





السنّة : ثلاثة رياضيات

قسم : الرياضيات



منشورات جامعة دمشق
كلية العلوم

الميكانيك ((٢))
حركة وتوازن المجموعات المادية

هدى الشماط
مبة بأعمال في قسم الرياضيات

الدكتورة
دعد الحسيني
استاذة في قسم الرياضيات

جامعة دمشق



الفهرس

الصفحة

٧

مقدمة

القسم الأول

حركة المجموعات المادية

٩

- ١١ - الحركات البسيطة للجسم الصلب
- ٢١ - الحركة الاندحافية للجسم الصلب
- ٢٩ - الحركة الدورانية لجسم صلب حول محور ثابت
- ٣٩ - الحركة اللولبية لجسم صلب
- ٤٩ - الحركة الدورانية لجسم صلب حول نقطة ثابتة
- ٦٧ - الحركة العامة للجسم الصلب
- ٨١ - الحركة المستوية للجسم الصلب
- ١٠٣ - الحركة المحصلة لنقطة مادية
- ١٢٣ - الحركة المحصلة لجسم صلب

القسم الثاني

علم التوازن

١٤١

- ١٤٣ - مبادئ علم توازن المجموعات المادية
- ١٥٧ - الشروط العامة للتوازن
- ١٧٣ - التوازن التحليلي - مبدأ العمل الافتراضي
- ٢٠١ - توازن الحبال غير القابلة للامتطاط

القسم الثالث

مبادئ الحساب التتسوري

٢٢٣

٢٢٥

- الكميات ذات الأدلة وترميز الجمع

الصفحة

٢٢٩	- دماير التحويل التسورية
٢٣٧	- الفضاء المترى الريماني وتلسور الاساس
٢٤٩	- المصطلحات
٢٦٣	- المراجع



المقدمة

بسم الله الرحمن الرحيم

من السمات المميزة لعلم الميكانيك ، أنه يعد صلة الوصل بين الرياضيات المجردة وعلم الفيزياء ، وهو الرابطة بين علم الرياضيات و الحياة العملية . وقد تشعبت فروع علم الميكانيك لتواكب الحضارة والتطور التقني ، لأنه الأساس لفهم الكثير من الظواهر الطبيعية وشرحها .

إن الموضوع الرئيسي لهذا الكتاب هو : حركة وتوازن المجموعات المادية . وتبدو أهمية دراسة الحركة جلية إذا لاحظنا أن كل شيء في عالمنا يتحرك من الذرات إلى المجرات ، وأن الحياة دون حركة . وعلم الحركة هو لبنة الأساس لفهم موضوعات علم الميكانيك عامة وهو العلم الذي يدرس الطبيعة الهندسية للحركات دون التعرض لمسبباتها ، ويعين الإنسان على تصور الحركات في الطبيعة وتحليلها ، أما علم التوازن فهو من أوائل فروع علم الميكانيك التي اهتم بها الإنسان منذ أقدم العصور . وترجع طلائع تطبيقات هذا العلم إلى آلاف السنين قبل الميلاد حين استفاد البابليون والمصريون والصينيون من مبادئ علم التوازن في تشييد الكثير من الصروح الحضارية . وعلم التوازن هو الفرع الذي يختص بدراسة وضع السكون للنقط المادية ، ويتناول دراسة الشروط التي يجب أن تحققها مجموعة من القوى تؤثر على مجموعة نقط مادية لكي تبقى المجموعة المادية في حالة سكون بالنسبة لجملة مقارنة ما . لقد وضعت مباحث الكتاب بحيث تكون شاملة لجميع مفردات منهاج مقرر الميكانيك (٢) ،

اطلسلاب السنة الثالثة رياضية . ويمالج القسم الأول منه موضوعات علم الحركة حيث شرحت فيه بشكل خلاص ومفصل حركات المجموعات المتماصة ، بدءاً بالحركات البسيطة ، ثم الحركة العامة للأجسام الصلبة ، ثم الحركات المركبة للنقط المادية ، وللأجسام الصلبة . و تمت الدراسة بالطريقتين ، الشعاعية والتحليلية .

فسي حين خصص القسم الثاني من الكتاب لدراسة توازن المجموعات المادية بدءاً بمسلمات علم التوازن ، مروراً بدراسة الشروط العامة لتوازن المجموعات المادية ، وانتهاء بدراسة علم التوازن التحليلي ، حيث شرحت شروط التوازن بطريقة العمل الافتراضي ، وبطريقة

مضارب لاغراج ، في حالة الصلات القابلة للتححر ، والصلات غير القابلة للتححر . وختم القسم بدراسة شروط توازن الحبال وتطبيقاتها .

أما القسم الأخير من الكتاب ففيه عرض موجز لمبادئ حساب الموترات (الحساب التانسوري) هذا العلم الذي يعد بحق الأداة الناجحة لصياغة القوانين الرياضية والفيزيائية ، بحيث تبقى هذه القوانين صحيحة حين الانتقال من جملة إحداثية إلى جملة أخرى. وتم في هذا القسم شرح المفهوم الرياضي للجبري للتسورات ، وشرح خواص للتسورات ، والعمليات عليها . ثم دراسة بعض تطبيقات الحساب التانسوري في الميكانيك .

يتميز الكتاب بوفرة التطبيقات ، والمسائل المحولة ، والتمارين غير المحولة ، الأمر الذي يساعد القارئ في تصور وفهم الحركات التي تتم في الطبيعة ، وفي ربط المعادلات العملية بالأبحاث النظرية .

نأمل أن يفي هذا الكتاب بالغرض المنشود ، ويقدم لأبناء وطننا ما نرجوه من الفائدة العملية . والله ولي التوفيق

لجنة التأليف

ق . أ . هدى الشماط

أ . د . دعد الحسيني

القسم الأول

حركة المجموعات المادية

- الحركات البسيطة للجسم الصلب
- الحركة الانسحابية للجسم الصلب
- حركة الدورانية لجسم صلب حول محور ثابت
- الحركة اللولبية لجسم صلب
- الحركة الدورانية لجسم صلب حول نقطة ثابتة
- الحركة العامة للجسم الصلب
- الحركة المستوية للجسم الصلب
- الحركة المحصلة لنقطة مادية
- الحركة المحصلة لجسم صلب



الفصل الأول

الحركات البسيطة للجسم الصلب

- تعريف الجسم الصلب
- تعيين موضع الجسم الصلب
- درجات الحرية للجسم الصلب
- الإحداثيات المعممة لمجموعة مادية
- معادلات حركة مجموعة مادية
- تعيين موضع جسم صلب تحليلياً
- النظرية الأساسية لحركة الجسم الصلب



مبادئ أساسية

١-١-١ تمهيد

إن علم الحركة هو فرع من علم الميكانيك يدرس الخواص الهندسية لحركة نقطة أو مجموعة نقط مادية بمعزل عن مسببات الحركة . لذا يدعو البعض علم هندسة الحركة .
إن من أوائل من اهتم بدراسة هذا الفرع من علم الميكانيك العالم الفرنسي أمبير والعالم الفرنسي شال كما أن باكورة ما نشر عن الخواص الهندسية لحركة المجموعات المادية كان في كلية العلوم بباريس عام ١٨٣٨ . إن أول مؤلف ظهر في علم الحركة كتبه العالم بيزال عام ١٨٦٢ واستمر الاهتمام منذ ذلك الوقت بهذا العلم كعلم مستقل لما له من أهمية في دراسة علم التحريك وفهم موضوعات الفيزياء النظرية.

٢-١-١ تعريف الجسم الصلب :

الجسم الصلب ، أو المجموعة المادية المتماسكة ، هو مجموعة نقط مادية تحافظ على الأبعاد المتبادلة بينها مع تغير الزمن.

من المهم أن نشير إلى أنه ليس في الطبيعة جسم ينطبق عليه التعريف الرياضي للجسم الصلب بيد أنه يمكن وينجح التعامل مع كثير من الأجسام كأجسام صلبة حيث يمكن إهمال التغيرات الصغيرة جداً ، بالنسبة لأبعاد المجموعة ، والتي تطرأ على الأبعاد المتبادلة بين نقط المجموعة .

٣-١-١ تعيين موضع الجسم الصلب :

إن تعيين موضع جسم صلب يعني تعيين موضع كل نقطة من هذا الجسم في لحظة ما من الزمن بالنسبة لفراغ ما ، أو بالنسبة لجملة إحداثية معينة . ولما كان من الممكن أن يحوي الجسم عدداً غير منته من النقط المادية فقد يبدو أن تعيين موضع الجسم الصلب أمر مستعسر ولكن تعريف الجسم الصلب يزودنا بإمكانية تعيين موضع أي نقطة من جسم صلب إذا عرفنا موضع ثلاث نقط فقط من الجسم غير واقعة على استقامة واحدة ولبيان ذلك كما يلي:
إن موضع نقطة واحدة M في الفراغ الثلاثي يتعين إذا عرفت ثلاث إحداثيات لهذه النقطة أي تحتاج لثلاث علاقات مستقلة لتعيين هذه الإحداثيات ، ونحصل على هذه العلاقات الثلاث من علاقات البعد بين للنقطة M والنقط الثلاث المعروفة ولتكن O_1 ، O_2 ، O_3 فنكتب

$$\overline{Mo_1} = \text{ثابت} \quad \overline{Mo_2} = \text{ثابت} \quad \overline{Mo_3} = \text{ثابت}$$

٤-١-١ درجات الحرية:

أ- درجات حرية نقطة مادية : هي عدد الوسطاء المستقلة الكافية لتحديد موضع هذه النقطة. ولما كانت النقطة المادية الطليقة في الفراغ الثلاثي تتعين بثلاث إحداثيات، فإننا نقول إن لها ثلاث درجات حرية ، أي أن هذه النقطة تملك حرية الحركة في أي من الاتجاهات الثلاثة للفراغ . أما إذا قيدت حركة النقطة فلن درجات حريتها تنقص بعدد العلاقات التي تعبر عن القيد. فإذا قيدت حركة نقطة مادية على سطح ما فلن عدد درجات حريتها تنقص درجة واحدة . لأن السطح هو بيان معادلة واحدة تربط بين إحداثيات النقطة الثلاث وبالتالي تتعين النقطة بوسطين مستقلين لذا نقول : إن للنقطة المادية المتحركة على سطح ما درجتى حرية فقط . وإذا قيدت حركة النقطة المادية على منحنى يبقى للنقطة درجة حرية واحدة ، لأن المنحنى يتعين في الفراغ بمعادلتين (تقاطع سطحين) تربطان الإحداثيات الثلاث للنقطة .

ب- درجات حرية مجموعة مادية : نسمي عدد الوسطاء المستقلة الكافية لتحديد موضع مجموعة مادية عدد درجات حرية المجموعة . ولنكتب في الحالة العامة :
عدد درجات حرية مجموعة مادية = عدد الوسطاء التي تعين المجموعة - عدد العلاقات التي تربط هذه الوسطاء
مثال (١) : إن للجسم الصلب الطليق ست درجات حرية في الفراغ الثلاثي في الحقيقة إن موضع الجسم المطابق يتعين إذا عرف موضع ثلاث نقط غير واقعة على استقامة واحدة كما سبق وذكرنا أي تحتاج لستة وسطاء لتحديد موضع الجسم ولكن هذه الوسطاء مرتبطة بثلاث علاقات هي علاقات الأبعاد الثابتة المتبادلة بين النقط الثلاث لذا يكون للجسم الصلب الطليق ست درجات حرية ، $(9 - 3 = 6)$

مثال (٢) : إن عدد درجات حرية جسم صلب ثبت فيه نقطة واحدة O هو ثلاث درجات . في الحقيقة يكفي لتحديد موضع الجسم في هذه الحالة معرفة موضع نقطتين O_1, O_2 مثلاً غير واقعتين مع O على استقامة واحدة وبالتالي نحتاج لستة وسطاء مرتبطة بثلاث علاقات هي علاقات الأبعاد الثابتة

$$\overline{OO_1} = \text{ثا} , \overline{OO_2} = \text{ثا} , \overline{O_1O_2} = \text{ثا}$$

مثال (٣) : للجسم الصلب المقيد بنقطتين ثابتتين O_1, O_2 مثلاً درجة حرية واحدة . في الحقيقة يكفي هنا لتحديد موضع الجسم معرفة موضع نقطة واحدة ولنكن O ولكن

احداثيات O الثلاث مرتبطة بعلاقتهن هما البعد بين O و O_1 ثابت والبعد بين O و O_2 ثابت . ($1 = 2 - 3$)

مثال (4) : إن للقضيب الصلب AB الطليق في الفراغ خمس درجات حرية
 الإثبات : يتعين القضيب الطليق في الفراغ إذا عرف موضع نقطتين منه ، أي إذا عرفت
 ستة وسطاء . ولكن هذه الوسطاء مرتبطة بعلاقة واحدة هي البعد الثابت بين
 النقطتين مما يدل على أن للقضيب خمس درجات حرية ($5 = 1 - 6$)
 تمرين (1) : عين عدد درجات حرية مجموعة مادية مؤلفة من قضيب يلزم
 مستوياً ثابتاً ونقطة مادية تلازم للقضيب .

الحل : إن القضيب يتعين في المستوي بأربعة وسطاء هي احداثيات نقطتين منه ،
 وترتبط هذه الوسطاء بعلاقة البعد بين النقطتين فيكون للقضيب ثلاث درجات حرية . ونعلم
 أن للنقطة التي تلازم القضيب درجة حرية واحدة لذا يكون للمجموعة المادية أربع درجات
 حرية.

تمرين (2) : عين عدد درجات حرية قضيب يتحرك في الفراغ بحيث يلزم أحد
 طرفيه سطح كرة ثابتة ويلزم طرفه الثاني مستقيماً ثابتاً .

الحل : للقضيب الطليق كما وجدنا خمس درجات حرية ، إحدى نقطه تحقق معادلة
 الكرة والنقطة الثانية تحقق معادلتين المستقيم وبالتالي هناك ثلاث علاقات تربط الوسطاء
 الخمس ويبقى للقضيب درجتان حرية .

١-١-٥ الاحداثيات المعممة لمجموعة مادية :

نسمى الوسطاء المستقلة التي نعين وبشكل وحيد وكامل موضع المجموعة المادية ،
 الاحداثيات المعممة لهذه المجموعة . ويتضح من هذا أن عدد الوسطاء المعممة يساوي عدد
 درجات حرية المجموعة ، فإذا كان لمجموعة ما n درجة حرية كان لها n احداثي معم
 نرمزها q_i حيث ($i = 1, 2, \dots, n$)

— إن للنقطة المادية في المستوي x, y مثلاً درجتين حرية واحداثياتها المعممان هما

$$q_1 = x \quad ; \quad q_2 = y$$

— إن للجسم الصلب الطليق ست درجات حرية فله ستة احداثيات معممة q_i

يمكن اختيارها بطرق عديدة ، $i = 1, 2, \dots, 6$

— إن للنقطة الطليقة في الفراغ ثلاث درجات حرية واحداثياتها المعممة يمكن أن نختارها

الاحداثيات الكروية مثلاً : $q_1 = r$, $q_2 = \varphi$, $q_3 = \theta$

٦-١-١ : معادلات حركة مجموعة مادية :

إن معادلات حركة مجموعة مادية هي العلاقات الزمنية التي تربط الاحداثيات المسممة لهذه المجموعة بالزمن . ويكون عدد معادلات حركة مجموعة مادية مساوياً نوعاً لعدد درجات حرية هذه المجموعة ، ونكتب معادلات الحركة كما يلي :

$$q_i = q_i(t) \quad \text{حيث} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \text{و} \quad n \text{ عدد درجات حرية المجموعة}$$

ملاحظة : إن عدد معادلات حركة الجسم الصلب الطليق = 6 وعدد معادلات

حركة الجسم الصلب المقيد $6 >$

٧-١-١ : تعيين موضع جسم صلب تحليلياً :

نختار جملة إحداثية بعدها ثابتة (وسنختار السهولة جملة إحداثية ديكارتية قائمة ومباشرة) ونختار جملة إحداثية متماسكة مع الجسم الصلب (تعد هذه الجملة تمديداً غير منته للجسم الصلب) ، نرمز للجملة التي بعدها ثابتة ، S_1 أو $o_1 x_1 y_1 z_1$ والجملة المتماسكة مع الجسم ، S أو $o x y z$. ومن الواضح أنه يكفي لتعيين موضع الجسم الصلب بالنسبة للجملة الاحداثية الثابتة فرضاً أن نعين موضع الجملة المتماسكة معه بالنسبة للجملة الثابتة . فإذا كانت M نقطة ما من الجسم الصلب ، فإنه لتعيين موضع M بالنسبة للجملة S_1 يكفي تعيين موضع هذه النقطة بالنسبة للجملة المتماسكة مع الجسم ، S ، وتعيين موضع الجملة المتماسكة مع الجسم بالنسبة لجملة المقارنة الثابتة S_1 .

لذا نفترض أن موضع النقطة M : $M \in S$ يتعين من مركبات متجه الموضع $\vec{OM} = (x, y, z)$ وهي مقادير غير تابعة للزمن لأن النقطة M لا تغير موضعها بالنسبة لـ S . ونفترض أن إحداثيات o مبدأ الجملة المتماسكة مع S هي $o_1 o = (x_0, y_0, z_0)$ وهي مقادير تابعة للزمن ، ونفترض أن جيوب تمام توجيه المحاور ox , oy , oz بالنسبة للجملة $o_1 x_1 y_1 z_1$ (وهي مركبات متجهات الوحدة $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) تعطى كما يلي :

$$\vec{k} = (\alpha_3, \beta_3, \gamma_3) \quad , \quad \vec{j} = (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) \quad , \quad \vec{i} = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$$

حيث $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ مقادير تابعة للزمن و $i = (1, 2, 3)$

فلتعيين موضع النقطة M من الجسم S يكفي إسقاط العبارة المتجهية :

$$\vec{OM} = \vec{O_1O} + \vec{O_1M} = \vec{O_1O} + x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

على المحاور الثابتة O_1x_1, y_1, z_1 الأمر الذي يعطى :

$$x_1 = x_0 + x\alpha_1 + y\alpha_2 + z\alpha_3$$

$$(1-1) \quad y_1 = y_0 + x\beta_1 + y\beta_2 + z\beta_3$$

$$z_1 = z_0 + x\gamma_1 + y\gamma_2 + z\gamma_3$$

أرى أن الاحداثيات (x_1, y_1, z_1) قد تمكنت بدلالة (12) وبسيطاً تالهاً للزمن هي x_0, y_0, z_0 و $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ حيث $i=1, 2, 3$ ، ولكن هذه المقادير مرتبطة بالعلاقات الست التالية :

$$\vec{k}^2 = 1, \vec{j}^2 = 1, \vec{i}^2 = 1 \quad (\vec{k}, \vec{j}, \vec{i} \text{ متجهات واحدة})$$

$$(1-2) \quad \vec{k} \cdot \vec{i} = 0, \vec{j} \cdot \vec{k} = 0, \vec{i} \cdot \vec{j} = 0 \quad (oz, oy, ox \text{ محاور متعامدة متشعبة})$$

مما يدل على أن عدد الوسطاء المستقلة هو ستة ، وهذا يوافق ما سبق أن ذكر من أن عدد درجات حرية الجسم الطليق ست ، وبالتالي يتعين للجسم ستة إحداثيات مستقلة يمكن اختيارها أي من الوسطاء $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ و x_0, y_0, z_0 أو أي وسطاء غيرها مرتبطة بها . وتأخذ معادلات حركة الجسم الصلب الطليق الشكل : $q_s = q_s(t)$ حيث $s=1, 2, \dots, 6$ النظرية الأساسية لحركة الجسم الصلب :

- الشرط اللازم والكافي كي تتحرك مجموعة مادية كمجموعة متماسكة (كجسم صلب) هو أن يتماوى ممقطا سرعتي نقطتين ما من المجموعة على المستقيم الواصل بين هاتين النقطتين .

البرهان :

- لزوم الشرط : نفترض أن المجموعة S متماسكة وأن $\forall A, B \in S$ فمن تعريف الجسم الصلب يمكن أن نكتب علاقة البعد الثابت بين النقطتين A و B بالشكل

$$\vec{AB}^2 = C \quad \text{نشتق طرفي العلاقة لنجد} \quad 2\vec{AB} \frac{d\vec{AB}}{dt} = 0$$

$$\vec{AB} (\vec{V}_B - \vec{V}_A) = 0 \quad \text{ومنه}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{V_B} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{V_A}$$

$$|\overrightarrow{AB}| \text{proj}_{\overrightarrow{AB}} \overrightarrow{V_B} = |\overrightarrow{AB}| \text{proj}_{\overrightarrow{AB}} \overrightarrow{V_A} \quad \text{أي أن}$$

ومسألة فإن مسقط سرعة النقطة A على المستقيم AB يساوي مسقط سرعة النقطة B على المستقيم AB .

- كفاية الشرط : لنفترض أن A و B نقطتان ما من مجموعة مادية تتحرك بحيث يبقى مسقط سرعة النقطة A على المستقيم AB مساوياً لمسقط سرعة النقطة B على هذا المستقيم ولنثبت أن المجموعة المادية متماسكة . من أجل ذلك نكتب

$$\text{proj}_{\overrightarrow{AB}} \overrightarrow{V_B} = \text{proj}_{\overrightarrow{AB}} \overrightarrow{V_A}$$

نضرب طرفي العلاقة بـ $|\overrightarrow{AB}|$ فنجد :

$$|\overrightarrow{AB}| \text{proj}_{\overrightarrow{AB}} \overrightarrow{V_B} = |\overrightarrow{AB}| \text{proj}_{\overrightarrow{AB}} \overrightarrow{V_A} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{V_B} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{V_A} \Rightarrow \overrightarrow{AB} (\overrightarrow{V_B} - \overrightarrow{V_A}) = 0$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} \frac{d\overrightarrow{AB}}{dt} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AB}^2 = \text{ثابت}$$

وهو المطلوب إثباته

ملاحظة : إن النظرية السابقة هي نتيجة مباشرة لثبات الأبعاد المتبادلة بين نقط أي مجموعة متماسكة . إذ من الواضح أنه لو اختلفت قيمة مسقط سرعة النقطة A على المستقيم AB عن قيمة مسقط سرعة النقطة B من المجموعة على المستقيم AB لتحركت النقطتان بحيث يعتمدان أو تقتربان من بعضهما ولما بقي البعد بينهما ثابتاً .

نتيجة : إن معرفة سرع ثلاث نقط غير واقعة على استقامة واحدة من جسم صلب تكفي لتحديد سرعة أي نقطة من هذا الجسم لا تقع على استقامة واحدة مع أي نقطتين من النقط الثلاث

الإثبات : لنكن A و B و C ثلاث نقط من جسم صلب علمت سرعة كل منها ولنكن M نقطة ما من الجسم فإذا وصلنا M إلى النقط الثلاث A و B و C فإن النظرية الأساسية تعين لنا مساقط سرعة النقطة M على المناحي الثلاثة المختلفة MA و MB و MC وهذا يكفي لتحديد سرعة النقطة M في الفراغ بشكل وحيد .

تمارين

١- ثلاث نقط من جسم صلب يتحرك بحيث تكون مواضع ومتجهات

سرع هذه النقط في لحظة t معلومة وهي :

$$\begin{aligned} A &= (0, 0, 0) & V_A &= (2, 1, -3) \\ B &= (1, 1, 0) & V_B &= (0, 3, -1) \\ C &= (1, 1, 1) & V_C &= (-1, 2, -1) \end{aligned}$$

عين متجهات سرع النقط التالية في اللحظة المذكورة

$$M_1(2, 2, 0) , M_2(1, 1, -1) , M_3(1, 2, 0) , M_4(1, 0, 1)$$

٢- بفرض A, B, C ثلاث نقط من جسم صلب احداثيات النقط وسرعها في

لحظة t هي :

$$\begin{aligned} A &= (0, 0, 0) & V_A &= (2, 1, -3) \\ B &= (1, 1, 0) & V_B &= (0, 3, -1) \\ C &= (-1, -1, 0) & V_C &= (1, 2, -5) \end{aligned}$$

عين سرع النقط :

$$M_1(1, 1, -1) , M_2(1, 2, 3)$$

٣- ليكن لدينا ثلاث نقط A, B, C من مجموعة مادية احداثياتها وسرعها

في لحظة t من الزمن هي :

$$\begin{aligned} A &= (0, 0, 1) & V(A) &= (0, 1, 2) \\ B &= (1, 1, 0) & V(B) &= (0, 0, 1) \\ C &= (1, 2, -1) & V(C) &= (-1, 1, 1) \end{aligned}$$

هل المجموعة التي اخذت منها هذه النقط متماثلة أم لا ؟ ولماذا ؟

٤- صفحة بشكل مثلث متساوي الساقين OAB رأسها O ثابت . برهن أن قياس مسقط

سرعة النقطة A على المستقيم OB يساوي قياس مسقط سرعة النقطة B على OA .





الفصل الثاني

الحركة الانسحابية للجسم الصلب

- توزيع السرعة
- توزيع التسارعات
- الحركة المماسية لحركة انسحابية
- الدراسة التحليلية للحركة الانسحابية للجسم الصلب



١-٢-١ تعريف : نقول إن الجسم الصلب يتحرك بحركة انسيابية إذا بقي أي متجه من الفراغ المتماثل مع الجسم الصلب مساوياً لنفسه أثناء الحركة

فإذا فرضنا O و M نقطتين ما من الجسم الصلب فإن التعريف السابق يقتضي ما يلي :

الجسم الصلب $\forall O, M \in$ فإن : ثابت $\overrightarrow{OM} = \vec{C}$

أي أن : $\overrightarrow{o_1 M} - \overrightarrow{o_1 O} = \vec{C}$ حيث O_1 نقطة ثابتة في الفراغ

ومنه : $\vec{r}(M) = \overrightarrow{o_1 M} = \overrightarrow{o_1 O} + \vec{C}$ (١-٢)

أي أن معرفة موضع النقطة O تكفي لتعيين موضع النقطة M أيًا كانت هذه النقطة من الجسم الصلب ، كما أن مسار أي نقطة M ينتج عن مسار النقطة O بالسحاب بمتجه ثابت $\vec{C}$.

إن عدد درجات حرية جسم صلب يتحرك بحركة انسيابية هو ثلاث ، لأن عدد درجات حرية الجسم الصلب الطليق هو ست درجات كما نعلم ، فإذا قيدنا ملحي أي متجه تكون قد أضفنا ثلاث علاقات ناتجة عن القيود مما يبقى للجسم الصلب ثلاث درجات حرية في هذه الحالة . والمناقشة السابقة تدل على أنه يمكن اختيار إحداثيات نقطة ما O من الجسم كإحداثيات معممة وتعيين حركة الجسم الانسيابية بالتالي بثلاث معادلات حركة يمكن أن تكتب كما يلي :

$$x_0 = x_0(t) \quad , \quad y_0 = y_0(t) \quad , \quad z_0 = z_0(t)$$

٢-٢-١ توزيع السرعة : استنتجنا من تعريف الحركة الانسيابية للجسم الصلب أن

المتجه $\overrightarrow{OM}$ يبقى ثابتاً أثناء الحركة أيًا كانت النقطتان O و M من الجسم ، وباشتقاق المتجه الثابت $\overrightarrow{OM}$ نجد :

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{M}}{dt} - \frac{d\vec{O}}{dt} = \vec{V}(M) - \vec{V}(O) = \vec{0}$$

أي : $\vec{V}(M) = \vec{V}(O)$ (٢-٢)

مما يدل على أن سرع جميع نقط الجسم الصلب متساوية في كل لحظة

نتيجة : إن خاصية تساوي سرع نقط الجسم الصلب المتحرك بحركة انسيابية

هي خاصية مميزة ، بمعنى أنه لو تحركت أي مجموعة مادية وكانت سرع جميع نقطها

متساوية في كل لحظة كانت المجموعة متماسكة وحركتها انسحابية .

الإثبات : بفرض O و M نقطتين ما من مجموعة مادية تتحرك بحيث يبقى

$$\vec{V}(M) = \vec{V}(O) \quad \text{في كل لحظة}$$

$$\frac{d\vec{OM}}{dt} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{V}(M) - \vec{V}(O) = \vec{0} \quad \text{أي :}$$

$$\vec{OM} = \vec{C} \quad \text{ومنه :}$$

إن تسجلات طويلة المتجه $\vec{OM}$ يدل على أن الجسم صلب وثبات ملحي المتجه $\vec{OM}$ يدل على أن الحركة انسحابية ، وبذلك يتم المطلوب ،

١-٢-٣ توزيع التسارعات

رأينا أنه مهما كانت النقطة M من الجسم الصلب فإن $\vec{V}(M) = \vec{V}(O)$

$$\vec{\Gamma}(M) = \vec{\Gamma}(O) \quad \text{وباشتقاق العلاقة الأخيرة نجد}$$

أي أن تسارعات جميع نقط الجسم الصلب المتحرك بحركة انسحابية ، متساوية فيما بينها في كل لحظة

- ملاحظة : إن تساوي متجهات التسارع لنقط مجموعة مادية هو شرط غير

كاف كي تكون المجموعة متماسكة و تكون حركتها انسحابية .

في الحقيقة بكاملة طرفي المساواة $\vec{\Gamma}(M) = \vec{\Gamma}(O)$ نجد :

$$\vec{V}(M) = \vec{V}(O) + \vec{a} \quad \text{وبالكاملة ثانية نجد} \quad \vec{OM} = \vec{at} + \vec{a_1} \quad (٣ - ٢)$$

مما يدل على أن المجموعة غير متماسكة وأن حركتها ليست انسحابية.

أما إذا تحركت مجموعة متماسكة بحيث تبقى متجهات التسارع لنقطها متساوية ، كانت

حركتها انسحابية لأن كون المجموعة متماسكة يستدعي اندام $\vec{a}$ في العلاقة (٣-٢) وهذا

بدوره يستدعي صحة العلاقة $\vec{V}(M) = \vec{V}(O)$ التي تدل على أن حركة المجموعة

الانسحابية.

١-٢-٤ الحركة المماسية لحركة انسحابية

إذا تساوت سرع جميع نقط جسم صلب في لحظة واحدة فقط فإننا نقول إن حركة

الجسم مماسية في هذه اللحظة لحركة انسحابية . وتكون متجهات تسارع نقط المجموعة غير

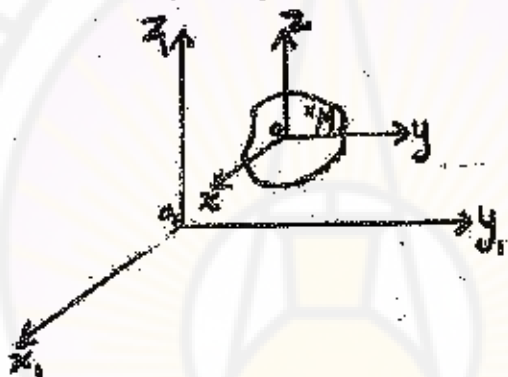
متساوية في تلك اللحظة في الحالة العامة .

١-٢-٥ الدراسة التحليلية للحركة الانسحابية للجسم الصلب .

تعيين الموضع : من أجل تعيين الموضع تحليلياً نبدأ باختيار جمل إحداثية مناسبة . فنختار هنا جملة إحداثيات ديكارتية مباشرة وثلاثة $o_1 x_1 y_1 z_1$ ، ونفرض جملة إحداثيات ديكارتية مباشرة متماسكة مع الجسم الصلب بحيث تكون محاورها $o x y z$ موازية للمحاور الثابتة $o_1 x_1 y_1 z_1$ وهذا ممكن في هذه الحالة لأن المتجهات تحافظ على منحائها في الحركة الانسحابية كما رأينا.

إن موضع أي نقطة M من الفراغ المتماسك مع الجسم الصلب يتعين من العلاقة :

$$\forall M : \quad \begin{aligned} \vec{o_1 M} &= \vec{o_1 o} + \vec{o M} \\ \vec{o_1 M} &= \vec{o_1 o} + x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k} \end{aligned} \quad (٤-٢)$$



الشكل (١)

حيث (x, y, z) هي إحداثيات النقطة M بالنسبة للجملة المتماسكة مع الجسم فهي بالتالي مقادير ثابتة . باسقاط العلاقة (٤-٢) على جملة الإحداثيات الثابتة مع ملاحظة أن :

$$\vec{k} = \vec{k}_1, \quad \vec{j} = \vec{j}_1, \quad \vec{i} = \vec{i}_1$$

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x_0 + x \\ y_1 &= y_0 + y \\ z_1 &= z_0 + z \end{aligned} \right\} \text{ لجسم :} \quad (٥-٢)$$

حيث (x_0, y_0, z_0) هي إحداثيات النقطة o من الجسم وهي الإحداثيات المعممة للجسم أي هي الوسيط المستقلة الثلاثة الكافية لتعيين موضع أي نقطة من الجسم الصلب المتحرك بحركة انسحابية . وتمثل العلاقات الزمنية $x_0(t)$ ، $y_0(t)$ ، $z_0(t)$

معادلات الحركة في هذه الحالة ، وعندما ، كما هو واضح ، يساوي عدد درجات حرية الجسم . بتعويض z_0 , y_0 , x_0 بتأدية الزمن فإن العلاقات (٢-٥) تمثل المعادلات الوسيطية لمسار النقطة M ويتضح من المعادلات (٢-٥) أن مسار النقطة M ينتج عن مسار النقطة O بانسحاب ، ومتجه الانسحاب هو $\vec{OM} = (x, y, z)$ ثابت .

- تعيين السرعة : يكفي ، لتعيين مركبات متجه سرعة النقطة M ، اشتقاق

متجه الموضع $\vec{OM}$ للحصول على:

$$(٢-٦) \quad \vec{V}(M) = (x'_1 = x'_0, \quad y'_1 = y'_0, \quad z'_1 = z'_0)$$

مما يوضح ثانية أن

$$\vec{V}(M) = \vec{V}(O)$$

- تعيين التسارعات : نحصل على مركبات متجه التسارع بالاشتقاق المباشر.

لمركبات متجه السرعة للنقطة المطلوبة فنكتب :

$$(٢-٧) \quad \vec{\Gamma}(M) = (x''_1 = x''_0, \quad y''_1 = y''_0, \quad z''_1 = z''_0)$$

يتضح مما سبق أن دراسة الحركة الانسحابية للجسم الصلب تعاد إلى دراسة حركة نقطة مادية واحدة . ولا بد من الإشارة هنا إلى أن مسارات نقط الجسم الصلب في الحركة الانسحابية يمكن أن تكون أي منحنيات فرائية فيمكن أن تكون مستقيمت أو دوائر أو أي منحنيات أخرى.

وأمثلة الحركة الانسحابية في الحياة العملية كثيرة جداً فالمصاعد والمحافلات والسلالم المتحركة وكثير من ألعاب الأطفال كل هذه تتحرك بحركات انسحابية .

تمارين

- ١ - قرص دائري نصف قطره a يتحرك بحركة انسحابية معادلات حركته تعطى كما يلي: $x_0 = t$, $y_0 = \sin t$, $z_0 = \cos t$ عين مسار نقطة M من محيط القرص وسرعة وتصارع هذه النقطة.
- ٢ - يتحرك جسم صلب S بحركة انسحابية ، معادلات حركة مركز عطائه C هي : $x = a \cos(kt - \alpha)$, $y = b \cos kt$, $z = 0$ نقطة M من الجسم احداثياتها بالنسبة لجملة احداثيات متماسكة مع الجسم مبدؤها في C (مركز عطائه) هي : $\overrightarrow{CM} = (1, 0, 1)$ والمطلوب:
 - ١- عين مسار النقطة C ومسار النقطة M .
 - ٢- عين متجه سرعة النقطة M ومتجه تسارعها.
 - ٣- كيف يتغير مسار النقطة C إذا تغيرت α في الفترة $[0, 2\pi]$.
- ٣ - تعطى معادلات حركة ثلاث نقط بالشكل التالي:

$$\begin{aligned} x(o_1) &= \cos t & y(o_1) &= \sin t & z(o_1) &= 0 \\ x(o_2) &= \cos t - 2 & y(o_2) &= \sin(\pi - t) & z(o_2) &= 2 \\ x(o_3) &= -2 & y(o_3) &= 2 \sin t & z(o_3) &= 1 \end{aligned}$$
 والمطلوب:
 - ١- عين متجهات السرعة لكل من النقط الثلاث o_1 , o_2 , o_3 .
 - ٢- هل تنتمي النقطتان o_1 , o_2 إلى جملة متماسكة ؟ وهل تتحرك هذه الجملة بحركة انسحابية ؟
 - ٣- أعد السؤال السابق من أجل النقطتين o_2 , o_3 .
 - ٤- هل تولف النقط الثلاث مجموعة متماسكة ؟
 - ٤- علمت مواضع ومسرع النقط التالية:

$$\begin{aligned} A(0, 0, 0) & \quad B(1, 1, 0) & C(1, 0, 1) & D(1, 1, 1) \\ \overrightarrow{V_A}(2, 1, -3) & \quad \overrightarrow{V_B}(0, 3, -1) & \overrightarrow{V_C}(0, 0, 1) & \overrightarrow{V_D}(-1, 2, -1) \end{aligned}$$
 أي من هذه النقط تولف مجموعة متماسكة



الفصل الثالث

الحركة الدورانية لجسم صلب حول محور ثابت

- شعاع الدوران وشعاع التسارع الزاوي
- توزيع السرعة
- توزيع التسارعات
- الدراسة التحليلية للحركة
- الحركة المماسية لحركة دورانية



١-٣-١ تعريف: الحركة الدورانية لجسم صلب حول محور ثابت هي حركة جسم صلب تبقى نقطتان فيه ثابتتين أثناء الحركة. وتكون نقط المستقيم الواصل بين النقطتين بالتالي ثابتة ويكون للجسم في هذه الحالة درجة حرية واحدة ، ويتمين موضع أي نقطة من الجسم (أو من الفراغ المتماثل مع الجسم) بدلالة وسيط واحد ، هو الإحداثي المعمم للحركة . وأبسط اختيار للإحداثي المعمم ، الزاوية θ ، التي يصنعها نصف مستو متحرك متماسك مع الجسم يحوي المستقيم الثابت ، مع مستو ثابت في الفراغ يمر أيضاً من المستقيم ذاته . تتعين حركة الجسم في هذه الحالة ، بمعادلة حركة واحدة من الشكل $\theta = \theta(t)$ والتحديد الميكانيكي للذي يقيد حركة الجسم في كل من النقطتين الثابتتين يدعى المفصل الأسطواني. وبوجه المستقيم المار من النقطتين الثابتتين بحيث يكون دوران الجسم حوله مباشراً ويدعى هذا المستقيم السوجه محور الدوران .



الشكل (٢)

- ينتج من تعريف الحركة الدورانية حول محور ثابت ، أن مسار أي نقطة من الجسم هو دائرة يقع مركزها على محور الدوران ، ويمامد مستويها هذا المحور ، ويكون نصف قطرها مساو لبعد هذه النقطة عن محور الدوران . وإذا دارت نقطة ما بزاوية قدرها $\Delta\theta$ فسيان جميع نقط الفراغ المتماثل مع الجسم تدور بالمقدار ذاته $\Delta\theta$ و تقطع بالتالي أقواساً من دوائر تقابل زوايا مركزية متساوية تساوي $\Delta\theta$.

١-٣-٢ شعاع الدوران وشعاع التسارع الزاوي:

نسعى المشتق بالنسبة للزمن للزاوية θ السرعة الزاوية للحركة الدورانية حول

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

محور ثابت ونكتب:

ونعرف شعاع الدوران (أو شعاع السرعة الزاوية) في هذه الحالة بأنه الشعاع $\vec{\omega}$ الذي يحصل على محور الدوران ، طويلته تساوي قيمة السرعة الزاوية ، وجهته بحيث يكون الدوران حوله مباشراً. تسمى الحركة دورانية منتظمة إذا كانت طويلة شعاع الدوران ثابتة .
 نسمي المشتق الثاني للزاوية θ بالنسبة للزمن أو المشتق الأول للسرعة الزاوية ، التسارع

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

الزاوي ، ونكتب:

ويعرف شعاع التسارع الزاوي بأنه المشتق الزمني لشعاع الدوران أي : $\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$

وهو شعاع يحمل على محور الدوران أيضاً طويلته تساوي θ'' ويوافق شعاع الدوران بالجهة إذا كانت الحركة متساوية ، وبخلافه بالجهة إذا كانت الحركة متعاطفة ، ويساوي الصفر إذا كانت الحركة متقطعة . (أي إذا كانت طويلة شعاع الدوران ثابتة) ، وتكون طويلته ثابتة إذا كانت الحركة متغيرة بالنظام .

٣-٣-١ توزيع السرعة في الجسم:

لتكن M نقطة ما من الجسم S (أو من الفراغ المتماثل مع الجسم) لنفترض أننا أن مسار هذه النقطة دائرة يقع مركزها على محور الدوران .

إن شعاع سرعة النقطة M كما نعلم يحمل على مماس المماس أي يحمل على مماس الدائرة وإياديه يساوي حاصل جداء السرعة الزاوية بنصف قطر الدائرة ويوجه باتجاه الدوران على هذه الدائرة . يتضح من ذلك أن هذا الشعاع ينطبق على الجداء الخارجي لشعاع الدوران

بالشعاع $\vec{OM}$ حيث O نقطة ما من محور الدوران . لذا نكتب :

$$\vec{V}(M) = \vec{\omega} \times \vec{OM} \quad (٣-٣)$$

حيث: $\vec{\omega}$ شعاع الدوران ، Δ محور الدوران ، $(O \in \Delta)$



الشكل (٣)

الفرض أن m هي مسقط M على محور الدوران ، يمكننا دوماً كتابة العلاقة

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mM}$$

إذا عوضنا في العلاقة (١-٣) بقيمتها نحصل على :

$$\vec{V}(M) = \vec{\omega} \times (\overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mM})$$

ولما كان $o, m \in \Delta$ فإن $\overrightarrow{Om} \parallel \vec{\omega}$ و $\vec{\omega} \times \overrightarrow{Om} = \vec{0}$ وبالتالي ينتج أن:

$$\vec{V}(M) = \vec{\omega} \times \overrightarrow{mM} \quad (٢-٣)$$

حيث $\vec{\omega}$ شتاع الدوران ، m مسقط M على محور الدوران . وهو الشكل الثاني لعبارة السرعة في الحركة الدورانية حول محور

١-٣-٤ توزع التسارعات في الجسم :

لتكن M نقطة ما من الجسم (أو من الفراغ المتماثل مع الجسم) . إن شتاع M

كما نعلم هو المشتق بالنسبة للزمن لشتاع السرعة $\vec{V}(M)$: نشق طرفي العلاقة (١-٣) فنجد :

$$(٣-٣) \quad \vec{\Gamma}(M) = \frac{d\vec{V}(M)}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \overrightarrow{Om} + \vec{\omega} \times \frac{d\overrightarrow{Om}}{dt}$$

ولكن $\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\varepsilon}$ وهو شتاع التسارع الزاوي ، و $\frac{d\overrightarrow{Om}}{dt} = \vec{V}(M)$ بالتعويض في (٣-٣) نجد :

$$(٤-٣) \quad \vec{\Gamma}(M) = \vec{\varepsilon} \times \overrightarrow{Om} + \vec{\omega} \times \vec{V}(M)$$

لنعوض $\vec{V}(M)$ بقيمتها من العلاقة (٢-٣) فنجد :

$$\vec{\Gamma}(M) = \vec{\varepsilon} \times \overrightarrow{Om} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \overrightarrow{mM})$$

طبقاً لعلاقة جيبس على الجداء الخارجي المضاعف مع ملاحظة أن $\vec{\omega} \perp \overrightarrow{mM}$ فنحصل

$$(٥-٣) \quad \vec{\Gamma}(M) = \vec{\varepsilon} \times \overrightarrow{Om} - \omega^2 \overrightarrow{mM} \quad \text{على العلاقة}$$

حيث : $\vec{\varepsilon}$ شتاع التسارع الزاوي ، $o \in \Delta$ ، m مسقط M على Δ .

بالحصول من عبارة التسارع (٥-٣) : أن الحد الأول $\vec{\varepsilon} \times \overrightarrow{Om}$ يوازي $\vec{V}(M)$ أي يمس على مماس الدائرة ، مسار النقطة M . تدعى هذه المركبة للتسارع ، التسارع

المماسسي. كما يلاحظ أن الحد $\omega^2 \overline{mM}$ هو شعاع يحمل على نصف قطر الدائرة مسار النقطة M وينجه نحو مركزها. تدعى هذه المركبة للتسارع ، التسارع الناطمي . أي أن تسارع النقطة M هو محصلة تسارعين : تسارع مماسي و تسارع ناظمي ونكتب

$$\vec{\Gamma}(M) = \vec{\Gamma}_T(M) + \vec{\Gamma}_N(M)$$

إذا كانت الحركة الدورانية منتظمة أي إذا كانت السرعة الزاوية ω ثابتة فإن قيمة التسارع الزاوي σ تصبح صفراً ، ويلغى بالتالي التسارع المماسي للحركة ويغدو تسارع أي نقطة من الجسم ناظماً .

١ - ٣ - ٥ الدراسة التحليلية للحركة :

١ - تعيين الموضع : نختار في هذه الحالة جملة أحداثيات ديكارتية قائمة ثابتة ينطبق قسماً المحور $o_1 z_1$ على محور الدوران الثابت ويكون المستوي $x_1 o_1 y_1$ بالقياس عمودياً على محور الدوران .

ونختار جملة أحداثيات ديكارتية قائمة متماسكة مع الجسم المنحرك بحيث ينطبق فيها المحور oz على محور الدوران (أي على المحور $o_1 z_1$) وتطبق النقطة o على المبدأ o_1 فيكون المستوي xoy واقفاً في المستوي الثابت $x_1 o_1 y_1$ ويصنع المحور ox زاوية θ مع المحور $o_1 x_1$.

إن موضع نقطة ما M من الجسم تتعين تحليلياً بإسقاط العلاقة الشعاعية :

$$\overline{o_1 M} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$$

على جملة المحاور الثابتة الأمر الذي يعطي :

$$x_1 = x \cos \theta - y \sin \theta$$

$$y_1 = x \sin \theta + y \cos \theta \quad (١-٣)$$

$$z_1 = z$$

وعلياً أن لا ننسى أن (x, y, z) مقادير ثابتة غير تابعة للزمن . ويحدد الموضع بالتالي بدلالة وسيط واحد هو θ . فإذا علمت معادلة الحركة الوحيدة للجسم $\theta = \theta(t)$ فإننا نعوض θ بدلالة الزمن t في العلاقات (١-٣) لنحصل على معادلات حركة النقطة M :

$$x_1 = x_1(t) , \quad y_1 = y_1(t) , \quad z_1 = z_1(t) \quad (٧-٣)$$

ويحذف الوسيط الوحيد t بين المعادلات الثلاث (٧-٣) لنحصل على معادلتين ديكارتيين

الديكارتيان لمسار النقطة M .
 $f_1(x_1, y_1, z_1) = 0$ و $f_2(x_1, y_1, z_1) = 0$ هما المعادلتان

٢- تعيين السرعة : نعلم أن متجه السرعة هو مشتق متجه الموضع لذا يمكن أن

$$\vec{V}(M) = \frac{d\vec{OM}}{dt} = x_1' \vec{i}_1 + y_1' \vec{j}_1 + z_1' \vec{k}_1 \quad \text{نكتب :}$$

وهذه هي مركبات متجه السرعة على جملة المحاور الثابتة في الفراغ .
 يمكن الحصول على هذه المركبات أيضاً بإسقاط عبارة متجه السرعة على المحاور الثابتة
 فنكتب :

$$(٣-٨) \quad \vec{V}(M) = \vec{\omega} \times \vec{OM} = \begin{vmatrix} \vec{i}_1 & \vec{j}_1 & \vec{k}_1 \\ 0 & 0 & \omega \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix} = -\omega y_1 \vec{i}_1 + \omega x_1 \vec{j}_1$$

كما يمكن الحصول على مركبات متجه السرعة على جملة المحاور المتحركة مع الجسم
 بطريقة الإسقاط فنكتب :

$$(٣-٩) \quad \vec{V}(M) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega = \theta' \\ x & y & z \end{vmatrix} = -\omega y \vec{i} + \omega x \vec{j}$$

يمكن الانتقال من العلاقات (٣-٨) إلى العلاقات (٣-٩) وبالعكس بإسقاط متجهات
 الواحدة ($\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1$) على المحاور ($\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$) أو بالعكس .

٣- تعيين التسارع : لما كان متجه تسارع النقطة M من الجسم هو المشتق
 الزمني لمتجه السرعة . كان بالإمكان كتابة العلاقة :

$$\vec{\Gamma}(M) = \frac{d\vec{V}(M)}{dt} = \frac{d^2 \vec{OM}}{dt^2}$$

وهذه العلاقة تعطينا مركبات متجه التسارع على المحاور الاحداثية الثابتة :

$$\vec{\Gamma}(M) = x_1'' \vec{i}_1 + y_1'' \vec{j}_1 + z_1'' \vec{k}_1$$

ويمكن الحصول على مركبات متجه تسارع النقطة على الجملة الثابتة أو على الجملة

$$\vec{\Gamma}(M) = \vec{\varepsilon} \times \vec{OM} - \omega^2 \vec{OM} \quad \text{العلاقة :}$$

$$\vec{\Gamma}(M) = (0, 0, \varepsilon) \times (x_1, y_1, z_1) - \omega^2 (x_1, y_1, 0) \quad \text{فجد}$$

$$= (-\varepsilon y_1 - \omega^2 x_1) \vec{i}_1 + (\varepsilon x_1 - \omega^2 y_1) \vec{j}_1 + (0) \vec{k}_1$$

$$\vec{\Gamma}(M) = (0, 0, \varepsilon) \times (x, y, z) - \omega^2 (x, y, 0) \quad \text{أو}$$

$$= (-\varepsilon y - \omega^2 x) \vec{i} + (\varepsilon x - \omega^2 y) \vec{j} + (0) \vec{k}$$

٦-٣-٤ الحركة المماسية لحركة دورانية :

إذا لعدمت مرع نقط مستقيم متماسك مع جسم صلب في لحظة واحدة فقط نقول إن حركة الجسم في هذه اللحظة مماسة لحركة دورانية حول محور ثابت ، وتعين سرع وتسارعات نقط الجسم في هذه اللحظة فقط كما مر آنفاً.

٦-٣-٥ مثال : لعين حركة نقطة من سطح الكرة الأرضية آخطين بعين الإعتبار

حركة الأرض حول محورها فقط .

الحل : إن الحركة دورانية حول محور ثابت ، بفرض M نقطة ما من سطح الكرة فإن مسار النقطة M هي دائرة عرض ، مركزها يقع على محور الدوران نصف قطرها

$r = m M$. إن متجه سرع M يحمل على مماس الدائرة ويتجه باتجاه دوران الكرة

الأرضية وهو دوران مباشر . والقيمة العددية للسرعة هي : $v = r \omega$ حيث :

$$\omega = \frac{2\pi}{24 \times 3600} \quad (\text{راديان / ثانية}) . \text{ أما تسارع النقطة } M \text{ فهو ناظمي لأن}$$

الحركة منتظمة وبحمل على $M m$ ويساوي $\vec{\Gamma}(M) = -\omega^2 \overrightarrow{m M}$



الشكل (٤)

لتعيين الموضع والسرعة تحليلياً نختار جملة محاور ثابتة ينطبق فيها Oz_1 على محور

الأرض ونختار جملة محاور متماسكة مع الكرة الأرضية بحيث ينطبق Oz على محور

الأرض أيضاً . ونختار المحور ox في مستوى دائرة الطول المارة من النقطة M .
ونفرض الزاوية بين ox و ox_1 : θ

(١) من الواضح أن إحداثيات النقطة M بالنسبة لجملة المحاور $ox y z$ المتماصة مع

$$x = R \cos \alpha \quad y = 0 \quad z = R \sin \alpha$$

الارض هي : R نصف قطر الأرض ، α زاوية عرض مكان M أي الزاوية بين $\overrightarrow{ox}$ و $\overrightarrow{OM}$.

إن معادلة الحركة في هذه الحالة تتعين من العلاقة :

$$\theta' = \omega \quad \Rightarrow \quad \theta = \int \omega dt \quad \theta = \omega t$$

وذلك بإختيار مبدأ للزمن هو اللحظة التي كان فيها ox منطبقاً على ox_1 .

وبتعيين موضع النقطة M بالنسبة لجملة الإحداثيات $ox_1 y_1 z_1$ التي افترضناها ثابتة من

إسقاط العلاقة $\overrightarrow{OM} = x \vec{i} + (0) \vec{j} + z \vec{k}$ على المحاور $ox_1 y_1 z_1$ الأمر الذي يعطي :

$$\begin{aligned} x_1 &= (R \cos \alpha) \cos \theta = (R \cos \alpha) \cos \omega t \\ y_1 &= (R \cos \alpha) \sin \theta = (R \cos \alpha) \sin \omega t \\ z_1 &= R \sin \alpha = \text{ثابت} \end{aligned} \quad (١)$$

إن المعادلات (١) تمثل معادلات حركة النقطة M ويختلف الزمن بين هذه المعادلات نجد :

$$\begin{aligned} x_1^2 + y_1^2 &= R^2 \cos^2 \alpha = r^2 \\ z_1 &= R \sin \alpha \end{aligned}$$

وهي معادلات دائرة تقع في المستوى الذي يوازي $ox_1 y_1$ ويبعد عنه بالمقدار $R \sin \alpha$ ومركزها يقع على oz_1 و نصف قطرها $r = R \cos \alpha = M m$

(٢) السرعة : تتعين سرعة للنقطة M من إسقاط العلاقة :

$$\vec{V}(M) = \vec{\omega} \times \overrightarrow{OM}$$

على المحاور المتماصة مع الأرض الأمر الذي يعطي

$$(٢) \quad \vec{V}(M) = (0, 0, \omega) \times (R \cos \alpha, 0, R \sin \alpha) = \omega r \vec{j}$$

أما الإسقاط على المحاور الثابتة فيعطي :

$$\vec{V}(M) = (0, 0, \omega) \times (r \cos \omega t, r \sin \omega t, R \sin \alpha)$$

$$(٣) \quad = -\omega r \sin \omega t \vec{i}_1 + \omega r \cos \omega t \vec{j}_1$$

٣) التسارع : نحصل على مركبات متجه التسارع من إسقاط العلاقة :

$$\vec{\Gamma}(M) = -\omega^2 m \vec{M}$$

على المحاور المتماثلة مع الأرض الأمر الذي يعطي :

$$(٤) \quad \vec{\Gamma}(M) = -\omega^2 (x, 0, 0) = -\omega^2 R \cos \alpha \vec{i}$$

والإسقاط على المحاور الثابتة يعطي :

$$(٥) \quad \vec{\Gamma}(M) = -\omega^2 (x_1, y_1, 0) = -\omega^2 r \cos \omega t \vec{i}_1 - \omega^2 r \sin \omega t \vec{j}_1$$

الفصل الرابع

الحركة التوافقية لجسم صلب

- تعيين موضع نقط الجسم
- توزيع السرعة
- توزيع التسارعات
- الدراسة التحليلية للحركة



١-٤-١ تعريف :

نسمي حركة الجسم الصلب حركة لولبية عامة إذا بقي حامل مستقيم واحد من الجسم ثابتاً . أي إذا تحرك الجسم بحيث يزلق مستقيم D متماسك مع الجسم على مستقيم D_1 ثابت في الفراغ . يتضح من هذا التعريف أن الجسم يستطيع في هذه الحالة الدوران حول المستقيم D_1 و الانسحاب على هذا المستقيم ويكون الجسم في هذه الحالة درجتا حرية ويتمين موضع الجسم بدلالة وسيطين : زاوية θ تحين الدوران ، والطول S الذي يعين الانسحاب على المستقيم D_1 .

نسمي حركة الجسم الصلب حركة لولبية دائرية (و سقتصر على دراستها فقط) وتدعوها حركة لولبية ، اختصاراً (إذا رسمت أي نقطة من الجسم لولباً دائرياً وكانت خطوة اللولب هي ذاتها لجميع نقط الجسم .

إن مسارات نقط الجسم كما يتضح من التعريف هي أوالب دائرية متساوية الخطى ترسم على أسطوانات دائرية محورها واحد وأنصاف أقطارها مختلفة .

إن للحركة في هذه الحالة درجة حرية واحدة لأن اللولب للدائري يتصف بالخاصة التالية :

إن الانسحاب وفق محور اللولب يتناسب مع زاوية الدوران حول هذا المحور .

أي أن الوسيطين θ و S مرتبطان بالعلاقة :

$$S = b\theta$$

مما يجعل الوسيط θ كائناً لتعيين موضع أي نقطة من الجسم .

تدعى الثابتة b (ثابتة التناسب) الخطوة المختزلة للولب . فإذا دارت نقطة ما على اللولب

$$B = 2\pi b$$

دورة كاملة فإنها تسحب بالمقدار الثابت

تدعى الثابتة B خطوة اللولب . ولا تختلف هذه الثابتة من نقطة إلى أخرى .

١-٤-٢ تعيين موضع نقط الجسم :

لما كان للجسم درجة حرية واحدة فإن للحركة معادلة واحدة

$$\theta = \theta(t) \quad \text{من الشكل (١-٤)}$$

ويتمين موضع نقطة ما M من الجسم بالعلاقة

$$\begin{aligned} \vec{oM} &= \vec{oO} + \vec{OM} \\ &= b\theta \vec{u} + \vec{OM} \end{aligned}$$

حيث O_1 نقطة ثابتة ، O نقطة متماسكة مع الجسم ، b الخطوة المختزلة للحركة اللولبية ، $\vec{u}$ متجه الواحدة لمحور الحركة اللولبية Δ ،

١-٤-٣ توزيع السرعة :

لتعيين سرعة نقطة M من الجسم نسقط النقطة على Δ محور الاسطوانة وعلى المستوي العمودي على هذا المحور ، ليكن m_1 مسقطها على Δ و m_2 مسقطها على المستوي ، نعلم أن سرعة m_1 تساوي مسقط سرعة M على Δ وسرعة m_2 ليست إلا مسقط سرعة M على المستوي لذا يمكن أن نكتب أن :

$$\vec{V}(M) = \vec{V}(m_1) + \vec{V}(m_2)$$

وبما أن حركة m_1 مستقيمة فإن سرعتها $S' \vec{u}$

وبما أن حركة m_2 في المستوي حركة دائرية شعاع دوراتها هو $\vec{\omega}$ فإن سرعتها تساوي

$$\vec{V}(m_2) = \vec{\omega} \times \vec{O_1 M}$$

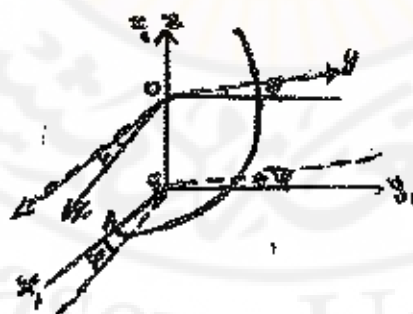
حيث O_1 نقطة ثابتة من المحور Δ فإن متجه سرعة M هو :

$$\vec{V}(M) = S' \vec{u} + \vec{\omega} \times \vec{O_1 M}$$

ولما كان $S' = b \theta'$ فإن $S' \vec{u} = b \vec{\omega}$ وتأخذ عبارة سرعة M الشكل :

$$(٢-٤) \quad \vec{V}(M) = b \vec{\omega} + \vec{\omega} \times \vec{O_1 M}$$

(حيث $\vec{\omega}$ هو متجه الدوران ، O_1 نقطة ثابتة من محور الحركة اللولبية ، b الخطوة المختزلة للولب)



شكل (٤)

١-٤-٤ توزيع التسارعات:

نحصل على تسارع النقطة M كما سبق وذكرنا . باستقاي متجه السرعة . الأمر الذي يعطي :

$$\vec{\Gamma}(M) = b \vec{\varepsilon} + \vec{\varepsilon} \times \vec{oM} + \vec{\omega} \times \vec{V}(M)$$

وبتعميد $\vec{V}(M)$ قيمته (١-٢) نجد :

$$(١-٢) \quad \vec{\Gamma}(M) = b \vec{\varepsilon} + \vec{\varepsilon} \times \vec{oM} - \omega^2 \vec{m_1 M}$$

حيث $\vec{\varepsilon}$ هو متجه التسارع الزاوي ويساوي $\frac{d\vec{\omega}}{dt}$ ويحمل على $\vec{\omega}$ ، m_1 مسقط النقطة M على المحور Δ .

١-٤-٥ الدراسة التحليلية للحركة:

إن الخطوة الأولى والهامة في الدراسة التحليلية هي اختيار جملة محاور نفترضها ثابتة وجملة محاور متماسكة مع الجسم المتحرك . نختار في هذه الحالة جملة ثابتة $o_1 x_1 y_1 z_1$ ينطبق فيها المحور $o_1 z_1$ على محور الحركة Δ . ونختار جملة متماسكة مع الجسم $ox_1 y_1 z_1$ ينطبق فيها أيضاً المحور ox_1 على محور الحركة Δ ويمدوها o على المحور الثابت $o_1 z_1$ فإذا افترضنا أن o كانت في لحظة البدء في الموضع o_1 فإن $\vec{o_1 o}$ يساوي في لحظة ما :

$$\vec{o_1 o} = S \vec{k_1} = b\theta \vec{k_1}$$

حيث θ هي الزاوية التي يصنعها المحور ox_1 مع منتهي يوازي المحور $o_1 x_1$ وتمثل θ الاحداثي المعسم للحركة وتكفي معرفة تابعة θ الزمن لتعین الحركة .

١- تعيين الموضع :

يتعين موضع النقطة M من إسقاط العلاقة :

$$\vec{o_1 M} = \vec{o_1 o} + \vec{oM}$$

$$\vec{o_1 M} = b\theta \vec{k_1} + x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k} \quad \text{أو}$$

على جملة المحاور الثلاثة $o_1 x_1 y_1 z_1$ فنجد :

$$x_1 = x \cos \theta - y \sin \theta$$

$$(1-1) \quad y_1 = x \sin \theta + y \cos \theta$$

$$z_1 = b \theta + z$$

فإذا عوضنا الوسيط الوحيد θ بتابعية الزمن t نحصل على معادلات حركة النقطة M ويحذف الوسيط t بين معادلات الحركة نحصل على معادلتى مسار النقطة M .



الشكل (٦)

٢- تعيين السرعة :

تتبعين مركبات متجه السرعة للنقطة M على المحاور الثابتة من اشتقاق إحداثيات هذه النقطة (x_1, y_1, z_1) فنكتب :

$$\vec{V}(M) = x_1' \vec{i}_1 + y_1' \vec{j}_1 + z_1' \vec{k}_1$$

أو من إسقاط العلاقة (٢-٤) الأمر الذي يعطى :

$$\vec{V}(M) = (0, 0, \theta') \times (x_1, y_1, z_1) + b\theta' (0, 0, 1)$$

$$(5-4) \quad \vec{V}(M) = -y_1 \theta' \vec{i}_1 + x_1 \theta' \vec{j}_1 + b\theta' \vec{k}_1 \quad \text{أي}$$

فسي حين تتعين مركبات متجه السرعة على المحاور المتماثلة مع الجسم (ox, y, z) من إسقاط العلاقة (٢-٤) على هذه المحاور فنجد :

$$\vec{V}(M) = \vec{\omega} \times \vec{OM} + b \omega \vec{k}$$

$$\vec{V}(M) = (0, 0, \theta') \times (x, y, z+s) + b\theta' \vec{k}$$

$$(٦-٤) \quad \vec{V}(M) = -y \theta' \vec{i} + x \theta' \vec{j} + b\theta' \vec{k}$$

حيث (x, y, z) مقادير ثابتة غير تابعة للزمن . b خطوة اللولب المستقلة .

٣ - تعيين التسارعات :

تعيين مركبات منجه التسارع على جملة الاحداثيات الثابتة باستقاي مركبات منجه

$$\vec{V}(M) = x_1'' \vec{i}_1 + y_1'' \vec{j}_1 + z_1'' \vec{k}_1 \quad ; \quad \text{السرعة على هذه المحاور فنكتب :}$$

أو من اسقاط عبارة التسارع (٣-٤) على المحاور الثابتة الأمر الذي يعطي :

$$(٧-٤) \quad \vec{V}(M) = (-\theta'' y_1 - \theta'^2 x_1) \vec{i}_1 + (\theta'' x_1 - \theta'^2 y_1) \vec{j}_1 + b \theta'' \vec{k}_1$$

ونحصل على مركبات التسارع على جملة المحاور المتناسكة باسقاط العبارة (٣-٤) على هذه المحاور فنجد :

$$(٨-٤) \quad \vec{V}(M) = (-\theta'' y - \theta'^2 x) \vec{i} + (\theta'' x - \theta'^2 y) \vec{j} + b \theta'' \vec{k}$$

١ - ٤ - ٦ مثال: تدور اسطوانة دائرية حول محورها بسرعة زاوية ثابتة $\omega = 2$

وينسحب محورها على حامله بسرعة منتظمة قيمتها $v = 6$ والمطلوب تعيين

الخطوة المختزلة للحركة اللولبية للأسطوانة ثم تعيين موضع ومعدار وسرعة وتساوع نقطة من الاسطوانة . احداثياتها بالنسبة لمحاور متناسكة مع الاسطوانة هي (٢, ٢, ٣) .

الحل : نعلم من خواص اللولب الدائري أن $S = b \theta$

$$v = s' = b \omega \quad \Leftrightarrow \quad \omega = \frac{v}{b} = \frac{6}{3} = 2$$

ومنه فإن خطوة اللولب المختزلة $b = 3$.

ومعادلة حركة الاسطوانة :

$$\theta = \int \omega dt = 2t$$

بفرض أن $\theta = 0$ في لحظة البدء

إن موضع النقطة M يتعين من (٤-٤) التي تعطي في هذه الحالة :

$$x_1 = 2 (\cos 2t - \sin 2t)$$

$$y_1 = 2 (\sin 2t + \cos 2t)$$

$$z_1 = 3 + 6t$$

وهي معادلات حركة النقطة M . ويحذف t بين هذه المعادلات الثلاث نجد :

$$(١) \quad x_1^2 + y_1^2 = 8 \quad \text{وهي معادلة سطح اسطوانة نصف قطرها } 2\sqrt{2} \text{ محورها } O_1 z_1$$

$$(٢) \quad x_1 = 2 \left(\cos \frac{z_1 - 3}{3} - \sin \frac{z_1 - 3}{3} \right)$$

إن (١) و (٢) هما معادلتا مسار النقطة M وهو منحن لولبي يرتسم على سطح الاسطوانة ببيان المعادلة (١) .

وتتبعين سرعة M من (٦-٤) بالشكل :

$$\vec{V}(M) = -4 \vec{i} + 4 \vec{j} + 6 \vec{k}$$

ويتبعين تسارع M من (٨-٤) بالشكل :

$$\vec{\Gamma}(M) = -8 \vec{i} - 8 \vec{j}$$



تمارين

- ١- يتحرك جسم صلب بحركة دورانية حول محور ثابت Δ حسب المعادلة :
- $$\varphi = \alpha \log \left(1 + \frac{\omega_0 t}{\alpha} \right) \quad (\omega_0, \alpha \text{ ثابتان})$$
- والمطلوب (١) تعيين متجه الدوران ومتجه التسارع الزلوي للجسم
- (٢) تعيين سرعة وتسارع نقطة من الجسم تبعد عن محور الدوران بالمقدار R
- (٣) تعيين قيمة كل من التسارع المماسي والتسارع الناطقي والتسارع الكلي
- (٤) تعيين القيمة العددية للسرعة و التسارع عندما تسعى t إلى اللانهاية .
- ٢- يتحرك أسطوانة دائرية حول محورها وفق المعادلة :
- $$\theta = a \left[t + \frac{1}{b} (e^{-bt} - 1) \right] \quad (a, b \text{ ثابتان موجبتان})$$
- والمطلوب (١) عين متجه الدوران ومتجه التسارع الزاوي للأسطوانة
- (٢) عين سرعة وتسارع نقطة من قاعدة الاسطوانة تبعد عن مركز القاعدة بالمقدار $r = \frac{R}{2}$ حيث R نصف قطر قاعدة الاسطوانة
- (٣) عين سرعة وتسارع نقطة من سطح الاسطوانة تبعد عن قاعدتها بالمقدار R
- (٤) ناقش قيم السرعة والتسارعات عندما يسقى t إلى اللانهاية
- ٣- يدور قرص دائري نصف قطره R ، حول قطره الثابت OA بسرعة زاوية $\omega = 2e^{-t}$ والمطلوب :
- (١) أوجد معادلة حركة القرص
- (٢) عين السرعة والتسارع لنقطة من محيط القرص تقع على القطر الذي يصنع زاوية $\frac{\pi}{3}$ مع القطر OA بالطريقة الشعاعية ثم بالطريقة التحليلية بالنسبة لمحاور متعامكة مع القرص وبالنسبة لمحاور ثابتة .
- ٤- أهد حل المسألة (١) بفرض أن الحركة لولبية خطوتها $b = \alpha$
- ٥- يتحرك قرص دائري نصف قطره a بحركة لولبية حول محوره بسرعة زاوية ثابتة

$\omega = \omega_0$ علماً أن محور القرص ينتقل بمقدار $2\omega_0$ عندما يتم للقرص دورة كاملة حول محوره والمطلوب :

١- تعيين مسار وسرعة وتسارع نقطة M من محيط القرص

٢- تعيين مسار وسرعة وتسارع نقطة تبعد عن مركز القرص بالمقدار $\frac{1}{2}a$



الفصل الخامس

الحركة الدورانية لجسم صلب حول نقطة ثابتة

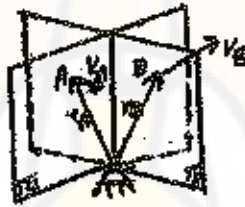
- نظرية أولر - دالامبير
- التخرج دون انزلاق والقاعدة والمتخرج
- توزيع السرعة في الحركة الدورانية حول نقطة
- توزيع التسارعات
- الدراسة التحليلية للحركة



١-٥-١ تعريف :

تكون حركة الجسم الصلب دورانية حول نقطة إذا ثبتت من الجسم نقطة واحدة . وقد رأينا أن الجسم في هذه الحالة ثلاث درجات حرية أي أن موضع أي نقطة من الجسم يتعين بدلالة ثلاث إحداثيات معينة فقط . وتكفي لدراسة حركة هذا الجسم معرفة ثلاث معدلات حركة زمنية . والقيد الذي يقيد حركة الجسم في هذه الحالة يدعى المفصل الكروي (أو المفصل النقطي) . وهذا القيد يسمح بدوران الجسم في جميع الاتجاهات حول مركز المفصل دون أن يسمح بانتقال المفصل

١-٥-٢ نظرية أولر - دالمبير (النظرية الأساسية للحركة الدورانية حول نقطة)
إذا ثبتت في الجسم الصلب نقطة واحدة فهناك في كل لحظة مستقيم يمر من تلك النقطة الثابتة تكون سرع نقطه معلومة في اللحظة المذكورة ، أي أن حركة الجسم في كل لحظة هي حركة دورانية حول محور يمر من النقطة الثابتة يدعى المحور الآلي للدوران .



الشكل (٧)

الاثبات : ليكن S الجسم الصلب O النقطة الثابتة ولتكن A, B نقطتين من S لا تقعان مع O في مستو واحد .

نفرض أن : $\vec{V}(A) \neq \vec{0}$ و $\vec{V}(B) \neq \vec{0}$ في لحظة ما t إذ لو كان $\vec{V}(A) = \vec{0}$ أو $\vec{V}(B) = \vec{0}$ في تلك اللحظة لكانت النظرية محققة وكان المحور الآلي للدوران هو OA أو OB .

و لنفرض أن $\vec{V}(A)$ لا ~~تحتوي~~ ^{تحتوي} $\vec{V}(B)$ وهذا ممكن دوماً لأنه لو كانت سرع جميع نقط الجسم متساوية في اللحظة المذكورة لكانت حركة الجسم السحابية وهذا غير ممكن لأن O ثابتة ولو كانت السرع متوازية وغير متساوية لما تحققت نظرية المساقط المتساوية .
نعلم من النظرية الأساسية لحركة الجسم الصلب (نظرية المساقط المتساوية) أن :

$$\text{proj}_{\pi_1} \vec{V}(A) = \text{proj}_{\pi_1} \vec{V}(O) = \vec{O}$$

الأمر الذي يعني أن $\vec{V}(A) = \vec{O}$ وهذا يخالف الفرض ، أو $\vec{V}(A) \perp \overline{OA}$ في اللحظة المذكورة . لتمرر مستويا π_1 من OA بحيث يعامد $\vec{V}(A)$:

نلاحظ أنه : $\forall A_1 \in \pi_1$ فإن $\vec{V}(A_1) = \vec{O}$ أو $\vec{V}(A_1) \perp \overline{OA_1}$ وذلك بتطبيق نظرية المعامد المتساوية على سرعتي النقطتين O و A_1

كما أن : $\vec{V}(A_1) = \vec{O}$ أو $\vec{V}(A_1) \perp \overline{AA_1}$

وذلك بتطبيق نظرية المعامد المتساوية أيضاً على سرعتي النقطتين A و A_1

الأمر الذي يثبت أن : $\vec{V}(A_1) = \vec{O}$ أو $\vec{V}(A_1) \perp \pi_1$ لأنها تعامد مستقيمين من

هذا المستوي . وبمحاكمة مماثلة نجد أن $\vec{V}(B) \perp \overline{OB}$ ، لتمرر مستويا π_2 يحوي OB

ويعامد $\vec{V}(B)$ فنجد أنه $\forall B_1 \in \pi_2$ فإن $\vec{V}(B_1) = \vec{O}$ أو $\vec{V}(B_1) \perp \pi_2$

ولما كان $\vec{V}(A)$ لا يوازي $\vec{V}(B)$ فإن π_1 لا يوازي π_2 وهما مشتركان بالنقطة

O فهما يشتركان بفصل مشترك Δ يمر من O . لنأخذ الآن نقطة ما O_1 من Δ ، بما

أن $O_1 \in \pi_1$ و $O_1 \in \pi_2$ $\Leftrightarrow \vec{V}(O_1) = \vec{O}$ أو $\vec{V}(O_1) = \vec{O}$

$\vec{V}(O_1) = \vec{O}$ تعامد كلا من π_1 و π_2 وهذا مستحيل أي أن

$\forall O_1 \in \Delta$ الأمر الذي يثبت النظرية .

٣-٥-١ التدرج دون انزلاق والقاعدة والمختبرج .

إذا تحرك جسم صلب بالنسبة لجسم صلب ثابت وكانت سرعت نقط تماس الجسمين

معدومة فإن حركة الجسم في اللحظة المذكورة تدعى حركة تدرج دون انزلاق . إذا وقعت

نقطة التماس على استقامة واحدة كان الحامل لنقط التماس هو المحور الألي للدوران . وأي

نقطة مثل P من هذا المحور تنتقل على الجسم المتحرك رأسمة قطعة من منحني وليكن C

وتنتقل على الجسم الثابت رأسمة قطعة من منحني وليكن C_1 .

نلاحظ أن المنحنيين متماسان في P التي تكون سرعتها معدومة في اللحظة المذكورة .

تدعى هذه النقطة المركز الألي للدوران وتدعى حركة المنحني C بالنسبة للمنحني C_1 حركة

تدرج دون انزلاق . يلاحظ من هذا التعريف أن سرعة انتقال النقطة P على C

تساوي سرعة انتقال P على C_1 وأن طول قطعة المنحني الذي ترسمه على المنحني C في

فترة زمنية معينة تساوي طول قطعة الملحني الذي ترسمه على C_1 في الفترة الزمنية ذاتها .
ويسمى الملحني C عادة المتدرج في حين يسمى الملحني C_1 القاعدة .

وجدنا أنه إذا ثبتت في جسم صلب نقطة واحدة فإن الجسم يتحرك في كل لحظة بحركة دورانية حول محور Δ ممينا المحور الأني للدوران . ومن الواضح أن هذا المحور ينقل في الفراغ المتماثل مع الجسم بحيث يبقى ماراً من النقطة الثابتة O فهو يسمح بالتالي سطحاً مخروطياً رأسه O يدعى المخروط المتدرج . كما أنه ينقل في الفراغ الثابت ماراً أيضاً من النقطة O فهو يسمح في هذا الفراغ سطحاً مخروطياً رأسه O أيضاً يدعى المخروط القاعدة . ويشارك المخروطان في كل لحظة بمولد مشترك مار من O سرع نقطه معدومة هو المحور الأني للدوران . وتتم حركة S بالتالي بتدرج المخروط المتدرج دون انزلاق على سطح المخروط القاعدة ويدعى هذان المخروطان أيضاً مخروطي بوانسو .

١-٥-٤ توزيع السرعة في الحركة الدورانية حول نقطة .

لما كانت الحركة الدورانية للجسم الصلب حول نقطة هي في كل لحظة حركة دورانية حول محور أني Δ فإن سرعة نقطة ما M من الجسم يمكن أن نكتب بالشكل :

$$(1-5) \quad \vec{V}(M) = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \vec{\omega}_M \times \vec{OM}$$

حيث $\vec{\omega}_M$ هو شعاع الدوران للنقطة M ويصل على Δ ، و O هي النقطة الثابتة ، والسؤال السالغ الأهمية هو : هل يتعلق $\vec{\omega}_M$ باختيار النقطة M ؟ سنثبت فيما يلي أن شعاع الدوران $\vec{\omega}_M$ لا يتعلق فعلاً باختيار النقطة M ، من أجل ذلك نفرض جدلاً أن شعاع الدوران المتعلق بنقطة ما A من الجسم هو $\vec{\omega}_A$ وشعاع الدوران المتعلق بنقطة أخرى B من الجسم هو $\vec{\omega}_B$ ولنثبت أن $\vec{\omega}_A = \vec{\omega}_B$. لذا نكتب عبارة شعاع السرعة لكل من النقطتين A و B على النحو :

$$\vec{V}(A) = \vec{\omega}_A \times \vec{OA} \quad , \quad \vec{V}(B) = \vec{\omega}_B \times \vec{OB}$$

ومن النظرية الأساسية لحركة الجسم الصلب يمكن أن نكتب

$$\vec{V}(A) \cdot \vec{AB} = \vec{V}(B) \cdot \vec{AB}$$

نموض عبارة $\vec{V}(A)$ و $\vec{V}(B)$ في هذه العلاقة فنجد :

$$\begin{aligned} (\vec{\omega}_A \times \vec{oA}) \cdot \vec{AB} &= (\vec{\omega}_B \times \vec{oB}) \cdot \vec{AB} \\ (\vec{\omega}_A, \vec{oA}, \vec{AB}) &= (\vec{\omega}_B, \vec{oB}, \vec{AB}) \end{aligned} \quad \text{أي}$$

وبتبدل دوراني لأشعة الجداء الخارجي في المساواة الأخيرة نحصل على:

$$(\vec{oB} \times \vec{BA}) \vec{\omega}_B = (\vec{oA} \times \vec{BA}) \vec{\omega}_A$$

$$[(\vec{oA} + \vec{AB}) \times \vec{BA}] \cdot \vec{\omega}_B = (\vec{oA} \times \vec{BA}) \vec{\omega}_A \quad \text{أو :}$$

$$(\vec{oA} \times \vec{BA}) \vec{\omega}_B = (\vec{oA} \times \vec{BA}) \vec{\omega}_A \quad \text{مما يقودنا إلى المساواة :}$$

ولمسا كسان $\vec{\omega}_A // \vec{\omega}_B$ لأنهما يحملان على محور الدوران الآلي Δ فإن المساواة

الأخيرة تقتضي أن يكون $\vec{\omega}_A = \vec{\omega}_B = \vec{\omega}$ مهما تكن A و B من الجسم

وهو المطلوب اثباته . أي أن عبارة شعاع السرعة لنقطة ما من جسم يتحرك بحركة دورانية حول نقطة ثابتة هي :

$$(٢-٥) \quad \vec{V}(M) = \vec{\omega} \times \vec{oM}$$

حيث $\vec{\omega}$ شعاع الدوران الآلي وهو يحمل على المحور الآلي للدوران الذي يمر دوماً من

النقطة الثابتة O . إن قيمة $\vec{\omega}$ وملحاه تابعان للزمن ولا يتغيران من نقطة إلى أخرى في

الجسم .

٥-٥-١ نموذج التسارعات:

بما أن متجه التسارع هو المشتق الزمني لمتجه السرعة لأي نقطة M فإن :

$$\vec{\Gamma}(M) = \frac{d\vec{V}(M)}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{oM} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{oM}}{dt}$$

نسمي $\frac{d\vec{\omega}}{dt}$ شعاع التسارع السزائي الآلي ورمزه $\vec{\varepsilon}$ ونعوض $\frac{d\vec{oM}}{dt}$ بعبارة

السرعة $\vec{V}(M)$ فنجد :

$$(٣-٥) \quad \vec{\Gamma}(M) = \vec{\varepsilon} \times \vec{oM} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{oM})$$

والتي يمكن أن نكتب أيضاً بالشكل :

$$(\epsilon=0) \quad \vec{\Gamma}(M) = \vec{\epsilon} \times \vec{OM} + \vec{\omega} \times \vec{V}(M) = \vec{\epsilon} \times \vec{OM} - \vec{\omega}^2 m \vec{M}$$

حيث m هي مسقط النقطة M على محور الدوران الآني .

٦-٥-١ الدراسة التحليلية للحركة.

١- تعيين الموضع :

نبدأ كما ذكرنا سابقاً باختيار جمل إحداثية ، فلنختار الجملة الثابتة $ox_1y_1z_1$ والجملة المتحركة $oxyz$ حيث تشترك الجملتان بالنقطة الثابتة O .

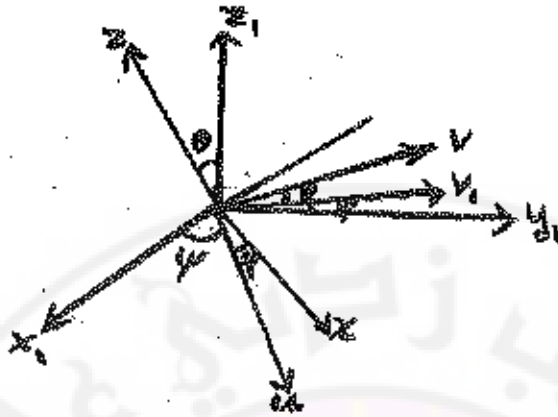
إن موضع أي نقطة M من الجسم الصلب تتعين من إسقاط الإسارة الشعاعية

$$\vec{OM} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$$

على جملة المحاور الثابتة $ox_1y_1z_1$ ، حيث (x, y, z) مقادير ثابتة و $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ متجهات لواحده لجملة متغيرة ، وتعين هذه المتجهات كما سبق أن ذكرنا بتابعية تسعة وبسطاء مرتسبطة بست علاقات مما يبقي ثلاثة وسطاء مستقلة تساوي عدد درجات حرية الجسم. وقد أوضح العالم أولر أنه يمكن اختيار هذه الوسطاء المستقلة ثلاث زوايا سميت باسمه؛ زوايا أولر؛ وسنوضح كيف يمكن فعلاً لجملة إحداثيات $ox_1y_1z_1$ أن تنطبق على الجملة $oxyz$ إذا دارت ثلاثة دورانات متتالية كل دوران بمقدار إحدى زوايا أولر .
تتعين زوايا أولر بالشكل التالي :

لنكن $ox_1y_1z_1$ جملة المحاور الإحداثية الثابتة ولنكن $oxyz$ الجملة المتحركة التي تشترك مع الجملة الثابتة بالنقطة O وليكن $\vec{ou}$ الفصل المشترك للمستويين xy و x_1y_1 .
نسمي الزاوية بين الفصل المشترك $\vec{ou}$ والمحور الثابت ox_1 (ψ) والزاوية بين $\vec{ou}$ والمحور ox (φ) ونسمي الزاوية بين المحورين oz و z_1 (θ) .

يلاحظ أن الزاوية ψ تقع في المستوي x_1y_1 والزاوية φ تقع في المستوي xy والزاوية θ في المستوي zz_1 العمودي على الفصل المشترك $\vec{ou}$. أي أن θ هي الزاوية بين المستويين xoy و x_1oy_1 ، ويلاحظ أن الزوايا الثلاث θ, φ, ψ غير مرتبطة وهذه الزوايا هي التي تدعى زوايا أولر .



الشكل (٨)

لنفترض أن الجسم $Oxyz$ كانت في لحظة ما مطبقة على الجسم $Ox_1y_1z_1$. ندور جسمه المحاور $Oxyz$ أولاً حول المحور Oz_1 بزاوية قدرها ψ فيطبق المحور Ox_1 على Ou ويحافظ Oz_1 على موضعه وينطبق المحور Oy_1 على محور Ov يعامد Ou ويقع في المستوى x_1y_1 . ثم ندور الجسم الناتجة حول المحور Ou بمقدار الزاوية θ فيطبق Oz_1 على Oz ويبقى Ou على حامله وينطبق المحور Ov_1 على محور جديد ندعوه Ov ثم ندور الجسم الناتجة حول المحور Oz بمقدار الزاوية ϕ فيحافظ Oz على موضعه وينطبق Ou على Ox وبالتالي ينطبق Ov على المحور Oy الذي يتم الثلاثية x, y, z . وبذلك نكون قد انتقلنا من الجسم $Ox_1y_1z_1$ إلى $Oxyz$ بثلاثة دورات متتالية

لنخص ما سبق بالجدول التالي :

دوران حول Ox_1	دوران حول Ou	دوران حول Oz
$Ox_1y_1z_1 \xrightarrow{\text{زاوية } \psi} OuV_1Z_1$	$OuV_1Z_1 \xrightarrow{\text{زاوية } \theta} OuVZ$	$OuVZ \xrightarrow{\text{زاوية } \phi} Oxyz$

نعمين مركبات متجهات الوحدة $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ للمحاور x, y, z على المحاور x_1, y_1, z_1 أو بالعكس من مصفوفات التحويل الثلاث التالية :

$$D_\psi = \begin{array}{c|ccc} & u & v & k \\ \hline i & \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ j & \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ k & 0 & 0 & 1 \end{array}, \quad D_\theta = \begin{array}{c|ccc} & u & v & k \\ \hline u & 1 & 0 & 0 \\ v & 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ k & 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{array}$$

(٥-٥)

$$D_\phi = \begin{array}{c|ccc} & i & j & k \\ \hline u & \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ v & \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ k & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

٢- تعيين شعاع الدوران $\vec{\omega}$.

يلاحظ مما سبق أن شعاع الدوران الآلي $\vec{\omega}$ ليس إلا محصلة ثلاث مركبات $\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2, \vec{\omega}_3$.

$$\vec{\omega}_3 = \phi' \vec{k}, \quad \vec{\omega}_2 = \theta' \vec{u}, \quad \vec{\omega}_1 = \psi' \vec{k}_1 \quad \text{حيث } \vec{\omega}_3, \vec{\omega}_2$$

$$(١-٥) \quad \vec{\omega} = \psi' \vec{k}_1 + \theta' \vec{u} + \phi' \vec{k} \quad \text{أي أن}$$

لنفرض أن p, q, r هي مركبات $\vec{\omega}$ على المحاور المتحركة $oxyz$

ولنفرض أن p_1, q_1, r_1 هي مركبات $\vec{\omega}$ على المحاور الثابتة $ox_1y_1z_1$ الأمر الذي يفولنا أن نكتب

$$\vec{\omega} = p\vec{i} + q\vec{j} + r\vec{k} = p_1\vec{i}_1 + q_1\vec{j}_1 + r_1\vec{k}_1$$

يمكن تعيين المركبات (p, q, r) أو (p_1, q_1, r_1) من العلاقة (١-٥) وباستخدام مصفوفات التحويل (٥-٥) على النحو التالي :

لنوجد أولاً p, q, r من أجل ذلك نكتب عبارة $\vec{u}$ من المصفوفة D_ϕ :

$$\vec{u} = \cos \phi \vec{i} - \sin \phi \vec{j}$$

ونكتب عبارة $\vec{k}_1$ من المصفوفة D_θ :

$$\vec{k}_1 = \sin \theta \vec{v} + \cos \theta \vec{k}$$

وبعوض $\vec{v}$ بقيمته من المصفوفة D_ψ فنجد :

$$\vec{k}_1 = (\sin \theta \sin \phi) \vec{i} + (\sin \theta \cos \phi) \vec{j} + \cos \theta \vec{k}$$

نعوض $\vec{u}$ و $\vec{k}_1$ في (٦-٥) فنجد مركبات $\vec{w}$ على النحو :

$$(٧-٥) \quad \begin{cases} p = \psi' \sin \theta \sin \varphi + \theta' \cos \varphi \\ q = \psi' \sin \theta \cos \varphi - \theta' \sin \varphi \\ r = \psi' \cos \theta + \varphi' \end{cases}$$

ومن أجل تعيين p_1, q_1, r_1 نكتب عبارة $\vec{u}$ من المصفوفة D_ψ فنجد :

$$\vec{u} = \cos \psi \vec{i}_1 + \sin \psi \vec{j}_1$$

ونكتب عبارة $\vec{k}$ من المصفوفة D_θ :

$$\vec{k} = -\sin \theta \vec{v}_1 + \cos \theta \vec{k}_1$$

وبتعويض $\vec{v}_1$ بقيمتها من المصفوفة D_φ نجد :

$$\vec{k} = (\sin \theta \sin \psi) \vec{i}_1 - (\sin \theta \cos \psi) \vec{j}_1 + \cos \theta \vec{k}_1$$

بتعويض قيمتي $\vec{u}$ و $\vec{k}$ في العلاقة (٦-٥) نحصل على المركبات المطلوبة :

$$(٨-٥) \quad \begin{cases} p_1 = \varphi' \sin \theta \sin \psi + \theta' \cos \psi \\ q_1 = -\varphi' \sin \theta \cos \psi + \theta' \sin \psi \\ r_1 = \varphi' \cos \theta + \psi' \end{cases}$$

ملاحظة : يمكن تعيين المركبات p, q, r و p_1, q_1, r_1 من الإسقاط

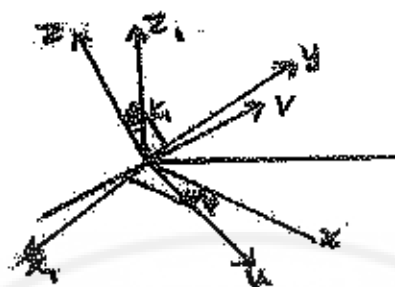
المباشر فلتعبر p, q, r مثلاً إسقاط u على x, y فنجد

$$\vec{u} = \cos \varphi \vec{i} - \sin \varphi \vec{j}$$

ومن أجل إيجاد إسقاط $\vec{k}_1$ على x, y, z نرسم من نهاية $\vec{k}_1$ موازياً لـ z فيقطع المستوى

xoy بنقطة تقع على $\vec{ov}$ العمود على $\vec{ou}$ في المستوى xoy الأمر الذي يصلي :

$$\vec{k}_1 = \sin \theta \vec{v} + \cos \theta \vec{k}$$



الشكل (٩)

وباسقاط $\vec{v}$ على x, y نجد

$$\vec{k}_1 = \sin \theta \sin \varphi \vec{i} + \sin \theta \cos \varphi \vec{j} + \cos \theta \vec{k}$$

وهذا ما وجدناه سابقاً

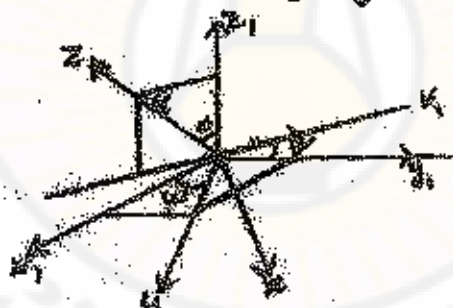
أما لإيجاد p_1, q_1, r_1 فيلزم إسقاط $\vec{u}$ على x_1, y_1, z_1 فنجد

$$\vec{u} = \cos \psi \vec{i}_1 + \sin \psi \vec{j}_1$$

واسقاط $\vec{k}$ على x_1, y_1, z_1 ، لذا نرسم من نهاية $\vec{k}$ مواز لـ oz_1 فيقطع المستوي $x_1 y_1$

بنقطة تقسم على $o v_1$ العمود على ou في المستوي $x_1 y_1$ (لأن ou يعامد المستوي

$o z_1 v_1$) وهكذا نحصل كما في الشكل



الشكل (١٠)

$$\vec{k} = -\sin \theta \vec{v}_1 + \cos \theta \vec{k}_1$$

على :

$$\vec{v}_1 = -\sin \psi \vec{i}_1 + \cos \psi \vec{j}_1$$

وعلى

الأمر الذي يعطى :

$$\vec{k} = \sin \theta \sin \psi \vec{i}_1 - \sin \theta \cos \psi \vec{j}_1 + \cos \theta \vec{k}_1$$

وهي العلاقة التي حصلنا عليها باستخدام مصفوفات التحويل.

٣- تعيين شعاع التسارع الزاوي :

نعلم أن : $\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$ لذا فإن مركبات $\vec{\varepsilon}$ على جملة المحاور الثابتة $ox_1y_1z_1$

تتبع بالاشتقاق مباشرة حيث نجد :

$$(9-0) \quad \vec{\varepsilon} = p'_1 \vec{i}_1 + q'_1 \vec{j}_1 + r'_1 \vec{k}_1$$

أما لتعيين مركبات $\vec{\varepsilon}$ على المحاور المتحركة فعلينا اشتقاق عبارة $\vec{\omega}$ على هذه المحاور

$$(10-0) \quad \vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = p' \vec{i} + q' \vec{j} + r' \vec{k} + p \vec{i}' + q \vec{j}' + r \vec{k}'$$

لأن : $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ هي أيضاً توابع للزمن ، لذا فإننا نحتاج لحساب مشتقاتها ، ومن أجل

ذلك نتبع ما يلي : لنكن A نهاية متجه الواحدة للمحور ox أي لنفرض أن

$$\vec{i} = \vec{oA} \quad \text{فيكون المشتق} \quad \vec{i}' = \frac{d\vec{i}}{dt} = \frac{d\vec{oA}}{dt} = \vec{V}(A)$$

ولكن حركة A وهي نقطة متماسكة مع ox هي كحركة الجملة xyz دورانية

حول O شعاع دورانها $\vec{\omega}$ أي ، نكتب بالشكل

$$\vec{V}(A) = \vec{\omega} \times \vec{oA}$$

الأمر الذي يقودنا إلى العلاقة الهامة

$$(11-0) \quad \begin{cases} \vec{i}' = \vec{\omega} \times \vec{i} \\ \vec{j}' = \vec{\omega} \times \vec{j} \\ \vec{k}' = \vec{\omega} \times \vec{k} \end{cases} \quad \text{وبشكل مشابه يمكن أن نكتب أن}$$

وبتعويض قيم المشتقات $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$ في العلاقة (١٠-٥) نجد

$$\vec{\varepsilon} = p' \vec{i} + q' \vec{j} + r' \vec{k} + \vec{\omega} \times (p \vec{i} + q \vec{j} + r \vec{k})$$

$$\vec{\varepsilon} = p' \vec{i} + q' \vec{j} + r' \vec{k} + \vec{\omega} \times \vec{\omega}$$

$$(12-0) \quad \vec{\varepsilon} = p' \vec{i} + q' \vec{j} + r' \vec{k} \quad \text{أي أن}$$

الأمر الذي يقودنا إلى النتيجة الهامة التي تعد خاصية مميزة لشعاع الدوران ألا وهي أن مركبات مشتق شعاع الدوران على الجملة المتحركة كما على الجملة الثابتة ليست إلا مشتق مركبات شعاع الدوران على الجملة الموافقة .

٤ - تعيين السرعة تحليلياً :

من السهل بعد أن عينا مركبات شعاع الدوران على كل من الجملتين الثابتة والمتحركة أن نعين مركبات سرعة أي نقطة M من الجسم الصلب على الجملة المطلوبة من إسقاط العبارة

$$\vec{V}(M) = \vec{\omega} \times \vec{OM}$$

الأمر الذي يعطي بالإسقاط على المحاور الثابتة:

$$\vec{V}(M) = (p_1, q_1, r_1) \times (x_1, y_1, z_1)$$

(١٣-٥)

$$= ((q_1 z_1 - r_1 y_1), (r_1 x_1 - p_1 z_1), (p_1 y_1 - q_1 x_1))$$

وبالإسقاط على المحاور المتحركة :

$$\vec{V}(M) = (p, q, r) \times (x, y, z)$$

(١٤-٥)

$$= ((qz - ry), (rx - pz), (py - qx))$$

٥ - تعيين المحور الآتي للدوران تحليلياً :

تتضمن معادلات Δ ، المحور الآتي للدوران في الفراغ الثابت أو في الفراغ المتحرك من شرط تولي هذا المحور مع شعاع الدوران أي من الشرط $\vec{\omega} \parallel \vec{OO_1}$ بفرض $O_1 \in \Delta$

(١٥-٥)

$$\frac{x_1}{p_1} = \frac{y_1}{q_1} = \frac{z_1}{r_1}$$

فنحصل على المعادلات

في الفراغ الثابت بفرض (x_1, y_1, z_1) إحداثيات O_1 في هذا الفراغ

(١٦-٥)

$$\frac{x}{p} = \frac{y}{q} = \frac{z}{r}$$

وعلى المعادلات

في الفراغ المتحرك حيث (x, y, z) إحداثيات O_1 في هذا الفراغ

ويحذف الوسيط الوحيد (الزمن) بين المعادلتين (٥-١٥) أو (٥-١٦) نحصل على معادلة سطح مخروطي رأسه O هو المخروط القاعدة في الفراغ الثابت أو هو المخروط المتحرك في الفراغ المتحرك .

٦ - تعيين التتارعات تحليلياً:

ليست هناك أدنى صعوبة في تعيين مركبات متجه التتار $\vec{\Gamma}(M)$ لنقطة ما من الجسم بعد أن عينا مركبات شعاعي الدوران والتتار الزاوي على كل من الجملتين الثابتة والمتحركة وذلك بإسقاط عبارة التتار (٥-١٦) فنجد :

$$(١٧-٥) \quad \vec{\Gamma}(M) = (p'_1, q'_1, r'_1) \times (x_1, y_1, z_1) + (p_1, q_1, r_1) \times (x'_1, y'_1, z'_1)$$

$$(١٨-٥) \quad \vec{\Gamma}(M) = (p', q', r') \times (x, y, z) + (p, q, r) \times (x', y', z')$$

على أن لا ننسى أن (x_1, y_1, z_1) مقادير تابعة للزمن في حين (x, y, z) مقادير ثابتة.

٧-٥-١ مثالي : يتحرك جسم صلب بحركة دورانية حول نقطة ثابتة O وفق المعادلات :

$$\psi = 2t, \quad \theta = \frac{\pi}{6}, \quad \varphi = 30t$$

والمطلوب تعيين شعاع الدوران وشعاع التتار الزاوي ومعادلتا مخروط القاعدة ومخروط

المتحرك ثم تعيين سرعة وتتار نقطة M من الجسم إحداثياتها بالنسبة لجملة الإحداثيات xyz المتناسكة مع الجسم هي $(0, 0, -1)$.

$$\vec{\omega} = \psi' \vec{k}_1 + \theta' \vec{u} + \varphi' \vec{k} \quad \text{الحل : لدينا شعاع الدوران}$$

$$\vec{\omega} = 2 \vec{k}_1 + 30 \vec{k} \quad \text{نشتق ونعوض فنجد}$$

نمقلد $\vec{k}_1$ على المحاور المتناسكة مع الجسم ونكتب بهد تعويض الزوايا بقيمتها :

$$\vec{\omega} = (\sin 30t) \vec{i} + (\cos 30t) \vec{j} + (\sqrt{3} + 30) \vec{k}$$

نشتق فنحصل على شعاع التتار الزاوي :

$$\vec{\varepsilon} = (30 \cos 30t) \vec{i} - (30 \sin 30t) \vec{j}$$

$$\frac{x}{\sin 30t} = \frac{y}{\cos 30t} = \frac{z}{\sqrt{3} + 30} \quad \text{معادلات مخروط المتحرك :}$$

يحذف t بين هاتين المعادلتين نجد المعادلة الديكارتية للمتحرك :

$$x^2 + y^2 = \frac{z^2}{(\sqrt{3} + 30)^2}$$

ولتعيين مخروط القاعدة نسقط $\vec{k}$ على المحاور الثابتة ونعوض في عبارة $\vec{\omega}$ فنجد

$$\vec{\omega} = (15 \sin 2t) \vec{i}_1 - (15 \cos 2t) \vec{j}_1 + (15\sqrt{3} + 2) \vec{k}_1$$

ونكون معادلات مخروط القاعدة هي :

$$\frac{x_1}{15 \sin 2t} = \frac{y_1}{15 \cos 2t} = \frac{z_1}{15\sqrt{3} + 2}$$

وننتج المعادلة الديكارية للقاعدة من حذف t بين هاتين المعادلتين على النحو :

$$x_1^2 + y_1^2 = \frac{225}{(15\sqrt{3} + 2)^2} z_1^2$$

نعين شعاع سرعة النقطة M في الفراغ المتحرك من العلاقة :

$$\vec{V}(M) = \vec{\omega} \times \vec{OM} = (p, q, r) \times (0, 0, -1)$$

$$\vec{V}(M) = (-\cos 30 t) \vec{i} + (\sin 30 t) \vec{j} \quad \text{فنجد}$$

ونعين شعاع تسارع النقطة M في الفراغ المتحرك أيضاً من العلاقة :

$$\begin{aligned} \vec{\Gamma}(M) &= \vec{e} \times \vec{OM} + \vec{\omega} \times \vec{V}(M) \\ &= (p', q', 0) \times (0, 0, -1) + (p, q, r) \times (v_x, v_y, 0) \end{aligned}$$

فنجد :

$$\vec{\Gamma}(M) = (-30 \sin 30 t, -30 \cos 30 t, 0) + (\sqrt{3} + 30)(-\sin 30 t, -\cos 30 t, 0)$$

$$\vec{\Gamma}(M) = -(\sqrt{3} + 60) \sin 30 t \vec{i} - (\sqrt{3} + 60) \cos 30 t \vec{j}$$

تمارين

١- يتحرك قضيب OA طوله l في الفراغ بحيث تبقى نهايته O ثابتة . تتعين حركته

بتابعية زوايا أولر :

$$\psi = t, \quad \theta = 2t, \quad \varphi = \frac{\pi}{4}$$

والمطلوب تعيين شتعاغ المحوران الآلي وشتعاغ التسارع الآلي ومخروطي القاعدة والمتدرج ومسرعة نهاية القضيب A وتسارعها.

٢- يتحرك جسم صلب S في الفراغ بحيث تبقى النقطة O منه ثابتة ، xyz جملة

احداثيات متعامدة ومباشرة متماسكة مع S . فإذا كانت مركبات متجه السرعة للنقطة

$M_1(0,0,2)$ على xyz هي $\vec{V}(M_1) = (t, 2t^2, 0)$ وجيب تمام توجيه

متجه السرعة للنقطة $M_2(0,1,2)$ بالنسبة للجملة xyz هي $(\frac{-2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-1}{3})$ هي

عين المحور الآلي لدوران S وعين شعاغ الدوران وشتعاغ التسارع الزاوي الآلي

والمعادلة الديكارتية للمتدرج .

٣- مخروط دوراني زاويته الرأسية $2\alpha = \frac{\pi}{6}$ يتحرك بحيث يبقى رأسه O ثابتاً

ويصلح محوره OC مع المحور الشاقولي للثابت OZ_1 زاوية قدرها $\frac{\pi}{6}$ راديان فإذا

كانت سرعة النقطة A التي تقع على سطح المخروط وتبعد عن ذروته بالمقدار

$$\vec{V}(A) = (-\sin t \vec{i}_1 + \cos t \vec{j}_1) \quad \alpha = 1 \text{ هي:}$$

عين معادلات حركة المخروط وشتعاغ الدوران الآلي ، ثم عين القاعدة والمتدرج .

٤- $OABC$ صفيحة بشكل مستطيل تدور حول رأسها الثابت O بحيث يبقى ضلعها OA

ملازماً للمستوي الثابت oxy_1 والمطلوب :

١- تعيين الوسيطاء الممنقلة التي تعين موضع وحركة الصفيحة

٢- تعيين شعاغ الدوران الآلي بتابعية الوسيطاء الممنقلة

لتعيين معادلات الحركة ، أي العلاقات الزمنية للاحداثيات المعممة نكتب القيمة العددية

$$\omega_1 = -(2\theta)' \quad , \quad v = 2a = \omega_1 a \quad \text{سرعة } A \text{ على محيط الدائرة}$$

$$\theta' = -1 \quad \Leftarrow \quad -2a\theta' = 2a \quad \text{أي أن}$$

تكامل بالنسبة للزمن ونفرض أن $\theta = 0$ في لحظة البدء فنجد :

$$\theta = -t \quad \text{المعادلة الأولى للحركة.}$$

ونكتب احداثيات A على المحاور الثابتة التي نختارها ox , oy فنجد

$$x(A) = a \cos 2\theta \quad y(A) = a \sin 2\theta$$

وبتعيين θ بقيمتها نجد معادلات الحركة المطلوبة :

$$\theta = -t \quad , \quad x(A) = a \cos 2t \quad y(A) = -a \sin 2t$$

(٢) نحسب سرعة النقطة B من العلاقة

$$\vec{V}(B) = \vec{V}(A) + \vec{\omega} \times \vec{AB}$$

$$\vec{V}(B) = (-2a \sin 2t, -2a \cos 2t, 0) + (-1\vec{k}) \times (-2t \cos t, 2t \sin t, 0)$$

و بالأصلا ن نجد :

$$\vec{V}(B) = (-2a \sin 2t + 2t \sin t) \vec{i} + (-2a \cos t + 2t \cos t) \vec{j}$$

أما تسارع النقطة B فنحصل عليه باشتقاق مركبتي شعاع السرعة على المحاور الثابتة فنجد :

$$\vec{\Gamma}(B) = (-4a \cos 2t + 2t \cos t) \vec{i} + (4a \sin t - 2t \sin t) \vec{j}$$

(٤) لتحديد مركز التسارع المعلوم نكتب :

$$\vec{\Gamma}(Q) = \vec{\Gamma}(A) + \vec{\varepsilon} \times \vec{AQ} - \omega^2 \vec{AQ} = \vec{0}$$

$$-4a \cos 2t - (x - a \cos 2t) = 0 \Rightarrow x = -3a \cos 2t$$

$$4a \sin 2t - (y + a \sin 2t) = 0 \Rightarrow y = 3a \sin 2t$$

وفي اللحظة $t=0$ نجد

$$x(Q) = -3a \quad , \quad y(Q) = 0$$

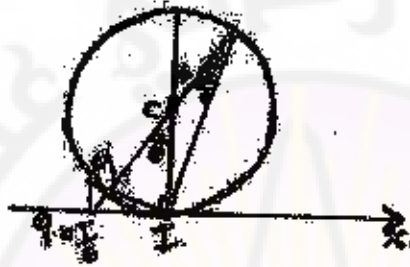
تمرين (٣) : يتحرك قرص دائري مركزه c نصف قطره a في معنو شاقولي

على المحور الأفقي ox دون انزلاق والمطلوب :

١- عين المركز الآتي للدوران والقاعدة والمتحرك

٢- عين مسار نقطة M من محيط القرص كانت منطبقة على نقطة تماس القرص مع المحور O_1x في لحظة البدء ، وعين سرعة هذه النقطة وتساوعها علماً أن سرعة النقطة c مركز القرص تساوي v .

(الحل : ١) نعلم أنه في حركة التدرج دون انزلاق تكون نقطة التماس هي المركز الأكي للدوران I وبالتالي فإن القاعدة هي المستقيم O_1x أما المتدرج فهو محيط القرص أي الدائرة (c, a) .



الشكل (١٧)

٢) نفرض أن M كانت منطبقة على I_0 في لحظة البدء ولنختار I_0 مبدأً للاحداثيات المتماثلة مع المستوي الثابت O_1xy وبعد مرور زمن قدره t أصبحت M في وضعها الجديد على محيط الدائرة وأصبحت نقطة التماس (المركز الأكي للدوران) في الموضع I ونفرض الزاوية بين CM و CI تساوي θ .

نعلم من شرط التدرج دون انزلاق أن طول المنحنى MI يساوي طول القطعة المستقيمة O_1I أي :

$$\overline{O_1I} = a\theta \vec{i}$$

واتعيين إحداثيات M نكتب

$$\overline{O_1M} = \overline{O_1I} + \overline{IM}$$

ولكن طول $\overline{IM}$ يساوي $2a \sin \frac{\theta}{2}$ فباستطالع العلاقة * على المحورين O_1x و O_1y

نجد :

$$\overline{O_1M} = a\theta \vec{i} - (2a \sin \frac{\theta}{2})(\cos \frac{\theta}{2})\vec{i} + 2a \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \vec{j}$$

أي : $y(M) = a(1 - \cos \theta)$ $x(M) = a(\theta - \sin \theta)$ * *
وهي معادلات المنحني الذي يدعى سيكلويد.
- يمكن تعين سرعة النقطة M من العلاقة :

$$\vec{V}(M) = \vec{\omega} \times \vec{IM}$$

ولدينا $\vec{\omega} = -\theta' \vec{k}$ (الإشارة السالبة لأن الدوران باتجاه عقارب الساعة) وبإسقاط عبارة $\vec{V}(M)$ على المحورين O_1x و O_1y نجد :

$$\vec{V}(M) = a\theta'(1 - \cos \theta) \vec{i} + a\theta' \sin \theta \vec{j}$$

ونحصل على العبارة ذاتها باشتقاق * * بالنسبة للزمن .

ويتمتع متجه التسارع باشتقاق عبارة السرعة ، الأمر الذي يعطي :

$$\vec{\Gamma}(M) = a [\theta''(1 - \cos \theta) + \theta'^2 \sin \theta] \vec{i} + a [\theta'' \sin \theta + \theta'^2 \cos \theta] \vec{j}$$

تمرين (٤) : بكرة متحركة مركزها C نصف قطرها a ترفع شاقولياً بواسطة حبل يمر على محيطها وتتم نهايتا الحبل على بكرتين صغيرتين ثابتتين . A و B نقطتا تماس الحبل مع البكرة و AB قطر أفقي فيها فإذا علمت أن سرعة النقطة A شاقولية نحو الأعلى ونفساوي v_1 وأن مسرعة النقطة B هي $\vec{v}_2$: $\vec{v}_2 = 2\vec{v}_1$ فالمطلوب : تعيين المركز الأتي للدوران للبكرة وتعيين القاعدة والمنحرج ثم تعيين سرعة النقطة C (مركز البكرة)



الشكل (١٨)

الحل : بما أن سرعة A تولزي سرعة B و $\vec{V}(A) \neq \vec{V}(B)$ فإن المركز الأتي للدوران هو نقطة تقاطع المصنفين BA مع B_1A_1 المستقيم الواسل بين نهايتي سرعتي اللقطتين A و B . نلاحظ من الشكل أن :

$$\frac{IA}{IB} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{1}{2}$$

من العلاقة * يمكن أن نكتب :

$$\frac{\overline{IA}}{\overline{IB} - \overline{IA}} = \frac{\overline{IA}}{2a} = 1 \Rightarrow \overline{IA} = 2a$$

وبالتالي فإن:

$\overline{OI} = 3a$ أي أن بعد المركز الآلي للدوران عن النقطة c المتماصة مع مستوى البكرة ثابت فالمحل الهندسي لـ I في هذا المستوى دائرة مركزها c نصف قطرها a وهي تمثل المتدحرج.

كما أن بعد I عن المستقيم o_1 الثابت يساوي المقدار الثابت a فالمحل الهندسي للمركز الآلي للدوران في المستوى الثابت هو المستقيم o_1 ببيان المعادلة $x_1(I) = 3a$ فالقاعدة مستقيم ونقم الحركة بتدحرج الدائرة $(c, 3a)$ على المستقيم الشاقولي D .

إن سرعة النقطة c تعتمد Ic فهي شاقولية نحو الأعلى وقيمتها تتعين من العلاقة:

$$\frac{v(c)}{Ic} = \frac{v(A)}{IA} \Rightarrow$$

$$v(c) = \frac{3a}{2a} v_1 = \frac{3}{2} v_1$$

تمارين

- (١) ذراع OA طوله a يدور في مستو ثابت بسرعة زاوية ثابتة ω_1 حول النقطة الثابتة O ، AB بد طولها $2a$ مرتبطة مفصلياً في A بالذراع OA وتزلق نهايتها B على مستقيم ثابت ox بالمطلوب :
- ١- تعيين المركز الآلي للدوران AB ومعادلات حركتها
 - ٢- تعيين القاعدة والمتحرك
 - ٣- تعيين سرعة وتسارع النقطة B ثم تعيين السرعة والتسارع حين تكون الزاوية $\angle BOA$ مساوية للصفر أو 30° أو 60° .
 - ٤- عين النقطة M من AB التي تكون سرعتها أصغرية
- (٢) قضيب AB طوله $2l$ يتحرك في المستوي xoy بحيث تتحرك النقطة A على ox بسرعة ثابتة قيمتها v ، وتتحرك النهاية B في المستوي xoy بحيث تبقى القيمة العددية ل سرعتها ثابتة وتساوي v أيضاً . كان القضيب AB منطبقاً على oy في لحظة البدء والمطلوب :
- ١- إيجاد مسار النقطة B
 - ٢- تعيين المركز الآلي للدوران القضيب والقاعدة والمتحرك
- (٣) يتحرك قرص دائري دون الزلاق على مستقيم ox في المستوي xoy وبقي سرعة مركزه ثابتة حين تسارع المركز الآلي للدوران
- (٤) زاوية صلبة AMC قائمة في M تزلق النقطة A نهاية الضلع الأول على المحور oy الشاقولي بسرعة ثابتة تساوي v ويمر الضلع MC من نقطة ثابتة B على المحور ox الأفقي فإذا علمت أن $AM = OB = a$ فالمطلوب :
- ١- تعيين مسار النقطة M
 - ٢- تعيين المركز الآلي للدوران ومعادلات حركة الزاوية القائمة بفرض أن A كانت في O في اللحظة الابتدائية ، وعين سرعة وتسارع النقطة M
 - ٣- تعيين القاعدة والمتحرك
 - ٤- تعيين سرعة وتسارع النقطة التي تنطبق على B في اللحظة المذكورة .

(٥) قرص دائري C نصف قطره a مركزه O يتدحرج دون انزلاق على المحيط الخارجي لقرص دائري ثابت مركزه O_1 ونصف قطره a_1 بحيث يدور المستقيم O_1O حول O_1 في المستوى الثابت $O_1x_1y_1$ بسرعة زاوية $\omega_1 = b\dot{t}$ ، احسب سرعة وتسارع النقطة D من محيط القرص C في اللحظة التي يكون فيها OD عمودياً على O_1O وعين معادلات حركة القرص C .

(٦) يتحرك المستوي xoy في مستو ثابت $x_1O_1y_1$ بحيث تتلاقى النقطة O على نصف المستقيم By_1 علماً أن إحداثيا B في المستوي الثابت هما $B(0, b)$ ويمس المستقيم ox دوماً دائرة ثابتة مركزها O_1 نصف قطرها b ، عين المركز الآلي لدوران المستوي xoy ثم عين القاعدة والمتدحرج .

٢-٢-٢- عرض أن قيمة سرعة نقطة تماس ox مع الدائرة هي $v = b\dot{t}$ يطلب تعيين

معادلات حركة المستوي xoy . ثم تعيين مركز التسارع المعنوم .

(٧) نصف دائرة ثابتة مركزها O نصف قطرها a قطرها ac ألقى قضيب طوله

$2l > 2a$ يتحرك لهائنه A على محيط الدائرة بسرعة قيمتها ثابتة وتساوي $v = 2a$

كما يستند القضيب على حافة الدائرة في C والمطلوب :

١- تعيين المركز الآلي للدوران للقضيب AB وتعيين القاعدة والمتدحرج .

٢- كتابة المعادلات الزمنية لحركة القضيب وتعيين شعاع التسارع الزاوي الآلي .

٣- تعيين سرعة وتسارع النهاية B من القضيب .

٤- تعيين مركز التسارع المعنوم للقضيب في اللحظة $t = 0$.

الفصل الثامن

الحركة المحصلة لنقطة مادية

- جملة الاحداثيات المتحركة واثرها على المتجهات ومشتقاتها
- محصلة حركتين لنقطة مادية
- تركيب السرعة
- تركيب التسارعات
- تعيين الحركة المحصلة تحليلاً
- دسائير بود
- شرط التكميرج دون الزلاق في حركة مستوية



تجسيد : لقد درسنا حركة نقطة مادية وحركة مجموعة نقط مادية بالنسبة لجملة

احداثية افترضناها ثابتة . ولكن هذا الافتراض غير واقعي لعدم وجود أي جسم ثابت بشكل مطلق في الطبيعة ، لذا كان من الضرورة بمكان دراسة أثر حركة الجملة التي افترضناها ثابتة على حركة النقط المادية وهذا ما دفعنا لدراسة الحركة للمحصلة لنقطة مادية

١-٨-١ جملة الاحداثيات المتحركة وأثرها على المتجهات ومشتقاتها

لتكن المجموعة المتماسكة S ولنعرف جملة الاحداثيات الديكارية القائمة المتماسكة

مبها $Oxyz$ ، ولنكن الجملة S_1 التي نفترضها ثابتة في الفراغ ولنعرف فيها جملة الاحداثيات $O_1x_1y_1z_1$ وليكن $\vec{A}$ متجهاً متغيراً بالنسبة للجملة S .

يتعين المتجه $\vec{A}$ إذا عرفت مركباته على الجملة $Oxyz$ كما يلي :

$$(1) \quad \vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}$$

ويتعين إذا عرفت مركباته على الجملة S_1 كما يلي :

$$(2) \quad \vec{A} = A_{x_1} \vec{i}_1 + A_{y_1} \vec{j}_1 + A_{z_1} \vec{k}_1$$

إن متجهات الواحدة $\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1$ ثابتة غير أن متجهات الواحدة $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ متغيرة ويمكن

تعيين العلاقة بينها إذا عرفت حركة S بالنسبة لـ S_1 وعندها تتعين العلاقة بين

(A_x, A_y, A_z) و $(A_{x_1}, A_{y_1}, A_{z_1})$ ولنعين هذه العلاقة في الحالات التالية :

١- حركة S بالنسبة لـ S_1 حركة الانسحابية .

نعلم أنه يمكن اختيار الجملة $Oxyz$ موازية للجملة $O_1x_1y_1z_1$ في الحركة الانسحابية

وتحافظ هذه المحاور على مناحيها أثناء الحركة وبالتالي يكون :

$$\vec{i} = \vec{i}_1, \quad \vec{j} = \vec{j}_1, \quad \vec{k} = \vec{k}_1$$

$$\text{أن : } A_x = A_{x_1}, \quad A_y = A_{y_1}, \quad A_z = A_{z_1}$$

أي أن مركبات المتجه $\vec{A}$ لا تتأثر بحركة الجملة S .

وإذا حسبنا مشتق المتجه $\vec{A}$ بالنسبة لراصد ههناك مع الجملة S ورمزه

$$(3) \quad \left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_M = A'_x \vec{i} + A'_y \vec{j} + A'_z \vec{k} \quad \text{نجد :}$$

وإذا حسبنا مشتق المتجه $\vec{A}$ بالنسبة لراصد متماسك مع S_1 ورمزه $\left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_F$

$$(٤) \quad \left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_F = A'_x \vec{i}_1 + A'_y \vec{j}_1 + A'_z \vec{k}_1 \quad \text{نجد:}$$

ولما كان $A_x = A_{x_1}$, $A_y = A_{y_1}$, $A_z = A_{z_1}$ ومتجهات الواحدة

$$\left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_F = \left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_M \quad \text{متساوية كان}$$

أي أن مشتق المتجه $\vec{A}$ (أي نسبة تغيره مع الزمن) لا تتأثر بحركة الجمله S لذا تسمى جمل الاحداثيات المتحركة بحركة انسحابية جمل عطالية.

٢- حركة S بالنسبة لـ S_1 دورانية حول نقطة ثابتة .

إن مستجهات الواحدة $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ للجمله المتحركة تتغير في هذه الحالة بتابعية زوايا اولر كما مر سابقاً وبالتالي يمكن تعيين العلاقات التي تربط المركبات A_x, A_y, A_z بالمركبات $A_{x_1}, A_{y_1}, A_{z_1}$.

انحصر الآن العلاقة بين $\left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_M$ و $\left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_F$ من أجل ذلك نكتب:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_F &= \frac{d}{dt} (A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}) \Big|_F \\ &= \left(\frac{dA_x}{dt} \vec{i} + \frac{dA_y}{dt} \vec{j} + \frac{dA_z}{dt} \vec{k} \right) + \left(A_x \frac{d\vec{i}}{dt} + A_y \frac{d\vec{j}}{dt} + A_z \frac{d\vec{k}}{dt} \right) \end{aligned}$$

واما كانت حركة S بالنسبة لـ S_1 دورانية حول نقطة فإن

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{i} \quad , \quad \frac{d\vec{j}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{j} \quad , \quad \frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{k}$$

لنروض في عبارة المشتق مع ملاحظة (٣) و(٤) نجد

$$\left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_F = \left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_M + \vec{\omega} \times (A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k})$$

$$(٥) \quad \left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_F = \left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_M + \vec{\omega} \times \vec{A} \quad \text{أي}$$

٢- حركة S عامة بالنسبة لـ S_1

نعلم أن الحركة العامة للمجموعة المتماسكة هي انسحاب مع قلب للحركة ودوران حول هذا القطب ولما كانت الحركة الانسحابية لا تؤثر على المتجهات ومشتقاتها فإن العلاقة (٥) تصبح هنا.

يمكن أن تكتب العلاقة (٥) باستخدام المؤثر التفاضلي على كمية شعاعية على النحو :

$$D|_F = D|_M + \vec{\omega} \times$$

حيث $D|_F$ يرمز المشتق بالنسبة لفراغ متماثل مع S_1 الثابتة و $D|_M$ المشتق بالنسبة لفراغ متماثل مع S المتحركة.

ملاحظة : بتطبيق العلاقة (٥) على متجه الدوران الآتي $\vec{\omega}$ نجد

$$\left. \frac{d\vec{\omega}}{dt} \right|_F = \left. \frac{d\vec{\omega}}{dt} \right|_M + \vec{\omega} \times \vec{\omega}$$

$$\left. \frac{d\vec{\omega}}{dt} \right|_F = \left. \frac{d\vec{\omega}}{dt} \right|_M \Rightarrow p'_1 \vec{i}_1 + q'_1 \vec{j}_1 + r'_1 \vec{k}_1 = p'_1 \vec{i} + q'_1 \vec{j} + r'_1 \vec{k} \quad \text{أي:}$$

وهي العلاقة التي أثبتناها في الحركة الدورانية حول نقطة ثابتة.

١-٨-٢ محصلة حركتين لنقطة مادية:

لتكن M نقطة مادية متحركة بالنسبة لمجموعة متماسكة S . فإذا كانت المجموعة S

متحركة بدورها بالنسبة لمجموعة متماسكة S_1 فإننا نعرف الحركات التالية.

- نسمي حركة النقطة M بالنسبة لراصد متماثل مع الجملة S لحركة النسبية لـ M .
- ونسمي حركة النقطة M من الجملة S والتي تنطبق في اللحظة t على النقطة M ، بالنسبة للجملة S_1 الحركة الحرة لـ M .
- ونسمي حركة النقطة M بالنسبة للجملة S_1 الحركة للمحصلة (أو الحركة المطلقة) للنقطة M .

ونعني المسار التي ترسمه M في حركتها النسبية (بالنسبة للجملة S) المسار النسبي لها والسرعة التي تتحرك بها السرعة النسبية والقتراع الناتج التضرع النسبي

ونسمى المسار التي ترسمه النقطة P بالنسبة للجملة S_1 المسار الجري للنقطة M والسرعة التي تتحرك بها السرعة الجرية والتسارع الناتج التسارع الجري ونسمى المسار الذي ترسمه النقطة M بالنسبة للجملة الثابتة S_1 (نتيجة لأحركتين النسبية والجري) المسار المطلق والسرعة التي ترسمه بها السرعة المطلقة والتسارع الناتج التسارع المطلق

٣-٨-١ تركيب السرعة

لحساب السرعة المطلقة للنقطة M يكفي اشتقاق متجه الموضع $\overrightarrow{O_1M}$ بالنسبة للفراغ الثابت S_1 (نقطة ثابتة من الجملة S_1). من أجل ذلك نكتب العلاقة الشعاعية :

$$\overrightarrow{O_1M} = \overrightarrow{O_1O} + \overrightarrow{OM}$$

حيث O نقطة ثابتة بالنسبة للجملة S وتكون السرعة المطلقة ونرمزها $\vec{V}_o(M)$:

$$\vec{V}_o(M) = \left. \frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt} \right|_P = \left. \frac{d\overrightarrow{O_1O}}{dt} \right|_F + \left. \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right|_F$$

إن الحد الأول $\left. \frac{d\overrightarrow{O_1O}}{dt} \right|_F$ هو متجه السرعة للنقطة O (المتناسكة مع S) بالنسبة للجملة

الثابتة S_1 ونرمزها $\vec{V}(O)$ ، ومن أجل حساب الحد الثاني نطبق العلاقة (٥) فلجد:

$$\vec{V}_o(M) = \vec{V}(O) + \left. \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right|_M + \vec{\omega} \times \overrightarrow{OM}$$

حركة S بالنسبة لـ S_1 . نلاحظ هنا أن $\left. \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right|_M$ ليس إلا متجه السرعة النسبية للنقطة

M ونرمزها $\vec{V}_r(M)$

وإن المقدار $\vec{V}(O) + \vec{\omega} \times \overrightarrow{OM}$ هو سرعة نقطة من الجملة S بالنسبة للفراغ الثابت

المتناسك مع S_1 أي هي السرعة الجرية للنقطة M نرمزها $\vec{V}_g(M)$ ونكتب

$$(١) \quad \vec{V}_o = \vec{V}(O) + \vec{\omega} \times \overrightarrow{OM}$$

$$(٧) \quad \vec{V}_o(M) = \vec{V}_r(M) + \vec{V}_g(M) \quad \text{أي أن}$$

الأمر الذي يوضح النتيجة الهامة ألا وهي أن السرعة المطلقة لنقطة مادية M تتحرك بحركة مركبة من حركتين هي المجموع الهندسي لسرعتين : الأولى سرعة النقطة في حركتها

النسبية بالنسبة لـ S ، والثانية سرعة النقطة في حركتها متماكة مع الجملة S بالنسبة للجملة
الثابتة S_1

١-٨-٤ تركيب التسارعات

إن التسارع المطلق للنقطة M هو المشتق الزمني للسرعة المطلقة بالنسبة للفراغ
الثابت المتماكة مع الجملة S_1 ونرمزه $\vec{\Gamma}_a(M)$ ولتعيين هذا المتجه نشق العبارة الشعاعية

$$\vec{V}_a(M) = \vec{V}_r(M) + \vec{V}(o) + \vec{\omega} \times \vec{OM}$$

فلجد :

$$\vec{\Gamma}_a(M) = \frac{d\vec{V}_a}{dt} \Big|_F = \frac{d\vec{V}_r}{dt} \Big|_F + \frac{d\vec{V}(o)}{dt} \Big|_F + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \Big|_F \times \vec{OM} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{OM}}{dt} \Big|_F$$

إن $\frac{d\vec{V}(o)}{dt} \Big|_F = \vec{\Gamma}(o)$ وهو تسارع النقطة o بالنسبة للجملة S_1 ، و $\frac{d\vec{\omega}}{dt} \Big|_F = \vec{\epsilon}$ متجه

التسارع الزاوي في الحركة الجيروسكوبية

نطبق العلاقة (٥) فلجد :

$$\vec{\Gamma}_a(M) = \frac{d\vec{V}_r}{dt} \Big|_M + \vec{\omega} \times \vec{V}_r + \vec{\Gamma}(o) + \vec{\epsilon} \times \vec{OM} + \vec{\omega} \times \left(\frac{d\vec{OM}}{dt} \Big|_M + \vec{\omega} \times \vec{OM} \right)$$

نلاحظ في هذه العلاقة أن :

$$\frac{d\vec{V}_r}{dt} \Big|_M \text{ ليس إلا التسارع النسبي لرمزه } \vec{\Gamma}_r \text{ و } \vec{\Gamma}(o) + \vec{\epsilon} \times \vec{OM} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{OM})$$

لا تسارع النقطة M متماكة مع S بالنسبة لـ S_1 أي التسارع الجري ورمزه $\vec{\Gamma}_g$ ونحصل

بالتمويض والإصلاح على النتيجة التالية

$$(٨) \quad \vec{\Gamma}_a(M) = \vec{\Gamma}_r + \vec{\Gamma}_g + 2\vec{\omega} \times \vec{V}_r$$

نسمي الحد الأخير التسارع المتمم (تسارع كوريوليس) ورمزه $\vec{\Gamma}_c$ ونكتب

$$(٩) \quad \vec{\Gamma}_a(M) = \vec{\Gamma}_r + \vec{\Gamma}_g + \vec{\Gamma}_c$$

ملاحظة : إن التسارع المتمم $\vec{\Gamma}_c$ ينعدم عندما يكون $\vec{\omega} \times \vec{V}_r = 0$ أي :

- ١- إذا كان $\vec{\omega} = \vec{0}$ وهذا يعني أن الحركة الجرية هي حركة انحنائية فقط
 ٢- إذا كان $\vec{V}_r = \vec{0}$ أي في حالة التوازن النسبي للنقطة M بالنسبة للجملة S
 ٣- أو إذا كان $\vec{\omega} \parallel \vec{V}_r$

وفي هذه الحالات فقط يصبح التمارع المطلق محصلة تسارعين ، التمارع النسبي والتمارع الجري .

٥-٨-١ تعيين الحركة المحصلة تحليلياً:

- ١- نختار ثلاثية ديكارتية قائمة ومباشرة متماسكة مع S_1 التي نفترضها ثابتة ولنكن o, x_1, y_1, z_1 . ونختار ثلاثية ديكارتية قائمة ومباشرة متماسكة مع S بالنسبة لـ S_1 ولنكن o, x, y, z

إن موضع النقطة M يتعين من العلاقة

$$\vec{OM} = \vec{O_1M} + x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad (10)$$

حيث (x, y, z) هي الإحداثيات النسبية للنقطة M وهي مقادير تابعة للزمن و $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ متجهات الواحدة للمحاور المتحركة مع S وتتبعين كما مر سابقاً بتابعية زوايا أولر التابعة للزمن . و (x_0, y_0, z_0) إحداثيات النقطة o مبدأ الجملة المتحركة وهي أيضاً مقادير تابعة للزمن . أي أن النقطة M في هذه الجملة تسع درجات حرية وتتبعين إحداثيات M المطلقة (x_1, y_1, z_1) بتابعية تسع وسطاء تابعة للزمن .

- ٢- لتعيين السرعة المطلقة نشق العبارة (٩) بالنسبة للزمن فنجد

$$\vec{V}_o = \frac{d\vec{OM}}{dt} \Big|_F = \vec{V}(o) + x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k} + x\vec{i}' + y\vec{j}' + z\vec{k}' \quad (11)$$

إن المقدار $x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$ يتعلق بالحركة النسبية للنقطة M ويعين مركبات السرعة النسبية $\vec{V}_r$ على المحاور المتحركة المتماسكة مع S . أي

$$\vec{V}_r = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k} \quad (12)$$

في حين تتعلق الحدود $\vec{V}(o) + x\vec{i}' + y\vec{j}' + z\vec{k}'$ بالحركة الجرية وتعين متجه السرعة الجرية

$$\vec{V}_g = \vec{V}(o) + x\vec{i}' + y\vec{j}' + z\vec{k}' \quad (13)$$

وبملاحظة أن $\vec{k}' = \vec{\omega} \times \vec{k}$, $\vec{j}' = \vec{\omega} \times \vec{j}$, $\vec{i}' = \vec{\omega} \times \vec{i}$

نحصل على عبارة السرعة الجرية الشعاعية (٦) التي يمكن إسقاطها على أي من الجملتين المتحركة أو الثابتة.

$$\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_s \quad \text{وحصلنا بالتالي على علاقة تركيب السرعة}$$

٣- لتعيين التسارع المطلق نشق العبارة (١١) فنجد:

$$(١٤) \quad \vec{\Gamma}_a = \vec{\Gamma}(o) + (x''\vec{i} + y''\vec{j} + z''\vec{k}) + 2(x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}') + x\vec{i}'' + y\vec{j}'' + z\vec{k}''$$

نلاحظ أن التسارع النسبي الذي يتعلق بحركة M بالنسبة لـ S فقط هو:

$$(١٥) \quad \vec{\Gamma}_r = (x''\vec{i} + y''\vec{j} + z''\vec{k})$$

وأن التسارع الجري الذي يتعلق بحركة الجملة S بالنسبة لـ S_1 هو:

$$(١٦) \quad \vec{\Gamma}_s = \vec{\Gamma}(o) + x\vec{i}'' + y\vec{j}'' + z\vec{k}''$$

والحدود المتبقية تعين التسارع المتم أي

$$(١٧) \quad \vec{\Gamma}_o = 2(x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}')$$

١-٨-٦ نسبتيير بور:

كثيراً ما تصادف في التطبيقات العملية مسائل تكون فيها مركبات شعاع السرعة المطلقة للنقطة المادية M ومركبات شعاع الدوران معينة بالنسبة لجملة الأحداثيات المتحركة. دون أن تكون العلاقات التي تعين الجملة المتحركة بالنسبة للجملة الثابتة معروفة أو قد تكون هذه العلاقات متقدة، عندها نحتاج لوسيلة تعين لنا مركبات التسارع المطلق على جملة الأحداثيات، للمتحركة بسهولة وهذه الوسيلة هي نسبتيير بور التي مستخرجها فيما يلي:

نعلم أن التسارع المطلق هو المشتق الزمني للسرعة المطلقة في الفراغ الثابت لذا نكتب:

$$(١٨) \quad \vec{\Gamma}_a(M) = \frac{d\vec{V}_a}{dt} \Big|_F = \frac{d\vec{V}_o}{dt} \Big|_M + \vec{\omega} \times \vec{V}_o$$

وبإسقاط طرفي هذه العلاقة على جملة المحاور المتحركة نجد:

$$(١٩) \quad \begin{aligned} \Gamma_{a(x)} &= \frac{dV_{a(x)}}{dt} + q V_{a(z)} - r V_{a(y)} \\ \Gamma_{a(y)} &= \frac{dV_{a(y)}}{dt} + r V_{a(z)} - p V_{a(x)} \end{aligned}$$

$$\Gamma_{a(s)} = \frac{dV_{a(s)}}{dt} + p V_{o(s)} - q V_{a(s)}$$

وهي التي تسمى دساتير بور.

ملاحظة: يمكن تركيب أكثر من حركتين بالتسلسل فإذا تحركت النقطة M بالنسبة لجملة S_1 وتحركت S_1 بالنسبة لـ S_2 و S_2 بالنسبة لـ S_3 وهكذا فإننا نعبر أولاً بحركة النقطة M بالنسبة للجملة S_2 ونعتبرها حركة نسبية ثم نركبها مع حركة S_2 بالنسبة لـ S_3 وهكذا... حتى نحصل على المحصلة الأخيرة للحركات ونلاحظ أن تعيين السرعة المطلقة الأخيرة يتم بتعيين المجموع الشعاعي للسرع المركبة أي يمكن أن نكتب

$$\vec{V}_o = \sum_{i=1}^n \vec{V}_i$$

في حين يكون تركيب التسارعات أكثر تعقيداً.

٧-٨-١ شرط التدرج دون الزلاقي في الحركة المستوية:

عرفنا المركز الآتي للدوران في الحركة المستوية على أنه نقطة من المستوي المتحرك نعدم سرعتها بالنسبة للمستوي الثابت. ورأينا أن هذه النقطة I تنقل في المستوي المتحرك على منحني هو المتدرج وتنقل في المستوي الثابت على منحني هو القاعدة. ولننظر الآن إلى حركة هذه النقطة على أنها محصلة حركتين. حركة النقطة I على المتدرج (بالنسبة للمستوي المتحرك) وهي حركة نسبية وسرعة انتقالها على المتدرج هي السرعة النسبية لرمزها $\vec{V}_r(I)$ ، وحركة للنقطة P من المستوي المتحرك التي تنطبق على I في اللحظة المذكورة بالنسبة للمستوي الثابت وهي الحركة الجرية والسرعة في هذه الحركة تساوي الصفر (حسب تعريف المركز الآتي للدوران) أي $\vec{V}_e(I) = \vec{0}$ ، أما حركة للنقطة I على القاعدة (المتماسكة مع المستوي الثابت) فهي الحركة المطلقة لها وتكون سرعة انتقال I على القاعدة هي السرعة المطلقة للنقطة I أي هي $\vec{V}_o(I)$ وحسب تركيب الحركات يمكن أن نكتب

$$\vec{V}_o(I) = \vec{V}_r(I) + \vec{V}_e(I) \quad \text{ولما كان } \vec{V}_e(I) = \vec{0} \quad \text{فإننا نجد العلاقة} \quad \vec{V}_o(I) = \vec{V}_r(I) \quad (٧٠)$$

وبمكاملة العلاقة (٧٠) نجد أن المسافة التي تقطعها I على المسار النسبي لها (المتدرج) تساوي المسافة التي تقطعها I على المسار المطلق (القاعدة) في فترة زمنية واحدة.

بإسراع مما سبق أننا نستطيع صياغة عبارات متكافئة بعد كل منها شرطاً لتخرج منحني ما متحرك C دون الزلاق على منحني ثابت C_1 في مستو معين فنقول

١- نقطة التماس بين المنحني C المتحرك والمنحني الثابت C_1 هي المركز الآني للدوران $\Leftrightarrow$ الحركة تخرج دون الزلاق

٢- السرعة الجرية لنقطة التماس تساوي الصفر $\vec{V}_o(I) = \vec{0} \Leftrightarrow$ الحركة تخرج دون الزلاق

٣- السرعة المطلقة لنقطة التماس تساوي السرعة النسبية لها $\vec{V}_o(I) = \vec{V}_r(I) \Leftrightarrow$ الحركة تخرج دون الزلاق

٤- المسافة التي تقطعها نقطة التماس على المنحني C تساوي المسافة التي تقطعها على C_1 في فترة زمنية واحدة $\Leftrightarrow$ الحركة تخرج دون الزلاق

تمارين محلولة

تمارين (١): نقطة مادية تتحرك على خط طول من الشمال إلى الجنوب على سطح الكرة الأرضية بسرعة ثابتة v فإذا افترضنا أن محور الأرض ثابت . يطلب تعيين السرعة المطلقة والتسارع المطلق للنقطة M .

الحل: طريقة أولى : إن الحركة النسبية هي حركة النقطة M على محيط دائرة مركزها مركز الأرض O ونصف قطرها R نصف قطر الكرة الأرضية ، وهي حركة دائرية منتظمة سرعتها الزاوية ثابتة تساوي $\omega_r = \frac{v}{R}$



الشكل (١٩)

أي أن شعاع السرعة النسبية هو شعاع مماس في M ويصل على مماس الدائرة (O, R) وقيمتها v ويتجه وفق الحركة النسبية من الشمال إلى الجنوب.

الحركة الجرية هي حركة النقطة M مع الكرة حول محور ثابت هو محور الكرة الأرضية وليكن OZ_1 وهي حركة دورانية منتظمة سرعتها الزاوية $\omega_g = \frac{2\pi}{24 \times 3600}$ ، و شعاع السرعة الجرية يصل على مماس دائرة عرض مركزها m (على محور الكرة الأرضية) ونصف قطرها $r = \overline{mM}$ ، وقيمتها $\omega_g \cdot r$ وجهته باتجاه دوران الأرض (من الغرب إلى الشرق)

وتكون السرعة المطلقة بالتالي هي محصلة الشعاعين $\vec{V}_g$ ، $\vec{V}_r$

أما التسارع المطلق فهو محصلة ثلاثة أشعة $\vec{\Gamma}_e, \vec{\Gamma}_s, \vec{\Gamma}_r$
 $\vec{\Gamma}_r$ التسارع النسبي هو تسارع ناظمي لأن الحركة النسبية دائرية منتظمة فهو شعاع
 يحمل على $\vec{MO}$ وقيمه $|\vec{\Gamma}_r| = v^2 R = \omega_r^2 \cdot R$ ويتجه نحو O

$\vec{\Gamma}_s$ التسارع الجري وهو بدوره تسارع ناظمي يحمل على $\vec{Mm}$ وقيمه $\omega_s^2 r$
 أما التسارع المتمم $\vec{\Gamma}_e$ فهو كما نعلم : $\vec{\Gamma}_e = 2 \vec{\omega} \times \vec{V}_r$ فهو شعاع يعامد كلاً من $\vec{\omega}$
 الذي يحمل على محور الأرض $\vec{V}_r$ المماس لدائرة الطول فهو يعامد مستوي دائرة الطول
 أي يعامد Mm لذا فهو يحمل على مماس دائرة العرض أي يوازي $\vec{V}_e$ وقيمه $2\omega_s v \sin \theta$
 حيث θ الزاوية المتممة لـ α التي يصلها OM مع محور الأرض .
 وجهته تتعين من الجداء الخارجي $\vec{\omega} \times \vec{V}_r$.

والتسارع المطلق بالتالي هو محصلة الأشعة الثلاث السابقة

طريقة ثالثة : نختار جملة إحداثية نيكاثرية قائمة مباشرة متماسكة مع محور
 الأرض مركزها الكرة الأرضية ولنكن $ox_1y_1z_1$ ونختار جملة إحداثية متحركة مع الكرة
 الأرضية بحيث ينطبق oz_1 على oz ويقع ox في مستوي دائرة الطول للنقطة M .
 مستوي هذه الدائرة ولنعين مركبات $\vec{V}_e, \vec{V}_s, \vec{V}_r$ على الجملة $ox_1y_1z_1$ فنجد :

$$\vec{V}_r = (0, \omega_r, 0) \times (x, 0, z) = \omega_r z \vec{i} - \omega_r x \vec{k}$$

حيث $x = R \cos \theta$ $y = R \sin \theta$ $\theta = \omega_r t$ باختيار مناسب لشروط البدء

$$\vec{V}_s = (0, 0, \omega_s) \times (x, 0, z) = \omega_s x \vec{j}$$

$$\vec{V}_e = \omega_r z \vec{i} + \omega_s x \vec{j} - \omega_r x \vec{k}$$

ولنعين مركبات التسارع المطلق على الجملة xyz فنكتب

$$\vec{\Gamma}_r = -\omega_r^2 \vec{OM} = -\omega_r^2 x \vec{i} - \omega_r^2 z \vec{k} \quad , \quad \vec{\epsilon}_r = \vec{0}$$

$$\vec{\Gamma}_s = -\omega_s^2 \vec{mM} = -\omega_s^2 x \vec{i} \quad , \quad \vec{\epsilon}_s = \vec{0}$$

$$\vec{\Gamma}_e = 2(0, 0, \omega_s) \times (\omega_r z, 0, -\omega_r x) = \omega_s \omega_r z \vec{j}$$

$$\vec{\Gamma}_e = -x(\omega_r^2 + \omega_s^2) \vec{i} + \omega_s \omega_r z \vec{j} - \omega_r^2 z \vec{k} \quad \text{فنجد}$$

ملاحظة (١) : كان بالإمكان إيجاد مركبات $\vec{\Gamma}_e$ بتطبيق دساتير بور.

ملاحظة (٢) : يمكن تعيين مركبات السرعة المطلقة والتسارع المطلق على جملة المحاور
 الثابتة $ox_1y_1z_1$ بملاحظة أن :

$$\begin{aligned}\vec{i} &= \cos \psi \vec{i}_1 + \sin \psi \vec{j}_1 \\ \vec{j} &= -\sin \psi \vec{i}_1 + \cos \psi \vec{j}_1 \\ \vec{k} &= \vec{k}_1\end{aligned}$$

و $\psi = (\alpha x, \alpha x_1)$ و $\psi = \int \omega_0 dt = \omega_0 t$ باختيار مناسب لمبدأ الزمن.

تمرين (٢) : $o_1 x_1 y_1$ محوران متعامدان في مستوى ثابت ، مستقيم Δ يتحرك

دون انزلاق على محيط دائرة ثابتة مركزها o_1 نصف قطرها l بحيث تبقى المصرة الزاوية لدوران النقطة c نقطة تماس المستقيم Δ مع الدائرة (o_1, l) ثابتة وتساوي ω . M نقطة مادية تتحرك على المستقيم Δ بحركة منتظمة برعتها v ثابتة ، كان المستقيم Δ في لحظة البدء مماساً للدائرة في النقطة $A(1,0)$ وكانت M في النقطة A في لحظة البدء أيضاً والمطلوب :

١- تعيين الاحداثيات المطلقة للنقطة M (بالنسبة لجملة المحاور $ox_1 y_1$) أي معادلات

الحركة المطلقة لـ M

٢- تعيين السرعة المطلقة والتسارع المطلق للنقطة M

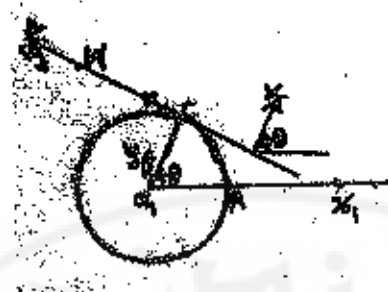
٣- تعيين العلاقة التي تربط v بـ ω كي يكون $\vec{\Gamma}_0$ محمولاً على Δ .

الحل : إن حركة M هي محصلة حركتين حركة نسبية وهي حركتها على المستقيم

Δ وحركة جرية مع Δ وهي حركة مستوية . بما أن حركة Δ تتحرك دون انزلاق فإن نقطة التماس c هي المركز الأني للدوران في الحركة المستوية : نختار النقطة o مبدأ الاحداثيات المتناسكة مع Δ النقطة من Δ التي كانت في A لحظة البدء . فمن شرط التخرج دون انزلاق نلاحظ أن المسافة التي تقطعها نقطة التماس c (المركز الأني للدوران) على المستقيم Δ (وهو المتحرك) تساوي المسافة التي تقطعها النقطة c على الدائرة (o_1, l) (المسافة) أي أن طول $\vec{oc}$ يساوي طول القوس $\widehat{Ac}$ فإذا سمينا الزاوية بين $o_1 c$

و $o_1 x_1$ θ كان لدينا $\vec{oc} = \widehat{Ac} = \theta$ (لأن نصف قطر الدائرة $l=1$)

نختار المحور oy منطبقاً على Δ والمحور ox العمود على Δ في النقطة o .



شكل (٢٠)

لتعيين موضع النقطة M نكتب:

$$\overrightarrow{O_1M} = \overrightarrow{O_1C} + \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OM} \quad , \quad |\overrightarrow{OM}| = \int v dt = vt \quad (١)$$

نسقط هذه العبارة الشعاعية على المحورين O_1x_1 , O_1y_1 فنجد :

$$x_1(M) = \cos \theta + \theta \sin \theta - vt \sin \theta \quad , \quad y_1(M) = \sin \theta - \theta \cos \theta + vt \cos \theta$$

ولما كانت السرعة الزاوية لـ $\omega = c \leftarrow \theta = \omega t$ (بملاحظة شروط البدء المعطاة)

$$x_1(M) = \cos \omega t + (\omega - v)t \sin \omega t \quad \text{ومنه}$$

$$y_1(M) = \sin \omega t - (\omega - v)t \cos \omega t$$

وهي معادلات الحركة المطلقة للنقطة M .

٢- لتعيين السرعة والتسارع المطلقين ، يكفي اشتقاق x_1 , y_1 بالنسبة للزمن ونكتب

$$\vec{V}_o = x_1' \vec{i}_1 + y_1' \vec{j}_1 \quad , \quad \vec{V}_o = x_1' \vec{i}_1 + y_1' \vec{j}_1$$

لتعين مركبات السرعة المطلقة والتسارع المطلق على المحاور oxy المتحركة .

$$\vec{V}_r = v \vec{j} \quad \text{إن السرعة النسبية لـ } M \text{ هي :}$$

$$\vec{V}_o = \vec{\omega} \times \overrightarrow{cM} \quad \text{والسرعة الجرية لـ } M \text{ هي :}$$

إن $\omega = \theta'$ لأن θ الزاوية التي يصنعها المستقيم ox من المستوي المتحرك مع المستقيم

O_1x_1 من المستوي الثابت وتساوي وضوحاً الزاوية بين O_1x_1 , O_1C ولتعيين مركبات

$$\overrightarrow{cM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OC} = (vt - \theta) \vec{j} \quad \text{كما يلي :}$$

$$\vec{V}_o = (0, 0, \omega) \times (0, (v - \omega)t, 0) = -\omega(v - \omega)t \vec{i} \quad \text{ومنه}$$

$$\vec{V}_o = -\omega(v - \omega)t \vec{i} + v \vec{j} \quad \text{والسرعة المطلقة بالتالي هي :}$$

تعيين التسارع : لتعين التسارع المطلق بطريقة تركيب الحركات فنكتب

$\vec{\Gamma}_r = \vec{0}$ هو التسارع في حركة M النسبية ، وهي حركة مستقيمة منتظمة أي $\vec{\Gamma}_r = \vec{0}$
 $\vec{\Gamma}_c$ هو التسارع في حركة M الجرية وهي حركة مستوية ويمكن أن يحسب

$$\vec{\Gamma}_c = \frac{d}{dt} (\vec{\omega} \times \vec{cM}) = \vec{\omega} \times \vec{cM} + \vec{\omega} \times \left(\frac{d\vec{cM}}{dt} \right) \quad \text{كما يلي:}$$

$$\frac{d\vec{cM}}{dt} = \vec{V}_c(M) - \vec{u} \quad \text{ولدينا } \vec{c} = \vec{0} \quad \text{لأن } \vec{\omega} \text{ ثابت و}$$

حيث $\vec{u}$ سرعة انتقال c على القاعدة أو على المتكدرج

$$\frac{d\vec{cM}}{dt} = -\omega(v-\omega)t \vec{i} - r\theta' \vec{j} = -\omega(v-\omega)t \vec{i} - \omega \vec{j} \quad \text{ومنه}$$

وبالتعويض نجد

$$\vec{\Gamma}_c = (0, 0, \omega) \times (-\omega(v-\omega)t, -\omega, 0) = \omega^2 \vec{i} - \omega^2(v-\omega)t \vec{j}$$

والحسب أخيراً التسارع المتمم من العلاقة

$$\vec{\Gamma}_c = 2\vec{\omega}_s \times \vec{V}_r = 2(0, 0, \omega) \times (0, v, 0) = -2\omega v \vec{i}$$

ويصبح التسارع المطلق :

$$\vec{\Gamma}_a = (\omega^2 - 2\omega v) \vec{i} - \omega^2(v-\omega)t \vec{j}$$

ملاحظة (١) : كان بالإمكان الحصول على مركبات $\vec{\Gamma}_a$ على المحاور ox, y من دساتير بور أي من إسقاط العلاقة :

$$\begin{aligned} \vec{\Gamma}_a &= \frac{d\vec{V}_a}{dt} \Big|_M + \vec{\omega}_s \times \vec{V}_a \\ &= (-\omega(v-\omega), 0, 0) + (0, 0, \omega) \times (-\omega(v-\omega)t, v, 0) \\ &= (-2v\omega + \omega^2) \vec{i} - \omega^2(v-\omega)t \vec{j} \end{aligned} \quad \text{فلنجد :}$$

وهي القيمة التي حصلنا عليها سابقاً

ملاحظة (٢) : يمكن الحصول على هذه المركبات أيضاً من إسقاط $\vec{i}_1, \vec{j}_1$ على المحاور ox, oy .

(٤) كي يجعل $\vec{\Gamma}_a$ على Δ يجب أن تكون المركبة على x معدومة لذا نكتب

$$-2\omega v + \omega^2 = 0 \Rightarrow \omega = 2v$$

وهي العلاقة المطلوبة.



تمارين

١- يتحرك مستو مثلل زاوية ميله على الأفق تساوي α بحركة المسماوية على مستو أفقي ، ويرفع أثناء حركته قضيباً مستقيماً يستند عليه شاقولياً نحو الأعلى ، والمطلوب تعيين تسارع القضيب علماً بأن تسارع المستوي المائل في حركته يساوي γ .

٢- يدور قضيب OA حول O في مستويه بسرعة زاوية ثابتة ω ، نقطة تتزلق على OA بسرعة قيمتها ثابتة تساوي u ، عين سرعة وتسارع M المطلقين بدلالة بعد M عن النقطة O .

٣- يدور قرص دائري نصف قطره a بسرعة زاوية ثابتة ω حول محور يمر من نقطة O تقع على محيط القرص ، تتزلق نقطة M بدءاً من النقطة A المقابلة قطرياً لـ O على محيط القرص بسرعة منتظمة قيمتها u . عين السرعة والتسارع المطلقين للنقطة M في الحالتين :
١- محور الدوران في مستوي القرص .
٢- محور الدوران بعامد مستوي القرص .

٤- يدور مثلث قائم الزاوية ABC حول ضلعه القائم الثابت CB وفق القانون

$$\varphi = c_1 t + c_2 t^2 \quad (c_1, c_2 \text{ ثابتان})$$

وتتحرك نقطة M بحركة اهتزازية بسيطة على الوتر AB حسب القانون

$$OM = a \cos \frac{\pi}{3} t \quad (O \text{ منتصف } AB)$$

عين السرعة المطلقة والتسارع المطلق للنقطة M في لحظة ما t .

٥- xy زاوية صلبة قياسها a تدور في مستويها حول رأسها الثابت O بسرعة زاوية

ω ، نقطة كحرك في المستوي xy ، إحداثيها بالنسبة لـ yx هما x و y . احسب بدلالة x و y ومشتقاتها بالنسبة للزمن السرعة المطلقة للنقطة M .

٦- xyz ثلاثة قائمة ومباشرة ، Δ مستقيم يوازي Oz ويدور حول Oz بسرعة زاوية

ثابتة ω ، كان Δ في لحظة البدء في الموضع $x=a$ ، $y=0$ ، نقطة p ،

تتحرك على Δ ، بتعين راقمها بالعلاقة : $z = b \cos(2\omega t + a)$

والمطلوب : ١- تعيين إحداثيات p المطلقة .

٢- تعيين شعاعي السرعة والتسارع المطلقين للنقطة p .

٧- قضيب مستقيم يمر من حلقين صغيرين A و B تستطيعان الانزلاق على محيط دائرة نصف قطرها R ، يتحرك A بحيث يبقى أفقياً . معادلة حركة مركز القضيب هي : $y = R \cos 2\pi t$. عين السرعة المطلقة والنسبية والجرية للحلقة A بالفترض حركة A على المستقيم هي حركتها النسبية .

٨- تدور اسطوانة دائرية حول محورها بسرعة زاوية ثابتة ω ، نقطة تتحرك على سطح الاسطوانة حسب المعادلات :

$$x = 3 \cos 2\pi t , \quad y = 3 \sin 2\pi t , \quad z = 3t$$

يفترض x, y, z هي جملة متماسكة مع الاسطوانة يطبق منها z على محور الاسطوانة . عين السرعة المطلقة والتسارع المطلق للنقطة M .



الفصل التاسع

الحركة المحصلة لجسم صلب

- تركيب حركتين انسيابيتين
- تفريق الحركة الانسيابية
- تركيب حركتين دورائيتين
- تفريق انسياب إلى دورانيين متعاكسين
- تركيب حركة دورانية وحركة انسيابية
- حركة جسم على تماس مع جسم ثابت
- الانزلاق والتدحرج واللفل



١-٩-١ ليكن الجسم الصلب Σ الذي يتحرك بالنسبة لجملة $Oxyz$ متماسكة مع S

التي تتحرك بدورها بالنسبة لجملة $O_1x_1y_1$ متماسكة مع S_1 التي نفترضها ثابتة.

نسمي حركة Σ بالنسبة لـ S حركة نسبية ونسمي حركة Σ متماسكة مع S بالنسبة لـ S_1 حركة جرية ونسمي حركة Σ بالنسبة لـ S_1 حركة محصلة (أو مطلقة) ، ولود أن نعين السرعة المطلقة والتسارع المطلق للنقطة ما $M \in \Sigma$ بالنسبة للفراغ الذي افترضناه ثابتاً.

إن السرعة المطلقة $\vec{V}_a(M)$ نكتب كما مر سابقاً (الحركة المحصلة لنقطة مادية) على النحو

$$\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e$$

والسرعة النسبية هنا هي حركة نقطة من جسم صلب بالنسبة لجملة $Oxyz$ فهي نكتب بالحالة العامة كما يلي:

$$\vec{V}_r(M) = \vec{V}(P) + \vec{\omega}_r \times \vec{PM}$$

حيث $\vec{\omega}_r$ هو شعاع الدوران الآني النسبي و P نقطة من الجسم Σ نختارها قطباً للحركة والسرعة الجرية $\vec{V}_e$ هي سرعة نقطة من S تنطبق على M في اللحظة المذكورة بالنسبة للجملة S_1 فهي نكتب كما يلي:

$$\vec{V}_e(M) = \vec{V}(O) + \vec{\omega}_e \times \vec{OM}$$

حيث $\vec{\omega}_e$ شعاع الدوران الآني في الحركة الجرية و O هو القطب في هذه الحركة وتكون السرعة المطلقة بالتالي :

$$\vec{V}_a = \vec{V}(P) + \vec{\omega}_r \times \vec{PM} + \vec{V}(O) + \vec{\omega}_e \times \vec{OM}$$

ويتعين التسارع المطلق بطريقة مشابهة وذلك بتعيين كل من التسارعات $\vec{\Gamma}_r$ و $\vec{\Gamma}_e$ و $\vec{\Gamma}_a$ لأي نقطة M من الجسم Σ .

سندرس فيما يلي تركيب بعض الحركات الخاصة الهامة للجسم الصلب .

٢-٩-١ تركيب هركتين انسيجابيتين : إذا كانت الحركة النسبية الانسيابية شعاع

سرعتها الانسيابية $\vec{V}_1$ وكانت الحركة الجرية الانسيابية شعاع سرعتها الانسيابية

$$(1) \quad \forall M \in \Sigma \quad \vec{V}_a(M) = \vec{V}_1 + \vec{V}_2$$

أي أن الحركة المحصلة هي حركة الانسيابية بسيطة شعاع السرعة التي نشأت من الجسم يساوي المجموع الشعاعي للشعاعي السرعة $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$.

وما قيل عن توزيع السرعة يقال عن توزيع التسارعات ونكتب $\vec{\Gamma}_0 = \vec{\Gamma}_1 + \vec{\Gamma}_2$

- يمكن تعميم تركيب حركتين التسحابيتين لجسم صلب على عدة حركات التسحابية وتكون محصلة عدة حركات التسحابية . حركة التسحابية بسيطة شعاع السرعة في الحركة المحصلة

يساوي المجموع الشعاعي لأشعة السرعة في الحركات المركبة أي $\vec{V}_0 = \sum_{i=1}^n \vec{V}_i$

٣-٩-١ تفريق الحركة الانسحابية إلى حركتين انسحابيتين:

١- نعلم أن أي شعاع $\vec{V}$ في الفراغ يمكن تفريقه بشكل وسيد إلى ثلاثة أشعة

متلاقية في نقطة أي يمكن أن نكتب $\vec{V} = \vec{V}_x + \vec{V}_y + \vec{V}_z$ بفرض x, y, z ثلاثة

محاور متلاقية في نقطة ونقول عندها إن $\vec{V}$ هو شعاع السرعة في حركة محصلة ناتجة

عن تركيب ثلاث حركات انسحابية أشعة السرعة لها هي $\vec{V}_x, \vec{V}_y, \vec{V}_z$ ونسمي

الحركات الانسحابية المركبة للحركة الانسحابية $\vec{V}$

٢- يمكن تفريق أي شعاع $\vec{V}$ في مستو يحوي هذا الشعاع إلى حركتين وفق محورين

متعامليين ويكون التفريق وحيداً على المحورين المذكورين لذا نقول يمكن تفريق الحركة

الانسحابية لجسم صلب إلى حركتين انسحابيتين في مستو يحوي شعاع السرعة الانسحابية $\vec{V}$

أي $\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2$ حيث $\vec{V}_1, \vec{V}_2$ هما سرعتا الحركتين الانسحابيتين المركبتين

٤-٩-١ تركيب حركتين دورائيتين:

إذا تحرك جسم صلب Σ بحركة دورانية حول محور Δ_1 من جملة إحداثية

معامسكة مع الفراغ S وكان شعاع الدوران $\vec{\omega}_1$ وإذا تحركت انجملة S بالنسبة للفراغ S_1

بحركة دورانية حول محور Δ_2 شعاع دورانها $\vec{\omega}_2$ ، فإن السرعة المطلقة للنقطة ما من

الجسم Σ نكتب كما يلي:

$$\vec{V}_0(M) = \vec{\omega}_1 \times \vec{o_1M} + \vec{\omega}_2 \times \vec{o_2M}$$

حيث $o_1 \in \Delta_1, o_2 \in \Delta_2$ ولنميز الحالات الخاصة التالية:

(١) Δ_1, Δ_2 متقاطعان في نقطة O عندها تصبح عبارة السرعة المطلقة :

$$\vec{V}_0(M) = \vec{\omega}_1 \times \vec{oM} + \vec{\omega}_2 \times \vec{oM} = (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2) \times \vec{oM}$$

$$(٢) \quad \vec{V}_0(M) = \vec{\omega} \times \vec{oM} \quad \text{أي}$$

والحركة المحصلة هي حركة دورانية بسيطة شعاع دوراتها $\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$ ويمر من نقطة تقاطع Δ_1 مع Δ_2 ، ويتعين التصارع لأي نقطة كما مر في الحركة الدورانية البسيطة للجسم الصلب

- لو أردنا إيجاد محصلة عدة دورانات حول محاور متقاطعة في نقطة فإننا نجد بتركيب الحركات بشكل متتال أن الحركة المحصلة هي حركة دورانية بسيطة حول محور يمر من نقطة التقاطع ، وشعاع الدوران في كل لحظة ، هو محصلة أشعة الدوران لكل حركة أي:

$$\vec{\omega} = \sum_{i=1}^n \vec{\omega}_i$$

- لما كان بالإمكان تقريب أي شعاع مثل $\vec{\omega}$ في الفراغ إلى ثلاثة أشعة حسب ثلاث مناح متقاطعة في نقطة وبشكل وحيد فإنه بالإمكان تقريب الحركة للدورانية التي شعاع دوراتها $\vec{\omega}$ إلى ثلاث دورانات بسيطة حول ثلاث محاور متلاقية في نقطة وقد مر معنا مثال ذلك في الحركة الدورانية لجسم صلب حول نقطة ثابتة .

$$(2) \quad \Delta_1 \text{ يوازي } \Delta_2 \text{ و } \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 \neq \vec{0}$$

تكتب السرعة المطلقة في هذه الحالة كما يلي:

$$(3) \quad \vec{V}_a(M) = \vec{\omega}_1 \times \vec{o_1 M} + \vec{\omega}_2 \times \vec{o_2 M}$$

لما كان $\vec{\omega}_1 // \vec{\omega}_2$ فإن $\frac{\vec{\omega}_1}{\omega_1} = \frac{\vec{\omega}_2}{\omega_2} = \vec{u}$ حيث $\vec{u}$ شعاع الواحدة للمحور

$$\vec{\omega}_2 = \frac{\omega_2}{\omega_1} \vec{\omega}_1 \Leftrightarrow \Delta_2, \Delta_1 \text{ المشترك}$$

نعوض في عبارة السرعة المطلقة لنجد :

$$\vec{V}_a(M) = \vec{\omega}_1 \times (\vec{o_1 M} + \frac{\omega_2}{\omega_1} \vec{o_2 M}) = \frac{\omega_1}{\omega_1} \times (\omega_1 \vec{o_1 M} + \omega_2 \vec{o_2 M})$$

نعلم من علاقة مركز مجموعة نقط أنه إذا كان $\omega_1 + \omega_2 \neq 0$ فإن :

$$(4) \quad \omega_1 \vec{o_1 M} + \omega_2 \vec{o_2 M} = (\omega_1 + \omega_2) \vec{c M}$$

حيث c هي مركز النقطتين o_1, o_2 . نعوض في عبارة السرعة المطلقة لنجد:

$$\vec{V}_a(M) = (\omega_1 + \omega_2) \vec{u} \times \vec{c M} = \vec{\omega} \times \vec{c M} : \vec{\omega} = (\omega_1 + \omega_2) \vec{u} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$$

أي أن الحركة المحصلة هي حركة دورانية بسيطة شعاع دوراتها $\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$

يطبق في نقطة c هي مركز النقطتين o_1 ، o_2 ، نسمي النقطة c مركز الدورانيين ويمكن تعيين النقطة c هندسياً كما يلي :

أو عوضاً $M \rightarrow c$ في علاقة مركز مجموعة النقط نجد :

$$(٥) \quad \omega_1 \overrightarrow{o_1 c} + \omega_2 \overrightarrow{o_2 c} = \vec{0} \Rightarrow \frac{\overrightarrow{o_1 c}}{\omega_2 c} = - \frac{\omega_2}{\omega_1}$$

تدل العلاقة (٥) على أنه إذا كان $\overrightarrow{\omega_1}$ ، $\overrightarrow{\omega_2}$ باتجاه واحد أي إذا كان ω_1 ، ω_2 من إشارة واحدة فإن النقطة c تقع بين النقطتين o_1 ، o_2 وتقسّم القطعة $o_1 o_2$ داخلياً بالنسبة

$$\frac{\omega_2}{\omega_1}$$

لما إذا كان $\overrightarrow{\omega_1}$ ، $\overrightarrow{\omega_2}$ باتجاهين مختلفين أي ω_1 ، ω_2 من إشارتين مختلفتين فإن c تقع في طرف واحد بالنسبة لـ o_1 ، o_2 وهي النقطة القاسمة خارجاً للقطعة المستقيمة

$o_1 o_2$ بالنسبة $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ ويوضح الشكل التالي طريقة تعيين c هندسياً



الشكل (٢١)

تعيين مركز الدورانات c تحليلياً : يمكن تعيين إحداثيات النقطة c باسقاط العلاقة (٤) على محورين إحداثيين ox ، oy مثلاً ، فنجد

$$\omega_1 (x(c) - x_1) + \omega_2 (x(c) - x_2) = 0 \Rightarrow x(c) = \frac{\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2}{\omega_1 + \omega_2}$$

$$\omega_1 (y(c) - y_1) + \omega_2 (y(c) - y_2) = 0 \Rightarrow y(c) = \frac{\omega_1 y_1 + \omega_2 y_2}{\omega_1 + \omega_2}$$

ملاحظة : يمكن تركيب عدة دورانات متوازية ω_1 ، ω_2 ، حيث

بالمتتالي لتحصل على حركة محصلة هي حركة دورانية بسيطة $\sum_{i=1}^n \vec{\omega}_i \neq \vec{0}$

شعاع دوراتها $\vec{\omega} = \sum \vec{\omega}_i$ يولدي الدورانات المركبة ويطبق في نقطة c هي مركز الدورانات والتي تتميز من العلاقة :

$$(٦) \quad \vec{oc} = \frac{\sum \omega_i \vec{oo}_i}{\sum \omega_i} \quad , \quad \vec{\omega}_i \text{ هي نقط تطبيق الدورانات المتوازية } \vec{\omega}_i$$

(٧) $\Delta_2 // \Delta_1$ و $\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 = \vec{0}$ و $\vec{\omega}_1$ لا تطبق على o_2 أي $\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2$ تشكل مزدوجة .

نكتب السرعة المطلقة لنقطة M من الجسم Σ في هذه الحالة كما يلي :

$$\vec{V}_o(M) = \vec{\omega}_1 \times \vec{o_1 M} + \vec{\omega}_2 \times \vec{o_2 M} = \vec{\omega}_1 \times (\vec{o_1 M} - \vec{o_2 M})$$

$$(٧) \quad \vec{V}_o(M) = \vec{\omega}_1 \times \vec{o_1 o_2}$$

أي أن السرعة لا تتعلق بالنقطة M مما يدل على أن الحركة المحصلة هي حركة الانسحابية شعاع سرعتها الانسحابية $\vec{V}_o$ هو عزم المزدوجة $\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2$ فهو يعامد مستوي المزدوجة .

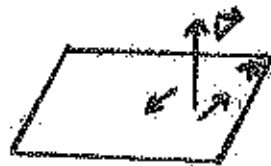
(٨) إذا كان $\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2$ متعاكسين مباشرة أي $\vec{\omega}_2 = -\vec{\omega}_1$ و $\vec{\omega}_1$ تطبق

على o_2 عندها تصبح السرعة المطلقة $\vec{V}_o(M) = \vec{0}$

ونقول إن محصلة دوراتين متعاكسين مباشرة هي سكون .

٩-٩-٥ تفريق الانسحاب إلى دوراتين متعاكسين:

يمكن تفريق الانسحاب : شعاع سرعته الانسحابية $\vec{V}$ إلى دوراتين في مستوي يعامد الشعاع $\vec{V}$. في الحقيقة يمكن دوماً البحث عن مزدوجة في المستوي π العمودي على $\vec{V}$ بحيث يكون عزمها $\vec{V}$ ويمكن أن يتم ذلك بطرق كثيرة فيمكن أن نختار ذراع المزدوجة ونعين شعاعها أو نختار أحد الشعاعين ونعين الذراع ويتم ذلك بما يناسب المسألة المدروسة



الشكل (٢٧)

٦-٩-١ تركيب حركة دورانية وحركة الانسحابية

إذا كانت الحركة التجمعية مثلاً حركة دورانية فإن شعاع السرعة النسبية يكون

$$\vec{V}_r(M) = \vec{\omega} \times \vec{OM}$$

$$\vec{V}_o(M) = \vec{V}_o + \vec{\omega} \times \vec{OM}$$

وتكون السرعة المطلقة بالتالي :

والحركة المحصلة هي حركة عامة . لندرس الحالات الخاصة التالية:

(١) شعاع السرعة في الحركة الانسحابية يوازي شعاع الدوران في الحركة الدورانية ،

$$\vec{V}_o(M) \parallel \vec{\omega} \quad \text{علما بما يمكن أن نكتب} \quad \vec{V}_o = b \vec{\omega} \quad \text{مما يعطي}$$

$$\vec{V}_o(M) = b \vec{\omega} + \vec{\omega} \times \vec{OM}$$

والحركة المحصلة هي حركة لولبية دائرية

(٢) شعاع السرعة في الحركة الانسحابية يعامد شعاع الدوران : $\vec{V} \perp \vec{\omega}$

نفرض الانسحاب في هذه الحالة إلى حركتين دوريتين في مستوي يعامد الانسحاب $\vec{V}$

ويتمان في المستوي العمودي على $\vec{\omega}$. نختار شعاع الدوران $\vec{\omega}_1$ يعاكس $\vec{\omega}$ مباشرة

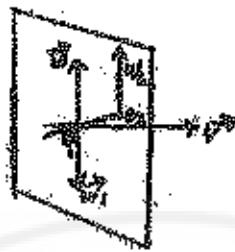
ومطبق في O_1 (مبدأ $\vec{\omega}$) فيكون $\vec{\omega}_1 = -\vec{\omega}$ و $\vec{\omega}_2 = \vec{\omega}$ ويطبق $\vec{\omega}_2$

في النقطة O_2 التي نعين من العلاقة $\vec{V} = \vec{\omega}_1 \times \vec{O_1O_2}$

فلمحصل على ثلاث حركات دورانية متوازية محصلتها هي محصلة الانسحاب $\vec{V}$ و الدوران

$\vec{\omega}$. ولما كانت محصلة الدورانين $\vec{\omega}_1$ و $\vec{\omega}_2$ ستكون تصبح الحركة المحصلة المطلوبة

هي حركة دورانية بسيطة شعاع دورانها $\vec{\omega}_2 = \vec{\omega}$ يطبق في نقطة جديدة هي O_2 .



الشكل (٧٣)

٣) شعاع السرعة في الحركة الاندحافية يقطع شعاع الدوران $\vec{\omega}$ ويصنع معه زاوية α نسبداً قسماً هذه الحالة بتفريق الحركة الاندحافية إلى هركتين اندحافيتين في المستوى المعين بـ $\vec{V}$ و $\vec{\omega}$ أحد الاندحابين يحمل على $\vec{\omega}$ ويساوي $\vec{V}_1 = \vec{V} \cos \alpha$ والثاني بعامد $\vec{\omega}$ ويساوي $\vec{V}_2 = \vec{V} \sin \alpha$ ثم نركب الاندحاب $\vec{V}_2$ مع الدوران $\vec{\omega}$ فنحصل على حركة لولبية بسيطة شعاع دورانها $\vec{\omega}$ ويطبق في نقطة O_2 تتعين من العلاقة:

$\vec{V}_2 = -\vec{\omega} \times \overrightarrow{O_1 O_2} = \vec{V} \sin \alpha$ (نقطة O_1 من $\vec{\omega}$) ثم نركب الحركة الدورانية الناتجة مع الاندحاب $\vec{V}_1$ الموازي لـ $\vec{\omega}$ فنحصل على حركة محصلة هي حركة لولبية بسيطة شعاع دورانها $\vec{\omega}$ مطبق في O_2 وخطوة اللولب

$$b = \frac{V \cos \alpha}{\omega}$$

ونكتب السرعة المماسية لنقطة M في هذه الحالة على النحو :

$$\vec{V}_s(M) = b \vec{\omega} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{O_2 M}$$

١-٩-٧ حركة جسم S على تماس مع جسم S_1 ثابت

لنكن S جسم متحرك يتحرك بحيث يبقى ماساً لجسم ثابت S_1 ، لنكن p نقطة التماس الهندسية بين S و S_1 ، نلاحظ في كل لحظة من الزمن أن النقطة p تنطبق على نقطة A من S وتنطبق على نقطة B من S_1 ، وعندما يتغير الزمن تنتقل النقطة p على السطح S ،

نسمي المنحني الذي ترسمه أثناء انتقالها C وننتقل على السطح S_1 ونسمي المنحني الذي ترسمه على S_1 C_1 إن المنحنيين C و C_1 يشتركان في كل لحظة بنقطة التماس المشتركة p .

إن حركة p على المنحني C هي حركة نسبية ، وحركة النقطة A من S التي تنطبق على p في اللحظة المذكورة بالنسبة لـ S_1 هي حركة جرية ، وحركة p على C_1 (بالنسبة لـ S_1) هي حركتها المطلقة وحسب تركيب المبرع نكتب

$$\vec{V}_o(p) = \vec{V}_e(p) + \vec{V}_r(P) = \vec{V}_o(A) + \vec{V}_r(p)$$



الشكل (٢٤)

نسمي سرعة النقطة A بالنسبة للجسم S_1 السرعة الانزلاقية لـ S على S_1 ونرمزها $\vec{W}$

$$\vec{V}_o(p) = \vec{W} + \vec{V}_r(P) \quad \text{ونكتب}$$

إن السرعة الانزلاقية لـ S على S_1 تقع دوماً في المستوى المماس للسطحين المتماسين

S, S_1

الاثبات : من العلاقة * نجد :

$$\vec{W} = \vec{V}_o(p) - \vec{V}_r(P)$$

إن $\vec{V}_r(P)$ تحمل على مماس المنحني C و $\vec{V}_o(p)$ تحمل على مماس المنحني C_1

ولما كان المنحنيان C و C_1 متماسين لكل من سرعتين تقع في المستوى المماس للسطحين

S و S_1 مما يدل على أن شعاع السرعة الانزلاقية يقع أيضاً في المستوى المماس .

١-٩-٨ الانزلاقي والتكحرج والقتل:

لنكن M نقطة مسا من الجسم المتحرك S . إن سرعة النقطة M نكتب كما نعلم

باعتبار النقطة A قطباً للحركة كما يلي:

$$\vec{V}(M) = \vec{V}(A) + \vec{\omega} \times \vec{AM}$$

يتفرق شعاع الدوران $\vec{\omega}$ إلى شعاعين أحدهما في المستوى المماس للسطحين والثاني يحمل

على السطاح للسطحين فنكتب $\vec{\omega} = \vec{\omega}_r + \vec{\omega}_N$ ويتم بذلك تفريق الحركة

الدورانية حول القطب A إلى حركتين دورانيتين شعاع الدوران في الحركة الأولى يقع في

المستوي المماس للسطحين S و S_1 نسمي هذه الحركة حركة التكحرج ، وشعاع الدوران

الثاني يحمل على الناطم للسطحين ونسمي هذه الحركة حركة القتل ، ونلاحظ أن سرعة

النقطة A من الجسم S بالنسبة للجسم الثابت S_1 هي السرعة الانزلاقية لذا نكتب:

$$\vec{V}(M) = \vec{W} + \vec{\omega}_T \times \vec{AM} + \vec{\omega}_N \times \vec{AM}$$

مما يدل على أن سرعة نقطة ما M من S هي محصلة سرع ثلاث حركات
حركة الانزلاقية سرعتها $\vec{W}$ ، وحركة تدرج سرعتها $\vec{\omega}_T \times \vec{AM}$ ، وحركة قتل
سرعتها $\vec{\omega}_N \times \vec{AM}$ والحركة العامة هي بالتالي محصلة ثلاث حركات ، انزلاق وتدرج
وقتل

نلاحظ الحالات الخاصة التالية :

- ١- إذا كان $\vec{\omega} = \vec{\omega}_T + \vec{\omega}_N = \vec{0}$ كانت الحركة الانزلاقية فقط .
- ٢- إذا كان $\vec{W} = \vec{0}$ كانت الحركة تدرج وقتل دون انزلاق .
- ٣- إذا كان $\vec{W} = \vec{0}$ و $\vec{\omega}_T = \vec{0}$ كانت الحركة حركة قتل فقط دون تدرج ولا
انزلاق وتبقى نقطة التماس دون أن يتغير موضعها في هذه الحالة .
- ٤- إذا كان $\vec{W} = \vec{0}$ و $\vec{\omega}_N = \vec{0}$ كانت الحركة تدرج فقط دون انزلاق وتنتقل نقطة
التماس P فترسم منحنياً C في الجسم S سميناه المنحرج وترسم منحنياً C_1 في الجسم
الثابت S_1 سميناه القاعدة ، ويتدرج المنحني C على المنحني C_1 دون انزلاق أثناء حركة S
بالنسبة لـ S_1 ونحصل على شرط للتدرج دون انزلاق على النحو :
- ١- السرعة الانزلاقية للنقطة التماس (وهي السرعة الجرية لهذه النقطة) تساوي الصفر
أو
 $\vec{W} = \vec{V}_*(p) = \vec{0}$
- ٢- سرعة انتقال P على C تساوي سرعة انتقالها على C_1 أي : $\vec{V}_*(p) = \vec{V}_*(p)$
أو
- ٣- المسافة التي تقطعها P على المنحني C تساوي المسافة التي تقطعها على C_1 في فترة
زمنية واحدة .

تمارين محلولة

تمرين (١) : يدور قرص دائري مركزه O نصف قطره a حول محوره الأفقي

O_1O بسرعة زاوية ω_1 ويدور المحور O_1O حول شاقولي O_1Z بسرعة زاوية ω_2 .
عين شعاع المبرعة المطلقة وشعاع التصادع المطلق لكل من النقطتين A و B الواقعتين على محيط القرص في اللحظة التي يكون فيها القطر شاقولياً. يعطى طول $b = O_1O$

الحل: إن الحركة هي محصلة حركتين دوريتين شعاعاً الدوران ω_1 ، ω_2 .
نستخلصان فسي النقطة الثابتة O_1 ، لذا فإن الحركة المطلقة هي حركة دورانية بسيطة يتمين

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 \quad : \text{شعاع الدوران فيها من الملائمة}$$



الشكل (٢٥)

نختار جملة محاور ثابتة $O_1x_1y_1z_1$ بحيث يطبق O_1z_1 على O_1Z الشاقولي وبحيث يقع O_1O في المستوى الأفقي ، فنكون مركبات $\vec{\omega}$ على الجملة المعتمدة O_1x, y, z هي

$$\vec{\omega} = \omega_1 \vec{i} + \omega_2 \vec{k}$$

إن سرعة النقطة A هي:

$$\vec{V}(A) = \vec{\omega} \times \vec{O_1A} = (\omega_1, 0, \omega_2) \times (b, 0, a) = (\omega_2 b - \omega_1 a) \vec{j}$$

وسرعة النقطة B :

$$\vec{V}(B) = \vec{\omega} \times \vec{O_1B} = (\omega_1, 0, \omega_2) \times (b, 0, -a)$$

ونكتب عبارة شعاع التصادع المطلق

$$\begin{aligned} \vec{\Gamma}(A) &= \vec{r} \times \vec{O_1A} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{O_1A}) \\ &= (\omega'_1, 0, \omega'_2) \times (b, 0, a) + (\omega_1, 0, \omega_2) \times (0, (\omega_2 b - \omega_1 a), 0) \end{aligned}$$

$$= -\omega_2(\omega_2 b - \omega_1 a) \vec{i} + (\omega_2' b - \omega_1' a) \vec{j} + \omega_1(\omega_2 b - \omega_1 a) \vec{k}$$

ونحسب تمسار النقطة B بالطريقة ذاتها.

تمرين (٧): مخروط دوراني S قاعدته دائرة في المستوى الثابت $O_1 x_1 y_1$.

نصف قطرها يساوي a ويبعد مركزها O عن O_1 بالمقدار $2a$. يدور S حول محوره الثنائي بمسرة زاوية ω_2 ويدور مع محوره حول $O_1 z_1$ الثابت بمسرة زاوية ω_1 عين الحركة المحصلة للمخروط واكتب عبارة سرعة نقطة ما من المخروط في الحالتين:

$$\vec{\omega}_1 = \vec{\omega}_2 = 2 \vec{k}_1 \quad (1)$$

$$\vec{\omega}_1 = -\vec{\omega}_2 = \vec{k}_1 \quad (2)$$

الحل: الحركة هي تركيب دورانيين متوازيين

(1) في الحالة الأولى $\omega_1 + \omega_2 \neq 0$ فالحركة المحصلة حركة دورانية بسيطة شعاع

دورانها $\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 = 4 \vec{k}_1$ يطبق في نقطة c هي مركز الدورانيين ولما كان

$\omega_1 = \omega_2$ فإن c تقع في منتصف القطعة $O_1 O$ أي تبعد عن O_1 بالمقدار a . واحداثياتها

هي بالتالي $O_1 c = (a \cos \psi, a \sin \psi, 0)$

وباختيار مناسب لمبدأ الزمن نكتب:

$\psi = \int \omega_2 dt = 2t$

ونعبر عن سرعة نقطة M من العلاقة

$\vec{V}(M) = \vec{\omega} \times \vec{cM}$

فإذا كانت احداثيات M هي (x_1, y_1, z_1) كان

$$\vec{V}(M) = (0, 0, 4) \times (x_1 - a \cos 2t, y_1 - a \sin 2t, z_1)$$



الشكل (٧٦)

(٧) في الحالة الثانية نلاحظ أن $\omega_1 + \omega_2 = 0$ فالحركة المحصلة حركة انسيابية يتعين

شعاع السرعة الانسيابية من العلاقة:

$$\vec{V} = \vec{\omega}_1 \times \vec{O_1 O} = (0, 0, t) \times (2a \cos \psi, 2a \sin \psi, 0)$$

حيث تتعين ψ في هذه الحالة كما يلي:

$$\psi = \int \omega_1 dt = \int t dt = \frac{1}{2} t^2 + \psi_0$$

وسرعة أي نقطة M هي $\vec{V}(M) = \vec{V}$

تمرين (٣) : لتور اسطوانة دائرية حول محورها بسرعة زاوية ω_1 وتسحب مع محورها بسرعة $\vec{V}$ تصنع زاوية $\alpha = 30^\circ$ مع $\vec{\omega}_1$. عين عناصر الحركة المحصلة واكتب عبارة السرعة المطلقة لنقطة ما M من الاسطوانة .

الحل : لختار المستوى z المستوي العمودي على $\vec{V}$ ونسقط $\vec{V}$ على المحورين

z, y

$$\vec{V} = v \sin 30^\circ \vec{j} + v \cos 30^\circ \vec{k} \quad \text{ف نجد}$$

$$= \frac{1}{2} v \vec{j} + \frac{\sqrt{3}}{2} v \vec{k}$$

إن محصلة الانسحاب $\vec{V}_1 = \frac{1}{2} v \vec{j}$ مع الدوران $\vec{\omega}_1 = \omega_1 \vec{k}$ هي حركة دورانية

بسيطة شعاع الدوران فيها يساوي $\vec{\omega}_1$ ويطبق في نقطة O_2 تتعين من العلاقة

$$\vec{V}_1 = -\vec{\omega}_1 \times \vec{O_1 O_2}$$

$$\frac{1}{2} v \vec{j} = (0, 0, -\omega_1) \times (x, y, z) = \omega_1 y \vec{i} - \omega_1 x \vec{j}$$

ونجد أن إحداثيات O_2 هي : $O_2 \left(\frac{-v}{2\omega_1}, 0, 0 \right)$



الشكل (٢٧)

نسم نعين محصلة الدوران الناتج مع الانحجاب $\vec{V}_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} v \vec{k}$ فتكون الحركة المحصلة حركة لولبية عناصرها : شعاع الدوران $\vec{\omega}_1 = \vec{\omega}_1 \vec{k}$ ، نقطة من محور الدوران وخطوة اللولب المختزلة وهي $b = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{v}{\omega_1}$ ويكتب شعاع السرعة المطلقة للنقطة M من الأسطوانة كما يلي : $\vec{V}(M) = b\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_1 \times \vec{o_2M}$

تمريرين (4) : صفيحة $A_1A_2A_3$ بشكل مثلث قائم الزاوية في A_1 متساوي الساقين طول ضلعه القائم 1 تتحرك في مستو ثابت بحيث تتحرك حركتها من ثلاث دورانات في المستوي الثابت حول النقط الثلاث A_1, A_2, A_3 قيمها على التوالي $\omega_1 = 1 + 2tg t - tg^2 t$
 $\omega_2 = -2tg t$
 $\omega_3 = tg^2 t$

والمطلوب : ١- تعيين المتكحرج والقاعدة

٢- تعيين معادلات حركة النقطة A_1

الحل : نختار فسي المستوي الثابت المحورين o_1x_1, o_1y_1 ونختار المحاور المتعامدة مع الصفيحة مذبذبة على ضلعيها A_1x, A_1y ، إن حركة الصفيحة مستوية ، والدورانات الثلاث هي دورانات متوالية تعامد مستوي الحركة ونلاحظ أن

$$\omega = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 1 \neq 0$$

أي أن الحركة ترد إلى حركة دورانية آنية حول محور أني الدوران يعامد مستوي الحركة ويطبق فسي c مركز النقط الثلاث A_1, A_2, A_3 وهو المركز الآني للدوران ويتمين من العلاقة :

$$\omega_1 \vec{A_1c} + \omega_2 \vec{A_2c} + \omega_3 \vec{A_3c} = \vec{0}$$

نسط هذه العلاقة على المحورين A_1x, A_1y مع ملاحظة أن إحداثيات رؤوس المثلث هي $A_1(0,0), A_2(1,0), A_3(0,1)$ فلجد

$$x(c) = \omega_2 = -2tg t \quad y(c) = \omega_3 = tg^2 t$$

ومنه نجد أن المتكحرج هو قطع مكافئ معادلته $x^2 = 4y$

تمارين

- ١- يدور قرص دائري نصف قطره a مركزه O حول محوره الشاقولي OZ بسرعة زاوية ثابتة ω_1 ويدور المحور OZ حول محور شاقولي ثابت O_1Z_1 يبعد عن OZ بالمقدار b بسرعة زاوية ثابتة ω_2 عين المحور الأني للدوران في هاتين
 - ١- جهة ω_1 تماثل جهة ω_2
 - ٢- جهة ω_1 تعاكس جهة ω_2 و $\omega_2 \neq \omega_1$
 - ٣- $\vec{\omega}_1 = -\vec{\omega}_2$
- ٢- يتحرك جسم صلب بحركة دورانية حول محور OZ بسرعة زاوية قيمتها $\omega - 3t$ ويلصق الجسم متماسكاً مع المحور OZ بسرعة المسحافية $\vec{V} = t\vec{i} + t\vec{j}$ عين الحركة المحصلة للجسم ثم عين السرعة المطلقة والتمارح المطلق للنقطة M من الجسم إحداثياتها بالنسبة للجملة $oxyz$ هي $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0)$.
- ٣- صفيحة OAB بشكل مثلث قائم الزاوية في O متساوي الساقين طول ضلعه القائم a تتحرك في مستو بحيث تكون حركتها محصلة ثلاث دورانات حول رؤوسها

$$\omega_A = 2\sin t, \quad \omega_B = -\cos t, \quad \omega_O = 1 + \cos t - \sin t$$
 والمطلوب :
 - ١- تعيين المركز الأني لدوران الصفيحة في المستوي والقاعدة والمتدرج
 - ٢- تعيين معدلات حركة الصفيحة
 - ٣- عين سرعة منتصف الوتر
- ٤- صفيحة بشكل مثلث أطوال أضلاعه $OA = 3 \text{ cm}$ ، $OB = 4 \text{ cm}$ ، $AB = 5 \text{ cm}$ تتحرك في مستويها وحركتها تنتج عن تركيب ثلاث دورانات حول رؤوسها قيمها

$$\omega_O = -2t^2, \quad \omega_A = t^2 + t, \quad \omega_B = t^2 - 1$$
 عين الحركة المحصلة للصفيحة
 - ١- عين القاعدة والمتدرج عندما $t \neq 1$
 - ٢- عين مركز رؤوس المثلث.

- ٥- مخروط دوراني A زاويته الرأسية $\frac{\pi}{2}$ رأسه O ثابت يتدحرج دون الزلاق على السطح الخارجي لمخروط ثابت B زاويته الرأسية $\frac{\pi}{2}$ أيضاً رأسه O محوره Oz . نصف قطر قاعدة المخروط A يساوي a ، القيمة العددية لسرعة O_1 مركز قاعدة المخروط A ثابتة تساوي $v=4a$
- ١- عين شعاع الدوران الجري وشعاع الدوران النسبي وشعاع الدوران المطلق للمخروط A
- ٢- عين شعاع التسارع الزاوي المطلق
- ٣- عين سرعة وتسارع النقطتين D ، C نهايتي القطر DO_1C لقاعدة المخروط A في اللحظة التي يكون فيها DC موازياً لـ Oz .

القسم الثاني

علم التوازن

- .. مبادئ علم توازن المجموعات المادية
- الشروط العامة للتوازن
- التوازن التحليلي - مبدأ العمل الافتراضي
- توازن الحبال الغير القابلة للامتطاط



الفصل الأول

مبادئ علم توازن المجموعات المادية

- تعاريف

- المسلمات والمبادئ الأساسية في التوازن

- أنواع الصلوات

- الاحتكاك في حالة جسمين متلامسين

- أنواع الاحتكاك



٢-١-٢ مقدمة :

يعد علم التوازن من أوائل فروع علم الميكانيك التي اهتم بها الإنسان منذ أقدم العصور . فقد استفاد البابليون والمصريون القدماء من مبادئ علم التوازن ومن قوانين الآلات البسيطة في رفع الأثقال إلى علو شاهق ، أثناء تشييد المعابد والأهرامات . بيد أن بدايات ما خط في هذا المجال يرجع إلى القرن الرابع قبل الميلاد حين وضع أرسطو (٢٨٧ - ٢١٢ ق.م) مبادئ جمع القوى ، وحسن مركز الثقل لبعض الأشكال الهندسية . ولكن لم تتم صياغة هذا العلم بشكله الحالي إلا في القرن السابع عشر الميلادي . وينسب علم الميكانيك التقليدي بما فيه علم التوازن إلى العالم فيثاغورس (١٦٤٣ - ١٧٢٦ م) الذي وضع المبادئ النظرية لهذا العلم ، في حين يعود الفضل في الصياغة الحديثة لعلم التوازن للعالم الفرنسي بوليسو (١٧٧٧ - ١٨٥٩ م) .

٢-١-٢ تعاريف :

- علم التوازن : هو فرع من علم الميكانيك يختص بدراسة قوانين تركيب القوى و شروط توازن النقط والمجموعات المادية الخاضعة لتأثير قوى ما .
- والتوازن هو حالة السكون لنقط أو أجسام مادية بالنسبة لجملة احداثية ما ، فإذا كانت الجملة الاحداثية ثابتة قيل إن التوازن بالنسبة لها مطلق وإلا سمي التوازن نسبياً وسندرس في هذا الفصل التوازن المطلق فقط .
- المجموعة المادية : هي مجموعة نقط مادية قد يكون عددها منته أو غير منته تنصف عناصرها بصورة مميزة
- المجموعة المادية المتماسكة كما مر معنا : هي مجموعة نقط مادية تحافظ على الأبعاد المتبادلة بينها دوماً .
- المجموعة المادية الطليقة (أو الحرة) : هي المجموعة المادية التي لا يقيد حركة أي نقطة فيها أي عائق ، أي لا يوجد ما يحد من ، أو يحول دون حركة نقطتها ، في أي جهة كانت .
- المجموعة المادية المقيدة : هي المجموعة المادية التي يقيد حركة نقطة ما منها عائق يحد أو يحول دون حركتها في جهة ما .

- الصلات أو الأربطة : هي أي حائل يمنع انتقال نقطة مادية (أو جسم مادي) في اتجاه ما.
- القسوة : هي القياس الميكانيكي للآثار المتبادلة بين النقط المادية ويعبر عنها بمتجه طويلته وجهته ومبدؤه ، تعين مقدار ومنحى وجهة ونقطة تطبيق القوة.
- القوى الداخلية : هي التأثير المتبادل لنقط مجموعة مادية بعضها على بعض
- القوى الخارجية : هي القوى الناتجة عن تأثير نقط أو أجسام خارجة عن المجموعة المادية المدروسة فسي نقط المجموعة ، وتجدر الملاحظة هنا أن تقسيم القوى إلى داخلية وخارجية هو تقسيم اعتباطي أو نمبي يتعلق بتعريف المجموعة المادية المدروسة فيمكن مثلاً أن نعد تأثير جذب الشمس للأرض قوة خارجية في حين نصيغ هذه القسوة داخلية إذا كانت المجموعة المدروسة هي المجموعة الشمسية لا الكرة الأرضية لوحدها ، وعندما تعزل مجموعة مادية عن غيرها لا يؤثر فيها أية قوة خارجية وتكون القوى المؤثرة فيها داخلية فقط.
- قوى الصلات (ردود الفعل) : هي القوى التي تنشأ عن الصلات أو الأربطة التي تقيد حركة المجموعة المادية ، وتدعى ردود الفعل ، ونتج هذه القوى بالاتجاه الذي يعاكس اتجاه حركة الجسم لو أزيل القيد ، وإذا كانت الصلة تمنع حركة نقط المجموعة في اتجاهات عدة فإن اتجاه رد الفعل لا يمكن أن يتعين إلا بعد حل المسألة المدروسة. ويجب أن لا يغرب عن الذهن أن ردود الفعل هي قوى غير فاعلة بل تنشأ للمانع الحركة.
- مجموعة القوى المتوازنة : إذا أثرت مجموعة قوى على نقطة مادية أو على جسم مادي ولم تغير من الحالة الميكانيكية ، من حركة أو سكون ، للنقطة (أو الجسم) قلنا إن مجموعة القوى متوازنة.
- مجموعات القوى المتكافئة
- إذا استبدلنا مجموعة قوى بمجموعة قوى أخرى مؤثرة على مجموعة مادية دون أن يتغير الوضع الميكانيكي من حركة أو سكون للمجموعة المادية قلنا : إن مجموعتي القوى متكافئتان .
- محصلة مجموعة قوى : القوة الوحيدة التي تكافئ بأثرها مجموعة قوى مؤثرة على مجموعة مادية ، إن وجدت ، تدعى محصلة مجموعة القوى . وليس بالضرورة أن

يكون لمجموعة قوى محصلة .

ويجب أن نفرق بين المحصلة وبين الحاصلة العامة لمجموعة قوى ، التي تساوي المجموع الهندسي (المجموع الشعاعي) لقوى المجموعة .

٢-١-٣ المبادئ والمبادئ الأساسية في التوازن

١- مبدأ العطالة : (مبدأ القصور الذاتي) : إن أي نقطة مادية (أو جسم صلب)

قاصرة بذاتها عن تبديل حالتها من حركة وسكون دون مؤثر خارجي

٢- إن مجموعة القوى المؤلفة من قوتين متعاكستين مباشرة مطبقتين في نقطة

مادية واحدة تشكل مجموعة متوازنة. إن هذه المجموعة هي أبسط مجموعة

متوازنة لأن التجربة أثبتت أنه لا يمكن لقوة وحيدة أن تؤثر على نقطة مادية

دون أن تغير حالة للنقطة الميكانيكية

٣- مبدأ الفعل ورد الفعل: إذا أثرت نقطة مادية M_1 على نقطة M_2 (من

مجموعة مادية واحدة أو من مجموعتين مختلفتين) بقوة $\vec{F}_1$ فإن النقطة

M_2 تؤثر على النقطة M_1 بقوة $\vec{F}_2$ تساوي $\vec{F}_1$ بالقيمة ولها الحامل ذاته

وتعاكسها بالجهة أي $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ لذا يقال إن لكل فعل رد فعل يعاكسه .

٤- إن إضافة (أو حذف) مجموعة متوازنة إلى القوى المؤثرة على مجموعة

مادية لا يؤثر على الوضع الميكانيكي للجسم من حركة أو توازن . أي أن

مجموعات القوى المتكافئة تنتج عن بعضها بإضافة أو حذف مجموعات

قوى متوازنة.

٥- المجموعة المتوازنة في الجسم الصلب :

إن مجموعة القوى المؤلفة من قوتين متعاكستين ومتساويتين ومؤثرتين في

نقطتين من الحامل المشترك لهما في الجسم الصلب هي مجموعة متوازنة

(ينتج هذا المبدأ من تعريف الجسم الصلب) .. وهي أبسط مجموعة

متوازنة في الجسم الصلب .



الشكل (١)

٦- نتيجة : القوى المؤثرة في الجسم الصلب هي قوى متزنة

الاثبات : لنفرض أن الجسم الصلب S يخضع لتأثير قوة $\vec{F}$ مطبقة في النقطة A من الجسم ولتأخذ النقطة B من حامل القوة $\vec{F}$ ونطبق في هذه النقطة قوتين متعاكستين مباشرة $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ بحيث يكون :

$$\vec{F}_2 = -\vec{F} \quad \vec{F}_1 = \vec{F}$$

إن مجموعة القوى $(\vec{F}_2, \vec{F}_1, \vec{F})$ تكافئ حسب ما سبق القوة $\vec{F}$. كما أن المجموعة $\vec{F}_2, \vec{F}$ هي مجموعة متوازلة في الجسم الصلب . الأمر الذي يسمح لنا بحذفها دون أن نغير الحالة الميكانيكية للجسم مما يبقى القوة الوحيدة $\vec{F}_1$ المساوية للقوة $\vec{F}$ والمطبقة في B بدلاً من أن تطبق في A . أي أمكن زلق نقطة تطبيق $\vec{F}$ على حاملها من A إلى B ، دون تغيير الحالة الميكانيكية للجسم وهو المطلوب .

- إن للنتيجة السابقة تسمح لنا بالتعامل مع مجموعات القوى المؤثرة على الأجسام الصلبة كمجموعات أنظمة متزنة ، الأمر الذي يحوّلنا من استخدام نتائج رد مجموعات الأنظمة المتزنة في دراسة رد مجموعات القوى . ومما تجدر ملاحظته هنا أن مجموعات القوى المؤثرة على الجسم الصلب يمكن أن ترد في الحالة العامة إلى قوة وحيدة تساوي الحاصلة للعامة لمجموعة القوى ، وإلى مزدوجة بسيطة عزمها يساوي العزم الحاصل لمجموعة القوى . ومن وجهة النظر الميكانيكية فإن القوة الوحيدة تسبب انسحاب الجسم الصلب والمزدوجة البسيطة تسبب دوران الجسم الصلب . الأمر الذي يوضح سبب الحركة العامة للجسم الصلب : انسحاب مع قطب ودوران حول هذا القطب . أما إذا انعدم عزم المزدوجة في حالة خاصة فإن القوى ترد إلى قوة وحيدة كما نعلم مما يجعل حركة الجسم انسحابية فقط ، وإذا انعدمست الحاصلة العامة ردت مجموعة القوى في حالة خاصة إلى

مزدوجة تسبب الحركة الدورانية للجسم . أما إذا كانت مجموعة القوى مكافئة للصفر أي إذا ردت إلى قوة وحيدة تساوي الصفر وإلى مزدوجة ذراعها معدوم فإن مجموعة القوى تكافئ مجموعة متوازنة في الجسم الصلب ويبقى الجسم عندها ساكناً بدءاً من وضع سكوني له .

٧- مسلمة الارتباط :

يمكن حذف أي صلة (أو ارتباط) تقيد مجموعة مادية والاستعاضة عنها برد فعلها دون أن يتغير الوضع الميكانيكي للجسم من حركة أو سكون .

إن مسلمة الارتباط ذات أهمية كبرى في حل مسائل التوازن ولابد كي تكون الفائدة منها محققة من دراسة الصلات وأنواعها وردود أفعالها لذا سنستعرض ما نحتاج إليه منها ببعض التفصيل .

٢-١-٤ أنواع الصلات

١- الصلات الهندسية : إذا أمكن التعبير عن الصلة أو الارتباط بعلاقة

رياضية تربط إحداثيات نقط المجموعة المادية بالشكل $f(\bar{M}_i) = f(x_i, y_i, z_i) = 0$ فلذا إن الصلة هندسية ، وتكون هذه الصلات ثابتة (مستقلة عن الزمن) إذا لم تحو العلاقات السابقة الزمن بشكل صريح وتكون غير ثابتة (تابعة للزمن) إذا كتبت العلاقة الرياضية للصلة على النحو : $f(\bar{M}_i, t) = f(x_i, y_i, z_i, t) = 0$. وتدعى هذه العلاقة الرياضية معادلة الصلة

إن النقط المقيدة على سطح ما أو على منحني ما تخضع لصلات هندسية .

٢- الصلات التفاضلية : إذا كانت العلاقات الرياضية التي تعبر عن الصلة

علاقات تفاضلية غير كمولة فلذا إن للصلات تفاضلية وتكون هذه العلاقات في هذه الحالة

كما يلي : $f(\bar{M}_i, \bar{M}_i', \bar{M}_i'') = f(x_i, y_i, z_i, x_i', y_i', z_i', x_i'', y_i'', z_i'') = 0$

وإذا استقطبنا معادلة هذه العلاقات التفاضلية غدت الصلة هندسية .

٣- إن صلة التدرج دون انزلاق مثلاً هي صلة تفاضلية إذا كتب شرط التدرج دون انزلاق كعلاقة بين السرعة النسبية والسرعة المطلقة لنقط التماس .

٣- الصلات غير القابلة للتحرر (ثلاثية الجانب) .

نقول إن الصلة غير قابلة للتحرر إذا كانت النقط المقيدة من المجموعة المادية لا

تستطيع التحرر من قيودها . كصلة حلقة صغيرة تتحرك على محيط سلك مغلق ويهبر عن هذه الصلات بعلاقات تساوي $f = 0$

٤- الصلات القابلة للتحرر : هي الصلات التي يمكن للنقط المقيدة فيها التحرر والانفصال عن القسود بجهة ما كصلة نقطة على السطح الخارجي أو الداخلي لكرة حيث تستطيع الانزلاق نحو خارج الكرة أو نحو داخلها ويهبر عن هذه الصلات بعلاقات تراجع

$$f(M) \leq 0 \quad \text{أو} \quad f(M) \geq 0$$

٥- الصلات المثالية : نقول إن صلة ما مثالية إذا كان عمل رد فعل الصلة خلال الانتقال الموافق للصلة معدوماً أي إذا كان $\vec{R} \cdot d\vec{M} = 0$

إن الصلات دون احتكاك (أي في حالة التماس الأملس للمسوح) هي صلات مثالية . لأن رد الفعل يكون فيها ناظماً على سطح التماس ، أي على الانتقال الممكن لنقط الجسم المنطبقة على نقط التماس . مما يجعل عمل هذه القوى معدوماً . وهذا تجدر الإشارة إلى أن لعدام الاحتكاك ليس شرطاً كي تكون الصلة مثالية ففي حالة حركة المستخرج دون انزلاق لابد من وجود الاحتكاك الذي يجعل رد الفعل غير ناظمي على سطح التماس ولكن عمل رد الفعل هذا يكون معدوماً بسبب انعدام انتقال النقطة من الجسم المنطبقة على نقطة التماس (لأن السرعة الانزلاقية تكون معدومة كما مر في أبحاث الحركة) . مما يجعل صلة المستخرج دون انزلاق صلة مثالية .

٦- الصلات غير المثالية : نسمي الصلة غير مثالية إذا كان عمل رد فعلها خلال الانتقال الموافق لهذه الصلة غير معدوم أي إذا كان $\vec{R} \cdot d\vec{M} \neq 0$

إن الصلات مع احتكاك (صلة تماس الأجسام المشددة غير الملساء) هي صلات غير مثالية فهي الحالة العامة حين يكون الانزلاق ممكناً لأن عمل رد الفعل (وهو مثال على الانتقال) في هذه الحالة لا يساوي الصفر .

٢-١-٥ الاحتكاك في حالة جسمين متلامسين :

لنفرض أن الجسم الصلب S يتحرك بحيث يبقى ملامساً لسطح S_1 غير أملس ولنفرض أن A نقطة من الجسم S تنطبق على النقطة p نقطة التماس الهندسية للجسمين . لقد وجدنا في أبحاث الحركة أن حركة الجسم S بالنسبة لـ S_1 ترد إلى مجموع حركتين : حركة انزلاقية مع النقطة A وحركة دورانية حول النقطة A ، وقد فرقنا الحركة الدورانية

إلى حركة تخرج حول محور يقع في المستوى المماس للسطحين وحركة قفل حول محور ناظمي على المستوى المماس ، إن هذا الأمر يدعو لرد القوى المسببة لهذه الحركة إلى قسوة وحيدة تقع في المستوى المماس للسطحين تسبب الحركة الانزلاقية ، وإلى مزدوجة بسيطة محورها في المستوى المماس وشعاعها في المستوى العمودي على محورها تسبب تخرج هذا الجسم ، ومزدوجة محورها ناظمي على المستوى المماس يقع شعاعها في المستوى المماس تسبب قفل الجسم.

وتدل التجارب العملية أنه إذا كان الجسم S ساكناً بالنسبة للجسم S_1 وطبقت عليه مجموعة قوى فإن الجسم يبقى ساكناً حتى تتجاوز مجموعة القوى المطبقة قيمة ما مما يدل على نشوء قوى في الجسم توازن القوى المطبقة تسمى هذه القوى قوى الاحتكاك وبمناقشة عقلية يتضح أن قوى الاحتكاك تعاكس القوى المحركة ويجب أن ترد أيضاً : إلى قوة وحيدة تعاكس الانزلاق تسمى قوة احتكاك الانزلاق وتقع وضوحاً في المستوى المماس للسطحين التماسيين وإلى مزدوجة بسيطة تعاكس مزدوجة التخرج تسمى مزدوجة احتكاك التخرج ومزدوجة تعاكس مزدوجة القفل تدعى مزدوجة احتكاك القفل .

ومن الجدير بالذكر أن السطوح الملمساء تماماً أي التي تكون ردود فعلها ناظرية على سطح التماس هي سطوح نظرية لا تتوفر في الواقع العملي ولكن يمكن بطرق خاصة توفير سطوح قريبة من الملمساء فقط .

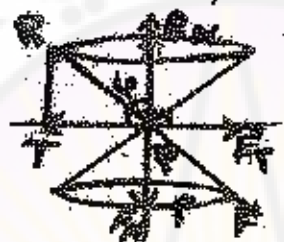
٢-١-٦ أنواع الاحتكاك

١- احتكاك الانزلاق : تبين التجارب البسيطة أنه إذا وضع جسم ثقيل ثقله P مثلاً على سطح أفقي خشن فإن الجسم يبقى ساكناً مما يدل على أن السطح قد أثر على الجسم بقوة رد فعل R_N تعاكس ثقله مباشرة . فإذا أثّرنا على الجسم بقوة أفقية صغيرة F_T فإن الجسم يبقى ساكناً ، مما يدل على أن السطح الخشن قد تسبب في نشوء قوة أفقية تعاكس للقوة الفاعلة F_T مباشرة فإذا زدنا مقدار القوة المطبقة F_T تدريجياً فإننا نلاحظ أن الجسم يبدأ بالحركة حين تبلغ القوة F_T قيمة حدية مما يدل على أن قوة مقاومة الانزلاق تتزايد مع تزايد F_T حتى تبلغ حداً أعظمياً نرمز له T ، يبدأ الجسم بعده بالحركة باتجاه القوة F_T . نسمي القوة T التي يوشك الجسم علدها أن يخرج عن توازنه قوة الاحتكاك عند الانطلاق ويبقى الجسم ساكناً طالما بقيت القوة المؤثرة الأفقية F_T أصغر بقيمتها من القيمة المطلقة لـ T .

إن رد الفعل المسطوح في هذه الحالة هي قوة $\vec{R}$ مائلة على سطح التماس مركبتها الناعمية تساوي R_N ومركبتها المماسية هي T وهذه القوة تعاكس مباشرة القوة المؤثرة $\vec{F}$ وتشكل معها مجموعة متوازنة . إن الزاوية φ التي يصنعها رد الفعل $\vec{R}$ مع الناعم حين يكون

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{T}{R_N} \quad \text{العلاقة :}$$

وتسمى هذه الزاوية زاوية الاحتكاك عند الانطلاق . ومن الواضح أن الجسم يبقى ساكناً ما دامت الزاوية التي تصنعها القوة $\vec{F}$ مع الناعم (والتي تساوي الزاوية التي يصنعها رد الفعل مع الناعم) أصغر من زاوية الاحتكاك φ .



الشكل (٢)

وقد دلت التجارب على أن الاحتكاك عند الانطلاق يتصف بما يلي:

١- لا يتوقف على مساحات السطوح المتماسية

٢- لا يتعلق بجهة تأثير القوة

٣- يتوقف على نوع السطوح المتماسية

٤- قيمته متناسبة مع المركبة الناعمية لرد الفعل R_N (أو F_N) . ونكتب $T = f R_N$

إن ثابت التناسب ويرمز لها f تدعى عامل احتكاك الانزلاق أو أمثال احتكاك الانزلاق ، وهو عدد ليس له بعد ليزيائي ، تتوقف قيمته على طبيعة الجسمين المتماسين وتحدد تجريبياً .

$$|F_T| \leq f |F_N| \quad \text{العلاقة :}$$

ويبقى الجسم ساكناً ما تحققت العلاقة :
و تبقى قوى الاحتكاك أثناء الحركة ، ولكن نلاحظ أن قيمة عامل احتكاك الانزلاق أثناء الحركة أقل بقليل من قيمته في حالة السكون .

لما كانت قيمة T لا تتعلق بجهة F_T فإننا إذا دورنا القوة المماسية F_T المؤثرة على الجسم فإن R سيدور بحيث يبقى على سطح مخروطي لروته نقطة تطبيق القوة ومحوره ناعمي

على سطح التماس ، نصف زاويته الرأسية ϕ زاوية الاحتكاك . يسمى هذا السطح المخروطي ، ومخروط الاحتكاك ، ومن الواضح مما سبق أن الجسم يبقى ساكناً ما دامت القوة المؤثرة $\vec{F}$ أو رد الفعل $\vec{R}$ داخل مخروط الاحتكاك في حين يشرع الجسم بالانزلاق بالاتجاه الموافق لجهة القوة العماسية عندما تقع القوة $\vec{F}$ (أو رد الفعل $\vec{R}$) على سطح مخروط الاحتكاك .

إذا تم التماس بين الجسم والحاجز في أكثر من نقطة فإن كل ما ذكر سابقاً يصبح من أجل كل نقطة من نقاط التماس .

٢- احتكاك التدرج :

لنفرض أن جسم ما S يبقى ملاصقاً لسطح ثابت ، ونطبق على الجسم مزدوجة محركة محورها يقع في المستوي التماس للمسطحين المتلامسين ، (أي لنطبق مزدوجة تدرج) ، نذل التجربة أن الجسم يبقى ساكناً ولا يشرع بالتدرج ما دامت قيمة عزم مزدوجة التدرج المطبقة أصغر من مقدار محدود متناسب مع قياس المركبة الناعمية للقوى المطبقة . مما يشعر بنشوء مزدوجة ، توازن مزدوجة التدرج ، وهي التي تسمى مزدوجة احتكاك التدرج وتكون القيمة العظمى لعزم هذه المزدوجة G_1 متناسبة مع N قيمة المركبة الناعمية للقوى المطبقة ويكتب :

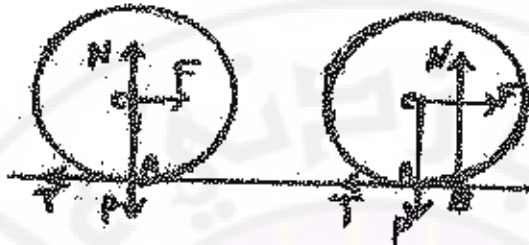
$$|\vec{G}_1| = f_1 |\vec{N}|$$

يسمى ثابت التناسب f_1 عامل احتكاك التدرج ويلاحظ من العلاقة السابقة : أن f_1 يعتمد طول ، ويقاس عادة بالسنتيمتر ويمثل ذراع مزدوجة احتكاك التدرج نذل للتجارب أن f_1 يتعلق بنوعية الجسمين المتلامسين ، وتتغير قيمته تجريبياً وقد وجد أن قيمته أقل بكثير من قيمة عامل احتكاك الانزلاق * .

ولتوضيح الفكرة الفيزيائية لمزدوجة احتكاك التدرج نفرض لدينا اسطوانة دائرية نصف قطرها R تستطيع التدرج على مستو أفقي . إن حركة الاسطوانة مستوية فإذا فعلنا الاسطوانة بمستوى محورها يمر من مركز عطالتها فإن دائرة المقطع تتحرك في

* دلت التجربة مثلاً على أن عامل احتكاك الانزلاق في حالة خشب على خشب تتراوح بين 0,4 إلى 0,7 في حين أن عامل احتكاك التدرج في الحالة ذاتها تتراوح بين 0,05 إلى 0,07 وعامل احتكاك الانزلاق للزلا على فولاذ تتراوح بين 0,15 إلى 0,25 في حين عامل احتكاك التدرج في هذه الحالة يساوي 0,005 .

مستويها . فإذا كانت الاسطوانة ساكنة فإنها تخضع لقوتين متوازنتين : ثقلها p ورد فعل المستوى $\bar{N}$ المعاكس مباشرة لـ p . فإذا أثرت قوة القوة $\bar{F}$ على مركز الاسطوانة c فإن الاسطوانة تنزلق إذا كان المستوى أمساً .



الشكل (٢)

أمساً إن كسان التماس مع احتكاك نشأت قوة احتكاك في نقطة التماس تمنع الانزلاق فتشكل التوازن $\bar{F}$ و $\bar{T}$ مزدوجة تعمل على تحريك الاسطوانة بحركة تخرج حول محور يوازي محورهما ، مهما كانت القوة F صغيرة . ولكن التجربة تدل على أن الاسطوانة لا تشرع بالسكحرج إلا بعد أن يتجاوز عزم هذه المزدوجة قيمة معينة . الأمر الذي يدل على أن رد الفعل N لا يطبق في نقطة التماس A بل ازاحت نقطة تطبيقه إلى نقطة مجاورة B . بحيث تشكل المزدوجة $(\bar{p}, \bar{N})$ مزدوجة توازن المزدوجة $(\bar{F}, \bar{T})$. ويمثل البعد AB ذراع هذه المزدوجة وهو الذي يماوي عامل احتكاك التدرج . وسبب ذلك أن ملاصقة السطحين لا تكون في الواقع بنقطة واحدة ، بل تكون موزعة على سطح محدود يحيط بنقطة التماس الهندسية .

٣- احتكاك الثقل :

لنفرض كرة ثقيلة تستند إلى سطح أفقي . فإذا كانت هذه الكرة ساكنة فإن رد فعل السطح لها يسوازن ثقلها . فإذا طبقنا على هذه الكرة مزدوجة أفقية محورها يماهد سطح التماس فإننا نلاحظ أن الكرة تسبق ساكنة ولا تفتل (أي لا تدور حول المحور العمودي على سطح التماس) ما بقي عزم المزدوجة المطبقة أصغر من قيمة محدودة متناسبة أيضاً مع المركبة الانطامسية للقوى المطبقة ، الأمر الذي يدل على نشوء مزدوجة احتكاك تقاوم حركة الثقل ،

القيمة العظمى لمزم هذه المزدوجة $\overline{G_2}$ يعطى بالعلاقة $|\overline{G_2}| = f_2 |\overline{N}|$ ويدعى ثابت التماسب f_2 عامل احتكاك القفل ، ولعامل احتكاك القفل بعد طول فيزيائي ويقاس بالسنتيمتر . وقد دلت التجارب على أن هذا العامل يتعلق بمادة السطحين المتماسين ، وأن قيمته صغيرة جداً وأصغر من عامل احتكاك التدرج ، وتبلغ قيمته من $\frac{1}{10}$ إلى $\frac{1}{5}$ من قيمة عامل احتكاك التدرج.

ملاحظة : إذا كان الجسم قابلاً للانعكاس حول حافة من حوافه فإن الشروع بالانقلاب هو حالة خاصة من الشروع بالتدرج ، ولكن يطبق رد الفعل في هذه الحالة عند الحافة التي يمكن للجسم أن ينقلب حولها .

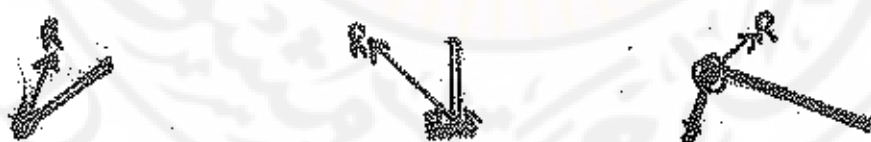
ردود الأفعال في بعض الحالات الخاصة :

١- إذا كان الاستناد دون احتكاك يكون رد الفعل دائماً على سطح الاستناد في نقطة الاستناد .



الشكل (٤)

٢- إذا كانت الصلة مفصل كروي ، فإن رد الفعل يمر من مركز المفصل و ملحا غير معين . (يتعين من معادلات التوازن)



الشكل (٥)

٣- إذا كانت الصلة مفصل اسطواني يكون رد الفعل دائماً على محور المفصل إذا كان ممسكاً وقاطعاً له إذا كان حثناً.

٤- إذا كانت الصلة ربط نقطة من الجسم بخيط يكون رد الفعل محمولاً على منحى الخيط ويدعى توتر الخيط .



الشكل (١)

٥- في حالات الصلات مع احتكاك تكون ردود الأفعال مائلة على سطوح التماس كما مر سابقاً .



الفصل الثاني

الشروط العامة للتوازن

- شروط توازن مجموعة مادية
- الشروط اللازمة لتوازن مجموعة مادية
- شروط توازن المجموعات المتماسكة للأجسام الصلبة



٢-٢-١ شروط توازن مجموعة مادية :

نعلم من توازن النقطة المادية أن الشرط اللازم والكافي لتوازن نقطة مادية طليقة ، هو أن تكون حاصلة القوى المفروضة المطبقة على النقطة المادية مساوية للصفر . وإذا كانت النقطة مقيدة يبقى الشرط السابق صحيحاً إذا افترضنا أن النقطة طليقة وخاضعة للقوى المفروضة ولقوى الصلابة . (ردود الفعل) . (حسب مسلمة الارتباط) .
أما إذا كان لدينا مجموعة نقط مادية فإن الشرط اللازم والكافي لتوازن هذه المجموعة هو أن تكون حاصلة القوى المؤثرة في كل نقطة من المجموعة مساوية للصفر . أي هو أن تكون كل نقطة من نقط المجموعة متوازنة

٢-٢-٢ الشروط اللازمة لتوازن مجموعة مادية :

ممن الواضح أنه حين تتوازن مجموعة مادية فإن مجموعة القوى المؤثرة في جميع نقطها هي مجموعة مكافئة للصفر ، ولكن القوى المؤثرة في مجموعة ، كما وسبق أن عرفنا ، هي قوى داخلية ، وقوى خارجية . ولما كانت القوى الداخلية متعاكسة متلي (وفق مبدأ الفعل ورد الفعل) فيمكن القول :

إن الشرط اللازم لتوازن مجموعة مادية هو أن تولد القوى الخارجية مجموعة أشعة مكافئة للصفر . وتضم القوى الخارجية القوى المطبقة فقط في حالة الأجسام الطليقة ، والقوى المطبقة وردود الفعل ، في حالة الأجسام المقيدة .

إذا رمزنا للحاصلة العامة للقوى الخارجية بـ $\vec{F}$ وللعزم الحاصل لهذه القوى في مبدأ الإحداثيات بـ $\vec{G}$ لأمكن التعبير عن الشرط اللازم للتوازن بالمعادلتين الشعاعيتين

$$\vec{F} = \vec{0} \quad \vec{G}_O = \vec{0} \quad (1-2)$$

أو بالمعادلات الجبرية الناتجة عن إسقاط المعادلتين (١-٢) على جملة ديكارتية مبدؤها O . وتجدر الملاحظة أن هذه المعادلات يجب أن تتحقق من أجل مواضع توازن نقط المجموعة ومن أجل سرع متوسطة لهذه النقط .

ولابد من الإشارة إلى أن هذه المعادلات هي شروط لازمة لتوازن مجموعة مادية وليست بشروط كافية للتوازن ، إلا في المجموعات المتماثلة .

٢-٢-٣ شروط توازن المجموعات المتماثلة (الأجسام الصلبة)

ذكرنا أن الشرط اللازم لتوازن مجموعة مادية هو أن تكون مجموعة القوى

الخارجية المؤثرة على نقط المجموعة تكافئ للصفر . ولتثبت أن هذا الشرط هو شرط كاف لتوازن الأجسام الصلبة .

ففي الحقيقة إذا انعدم كل من شعاعي الحاصلة العامة $\bar{F}$ والعزم الحاصل $\bar{G}$ أمكن رد مجموعة القوى المؤثرة في جسم صلب (وقد أثبتنا أنها مجموعة قوى منزلقة) إلى قوة وحيدة مساوية للصفر ، وإلى مزدوجة عزمها (محورها) يساوي الصفر ، وبذلك ترد مجموعة القوى الخارجية إلى قوتين متساويتين بالتثنية وعلى حامل واحد ومتعاكستين بالجهة . ولقد مر معنا أن هذه المجموعة هي مجموعة متوازنة في الجسم الصلب ، إذا بقي الجسم ساكناً بدءاً من وضع سكوني ما . وهو المطلوب اثباته .

إذا فرضنا أن (X, Y, Z) هي المركبات على جملة محاور متعامدة $Oxyz$ لمحصلة القوى المطبقة على نقط الجسم الصلب ، وأن (R_x, R_y, R_z) هي مركبات محصلة ردود فعل الصللات التي يرضع لها الجسم ، و (L, M, N) مركبات العزم الحاصل للقوى المطبقة ، و (L_1, M_1, N_1) مركبات العزم الحاصل لردود الفعل ، فإن معادلات التوازن للجسم تكون بالشكل :

$$\begin{array}{ll} X + R_x = 0 & L + L_1 = 0 \\ (2-2) \quad Y + R_y = 0 & M + M_1 = 0 \\ Z + R_z = 0 & N + N_1 = 0 \end{array}$$

يضاف إلى هذه المعادلات في حالة وجود احتكاك الشروط

$|T| \leq |N|$ شرط عدم الانزلاق ، ويتحقق التساوي إذا كان الجسم على وشك الانزلاق . و $|G_1| \leq |N|$ وهو شرط عدم التخرج ، ويتحقق علاقة التساوي هنا إذا كان الجسم على وشك التخرج .

و $|G_2| \leq |N|$ وهو شرط عدم الفتل ، ويتحقق علاقة التساوي إذا كان الجسم على وشك الفتل .

ملاحظة (1) : إن معادلات التوازن (2-2) تعين عادة أوضاع توازن الجسم وردود الفعل . فإذا كان عدد المعادلات كاف لتعيين أوضاع التوازن وردود الفعل ، قيل إن المسألة معينة توازنيًا (أو مغلقة توازنيًا) .

أما إذا كان عدد المعادلات غير كاف ، قيل إن المسألة غير معينة (أو غير منطقة) توازنياً، وتستخدم عندها معادلات إضافية من مباحث علم المرونة ، أو توضع شروط إضافية لحل المسألة المدروسة .

ملاحظة (٢) : إذا كانت المجموعة المدروسة مؤلفة من عدد من الأجسام الصلبة تطبق الشروط السابقة على كل جزء من المجموعة وعلى المجموعة كلها مع ملاحظة القوى الداخلية والخارجية أثناء ذلك .

تمارين محلولة

تمرين (١) : قضيب AB طوله $2l$ ثقله p متجانس ، يستند بنهايته A على

محور شاقولي oy وبنهايته B على محور أفقي ox . تؤثر في النقطة B منه قوة أفقية $\vec{F}$

والمطلوب : ١ . التوازن وردود الفعل إذا كان تعيين وضع الاستناد دون احتكاك

٢ . تعيين وضع التوازن وردود الفعل إذا كان الاستناد مع احتكاك وعامل

احتكاك الانزلاق f

٣ . تعيين قيمة القوة F' حين تشرح النقطة B بالانزلاق نحو اليمين علماً أن

زاوية القضيب مع الأفق $\theta = \frac{\pi}{4}$ في حالة التوازن .

٤ . (عادة الطاب (٣) حين تشرح النقطة B بالانزلاق نحو اليسار بدءاً من

وضع التوازن $\theta = \frac{\pi}{4}$.

الحل : (١) بما أن الاستناد دون احتكاك فإن ردود الفعل في A و B نظامية على سطحي

الاستناد . القوى التي يخضع لها القضيب هي بالتالي :

$$\vec{F} = (-F, 0) \quad \vec{P} = (0, -p)$$

$$\vec{R}_A = (X_A, 0) \quad \vec{R}_B = (0, Y_B)$$

نكتب القيد اللازم والكافي للتوازن : $\sum \vec{F} = \vec{0}$ و $\sum \vec{G}_B = \vec{0}$

نسقط على المحورين ox ، oy نجد :

$$(1) \quad X_A - F = 0$$

$$(2) \quad Y_B - p = 0$$

نسبب المزم في B للقوى فنجد مركبة واحدة للمزم على المحور oz :

$$(3) \quad G_B = pl \cos \theta - 2X_A l \sin \theta = 0$$

من المعادلات (١) و (٢) و (٣) نحصل على المطلوب :

$$X_A = F, \quad Y_B = p, \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{p}{2F}$$



الشكل (v)

(v) حين يكون الاحتكاك مع احتكاك تصبح مركبات القوى :

$$\vec{F} = (-F, 0) \quad \vec{P} = (0, -p)$$

$$\vec{R}_A = (X_A, Y_A) \quad \vec{R}_B = (X_B, Y_B)$$

ونأخذ معادلات التوازن على النحو :

$$(i) \quad X_A + X_B = F$$

$$(v) \quad Y_A + Y_B = p$$

$$(iii) \quad X_B = f Y_B, \quad (i) \quad Y_A = f X_A \quad ; \quad \Leftrightarrow \quad |F| = f |N|$$

$$(e) \quad G_B = p \cos \theta - 2 Y_A \cos \theta - 2 X_A \sin \theta = 0$$

من المعادلات الخمس نجد :

$$X_A = \frac{F - f p}{1 - f^2}, \quad Y_A = f \frac{F - f p}{1 - f^2}, \quad X_B = f \frac{p - f F}{1 - f^2}, \quad Y_B = \frac{p - f F}{1 - f^2}$$

$$\tan \theta = \frac{f^2 p - 2 f F + p}{2 (F + f p)}$$

ويبقى التوازن قائماً ما دامت العلاقتان $Y_A \leq f X_A$ و $X_B \leq f Y_B$ محققتان .

(٣) حين نخرج النقطة B بالانزلاق نحو اليمين تكون مركبات القوى :

$$\vec{R}_A = (X_A, Y_A) \quad \vec{R}_B = (-X_B, Y_B)$$

$$\vec{F} = (-F_{\max}, 0) \quad \vec{P} = (0, -p)$$



الشكل (A)

(١) $X_A - X_B = F_{\min}$ وتصبح معادلات التوازن :

(٢) $Y_A + Y_B = p$

(٣) $X_B = f Y_B$, (٤) $Y_A = f X_A$

(٥) $G_B = p l \cos \theta - Y_A (2 l \cos \theta) - X_A (2 l \sin \theta) = 0$

ويحل المعادلات الخمس نجد بعد تبسيط : $\theta = \frac{\pi}{4}$

$$X_A = \frac{p}{2(f+1)} , Y_A = \frac{f p}{2(f+1)} , X_B = f \frac{p - f F_{\min}}{1+f^2} , Y_B = \frac{p - f F_{\min}}{1+f^2}$$

$$F_{\min} = \frac{1-f^2-2f}{2(f+1)}$$

(٤) حين تشرع النقطة B بالانزلاق نحو اليسار تكون مركبات القوى :

$$\vec{R}_A = (X_A, -Y_A) , \vec{R}_B = (X_B, Y_B)$$

$$\vec{F} = (-F_{\max}, 0) , \vec{P} = (0, -p)$$



الشكل (٩)

(١) $X_B + X_A = F_{\max}$ وتصبح معادلات التوازن في هذه الحالة :

(٢) $Y_B - Y_A = p$

(٣) $X_B = f Y_B$, (٤) $Y_A = f X_A$

(٥) $-G_B = 0 \Rightarrow p - 2X_A + 2Y_A = 0$

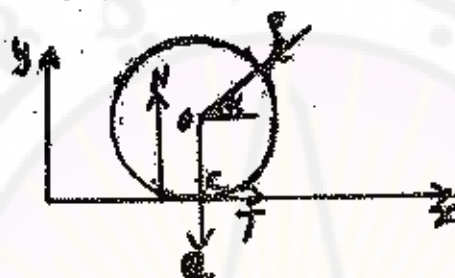
$$X_A = \frac{p}{2(1-f)} , Y_A = \frac{f p}{2(1-f)}$$

$$X_B = f \frac{p + f F_{\max}}{1+f^2} , Y_B = \frac{p + f F_{\max}}{1+f^2}$$

$$F_{\max} = \frac{1-f^2+2f}{2(1-f)}$$

تمرين (٢) : قرص دائري نصف قطره r متجانس ثقله Q يستطيع الحركة في مستوى شاقولي على محور أفقي O_1X خشن عامل احتكاك الانزلاقي f وعامل احتكاك السكون f_1 . تؤثر في مركزه O قوة كما في الشكل ، قيمتها p تصنع مع الأفق زاوية α ثابتة . والمطلوب تعيين قيمة p وورد الفعل في الحالات :

- (١) حين يشرع القرص بالتدحرج دون انزلاق .
- (٢) حين يشرع القرص بالانزلاق دون تدحرج .
- (٣) تعيين الشرط كي يشرع القرص بالتدحرج والانزلاق بأن واحد .



الشكل (١٠)

الحل: القوى التي يخضع لها القرص :

$$\vec{Q} = (0, -Q)$$

الثقل

$$\vec{P} = (-p_1 \cos \alpha, -p_1 \sin \alpha)$$

القوة المطبقة

$$\vec{R} = (T, N)$$

رد الفعل

$$\sum \vec{F}_i = \vec{0}$$

$$\sum \vec{G}_i = \vec{0}$$

وشروط العامة للتوازن:

(١) عندما يشرع القرص بالتدحرج يتوضع رد الفعل $\vec{R}$ في نقطة تبعد عن نقطة التماس

الهندسية C بالمقدار f_1 وتكتب شروط التوازن بالشكل :

$$(١) \quad -p_1 \cos \alpha + T = 0 \quad \Rightarrow \quad T = p_1 \cos \alpha$$

$$(٢) \quad -p_1 \sin \alpha - Q + N = 0 \quad \Rightarrow \quad N = p_1 \sin \alpha + Q$$

$$(٣) \quad G_c = r p_1 \cos \alpha - f_1 N = 0$$

بحل المعادلات الثلاث نجد

$$p_1 = \frac{f_1 Q}{r \cos \alpha - f_1 \sin \alpha}$$

$$T = \frac{f_1 Q \cos \alpha}{r \cos \alpha - f_1 \sin \alpha}$$

$$N = Q + \frac{f_1 Q \sin \alpha}{r \cos \alpha - f_1 \sin \alpha}$$

وكي لا ينزلق القرص يجب أن يتحقق الشرط :

$$T < f N \Rightarrow p_1 < \frac{f Q}{\cos \alpha - f \sin \alpha}$$

(١) حين يشرع القرص بالانزلاق تصبح معادلات التوازن :

$$(١) \quad T = p \cos \alpha$$

$$(٢) \quad N = p \sin \alpha + Q$$

$$(٣) \quad T = f N$$

$$(٤) \quad G_c = r p \cos \alpha - N x = 0$$

حيث x هي بعد نقطة التعليق O عن نقطة التماس الهندسية للقرص مع السطح ox .

من المعادلات السابقة نجد :

$$p = \frac{f Q}{\cos \alpha - f \sin \alpha}$$

$$T = \frac{f Q \cos \alpha}{\cos \alpha - f \sin \alpha}$$

$$N = Q + \frac{f Q \sin \alpha}{\cos \alpha - f \sin \alpha}$$

$$x = \frac{r p \cos \alpha}{p \sin \alpha + Q}$$

والشرط كي لا يتدحرج القرص في هذه الحالة هو أن يكون

$$r < f_1$$

$$p < \frac{f_1 Q}{r \cos \alpha - f_1 \sin \alpha}$$

أي

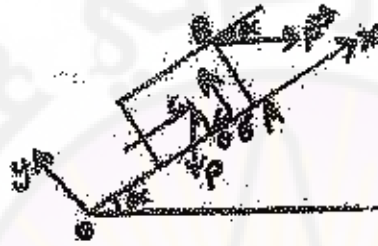
(٢) حين يشرع القرص بالانزلاق والتدحرج بأن واحد تكون :

$$f_1 = f r$$

ويتحقق الشرط بالتالي

ويبقى القرص في حالة توازن ما بقيت القوة الدافعة أصغر من أصغر القيمتين p_1 و p .

- تمرين (٣) : جسم مستطيل بشكل مكعب يستطيع الانزلاق على مستوى مائل خشن زاوية ميله على الأفق α ، ثقل المكعب p ، طول ضلعه $2a$ ، عامل احتكاك الانزلاق f تؤثر في رأسه B قوة أفقية $\vec{F}$ كما في الشكل ، والمطلوب تعيين القوة F في الحالات التالية :
- ١- إذا كان الجسم على وشك الانزلاق نحو الأعلى .
 - ٢- إذا كان الجسم على وشك الانقلاب حول حالته A .
 - ٣- إذا كان الجسم على وشك الانزلاق نحو الأسفل .



الشكل (١١)

الحصل : نختار المحاور في المستوي الشاقولي ox على خط الميل الأعظم للمستوي المائل ، oy العمود عليه :

القوى التي يخضع لها الجسم : الثقل $\vec{p} = (-p \sin \alpha, -p \cos \alpha)$ يطبق في c
 القوة المطبقة $\vec{F} = (F \cos \alpha, -F \sin \alpha)$ مطبقة في B
 رد الفعل $\vec{R} = (-T, N)$ مطبق في o' على ox

الشروط العامة للتوازن : $\sum \vec{F} = \vec{0}$ ، $\sum \vec{G}_o = \vec{0}$

(١) $-p \sin \alpha + F \cos \alpha - T = 0$; فنجد oy ، ox نسقط على المحورين

(٢) $-p \cos \alpha - F \sin \alpha + N = 0$

نسقط $\vec{G}_o$ على oz العمود على المستوي :

(٣) $a \sin \alpha - 2a F \cos \alpha - a F \sin \alpha + xN = 0$

حيث x بعد نقطة تطبيق رد الفعل R عن o .

(٤) $T = fN$ ويضاف إلى المعادلات السابقة المعادلة :

حصلنا على أربع معادلات تحوي المجاهيل (F, T, N, x) بحلها نحصل على قيمة F

$$F_{\max} = \frac{\sin \alpha + f \cos \alpha}{\cos \alpha - f \sin \alpha} \quad \text{المطلوبة ونجد :}$$

(٢) إذا كان الجسم على وشك الانقلاب حول حالته A فإن رد الفعل يطبق في A وتصبح

المعادلة (٣) من معادلات التوازن :

$$a p \sin \alpha - 2a F \cos \alpha - a F \sin \alpha + a N = 0$$

$$N = -p \sin \alpha + F(2 \cos \alpha + \sin \alpha)$$

$$N = p \cos \alpha + F \sin \alpha$$

ومن المعادلة (٢) نجد

ب طرح المعادلتين الناتجتين والإصلاح نجد :

$$F = \frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{2 \cos \alpha} p$$

(٣) إذا كان الجسم على وشك الانزلاق نحو الأسفل فإن قوة الاحتكاك المماسية T تتجه نحو

الأعلى تبدل في المعادلة (١) إشارة T وتبقى بقية المعادلات كما هي ونحسب F فنجد :

$$F_{\min} = \frac{\sin \alpha - f \cos \alpha}{\cos \alpha + f \sin \alpha} p$$

تمارين

- ١- قضيب متجانس ثقله p طوله $2l$ يستلج الدوران في مستو شاقولي حول نهايته المثبتة O ، تربط نهايته A بخيط لا ثقل له . يمر الخيط بمحز بكرة صغيرة (لبعادها مهملة) تقع في المستوي الشاقولي وعلى بعد $2l$ عن O . B ، O على الخيط واحد ، يعلق في نهاية الخيط ثقل Q والمطلوب تعيين الوضع التوازلي للقضيب وردود الفعل .
- ٢- قرص دائري متجانس ثقله p مركزه O يستلج الدوران في مستو شاقولي حول نقطة ثابتة O من محيطه . نفرض خيطاً ثقله مهملاً نثبت إحدى نهايتيه في O ويمرر على محز في محيط القرص ثم يتدلى شاقولياً ويربط بنهايته ثقل Q . والمطلوب تعيين الزاوية التي يصنعها CO مع الأفق في وضع التوازن ، احسب الزاوية في الحالة الخاصة عندما $Q = p$
- ٣- قضيب AB متجانس ثقله p طوله $2l$ يستند بنهايتيه A ، B إلى محورين متعامدين ox أفقي و oy شاقولي . خيط طوله d ثابت يشد به القضيب من نقطة معلومة منه C إلى النقطة O والمطلوب تعيين القوة المؤثرة في القضيب في الحالات التالية في وضع توازنه :
- ١- الاستناد دون احتكاك
 - ٢- الاستناد مع احتكاك عامله f حين يكون القضيب على وشك الانزلاق إلى اليمين أو إلى اليسار .
- ٤- حوض بشكل نصف كرة جوفاء قطرها $2a$. AB قضيب متجانس طوله $2l$ ثقله p يستند إلى حافة الحوض وتستند نهايته A إلى سطح الحوض . عين وضع التوازن وقوى الصلالت في الحالتين :
- ١- الاستناد أملس
 - ٢- الاستناد مع احتكاك عامله f .
- ٥- قضيب ثقيل ومتجانس طوله a ثقله p يتزلق إحدى نهايتيه A على محور شاقولي صاعد oy ، وتستند نهايته B على الجزء المائل لـ $x > 0$ من القطع المكافئ $x^2 - 2ay = 0$ ، والمطلوب :
- ١- تعيين وضع التوازن وردود الفعل بفرض الاستناد دون احتكاك .

٦- إعادة المسألة في حالة وجود احتكاك عامله f .

٦- قضيب متجانس طوله $2l$ ثقله P يتحرك في مستو شاقولي بحيث تتزلق نهايته الدنيا A على مستقيم شاقولي Oy ، ويستند على مسند نقطي عمودي على المستوي الشاقولي بنقطة A' تبعد عن Oy بالمقدار d ، ويعلق في النهاية العليا B للقضيب ثقل Q .
والمطلوب تعيين وضع توازن القضيب وردود فعل المحور Oy والمسند في A' . بفرض أن الصلاصلا دون احتكاك.

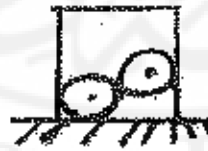
٧- اسطوانة دائرية نصف قطرها a ثقلها P متجانسة تستلعب الحركة على مستو يعميل على الأفق بزاوية α . تؤثر في مركز الاسطوانة قوة $\vec{F}$ توازي المستوي المائل والمطلوب:

- ١- تعيين القيمتين الصغرى والعظمى للقوة F التي تجعل الاسطوانة على وشك التدرج علماً أن عامل احتكاك التدرج هو μ .
- ٢- تعيين القيمة الصغرى لعامل احتكاك الانزلاق التي تجعل الاسطوانة تشرع بالتدرج دون انزلاق.

٣- بفرض f عامل احتكاك الانزلاق عين قيمة القوة $\vec{F}$ حين تشرع الاسطوانة بالانزلاق نحو الأعلى وحين تشرع بالانزلاق نحو الأسفل.

٨- كرتان ثقلتان ثقل كل منهما P ونصف قطرها a موضوعتان داخل اسطوانة دائرية نصف قطرها R . بحيث تستند الكرة الأولى إلى الأرض الأفقية وإلى جدار الاسطوانة، وتستند الثانية إلى الكرة الأولى وإلى جدار الاسطوانة. عين قيمة Q ثقل الاسطوانة كي تشرع الاسطوانة بالانقلاب حول حافتها في نقطة K مثلاً. ما هو الشرط الذي يجب أن تحققه R كي تبقى الاسطوانة متوازنة في حالتين:

- ١- إذا كان الاستناد دون احتكاك ،
- ٢- إذا كان الاستناد مع احتكاك عامله f



الشكل (١٧)

- ٩- قضيبان متماثلان متجانسان متفصلان معاً في منتصفيهما O تقل كل منهما p وطوله $2l$ ، يستند القضيب AB بنهايته A على مستقيم أفقي O_1x ، ويستند الثاني CD بنهايته D على المستقيم O_1x . تربط النهايتان A, C بخيط ثقله مهمل غير قابل للامتطاط. ويستند داخل الزاوية العليا بين القضيبين قرص دائري نصف قطره a ثقله Q . تتوازن المجموعة في مستو شاقولي بحيث تكون الزاوية بين القضيبين 2α . والمطلوب تعيين شد الخيط وردود فعل القيود علماً أن الصلابة دون احتكاك .
- ١٠- قضيب AB متجانس طوله $2l$ ثقله p يستند بنهايته B على أرض أفقية خشنة ويستند بنهايته A داخل نصف دائرة خشنة قطرها شاقولي نصف قطرها a عامل احتكاك الانزلاق f . اكتب المعادلات التي تعين وضع التوازن وردود الفعل بفرض أن القضيب على وشك الانزلاق إلى الأسفل ، وعلماً أن النقطة B تخضع لتأثير قوة أفقية $\vec{F}$.



الشكل (١٤)



الفصل الثالث

التوازن التحليلي - مبدأ العمل الافتراضي

- الانتقالات الحقيقية والانتقالات الافتراضية
- العلاقة بين الانتقالات الحقيقية والانتقالات الافتراضية
- الأعمال الحقيقية لقوة ما ، والأعمال الافتراضية
- حساب الأعمال الافتراضية للقوى المؤثرة على مجموعة مادية
- مبدأ العمل الافتراضي
- المعادلات العامة للتوازن
- رد معادلات التوازن إلى أقل عدد ممكن
- حالات خاصة
- مضارب لاغرانج
- تعيين ردود الفعل
- تعيين مواضع التوازن في حالة الصلات القابلة للتحرر



٢-٣-١ الانتقالات الحقيقية والانتقالات الافتراضية

الانتقالات الحقيقية: نتكن لدينا النقطة المادية M إن معادلة حركة النقطة M هي العلاقة التي تربط موضع هذه النقطة بالزمن ويعبر عنها بالعلاقة $\vec{r} = \vec{r}(t)$ ، أو $\vec{r} = \vec{r}(t)$ ، أو اختصاراً $\vec{M}(t)$ ، حيث O نقطة لغرضها ثابتة و $\vec{r}$ نصف القطر الشعاعي للنقطة M ، و t الزمن ، فإذا تغير الزمن بمقدار صغير dt فإن النقطة تنتقل من موضعها ويعبر عن انتقالها بالعلاقة $d\vec{M} = d\vec{r}$ وبإسقاط هذا المتجه على محاور ديكارتية نحصل على مركبات الانتقال العنصري للنقطة M : $d\vec{M} = (dx, dy, dz)$: ندعو هذه الانتقالات الانتقالات الحقيقية . إن الانتقالات الحقيقية لنقطة مادية تحقق معادلات حركة النقطة ، كما تحقق معادلات الارتباط في حالة النقط المقيدة .

الانتقالات الافتراضية : إن الانتقال الافتراضي لنقطة مقيدة M هو انتقال وهمي غير حقيقي في الحالة العامة يفترض فيه أن النقطة انتقلت محافظة على القيود أو الصلات التي تخضع لها ، ويرمز $\delta \vec{M}$ أو $\delta \vec{r}$ وترمز مركباته : $(\delta x, \delta y, \delta z)$ ، يدل التعريف على أن الانتقال الافتراضي لم يتم نتيجة تغير الزمن ، ولا يتعلق بمعادلات حركة النقطة ، ولكنه يحقق معادلات الارتباط التي تخضع لها النقطة .

٢-٣-٢ العلاقة بين الانتقالات الحقيقية والانتقالات الافتراضية :

نميز الحالات التالية :

١- حالة صلات هندسية ثابتة غير قابلة للتحرير : ذكرنا أن الصلة الهندسية الثابتة هي التي يسير عنها بمعادلة من الشكل :

$$f(x, y, z) = 0$$

لنعد النقطة المادية $M(x, y, z)$ انتقالاً حقيقياً وآخر افتراضياً موافقاً لهذه الصلة والحساب كلاً من df و δf فنجد :

$$df = f(x+dx, y+dy, z+dz) - f(x, y, z)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = 0$$

$$\delta f = f(x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z) - f(x, y, z)$$

$$-\frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\delta z = 0$$

وذلك بإعمال الحدود اللامتناهية في الصغر من المراتبة الثانية فما فوق . يلاحظ مما سبق أن لافرق بين δf و $d f$ في حالة الصلات الهندسية الثابتة ، مما يدل على أن العلاقات التي تربط الإنتقالات الحقيقية هي العلاقات ذاتها التي تربط الإنتقالات الافتراضية ، الأمر الذي يجعل من الممكن عد الإنتقالات الحقيقية حالة خاصة من الإنتقالات الافتراضية

٢- حالة صلات هندسية متغيرة غير قابلة للتحرر :

نكتب معادلة الصلة في هذه الحالة بالشكل :

$$f(x, y, z, t) = 0$$

ويحساب $d f$ و δf نجد :

$$d f = \frac{\partial f}{\partial x} d x + \frac{\partial f}{\partial y} d y + \frac{\partial f}{\partial z} d z + \frac{\partial f}{\partial t} d t = 0$$

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \delta z = 0$$

لأن t لا تتغير في الإنتقالات الافتراضية .

يلتج مما سبق أن العلاقة التي تربط الإنتقالات الحقيقية $(d x, d y, d z)$ تختلف عن تلك التي تربط الإنتقالات الافتراضية $(\delta x, \delta y, \delta z)$ إذا لاستطع في حالة الصلات المتغيرة أن نعد الإنتقالات الحقيقية حالة خاصة من الإنتقالات الافتراضية.

٣- الصلات القابلة للتحرر :

إن النقط المقيدة تعافظ فعلياً على الصلة في هذه الحالة لذا فإن : $d f = 0$ ، في حين يمكن أن يعطى الإنتقال الافتراضي بحيث تتحرر النقط عن الصلات مما يجعل لـ δf إشارة محددة . ولا تساوي الصفر إلا إذا افترضنا أن الصلة بقيت قائمة ، وتكون عندها

$$\delta f \leq 0 \quad \text{أو} \quad \delta f \geq 0$$

٢-٣-٣ الأعمال الحقيقية لقوة ما ، والأعمال الافتراضية :

١- العمل الحقيقي : نعلم أن العمل العنصري لقوة $\vec{F}$ تؤثر على النقطة M فتسبب

لها الانتقال العنصرياً حقيقياً $d\vec{M}$ يعطى بالعلاقة $dA = \vec{F} \cdot d\vec{M}$ ونكتب عبارة العمل

$$dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz \quad \text{بالإحداثيات الديكارتية بالشكل}$$

كما أن العمل الكلي للقوة $\vec{F}$ الموافق للانتقال النقطة M من موضع أول M_1 إلى موضع M_2 يعطى بالعلاقة

$$A = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F} d\vec{M} = \int_{M_1}^{M_2} (F_x dx + F_y dy + F_z dz)$$

وإذا كانت القوة $\vec{F}$ مشتقة من كمون أي إذا كان المقدار $\vec{F} \cdot d\vec{M}$ تفاضلاً كلياً لتابع u يمكن أن نكتب

$$A = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F} d\vec{M} = \int_{M_1}^{M_2} du = u(x_2, y_2, z_2) - u(x_1, y_1, z_1)$$

بمسايدل على أن عمل القوى الكمونية لا يتعلق بشكل المسار الذي تسلكه النقطة بين الموضعين M_1 ، M_2 ، بل إن العمل الكلي يتعلق فقط بالموضعين الابتدائي والنهائي للنقطة . يسمى التابع u تابع القوى ويتعين من التكامل غير المحدد $u = \int \vec{F} d\vec{M}$

٢- العمل الافتراضي :

لنسمي المقدار $\vec{F} \cdot \delta \vec{M}$ العمل الافتراضي للقوة $\vec{F}$ المؤثرة على النقطة M الموافق للانتقال الافتراضي $\delta \vec{M}$ للنقطة M أي الانتقال الموافق للصلوات التي تخضع لها النقطة

٢-٣-٤ حساب الأعمال الافتراضية للقوى المؤثرة على مجموعة مادية :

لنفرض مجموعة مادية M ($i = 1, 2, \dots, n$) ولنفرض أن القوة $\vec{F}_i$ تؤثر على النقطة M_i من المجموعة . إن العمل الافتراضي للقوى المؤثرة على المجموعة هو مجموع الأعمال الافتراضية للقوى $\vec{F}_i$ في الإزاحات الافتراضية للنقاط M_i أي :

$$\delta \tau = \sum \vec{F}_i \cdot \delta \vec{M}_i$$

نعلم أن القوى المؤثرة في مجموعة مادية تتألف من قوى داخلية وقوى خارجية ، والقوى الخارجية تضم قوى مطبقة وقوى ناتجة عن الصلات ولنبعث في أعمال هذه القوى

(١) أعمال القوى الداخلية : رأينا حسب مبدأ الفعل ورد الفعل أن القوى الداخلية

هي قوى متعاكسة مباشرة مثلي . فإذا أخذنا نقطتين M_1 ، M_2 مثلاً من المجموعة فإن M_1 تؤثر في M_2 بقوة نرمزها $\vec{F}_1$ والنقطة M_2 تؤثر في M_1 بقوة $\vec{F}_2$ تعاكس مباشرة $\vec{F}_1$ أي $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$. ولحسب مجموع الصالين الافتراضيين لهاتين القوتين فنجد :

$$\delta \tau_{1,2} = \vec{F}_1 \cdot \delta \vec{M}_1 + \vec{F}_2 \cdot \delta \vec{M}_2 = \vec{F}_1 \cdot (\delta \vec{M}_2 - \delta \vec{M}_1)$$

$$\delta \tau_{1,2} = \vec{F}_2 \cdot \delta(\vec{M}_1 \vec{M}_2) = F_2 \delta r$$

حيث F_2 القيمة المجدبة للقوة ، r البعد بين النقطتين

فإذا كان البعد بين M_1 و M_2 ثابتاً كان العمل $\delta \tau_{1,2} = 0$

ينتج من ذلك أن العمل الافتراضي لجميع القوى الداخلية في المجموعات غير القابلة للتشوه ، وبشكل خاص للمجموعات المتماصة يساوي الصفر .

وكذلك فإن العمل الافتراضي للقوى الناشئة عن التأثير المتبادل في المفصلات في المجموعات المرتبطة مفصلياً (وهي قوى داخلية) يساوي الصفر لانطباق نقطتي تطبيق القوتين .

٢) أعمال ردود الفعل (أعمال القوى الناتجة عن الصلات) . نميز الحالات التالية :

أ : حالة جسم مقيد بنقطة ثابتة أو بمحور ثابت :

إن ردود الفعل في هذه الحالة تمر بالنقطة الثابتة (الجسم مقيد بنقطة) أو تقطع محور الدوران (الجسم مقيد بمحور) وبالتالي فإن الانتقالات الافتراضية للنقط التطبيق معجومة مما يبين أن العمل الافتراضي الموافق لهذه الصلات معنوم أيضاً .

ب : حالة جسم يستطيع الحركة بحيث يبقى سطحه ملاصقاً لسطح جسم ثابت :

لنفترض جسماً S يبقى سطحه ملاصقاً لجسم S_1 ، نعدّه ثابتاً ، ولنسمّ نقطة التماس بين السطحين p . إن هذه النقطة تطبق في اللحظة المدروسة على النقطة A من الجسم S وعلى A_1 من الجسم S_1 . إن القوى الناتجة عن الصلات $\vec{R}$ (هي رد فعل S_1 في S) تطبق في A والعمل الافتراضي لهذه القوة :

$$\delta \tau = \vec{R} \cdot \delta \vec{A}$$

$$\delta \tau = \vec{R} \cdot \vec{V}(A) \delta t = \vec{R} \cdot \vec{W} \delta t$$

الذي يمكن أن يكتب

حيث $\vec{V}(A)$ مسرعة النقطة A في اللحظة المذكورة وهذه المسرعة هي سرعة الزلاق S على S_1 ، ونقع كما نعلم في المستوي المماس في p للسطحين S و S_1 .

وهنا نميز حالتين :

(١) إذا كانت حركة S في اللحظة t الزلاقاً دون احتكاك كان رد الفعل $\vec{R}$ عمودياً على المستوي المماس في النقطة p للسطحين وكان بالتالي $\vec{R} \cdot \vec{W} = 0$ مما يقود إلى أن $\delta \tau = 0$

(٢) إذا كانت حركة S بالنسبة لـ S_1 في اللحظة المذكورة هي حركة دون الزلاق فإن رد الفعل $\vec{R}$ لا يكون عمودياً على المستوي المماس للسطحين في النقطة p لنشوء قوة ممانعة

الانزلاق ولكن السرعة الانزلاقية $\vec{W}$ تكون معدومة مما يجعل $\delta \tau = 0$. وبالتالي فإن العمل الافتراضي لردود الفعل يكون معدوماً أيضاً .

ملاحظة : إذا كان الجسم S_1 متحركاً (أي إذا كانت الصلة تابعة للزمن) فإن العمل الافتراضي لردود الفعل يكون معدوماً إذا كانت الصلة دون احتكاك أو إذا كانت حركة S_1 بالنسبة لـ S_2 حركة تنحرج وفصل دون انزلاق ، ولكن يجب أن لا ننسى في هذه الحالة أن العمل الحقيقي لا يمكن أن يعد صلاً افتراضياً والعمل الحقيقي الجزئي لا يساوي الصفر في الحالة العامة .

العمل الافتراضي لردود الفعل في حالة الصلات المثالية القابلة للتحرر .

إن الانتقالات الافتراضية في حالة الصلات القابلة للتحرر قد تكون انتقالات تساوي حين تبقى الصلات قائمة ، أو تكون انتقالات تراجع حين تنفك النقط عن الصلة ، مما يقود إلى أن العمل الافتراضي يكون صفرأ في حالات انتقالات التساوي (عدم الانفكاك عن الصلات) أو يكون العمل الافتراضي الموافق للصلة موجباً (أو صفرأ) في حالة الانتقالات التراجع (الانفكاك عن الصلة)

٢-٣-٥ مبدأ العمل الافتراضي :

لتكن لدينا مجموعة نقط متماسكة M_1 خاضعة لصلات مثالية قابلة للتحرر أو غير قابلة للتحرر ومستقلة عن الزمن . إن للشرط اللازم والكافي لتوازن هذه المجموعة في وضع ما ، من أجل سرع معدومة لنقط المجموعة ، هو أن يكون العمل الافتراضي للقوى المفروضة (من أجل انتقال افتراضي موافق للصلة) اعتباراً من الوضع المفروض أصغر أو يساوي الصفر ، ويكتب الشرط : $\delta \tau \leq 0$.

لنرمز الشرط : لنفترض أن المجموعة متوازنة ولنبرهن أن العمل الافتراضي للقوى (المفروضة) المطبقة في نقط المجموعة يساوي الصفر أو أصغر من الصفر . عندما تتوازن المجموعة في وضع معين تغزو أي نقطة M_1 من المجموعة متوازنة تحت تأثير القوى المؤثرة فيها وتكون حاصلة هذه القوى مساوية للصفر أي :

$\vec{F}_1 + \vec{F}_1' + \vec{R}_1 = \vec{0}$ حيث $\vec{F}_1$ محصلة القوى المطبقة ، $\vec{F}_1'$ محصلة القوى الداخلية ، $\vec{R}_1$ محصلة قوى ردود الفعل ، فمن أجل أي انتقال افتراضي للنقطة M_1 بدءاً من الوضع التوازلي المفترض ، يكون العمل الافتراضي لجميع القوى المؤثرة في هذه النقطة مساوياً

للصفر . وبالتالي من أجل أي انتقال افتراضي لجميع نقط المجموعة يظل العمل الافتراضي لجميع القوى المؤثرة في جميع نقط المجموعة مساوياً للصفر أي

$$(1) \quad \delta r + \delta r_1 + \delta r_2 = 0$$

حيث δr هو مجموع الأعمال الافتراضية للقوى المطبقة على المجموعة .

δr_1 هو مجموع الأعمال الافتراضية للقوى الداخلية بين نقط المجموعة .

δr_2 هو مجموع الأعمال الافتراضية لقوى الصلات التي تخضع لها المجموعة .

ولكن العمل الافتراضي للقوى الداخلية $\delta r_1 = 0$ لأن المجموعة متماسكة ، والعمل

الافتراضي لردود الفعل في حالة الصلات المثالية يساوي الصفر إن كانت الصلات غير قابلة

للتحرر ، فسي حين يكون العمل الافتراضي لردود الفعل في حالة الصلات القابلة للتحرر

محدوماً إن بقيت الصلات قائمة ، و موجباً إن تحررت للنقط عن الصلات . أي أن

$$\delta r_2 \geq 0 \text{ دوماً وبالتالي نجد من العلاقة (1) أن } \delta r \leq 0 \text{ وهو المطلوب .}$$

كافية الشرط :

لنكتب أن العمل الافتراضي للقوى المفروضة يحقق العلاقة

$$\delta r \leq 0$$

ولنتثبت أن المجموعة تبقى متوازنة بدءاً من وضع مكوني .

فسي التطبيق إذا لم تكن المجموعة متوازنة فإنها تتحرك تحت تأثير القوى المؤثرة في

المجموعة ، ومجموع الأعمال الجزئية لجميع القوى المؤثرة يكون موجباً بسبب الحركة أي :

$$(2) \quad \delta r + \delta r_1 + \delta r_2 > 0$$

ولما كان العمل الجزئي للقوى الداخلية يساوي الصفر لأن المجموعة متماسكة $\delta r_1 = 0$

والعمل الافتراضي لردود الفعل $\delta r_2 = 0$ إن بقيت الصلات قائمة لأن الصلات مثالية .

ويساوي الصفر أيضاً إذا انفكت للنقط عن الصلات حين تحركت لأن قوى الصلات تفقد

عندئذ معنوية فإن العلاقة (2) تعطي : $\delta r > 0$ وهذا يناقض الافتراض الجلي ،

فالمجموعة إذن تبقى متوازنة وهو المطلوب .

ملاحظة هامة : إن الشرط السابق هو شرط لازم وغير كاف لتوازن المجموعات

غير المتماسكة

تعيين مواضع التوازن :

لتكن S مجموعة مادية خاضعة لصلات قابلة للتحرر بحيث تكون الاتفاقات الموافقة لهذه

الصللات معينة بعلاقات تساوي وعلاقات تراجع . فلتعين مواضع التوازن الموافقة لهذه الصللات ، نبدأ بتعين مواضع التوازن ، الموافقة لعلاقات التساوي أي نكتب $\delta \tau = 0$ فنجد عدداً من مواضع التوازن ثم نختار منها المواضع التي يكون فيها العمل الافتراضي للقوى المطبقة من أجل الانتقالات التراجع سالباً أو مساوياً للصفر فنحصل على مواضع التوازن التي تكون من أجلها جميع الصللات محققة .

٢-٣-٦ المعادلات العامة للتوازن

لنكن S مجموعة مادية مؤلفة من n من النقط المادية M_i حيث $(i=1, 2, \dots, n)$ إن عدد الوسطاء التي تعين مواضع النقط M_i هي $3n$ وهي x_i, y_i, z_i فإذا كانت المجموعة طليقة (غير مقيدة) كانت الوسطاء مستقلة . ونكتب معادلة للتوازن حسب مبدأ العمل الافتراضي عندها كما يلي :

$$\delta \tau = \sum (X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i) = 0$$

حيث (X_i, Y_i, Z_i) هي مركبات القوى المؤثرة في النقطة المادية M_i .
 $(\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i)$ الانتقالات الافتراضية للنقطة M_i .

وهي انتقالات مستقلة ، لذا كي نتحقق المعادلة * يلزم أن تكون أمثال الانتقالات الافتراضية المستقلة مساوية للصفر الأمر الذي يعطي الشروط التالية

$$X_i = 0, \quad Y_i = 0, \quad Z_i = 0$$

هذه المعادلات عددها $3n$ معادلة بعدد درجات حرية المجموعة وتكافئ الشروط العامة لتوازن جميع نقط المجموعة المادية .

لنفترض الآن أن للنقط $M_i (x_i, y_i, z_i)$ وعندها n مرتبطة بعلاقات هندسية ثابتة ، الأمر الذي يجعل الاستقلالات الافتراضية ، $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ ، مرتبطة بدورها . ولنفترض أن $\bar{F}_i (X_i, Y_i, Z_i)$ هي حاصلة القوى المؤثرة في النقطة M_i . فإذا كانت المجموعة متوازنة فإن مبدأ العمل الافتراضي يعطينا المعادلة التالية:

$$\delta \tau = \sum_{i=1}^n (X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i) \leq 0$$

العلاقة التي يجب أن نتحقق من أجل جميع الانتقالات الافتراضية $(\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i)$ للموافقة للصللات وتدعى هذه المعادلة المعادلة العامة للتوازن

٧-٣-٢ رد معادلات التوازن إلى أقل عدد ممكن :

لنفترض أن معادلات الصلة التي تعبر عن القيود التي تخضع لها المجموعة وعندها

$$(١) \quad f_\alpha(x_i, y_i, z_i) = 0 \quad \alpha = 1, 2, \dots, s \quad \text{حيث } s$$

فيكون المجموعة ، $k = 3n - s$ درجة حرية ، وتعين المجموعة بالتالي k من

الوسطاء المستقلة ، ونسمم الاحداثيات المعمة للمجموعة q_j حيث $j = 1, 2, \dots, s$

فإذا أمكن تعيين الاحداثيات x_i, y_i, z_i للمجموعة بتابعية الاحداثيات المعمة q_j نقول

إن المجموعة هولونومية ونكتب :

$$(٢) \quad x_i = x_i(q_j), \quad y_i = y_i(q_j), \quad z_i = z_i(q_j)$$

ومن ثم تتعين الانتقالات الافتراضية للنقط M_j بتابعية الانتقالات الافتراضية للاحداثيات

المعومة على النحو :

$$(٣) \quad \delta x_i = \sum_{j=1}^k \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \delta q_j, \quad \delta y_i = \sum_{j=1}^k \frac{\partial y_i}{\partial q_j} \delta q_j, \quad \delta z_i = \sum_{j=1}^k \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \delta q_j$$

فإذا حملنا هذه التقدير إلى المعادلة العامة للتوازن أصبحت بالشكل :

$$\delta \tau = \sum_{i=1}^n \left[X_i \sum_{j=1}^k \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + Y_i \sum_{j=1}^k \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + Z_i \sum_{j=1}^k \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right] \delta q_j = 0$$

والتي يمكن أن نكتب :

$$(٤) \quad \sum_{j=1}^k \left[\sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right] \delta q_j = \sum_j Q_j \delta q_j = 0$$

ولما كانت q_j مستقلة وكان من الواجب أن تتحقق المعادلة الأخيرة مهما كانت δq_j فإنه

يلزم أن يكون :

$$(٥) \quad Q_j = \sum_{i=1}^n \left(X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right) = 0$$

الأسر الذي يعطينا k معادلة لازمة لتوازن المجموعة وكافية إن كانت شروط مبدأ العمل

الافتراضي محققة . وتكفي هذه المعادلات لتعيين الوسطاء q_j التي تعين مواضع توازن

المجموعة .

أما إذا كانت المجموعة غير هولونومية فإن الانتقالات الافتراضية $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ تكسب في هذه الحالة بشكل عام على النحو :

$$(٦) \quad \delta x_i = \sum_{j=1}^k a_{ij} \delta q_j, \quad \delta y_i = \sum_{j=1}^k b_{ij} \delta q_j, \quad \delta z_i = \sum_{j=1}^k c_{ij} \delta q_j$$

وينقل هذه القيم إلى المعادلة العامة للتوازن نحصل بدلاً عن العلاقة (٥) على العلاقة

$$(٧) \quad Q_i = \sum_{j=1}^n (X_j a_{ij} + Y_j b_{ij} + Z_j c_{ij}) = 0$$

التي تعطي k من المعادلات اللازمة (أو اللازمة والكافية) لتوازن المجموعة المادية .
ملاحظة : نسمي القوى المعمة ويتضح من العلاقة (٤) أنه ليس بالضرورة أن يكون للقوى Q_i بعد قوة (يكون Q_i مثلاً بعد عزم إذا كان الاحداثي المعمم q_i زاوية) .
٢-٣-٨ حالات خاصة : ١- إذا كانت إفادة العمل الافتراضي تفاضلاً كلياً لتابع u

$$\delta \tau = \sum Q_i \delta q_i = \delta u \quad \text{أي إذا كان}$$

أصبحت شروط التوازن هي :

$$(٨) \quad Q_i = \frac{\partial u}{\partial q_i} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial q_1} = 0 \dots \dots \dots \frac{\partial u}{\partial q_k} = 0$$

مما يدل على أن شروط التوازن هي شروط وجود القيم الحدية للدالة u . ويبرهن أن التوازن بغض مستقراً حين يصبح القابع u في نهايته العظمى .

٢-٣-٨ إذا كانت القوى $\vec{F}_i$ مشتقة من تابع قوى تكون إفادة العمل الافتراضي تفاضلاً كلياً لتابع

$$\sum_i (X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i) = \delta u \quad \text{أي :}$$

ونحصل هذه الحالة في نطاق الحالة الخاصة السابقة لأن الافادة $\sum Q_i \delta q_i$ تصبح تفاضلاً كلياً مما يقودنا إلى شروط التوازن السابقة (٨) .

ومما تجدر الإشارة إليه أنه قد تكون الإفادة $\sum Q_i \delta q_i$ تفاضلاً كلياً دون أن تكون القوى $\vec{F}_i$ مشتقة من تابع قوى (أي مشتقة من كمون) .

٢-٣-٩ مضاريب لاغرانج :

نفرض مجموعة نقط مادية M_i عددها n خاضعة لصلات يعبر عنها بالعلاقات :

$$(١) \quad f_j(x_i, y_i, z_i) = 0 \quad j = 1, 2, \dots, k$$

بعضها غير قابل للتحرر وليكن عددها s ، وبعضها قابل للتحرر وليكن عددها t ، ولنكتب $s+t=h$. إن للمجموعة k درجة حرية حيث $k=3n-h$.

إن الانتقالات الافتراضية للنقط M_i ترتبط بعلاقات ناتجة عن تعاضل المعادلات (١)

$$(٢) \quad \delta f_j = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial f_j}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial f_j}{\partial z_i} \delta z_i \right) = 0 \quad \text{وهي}$$

وذلك بفرض أن جميع النقط بقيت محافظة على الصلات ولم تتحرر $j=1,2,\dots,k$.
عنها وتدل هذه العلاقات على أن k من هذه الانتقالات يمكن أن تعد مستقلة .

وتعين العلاقات (٢) التي عددها h بقية الانتقالات بتابعة الانتقالات المستقلة .

هذا ولتعيين شروط التوازن لمجموعة للنقط M_i بالتتابع طريقة مضاريب لاغرانج تضرب

كل من المعادلات δf_j بعوامل اختيارية λ_j ولجمع هذه المقادير مع عبارة العمل

الافتراضي $\delta \tau$ فنحصل على العلاقة .

$$(٣) \quad \delta \tau + \sum_j \lambda_j \delta f_j = 0$$

التي تقود إلى العلاقة :

$$\sum_j (X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i) + \sum_j \lambda_j \sum_i \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial f_j}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial f_j}{\partial z_i} \delta z_i \right) = 0$$

والتي يمكن أن تكتب على النحو :

$$(٤) \quad \sum_{i=1}^n \left[\left(X_i + \sum_j \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right) \delta x_i + \left(Y_i + \sum_j \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial y_i} \right) \delta y_i + \left(Z_i + \sum_j \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial z_i} \right) \delta z_i \right] = 0$$

نعمين الآن المضاريب λ_j بحيث تلغى أمثال h من الانتقالات الافتراضية للنقط M_i ويبقى

في العلاقة (٤) ، k من الحدود فقط وهي أمثال الانتقالات الافتراضية المستقلة التي يجب أن

تستعمل بدورها ، مما يدل على أن أمثال جميع الانتقالات الافتراضية معروفة ، الأمر الذي

يعطينا $3n$ معادلة هي :

$$X_i + \sum_j \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i} = 0$$

$$(٥) \quad Y_i + \sum_j \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial y_i} = 0$$

$$Z_i + \sum_j \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial z_i} = 0$$

حيث $i = 1, 2, \dots, n$

فإذا أضفنا هذه المعادلات وعددها $3n$ إلى معادلات الصلة (١) وعددها h نحصل على $3n + h$ معادلة تحمين إحداثيات النقاط M_i وعددها $3n$ والمضاريب λ_j وعددها h التي تسمى مضاريب لاغرانج. تسمى مجموعة المعادلات جميعها المعادلات العامة للتوازن بطريقة مضاريب لاغرانج.

٢-٣-١ تعيين ردود الفعل : نعلم حسب مسلمة الارتباط أن معادلات التوازن لا

تستأثر حين نحذف صلة ما $f_j = 0$ شريطة أن نضيف إلى القوى المطبقة في النقطة M_i رد فعل الصلة f_j في النقطة M_i . وإذا حذفنا الصلة f_j يحذف من معادلات

$$\lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i}, \quad \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial y_i}, \quad \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial z_i}$$

التي يجب أن تستبدل بمركبات رد الفعل $\overline{R_j}$ في النقطة M_i مما يدل على أن مركبات رد الفعل هي : $\overline{R_j} = \lambda_j \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}, \frac{\partial f_j}{\partial y_i}, \frac{\partial f_j}{\partial z_i} \right)$ والتي نكتب كما يلي :

$$(٦) \quad \overline{R_j} = \lambda_j (\text{grad } f_j)_{M_i}$$

ومن الواضح أن $\overline{R_j}$ متناسبة مع λ_j ومنحاتها يعامد المصطح الذي معادلته : $f_j = 0$ في النقطة M_i في موضع التوازن.

٢-٣-١١ تعيين موضع التوازن في حالة الصلات القابلة للتحرر :

١- طريقة العمل الافتراضي :

نفترض أن الصلات $f_j(x_i, y_i, z_i) = 0$ حيث $j = s+1, \dots, t$ هي صلات قابلة للتحرر أي أن الانتقالات الافتراضية ترتبط بعلاقات التراجع التالية :

$$(٧) \quad \delta f_j = \sum a_{ji} \delta x_i + b_{ji} \delta y_i + c_{ji} \delta z_i \leq 0$$

من أجل : $j = s+1, \dots, j = t$

ونفترض أن المسترجعات هي جميعها من إشارة واحدة ولكن سالبة مثلاً فإن كانت إشارة إحدى العلاقات موجبة لضرب طرفيها بـ -1 .

فلنعين مواضع التوازن الموافقة للصلات نبدأ بتعيين مواضع التوازن الموافقة لعلاقات التساوي من أجل جميع الصلات $f_j = 0$ ، أي من أجل $j = 1, \dots, s$ (الصلات غير القابلة للتحرر) ومن أجل $j = s+1, \dots, t$ (الصلات القابلة للتحرر) ثم نختار منها المواضع التي تحقق التراجع في المجموعة $\delta f_j \leq 0$ حيث $j = s+1, \dots, t$.
ويعبر آخر نكتب أولاً أن :

$$(8) \quad \delta \tau = \sum_{i=1}^n (X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i) = 0$$

من أجل جميع النقالات التساوي :

$$\delta f_j = 0 \quad j = 1, 2, \dots, h \quad , \quad h = s + t$$

فلنجد عدداً مسن مواضع التوازن نختار منها مواضع يكون فيها العمل الافتراضي للقوى المفروضة من أجل النقالات التراجع سالباً أو مساوياً للصفر أي $\delta \tau \leq 0$ فلنحصل بذلك على مواضع التوازن التي تكون من أجلها جميع الصلات مطقة.

٧- طريقة مضارب لاغرانج :

وجدنا أن شرط التوازن بطريقة مضارب لاغرانج هو :

$$(9) \quad \delta \tau + \sum_{j=1}^h \lambda_j \delta f_j = 0$$

حيث $f_j(x_i, y_i, z_i) = 0$ صلات بعضها غير قابل للتحرر وعددها s : $j = 1, 2, \dots, s$ وبعضها قابل للتحرر وعددها t (حيث $j = s+1, \dots, s+t = n$)

ولما كانت $\delta f_j = 0$ من أجل الصلات غير القابلة للتحرر فإن الشرط السابق يصبح بالشكل

$$(10) \quad \delta \tau + \sum_{j=s+1}^h \lambda_j \delta f_j = 0$$

$$(11) \quad \delta \tau = - \sum_{j=s+1}^h \lambda_j \delta f_j \quad \text{أو}$$

$$\delta \tau = \sum_{i=1}^n (X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i) \leq 0 \quad \text{فيذا لاحظنا أن}$$

من أجل الصلوات القابلة للتحرر. وأعطينا التقاليد الافتراضية نحافظ على الصلة أي
تجعل $\delta f_r = 0$ من أجل جميع الصلوات ما عدا واحدة فقط ولتكن f_r أيًا كانت r :
($j = s+1, 2, \dots, h$) فلن العلاقة (١٠) تدل على أن : $\delta f_r \geq 0$ الأمر الذي يدل
على أن إشارة λ_r يجب أن تكون من إشارة δf_r ، أو أن تكون $\lambda_r = 0$. (وذلك
مهما تكن r حيث $j = s+1, 2, \dots, n$)

فإذا وخطبا إشارة δf_r القابلة للتحرر عن الصلة وفرضناها سالبة فلننا نستطيع أن نقول إن
 λ_r يجب أن تكون سالبة أو مساوية للصفر من أجل جميع الصلوات القابلة للتحرر .
ونخلص الحل بالشكل التالي :

لتعيين مواضع التوازن ووجود الفعل في حالة الصلوات المثالية القابلة للتحرر أو غير القابلة
للتحرر نبدأ بحل المعادلات :

$$X_i + \sum_{j=1}^h \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i} = 0 \quad Y_i + \sum_{j=1}^h \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial y_i} = 0 \quad Z_i + \sum_{j=1}^h \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial z_i} = 0$$

مع معادلات الصلة $f_j(x_i, y_i, z_i) = 0$

حيث $j = 1, 2, \dots, h$ $i = 1, 2, \dots, n$

لتحصيل على مواضع التوازن وقيم المضارب λ_r ، ثم نختار من المواضع السابقة تلك
المواضع التي تكون من أجلها λ_r سالبة أو مساوية للصفر
(أو تلك القيم λ_r التي توافق إشارتها إشارة δf_r ، أو تساوي الصفر) من أجل كل
صلة قابلة للتحرر .

ونعين ردود الفعل في كل نقطة M_i من نقطة المجموعة في حالة التوازن من العلاقات
 $\vec{R}_i = \lambda_j (\vec{\text{grad}} f_j)_{M_i}$

تمارين محلولة

تمرين (١) : الرافعة : لنكن الرافعة البسيطة المولدة من قضيب AB مقيد بنقطة

ثابتة O ، $OA = a$ ، $OB = b$ تطبيق القوة المحركة $\vec{P}$ الشاقولية في النقطة A ،
وتطبيق المقاومة $\vec{Q}$ الشاقولية في النقطة B ، ونفترض أن نقل الرافعة مهمل بالنسبة للقوتين
 $\vec{P}$ و $\vec{Q}$. ولنعين شروط التوازن :

(١) النظريات العامة : إن الشرط اللازم والكافي لتوازن الرافعة هو أن يكون :

$$\sum \vec{F} = \vec{P} + \vec{Q} + \vec{R}_O = 0$$

$$\sum \vec{G}_O = 0$$

إن المعادلة الأولى تعين رد الفعل وتعطي :

في حين تعين المعادلة الثانية شرط التوازن وتعطي :

$$aP - bQ = 0 \Rightarrow aP = bQ \Leftrightarrow (\text{القوة} \times \text{ذراعها} = \text{المقاومة} \times \text{ذراعها})$$

وإذا كانت $\theta = 0$ فإن عزم P في O يساوي عزم Q في O مهما تكن $\vec{P}$ و $\vec{Q}$ وهو
الوضع الشاقولي للتوازن



الشكل (١٤)

(٢) طريقة العمل الافتراضي :

بما أن الجسم صلب والصلات متالية فإن الشرط اللازم والكافي للتوازن :

$$\delta \tau = \vec{P} \delta \vec{A} + \vec{Q} \delta \vec{B} = 0$$

إن الجسم درجة حرية واحدة ، نختار θ الاحداثي المعمم ونعين الوسيط

بتابعية الوسيط θ لنجد : x_B ، y_B ، x_A ، y_A

$$x_A = a \cos \theta, \quad y_A = a \sin \theta$$

$$x_B = -b \cos \theta, \quad y_B = -b \sin \theta$$

لحساب الانتقالات الافتراضية فنجد :

$$\delta x_A = -a \sin \theta \delta \theta, \quad \delta y_A = a \cos \theta \delta \theta$$

$$\delta x_B = b \sin \theta \delta \theta, \quad \delta y_B = -b \cos \theta \delta \theta$$

ولدينا مركبات القوى المطبقة :

$$\vec{P} = (0, -P) \quad \vec{Q} = (0, -Q)$$

وبالتالي :

$$\delta \tau = Y_A \delta y_A + Y_B \delta y_B = -aP \cos \theta \delta \theta + bQ \cos \theta \delta \theta = 0$$

$$(-aP + bQ) \cos \theta \delta \theta = 0$$

ولما كان $\delta \theta$ انتقالاً افتراضياً مستقلاً أي $\delta \theta \neq 0$ ينتج أنه :

$$\text{إما } \cos \theta = 0 \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \quad \text{وهذا يعطي وضع توازن شاقولي لا يتعلق بقيمة}$$

$\vec{P}$ و $\vec{Q}$

$$aP = bQ$$

وإما

وهو شرط التوازن . ولا يتعلق بالزاوية θ مما يدل على أن الرافعة تتوازن إذا تحقق هذا الشرط مهما كانت قيمة الزاوية θ .

ويتعين رد الفعل في هذه الحالة من النظريات العامة (كالمسابق)

(٢) طريقة مضاريب لاغرانج :

إن الوسيط الذي تعين وضع القضيب هي $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ والصلاص التي تخضع لها الرافعة :

$$(١) \quad f_1 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - l^2 = 0 \quad \Leftarrow \quad \text{طول } AB \text{ ثابت}$$

$$(٢) \quad f_2 = x_1^2 + y_1^2 - a^2 = 0 \quad \Leftarrow \quad \text{بعد } A \text{ عن } O \text{ ثابت}$$

$$(٣) \quad f_3 = x_2^2 + y_2^2 - b^2 = 0 \quad \Leftarrow \quad \text{بعد } B \text{ عن } O \text{ ثابت}$$

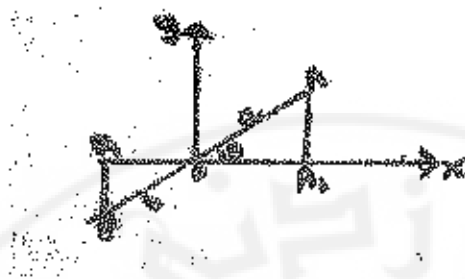
وتكتب معادلات التوازن بطريقة مضاريب لاغرانج كما يلي :

$$(٤) \quad 0 + \lambda_1(-2(x_2 - x_1)) + \lambda_2(2x_1) + \lambda_3(0) = 0$$

$$(٥) \quad -P + \lambda_1(-2(y_2 - y_1)) + \lambda_2(2y_1) + \lambda_3(0) = 0$$

$$(٦) \quad 0 + \lambda_1(-2(x_2 - x_1)) + \lambda_2(0) + \lambda_3(2x_2) = 0$$

$$(٧) \quad -Q + \lambda_1(-2(y_2 - y_1)) + \lambda_2(0) + \lambda_3(2y_2) = 0$$



الشكل (١٥)

إن المعادلات الصبع تكفي لتحديد مواضع التوازن ومضارب لاغرانج :

فلذا حذفنا λ_1 و λ_2 و λ_3 من المعادلات الأربع الأخيرة لحد :

$$\lambda_1 = \frac{Px_1}{y_1x_2 - x_1y_2} = \frac{-Qx_2}{y_1x_2 - x_1y_2} \Rightarrow Px_1 = -Qx_2$$

وتتحقق هذه العلاقة (١) إذا كان $\forall P, Q \quad x_1 = x_2 = 0$

أي $\theta = 0$ كما مر سابقاً

$$(٧) \text{ أو إذا كان } \frac{x_1}{x_2} = -\frac{Q}{P} \text{ ونرى من تشابه المثلثين } oBB_1, oAA_1$$

$$\text{أن } \frac{x_1}{x_2} = \frac{-a}{b} \text{ الأمر الذي يقود إلى العلاقة } aP = bQ \text{ (شرط توازن الرافعة$$

المعروف)

تمرين (٧) : قضيب AB متجانس طوله $2l$ كتلة P يستند بطرفه A على جدار

شاقولي أملس ويستند بطرفه B على أرض أفقية ملساء . يخضع القضيب لتأثير قوة أفقية $\vec{F}$

مطبقة في B كما في الشكل والمطلوب تحيين مواضع التوازن وردود الفعل .

الحل : (١) تطبيق النظريات العامة

$$(١) \quad \sum \vec{G}_i = \vec{0} \quad \sum \vec{F} = \vec{0} \quad \text{الشرط الخترم والخافي للتوازن :}$$

الجسم المدروس هو القضيب المتجانس AB الذي طوله $2l$

القوى التي يخضع لها :

$$\vec{P} = (0, -P) \quad \text{مطبقة في } c \text{ منتصف التضييب}$$

$$\vec{F} = (-F, 0) \quad \text{مطبقة في } B$$

$$\vec{R}_B = (0, R_B) \quad \text{مطبقة في } B$$

$$\vec{R}_A = (R_A, 0) \quad \text{مطبقة في } A$$

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \quad \text{الشرط يعطى}$$

$$-F + R_A = 0 \Rightarrow R_A = F \quad \text{ويحمل على } ox$$

$$-P + R_B = 0 \Rightarrow R_B = P \quad \text{ويحمل على } oy$$

نختار النقطة B مركزاً المعزوم ونكتب :

$$\sum \vec{G}_B = \vec{Bc} \times \vec{P} + \vec{BA} \times \vec{R}_A = \vec{0}$$

$$Pl \cos \varphi - 2l R_A \sin \varphi = 0$$

$$\Rightarrow \lg \varphi = \frac{P}{2R_A} = \frac{P}{2F}$$

ولنعين الزاوية φ موضع التوازن .



الشكل (١٦)

(٢) تطبيق طريقة العمل الافتراضي :

الجسم صلب والصلات مثالية نفترضها غير قابلة للتحرر ، إن الجسم درجة حرية واحدة .
الشرط اللازم والكافي للتوازن :

$$\delta \tau = \vec{F} \delta \vec{B} + \vec{P} \delta \vec{C} = 0$$

$$\delta \tau = -F \delta x_B - P \delta y_C = 0$$

أي

$$x_B = 2l \cos \varphi \Rightarrow \delta x_B = -2l \sin \varphi \delta \varphi$$

وبما أن :

$$y_C = l \sin \varphi \Rightarrow \delta y_C = l \cos \varphi \delta \varphi$$

$$(F(-2l \sin \varphi) + Pl \cos \varphi) \delta \varphi = 0 \quad \text{هنا}$$

ولما كان $\delta \varphi$ افتقاراً افتراضياً مستقلاً هنا :

$$2lF \sin \varphi = Pl \cos \varphi$$

$$\tan \varphi = \frac{P}{2F} \quad \text{ومنه}$$

وتتبعين ردود الفعل من العلاقة $\sum \vec{F} = \vec{0}$ كما سبق .

(٣) طريقة مضارب لاغرانج :

لنكرنا أن الوسطاء هي x_A, y_A, x_B, y_B نكتب معادلات الصلة على النحو :

$$f_1 \equiv x_A = 0$$

$$f_2 \equiv y_B = 0$$

$$f_3 \equiv (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 - 4l^2 = 0$$

يسوزع ثقل القضيب المتساوي في مركزه على طرفي القضيب ، لتصبح القوى المطبقة في

$$\vec{P} = (0, -\frac{P}{2}) \quad \text{والقوة} \quad \vec{F} = (-F, 0) \quad \text{النقطة B :}$$

$$\vec{P} = (0, -\frac{P}{2}) \quad \text{والقوة الوحيدة المطبقة في النقطة A هي}$$

نكتب المعادلات حسب مضارب لاغرانج كما يلي :

$$\begin{cases} \text{في النقطة A} \\ \begin{cases} 0 + \lambda_1(1) + \lambda_2(0) + 2\lambda_3(x_A - x_B) = 0 \\ -\frac{P}{2} + \lambda_1(0) + \lambda_2(0) + 2\lambda_3(y_A - y_B) = 0 \end{cases} \\ \text{في النقطة B} \\ \begin{cases} -F + \lambda_1(0) + \lambda_2(0) - 2\lambda_3(x_A - x_B) = 0 \\ -\frac{P}{2} + \lambda_1(0) + \lambda_2(1) - 2\lambda_3(y_A - y_B) = 0 \end{cases} \end{cases}$$

لتضيف إلى المعادلات الأربعة السابقة معادلات الصلة الثلاث فنحصل على سبع معادلات

تتمتع المجاميل السبعة . يحل هذه المعادلات حلاً مشتركاً نجد :

$$\lambda_1 = F' \quad , \quad \lambda_2 = P \quad , \quad \lambda_3 = \frac{F}{2x_B} = \frac{P}{4y_A}$$

على وضع التوازن الذي حصلنا عليه سابقاً

$$\frac{y_A}{x_B} = \frac{P}{2F} = \tan \varphi$$

وتتمين ردود الفعل كما يلي :

$$\overline{R}_A = \lambda_1 (\overline{\text{grad}} f_1) \Big|_A = F \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_A}, \frac{\partial f_1}{\partial y_A} \right) = F (1, 0)$$

$$\overline{R}_B = \lambda_2 (\overline{\text{grad}} f_2) \Big|_B = F \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_B}, \frac{\partial f_2}{\partial y_B} \right) = P (0, 1)$$

ملاحظة : إذا كانت الصلات قابلة للتحرر فإن مواضع التوازن المقبولة هي التي تكون فيها إشارة λ_j موافقة لاشك δf_j ونلاحظ هنا أن إشارة كل من λ_1 و λ_2 موجبة وأن $\delta f_1 \geq 0$ و $\delta f_2 \geq 0$ مما يدل على أن موضع التوازن الذي حصلنا عليه مقبول.

تمرين (٣) : AB قضيب ثقيل متجانس ، تتزلق نهايته بدون احتكاك على قطع مكافئ ثابت مفروض معادلته : $x^2 = 2y - 1$ في المستوي الثنائي xy والمطلوب : تعيين أوضاع توازن القضيب علماً أن طول القضيب a ونقطة $2P$.

١- إذا كان القضيب غير قابل للتحرر .

٢- إذا كان القضيب قابلاً للتحرر .

الحل : المجموعة المدروسة هي القضيب AB

الوسطاء التي تعين الجسم :

$$A(x_1, y_1) \quad , \quad B(x_2, y_2)$$

ترابط الوسطاء بثلاث علاقات صلة هي :

$$(1) \quad \begin{cases} A \in \text{القطع} & \Rightarrow x_1^2 = 2y_1 - 1 \\ B \in \text{القطع} & \Rightarrow x_2^2 = 2y_2 - 1 \\ \text{ثابت } AB \text{ طول} & \Rightarrow (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = a^2 \end{cases}$$

مما يدل على أن للقضيب درجة حرية واحدة ويتعين موضعه بوسيط واحد يمكن اختياره x_1 مثلاً

(١) لتطبيق العمل الافتراضي: إن شروط مبدأ العمل الافتراضي محققة

$$(2) \quad \text{لذا نكتب : } \delta \tau = 2 \vec{P} \delta \vec{c} = 2P \delta y_c = 0$$

حيث $\bar{c}$ منتصف القضيب وفيها يطبق الثقل .

$$\delta y_c = \frac{1}{2}(\delta y_1 + \delta y_2) \quad \Leftrightarrow \quad y_c = \frac{y_1 + y_2}{2} \quad \text{نعلم أن}$$

نعوض في عبارة العمل الافتراضي فنجد :

$$\delta \tau = 0 \Rightarrow (\delta y_1 + \delta y_2) = 0$$

نأخذ تفاضل طرفي معادلات الصلة (١) فنجد :

$$(٣) \quad \begin{cases} x_1 \delta x_1 = \delta y_1 \\ x_2 \delta x_2 = \delta y_2 \\ (x_2 - x_1)(\delta x_2 - \delta x_1) + (y_2 - y_1)(\delta y_2 - \delta y_1) = 0 \end{cases}$$

نحسب $(y_2 - y_1)$ من العلاقات (١) ونحسب $(\delta y_2 - \delta y_1)$ من العلاقات الأولى والثانية من (٣) ، ونعوض في المعادلة الثالثة من (٣) فنجد :

$$(٤) \quad (x_2 - x_1)(\delta x_2 - \delta x_1) + \frac{x_2^2 - x_1^2}{2} (x_2 \delta x_2 - x_1 \delta x_1) = 0$$

نلاحظ أن العلاقة (٤) تكون محققة وضوحاً عندما $x_1 = x_2$ أي عندما يكون القضيب مساقولياً ، وهذا يعطي حالة خاصة لتوازن القضيب إذا استند بإحدى نهايتيه فقط على القطع . ولا بد في هذه الحالة من أن يعاكس ثقل القضيب رد الفعل مباشرة وهذا لا يتم إلا إذا كان الاستناد في ذروة القطع . (هذا هو موضع التوازن في حالة إحدى الصلات غير محققة) .

الحالة العامة : $x_1 \neq x_2$ ، عندها يمكن تعيين δx_2 بتابعية δx_1 من العلاقة (٤) فنجد :

$$(٥) \quad \delta x_2 = \frac{2 + (x_2 + x_1)x_1}{2 + (x_2 + x_1)x_2} \delta x_1$$

$$\delta y_1 + \delta y_2 = x_1 \delta x_1 + x_2 \delta x_2 \quad \text{ولما كان}$$

$$\delta y_1 + \delta y_2 = (x_1 + x_2) \cdot \frac{2 + (x_2 + x_1)x_1}{2 + (x_2 + x_1)x_2} \delta x_1 \quad \text{فإن}$$

وبعد الإصلاح نجد شرط التوازن

$$\frac{(x_1 + x_2)(1 + x_1 x_2)}{2 + (x_2 + x_1)x_2} \delta x_1 = 0 \Rightarrow (x_1 + x_2)(1 + x_1 x_2) = 0$$

هنا نميز حالتين

(١) إما $x_1 = -x_2$ والقضيب أفقي . ومن معادلة الصلة الثالثة نجد موضع التوازن :

$$x_1 = -\frac{a}{2} \quad x_2 = \frac{a}{2} \quad y_1 = y_2 = \frac{a^2}{8}$$

ولتعيين ردود الفعل نكتب $\sum \vec{F} = \vec{0}$ أي :

$$-\vec{P} + \vec{R}_A + \vec{R}_B = \vec{0}$$

وبالاعتقاد نجد :

$$\begin{cases} X_A + X_B = 0 \\ Y_A + Y_B = 0 \end{cases} \quad (٧)$$

ولما كانت الصلات دون احتكاك فإن ردود الفعل لأفقية على القطع في النقطتين A و B أي

$$\frac{Y_A}{X_A} = \frac{-1}{y'|_A} = -\frac{1}{x_1} = \frac{2}{a}, \quad \frac{Y_B}{X_B} = \frac{-1}{y'|_B} = -\frac{1}{x_2} = -\frac{2}{a}$$

وبالتعويض في (٧) نجد

$$Y_A = Y_B = P$$

$$X_A = -X_B = \frac{a}{2} P$$

(٢) أو $x_1 x_2 = -1$ أي أن القضيب AB يمر بمحرف القطع . إن العلاقة $x_1 x_2 = -1$ مع معادلات الصلة الثلاث (١) تعين الاحداثيات x_1, x_2, y_1, y_2 في موضعي التوازن .

ويمكن تعيين ردود الفعل من العلاقة (٧) كما في الحالة الأولى في كل من موضعي التوازن.

طريقة مضارب لآخر اتج : الاحداثيات التي تعين موضع القضيب هي كما ذكرنا :

x_1, y_1, x_2, y_2 ومعادلات الصلة هي :

$$f_1 = x_1^2 - 2y_1 + 1 = 0 \quad (١)$$

$$f_2 = x_2^2 - 2y_2 + 1 = 0 \quad (٢)$$

$$f_3 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - a^2 = 0 \quad (٣)$$

نفسق الثقل المطبق في مركز القضيب إلى قوتين متساويتين مطبقتين في النقطتين A و B ونكتب المعادلات :

$$\begin{cases} 0 + \lambda_1(2x_1) + \lambda_2(0) + \lambda_3(-2(x_2 - x_1)) = 0 \\ -P + \lambda_1(-2) + \lambda_2(0) + \lambda_3(-2(y_2 - y_1)) = 0 \end{cases} \quad (٤) \text{ و } (٥)$$

في النقطة A

$$\text{في النقطة } B \begin{cases} 0 + \lambda_1(0) + \lambda_2(2x_2) + \lambda_3(2(x_2 - x_1)) = 0 \\ -P + \lambda_1(0) + \lambda_2(-2) + \lambda_3(2(y_2 - y_1)) = 0 \end{cases} \quad (٧) \text{ و } (٦)$$

المعادلات من (٦) إلى (٧) تعين المجاميل العسمة $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ و x_1, y_1, x_2, y_2
بحل هذه المعادلات نجد :

$$\lambda_1 = \frac{-Px_2}{x_2 - x_1}$$

$$\lambda_2 = \frac{Px_1}{x_2 - x_1}$$

$$\lambda_3 = \frac{-Px_1x_2}{(x_2 - x_1)^2}$$

$$y_2 - y_1 = \frac{(x_2 - x_1)(x_1 + x_2)}{2x_1x_2} = \frac{1}{2}(x_2^2 - x_1^2)$$

(١) $x_1 = x_2$ الوضع الذي وجدناه سابقاً والقضيب شاقولي يستند على ثروة القطع

$$\frac{(x_1 + x_2)(1 - x_1x_2)}{2x_1x_2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 \neq x_2 \quad (٢)$$

ومنه إما $x_1 = -x_2$ أو $x_1x_2 = 1$

وهي أوضاع التوازن التي حصلنا عليها بالطريقة السابقة .

أما لتحديد ردود الفعل في النقطتين A و B فإننا نكتب :

$$\vec{R}_A = \lambda_1 \vec{\text{grad}} f_1|_A = \lambda_1 (2x_1, -2)$$

فمن أجل موضع التوازن الأول $x_2 = \frac{a}{2}$ ، $x_1 = -\frac{a}{2}$ تكون $\lambda_1 = -\frac{P}{2}$

$$\vec{R}_A = -\frac{P}{2}(-a, -2) = (P\frac{a}{2}, P) \quad \text{وبالتعويض نجد}$$

$$\vec{R}_B = \lambda_2 \vec{\text{grad}} f_2|_B = \lambda_2 (2x_2, -2) \quad \text{كما نجد :}$$

$$\lambda_2 = -\frac{Pa}{2a} = -\frac{P}{2} \quad \text{وبالتعويض بقيمة } \lambda_2 \text{ نجد}$$

$$\vec{R}_B = -\frac{P}{2}(a, -2) = (-\frac{a}{2}P, P)$$

ويمتطيع أن نعين توتر القضيب (. هي قوة داخلية) من العلاقة

$$\vec{R}_3 = \lambda_2 \text{grad } f_3|_{A,B}$$

وتتبعين مواضع التوازن في الحالة الثانية أي عندما $x_1 x_2 = -1$ من معادلات التوازن السابقة ونلاحظ أن وضع التوازن هو وضع القضيب حين يمر من محرق القطع فيكون لدينا في هذه الحالة موضعين للتوازن وتتبعين ردود الفعل بالطريقة ذاتها المهيئة أعلاه.

ملاحظة (١) : إذا كانت الصلات قابلة للتحرر فإننا نلاحظ أن

$$\delta f_1 \leq 0 \quad \text{و} \quad \delta f_2 \leq 0 \quad \text{في هذه الحالة. لذا نفكر من مواضع التوازن تلك التي توافق}$$

$$\lambda_1 \leq 0 \quad \text{و} \quad \lambda_2 \leq 0$$

فمن أجل الموضع $x_1 = -x_2$ نجد أن $\lambda_1 = -\frac{P}{2}$ سالبة وكذا : $\lambda_2 = -\frac{P}{2}$ سالبة

فإن موضع التوازن موافق لهذه الصلة

ونناقش الحالات الأخرى بالطريقة ذاتها .

ملاحظة (٢) : نلاحظ في هذه المسألة أن القوى المطبقة هي ثقل القضيب فقط

وهي قوة مشتقة من كمون ، إن تابع القوى هو

$$u = -2P y_c$$

ومواضع التوازن هي التي توافق نهايات حدية لهذا التابع أي للتابع y_c ، ومنه فإن القضيب

يتوازن حين يبلغ مركز ثقله أعلى أو أخفض موضع على مساره أي تلك التي تحقق العلاقة :

$$\delta y_1 + \delta y_2 = 0$$

وهو الشرط الذي حصلنا عليه بطريقة العمل الافتراضي.

تعاريف

(١) عارضة AB يربط طرفيها بحبل ثقله مهمل غير قابل للامتداد طوله a يمر على بكرة

مثبتة في المستوى الشاقولي في نقطة O ، يحلق في النقطة A ثقل P ويحلق في النقطة B ثقل Q ويهمل ثقل العارضة ، والمطلوب تعيين الوضع التوازني للمجموعة المادية .

(٢) نتوضع نقطة مادية M نقلا P على دائرة شاقولية منسأة نصف قطرها R وتخضع

النقطة M لقوتين جانبتين من النقطتين A و B من الدائرة ، AB هو القطر الاقصى للدائرة تتعين القوتان من الحالتين :

$$\vec{F}_1 = \lambda_1 \vec{MA} \quad , \quad \vec{F}_2 = \lambda_2 \vec{MB}$$

عين مواضع توازن M في الحالتين :

(١) النقطة غير قابلة للتحرر عن الدائرة

(٢) يمكن النقطة أن تترك نحو خارج الدائرة

(٣) تتكون مجموعة مادية من نقطتين A و B ، تربط A بخيط غير قابل للامتداد

طوله a_1 مثبت في نقطة ثابتة O من مستو شاقولي . وتربط B بالنقطة A أيضاً

بخيط غير قابل للامتداد طوله a_2 . يؤثر على النقطة A قوة شاقولية $\vec{F}_1$

ويؤثر على النقطة B قوة أفقية $\vec{F}_2$ عين الوضع التوازني للمجموعة المادية ،

يهمل ثقل كل من الخيطين .

(٤) مضلع جبلي $A_0 A_1 A_2 A_3 A_4 A_5$ مثبت في الفراغ من طرفيه A_0 و A_5

وخاضع لقوى شد مفروضة $\vec{F}_1$ ، $\vec{F}_2$ ، $\vec{F}_3$ ، $\vec{F}_4$ مطبقة في الرؤوس $A_1 A_2 A_3 A_4$

تتلى التوالسي والمطلوب تعيين أوضاع التوازن وشد الحبل في النقط A_i

($i = 1, 2, 3, 4$) . (يشر إلى أطوال القطع $A_i A_{i+1} = l_i$) ($i = 1, 2, \dots, 5$)

(٥) خيط لدن غير (قابل للامتداد) طوله ثابت l ثقله مهمل ، يربط أحد طرفيه بنقطة

ثابتة O ويربط الطرف الثاني بنقطة مادية ثقيلة M نقلا P ، نتوضع النقطة M على

السطح الخارجي لاسطوانة دورانية أفقية ثابتة مركزها (a, b) ونصف قطرها

R ، ويفترض أن B أعلى نقطة من الدائرة c مقطع الاسطوانة في المستوى (x, y) ،

و OT المماس المقام من O لمقطع الاسطوانة المذكور ، و يفترض :
 $|OB| \leq l \leq |OT|$ والمطلوب تعيين مواضع توازن النقطة M بطريقتين ، المثل
 الافتراضي وطريقة مضارب لاغرانج مع ملاحظة أن الصلاات قابلة للتحرر .

(٦) قضيب متجانس ثقل يستطيع الدوران في مستو شاقولي ثابت حول نهايته المثبتة

O . تربط النهاية A بخيط لا ثقل له يمر بمركز بكرة صمغية B مثبتة في المستوي الشاقولي الثابت في موضع من أفق النقطة O . يعلق في نهاية الخيط ثقل Q . فإذا
 فرض أن ثقل القضيب P وأن $OA=a$ و $OB=b$ فالمطلوب تعيين زاوية OA مع الأفق في الوضع التوازلي للقضيب وذلك :

(١) إذا فرض أن $a=b$ (٢) إذا فرض أن $a \neq b$

(٧) قضبان متجانسان طول كل منهما a وثقله P ، يدور OB حول O في

المستوي الشاقولي الثابت Oxy ، ويدور AC حول النقطة A من المستوي الشاقولي
 احداثياتها $(3a, 0)$ ، الصلاات مثالية .

فإذا فرضنا أن B و C مربوطتان بخيط غير قابل للانتمطاط طوله $2a$ وثقله سهل
 فالمطلوب تعيين الوضع التوازلي وردي للقل في O و A وشد الخيط .

(٨) تربط نقطة مادية ثقيلة M ثقلها P بخيط غير قابل للانتمطاط طوله a و تربط نهاية

الخيط بنقطة ثابتة O ، تستند النقطة M على مستقيم في المستوي الشاقولي معادلته
 $y=x$ عين أوضاع توازن النقطة M بفرض أن الصلاات قابلة للتحرر .

(٩) نقطتان ماديتان ثقلتان ثقل كل منهما P ملازمتان لدائرة شاقولية C

مركزها O ونصف قطرها a بدون احتكاك . تتجاذب النقطتان M_1 و M_2 بقوة
 شدتها ثابتة Q . أوجد أوضاع توازن للنقطتين على الدائرة . بفرض أن النقطتين
 تستعملان الانفكاك نحو خارج الدائرة .

(١٠) ليكن C ملحني يقع في الربع الأول من مستو شاقولي Oxy ، Oy شاقولي

صاعد ، ويتجه ثقل الملحني C نحو الاتجاه السالب من المحور Oy .

AB قضيب متجانس طوله $2a$ ثقله P يستند إلى الملحني C ، لنرمز بـ M لنقطة
 التماس ، وتترلق نهايته A على المحور Oy ، ولنرمز بـ r لطول القطعة AM و
 بـ θ للزاوية بين AM والمحور الأفقي Ox .

١- اكتب في حالة توازن القضيب العلاقة بين r و θ علماً بأن الصلابة تكون

احتكاك وعين ردود الفعل بدلالة θ

٢- افترض أن المنحني C قد رد إلى نقطة فصلها h . عين في حالة التوازن

الوسيطين r و θ وعين ردود الفعل .

٣- افترض أن المنحني C فرع لقطع مكافئ معين بالمعادلة

$$y^2 = 2Px \quad y > 0$$

عين في حالة التوازن فصل نقطة استناد القضيب على المنحني

(علم أن ما تحت الناظم في القطع المكافئ يساوي ومنه القطع المكافئ) .

الفصل الرابع

توازن الحبال غير القابلة للامتداد

- معادلات توازن الحبال
- المعادلات الدينامية لتوازن الحبال
- المعادلات الذاتية لتوازن الحبال
- توازن الحبال في حالات خاصة للقوى المطبقة
- توازن الحبال الثقالية
- توازن الحبال الحاملة للجسور
- توازن حبل على سطح اسطوانتي خشن
- توازن حبل موضوع على سطح دون احتكاك



٢-٤-١ تعريف : الحبل غير القابل للامتطاط أو (الخيط أو السلسلة) هو مجموعة

نقطة مادية موزعة بشكل مستمر على طول معين ما . بحيث يبقى الطول المنحني
بين أي نقطتين من المجموعة ثابتاً . يدعى المنحني الذي نقوضه وفقه نقط الحبل في حالة
توازنها المنحني التوازني للحبل أو (الشكل التوازني للحبل)

٢-٤-٢ معادلة توازن الحبال :

ليكن C الشكل التوازني لحبل غير قابل للامتطاط . ولتكن $\vec{F}$ القوة المؤثرة على
واحدة الطول من الحبل . نفكر للنقطة O مبدأ للاحداثيات المحلية على C ونفترض الجهة
الموجبة للأكواس من O إلى C .

لتعيين شرط توازن أي نقطة M من الحبل نقتطع وهماً العنصر المتناهي في الصغر AB
الذي مركزه النقطة M وطوله ds . إن هذا العنصر يبقى متوازناً حسب بديهية الارتباط إذا
أضفنا للقوى المطبقة عليه قوى الرباط وهي هنا شد الحبل في كل من النقطتين A و B .
وبالتالي تصبح القوى المؤثرة على العنصر AB من الحبل هي :

١- القوة المطبقة وتساوي $\vec{F} \cdot ds$ (لأن $\vec{F}$ القوة المطبقة على واحدة الطول من الحبل
و ds هو طول هذا العنصر)



الشكل (١٧)

٢- شد الحبل في النقطة A (أو توتر الحبل) ويساوي T ويحمل على المماس للمنحني
في A ويتجه بالاتجاه السالب .

٣- شد الحبل في النقطة B ويساوي $T_1 = T + dT$ ويحمل على المماس للمنحني C
في النقطة B ويتجه بالاتجاه الموجب . ويكون شرط التوازن :

$$\vec{F} \cdot ds - \vec{T} + \vec{T}_1 = \vec{0}$$

ولما كان بالإمكان افتراض أن حامل كل من $\vec{T}_1$ و $\vec{T}$ ينطبق على المماس للمنحني c في النقطة M (مركز المماس ds) وذلك بإسقاط متناهيات في المماس من المرتبة الثانية فما فوق ، فإن شرط التوازن يصبح كما يلي

$$(1) \quad \begin{cases} \vec{F} ds + d\vec{T} = \vec{0} \\ \vec{F} + \frac{d\vec{T}}{ds} = \vec{0} \end{cases} \quad \text{أو}$$

تدعى المعادلة (1) المعادلة العامة لتوازن الحبال وهي معادلة شعاعية تعين في الحالة العامة معادلات الشكل التوازني للحبل ومتجه التوتر في أي نقطة منه .

٢-٤-٣ المعادلات الديكارتية لتوازن الحبال :

لتكن $oxyz$ جملة إحداثية قسمة ومباينة . إن التوتر $\vec{T}$ يحمل كما يعلم على المماس للمنحني c في النقطة M ، لذا نكتب : $\vec{T} = T \cdot \vec{\tau}$ حيث $\vec{\tau}$ شعاع واحد المماس للمنحني c ، فتكون مركبات $\vec{T}$ على الجملة $oxyz$ هي :

$$\vec{T} = (T \frac{dx}{ds}, T \frac{dy}{ds}, T \frac{dz}{ds})$$

نسمي مركبات $\vec{F}$ على هذه الجملة (F_x, F_y, F_z) ونسقط المعادلة الشعاعية للتوازن

$$(2) \quad \begin{aligned} F_x + \frac{d}{ds} (T \frac{dx}{ds}) &= 0 \\ F_y + \frac{d}{ds} (T \frac{dy}{ds}) &= 0 \\ F_z + \frac{d}{ds} (T \frac{dz}{ds}) &= 0 \end{aligned} \quad \text{على المحاور } oxyz \text{ فنجد :}$$

وهي المعادلات الديكارتية لتوازن الحبال .

يلاحظ أن المعادلات (2) هي معادلات تفاضلية من المرتبة الثانية وبمكاملة هذه المعادلات

$$f_1(x, y, z) = 0 \quad \text{تحصل على معادلتين من الشكل}$$

$$f_2(x, y, z) = 0$$

نميزان المنحني الفراغي الذي يحمل عليه الشكل التوازني للحبل . والمعادلة الثالثة تعين لنا متجه التوتر $\vec{T}(x, y, z)$ في أي نقطة كانت من الحبل في حالة توازنه .

٧-٤-٤ المعادلات الذاتية لتوازن الحبال :

نمسط المعادلة الشعاعية للتوازن (١) على جملة إحداثيات ذاتية مرتبطة بالمنحنى التوازني للحبل مبدؤها النقطة M أنتهتها: $\overline{MT}$ يحمل على المماس للمنحنى في النقطة M ، و $\overline{Mn}$ يحمل على الناطم الأساسي للمنحنى ، و $\overline{Mb}$ يحمل على ثنائي الناطم . فإذا كانت مركبات القوة $\overline{F}$ المطبقة على واحدة الطول من الحبل على هذه الجملة الإحداثية هي

$$(F_r, F_n, F_b) \quad \text{وإذا لاحظنا أن} \quad \frac{d\overline{T}}{ds} = \frac{dT}{ds} \cdot \overline{\tau} + T \frac{d\overline{\tau}}{ds}$$

$$\text{وإن} \quad \frac{d\overline{\tau}}{ds} = \frac{\overline{n}}{\rho} \quad \text{حيث } \rho \text{ هو نصف قطر تقوس}$$

المنحنى في النقطة M ، فإن المساواة تعطي المعادلات الذاتية التالية لتوازن الحبال :

$$(٧) \quad \begin{cases} F_r + \frac{dT}{ds} = 0 \\ F_n + \frac{T}{\rho} = 0 \\ F_b = 0 \end{cases}$$

تبدل المعادلة الأخيرة على أن مركبة القوى المطبقة على ثنائي الناطم معدومة ، الأمر الذي يعطى بشرط التوازن التالي : إن الحبل الذي يخضع لقوى مطبقة $\overline{F}$ يأخذ وضعاً توازنياً بحيث تقع القوة المطبقة في المستوى المماس للمنحنى التوازني للحبل . فسي حين تعين المعادلة الأولى المعادلة الذاتية للشكل التوازني للحبل ، وتعين المعادلة الثانية قيمة التوتر في كل نقطة من الحبل .

٧-٤-٥ توازن الحبال في حالات خاصة للقوى المطبقة

١) حالة قوى متوازية :

لنفرض أن القوى المطبقة على واحدة الطول من حبل غير قابل للامتداد هي قوى متوازية توازي منحنى ثابتاً . ولنفرض أن متجه الواحدة لهذا المنحنى هو $\overline{T}$ ولنثبت ما يلي :

- أ - أن الشكل التوازني للحبل هو منحن يقع في مستو يحوي (أو يوازي) المنحنى $\overline{T}$
- ب - أن مسقط التوتر في أي نقطة من الحبل على العمود على $\overline{T}$ في المستوى الحاوي

على الشكل التوازني للحبل ثابت .

الإثبات : (١) لنكتب المعادلة العامة للتوازن :

$$\vec{F} + \frac{d\vec{T}}{ds} = \vec{0}$$

ولنضرب طرفي هذه العلاقة شعاعياً بالمتجه $\vec{T}$ فنجد

$$(٤) \quad \vec{F} \times \vec{T} + \frac{d\vec{T}}{ds} \times \vec{T} = \vec{0}$$

$$(٥) \quad \frac{d\vec{T}}{ds} \times \vec{T} = \vec{0} \quad \text{لأن } \vec{F} \times \vec{T} = \vec{0} \text{ بسبب التوازي مما يقود إلى أن :}$$

$$\frac{d}{ds} (\vec{T} \times \vec{T}) = \frac{d\vec{T}}{ds} \times \vec{T} + \vec{T} \times \frac{d\vec{T}}{ds} = \vec{0} \quad \text{نكتب العلاقة :}$$

$$\text{ونلاحظ أن : } \frac{d\vec{T}}{ds} \times \vec{T} = \vec{0} \text{ حسب (٥) و } \vec{T} \times \frac{d\vec{T}}{ds} = \vec{0} \text{ لأن } \vec{T} \text{ شعاع واحدة}$$

$$(٦) \quad \frac{d}{ds} (\vec{T} \times \vec{T}) = \vec{0} \quad \text{المنحني ثابت ، الأمر الذي يعطي :}$$

$$(٧) \quad \vec{T} \times \vec{T} = \vec{c} \quad (\text{شعاع ثابت}) \quad \text{أي أن}$$

وهذا يبين وضوحاً أن $\vec{T}$ و $\vec{T}$ يقعان في مستوى واحد ثابت يعامد $\vec{c}$ ، مما يثبت أن جميع نقاط الحبل تقع في هذا المستوى الثابت .

(ب) نفترض أن نقط $\vec{T}$ متجه للواحدة للمنحني الذي يعامد $\vec{T}$ في المستوى الثابت

السابق ، ولنضرب طرفي المعادلة العامة للتوازن شعاعياً بالمتجه $\vec{T}$ فنجد :

$$\vec{F} \cdot \vec{T} + \frac{d\vec{T}}{ds} \cdot \vec{T} = 0$$

$$(٨) \quad \frac{d\vec{T}}{ds} \cdot \vec{T} = 0 \quad \text{ولكن } \vec{F} \cdot \vec{T} = 0 \text{ بسبب التعامد} \quad \Leftarrow$$

ولما كان :

$$(٩) \quad \frac{d}{ds} (\vec{T} \cdot \vec{T}) = \frac{d\vec{T}}{ds} \cdot \vec{T} + \vec{T} \cdot \frac{d\vec{T}}{ds} = 0$$

$$\text{لأن } \frac{d\vec{T}}{ds} \cdot \vec{T} = 0 \text{ من (٨) ولأن } \vec{T} \text{ متجه ثابت (بالمنفح والطويلة)}$$

فإن : $\frac{d}{ds}(\vec{T} \cdot \vec{J}) = 0 \Leftrightarrow \vec{T} \cdot \vec{J} = c \Leftrightarrow$ مسقط $\vec{T}$ على منحى $\vec{J}$ ثابت وهو المطلوب .

(٢) حالة قوى مركزية :

لنفرض أن القوى المؤثرة على واحدة الطول من حبل غير قابل للامتطاط هي قوى مركزية أي : $\vec{F} // \vec{r}$ ، حيث $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ هو نصف القطر الشعاعي للنقطة M من الحبل، و O مركز القوى ، وقد اخترناه مبدأ للاحداثيات ، ولنتثبت أن الشكل التوازني للحبل يقع في مستوى ثابت يحوي مركز القوى .

الاثبات : نضرب طرفي معادلة التوازن شعاعياً بالمتجه $\vec{r}$ فنجد :

$$\vec{F} \times \vec{r} + \frac{d\vec{T}}{ds} \times \vec{r} = \vec{0}$$

ولما كان $\vec{F} \times \vec{r} = \vec{0}$ بسبب التوازي (لهما حامل واحد) فإن :

$$(11) \quad \frac{d\vec{T}}{ds} \times \vec{r} = \vec{0}$$

لنحسب هنا أيضاً المقدار $\frac{d}{ds}(\vec{T} \times \vec{r})$ فنجد :

$$\frac{d}{ds}(\vec{T} \times \vec{r}) = \frac{d\vec{T}}{ds} \times \vec{r} + \vec{T} \times \frac{d\vec{r}}{ds}$$

إن $\frac{d\vec{T}}{ds} \times \vec{r} = \vec{0}$ حسب (١١)

و $\vec{T} \times \frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{0}$ لأن $\vec{T}$ و $\frac{d\vec{r}}{ds}$ يحملان على المماس للمنحني التوازني للحبل فإن :

$$\frac{d}{ds}(\vec{T} \times \vec{r}) = \vec{0} \Rightarrow \vec{T} \times \vec{r} = \vec{c}$$

الأمر الذي يدل على أن $\vec{T}$ تقع مع $\vec{r}$ في مستوى ثابت يحوي وضوحاً مركز القوى .

(٣) حالة القوى الكمونية :

لنفرض أن القوة المطبقة على واحدة الطول من حبل هي قوة كمونية ، أي يمكن أن يعبر

$$\vec{F} = \text{grad } u \quad \text{على النحو :}$$

إن المعادلة العامة لتوازن الحبال في هذه الحالة تصبح كما يلي :

$$(12) \quad \vec{\tau} \cdot \vec{\text{grad}} u + \frac{d\vec{T}}{ds} = \vec{0}$$

نضرب طرفي هذه المعادلة سلمياً بـ $\vec{\tau}$ متجه الوحدة للمماس في النقطة M من المحلني
التوازني للحبل فنجد :

$$(13) \quad \vec{\tau} \cdot \vec{\text{grad}} u + \vec{\tau} \cdot \frac{d\vec{T}}{ds} = 0$$

وبالحسب المقدار :

$$\frac{d}{ds}(\vec{T} \cdot \vec{\tau}) = \frac{dT}{ds} = \frac{d\vec{T}}{ds} \cdot \vec{\tau} + \vec{T} \cdot \frac{d\vec{\tau}}{ds}$$

لما كان حامل المشتق $\frac{d\vec{\tau}}{ds}$ هو الناظم فإن الجداء الداخلي لـ $\vec{T}$ و $\frac{d\vec{\tau}}{ds}$ يساوي
الصفر الأمر الذي يعطي :

$$\frac{dT}{ds} = \vec{\tau} \cdot \frac{d\vec{T}}{ds}$$

ومن جهة ثانية فإننا نعلم أن مركبات التدرج على جملة إحداثيات ديكارتية قائمة $oxyz$ هي :

$$\vec{\text{grad}} u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

ومركبات متجه الوحدة للمماس $\vec{\tau}$ على الجملة الإحداثية ذاتها هي كما سبق وذكرنا :

$$\vec{\tau} = \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds} \right)$$

الأمر الذي يعين لنا الجداء السلمي $\vec{\tau} \cdot \vec{\text{grad}} u$ على النحو

$$\vec{\tau} \cdot \vec{\text{grad}} u = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{ds} = \frac{du}{ds}$$

وبالتعويض في العلاقة (13) نجد

$$\frac{du}{ds} + \frac{dT}{ds} = 0$$

$$(14) \quad \frac{d(u+T)}{ds} = 0 \Rightarrow u+T = \text{ثابت} \quad \text{أي}$$

فإذا عرفت قيمة كل من u و T في موضع ما فلهن العبارة (١٤)

$$u + T = u_0 + T_0 \quad \text{تعطى :}$$

(١٥)

وتمين لنا هذه العلاقة قيمة التوتر في أي نقطة من الحبل إذا علم تابع القوى u .

٢-٤-٢ توازن الحبال الثقيلة :

لنفترض لدينا حبل ثقيل متجانس ثقل واحدة الطول منه ثابت ويساوي γ ، ولنفرض الشكل التوازني الحبل والتوتر في نقط هذا الحبل .

بما أن القوى التي يخضع لها الحبل شاقولية أي هي قوى متوازنة فإن الشكل التوازني (كما مر معنا) يقع في مستو شاقولي . لنختار هذا المستوى oxy حيث oy شاقولي صاعد ولنسقط المعادلة العامة لتوازن الحبال على المحورين ox و oy فنجد من (٢) :

$$(١٦) \quad \begin{cases} 0 + \frac{d}{ds} \left(T \frac{dx}{ds} \right) = 0 \\ -\gamma + \frac{d}{ds} \left(T \frac{dy}{ds} \right) = 0 \end{cases}$$

$$(١٧) \quad T \frac{dx}{ds} = T_0 = \text{ثابت} \quad \text{بمكاملة المعادلة الأولى نجد :}$$

وهي النتيجة التي أثبتناها سابقاً : (مسقط التوتر على العمود على منحني القوى المتوازنة ثابت)



الشكل (١٨)

$$T = T_0 \frac{ds}{dx}$$

نعين T من العلاقة (١٧) فنجد

نعوض هذه القيمة في المعادلة الثانية من معادلات التوازن (١٦) فنحصل على :

$$\frac{d}{ds} (T_0 \frac{ds}{dx} \frac{dy}{ds}) = \gamma$$

(١٨) $T_0 d(\frac{dy}{dx}) = \gamma ds$ أو

بما أن عبارة عنصر طول قوس ملحن مستوي هي كما نعلم :

$$ds = \sqrt{1+y'^2} dx, \quad y' = \frac{dy}{dx}$$

فإن المعادلة (١٨) تغدو على النحو

$$dy' = \frac{\gamma}{T_0} \sqrt{1+y'^2} dx$$

بفصل متحولات المعادلة التفاضلية الأخيرة وبفرض أن نجد : $\frac{\gamma}{T_0} = \frac{1}{a}$

$$(١٩) \quad \frac{dy'}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{1}{a} dx$$

وبمكاملة طرفي المعادلة (١٩) نجد : $\arg sh y' = \frac{x}{a} + x_0$ (٢٠)

فإذا فرضنا أن $y' = 0$ عندما $x = 0$ فإن ثابت التكامل x_0 يصبح صغراً

والمعادلة (٢٠) تكتب كما يلي : $\frac{dy}{dx} = y' = sh \frac{x}{a}$ (٢١)

وبمكاملة طرفي المعادلة (٢١) نجد : $y = a ch \frac{x}{a} + y_0$

فإذا فرضنا أن $y = a$ عندما $x = 0$ نحصل على أن $y_0 = 0$

ونحصل بالتالي على المعادلة : $y = a ch \frac{x}{a}$ (٢٢)

وهي معادلة الشكل التوازني للحبل ، وهي المعادلة القانونية للمنحنى الذي يسمى السلسلة .

ويتضح من المعادلة (٢٢) أن المنحنى متناظر بالنسبة للمحور oy حيث :

$y(-x) = y(x)$ ، كما يتضح أن المنحنى يمر من النقطة $(0, a)$ وهي ذروة السلسلة

والمنحاس في الذروة يوازي المحور ox لأن $y' = 0$ في هذه النقطة . وتدعى الثابتة a

وسيط السلسلة ويكون التوتر في هذه النقطة هو T_0

تعيين التوتر : بما أن قوى الثقالة التي يخضع لها الحبل هي قوى كمونية فإنه بالإمكان تعيين التوتر من العلاقة

$$(٢٣) \quad T + u = T_0 + u_0$$

ونعلم أن تابع القوى لقوة الثقالة :

$$u = -\gamma y$$

$$u_0 = -\gamma y_0 = -\gamma a$$

و T_0 هو التوتر في الذروة . وقد فرضنا $\frac{\gamma}{T_0} = \frac{1}{a}$ أي أن $T_0 = a\gamma$

بتعويض هذه القيم في (٢٣) نجد

$$T - \gamma y = a\gamma - a\gamma = 0$$

$$(٢٤) \quad T = \gamma y$$

تدل العلاقة (٢٤) على أن قيمة التوتر في أي نقطة من الحبل تساوي ثقل قطعة من الحبل طولها يساوي ترتيب هذه النقطة .

ملاحظة : نفود النتيجة الأخيرة إلى الملاحظة الهامة التالية : إذا مر حبل ثقيل على بكرتين صغيرتين (أبعدهما مهملة) دون احتكاك فإن الحبل يتوازن عندما يمر طرفاه ، المتكاملان شاقولياً ، المحور ox .

٢-٤-٧ توازن الحبال الحاملة للجسور :

نفترض أن ثقل الجسر المحمول موزع بانتظام على طول الجسر أي (على ox) وأن ثقل وحدة الطول منه ثابت γ . ونفترض أن ثقل الحبل مهمل بالنسبة لثقل الجسر .



شكل (١٩)

لن المنصهر ds من الحبل الحامل للجسر يخضع لقوة شاقولية قيمتها γds ولما كان الشكل التوازني للحبل هو ملحق مستوي يقع في المستوى الشاقولي الذي نفترضه oxy ولختار oy

شاقولياً صاعداً ، فإن إسقاط المعادلة العامة لتوازن الحبل على المحورين ox و oy ومكاملة المعادلة الأولى يعطى :

$$(٢٥) \quad \begin{cases} T \frac{dx}{ds} = T_x = T_0 \quad \text{ثابت} \\ d(T_0 \frac{dy}{ds} \frac{ds}{dx}) = \gamma dx \end{cases}$$

وبإصلاح المعادلة الثانية ووضع $T_0 = ay$ أو $\frac{\gamma}{T_0} = \frac{1}{a}$

$$d(y') = \frac{1}{a} dx \quad \text{نجد}$$

وبمكاملة هذه العلاقة مرتين متتاليتين نجد :

$$(٢٦) \quad y = \frac{1}{2a} x^2 + c_1 x + c_2$$

فالشكل التوازلي هو قطع مكافئ محوره شاقولي . ويمكن تعيين ثوابت التكامل من الشروط

الحدية فلو فرضنا مثلاً أن $y' = 0$ و $y = 0$ عندما $x = 0$ لوجدنا أن

$c_1 = 0$, $c_2 = 0$ الأمر الذي يعطي المعادلة التفاضلية للمنحنى التوازلي للحبل :

$$(٢٧) \quad y = \frac{1}{2a} x^2$$

ومن أجل تعيين التوتر في نقط الحبل نستخدم العلاقة

$$T + u = \text{ثابت}$$

كما في الحالة السابقة

$$T = T_0 \frac{ds}{dx} \quad \text{لو نصب التوتر من العلاقة}$$

$$= T_0 \sqrt{1 + y'^2}$$

$$(٢٨) \quad T = T_0 \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}}$$

٢-٤-٨ توازن حبل على سطح اسطوانتي خشن :

لندرس توازن حبل يمر سطحاً اسطوانياً دائرياً على طول قوس AB يقابل زاوية

مركزية مقدارها α ، علماً أن عامل احتكاك الانزلاق على السطح يساوي f .

لنأخذ توازن عنصر من الحبل طوله $M_1 M_2 = ds$ يقابل زاوية مركزية $d\theta$:

يفرض هذا العنصر من الحبل للقوى التالية : قوة شد الحبل في M_1 ولتكن $\vec{T}$ تحمل على المماس في M_1 لقوس الدائرة ، والقوة $\vec{T}_1 = \vec{T} + d\vec{T}$ شد الحبل في النقطة M_2 وتحمل على المماس في M_2 لقوس الدائرة ، و رد الفعل الناطمي $d\vec{N}$ يطبق في M مركز العنصر ds ويحمل على الناطم في M للقوس ds ، وقوة الاحتكاك المماسية $d\vec{F}$ وتحمل على المماس للدائرة في النقطة M (مركز العنصر $M_1 M_2$) . وبالتالي فلن شرط توازن

$$\vec{T} + (\vec{T} + d\vec{T}) + d\vec{N} + d\vec{F} = \vec{0} \quad \text{العنصر } ds \text{ هو :} \quad (٢٩)$$



المعادلة (٢٩)

نسقط العلاقة (٢٩) على المماس والناظم الموجهين في النقطة M من قوس الدائرة ، مع

ملاحظة أن الزاوية بين $\vec{T}$ والمماس في M هو $\frac{d\theta}{2}$ وأن الزاوية بين $\vec{T}_1$ والمماس في

في M هي $\frac{d\theta}{2}$ أيضاً بسبب التناظر ، فنجد :

$$(٣٠) \quad \begin{cases} (T + dT) \cos \frac{d\theta}{2} - T \cos \frac{d\theta}{2} - dF = 0 \\ -(T + dT) \sin \frac{d\theta}{2} - T \sin \frac{d\theta}{2} - dN = 0 \end{cases}$$

هيسث اعتبر الاتجاه الموجب على المنحني من A إلى B واعتبر الحبل على وشك الانزلاق نحو B (لذا فإن قوة الاحتكاك تعاكس الاتجاه الممكن للانزلاق) نضاه إلى المعادلتين (٣٠) علاقة احتكاك الانزلاق :

$$(31) \quad dT = f dN$$

ولما كانت الزاوية $d\theta$ متناهية في الصغر فبالقائي $\frac{d\theta}{2}$ متناهية في الصغر ، و بإهمال المتناهيات في الصغر من المرتبة الثانية فما فوق تفقد المعادلات (٣٠) بعد تبويض

$$\sin \frac{d\theta}{2} \cong \frac{d\theta}{2} \quad \text{و} \quad \cos \frac{d\theta}{2} \cong 1 \quad \text{على النحو:}$$

$$(32) \quad \left\{ \begin{array}{l} dT = dF = f dN \\ dN = T d\theta \end{array} \right\} \Rightarrow dT = f T d\theta$$

بمكاملة المعادلات (٣٢) نجد :

$$(33) \quad \int_A^B \frac{dT}{T} = f \int_A^B d\theta$$

وبما أن قيمة التوتر في A هو Q وقيمة التوتر في B هو P والزاوية المقابلة للقوس $\widehat{AB}$ هي α فإن العلاقة (٣٣) تعطى :

$$\log T \Big|_Q^P = \log \frac{P}{Q} = f \alpha$$

$$(34) \quad P = Q e^{f\alpha} \quad \text{أو} \quad Q = P e^{-f\alpha} \quad \text{ومنه}$$

مما يدل على أن القوة P التي يجب أن توازن Q لا تتعلق بنصف قطر الاسطوانة ولكنها تتعلق بطول القوس الذي يتم التماس على طوله ، وتعلق بعامل الاحتكاك أي بمادة الحبل وسطح التماس ، وهذه التبعية أسية ، الأمر الذي يوضح أن قيمة Q تتكاثر بسرعة عند تزايد α أو تزايد f . ونورد فيما يلي قيماً للنسبة $\frac{P}{Q}$ في حالة $f = 0.5$ (حبل ليفي على سطح خشبي) :

$$\alpha = \pi : \frac{P}{Q} = e^{\frac{\pi}{2}} = 4.8 \Rightarrow Q = 2 \text{ kg} \Rightarrow P = 9.6 \text{ kg}$$

$$\alpha = 4\pi : \frac{P}{Q} = e^{2\pi} = 535.5 \Rightarrow Q = 2 \text{ kg} \Rightarrow P \cong 1070 \text{ kg}$$

مما يدل أنه يمكن لقوة 2 kg أن توازن قرابة 10 kg في حالة نصف دورة للحبل على المحيط ، في حين يمكن لقوة 2 kg أن توازن أكثر من 1000 kg في حالة دورتين للحبل على المحيط . وفي حالة ثلاث دورات يمكن لقوة 2 kg أن توازن أكثر من 24783 kg

٢-٩-٤ توازن حبل موضوع على سطح دون احتكاك :

لنفرض أن معادلة السطح الذي يتوضع عليه الحبل هي :

$$(٣٥) \quad f(x, y, z) = 0$$

بما أن الصلة دون احتكاك فإن رد الفعل يكون دائماً على السطح المذكور ولنفرض مركبات رد الفعل على واحدة الطول من الحبل هي :

$$\vec{R} = \left(\lambda \frac{\partial f}{\partial x}, \lambda \frac{\partial f}{\partial y}, \lambda \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

تضاف هذه القوة إلى القوة الخارجية $\vec{F}$ المطبقة على واحدة الطول من الحبل فتصبح معادلات توازن الحبل :

$$(٣٦) \quad \begin{cases} d \left(T \frac{dx}{ds} \right) + F_x ds + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} ds = 0 \\ d \left(T \frac{dy}{ds} \right) + F_y ds + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} ds = 0 \\ d \left(T \frac{dz}{ds} \right) + F_z ds + \lambda \frac{\partial f}{\partial z} ds = 0 \end{cases}$$

المعادلات (٣٦) و (٣٥) والعلاقة $(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 = (ds)^2$ تعين T و R و x, y, z كتابع لـ s في حالة توازن الحبل .

وفي الحالة التي تكون فيها القوى كمونية ، فإن التوتر يتعين (كما مر سابقاً) من العلاقة $d(T+u)=0$ أو : ثابت $T+u$ بفرض u تابع القوى . وفي حالة خاصة ، إذا كانت القوى هي قوى السقالة ووجهنا z وفق الشاقول الصاعد لحصل على العلاقة

$$(٣٧) \quad dT = -du = \gamma dz \quad \text{التي تعطي} \quad T = \gamma(z-h)$$

تمارين محلولة

تمرين (١) : حبل ثقيل متجانس طوله $2l = (4 + 2\sqrt{3}) \text{ cm}$ يمر دون احتكاك على بكرتين صغيرتين ثابتتين A و B واقعتين على أفق واحد ، يتدلى طرفا الحبل شاقولياً في A و B ويتوازن الحبل حين يكون طول الجزء الشاقولي المتدلي من كل طرف مساوياً 2 cm . أوجد معادلة الشكل التوازني للحبل وتوتر الحبل في النقطة A والبعد بين البكرتين ، علماً أن وزن واحدة الطول من الحبل $\gamma = 1$

الحل: بما أن الحبل خاضع لنقله فقط فإن معادلة الشكل التوازني :

$$y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a} \quad \text{حيث } a \text{ ومسط السلسلة}$$

لتعيين قيمة a بحسب طول الحبل بين النقطتين A و B :

$$ds = \int_A^B \sqrt{1+y'^2} dx = 2l - 4 = 2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{3} = 2a \operatorname{sh} \frac{x}{a} \Big|_0^{x_B} = 2a \operatorname{sh} \frac{x_B}{a}$$

$$a \operatorname{sh} \frac{x_B}{a} = \sqrt{3}$$

ومنه نجد

$$y_B = a \operatorname{ch} \frac{x_B}{a} = 2$$

ولدينا :

وبالاستفادة من العلاقة المعروفة $\operatorname{ch}^2 u - \operatorname{sh}^2 u = 1$ نجد

$$a^2 = 1, \quad a = 1$$

ومعادلة الشكل التوازني هي بالتالي :

إن قيمة التوتر في النقطة A (أو B) تتعين من العلاقة :

$$T_A = \gamma y_A = 2$$

إن مركبة التوتر على المحور ox ثابتة وتساوي : $T_x = T_o = \gamma a = 1$

وبالتالي فإن مركبة التوتر في A على المحور oy تحسب من العلاقة :

$$T_y^2 + T_x^2 = T^2 \Rightarrow T_y^2 = 4 - 1 = 3$$

والتوتر في A أو B هو : $\vec{T} = (\pm 1, \sqrt{3})$

وأخيراً نعين البعد بين البكرتين من ملاحظة أن :

$$|\overline{AB}| = 2x_A, \quad y_A = 2 = \operatorname{ch} x_A$$

$$\overline{AB} = 2 \arg \operatorname{ch} 2 = 2.6$$

ومنه

تمرين (٧) : حبل غير قابل للامتطاط تخضع نقطة لقوى مركزية تابعة لـ r حيث

$\vec{r}$ هو نصف القطر الشعاعي للنقطة M . أثبت أن معادلتى التوازن بالاحداثيات القطبية

$$T r^2 \frac{d\theta}{ds} = c, \quad dT + F dr = 0 \quad \text{هي :}$$

حيث (r, θ) الاحداثيان القطبيان للنقطة M .

ثم أوجد معادلة الشكل التوازني للحبل بالشكل $s = s(\theta)$ علماً أن للقوة المطبقة على واحدة

$$\vec{F} = \frac{2k^2}{r^3} \vec{I}, \quad (k \text{ ثابتة})$$

وبفرض أن $T=1$ عندما $r=k$.

الحل: إن الشكل التوازني يقع في مستو يحوي مركز القوى ، كما نعلم ، وقد وجدنا

في حالة القوى المركزية أن :

$$(1) \quad \vec{T} \times \vec{r} = \vec{c}$$

$$\vec{T} = T \cdot \vec{\tau} = T \frac{d\vec{r}}{ds}, \quad \vec{r} = r \vec{I}$$

ولدينا

$$\vec{T} = T \left(\frac{dr}{ds} \vec{I} + r \frac{d\vec{I}}{ds} \right) = T \left(\frac{dr}{ds} \vec{I} + r \frac{d\theta}{ds} \vec{J} \right)$$

بفرض $\vec{I}, \vec{J}$ متجهي الواحدة للاحداثين القطبيين ، وبالتعويض في العلاقة (١) :

$$(2) \quad T r^2 \frac{d\theta}{ds} = c \quad \Leftrightarrow \quad \vec{r} \times \vec{T} = T \begin{vmatrix} \vec{I} & \vec{J} & k \\ r & 0 & 0 \\ r' & r\theta' & 0 \end{vmatrix} = \vec{c}$$

اضرب طرفي المعادلة العامة للتوازن داخلياً بـ $\vec{\tau}$ (حيث $\vec{\tau}$ شعاع الواحدة للمماس

للمنحني التوازني للحبل)

$$(3) \quad \vec{\tau} d\vec{T} + \vec{\tau} \cdot \vec{F} ds = 0 \quad \text{فلجد :}$$

ولما كان : $\vec{r} = r \vec{I}$ و $\vec{\tau} = \frac{d\vec{r}}{ds}$ و $\vec{F} = F \cdot \vec{I}$ و $\vec{T} = T \vec{\tau}$ فإن العلاقة (٣) تعطي دون أي صعوبة :

$$(٤) \quad dT + F dr = 0$$

والمعادلتان (٢) و (٤) هما معادلتا التوازن في هذه الحالة .

(٢) نعوض F بقيمتها في (٤) فنجد

$$dT = -\frac{2k^2}{r^3} dr \Rightarrow T = -2k^2 \int \frac{dr}{r^3} = \frac{k^2}{r^2} + c_1$$

ومن الشرط الابتدائي نجد أن $c_1 = 0$ وبالتالي فإن :

$$(٥) \quad T = \frac{k^2}{r^2}$$

بتعويض قيمة T التي حصلنا عليها في المعادلة (٢) نجد :

$$\frac{k^2}{r^2} r^2 \frac{d\theta}{ds} = c \Rightarrow ds = \frac{k^2}{c} d\theta$$

$$(٦) \quad s = \frac{k^2}{c} \theta + s_0$$

وبالمعاملة نجد أخيراً

وهي معادلة الشكل التوزني للحبل .

تفسير (٣) : حبل غير قابل للامتطاط محيط بقرص دائري خشن على طول

قوس بقليل زاوية مركزية $\alpha = \frac{5\pi}{4}$ ، يثبت أحد طرفي الحبل بنهاية قضيب ED ويثبت

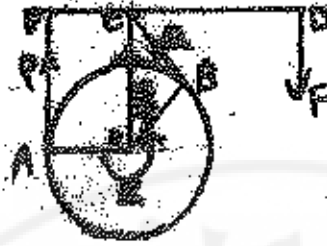
الطرف الثاني بنقطة ثابتة C من القضيب يستطوع القضيب الدوران حولها . يطبق على D

النهاية الثانية للقضيب ثقل شاقولي F . والمطلوب تعيين P و Q شدي الحبل في النقطتين A

و B (حيث يفصل الحبل عن القرص) في وضع التوازن علماً أن :

$$f = \frac{1}{2} \text{ معامل احتكاك} , \quad AE // OC \text{ شاقولي} , \quad |CD| = 2a , \quad |EC| = a$$

الانزلاق بين الحبل ومحيط القرص .



الشكل (٢١)

الحبل : بما أن القوس متوازن فإن عزوم القوى المؤثرة عليه حول C تساوي

الصفر ←

$$P \cdot a = F (2a) \Rightarrow$$

$$P = 2F$$

ولدينا العلاقة بين P و Q :

$$Q = P e^{-\alpha f} \quad \text{نعوض فلجد :}$$

$$Q = 2F e^{-\frac{3}{4}\pi f}$$

$$Q = 2F e^{-\frac{3}{8}\pi} \approx 0.28 F \quad \text{بحصول على القيمة } f = \frac{1}{2} \quad \text{وبنعوض}$$

نصيرين (٤) : عيّن الشكل التوازني لحبل غير قابل للانطاط ملازم لسطح كرة

دون احتكاك (١) إذا كان الحبل غير خاضع لأي قوى مطبقة (ونقله مهم)

(٢) إذا كان الحبل متجانس وثقل

الحل : (١) بما أن القوى المطبقة معدومة فإن الحبل يخضع لرد الفعل الناطمي فقط،

ولما كان الناطم على سطح الكرة يمر من مركزها فإن الحبل يخضع لقوة مركزية ، ووجدنا

أن الشكل التوازني للحبل يقع في مستو يحوي مركز القوى أي أن الشكل التوازني للحبل

هو تقاطع سطح الكرة مع مستو يمر بمركزها الأمر الذي يدل على أن الحبل يتوازن على

طول دائرة عظمى للكرة.

ومن جهة ثانية فإن المسقط على المماس لمساحة التوازن عملي

$$dT=0 \Rightarrow T=c$$

أي أن التوتر ثابت في أي نقطة من الحبل .

(٢) نختار مركز الكرة مبدأً للإحداثيات ، ونوجه المحور oz شاقولياً نحو الأعلى، ونفرض

أن γ هو ثقل واحدة الطول للحبل ، و $\vec{R}$ رد فعل السطح على واحدة الطول من الحبل

ويحمل على النافذ أي على $\vec{OM}$.

بما أن قوى الثقالة كمونية والصلات مثالية مما يقتضي أن يكون عمل ردود الفعل معدوماً

فلن بالإمكان تطبيق العلاقة (٣٧) لتعيين التوتر ونكتب :

$$(1) \quad T = \gamma(z-h)$$

لدينا معادلة توازن الحبل في هذه الحالة

$$(2) \quad \frac{d\vec{T}}{ds} + \gamma \vec{k} + \vec{R} = \vec{0}$$

نضرب طرفي المعادلة (٢) شعاعياً بـ $\vec{r}$ (نصف القطر الشعاعي للنقطة M من الحبل)

$$(3) \quad \frac{d\vec{T}}{ds} \times \vec{r} + \gamma \vec{k} \times \vec{r} = \vec{0} \quad \text{فجد}$$

لأن $\vec{R} \parallel \vec{r}$. وإذا ضربنا طرفي (٣) داخلياً بـ $\vec{k}$ شعاع الواحدة للمحور oz

$$(4) \quad \left(\frac{d\vec{T}}{ds} \times \vec{r} \right) \cdot \vec{k} = 0 \quad \text{نجد :}$$

وبملاحظة أن :

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left[(\vec{T} \times \vec{r}) \cdot \vec{k} \right] &= \left(\frac{d}{ds} (\vec{T} \times \vec{r}) \right) \cdot \vec{k} \\ &= \left(\frac{d\vec{T}}{ds} \times \vec{r} \right) \cdot \vec{k} = \left(\vec{T} \times \frac{d\vec{r}}{ds} \right) \cdot \vec{k} \end{aligned}$$

ولما كان $\frac{d\vec{r}}{ds} \parallel \vec{T}$ وباستخدام العلاقة (٤) نجد

$$(5) \quad \frac{d}{ds} \left[(\vec{T} \times \vec{r}) \cdot \vec{k} \right] = 0$$

الأمر الذي يدل على أن :

$$(6) \quad (\vec{T} \times \vec{r}) \cdot \vec{k} = c$$

وهذا يعني أن مركبة الجداء $\vec{T} \times \vec{r}$ على المحور oz ثابت . فإذا استخدمنا الاحداثيات الاسطوانية (r, θ, z) فإن العلاقة (٦) تعطى :

$$(٧) \quad T r^2 \frac{d\theta}{ds} = c$$

وبتعويض قيمة T من العلاقة (١) نجد :

$$(z-h) r^2 d\theta = A ds$$

وهي المعادلة التفاضلية للشكل التوازني للحبل والتي تغدو إذا عوضنا القيم

$$(٨) \quad r^2 = a^2 - z^2 \quad (a \text{ نصف قطر الكرة})$$

$$(ds)^2 = (dr)^2 + r^2 (d\theta)^2 + (dz)^2$$

على النحو :

$$(٩) \quad d\theta = \frac{A a dz}{(a^2 - z^2) \sqrt{(h-z)^2 (a^2 - z^2) - A^2}}$$

وبمكاملة هذه العلاقة نحصل على عبارة $\theta(z)$ ولدينا $r(z)$ من العلاقة (٨) مما يبين الشكل التوازني للحبل .

تمارين

(١) قطعة من حبل غير قابل للامتطاط ثقل واحدة الطول منه $\gamma = 1$ ، وطول القطعة

AB يساوي $\sqrt{3}$ فإذا علمت أن التوتر الحبل في النقطة B يصنع زاوية $\frac{\pi}{3}$ مع

المحور الأفقي وأن قيمته تساوي 2 فالمطلوب :

١- أوجد معادلة الشكل التوازني للحبل

٢- عين إحداثيات النقطة B بفرض $x_B > 0$

٣- عين شعاع التوتر في النقطة A

(٢) حبل غير قابل للامتطاط ثقيل متجانس طوله 2 مثبت من طرفه A بنقطة ثابتة من

المستوي الشاقولي ويمر الحبل على بكرة صغيرة (مهملة الأبعاد) مثبتة في نقطة B على أفق A ثم يتلى شاقولياً . والمطلوب تعيين طول الجزء المنحني من الحبل في حالة التوازن علماً أن البعد بين النقطتين A و B يساوي $2a$ (a وسط السلسلة)

(٣) أوجد الشكل التوازني وقيمة التوتر لحبل غير قابل للامتطاط تخضع واحدة الطول من

الحبل لقوة قيمتها ثابتة تساوي γ وتصنع زاوية $\alpha = s$ مع العماس للحبل في النقطة M ، بفرض s طول قوس المنحني التوازني للحبل علماً أن $T=0$ عندما $s=0$.

(٤) أوجد الشكل التوازني لحبل غير قابل للامتطاط تخضع واحدة الطول منه لقوة شاقولية

$\vec{F}$ مغطاة بالمعادلات :

$$F = \frac{A}{a \cos^2 \alpha} \quad (١)$$

التوازني والمحور ox .

$$F = \frac{A a}{y^2} \quad (٢)$$

ترتيب النقطة M .

$$F = \frac{A a}{a^2 - x^2} \quad (٣)$$

x فاصلة النقطة M .

القسم الثالث

مبادئ الحساب التسموري (الموتري)

- الكميات ذات الأدلة وترميز الجمع
- تعريف التسمور
- دساتير التحويل التسمورية
- التناظر والتناظر العكسي
- العمليات على التسمورات
- الفضاء المترى الريماني وتسمور الأساس
- بعض تطبيقات التسمورات في الميكانيك



تمهيد : إن الحساب التتسوري وسيلة تجعل من الممكن صياغة القوانين الرياضية والفيزيائية بحيث يمكن التعبير عنها في أي جملة احداثية . وقد عمت تطبيقات هذا العلم في السنوات الأخيرة معظم أبحاث الميكانيك ، والفيزياء النظرية ، والهندسة الفاضلية ، الأمر الذي أدى إلى تطور سريع لهذا العلم .

سنبدأ فيما يلي بعرض سريع للمفاهيم الأساسية لهذا العلم

٢-٥-١ الكميات ذات الأدلة وترميز الجمع

١- تعريف : إن الكمية ذات الأدلة هي وسيلة لاختصار الكتابة والاقتصاد في استخدام الحروف والرموز ، وخاصة حين نتعامل مع فضاءات متجهية كثيرة الأبعاد . فالكمية ذات الدليل الواحد a_i حيث $i=1,2,\dots,n$ تعبر عن مركبات متجه في فضاء ذي n بعداً هسي $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ ، ويمكن أن نكتب هذه الكمية بشكليين مختلفين حسب وضع الدليل وتعتبر الكميتان a_i و a^i عن متجهين مختلفين .

والكمية ذات الدليلين a_{ij} والتي يمكن أن نكتب بثلاثة أشكال مختلفة a_{ij} ، a^{ij} ، a^i_j حيث $i, j=1,2,\dots,n$ هي رمز لـ n^2 من المركبات في فضاء ذي n بعداً لثلاث كميات مختلفة ، وهكذا ... فإن الكمية التابعة لـ N من الأدلة تمثل n^N من المركبات في فضاء ذي n بعداً

٢- الكميات المتناظرة : نقول عن الكمية ذات الأدلة إنها متناظرة بالنسبة لدليلين من نوع واحد (خطيين أو سطحيين) إذا تساوت مركبات هذه الكمية حين تبادل بين الدليلين . فنقول مثلاً إن الكمية a_{ij}^k متناظرة بالنسبة للدليلين i, j إذا تحققت العلاقة $a_{ij}^k = a_{ji}^k$ ونقول إن الكمية $a_{i_1 i_2 \dots i_r}^{j_1 j_2 \dots j_r}$ متناظرة إذا كانت متناظرة بالنسبة لأي دليلين من نوع واحد .

٣- الكميات شبيهة المتناظرة : نقول إن الكمية ذات الأدلة شبيهة متناظرة بالنسبة لدليلين من نوع واحد إذا كانت المركبات الناتجة عن مبادلة الدليلين المذكورين متساوية بالقيمة مختلفة بالامثلة فنقول مثلاً إن الكمية a_{ij}^k شبيهة متناظرة إذا تحققت العلاقة

$$a_{ij}^k = -a_{ji}^k$$

٤- ترميز الجمع : نعلم أن أي تركيب خطي يمكن أن يكتب كما يلي :

$$s = \sum_{i=1}^n a_i x^i = a_1 x^1 + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

يرمز هذا المجموع اختصاراً كما يلي $s = a_r x^r$

وبذلك دون كتابة إشارة الجمع ، ويسمى الدليل r المكرر والذي تتم عليه عملية الجمع الدليل الأخرس (أو الدليل الأصم) . واصطلاح على أن كل دليل مكرر مرتين مرة كدليل علوي ومرة كدليل سفلي يعني عملية جمع على هذا الدليل إلا إذا ذكر خلاف ذلك . وكان أول من استخدم هذا الترميز العالم أنشتاين ، ويسمى للدليل غير المكرر عادة دليلاً حراً . إن تغيير رمز الدليل الأخرس لا يؤثر على قيمة الكمية الحاوية لهذا الدليل في حين تتغير قيمة الكمية إذا تغير رمز الدليل الحر فعلى سبيل المثال إن المجموع s يمكن أن يكتب بأحد الأشكال التالية :

$$s = a_1 x^1 = a_r x^r = a_r x^r = a_1 x^1 + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

في حين تعبر الكمية a^r عن مقادير مختلفة عادة عن المقادير التي تعبر عنها الكمية a^r . كما أن الكمية $a_r x^r$ هي كمية ذات دليل واحد هو الدليل الحر r لأن الدليل s هو دليل أخرس تتم عليه عملية الجمع أي يمكن أن يكتب :

$$A_r = a_r x^r = a_{r1} x^1 + a_{r2} x^2 + \dots + a_{rn} x^n$$

ملاحظة : إن العبارة التربيعية $\sum_i \sum_j a_{ij} x^i x^j$ ترمز كما يلي :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x^i x^j = a_{ij} x^i x^j = a_{11} x^1 x^1 + a_{12} x^1 x^2 + \dots + a_{21} x^2 x^1 + \dots + a_{nn} x^n x^n$$

ويستخدم الطريقة ذاتها لترميز العبارات من درجات أعلى

مثال (١) :

لنكن الدالة $f(x^1, x^2, \dots, x^n)$ التابعة لـ n من المتغيرات المستقلة ، نعلم أن التفاضل الكلي لـ f هو :

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$$

ويكتب اختصاراً حسب ترميز الجمع المذكور وبعث رلاحظ أن i دليل أخرس كما يلي :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$$

وكذا يكتب المشتق الكلي لـ f كما يلي

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt}$$

• - دلتا كرونيكر : تعرف دلتا كرونيكر ذات الدليلين وترمز δ^i_j كما يلي

$$\delta_j' = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

ويمكن أن نرمز دلتا كرونكير أيضاً δ_{ij}

تطبيق : إذا كانت x' متغيرات مستقلة في فضاء ذي n بعداً فإن $\frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \delta_j^i$

وذلك لأن مشتق أي متغير بالنسبة لنفسه يساوي الواحد ومشتقه بالنسبة لغيره يساوي الصفر

تمرين (١) : أثبت أن : $\delta_j' A^j = A^i$

إن الدليل j هو دليل آخرس لأنه دليل مكرر مما يعني أن

$$\delta_j' A^j = \delta_1' A^1 + \delta_2' A^2 + \dots + \delta_n' A^n$$

فإذا كانت $i = 1$ فإن $\delta_1^1 = 1$ و $\delta_2^1 = \delta_3^1 = \dots = \delta_n^1 = 0$

$$\delta_j^1 A^j = A^1 \quad \text{أي}$$

وإذا كانت $i = 2$ نجد $\delta_j^2 A^j = \delta_1^2 A^1 + \delta_2^2 A^2 + \dots + \delta_n^2 A^n = A^2$

مما يدل على أن

$$\delta_j' A^j = A^i$$

تمرين (٢) : احسب δ_j' في فضاء ذي n بعداً

$$\delta_j' = \delta_1^1 + \delta_2^2 + \dots + \delta_n^n = n \quad \text{الحل : نكتب}$$

تمرين (٣) : احسب $\delta_j' \delta_k^j$

الحل : إن j هو دليل آخرس لذا نكتب :

$$\delta_j' \delta_k^j = \delta_1^1 \delta_k^1 + \delta_2^2 \delta_k^2 + \dots + \delta_n^n \delta_k^n$$

ونلاحظ أن المقدار يساوي الواحد عندما :

$$i = k = 1, 2, \dots, n$$

وأن المقدار يساوي الصفر عندما

$i \neq k$ فهو يساوي δ_k^i حسب تعريف دلتا كرونكير .

ملاحظة : إذا كانت الوسطاء المستقلة $\bar{x}'$ تابعة للمتغيرات المستقلة x^j حيث

$i, j = 1, 2, \dots, n$ فإن :

$$\frac{d\bar{x}^i}{dx^j} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} \frac{dx^k}{dx^j} = \delta_j^i, \quad \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial x^j} = \delta_j^i$$

تطبيق : طبق الملاحظة الأخيرة على الأحداثيات الديكارتية x, y والأحداثيات

$$y = r \sin \theta, \quad x = r \cos \theta \quad \text{حيث } r, \theta \text{ القطبية}$$

٢-٥-٢ تعريف التتصور : ليكن u فضاء متجهياً على الحقل k بعد n ، وليكن u^*

تتوي u ، ولناخذ الجداء التتصورى لـ p من الفضاءات u و q من الفضاءات u^*

ولنرمز الجداء u_q^p . نسمي المجموع المباشر لجميع الفضاءات المتجهية u_q^p الفضاء

$$T(u) = \bigoplus_{p=0}^n u_q^p \quad \text{ونكتب : } T(u)$$

إن عناصر $T(u)$ ولرمزها t_q^p تسمى تصورات على u . وبلاحظ أن كل فضاء u_q^p

هو فضاء جزئى من $T(u)$ وبشكل خاص فإن $u_0^1 = u$ ، $u_1^0 = u^*$ و u_0^0 هو k

المتنى . ولما كان بعد u هو n فإن بعد u^* هو n أيضاً وبعد u_q^p هو n^{p+q}

إذا كان : $B = \{e_i\}$ قاعدة الفضاء u و $B^* = \{e^i\}$ قاعدة للفضاء u^* ، فإن قاعدة

الفضاء التتصورى $T(u)$ هي :

$$e_{j_1 j_2 \dots j_p}^{i_1 i_2 \dots i_q} = e_{j_1} \otimes e_{j_2} \otimes \dots \otimes e_{j_p} \otimes e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_q}$$

لذا كان التتصور $t_q^p \in T$ فإن هذا التتصور يكتب بدلالة مركباته على القاعدة المذكورة

كما يلي :

$$t_q^p = A_{i_1 i_2 \dots i_q}^{j_1 j_2 \dots j_p} e_{j_1 j_2 \dots j_p}^{i_1 i_2 \dots i_q}$$

وتكمن أهمية التتصورات في إمكانية تعيين مركبات التتصور حين تتغير القاعدة . سنقول

اختصاراً التتصور $A_{i_1 i_2 \dots i_q}^{j_1 j_2 \dots j_p}$ بدلاً عن التتصور الذي مركباته هي $A_{i_1 i_2 \dots i_q}^{j_1 j_2 \dots j_p}$.

إن مرتبة التتصور t_q^p هي العدد $p+q$ أي هي عدد الأدلة التي تميز مركبات هذا التتصور

ويطلق على الأدلة العلوية اسم أدلة مخالفة وعلى الأدلة السفلية اسم أدلة موافقة ، ونقول إن

التتصور $A_{i_1 i_2 \dots i_q}^{j_1 j_2 \dots j_p}$ هو تتصور مخالف من المرتبة p موافق من المرتبة q أو مختلط من

المرتبة $p+q$.

نقول إن A^i هو تتصور مخالف مرتبة أولى أو متجه مخالف ، ونقول إن A_j هو تتصور

موافق مرتبة أولى أو متجه موافق . ونقول إن A^{ij} هو تتصور مخالف مرتبة ثانية وإن A^i_j

هو تتصور مختلط مرتبة ثانية مخالف مرتبة أولى وموافق مرتبة أولى ، ونقول إن الكميات

السامية هي تنسورات من المرتبة صفر . ويلاحظ أن المتجهات المخالفة هي عناصر الفضاء u وأن المتجهات الموافقة هي عناصر الفضاء u^*

٢-٥-٣ نسبتي التحويل التتسورية

لتكن x^i جملة إحداثية في فراغ بعده n أي $i=1,2,\dots,n$ ولتكن $\bar{x}^i$ جملة إحداثية أخرى في الفراغ ذاته مرتبطة بالجملة السابقة بعلاقات التحويل العكوسة

$$\bar{x}^i = x^j (x^j)^{-1} \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

من تعريف التتسور t_q^p يمكن أن نعين مركبات هذا التتسور في الجملة الإحداثية الجديدة

$$\bar{A}_{\beta_1 \dots \beta_q}^{\alpha_1 \dots \alpha_p} \text{ بدلالة مركباته في الجملة القديمة أي بدلالة } A_{\beta_1 \dots \beta_q}^{\alpha_1 \dots \alpha_p}$$

من الدستور :

$$\bar{A}_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_q}^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p} = \frac{\partial \bar{x}^{\alpha_1}}{\partial x^{\beta_1}} \frac{\partial \bar{x}^{\alpha_2}}{\partial x^{\beta_2}} \dots \frac{\partial \bar{x}^{\alpha_p}}{\partial x^{\beta_p}} \frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial \bar{x}^{\alpha_1}} \frac{\partial x^{\beta_2}}{\partial \bar{x}^{\alpha_2}} \dots \frac{\partial x^{\beta_q}}{\partial \bar{x}^{\alpha_q}} A_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_q}^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p}$$

الذي يدعى دستور التحويل التتسوري المخالف من المرتبة p والموافق من المرتبة q . وبشكل خاص يكون دستور تحويل التتسور المخالف من المرتبة الأولى (المتجه المخالف)

$$\bar{A}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^a} A^a \quad \text{على النحو}$$

ودستور تحويل التتسور الموافق من المرتبة الأولى (المتجه الموافق) على النحو

$$\bar{A}_j = \frac{\partial x^a}{\partial \bar{x}^j} A_a$$

ودستور تحويل التتسور المخالف من المرتبة الثانية على النحو :

$$\bar{A}^{ij} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^a} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^b} A^{ab}$$

ودستور تحويل التتسور الموافق من المرتبة الثانية

$$\bar{A}_{ij} = \frac{\partial x^a}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^b}{\partial \bar{x}^j} A_{ab}$$

ودستور تحويل التتسور المختلط من المرتبة الثانية على النحو

$$\bar{A}'_j = \frac{\partial \bar{x}'}{\partial x^a} \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}'} A^a_p$$

وهكذا ... حيث يتم الجمع على الأدلة الخرساء في كل حالة .

نذكرنا أن السلمييات هي تمسورات من المرتبة صفر وتدعى بالمتغيرات لأن قيمتها لا تتغير بتغير الجملة الاحداثية ، لذا يمكن أن نعبر عن المقدار السلمي φ على النحو $\bar{\varphi} = \varphi$ حيث استعملنا على وضع النقط الصغير فوق المركبات على الاحداثيات الجديدة لتمييزها عن الاحداثيات القديمة

ملاحظة : إذا كتبت مركبات كمية ذات أدلة بالنسبة للاحداثيات جديدة بدلالة مركباتها بالذمة لجملة احداثيات قديمة وفق دستور تحويل تمسوري، فإننا نقول إن الكمية تمثل تمسوراً يتحدد نوعه ومرتبته من دستور التحويل .

٢-٥-٤ تطبيقات

١- إذا كان لدينا دستور التحويل الاحداثي المكوس : $\bar{x}' = \bar{x}'(x')$ وكانت الدوال $\bar{x}'$ قابلة للاشتقاق فإن

$$(1) \quad (d\bar{x}') = \frac{\partial \bar{x}'}{\partial x^j} (dx^j)$$

(حيث يتم الجمع على الدليل الآخر j كما مر سابقاً)

إن العلاقة (١) تسدل على أن التفاضلات تتبع دستور تحويل تمسوري مخالف من المرتبة الأولى أي أنها مركبات متجه مخالف .

ولو فرضنا أن x^j تابعة للمتغير المستقل t يكون :

$$(2) \quad \frac{d\bar{x}'}{dt} = \frac{\partial \bar{x}'}{\partial x^j} \frac{dx^j}{dt}$$

سما يدل على أن المشتقات $\frac{d\bar{x}'}{dt}$ تمثل أيضاً مركبات متجه مخالف .

وإذا كان الوسيط t هو الزمن وكانت $\bar{x}^j$ هي مركبات متجه الموضع لنقطة فإن العلاقة (٢) تدل على أن متجه السرعة هو متجه مخالف .

٢- لكن الدالة السلمية f التابعة للاحداثيات $\bar{x}'$ والقابلة للاشتقاق فإن دستور الاشتقاق

للدوال المركبة يكتب كما يلي :

$$\frac{df}{dx^i} = \frac{\partial f}{\partial x^j} \frac{dx^j}{dx^i}$$

الأمر الذي يدل على أن $\frac{df}{dx^i}$ هي مركبات متجه موافق

كما أن :

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{x}^i} = \frac{\partial f}{\partial x^j} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i}$$

وأما كانت $\frac{\partial f}{\partial \bar{x}^i}$ هي مركبات متجه التدرج للدالة العددية كإفاله من الواضح أن متجه التدرج هو متجه موافق .

٢- إن دلتا كرونيكر δ^i_j هي تنسور مختلط من المرتبة الثانية

في الحقيقة وجدنا أن $\bar{\delta}^i_j = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}$ وهذا يكتب كما يلي :

$$\bar{\delta}^i_j = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^a} \frac{\partial x^a}{\partial x^j}$$

ونعلم أن : $\frac{\partial x^a}{\partial \bar{x}^j} = \frac{\partial x^a}{\partial x^i} \delta^i_j$ وبالتعويض في العلاقة السابقة نجد :

$$\bar{\delta}^i_j = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^a} \frac{\partial x^a}{\partial \bar{x}^j} \delta^a_j$$

وهو المطلوب

تمرين : إذا كانت مركبات المتجه الموافق A_i في الأحداثيات الديكارونية القائمة

$$A_1 = xy, \quad A_2 = 2y - z^2, \quad A_3 = xz$$

أوجد مركباته في الأحداثيات الاسطوانية $\bar{x}^1 = r, \bar{x}^2 = \theta, \bar{x}^3 = z$:

الحل : نكتب أولاً تنسور التحويل :

$$\bar{A}_i = \frac{\partial x^a}{\partial \bar{x}^i} A_a = \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^i} A_1 + \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^i} A_2 + \frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^i} A_3 = \frac{\partial x}{\partial \bar{x}^i} A_1 + \frac{\partial y}{\partial \bar{x}^i} A_2 + \frac{\partial z}{\partial \bar{x}^i} A_3$$

ولدينا بمقابل تحويل الأحداثيات الديكارتية إلى الأحداثيات الاسطوانية كما يلي :

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z$$

وبالتعويض نجد :

$$\bar{A}_1 = \bar{A}_r = (\cos \theta)(xy) + (\sin \theta)(2y - z^2) + 0$$

$$\bar{A}_2 = \bar{A}_\theta = (-r \sin \theta)(xy) + (r \cos \theta)(2y - z^2) + 0$$

$$\bar{A}_3 = \bar{A}_z = 0 + (1)xz$$

نعوض الأحداثيات x, y بدلا r, θ :

$$\bar{A}_1 = (r^2 \cos^2 \theta + 2r \sin \theta - z^2) \sin \theta$$

$$\bar{A}_2 = (-r^2 \sin^2 \theta + 2r \sin \theta - z^2) r \cos \theta$$

$$\bar{A}_3 = rz \cos \theta$$

٢-٥-٥ التناظر والتناظر العكسي

١- إذا بادلنا بين دليلين من نوع واحد لتصور ولم تتغير مركبات هذا التصور قلنا

إن التصور متناظر بالنسبة لهذين الدليلين ، أي يكون التصور A^{ijk} متناظر بالنسبة للدليلين

i, j مثلاً إذا تحققت العلاقة $A^{ijk} = A^{jik}$ ونقول إن التصور متناظر إذا لم تتغير

مركباته إذا بادلنا بين أي دليلين من نوع واحد

ملاحظة : لا يصرف التناظر على دليلين من نوعين مختلفين إلا في حالة دلنا

$$\delta'_i = \delta_j$$

٢- إذا بادلنا بين دليلين من نوع واحد (علويين أو سفليين) وتغيرت إشارة المركبة دون

قيمتها، قلنا إن التصور شبه متناظر أو عكسي التناظر . أي إذا كان التصور A_{ijk} شبه

متناظر بالنسبة للدليلين i, k فإن $A_{ijk} = -A_{kji}$ ونقول عن تصور إنه شبه

متناظر (أو عكسي التناظر) إذا تغيرت إشارة أي مركبة كلما بادلنا بين دليلين من نوع

واحد فيها

نتائج : ١- تسعدم مركبات التصور شبه المتناظر الحلوية على دليلين من نوع واحد

متساويين . على سبيل المثال تكون المركبات التالية لتصور شبه متناظر معدومة

$$A_{112} = A_{122} = A_{323} = \dots = 0 \quad \text{أي}$$

٢- تكون مركبات التصور من المرتبة n شبه المتناظر في الفراغ ذي الـ n بعداً

إما مساوية للصفر أو تختلف عن بعضها بالإشارة فقط .

٣- إذا تحققت خاصية التناظر أو التناظر العكسي لتصور ما في جملة أحداثيات ، تبقى هذه الخاصية معقدة في أي جملة أخرى ترتبط بالجملة الأولى بقانون تحويل عكوس .

٤- إذا العنيت جميع مركبات تصور في جملة أحداثية ، تكون جميع مركباته معدومة في أي جملة أخرى مرتبطة بالجملة الأولى بقانون عكوس . أي إذا صحت معادلة تنسورية في جملة أحداثية ، فإنها تبقى صحيحة في أي جملة أحداثية أخرى.

٢-٥-٦ العمليات على التلسورات : تعرف على التلسورات العمليات التالية

١- الجمع : إن مجموع تلسورين أو أكثر من مرتبة واحدة ونوع واحد هو تصور من ذات المرتبة والنوع ، مركباته هي مجموع المركبات المقابلة في التلسورات الأصلية أي نكتب مثلاً

$$A_{ij}'' + B_{ij}'' + C_{ij}'' = D_{ij}''$$

٢- الضرب بعدد سلمي : إن جداء أي تصور بعدد سلمي هو تصور من نفس النوع والمرتبة مركباته هي ناتج ضرب مركبات التلسور الأصلي بالعدد السلمي ونكتب :

$$\lambda A_{ij}' = B_{ij}'$$

ينتج مما سبق أن التركيب الخطي لتلسورات لها لمرتبة والنوع ذاته هو تصور له ذات النوع والمرتبة .

نتيجة : إن أي تصور من المرتبة لثلاثية موافق أو مخالف ينتج عن مجموع تلسورين من النوع ذاته أحدهما متناظر . والثاني شبه متناظر في الحقيقة نلاحظ أن :

$$A_{ij} = \frac{1}{2}(A_{ij} + A_{ji}) + \frac{1}{2}(A_{ij} - A_{ji})$$

ومن الواضح أن $\frac{1}{2}(A_{ij} + A_{ji})$ هو تصور متناظر في حين $\frac{1}{2}(A_{ij} - A_{ji})$ هو تصور شبه متناظر

٣- الجداء الخارجي : يعرف الجداء الخارجي للتسورين بأنه تسور مرتبته هي مجموع مرتبتي التسورين ، ونوعه كما تدل عليه الأدلة ، فعلى سبيل المثال ناتج الجداء الخارجي للتسورين A^{ij} و B_{lm}^k هو التسور C_{lm}^{ijk} أي هو تسور من المرتبة الخامسة مختلف مرتبه ثلثه وموافق مرتبة ثانيه .

٤- التقليل : تتم عملية التقليل على تسور مختلف بجعل دليل علوي مساو لدليل سفلي ، أي بإجراء عملية جمع على هذا الدليل الذي أصبح أحرساً. ليكن التسور $A_{\beta\gamma}^{\alpha}$ إن نستور التحويل لهذا التسور كما نعلم هو :

$$\bar{A}_{\alpha'}^{\gamma'} = \frac{\partial \bar{x}^{\gamma'}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial \bar{x}^{\alpha'}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial \bar{x}^{\gamma'}} A_{\beta\gamma}^{\alpha}$$

إذا أجرينا التقليل على الدليلين α ، α' أي جعلنا $\alpha = \alpha'$ فإن التسور السابق يغدو كما يلي :

$$\bar{A}_{\alpha'}^{\gamma'} = \frac{\partial \bar{x}^{\gamma'}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial \bar{x}^{\alpha}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial \bar{x}^{\gamma'}} A_{\beta\gamma}^{\alpha} = \frac{\partial x^{\beta}}{\partial \bar{x}^{\alpha'}} \delta_{\alpha}^{\gamma'} A_{\beta\gamma}^{\alpha}$$

$$\bar{A}_{\alpha'}^{\gamma'} = \frac{\partial x^{\beta}}{\partial \bar{x}^{\alpha'}} A_{\beta\gamma}^{\gamma'} \Rightarrow \bar{C}_{\alpha} = \frac{\partial x^{\beta}}{\partial \bar{x}^{\alpha'}} C_{\beta}$$

والناتج هو بالتالي تسور موافق من المرتبة الأولى .

مما يدل على أن عملية التقليل تؤدي إلى تخفيض مرتبة التسور مرتبتين إحداهما موافقة والثانية مخالفة .

٥- الجداء الداخلي : هي عملية مركبة من عمليتي الجداء الخارجي والتقليل . فالجداء الداخلي للتسورين $A_{\beta\gamma}^{\alpha}$ و B^k مثلاً يكتب كما يلي :

$$A_{\beta\gamma}^{\alpha} B^k = C_{\beta\gamma}^{\alpha k} = D_j^j$$

٦- قانون النسبة : يعطى هذا القانون العملية المعاكسة لعملية الجداء الداخلي

ويص على مايلي :

إذا كان ناتج الجداء الداخلي لكمية ذات أدلة بتسور اختياري تسوراً مرتبته ونوعه يوافقان عملية الجداء الداخلي فإن الكمية ذات الأدلة هي تسور .

ستثبت صحة هذا القانون في حالة خاصة ويتم إثباته في أي حالة أخرى بالطريقة ذاتها .

لتكن الكمية $A(r, s, t)$ والتسور الاختياري B^{st} فإذا كن

$$(1) \quad A(r, s, t) \cdot B'' = C'$$

حيث C' تنسور مخالف مرتبة أولى فإن الكمية $A(r, s, t)$ هي مركبات تنسور مخالف مرتبة أولى موافق مرتبة ثانية A'' .

الاشتباكات : إن المعادلة (1) صحيحة في أي جملة إحداثية لذا نكتب هذه المعادلة في جملة إحداثيات جديدة على النحو :

$$(2) \quad \bar{A}(r, s, t) \cdot \bar{B}'' = \bar{C}' = 0$$

ونكتب دعامتير التحويل لكل من التسمولين $\bar{B}''$ و $\bar{C}'$ كما يلي

$$\bar{B}'' = \frac{\partial \bar{x}^s}{\partial x^j} \frac{\partial \bar{x}^t}{\partial x^k} B''^{jk} \quad \text{و} \quad \bar{C}' = \frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^i} C'$$

نعوض في المعادلة (2) مع ملاحظة أن

$$C' = A(i, j, k) B''^{jk}$$

$$(3) \quad \left[\bar{A}(r, s, t) \frac{\partial \bar{x}^s}{\partial x^j} \frac{\partial \bar{x}^t}{\partial x^k} - A(i, j, k) \frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^i} \right] B''^{jk} = 0$$

ولما كان التسمور B''^{jk} تنسوراً اختيارياً فإننا نختاره بحيث نعتمد جميع مركباته ما عدا واحدة ولتكن B''^{jk} فتكون أمثال المركبة B''^{jk} تساوي الصفر من أجل كل قيمة لـ j, k أي نجد أن :

$$(4) \quad \bar{A}(r, s, t) \frac{\partial \bar{x}^s}{\partial x^j} \frac{\partial \bar{x}^t}{\partial x^k} = A(i, j, k) \frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^i}$$

لنضرب الآن طرفي العلاقة (4) داخلياً بـ $\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^n} \cdot \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^m}$ ونلاحظ أن :

$$\frac{\partial \bar{x}^s}{\partial x^j} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^n} = \delta_n^s, \quad \frac{\partial \bar{x}^t}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^m} = \delta_m^t$$

$$\bar{A}(r, s, t) \delta_n^s \delta_m^t = A(i, j, k) \frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^n} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^m}$$

لنجد :

$$\bar{A}(r, n, m) = \frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^n} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^m} A(i, j, k) \quad \text{ومنه :}$$

أي أن الكمسية ذات الأدلة تتبع تحويل تنسوري من المرتبة الثالثة مخالف من المرتبة أولى
وموافق من المرتبة الثانية ، ويمكن أن تكتب على النحو A_{nm}^r

- قانون النسبة عندما يكون التتصور B^{jk} متناظراً.

نلاحظ في هذه الحالة أننا إذا اخترنا التتصور B^{jk} في العلاقة (٣) بحيث تتضمن جميع مركباته
ما عدا المركبة ذات الدليلين k, j فقط فإن كلا من B^{jk} و B^{kj} المتساويين تكون مغايرة
للصفر وتصبح أمثال B^{jk} المعطومة هي:

$$[\bar{A}(r, s, t) \frac{\partial \bar{x}^s}{\partial x^j} \frac{\partial \bar{x}^t}{\partial x^k} - \frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^i} A(i, j, k) + \bar{A}(r, s, t) \frac{\partial \bar{x}^s}{\partial x^k} \frac{\partial \bar{x}^t}{\partial x^j} - \frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^i} A(i, k, j)] = 0$$

ولما كان الدليلان s, t آخرين أمكن أن نبادل بينهما في الحد الثاني لنجد:

$$(٥) [\bar{A}(r, s, t) + \bar{A}(r, t, s)] \frac{\partial \bar{x}^s}{\partial x^j} \frac{\partial \bar{x}^t}{\partial x^k} = [A(i, j, k) + A(i, k, j)] \frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^i}$$

$$\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^n} \cdot \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^m} \quad \text{نضرب طرفي العلاقة (٥) داخلياً بالمقدار}$$

أخذين بعين الاعتبار أن

$$\frac{\partial \bar{x}^s}{\partial x^j} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^n} = \delta_n^s \quad \frac{\partial \bar{x}^t}{\partial x^k} \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^m} = \delta_m^t$$

نجد

$$[\bar{A}(r, s, t) + \bar{A}(r, t, s)] \delta_n^s \delta_m^t = [A(i, j, k) + A(i, k, j)] \frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^i} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^n} \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^m}$$

$$(٦) \quad \bar{A}(r, n, m) + \bar{A}(r, m, n) = \frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^i} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^n} \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^m} [A(i, j, k) + A(i, k, j)]$$

الأمر الذي يدل على أن المجموع $\bar{A}(r, n, m) + \bar{A}(r, m, n) = C_{nm}^r$ هو
الذي يمثل تنسوراً من المرتبة الثالثة مخالفاً من المرتبة الأولى موافقاً من المرتبة الثانية .

- قانون النسبة عندما يكون التتصور الاختياري عكسي التناظر (شبه متناظر)

تختلف هذه الحالة عن سابقتها بكون $B^{jk} = -B^{kj}$ فلذا تابعنا الإثبات بالطريقة السابقة

$$(٧) \quad \bar{A}(r, n, m) - \bar{A}(r, m, n) = C_{nm}^r \quad \text{نجد دون عناء أن الفرق}$$

هو الذي يمثل تنسوراً مختلطاً من المرتبة الثالثة.

٧- التتسورات المترافقة :

إذا كان A_{ij} تتسوراً متناظراً وإذا كان المحدد $|A_{ij}| = \det A_{ij} \neq 0$ فإن التتسور المتناظر B^{ik} الذي يحقق العلاقة

$$A_{ij} B^{ik} = \delta_j^k$$

يسمى مرافق التتسور A_{ij} . ويسمى عندها أيضاً التتسور A_{ij} مرافق التتسور B^{ik} أو نقول إن التتسورين A_{ij} ، B^{ik} مترافقان .

ملاحظة : يمكن وضع مركبات تتسور من المرتبة الثانية بشكل مصفوفة مربعة ونلاحظ من التعريف السابق أن مصفوفة مركبات B^{ik} المرافق لـ A_{ij} هي مقلوب مصفوفة مركبات A_{ij} وأن مصفوفة مركبات B^{ik} هي المصفوفة القطرية الواحدة I .

٢-٥-٧ الفضاء المترى الريسماني والتتسور الأساس.

١- الفضاء المترى الريسماني هو الفضاء الذي يعرف عليه المترى على النحو

$$(A) \quad (ds)^2 = A_{ij} dx^i dx^j$$

حيث ds عنصر البعد وهو مقدار سلمي أي هو تتسور من المرتبة صفر .
و (dx^i) هو تتسور مخالف من المرتبة الأولى (كما مر في (٢-٥-٢)) .
فيكون $dx^i dx^j$ حسب تعريف الجداء الخارجي هو تتسور مخالف من المرتبة الثانية وهو تتسور متناظر لأن $dx^i \cdot dx^j = dx^j \cdot dx^i$

٢- تتسور الأساس : نلاحظ في العلاقة (A) أن $(ds)^2$ هو تتسور من المرتبة صفر وأن $dx^i dx^j$ تتسور مخالف متناظر كافي لذا فحسب قانون النسبة نرى أن الكمية $(A_{ij} + A_{ji})$ تمثل تتسوراً موافقاً متناظراً من المرتبة الثانية . فإذا كتبنا

$$A_{ij} = \frac{1}{2}(A_{ij} + A_{ji}) + \frac{1}{2}(A_{ij} - A_{ji})$$

ونضربنا طرفي هذه العلاقة داخلياً بـ $dx^i dx^j$ فإننا نجد :

$$(1) A_{ij} dx^i dx^j = (ds)^2 = \frac{1}{2}(A_{ij} + A_{ji}) dx^i dx^j + \frac{1}{2}(A_{ij} dx^i dx^j - A_{ji} dx^i dx^j)$$

ولما كان الدليلان i, j أخرسنان أي يمكن أن نبادل بينهما في الحد الأخير من العلاقة (١)

$$\text{فنجد أن } (ds)^2 = \frac{1}{2}(A_{ij} + A_{ji}) dx^i dx^j$$

نسمي التمسور الموالف المتناظر $\frac{1}{2}(A_{rr} + A_{rr})$ التمسور الأساس للفضاء الريماني ،

ونرمزه g_{rr} ، ونكتب المترك في هذا الفضاء على النحو

$$(10) \quad (ds)^2 = g_{rr} dx^r dx^r$$

إن العلاقة (10) من الأهمية بمكان حيث إنها تسمح بتعيين عبارة العنصر الخطي ds في أي جملة إحداثية إذا عرفت في جملة إحداثية ما

٣- الفضاء الإقليدي : الفضاء الإقليدي هو فضاء ريماني فيه جملة إحداثية يكتب

المترك بالنسبة لهذه الجملة الإحداثية على النحو : $(ds)^2 = \delta_{rr} dx^r dx^r$ حيث

δ_{rr} هي دلالة كرونكر التي مركبتها على هذه الجملة تمثل مصفوفة قطرية واحدية

مثال : نعلم أن المترك في الإحداثيات الديكارتية القائمة في فضاء ثلاثي هو

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$$

$$(ds)^2 = \delta_{rr} dx^r dx^r$$

أي يتعين من التمسور

مما يدل على أن الفضاء الثلاثي الذي نعيش فيه هو فضاء إقليدي .

تطبيق : لنوجد عبارة $(ds)^2$ بالإحداثيات الأسطوانية في فضاء إقليدي

الحل : يلزم تعيين مركبات التمسور الأساس على الإحداثيات الأسطوانية (r, θ, z)

$$g_{rr} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{علماً أن مركباته على الإحداثيات الديكارتية القائمة هي}$$

نكتب دستور التحويل للتمسور موافق مرتبة ثانية كما يلي :

$$\bar{g}_{rr} = \frac{\partial x^a}{\partial x^r} \frac{\partial x^b}{\partial x^r} g_{ab}$$

ولما كانت المركبات غير القطرية معدومة فإن هذا التمسور ينفذ :

$$\bar{g}_{rr} = \frac{\partial x^1}{\partial x^r} \frac{\partial x^1}{\partial x^r} g_{11} + \frac{\partial x^2}{\partial x^r} \frac{\partial x^2}{\partial x^r} g_{22} + \frac{\partial x^3}{\partial x^r} \frac{\partial x^3}{\partial x^r} g_{33}$$

حيث : $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$, $g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1$

$$\bar{x}^1 = r , \quad \bar{x}^2 = \theta , \quad \bar{x}^3 = z ;$$

بالتعويض وملاحظة أن : $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $z = z$

نجد : عندما $\bar{g}_{11} = 1$, $\bar{g}_{22} = r^2$, $\bar{g}_{33} = 1$, $\bar{g}_{ij} = 0$ $i \neq j$

وبالتالي فإن $(ds)^2 = \bar{g}_{11} d\bar{x}^1 d\bar{x}^1 + \bar{g}_{22} d\bar{x}^2 d\bar{x}^2 + \bar{g}_{33} d\bar{x}^3 d\bar{x}^3$

أي $(ds)^2 = (dr)^2 + r^2(d\theta)^2 + (dz)^2$

تمرين : أوجد عبارة $(ds)^2$ بالاحداثيات الكروية في فضاءقليدي .

الحل : نكتب دساتير تحويل الاحداثيات على النحو

$$x = r \sin \theta \cos \varphi , \quad y = r \sin \theta \sin \varphi , \quad z = r \cos \theta$$

وبعض في دساتير التحويل التكموري كما في التمرين السابق فلجد مركبات تكمور الأساس

على الاحداثيات الجديدة (r, θ, φ) كما يلي :

$$\bar{g}_{11} = 1 , \quad \bar{g}_{22} = r^2 , \quad \bar{g}_{33} = r^2 \sin^2 \theta , \quad \bar{g}_{ij} = 0 \quad i \neq j$$

وتصبح عبارة $(ds)^2$ كما يلي :

$$(ds)^2 = (dr)^2 + r^2(d\theta)^2 + r^2 \sin^2 \theta (d\varphi)^2$$

٤- قرين تكمور :

ليكن g_{ij} هو تكمور الأساس للفضاء ما و g^{ij} هو مرافق هذا التكمور

يعرف قرين المتجه المخالف A^i بأنه المتجه الموافق A_i الذي يتعين من العلاقة

$$(11) \quad A_i = g_{ij} A^j$$

ويعرف قرين المتجه الموافق A_i بأنه المتجه المخالف A^i الذي يتعين من العلاقة

$$A^i = g^{ij} A_j$$

ويعرف قرين التكمور المخالف من المرتبة الثانية A^{ij} بأنه التكمور الموافق A_{mn} الذي

يتعين من العلاقة

$$(12) \quad A_{mn} = g_{im} g_{jn} A^{ij}$$

ويعرف قرين التكمور الموافق A_{ij} بأنه التكمور المخالف A^{mn} حيث

$$(13) \quad A^{mn} = g^{im} g^{jn} A_{ij}$$

وهكذا .

وتسمى عملية الانتقال من تكمور إلى مرافقه عادة عملية رفع أو خفض أدلة تكمور .

٥- طول متجه :

- إذا كان A^i متجه مخالف من فضاء تكمور الأساس فيه هو g_{ij} فإن مربع

طول المتجه A^i يتعين من العلاقة

$$(14) \quad |A^i|^2 = g_{ij} A^i A^j$$

حيث $e_i = \pm 1$ بحيث تجعل طول المتجه حقيقياً .

- وإذا كان A_i متجه موافق في فضاء تنسور الأساس فيه هو g_{ij} فإن مربع طول هذا المتجه يتعين من العلاقة

$$(15) \quad (A_i)^2 = g^{ij} A_i A_j$$

حيث g^{ij} هو مرفق تنسور الأساس.

ملاحظة : نسمي المتجه متجه واحد إذا كان طوله يساوي الواحد ونسميه صفري إذا كان طوله صفراً

- الزاوية بين متجهين : نتعين الزاوية θ بين المتجهين A^i, B^j من العلاقة

$$(16) \quad \cos \theta = \frac{g_{ij} A^i B^j}{|A^i| \cdot |B^j|}$$

وتتعين الزاوية بين المتجهين B_j, A_i من العلاقة

$$(17) \quad \cos \theta = \frac{g^{ij} A_i B_j}{|A_i| \cdot |B_j|}$$

- إن شرط تعامد متجهين هو : $\cos \theta = 0$ أي :

$$g_{ij} A^i B^j = 0 \quad \text{أو} \quad g^{ij} A_i B_j = 0$$

٨-٥-٢ بعض تطبيقات التنسورات في الميكانيك

١- التحويلات الخطية العكوسة : إذا ارتبطت الاحداثيات الجديدة $\bar{x}^i$ بالاحداثيات

$$\bar{x}^i = a^i_j x^j \quad \text{حيث } a^i_j \neq 0$$

فإننا نقول إن الاحداثيات تتبع تحويل خطي

$$\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} = a^i_j \quad \text{عكس . نلاحظ في هذه الحالة أن :}$$

$$(18) \quad \bar{x}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} x^j \quad \text{و}$$

أي أن الاحداثيات في هذه الحالة تمثل تنسوراً مخالفاً من المرتبة الأولى

وإذا كانت $\bar{x}'$ هي إحداثيات نقطة في الفراغ ، نلاحظ أن متجه الموضع هو تمسور مخالف من المرتبة الأولى

ملاحظة : إن حركة الجسم الصلب في الفراغ هي كما نعلم المسحب مع قطب وتوران حول القطب وبالتالي فإن التحويلات التي تربط الإحداثيات الثابتة بالإحداثيات المتحركة للجسم الصلب هي تحويلات خطية

٢- تعريف تمسور العطالة :

لتكن $M_{(a)}$ مجموعة نقط مادية كتلة النقطة $M_{(a)}$ هي $m_{(a)}$ وليكن $x'_{(a)}$ هو متجه الموضع للنقطة $M_{(a)}$. ولتكن $\bar{x}'$ جملة إحداثيات جديدة ترتبط بالجملة x' بتحويلات خطية عكوسة ، أي أن $x'_{(a)}$ هو متجه مخالف . نعرف تمسور العطالة للمجموعة المادية $M_{(a)}$ بالنسبة لمبدأ الأحداثيات O على أنه :

$$I'^{ij} = \sum_a m_a x'_{(a)i} x'_{(a)j} \quad \text{أو بشكل مختصر :} \quad I'^{ij} = \sum_a m x' x' \quad (19)$$

الجمع على نقط المجموعة المادية. ولما كان $x'_{(a)}$ تمسور مخالف من المرتبة الأولى فإن الجداء الخارجي $x'_{(a)i} x'_{(a)j}$ هو تمسور مخالف من المرتبة الثانية مما يدل على أن تمسور العطالة I'^{ij} هو تمسور مخالف من المرتبة الثانية . ونلاحظ من التعريف أن هذا التمسور متناظر ، ونلاحظ أن مركبات تمسور العطالة لمجموعة مادية على جملة محاور ديكارتية متعامدة في فراغ ثلاثي هي عناصر المصفوفة التالية :

$$(20) \quad I'^{ij} = \begin{pmatrix} \sum_a m x^2 & \sum_a m xy & \sum_a m xz \\ \sum_a m yx & \sum_a m y^2 & \sum_a m yz \\ \sum_a m zx & \sum_a m zy & \sum_a m z^2 \end{pmatrix}$$

ولما كان $I_o = \sum_a m (x^2 + y^2 + z^2)$ هو عزم عطالة المجموعة بالنسبة لمبدأ الأحداثيات O و $\sum_a m xy$ ، $\sum_a m yz$ ، $\sum_a m zx$ هي جداءات العطالة للمجموعة المادية ، و

$$I_x = \sum_a m (y^2 + z^2) , \quad I_y = \sum_a m (x^2 + z^2) , \quad I_z = \sum_a m (x^2 + y^2)$$

هي عزم عطالة المجموعة بالنسبة للمحاور للاحداثية فإن مركبات تتصور العطالة تصبح على النحو :

$$(٢٠) \quad I^{ij} = \begin{pmatrix} I_o - I_x & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & I_o - I_y & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & I_o - I_z \end{pmatrix}$$

ولما كان I^{ij} هو تتصور مخالف مرتبة ثانية فإنه بالإمكان تعيين مركبات هذا التتصور على أي جملة احداثية جديدة ترتبط بالجملة السابقة بتحويلات خطية وبشكل خاص بالنسبة لجملة تنتج عن الجملة السابقة بدوران حول نقطة.

٣- عزم عطالة مجموعة مادية بالنسبة لمبدأ الاحداثيات

إذا كان I^{ij} تتصور العطالة لمجموعة نقط مادية ، وإذا كان g_{ij} تتصور الاساس للفضاء المدروس فإن عزم عطالة المجموعة المادية في الفضاء المذكور بالنسبة لمبدأ الاحداثيات هو بالتعريف الكمية السلمية

$$I_o = g_{ij} I^{ij}$$

وعلى سبيل المثال إذا كانت جملة الاحداثيات هي الاحداثيات الديكارتية القائمة في فضاء اقليدي ثلاثي فإن

$$I_o = g_{11} I^{11} + g_{22} I^{22} + g_{33} I^{33}$$

ونعلم أن : $g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1$ فإذا عوضنا قيم I^{11} ، I^{22} ، I^{33} السابقة نجد :

$$I_o = \sum_{\alpha} m(x^2 + y^2 + z^2)$$

وهو التتصور المعروف .

٤- عزم عطالة مجموعة مادية بالنسبة لمحور يمر من مبدأ الاحداثيات o .

إن عزم عطالة مجموعة مادية بالنسبة لمحور Δ هو كما نعلم :

$$I_{\Delta} = \sum_{\alpha} m D^2$$

حيث D هو بعد النقطة $M_{(\alpha)}$ عن المحور Δ ، فإذا كان o' هو متجه الوحدة على المحور Δ و $x' = \overline{oM}$ متجه الموضع للنقطة ، وكلا منهما متجه مخالف فإن :

$$D^2 = \overline{oM}^2 - (oM \cos \theta)^2$$



شكل (٢٢)

فإذا كان g_{ij} تفسر الأساس للفضاء المتروس وكانت تحويلات الاحداثيات خطية

فإن : $\cos \theta = \frac{g_{ij} x^i u^j}{|x^i| |u^j|}$ و $(oM)^2 = g_{ij} x^i x^j$

ولكن طول $|u^j|$ يساوي الواحد لأنه متجه واحد ، و $(oM)^2 \cos^2 \theta = (g_{ij} x^i u^j)^2$ وبالتالي نجد :

$$D^2 = g_{ij} x^i x^j - (g_{ij} x^i u^j)^2 = g_{ij} x^i x^j - g_{im} g_{nj} x^i u^m x^j u^n$$

نعوض في عبارة عزم العطالة فنجد :

$$I_{\Delta} = \sum_a m (g_{ij} x^i x^j - g_{im} g_{nj} x^i x^j u^m u^n)$$

$$\sum_a m x^i x^j = I^{ij} \quad \text{وتكن}$$

$$\sum_a m g_{ij} x^i x^j = g_{ij} I^{ij} = I_o \quad \text{و} \quad g_{im} g_{nj} I^{ij} = I_{mn} \quad \text{أي}$$

حيث I_{mn} قرين تفسر العطالة وبالتالي نجد عبارة عزم العطالة بالنسبة للمحور Δ كما يلي :

$$(٢١) \quad I_{\Delta} = I_o - I_{mn} u^m u^n$$

وإذا ضربنا I_o بالمقدار $g_{mn} u^m u^n$ الذي يساوي الواحد ، حصلنا على الصيغة

لعزم العطالة ألا وهي :

$$(٢٢) \quad I_{\Delta} = (I_o g_{mn} - I_{mn}) u^m u^n$$

٥- مجسم العطالة لمجموعة مادية بالنسبة للنقطة O .

إن مجسم العطالة لمجموعة نقط مادية $M_{(s)}$ هو المحل الهندسي للنقط p التي تحقق العلاقة

$$\vec{op} = \frac{\vec{u}}{\sqrt{I_\Delta}}$$

حيث O مبدأ الإحداثيات ، $\vec{u}$ متجه الواحدة للمحور Δ ، I_Δ عزم عطالة المجموعة المادية بالنسبة للمحور Δ

إن المتجه $\vec{op}$ متجه الموضع للنقطة p ، هو متجه مخالف في التحويلات الخطية للإحداثيات ، ولكن مركباته هذا المتجه ، نلاحظ أنها ترتبط بمركبات المتجه المخالف $\vec{u}'$ بالعلاقة

$$\vec{u}' = \sqrt{I_\Delta} \vec{x}'$$

فإذا عوضنا في العلاقة (٢٢) نجد :

$$I_\Delta = (I_o g_{mn} - I_{mn}) x^m x^n I_\Delta$$

ومنه نجد المعادلة التكميلية

$$(I_o g_{mn} - I_{mn}) x^m x^n = 1 \quad (٢٣)$$

وهي معادلة مجسم العطالة للمجموعة المادية في النقطة O .

مثال : لنكن x, y, z الإحداثيات الديكارتية القائمة في فضاء إقليدي ثلاثي ، نعلم أن تفسر الأساس هو $g_{ij} = \delta_{ij}$ ، وأن تفسر العطالة يعطى من العلاقة (٢٠) ، إن قرين تفسر العطالة يتعين كما يلي :

$$I_{mn} = g_{mi} g_{nj} I^{ij} = I^{mn}$$

فإذا كانت مركبات $\vec{u}'$ على المحاور (x, y, z) هي (α, β, γ) فإن عزم عطالة مجموعة مادية بالنسبة للمحور Δ تتعين وفق العلاقة (٢٢) كما يلي :

$$\Delta = (I_o g_{11} - I_{11}) \alpha^2 + (I_o g_{22} - I_{22}) \beta^2 + (I_o g_{33} - I_{33}) \gamma^2 - 2I_{12} \alpha \beta - 2I_{23} \beta \gamma - 2I_{31} \gamma \alpha$$

ولكن

$$I_o g_{11} - I_{11} = \sum m [(x^2 + y^2 + z^2) - x^2] = \sum m (y^2 + z^2) = I_x = A$$

$$I_o g_{33} - I_{33} = I_z = C \quad , \quad I_o g_{22} - I_{22} = I_y = B$$

وبملاحظة أن I_{23} ، I_{31} هي جداءات العطالة نجد أن

$$I_\Delta = A \alpha^2 + B \beta^2 + C \gamma^2 - 2(I_{xy} \alpha \beta + I_{yz} \beta \gamma + I_{zx} \gamma \alpha) = f(\alpha, \beta, \gamma)$$

وتصبح معادلة مجسم العطالة على النحو :

$$f(x,y,z) = 1$$

ملاحظة هامة : إن العلاقتين التسمورتين لعزم العطالة ومجسم العطالة تسمح

بتعيين عزم العطالة ومجسم العطالة لمجموعة مادية بالنسبة لأي جملة محاور في الفضاء
الافندي ترتبط مع الاحداثيات الديكارتية القائمة بتحويل خطي عكوس .

تمارين

- ١- أثبت أن مقلص التensor A^i_j يعطي كمية سلمية (لا متغيرة) .
- ٢- لوكن المتجه المخالف A^i الذي مركباته على جملة احداثيات ديكارتية متعامدة $(1, 2, -1)$ ، أوجد مركبات هذا المتجه على جملة احداثيات كروية (r, θ, ϕ) .
- ٣- ليكن التensor A^i_j الذي مركباته على جملة احداثيات ديكارتية القائمة هي : $A^1_1 = 1$ ، $A^2_2 = 3$ ، $A^3_3 = -1$ ، $A^j_i = 0$ عندما $i \neq j$ أوجد مركبات هذا التensor على جملة جديدة ترتبط بالاحداثيات الديكارتية القائمة وفق العلاقات $\bar{x}^1 = 2x - y$ ، $\bar{x}^2 = x + z$ ، $\bar{x}^3 = y + 2z$
- ٤- أوجد مركبات تensor الأساس في الاحداثيات القطبية المستوية في فراغ اللذي ثم أوجد طول متجه A_i مركباته في الاحداثيات القطبية هي (r, I)
- ٥- عين الزاوية بين للمتجه A^i الذي مركباته في الاحداثيات الديكارتية القائمة هي $(1, 1, 0)$ والمتجه B^i الذي مركباته على جملة الاحداثيات الأسطوانية هي $(r, \theta, 1)$
- ٦- إذا كانت الكمية ذات الأدلة $A(p, q, r)$ تحقق العلاقة $A(p, q, r) B^p_q = C^r_p$ حيث B^p_q هو تensor اختياري و C^r_p تensor معروف فالمطلوب اثبات أن $A(p, q, r)$ هي تensor يطلب تعيين نوعه ومرتبه .
- ٧- إذا كانت مركبات تensor المعطاة لجسم S على جملة احداثيات ديكارتية هي كما يلي :

$$I'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
فالمطلوب :
(١) احسب عزم عطالة الجسم S بالنسبة لمبدأ الاحداثيات
(٢) عين مركبات متجه الواحدة لمحور OA علماً أن $A(1, 1, 1)$ يحمل على هذا المحور
(٣) احسب عزم عطالة الجسم S بالنسبة للمحور Δ
٨- أوجد مركبات تensor الأساس على جملة احداثيات x, y, z ترتبط بجملة الاحداثيات الديكارتية القائمة بالمتساويين :

$$x = x_1 + z_1, \quad y = x_1 - y_1, \quad z = y_1 - z_1$$

ثم أثبت أن المتجه الذي مركباته على x, y, z هي $\vec{A}'(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0)$ هو متجه واحد.

٩- لنكن مركبات تتصور العطالة لجسم صلب على جملة إحداثيات ديكارتية القائمة هي :

$$I' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{لوجد مركبات } I_{ij} \text{ على الجملة } x_1, y_1, z_1 \text{ التي ترتبط}$$

بالإحداثيات الديكارتية القائمة بالعلاقات :

$$x_1 = x - z, \quad y_1 = y + z, \quad z_1 = z$$

ثم احسب عزم عطالة الجسم حول محور Δ يحمل عليه المتجه $\vec{A}'$ الذي مركباته على الجملة x_1, y_1, z_1 هي $\vec{A}'(0, 0, \frac{2}{\sqrt{3}})$ واكتب معادلة مجسم العطالة

بالنسبة لـ x, y, z وبالنسبة لـ x_1, y_1, z_1

١٠- يعرف الميترك في فراغ ريماني ثنائي بالعلاقة :

$$(ds)^2 = 5(dx^1)^2 - 2(dx^1)(dx^2) + 2(dx^2)^2$$

(١) اكتب مركبات تتصور الأساس على هذه الجملة x^1, x^2

(٢) احسب طول كل من المتجهين $u' = (\frac{1}{\sqrt{5}}, 0)$ و $v' = (0, \frac{1}{\sqrt{2}})$

وعين الزاوية بينهما .

١١- تعطى دساتير التحويل من الإحداثيات الديكارتية القائمة x, y, z إلى إحداثيات

جديدة x_1, y_1, z_1 كما يلي : $x = x_1 - y_1, \quad y = y_1, \quad z = y_1 + z_1$

(١) عين $(ds)^2$ بالإحداثيات (x_1, y_1, z_1)

(٢) عين الزاوية بين المتجهين B_1, A_1 علماً أن مركبات A_1 على الجملة

الجديدة $\vec{A}' = (1, 1, 0)$ ومركبات B_1 على الجملة القديمة $B_1 = (0, 0, 1)$

(٣) إذا كان تتصور العطالة لجسم S بالإحداثيات الجديدة x_1, y_1, z_1 هو :

$$\bar{T}'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ عين عظام العظام بالنسبة لمبدأ الاحداثيات ، وعين}$$

مركبات تنسور العظام على العظام القديمة ، ومعالجة مجسم العظام على العظام القديمة .



المصطلحات

(١)

sense	اتجاه
Friction	احتكاك
Slipping _	احتكاك الانزلاق
Rolling _	احتكاك التدرج
Pivot _	احتكاك الفتل
Coefficient of _	عامل احتكاك
Force of _	قوة الاحتكاك
Coordinates	احداثيات
Cylindrical _	احداثيات اسطوانية
Cartisian -	احداثيات ديكارتية
Canonical _	احداثيات قانونية
Polar _	احداثيات قطبية
Spherical _	احداثيات كروية
Independent _	احداثيات مستقلة
Absolute _	احداثيات مطلقة
Generalized _	احداثيات معممة
Curvilinear _	احداثيات منحنية
Relative _	احداثيات نسبية
Arbitrary	اختياري
Sign	اشارة
Derivation	اشتقاق
Minimum	اصغري
Maximum	اعظمي
Horizontal	أفقي

Length	الطول
Displacement	النقل الافتراضي
Virtual _	النقل
Slipping	انزلاق
Translation	المسحاب
Insantaneous	الني

(ب)

Initial	بدائي (ابتدائي)
Simple	بسيط
Demention	بعد

(ت)

Potential	تابع الكمون
Eccentricity	تباعد مركزي
Transformation	تحويلات
Linear _	تحويلات خطية
Inverse _	تحويلات عكسية
Canonical _	تحويل قانوني
Gradiant	تدرج
Rolling	تدحرج
_ Without slipping	تدحرج دون انزلاق
Acceleration	تسارع
Entrinement(or based)_	تسارع جري
Angular _	تسارع زاوي
Corolis _	تسارع كوريوليس
Supplementary _	تسارع مقسم
Absolute _	تسارع مطلق
Tangential _	تسارع مماسي

Normal _	تسارع ناظمي
Relative _	تسارع نسبي
Definition	تعريف
Suspension	تعليق
Determination	تعيين
Variation	تغير
Change of Variables	تغيير متحولات
Differentiation	تفاضل
Divergence	تفرق
Decomposition	تفريق
Interetion	تقاطع
Contraction	تقلوص
Contact	تماس
Proportion	تناسب
Equilibrium	توازن
Conditions of _	شروط التوازن
Statics of rigidbodies	توازن الأجسام الصلبة
(ث)	
Constant	ثابت
(ج)	
Product	جداء
Inter _	جداء داخلي
Outer _	جداء خارجي
Scalar _	جداء عددي
Vector _	جداء متجه
Triple-Vector _	جداء متجه مضاعف
Attraction	جذب

Body	جسم
Rigid body	جسم صلب
Free body	جسم طليق
Constrained	جسم مقيد
System	جملة
Coordinate	جملة إحداثية
Cartesian Coordinate system	جملة إحداثية قائمة
Interial	جملة إحداثية عطالية
Polar	جملة إحداثية قطبية
Fixed	جملة إحداثية ثابتة
Moving	جملة إحداثية متحركة
Non- interial system	جملة غير عطالية

(ح)

Resultant	هاصلة
Line of action	حامل
Free	حر (طليق)
Motion	حركة
Initial	حركة ابتدائية
Circular	حركة دائرية
General	حركة عامة
Inverse	حركة عكسية
Direct	حركة مباشرة
Rectilinear	حركة مستقيمة
Plane	حركة مستوية
Absolute	حركة مطلقة
Relative	حركة نسبية

Kinetic	حركي
Field	حقل
Ring	حلقة

(ع)

Latitude	خط العرض
Longitude	خط الطول
Linear	خطي

(د)

Function	دالة
Circle	دائرة
Circular	دائري
— motion	حركة دائرية
Degree	درجة
Degrees of freedom	درجات الحرية
Formula	مستور
Kronecker delta	دلتا كرونكر
Index	دليل
Period	دور
Rotation	دوران

(ذ)

Arm	ذراع
Peak	ذروة

(ر)

Radian	راديان
Reaction	رد فعل
Symbol	رمز

(ج)

Angle	زاوية
Euler's angles	زوايا
Angular	زاوي
Velocity	سرعة زاوية
acceleration	تسارع زاوي
Time	زمن

(س)

Negative	سالب
Static	ساكن
Veloccity	سرعة
Entrainement	سرعة جرية
Based	سرعاتية
Linear	سرعة خطية
Angular	سرعة زاوية
Absoaute	سرعة مطلقة
Relative	سرعة نسبية
Surface	سطح
Rough	سطح خشن
Wire	سلك
Scalar	سلمي (عدي)

(ش)

Skew _ symmetric	شبه متناظر
Condition	شرط
Initial	شرط ابتدائي
Necessary	شرط لازم
Sufficient	شرط كاف
Vector	شعاع (متجه)

Free _	شعاع طليق
Contravariant _	شعاع مخالف
Sliding _	شعاع منزلق
Covariant _	شعاع موافق
Unit _	شعاع واحدة
(ص)	
Rigid	صلب (صلد)
Formula	صيغة
(ط)	
Mmethod	طريقة
Longitude	طول
(ع)	
Factor	عامل
Number	عدد
Real_	عدد حقيقي
Moment	عزم
_ of vector	عزم شعاع
_ of Inertia	عزم عطالة
_ of a force	عزم قوة
_ of couple	عزم مزدوجة
Relation	علاقة
Science	علم
statics	علم للتوازن
Kinematics	علم الحركة
Mechanics	علم الميكانيك
Work	عمل
Virtual _	عمل الافتراضي

Element

عنصر

Line _

عنصر خطي

(ل)

Abscissa

فاصلة (فصل)

Hypothesis

ارضية

Space

فضاء

Euclidean _

فضاء اقليدي

Riemannian _

فضاء ريماني

Vector _

فضاء متجهي

metric _

فضاء متري

(م)

Base

قاعدة

Law

قانون

Transformation _

قانون التحويل

Quotient _

قانون النسبة

Orthogonal

قائم

Disk

قرص

Associate tensor

قرين تنسور

Rod

قضيب

Pole

قطب

Polar

قطبي

Hyperbola

قطع زائد

Parabola

قطع مكافئ

Ellipse

قطع ناقص

Measurement

قياس

Force

قوة

external _

قوة خارجية

acting _	قوة مؤثرة
Friction _	قوة احتكاك
internal _	قوة داخلية
generalized _	قوة معممة
Concurrent forces	قوى متلاقية
Parallel _	قوى متوازية
Applied _	قوى مطبقة
Force of gravity	قوة الثقالة
are	قوس
Value	قيمة
Initial _	قيمة ابتدائية

(ك)

Mass	كتلة
Mass _ centre	مركز الكتلة
Sphere	كرة
Quantity	كمية
Momentum	كمية الحركة
Momenta	كميات الحركة
Angular momentum	كمية الحركة الزاوية (الدورانية)

(ل)

Invariance	لا تغير
Invariant	لا متغير
Infinite	لامتناه
Infinity	لانهاية
Moment	لحظة

(م)

Material	مادي
----------	------

Directly	مباشرة
Principle	مبدأ
Homogeneous	متجانس
Vector	متجه (شعاع)
Velocity	متجه السرعة
Acceleration	متجه التسارع
Position	متجه الموضع
Unit	متجه الوحدة
Moving	متجه متحرك
Variable	متحول
Identity	متطابقة
Proportional	متناسب
Triangle	مثلث
Trigonometric	مثلثي
Fixed	مثبت (ثابت)
Interval	مجال
system	مجموعة
Material	مجموعة مادية
Mechanical	مجموعة ميكانيكية
system of forces	مجموعة قوى
system of Particles	مجموعة نقط مادية
Resultant	محصلة (قوى)
Sum of forces	مجموع القوى
Axis	محور
of rotation	محور الدوران
Instantaneous axis of rotation	محور الدوران الآني
Perpendicular axes	محاور متعامدة

Axis of inertia	محاور عطالة
Axle	أستور (للقرس)
Axial	مستوي
Cone	مخروط
Graph	سطح
Range	مدى (مجال)
Order	مرتبة
Components	مركبات
— of acceleration	مركبات التسارع
— of Velocity	مركبات السرعة
Center	مركز
Couple	مزدوجة
Trajectory (Path)	مسار
Problem	مسألة
Distance	مسافة
Equality	مساواة
Plane	مستوى
Independent	مستقل
Projection	مسطح
Support	مسند
Derivative	مشتق
Absolute	مطلق
Polygon	مضلع
Equation	معادلة
Cartisian _	معادلة ديكارتية
Parametric equations	معادلات وسيطية
Constraint Equations	معادلات الصلة

Equations of equilibrium	معادلات التوازن
Lagrange's Equations	معادلات لاغرانج
... multipliers	مضارب لاغرانج
Rate	معدل
Reference	مقارنة
Section	مقطع
Note	ملاحظة
Confined	ملازم (مقيد)
Equivalent	مكافئ
Cube	مكعب
Tangent	مماس
Tangential	مماسي
Uniform	منتظم
... Motion	حركة منتظمة
... rotation	دوران منتظم
Direction	منحى
Curve	منحني
Negligible	مهمل
Tensor	موتر (تيسور)
Conjugate ...	موتر مرافق
Fundamental Tensor	موتر الأساس
Symmetric ...	موتر متناظر
Skew ...	موتر شبه متناظر
Contravariant ...	موتر مخالف
Covariant ...	موتر موافق
Mixed ...	موتر مختلط
Positive	موجب

Postulate	موضوعية
Inclination	ميل
(ن)	
Conclusion	نتيجة
Ratio	نسبة
Relative	نسبي
Radius	نصف قطر
Radius _ vector	نصف القطر المتجه
Point	نقطة
Limit	نهاية
(و)	
Parameter	وسيط
Average	وسيطي
(ي)	
Prove	يبرهن
Move	يحرك
Role	يتخرج
Calculate	يحسب
Slide	يلزق
Slip	يلزلق



المراجع

- [١] ١٩٦٠ موسكو آبل - ب . الميكانيك النظري الجزء الأول
- [٢] ١٩٧٢ موسكو بوخكولتز ن. ن. كورس في الميكانيك النظري الجزء الأول
- [٣] ١٩٧٤ موسكو بوريزكين و. ن. كورس في الميكانيك النظري
- [٤] ١٩٨٦ جامعة دمشق د . محمد الحسيني الميكانيك ٢
- [٥] ١٩٦١ موسكو هولوييتس . و . هب الميكانيك النظري
- [٦] ١٩٧٤ جامعة دمشق أ. وجيه القاسبي موجز الميكانيك الجزء الثاني
- [٧] Borisenko A. Tarapov I. c. *Vector and Tensor Analysis with Applications* prentic - Hall u.s.A 1968
- [٨] CABANNES H. *Course de Mecanique Generale* Dunod P Aris 1966
- [٩] Germain . P. *Introduction a la Mecanique des Milieux continus I*. Masson Paris 1980
- [١٠] Lass H. *Vector and tensor Analyses* International student Edition 1950
- [١١] Mastew D. Sampson H. Meyer P. *Fundamental structures of Algebra* I . s . E . 1968
- [١٢] Robert A. Becler *Introduction - to Theoretical Mechanics* . McGRAW Hill Book company 1964
- [١٣] Spain B. *Tensor Calculus* Oliver and Boyd 1965

اللجنة العلمية

أ. د. دعد الحسيني

أ. د. محمد بشير قابيل

أ.م. د. حمزة حاكمي

المذقق الففوي

أ.د. إبراهيم عبد الله

حقوق الطبع والترجمة والنشر محفوظة لمديرية الكتب والمطبوعات