+ - X_2^-) + 10X_3 \geq -90$$
$$X_1, X_2^+, X_2^-, X_3 \geq 0$$

الطريقة الثانية:

تابع الهدف من النوع Max فتكون القيود كلها(≤) أصغر أو يساوي، وجميع متغيرات القرار غير سالبة يصبح النموذج بالصيغة النظامية كما يلي:

يستبدل x_2 بتفاضل $(x_2^+ - x_2^-)$ وذلك في تابع الهدف وكافة القيود.

$$MaxZ = -5X_1 + 2(X_2^+ - X_2^-) - 3X_3$$

القيد الأول يبقى كما هو:

$$X_1 - (X_2^+ - X_2^-) + 3X_3 \leq 30$$

القيد الثاني يضرب بـــ(−1):

$$-X_1 - 9(X_2^+ - X_2^-) + 6X_3 \leq -40$$
$$7X_1 - 3(X_2^+ - X_2^-) + X_+ \leq 20$$
$$-7X_1 + 3(X_2^+ - X_2^-) - X_3 \leq -20$$

القيد الرابع :

$$2(X_2^+ - X_2^-) + 10X_3 \leq 90$$
$$2(X_2^+ - X_2^-) + 10X_3 \geq -90 \Longrightarrow -2(X_2^+ - X_2^-) - 10X_3 \leq 90$$
$$X_1, X_2^+, X_2^-, X_3 \geq 0$$

المسألة الثانية: تم البدء بحل نموذج برمجة خطية بطريقة السمبلكس وتابع الهدف فيه هو على الشكل التالي: $\max Z = 2x_1 - x_2$، حيث تم التوصل إلى جدول الحل الوارد أدناه والمطلوب هل الحل الوارد بالجدول مثالي، في حال الاجابة بلا أوجد الحل المثالي النهائي؟ وماهي قيمة تابع الهدف المثلى؟

المتغير / القيد	y_3	y_4	قيم الحل
Y_1	-1	1	-1
x_2	1/2	2	1
X_1	-1	-3/2	0
Y_2	1/2	1/2	1/2
z	7/2	4	5

الحل: نجد من قيم عمود الحل بأن هناك قيمة سالبة هي (−1) يجب تطوير مسموحية الحل فسطرها هو سطر محوري، نبحث في السطر المحوري عن القيمة الأشد سلبية فنجد أنها (−1) فتكون عنصر محوري، وعمودها هو عمود محوري.

للحصول على حل جديد(جدول جديد) نأخذ مقلوب العنصر المحوري، نقسم عناصر السطر المحوري على العنصر المحوري فنحصل على القيم الجديدة لها. نقسم عناصر العمود المحوري على العنصر المحوري ونضرب بـــ (−1). أما بقية القيم فيطبق مايلي:

القيمة الجديدة= القيمة القديمة− (المقابل بالسطر المحوري× المقابل بالعمود المحوري)/ العنصر المحوري. من الجدول الجديد نجد أن جميع قيم تابع الهدف السطر z موجبة، وجميع قيم عمود الحل موجبة، وتابع الهدف من النوع max فالحل مثالي، ويكون لدينا x1=1, x2=1/2، وقيمة تابع الهدف 3/2، وللتأكد نعوض في تابع الهدف فنحصل على2(1)-1/2=2-1/2=1.5 أو 3/2

المتغيرات	Y1	Y4	قيم الحل
Y3	-1	-1	1
X2	½	5/2	½
X1	-1	-5/2	1
Y2	½	1	0
z	7/2	15/2	3/2

المسألة الثالثة: لدينا نموذج البرمجة الخطية كما يلي:

$$maxz = x_1 + 6x_2 + x_3$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 6$$
$$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 10$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

المطلوب:

1- أوجد الحل البياني لهذا النموذج؟

2- أوجد جدول السمبلكس الأول وحدد كل من: السطر المحوري، العمود المحوري، العنصر المحوري.

الحل: لايمكن إيجاد الحل البياني لهذا النموذج لأن الطريقة البيانية تستخدم عندما يتضمن نموذج البرمجة الخطية متغيرين فقط، والنموذج الحالي يتضمن ثلاثة متغيرات.

جدول السمبلكس الأول وتحديد كل من: السطر المحوري، العمود المحوري، العنصر المحوري.

نكتب تابع الهدف على شكل معادلة =0

$$maxz - x_1 - 6x_2 - x_3 = 0$$
$$y_1 \qquad x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 6$$
$$y_1 \qquad 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 10$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

فيكون الجدول كما يلي:

المتغيرات / القيود	x_1	x_2عمود محوري	x_3	عمود الحل	قيم عمود الحل/قيم العمود المحوري
y_1	1	2عنصر	3	6	6/2=3سطر

		محوري			محوري
y_1	3	2	2	10	10/2=5
z	−1	−6	−1	0	0

بما أن قيم عمود الحل كلها موجبة فلا يمكن تطوير مسموحية الحل، نختبر مثالية الحل تابع الهدف من نوع max، فيجب أن تكون قيم السطر z كلها موجبة أو أصفار بالنظر للجدول نجدها سالبة فنحتار القيمة الأكثر سلبية وهي −6 فيكون عمودها هو العمود المحوري، وبتقسيم قيم عمود الحل على قيم العمود المحوري واختيار أقل ناتج موجب وهو /3/ فيكون سطر y1 هو سطر محوري والعنصر 2 هو عنصر محوري تقاطع السطر المحوري مع العمود المحوري.

المسألة الرابعة: ليكن لدينا نموذج البرمجة الخطية التالي:

$\max Z = 5x_1 - 2x_2 + 3x_3$ ضمن القيود التالية:

$$x_1 - x_2 + 3x_3 \leq 30$$
$$x_1 + 9x_2 - 6x_3 \geq 40$$
$$7x_1 - 3x_2 + x_3 = 20$$
$$|2x_2 + 10x_3| \leq 90$$

قيود عدم السلبية $x_1, x_2, x_3 \geq 0$. مع العلم بأن x_2 غير محدد الاشارة.

استخدم التحويلات المناسبة للوصول إلى الصيغة القياسية للمسألة.

الحل: تحويل النموذج للصيغة القياسية:

وجميع متغيرات القرار غير سالبة يصبح النموذج

يستبدل x_2 بتفاضل $(x_2^+ - x_2^-)$ وذلك في تابع الهدف وكافة القيود.

$$ManZ = 5X_1 - 2(X_2^+ - X_2^-) + 3X_3 + 0s_1 - 0s_2 + 0s_3 - 0s_4$$

القيد الأول:

$$X_1 - (X_2^+ - X_2^-) + 3X_3 + s_1 = 30$$

القيد الثاني:

$$X_1 + 9(X_2^+ - X_2^-) - 6X_3 - s_2 = 40$$

القيد الثالث:

$$7X_1 - 3(X_2^+ - X_2^-) + X_3 = 20$$

القيد الرابع :

$$2(X_2^+ - X_2^-) + 10X_3 + s_3 = 90$$
$$2(X_2^+ - X_2^-) + 10X_3 - s_4 = -90$$

$$X_1, X_2^+, X_2^-, X_3, s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0$$

المسألة الخامسة:

- استخدم التحويلات المناسبة للوصول إلى الصيغة النظامية لنموذج البرمجة الخطية التالي:

$\max Z = 2x_1 - 2x_2 + 5x_3$ ضمن القيود التالية:

$$x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 30$$
$$x_1 + 4x_2 - 5x_3 \geq 40$$
$$4x_1 + 5x_2 = 20$$
$$|5x_2 + 8x_3| \leq 100$$

قيود عدم السلبية $x_1, x_2 \geq 0$. مع العلم بأن x_3 غير محدد الاشارة.

ب- لدينا نموذج البرمجة الخطية التالي: $\min Z = 2x_1 + x_2$ ضمن القيود التالية:

$$2x_1 + x_2 = 3$$
$$3x_1 + 2x_2 \geq 6$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 4$$

قيود عدم السلبية $x_1, x_2 \geq 0$

المطلوب: كوّن جدول السمبلكس الأول للنموذج السابق فقط ؟

الحل:

حل الطلب الأول: بطريقتين:

الطريقة الأولى:	الطريقة الثانية:
$\max Z = 2x_1 - 2x_2 + 5(x_3^+ - x_3^-)$ $x_1 - x_2 + 2(x_3^+ - x_3^-) \leq 30$ $-x_1 - 4x_2 + 5(x_3^+ - x_3^-) \leq -40$ $4x_1 + 5x_2 \leq 20$ $4x_1 + 5x_2 \geq 20 \Rightarrow -4x_1 - 5x_2 \leq -20$ $5x_2 + 8(x_3^+ - x_3^-) \leq 100$ $5x_2 + 8(x_3^+ - x_3^-) \geq -100 \Rightarrow -5x_2 - 8(x_3^+ - x_3^-) \leq 100$ $x_1, x_2, x_3^+, x_3^- \geq 0$	Min=maxw=max(-z)$=-2x_1 + 2x_2 - 5(x_3^+ - x_3^-)$ $-x_1 + x_2 - 2(x_3^+ - x_3^-) \geq -30$ $x_1 + 4x_2 - 5x_3 \geq 40$ $4x_1 + 5x_2 \geq 20$ $4x_1 + 5x_2 \leq 20 \Rightarrow -4x_1 - 5x_2 \geq -20$ $5x_2 + 8(x_3^+ - x_3^-) \leq 100 \Rightarrow -5x_2 - 8(x_3^+ - x_3^-) \geq -100$ $5x_2 + 8(x_3^+ - x_3^-) \geq -100$ $x_1, x_2, x_3^+, x_3^- \geq 0$

حل الطلب الثاني:

نجعل تابع الهدف على شكل معادلة=0

$$\min Z = 2x_1 + x_2 = Z - 2x_1 - x_2 = 0$$

$$2x_1 + x_2 \le 3 \qquad y_1$$
$$2x_1 + x_2 \ge 3 \rightarrow -2x_1 - x_2 \le -3 \qquad y_2$$
$$-3x_1 - 2x_2 \le -6 \qquad y_3$$
$$x_1 + 2x_2 \le 4 \qquad y_4$$

قيود عدم السلبية $x_1, x_2 \ge 0$

الجدول

المتغير / القيد	عمود محوري x_1	x_2	قيم الحل
Y1	2	1	3
Y2	2−	1−	3−
Y3	−3	-2	-6
Y4	1	2	4
z	-2	-1	0

مشاكل النقل

هي عبارة عن عملية نقل مواد متشابهة من مراكز الانتاج (نقاط المصدر) إلى مراكز الطلب والاستهلاك بحيث تكون التكاليف أقل ما يمكن. ويفترض نموذج النقل ما يلي:

1. وجود عدد من مراكز الانتاج عددها n مركز وعدد من مراكز الطلب والاستهلاك وعددها m مركزاً.
2. تكلفة نقل الوحدة الواحدة من مراكز الانتاج I إلى مراكز الطلبJ معلومة ومحددة C_{ij} (حيث رمز c يدل على cost تكلفة).
3. الكميات المنقولة من مراكز الانتاج I إلى مراكز الطلب أيضاً معلومة ويرمز لها بـــ X_{ij} .
4. الهدف هو تخفيض التكاليف الكلية (النقل بأقل التكاليف).
5. تصاغ مشكلة النقل على شكل جدول كالآتي:

مراكز الاستهلاك / مراكز الانتاج	1	2	3	....m	العرض
1	C_{11}	C_{12}	C_{13}	...c1m	b_1
2	C_{21}			C_{2m}	b_2
. .					b_3
n	C_{n1}	C_{n2}		...C_{nm}	b_n
الطلب	A_1	A_2	A_3	...A_m	متساويان

قانون حساب التكلفة الكلية: $TC = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} C_{ij}X_{ij}$

نقول عن مسألة النقل إنها متوازنة إذا كانت كمية العرض تساوي كمية الطلب.

طرق الحل الأولي:

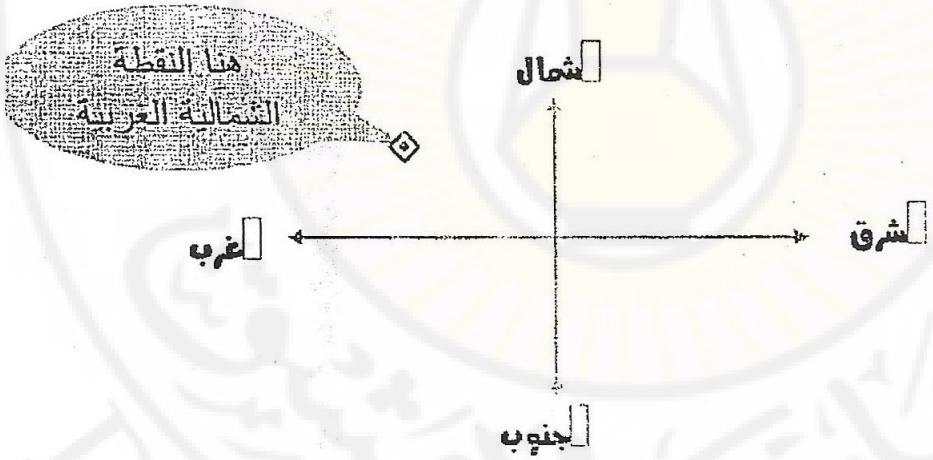
1-طريقة الزاوية الشمالية الغربية(الزاوية العليا اليسرى)

2-طريقة التكلفة الأقل.

3-طريقة فوجل.

الطريقة الأولى: طريقة الزاوية الشمالية الغربية:

◈ الزاوية الشمالية الغربية تحدد وفق لقاعدة الاتجاهات الجغرافية:



◄◄ حل المسألة:

A إيجاد عدد الوحدات المنتجة التي يقدمها كل مصنع لكل سوق

مثال:

عندنا شركة صناعية تنتج نوعاً من المنتجات بثلاث مصانع والطاقة الإنتاجية لهذه المصانع هي:

700 ، 500 ، 300 على التوالي ⇐ إذاً هذه الطاقة الإنتاجية

وتوزع هذه الطاقة الإنتاجية هذا الإنتاج في خمسة أسواق، والطلب في كل سوق على الشكل التالي:

350 ، ، 250 ، 250 ، 300 ، 350

وإن التكاليف هي عبارة عن المصفوفة التالية:

مصفوفة التكاليف							
الأسواق / المصانع	①	②	③	④	⑤	الطاقة الإنتاجية لكل مصنع	
①	5	7	9	11	6	300	
②	19	8	10	13	5	500	
③	4	9	7	6	3	700	
الكمية المطلوبة لكل سوق	350	300	250	250	350	1500	المجموع

شرح الجدول:

لدينا 5 أسواق موزعة على الأعمدة ويمثل هذه الأسواق المقاصد التي نريد توزيع كمية معينة من منتجات المصانع الثلاثة (والتي هي من نوع واحد) على هذه الأسواق ولكل سوق طلب معين:

- السوق الأول ① طلبه 350
- السوق الثاني ② طلبه 300
- السوق الثالث ③ طلبه 250
- السوق الرابع ④ طلبه 250
- السوق الخامس ⑤ طلبه 350

ولدينا 3 مصانع موزعة على الأسطر وتمثل هذه المصانع المصادر التي سنوزع منها كمية معينة من المنتجات ذات النوع الواحد على الأسواق.
لكن لكل مصنع من المصانع طاقة انتاجية معينة لإنتاج المنتج

- فقدرة المصنع الأول للإنتاج هي 300
- وقدرة المصنع الثاني للإنتاج هي 500
- وقدرة المصنع الثالث للإنتاج هي 700

الأرقام الموجودة ضمن الجدول هي عبارة عن تكاليف النقل، أي مثلاً:

- تكلفة نقل المنتج من المصنع الأول ① إلى السوق الأول ❶ هي 5
- تكلفة نقل المنتج من المصنع الأول ① إلى السوق الثاني ❷ هي 7
- تكلفة نقل المنتج من المصنع الثاني ② إلى السوق الثالث ❸ هي 10
- وهكذا من أجل بقية عناصر تكاليف النقل الموجودة ضمن الجدول

ملاحظة هامة:

نلاحظ أن هذه المسألة **متوازنة** أي ليس لدينا فائض بالإنتاج ولا زيادة بالطلب لأنه:

مجموع الكمية المطلوبة لكل سوق

= طلب السوق❶ + طلب السوق❷ + طلب السوق❸ + طلب السوق❹ + طلب السوق❺

= 350 + 300 + 250 + 250 + 350

= 1500

مجموع القدرة (الطاقة الإنتاجية لكل مصنع)

= الطاقة الإنتاجية للمصنع① + الطاقة الإنتاجية للمصنع② + الطاقة الإنتاجية للمصنع③

= 300 + 500 + 700

= 1500

لذلك قلنا إن مسألتنا متوازنة، لأنه...

مجموع الطاقة الإنتاجية لكل مصنع $\sum a_i = \sum b_j$ مجموع الكمية المطلوبة لكل سوق

لذلك لا داعي هنا لإضافة أي منتج أو زبون وهمي

الحل:

A إيجاد عدد الوحدات المنتجة التي يقدمها كل مصنع لكل سوق

الخطوة الأولى "إيجاد الزاوية الشمالية الغربية":

قاعدة الزاوية الشمالية الغربية تقتضي أن انطلق من المنطقة الشمالية الغربية من مصفوفة التكاليف عند أول مربع ذو التكلفة **5** ، سنوضح بالشكل...

- عندنا المستودع الأول (السوق الأول ❶) يعني بمعنى آخر المقصد الأول يحتاج **350** وحدة وهي تمثل الكمية التي يطلبها السوق ❶
- عندنا المصنع (المعمل الأول ①) ينتج **300** وحدة

الأسواق / المصانع	❶	.....
①	5	7
.....	19	8

هذا المربع هو نقطة الزاوية الشمالية الغربية

الخطوة الثانية "التمرير":

نحدد الكمية التي استطيع أن امررها من المصنع الأول الى السوق الأول

أي ماهي الكمية التي أستطيع أن أمررها ضمن نقطة الزاوية الشمالية الغربية التي حددناها بالجدول السابق ؟؟

← أستطيع أن امرر **300** وحدة (وهو كامل انتاج المصنع الأول)

سؤال: طيب ليش بحسن مرر **300** وحدة بس من المنتجات ذات النوع الواحد، و ليش مررنا هي الكمية من المصنع الأول ؟؟

الجواب:

- مررنا هذه الكمية من المصنع الأول لأنه منطقة الزاوية الشمالية الغربية واقعة ضمن السطر الأول وكون هذا السطر هو السطر الخاص بالمصنع الأول فسنمرر الطاقة الانتاجية للمصنع الأول على نقطة الزاوية الشمالية الغربية.
- ولم نمرر أكثر من **300** وحدة لأن المقدرة الإنتاجية لهذا المصنع هي فقط **300** مع أن السوق الأول يحتاج لـ **350** وحدة لكنها أكبر من القدرة الإنتاجية للمصنع الأول

الخطوة الثالثة "الشطب":

هنا المصنع الأول لم يعد لديه أيّ وحدات انتاجية يقدمها لباقي الأسواق (هو حتى لم يشبع حاجة السوق الأول) لذلك نقوم بشطب السطر الأول الخاص بالمعمل الأول

ولكننا لا نشطب العمود الأول الخاص بالسوق الأول كوننا لم نشبع احتياجه بعد

الحالة العامة:

عند الحل بطريقة الزاوية الشمالية الغربية فهذا يعني أنني أنطلق من نقطة تقاطع المصدر الأول مع المقصد الأول فلحين انتهاء واحد من 3 حالات هي:

1. انتاج المصدر الأول = احتياج المقصد الأول بالكامل

بمعنى آخر الكمية المنتجة بالمصنع تساوي الكمية المطلوبة بالسوق ← أمرر للسوق كامل الكمية المنتجة (هي هنا نفسها الكمية المطلوبة)

- نشطب السطر الأول

- نشطب السطر الخاص بهذا المصنع: كوننا مررنا كامل الكمية التي انتجها (لم يعد لديه انتاج يقدمه لأي سوق آخر)
- نشطب العمود الخاص بهذا السوق: كوننا اشبعنا حاجته

2. انتاج المصدر الأول < احتياج المقصد الأول بالكامل

بمعنى آخر الكمية المنتجة بالمصنع اقل من الكمية المطلوبة بالسوق ← أمرر للسوق كامل الكمية المنتجة

- نشطب السطر الخاص بهذا المصنع: كوننا مررنا كامل الكمية التي انتجها (لم يعد لديه انتاج يقدمه لأي سوق آخر وهو حتى لم يشبع السوق الذي أعطاه وحداته الانتاجية)
- لا نشطب العمود الخاص بهذا السوق: كوننا لم نشبع حاجته بعد

3. انتاج المصدر الأول > احتياج المقصد الأول بالكامل

بمعنى آخر الكمية المنتجة بالمصنع اكبر من الكمية المطلوبة بالسوق ← أمرر للسوق الكمية التي يحتاجها من الوحدات الانتاجية للمصنع

- لا نشطب السطر الخاص بهذا المصنع: كوننا مررنا جزء فقط من الكمية التي انتجها (مازال لديه انتاج يقدمه للأسواق الأخرى)
- نشطب العمود الخاص بهذا السوق: كوننا اشبعنا حاجته

في مسألتنا نحن في الحالة **2** (احتياج السوق **350** > القدرة الإنتاجية للمصنع **300**)
← السوق مازال بحاجة **50** وحدة إنتاجية (**350 – 300 = 50**)

إلى هنا أصبحت مصفوفة التكاليف كالتالي:

مصفوفة التكاليف						
الأسواق / المصانع	①	②	③	④	⑤	الطاقة الإنتاجية لكل مصنع
①	5 300					
②	19	8	10	13	5	500
③	4	9	7	6	3	700
الكمية المطلوبة لكل سوق	350 ↓ 50	300	250	250	350	1500 المجموع

نقوم بإعادة تطبيق الخطوات السابقة لكن على المصفوفة التي نتجت معنا:

الخطوة الأولى "إيجاد الزاوية الشمالية الغربية":

نعتبر السطر المشطوب غير موجود فيكون موقع الزاوية الشمالية الغربية بالسطر الثاني العمود الأول (المصنع الثاني، السوق الأول)، وعملياً كالتالي:

	5 300	
②	19	8
③	4	9

هذا المربع هو نقطة الزاوية الشمالية الغربية

الخطوة الثانية "التمرير":

نحدد الكمية التي استطيع أن امررها من المصنع الثاني إلى السوق الأول ضمن نقطة الزاوية الشمالية الغربية التي حددناها

← أستطيع أن امرر **500** وحدة لكن السوق الأول احتياجه **50** فقط فنقوم بتمزير بمقدار احتياج السوق فقط

الخطوة الثالثة "الشطب":

هنا السوق الأول تم اشباعه لذلك نقوم بشطب العمود الأول الخاص بالسوق الأول

ولكننا لا نشطب السطر الثاني الخاص بالمصنع الثاني كون هذا المصنع مازال لديه وحدات انتاجية يقدمها لباقي الأسواق

إذاً نحن في الحالة 3 (احتياج السوق **50** < القدرة الإنتاجية للمصنع **500**)

← المصنع الثاني مازال لديه **450** وحدة إنتاجية (**450 = 50 – 500**)

إلى هنا أصبحت مصفوفة التكاليف كالتالي:

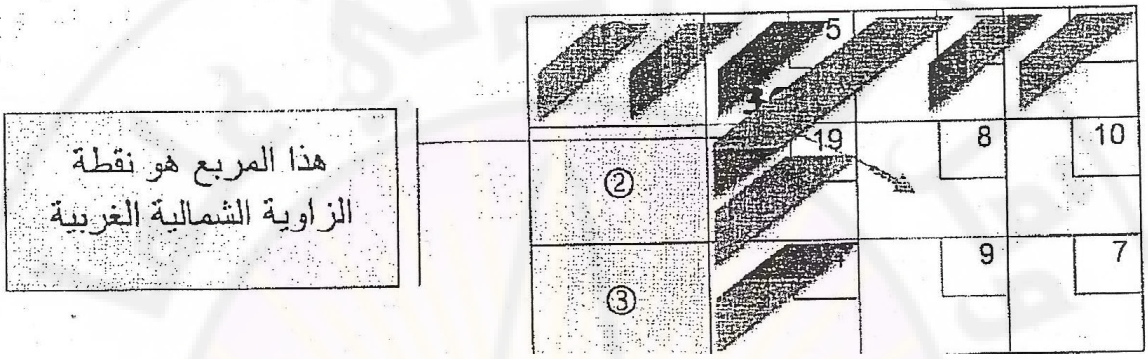
مصفوفة التكاليف

الأسواق / المصانع	①	②	③	④	⑤	الطاقة الإنتاجية لكل مصنع	
	300						
②	50	8	10	13	5	500 ← 450	
③	4	9	7	6	3	700	
الكمية المطلوبة لكل سوق		300	250	250	350	1500	المجموع

نقوم مجدداً بإعادة تطبيق الخطوات السابقة لكن على المصفوفة الناتجة:

الخطوة الأولى "إيجاد الزاوية الشمالية الغربية":

نعتبر السطر المشطوب غير موجود وكذلك العمود المشطوب فيكون موقع الزاوية الشمالية الغربية بالسطر الثاني العمود الثاني (المصنع الثاني ، السوق الثاني)، وعملياً كالتالي:



الخطوة الثانية "التمرير":

نحدد الكمية التي استطيع أن امررها من المصنع إلى السوق ضمن الزاوية الشمالية الغربية التي حددناها

- عدد الوحدات الانتاجية في المصنع الثاني = **450**
- الكمية المطلوبة التي يحتاجها السوق الثاني = **300**

← امرر **300** وحدة أي نقوم بتمرير بمقدار احتياج السوق فقط وما تبقى يبقى للمصنع

الخطوة الثالثة "الشطب":

هنا السوق الثاني تم إشباعه لذلك نقوم بشطب العمود الثاني الخاص بالسوق الثاني

ولكننا لا نشطب السطر الثاني الخاص بالمصنع الثاني كون هذا المصنع مازال لديه وحدات انتاجية يقدمها لباقي الأسواق

إذاً نحن في الحالة **3** (احتياج السوق **300** < القدرة الإنتاجية للمصنع **450**)

← المصنع مازال لديه **150** وحدة إنتاجية (**150 = 300 – 450**)

إلى هنا أصبحت مصفوفة التكاليف كالتالي:

مصفوفة التكاليف

الأسواق / المصانع	①	②	③	④	⑤	الطاقة الإنتاجية لكل مصنع	
	5						
②	10	8	10	13	5	450 → 150	
	50	300					
③	4	9	7	6	3	700	
الكمية المطلوبة لكل سوق			250	250	350	1500	المجموع

مرة أخرى نعيد تطبيق الخطوات السابقة لكن على المصفوفة الناتجة:

الخطوة الأولى "إيجاد الزاوية الشمالية الغربية":

نعتبر السطر المشطوب غير موجود وكذلك الأعمدة المشطوبة فيكون موقع الزاوية الشمالية الغربية بالسطر الثاني العمود الثالث (المصنع الثاني ،السوق الثالث)، وعملياً كالتالي:

	5	7	9
②	19	8	10
③			7

هذا المربع هو نقطة الزاوية الشمالية الغربية

الخطوة الثانية "التمرير":

نحدد الكمية التي استطيع أن امررها من المصنع إلى السوق ضمن الزاوية الشمالية الغربية التي حددناها

- عدد الوحدات الانتاجية في المصنع الثاني = **150**
- الكمية المطلوبة التي يحتاجها السوق الثالث = **250**

← امرر **150** وحدة أي نقوم بتمرير كامل انتاج المصنع الثاني إلى السوق الثالث

الخطوة الثالثة "الشطب":

هنا السوق الثالث لم يتم اشباعه بعد فلا نقوم بشطب العمود الثالث الخاص بالسوق الثالث

ولكننا نشطب السطر الثاني الخاص بالمصنع الثاني كون هذا المصنع لم يعد لديه أي وحدات انتاجية يقدمها لباقي الأسواق

إذاً نحن في الحالة **2** (احتياج السوق **250** > القدرة الإنتاجية للمصنع **150**)

← السوق مازال بحاجة **100** وحدة إنتاجية (**100 = 150 – 250**)

إلى هنا أصبحت مصفوفة التكاليف كالتالي:

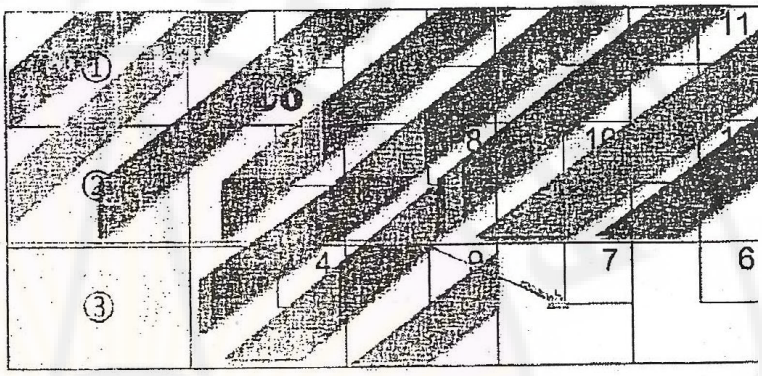
مصفوفة التكاليف

المصانع \ الأسواق	❶	❷	❸	❹	❺	الطاقة الإنتاجية لكل مصنع
①	5 **300**		9			
②	9	**300**	10 **150**	8	5	
③	4		7	6	3	**700**
الكمية المطلوبة لكل سوق			~~250~~ ⇩ 100	**250**	**350**	**1500** المجموع

نقوم مجدداً بإعادة تطبيق الخطوات السابقة لكن على المصفوفة الناتجة:

الخطوة الأولى "إيجاد الزاوية الشمالية الغربية":

نعتبر الأسطر المشطوبة غير موجودة وكذلك الأعمدة المشطوبة فيكون موقع الزاوية الشمالية الغربية بالسطر الثالث العمود الثالث (المصنع الثالث للسوق الثالث)، وعملياً كالتالي:



هذا المربع هو نقطة الزاوية الشمالية الغربية

الخطوة الثانية "التمرير":

نحدد الكمية التي استطيع أن امررها من المصنع إلى السوق ضمن الزاوية الشمالية الغربية التي حددناها:

- عدد الوحدات الانتاجية في المصنع الثالث = **700**
- الكمية المطلوبة التي يحتاجها السوق الثالث = **100**

← أستطيع أن امرر **700** وحدة لكن السوق الثالث احتياجه **100** فنمرر **100** وحدة

الخطوة الثالثة "الشطب":

هنا السوق الثالث تم اشباعه فنقوم بشطب العمود الثالث الخاص بالسوق الثالث

ولكننا لا نشطب السطر الثالث الخاص بالمصنع الثالث كون هذا المصنع مازال لديه وحدات انتاجية يقدمها لباقي الأسواق

إذاً نحن في الحالة **3** (احتياج السوق **100** < القدرة الإنتاجية للمصنع **700**)
← المصنع مازال لديه **600** وحدة إنتاجية (**700 – 100 = 600**)

إلى هنا أصبحت مصفوفة التكاليف كالتالي:

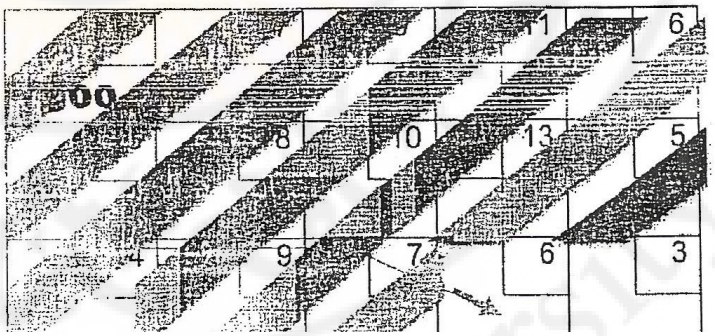
مصفوفة التكاليف

الأسواق / المصانع	①	②	③	④	⑤	الطاقة الإنتاجية لكل مصنع
①	5	7	9	11	6	
②	50	40	10	13	5	
③			7	6	3	700 ← 600
			100			
الكمية المطلوبة لكل سوق				250	350	1500 المجموع

نقوم مرة أخرى بإعادة تطبيق الخطوات السابقة لكن على المصفوفة الناتجة:

الخطوة الأولى "إيجاد الزاوية الشمالية الغربية":

نعتبر الأسطر المشطوبة غير موجودة وكذلك الأعمدة المشطوبة فيكون موقع الزاوية الشمالية الغربية بالسطر الثالث العمود الرابع (المصنع الثالث ،السوق الرابع)، وعملياً كالتالي:



هذا المربع هو نقطة الزاوية الشمالية الغربية

الخطوة الثانية "التمرير":

نحدد الكمية التي استطيع أن امررها من المصنع إلى السوق ضمن الزاوية الشمالية الغربية التي حددناها:

- عدد الوحدات الانتاجية في المصنع الثالث = **600**
- الكمية المطلوبة التي يحتاجها السوق الرابع = **250**

← أستطيع أن امرر **600** وحدة لكن السوق الرابع احتياجه **250** فنمرر **250** وحدة

الخطوة الثالثة "الشطب":

هنا السوق الرابع تم اشباعه فنقوم بشطب العمود الرابع الخاص بالسوق الرابع

ولكننا لا نشطب السطر الثالث الخاص بالمصنع الثالث كون هذا المصنع مازال لديه وحدات انتاجية يقدمها لباقي الأسواق

إذاً نحن في الحالة **3** (احتياج السوق **250** < القدرة الإنتاجية للمصنع **600**)

← المصنع مازال لديه **350** وحدة إنتاجية (**600 – 250 = 350**)

إلى هنا أصبحت مصفوفة التكاليف كالتالي:

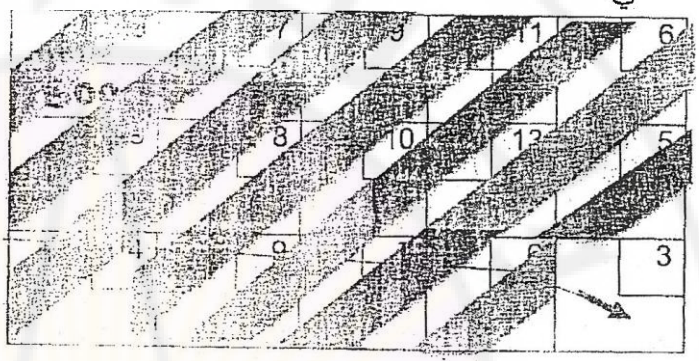
مصفوفة التكاليف

الأسواق / المصانع	①	②	③	④	⑤	الطاقة الإنتاجية لكل مصنع
①	5	7	9	11	6	
②	10	12			5	
③			6		3	600 ➡ 350
الكمية المطلوبة لكل سوق			250		350	1500

نقوم مجدداً بإعادة تطبيق الخطوات السابقة لكن على المصفوفة الناتجة:

الخطوة الأولى "إيجاد الزاوية الشمالية الغربية":

نعتبر الأسطر المشطوبة غير موجودة وكذلك الأعمدة المشطوبة فيكون موقع الزاوية الشمالية الغربية بالسطر الثالث العمود الخامس (المصنع الثالث ،السوق الخامس)، وعملياً كالتالي:



هذا المربع هو نقطة الزاوية الشمالية الغربية (هو آخر مربع)

الخطوة الثانية "التمرير":

نحدد الكمية التي استطيع أن امررها من المصنع إلى السوق ضمن الزاوية الشمالية الغربية التي حددناها:

- عدد الوحدات الانتاجية في المصنع الثالث = **350**
- الكمية المطلوبة التي يحتاجها السوق الخامس = **350**

⇐ أستطيع أن امرر **350** وحدة وهذا يوافق تماما احتياج السوق الخامس

الخطوة الثالثة "الشطب":

هنا السوق الخامس تم اشباعه فنقوم بشطب العمود الخامس الخاص بالسوق الخامس

كما أننا نشطب السطر الثالث الخاص بالمصنع الثالث كون هذا المصنع استنفذ ما لديه من وحدات انتاجية

إذاً نحن في الحالة **1** (احتياج السوق **350** = القدرة الإنتاجية للمصنع **350**)

الـ هنا أصبحت مصفوفة التكاليف كالتالي:

مصفوفة التكاليف

الأسواق / المصانع	①	②	③	④	⑤	الطاقة الإنتاجية لكل مصنع
①	5	7	9	11	6	ـــــ
	300					
②	19	8	15	13	5	ـــــ
	50	300	150			
③	4	9	7	6	3	ـــــ
			100	250	350	
الكمية المطلوبة لكل سوق	ـــــ	ـــــ	ـــــ	ـــــ	ـــــ	1500 المجموع

وبهذا نكون قد غطينا مصفوفة التكاليف بالكامل حيث أننا أوجدنا عدد الوحدات المنتجة التي يقدمها كل مصنع لكل سوق

ملاحظة هامة:

إن عملية الشطب التي نقوم بها ماهي الا لمساعدتنا في إيجاد الزاوية الشمالية الغربية ففعلياً أنا لا أقوم بأي عملية حذف لأي سطر أو عمود ونحن غير مطالبين برسم أي منها في الامتحان

* فالشكل النهائي للمصفوفة التي نتجت معنا وهي المصفوفة المطلوبة منا بالامتحان ☺

مصفوفة التكاليف

الأسواق / المصانع	①	②	③	④	⑤	الطاقة الإنتاجية لكل مصنع
①	5	7	9	11	6	ـــــ
	300					
②	19	8	15	13	5	ـــــ
	50	300	150			
③	4	9	7	6	3	ـــــ
			100	250	350	
الكمية المطلوبة لكل سوق	ـــــ	ـــــ	ـــــ	ـــــ	ـــــ	1500

هذه المصفوفة إلى الآن الحل الأولي فعلينا الآن حساب مجموعة تكلفة النقل الأولي

B حساب تكلفة النقل الأولي

$$MIN \quad Z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} C_{ij} \; X_{ij}$$

حيث:

- C_{ij} : هي كلفة نقل الوحدة من المصنع إلى السوق
  - الموجودة فعلياً في مصفوفتنا داخل المربع بالزاوية

مثلاً: $C_{23} = \mathbf{10}$ ، وهي كلفة نقل الوحدة الواحدة من المصنع الثاني (السطر الثاني) إلى السوق الثالث (العمود الثالث)

$C_{35} = \mathbf{3}$ ، وهي كلفة نقل الوحدة الواحدة من المصنع الثالث (السطر الثالث) إلى السوق الخامس (العمود الخامس)

- X_{ij} : هي الكمية المنقولة التي قمنا بتمريرها من المصنع إلى السوق ← التي قمنا بحسابها قبل قليل

مثلا: $X_{23} = \mathbf{150}$ ، وهي الكمية المنقولة التي قمنا بتمريرها من المصنع الثاني (السطر الثاني) إلى السوق الثالث (العمود الثالث)

$X_{35} = \mathbf{350}$ ، وهي الكمية المنقولة التي قمنا بتمريرها من المصنع الثالث (السطر الثالث) إلى السوق الخامس (العمود الخامس)

لنعوض:

$$Z = C_{11}X_{11} + C_{21}X_{21} + C_{22}X_{22} + C_{23}X_{23} + C_{33}X_{33} + C_{34}X_{34} + C_{35}X_{35}$$

$$= 5\times300 + 19\times50 + 8\times300 + 10\times150 + 7\times100 + 6\times250 + 3\times350$$

$$= 9600$$

هذا هو مجموع تكلفة النقل الأولي ، وهو الحل الأولي وفقاً لقاعدة الزاوية الشمالية الغربية

الطريقة الثانية: وفق هذه الطريقة نبحث في تكاليف النقل عن أصغر تكلفة ممكنة ونمرر عبرها أكبر كمية ممكنة بالمقارنة بين الكمية المنتجة والكمية المطلوبة عند هذه التكلفة التي اخترناها وحسب المشاكل السابقة.

- كل الطرق التي استخدمناها في حل مشاكل النقل من طريقة الزاوية الشمالية الغربية وحالياً طريقة التكلفة الأقل وطريقة فوجل التي سنقوم بحلها لاحقاً هي عبارة عن طرق تؤدي إلى حل أولي.

مسألة:

الأسواق / المصانع	1	2	3	4	5	المتاح
1	5	7 300	9	11	6	300
2	19	8	10 250	13 250	5	500
3	4 350	9	7	6	3 350	~~700~~ 350
المطلوب	350	300	250	250	350	المجموع 1500

شرح الجدول:

بالخطوة الأولى: نختار أصغر تكلفة ممكنة بالجدول وهي هنا 3 ونمرر عندها أكبر كمية ممكنة بالمقارنة بين الكمية المنتجة والكمية المطلوبة.

وطالما أن التكلفة 3 تقع بعمود السوق 5 الذي كميته المطلوبة هي 350 وتقع بسطر المصنع (3) الذي كميته المنتجة هي 700 إذاً نحن بحالة:

بالمصنع (3) الكمية المنتجة (700) > (350) الكمية المطلوبة بالسوق (5)

نمرر أكبر كمية ممكنة (الكمية المنقولة) عند التكلفة 3 وهي هنا (350) الكمية المطلوبة لأنها أصغر فنسجل بالمربع ذو التكلفة 3 الكمية المنقولة 350.

وطالما أشبعنا كل حاجة السوق 5 من الكمية المطلوبة لديه نشطب عموده الخامس وتصبح الكمية المنتجة الباقية بالمصنع (3) هي:

350 = (الكمية المنقولة) 350 – 700 (الكمية المنتجة)

وهكذا تكون أول قيمة بحساب التكاليف هي:

3 × 350 = التكلفة × الكمية المنقولة

← والآن نعيد فحص التكاليف الموجودة بالجدول السابق بعد شطب العمود (5) ونختار أصغرها وهي التكلفة 4، والتي تقع بعمود السوق (1) وبسطر المصنع (3) والآن نحدد ما هي الكمية المنقولة عند هذه التكلفة:

طالما أن التكلفة 4 موجودة ضمن:

سطر المصنع (3) الذي كميته المنتجة الباقية 350 وضمن عمود السوق (5) الذي كميته المطلوبة هي 350

إذاً نحن بحالة:

الكمية المنتجة (350) = (350) الكمية المطلوبة

⊂إذاً نمرر أكبر كمية منقولة ممكنة وي هنا 350 (الكمية المنتجة التي هي نفسها الكمية المطلوبة لأنهم تساوو) فنسجل في المربع ذو التكلفة 4 الكمية المنقولة 350

وطالما أشبعنا كل حاجة السوق 5 ⇦فنشطب عموده الخامس.

وطالما استخدمنا كل الكمية المنتجة للمصنع (3) ومررناها بالكامل ⇦فنشطب سطر المصنع (3).

وبهذا تكون القيمة بحساب تكلفة النقل هنا هي:

4 × 350 = التكلفة × الكمية المنقولة

والآن نعيد فحص التكاليف الموجودة بالجدول السابق بعد شطب العمود (5) والسطر (3) ونختار أصغر هذه التكاليف المتبقية حيث بقيت لدينا التكاليف التالية:

7,9,11,8,10,13

فأصغر هذه التكاليف هي التكلفة 7 الموجودة بعمود السوق (2) وسطر المصنع (1).

والآن نحدد ما هي الكمية المنقولة التي نستطيع تمريرها عند التكلفة 7 وطالما أنها موجودة ضمن:

سطر المصنع 1 الذي كميته المنتجة هي 300

وعمود السوق 2 الذي كميته المطلوبة هي 300

←إذاً نحن بحالة: (300) الكمية المنتجة = الكمية المطلوبة (300)

نمرر أكبر كمية ممكنة (الكمية المنقولة) عند التكلفة 7 وهي هنا 300 الكميه المطلوبه او المنتجة نفس الشيء لأنهم متساويين ونسجل بالمربع ذو التكلفة 7 الكمية المنقولة 300 وطالما أشبعنا كل حاجة السوق (2) ⇦نشطب العمود الثاني فلم يعد لدي السوق (2) أي كمية مطلوبة.

وطالما استخدمنا كل الكمية المنتجة بالمصنع (1) ⇦نشطب سطره الأول ولم يعد لدى المصنع (1) أي كمية منتجة.

فأصبحت قيمة تكلفة نقل من المصنع (1) إلى السوق (2) هي:

التكلفة × الكمية المنقولة = 300 × 7

الآن نعيد فحص التكاليف من جديد ونختار أصغر تكلفة بالجدول، فنجد أن التكاليف التي بقيت بعد شطب الأعمدة 5,2,1 والأسطر 2,1 هي: 10,13

بالسطر الثاني (سطر المصنع 2) الذي كميته المنتجة هي 500 وبأعمدة الأسواق 4,3 وطالما لم يتبقى غيرهم نمرر كل الكميات المنتجة إلى كل الكميات المطلوبة عند التكلفة 13,10 كالتالي:

التكلفة 10: طالما أنها موجودة ضمن:

سطر المصنع 2 الذي كميته المنتجة هي 500 وبعمود السوق 3 الذي كميته المطلوبة هي 250 إذاً نحن بحالة:

(500) الكمية المنتجة > الكمية المطلوبة (250)

⇦نمرر أكبر كمية ممكن نقلها عند التكلفة 10 وهي الكمية المطلوبة 250 لأنه أصغر فتصبح الكمية المنتجة لدى المصنع 2 هي:

250 = الكمية المنقولة (250) – (500) الكمية المنتجة

⇦إذاً تصبح تكلفة النقل هنا هي: 10 × 250

ولا يعود يتبقى لدى السوق (3) أي كمية مطلوبة لأننا أشبعناها بالكامل وسواء شطبنا عموده أم لم نشطبه لا يؤثر لأنه لم يعد تبقى لدينا سوى تكلفة وحيدة سنملأها التكلفة 13 كما ذكرنا لكم.

التكلفة 13 طالما أنها موجودة ضمن:

سطر المصنع 2 الذي كميته المنتجة الباقية هي 250 وموجودة ضمن عمود السوق (4) الذي كميته المطلوبة هي 250 ⇦إذاً نحن بحالة:

(250) الكمية المنتجة = الكمية المطلوبة (250)

إذاً نمرر الكمية المنقولة 250 عند التكلفة 13 ونسجل 250 بالمربع ذو التكلفة 13 وبذلك لم يعد لدينا لا كميات منتجة ولا كميات مطلوبة ⇦لذلك سواء شطبنا الأعمدة 4,3 والسطر 2 أم لم نشطبهم لا يؤثر.

وتصبح تكلفة النقل المنتج من المصانع الخمسة إلى الأسواق الثلاثة التي حاولنا أن تكون أقل ما يمكن هي: مجموع (الكميات المنقولة × التكاليف) أي وكما ذكرنا بالكلام النظري هي:

$$MINZ = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} C_{ij} X_{ij}$$

$$= 350 \times 3 + 350 \times 4 + 300 \times 7 + 250 \times 10 + 250 \times 13 = 10300$$

الطريقة الثالثة: حل مسالة نقل بطريقة فوجل باستخدام الفروق في السطر وفي العمود معاً

خطوات الحل:

1-ملء مربعات خانات الجدول ونحسب الفروق بين أقل تكلفتين بالأسطر وبالأعمدة.

2-نختار أكبر فرق بالأسطر وبالأعمدة وثم تحديد السطر أو العمود الذي يقابل أكبر فرق.

3-تحديد أقل تكلفة نقل في السطر أو العمود المقابل لأكبر الفروق وذلك لنمرر أكبر كمية ممكنة عند هذه التكلفة.

4- حتى تستطيع معرفة ما هي أكبر كمية ممكنة نستطيع تمريرها للمربع وأصغر تكلفة تكلفة التي حددناها بالخطوة السابقة علينا تحديد ما يلي:

أ- علينا تحديد بأي عمود تقع هذه التكلفة حتى نحدد بأي سوق هي وما هي الكمية المطلوبة التي لديه.

ب- علينا تحديد بأي سطر تقع هذه التكلفة حتى نحدد بأي مصنع هي وما هي الكمية المنتجة لديه.

5-عندها نكون أمام /3/ حالات وهي:

الحالة الأولى: الكمية المنتجة > الكمية المطلوبة نمرر أكبر كمية ممكنة وهي هنا الكمية المطلوبة (لأنها الاصغر) عند المعبر (المربع) ذو التكلفة الأقل التي حددناها مسبقاً.

نشطب العمود الخاص بالسوق الذي أشبعنا كل الكمية المطلوبة التي يحتاجها ومررناها له.

الحالة الثانية: الكمية المنتجة = الكمية المطلوبة عندئذ نمرر أكبر كمية ممكنة وهي هنا الكمية المطلوبة أو الكمية المنتجة (نفس الشيء لأنهما متساويين) عند المعبر ذو التكلفة الأقل التي حددناها مسبقاً,

وعندها نشطب السطر الخاص بالمصنع الذي مررنا (استخدمنا) كل الكمية المنتجة التي لديه.

كذلك نشطب العمود الخاص بالسوق الذي مررنا له كل ما يحتاجه من الكمية المطلوبة لديه(أشبعنا طلبه).

الحالة الثالثة: الكمية المنتجة< الكمية المطلوبة عندئذ نمرر أكبر كمية ممكنة وهي هنا الكمية المنتجة (لأنه الأصغر) عند المعبر ذؤ التكلفة الأقل التي حددناها مسبقاً.

عندها نشطب السطر الخاص بالمصنع الذي مررنا كل الكمية المنتجة لديه ولم يعد لديه كمية منتجة.

6- نملئ المربع ذو التكلفة الأقل التي حددناها مسبقاً بالكمية المنقولة (أكبر كمية ممكنة استطعنا تمريرها التي حددناها بالخطوة السابقة).

7-نكرر العمليات السابقة على أن نصل على المربع في الزاوية الجنوبية الشرقية من الجدول يعني عندما نمرر جميع الكميات المنتجة (استخدمناها كلها) ونشبع جميع الكميات المطلوبة عندها نصل للخطوة التالية بالحل وهي:

8-حساب تكلفة النقل وفق القانون الذي طبقناه عند حساب تكلفة النقل وفق الحل ألأولي بطريقة الزاوية الشمالية الغربية.

$$MINZ = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} C_{ij}X_{ij}$$

* تذكرة: حيث:

C_{ij}: هي تكلفة النقل الموجودة بالمربعات الصغيرة بالجدول.

X_{ij}: هي الكمية المنقولة والتي هي أكبر كمية ممكنة استطعنا تمريرها عند أصغر تكلفة نقل كانت تقابل أكبر الفروق بالأسطر وبالأعمدة.

$i = 1..n$: يعني i هي عدد الأسطر من 1 حتى أخر سطر بالجدول وهو n.

$j = 1..m$: يعني j هي عدد الأعمدة من 1 حتى أخر عمود بالجدول وهو m.

⇐ والآن سنقوم بحل المسألة التي طرحت بالمحاضرة السابقة والي كانت معطياتها هي:

شركة تنتج نوعاً من المنتجات في 3 مصانع وطاقتها الإنتاجية على التوالي هي:

300,500,700

وأنها توزع الإنتاج في 5 أسواق والكميات المطلوبة لديها هي التوالي:

350,300,250,250,250,350

وأن التكاليف هي عبارة عن المصفوفة الآتية:

الأسواق / المصانع	1	2	3	4	5	الكميات المنتجة
1	5	7	9	11	6	300
2	19	8	10	13	5	500
3	4	9	7	6	3	700
الكميات المطلوبة	350	300	250	250	350	1500

المطلوب: حساب تكلفة النقل وفق طريقة فوجل بالأسطر وبالأعمدة.

الحل:

المسألة هنا متوازنة أي:

الكميات المنتجة = الكميات المطلوبة

350+300+250+250+350 = 300+500+700

1500 = 1500

والآن علينا بأول خطوة ملئ مربعات خانات الجدول ووضع التكاليف السابقة ضمن مربعات صغيرة. والآن سنقوم بوضع الجدول النهائي والشرح عليه كيف تم الحل كالتالي:

الأسواق / المصانع	1	2	3	4	5	الكميات المنتجة	الفروق بالأسطر
1	5	7 300	9	11	6	300	1 1 2 2
2	19	8	10 150	13	5 350	150 ~~500~~	3 3 2 2
3	4 350	9	7 100	6 250	3	~~450~~ 100 ~~700~~	1 1 3 2
الكمية المطلوبة	350	300	250	250	350	1500	
الفروق بالأعمدة	1 1 1	1 1 1 1	2 2 2 2		2 2		

شرح الجدول النهائي بالحل وفق طريقة فوجل بالأسطر وبالأعمدة:

الأسواق / المصانع	1	2	3	4	5	الكميات المنتجة	الفروق بالأسطر
1	5	7 300	9	11	6	300	1 1 2 2
2	19	8	10 150	13	5 350	150 ~~500~~	3 3 2 2
3	4 350	9	7 100	6 250	3	~~450~~ 100 ~~700~~	1 1 3 2
الكمية المطلوبة	350	300	250	250	350	1500	
الفروق بالأعمدة	1 1 1	1 1 1 1	2 2 2 2	5	2 2		

شرح الجدول النهائي بالحل وفق طريقة فوجل بالأسطر وبالأعمدة:

أولاً: قمنا بملئ الجدول وفق المعطيات أي قمنا بوضع الكمية المطلوبة مقابل سوق ضمن الأعمدة فالسوق 1 كميته المطلوبة 350 وهكذا بالنسبة لبقية الأسواق (الطلب) وكذلك وضعنا الكمية المنتجة مقابل كل مصنع ضمن الأسطر فالمصنع 1 كميته المنتجة 300 وهكذا بالنسبة لبقية المصانع (العرض).

توضيح: التكاليف الموجودة ضمن المربعات الصغيرة هي عبارة عن تكلفة نقل المنتج من المصنع الذي تقع التكلفة في عموده مثل:

التكلفة 10 هي تكلفة نقل المنتج من المصنع 2 إلى السوق 3 وهكذا من أجل بقية التكاليف.

ونحسب الفروق بين أقل كلفتين بالأسطر وبالأعمدة فتكون الفروق **بالخطوة الأولى** كالتالي:

الفروق بالأسطر:

الفرق بالسطر 1 $= 6 - 5 = 1$

الفرق بالسطر 2 $= 8 - 5 = 3$

الفرق بالسطر 3 $= 4 - 3 = 1$

الفروق بالأعمدة:

الفرق بالعمود 1 = 5 – 4 = 1

الفرق بالعمود 2 = 8 – 7 = 1

الفرق بالعمود 3 = 9 – 7 = 2

الفرق بالعمود 4 = 11 – 6 = 5

الفرق بالسطر 5 = 5 – 3 = 2

ثانياً: نختار أكبر هذه الفروق بالأسطر وبالأعمدة وأكبر الفروق هو الفرق 5 والآن.نحدد السطر أو العمود الذي يقابل أكبر فرق وهنا أكبر الفروق (5) يقع في العمود (4) "السوق 4"

ثالثاً: والآن نحدد أقل تكلفة نقل في السطر أو العمود الذي يقابل أكبر الفروق وهنا أكبر الفروق (5) يقع في العمود (4) وعندها نكون أقل تكلفة في العمود (4) المقابل لأكبر الفروق (5) هي التكلفة 6 الموجودة ضمن المربع الصغير.

رابعاً: نحدد أكبر كمية ممكنة نستطيع تمريرها للمربع ذو التكلفة الأقل 6 التي حددناها بالخطوة السابقة.

1-تقع التكلفة الأقل 6 بالعمود (4) أي السوق 4 الذي كميته المطلوبة هي 250.

2-تقع التكلفة الأقل 6 بالسطر (3) أي المصنع (3) الذي كميته المنتجة هي 700.

خامساً: إذاً نحن بحالة: الكمية المنتجة (700) > (250) الكمية المطلوبة

نمرر أكبر كمية ممكنة وهي هنا الكمية المطلوبة (250) عند المربع ذو التكلفة الأقل 6 التي حددناها مسبقاً

ونشطب عمود السوق (4) لأننا أشبعنا كل حاجته من الكمية المطلوبة وأصحت الكمية المنتجة لدى المصنع (3) هي:

450 = الكمية التي قمنا بتمريرها (250) – (700) الكمية المنتجة

سادساً: ملئنا المربع ذو التكلفة الأقل 6 التي تقع بسطر المصنع (3) وبعمود السوق (4) بالكمية المنقولة التي استطعنا تمريرها وهي 250

سابعاً: الآن نعيد تكرار العمليات السابقة ونحسب الفروق بالأسطر وبالأعمدة من جديد: إذا:

أولاً: فتكون الفروق بالأسطر وبالأعمدة بالخطوة الثانية هي:

الفروق بالأسطر:

الفرق بالسطر 1 = 6 − 5 = 1

الفرق بالسطر 2 = 8 − 5 = 3

الفرق بالسطر 3 = 4 − 3 = 1

الفروق بالأعمدة:

الفرق بالعمود 1 = 5 − 4 = 1

الفرق بالعمود 2 = 8 − 7 = 1

الفرق بالعمود 3 = 9 − 7 = 2

الفرق بالعمود 5 = 5 − 3 = 2

انتباه: علماً أنه لم ننظر للعمود (4) عندما حسبنا الفروق بالخطوة الثانية.

ثانياً: نختار أكبر الفروق بالأسطر وبالأعمدة الذي حسبناهم بالخطوة السابقة وهو الفرق 3 أكبر الفروق بالأسطر وبالأعمدة وهو يقع بالسطر (2) (بالمصنع 2).

ثالثاً: نحدد أقل تكلفة نقل في السطر أو العمود الذي يقابل أكبر الفروق الذي هو الفرق 3 وطالما يقع في سطر المصنع (2) عندها تكون أقل تكلفة في السطر (2) هي التكلفة 5 الموجودة ضمن المربع الصغير.

رابعاً: نحدد أكبر كمية ممكنة نستطيع تمريرها في المربع ذو التكلفة الأقل 5 التي حددناها سابقاً.

1) تقع التكلفة الأقل 5 بسطر المصنع 2 الذي كميته المنتجة هي 500

2) تقع التكلفة الأقل 5 بعمود السوق 5 الذي كميته المطلوبة هي 350

خامساً: إذاً نحن بحالة:

الكمية المنتجة (500) > (350) الكمية المطلوبة

نمرر أكبر كمية ممكنة وهي هنا الكمية المطلوبة (350) لأنه الأصغر بحيث نمررها عند المربع ذو التكلفة الأقل 5 التي حددناها سابقاً.

ونشطب عمود السوق 5 لأننا أشبعنا كامل حاجته من الكمية المطلوبة أي مررنا له كل ما يحتاجه وهو 350 وتصبح الكمية المنتجة لدى المصنع 2 هي:

150 = الكمية التي مررناها (350) − (500) الكمية المنتجة

150 الكمية المنتجة التي بقيت لدى المصنع 2

سادساً: ملئنا المربع ذو التكلفة الأقل 5 التي تقع بسطر المصنع (2) وبعمود السوق (5) بالكمية المنقولة التي استطعنا تمريرها وهي 350

سابعاً: الآن نعيد تكرار العمليات السابقة ونحسب الفروق بالأسطر وبالأعمدة من جديد: إذاً

أولاً: فتكون الفروق بالأسطر وبالأعمدة بالخطوة الثالثة هي:

الفروق بالأسطر:		
الفرق بالسطر 2 = 10 − 8 = 2	الفرق بالسطر 1 = 7 − 5 = 2	
الفرق بالسطر 3 = 7 − 4 = 3		

الفروق بالأعمدة:		
الفرق بالعمود 2 = 8 − 7 = 1	الفرق بالعمود 1 = 5 − 4 = 1	
الفرق بالعمود 3 = 9 − 7 = 2		

ملاحظة: علماً أننا اعتبرنا العمود 4 والعمود 5 غير موجودين عندما حسبنا الفروق من جديد لأننا شطبناهم.

ثانياً: نختار أكبر هذه الفروق بالأسطر وبالأعمدة وهو الفرق 3 وهو يقع بسطر المصنع 3 (السطر 3).

ثالثاً: نحدد أقل تكلفة نقل في السطر أو العمود الذي يقابل أكبر الفروق:

وهنا السطر (3) يقابل أكبر الفروق الذي هو 3 وفي السطر (3) أصغر تكلفة موجودة ضمن المربعات الصغيرة هي التكلفة 4 علماً أننا لم ننظر للعمودين 4 و5 لأننا شطبناهم. علماً أن التكاليف موجودة ضمن المربعات الصغيرة بالجدول.

رابعاً: نحدد سطر وعمود أقل تكلفة التي حددناها بالمرحلة السابقة التي هي 4

وهي موجودة بسطر المصنع (3) الذي كميته المنتجة الباقية هي 450 وموجودة بعمود السوق (1) الذي كميته المطلوبة هي 350

خامساً: إذاً نحن بالة: الكمية المنتجة (450) > الكمية المطلوبة (350)

⇦نمرر أكبر كمية ممكنة وهي هنا الكمية المطلوبة (350) لأنه الأصغر عند المربع ذو التكلفة الأقل 4 التي حددناها سابقاً.

ونشطب عمود السوق (1) لأننا أشبعنا كل حاجته من الكمية المطلوبة ومررناها له بالكامل وأصبحت الكمية المنتجة لدى المصنع (3) هي:

الكمية المنتجة الباقية لدى المصنع 3 (450) – (350) الكمية المطلوبة بالسوق 1 = 100

100 الكمية المنتجة التي بقيت لدى المصنع 3

سادساً: ملئنا المربع ذو التكلفة الأقل 4 التي تقع بسطر المصنع (3) وبعمود السوق (1) بالكمية المنقولة التي استطعنا تمريرها وهي 350

سابعاً: الآن نعيد تكرار العمليات السابقة ونحسب الفروق بالأسطر وبالأعمدة من جديد.

إذاً: أولاً فتكون الفروق بالأسطر وبالأعمدة بالخطوة الرابعة هي:

الفروق بالأسطر:		
الفرق بالسطر 2 = 10 – 8 = 2	الفرق بالسطر 1 = 9 – 7 = 2	
الفرق بالسطر 3 = 9 – 7 = 2		

الفروق بالأعمدة:	
الفرق بالعمود 3 = 9 – 7 = 2	الفرق بالعمود 2 = 8 – 7 = 1

❖ علماً أننا لا نأخذ بعين الاعتبار الأعمدة 1 و4 و5 لأننا شطبناهم.

ثانياً: نختار أكبر هذه الفروق هو 2 ولكن عندنا الفرق متشابه بالأسطر 1 و2 و3 والعمود 3 ⇦فنختار أي فرق نريد ولنفترض أنه اخترنا أن نمرر أكبر كمية ممكنة عند التكلفة 7 الموجودة بسطر المصنع (3) وبعمود السوق (3).

لماذا اخترنا أن نمرر أكبر كمية ممكنة عند التكلفة 7؟

لأنه لو قارنا بين الفروق السابقة أصغر تكلفة فيها هي التكلفة 7 التي يكون أكبر فرق بالأسطر وبالأعمدة عندها.

أي: أكبر الفروق بين أقل تكلفتين بالأسطر وبالأعمدة هو 2

الفرق بالسطر 1 = 9 – 7 = 2

2 = 8 – 10= الفرق بالسطر 2

2 = 7 – 9 = الفرق بالسطر 3

2 = 7 – 9 = الفرق بالعمود 3

⇦أصغر التكاليف هي التكلفة 7

ولتكن التكلفة 7 الموجودة بسطر المصنع (1) وعمود السوق (2).

ثالثاً: وطالما أن التكلفة 7 التي أخذناها موجودة بسطر المصنع 1 الذي كميته المنتجة التي بقيت هي 300 وموجودة بعمود السوق 2 الذي كميته المطلوبة هي 300 إذاً نحن بحالة:

الكمية المنتجة (300) = (300) الكمية المطلوبة

⇦نمرر أكبر كمية ممكنة وهي هنا الكمية المنتجة (300 التي نفسها الكمية المطلوبة لأنهم متساويين عند المربع ذو التكلفة الأقل 7 التي حددناها مسبقاً، ونشطب سطر المصنع (1) لأننا مررنا (استخدمنا) كل الكمية المنتجة التي لديه، ونشطب عمود السوق (2) لأننا أشبعنا كل الكمية المنتجة لديه.

سادساً: ملئنا المربع ذو التكلفة الأقل 7 التي تقع بسطر المصنع (1) وعمود السوق (2) بالكمية المنقولة التي استطعنا تمريرها وهي 300

والآن نلاحظ أنه لم يتبقى لدي سوى الكمية المطلوبة الموجودة بالسوق 3 والتي هي 250 لم نقم بإشباعها بعد ولدينا الكميات المنتجة التي بقيت والتي هي بالمصنع (2) بقي 150 وبالمصنع (3) بقي 100.

إذاً نقوم بنقل الكميات المنتجة التي بقيت إلى الأسواق التي لم نقم بإشباع الكمية المطلوبة لديها في المربعات التي لم تشطب بعد وهي عند التكلفة 10 بالعمود (3) وبالسوق (2).

وعند التكلفة 7 بالعمود (3) وبالسوق (2)

وهذا سيتوضح لكم في حال رسمتوا الجدول دون الحل عليه وطبقتوا الشرح الموجود عندها سيتبين معكم المربعات التي بقيت غير مشطوبة لا من جهة الأسطر ولا من جهة الأعمدة بعد شطب الأعمدة 5,4,2,1 والسطر 1 بالخطوات السابقة بالحل.

والآن طالما أن المربع الذي لم يشطب بعد وهو:

عند التكلفة 10 موجود بسطر المصنع 2 وبعمود السوق 3.

نحن بحالة: بالمصنع (2) بالكمية المنتجة الباقية (150) < (250) الكمية المطلوبة بالسوق (3)

نمرر أكبر كمية ممكنة وهي هنا 150 (الكمية المنتجة) لأنه الأصغر عند المربع ذو التكلفة 10 ونسجل عنده 150.

إذا استخدمنا كامل الكمية المنتجة لدى المصنع (2) وبقي بالسوق (3) كمية مطلوبة هي:

100 = (الكمية المنقولة) 150 – 250

وعند التكلفة 7 موجود بسطر المصنع (3) وعمود السوق (3)

نحن بحالة: بالمصنع (3) الكمية المنتجة الباقية (100) = (100) الكمية المطلوبة الباقية بالسوق (3)

ملاحظة: والآن وطالما أنه كان لم يعد لدينا كميات منتجة ولا كميات مطلوبة فسواءً شطبنا العمود 2 والأسطر 3,2 أم لم نشطبهم لا يؤثر.

والآن لنحسب تكلفة النقل كالتالي:

والتي تساوي مجموع (الكميات المنقولة × التكاليف) أي:

$$MINZ = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} C_{ij}X_{ij}$$

$$= 250 \times 6 + 350 \times 5 + 350 \times 4 + 300 \times 7 + 150 \times 10 + 100 \times 7$$

$$= 8950$$

هذه هي قيمة الحل وفقاً لهذه الطريقة ولكن كل هذه الحلول ليست حلولاً مثلى وكلها حلول أولية.

عرض وتعريف

إن مشكلة التخصيص والتعيين ما هي إلا فرع خاص جداً من مشكلة النقل التي تعد تطبيقاً أساسياً للبرمجة الخطية ، هذه المشكلة تتعلق بتعيين عدد من العمال على عدد من الآلات لإنجاز الوظائف الإنتاجية، وذلك عن طريق تعيين عامل واحد فقط على كل آله، هذا التعيين يتطلب تساوي عدد العمال مع عدد الآلات ، إن حل مشكلة التعيين هو عبارة عن إيجاد الطريقة المثلة لتوزيع العمال على الآلات بشكل يحقق تخفيض تكاليف الإنتاج إلى أدنى حد ممكن .

حتى يمكن حل مشكلة التعيين فإنه لا بد من حقيق مجموعة من الشروط، هي التالية:

١ ــ إن عدد العمال يجب أن يساوي تماماً عدد الآلات.

٢ ــ إن كل عامل يجب أن يعمل على آلة واحدة فقط.

٣ ــ يمكن استخدام دالة هدف واحدة للتقييم، ويكون هدف هذه الدالة تخفيض تكاليف الإنتاج.

عند توفر هذه الشروط الثلاثة فإنه يمكن حل مشكلة التعيين بإحدى الطريقتين :

١ ــ طريقة التراتيب .

2– طريقة الحل المباشر: سنتطرق إلى طريقة الحل المباشر فقط.

طريقة الحل المباشر

حسب هذه الطريقة فإن الوصول إلى أفضل توزيع على الآلات يتطلب تحديد أفضل خلية في كل سطر وكل عمود ، عندما يكون الجدول يتضمن التكاليف، فإن أفضل خلية هي تلك التي تحتوي على أقل كلفة تشغيل، فإذا قمنا بطرح تكلفة هذه الخلية من تكاليف السطر الذي يحتوي على هذه الخلية وبالوقت نفسه نقوم بطرح تكلفة التشغيل الدنيا لكل عمود من باقي التكاليف؛ فإن هذه العملية تعطينا جدولاً جديداً يكون فيه كل سطر وكل عمود يحتوي على الأقل على صفر ، هذه الطريقة في الحل تتطلب منا المرور بالخطوات التالية :

١ ـــ بالنسبة لكل سطر نطرح أقل رقم من باقي أرقام السطر، مما يجعل كل سطر يحتوي على الأقل على صفر .

٢ ـــ بالنسبة لكل عمود أيضاً يقوم بطرح أقل رقم من باقي أرقام العمود بشكل يصبح كل عمود يحتوي على الأقل على صفر .

٣ ـــ نقوم برسم مجموعة من الخطوط المستقيمة الأفقية والعمودية .

٤ ـــ إذا كان عدد الخطوط المستقيمة أقل من عدد العمال أو عدد الآلات فإننا نقوم بأخذ أقل رقم من الأرقام غير المعطاة، ثم نقوم بطرحه من باقي الأرقام وأضافته إلى الأرقام التي تشكل تقاطع المستقيمات .

٥ ـــ إذا أصبح عدد الخطوط يساوي عدد العمال أو عدد الآلات، فإننا نختار السطر الذي يحتوي على صفر واحد، ثم بعد ذلك نحذف السطر والعمود التي يكون الصفر تقاطعها، ثم تكرر العملية حتى يتم توزيع جميع العمال على جميع الآلات، وهذا يعطينا التوزيع الأمثل للعمال على الآلات داخل المصنع .

لو افترضنا أنه لدينا أربعة عمال وأربع آلات، وأن تكاليف التشغيل تأخذ شكل الجدول التالي :

آلات / عمال	1	2	3	4
A	70	50	50	60
B	30	30	90	110
C	30	10	20	60
D	50	20	70	60

في هذا الجدول نلاحظ أن أقل قيمة في السطر الأول هي 50 وفي السطر الثاني هي 30 وفي السطر الثالث 10 وفي السطر الرابع هي 20 لو قمنا بطرح هذه القيم من باقي قيم الأسطر لحصلنا على الجدول التالي :

آلات / عمال	1	2	3	4
A	20	0	0	10
B	0	0	60	80
C	20	0	10	50
D	30	0	50	40

من هذا الجدول نلاحظ أن العمود الرابع لا يحتوي على صفر، وأن أقل قيمة في هذا العمود هي 10 . بطرح هذه القيمة من باقي قيم العمود و نحصل على الجدول التالي :

آلات / عمال	1	2	3	4
A	20	0	0	0
B	0	0	60	70
C	20	0	10	40
D	30	0	50	30

هذا الجدول يحتوي على الأقل صفر في كل عمود وكل سطر وبرسم الخطوط المستقيمة التي تصل بين الأصفار نحصل على الجدول التالي :

آلات / عمال	1	2	3	4
A	20	0	0	0
B	0	0	60	70
C	20	0	10	40
D	30	0	50	30

من دراسة هذا الجدول نلاحظ أن عدد الخطوط المستقيمة هو ثلاثة، أي أقل من عدد العمال والآلات وهذا يقودنا إلى القول إنه لا يوجد حل أمثل .

بعد دراسة الأرقام غير المغطاة نلاحظ أن قيمة هي 10 ، بطرح هذه القيمة من القيم والمغطاة وإضافتها إلى أرقام الخانات التي تكون تقاطع المستقيمات نحصل على الجدول التالي:

آلات / عمال	1	2	3	4
A	20	10	0	0
B	0	10	60	70
C	10	0	0	30
D	20	0	40	20

برسم الخطوط المستقيمة نحصل على الجدول التالي :

آلات / عمال	1	2	3	4
A	~~20~~	10	0	0
B	~~0~~	10	60	70
C	10	0	0	30
D	20	0	40	20

من هذا الجدول نلاحظ أن عدد الخطوط المستقيمة هي أربع خطوط أي يساوي تماماً عدد العمال وعدد الآلات ، بتحقق هذه المساواة يمكن القول إننا قد توصلنا إلى الحل الأمثل بإجراء الخطوات التالية :

في السطر الرابع يوجد صفر واحد فقط، ويشغل ملتقى العمود الثاني مع السطر الرابع، وهذا ما يقودنا إلى القول إن العامل يجب أن يعين على الآلة الثانية ، نقوم بحذف العمود الثاني والسطر الرابع نحصل على الجدول التالي :

	آلات / عمال	1	3	4
	A	~~20~~	~~0~~	~~0~~
	B	~~0~~	~~60~~	~~70~~
	D	10	0	30

في هذا الجدول نلاحظ أن السطرين الثاني والثالث يحتوي كل منهما على صفر واحد ، هذه النتيجة تقودنا إلى القول بضرورة تعيين العامل B على الآلة الأولى والعامل D على الآلة الثانية والعامل A على الآلة الربعة ، بعد ذلك يمكن القول إن التخصيص الأمثل يأخذ شكل الجدول التالي :

العامل	الآلة	تكاليف التشغيل
A	4	60
B	1	30
D	3	20
C	2	20

أي إن الحد الأدنى لتكاليف التشغيل هو مساو إلى ما يلي :

$$\text{Min } C = 60 + 30 + 20 + 20 = 130$$

وفي النهاية لا بد من الإشارة إلى عدة حقائق وهي :

١ ــ يمكن أن يستخدم الأسلوب في حالة تنظيم الربح .

٢ ــ يمكن أن يستخدم الأسلوب نفسه في حال عدم تساوي عدد العمال مع عدد الآلات، وذلك بإضافة متغيرات (عامل ــ آلة) وهمية بتكاليف أو عائد صفر في الجدول الأصلي ، وفي هذه الحالة سوف ينطوي الحل الأمثل على آلة عاطل أو عامل لا يعمل.

٣ ــ في حالة المواقف الأكثر تعقيد يمكن استخدام طريقة النقل أو البرمجة الخطية للوصول إلى الحل الامثل .

٤ ــ في حالة عدم إمكانية تخصيص عامل معين على آلة معينة لأسباب تقنية، فإنه يتم وضع تكاليف مرتفعة في الخلية التي هي التقاء سطر العامل مع عمود الآلة.

مسألة ثانية: ترغب إحدى المعامل بتخصيص ثلاثة أجهزة لانجاز ثلاثة مهمات والجدول التالي يمثل التكاليف المتعلقة بانجاز كل مهمة عن طريق أي من الأجهزة الثلاث.

مهمات / أجهزة	1	2	3
س	26	18	24
ص	20	14	18
ع	18	12	20

المطلوب ايجاد التخصيص الأمثل (الوصول إلى الحل الأمثل) بأدنى تكلفة.

الحل:

الخطوة الأولى طرح أقل تكلفة من كل سطر ومن كل عمود فنحصل على الجدول التالي:

مهمات / أجهزة	1	2	3	أقل تكلفة في السطر
س	8	0	6	18
ص	6	0	4	14
ع	6	0	8	12

أقل التكاليف في الأعمدة

مهمات / أجهزة	**1**	**2**	**3**
س	2	0	2
ص	0	0	0
ع	0	0	4
أقل تكلفة في العمود	6	0	4

نقوم بعد الاصفار في كل سطر وفي كل عمود ونأخذ عدد الاصفار الأكثر ونشطب

مهمات / أجهزة	1	2	3
س	2	0	2
ص	0	0	0
ع	0	0	4

تم تشطيب ثلاثة خطوط والمسألة لدينا ثلاثة آلات وثلاثة عمال أي الحل أمثل

ننتقل للجدول التالي بدون التشطيب لإجراء عملية التخصيص

مهمات / أجهزة	1	2	3
س	2	0	2
ص	0	0	0
ع	0	0	4

عملية التخصيص: انظر إلى السطر أو العمود الذي يكون فيه صفر لوحده

في السطر الأول يوجد صفر واحد أضعه في دائرة وأشطب بقية الأصفار في عموده وفي العمود الثالث اضع الصفر في دائرة واشطب بقية الأصفار التي معه بالسطر. وبقي في العمود الأول صفر أضعه ضمن دائرة وبذلك فإن التخصيص بأقل التكاليف هو: س/2 بتكلفة /18/

ص/3 بتكلفة /18/

ع/1 بتكلفة /18/

فتكون التكلفة الإجمالية هي: 18+18+18=54 وحدة نقدية.

مسألة ثالثة: ليكن لدينا أربعة آلات سيتم توزيعها على أربعة عمال ومصفوفة تكاليف التشغيل كما يلي:

آلات / عمال	1	2	3	4
A	70	50	50	60
B	30	30	90	110

C	30	10	20	60
D	50	20	70	60

المطلوب اوجد التخصيص الامثل للعمال على الآلات؟ (يترك الحل للطالب)

تطبيقات عملية

شركة ما لديها ثلاثة مصانع حيث يبلغ إنتاج المصنع الأول/300/ وحدة منتجة وإنتاج المصنع الثاني /500/ وحدة منتجة، وإنتاج المصنع الثالث/700/ وحدة منتجة. وتوزع منتجاتها في أربعة أسواق حيث تبلغ كميات الطلب لهذه الأسواق على التوالي: 350 وحدة منتجة، 400 وحدة منتجة،300 وحدة منتجة، 450 وحدة منتجة وفق مصفوفة التكاليف كما يلي:

الكميات المنتجة	4	3	2	1	الاسواق/المصانع
300	4	10	7	5	1
500	2	7	8	9	2
700	11	5	6	4	3
	450	300	400	350	الكميات المطلوبة

المطلوب: حساب تكلفة النقل الأولي وفق أسلوب الزاوية الشمالية الغربية؟

الحل: المسألة متوازنة لأن الكميات المطلوبة 350+400+300+450=1500 تساوي الكميات المنتجة

1500=700+500+300

نبدأ بالخلية الناجمة عن تقاطع السطر الأول بالعمود الأول(الزاوية الشمالية الغربية) والتي تكلفتها/5/يحتاج السوق الأول الى 350 وحدة وانتاج المصنع الاول 300 وحدة يتم تمرير هذه الكمية الى هذه الخلية وتصبح كمية السوق الأول 50 وحدة، وويشطب الشطر الأول لأن تم تمرير كامل انتاج المصنع الاول ، ننتقل إلى الزاوية (الخلية) الناجمة عن تقاطع سطر المصنع الثاني مع عمود السوق الأول والتي تكلفتها/9/ الذي يحتاج 50 وحدة يتم تمريرها من انتاج المصنع الثاني ويتبقى لدى هذا المصنع 450 وحدة يشطب العمود الاول لآن السوق الاول اشبع بكامل كميته المطلوبة، ويشبع السوق الثاني ويشطب عموده، وهكذا.

تصبح الخلايا المشبعة كما في الجدول التالي:

الكميات المنتجة	4	3	2	1	الاسواق/المصانع
300	4	10	7	5 300	1
500	2	500 7	400 8	9 50	2
700	11 450	250 5	6	4	3

	450	300	400	350	الكميات المطلوبة

الكلفة الاجمالية=$minz = \sum\sum C_{ij}X_{ij}$

Minz=300*5+9*50+400*8+500*7+5*250+11*450=11700

المسألة الثانية: شركة ما لديها مصنعين حيث يبلغ إنتاج المصنع الأول/600/ وحدة منتجة وإنتاج المصنع الثاني /400/ وحدة منتجة، وتوزع منتجاتها في أربعة أسواق حيث تبلغ كميات الطلب لهذه الأسواق على التوالي: 200 وحدة منتجة، 250 وحدة منتجة، 300 وحدة منتجة، 250 وحدة منتجة وفق مصفوفة التكاليف كما يلي:

الكميات المنتجة	4	3	2	1	الاسواق/المصانع
600	5	10	٢	٣	1
400	٢	٧	٨	٧	2
	250	300	250	200	الكميات المطلوبة

المطلوب: حساب تكلفة النقل الأولي وفق أسلوب تقريب فوجل بالأسطر والأعمدة؟

الحل: المسألة متوازنة الكمية المطلوبة (200+250+300+250=1000)= الكمية المنتجة(400+600=1000)

نوجد الفرق بين أقل تكلفتين في كل سطر وعمود فنجد السطر الأول /1/ والسطر الثاني الفرق /5/ بينما الفرق للعمود الأول /4/ وللعمود الثاني/6/ وللعمود الثالث /3/ وللعمود الرابع/3/ اكبر هذه الفروق للأسطر والأعمدة هو الفرق /6/ في العمود الثاني نشبع طلب السوق الثاني البالغ 250 من منتجات المصنع الأول حيث كمية إنتاجه هي 600 ويتبقى منها 350

نكرر الخطوة السابقة ونوجد الفروق للأسطر والأعمدة بعد حذف العمود الثاني الذي تم إشباع طلبه.

فرق السطر			الكميات المنتجة	4	3	2	1	الاسواق/المصانع
7	2	1	~~350~~ 600 ~~150~~	5	10 150	2 250	٣ 200	1
0	5	5	~~400~~ ~~150~~	٢ 250	٧ 150	٨	٧	2
				250	300	250	200	الكميات المطلوبة
				3	3	6	4	فرق العمود
				3	3	-	4	
				-	3	-	4	

$$minz = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{4} c_{ij}x_{ij}$$

$$minz = 200 \times 3 + 2 \times 250 + 10 \times 150 + 7 \times 150 + 2 \times 250 = 4150$$

المسألة الثالثة شركة ما لديها مصنعين حيث يبلغ إنتاج المصنع الأول/600/ وحدة منتجة وإنتاج المصنع الثاني /400/ وحدة منتجة، وتوزع منتجاتها في أربعة أسواق حيث تبلغ كميات الطلب لهذه الأسواق على التوالي: 200 وحدة منتجة، 250 وحدة منتجة،300 وحدة منتجة، 250 وحدة منتجة وفق مصفوفة التكاليف كما يلي:

الاسواق/المصانع	1	2	3	4	الكميات المنتجة
1	3	2	10	5	600
2	7	8	7	2	400
الكميات المطلوبة	200	250	300	250	

المطلوب: حساب تكلفة النقل الأولي وفق أسلوب التكلفة الأقل؟

المسألة متوازنة لأن الكميات المطلوبة (1000=250+300+250+200) تساوي الكميات المنتجة (1000=600+400)

نختار أقل تكلفة في الجدول وهي /2/ في السوق الرابع والسوق الثاني نشبع كل السوق بحاجته فنضع بالخلية التي تكلفتها/2/ حاجة السوق الثاني 250 وحدة وتصبح الكمية المنتجة في المصنع الأول /350/ وحدة ونشبع حاجة السوق الرابع من انتاج المصنع الثاني بـــ 250 وحدة وتصبح الكمية المنتجة في المصنع الثاني هي 150 وحدة. ونحذف العمود الثاني والعمود الرابع ونبحث عن التكلفة الأقل من جديد وهكذا نكرر الخطوات حتى نشبع حاجة كافة الأسواقويصبح الجدول بعد الاشباع كما يلي

الاسواق/المصانع	1	2	3	4	الكميات المنتجة
1	200 3	250 2	150 10	5	600
2	7	8	150 7	250 2	400
الكميات المطلوبة	200	250	300	250	

الكلفة الاجمالية=$minz = \sum\sum C_{ij}X_{ij}$

Minz=3*200+2*250+10*150+7*150+250*2=4150

المسألة الرابعة

لدينا ثلاثة عمال وثلاث آلات وتكاليف التشغيل موضحة كما يلي:

آلات / عمال	1	2	3

A	50	20	40
B	30	60	30
C	70	90	80

المطلوب أوجد التوزيع الأمثل للعمال على هذه الآلات بالحد الأدنى من تكاليف التشغيل، أوجد هذا الحد؟

الحل:

نبحث في كل سطر عن أقل قيمة للتكلفة ونطرحها من باقي القيم في السطر المختارة منه بحيث نحصل على صفر في كل سطر. ونطبق ذلك على الأعمدة أيضاً بحيث نحصل في كل سطر وفي كل عمود على صفر. مثلاً في السطر الاول اقل تكلفة 20 وفي الثاني /30/ وفي الثالث 70

فنحصل على الجدول التالي

عمال \ آلات	1	2	3
A	30	0	20
B	0	30	0
C	0	20	10

نجد من الجدول أعلاه أن ه لدينا في كل سطر وكل عمود صفر واحد على الاقل. نصل بين الاصفار بخطوط مستقيمة كما يلي

عمال \ آلات	1	2	3
A	30	0	20
B	0	30	0
C	0	20	10

عدد الخطوط المستقيمة يساوي عدد الالات ويساوي عدد العمال فالحل أمثل

السطر الأول يحوي صفر واحد فقط لذلك يخصص العامل A على الالة الثانية والسطر الثالث يحوي صفر واحد فيخصص العامل C على الالة الاولى، وبالتالي العاملB على الالة الثالثة.

العامل	الالة	التكلفة
A	2	20
B	3	30
C	1	70

أو الحد الادنى للتكلفة Min z= 20+30+70=120