وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الرياضيات /٣/


وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

السنة : الثانية

القسم: العلوم الأساسية

الاختصاص: جميع الاختصاصات


وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

منشورات جامعة دمشق
كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية

الرياضيات /٣/

الدكتور
منير الترك
أستاذ مساعد في قسم العلوم الأساسية

الدكتور
إبراهيم عبدو كيالي
مدرس في قسم العلوم الأساسية

الدكتور
حسام حمامة كمرجي
مدرس في قسم العلوم الأساسية

جامعة
دمشق

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الفهرس

المقدمة ١٥

١. جمل الإحداثيات في المستوي والفضاء ١٩

١.١ إحداثيات نقطة ما في المستوي ١٩

٢.١ الإحداثيات والمناحي في الفضاء ٢١

٣.١ تعيين نقطة في الفضاء ٢٢

٤.١ البعد بين نقطتين في الفضاء ٢٤

٥.١ إحداثيات نقطة تقسم قطعة مستقيمة بنسبة معلومة: ٢٥

٦.١ الإحداثيات الأسطوانية: ٢٦

٧.١ الإحداثيات الكروية: ٢٧

٨.١ الوسطاء الموجهة وجيوب تمام التوجيه لمنحًى في الفضاء ٢٩

أولاً: وسطاء التوجيه: ٢٩

ثانياً: جيوب تمام التوجيه: ٣٠

٩.١ العلاقة بين وسطاء توجيه وجيوب تمام توجيه منحًى معلوم: ٣١

١٠.١ الزاوية بين مَنْحيين (أو مستقيمين) ٣٢

١١.١ العمليات الأساسية على الأشعة: ٣٣

أولاً: الجداء السلمي (الداخلي) لشعاعين ٣٣

ثانياً: الجداء الخارجي لشعاعين (أو الجداء الشعاعي) ٣٥

ثالثاً: الجداء المختلط لثلاث أشعة: ٣٧

تمارين غير محلولة ٤٠

٢. المستوي في الفضاء ٤٥

١.٢ تعريف المستوي في الفضاء ٤٥
٢.٢ معادلة مستو يمر من نقطة معلومة ويعامد شعاعاً معلوماً ٤٥
٣.٢ حالات خاصة لمعادلة مستوٍ ٤٦
٤.٢ معادلة مستوٍ مار من ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة: ٤٨
٥.٢ معادلة مستوٍ يمر من نقطة معلومة ويوازي منحيين مفروضين: ٥٠
٦.٢ الزاوية بين مستويين ٥١
٧.٢ بعد نقطة معلومة عن مستو معلوم: ٥٣
٨.٢ حزمة المستويات ٥٥
تمارين غير محلولة ٥٨
٣. المستقيم في الفضاء ٦٣
١.٣ معادلات المستقيم في الفضاء ٦٣
٢.٣ معادلة مستقيم يمر من نقطتين: ٦٤
٣.٣ معادلة مستقيم معين بتقاطع مستويين معلومين: ٦٦
٤.٣ الزاوية بين مستقمين في الفضاء ٦٨
٥.٣ زاوية مستقيم مع مستوٍ ٦٩
٦.٣ بعد نقطة عن مستقيم ٧٠
٧.٣ تقاطع مستقيم مع مستوٍ ٧٢
٨.٣ طول مسقط قطعة مستقيمة على مستقيم معلوم: ٧٥
٩.٣ أقصر بعد بين مستقيمين: ٧٦
١٠.٣ شرط وقوع مستقيمين في مستوٍ واحد: ٧٨
١١.٤ التناظر بالنسبة إلى مستوٍ ٨٠
١٢.٣ التناظر بالنسبة إلى مستقيم: ٨١

تمارين غير محلولة **٨٤**

٤. السطوح والمنحنيات في الفضاء **٨٩**

٤.١ تعريف السطح: ٨٩

٤.٢ المعادلة العامة لسطوح الدرجة الثانية: ٨٩

٤.٣ مراكز التناظر للسطوح من الدرجة الثانية: ٩٠

٤.٤ المخروط الموجه والمخروط المقارب لسطح من الدرجة الثانية: ٩٣

٤.٥ الأشكال المختلفة للسطوح من الدرجة الثانية ٩٥

٤.٥.١ مجسم القطع الناقص ٩٥

٤.٥.٢ مجسم القطع الزائد ٩٨

٤.٦ المخروط من الدرجة الثانية (المخروط التربيعي) ١٠٤

تمارين غير محلولة **١٠٧**

٥. التكاملات المضاعفة **١١١**

٥.١ التكامل الثنائي: ١١١

٥.١.١ حساب التكامل الثنائي: ١١٥

٥.٢ التكاملات الثنائية في الإحداثيات القطبية: ١٢٩

٥.٢.١ المساحة بين منحنيين قطبيين ١٣٤

تمارين (٥-١) **١٣٦**

الإجابات: ١٣٩

تمارين (٥-٢) **١٤٤**

٥.٣ حساب الحجوم ١٥٠

تمارين (٥-٣) **١٥٣**

٤.٥ تغيير الإحداثيات في التكاملات الثنائية ١٥٥
تمارين (٥–٤) **١٦٤**
الإجابات: ١٦٥
٥.٥ التكاملات الثلاثية في $\mathbb{R}3$ ١٦٦
٦.٥ التكامل الثلاثي في الإحداثيات الأسطوانية ١٦٨
١.٦.٥ التكامل الثلاثي هو نهاية ثلاث مجموعات ١٧٠
٧.٥ التكامل الثلاثي في الإحداثيات الكروية ١٧٦
٨.٥ تغيير الإحداثيات في التكاملات الثلاثية ١٨٠
تمارين (٥–٥) **١٨٣**
٦. التكامل السطحي والخطي **١٨٩**
١.٦ تعريف التكامل السطحي وشروط وجوده ١٨٩
٢.٦ حساب التكامل السطحي ١٩١
٣.٦ تعريف التكامل الخطي وشروط وجوده ١٩٤
٤.٦ حساب التكامل الخطي ١٩٧
أمثلة محلولة **٢٠٠**
تمارين غير محلولة **٢١٣**
٧. التحليل الشعاعي **٢١٧**
١.٧ التابع العددي والتابع الشعاعي للموضع: ٢١٧
٢.٧ تدرج تابع عددي والمشتقات الموجهة له: ٢١٨
١.٢.٧ تدرج مجموع وتدرج جداء: ٢٢٠
٢.٢.٧ تأثير $\mathbf{V}$ على تابع للإحداثي الكروي $\mathbf{r}$ فقط ٢٢٠

٣.٧ تفرق ودوران تابع شعاعي للموضع: ٢٢١
٤.٧ المشتقات الشعاعية من المرتبة الثانية: ٢٢١
١.٤.٧ تفرق التدرج أو اللابلاسي: ٢٢١
٢.٤.٧ دوران التدرج: ٢٢٢
٣.٤.٧ تفرق الدوران: ٢٢٣
٤.٤.٧ دوران الدوران (تدرج التفرق) اللابلاسي ٢٢٤
٥.٤.٧ التدرج، التفرق، الدوران، اللابلاسي في الاحداثيات المتعامدة: ٢٢٤
٥.٧ التكاملات الشعاعية ٢٣٣
أولاً- التكاملات الخطية على المنحني الموجه: ٢٣٣
١.٥.٧ التكاملات الخطية على منحني موجه ثلاثة أنواع: ٢٣٣
ثانياً- التكاملات السطحية على سطح موجه: ٢٣٥
٢.٥.٧ التكاملات السطحية على سطح موجه ثلاثة أنواع: ٢٣٦
ثالثاً- نظريات التحويل من تكامل سطحي إلى حجمي وبالعكس: ٢٣٧
النظرية الأولى: نظرية غوص في التفرق: ٢٣٧
النظرية الثانية: في الدوران: ٢٣٧
النظرية الثالثة: في التدرج: ٢٣٧
رابعاً- نظرية ستوكس لتحويل التكامل السطحي إلى خطي وبالعكس: ٢٣٧
خامساً - نظرية غرين العامة (في الفراغ): ٢٤٠
سادساً- علاقة غرين: ٢٤١
٦.٧ تطبيقات التحليل الشعاعي: ٢٤٣
١.٦.٧ معادلات ماكسويل ونتائجها: ٢٤٣
٢.٦.٧ معادلات ماكسويل للحقل الكهرطيسي: ٢٤٤

مسائل غير محلولة ٢٤٧

مسائل إضافية ٢٦٢

٨. الاحتمال والإحصاء ٢٦٩

٨.١ المقدمة ٢٦٩

٨.٢ الإحصاء والإحصاء الوصفي: ٢٦٩

٨.٢.١ تعريف: ٢٦٩

٨.٢.٢ البيانات الإحصائية وطرق عرضها ٢٦٩

٨.٢.٣ مقاييس النزعة المركزية والتشتت: ٢٧٨

٨.٢.٤ معامل الاختلاف ومقاييس الإلتواء والتفلطح: ٢٩٠

٨.٢.٥ المتغير المعياري: ٢٩٥

٨.٢.٦ القاعدة التجريبية (Empirical rule): ٢٩٧

٨.٣ مبادئ الاحتمال (Elements of Probability): ٣٠٠

٨.٣.١ فضاء التجربة (Space of Experiment): ٣٠٠

٨.٣.٢ الحدث: ٣٠١

٨.٣.٣ الدالة الاحتمالية: ٣٠٤

٨.٣.٤ خصائص الاحتمال: ٣٠٨

٨.٣.٥ الاحتمال الشرطي (Conditional Probability): ٣١١

٨.٤ طرائق العدّ: ٣١٧

٨.٤.١ المبدأ الأساسي للعد: Fundamental principle of counting. ٣١٨

٨.٤.٢ التباديل Permutations: ٣١٩

٨.٤.٣ التراتيب (Arrangements): ٣١٩

٨.٤.٤ التوافيق (Combinations): ٣٢٠

٥.٨ المتغير العشوائي ودالة الكثافة random variables & density functions: ٣٢٠
١.٥.٨ تعريف المتغير العشوائي: ٣٢١
٢.٥.٨ التوزيع الاحتمالي (Probability Distribution): ٣٢٣
٣.٥.٨ القيم المميزة للمتغيرات العشوائية: ٣٣٨
٦.٨ بعض التوزيعات الخاصة (Special Distributions) ٣٥٠
١.٦.٨ التوزيع الثنائي (Binomial distribution): ٣٥٠
٢.٦.٨ التوزيع الطبيعي (Normal distribution): ٣٥٣
٧.٨ الانحدار والارتباط البسيطان (Simple Regression Correlation) : .. ٣٥٨
١.٧.٨ الانحدار الخطي البسيط (Simple Regression Line): ٣٦١
٢.٧.٨ الارتباط البسيط ومعامل بيرسون: ٣٦٥
تمارين عامة: **٣٦٨**
٩. أوليات التحليل العددي ٣٨٥
٩.١ تمهيد: ٣٨٥
٢.٩ تحليل الخطأ (Error Analysis): ٣٨٦
٣.٩ حل المعادلة اللاخطية (Sol. of nonlinear Equation): ٣٩٠
١.٣.٩ طريقة النقطة الثابتة: ٣٩٠
٢.٣.٩ طريقة نيوتن رافسون التكرارية: ٣٩٩
٤.٩ حل جمل المعادلات الخطية: ٤٠٣
١.٤.٩ طريقة جاكوبي (Jacobi Iterative Method): ٤٠٦
٢.٤.٩ طريقة غاوس–سيدل التكرارية (Gauss-Seidel M) : ٤١٠
٥.٩ الإستيفاء وتقريب الدوال (Collocation and Interpolations): ٤١٥
١.٥.٩ حدودية لاغرانج للتقريب: ٤١٧

٢.٣.٩ حدودية نيوتن للفروق المتقدمة لاستيفاء وتقريب الدوال: ٤٢١
٦.٩ الطرائق العددية لحل المعادلات التفاضلية: ٤٢٥
١.٦.٩ طريقة المماس (كوشي – أويلر): ٤٢٦
٢.٦.٩ أسلوب القواطع لحل المعادلات التفاضلية ذات المرتبة الثانية: ٤٣٠
٧.٩ الطرائق العددية لحساب المشتق والتكامل: ٤٣٤
١.٧.٩ حساب المشتق: ٤٣٤
٢.٧.٩ حساب التكامل العددي (Numerical Integration): ٤٣٩
تمارين عامة: **٤٤٢**
دليل المصطلحات العلمية **٤٥٣**
المراجع References **٤٦٥**

المقدمة

تم إعداد كتاب الرياضيات (٣) وفق المفردات المقترحة في مجلس قسم العلوم الأساسية في كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية في جامعة دمشق، وذلك لطلاب السنة الثانية للأقسام جميعها، ويتناول هذا الكتاب تسعة فصول رئيسة تعالج الموضوعات الآتية:

١ – جمل الإحداثيات في المستوي والفضاء.

٢ – المستوي ومعادلاته في الفضاء.

٣ – المستقيم ومعادلاته في الفضاء.

٤ – السطوح والمنحنيات ومعادلاتها في الفضاء.

٥ – التكاملات المضاعفة الثنائية والثلاثية.

٦ – التكامل السطحي والخطي.

٧ – التحليل الشعاعي.

٨ – الاحتمال والإحصاء.

٩ – أوليات التحليل العددي.

وهذه الموضوعات مجتمعة ضرورية لتمهد الفهم والاستيعاب لمقرر الرياضيات (٤)، وكذا تعد امتداداً لمقررات الرياضيات في السنوات السابقة لتشكل هذه المقررات تسلسلاً رياضياً منطقياً مترابطاً.

وتم في هذا الكتاب مراعاة دعم كل فكرة نظرية بتطبيق عملي مباشر، وذلك بهدف إغناء الفكرة النظرية وتوضيحها من جهة، وتطويرها وترسيخها في ذهن الطالب من جهة أخرى، حيث أوردنا العديد من الأمثلة خلال عرضنا للمفاهيم النظرية، وأتبعنا كل فصل بتطبيقات وتمارين عديدة يتجلى فيها فهم الطالب للقسم النظري ليرتقي إلى المستوى المنشود.

آملين في الختام أن يكون هذا الكتاب واضحاً وسهلاً، وأن يؤدي الغاية المرجوة من تأليفه، والله ولي التوفيق.

المؤلفون

Damascus University

فهرس الفصل الأول

١. جمل الإحداثيات في المستوي والفضاء

١.١ إحداثيات نقطة ما في المستوي.

٢.١ الإحداثيات والمناحي في الفضاء.

٣.١ تعيين نقطة في الفضاء.

٤.١ البعد بين نقطتين في الفضاء.

٥.١ إحداثيات نقطة تقسم قطعة مستقيمة بنسبة معلومة.

٦.١ الإحداثيات الأسطوانية.

٧.١ الإحداثيات الكروية.

٨.١ الوسطاء الموجهة وجيوب تمام التوجيه لمنحًى في الفضاء.

٩.١ العلاقة بين وسطاء التوجيه وجيوب تمام التوجيه لمنحًى معلوم.

١٠.١ الزاوية بين منحيين (أو مستقيمين).

١١.١ العمليات الأساسية على الأشعة.

تمارين غير محلولة.

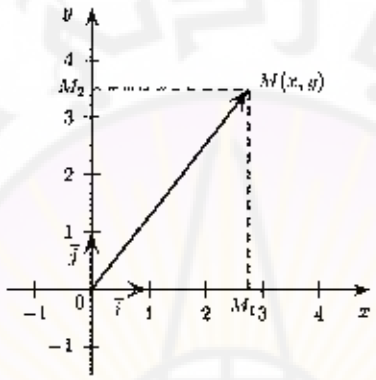
وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الفصل الأول

١. جمل الإحداثيات في المستوي والفضاء

١.١ إحداثيات نقطة ما في المستوي

لتكن oxy دالة جملة محاور إحداثية متعامدة:



الشكل: ١-١

نسمي المحور ox بمحور الفواصل، والمحور oy بمحور التراتيب، ولتكن لدينا أشعة الواحدة $\vec{i}$ و$\vec{j}$ للمحاور الإحداثية على الترتيب ox وoy.

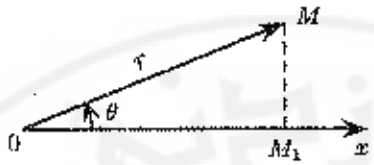
لتكن M نقطة ما من المستوي، ولتكن M_1 مسقط هذه النقطة M على المحور ox وM_2 مسقط النقطة M على المحور oy. وبالتالي يكون لدينا العلاقة الشعاعية:

$$\overrightarrow{oM} = \overrightarrow{oM_1} + \overrightarrow{oM_2} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

حيث إن x هي طويلة الشعاع $\left|\overrightarrow{oM_1}\right| = x$ على المحور ox وy طويلة الشعاع $\left|\overrightarrow{oM_2}\right| = y$ على المحور oy.

ونرمز لإحداثيات هذه النقطة بالرمز $M(x,y)$ عندئذ نسمي هذه الإحداثيات بالإحداثيات الديكارتية. ولكن ليست هي الإحداثيات الوحيدة لتعيين هذه النقطة وإنما توجد إحداثيات أخرى تعرف بالإحداثيات القطبية.

إن الإحداثيات القطبية تأتي من حيث الأهمية مباشرة بعد الإحداثيات الديكارتية المتعامدة، وتتألف من المبدأ o الذي يدعى بالقطب ثم نرسم نصف مستقيم ox وبفرض r هو طويلة الشعاع $\overrightarrow{oM}$ الذي يصنع زاوية θ مع نصف المستقيم الموجه ox (محور قطبي) كما في الشكل: ١-٢.



الشكل: ١-٢

نسمي (r,θ) بالإحداثيات القطبية للنقطة M ونسمي r بنصف القطر الشعاعي وθ الزاوية القطبية، ونكتب $M(r,\theta)$، ويكون لدينا: $r \geq 0$ و $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

أما العلاقة التي تربط الإحداثيات الديكارتية بالإحداثيات القطبية فهي من الشكل الآتي:

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta \qquad (1)$$

أما الصيغتان اللتان تعطيان الإحداثيات القطبية بدلالة الإحداثيات الديكارتية فهما:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \tan\theta = \frac{y}{x} \quad or \quad \theta = \arctan\frac{y}{x} \qquad (2)$$

ويجب علينا تحديد الزاوية θ في أي ربع من أرباع المستوي xoy الأربعة، وذلك بحسب x وy من حيث الإشارة، فإذا كانتا موجبتين كانت الزاوية θ تقع في الربع الأول أو كانتا سالبتين فإنها تقع في الربع الثالث، أما إذا كانت $x > 0$ و$y < 0$، فإن الزاوية θ تقع في الربع الرابع، أما إذا كانت $x < 0$ و$y > 0$، فإن الزاوية θ تقع في الربع الثاني.

مثال (١): إذا علمت أن إحداثيات النقطة M في جملة محاور متعامدة هي: $x = 2$, $y = -2$ أوجد الإحداثيات القطبية لهذه النقطة.

الحل: بحسب العلاقات التي تربط الإحداثيات القطبية بالإحداثيات الديكارتية نجد أن:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2},$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{-2}{2} = -1 \Longrightarrow \theta = \frac{-\pi}{4}$$

لكن بما أن $x > 0$ و $y < 0$، فإن النقطة M تقع في الربع الرابع، وبالتالي فإن الزاوية θ تكون $-\frac{\pi}{4}$، وبالتالي نجد أن الإحداثيات القطبية للنقطة $M(2,-2)$ هي: $M\left(2\sqrt{2},-\frac{\pi}{4}\right)$.

مثال (٢): أوجد معادلة المنحني المستوي الذي معادلته في الإحداثيات القطبية هي:

$$r = 4a\cos\theta$$

الحل: بالانتقال إلى الإحداثيات الديكارتية واعتماداً على العلاقات:

$$r = \sqrt{x^2+y^2}\ , \qquad \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

نجد عند التعويض بالمعادلة المعطاة أن:

$$\sqrt{x^2+y^2} = 4a\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \Rightarrow x^2+y^2 = 4ax \Rightarrow x^2+y^2-4ax = 0$$

$$\Rightarrow x^2-4ax+4a^2-4a^2+y^2 = 0 \Rightarrow (x-2a)^2+y^2 = 4a^2$$

وهذه المعادلة تمثل معادلة دائرة نصف قطرها $2a$ وتمر من المبدأ o وإحداثيات مركزها هو: $(2a,0)$.

٢.١ الإحداثيات والمناحي في الفضاء

يتعين وضع النقطة M في الفضاء بثلاث إحداثيات رئيسة وهي: الإحداثيات الديكارتية: نأخذ من نقطة ثلاثة محاور ox وoy وoz متلاقية في النقطة o وغير واقعة في مستوٍ واحد. نسمي هذه المحاور بالمحاور الإحداثية، وهي تعين ثلاثة مستويات مختلفة xoy وyoz وzox تدعى هذه المستويات بالمستويات الإحداثية.

المحور $x'ox$ يسمى محور الفواصل (أو محور السينات) والمحور $y'oy$ يسمى محور التراتيب (أو محور العينات) والمحور $z'oz$ يسمى محور الرواقم (أو محور الصادات)، النقطة o تدعى مبدأ الإحداثيات (أو نقطة الأصل).

نسمي الفضاء الذي رسمنا فيه المحاور فضاءً إحداثياً ثلاثي البعد. ونقول: إن جملة المحاور السابقة تشكل جملة إحداثيات ديكارتية، ونرمز لها بالرمز: $oxyz$.

وعامة عندما تكون هذه المحاور غير متعامدة فنقول عنها: إنها جملة محاور إحداثية مائلة.

أما إذا كانت هذه المحاور متعامدة مثنى مثنى عندئذٍ نقول: إنها جملة محاور قائمة.

ونقول عن الجملة $oxyz$: إنها جملة إحداثيات مباشرة إذا دار المحور ox حول النقطة o في المستوي oy لينطبق باتجاه يخالف دوران عقارب الساعة بالنسبة لراصد واقف في الاتجاه الموجب للمحور oz.

وإذا كان الدوران باتجاه دوران عقارب الساعة بالنسبة لهذا الراصد عندئذٍ نقول عن الجملة: إنها جملة غير مباشرة (عكسية).

٣.١ تعيين نقطة في الفضاء

لتكن لدينا نقطة M اختيارية في الفضاء المنسوب إلى جملة المحاور الإحداثية $OXYZ$، ولنرسم من هذه النقطة ثلاثة مستويات موازية للمستويات OXY وOYZ وOXZ تقطع المحاور $Z'OZ$ و$Y'OY$ و$X'OX$ في النقاط M_3 وM_2 وM_1 على الترتيب، هذه النقاط تدعى: مساقط النقطة M بموازاة المستويات الإحداثية المذكورة. تتعين هذه المساقط على المحاور الإحداثية بفواصلها الجبرية على المحاور ولتكن x, y, z بحيث:

$$\overline{OM_1} = x\,, \qquad \overline{OM_2} = y\,, \qquad \overline{OM_3} = z$$

هذه الأعداد الجبرية الثلاثة تدعى إحداثيات النقطة M، ونسمي العدد x فاصلة النقطة و العدد y ترتيب النقطة والعدد z راقم النقطة.

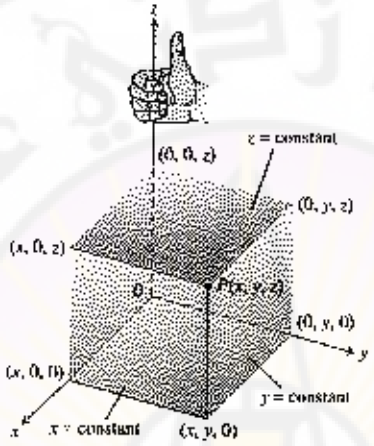
أي أن كل نقطة في الفضاء الثلاثي يقابلها ثلاثي مرتب وحيد (x, y, z) من الأعداد الحقيقية. وبالعكس كل ثلاثي مرتب (x, y, z) من الأعداد الحقيقية يعين نقطة وحيدة في الفضاء.

إذا أخذنا على المحاور الإحداثية OX, OY, OZ أشعة الواحدة $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ على الترتيب فإن الشعاع $\overrightarrow{OM}$ يكتب على الشكل:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{OM_3} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k} \qquad (3)$$

وهذا واضح من استوازي السطوح في الشكل: ١-٣.

فالإحداثيات الديكارتية للنقطة P هي: x, y, z وهي مركبات الشعاع $\overrightarrow{OP}$ وفق أشعة الواحدة للمحاور الإحداثية.



الشكل: ١-٣

وكثيراً ما نكتب $\vec{M}$ بدلاً من النقطة M، ونعني بذلك نهاية الشعاع $\overrightarrow{OM}$ الذي مركباته إحداثيات هذه النقطة، واستناداً إلى هذا الاصطلاح يمكننا أن نعبر عن الشعاع $\overrightarrow{AB}$ في الفضاء بالشكل الآتي:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \vec{B} - \vec{A}$$

رأينا أن النقطة في الفضاء تتعين بثلاثة وسطاء سلمية، وحسب هذا المفهوم، فإن النقطة على محور أو على منحني تتعين بوسيط واحد. أما في المستوي أو على سطح فتتعين بوسيطين.

سوف نعتمد في دراستنا على جملة المحاور الإحداثية **المتعامدة مثنى مثنى** ما لم ننص على خلاف ذلك.

٤.١ البعد بين نقطتين في الفضاء

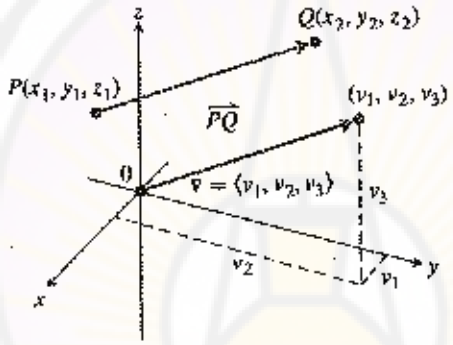
من المعلوم أن الجداء السلمي لشعاع في نفسه يساوي مربع طول هذا الشعاع، فإذا كانت x, y, z مركبات هذا الشعاع بالنسبة لجملة ديكارتية متعامدة عندئذٍ نكتب:

$$\vec{v} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k} = v_1\,\vec{i} + v_2\,\vec{j} + v_3\,\vec{k}$$

فإن طول هذا الشعاع هو:

$$|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (4)$$

لتكن $P(x_1, y_1, z_1)$ و $Q(x_2, y_2, z_2)$ نقطتين في الفضاء المنسوب إلى إحداثيات ديكارتية متعامدة، يكفي حساب طول الشعاع $\overrightarrow{PQ}$ فإذا رمزنا للبعد بين هاتين النقطتين بالرمز d يكون:



الشكل: ١-٤

$$d = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad (5)$$

حيث: $x = x_2 - x_1$ ، $y = y_2 - y_1$ ، $z = z_2 - z_1$ هي مركبات الشعاع $\overrightarrow{PQ}$ على المحاور الإحداثية.

مثال (٣): احسب البعد بين النقطتين $P(1,4,5)$ و $Q(5,0,1)$.

الحل: بتطبيق الدستور (5) نجد:

$$d = \sqrt{(5-1)^2 + (0-4)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{16 + 16 + 16} = \sqrt{48}$$
$$= 4\sqrt{3}$$

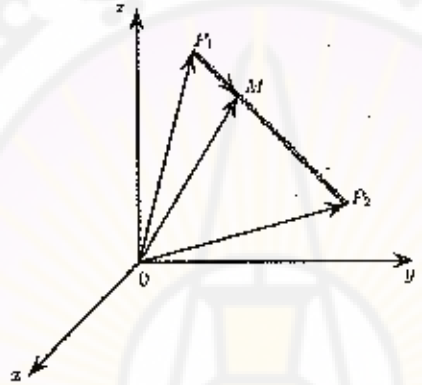
١.٥ إحداثيات نقطة تقسم قطعة مستقيمة بنسبة معلومة:

لمعرفة إحداثيات نقطة تقسم قطعة مستقيمة بنسبة معلومة r، نأخذ النقطتين $P_1(x_1, y_1, z_1)$ و $P_2(x_2, y_2, z_2)$ المنسوبتين لجملة إحداثيات ديكارتية متعامدة. ولتكن $M(x, y, z)$ نقطة تقسم القطعة المستقيمة $\overline{P_1P_2}$ بنسبة r بحيث يكون:

$$\frac{\overline{P_1M}}{\overline{MP_2}} = r$$

والمطلوب تعيين إحداثيات النقطة M. (الشكل: ١-٥). لنكتب العلاقة الشعاعية:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{P_1M} \qquad (6)$$



الشكل: ١-٥

من الفرض لدينا: $\overrightarrow{P_1M} = r\,\overrightarrow{MP_2}$

بالتعويض في العلاقة الشعاعية السابقة نجد:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP_1} + r\left(\overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OM}\right) = \overrightarrow{OP_1} + r\,\overrightarrow{OP_2} - r\,\overrightarrow{OM} \Longrightarrow$$

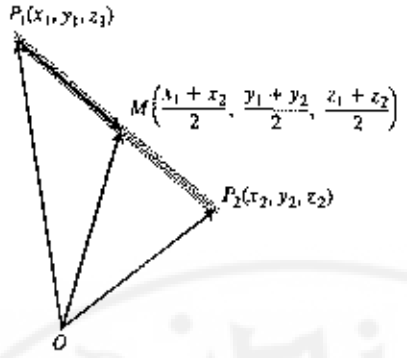
$$(1+r)\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP_1} + r\,\overrightarrow{OP_2} \Longrightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OP_1} + r\,\overrightarrow{OP_2}}{1+r} \;;\; r \neq -1 \qquad (7)$$

وبإسقاط هذه العلاقة الشعاعية على المحاور نجد:

$$x = \frac{x_1 + r\,x_2}{1+r}, \qquad y = \frac{y_1 + r\,y_2}{1+r}, \qquad z = \frac{z_1 + r\,z_2}{1+r} \qquad (8)$$

وبحالة خاصة تكون إحداثيات منتصف القطعة $\overline{P_1P_2}$ عندما $r = 1$ وعندئذٍ يكون:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \qquad z = \frac{z_1 + z_2}{2} \qquad (9)$$

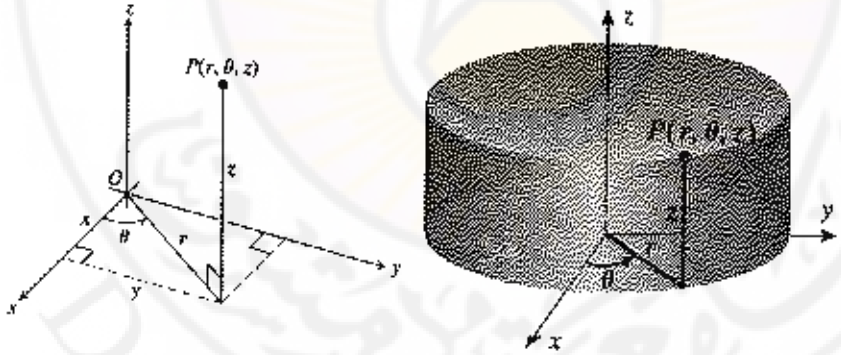


الشكل: ١-٦

ملاحظة (١): في الشكل السابق كانت النقطة M داخل القطعة المستقيمة والنسبة r كانت موجبة، أما إذا كانت M قاسمة خارجاً للقطعة المستقيمة، فإن النسبة r تكون سالبة بشرط $r \neq -1$.

٦.١ الإحداثيات الأسطوانية:

من الممكن أيضاً أن نعين تماماً وضع نقطة في الفضاء بثلاثة وسطاء سلمية أخرى غير الإحداثيات الديكارتية.



الشكل: ١-٧

وجدنا أن النقطة P تتعين في الفضاء بمعرفة راقمها z ومسقطها P' على المستوي xoy، فإذا عيّنا المسقط P' في المستوي XOY بالإحداثيين القطبيين r, θ نقول عندئذٍ: إننا قد عيّنا النقطة P في الفضاء بالطريقة الأسطوانية، (الشكل ١-٧).

نسمي الأعداد الحقيقية r,θ,z بالإحداثيات الأسطوانية للنقطة. ونرمز للنقطة P التي إحداثياتها الأسطوانية r,θ,z بالرمز $P(r,\theta,z)$ حيث إن θ هي الزاوية التي يصنعها المسقط مع المحور OX أي: $\theta = \measuredangle(XOP')$، التي تدعى بالزاوية القطبية، كما نسمي $r = |\overline{OP'}|$ نصف القطر الشعاعي.

من الشكل: ١-٧ نلاحظ العلاقات الآتية بين الإحداثيات الديكارتية والإحداثيات الأسطوانية:

$$x = r\cos\theta\,, \qquad y = r\sin\theta\,, \qquad z = z \qquad (10)$$

وبالعكس يمكننا حساب الإحداثيات الأسطوانية بدلالة الإحداثيات الديكارتية حسب العلاقات الآتية:

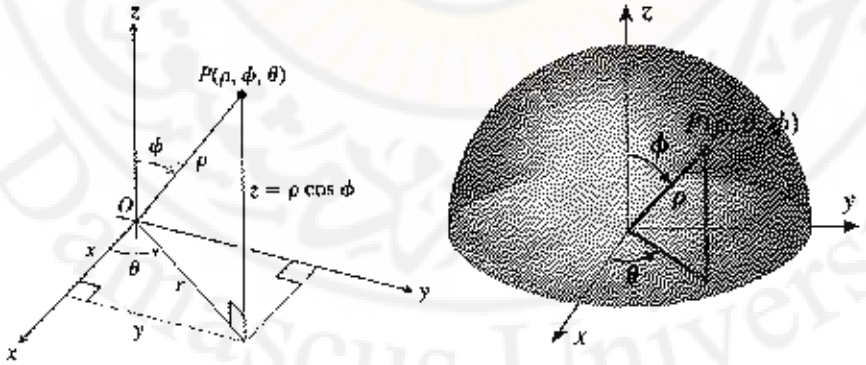
$$r = \sqrt{x^2+y^2}\,, \qquad \theta = \arctan\frac{y}{x}\,, \qquad z = z \qquad (11)$$

في الإحداثيات الأسطوانية نفرض أن:

$$0 \le \theta \le 2\pi\,, \qquad r \ge 0\,, \qquad -\infty < z < \infty$$

١.٧ الإحداثيات الكروية:

إن وضع النقطة P في الفضاء يتعين بواسطة طول نصف القطر الشعاعي OP أي: $\rho = |\overline{OP}|$ والزاوية θ بين OX و$\overline{OP'}$ باعتبار P' هي مسقط P على المستوي XOY والزاوية φ بين OZ و$\overrightarrow{OP}$.



الشكل: ١-٨

الوسطاء الثلاثة (ρ,θ,φ) تعين تماماً وضع النقطة P في الفضاء، ونسميها الإحداثيات الكروية لهذه النقطة كما في الشكل: ١-٨ حيث إن:

$$0 \le \varphi \le \pi, \quad 0 \le \theta \le 2\pi, \quad r \ge 0$$

كما أن الانتقال من الإحداثيات الديكارتية إلى الإحداثيات الكروية يتم وفق العلاقات الآتية:

$$x = \rho \sin\varphi \cos\theta\ , \quad y = \rho \sin\varphi \sin\theta\ , \quad z = \rho\cos\varphi \qquad (12)$$

كما أن العلاقات (13) تعين الإحداثيات الكروية لنقطة بدلالة الإحداثيات الديكارتية:

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad or \quad \theta = \arctan\dfrac{y}{x} \\ \cos\varphi = \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \quad or \quad \varphi = \arctan\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} \end{cases} \qquad (13)$$

كما تجدر الإشارة هنا إلى أن الإحداثيات الكروية هي الإحداثيات الوسيطية لكرة مركزها مبدأ الإحداثيات ونصف قطرها ρ.

مثال (٤): أوجد الإحداثيات الأسطوانية والإحداثيات الكروية للنقطة M المعطاة إحداثياتها الديكارتية الآتية:

$$x = 1, \quad y = \sqrt{3}, \quad z = 2\sqrt{3}$$

الحل: الإحداثيات الأسطوانية بحسب العلاقات (11) نجد أن:

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2, \quad \tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

الزاوية المعطاة في الربع الأول لأن: $x > 0$ و $y > 0$، وبالتالي فإن الإحداثيات الأسطوانية هي: $M\left(2, \frac{\pi}{3}, 2\sqrt{3}\right)$. أما الديكارتية فهي: $M(1,\sqrt{3},2\sqrt{3})$.

أما الإحداثيات الكروية التي تتعين فيها النقطة $M(\rho,\theta,\varphi)$ فيكون لدينا حسب العلاقات (13):

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{1+3+12} = \sqrt{16} = 4$$

$$\cos\varphi = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{6}$$

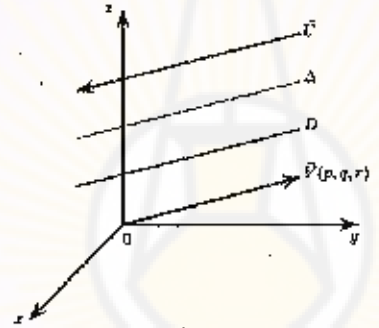
$$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

وبالتالي تكون الإحداثيات النقطة الكروية هي: $M\left(4, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right)$

٨.١ الوسطاء الموجهة وجيوب تمام التوجيه لمنحًى في الفضاء

أولاً: وسطاء التوجيه:

نقول عن جميع المستقيمات D والمحاور Δ والأشعة $\vec{U}$ التي توازي الشعاع $\vec{V}$ الذي مركباته (p,q,r) إن لها منحى هذا الشعاع. فكل شعاع $\vec{V}(p,q,r)$ يعين في الفضاء منحًى، كما نقول (p,q,r) عن إنها الوسطاء الموجهة لهذا المنحى أو أمثال توجيهه.



الشكل: ١-٩

نستنتج من هذا التعريف أن كل شعاعين متوازيين يعينان المنحى نفسه، فإذا كان: $\overrightarrow{V_1}(p_1,q_1,r_1)$ و $\overrightarrow{V_2}(p_2,q_2,r_2)$ شعاعين متوازيين (مرتبطين خطياً) عندئذٍ نكتب:

$$\overrightarrow{V_1} \,/\!/\, \overrightarrow{V_2} \Leftrightarrow \overrightarrow{V_1} = \lambda\, \overrightarrow{V_2} \quad ; \quad (\lambda \neq 0)$$

فإن:

$$p_1 = \lambda\, p_2\,, \qquad q_1 = \lambda\, q_2\,, \qquad r_1 = \lambda\, r_2$$

أي أن:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{q_1}{q_2} = \frac{r_1}{r_2} = \lambda \qquad (14)$$

وهو شرط توازي مُنْحَيين.

ويكون هذان المنحيان متعامدين إذا وفقط إذا كان:

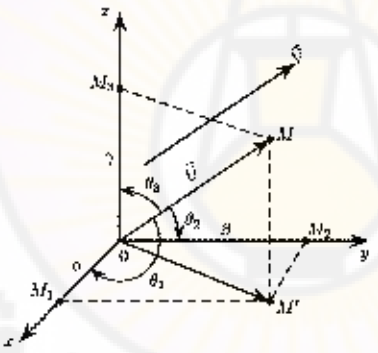
$$\overrightarrow{V_1} \perp \overrightarrow{V_2} \Leftrightarrow \overrightarrow{V_1} \cdot \overrightarrow{V_2} = p_1p_2 + q_1q_2 + r_1r_2 = 0 \qquad (15)$$

مثال (٥): الشعاعان $\overrightarrow{V_1}(1,2,3)$ و$\overrightarrow{V_2}(2,4,6)$ يمثلان منحيين متوازيين لأنهما يحققان العلاقة (14).

مثال (٦): الشعاعان $\overrightarrow{V_1}(0,4,-2)$ و$\overrightarrow{V_2}(0,1,2)$ يمثلان منحيين متعامدين لأنهما يحققان العلاقة (15).

ثانياً: جيوب تمام التوجيه:

لنرسم ابتداءً من مبدأ الإحداثيات شعاع الواحدة $\vec{U}$ الذي يمثل نفس المنحى المعين بالشعاع $\vec{V}$.



الشكل: ١-١٠

ولنفرض أن $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ هي الزوايا التي يصنعها الشعاع $\vec{U}$ مع المحاور الإحداثية على الترتيب OX, OY, OZ فإن:

$$\begin{cases} \overline{OM_1} = \alpha = \cos\theta_1 \\ \overline{OM_2} = \beta = \cos\theta_2 \\ \overline{OM_3} = \gamma = \cos\theta_3 \end{cases} \qquad (16)$$

فالمركبات α, β, γ لشعاع الواحدة $\vec{U}$ على محاور الإحداثيات تسمى جيوب تمام توجيه هذا المنحى، لأنها تساوي جيوب تمام الزوايا $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ وبما أن $|\vec{U}| = 1$، فإن جيوب تمام التوجيه ترتبط فيما بينها بالعلاقة:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \quad \text{or} \quad \cos^2\theta_1 + \cos^2\theta_2 + \cos^2\theta_3 = 1 \qquad (17)$$

٩.١ العلاقة بين وسطاء التوجيه وجيوب تمام التوجيه لمنحًى معلوم:

بفرض $\vec{V}(p,q,r)$ شعاع توجيه لمنحى معلوم و$\vec{U}(\alpha,\beta,\gamma)$ شعاع الواحدة الموازي له عندئذٍ نكتب:

$$\vec{V} = |\vec{V}|\vec{U}$$

وبالتالي: $\vec{U} = \frac{\vec{V}}{|\vec{V}|}$ باسقاط هذه العلاقة على المحاور الإحداثية الثلاثة نجد:

$$\alpha = \frac{p}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}, \beta = \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}, \gamma = \frac{r}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}} \qquad (18)$$

هذه العلاقات الثلاث تعطي جيوب تمام التوجيه لمنحًى بدلالة وسطاء توجيهه.

مثال (٧): عين جيوب تمام توجيه المنحى المعين بالشعاع $\vec{V}(2,1,-2)$.

الحل: بتطبيق (18) نجد:

$$\alpha = \frac{2}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}, \qquad \beta = \frac{1}{3}, \qquad \gamma = \frac{-2}{3}$$

ملاحظة (٢): من نقطتين معلومتين في الفضاء $M_1(x_1,y_1,z_1)$ و$M_2(x_2,y_2,z_2)$ يمكن تعيين منحى في الفضاء وسطاء توجيهه هي مركبات الشعاع $\overrightarrow{M_1M_2}$ أي:

$$p = x_2 - x_1, \qquad q = y_2 - y_1, \qquad r = z_2 - z_1 \qquad (19)$$

عندئذٍ فإن جيوب تمام توجيه هذا المنحى هي:

$$\alpha = \frac{x_2 - x_1}{|\overrightarrow{M_1M_2}|}, \beta = \frac{y_2 - y_1}{|\overrightarrow{M_1M_2}|}, \gamma = \frac{z_2 - z_1}{|\overrightarrow{M_1M_2}|} \qquad (20)$$

مثال (٨): عين وسطاء توجيه وجيوب تمام التوجيه لمنحًى المعين بالنقطتين: $M_1(3,2,0)$ و$M_2(4,3,1)$.

الحل: اعتماداً على العلاقات (19) نلاحظ أن وسطاء التوجيه:

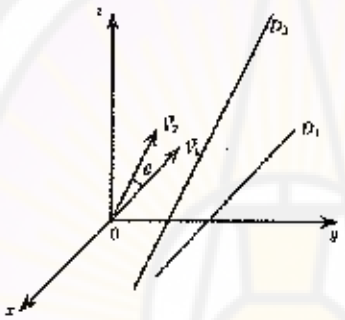
$$p = 4 - 3 = 1, \qquad q = 3 - 2 = 1, \qquad r = 1 - 0 = 1$$

ونلاحظ أن جيوب تمام التوجيه تعطى حسب العلاقات (20) كما يلي:

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad \beta = \frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

١٠.١ الزاوية بين مَنْحَيين (أو مستقيمين)

إذا كان D_1 مستقيماً منحاه معين بالشعاع $\overrightarrow{V_1}(p_1, q_1, r_1)$ و D_2 مستقيماً منحاه معين بالشعاع $\overrightarrow{V_2}(p_2, q_2, r_2)$ وكانت θ الزاوية الكائنة بين الشعاعين $\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}$ الشكل: ١-١١ عندئذٍ حسب تعريف الجداء السلمي لشعاعين نكتب:



الشكل: ١-١١

$$\overrightarrow{V_1} \cdot \overrightarrow{V_2} = |\overrightarrow{V_1}| \cdot |\overrightarrow{V_2}| \cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{\overrightarrow{V_1} \cdot \overrightarrow{V_2}}{|\overrightarrow{V_1}| \cdot |\overrightarrow{V_2}|} \Rightarrow$$

$$\cos\theta = \frac{p_1 \cdot p_2 + q_1 \cdot q_2 + r_1 \cdot r_2}{\sqrt{p_1^2 + q_1^2 + r_1^2} \cdot \sqrt{p_2^2 + q_2^2 + r_2^2}}$$

نلاحظ هنا أن الطرف الأيمن ذا قيمة جبرية قد تكون موجبة (الزاوية θ حادة) أو سالبة (الزاوية θ منفرجة)، هذه الإشارة تفيدنا في تعيين الزاوية الكائنة بين محورين موجهين باتجاهي $\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}$.

ملاحظة (٣): في حالة تعامد المنحيين تكون $\theta = \frac{\pi}{2} \Leftarrow \cos\theta = 0$ وبالتالي يكون:

$$p_1 \cdot p_2 + q_1 \cdot q_2 + r_1 \cdot r_2 = 0$$

وهو شرط تعامد منحيين.

وإذا تعين المنحيان بجيوب تمام التوجيه يكون:

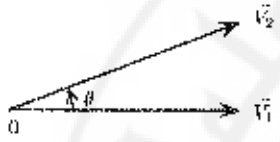
$$\cos\theta = \alpha_1 \cdot \alpha_2 + \beta_1 \cdot \beta_2 + \gamma_1 \cdot \gamma_2 \qquad (21)$$

ويصبح شرط التعامد:

$$\cos\theta = \alpha_1 \cdot \alpha_2 + \beta_1 \cdot \beta_2 + \gamma_1 \cdot \gamma_2 = 0 \qquad (22)$$

١١.١ العمليات الأساسية على الأشعة:

أولاً: الجداء السلمي (الداخلي) لشعاعين



الشكل: ١-١٢

ليكن $\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}$ شعاعين اختياريين ولنفرض أن الزاوية بين هذين الشعاعين هي θ الشكل: ١-١٢ عندئذٍ نعرف الجداء السلمي لهذين الشعاعين بأنه مقدار سلمي يساوي إلى جداء طول الأول في طول الثاني في جيب تمام الزاوية الكائنة بينهما فنكتب:

$$\overrightarrow{V_1} \cdot \overrightarrow{V_2} = |\overrightarrow{V_1}| \cdot |\overrightarrow{V_2}| \cos\theta \quad ; \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \qquad (23)$$

إن الجداء السلمي يتمتع بالخواص الآتية:

١. من أجل الشعاعين الاختياريين $\vec{A}, \vec{B}$ لدينا:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$$

٢. من أجل λ عدد حقيقي، والشعاعين الاختياريين $\vec{A}, \vec{B}$ لدينا:

$$(\lambda\vec{A}) \cdot \vec{B} = \lambda(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \cdot (\lambda\vec{B})$$

٣. الجداء الداخلي توزيعي: من أجل ثلاثة أشعة مفروضة $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ فإن:

$$(\vec{A} + \vec{B}) \cdot \vec{C} = \vec{A} \cdot \vec{C} + \vec{B} \cdot \vec{C} \quad \& \quad \vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$$

٤. إذا كان $\overrightarrow{V_1} = \overrightarrow{V_2} = \vec{V}$ وعندما تكون أشعة الواحدة $\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = 1, \vec{i} \cdot \vec{j} = 0$،

$$\vec{V} \cdot \vec{V} = |\vec{V}| \cdot |\vec{V}| = |\vec{V}|^2 \Rightarrow |\vec{V}| = \sqrt{\vec{V} \cdot \vec{V}}$$

٥. الجداء الداخلي لشعاعين بدلالة مسقطيهما على المحورين الإحداثيين، ليكن لدينا الشعاعان:

$$\vec{A} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} \qquad \& \qquad \vec{B} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j}$$

مع العلم أن $\vec{i}$ و$\vec{j}$ هي أشعة الواحدة على المحاور الإحداثية OX وOY على الترتيب، فإن:

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = a_1b_1 + a_2b_2$$

مع العلم أن: $\vec{i}\cdot\vec{i} = \vec{j}\cdot\vec{j} = 1,\ \vec{i}\cdot\vec{j} = 0$.

٦. في الفراغ ثلاثي البعد المعين بجملة المحاور الإحداثية المتعامدة مثنى مثنى OX وOY وOZ وحيث إن: $\vec{i}$ و$\vec{j}$ و$\vec{k}$ هي أشعة الواحدة على المحاور الإحداثية على الترتيب، وليكن لدينا الشعاعان $\vec{A}, \vec{B}$ في الفضاء الثلاثي حيث إن:

$$\vec{A} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k} \qquad \& \qquad \vec{B} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$$

وبالتالي فإن:

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

مع العلم أن: $\vec{i}\cdot\vec{i} = \vec{j}\cdot\vec{j} = \vec{k}\cdot\vec{k} = 1,\ \vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{j}\cdot\vec{k} = \vec{k}\cdot\vec{i} = 0$.

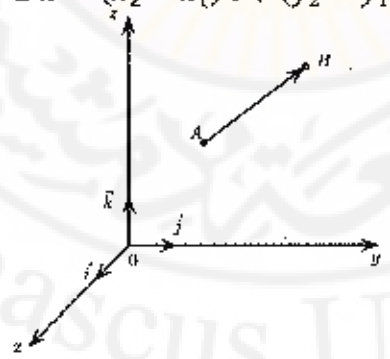
وواضح أن هذا الجداء يساوي الصفر في حالة تعامد الشعاعين $\vec{A}, \vec{B}$.

أما إذا كان لدينا الشعاع $\overrightarrow{AB}$ مقيداً في الفضاء ثلاثي البعد، أي علم مبدؤه $A(x_1, y_1, z_1)$ ونهايته $B(x_2, y_2, z_2)$ فإن:

$$x = x_2 - x_1, \qquad y = y_2 - y_1, \qquad z = z_2 - z_1$$

عندئذٍ يمكننا أن نعبر عن الشعاع المقيد $\overrightarrow{AB}$ بالشكل:

$$\overrightarrow{AB} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k} = (x_2 - x_1)\,\vec{i} + (y_2 - y_1)\,\vec{j} + (z_2 - z_1)\,\vec{k}$$

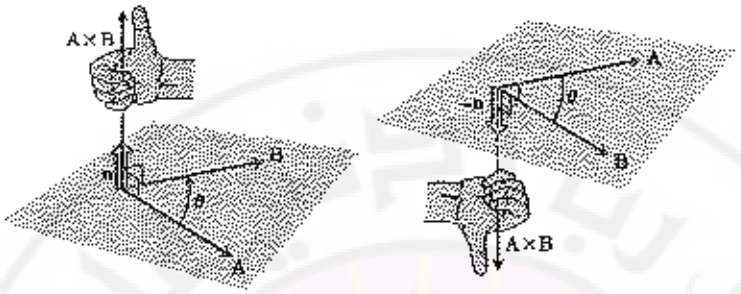


الشكل: ١-١٣

ثانياً: الجداء الخارجي لشعاعين (أو الجداء الشعاعي)

نعرف الجداء الخارجي لشعاعين $\vec{A},\vec{B}$ بأنه شعاع ثالث يعامد مستوي الشعاعين $\vec{A},\vec{B}$ كما في الشكل: ١-١٤ ويعبر عن الجداء الخارجي للشعاعين $\vec{A},\vec{B}$ بالشكل الآتي:

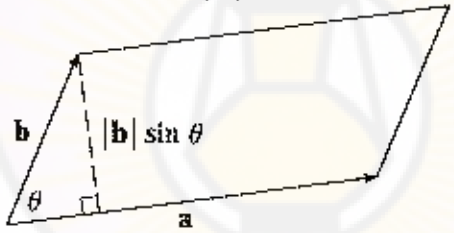
$$\vec{C}=\vec{A}\times\vec{B}=\vec{A}\wedge\vec{B}$$



الشكل: ١-١٤

أما طويلة $\vec{C}$ أو $|\vec{A}\wedge\vec{B}|$ فتساوي إلى العدد الدال على مساحة متوازي الأضلاع الذي ضلعاه $\vec{A},\vec{B}$ أي:

$$|\vec{A}\wedge\vec{B}|=|\vec{A}|\cdot|\vec{B}|\sin\theta \qquad (24)$$



الشكل: ١-١٥

وإذا اعتبرنا $\vec{n}$ شعاع الواحدة المحمول على $\vec{C}$ بالاتجاه الموجب نكتب:

$$\vec{A}\wedge\vec{B}=|\vec{A}|\cdot|\vec{B}|\sin\theta\cdot\vec{n} \quad ; \quad 0\le\theta\le\pi \qquad (25)$$

إن الجداء الشعاعي يتمتع بالصفات الآتية:

١. $\vec{A}\wedge\vec{B}=-\vec{B}\wedge\vec{A}$

٢. $\vec{A}\wedge(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}\wedge\vec{B}+\vec{A}\wedge\vec{C}$

٣. $(\vec{B}+\vec{C})\wedge\vec{A}=\vec{B}\wedge\vec{A}+\vec{C}\wedge\vec{A}$

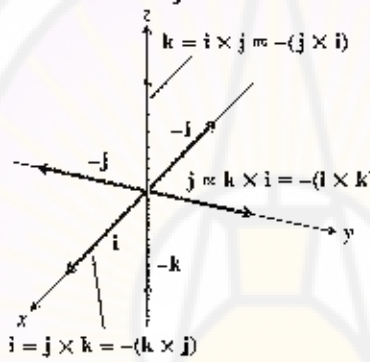
٤. $\lambda(\vec{A}\wedge\vec{B}) = (\lambda\vec{A})\wedge\vec{B} = \vec{A}\wedge(\lambda\vec{B})$

٥. إذا توازى الشعاعان $\vec{A},\vec{B}$، فإن $\sin\theta = 0$، وبالتالي فإن $\vec{A}\wedge\vec{B} = 0$ وكذلك $\vec{A}\wedge\vec{A} = 0$ مهما كان الشعاع $\vec{A}$.

حيث إن $\vec{A},\vec{B},\vec{C}$ أشعة اختيارية و λ عدد حقيقي.

أما من أجل أشعة الواحدة $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ المحمولة على المحاور الإحداثية OX,OY,OZ على الترتيب فلدينا:

$$\begin{cases} \vec{i}\wedge\vec{i} = \vec{j}\wedge\vec{j} = \vec{k}\wedge\vec{k} = \vec{0} \\ \vec{i}\wedge\vec{j} = -\vec{j}\wedge\vec{i} = \vec{k} \\ \vec{j}\wedge\vec{k} = -\vec{k}\wedge\vec{j} = \vec{i} \\ \vec{k}\wedge\vec{i} = -\vec{i}\wedge\vec{k} = \vec{j} \end{cases} \qquad (26)$$



الشكل: ١-١٦

ليكن لدينا الشعاعان:

$$\vec{A} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k} \quad , \quad \vec{B} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$$

في الفضاء ثلاثي البعد المعين بجملة المحاور الإحداثية المتعامدة مثنى مثنى نلاحظ أن الجداء $\vec{A}\wedge\vec{B}$ ليس إلا منشور المحدد:

$$\vec{A}\wedge\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \qquad (27)$$

$$\vec{A}\wedge\vec{B} = (y_1z_2 - z_1y_2)\vec{i} + (z_1x_2 - x_1z_2)\vec{j} + (x_1y_2 - y_1x_2)\vec{k}$$

مثال (٩): أوجد الجداء الخارجي والداخلي للشعاعين:

$$\vec{A} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k} \quad , \quad \vec{B} = 3\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$$

الحل: لنوجد الجداء الخارجي $\vec{A} \wedge \vec{B}$ اعتماداً على العلاقة (27) فنجد:

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3\vec{i} - 4\vec{j} - 5\vec{k}$$

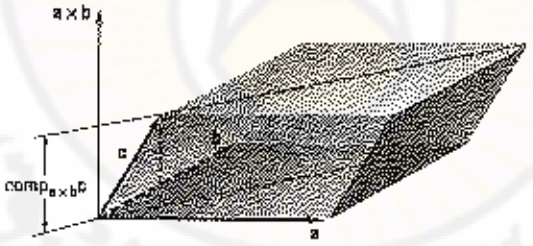
ببساطة نرى أن هذا الشعاع يعامد كلاً من الشعاعين $\vec{A}$ و $\vec{B}$.

لإيجاد الجداء الداخلي $\vec{A} \cdot \vec{B}$ نكتب:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 3 + 2 - 1 = 4$$

ثالثاً: الجداء المختلط لثلاثة أشعة:

وجدنا سابقاً أن الجداء الخارجي لشعاعين هو شعاع مثل $\vec{A} \wedge \vec{B}$، فإذا ضربنا هذا الشعاع سلمياً بشعاع ثالث مثل $\vec{C}$ نحصل على مقدار سلمي هو: $(\vec{A} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{C} = (\vec{A}, \vec{B}, \vec{C})$ فهذا الجداء يسمى بالجداء المختلط، وللجداء معنىً هندسيٌ يدل على أنه القيمة المطلقة لهذا الجداء تساوي إلى العدد الدال على حجم متوازي السطوح المائل الذي حروفه هي الأشعة $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ كما في الشكل: ١-١٧.



الشكل:١-١٧

خواص الجداء المختلط:

١. الصيغة التحليلية للجداء المختلط: لنفرض أن الأشعة الثلاثة هي:

$$\vec{A} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}\,, \quad \vec{B} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}\,, \quad \vec{C} = c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k}$$

ولنوجد أولاً الجداء المتجهي $\vec{A} \wedge \vec{B}$ نجد أن:

$$\vec{A}\wedge\vec{B}=\begin{vmatrix} i & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}=\begin{matrix}(a_2b_3-a_3b_2)\vec{i}+(a_3b_1-a_1b_3)\vec{j}+\\ (a_1b_2-a_2b_1)\vec{k}\end{matrix}$$

والآن لنوجد $(\vec{A}\wedge\vec{B})\cdot\vec{C}$ حسب تعريف الجداء السلمي نجد أن:

$$\begin{aligned}(\vec{A}\wedge\vec{B})\cdot\vec{C}&=(a_2b_3-a_3b_2)c_1+(a_3b_1-a_1b_3)c_2+(a_1b_2-a_2b_1)c_3\\&=a_2b_3c_1-a_3b_2c_1+a_3b_1c_2-a_1b_3c_2+a_1b_2c_3-a_2b_1c_3\\&=a_2b_3c_1+a_3b_1c_2+a_1b_2c_3-(a_3b_2c_1+a_1b_3c_2+a_2b_1c_3)\end{aligned}$$

وهذه الصيغة التحليلية يمكن التعبير عنها باستخدام المحددات كما يلي:

$$(\vec{A}\wedge\vec{B})\cdot\vec{C}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \qquad (28)$$

وبنشر هذا المحدد نحصل على الصيغة السابقة نفسها.

٢. لا يتغير الجداء المختلط عند إجراء تبديل دوري مباشر على مواضع الأشعة، أي بعبارة أخرى يكون لدينا:

$$(\vec{A}\wedge\vec{B})\cdot\vec{C}=(\vec{B}\wedge\vec{C})\cdot\vec{A}=(\vec{C}\wedge\vec{A})\cdot\vec{B}$$

أما إذا كان التبديل غير دوري وغير مباشر يكون:

$$(\vec{A}\wedge\vec{B})\cdot\vec{C}=-(\vec{B}\wedge\vec{A})\cdot\vec{C}=-(\vec{A}\wedge\vec{C})\cdot\vec{B}=-(\vec{C}\wedge\vec{B})\cdot\vec{A}$$

٣. إن الجداء المختلط للمتجهات $\vec{A},\vec{B},\vec{C}$ يساوي الصفر إذا وفقط إذا وقعت هذه المتجهات في مستوٍ واحد.

مثال (١٠): هل الأشعة الثلاثية الآتية تقع في مستوٍ واحد؟

$$\vec{A}=-\vec{i}+3\vec{j}+2\vec{k},\ \vec{B}=2\vec{i}-3\vec{j}-4\vec{k},\ \vec{C}=-3\vec{i}+12\vec{j}+6\vec{k}$$

الحل: لنحسب الجداء المختلط لهذه الأشعة:

$$(\vec{A}\wedge\vec{B})\cdot\vec{C}=\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & -4 \\ -3 & 12 & 6 \end{vmatrix}=-30-0+30=0$$

بما أن الجداء المختلط للأشعة المذكورة معدوماً، فإنها تقع في مستوٍ واحد.

مثال (١١): احسب حجم متوازي السطوح المرسوم على الأشعة:

$$\vec{A}=5\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k},\ \ \vec{B}=2\vec{i}+5\vec{j}+2\vec{k},\ \ \vec{C}=\vec{i}+4\vec{j}+2\vec{k}$$

الحل: لنرمز لهذا الحجم بالرمز V. ثم لنحسب الجداء المختلط لهذه الأشعة:

$$(\vec{A}\wedge\vec{B})\cdot\vec{C}=\begin{vmatrix}5&2&1\\2&5&2\\1&4&2\end{vmatrix}=10-4+3=9$$

وبالتالي فإن حجم متوازي السطوح:

$$V=\left|(\vec{A}\wedge\vec{B})\cdot\vec{C}\right|=9 \quad \text{وحدة حجم}$$

يمكن بالاستناد إلى مفهوم الجداء المختلط لثلاثة أشعة الاستفادة لإثبات وقوع أربع نقاط في مستوٍ واحد. فإذا كان لدينا النقاط في الفضاء الثلاثي:

$$A_1(x_1,y_1,z_1),\qquad A_2(x_2,y_2,z_2),\qquad A_3(x_3,y_3,z_3),\qquad A_4(x_4,y_4,z_4)$$

إن الشرط اللازم والكافي لكي تكون هذه النقاط واقعة في مستوٍ واحد أن تحقق ما يلي:

$$(\overrightarrow{A_1A_2}\wedge\overrightarrow{A_1A_3})\cdot\overrightarrow{A_1A_4}=\begin{vmatrix}x_2-x_1&y_2-y_1&z_2-z_1\\x_3-x_1&y_3-y_1&z_3-z_1\\x_4-x_1&y_4-y_1&z_4-z_1\end{vmatrix}=0 \qquad (29)$$

مثال (١٢): برهن أن النقاط الأربع:

$$A(1,6,5),\qquad B(7,-18,2),\qquad C(3,-2,4),\qquad D(4,4,9)$$

تقع في مستوٍ واحد.

الحل: لنوجد الجداء المختلط $(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}$ وذلك بنشر المحدد:

$$(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix}6&-24&-3\\2&-8&-1\\3&-2&4\end{vmatrix}=6(-34)+24(11)-3(20)=0$$

وبالتالي فإن النقاط المعطاة تقع في مستوٍ واحد.

تمارين غير محلولة

١. أوجد الإحداثيات الأسطوانية والكروية للنقطة $M(2\sqrt{2}, 2, 1)$.

٢. أوجد الإحداثيات الديكارتية والكروية للنقطة M المعينة بالإحداثيات الأسطوانية $r = 2\ ,\ \theta = \frac{\pi}{4}\ ,\ z = 1$.

٣. سطح معادلته الديكارتية:

$$x^2 + y^2 + z^3 + 2x - 4y - 2z - 3 = 0$$

أوجد معادلة هذا السطح بالإحداثيات الكروية.

٤. برهن أن المستقيم الواصل بين النقطتين $A(5, 2, 3)$ و$B(6, 1, 4)$ يوازي المستقيم الواصل بين النقطتين $C(-3, -2, 1)$ و$D(-1, -4, 3)$.

٥. عين الزاوية الكائنة بين المستقيم المعين بالنقطتين $A(-3, 2, 4)$ و$B(2, 5, -2)$ والمستقيم المعين بالنقطتين $C(1, -2, 2)$ و$D(4, 2, 3)$.

٦. أثبت أن النقاط: $A(3, -1, 4)$ و$B(-2, 5, 2)$ و$C(8, -7, 6)$ تقع على استقامة واحدة، ثم عين النسبة التي تقسم بها النقطة B القطعة المستقيمة AC.

٧. أوجد مركبات الشعاع $\overrightarrow{AB}$ على المحاور الإحداثية، ثم عين جيوب تمام توجيهه علماً أن: $A(1, 2, 3)$ و$B(2, 4, 5)$.

٨. أوجد طول وجيوب تمام توجيه الشعاع: $\vec{A} = \vec{i} - 4\vec{j} + 8\vec{k}$.

٩. احسب $\vec{A} \cdot \vec{B}$ و$\vec{A} \wedge \vec{B}$ إذا علمت أن:

$$\vec{A} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}, \qquad \vec{B} = 3\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$$

١٠. أوجد الجداء المختلط للأشعة:

$$\vec{A} = \vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}, \qquad \vec{B} = 3\vec{i} + 2\vec{j}, \qquad \vec{C} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$$

١١. برهن صحة العلاقات:

$$(\vec{A} - \vec{B}) \wedge (\vec{A} + \vec{B}) = 2\vec{A} \wedge \vec{B}$$
$$(\vec{A} \wedge \vec{B})^2 + (\vec{A} \cdot \vec{B})^2 = (\vec{A})^2 \cdot (\vec{B})^2$$

١٢. أوجد طول $\overrightarrow{AB}$ والزاوية $B\hat{A}C$ إذا كان: $A(2,-3,1)$ و$B(4,11,6)$ و$C(4,-4,3)$.

١٣. برهن أن النقاط الأربع:

$$A(1,6,5), \qquad B(7,-18,2), \qquad C(3,-2,4), \qquad D(4,4,9)$$

تقع في مستوٍ واحد.

Damascus University

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

فهرس الفصل الثاني

٢. المستوي في الفضاء

١.٢ تعريف المستوي في الفضاء.

٢.٢ معادلة مستو يمر من نقطة معلومة ويعامد شعاعاً معلوماً.

٣.٢ حالات خاصة لمعادلة مستوٍ.

٤.٢ معادلة مستوٍ مار من ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة.

٥.٢ معادلة مستوٍ يمر من نقطة معلومة ويوازي منحيين مفروضين.

٦.٢ الزاوية بين مستويين.

٧.٢ بعد نقطة معلومة عن مستو معلوم.

٨.٢ حزمة المستويات.

تمارين غير محلولة.

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الفصل الثاني

٢. المستوي في الفضاء

٢.١ تعريف المستوي في الفضاء

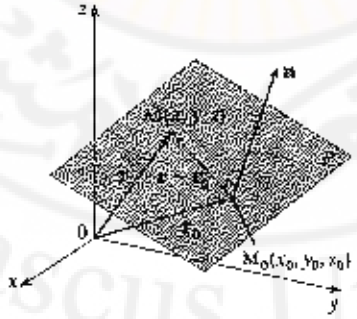
يعرف المستوي في الفضاء بأنه سطح غير محدود ينطبق عليه المستقيم في جميع أوضاعه. ويرمز للمستوي عادة بالرمز P، ويتعين المستوي بصورة وحيدة بمعرفة نقطة منه ومستقيم يعامده كما يمكن أيضاً تعيين المستوي بثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة أو بنقطة منه وشعاعين غير متوازيين.

٢.٢ معادلة مستو يمر من نقطة معلومة ويعامد شعاعاً معلوماً

ليكن P مستوياً في الفضاء. إن وضع P يتعين تماماً بمعرفة شعاع $\vec{N}$ عمودي على هذا المستوي ونقطة ما ثابتة $M_0(x_0, y_0, z_0)$ من هذا المستوي. نسمي عادة الشعاع $\vec{N}$ العمودي على P شعاعاً ناظماً على هذا المستوي مركباته هي: $\vec{N}(p, q, r)$.

ولإيجاد معادلة المستوي P نأخذ نقطة اختيارية $M(x, y, z)$ من المستوي P يكون لأجلها: (انظر الشكل:٢-١)

$$\vec{M_0M} \perp \vec{N} \quad \text{أي يتحقق معنا:} \quad (1) \quad \vec{M_0M} \cdot \vec{N} = 0$$



الشكل: ٢-١

وهذه المعادلة تدعى بالمعادلة الشعاعية للمستوي P المار من النقطة M_0 وشعاع ناظمه الشعاع $\vec{N}$.

ويمكن أن نعبر عن المعادلة (1) تحليلياً بالمعادلة:

$$p(x-x_0)+q(y-y_0)+r(z-z_0)=0 \qquad (2)$$

وتكتب بالشكل:

$$px+qy+rz-(px_0+qy_0+rz_0)=0 \qquad (3)$$

وبفرض أن h ثابت ويساوي: $h=-(px_0+qy_0+rz_0)$ عندئذٍ تصبح المعادلة (3) بالشكل:

$$P(x,y,z)\equiv px+qy+rz+h=0 \qquad (4)$$

وهي المعادلة التحليلية الخطية للمستوي P بالنسبة للمتحولات x,y,z.

٣.٢ حالات خاصة لمعادلة مستوٍ

نحن نعلم أن المعادلة العامة لمستوٍ هي:

$$P(x,y,z)\equiv px+qy+rz+h=0 \qquad (4)$$

لندرس الحالات الخاصة التي يكون فيها بعض الأمثال معدوماً.

١. إذا كانت $h=0$ عندئذٍ تصبح المعادلة بالشكل:

$$P(x,y,z)\equiv px+qy+rz=0 \qquad (5)$$

وهذه تمثل معادلة مستوٍ يمر من مبدأ الإحداثيات؛ لأن هذه المعادلة محققة من أجل هذه النقطة $(0,0,0)$.

٢. إذا كانت $r=0$ عندئذٍ تصبح المعادلة بالشكل:

$$P(x,y,z)\equiv px+qy+h=0 \qquad (6)$$

وهذه تمثل معادلة مستوٍ يوازي المحور OZ؛ لأن وسطاء توجيه الناظم هي: $(p,q,0)$.

٣. إذا كانت $q=0$ عندئذٍ تصبح المعادلة بالشكل:

$$P(x,y,z)\equiv px+rz+h=0 \qquad (6')$$

وهذه تمثل معادلة مستوٍ يوازي المحور OY؛ لأن وسطاء توجيه الناظم هي: $(p,0,r)$.

٤. إذا كانت $p = 0$ عندئذٍ تصبح المعادلة بالشكل:

$$P(x,y,z) \equiv qy + rz + h = 0 \qquad (6'')$$

وهذه تمثل معادلة مستوٍ يوازي المحور OX؛ لأن وسطاء توجيه الناظم هي: $(0,q,r)$.

٥. إذا كانت $p = q = 0$ فالمعادلة تصبح بالشكل:

$$P(x,y,z) \equiv rz + h = 0$$

وهي تكتب بالشكل:

$$z = -\frac{h}{r} = C$$

حيث C ثابت، وهي تمثل معادلة مستوٍ يوازي المستوي XOY ويبعد عنه بمقدار C. وبالطريقة نفسها تماماً نجد أنه إذا كانت $x = A$ حيث A ثابت، وهي تمثل معادلة مستوٍ يوازي المستوي YOZ ويبعد عنه بمقدار A، والمعادلة $y = B$ حيث B ثابت، وهي تمثل معادلة مستوٍ يوازي المستوي ZOX ويبعد عنه بمقدار B.

مثال (١): أوجد معادلة المستوي المار من النقطة $M_0(1,2,-1)$ الذي يعامد المنحى $\vec{N}(-2,4,1)$.

الحل: حسب المعادلة (2) نجد أن:

$$-2(x-1) + 4(y-2) + 1(z+1) = 0 \implies -2x + 4y - z - 5 = 0$$

طريقة ثانية: نعلم أن المعادلة العامة للمستوي:

$$px + qy + rz + h = 0$$

ولكن أمثال توجيه الناظم هي: $p = -2, q = 4, r = 1$ عندئذٍ تصبح المعادلة بالشكل:

$$-2x + 4y + z + h = 0$$

وبما أن المستوي يمر من النقطة $M_0(1,2,-1)$ فهي تحقق معادلته أي أن:

$$-2 + 8 - 1 + h = 0 \implies h = -5$$

وبالتالي فإن معادلة المستوي المطلوب هي:

$$-2x + 4y - z - 5 = 0$$

مثال (٢): أوجد معادلة المستوي الذي يمر من النقطة $M_0(1,3,-1)$ ويعامد المستقيم المار من النقطتين: $A_1(2,1,5),\ A_2(3,2,4)$.

الحل: إن منحى ناظم المستوي المطلوب معين بالشعاع $\overrightarrow{A_1A_2}$ فوسطاء توجيه هذا المنحى هو:

$$p = 3-2 = 1\,, \qquad q = 2-1 = 1\,, \qquad r = 4-5 = -1$$

وبالتالي فإن معادلة المستوي المطلوب حسب (2) هي:

$$(x-1)+(y-3)-(z+1)=0 \implies x+y-z-5=0$$

مثال (٣): أوجد جيوب تمام توجيه منحى الناظم على المستوي:

$$-x+y+2z+3=0$$

الحل: إن وسطاء التوجيه هي: $p=-1, q=1, r=2$ حسب العلاقات (18) من الفصل الأول نجد أن:

$$\alpha = -\frac{1}{\sqrt{6}}\,, \qquad \beta = \frac{1}{\sqrt{6}}\,, \qquad \gamma = \frac{2}{\sqrt{6}}$$

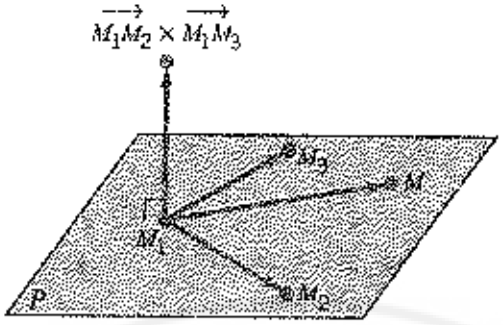
٤.٢ معادلة مستوٍ مار من ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة:

لنفرض أن المستوي P يمر من النقاط الثلاث $M_1(x_1,y_1,z_1),\ M_2(x_2,y_2,z_2),$ $M_3(x_3,y_3,z_3)$ التي لا تقع على استقامة واحدة. من أجل إيجاد معادلة المستوي P يمكننا إرجاع هذه الحالة إلى الحالة الأساسية السابقة وذلك بمعرفة إحدى نقاطه ولتكن $M_1(x_1,y_1,z_1)$ مثلاً، ثم نعين منحى الناظم على هذا المستوي P اعتماداً على العلاقة الآتية:

$$\vec{N} = \overrightarrow{M_1M_2} \wedge \overrightarrow{M_1M_3}$$

أو أي جداء آخر للأشعة: $\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}, \overrightarrow{M_2M_3}$ فتكون معادلته:

$\overrightarrow{M_1M} \perp \left(\overrightarrow{M_1M_2} \wedge \overrightarrow{M_1M_3}\right)$ أو (7) $\overrightarrow{M_1M} \cdot \left(\overrightarrow{M_1M_2} \wedge \overrightarrow{M_1M_3}\right) = 0$ وهذا يمثل جداء مختلط، حيث إن $M(x,y,z)$ نقطة متحولة في هذا المستوي، الشكل: ٢-٢.



الشكل: ٢-٢

مع العلم أن:

$$\overrightarrow{M_1M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1), \qquad \overrightarrow{M_1M_3}(x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$$

ويمكن أن نعبر عن العلاقة (7) تحليلياً بالشكل الآتي:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (8)$$

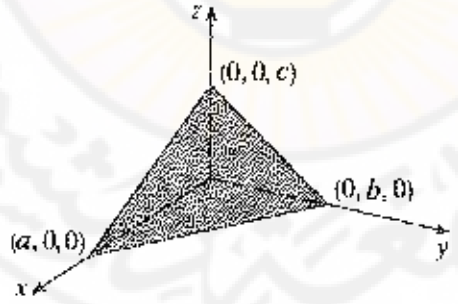
يشير هذا المحدد لحصل على معادلة المستوي P المار من النقاط M_1, M_2, M_3.

وبحالة خاصة، إذا كانت النقاط الثلاث هي نقاط تقاطع المستوي مع المحاور الإحداثية

أي: $M_1(a,0,0),\ M_2(0,b,0),\ M_3(0,0,c)$ تصبح معادلة المستوي:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

وتسمى بمعادلة التقاطع للمستوي انظر الشكل: ٢-٣.



الشكل: ٢-٣

مثال (٤): أوجد معادلة المستوي المار بالنقاط الثلاث الآتية:

$$M_1(1,0,-2), \qquad M_2(2,2,3), \qquad M_3(1,2,-1)$$

الحل: إن معادلة المستوي تعطى اعتماداً على العلاقة (8) وبنشر المحدد:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z+2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -8(x-1) - y + 2(z+2) = 0$$

نجد أن معادلة المستوي المطلوب هي:

$$-8x - y + 2z + 12 = 0 \Rightarrow 8x + y - 2z - 12 = 0$$

ومعادلة تقاطعه مع المحاور الإحداثية هي:

$$\frac{x}{\frac{12}{8}} + \frac{y}{12} + \frac{z}{-6} = 1$$

فهو يقطع المحاور الإحداثية في النقاط:

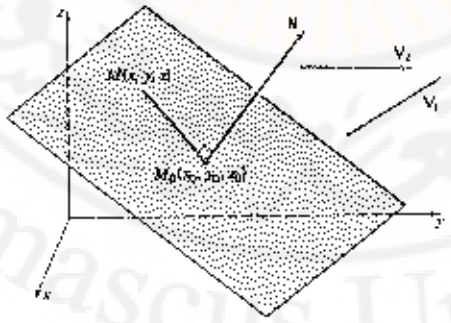
$$p_1\left(\frac{12}{8}, 0, 0\right), \qquad p_2(0, 12, 0), \qquad p_3(0, 0, -6)$$

مثال (٥): أوجد معادلة المستوي الذي يقطع المحور OX في نقطة فاصلتها -4 ويقطع المحور OY في نقطة ترتيبها 3 ويقطع المحور OZ في نقطة راقمها 2.

الحل: حسب العلاقة (9) نكتب: $\frac{x}{-4} + \frac{y}{3} + \frac{z}{2} = 1$.

٢.٥ معادلة مستوٍ يمر من نقطة معلومة ويوازي منحيين مفروضين:

لتكن النقطة $M_0(x_0, y_0, z_0)$ نقطة معلومة يمر منها المستوي P، وليكن $\vec{V}_1(p_1, q_1, r_1)$ و $\vec{V}_2(p_2, q_2, r_2)$ شعاعا توجيه المنحيين المفروضين، ولنبحث عن معادلة المستوي P المار من النقطة M_0، والموازي للمنحيين المفروضين. الشكل: ٢-٤.



الشكل: ٢-٤

إن منحى الناظم $\vec{N}$ للمستوي P هو منحى الشعاع: $\vec{N}=\vec{V}_1\Lambda\vec{V}_2$ فإذا فرضنا $M(x,y,z)$ نقطة من المستوي P فإن:

$$\overrightarrow{M_0M}\perp\vec{N}\Leftrightarrow\overrightarrow{M_0M}\cdot\vec{N}=0\Leftrightarrow\overrightarrow{M_0M}\cdot\left(\vec{V}_1\Lambda\vec{V}_2\right)=0$$

وهي المعادلة الشعاعية للمستوي المطلوب. وهذه المعادلة تكتب بالشكل التحليلي الآتي:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix}=0 \qquad (10)$$

مثال (٦): أوجد معادلة المستوي المار من النقطة $M_0(1,4,6)$ والموازي للشعاعين: $\vec{V}_1(3,1,-1)$ و $\vec{V}_2(0,2,3)$.

الحل: لإيجاد معادلة المستوي المطلوب نطبق العلاقة (10) نجد:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-4 & z-6 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow 5x-9y+6z-5=0$$

وهي معادلة المستوي المطلوب.

مثال (٧): أوجد معادلة المستوي المار من النقطة $A(2,1,0)$ ويعامد الفصل المشترك للمستويين:

$$x+2y+z-4=0 \qquad \& \qquad 3x+y+3z+5=0$$

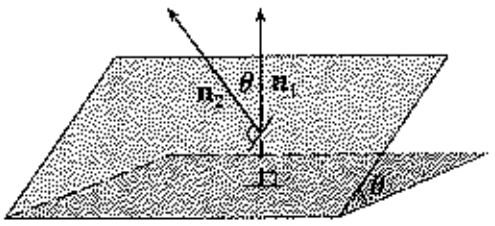
الحل: ترد هذه المسألة إلى سابقتها؛ وذلك لأن تعامد المستوي المطلوب مع الفصل المشترك للمستويين المعطيين يكافئ توازيه مع ناظميهما فمعادلته:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow 5x-y-3z-9=0$$

وهي معادلة المستوي المطلوب.

٦.٢ الزاوية بين مستويين

ليكن لدينا المستويان المتقاطعان: $\begin{cases} P_1(x,y,z)\equiv p_1x+q_1y+r_1z+h_1=0 \\ P_2(x,y,z)\equiv p_2x+q_2y+r_2z+h_2=0 \end{cases}$



الشكل: ٢-٥

إن الزاوية بين المستويين المتقاطعين P_1 و P_2 هي الزاوية الكائنة بين متجهي ناظميهما. إن شعاع منحى ناظم المستوي الأول هو: $\vec{N}_1(p_1, q_1, r_1)$. وشعاع منحى ناظم المستوي الثاني هو: $\vec{N}_2(p_2, q_2, r_2)$. فإذا كانت θ هي الزاوية الكائنة بين الشعاعين $\vec{N}_1$ و $\vec{N}_2$ يكون:

$$\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2 = |\vec{N}_1| \cdot |\vec{N}_2| \cos\theta \quad \Longrightarrow$$

$$\cos\theta = \frac{\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2}{|\vec{N}_1| \cdot |\vec{N}_2|} = \frac{p_1p_2 + q_1q_2 + r_1r_2}{\sqrt{p_1^2 + q_1^2 + r_1^2}\sqrt{p_2^2 + q_2^2 + r_2^2}} \qquad (11)$$

من هذه العلاقة نلاحظ أن المقدار في المقام هو دوماً موجب، أما المقدار الموجود في البسط فهو موجب عندما تكون الزاوية θ حادة، وسالب عندما تكون الزاوية θ منفرجة وبما أننا نريد تعيين الزاوية بين منحنيي المتجهين $\vec{N}_1$ و $\vec{N}_2$ بغض النظر عن اتجاههما أي: $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ لذلك نأخذ القيمة المطلقة للبسط وتصبح العلاقة (11) على الشكل الآتي:

$$\frac{|p_1p_2 + q_1q_2 + r_1r_2|}{\sqrt{p_1^2 + q_1^2 + r_1^2}\sqrt{p_2^2 + q_2^2 + r_2^2}} \qquad (12)$$

المستويان P_1 و P_2 يتعامدان إذا تعامد ناظميهما أي أن:

$$\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2 = p_1p_2 + q_1q_2 + r_1r_2 = 0 \qquad (13)$$

ويكون المستويان P_1 و P_2 متوازيين إذا توازى ناظميهما أي أن:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{q_1}{q_2} = \frac{r_1}{r_2} = \lambda \quad ; \quad \lambda = \text{constant} \qquad (14)$$

وبالتالي شرط التوازي ممكن أن يكتب بالشكل:

$$p_1 = \lambda p_2\,, \qquad q_1 = \lambda q_2\,, \qquad r_1 = \lambda r_2$$

أما إذا اشترك المستويان بنقطة واحدة بالإضافة لتوازيهما فيصبح المستويان متطابقين وشرط التطابق هو تحقق الآتي:

$$\frac{p_1}{p_2}=\frac{q_1}{q_2}=\frac{r_1}{r_2}=\frac{h_1}{h_2}=\lambda \quad ; \quad \lambda=\text{constant} \qquad (15)$$

مثال (٨): لتكن لدينا المستويات الآتية:

$$P_1\equiv 4x-5y+6z-9=0\,, \qquad P_2\equiv x+2y+z-1=0$$
$$P_3\equiv -3x-6y-3z+3=0\,, \qquad P_4\equiv 8x-10y+12z+4=0$$

بين أن P_1 يعامد P_2 وأن P_2 وP_3 متطابقان وأن P_1 وP_4 متوازيان.

الحل: ١. نلاحظ أن ناظم المستوي P_1 هو: $\vec{N}_1(4,-5,6)$، وكذلك ناظم المستوي P_2 هو: $\vec{N}_2(1,2,1)$ وحتى يتعامد P_1 مع P_2 يجب تحقق شرط التعامد – وحسب العلاقة (13) – والذي هو:

$$p_1p_2+q_1q_2+r_1r_2=4-10+6=0 \implies P_1\perp P_2$$

٢. شرط الانطباق هو:

$$\frac{p_2}{p_3}=\frac{q_2}{q_3}=\frac{r_2}{r_3}=\frac{h_2}{h_3}$$

مع العلم أن: $\vec{N}_2(1,2,1)$ و$\vec{N}_3(-3,-6,-3)$ و$h_2=-1$ و$h_3=3$، ومنه:

$$\frac{1}{-3}=\frac{2}{-6}=\frac{1}{-3}=\frac{-1}{3} \qquad \text{تحققة}$$

وبالتالي فإن المستويين P_2 و P_3 متطابقان.

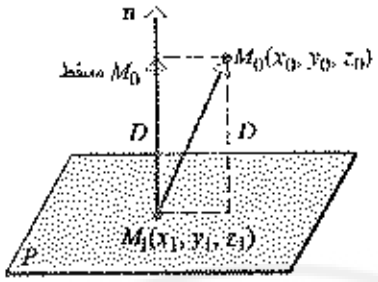
٣. نلاحظ أن: $\vec{N}_1(4,-5,6)$ و$\vec{N}_4(8,-10,-3)$ وشرط التوازي هو تحقق الآتي:

$$\frac{p_1}{p_4}=\frac{q_1}{q_4}=\frac{r_1}{r_4}=\lambda \implies \frac{4}{8}=\frac{-5}{-10}=\frac{6}{12} \qquad \left(\text{تحقق}\right)$$

وبالتالي فإن P_1 وP_4 متوازيان.

٧.٢ بعد نقطة معلومة عن مستو معلوم:

ليكن لدينا المستوي: $P(x,y,z)\equiv px+qy+rz+h=0$، ولتكن لدينا النقطة $M_0(x_0,y_0,z_0)$ لا تقع في هذا المستوي، ولنوجد بعد هذه النقطة عن المستوي P.



الشكل: ٢-٦

لنفرض أن $M_1(x_1, y_1, z_1)$ هو المسقط القائم للنقطة M_0 على المستوي P ولنفرض أن d القياس الجبري للشعاع $\overrightarrow{M_1M_0}$ المحمول على $\vec{N}$ انظر الشكل: ٢-٦ عندئذٍ نكتب:

$$\overrightarrow{M_1M_0} \cdot \vec{N} = |\overrightarrow{M_1M_0}| \cdot |\vec{N}| = d \cdot |\vec{N}|$$

حيث إن d مقدار موجب عندما تقع M_0 في الاتجاه الموجب للناظم $\vec{N}$ بالنسبة للمستوي، وإن d مقدار سالب عندما تقع M_0 في الاتجاه السالب للناظم $\vec{N}$ بالنسبة للمستوي. ومن العلاقة السابقة نجد أن:

$$d = \frac{\overrightarrow{M_1M_0} \cdot \vec{N}}{|\vec{N}|} = \frac{p(x_0 - x_1) + q(y_0 - y_1) + r(z_0 - z_1)}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}$$
$$= \frac{px_0 + qy_0 + rz_0 - (px_1 + qy_1 + rz_1)}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}$$

وبما أن النقطة $M_1(x_1, y_1, z_1)$ تنتمي للمستوي P فإحداثياتها تحقق معادلته أي:

$$px_1 + qy_1 + rz_1 + h = 0 \Rightarrow h = -(px_1 + qy_1 + rz_1)$$

نعوض في العلاقة الأخيرة نجد أن:

$$d = \frac{px_0 + qy_0 + rz_0 + h}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}} \qquad (16)$$

وبما أن البسط ليس إلا القوة التحليلية للنقطة M_0 بالنسبة للمستوي P فنكتب:

$$d = \frac{P(x_0, y_0, z_0)}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}$$

ولإيجاد البعد الهندسي للنقطة M_0 عن المستوي P وبغض النظر عن موقع النقطة M_0 بالنسبة للمستوي P. فنأخذ d بالقيمة المطلقة فنجد:

$$d = \frac{|px_0 + qy_0 + rz_0 + h|}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}} = \frac{|P(x_0, y_0, z_0)|}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}} \qquad (17)$$

مثال (٩): ليكن لدينا المستوي $P(x,y,z) \equiv 2x - y + 3z - 1 = 0$ والمطلوب: حساب بعد كل من النقاط الثلاث الآتية عنه.

$$M_1(1,1,1), \qquad M_2(1,1,-1), \qquad M_3(1,4,1)$$

الحل: بتطبيق الدستور (16) لحساب بعد النقاط الثلاث عن المستوي P الذي ناظمه $\vec{N}(2,-1,3)$:

١. بعد النقطة $M_1(1,1,1)$ عن المستوي P هو:

$$d_1 = \frac{2 - 1 + 3 - 1}{\sqrt{4 + 1 + 9}} = \frac{3}{\sqrt{14}} > 0$$

أي أن النقطة M_1 تقع في جهة الناظم $\vec{N}$.

٢. بعد النقطة $M_2(1,1,-1)$ عن المستوي P هو:

$$d_2 = \frac{2 - 1 - 3 - 1}{\sqrt{4 + 1 + 9}} = \frac{-3}{\sqrt{14}} < 0$$

أي أن النقطة M_2 تقع في الجهة المخالفة للناظم $\vec{N}$.

٣. بعد النقطة $M_3(1,4,1)$ عن المستوي P هو:

$$d_3 = \frac{2 - 4 + 3 - 1}{\sqrt{4 + 1 + 9}} = \frac{0}{\sqrt{14}} = 0$$

أي أن النقطة M_3 تقع على المستوي P.

٨.٢ حزمة المستويات

إن مجموعة المستويات التي تقبل D فصلاً مشتركاً لها تدعى بالتعريف حزمة المستويات، فكل مستقيم في الفضاء يعين حزمة المستويات، أو بشكل آخر كل مستويين متقاطعين يعينان حزمة مستويات تشاركهما بالفصل المشترك نفسه.

ليكن لدينا المستويان P_1 و P_2 المتقاطعان بالفصل المشترك المستقيم D:

$$\begin{cases} P_1(x,y,z) \equiv p_1x + q_1y + r_1z + h_1 = 0 \\ P_2(x,y,z) \equiv p_2x + q_2y + r_2z + h_2 = 0 \end{cases}$$

إن الشكل العام لمعادلة حزمة المستويات المعينة بهذين المستويين تعطى بالشكل:

$$P(\lambda) = P_1 + \lambda P_2 \qquad (18)$$

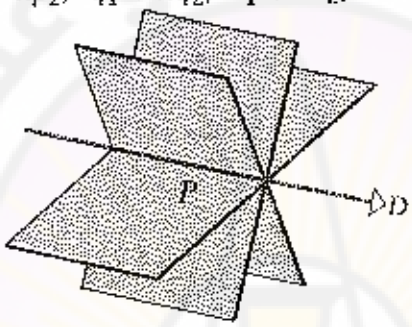
حيث λ وسيط متحول وكل قيمة عددية للوسيط λ تعطي مستوياً من مستويات الحزمة

ويمكن أن نكتب العلاقة على الشكل (18) الآتي:

$$P(\lambda) \equiv p_1x + q_1y + r_1z + h_1 + \lambda(p_2x + q_2y + r_2z + h_2) = 0$$
$$\equiv (p_1 + \lambda p_2)x + (q_1 + \lambda q_2)y + (r_1 + \lambda r_2)z + h_1 + \lambda h_2 = 0$$

إن ناظم حزمة المستويات هو:

$$\vec{N}(p_1 + \lambda p_2,\ q_1 + \lambda q_2,\ r_1 + \lambda r_2) \qquad (19)$$



الشكل:٢-٧

لإيجاد أحد مستويات الحزمة يلزم شرط واحد فقط يحققه المستوي المراد إيجاد معادلته وذلك لأن المعادلة (18) لا تحوي إلا على مجهول واحد وهو الوسيط λ. كما تجدر الإشارة هنا أن مركبات ناظم الحزمة لا تنعدم معاً في آن واحد وإلا أصبح المستويان P_1 و P_2 متوازيين، وهذا مرفوض لأنهما متقاطعان فرضاً بالفصل المشترك D.

مثال (١٠): أوجد معادلة المستوي المار من النقطة $(1,-1,0)$ ومن الفصل المشترك للمستويين:

$$\begin{cases} P_1(x,y,z) \equiv 2x + 3y + z - 2 = 0 \\ P_2(x,y,z) \equiv -3x + y - 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

الحل: إن المستوي المطلوب هو أحد مستويات الحزمة المعينة بـ P_1 و P_2 أي من المستويات:

$$P(\lambda) = P_1 + \lambda P_2 \equiv (2-3\lambda)x + (3+\lambda)y + (1-2\lambda)z - 2 + \lambda = 0$$

لنعين λ بحيث يمر المستوي $P(\lambda)$ من النقطة $(1,-1,0)$ فنجد:

$$(2-3\lambda) - (3+\lambda) - 2 + \lambda = 0 \implies -3\lambda - 3 = 0 \implies \lambda = -1$$

وجدنا أن $\lambda = -1$ نعوض λ بقيمها في معادلة الحزمة نجد:

$$P(-1) \equiv 5x + 2y + 3z - 3 = 0$$

وهي معادلة المستوي المطلوب.

تمارين غير محلولة

١. أوجد معادلة المستوي الذي يمر من النقطتين $A(2,1,-2)$ و$B(3,-1,1)$ يوازي المستقيم الواصل بين النقطتين $C(-2,-3,0)$ و$D(-2,-4,3)$.

٢. مستوٍ يمر من النقاط $A(2,-4,-7)$ و$B(1,-2,3)$ و$C(2,1,3)$ أوجد معادلة هذا المستوي، ثم احسب طول وجيوب تمام توجيه العمود النازل من نقطة الأصل على هذا المستوي.

٣. أوجد معادلة المستوي الذي يمر من النقاط: $A(1,1,0)$ و$B(1,2,1)$ و$C(-2,2,-1)$، وأثبت أن المستقيم الواصل بين النقطتين $D(1,-4,8)$ و$E(5,2,2)$ عمودٌ على هذا المستوي.

٤. أوجد معادلة المستوي المار بالفصل المشترك للمستويين:

$$P_1 \equiv x+y+2=0 \quad \& \quad P_2 \equiv 2x-y+5=0$$

والذي يعامد المستوي $P \equiv x+y+z-1=0$.

٥. أوجد الزاوية الكائنة بين المستويين:

$$P_1 \equiv x-y+z+7=0 \quad \& \quad P_2 \equiv 3x+y+z+4=0$$

٦. أوجد بعد النقطة $M(1,1,2)$ عن المستوي $P \equiv 3x+2y-4z-16=0$.

٧. أوجد معادلة المستوي المار من النقطة $M(1,-2,1)$ والموازي للمنحيين: $\vec{V}_1(0,2,1)$ و$\vec{V}_2(2,1,3)$.

٨. أوجد معادلة المستوي المار من النقطة $M(1,-1,0)$ والذي يعامد المتجه $\vec{N}(2,3,5)$.

٩. أوجد معادلة المستوي المار من الفصل المشترك للمستويين:

$$P_1 \equiv 3x + 2y - 2z + 6 = 0 \qquad \& \qquad P_2 \equiv -x + 2y + 3z - 2 = 0$$

ويمر بالنقطة $M(0,2,1)$.

١٠. أوجد البعد بين المستويين:

$$P_1 \equiv 2x + 2y + z + 3 = 0 \qquad \& \qquad P_2 \equiv 4x + 4y + 2z + 10 = 0$$

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

فهرس الفصل الثالث

٣. المستقيم في الفضاء

١.٣ معادلات المستقيم في الفضاء.

٢.٣ معادلة مستقيم يمر من نقطتين.

٣.٣ معادلة مستقيم معين بتقاطع مستويين معلومين.

٤.٣ الزاوية بين مستقيمين في الفضاء.

٥.٣ زاوية مستقيم مع مستوٍ.

٦.٣ بعد نقطة عن مستقيم.

٧.٣ تقاطع مستقيم مع مستوٍ.

٨.٣ طول مسقط قطعة مستقيمة على مستقيم معلوم.

٩.٣ أقصر بعد بين مستقيمين.

١٠.٣ شرط وقوع مستقيمين في مستوٍ واحد.

١١.٤ التناظر بالنسبة إلى مستوٍ.

١٢.٣ التناظر بالنسبة إلى مستقيم.

تمارين غير محلولة.

Damascus University

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الفصل الثالث

٣. المستقيم في الفضاء

تمهيد: يتعين المستقيم في الفضاء بنقطة معلومة ومنحًى معلوم، أو بنقطتين معلومتين كما يمكن تعيينه بتقاطع مستويين.

١.٣ معادلات المستقيم في الفضاء

لتكن $M_0(x_0, y_0, z_0)$ نقطة من المستقيم D، وليكن $\vec{V}(p, q, r)$ شعاعاً معلوماً يوازي هذا المستقيم، ولنوجد معادلة المستقيم D الذي يمر من النقطة M_0 ويوازي المنحى $\vec{V}$.

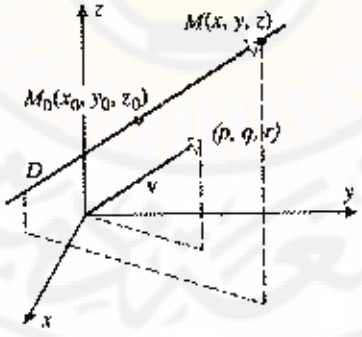
لنأخذ نقطة متحولة على المستقيم D، ولتكن هذه النقطة $M(x, y, z)$، ففي جميع أوضاع النقطة M على هذا المستقيم تتحقق العلاقة الشعاعية الآتية:

$$\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{V}$$

أي أن الشعاعين $\vec{V}$ و $\overrightarrow{M_0M}$ مرتبطان خطياً ونكتب:

$$\overrightarrow{M_0M} = \lambda\vec{V} \qquad (1)$$

حيث λ وسيط متحول.



الشكل: ٣-١

وبإسقاط العلاقة (1) على المحاور الإحداثية نجد:

$$x - x_0 = \lambda p, \qquad y - y_0 = \lambda q, \qquad z - z_0 = \lambda r$$

ومنه نجد:

$$x = x_0 + \lambda p, \qquad y = y_0 + \lambda q, \qquad z = z_0 + \lambda r \qquad (2)$$

وهي المعادلات الوسيطية للمستقيم D. وبحذف الوسيط λ من المعادلات الوسيطية فنحصل على:

$$\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q} = \frac{z - z_0}{r} \qquad (3)$$

ونلاحظ أن هذه العلاقة (3) تمثل معادلتين ديكارتيتين أساسيتين للمستقيم D.

مثال (١): اكتب المعادلات الوسيطية للمستقيم D الذي يمر بالنقطة $M(1,3,-2)$ والموازي للشعاع: $\vec{V} = 3\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$. ثم أوجد معادلته الديكارتية، وعين نقطة تقاطعه مع المستوي YOZ.

الحل: نحن نعلم أن المعادلات الوسيطية حسب العلاقة (2) هي:

$$x = 1 + 3\lambda, \qquad y = 3 + \lambda, \qquad z = -2 + 2\lambda$$

والمعادلات الديكارتية حسب العلاقة (3) هي:

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+2}{2}$$

والتي يمكن كتابتها بالشكل: $x - 3y + 8 = 0$ و $2x - 3z - 8 = 0$.

المستقيم D يقطع المستوي YOZ عندما $x = 0$، بالتعويض في المعادلات الوسيطية نجد أن: $\lambda = \frac{-1}{3}$ نبدل نجد: $y = \frac{8}{3}$ و $z = \frac{-4}{3}$ إذاً نقطة التقاطع هي: $A\left(0, \frac{8}{3}, \frac{-4}{3}\right)$.

٢.٣ معادلة مستقيم يمر من نقطتين:

لتكن $M_1(x_1, y_1, z_1)$ و $M_2(x_2, y_2, z_2)$ نقطتين يمر منهما المستقيم D، ولإيجاد معادلة المستقيم الذي يمر من النقطتين M_1 و M_2 نختار نقطة $M(x, y, z)$ واقعة على هذا المستقيم؛ وبالتالي فإن الشرط اللازم والكافي لكي تقع النقطة M على المستقيم المار من M_1M_2 هو تحقق العلاقة:

$$\overrightarrow{M_1M} \parallel \overrightarrow{M_1M_2}$$

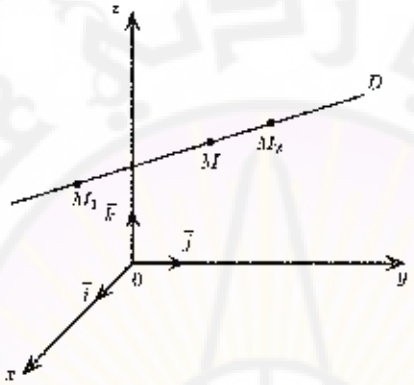
وهذا يكافئ العلاقة الشعاعية:

$$\overrightarrow{M_1M} = \lambda \overrightarrow{M_1M_2}$$

بإسقاط العلاقة الشعاعية على المحاور الإحداثية نجد أن:

$$\left.\begin{aligned} x - x_1 &= \lambda(x_2 - x_1) \\ y - y_1 &= \lambda(y_2 - y_1) \\ z - z_1 &= \lambda(z_2 - z_1) \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

وهذه تمثل المعادلات الوسيطية للمستقيم D المار من النقطتين M_1 و M_2.



الشكل: ٣-٢

بحذف الوسيط λ من المعادلات (4) نحصل على المعادلات الديكارتية للمستقيم D المار من النقطتين M_1 و M_2.

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \qquad (5)$$

مثال (٢): أوجد المعادلات الديكارتية والمعادلات الوسيطية للمستقيم D المار من النقطتين $M_1(2,1,3)$ و $M_2(5,4,5)$.

الحل: إن المعادلات الديكارتية للمستقيم D المار من النقطتين السابقتين حسب العلاقة (5) هي:

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-3}{2}$$

أما المعادلات الوسيطية للمستقيم D هي حسب العلاقة (4):

$$\begin{cases} x-2=3\lambda \Rightarrow x=2+3\lambda \\ y-1=3\lambda \Rightarrow y=1+3\lambda \\ z-3=2\lambda \Rightarrow z=3+2\lambda \end{cases}$$

٣.٣ معادلة مستقيم معين بتقاطع مستويين معلومين:

يمكن أن يتعين المستقيم D كفصل مشترك لمستويين ما مثل:

$$D\begin{cases} P_1 \equiv p_1x+q_1y+r_1z+h_1=0 \\ P_2 \equiv p_2x+q_2y+r_2z+h_2=0 \end{cases} \qquad (6)$$

نلاحظ أن نقاط المستقيم D تحقق بآن واحد المعادلتين (6). لذلك يمكن أن نقول إن جملة المعادلتين (6) تمثل الشكل الديكارتي للمستقيم D، وللانتقال من الشكل الديكارتي إلى الشكل الوسيطي لمعادلات المستقيم D نقوم بحل جملة المعادلتين (6) بالنسبة لأحد المتحولات x أو y أو z بعد أن نقيده وسيطاً λ.

لنفرض أن $z=\lambda$ فتصبح الجملة بالشكل الآتي:

$$D\begin{cases} P_1 \equiv p_1x+q_1y+r_1\lambda+h_1=0 \\ P_2 \equiv p_2x+q_2y+r_2\lambda+h_2=0 \end{cases} \qquad (7)$$

فإذا كان $p_1q_2-p_2q_1\neq 0$ عندئذٍ يمكننا حل الجملة الجديدة (7) وإيجاد قيمتي x,y بدلالة الوسيط λ فنحصل على: $x=x(\lambda),\ y=y(\lambda),\ z=\lambda$، وهي المعادلات الوسيطية للمستقيم D.

ملاحظة (١): لإيجاد المعادلتين الديكارتيتين للمستقيم D نختار نقطة $M_0(x_0,y_0,z_0)$ تحقق جملة المعادلتين (6) ثم نوجد منحى المستقيم بإيجاد الجداء الخارجي لناظمي المستويين P_1,P_2 في (6) وعندئذٍ تصبح المعادلتين الديكارتيتين للمستقيم D، من الشكل:

$$\frac{x-x_0}{p}=\frac{y-y_0}{q}=\frac{z-z_0}{r}$$

حيث $M_0(x_0,y_0,z_0)$ تمثل إحداثيات النقطة المختارة وأيضاً:

$$\vec{N}=\vec{N}_1\wedge\vec{N}_2=p\vec{i}+q\vec{j}+r\vec{k}$$

ملاحظة (٢): لإيجاد منحى المستقيم D المعين بجملة المعادلتين (6) نلاحظ أن $\vec{N}_1$ يمثل ناظم المستوي P_1؛ وكذلك $\vec{N}_2$ يمثل ناظم المستوي P_2؛ وبالتالي فإن منحى المستقيم D يمكن إيجاده اعتماداً على العلاقة الآتية:

$$\vec{V} = \vec{N} = \vec{N}_1 \Lambda \vec{N}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\vec{V} = (q_1 r_2 - r_1 q_2)\vec{i} + (r_1 p_2 - p_1 r_2)\vec{j} + (p_1 q_2 - q_1 p_2)\vec{k}$$

مثال (٣): عين أمثال توجيه المستقيم:

$$D \{ \; P_1 \equiv 2x + y + 3z + 3 = 0 \;\; , \;\; P_2 \equiv x - y + z + 5 = 0$$

الحل: إن أمثال توجيه المستقيم تعطى بالشكل:

$$\vec{V} = \vec{N} = \vec{N}_1 \Lambda \vec{N}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4\,\vec{i} + \vec{j} - 3\,\vec{k}$$

وبالتالي فإن أمثال توجيه الناظم هي: $\vec{N}(4, 1, -3)$.

مثال (٤): أوجد المعادلتين الديكارتيتين للمستقيم D المعين بالمعادلتين:

$$D \begin{cases} P_1 \equiv x - y + 3z + 1 = 0 \\ P_2 \equiv 2x + 5y - z + 2 = 0 \end{cases}$$

الحل: لنوجد أمثال توجيه منحى هذا المستقيم:

$$\vec{V} = \vec{N} = \vec{N}_1 \Lambda \vec{N}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & -1 \end{vmatrix} = -14\,\vec{i} + 7\,\vec{j} + 7\,\vec{k}$$

وبالتالي فإن أمثال توجيه المستقيم هي: $\vec{N}(-14, 7, 7)$.

ولإيجاد نقطة ما من المستقيم D نفرض أن $x = 1$ نعوض في معادلتي المستقيم D نجد:

$$-y + 3z + 2 = 0$$
$$5y - z + 4 = 0$$

وبحل جملة هاتين المعادلتين نجد نقطة من المستقيم وهي $M_0(1, -1, -1)$ والمعادلتين الديكارتيتين هما:

$$\frac{x-1}{-14}=\frac{y+1}{7}=\frac{z+1}{7}$$

مثال (٥): أوجد المعادلات الوسيطية للمستقيم D المعين بالمعادلتين:

$$D\begin{cases}P_1\equiv 3x+y-3z+2=0\\ P_2\equiv 2x-y-2z+8=0\end{cases}$$

الحل: نختار أحد المجاهيل وسيطاً وليكن $z=t$ مثلاً فنحصل على الجملة:

$$3x+y-3t+2=0$$
$$2x-y-2t+8=0$$

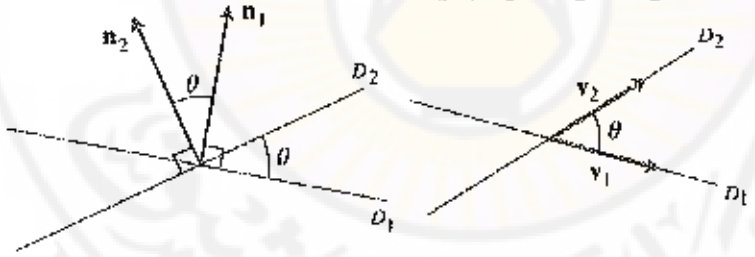
بحل هذه الجملة نحصل على المعادلات الوسيطية للمستقيم والتي هي:

$$x=t-2,\qquad y=4,\qquad z=t$$

٤.٣ الزاوية بين مستقيمين في الفضاء

الزاوية بين مستقيمين في الفضاء هي الزاوية بين منحييهما. فإذا كان منحى المستقيم D_1 معيناً بالشعاع $\vec{V}_1(u_1,v_1,w_1)$ وكان منحى المستقيم D_2 معيناً بالشعاع $\vec{V}_2(u_2,v_2,w_2)$ ولنفرض أن θ هي الزاوية بين منحيي هذين المستقيمين عندئذٍ يكون:

$$\cos\theta=\frac{|\vec{V}_1\cdot\vec{V}_2|}{|\vec{V}_1|\cdot|\vec{V}_2|}=\frac{|u_1u_2+v_1v_2+w_1w_2|}{\sqrt{u_1^2+v_1^2+w_1^2}\sqrt{u_2^2+v_2^2+w_2^2}}\qquad(8)$$



الشكل:٣-٣

مثال (٦): أوجد الزاوية بين المستقيمين:

$$D_1\begin{cases}x=2+2\lambda\\ y=-1+\lambda\\ z=4+3\lambda\end{cases}\qquad D_2\begin{cases}x=-1+\lambda\\ y=2+2\lambda\\ z=1-5\lambda\end{cases}$$

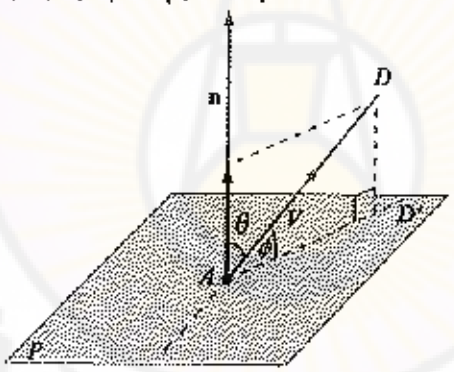
الحل: نلاحظ أن منحنى المستقيم D_1 هو: $\vec{V}_1(2,1,3)$. وكذلك نلاحظ أن منحنى المستقيم D_2 هو: $\vec{V}_2(1,2,-5)$. لإيجاد الزاوية بين المستقيمين D_1 و D_2 نستخدم العلاقة (8) نجد أن:

$$\cos\theta = \frac{|2+2-15|}{\sqrt{4+1+9}\sqrt{1+4+25}} = \frac{11}{\sqrt{14}\sqrt{30}}$$

٣. ٥ زاوية مستقيم مع مستوٍ

هي الزاوية الكائنة بين المستقيم D ومسقط هذا المستقيم على هذا المستوي P، وليكن D'. لنفرض أن منحنى المستقيم D معين بالشعاع $\vec{V}(u,v,w)$ ومنحنى ناظم المستوي P معين بالشعاع $\vec{N}(p,q,r)$. ولنفرض أن φ هي الزاوية بين المستقيم D ومسقطه D' على المستوي P. والزاوية θ هي مكملة للزاوية φ والتي تقع بين $\vec{V}$ و $\vec{N}$ عندئذٍ يكون:

$$\cos\theta = \sin\varphi = \frac{|\vec{N}\cdot\vec{V}|}{|\vec{N}|\cdot|\vec{V}|} = \frac{|pu+qv+rw|}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}\sqrt{u^2+v^2+w^2}} \qquad (9)$$



الشكل: ٣-٤

مثال (٧): أوجد الزاوية بين المستقيم: $D\begin{cases} P_1 \equiv 3x-y+2z+2=0 \\ P_2 \equiv x+3y-z-4=0 \end{cases}$ وبين المستوي: $P \equiv x+2y-z-5=0$.

الحل: إن أمثال توجيه المستقيم D هي مركبات الشعاع:

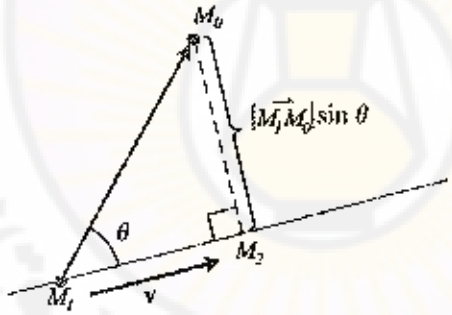
$$\vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -\vec{i} + 7\vec{j} + 5\vec{k}$$

أي أن: $\vec{V}(-1,7,5)$ وأمثال توجيه ناظم المستوي P هي: $\vec{N}(1,2,-1)$ وبالتالي الزاوية بين المستقيم D والمستوي P حسب (9) هي:

$$\sin\varphi = \frac{|\vec{N}\cdot\vec{V}|}{|\vec{N}|\cdot|\vec{V}|} = \frac{|-1+14-5|}{\sqrt{1+4+1}\sqrt{1+49+25}} = \frac{8}{\sqrt{6}\sqrt{75}}$$

٦.٣ بعد نقطة عن مستقيم

إن بعد النقطة $M_0(x_0,y_0,z_0)$ عن المستقيم D هو بالطبع البعد بين هذه النقطة وبين مسقطها القائم على المستقيم D. لنفرض أن المسقط القائم للنقطة M_0 على المستقيم D هي النقطة M_2 ولنفرض أن منحى المستقيم D معين بالشعاع $\vec{V}(u,v,w)$ فلحساب d للنقطة M_0 عن المستقيم D المعين بالنقطة M_1 ومنحاه $\vec{V}$، (انظر الشكل: ٣-٥) نكتب:



الشكل: ٣-٥

$$|\overrightarrow{M_1M_0}\wedge\vec{V}| = |\overrightarrow{M_1M_0}|\cdot|\vec{V}|\sin\theta = |\vec{V}|\cdot d \implies$$

ومنه نجد:

$$d = \frac{|\overrightarrow{M_1M_0}\wedge\vec{V}|}{|\vec{V}|} \qquad (10)$$

وهي العلاقة الشعاعية لبعد النقطة M_0 عن المستقيم D.

مثال (٨): أوجد بعد النقطة $M_0(1,2,3)$ عن المستقيم D المعين بالمعادلتين:

$$D\begin{cases} P_1 \equiv 2x-3y+z=0 \\ P_2 \equiv x+y-3=0 \end{cases}$$

الحل: نعين منحى المستقيم D:

$$\vec{V}=\vec{N}_1\Lambda\vec{N}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=-\vec{i}+\vec{j}+5\vec{k}$$

لنختر نقطة من المستقيم M_1 فيها $y=0$ فيكون $x=3$، $z=-6$. وبالتالي فإن:

$M_1(3,0,-6)$. ويكون: $\overrightarrow{M_1M_0}(-2,2,9)$ وبالتالي:

$$\overrightarrow{M_1M_0}\Lambda\vec{V}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 2 & 9 \\ -1 & 1 & 5 \end{vmatrix}=\vec{i}+\vec{j}+0\vec{k} \Longrightarrow$$

$$\left|\overrightarrow{M_1M_0}\Lambda\vec{V}\right|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}\,,\quad \left|\vec{V}\right|=\sqrt{1+1+25}=\sqrt{27}$$

$$\Longrightarrow d=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{27}}$$

مثال (٩): أوجد بعد النقطة $M_0(-2,3,4)$ عن المستقيم D المعين بـ:

$$\frac{x-3}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{1}$$

الحل: النقطة $M_1(3,-1,1)$ تقع على المستقيم والشعاع $\vec{V}(1,2,1)$ يوازي المستقيم وبالتالي نكتب:

$$\overrightarrow{M_1M_0}\Lambda\vec{V}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -5 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=-2\vec{i}+8\vec{j}-14\vec{k} \Longrightarrow$$

$$\left|\overrightarrow{M_1M_0}\Lambda\vec{V}\right|=\sqrt{4+64+196}=2\sqrt{66}\,,\quad \left|\vec{V}\right|=\sqrt{1+4+1}=\sqrt{6}$$

وبتطبيق العلاقة (10):

$$\Longrightarrow d=\frac{2\sqrt{66}}{\sqrt{6}}=2\sqrt{11}$$

ملاحظة: لحساب البعد بين مستقيمين متوازيين يكفي أن نوجد نقطة من أحدهما ونحسب بعدها عن المستقيم الثاني فنحصل على البعد بين المستقيمين.

مثال (١٠): أوجد البعد بين المستقيمين:

$$D_1:\begin{cases}\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-2}{6}=\dfrac{z-3}{9}\end{cases}\quad,\quad D_2:\begin{cases}\dfrac{x}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z+1}{3}\end{cases}$$

الحل: المستقيمان متوازيان (لأن منحيهما متوازيان) لذلك من أجل حساب البعد بينهما نأخذ نقطة من أحدهما، ولنحسب بعدها عن المستقيم الثاني. لنأخذ النقطة $M_1(1,2,3)$ من المستقيم D_1 ولنحسب بعدها عن المستقيم الآخر. النقطة $M_2(0,-2,-1)$ تقع على المستقيم الثاني وبالتالي يكون:

$$\overrightarrow{M_2M_1}\wedge\vec{V}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&4&4\\1&2&3\end{vmatrix}=4\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}\implies$$

$$\left|\overrightarrow{M_2M_1}\wedge\vec{V}\right|=\sqrt{16+1+4}=\sqrt{21}\ ,\ \left|\vec{V}\right|=\sqrt{1+4+9}=\sqrt{14}$$

وبالتالي حسب العلاقة (10) نجد أن:

$$d=\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{14}}$$

٧.٣ تقاطع مستقيم مع مستوٍ

لنبحث عن نقطة تقاطع المستقيم D المعين بمعادلاته الوسيطية:

$$x=x_0+\lambda u\,,\qquad y=y_0+\lambda v\,,\qquad z=z_0+\lambda w$$

والمستوي P الذي معادلته: $P\equiv px+qy+rz+h=0$.

ولنوجد إحداثيات نقطة تقاطع المستقيم مع المستوي.

إن نقطة التقاطع تحقق إحداثياتها معادلات المستقيم والمستوي، لذلك نعوض كلاً من x,y,z بما يساويها في معادلة المستوي يكون:

$$p(x_0+\lambda u)+q(y_0+\lambda v)+r(z_0+\lambda w)+h=0\implies$$
$$\lambda(pu+qv+rw)+px_0+qy_0+rz_0+h=0\qquad(11)$$

أي نحصل على معادلة بمجهول وحيد هو λ بحل هذه المعادلة نجد قيمة λ المقابلة لنقطة التقاطع وبالتعويض في معادلات المستقيم نجد إحداثيات نقطة التقاطع المطلوبة. إن الشرط اللازم والكافي لإيجاد قيمة λ من المعادلة (11) هو: $pu+qv+rw\neq 0$.

أي ألّا يكون المستقيم موازياً للمستوي ويوجد عندئذٍ قيمة وحيدة لـ λ. وبالتالي يوجد نقطة تقاطع وحيدة يقطع فيها المستقيم D المستوي.

أما إذا حصل العكس فإننا نكون أمام حالتين:

١. إذا كان: $pu+qv+rw=0$ و $px_0+qy_0+rz_0+h=0$ نلاحظ أن الشرط الأول يعني أن المستقيم يوازي المستوي، والشرط الثاني يعني اشتراك المستقيم والمستوي بنقطة واحدة؛ وبالتالي نستنتج أن المستقيم D منطبق على المستوي.

٢. إذا كان: $pu+qv+rw=0$ و $px_0+qy_0+rz_0+h\neq 0$ الشرط الأول يعني أن المستقيم يوازي المستوي والشرط الثاني لا يوجد ولا نقطة تقاطع بين المستقيم والمستوي وهذا يؤدي إلى أن المستقيم يوازي المستوي.

أما إذا كان المستقيم معطًى كفصل مشترك لمستويين أي أن:

$$D\begin{cases}P_1\equiv p_1x+q_1y+r_1z+h_1=0\\ P_2\equiv p_2x+q_2y+r_2z+h_2=0\end{cases}$$

والمستوي P الذي معادلته: $P\equiv px+qy+rz+h=0$.

عندئذٍ نقوم بحل المعادلات الثلاث: $P=0$ و $P_1=0$ و $P_2=0$، بالنسبة (x,y,z) إذا كانت معينة الأمثال:

$$\Delta=\begin{vmatrix}p & q & r\\ p_1 & q_1 & r_1\\ p_2 & q_2 & r_2\end{vmatrix}=0$$

أي إذا كانت نواظم هذه المستويات واقعة في مستوٍ واحد فنكون أمام حالتين:

١. يوجد للمعادلات عدد لا نهائي من الحلول، وهذا ينتج إذا كانت المستويات الثلاثة مشتركة بفصل مشترك واحد.

٢. لا يوجد للمعادلات الثلاث حل مشترك؛ وبالتالي فالمستويات الثلاثة لا تتلاقى

وفي هذه الحالة المستقيم يوازي المستوي P.

أما إذا كان $\Delta \neq 0$ يوجد حل للجملة؛ وبالتالي يوجد نقطة تقاطع.

مثال (١١): ادرس تقاطع المستقيم: $D: \{x = 2 - 3\lambda,\ y = 1 + \lambda,\ z = \lambda$ مع المستويات: $\begin{cases} P_1 \equiv x + y + z + 4 = 0 \\ P_2 \equiv 2x + 4y + 2z + 10 = 0 \\ P_3 \equiv 2x + 8y - 2z - 12 = 0 \end{cases}$.

الحل: نعوض معادلات المستقيم D في معادلة المستوي P_1 نجد:

$$7 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 7$$

نبدل قيمة λ في كل من x, y, z نجد: $x = -19,\ y = 8,\ z = 7$. والمستقيم يقطع المستوي في نقطة وحيدة هي: $M_0(-19, 8, 7)$.

بتعويض معادلات المستقيم D في معادلة المستوي P_2 نجد: $0\lambda = -18$ وهي مستحيلة، فالمستقيم D يوازي المستوي P_2 ولا ينطبق عليه.

وبتعويض معادلات المستقيم D في معادلة المستوي P_3 نجد: $0\lambda = 0$ وهي محققة مهما كانت λ، فالمستقيم D ينطبق على المستوي P_3.

مثال (١٢): أوجد نقطة تقاطع المستوي: $x + y + z - 3 = 0$ مع المستقيم:

$$\frac{x+5}{3} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+3}{2} = \lambda$$

الحل: نلاحظ أن المعادلات الوسيطية لهذا المستقيم هي:

$$x = -5 + 3\lambda, \qquad y = 3 - \lambda, \qquad z = -3 + 2\lambda$$

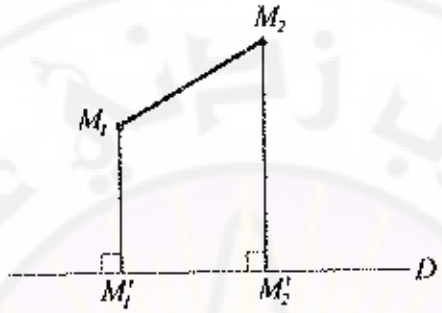
بالتعويض في معادلة المستوي نجد: $4\lambda = 8$ ومنه: $\lambda = 2$، نعوض قيمة λ في المعادلات الوسيطية نجد أن:

$$x = 1, \qquad y = 1, \qquad z = 1$$

فنقطة التقاطع هي: $M_0(1, 1, 1)$.

٨.٣ طول مسقط قطعة مستقيمة على مستقيم معلوم:

ليكن لدينا المعلوم D و $\vec{u}(\alpha,\beta,\gamma)$ شعاع الواحدة المحمول على هذا المستقيم. ولتكن لدينا M_1M_2 قطعة مستقيمة معينة بالنقطتين $M_1(x_1,y_1,z_1), M_2(x_2,y_2,z_2)$ ولنحسب طول مسقط هذه القطعة على المستقيم. الشكل: ٣-٦.



الشكل: ٣-٦

مسقط $\overrightarrow{M_1M_2}$ على $\vec{u}$، وطول المسقط هو القيمة المطلقة للعدد الحقيقي الناتج أي:

$$\text{مسقط } \overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{M_1M_2}\cdot\vec{u} = \alpha(x_2-x_1)+\beta(y_2-y_1)+\gamma(z_2-z_1)$$

$$\text{طول مسقط } \overrightarrow{M_1M_2} = |\alpha(x_2-x_1)+\beta(y_2-y_1)+\gamma(z_2-z_1)| \quad (12)$$

مثال (١٣): احسب طول مسقط القطعة المستقيمة AB المعينة بالنقطتين $A(2,3,5)$ و $B(1,4,-1)$ على المستقيم D المعين بالمعادلتين:

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z}{2}$$

الحل: إن جيوب تمام توجيه منحى هذا المستقيم هي:

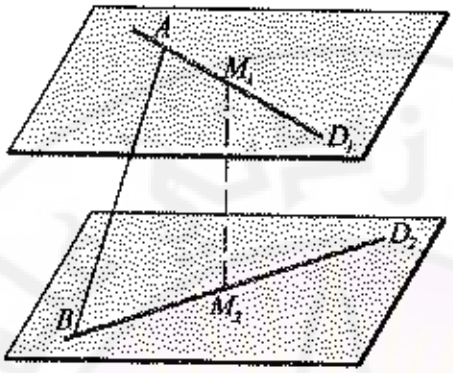
$$\alpha=\frac{2}{3}, \quad \beta=\frac{-1}{3}, \quad \gamma=\frac{2}{3}$$

$$\overrightarrow{AB}=-\vec{i}+\vec{j}-6\vec{k}$$

$$\text{طول المسقط} = \left|\tfrac{2}{3}(-1)-\tfrac{1}{3}(1)+\tfrac{2}{3}(-6)\right| = |-5| = 5$$

٩.٣ أقصر بعد بين مستقيمين:

ليكن لدينا المستقيمان D_1 و D_2 المعلومان في الفضاء، لحساب أقصر بعد بين نقطة ما من D_1 وبين مستوٍ يمر من D_2 يوازي D_1. انظر الشكل: ٣-٧.



الشكل: ٣-٧

نتبع ما يلي: نختار نقطة مثل $A(x_1, y_1, z_1)$ من المستقيم D_1، كذلك نختار نقطة مثل $B(x_2, y_2, z_2)$ من المستقيم D_2، فيمكن اعتبار M_1M_2 مسقطاً للقطعة AB على منحى العمود المشترك للمستقيمين، لذلك نحسب جيوب تمام توجيه منحى العمود المشترك للمستقيمين ثم الدستور (12).

مثال (١٤): احسب طول العمود المشترك بين المستقيمين:

$$D_1 \quad \begin{cases} \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-1}{-3} = \dfrac{z+2}{5} \end{cases} \quad , \quad D_2 \quad \begin{cases} \dfrac{x}{3} = \dfrac{y}{-2} = z \end{cases}$$

الحل: إن أمثال توجيه منحى المستقيم الأول هي: $(2, -3, 5)$.

إن أمثال توجيه منحى المستقيم الثاني هي: $(3, -2, 1)$.

فأمثال توجيه منحى العمود المشترك تعطى بالعلاقة:

$$\vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (-3+10)\vec{i} + (15-2)\vec{j} + (-4+9)\vec{k}$$
$$= 7\vec{i} + 13\vec{j} + 5\vec{k}$$

وبالتالي فإن جيوب تمام توجيه منحى العمود المشترك هي:

$$\left(\frac{7}{\sqrt{243}},\frac{13}{\sqrt{243}},\frac{5}{\sqrt{243}}\right)$$

المستقيم D_1 يمر بالنقطة $A(2,1,-2)$ والمستقيم D_2 يمر بالنقطة $B(0,0,0)$ ومنه يكون طول العمود المشترك حسب (12):

$$M_1M_2=\left|\frac{7}{\sqrt{243}}(2-0)+\frac{13}{\sqrt{243}}(1-0)+\frac{5}{\sqrt{243}}(-2-0)\right|=\frac{17}{\sqrt{243}}$$

مثال (١٥): احسب أقصر بعد بين المستقيمين الآتيين:

$$D_1\ \begin{cases}x+y-z+2=0\\x+z-1=0\end{cases},\qquad D_2\ \begin{cases}2x+y-2z+1=0\\x-y+2=0\end{cases}$$

الحل: ١. نمرر حزمة مستويات من D_2 معادلتها هي:

$$P_2(\lambda)\equiv(2+\lambda)x+(1-\lambda)y-2z+2\lambda+1=0$$

لنوجد منحى المستقيم D_1:

$$\vec{V}_1=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&1&-1\\1&0&1\end{vmatrix}=\vec{i}-2\vec{j}-\vec{k}$$

٢. لدينا:

$$P_2(\lambda)\ /\!/\ D_1\Leftrightarrow\vec{N}_2(\lambda)\cdot\vec{V}_1=0\Longrightarrow$$

$$(2+\lambda)-2(1-\lambda)+2=0\Longrightarrow 3\lambda+2=0\Longrightarrow\lambda=-\frac{2}{3}$$

$$P_2\left(-\frac{2}{3}\right)\equiv\frac{4}{3}x+\frac{5}{3}y-2z-\frac{1}{3}=0$$

$$P_2\equiv 4x+5y-6z-1=0$$

٣. نختار نقطة من D_1 راقمها $z=0$ مثلاً، فيكون: $x=1$ و$y=-3$، أي أن:

$A(1,-3,0)$ هي النقطة المختارة.

نحسب بعد A عن المستوي P_2 باستخدام علاقة بعد نقطة عن مستوٍ نجد:

$$d=\frac{|4-15-1|}{\sqrt{16+25+36}}=\frac{12}{\sqrt{77}}$$

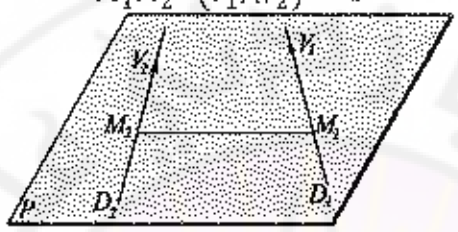
١٠.٣ شرط وقوع مستقيمين في مستوٍ واحد:

ليكن لدينا المستقيمان D_1 وD_2 المعينان وسيطياً بالشكل:

$$D_1:\left\{\frac{x-x_1}{p_1}=\frac{y-y_1}{q_1}=\frac{z-z_1}{r_1}\right.\quad,\quad D_2:\left\{\frac{x-x_2}{p_2}=\frac{y-y_2}{q_2}=\frac{z-z_2}{r_2}\right.$$

والواقعان في مستوٍ واحد، عندئذٍ يتحقق الشرط:

$$\overrightarrow{M_1M_2}\cdot\left(\vec{V}_1\Lambda\vec{V}_2\right)=0$$



الشكل: ٣-٨

حيث إن المستقيم D_1 المعين بالنقطة $M_1(x_1,y_1,z_1)$ ومنحى الشعاع $\vec{V}_1(p_1,q_1,r_1)$. والمستقيم D_2 المعين بالنقطة $M_2(x_2,y_2,z_2)$ ومنحى الشعاع $\vec{V}_2(p_2,q_2,r_2)$. أي أن:

$$\Delta=\begin{vmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ p_1 & q_1 & r_1\\ p_2 & q_2 & r_2\end{vmatrix}=0 \qquad (13)$$

العلاقة (13) تمثل شرط وقوع المستقيمين D_1 وD_2 في مستوٍ واحد.

أما إذا كان المستقيمان D_1 وD_2 معينين ديكارتياً بالمعادلات:

$$D_1:\begin{cases}P_1\equiv p_1x+q_1y+r_1z+h_1=0\\ P_2\equiv p_2x+q_2y+r_2z+h_2=0\end{cases}$$
$$D_2:\begin{cases}P_3\equiv p_3x+q_3y+r_3z+h_3=0\\ P_4\equiv p_4x+q_4y+r_4z+h_4=0\end{cases}$$

فإن وجود المستقيمين D_1 وD_2 في مستوٍ واحد، يعني أن هذا المستوي يكون أحد مستويات الحزمة المعينة بالمستويين P_1 وP_2 وبالوقت نفسه يكون هذا المستوي أحد مستويات الحزمة المعينة بالمستويين P_1 وP_2 فيوجد عندئذٍ أربعة وسطاء λ_1 وλ_2 وλ_3 وλ_4 بحيث تتحقق المعادلة:

$$\lambda_1P_1+\lambda_2P_2+\lambda_3P_3+\lambda_4P_4\equiv 0$$

أي أن إحدى المعادلات الأربع يمكن استنتاجها من المعادلات الثلاث الأخرى، وعندئذٍ يكون الشرط اللازم والكافي هو:

$$\Delta=\begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 & h_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 & h_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 & h_3 \\ p_4 & q_4 & r_4 & h_4 \end{vmatrix}=0 \qquad (14)$$

مثال (١٦): أثبت أن المستقيمين:

$$D_1:\left\{\frac{x-2}{3}=\frac{y-3}{4}=\frac{z-4}{5}\right. \quad , \quad D_2:\left\{\frac{x-3}{4}=\frac{y-4}{5}=\frac{z-5}{6}\right.$$

يقعان في مستوٍ واحد.

الحل: المستقيم D_1 يمر من النقطة $M_1(2,3,4)$ ومنحاه هو: $\vec{V}_1(3,4,5)$. والمستقيم D_2 يمر من النقطة $M_1(3,4,5)$ ومنحاه هو: $\vec{V}_1(4,5,6)$. وشرط وقوع المستقيمين في مستوٍ واحد حسب (13) هو:

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}=0$$

مثال (١٧): أثبت أن المستقيمين:

$$D_1:\left\{\begin{matrix} x+y+z-3=0 \\ y-z+2=0 \end{matrix}\right. \quad , \quad D_2:\left\{\begin{matrix} 2x+y-2z+2=0 \\ 3x-2z+1=0 \end{matrix}\right.$$

يقعان في مستوٍ واحد، ثم عين نقطة تقاطعهما.

الحل: حسب العلاقة (14) نجد:

$$\begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 & h_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 & h_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 & h_3 \\ p_4 & q_4 & r_4 & h_4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}=0$$

فالشرط (14) محقق؛ وبالتالي يقع المستقيمان في مستوٍ واحد، أما نقطة التقاطع فنحصل عليها بإيجاد الحل المشترك لثلاث من المعادلات الأربع فنجد: $x=1, y=0, z=2$ ونرى بسهولة أنها تحقق الرابعة.

١١.٤ التناظر بالنسبة إلى مستوٍ

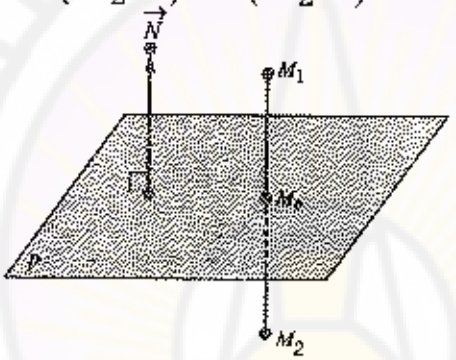
نقول عن النقطتين $M_1(x_1, y_1, z_1)$ و$M_2(x_2, y_2, z_2)$ إنهما متناظرتان بالنسبة للمستوي $P \equiv px + qy + rz + h = 0$ إذا كان هذا المستوي يعامد القطعة المستقيمة $\overline{M_1M_2}$ ويقطعها في منتصفها.

بما أن المستوي P يعامد M_1M_2 عندئذٍ نكتب: $\overrightarrow{M_1M_2} \parallel \vec{N}$، وهذا يعني:

$$\frac{x_2 - x_1}{p} = \frac{y_2 - y_1}{q} = \frac{z_2 - z_1}{r} \qquad (15)$$

والنقطة M_0 منتصف M_1M_2 تحقق إحداثياتها معادلة المستوي أي:

$$p\left(\frac{x_2 + x_1}{2}\right) + q\left(\frac{y_2 + y_1}{2}\right) + r\left(\frac{z_2 + z_1}{2}\right) + h = 0 \qquad (16)$$



الشكل: ٣-٩

إن المعادلات في (15) و(16) تمكننا من إيجاد إحدى النقطتين إذا عرفنا الأخرى والمستوي P، كذلك تمكننا من إيجاد معادلة المستوي P إذا عرفنا النقطتين المتناظرتين.

مثال (١٨): أوجد نظيرة النقطة $M_1(1, 0, 1)$ بالنسبة للمستوي: $x + y + z = -1$.

الحل: نفرض $M_2(x_2, y_2, z_2)$ نظيرة M_1 بالنسبة لهذا المستوي حسب (15) و(16) نجد:

$$x_2 - 1 = y_2 = z_2 - 1$$

$$\frac{1 + x_2}{2} + \frac{y_2}{2} + \frac{1 + z_2}{2} + 1 = 0$$

بحل جملة المعادلات الثلاث نجد:

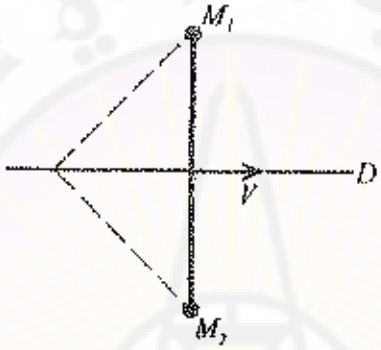
$x_2 = z_2 = -1\ ,\ y_2 = -2$ والنقطة هي: $M_2(-1,-2,-1)$.

١٢.٣ التناظر بالنسبة إلى مستقيم:

نقول عن النقطتين $M_1(x_1,y_1,z_1)$ و $M_2(x_2,y_2,z_2)$ إنهما متناظرتان بالنسبة إلى المستقيم D إذا كان هذا المستقيم يعامد القطعة المستقيمة $\overline{M_1M_2}$ ويقطعها في منتصفها.

فإذا كان المستقيم D معطىً بالمعادلتين:

$$P(x,y,z)=0\ ,\qquad Q(x,y,z)=0$$



الشكل: ٣-١٠

فإن منحى المستقيم D معلوم، وهو: $\vec{V}(u,v,w)$ وبما أن $\overrightarrow{M_1M_2}$ يتعامد مع $\vec{V}$ فإن:

$$\vec{V}\cdot\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1)u+(y_2-y_1)v+(z_2-z_1)w=0$$

وبما أن منتصف $\overline{M_1M_2}$ يقع على المستقيم D فإحداثياتها تحقق معادلتي المستقيم أي:

$$\begin{cases} P\left(\dfrac{x_2+x_1}{2},\ \dfrac{y_2+y_1}{2},\ \dfrac{z_2+z_1}{2}\right)=0 \\ Q\left(\dfrac{x_2+x_1}{2},\ \dfrac{y_2+y_1}{2},\ \dfrac{z_2+z_1}{2}\right)=0 \end{cases} \qquad (17)$$

عندئذٍ تستخدم هذه المعادلات الثلاث لإيجاد نظيرة نقطة أو نظير مستوٍ أو نظير مستقيم بالنسبة إلى مستقيم D.

مثال (١٩): عين نظيرة النقطة $M_1(2,1,0)$ بالنسبة للمستقيم:

$$D\begin{cases} x+2y-1=0, \\ 2x+y+z+2=0 \end{cases}$$

الحل: نفرض أن $M_2(x_2,y_2,z_2)$ نظيرة النقطة M_1. نلاحظ أن منحى المستقيم D هو:

$$\vec{V}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}=2\vec{i}+\vec{j}-3\vec{k}$$

عندئذٍ نجد أن $\vec{V}(2,1,-3)$ وحسب العلاقات (17) نجد:

$$2(x_2-2)-(y_2-1)-3(z_2-0)=0 \Rightarrow 2x_2-y_2-3z_2-3=0$$

$$\left(\frac{x_2+2}{2}\right)+2\left(\frac{y_2+1}{2}\right)-1=0$$

$$2\left(\frac{x_2+2}{2}\right)+\left(\frac{y_2+1}{2}\right)+\left(\frac{z_2}{2}\right)+2=0$$

بحل المعادلات الثلاث السابقة نجد:

$$x_2=-\frac{22}{7}, \qquad y_2=\frac{4}{7}, \qquad x_2=-\frac{23}{7}$$

مثال (٢٠): أوجد نظير المستوي: $P\equiv x+y-2z+1=0$ بالنسبة إلى المستقيم D المعين بالمعادلتين:

$$D\begin{cases} x-z=0, \\ x+y+2=0 \end{cases}$$

الحل: نوجد منحى المستقيم D الذي هو:

$$\vec{V}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$$

ولتكن $M_1(x_1,y_1,z_1)$ نقطة ما من المستوي P، ولتكن $M_2(x_2,y_2,z_2)$ نظيرة النقطة M_1 بالنسبة للمستقيم D بتطبيق العلاقات (17) نجد:

$$\begin{cases} (x-x_1)-(y-y_1)+(z-z_1)=0 \\ \dfrac{x+x_1}{2}-\dfrac{z+z_1}{2}=0 \\ \dfrac{x+x_1}{2}+\dfrac{y+y_1}{2}+2=0 \end{cases}$$

بإصلاح هذه المعادلات الثلاث نجد أن:

$$\begin{cases} -x_1 + y_1 - z_1 = -x + y - z & (1) \\ x_1 - z_1 = z - x & (2) \\ x_1 + y_1 = -x - y - 4 & (3) \end{cases}$$

نحسب x_1, y_1, z_1 بدلالة x, y, z فنجد أن:

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{3}(x + 2y - 2z + 4) \\ y_1 = -\frac{1}{3}(2x + y + 2z + 8) \\ z_1 = \frac{1}{3}(x - 2y - z - 4) \end{cases}$$

لكن بما أن M_1 نقطة من P إذاً: $x_1 + y_1 - 2z_1 + 1 = 0$ وبتعويض x_1, y_1, z_1 بما يساويها في المعادلة الأخيرة نجد:

$$5x - y + 2z + 9 = 0$$

وهي معادلة المستوي المطلوب.

Damascus University

تمارين غير محلولة

١. أوجد معادلات المستقيم المار بالنقطتين $M_1(2,1,3), M_2(0,1,-1)$ ثم أوجد جيوب تمام توجيهه ونقاط تقاطعه مع المستويات الإحداثية ومع المستوي:

$$P \equiv 2x - y + z + 1 = 0$$

٢. أوجد الزاوية بين المستقيم: $D \begin{cases} x - 2y + z = 6 \\ 2x + 3z = 1 \end{cases}$ والمستوي:

$$P \equiv x - y + z = 7$$

٣. أثبت أن المستقيم: $\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{6} = \frac{z-3}{4}$ يوازي المستوي: $2x + 3y - 6z = -7$.

٤. أوجد معادلتي المستقيم الذي يمر بالنقطة $A(1,-1,2)$ ويقطع كلًّا من المستقيمين:

$$D_1 \begin{cases} x - y - z + 1 = 0 \\ 2x + 4y + z - 4 = 0 \end{cases} \qquad D_2 \begin{cases} x = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-2}{3} \end{cases}$$

ثم احسب طول القطعة المحددة بنقطتي تقاطع هذا المستقيم مع المستقيمين D_1 و D_2.

٥. أوجد نظير النقطة $A(-2,1,3)$ بالنسبة للمستوي: $x + 2y + 3z - 2 = 0$.

٦. أوجد نظير المستوي $P \equiv x - 2y + z - 4 = 0$ بالنسبة للمستوي: $Q \equiv 2x + y - z + 1 = 0$.

٧. أثبت أن المستقيمين:

$$D_1 \begin{cases} \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4} \end{cases} \qquad D_2 \begin{cases} \frac{x-1}{3} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-4}{5} \end{cases}$$

يقعان في مستوٍ واحد، أوجد معادلة هذا المستوي ثم عين نقطة تقاطعهما.

٨. بين فيما إذا كان المستقيمان:

$$D_1 \begin{cases} \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3} \end{cases} \qquad D_2 \begin{cases} \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{4} \end{cases}$$

متقاطعين، ثم عين نقطة تقاطعهما في حالة التقاطع.

٩. احسب طول العمود المشترك بين المستقيمين:

$$D_1 \begin{cases} \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-1}{-5} = \dfrac{z+2}{2} \end{cases} \qquad D_2 \begin{cases} \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{-3} = z \end{cases}$$

١٠. بين وضع المستقيم: $\frac{x+5}{3} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+3}{2}$ بالنسبة للمستويات:

$$P_1 \equiv 3x + 3y + 3z - 3 = 0$$
$$P_2 \equiv 3x + y - 4z - 7 = 0$$
$$P_3 \equiv 3x + y - 4z = 0$$

١١. احسب أقصر بعد بين المستقيمين الآتيين:

$$D_1 \begin{cases} x + y - z + 2 = 0 \\ x + z - 1 = 0 \end{cases} \qquad D_2 \begin{cases} 2x + y - 2z + 1 = 0 \\ x - y + 2 = 0 \end{cases}$$

١٢. أوجد بعد النقطة $M(1,0,1)$ عن المستقيم: $D \begin{cases} 2x + y = 0 \\ x + y - 2z + 1 = 0 \end{cases}$.

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

فهرس الفصل الرابع

٤. السطوح والمنحنيات في الفضاء

٤.١ تعريف السطح.

٤.٢ المعادلة العامة لسطوح الدرجة الثانية.

٤.٣ مراكز التناظر للسطوح من الدرجة الثانية.

٤.٤ المخروط الموجه والمخروط المقارب لسطح من الدرجة الثانية.

٤.٥ الأشكال المختلفة للسطوح من الدرجة الثانية.

٤.٦ المخروط من الدرجة الثانية (المخروط التربيعي).

تمارين غير محلولة.

Damascus University

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الفصل الرابع

٤. السطوح والمنحنيات في الفضاء

٤.١ تعريف السطح:

هو المحل الهندسي لمجموعة نقاط الفضاء التي تحقق خاصة معينة تدعى الخاصة المميزة لهذا السطح.

فعلى سبيل المثال: نلاحظ أن مجموعة نقاط الفضاء التي تبعد بعداً ثابتاً عن نقطة ثابتة من مستوٍ معلوم تؤلف سطح كرة.

٤.٢ المعادلة العامة لسطوح الدرجة الثانية:

نقول عن السطح S إنه من الدرجة الثانية إذا كانت معادلته من الدرجة الثانية بالنسبة لـ x, y, z أي أن الشكل العام لمعادلات هذه السطوح هو:

$$f(x,y,z) \equiv a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 + 2b_1yz + 2b_2xz + 2b_3xy + 2c_1x + 2c_2y + 2c_3z + d = 0 \qquad (1)$$

الحدود الثلاثة الأولى تسمى «الحدود المربعة» والحدود الثلاثة التي تليها تسمى «الحدود المستطيلة» والحدود الثلاثة الآتية تسمى بالحدود الخطية، والحد الأخير هو الحد الثابت، يمكن أن نعبر عن العلاقة (1) بشكل مختزل وكما يلي:

$$f(x,y,z) \equiv F(x,y,z) + 2P(x,y,z) + d = 0 \qquad (2)$$

حيث إن $F(x,y,z)$ تابع متجانس من الدرجة الثانية، ويحوي الحدود الستة الأولى من المعادلة (1) و$2P(x,y,z)$ هو تابع متجانس من الدرجة الأولى ويحوي الحدود الثلاثة التي تليها وd هو الحد الثابت.

٣.٤ مراكز التناظر للسطوح من الدرجة الثانية:

إذا جعلنا في المعادلة (1)، $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ عندئذٍ ترد المعادلة إلى معادلة من الشكل:

$$f(x,y,z) \equiv a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 + 2b_1yz + 2b_2xz + 2b_3xy + d = 0 \quad (3)$$

وهنا نلاحظ أن مبدأ الإحداثيات مركز تناظر للسطح من الدرجة الثانية الذي معادلته (3) لتحقق العلاقة:

$$f(x,y,z) = f(-x,-y,-z)$$

وهذا الشرط يتحقق عندما تنعدم الحدود الخطية في المعادلة (1).

أما إذا كانت معادلة السطح تحوي حدوداً خطية، وكانت النقطة $M_0(x_0,y_0,z_0)$ مركز تناظر السطح، فإن انسحاب جملة المحاور الإحداثية وفق الشعاع $\overrightarrow{OM_0}$ يجب أن يعدم الحدود الخطية. لذلك لإيجاد مركز تناظر سطح من الدرجة الثانية يلزم ويكفي أن نبحث عن الانسحاب الذي يعدم الحدود الخطية.

فإذا كانت $M_0(x_0,y_0,z_0)$ مركزاً للجملة الجديدة فإن:

$$x = x_0 + X\,, \qquad y = y_0 + Y\,, \qquad z = z_0 + Z$$

فإذا عوضنا هذه التحولات في المعادلة العامة للسطح من الدرجة الثانية (1)، ورتبنا الحدود تنازلياً فنجد أمثال x هي:

$$2a_1x_0 + 2b_3y_0 + 2b_2z_0 + 2c_1 = f'_{x_0}$$

أمثال y هي:

$$2b_3x_0 + 2a_2y_0 + 2b_1z_0 + 2c_2 = f'_{y_0}$$

أمثال z هي:

$$2b_2x_0 + 2b_1y_0 + 2a_3z_0 + 2c_3 = f'_{z_0}$$

فإذا كانت $M_0(x_0,y_0,z_0)$ مركز تناظر السطح S؛ فإن إحداثياتها تحقق المعادلات الخطية الثلاث:

$$f'_{x_0} = 0\,, \qquad f'_{y_0} = 0\,, \qquad f'_{z_0} = 0 \qquad (4)$$

إن هذه المعادلات الخطية تمثل ثلاثة مستويات، ونكون أمام إحدى الحالات الآتية:

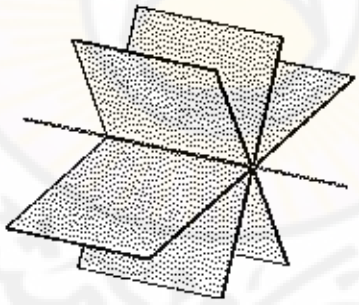
١. إذا كان المحدد: $\Delta \neq 0$ غير مساوية للصفر أي: $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_3 & b_2 \\ b_3 & a_2 & b_1 \\ b_2 & b_1 & a_3 \end{vmatrix} \neq 0$ فلهذه المعادلات (4) حل وحيد x_0, y_0, z_0 ويكون للسطح مركز تناظر وحيد هو $M_0(x_0, y_0, z_0)$ حيث:

$$x_0 = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \qquad y_0 = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \qquad z_0 = \frac{\Delta_z}{\Delta}, \qquad (5)$$

٢. إذا كانت $\Delta = 0$ أي نواظم هذه المستويات تقع في مستوٍ واحدٍ فإننا نميز الحالتين:

أ- إذا كانت: $\Delta_x \neq 0, \Delta_y \neq 0, \Delta_z \neq 0$ عندئذٍ لا يوجد للجملة حل؛ وبالتالي المستويات الثلاثة تكون متقاطعة مثنى مثنى، وتوازي استقامة معينة، وتشكل الوجوه الثلاثة سطحاً موشورياً ولا يوجد للسطح مركز تناظر.

ب- إذا كانت: $\Delta_x = 0, \Delta_y = 0, \Delta_z = 0$ في هذه الحالة تكون إحدى المعادلات الثلاث ناتجة عن المعادلتين الباقيتين؛ وبالتالي ترد جملة المعادلات هذه إلى جملة معادلتين بثلاثة مجاهيل، ولها عدد لا متناهٍ من الحلول، وهذه الحلول هي نقاط الفصل المشترك لهذه المستويات، وعندئذٍ نقول: إن للسطح S محور تناظر هو الفصل المشترك. انظر الشكل: ٤-١.



الشكل: ٤-١

٣. إذا كانت $\Delta = 0$ بسبب تناسب العناصر المتقابلة في صفين على الأقل، فالجملة مستحيلة الحل؛ لأنه يتوازى اثنان من المستويات في هذه الحالة، وعندئذٍ لا يكون للسطح مركز تناظر أو محور تناظر.

أما إذا تناسبت أمثال المجاهيل في كل صفين مع الثوابت الواردة في المعادلات الثلاث فالجملة تمثل ثلاثة مستويات متطابقة، وعندئذٍ تكون جميع نقاط مستوياتها المشتركة نقاط تناظر للسطح؛ وبالتالي يكون هذا المستوي مستوي تناظر للسطح.

مثال (١): أوجد مراكز التناظر للسطوح الآتية:

1. $3x^2+5y^2+3z^2+2yz+2xz+2xy-4x-8z+5=0$
2. $x^2+3y^2-z^2-2yz-4xy+2x+4z-1=0$
3. $x^2+y^2+4z^2-2xy+4xz-4yz-x+y-2z=0$
4. $x^2+y^2+z^2+2xy+2x+3y+z+2=0$

الحل: إن مركز تناظر السطح الأول يعين بالحل المشترك لمجموعة المعادلات الآتية:

$$\begin{cases} f'_x \equiv 6x+2z+2y-4=0 \\ f'_y \equiv 10y+2z+2x=0 \\ f'_z \equiv 6z+2y+2x-8=0 \end{cases}$$

وتختزل إلى الشكل:

$$\begin{cases} 3x+y+z-2=0 & (a) \\ x+5y+z=0 & (b) \\ x+y+3z-4=0 & (c) \end{cases}$$

بحل هذه الجملة نجد أن مراكز التناظر هي النقطة: $\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{4}{3}\right)$.

أما السطح الثاني فنجد المعادلات الآتية:

$$\begin{cases} f'_x \equiv 2x-4y+2=0 \\ f'_y \equiv 6y-4x-2z=0 \\ f'_z \equiv -2z-2y+4=0 \end{cases}$$

وتختزل إلى الشكل:

$$\begin{cases} x-2y+1=0 & (a) \\ -2x+3y-z=0 & (b) \\ y+z-2=0 & (c) \end{cases}$$

ونلاحظ أن معين الأمثال: $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$ ، كذلك نجد:

$$\Delta_x=0, \quad \Delta_y=0, \quad \Delta_z=0$$

فالجملة لها عدد غير منتهٍ من الحلول أي للسطح مراكز تناظر تقع على المستقيم:

$$x-2y+1=0 \qquad \& \qquad y+z-2=0$$

ملاحظة: إذا رجعنا إلى المعادلات الثلاث نجد بسهولة أنه إذا جمعنا المعادلتين (b) و(c) نحصل على المعادلة (a) مما يدل على أن المستويات الثلاثة تشترك بفصل مشترك جميع نقاط مراكز تناظر؛ وبالتالي السطح يقبل هذا الفصل المشترك محوراً للتناظر.

أما بالنسبة للسطح الثالث فنجد المعادلات الآتية:

$$\begin{cases} f'_x \equiv 2x-2y+4z-1=0 \\ f'_y \equiv 2y-2x-4z+1=0 \\ f'_z \equiv 8z+4x-4y-2=0 \end{cases}$$

ونلاحظ بسهولة أن جملة المعادلات الثلاث هذه تمثل ثلاثة مستويات متطابقة، أحدها يصلح مستوياً لتناظر السطح.

أما بالنسبة للسطح الرابع فنجد المعادلات الآتية:

$$\begin{cases} f'_x \equiv 2x+2y+2=0 & (a) \\ f'_y \equiv 2y+2x+3=0 & (b) \\ f'_z \equiv 2z+1=0 & (c) \end{cases}$$

ونلاحظ بسهولة أن المعادلتين (a) و(b) تمثلان مستويين متوازيين، فلا يوجد للجملة حل. وبالتالي لا يوجد للسطح مركز تناظر.

٤.٤ المخروط الموجه والمخروط المقارب لسطح من الدرجة الثانية:

ليكن S سطحاً من الدرجة الثانية معادلته من الشكل:

$$f(x,y,z) \equiv F(x,y,z)+2P(x,y,z)+d=0 \qquad (6)$$

لنفرض وجود نقاط $N(x,y,z)$ لهذا السطح بعيدة جداً عن مركز الإحداثيات أي أن x,y,z تتناهى نحو اللانهاية أن:

$$\lim_{(x,y,z)\to(\infty,\infty,\infty)} f(x,y,z)=F(x,y,z)=0$$

فإن هذه النقاط تقترب من نقاط السطح S' الذي معادلته:

$$F(x,y,z)\equiv a_1x^2+a_2y^2+a_3z^2+2b_1yz+2b_2xz+2b_3xy=0 \qquad (7)$$

لأنه يمكن إهمال الحدود الخطية، والحد الثابت أمام الحدود من الدرجة الثانية. إن المعادلة (7) تمثل معادلة سطح متجانس من الدرجة الثانية S' هو مخروط رأسه مبدأ الإحداثيات، هذا المخروط بالتعريف يسمى بالمخروط الموجه للسطح S.

ويصبح المخروط الموجه مقارباً للسطح S إذا كان مركز تناظره هو مركز تناظر للسطح نفسه.

ونحصل على معادلة المخروط المقارب لسطح من الدرجة الثانية بإجراء انسحاب لرأس المخروط الموجه إلى مركز تناظر السطح؛ وذلك بوضع: $x-x_0, y-y_0, z-z_0$ بدلاً من x, y, z في المعادلة (7).

مثال (٢): ليكن لدينا السطح S معيناً بالمعادلة:

$$3x^2 - y^2 + 2z^2 + 2xy + 8y - 7 = 0$$

فالمطلوب: أوجد معادلة المخروط المقارب لهذا السطح.

الحل: لنوجد أولاً مركز تناظر السطح:

$$f'_x = 6x + 2y = 0, \qquad f'_y = -2y + 2x + 8 = 0, \qquad f'_z = 4z = 0$$

بحل المعادلات:

$$3x + y = 0, \qquad -y + x + 4 = 0, \qquad z = 0$$

نجد: $x = -1\ ,\ y = 3\ ,\ z = 0$ والنقطة $M_0(-1, 3, 0)$ هي إحداثيات مركز تناظر السطح.

إن معادلة المخروط الموجه لهذا السطح هي:

$$3x^2 - y^2 + 2z^2 + 2xy = 0$$

لإيجاد معادلة المخروط المقارب لهذا السطح نستبدل في المعادلة الأخيرة كل x بـ $x+1$ وكل y بـ $y-3$ وكل z بنفسها z نجد:

$$3(x+1)^2 - (y-3)^2 + 2z^2 + 2(x+1)(y-3) = 0 \Rightarrow$$
$$3x^2 - y^2 + 2z^2 + 8y + 2xy - 12 = 0$$

وهي معادلة المخروط المقارب لهذا السطح.

٥.٤ الأشكال المختلفة للسطوح من الدرجة الثانية

وجدنا سابقاً أن الشكل العام لمعادلة سطح من الدرجة الثانية هو:

$$f(x,y,z) \equiv F(x,y,z) + 2P(x,y,z) + d = 0$$

فإذا أجرينا انسحابات مناسبة ودورانات مناسبة أيضاً لجملة المحاور الإحداثية $OXYZ$ عندئذٍ نستطيع حذف الحدود الخطية والمستطيلة من المعادلة، وبذلك تؤول المعادلة إلى الشكل:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + D = 0 \qquad (8)$$

نلاحظ أن هذه المعادلة تحوي حدوداً مربعة فقط وحداً مطلقاً فقط، وهذا الشكل المختزل يسهل علينا دراسة السطح وتعيين نوعه.

١.٥.٤ مجسم القطع الناقص

وجدنا سابقاً أن المعادلة المختزلة للسطح من الدرجة الثانية هي:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + D = 0 \qquad (8)$$

فإذا كانت الأعداد الحقيقية A, B, C, D مخالفة للصفر وكانت D من إشارة مخالفة لإشارة كل من A, B, C عندئذٍ المعادلة (8) يمكن أن نعبر عنها بالشكل:

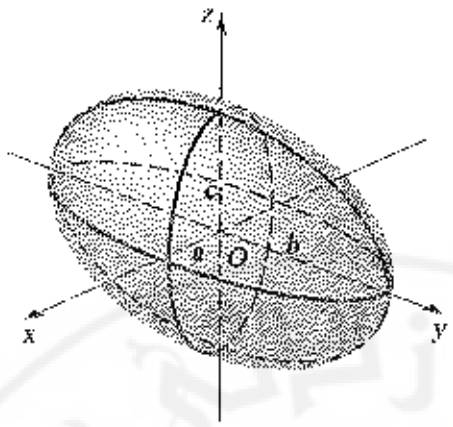
$$\frac{x^2}{\frac{-D}{A}} + \frac{y^2}{\frac{-D}{B}} + \frac{z^2}{\frac{-D}{C}} = 1 \qquad (9)$$

بفرض أن: $\frac{-D}{A} = a^2$, $\frac{-D}{B} = b^2$, $\frac{-D}{C} = c^2$، عندئذٍ تصبح المعادلة (9) بالشكل:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (10)$$

مع العلم أن المقامات هي مقادير موجبة عندئذٍ تسمى المعادلة (10) بالمعادلة النموذجية لمجسم القطع الناقص.

نسمي a, b, c أنصاف محاور مجسم القطع الناقص، وهي تمثل أطوال القطع التي يقطعها مجسم القطع الناقص من المحاور الإحداثية، الشكل:٤-٢.



الشكل: ٤-٢

فمثلاً تمثل a طول القطعة التي تصل مبدأ الإحداثيات بنقطة تقاطع هذا السطح مع القسم الموجب من المحور OX. وهذا واضح لأن النقطة $(a,0,0)$ تحقق معادلة مجسم القطع الناقص.

من المعادلة نجد أن المستويات الإحداثية في هذه الحالة هي مستويات تناظر لمجسم القطع الناقص، ومبدأ الإحداثيات مركز تناظر له أيضاً.

والمقاطع الناشئة عن المستويات الإحداثية هي قطوع ناقصة، فمثلاً يكون لدينا عندما $z=0$، $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. وكل مستوٍ قاطع لمجسم القطع الناقص يقطعه بقطع ناقص أيضاً.

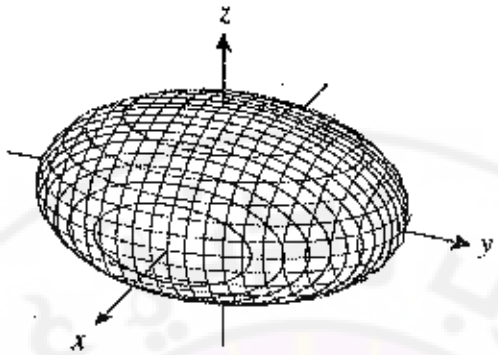
بناء على ما سبق يمكن بسهولة تخيل سطح مجسم القطع الناقص. يمكن في بعض الحالات أن يتساوى اثنان من أنصاف المحاور a,b,c. وبالتالي نحصل على سطح نطلق عليه اسم مجسم قطع ناقص دوراني. فعلى سبيل المثال: إذا كان $a=b$ فإن معادلة مجسم القطع تكتب بالشكل:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$$

ومن خواص مجسم القطع الناقص الدوراني أنه ينتج من دوران القطع الناقص:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$$

الواقع في المستوي XOZ حول المحور OZ الشكل: ٤-٣.



الشكل: ٤-٣

كما أن المستوي $z=h$ يقطع هذا المجسم بدائرة مركزها على المحور OZ إذا كان $|h|<c$. أخيراً إذا تساوت أنصاف المحاور جميعها $a=b=c$ فإن مجسم القطع الناقص يتحول إلى كرة.

مثال (٣): عين السطح المعرف بالمعادلة:

$$16x^2+3y^2+16z^2-48=0$$

الحل: هذه المعادلة ترد إلى الشكل:

$$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{3}=1$$

نلاحظ أن هذه المعادلة هي من الشكل النموذجي لمعادلة مجسم قطع ناقص دوراني أنصاف محاوره $a=c=\sqrt{3}\,,b=4$ ومحور دورانه هو المحور OY.

مثال (٤): عين السطح المعرف بالمعادلة:

$$x^2-6x+4y^2+9z^2+36z-99=0$$

الحل: ترد هذه المعادلة إلى الشكل:

$$x^2-6x+4y^2+9(z^2+4z)-99=0$$
$$x^2-6x+9-9+4y^2+9(z^2+4z+4-4)-99=0$$

بالإصلاح نجد أن:

$$(x-3)^2+4y^2+9(z+2)^2=144$$

إذا سحبنا نقطة الأصل إلى النقطة $(3,0,-2)$ عندئذٍ هذه المعادلة تصبح:

$$\frac{X^2}{144}+\frac{Y^2}{9}+\frac{Z^2}{16}=1$$

وواضح أنها معادلة مجسم قطع ناقص بحالته العامة، أنصاف محاوره: $a=12,\ b=3,$ $c=4$، مركزه النقطة $(3,0,-2)$ ومحاوره التناظرية توازي المحاور الإحداثية.

٢.٥.٤ مجسم القطع الزائد

وجدنا سابقاً أن المعادلة المختزلة للسطوح من الدرجة الثانية هي من الشكل:

$$Ax^2+By^2+Cz^2+D=0 \qquad (11)$$

حيث إن الأعداد: A,B,C,D مغايرة للصفر.

لنفرض أن A,B لها الإشارة نفسها، وأن C من إشارة مخالفة والمعادلة (11) تكتب بالشكل:

$$Ax^2+By^2+Cz^2=-D \qquad (12)$$

لنميز الآن الحالتين التاليتين:

أ- الطرف الثاني $-D$ من إشارة A,B فإذا قسمنا طرفي المعادلة على $-D$ تصبح من الشكل:

$$\frac{x^2}{\frac{-D}{A}}+\frac{y^2}{\frac{-D}{B}}+\frac{z^2}{\frac{-D}{C}}=1$$

ولنفرض أن: $a^2=\frac{-D}{A}, b^2=\frac{-D}{B}, c^2=\frac{D}{A}$ والمعادلة تصبح من الشكل:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

نسمي السطح الناتج مجسم القطع الزائد ذو الفرع الواحد.

ب- الطرف الثاني $-D$ مغاير لإشارة A,B فإذا قسمنا طرفي المعادلة على D تصبح من الشكل:

$$\frac{x^2}{\frac{D}{A}}+\frac{y^2}{\frac{D}{B}}-\frac{z^2}{\frac{D}{C}}=-1$$

ولنفرض أن: $a^2=\frac{D}{A}, b^2=\frac{D}{B}, c^2=\frac{D}{A}$ والمعادلة تصبح من الشكل:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

نسمي السطح الناتج بجسم القطع الزائد ذا الفرعين، لهذه التسمية أسبابها سنبينها فيما بعد.

١ – بجسم القطع الزائد ذو الفرع الواحد (بجسم القطع الزائد وحيد الفرع)

إن معادلة بجسم القطع الزائد وحيد الفرع هي:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

إن هذا السطح متناظر بالنسبة لمبدأ الإحداثيات، أما مقطع هذا بالمستوي الإحداثي xoy هو عبارة عن قطع ناقص في المستوي xoy أما مقطع هذا السطح بالمستوي xoz هو عبارة عن قطع زائد معادلته:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\ ;\ \ y=0$$

كما أن مقطع السطح yoz هو عبارة عن قطع زائد معادلته هي:

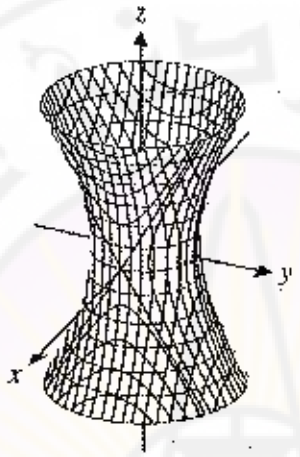
$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\ ;\ \ x=0$$

وهو واقع في المستوي yoz أما مقاطع بجسم القطع الزائد وحيد الفرع بمستويات توازي المستويات الإحداثية فهي قطوع ناقصة أو قطوع زائدة ضمن شروط معينة فعلى سبيل المثال المقطع بمستوٍ يوازي المستوي xoy نجد أن:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{z_0^2}{c^2}\ ;\ \ z=z_0$$

واضح من هذه المعادلة أن المقطع هو قطع ناقص وواضح أيضاً أنه عندما $z_0=0$ فإن أنصاف المحاور للقطع الناقص تأخذ قيماً أصغرية أي يكون المقطع أصغرياً عندما تقطع المجسم xoy. كما نلاحظ أن أنصاف محاور هذه القطوع يزداد بازدياد z_0 لذلك نجد أن

مجسم القطع الزائد وحيد الفرع له شكل أنبوب مقاطعه الأفقية بمستويات موازية للمستوي xoy هي قطوع ناقصة أصغرها هو الواقع في المستوي xoy أي عندما $z = 0$، وتجدر الإشارة إلى أنه في حال تساوي a مع b فإن المقاطع تكون دوائر مركزها المحور oz وتسمى في هذه الحالة مجسم القطع الزائد بمجسم قطع زائد دوراني وحيد الفرع لأنه؛ ناتج عن دوران قطع زائد حول محوره غير القاطع حتماً.



الشكل: ٤-٤

٢- مجسم القطع الزائد ثنائي الفرع:

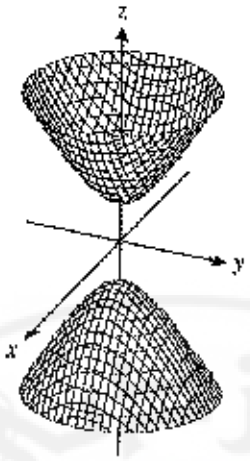
لقد وجدنا سابقاً في هذه الحالة تكوّن معادلة هذا المجسم هي:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

أيضاً لهذا المجسم مركز تناظر هو مبدأ الإحداثيات، لندرس مقاطع هذا السطح مع المستويات الإحداثية، أولاً المقطع بالمستوي xoz والمعرف بالمعادلتين:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1\ ;\ y=0$$

ومن الواضح أن المقطع هو عبارة عن قطع زائد واقع في المستوي xoz ونلاحظ أيضاً من هذه المعادلة نجد أن النقطتين $M_1(0,0,c)$ و $M_2(0,0,-c)$ هما من المحور oz وهو المحور القاطع لمجسم القطع الزائد وهكذا نجد أن المقطع يتألف من فرعين كما هو واضح بالرسم.



الشكل: ٤-٥

أما مقطع المجسم بالمستوي yoz فهو عبارة أيضاً عن قطع زائد واقع في المستوي yoz ومعرف بالمعادلتين:

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1\ ;\quad x=0$$

نلاحظ أيضاً أن القطع هو عبارة عن قطع زائد واقع في المستوي yoz محوره القاطع أيضاً $2c$ ومحوره غير القاطع $2b$ محمول على المحور oy كما يقطع المحور oz في النقطتين السابقتين أيضاً $M_1(0,0,c)$ و $M_2(0,0,-c)$ ويتألف من فرعين.

أما مقاطع المجسم بالمستوي xoy فهو قطع ناقص وهمي، ولذلك تقطع هنا المجسم بمقاطع موازية للمستوي xoy وبذلك نحصل على معادلتي القطع:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z_0^2}{c^2}-1\ ;\quad z=z_0$$

إذا كان $|z_0|>c$ فإن المستوي $z=z_0$ يقطع المجسم بقطع ناقص، أما إذا كان $z_0=c$ فإن المقطع يصبح نقطة، وأيضاً إذا كان $z_0=-c$ فالمقطع أيضاً يصبح نقطة.

وبذلك عندما يكون لدينا $z_0=\pm c$ فإن المقطع يصبح نقطة عند النقطتين $M_1(0,0,c)$ و $M_2(0,0,-c)$ والمستويان $z_0=\pm c$ يمسان المجسم عند النقطتين M_1 و M_2، كما أنه إذا كان $|z_0|<c$ فإن المستوي $z=z_0$ لايقطع المجسم في أية نقطة

ويصبح القطع قطعاً ناقصاً وهمياً وهكذا نستنتج من هذه الدراسة أن مجسم القطع الزائد ثنائي القرع هو عبارة عن سطح مؤلف من فرعين منفصلين تماماً، وأيضاً في حال تساوي a و b فإن المقاطع تكون دوائر متوازية ويسمى عندها مجسم القطع الزائد ذا الفرعين بالمجسم الدوراني، وتكون معادلته من الشكل النموذجي:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \qquad (13)$$

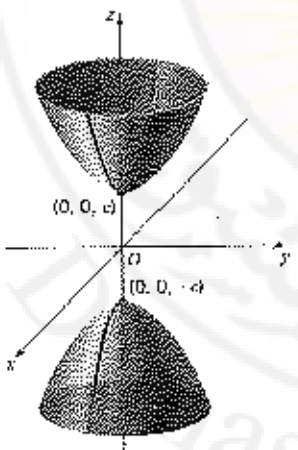
ملاحظة: يمكن لنا أن نجعل الطرف الثاني من معادلة مجسم القطع الزائد ثنائي القرع تساوي $+1$ بضرب طرفي المعادلة (13) بـ -1 فنجد أنها تأخذ الشكل:

$$\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (13')$$

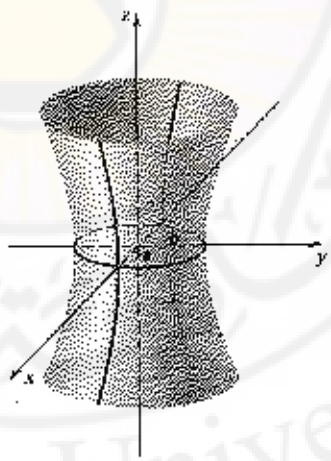
المهم أن يكون حدان من الحدود المربعة سالبين.

الحالات الباقية:

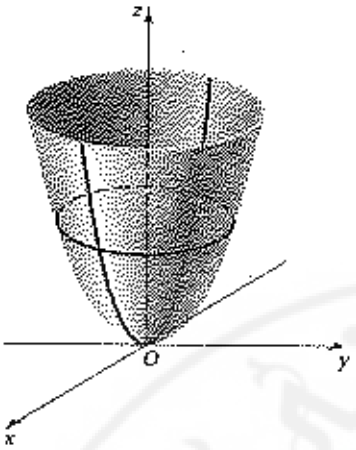
توجد أشكال من السطوح ذات الدرجة الثانية لم نذكرها آنفاً يمكن شملها في الجدول التالي مع العلم أننا عرضنا فقط الحالات التي يكون فيها oz محوراً تناظرياً ويمكن إيجاد الباقي بشكل مشابه:



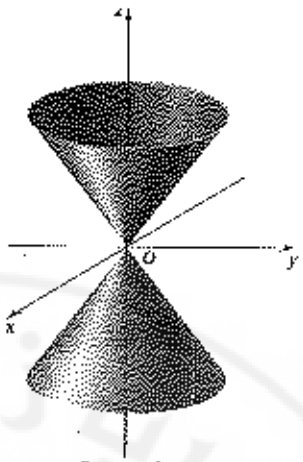
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$



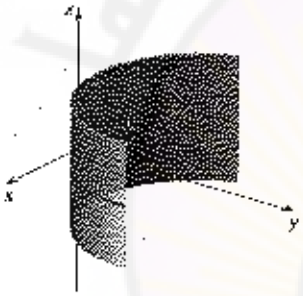
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$



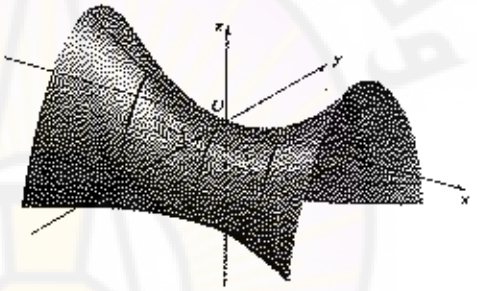
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$$



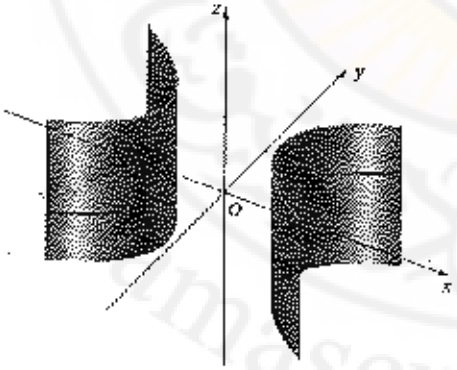
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z^2$$



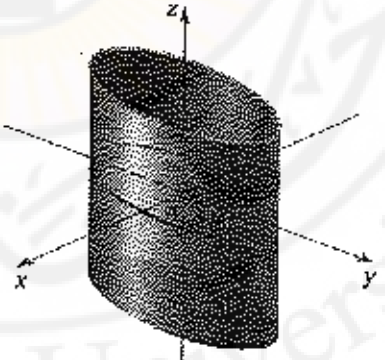
$$x^2=4cy$$



$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z$$



$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

مثال (٥): عين نوع السطح: $3x^2 - 5y^2 - 2z^2 - 30 = 0$.

الحل: هذه المعادلة تكتب بالشكل:

$$\frac{y^2}{6} + \frac{z^2}{15} - \frac{x^2}{10} = -1$$

وواضح أنها المعادلة النموذجية لمجسم قطع زائد ذي الفرعين، وتكتب بشكل آخر:

$$\frac{x^2}{10} - \frac{y^2}{6} - \frac{z^2}{15} = 1$$

مركز تناظره O وطول نصف المحور القاطع $a = \sqrt{10}$ محمول على محور السينات وطولا نصفي المحورين غير القاطعين $b = \sqrt{6}, c = \sqrt{15}$ محمولان على المحورين oy, oz على الترتيب.

مثال (٦): عين نوع السطح الذي معادلته:

$$2x^2 - 3y^2 - 2z^2 - 8x + 6y - 12z - 21 = 0$$

الحل: بالإتمام إلى مربع كامل نجد:

$$2(x^2 - 4x + 4) - 3(y^2 - 2y + 1) - 2(z^2 + 6z + 9) = 8$$

ومنه نجد:

$$\frac{(x-2)^2}{4} - \frac{(y-1)^2}{8/3} - \frac{(z+3)^2}{4} = 1$$

نلاحظ بسهولة أنه مجسم قطع زائد ذو فرعين، مركز تناظره النقطة $(2, 1, -3)$ ونصف محوره القاطع $a = 2$ محمول على محور يوازي المحور ox.

٦.٤ المخروط من الدرجة الثانية (المخروط التربيعي)

إن المعادلة المختزلة لسطح من الدرجة الثانية هي:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + D = 0 \qquad (14)$$

فإذا كانت الأمثال A, B, C مغايرة للصفر والحد المطلق $D = 0$ عندئذٍ المعادلة (14) تصبح بالشكل:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 0 \qquad (15)$$

نميز الحالتين الآتيتين:

الحالة الأولى: إذا كانت الأمثال A,B,C متفقة بالإشارة فإن المعادلة (15) تكون متجانسة من الدرجة الثانية، وتكتب بالشكل:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0 \qquad (16)$$

وهي تمثل نقطة حقيقية هي المبدأ O أو نقول عن هذه المعادلة إنها معادلة مخروط وهمي:

الحالة الثانية: أما إذا اختلفت إشارات الأمثال في المعادلة (15) عندئذٍ يمكن كتابتها بالشكل الآتي:

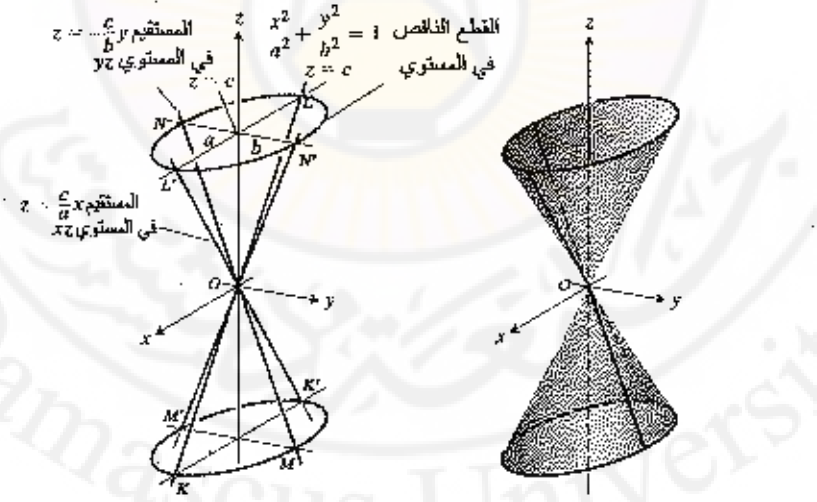
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \qquad (17)$$

وهي معادلة مخروط حقيقي رأسه النقطة O.

أ- إذا قطعنا السطح (17) بالمستوي $z=c$ فمعادلتا المقطع تتعينان كالآتي:

$$\left.\begin{aligned}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad \&\qquad z=c\end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

وهذا المقطع هو قطع ناقص واقع في المستوي الأفقي $z=c$ نصفا محوريه a,b وهو متناظر بالنسبة للمستويين xoz وyoz. الشكل: ٤-٦.



الشكل: ٤-٦

ب- إذا قطعنا السطح بالمستوي xoz فمعادلتا المقطع تتعينان كالآتي:

$$\left.\begin{array}{lll} \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0 & \& & y=0 \end{array}\right\} \quad (19)$$

أي: $$\left.\begin{array}{lll} \left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}\right)\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}\right)=0 & \& & y=0 \end{array}\right\} \quad (19')$$

والمقطع يتألف من جملة المستقيمين: $\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=0$ و $\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=0$ الواقعين في المستوي xoz وهما KL و $K'L'$ الشكل: ٤-٦.

تمارين غير محلولة

١. أوجد معادلة الكرة التي توافق الحالات الآتية:

أ- مركزها النقطة $(1, 0, -1)$ وقطرها يساوي 8.

ب- مركزها النقطة $(-1, 3, 2)$ وتمر من مبدأ الإحداثيات.

ج- قطرها القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين $(-1, 2, 1)$ و $(0, 2, 3)$.

٢. أوجد معادلتي الكرتين اللتين مركزهما مبدأ الإحداثيات وتمسان الكرة التي نصف قطرها يساوي 1، ومركزها $(3, -2, 4)$.

٣. أوجد معادلة الكرة التي مركزهاالنقطة $(2, -1, -3)$ وتوافق الحالات الآتية:

أ- تمس المستوي xoy.

ب- تمس المستوي xoz.

ج- تمس المستوي yoz.

٤. عين نوع السطح من الدرجة الثانية الذي معادلته:

a) $x^2 + y^2 + z^2 + 10x + 4y + 2z - 19 = 0$

b) $x^2 + y^2 + z^2 - y = 0$

c) $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2x - 3y + 5z - 2 = 0$

d) $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y + 2z + 3 = 0$

e) $x^2 + y^2 + z^2 - 3x + 4y - 8z + 25 = 0$

f) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6y - 8z + 1 = 0$

g) $4x^2 + y^2 + z^2 = 4$

h) $9x^2 - y^2 - z^2 = 16$

i) $z = 9x^2 + 4y^2$

j) $9x^2 - y^2 + 4z^2 = 9$

k) $x^2 + 4y^2 - 9z^2 = 0$

l) $z = x^2 - 4y^2$

m) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

n) $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

o) $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$

p) $z = (x + 2)^2 + (y - 3)^2 - 9$

q) $4x^2 - y^2 + 16(z - 2)^2 = 100$

r) $9x^2 + y^2 + 4z^2 - 18x + 2y + 16z - 10 = 0$

s) $z^2 = 4x^2 + y^2 + 8x - 2y + 4z$

t) $z^2 = 4 - x^2 - y^2$

u) $2x^2 + 2y^2 + z^2 - 3 = 0$

Damascus University

فهرس الفصل الخامس

٥. التكاملات المضاعفة

٥.١ التكامل الثنائي.

٥.٢ التكاملات الثنائية في الإحداثيات القطبية.

٥.٣ حساب الحجوم.

٥.٤ تغيير الإحداثيات في التكاملات الثنائية.

٥.٥ التكاملات الثلاثية في $\mathbb{R}^3$.

٥.٦ التكامل الثلاثي في الإحداثيات الأسطوانية.

٥.٧ التكامل الثلاثي في الإحداثيات الكروية.

٥.٨ تغيير الإحداثيات في التكاملات الثلاثية.

تمارين عامة.

Damascus University


وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الفصل الخامس

٥. التكاملات المضاعفة

٥.١ التكامل الثنائي:

للتشابه بين تعريف التكامل المحدد للدالة f بمتغير واحد x على فترة $[a,b]$، وبين تعريف التكامل لدالة f بمتغيرين على منطقة D، من المستحسن أن نذكر بتعريف التكامل المحدد:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

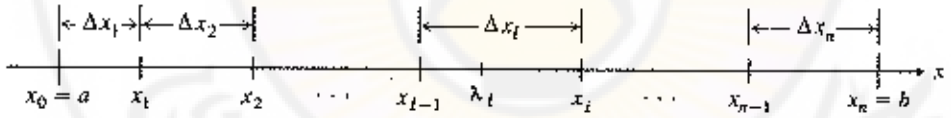
يلزمنا لإنجاز هذا التكامل استناداً للتعريف أن نجزئ الفترة $[a,b]$ المعرفة عليها الدالة f إلى n فترة جزئية بالنقاط:

$$a = x_0, x_1, \cdots, x_{i-1}, x_i, \cdots, x_n = b$$

المحققة للشرط:

$$x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n$$

لنحدد أطوال هذه الفترات بالصورة: $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$



ثم لنختر عدداً اختيارياً λ_i $(i = 1, \cdots, n)$ داخل كل فترة:

$$\lambda_1 \in [x_0, x_1], \cdots, \lambda_i \in [x_{i-1}, x_i], \cdots, \lambda_n \in [x_{n-1}, x_n]$$

لنشكل مجموع ريمان للدالة f على هذه الفترة، ولنرمز له بالرمز S_n:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i)\Delta x_i$$

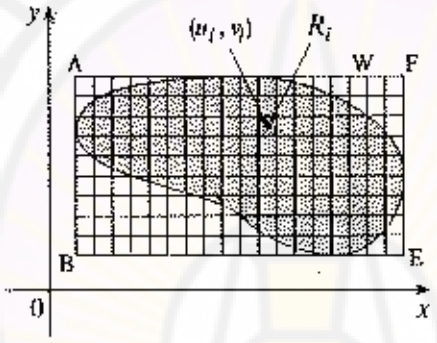
ليكن $\|p\|$ هو أكبر الأعداد Δx_i $(\|p\| = \max \Delta x_i)$ ولنسمه بتنظيم التجزئة.

إذا انتهى S_n نحو العدد الوحيد S عندما: $\|p\| \to 0$، وذلك مهما كانت التجزئة p ومهما كان اختيار λ_i داخل فترات التجزئة، فإننا نسمي هذه النهاية بالتكامل المحدد للدالة f على الفترة $[a,b]$، ولنرمز لهذا التكامل بالرمز $\int_a^b f(x)\,dx$ ، ونكتب:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\|p\|\to 0} S_n$$

نقول في هذه الحالة: إن f قابلة للتكامل على الفترة $[a,b]$.

لتكن f دالة بمتغيرين x, y معرفة على منطقة D. لنعرف التكامل الثنائي لهذه الدالة على هذه المنطقة. لتكن w المنطقة المغلقة المستطيلة الشكل التي أضلاعها توازي المحاور الإحداثية، وتحوي المنطقة المحددة D، شكل: ٥-١.



الشكل: ٥-١

لتكن n عدد المناطق مستطيلة الشكل التي تقع داخل D، وهي:

$$R_0, R_1, \cdots, R_i, \cdots, R_n$$

نسمي مجموعة هذه المناطق المستطيلة الجزئية والمغلقة التي تقع بشكل كامل داخل D بالتجزئة الداخلية p للمنطقة D، ولنرمز لها بالرمز $\{R_i\}$. لتكن ΔA_i مساحة المنطقة المستطيلة R_i ولتكن (u_i, v_i) نقطة اختيارية تقع داخل R_i. نسمي طول أكبر قطر بين جميع أقطار المجموعة $\{R_i\}$ بتنظيم التجزئة p، ولنرمز له بالرمز $\|p\|$.

تعريف (١): لتكن f دالة بمتغيرين (x,y) معرفة على منطقة D، ولتكن $p = \{R_k\}$ تجزئة داخلية للمنطقة D، نسمي أي مجموع من الشكل:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(u_k, v_k)\, \Delta A_k$$

بمجموع ريمان للدالة f من أجل التجزئة p، حيث (u_k, v_k) نقطة اختيارية من R_k التي مساحتها ΔA_k، والمجموع يمتد على كل المجموعات الجزئية لهذه التجزئة.

تعريف (٢): لتكن f دالة بمتغيرين (x, y) معرفة على المنطقة المغلقة والمحدودة D، وليكن L عدداً حقيقياً. تحقق العبارة:

$$\lim_{\|p\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(u_i, v_i)\, \Delta A_i = L$$

يعني: أنه لكل عدد $\varepsilon > 0$، يوجد عدد $\delta > 0$، حيث لو كانت p تجزئة داخلية للمنطقة D تحقق الشرط: $\|p\| < \delta$، لكان:

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(u_i, v_i)\, \Delta A_i - L \right| < \varepsilon$$

مهما كان اختيار (u_i, v_i) داخل R_i.

تعريف (٣): لتكن f دالة بمتغيرين (x, y) معرفة على المنطقة المغلقة والمحدودة D، نعرف التكامل الثنائي للدالة f على المنطقة D، ونرمز له بالشكل $\iint_D f(x, y) dA$، بالصورة الآتية:

$$\iint_D f(x, y) dA = \lim_{\|p\| \to 0} S_n$$

بشرط وجود هذه النهاية مهما كانت التجزئة، ومهما كان اختيار (u_i, v_i) داخل R_i.

نقول عن الدالة f المحققة لهذا التعريف، إنها قابلة للتكامل على المنطقة D. وإذا كانت $f(x, y) = 1$، فإن ناتج التكامل $\iint_n dx dy = \iint_D dA$ يمثل مساحة المنطقة D.

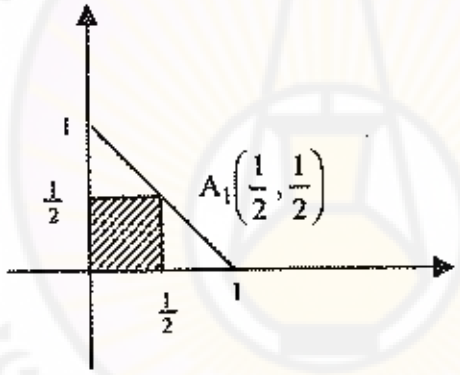
نظرية (١): كل دالة متصلة على منطقة D مغلقة، ومحدودة هي قابلة للتكامل على هذه المنطقة.

مثال (١): باستخدام مجموع ريمان، أوجد القيمة التقريبية للتكامل: $\iint_D 24xy\,dA$، حيث D المنطقة المحددة بالشكل: $x+y\le 1,\ y\ge 0,\ x\ge 0$.

الحل: الدالة $f(x,y)=24xy$ متصلة؛ لأنها كثيرة حدود، فهي قابلة للتكامل على المنطقة المثلثية الشكل D. يمكن البرهان فيما بعد على أن قيمة التكامل تساوي الواحد. لنحسب هذا التكامل بشكل تقريبي باستخدام مجموع ريمان.

١. لنجزئ الفترة $[0,1]$ الواقعة على المحور x إلى جزءين متساويين $(n=2)$، وبالمثل الفترة $[1,0]$ الواقعة على المحور y فنحصل على تجزئة p تحوي منطقة جزئية واحدة R_1 مساحتها: $\Delta A_1=\frac{1}{4}$، بالتالي فإن قيمة التكامل التقريبية:

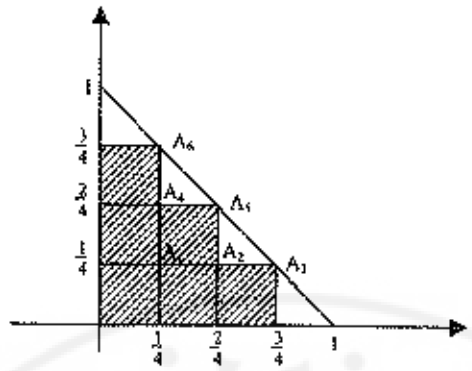
$$\iint_D 24xy\,dA \approx f(x_1,y_1)\Delta A_1 \approx 24\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)\approx 1.5$$



الشكل: ٥-٢

٢. لنأخذ: $n=4$ على كل من المحورين، فنحصل على تجزئة داخلية تحوي ستة مربعات مساحة كل منها يساوي $\frac{1}{16}$، وتكون قيمة مجموع ريمان:

$$\sum_{i=1}^{6} f(x_i,y_i)\Delta A_i=\frac{24}{16}\sum_{i=1}^{6} x_i\,y_i=\frac{24}{16}\left(\frac{1}{16}+\frac{2}{16}+\frac{3}{16}+\frac{2}{16}+\frac{4}{16}+\frac{3}{16}\right)$$
$$=\frac{45}{32}=1\frac{13}{32}$$



الشكل: ٥-٣

٣. إذا كانت: $n = 8$ فسوف نجد عدد المربعات يساوي 28، وقيمة التكامل التقريبية هي: $S_n = 1\frac{59}{256}$.

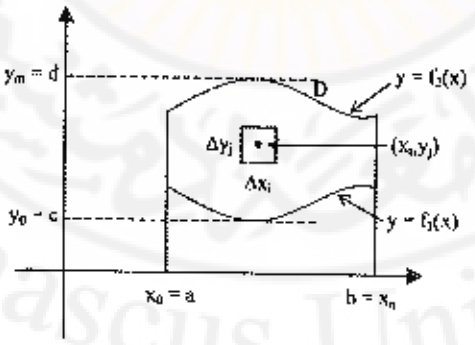
٤. إذا كانت: $n = 10$ فسوف نجد عدد مربعات التجزئة الداخلية p هو 45، وقيمة التكامل التقريبية هي: $S_n = 1.188$.

٥.١.١ حساب التكامل الثنائي:

أ- لتكن f دالة بمتغيرين متصلة على منطقة مغلقة D من النوع الأول. ولتكن p تجزئة داخلية للمنطقة D. مجموع ريمان الموافق لهذه التجزئة هو:

$$\sum_{i,j} f(x_i, y_j)\Delta y_j \Delta x_i$$

حيث: $1 \le i \le n,\ 1 \le j \le m$ شكل: ٥-٤.



الشكل: ٥-٤

يمكن أن نكتب مجموع ريمان على الشكل:

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \left(\sum_{j=1}^{m} f(x_i, y_j) \Delta y_j \right)$$

نحسب نهاية هذا المجموع عندما نظيم التجزئة ينتهي نحو الصفر، بالصورة الآتية:

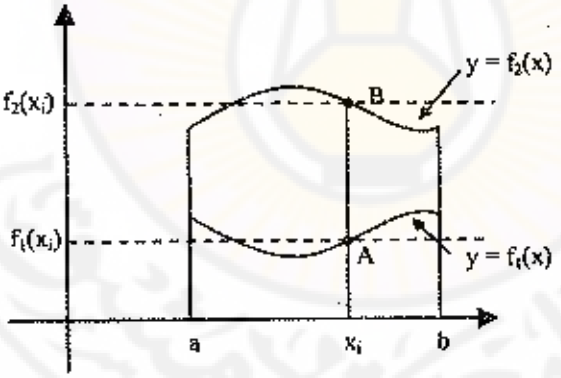
١. نثبت x_i ونحسب نهاية المجموع ما بين المعترضتين عندما: $\max \Delta y_j \to 0$ ولتكن هذه النهاية تساوي: $\varphi(x_i)$.

٢. نحسب نهاية $\sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i) \Delta x_i$ عندما: $\max \Delta x_i \to 0$ وسنوضح ذلك في الآتي:

نعلم أن: f دالة متصلة على D، بالتالي فإن $f(x,y)$ متصلة بالنسبة للمتغير y على أية قطعة مستقيمة $[A,B]$ محتواة في D وموازية للمحور y الشكل: ٥-٤. لنحسب النهاية الآتية مع x_i، فنجد:

$$\lim_{\|p''\| \to 0} \sum_{j=1}^{m} f(x_i, y_j) \Delta y_j = \int_{f_1(x_i)}^{f_2(x_i)} f(x_i, y) dy = \varphi(x_i)$$

حيث إن $\|p''\|$ نظيم التجزئة على الفترة $[f_1(x_i), f_2(x_i)]$.



($f_2(x) \geq f_1(x)$، $f_1(x)$ و $f_2(x)$ متصلتان على الفترة $[a,b]$)

الشكل: ٥-٥

ب- لنحسب نهاية المجموع: $\sum_i \varphi(x_i) \Delta x_i$ عندما $\|p'\| \to 0$ (حيث $\|p'\|$ نظيم التجزئة على الفترة $[a,b]$)، فنجد:

$$\lim_{\|p'\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\varphi(x_i)\Delta x_i=\int_a^b\varphi(x)dx$$

أو بصورة أخرى:

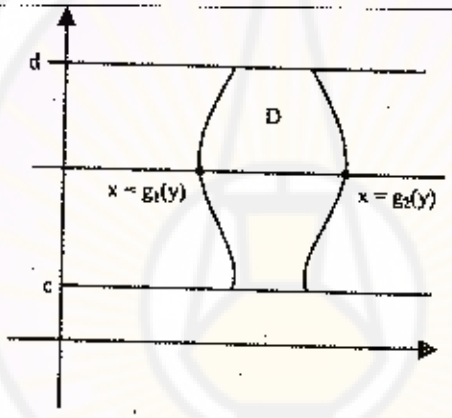
$$\lim_{\|p\|\to 0}\sum_{i,j}f(x_i,y_j)\Delta y_i\Delta x_i=\iint_D f(x,y)dydx=\int_a^b\left[\int_{f_1(x)}^{f_2(x)}f(x,y)dy\right]dx$$

(التكامل بين المعترضتين يكامل مع ثبات x)

إذا كانت D من النوع الثاني فإن التكامل الثنائي يصبح على الصورة:

$$\lim_{\|p\|\to 0}\sum_{i,j}f(x_i,y_j)\Delta x_i\Delta y_j=\iint_D f(x,y)dydx=\int_c^d\left[\int_{g_1(y)}^{g_2(y)}f(x,y)dx\right]dy$$

(التكامل بين المعترضتين يكامل مع ثبات x)



($g_2(y)\geq g_1(y)$، $g_2(y)$ و $g_1(y)$ متصلتان على الفترة $[c,d]$)

الشكل: ٥-٦

يمكن أن نقبل بصحة النظريات الآتية دون برهان:

نظرية (٢): إذا كانت النهاية: $\sum_{\|p\|\to 0}f(x_i,y_j)\Delta A_i$ موجودة، فإن النهاية وحيدة.

نظرية (٣): إذا كانت: $f(x,y),g(x,y)$ قابلتين للتكامل على المنطقة D، وإذا كان: $f(x,y)\leq g(x,y)$، فإن:

$$\iint_D f(x,y)dA \le \iint_D g(x,y)dA \quad ; \quad (dA = dydx)$$

نظرية (٤): إذا كانت $f(x,y)$ قابلة للتكامل على المنطقة D، فإن $kf(x,y)$ قابلة للتكامل على المنطقة D، حيث k عدد ثابت:

$$\iint_D kf(x,y)dA = k\iint_D f(x,y)dA$$

نظرية (٥): إذا كانت $f(x,y),\ g(x,y)$ قابلتين للتكامل على المنطقة D، فإن مجموعهما وفرقهما يكون أيضاً قابلاً للتكامل على D، وبالتالي:

$$\iint_D [f(x,y) \pm g(x,y)]dA = \iint_D f(x,y)dA \pm \iint_D g(x,y)dA$$

والنظرية صحيحة من أجل عدد محدود من الدوال.

نظرية (٦) (نظرية القيمة المتوسطة): إذا كانت $f(x,y)$ متصلة على منطقة مغلقة ومحدودة D، فلا بد من وجود نقطة (ξ,η) داخل D، بحيث تكون:

$$\iint_D f(x,y)dA = f(\xi,\eta)\ S \quad ; \quad \left(S \text{ مساحة المنطقة } D\right)$$

مثال (٢): عين حدود التكامل: $\iint_D f(x,y)dydx$ من أجل المنطقة التي تحد كلاً من الأشكال الآتية، ثم احسب في الطلبات من ١ حتى ٤ مساحة كل منطقة.

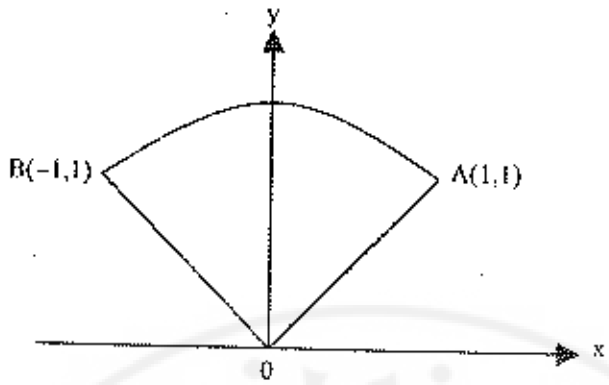
١) مستطيل رؤوسه: $O(0,0), A(2,0), B(2,1), C(0,1)$.

٢) مثلث رؤوسه: $O(0,0), A(1,0), B(1,1)$.

٣) شبه منحرف رؤوسه: $O(0,0), A(2,0), B(1,1), C(0,1)$.

٤) متوازي أضلاع رؤوسه: $A(1,2), B(2,4), C(2,7), D(1,5)$.

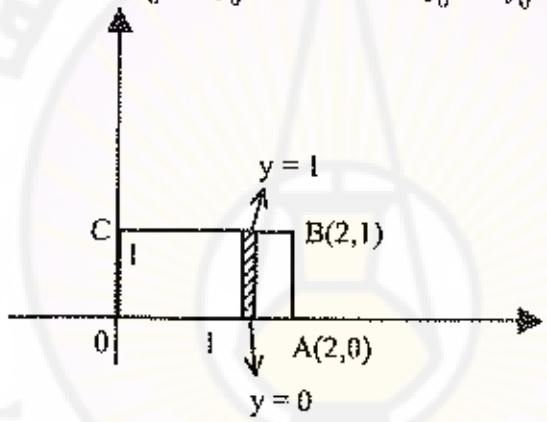
٥) قطاع دائري، محدد بالشكل: ٥-٧(أ)



الشكل: ٥-٧(أ)

الحل: ١) لدينا:

$$\iint_D f(x,y)dydx = \int_0^2 dx \int_0^1 f(x,y)dy = \int_0^1 dy \int_0^2 f(x,y)dx$$



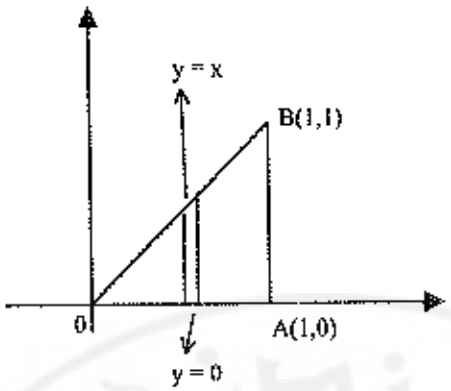
الشكل: ٥-٧ (ب)

ومساحة المنطقة D، تساوي:

$$\int_0^2 dx \int_0^1 dy = \int_0^2 \Big[y\Big]_0^1 dx = \Big[x\Big]_0^2 = 2$$

٢) لدينا:

$$\iint_D f(x,y)dydx = \int_0^1 dy \int_y^1 f(x,y)dx = \int_0^1 dx \int_0^x f(x,y)dy$$



الشكل: ٥-٧ (ج)

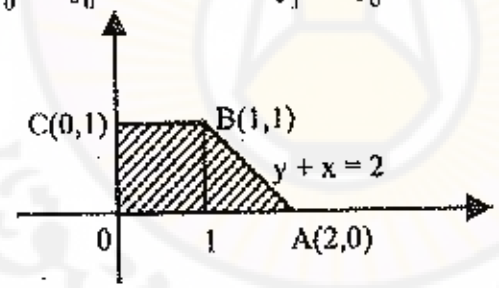
ومساحة المنطقة D، تساوي:

$$\int_0^1 dx \int_0^x dy = \int_0^1 \left[y\right]_0^x dx = \int_0^1 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

٣) لدينا:

$$\iint_D f(x,y)dydx = \int_0^1 dy \int_0^{2-y} f(x,y)dx =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} f(x,y)dy$$



الشكل: ٥-٧ (د)

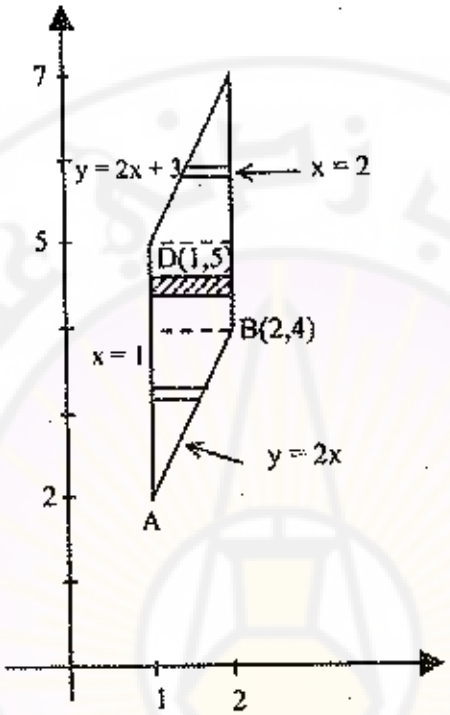
ومساحة المنطقة D، تساوي:

$$\int_0^1 dy \int_0^{2-y} dx = \int_0^1 \left[x\right]_0^{2-y} dy = \int_0^1 (2-y)dx = \left[2y - \frac{y^2}{2}\right]_0^1 = \frac{3}{2}$$

٤) لدينا:

$$\iint_D f(x,y)dydx = \int_0^2 dx \int_{2x}^{2x+3} f(x,y)dy =$$

$$= \int_2^4 dy \int_1^{\frac{y}{2}} f(x,y)dx + \int_4^5 dy \int_1^2 f(x,y)dx + \int_5^7 dy \int_{\frac{y-3}{2}}^2 f(x,y)dx$$



الشكل: ٥-٧ (هـ)

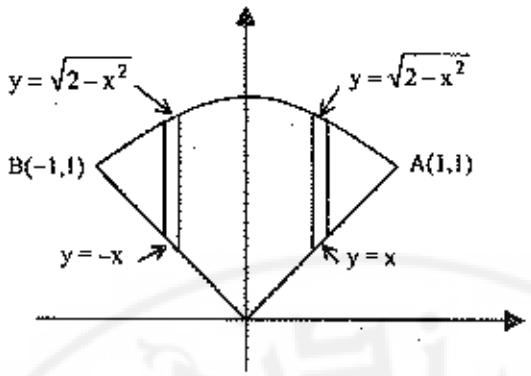
ومساحة المنطقة D، تساوي:

$$\int_1^2 dx \int_{2x}^{2x+3} dy = \int_0^2 \Big[y\Big]_{2x}^{2x+3} dx = \int_0^2 (2x+3-2x)dx = \int_0^2 3dx = 3$$

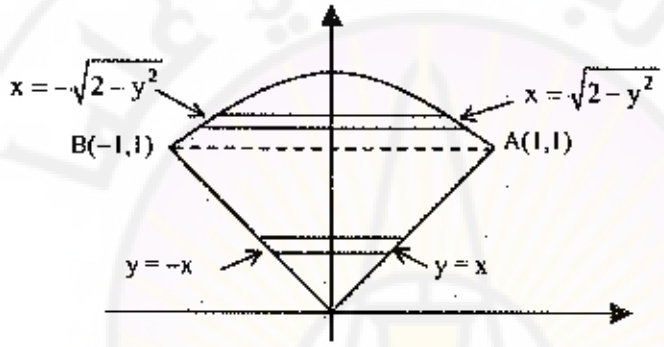
و) لدينا:

$$\iint_D f(x,y)dydx = \int_{-1}^0 dx \int_{-x}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dy + \int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dy =$$

$$= \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)dx + \int_0^1 dy \int_{-y}^{y} f(x,y)dx$$



الشكل: ٥−٧ (و)



الشكل: ٥−٧ (ز)

مثال (٣): غير ترتيب حدود التكامل للتكاملات المضاعفة الآتية:

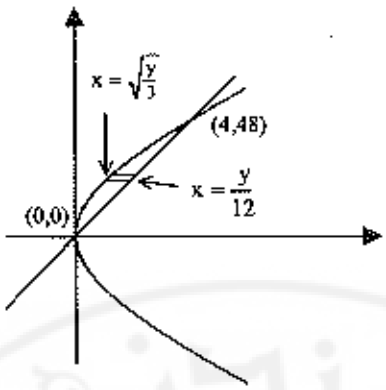
$$(1)\quad \int_0^4 dx \int_{12x}^{3x^2} f(x,y)dy \qquad (2)\quad \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)dx$$

$$(3)\quad \int_0^{\pi} dx \int_0^{\sin x} f(x,y)dy \qquad (4)\quad \int_0^1 dy \int_{\frac{y^2}{2}}^{\sqrt{3-y^2}} f(x,y)dx$$

الحل: ١) المنطقة D محددة بالمنحنيات: $y=3x^2$ (قطع مكافئ)، $y=12x$ ، $x=0$ ، $x=4$ ، نقاط التقاطع بين المنحنيين:

$$12x=3x^2 \Longrightarrow x=0, x=4$$

نقطتا التقاطع هما: $(0,0),(4,48)$.

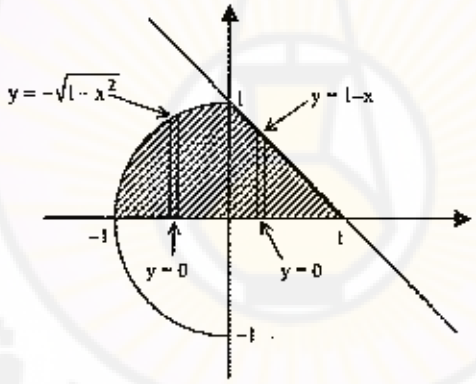


الشكل: ٥-٨ (أ)

يكتب التكامل بعد تغيير الترتيب على الشكل:

$$(1) \quad \int_0^4 dx \int_{12x}^{3x^2} f(x,y)dy = \int_0^{48} dy \int_{\sqrt{\frac{y}{3}}}^{\frac{y}{12}} f(x,y)dx$$

٢) المنطقة D محددة بالمنحنيات: $x = -\sqrt{1-y^2}$ ، $x = 1-y$ ، $y = 0$ ، $y = 1$.



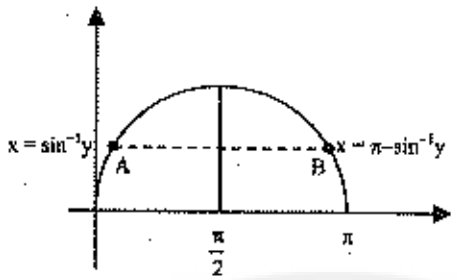
الشكل: ٥-٨ (ب)

يكتب التكامل بعد تغيير الترتيب على الشكل:

$$(2) \quad \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)dx$$

$$= \int_{-1}^0 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy + \int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x,y)dy$$

٣) $y = \sin x \Leftrightarrow x = \sin^{-1} y$ حيث: $\frac{\pi}{2} \geq x \geq -\frac{\pi}{2}$.



الشكل: ٥-٨ (ج)

من الملاحظ أن: $x_A = \sin^{-1} y$ وبسبب تناظر المنطقة D بالنسبة للمستقيم $x = \frac{\pi}{2}$، فإن: $x_B = \pi - \sin^{-1} y$، وبالتالي يكتب التكامل بعد تغيير الترتيب على الشكل:

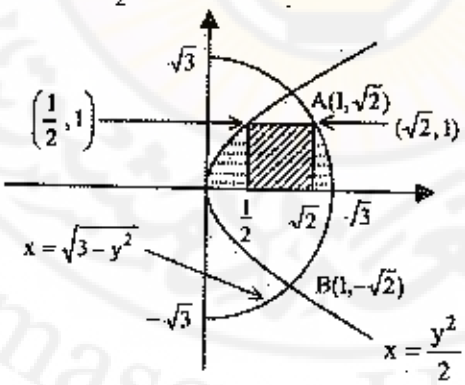
$$(3) \quad \int_0^{\pi} dx \int_0^{\sin x} f(x,y)dy = \int_0^1 dy \int_{\sin^{-1} y}^{\pi - \sin^{-1} y} f(x,y)dy$$

٤) المنطقة D محددة بالقطع المكافئ: $x = \frac{y^2}{2}$ ونصف الدائرة: $x = \sqrt{3 - y^2}$ والمستقيمان: $y = 0, y = 1$. نقطتا التقاطع بين المنحنيين هما: $(1, \pm\sqrt{2})$.

نقسم منطقة التكامل بالمستقيمين: $x = \frac{1}{2}$ و $x = \sqrt{2}$ إلى ثلاث مناطق، فنجد:

$$(4) \quad \int_0^1 dy \int_{\frac{y^2}{2}}^{\sqrt{3-y^2}} f(x,y)dx =$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_0^{\sqrt{2x}} f(x,y)dy + \int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{2}} dx \int_0^1 f(x,y)dy + \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} dx \int_0^{\sqrt{3-x^2}} f(x,y)dy$$



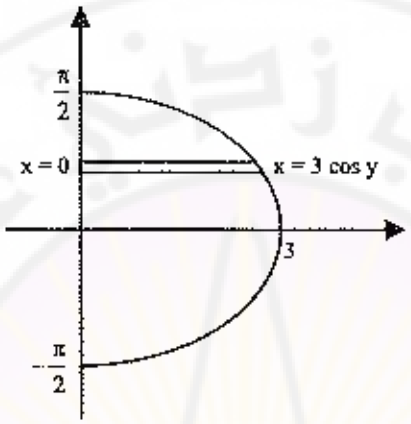
(منطقة التكامل هي المنطقة المظللة)

الشكل: ٥-٨ (د)

مثال (٤): احسب التكاملات التالية، وارسم منطقة التكامل في كل حالة:

$$(1)\quad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dy \int_{0}^{3\cos y} x^2 \sin^2 y \, dx \qquad (2)\quad \int_{0}^{\pi} dx \int_{0}^{1+\cos x} y^2 \sin x \, dy$$

الحل: ١) المنطقة D محصورة بين المنحني: $x = 3\cos y$ والمستقيمات: $x = 0$ و$y = -\frac{\pi}{2}$ و$y = \frac{\pi}{2}$ لتكامل مع ثبات y، فنجد: (لاحظ أن دالة التكامل زوجية)



الشكل: ٥-٩ (أ)

$$(1) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{x^3}{3}\sin^2 y\right]_0^{3\cos y} dy = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(3\cos y)^3}{3}\sin^2 y \, dy$$

$$= 18\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 y \sin^2 y \, dy = 18\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 y \sin^2 y \cos y \, dy$$

$$= 18\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 y)\sin^2 y \cos y \, dy$$

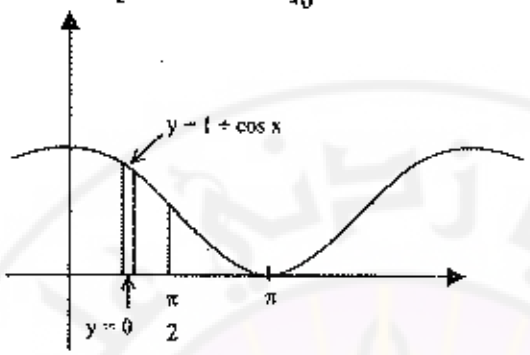
$$= 18\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 y \cos y \, dy - 18\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 y \cos y \, dy$$

$$= 18\left[\frac{\sin^3 y}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - 18\left[\frac{\sin^5 y}{5}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 18\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right) = \frac{12}{5}$$

٢) المنطقة محصورة بين المنحني: $y = 1+\cos x$ والمستقيمات: $y = 0$ و$x = 0$ و$x = \pi$ لتكامل مع ثبات x، فنجد: (لاحظ أن مشتق ما بين القوسين هو $-\sin x$)

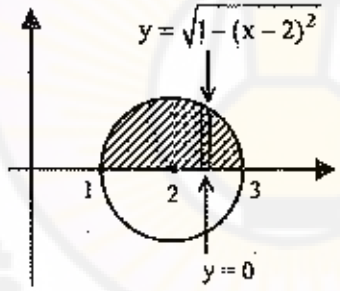
$$(2) = \int_0^{\pi} \left[\frac{y^3}{3}\sin x\right]_0^{1+\cos x} dx = \frac{1}{3}\int_0^{\pi} (1+\cos x)^3 \sin x\, dx =$$

$$= -\frac{1}{3}\left[\frac{(1+\cos x)^4}{4}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{3}\frac{(2)^4}{4} = \frac{4}{3}$$



الشكل: ٥-٩ (ب)

مثال (٥): أوجد التكامل: $\iint_D xy\,dy\,dx$ حيث D المنطقة المحصورة بين المحور x ونصف الدائرة العليا: $(x-2)^2 + y^2 = 1\ ,\ y \geq 0$.



الحل: يكتب التكامل على الشكل:

$$\int_1^3 dx \int_0^{\sqrt{1-(x-2)^2}} xy\,dy = \int_1^3 \left[\frac{xy^2}{2}\right]_0^{\sqrt{1-(x-2)^2}} dx =$$

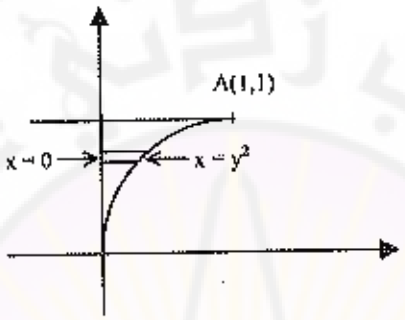
$$= \frac{1}{2}\int_1^3 x[1-(x-2)^2]dx = \frac{1}{2}\int_1^3 [(x-2)+2][1-(x-2)^2]dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^3 [(x-2) - (x-2)^3 + 2 - 2(x-2)^2]dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{(x-2)^2}{2} - \frac{(x-2)^4}{4} + 2x - 2\frac{(x-2)^3}{3}\right]_1^3 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + 6 - \frac{2}{3}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + 2 + \frac{2}{3}\right) = 3 - \frac{1}{3} - 1 - \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

مثال (٦): احسب التكامل: $\iint_D e^{\frac{x}{y}} dydx$ حيث D المنطقة المحصورة بين القطع المكافئ $y^2 = x$ والمستقيمين: $x = 0\ ,\ y = 1$.



الشكل: ٥-١٠

الحل: يكتب التكامل على الشكل:

$$(1) = \int_0^1 dy \int_0^{y^2} e^{\frac{x}{y}} dx$$

(لاحظ أنه من المستحيل أن نكامل دالة التكامل: $e^{\frac{x}{y}}$ مع ثبات x، لذا بدأنا بالمكاملة بالنسبة للمتغير x وثبتنا y).

$$(1) = \int_0^1 \left[ye^{\frac{x}{y}}\right]_0^{y^2} dy = \int_0^1 ye^y dy - \int_0^1 ydy = \int_0^1 ye^y dy - \frac{1}{2}$$

باستخدام التكامل بالتجزئة وبوضع: $y = v, e^y dy = du$ نجد: $dy = dv, e^y = u$

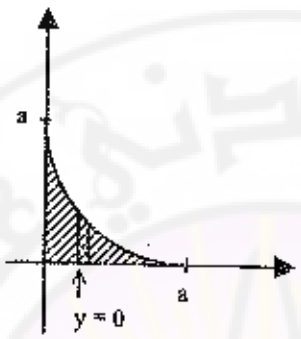
ومنه: (مع ملاحظة أن: $\int v\,du = uv - \int u\,dv$)

$$\int_0^1 ye^y dy = [ye^y]_0^1 - \int_0^1 e^y dy = e - (e-1) = 1$$

بالتعويض عن قيمة التكامل بما يساويه في (1)، نجد:

$$(1) = \iint_D e^{\frac{x}{y}} dydx = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

مثال (٧): أوجد التكامل: $\iint_D xy\, dydx$ حيث D المنطقة المحددة بمحوري الإحداثيات وقوس الأسترويد $x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t$ والواقعة في الربع الأول.



الشكل: ٥-١١

الحل: يكتب التكامل على الشكل:

$$\int_0^a dx \int_0^{g(x)} xy\, dy = \int_0^a \left[\frac{xy^2}{2}\right]_0^{g(x)} dx = \frac{1}{2}\int_0^a x\left(g(x)\right)^2 dx$$

حيث: $g(x) = a\sin^3 t$ ، ونلاحظ أن: $dx = 3a\cos^2 t\,(-\sin t)dt$ وأن:

$$x = 0 \Rightarrow \cos^3 t = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}, \qquad x = a \Rightarrow \cos^3 t = 1 \Rightarrow t = 0$$

إذن التكامل يصبح على الصورة:

$$\frac{1}{2}\int_0^a x\left(g(x)\right)^2 dx = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^0 a\cos^3 t \cdot a^2\sin^6 t \cdot 3a\cos^2 t\,(-\sin t)dt$$

$$= \frac{3}{2}a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 t\, \cos^4 t\, \cos t\, dt$$

نضع $\sin t = u$ ، فنجد: $\cos t\, dt = du$ ، وبالتالي فإن التكامل يساوي:

$$= \frac{3a^4}{2}\int_0^1 u^7(1-u^2)^2 du = \frac{3a^4}{2}\int_0^1 u^7(1-2u^2+u^4)du =$$

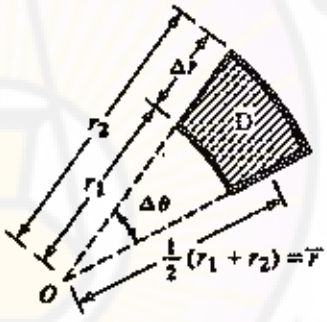
$$= \frac{3a^4}{2}\left[\frac{u^{12}}{12} - \frac{2u^{10}}{10} + \frac{u^8}{8}\right]_0^1 = \frac{3a^4}{2}\left(\frac{1}{12} - \frac{1}{5} + \frac{1}{8}\right) = \frac{3a^4}{2}\left(\frac{1}{120}\right) = \frac{a^4}{80}$$

٥.٢ التكاملات الثنائية في الإحداثيات القطبية:

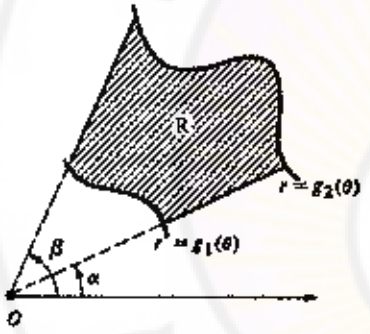
تمهيد: من الملاحظ أن مساحة القطاع الدائري الذي زاويته $\Delta\theta$ للدائرة التي مركزها 0 وطول نصف قطرها r_2، يساوي: $\frac{1}{2}(r_2)^2\Delta\theta$. وأن مساحة القطاع الدائري الذي زاويته $\Delta\theta$ للدائرة التي مركزها 0 وطول نصف قطرها r_1، يساوي: $\frac{1}{2}(r_1)^2\Delta\theta$. بالتالي فإن مساحة المنطقة (المظللة) D المحصورة بين هذين القطاعين يساوي:

$$\Delta A = \frac{1}{2}r_2^2\Delta\theta - \frac{1}{2}r_1^2\Delta\theta = \frac{1}{2}(r_2^2 - r_1^2)\Delta\theta = \frac{1}{2}(r_2 + r_1)(r_2 - r_1)\Delta\theta =$$
$$= \bar{r}\,\Delta r\,\Delta\theta$$

حيث: $\bar{r} = \frac{r_1+r_2}{2}$ المتوسط الحسابي لنصفي قطري الدائرتين و $\Delta r = r_2 - r_1$ الفرق بين طوليهما.

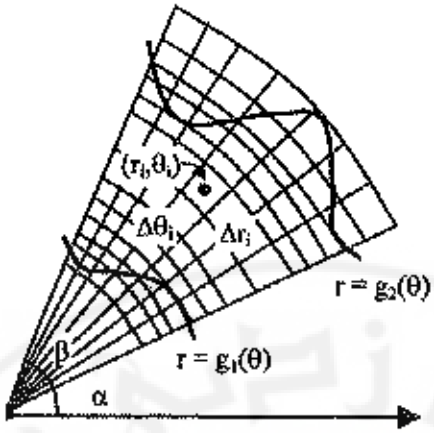


الشكل: ٥-١٢



الشكل: ٥-١٣

لاحظ في الشكل: ٥-١٣ المنطقة R المحصورة بين المنحنيين القطبيين $r = g_1(\theta)$ و $r = g_2(\theta)$، والمستقيمين المارين بالنقطة O واللذين يصنعان الزاويتين α, β مع المحور القطبي. لنفرض أن g_1, g_2 متصلتان على الفترة $[\alpha, \beta]$، وأن: $g_2(\theta) \geq g_1(\theta)$. لنجزئ المنطقة R إلى مناطق جزئية بأقواس دوائر مركزها المشترك هو نقطة الأصل O وبأنصاف أقطار تمر بالنقطة O كما هو موضح في الشكل: ٥-١٤.



الشكل: ٥-١٤

لتكن: $R_1, R_2, \cdots, R_n$ تجزئة داخلية قطبية لهذه المنطقة، ولتكن (r_i, θ_i) نقطة من المنطقة الجزئية R_i (المماثلة هندسياً للمنطقة I). حيث r_i المتوسط الحسابي لنصفي قطري الدائرتين اللذين يحداها.

من الملاحظ أن: $\Delta A_i = r_i \Delta r_i \Delta\theta_i$ (مساحة المنطقة الجزئية R_i). بفرض أن: $\|p\|$ نظيم التجزئة (يساوي أطول قطر من أقطار التجزئة الداخلية) وأن: $f(r,\theta)$ دالة متصلة على المنطقة R. بأسلوب مشابه لما صنعناه عند تعريف التكامل الثنائي للدالة $f(r,\theta)$ على منطقة R، فإن:

$$\lim_{\|p\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(r_i,\theta_i) r_i \Delta r_i \Delta\theta_i = \iint_R f(r,\theta)\Delta A = \int_\alpha^\beta \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} f(r,\theta) r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_\alpha^\beta \left[\int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} f(r,\theta) r\,dr \right] d\theta$$

لإنجاز التكامل، نحسب أولاً التكامل: $\varphi(\theta) = \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} f(r,\theta) r\,dr$ مع افتراض θ مقداراً ثابتاً، ثم نحسب التكامل: $\int_\alpha^\beta \varphi(\theta)\,d\theta$. وإذا كانت: $f(r,\theta) = 1$، فإن قيمة التكامل:

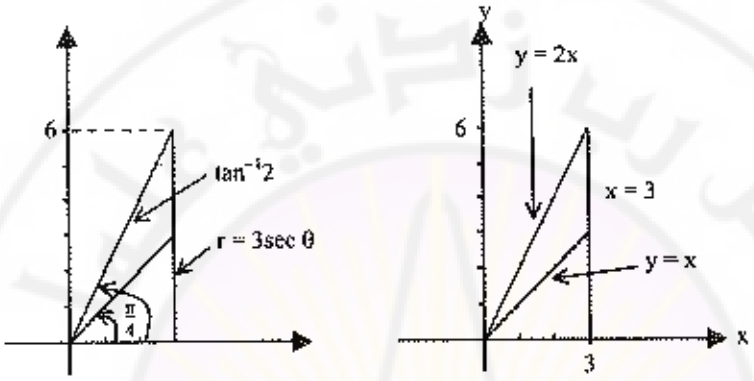
$$\int_\alpha^\beta \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} r\,dr\,d\theta$$

تمثل مساحة المنطقة R.

مثال (٨): ارسم المنطقة التي مساحتها محددة بالتكامل التالي، ثم احسب هذا التكامل.

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\tan^{-1}2} d\theta \int_{0}^{3\sec\theta} r dr$$

الحل:



الشكل: ٥-١٥

١) المنطقة محددة قطبياً بالمستقيمات الثلاثة: $r = 3\sec\theta, \theta = \frac{\pi}{4}, \theta = \tan^{-1}2$

وديكارتياً بالمستقيمات الثلاثة: $x = 3, y = x, y = 2x$. المساحة S تساوي:

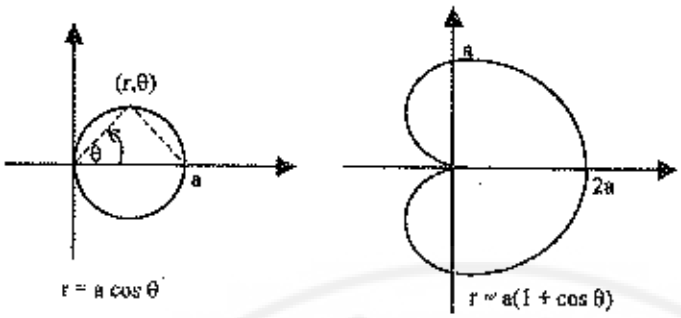
$$S = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\tan^{-1}2} \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{3\sec\theta} d\theta = \frac{9}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\tan^{-1}2} \sec^2\theta\, d\theta = \left[\frac{9}{2}\tan\theta\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\tan^{-1}2}$$
$$= \frac{9}{2}(2-1) = \frac{9}{2}$$

٢) بصورة أخرى:

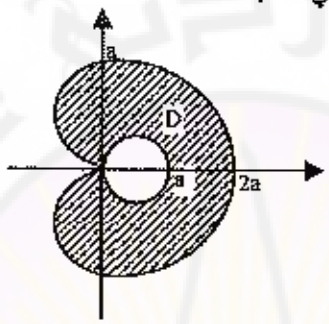
$$S = \int_0^3 dx \int_x^{2x} dy = \int_0^3 \left[y\right]_x^{2x} dx = \int_0^3 (2x - x)dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^3 = \frac{9}{2}$$

مثال (٩): احسب مساحة الشكل المحدد بالمنحنيين:

$$r = a(1 + \cos\theta), \qquad r = a\cos\theta$$



(دائرة طول قطرها a) (منحني القلب)



الشكل: ٥-١٦

الحل: المساحة S تساوي المساحة المحدودة بمنحني القلب مطروحاً منها مساحة الدائرة:

$$S = 2\int_0^{\pi} d\theta \int_0^{a(1+\cos\theta)} r dr - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a\cos\theta} r dr =$$

$$= \int_0^{\pi} \left[r^2\right]_0^{a(1+\cos\theta)} d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[r^2\right]_0^{a\cos\theta} d\theta$$

$$= a^2 \int_0^{\pi} (1+\cos\theta)^2 d\theta - a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta \, d\theta$$

$$= a^2 \int_0^{\pi} (1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta) d\theta - \frac{a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2\theta) d\theta$$

$$= a^2 \int_0^{\pi} \left(1 + 2\cos\theta + \frac{1+\cos 2\theta}{2}\right) d\theta - \frac{a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2\theta) d\theta$$

$$= a^2 \left[\theta + 2\sin\theta + \frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4}\right]_0^{\pi} - \frac{a^2}{2} \left[\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= a^2\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right) - \frac{a^2}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{5\pi a^2}{4}$$

مثال (١٠): أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين الدائرتين: $r = 2\cos\theta$ و $r = -2\sin\theta$.

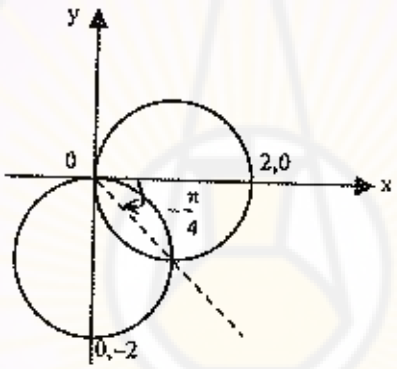
الحل: لنبحث عن المعادلتين الديكارتيتين للمنحنيين السابقين، فنجد بضرب طرفي كل من المعادلتين السابقتين بالمتغير r:

(أ) $r^2 = 2r\cos\theta \implies x^2 + y^2 = 2x \implies (x-1)^2 + y^2 = 1$

(لاحظ أن: $r = 0$ نقطة من نقاط المنحني: $r = 2\cos\theta$ توافق $\theta = \frac{\pi}{2}$).

(ب) $r^2 = -2r\sin\theta \implies x^2 + y^2 = -2y \implies x^2 + (y+1)^2 = 1$

(لاحظ أن: $r = 0$ نقطة من نقاط المنحني: $r = -2\sin\theta$ توافق $\theta = 0$).



الشكل: ٥-١٧

نحصل على نقطة التقاطع الأخرى للدائرتين خلاف نقطة الأصل، من المعادلة:

$$2\cos\theta = -2\sin\theta \implies \tan\theta = -1 \implies \theta = -\frac{\pi}{4}$$

لاحظ أن الدائرتين متماثلتان بالنسبة لمنصف الربع الثاني. إذن المساحة S المحصورة بينهما تساوي:

$$2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\int_{0}^{-2\sin\theta} r\,dr\,d\theta = 2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\left[\frac{r^2}{2}\right]_{0}^{-2\sin\theta} d\theta = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} 4\sin^2\theta\,d\theta =$$

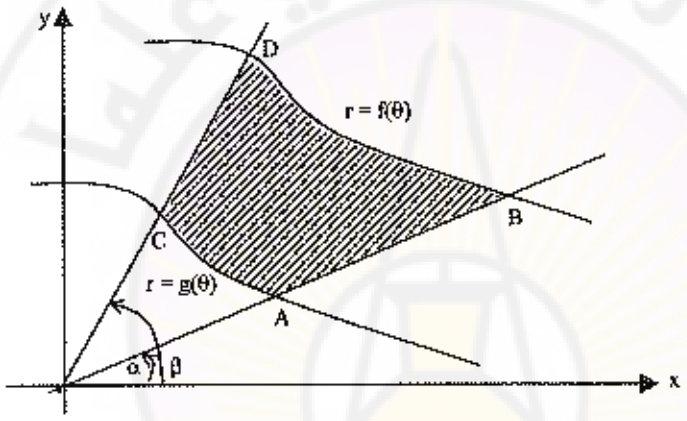
$$= 2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}(1-\cos\theta)d\theta = 2\left[\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{0} = \frac{\pi}{2} - 1$$

١.٢.٥ المساحة بين منحنيين قطبيين

ليكن $r = f(\theta)$ و $r = g(\theta)$ منحنين قطبيين متصلين على الفترة $[\alpha, \beta]$.

إذا كان $f(\theta) \geq g(\theta)$، فإن المساحة المظللة بين المنحنيين، الشكل: ٥-١٨، تعطى بالصيغة:

$$S = \int_{\alpha}^{\beta}\int_{g(\theta)}^{f(\theta)} r\,dr\,d\theta$$



الشكل: ٥-١٨

مثال (١١): أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين:

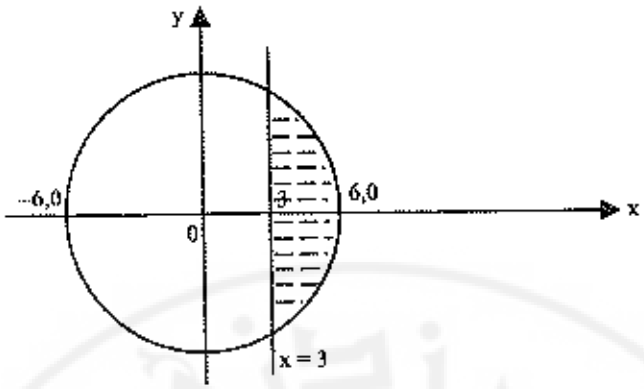
$$r = 3\sec\theta\,, \qquad r = 6\,; \qquad x \geq 3$$

الحل: المعادلة: $r = 6$، تمثل دائرة طول نصف قطرها 6 ومركزها نقطة الأصل.

والمعادلة: $r = 3\sec\theta$ تمثل مستقيماً معادلته الديكارتية: $x = 3$.

نحصل على نقاط التقاطع بين المنحنيين، من المعادلة:

$$6 = 3\sec\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \pm\frac{\pi}{3}$$



الشكل: ٥-١٩

المساحة تساوي:

$$S = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{3\sec\theta}^{6} r dr = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left[\frac{r^2}{2}\right]_{3\sec\theta}^{6} d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (36 - 9\sec^2\theta) d\theta$$

وبما أن الدالة زوجية فإننا نجد:

$$S = 2 \cdot \frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} (36 - 9\sec^2\theta) d\theta = [36\theta - 9\tan\theta]_0^{\frac{\pi}{3}} = 12\pi - 9\sqrt{3}$$

تمارين (٥–١)

١. احسب مساحة المنطقة المحدودة بالقطع المكافئ: $y = 4x - x^2$ ومحور السينات.

٢. احسب مساحة الشكل المحدود بالمنحني: $y = \ln x$ والمحور x والمستقيم $x = e$.

٣. احسب مساحة الشكل المحدود بالمنحني: $y = x(x-1)(x-2)$ ومحور السينات.

٤. أوجد مساحة الشكل المحدود بالمنحني: $y^3 = x$ والمستقيمين $y = 1$ و $x = 8$.

٥. أوجد مساحة الشكل المحدود بقوس المنحني: $y = \sin x$ والمحدود بالنقطتين $x = 0$ و $x = \pi$ والمحور x.

٦. احسب مساحة الشكل المحدود بالمنحني: $y = \tan x$ ومحور السينات والمستقيم $x = \frac{\pi}{3}$.

٧. أوجد مساحة المنطقة المحدودة بالقطع الزائد: $xy = m^2$ والمستقيمين $x = a$ و $x = 3a$ حيث $(a > 0)$ والمحور x.

٨. احسب مساحة المنطقة المحدودة بالمنحني: $y = \frac{a^3}{x^2+a^2}$ ومحور السينات.

٩. أوجد مساحة الشكل المحدود بالمنحني: $y = x^3$ ومحور الصادات والمستقيم $y = 8$.

١٠. أوجد مساحة الشكل المحدود بالقطعين المكافئين: $y^2 = 2ax$ و $x^2 = 2ay$.

١١. احسب مساحة الشكل المحدود بالقطع المكافئ: $y = 2x - x^2$ والمستقيم $y = -x$.

١٢. أوجد مساحة جزء القطع المكافئ: $y = x^2$ والمحدود بالمستقيم $y = 3 - 2x$.

١٣. أوجد مساحة الشكل المحدود بالقطعين المكافئين: $y = x^2$ و $y = \frac{x^2}{2}$ والمستقيم $y = 2x$.

١٤. أوجد مساحة الشكل المحدود بالقطعين المكافئين: $y = 4 - \frac{2}{3}x^2$ و $y = \frac{x^2}{2}$.

١٥. أوجد مساحة الشكل المحدود بالمنحني: $y = \frac{1}{1+x^2}$ والقطع المكافئ $y = \frac{x^2}{2}$.

١٦. أوجد مساحة الشكل المحدود بالمنحنين: $y = e^{-x}$, $y = e^x$ والمستقيم $x = 1$.

١٧. أوجد مساحة الشكل المحدود بالقطع الزائد: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ والمستقيم $x = 2a$.

١٨. أوجد مساحة الشكل المحدود بالمنحني: $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

١٩. أوجد مساحة الشكل المحدود بالسلسلة: $y = a\cosh\frac{x}{a}$ ومحور الصادات والمستقيم $y = \frac{a}{2e}(e^2 + 1)$.

٢٠. أوجد مساحة الشكل المحدود بالمنحني: $a^2y^2 = x^2(a^2 - x^2)$.

٢١. أوجد مساحة المنطقة الواقعة داخل المنحني: $\left(\frac{x}{5}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$.

٢٢. أوجد مساحة الشكل المحدود بالقطع الزائد: $x^2 - y^2 = 9$ ومحور السينات ووتر القطع المار بالنقطة $(5,4)$ والموازي للمحور x.

٢٣. أوجد مساحة الشكل المحدود بالمنحني: $y = \frac{1}{x^2}$ ومحور السينات والمستقيم $x = 1$ مع $x > 1$.

٢٤. أوجد مساحة الشكل المحدود بالمنحني: $y^2 = \frac{x^3}{2a-x}$ والمستقيم $x = 2a,\ x > 0$

٢٥. أوجد مساحة الشكل المحدود بالمنحني: $y^2 = \frac{x(x-a)^2}{2a-x}$ والمستقيم $x = 2a > 0$.

٢٦. أوجد مساحتي جزئي الدائرة: $x^2 + y^2 = 8$ المحدودتين بالقطع المكافئ: $y^2 = 2x$.

٢٧. أوجد مساحة الشكل المحدود بالمنحني: $x^2 + y^2 = 16$ والقطع المكافئ: $x^2 = 12(y-1)$، (يوجد خياران).

٢٨. أوجد مساحة المنطقة التي يحددها المنحني: $x = a\cos^3 t\ ,\ y = b\sin^3 t$.

٢٩. أوجد مساحة الشكل المحدود بالمحور x وقوس السيكلوئيد المعرف بالمعادلتين: $x = a(t - \sin t)\ ,\ y = a(t - \cos t)$.

٣٠. أوجد مساحة المنطقة المحصورة بقوس المنحني:

$$\begin{cases} x = at - b\sin t \\ y = a - b\cos t \end{cases}\ ,\quad (0 < b \le a)$$

والقطعة المستقيمة المارة بالنقطتين الموافقين: $t = 0\ ,\ t = 2\pi$.

٣١. أوجد مساحة الشكل المحدود بالمنحني:

$$x = a(2\cos t - \cos 2t)\ ,\quad y = a(2\sin t - \sin 2t)$$

٣٢. أوجد مساحة الجزء المغلق من المنحني:

$$x = \frac{3at}{1+t^3}\ ,\quad y = \frac{3at^2}{1+t^3}$$

٣٣. أوجد المساحة التي يحدها منحني القلب: $r = a(1 + \cos\theta)$.

٣٤. أوجد مساحة إحدى وريقات الشكل المعرف بالمعادلة: $r = a\cos 2\theta$.

٣٥. أوجد مساحة الشكل المحدود بالمنحني: $r^2 = a^2 \sin 4\theta$.

٣٦. أوجد مساحة الشكل المحدود بالمنحني: $r = a\sin 3\theta$.

٣٧. أوجد مساحة الشكل المحدود بالمنحني: $r = 2 + \cos\theta$.

٣٨. أوجد مساحة الشكل المحدود بالقطع المكافئ: $r = a\sec^2\frac{\theta}{2}$، ونصفي المستقيمين: $\theta = \frac{\pi}{4}$, $\theta = \frac{\pi}{2}$.

٣٩. أوجد مساحة القطع الناقص:

$$r = \frac{P}{1 + b\cos\theta} \; ; \quad b < 1$$

٤٠. أوجد مساحة الشكل الواقع خارج الدائرة: $r = a$ والمحدود بالمنحني:

$$r = 2a\cos 3\theta$$

٤١. أوجد مساحة الشكل المحدود بالمنحني: $x^4 + y^4 = x^2 + y^2$، (استخدم المعادلة القطبية).

الإجابات:

١) $\frac{32}{3}$ ٢) 1 ٣) $\frac{1}{2}$

٤) $\frac{17}{4}$ ٥) 2 ٦) $\ln 2$

٧) $m^2 \ln 3$ ٨) πa^2 ٩) 12

١٠) $\frac{4}{3}a^2$ ١١) $\frac{9}{2}$ ١٢) $\frac{32}{3}$

١٣) 4 ١٤) $\frac{32}{3}$ ١٥) $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}$

١٦) $2(\cosh 1 - 1) = e + \frac{1}{e} - 2$ ١٧) $ab\left[2\sqrt{3} - \ln(2+\sqrt{3})\right]$ ١٨) $\frac{3}{8}\pi a^2$

١٩) $\frac{2a^2}{e}$ ٢٠) $\frac{4}{3}a^2$ ٢١) 15π

٢٢) $10+\frac{9}{2}\ln 3$ ٢٣) 1 ٢٤) $3\pi a^2$

٢٥) $a^2\left(2+\frac{\pi}{2}\right)$ ٢٦) $2\pi+\frac{4}{3}\ ,\ 6\pi-\frac{4}{3}$ ٢٧) $\frac{32\pi}{3}+\frac{4\sqrt{3}}{3}\ ,\ \frac{16\pi}{3}-\frac{4\sqrt{3}}{3}$

٢٨) $\frac{3}{8}\pi ab$ ٢٩) $3\pi a^2$ ٣٠) $\pi(b^2+2ab)$

٣١) $6\pi a^2$ ٣٢) $\frac{1}{2}a^2$ ٣٣) $\frac{3}{2}\pi a^2$

٣٤) $\frac{1}{8}\pi a^2$ ٣٥) a^2 ٣٦) $\frac{1}{4}\pi a^2$

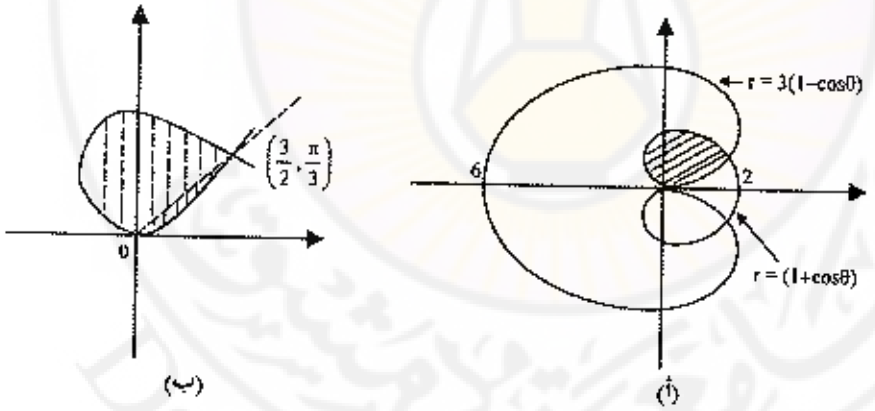
٣٧) $\frac{9}{2}\pi$ ٣٨) $\frac{14-8\sqrt{2}}{3}a^2$ ٣٩) $\frac{\pi p^2}{(1-b^2)^{\frac{3}{2}}}$

٤٠) $a^2\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ٤١) $\pi\sqrt{2}$

مثال (١٢): احسب قيمة التكامل: $\iint_D \sin\theta\, r dr d\theta$، حيث D المنطقة الواقعة في نصف المستوي العلوي $(y \geq 0)$ وداخل المنحنيين:

$$r = 3(1-\cos\theta)\,, \qquad r = 1+\cos\theta$$

الحل: المنحني: $r = 1+\cos\theta$، هو منحني القلب، ونحصل عليه عندما تأخذ θ مجموعة القيم $[0, 2\pi]$ ونحصل على نصفه الأعلى عندما، تأخذ θ مجموعة القيم $[0, \pi]$. المنحني $1-\cos\theta$ هو نظير الأول بالنسبة للمحور y. نحصل على المنحني: $r = 3(1-\cos\theta)$ من سابقه بعملية تكبير مركزه O ونسبته 3 (الشكل: ٥-٢٠).



الشكل: ٥-٢٠

نحصل على نقطة التقاطع بين المنحنيين (خلاف نقطة الأصل)، من المعادلة:

$$3(1-\cos\theta) = 1+\cos\theta \implies 4\cos\theta = 2 \implies \theta = \frac{\pi}{3}$$

وهي النقطة الواقعة على الفترة: $[0, \pi]$، إذن:

$$\iint_D \sin\theta\, r dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin\theta\, d\theta \int_0^{3(1-\cos\theta)} r dr + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^{1+\cos\theta} r dr$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin\theta \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{3(1-\cos\theta)} d\theta + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \sin\theta \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{1+\cos\theta} d\theta =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} 9(1-\cos\theta)^2 \sin\theta\, d\theta + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} (1+\cos\theta)^2 \sin\theta\, d\theta =$$

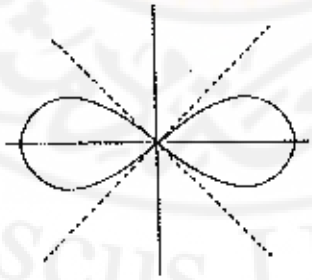
$$= \frac{1}{2}\cdot 3(1-\cos\theta)^3\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} - \frac{1}{6}(1+\cos\theta)^3\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \Longrightarrow$$

(وضعنا في التكامل الأول: $u = 1-\cos\theta \Longrightarrow du = \sin\theta\, d\theta$، وفي التكامل الثاني: $u = 1+\cos\theta \Longrightarrow du = -\sin\theta\, d\theta$)

$$\iint_D \sin\theta\, r dr d\theta = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{8} - 0\right) - \frac{1}{6}\left(0 - \frac{27}{8}\right) = \frac{3}{4}$$

مثال (١٣): احسب قيمة التكامل الثنائي: $\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\, dy dx$ على المنطقة المحدودة بالمنحني: $(x^2+y^2)^2 = x^2 - y^2 \;;\; (x \geq 0)$ (*).

الحل: المعادلة القطبية للمنحني، هي: $r^4 = r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = r^2\cos 2\theta$ أو $r^2 = \cos 2\theta$. لاحظ أن: $\theta = \frac{\pi}{4} \Longrightarrow r = 0$، إذن المنحني (*) هو نفسه المنحني: $r^2 = \cos 2\theta$. المنحني مكون من الجزئين: $r = \pm\sqrt{\cos 2\theta}$، ونحصل على أحدهما بأخذ نظيره بالنسبة للقطب O. عندما تأخذ θ القيم: $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ نحصل على المنطقة D الواقعة في النصف الأيمن من المستوي، (الشكل: ٥-٢١). إذن التكامل يساوي:



الشكل: ٥-٢١

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\int_{0}^{\sqrt{\cos 2\theta}}\sqrt{1-r^2}\,r dr d\theta = -\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_{0}^{\sqrt{\cos 2\theta}} (1-r^2)^{\frac{1}{2}} - 2r dr =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left[\frac{2}{3}(1-r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\sqrt{\cos 2\theta}} d\theta = -\frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left[(1-\cos 2\theta)^{\frac{3}{2}} - 1\right] d\theta$$

$$= -\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (2\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}} d\theta + \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta$$

(مع ملاحظة أن دالة التكامل دالة زوجية، وأن: $1-\cos 2\theta = 2\sin^2\theta$)

$$= -\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\sqrt{2}\sin^3\theta\, d\theta + \frac{\pi}{6} = +\frac{4\sqrt{2}}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2\theta\,(-\sin\theta\, d\theta) + \frac{\pi}{6}$$

لنضع: $\cos\theta = u$، فنجد: $du = -\sin\theta\, d\theta$. من الملاحظ أن:

$$\theta = 0 \Rightarrow u = 1, \qquad \theta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow u = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

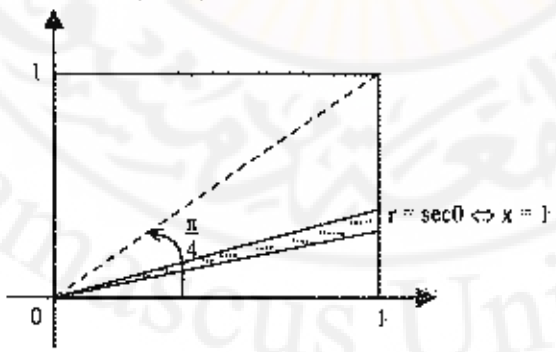
إذن: التكامل يساوي:

$$= \frac{4\sqrt{2}}{3}\int_1^{\frac{1}{\sqrt{2}}}(1-u^2)du + \frac{\pi}{6} = \frac{4\sqrt{2}}{3}\left[u - \frac{u^3}{3}\right]_1^{\frac{1}{\sqrt{2}}} + \frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{4\sqrt{2}}{3}\left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{6\sqrt{2}}\right) - \frac{2}{3}\right] + \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{16\sqrt{2}-20}{9}\right)$$

مثال (١٤): احسب قيمة التكامل: $\int_0^1\int_0^1 \frac{2xy}{x^2+y^2}\,dy\,dx$.

الحل: منطقة التكامل، هي المنطقة المحدودة بأضلاع المربع في الشكل: ٥-٢٢.



الشكل: ٥-٢٢

لنجر التغيير القطبي: $x = r\cos\theta\ ,\ y = r\sin\theta$، فنجد أن التكامل يساوي:

$$I = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\sec\theta}\frac{2r^2\sin\theta\cos\theta}{r^2}\,r\,dr\,d\theta$$

لاحظ أن منطقة التكامل متناظرة بالنسبة لقطر المربع (منصف الربع الأول) وأن: $f(x,y) = f(y,x)$، أي أن قيمة دالة التكامل عند النقطة (x,y) تساوي قيمتها عند النقطة (y,x) نظيرتها بالنسبة لمنصف الربع الأول.

بملاحظة أن التكامل معتل عند: $r = 0$، فإن:

$$I = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\lim_{t\to 0^+}\int_t^{\sec\theta}\frac{2r^3}{r^2}\,dr\right)\sin\theta\cos\theta\,d\theta$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[r^2\right]_0^{\sec\theta}\sin\theta\cos\theta\,d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec^2\theta\sin\theta\cos\theta\,d\theta$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin\theta}{\cos\theta}d\theta = \left[-2\ln(\cos\theta)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = -2\ln\frac{1}{\sqrt{2}} = -2\ln 2^{-\frac{1}{2}} = \ln 2$$

مثال ١٤: احسب قيمة التكامل الثنائي:

$$I = \iint_D \frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\,dx\,dy$$

حيث D هي المنطقة الواقعة بين الدائرتين $x^2+y^2 = 1$ و $x^2+y^2 = e^2$.

الحل: نستخدم الإحداثيات القطبية نجد: $0 \le \theta \le 2\pi$ و $1 \le r \le e$. ومنه:

$$I = \int_0^{2\pi}d\theta\int_1^e\frac{\ln r^2}{r^2}r\,dr = 2\pi\int_1^e 2\frac{\ln r}{r}\,dr = 4\pi\int_1^e \ln r\,d(\ln r) \Rightarrow$$

$$I = 2\pi\left[\ln^2 r\right]_1^e = 2\pi$$

تمارين (٥–٢)

في التمارين من ١ إلى ٤، اكتب حدود التكامل الثنائي $\iint_D f(x,y)\,dA$ بطريقتين مختلفتين، ثم احسب مساحة المنطقة D:

١. الواقعة بآن واحد داخل الدائرة: $x^2+y^2=2ax$ والقطع المكافئ: $x^2=2ay$، حيث $(a>0)$.

٢. المحدودة بالمنحنيين: $y^2=x^3$ و $y=x^3$.

٣. الواقعة داخل الدائرة: $x^2+y^2=25$ وأعلى المستقيم: $3x=4y$.

٤. الواقعة داخل القطعين: $y=x^2$ و $10x=y^2-15y+24$.

في التمارين من ٥ إلى ٨ حدد بيانياً منطقة التكامل:

٥. $\int_0^1\int_0^{x+1} f(x,y)dydx$ ٦. $\int_0^2\int_y^{2^y} f(x,y)dydx$

٧. $\int_0^1\int_0^{\left(1-y^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}} f(x,y)dydx$ ٨. $\int_0^2\int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{20-x^2}} f(x,y)dydx$

في التمارين من ٩ إلى ١٢ غير ترتيب حدود التكامل:

٩. $\int_0^2\int_{-x}^{2-x^2} f(x,y)dydx$ ١٠. $\int_0^2\int_{y^3}^{4\sqrt{2y}} f(x,y)dydx$

١١. $\int_1^4\int_{\frac{y}{2}}^{y} f(x,y)dydx$ ١٢. $\int_0^2\int_0^{e^x} f(x,y)dydx$

في التمارين من ١٣ إلى ١٦ احسب قيمة التكامل: $\iint_D f(x,y)dydx$ حيث:

١٣. $S: f(x,y)=x^2+xy$ المنطقة المحدودة بالمستقيمات: $x=-1$ و $x=1$ و $y=0$ و $y=1$.

١٤. $S: f(x,y) = x + y$ المنطقة المثلثية المحدودة بالمستقيمات: $x = 2y$ و $x = 6$ و $y = 0$.

١٥. $S: f(x,y) = xy$ المنطقة الدائرية الواقعة في الربع الأول وداخل الدائرة: $x^2 + y^2 = a^2$.

١٦. $S: f(x,y) = x^2 + y^2$ المنطقة المحدودة بمحوري الإحداثيات والمنحني: $y = e^{-x}$

أوجد قيمة كل من التكاملات الآتية من ١٧ حتى ٢٤:

١٧. $\int_0^2 dy \int_1^2 (x^2 + 2y)dx$

١٨. $\int_{-3}^{3} dy \int_{y^2-4}^{5} (x + 2y)dx$

١٩. $\int_0^4 dy \int_1^2 \frac{dx}{(x+y)^2}$

٢٠. $\int_0^{2\pi} d\theta \int_{a\sin\theta}^{a} r dr$

٢١. $\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{x^2 dy}{1+y^2}$

٢٢. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{3\cos\theta} r^2 \sin^2\theta \, dr$

٢٣. $\int_1^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{x^2 dy}{y^2}$

٢٤. $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2}dy$

اكتب معادلات المنحنيات التي تحد المناطق المعرفة عليها التكاملات الآتية، ثم ارسم هذه المناطق (من ٢٥ إلى ٣٠):

٢٥. $\int_{-6}^{2} dy \int_{\frac{y^2}{4}-1}^{2-y} f(x,y)dx$

٢٦. $\int_1^3 dx \int_{x^2}^{x+9} f(x,y)dy$

٢٧. $\int_0^4 dy \int_y^{10-y} f(x,y)dx$

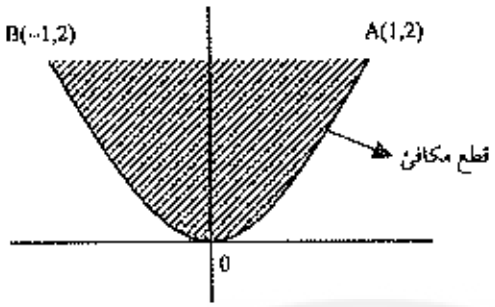
٢٨. $\int_1^3 dx \int_{\frac{x}{3}}^{2x} f(x,y)dy$

٢٩. $\int_0^3 dx \int_0^{25-x^2} f(x,y)dy$

٣٠. $\int_{-1}^{2} dx \int_{x^2}^{x+2} f(x,y)dy$

حدد حدود التكامل: $\iint_D f(x,y)dx\,dy$ بطريقتين مختلفتين (من ٣١ إلى ٣٣).

٣١. D هي المنطقة المظللة المحدودة بالشكل الآتي:



٣٢. D هي المنطقة الدائرية المحصورة بالدائرتين: $r = 2, r = 1$.

٣٣. D هي المنطقة المحصورة بالقطع الزائد: $y^2 - x^2 = 1$ والدائرة $y^2 + x^2 = 9$ التي تحوي نقطة الأصل في داخلها.

٣٤. عين حدود التكامل المضاعف: $\iint_D f(x,y)dx\,dy$، إذا كانت D معرفة بالصورة:

(أ) $x + y \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0$ (ب) $y^2 + x^2 \le a^2$

(ج) $x^2 + y^2 \le x$ (د) $y \le 1,\ x \ge -1,\ y \ge x$

(هـ) $0 \le y \le a,\ y \le x \le y + 2a$

غير ترتيب حدود التكامل فيما يلي: (من ٣٥ إلى ٣٩)

٣٥. $\int_0^1 dx \int_{2x}^{3x} f(x,y)dy$ ٣٦. $\int_0^a dx \int_{\frac{a^2-x^2}{2a}}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x,y)dy$

٣٧. $\int_{\frac{a}{2}}^{a} dx \int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} f(x,y)dy$ ٣٨. $\int_0^{2a} dx \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{4ax}} f(x,y)dy$

٣٩. $\int_0^{\frac{a\sqrt{2}}{2}} dx \int_0^{x} f(x,y)dy + \int_{\frac{a\sqrt{2}}{2}}^{a} dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x,y)dy$

احسب قيم التكاملات الآتية:

٤٠. $\iint_D x dx dy$، حيث D المنطقة التي تحد المثلث الذي رؤوسه نقطة الأصل، $A(1,1)$، $B(0,1)$.

٤١. $\iint_D x dxdy$، حيث D المنطقة المحصورة بالمستقيم المار بالنقطتين: $A(2,0)$، $B(0,2)$، وقوس الدائرة التي مركزها $C(0,1)$ وطول نصف قطرها الواحد 1.

٤٢. $\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$، حيث D ربع المنطقة الدائرية: $x^2+y^2 \leq 4$، والواقعة في الربع الأول.

٤٣. $\iint_D \sqrt{x^2-y^2}dxdy$، حيث D المنطقة المثلثية التي رؤوسها: نقطة الأصل، $A(1,-1)$، و $B(1,1)$.

٤٤. $\iint_D \sqrt{xy-y^2}dxdy$، حيث D المنطقة المثلثية التي رؤوسها: نقطة الأصل، $A(10,1)$، و $B(1,1)$.

٤٥. $\iint_D \frac{x\,dxdy}{x^2+y^2}$، حيث D المنطقة المحصورة بين قطع المكافئ: $y^2=x$، والمستقيم $y=x$.

٤٦. ارسم المنطقة المعرف عليها التكامل: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_{\cos x}^{1} y^4 dy$، ثم احسب قيمته.

ارسم المنطقة المعرف عليها كل من التكاملات، واحسب قيمة التكامل:

٤٧. $\iint_D xy^2 dxdy$، حيث D المنطقة المحدودة بالقطع: $y^2=2px$، والمستقيم: $x=p$.

٤٨. $\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{4-x}}$، حيث D المنطقة الدائرية التي طول نصف قطر دائرتها 2 والمماسة لمحوري الإحداثيات والواقعة في الربع الأول من المستوي.

٤٩. $\iint_D y dxdy$، حيث D المنطقة المحدودة بقوس السيكلوئيد: $x=2(t-\sin t)$، $y=2(t-\cos t)$، حيث $(2\pi \geq t \geq 0)$ وبالمحور x.

٥٠. احسب القيمة المتوسطة للدالة: $f(x,y)=xy^2$ والمعرفة بالصورة: $\frac{1}{S}\iint_D f(x,y)dxdy$ حيث D المنطقة المحققة نقاطها للمتباينتين: $0\leq x\leq 1$، $0\leq y\leq 1$، وS مساحة المنطقة.

باستخدام الإحداثيات القطبية عين حدود كل تكامل فيما يلي:

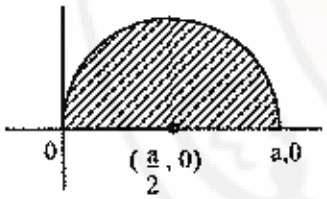
٥١. $\int_0^1 dx\int_0^1 f(x,y)dx$ ٥٢. $\int_0^2 dx\int_0^x f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)dy$

٥٣. $\iint_D f(x,y)dxdy$، حيث D المنطقة المحدودة بالمستقيمات: $y=x$، $y=-x$، $y=1$.

٥٤. $\int_{-1}^1\int_{x^2}^1 f\left(\frac{y}{x}\right)dydx$.

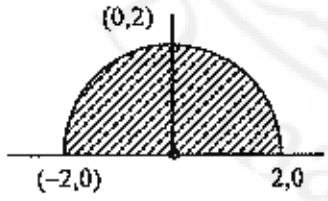
٥٥. $\iint_D f(x,y)dxdy$، حيث D المنطقة المحدودة بالليمنسكات:
$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$

٥٦. $\iint_D ydxdy$، حيث D المنطقة المحدودة بنصف الدائرة والمحور x، والموضحة في الشكل المرافق:



٥٧. $\iint_D(x^2+y^2)dxdy$، حيث D المنطقة المحدودة بالدائرة: $x^2+y^2=2ax$.

٥٨. $\iint_D\left(\sqrt{4-x^2-y^2}\right)dxdy$، حيث D المنطقة المحدودة بنصف الدائرة والمحور x، والموضحة في الشكل المرافق، أي: $\sqrt{x^2+y^2}=2$.



٥٩. احسب التكامل المضاعف: $\iint_D r dr d\theta$ على المنطقة المحدودة بالدائرة $r = a$ والتي لا تحتوي O في داخلها، وبالمنحني $r = a(1 + \cos\theta)$.

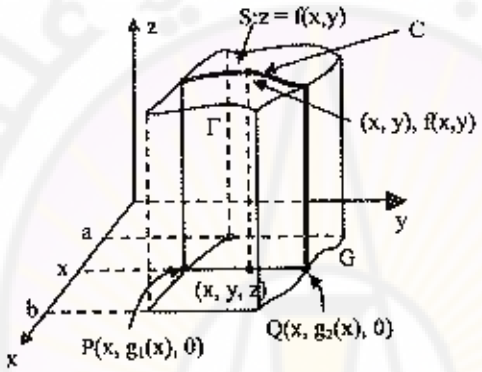
٦٠. احسب التكامل:

$$\int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{x^2 + y^2}\, dy$$

Damascus University

٣.٥ حساب الحجوم

لنفرض أن الدالة f معرفة، ومتصلة على منطقة G من النوع الأول، وتحقق الشرط: $f(x,y) \geq 0$ على هذه المنطقة. ليكن S السطح المعرف بالمعادلة: $S: z = f(x,y)$، وليكن V حجم الجسم الواقع فوق المنطقة G وتحت السطح S. الشكل: ٥-٢٣. المستوي Γ الموازي للمستوي YZ الذي يمر بالنقطة $(x, y, f(x,y))$ يقطع السطح S بالمنحني C كما يقطع G بالنقطتين: $P(x, g_1(x), 0), Q(x, g_2(x), 0)$. الشكل: ٥-٢٣.



الشكل: ٥-٢٣

حسب ما ورد في المقرر السابق حساب التكامل، فإن $A(x)$ مساحة مقطع الجسم بالمستوي Γ والواقع فوق القطعة $[P,Q]$ وتحت المنحني C، الشكل: ٥-٢٣. تساوي: $A(x) = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy$ (حيث x مقدار ثابت). بالتالي، فإن: $A(x)\Delta x$ يساوي حجم متوازي المستطيلات الذي مساحة قاعدته $A(x)$، وارتفاعه يساوي Δx، ومجموع هذه الحجوم الجزئية، الشكل: ٥-٢٣، يساوي V حجم الجسم ويساوي:

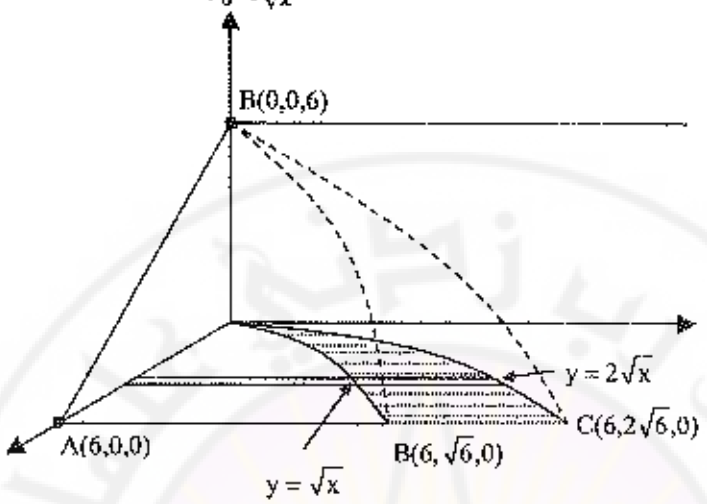
$$V = \int_a^b A(x)dx = \int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy\right] dx = \int_a^b dx \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy$$

مثال (١٥): أوجد الحجم المحدود بالسطوح الآتية (الشكل: ٥-٢٤):

$$y = \sqrt{x}\,, y = 2\sqrt{x}\,, x + z = 6\,, z = 0$$

الحل: الحجم يساوي:

$$V = \int_0^6 \int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} [g(x,y) - 0]\, dy\, dx$$



الشكل: ٥-٢٤

لاحظ أن معادلة السطح العلوي (المستوي): $z = g(x,y) = 6 - x$، ومعادلة السطح الأسفل (المستوي): $z = 0$. مسقط المنطقة التي تحد الحجم على المستوي XY، محصورة بين قوسي القطعين المكافئين: $y = 2\sqrt{x}\,,\ y = \sqrt{x}$ الواقعين في المستوي XY وبين المستقيم $x = 6$. إذن:

$$V = \int_0^6 \int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} (6 - x)\, dy\, dx = \int_0^6 \left[6y - xy\right]_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} dx =$$

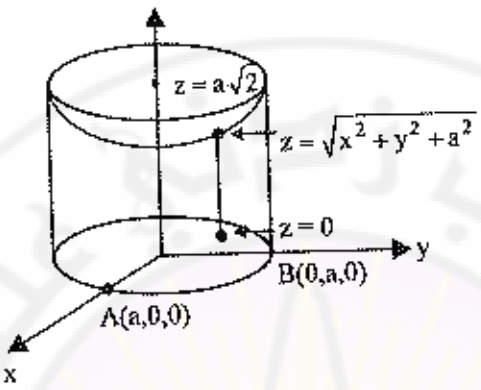
$$= \int_0^6 \left(12\sqrt{x} - 2x\sqrt{x} - 6\sqrt{x} + x\sqrt{x}\right) dx = \int_0^6 \left(6x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}}\right) dx =$$

$$= \left[4x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right]_0^6 = \frac{48\sqrt{6}}{5}$$

مثال (١٦): أوجد حجم المنطقة المحدودة بالسطحين:

$$x^2 + y^2 - z^2 = -a^2\,, \qquad x^2 + y^2 = a^2$$

الحل: السطح الأول أسطوانة دائرية طول نصف قطرها a، ومحور تماثلها المحور z، مسقطها على المستوي XY القرص الدائري D. السطح الثاني مجسم قطع زائد ذو فرعين، والمنطقة R التي تحد الحجم متماثلة بالنسبة للمستوي XY. لنحسب حجم المنطقة أعلى المستوي $z = 0$ ولنضاعف الناتج، فنجد:



الشكل: ٥-٢٥

$$V = 2\iint_D \sqrt{x^2 + y^2 + a^2}\, dy\, dx$$

باستخدام الإحداثيات القطبية، نجد:

$$V = 2\int_0^{2\pi}\int_0^a \sqrt{r^2 + a^2}\, r\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi}\left[\frac{(r^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^a d\theta$$

$$= \frac{4\pi}{3}a^3\left(2\sqrt{2} - 1\right)$$

(وضعنا: $r^2 + a^2 = u \Leftrightarrow du = 2rdr$)

تمارين (٥-٣)

احسب التكاملات الآتية محدداً حجم المنطقة المعرف عليها كل من هذه التكاملات وموضحاً ذلك بيانياً:

١. $\int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1-x-y)dy$

٢. $\int_0^2 dx \int_0^{2-x} (4-x-y)dy$

٣. $\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (1-x)dy$

٤. $\int_0^2 dx \int_{2-x}^2 (4-x-y)dy$

٥. $\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{4-x^2-y^2}dy$

٦. احسب حجم المنطقة المحددة بمجسم القطع المكافئ الناقصي: $z = 2x^2 + y^2 + 1$، وبالمستويات: $x + y = 1\ ,\ x = 0\ ,\ y = 0$، والواقعة في الثمن الأول.

٧. أوجد حجم المنطقة المحددة بمجسم القطع الزائد المكافئ: $z = x^2 - y^2$، وبالمستويات: $x = 1\ ,\ z = 0\ ,\ y = 0$.

٨. احسب حجم الجسم المحدود بالأسطوانة: $x^2 + z^2 = a^2$، وبالمستويات: $y = 0\ ,\ y = x$، $z = 0$،

احسب حجم الجسم المحدود بالسطوح الآتية:

٩. $z = 0\ ,\ x^2 + y^2 = 4\ ,\ 2z = y^2$

١٠. $z = 0\ ,\ y = 1\ ,\ y = x^2\ ,\ z = x^2 + y^2$

١١. $y = 0\ ,\ z = 0\ ,\ 3x + 2y = 8\ ,\ 3x + y = 4\ ,\ x + y + z = 4$

١٢. $z = 0\ ,\ y = 0\ ,\ y = x\ ,\ \frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$

١٣. $z = 0\ ,\ x^2 + y^2 - z^2 = 1\ ,\ 2z = x^2 + y^2$

١٤. احسب حجم الجسم المحدود بمجسم القطع المكافئ: $x^2 + y^2 = 2z$، وبالكرة: $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ والواقع داخل مجسم القطع المكافئ.

١٥. احسب حجم الجسم المحدود بالمستوي XY وبالأسطوانة: $x^2 + y^2 = 2x$ والمخروط: $x^2 + y^2 = z^2$.

١٦. احسب حجم الجسم المحدود بالمستوي XY والسطحين: $x^2 + y^2 = 1$ و $z = e^{-(x^2+y^2)}$.

١٧. احسب حجم الجسم المحدود بالمستوي XY والسطحين:

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \quad \& \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{2x}{a}$$

١٨. بأية نسبة يقسم المجسم: $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ حجم المنطقة الكروية: $x^2 + y^2 + z^2 \leq 3$.

١٩. احسب حجم الجسم المحدود بالسطوح:

$$z = x + y\,, xy = 1\,, xy = 2\,, y = x\,, y = 2x\,, z = 0\ ;\ (x > 0\,, y > 0)$$

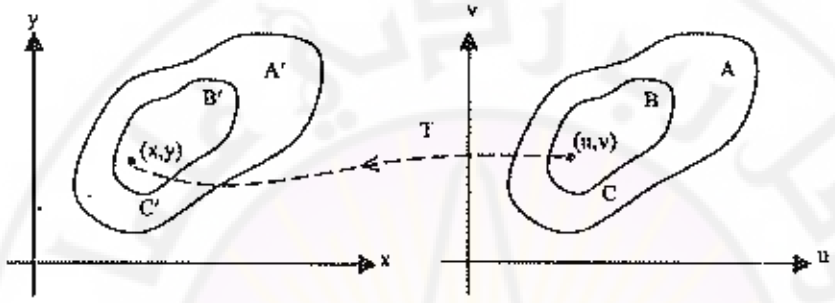
٥.٤ تغيير الإحداثيات في التكاملات الثنائية

لنجر التغيير التالي للإحداثيين x, y في التكامل الثنائي $\iint_D F(x,y)dy\,dx$، وبالصورة:

$x = f(u,v), y = g(u,v)$ ، وذلك وفقاً للتحويل T:

$$T: (u,v) \to (x,y)$$

الذي يحول النقطة (u,v) في المستوي uv إلى النقطة (x,y) في المستوي xy، شكل: ٥-٢٦.



الشكل: ٥-٢٦

نظرية (٧): إن التكامل الثنائي يمكن حسابه بالشكل:

$$\iint_A F(x,y)\,dy\,dx = \pm \iint_B F\big(f(u,v), g(u,v)\big)\,J\,dv\,du \qquad (1)$$

حيث: $J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$ (نسمي J بالمحدد اليعقوبي أو محدد التحويل T)

الصيغة (1) صحيحة، إذا تحققت الشروط الآتية:

(١) المنطقتان B, B' مغلقتان، ومحدودتان، وتقعان في المستويين uv وxy على الترتيب. يحد المنطقة B المنحني C ذو التجزئيات الملساء مغلقاً وبسيطاً، وبالمثل يحد المنطقة B' منحني C' له صفات المنحني C نفسها.

(٢) الدالة $F(x,y)$ لها مشتقتان جزئيتان من الرتبة الأولى متصلتان على المنطقة المفتوحة A' التي تحوي المنطقة B'.

(٣) الدالتان: $x = f(u,v),\ y = g(u,v)$ لهما مشتقات جزئية من الرتبة الثانية متصلة على منطقة مفتوحة A تحوي المنطقة B، وعندما: $(u,v) \in A$، فإن: $(x,y) \in A'$.

(٤) إذا كانت: $(u,v) \in C$، فإن النقطة المقابلة وفقاً للتحويل T تقع على المنحني C'. إذا رسمتْ النقطة (u,v) المنحني C ولمرة واحدة في الجهة الموجبة (المخالفة لاتجاه عقارب الساعة)، فإن النقطة (x,y) ترسم المنحني C' ولمرة واحدة في الجهة الموجبة (والإشارة الموافقة هي +)، أو ترسمه في الجهة السالبة (والإشارة الموافقة هي −).

ملحوظة (١): لنشر هنا إلى أن التطبيق T لا نفترضه تقابلاً إلا على حدود المنطقتين B, B' أي من C إلى C'. ننبه أيضاً إلى أن النقطة: $(u,v) \in B$ قد لا تقع صورتها في B' بل في المنطقة A' عموماً. وكذلك لا قيود تذكر حول إشارة المحدد J.

نظرية (٨): إذا تحققت الشروط (١)، (٢)، (٣)، (٤) في النظرية السابقة، وإذا كان المحدد J لا يغير إشارته في المنطقة B، فإن:

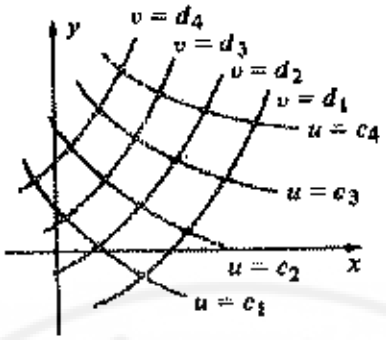
$$\iint_A F(x,y)\,dy\,dx = \iint_B F\big(f(u,v), g(u,v)\big)\,|J|\,dv\,du$$

ملحوظة (٢):

(١) النظرية السابقة تسمح بانعدام J عند بعض النقاط.

(٢) إذا كان J موجباً دوماً أو سالباً دوماً في النظرية السابقة، فإن T هو تحويل تقابل.

ملحوظة (٣): في التحويل: $u = f_1(x,y)\,, v = f_2(x,y)$ إذا أخذت u قيماً ثابتة نحصل على مجموعة أولى من المنحنيات الإحداثية في المستوي xy، وكذلك إذا أخذت v قيماً ثابتة نحصل على مجموعة أخرى من المنحنيات الإحداثية.



الشكل: ٥-٢٧

المجموعتان معاً تكونا شبكة إحداثية منحنية، وكل نقطة P من المنطقة K هي نقطة تلاقي منحنيين إحداثيين على أحدهما تكون u ثابتة وعلى الآخر تكون v ثابتة، شكل: ٥-٢٧.

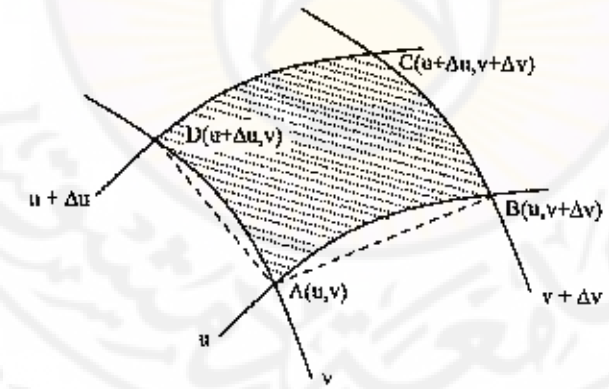
المساحة التقريبية لإحدى عيون الشبكة الإحداثية

لنضع: $\vec{r} = \overrightarrow{OA} = x\vec{i} + y\vec{j} = g_1(u,v)\vec{i} + g_2(u,v)\vec{j}$

١. إذا ثبتنا قيمة v، نجد: $\Delta r = \overrightarrow{AD} \approx dr = \frac{\partial x}{\partial u}\Delta u\,\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\Delta u\,\vec{j}$.

٢. إذا ثبتنا قيمة u، نجد: $\Delta r = \overrightarrow{AB} \approx dr = \frac{\partial x}{\partial v}\Delta v\,\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\Delta v\,\vec{j}$.

($\Delta u\,,\Delta v$ مقداران صغيران) انظر الشكل: ٥-٢٨.



الشكل: ٥-٢٨

لنحسب S مساحة متوازي الأضلاع المنشأ على المتجهين $\overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AB}$ ، فنجد:

$$S = \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right| = \left\| \begin{matrix} i & j & k \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & 0 \end{matrix} \right\| \Delta u \Delta v = \left\| \begin{matrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{matrix} \right\| \Delta u \Delta v$$

$$= \left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| \Delta u \Delta v$$

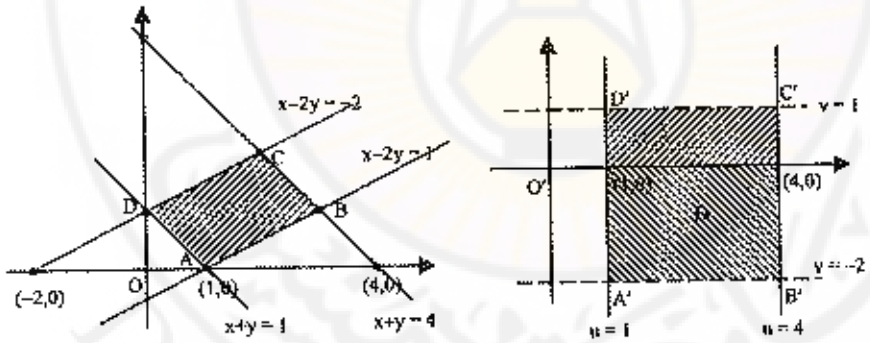
بالتالي، فإن S تساوي: $S = |I|\Delta u \Delta v$، حيث $I = \frac{D(x,y)}{D(u,v)}$.

إذا اعتبرنا قيمة S عند النقطة (u_i, v_i) مساحة تقريبية للتجزئة الجزئية R_i فيمكن بسهولة وبالأسلوب نفسه المتبع عند تعريف التكامل الثنائي للدالة f على المنطقة K، التوصل إلى النتيجة:

$$\iint_K f(x,y)\, dy\, dx = \iint_D |I| f(u,v)\, dv\, du$$

مثال (١٧): أوجد التكامل المضاعف: $\iint_K (x+y)^3\, dy\, dx$ حيث K المنطقة المحدودة بالمستقيمات: $x+y=1\,,\ x+y=4\,,\ x-2y=1\,,\ x-2y=-2$.

الحل: لنجر التغيير: $u = x+y\,,\ v = x-2y$ (2).



الشكل: ٥-٢٩

من (2) نجد: $x = \frac{2u+v}{3}\,,\ y = \frac{u-v}{3}$، ومنه: $I = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{vmatrix} = -\frac{1}{3}$

(لاحظ أن: $\frac{D(u,v)}{D(x,y)} = -3$ وأن: $\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \frac{1}{\frac{D(u,v)}{D(x,y)}}$

لاحظ أن المنطقة K في المستوي xy هي متوازي أضلاع وأن صورتها في المستوي uv هي مستطيل أضلاعه توازي المحورين الإحداثيين. بالتالي، فإن:

$$\iint_K f(x,y)\,dy\,dx = \iint_K (x+y)^3\,dy\,dx = \iint_K u^3|I|\,du\,dv =$$

$$= \frac{1}{3}\int_{-2}^{1} dv \int_1^4 u^3 du = \frac{1}{3}\int_{-2}^{1}\left[\frac{u^4}{4}\right]_1^4 dv = \frac{1}{3}\left(4^3 - \frac{1}{4}\right)[v]_{-2}^{1} = 63\frac{3}{4}$$

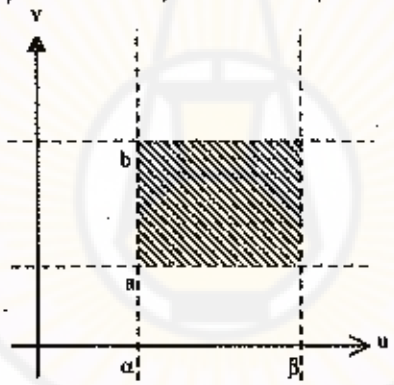
مثال (١٨): احسب مساحة الرباعي المنحني المحدود بالقطوع المكافئة:

$$x^2 = ay, \quad x^2 = by, \quad y^2 = \alpha x, \quad y^2 = \beta x$$

حيث: $0 < a < b, 0 < \alpha < \beta$.

الحل: نضع: $u = \frac{y^2}{x}, v = \frac{x^2}{y}$، فتصبح معادلة المنحنيات في المستوي uv على الصورة:

$$v = a, \quad v = b, \quad u = \alpha, \quad u = \beta$$



الشكل: ٥-٣٠

من الملاحظ أن:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{y^2}{x^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2y}{x}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2x}{y}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{x^2}{y^2}$$

إذن: $$\frac{1}{I} = \frac{D(u,v)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} -\frac{y^2}{x^2} & \frac{2y}{x} \\ \frac{2x}{y} & -\frac{x^2}{y^2} \end{vmatrix} = 1 - 4 = -3$$

المساحة S، تساوي:

$$S = \int_{\alpha}^{\beta}\int_{a}^{b} |I|\, dv\, du = \frac{1}{3}\int_{a}^{b} dv \int_{\alpha}^{\beta} du = \frac{1}{3}(\beta-\alpha)(b-a)$$

مثال (١٩): احسب مساحة القطع الناقص:

$$(x-2y+3)^2 + (3x+4y-1)^2 = 100$$

الحل: لنجر التغيير: $u = x-2y+3$, $v = 3x+4y-1$ ، من الملاحظ أن:

$$I = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \frac{1}{\dfrac{D(u,v)}{D(x,y)}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{1}{10}$$

المساحة تساوي:

$$\iint_D |I|\, du\, dv = \frac{1}{10}\iint_D du\, dv$$

لنجر التغيير: $u = r\cos\theta$, $v = r\sin\theta$ ، فنجد:

$$\frac{1}{10}\iint_D du\, dv = \frac{1}{10}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{10} r dr = \frac{1}{10}\int_0^{2\pi}\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{10} d\theta = \frac{50}{10}\cdot 2\pi$$
$$= 10\pi$$

مثال (٢٠): احسب مساحة الشكل المحدود بالمنحني: $\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\right)^2 = \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}$

الحل: لنجر التغيير: $x = 2\rho\cos\theta$, $y = 3\rho\sin\theta$ ، (التحويل شبه القطبي)

فنجد أن محددة التحويل، تساوي:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y}{\partial \rho} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\cos\theta & 3\sin\theta \\ -2\rho\sin\theta & 3\rho\cos\theta \end{vmatrix} = 6\rho$$

تصبح معادلة المنحني، على الشكل:

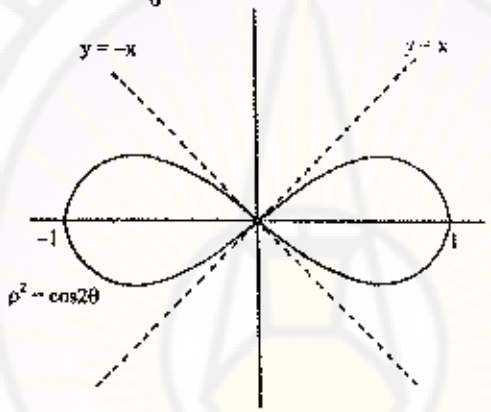
$$\rho^4 = \rho^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) \Longrightarrow \begin{cases} \rho^2 = 0 \Longrightarrow \rho = 0 & \text{أو} \\ \rho^2 = \cos 2\theta \Longrightarrow \rho = \pm\sqrt{\cos 2\theta} \end{cases} \quad (*)$$

(لاحظ أن: $\theta = \frac{\pi}{4} \Longleftarrow \rho = 0$)

يمكن الحصول على المنحني: $\rho = -\sqrt{\cos 2\theta}$ من المنحني: $\rho = \sqrt{\cos 2\theta}$، بأخذ نظيره بالنسبة للقطب. لاحظ أن $f(\theta) = f(-\theta)$، وهذا يعني أن المنحني متماثل بالنسبة للمحور القطبي. إذن يكفي رسم نصف المنحني: $\rho = \sqrt{\cos 2\theta}$ الموافق للفترة $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ ثم أخذ نظيره بالنسبة للمحور القطبي ثم أخذ نظير الناتج بالنسبة للقطب للحصول على المنحني (*). ومساحة المنحني، تساوي:

$$4\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\sqrt{\cos 2\theta}} 6\rho d\rho = 24\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^{\sqrt{\cos 2\theta}} d\theta = 12\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta \, d\theta =$$

$$= 6\left[\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 6$$

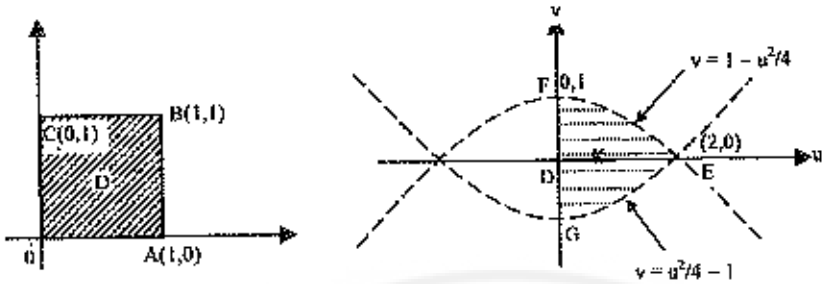


الشكل: ٥-٣٢

مثال (٢١): أوجد K صورة المنطقة D: $1 \geq y \geq 0, 1 \geq x \geq 0$، تحت تأثير التحويل: $T = (x, y) \to (u = 2xy, v = x^2 - y^2)$. أوجد $T^{-1}(K)$، ثم أثبت أن:

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{2xy}{x^2 + y^2} dy\, dx = \int_0^2 du \int_{\frac{u^2}{4}-1}^{1-\frac{u^2}{4}} \frac{u}{4(u^2 + v^2)} dv$$

الحل: لدينا:



الشكل: ٥-٣٣

(١) نحصل على صورة القطعة $[0,C]$ بالتعويض عن x بالقيمة صفر في التطبيق: $u = 2xy, v = x^2 - y^2$، فنجد: $u = 0, v = -y^2, (1 \geq y \geq 0)$. فالصورة هي القطعة: $[D,G]$.

(٢) نحصل على صورة القطعة $[0,A]$ بالتعويض عن y بالقيمة صفر في التطبيق، فنجد: $u = 0, v = x^2, (1 \geq x \geq 0)$. فالصورة هي القطعة: $[D,F]$.

(٣) صورة المستقيم: $x = 1, (1 \geq y \geq 0)$، هو القوس $\overset{\frown}{FE}$ للقطع المكافئ: $u = 2y, v = 1 - y^2$ الذي معادلته الديكارتية: $v = 1 - \frac{u^2}{4}$، حيث: $(2 \geq u \geq 0), (1 \geq v \geq 0)$.

(٤) بالمثل صورة المستقيم: $y = 1, (1 \geq x \geq 0)$، هو القوس $\overset{\frown}{GE}$ للقطع المكافئ: $u = 2x, v = x^2 - 1$ الذي معادلته الديكارتية: $v = \frac{u^2}{4} - 1$، حيث: $(2 \geq u \geq 0), (0 \geq v \geq -1)$.

- لإيجاد T^{-1}، لنثبت أولاً أن T تقبل دالة عكسية على المنطقة D:

نضع: $f(x,y) = 2xy$ و $g(x,y) = x^2 - y^2$.

شرط التباين:

$$f(x_1,y_1) = f(x_1,y_1),\ g(x_1,y_1) = g(x_1,y_1) \Longrightarrow x_1 = x_2\ \&\ y_1 = y_2$$

من العلاقتين: $2x_1y_1 = 2x_2y_2$, $x_1^2 - y_1^2 = x_2^2 - y_2^2$ نجد بالتربيع والجمع:

$$4x_1^2y_1^2 + (x_1^2 - y_1^2)^2 = 4x_2^2y_2^2 + (x_2^2 - y_2^2)^2 \Longrightarrow$$
$$(x_1^2 + y_1^2)^2 = (x_2^2 + y_2^2)^2 \Longleftrightarrow x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2$$

إذن: $\begin{cases} x_1^2+y_1^2=x_2^2+y_2^2 \\ x_1^2-y_1^2=x_2^2-y_2^2 \end{cases}$ بالجمع تارة وبالطرح تارة أخرى، نجد: $\begin{cases} x_1^2=x_2^2 \\ y_1^2=y_2^2 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} x_1=x_2 \\ y_1=y_2 \end{cases}$ لأن المتغيرين x,y غير سالبين $(1\geq y\geq 0\,,1\geq x\geq 0)$.

إذن التطبيق متباين ويقبل تطبيقاً عكسياً من الشكل: $T^{-1}: K\to D$.

من المعادلتين: $u=2xy\,,\ v=x^2-y^2$ ، بالتربيع والجمع نجد:

$$u^2+v^2=(x^2+y^2)^2 \iff x^2+y^2=\sqrt{u^2+v^2}$$

إذن: $\begin{cases} x^2+y^2=\sqrt{u^2+v^2} \\ x^2-y^2=v \end{cases}$، ومنه: $\begin{cases} x^2=\frac{1}{2}\left(\sqrt{u^2+v^2}+v\right) \\ y^2=\frac{1}{2}\left(\sqrt{u^2+v^2}-v\right) \end{cases}$ ، بالتالي فإن:

$$T^{-1}:(u,v)\to\left(x=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{u^2+v^2}+v}\ ,\ y=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{u^2+v^2}-v}\right)$$

(لاحظ أن x,y غير سالبين)

- من الشكل: ٥-٣٣، نجد أن:

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{2xy}{x^2+y^2}\,dy\,dx=\int_0^2 du\int_{\frac{u^2}{4}-1}^{1-\frac{u^2}{4}}|I|\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}dv \qquad (**)$$

لكن: $\frac{1}{I}=\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2y & 2x \\ 2x & -2y \end{vmatrix}=-4(y^2+x^2)=-4\sqrt{u^2+v^2}$ ومنه:

$I=\frac{1}{-4\sqrt{u^2+v^2}}$. بالتعويض عن I بما يساويها في العلاقة (**)، نجد المطلوب.

تمارين (٥-٤)

١. احسب قيمة: $\iint_R \sqrt{x+y}\,dA$، حيث R متوازي الأضلاع المحدود بالمستقيمات: $2x-3y=4\,,2x-3y=0\,,x+y=1\,,x+y=0$.

٢. احسب قيمة: $\int_0^1 \int_0^{1-x} \frac{1}{(x^2+y^2+1)^2}\,dy\,dx$.

٣. احسب قيمة: $\iint_R xy\,dA$، حيث R المنطقة الواقعة في الربع الأول والمحدودة بالقطعين الزائدين: $(0<a<b)\,,\ x^2-y^2=b\,,\ x^2-y^2=a$، وبالدائرتين: $(b<c<d)$ ، حيث $x^2+y^2=d\,,\ x^2+y^2=c$.

٤. أوجد قيمة التكامل: $\iint_R (x-y)^4\,e^{x+y}dydx$، حيث R المنطقة المحدودة برؤوس المربع: $(1,0),(2,1),(1,2),(0,1)$.

٥. أوجد قيمة التكامل: $\int_0^1 \int_0^x \sqrt{x^2+y^2}\,dydx$ ، بإجراء التحويل: $x=u$ و $y=uv$.

٦. أوجد قيمة التكامل: $\iint_R (ax+by)^n\,dA$، $(a,b>0$ و n عدد صحيح موجب) حيث R القرص الدائري: $x^2+y^2\le 1$، باستخدام دوران مناسب للمحورين الإحداثيين.

٧. أوجد قيمة التكامل: $\int_0^1 \int_0^{1-x} y\ln(1-x-y)\,dydx$ ، باستخدام التحويل: $x=u-uv$ و $y=uv$.

٨. بين أن التطبيق: $x=u-uv\,,y=uv-uvw\,,z=uvw$، يحول المنطقة المحدودة داخل الهرم الرباعي المحدود بالمستويات: $x+y+z=1\,,z=0\,,y=$

$0, x = 0$ ، إلى المنطقة المحدودة داخل المكعب المحدود بالمستويات: $u = v = w = 0$ و $u = v = w = 1$. استخدم هذا التحويل لإيجاد مركز ثقل المنطقة الهرمية.

الإجابات:

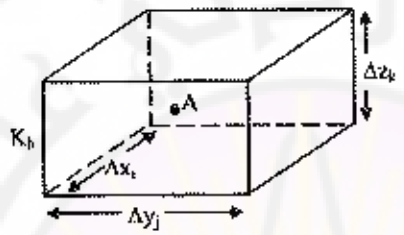
١) $\frac{1}{8}(b-a)(d-c)$ ٢) $\frac{\sqrt{3\pi}}{18}$ ٣) $\frac{8}{15}$ ٤) $\frac{1}{6}\left[\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})\right]$

٥) $\frac{1}{5}(e^3-e)$ ٦) صفر إذا كان n فردياً وإذا كان n زوجياً فإنه يساوي: $\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots n}\cdot 2\pi(a^3+b^3)^{\frac{n}{2}}$

٧) $-\frac{11}{36}$ ٨) $\bar{x}=\bar{y}=\bar{z}=\frac{1}{4}$

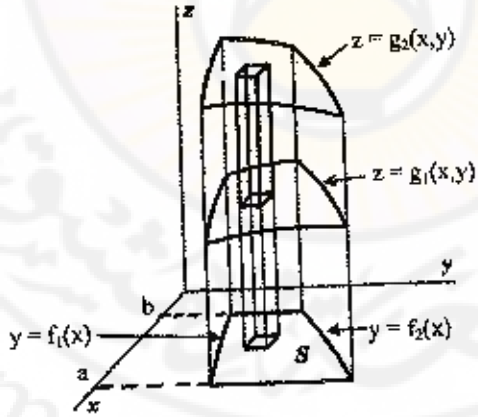
٥.٥ التكاملات الثلاثية في $\mathbb{R}^3$

لتكن f دالة معرفة على المنطقة المغلقة والمحدودة: $K \subset \mathbb{R}^3$. لنجزئ المنطقة K بمستويات توازي المستويات الإحداثية، ولتكن P التجزئة الداخلية للمنطقة K والتي عناصرها الداخلية: $K_1, K_2, \cdots, K_n$، حيث K_h المنطقة الجزئية التي على شكل متوازي مستطيلات والتي كل زوج متقابل من وجوهها يوازي أحد المستويات الإحداثية، شكل: ٥-٣٤.



الشكل: ٥-٣٤

ليكن Δv_h حجم K_h ولنفرض أن: $A(x_i, y_j, z_k)$ نقطة من نقاط K_h. إذا كانت المنطقة K محدودة من الأعلى بالسطح: $z = g_2(x, y)$، ومن الأسفل بالسطح: $z = g_1(x, y)$، شكل: ٥-٣٥.



الشكل: ٥-٣٥

وإذا كانت g_1, g_2، متصلتين على المنطقة S من النوع الأول معرفة بالصورة:

f_1, f_2 متصلتان على الفترة $[a,b]$).

بأسلوب مشابه لما قدمناه في التكامل الثنائي، نجد:

$$\lim_{\|p\|\to 0}\sum_{i,j,k} f(x_i,y_j,z_k)\Delta v_h = \iint_S \left[\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right] dy\,dx \quad (1)$$

(التكامل بين المعترضتين محسوب مع ثبات x, y وناتجه دالة بالمتغيرين: x, y)

بشكل خاص إذا كانت $f(x,y,z)=1$ في (1)، فإن الصيغة:

$$V = \int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} dz\,dy\,dx$$

تعبر عن حجم المنطقة K.

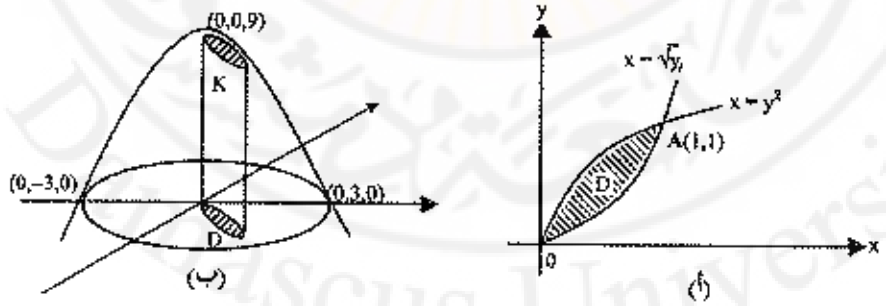
مثال (٢٢): حدد منطقة التكامل فيما يلي:

$\int_0^1 \int_{y^2}^{\sqrt{y}} \int_0^{9-x^2-y^2} f(x,y,z)dz\,dx\,dy$ ، ثم أوجد حجم هذه المنطقة.

الحل: ١) المنطقة K يحدها من الأعلى مجسم القطع المكافئ الذي رأسه النقطة: $(0,0,9)$ وفتحته نحو الأسفل.

٢) ويحدها المستوي $z=0$ من الأسفل.

٣) مسقط K على المستوي xy، هي المنطقة D المحدودة بالمنحنيات: $x=y^2$ (قطع مكافئ)، $x=\sqrt{y}$ (نصف قطع مكافئ)، $y=0$ (محور السينات)، $y=1$ (شكل: ٥-٣٦).



الشكل: ٥-٣٦

حجم المنطقة K، هو:

$$V = \int_0^1 dy \int_{y^2}^{\sqrt{y}} dx \int_0^{9-x^2-y^2} dz = \int_0^1 dy \int_{y^2}^{\sqrt{y}} \left[z\right]_0^{9-x^2-y^2} dx =$$

$$= \int_0^1 dy \int_{y^2}^{\sqrt{y}} (9 - x^2 - y^2) dx = \int_0^1 \left[9x - \frac{x^3}{3} - y^2 x\right]_{y^2}^{\sqrt{y}} dy =$$

$$= \int_0^1 \left[\left(9\sqrt{y} - \frac{y\sqrt{y}}{3} - y^2\sqrt{y}\right) - \left(9y^2 - \frac{y^6}{3} - y^4\right)\right] dy =$$

$$= \left[\left(9y^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{15}y^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{7}y^{\frac{7}{2}}\right) - \left(3y^3 - \frac{y^7}{21} - \frac{y^5}{5}\right)\right]_0^1 =$$

$$= 6 - \frac{2}{15} - \frac{2}{7} - 3 + \frac{1}{21} + \frac{1}{5} = \frac{297}{105} = \frac{99}{35}$$

مثال (٢٣): أوجد قيمة التكامل: $I = \iiint_D x^3 y^2 z \, dz \, dy \, dx$، حيث D المنطقة المحدودة بالمتباينات: $0 \le x \le 1 \; , \; 0 \le y \le x \; , \; 0 \le z \le xy$

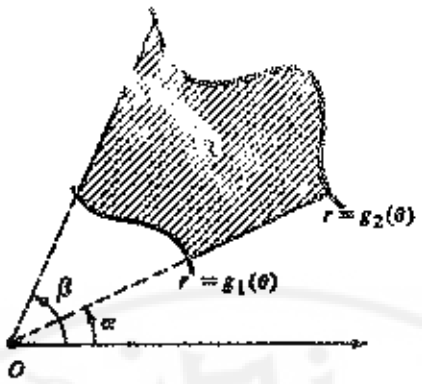
الحل: لدينا:

$$I = \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^{xy} x^3 y^2 z \, dz = \int_0^1 dx \int_0^x x^3 y^2 \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{xy} dy =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^x \frac{x^5 y^4}{2} dy = \int_0^1 \frac{x^5}{2} \left[\frac{y^5}{5}\right]_0^x dx = \int_0^1 \frac{x^{10}}{10} dx = \frac{1}{110}$$

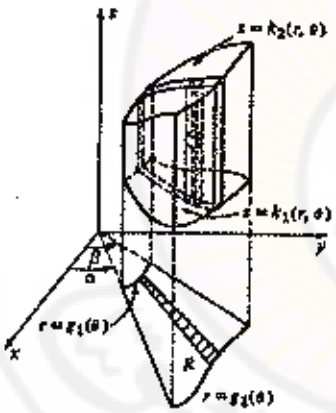
٦.٥ التكامل الثلاثي في الإحداثيات الأسطوانية

لتكن Q منطقة مغلقة ومحدودة من الفضاء الإقليدي ثلاثي البعد، مسقطها المنطقة R على المستوي R، الشكل: ٥-٣٧.

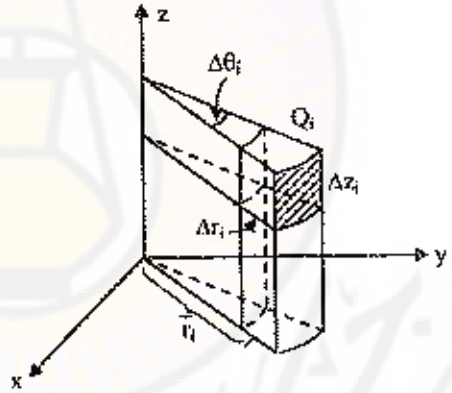


الشكل: ٥-٣٧

لنفرض أن Q محصورة من الأعلى بالسطح: $z = k_2(r,\theta)$، ومن الأعلى بالسطح: $z = k_1(r,\theta)$، والدالتان: k_1, k_2، لهما مشتقات جزئية متصلة على R. المنطقة Q محددة بالصورة: $Q = \{(r,\theta,z): (r,\theta) \in R,\ k_1(r,\theta) \le z \le k_2(r,\theta)\}$، (شكل: ٥-٣٩).



الشكل: ٥-٣٩



الشكل: ٥-٣٨

لتكن P تجزئة على Q عناصرها الداخلية: $Q_1, Q_2, \cdots, Q_i, \cdots, Q_n$. نحصل على P بتقسيم المنطقة Q بمستويات توازي المستوي xy وبأنصاف مستويات يحدها المحور z وبأسطوانات دائرية محورها المشترك المحور z. حجم التجزئة Q_i كما هو موضح في الشكل: (٥-٣٨)، يساوي حجم موشور، مساحة قاعدته: $\bar{r}\,\Delta r_i\,\Delta\theta_i$ وارتفاعه Δz_i،

فهو يساوي: $\bar{r}\,\Delta z_i\,\Delta r_i\,\Delta\theta_i$ ($\bar{r}$ المتوسط الحسابي لنصفي قطري الأسطوانتين اللذ تحدان Q_i).

بأسلوب مشابه لتعريف التكامل الثلاثي في الإحداثيات الديكارتية، فإن التكامل الثلاثي في الإحداثية الأسطوانية يتحدد بالصورة:

$$\iiint_Q f(r,\theta,z)dv = \int_\alpha^\beta \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} \int_{k_1(r,\theta)}^{k_2(r,\theta)} f(r,\theta,z)\, r dz\, dr\, d\theta \qquad (2)$$

١.٦.٥ التكامل الثلاثي هو نهاية ثلاث مجموعات

(١) المجموع الأول محسوب على طول عمود مناطقه الجزئية من الشكل Q_i. يحد هذا العمود من الأعلى السطح $z = k_2(r,\theta)$ ومن الأسفل السطح $z = k_1(r,\theta)$، الشكل: (٥-٣٩) وفي هذا المجموع r,θ ثابتان.

(٢) المجموع الثاني يمتد على شريحة تحتوي على الأعمدة السابقة جميعها، وفي هذا المجموع θ ثابتة و r هو المتغير.

(٣) المجموع الثالث تمسح به الشرائح السابقة المنطقة Q بأكملها عندما تتغير θ من α إلى β. وهذا يستدعي إجراء ثلاثة تكاملات:

(أ) $\int_{k_1(r,\theta)}^{k_2(r,\theta)} f(r,\theta,z)\, r dz$ (مع ثبات r,θ).

(ب) $\int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} \varphi(r,\theta)dr$ (مع ثبات θ)، حيث: $\varphi(r,\theta)$ هي نتيجة التكامل السابق.

(ت) ثم مكاملة الناتج في الفقرة السابقة بين α و β.

في العلاقة (2)، إذا كانت: $f(r,\theta,z) = 1$، فإن التكامل يعبر عن حجم المنطقة Q.

مثال (٢٤): حول الإحداثيات المتعامدة x,y,z إلى الإحداثيات الأسطوانية r,θ,z، ثم احسب قيمة التكامل الأول فقط:

١) $\iiint_D x^2y\, dz\, dy\, dx$، المنطقة: D: $0 \le z \le h,\ x^2+y^2 \le a^2$.

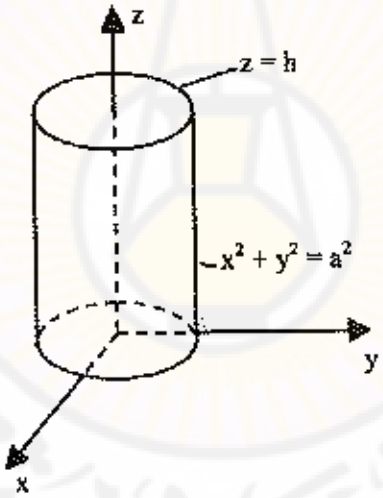
٢) $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{x-y+2} (x^2 - y^2) dz\, dy\, dx$.

الحل: ١) المنطقة D تأخذ شكل أسطوانة (الشكل: ٥-٤٠):

نجري التغيير: $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,\ z = z$، فنجد أن التكامل يكتب على الشكل:

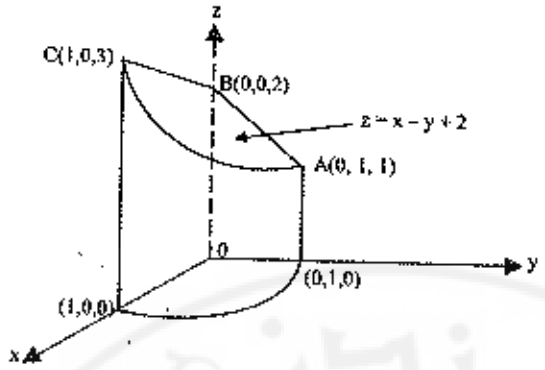
$$\int_0^{2\pi} \int_0^{a} \int_0^{h} (r\cos\theta)^2 (r\sin\theta) dz\, r dr\, d\theta =$$
$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{a} \int_0^{h} r^4 \cos^2\theta \sin\theta\, dz\, dr\, d\theta =$$
$$= h\left(\int_0^{a} r^4 dr\right)\left(\int_0^{2\pi} \cos^2\theta \sin\theta\, d\theta\right) = 0$$

(لاحظ أن حدود التكامل ثابتة، وأن: $\int_0^{2\pi} \cos^2\theta \sin\theta\, d\theta = \left[\frac{\cos^3\theta}{3}\right]_0^{2\pi} = 0$)



الشكل: ٥-٤٠

٢) مسقط منطقة التكامل على المستوي xy، ربع دائرة مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها الواحدة، الشكل: ٥-٤١.



الشكل: ٥-٤١

يكتب التكامل على الشكل:

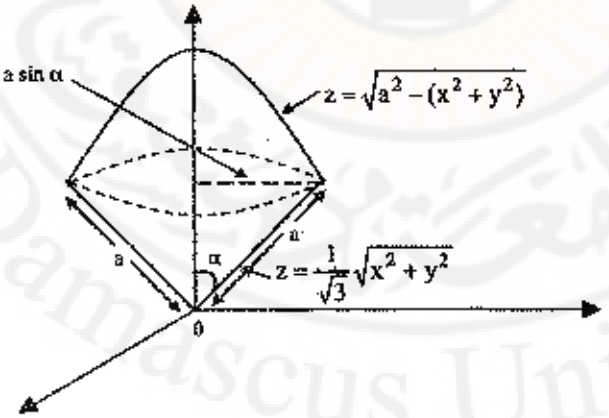
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \int_0^{2+r(\cos\theta-\sin\theta)} r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)dz\, r dr\, d\theta =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \int_0^{2+r(\cos\theta-\sin\theta)} r^3 \cos 2\theta\, dz\, dr\, d\theta$$

مثال (٢٥): أوجد حجم المنطقة المحصورة داخل السطحين:

$z = \sqrt{a^2 - (x^2+y^2)}$ (نصف كرة) و $z = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{x^2+y^2}$ (نصف مخروط).

الحل: تكتب معادلة نصف المخروط بدلالة الإحداثيات الأسطوانية على الشكل: $z = \frac{1}{\sqrt{3}} r \Rightarrow \frac{r}{z} = \sqrt{3}$. لاحظ أن: $\frac{r}{z} = \tan\alpha$ الشكل: ٥-٤٢. إذن $\alpha = \frac{\pi}{3}$.



الشكل: ٥-٤٢

لاحظ أيضاً أن طول نصف قطر دائرة التقاطع بين السطحين تساوي: $a\sin\alpha = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

باستخدام الإحداثيات الأسطوانية نجد أن الحجم يساوي:

$$V = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{a\sqrt{3}}{2}} r dr \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}r}^{\sqrt{a^2-r^2}} dz$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{a\sqrt{3}}{2}} \left(\sqrt{a^2-r^2} - \frac{1}{\sqrt{3}}r\right) r dr$$

$$= 2\pi \int_0^{\frac{a\sqrt{3}}{2}} -\frac{1}{2}(a^2-r^2)^{\frac{1}{2}}(-2r dr) - 2\pi \int_0^{\frac{a\sqrt{3}}{2}} \frac{r^2}{\sqrt{3}} dr =$$

$$= \left[2\pi\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)(a^2-r^2)^{\frac{3}{2}} - 2\pi\frac{r^3}{3\sqrt{3}}\right]_0^{\frac{a\sqrt{3}}{2}} =$$

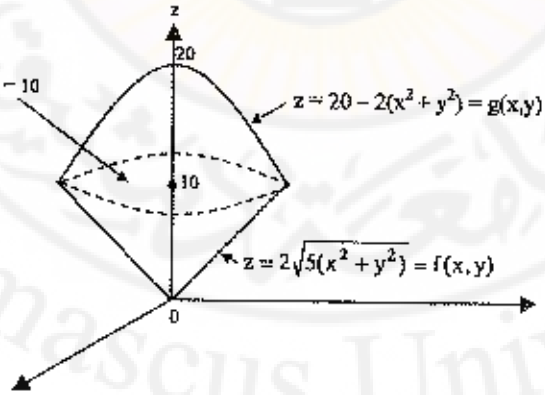
$$= -\frac{2}{3}\pi\left(\frac{a^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{4}a^3 + \frac{2}{3}\pi a^3 = \frac{\pi a^3}{3}$$

مثال (٢٦): أوجد الحجم المحدود بنصف المخروط، ومجسم القطع المكافئ الآتيين:

$$z = 2\sqrt{5(x^2+y^2)} \qquad \& \qquad z = 20 - 2(x^2+y^2) \qquad (3)$$

عبر عن الحجم على شكل تكامل ثلاثي بدلالة الإحداثيات x, y, z وبدون حساب هذا التكامل، ثم استخدم الإحداثيات الأسطوانية لحساب هذا الحجم.

الحل:

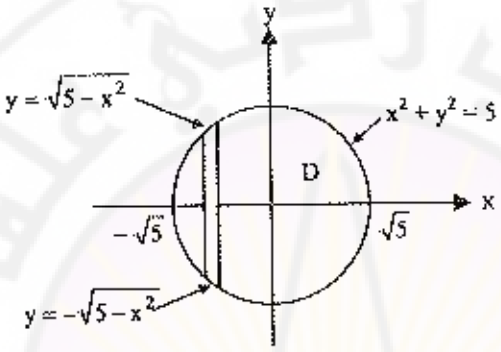


الشكل: ٥-٤٣

لحساب نقاط التقاطع بين المجسمين نحذف x^2+y^2 بين المعادلتين في (3)، فنجد من المعادلة الأولى: $x^2+y^2=\frac{z^2}{20}$، وبالتعويض في الثانية نحصل على:

$$z^2+10z-200=0 \Rightarrow (z-10)(z+20)=0 \Rightarrow z=10$$

(لاحظ أن $z\geq 0$) وهي معادلة المستوي التي تحتوي نقاط التقاطع. نقاط التقاطع تمثل دائرة مسقطها على المستوي xy هي الدائرة: $x^2+y^2=\frac{z^2}{20}=\frac{(10)^2}{20}=5$ التي طول نصف قطرها: $r=\sqrt{5}$.



الشكل: ٥-٤٤

والحجم V يساوي:

$$V=\iiint dz\,dy\,dx=\iint_D dy\,dx\int_{f(x,y)}^{g(x,y)}dz=$$

$$=\iint_D [g(x,y)-f(x,y)]dy\,dx=$$

$$=\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}}dx\int_{-\sqrt{5-x^2}}^{\sqrt{5-x^2}}\left[20-2(x^2+y^2)-2\sqrt{5(x^2+y^2)}\right]dy$$

لحساب هذا الحجم، نجري التغيير: $x=r\cos\theta\ ,y=r\sin\theta$ فنجد:

$$V=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{5}}[20-2r^2-2\sqrt{5}\,r]rdr=2\pi\left[10r^2-\frac{r^4}{2}-\frac{2\sqrt{5}}{3}r^3\right]_0^{\sqrt{5}}$$

$$=2\pi\left(50-\frac{25}{2}-\frac{2\sqrt{5}\cdot 5\sqrt{5}}{3}\right)=\frac{125\pi}{3}$$

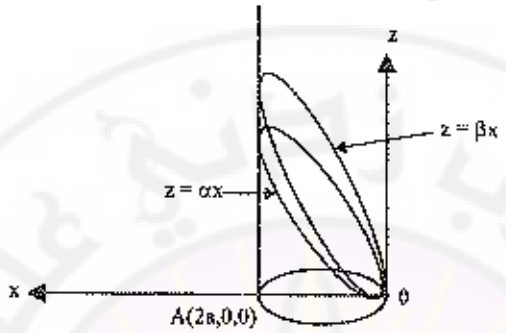
مثال (٢٤): أوجد الحجم المحدود بالسطوح الآتية:

$$x^2 + y^2 = 2ax\,, \qquad z = \alpha x\,, \qquad z = \beta x\,, \qquad (\beta > \alpha)$$

الحل: مسقط المنطقة التي تحد الحجم على المستوي xy، هو دائرة معادلتها القطبية:

$$x^2 + y^2 = 2ax \implies r^2 = 2ar\cos\theta \implies r = 2a\cos\theta$$

(لاحظ أن $r = 0$ عندما $\theta = \frac{\pi}{2}$) ومنه:



الشكل: ٥-٤٥

$$V = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2a\cos\theta} \int_{\alpha r\cos\theta}^{\beta r\cos\theta} r\,dz\,dr\,d\theta =$$

$$= (\beta - \alpha)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^{2a\cos\theta} d\theta = \frac{(\beta-\alpha)}{3}a^3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 8\cos^4\theta\,d\theta =$$

$$= \frac{16(\beta-\alpha)a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta\,d\theta = \frac{16(\beta-\alpha)a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)^2 d\theta$$

$$= \frac{4(\beta-\alpha)a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + 2\cos 2\theta + \frac{1+\cos 4\theta}{2}\right) d\theta =$$

$$= \frac{4(\beta-\alpha)a^3}{3}\left[\theta + \sin 2\theta + \frac{\theta}{2} + \frac{\sin 4\theta}{8}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4(\beta-\alpha)a^3}{3}\cdot\frac{3\pi}{4}$$

إذن: $V = (\beta - \alpha)\pi a^3$

Damascus University

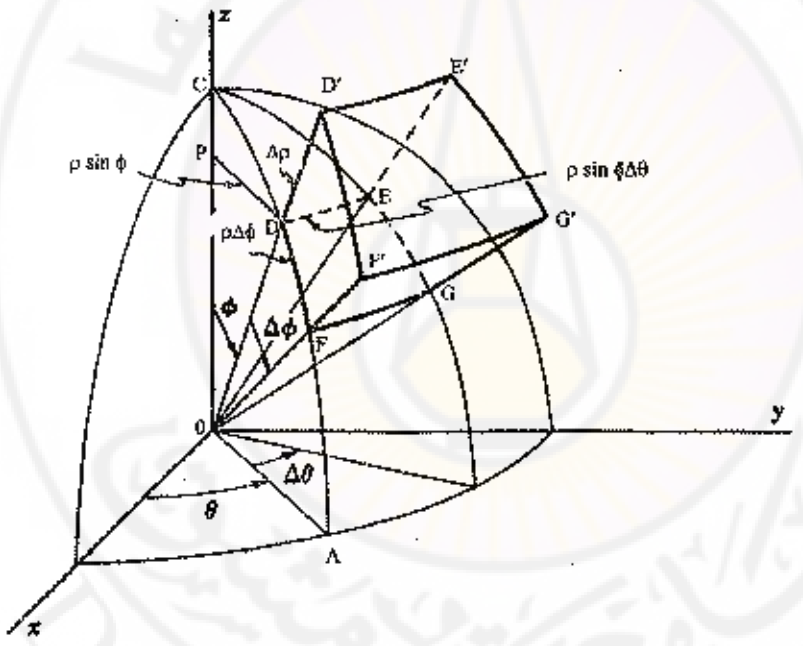
٧.٥ التكامل الثلاثي في الإحداثيات الكروية

من المفضل أحياناً استخدام الإحداثيات الكروية لإيجاد التكامل الثلاثي في الحالة التي تكون فيها الدالة f بالمتغيرات (ρ, φ, θ) متصلة ومعرفة على منطقة من الشكل:

$$R = \{(\rho, \varphi, \theta): f_1(\varphi, \theta) \le \rho \le f_2(\varphi, \theta), g_1(\theta) \le \varphi \le g_2(\theta), m \le \theta \le n\}$$

ولنفرض أن الدالة f قابلة للتكامل على المنطقة R.

لتكن Q منطقة جزئية محصورة بين نصفي مستويين يحويان ويحدان المحور z ويصنعان زاويتين $\theta, \theta + \Delta\theta$ مع المستوي xy، وبين الكرتين (مركزهما المشترك نقطة الأصل) طولا نصفي قطرهما $\rho, \rho + \Delta\rho$، وبين نصفي مخروطين زاويتهما الرأسيتين $\varphi, \varphi + \Delta\varphi$ ومحور تناظرهما المحور z، الشكل: ٥-٤٦.

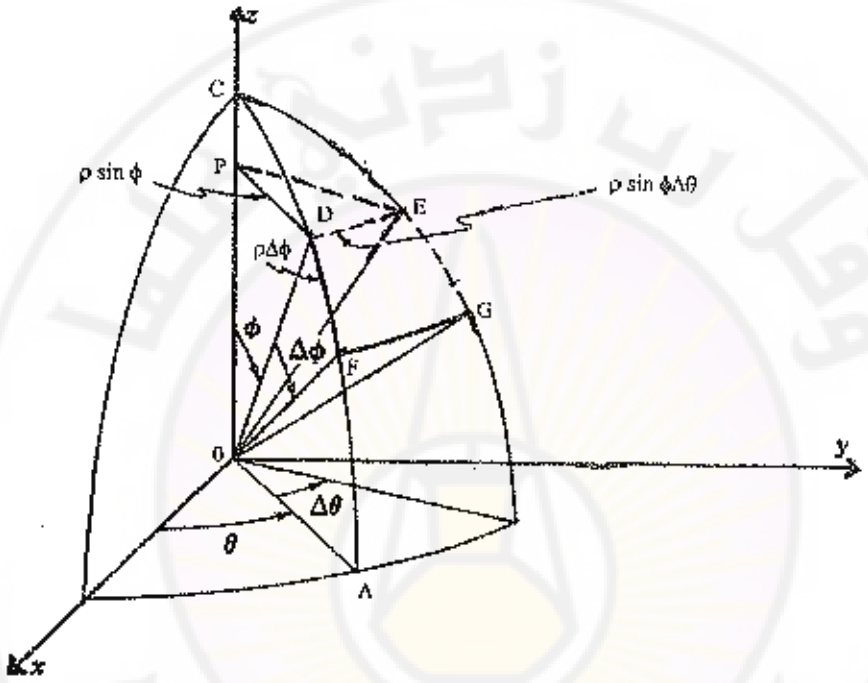


الشكل: ٥-٤٦

لاحظ أن بعد النقطة $D(\rho, \varphi, \theta)$ عن P مسقطها على المحور z، يساوي: $r = \rho \sin\varphi$، وأن طول القوس $\overrightarrow{DE}$ الناتج من دوران القطعة $[P, D]$ في المستوي DPE العمودي على المحور z بزاوية مقدارها $\Delta\theta$، يساوي: $r\Delta\theta = \rho \sin\varphi\, \Delta\theta$. لاحظ أيضاً

أن طول القوس $\overset{\frown}{DF}$ الناتج من دوران القطعة $[O,D]$ في المستوي OAC حول النقطة O بزاوية مقدارها $\Delta\varphi$، يساوي: $\rho\Delta\varphi$.

إذا استطالت القطع: $[0,D],[0,F],[0,G],[0,E]$ بمقدار $\Delta\rho$، حصلنا على الرباعي المنحني $D'F'G'E'$ الواقع على الكرة الثانية، وبالتالي حصلنا على المنطقة Q، الشكل: ٥–٤٦.



الشكل: ٥–٤٧

يمكن اعتبار حجم المنطقة Q التقريبي، يساوي حجم متوازي المستطيلات المنشأ على القطع: $[D,D'],[D,F],[D,E]$ ويساوي: $\Delta v \approx \rho^2 \sin\varphi\,\Delta\rho\Delta\varphi\Delta\theta$. لنجزئ المنطقة R إلى مناطق جزئية داخلية: $R_1,R_2,\cdots,R_h,\cdots,R_n$ لها شكل المنطقة Q نفسها، بالكرات: $\rho=a_k$ التي مركزها المشترك نقطة الأصل، وأنصاف المخاريط الدورانية: $\varphi=c_j$ وأنصاف المستويات $\theta=m_i$ التي يحدها المحور z. إذا استبدلنا إحداثيات النقطة: $D(\rho,\varphi,\theta)$، بالإحداثيات: $\rho_k,\varphi_j,\theta_i$ تنقلب المنطقة Q لتصبح

المنطقة الجزئية R_h وحجمها التقريبي يساوي: $\Delta v_h \approx \rho_k^2 \sin\varphi_j \, \Delta\rho_k \Delta\varphi_j \Delta\theta_i$. يمكن البرهان أن الحجم الدقيق للمنطقة R_h يساوي: $\Delta v_h = \bar{\rho}_k^2 \sin\bar{\varphi}_j \, \Delta\rho_k \Delta\varphi_j \Delta\theta_i$، حيث $\bar{\rho}$ عدد محصور بين ρ_k و $\rho_k + \Delta\rho_k$، $\bar{\varphi}_j$ زاوية محصورة بين φ_j و $\varphi_j + \Delta\varphi_j$. يمكن أن نعرف التكامل الثلاثي للدالة: $f(\rho, \varphi, \theta)$ على المنطقة R على أنه نهاية مجموع ريمان $\sum_{i,j,k} f(\rho_k, \varphi_j, \theta_i)\Delta v_h$ عندما $\|p\| \to 0$ (هذا وقد اخترنا ρ_k بحيث تكون مساوية $\bar{\rho}_k$ و φ_j مساوية $\bar{\varphi}_j$) ويساوي:

$$\begin{aligned}\iiint_R f(\rho, \varphi, \theta)\rho^2 \sin\varphi \, d\rho d\theta d\varphi \\ &= \lim_{\|p\|\to 0} \sum_{i,j,k} f(\rho_k, \varphi_j, \theta_i)\rho_k^2 \sin\varphi_j \, \Delta\rho_k \Delta\varphi_j \Delta\theta_i \\ &= \int_m^n \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} \int_{f_1(\varphi,\theta)}^{f_2(\varphi,\theta)} f(\rho, \varphi, \theta)\rho^2 \sin\varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta\end{aligned}$$

مثال (٢٥): حول التكاملات الآتية إلى الإحداثيات الكروية، ثم احسب قيمتها:

١) $\iiint_R x^2 y \, dz \, dy \, dx$ حيث R المنطقة الكروية: $x^2 + y^2 + z^2 \le a^2$.

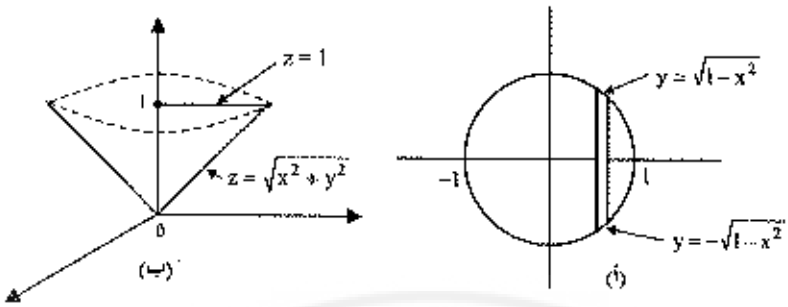
٢) $\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} (x^2 + y^2 + z^2) \, dz \, dy \, dx$.

الحل: ١) باستخدام التحويل الكروي: $x = \rho \sin\varphi \cos\theta$ و $y = \rho \sin\varphi \sin\theta$ و $z = \rho \cos\varphi$ يصبح التكامل على الصورة:

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{a} \rho^2 \sin^2\varphi \cos^2\theta \cdot \rho \sin\varphi \sin\theta \cdot \rho^2 \sin\varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta \\ &= \left(\int_0^a \rho^5 d\rho\right)\left(\int_0^{\pi} \sin^4\varphi \, d\varphi\right)\left(\int_0^{2\pi} \cos^2\theta \sin\theta \, d\theta\right) = 0\end{aligned}$$

(لاحظ أن: $\int_0^{2\pi} \cos^2\theta \sin\theta \, d\theta = \left[\frac{\cos^3\theta}{3}\right]_0^{2\pi} = 0$، وضعنا $\cos\theta = u$)

٢) حدود مسقط منطقة التكامل على المستوي xy، هي الدائرة: $x^2 + y^2 = 1$. والمنطقة محصورة من الأعلى بالمستوي: $z = 1 \Rightarrow \rho\cos\varphi = 1 \Rightarrow \rho = \sec\varphi$ ومن الأسفل بنصف المخروط: $z = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$.



الشكل: ٥-٤٨

التكامل يصبح على الشكل:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\sec\varphi} \rho^2\cdot\rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\frac{\rho^5}{5}\right]_0^{\sec\varphi}\sin\varphi\,d\varphi =$$

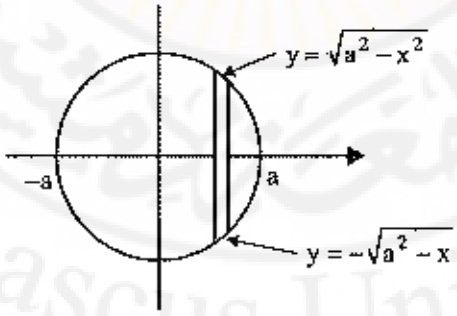
$$= \frac{2\pi}{5}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin\varphi\,d\varphi}{\cos^5\varphi} = -\frac{2\pi}{5}\left[\frac{\cos^{-4}\varphi}{-4}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{3\pi}{10}$$

(وضعنا: $\cos\varphi = u$)

مثال (٢٦): أوجد قيمة التكامل:

$$A = \int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}\int_{a-\sqrt{a^2-x^2-y^2}}^{a+\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dz\,dy\,dx$$

الحل: من الملاحظ أن مسقط المنطقة R المعرف عليها هذا التكامل، على المستوي xy هي المنطقة D المحاطة بنصفي الدائرتين: $y = \sqrt{a^2-x^2}$ و $y = -\sqrt{a^2-x^2}$. إذن D هي القرص الدائري: $x^2+y^2 \le a^2$، الشكل: ٥-٤٩.



الشكل: ٥-٤٩

يحد المنطقة R من الأعلى ومن الأدنى نصفا الكرتين: $z = a + \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ و $z = a - \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$، أو الكرة التي تمس المستوي xy عند نقطة الأصل ومعادلتها:

$$x^2 + y^2 + (z-a)^2 = a^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 2az \Leftrightarrow \rho = 2a\cos\varphi$$

(إذا كان $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ، فإن $\rho = 0$)

باستخدام الإحداثيات الكروية، نجد:

$$\Lambda = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2a\cos\varphi} \rho^3 \sin\varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta =$$

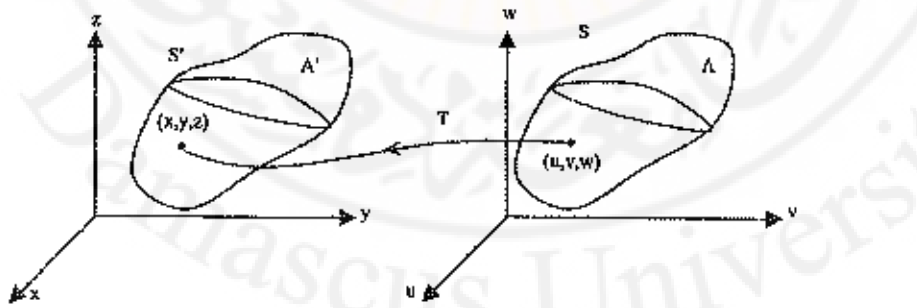
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2a\cos\varphi)^4}{4} \sin\varphi \, d\varphi \, d\theta = 4a^4 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\varphi \sin\varphi \, d\varphi$$

$$= 8\pi a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\varphi \sin\varphi \, d\varphi = 8\pi a^4 \left[\frac{-\cos^5\varphi}{5}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{8\pi a^4}{5}$$

(يكفي أن تتحول φ على الفترة $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ لكي ترسم الكرة بأكملها)

٨.٥ تغيير الإحداثيات في التكاملات الثلاثية

إذا أجرينا تغييراً للإحداثيات في التكامل الثلاثي: $\iiint_A F(x,y,z)dz\,dy\,dx$ وبالصورة: $x = f(u,v,w),\ y = g(u,v,w),\ z = h(u,v,w)$ وذلك وفقاً للتحويل: $T: (u,v,w) \to (x,y,z)$ الذي يحول النقطة (u,v,w) في الفضاء uvw إلى النقطة (x,y,z) في الفضاء xyz، الشكل: ٥-٥٠.



الشكل: ٥-٥٠

وبشروط مشابهة لما صادفناه في التكامل الثنائي على المنطقتين A', A المغلقتين والمحدودتين في الفضائين المذكورين واللتين يحدهما السطحان S', S وكذلك شروط مشابهة على الدوال: F, f, g, h. وبفرض أن الدالة T، حيث $T(A) = A'$ دالة تقابل، وأن المحددة: $J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$ تحتفظ بإشارة ثابتة على A فهي موجبة دوماً أو سالبة دوماً، فإن:

$$\iiint_A F(x,y,z)dz\,dy\,dx = \iiint_A F(f(u,v,w),g(u,v,w),h(u,v,w))|J|\,dw\,dv\,du$$

مثال (٢٧): أوجد حجم المنطقة المحدودة بالسطوح الآتية:

$$z = 0, z = x + y, xy = 1,\ xy = 2,\ y = x, y = 2x \quad (\text{حيث } x > 0,\ y > 0)$$

نجري التغيير: $u = \frac{y}{x}, v = xy, w = z$، فنجد:

$$\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} = \begin{vmatrix} -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} & 0 \\ y & x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{y}{x} = -2u \Rightarrow J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \frac{-1}{2u}$$

من الملاحظ أن: $y^2 = uv$، ومنه: $x^2 = \frac{v}{u}, y^2 = \sqrt{u}\sqrt{v}$. تكتب معادلة السطوح على الصورة:

$$w = \sqrt{u}\sqrt{v} + \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{u}},\ w = 0,\ v = 2,\ v = 1,\ u = 2,\ u = 1$$

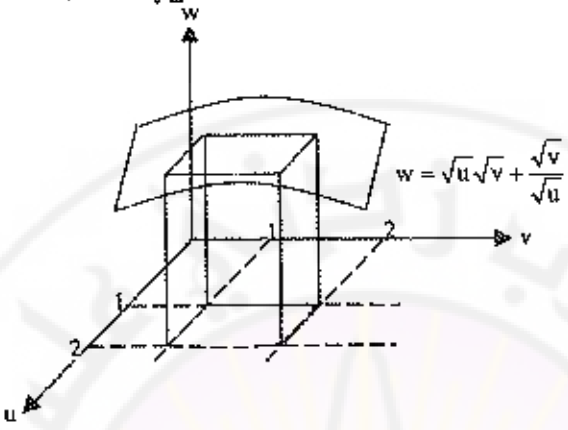
(لاحظ أن: $u > 0,\ v > 0$)

الحجم يساوي:

$$V = \int_1^2 \int_1^2 \int_0^{\sqrt{u}\sqrt{v}+\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{u}}} |J|dw\,dv\,du = \int_1^2 \int_1^2 \frac{1}{2u}\left(u^{\frac{1}{2}} v^{\frac{1}{2}} + v^{\frac{1}{2}} u^{-\frac{1}{2}}\right) dv\,du$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^2\int_1^2 v^{\frac{1}{2}}\left(u^{-\frac{1}{2}}+u^{-\frac{3}{2}}\right)dv\,du = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}v^{\frac{3}{2}}\right]_1^2\left[2u^{\frac{1}{2}}-2u^{-\frac{1}{2}}\right]_1^2 =$$

$$= \frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)\left(\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{2}}{3}(2\sqrt{2}-1)$$



الشكل: ٥--١٥

مثال (٢٨): أوجد الحجم المحصور بمجسم القطع الناقص: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

الحل: نجري التغيير شبه الكروي الآتي:

$$x = a\rho\sin\varphi\cos\theta\ , \qquad y = b\rho\sin\varphi\sin\theta\ , \qquad z = c\rho\cos\varphi$$

نعلم أن محددة التحويل الكروي، تساوي: $\rho^2\sin\varphi$. إذن محددة التحويل في هذه الحالة، تساوي: $abc\,\rho^2\sin\varphi$، والحجم يساوي:

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^1 abc\,\rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta = abc\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^1\cdot[-\cos\varphi]_0^{\pi}\cdot[\theta]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{4\pi}{3}abc$$

تمارين (٥-٥)

أوجد حدود التكامل: $\iiint_D f(x,y,z)dz\,dy\,dx$ من أجل المنطقة D المعرفة كما يلي:

١) D رباعي وجه محدود بالمستويات الإحداثية والمستوي: $x+y+z=1$.

٢) D المنطقة المحدودة بالأسطوانة: $x^2+y^2=4$ والمستويين: $z=5, z=0$.

٣) D المنطقة المحدودة بالمستوي $z=c$ والسطح: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$.

٤) D المنطقة المحدودة بالسطحين: $z=0$, $z=1-x^2-y^2$.

احسب التكاملات الآتية:

٥) $$\int_0^1 dx\int_0^1 dy\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{x+y+z+1}}$$

٦) $$\int_0^2 dx\int_0^{2\sqrt{x}} dy\int_0^{\sqrt{\frac{4x-y^2}{2}}} z\,dz$$

٧) $$\int_0^a dx\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dy\int_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \frac{dz}{\sqrt{a^2-x^2-y^2-z^2}}$$

٨) $$\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\int_0^{1-x-y} xyz\,dz$$

٩) احسب قيمة التكامل: $\iiint_D (x+y+z)^2 dz\,dy\,dx$، حيث D المنطقة المحدودة بمجسم القطع المكافئ: $x^2+y^2=2az$، والكرة: $x^2+y^2+z^2=3a^2$.

١٠) احسب قيمة التكامل: $\iiint_D z^2 dz\,dy\,dx$، حيث D المنطقة المحدودة داخل الكرتين: $x^2+y^2+z^2=a^2$ و $x^2+y^2+z^2=2az$.

١١) احسب قيمة التكامل: $\iiint_D z\,dz\,dy\,dx$، حيث D المنطقة المحدودة بالمستوي: $z=0$، ونصف المجسم: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ العلوي $(z\geq 0)$.

١٢) أوجد قيمة التكامل: $\iiint_D \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right) dz\,dy\,dx$، حيث D المنطقة الواقعة داخل مجسم القطع الناقص: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

١٣) أوجد قيمة التكامل: $\iiint_D z\,dz\,dy\,dx$، حيث D المنطقة المحدودة بالمخروط: $z=x^2+y^2$ والمستوي: $z=4$.

١٤) باستخدام الإحداثيات الأسطوانية، احسب قيمة التكامل: $\iiint_D dz\,dy\,dx$، حيث D المنطقة المحدودة بالسطحين: $x^2+y^2+z^2=2z$, $x^2+y^2=z^2$ والتي تحتوي النقطة: $(0,0,1)$.

١٥) باستخدام الإحداثيات الأسطوانية، احسب قيمة التكامل:

$$\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} dy \int_0^1 z\sqrt{x^2+y^2}\,dz$$

١٦) باستخدام الإحداثيات الأسطوانية، احسب قيمة التكامل:

$$\int_{-a}^{a} dx \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} (x^2+y^2)\,dz$$

١٧) باستخدام الإحداثيات الكروية، احسب قيمة التكامل:

$$\iiint_D \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dz\,dy\,dx$$

حيث D المنطقة الواقعة داخل الكرة: $x^2+y^2+z^2-x=0$.

١٨) باستخدام التكامل الثلاثي أوجد الحجم المحدود بالسطوح:

$$y^2=4a^2-3ax\,,\qquad y^2=ax\,,\qquad z=\pm k$$

١٩) أوجد حجم جزء المنطقة الأسطوانية: $x^2+y^2=2ax$ المحصور بين المجسم: $x^2+y^2=2az$، والمستوي: xy.

٢٠) أوجد حجم الجسم المحدود بالكرة: $x^2+y^2+z^2=a^2$ والمخروط: $x^2+y^2=z^2$، والواقع خارج المخروط.

٢١) أوجد حجم الجسم المحدود بالكرة: $x^2+y^2+z^2=4$ والسطح: $x^2+y^2=3z$ ، والواقع داخل السطح.

٢٢) أوجد الحجم المحدود بالمستوي xy والأسطوانة: $x^2+y^2=ax$، والكرة: $x^2+y^2+z^2=a^2$، والواقع داخل الأسطوانة.

٢٣) احسب حجم الجسم المحدود بمجسم القطع المكافئ: $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\frac{2x}{a}$ ، والمستوي $x=a$.

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

فهرس الفصل السادس

٦. التكامل السطحي والخطي

١.٦ تعريف التكامل السطحي وشروط وجوده.

٢.٦ حساب التكامل السطحي.

٣.٦ تعريف التكامل الخطي وشروط وجوده.

٤.٦ حساب التكامل الخطي.

أمثلة محلولة.

تمارين غير محلولة.

Damascus University

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الفصل السادس

٦. التكامل السطحي والخطي

سنقتصر في هذا البحث على دراسة التكامل السطحي والخطي من دون توجيه السطوح أو المنحنيات، وسنعالج في التحليل الشعاعي التكاملات الناتجة عن هذا التوجيه.

١.٦ تعريف التكامل السطحي وشروط وجوده

ليكن Σ سطحاً محدداً صقيلاً أو صقيلاً جزئياً، ويمكن أن يكون مفتوحاً أو مغلقاً (إذا كان مفتوحاً فيشترط أن يكون ذا حافة Γ صقيلة أو صقيلة جزئياً) فتكون له مساحة S. ليكن $f(x,y,z)$ تابعاً معرفاً ومحدداً على Σ والمتحولات الثلاثة x,y,z غير مستقلة لأنها ترتبط بمعادلة السطح، فيكون عدد المتحولات المستقلة اثنين فقط.

بواسطة منحنيات صقيلة جزئياً نجزئ السطح Σ إلى عدد محدود N من السطوح الجزئية:

$$\Sigma_i \quad (i = 1, 2, \cdots, N)$$

بحيث يكون:

$$\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \cdots \cup \Sigma_N$$

وبحيث لا توجد نقاط داخلية مشتركة بين السطوح الجزئية، ولتكن مساحة السطوح الجزئية على الترتيب:

$$\Delta S_i \quad (i = 1, 2, \cdots, N)$$

وليكن D أعظم أقطار هذه السطوح الجزئية. نشكل المجموع:

$$I_N = \sum_{i=1}^{N} f(\xi_i, \eta_i, \varphi_i)\, \Delta S_i$$

حيث $(\xi_i, \eta_i, \varphi_i)$ نقطة ما من Σ_i.

إذا كانت النهاية:

$$\lim_{D \to 0} I_N \qquad (1)$$

موجودة أياً كانت طريقة تجزئة السطح Σ وأياً كان موضع النقطة $(\xi_i, \eta_i, \varphi_i)$ على Σ_i فإن هذه النهاية تدعى التكامل السطحي للتابع $f(x,y,z)$ على السطح Σ ونرمز لذلك بالرمز:

$$I = \iint_{\Sigma} f(x,y,z)\, dS \qquad (2)$$

وعندئذ نقول: إن هذا التابع قابل للمكاملة على هذا السطح، ويدعى dS عنصر المساحة.

يمكن البرهان أن النهاية (1) موجودة إذا كان التابع $f(x,y,z)$ مستمراً أو مستمراً جزئياً على Σ.

ملاحظة: نقتصر فيما يلي على سطح محدد وصقيل أو صقيل جزئياً (وذي حافة صقيلة أو صقيلة جزئياً إذا كان مفتوحاً) وعلى تابع محدد ومعرف عليه شرط أن يكون مستمراً أو مستمراً جزئياً، بحيث يكون التكامل (2) موجوداً علماً أنه إذا كان التابع أو السطح غير محدد فتنتج تكاملات سطحية شاذة.

نتائج:

أولاً: خواص التكامل السطحي: سنبرهن أن التكامل السطحي يمكن ارجاعه إلى تكامل ثنائي على منطقة مستوية؛ ولذا فإن خواص التكامل السطحي هي خواص التكامل الثنائي نفسها.

ثانياً: حساب مساحة السطح: بوضع $f(x,y,z) = 1$ في (2) ينتج:

$$I = \iint_{\Sigma} dS = S$$

وهو القانون العام لحساب المساحة S لأي سطح Σ.

ثالثاً: إذا كان Σ سطحاً مغلقاً فنرمز للتكامل عليه بالرمز:

$$I = \oiint_{\Sigma} f(x,y,z)\, dS$$

٢.٦ حساب التكامل السطحي

نبين فيما يلي طريقة حساب التكامل:

$$I = \iint_{\Sigma} f(x,y,z)\, dS \qquad (2)$$

على سطح صقيل وبسيط ثم نعمم على الحالات الأخرى.

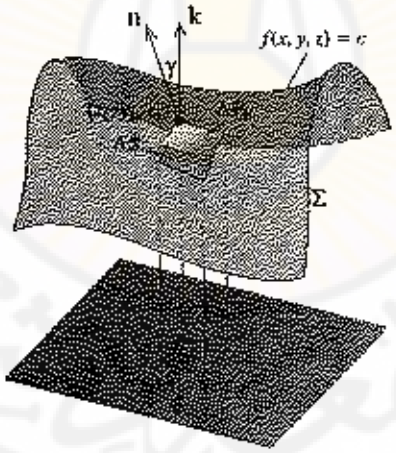
حسابه على سطح صقيل وبسيط:

ليكن Σ سطحاً صقيلاً وبسيطاً في اتجاه z وذا حافة صقيلة جزئياً ولتكن R_z مسقط السطح Σ على المستوي $z = 0$. الشكل (٦-١). في هذه الحالة تكون R_z منطقة مستوية محاطة بمنحنٍ صقيل جزئياً ومساحتها A_z ويتضح من الشكل (٦-١) أن:

$$\hat{n} = (z'_x, z'_y, -1), \hat{k} = (0,0,1) \Longrightarrow \cos\gamma = \frac{\hat{n}\cdot\hat{k}}{\sqrt{z'^2_x + z'^2_y + 1}\,\sqrt{0+0+1}}$$

$$\Longrightarrow \cos\gamma = \frac{-1}{\sqrt{z'^2_x + z'^2_y + 1}} \;;\; \Delta S|\cos\gamma| = \Delta A_z \Longrightarrow \Delta S = \left|\frac{1}{\cos\gamma}\right| \Delta A_z$$

$$\Longrightarrow \Delta S \approx |\sec\gamma|\, \Delta A_z$$



الشكل: ٦-١

وعندما $\lim(\Delta S) \to 0$ فإن عنصر المساحة dS يعطى بالعلاقة:

$$dS = |\sec\gamma|\, dA_z$$

وقد أخذنا القيمة المطلقة، لأن الزاوية γ يمكن أن تكون حادة أو منفرجة حسبما توجه $\vec{n}$ نحو الصادات الموجبة أو السالبة.

بما أن Σ سطح صقيل وبسيط في اتجاه z فإن معادلته هي:

$$z = g(x,y) \qquad (3)$$

حيث $g(x,y) \in Cl^1$ على R_z. إن نسب توجيه الناظم على هذا السطح هي:

$$-\frac{\partial z}{\partial x} : -\frac{\partial z}{\partial y} : 1$$

فينتج من ذلك أن:

$$|\sec\gamma| = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$$

وهو تركيب مستمر على R_z فيكون عنصر المساحة:

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dA_z \qquad (4)$$

وفي التجزئة القائمة للمنطقة R_z يكون: $dA_z = dx\, dy$.

على Σ لدينا التابع المستمر أو المستمر جزئياً:

$$f(x,y,z) = f[x,\ y,\ g(x,y)] \qquad (5)$$

بتعويض (3)، (4)، (5) في (2) ينتج قانون حساب التكامل السطحي في التجزئة القائمة:

$$I = \iint_{\Sigma} f(x,y,z)\, dS$$

$$= \iint_{R_z} f(x,y,g(x,y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy \qquad (6)$$

إن التكامل الثنائي على R_z يمكن كتابته بالشكل:

$$\iint_{R_z} \psi(x,y)\, dx\, dy$$

وهو موجود لأن $\psi(x,y)$ مستمر أو مستمر جزئياً على المنطقة R_z المحاطة بمنحنٍ صقيل جزئياً، ويتم حساب التكامل الثنائي بالطرق التي درسناها.

نتائج:

أولاً) بوضع $f(x,y,z)=1$ في (6) ينتج قانون حساب المساحة S لسطح صقيل وبسيط في اتجاه z وهو:

$$S=\iint_{R_z}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy \qquad (7)$$

ثانياً) إن القانونين (6)، (7) يعطيان قيمة التكامل في التجزئة القائمة، ولكن يمكن استخدام التبديل مستمر المشتقات على المنطقة R_z لحسابه في التجزئة القطبية أو المنحنية.

ثالثاً) إذا كان Σ سطحاً صقيلاً وبسيطاً في اتجاه x أو في اتجاه y فإننا نتبع الطريقة نفسها لإرجاع التكامل على Σ إلى تكامل ثنائي على المسقط R_x أو R_y على الترتيب.

التعميم على سطح يمكن تقسيمه إلى سطوح صقيلة وبسيطة عديدة:

ونميز هنا بين حالتين:

أولاً) السطح بسيط في اتجاه أحد المحاور، ولكنه صقيل جزئياً.

في هذه الحالة يمكن تقسيم السطح Σ إلى عدد محدود من السطوح $\Sigma_1,\cdots,\Sigma_N$ بحيث يكون كل واحد منها صقيلاً وبسيطاً في اتجاه ذلك المحور، ويكون عندئذ:

$$I=\iint_{\Sigma} f\,dS=\iint_{\Sigma_1} f_1\,dS+\cdots+\iint_{\Sigma_N} f_N\,dS \qquad (8)$$

حيث $f_1,\cdots,f_N$ هي على الترتيب قيم التابع $f(x,y,z)$ على السطوح $\Sigma_1,\cdots,\Sigma_N$. تحسب التكاملات الناتجة كما ذكرنا أعلاه.

ثانياً) السطح صقيل، ولكنه غير بسيط في اتجاه أي محور.

بواسطة منحنيات صقيلة جزئياً نحاول تقسيم السطح Σ إلى عدد محدود من السطوح $\Sigma_1, \cdots, \Sigma_N$ بحيث يكون كل واحد منها صقيلاً وبسيطاً في اتجاه أحد المحاور، وإن أمكن ذلك فإننا نطبق القانون (8) على هذه الحالة أيضاً لحساب التكامل على السطح Σ.

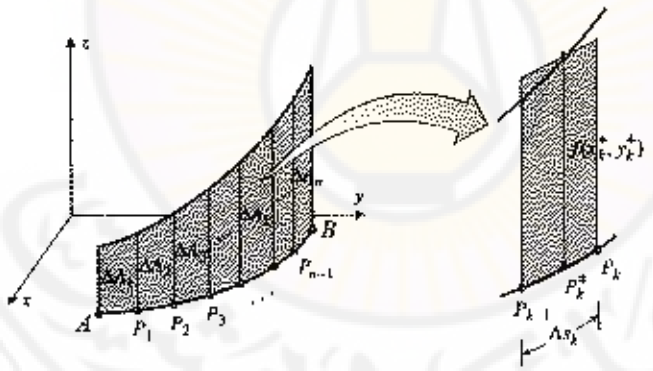
٣.٦ تعريف التكامل الخطي وشروط وجوده

ليكن Γ منحنياً فراغياً محدداً (ويمكن أن يكون مفتوحاً أو مغلقاً) صقيلاً أو صقيلاً جزئياً، فيكون له طول s. ليكن التابع $f(x,y,z)$ معرفاً ومحدداً على Γ حيث تكون المتحولات الثلاثة x,y,z غير مستقلة؛ لأنها ترتبط بمعادلات المنحني Γ فيكون عدد المتحولات المستقلة واحداً فقط.

إذا كان Γ هو المنحني الواصل بين النقطتين A,B فإننا نجزئ Γ إلى عدد محدود N من المنحنيات الجزئية:

$$\Gamma_i, \quad (i = 1,2,\cdots,N)$$

وذلك بواسطة النقاط $P_0 = A, P_1, \cdots, P_N = B$ (الشكل ٦-٢).



الشكل: ٦-٢

ليكن Δs_i طول المنحني الجزئي Γ_i وليكن D أعظم أطوال هذه المنحنيات الجزئية.

نشكل المجموع:

$$I_N = \sum_{i=1}^{N} f(\xi_i, \eta_i, \varphi_i)\, \Delta s_i$$

حيث $(\xi_i, \eta_i, \varphi_i)$ نقطة ما من Γ_i.

إذا كانت النهاية:

$$\lim_{D \to 0} I_N \qquad (9)$$

موجودة أياً كانت طريقة تجزئة المنحني Γ وأياً كان موضع النقطة $(\xi_i, \eta_i, \varphi_i)$ على Γ_i فإن هذه النهاية تدعى التكامل الخطي للتابع $f(x,y,z)$ على المنحني Γ ونرمز له بالرمز:

$$I = \int_{\Gamma} f(x,y,z)\, ds \qquad (10)$$

ونقول عندئذٍ: إن هذا التابع قابل للمكاملة على هذا المنحني.

ويمكن البرهان على أن النهاية (9) موجودة إذا كان $f(x,y,z)$ مستمراً أو مستمراً جزئياً على Γ ويجب أن نلاحظ أن قيمة (10) لا تتغير سواء أكانت النقطة A أم B مبدأ لقياس طول القوس s.

ملاحظة:

فيما يلي نقتصر على منحنٍ محدد وصقيل أو صقيل جزئياً، وعلى تابع معرف ومحدد عليه شرط أن يكون مستمراً أو مستمراً جزئياً بحيث يكون التكامل (10) موجوداً مع العلم أنه إذا كان التابع أو المنحني غير محدد فتنتج تكاملات خطية شاذة.

نتائج:

أولاً) خواص التكامل الخطي: سنبرهن أنه يمكن إرجاع التكامل الخطي إلى تكامل بسيط محدد، ولذا فإن خواص التكامل البسيط المحدد نفسها باستثناء خاصة تغيير الاتجاه على المنحني إذ في التكامل الخطي لدينا:

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y,z)\, ds = \int_{\overset{\frown}{BA}} f(x,y,z)\, ds$$

بينما في التكامل البسيط يكون:

$$\int_A^B f(x)dx = -\int_B^A f(x)dx$$

ثانياً) حساب طول المنحني: بوضع $f(x,y,z) = 1$ في (10) ينتج:

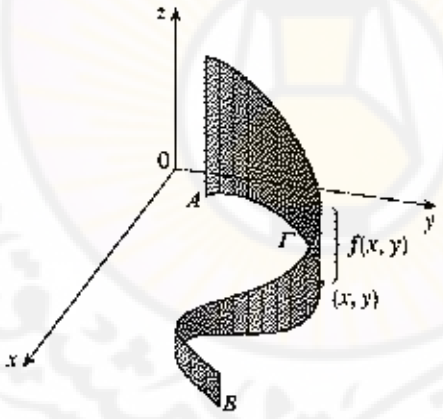
$$I = \int_\Gamma ds = s$$

وهو القانون العام لحساب الطول s لأي منحني Γ.

ثالثاً) التكامل الخطي على منحنٍ مستوٍ وحساب مساحة أسطوانة قائمة: في الحالة الخاصة التي يكون فيها المنحني Γ واقعاً في المستوي xy فإن القانون (10) يصبح:

$$I = \int_\Gamma f(x,y)\, ds$$

وإذا كان $f(x,y) \geq 0$ فإن التكامل الأخير يعطي مساحة أسطوانة قائمة مولداتها توازي محور z ودليلها في المستوي $z = 0$ هو المنحني Γ وارتفاعها المتحول هو: $z = f(x,y)$ (الشكل ٦–٣).



الشكل: ٦–٣

رابعاً) إذا كان Γ منحنياً مغلقاً فنرمز للتكامل عليه بالرمز:

$$I = \oint_\Gamma f(x,y,z)\, ds$$

٤.٦ حساب التكامل الخطي

نبين فيما يلي طريقة حساب التكامل:

$$I = \int_{\Gamma} f(x,y,z)\, ds \qquad (11)$$

على منحنٍ صقيل، ثم نعمم على الحالة التي يكون فيها المنحني صقيلاً جزئياً.

حسابه على منحنٍ صقيلٍ:

ليكن Γ منحنياً صقيلاً يصل بين النقطتين A, B ومعرفاً بدلالة وسيط عام t بالمعادلات:

$$x = g_1(t), \qquad y = g_2(t), \qquad z = g_3(t)$$

حيث t يتزايد من القيمة t_A إلى القيمة t_B (قيمتا الوسيط في النقطتين A و B على الترتيب). ينتج من ذلك أنه على Γ لدينا التابع المستمر أو المستمر جزئياً.

$$f\big(f(x,y,z)\big) = f[g_1(t), g_2(t), g_3(t)] = f_1(t) \qquad (i)$$

كما أن عنصر الطول هو:

$$ds = \pm\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, dt \qquad (ii)$$

وهو تركيب مستمر على المنحني الصقيل Γ وتؤخذ إشارة الزائد إذا كانت t متزايدة مع تزايد s وتؤخذ إشارة الناقص إذا تناقصت t مع تزايد s.

بتعويض (i) و(ii) في (11) ينتج قانون حساب التكامل الخطي في الإحداثيات الوسيطية:

$$I = \int_{\Gamma} f(x,y,z)\, ds = \pm \int_{t_A}^{t_B} f_1(t)\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, dt \qquad (12a)$$

ومن الواضح أن حساب التكامل الخطي قد أرجع إلى حساب بسيط محدد من الشكل:

$$\int_{t_A}^{t_B} \psi(t)\, dt$$

وهذا التكامل موجود؛ لأن $\psi(t)$ تابع مستمر أو مستمر جزئياً في مجال المكاملة $t_A \le t \le t_B$. أما إذا كان المنحني الصقيل Γ معرفاً كتقاطع للسطحين:

$$\left.\begin{matrix} G(x,y,z)=0 \\ H(x,y,z)=0 \end{matrix}\right\}, \quad \left[G,H\in C1', \quad \frac{\partial(G,H)}{\partial(y,z)}\neq 0\right]$$

فيمكن اعتبار x هو الوسيط، ويصبح القانون $(12a)$ على الشكل:

$$I=\int_{\Gamma} f(x,y,z)\,ds=\pm\int_{x_A}^{x_B} f_1(x)\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\,dx \qquad (12b)$$

وإن حساب التكامل الخطي فيه قد أرجع إلى حساب تكامل بسيط محدد من الشكل:

$$\int_{x_A}^{x_B}\psi(x)\,dx$$

وهذا التكامل موجود؛ لأن $\psi(x)$ تابع مستمر أو مستمر جزئياً في مجال المكاملة $x_A \le x \le x_B$.

نتائج:

أولاً) بوضع $f(x,y,z)=1$ في $(12a)$ و$(12b)$ ينتج قانونا حساب الطول s للمنحني المذكور Γ:

$$s=\int_{\Gamma} ds=\pm\int_{t_A}^{t_B}\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,dt \qquad (13a)$$

$$s=\int_{\Gamma} ds=\pm\int_{x_A}^{x_B}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\,dx \qquad (13b)$$

ثانياً) بالطريقة السابقة نفسها يمكن اعتبار y أو z هو الوسيط، ويتم الإرجاع عندئذٍ إلى تكامل بسيط محدد من الشكل:

$$\int_{y_A}^{y_B}\psi(y)\,dy \qquad \text{أو} \qquad \int_{z_A}^{z_B}\psi(z)\,dz$$

التعميم على منحنٍ صقيلٍ جزئياً:

إذا كان Γ منحنياً صقيلاً جزئياً فإنه يمكن تقسيمه إلى عدد محدود من المنحنيات الصقيلة $\Gamma_1,\Gamma_2,\cdots,\Gamma_N$ ويكون عندئذٍ:

$$I = \int_{\Gamma} f\, ds = \int_{\Gamma_1} f_1\, ds + \int_{\Gamma_2} f_2\, ds + \cdots + \int_{\Gamma_N} f_N\, ds \qquad (14)$$

حيث $f_1, f_2, \cdots, f_N$ هي على الترتيب قيم التابع f على المنحنيات $\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots, \Gamma_N$ وتحسب التكاملات الناتجة كما ذكر أعلاه.

Damascus University

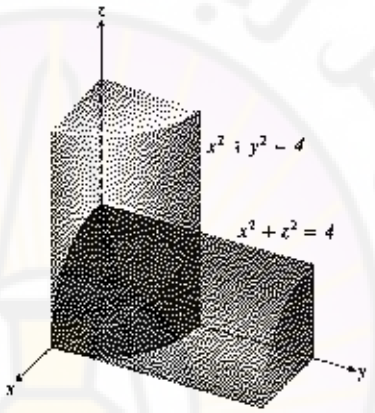
أمثلة محلولة

التكامل السطحي

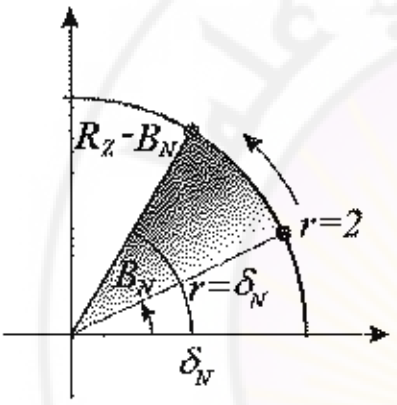
مثال (١): ارسم السطح Σ الذي تقطعه الأسطوانة $x^2+y^2=4$ من الأسطوانة $x^2+z^2=4$ والواقع في الثمن الموجب ثم احسب قيمة التكامل السطحي:

$$I=\iint_{\Sigma}\frac{z\,dS}{(x^2+y^2)^{3/4}}$$

الحل:



الشكل: ٦-٤أ



الشكل: ٦-٤ب

إن السطح Σ مظلل في الشكل (٦-٤أ) كما ظلل في الشكل نفسه (٦-٤ب) مسقطه R_z على المستوي $z=0$. إن Σ سطح صقيل (جزء من أسطوانة دورانية قائمة) وله حافة صقيلة جزئياً كما أنه بسيط في اتجاه z.

على السطح Σ يكون $z=\sqrt{4-x^2}$ ولدينا عندئذٍ:

$$dS=\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}\;dx\,dy=\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}\right)^2+0}\;dx\,dy=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{4-x^2}}\;dx\,dy$$

ومنه:

$$I = \iint_{\Sigma} \frac{z\,dS}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{4}}} = \iint_{R_z} \frac{\sqrt{4-x^2}}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{4}}} \frac{2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx\,dy =$$

$$= 2\iint_{R_z} \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^{3/4}}$$

هذا تكامل ريمن الثنائي الشاذ لوجود نقطة شاذة للتابع $\frac{1}{(x^2+y^2)^{3/4}}$ على محيط المنطقة R_z. نستثني النطاق B_N المبين في الشكل (٦-٤ب) وهو نطاق ربع دائري مركزه النقطة O ونصف قطره $0 < \delta_N < 2$. إن التكامل I_N على المنطقة $R_z - B_N$ موجود لأنها منطقة محددة ومحاطة بمنحنٍ صقيلٍ جزئياً والتابع $\frac{1}{(x^2+y^2)^{3/4}}$ مستمر عليها ويكون:

$$I_N = 2\iint_{R_z-B_N} \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^{3/4}}$$

وبسبب وجود تناظر مركزي نبدل الإحداثيات الديكارتية بالقطبية فيكون:

$$I_N = 2\iint_{(R_z-B_N)_1} \frac{r\,dr\,d\theta}{(r^2)^{3/4}} = 2\iint_{(R_z-B_N)_1} \frac{dr\,d\theta}{r^{1/2}}$$

وباستخدام الشكل (٦-٤ب) ينتج:

$$I_N = 2\int_0^{\pi/2} d\theta \int_{r=\delta_N}^{r=2} \frac{dr}{r^{1/2}} = 2\cdot\frac{\pi}{2}\left[2\sqrt{r}\right]_{\delta_N}^{2} = 2\pi\left[\sqrt{2}-\sqrt{\delta_N}\right]$$

ومنه:

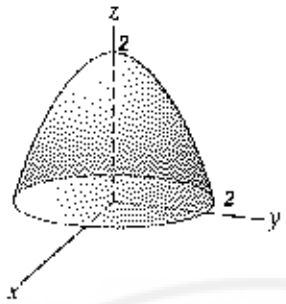
$$\lim_{\delta_N \to 0} I_N = 2\,\pi\,\sqrt{2}$$

فالتكامل يتقارب إلى القيمة: $I = 2\,\pi\sqrt{2}$.

مثال (٢): احسب مساحة جزء من السطح:

$$z = -\frac{1}{2}(x^2+y^2) + 2$$

والواقع فوق المستوي: $z = 0$.



الحل: ولدينا: $z = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4$

$$I = \iint dS = \iint \mu \, dx \, dy$$

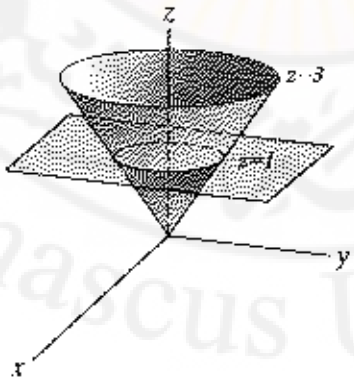
$$\mu = \sqrt{z_x'^2 + z_y'^2 + 1} = \sqrt{x^2 + y^2 + 1} \; ; \; z_x' = -x \, , z_y' = -y \Rightarrow$$

$$I = \iint \sqrt{x^2 + y^2 + 1} \, dx \, dy = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^2 \sqrt{r^2 + 1} \, r dr \right] d\theta \Longrightarrow$$

$$I = \frac{1}{2} \sqrt{r^2 + 1} \, d(r^2 + 1) = \frac{1}{2} \left[\frac{(r^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^2 = \frac{1}{3} \left[(r^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \right]_0^2 =$$

$$= \frac{1}{3} (5)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \left(\sqrt{125} - 1 \right) \Rightarrow I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{3} d\theta \approx 6.78\pi$$

مثال (٣): احسب مساحة جزء من السطح: $x^2 + y^2 = 3z^2$ المقطوع بالمستويين $z = 1 \, , z = 3$.



الحل: المعادلة المعطاة هي عبارة عن مخروط دوراني محوره Oz ورأسه O، أما زاويته:

$$x^2+y^2=\tan^2\alpha\, z^2 \Rightarrow \tan^2\alpha=3 \Rightarrow \tan\alpha=\sqrt{3} \Rightarrow \alpha=\frac{\pi}{3}$$

$$z=\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{x^2+y^2}$$

$$I=\iint_{\Sigma} dS=\iint \mu\, dx\, dy$$

$$\mu=\sqrt{z_x'^2+z_y'^2+1},\ z_x'^2=\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ z_y'^2=\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \Rightarrow$$

$$\mu=\sqrt{\frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}\right)+1} \Rightarrow \mu=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

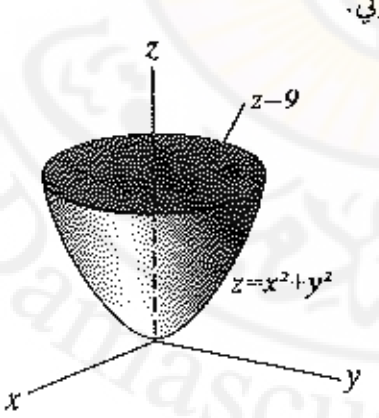
$$I=\int_0^{2\pi}\left[\int_{\sqrt{3}}^{3\sqrt{3}}\frac{2}{\sqrt{3}}r\,dr\right]d\theta=\int_0^{2\pi}\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{r^2}{2}\right]_{\sqrt{3}}^{3\sqrt{3}}d\theta=\int_0^{2\pi}\left[\frac{27}{\sqrt{3}}-\frac{3}{\sqrt{3}}\right]d\theta$$

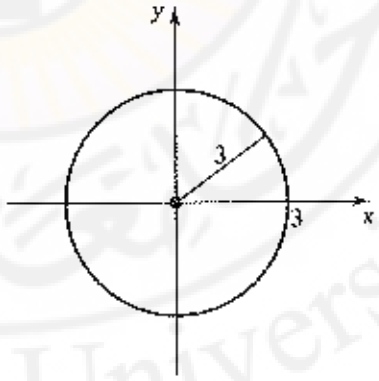
$$=\frac{48}{\sqrt{3}}\pi$$

مثال (٤): احسب مساحة جزء من السطح $z=x^2+y^2$ الواقعة تحت المستوي $z=9$ مع الرسم.

الجواب: $\frac{\pi}{6}[(27)^{\frac{3}{2}}-1]$

الحل: $z=x^2+y^2$ مجسم قطع مطافئ دوراني.





$$I=\iint_{\Sigma}\mu\, dx\, dy\ ;\ \mu=\sqrt{z_x'^2+z_y'^2+1}\ ;\ z_x'^2=4x^2,\ z_y'^2=4y^2 \Rightarrow$$

$$\mu = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} = \sqrt{4r^2 + 1}$$

بعد حساب عامل التسطح μ نسقط على المستوي: xoy.

$$I = \int_0^{2\pi}\left[\int_0^3 \sqrt{4r^2+1}\, r dr\right] d\theta \;;\begin{cases} t = 4r^2 + 1 \Rightarrow 8\, r\, dr = dt \\ r = 0 \Rightarrow t = 1, r = 3 \Rightarrow t = 36 \end{cases} \Rightarrow$$

$$I = 2\pi \int_1^{36} \sqrt{t}\, \frac{dt}{8} = \frac{\pi}{4}\left[\frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}}\right]_1^{36} = \frac{\pi}{6}\left[(37)^{\frac{3}{2}} - 1\right]$$

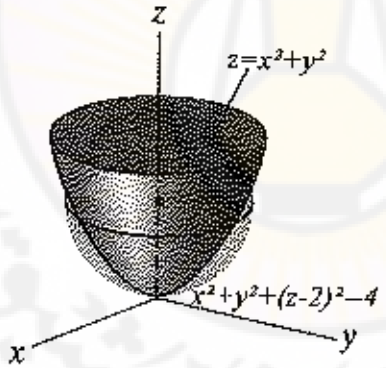
ملاحظة: عندما تكون الكرة على المحور x فإننا:

$$\theta: 0 \to \frac{\pi}{2}, \qquad \varphi: 0 \to \frac{\pi}{2}, \qquad r: 0 \to \sin\theta \cos\varphi$$

مثال (٥): احسب قيمة التكامل السطحي:

$$I = \iint_\Sigma \frac{z-2}{x^2+y^2}\, dS$$

حيث Σ هو الجزء الذي يقطعه الجسم $z = x^2 + y^2$ من السطح $z = 2 + \sqrt{4 - (x^2 + y^2)}$ وذلك في حال وجوده.



الحل: حسب الشكل نلاحظ أن المعادلة: $x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4$ (هي النصف العلوي للكرة) و $z = x^2 + y^2$ هو مجسم قطع مكافئ دوراني. يتقاطع السطحان في المستوي بالمساواة بين المعادلتين ينتج لدينا:

$$z - 2 = \sqrt{4 - (x^2 + y^2)} \Rightarrow (z-2)^2 = 4 - (x^2 + y^2) \Rightarrow$$
$$(z-2)^2 + x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow (z-2)^2 + z = 4 \Rightarrow z^2 - 3z = 0 \Rightarrow$$
$$z(z-3) = 0 \Rightarrow z = 0 \quad or \quad z = 3$$

إذاً السطح عبارة عن سطح القبة الكروية الذي حافته "حدوده" دائرة وهي منحنٍ مستوٍ صقيل.

التابع المكامل: $\frac{z-2}{x^2+y^2}$ وهو تابع مستمر على Σ ما عدا النقطة $(0,0,4)$، وهي رأس القبة الكروية. إذاً التكامل السطحي هو: عبارة عن تكامل شاذ. لنحسب الآن عامل التسطح μ:

$$\mu = \sqrt{z_x'^2 + z_y'^2 + 1};$$

$$z_x' = -\frac{x}{\sqrt{4-x^2-y^2}} \Longrightarrow z_x'^2 = \frac{x^2}{4-x^2-y^2}, \Longrightarrow z_y'^2 = \frac{y^2}{4-x^2-y^2}$$

$$\mu = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{4-x^2-y^2}+1} = \sqrt{\frac{x^2+y^2+4-x^2-y^2}{4-x^2-y^2}} = \frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$$

$$I = \iint_{D_z} \frac{\sqrt{4-x^2-y^2}}{x^2+y^2} \frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}} dx\,dy = \iint \frac{2dx\,dy}{x^2+y^2}$$

ننتقل إلى التحزئة القطبية:

$$I_N = 2\int_0^{2\pi}\left[\int_\delta^{\sqrt{3}} \frac{r dr}{r^2}\right] d\theta = 2\int_0^{2\pi} [\ln r]_\delta^{\sqrt{3}} d\theta = 2\int_0^{2\pi} \left(\ln\sqrt{3} - \ln\delta\right) d\theta$$

$$\Longrightarrow I_N = 4\pi\left(\ln\sqrt{3} - \ln\delta\right) \Longrightarrow I_N \approx \lim_{\delta\to 0} I_N = +\infty$$

والتكامل متباعد $I = +\infty$.

تمرين: (دورة ١٩٨٥)

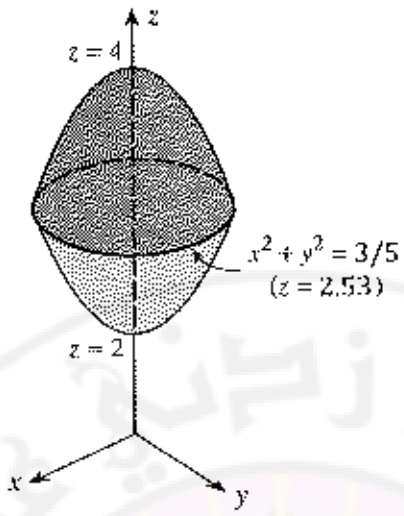
ارسم المنطقة الفراغية المحاطة بسطحين ثم أحسب حجمها:

$$z = 4\sqrt{1-x^2-y^2} \quad (1) \quad \& \quad z = 2\sqrt{1+x^2+y^2} \quad (2)$$

من المعادلة الأولى: $\frac{x^2}{16} + x^2 + y^2 = 1$ (وهي معادلة مجسم قطع ناقص)

بالتربيع نلاحظ أن المعادلة $z = 2\sqrt{1+x^2+y^2}$ نجد: $-\frac{x^2}{4} + x^2 + y^2 = -1$

وهو النصف العلوي لمجسم القطع الناقص الذي مركزه (0).



لتقاطع المعادلتين:

$$16\,(1-x^2-y^2)=4\,(1+x^2+y^2)\Longrightarrow$$

$$3=5x^2+5y^2\Longrightarrow x^2+y^2=\frac{3}{5}$$

من (2) نجد: $z=2\sqrt{1+\frac{3}{5}}$، أي: $z=4\sqrt{\frac{2}{5}}$.

يمكن أن نستخدم إحداثيات أسطوانية مباشرة أو الإحداثيات الديكارتية ومن ثم القطبية:

$$I=\iint\left[\int_{z=2\sqrt{1+x^2+y^2}}^{z=4\sqrt{1-x^2-y^2}}dz\right]dx\,dy\Longrightarrow$$

$$I=\iint\left[4\sqrt{1-x^2-y^2}-2\sqrt{1+x^2+y^2}\right]dx\,dy\Longrightarrow$$

$$I=\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{5}}\left(4\sqrt{1-r^2}-2\sqrt{1+r^2}\right)r\,dr\right]d\theta\Longrightarrow$$

$$I=\int_0^{2\pi}\left[-\frac{4}{3}(1-r^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}(1+r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{5}}d\theta\Longrightarrow$$

$$I=2\pi\left[-\frac{4}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}\left(\frac{8}{5}\right)^{\frac{3}{2}}+\frac{4}{3}+\frac{2}{3}\right]$$

تمرين: ارسم السطح Σ الذي تقطعه الأسطوانة:

$$x^2 + z^2 = 4$$

الواقع في الثمن الموجب ومن ثم احسب التكامل:

$$I = \iint_{\Sigma} \frac{z\, ds}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

أمثلة عن التكامل الخطي « التكامل المنحني »

مثال (٤): احسب قيمة التكامل الخطي: $I = \int_{\Gamma}(x^2 + y^2)\, ds$ حيث Γ هو القوس من المنحني:

$$x = 5\cos t\ , \qquad y = 5\sin t\ , \qquad z = \sqrt{11}\, t$$

الواصل بين النقطتين المقابلتين للقيمتين: $t = 0\ ,\ t = \pi/2$.

الحل: المنحني هو اللولب الدائري فهو صقيل ومحدد كما أن s تتزايد مع تزايد t فيكون:

$$ds = +\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, dt = \sqrt{25\sin^2 t + 25\cos^2 t + 11}\, dt = 6\, dt$$

إن التكامل I موجود لأن التابع:

$$x^2 + y^2 = 25\cos^2 t + 25\sin^2 t = 25$$

مستمر على المنحني المحدد والصقيل ومن القانون $12a$ ينتج أن:

$$I = \int_0^{\pi/2} 25\,(6)\, dt = \frac{150}{2}\pi = 75\,\pi$$

تمرين: احسب التكامل:

$$\int_{AB} y\sin z\ dl$$

وذلك على المنحني الوسيطي المعطى بالمعادلات:

$$x = \cos t\ , \qquad y = \sin t\ , \qquad z = t \qquad ; \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

الحل: نعوض المعطيات على الشكل الآتي:

$$\int_{AB} y\sin z\ dl = \int_0^{2\pi} \sin t \sin t\ dl$$

نعوض dl بمقداره $dl = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, dt$ حيث إن:

$$x' = -\sin t\ , \qquad y' = \cos t\ , \qquad z' = 1 \implies dl = \sqrt{2}\, dt$$

$$I = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sin^2 t\, dt = \pi\sqrt{2}$$

تمرين: احسب التكامل الخطي:

$$\int_{AB} (y\, dx + z\, dy + x\, dz)$$

حيث AB هي قطعة مستقيمة من $M_1(2,0,0)$ إلى $M_2(3,4,5)$.

الحل: M_2M_1 في مثل هذه المسألة علينا أولاً أن نكتب المعادلات الوسيطية للمستقيم، نعد أن المستقيم يوازي M_2M_1 ويمر من M_1.

$$x = 2 + t, \qquad y = 4t, \qquad z = 5t \qquad ; \qquad 0 \le t \le 1$$

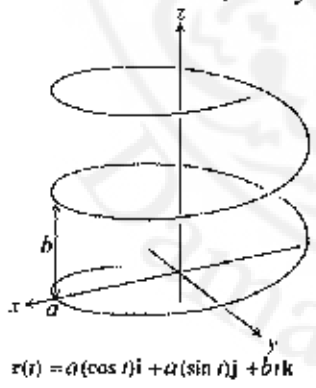
$$x - 2 = t \implies dx = dt,\ y = 4t \implies dy = 4dt,\ z = 5t \implies dz = 5dt$$

$$N = \int_0^1 [(4t)dt + (20t)dt + 5(2 + t)dt]$$

$$= \left[2t^2 + 10t^2 + 10t + \frac{5}{2}t^2\right]_0^1 = 2 + 10 + 10 + 2.5 = 24.5$$

تمرين: احسب طول قوس اللولب:

$$x = a\cos t\ , \qquad y = a\sin t\ , \qquad z = b\, t \qquad ; \qquad 0 \le t \le 2\pi$$



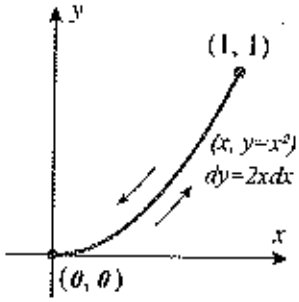
الحل: في هذه المسألة لا يوجد تابع مكامل إذاً:

$$I = \int_0^{2\pi} dl$$

$$dl = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, dt \implies$$

$$I = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + b^2}\, dt = \left[\sqrt{a^2 + b^2}\, t\right]_0^{2\pi}$$

$$= 2\pi\sqrt{a^2 + b^2}$$



تمرين: احسب التكامل الخطي:

$$I = \int_{\Gamma} (2x + yx)dx + (3x - 2)dy$$

على المنحني الذي هو جزء من القطع $y = x^2$ الواصل بين $(0,0)$ و $(1,1)$.

$$y = x^2 \Rightarrow dy = 2x\,dx \Rightarrow$$

$$I = \int_0^1 [(2x + x^3)dx + (3x - 2)2x\,dx] = \left[x^2 + \frac{x^4}{4} + 2x^3 - 2x^2\right]_0^1 \Rightarrow$$

$$I = 1 + \frac{1}{4} + 2 - 2 = \frac{5}{4}$$

تمرين: احسب التكامل الخطي:

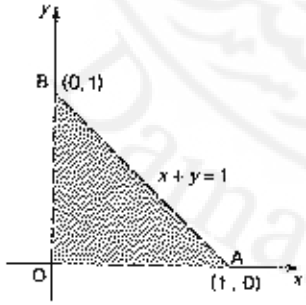
$$I = \oint_l [(xy + x)dx + (xy + x - y)dy]$$

حيث l هو منحني القطع الناقص:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

الحل: علينا كتابة المعادلات الوسيطية للقطع الناقص $x = a\cos t, y = b\sin t$،

$$I = \int_0^{2\pi} [(a \cdot b\sin t \cdot \cos t + a\cos t)(-a\sin t)dt$$
$$+ (a \cdot b\cos t \cdot \sin t + a\cos t - b \cdot \sin t)b \cdot \cos t\,dt]$$
$$= a \cdot b \cdot \pi$$

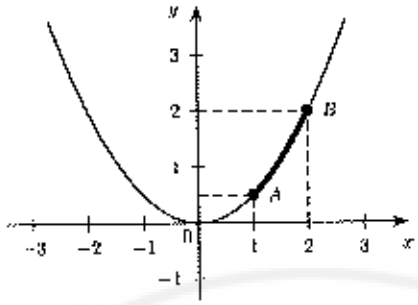


تمرين: احسب التكامل:

$$I = \int_{\Gamma} (x + y)dl$$

حيث Γ هو محيط المثلث OAB و $A(1,0)$، $B(0,1)$.

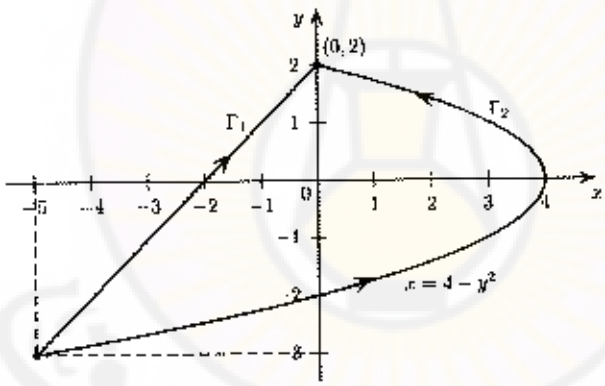
الحل: علينا حساب ثلاث $dl = \sqrt{1 + y'^2}\,dx$



$$I=\int_1^2 \frac{x}{2}\sqrt{1+x^2}\,dx=\frac{1}{6}\left[\sqrt{125}-\sqrt{8}\right]=1.3$$

تمرين: احسب التكامل الخطي: $I=\int_\Gamma (y\,dx+x\,dy)$ حيث Γ يتكون من القطعة المستقيمة Γ_1 من النقطة $(-5,-3)$ إلى النقطة $(0,2)$. وΓ_2 هو جزء القطع المكافئ: $x=4-y^2$ من النقطة $(-5,-3)$ إلى النقطة $(0,2)$.

الحل: يبين الشكل المنحنيين Γ_1 وΓ_2 المكونين لـ Γ.



من المعلوم أن التمثيل الوسيطي للقطعة المستقيمة هو:

$$x=5t-5,\qquad y=5t-3\quad;\quad 0\le t\le 1\implies$$

$$I_1=\int_{\Gamma_1}(y^2\,dx+x\,dy)=\int_0^1\left[(5t-3)^2(5dt)+(5t-5)(5dt)\right]=\frac{-5}{6}$$

$$I_2=\int_{\Gamma_2}(y^2\,dx+x\,dy)=\int_{y=-3}^{y=2}\left[y^2(-2y\,dy)+(4-y^2)\,dy\right]=40\frac{5}{6}$$

$$I=I_1+I_2=\int_{\Gamma_1}+\int_{\Gamma_2}=-\frac{5}{6}+40\frac{5}{6}$$

تمارين غير محلولة

في هذه المسائل جميعها يجب الاستعانة بالرسم كما يجب التأكد من تحقق شروط وجود التكاملات قبل حسابها.

١. احسب مساحة الجزء الذي تقطعه الأسطوانة $(x-1)^2+y^2=1$ من النصف العلوي للكرة $x^2+y^2+z^2=4$.

الجواب: 4.566.

٢. احسب مساحة الجزء من سطح مجسم القطع المكافئ الزائدي $z=\frac{1}{2}(x^2-y^2)$ والذي مسقطه على المستوي $z=0$ هو العقدة اليمنى لمنحني اللمنسكات $r^2=\cos 2\theta$.

الجواب: 0.588.

٣. احسب قيمة التكامل السطحي $I=\iint_{\Sigma}(x^2-y^2)\,dS$ حيث Σ هو الجزء من المخروط $z^2=3(x^2-y^2)$ المحصور بين المستويين $z=1,\ z=3$.

الجواب: 27.925.

٤. احسب قيمة التكامل الخطي $I=\int_{\Gamma}4\sin 4t\ ds$ حيث Γ هو القوس من المنحني $x=\sin^2 t\ ,\ y=\cos^2 t\ ,\ z=t$ الواصل بين النقطتين $t=0\ ,\ t=\frac{\pi}{4}$.

الجواب: 2.80.

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

فهرس الفصل السابع

٧. التحليل الشعاعي

٧.١ التابع العددي والتابع الشعاعي للموضع.

٧.٢ تدرج تابع عددي والمشتقات الموجهة له.

٧.٣ تفرق تابع شعاعي للموضع ودورانه.

٧.٤ المشتقات الشعاعية من المرتبة الثانية.

٧.٥ التكاملات الشعاعية.

أولاً- التكاملات الخطية على المنحني الموجه.

ثانياً- التكاملات السطحية على سطح موجه.

ثالثاً- نظريات التحويل من تكامل سطحي إلى حجمي، وبالعكس.

النظرية الأولى: نظرية غوص في التفرق.

النظرية الثانية: في الدوران.

النظرية الثالثة: في التدرج.

رابعاً- نظرية ستوكس لتحويل التكامل السطحي إلى خطي، وبالعكس.

خامساً - نظرية غرين العامة (في الفراغ).

سادساً- علاقة غرين.

٧.٦ تطبيقات التحليل الشعاعي.

تمارين غير محلولة.

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

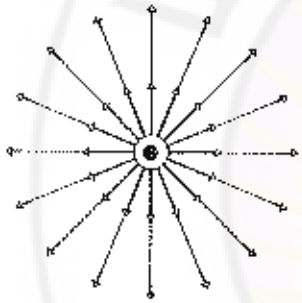
الفصل السابع

٧. التحليل الشعاعي

تعريف: الدالة المتجهية في الفضاء المتجهي ثلاثي البعد V^3 هي دالة مجالها D مجموعة جزئية من الأعداد الحقيقية ومستقرها (مداها) مجموعة من المتجهات المنتمية إلى V^3.

هذا يعني أن كل عدد (وسيط) $t \in D$ يوافقه متجهٌ وحيدٌ $\vec{r}(t) \in V^3$ وهذا يتطلب وجود ثلاثة مركبات عددية لهذا المتجه بحيث يكون:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$



حيث $x(t), y(t), z(t)$ ثلاث دوال عددية تحدد مركبات هذا المتجه عند كل نقطة $t \in D$.

وبتعبير آخر نقول: إنه إذا كان لدينا منطقة D (نطاق) في الفراغ فإنه يمكن أن نقابل كل موضع M من هذه المنطقة بشعاع (أو متجه) $\vec{F}(M)$ نسميه تابع شعاعي للموضع M ونكتب:

$$\vec{F}(x,y,z) = F_1(x,y,z)\vec{i} + F_2(x,y,z)\vec{j} + F_3(x,y,z)\vec{k}$$

حيث إن $\vec{F}$ معرفٌ ومستمرٌ وقابلٌ للاشتقاق ونسمي $\vec{F} = \vec{F}(x,y,z)$ بالحقل الشعاعي (المتجهي).

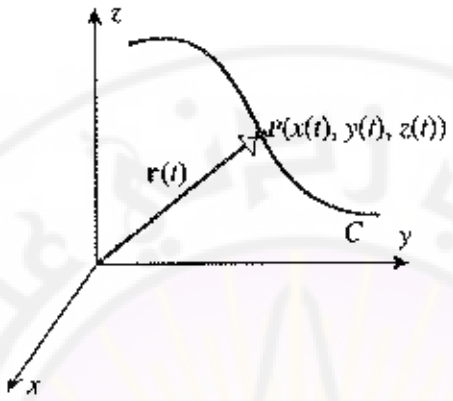
السرعة مثلاً هي تابع شعاعي للموضع.

٧. ١ التابع العددي والتابع الشعاعي للموضع:

تابع عددي: $U(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$

تابع شعاعي: $\vec{F}(x,y,z) = F_x\hat{\imath} + F_y\hat{\jmath} + F_z\hat{k}$ حيث إن: F_x, F_y, F_z لا تعني تابعاً لـ x أو y أو z وإنما مسقط التابع F على كلٍ من X, Y, Z، فمثلاً:

$$\vec{F}(x,y,z) = (x+y-z)\hat{\imath} + (x\cdot y\cdot z)\hat{\jmath} + (e^z.y)\hat{k}$$



الشكل: ٧-١

$$\vec{r} = \overrightarrow{OP} = x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath} + z\,\hat{k} \Rightarrow r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

٢.٧ تدرج تابع عددي والمشتقات الموجهة له:

ليكن لدينا $U(x,y,z) \in Cl^1$ تابعاً عددياً للموضع في نطاق فراغي D قابلاً للاشتقاق نعرف تدرج التابع العددي U على أنه المشتق الموجه وفق شعاع توجيه الناظم لسطح السوية وهو المشتق الأعظمي.

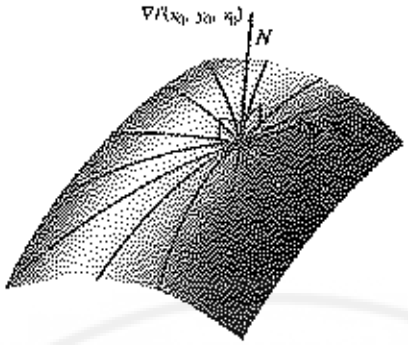
إن تدرج التابع U هو الشعاع:

$$\overrightarrow{\nabla U} = \frac{\partial U}{\partial x}\cdot\hat{\imath} + \frac{\partial U}{\partial y}\cdot\hat{\jmath} + \frac{\partial U}{\partial z}\cdot\hat{k} = \overrightarrow{grad\,u}$$

$$\overrightarrow{\nabla U} = 2X\cdot\hat{\imath} + 2Y\cdot\hat{\jmath} + 2Z\cdot\hat{k} = 2\left(X\cdot\hat{\imath} + Y\cdot\hat{\jmath} + Z\cdot\hat{k}\right) = \overrightarrow{2r} = 2r\cdot\hat{r}$$

كما يرمز له بالرمز:

$$\overrightarrow{\nabla U} = \frac{\partial U}{\partial N}\,.\,\hat{N}$$



الشكل: ٧-٢

من تعريف التدرج نستخلص ما يسمى بالمؤثر الاشتقاقي الموجه $\vec{\nabla}$.

$$\overrightarrow{\nabla U} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\cdot\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\cdot\hat{k}\right)U$$

المؤثر الاشتقاقي الموجه:

$$\vec{\nabla} = \hat{\imath}.\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath}.\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}.\frac{\partial}{\partial z}$$

أو:

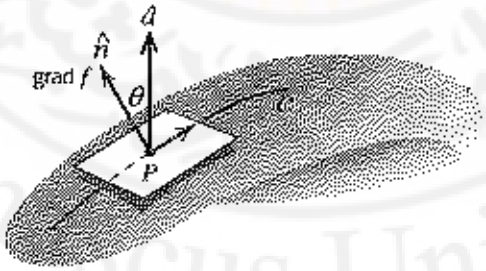
$$\overrightarrow{\nabla U} = \hat{N}\cdot\frac{\partial U}{\partial N} = \left(\hat{N}\cdot\frac{\partial}{\partial N}\right)U \Rightarrow \vec{\nabla} = \vec{N}\cdot\frac{\partial}{\partial N}$$

أي أن $\vec{\nabla}$ مؤثر اشتقاقي موجه وفق توجيه الناظم.

يقال إن المشتق الموجه للتابع U وفق شعاع ما $\vec{a} = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k}$ هو:

$$\hat{a}\cdot\overrightarrow{\nabla U} = a_x\frac{\partial U}{\partial x} + a_y\frac{\partial U}{\partial y} + a_z\frac{\partial U}{\partial z}$$

إذا كان اتجاه $\hat{\theta}$ باتجاه $\hat{N}$، $\hat{\theta} = 0$ أي أن: $\cos\theta = 1$ والمشتق أعظمي.



الشكل: ٧-٣

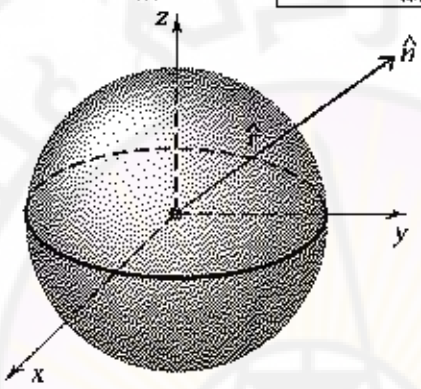
١.٢.٧ تدرج مجموع وتدرج جداء:

1. $\vec{\nabla}(U+V)=\vec{\nabla}U+\vec{\nabla}V$
2. $\vec{\nabla}(U\cdot V)=(\vec{\nabla}U)\cdot V+(\vec{\nabla}V)\cdot U$

٢.٢.٧ تأثير $\vec{\nabla}$ على تابع للإحداثي الكروي (r) فقط

عندئذٍ تكون سطوح السوية عبارة عن كرات مركزية $U(r)$

$$\overrightarrow{\nabla U}=\frac{dU}{dN}\cdot\hat{N}=\frac{dU}{dr}\cdot\hat{r}\Longrightarrow\boxed{\overrightarrow{\nabla U}=\frac{dU}{dr}\cdot\hat{r}}$$



الشكل: ٧-٤

أمثلة:

- $U=x^2+y^2+z^2\Longrightarrow U=r^2\Longrightarrow\overrightarrow{\nabla U}=\frac{dU}{dr}\cdot\hat{r}=2r\cdot\hat{r}$
- $U=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\Longrightarrow U=r\Longrightarrow\overrightarrow{\nabla U}=\hat{r}$
- $U=x^2+y^2+z^2+\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\Longrightarrow U=r^2+\frac{1}{r}\Longrightarrow\overrightarrow{\nabla U}=\frac{dU}{dr}\cdot\hat{r}=\left(2r-\frac{1}{r^2}\right)\hat{r}$

ملاحظة: يرتبط التدرج $\overrightarrow{\nabla U}$ بالتفاضل التام dU للتابع العددي U بالعلاقة الآتية:

$$\overrightarrow{\nabla U}=\frac{\partial U}{\partial x}\cdot\hat{\imath}+\frac{\partial U}{\partial y}\cdot\hat{\jmath}+\frac{\partial U}{\partial z}\cdot\hat{k}$$

$$\vec{r}=x\cdot\hat{\imath}+y\cdot\hat{\jmath}+z\cdot\hat{k}\Longrightarrow\overrightarrow{dr}=dx\cdot\hat{\imath}+dy\cdot\hat{\jmath}+dz\cdot\hat{k}$$

$$\overrightarrow{\nabla U}\cdot\overrightarrow{dr}=\frac{\partial U}{\partial x}\cdot dx+\frac{\partial U}{\partial y}\cdot dy+\frac{\partial U}{\partial z}\cdot dz=dU\Longrightarrow\boxed{\overrightarrow{\nabla U}\cdot\overrightarrow{dr}=dU}$$

٣.٧ تفرق تابع شعاعي للموضع ودورانه:

ليكن $\vec{F}(x,y,z) = F_x\hat{\imath} + F_y\hat{\jmath} + F_z\hat{k} \in Cl^1$ تابعاً شعاعياً للموضع في نطاق فراغي D وقابلاً للاشتقاق.

تفرق $\vec{F}$: أو $\vec{\nabla}\cdot\vec{F}$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}\cdot F_x + \frac{\partial}{\partial y}\cdot F_y + \frac{\partial}{\partial z}\cdot F_z = \operatorname{div}\vec{F}$$

دوران $\vec{F}$: أو $\vec{\nabla}\wedge\vec{F}$

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \operatorname{rot}\vec{F}$$

تفرق شعاع الموضع $\vec{r}$ ودورانه:

$$\vec{r} = x\cdot\hat{\imath} + y\cdot\hat{\jmath} + z\cdot\hat{k} \Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{r} = \frac{dx}{dx} + \frac{dy}{dy} + \frac{dz}{dz} = 3 \Rightarrow \boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{r} = 3}$$

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{r} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = (0)\hat{\imath} + (0)\hat{\jmath} + (0)\hat{k} \Rightarrow \boxed{\operatorname{rot}\vec{r} = 0}$$

قواعد الاشتقاق الموجه لجداء تابعين أحدهما عددي:

(1) $\vec{\nabla}\cdot(U\,\vec{V}) = \vec{\nabla}U\cdot\vec{V} + U(\vec{\nabla}\cdot\vec{V})$

(2) $\vec{\nabla}\wedge(U\,\vec{V}) = \vec{\nabla}U\wedge\vec{V} + U(\vec{\nabla}\wedge\vec{V})$

٤.٧ المشتقات الشعاعية من المرتبة الثانية:

١.٤.٧ تفرق التدرج أو اللابلاسي:

ليكن التابع العددي U المعرف على النطاق الفراغي D وقابلاً للاشتقاق مرتين أي $U \in Cl^2$ فإن:

$$(\vec{\nabla}.\vec{\nabla})U = \vec{\nabla}^2 U = \nabla^2 U$$

حيث إن: تربيع داخلي = مربع طويلة الشعاع.

عبارة لابلاس U هي:

$$\vec{\nabla}.\overrightarrow{\nabla U} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

تدعى المعادلة $\nabla^2 U = 0$ بمعادلة لابلاس وكل تابع U يحققها يدعى بالتابع التوافقي.

مثال: أوجد لابلاس التابع $U = \frac{1}{r}$; $r \neq 0$.

الحل: في أي نظام فراغي لا يشمل المبدأ أو القطب (O) فإن:

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right) = \vec{\nabla}\left(-\frac{1}{r^2}\hat{r}\right) = \vec{\nabla}\left(-\frac{1}{r^3}\vec{r}\right)$$

$$= \vec{\nabla}\left(-\frac{1}{r^3}\right)\cdot\vec{r} + \left(-\frac{1}{r^3}\right)(\vec{\nabla}\cdot\vec{r}) = \frac{3}{r^4}\hat{r}\cdot\vec{r} - \frac{3}{r^3}$$

$$= \frac{3}{r^4}\, r - \frac{3}{r^3} = 0 \Rightarrow \boxed{\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = 0}$$

التابع $\frac{1}{r}$ تابع توافقي في أي نطاق فراغي لا يشمل المبدأ (O).

٢.٤.٧ دوران التدرج:

أياً يكن التابع العددي U المعرف على النطاق الفراغي D والقابل للاشتقاق مرتين أي $U \in Cl^2$ فإن:

$$\vec{\nabla} \wedge (\overrightarrow{\nabla U}) = \vec{0} \qquad (\text{مطابقة})$$

نتيجة:

إذا كان الشعاع الكموني $\vec{F} = \overrightarrow{\nabla U}$ فإن:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \vec{\nabla} \wedge \overrightarrow{\nabla U} = \vec{0}$$

والعكس صحيح أيضاً فإذا كانت:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{F} = \overrightarrow{\nabla U} \quad (\text{تدرج})$$

فنقول عن شعاع $\vec{F}$ إنه كموني إذا كان مساوياً لتدرج تابع عددي U يدعى الكمون العددي للشعاع الكموني $\vec{F}$، عندئذٍ $\vec{F} = \overrightarrow{\nabla U}$ و $\mathrm{rot}\,\vec{F} = \vec{0}$ باختصار:

إن الشروط اللازمة والكافية لكي يكون شعاع ما $\vec{F}$ كموني في نطاق فراغي D هي استمرار مشتقاته الأولى، وانعدام دورانه في النطاق D.

مثال: نعلم أن شعاع الموضع $r \in Cl^1$ وأيضاً $\mathrm{rot}\,\vec{r} = \vec{0}$ إذاً $\vec{r}$ تابع كموني، لإيجاد كمونه العددي U لدينا إحدى طريقتين:

الطريقة الأولى: بما أن $\vec{r}$ كموني فهذا يعني أن $\vec{r} = \overrightarrow{\nabla U}$ أو $\overrightarrow{\nabla U} = \vec{r}$ أي أن: $U = U(r)$

$$\frac{dU}{dr}\cdot\hat{r} = \vec{r} = r\cdot\hat{r} \Rightarrow \frac{dU}{dr} = r \Rightarrow U = \frac{r^2}{2} + C \Rightarrow \vec{r} = \vec{\nabla}\left(\frac{r^2}{2}\right)$$

الطريقة الثانية:

$$\overrightarrow{\nabla U} = \vec{r} \Longrightarrow \frac{\partial U}{\partial x}\cdot\hat{\imath} + \frac{\partial U}{\partial y}\cdot\hat{\jmath} + \frac{\partial U}{\partial z}\cdot\hat{k} = x\cdot\hat{\imath} + y\cdot\hat{\jmath} + z\cdot\hat{k}$$

بالمقارنة:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = x, \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = y, \qquad \frac{\partial U}{\partial z} = z$$

$$U(x,y,z) = \frac{x^2}{2} + f_1(y,z) \quad \text{أو} \quad = \frac{y^2}{2} + f_2(x,z) \quad \text{أو} \quad = \frac{z^2}{2} + f_3(x,y)$$

نأخذ اجتماع الحلول:

$$U(x,y,z) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2} + C \Longrightarrow U = \frac{r^2}{2} + C$$

٣.٤.٧ تفرق الدوران:

أياً يكن الشعاع $\vec{F}$ حيث: $\vec{F} = F_x\cdot\hat{\imath} + F_y\cdot\hat{\jmath} + F_z\cdot\hat{k} \in Cl^2$ فإن:

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{F}\right) = \vec{0}$$

نتيجة: نقول عن شعاع $\vec{A}$ إنه لولبي إذا كان مساوياً لدوران شعاع آخر $\vec{F}$ أي أن: $\vec{A} = \vec{\nabla}\wedge\vec{F}$ يدعى الشعاع الآخر $\vec{F}$ بالكمون الشعاعي للشعاع اللولبي $\vec{A}$ وعندئذٍ يكون:

$$\vec{\nabla}.\vec{A} = \vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{F}\right) = \vec{0}$$

والعكس صحيح أيضاً فإذا كان تفرق شعاع ما منعدماً $\vec{\nabla}.\vec{A}=0$ يكون $\vec{\nabla}\wedge\vec{F}=\vec{A}$ وباختصار؛ فإن الشروط اللازمة والكافية لكي يكون شعاع ما $\vec{A}$ لولبياً هي استمرار مشتقاته الأولى وانعدام تفرقه.

٤.٤.٧ دوران الدوران (تدرج التفرق) اللابلاسي

يرتبطون بالعلاقة الآتية: (حيث: $\vec{F}=F_x\cdot\hat{\imath}+F_y\cdot\hat{\jmath}+F_z\cdot\hat{k}\in Cl^2$)

$$\vec{\nabla}\wedge\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{F}\right)=\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right)-\nabla^2\vec{F}$$

$$\frac{\partial\vec{F}}{\partial x}=\frac{\partial F_x}{\partial x}\cdot\hat{\imath}+\frac{\partial F_y}{\partial x}\cdot\hat{\jmath}+\frac{\partial F_z}{\partial x}\cdot\hat{k}\quad\&\quad\frac{\partial^2\vec{F}}{\partial x^2}$$
$$=\frac{\partial^2F_x}{\partial x^2}\cdot\hat{\imath}+\frac{\partial^2F_y}{\partial x^2}\cdot\hat{\jmath}+\frac{\partial^2F_z}{\partial x^2}\cdot\hat{k}$$

٥.٤.٧ التدرج، التفرق، الدوران، اللابلاسي في الإحداثيات المتعامدة:

$$(x,y,z)\to(u,v,w)$$
$$x=f_1(u,v,w),\qquad y=f_2(u,v,w),\qquad z=f_3(u,v,w)$$
$$\vec{r}(x,y,z)=x\,\hat{\imath}+y\,\hat{\jmath}+z\,\hat{k}=\vec{r}(u,v,w)$$
$$d\vec{r}=\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\cdot du+\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\cdot dv+\frac{\partial\vec{r}}{\partial w}\cdot dw$$
$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}=\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\right|\cdot\hat{u},\qquad\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}=\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\right|\cdot\hat{v},\qquad\frac{\partial\vec{r}}{\partial w}=\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial w}\right|\cdot\hat{w}$$

بفرض:

$$h_u=\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\right|,\qquad h_v=\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\right|,\qquad h_w=\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial w}\right|$$
$$d\vec{r}=(h_u\cdot du)\,\hat{u}+(h_v\cdot dv)\,\hat{v}+(h_w\cdot dw)\,\hat{w}$$

قانون تدرج التابع العددي:

بفرض أن: $U(u,v,w)\in Cl^1$ و $\overrightarrow{\nabla U}=\lambda_u\,\hat{u}+\lambda_v\,\hat{v}+\lambda_w\,\hat{w}$ نعلم أن:

$$\boxed{\overrightarrow{\nabla U}\cdot d\vec{r}=dU}$$

$$\lambda_u\cdot h_u\cdot du+\lambda_v\cdot h_v\cdot dv+\lambda_w\cdot h_w\cdot dw=\frac{\partial U}{\partial u}du+\frac{\partial U}{\partial v}dv+\frac{\partial U}{\partial w}dw$$

$$\Rightarrow \lambda_u \cdot h_u = \frac{\partial U}{\partial u}\,, \qquad \lambda_v \cdot h_v = \frac{\partial U}{\partial v}\,, \qquad \lambda_w \cdot h_w = \frac{\partial U}{\partial w}$$

$$\Rightarrow \lambda_u = \frac{1}{h_u}\frac{\partial U}{\partial u}\,, \qquad \lambda_v = \frac{1}{h_v}\frac{\partial U}{\partial v}\,, \qquad \lambda_w = \frac{1}{h_w}\frac{\partial U}{\partial w}$$

$$\overrightarrow{\nabla U} = \frac{1}{h_u}\frac{\partial U}{\partial u}\,\hat{u} + \frac{1}{h_v}\frac{\partial U}{\partial v}\,\hat{v} + \frac{1}{h_w}\frac{\partial U}{\partial w}\,\hat{w}$$

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{1}{h_u}\frac{\partial}{\partial u}\right)\hat{u} + \left(\frac{1}{h_v}\frac{\partial}{\partial v}\right)\hat{v} + \left(\frac{1}{h_w}\frac{\partial}{\partial w}\right)\hat{w}$$

المؤثر الاشتقاقي ∇ في الجملة الجديدة:

$$h_u = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\right|\,, \qquad h_v = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right|\,, \qquad h_w = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial w}\right|$$

قانون التدرج أسطوانياً:

$$(x, y, z) \rightarrow (\rho, \varphi, z)$$

$$x = \rho\cos\varphi\,, \qquad y = \rho\sin\varphi\,, \qquad z = z$$

$$\vec{r}(\rho, \varphi, z) = \rho\cos\varphi\;\hat{\imath} + \rho\sin\varphi\;\hat{\jmath} + z\,\hat{k}$$

$$h_u = h_\rho = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho}\right|\,, \qquad h_v = h_\varphi = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}\right|\,, \qquad h_w = h_z = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial z}\right|$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} = \cos\varphi\,\hat{\imath} + \sin\varphi\,\hat{\jmath} + 0\,\hat{k} \Rightarrow h_\rho = 1$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = -\rho\sin\varphi\,\hat{\imath} + \rho\cos\varphi\,\hat{\jmath} + 0\,\hat{k} \Rightarrow h_\varphi = \rho$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial z} = 0\,\hat{\imath} + 0\,\hat{\jmath} + \hat{k} \Rightarrow h_z = 1$$

$$\boxed{h_\rho = 1\,, \qquad h_\varphi = \rho\,, \qquad h_z = 1}$$

$$\overrightarrow{\nabla U} = \frac{1}{h_\rho}\frac{\partial U}{\partial \rho}\hat{\rho} + \frac{1}{h_\varphi}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\hat{\varphi} + \frac{1}{h_z}\frac{\partial U}{\partial z}\hat{k}$$

$$\boxed{\overrightarrow{\nabla U} = \frac{\partial U}{\partial \rho}\hat{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\hat{\varphi} + \frac{\partial U}{\partial z}\hat{k}}$$

وهو قانون التدرج أسطوانياً.

مثال: أوجد تدرج التابع: $U = \sqrt{\rho^2 + 1} + \cos\varphi - \frac{1}{z}$.

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi} = \rho(\cos\varphi + \sin\varphi)\,, \qquad \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}$$

في المنطقة R $(\rho \neq 0)$؛ وبالتالي فإن $U \in Cl^1$ في المنطقة R وتدرجه موجود فيها.

$$\overrightarrow{\nabla U} = \frac{1}{h_\rho}\frac{\partial U}{\partial \rho}\hat{\rho} + \frac{1}{h_\varphi}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\hat{\varphi} + \frac{1}{h_z}\frac{\partial U}{\partial z}\hat{k} = \frac{\partial U}{\partial \rho}\hat{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\hat{\varphi} + \frac{\partial U}{\partial z}\hat{k}$$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{\nabla U} = \left(\sin\varphi - \cos\varphi + \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}\right)\hat{\rho} + \frac{1}{\rho}\rho(\cos\varphi + \sin\varphi)\hat{\varphi}$$
$$+ \frac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}\hat{k} = \vec{F}$$

مثال: إذا كان: $\vec{F} = (\hat{\imath}\cdot\vec{r})\vec{r}$ أوجد:

أ- $\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\wedge\vec{F})$ ب- $\vec{\nabla}\wedge(\vec{\nabla}\wedge\vec{F})$

الحل: $\hat{\imath}\cdot\vec{r} = (1,0,0)(x,y,z) = x \implies$

$$\vec{F} = X\cdot\vec{r} = x^2\cdot\hat{\imath} + xy\cdot\hat{\jmath} + xz\cdot\hat{k}$$

مركباته كثيرات حدود $\vec{F} \in Cl^2$ في الفراغ، وبالتالي التراكيب المطلوب حسابها موجودة دوماً.

$\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\wedge\vec{F}) = 0$ مطابقة

ب- $\vec{\nabla}\wedge(\vec{\nabla}\wedge\vec{F})$ التركيب موجود دوماً مثل ما سبق.

طريقة (١)

$$\vec{\nabla}\wedge(\vec{\nabla}\wedge\vec{F}) = \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}) - \nabla^2\vec{F} = 4\hat{\imath} - 2\hat{\imath} = 2\hat{\imath}$$

طريقة (٢)

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 & xy & xz \end{vmatrix} = (0-0)\hat{\imath} - (z-0)\hat{\jmath} + (y-0)\hat{k} \Longrightarrow$$

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{F} = 0\,\hat{\imath} - z\,\hat{\jmath} + y\,\hat{k} \Longrightarrow$$

$$\vec{\nabla}\wedge\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{F}\right)=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ 0 & -z & y\end{vmatrix}=(1+1)\hat{i}-(0-0)\hat{j}+(0-0)\hat{k}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\wedge\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{F}\right)=2\,\hat{i}$$

مثال آخر: إذا كان $U=\frac{x+z}{x^2+y^2+z^2}$ أوجد:

١- $\overrightarrow{\nabla U}$ ٢- $\nabla^2 U$ ٣- $\vec{\nabla}\wedge\left(\overrightarrow{\nabla U}\right)$

$U\in Cl^2$ في أي نطاق فراغي لا يشمل المبدأ (0). والتراكيب المطلوب حسابها في أي نطاق فراغي لا يشمل المبدأ (0).

$$\overrightarrow{\nabla U}=\frac{\partial U}{\partial x}\cdot\hat{i}+\frac{\partial U}{\partial y}\cdot\hat{j}+\frac{\partial U}{\partial z}\cdot\hat{k}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{x^2+y^2+z^2-2x(x+z)}{(x^2+y^2+z^2)^2}=\frac{-x^2+y^2+z^2-2xz}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y}=\frac{-2y(x+z)}{(x^2+y^2+z^2)^2}\quad;\quad \frac{\partial U}{\partial z}=\frac{-z^2+y^2+x^2-2xz}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

$$\overrightarrow{\nabla U}=\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^2}\left[(-x^2+y^2+z^2-2xz)\cdot\hat{i}-2y(x+z)\cdot\hat{j}\right.$$
$$\left.+(-z^2+y^2+x^2-2xz)\cdot\hat{k}\right]$$

$$\nabla^2 U=\frac{\partial^2 U}{dx^2}+\frac{\partial^2 U}{dy^2}+\frac{\partial^2 U}{dz^2}\Rightarrow \nabla^2 U=\frac{-2(x+z)}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

$\vec{\nabla}\wedge\left(\overrightarrow{\nabla U}\right)=\vec{0}$ مطابقة

مثال: إذا كان: $\vec{F}=r^3\cdot\vec{r}=r^4\cdot\hat{i}\Rightarrow\vec{F}\in Cl^1$ في أي نطاق فراغي يكون $\vec{\nabla}\wedge\vec{F}$ موجوداً دوماً.

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{F}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ r^4 & 0 & 0\end{vmatrix}=\vec{0}$$

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{F}=\vec{\nabla}\wedge(r^3\cdot\vec{r})=\vec{\nabla}(r^3)\wedge\vec{r}+r^3\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{r}\right)=3r^2\cdot\hat{r}\wedge\vec{r}=\vec{0}$$

$$\boxed{\vec{\nabla}\wedge\vec{F}=\vec{0}}\Rightarrow$$

$\vec{F}$ شعاع كموني وبفرض أن U هو الكمون العددي للشعاع الكموني $\vec{F}$، فإن: $\vec{F} = \overrightarrow{\nabla U}$

$$U = U(r), \Longrightarrow r^4 \cdot \hat{r} = \frac{dU}{dr} \cdot \hat{r} \Longrightarrow \frac{dU}{dr} = r^4 \Longrightarrow U = \frac{r^5}{5} + C$$

$$\nabla^2 U = \vec{\nabla} \cdot \left(\overrightarrow{\nabla U}\right) = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot (r^3 \cdot \vec{r}) = \vec{\nabla}(r^3) \cdot \vec{r} + r^3 \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{r}\right)$$
$$= 3r^2 \hat{r} \cdot \vec{r} + 3r^3 = 3r^3 + 3r^3 = 6r^3 \Longrightarrow \boxed{\nabla^2 U = 6r^3}$$

مثال: ليكن:

$$\vec{F} = (x + cy + az)\,\hat{\imath} + (x + y^2 + bz)\,\hat{\jmath} + (cy + z^2)\,\hat{k}$$

أوجد كمونه العددي U ثم احسب تفرق التابع الشعاعي الناتج $\vec{F}$.

الحل:

$\vec{F} \in C^1$ دوماً، لأن مركباته كثيرات حدود، ويجب أن يحقق $\vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \vec{0}$ أي أن:

$$\begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x + cy + az & x + y^2 + bz & cy + z^2 \end{vmatrix} = \vec{0} \Longrightarrow$$

$$(c - b)\,\hat{\imath} - (0 - a)\,\hat{\jmath} + (1 - c)\,\hat{k} = \vec{0} \Longrightarrow c = b, a = 0, c = 1 \Longrightarrow b = 1$$

$$\vec{F} = (x + y)\,\hat{\imath} + (x + y^2 + z)\,\hat{\jmath} + (y + z^2)\,\hat{k}$$

هذا الشعاع كموني في أي نطاق فراغي.

بفرض U هو الكمون العددي للشعاع الكموني $\vec{F}$ فإن:

$$\vec{F} = \overrightarrow{\nabla U}\,;\ \vec{F} = \frac{\partial U}{\partial x}\,\hat{\imath} + \frac{\partial U}{\partial y}\,\hat{\jmath} + \frac{\partial U}{\partial z}\,\hat{k} \Longrightarrow$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = x + y \Longrightarrow U = \frac{x^2}{2} + yx + \varphi_1(y, z)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = x + y^2 + z \Longrightarrow U = xy + \frac{y^3}{3} + zy + \varphi_2(x, z)$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = y + z^2 \Longrightarrow U = yz + \frac{z^3}{3} + \varphi_3(x, y)$$

$$\Longrightarrow U = \frac{x^2}{2} + \frac{y^3}{3} + \frac{z^3}{3} + xy + zy + C$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \nabla^2 U\,;\quad \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = 1 + 2y + 2z$$

مثال: إذا كان $U(r,\theta,\varphi)$ معطًى بالإحداثيات الكروية على الشكل:

$$U = \left(r + \frac{1}{r^2}\right)\cos\theta + \sin\varphi$$

احسب: $\vec{\nabla} \cdot U$، $\nabla^2 U$، $\vec{\nabla} \wedge \left(\vec{\nabla} \cdot U\right)$.

الحل: $U \in Cl^2$ حيث $r \neq 0$ ومن حيث المبدأ فإن هذه التراكيب المطلوبة موجودة في أي نطاق فراغي لا يشمل المحور (z) باستخدام القوانين الكروية:

$$\overrightarrow{\nabla U} = \frac{1}{h_r}\frac{\partial U}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{h_\theta}\frac{\partial U}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{1}{h_\varphi}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\hat{\varphi}$$

$$\frac{\partial U}{\partial r} = \left(1 - \frac{2}{r^3}\right)\cos\theta\ , \qquad \frac{\partial U}{\partial \theta} = -\left(r + \frac{1}{r^2}\right)\sin\theta\ , \qquad \frac{\partial U}{\partial \varphi} = \cos\varphi$$

$$\overrightarrow{\nabla U} = \underbrace{\left[\left(1 - \frac{2}{r^3}\right)\cos\theta\right]}_{F_r}\hat{r} + \underbrace{\left[-\left(1 + \frac{1}{r^3}\right)\sin\theta\right]}_{F_\theta}\hat{\theta} + \underbrace{\left[\frac{1}{r\sin\theta}\cos\varphi\right]}_{F_\varphi}\hat{\varphi} \Longrightarrow$$

$$\nabla^2 U = \vec{\nabla} \cdot \left(\overrightarrow{\nabla U}\right) = \vec{\nabla} \cdot \vec{F}$$

أو مباشرة:

$$\nabla^2 U = \frac{1}{h_r \cdot h_\theta \cdot h_\varphi}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{h_\theta \cdot h_\varphi}{h_r}\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{h_r \cdot h_\varphi}{h_\theta}\frac{\partial U}{\partial \theta}\right) + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{h_r \cdot h_\theta}{h_\varphi}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\right)\right]$$

$$\frac{h_\theta \cdot h_\varphi}{h_r}\frac{\partial U}{\partial r} = r^2\sin\theta\left(1 - \frac{2}{r^3}\right)\cos\theta = \left(r^2 - \frac{2}{r}\right)\sin\theta\cos\theta \Longrightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{h_\theta \cdot h_\varphi}{h_r}\frac{\partial U}{\partial r}\right) = \left(2r + \frac{2}{r^2}\right)\sin\theta\cos\theta = \left(r + \frac{1}{r^2}\right)\sin 2\theta$$

$$\frac{h_r \cdot h_\varphi}{h_\theta}\frac{\partial U}{\partial \theta} = -\sin^2\theta\left(r + \frac{1}{r^2}\right) \Longrightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{h_r \cdot h_\varphi}{h_\theta}\frac{\partial U}{\partial \theta}\right) = -\sin 2\theta\left(r + \frac{1}{r^2}\right)$$

$$\frac{h_r \cdot h_\theta}{h_\varphi}\frac{\partial U}{\partial \varphi} = \frac{1}{\sin\theta}\cos\varphi \Longrightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{h_r \cdot h_\theta}{h_\varphi}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\right) = -\frac{1}{\sin\theta}\sin\varphi$$

$$\nabla^2 U = \frac{1}{r^2 \sin\varphi}\left(-\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\right) = -\frac{\sin\varphi}{r^2 \sin 2\varphi} \Rightarrow \nabla^2 U = -\frac{1}{r^2 \cos\varphi}$$

كروياً: $\vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \vec{0}$ أو $\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} U) = \vec{0}$.

مثال: أ- برهن أن: $\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = 0$ و $r \neq 0$.

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{r^3} \cdot \vec{r}\right) = \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{r^3}\right) \cdot \vec{r} + \frac{1}{r^3} \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{r} = -\frac{3}{r^4} \cdot \hat{r} \cdot \vec{r} + \frac{3}{r^3} = 0$$

الشعاع $\frac{\vec{r}}{r^3}$ شعاع لولبي في أي نطاق لا يشمل المبدأ.

ب- $\vec{\nabla} \wedge (r \cdot \vec{r}) = \vec{0}$ في أي نطاق فراغي.

$$\vec{\nabla} \wedge (r \cdot \vec{r}) = \vec{\nabla}(r) \wedge \vec{r} + r \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{r}) = \hat{r} \wedge \vec{r} + 0 = \vec{0}$$

الشعاع $r \cdot \vec{r}$ كموني لأن دورانه معدوم.

جـ- مطابقة $\vec{\nabla} \cdot [\vec{\nabla} \wedge (\vec{r} \cdot \ln r)] = \vec{0}$ ، $r > 0$ صحيح في أي نطاق فراغي لا يشمل المبدأ (O).

د- $\overrightarrow{\nabla\varphi} = \frac{\hat{\varphi}}{r \sin\varphi}$ في أي نطاق لا يشمل المحور z.

تطبيق قانون التدرج الكروي: $U(r, \theta, \varphi) = \varphi$

هـ- $\vec{\nabla} \wedge \hat{\varphi} = \frac{\hat{k}}{\rho}$ في أي نطاق لا يشمل المحور z.

$$\vec{F} = F_\rho \cdot \hat{\rho} + F_\varphi \cdot \hat{\varphi} + F_z \cdot \hat{k} = \hat{\varphi} \quad \Rightarrow \quad F_\rho = F_z = 0\,, \qquad F_\varphi = 1$$

قانون الدوران الأسطواني:

$$\vec{\nabla} \wedge \hat{\varphi} = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} 1\hat{\rho} & \rho\hat{\varphi} & 1\hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \rho \cdot 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\rho}[\hat{\rho}(0-0) - \hat{\varphi}(0-0) + \hat{k}(1-0)]$$
$$= \frac{1}{\rho}\hat{k}$$

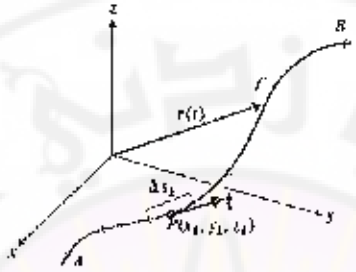
و- $\nabla^2(\rho^2 \cos\varphi) = 3\cos\varphi$

من قانون الدوران الأسطواني $U(\rho, \varphi, z) = \rho^2 \cos\varphi$

٥.٧ التكاملات الشعاعية

أولاً– التكاملات الخطية على المنحني الموجه:

Γ منحني فراغي مستمر يصل بين النقطتين A و B. P نقطة متحولة عليه، فإذا عددنا A نقطة البداية و B نقطة النهاية يمكن توجيه المنحني Γ من $A \leftarrow B$ وفق شعاع المماس $\hat{t}$.



الشكل: ٧–٧

$$\vec{r} = \overrightarrow{OP} = x \cdot \hat{i} + y \cdot \hat{j} + z \cdot \hat{k}$$

وليكن S طول قوس المنحني $S = \overset{\frown}{AB}$، يعرف عنصر طول القوس الموجه بأنه:

$$\overrightarrow{ds} = \overrightarrow{dr}\,, \overrightarrow{ds} = ds \cdot \hat{t} \text{ أو } \overrightarrow{dr} = dr \cdot \hat{t}$$

١.٥.٧ التكاملات الخطية على منحنٍ موجه ثلاثة أنواع:

١) جولان الشعاع $\vec{F}$ حول منحنٍ موجه Γ وهو التكامل العددي للتابع الشعاعي $\vec{F}$ عبارة الجولان: $\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot \overrightarrow{ds}$ ولحسابه:

$$\vec{F} = F_x \cdot \hat{i} + F_y \cdot \hat{j} + F_z \cdot \hat{k}$$

$$\overrightarrow{ds} = \overrightarrow{dr} = dx \cdot \hat{i} + dy \cdot \hat{j} + dz \cdot \hat{k}$$

$$\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot \overrightarrow{ds} = \int_{\Gamma} (F_x \cdot dx + F_y \cdot dy + F_z \cdot dz)$$

لا بد لنا أن نعلم معادلات Γ الوسيطية:

$$\Gamma\{x = x(t)\,, \quad y = y(t)\,, \quad z = z(t)\}\,;\ t_A \le t \le t_B$$

$$x = x'(t)dt\,, \quad y = y'(t)dt\,, \quad z = z'(t)dt \Longrightarrow$$

$$\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot \overrightarrow{ds} = \int_{t_A}^{t_B} f(t) \cdot dt$$

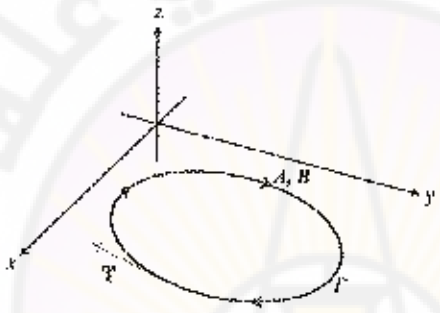
ويدل التعويض من معادلات Γ على أن الجولان يرتبط بمسار المكاملة على Γ.

ولكن في الحالة الخاصة التي يكون فيها الشعاع $\vec{F}$ كمونياً أي أن: $\vec{F} = \overrightarrow{\nabla U}$ عندئذٍ:

$$\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot \overrightarrow{ds} = \int_{\Gamma} \overrightarrow{\nabla U} \cdot \overrightarrow{dr} = \int_{\overline{AB}} dU = U(B) - U(A)$$

وهذا يعني أن جولان الشعاع الكموني $\vec{F}$ يساوي فرق الكمون بين نقطة البداية ونقطة النهاية؛ وبالتالي فهو مستقل عن المسار.

وبالإضافة إلى ذلك فإذا كان المنحني مغلقاً فإن جولان الشعاع الكموني $\vec{F}$ حول أي منحنٍ موجه مغلق هو جولان منعدم.



الشكل: ٧-٨

٢) التكامل الخطي الشعاعي لتابع شعاعي: $\int_{\Gamma} \vec{F} \wedge \overrightarrow{ds}$ حسابه:

$$\int_{\Gamma} \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ F_x & F_y & F_z \\ dx & dy & dz \end{vmatrix} =$$

$$= \hat{i} \int_{\Gamma} (F_y dz - F_z dy) - \hat{j} \int_{\Gamma} (F_x dz - F_z dx) + \hat{k} \int_{\Gamma} (F_x dy - F_y dx)$$

نعوض من معادلة المنحني، يمكن حساب هذه التكاملات والناتج شعاع.

٣) التكامل الخطي الشعاعي لتابع عددي U:

$$\int_{\Gamma} U \cdot \overrightarrow{ds} = \hat{i} \int_{\Gamma} U \cdot dx + \hat{j} \int_{\Gamma} U \cdot dy + \hat{k} \int_{\Gamma} U \cdot dz$$

نبدل بمعادلات Γ لـ U, dx, dy, dz.

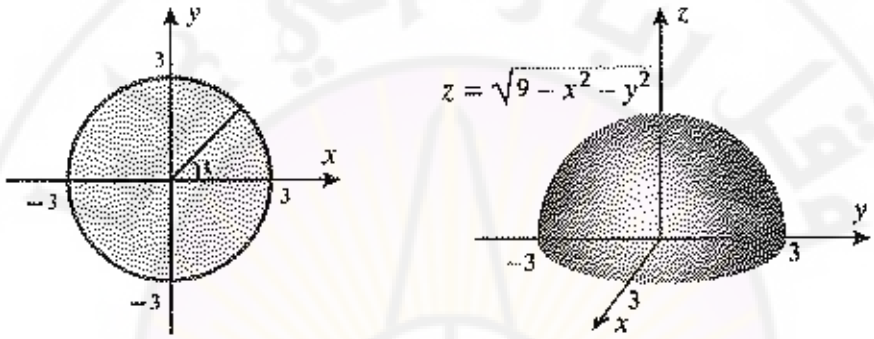
يرمز للتكامل الخطي على منحنٍ موجه مغلق بالرمز $\oint$.

تمرين: احسب جولان التابع الشعاعي للموضع $\vec{F}$ حول المنحني الموجه الناتج من تقاطع السطحين: $\Gamma: \{z = \sqrt{9 - x^2 - y^2},\quad z = 0\}$ حيث إن:

$$\vec{F} = 2y \cdot \hat{i} + 3x \cdot \hat{j} - z^2 \cdot \hat{k}$$

الحل:

$$\oint \vec{F} \cdot \overrightarrow{ds} = \oint (F_x \cdot dx + F_y \cdot dy + F_z \cdot dz)\ ;\ (z = 0\ ,\ \ dz = 0)$$



الشكل: ٧-٩

وسيطياً $\Gamma: \begin{cases} x = 3\cos t & z = 0 \\ y = 3\sin t & 0 \le t \le 2\pi \end{cases}$ ومنه:

$$dx = -3\sin t\, dt\ ,\qquad dy = 3\cos t\, dt\ ,\qquad dz = 0$$

$$\oint_\Gamma \vec{F} \cdot \overrightarrow{ds} = \oint_\Gamma (2y\, dx + 3x\, dy)$$

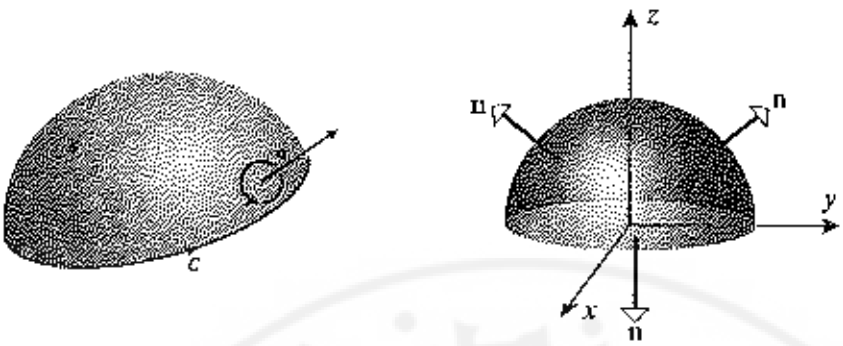
$$= \int_{t=0}^{t=2\pi} [2(3\sin t)(-3\sin t\ dt) + 3(3\cos t)(3\cos t\, dt)]$$

$$= 9\int_0^{2\pi} (3\cos^2 t - 2\sin^2 t)dt = 9\int_0^{2\pi} (3\cos^2 t - 2 + 2\cos^2 t)dt$$

$$= 9\int_0^{2\pi} (5\cos^2 t - 2)dt = 9\int_0^{2\pi} \left(5\frac{1+\cos 2t}{2} - 2\right)dt = 9\pi$$

ثانياً- التكاملات السطحية على سطح موجه:

يوجه السطح وفق شعاع توجيه الناظم $\hat{n}$ إذا كان السطح مفتوحاً كما في الشكل ٧-١٠:



الشكل: ٧-١٠

وإذا كان السطح مغلقاً الناظم دوماً إلى الخارج S مساحة السطح، ds عنصر مساحة السطح، وعنصر المساحة الموجه هو: $\overrightarrow{ds} = ds \cdot \hat{n}$

٢.٥.٧ التكاملات السطحية على سطح موجه ثلاثة أنواع:

١) تدفق الشعاع $\vec{F}$ عبرالسطح الموجه $\sum$ هو التكامل السطحي العددي.

$$\iint_{\Sigma} \vec{F} \cdot \overrightarrow{ds} = \iint_{\Sigma} (\vec{F} \cdot \hat{n}) ds$$

وهو تكامل سطحي عددي:

$$= \int_{\Sigma} f(x,y,z)ds = \iint_{R_z} f_1(x,y) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy$$

وإذا كان السطح مغلقاً نكتب:

$$\oiint_{\Sigma} \vec{F} \cdot \overrightarrow{ds} = \oint_{\Sigma} \vec{F} \cdot \overrightarrow{ds}$$

٢) التكامل السطحي الشعاعي لتابع شعاعي:

$$\int_{\Sigma} \vec{F} \wedge \overrightarrow{ds} = \int_{\Sigma} (\vec{F} \wedge \hat{n}) ds = \int_{\Sigma} \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} ds$$

٣) التكامل السطحي الشعاعي لتابع عددي U:

$$\int_{\Sigma} U\,\overrightarrow{ds} = \int_{\Sigma} (U\,\hat{n})\,ds$$

ثالثاً– نظريات التحويل من تكامل سطحي إلى حجمي، وبالعكس:

السطح المغلق $\sum$ سطح موجه ومغلق يحيط بالمنطقة الفراغية R.

إذا كان $\vec{F} = F_x \cdot \hat{\imath} + F_y \cdot \hat{\jmath} + F_z \cdot \hat{k}$ تابعاً شعاعياً للموضع و $\vec{F} \in Cl^1$ في R.

النظرية الأولى: نظرية غوص في التفرق:

إن تدفق الشعاع $\vec{F}$ عبر السطح الموجه المغلق $\sum$ مساوٍ للتكامل الحجمي لتفرق $\vec{F}$ في المنطقة الفراغية R.

$$\oint_{\Sigma} \vec{F} \cdot \overrightarrow{ds} = \oint_{\Sigma} (\vec{F} \cdot \hat{n})ds = \iiint_{R} (\vec{\nabla} \cdot \vec{F})dv$$

النظرية الثانية: في الدوران:

$$\oint_{\Sigma} \vec{F} \wedge \overrightarrow{ds} = \oint_{\Sigma} (\vec{F} \wedge \hat{n}) \cdot ds = \int_{R} (\vec{\nabla} \wedge \vec{F})dv$$

النظرية الثالثة: في التدرج:

إذا كان $U \in Cl^1$ فإن

$$\oint_{\Sigma} U \cdot \overrightarrow{ds} = \oint_{\Sigma} (U \cdot \hat{n}) \cdot ds = \int_{R} (\overrightarrow{\nabla U})dv$$

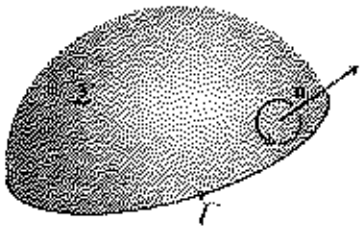
رابعاً– نظرية ستوكس لتحويل التكامل السطحي إلى خطي وبالعكس:

ليكن لدينا السطح المفتوح $\sum$ و $\vec{F} \in Cl^1$

$$\vec{F} = F_x \cdot \hat{\imath} + F_y \cdot \hat{\jmath} + F_z \cdot \hat{k}$$

إذا كان $\sum$ سطحاً موجهاً مفتوحاً وحافته Γ المنحني الموجه، وإذا كان $\vec{F} \in Cl^1$ فإن:

تدفق دوران الشعاع $\vec{F}$ عبر السطح الموجه $\sum$ مساوياً لجولان الشعاع $\vec{F}$ حول حافته الموجهة Γ أي أن:



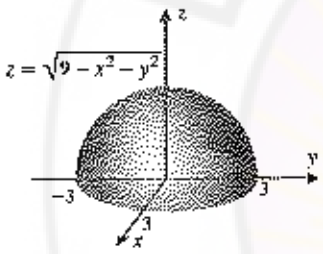
الشكل: ٧-١١

$$\int_{\Sigma}(\vec{\nabla}\wedge\vec{F})\cdot\overrightarrow{ds}=\oint_{\Gamma}\vec{F}\cdot\overrightarrow{ds}$$

مثال: احسب تدفق دوران التابع الشعاعي للموضع :

$$\vec{F}=2y\cdot\hat{\imath}+3x\cdot\hat{\jmath}-z^2\cdot\hat{k}$$

عبر السطح الموجه $\sum$ للنصف العلوي للكرة: $\Sigma:\ z=\sqrt{9-x^2-y^2}$



الحل: التابع $\vec{F}\in Cl^1$ لأن مركباته كثيرات حدود فدوراناته موجودة، والسطح الموجه $\sum$ وتدفق الدوران موجود أيضاً، كما أن الحافة Γ موجهة، وشروط تطبيق نظرية ستوكس محققة:

$$\int_{\Sigma}(\vec{\nabla}\wedge\vec{F})\cdot\overrightarrow{ds}=\oint_{\Gamma}\vec{F}\cdot\overrightarrow{ds}=9\pi$$

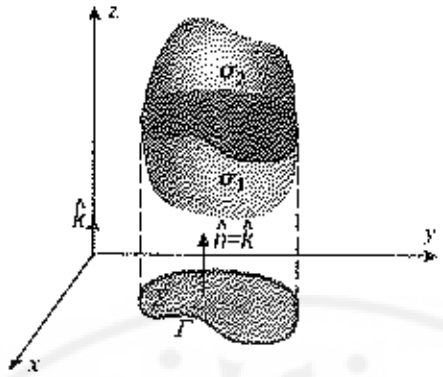
مسألة محلولة سابقاً.

حالة خاصة نظرية **غرين** في المستوي إذا كان $\sum$ سطحاً مستوياً في المستوي $z=0$ فإن:

$$\vec{F}=F_x\cdot\hat{\imath}+F_y\cdot\hat{\jmath}+F_z\cdot\hat{k}\qquad;\qquad\vec{F}\in Cl^1$$

$$\vec{F}\cdot\overrightarrow{ds}=F_x\cdot dx+F_y\cdot dy+F_z\cdot dz=F_x\cdot dx+F_y\cdot dy\ ;\ dz=0\Longrightarrow$$

$$\oint_{\Gamma}\vec{F}\cdot\overrightarrow{ds}=\oint_{\Gamma'}(F_x\cdot dx+F_y\cdot dy)$$

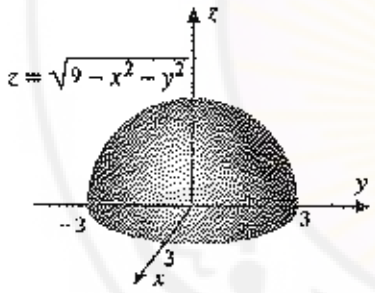


الشكل: ٧-١٢

$$\int_{\Sigma}(\vec{\nabla}\wedge\vec{F})\cdot\overrightarrow{ds}=\int_{\Sigma}(\vec{\nabla}\wedge\vec{F})\cdot\hat{k}\,ds=\int_{\Sigma}\left(\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\hat{k}\cdot\hat{k}\,ds$$
$$=\int_{\Sigma}\left(\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)dx\,dy$$

وبالتالي فإن:

$$\oint_{\Gamma}(F_x\cdot dx+F_y\cdot dy)=\iint_{\Sigma}\left(\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)dx\,dy$$



مثال: حقق نظرية غرين في المستوي على التابع الشعاعي:

$$\vec{F}=2y\cdot\hat{\imath}+3x\cdot\hat{\jmath}-z^2\cdot\hat{k}$$

والسطح المستوي: $\Sigma: x^2+y^2\le 9$

الحل:

$$\oint_{\Gamma}(F_x\cdot dx+F_y\cdot dy)=\oint_{\Gamma}(2y\cdot dx+3x\cdot dy)=9\pi$$

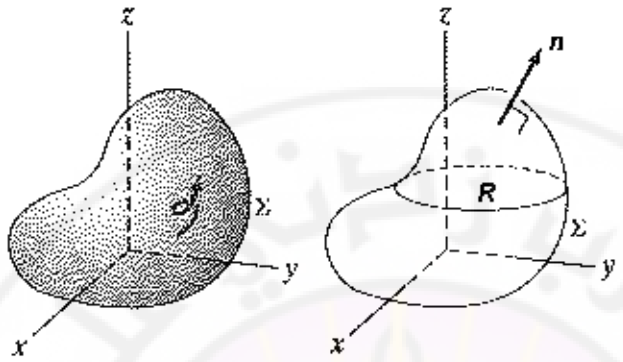
$$\iint_{\Sigma}\left(\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)dx\,dy=\iint_{\Sigma}(3-2)\,dx\,dy=\iint_{\Sigma}dx\,dy\Rightarrow$$

$$\iint_{\Sigma}dx\,dy=\iint_{\Sigma}dA=\text{area of }A=\pi(3)^2=9\pi$$

وهو مساحة القرص الدائري، فالمساواة محققة.

خامساً – نظرية غرين العامة (في الفراغ):

بالعودة إلى السطح المغلق الموجه، نظريّة في تحويل تكامل سطحي إلى حجمي في اللابلاسي. $W, U \in Cl^2$ في R. تنص:



الشكل: ٧–١٣

$$\oint_{\Sigma} (U \cdot \overrightarrow{\nabla W} - W \cdot \overrightarrow{\nabla U}) \cdot \overrightarrow{ds} = \int_{R} (U \cdot \nabla^2 W - W \cdot \nabla^2 U) \cdot dv$$

لبرهان هذه النظرية نستخدم نظرية غوص في التفرق.

$$\int_{\Sigma} (U \cdot \overrightarrow{\nabla W} - W \cdot \overrightarrow{\nabla U}) \cdot \overrightarrow{ds} = \int_{R} \left[\vec{\nabla} \cdot (U \cdot \overrightarrow{\nabla W} - W \cdot \overrightarrow{\nabla U})\right] \cdot dv =$$

$$= \int_{R} \left[\vec{\nabla} \cdot (U \cdot \overrightarrow{\nabla W}) - \vec{\nabla} \cdot (W \cdot \overrightarrow{\nabla U})\right] \cdot dv =$$

$$= \int_{R} \left[\overrightarrow{\nabla U} \cdot \overrightarrow{\nabla W} + U \cdot (\vec{\nabla} \cdot \overrightarrow{\nabla W}) - \overrightarrow{\nabla W} \cdot \overrightarrow{\nabla U} - W \cdot (\vec{\nabla} \cdot \overrightarrow{\nabla U})\right] \cdot dv =$$

$$= \int_{R} (U \cdot \nabla^2 W - W \cdot \nabla^2 U) \cdot dv =$$

وبما أن:

$$\overrightarrow{\nabla U} = \frac{\partial U}{\partial n} \hat{n}, \qquad \overrightarrow{\nabla W} = \frac{\partial W}{\partial n} \hat{n}, \qquad \overrightarrow{ds} = ds \cdot \hat{n}$$

فإن العلاقات السابقة تكتب بالشكل:

$$\oint_{\Sigma} \left(U \cdot \frac{\partial W}{\partial n} - W \cdot \frac{\partial U}{\partial n}\right) \cdot ds = \int_{R} (U \cdot \nabla^2 W - W \cdot \nabla^2 U) \cdot dv$$

إذا كان التابعان $U,\ W$ توافقيين في المنطقة R فإن: $\nabla^2 W = \nabla^2 U = 0$ في R وتصبح العلاقة في حالة خاصة:

$$\oint_{\Sigma}\left(U\cdot\frac{\partial W}{\partial n}-W\cdot\frac{\partial U}{\partial n}\right)\cdot ds=0$$

سادساً– علاقة غرين:

وهي حالة خاصة من نظرية غرين السابقة حيث $U=\frac{1}{r}$ وهو تابع توافقي في أي نطاق فراغي لا يشمل المبدأ (O) ولذلك نميز حالتين:

١) O خارج Σ:

$$\vec{r}=\overrightarrow{op},\qquad r=op$$

في هذه الحالة التابع $U=\frac{1}{r}$ توافقي في (R) أي أن:

$$\nabla^2 U=\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right)=0$$

وتنتج العلاقة:

$$\oint_{\Sigma}\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial W}{\partial n}-W\cdot\frac{\partial(1/r)}{\partial n}\right)\cdot ds=\int_{R}\left(\frac{1}{r}\cdot\nabla^2 W\right)\cdot dv$$

٢) O داخل Σ:

$$\oint_{\Sigma}\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial W}{\partial n}-W\cdot\frac{\partial(1/r)}{\partial n}\right)\cdot ds=\int_{R}\left(\frac{1}{r}\cdot\nabla^2 W\right)\cdot dv+4\pi W(O)$$

حيث $W(O)$ قيمة التابع W في القطب (O). هذه العلاقة تدعى علاقة غرين.

مثال: أ– $\vec{F}=r^3\cdot\vec{r}$ كموني، أوجد كمونه العددي W بإهمال الثابت الاختياري.

ب– احسب $\nabla^2 W$.

جـ– برهن أن:

$$\oint_{\Sigma}\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial W}{\partial n}-W\cdot\frac{\partial(1/r)}{\partial n}\right)\cdot ds=\int_{R}(6r^2)\cdot dv\quad;\quad R=\vec{O}$$

الحل: أ– $\vec{F}=r^3\cdot\vec{r}\ni Cl^1$ دوماً:

٢.٦.٧ معادلات ماكسويل للحقل الكهرطيسي:

تتحكم في التحريك بهذا الحقل، وهي أربع معادلات ولها نتائجها:

١) تفرق حقل كهربائي $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{k}$

٢) تفرق حقل مغناطيسي $\vec{\nabla}\cdot\vec{H}=0$

٣) دوران حقل مغناطيسي $\vec{\nabla}\cdot\vec{H}=\vec{j}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$ ، $\vec{\nabla}\wedge\vec{H}=\sigma\cdot\vec{E}+k\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$

٤) دوران حقل كهربائي $\vec{\nabla}\wedge\vec{E}=-\mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$

أهم نتائجها هي:

أولاً– تناقص الشحنة بمرور الزمن: من المعادلة (٣):

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{H}=\sigma\cdot\vec{E}+k\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\Rightarrow\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\wedge\vec{H})=\sigma\cdot(\vec{\nabla}\cdot\vec{E})+k\frac{\partial(\vec{\nabla}\cdot\vec{E})}{\partial t}$$

بما أن تفرق الدوران منعدم وحسب (١) ينتج:

$$0=6\frac{\rho}{k}+\frac{k}{k}\frac{\partial\rho}{\partial t}\Rightarrow\frac{6}{k}\rho+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=-\frac{6}{k}\rho\Rightarrow\frac{\partial\rho/\partial t}{\rho}=-\frac{6}{k}$$

نكامل:

$$\ln\rho=-\frac{6}{k}t+c\Rightarrow\rho=e^{-\frac{6}{k}t+c}=e^{-\frac{6}{k}t}\cdot e^{c}=\rho_0\cdot e^{-\frac{6}{k}t}$$

حيث إن: $\rho_0=e^c>0$.

$$\rho'=-\rho_0\cdot\frac{6}{k}\cdot e^{-\frac{6}{k}t}<0$$

وبالتالي ρ متناقص.

$$\lim_{t\to\infty}\rho=\lim_{t\to\infty}\rho_0\cdot e^{-\frac{6}{k}t}=0$$

أي أن الشحنة تتناقص بمرور الزمن وتؤول إلى الصفر داخل الوسط، لذلك نعد عملياً أن $\rho\approx 0$ داخل الوسط.

ولكن $\rho\neq 0$ على السطح لأن الشحنة تنتقل من الداخل إلى السطح.

ثانياً- معادلة البرق والانتشار الكهربائي:

من المعادلة (٤):

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) = -\mu \frac{\partial (\vec{\nabla} \wedge \vec{E})}{\partial t} = -\mu \frac{\partial}{\partial t}\left(6\vec{E} + k\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$$

ولكن:

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 E$$

ينتج:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 E = -\mu\, \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu\, k \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

وبوضع $\rho \approx 0$ داخل الوسط وهذا ممكن بمرور الزمن $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{k} = 0$

وتنتج المعادلة: **معادلة البرق:**

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu\, \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu\, k \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

وتنتج المعادلة نفسها للحقل $\vec{H}$.

وفي حالة التغير البطيء يمكن إهمال $\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$ لتنتج المعادلة:

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu\, \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

وبوضع $\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E}$ تنتج معادلة الانتشار:

$$\nabla^2 \vec{J} = \mu\, \sigma \frac{\partial \vec{J}}{\partial t}$$

ثالثاً- الموجة الكهربائية والموجة المغناطيسية:

في وسط غير ناقل $\sigma = 0$، تصبح معادلة البرق كالآتي:

وتنتج المعادلة نفسها للحقل $\vec{H}$:

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu\, k \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

وهي معادلات عامة لموجة كهربائية أو مغناطيسية.

وتدل أن الموجة تنتقل في الوسط بسرعة $V = \frac{1}{\sqrt{\mu \cdot k}}$ وفي الخلاء $k = k_0$ ، $\mu = \mu_0$ ،

$\mu_0 \cdot k_0 \cdot c^2 = 1$.

حيث إن: c سرعة الضوء، وهكذا تنتقل الموجة في الخلاء بسرعة الضوء.

مسائل غير محلولة

١. احسب مساحة قطعة المخروط $x^2 + y^2 = z^2$ الواقعة فوق المستوي xoy وداخل الأسطوانة $x^2 + y^2 = 2y$.

الجواب: $S = 4\sqrt{2}\,\pi$.

٢. احسب قيمة التكامل السطحي:

$$I = \iint_R z\,dx\,dy$$

حيث R هي المنطقة المحددة بنصف الكرة العلوي $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ والأسطوانة $x^2 + y^2 = 2y$.

الجواب: $I = 2\,\pi$.

٣. احسب قيمة التكامل الآتي:

$$I = \iiint_\Omega z\,dx\,dy\,dz$$

حيث Ω هي المنطقة المحددة بالسطح $z^2 = \frac{h^2}{R^2}(x^2 + y^2)$ والمستوي $z = h$.

الجواب: $I = \frac{\pi}{4}h^2R^2$.

٤. احسب قيمة التكامل السطحي:

$$I = \iint_S z\,dx\,dy$$

حيث S هي السطح الخارجي للكرة $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ والواقع في الثمن الأول من الفضاء (أي المحقق للمتراجحات $x \geq 0,\ y \geq 0$).

الجواب: $I = \frac{\pi}{3}$.

٥. ارسم المنطقة الفراغية R الواقعة داخل الكرة $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ وداخل المجسم $x^2 + y^2 = 3z$، وعين دائرة التقاطع، ثم احسب قيمة التكامل الثلاثي:

$$I = \iiint_R (x^2 + y^2)\, dx\, dy\, dz$$

(الدخول من قبة المجسم والخروج من قبة الكرة).

٦. احسب قيمة التكامل الثنائي الآتي:

$$I = \iint_R \frac{x}{y^2} \sin \pi x \; dx\, dy$$

المحاطة بالمنحنيات: $x \cdot y = 1,\ y = x,\ x = 2$.

الجواب: $I = -0.82$

٧. أوجد حجم المجسم الأسطواني الذي أساسه المنطقة D والمحدود من الأعلى بالمستوي $z = 2 - x - y$ حيث D هي المنطقة من المستوي $z = 0$ المحدودة بالمستقيم $y = x$ وبالقطع المكافئ $y = x^2$.

الجواب: $V = \frac{11}{60}$.

٨. احسب قيمة التكامل الثنائي:

$$I = \iint_R \frac{y}{x^2}\, dx\, dy$$

حيث R المنطقة الموجودة في الثمن الأول من المستوي والكائنة خارج الدائرة $x^2 + y^2 = 4$ وداخل الدائرة $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$.

الجواب: $I = 0.29$.

٩. أوجد حجم المجسم الأسطواني الذي أساسه المنطقة D ويحده من الأعلى السطح $z = x^2 + y^2$ حيث D هي المنطقة المحدودة بالمنحني $y = x^2$ وبالمستقيم $y = 1$.

الجواب: $V = \frac{88}{105}$.

١٠. احسب قيمة التركيب الآتي:

$$I = \int_0^3 dy \int_{x=1}^{\sqrt{4-y}} \cos\frac{\pi y}{2(2+x)}dx$$

الجواب: $I = 1.36$.

١١. احسب حجم المنطقة المحاطة بالسطحين:

$$x^2 + y^2 - z^2 = -1, \qquad x^2 + y^2 = 1$$

الجواب: $I = \frac{4\pi}{3}\left(\sqrt{2^3} - 1\right)$.

١٢. احسب قيمة التكامل الثنائي:

$$I = \iint_R e^{\frac{y}{y+x}}\, dx\, dy$$

حيث R هي المنطقة المحاطة بالمستقيمات:

$$y = x, \qquad y = 2x, \qquad x + y = 1, \qquad x + y = 2$$

الجواب: $I = 0.45$.

١٣. استخدم التبديلات المناسبة لحساب قيمة التكامل الثنائي الآتي:

$$I = \iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1} \sqrt{1 - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)}\, dx\, dy$$

حيث a, b موجبتان تماماً.

الجواب: $I = \frac{2}{3}\pi\, a\, b$.

١٤. احسب مساحة المنطقة المحاطة بالمنحنيات الآتية:

$$D: \left\{\theta = \frac{\pi}{4}, \qquad r = 1 + \cos\theta, \qquad r = 2\sqrt{\cos 2\theta}\right\}$$

الجواب: $D = 0.421$.

١٥. احسب قيمة التكامل الثنائي الآتي:

$$I = \iint_R \frac{dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

حيث R هي المنطقة المحاطة بالمنحنيات:

$$y = 0, \qquad y = x, \qquad y = \sqrt{2x - x^2}$$

الجواب: $I = \sqrt{2} = 1.414$.

١٦. احسب قيمة التكامل الثنائي الآتي:

$$I = \iint_R \frac{x\,y}{(1+x^2+y^2)^{5/2}}\,dx\,dy$$

حيث R هو الربع الموجب من المستوي.

الجواب: $I = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{6}$.

١٧. استخدم التبديل $x + y = u\,,\ y = u\,v$ لحساب قيمة التكامل الثنائي الشاذ:

$$I = \iint_R e^{\frac{y}{y+x}}\,dx\,dy$$

حيث R هي المنطقة المحاطة بالمستقيمات:

$$y = 0, \qquad x = 0, \qquad y = 1 - x,$$

الجواب: $I = \frac{e-1}{2}$.

١٨. احسب قيمة التكامل الثنائي الشاذ:

$$I = \iint_R \frac{y^2}{1+x^2y^2}\,dx\,dy$$

حيث R هو الشريط الواقع في الربع الأول والمحاط بالمستقيمين:

$$y = 0, \qquad y = 1,$$

الجواب: $I = \frac{\pi}{4}$.

١٩. احسب قيمة التكامل:

$$I = \int_L \frac{y}{x}\,ds$$

حيث L هو الجزء من القطع المكافئ $y = \frac{1}{2}x^2$ والمحصور بين النقطتين: $A\left(1, \frac{1}{2}\right)$ و $B(2, 2)$.

الجواب: $I = \frac{1}{6}\left(\sqrt{125} - \sqrt{8}\right)$.

٢٠. احسب قيمة التكامل الثنائي الشاذ:

$$I = \iint_R \ln\sqrt{x^2 + y^2}\, dx\, dy$$

حيث R هي القرص: $x^2 + y^2 \le 1$.

الجواب: $I = -\frac{\pi}{2}$.

٢١. احسب مساحة المنطقة D المحاطة بالمنحنيات الآتية:

$$x = 4, \qquad xy = 4, \qquad y = x$$

الجواب: $I = 3.2$.

٢٢. احسب قيمة التكامل الآتي:

$$I = \int_L y\, e^{-x}\, ds$$

حيث L القسم من المنحني: $y = 2\arctan t - t$ ، $x = \ln(1 + t^2)$ الموافق للمتحول t من الصفر حتى الواحد.

الجواب: $I = \frac{\pi^2}{16} - \frac{\ln 2}{2}$.

٢٣. احسب قيمة التكامل الثنائي الآتي:

$$I = \iint_R \sqrt{y + x^2}\, dx\, dy$$

حيث R هي المنطقة المحاطة بالمنحنيات: $y = 2x + 1$ ، $y = 1 - x^2$.

الجواب: $I = \frac{4}{3}$.

٢٤. احسب قيمة التكامل الآتي:

$$I = \int_L x\,y\,z\,ds$$

حيث L المنحني الذي معادلاته الوسيطية هي:

$$x = t, \qquad y = \frac{t^2}{2}, \qquad z = \sqrt{\frac{8\,t^3}{3}}$$

الموافق للمتحول t من الصفر حتى الواحد.

الجواب: $I = \frac{16\sqrt{2}}{143}$.

٢٥. احسب قيمة التكامل الثنائي الآتي:

$$I = \iint_R \frac{1}{x^2 + y^2}\,dx\,dy$$

حيث R هي:

١- المنطقة المحدودة $x^2 + y^2 \le 1$ واحسب D.

٢- المنطقة المحدودة $\frac{1}{4} \le x^2 + y^2 \le 1$ واحسب D.

الجواب: ١- التكامل شاذ و $I = \infty,\ D = 2\pi$. ٢- $I = 4.35,\ D = \pi$.

٢٦. احسب قيمة التكامل الثنائي الآتي:

$$I = \iint_D (x^2 + y^2)\,dx\,dy$$

حيث D هي المنطقة المحدودة بالمستقيمات $x + y = 1,\ y = 0,\ x = 0$.

الجواب: $I = \frac{1}{6}$.

٢٧* احسب قيمة التكامل المنحني الآتي:

$$I = \int_{AB} [(x^2 + y^2)\,dx + 2xy\,dy]$$

على طول $y = x^3$ من النقطة A التي فاصلتها $x = 1$ حتى النقطة B التي فاصلتها 2.

الجواب: $I = \frac{129}{3}$.

٢٨. إذا كانت D هي المجموعة:

$$D = \{(x,y), \quad y^2 \le x \le y, \quad 0 \le y \le 1\}$$

فأثبت أن:

$$I = \iint_D x\,y\,dx\,dy = \frac{1}{24}$$

٢٩. احسب التكامل الثنائي الشاذ الآتي:

$$I = \iint_R \frac{3\sqrt{y}+1}{\sqrt{x}} dx\,dy$$

حيث R هي المنطقة المحاطة بالمستقيمات: $y = x,\ x = 1,\ y = 0$.

الجواب: $I = \frac{5}{3}$

٣٠. احسب التكامل الثنائي الشاذ الآتي:

$$I = \iint_R e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$

حيث R هي الربع الأول من المستوي، واستنتج من ذلك تكامل بواسون:

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$$

الجواب: $I = \frac{\pi}{4}$ وتكامل بواسون $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

٣١. أوجد حجم المنطقة الواقعة داخل النصف العلوي للكرة التي معادلتها $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ وداخل الأسطوانة $(x-1)^2 + y^2 = 1$.

الجواب: $V = -\frac{16}{3}\left[\frac{4-3\pi}{6}\right] = 4.82$.

٣٢. أوجد عناصر المنطقة (عندما نثبت x) المحدودة بالدائرة التي قطرها R ومركزها مبدأ الإحداثيات.

٣٣. احسب التكامل الثلاثي الآتي:

$$I = \iiint_R (x^2 + 3z^2)\, dx\, dy\, dz$$

حيث R هي المنطقة المحاطة بالمنحنيات: $x^2 + y^2 = 4,\ z = 0,\ z = x^2 + y^2$.

الجواب: $I = 128\left[\frac{1}{6}\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right] = 234.5$.

٣٤. احسب التكامل الثلاثي الآتي:

$$I = \iiint_R \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}\, dx\, dy\, dz$$

حيث R هي المنطقة: $x^2 + y^2 + z^2 \le x$.

الجواب: $I = \frac{\pi}{10}$.

٣٥. استخدم التبديل $u = x - y,\ v = x + y$ لحساب قيمة التكامل الثنائي الآتي:

$$I = \iint_R \cos\frac{x - y}{x + y}\, dx\, dy$$

حيث R هي المنطقة المحدودة بالمستقيمات:

$$x + y = e, \qquad x + y = 1, \qquad y = 0, \qquad x = 0$$

الجواب: $I = 2.68$.

٣٦. احسب قيمة التكامل الثنائي الآتي:

$$I = \iint_S \frac{dx\, dy}{\sqrt[3]{(x - y)^2}}$$

حيث S هو المربع: $|x| \le 1,\ |y| \le 1$.

الجواب: $I = \frac{9}{2} = 4.5$.

٣٧. احسب التكامل الثنائي الآتي:

$$I = \iint_R \frac{3\sqrt{y} + 1}{\sqrt{x}}\, dx\, dy$$

حيث R هي المنطقة المحاطة بالمستقيمات: $x = \frac{1}{\sqrt{2}},\ x = 1,\ y = 0,\ y = x$.

الجواب: $I = 0.7702$.

٣٨. احسب مساحة الجزء من سطح مجسم القطع المكافئ الدوراني $z = x^2 + y^2$ المقطوع بالأسطوانة $x^2 + y^2 = 4$.

الجواب: $A = \frac{\pi}{6}\left(17\sqrt{17} - 1\right)$.

٣٩. احسب التكامل الثنائي الآتي:

$$I = \iint_R \frac{\ln(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)}\, dx\, dy$$

حيث R هي المنطقة الواقعة بين الدائرتين: $x^2 + y^2 = 1,\ x^2 + y^2 = e^2$.

الجواب: $I = 2\pi$.

٤٠. استخدم تبديلات مناسبة لحساب قيمة التكامل الثلاثي:

$$I = \iiint_R z\, dx\, dy\, dz$$

حيث R هي المنطقة المحددة بالسطوح:

$$x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1,\ x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 4,\ x^2 + y^2 = (z-1)^2$$

الجواب: $I = 5.888 + 4.279 = 10.167$.

٤١. احسب قيمة التكامل الثلاثي:

$$I = \iiint_R (x^2 + y^2)\, dx\, dy\, dz$$

حيث R هي المنطقة المحددة من الأسفل بالقطع المكافئ $z = x^2 + y^2$ ومن الأعلى بالمستوي $z = \pi$.

الجواب: $I = \frac{\pi^4}{2} - \frac{\pi^4}{3} = 16.234$.

٤٢. أوجد عناصر المنطقة D عندما نثبت x (أو عندما نسقط على المحور ox) إذا كانت D تطابق مجموعة النقاط (x,y) من المستوي المحققة للمتراجحات:

$$x \geq 0, \qquad y \geq x^2, \qquad y \geq 2 - x^2$$

٤٣. احسب قيمة التكامل الثنائي:

$$I = \iint_R \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} \right) dx\, dy$$

حيث R هي المنطقة المستوية المحددة بـ: $0 \leq x \leq 1$ و $0 \leq y \leq 1$.

الجواب: $I = \frac{8}{3}$.

٤٤. استخدم تبديلاً مناسباً لحساب قيمة التكامل الثنائي الآتي:

$$I = \iint_R \frac{dx\, dy}{x\, y}$$

حيث R هي المنطقة المحاطة بالدوائر:

$$x^2 + y^2 = 2x, \quad x^2 + y^2 = 4x, \quad x^2 + y^2 = 2y, \quad x^2 + y^2 = 4y$$

الجواب: $I = 0.48$.

٤٥. احسب قيمة التكامل الثلاثي الآتي:

$$I = \iiint_R z\, dx\, dy\, dz$$

حيث R هي المنطقة $x^2 + y^2 + z^2 \leq x$.

الجواب: $I = \frac{\pi}{32}$.

٤٦. احسب قيمة التكامل الآتي:

$$I = \iint_R x\, y\, dx\, dy$$

حيث R هي المنطقة الواقعة داخل الربع الأول للقطع الناقص $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ وخارج الدائرة $x^2 + y^2 = a^2$، حيث $b > a$.

الجواب: $I = \frac{a^2}{8}(b^2 - a^2)$.

٤٧. احسب قيمة التكامل الثلاثي الآتي:

$$I = \iiint_V x\,y\,dx\,dy\,dz$$

حيث V هو الحجم المحاط بمجسم القطع الناقص $2x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

الجواب: $I = \frac{4}{15}$.

٤٨. احسب قيمة التكامل الثلاثي الآتي:

$$I = \iiint_V \frac{dx\,dy\,dz}{(1+x+y+z)}$$

حيث V هو الموشور المحدد بالمستويات: $x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ x + y + z = 1$.

الجواب: $I = \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{2}\left(\ln 2 - \frac{1}{2}\right)$.

٤٩. احسب قيمة التكامل الثلاثي الآتي:

$$I = \iiint_V z\,dx\,dy\,dz$$

حيث V هو النصف العلوي من مجسم القطع الناقص: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$.

الجواب: $I = \frac{\pi}{4} a\,b\,c^2$.

٥٠. احسب حجم المنطقة المحاطة بالسطوح:

$$y^2 = 4 - 3x, \qquad y^2 = x, \qquad z = +2, \qquad z = -2$$

الجواب: $I = \frac{64}{9}$.

٥١. احسب قيمة التكامل الثنائي الآتي:

$$I = \iint_S y^2\sqrt{R^2 - x^2}\,dx\,dy$$

حيث S هي الدائرة التي مركزها مبدأ الإحداثيات ونصف قطرها R.

الجواب: $I = \frac{32}{45} R^5$.

٥٢. احسب قيمة التكامل الثنائي الآتي:

$$I = \iint_R \sqrt{4 - x^2 - y^2}\, dx\, dy$$

حيث R هي المنطقة المحصورة بين المستقيم $y = 0$ والنصف العلوي للدائرة.

$$x^2 + y^2 - 2x = 0$$

الجواب: $I = \frac{12\pi - 16}{9}$.

٥٣. استخدم التبديل: $u = x - y$ و $u = x + y$ لحساب قيمة التكامل الثنائي الآتي:

$$I = \iint_R e^{\frac{x-y}{x+y}}\, dx\, dy$$

حيث R هي المنطقة $R: \begin{cases} x = 0, & x + y = 1 \\ y = 0, & x + y = 2 \end{cases}$.

الجواب: $I = \frac{3}{4}\left(\frac{e^2 - 1}{e}\right)$.

٥٤. احسب قيمة التكامل الثنائي الآتي:

$$I = \iint_R \frac{x}{y^2}\, dx\, dy$$

حيث R هي المنطقة المحصورة بين المنحنيات: $R: \begin{cases} x = 4, & x = 2 \\ y = 1, & y = x^2 \end{cases}$.

الجواب: $I = 6 - \ln 2$.

٥٥. احسب قيمة التكامل الثنائي الآتي:

$$I = \iint_R x\, y\, dx\, dy$$

حيث R هي المنطقة المحدودة بالقطع: $y^2 = 2x$ والمستقيم $x = 1$.

الجواب: $I = 0$.

٥٦. احسب قيمة التكاملات الآتية:

$$I_1 = \iint_{\Delta_1} \cos(x+y)\,dx\,dy$$

$$I_2 = \iint_{\Delta_2} (2x+y)\,dx\,dy\,, \qquad I_3 = \iint_{\Delta_3} (x+6y)\,dx\,dy$$

حيث Δ_1 هو المثلث المحدد بالمستقيمات: $y=\pi\,,\ y=x\,,\ x=0$.

حيث Δ_2 هو المثلث المحصور بين المحورين الإحداثيين والمستقيم: $x+y=3$.

حيث Δ_3 هو المثلث المحدد بالمستقيمات الآتية: $y=x\,,\ y=5x\,,\ x=1$.

الجواب: $I_1=2,\ I_2=\frac{27}{2},\ I_3=\frac{76}{3}$.

٥٧. احسب قيمة التكامل الثلاثي الآتي:

$$I = \iiint_R z\,dx\,dy\,dz$$

حيث R هي المنطقة الفراغية الواقعة بين الكرة: $x^2+y^2+z^2=4$ وبين القسم العلوي من الأسطوانة $x^2+(y-1)^2=1$.

الجواب: $I=\frac{5\pi}{4}=3.925$.

٥٨. استخدم التبديل التالي $u=\frac{x}{2}\,,\ v=\frac{y}{3}$ لحساب قيمة التكامل I:

$$I = \iint_R \sqrt{1+\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}}\,dx\,dy$$

حيث R هي المنطقة المستوية المحاطة بالقطع الناقص: $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$.

الجواب: $I=4\pi\left(2\sqrt{2}-1\right)=22.96$.

٥٩. احسب قيمة التكامل الآتي:

$$I = \int_0^1 \int_0^1 \frac{y}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx\,dy$$

حيث R هي المنطقة المستوية المحاطة بالقطع الناقص: .

الجواب: $I = 0.222$.

٦٠. احسب مساحة الجزء الذي تقطعه أسطوانة $(x-1)^2 + y^2 = 1$ من النصف العلوي للكرة $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

الجواب: $I = -8 + 4\pi = 4.56$.

٦١. احسب مساحة الجزء من سطح مجسم القطع المكافئ الزائدي $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ والذي مسقطه على المستوي $z = 0$ هو العقدة اليمنى للمنحني القطبي $r^2 = \cos 2\theta$.

الجواب: $I = 0.589$.

٦٢. احسب قيمة التكامل السطحي:

$$I = \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2)\, ds$$

حيث Σ هو الجزء من المخروط $z^2 = 3(x^2 + y^2)$ المحصور بين المستويين $z = 1, z = 3$.

الجواب: $I = \pi\left(9 - \frac{1}{9}\right) = 27.9$.

٦٣. احسب قيمة التكامل الخطي:

$$I = \int_{\Gamma} 4 \sin 4t \; dl$$

حيث Γ هو القوس من المنحني $x = \sin^2 t,\ y = \cos^2 t,\ z = t$ الواصل بين النقطتين $t = 0,\ t = \frac{\pi}{4}$.

الجواب: $I = 2.8$.

٦٤. احسب قيمة التكامل الخطي:

$$I = \int_{\Gamma(AB)} (-y\, dx + x\, dy)$$

حيث Γ هو القوس المأخوذ على الجزء الأعلى من نصف الدائرة $x^2 + y^2 = a^2$.

الجواب: $I = -a^2\pi$.

٦٥. احسب قيمة التكامل السطحي:

$$I = \iint_S x^2\, y^2\, ds$$

حيث S نصف سطح الكرة العلوي $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

الجواب: $I = \frac{2\pi R^6}{15}$.

٦٦. احسب قيمة التكامل الثنائي الآتي:

$$I = \iint_D e^{x+y}\, dx\, dy$$

حيث D المنطقة المحصورة بين المربعين اللذين مركزهما مبدأ الإحداثيات وطول ضلع المربع الداخلي 2 وطول ضلع المربع الخارجي 4.

الجواب: $I = 4 \sinh 4 \sinh 1$.

مسائل إضافية

أولاً: التكاملات الثنائية:

١- عين عناصر المنطقة D المحدودة بالمنحنيات $x^2+y^2=4\,,\ y+x=2$ والواقعة في الربع الأول وذلك في الحالتين:

(أ) عندما نثبت x.

(ب) عندما نثبت y.

٢- عين عناصر المنطقة D المحدودة بالمنحنيات $y=x^3\,,\ x+y=2\,,\ x=0$ وذلك عندما نثبت x، وعندما نثبت y.

٣- عين عناصر المنطقة D المحدودة بالمنحنيات $x\,y=1\,,\ x=2\,,\ y=x$ وذلك عندما نثبت x، وعندما نثبت y.

٤- عين عناصر المنطقة D المحدودة بالمنحنيات $x=2, y=\frac{1}{2}x^2+1, y=x^2+1$ وذلك عندما نثبت x، وعندما نثبت y.

٥- احسب التكامل الثنائي الآتي:

$$\iint_D (12-3x-4y)\,dx\,dy$$

حيث D المنطقة المحدودة بالقطع الناقص: $x^2+4y^2=4$.

٦- احسب التكامل الثنائي الآتي:

$$\iint_D \left(1-\frac{x}{3}-\frac{y}{4}\right)dx\,dy$$

حيث D المنطقة المحدودة بالمستقيمات: $y=-2,\ y=2,\ x=-1,\ x=1$.

٧- احسب التكامل الثنائي الآتي:

$$\iint_D (x^2 + y^2 - 2x - 2y + 4)\, dx\, dy$$

حيث D المنطقة المحدودة بالمستقيمات: $x = 0,\ x = 2,\ y = 0,\ y = 2$.

٨- احسب التكامل الثنائي الآتي:

$$\iint_D \frac{dx\, dy}{\sqrt{ax - x^2}}$$

حيث D المنطقة المحدودة بمحور العينات وبالقطع المكافئ: $y^2 = a^2 - ax$.

٩- احسب التكامل الثنائي الآتي:

$$\iint_D (x^2 + y^2 + 2)\, dx\, dy$$

حيث D المنطقة المحدودة بالمستقيمات: $y = 0\ ,\ y = x\ ,\ x = 2a$.

١٠- احسب التكامل الثنائي الآتي:

$$\iint_D \sqrt{x^2 - y^2}\, dx\, dy$$

حيث D المنطقة الواقعة داخل المثلث الذي رؤوسه النقاط: $(0,0)\ ,\ (1,1)\ ,(10,1)$.

١١- احسب التكامل الثنائي الآتي:

$$\iint_D \frac{x\, dx\, dy}{x^2 + y^2}$$

حيث D المنطقة المحدودة بالقطع المكافئ: $y = \frac{1}{2}x^2$ والمستقيمات:

$$y = 2, \qquad y = 1, \qquad x = 0$$

١٢- احسب التكامل الثنائي الآتي:

$$\iint_D \sin(x + y)\, dx\, dy$$

حيث D المنطقة المحدودة بالمستقيمات: $y = x\ ,\ x + y = \frac{\pi}{2}\ ,\ y = 0$.

١٣- احسب التكامل الثنائي الآتي:

$$\iint_D \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}\, dx\, dy$$

حيث D المنطقة التي نقاطها تحقق المترجحات:

$$y \geq 0, \quad x \geq 0, \quad x^2+y^2 \leq 1$$

١٤- احسب التكامل الثنائي الآتي:

$$\iint_D \frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\, dx\, dy$$

حيث D المنطقة المحصورة بين الدائرتين: $x^2+y^2=e$ ، $x^2+y^2=1$.

١٥- أوجد حجم الجسم المحدود بالمستويات:

$$2x+y-2=0,\ z=0,\ x+y-5=0,\ 4x-y=0,\ 3x-2y=0$$

١٦- بالانتقال إلى الإحداثيات القطبية أوجد حجوم الأجسام المحددة بالسطوح المعطاة:

a) $x+y+z=3a,\ x^2+y^2=a^2,\ z=0$
b) $z=x,\ x^2+y^2=a^2,\ z=0$
c) $z=x^2+y^2,\ x^2+y^2=x,\ x^2+y^2=2x,\ z=0$
d) $z=x^2+y^2,\ z=x+y$

ثانياً: التكاملات الثلاثية:

١- احسب التكامل الثلاثي الآتي

$$\iiint_V (x\,y\,z-1)dx\,dy\,dz$$

حيث V المنطقة الواقعة في الثمن الأول والمحدودة بالسطحين:

$$x^2+y^2+z^2=2Rz, \quad x^2+y^2+z^2=R^2$$

٢- احسب التكامل الثلاثي الآتي:

$$\iiint_V y^3 z^2 \, dx \, dy \, dz$$

حيث V المنطقة المحصورة بالمستويات:

$$y = 4, \quad y = 2, \quad x = 1, \quad x = 0, \quad z = 8, \quad z = 5$$

٣- احسب التكامل الثلاثي الآتي:

$$\iiint_V x \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dx \, dy \, dz$$

حيث V المنطقة الناتجة عن تقاطع الكرة: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ مع الأسطوانة $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$ والواقعة ضمن الأسطوانة.

٤- احسب التكامل الثلاثي الآتي:

$$\iiint_V e^x \sqrt{y^2 + z^2} \, dx \, dy \, dz$$

حيث V المنطقة المحدودة بالمستويات: $x = 2$, $x = 1$ وبالأسطوانتين $y^2 + z^2 = 4$ و $y^2 + z^2 = 9$.

ثالثاً: التكاملات السطحية والخطية:

١- احسب التكامل المنحني الآتي:

$$\int_L (x^2 + y^2)^n \, ds$$

حيث L الدائرة المعطاة بالمنحنيات: $x = a\cos t$, $y = a\sin t$.

٢- احسب التكامل المنحني الآتي:

$$\int_L \left(\frac{x}{y} dx + \frac{dy}{y - a} \right)$$

حيث L جزء المنحني: $x = a(t - \sin t)$, $y = a(t - \cos t)$، الواصل من النقطة الموافقة للقيمة $t = \frac{\pi}{6}$ إلى $t = \frac{\pi}{3}$.

٣- احسب التكامل المنحني

$$\int_L [(y+z)dx + (z+x)dy + (x+y)dz]$$

حيث L جزء المنحني: $x = a\sin^3 t\ ,\ y = 2a\sin t\cos t\ ,\ z = a\cos^2 t$

الواصل من النقطة الموافقة للقيمة $t = 0$ إلى $t = -\pi$.

Damascus University

فهرس الفصل الثامن

٨. الاحتمال والإحصاء

Probability & Statistics

١.٨ المقدمة.

٢.٨ الإحصاء والإحصاء الوصفي.

٣.٨ مبادئ الاحتمال.

٤.٨ طرائق العد.

٥.٨ المتغير العشوائي ودالة الكثافة.

٦.٨ بعض التوزيعات الخاصة.

٧.٨ الانحدار والارتباط البسيطان.

٨.٨ تمارين عامة.

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الفصل الثامن

٨. الاحتمال والإحصاء

Probability & Statistics

١.٨ المقدمة

إنّ للاحتمال والإحصاء أهمية كبيرة في الكثير من العلوم، ولاسيما في التطبيقات الهندسية؛ حيث سنعتمد في هذا الفصل على دراسة الاحتمال والإحصاء بمنحى شبه تطبيقي ينطلق من جملة من المبادئ الأساسية، نقبلها ونستنتج وفقها نظرية الاحتمال بشكل رياضي.

٢.٨ الإحصاء والإحصاء الوصفي:

١.٢.٨ تعريف:

الإحصاء: هو علم يهتم بتجميع وتنظيم وتحليل وتفسير ظاهرة معينة لمجتمع إحصائي ما، واستخلاص نتائج مقبولة لاعتمادها أساساً لفكرة واضحة ومعقولة عن تلك الظاهرة، والسعي للوصول إلى قرار مبني على البيانات الإحصائية التي قام بدراستها الإحصائي.

أمّا **الإحصاء الوصفي** فهو عملية جمع المعطيات الإحصائية أو المعلومات ومن ثم تبويب هذه المشاهدات والمعطيات في فئات متجانسة ضمن جداول خاصة وتنظيمها في رسوم بيانية؛ بالإضافة إلى حساب بعض الخصائص العددية الهامة لهذه المعطيات.

٢.٢.٨ البيانات الإحصائية وطرق عرضها: عند دراسة ظاهرة إحصائية معينة غالباً ما تكون المعطيات الإحصائية ميدانية غير مرتبة. وعليه نحتاج لترتيب هذه البيانات وعرضها

بشكلٍ جديد يمكننا من دراسة تلك الظاهرة بشكلٍ أفضل، ويساعدنا على الوصول إلى النتائج المطلوبة بشكلٍ أسرع، وفقاً للآتي:

1- جدول التوزيع التكراري (Frequency distribution table): ليكن لدينا مجموعة من القياسات (المشاهدات – البيانات) لظاهرة معينة، عندئذٍ يمكننا ترتيب هذه القياسات وعرضها ضمن جدول يمكننا من إعطاء فكرة واضحة عن هذه الظاهرة. حيث نميّز هنا نوعين من الجداول، **جدول التوزيع التكراري النقطي**، وهو جدول يتم فيه كتابة القياسات بشكل مرتب (تصاعدياً أو تنازلياً) مع كتابة التكرار لكل قياس على حدةٍ (عدد مرّات ظهور هذا القياس). و **جدول التوزيع التكراري الفئوي (للبيانات المبوبة)**؛ وهو جدول يتم فيه تصنيف القياسات وتبويبها ضمن فئات منتظمة مناسبة منفصلة غير متشابكة مع ذكر التكرار لكل فئة (عدد القياسات الموجودة ضمن الفئة الواحدة). ويُحدد الإحصائيُّ طول الفئة، أمّا عدد الفئات فيجب أن يكون معقولاً (عادةً يُؤخذ عدد الفئات بين 5 و 20 فئة). حيث سندرس الحالة التي تكون فيها الفئات متساوية الطول فقط.

ملاحظة①: يُستخدم عادةً جدول التوزيع التكراري النقطي عندما يكون عدد المشاهدات غير كبير. وفي الحالة المعاكسة يُستَخدم جدول التوزيع التكراري الفئوي.

مثال (1): البيانات الآتية تدل على عدد المولدات الكهربائية المبيعة يومياً في أحد المخازن خلال 60 يوماً متتالياً:

30	36	32	39	43	44	48	39	59	41
46	43	39	48	36	48	44	50	41	43
41	39	36	50	32	46	41	52	39	44
43	46	41	39	50	32	43	59	50	46
36	46	30	43	41	39	48	36	50	41
39	41	36	39	43	30	44	50	32	43

والمطلوب:

أنشئ جدول التوزيع التكراري النقطي، ثم أنشئ جدول التوزيع التكراري الفئوي لهذه البيانات.

الحل: من القياسات المبينة أعلاه نجد أن جدول التوزيع التكراري النقطي لها هو:

الجدول (8.1) جدول التوزيع التكراري النقطي

القياسات	30	32	36	39	41	43	44	46	48	50	52	59
التكرار	3	4	6	9	8	8	4	3	6	6	1	2

ولإنشاء جدول التوزيع التكراري الفئوي نلاحظ من البيانات أعلاه أن أصغر قيمة هي 30 وأكبر قيمة هي 59. فإذا اخترنا عدد الفئات مساوياً 6 وعندئذٍ يكون جدول التوزيع التكراري الفئوي هو:

الجدول (8.2) جدول التوزيع التكراري الفئوي

رقم الفئة	حدود الفئة	مركز الفئة	التكرار	التكرار النسبي	التكرار المئوي
1	[30,35[	32.5	7	0.12	12
2	[35,40[	37.5	15	0.25	25
3	[40,45[	42.5	20	0.33	33
4	[45,50[	47.5	9	0.15	15
5	[50,55[	52.5	7	0.12	12
6	[55,60[	57.5	2	0.03	3
المجموع			60	1	100

حيث مُثلت كل فئة بفترة نصف مفتوحة، وذكر مركزها وهو يساوي نصف مجموع حدّي الفئة. كما نلاحظ بأنه تم ذكر التكرار والتكرار النسبي، وكذلك التكرار المئوي لكل فئة. حيث يُحسب التكرار النسبي للفئة بتقسيم تكرارها على العدد الكلي للقياسات، كما

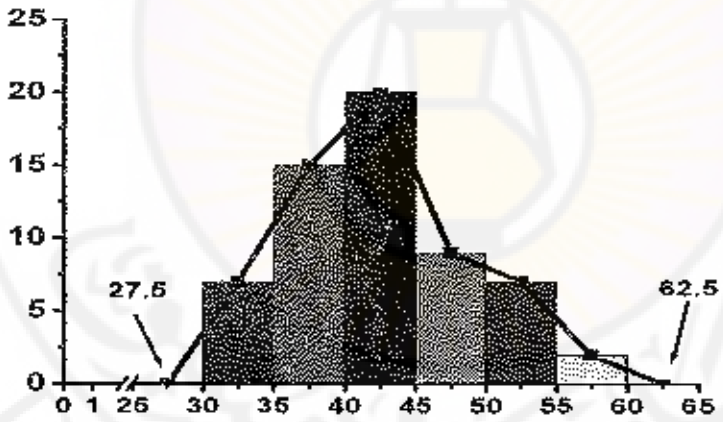
يُحسب التكرار المئوي للفئة بضرب تكرارها النسبي بمئة. أمّا طول الفئة ℓ فيحسب من العلاقة الآتية:

$$\ell = \frac{U-L}{n} = \frac{59-30}{6} = \frac{29}{6} \approx 5$$

حيث U,L هما الحدان الأعلى والأدنى للبيانات، بينما n عدد الفئات.

2- المضلع التكراري:

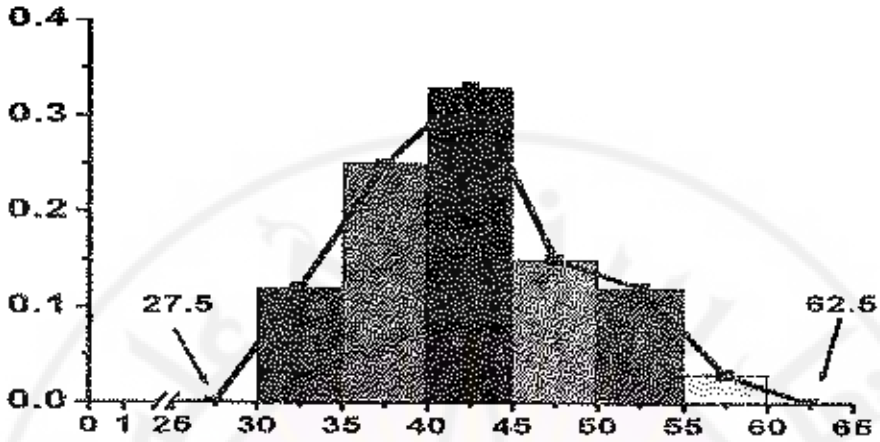
هناك طرق أخرى لعرض البيانات الإحصائية، بصورة أشكال نذكر منها عرض البيانات على شكل مدرج تكراري حيث تُمثل كل فئة بمستطيل قاعدته تساوي طول الفئة وارتفاعه يساوي تكرار تلك الفئة. كما يمكن عرض البيانات على شكل مُضلّع يسمى المضلع التكراري، وهو خط منكسر يصل بين النقاط التي فواصلها مراكز الفئات وتراتيبها تكرار تلك الفئات. الشكل التالي يُوضّح كلاً من المدرج والمضلع التكراري للبيانات المبينة في الجدول (8.2).



الشكل (8.1): المدرج التكراري والمضلع التكراري (الخط المنكسر)

حيث أضفنا إلى الرسم القيمتين 27.5 و 62.5 في البداية والنهاية واللتين تمثلان المراكز للفئات التي تكرارها معدوم. وفي الكثير من التطبيقات يكون من الأنسب استخدام التكرار النسبي للفئات بدلاً من التكرار نفسه، حيث يتم رسم المدرج التكراري النسبي

والمضلع التكراري النسبي. يوضح الشكل الآتي كلاً من المدرج (والمضلع) التكراري النسبي للبيانات المبينة في الجدول (2-8).



الشكل (2-8): المدرج (والمضلع) التكراري النسبي

مما سبق نجد أن تمثيل البيانات المبوبة بمدرج تكراري (أو تكراري نسبي) وكذلك بمضلع تكراري (أو تكراري نسبي) يمكّننا من وصف البيانات بشكل أسرع وأدق.

3- **التوزيع التكراري المتجمع**: يمكن عرض البيانات أيضاً باستخدام جداول التوزيع التكراري المتجمع حيث يوجد نوعان منها، هما: جدول التوزيع التكراري المتجمع الصاعد؛ وجدول التوزيع التكراري المتجمع النازل. حيث يمثل التكرار المتجمع الصاعد لكل فئة، مجموع تكرارات القيم الأصغر من الحد الأدنى لهذه الفئة. كما يمثل التكرار المتجمع النازل لكل فئة، مجموع تكرارات القيّم الأكبر من أو تساوي الحد الأعلى لهذه الفئة.

فيما يلي نبيّن كلاً من جدول التوزيع التكراري المتجمع الصاعد، وجدول التوزيع التكراري المتجمع النازل للبيانات المبينة في مثالنا السابق.

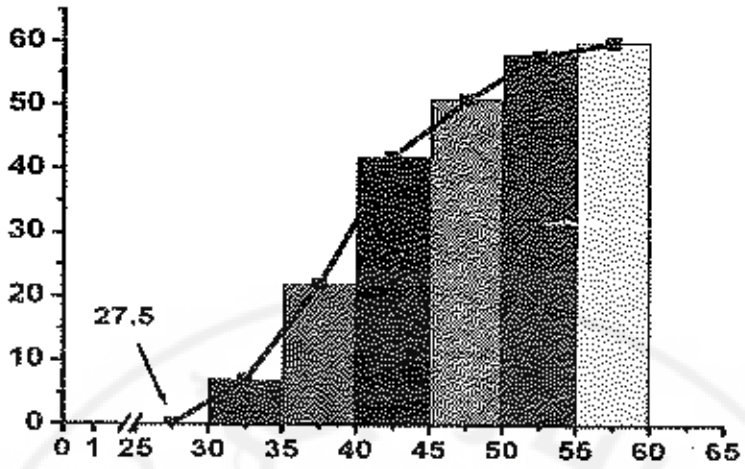
الجدول (3-8) جدول التوزيع التكراري المتجمع الصاعد

التسلسل	الحدود الدنيا للفئات	التكرار المجمّع الصاعد	التكرار المجمّع الصاعد النسبي
1	أقل من 30	0	0
2	أقل من 35	7	0.12
3	أقل من 40	22	0.37
4	أقل من 45	42	0.7
5	أقل من 50	51	0.85
6	أقل من 55	58	0.97
7	أقل من 60	60	1

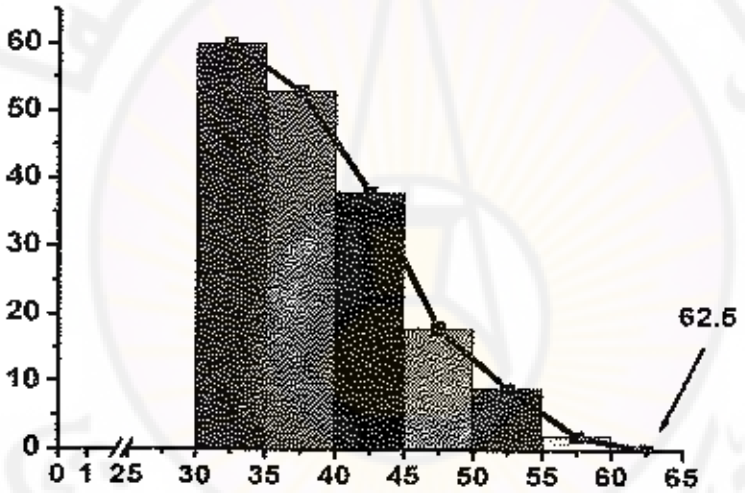
الجدول (4-8) جدول التوزيع التكراري المتجمع النازل

التسلسل	الحدود العليا للفئات	التكرار المجمّع النازل	التكرار المجمّع النازل النسبي
1	أكبر أو يساوي 30	60	1
2	أكبر أو يساوي 35	53	0.88
3	أكبر أو يساوي 40	38	0.63
4	أكبر أو يساوي 45	18	0.3
5	أكبر أو يساوي 50	9	0.18
6	أكبر أو يساوي 55	2	0.03
7	أكبر أو يساوي 60	0	0

وبالتالي فإنه يمكننا تمثيل المدرج (والمضلع) التكراري المتجمع الصاعد وكذلك المدرج (والمضلع) التكراري المتجمع النازل للبيانات السابقة كما يلي:



الشكل (3-8): المدرج (والمضلع) التكراري المتجمع الصاعد



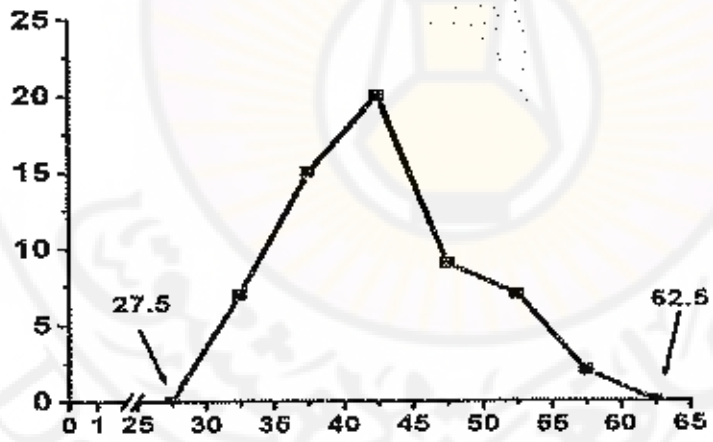
الشكل (4-8): المدرج (والمضلع) التكراري المتجمع النازل

4- المنحني التكراري (The frequency curve):

بالعودة للمثال (1) نلاحظ البيانات المذكورة تمثل عدد المولدات المبيعة يومياً خلال 60 يوم فقط حيث تعد هذه القياسات عينة من مجتمع أيام السنة بكاملها. وبالتالي يمكننا تعريف المجتمع الإحصائي بأنه مجموعة كل العناصر التي تشملها دراسة إحصائية ما،

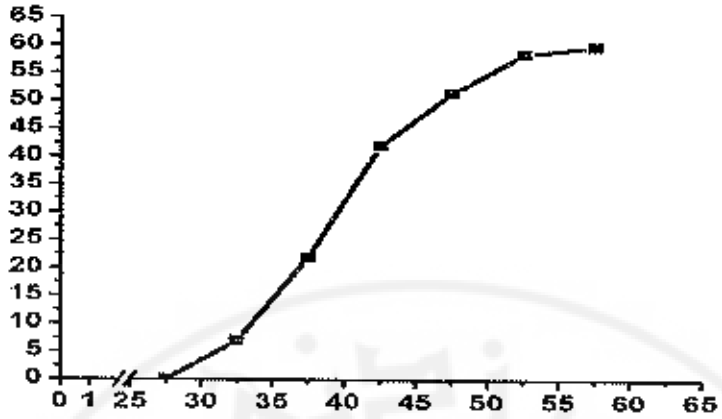
بينما العينة هي مجموعة جزئية من ذلك المجتمع الإحصائي قيد الدراسة. عند دراسة مسألة إحصائية على مجتمع ما غالباً ما تكون الدراسة صعبة أو مستحيلة، لذلك يلجأ الإحصائي إلى اختيار عينة من هذا المجتمع ثم يقوم بدراسة المسألة ضمن العينة للوصول إلى قرار يعمم بعدئذٍ ليشمل المجتمع بكامله. ولكي يكون هذا القرار دقيقاً يجب اختيار العينة بشكل جيد وغير متحيز وبصورة عشوائية، حيث تدعى عندئذٍ بالعينة العشوائية التي تعرف على أنها عينة مختارة من المجتمع الإحصائي بحيث إنّ أي مجموعة جزئية أخرى من المجتمع لها عدد عناصر هذه العينة نفسها، تملك الفرصة نفسها للاختيار.

وجدنا سابقاً أنه يمكن عرض البيانات باستخدام خط منكسر يدعى بالمضلع التكراري، حيث كان لدينا عدد محدود من الفئات. وفي الحالة التي يكون فيها عدد الفئات كبيراً وطول كل فئة صغير يتحول الخط المنكسر إلى خط منحنٍ ندعوه بالمنحني التكراري. ممّا سبق نلاحظ أنّ المنحني التكراري للبيانات المبينة في الجدول (2-8) هو كما في الشكل الآتي:

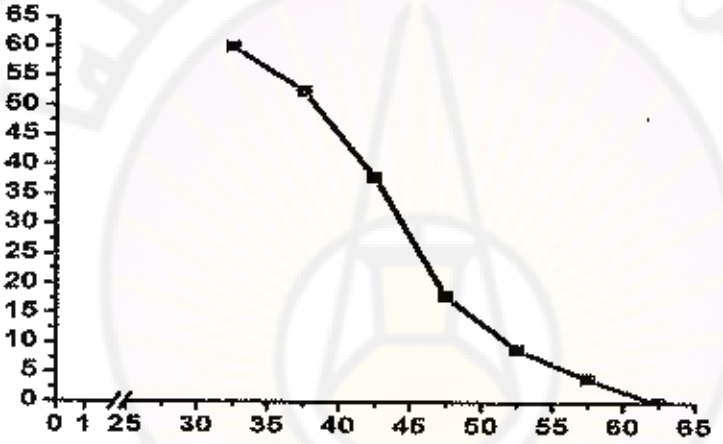


الشكل (5-8): المنحني التكراري

كما نلاحظ أيضاً بأنّ المنحني التكراري المتجمع الصاعد والمنحني التكراري المتجمع النازل، للمثال (1) هما المنحنيان الموضحان بالشكلين الآتيين:

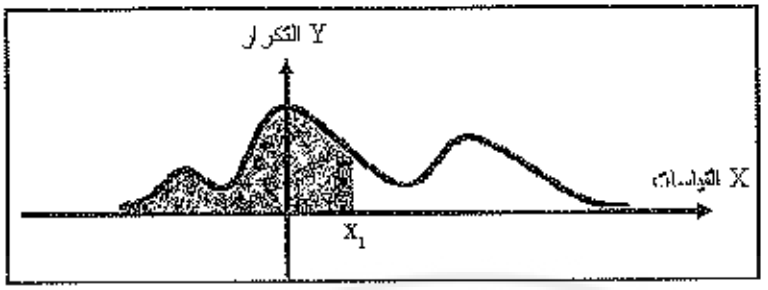


الشكل (6-8): المنحني التكراري المتجمع الصاعد



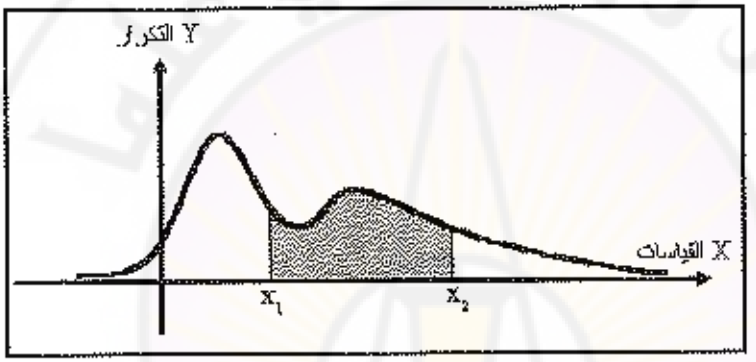
الشكل (7-8): المنحني التكراري المتجمع النازل

ممّا سبق نجد أنه يمكن تمثيل البيانات في أية مسألة إحصائية بمنحنٍ تكراري؛ حيث تختلف أشكال المنحنيات التكرارية من مسألة إلى أخرى. وقد اتفق في الإحصاء على عدّ المساحة الكلية الواقعة تحت المنحني التكراري مساوية للواحد لجميع المنحنيات التكرارية؛ وبالتالي فإنّ المساحة المظللة في الشكل (8-8) مثلاً تمثل النسبة المئوية لعدد القياسات التي هي أصغر من x_1.



الشكل (8-8)

كما تمثل المساحة المظللة في الشكل (8-9) النسبة المئوية لعدد القياسات الواقعة بين x_1 و x_2.



الشكل (8-9)

٣.٢.٨ مقاييس النزعة المركزية والتشتت:

بعد عملية عرض البيانات الإحصائية وتحليلها بيانياً يقوم الإحصائي عادةً بإجراء بعض العمليات العددية على هذه المعطيات لاستخلاص بعض المقاييس التي تساعد في وصف البيانات بصورة دقيقة للوصول لبعض النتائج المطلوبة. حيث تسمى المقاييس العددية التي تصف مجتمعاً إحصائياً بالوسطاء (المعالم) بينما تسمى المقاييس العددية التي تصف عينة بالإحصائيات.

يُرمز لوسطاء المجتمع الإحصائي عادةً بأحرف يونانية (مثل μ ، σ ، ...) كما يُرمز لإحصائيات العينة بحروف لاتينية (مثل $\bar{x}$ ، s ، ...). ممّا سبق نلاحظ أنّ الوسيط هو

قيمة ثابتة تصف المجتمع الإحصائي، بينما الإحصائية هي قيمة متغيرة تتغير من عينة لأخرى.

تُصنف المقاييس الإحصائية في الإحصاء إلى نوعين، (a) مقاييس النزعة المركزية و (b) مقاييس التشتت حيث يُعرّف مقياس النزعة المركزية على أنه أي قياس عددي يُعبر عن موضع تمركز التوزيع، لمجموعة من البيانات. بينما يُعرف مقياس التشتت على أنه أي قياس عددي يُعبر عن تباعد أو انتشار البيانات حول موضع تمركز التوزيع.

(a)– مقاييس النزعة المركزية (Measures of central tendency):

من هذه المقاييس سندرس فقط المتوسط الحسابي والوسط والمنوال.

(1) المتوسط الحسابي (The mean):

يُعرّف المتوسط الحسابي النقطي لمجموعة من القياسات $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (ليست بالضرورة كلها مختلفة) الممثلة لمجتمع إحصائي محدود حجمه n، بالعلاقة الآتية:

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \qquad (8.1)$$

وفي الحالة التي تمثل فيها القياسات $x_1, x_2, \ldots, x_n$ عينة حجمها n مأخوذة من مجتمع كبير العدد أو غير محدود فإن المتوسط الحسابي النقطي يكون:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \qquad (8.2)$$

مثال (2): في دراسة إحصائية لمعرفة متوسط عمر المحرك لنوع معيّن من السيارات، أُخذت عينة مؤلفة من 8 سيارات من هذا النوع حيث تم تجريب محركاتها وتسجيل أعمار هذه المحركات (بآلاف الكيلومترات) فكانت كالآتي:

180, 130, 220, 150, 195, 130, 173, 195

أوجد متوسط عمر المحرك لهذا النوع من السيارات.

الحل:

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{180+130+\ldots+173+195}{8} = 171.625 \approx 172$$

وبالتالي فإنّ متوسط عمر المحرّك لهذا النوع من السيارات هو 172 ألف كيلومتر تقريباً.

(2) المتوسط الحسابي للبيانات المبوبة:

إذا كانت القياسات المفروضة معرّفة ضمن جدول التوزيع التكراري النقطي الآتي:

القياسات	x_1	$x_2 \ldots$	x_k
التكرار	f_1	$f_2 \ldots$	f_k

حيث تمثل f_i التكرار للقياس x_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$، عندئذٍ يُعرف المتوسط الحسابي النقطي لهذه القياسات بالعلاقة:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i f_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i} \qquad (8.3)$$

وفي الحالة التي تكون فيها القياسات معرفة ضمن جدول التوزيع التكراري الفئوي، فإنّ المتوسط الحسابي الفئوي يكون:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} c_i f_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i} \qquad (8.4)$$

حيث يدلّ k على عدد الفئات، أمّا c_i و f_i فهي تمثل على الترتيب مركز الفئة i وتكرار هذه الفئة.

مثال(3): أوجد المتوسط الحسابي النقطي والمتوسط الحسابي الفئوي للقياسات المبينة في المثال (1)

الحل: بالاستفادة من جدول التوزيع التكراري النقطي المبيّن في المثال (1) نجد أنّ المتوسط الحسابي النقطي للقياسات هو:

$$\bar{x} = \frac{\Sigma xf}{\Sigma f} = \frac{(30)(3)+(32)(4)+\ldots+(59)(2)}{60} = \frac{2528}{60} = 42.13$$

كذلك نجد من جدول التوزيع التكراري الفئوي المبيّن في المثال (1) أنّ المتوسط الحسابي الفئوي للقياسات هو:

$$\bar{x} = \frac{\Sigma cf}{\Sigma f} = \frac{(32.5)(7)+\ldots+(57.5)(2)}{60} = \frac{2548.6}{60} = 42.48$$

ممّا سبق نلاحظ أن المتوسط الحسابي النقطي للقياسات يعطي القيمة الصحيحة تماماً للمتوسط بينما يعطي المتوسط الحسابي الفئوي قيمة تقريبية لهذا المتوسط. حيث يلجأ الإحصائي غالباً لحساب المتوسط النقطي، وفي الحالات التي يكون فيها عدد القياسات كبيراً جداً يلجأ لحساب المتوسط الفئوي. حيث نجد أنّ الخطأ هنا ناتج عن فقدان العناصر الأساسية في أثناء عملية التبويب والتصنيف.

(3) الوسط (The median):

يعرّف الوسط النقطي لمجموعة من القياسات $x_1, x_2, \ldots, x_n$ المرتبة تصاعدياً أو تنازلياً، بأنه القيمة الواقعة في وسط هذه القياسات (إذا كان عددها فردياً) أو المتوسط الحسابي للقيمتين المتتاليتين الواقعتين في الوسط (إذا كان عدد القياسات زوجياً). حيث يُرمز عادةً للوسط بالرمز $\tilde{\mu}$ في حالة المجتمع الإحصائي وبالرمز $\tilde{x}$ في حالة العينة. أمّا الوسط الفئوي للقياسات المبوبة فهو القيمة التقريبية الواقعة في فئة الوسط التي نحصل عليها من العلاقة:

$$\tilde{x} = L_k + \frac{\frac{N}{2} - \sum_{i=1}^{k-1} f_i}{f_k} \ell \qquad (8.5)$$

حيث يَدل N على العدد الكلي للقياسات، كما يَدل k على تسلسل فئة الوسط، أمّا ℓ و L_k و f_k فهي تدل على طول فئة الوسط والحد الأدنى لها وتكرارها على الترتيب.

ملاحظة هامة ②: يتم إيجاد فئة الوسط من خلال البحث عن الفئة التي يكون عندها التكرار المتجمع الصاعد أكبر أو مساوياً $\frac{N}{2}$ (نصف التكرارات).

مثال(4): أوجد الوسط النقطي للبيانات المبينة في المثال (2).

الحل: نلاحظ أن عدد القياسات في المثال (2) هو عدد زوجي ويساوي 8، عندئذٍ نرتب البيانات ترتيباً تصاعدياً كما يلي:

130, 130, 150, 173, 180, 195, 195, 220

ثم نأخذ المتوسط الحسابي للقيمتين 173,180 حيث نجد أنّ الوسط النقطي لهذه العينة هو:

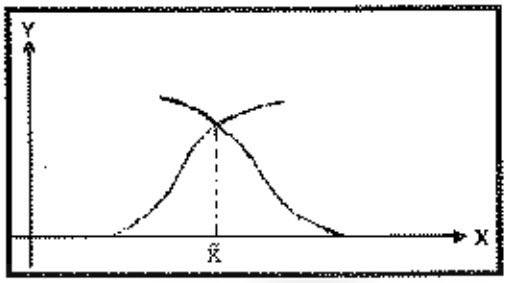
$$\tilde{x} = \frac{173+180}{2} = 176.5$$

مثال(5): أوجد الوسط الفئوي للبيانات المبينة في المثال (1).

الحل: لإيجاد الوسط الفئوي للبيانات نلاحظ من الجدول (6.2) أن فئة الوسط هي الفئة الثالثة؛ لأن القياس الذي ترتيبه $\frac{N}{2} = \frac{60}{2} = 30$ يقع فيها، وبالتالي فإن قيمة الوسط الفئوي تكون:

$$\tilde{x} = 40 + \frac{30-22}{20}(5) = 42$$

ملاحظة ③: يمكن تعيين الوسط لمجموعة من البيانات بشكلٍ هندسي بأخذ نقطة تقاطع المنحنيين التكراريين الممثلين للتوزيعين التكراريين المتجمع الصاعد والمتجمع النازل كما في الشكل الآتي:



الشكل (8.10)

4- المنوال (The mode):

يعرّف المنوال النقطي لمجموعة من القياسات بأنه القيمة الأكثر تكراراً بينها ويُرمز له بالرمز M.

من التعريف السابق نلاحظ أن المنوال قد لا يكون موجوداً، وإذا وجد فقد لا يكون وحيداً. أمّا المنوال الفئوي للقياسات المبوبة فهو القيمة الواقعة في الفئة الأعلى تكراراً، ويحسب من العلاقة الآتية:

$$M = L_k + \frac{f_k - f_{k-1}}{(f_k - f_{k-1}) + (f_k - f_{k+1})}\ell \qquad (8.6)$$

حيث يدل k على رقم فئة المنوال، كما يدل ℓ على طول هذه الفئة، أمّا f_{k-1} ،f_k ،f_{k+1} فهي تدل على تكرارات كل من فئة المنوال والفئتين التي تسبقها وتليها على الترتيب.

مثال(6): أوجد المنوال النقطي للقياسات المبينة في المثال (2).

الحل: من البيانات المذكورة في المثال (2) نلاحظ أن كلاً من القياسين 130 ، 195 يمكن عدّه المنوال النقطي حيث تكرر ذكر كل منهما مرتين.

مثال (7): أوجد المنوال النقطي للبيانات المبينة في المثال (1)، ثم أوجد المنوال الفئوي لهذه البيانات.

الحل: بالعودة للمثال (1) نلاحظ من جدول التوزيع التكراري النقطي (1-8) أنّ المنوال النقطي للبيانات هو القياس 39 حيث تكرر ذكره تسع مرّات، ومنه فإنّ: M = 39.
كما نلاحظ من جدول التوزيع التكراري الفئوي (2-8) أن الفئة الثالثة هي الفئة الأعلى تكراراً وبالتالي فإنّ المنوال الفئوي يقع ضمنها ويساوي:

$$M = 40 + \frac{(20-15)(5)}{(20-15)+(20-9)} = 38.44$$

لاحظ أنّ المنوال النقطي يعطي القيمة الصحيحة تماماً للمنوال بينما يعطي المنوال الفئوي قيمة تقريبية وهمية لهذا المنوال. ويرجع هذا الخطأ إلى القيم الضائعة أو المهملة في أثناء التصنيف والتبويب.

(b)- مقاييس التشتت (Measures of variations):

(1) المدى (The range):

يعرّف المدى النقطي R بمجموعة من القياسات على أنه الفرق بين الحدين الأعلى والأدنى لها. كما يعرّف المدى الفئوي للبيانات المبوبة على أنه الفرق بين مركزي الفئتين الأولى والأخيرة.

مثال(8): أوجد كلاً من المدى النقطي والمدى الفئوي للبيانات المبينة في المثال (1).
الحل: من البيانات المذكورة في المثال (1) نجد أنّ المدى النقطي لهذه البيانات يساوي: 59-30=29 ، بينما نجد أنّ المدى الفئوي يساوي: 57.5-32.3=25.2 والفارق بينهما ناتج عن إهمال القيم المتطرفة.

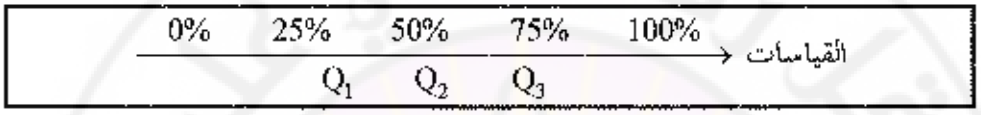
(2) الربيعات (Quartiles):

إذا كانت $x_1, x_2, \ldots, x_n$ مجموعة من القياسات المرتبة تصاعدياً، عندئذٍ ندعو بالربيع الأدنى (أو الأول) القياس الذي يكون ترتيبه عند ربع القياسات أي الذي يقع قبله 25%

من القياسات، كما ندعو بالربيع الأعلى (أو الثالث) القياس الذي يكون ترتيبه عند ثلاثة أرباع القياسات؛ أي الذي يقع قبله 75% من القياسات. وندعو الربيع الثاني ذلك القياس الذي يكون ترتيبه عند منتصف البيانات؛ أيّ الذي يقع قبله 50% من القياسات.

ممّا سبق نلاحظ أنّ الربيع الثاني لمجموعة من القياسات يساوي وسطها.

إذا رمزنا للربيعات الثلاثة الأدنى والثاني والأعلى بالرموز Q_1، Q_2، Q_3 على الترتيب، فإنّه يمكن توضيحها بالشكل الآتي:



الشكل (11–8)

(3) نصف المدى الربيعي:

إذا كان Q_1 و Q_3 الربيعين الأدنى والأعلى على الترتيب لمجموعة من القياسات المرتبة تصاعدياً، عندئذٍ يُعرف نصف المدى الربيعي النقطي لهذه القياسات بالعلاقة:

$$Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2} \qquad (8.7)$$

كما يُعرّف نصف المدى الربيعي الفئوي لمجموعة من البيانات المبوبة، بأنه القيمة الناتجة من العلاقة (8.7) مع ملاحظة أن Q_1 و Q_3 في هذه الحالة يمثلان الربيعين الفئويين الأدنى والأعلى لهذه البيانات على الترتيب:

$$Q_1 = L_k + \frac{\frac{n}{4} - \sum_{i=1}^{k-1} f_i}{f_k} \cdot \ell \qquad (8.8)$$

$$Q_3 = L_k + \frac{\frac{3n}{4} - \sum_{i=1}^{k-1} f_i}{f_k} \cdot \ell \qquad (8.9)$$

حيث تدل k و ℓ و L_k و f_k في العلاقة (8.8) على ترتيب فئة الربيع الأدنى وطولها وتكرارها والحد الأدنى فيها، بينما تدل هذه الرموز في العلاقة (8.9) على الترتيب لفئة الربيع الأعلى وطولها وتكرارها والحد الأدنى فيها.

مثال(9): أوجد الربيعات الثلاثة ونصف المدى الربيعي النقطي للبيانات المذكورة في كل من الحالتين الآتيتين:

أ – 37, 49, 40, 64, 59, 46, 48

ب– 33, 47, 53, 52, 50, 38, 40, 43

الحل: أ – لنرتب القياسات ترتيباً تصاعدياً كما يلي:

37, 40, 46, 48, 49, 59, 64

حيث نلاحظ أنّ عددها ($n = 7$) فردياً، ومنه فإن الربيع الثاني هو الوسط لهذه البيانات وهو القياس الموجود في المنتصف؛ أي أن: $Q_2 = 48$ ، أما الربيع الأول، فهو الوسط للقياسات الواقعة قبل Q_2 وهي عبارة عن ثلاثة قياسات، وهذا يعني بأن: $Q_1 = 40$ وأخيراً، فإن الربيع الثالث هو الوسط للقياسات الواقعة بعد Q_2 حيث نجد أن: $Q_3 = 59$؛ وبالتالي فإن نصف المدى الربيعي النقطي يكون:

$$Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{59 - 40}{2} = 9.5$$

ب– بترتيب القياسات المذكورة ترتيباً تصاعدياً نجد أنّ:

33, 38, 40, 43, 47, 50, 52, 53

حيث لدينا عدد القياسات ($n=8$) زوجياً، ومنه فإن الربيع الثاني هو الوسط لهذه البيانات وهو المتوسط الحسابي للقيمتين الواقعتين بالمنتصف . أي أن $Q_2 = \frac{43+47}{2} = 45$ ، أما الربيع الأول فهو الوسط للقياسات الواقعة قبل Q_2 وهي عبارة عن ثلاثة قياسات، وهذا يعني أن: $Q_1 = 38$ ، وأخيرا فإن الربيع الثالث هو الوسط للقياسات الواقعة بعد Q_2 وهي ثلاثة قياسات أيضاً، وهذا يعني أن: $Q_3 = 52$

وبالتالي فإن نصف المدى الربيعي النقطي يكون:

$$Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{52-38}{2} = 7$$

مثال(10): أوجد الربيعين الفئويين الأدنى والأعلى للبيانات المبوبة المذكورة في المثال (1) ثم استنتج نصف المدى الربيعي الفئوي لهذه البيانات.

الحل: لحساب الربيعين الفئويين الأدنى والأعلى للبيانات نلاحظ أنّ فئة الربيع الأدنى هي الفئة التي يساوي تكرارها المتجمع الصاعد أو يزيد على ربع البيانات. وبما أنّ $\frac{n}{4} = \frac{60}{4} = 15$ وبالتالي فإنّ فئة الربيع الأدنى هي الفئة الثانية. كما نلاحظ أنّ فئة الربيع الأعلى هي الفئة التي يساوي تكرارها المتجمع الصاعد أو يزيد على $\frac{3}{4}$ البيانات. وبما أنّ: $\frac{3n}{4} = 45$ وبالتالي فإنّ فئة الربيع الأعلى هي الفئة الرابعة. ومنه نجد من العلاقتين (8.8) و(8.9) أنّ الربيعين الفئويين الأدنى والأعلى هما:

$$Q_1 = 35 + \frac{15-7}{15}(5) = 37.67$$

$$Q_3 = 45 + \frac{45-42}{9}(5) = 46.67$$

وبالتالي فإن نصف المدى الربيعي الفئوي لهذه البيانات هو:

$$Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{46.67 - 37.67}{2} = 4.5$$

(4) المئينيات والعُشيرات (Percentiles and Deciles):

يمكن تعريف مقاييس أخرى مشابهة للربيعات لمجموعة من القياسات مثل المئينيات والعشيرات حيث يعرّف المئين (أو المئوي) P_i $(i = 1,2,\cdots,99)$ لمجموعة من القياسات المرتبة تصاعدياً، بأنه القياس الذي يتجاوز في ترتيبه $i\%$ من القياسات، ويقلّ عن $(1 - i)\%$ من القياسات الباقية. فمثلاً P_{37} يدلّ على القياس الذي يتجاوز في ترتيبه

37% من القياسات؛ وبالتالي فإن الربيع الأدنى هو P_{25} والوسط هو P_{50} بينما الربيع الأعلى فهو P_{75}.

كما يعرّف العُشير (أو العشري) D_i $(i=1,2,\cdots,10)$ لمجموعة من القياسات المرتبة تصاعدياً، بأنه القياس الذي يتجاوز في ترتيبه $\frac{i}{10}$ من القياسات. ومنه فإن D_4 مثلاً، يمثل القياس الذي يتجاوز في ترتيبه $\frac{4}{10}$ أو 40% من القياسات. وتستخدم المئينيات والعشيرات للحصول على أكبر عدد ممكن من البيانات غير المتطرفة عند إجراء عملية التبويب والتصنيف والحصول على دقة أكبر عندئذٍ.

(5) التباين (The variance):

يعرّف التباين النقطي لمجموعة من القياسات $x_1, x_2, \ldots, x_n$ الممثلة لعينة ما التي متوسطها $\bar{x}$ بأنه معدل مربعات انحرافات هذه القياسات عن متوسطها، ويرمز له بالرمز S^2 حيث:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n} \qquad (8.10)$$

إنّ العلاقة السابقة تعطي تباين العينة الذي يعد تقديراً مناسباً لتباين المجتمع، وقد وجد إحصائياً بأن هذا التقدير يكون أفضل عند القسمة على $n-1$ بدلاً من n في العلاقة (8.10) حيث تصبح بالشكل:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1} \qquad (8.11)$$

كما يمكن حساب تباين العينة أيضاً من العلاقة الآتية التي تنتج عن العلاقة (8.11) بعد التبسيط:

$$S^2 = \frac{n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-(\sum_{i=1}^{n}x_i)^2}{n(n-1)} \qquad (8.12)$$

أمّا التباين الفئوي لعينة فيها n من القياسات المبوبة فهو:

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k}(c_i - \bar{x})^2 f_i \qquad (8.13)$$

حيث يدّل k عدد الفئات أمّا c_i فهي تدّل على مركز الفئة رقم i.

ملاحظة ④: يرمز عادةً لتباين العينة بالرمز S^2 حيث يحسب من العلاقة (8.11) إذا كان نقطياً ومن العلاقة (8.13) إذا كان فئوياً. كما يرمز لتباين المجتمع بالرمز σ^2 وهو غالباً ما يكون غير معلوم. وفي حال وجوده، فإن التباين النقطي لمجتمع محدود فيه n عنصر يحسب من العلاقة الآتية:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^n}{n}$$

حيث يدل μ على المتوسط النقطي لهذا المجتمع.

أما التباين الفئوي لمجتمع محدود فيه n من القياسات المبوبة فيعطى بالعلاقة:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(c_i - \mu)^2 f_i$$

حيث يدل μ على المتوسط الفئوي لهذا المجتمع.

(6) الانحراف المعياري (Standard deviation):

يسمى الجذر التربيعي الموجب للتباين النقطي لمجموعة من القياسات بالانحراف المعياري النقطي لها. كما يُسمى الجذر التربيعي الموجب للتباين الفئوي لمجموعة من القياسات المبوبة بالانحراف المعياري الفئوي لها.

مثال(11): أوجد التباين والانحراف المعياري للعينة المؤلفة من القياسات المذكورة في المثال (2).

الحل: وجدنا في المثال (2) أنّ: $\bar{x} = 171.625$. ومنه فإنّ تباين العينة هو:

$$S^2 = \frac{\sum (x-\bar{x})^2}{n-1} = \frac{(180-171.625)^2 + \ldots + (195-171.625)^2}{7} = 1062.55$$

وبالتالي فإن الانحراف المعياري يكون:

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{1062.55} = 32.597$$

٤.٢.٨ معامل الاختلاف ومقاييس الالتواء والتفلطح:

(a)– معامل الاختلاف (Coefficient of Variation):

يعرّف معامل الاختلاف لمجموعة من القياسات الممثلة لعينة بأنه النسبة بين الانحراف المعياري والمتوسط الحسابي لهذه القياسات. حيث يرمز له بالرمز C.V ومنه فإنّ:

$$C.V = \frac{s}{\bar{x}} \qquad (8.14)$$

وفي حالة المجتمع الإحصائي المحدود يكون:

$$C.V = \frac{\sigma}{\mu} \qquad (8.15)$$

كما يمكن حساب معامل الاختلاف عن طريق الربيعات حيث يكون:

$$C.V = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} \qquad (8.16)$$

يستخدم معامل الاختلاف للمقارنة بين مجموعتين من البيانات وتحديد أيّهما أفضل من الأخرى، حيث تكون المجموعة ذات المعامل الأصغر أي ذات الاختلاف الأقل هي المجموعة الأفضل، ويلاحظ بأنه يقيس مقدار الانحراف في الوحدة الواحدة من البيانات.

ملاحظة ⑤: إن معامل الاختلاف السابق يسمى معامل الاختلاف النقطي. أمّا معامل الاختلاف الفئوي لمجموعة من القياسات المبوبة فهو النسبة بين الانحراف المعياري الفئوي والمتوسط الحسابي الفئوي لهذه القياسات.

مثال(12): قارن بين المجموعتين التاليتين من البيانات الممثلتين لعينتين مختلفتين من القياسات وذلك من حيث قوة التمركز حول المتوسط الحسابي ودرجة التشتت.

A:	15	17	21	18	19	22
B:	40	7	8	10	9	

الحل: بحساب المتوسط الحسابي والانحراف المعياري لكل من المجموعتين السابقتين نجد أنّ:

$S = 2.58$ ، $\bar{x} = 18.67$ من أجل البيانات A

و $S = 14.13$ ، $\bar{x} = 14.8$ من أجل البيانات B

ومنه فإن معاملي الاختلاف الناتجين يكونان:

$$C.V_A = \frac{2.58}{18.67} = 0.138$$

$$C.V_B = \frac{14.13}{14.8} = 0.955$$

حيث نجد أنّ مجموعة البيانات A أفضل من المجموعة B. لأن درجة أو نسبة تشتت البيانات في المجموعة A عن متوسطها أقل بكثير من درجة تشتت بيانات المجموعة B عن متوسطها.

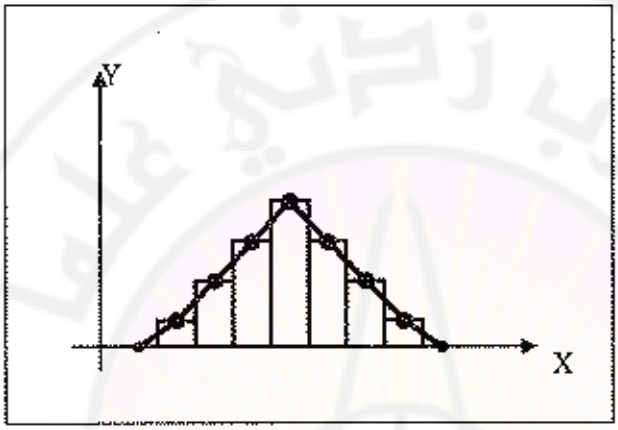
(b)– مقاييس الالتواء والتفلطح:

(1) مقاييس الالتواء:

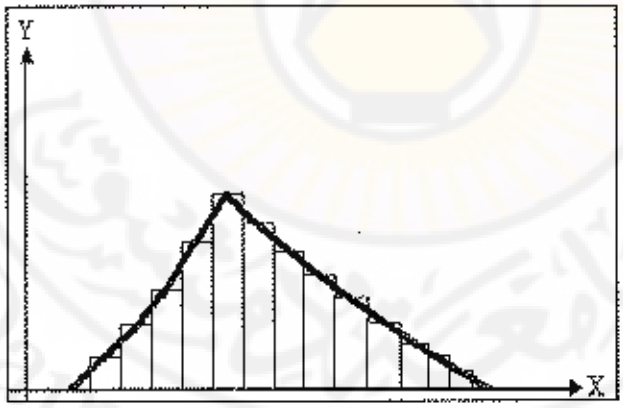
يسمى التوزيع التكراري الذي يتساوى فيه المتوسط الحسابي مع كل من المنوال والوسط بالتوزيع التكراري المتناظر (أو المتماثل). وفي الحالة المعاكسة أي عند اختلاف المتوسط الحسابي عن المنوال والوسط يدعى التوزيع التكراري بالتوزيع التكراري غير المتناظر (أو ملتوٍ). حيث يكون الالتواء موجباً (نحو اليمين) إذا كان انتشار البيانات على يمين المنوال أكبر من انتشارها على يساره $M < \tilde{x} < \bar{x}$. وبعكس ذلك يكون الالتواء سالباً (نحو اليسار) $\bar{x} < \tilde{x} < M$. وهكذا نلاحظ أن الالتواء يقيس درجة تماثل أو اعتدال التوزيع التكراري حول متوسط البيانات. وعلى هذا الأساس يمكن تعريف معامل الالتواء المنوالي sk بالعلاقة الآتية:

$$sk = \frac{\bar{x} - M}{s} \qquad (8.17)$$

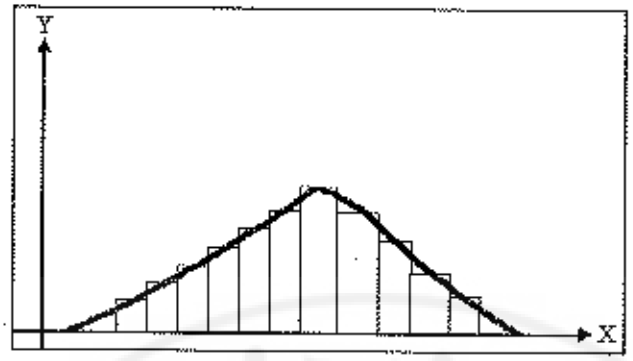
من التعريف السابق نجد أن معامل الالتواء للتوزيعات المتماثلة يساوي الصفر؛ حيث يمكن توضيح التوزيعات التكرارية المتماثلة وغير المتماثلة (الملتوية) من خلال الأشكال البيانية الآتية:



الشكل (8–12): توزيع تكراري متماثل أو معتدل فيه $\bar{x} = M = \tilde{x}$ ودرجة الالتواء صفر



الشكل (8–13): توزيع تكراري غير متماثل وملتو نحو اليمين (موجب) فيه $M < x < \tilde{x}$



الشكل (14-8): توزيع تكراري غير متماثل وملتو نحو اليسار (سالب) $\bar{x} < \tilde{x} < M$

هناك تعريف آخر لمعامل الالتواء وذلك عن طريق الوسط $\tilde{x}$ حيث يسمى في هذه الحالة بمعامل الالتواء الوسطي (أو مقياس بيرسون للالتواء) ويعطى بالعلاقة:

$$sk = \frac{3(\bar{x} - \tilde{x})}{s} \qquad (8.18)$$

حيث يعد معامل الالتواء الوسطي أكثر دقة من معامل الالتواء المنوالي لأن الوسط يصف البيانات بشكلٍ أفضل من المنوال.

وفي الحالة التي يتعذر فيها حساب المتوسط الحسابي كما في التوزيعات المفتوحة نلجأ إلى استخدام الربيعات في حساب معامل الالتواء الوسطي حيث يعطى عندئذٍ بالعلاقة:

$$sk = \frac{(Q_3 - \tilde{x}) - (\tilde{x} - Q_1)}{Q_3 - Q_1} \qquad (8.19)$$

ويسمى بمعامل الالتواء الربيعي؛ حيث يكون هذا المعامل مساوياً للصفر في حالة التوزيع التكراري المتماثل، وذلك لأن الربيعين Q_1 و Q_3 يكونان على بعدين متساويين من الوسط وعلى جانبيه. وعندما يختلف بعد كل من الربيعين عن الوسط نحصل على معامل التواء موجب أو سالب حيث يكون ممثلاً لتوزيع تكراري ملتوٍ نحو اليمين أو نحو اليسار.

ملاحظة ⑥ (العلاقة التجريبية المركزية):

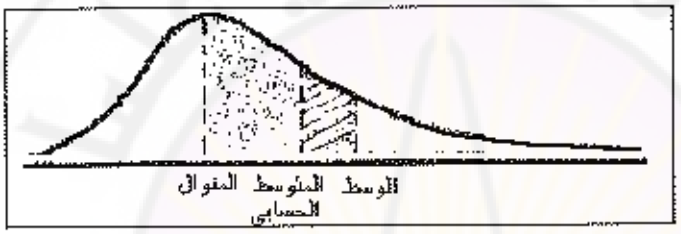
هناك علاقة تربط بين المتوسط الحسابي والوسط والمنوال وهي:

$$(\bar{x} - M) = 3(\bar{x} - \tilde{x}) \qquad (8.20)$$

حيث يمكن توضيح ذلك من خلال الشكلين الآتيين:



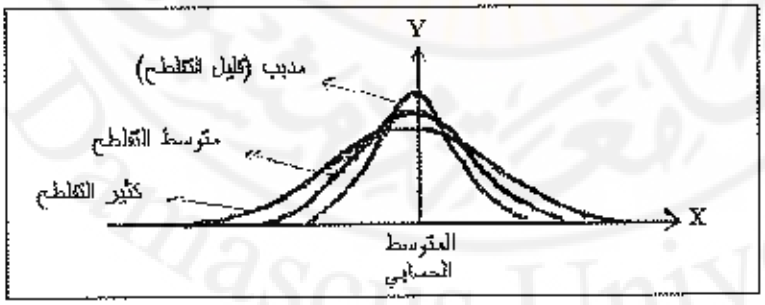
الشكل (8-15)



الشكل (8-16)

(2) مقاييس التفلطح (معامل التفلطح):

يُدعى التوزيع التكراري الذي يكون فيه انتشار البيانات حول متوسطها متماثلاً وبعيداً، بالتوزيع التكراري المتفلطح، ومنه فإنّ التفلطح يقيس ابتعاد البيانات أو اقترابها من المتوسط الحسابي، ويمكن توضيح ذلك من خلال الشكل الآتي:



الشكل (8.17)

حيث يتم حساب معامل التفلطح والذي يرمز له بالرمز k لمجموعة من البيانات من خلال العلاقة الآتية:

$$k = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^4}{n \; s^4} \qquad (8.21)$$

وعليه يعد التوزيع مفلطحاً إذا كان معامل التفلطح $k > 1$ وبخلاف ذلك يعد التوزيع مدبباً حيث يكون $k < 1$.

مثال (13): ليكن لدينا عينة عشوائية مؤلفة من القياسات:

40, 9, 4, 7, 16

والمطلوب حساب معاملي الالتواء الوسطي والتفلطح لهذه القياسات.

الحل: من القياسات السابقة نجد أنّ:

$$S^2 = 211.703 \quad , \quad \bar{x} = 15.2 \quad , \quad \tilde{x} = 9$$

ومنه فإنّ معاملي الالتواء الوسطي والتفلطح يكونان:

$$sk = \frac{3(\bar{x} - \tilde{x})}{s} = 0.426$$

$$k = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^4}{n \; s^4} = \frac{400008.656}{224090.8} = 1.785$$

أي أنّ القياسات متشتتة بعضها عن بعض وملتوية نحو اليمين؛ لأنّ النسبة $sk = 0.426 > 0$ على الأقل، كما أنّ هناك درجة عالية من التفلطح في توزيعها، وذلك بملاحظة أنّ: $k = 1.785$؛ لأنّ التشتت عن المتوسط الحسابي كبير.

٥.٢.٨ المتغير المعياري:

ليكن لدينا مجموعة من القياسات الممثلة لعينة وليكن $\bar{x}$ متوسطها الحسابي و s انحرافها المعياري، ويفرض x أحد هذه القياسات عندئذٍ ندعو القياس z المعطى بالعلاقة:

$$z = \frac{x - \bar{x}}{s} \qquad (8.22)$$

بالمتغير المعياري (أو الدرجة المعيارية) للقياس X.

وفي حالة المجتمع الإحصائي المحدود ذي المتوسط μ والانحراف المعياري σ تصبح الدرجة المعيارية z للقياس x بالشكل:

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} \qquad (8.23)$$

وتستخدم الدرجة المعيارية عادةً للمقارنة بين قياسين مأخوذين من عينتين مختلفتين (أو مجتمعين إحصائيين محدودين مختلفين).

مثال(14): تقدم مهندس ميكانيك إلى اختبارين أجرتهما إحدى الشركات الراغبة بتعيين بعض المهندسين؛ فحصل على الدرجة 82 في اختبار اللغة الإنكليزية، والدرجة 89 في اختبار الميكانيك. فإذا علمت أنّ متوسط درجات المهندسين المتقدمين لاختبار اللغة كان 68 وبانحراف معياري قدره 8، وأنّ متوسط درجات المهندسين في اختبار الميكانيك كان 80 وبانحراف معياري قدره 6. فبيّن في أي اختبار كانت درجة المهندس أفضل مقارنة مع بقية المهندسين المتقدمين.

الحل: نلاحظ من مثالنا أنه لدينا مجتمعان إحصائيان محدودان مختلفان، الأول يمثل مجموعة درجات المهندسين في اختبار اللغة الإنكليزية والثاني يمثل مجموعة درجات هؤلاء المهندسين في اختبار الميكانيك. والقياسان المأخوذان من هذين المجتمعين هما درجتا المهندس المتقدم في الاختبارين. عندئذٍ يمكننا كتابة ما يلي:

الاختبار	درجة المهندس المتقدم	المتوسط الحسابي	الانحراف المعياري
اللغة الإنكليزية	$x_1 = 82$	$\mu_1 = 68$	$\sigma_1 = 8$
الميكانيك	$x_2 = 89$	$\mu_2 = 80$	$\sigma_2 = 6$

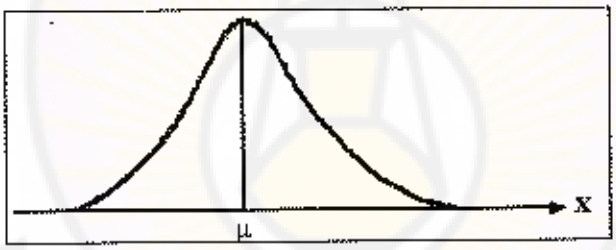
ولمعرفة في أي الاختبارين كان المهندس أفضل مقارنةً مع بقية المهندسين المتقدمين نوجد الدرجة المعيارية لكل من القياسين x_1 و x_2 حيث نجد أنّ:

$$z_1 = \frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1} = \frac{82-68}{8} = 1.75 \qquad z_2 = \frac{x_2 - \mu_2}{\sigma_2} = \frac{89-80}{6} = 1.50$$

أي أنّ درجة المهندس المتقدم في اللغة الإنكليزية تزيد 1.75 انحرافاً معيارياً على متوسط درجات المهندسين المتقدمين لاختبار اللغة، بينما تزيد درجة المهندس في الميكانيك بمقدار 1.50 انحرافاً معيارياً على متوسط درجات المهندسين المتقدمين في الميكانيك. وبمقارنة هاتين الدرجتين المعياريتين نجد أنّ المهندس كان أكثر تفوقاً في اللغة مقارنةً مع بقية المهندسين. على الرغم من أنّ درجته في اللغة أقل من درجته في الميكانيك.

٦.٢.٨ القاعدة التجريبية (Empirical rule):

وجدنا فيما سبق أنّ لكل توزيع تكراري مضلعاً تكرارياً أو بشكل أشمل منحنياً تكرارياً. حيث تختلف أشكال هذه المنحنيات التكرارية من توزيع لآخر. لكننا نلاحظ أن أغلب التوزيعات التي تواجهنا عملياً يكون لها منحنيات تكرارية متشابهة، تأخذ شكل الجرس كما في الشكل الآتي:

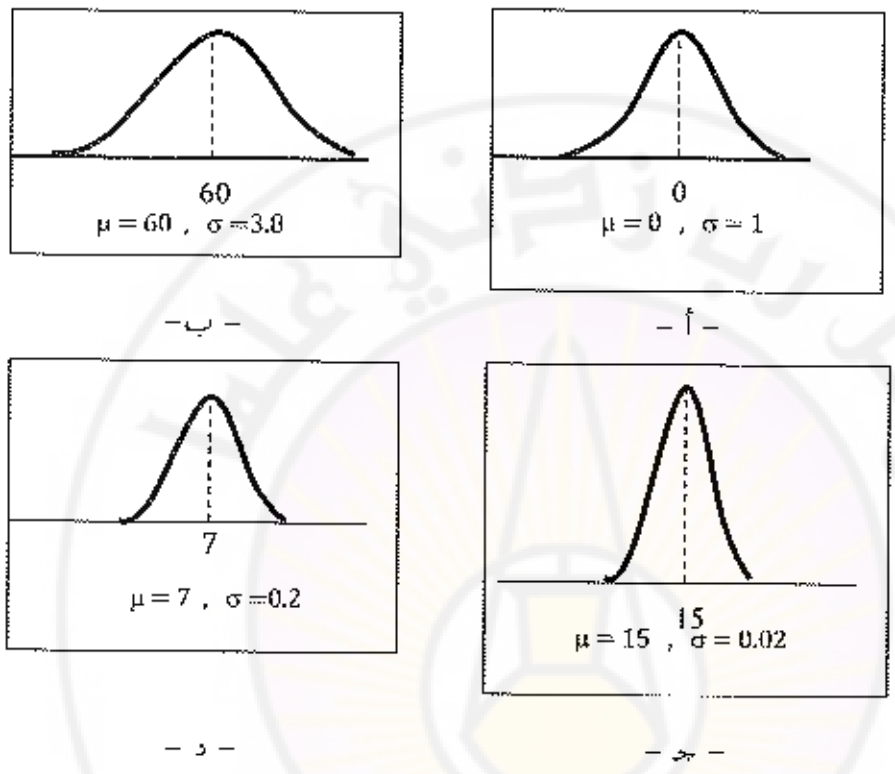


الشكل (8.18)

فمثلاً توزيع أعمار المحركات لنوع معيّن من السيارات يقابله منحن تكراري له شكل الجرس، كذلك نلاحظ أنّ قياسات أعمار المصابيح الكهربائية المنتجة في مصنع ما تتوزع بحيث يكون منحنيها التكراري له الشكل السابق أيضاً.

يسمى التوزيع التكراري الذي يقابله منحن تكراري له شكل الجرس، بالتوزيع المعتدل أو الطبيعي أو المتماثل. حيث يكون المنحني لهذا التوزيع متناظراً بالنسبة للمتوسط الحسابي μ. ويختلف باختلاف قيمة الانحراف المعياري σ. كما يسمى التوزيع التكراري بالتوزيع

الطبيعي القياسي عندما يكون متوسطه $\mu = 0$ وتباينه $\sigma = 1$ وهو المستخدم كثيراً في الحسابات الإحصائية. تمثل الأشكال التالية بعض المنحنيات التكرارية لتوزيعات معتدلة وطبيعية:



– أ – – ب – – جـ – – د –

الشكل (8.19): بعض المنحنيات التكرارية الممثلة لتوزيعات (طبيعية)

إذا كان لدينا توزيع طبيعي (أو قريب من الطبيعي) فإنه بالإمكان تحديد النسب لتوزيع القياسات بمجرد معرفتنا بالمتوسط الحسابي والانحراف المعياري لهذه القياسات؛ وذلك وفق القاعدة الآتية:

القاعدة التجريبية:

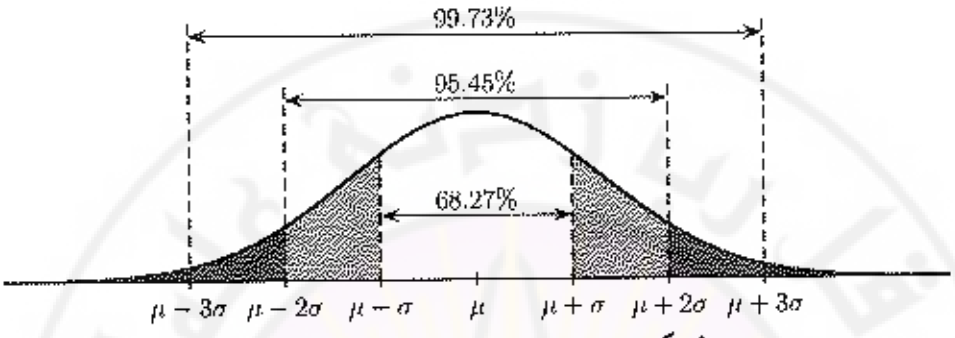
إذا كان لدينا مجموعة من القياسات لها التوزيع الطبيعي (أو القريب من الطبيعي)، فإنّه يكون لدينا تقريباً:

68.27% من القياسات تقع في الفترة $[\mu - \sigma \ , \ \mu + \sigma]$

95.45% من القياسات تقع في الفترة $[\mu - 2\sigma \ , \ \mu + 2\sigma]$

99.73% من القياسات تقع في الفترة $[\mu - 3\sigma \ , \ \mu + 3\sigma]$

ويمكن توضيح ذلك بالشكل الآتي:



الشكل (20–8): توضيح للقاعدة التجريبية

مثال (15): في دراسة لمعرفة عدد الأعطال الكهربائية التي تحدث يومياً في منطقة ما. تم مراقبة الأعطال في هذه المنطقة خلال 50 يوماً فكان المعدل الوسطي لحدوث الأعطال يومياً هو 30 عطلاً بانحراف معياري قدره 5 أعطال، وبفرض أنّ توزيع الأعطال معتدل (أي أنّ المنحني التكراري له شكل الجرس) فالمطلوب استخدام القاعدة التجريبية في وصف توزع الأعطال خلال هذه المدة.

الحل: لدينا $\bar{x}=30$ ، $s=5$

فحسب القاعدة التجريبية يمكن أن نتوقع تقريباً أنّ:

68.27% من الأيام المراقبة سوف يحدث فيها أعطال عددها محصور ضمن الفترة $[\bar{x}-s \ , \ \bar{x}+s]$ = [25, 35] وعدد هذه الأيام هو 34 يوماً.

95.45% من الأيام المراقبة سوف يحدث فيها أعطال عددها محصور ضمن الفترة $[\bar{x}-2s \ , \ \bar{x}+2s]$ = [20, 40] وعدد هذه الأيام هو 48 يوماً.

99.73% من الأيام المراقبة سوف يحدث فيها أعطال عددها محصور ضمن الفترة

$[\bar{x}-3s\ ,\ \bar{x}+3s] = [15, 54]$ وعدد هذه الأيام هو 50 يوماً.

٣.٨ مبادئ الاحتمال (Elements of Probability):

١.٣.٨ فضاء التجربة (Space of Experiment):

تسمى كل عملية تقودنا إلى مجموعة من النتائج (أو البيانات) في الإحصاء بالتجربة العشوائية، فعند رمي حجر نرد نجد أنّ النتائج المنتظرة ستكون هي الأعداد من 1 وحتى 6. وعند فحص جهاز كهربائي سنكون أمام نتيجتين إمّا يعمل وإمّا معطل. إذا أجرينا تجربة عشوائية ما، فإنه يُطلق على مجموعة كل النتائج الممكنة اسم فضاء التجربة، أو فضاء العينة (Sample space) رمز له بالرمز S، فمثلاً عند رمي قطعة نقود في الهواء نجد أنّ فضاء التجربة يكون:

$$S=\{H,T\}$$

حيث يدل الرمز H على ظهور الصورة كما يدل الرمز T على ظهور الكتابة. وعند اختبار مصباح كهربائي نجد أنّ فضاء التجربة يكون:

$$S=\{D,N\}$$

حيث يدل الرمز D على أن المصباح المسحوب تالف بينما يدل الرمز N على أنه سليم. وعند رمي ثلاث قطع نقود دفعة واحدة (أو رمي قطعة نقود ثلاث مرّات متتالية) نجد أن فضاء التجربة يكون:

$$S=\{HHH, HTH, THH, HHT, TTH, THT, HTT, TTT\}$$

وإذا كان اهتمامنا موجهاً نحو عدد الصور الظاهرة خلال التجربة السابقة عندئذٍ يصبح فضاء التجربة بالشكل الرقمي أو العددي الآتي:

$$S=\{0, 1, 2, 3\}$$

تعريف: يُقال عن مجموعة A إنّها مجموعة منتهية إذا كان عدد عناصرها منتهياً، ويُقال عن A إنّها مجموعة قابلة للعد إذا كانت غير منتهية وبالإمكان عَدُّ عناصرها (أي يوجد

تقابل بين عناصرها وعناصر مجموعة الأعداد الطبيعية). وفي الحالة التي تكون فيها A مجموعة غير منتهية وغير قابلة للعد فإنه يُقال: إنها مجموعة غير منتهية.

تعريف الفضاء المنفصل والفضاء المتصل:

يُدعى فضاء التجربة المؤلف من عدد منتهٍ أو قابل للعد من العناصر بفضاء تجربة منفصل (أو منقطع). كما يدعى فضاء التجربة المؤلف من عدد غير منته وغير قابل للعد من العناصر بفضاء تجربة متصل (مستمر). فمثلاً عند قياس زمن احتراق مصابيح كهربائية نجد أنّ هذه التجربة هي تجربة إحصائية متصلة؛ لأنّ نواتج القياس قد تعطي أي عدد من الأعداد الحقيقية بين الصفر و 1100 ساعة مثلاً. وهذه المجموعة غير منتهية وغير قابلة للعد حيث يُكتب فضاء هذه التجربة بالشكل الوصفي الآتي:

$$S = \{x : 0 \leq x \leq 1100, x \in R\}$$

و R تمثل هنا مجموعة الأعداد الحقيقية.

٢.٣.٨ الحدث:

تعريف: يُعرّف الحدث على أنه مجموعة جزئية من فضاء التجربة. وفي الحالة التي يكون فيها الحدث مكوناً من عنصر وحيد نحصل على ما يسمى بالحدث الابتدائي (أو البسيط).

نستنتج من التعريف السابق أن فضاء التجربة S نفسه هو حدث؛ لأن $S \subseteq S$، كما أن المجموعة الخالية ϕ تشكل حدثاً أيضاً؛ لأن $\phi \subset S$.

فمثلاً عند إلقاء ثلاث قطع نقدية في الهواء نجد أن الحدث: «ظهور الصورة على إحدى القطع والكتابة على القطعتين الباقيتين» هو:

$$A = \{HTT, THT, TTH\}$$

والحدث "جميع الوجوه ذات شكل واحد" هو:

$$B = \{ HHH , TTT \}$$

عند إجراء تجربة عشوائية ما مرةً واحدة فقط سنحصل على نتيجة واحدة، فإذا كانت هذه النتيجة هي x فإننا نقول عن حدث إحصائي ما E إنه وقع إذا وفقط إذا كانت $x \in E$. مما سبق نستنتج أنه إذا كانت x نتيجة لتجربة عشوائية ما فإنه قد يقع أكثر من حدث في وقتٍ واحد، وأحد هذه الأحداث سيكون الحدث الابتدائي $\{x\}$.

ففي تجربة رمي حجر النرد، إذا كان العدد الظاهر على الوجه العلوي هو 5 فإننا نقول إنَّ كلاً من الأحداث الآتية:

$$C=\{2,5\} \quad B=\{1,3,5\} \quad A=\{5\}$$

مثلاً قد وقعت وذلك لوجود العدد 5 ضمنها.

تعريف: إذا كان A,B حدثين موافقين لتجربة عشوائية ما، فإن $A\cap B$ و $A\cup B$ هي أحداث أيضاً حيث يقع الحدث $A\cap B$ إذا وفقط إذا وقع كل من A و B. بينما يقع الحدث $A\cup B$ إذا وفقط إذا وقع أحد الحدثين A أو B على الأقل.

تعريف: (الحدث الأكيد والحدث المستحيل):

ليكن لدينا فضاء تجربة S عندئذٍ بما أن $S\subseteq S$ فإن S هو حدث ويدعى بالحدث الأكيد أو الشامل. كذلك بما أنّ $\phi\subset S$ ومنه فإنّ ϕ هي حدث أيضاً ويدعى بالحدث المستحيل، وذلك لاستحالة وقوعه.

تعريف الأحداث المتنافية (mutually Exclusive) والأحداث المتتامة:

يُدعى الحدثان A وB اللذان يستحيل وقوعهما معاً أو ينفي وقوع أحدهما وقوع الآخر بالحدثين المتنافيين حيث يكون: $A\cap B=\phi$

أمّا الحدثان المتتامان A وB فهما الحدثان اللذان يقع أحدهما إذا وفقط إذا لم يقع الآخر. أي إذا وفقط إذا كان:

$$A\cup B=S,\ A\cap B=\phi$$

أي $B=S-A=A'$

فمثلاً في تجربة رمي قطعتي نقود دفعة واحدة نجد أنّ فضاء التجربة هو:

$$S=\{HH, HT, TH, TT\}$$

فإذا كانت A و B و C الأحداث الإحصائية الآتية:

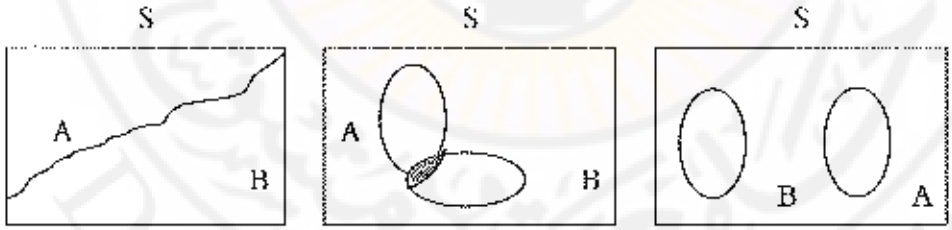
$$A=\{HH,TT\}$$
$$B=\{HT,TH\}$$
$$C=\{HT\}$$

فعندئذٍ نلاحظ أن الحدثين A و C متنافيان؛ لأن: $A\cap C=\phi$ كما نجد أن الحدثين A,B متتامان؛ لأن:

$$A\cap B=\phi\ ,\ A\cup B=S$$

ممّا سبق نستنتج أن الحدثين المتتامين هما حدثان متنافيان والعكس غير صحيح بالضرورة.

ملاحظة ⑦: يستخدم عادة لتوضيح مفهومي فضاء التجربة والحوادث أشكال هندسية تدعى بمخططات فن (Venn) حيث يمثل فضاء التجربة بمستطيل كما تمثل الحوادث بدوائر أو أشكال بيضوية أو مناطق جزئية ضمن المستطيل. يوضّح الشكل الآتي بعض الحالات الممثلة للعلاقة بين حدثين:



(متتامان) (غير متنافيين) (متنافيان)

الشكل (21–6): توضيح العلاقة بين حدثين إحصائيين مفروضين.

تعريف الأحداث المستقلة (Independent events):

تدعى الأحداث التي يكون وقوعها غير مترابط بعضها ببعض ضمن تجربة عشوائية ما بالأحداث المستقلة وفي الحالة المعاكسة تدعى بالأحداث غير المستقلة أو المترابطة.

فمثلاً نجد أن هطول المطر مرتبط بالغيوم وحركة الغيوم ترتبط بالرياح، لذلك فإنّ هذه الأحداث الجوية الثلاثة غير مستقلة. وفي تجربة رمي قطعتي نقود نجد أن ظهور الصورة H على إحدى القطعتين وظهور الصورة H على القطعة الأخرى، هما حدثان مستقلان. وكذلك حدوث عطل كهربائي في منطقةٍ ما من مدينة دمشق وحدوث عطل في شبكة المياه بمنطقة أخرى هما حدثان مستقلان.

نتيجة 1: مما سبق نجد أنَّ:

أ – الحدثين المتنافيين هما حدثان غير مستقلين.

ب – الحدثين المستقلين هما حدثان غير متنافيين.

جـ- أمّا الأحداث غير المتنافية فقد تكون مستقلة أو غير مستقلة. وكذلك الأحداث غير المستقلة فقد تكون متنافية أو غير متنافية.

فمثلاً ظهور الصورة H في الرمية الأولى لقطعة نقود وظهورها (أي ظهور H) في الرمية الثانية يعبّر عن حدثين غير متنافيين، ولكنهما مستقلان.

٣.٣.٨ الدالة الاحتمالية:

هناك تعريف تقليدي للاحتمال الذي يرمز له بالرمز P، فإذا كان لدينا فضاء تجربة S يحتوي على n نتيجة، كل منها لها الفرصة نفسها في الظهور، وكان A حدثاً يحتوي على k نتيجة فإن احتمال وقوع الحدث A (أو تحققه) هو:

$$P = P(A) = \frac{k}{n} = \frac{\text{عدد الحالات المواتية (الموافقة لـ A)}}{\text{عدد الحالات الكلية}}$$

ومنه فإنّ احتمال عدم وقوع الحدث A (أو عدم تحققه) هو احتمال وقوع الحدث المتمم له في التجربة نفسها؛ أي أن:

$$q = P(A') = \frac{n-k}{n} = 1 - \frac{k}{n}$$

وبالتالي فإنّ: $P(A') = 1 - p(A)$ أو $P(A) + P(A') = 1$ أي أنّ $P + q = 1$

مثال(16): عند رمي حجر نرد متوازن نجد أنّ فضاء التجربة هو: $S = \{1,2,3,4,5,6\}$ فإذا فرضنا أنّ A هو الحدث الذي يقع إذا كان الناتج عدداً زوجياً و B الحدث الذي يقع إذا كان الناتج يقبل القسمة على 3، أي أنّ: $A = \{2,4,6\}$ و $B = \{3,6\}$ عندئذٍ نجد أن احتمال وقوع كل من الحدثين A و B هو:

$$p(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad , \quad p(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

كما نجد أنّ احتمال عدم وقوع الحدث B هو: $P(B') = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

أو بشكل آخر $P(B') = 1 - p(B) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

إن التعريف السابق للاحتمال غير كافٍ في حساب الاحتمالات؛ وذلك لأنه يشترط أن تكون فرص الظهور متساوية لجميع عناصر فضاء التجربة، لذلك نحتاج إلى تعريف آخر للاحتمال بحيث يشمل الحالات جميعها.

تعريف (التعريف الرياضي للاحتمال):

ليكن S فضاء تجربة ما، ولنعرف الدالة P من مجموعة أجزاء فضاء التجربة $(p(S))$ S إلى مجموعة الأعداد الحقيقية R والتي تحقق الشروط الآتية:

1- $\forall A \in p(S) : 0 \le P(A) \le 1$.

2- $P(S) = 1$

3- إذا كانت ... $A_1, A_2, \ldots, A_n$ متتالية منتهية أو غير منتهية من عناصر $p(S)$ والمتنافية مثنى مثنى فإنّ:

$$P\left(\bigcup_{i\geq 1} A_i\right) = \sum_{i\geq 1} P(A_i)$$

عندئذٍ تسمى الدالة P دالة احتمالية كما يُسمى P(A) باحتمال وقوع الحدث A.

نتيجة 2:

1- اعتماداً على التعريف الرياضي للاحتمال نستنتج أنه إذا كانت $A_1, A_2, \ldots, A_n$ مجموعة منتهية من الأحداث المتنافية مثنى مثنى فإن:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) \qquad (8.24)$$

2- إذا احتوى فضاء التجربة S على n نتيجة $x_1, x_2, \ldots, x_n$ وإذا أخذنا مجموعة الحوادث الابتدائية $\{x_1\}, \{x_2\} \ldots \{x_n\}$ المتنافية مثنى مثنى عندئذ نجد أنّ:

$$P(S) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} \{x_i\}\right) = \sum_{i=1}^{n} P(\{x_i\})$$

فإذا رمزنا للاحتمال $P(\{x_i\})$ بالرمز $P(x_i)$ اختصاراً، وبما أن $P(S) = 1$ نجد أن:

$$1 = \sum_{i=1}^{n} P(x_i)$$

حيث نستنتج في الحالة التي تكون فيها فرص الظهور متساوية لجميع عناصر الفضاء S، أن:

$$1 = nP(x_i) \Rightarrow P(x_i) = \frac{1}{n} \quad , \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

ومنه فإن احتمال أي حدث A عدد عناصره k في هذه الحالة يكون: $P(A) = \frac{k}{n}$

وهذا مايتطابق مع ما وجدناه في التعريف التقليدي للاحتمال مع التذكير بأن ذلك يبقى مشروطاً بتساوي فرص الظهور لعناصر S.

مثال (17): عند إلقاء قطعة نقود متوازنة مرتين متتاليتين. أوجد احتمال ظهور الكتابة مرة واحدة على الأقل.

الحل: بما أنّ قطعة النقود متوازنة فإنّ كلاً من الصورة والكتابة له الفرصة نفسها في الظهور. إنّ فضاء هذه التجربة هو: $S = \{HH,HT,TH,TT\}$

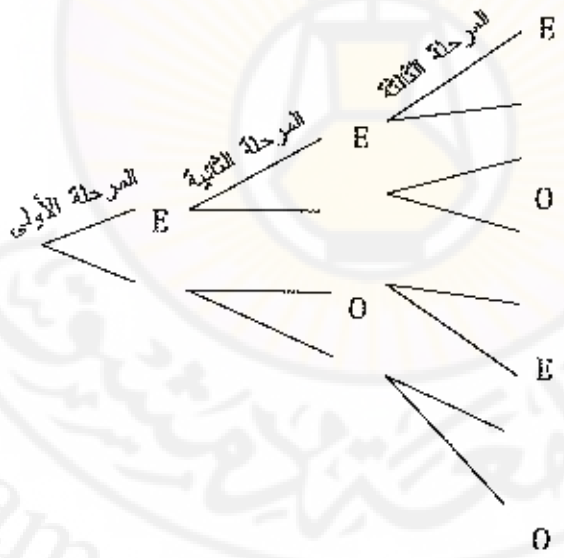
وإن الحدث المطلوب هو: $A = \{HT, TH, TT\}$

وبالتالي فإن: $P(A) = \frac{3}{4}$

مثال(18): أراد شخص تسجيل عدد سري من ثلاث خانات للدخول إلى حاسبه الشخصي. والمطلوب ما احتمال أن يحتوي هذا العدد على رقمين زوجيين ورقم فردي واحد علماً بأنّ للأرقام الفرصة نفسها في الاختيار؟

الحل: بفرض أنّ الرمز E يدل على الرقم الزوجي والرمز O يدل على الرقم الفردي فإنّ فضاء التجربة يكون: $S = \{EEE,EEO,EOE,EOO,OEE,OEO,OOE,OOO\}$

حيث بالإمكان استخدام طريقة الشجرة لمعرفة عناصر S كما يلي:



إنّ الحدث المطلوب هو : $A = \{EEO,EOE,OEE\}$

وبما أنّ للأرقام الفرصة نفسها في الاختيار فإنّ: $P(A) = \frac{3}{8}$

مثال(19): ألقي حجر نرد غير متوازن بحيث أن فرصة ظهور العدد الفردي تساوي ضعفي فرصة ظهور العدد الزوجي. ما احتمال الحدث A الذي يقع إذا وفقط إذا كان الناتج أكبر من 2 ؟

الحل: إن فضاء التجربة S هو: $S = \{1,2,3,4,5,6\}$

كما أنّ الحدث المطلوب هو: $A = \{3,4,5,6\}$ وعليه إذا افترضنا أن احتمال ظهور العدد الزوجي هو x فإن احتمال ظهور العدد الفردي يكون 2x؛ وبالتالي فإن:

$$P(S) = P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6)$$
$$1 = 2x + x + 2x + x + 2x + x$$

ومنه نجد أنّ: $1 = 9x \rightarrow x = \frac{1}{9}$

وبالتالي: $P(A) = P(3) + P(4) + P(5) + P(6)$

$$= \frac{2}{9} + \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

٤.٣.٨ خصائص الاحتمال:

من التعريف الرياضي للاحتمال نستنتج الخصائص الآتية:

1 – إذا كان A حدثاً وكان A' الحدث المتمم له فإنّ:

$$P(A) + P(A') = 1 \qquad (8.25)$$

لأنّ $A \cap A' = \phi$ (متنافيان) كما أنّ $A \cup A' = S$ ومنه نجد أنّ:

$$P(A \cup A') = P(S) \Rightarrow P(A) + P(A') = 1$$

2 – $P(\phi) = 0 \qquad (8.26)$

وذلك لأنه إذا أخذنا $A = \phi$ في العلاقة (6.25) نجد أنّ:

$$1 = P(\phi) + P(\phi')$$

ومنه: $1 = P(\phi) + P(S)$

وبما أنّ: $P(S) = 1$ فإنّ $P(\phi) = 0$

3- إذا كان A , B حدثين فإن:

$$P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B) \qquad (8.27)$$

4- إذا كان A و B حدثين غير متنافيين فإن:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \qquad (8.28)$$

5- إذا كان A و B حدثين وكان $A \subseteq B$ فإن: $P(A) \le P(B)$

6- إذا كان A و B حدثين مستقلين وغير متنافيين فإن:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \qquad (8.29)$$

وبتوسيع القاعدة لتشمل n من الأحداث المستقلة وغير المتنافية نجد أنّ:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1) \cdots P(A_n) \qquad (8.30)$$

فمثلاً في تجربة رمي قطعة نقود متوازنة مرتين متتاليتين نجد أنّ ظهور الكتابة T في الرمية الأولى وظهورها في الرمية الثانية يشكل حدثين مستقلين وغير متنافيين ومنه فإنّ:

$$P(TT) = P(T)P(T) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

مثال(20): إذا كان احتمال إنتاج آلة معينة في مصنع للنسيج، لقماش يحوي النسبة المطلوبة تماماً من القطن هو $\frac{1}{4}$ واحتمال عدم إنتاج آلة أخرى لقماش يحوي تلك النسبة من القطن هو $\frac{1}{5}$ ، فما هو احتمال إنتاج أحد الآلتين على الأقل للقماش المطلوب؟

الحل: نفرض A الحدث الذي يقع إذا أنتجت الآلة الأولى قماشاً يحوي النسبة المطلوبة من القطن و B الحدث الذي يقع إذا أنتجت الآلة الثانية ذلك القماش. وبالتالي فإن الحدث المطلوب حساب احتماله هو $A \cup B$. حيث لدينا:

$$P(A) = \frac{1}{4}$$

$$P(B) = 1 - P(B') = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

وبما أن الحدثين A, B مستقلان وغير متنافيين فإن:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$
$$=P(A)+P(B)-P(A).P(B)$$
$$=(\frac{1}{4})+(\frac{4}{5})-(\frac{1}{4})(\frac{4}{5})=\frac{17}{20}$$

مثال(21): إذا كان احتمال إصابة محمد لهدف معين هو $\frac{3}{4}$ واحتمال إصابة أحمد للهدف نفسه هو $\frac{1}{3}$، فاحسب كلاً من الاحتمالات الآتية: ألا يصيب محمد الهدف، أن يصيبا الهدف معاً، أن يصيب أحدهما على الأقل، ألا يصيبا الهدف في آنٍ واحد (أي أن يصيب أحدهما فقط أو لا يصيبا معاً)، أن يصيب محمد الهدف ولا يصيبه أحمد.

الحل: نفرض أن A الحدث الذي يقع إذا أصاب محمد الهدف و B الحدث الذي يقع إذا أصاب أحمد الهدف عندئذٍ نجد أنّ:

$$P(A)=\frac{3}{4} \quad و \quad P(B)=\frac{1}{3}$$

ومنه فإنّ احتمال ألا يصيب محمد الهدف هو: $P(A')=1-P(A)=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$

واحتمال أن يصيبا الهدف معاً هو: $P(A\cap B)=P(A)P(B)=\frac{3}{4}.\frac{1}{3}=\frac{1}{4}$

وذلك بملاحظة أن B و A حدثان مستقلان وغير متنافيين.

أمّا احتمال أن يصيب الهدف أحدهما على الأقل فهو:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{3}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{5}{6}$$

ولحساب احتمال ألا يصيبا الهدف في آنٍ واحد يجب أن نحسب الاحتمال للحدث $(A\cap B)'$ حيث نجد أنّ:

$$P(A\cap B)'=1-P(A\cap B)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

وأخيراً نجد أن احتمال أن يصيب محمد الهدف ولا يصيبه أحمد هو:

$$P(A\cap B')=P(A)-P(A\cap B)=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

٥.٣.٨ الاحتمال الشرطي (Conditional Probability):

نحتاج في كثير من المسائل الاحتمالية إلى دراسة العلاقة ما بين الأحداث المتعلقة بتجربة مفروضة. حيث نجد أنّ احتمالات بعض هذه الأحداث قبل إجراء التجربة قد تختلف عن احتمالاتها بعد إجراء التجربة نظراً لشروط أو قيود مفروضة. فإذا أجريت تجربة ما ونتج عن ذلك وقوع أحد الأحداث فإنّ من شأن ذلك تغير الصورة الاحتمالية لبقية الأحداث، حيث قد يتغير احتمال بعضها ويبقى احتمال بعضها الآخر كما كان قبل إجراء التجربة.

(1) تعريف الاحتمال الشرطي:

إذا كان B و A حدثين متعلقين بتجربة مفروضة، وكان $P(B) \neq 0$، عندئذٍ يُعرّف احتمال الحدث A مشروطاً بالحدث B الذي يُرمز له بالرمز $P(A|B)$، بالعلاقة:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad (8.31)$$

ويسمى بالاحتمال الشرطي للحدث A علماً بأنّ B قد وقع.

مثال(22): ليكن الجدول الآتي الذي يمثل تصنيف العمال في مصنعٍ ما تبعاً للجنس والحالة الوظيفية:

الجنس/العمل	عامل	إداري	المجموع
ذكر	84	20	104
أنثى	52	32	84
المجموع	136	52	188

اختير شخص عشوائياً من هذا المصنع. ما احتمال أن يكون رجلاً علماً بأنه عامل، وما احتمال أن يكون أنثى من الإداريين؟

الحل: نفرض A الحدث الذي يقع إذا وفقط إذا كان الشخص المختار رجلاً.

و B الحدث الذي يقع إذا وفقط إذا كان الشخص المختار عاملاً.

عندئذٍ نجد أنّ: $P(B)=\frac{136}{188}=\frac{34}{47}$ ، $P(B')=1-\frac{34}{47}=\frac{13}{47}$

وأنّ: $P(A\cap B)=\frac{84}{188}=\frac{21}{47}$ ، $P(A'\cap B')=\frac{32}{188}=\frac{8}{47}$

وبالتالي فإنّ الاحتمالين المطلوبين هما:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{21}{34}=0.618$$

$$P(A'|B')=\frac{P(A'\cap B')}{P(B')}=\frac{8}{13}=0.615$$

(2)– خصائص الاحتمال الشرطي:

من تعريف الاحتمال الشرطي نستنتج الخواص الآتية:

أ) إذا كان B و A حدثين و $P(A)>0$ فإنّ:

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)} \qquad (8.32)$$

ب) إذا كان B و A حدثين فإنّ احتمال تقاطعهما:

$$P(A\cap B)=P(A).P(B|A)=P(B).P(A|B) \qquad (8.33)$$

وبشكل مشابه نجد أنّ تقاطع ثلاثة حوادث A, B, C هو:

$$P(A\cap B\cap C)=P(A).P(B|A)P(C|(A\cap B)) \qquad (8.34)$$

وبهذه الطريقة نستطيع حساب احتمال التقاطع لأي عدد منتهٍ من الحوادث $A_1,A_2,\ldots,A_n$ كما يلي:

$$P(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n)=$$
$$P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|(A_1\cap A_2))\ldots P(A_n|(A_1\cap A_2\ldots\cap A_{n-1})) \qquad (8.35)$$

جـ) – إذا كان B و A حدثين متنافيين فإنّ:

$$P(A|B)=0$$

وذلك لأنّ: $A\cap B=\phi$ في هذه الحالة؛ ومنه فإنّ $P(A\cap B)=0$ مما يؤدي إلى أنّ:

$$P(A|B)=0$$

د) – إذا كان B و A حدثين مستقلّين وغير متنافيين؛ فإنّ:

$$P(A|B)=P(A) \quad , \quad P(B|A)=P(B) \qquad (8.36)$$

حيث لدينا B و A حدثان مستقلان وغير متنافيين ومنه نجد من العلاقة (6.29) أنّ:

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$$

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A)P(B)}{P(B)}$$

وبما أنّ $P(B)\neq 0$ فإنّ: $P(A|B)=P(A)$

وبالطريقة نفسها نثبت أنّ: $P(B|A)=P(B)$

ممّا سبق يمكننا صياغة تعريف آخر للحوادث المستقلة كما يلي:

(3) – تعريف الحوادث المستقلة:

يسمى الحدثان غير المتنافيين A, B بالحدثين المستقلين إذا وفقط إذا كان:

$$P(A|B)=P(A) \quad , \quad P(B|A)=P(B)$$

أو كان: $P(A\cap B)=P(A).P(B)$

حيث يمكن تعميم ذلك من أجل n من الأحداث المستقلة وغير المتنافية كما وجدنا في العلاقة (8.30).

مثال(23): صندوق فيه 36 مصباحاً كهربائياً 6 منها تالفة. سُحب عشوائياً ثلاثة مصابيح. ما احتمال أن تكون المصابيح المسحوبة جميعها تالفة في الحالتين التاليتين:

1- إذا تمت عملية السحب على التوالي (دون إعادة)؟

2- إذا تمت عملية السحب بحيث يُعاد المصباح المسحوب للصندوق؟

الحل: ليكن A الحدث الذي يقع إذا كان المصباح المسحوب أولاً تالفاً، و B الحدث الذي يقع إذا كان المصباح المسحوب ثانياً تالفاً و C الحدث الذي يقع إذا كان المصباح المسحوب ثالثاً تالفاً. عندئذٍ نجد أنّ الحدث المطلوب هو: $A\cap B\cap C$ حيث نميّز الحالتين الآتيتين:

1- إذا تمت عملية السحب من دون إعادة فإنّ:

$$P(A\cap B\cap C)=P(A)P(B|A)P(C|(A\cap B))$$

حيث نجد مباشرةً أنّ:

$$P(A)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$

$$P(B|A)=\frac{5}{35}=\frac{1}{7}$$

$$P\big(C|(A\cap B)\big)=\frac{4}{34}=\frac{2}{17}$$

وبالتالي فإنّ: $P(A\cap B\cap C)=(\frac{1}{6})(\frac{1}{7})(\frac{2}{17})=\frac{1}{357}=0.0028$

2- إذا تمت عملية السحب بحيث يُعاد المصباح المسحوب للصندوق؛ فإنّ الأحداث A, B, C في هذه الحالة تكون مستقلة، ومتساوية فرص الوقوع حيث نجد أنّ:

$$P(A)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}\quad,\quad P(B)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}\quad,\quad P(C)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$

وبالتالي فإنّ: $P(A\cap B\cap C)=P(A)P(B)P(C)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{216}=0.0046$

مثال(24): يوجد في أحد المصانع جهاز حساس يستخدم لكشف مكان الأعطال في الآلات. وجد المهندس المختص أنّ هذا الجهاز بحاجة إلى صيانة وإلاّ سيخطئ في تحديد مكان العطل. فإذا علمت أنّ احتمال موافقة الإدارة على صيانة الجهاز هذا العام هو 0.70، واحتمال ألا يخطئ الجهاز في تحديد مكان العطل من دون صيانة هو 0.40، واحتمال ألا يخطئ في حال صيانته هذا العام هو 0.90. ما احتمال ألا يخطئ الجهاز هذا العام؟

الحل: ليكن A الحدث الذي يقع إذا وفقط إذا لم يخطئ الجهاز في تحديد مكان العطل هذا العام، و B الحدث الذي يقع إذا وفقط إذا وافقت الإدارة على صيانة هذا الجهاز هذا العام أيضاً. عندئذٍ يكون الحدث المطلوب حساب احتماله هو $A\cap(B\cup B')$ أي لا يخطئ الجهاز هذا العام بصيانة أم من دون صيانة حيث نجد أنّ:

$$P[A\cap(B\cup B')]=P[(A\cap B)\cup(A\cap B')]=P(A\cap B)+P(A\cap B')$$

وذلك بملاحظة أنّ الحدثين $A\cap B$, $A\cap B'$ متنافيان. ومنه نجد أنّ:

$$P[A\cap(B\cup B')]=P(B)P(A|B)+P(B')P(A|B')$$

$$=(0.70)(0.90)+(0.30)(0.40)=0.75$$

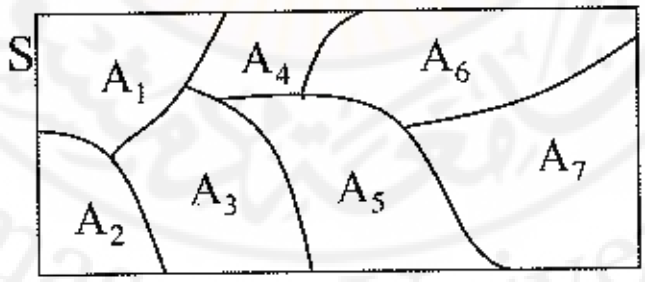
4- قانون بايز (Bays Rule):

تعريف: ليكن S فضاء تجربة، ولتكن $(A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots)$ متتالية منتهية أو غير منتهية من الأحداث في هذا الفضاء، عندئذٍ نقول عن هذه المتتالية: إنّها تشكل تجزئة للحدث الشامل (أو الأكيد) S، إذا كانت تغطي S من جهة، ومتنافية مثنى مثنى من جهة أخرى. ومنه فإنّ المتتالية $(A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots)$ تجزئة لفضاء التجربة S إذا تحقق الشرطان الآتيان:

أ) $S=\bigcup_{i\geq 1}A_i=A_1\cup A_2\ldots\cup A_n\cup\ldots$

ب) $i\neq j\Rightarrow A_i\cap A_j=\phi$

يمثل الشكل الآتي تجزئة للحدث الشامل S إلى سبعة أحداث:



الشكل (22-8) يوضح تجزئة لفضاء التجربة S

قانون بايز:

لتكن $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ تجزئة لفضاء التجربة S، وليكن B حدثاً مرتبطاً بالتجربة ذاتها عندئذٍ نجد أنّ:

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{j=1} P(A_j)P(B|A_j)} \qquad (8.37)$$

وفي الحالة التي تكون فيها التجزئة للحدث الشامل S منتهية كالتجزئة $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ويفرض أنّ B حدثٌ مرتبطٌ بالتجربة ذاتها عندئذٍ يصبح قانون بايز بالشكل:

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j)P(B|A_j)} \qquad (8.38)$$

مثال(25): ثلاث آلات M_1, M_2, M_3 تنتج 40% ، 35% ، 25% من إنتاج مصنع وذلك على الترتيب. وجد أنّ 2% و 4% و 5% من إنتاج هذه الآلات رديء وذلك على الترتيب أيضاً. اخترنا سلعة من إنتاج هذا المصنع فكانت رديئة، فما هو احتمال كون هذه السلعة من إنتاج الآلة M_1؟

الحل: إذا رمزنا بـ A_i للحدث الذي يقع إذا كانت السلعة من إنتاج الآلة M_i، i=1,2,3 ورمزنا بـ B للحدث الذي يقع إذا كانت السلعة المسحوبة رديئة. عندئذٍ نجد أن الأحداث A_i تشكل تجزئة للحدث الشامل وأنّ الحدث المطلوب حسابه هو: $P(A_1|B)$ ؛ حيث لدينا:

$$P(A_1) = 0.25\ ,\ P(A_2) = 0.35\ ,\ P(A_3) = 0.40$$

$$P(B|A_1) = 0.05\ ,\ P(B|A_2) = 0.04\ ,\ P(B|A_3) = 0.02$$

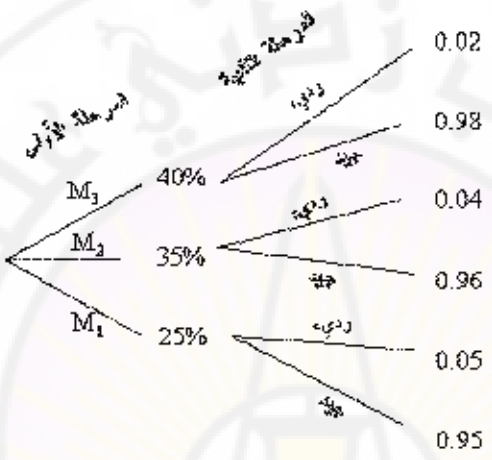
وبتطبيق قانون بايز نجد أنّ:

$$P(A_1|B) = \frac{P(A_1)P(B|A_1)}{\sum_{j=1}^{3} P(A_j)P(B|A_j)}$$

$$= \frac{(0.25)(0.05)}{(0.25)(0.05)+(0.35)(0.04)+(0.40)(0.02)}$$

$$= \frac{0.0125}{0.0345} = \frac{125}{345} \cong 0.362$$

ملاحظة ⑧: يمكن الإفادة من طريقة الشجرة لحساب الاحتمالات الشرطية، وقاعدة بايز كالآتي:



ومنه نجد أنّ النسبة الكلية للإنتاج الرديء هي:

$$P(D) = \sum_{j=1}^{3} P(A_1)P(B/A_1) = \left(\frac{25}{100}\right)\left(\frac{5}{100}\right)+\left(\frac{35}{100}\right)\left(\frac{4}{100}\right)+\left(\frac{4}{100}\right)\left(\frac{2}{100}\right)$$

وبالمثل نجد أنّ نسبة الإنتاج الرديء في المصنع الأول:

$$P(A_1)P(B/A_1) = \left(\frac{25}{100}\right)\left(\frac{5}{100}\right) = .0125$$

وعليه فإنّ:

$$P(A_1/B) = \frac{0.0125}{0.0345} = 0.362$$

٤.٨ طرائق العدّ:

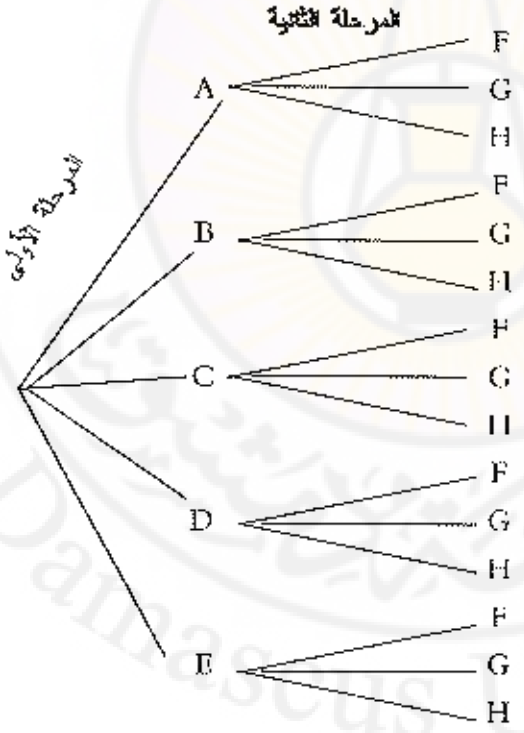
فيما يلي سنبيّن بعض المبادئ الأساسية لطرائق العد التي ستُساعدنا في دراستنا للاحتمالات.

١.٤.٨ المبدأ الأساسي للعد: Fundamental principle of counting

إذا كان لدينا k عملية مختلفة، وكان بالإمكان إجراء العملية الأولى بـ n_1 طريقة مختلفة وإجراء العملية الثانية بـ n_2 طريقة مختلفة وهكذا... إذا كان بالإمكان إجراء العملية الأخيرة بـ n_k طريقة مختلفة، فإنّ عدد الطرق m التي يمكن إجراء هذه العمليات بها على الترتيب هو: $m = n_1.n_2....n_k$

مثال(26): أعلنت شركة للصناعات النسيجية عن وظيفتين شاغرتين، فتقدم 3 رجال و 5 سيدات لملء هاتين الوظيفتين. بكم طريقة يمكن تعيين رجل وسيدة في هاتين الوظيفتين.

الحل: إذا رمزنا للسيدات المتقدمات للوظيفة بالرموز A, B, C, D, E وللرجال المتقدمين لهذه الوظيفة بالرموز F, G, H فإنه يمكننا تمثيل طرق الاختيار بالشجرة الآتية ذات المرحلتين:



وبالإفادة من المبدأ الأساسي للعد نجد أن عدد الطرق المختلفة لاختيار رجل وسيدة من عدد المرشحين الكلي هو: $5 \times 15 = 3$ طريقة.

٢.٤.٨ التباديل Permutations:

نحتاج في كثير من الأحيان لإيجاد عدد التباديل الممكن لـ n من العناصر المختلفة الذي يرمز له عادة بالرمز: P_n^n أو $P(n,n)$، حيث يُعرف عدد تباديل n عنصراً مختلفاً بالعلاقة:

$$P(n,n) = n! = n(n-1)(n-2)...3.2.1 \qquad (8.39)$$

مثال (27): بكم طريقة يمكن ترتيب 4 آلات جديدة مختلفة في أحد المصانع؟

الحل: إنّ عدد الطرق الممكنة هو: $P(4,4) = 4! = 4.3.2.1 = 24$

٣.٤.٨ التراتيب (Arrangements):

إذا كان المطلوب هو حساب عدد التراتيب الممكنة لـ k من العناصر والمأخوذة من n من العناصر المختلفة الذي يرمز له بالرمز: P_n^k أو $P(n,k)$، فإننا نعرف عدد تراتيب k عنصراً مأخوذة معاً من n عنصر مختلف بالشكل:

$$P_n^k = P(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!} \qquad (8.40)$$

مثال(28): يريد صاحب معرض عرض أو ترتيب سيارتين داخل الصالة من مجموع أربع سيارات مختلفة الألوان، فكم ترتيباً لديه للعرض؟

الحل: إذا رمزنا للسيارات الأربع بالرموز A, B, C, D، فإنّ الحالات الممكنة لترتيب سيارتين منها هي:

AB, AC, AD BC, BD, BA CD, CA, CB DA, DB, DC

وبالتالي فإنّ عدد التراتيب لديه يكون:

$$P_4^2 = P(4,2) = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = 12$$

٨.٤.٤ التوافيق (Combinations):

إذا كان المطلوب هو إيجاد عدد الطرق الممكنة لاختيار k عنصراً من n من العناصر المختلفة بغض النظر عن تراتيبها فإننا نسمي هذه العملية بالتوافيق، ويرمز لها بالرمز: C_n^k أو بالرمز: $\binom{n}{k}$ أو بالرمز: $C(n,k)$. حيث نعرّف عدد توافيق k عنصراً مأخوذة معاً من n عنصر بالعلاقة:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad (8.41)$$

ففي المثال السابق نجد أنّ هنالك 6 توافيق من مجموع 12 ترتيباً أو تبديلاً حيث نغض النظر عن التراتيب؛ لأنّ AC هو نفسه CA عندئذٍ ولا حاجة للتكرار.

نتيجة 3: من العلاقة (8.41) نجد أنّ: $C_n^n = 1$ ، $C_n^0 = 1$ حيث يمكن إثبات ذلك بسهولة.

مثال(29): أعلنت إحدى الشركات عن حاجتها لتعيين أربعة مهندسين ميكانيكيين للوظيفة نفسها، فتقدم ثمانية أشخاص. بكم طريقة يمكن اختيار أربعة منهم؟

الحل: إنّ عدد الطرق الممكنة هو: $C(8,4) = C_8^4 = \frac{8!}{4!4!} = 70$ طريقة.

٨.٥ المتغير العشوائي ودالة الكثافة random variables & density functions:

وجدنا فيما سبق أنّ أية تجربة إحصائية تقودنا إلى مجموعة من النتائج الكمية أو الكيفية (الوصفية)؛ حيث يهتم الإحصائي بهذه النتائج سواء أكانت كيفية أم كمية، لكن رد البيانات الكيفية إلى رقمية قد يُساعد الباحث أكثر في تسهيل الدراسة الإحصائية

واستقراء النتائج. فيمكن أن نمثل كل نتيجة من فضاء التجربة بعدد كيفي بناءً على صفة معينة معطاة.

١.٥.٨ تعريف المتغير العشوائي:

يُعرّف المتغير العشوائي على أنه دالة تعرّف من فضاء تجربة ما إلى مجموعة الأعداد الحقيقية R. حيث يقابل كل عنصر من فضاء التجربة عدداً حقيقياً هو قيمة المتغير العشوائي عند هذا العنصر. ويُرمز عادة للمتغيرات العشوائية بأحرف لاتينية كبيرة مثل: $X,Y,Z,\ldots$ ويرمز لقيم هذه المتغيرات العشوائية بأحرف لاتينية صغيرة مثل $x,y,z,\ldots$.

فمثلاً في تجربة رمي ثلاث قطع نقود دفعة واحدة، حيث يكون فضاء التجربة بالشكل الآتي:

$$S=\{HHH,HHT,HTH,THH,HTT,THT,TTH,TTT\}$$

إذا كان X المتغير العشوائي الدال على عدد مرات ظهور الصورة، فإنّ X يعد دالة من فضاء التجربة S إلى مجموعة الأعداد الحقيقية R، حيث يقرن X كل عنصر من S بعدد مرات ظهور الصورة في هذا العنصر. ومنه نجد أنّ:

$$X(HHH)=3,X(HHT)=2,X(HTH)=2,\cdots,X(TTH)=1,X(TTT)=0$$

من التعريف السابق للمتغير العشوائي نجد أنّ الصورة العكسية لكل قيمة من قيم المتغير العشوائي X تمثل حدثاً. ففي مثال رمي قطع النقود الثلاث نجد أنّ:

$$X^{-1}(0)=\{TTT\},X^{-1}(1)=\{HTT,THT,TTH\},$$

$$X^{-1}(2)=\{HHT,HTH,THH\},X^{-1}(3)=\{HHH\}$$

وبالتالي إذا أخذنا الحدث: $A=\{HTT,THT,TTH\}$ على سبيل المثال فإنّ: $P(A)=\frac{3}{8}$ كذلك نجد أنّ: $P(x=1)=P(A)=\frac{3}{8}$ أيضاً.

مثال(30): عائلة عندها ثلاثة أولاد. اكتب فضاء التجربة S. بفرض أنّ المتغير العشوائي X يدل على عدد الذكور، اذكر قيم هذا المتغير المقابلة لعناصر الفضاء S. ثم احسب احتمال الحدث $X < 3$.

الحل: إذا رمزنا بالرمز B للذكر، والرمز G للأنثى، فإنّ فضاء التجربة يكون:

$$S=\{BBB,BBG,BGB,GBB,BGG,GBG,GGB,GGG\}.$$

ومنه نجد أنّ قيم المتغير العشوائي X المقابلة لعناصر S هي:

عناصر S	BBB	BBG	BGB	GBB	BGG	GBG	GGB	GGG
قيم X	3	2	2	2	1	1	1	0

وبالتالي فإنّ: $P(X<3)=P(X\le 2)=\frac{7}{8}=0.875$

كما يمكن حساب الاحتمال الأخير بطريقة أخرى، عن طريق الحدث المتمم، حيث نجد أنّ:

$$P(X<3)=P(X\le 2)=1-P(X=3)=1-\frac{1}{8}=0.875$$

مثال(31): صندوق فيه 9 مصابيح كهربائية أربعة منها تالفة. سُحب مصباحان عشوائياً، اذكر فضاء التجربة. ثم بفرض X المتغير العشوائي الدال على عدد المصابيح التالفة المسحوبة، اذكر القيم المقابلة. ثم احسب احتمال أن نكون اخترنا مصباحاً واحداً على الأقل تالفاً.

الحل: بفرض أن الرمز G يدلّ على المصباح غير التالف أو الجيد، والرمز B يدلّ على المصباح التالف؛ فإنّ فضاء التجربة يكون:

$$S=\{GG,GB,BG,BB\}$$

ومنه فإنّ قيم المتغير العشوائي X المقابلة لعناصر S تكون:

عناصر S	GG	GB	BG	BB
قيم X	0	1	1	2

ومنه فإنّ احتمال أن نكون اخترنا مصباحاً واحداً على الأقل تالفاً هو:

$$P(X \geq 1) = P(X = 1) + P(X = 2)$$

حيث لدينا:

$$P(X = 1) = \frac{C_4^1 C_5^1}{C_9^2} = \frac{5}{9}$$

$$P(X = 2) = \frac{C_4^2 C_5^0}{C_9^2} = \frac{1}{6}$$

وبالتالي فإنّ: $P(X \geq 1) = \frac{5}{9} + \frac{1}{6} = \frac{13}{18} = 0.72$

كما يمكن حساب الاحتمال الأخير بطريقة أخرى حيث نجد أنّ:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \frac{C_4^0 C_5^2}{C_9^2} = 1 - \frac{5}{18} = \frac{13}{18} = 0.72$$

٢.٥.٨ التوزيع الاحتمالي (Probability Distribution):

يُدعى المتغير العشوائي المعرف على فضاء التجربة المنقطع (أو المنفصل) بالمتغير العشوائي المنقطع (أو المنفصل). كما يدعى المتغير العشوائي المعرف على فضاء تجربة متصل بالمتغير العشوائي المستمر(أو المتصل). في الفقرات القادمة سنأخذ توزيعات تُستخدم فيها الاحتمالات بدلاً من التكرارات حيث تُسمى مثل هذه التوزيعات بالتوزيعات الاحتمالية التي إمّا أن تكون توزيعات احتمالية منقطعة (إذا كان فضاء التجربة منقطع) وإمّا أنْ تكون توزيعات احتمالية مستمرة (إذا كان فضاء التجربة مستمراً).

(1) التوزيع الاحتمالي المنقطع (أو المنفصل) (Discreate Probability Distribution):

ليكن X متغيراً عشوائياً منقطعاً. عندئذٍ تسمى الدالة المعرفة على مجموعة قيم المتغير المنقطع X، التي تأخذ قيمها من مجموعة الأعداد الحقيقية R، والممثلة لاحتمال كل قيمة من قيم X، بدالة الاحتمال المنقطع أو دالة التوزيع الاحتمالي المنقطع للمتغير X. ويرمز

لها بالرمز : f(x) حيث $f(x) = P(X = x)$. كما يسمى الجدول الممثل لاحتمالات قيم المتغير العشوائي X بجدول التوزيع الاحتمالي المنقطع.

مثال(32): جهاز إلكتروني يحتوي على أحد عشر ترانزستوراً، ثلاثة منها لا تعمل، اختار المهندس المختص بصورة عشوائية ثلاثة ترانزستورات، ونزعها من الجهاز ثم فحصها. بفرض أنّ المتغير العشوائي X يَدُلُّ على عدد ما وجده المهندس عاطلاً منها. أوجد جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير X، ثم مثل النتائج بيانياً على شكل مدرج احتمالي.

الحل: إذا رمزنا للترانزستور العاطل بـ B، وللترانزستور غير العاطل بـ G عندئذٍ نجد أنّ فضاء التجربة يكون: $S = \{GGG, GGB, GBG, BGG, GBB, BGB, BBG, BBB\}$ ومنه فإنّ المتغير العشوائي X يأخذ القيم صفر أو 1 أو 2 أو 3. والتي تُحسب احتمالاتها كالآتي:

$$f(0) = P(X = 0) = \frac{C_3^0 C_8^3}{C_{11}^3} = \frac{56}{165}$$

$$f(1) = P(X = 1) = \frac{C_3^1 C_8^2}{C_{11}^3} = \frac{84}{165}$$

$$f(2) = P(X = 2) = \frac{C_3^2 C_8^1}{C_{11}^3} = \frac{24}{165}$$

$$f(3) = P(X = 3) = \frac{C_3^3 C_8^0}{C_{11}^3} = \frac{1}{165}$$

وبالتالي فإنّ جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المنقطع X هو:

قيم X	0	1	2	3
$f(x) = P(X = x)$	$\frac{56}{165}$	$\frac{84}{165}$	$\frac{24}{165}$	$\frac{1}{165}$

يمكن تمثيل جدول التوزيع الاحتمالي السابق بمدرج احتمالي كما في الشكل الآتي:



الشكل (23-8)

حيث نلاحظ أنّ: $\sum_{x=0}^{3} f(x) = \sum_{x=0}^{3} P(X=x) = \frac{56}{165} + \frac{84}{165} + \frac{24}{165} + \frac{1}{165} = \frac{165}{165} = 1$

وبصورة عامة نستنتج أنه إذا كان X متغيراً عشوائياً منقطعاً فإنّ:

$$\sum_{x} f(x) = 1 \qquad (8.42)$$

حيث $0 \le f(x) \le 1$ أياً كان x من قيم المتغير العشوائي X.

(2) التوزيع الاحتمالي المستمر (أو المتصل) (Continuous Probability Distribution):

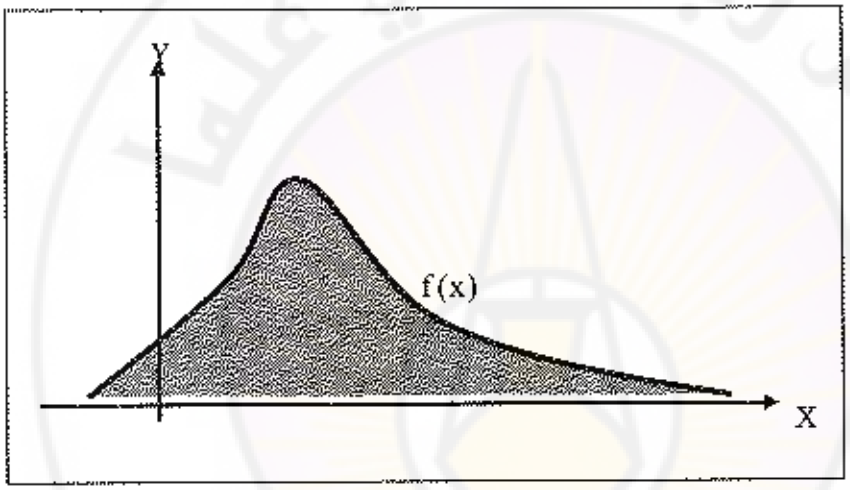
وجدنا أنه يمكن تمثيل التوزيع الاحتمالي المنقطع بجدول؛ وبالتالي بمدرج أو مضلع. أمّا في حالة المتغير العشوائي المستمر، فإنه ليس بالإمكان تمثيل التوزيع الاحتمالي لهذا المتغير بجدول، وبالتالي لا يمكن تمثيله بيانياً بمدرج أو مضلع. بل نجد أنه عندما يكون المتغير العشوائي مستمراً فإنّ التوزيع الاحتمالي له سيمثل بمنحنٍ مستمر. إنّ معادلة هذا المنحنى تكون $y = f(x)$، حيث تمثل x إحدى القيم العددية التي يأخذها المتغير المستمر X. وتسمى الدالة $f(x)$ بدالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي المستمر X. و يجب أن تحقق شروطاً معينة كي تمثل دالة كثافة لمتغير مستمر X.

(3) دالة الكثافة الاحتمالية (Probability density function):

ليكن X متغيراً عشوائياً مستمراً، عندئذٍ تُسمى الدالة $y = f(x)$ المعرفة على مجموعة الأعداد الحقيقية أو على جزء منها، بدالة الكثافة الاحتمالية للمتغير X إذا كانت تحقق الشرطين التاليين:

(1) $f(x) \geq 0$ وذلك أياً كان x من قيم المتغير العشوائي X.

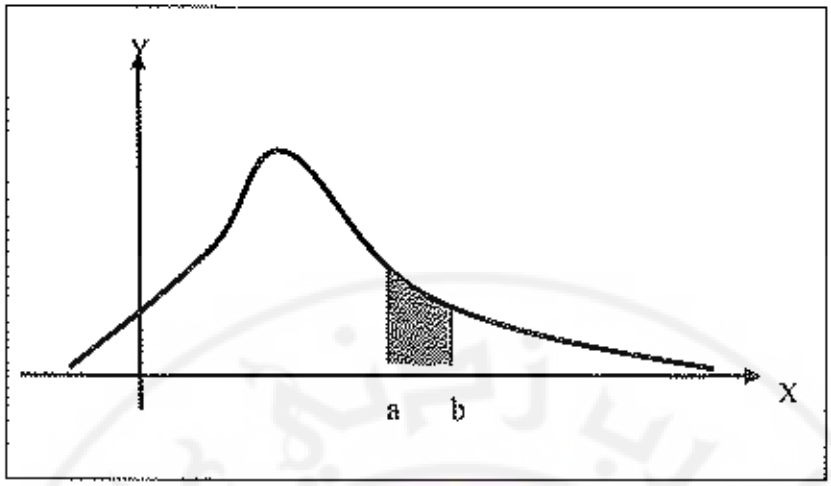
(2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$. أي أنّ المساحة المحددة بمنحني الدالة والمحور Ox تساوي الواحد. يوضّح الشكل الآتي منحني دالة الكثافة $y = f(x)$ لمتغير عشوائي مستمر X:



الشكل (24-8) – مساحة المنطقة المظللة =1

من التعريف السابق لدالة الكثافة الاحتمالية لمتغير عشوائي مستمر X نجد أنّ احتمال الحدث $a \leq X \leq b$ حيث a و b أي عددين حقيقيين من قيم المتغير X، يمثل المساحة المبينة بالشكل (25-8) والتي تُحسب بالعلاقة:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_{a}^{b} f(x)dx$$



الشكل (25-8) – مساحة المنطقة المظللة تمثل الاحتمال $P(a \le X \le b)$

كذلك نلاحظ أنّ: $P(a < X < b) \approx P(a \le X \le b)$

لأنّ $P(a \le X \le b) = P(a < X < b) + P(X = a) + P(X = b)$

$$= P(a < X < b) + \int_a^a f(x)dx + \int_b^b f(x)dx = P(a < X < b)$$

وذلك لأنّ: $\int_a^a f(x)dx = \int_b^b f(x)dx = 0$

ملاحظة ⑨: إنّ دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي المنقطع هي نفسها دالة التوزيع الاحتمالي المنقطع أي أنّ: $f(x) = P(X = x)$ حيث نلاحظ أنّ:

(1) $f(x) = P(X = x) \ge 0$ أياً كان x من قيم المتغير العشوائي X.

(2) $\sum_x f(x) = 1$.

(4) دالة التوزيع المجمعة (التراكمية):

ليكن X متغيراً عشوائياً منقطعاً أو مستمراً، دالة كثافته الاحتمالية $f(x)$، عندئذٍ تُعرّف دالة التوزيع المجمعة للمتغير X التي نرمز لها بالرمز: $F(x)$ بالعلاقة الآتية:

$$F(x) = P(X \le x) \qquad (8.43)$$

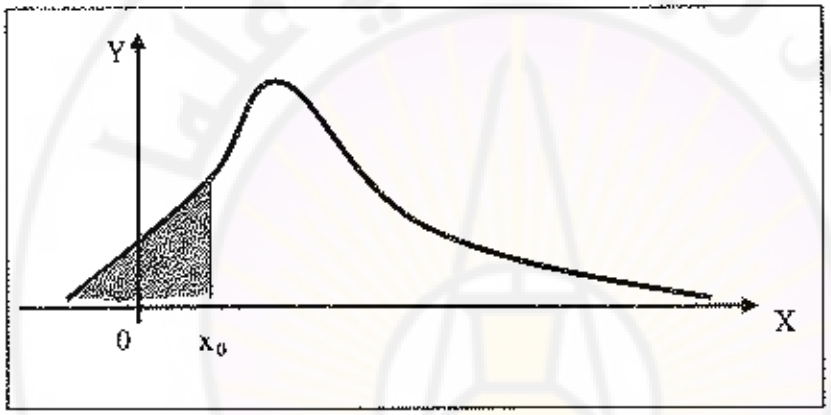
وبالتالي إذا كان X متغيراً عشوائياً منقطعاً فإنّ:

$$F(x_0) = P(X \le x_0) = \sum_{x \le x_0} f(x) = \sum_{x \le x_0} P(X = x)$$

حيث تمثل x_0 قيمة ما للمتغير المنقطع X.

أمّا إذا كان X متغيراً عشوائياً مستمراً فإنّ: $F(x_0) = P(X \le x_0) = \int_{-\infty}^{x_0} f(x)dx$

حيث تمثل x_0 قيمة ما للمتغير المستمر X. ويمكن توضيح ذلك بالشكل (6-26) الآتي:



الشكل (8-26) – $F(x_0) = P(X \le x_0)$

من العلاقة (8.43) نلاحظ أنّ دالة التوزيع المجمعة هي دالة في x، فإذا كان X متغيراً عشوائياً مستمراً فإنّ العلاقة الممثلة لدالة التوزيع المجمعة هي:

$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx \qquad (8.44)$$

كما يمكن الإفادة من دالة التوزيع المجمعة لمتغير عشوائي مستمر في حساب احتمال الحدث $P(x_1 \le X \le x_2)$ حيث نجد أنّ:

$$\begin{aligned} P(x_1 \le X \le x_2) &= P(X \le x_2) - P(X \le x_1) \\ &= F(x_2) - F(x_1) \end{aligned} \qquad (8.45)$$

مثال(33): متغير عشوائي مستمر X دالة كثافته هي :

$$f(x)=\frac{2}{21}(1+x)\ ,\ 1\le x\le 4$$

والمطلوب:

1- تأكد أنّ $f(x)$ هي دالة كثافة احتمالية.

2- أوجد دالة التوزيع المجمعة للمتغير العشوائي المستمر X.

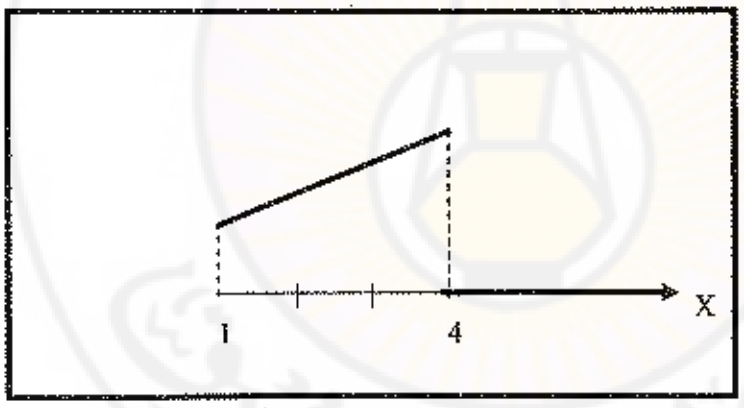
3- أوجد $P(X<2)$.

4- أوجد $P(2\le X<3)$.

الحل: 1- يمكن التعبير عن دالة الكثافة المفروضة بالآتي:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{2}{21}(1+x)\ ,\ 1\le x\le 4\\ 0\quad ,\quad x<1\ \text{ أو }\ x>4\end{cases}$$

حيث يمكن تمثيلها بيانياً كما في الشكل الآتي:



الشكل (27-8)

من تعريف دالة الكثافة $f(x)$ نلاحظ بسهولة أنّ $f(x)\ge 0$ أياً كان x من قيم المتغير العشوائي X. كما نلاحظ أنّ:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^{1} f(x)dx+\int_{1}^{4} f(x)dx+\int_{4}^{\infty} f(x)dx$$

$$=0+\frac{2}{21}\int_{1}^{4}(1+x)dx+0=\frac{2}{21}\left[x+\frac{x^2}{2}\right]_1^4=\frac{2}{21}\left(\frac{21}{2}\right)=1$$

وبالتالي فإنّ الدالة $f(x)$ السابقة هي دالة كثافة احتمالية.

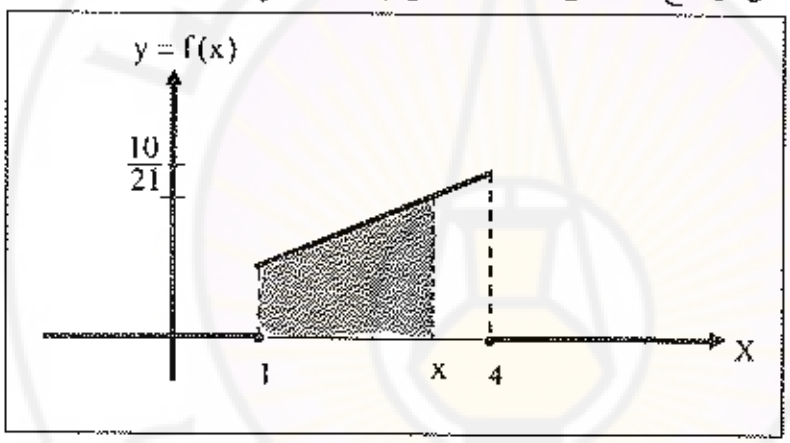
2- لإيجاد دالة التوزيع المجمعة للمتغير العشوائي المستمر X الذي دالة كثافته $f(x)$ نجد أنّ:

$$F(x)=P(X\le x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

$$=\int_{-\infty}^{1} f(x)dx+\int_{1}^{x} f(x)dx=0+\frac{2}{21}\int_{1}^{x}(1+x)dx$$

$$=\frac{2}{21}\left[x+\frac{x^2}{2}\right]_1^x=\frac{2}{21}\left(x+\frac{x^2}{2}-\frac{3}{2}\right)$$

حيث يمكن توضيح ذلك من خلال الشكل (28-6) الآتي:



الشكل (28-8)

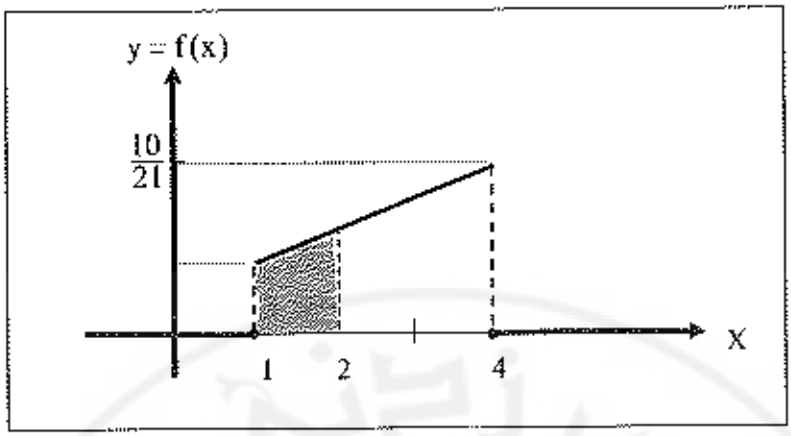
3- لحساب الاحتمال $P(X<2)$ نلاحظ أنّ:

$$P(X<2)=\int_{-\infty}^{2} f(x)dx=\frac{2}{21}\int_{1}^{2}(1+x)dx=\frac{2}{21}\left[x+\frac{x^2}{2}\right]_1^2=\frac{5}{21}=0.238$$

كما يمكن حساب هذا الاحتمال عن طريق دالة التوزيع المجمعة كالآتي:

$$P(X<2)=P(X\le 2)=F(2)=\frac{2}{21}(2+\frac{4}{2}-\frac{3}{2})=\frac{5}{21}=0.238$$

حيث يمكن توضيح ذلك من خلال الشكل (29-8):



الشكل (8-29)

4- لحساب الاحتمال $P(2 \le X < 3)$ نجد أنّ:

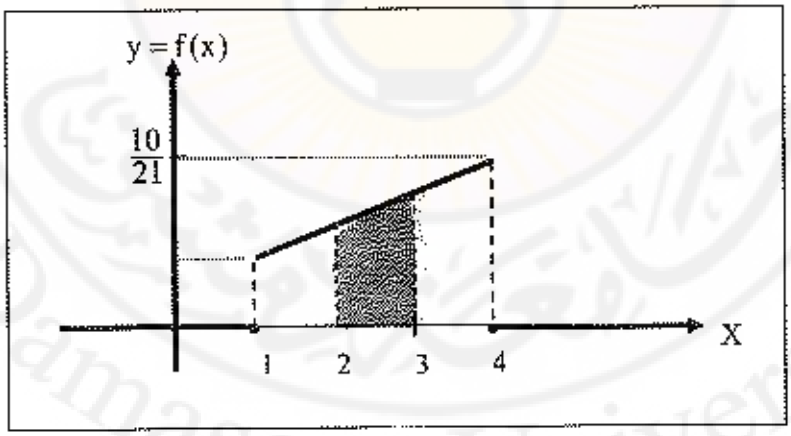
$$P(2 \le X < 3) = \int_2^3 f(x)dx = \frac{2}{21}\int_2^3 (1+x)dx = \frac{2}{21}\left[x + \frac{x^2}{2}\right]_2^3$$

$$= (\frac{2}{21})(\frac{7}{2}) = \frac{1}{3} = 0.333$$

كما يمكن حساب هذا الاحتمال عن طريق دالة التوزيع المجمعة كالآتي:

$$P(2 \le X < 3) = P(2 \le X \le 3) = F(3) - F(2) = 0.333$$

حيث يمكن توضيح ذلك من خلال الشكل (8-30).



الشكل (8-30)

(5) دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة لمتغيرين عشوائيين منقطعين:

ليكن X و Y متغيرين عشوائيين منقطعَيْن. فإنّ الدالة المعرفة على مجموعة قيّم المتجه العشوائي المنقطع (X,Y)، التي تأخذ قيمها من مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$، والمثلة لاحتمال كل قيمة (x,y) من قيم (X,Y) تُدعى بدالة الكثافة الاحتمالية المشتركة للمتغيرين العشوائيين المنقطعين X,Y . يُرمز لهذه الدالة بالرمز $f(x,y)$ حيث تكتب:

$$f(x,y)=P(X=x,Y=y)$$

إنّ هذه الدالة تُعطى عادة على شكل جدول يُسمى بجدول التوزيع الاحتمالي المشترك للمتغيرين العشوائيين X و Y المبين كالآتي:

X \ Y	y_1	y_2	...	y_m	المجموع
x_1	$f(x_1,y_1)$	$f(x_1,y_2)$	...	$f(x_1,y_m)$	$f(x_1)$
x_2	$f(x_2,y_1)$	$f(x_2,y_2)$	...	$f(x_2,y_m)$	$f(x_2)$
⋮	⋮	⋮	...	⋮	⋮
x_n	$f(x_n,y_1)$	$f(x_n,y_2)$	...	$f(x_n,y_m)$	$f(x_n)$
المجموع	$g(y_1)$	$g(y_2)$	...	$g(y_m)$	1

حيث يمثل $f(x_n)$ مجموع كل الاحتمالات الواقعة في السطر، والمقابلة للقيمة x_i $(i=1,2,\cdots,n)$ ويمثل $g(y_j)$ مجموع كل الاحتمالات الواقعة في العمود، والمقابلة للقيمة y_j $(j=1,2,\cdots,m)$. تُسمى الدوال: $f(x)$ و $g(y)$ المعرّفة بالعلاقتين الآتيتين:

$$f(x)=\sum_y f(x,y) \qquad g(y)=\sum_x f(x,y) \tag{8.46}$$

بالدوال الهامشية أو الحدّية (Marginal) لكل من X و Y على الترتيب؛ حيث تحقق دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة الشرطين الآتيين:

1) $f(x,y) \geq 0$

2) $\sum_x \sum_y f(x,y) = 1$

(6) دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة لمتغيرين عشوائيين مستمرين:

ليكن X و Y متغيرين عشوائيين مستمرين. عندئذٍ تكون الدالة $f(x,y)$ المعرفة على مجموعة قيّم هذا المتجه التي تأخذ قيمها من مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$، دالة كثافة احتمالية للمتجه العشوائي المستمر (X,Y) إذا حققت الشرطين الآتيين:

$$f(x,y) \geq 0 \quad -1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = 1 \quad -2$$

تُسمى الدالة $f(x,y)$ أيضاً دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة للمتغيرين العشوائيين المستمرّين X و Y.

من التعريف السابق للدالة $f(x,y)$ نجد أنه يمكننا الحصول على دالتي الكثافة الهامشيتين لكل من المتغيرين العشوائيين X و Y كالآتي:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy \qquad (8.47)$$

$$g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx \qquad (8.48)$$

(7) دالة التوزيع المجمعة (التراكمية) لمتغيرين عشوائيين:

إذا كان X و Y متغيرين عشوائيين، وكانت $f(x,y)$ دالة الكثافة المشتركة لهذين المتغيرين عندئذٍ تُعرف دالة التوزيع المجمعة لـ X و Y، والتي يرمز لها بالرمز: $F(x,y)$ بالعلاقة الآتية:

$$F(x,y) = P[X \leq x, Y \leq y] \qquad (8.49)$$

حيث تمثل x و y أعداداً حقيقية من قيم المتغيرين X و Y على الترتيب. فإذا كان (X,Y) متجهاً عشوائياً منقطعاً فإنّ:

$$F(x_0,y_0)=P[X\le x_0,Y\le y_0]=\sum_{x\le x_0}\sum_{y\le y_0}f(x,y)=\sum_{x\le x_0}\sum_{y\le y_0}P[X=x,Y=y]$$

أمّا إذا كان (X,Y) متجهاً عشوائياً مستمراً فإنّ:

$$F(x_0,y_0)=P[X\le x_0,Y\le y_0]=P[X<x_0,Y<y_0]=\int_{-\infty}^{x_0}\int_{-\infty}^{y_0}f(x,y)dxdy$$

من العلاقة (8.49) نلاحظ أنّ $F(x,y)$ هي عبارة عن دالة في المتغيرين الحقيقيين x و y ففي الحالة التي يكون فيها المتجه (X,Y) مستمراً نجد أنّ العلاقة الممثلة لدالة التوزيع المجمعة لهذا المتجه هي:

$$F(x,y)=P[X\le x,Y\le y]=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)du\,dv \qquad (8.50)$$

(8) المتغيرات العشوائية المستقلة:

إذا كانت $f(x,y)$ دالة الكثافة المشتركة للمتغيرين العشوائيين X و Y وكانت $f(x)$ و $g(y)$ دالتي الكثافة الهامشيتين لكلٍ من X و Y على الترتيب، عندئذٍ نقول عن المتغيرين العشوائيين X و Y إنهما مستقلان إذا وفقط إذا كان:

$$f(x,y)=f(x)g(y) \qquad (8.51)$$

نتيجة 4: إذا كان X و Y متغيرين عشوائيين، وكانت $F(x,y)$ دالة توزيعهما المجمعة فإنّ الشرط اللازم والكافي لكي يكون X و Y مستقلين هو:

$$F(x,y)=F(x)F(y) \qquad (8.52)$$

حيث تمثل $F(x)$ و $F(y)$ دوال التوزيع المجمعة لكل من المتغيرين X و Y على الترتيب.

مثال(34): يحتوي جهاز إلكتروني لا يعمل على تسع وصلات ثلاث منها بيضاء واثنتان سوداوان وأربع حمراوات. سُحب عشوائياً وصلتان من الجهاز لفحصهما. ليكن X المتغير العشوائي الدال على عدد القطع البيضاء المسحوبة و Y المتغير العشوائي الدال على عدد القطع السوداء المسحوبة والمطلوب:

(1) عيّن جدول التوزيع الاحتمالي المشترك للمتغيرين العشوائيين X و Y.

(2) أوجد التوزيعات الهامشية لكل من المتغيرين المنقطعين X و Y.

(3) بيّن إذا كان المتغيران العشوائيان X و Y مستقلين أم لا.

الحل: 1- إنّ قانون التوزيع المشترك للمتغيرين العشوائيين X و Y يعطى بالشكل:

X \ Y	0	1	2
0	f(0,0)	f(0,1)	f(0,2)
1	f(1,0)	f(1,1)	f(1,2)
2	f(2,0)	f(2,1)	f(2,2)

حيث نجد أنّ:

$$f(0,0) = P(X=0, Y=0) = \frac{C_3^0 C_2^0 C_4^2}{C_9^2} = \frac{6}{36}$$

$$f(0,1) = P(X=0, Y=1) = \frac{C_3^0 C_2^1 C_4^1}{C_9^2} = \frac{8}{36}$$

$$\vdots$$

$$f(2,2) = P(X=2, Y=2) = 0$$

وبالتالي فإنّ جدول التوزيع الاحتمالي المشترك للمتغيرين X و Y هو:

X \ Y	0	1	2	المجموع
0	$6/36$	$8/38$	$1/36$	$15/36$
1	$12/36$	$6/36$	0	$18/36$
2	$3/36$	0	0	$3/36$
المجموع	$21/36$	$14/36$	$1/36$	1

(2) بفرض أنّ $f(x)$ هي دالة الكثافة الهامشية لـ X و $g(y)$ دالة الكثافة الهامشية لـ Y فإننا نجد من جدول التوزيع المشترك أنّ:

$$f(0)=P(X=0)=\sum_{y}P(X=0,Y=y)=P(X=0,Y=0)+P(X=0,Y=1)+P(X=0,Y=2)$$

$$=\frac{15}{36}$$

$$f(1)=P(X=1)=\frac{18}{36}\quad,\quad f(2)=P(X=2)=\frac{3}{36}$$

ومنه فإنّ جدول التوزيع الاحتمالي المنقطع للمتغير X هو:

X	0	1	2
$f(x)=P(X=x)$	$15/36$	$18/36$	$3/36$

بالطريقة نفسها نجد أنّ جدول التوزيع الاحتمالي المنقطع للمتغير Y هو:

Y	0	1	2
$g(y)=P(Y=y)$	$21/36$	$14/36$	$1/36$

(3) من النتائج المبينة أعلاه نلاحظ أن المتغيرين العشوائيين X و Y غير مستقلين؛ وذلك لعدم تحقق الشرط $f(x,y)=f(x)g(y)$

مثال(35): ليكن YX متغيرين عشوائيين مستمرين دالة كثافتهما المشتركة معرفة بالعلاقة: $f(x,y)=\frac{x}{4}\left(1+3y^2\right);\ 0<x<2\ ,\ 0<y<1$

والمطلوب: 1- أثبت أنّ الدالة $f(x,y)$ هي دالة كثافة احتمالية.

2- أوجد دالتي الكثافة الهامشيتين لكل من: X و Y.

3- أوجد دالة التوزيع المجمعة للمتجه العشوائي المستمر: (X,Y)

4- احسب الاحتمال: $P[X<1,Y<0.5]$.

5- بيّن إذا كان المتغيران YX مستقلين أم لا.

الحل: 1- يمكن كتابة دالة الكثافة السابقة بالشكل:

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x}{4}(1+3y^2)\ ;\ 0<x<2;\ 0<y<1\\ 0\qquad\quad ;\quad \text{عدا ذلك}\end{cases}$$

حيث نلاحظ وضوحاً أنّ $f(x,y)\geq 0$ أياً كان العددان الحقيقيان x و y . كما نلاحظ أنّ:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy=1$$

لأنّ:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy=\int_0^2\int_0^1 \frac{x}{4}\left(1+3y^2\right)dxdy$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^2 xdx\int_0^1\left(1+3y^2\right)dy$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^2\left[y+y^3\right]_0^1 xdx=\frac{2}{4}\int_0^2 xdx=\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2=1$$

2- لإيجاد دالتي الكثافة الهامشيتين لكلٍ من X و Y نجد أنّ:

$$f'(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy=\int_0^1\frac{x}{4}\left(1+3y^2\right)dy=\frac{x}{4}\left[y+y^3\right]_0^1=\frac{x}{2}$$

$$g(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx=\int_0^2\frac{x}{4}\left(1+3y^2\right)dx=\frac{\left(1+3y^2\right)}{4}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2=\frac{1+3y^2}{2}$$

وبالتالي فإنّ دالة الكثافة الهامشية لـ X هي:

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{x}{2}\ ;\ 0<x<2\\ 0\quad ;\quad \text{عدا ذلك}\end{cases}$$

ودالة الكثافة الهامشية لـ Y هي:

$$g(y)=\begin{cases}\frac{1+3y^2}{2}\ ;\ 0<y<1\\ 0\quad ;\quad \text{عدا ذلك}\end{cases}$$

3- لإيجاد دالة التوزيع المجمعة للمتجه (X,Y) نجد أنّ:

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,du\,dv$$

$$=\int_{-\infty}^{x}\int_{01}^{y}\frac{u}{4}\left(1+3v^2\right)du\,dv$$

$$=\frac{1}{4}\int_{0}^{x}u\left[v+v^3\right]_0^y du=\frac{1}{4}\int_{0}^{x}u\left[y+y^3\right]_0^y du$$

$$=\frac{1}{4}\left(y+y^3\right)\left[\frac{u^2}{2}\right]_0^x=\frac{1}{8}x^2\left(y+y^3\right)$$

4- لحساب الاحتمال $P[X<1,Y<0.5]$ نجد أنّ:

$$P[X<1,Y<0.5]=\int_{0}^{1}\int_{0}^{0.5}\frac{x}{4}\left(1+3y^2\right)dx\,dy=\int_{0}^{1}\frac{x}{4}\left[y+y^3\right]_0^{0.5}dx=(0.156)\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1=0.078$$

حيث يمكن حساب الاحتمال السابق أيضاً عن طريق دالة التوزيع المجمعة كما يأتي:

$$P[X<1,Y<0.5]=F(1,0.5)=\frac{1}{8}(1)^2\left(0.5+(0.5)^3\right)=0.078$$

5- ممّا سبق نجد أنّ المتغيرين العشوائيين X و Y مستقلان؛ لأنّ: $F(x,y)=f(x)g(y)$ حيث يمكن التحقق من ذلك بسهولة.

٣.٥.٨ القيم المميزة للمتغيرات العشوائية:

(1) التوقع الرياضي لمتغير عشوائي (Mathematical expection of a random variable):

إذا كان X متغيراً عشوائياً، فإنّ قيم هذا المتغير تتوزع عشوائياً حيث تميل غالباً إلى التراكم أو التجمع حول قيمة معينة تعبر عن تمركز هذا التوزيع. تسمى هذه القيمة بالقيمة المتوقعة أو التوقع الرياضي للمتغير X حيث يرمز لها بالرمز $E(X)$. فإذا كان X متغيراً

عشوائياً منقطعاً دالة كثافته الاحتمالية $f(x) = P(X = x)$ فإنّ التوقع الرياضي لهذا المتغير يكون:

$$E(X) = \sum_x xf(x) = \sum_x xp(X = x) \qquad (8.53)$$

وإذا كان X متغيراً عشوائياً مستمراً دالة كثافته الاحتمالية $f(x)$ فإنّ التوقع الرياضي للمتغير X في هذه الحالة يكون:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx \qquad (8.54)$$

مثال(36): أوجد التوقع الرياضي للمتغير العشوائي المنقطع المعرف في المثال (32).

الحل: بالعودة إلى المثال (32) وبالإفادة من جدول التوزيع الاحتمالي نجد أنّ:

$$E(x) = \sum_{x=0}^{3} xf(x) = (0)\left(\frac{56}{165}\right)+(1)\left(\frac{84}{165}\right)+(2)\left(\frac{24}{165}\right)+(3)\left(\frac{1}{165}\right)$$
$$= \frac{135}{165} = 0.818 \approx 1$$

أي أننا نتوقع أن نجد ترانزستوراً واحداً تالفاً ضمن الترانزستورات الثلاثة المختارة.

مثال(37): أوجد التوقع الرياضي للمتغير العشوائي المستمر المعرف في المثال (33).

الحل: بالعودة إلى المثال (33) حيث كان لدينا X متغيراً عشوائياً مستمراً دالة كثافته:

$$f(x) = \frac{2}{21}(1+x) \quad , \quad 1 \le x \le 4$$

نجد أنّ التوقع الرياضي للمتغير X هو:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{\infty}^{1} xf(x)dx + \int_{1}^{4} xf(x)dx + \int_{4}^{\infty} xf(x)dx$$
$$= \int_{1}^{4} x\left[\frac{2}{21}(1+x)\right]dx = \frac{2}{21}\int_{1}^{4}(x+x^2)dx = 2.707$$

ملاحظة ⑩: يمكن تعميم مفهوم التوقع الرياضي لمتغير عشوائي منقطع أو مستمر ليشمل حالة حساب القيمة المتوقعة لدالة في هذا المتغير العشوائي. فإذا كان X متغيراً عشوائياً منقطعاً دالة كثافته الاحتمالية $f(x)$، وكانت $u(x)$ دالة عددية في X فإنّ التوقع الرياضي للدالة $u(X)$ يعطى بالعلاقة:

$$E[u(X)] = \sum_{x} u(x)f(x) \qquad (8.55)$$

وإذا كان X متغيراً عشوائياً مستمراً دالة كثافته الاحتمالية $f(x)$، وكانت $u(x)$ دالة عددية في X مستمرة على مجموعة الأعداد الحقيقية أو على جزء منها، فإنّ التوقع الرياضي للدالة $u(X)$ يكون:

$$E[u(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} u(x)f(x)dx \qquad (8.56)$$

(2) التوقع الرياضي لدالة متجه عشوائي:

إذا كان X,Y متغيرين عشوائيين منقطعين، وكانت $f(x,y)$ دالة الكثافة المشتركة بينهما و $u(x,y)$ دالة عددية في X و Y فإنّ التوقع الرياضي للدالة $u(X,Y)$ يكون:

$$E[u(X,Y)] = \sum_{x}\sum_{y} u(x,y)f(x,y) \qquad (8.57)$$

وإذا كان المتغيران العشوائيان X و Y مستمرين، والدالة $u(x,y)$ مستمرة؛ فإنّ التوقع الرياضي للدالة $u(X,Y)$ يكون:

$$E[u(X,Y)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} u(x,y)f(x,y)dxdy \qquad (8.58)$$

نتيجة 5: إذا كان X و Y متغيرين عشوائيين مستقلين فإنّ:

$$E[XY] = E(X)E(Y) \qquad (8.59)$$

مثال(38): بالعودة للمثال (35) حيث كان X و Y متغيرين عشوائيين دالة كثافتهما المشتركة هي: $f(x,y)=\frac{x}{4}\left(1+3y^2\right);\ 0<x<2\ ,\ 0<y<1$

وكانت دالتي الكثافة الهامشيتين لكل من المتغيرين X و Y هي:

$$f(x)=\frac{x}{2}\ ;\ 0<x<2 \qquad g(y)=\frac{1+3y^2}{2}\ ;\ 0<y<1$$

حيث وجدنا أنّ X و Y مستقلان؛ لأنّ: $f(x,y)=f(x)g(y)$

1- لنحسب الآن التوقع الرياضي لكلٍ من X و Y و XY. حيث نجد أنّ:

$$E(XY)=\int_0^2\int_0^1 xy\frac{x}{4}\left(1+3y^2\right)dx\,dy=\int_0^2\frac{x^2}{4}dx\int_0^1\left(y+3y^3\right)dy=\frac{5}{6}$$

$$E(X)=\int_0^2\int_0^1 x\frac{x}{4}\left(1+3y^2\right)dx\,dy=\int_0^2\frac{x^2}{4}dx\int_0^1\left(1+3y^2\right)dy=\frac{4}{3}$$

$$E(Y)=\int_0^2\int_0^1 y\frac{x}{4}\left(1+3y^2\right)dx\,dy=\int_0^2\frac{x}{4}dx\int_0^1\left(y+3y^3\right)dy=\frac{5}{6}$$

ويمكن حساب التوقع الرياضي لكلٍ من X و Y مباشرةً عن طريق دالتي الكثافة الهامشيتين f(x) و g(y) حيث نجد أنّ:

$$E(X)=\int_0^2\frac{x^2}{2}dx=\frac{4}{3} \qquad E(Y)=\int_0^1 y\frac{\left(1+3y^2\right)}{2}dy=\frac{5}{8}$$

ممّا سبق نجد أنّ $E(XY)=\frac{5}{6}=\left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{5}{8}\right)=E(X)\cdot E(Y)$ وذلك لأنّ X و Y متغيران عشوائيان مستقلان.

(3) خواص التوقع الرياضي (أو القيمة المتوقعة):

1- إذا كان k ثابتاً عددياً فإنّ:

$$E(k)=k \qquad (8.50)$$

وذلك لأنّ:

$$E(k)=\begin{cases}\sum_x kf(x)=k\sum_x f(x)=k(1)=k\\ \int_{-\infty}^{\infty} kf(x)=k\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=k(1)=k\end{cases}$$

2- إذا كانت $u(x)$ دالة في المتغير العشوائي المنقطع أو المستمر X وكان k عدداً ثابتاً. فإنّ:

$$E[ku(X)]=kE[u(X)] \qquad (8.60)$$

وذلك لأنّ:

$$E[ku(X)]=\begin{cases}\sum_x ku(x)f(x)=k\sum_x u(x)f(x)=kE[u(X)]\\ \int_{-\infty}^{\infty} ku(x)f(x)dx=k\int_{-\infty}^{\infty} u(x)f(x)dx=kE[u(X)]\end{cases}$$

3- إذا كانت $u_1(x_1),u_2(x_2),\ldots,u_n(x_n)$ دوال عددية في المتغيرات العشوائية (المنقطعة أو المستمرة) $X_1,X_2,\ldots X_n$ على الترتيب فإنّ:

$$E(k_1u_1+k_2u_2+\ldots+k_nu_n)=k_1E(u_1)+k_2E(u_2)+\ldots k_nE(u_n) \qquad (8.61)$$

حيث تمثل $k_1,k_2,\ldots,k_n$ أعداداً ثابتة. أي أنّ القيمة المتوقعة هي عملية خطية. وبشكل خاص إذا كانت: $k_1=k_2=\ldots=k_n=1$ فإنّ:

$$E(u_1+u_2+\ldots+u_n)=E(u_1)+E(u_2)+\ldots E(u_n) \qquad (8.62)$$

من الخواص السابقة وفي الحالة الخاصة التي يكون فيها $u(X)=X$ و $u_1(X_1)=X_1,\ldots,u_n(X_n)=X_n$ نستنتج أنه:

$$E(kX)=kE(X) \qquad (8.63)$$

حيث يمثل k عدداً ثابتاً.

$$E(k_1X_1+k_2X_2+\ldots+k_nX_n)=k_1E(X_1)+k_2E(X_2)+\ldots+k_nE(X_n) \qquad (8.64)$$

حيث تمثل $k_1,k_2,\ldots,k_n$ أعداداً ثابتة. وبشكل خاص يكون:

$$E(X_1+X_2+\ldots+X_n)=E(X_1)+E(X_2)+\ldots+E(X_n) \qquad (8.65)$$

مثال(39): إذا كانت :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{16} & , \quad x = 1,3,5,7 \\ 0 & , \quad \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

هي دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي X، والمطلوب حساب ما يلي:

أ- $E(X)$ ب- $E(X^3)$ جـ- $E(5X+2X^3)$

الحل: من تعريف الدالة $f(x)$ نلاحظ أنّ المتغير العشوائي X هو متغير منقطع، حيث نجد أنّ:

أ- $$E(X) = \sum_x xf(x) = (1)(\frac{1}{16}) + (3)(\frac{3}{16}) + (5)(\frac{5}{16}) + (7)(\frac{7}{16}) = \frac{84}{16} = 5.25$$

ب-

$$E(X^3) = \sum_x x^3 f(x) = (1^3)(\frac{1}{16}) + (3^3)(\frac{3}{16}) + (5^3)(\frac{5}{16}) + (7^3)(\frac{7}{16}) = \frac{3108}{16} = 194.25$$

جـ- إذا كانت $u(x) = 5x + 2x^3$ دالة عددية في المتغير X فإنّ:

$$E[u(X)] = E[5X + 2X^3] = \sum_x (5x + 2x^3) f(x)$$

$$= (7)(\frac{1}{16}) + (69)(\frac{3}{16}) + (275)(\frac{5}{16}) + (721)(\frac{7}{16}) = \frac{6636}{16} = 414.75$$

وهناك طريقة أخرى لحساب التوقع الرياضي للدالة $u(X)$ وذلك بالاستفادة من خواص التوقع حيث نجد أنّ:

$$E[u(X)] = E[5X + 2X^3] = 5E(X) + 2E(X^3) = 5(5.25) + 2(194.25) = 414.75$$

مثال(40): إذا كانت الدالة:

$$f(x) = \begin{cases} 3(1 - \frac{1}{2}x) & , \quad 0 < x < 1 \\ 0 & , \quad \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

هي دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي X، فاحسب القيمة المتوقعة للدالة العددية $u(X)$ في كلٍ من الحالات الآتية:

أ- $u(X)=X$ ب- $u(X)=X^3$ جـ- $u(X)=2X+6X^3$

الحل: من التعريف المعطى لدالة الكثافة نلاحظ أنّ المتغير العشوائي X هو متغير مستمر، وعليه نجد أنّ:

أ- $$E[u(X)]=E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx\int_{0}^{1}3x(1-\frac{1}{2}x)dx$$

$$=3\int_{0}^{1}xdx-\frac{3}{2}\int_{0}^{1}x^2dx=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=1$$

ب- $$E[u(X)]=E(X^3)=\int_{-\infty}^{\infty}x^3f(x)dx=\int_{0}^{1}3x^3(1-\frac{1}{2}x)dx$$

$$=3\int_{0}^{1}x^3dx-\frac{3}{2}\int_{0}^{1}x^4dx=\frac{9}{20}=0.45$$

جـ- لنحسب التوقع الرياضي للدالة: $u(X)=2X+6X^3$ باستخدام الخاصة الخطية للقيمة المتوقعة كالآتي:

$$E[u(X)]=E[2X+6X^3]=2E(X)+6E(X^3)$$

$$=2(1)+6\left(\frac{9}{20}\right)=\frac{47}{10}=4.7$$

ملاحظة 1: ليكن X متغيراً عشوائياً منقطعاً عندئذٍ نجد من تعريف التوقع الرياضي لهذا المتغير ومن تعريف المتوسط الحسابي لقيم هذا المتغير، بأنّ التوقع الرياضي للمتغير المنقطع X هو ليس إلاّ المتوسط الحسابي لهذا المتغير. حيث يُرمز عادةً للمتوسط الحسابي للمتغير العشوائي X بالرمز μ_x وبالتالي فإنّ:

$$\mu_x=E(X) \qquad (8.66)$$

إنّ العلاقة (8.66) تبقى محققة في كل من حالتي المتغير العشوائي المنقطع والمستمر.

(4) تباين (تشتت) المتغير العشوائي (Variance of a random variable):

إنّ إيجاد التوقع الرياضي لمتغير عشوائي لا يفي بالغرض في كثير من الأحيان حيث غالباً ما نحتاج لمعرفة العلاقة بين قيم المتغير العشوائي والقيمة المتوقعة له.

تعريف: ليكن X متغيراً عشوائياً توقعه الرياضي $E(X) = \mu_x = \mu$. إنّ تباين المتغير العشوائي X الذي نرمز له بالرمز: $Var(X)$ أو بالرمز: σ_x^2 يعطى بالعلاقة:

$$Var(X) = \sigma_x^2 = E(X-\mu)^2 \qquad (8.67)$$

فإذا كان X متغيراً عشوائياً منفصلاً دالة كثافته الاحتمالية $f(x)$ فإنّ:

$$\sigma_x^2 = \sum_x (x-\mu)^2 f(x) \qquad (8.68)$$

أمّا إذا كان X متغيراً عشوائياً مستمراً دالة كثافته الاحتمالية $f(x)$ فإنّ:

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx \qquad (8.69)$$

(5) الانحراف المعياري لمتغير عشوائي:

ليكن X متغيراً عشوائياً تباينهُ $\sigma_x^2 = Var(X)$ عندئذ يعرف الانحراف المعياري للمتغير العشوائي X بأنه الجذر التربيعي الموجب لتباينه أي أنّ:

$$\sigma_x = \sqrt{Var(X)} \qquad (8.70)$$

مثال(41): احسب التباين، والانحراف المعياري للمتغير العشوائي المنقطع المعرف في المثال (32).

الحل: وجدنا في المثال (36) أنّ التوقع الرياضي لهذا المتغير العشوائي هو:

$$\mu_x = E(X) = 0.818$$

ومنه فإنّ التباين يكون: $Var(X) = \sigma_x^2 = \sum_x (x-\mu)^2 f(x)$

$$= (0-0.818)^2\left(\frac{56}{165}\right) + (1-0.818)^2\left(\frac{84}{165}\right) + (2-0.818)^2\left(\frac{24}{165}\right) + (3-0.818)^2\left(\frac{1}{165}\right)$$

$$\sigma_x^2 = 0.752$$

وبالتالي فإنّ الانحراف المعياري للمتغير X هو: $\sigma_x = \sqrt{0.752} = 0.867$

مثال(42): احسب التباين، والانحراف المعياري للمتغير العشوائي المستمر المعرف بالشكل الآتي:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{2}{21}(1+x) & 1\le x\le 4\\ 0 & \text{غير ذلك}\end{cases},$$

الحل: من تطبيق تعريف القيمة المتوقعة نجد أنّ التوقع الرياضي لهذا المتغير هو:

$$\mu_x=E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\,f(x)dx=\frac{2}{21}\int_1^4(x+x^2)dx=2.707$$

ومنه فإنّ التباين يكون: $Var(X)=\sigma_x^2=E(x-\mu)^2$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2f(x)dx=\int_1^4(x-2.707)^2\frac{2}{21}(1+x)dx$$

$$=\frac{2}{21}\int_1^4(x^3-4.414x^2+1.914x+7.328)dx=7.394$$

وبالتالي فإنّ الانحراف المعياري للمتغير X يكون: $\sigma_x=\sqrt{7.394}=2.72$

نتيجة 6: من التعريف المعطى بالعلاقة (6.67) لتباين متغير عشوائي X وبالإفادة من خواص التوقع الرياضي نجد أنّ:

$$Var(X)=E(x-\mu)^2=E\left(x^2-2\mu x+\mu^2\right)=E\left(x^2\right)-2\mu E(x)+E\left(\mu^2\right)=E\left(x^2\right)-2\mu^2+\mu^2$$

$$Var(X)=E\left(X^2\right)-\mu^2 \qquad (8.68)$$

وبالتالي فإنه يمكننا حساب التباين لمتغير عشوائي X من العلاقة (8.68) أيضاً.

مثال(43): ليكن X متغيراً عشوائياً منقطعاً له جدول التوزيع الاحتمالي الآتي:

x	0	1	2	3
f(x)	$27/64$	$27/64$	$9/64$	$1/64$

أوجد التوقع الرياضي للمتغير X وكذلك التباين والانحراف المعياري.

الحل: إنّ التوقع الرياضي للمتغير العشوائي المنقطع X هو:

$$\mu_x = E(X) = \sum_{x=0}^{3} x\, f(x) = 0.75$$

لنوجد الآن التوقع الرياضي لـ X^2 حيث نجد أنّ:

$$E\left(X^2\right) = \sum_{x=0}^{3} x^2\, f(x) = 1.125$$

ومنه فإنّ التباين للمتغير X يكون:

$$\sigma_x^2 = Var(X) = E\left(X^2\right) - \mu^2 = 1.125 - (0.75)^2 = 0.563$$

حيث نجد أنّ الانحراف المعياري هو: $\sigma_x = \sqrt{0.563} = 0.75$

(6) خواص التباين لمتغير عشوائي:

بالاعتماد على خواص التوقع الرياضي، وعلى تعريف تباين متغير عشوائي نستطيع أن نستنتج خواص التباين الآتية: إذا كانت $u(x)$ دالة في المتغير العشوائي X، وكان ℓ و k عددين ثابتين حيث $k \neq 0$ فإنّ:

1) $$Var(k) = 0 \qquad (8.69)$$

2) $$Var\left(ku(X) + \ell\right) = k^2 Var\left(u(X)\right) \qquad (8.70)$$

3) إذا كانت $u_1(X_1), u_2(X_2), \cdots, u_n(X_n)$ دوال عددية في المتغيرات العشوائية المستقلة $X_1, X_2, \cdots, X_n$ على الترتيب فإنّ:

$$Var\left(u_1 + u_2 + \cdots u_n\right) = Var\left(u_1\right) + Var\left(u_2\right) + \cdots + Var\left(u_n\right) \qquad (8.71)$$

من الخواص السابقة، وفي الحالة التي يكون فيها $u_1(X_1) = X_1, \cdots, u_n(X_n) = X_n, u(X) = X$ وبفرض أنّ k عدد ثابت لا يساوي الصفر، نستنتج أنّ:

$$Var(kX + \ell) = k^2 Var(X) \qquad (8.72)$$

وإذا كانت $X_1, X_2, \cdots, X_n$ متغيرات عشوائية مستقلة فإنّ:

$$\mathrm{Var}(X_1, X_2, \cdots, X_n) = \mathrm{Var}(X_1) + \mathrm{Var}(X_2) + \cdots + \mathrm{Var}(X_n) \qquad (8.73)$$

مثال(44): ليكن X و Y متغيرين عشوائيين مستقلين بحيث إنّ:

$E(X) = 1$, $E(Y) = 3$, $\mathrm{Var}(X) = 1.5$, $\mathrm{Var}(Y) = 5$ عندها نجد أنّ:

$$E(2X - 3Y + 7) = 2E(X) - 3E(Y) + 7 = 2 - 9 + 7 = 0$$

$$\mathrm{Var}(2X - 3Y + 7) = \mathrm{Var}(2X) + \mathrm{Var}(-3Y) + \mathrm{Var}(7)$$

$$= 4\mathrm{Var}(X) + 9\mathrm{Var}(Y) + 0 = (4)(1.5) + (9)(5) = 51$$

(7) التباين المزدوج لمتغيرين عشوائيين:

يُعرّف التباين المزدوج لمتغيرين عشوائيين X و Y (أو التغاير بين المتغيرين العشوائيين X و Y) بالعلاقة الآتية:

$$\mathrm{cov}(X, Y) = \sigma_{xy} = E\left[(X - \mu_1)(Y - \mu_2)\right] \qquad (8.74)$$

حيث $\mu_1 = E(X)$ و $\mu_2 = E(Y)$

من العلاقة (8.74) وبالإفادة من خواص التوقع الرياضي نجد بسهولة أنّ:

$$\mathrm{cov}(X, Y) = E(XY) - \mu_1\mu_2 \qquad (8.75)$$

ومنه نستنتج العلاقة الهامة:

$$E(XY) = \mathrm{cov}(X, Y) + \mu_1\mu_2 \qquad (8.76)$$

والتي تكتب أيضاً بالشكل الآتي:

$$E(XY) = \mathrm{cov}(X, Y) + E(X)E(Y) \qquad (8.77)$$

نتيجة 7: يمكن بسهولة إثبات أنه إذا كان X و Y متغيرين عشوائيين توقعهما μ_1 و μ_2 على الترتيب، وكانت a_1, a_2, b_1, b_2 أعداداً حقيقية حيث $a_1 \neq 0$ و $a_2 \neq 0$ فإنّ:

$$\operatorname{cov}(a_1X+b_1, a_2Y+b_2) = a_1a_2\operatorname{cov}(X,Y) \qquad (8.78)$$

(8) معامل الارتباط بين متغيرين عشوائيين:

يُعرّف معامل الارتباط بين متغيرين عشوائيين بالعلاقة الآتية:

$$\rho(X,Y) = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma_x \cdot \sigma_y} \qquad (8.79)$$

حيث تمثل σ_x ، σ_y الانحرافين المعياريين للمتغيرين X و Y على الترتيب.

ملاحظة (12) : إنّ معامل الارتباط بين متغيرين عشوائيين هو عدد حقيقي محصور بين العدد (1-) والعدد (1) أي أنّ: $-1 \le \rho(X,Y) \le 1$

نتيجة 8: يمكن بسهولة إثبات أنّ:

$$\rho(a_1X+b_1, a_2Y+b_2) = \rho(X,Y) \qquad (8.80)$$

حيث تمثل a_1, a_2, b_1, b_2 أعداداً حقيقية و $a_1 \neq 0$ و $a_2 \neq 0$

نتيجة 9: إذا كان X و Y متغيرين عشوائيين مستقلين، فإنّ: $\operatorname{Cov}(X,Y) = 0$ ، وكذلك $\rho(X,Y) = 0$

مثال(45): أوجد التباين المزدوج للمتغيرين العشوائيين المنقطعين: X و Y المعرفين في المثال (34)، ثم أوجد معامل الارتباط بين هذين المتغيرين.

الحل: بالعودة للمثال (34) وبالإفادة من جدول التوزيع الاحتمالي المشترك للمتغيرين X و Y ومن جدول التوزيع الاحتمالي المنقطع لكلٍ من المتغيرين X و Y نجد أنّ:

$$E(X) = \sum_x xf(x) = \frac{2}{3} \quad , \quad E(Y) = \sum_y yg(y) = \frac{4}{9} \quad , \quad E(XY) = \sum_x \sum_y xy\, f(x,y) = \frac{1}{6}$$

ومنه، فإنّ التباين المزدوج للمتغيرين X و Y يكون:

$$COV(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{1}{6} - \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{4}{9}\right) = -\frac{7}{54} = -0.129$$

ولإيجاد معامل الارتباط بين المتغيرين X و Y نحتاج لحساب σ_x و σ_y حيث نجد أنّ:

$$E(X^2) = \sum_x X^2 f(x) = \frac{10}{12} = \frac{5}{6} \quad , \quad E(Y^2) = \sum_y Y^2 g(y) = \frac{1}{2}$$

ومنه، فإنّ:

$$\sigma_x^2 = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{5}{6} - \frac{4}{9} = \frac{14}{36} = 0.388$$

$$\sigma_y^2 = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = \frac{1}{2} - \frac{16}{81} = \frac{98}{324} = 0.302$$

وبالتالي؛ فإنّ معامل الارتباط بين المتغيرين X و Y يكون:

$$\rho(X,Y) = \frac{COV(X,Y)}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{-0.129}{\sqrt{0.388}\sqrt{0.302}} = -0.378$$

لاحظ أنّ معامل الارتباط $\rho(X,Y)$ لا يساوي الصفر؛ وذلك لأنّ المتغيرين X و Y في هذا المثال غير مستقلين كما وجدنا سابقاً.

٦.٨ بعض التوزيعات الخاصة (Special Distributions)

درسنا فيما سبق التوزيعات الاحتمالية للمتغيرات العشوائية حيث وجدنا أنّ هناك نوعين لهذه التوزيعات حسب كون المتغير العشوائي منقطعاً أو مستمراً.

فيما يلي نذكر نموذجين من التوزيعات الاحتمالية الشهيرة:

١.٦.٨ التوزيع الثنائي (Binomial distribution):

يطلق اسم التوزيع الثنائي على حصيلة التجارب ذات المحاولات المتكررة والمستقلة التي تحوي كل منها على نتيجتين فقط مثل النجاح أو الفشل، الصورة أو الكتابة، جيد أو غير جيد، عالٍ أو متدنٍ ...إلخ، كما يُطلق على مثل هذه المحاولات اسم محاولات برنولي (Bernolli trials).

تعريف التجربة الثنائية: التجربة الثنائية هي التجربة التي تتميز بالخواص الآتية:

(1) تتألف التجربة من n محاولة من التكرارات المتماثلة تماماً.

(2) نتيجة كل محاولة هي النجاح أو الفشل.

(3) احتمال النجاح ونرمز له بـ p يبقى ثابتاً من محاولة لأخرى (وبالتالي فإنّ احتمال الفشل هو $q=1-p$)

(4) المحاولات المتكررة مستقلة بعضها عن بعض.

(5) نهتم بعدد النتائج المطلوبة x (والتي تسمى بالنجاحات) التي نحصل عليها خلال n محاولة.

تعريف (المتغير العشوائي الثنائي): يُدعى المتغير العشوائي المنقطع X الذي يعين عدد النجاحات في n محاولة من تجربة ثنائية بالمتغير العشوائي الثنائي. كما تُدعى دالة الكثافة الاحتمالية لهذا المتغير بدالة التوزيع الثنائي التي تأخذ الشكل الآتي:

$$f(x,n,p)=P(X=x)=\begin{cases}c_n^x\,p^x\,q^{n-x} & x=0,1,2,\cdots,n\\ 0\end{cases} \qquad (8.81)$$

حيث إنّ:

$$c_n^x=\frac{n!}{x!(n-x)!} \qquad (8.82)$$

إنّ دالة التوزيع الثنائي هي دالة كثافة احتمالية؛ لأنّ:

1) $f(x,n,p)=P(X=x)\geq 0$

2) $$\sum_{x=0}^{n}P(X=x)=\sum_{x=0}^{n}c_n^x\,p^x\,q^{n-x}=(p+q)^n=1$$

من التعريف السابق لدالة التوزيع الثنائي يمكن الإثبات بسهولة أنّ التوقع الرياضي للمتغير العشوائي الثنائي هو: $E(X)=\sum_{x=0}^{n}x\,P(X=x)$

$$E(X)=nP \qquad (8.83)$$

كذلك يمكن الإثبات بسهولة أنّ تباين المتغير العشوائي الثنائي X هو:

$$Var(X) = \sigma_x^2 = E(x-\mu)^2$$

$$\sigma_x^2 = npq \qquad (8.84)$$

وبالتالي؛ فإنّ الانحراف المعياري يكون:

$$\sigma_x = \sqrt{npq} \qquad (8.85)$$

مثال(46): وجد في إنتاج أحد المصانع أنّ من بين كل 1000 وحدة منتجة توجد 150 وحدة تالفة، فإذا أُخذت عينة مكونة من 5 وحدات فاحسب كلاً من الاحتمالات الآتية:

أ) الوحدات المختارة كلها سليمة.

ب) وحدة واحدة على الأكثر تالفة.

جـ) وحدتان تالفتان على الأقل.

الحل: نلاحظ أنّ لدينا تجربة ثنائية حيث يكون الإنتاج تالفاً أو غير تالف. فإذا افترضنا أنّ X هو المتغير العشوائي الممثل لعدد الوحدات التالفة ضمن العينة العشوائية المختارة. فإننا نجد أنه يأخذ القيم الآتية: $x = 0,1,2,3,4,5$

كما نجد: $p = \frac{150}{1000} = 0.15 \quad , \quad q = 1-p = 0.85 \quad , \quad n = 5$

وباستخدام العلاقة (8.81) السابقة نجد أنّ:

أ) احتمال أن تكون جميع الوحدات المختارة سليمة هو:

$$P(X=0) = f(0,5,0.15) = c_5^0 (0.15)^0 (0.85)^5 = 0.4437$$

ب) احتمال وجود وحدة واحدة تالفة على الأكثر هو:

$$P(X \le 1) = P(X=0) + P(X=1) = 0.4437 + c_5^1 (0.15)^1 (0.85)^4 = 0.8352$$

جـ) احتمال وجود وحدتين تالفتين على الأقل:

$$P(X \ge 2) = 1 - P(X \le 1) = 1 - 0.8352 = 0.1648$$

مثال(47): أوجد التوقع الرياضي والتباين والانحراف المعياري للمتغير العشوائي الثنائي المعرّف في المثال (46).

الحل: بالإفادة من العلاقتين (8.83) و (8.84) نجد أنّ التوقع الرياضي للمتغير الثنائي X هو:

$$E(X) = np = (5)(0.15) = 0.75$$

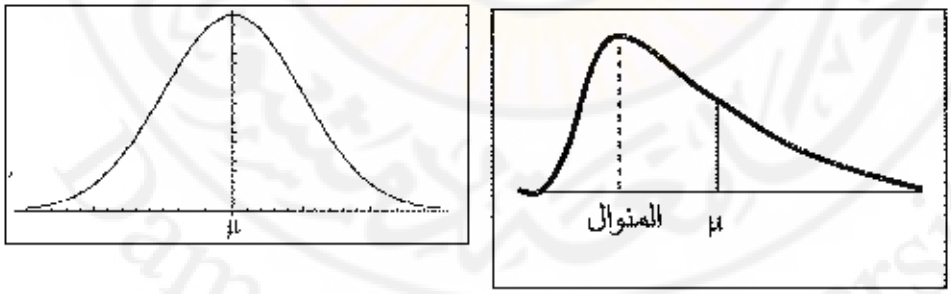
كما نجد أنّ التباين لهذا المتغير هو : $\sigma_x^2 = npq = (5)(0.15)(0.85) = 0.6375$

وبالتالي؛ فإنّ الانحراف المعياري يكون: $\sigma_x = 0.798$

أي أننا نتوقع وجود وحدة واحدة تالفة تقريباً بين الوحدات الخمس المختارة وبانحراف معياري قدره 0.798 ؛ لأنّ $0.75 - 0.798 = -0.048 \le \mu \le 0.75 + 0.798 = 1.548$

٢.٦.٨ التوزيع الطبيعي (Normal distribution):

يُقال عن أي توزيع تكراري أو نسبي لمتغير عشوائي مستمر X إنّه توزيع طبيعي أو معتدل ويرمز له بالرمز: $N(\mu, \sigma^2)$ حيث μ و σ يمثلان المتوسط والانحراف المعياري للتكرارات، إذا كانت تكرارات هذا المتغير العشوائي (كماً كانت أو وصفاً) تنتشر وتتوزع بصورة متماثلة حول متوسط تلك التكرارات. وبخلاف ذلك يُقال عن التوزيع إنّه غير طبيعي أو غير متماثل الانتشار أو ملتوٍ (skewed). ويمكن توضيح ذلك من خلال الشكل (8-31) الآتي:



-b- منحنٍ لتوزيع ملتوٍ غير طبيعي -a- منحنٍ لتوزيع طبيعي غير ملتوٍ

الشكل (8-31)

إنّ للتوزيع الطبيعي أهمية كبيرة في الإحصاء حيث يُلاحظ أنّ أغلب التجارب الإحصائية تعطي بيانات تمثل بمنحنٍ له شكل المنحني الطبيعي (شكل جرس) أو قريب من المنحني الطبيعي. فعلى سبيل المثال نجد أنّ توزيع أطوال الطلاب المذكور في إحدى جامعات القطر يأخذ شكل المنحني الطبيعي، كذلك نجد أنّ درجات الطلبة تتوزع توزيعاً طبيعياً حول متوسطها. إذا كان X متغيراً عشوائياً مستمراً له التوزيع الطبيعي، فإنّ دالة الكثافة الاحتمالية لهذا المتغير تُعرف بالعلاقة:

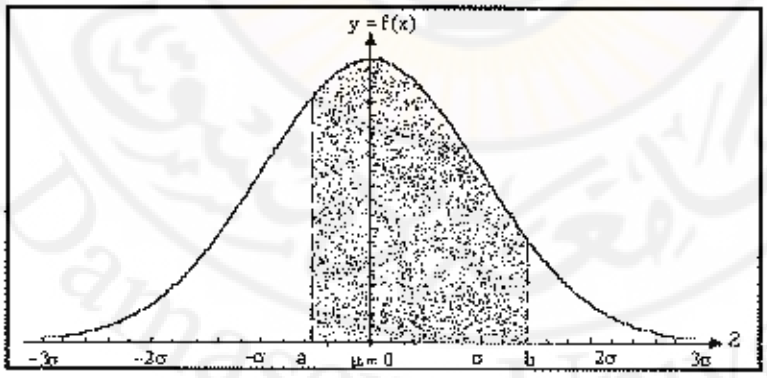
$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2} \qquad -\infty<x<\infty \qquad (8.86)$$

حيث يمثل $\mu=E(X)$ متوسط التوزيع و $\sigma=\sigma_x$ الانحراف المعياري لهذا التوزيع.

ومن أمثلة التوزيعات الطبيعية الشهيرة ما يسمى بالتوزيع الطبيعي المعياري أو القياسي الذي يرمز له بالرمز $N(\mu,\sigma^2)=N(0,1)$ حيث متوسطه صفر، وانحرافه المعياري الواحد، وفيه يتم اعتماد الدرجة المعيارية Z بدلاً من المتغير العشوائي X وعليه تكون دالة الكثافة لهذا التوزيع هي:

$$f(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-z^2/2} \qquad (8.87)$$

والتي تأخذ بيانياً الشكل الآتي:



الشكل (8-32): المنحني الطبيعي المعياري الذي يمثل التوزيع الطبيعي المعياري N(0,1)

إنّ التوزيع الطبيعي المعياري له استخدامات كثيرة لتطبيقاته الواسعة وحساباته المجدولة [ملحق – التوزيع الطبيعي المعياري] حيث تمثل المساحات تحت المنحني فيه احتمال وقوع المتغير العشوائي Z ضمن النطاق المحدد. ففي الشكل (32-6) المبيّن أعلاه نلاحظ أنّ المساحة المظللة فيه تمثل الاحتمال $P(a \le Z \le b)$ حيث نجد أنّ:

$$P(a \le Z \le b) = \int_a^b f(z)dz \qquad (8.88)$$

ملاحظة (13): لاستخدام الجداول الخاصة بالتوزيع الطبيعي المعياري تحسب قيمة الاحتمال من البيانات في العمود الأول أمام الدرجة المعيارية z أو من البيانات في الأعمدة الأخرى إن كانت z ذات قيم عشرية أخرى. فمثلاً إذا كانت z=2.15 فإننا نقرأ قيمة الاحتمال في العمود 0.05 والسطر الموافق للرقم 2.1 في العمود z. وهكذا...

ملاحظة (14): بعد معرفة العلاقة بين التوزيع الطبيعي (المعتدل) $N(\mu,\sigma^2)$ والتوزيع الطبيعي المعياري $N(0,1)$ يمكننا إجراء التحويلات من الدرجات الطبيعية إلى المعيارية وبالعكس، ولاستخدام الجداول الخاصة بالتوزيع الطبيعي المعياري لحساب الاحتمالات الطبيعية أو المقاربة لها يتوجب تحويل البيانات (x) إلى الدرجة المعيارية $\left(z=\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$ أولاً ومن ثم استخدام الملاحظة (13):

مثال(48): أوجد كلاً من الاحتمالات الآتية لتجربة إحصائية عشوائية يتوزع متغيرها العشوائي توزيعاً طبيعياً معيارياً.

أ- $P(Z \le 1.72)$ ب- $P(Z \le -0.54)$

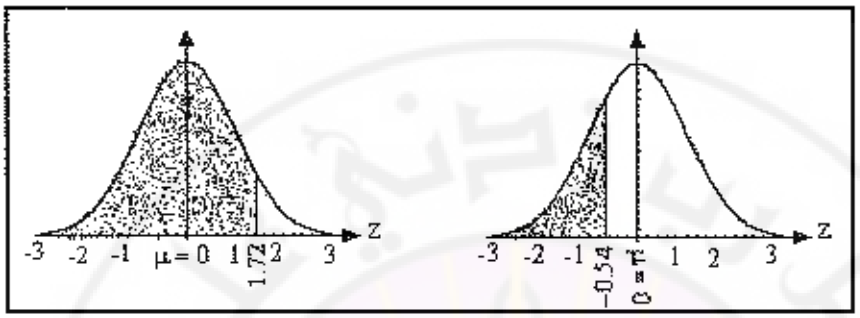
جـ- $P(Z \ge 0.29)$ د- $P(-1.91 \le Z \le 1.45)$

الحل: لمّا كانت الدرجات طبيعية معيارية، نستخدم الجداول مباشرة لحساب الاحتمالات كما يأتي:

أ-

$$P(Z \le 1.72) = F(z) = \int_{-\infty}^{1.72} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

ومن الجدول الخاص نجد أمام الدرجة $z = 1.7$ وفي العمود 0.02 قيمة الاحتمال وتساوي 0.9573 التي تمثل المساحة تحت المنحني ولغاية النقطة $z = 1.72$ انظر الشكل (33-6):



(a) (b)

الشكل (33-8)

ب-

$$P(Z \le -0.54) = F(z) = \int_{-\infty}^{-0.54} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{1}{2}z^2} dz = 0.2946$$

جـ-

$$P(Z \ge 0.29) = \int_{0.29}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

$$= 1 - P(Z \le 0.29) = 1 - \int_{-\infty}^{0.29} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

$$= 1 - 0.6141 = 0.3859$$

د-

$$P(-1.91 \le Z \le 1.42) = P(Z \le 1.42) - P(Z \le -1.91)$$

$$= \int_{-\infty}^{1.42} f(z)dz - \int_{-\infty}^{-1.91} f(z)\,dz$$

$$= 0.92220 - 0.02807 = 0.89413$$

ملاحظة (15): يمكن استخدام جداول التوزيع الطبيعي المعياري بشكل عكسي، أي عند البحث عن قيمة z الموافقة لاحتمالٍ معطى.

مثال(49): أوجد قيمة z فيما يلي:

أ) $P(Z \le z_1) = 0.9591$ ب) $P(Z \le z_2) = 0.7975$ جـ) $P(Z > z_3) = 0.063$

الحل: أ) من جدول التوزيع الطبيعي المعياري نجد مباشرة أنّ قيمة z_1 الموافقة للاحتمال المعطى 0.9591 هي: $z_1 = 1.74$

ب) عند البحث في جدول التوزيع الطبيعي المعياري نجد أنّ العدد 0.7975 غير موجود حيث نأخذ أقرب عددين له موجودين بالجدول، وهما: 0.7967 و 0.7995 والمقابلين للقيمتين 0.83 و 0.84 حيث يمكن أخذ $z_2 = 0.83$ ؛ لأنّ: 0.7967 أقرب إلى 0.7975 من العدد 0.7995. وإذا أردنا دقة أكثر نأخذ: $z_2 = \frac{0.83+0.84}{2} = 0.835$

جـ) نريد القيمة z_3 التي يقع على يمينها مساحة قدرها 0.063 وبالتالي يقع على يسارها مساحة قدرها $1 - 0.063 = 0.9370$ ومن جدول التوزيع الطبيعي المعياري نجد أنّ:

$$z_3 = 1.53$$

مثال(50):

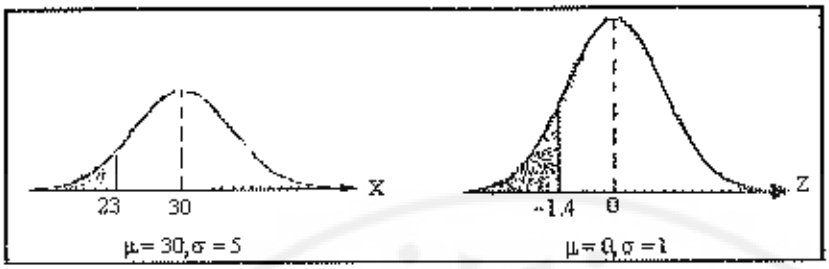
ينتج معمل للبطاريات، بطاريات صغيرة متوسط أعمارها 30 ساعة بانحراف معياري قدره 5 ساعات. بفرض أنّ أعمار البطاريات تتوزع وفق التوزيع الطبيعي، أوجد احتمال أن تعيش بطارية ما أقل من 23 ساعة؟

الحل: لدينا توزيع طبيعي حيث: $x = 23$ و $\mu = 30$ و $\sigma = 5$. وبالتحويل إلى التوزيع الطبيعي المعياري نجد أنّ:

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{23-30}{5} = -1.4$$

وبالتالي نجد أنّ الاحتمال المطلوب هو: $P(X < 23) = P(Z < -1.4)$

وباستخدام جداول التوزيع الطبيعي المعياري نجد أنّ: $P(X < 23) = 0.0808$



مثال(51): وجد في تجربة إحصائية أنّ متوسط فترة العمل والضمانة لأحد أنواع محركات الديزل هو 266 أسبوعاً بانحراف معياري قدره 12 أسبوعاً. فإذا علمت أنّ فترات عمل هذه المحركات تتوزع وفق التوزيع الطبيعي، أوجد احتمال أو نسبة آلات الديزل التي تعمل بين 260 و 270 أسبوعاً.

الحل: بفرض أنّ X هو المتغير العشوائي الممثل لفترة العمل لهذا النوع من المحركات، عندئذٍ نجد أنّ X متغير طبيعي حيث لدينا: $\mu = 266, \sigma = 12$. والاحتمال المطلوب حسابه هو: $P(260 < X < 270)$ حيث نحول القيّم إلى الدرجات المعيارية ليتسنى لنا استخدام الجداول الطبيعية المعيارية، فنجد أنّ:

$$P(260 < X < 270) = P(260 \le X \le 270) = P\left(\frac{260-266}{12} \le Z \le \frac{270-266}{12}\right)$$

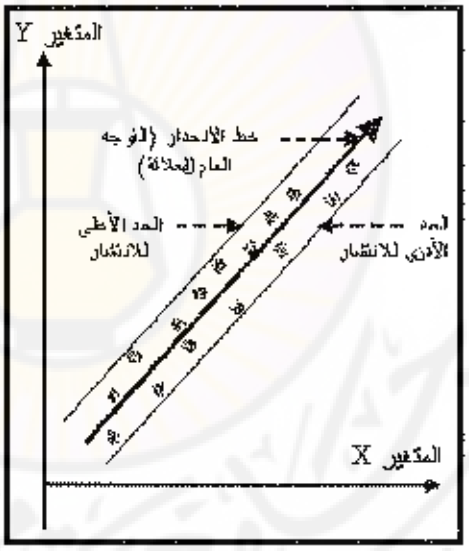
$$= P(-0.50 \le Z \le 0.33) = P(Z < 0.33) - P(Z \le -0.50)$$

$$= 0.6293 - 0.3085 = 0.3208 = 32.08\% \qquad \text{(من الجداول)}$$

٧.٨ الانحدار والارتباط البسيطان (Simple Regression Correlation) :

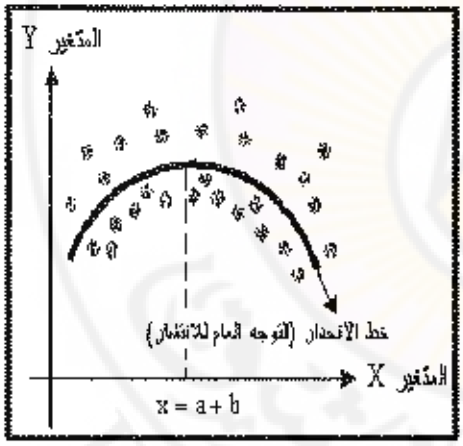
كثيراً ما نراقب أو نلاحظ، ومن ثم نستنتج وجود ظاهرة ما أو علاقة بين متغيرين كالجودة والأسعار، إذ كلما كانت الجودة عالية كانت الأسعار غالية أيضاً، ولكن العكس غير صحيح أحياناً، إذ ليس كل ذي سعرٍ عال يتميز بجودة عالية. كما نلاحظ

أيضاً وجود علاقة بين السرعة والخطورة أو بين ارتفاع الأسعار أو غلاء المعيشة والزمن...إلخ ويُطلق على مثل هذه العلاقات التي تربط بين المتغير العشوائي Y والمتغير العشوائي X مثلاً اسم انحدار المتغير Y على المتغير X والذي يعبر عنه أو يوصف بحساب معادلة الخط البياني بين المتغيرين المذكورين، ولا بدّ من الإشارة هنا إلى أنّ معادلة انحدار المتغير X على Y تختلف عن معادلة انحدار Y على X السابقة. ومن البديهي أن تمثل العلاقة ارتباطاً معيناً قوياً أو ضعيفاً، سالباً أو موجباً بين المتغيرين أيضاً يمكن وصفه أو التعبير عنه بما يسمى معامل الارتباط الذي يرمز له عادة بالرمز ρ أو r أحياناً. ويمكن ملاحظة وجود هذه الظاهرة، الانحدار والارتباط بين المتغيرين X و Y من الأشكال الانتشارية لقيمها المتناظرة المأخوذة عن الدراسات والملاحظات الميدانية كما في الأشكال الآتية:



الشكل (34-8)

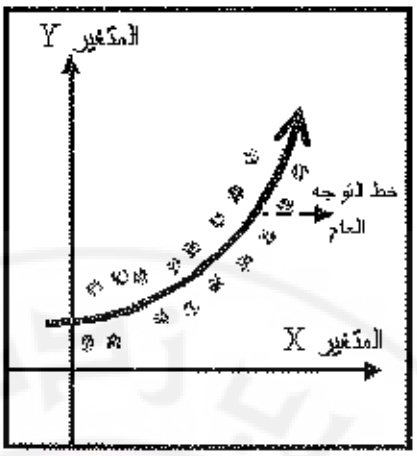
الانتشار يوضح وجود علاقة خطية بين قيم المتغيرين يمكن تمثيلها بالنموذج أو العلاقة الخطية: $y = ax + b$



الشكل (35-8)

الانتشار يوضح وجود علاقة غير خطية بين قيم المتغيرين يمكن تمثيلها بالنموذج:

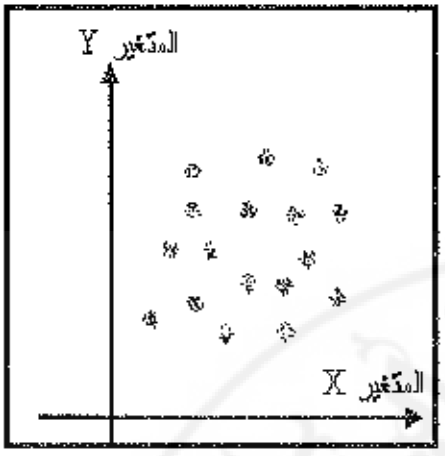
$$y = \frac{1}{2}(a - x)^2 + bx$$



الشكل (8-36)

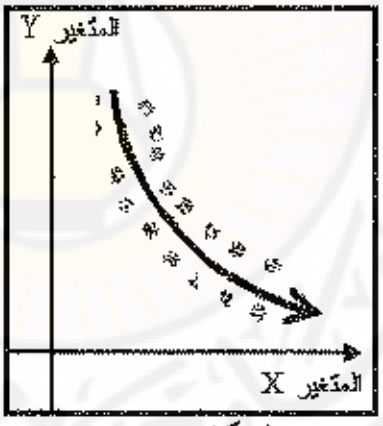
الانتشار يوضح وجود علاقة غير خطية بين قيم المتغيرين يمكن تمثيلها بالنموذج:

$$y = ae^{ax}$$



الشكل (8-37)

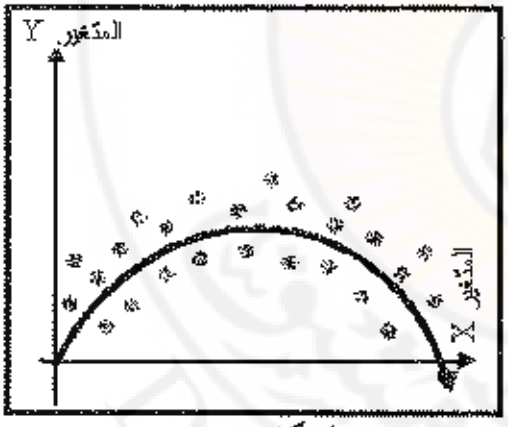
الانتشار يوضح عدم وجود علاقة بين المتغيرين أي عدم وجود انحدار.



الشكل (8-38)

الانتشار يوضح وجود علاقة غير خطية عكسية بين قيم المتغيرين يمكن تمثيلها بالنموذج غير الخطي:

$$y = \frac{a}{x}$$



الشكل (8-39)

الانتشار يوضح وجود علاقة غير خطية بين المتغيرين يمكن تمثيلها بالنموذج غير الخطي:

$$y = a\sin ax$$

يلاحظ من الشكل (34 .8) أنّ الانتشار لقيم المتغيرين X ، Y يدلل على وجود علاقة ما يمكن تمثيلها بخط مستقيم تقريبي مثل: $y = a + b$ يفسر أو يقنن تلك العلاقة بين المتغيرين بصورة تقريبية، وهكذا بقية الحالات الأخرى.

وعموماً يمكن الإفادة من معادلة الانحدار ليس للتمثيل البياني فقط، بل للتنبؤ وتقدير القيم لمتناظرة للمتغيرين التي لم تظهر أو تلاحظ ميدانياً بصورة واقعية، وذلك عن طريق افتراض قيمة لأحد المتغيرين واستحصال قيمة المتغير الآخر بحل المعادلة والنموذج الرياضي. كما يمكن الإفادة من معامل الارتباط ρ مثلاً في كثير من التطبيقات الإنتاجية أو الاجتماعية ولظواهر مختلفة منها التحقق من وجود الظاهرة الإنتاجية المفترضة وكم هي قوتها وأهميتها في الإنتاج.

١.٧.٨ الانحدار الخطي البسيط (Simple Regression Line):

يُقال عن الانحدار إنه خطي إذا كان من الدرجة الأولى، ويُقال عنه بسيط إذا كان بين متغيرين فقط أو ذا متغير مستقل واحد فقط، وبخلاف ذلك يُقال عنه انحدار غير خطي إذا كان غير متمثل بخط مستقيم وغير بسيط إذا كان متعدد المتغيرات، وعليه يمكن تمثيل علاقة الانحدار الخطي البسيط للمغير Y على المتغير X بالنموذج الرياضي التالي الذي يمثل معادلة خط مستقيم:

$$\hat{y} = \alpha + \beta x \qquad (8.89)$$

حيث يمثل الرمز α نقطة تقاطع المستقيم مع المحور y بينما يمثل الرمز β ميل الخط المستقيم أو معامل انحدار النموذج الخطي.

ويتلخص أسلوب حساب كل من المعاملين β, α باستخدام ما يسمى بطريقة المربعات الصغرى للخطأ (E) ويقصد بها: أنّ مجموع مربعات الخطأ بين القيم المحسوبة أو المقدّرة والقيم الميدانية هو أقل ما يمكن؛ أي عند قيمته الصغرى:

$$E = \sum_{i=1}^{n} E_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - (\alpha + \beta x_i))^2 \qquad (8.90)$$

ومنها نستنتج أنّ:

$$\alpha = \bar{y} - \beta\bar{x} \qquad (8.91)$$

كما نجد أنّ:

$$\beta = \frac{n\sum x_i y_i - (\sum x_i)(\sum y_i)}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \qquad (8.92)$$

ويمكن استخدام المعادلة السابقة لحساب معامل الانحدار (الميل) β مباشرة بعد جدولة وحساب عناصرها الأربعة $\sum x_i y_i$ ، $\sum x_i$ ، $\sum y_i$ ، $\sum x_i^2$ كما يمكن استخدام أحد صور أو أوجه المعادلة السابقة بعد تبسيطها كالآتي:

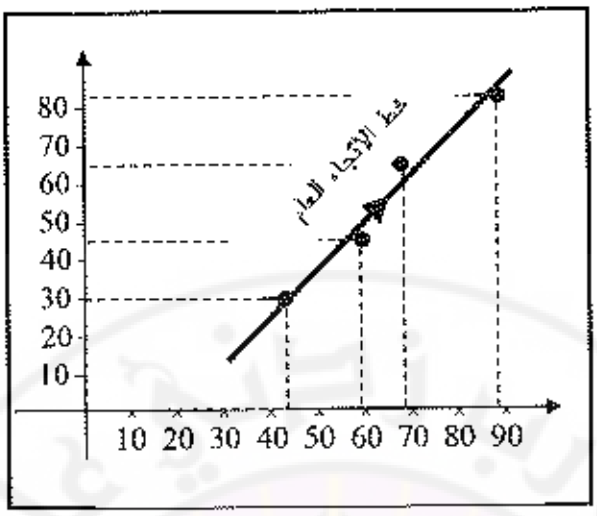
$$\beta = \frac{\sum x_i y_i - n\bar{x}\,\bar{y}}{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2} \qquad (8.93)$$

أو الصورة الآتية:

$$\beta = \frac{\sum_{i}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i}^{n}(x_i - \bar{x})^2} \qquad (8.94)$$

مثال(52): حصل خمسة طلاّب على الدرجات 30، 65، 45، 65، 85 في مادة الفيزياء، وعلى الدرجات 45، 55، 60، 70، 90 في الرياضيات. احسب معادلة انحدار درجات الفيزياء عن الرياضيات.

الحل: نفترض أنّ درجات الفيزياء y_i و درجات الرياضيات x_i والمطلوب هو حساب انحدار y_i على x_i أي حساب المعادلة الخطية $\hat{y} = \alpha + \beta x$ ، لأنّ شكل الانتشار لدرجات الفيزياء على درجات الرياضيات يوضح أنّ العلاقة خطية:



الشكل(8.40)- الشكل الانتشاري للمثال (52)

وعليه نكوّن الجدول الآتي (الأعمدة كافة عدا 4 ، 5 ، 6) لحساب كل من β ، α من العلاقة (8.94) كالآتي:

(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
y_i	x_i	x_iy_i	x_i^2	y_i^2	$(x_i - \bar{x})$	$y_i \quad \bar{y}_i$	$[(y_i - \bar{y}) \times (x_i - \bar{x})]$	$(x_i - \bar{x})^2$
85	90	765	8100	722	26	27	702	676
65	70	0	4900	542	6	7	42	36
45	60	455	3600	25	-4	-13	52	16
65	55	0	3025	202	-9	7	-63	81
30	45	270	2025	5	-19	-28	542	361
		0		422				
		327		5				
		5		900				
		135						
		0						
290	32	198	21650	196			1265	1170
	0	25		00				

ومن العمود الثاني نجد أنّ: $\bar{y}=\frac{290}{5}=58$ ومن العمود الثالث $\bar{x}=\frac{320}{5}=64$

وباستخدام العلاقة (8.94) نجد أنّ: $\beta=\frac{\sum(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum(x_i-\bar{x})^2}=\frac{1265}{1170}=1.081$

ومنه باستخدام العلاقة (8.91) نحصل على α حيث:

$$\alpha=\bar{y}-\beta\bar{x}=58-(1.081)(64)=-11.184$$

وعليه تكون العلاقة الخطية أو معادلة الانحدار لدرجات الفيزياء على الرياضيات هي:

$$y=-11.184+1.081X \qquad (8.95)$$

حيث يمثل 1.081 ميل العلاقة الخطية (الخط المستقيم) بينما يمثل 11.184- نقطة التقاطع مع محور Y. وبرسم هذه العلاقة الخطية نجد أنها تمثل الشكل الانتشاري للمثال (52)، كما نجد منها أنّ درجة الفيزياء لأحد الطلبة الحاصل على درجة 30 في الرياضيات مثلاً ستكون $21.246\cong 21$ تقريباً. ولو افترضنا أنّ طالباً حصل على درجة مئة في الرياضيات فإنّ درجته في الفيزياء حسب المعادلة ستكون $96.916\cong 97$ ، حيث:

$$y=-11.184+1.081(30)=21.246\cong 21$$

$$y=-11.184+1.081(100)=96.916\cong 97$$

وبهذا الأسلوب يمكننا التنبؤ عن الجودة من عدد مرات الصيانة أو التنبؤ عن الجودة من الأسعار... أو التنبؤ بزمن صيانة الآلة أو استبدالها من عدد الإنتاج التالف أو المعطوب.

ملاحظة ⑯: لو استخدمنا العلاقة (8.93) بدلاً من العلاقة (8.94) لحصلنا على النتيجة نفسها والمعادلة نفسها، حيث نجد من الجدول أيضاً أنّ:

$$\beta=\frac{\sum x_iy_i-n\,\bar{x}\,\bar{y}}{\sum x_i^2-n\bar{x}^2}=\frac{19825-5(64)(58)}{21650-5(64)(64)}=\frac{19825-18560}{21650-20480}=\frac{1265}{1170}=1.0804\cong 1.081$$

ملاحظة (7): باستخدام الأسلوب نفسه والعلاقات نفسها يمكننا حساب معادلة انحدار درجات الرياضيات عن درجات الفيزياء وفي هذه الحالة نوجد انحدار X على Y أي نحسب المعادلة $X = \gamma + \delta y$ (أو نفترض أنّ Y تمثل درجات الرياضيات بدلاً من الفيزياء كما في الحالة الأولى، ومن ثم نرتب العلاقات على هذا الأساس $y = \alpha + \beta x$ حيث x تمثل الفيزياء) وكالتالي حيث نجد أنّ:

$$\delta = \frac{\sum x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_1^n y_i^2 - n\bar{y}^2} = \frac{\sum_1^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum (y_i - \bar{y})^2}$$

حيث y_i تمثل درجات الفيزياء و x_i تمثل درجات الرياضيات كما في السابق. وبالتعويض نجد (من تربيع العمود الثامن) أنّ:

$$\sum (y_i - y_i)^2 = 729 + 49 + 169 + 49 + 784 = 1780$$

ومنه:

$$\delta = \frac{1265}{1780} = 0.7106$$

وكذلك نجد أنّ:

$$\gamma = \bar{x} - \delta\bar{y} = 64 - (0.7106)(58) = 64 - 41.2148 = 22.785$$

وبالتالي نجد أنّ معادلة انحدار الرياضيات عن الفيزياء تأخذ الشكل الآتي:

$$X = \gamma + \delta y = 22.785 + 0.7106y$$

٢.٧.٨ الارتباط البسيط ومعامل بيرسون:

من البديهي أن تمثل علاقة الانحدار المحسوبة سابقاً ارتباطاً بين المتغيرين X و Y، ولكنها لا تشير إلى قوة أو ضعف نوعية العلاقة، كما لا تشير إلى ايجابية أو سلبية هذه العلاقة، وعليه يعرّف الارتباط بقوة أو درجة العلاقة بين المتغيرين ويقاس أو يحسب بمعامله الذي يرمز له عادة بالرمز ρ_{xy} أو r_{xy} أحياناً حيث:

$$\rho_{xy} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_i^n (x_i - \bar{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} \qquad (8.96)$$

ويطلق على هذا المعامل ρ_{xy} اسم معامل بيرسون للارتباط البسيط الخطي الذي تنحصر قيمته كما هو ملاحظ من العلاقة (8.96) بالفترة: $-1 \le \rho_{x,y} \le +1$ وعلى ضوء قيم هذا المعامل يتم تصنيف الارتباط بين المتغيرين X, Y بأنه قوي أو ضعيف كالآتي:



حيث يقال عن الارتباط أو العلاقة إنّها قوية إيجابية كلما اقترب المعامل ρ من 1+، وبالعكس يقال عن الارتباط إنه قوي سلبي عندما يقترب المعامل ρ من 1-، وعندما يقترب المعامل من الصفر يكون الارتباط ضعيفاً أو معدوماً.

وبتبسيط العلاقة (8.96) نحصل على العلاقة الآتية لمعامل بيرسون:

$$\rho_{x,y} = \frac{\sum_{i=}^n x_i y_i - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=}^n x_i\right)\left(\sum_{i=1}^n y_i\right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2}\sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^n y_i\right)^2}} \qquad (8.97)$$

ملاحظة (18): يستخدم معامل بيرسون للارتباط الخطي البسيط لحساب قوة أو درجة الارتباط في العينة بين المتغيرين ومن ثم تقدير قوة أو درجة الارتباط بين متغيري المجتمع الإحصائي على ضوء ذلك بغض النظر عن معادلة الانحدار، وحتى من دون اللجوء إلى حسابها.

مثال(53): احسب معامل الارتباط بين درجات الفيزياء والرياضيات للطلاب الخمسة في المثال السابق (52) :

الحل:

بتكوين الجدول الحسابي لعناصر معامل الارتباط نفسه (الأعمدة كافة عدا 10,9,8,7) وباستخدام العلاقة (8,97) نجد أن:

$$\rho = \frac{\sum x_i y_i - \frac{1}{5}\left(\sum x_i\right)\left(\sum y_i\right)}{\sqrt{\sum x_i^2 - \frac{1}{5}\left(\sum x_i\right)^2}\sqrt{\sum y_i^2 - \frac{1}{5}\left(\sum y_i\right)^2}}$$

وهذا يعني بأن الارتباط بين درجات الفيزياء والرياضيات للطلبة الخمسة قوي جداً وإيجابي، ولكنه غير تام كما يعكس أيضاً التقارب القوي بين مستويات الطلبة في كل من الفيزياء والرياضيات.

ملاحظة 19: لاحظ أنّ مربع معامل بيرسون للارتباط يساوي جداء معاملي انحدار Y على X وانحدار X على Y أي أنّ: $\rho^2 = \beta_1 \cdot \beta_2$ ومن المثالين 52 و 53 نجد أنّ:

$$(0.877)^2 = 0.769 = (0.711)(1.081) = 0.768591 = 0.769$$

تمارين عامة:

1- يبيّن الجدول التالي درجات 42 طالباً من طلاب السنة الثانية هندسة ميكانيك عام في مقرر الرياضيات (3) في أحد الامتحانات:

36	48	45	65	45	27	40
50	35	52	58	56	40	63
52	60	65	25	55	51	45
37	36	50	65	40	48	62
55	69	25	45	26	58	35
45	74	27	35	37	52	55

والمطلوب: 1) أنشئ جدول التوزيع التكراري النقطي.

2) أنشئ جدول التوزيع التكراري الفئوي للبيانات السابقة مستخدماً 7 فئات متساوية الطول.

3) أنشئ المدرج التكراري والمضلع التكراري لهذا التوزيع.

4) أنشئ المدرج التكراري النسبي ومضلعه التكراري.

5) أنشئ جدول التوزيع التكراري المجمع الصاعد، وارسم مضلعه التكراري.

6) أنشئ جدول التوزيع التكراري المجمع النازل، وارسم مضلعه التكراري.

7) أوجد المتوسط الحسابي النقطي والتباين والانحراف المعياري النقطي لهذه الدرجات.

8) أوجد المتوسط الحسابي الفئوي، وكذلك التباين، والانحراف المعياري الفئويين.

9) أوجد الوسط النقطي، المنوال النقطي لهذه البيانات.

10) أوجد الوسط الفئوي، وكذلك المنوال الفئوي.

11) أوجد الربيعين الفئويين الأدنى والأعلى ثم استنتج نصف المدى الربيعي الفئوي للبيانات المبوبة.

2- قارن بين المجموعتين التاليتين من البيانات الممثلتين لعينتين مختلفتين من حيث قوة التمركز حول المتوسط الحسابي ودرجة التشتت:

B: 31 29 32 30 33 A: 40 5 3 6 2

3- لتكن البيانات الآتية التي تمثل عينة عشوائية مختارة: 3,7,6,40,5

والمطلوب حساب معاملي الالتواء الوسطي والتفلطح لهذه البيانات.

4- ليكن لدينا جدول التوزيع التكراري الفئوي الآتي:

حدود الفئة	[20,23[	[23,26[	[26,29[	[29,32[	[32,35[	[35,38[	[38,41[
التكرار	4	8	23	34	26	4	1

والمطلوب:

أ – احسب المتوسط الحسابي الفئوي، وكذلك التباين والانحراف المعياري الفئويين للبيانات.

ب- أوجد الوسط الفئوي والمنوال الفئوي لهذه البيانات.

جـ – أوجد نصف المدى الربيعي الفئوي.

د – أوجد المئوي P_{40}

هـ – احسب العُشير D_7

5- أرادت إدارة أحد المصانع أن توفد مهندساً للخارج لاتّباع دورة تدريبية، فتقدم 6 مهندسين ميكانيكيين للإفادة من هذه الدورة. أجرت الإدارة ثلاثة اختبارات لكل

من المتقدمين في مجال تخصصه كمهندس ميكانيك وفي اللغة الإنكليزية وفي الحاسوب، فكانت النتائج كالآتي (الدرجات من 10).

المهندس المتقدم	المعلومات ضمن تخصصه	اللغة الإنكليزية	الحاسوب
A	10	9	5
B	9	9	6
C	5	2	0
D	5	9	10
E	4	0	6
F	3	1	9

والمطلوب:

أ – حول الدرجات إلى درجات معيارية في كلٍ من الاختبارات الثلاثة.

ب– من هو الفائز بهذه الدورة؟ علماً بأنّ صاحب أكبر مجموع (بالوحدات المعيارية) هو الفائز.

6- تدفع شركة خاصة لموظفيها البالغ عددهم 1000 موظف رواتب شهرية بمعدل 14250 ل.س شهرياً وبانحراف معياري قدره 600 ل.س. بفرض أنّ المنحني التكراري لمجتمع موظفي الشركة يأخذ شكل الجرس، استخدم القاعدة التجريبية لوصف فئات الموظفين تبعاً لتغير الرواتب.

7- عند قياس أطوال 2000 طالب جامعي تبين أنّ المتوسط الحسابي لهذه الأطوال هو 174cm وبانحراف معياري قدره 9cm. فإذا علمت أنّ منحني التوزيع التكراري لهذا المجتمع يأخذ شكل الجرس:

1) صف توزع هؤلاء الطلاب بالنسبة لأطوالهم مستخدماً القاعدة التجريبية.

2) كم طالباً يتجاوز طولهم 185 cm

3) كم طالباً يقل طولهم عن 157 cm

8- إذا كان المعدل الوسطي لحدوث أعطال كهربائية يومياً في منطقة ما هو 30 عطلاً بانحراف معياري قدره 5 أعطال، وبفرض أنّ المنحني التكراري له شكل الجرس. فالمطلوب:

1) صف توزع الأعطال مستخدماً القاعدة التجريبية.

2) أوجد النسبة المئوية لعدد الأيام التي لا يحدث فيها أكثر من 40 عطلاً.

3) أوجد النسبة المئوية لعدد الأيام التي يحدث فيها أقل من 17 عطلاً.

9- اكتب فضاء التجربة الآتية: إذا ألقيت قطعة نقود وظهرت الصورة (H) فإننا نرمي القطعة مرة ثانية وإن كانت النتيجة كتابة (T) فإننا نرمي زهرة النرد مرة واحدة فقط. اكتب جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير X الذي يمثل عدد مرات ظهور الكتابة.

10- أربعة طلاب انتخبوا عشوائياً من صف ما، فإذا رمزنا بـ M للطالب و بـ F للطالبة، اكتب فضاء التجربة S_1. ثم اكتب فضاء تجربة آخر S_2 عناصره تمثل عدد الإناث المنتخبة.

11- إذا كانت الحوادث A,B,C معرّفة على فضاء تجربة عشوائية. فعبّر عن الحوادث الآتية رياضياً:

أ – وقوع الحدث A مع عدم وقوع كلٍّ من الحدثين B و C

ب– وقوع الحدث A مع عدم وقوع أحد الحدثين B و C

جـ – وقوع الحوادث الثلاثة معاً.

د – عدم وقوع أي من الحوادث الثلاثة.

هـ – وقوع أحد الحوادث الثلاثة على الأقل.

12- استخدم مخططات فن لإثبات العلاقات الآتية بين الأحداث المذكورة:

أ – $A = A \cup (A \cap B)$

ب– $A = (A \cap B) \cup (A \cap B')$

جـ – $(A \cap B)' = A' \cup B'$

د – $(A \cup B)' = A' \cap B'$

هـ – $(A \cup B) = (A \cap B) \cup (A \cap B') \cup (A' \cap B)$

و – $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

13– ألقي حجرا نرد، الأول أخضر والثاني أبيض، وسجلنا النتائج والمطلوب:

أ – اكتب فضاء التجربة

ب– اكتب عناصر الحدث A الذي يقع إذا كان المجموع للرقمين الظاهرين على الحجرين أقل من 6 ثم احسب احتمال A.

جـ – احسب احتمال الحدث B الذي يقع إذا ظهر الرقم 2 على الحجر الأخضر

د – احسب احتمال الحدث C الذي يقع إذا ظهر الرقم 4 على أحد حجري النرد.

هـ – احسب احتمال الحدث $B \cap C$

و – احسب احتمال الحدث $A \cup B \cup C$

14– أُلقِيَ حجراً نرد مختلفان والمطلوب:

1) اكتب فضاء التجربة.

2) إذا كان A الحدث الذي يقع إذا كان المجموع للرقمين الظاهرين هو 7 و B الحدث الذي يقع إذا كان المجموع لهذين الرقمين هو 9 فاحسب كلاً من الاحتمالات الآتية:

$P(A), P(B), P(A \cap B), P(A'), P(B'), P(A \cup B), P(A \cup B'), P(A' \cup B), P(A' \cap B')$

15– سُحبت عشوائياً كرة من كيس يحتوي 3 كرات حمراء، 4 زرقاء، و 5 صفراء.

أ — ما احتمال ألّا تكون الكرة المسحوبة صفراء اللون؟

ب- ما احتمال كون الكرة المسحوبة صفراء أو زرقاء؟

16- كيس يحوي 4 كرات بيضاء و 3 سوداء، وكيس آخر يحوي 3 بيضاء و 5 سوداء. اختيرت كرة عشوائياً من الكيس الأول ووضعت في الكيس الثاني. سُحبت بعد ذلك كرة من الكيس الثاني. ما احتمال أن تكون الكرة المسحوبة من الكيس الثاني سوداء؟

17- تقدم رجلان وامرأتان بطلباتهم لملء وظيفتين شاغرتين في إحدى المؤسسات. اختار المدير عشوائياً شخصاً للوظيفة الأولى وآخر للوظيفة الثانية. والمطلوب:

أ — اكتب فضاء التجربة S.

ب- احسب احتمال الحدث A الذي يقع إذا كان رجلاً قد شغل الوظيفة الأولى.

ج — احسب احتمال الحدث B الذي يقع إذا كانت وظيفة واحدة فقط قد شغلتها امرأة.

د — احسب احتمال الحدث C الذي يقع إذا كانت الوظيفتان قد شغلتا برجلين.

18- إذا كان A و B حدثين مستقلين فأثبت أن الحدثين A' و B' مستقلان أيضاً.

19- إذا كان A و B حدثين معرفين في فضاء تجربة ما. وكان:

$P(A)=t, P(B)=\frac{1}{3}, P(A\cup B)=\frac{1}{2}$ فاحسب قيمة t في الحالتين التاليتين:

أ — إذا كان الحدثان B و A متنافيين.

ب - إذا كان الحدثان B و A مستقلين.

20- صنعت قطعة نقود بحيث أنّ احتمال ظهور الصورة $\frac{1}{3}$ ، فإذا رميت القطعة مرة واحدة وظهرت الصورة فإننا نختار عدداً عشوائياً من 3 إلى 15، أمّا إذا ظهرت الكتابة فإننا نختار عدداً عشوائياً من 1 إلى 7، فما هو احتمال أن يكون العدد المختار فردياً .

21- تنوي أسرة قضاء إجازة نهاية الأسبوع في إحدى الأماكن السياحية A و B أو C، فإذا كان احتمال سقوط المطر في A هو 0.6 وفي B هو 0.7 وفي C هو 0.5 وإذا اختارت الأسرة مكان الإجازة عشوائياً فاحسب:

أ – احتمال أن تكون الإجازة ممطرة.

ب – إذا كانت الإجازة ممطرة فما هو احتمال أن هذه الإجازة كانت في المكان B؟

22- سلمى طالبة في السنة الأخيرة، احتمال أن تتخرج هذا العام هو 0.80 واحتمال أن تتزوج في صيف هذا العام إذا تخرجت هو 0.90 أمّا إذا لم تتخرج فاحتمال زواجها في ذلك الوقت هو 0.30. ما هو احتمال زواج سلمى صيف هذا العام؟

23- ينتج أحد المصانع 300 بدلة رجالية و 900 بدلة نسائية، كما ينتج مصنع آخر 500 بدلة رجالية و 500 بدلة نسائية، فإذا اختيرت بدلة واحدة فقط من كل مصنع لقياس جودة الإنتاج، فما هو احتمال أن تكون إحدى البدلتين رجالية على الأقل.

24- إذا كان معدل إنتاج ثلاثة مصانع مختلفة للبطاريات هي: 500 ، 700 ، 900 بالترتيب، وكان عدد البطاريات التالفة في هذا الإنتاج هو: 20 ، 30 ، 60 على الترتيب حيث يُباع هذا الإنتاج في محل لبيع المفرق، فما هو احتمال أن تكون البطارية المشتراة تالفة. ثم ما هو احتمال أن تكون البطارية المشتراة التالفة هي من إنتاج المصنع الأول.

25- أثبت أن:

أ - $C_n^p = C_n^{n-p}$ ب - $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$ جـ - $C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = 2^n$

26- أرادت شركة هندسية تشكيل لجنة مؤلفة من 5 مهندسين اثنان منهم من الشباب وثلاث من الفتيات، حيث تم ترشيح 5 شباب و 7 فتيات لهذه اللجنة. بكم طريقة يمكن تشكيل اللجنة إذا كان:

أ — بإمكان أي شاب أو فتاة دخول اللجنة.

ب — شاب معيّن يجب أن يكون ضمن اللجنة.

جـ - فتاتان معينتان يجب ألا تكونا ضمن اللجنة.

27- صندوق يحوي 8 كرات حمراء و 3 خضراء و 9 زرقاء. سُحبت 3 كرات عشوائياً. أوجد الاحتمالات الآتية:

أ — أن تكون الكرات الثلاث زرقاء.

ب- اثنتان زرقاوان وواحدة خضراء.

جـ - على الأقل كرة خضراء.

د — كرة من كل لون.

هـ - الأولى زرقاء والثانية حمراء والثالثة خضراء.

28- في تجربة رمي حجر النرد. ليكن X المتغير العشوائي الدال على العدد الأكبر من الوجهين الظاهرين، وعلى أحدهما في حال تساويهما. اكتب جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X واحسب التوقع الرياضي له.

29- كيس يحوي 5 كرات بيضاء و 3 خضراء. سحبنا 4 كرات عشوائياً فإذا كان المتغير العشوائي X يدل على عدد الكرات البيضاء المسحوبة، اكتب جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X واحسب توقعه الرياضي وتباينه.

30- شركة فيها 11 مهندساً 3 منهم اختصاص ميكانيك عام. أرادت الشركة تشكيل لجنة مؤلفة من 5 مهندسين بصورة عشوائية. فإذا كان المتغير العشوائي X يدل على عدد المهندسين الميكانيكيين في المجموعة المختارة فالمطلوب:

1) اكتب جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X.

2) احسب التوقع الرياضي والتباين والانحراف المعياري للمتغير العشوائي X.

31- ليكن X متغيراً عشوائياً منقطعاً له جدول التوزيع الاحتمالي الآتي:

X	0	1	2	3
P(X = x)	0.1	0.35	0.4	0.15

والمطلوب:

1) احسب التوقع الرياضي للمتغير العشوائي X . ثم احسب التباين والانحراف المعياري لهذا المتغير.

2) احسب التوقع الرياضي للدالة: $g(x) = 1 + 2\sin x$

32- ليكن X متغيراً عشوائياً منقطعاً دالة كثافته الاحتمالية معرفة بالشكل:

$$f(x) = P(X = x) = \frac{1}{6} \quad , \quad x = 1,2,3,4,5,6$$

أوجد القيمة المتوقعة والانحراف المعياري للمتغير X.

33- إذا تم انتخاب طالبين من شعبة تضم 25 طالباً و 15 طالبة فإذا كان المنتخب طالباً (M) اخترنا عدداً زوجياً من المجموعة من $3 \leftarrow 15$: S_1 إذا كان المنتخب طالبة (F) اخترنا عدداً فردياً من المجموعة من $1 \leftarrow 7$: S_2 اكتب فضاء التجربة، واكتب جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير X الذي يمثل عدد مرات ظهور العدد الزوجي.

34- ليكن X متغيراً عشوائياً مستمراً دالة كثافته معرفة بالشكل:

$f(x)=6(1-x)x \quad , \quad 0<X<1$ أوجد التوقع الرياضي والتباين والانحراف المعياري لهذا المتغير.

35- متغير عشوائي مستمر X دالة كثافته هي:

والمطلوب: $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x} & , \quad x\geq 0\\ 0 & , \quad x<0\end{cases}$

1) تأكد أنّ $f(x)$ هي دالة كثافة احتمالية.

2) أوجد دالة التوزيع المجمعة للمتغير العشوائي X.

3) احسب الاحتمال $P(1\leq X\leq 2)$.

4) أوجد التوقع الرياضي للمتغير العشوائي X وكذلك التباين والانحراف المعياري.

36- ليكن X متغيراً عشوائياً مستمراً معرفاً بالدالة:

$$f(x)=\frac{a}{x^2+1} \quad , \quad -\infty<X<\infty$$

حيث a ثابت عددي والمطلوب:

1) عيّن قيمة الثابت a لكي تكون الدالة $f(x)$ دالة كثافة احتمالية للمتغير العشوائي X.

2) أوجد دالة التوزيع المجمعة للمتغير X.

3) احسب الاحتمال: $P(-1\leq X\leq 2)$.

37- إذا كانت التغيرات في درجة الحرارة لتجربة ما تتوزع وفقاً لمتغير عشوائي مستمر ذي تابع كثافة احتمالية معرّفة بالشكل الآتي:

$$f(x)=\begin{cases}\alpha\frac{x^2}{9} & -1<X<2\\ 0 & \text{عدا ذلك}\end{cases}$$

فاحسب قيمة α كي تكون $f(x)$ دالة كثافة احتمالية واحسب $P(0<X<1)$ ثم أوجد دالة التوزيع الاحتمالية $F_x(x)$ وارسمها.

38- X و Y متغيران عشوائيان منقطعان دالة كثافتهما المشتركة معرفة بالجدول الآتي:

X \ Y	-1	0	1
0	0.1	0.2	0.1
1	0.2	0.3	0.1

أوجد معامل الارتباط بين X و Y.

39- يحتوي جهاز لا يعمل على أربع وصلات أساسية، واحدة منها بيضاء واثنتان حمراوان وواحدة سوداء. تم فحص ثلاث وصلات بشكل عشوائي. ليكن X المتغير العشوائي الدال على عدد الوصلات البيضاء التي تم فحصها و Y المتغير العشوائي الدال على عدد الوصلات الحمراء التي تم فحصها أيضاً. والمطلوب:

1) عيّن جدول التوزيع المشترك للمتغيرين العشوائيين X و Y.

2) أوجد معامل الارتباط بين X و Y.

3) بيّن فيما إذا كان X و Y مستقلين أم لا؟

40- ليكن X و Y متغيرين عشوائيين مستمرين دالة كثافتهما المشتركة معرفة بالعلاقة:

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2-2xy+2y^2}{2}} \quad , \quad -\infty<x,y<\infty$$

والمطلوب:

1) أثبت أنّ الدالة $f(x,y)$ هي دالة كثافة احتمالية.

2) أوجد الكثافتين الهامشيتين لكل من X و Y.

3) أوجد التوقع الرياضي لكل من X و Y.

4) أوجد الانحراف المعياري لكل من X و Y.

5) بيّن إذا كان X و Y مستقلين أم لا؟

6) أوجد التباين المزدوج للمتغيرين X و Y ومعامل الارتباط بينهما.

41- X و Y متغيران عشوائيان مستمران دالة كثافتهما المشتركة معرفة بالعلاقة:

$$f(x,y) = y^2 e^{-y(x+1)} \quad , \quad x \geq 0 \quad , \quad y \geq 0$$

والمطلوب:

1) أثبت أنّ الدالة $f(x,y)$ هي دالة كثافة احتمالية.

2) أوجد الكثافتين الهامشيتين لكل من X و Y. ثم بيّن إذا كان المتغيران X و Y مستقلين أم لا؟

3) أوجد التباين المزدوج للمتغيرين العشوائيين X و Y .

4) أوجد الانحراف المعياري لكل من X و Y.

5) أوجد معامل الارتباط بين X و Y .

42- اخترنا نقطة بصورة عشوائية على القطر المطابق لمحور السينات من دائرة مركزها المبدأ ونصف قطرها الواحد. لتكن X فاصلة هذه النقطة. ننشئ الوتر العمود على محور السينات في هذه النقطة ثم نختار بصورة عشوائية نقطة من هذا الوتر، وليكن y ترتيب هذه النقطة. والمطلوب:

1) أوجد دالة الكثافة المشتركة للمتغيرين المستمرين X و Y.

2) ما هو احتمال وقوع النقطة التي نختارها بهذا الشكل داخل المربع المرسوم ضمن الدائرة الذي تتوازى أضلاعه مع المحاور الإحداثية.

43- إذا علمت أن توزيع X هو توزيع معتدل طبيعي متوسطه $\mu = 12$ وانحرافه المعياري $\sigma = 2$ فاحسب مستخدماً الجداول كلاً من الاحتمالات الآتية:

$$P(10 < X < 13) \quad , \quad P(X < 10) \quad , \quad P(X > 14)$$

$$P(16 < X < 20) \quad , \quad P(X < 10.5) \quad , \quad P(X > 11)$$

44- إذا كانت درجتك الطبيعية المعيارية في إحدى الاختبارات هي $z = 8$ فما هي النسبة المئوية للطلبة الذين تتوقع أن تكون درجاتهم المعيارية أعلى من درجتك.

45- احسب كلاً من المتوسط والانحراف المعياري لتوزيع متغير ثنائي إذا علمت أن $n = 12 , P = \frac{1}{4}$.

46- أنتج مصنع للأدوية دواءً جديداً لمعالجة أحد الأمراض، معدل نجاحه 80%، أعطي هذا الدواء لـ 15 مريضاً بهذا المرض. ما احتمال شفاء 12 منهم على الأقل.

47- آلة لإنتاج المسامير لوحظ أنها تنتج مسامير تالفة بنسبة 20% . اخترنا عشوائياً 10 مسامير من المسامير المنتجة من هذه الآلة والمطلوب.

أ) ما احتمال وجود مسمارين تالفين فقط بين هذه المسامير؟

ب) ما احتمال وجود ثلاثة مسامير تالفة على الأكثر؟

48- ينتج معمل للبطاريات، بطاريات صغيرة متوسط أعمارها 30 ساعة بانحراف معياري قدره 5 ساعات، وحيث إنّ أعمار البطاريات تتوزع وفق التوزيع الطبيعي، فما هو احتمال أن تعيش بطارية ما أقل من 23 ساعة.

49- إنّ درجات 300 طالب نجحوا في امتحان مقرر الرياضيات (3) كانت تتوزع طبيعياً، بمتوسط قدره 65 وبانحراف معياري قدره 10 والمطلوب:

أ) كم هو عدد الطلاب الذين وقعت درجاتهم بين السبعين والثمانين؟

ب) ما هي أقل درجة حصل عليها طالب من الـ 12% الأوائل، وما هي أعلى درجة حصل عليها طالب من المجموعة الباقية؟

50- البيانات الآتية تمثل الطول x والوزن y لاثني عشر شخصاً:

أ) ارسم الشكل الانتشاري، واحسب معادلة انحدار y عن x.

ب) احسب قيمة معامل الارتباط لبيرسون.

x	65	73	70	68	66	69	75	70	64	72	65	71
y	124	184	161	164	140	154	210	164	126	172	133	150

51- البيانات الآتية توضح مقاومة الشد وصلابة الألمنيوم المسبوك. احسب معادلة انحدار مقاومة الشد Y على صلابة الألمنيوم X وارسم الشكل الانتشاري:

y	293	349	368	301	340	308	354	313	322	334	377	247
x	53	70	84	55	78	64	71	53	82	67	70	56

52- البيانات الآتية تبين مقدار ضغط الغاز لحجوم مختلفة:

$V: cm^3$	50	60	70	90	100
$P: kg/cm^2$	64.7	51.3	40.5	25.9	7.8

قدر مقدار الضغط p عندما $V = 80cm^3$ إذا علمت أنّ $PV^\gamma = C$ حيث γ و C ثوابت. احسب تقدير كل من γ و C بطريقة المربعات الصغرى.

53- البيانات الآتية توضح مسافة التوقف وفقاً لسرعات مختلفة في تجربة على موديل جديد للسيارات:

V السرعة (كيلو مترات بالساعة)	35	50	65	80	95	110
d مسافة التوقف بالأمتار	16	26	41	62	88	119

والمطلوب: احسب معامل الارتباط لبيرسون.

54- احسب الميل ونقطة القطع مع المحور Y، واكتب معادلة انحدار المتغير Y على المتغير X من البيانات الآتية:

y	3	19	18	22	23
x	-2	-1	0	1	2

مستخدماً طريقة المربعات الصغرى.

55- إذا كانت معادلة انحدار المتغير Y على X هي: $y = a_0 + a_1 x$ ومعادلة انحدار المتغير X على Y هي $x = b_0 + b_1 y$ فأثبت أنّ: $a_1 b_1 = r^2$ حيث r معامل الارتباط بينهما.

56- في أحد البيانات المجدولة وجد أنّ:

$$N = 30, \sum x_i = 15, \sum y_i = 30, \sum x_i y_i = -30, \sum x_i^2 = 10, \sum y_i^2 = 160$$

فاحسب كلاً من معادلتي انحدار Y على X و X على Y.

فهرس الفصل التاسع

٩. أوليات التحليل العددي

Elementary Numerical Analysis

٩.١ تمهيد.

٩.٢ تحليل الخطأ.

٩.٣ حل المعادلة اللاخطية.

٩.٤ حل جمل المعادلات الخطية.

٩.٥ الاستيفاء وتقريب الدوال .

٩.٦ الطرائق العددية لحل المعادلات التفاضلية.

٩.٧ الطرائق العددية لحساب المشتق والتكامل.

٩.٨ تمارين عامة.

Damascus University

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الفصل التاسع

٩. أوليات التحليل العددي

(Elementary Numerical Analysis)

٩.١ تمهيد:

يقصد بالتحليل العددي دراسة الأساليب الرقمية الافتراضية والتقريبية المتكررة واستخدامها بدلاً من الأساليب الجبرية نظراً للقصور في العملية الجبرية أو عدم تمكن الآلة من معالجة الحالة الجبرية ، للوصول إلى النتائج المطلوبة التي تكون أحياناً متطابقة مع النتائج الجبرية.

وتتجلى أهمية التحليل العددي عند استخدام الحاسب الآلي الذي يعتمد أساساً على الأرقام في عملياته كافة وبهذا كان لا بدّ من تحويل أية عملية إلى لغة رقمية، ولكن بعد وضع نماذج خاصة أو روتين خاص يميز كل عملية عن الأخرى حيث يطلق على هذه النماذج أو الروتينات الخاصة اسم الخوارزميات.

إنّ ضخامة العمليات الحسابية، وتطورها فرض استخدام الآلة (الحاسب) لاختصار الفترة الزمنية لإجراء العملية الحسابية العددية ومنهجية العمليات، وهذه المنهجية بحاجة إلى نموذج خاص بالعملية الحسابية يبدأ بالمخططات أو الخوارزميات (مسار العملية الحسابية) مروراً بالبرنامج الرياضي للعملية وانتهاءً بتصحيح الأخطاء.

إنّ وضع النماذج الرياضية للمسائل الميدانية مهم جداً لما يسببه أي خطأ بسيط من تراكم أخطاء جسيمة قد تؤدي إلى فشل العملية الحسابية بالكامل، وقد تتعدد النماذج الرياضية لمسألة واحدة إذ يكون التفاوت مهماً على أساس الزمن اللازم لإنجاز العملية الحسابية، وتراكم الخطأ وعلى هذا الأساس تصنف النماذج الرياضية إلى مستقرة أو غير

مستقرة (معتلة)، حيث يُقال عن النموذج الرياضي بأنه معتل أو غير مستقر عندما يؤدي أي تغيير طفيف فيه إلى تراكم أخطاء في المراحل اللاحقة. وتعد مرحلة النمذجة من أهم مراحل استخدام الحاسب الآلي من ناحيتين: أولهما نقل البيانات الميدانية إلى معادلات رياضية، وثانيهما: وضع نموذج أو خوارزمية الحل. وسنلاحظ هذه الأهمية كما سنلاحظ العديد من النماذج العددية في الفقرات القادمة.

٢.٩ تحليل الخطأ (Error Analysis):

يعرّف الخطأ والذي يرمز له بالرمز E على أنه الفرق بين القيمة الحقيقية y والقيمة التقريبية أو المتوقعة y_c، وعادة ما يحسب بالقيمة المطلقة، ويسمى عندئذٍ بالخطأ المطلق. بينما يعرّف الخطأ النسبي (Relative Error)، بالنسبة بين مقدار الخطأ المطلق والقيمة الحقيقية. حيث يقيس الخطأ المطلق مقدار الفرق بين القيمتين الحقيقية والتقريبية، بينما يقيس الخطأ النسبي مقدار الخطأ في الوحدة الواحدة من القيمة الحقيقية. وبعبارة رياضية نجد أنّ:

$$E = |y - y_c| \qquad (9.1)$$

$$RE = \frac{|y - y_c|}{y} \qquad (9.2)$$

وينشأ هذا الخطأ العددي من العمليات الحسابية التي تكون عادة في الآلة (الحاسب)، أو البيانات المدخلة أو في الخوارزميات ونماذج أو اساليب الحل أو في التدوير والتقريب للحصول على النتائج المطلوبة أو ما يسمى بالمخرجات. ومن البديهي أن يزداد الخطأ عند تكرار العملية الحسابية أو الخوارزمية، فمثلاً عند تدوير عدد من أربعة أرقام عشرية إلى ثلاثة أرقام عشرية وإضافته على رقم آخر ثم تدويره بالأسلوب نفسه، فإنّ الخطأ في العملية هو مجموع لخطأي التدوير في العدد الأول والثاني، أي أنّ الخطأ عملية تراكمية تزداد بازدياد العمليات الحسابية وتكرارها. وبالمثل إذا كان هنالك خطأ في النمذجة أو

الخوارزمية، فإنّ الخطأ سيتراكم بعدد مرّات استخدام الخوارزمية نفسها، ولربما يفشل البرنامج الحسابي بالكامل. وسنستعرض هنا بعضاً من هذه الأخطاء.

خطأ المدخلات: ويطلق على المسائل من هذا النوع من الخطأ اسم المسائل المعتلة أو غير المستقرة، وعادة ما تكون أخطاء نتائجها كبيرة. ولنأخذ عملية الجمع والتدوير كمثال فلو افترضنا أنّ العددين: $x = 4.34 \quad y = 5.43$ وأردنا حساب كلٍ من المقادير $x+y$ ، $x+0.1y$ ، $x+0.01y$ مقربة إلى رقمين عشريين فنجد أنّ:

أ - $\begin{array}{r} x = 4.34 \\ +y = 5.43 \\ \hline x+y = 9.77 \end{array}$ ب - $\begin{array}{r} x = 4.34 \\ +0.1y = 0.54 \\ \hline x+0.1y = 4.88 \end{array}$ جـ - $\begin{array}{r} x = 4.34 \\ +0.01y = 0.05 \\ \hline x+0.01y = 4.39 \end{array}$

حيث نجد في العملية (أ) أنّ الخطأ في العنصر الأول x والثاني y هو على الترتيب: $E_1 = x - 4.34 \le 0.005$ ، $E_2 = y - 5.43 \le 0.01$ وبالتالي فإنّ الخطأ في العملية هو تراكمي: $E = E_1 + E_2 \le 0.01$

خطأ الخوارزمية: أو ما تسمى بالأخطاء المحاثة (Induced errors) وهي التي تحدث عند الضرب بالعددين 0.1 ، 0.01 ومن ثم التقريب. حيث نجد من المثال السابق أنّ:

$$E_1 = 0.1y - 0.1y_c = 0.543 - 0.54 = 0.003 \le 0.005$$

$$E_2 = 0.01y - 0.01y_c = 0.0543 - 0.05 = 0.0043$$

وبالجمع نجد أنّ: $E = E_1 + E_2 \le 0.0093$

خطأ المخرجات أو النتائج: وهي الأخطاء الناجمة عن نتائج العمليات الحسابية؛ ففي المثال السابق نلاحظ بأنّ مقدار الخطأ في ناتج المجموع الأول (أ) هو:

$$E = |(x+y) - 9.77| = |(x-4.34) + (y-543)| \le E_1 + E_2 \le 0.005 + 0.005 = 0.01$$

وبالمثل لو جمعنا أربعة أرقام $x+y+t+z$ مثلاً فإنّ مقدار الخطأ سيتصاعد إلى 0.02 وهكذا ...

أمّا مقدار الخطأ في ناتج المجموع الثاني (ب) فنجد:

$$0.1y = 0.1(E_2 + 5.43) = 0.1E_2 + 0.543$$

وأنّ: $$E = [(x+0.1y) - 4.88] = [(E_1 + 4.34) + (0.1E_2 + 0.543) - 4.88]$$

$$= E_1 + 0.1E_2 + 0.003$$

وعلى هذا الأساس نجد أنّ الخطأ المطلق في مخرجات عملية الجمع الثانية (ب) هي:

$$E = |x + 0.1y - 4.88| \le E_1 + |0.1E_2| + |0.003| \le 0.05 + 0.005 + 0.003 = 0.058$$

وبالأسلوب نفسه يمكننا حساب مقدار الخطأ في المجموع الثالث (جـ) وهو $(x + 0.01y)$ حيث نجد أنّ: $0.01y = 0.01(E_2 + 5.43) = 0.01E_2 + 0.0543$ ومنه:

$$E = |(x + 0.01y) - 4.39| \le |E_1| + |0.01E_2| + |0.0043| \le 0.05 + 0.005 + 0.0043$$

$$= 0.0593$$

مثال(1): احسب مقدار الخطأ المطلق والخطأ النسبي في حساب الجذر الأصغر للمعادلة

$$x^2 - 20x + 1 = 0$$

الحل: بحل المعادلة نجد أنّ جذري المعادلة هما: $x = 10 \pm \sqrt{99}$، ومنه نجد أنّ الجذر الأصغر هو: $x = 10 - \sqrt{99}$، وبملاحظة أنّ:

$$\left(10 - \sqrt{99}\right)\left(10 + \sqrt{99}\right) = 100 - 99 = 1$$

فإنّ: $\left(10 - \sqrt{99}\right) = \dfrac{1}{10 + \sqrt{99}}$، وعليه نلاحظ هنا أسلوبين لحساب الجذر الأصغر هما: $x = 10 - \sqrt{99}$ أو $10 - 9.9 = 0.1$. أمّا الأسلوب الثاني فهو:

$$x = \frac{1}{10 + \sqrt{99}} = \frac{1}{10 + 9.9} = \frac{1}{19.9} = 0.0503$$

ومنه فإنّ مقدار الخطأ (والخطأ المطلق) في حساب الجذر الأصغر هو:

$$E = (0.10 - 0.0503) = 0.0497$$

أمّا مقدار الخطأ النسبي فهو: $RE = \frac{|0.1 - 0.0503|}{0.1} = 0.00497$

هنالك أنواع أخرى من الأخطاء مثل: الخطأ المحتمل، والخطأ الخفي، وخطأ المحاثة الناتج عن خطأ في الطريقة أو النموذج ...إلخ لن نتطرق لدراستها هنا.

مثال(2): إذا كانت الدالة $f(x) = \sqrt{3x-5}$ معرّفة على النطاق $D_f = [2,10]$ وكانت الدالة $g(x) = x^2 + 2$ معرّفة على النطاق $D_g = [-3,3]$. احسب نطاق تعريف الدالة المركبة: $(gof)(x)$.

الحل: باستخدام عملية التركيب: $(gof)(x) = g(f(x))$ نجد أنّ النطاق المحسوب عددياً هو: $D_{gof} = \{x : 2 \le x \le 4.6666\}$ ولو تم تقريب الحد الأعلى من النطاق (آلياً مثلاً) إلى 4.67 بدلاً من 4.66 لوجدنا أنّ الدالة المركبة غير قابلة للتعريف؛ على النطاق الجديد عموماً وعلى القيمة $x = 4.67$ بالخصوص لأنّ:

$$(gof)(x) = g(f(x)) = 9\left(\sqrt{3(4.67)-5}\right) = 9\left(\sqrt{14.01-5}\right) = g\left(\sqrt{9.01}\right)$$

ومنه نجد أنّ الدالة المركبة غير قابلة للتعريف لأنّ الدالة g غير قابلة للتعريف عند الجذر $\sqrt{9.01}$ لأنه أكبر من العدد $x = 3$ ويقع خارج نطاق الدالة g. ومن هذا الخطأ الخفي يتوجب الحذر عند التقريب. وبالحقيقة لا يجوز التقريب في مثل هذه الحالات.

والجدير بالذكر هو أنّ الأخطاء لا تنتهي بما ذكرناه سابقاً بل قد تكون ناتجة أيضاً من النموذج الرياضي غير السليم الذي يعتمد بشكل كبير على أسلوب صياغة هذا النموذج، أي تحويل المسألة من المشاهدات الميدانية إلى المعادلات الرياضية.

والجدير بالذكر هنا هو وجود خطأ في أثناء حسابات الخطأ أيضاً، كما أنه يوجد خطأ في حسابات التدوير بالنقطة الثابتة أو بالنقطة الحرة (Fixed or Free Point Approximation).

٣.٩ حل المعادلة اللاخطية (Sol. of nonlinear Equation):

يقصد بحل المعادلة اللاخطية (ذات الدرجة الأكبر من الواحد) عددياً هو إيجاد قيمة المتغير $\bar{x}$ بصورة تقريبية بحيث إنّ: $f(\bar{x})=0$، وبعبارة أخرى بيانية، حل المعادلة اللاخطية يعني إيجاد نقاط تقاطع منحني الدالة لهذه المعادلة مع المحور X والتي تمثل بدورها جذور المعادلة باستخدام الوسائل العددية التقريبية التكرارية.

١.٣.٩ طريقة النقطة الثابتة:

في هذا المجال سنركز على ما يسمى بطريقة النقطة الثابتة (Fixed Point Iteration) على الرغم من وجود طرائق أخرى للحل مثل طريقة نيوتن–رافسون والتي تسمى أيضاً بطريقة المماسات. وتعتمد هذه الطريقة في مفهومها الرياضي على نظرية القيمة الوسطى للمشتق عند النقطة الوسطية $\bar{x}$ وهي: $\frac{F(x_n)-F(x_m)}{x_n-x_m}=F'(\bar{x})$ ومنه نجد أنّ: $|F'(x)|^n\to 0$ حيث $\bar{x}\in[x_n,x_m]$ و $|F'(x)|^n<1$.

تتلخص هذه الطريقة العامة (والتي لا تحتاج إلى شروط أولية متعددة بعكس بعض الطرق الأخرى) في إيجاد نقاط تقاطع المنحني مع المحور X (نقطة واحدة على الأقل)، أو في إيجاد جذور المعادلة $y=f(x)=0$ بإعادة كتابة أو صياغة العلاقة على الصورة الجذرية التكرارية $x\cong F(x)$ أي كتابة الجذر x بدلالة الحدود الأخرى في العلاقة: $(f(x)=0)$ السابقة وقد يوجد صور أخرى لمثل هذه الصياغة مثل: $x=g(x)$. ثم نفترض وجود جذر أولي تقريبي (يسمى الجذر الافتراضي) هو: $x_0\in D_f$، أي أنّ $y=f(x_0)=0$ حيث نجد منه أنّ مقدار الخطأ الأول E_1 هو:

$$E_1=x_1-F(x_0)\neq 0 \qquad (9.3)$$

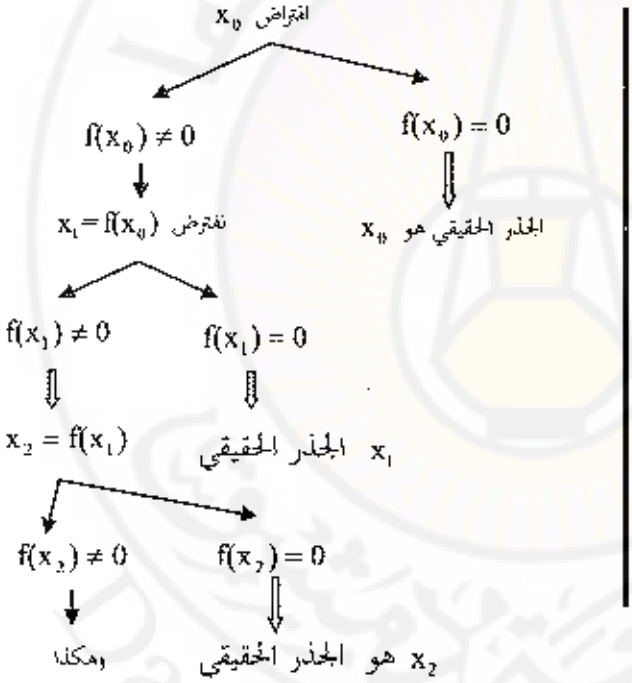
ولتقليل هذا الخطأ الناتج عن الافتراض والاقتراب من الجذر الحقيقي، نفترض أيضاً أنّ x_1 هو جذر للمعادلة: $x_2=F(x_1)$. وبالمثل نجد بأنّ هناك نسبة من الخطأ:

$$E_2 = x_2 - F(x_1) \qquad (9.4)$$

وبتكرار هذا الأسلوب مرة تلو الأخرى نلاحظ أنّ مقدار الخطأ يتقلص، ويتضائل إلى حد الانعدام أو الصفر، أي للحد الذي تتقارب فيه المتتالية $\{E_i\}$ من الصفر، أي أنّ:

$$x_n \cong F(x_{n-1}) \qquad (9.5)$$

ومن التكرار السابق نجد أنّ مقادير الخطأ متناسبة مع بعضها بمقدار ضئيل جداً وكلما كان معامل التناسب بين الأخطاء صغيراً كان التقارب نحو الجذر الحقيقي بصورة أسرع، وبالعكس كلما كان معامل التناسب كبيراً كان التقارب بطيئاً أو معدوماً، وهذا يعني عدم وجود حل للمعادلة. وعلى هذا الأساس يمكننا كتابة التكرار السابق كالآتي:



$$x_i \cong F(x_{i-1})$$

$$\begin{aligned} x_1 &\cong F(x_0) \\ x_2 &\cong F(x_1) \\ x_3 &\cong F(x_2) \\ &\vdots \\ x_n &\cong F(x_{n-1}) \end{aligned}$$

$$\lim_{n \to k} x_n = x$$

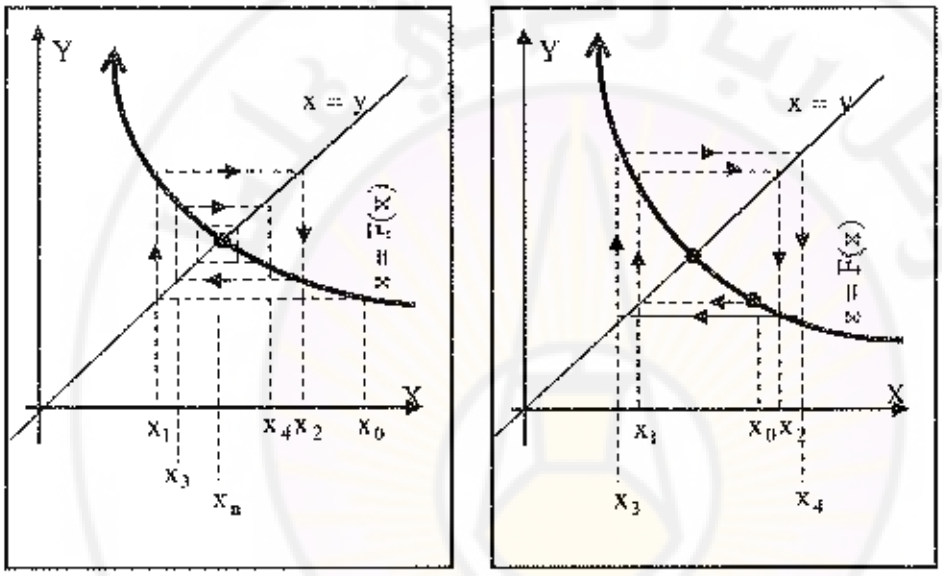
حيث يحدث التقارب بعد k من المرّات عندما يكون الشرط التالي محققاً:

$$|F(x_i) - F(x_j)| = |F'(\bar{x})(x_i - x_j)| = |F'(\bar{x})||x_i - x_j| < |x_i - x_j| \qquad (9.6)$$

أي أنّ شرط التقارب هو: $|F'(\bar{x})| < 1 \qquad (9.7)$

كما في النظرية الآتية:

نظرية: إذا كانت الدالة $F'(x_n)$ موجودة ضمن الفترة $D_F=[\alpha-A,\alpha+A]$ التي تحتوي على الجذر الأولي المفترض x_0 والنقطة الثابتة α فإنّ: $x_{n+1}=F(x_n)$ تتقارب إلى α عندما: $|F'(x_n)|\le k<1$ على النطاق D .



أ — حالة التباعد وعدم وجود الحل

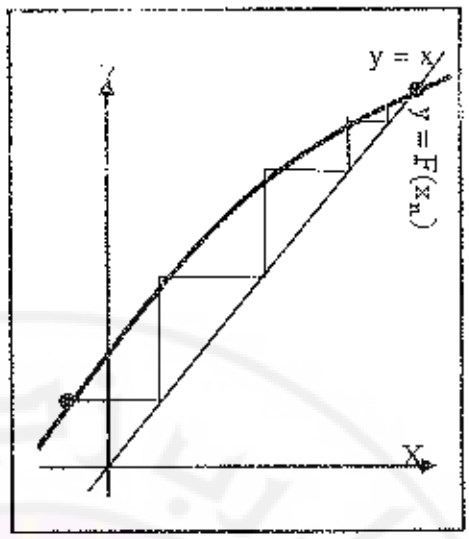
(x_n للخارج)

$|F'(x_n)|>1$

ب — حالة التقارب ووجود الحل

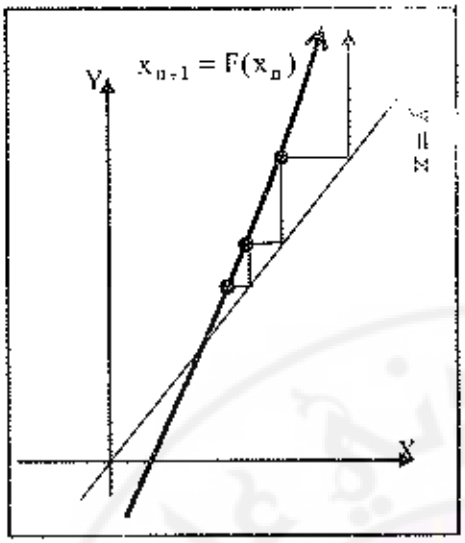
(x_n للداخل)

$|F'(x_n)|<1$



جـ — حالة تقارب ووجود الحل

$$0 \le [F'(x_n)] < 1$$



د — حالة تباعد

$$F'(x_n) > 1$$

الشكل (1-9)

مثال(3): استخدم الأسلوب التكراري (طريقة النقطة الثابتة) لإيجاد جذور المعادلة اللاخطية الآتية إن وجدت (أي أوجد نقاط تقاطع الدالة مع المحور X)

$$f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0$$

الحل: نعيد كتابة المعادلة السابقة على الصورة الآتية: $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$ ومنها:

$x(x^2 + 2x + 10) = 20$ أي أنّ: $x = F(x) = \dfrac{20}{x^2 + 2x + 10}$ ، ومنه يمكننا صياغة الصورة العامة للعلاقة التكرارية كما يلي:

$$x_n = F(x_{n-1}) = \frac{20}{x_{n-1}^2 + 2x_{n-1} + 10} \qquad n = 0, 1, 2... \qquad (9.8)$$

Damascus University

(هناك صياغات أخرى للدالة $F(x)$ مثل: $x = \sqrt{2x^2 - 10 + 20}$ أو $x = \sqrt[3]{\frac{10(2-x)}{x-2}}$ قد يؤدي استخدام بعضها إلى تباعد متتالية الحلول لعدم تحقق الشرط (7.7) أي: $|F'(x)| < 1$).

بفرض أنّ الجذر الأولي الذي يؤخذ اختيارياً على أمل وصول المتتالية إلى تقارب مع عدد ما مثل α (أي نقطة التقاطع (الثابتة) مع المحور X) هو: $x_0 = 1 \in D_F$ مثلاً. نجد باستخدام العلاقة التكرارية السابقة أنّ متتالية الحل ستكون تقاربية؛ لأنّ $|F'(x)| = \left|\frac{-40x+40}{(x^2+2x+10)^2}\right| < 1$ دائماً على نطاق الدالة. ومنه فإنّ:

$$x_1 = \frac{20}{x_0^2 + 2x_0 + 10} = \frac{20}{1+2+10} = \frac{20}{13} = 1.5384615 \Rightarrow E_1 = 0.5384615$$

ولكن $f(1.5384615) \neq 0$، لذا بتعويض $x_1 = 1.5384615$ نفسه كحذر تقريبي جديد للمعادلة، وباستخدام العلاقة التكرارية مرة ثانية نجد أنّ:

$$x_2 = \frac{20}{x_1^2 + 2x_1 + 10} = \cdots = 1.2950191$$

ولكن $f(1.2950191) \neq 0$ لذا نستخدم x_2 نفسه كحذر جديد للمعادلة، وهكذا نجد أنّ:

$$x_3 = \frac{20}{x_2^2 + 2x_2 + 10} = \cdots = 1.4018253$$

$$x_4 = \frac{20}{x_3^2 + 2x_3 + 10} = \cdots = 1.3542093$$

$$x_5 = \frac{20}{x_4^2 + 2x_4 + 10} = \cdots = 1.3752980$$

$$x_6 = \cdots = 1.3659297$$

$$x_7 = \cdots = 1.3700860$$

$$x_8 = \cdots = 1.368241023$$

$$\vdots$$

$x_{19} = \cdots$ $= 1.368807940$

$x_{20} = \cdots$ $= 1.3688080$

$x_{21} = \cdots$ $= 1.3688081$

$x_{22} = \cdots$ $= 1.3688081$

$x_{23} = \cdots$ $= 1.3688081$

ويلاحظ بأن النتائج الثلاث الأخيرة متساوية (أي تحقق شرط التوقف) أي أنّ:

$$|F(x_{23}) - F(x_{22})| < |x_{23} - x_{22}| < \varepsilon$$

ومنه نستنتج تحقق شرط التقارب السابق (9.6)، حيث نلاحظ أن التقارب كبير بين القيم الأخيرة وتتوقف عندئذ عملية التكرار، ويكون جذر المعادلة هو العدد الأخير في التكرار أي أن: $x = x_{23} = 1.3688081$.

ملاحظة ①: عندما تكون قيم $F(x_n)$ متفرقة ومتباعدة أو متذبذبة، فإنّ هذا يعني أنّ معامل التناسب غير مستقر أو ثابت. ومنه نستنتج عدم وجود حل للمعادلة، مثل المعادلة $x^3 - 4x^2 - 10 = 0$ على النطاق $-1 \le x \le 1$ حيث لا يوجد لها جذور في المجال [1,2] بعكس المعادلة $x^3 - 30x - 10 = 0$ على النطاق $-1 \le x \le 1$ حيث نجد أنّ الجذر التقريبي هو: $x_7 = -0.3345818$ نظراً لتقارب قيم $F(x_n)$ أو تساويها في المراحل الثلاث الأخيرة. كما نلاحظ أنّ تدوير النتائج يؤثر على تسارع أو تباطؤ التقارب، وعدد الخطوات، فالتدوير إلى رقمين عشريين قد يُساعد على تسارع التقارب أكثر من التدوير إلى ثلاثة أو أربعة أو خمسة أرقام عشرية.

مثال(4): استخدم طريقة النقطة الثابتة لحل المعادلة اللاخطية $x^2 - 2x - 8 = 0$

الحل: من المعادلة السابقة نلاحظ أنه يمكن الحصول على أكثر من صيغة للدالة التكرارية $F(x_n)$ وهذه الصيغ هي:

أ - $x_{n+1} = F(x_n) = \sqrt{2x_n + 8} \quad \Leftarrow \quad x = \sqrt{2x+8} = F_1(x)$

ب - $x_{n+1} = F(x_n) = \frac{2x_n + 8}{x_n} \quad \Leftarrow \quad x = \frac{2x+8}{x} = F_2(x)$

جـ - $x_{n+1} = F(x_n) = \frac{8}{x_n - 2} \quad \Leftarrow \quad x = \frac{8}{x-2} = F_3(x)$

د - $x_{n+1} = F(x_n) = \frac{x_n^2 - 8}{2} \quad \Leftarrow \quad x = \frac{x^2-8}{2} = F_4(x)$

وبدراسة كل من الصيغ السابقة للمتتالية التكرارية لطريقة النقطة الثابتة نجد أنّ شرط التقارب محقق في جميع الصيغ عدا الحالة الأخيرة (د) كما يلي:

أ - $F_1'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+8}} < 1$ فقط على الفترة (أو النطاق) $D_1 = [-3.5, \infty)$ ومنه نجد أنّ الجذر الاختياري الأولي $x_0 = 5$ ينتمي للنطاق D_1، وبالتالي نتوقع أن تكون متتالية الحلول متقاربة على D_1 حسب النظرية آنفة الذكر.

ب - $F_2'(x) = \left[\frac{2x+8}{x}\right]' = \frac{8}{x^2} < 1$ فقط على الفترة:

$D_2 = \{x : x < \pm 2\sqrt{2} = \pm 2.828427\}$، ومنه نلاحظ أنّ الجذر الاختياري الأولي $x_0 = 5$ ينتمي للنطاق D_2، وبالتالي تكون متتالية الحلول متقاربة حسب النظرية.

جـ - $F_3'(x) = \frac{-8}{(x-2)^2} <$ دائماً على الفترة $D_3 = (-\infty, \infty)$ ومنه نجد أنّ الجذر الأولي المفترض $x_0 = 5$ ينتمي للنطاق D_3، ومتتالية الحلول متقاربة أيضاً.

د - $F_4'(x) =$ فقط على الفترة $D_4 = (-\infty, 1)$ ومنه نجد أنّ الجذر الأولي المفترض $x_0 = 5 \notin D_4$، وبالتالي نجد أن شرط التقارب غير محقق عندما نختار $x_0 = 5$ وأنّ متتالية الحلول التقريبية غير متقاربة (متباعدة) ولو تم تغيير الجذر الأولي المفترض إلى $x_0 = 0.5 \in D_4$ أو $x_0 = -3 \in D_4$ لحصلنا على متتالية حلول متقاربة.

وعلى سبيل المثال لو أخذنا العلاقة التكرارية (جـ) $x_{n+1} = F(x_n) = \frac{8}{x_n - 2}$ ، وافترضنا أن الجذر الأولي هو: $x_0 = 5 \in D_3$ لوجدنا أنّ حساب النقطة الثابتة (الحل) α يأخذ المتتالية الآتية مقربة لخمسة أرقام عشرية:

$$x_0 = 5$$

$$x_1 = \frac{8}{3} = 2.66667$$

$$x_2 = F(x_1) = \frac{8}{2.66667 - 2} = \frac{24}{2} = 12$$

$$x_2 = F(x_2) = \frac{8}{(12 - 2)} = \frac{8}{10} = 0.80000$$

$$x_4 = F(x_3) = \frac{80}{-12} = \quad = -6.66667$$

$$x_5 = F(x_4) = \frac{96}{-104} = \quad = -0.92308$$

$$\vdots$$

$$x_{10} = F(x_9) = \frac{8}{-1.919 - 2} = \frac{8}{-3.919} = -2.04113$$

$$\vdots$$

$$x_{15} = F(x_{14}) = \frac{8}{-4.002} = -1.99872$$

$$x_{16} = F(x_{15}) = \frac{8}{-3.99872} = -2.00064$$

$$x_{17} = F(x_{16}) = \frac{8}{-4.00064} = -1.99968$$

$$x_{18} = F(x_{17}) = \frac{8}{-3.99968} = -2.00016$$

$$x_{19} = F(x_{18}) = \frac{8}{-4.00012} = -1.999930$$

$$x_{20} = F(x_{19}) = \frac{8}{-3.99995} = -2.000035$$

وبملاحظة القيم الأخيرة للمتتالية نستنتج تحقق شرط التوقف؛ لأنّ الفروقات صغيرة جداً.

أي أنّ: $|x_{20} - x_{19}| = |-2.00004 + 1.99993| = 0.00011 = 1.1 \times 10^{-4} < \varepsilon$

ومنه فإن المتتالية تتقارب للحل $x = -2$ بعد المرحلة العشرين. ولو أخذنا المتتالية مقربة لثلاثة أرقام عشرية مثلاً لحصلنا على تقارب أسرع عند المرحلة الرابعة عشرة. وبالمقارنة مع

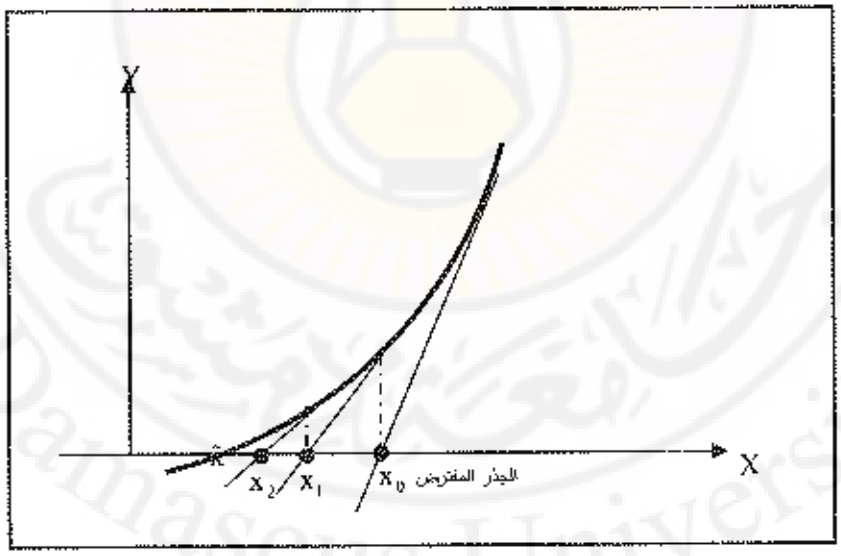
متتاليتي الصيغتين (أ) ، (ب) نجد أنّ هذه الطريقة أقل تسارعاً.حيث نجد بالأسلوب نفسه أنّ متتاليتي الصيغتين (أ) و (ب) أكثر تسارعاً للحصول على الحل (النقطة الثابتة α)، أي بعدد أقل من المراحل كما يشير الجدول (7.1) الآتي:

جدول (9.1) متتاليات الحلول لمثال (4)

	(أ)	(ب)	(جـ)	(د)
n	$x_{n+1}=\sqrt{2x_n+8}$	$x_{n+1}=\frac{2x_n+8}{x_n}$	$x_{n+1}=\frac{8}{x_n-2}$	$x_{n+1}=\frac{x_n^2-8}{2}$
0	5	5	5	5
1	4.243	3.600	2.66667	8.5
2	4.060	4.222	12	32.125
3	4.015	3.895	0.80000	512.008
4	4.004	4.054	-6.66667	والمتتالية تباعدية لا
5	4.001	3.973	-0.92308	تحقق شرط التوقف.
6	$4.000=\alpha$	4.014	-2.73684	
7	وهو الجذر الأول بعد	3.993	-1.68889	
8	ست مراحل مقربة لثلاثة	4.004	-2.16867	
9	أرقام عشرية.	3.998	-1.91908	
10		4.001	-2.011113	
11		$4.000=\alpha$	-1.97964	
12		وهو الجذر الأول بعد	-2.01023	
13		إحدى عشرة مرحلة	-1.99489	
14		مقربة لثلاثة أرقام عشرية	-2.00256	
15		أيضاً.	-1.99872	
16			-2.00064	
17			-1.99968	
18			-2.00016	
19			-1.999930	
20			$-2.00004=\alpha$	
			وهو الجذر الثاني	

٢.٣.٩ طريقة نيوتن رافسون التكرارية:

تعد طريقة نيوتن رافسون واحدة من الطرق الشائعة والسهلة لحساب الجذور التقريبية للمعادلات اللاخطية التي قد تكون بديلاً مناسباً للطريقة السابقة -- طريقة النقطة الثابتة — كما أنها تسمى عملياً بطريقة المماسات. وتتلخص هذه الطريقة في حساب جذر المعادلة $y=f(x)$ الذي نرمز له بالرمز: $\bar{x}$ حيث $y=f(\bar{x})=0$ باستخدام معادلة المماس لمنحني الدالة المستمرة المذكورة، عند نقطة ما عليه، ومن ثم حساب نقطة تقاطعه x_0 مع المحور X حيث يشترط أن يكون $y'=f'(x)\neq 0$ لكي لا يكون المماس موازياً للمحور X. بالاستخدام المتكرر لمعادلة المماس عند نقاط متتالية عليه (وهذا ممكن لأنّ الدالة مستمرة على نطاقها) نحصل على متتالية من النقاط القاطعة للمحور X مثل: $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n$ تقترب فيها x_n من الجذر المطلوب $\bar{x}$ أي أنّ $|x_n-\bar{x}|<\varepsilon$ ، حيث ε مقدار صغير جداً، ومنه نستنتج أنّ $\Delta x_n \to 0$ عندما $n\to\infty$ كما نستنتج أنّ x_n أو x_i بصورة عامة يجب أن تقع ضمن النطاق المعيّن للدالة، وليست خارجه كما يوضح الشكل البياني الآتي:



الشكل (2-9) يوضح النقاط القاطعة للمحور X التي تمثل متتالية الحلول التقريبية.

بفرض أن معادلة المماس تأخذ الصورة الآتية:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x)(x - x_0)$$

ومنه نجد أنّ:

$$x - x_0 = \frac{f(x) - f(x_0)}{f'(x_0)}$$

وبالتالي نحصل على العلاقة:

$$x = x_0 + \frac{f(x) - f(x_0)}{f'(x_0)}$$

التي نستطيع منها صياغة العلاقة التكرارية الآتية:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{f'(x_n)}$$

وبفرض أن $x_{n+1} \to \bar{x}$ فإنّ: $f(\bar{x}) = 0$ حيث $\bar{x}$ تمثل نقطة التقاطع مع المحور X ومنه يمكن كتابة العلاقة التكرارية السابقة بالشكل الآتي:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad (9.7)$$

ومنها نجد أنّ شرطي التقارب هما:

1- $f'(x_n) \neq 0$

2- $\lim_{n \to \infty} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \to 0$

أو أنّ: $|x_{n+1} - x_n| \to 0$ عندما $n \to \infty$ وهو ما يسمى بشرط التوقف للعمليات التقريبية.

ومن الجدير بالإشارة هو أنّ طريقة نيوتن رافسون تكون متباعدة عندما لا يقطع المنحني المحور X مثل منحني الدالة $y = x^2 + 4$.

وبالمقارنة بين الطريقتين السابقتين نجد أنّ تحقق شرط التوقف يكفي لتحقق شرط التقارب.

مثال(5): احسب الجذر الحقيقي الموجب للدالة: $f(x) = 5x^3 - 3x^2 - 3x - 8$

الحل: بأخذ قيم تجريبية مثل $x=1$ و $x=2$ نجد أن : $y_1=f(1)=-9$ بينما $y_2=f(2)=14$ وهو ما يشير إلى أنّ منحني الدالة يقطع المحور X في نقطة ما مثل $\tilde{x}$ تقع بين النقطتين $x_1=1$ ، $x_2=2$ نظراً لاختلاف إشارتي أو قيمتي الدالة عند النقطتين. لذا نفترض أنّ الجذر الأولي والاختياري هو: $x_0=1.4$ مثلاً وعليه نجد أنّ $f'(1.4)\neq 0$. وأنّ متتالية الحلول التقريبية تحسب كالآتي:

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}=x_0-\frac{5x_0^3-3x_0^2-3x_0-8}{15x_0^2-6x_0-3}=\frac{10x_0^3-3x_0^2+8}{15x_0^2-6x_0-3}=1.64$$

وبما أنّ: $|\Delta x|=x_1-x_0=1.64-1.4=0.24>\varepsilon$

لذا نستمر في التقريب إلى الرقم العشري المطلوب:

$$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}=\frac{10x_1^3-3x_1^2+8}{15x_1^2-6x_1-3}=1.60$$

وأيضاً نجد أنّ شرط التقارب والتوقف غير محقق $|\Delta x|=+0.04$ لذا نستمر في التقريب

وهكذا نجد: $x_3=x_2-\frac{f(x_2)}{f'(x_2)}=\frac{10x_2^3-3x_2^2+8}{15x_2^2-6x_2-3}=1.60$

حيث نجد في المرحلة الثالثة أنّ: $|\Delta x|=|x_3-x_2|=0<\varepsilon$

ومنه نجد أنّ شرط التقارب والتوقف محققان. لذلك نستنتج أنّ الجذر هو:

$$\tilde{x}=x_3=1.60$$

ويفضل عند تطبيق طريقة نيوتن رافسون استخدام الجدول الآتي:

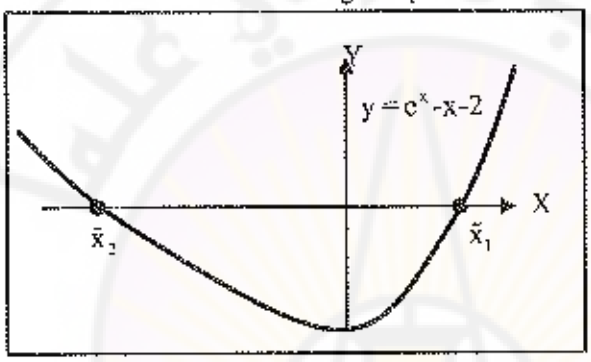
i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	$A_i=f(x_i)/f'(x_i)$	$x_{i+1}=x_i-A_i$
0				
1				
2				
:				
N				

مثال(6): احسب أصفار الدالة $f(x)=e^x-x-2$ مستخدماً طريقة نيوتن رافسون التكرارية.

الحل: بتطبيق العلاقة التكرارية لنيوتن رافسون:

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_{n+1}=x_n-\frac{e^{x_n}-x_n-2}{e^{x_n}-1}$$



ومن الرسم البياني للدالة نجد أنّ لها جذرين، ومنه نجد أنّ المتتالية x_n تتقارب من الجذر $\bar{x}_2$ السالب عندما نفترض أنّ $x_0<2$ وتتقارب من الجذر $\bar{x}_1$ عندما نأخذ الجذر الافتراضي الأولي $x_0>0$.

وفي كلتا الحالتين نجد (عند أخذ $x_0=\pm 10$) أنّ شرط التقارب محقق، وهو $f'(\pm 10)\neq 0$.

وتفشل الطريقة عندما نأخذ $x_0=0$ لأنّ المشتق $f'(0)$ يكون غير محقق للشرط والجدول التالي يوضح متتاليتي التقريب مقربة لخمسة أرقام عشرية:

i	x_n	x_n
0	-10	10
1	-1.999591	9.000489
2	-1.843472	8.001733
3	-1.841406	7.004749
4	1.841406	6.012020
5		5.029236
6		4.068950
7		3.157113
8		2.341852
9		1.697350
10		1.302210
11		1.162073
12		1.146376
13		1.146193
14		1.146193

ويلاحظ أنّ شرط التقارب والتوقف محقق في المرحلة 14 و 13 للجذر الموجب وفي المرحلتين 3 ، 4 للجذر السالب. ومنه نستنتج أنّ جذري (أو صفري) الدالة هما:

$$\bar{x}_1 = 0.146193 \qquad \bar{x}_2 = -1.841406$$

كما نلاحظ أنّ شرط التوقف يكون محققاً عند المرحلة 12، 13 عندما يكون التدوير لثلاثة أرقام عشرية.

٤.٩ حل جمل المعادلات الخطية:

(Numerical Sol. of System of Linear Equations)

تتلخص الطرق العددية التراجعية أو التكرارية لحل جمل المعادلات الخطية في إتباع واحدة من الطرق الشهيرة الآتية على الرغم من التفاوت البسيط بين هذه الطرق أحياناً. ونذكر منها:

أ — طريقة الاختزال (غاوس) باستخدام العمليات الأولية على المصفوفات.

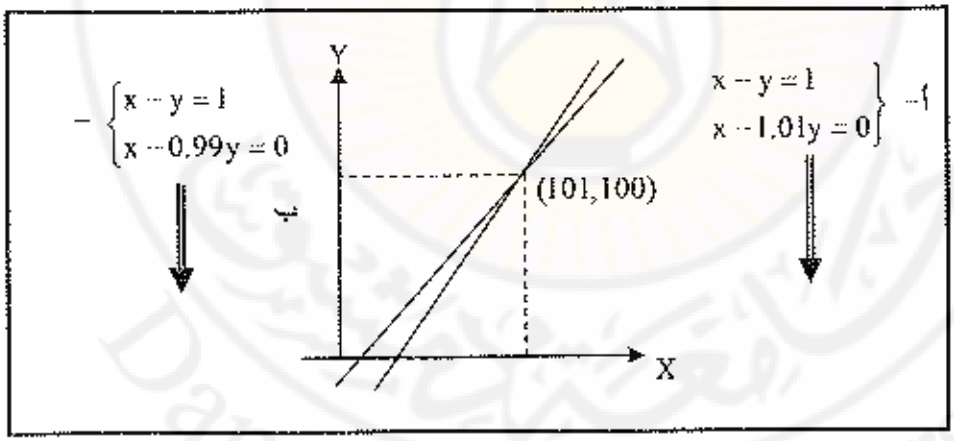
ب — طريقة التثليث (شولسكي)

جـ — طريقة البواقي Residual (Relaxation) Method

د — طريقة جاكوبي التراجعية.

هـ — طريقة غاوس — سيدال التكرارية (Gauss-Seidel)

وتقدر أفضلية هذه الطرق أو الخوارزميات التكرارية بعضها على بعض بعدد الخطوات التكرارية للتقارب مع الحل، ونسبة الخطأ في الحل، فكلما كان عدد الخطوات التكرارية قليلاً ومقدار نسبة الخطأ صغيراً كانت الطريقة أفضل من الأخرى. وعلى الرغم من هذه الأفضلية لبعض الطرق على الأخرى إلّا أنّ أنظمة المعادلات نفسها تختلف هي الأخرى في قبول مواصفات التقارب نحو الحل المضبوط، حيث نجد أنّ بعض أنظمة المعادلات مثل $AX=B$ تتغير حلولها ونتائجها بغرابة وإفراط لمجرد أي تغيير بسيط في المعاملات A أو الثوابت B ومثل هذه الأنظمة تسمى بالأنظمة غير المنتظمة أو غير المستقرة (ضعيفة الشرطية) (ill-condition ed system) مثل المنظومتين (أ) و (ب) في الشكل:



الشكل (3-9) المستقيمان متوازيان تقريباً

(لاحظ النتائج السلبية بمجرد تغيير معامل y بمقدار ضئيل جداً في المجموعة الثانية)

والحقيقة أنّ استخدام أيٍّ من الطرق السابقة لحل جمل المعادلات لا يعني وجود الحل، وعلى هذا الأساس يُقال إنّ الطريقة أو التكرار متقارب عندما يتحقق شرط التقارب حيث تتقارب النتائج من الحلول الحقيقية، وبعكس ذلك يُقال عن الطريقة إنها متباعدة عندما تتباعد التكرارات عن الحلول المطلوبة أو تتذبذب حولها ، ومن أجل اختصار عملية التكرار يفضل ملاحظة الشرط التالي الكافي للتقارب قبل البدء في الحل.

* **الشرط الكافي وغير الضروري** لتقارب جملة المعادلات $AX=B$ حيث A مصفوفة الأمثال المربعة nxn هو:

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \qquad \text{حيث: } i = 1,2,3,\cdots n \tag{9.9}$$

حيث تكون القيمة المطلقة للعنصر القطري أكبر من مجموع القيم المطلقة لعناصر صفه ، ويطلق على هذا النوع من مصفوفة المعاملات اسم المصفوفة مضخمة القطر (diagonally dominent) مثل:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 2 & -8 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

وهي مصفوفة مضخمة القطر، حيث نلاحظ فيها أنّ:

$$|a_{11}| = |4| > |-3| + |0| \qquad |a_{22}| = |-8| > |2| + |5| \qquad |a_{33}| = |3| > |1| + |1|$$

أمّا المصفوفة: $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ فهي مصفوفة غير مضخمة القطر، حيث نجد فيها أنّ:

$$|b_{11}| = |2| < |-3| + |0|$$

ونركز في موضوعنا هذا على طريقتين فقط هما: طريقة جاكوبي التكرارية وطريقة غاوس سيدال التكرارية.

١.٤.٩ طريقة جاكوبي (Jacobi Iterative Method):

تتلخص طريقة جاكوبي لحل جملة المعادلات الخطية بالخطوات الآتية:

أ – إعادة كتابة أو صياغة المعادلات على الصورة الدالية أي كتابة المتغير x_i في المعادلة رقم (i) بدلالة المتغيرات الأخرى.

ب – نختار القيم الابتدائية التقريبية مفترضين أنها تمثل حلول المعادلات ولكافة المتغيرات، ويفضل عادة في المرحلة الصفرية عند غياب الشروط أو القيود الأولية عدّ تلك القيم الابتدائية مساوية للصفر أي: $x_1^{(0)}=0 \quad x_2^{(0)}=0 \quad \cdots \quad ,x_n^{(0)}=0$

جـ – تعويض القيم الابتدائية التقريبية المفترضة في جملة المعادلات الدالية ، وحساب قيم المتغيرات x_i الجديدة ($i=1,\cdots,n$) من معادلاتها بمعلومية المتغيرات المفترضة الأخرى.

د – تعويض القيم التقريبية المحسوبة في المرحلة (جـ) في جملة المعادلات الدالية مرة أخرى، ثم حساب قيم x_i ($i=1,\cdots,n$) الجديدة من المعادلات المقابلة.

هـ – تكرار عملية تعويض قيم (x_i) الجديدة في جملة المعادلات الدالية ، وحساب قيمة المتغير x_i الجديدة من المعادلة المناظرة رقم (i) على الترتيب حيث $i=1,2,\cdots,n$ ثم جدولة النتائج.

و– ملاحظة شروط التوقف والتقارب $\left|x_i^{(k)}-x_i^{(k-1)}\right|<\varepsilon$ في المرحلة الكافية لإيقاف التكرار وحساب النتائج، وتثبيتها.

مثال(7): أوجد مجموعة حلول جملة المعادلات الآتية مقربة لثلاثة أرقام عشرية:

$$14x_1+2x_2+4x_3=-10$$

$$16x_1+40x_2-4x_3=55$$

$$-2x_1 + 4x_2 + 16x_3 = 38$$

الحل: نلاحظ أولاً أنّ الشرط الضروري للتقارب محقق؛ لأنّ مصفوفة المعاملات مضخمة القطر حيث نلاحظ أن:

$$|a_{11}| = |14| > |2| + |4|$$

$$|a_{22}| = |40| > |16| + |-4|$$

$$|a_{33}| = |16| > |-2| + |4|$$

وهذا يعني أنّ متتالية الحلول متقاربة. ولو استبدلنا المعادلة الأولى بالمعادلة الثانية سنجد أنّ متتالية الحلول غير متقاربة؛ لأنّ مصفوفة المعاملات عندئذ تكون غير مضخمة القطر.

الآن نقوم بصياغة الصورة الدالية كالآتي:

$$x_1 = -\frac{10}{14} - \frac{2}{14}x_2 - \frac{4}{14}x_3 \qquad ①$$

$$x_2 = \frac{55}{40} - \frac{16}{40}x_1 + \frac{4}{40}x_3 \qquad ②$$

$$x_3 = \frac{38}{16} - \frac{2}{16}x_1 - \frac{4}{16}x_2 \qquad ③$$

ومنها نجد أنّ:

$$x_1 = -0.714 - 0.143x_2 - 0.286x_3$$

$$x_2 = 1.375 - 0.400x_1 - 0.100x_3$$

$$x_3 = 2.375 - 0.125x_1 - 0.250x_2$$

ونفرض أنّ الحلول الابتدائية في المرحلة الأولى ($k=1$) صفرية أي:

$$x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = 0$$

نحصل على القيم التقريبية الآتية للمرحلة الأولى:

$$x_1^{(1)} = -0.714 \quad , \quad x_2^{(1)} = 1.375 \quad , \quad x_3^{(1)} = 2.375$$

وبتكرار عملية التعويض بالقيم الثلاث الجديدة مرة أخرى نحصل على قيم المرحلة الثانية ... ، وبالمتابعة نحصل على الجدول الآتي:

الجدول (2-9)

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	0	0	0
1	-0.714	1.375	2.375
2	-1.590	1.899	2.808
3	-1.789	2.292	3.049
4	-1.914	2.396	3.172
5	-1.964	2.458	3.213
6	-1.984	2.482	3.236
7	-1.994	2.493	3.244
8	-1.998	2.497	3.247

وبملاحظة شرط التوقف والتقارب في المراحل الأخيرة للأعمدة الثلاثة نجد أنّ الفروق بين القيم الأخيرة $\max\left|x_i^k - x_i^{k-1}\right| \le 0.004 = 4\times10^{-3}$ ضئيلة جداً، ومنه نجد أنّ الحل التقريبي للجملة هو: $x_1 = -1.998, x_2 = 2.497, x_3 = 3.247$ مقرباً لثلاثة أرقام عشرية، كما يمكن كتابة الحل بالشكل: $x_1 = -2, x_2 = 2.5, x_3 = 3.25$ مقرباً لرقمين عشريين.

مثال(8): لتوضيح نجاح أو فشل طريقة جاكوبي ندرس حل الجملة الآتية:

$$5x_1 + 2x_2 - x_3 = 6$$

$$x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 4$$

$$2x_1 + x_2 + 4x_3 = 7$$

ومنها نلاحظ أنّ مصفوفة المعاملات مضخمة القطر، أي أنّ الشرط الكافي لتقارب طريقة جاكوبي محقق، ومنه تكون متتالية الحلول مقربة لثلاثة أرقام عشرية كما في الجدول الآتي:

الجدول (3-9)

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	0	0	0
1	1.200	0.667	1.750
2	1.283	1.342	0.983
3	0.860	0.944	0.773
4	0.977	0.910	1.084
5	1.053	1.064	1.034
6	0.988	1.008	0.962
7	0.989	0.983	1.004
8	1.008	1.004	1.010
9	1.000	1.004	0.995
10	0.997	0.998	0.999
11	1.001	1.000	1.002

وبملاحظة شرط التوقف، والتقارب في المراحل الأخيرة للأعمدة الثلاثة نجد أنّ: $\max\left|x_i^k - x_i^{k-1}\right| \le 0.004 = 4\times10^{-3}$، ومنه فإن التقارب محقق وعليه نوقف عملية التقريب عند الخطوة الحادية عشرة. حيث نجد أن الحل الأخير هو:

$x_1 = 1.001 \quad x_2 = 1 \quad x_3 = 1.002$ مقرباً لثلاثة أرقام عشرية.

من ناحية أخرى لو استبدلنا المعادلة الأولى بالثانية في المجموعة السابقة سنحصل على جملة المعادلات الآتية:

$$x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 4$$

$$5x_1 + 2x_2 - x_3 = 6$$

$$2x_1 + x_2 + 4x_3 = 7$$

ومنها نجد أنّ الشرط الكافي (9.9) غير محقق، وأنّ طريقة جاكوبي سريعة التباعد (لأنّ متتالية الحلول تشير إلى سرعة في التباعد)، كما في الجدول الآتي:

الجدول (4–9)

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	0	0	0
1	4.000	3.000	1.750
2	-8.750	-6.125	-1.000
3	37.750	24.375	7.656
4	-119.282	-87.547	-23.219
5	459.625	289.596	83.278

٢.٤.٩ طريقة غاوس–سيدل التكرارية (Gauss-Seidel M) :

لا تختلف طريقة سيدل عن جاكوبي كثيراً إلاّ بتعويض كل قيمة منفردة محسوبة حديثة للمتغيرات في المعادلة الآتية لها، أي حساب القيمة x_i بصورة منفردة بتعويض المتغير x_{i-1} وما قبله في المعادلة (i) . ويمكننا تلخيص هذه الطريقة – التي تعدّ أكثر تسارعاً من طريقة جاكوبي – بالخطوات الآتية:

أ – إعادة صياغة المعادلات على الصورة الدالية أي كتابة المتغير x_i بدلالة المتغيرات الباقية وعلى الترتيب.

ب – نختار القيم أو الحلول الابتدائية لمتغيرات المعادلة رقم (i) فقط، وذلك لحساب قيمة المتغير x_i بصورة منفردة منها. وعادة ما تكون تلك القيم المختارة صفرية والرقم $i=1$ وحيث: $x_i \neq x_j = 0 \qquad j=1,2,\cdots,n \neq i$

جـ – تعويض كافة القيم الابتدائية المختارة السابقة والقيمة x_i المحسوبة من المعادلة رقم (i) في المرحلة السابقة، في المعادلة رقم $i+1$ الآتية، حيث نحسب منها قيمة المتغير التالي x_{i+1}.

د – تعويض القيم الابتدائية المختارة (المفترضة) وقيمة x_i المحسوبة في المعادلة رقم i والقيمة x_{i+1} المحسوبة من المعادلة $i+1$ في المعادلة الآتية لها رقم $i+2$، لحساب قيمة المتغير x_{i+2} وهكذا...

هـ – تكرار عملية التعويض بالقيم المحسوبة من المرحلة السابقة وعلى التعاقب وجدولة النتائج التقريبية في الجملة الآتية:

$$x_1^{(k)} = a_1 + b_1[x_2^{(k-1)}] + c_1[x_3^{(k-1)}]$$

$$x_2^{(k)} = a_2 + b_2[x_1^{(k)}] + c_2[x_3^{(k-1)}]$$

$$x_3^{(k)} = a_3 + b_3[x_1^{(k)}] + c_3[x_2^{(k)}]$$

و– إيجاد شروط التقارب لكل متغير من المتغيرات في المتتالية $\{x_i^{(k)}\}$ وهو: $|x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}| < \varepsilon$ لتحديد توقيت إيقاف العمليات.

مثال(9): أوجد الحلول التقريبية لجملة المعادلات الآتية:

$$14x_1 + 2x_2 + 4x_3 = -10 \quad ①$$

$$16x_1 + 40x_2 - 4x_3 = 55 \quad ②$$

$$-2x_1 + 4x_2 - 16x_3 = -38 \quad ③$$

الحل: نقوم أولا بإعادة صياغة معادلات الجملة على الصورة الدالية التكرارية الآتية:

$$x_1^{(k)} = -0.714 - 0.143x_2^{(k-1)} - 0.286x_3^{(k-1)} \quad ④$$

$$x_2^{(k)} = 1.375 - 0.400x_1^{(k)} + 0.100x_3^{(k-1)} \quad ⑤$$

$$x_3^{(k)} = 2.375 - 0.125x_1^{(k)} + 0.250x_2^{(k)} \quad ⑥$$

وباختيار $x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = 0$ وتعويض هذه القيم الافتراضية في المعادلة (4) نحصل على قيمة المتغير $x_1^{(1)}$ كالآتي:

$$x_1^{(1)} = -0.714 - 0 - 0$$

وبتعويض القيمة المفترضة $x_3^{(0)} = 0$ والقيمة المحسوبة $x_1^{(1)}$ من المرحلة السابقة في المعادلة ⑤ نحصل على قيمة $x_2^{(1)}$ الجديدة.

$$x_2^{(1)} = 1.375 - 0.400(-0.714) + 0 = 1.661$$

وبتعويض القيمتين $x_2^{(1)}$ ، $x_1^{(1)}$ المحسوبتين من المرحلتين السابقتين في المعادلة ⑥ نحصل على قيمة $x_3^{(1)}$ الجديدة. حيث $k=1$ يشير إلى المرحلة الأولى.

$$x_3^{(1)} = 2.375 - 0.125(-0.714) + 0.250(1.661) = 2.879$$

وبتكرار العمليات السابقة بالترتيب نفسه، أي بتعويض $x_2^{(1)} = 1.661$ $x_3^{(1)} = 2.879$ في المعادلة ④ من جديد نحصل على قيمة المتغير $x_1^{(2)}$ الجديدة، وهكذا نجد أنّ المرحلة الثانية تأخذ الصيغة الآتية:

$$x_1^{(2)} = a_1 + b_1 x_2^{(1)} + c_1 x_3^{(1)}$$
$$x_2^{(2)} = a_2 + b_2 x_1^{(2)} + c_2 x_3^{(1)}$$
$$x_3^{(2)} = a_3 + b_3 x_1^{(2)} + c_3 x_2^{(2)}$$

أي أنّ:

$$x_1^{(2)} = -0.714 - 0.143(1.661) - 0.286(2.879) = -1.775$$
$$x_2^{(2)} = 1.375 - 0.400(-1.775) + 0.100(2.879) = 2.373$$
$$x_3^{(2)} = 2.375 - 0.125(1.775) + 0.250(2.373) = +3.190$$

وهكذا بتكرار تعويض القيم السابقة والمتابعة يمكننا جدولة النتائج التقريبية كالآتي:

Damascus University

الجدول (9.5)

i	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	↓	0	0
1	-0.714	↓	0
2	-0.714	1.661	↓
3	↓	1.661	2.879
4	-1.775	↓	2.879
5	-1.775	2.373	↓
6	↓	2.373	3.190
7	-1.965	↓	3.190
8	-1.965	2.480	↓
9	↓	2.480	3.241
10	-1.996	↓	3.241
11	-1.996	2.497	↓
12	↓	2.497	3.249
13	-2.000	↓	3.249
14	-2.000	2.500	↓
15	-2.000	2.500	3.250

ومن التقارب الأخير بين القيم في كل عمود نجد أنّ القيم التقريبية للحلول مقربة لثلاثة أرقام عشرية هي: $x_3 = 3.25$ ، $x_2 = 2.5$ ، $x_1 = -2$ وهي القيم نفسها التي حصلنا عليها باستخدام طريقة جاكوبي السابقة.

مثال(10): لتوضيح شرط التقارب ونجاح أو فشل طريقة غاوس-سيدل ندرس الجملة السابقة المذكورة في المثال (8) مرة ثانية وهي:

$$5x_1 + 2x_2 - x_3 = 6$$

$$x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 4$$

$$2x_1 + x_2 - 4x_3 = 7$$

وباستخدام طريقة غاوس–سيدال سنجد أنّ متتالية الحلول تتقارب نظراً لتحقق الشرط الضروري للتقارب (المصفوفة مضخمة القطر) كما في الجدول الآتي: حيث أوقفت العملية بعد سبع مراحل وفيها نجد أنّ شرط التوقف هو:

$$\max\left|x_i^{(7)} - x_i^{(6)}\right| < 0.004 = 4.0\times10^{-3}$$:

الجدول (9.6)

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	0	0	0
1	1.200	0.467	1.033
2	1.220	0.980	0.895
3	0.987	0.950	1.019
4	1.024	1.006	0.986
5	0.995	0.994	1.004
6	1.003	1.002	0.998
7	0.999	0.999	1.001

وبالمثل لو استبدلنا المعادلة الأولى بالثانية في الجملة السابقة لوجدنا أنّ طريقة غاوس–سيدال تتسارع نحو التباعد؛ لأنّ الشرط الكافي للتقارب غير محقق ومتتالية الحلول تكون متباعدة في الأعمدة الثلاثة كما في الجدول الآتي:

الجدول (9.7)

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	0	0	0
1	4.000	-7.000	1.500
2	50.500	-122.50	7.125
3	760.375	-1894.375	95.156

والجدير بالذكر في هذا السياق هو عدم ضرورة تقارب طريقتي جاكوبي وغاوس-سيدل أو تباعدهما معاً ففي كثير من الجمل نلاحظ تقارباً في طريقة جاكوبي مثلاً، وتباعد في طريقة غاوس-سيدل، وبالعكس. ولكنهما تتقاربان معاً إذا تحققت خاصية المصفوفة المضخمة وهو الشرط الكافي المذكور سابقاً.

ملاحظة ②: على الرغم من التقارب في النتائج لطريقتي جاكوبي وغاوس- سيدل إلاّ أننا لا نستطيع الجزم بأفضلية إحدى الطريقتين على الأخرى. وبالرغم من أنّ عدد التكرارات في خوارزمية سيدل أقل منه في خوارزمية جاكوبي إلاّ أنّ مسألة التباعد وعدم التقارب (عدم وجود حل للجملة) هي الوسيلة الأفضل لتوضيح أفضلية إحدى الطرق على الأخرى.

٥.٩ الاستيفاء وتقريب الدوال (Collocation and Interpolations):

يقصد بتقريب الدوال هو حساب العلاقة بين متغيرين (أو أكثر) أو حساب الحدودية التي تمثل المتغيرين والتي تتطابق أو تتوافق مع قيم هذين المتغيرين المعلومة أو المشاهدة ميدانياً، ويرمز عادة لهذه العلاقة أو الحدودية بالرمز $P_n(x)$ وهي في النهاية دالة بالمتغير x.

ويقصد بالاستيفاء هو حساب بعض القيم البينية غير المنظورة ميدانياً من خلال حدودية تقريبية $P_n(x)$ ، أي حساب قيم غير مشاهدة ميدانياً من بعض القيم المعلومة أو

المشاهدة ميدانياً. وهذا يعني أن النقاط المعلومة المتوفرة تشكل جذوراً أو أصفاراً للحدودية $P_n(x)$.

لقد درسنا سابقاً كلاً من متسلسلة تايلور وماك لوران ولورنت لتقريب الدوال المستمرة والقابلة للاشتقاق مثل $y=f(x)$ على نطاقها عند نقطة معينة. أمّا في حالة التقريب والاستيفاء فنحن نذهب إلى أعمق وأبعد من ذلك حيث نحسب التقريب للعلاقات المفترضة من معلومية ومشاهدة بعض القيم المتفرقة غير المتصلة وتكوين الحدودية $P_n(x)$ التقريبية والمتوافقة مع تلك القيم أو النقاط المعلومة.

وهنالك العديد من هذه الطرق لحساب الحدودية $P_n(x)$ لا تختلف عن بعضها البعض إلاّ بتعديلات قد تكون هامشية أحياناً أو خاصة لمسائل معينة أحياناً أخرى ونذكر منها:

1- طريقة نيوتن للفروق المتقدمة (الفترات أو الفروق المتساوية).

2- طريقة نيوتن للفروق المتقدمة (الأمامية).

3- طريقة نيوتن للفروق النسبية.

4- طريقة لاغرانج (الفترات غير المتساوية)

5- طريقة غاوس للإزاحة المتقدمة.

6- طريقة غاوس للإزاحة التراجعية.

7- حدودية إيفرت.

8- حدودية إستراينغ (الحدودية العاملية Factorial Polynomial).

9- حدودية بسل (Bessel's Polynomial).

10- الحدوديات المتعامدة.

ونركز هنا على كل من حدودية نيوتن للفروق المتقدمة التي تتميز بالقيم المنفردة وتساوي الفترات بين القيم المشاهدة الميدانية، وحدودية لاغرانج للقيم المنفردة أيضاً التي تتميز بعدم تساوي الفترات.

١.٥.٩ حدودية لاغرانج للتقريب:

في الكثير من المسائل التجريبية والميدانية مثل المسائل الفيزيائية أو الميكانيكية ...إلخ نحتاج لتمثيل (أو التعبير عن) جملة من النتائج أو النقاط المتفرقة التي يمكن أن نرمز لها بالرمز: (x_i, y_i) حيث: $i = 0,1,\cdots,n$ بدالة تقريبية من الدرجة n توضح العلاقة بين قيم المتغيرين x_i, y_i ويمر منحنيها من تلك النقاط. والجدير بالذكر هنا هو أنّ مثل هذا التمثيل يصبح غير بسيط عندما يزداد عدد النقاط أو النتائج، إذ يتوجب عندئذٍ ملاحظة انتشار هذه النقاط إذا كانت على استقامة واحدة تقريباً أم لا، وبديهي أن تقترن نوعية الانتشار هذه بدرجة العلاقة متعددة الحدود التي تمثل تلك النتائج أو النقاط. وحدودية لاغرانج هي إحدى هذه الوسائل التقريبية للتعبير عن تلك النتائج التقريبية. وتتلخص طريقة لا غرانج في حساب حدودية لاغرانج $LP_n(x)$ حيث يمثل n عدد النقاط أو القيم المشاهدة ميدانياً، وتعميم معادلة الخط المستقيم لتشمل كافة النقاط المعطاة.

ففي حالة النقطتين (x_1, y_1) و (x_0, y_0) مثلاً، نجد أنّ معادلة المستقيم تأخذ صورة الميل الآتية:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$$

والتي يمكن أن تكتب بالشكل الآتي أيضاً:

$$f(x) = \left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right) f(x_0) + \left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right) f(x_1)$$

وهي حدودية من الدرجة الأولى.

ولتعميم هذه الحالة لتشمل ثلاث نقاط أو أكثر نفترض أنّ الحدودية من الدرجة n هي:

$$LP_n(x) = \sum_{i=1}^{n} L_i(x) y_i = L_0 y_0 + L_1 y_1 + \cdots + L_n y_n \quad (9.10)$$

حيث يعرّف معامل لاغرانج $L_i(x)$ ويحسب من العلاقة الآتية:

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \left(\frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right)$$

$$= \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)(x_i-x_2)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)} \qquad (9.11)$$

حيث $y_i = f(x_i)$ تمثل القيمة التجريبية أو المشاهدة المناظرة للقيمة x_i (المتغير المستقل رقم i).

ومن العلاقة السابقة يمكننا ملاحظة أنّ درجة الحدودية التي تتطابق وتتوافق مع النقاط (x_i, y_i) المعطاة تساوي n، كما نجد الشرطين الآتيين:

أ - $L_i(x_i) = 1$ و ب - $L_i(x_j) = 0$ عندما $i \neq j$

ونلاحظ أيضاً أنّ البسط يحتوي جداء كافة العوامل الممكنة $(x - x_j)$ لجذور الحدودية عدا العامل $(x - x_i)$، وبالمثل يكون المقام، عدا العامل $(x_i - x_i)$. ومن الجدير بالذكر هنا هو وحدانية معاملات لاغرانج لكل قيمة من قيم x_i، ومن السهل إثبات ذلك. من جهة أخرى نذكر أيضاً بالخطأ الموجود في هذه الحدودية عند النقاط البينية غير المعطاة، حيث نجد أنّ قيم الحدودية تتوافق أو تتطابق مع القيم المعطاة كافة، أي أنّ $LP_n(x_i) = f(x_i)$ لكافة قيم $i = 0, 1, 2, \cdots, n$. كما لا يمكن الحديث عن جودة التقريب باستخدام حدودية لاغرانج إلاّ بعد مقارنة هذه الحدودية مع حدوديات تقريبية أخرى.

هناك صيغ أخرى لحدودية لاغرانج يمكننا فيها استخدام جداول الفروق المتقدمة أو جداول الفروق المقسومة كما هو مستخدم في طريقة تقريب واستيفاء حدودية نيوتن، ويمكن الرجوع إليها في مصادر أخرى.

نظرية الخطأ في حدودية لاغرانج:

إذا كانت جميع مشتقات الدالة $f(x)$ حتى المشتق من المرتبة $n+1$ موجودة ومستمرة عند النقطة $x_i \in [a, b]$، حيث $i = 0, 1, 2, \cdots, n$، فإنّ لكل x_i هناك عدد وسطي مثل: $\bar{x} \in (a, b)$ بحيث إنّ:

$$f(x)-LP_n(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)\frac{f^{n+1}_{(\xi)}}{(n+1)!}$$

ملاحظة هامة ③: يمكن استخدام حدودية لاغرانج لحساب المشتقات عددياً [انظر مثال (24) لاحقاً].

مثال(11): أوجد حدودية لاغرانج من الدرجة الثانية للدالة $f(x)=\text{Ln}\,x$ مستخدماً البيانات الآتية:

x_t	2	2.5	3
$f(x_i)$	0.69315	0.91629	1.09861

الحل: نلاحظ بأنه يوجد ثلاث نقاط معطاة، ومنه يمكن تكوين حدودية من الدرجة $n=2$ كما يأتي:

من (9.11) نجد أنّ:

$$L_0(x)=\frac{(x-2.5)(x-3)}{(2-2.5)(2-3)}=\frac{x^2-5.5x+7.5}{0.5}$$

$$L_1(x)=\frac{(x-2)(x-3)}{(2.5-2)(2.5-3)}=\frac{x^2-5x+6}{-0.25}$$

$$L_2(x)=\frac{(x-2)(x-2.5)}{(3-2)(3-2.5)}=\frac{x^2-4.5x+5}{0.5}$$

وبالتعويض في (9.10) نحصل على الحدودية:

$$LP_2(x)=L_0y_0+L_1y_1+L_2y_2$$

$$=\frac{x^2-5.5x+7.5}{0.5}(0.69315)+\frac{x^2-5x+6}{0.25}(0.91629)+\frac{x^2-4.5x+5}{0.5}(1.09861)$$

$$=-0.08164x^2+0.81360x-0.60761$$

وباستخدام العلاقة التقريبية السابقة نستطيع حساب أي قيمة تقريبية للدالة على الفترة $2<x_i<3$ مثل: $\ell n(2.7)=LP_2(2.7)=0.99412$. وبملاحظة أنّ القيمة الصحيحة هي: 0.99325 مقربة لخمسة أرقام عشرية ، ومنه فإنّ مقدار الخطأ يكون:

$E = -0.00087 = -8.7\times10^{-4}$. ومن البديهي أن يقل مقدار هذا الخطأ كلما زادت درجة الحدودية.

مثال(12): أوجد حدودية لاغرانج لاستنتاج العلاقة المعرفة بالنقاط الآتية:

$$(0,-3),(1,0),(3,30),(5,132)$$

الحل: نلاحظ عموماً أنّ المسافات غير متساوية؛ أي $x_{i+1}-x_i \neq x_{i+2}-x_{i+1}$. ومنه باستخدام حدودية لاغرانج نجد أن:

$$L_1(x)=\frac{(x-1)(x-3)(x-5)}{(0-1)(0-3)(0-5)} \qquad L_3(x)=\frac{(x-0)(x-1)(x-5)}{(3-0)(3-1)(3-5)}$$

$$L_2(x)=\frac{(x-0)(x-3)(x-5)}{(1-0)(1-3)(1-5)} \qquad L_4(x)=\frac{(x-0)(x-1)(x-3)}{(5-0)(5-1)(5-3)}$$

$$LP_3(x)=L_1y_1+L_2y_2+L_3y_3+L_4y_4$$

$$=\left[\frac{(x^3-9x^2+23x-15)}{-15}\right](-3)+\left[\frac{x^3-8x^2+15x}{8}\right](0)$$

$$+\left[\frac{x^3-6x^2+5x}{-12}\right](30)+\left[\frac{x^3-4x^2+3x}{40}\right](132)$$

$$=x^3+2x-3=f(x)$$

وهي حدودية من الدرجة الثالثة ، حيث نلاحظ بالتعويض أنها تعطي القيم نفسها بالنسبة للنقاط المعطاة. فنجد أنّ:

$LP_3(0)=-3, LP_3(1)=0$ ، $LP_3(3)=3$ ، $LP_3(5)=13$. يستفاد من حدودية لاغرانج السابقة في حساب بقية قيم الدالة عند النقاط البينية (أي بين النقاط المعطاة في المثال)، فمثلاً لحساب قيمة الدالة التقريبية عندما: $x=\frac{1}{2}$ أو $x=2$ نجد أنّ:

$$LP_3\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{15}{8}$$

$$LP_3(2)=f(2)=9$$

كما يستفاد من حدودية لاغرانج أيضاً في التنبؤ عن قيمة الدالة عند القيم اللاحقة فمثلاً عندما $x = 6 > 5$ نجد أنّ: $LP_3(6) = f(6) = 225$

٢.٣.٩ حدودية نيوتن للفروق المتقدمة لاستيفاء الدوال وتقريبها:

تستخدم حدودية نيوتن $NP(x_n)$ من الدرجة n لحساب أو تقدير قيمة الدالة y عند أي نقطة بالإفادة من نقاط معطاة تحقق أن الفروق بين قيم المتغيرات المستقلة x_i متساوية وثابتة أي أنّ:

$$h = \Delta x_i = x_{i+1} - x_i \quad \text{ثابت، ومنه فإنّ:} \quad x_n = x_0 + nh \qquad (9.12)$$

حيث يُسمى Δx_i في مثل هذه الحالة بالفرق المتقدم، لأنه يعني القيمة اللاحقة (المتقدمة) x_{i+1} مطروحاً منها القيمة السابقة x_i. والجدير بالذكر هنا هو أنّ حدودية نيوتن للفروق المتقدمة أو الفروق النسبية هي الأخرى تعميم لمعادلة المستقيم المار بين نقطتين والتي يمكن أن تكتب بالشكل الآتي:

$$y = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

حيث يسمى المعامل $\Delta x = (x - x_0)$ بالفرق النسبي و $f(x_1) - f(x_0)$ بالفرق المتقدم. ومنه تعرّف حدودية نيوتن للفروق المتقدمة بالعلاقة الآتية:

$$NP(x_n) = NP(x_0 + nh) = (1 + \Delta)^n y_0 = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (\Delta^i y_0)$$

$$= y_0 + n\,\Delta^1 y_0 + \binom{n}{2}\Delta^2 y_0 + \cdots + \binom{n}{n}\Delta^n y_0 \qquad (9.13)$$

حيث Δ^i يمثل الفرق المتقدم رقم i أو الرتبة i. و $\binom{n}{i}$ يمثل توافيق i من العناصر مأخوذة من عدد n من العناصر $(n \geq i)$. وبتبسيط الحدودية (9.13) بعد تعويض كل من $h = \Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ ، $n = \frac{x_n - x_0}{h}$ نجد أنّ:

$$NP(x_n) = y_0 + n\,\Delta y_0 + \frac{n(n-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \cdots \qquad (9.14)$$

$$\cdots+\frac{n(n-1)(n-2)\cdots 3x2x1}{n!}\Delta^n y_0$$

$$=y_0+\frac{\Delta y_0}{h}(x_n-x_0)+\frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x_n-x_0)(x_n-x_1)+\cdots$$

$$+\frac{\Delta^n y_0}{n!\,h^n}(x_n-x_0)(x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-1}) \qquad (9.15)$$

حيث يلاحظ أنّ حدودية نيوتن للفروق المتقدمة لاستيفاء الدوال ، تشابه متسلسلة تايلور ، ولكنها تستخدم الفروق المتقدمة (أو النسبية) بدلاً من المشتقات.

مثال(13): احسب حدودية نيوتن من الدرجة الثالثة التي تتوافق مع القيم الميدانية المشاهدة والمبينة بالجدول الآتي:

K	0	1	2	3
x_k	4	6	8	10
y_k	1	3	8	20

الحل: نلاحظ أنّ الفروق $(h=\Delta x_i=x_{i+1}-x_i=2)$ ثابتة لذا نستخدم متقاربة نيوتن وذلك بتكوين جدول الفروق المتقدمة بالنسبة للمتغير التابع y_k ، كما نلاحظ بأنّ عدد النقاط x_i هي $i=4$ لذا فإنّ أعلى درجة لحدودية نيوتن هي الثالثة، كما يشير لذلك جدول الفروق الآتي:

k	x_k	y_k	$\Delta^1 y$	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
0	4	1	$\Delta^1 y_0=+2$	$\Delta^2 y_0=+3$	$\Delta^3 y_0=+4$
1	6	3	$\Delta^1 y_1=+5$	$\Delta^2 y_1=+7$	
2	8	8	$\Delta^1 y_2=+12$		
3	10	20			

وبتعويض فروق y_0 المتقدمة بمراتبها الثلاث الموضحة في الجدول أعلاه في حدودية نيوتن السابقة (9.15) نحصل على الآتي:

$$NP(x_3)=y_0+\frac{\Delta y_0}{h}(x_3-x_0)+\frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x_3-x_0)(x_3-x_1)+\frac{\Delta^3 y_0}{3!h^3}(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)$$

$$= 1 + \frac{2}{2}(x_3 - 4) + \frac{3}{2!(4)}(x_3 - 4)(x_3 - 6) + \frac{4}{3!(8)}(x_3 - 4)(x_3 - 6)(x_3 - 8)$$

$$= \frac{1}{12}x_3^3 - \frac{27}{24}x_3^2 + \frac{142}{24}x_3 - 10$$

ومنه نجد أنّ حدودية نيوتن للفروق المتقدمة للبيانات السابقة تكتب بالشكل:

$$NP(x) = \frac{1}{12}x^3 - \frac{9}{8}x^2 + \frac{71}{12}x - 10$$

ولتحقيق نجد عندما $x = 10$ فإنّ: $NP(10) = 20$

$x = 6$ فإنّ: $NP(6) = 3$

$x = 8$ فإنّ: $NP(8) = 8$

وهذا يعني أنّ الحدودية متوافقة ومتطابقة مع القيم الميدانية المعطاة.

ويستفاد من حدودية نيوتن المذكورة في تقدير القيم البينية التقريبية للدالة وكذلك القيم في المراحل الآتية، فمثلاً عندما $x = 5$ أو $x = 7$ أو $x = 9$ نجد بعد التعويض أنّ:

$$NP(5) = 1.875 \ ، \ NP(7) = 4.875 \ ، \ NP(9) = 12.875$$

مثال(14): استخدم الفروق المتقدمة لاستكمال قيم y_k في الجدول التالي حيث $y_k = P(x_k)$ حدودية من الدرجة الخامسة واكتب حدودية نيوتن المتطابقة مع القيم المذكورة.

x_k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y_k	-2	-1	4	1	0	3	?	?	?

الحل: لنكون جدول الفروق المتقدمة ، حيث نلاحظ أولاً أنّ $x_{k+1} - x_k = \Delta x_k = 1$ أي أن الفروق متساوية، كما نلاحظ أنّ الحدودية من الدرجة الخامسة؛ لذا تكون الفروق من المرتبة السادسة ($\Delta^6 y$) مساوية للصفر ، ومنها نستنتج أنّ كافة الفروق من المرتبة الخامسة يجب أن تساوي كمية ثابتة لكافة قيم y_k . ومنه يمكن استكمال القيم المتبقية

في الجدول رجوعاً وبصورة عكسية بدأ من عمود الفروق من المرتبة السادسة الصفرية كما هو موضح في الجدول وتحت الخط المائل:

الجدول (9.8)

x_k	y_k	$\Delta^1 y$	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$	$\Delta^6 y$
0	$y_0 = -2$	+1	4	-12	+22	-30	0
1	$y_1 = -1$	+5	-8	+10	-8		0
2	$y_2 = 4$	-3	2	+2	-38	30	0
3	$y_3 = 1$	-1	4			-30	0
4	$y_4 = 0$	3				-30	0
5	$y_5 = 3$						
6	-26	-29	-32	-36	-68		
7	-191	-165	-136	-104	-98		
8	-694	-503	-338	-202			

ولتكوين حدودية نيوتن من الدرجة الخامسة نستخدم عناصر القطر العلوي $\Delta^i y_0$ فقط (أي القيم المحاطة بمستطيلات) من الجدول أعلاه كالآتي: (حيث: $h = x_{i+1} - x_i = 1$)

$$NP(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h}(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + \frac{\Delta^5 y_0}{5!h^5}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_4) + 0$$

$$= -2 + 1(x-0) + \frac{4}{2}x(x-1) + \frac{-12}{6}x(x-1)(x-2)$$

$$+ \frac{22}{24}x(x-1)(x-2)(x-3) + \frac{-30}{120}x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$

$$= -2 + x + 2x^2 - 2x - 2x^3 + 6x^2 - 4x + \frac{11}{12}(x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x)$$

$$-\frac{1}{4}(x^5 - 10x^4 - 35x^3 - 50x^2 + 24x)$$

$$= -2 - \frac{33}{2}x + \left(8 + \frac{121}{12} + \frac{50}{4}\right)x^2 - x\left(2 + \frac{11}{2} + \frac{35}{4}\right)x^3 + \left(\frac{11}{2} + \frac{10}{4}\right)x^4 - \frac{1}{4}x^5$$

$$= -2 - 16.5x + 30.583x^2 - 16.25x^3 + 3.417x^4 - 0.25x^5$$

وهي حدودية من الدرجة الخامسة متطابقة مع القيم الجدولية المعطاة لـ y_k حيث يمكن الإفادة من هذه الحدودية لتقدير قيم y_k البينية والتنبؤ نوعاً ما بقيم y عندما $x = x_{k+i} \geq 8$ تقريباً.

٦.٩ الطرائق العددية لحل المعادلات التفاضلية:

هناك الكثير من الحالات التي يكون فيها الحل الجبري للمعادلات التفاضلية عسيراً أو غير ممكناً، حيث يستخدم في مثل هذه الحالات الأساليب العددية لإيجاد الحلول التقريبية الممكنة للمعادلة، وذلك بالاعتماد على بعض الشروط الأولية أو الحدّية التي تحكم المعادلة التي يرمز لها بالرمز: $y_0 = f(x_0)$. وفي هذا الإطار نذكر عدداً من الطرق والأساليب مثل:

1- طريقة المماس (Tangential Method) التي تسمى أيضاً باسم طريقة كوشي-أويلر (Cauchy-Euler Method).

2- طريقة التكامل (Integral Method)

3- طريقة تايلور (Taylor Method)

حيث تسعى كافة هذه الأساليب وغيرها إلى إيجاد القيمة المطلوبة y^* عندما $x = x_0 + \Delta x$ التي تحقق المعادلة التفاضلية $y' = f(x, y)$ ذات المرتبة الأولى والتي توافق الشرط الأولي (x_0, y_0) حيث تمثل فيه y الدالة الأساسية أو حل المعادلة المذكورة. وسنركز هنا على أسلوب واحد هو أسلوب كوشي-أويلر لحل المعادلات التفاضلية ذات المرتبة الأولى.

١.٦.٩ طريقة المماس (كوشي – أويلر):

تتلخص هذه الطريقة باستخدام معادلة القيمة الوسطية لحساب التفاضل، أو معادلة المماس المحددة بدلالة الميل عند نقطة أولية معلومة (x_0, y_0)، حيث تكتب هذه المعادلة بالشكل:

$$y - y_0 = f'(\bar{x})(x - x_0) = f'(\bar{x})\Delta x \qquad (9.16)$$

ومنها نجد أنّ: $y_1 - y_0 = f'(x_0)(x_1 - x_0)$

أو أنّ: $y_1 = y_0 + f'(x_0)(x_1 - x_0)$

ويلاحظ من العلاقة السابقة أنها تحسب أول قيمة تقريبية y_1 للدالة بالاعتماد على الشرط الأولي (x_0, y_0) وبتكرار الأسلوب نفسه، واستخدام معادلة المماس (أوعلاقة الميل) مفترضين أنّ النقطة (x_1, y_1) المحسوبة سابقاً تمثل الشرط الأولي الجديد، نستطيع حساب القيمة التقريبية الثانية y_2 للدالة عند النقطة x_2 بالاعتماد على الشرط الأولي (x_1, y_1)، وهكذا نحصل على مجموعة من القيم المتعاقبة للدالة حيث نحسب القيمة التقريبية y_n عند النقطة x_n بالاعتماد على الشرط الأولي (x_{n-1}, y_{n-1}) للمعادلة التفاضلية ، ويمكن توضيح ماسبق كما يلي:

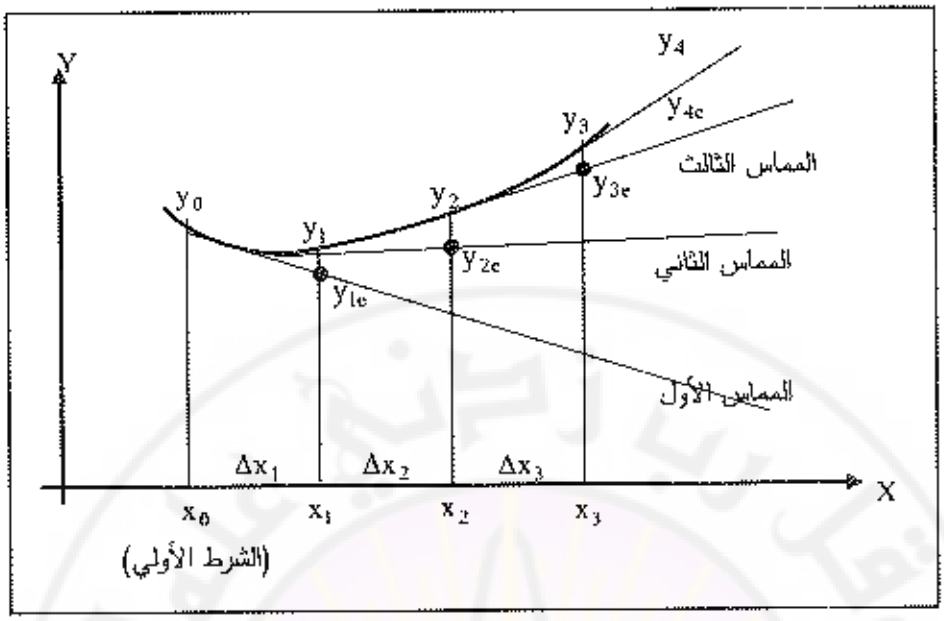
$$y_1 - y_0 = f'(x_0)\Delta x = f'(x_0)(x_1 - x_0)$$

$$y_2 - y_1 = f'(x_1)(x_2 - x_1)$$
$$y_3 - y_2 = f'(x_2)(x_3 - x_2)$$
$$\vdots$$

$$y_n - y_{n-1} = f'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) \qquad (9.17)$$

حيث $\Delta x = x_i - x_{i-1} = h$ ويمثل فترة ثابتة. كما تمثل العلاقة النونية الأخيرة الصورة العامة التكرارية لمجموعة الحلول التكرارية المتعاقبة للمعادلة التفاضلية المفروضة التي يمكن صياغتها بصورة جدولية لتسهيل عملية الحل كما في الأمثلة اللاحقة.

ويمكن توضيح هذه الطريقة (أسلوب المماسات) بيانياً بالشكل الآتي:



الشكل (4-9)

لاحظ أنّ القيمة المحسوبة المتوقعة عند النقطة x_3 هي y_{3e} على المماس الثالث حيث نجد أنّ مقدار الخطأ هو: $E = |y_3 - y_{3e}|$ ، كما نلاحظ أنّ هذه المماسات تشكل محيطاً للمنحني يكاد يتطابق معه عندما $\Delta x \to 0$ أو $n \to \infty$ حيث n يمثل عدد التقسيمات.

مثال(15): احسب الحل التقريبي للمعادلة التفاضلية $y' = \frac{dy}{dx} = y + x^2$ المقيدة بالشرط الأولي $(x_0, y_0) = (0,1)$ عند النقطة $x = 1$.

الحل: بتقسيم نطاق الحلول التقريبية $[x_0, x_n] = [0,1]$ إلى خمسة أقسام مثلاً وذلك باختيار $\Delta x = 0.2$ (يمكن التقسيم إلى عشرة أقسام حيث يكون $\Delta x = 0.1$ ونحصل على حل أفضل) نجد أنّ:

$$x_0 = 0 \quad x_1 = 0.2 \quad x_2 = 0.4 \quad x_3 = 0.6 \quad x_4 = 0.8 \quad x_5 = 1$$

وبتعويض الشرط الأولي (x_0, y_0) في المعادلة التفاضلية نستطيع حساب الحل التقريبي الأول y_1 مثلاً عند النقطة المناظرة $x_1 = 0.2$ وهكذا بتعويض y_4 في المعادلة نحصل على y_5 عند النقطة $x_5 = 1$ وهو الحل المطلوب. ويمكننا جدولة العمليات التكرارية لحساب الحل التقريبي كالآتي:

الجدول (9.9)

التسلسل i	الفترة Δx_i	النقطة x_i	القيمة التقريبية y_i	المشتق $y'_i = f'(x_i, y_i) = y_i + x_i^2$	الحل أو القيمة التقريبية $y_{i+1} = y_i + y'_i \Delta x_i$
0	–	0	1	$1 + 0 = 1$	$1 + 1(0.2) = 1.2$
1	0.2	0.2	1.2	$1.2 + (0.2)^2 = 1.42$	$1.2 + (1.24)(0.2) = 1.448$
2	0.2	0.4	1.448	$1.448 + (0.4)^2 = 1.608$	$1.448 + (1.608)(0.2) = 1.770$
3	0.2	0.6	1.770	$1.77 + (0.6)^2 = 2.130$	$1.77 + (2.13)(0.2) = 2.196$
4	0.2	0.8	2.196	$2.196 + (0.8)^2 = 2.836$	$2.196 + (2.836)(0.2) = 2.763$
5	0.2	1	2.763		(عند النقطة $x_5 = 1$)

حيث القيمة الأخيرة تمثل الحل التقريبي (العددي) المطلوب عند النقطة المطلوبة كما هو موضح في الشكل السابق لحركة المماسات.

وللتحقق من النتيجة التقريبية السابقة يمكننا حل المعادلة التفاضلية الخطية السابقة بالطرق المعروفة وتعويض $x = 1$ فيها ومن ثم حساب مقدار الخطأ في التقريب والذي يساوي القيمة المطلقة $E = |y(1) - y_5|$ حيث y_5 تمثل الحل العددي التقريبي بينما $y(1)$ تمثل الحل الحبري. ولحل المعادلة الخطية جبرياً بأحد الطرق المألوفة، نجد أنّ الحل بعد حساب معامل التكميل: $e^{\int -dx} = e^{-x}$ هو:

$$e^{-x}y' - ye^{-x} = x^2e^{-x}$$

$$d\left[ye^{-x}\right] = x^2e^{-x}\,dx$$

وبأخذ التكامل للطرفين نجد أن: $y = e^{1\cdot x}\int_{x_0}^{x} x^2 e^{-x}\,dx$

$$y = 3e^x - x^2 - 2x - 2$$

ومنه نجد أنّ: $y(1) = 3e - 5 = 3.15$

ومنه فإنّ الخطأ المطلق هو: $E = |y(1) - y_5| = |3.15 - 2.763| = 0.387$

أمّا الخطأ المطلق النسبي فهو: $RE = \dfrac{|y(1) - y_5|}{y(1)} = \dfrac{0.387}{3.15} = 0.123$

ملاحظة ④: لحل المعادلات التفاضلية ذات المرتبة الثانية عددياً نستخدم أسلوب التجزئة، أي تجزئة المعادلة التفاضلية إلى معادلتين تفاضليتين من المرتبة الأولى، وذلك بافتراض أن:

$$\frac{dy}{dx} = y' = z \quad ① \qquad\qquad z' = F(x, y, z) \quad ②$$

حيث نستطيع حل هاتين المعادلتين آنياً ووفقاً للشروط الأولية المرافقة (x_0, y_0, z_0). وذلك بحساب كل من y_k , z_k عند النقطة المطلوبة، ونجد بالأسلوب نفسه السابق أنّ:

$$y_n = y_{n-1} + z_{n-1}\Delta x \quad , \quad z_n = z_{n-1} + z'_{n-1}\Delta x \qquad (9.18)$$

ولو افترضنا أنّ المعادلة التفاضلية من المرتبة الثالثة فإننا نستخدم الفرضيتين السابقتين نفسيهما لتقليص المعادلة إلى المرتبة الثانية بدلاً من الثالثة ومن ثمّ نستخدم الأسلوب نفسه لتقليصها إلى المرتبة الأولى وحلها... وهكذا.

مثال(16): استخدم طريقة كوشي – أويلر لحل المعادلة التفاضلية $y'' = 4y - 2xy'$ عند النقطة $x = 0.15$ حيث $y'_0 = 0.5$, $y_0 = 0.2$ عندما $x_0 = 0$ وحيث $\Delta x = 0.05$.

الحل: بتحويل المعادلة المفروضة إلى معادلتين تفاضليتين من المرتبة الأولى نجد أنّ:

$$z' = 4y - 2xz \quad ② \quad \Leftarrow \quad \frac{dy}{dx} = y' = z \quad ①$$

ونحل المعادلتين بالصورة التكرارية السابقة، وباستخدام الشرط الأولي $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0.2, 0.5)$ نجد أن:

$$y_1 = y_0 + z_0\Delta x = 0.2 + (0.5)(0.05) \quad \Leftarrow \quad z_1 = z_0 + \Delta x z_0' = z_0 + (4y_0 - 2x_0z_0)\Delta x,$$

$$= 0.225 \qquad = 0.5 + [4(0.2) - 2(0)(0.5)]0.5 = 0.54$$

$$y_2 = y_1 + z_1\Delta x = 0.225 + (0.54)(0.5) \quad \Leftarrow \quad z_2 = 0.54 + [4(0.225) - 2(0.5)(.54)]0.5,$$

$$= 0.252 \qquad = 0.582$$

حيث استخدمنا (x_1, y_1, z_1) كشرط أولي ، وبالمثل نجد أن:

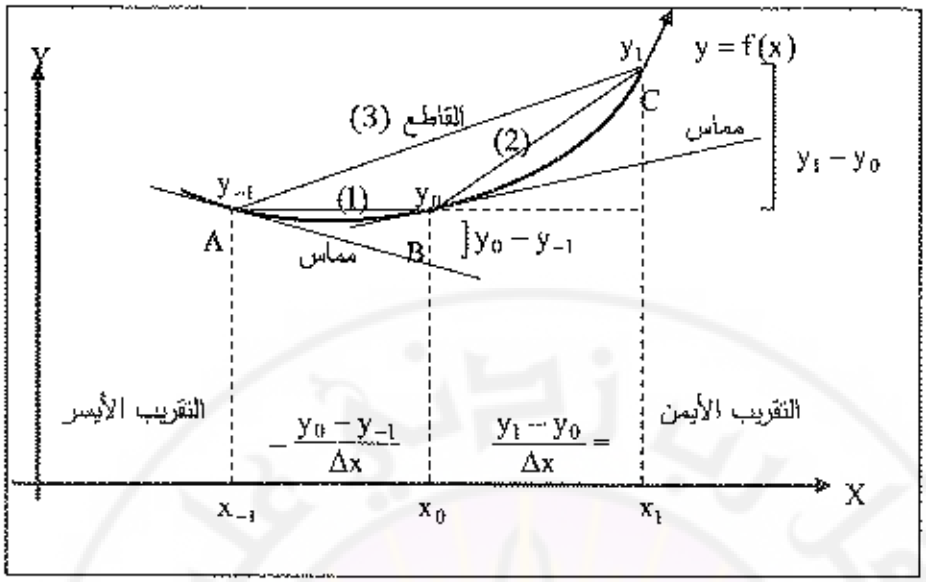
$$y_3 = y_2 + z_2\Delta x \quad \Leftarrow \quad z_3 = z_2 + (4y_2 - 2x_2z_2)\Delta x \quad ,$$

$$= 0.281 \qquad = 0.626$$

حيث $y_3 = 0.281$ تمثل القيمة العددية التقريبية للدالة عند النقطة $x = 0.15$ ، وهكذا نستطيع حساب z_4 ،y_4 عند النقطة $x = 0.2$ أو z_5 ،y_5 عند النقطة $x = 0.25$ ...

٢.٦.٩ أسلوب القواطع لحل المعادلات التفاضلية ذات المرتبة الثانية:

يتلخص أسلوب القواطع كما يسميه البعض لحل المعادلات التفاضلية ذات المرتبة الثانية بالاعتماد على الشرطين الأوليين (x_{-1}, y_{-1}) ،(x_0, y_0) اللذين يمثلان نقطتين على منحني الدالة $y = f(x)$ ، (اعتمدنا الترقيم 1- الذي يمثل خطوة واحدة إلى اليسار من النقطة x_0).



الشكل (5-9)

وبفرض أن الفترات Δx متساوية حيث: $\Delta x = x_0 - x_{-1} = x_1 - x_0 = \cdots = h$ ومنه نجد أنّ القيمة التقريبية لميل منحني الدالة $y = f(x)$ أو القيمة التقريبية للمشتق $y' = \frac{dy}{dx}$ عند النقطة x_0 يمكن أن يحسب بكل من النسبتين:

$$\text{المشتق من اليمين } \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \tan 0 \quad \text{أو المشتق من اليسار} \quad \frac{y_0 - y_{-1}}{x_0 - x_{-1}} = \tan \beta \tag{9.19}$$

ومن الشكل نلاحظ أنه إذا كان منحني الدالة مقعراً نحو الأعلى فإنّ القيمة التقريبية للميل (أو المشتق من اليمين) تكون كبيرة جداً بعكس القيمة التقريبية للميل (أو المشتق من اليسار) التي تكون صغيرة. وبالعكس عندما يكون المنحني مقعراً للأسفل. ومنه نستنتج بأنّ التقريب الأفضل لميل المنحني (المشتق $\frac{dy}{dx}$) عند النقطة x_0 سيكون ميل القاطع الكبير (3) (AC) والموازي للمماس عند النقطة الوسطية (x_0, y_0)، وهذا يعني أنّ

التقريب الأفضل للمشتق هو متوسط التقريبين الأيمن والأيسر عند النقطة (x_0, y_0) أي أنّ:

$$\frac{dy}{dx} \approx \frac{1}{2}[\tan\beta + \tan\theta] = \frac{1}{2}\left[\frac{y_0 - y_{-1}}{x_0 - x_{-1}} + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{y_0 - y_{-1} + y_1 - y_0}{h}\right] = \frac{y_1 - y_{-1}}{2h} \qquad (9.20)$$

وهو ما يسمى بمعدل التغير الأول، ومنه نجد أنّ: $y_1 - y_{-1} = \frac{dy}{dx}(2h)$ أو:

$$y_1 = y_{-1} + 2h\,y' \qquad (9.21)$$

ولحساب القيمة التقريبية للمشتق الثاني: $\frac{d^2y}{dx^2} = y''$ الذي يمثل المشتق الأول للمشتق $\frac{dy}{dx}$ نكرر الأسلوب أعلاه، ولكن بالنسبة للمشتق $\frac{dy}{dx}$ بدلاً من الدالة y، أي أنّ:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\tan BC - \tan AB}{h} = \frac{\frac{y_1 - y_0}{h} - \frac{y_0 - y_{-1}}{h}}{h}$$

$$= \frac{y_1 - 2y_0 + y_{-1}}{h^2} \qquad (9.22)$$

ومنه نجد أنّ:

$$y_1 = h^2 y'' + 2y_0 - y_{-1} \qquad (9.23)$$

وهكذا نستطيع حساب قيمة الدالة التقريبية الأولى y_1 عند النقطة x_1 بعد معرفة المشتق الثاني y'' وكل من الشرطين الابتدائيين (x_0, y_0)، (x_{-1}, y_{-1}) على الترتيب.

وبتكرار الأسلوب نفسه واعتبار: (x_1, y_1)، (x_0, y_0) هما الشرطان الأوليان نستطيع حساب القيمة التقريبية الثانية y_2 عند النقطة x_2 ... وهكذا

وبالتالي يمكننا صياغة الصورة التكرارية النونية لحساب y_n عند النقطة x_n وبالاعتماد على الشرطين الأوليين (x_{n-2}, y_{n-2})، (x_{n-1}, y_{n-1}) والفرق المركزي y'_n و y''_n كما يأتي:

$$y'_n = \frac{y_n - y_{n-2}}{2h} \qquad (9.24)$$

$$y''_n = \frac{y_n - 2y_{n-1} + y_{n-2}}{h^2} \qquad (9.25)$$

وبتعويض y'_n ، y''_n في المعادلة التفاضلية التكرارية يمكننا حساب القيمة التقريبية y_n عند النقطة x_n المطلوبة.

مثال(17): أوجد حل المعادلة التفاضلية $y'' - 3y' + 2y = x$ عددياً عند النقطة $x = 0.3$ إذا علمت أنّ $y = f(0) = 3$ ، $y = f(0.1) = 4$.

الحل: من المعطيات نلاحظ أنّ الشرطين الأولين هما: $(x_{-1}, y_{-1}) = (0,3)$، $(x_0, y_0) = (0.1,4)$ كما نلاحظ أنّ: $h = \Delta x = x_0 - x_{-1} = 0.1$ وبالتعويض في العلاقة التكرارية لكل من y'_n ، y''_n نجد أن:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{y_1 - y_{-1}}{2h} = \frac{y_1 - 3}{0.2}$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y_1 - 2y_0 - y_{-1}}{h^2} = \frac{y_1 - 8 + 3}{0.01}$$

وبتعويض هاتين القيمتين في المعادلة التفاضلية نستطيع حساب القيمة التقريبية الأولى y_1 عند النقطة x_1 كما يأتي: $y'' - 3y' + 2y = x$

$$\frac{y_1 - 8 + 3}{0.01} - \frac{3(y_1 - 3)}{0.2} + 2y_0 = x_0$$

$$\frac{y_1 - 5}{0.01} - \frac{3(y_1 - 3)}{0.2} + 8 = 0.1$$

ومنه نجد أنّ: $y_1 = \frac{447.1}{850} = 5.26$

ولحساب القيمة التقريبية المطلوبة الثانية y_2 عند النقطة $x_2 = 0.3$ نكرر استخدام العلاقة النونية y'_n ، y''_n مع الشروط الأولية الجديدة $(x_0, y_0) = (0.1,4)$، $(x_1, y_1) = (0.2,5.26)$ كما يلي: $y'' = 3y' + 2y_1 = x_1$

$$\frac{y_2 - 2(5.26) + 4}{0.01} - \frac{3(y_2 - 4)}{0.2} + 2(5.26) = 0.2$$

$$100y_2 - 1376.6 - 15y_2 + 60 + 10.596 = 0$$

أي أنّ: $y_2 = 6.84$ عند النقطة $x_2 = 0.3$

وبالمثل يمكن الاستمرار بتطبيق الأسلوب السابق لحساب متتالية من القيم التقريبية للدالة y عند أي نقطة من النقاط المطلوبة مثل: $x_3 = 0.4$ أو $x_4 = 0.5$ ...إلخ.

٩.٧ الطرائق العددية لحساب المشتق والتكامل:

٩.٧.١ حساب المشتق:

هنالك العديد من الطرق العددية لحساب التفاضل التي تعتمد أساساً على حساب الحدودية التقريبية المتطابقة مع البيانات أو النقاط المعطاة. ثم حساب المشتق العادي لهذه الحدودية، ولكننا هنا سنعتمد بصورة مختصرة على استخدام أعداد ستيرلنغ (Stirling numbers) وحدودية نيوتن التقريبية للدوال التي تم عرضها فيما سبق.

ولحساب مشتق حدودية ستيرلنغ نلاحظ من التعريف التالي أنّ التوافيق:

$$\binom{x}{n} = \frac{SP_{(x)}^{(n)}}{n!} = \frac{x!}{(x-n)!\,n!} = \frac{(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)}{n!} \qquad (9.26)$$

حيث $\binom{x}{n} = C_n^x$ يمثل عدد توافيق n من العناصر مأخوذة معاً من x عنصر، وحيث:

$$SP_{(x)}^{(n)} = (x-1)(x-2)\cdots(x-n+1) = S_1^n x + S_2^n x^2 + S_3^n x^3 + \cdots + S_n^n x^n \qquad (9.27)$$

تمثل حدودية ستيرلنغ (الحدودية العاملية Factorial polynomical) حيث نلاحظ فيها تناسق أعداد ستيرلنغ المتناسقة، ومنها نجد أنّ:

$$\frac{d}{dx}\binom{x}{n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{SP_{(x)}^{(n)}}{n!}\right) = \frac{1}{n!}\frac{d}{dx}\left[SP_{(x)}^{(n)}\right]$$

$$= \frac{1}{n!}\frac{d}{dx}\left[S_1^n x + S_2^n x^2 + S_3^n x^3 + \cdots + S_n^n x^n\right]$$

$$= \frac{1}{n!}\left[\sum_{k=1}^{n} k S_k^n x^{k-1}\right] = \frac{1}{n!}\left[S_1^n + 2S_2^n x + 3S_3^n x^2 + \cdots + nS_n^n x^{n-1}\right] \qquad (9.28)$$

ولحساب المشتق الثاني نكرر الاشتقاق لنحصل على:

$$\frac{d^2}{dx}\binom{x}{n} = \frac{1}{n!}\left[\sum_{k=1}^{n} k(k-1)S_k^n x^{k-2}\right]$$

حيث S_k^n تمثل أعداد ستيرلنغ و n درجة الحدودية أما k فتمثل قوة المتغير x . لتطبيق هذا النوع من الاشتقاق على حدودية نيوتن المقاربة للدالة أو نقاط معينة متفرقة ، نستخدم أولاً جداول الفروق المتقدمة لحساب صيغة نيوتن الآتية:

$$NP(x) = \binom{x}{0}y_0 + \binom{x}{1}\Delta y_0 + \binom{x}{2}\Delta^2 y_0 + \binom{x}{3}\Delta^3 y_0 + \cdots + \binom{x}{n}\Delta^n y_0$$

وبتعويض (7.26) في حدودية نيوتن نجد أن:

$$= sp_{(x)}^{(0)}y_0 + \frac{1}{1!}sp_{(x)}^{(1)}\Delta y_0 + \frac{1}{2!}sp_{(x)}^{(2)}\Delta^2 y_0 + \frac{1}{3!}sp_{(x)}^{(3)} + \cdots + \frac{1}{n!}sp_{(x)}^{(n)}\Delta^n y_0$$

حيث المعاملات كلها عبارة عن التوافيق أو أعداد ستيرلنغ المذكورة سابقاً، وبالتبسيط نجد أن:

$$NP(x) = 1y_0 + \left(S_0^1 + S_1^1 x\right)\Delta y_0 + \frac{1}{2!}\left(S_0^2 + S_1^2 x + S_2^2 x^2\right)\Delta^2 y_0$$
$$+ \frac{1}{3!}\left(S_0^3 + S_1^3 x + S_2^3 x^2 + S_3^3 x^3\right)\Delta^3 y_0 + \cdots \qquad (9.29)$$

حيث نلاحظ أولاً أنّ:

$$x = x_0 + nh$$

$$\frac{dx}{dn} = h \Rightarrow \frac{dn}{dx} = \frac{1}{h}$$

ومنه:

$$\frac{dNP(x)}{dx} = \frac{dNP(x)}{dn}\frac{dn}{dx} \qquad (9.30)$$

وبالتالي نجد أنّ الاشتقاق العددي التقريبي باستخدام أعداد ستيرلنغ وحدودية نيوتن يأخذ الصيغة العامة الآتية المستنتجة من اشتقاق العلاقة (7.28).

$$\frac{dNP(x)}{dx} = S_1^1\Delta y_0 + \frac{1}{2!}\left(S_1^2 + 2S_2^2 x\right)\Delta^2 y_0 + \frac{1}{3!}\left(S_1^3 + 2S_2^3 x + 3S_3^3 x^2\right)\Delta^3 y_0$$
$$+ \cdots + \frac{1}{n!}\left(S_1^n + 2S_2^n x + 3S_3^n x^2 + \cdots + nS_n^n x^{n-1}\right)\Delta^n y_0 \qquad (9.31)$$

ولحساب المشتق العددي الثاني (ويسمى فيزيائياً بالتسارع لجسيم متحرك) نقوم بالاشتقاق مرة ثانية للعلاقة (7·30) فنجد أنّ:

$$\frac{d^2NP(x)}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left[\frac{dNP(x)}{dx}\right]$$

$$=\frac{d^2NP(x)}{dn^2}\cdot\left(\frac{dn}{dx}\right)^2+\frac{d^2n}{dx^2}\cdot\left(\frac{dNP(x)}{dn}\right)=\frac{1}{h^2}\frac{d^2NP(x)}{dn^2}$$

ونتابع بهذا الشكل لحساب المشتقات من مراتب أعلى، إذ يكفي إعادة الاشتقاق في كل مرة . وبالعودة لعلاقة المشتق الثاني نجد أن:

$$\frac{d^2NP(x)}{(dx)^2}=S_2^2\Delta^2y_0+\frac{1}{3!}\left(2S_2^3+6S_3^3x\right)\Delta^3y_0+\cdots$$

$$+\frac{1}{n!}\left(2S_2^n+6S_3^nx+\cdots n(n-1)S_n^nx^{n-2}\right)\Delta^ny_0$$

مثال(18): احسب المشتق للمقدار $P(x)=\binom{x}{5}$ عند النقطة $x=6$

الحل:

$$\frac{d}{dx}\binom{x}{5}=\frac{1}{5!}\frac{d}{dx}\left[SP_{(x)}^{(5)}\right]=\frac{1}{5!}\left[S_1^5+2S_2^5x^2+3S_3^5x^2+4S_4^5x^3+5S_5^5x^4\right]$$

$$=\frac{1}{5!}\left[24-100x+105x^2-40x^3+5x^4\right]$$

$$=\frac{1}{5!}\left[24-600+3780-8640+6480\right]=\frac{1044}{120}=8.7$$

وإذا أردنا حساب المشتق الثاني للمقدار السابق، فإنه يكفي إعادة الاشتقاق بالطرق المعروفة. وأخيرا نذكر بأهمية أعداد ستيرلنغ الناتجة عن خصائص هذه الأعداد والتي نذكر منها الخاصتين الآتيتين:

① الخاصية التراجعية: $S_i^{(n+1)}=S_{i-1}^n-nS_i^n$

② $SP_{(i)}^n=0$ لأنه من التعريف $\sum_{i=1}^{n}S_i^n=0$

كما يمكننا تكوين جدول خاص لأعداد ستيرلنغ من الخاصية التراجعية حيث: $S_1^1=S_2^2=\cdots=S_n^n=1$ ، ومنه تصبح الحسابات السابقة أسهل بمعرفة هذا الجدول.

مثال(19): احسب المشتق للعلاقة التقريبية المتطابقة مع القيم المتناظرة الآتية:

X	0	1	2	3	4	5	6
Y	2	5	6	12	25	35	40

الحل: نوجد أولاً جدول الفروق المتقدمة ثم نحسب حدودية نيوتن التقريبية المتوافقة مع النقاط المعطاة ، وبعد ذلك نوجد مشتق حدودية نيوتن حسب العلاقة (9.30).

ونلاحظ أنّ $\Delta x = 1$.

الجدول (9.10)

x_k	y_k	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$	$\Delta^5 y_i$	$\Delta^6 y_i$
0	$y_0 = Z$	+3					
1	5	+1	-2				
2	6	+6	+5	+7			
3	12	+13	+7	+2	-5		
4	25	+10	-3	-10	-12	-7	
5	35	+11	+1	+4	14	26	+3
6	46						

حيث يمثل القطر العلوي القيم المستخدمة في حدودية نيوتن وهي: $\Delta^n y_0$ وبتعويض هذه القيم في العلاقة (9.29) نجد أن:

$$NP(x) = y_0 + \binom{x}{1}\Delta y_0 + \binom{x}{2}\Delta^2 y_0 + \binom{x}{3}\Delta^3 y_0 + \binom{x}{4}\Delta^4 y_0 + \binom{x}{5}\Delta^5 y_0 + \binom{x}{6}\Delta^6 y_0$$

$$= 140 + \left(S_0^1 + S_1^1\right)\Delta y_0 + \cdots + \left(S_0^6 + S_1^6 x + S_2^6 x^2 + S_3^6 x^3 + \cdots + S_6^6 x^6\right)\Delta^6 y_0$$

$$\frac{dNP(x)}{dx} = S_1^1 \Delta y_0 + \frac{1}{2!}\left[S_1^2 + 2S_2^2 x\right]\Delta^2 y_0 + \frac{1}{3!}\left[S_1^3 + 2S_2^3 x + 3S_3^3 x^2\right]\Delta^3 y_0$$

$$+ \frac{1}{4!}\left[S_1^4 + 2S_2^4 x + 3S_3^4 x^2 + 4S_4^4 x^3\right]\Delta^4 y_0$$

$$+ \frac{1}{5!}\left[S_1^5 + 2S_2^5 x + 3S_3^5 x^2 + 4S_4^5 x^3 + 5S_5^5 x^4\right]\Delta^5 y_0$$

$$+ \frac{1}{6!}\left[S_1^6 + 2S_2^6 x + 3S_3^6 x^2 + 4S_4^6 x^3 + 5S_5^6 x^4 + 6S_6^6 x^5\right]\Delta^6 y_0$$

$$= 3 + \frac{-2}{2}\left[-1 + 2x\right] + \frac{7}{3!}\left[2 - 6x + 3x^2\right] + \frac{5}{4!}\left[-6 + 22x - 18x^2 + 4x^3\right]$$

$$+ \frac{-7}{5!}\left[24 - 100x + 150x^2 - 40x^3 + 5x^4\right]$$

$$+\frac{33}{6!}\left[-120+548x-675x^2+340x^3-75x^4+6x^5\right]$$

ولو أردنا حساب قيمة المشتق السابق عند النقاط $x = 0\ ,\ 1$ مثلاً نجد أنّ:

$$\left.\frac{dNP(x)}{dx}\right|_{x=0} = -1.81667$$

$$\left.\frac{dNP(x)}{dx}\right|_{x=1} = 0.075$$

ومنه نجد أنّ المشتق الثاني هو:

$$\frac{d^2NP(x)}{dx} = -2+\frac{7}{3!}\left[-6+6x\right]+\frac{5}{4!}\left[22-36x+12x^2\right]$$

$$-\frac{7}{5!}\left[-100+300x-120x^2+20x^3\right]$$

ملاحظة ⑤: لاحظ خوارزمية أعداد ستيرلينغ الآتية المحسوبة وفقاً للخاصية التراجعية:

الجدول (9.11)

i \ S_i^n	S_1^n	S_2^n	S_3^n	S_4^n	S_5^n	S_6^n	S_7^n	S_8^n
1	**+1**							
2	−1	**+1**						
3	2	−3	**+1**	**+1**				
4	−6	11	−6		**+1**			
5	24	−50	35	−10		**+1**		
6	−120	274	−225	85	−15		**+1**	
7	−120	−1764	1624	−735	175	−12		**+1**
8	−5040	13068	13132	6769	−1960	322	−28	

٢.٧.٩ حساب التكامل العددي (Numerical Integration):

بالأسلوب نفسه السابق يمكننا تعريف التكامل العددي بأنه عملية حساب التكامل المحدّد لحدودية نيوتن التقريبية الممثلة لدالة معينة معطاة على شكل نقاط ميدانية. ومنه فإنّ عملية ... تتلخص بحساب حدودية نيوتن من الدرجة n أولاً ، ثم إجراء التكامل العادي لحدودها حداً حداً حيث تمثل قيم x الدنيا والعليا حدي التكامل المطلوب.

ولصياغة الصورة العامة للتكامل العددي بالأسلوب المذكور نفترض أنّ النقاط المعطاة هي: $(x_0,y_0),(x_1,y_1),\cdots,(x_n,y_n)$ ومنه فإنّ حدودية نيوتن تكون:

$$NP(x)=y_0+\frac{\Delta y_0}{h}(x-x_0)+\frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x-x_0)(x-x_1)$$
$$+\frac{\Delta^3 y_0}{3!h^3}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)+\cdots+\frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

وبأخذ التكامل للحدودية المذكورة نحصل على التكامل العددي المطلوب:

$$\int_{x_0}^{x_n=x_0+nh} NP(x)dx=\int_{x_0}^{x_0+nh}\left[y_0+\frac{\Delta y_0}{h}(x-x_0)+\cdots+\frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})\right]dx$$
$$=\left[y_0x+\frac{\Delta^1 y_0}{h}\left(\frac{x^2}{2}-x_0x\right)+\frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}\left(\frac{x^3}{3}-(x_0+x_1)\frac{x^2}{2}+x_0x_1x\right)+\cdots\right.$$
$$\cdots+\frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}-(x_0+x_1+\cdots+x_{n-1})\frac{x^n}{n}\right.$$
$$\left.\left.+(x_0x_1+x_0x_2+\cdots x_{n-2}x_{n-1})\frac{x^n}{n-1}-\cdots+\cdots\right)\right]_{x_0}^{x_0+nh} \qquad (9.32)$$

$$=h\left[ny_0+\frac{n^2}{2}\Delta^1 y_0+\left(\frac{n^3}{3}-\frac{n^2}{2}\right)\frac{\Delta^2 y_0}{2!}+\left(\frac{n^4}{4}-n^3+n^2\right)\frac{\Delta^3 y_0}{3!}+\cdots\right] \qquad (9.33)$$

حيث التكامل مأخوذ على n من الفترات المتساوية الطول h .

يلاحظ من التعريف السابق لتكامل حدودية نيوتن أنه يتميز بطول الفترات الثابت h .
ومنه يمكننا الإشارة إلى قاعدة شبه المنحرف للتكامل العددي، حيث يحسب التكامل بهذا الأسلوب بالعلاقة الآتية:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_0+nh} f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h}{2}\left[y_i + y_{i+1}\right]$$

$$= \frac{h}{2}\left[y_0 + 2(y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1}) + y_n\right] \qquad (9.34)$$

مثال(20): احسب التكامل العددي للدالة التقريبية المتطابقة مع النقاط الآتية:

$$(1,3)\ ,\ (2,5)\ ,\ (3,23)\ ,\ (4,69)$$

الحل: نلاحظ أنّ $\Delta x = h = 1$ ؛ لذا نكوّن جدول الفروق المتقدمة ، ثم نستخدم علاقة التكامل السابقة لنيوتن:

x_i	y_i	$\Delta^1 y$	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
$x_0 = 1$	$y_0 = 3$	$y_1 - y_0 = +2$		
$x_1 = 2$	$y_1 = 5$	$y_2 - y_1 = +18$	$+16$	
$x_2 = 3$	$y_2 = 23$	$y_3 - y_2 = 46$	28	12
$x_3 = 4$	$y_3 = 69$			

وبتطبيق تكامل نيوتن حيث: $x_n = x_3 = x_0 + 3h = 4$

$$\int_{x_0}^{x_0+nh} NP(x)dx = \int_{1}^{4} NP(x)dx = h\left[ny_0 + \frac{n^2}{2}\Delta^1 y_0 + \left(\frac{n^3}{3} - \frac{n^2}{2}\right)\frac{\Delta^2 y_0}{2!} + \left(\frac{n^4}{4} - n^3 n^2\right)\frac{\Delta^3 y_0}{3!}\right]$$

$$= 1\left[3(3) + \frac{9}{2}(2) + \left(\frac{27}{3} - \frac{9}{2}\right)\left(\frac{16}{2}\right) + \left(\frac{81}{4} - 27 + 9\right)\frac{12}{6}\right] = 18 + 36 + 4.5 = 58.5$$

ولو أخذنا التكامل العادي لحدودية نيوتن المحسوبة من النقاط المفروضة التي تكون $NP(x) = 2x^3 - 4x^2 + 5$ على النطاق $[1,4]$ لحصلنا على النتيجة التقريبية السابقة نفسها.

مثال(21): استخدم قاعدة شبه المنحرف لحساب تكامل الدالة $y = f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 5$ على المجال $[1,4]$.

الحل: بعد تقسيم المجال إلى وحدات حيث: $\Delta x = h = 1$ نجد أنّ:

$$\int_1^4 f(x)dx = \frac{h}{2}\left[y_0 + 2(y_1 + y_2) + y_3\right] = \frac{1}{2}\left[3 + 2(5+23) + 69\right] = \frac{128}{2} = 64 > 58.5$$

أي أنّ مقدار الخطأ المطلق في حساب التكامل بطريقة شبه المنحرف هو: $E = |A_2 - A_1| = |64 - 58.5| = 5.5$ ، بينما نجد أنّ الخطأ المطلق بين قيمة تكامل حدودية نيوتن التقريبي والتكامل العادي يساوي صفراً.

وعلى الرغم من وجود طرائق عددية أخرى لحساب التكاملات العددية، ومن أهمها طريقة غاوس وغريغوري وهيرمت والمستطيلات (أو سمبسون) إلاّ أننا نكتفي هنا بهذا القدر من الطرائق.

تمارين عامة:

1- احسب حدودية لاغرانج التي تتطابق مع النقاط الآتية:
$(2,3),(3,5),(5,7),(8,12)$ واحسب قيمة y عندما $x=4.5$ ، $x=8.5$.

2- احسب جذر المعادلة $f(x)=x^3-30x-10=0$ مستخدماً الطريقة التعاقبية على المجال $[-1,4]$.

3- استخدم أسلوب كوشي-أويلر لحل المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx}=y-x$ على المجال $[0,1]$ إذا علمت أنّ الشرط الأولي هو $(x_0,y_0)=(0,2)$ مستخدماً $\Delta x=0.2$ ثم $\Delta x=0.1$ وقارن بين الحلين (أحسب مقدار الخطأ المطلق).

4- حل المعادلة التفاضلية $y'=\frac{x-y}{x+y}$ حيث $(x_0,y_0)=(3,2)$ عند النقطة $x=1$ مفترضاً أنّ: $\Delta x=0.4$.

5- أوجد الحل التقريبي للمعادلة التفاضلية $y''+y'-6y=0$ عند النقطة $x=5$ إذا علمت أنّ $(x_0,y_0)=(0,1)$ وأنّ $y'(0)=-2$ و $\Delta x=1$ (قرب النواتج لثلاث أرقام عشرية).

6- احسب حدودية نيوتن من الدرجة السادسة المتطابقة مع النقاط الآتية:
$(0,2),(1,5),(2,6),(3,12),(4,25),(5,35),(6,46)$. واحسب قيمة y عندما $x=5.5$ ، $x=6.2$.

7- احسب التكامل للدالة التقريبية المعطاة بالنقاط الآتية $(1,2),(3,4),(5,7),(7,11)$ مستخدماً أسلوبي شبه المنحرف ونيوتن واحسب الخطأ المطلق بينهما.

8- كوّن جدول ستيرلنغ لغاية $n=9$.

9- استخدم كلاً من طريقتي جاكوبي وغاوس سيدال لحل جملة المعادلات الخطية الآتية مقرباً النتائج إلى ثلاثة أرقام عشرية: $5x-y-z-t=-4$

$$-x+10y-z-t=12$$

$$-x-y-5z-t=8$$

$$-x-y-z-10t=34$$

10- احسب المشتق للدالة التقريبية المعطاة بدلالة النقاط الميدانية الآتية $(0,1),(2,7),(3,12),(6,15),(7,18)$ وكذلك التكامل لها عند النقطة $x=6.5$.

11- استخدم طريقتي جاكوبي وغاوس سيدال لحل جملة المعادلات الخطية الآتية:

$$6x_1-x_2-2x_3=12$$

$$3x_1+5x_2+x_3=3$$

$$2x_1-x_2+7x_3=36$$

12- أوجد حدودية ستيرلنغ $SP''(x)$ عندما $n=5$ ، $n=7$.

13- استخدم طريقتي جاكوبي وغاوس سيدال لحل جملة المعادلات الخطية الآتية، واختبر فيما إذا كانت كل من الطريقتين ناجحة أو فاشلة (متقاربة أو متباعدة):

$$5x_1+2x_2-x_3=0$$

$$x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 4$$

$$2x_1 + x_2 + 4x_3 = 7$$

14- كوّن كثيرة الحدود من الدرجة الخامسة للدالة $f(x) = \frac{(x+5)(x-2)}{(x+3)(x+1)}$ مستخدماً البيانات الآتية ، ثم استنتج منها $f(7)$ واحسب مقدار الخطأ النسبي:

x_i	0	-1	1.5	3	5	10
$f(x_i)$	3.333333	-0.75	-0.288889	0.333333	0.625	0.839161

15- كوّن كثيرة الحدود من الدرجة الثانية للدالة $f(x) = \ell nx$ مستخدماً البيانات الآتية:

x_i	2	2.5	3
$f(x_i)$	0.69315	0.91629	1.09861

واحسب القيمة التقريبية لـ $\ell n(2.7)$ ثم احسب مقدار الخطأ النسبي.

16- أثبت أنّ $\Delta^n x^n = n!$.

الملحق (أ): جداول بعض التوزيعات الاحتمالية

أ.١ جدول توزيع ثنائي الحد

$$F(X) = P(X \le x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\, p^x (1-p)^{(n-x)}$$

		p												
n	x	0.05	0.10	0.20	0.25	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.75	0.80	0.90	0.95
2	0	0.902	0.810	0.640	0.562	0.490	0.360	0.250	0.160	0.090	0.062	0.040	0.010	0.003
	1	0.997	0.990	0.960	0.938	0.910	0.840	0.750	0.640	0.510	0.438	0.360	0.190	0.098
	2	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
3	0	0.857	0.729	0.512	0.422	0.343	0.216	0.125	0.064	0.027	0.016	0.008	0.001	0.000
	1	0.993	0.972	0.896	0.844	0.784	0.648	0.500	0.352	0.216	0.156	0.104	0.028	0.007
	2	1.000	0.999	0.992	0.984	0.973	0.936	0.875	0.784	0.657	0.578	0.488	0.271	0.143
	3	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
4	0	0.815	0.656	0.410	0.316	0.240	0.130	0.062	0.026	0.008	0.004	0.002	0.000	0.000
	1	0.986	0.948	0.819	0.738	0.652	0.475	0.313	0.179	0.084	0.051	0.027	0.004	0.000
	2	1.000	0.996	0.973	0.949	0.916	0.821	0.688	0.525	0.348	0.262	0.181	0.052	0.014
	3	1.000	1.000	0.998	0.996	0.992	0.974	0.938	0.870	0.760	0.684	0.590	0.344	0.185
	4	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
5	0	0.774	0.590	0.328	0.237	0.168	0.078	0.031	0.010	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000
	1	0.977	0.919	0.737	0.633	0.528	0.337	0.187	0.087	0.031	0.016	0.007	0.000	0.000
	2	0.999	0.991	0.942	0.896	0.837	0.683	0.500	0.317	0.163	0.104	0.058	0.009	0.001
	3	1.000	1.000	0.993	0.984	0.969	0.913	0.812	0.663	0.472	0.367	0.263	0.081	0.023
	4	1.000	1.000	1.000	0.999	0.998	0.990	0.969	0.922	0.832	0.763	0.672	0.410	0.226
	5	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
6	0	0.735	0.531	0.262	0.178	0.118	0.047	0.016	0.004	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
	1	0.967	0.886	0.655	0.534	0.420	0.233	0.109	0.041	0.011	0.005	0.002	0.000	0.000
	2	0.998	0.984	0.901	0.831	0.744	0.544	0.344	0.179	0.070	0.038	0.017	0.001	0.000
	3	1.000	0.999	0.983	0.962	0.930	0.821	0.656	0.456	0.256	0.169	0.099	0.016	0.002
	4	1.000	1.000	0.998	0.995	0.989	0.959	0.891	0.767	0.580	0.466	0.345	0.114	0.033
	5	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.996	0.984	0.953	0.882	0.822	0.738	0.469	0.265
	6	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
7	0	0.698	0.478	0.210	0.133	0.082	0.028	0.008	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	1	0.956	0.850	0.577	0.445	0.329	0.159	0.063	0.019	0.004	0.001	0.000	0.000	0.000
	2	0.996	0.974	0.852	0.756	0.647	0.420	0.227	0.096	0.029	0.015	0.005	0.000	0.000
	3	1.000	0.997	0.967	0.929	0.874	0.710	0.500	0.290	0.126	0.071	0.033	0.003	0.000
	4	1.000	1.000	0.995	0.987	0.971	0.904	0.773	0.580	0.353	0.244	0.148	0.026	0.004
	5	1.000	1.000	1.000	0.999	0.996	0.981	0.938	0.841	0.671	0.555	0.423	0.150	0.044
	6	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.998	0.992	0.972	0.918	0.867	0.790	0.522	0.302
	7	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
8	0	0.663	0.430	0.168	0.100	0.058	0.017	0.004	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	1	0.943	0.813	0.503	0.367	0.255	0.106	0.035	0.009	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
	2	0.994	0.962	0.797	0.679	0.552	0.315	0.145	0.050	0.011	0.004	0.001	0.000	0.000
	3	1.000	0.995	0.944	0.886	0.806	0.594	0.363	0.174	0.050	0.027	0.010	0.000	0.000
	4	1.000	1.000	0.990	0.973	0.942	0.826	0.637	0.406	0.194	0.114	0.056	0.005	0.000
	5	1.000	1.000	0.999	0.996	0.989	0.950	0.855	0.685	0.448	0.321	0.203	0.038	0.006
	6	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.991	0.965	0.894	0.745	0.633	0.497	0.187	0.057
	7	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.996	0.983	0.942	0.900	0.832	0.570	0.337
	8	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
9	0	0.630	0.387	0.134	0.075	0.040	0.010	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	1	0.929	0.775	0.436	0.300	0.196	0.071	0.020	0.004	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	2	0.992	0.947	0.738	0.601	0.463	0.232	0.090	0.025	0.004	0.001	0.000	0.000	0.000
	3	0.999	0.992	0.914	0.834	0.730	0.483	0.254	0.099	0.025	0.010	0.003	0.000	0.000
	4	1.000	0.999	0.980	0.951	0.901	0.733	0.500	0.267	0.099	0.049	0.020	0.001	0.000
	5	1.000	1.000	0.997	0.990	0.975	0.901	0.746	0.517	0.270	0.166	0.086	0.008	0.001
	6	1.000	1.000	1.000	0.999	0.996	0.975	0.910	0.768	0.537	0.399	0.262	0.053	0.008
	7	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.996	0.980	0.929	0.804	0.700	0.564	0.225	0.071
	8	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.998	0.990	0.960	0.925	0.866	0.613	0.370
	9	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

n	x	p												
		0.05	0.10	0.20	0.25	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.75	0.80	0.90	0.95
10	0	0.599	0.349	0.107	0.056	0.028	0.006	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	1	0.914	0.736	0.376	0.244	0.149	0.046	0.011	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	2	0.988	0.930	0.678	0.526	0.383	0.167	0.055	0.012	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000
	3	0.999	0.987	0.879	0.776	0.650	0.382	0.172	0.055	0.011	0.004	0.001	0.000	0.000
	4	1.000	0.998	0.967	0.922	0.850	0.633	0.377	0.166	0.047	0.020	0.006	0.000	0.000
	5	1.000	1.000	0.994	0.980	0.953	0.834	0.623	0.367	0.150	0.078	0.033	0.002	0.000
	6	1.000	1.000	0.999	0.996	0.989	0.945	0.828	0.618	0.350	0.224	0.121	0.013	0.001
	7	1.000	1.000	1.000	1.000	0.998	0.988	0.945	0.833	0.617	0.474	0.322	0.070	0.012
	8	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.998	0.989	0.954	0.851	0.756	0.624	0.264	0.086
	9	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.994	0.972	0.944	0.893	0.651	0.401
	10	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
11	0	0.569	0.314	0.086	0.042	0.020	0.004	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	1	0.898	0.697	0.322	0.197	0.113	0.030	0.006	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	2	0.985	0.910	0.617	0.455	0.313	0.119	0.033	0.006	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
	3	0.998	0.981	0.839	0.713	0.570	0.296	0.113	0.029	0.004	0.001	0.000	0.000	0.000
	4	1.000	0.997	0.950	0.885	0.790	0.533	0.274	0.099	0.022	0.008	0.002	0.000	0.000
	5	1.000	1.000	0.988	0.966	0.922	0.753	0.500	0.247	0.078	0.034	0.012	0.000	0.000
	6	1.000	1.000	0.998	0.992	0.978	0.901	0.726	0.467	0.210	0.115	0.050	0.003	0.000
	7	1.000	1.000	1.000	0.999	0.996	0.971	0.887	0.704	0.430	0.287	0.161	0.019	0.002
	8	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.994	0.967	0.881	0.687	0.545	0.383	0.090	0.015
	9	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.994	0.970	0.887	0.803	0.678	0.303	0.102
	10	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.996	0.980	0.958	0.914	0.686	0.431
	11	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
12	0	0.540	0.282	0.069	0.032	0.014	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	1	0.882	0.659	0.275	0.158	0.085	0.020	0.003	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	2	0.980	0.889	0.558	0.391	0.253	0.093	0.019	0.003	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	3	0.998	0.974	0.795	0.649	0.493	0.225	0.073	0.015	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000
	4	1.000	0.996	0.927	0.842	0.724	0.438	0.194	0.057	0.009	0.003	0.001	0.000	0.000
	5	1.000	0.999	0.981	0.946	0.882	0.665	0.387	0.158	0.039	0.014	0.004	0.000	0.000
	6	1.000	1.000	0.996	0.986	0.961	0.842	0.613	0.335	0.118	0.054	0.019	0.001	0.000
	7	1.000	1.000	0.999	0.997	0.991	0.943	0.806	0.562	0.276	0.158	0.073	0.004	0.000
	8	1.000	1.000	1.000	1.000	0.998	0.985	0.927	0.775	0.507	0.351	0.205	0.026	0.002
	9	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.997	0.981	0.917	0.747	0.609	0.442	0.111	0.020
	10	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.997	0.980	0.915	0.842	0.725	0.341	0.118
	11	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.998	0.986	0.968	0.931	0.718	0.460
	12	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
13	0	0.513	0.254	0.055	0.024	0.010	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	1	0.865	0.621	0.234	0.127	0.064	0.013	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	2	0.975	0.866	0.502	0.333	0.202	0.058	0.011	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	3	0.997	0.966	0.747	0.584	0.421	0.169	0.046	0.008	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
	4	1.000	0.994	0.901	0.794	0.654	0.353	0.133	0.032	0.004	0.001	0.000	0.000	0.000
	5	1.000	0.999	0.970	0.920	0.835	0.574	0.291	0.098	0.018	0.006	0.001	0.000	0.000
	6	1.000	1.000	0.993	0.976	0.938	0.771	0.500	0.229	0.062	0.024	0.007	0.000	0.000
	7	1.000	1.000	0.999	0.994	0.982	0.902	0.709	0.426	0.165	0.080	0.030	0.001	0.000
	8	1.000	1.000	1.000	0.999	0.996	0.968	0.867	0.647	0.346	0.206	0.099	0.006	0.000
	9	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.992	0.954	0.831	0.579	0.416	0.253	0.034	0.003
	10	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.989	0.942	0.798	0.667	0.498	0.134	0.025
	11	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.998	0.987	0.936	0.873	0.766	0.379	0.135
	12	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.990	0.976	0.945	0.746	0.487
	13	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
14	0	0.488	0.229	0.044	0.018	0.007	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	1	0.847	0.585	0.198	0.047	0.101	0.008	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	2	0.970	0.842	0.448	0.281	0.161	0.040	0.006	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	3	0.996	0.956	0.698	0.521	0.355	0.124	0.029	0.004	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	4	1.000	0.991	0.870	0.742	0.584	0.279	0.090	0.018	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000
	5	1.000	0.999	0.956	0.888	0.781	0.486	0.212	0.058	0.008	0.002	0.000	0.000	0.000
	6	1.000	1.000	0.988	0.962	0.907	0.692	0.395	0.150	0.031	0.010	0.002	0.000	0.000
	7	1.000	1.000	0.998	0.990	0.969	0.850	0.605	0.308	0.093	0.038	0.012	0.000	0.000
	8	1.000	1.000	1.000	0.998	0.992	0.942	0.788	0.514	0.219	0.112	0.044	0.001	0.000
	9	1.000	1.000	1.000	1.000	0.998	0.982	0.910	0.721	0.416	0.258	0.130	0.009	0.000
	10	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.996	0.971	0.876	0.645	0.479	0.302	0.044	0.004
	11	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.994	0.960	0.839	0.719	0.552	0.158	0.030
	12	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.992	0.953	0.899	0.802	0.415	0.153
	13	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.993	0.982	0.956	0.771	0.512
	14	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

n	x	p											
		0.05	0.10	0.20	0.25	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.75	0.80	0.90	0.95
15	0	0.463	0.206	0.035	0.013	0.005	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	1	0.829	0.549	0.167	0.080	0.035	0.005	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	2	0.964	0.816	0.398	0.236	0.127	0.027	0.004	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	3	0.995	0.944	0.648	0.461	0.297	0.091	0.018	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	4	0.999	0.987	0.836	0.686	0.515	0.217	0.059	0.009	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
	5	1.000	0.998	0.939	0.852	0.722	0.403	0.151	0.034	0.004	0.001	0.000	0.000	0.000
	6	1.000	1.000	0.982	0.943	0.869	0.610	0.304	0.095	0.015	0.004	0.001	0.000	0.000
	7	1.000	1.000	0.996	0.983	0.950	0.787	0.500	0.213	0.050	0.017	0.004	0.000	0.000
	8	1.000	1.000	0.999	0.996	0.985	0.905	0.696	0.390	0.131	0.057	0.018	0.000	0.000
	9	1.000	1.000	1.000	0.999	0.996	0.966	0.849	0.597	0.278	0.148	0.051	0.002	0.000
	10	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.991	0.941	0.783	0.485	0.314	0.164	0.013	0.001
	11	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.998	0.982	0.909	0.703	0.539	0.352	0.056	0.005
	12	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.996	0.973	0.873	0.764	0.602	0.184	0.036
	13	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.995	0.965	0.920	0.833	0.451	0.171
	14	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.995	0.987	0.965	0.794	0.537
	15	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
16	0	0.440	0.185	0.028	0.010	0.003	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	1	0.811	0.515	0.141	0.063	0.026	0.003	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	2	0.957	0.789	0.352	0.197	0.099	0.018	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	3	0.993	0.932	0.598	0.405	0.246	0.065	0.011	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	4	0.999	0.983	0.798	0.630	0.450	0.167	0.038	0.005	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	5	1.000	0.997	0.918	0.810	0.660	0.329	0.105	0.019	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000
	6	1.000	0.999	0.973	0.920	0.825	0.527	0.227	0.058	0.007	0.002	0.000	0.000	0.000
	7	1.000	1.000	0.993	0.973	0.926	0.716	0.402	0.142	0.026	0.007	0.001	0.000	0.000
	8	1.000	1.000	0.999	0.993	0.974	0.858	0.598	0.284	0.074	0.027	0.007	0.000	0.000
	9	1.000	1.000	1.000	0.999	0.993	0.942	0.773	0.473	0.175	0.080	0.027	0.001	0.000
	10	1.000	1.000	1.000	1.000	0.998	0.981	0.895	0.671	0.340	0.190	0.082	0.003	0.000
	11	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.995	0.962	0.839	0.550	0.370	0.202	0.017	0.001
	12	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.989	0.935	0.764	0.595	0.402	0.068	0.007
	13	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.998	0.982	0.901	0.803	0.648	0.211	0.043
	14	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.997	0.974	0.937	0.859	0.485	0.189
	15	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.997	0.990	0.972	0.815	0.560
	16	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
17	0	0.418	0.167	0.023	0.008	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	1	0.792	0.482	0.118	0.050	0.019	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	2	0.950	0.762	0.310	0.164	0.077	0.012	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	3	0.991	0.917	0.549	0.353	0.202	0.046	0.006	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	4	0.999	0.970	0.758	0.574	0.389	0.126	0.025	0.003	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	5	1.000	0.995	0.894	0.765	0.597	0.264	0.072	0.011	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
	6	1.000	0.999	0.962	0.893	0.775	0.448	0.166	0.035	0.003	0.001	0.000	0.000	0.000
	7	1.000	1.000	0.989	0.960	0.895	0.641	0.315	0.092	0.013	0.003	0.000	0.000	0.000
	8	1.000	1.000	0.997	0.988	0.960	0.801	0.500	0.199	0.040	0.012	0.003	0.000	0.000
	9	1.000	1.000	1.000	0.997	0.987	0.908	0.685	0.359	0.105	0.040	0.011	0.000	0.000
	10	1.000	1.000	1.000	0.999	0.997	0.965	0.834	0.552	0.225	0.107	0.038	0.001	0.000
	11	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.989	0.928	0.736	0.403	0.235	0.106	0.005	0.000
	12	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.997	0.976	0.874	0.611	0.426	0.242	0.022	0.001
	13	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.994	0.954	0.798	0.647	0.451	0.083	0.009
	14	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.988	0.923	0.836	0.690	0.238	0.050
	15	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.998	0.981	0.950	0.882	0.518	0.258
	16	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.998	0.992	0.977	0.833	0.582
	17	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
18	0	0.397	0.150	0.018	0.006	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	1	0.774	0.450	0.099	0.039	0.014	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	2	0.942	0.734	0.271	0.135	0.060	0.008	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	3	0.989	0.902	0.501	0.306	0.165	0.033	0.004	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	4	0.998	0.972	0.716	0.519	0.333	0.094	0.015	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	5	1.000	0.994	0.867	0.717	0.534	0.209	0.048	0.006	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	6	1.000	0.999	0.949	0.861	0.722	0.374	0.119	0.020	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
	7	1.000	1.000	0.984	0.943	0.859	0.563	0.240	0.058	0.006	0.001	0.000	0.000	0.000
	8	1.000	1.000	0.996	0.981	0.940	0.737	0.407	0.135	0.021	0.005	0.001	0.000	0.000
	9	1.000	1.000	0.999	0.995	0.979	0.865	0.593	0.263	0.060	0.019	0.004	0.000	0.000
19	10	1.000	1.000	1.000	0.999	0.994	0.942	0.760	0.437	0.141	0.057	0.016	0.000	0.000
	11	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.980	0.881	0.626	0.278	0.139	0.051	0.001	0.000
	12	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.994	0.952	0.791	0.466	0.285	0.133	0.006	0.000
	13	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.985	0.906	0.667	0.481	0.264	0.028	0.002
	14	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.996	0.967	0.835	0.674	0.499	0.096	0.011
	15	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.992	0.940	0.865	0.729	0.266	0.058
	16	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.986	0.961	0.901	0.550	0.226
	17	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.998	0.994	0.982	0.850	0.685
	18	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

n	x	p											
		0.05	0.10	0.20	0.25	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.75	0.80	0.90	0.95
19	0	0.377	0.135	0.014	0.004	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	1	0.755	0.420	0.083	0.031	0.010	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	2	0.933	0.705	0.237	0.111	0.046	0.008	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	3	0.987	0.885	0.455	0.262	0.133	0.032	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	4	0.998	0.965	0.673	0.465	0.282	0.070	0.010	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	5	1.000	0.991	0.837	0.668	0.474	0.163	0.032	0.003	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	6	1.000	0.998	0.932	0.825	0.666	0.308	0.084	0.012	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
	7	1.000	1.000	0.977	0.925	0.818	0.488	0.180	0.035	0.003	0.000	0.000	0.000	0.000
	8	1.000	1.000	0.993	0.971	0.916	0.667	0.324	0.088	0.011	0.002	0.000	0.000	0.000
	9	1.000	1.000	0.998	0.991	0.967	0.814	0.500	0.186	0.033	0.009	0.002	0.000	0.000
	10	1.000	1.000	1.000	0.998	0.989	0.912	0.676	0.333	0.084	0.029	0.007	0.002	0.000
	11	1.000	1.000	1.000	1.000	0.997	0.965	0.838	0.512	0.192	0.077	0.023	0.006	0.000
	12	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.988	0.916	0.692	0.334	0.175	0.060	0.002	0.000
	13	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.997	0.968	0.837	0.526	0.332	0.138	0.009	0.000
	14	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.990	0.930	0.718	0.539	0.337	0.035	0.002
	15	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.998	0.977	0.867	0.737	0.545	0.115	0.013
	16	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.995	0.954	0.899	0.763	0.295	0.067
	17	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.990	0.969	0.917	0.580	0.245
	18	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.996	0.986	0.865	0.623
	19	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
20	0	0.358	0.122	0.012	0.003	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	1	0.736	0.392	0.069	0.024	0.008	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	2	0.925	0.677	0.206	0.091	0.035	0.004	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	3	0.984	0.867	0.411	0.225	0.107	0.016	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	4	0.997	0.957	0.630	0.415	0.238	0.051	0.006	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	5	1.000	0.989	0.804	0.617	0.416	0.126	0.021	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	6	1.000	0.998	0.913	0.786	0.608	0.250	0.058	0.006	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	7	1.000	1.000	0.968	0.898	0.772	0.416	0.132	0.021	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
	8	1.000	1.000	0.990	0.959	0.887	0.596	0.252	0.057	0.005	0.001	0.000	0.000	0.000
	9	1.000	1.000	0.997	0.986	0.952	0.755	0.412	0.128	0.017	0.004	0.001	0.000	0.000
	10	1.000	1.000	0.999	0.996	0.983	0.872	0.588	0.245	0.048	0.014	0.003	0.000	0.000
	11	1.000	1.000	1.000	0.999	0.995	0.943	0.748	0.404	0.113	0.041	0.010	0.000	0.000
	12	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.979	0.868	0.584	0.228	0.102	0.032	0.000	0.000
	13	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.994	0.942	0.750	0.392	0.214	0.087	0.002	0.000
	14	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.998	0.979	0.874	0.584	0.383	0.196	0.011	0.000
	15	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.994	0.949	0.762	0.585	0.370	0.043	0.003
	16	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.984	0.893	0.775	0.589	0.133	0.016
	17	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.996	0.965	0.909	0.794	0.323	0.075
	18	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.992	0.976	0.931	0.608	0.264
	19	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.997	0.988	0.878	0.642
	20	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

۲.أ جدول توزیع پواسون

$$p(x) = P(X = x) = \begin{cases} e^{-\mu}\dfrac{\mu^x}{x!} & \text{if } x \in \mathbb{Z}^+ \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

x	$\mu = 0.1$		$\mu = 0.2$		$\mu = 0.3$		$\mu = 0.4$		$\mu = 0.5$	
	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$
0	0. 9048	0.9048	0. 8187	0.8187	0. 7408	0.7408	0. 6703	0.6703	0. 6065	0.6065
1	0905	0.9953	1637	0.9825	2222	0.9631	2681	0.9384	3033	0.9098
2	0045	0.9998	0164	0.9989	0333	0.9964	0536	0.9921	0758	0.9856
3	0002	1.0000	0011	0.9999	0033	0.9997	0072	0.9992	0126	0.9982
4	0000	1.0000	0001	1.0000	0003	1.0000	0007	0.9999	0016	0.9998
5							0001	1.0000	0002	1.0000

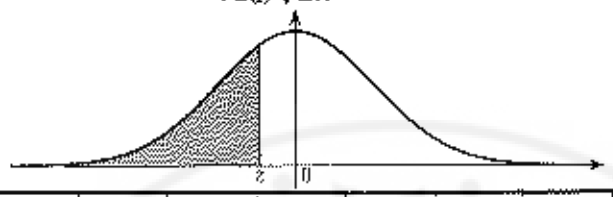
x	$\mu = 0.6$		$\mu = 0.7$		$\mu = 0.8$		$\mu = 0.9$		$\mu = 1$	
	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$
	0.		0.		0.		0.		0.	
0	5488	0.5488	4966	0.4966	4493	0.4493	4066	0.4066	3679	0.3679
1	3293	0.8781	3476	0.8442	3595	0.8088	3659	0.7725	3679	0.7358
2	0988	0.9769	1217	0.9659	1438	0.9526	1647	0.9371	1839	0.9197
3	0198	0.9966	0284	0.9942	0383	0.9909	0494	0.9865	0613	0.9810
4	0030	0.9996	0050	0.9992	0077	0.9986	0111	0.9977	0153	0.9963
5	0004	1.0000	0007	0.9999	0012	0.9998	0020	0.9997	0031	0.9994
6			0001	1.0000	0002	1.0000	0003	1.0000	0005	0.9999
7									0001	1.0000

x	$\mu = 1.5$		$\mu = 2$		$\mu = 3$		$\mu = 4$		$\mu = 5$	
	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$
	0.		0.		0.		0.		0.	
0	2231	0.2231	1353	0.1353	0498	0.0498	0183	0.0183	0067	0.0067
1	3347	0.5578	2707	0.4060	1494	0.1991	0733	0.0916	0337	0.0404
2	2510	0.8088	2707	0.6767	2240	0.4232	1465	0.2381	0842	0.1247
3	1255	0.9344	1804	0.8571	2240	0.6472	1954	0.4335	1404	0.2650
4	0471	0.9814	0902	0.9473	1680	0.8153	1954	0.6288	1755	0.4405
5	0141	0.9955	0361	0.9834	1008	0.9161	1563	0.7851	1755	0.6160
6	0035	0.9991	0120	0.9955	0504	0.9665	1042	0.8893	1462	0.7622
7	0008	0.9998	0034	0.9989	0216	0.9881	0595	0.9489	1044	0.8666
8	0001	1.0000	0009	0.9998	0081	0.9962	0298	0.9786	0653	0.9319
9			0002	1.0000	0027	0.9989	0132	0.9919	0363	0.9682
10					0008	0.9997	0053	0.9972	0181	0.9863
11					0002	0.9999	0019	0.9991	0082	0.9945
12					0001	1.0000	0006	0.9997	0034	0.9980
13							0002	0.9999	0013	0.9993
14							0001	1.0000	0005	0.9998
15									0002	0.9999
16									0001	1.0000

Damascus University

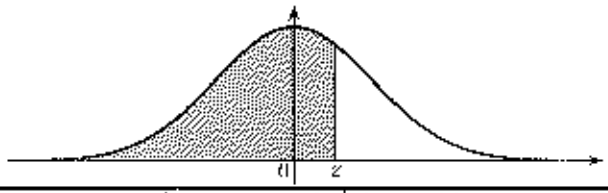
أ.٣ جدول التوزيع الطبيعي المعياري

$$Z \sim N(0,1), \qquad F(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx, \qquad z \in [-3.69, 0]$$



Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
-3.6	.0002	.0002	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001
-3.5	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002
-3.4	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0002
-3.3	.0005	.0005	.0005	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0003
-3.2	.0007	.0007	.0006	.0006	.0006	.0006	.0006	.0005	.0005	.0005
-3.1	.0010	.0009	.0009	.0009	.0008	.0008	.0008	.0008	.0007	.0007
-3.0	.0013	.0013	.0013	.0012	.0012	.0011	.0011	.0011	.0010	.0010
-2.9	.0019	.0018	.0018	.0017	.0016	.0016	.0015	.0015	.0014	.0014
-2.8	.0026	.0025	.0024	.0023	.0023	.0022	.0021	.0021	.0020	.0019
-2.7	.0035	.0034	.0033	.0032	.0031	.0030	.0029	.0028	.0027	.0026
-2.6	.0047	.0045	.0044	.0043	.0041	.0040	.0039	.0038	.0037	.0036
-2.5	.0062	.0060	.0059	.0057	.0055	.0054	.0052	.0051	.0049	.0048
-2.4	.0082	.0080	.0078	.0075	.0073	.0071	.0069	.0068	.0066	.0064
-2.3	.0107	.0104	.0102	.0099	.0096	.0094	.0091	.0089	.0087	.0084
-2.2	.0139	.0136	.0132	.0129	.0125	.0122	.0119	.0116	.0113	.0110
-2.1	.0179	.0174	.0170	.0166	.0162	.0158	.0154	.0150	.0146	.0143
-2.0	.0228	.0222	.0217	.0212	.0207	.0202	.0197	.0192	.0188	.0183
-1.9	.0287	.0281	.0274	.0268	.0262	.0256	.0250	.0244	.0239	.0233
-1.8	.0359	.0351	.0344	.0336	.0329	.0322	.0314	.0307	.0301	.0294
-1.7	.0446	.0436	.0427	.0418	.0409	.0401	.0392	.0384	.0375	.0367
-1.6	.0548	.0537	.0526	.0516	.0505	.0495	.0485	.0475	.0465	.0455
-1.5	.0668	.0655	.0643	.0630	.0618	.0606	.0594	.0582	.0571	.0559
-1.4	.0808	.0793	.0778	.0764	.0749	.0735	.0721	.0708	.0694	.0681
-1.3	.0968	.0951	.0934	.0918	.0901	.0885	.0869	.0853	.0838	.0823
-1.2	.1151	.1131	.1112	.1093	.1075	.1056	.1038	.1020	.1003	.0985
-1.1	.1357	.1335	.1314	.1292	.1271	.1251	.1230	.1210	.1190	.1170
-1.0	.1587	.1562	.1539	.1515	.1492	.1469	.1446	.1423	.1401	.1379
-0.9	.1841	.1814	.1788	.1762	.1736	.1711	.1685	.1660	.1635	.1611
-0.8	.2119	.2090	.2061	.2033	.2005	.1977	.1949	.1922	.1894	.1867
-0.7	.2420	.2389	.2358	.2327	.2296	.2266	.2236	.2206	.2177	.2148
-0.6	.2743	.2709	.2676	.2643	.2611	.2578	.2546	.2514	.2483	.2451
-0.5	.3085	.3050	.3015	.2981	.2946	.2912	.2877	.2843	.2810	.2776
-0.4	.3446	.3409	.3372	.3336	.3300	.3264	.3228	.3192	.3156	.3121
-0.3	.3821	.3783	.3745	.3707	.3669	.3632	.3594	.3557	.3520	.3483
-0.2	.4207	.4168	.4129	.4090	.4052	.4013	.3974	.3936	.3897	.3859
-0.1	.4602	.4562	.4522	.4483	.4443	.4404	.4364	.4325	.4286	.4247
-0.0	.5000	.4960	.4920	.4880	.4840	.4801	.4761	.4721	.4681	.4641

$$Z \sim N(0,1), \qquad F(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx, \qquad z \in [0, 3.69]$$



Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998
3.5	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998
3.6	.9998	.9998	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

دليل المصطلحات العلمية

(انكليزي- عربي)

A	
Absolute	مطلق
- - convergence	تقارب مطلق
- - value	قيمة مطلقة
Absolutely convergent series	سلسلة متقاربة مطلقاً
Acceleration	تسارع
- - of vectors	جمع الأشعة
Analytic function	تابع تحليلي
Angle	زاوية
Arbitrary	كيفي- اختياري
Arc	قوس
Area	مساحة
Axis	محور
- - of symmetry	محور تناظر
B	
Binomial formula	علاقة ثنائي الحد
Binomial	ثنائي الناظم

Boundary	حدود
Boundary conditions	شروط حدية
Boundary – value problems	مسائل القيم الحدية
Bound	محدود
- - function	تابع محدود
- - sequence	متتالية محدودة
Branch	فرع
- - point	نقطة تفرع
C	
Change of variables	تغيير المتحولات
Circle of convergence	دائرة التقارب
Circulation	جَوَلان
Closed	مغلق
- - curve	منحني مغلق
- - surface	سطح مغلق
Coefficients	أمثال
Comparison test	اختبار المقارنة
Components of a vector	مركبات شعاع
Conditional convergence	تقارب شرطي

Conformal mapping	تابع محافظ (مطابق)
- - transformation	محول حافظ
Conjugate	مرافق
Connected region	منطقة مترابطة
Conservative field	حقل محافظ
Constant	ثابت
Continuity	الاستمرار
Continuous	مستمر
- - curve	منحني مستمر
- - function	تابع مستمر
Contour	إطار – منحني محيطي بسيط
- - integrals	تكاملات محيطية
Convergence	تقارب
Convergent	متقارب
Convolution	ملتف(تلاف)
- - theorem	نظرية التلاف
Coordinate curves	منحنيات احتدائية
Coordinates	احداثيات
Cross ratio	النسبة التصالبية

Curl	دوران
Curvature	تقوس
Curves	منحنيات
Curvilinear coordinates	احداثيات منحنية
Cylindrical coordinates	احداثيات اسطوانية
D	
Definite integral	تكامل محدد
Degree of a polynomial	درجة كثيرة حدود
Delta function	التابع دلتا
Derivative	مشتق
Derivation	اشتقاق
Differentiability	قابلية الاشتقاق
Differential	تفاضل
Direction cosines	جيوب تمام التوجيه أو التجيبات الموجهة
Directional derivative	المشتق الموجه
Disk	قرص
Distance	مسافة
Divergence	تباعد أو تفرق
Divergent	متباعد

- - sequence	متتالية متباعدة
- - series	سلسلة متباعدة
Domain	منطقة
Double integrals	تكاملات ثنائية
Double pole	قطب مضاعف
E	
Elementary functions	توابع ابتدائية
Element	عنصر
Equation	معادلة
Essential singular point	نقطة شاذة أساسية
Euler's formula	علاقات أولر
Even function	تابع زوجي
Expansion	نشر
Exponential function	تابع أسّي
F	
Field	حقل
Flux	تدفق
Force	قوة
Fractional linear transformation	محول خطي كسري

Function	تابع
G	
Gamma function	تابع غاما
Gradient	تدرج
Graphical representation	تمثيل بياني
Gravitation	الجاذبية الأرضية
H	
Harmonic function	تابع توافقي
Higher order derivatives	المشتقات من مراتب عليا
I	
Increment	تزايد
Indefinite integral	تكامل غير محدد
Independent of the path	مستقل عن المسار
Infinite	لا نهائي
Infinity	اللا نهائية
Initial conditions	شروط ابتدائية
Initial point of a vector	نقطة البداية لشعاع
Integral	تكامل
Integration	مكاملة

Intersection	تقاطع
Interval	مجال
Inverse function	تابع عكسي
Isolated singular point	نقطة شاذة معزولة
J	
Jacobcan	جاكوبيان
L	
Length	طول
Level curve	منحني سوية
- - surface	سطح سوية
Limit	نهاية
Linearly independent	مستقل خطياً
Linear transformation	محول خطي
Line	مستقيم
- - integral	تكامل خطي
M	
Magnitude	قياس أو طول
Many-valued function	تابع متعدد القيم
Mapping	تطبيق

Moment	عزم
Multiplication	جداء
N	
Natural logarithm	اللوغاريتم الطبيعي
Neighborhood	جوار
Normal	ناظم
Numbers	أعداد
O	
Odd function	تابع فردي
Open region	منطقة مفتوحة
Operator	مؤثر
Order	رتبة
Ordered pair	زوج مرتب
Ordinary point	نقطة عادية
Orthogonal	متعامد
- - coordinates	إحداثيات متعامدة
P	
Parametric equations	معادلات وسيطية
Partial derivative	المشتق الجزئي

Period	دور
Periodic function	تابع دوري
Point set	مجموعة نقطية
Polar coordinates	الإحداثيات القطبية
Pole	قطب
Position vector	شعاع موضع
Potential	كمون
Power series	سلسلة قوى
Principal branch	الفرع الرئيس
- - normal	الناظم الأساسي
- - part	القسم الرئيس
- - value	القيمة الرئيسة
Product	جداء
Projection	إسقاط
R	
Radius	نصف قطر
- - of convergence	نصف قطر التقارب
- - of curvature	نصف قطر التقوس
Real axis	المحور الحقيقي

Region	منطقة
Regular	نظامي
Resultant	محصلة
Root	جذر
S	
Scalar	سلمي
- - field	حقل سلمي
- - product	الجداء السلمي
Sequence	متتالية
Simple	بسيط
- - closed curve	منحني بسيط مغلق
- - pole	قطب بسيط
Simply-connected region	منطقة بسيطة الاتصال
Singular point	نقطة شاذة
Smooth curve	منحني صقيل
- - surface	سطح صقيل
Symmetric	تناظر
System	جملة
T	

Tangent	مماس
Test	اختبار
Torsion	الالتفاف
Transformation	محول
Translation	انسحاب
Trigonometric	مثلثي
Twisted curve	منحني ملتوي
U	
Unit circle	دائرة الواحدة
Unit vector	شعاع الواحدة
V	
Value	قيمة
Variable	متحول
Vector	شعاع
Vector algebra	جبر الأشعة
Vector field	حقل شعاعي
Vector function	تابع شعاعي
Vector product	الجداء الشعاعي
Velocity	سرعة

Volume	حجم
W	
Work	العمل

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

References المراجع

1 Vector Analysis By: Louis Brand, John Wiley&sons Co. (1957)

2- Calculus and Analytic Geometry By: George B.Thomas & Ross L.Finney, sixth edition ,Addison Wesley pub. Co. (1984)

3- Calculus with analytic Geometry By:Howard Anton second Edition John wiley & son pub Co. (1984)

4- Advanced Engineering Mathematics By: C.R.Wylie Third edition, MacGraw Hill Book Co. (1966)

5- Mathematical Methods for Physicists By: George ArFken, Third edition, Acadimic press INC Co. (1985)

6 Vector Calculus By:J.E.Marsden and A.J.Tromba. 2ed, W.H.Freeman and Co. (1981)

7- Advanced calculus (schaum's outline series) By: Murray R Spiegel 2ed MacGraw Hill Co. (1974)

8 Calculus and Analytic Geometry By:W.H.Durfee 1ed MacGraw Hill,Inc Co. (1971)

9- Vector and Tensor Analysis By: G.E.Hay Dover Publication Inc Co. (1953)

10 Modern University Calculus with Coordinate Geometry By: Bell,Blum, Lewis and Rosen Blatt, 1ed Holden Co. (1966)

11- Introduction to Vector and Tensor Analysis By: Robert C. Wrede, 2ed, Dover Publication Inc Co. (1972)

12- الرياضيات (3) د. حسن سلوطة – مطبوعات جامعة دمشق– طبعة 9 (2002)

13- الرياضيات (4) د. حسن سلوطة – مطبوعات جامعة دمشق– طبعة 9 (1989)

14- الهندسة التحليلية د. محيي الدين بحبوح مطبوعات جامعة دمشق– (1985).

15- التحليل الرياضي ، د. فوزي دنان، مطبوعات جامعة دمشق– (1994).

16- الهندسة التحليلة في الفضاء، د. محمد وداد طرابيشي، مطبوعات جامعة حلب– كلية العلوم– (2006).

17- الرياضيات العامة (حساب التفاضل والهندسة التحليلة)، د. محمد خير أحمد، د. علي الحناوي –مطبوعات جامعة حلب– كلية العلوم– (2001).

18- الرياضيات (٣) (المعادلات التفاضلية والهندسة التحليلة في الفضاء)، د. موفق أحمد قباوة –مطبوعات جامعة حلب– كلية العلوم– (1999).

المراجع الخاصة بالاحتمال والإحصاء والتحليل العددي

1. Introduction to Probability and Statistics, Principles and Applications for Engineering and the Computing Sciences Second Ed., by J. S. Milton and Jesse C. Arnold
(الناشر: McGraw-Hill Publishing Company, 1990)

2. Introduction to Statistics, Third Ed., Ronald E. Waqlpole
(الناشر: collier MacMillan, 1982)

3. Introduction to Statistical Quality Control, Douglas C. Moutgouery
(الناشر: JohnWiley, 1985)

4. Elementary Statistics, Fourth Ed., Paul G. Hoel
(الناشر: A Wiley Arabook, 1984)

5. Introductory Statistical Analysis, 2ed ed., by Donald L. Harnett and James L. Murphy

(الناشر: Addison Wesley, 1980)

6. Matematiksel Istatistige Giris, U. Korum

(الناشر: Ankara.U, 1985)

7. Principles of Statistics, for Engineers and Scientists, by W. Navidi

(الناشر: McGraw-Hill International Edition, 2010)

8. Numerical Analysis, L. Burden and J. D. Faires

(الناشر: Thomson Brooks-Cole, 2005)

9. Elementary Numerical Analysis, K. Atkinson and W. Han

(الناشر: JohnWiley, New York, 2003)

10- الاحتمالات، الدكتور صلاح الأحمد، كلية العلوم – جامعة دمشق – 1982.

11- الاحتمالات، الدكتور عدنان عمورة، كلية العلوم – جامعة دمشق – 1993.

12- مبادئ الإحصاء والاحتمالات، الدكتور أنور اللحام والدكتور محمد شفيق ياسين، كلية العلوم – جامعة دمشق – 1982.

13- الاحتمال والإحصاء الحيوي، الدكتور علي سلامي والدكتور سلطان الصلخدي، كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية –جامعة دمشق.

14- الإحصاء والاحتمال، الدكتور قبانجي و الدكتور كمرجي، كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية – مطبوعات جامعة دمشق – 2006.

15 – الأسس العامة للتحليل العددي، الدكتورة دعد الحسيني، كلية العلوم – جامعة دمشق – 1982.

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

اللجنة العلمية:

- الأستاذ الدكتور : محمد نور شمة
- الأستاذ المساعد الدكتور : نظير هلال
- الأستاذ المساعد الدكتور : عماد قناش

المدقق اللغوي:

- الأستاذ المساعد الدكتور فخري بوش

Damascus University

حقوق الطبع والترجمة والنشر محفوظة

لمديرية الكتب والمطبوعات

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University