الدكتور المهندس
انطانيوس عقل
استاذ في كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية
بجامعة دمشق

جامعة دمشق
مديرية الكتب والمطبوعات
المكتبة

# ميكانيك
# السوائل التكنيكي

## الجزء الأول

حقوق التأليف والطبع والنشر محفوظة لجامعة دمشق


وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

## مقدمة الطبعة الثانية

بعد أن نفذت نسخ الطبعة الاولى التي صدرت عام ١٩٧٦ ، وبغية وضع هذا الكتاب في متناول الطلاب والمهندسين المهتمين بميكانيك السوائل في اسرع وقت ممكن ، فقد تقرر اصدار الطبعة الثانية بطريقة التصوير بعد أن تم تصحيح الاخطاء الطبعية وادخال تعديلات طفيفة جدا على النص في بعض الفقرات . وقد ارجأنا اجراء بعض التعديلات الجذرية الى الطبعة القادمة .

اننا نأمل ان تلاقي هذه الطبعة نفس الاستحسان الذي لاقته الطبعة الاولى ، وسنثمن عاليا اية ملاحظة تردنا تتعلق بالنص او تبويب مواد الكتاب لندرسها ونأخذها بالاعتبار في الطبعة القادمة .

**دمشق ـ تشرين اول ١٩٨١**

**المؤلف**

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

# تقديم

قصدت من وضع هذا الكتاب تحقيق هدفين رئيسيين : اولهما ان يكون مرجعا عربيا لطلاب الهندسة الميكانيكية يعتمدون عليه في دراسة مقرر ميكانيك السوائل ، وثانيهما ان يساعد المهندس الميكانيكي الممارس في ايجاد مفاتيح الحلول للمسائل المطروحة عليه والمتعلقة بالتطبيقات المتعددة والمتشعبة لهذا العلم .

ان تطبيقات ميكانيك السوائل الحديث تدخل في فروع الهندسة الميكانيكية كافة ، وفي فروع هندسية أخرى ( انظر المقدمة ) . وأمام تشعب هذه التطبيقات وتداخلها وتباينها الظاهري ، واستحالةمعالجتها بالتفصيل في كتاب واحد كانتموضوعا ت الكتاب العلمية مركزة على مسائل نموذجية توضح القوانين والعلاقات الاساسية التي تخضع لها جميع هذه التطبيقات ، وتبرز الربط الوثيق بين النظرية والتطبيق العملي، الامر الذي توخينا الاشارة اليه في عنوان الكتاب من خلال مفهوم كلمة « تكنيكي » .

وقد قضت الظروف ، ان يصدر هذا الكتاب بجزأين . اشتمل الجزء الاول على مقدمة وخمسة فصول . وتتضمن المقدمة لمحةتاريخية عن تطور ميكانيك السوائل ، وتوضح موقعه من العلوم الاخرى،واتجاهات وطرق بحثه ودراسته ، بالاضافة الى بحث هو بمثابة مدخل الى علم القيم الفيزيائية والجمل القياسية علّه يساعد الطالب على التأكد من صحة العلاقات الفيزيائية ويجنبه الوقوع في الاخطاء الحسابية التقليدية عند الانتقال من جملة قياس لاخرى . ويعالج الفصل الاول الصفات الفيزيائية ـ الميكانيكية للسوائل ، والثاني توازن السوائل الثابتة ومتغيرة الحجم ( هيدرو ـ وايروستاتك ) ، والثالث حركة السوائل العامة ( كينيماتك ) ، والرابع تحريك السوائل المثالية ( هيدرودينامك ) ، اما الفصل الخامس فقد أفرد لمعالجة طرق ميكانيك السوائل المستخدمة في حل مسائل الجريان المثالي الاساسية .

اما الجزء الثاني من الكتاب ، الذي سيصدر لاحقا ، فسيعالج تحريك السوائل الحقيقية وفصولا مختارة من تطبيقات ميكانيك السوائل .

وتحقيقا لمبدأ التصميم الهندسي المعروف فقد رتبت فصول الكتاب وفقراته بحيث يتم الانتقال من السهل الى الصعب فالاصعب . وحيث ان دراسة ميكانيك السوائل تبدأ في السنة الثانية فقد اعتبرنا المستوى العلمي الذي بلغه الطالب ، وبخاصة في الرياضيات والفيزياء والميكانيك التكنيكي ومقاومة المواد واسس الكهرباء ، مقدمة ضرورية لاستيعاب بعض نصوص الكتاب . وقد اتبعت كل فقرة اساسية بمجموعة من اسئلة المراجعة والتمارين المحلولة تتيح للطالب ان يختبر نفسه بنفسه ليتأكد من استيعابه للمادة النظرية وقدرته على تطبيقها .

وقد تعمدت في طباعة الكتاب استعمال حروف بحجمين مختلفين . ويمكن للقارىء في المرة الاولى ان يتجاوز مقاطع النص المطبوعة بحرف صغير . الا انها ضرورية لمن يريد التعمق في مادة الفقرة والاهتداء للمصادر المختصة التي وردت في الكتاب بصيغة ارقام عربية محصورة ضمن قوسين متوسطين ، مثلا [ 3 ] . اما الارقام العربية المحصورة ضمن اقواس صغيرة ، مثلا ( 2.15 ) ، فتشير الى المعادلات الرياضية التي رقمت متسلسلة بالنسبة لكل فقرة رئيسية ليتسنى العودة اليها بسهولة .

بالرغم من الجهد المبذول في تصحيح ملازم الكتاب فقد وقعت بعض الاخطاء المطبعية التي تم حصرها في جدول خاص يرجى الرجوع اليه قبل البدء بقراءة الكتاب . وقد يكون هناك اخطاء اخرى فاتتنا ملاحظتها نأمل ان لاتغيب عن فطنة القارىء .

ختاما يطيب لي أن أشكر كل من ساعد على اخراج الكتاب واسهم في اعداد اشكاله ورسومه العديدة . واخص بالشكر الجزيل عمال وادارة مطبعة جامعة دمشق الذين بذلوا كل مافي وسعهم لتلبية رغباتي في اخراج الكتاب بالشكل الافضلي الممكن .

دمشق في ايار ١٩٧٦ **انطانيوس عقل**

# فهرس المحتويات

## مقـدمـة


| | | الصفحة |
|---|---|---|
| ١,١ | لمحة تاريخية عن تطور ميكانيك السوائل ..... ..... ..... ..... ..... | ١ |
| ٢,١ | ميكانيك السوائل التكنيكي ، تطبيقاته وطرق بحثه ودراسته ..... ..... | ٨ |
| ٣,١ | تبويب ميكانيك السوائل وفروعه ..... ..... ..... ..... ..... ..... | ١٤ |
| ٤,١ | مدخل الى علم القيم والجمل القياسية ..... ..... ..... ..... ..... | ١٨ |
| ١,٤,١ | القيم الفيزيائية والعددية وواحدات القياس ومبادلاتها ..... ..... | ١٩ |
| ٢,٤,١ | العلاقة بين القيمة العددية وواحدة القياس، معادلة المقاس ..... ..... | ٢٧ |
| ٣,٤,١ | جملة الواحدات العالمية والتكنيكية ..... ..... ..... ..... ..... | ٣٣ |
| ٥,١ | اسئلة مراجعـة وتمارين ..... ..... ..... ..... ..... ..... ..... | ٣٦ |


## الفصل الأول

### الصفات الفيزيائية ـ الميكانيكية للسوائل


| | | |
|---|---|---|
| ١,٢ | تصنيف السوائل ..... ..... ..... ..... ..... ..... ..... ..... ..... | ٣٧ |
| ٢,٢ | اللزوجة ..... ..... ..... ..... ..... ..... ..... ..... ..... ..... | ٤٠ |
| ٣,٢ | حالة الاجهاد الهيدروستاتيكية ..... ..... ..... ..... ..... ..... | ٤٧ |
| ١,٣,٢ | تصنيف القوى المؤثرة في السائل ..... ..... ..... ..... ..... ..... | ٤٩ |
| ٢,٣,٢ | مفهوم الضغط في نقطة من السائل ..... ..... ..... ..... ..... ..... | ٥٣ |
| ٤,٢ | مفهوم ضغط التبخر ..... ..... ..... ..... ..... ..... ..... ..... | ٥٧ |
| ٥,٢ | الكثافة والحجم النوعي والوزن النوعي ..... ..... ..... ..... ..... | ٥٩ |
| ٦,٢ | قابلية الانضغاط ومعامل المرونة ..... ..... ..... ..... ..... ..... | ٦٠ |
| ٧,٢ | التوتر السطحي والخاصية الشعرية ..... ..... ..... ..... ..... ..... | ٦٣ |
| ٨,٢ | معادلات تغير الحالة للغازات الكاملة ..... ..... ..... ..... ..... | ٧٢ |
| ١,٨,٢ | قانون تغير الحالة الايزوترمي ..... ..... ..... ..... ..... ..... | ٧٥ |
| ٢,٨,٢ | قانون تغير الحالة الإيزوباري ..... ..... ..... ..... ..... ..... | ٧٦ |
| ٣,٨,٢ | قانون تغير الحالة الاديباتي ..... ..... ..... ..... ..... ..... | ٧٦ |
| ٤,٨,٢ | قانون تغير الحالة البوليتروبي ..... ..... ..... ..... ..... ..... | ٧٧ |
| ٩,٢ | اسئلة مراجعة وتمارين ..... ..... ..... ..... ..... ..... ..... | ٧٨ |

# الفصل الثـــاني

## توازن السوائل غير القابلة والقابلة للانضغاط

### ( هيدروستاتك وايروستاتك )


| | | الصفحة |
|---|---|---|
| | توازن السوائل الثابتة الحجم ( المتجانسة ) ..... ..... ..... ..... | ٨٢ |
| ١,٣ | التوازن في حقل الجاذبية الارضية ..... ..... ..... ..... ..... | ٨٢ |
| ١,١,٣ | توزع الضغط في سـائل متجانس ـ المعادلة الهيدروستاتيكية الاساسية ..... ..... ..... ..... ..... ..... ..... | ٨٤ |
| ٢٠١٠٣ | توزع الضغط في سائل غير متجانس ـ شروط التوازن المستقر ..... | ٨٧ |
| ٢,١,٣ | تطبيقات للمعادلة الهيدروستاتيكية الاساسية ..... ..... ..... | ٩٠ |
| ١,٣,١,٣ | الاوعية المستطرقة ..... ..... ..... ..... ..... ..... | ٩٠ |
| ٢,٣,١,٣ | مبدا قياس الضغط ـ المانومتر والبارومتر ..... ..... ..... | ٩١ |
| ٣,٣,١,٣ | حساب قوى الضغط على جدران الاوعية المستوية ..... ..... ..... | ١٠٣ |
| ٤,٣,١,٣ | حساب قوى الضغط على جدران الاوعية المنحنية ..... ..... ..... | ١٠٧ |
| ٥,٣,١,٣ | قوة الرفع الهيدروستاتيكية ( دافعة ارخميدس ) ..... ..... ..... | ١١٤ |
| ٦,٣,١,٣ | شروط التوازن المستقر للاجسام الطافية ..... ..... ..... ..... | ١١٧ |
| ٢,٣ | توزع الضغط في سائل مهمل الوزن ـ قانون باسكال ..... ..... ..... | ١٢٤ |
| ١,٢,٣ | المكبس الهيدروليكي ..... ..... ..... ..... ..... ..... | ١٢٦ |
| ٢,٢,٣ | سمام التحكم الهيدروليكي ..... ..... ..... ..... ..... ..... | ١٢٨ |
| ٣,٣ | توزع الضغط في سائل تحت تأثير حقل قوى عام ـ المعادلة الهيدروستاتيكية العامة ..... ..... ..... ..... ..... ..... | ١٣٠ |
| ١,٣,٣ | توازن سائل ثقيل في حقل القوة النابذة ..... ..... ..... ..... | ١٣٧ |
| ٢,٣,٣ | توازن سائل ثقيل في اناء يؤثر عليه تسارع خطي منتظم ..... ..... | ١٤٥ |
| ٤,٣ | اسئلة مراجعـة وتمارين ..... ..... ..... ..... ..... ..... | ١٤٨ |
| ٤ | توازن السوائل المتغيرة الحجم ( غير المتجانسة ) ..... ..... ..... | ١٥٥ |
| ١,٤ | شروط التوازن والاستقرار الستاتيكي ..... ..... ..... ..... | ١٥٥ |
| ٢,٤ | توازن الهواء الجوي ( ايروستاتك ) ..... ..... ..... ..... | ١٦٠ |
| ١,٢,٤ | توازن الهواء الجوي تحت شروط ايزوترمية ..... ..... ..... ..... | ١٦٠ |
| ٢,٢,٤ | توازن الهواء الجوي تحت شروط اديبالية ..... ..... ..... ..... | ١٦٢ |
| ٣,٢,٤ | توازن الهواء الجوي النظامي ..... ..... ..... ..... ..... | ١٦٤ |
| ٣,٤ | اسئلة مراجعة وتمارين ..... ..... ..... ..... ..... ..... | ١٦٨ |

# الفصل الثالث

## حركة السوائل غير القابلة والقابلة للانضغاط

## ( هيدروكينيماتك وايروكينيماتك )

### المفاهيم والقوانين العامة


| | | الصفحة |
|---|---|---|
| ٥ | المفاهيم الاساسية لحركة السوائل ... ... ... ... ... ... ... | ١٧٠ |
| ١,٥ | حقل الجريان وحقل السرعة ... ... ... ... ... ... ... | ١٧٠ |
| ٢,٥ | طريقة **لاغرانج** لدراسة حركة السوائل ... ... ... ... ... | ١٧٣ |
| ٣,٥ | طريقة **أويلر** لدراسة حركة السوائل ... ... ... ... ... | ١٧٣ |
| ٤,٥ | تصنيف حركات السوائل ( الجريانات ) ... ... ... ... ... | ١٧٧ |
| ١,٤,٥ | الجريانات غير المستقرة والمستقرة ... ... ... ... ... | ١٧٧ |
| ٢,٤,٥ | الجريانات الثلاثية ، الثنائية ، والاحادية المقاس ... ... ... | ١٨٠ |
| ٣,٤,٥ | الجريانات الصفائحية والمضطربة ... ... ... ... ... | ١٨٢ |
| ٤,٤,٥ | الجريانات تحت الصوتية ، الصوتية ، وفوق الصوتية ... ... ... | ١٨٥ |
| ٥,٥ | خط المسار، خط التيار ، أنبوبة التيار ... ... ... ... | ١٨٦ |
| ٦,٥ | اسئلة مراجعة وتمارين ... ... ... ... ... ... ... | ١٩٣ |
| ٦ | معادلة الاستمرار او قانون انحفاظ المادة ... ... ... ... | ١٩٥ |
| ١,٦ | معادلة الاستمرار وحيدة البعد ( نظرية خيط التيار ) ... ... ... | ١٩٦ |
| ٢,٦ | معادلة الاستمرار العامة ... ... ... ... ... ... ... | ٢٠١ |
| ٣,٦ | اسئلة مراجعة وتمارين ... ... ... ... ... ... ... | ٢٠٧ |
| ٧ | الحركة العامة للسوائل ... ... ... ... ... ... ... | ٢٠٩ |
| ١,٧ | مفهوم التشوه والدوران ... ... ... ... ... ... ... | ٢٠٩ |
| ٢,٧ | شرط الخلو من الدوران ... ... ... ... ... ... ... | ٢١٨ |
| ٣,٧ | المفاهيم الاولية والقوانين الاساسية للحركة الاعصارية ... ... | ٢٢٤ |
| ١,٣,٧ | مفهوم الجولان ... ... ... ... ... ... ... ... | ٢٢٤ |
| ٢,٣,٧ | خط الاعصار وانبوبة الاعصار ... ... ... ... ... ... | ٢٣٠ |
| ٣,٣,٧ | العلاقة بين الجولان والدوران ـ قانون **ستوكس** التكاملي ... ... | ٢٣٢ |
| ٤,٣,٧ | قانون **طومسون** عن ثبات الجولان مع الزمن ... ... ... ... | ٢٣٧ |
| ٥,٣,٧ | قوانين **هلمهولتس** ... ... ... ... ... ... ... | ٢٤٢ |
| ٦,٣,٧ | قانون **بيو ـ سافار** لحساب حقل السرعة المحرضة ... ... ... | ٢٤٤ |
| ٤,٧ | اسئلة مراجعة وتمارين ... ... ... ... ... ... ... | ٢٤٨ |

# الفصل الرابع

## تحريك السوائل المثالية غير القابلة للانضغاط ( هيدروديناميك )


| | | الصفحة |
|---|---|---|
| ٨ | قوانين التحريك الاساسية للجريانات وحيدة البعد ( نظرية خيط التيار ) | ٢٥١ |
| ١.٨ | معادلة **اويلر** الحركية وحيدة البعد | ٢٥٢ |
| ١.١.٨ | معادلة **أويلر** الحركية في اتجاه الجريان | ٢٥٣ |
| ٢.١.٨ | معادلة **أويلر** الحركية تاظميا على اتجاه الجريان | ٢٥٥ |
| ٢.٨ | معادلة **برنولي** | ٢٥٧ |
| ١.٢.٨ | معادلة **برنولي** كتكامل لمعادلة **اويلر** الحركية | ٢٥٧ |
| ٢.٢.٨ | معادلة **برنولي** العامة وحيدة البعد | ٢٦٤ |
| ٣.٢.٨ | معادلة **برنولي** للجريانات غير المستقرة | ٢٦٥ |
| ٤.٢.٨ | معادلة **برنولي** للحركة النسبية | ٢٦٦ |
| ٣.٨ | تطبيقات على معادلة **برنولي** | ٢٧٠ |
| ١.٣.٨ | انبوبة **فنتوري** | ٢٧١ |
| ٢.٣.٨ | تفريغ خزان من فتحة جانبية صغيرة تحت تاثير الثقالة | ٢٧٤ |
| ٣.٣.٨ | تفريغ خزان من فتحة جانبية صغيرة تحت تاثير ضغط زائد | ٢٧٩ |
| ٤.٣.٨ | تولد ضغط السحب في الجريان وميدأ المضخات الناقورية | ٢٨٢ |
| ٥.٣.٨ | السطوح الفاصلة وتشكل الاعاصير | ٢٨٦ |
| ٦.٣.٨ | قياس الضغط والسرعة والتيار الحجمي | ٢٩٠ |
| ١.٦.٣.٨ | الضغط الستاتيكي ، والتحريكي والكلي. ومعامل الضغط | ٢٩٠ |
| ٢.٦.٣.٨ | اجهزة قياس الضغط | ٢٩٥ |
| ٣.٦.٣.٨ | اجهزة قياس غزارة التدفق ( التيار الحجمي ) | ٣٠٢ |
| ٧.٣.٨ | تفريغ خزان مع مراعاة تغير ارتفاع السطح اثر للسائل | ٣٠٦ |
| ٨.٣.٨ | الجريان في مغلف حلزوني | ٣١٢ |
| ٤.٨ | اسئلة مراجعة وتمارين | ٣١٦ |
| ٥.٨ | قانون الدفع المخطي وقانون الدفع الدوراني | ٣٢٢ |
| ١.٥.٨ | اشتقاق قانون الدفع الخطي وقانون الدفع الدوراني لجريان مستقر | ٣٢٥ |
| ٢.٥.٨ | تطبيقات على قانوني الدفع الخطي والدوراني | ٣٣٣ |
| ١.٢.٥.٨ | حساب قوة الضغط المؤثرة على جدار كوع | ٣٣٣ |
| ٢.٢.٥.٨ | حساب قوة رد فعل الناقورة ومعامل التضييق لفتحة بوردا | ٣٣٦ |
| ٣.٢.٥.٨ | قوة ضغط ناقورة حرة على جدار ثابت ومتحرك | ٣٣٨ |
| ٤.٢.٥.٨ | حساب الفقد الصدمي نتيجة تغير مفاجيء المقطع | ٣٤٢ |
| ٥.٢.٥.٨ | تحديد المقاومة الاجمالية لجسم | ٣٤٥ |

الصفحة

٦,٢,٥,٨ حساب قوة الرفع الهيدروديناميكية ـ قانون **كوتا ـ يوكوفسكي** ..... ٣٥٢
٧,٢,٥,٨ معادلة **أويلر** العنقية ..... ٣٦٥
٨,٢,٥,٨ النظرية النافورية لحساب المراوح والرفاصات الملولبية ..... ٣٦٨
٩,٢,٥,٨ حساب السرعة النهائية لصاروخ ـ قانون **زيولكوفسكي** ..... ٨٠
١٠,٢,٥,٨ تطبيق قانون الدفع المخطي على جريان شبه مستقر ..... ٣٨٣
٦,٨ اسئلة مراجعة وتمارين ..... ٣٨٦

٩ المعادلات الاساسية للجريانات المثالية ثنائية وثلاثية البعد ..... ٣٩٣
١,٩ معادلات **أويلر** الحركية العامة ..... ٣٩٣
٢,٩ الحلول الممكنة لمعادلات **أويلر** الحركية ..... ٣٩٦
١,٢,٩ الشروط الحدية وشروط البدء ..... ٣٩٦
٢,٢,٩ صياغة عملية لمعادلات **أويلر** الحركية ..... ٣٩٨
٣,٢,٩ تكامل معادلات **أويلر** في حالة الجريانات الدورانية ..... ٤٠٠
٤,٢,٩ تكامل معادلات **أويلر** في حالة الجريانات اللادورانية ..... ٤٠٣
١,٤,٢,٩ كل جريان مثالي هو حل لمعادلات **أويلر** الحركية ..... ٤٠٣
٢,٤,٢,٩ معادلة **برنولي** العامة للجريانات الكمونية ..... ٤٠٥
٣,٩ المضمون الفيزيائي لكمون السرعة ($\phi$) ، مفهوم الكتلة الهيدروديناميكية ٤٠٨

١٠ الجريانات الكمونية ثنائية البعد ( المستوية ) ..... ٤١٠
١,١٠ تابع الكمون ($\phi$) ؛ معادلة **لابلاس** وامكانيات حلها ..... ٤١١
٢,١٠ تابع التيار ("ψ") ، مضمونه الفيزيائي وعلاقته مع ($\phi$) ..... ٤١٣
٣,١٠ أمثلة عن الجريانات الكمونية المستوية البسيطة ..... ٤١٨
١,٣,١٠ الجريان الانسحابي المنتظم ..... ٤١٩
٢,٣,١٠ النبع والبالوعة في المستوي ..... ٤٢١
٣,٣,١٠ الاعصار المستوي ..... ٤٢٤
٤,٣,١٠ نبع وبالوعة بشدة واحدة ، الثنائية المستوية ..... ٤٢٦
٥,٣,١٠ النبع الاعصاري ..... ٤٢٩
٦,٣,١٠ توزع سطحي من الينابيع والبالوعات ..... ٤٤٢
٧,٣,١٠ توزع سطحي اعصاري ..... ٤٤٥
٤,١٠ اسئلة مراجعة وتمارين ..... ٤٤٩

١١ الجريانات الكمونية المتناظرة دورانيا ..... ٤٥٤
١,١١ المعادلات التفاضلية الاساسية للجريانات الكمونية المتناظرة دورانيا ٤٥٥
٢,١١ أمثلة عن الجريانات الكمونية البسيطة المتناظرة دورانيا ..... ٤٥٩
١,٢,١١ الجريان الانسحابي المنتظم المتناظر دورانيا ..... ٤٥٩
٢,٢,١١ النبع النقطي والبالوعة النقطية ..... ٤٦٠
٣,٢,١١ الثنائية النقطية ..... ٤٦٢
٤,٢,١١ توزع خطي من الينابيع أو البالوعات النقطية ..... ٤٦٤
٣,١١ اسئلة مراجعة وتمارين ..... ٤٦٧

# الفصل الخامس

## مسائل الجريان الاساسية وطرق حلها

الصفحة


| | | |
|---|---|---|
| ١٢ | طريقة النقاط الشاذة ..... ..... ..... ..... ..... ..... ..... ..... | ٤٧٢ |
| ١٠١٢ | اسس الطريقة ..... ..... ..... ..... ..... ..... ..... ..... | ٤٧٢ |
| ١٠١٠١٢ | القوى المؤثرة على النقاط الشاذة في جريان انسحابي ..... ..... | ٤٧٣ |
| ٢٠١٠١٢ | التحديد البياني لصورة الجريان الاجمالي الناتج عن تقسيم جريانات كونية ..... ..... ..... ..... ..... ..... ..... ..... | ٤٧٨ |
| ٢،١٢ | دراسة الجريان حول اجسام مستوية ..... ..... ..... ..... ..... | ٤٨٠ |
| ١،٢،١٢ | الجريان حول جسم نصفي ..... ..... ..... ..... ..... ..... | ٤٨٠ |
| ٢،٢،١٢ | الجريان حول اجسام رانكين المستوية ..... ..... ..... ..... | ٤٨٦ |
| ٣،٢،١٢ | الجريان اللاجولاني حول اسطوانية دائرية وحساب كتلتها الهيدروديناميكية ..... ..... ..... ..... ..... ..... ..... ..... | ٤٨٨ |
| ٤،٢،١٢ | الجريان الجولاني حول اسطوانة دائرية وحساب تأثير ماجنوس ..... | ٤٩٤ |
| ٥،٢،١٢ | الجريان حول بروفيل متناظر ( عديم الانحناء ) وقليل السماكة ..... | ٥٠٠ |
| ٦،٢،١٢ | الجريان حول بروفيل جناح حامل قليل الانحناء وعديم السماكة ، طريقة برنباوم ..... ..... ..... ..... ..... ..... ..... | ٥٠٨ |
| ٧،٢،١٢ | الجريان بزاوية ورود حول بروفيل جناح حامل قليل السماكة والانحناء | ٥١٤ |
| ٨،٢،١٢ | الجريان حول بروفيل جناح حامل كبير السماكة والانحناء ..... ..... | ٥٣١ |
| ٩،٢،١٢ | الجريان عبر شبك بروفيلات مستقيم ..... ..... ..... ..... ..... | ٥٣٣ |
| ٣،١٢ | دراسة الجريان حول اجسام متناظرة دورانيا ..... ..... ..... ..... | ٥٤٦ |
| ١،٣،١٢ | الجريان حول جسم نصفي متناظر دورانيا ..... ..... ..... ..... | ٥٤٦ |
| ٢،٣،١٢ | الجريان حول اجسام رانكين المغزلية ..... ..... ..... ..... ..... | ٥٥٠ |
| ٣،٣،١٢ | الجريان حول كرة وحساب كتلتها الهيدروديناميكية ..... ..... ..... | ٥٥٢ |
| ٤،١٢ | اسئلة مراجعة وتمارين ..... ..... ..... ..... ..... ..... ..... | ٥٥٧ |
| ١٣ | طريقة التوابع المركبة لحساب الجريانات الكمونية المستوية ..... | ٥٦٤ |
| ١،١٣ | الاعداد المركبة وتمثيلها ..... ..... ..... ..... ..... ..... | ٥٦٤ |
| ٢،١٣ | تابع الكمون المركب والسرعة المركبة ..... ..... ..... ..... ..... | ٥٦٧ |
| ٣،١٣ | أمثلة عن توابع الكمون المركبة البسيطة ..... ..... ..... ..... ..... | ٥٦٩ |
| ١،٣،١٣ | الجريان الانسحابي المنتظم ..... ..... ..... ..... ..... ..... | ٥٧٠ |
| ٢،٣،١٣ | النبع والبالوعة والاعصار الكموني ..... ..... ..... ..... ..... | ٥٧١ |
| ٣،٣،١٣ | المثانية المستوية والجريان حول اسطوانة ..... ..... ..... ..... | ٥٧٢ |

| | | الصفحة |
|---|---|---|
| ٤,٢,١٣ | الجريان ضمن الفراغ الزاوي لجدارين مستويين | ٥٧٤ |
| ٤,١٣ | قانونا **بلازيوس ـ تشابليجين** لحساب محصلة قوى الضغط وعزمها | ٥٧٦ |
| ٥,١٣ | التمثيل المطابق | ٥٧٩ |
| ١,٥,١٣ | المفاهيم والمبادىء الاساسية لطريقة التمثيل المطابق | ٥٧٩ |
| ٢,٥,١٣ | امثلة عن توابع التمثيل المطابق | ٥٨٥ |
| ١,٢,٥,١٣ | تابع تمثيل **يوكوفسكي** | ٥٨٥ |
| ٢,٢,٥,١٣ | تابع تمثيل **كوتيغ** | ٥٩٧ |
| ٣,٢,٥,١٣ | طريقة الهودوغراف | ٥٩٩ |
| ٦,١٣ | أسئلة مراجعة وتمارين | ٦٠٦ |
| ١٤ | الطريقة البيانية ( الهندسية ) لحساب الجريانات المستوية | ٦١١ |
| ١٥ | الطرق التماثلية | ٦١٧ |
| ١,١٥ | الاسس الفيزيائية والرياضية | ٦١٧ |
| ٢,١٥ | التماثل مع الحقل الكهروديناميكي والكهراطيسي | ٦٢١ |
| ٣,١٥ | التماثل مع الغشاء الصابوني | ٦٢٦ |
| ٤,١٥ | التماثل مع الجريان الزاحف او الرشحي | ٦٣١ |
| ٥,١٥ | التماثل مع الحقل الحراري | ٦٣٣ |
| ٦,١٥ | اسئلة مراجعة وتمارين | ٦٣٣ |
| | فهرس أهم الرموز والأدلة المستخدمة | ٦٣٦ |
| | فهرس المصـــادر | ٦٥٢ |
| | معجم المصطلحات العلميـة | ٦٦٩ |
| | جدول الخطأ والصواب | 14 |


Damascus University


وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University


وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University


وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

# المقدّمة

## ١.١ لمحة تاريخية عن تطور ميكانيك السوائل

إن الاستمرارية الصاعدة التي تتطلبها عملية التطور والنمو للإنسان وللمجتمع وللعلوم أيضاً لاتتحقق فقط بتوجيه الأنظار على الاهداف البعيدة، وانما تحتاج أيضاً إلى رجعة للماضي، يتم فيها تقويم النتائج ودراسة الأساليب والوسائل التي أدت إلى هذه النتائج، وكذلك التعرف على الرواد الأوائل الذين تخطوا بأفكارهم ونتائجهم حدود زمانهم فأصبحوا مثلاً علياً يجتبنا الاقتداء بهم عدم الوقوع فريسة لعطالة الإرتياح الذاتي أو الغرور بنتائجنا. وهذا ماتهدف إليه هذه اللمحة التاريخية المقتضبة عن تطور ميكانيك السوائل.

إن ميكانيك السوائل هو أحد العلوم الأساسية الهندسية، التي انشقت منذ بداية القرن التاسع عشر عن العلوم الأساسية العامة كالفيزياء والكيمياء، لتركز الاهتمام على إيجاد الحلول العملية للمسائل التي تهم تطور التكنيك. وقد مرّ هذا العلم بمراحل مختلفة من التطور والنمو قبل أن يصل إلى المستوى الرفيع الذي يحتله اليوم. وكان طبيعياً خلال هذه المراحل أن تتباين وتيرات التطور وفقاً للمستوى العلمي والتكنيكي، وأن يتبدل أو يختفي العديد من المفاهيم والنظريات والطرق لتحل محلها أخرى أكثر دقة وواقعية.

لنتذكر مثلا أنه حتى أواخر القرن الماضي تقريباً كان يسود الاعتقاد باستحالة طيران الأجسام الأثقل من الهواء! واليوم لايخطر ببال أحدنا ونحن

نطير في طائرة نفاثة حديثة على ارتفاع آلاف الأمتار وبسرعات تجاوزت سرعة الصوت ، أنه فقط منذ حوالي 77 عاماً حاول العالم الألماني **ليلينتال** ( 1848 — 1896 ) O . Lilienthal أن يحذو حذو الطيور فركّب أجنحة اصطناعية وطار لأول مرة بتاريخ 16.8.1894 لمسافة 350 m مبرهناً صحة دراسته الشهيرة : « طيران الطيور كأساس لفن الطيران » ، التي نشرها عام 1889 . واعتبر ذلك في حينه نصراً علمياً كبيراً . كما أنه من الصعب تحديد أوجه الشبه بين عنفة فرنسيس المركبة على سد الفرات العظيم والعنفة التي عرضها **فرنسيس** J. Francis لأول مرة عام 1849 والتي اعتبرت فتحاً جديداً في بناء الآلات الهيدروليكية .

بيد أن عرضاً تاريخياً مقتضباً لتطور ميكانيك السوائل يتجلى بأوضح ما يمكن من خلال تتبع المراحل التي مرّت بها مسألة حساب **المقاومة** Drag لجسم يتحرك في سائل ، وهي المسألة الرئيسية التي كانت جهود الباحثين ، ولا تزال ، منصبة على حلها .

لقد ظهرت أولى المحاولات لصياغة قانون المقاومة في القرن السابع عشر ، حيث تطلبت ذلك ضرورة دراسة السقوط الحر للأجسام ومشكلة النواس الذي كان يستعمل كجهاز للقياس . وكانت تسود وقتئذ ، وحتى نهاية ذلك القرن ، آراء **أرسطو** Aristoteles (384 - 322 b. Ch.) القائلة بأن زمن سقوط الأجسام يتناسب عكساً ووزنها ، أي أن الأجسام الثقيلة تسقط أسرع من الأجسام الخفيفة . ولتفنيد هذا الرأي قام العالم الإيطالي المشهور **غاليليه** G. Galilei (1564 - 1642) في عام 1638 بتجارب عديدة على أجسام مختلفة الوزن أسقطها من برج بيزا ، واستطاع بنتيجتها أن يبرهن لأول مرة في التاريخ أن المقاومة التي تتلقاها الأجسام المتحركة في السوائل تتناسب طرداً مع كثافة السائل ومع سرعة الجسم ، ولكنه لم يقم بالحساب العددي للمقاومة .

وفي أوائل القرن الثامن عشر توصل العالم الإنجليزي **نيوتن** I. Newton (1642 - 1727) نتيجة لتجارب عديدة أجراها على سقوط كرة في سوائل مختلفة إلى إكتشاف القانون الأساسي للمقاومة :

$$F_w = c_w \cdot \rho A V^2 \qquad (1.1)$$

حيث $c_w$ معامل المقاومة ، $\rho$ كثافة السائل ، $A$ مقطع الجسم عمودياً على إتجاه الحركة ، $V$ سرعة الجسم . وهذا يعني أن :

> المقاومة تتناسب طرداً مع كثافة السائل ومساحة مقطعه العمودي على اتجاه الحركة ومع مربع السرعة .

وعلّل **نيوتن** هـذا القانون بمساعدة **نظرية التصادم** ، حيث اعتبر السائل مؤلفاً من جزيئات كتلية غير مرنة تفقد عند اصطدامها بالجسم كامل سرعتها [16] .

في أواسط القرن الثامن عشر استطاع القبطان الإفرنسي **بوردا** Borda عام 1763 أن يؤكد نتيجة تجارب عديدة أجراها على أجسام مختلفة صحة **قانون المقاومة المربع** لنيوتن ، ولكنه رفض تفسيره على أساس نظرية التصادم واضعاً حجر الأساس **للنظرية الهيدروديناميكية للمقاومة** ، التي تعتبر أن المقاومة التي تتلقاها الأجسام المغمورة المتحركة في السوائل تنشأ بسبب قوى الاحتكاك وقوى الضغط . والفرق الجوهري بين النظريتين هو أنه حسب نيوتن فإن مقدمة الجسم فقط تؤثر على المقاومة ، بينما يكون حسب النظرية الهيدروديناميكية لمؤخرة الجسم أيضاً تأثير حاسم على تحديد المقاومة الإجمالية ، كما تؤكد ذلك النظريات والتجارب الحديثة .

في النصف الثاني من القرن الثامن عشر تركزت الأبحاث النظرية على دراسة حركة السوائل غير اللزجة ، وبذلك وضع حجر الأساس **للهيدروديناميك النظري** الذي يفتخر حتى الآن بأسماء مؤسسيه من أمثال

**ليونهارد أويلر** L. Euler (1707 - 1783) ، **دانيال برنولي** D. Bernoulli (1700 - 1783) ، **يوسف لاغرانج** J. Lagrauge (1736 - 1831) وغيرهم فقد نشر أويلر عام 1775 دراسته المشهورة « المبادىء العامة لحركة السوائل » التي استخرج فيها لأول مرة المعادلات التفاضلية الأساسية لحركة السوائل المثالية ، والتي تعرف اليوم باسم : **معادلات أويلر التحريكية** . وهو أول من أدخل مفهوم **الضغط** Pressure فتلاشت بذلك نظرية التصادم لنيوتن . كما ترتبط باسمه المعادلة العنفية الأساسية التي توضح مبدأ نقل القدرة في آلات الجريان . أما برنولي فقد استخرج قانونه المشهور عن العلاقة بين السرعة والضغط والارتفاع المكاني ؛ بينما صاغ لاغرانج نظرية **الجريانات الكمونية** Potential flow ( راجع الفصل الرابع ) .

وخلال القرن التاسع عشر تطور ميكانيك السوائل النظري حتى وصل إلى درجة الكمال تقريباً . فقد صاغ **هلمهولتس** H. Helmholz (1821-1894) نظرية **الحركة الإعصارية** Vortex motion عام 1858 ، التي طورها فيما بعد **يوكفسكي** N. Joukowski (1847 - 1921) في روسيا و**براندل** L. Prandtl ( 1875 - 1953 ) في ألمانيا وأصبحت أساساً **لنظرية الجناح الحامل** Airfoil theory . كما وضع **رانكين** W. Rankine ( 1820 - 1872) عام 1862 **نظرية الينابيع والبالوعات** Theory of sources and sinks التي طبقت فيهما بعد لحساب هياكل السفن والمناطيد وطورت حتى أصبحت اليوم إحدى أهم الطرق الحديثة لميكانيك السوائل المعروفة باسم **طريقة النقاط الشاذة** . وقدم هلمهولتس عام 1873 عملاً إبداعياً عن نظرية التشابه للجريانات Flow Similarity ، الذي لم تكتشف أهميته إلا منذ وقت قريب جداً [43] . واستطاع **أيري** G. Airy (1801 - 1896) صياغة نظرية متكاملة لحركة الأمواج السطحية لاتزال معتمدة حتى وقتنا الحاضر [9] .

ولكن بالرغم من هذا التطور الهائل لميكانيك السوائل النظري فإنه أخفق في حساب مقاومة الأجسام المتحركة أو الضياع في القدرة والضغط للجريان في الأنابيب والأقنية . فقد حاول **دالمبير** (1717–1783) d'Alembert حساب مقاومة الأجسام في جريانات كمونية فحصل على نتيجة مزهلة : المقاومة تساوي الصفر . وهذا ما يعرف **بتناقضة دالمبير** d'Alembert's paradox . وأدرك الباحثون بعد فترة طويلة أن سبب هذه النتيجة المزهلة هو إهمال المعامل الفيزيائي المسؤول عن المقاومة وهو اللزوجة Viscosity ، فحاولوا إدخالها في معادلات الحركة . وتمكن العالم الإفرنسي **نافير** M. Navier (1785 – 1836) عام 1826 بناء على فرضيات فيزيائية متعددة من صياغة المعادلات التحريكية العامة للسوائل اللزجة ، التي اشتقها بدقة عام 1846 العالم الإنجليزي **ستوكس** G. Stokes (1819-1903) . وبالرغم من أن هذه المعادلات التفاضلية غير الخطية المعروفة اليوم باسم **معادلات نافير – ستوكس** ( راجع الفصل السادس ) تشكل الأساس لدراسة حركة السوائل الحقيقية ( اللزجة ) فإن صعوبة حلها بالمقارنة مع معادلات أويلر لم تتح في ذلك الوقت سوى إمكانية تطبيقها على حالات خاصة جداً مثل حساب المقاومة لكرة في جريان بطيء جداً يعرف باسم جريان ستوكس . كذلك لم تسفر المحاولات الجديدة لحساب المقاومة في جريانات غير لزجة عن نتائج مرضية . فقد وضع هلمهولتس عام 1868 و**كرشهوف** G. Kirchhoff (1824 – 1887) عام 1869 أسس نظرية **خطوط التيار الحرة** ؛ وحسب كرشهوف على أساسها المقاومة التي تتلقاها صفيحة عرضانية على اتجاه الجريان فوجد أن معامل المقاومة $c_w = 0{,}88$ بينما التجارب أثبتت أن : $c_w \approx 2{,}0$ [16] .

وكان طبيعياً أمام هذا الواقع ألا تحظى نتائج الهيدرودينامیك النظري

إلا بأهمية تطبيقية ضئيلة وخاصة عند المهندسين الذين اضطروا لتطوير فرع خاص بهم أطلقوا عليه **الهيدروليك** ، يعتمد في الدرجة الأولى على القيام بتجارب كثيرة وحصر نتائجها في قوانين تجريبية أو نصف تجريبية صالحة للتطبيق العملي . واستدعت عملية التطور هذه إنشاء وتطوير المنشآت والطرق التجريبية وأجهزة القياس ، وبذلك أرسيت دعائم ميكانيك السوائل التجريبي . ولعبت الأقنية الهوائية Wind tunnel لدراسة وقياس القوى المؤثرة على جسم في تيار هوائي دوراً هاماً في هذا المضمار ، لا يزال قائماً حتى الآن . إن أول قناة هوائية بنيت في روسيا عام 1890 من قبل **زيولكوفسكي** (1857-1935) K Ziolkowski ، الذي لقب فيما بعد بأبي الصواريخ ، وبنيت في نفس العام قناة في الدانمرك ، وأخرى في فرنسا عام 1896 وفي إنجلترا عام 1899 .

ولمعت في مجال الهيدروليك أسماء كثيرة منها : **بوازيل** J. Poiseuille (1799 – 1869) في فرنسا ، **هاجن** G. Hagen (1797 – 1884) في ألمانيا ، **رينولدز** O. Reynolds (1842 – 1912) في إنجلترا ، الذين يرتبط بأسمائهم اكتشاف نوعين من الجريانات : **الصفائحي والمضطرب** Laminar and turbulent . فقد استطاع هاجن وبوازيل حساب الخسارة في قدرة الجريان الصفائحي في الأنابيب ، بينما يعتبر رينولدز مؤسس نظرية الاضطراب Turbulence theory التي لا تزال تتوسع وتتعمق وتقدم مادة لا تنضب للبحث العلمي حتى وقتنا الحاضر . أما **بتروف** N. Petrow (1836-1920) في روسيا فقد وضع أسس **النظرية الهيدروديناميكية للتزييت** ( راجع الفصل السادس ) .

في أواخر القرن التاسع عشر وبسبب الاختلاف الجوهري من حيث الطريقة والهدف بين الهيدروديناميك النظري والهيدروليك فقد انشطر

ميكانيك السوائل إلى هذين الفرعين شبه المستقلين عن بعضهما ، مما أثر على تطويره جداً . ويعود الفضل الأكبر لإعادة توحيد هذين الفرعين في مطلع هذا القرن للعالم الألماني الفذ **لودفيج براندل** الذي جمع بين دقة نادرة في الملاحظة وقدرة فائقة للتجريد الرياضي ، وبذلك استطاع عام 1904 اكتشاف **نظرية الطبقة الحدية** Boundary - layer theory ، التي فتحت وبصورة مفاجئة باب الولوج لمسائل ، منها مسألة المقاومة ، كان من المؤكد أنها مستحيلة الحل بالطرق التجريبية البحتة أو الرياضية الصرفة . كما مهدت الطريق للمعالجة العددية لبعض الحقول المجاورة لميكانيك السوائل مثل النقل الحراري والمادي بواسطة الجريانات . ولذا فإن « تاريخ اكتشافها يعتبر عن حق تاريخ ميلاد ميكانيك السوائل الحديث » [64] .

لقد أسس براندل مدرسة جديدة للبحث العلمي تعتمد على ضرورة الربط الوثيق بين النظرية والتجربة . فالوضوح النظري يحدد البرنامج التجريبي بما هو ضروري وملح ويوجهه في الاتجاه الذي نتوقع الحصول منه على أجوبة للاستفسارات النظرية ، ونتأكد بالتجربة مدى صحة ومطابقة نتائجها النظرية مع الواقع . ولقد رسخ تلاميذ براندل من أمثال **بيتس** A. Betz ، **شلشتنج** H. Schlichting ، **نيكورادسي** J. Nikuradse ، وزملاؤه من أمثال **فون كرمان** Th. v. Kármán دعائم هذه المدرسة حتى أصبحت طريقتها هي الأسلوب المعتمد حالياً في كافة فروع البحث العلمي . واستطاع براندل نفسه بمساعدة بعض التجارب الأساسية القليلة المبنية على أساس نظري التوصل إلى نتائج حاسمة نذكر منها على سبيل العد لا الحصر : نظرية الجناح الحامل ، نظرية الجريانات تحت وفوق الصوتية ، نظرية الاضطراب وغيرها . ويكفي لتبيان الأهمية المتصاعدة لنظرية الطبقة الحدية أن نذكر أنه في العشر سنوات الأولى من اكتشافها كان معدل عدد الأبحاث التي تناولتها

بحثاً واحداً في العام ، بينما بلغ هذا المعدل 120 بحثاً عام 1954 [64] ، وهو يتجاوز اليوم ذلك الرقم بكثير .

بعد هذه اللمحة التاريخية المقتضبة يجدر بنا أن نتساءل : أين أصبح موقع ميكانيك السوائل الحديث من بقية العلوم الأخرى ، وما هي أهم تطبيقاته وطرقه التي تهم المهندس الميكانيكي بشكل عام والمختص بشكل خاص ، وكيف يتمكن الطالب أو المبتدي من دراسته وفهم قوانينه ؟

## ١ . ٢ ميكانيك السوائل التكنيكي ، تطبيقاته وطرق بحثه ودراسته

إذا كان الميكانيك العام يعالج في الماضي بشكل متكامل مسائل توازن وحركة المادة بحالاتها الثلاثة : الصلبة والمائعة والغازية ، أنظر مثلا [67] ، فإن التطور الكبير لهذا العلم خلال قرننا الحالي قد أدى إلى تقسيمه لعلمين مستقلين تقريباً هما :

**ميكانيك الجسم الصلب** : ويدرس حالة المادة الصلبة على أساس التعويض عن الكتل بنقاط مادية ويكتفي أحياناً بدراسة نقطة واحدة فقط ؛ ولهذا سمي أيضاً ميكانيك النقاط المادية Mechanics of point particles .

**ميكانيك السوائل** : ويدرس المادة في حالتيها المائعة والغازية على أساس أنها مؤلفة من جزيئات مادية موزعة في الحالة العامة بانتظام وبشكل مستمر ، ولهذا سمي أيضاً ميكانيك الوسط المستمر Mechanics of continuum .

وتضاف صفة « **تكنيكي** » أو « **تطبيقي** » لكل منهما إذا كانت الموضوعات موجهة بصورة أساسية للتطبيقات الهندسية .

وتتضح من هذا حقيقتان : الأولى أن موضوعات ميكانيك السوائل متشعبة ومتعددة ، ربما تعبر عنها كلمة **هيراقليد** Heraklit (544 - 483 b.Ch)

المشهورة : « Panta rhei » أي « كل ما يجري » ؛ والثانية أن القوانين الأساسية للميكانيك العام المعروفة في أقسامه الرئيسية : التوازن ، الحركة والتحريك ، التي تعالج سلوكية المادة : تبقى محافظة على صحتها تماماً في ميكانيك السوائل . فمثلاً ينطبق على كل جزيئة سائلية القانون الأساسي للتحريك : القوة = الكتلة × التسارع . ولكن لابد من التحذير ، خاصة بالنسبة للمبتدىء وغير المختص ، من محاولة التطبيق الأعمى لقوانين ميكانيك الجسم الصلب على الأجسام السائلة ، وخاصة في حالة الجريان . إذ أنه لو كان الأمر كذلك لفقد ميكانيك السوائل صفته كعلم مستقل .

وبالرغم من أن ميكانيك السوائل التكنيكي يبقى فرعاً من الميكانيك العام ، إلا أن التطور الهائل الذي أصابه في السنوات الأخيرة جعله يتخطى حدوده الأصلية ويتداخل في علوم غير ميكانيكية في الأصل مثل : الترموديناميك Thermodynamics ، الكيمياء الحركية Chemical Kinetics التي تدرس تفاصيل التفاعلات الكيميائية ، فيزياء البلازما Plasma Physics وغيرها [12] ، مما أدى إلى نشوء فروع اختصاصية جديدة لميكانيك السوائل ( راجع ٣.١ ) .

ولقد ازدادت أهمية ميكانيك السوائل التكنيكي بسبب تداخله في فروع علمية وتكنيكية متعددة ومختلفة فأصبح يمثل بالنسبة لتدريس هذه الفروع علماً أساسياً ، وبالنسبة لأبحاثها العلمية علماً مساعداً لا غنى عنه .

وتتجلى أهمية ميكانيك السوائل التكنيكي بالنسبة للمهندس بالسؤال المباشر أو غير المباشر عن إمكانية شحن السوائل بالقدرة وتحويلها لأنواع أخرى أو نقلها أو تخزينها . ولأخذ فكرة بسيطة عن هذه الإمكانية فإننا نذكر أن هناك :

١ — سوائل تنقل القدرة الميكانيكية وتستغل إما بشكل مباشر كما في مثال النقل الهيدروليكي أو الهوائي Hydraulic and pneumatic transport أو غير مباشر كما في مثال آلات الجريان ( العنفات والمضخات) Turbomachinery .

٢ — سوائل تنقل القدرة الحرارية وذلك إما في جريانات حرة كما في مثال الجريان حول سطوح باردة أو ساخنة ، أو في جريانات قسرية كما في مثال الجريان في نواقل حرارية ( التدفئة المركزية ! ) .

٣ — سوائل تخزن القدرة الكيميائية كما في مثال مواد الاحتراق المائعة والغازية .

٤ — سوائل ناقلة أو موصلة للقدرة الميكانيكية كما في مثال إنتشار الموجات للضغط العالي أو المنخفض ، أو الناتجة عن الانفجارات أو الموجات المائية .

٥ — سوائل لاتُستغل قدرتها كما في مثال الهواء الجوي ، جريان المياه الجوفية ، الجريان الرشحي والجريان عبر المصافي .

وفي مجال الهندسة الميكانيكية ، التي تهمنا بصورة خاصة ، فإن تطبيقات ميكانيك السوائل متعددة ومختلفة ، لأن العديد من العمليات التي تحدث في الآلة تتأثر بشكل أساسي بجريان السوائل . ففي **بناء الطائرات** يسعى المصمم لإعطائها شكلا مناسباً بحيث تكون قوة الرفع Lift المتولدة أعظمية والمقاومة أصغرية . وفي بناء **آلات الجريان** ، وسواء كانت آلات عمل كالمضخات والضواغط أو آلات قوة كالعنفات ، وسواء كان السائل هواء أو غازاً أوماء ، فإن مردود عملية تحويل القدرة التي يحملها التيار الجاري في الآلة يتأثر بصورة حاسمة بشكل ريش الدولاب الدائر Impeller ودولاب التوجيه Guide wheel ، وكذلك بشكل المغلف Casing . وفي مجال **نقل الموائع والغازات** كالنفط ومياه الشرب والغاز الطبيعي عبر أنابيب تصل اليوم بين قارات

بأكملها وكذلك بالنسبة لشبكات توزيعها فإن المهم تصميم هذه الأنابيب ومتمماتها من أكواع وتفريعات وصمامات وغيرها بحيث تكون القدرة الضائعة أصغرية . كما تزاداد أهمية النظرية الهيدروديناميكية والهيدروستاتيكية لتزييت المضاجع الانزلاقية Bearing lubrication مع الازدياد المضطرد لسرعة دوران الآلات من محركات انفجارية وآلات تشغيل وعنفات . وتبرز ضرورة السعي لإيجاد التصميم الأفضلي لهذه المضاجع من حقيقة أن القدرة الضائعة بالاحتكاك في مضجع عنفة غازية يصل إلى مئات الكيلو واطات [72] ، [73] .

بالنسبة **لمحطات القوى** البخارية أو الغازية فإن مردود تحويل القدرة الحرارية إلى ميكانيكية يتأثر لدرجة كبيرة بعمليات الاضطراب أثناء احتراق مادة الوقود وامتزاجها بالهواء [69] . ويكتسب هذا الموضوع أهمية كبرى في صناعة المحركات الانفجارية لعلاقته المباشرة بتقليل استهلاك الوقود [68] .

كذلك تزداد أهمية دراسة **الجريانات المتعددة الطور** ، التي تستخدم فيها قدرة السائل لنقل أو فصل مواد صلبة ، كما هو الحال في عمليات التجريف الهيدروليكي ، وتفريغ وشحن الحبوب وتنقية هواء المصانع من الغبار .

ويبدو للوهلة الأولى أن هذه الأمثلة القليلة من تطبيقات ميكانيك السوائل متباينة لارابط بينها ، وبالتالي فإن دراسة هذا العلم يحتاج لسنوات طويلة ، أو أنه ليس بالمستطاع خلال فترة زمنية محددة سوى الحصول على معلومات وافرة ولكن سطحية . والحقيقة أن هذا الاستنتاج خاطيء ، لأن كافة هذه التطبيقات تخضع لعدد قليل من القوانين الأساسية . وسنرى من خلال دراستنا أن كافة عمليات وظواهر الجريان المعقدة التي تدخل

في تطبيقات ميكانيك السوائل المختلفة تقوم على أسس عامة تجمع بينها ، أي أنه بالإمكان إرجاع هذه العمليات والظواهر المعقدة إلى عمليات بسيطة أولية Elementary processes وإيجاد الصياغة الرياضية لمعادلاتها ومن ثم حساب القوى والعزوم المؤثرة . وتتجلى هذه الحقيقة باستخدام **أشكال أساسية** للأجسام في آلات مختلفة ، كما تتجلى أيضاً في **طبيعة الجريان** حول أجسام مختلفة . فليس من الصعب التأكد أن بروفيل Profile جناح الطائرة لايختلف بشيء يذكر عن بروفيل ريشة الدولاب الدائر أو الثابت لعنفة أو مضخة أومروحة . وبالتالي فإننا نستفيد من نظرية الجناح الحامل بهدف حساب القوى والعزوم الناتجة عن الجريان حول الجناح في مجالات تطبيقية تبدو متباينة مثل بناء الطائرات وآلات الجريان . ومن جهة أخرى فإن طبيعة الجريان حول أجسام مختلفة هي واحدة تقريباً . فحول الجسم تتشكل طبقة حدية لا يمكن فيها اهمال قوى الاحتكاك وتتزايد فيها السرعة من الصفر على سطح الجسم وحتى قيمة معينة . وخارج هذه الطبقة يسود جريان مثالي عديم الاحتكاك . وقد أثبتت الأبحاث النظرية والتجريبية أن توزع السرعة Velocity profile في الطبقة الحدية يتعلق بالدرجة الأولى بتدرج الضغط باتجاه الجريان وليس بشكل الجسم . وبالتالي فإنه يمكن من معرفة توزع السرعة الحصول على معطيات هامة عن قوى الإحتكاك والمقاومة التي يتعرض لها الجسم .

لنأخذ مثالاً آخراً يتعلق **بنشوء الاضطراب والأعاصير** ، أخذ يكتسب في الآونة الأخيرة أهمية متزايدة . ففي الفضاء الجوي توجد أعاصير تبلغ أقطارها عدة آلاف من الكيلومترات وتؤثر كمناطق ضغط منخفض بشكل حاسم على حالة الطقس . بينما تبقى أقطار الأعاصير المتشكلة في الطبقة الحدية حول الأجسام أو في الأقنية في حدود 1—100 mm . إن

هذه الأعاصير تستهلك دائماً قدرة ، وأحياناً تكون قدرتها ذات قوة تدميرية هائلة تؤدي إلى كوارث قومية كما في حالة الأعاصير الاستوائية . ولكن طبيعة تشكل هذه الأعاصير وشكلها الخارجي متشابهة في كافة الحالات ، ولذلك فإن دراسة العمليات الأساسية لتشكلها سيقود إلى إمكانية التحكم بمسارها بهدف تقليل أضرارها بالنسبة لحالة الطقس أو الضياع في القدرة أو حتى الاستفادة منها في عمليات المزج والنقل الحراري والاحتراق .

ويستخدم ميكانيك السوائل في حل المسائل المتعددة المطروحة عليه طرقاً متطورة حسابية وتجريبية . وقد ساعد انتشار مراكز الحاسبات الإلكترونية على تحرير طاقة كبيرة للمهندسين والباحثين ، كانت تهدر سابقاً في زمن المساطر والحاسبات العادية من أجل تسطير قوائم عددية طويلة جداً ، فأصبحت توجه اليوم للبحث العلمي والعمل الهندسي المبدع من أجل حل المسائل الأساسية للجريان . كما أن إدخال عناصر القياس الإلكترونية واستخدام الحاسبات العددية قد زاد من دقة القياس وسهل جداً التقويم العددي للنتائج القياسية .

على أساس ماسبق بنيت الطريقة الحديثة لدراسة وتدريس ميكانيك السوائل التكنيكي والتي تتضمن في جوهرها التركيز على الفهم العميق للأسس والنواظم الفيزيائية العامة التي تجمع بين التطبيقات المختلفة . فالطالب يتمرن على استخدام أساليب البحث العلمي ، وينمي باستمرار ملكة تفكيره ، بحيث يتعلم كيف يصل من ملاحظة الظواهر إلى التجريد وصياغة العلاقة الرياضية ، ومن ثم إيجاد الحل المسبق للمسألة المطروحة بتطبيق الطرق الحسابية والتأكد من النتائج بإجراء تجارب معقولة . إن هذا

النهج سيجعل مهندس المستقبل قادراً عل التفكير المستقل والإبداع وبالتالي مؤهلا ليس فقط لدراسة وحساب نماذج الآلات التي مرت معه أثناء دراسته ، وإنما لتطوير هذه الآلات وابتكار نماذج وطرائق جديدة . ويتبين من ذلك أن دور المدرس هو أبعد مايكون عن تلقين المعلومات الجاهزة لطلابه . إن هذا الدور تحدده كلمة الفيلسوف الألماني كانت (1804 - 1724) I. Kant التي قدم بها إحدى محاضراته : « إن ما ينتظر من المعلم هو أن يربي في مستمعيه أولا الإنسان المتفهم وبعدها العاقل وأخيراً العالم . وميزة هذه الطريقة هي أنه عندما لايتاح للطالب الوصول للمرحلة الأخيرة ، كما يحدث عامة ، فإنه يكون قد استفاد من الإرشادات ، وإذا لم يكن ذلك من أجل المدرسة فحتماً من أجل الحياة ، لأنه سيصبح أكثر تمرناً وذكاء . أما إذا عكست هذه الطريقة فإن التلميذ سيتلقى نوعاً من التعقل قبل أن يتكوّن فهمه ، ويحمل علماً مستعاراً ملصوقاً عليه وغير نامٍ فيه ، بينما قدرته الذاتية لاتزال غير مثمرة كالسابق ، ولكن بنفس الوقت ، وبدافع جنون الحكمة ، يكون قد أصبح أكثر فساداً » .

## ٣٠١ تبويب ميكانيك السوائل وفروعه

إن لميكانيك السوائل ، كما لكل فرع علمي آخر ، طرقاً مميزة ولغة مشتركة تقريباً يتكلم ويكتب بها مئاوه متبعين في إختيار وعرض المواضيع مبدأ معيناً في التبويب والمعالجة . هذا المبدأ يجب أن يكون مبنياً على أساس أنه خلال التعمق المضطرد في المادة العلمية يمكن دائماً الاستفادة مما سبق تعلمه في فهم وتطبيق الجديد منها [12] .

توجد كتب كثيرة عن ميكانيك السوائل تنبيء عناوينها باتجاهات تطوره وفروعه التي يمكن تصنيفها وفق الأسس التالية :

آ ـ **الموضوع وطريقة المعالجة** : وهنا نميز بين اتجاهين رئيسيين الأول يهتم بالناحية **النظرية** ، ويعتمد على قسط كبير من الرياضيات العالية ويركز على سوق البراهين الرياضية الدقيقة والإشتقاقات المعقدة للعلاقات والقوانين المعلقة بمسائل الجريان ، ويطلق عليه الهيدروميكانيك النظري [1] أو الهيدروديناميك النظري [2] أو الإيروديناميك النظري [3] . والثاني يهتم بالناحية **الهندسية التطبيقية** ، ويكتفي بعلاقات رياضية بسيطة نسبياً من أجل استخراج قوانين جاهزة للإستخدام العملي والوصول لحلول تقريبية ذات دقة كافية لمسائل الجريان التي تدخل في تطبيقاته ، وذلك بمراعاة الظواهر والتأثيرات الثانوية على الجريان الأساسي بإدخال **معاملات أو توابع تصحيح** يتم تحديدها نظرياً أو تجريبياً . ويبرز هذا الاتجاه في عناوين الكتب المختلفة التي يركز كل منها على ناحية تطبيقية معينة مثل ميكانيك السوائل التطبيقي [ $7, 7_a$ ] ، ميكانيك السوائل التكنيكي [8] ، الهيدرو ـ والإيروميكانيك التكنيكي [9] ، ميكانيك السوائل مع تطبيقات هندسية [10] ، [11] ، ميكانيك السوائل العملي [15] وحديثاً جداً تكنيك الجريان Flow technique [12 , 13 , 14] ، حيث يقصد بكلمة « تكنيك » علم تطبيقي .

لقد تبلور هذان الاتجاهان بوضوح في السنوات الأخيرة بحيث أنه بعد الثلاثينيات قلما صدر كتاب لم تلحق بعنوانه صفة تنبه عن هوية إتجاهه [ $4_a$ ] [ 4 ] [6] . ومع هذا فهما مرتبطان بوثوق مع بعضهما ، ذلك أن ميكانيك السوائل التكنيكي يعتمد على المعلومات والحلول النظرية لميكانيك السوائل النظري ، الذي يتلقى بدوره من الأول مواضيع أبحاثه المثيرة التي يطرحها الواقع العملي .

ب ـ **حالة الوسط السائلي وسلوكيته** : لقد درجت على هذا الأساس

إنطلاقاً من كون الوسط السائل مائعاً أو غازاً ، في حالة سكون أو حركة ، تسمية الفروع التالية لميكانيك السوائل :

**الهيدروستاتك :** ويدرس توازن الماء والموائع الأخرى في حالة السكون [5] .

**الهيدروكينيماتك :** ويدرس الحركة البحتة للماء والموائع الأخرى .

**الهيدروديناميك :** ويدرس تحريك الماء والموائع الأخرى أي توازن القوى والعزوم في حالة الجريان .

**الهيدروليك :** وهو قسم من الهيدروديناميك يعالج مسائل الجريان وحيدة البعد ، كما هو الحال في الأنابيب والأقنية [19 , 20 , 21 , 22] .

**الأيروستاتك :** ويدرس بصورة أساسية توازن الهواء الجوي [5]

**الأيروكينيماتك :** ويدرس الحركة البحتة للهواء والغازات الأخرى .

**الأيروديناميك :** ويدرس تحريك الهواء حتى سرعات أقل من سرعة الصوت ، أي حتى تغيرات متوسطة للكثافة ، ويعتبر أساساً لعلم الطيران [17] [18] ، وآلات الجريان الحديثة [25] .

**الغازديناميك :** ويدرس تحريك الهواء والغازات الأخرى عند سرعات قريبة وأكبر من سرعة الصوت ، أي عندما يكون تغيير الكثافة كبيراً وكبيراً جداً [23] [24] .

**جـ ــ تداخل ميكانيك السوائل مع فروع علمية أخرى .** وقد أدى هذا التداخل إلى نشوء فروع اختصاصية منها مثلا :

**ميكانيك السوائل الحراري :** وفيه يتم ربط قوانين الترموديناميك والأيروديناميك مع بعضها .

**ميكانيك السوائل الكهراطيسي :** وفيه تدرس الجريانات في البلازما ،

التي هي عبارة عن سائل عالي التأين High ionized fluid نتيجة تطبيق حقول مغناطيسية و كهربائية . وحسب مايكون السائل مائعاً أو غازاً يطلق على هـذا الفرع الهيدرو ديناميك المغناطيسي Magnetohydrodynamics (MHD) أو الغاز ديناميك المغناطيسي Magnetogasdynamics (MGD) . وقد تركزت في الآونة الأخيرة الأبحاث في هذا المجال على المولد الهيدرو ديناميكي – المغناطيسي MHD - Generator والكهربائي EHD-Generator لأنهما يفتحان آفاقاً جديدة لتوليد القدرة الكهربائية من القدرة الحرارية للبلازما مباشرة وبدون أجزاء آلية متحركة [70] [74] .

لقد انحدر ميكانيك السوائل من الميكانيك العام ، ولايزال البعض يعتبره جزءاً منه . ولذلك يبدو منطقيا مما سبق أن تحافظ تسمية الأقسام الرئيسية لهذا العلم الكلاسيكي وهي : التوازن ( الستاتك Statics ) ، الحركة (الكينيماتك Kinematics ) والتحريك ( الديناميك Dynamics ) على دلالتها كاملة في ميكانيك السوائل ، وأن يعتمد عليها التبويب الرئيسي لمادته العلمية في كافة الفروع . كما يشير ربط هذه المفاهيم بكلمتي « هيدرو » و « أيرو » المشتقتين من الكلمتين اليونانيتين «hydor» وتعني «ماء» و «aër» وتعني « هواء » إلى تبويب فرعي ينطلق من كون الماء والهواء ممثلين رمزيين للحالة المائعة والغازية ، ويبرز في نفس الوقت أهميتهما العملية . ولكن هذا التبويب يطمس في الواقع حقيقة أن الهواء مثلا حتى سرعات تعادل ثلث سرعة الصوت ( حوالي 100 m/s ) يمكن اعتباره عملياً كالماء سائلا غير قابل للانضغاط .

إن الكتاب الذي نقدمه مكتوب بالدرجة الأولى لطلاب الهندسة الميكانيكية ، كما يدل على ذلك عنوانه . وسنعتمد في تبويبه الأساسي على سلوكية الوسط السائلي ، وفي تبويبه الفرعي على بعض الصفات الفيزيائية ـ

الميكانيكية للسوائل ، مع اعتبار أن كلمة « سائل » تشمل الحالة المائعة والغازية والتمييز بين سائل قابل وغير قابل للانضغاط . كما كان السعي عند اختيار الموضوعات العلمية مركزاً على ما هو أساسي ونموذجي منها ، وبحيث تبرز عند معالجتها العلاقات والقوانين الأساسية التي تعتمد عليها التطبيقات الهندسية المختلفة ، مع الابتعاد قدر الإمكان عن سرد المعلومات بشكل قاموسي وتقديم « روشيتات » جاهزة . ومن منطلق أن العمل التصميمي الهندسي يستخدم أولا الطرق البسيطة ومن ثم الطرق الأكثر تعقيداً ، فقد رتبت الموضوعات العلمية بحيث عولجت أولاً الجريانات البسيطة وحيدة البعد ومن بعدها الجريانات ثنائية وثلاثية البعد ؛ كما مهدت دراسة الجريانات عديمة الاحتكاك لدراسة الجريانات الحقيقية .

## ٤.١ مدخل الى علم القيم والجمل القياسية

إن العلاقات والقوانين التي يستخدمها ميكانيك السوائل هي علاقات بين قيم فيزيائية ، أي قيم يمكن قياسها والتعبير عنها بقيم وواحدات قياس . والمهندس ، بطبيعة الحال ، لايكتفي بالحصول على علاقات عامة فقط واقتراح الحلول النوعية للمسائل التي يعالجها ، وإنما عليه ، وهو في مرحلة التصميم إجراء الحسابات الضرورية وتسجيل نتائجها على مخططاته بشكل أرقام صلدة تمثل أبعاداً معينة .

إن التعرف على طبيعة العلاقات بين القيم الفيزيائية والعددية وواحدات القياس وعلى أسس تكوين الجمل القياسية المتعددة سيساعد حتماً على تجنب الأخطاء الحسابية ، التي يقع بها الطالب عادة وحتى المهندس الذي اعتاد على استخدام واحدات قياس معينة ، ويبرر أيضاً الضرورة التي أدت لإدخال جملة واحدات القياس العالمية .

## ١.٤.١ القيم الفيزيائية والعددية وواحدات القياس ومعاييرها

للتعبير عن جوهر المسائل والظواهر الفيزيائية تستخدم مفاهيم عامة مجردة مناسبة مثل الطول ، الكتلة ، الزمن ، درجة الحرارة وغيرها ، كل منها يمثل نوعاً معيناً من القيم الفيزيائية بدون أية صفة عددية :

| نوع القيمة الفيزيائية هو تعبير كيفي عام عن مضمون فيزيائي معين |
|---|

بينما يمثل مقدار القيمة الفيزيائية أو اختصاراً **القيمة** ، تعبيراً كيفياً وكمياً معيناً لموضوع فيزيائي أو رياضي . ويكون حسب [36] [38] [39] :

| القيمة = القيمة العددية ( أو عدد القياس ) × واحدة القياس |
|---|

(1.2)

إن القيم التالية :

الإحداثي $x = 3\ dm$ ؛ نصف القطر $r = 52\ mm$ ؛ ارتفاع سحب المضخة $h = 6\ m$ تمثل مقادير مختلفة لنفس نوع القيمة الفيزيائية ، وهو « الطول » . بينما تتبع القيم التالية : الوزن $F_G = 6\ kp$ ؛ المسافة $s = 3\ m$ ؛ المدة $t = 20\ h$ لأنواع قيم فيزيائية مختلفة هي : « القوة » ؛ « الطول » ؛ « الزمن » .

يستخدم علم القيم ، مثل الجبر ، لغة الرموز الحرفية لتمييز القيم الفيزيائية واختصار الصياغة الرياضية للمعادلات . فإذا رمزنا بـ C لقيمة ما فإن الصياغة الرياضية للعلاقة (1.2) تصبح حسب [36] [38] [39] :

$$C = \{G\}\,[G] \qquad (1.3)$$

حيث حصرت القيمة العددية ضمن قوسين كبيرين وواحدة القياس ضمن قوسين متوسطين . ويمكن لهذه العلاقة أن تمثل قيمة عامة أو خاصة

حسب ماتكون القيمة العددية وواحدة القياس غير محددتين أومحددتين كما في المثالين التاليين :

$r = 52\,mm$ ⇐ نوع القيمة : الطول ؛ القيمة العددية : $\{r\} = 52$ ؛ واحدة القياس : $[r] = mm$

$F_G = 6\,kp$ ⇐ نوع القيمة : القوة ؛ القيمة العددية : $\{F_G\} = 6$ ؛ واحدة القياس : $[F_G] = kp$ .

إن القيمة العددية ، كما يتضح من (1.3) ، ليست إلا العدد الناتج من مقارنة القيمة الفيزيائية مع واحدة القياس لنفس نوع القيمة ، بينما تمثل واحدة القياس قيمة عددية $\{G\} = 1$ ثابتة يمكن اختيارها اعتباطياً بالنسبة لكل نوع قيمة . فواحدة قياس الطول يمكن أن تكون الميليمتر [mm] أو السنتيمتر [cm] ، وواحدة قياس القوة الكيلوبوند [kp] أو النيوتن [N] ، وواحدة قياس الزمن الثانية [s] أو الساعة [h] .

إن الفيزياء الحديثة تستخدم اليوم مايزيد عن 40 إلى 50 نوعاً مختلفاً من القيم الفيزيائية بغض النظر عن ثوابت المادة المختلفة والمتعددة جداً [36] . وهذا ناتج عن تعدد واختلاف المسائل والظواهر الفيزيائية الإفرادية التي نتعرض لها والتي يؤثر على كل منها نوعان أو أكثر من القيم الفيزيائية التي ترتبط بعلاقات وقوانين تعبر عن جوهر الظاهرة ، وتسمى **معادلات القيم الفيزيائية** . فإذا نظرنا إلى هذه المعادلات والقوانين كعلاقات مستقلة عن بعضها فإن تصنيفها يبدو من باب المستحيل . وفي الحقيقة فإن كافة القوانين الفيزيائية الإفرادية ترتكز بشكل أساسي على **مبدأ السببية** Causality principle ، بمعنى أن نفس الأسباب تؤدي إلى نفس النتائج وبالعكس ، وبالإمكان ارجاعها إلى عدد قليل جداً من **القوانين الفيزيائية الأساسية** أو **القوانين الطبيعية** التي تتميز في الحالة العامة بصياغتها

الرياضية البسيطة [36] . فمثلاً معادلات **ماكسويل** J. Maxwell (1831–1879) تعبر بشكل مركز عن كل ما يتعلق بالظواهر الكهربائية والمغناطيسية ، و**قانون التحريك الأساسي** لنيوتن يعبر عن العلاقة العامة بين القوة والكتلة والتسارع .

نستنتج مما سبق أن كافة أنواع القيم الفيزيائية يمكن أيضاً إرجاعها إلى عدد قليل ومحدد من **أنواع القيم الفيزيائية الأساسية** المستقلة . ويتحدد عدد هذه الأنواع K بالنسبة لظاهرة معينة من العدد الإجمالي M لأنواع القيم الفيزيائية التي تتعلق بها الظاهرة وعدد المعادلات المستقلة N التي تخضع لها الظاهرة بموجب القوانين الفيزيائية ، حيث يكون [14] :

$$K = M - N \qquad (1.4)$$

فاذا فرضنا مثلا أن ظاهرة فيزيائية تخضع للمعادلتين :

$$F = m\frac{V}{t} \quad ; \quad V = \frac{s}{t} \qquad (1.5)$$

فإن أنواع القيم المؤثرة هي : القوة F ، الكتلة m ، السرعة V ، الزمن t ، والمسافة s ، وبالتالي يكون : $K = 3 \; ; \; N = 2 \; ; \; M = 5$ . وهذا العدد يكفي بالنسبة لكامل حقل الميكانيك .

إن اختيار أنواع القيم الأساسية يمكن أن يتم بشكل اعتباطي . ولكن من الأنسب أن يتم اختيارها بحيث يتحقق الشرطان التاليان [14] :

١ – يجب أن يكون ممكناً الحصول على تصور كيفي واضح عن أنواع القيم الأساسية .

٢ – يجب أن تكون هناك طريقة معروفة تسمح بإجراء مقارنة كمية بين مقداري قيمتين أساسيتين من نفس النوع .

وبعد تثبيت أنواع القيم الأساسية فإن بقية الأنواع يتم اشتقاقها بمساعدة

معادلات التعريف Definition equations والتناسب Proportionalities وتسمى **أنواع القيم المشتقة** [ 39] . ويتضمن الجدول (١.١) قائمة بأهم هذه المعادلات .

إن معادلات التعريف لاتتضمن معارف فيزيائية جديدة ، ولكنها تعرّف أنواع قيم جديدة بدلالة أنواع معروفة . فالسرعة مثلا تعرّف بدلالة المسافة المقطوعة ( نوع القيمة الطول ! ) والمدة التي استغرقها قطعها ( نوع القيمة الزمن ! ) . وباستثناء نوع القيمة المراد تعريفه (اشتقاقه) فإن كافة أنواع القيم الأخرى في معادلة التعريف تكون معلومة .

بالمقابل فإن معادلات التناسب هي التعبير الرياضي لقوانين طبيعية يتم الحصول عليها أو التأكد منها بواسطة التجربة ، ويمثل معامل التناسب دائماً **ثابتة مادة** ، يتم تعريفها بمساعدة أنواع القيم المعلومة الداخلة في المعادلة . فمثلا يمثل معامل التناسب بين إجهاد القص $\tau$ وتدرج السرعة ناظمياً على السطح $\partial v/\partial n$ في قانون نيوتن البسيط لاحتكاك السوائل ثابتة مادية يطلق عليها **اللزوجة التحريكية** ( راجع ٢.٢ ) .

إن التمييز بين أنواع قيم أساسية ومشتقة ينطبق أيضاً ، حسب (1.3) ، على القيم وواحدات القياس . فإذا فرضنا ، في الحالة العامة ، أن القيمة G ترتبط مع القيم $G_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ بعلاقة جدائية من الشكل :

$$G = a\, G_1^{\alpha}\, G_2^{\beta}\, G_3^{\gamma} \ldots \quad , \qquad (1.6)$$

حيث a معامل عددي يمكن أن يكون ذا طبيعة فيزيائية أو هندسية ، فيمكن حسب ( 1.3 ) كتابة كل قيمة كجداء للقيمة العددية في واحدة القياس ، وبالتالي ينتج :

$$\{G\}[G] = a\, \{G_1\}^{\alpha}[G_1]^{\alpha} \cdot \{G_2\}^{\beta}[G_2]^{\beta} \cdot \{G_3\}^{\gamma}[G_3]^{\gamma} \ldots \qquad (1.7)$$

الجدول ١.١ : قائمة بأهم معادلات التعريف والتناسب للقيم المشتقة بدلالة القيم الأساسية
( معادلات القيم الأساسية ) حسب فالوت Wallot [38] [14] [39]*

| القيمة الأساسية | معادلة القيم الأساسية | القيمة المشتقة |
|---|---|---|
| الطول L | $\varphi = \Delta U / r$ | $\varphi$ زاوية مركزية |
| ( القيمة الأساسية | $A = \iint_{(A)} dx\, dy$ | A سطح |
| للهندسة ) | $V = \iiint_{(V)} dx\, dy\, dz$ | V حجم |
| الزمن t | $\mathbf{V} = d\mathbf{s}/dt$ | V سرعة |
| ( القيمة الأساسية | $\mathbf{b} = d\mathbf{V}/dt$ | b تسارع |
| للحركة ) | $f = 1/\Delta t$ | f تردد |
| | $\omega = 2\pi f$ | $\omega$ تردد دائري (سرعة زاوية) |
| | $\mathbf{F} = \rho V \mathbf{b}$ | $\rho$ كثافة = كتلة نوعية |
| | $v = 1/\rho$ | v حجم نوعي |
| | $m = \rho V$ | m كتلة |
| | $F_G = mg$ | $F_G$ وزن ( ثقل ) |
| | $\gamma = \rho g$ | $\gamma$ وزن نوعي |
| القوة F | $\mathbf{F}_p = p\, \mathbf{A}$ | p ضغط |
| ( القيمة الأساسية | $\mathbf{F}_\tau = \tau\, \mathbf{A}$ | $\tau$ إجهاد قص |
| للتحريك ) | $\sigma = E.\Delta l/l = E\,\varepsilon$ | E معامل المرونة |
| | | ($\varepsilon$ الاستطالة النسبية) |
| | $W = \int_{(s)} \mathbf{F}\, ds$ | W عمل |
| | $P = dW/dt$ | P استطاعة |
| | $W_{kl} = m \frac{V^2}{2}$ | $W_{kl}$ قدرة حركية |

* الحروف الثانوية تمثل رموزاً لقيم شعاعية .

الجدول ١.١ : تتمة

| القيمة الأساسية | معادلة القيم الأساسية | القيمة المشتقة |
|---|---|---|
| القوة F<br>( القوة الأساسية<br>التحريك ) | $\mathbf{B} = m\,\mathbf{V} =$ | B كمية حركة ؛ I دفع |
| | $\mathbf{M_t} = \mathbf{s} \times \mathbf{F}$ | $\mathbf{M_t}$ عزم دوران |
| | $J = \int_{(V)} \rho r^2 dV$ | J عزم عطالة |
| | $\tau = \eta \cdot \partial v/\partial n$ | $\eta$ لزوجة تحريكية |
| | $\nu = \eta/\rho$ | $\nu$ لزوجة حركية |
| درجة الحرارة المطلقة T<br>( القيمة الأساسية<br>لعلم الحرارة ) | $\Delta T = T_2 - T_1$ | $\Delta T$ فرق في درجة الحرارة<br>(درجة حرارة نسبية )<br>$T_1$ درجة الحرارة في نقطة ما |
| | $L = L_0(1 + \beta\,\Delta T)$ | $\beta$ معامل التمدد الطولي |
| | $p = \rho\,R\,T$ | R ثابتة الغاز |
| | $C = \dfrac{W}{m\,\Delta T}$ | C حرارة النوعية ( $C_v$ مع ثبات الحجم، $C_p$ مع ثبات الضغط ) |
| | $Q_T = C\,m\,\Delta T$ | $Q_T$ كمية حرارة |
| | $C_T = C\,m$ | $C_T$ سعة حرارية |
| | $dU = d\,Q_T + dW$ | U قدرة داخلية ( كامنة ) |
| | $\dot{Q}_T = dQ/dt$ | $\dot{Q}_T$ تيار حراري |
| كمية الشحنة<br>الكهربائية $Q_e$<br>( القيمة الأساسية<br>لعلم الكهرباء ) | $\mathbf{H_e} = \mathbf{F}/Q_e$ | $\mathbf{H_e}$ شدة الحقل الكهربائي |
| | $Q_e = \int_{(A)} \mathbf{D}\,d\mathbf{A}$ | D انزياح كهربائي<br>( كثافة الشحنة ) |
| | $\mathbf{D} = \varepsilon\varepsilon_0\,\mathbf{H_e}$ | $\varepsilon\varepsilon_0$ ثابتة العازلية الكهربائية |
| | $U_e = \int_{(s)} \mathbf{H_e}\,d\mathbf{s}$ | $U_e$ توتر جهد ( كهربائي ) |

الجدول ١.١ : تتمة

| القيمة الأساسية | معادلة القيم الأساسية | القيمة المشتقة |
|---|---|---|
| كمية الشحنة الكهربائية $Q_e$ (القيمة الأساسية لعلم الكهرباء) | $I_e = d\,Q_e\,/dt$ | $I_e$ شدة تيار كهربائي |
| | $I_e = \int_{(A)} j_e\,d\,A$ | $j_e$ كثافة تيار كهربائي |
| | $U_e = R_e\ I_e$ | $R_e$ مقاومة كهربائية |
| | $-\oint_{(S)} H_e\,ds = \frac{d}{dt}\int_{(A)} B_m\,d\,A$ | $B_m$ تحريض مغناطيسي (كثافة السيالة المغناطيسية) |
| | $\int_{(S)} H_m\,ds = \int_{(A)} j_e\,d\,A$ | $H_m$ شدة الحقل المغناطيسي |
| | $j_e = \sigma_e\,H_e$ | $\sigma_e$ معامل الناقلية الكهربائية |
| | $I_e = C_e\,dU_e\,/\,dt$ | $C_e$ سعة كهربائية |
| | $U_e = L_e\,dI_e/dt$ | $L_e$ معامل التحريض الذاتي |

هذه المعادلة يمكن شطرها إلى **معادلة الواحدات القياسية** :

$$[G] = \xi\,[G_1]^{\alpha}\cdot[G_2]^{\beta}\cdot[G_3]^{\gamma}\ \ldots \qquad (1.8)$$

وإلى **معادلة القيم العددية** :

$$\{G\} = \frac{a}{\xi}\,\{G_1\}^{\alpha}\cdot\{G_2\}^{\beta}\cdot\{G_3\}^{\gamma}\ \ldots \qquad (1.9)$$

يطلق على $\xi$ « معامل واحدات القياس » [39] ، وتتحدد قيمته إما باختيار كافة واحدات القياس ، أو باختيار قيمة $\xi$ نفسها ( يفضل $\xi = 1$ ) ؛ وبالتالي تتحدد واحدة قياس $G$ ، وبعدها يصبح « معامل القيمة العددية »

$$z = a\,/\,\xi \qquad (1.10)$$

معلوماً والمعادلة (1.9) محددة .

إن معادلة الواحدات تعبر عن كيفية ارتباط واحدة قياس قيمة معينة

مع واحدات القيم الأخرى التي تتعلق بها ، فهي تصلح إذن بعد اختيار $\zeta$ **لتعريف** أو تحديد واحدة قياس مجهولة بدلالة الواحدات الأخرى المعلومة . أما معادلة القيم العددية فهي في الواقع علاقة بين قيم وليست علاقة فيزيائية . ونلاحظ أنه بالنسبة لعلاقة قيم فيزيائية ، مثل (1.6) ، يمكن بسبب حرية اختيار العدد z الحصول على عدد لانهائي من معادلات القيم العددية المتكافئة . ولكن في الحالة الخاصة والمفضلة التي يكون فيها $\zeta = 1$ فإنه ينتج من ( 1.9 ) وبعد اغفال الأقواس الكبيرة :

$$*C* = {}^{n}_{1} *G_1*^{\alpha} *G_2*^{\beta} *G_3*^{\gamma} \ldots \quad \text{—} \quad G = n\, G_1^{\alpha} G_2^{\beta} G_3^{\gamma} \ldots \qquad (1.11)$$

وبالتالي فإنه في هذه الحالة تكون معادلة القيم العددية مطابقة **شكلا** لمعادلة القيم الفيزيائية ويمكن أن تعبر الرموز $G_n$ إما عن القيمة الفيزيائية أو القيمة العددية .

يصدف في حالات عديدة عند إجراء قياسات تجريبية بهدف إيجاد العلاقة بين عدة قيم فيزيائية أن يهمل عن قصد أو غير قصد تأثير قيمة أو أخرى . وحيث أن واحدات القياس في التجربة تكون عادة معلومة فإن القيم العددية المقاسة تعطي معادلة قيم عددية نفرضها من الشكل :

$$\{G\} = z\, \{G_1\}^{\alpha}\, \{G_2\}^{\beta}\, \{G_3\}^{\gamma} \ldots \qquad (1.12)$$

ونتساءل عن معادلة القيم الفيزيائية التي يمكن اعتبارها أساساً لهذه المعادلة . إذا قسمنا معادلة القيم الفيزيائية (1.6) على معادلة الواحدات (1.8) ينتج :

$$\frac{G}{[G]} = \frac{a}{\zeta} \left(\frac{G_1}{[G_1]}\right)^{\alpha} \left(\frac{G_2}{[G_2]}\right)^{\beta} \left(\frac{G_3}{[G_3]}\right)^{\gamma} \ldots \qquad (1.13)$$

هذه المعادلة يسميها فالوت [14] [39] **معادلة قيم مفصّلة** cutted up ، وهي ليست إلا معادلة قيم عددية، لأن كل كسر فيها يمثل قيمة عددية ،

وبالتالي فهي مطابقة للعلاقة (1.9) . وعليه إذا بدلنا في العلاقة (1.12) القيمة العددية بالكسر الناتج من تقسيم القيمة الفيزيائية المقابلة على واحدتها القياسية فإننا نحصل على معادلة قيم مفصلة من الشكل (1.13) ، ولكنها تتضمن المعامل $z$ بدلا من $\frac{a}{\xi}$ . فإذا تأكدنا أن واحدات القياس المستعملة في التجربة تعطي معادلة واحدات صحيحة يدخل فيها طبعاً $\xi$ ، فإن ذلك يعني أن كافة القيم قد روعيت في (1.12) ، ونحصل منها على معادلة قيم فيزيائية من الشكل (1.6) بعد ضرب $z$ في $\xi$ وإغفال الواحدات .

على أساس ما تقدم فإنه يجب التمييز بين : معادلة القيم الفيزيائية (1.6) ، معادلة القيم العددية (1.9) ، معادلة القيم المفصلة (1.13) ، معادلة الواحدات العامة (1.8) معادلة الواحدات الخاصة مثل $N = kg\ m\ s^{-2}$ . وحيث أن واحدات قياس مختلفة لاتزال قيد الاستخدام فإنه من الضروري تحديد العلاقة بين القيمة العددية وواحدة القياس لتسهيل عملية التحويل من واحدة لأخرى .

## ١ . ٤ . ٢ العلاقة بين القيمة العددية وواحدة القياس ، معادلة القياس

عند تغيير واحدة القياس تتغير القيمة العددية ولكن القيمة تبقى محافظة على مضمونها الكمي والكيفي طالما بقي جداء القيمة العددية في واحدة القياس حسب (1.3) ثابتاً ، وهذا ما يطلق عليه **مطلب ثبات القيمة** Invariance demand [14] :

$$G = \{G'\}\,[G'] = \{G''\}\,[G''] = \cdots = \{G\}\,[G] \quad , \qquad (1.14)$$

وينتج معامل التحويل من واحدة لأخرى :

$$\alpha = \frac{\{G'\}}{\{G''\}} = \frac{[G'']}{[G']} \qquad (1.15)$$

وتكون النتيجة :

> عند تغيير واحدة القياس فإن القيم العددية تتناسب مع بعضها بعكس تناسب واحداتها ، أي أن القيمة العددية تصغر كلما كبرت واحدة القياس .

إن المسافة s مثلا كقيمة فيزيائية تبقى ثابتة إذا قيست بواحدات مختلفة ولكن قيمتها العددية تتغير .

$$s = 80\ \text{cm} = 8\ \text{dm} \Rightarrow \alpha = \frac{80}{8} = \frac{\text{dm}}{\text{cm}} = 10$$

ولكي يبقى معامل التحويل $\alpha$ لواحدتين معينتين ثابتاً يجب أن تكون القيم التي تحقق مطلب الثبات ذات تدريج عددي له نفس نقطة الصفر [14] ، كما هو الأمر مثلا بالنسبة لواحدة قياس القوة أو كمية الحرارة :

$$\left.\begin{aligned} F = 1\ \text{kp} &= 9,80665\ \text{N} = 9,80665\ \text{kg m s}^{-2} \\ Q = 1\ \text{kcal} &= 4186,8\ \ \text{J} = 4186,8\ \text{Nm} \end{aligned}\right\} \qquad (1:16)$$

بينما يكون مطلب الثبات غير محقق بالنسبة لدرجة الحرارة مثلا عند تغيير واحدة القياس من [°C] إلى [°K] :

$$T_1 = 100\ ^\circ\text{C} = 373,15\ ^\circ\text{K} \Rightarrow \alpha_1 = \frac{100}{373,85} = 0,3656$$

$$T_2 = 200\ ^\circ\text{C} = 473,15\ ^\circ\text{K} \Rightarrow \alpha_2 = \frac{200}{473,45} = 0,423$$

وبالتالي $\alpha_1 \neq \alpha_2$ .

إن تبديل واحدات القياس يتطلب الانتباه إلى ناحية مهمة يوضحها المثال (1.16) . فعند الانتقال من kp إلى N أدخل المعامل العددي 9,80665 ،

بينما كان هذا المعامل مساوياً الواحد عند الانتقال من N إلى $kg\,m\,s^{-2}$ . كما أدخل المعامل العددي 4186,8 عند الانتقال من kcal إلى J ، بينما كان مساوياً الواحد بالنسبة للانتقال من J إلى Nm . هذا الاختلاف ناتج بسبب أن معامل الواحدات العددي $\gamma$ الذي يظهر في معادلة الواحدات العامة ( 1 . 8 ) يأخذ قيماً مختلفة في حال الاختيار الحر للواحدات . ولكن من الممكن اختيار الواحدات القياسية بحيث يصبح $\gamma = 1$ . وفي هذه الحالة الخاصة والمفضلة تنتج معادلة تعريف واحدة قياس القيمة C من (1.8) :

$$[G] = [G_1]^{\alpha} [G_2]^{\beta} [G_3]^{\gamma} \ldots \qquad (1.17)$$

وتسمى الواحدات التي يتم إشتقاقها أي تعريفها على هذا الأساس **واحدات مترابطة** Coherent units . ونحصل عليها بوضع كافة القيم العددية في معادلة القيم مساوية للواحد . فإذا جعلنا في ( 1 . 14 ) :

$$\{G'\} = \{G''\} = 1 \Rightarrow [G'] = [G''] \qquad (1.18)$$

وينتج بالتالي من (1 . 16) أن :

$$N = kg\,m\,s^{-2} \quad ; \quad J = Nm = kg\,m^2 s^{-2} \qquad (1.19)$$

هي واحدات مترابطة بينما :

$$kp = 9{,}80665\ N \quad ; \quad kcal = 4186{,}8\ J \qquad (1.20)$$

هي واحدات غير مترابطة يتم تحديدها بمعادلات تعريف معينة :

> الواحدات المترابطة هي التي تكون كافة القيم العددية في معادلات تعريفها مساوية للواحد ، بينما يكون المعامل العددي للواحدات غير المترابطة مختلفاً عن الواحد .

إن الواحدات المترابطة يمكن اختصارها من معادلة القيم الفيزيائية

التي تكتب بصيغة مشابهة للعلاقة (1.7) وتبقى بالتالي معادلة القيم العددية فقط . وعليه فإن النتيجة التي توصلنا إليها على ص ٢٦ يمكن صياغتها بالشكل التالي :

> فقط في حال استخدام واحدات مترابطة تكون معادلة القيم العددية مطابقة شكلا لمعادلة القيم الفيزيائية .

لذلك يفضل دائماً استخدام واحدات مترابطة . إلا أنه ليس من الضروري بالنسبة لحقل معين من الفيزياء أو التكنيك استخدام واحدات مترابطة فقط ، ولكن الحساب العددي في هذه الحالة ، وخاصة عند تبديل بعض الواحدات يتطلب تجنباً للأخطاء الوضوح الكلي لمفهوم المقاس ( البعد ) **Dimension** . فماذا يعني ؟

> المقاس يعبر عن مضمون معادلة الواحدات العامة

لتوضيح هذا المفهوم نأخذ مثالا معادلة الواحدات العامة للعمل أو القدرة :

$$[W] = [F]\,[s] = [m]\,[V]^2 = [m]\,[s]^2\,[t]^{-2} \qquad (1.21)$$

فنجد أن جداء القوة في المسافة وكذلك جداء الكتلة في مربع السرعة أو جداء الكتلة في مربع المسافة مقسوماً على مربع الزمن كلها من **حيث المقاس** تمثل عملا أو قدرة . ولكن من جهة أخرى فإن عزم الدوران كجداء القوة في زراعها هو من **حيث المقاس** عمل أيضاً ، بالرغم من أن نوع القيمة الأخير مختلف . ومن هنا نصل إلى النتيجة الهامة التالية :

> يكون لقيمتين من نفس النوع مقاس واحد ويمكن جمعهما ، بينما لايتوجب أن تكون قيمتان لهما نفس المقاس من نفس النوع وبالتالي لايجوز جمعهما .

من جهة أخرى نقول أن ضاغط المضخة مثلا يمثل من حيث المقاس

طولا ( إرتفاعاً ) ولكن واحدة قياس الطول هي المتر . ولهذا لايجوز استخدام مفهوم « المقاس » بدلا من مفهوم « الواحدة » [14] .

المقاس لايتضمن معطيات عددية محددة ، وإنما معطيات كيفية يتم استنتاجها من معادلة المقاس Dimensional equation ، التي تنتج مباشرة من معادلة الواحدات العامة (1.17) باستبدال الأقواس المتوسطة بأقواس حادة [39] :

$$(G) = (G_1)^{\alpha}(G_2)^{\beta}(G_3)^{\gamma} \ldots . \quad , \qquad (1.22)$$

أو باستبدال التعابير المحصورة ضمن الأقواس برموز تمثل الحروف الأولى لأنواع القيم [14] . فمثلا إذا رمزنا للكثافة D وللكتلة M وللطول L تنتج معادلة المقاس للكثافة :

$$D^1 = M^{\alpha} L^{-3} \qquad (1.23)$$

ونلاحظ في هذه العملية أن أس كل حد في معادلة الواحدات العامة يبقى نفسه في معادلة المقاس . ولكنه يتغير عند تبديل الواحدات ، كما يتبين من مثال اللزوجة التحريكية :

$$\left.\begin{array}{l} [\eta] = \mathrm{kg\ m^{-1}\ s^{-1}} \Rightarrow (\eta) = (M)^1 (L)^{-1} (t)^{-1} \text{ في جملة القياس العالمية} \\ [\eta] = \mathrm{kp.\ m^{-2}\ s^1} \Rightarrow (\eta) = (F)^1 (L)^{-2} (t)^1 \text{ في جملة القياس التكنيكية} \end{array}\right\} \qquad (1.24)$$

إن لمعادلة المقاس أهمية بالغة تنجم من وجوب كون طرفيها لهما نفس المقاس . وهذا يعتبر مقياساً للتأكد من الصحة النوعية لمعادلة القيم الفيزيائية وصفة مميزة أخرى لها بالمقارنة مع معادلة القيم العددية . فإذا كانت معادلة المقاس محققة فإن معادلة القيم الفيزيائية التابعة لها تكون أيضاً صحيحة . وفي حالة العكس تكون قد أغفلت في معادلة القيم الفيزيائية بعض القيم التي يتم تحديدها بواسطة تصحيح معادلة المقاس، وذلك إما بتصحيح أس بعض

حدود هذه المعادلة أو إضافة حدود جديدة وتحديد أسمها ، وهذا ما يشكل مضمون **التحليل البعدي** Dimensional analysis . وينصح في كل مرة يبرز فيها أدنى شك في صحة أية معادلة قيم التأكد من صحة معادلة مقاسها .

إن معادلة المقاس تقود إلى التمييز بين **قيم بعدية** Dimensional **ولابعدية** Dimensionless . في الحالة الأولى يجب أن يكون في معادلة المقاس أس واحد على الأقل لنوع قيمة أساسية مختلفاً عن الصفر ، بينما يكون في الحالة الثانية أس كافة أنواع القيم في معادلة المقاس مساوياً للصفر ، وواحدة قياسها بالتالي تساوي الواحد .

إن القيم اللابعدية ذات أهمية كبيرة في ميكانيك السوائل ؛ حيث أن الاتجاه العام في معالجة العديد من مسائله يعتمد على استخدام قيم لابعدية يطلق عليها **أعداداً مميزة أو أعداد تشابه** Similarity Nr. وهي تمثل عادة نسبة قيمتين من نفس النوع لبعضهما .

أخيراً فإنه بمساعدة معادلة المقاس نستطيع في معادلة قيم فيزيائية استخدام واحدات مترابطة وغير مترابطة . وفي هذه الحالة يجب ضرب معادلة القيم **بثابتة المقاس** التي تنتج من معادلة تعريف الواحدات ، وتمثل مقداراً ، جداء قيمته العددية في واحدة القياس يساوي الواحد . مثل ذلك المكافيء الحراري الميكانيكي في جملة القياس التكنيكية :

$$\frac{1}{426{,}79}\,\frac{\text{kcal}}{\text{kpm}} = 1 \qquad , \qquad (1.25)$$

أو معامل التحويل بين النيوتن N والكيلوبوند kp :

$$\frac{1}{9{,}80665}\,\frac{\text{kp}}{\text{N}} = 1 \qquad . \qquad (1.26)$$

## ١ . ٤ . ٣ جملة الواحدات العالمية والتكنيكية

بعد أن يتم تحديد أنواع القيم والواحدات الأساسية فإنه بالإمكان ، كما بينا أعلاه ، اشتقاق مجموعة من أنواع القيم وواحداتها بشكل منهجي ، وبحيث تغطي حقلاً معيناً من الفيزياء أو التكنيك . يطلق على مجموعة القيم هذه **جملة القياس** ، وعلى مجموعة الواحدات **جملة واحدات القياس** System of units وأشهرها جملة القياس الفيزيائية المطلقة ، وجملة القياس التكنيكية التي مر ذكرها .

إن الواحدات الأساسية لحقل الميكانيك في جملة القياس الفيزيائية هي : **المتر** [m] للطول ، **الثانية** [s] للزمن ، و**الكيلوغرام** [kg] للكتلة ، التي تم اختيارها على أساس أنها لاتتغير مع المكان . وتختلف جملة القياس التكنيكية عنها فقط في اختيار الواحدة الأساسية الثالثة ، حيث تستخدم واحدة القوة ، **الكيلوبوند** [kp] ( قديماً الكيلوغرام ـ ثقلي ) ، بدلاً من واحدة الكتلة ( الجدول ٢.١ ) . وهذا الاختيار له سيئة أساسية وهو أن الثقل تابع للتسارع الأرضي ، وبالتالي يتغير مع المكان بعكس الكتلة .

الجدول ١ . ٢ : القيم والواحدات الأساسية لجملة القياس التكنيكية الجديدة

| نوع القيمة الأساسية | | الواحدة الأساسية | |
|---|---|---|---|
| التسمية | الرمز | التسمية | الرمز |
| الطول | L | المتر | m |
| الزمن | t | الثانية | s |
| القوة | F | الكيلو بوند ( بدلاً من الكيلوغرام ـ ثقلي ) | kp ( $kg_f$ ) |

ونظراً للصعوبات الناجمة عن استخدام واحدات مختلفة ، فقد تركزت المطالبة منذ فترة طويلة على ضرورة وضع جملة واحدات موحدة ودقيقة يعترف بها الجميع . وبعد مناقشات واقتراحات متعددة أقر الاجتماع العام الحادي عشر للمقاييس والأوزان .

CGPM = Conférence Général des Poids et Mesures

المنعقد في باريس عام 1960 ما اصطلح على تسميته **جملة الواحدات العالمية** Systéme International d'Unirés (SI) [14] [39] ، وبنيت على أساسها **جملة القياس العالمية** أو **جملة القياس الفيزيائية – التكنيكية** ، نظراً لأنها انبثقت من جملة القياس الفيزيائية والتكنيكية المشار إليهما ، ومن منطلق أن التكنيك يقوم على أساس الفيزياء . ويتضمن الجدول (٣.١) أهم القيم والواحدات الأساسية لهذه الجملة ، كما يتضمن الجدول (٤.١) البادئات التي تضاف إلى بداية اسم كل واحدة للحصول على مضاعفاتها أو أجزائها . فمثلاً بدلاً من واحدة الطول المتر نستخدم الكيلومتر : $km = 10^3 m$ ، أو السنتيمتر $cm = 10^{-2} m$ .

وبالنظر لأن العديد من القيم العددية معطاة بواحدات جملة القياس الفيزيائية أو التكنيكية ، والكثير من أجهزة القياس المستخدمة معيرة على أساس إحدى هاتين الجملتين ، فمن الطبيعي أن يتم إدخال جملة القياس العالمية تدريجياً . ولتسهيل ذلك فقد كتبت مقالات عديدة حول كيفية استخدامها [40] . ولكن الإلحاح في ضرورة استخدامها دفع العديد من الدول لاستصدار قوانين تلزم بذلك [41] .

الجدول ١.٣ : أنواع القيم والواحدات الأساسية لجملة القياس العالمية ( SI )

| المجال الفيزيائي | نوع القيمة الأساسية | | الواحدات الأساسية | |
|---|---|---|---|---|
| | التسمية | الرمز | التسمية | الرمز |
| ميكانيك: هندسة | الطول | L | المتر | m |
| ميكانيك: حركة | الزمن | t | الثانية | S |
| ميكانيك: تحريك | الكتلة | m | الكيلوغرام | kg |
| علم الكهرباء | شدة التيار | $I_e$ | الأمبير | A |
| علم الحرارة | درجة الحرارة | T | درجة كيلفين | °K |
| الشدة الضوئية | شدة الضوء | J | الكانديلا | Cd |

الجدول ١.٤ : البادئات القانونية لأسماء الواحدات للحصول على مضاعفاتها وأجزائها [36]

| البادئة لاسم الواحدة | الرمز | المعامل قبل الواحدة | البادئة لاسم الواحدة | الرمز | المعامل قبل الواحدة |
|---|---|---|---|---|---|
| تيترا Tetra | T | $10^{12}$ | ديسي Deci | d | $10^{-1}$ |
| جيجا Giga | G | $10^{9}$ | سنتي Centi | c | $10^{-2}$ ≙ % بالمئة |
| ميجا Mega | M | $10^{6}$ | ميلي Milli | m | $10^{-3}$ ≙ ‰ بالألف |
| كيلو Kilo | K | $10^{3}$ | ميكرو Micro | μ | $10^{-6}$ |
| هيكتو Hecto | h | $10^{2}$ | نانو Nano | n | $10^{-9}$ |
| ديكا Deca | da | $10^{1}$ | بيكو Pico | P | $10^{-12}$ |

## ١ . ٥ أسئلة مراجعة وتمارين

س ١.١ : اشرح أسس بناء الجمل القياسية وسبب تعددها .

س ٢.١ : اشرح العلاقة بين معادلة القيم الفيزيائية ومعادلة القيم العددية ومعادلة الواحدات القياسية .

س ٣.١ : بيّن أهمية معادلة المقاس للتأكد من صحة القوانين الفيزيائية .

س ٤.١ : عرّف الواحدات القياسية المترابطة . هل يمكن استخدامها مع واحدات غير مترابطة ؟

ت ١.١ : اكتب الواحدات القياسية في جملة القياس التكنيكية والعالمية لأنواع القيم الفيزيائية التالية : القوة ، الكتلة ، الكثافة ، اللزوجة التحريكية ، العمل ، الاستطاعة ، الاجهاد .

ت ٢.١ : حوّل معامل الانتقال الحراري $\alpha = 500\ kcal/m^2h\ ^\circ K$ إلى $J/m^2s\ ^\circ K$ بمساعدة ثابتة المقاس .

ت ٣.١ : برهن بمساعدة معادلة المقاس أن عدد رينولدز ، الذي يساوي نسبة جداء السرعة في الطول في الكثافة على اللزوجة التحريكية يمثل عدداً لابعدياً ( عدد تشابه ) .

# الفصل الأول

## ٢ الصفات الفيزيائية ـ الميكانيكية للسوائل

إن معرفة الصفات الفيزيائيةوخاصة الميكانيكية للسوائل لها أهمية كبيرة في تطبيقات ميكانيك السوائل . ولذا يهدف هذا الفصل شرح أهم هذه الصفات ، وتوضيح بعض المفاهيم والتعاريف التي سيتكرر ورودها في الفصول المقبلة .

### ٢ . ١ تصنيف السوائل

يبحث ميكانيك السوائل في توازن وحركة وتحريك السوائل . والسوائل هي أجسام مادية مترابطة باستمرار ولكنها تتميز عن الأجسام الصلبة بسهولة انزياح جزيئاتها المادية فيما بينها ، وبالتالي بسهولة تغير أشكالها . فبينما يلزم تطبيق قوى كبيرة نسبياً من أجل تغيير شكل الجسم الصلب ( الفولاذ ! ) ، فإن السائل ( الماء ! ) لا يبدي عند تغيير شكله سوى مقاومة ضعيفة جداً تتعلق بسرعة هذا التغيير ، وتنعدم تماماً إذا توفر الوقت الكافي له . فالسائل الساكن يغير شكله دون أية مقاومة .

وتختلف السوائل ، التي تشمل حالة المادة المائعة والغازية ، عن بعضها بالمقاومة التي تبديها ضد تغير الحجم . فالإناء الذي سعته نصف لتر لا يمكنه أن يستوعب لتراً من الماء أو الزيت مهما حاولنا ضغطه ؛ وإذا صببنا هذه

الكمية في إناء سعته ليترين فإنها تملأ نصفه فقط ، حتى لو فرغنا الهواء فوقها . وبالمقابل فإن كمية معينة من الهواء أو البخار تملأ دائماً كامل حجم الإناء الذي توضع فيه ، كبيراً كان أم صغيراً . وعلى هذا الأساس نميز بين سائل **ثابت الحجم** أو **غير قابل للانضغاط** Incompressible وسائل **متغير الحجم** أو **قابل للانضغاط** Compressible . وتكون كثافة الأول ثابتة عملياً $\rho \approx const.$ ، بينما كثافة الثاني متغيرة وتابعة للضغط ودرجة الحرارة $\rho = f(p,T)$ .

طبعاً لا يوجد حد فاصل تماماً بين السوائل غير القابلة والقابلة للإنضغاط . فالماء مثلاً تحت تأثير ضغوط عالية جداً يغير حجمه بشكل طفيف يعادل عند 0°C حوالي 0,05‰ من حجمه الأصلي لكل ضغط جوي . هذا التغيير الطفيف في الحجم ، الذي يهمل في أغلب الحالات العملية ، يجب مراعاته أحياناً كما في عملية حقن الوقود في محرك الديزل ؛ ( راجع ٦٠٢ ) .

ومن جهة أخرى فقد أكدت التجارب أن تغير الحجم الذي يتعرض له سائل قابل للانضغاط أثناء حركته النسبية حول جسم ثابت ، أو أثناء حركة هذا الجسم فيه وهو ساكن ، يمكن إهماله عملياً ، طالما أن السرعة النسبية للسائل أو الجسم هي أقل بكثير من سرعة الصوت في السائل . فالهواء مثلاً يغير كثافته بحدود 1% فقط عند لا تتجاوز سرعته 50 m/s عند ضغط ودرجة حرارة نظاميين . في هـــــذه الحالة ، التي تنطبق مثلاً على جريان الهواء حول سيارة حديثة ، يمكن اعتبار الهواء سائلاً غير قابل للانضغاط .

إن المقاومة الصغيرة نسبياً التي تبديها السوائل عند تغير أشكالها تدعو إلى استنتاج أن القوى المماسية أو قوى الاحتكاك ، الناتجة عن إجهادات القص ، والمؤثرة بين الجزيئات المتماسة أثناء حركتها ، صغيرة أيضاً ؛ وبالتالي يمكن

إهمالها كخطوة تقريبية أولى . وعلى هذا بنيت فرضية **السوائل المثالية** : **Ideal fluid**

> السائل المثالي هو سائل ثابت الحجم وعديم الإحتكاك ، تؤثر بين جزيئاته المتماسة والمتحركة قوى ناظمية ( ضغوط ) فقط ، بينما تكون القوى المماسية ( قوى الاحتكاك ) معدومة .

لقد اعتمد ميكانيك السوائل الكلاسيكي في دراساته النظرية على السوائل المثالية ، وقدم نتائج مرضية عملياً بالنسبة لحالات عديدة مثل حركة الأمواج تكوّن النافورات وغيرها . ولكنه أخفق تماماً في حساب المقاومة للأجسام ، حيث توصل إلى نتيجة مخالفة للواقع كلياً تنص على « أن كل جسم يتحرك بانتظام في سائل مثالي لانهائي الإمتداد لايتلقى أية مقاومة ( تناقضة دالمبير )» [28] . ولكن الخبرة تؤكد **أن** كل جسم يتحرك في سائل يتلقى مقاومة . وهذا يعود لحقيقة أنه في **السوائل الحقيقية أو الطبيعية** Natural fluid تؤثر سواء بين طبقات السائل ، أو بينه وبين سطح الجسم ، بالإضافة للقوى الناظمية قوى مماسية أيضاً .

يطلق على الصفة الفيزيائية التي تتميز بها السوائل الحقيقية بأنها تبدي مقاومة ضد تغير شكلها ، وبالتالي مقاومة للأجسام المتحركة فيها ، **اللزوجة** Viscosity ( راجع ٢.٢ ) .

السائل المثالي **ينزلق** على سطح الجسم إنزلاقاً وتكون له سرعة مماسية معينة . بينما **يلتصق** السائل الحقيقي على سطح الجسم وتتغير سرعته المماسية باتجاه الناظم على السطح من الصفر وحتى قيمة عظمى ، وهذا مايطلق عليه **شرط الالتصاق** . وحتى في الحالات التي تكون فيها لزوجة السائل صغيرة ، وبالتالي القوى المماسية أيضاً صغيرة لدرجة يمكن إهمالها ، فإن شرط الالتصاق يبقى قائماً ويؤدي في حالات عديدة إلى فوارق كبيرة بين قوانين الجريان

للسوائل المثالية والحقيقية. وإليه يعود بصورة خاصة السبب الفيزيائي الأساسي للفارق الشاسع بين قانون المقاومة في السوائل الحقيقية والمثالية .

بالإضافة لما تقدم فهناك بعض الصفات العامة التي يمكن تصنيف السوائل على أساسها ، فنميز حسب [12] بين :

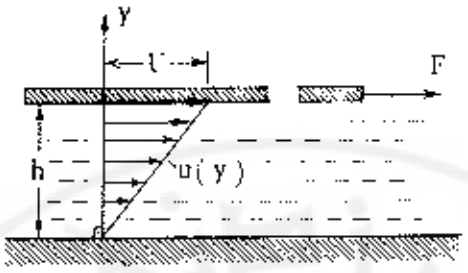
- سائل **متجانس** Homogeneous ، عندما تكون كل جزيئاته الحجمية تتمتع بنفس الصفات .
- سائل **غير متجانس** عندما تكون للجزيئات الحجمية للسائل صفات مختلفة كماً ونوعاً .
- سائل **متعدد الطور** Hetrogeneous ، عندما يكون السائل مؤلفاً من عدة أطوار Phase منفصلة عن بعضها ، ويمثل الطور مادة ( أو مزيجاً من المواد ) كل أجزائها لها نفس الصفات الفيزيائية . ( مثال : أجسام صلبة في الماء أو الغبار في الهواء ! ) .
- سائل **إزوتروبي** Isotrop ، أي موحد الخواص في كافة الاتجاهات .
- سائل **لاإزوتروبي** عندما تختلف صفاته مع الاتجاه .

## ٢ . ٢ اللزوجة

> اللزوجة هي الصفة الفيزيائية المميزة للسوائل الحقيقية بأنها تقاوم تغير شكلها.

ولذلك فإن كل جسم يتحرك في سائل حقيقي يتلقى مقاومة تستلزم بذل قوى خارجية للتغلب عليها ، وكل سائل حقيقي يجري ضمن أجسام كالأنابيب يخسر جزءاً من قدرته الميكانيكية .

لتوضيح ماهية اللزوجة نتصور التجربة البسيطة التالية ، الشكل (١.٢) :




الشكل ١,٢ : الجريان بين صفيحتين مستويتين و متوازيتين ( جريان كوئيت ) لتوضيح مفهوم لزوجة السائل

نعتبر صفيحتين متوازيتين أفقيتين وطويلتين جداً البعد بينهما h وتحصران سائلا لزجاً . إذا سحبت الصفيحة العلوية في مستويها بسرعة U ، فإن التجربة تبين أن السائل يبقى ملتصقاً بكلتي الصفيحتين . وبالتالي فإن سرعته على سطح الصفيحة السفلية تساوي الصفر ، بينما تساوي على سطح الصفيحة العلوية سرعة هذه الصفيحة نفسها U . وعليه يمكن اعتبار توزع سرعة السائل بين الصفيحتين خطياً ، وبهذا تكون سرعة السائل في نقطة ما بين الصفيحتين متناسبة طرداً مع البعد y عن الصفيحة السفلية :

$$u(y) = U \frac{y}{h} \quad , \qquad (2,1)$$

ويتحقق شرط الالتصاق :

$$\left.\begin{array}{l} y = o \Rightarrow u = o \\ y = h \Rightarrow u = U \end{array}\right\} \quad . \qquad (2,2)$$

ولكي تبقى حركة الصفيحة العلوية مستمرة ومنتظمة فإنه يلزم تطبيق قوة مماسية F باتجاه حركتها كافية للتغلب على قوى احتكاك السائل فقط ، باعتبار أن قوى الضغط متوازنة فيما بينها . فإذا أجريت تجارب متعددة بسرعات U وأبعاد h مختلفة فإن نتائج القياسات تؤكد أن القوة المماسية المحسوبة

بالنسبة لواحدة السطح المبلل تتناسب طرداً مع السرعة U وعكساً مع البعد h . فإذا رمزنا بالحرف $\tau$ لقوة الاحتكاك المؤثرة على واحدة السطح ، تنتج العلاقة التالية :

$$\tau = \frac{F}{A} = \eta \frac{U}{h} \quad . \qquad (2.3)$$

$\tau$ يمثل قوة على سطح ، وواحدة قياسه $\left[\frac{N}{m^2}\right]$ أو $\left[\frac{kp}{m^2}\right]$ فهو إذن إجهاد يطلق عليه إجهاد الاحتكاك أو **إجهاد القص** Shear stress تيمناً بالتسمية المماثلة في مقاومة المواد . أما معامل التناسب $\eta$ فيمثل ثابتة مادية لها قيمة محددة بالنسبة لسائل معين تحت ظروف خارجية معينة يطلق عليها **اللزوجة التحريكية** ( الديناميكية ) Dynamic viscosity ، وواحدة قياسها تنتج من ( 2.3 ) في الجملة العالمية والتكنيكية :

$$[\eta] = \left[\frac{\tau\, h}{U}\right] = N\,s\,m^{-2} = kg\,m^{-1}\,s^{-1} = \frac{1}{9{,}81}\cdot\frac{kp\,s}{m^2} \quad . \qquad (2.4)$$

وفي جملة القياس الفيزيائية ( c g s ) تستخدم واحدة **البواز** [ P ] أو **السنتيبواز** [ cP ] ، وكذلك $[dyn\,s\,cm^{-2}]$ . وترتبط هذه الواحدات مع الواحدات الأخرى بالعلاقة :

$$1\,\frac{N\,s}{m^2} = 10\,\frac{dyn\,s}{cm^2} = 10\,\frac{g}{cm\,s} = 10\,P = 10^3\,cP \quad . \qquad (2.5)$$

إذا قسمنا طرفي العلاقة ( 2.3 ) على الكثافة $\rho$ ( راجع ٢ . ٥ ) ينتج :

$$\frac{\tau}{\rho} = \frac{\eta}{\rho}\cdot\frac{U}{h} \quad , \qquad (2.6)$$

حيث يطلق على

$$v_\eta = \sqrt{\frac{\eta}{\rho}} \qquad (2.7)$$

اسم **سرعة إجهاد القص** Shear stress velocity ، وتلعب دوراً هاماً في الجريانات المضطربة ، بينما يسمى الكسر :

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} \qquad (2.8)$$

**اللزوجة الحركية** ( الكينيماتيكية ) Kinematic viscosity ، وتمثل النسبة بين ثابتي مادة ، وتلعب دوراً مهماً في كافة الجريانات التي تؤثر فيها قوى الاحتكاك وقوى العطالة . أمـا واحدتها القياسية فتنتج في الجمـلة العالمية أو التكنيكية :

$$[\nu] = m^2 s^{-1} \quad . \qquad (2.9)$$

كما يستعمل **الستوكس** [ St ] و**السنتيستوكس** [cSt] ( نسبة للعالم ستوكس ) حيث تقوم العلاقة :

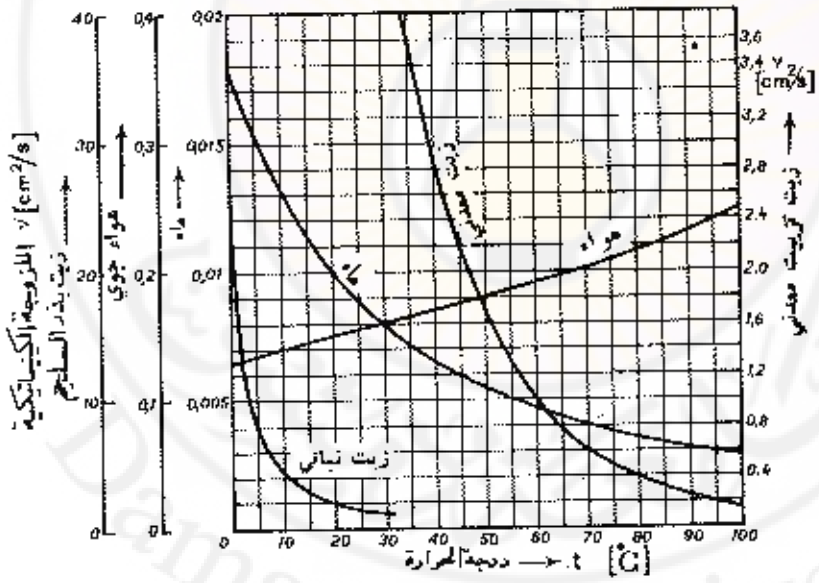
$$1\ m^2 s^{-1} = 10^4\ St = 10^6\ cSt = 10^4\ cm^2 s^{-1} \quad . \qquad (2.10)$$

وفي جملة القياس التكنيكية تستعمل واحدة قياس أخرى هي **درجة انجلر** Engler [°E] ، وتساوي النسبة بين الزمن الذي يستغرقه تفريغ كمية معينة من السائل المعتبر من إناء قياس خاص إلى الزمن الذي يستغرقه تفريغ نفس الكمية من الماء . وتطبق عدة قوانين تحويل لهذه الواحدة تمثل معادلات قيم عددية [8] [12] منها :

$$\left.\begin{array}{l} \text{قانون } \textbf{فون ميسس} \text{ V. Mieses :} \\ \dfrac{\nu}{[St]} = \dfrac{\nu}{[cm^2 s^{-1}]} = 0{,}0864\{°E\} - \dfrac{0{,}08}{\{°E\}} \\ \text{وقانون } \textbf{فوجل} \text{ Vogel :} \\ \dfrac{\nu}{[St]} = \{°E\}\,0{,}076^{+} \dfrac{1}{\{°E\}^2} \end{array}\right\} \qquad (2.11)$$

حيث تعني $\{°E\}$ القيمة العددية للّزوجة بدرجات انجلر .

بالنسبة للسوائل غير القابلة للإنضغاط ( الموائع ) فإن اللزوجة التحريكية $\eta$ لاتتعلق عملياً بالضغط ، ولكنها **تتناقص** بشدة مع ارتفاع درجة الحرارة . وينطبق نفس الشيء تقريباً على $\nu$ لأن الكثافة لاتتغير إلا قليلا جداً مع درجة الحرارة . وبالنسبة للسوائل القابلة للإنضغاط (الغازات) فإن $\eta$ لاتتعلق أيضاً بالضغط ، كما برهن ذلك ماكسويل عام 1876 [8] ؛ ولكنها **تزداد** مع ارتفاع درجة الحرارة ؛ بينما $\nu$ ، وبسبب أن الكثافة $\rho$ تتناقص بشدة مع إزدياد درجة الحرارة وتزداد مع ارتفاع الضغط ، فإنها **تتزايد بشدة** مع ارتفاع T **وتتناقص** مع ازدياد p . ويبين الشكل ( ٢ . ٢ ) تغير $\nu$ بالنسبة لعدد من السوائل . وفي [19] توجد قوائم بقيم $\nu$ تشمل أهم الموائع والغازات ذات الأهمية التكنيكية .




الشكل ٢.٢ : تغير اللزوجة الحركية مع درجة الحرارة بالنسبة لعدة سوائل حسب [8] [21]

على أساس اللزوجة يمكن التفريق وبين سوائل **صغيرة** اللزوجة كالماء والهواء ، وأخرى **كبيرة** اللزوجة كالزيوت المعدنية والجليسيرين ، الجدول (١.٢) . وتبدي الأولى مقاومة ضعيفة لتحرك الأجسام فيها ، ولذلك يمكن كخطوة تقريبية أولى إهمال لزوجتها واعتبارها سوائل مثالية . وعلى العموم فإنه يمكن تصنيف السوائل إلى :

| |
|---|
| سوائل مثالية : $\eta = 0$ ؛ سوائل حقيقية : $\eta > 0$ |

الجدول ١.٢ : مقارنة بين اللزوجة التحريكية والحركية لعدد من السوائل عند $p = 760\ Torr\ ,\ t = 20\ ^\circ C$

| السائل | $\frac{\eta \cdot 10^6}{kp\ s\ m^{-2}}$ | $\frac{\nu \cdot 10^6}{m^2 s^{-1}}$ |
|---|---|---|
| هواء | 1,84 | 15,1 |
| ماء | 103 | 1,01 |
| زئبق | 157,5 | 0,115 |
| مازوت | 362 | 4,14 |
| زيت محرك | 8713,8 | 94 |
| جليسيرين | 87040 | 680 |

إن العلاقة ( 2 . 3 ) تنطبق في الواقع على جريان بسيط جداً كالمبين في الشكل (١.٢) يطلق عليه نسبة لمكتشفه **جريان كوئيت** Couett-flow . فإذا بدلنا في هـذه العلاقة تغير السرعة باتجاه الناظم $\frac{U}{h}$ بتدرج السرعة $\frac{du}{dn}$ نتجت علاقة أعم :

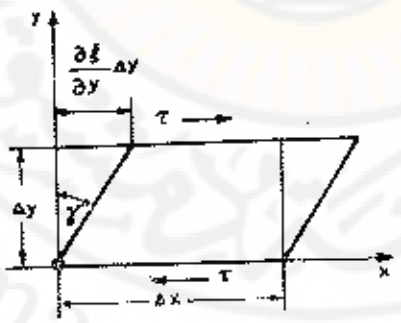
$$\tau = \eta \frac{du}{dn} \qquad (2.12)$$

يطلق عليهـا **قانون نيوتن للاحتكاك** : الذي ينطبق على كافة الجريانات الحقيقية الصفائحية والتي لايلزم أن يكون توزع السرعة فيهـا خطياً وفق العلاقة (2 . 1) . بمساعدة قانون نيوتن (2 . 12) يمكن إجراء مقارنة مفيدة بين احتكاك الأجسام السائلة والصلبة . فبينما قوى الاحتكاك بين السطوح الصلبة الساكنة غير معدومة ، فإنها لاتظهر في السوائل إلا في حالة الحركة لأن $\frac{du}{dy} = 0$ في حالة السكون . وينطبق على الجسم الصلب المرن **قانون هوك** Hooke :

$$\tau = G\gamma \quad ; \quad \gamma \approx \tan\gamma = \frac{\partial \xi}{\partial y} \qquad (2.13)$$

حيث G معامل الانزياح الزاوي أو معامل إجهاد القص ، $\gamma$ التغير الزاوي للزاوية القائمة أصلا نتيجة التشوه ، $\xi$ الانزياح في اتجاه x (الشكل ٣.٢) . وعليـه فان إجهاد القص للجسم الصلب المرن يتناسب طرداً مع **مقدار تغير الشكل** . أما في حالة السوائل حيث الانزياح الجزئي $\partial \xi = u\,\partial t$ فينتج من (2 . 12) :

$$\tau = \gamma \frac{du}{dy} = \eta \frac{d}{dy}\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right) = \eta \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right) = \eta \frac{d\gamma}{dt} \qquad (2.14)$$



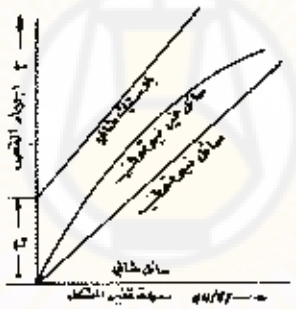

الشكل ٣.٢ : التشوه الزاوي لمرنة مستطيلة نتيجة الانزياح $\xi(y)$ باتجاه x بتأثير إجهاد القص $\tau$ .

وبهذا نصل إلى النتيجة الهامة التالية :

> إجهاد القص في السوائل يتناسب طرداً مع سرعة تغير شكل الجسم ، ويساوي الصفر في حالة السكون ، بينما في حالة الجسم الصلب فيتناسب طرداً مع مقدار تغير الشكل

التي سنعود إليها عند اشتقاق قانون ستوكس العام للاحتكاك .

هنـاك سوائل لاتخضع لقانون نيوتن مثل المواد الغرويّة Colloidal والبلاستيكية يطلق عليها السوائل **غير النيوتونية** وتكون فيها العلاقة بين إجهاد القص وتدرج السرعة غير خطية ويلزم أحياناً إجهاد قص ابتدائي $\tau_0$ يعادل إجهاد حد السيولة Yield stress لتأخذ طبيعة سيّالة (الشكل ٤.٢) . ويسمى الفرع العلمي الذي يدرس هذه المواد **ريولوجيا** Rheology [1] [6] .



الشكل ٢ . ٤ : السوائل النيوتونية وغير النيوتونية .

## ٢ . ٣ حالة الأجسام الريولوجية

في ميكانيك السوائل كما في مقاومة المواد يتركز الاهتمام على معرفة الإجهادات داخل الجسم المعتبر . ويعرف **الإجهاد** Stress بأنـه القوة المؤثرة على واحدة السطح ويمثل بشعاع . ويكون لدينا إجهاد مماسي أو **إجهاد**

**قص** عندما يكون شعاع القوة **F** عمودياً على شعاع الناظم على السطح **A** (٢.٢) ، وإجهاد ناظمي أو **ضغط** عندما يكون **F** موازياً **A** (٢.٣.٢) . وتمثل مجموعة الإجهادات المؤثرة على المقاطع المختلفة المارة في نقطة معينة **حالة الإجهاد** لتلك النقطة .

حسب النظرية الحركية للمادة **Kinetic theory of materials** تكون الذرات Atoms في حركة دائمة وتظهر قدرتها الحركية بشكل حرارة . وتقوم ذرات الأجسام الصلبة بحركة اهتزازية حول أماكن ثابتة ، بينما تتبادل الذرات المتجاورة للسوائل المائعة أماكنها كثيراً أو قليلاً ، ولا توجد في السوائل الغازية أماكن محددة للذرات مطلقاً . فإذا كان السائل في حالة إجهاد فإن تبادل الأمكنة بين الذرات يتم بحيث ينشأ انزياح في إتجاه فروق الإجهادات . ويؤدي هذا الانزياح في حالة السكون إلى الاختفاء السريع أو البطيء لفروق الإجهادات . أما في حالة الحركة فإنه ينشأ عن الانزياح إجهادات تكون أكبر كلما كان تغير الشكل أسرع [ 1 ] [ 7 ] .

إن دراسة حالة الإجهاد في السوائل تعتمد على نفس المبادىء والقوانين العامة لتوازن القوى المطبقة في ميكانيك الجسم الصلب . ويبرر البعض ذلك بواسطة مايسمى « **مبدأ التصلب** » الذي ينطلق من الفكرة التالية : « إن توازن أية جملة كتلية لايتأثر من جراء تثبيت بعض أجزائها المتحركة ؛ وعليه يمكن في سائل متوازن أن نتصور منطقة جزئية قد « تصلبت » ، بمعنى تجمدت ، بدون تغير في حجم السائل أو كثافته ، دون أن يؤثر ذلك على حالة التوازن ، ويمكن بعدها تطبيق قوانين التوازن للجسم الصلب على هذه المنطقة المتصلبة » [1] . فإذا كان السائل في حالة سكون فعلي فإن استخدام مبدأ التصلب لايخلق أية صعوبة . أما في حالة الحركة فيمكن أن يقود بسهولة إلى صعوبة كبيرة بسبب أنه لايمكن أن يوجد أي شيء

متصلب في السائل . والحقيقة أنه ليست هناك ضرورة ملحة للجوء لفكرة التصلب لأن « كل جملة مادية متوازنة تملك إمكانيات حركة داخلية ولكنها لاتستغل بسبب حالة التوازن ؛ تنطبق عليها قوانين التوازن للميكانيك العام » [1] . لذلك فإن الطريقة السائدة لدراسة الإجهادات في السوائل الساكنة أو المتحركة تعتمد على **مبدأ القطع** ، الذي أدخله **ايونهارد أويلر** ويعتبر رغم بساطته الظاهرية أحد أهم إنجازاته العبقرية [67] . هذا المبدأ الذي يتيح لنا تخيل الرؤية داخل المادة ؛ حيث لايمكن للعين أو التجربة أن تتغلغل ؛ يتلخص بما يلي : « نقتطع من الجسم ( الصلب أو السائل ) عنصراً حجمياً وندرس توازن القوى المؤثرة عليه في حالة السكون ؛ أو علاقة هذه القوى بالتسارعات الكتلية في حالة الحركة » .

إن مبدأ القطع ، المعروف جيداً في مقاومة المواد أيضاً ؛ سيقدم لنا خدمات جلّى عند دراسة توازن وحركة السوائل . ولذلك فمن المفيد معالجة أهم المنطلقات التي يعتمد عليها .

## ١.٣.٢ تصنيف القوى المؤثرة في السائل

إن القوى بمفهومها العام ليست إلا تأثيراً متبادلا بين الكتل يعبر عنه مبدأ **نيوتن** للفعل ورد الفعل . فالكتلة $m_1$ تجذب مثلا الكتلة $m_2$ بقوة F ، بينما الكتلة $m_2$ تجذب $m_1$ بقوة مضادة تساوي F بالمقدار وتعاكسها بالاتجاه .

لنعتبر **جملة كتلية** أو كما تسمى أيضاً **جملة فيزيائية** ذات **حدود** مميزة تعزلها بشكل ما عن الكتل الأخرى . هذه الحدود يمكن أن تكون **حقيقية** ، مثل السطح الخارجي للسائل أو جدران الأوعية التي تحتويه ، أو **وهمية** ، كأن نتصور أن الجملة الكتلية قد اقتطعت من داخل جسم سائل ،

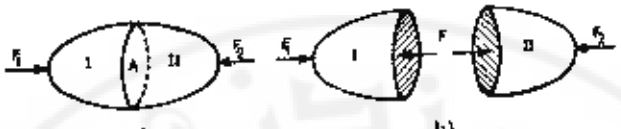
وحررت بعد التعويض عن تأثير السائل المحيط بها بقوى مناسبة بحيث أن سلوكية السائل (حالة توازنه مثلاً) لاتتغير . إن القوى المؤثرة على مثل هذه الجملة تقسم إلى نوعين : **قوى خارجية** تظهر كتأثير بين إحدى كتل الجملة المعتبرة وكتلة خارجية قريبة من الجملة ولكنها غير تابعة لها ؛ **وقوى داخلية** تظهر كتأثير متبادل بين كتلتين تابعتين للجملة المعتبرة . وواضح أن كل قوة خارجية تظهر مرة واحدة فقط ، بينما كل قوة داخلية تظهر مرتين كقوتين متضادتين . وعليه فإن محصلة كافة القوى الداخلية المؤثرة على الجملة تكون معدومة ، بينما لاتنعدم محصلة القوى الخارجية إلا إذا كانت الجملة في حالة توازن ، وينعدم عندها عزم المحصلة أيضاً . فإذا كانت $F_{xi}$ ، $F_{yi}$ ، $F_{zi}$ تمثل مركبات القوى الخارجية باتجاه المحاور الديكارتية $x , y , z$ و $M_i$ يمثل عزم هذه القوى بالنسبة لمحور دوران معين فينتج في حالة التوازن :

$$\sum_{i=1}^{n} F_{xi} = 0 \; ; \; \sum_{i=1}^{n} F_{yi} = 0 \; ; \; \sum_{i=1}^{n} F_{zi} = 0 \; ; \; \sum_{i=1}^{n} M_i = 0 \qquad (2.15)$$

ولكن شروط التوازن هذه لاتعطينا أية فكرة عن حالة الإجهاد داخل إحدى كتل الجملة المعتبرة لأن القوى الداخلية المؤثرة بين الذرات الكتلية هي المسؤولة عنها . وبالتالي فإن الحساب الدقيق للإجهادات الداخلية تستلزم معرفة القوى الداخلية الإفرادية التي تؤثر بها الذرات على بعضها ، مع أخذ حركتها الدائمة بعين الاعتبار . وفي الحالة العامة فإنه بدلاً من هذا الحساب المعقد يكتفى بحساب القيم الوسطية للإجهادات . ولكن كيف يمكن حساب القوى الداخلية طالما أن شروط التوازن ( 2 . 15 ) تطبق على القوى الخارجية فقط ؟ والجواب :

> بمساعدة مبدأ القطع يتم تحويل القوى الداخلية إلى خارجية وحسابها بتطبيق شروط التوازن .

وللتوضيح نعتبر الجملة الكتلية المبينة في الشكل (٢ . ٥ - a) $F_2, F_1$ تمثلان قوتين خارجيتين تعوضان عن تأثير الكتل الخارجية . بواسطة المقطع الوهمي A يصبح لدينا جملتين I و II .



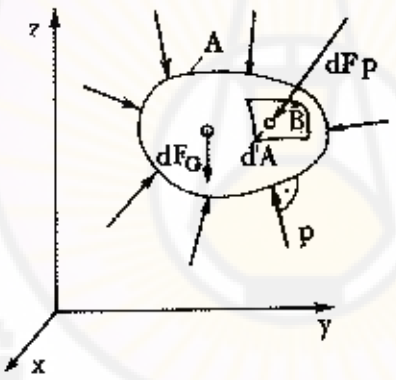

الشكل ٢.٥ : توضيح مبدأ القطع لحساب القوى الداخلية

فإذا أبعدنا الجملة II ، الشكل (٢.٥ - b) ، واعتبرنا الجملة I ( طبعاً العكس ممكن أيضاً ) فإن كافة القوى التي كانت تؤثر بها جزيئات الجملة II على جزيئات I ، والتي كانت قبل القطع قوى داخلية ، تظهر الآن بشكل قوى خارجية محصلتها F . فإذا كانت الجملة قبل القطع في حالة توازن ، فإن الجملة I تبقى أيضاً متوازنة ، وبالتالي يجب أن تكون محصلة القوتين F ، $F_1$ تساوي الصفر . فإذا كانت $F_1$ معلومة فيمكن على هذا الأساس حساب القوة المحصلة الوسطية للقوى الداخلية المؤثرة في المقطع A أو أي مقطع آخر أو خط تقاطع .

نتصور الآن أننا اقتطعنا من داخل سائل ما جزيئاً حجمياً $dV$ شكله غير محدد وحررناه من السائل المحيط به ، الشكل (٦.٢) . هذا الجزيء يمثل جملة فيزيائية فراغية ذات حدود وهمية ممثلة بالسطح الخارجي المغلق للجزيء . إن القوى الداخلية الناتجة عن التأثير المتبادل بين الجزيء والسائل المحيط به تظهر بشكل قوى خارجية موزعة على كامل السطح الخارجي للجزيء . ولذا يطلق عليها **القوى السطحية** وتتألف في الحالة العامة من قوى مماسية وناظمية تنتج عنها إجهادات مماسية ( إجهادات قص ) وإجهادات ناظمية ( ضغوط ) . وتنعدم الإجهادات المماسية إذا كان السائل ساكناً أو كان مثالياً ( عديم اللزوجة ) .

بالإضافة إلى القوى السطحية فمن الممكن أن تؤثر على الجزيء الحجمي قوى ليس لها علاقة بوجود السائل المحيط به . هذه القوى تكون موزعة على كامل حجم أو كتلة الجزيء ويطلق عليها **القوى الحجمية** $F_V$ أو **الكتلية** وأحياناً **الحقلية** . وتنتمي إليها مثلا قوة الثقالة أو قوة الجاذبية الأرضية $F_G$ الناتجة عن تأثير كتلة الكرة الأرضية على الكتلة المعتبرة ، القوى المغناطيسية والكهربائية ، القوة النابذة $F_Z$ وغيرها . وتنشأ القوى الكتلية إما بسبب تسارعات كامنة مستقلة عن الجملة المعتبرة كالتسارع الأرضي ، أو بسبب تسارعات متعلقة بالجملة ككل نتيجة حركتها ، كالتسارع النابذ [12] . وهي تخضع للقانون الأساسي للتحريك فمثلا :

$$F_I = m\,b \;;\; F_V = F_G = mg \;;\; F_I = F_Z = m\,r\,\omega^2 \,, \quad (2.16)$$




الشكل ٢.٦ : القوى السطحية والحجمية المؤثرة في السائل

حيث $b = g$ التسارع الأرضي ؛ $b = r\omega^2$ التسارع النابذ . ومنه ينتج بسهولة أن القوة الحجمية بالنسبة لواحدة الكتلة ، أي نسبة القوة الحجمية على الكتلة ، تساوي إلى التسارع في اتجاه القوة .

إن القوى السطحية والكتلية مجتمعة تحدد سلوكية الجزيء الحجمي الحركية أو السكونية . وحيث أن القوى الحجمية تعتبر بحكم المعطاة فإن

معرفة حالة الإجهاد مرهونة بحساب القوى السطحية . وقد تعرفنا في الفقرة (٢.٢) على ماهية الإجهادات المماسية ويلزم الآن التعرف على الإجهادات الناظمية .

## ٢.٣.٢ مفهوم الضغط في نقطة من السائل

لتوضيح مفهوم الضغط نقتطع من سائل مثالي جزيئاً حجمياً كما في الشكل (٦.٢) . إن تأثير السائل المحيط بهذا الجزيء ينحصر في هذه الحالة بالقوى السطحية الناظمية فقط ، لأن القوى المماسية ( قوى الاحتكاك ) تكون معدومة بسبب كون السائل عديم اللزوجة ، وكذلك قوى الشد باعتبار أن السائل في الحالة العامة لا يستطيع نقلها .

إذا كان $\Delta A$ عنصراً سطحياً يمر من النقطة B الواقعة على السطح الخارجي للجزيء الحجمي و $\Delta F_p$ القوة الناظمية المؤثرة عليه فيكون تعريفاً:

$$p = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F_p}{\Delta A} = \frac{dF_p}{dA} \qquad (2.17)$$

هو ضغط السائل ، أو اختصاراً **الضغط** المؤثر في النقطة B . فإذا كان الضغط موزعاً بانتظام على السطح ، ويتحقق ذلك كلما كان السطح صغيراً ، نتج لدينا علاقة أبسط :

$$p = \frac{F_p}{A} \quad (\mathbf{F}_p \parallel \mathbf{A}) . \qquad (2.18)$$

ضغط اذن إجهاد ناظمي يعبر عن شدة تأثير السائل المحيط على نقطة معينة ن السطح الخارجي للجزيء المقتطع . وتنتج واحدة قياسه :

$$[p] = \left[\frac{F_p}{A}\right] = Nm^{-2} , \qquad (2.19)$$

أو بالمقارنة مع جمل قياس أخرى :

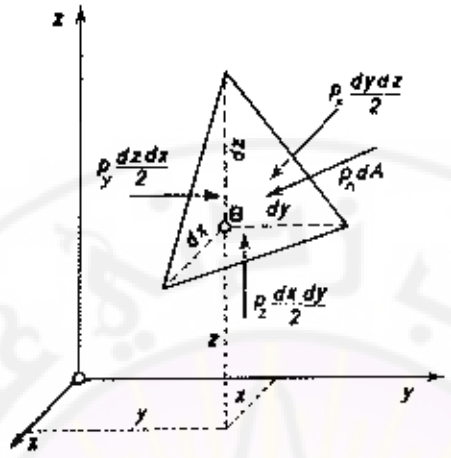
| الجملة العالمية | الجملة التكنيكية | الجملة الفيزيائية |
|---|---|---|
| $1\ N\ m^{-2}$ | $= \frac{1}{9,81}\ \frac{kp}{m^2}$ | $= 10\ \frac{dyn}{cm^2}$ |
| | $= \frac{1}{9,81}\ mm\ WC$ | $= 10^{-6}\ bar$ |
| | $= \frac{10^{-4}}{9,81}\ at$ | $= \frac{10^{-6}}{9,81.1,0333}\ atm = 0,987.10^{-6} atm$ |
| | | $= \frac{760.10^{-4}}{9,81.1,0333}\ Torr = 7,5.10^{-3}\ Torr$ $= 7,5.10^{-3} mm\ MC$ |

(2.20)

حيث تعني [atm] ضغط جوي فيزيائي ؛ [mm WC] ميلمتر عمود سائل ماء ؛ (mm MC) ميليمتر عمود سائل زئبق ( راجع ٢.٣.١.٣ ) .

لتحديد حالة الإجهاد في النقطة B نقتطع من داخل السائل المثالي هرماً ثلاثياً منتظماً متناهي الصغر أطوال حروفه الموازية لمحاور الأحداثيات الديكارتية الثابتة z, y, x هي على التوالي dz, dy, dx والنقطة B ( x , y , z ) تشكل إحدى زواياه ، الشكل ( ٧.٢ ) . نطبق على هذا الجزيء الحجمي **مبدأ دالمبير** الذي يقضي بأن القوى السطحية والحجمية ، بالإضافة لقوى العطالة ، يجب أن تكون في حالة توازن .

إن القوى الحجمية المؤثرة على الجزيء ، كقوة الثقالة مثلا ، وكذلك قوى العطالة ، تتناسب مع حجم الهرم ، فهي إذن صغيرة من المرتبة الثالثة ؛ أما القوى السطحية فتتناسب مع السطح ، فهي إذن صغيرة من المرتبة الثانية . وعليه يمكن إهمال القوى الكتلية وقوى العطالة واعتبار القوى السطحية ، الممثلة هنا بقوى ناظمية فقط ، محققة لشروط التوازن .




الشكل ٢.٧ : توازن هرم ثلاثي منتظم متناهي الصغر
لتحديد حالة الاجهاد في النقطة B

ليكن $p_x$ ، $p_y$ ، $p_z$ : الضغوط المؤثرة على أوجه الهرم في اتجاه المحاور x ، y ، z ، $p_n$ الضغط المؤثر على وجه الهرم المائل الذي مساحته dA . ولنفرض أن α ، β ، γ هي الزوايا المشكلة بين الناظم على dA والمحاور x ، y ، z ، وأن $dA_x$ ، $dA_y$ ، $dA_z$ هي السطوح المتعامدة على هذه المحاور . نطبق شروط التوازن على الهرم ( الشكل ٢.٧ ) فينتج :

$$\left.\begin{aligned} p_x \cdot dA_x - p_n \cdot dA \cos\alpha &= 0 \\ p_y \cdot dA_y - p_n \cdot dA \cos\beta &= 0 \\ p_z \cdot dA_z - p_n \cdot dA \cos\gamma &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (2.21)$$

من جهة أخرى ينتج من علاقة اتجاه التجيب :

$$dA_x = dA\cos\alpha = \frac{dy\,dz}{2} \; ; \; dA_y = dA\cos\beta = \frac{dz\,dx}{2} \; ;$$

$$dA_z = dA\cos\gamma = \frac{dx\,dy}{2} \qquad (2.22)$$

ومن مقارنة هاتين العلاقتين نصل إلى النتيجة الهامة التالية :

$$p_x = p_y = p_z = p_n \qquad (2.23)$$

التي تنص على أن الضغط في النقطة n في الاتجاهات المتعامدة مع سطوح الهرم الأربعة يبقى ثابتاً . وحيث أن اتجاه السطح المائل للهرم قد اختير على غير تعيين فإنه يمكن تعميم هذه النتيجة التي تتميز بها حالة الإجهاد الهيدروستاتيكية :

> تتميز حالة الإجهاد الهيدروستاتيكية بأن الضغط كإجهاد ناظمي له قيمة ثابتة في كافة اتجاهات المقاطع المارة في النقطة المعتبرة ، وهو يمثل قيمة عددية Scalar .

وبالعكس من ذلك فإن الاجهاد الناظمي للجسم الصلب حسب قوانين مقاومة المواد يتعلق باتجاه المقطع ويمثل مركبة **تنزور** Tensor ( التنزور هو قيمة مركبة من قيم موجهة ، أي أشعة ، بشكل جدائي ولكنها لاترتبط مع بعضها كجداءات عددية أو شعاعية [12] ) . ويلزم لتحديد حالة الإجهاد العامة في نقطة معرفة الإجهادات الناظمية في ثلاثة اتجاهات مختلفة ، وتمثّل حالة الإجهاد بيانياً بمجسم قطع ناقص، وتسمى الإجهادات المتعامدة على المستويات المارة من محاوره الرئيسية الثلاثة **الإجهادات الرئيسية** . بينما يلزم لتحديد حالة الإجهاد الهيدروستاتيكية معرفة قيمة عددية واحدة للضغط ، ويأخذ مجسم حالة الإجهاد شكل كرة .

إن العلاقة (2.23) تنطبق على السوائل الساكنة ( الحقيقية والمثالية ) بشكل عام ، وتعني أن الضغط هو **تابع مكاني** صرف : $p = f(x, y, z)$ كما تنطبق على السوائل المثالية المتحركة ، ولكن الضغط يكون هنا في الحالة العامة تابع للزمن أيضاً : $p = f(x, y, z, t)$ . وتجدر الاشارة أن هذه النتيجة تنطبق أيضاً على نقطة واقعة على حدود حقيقية للجزيء

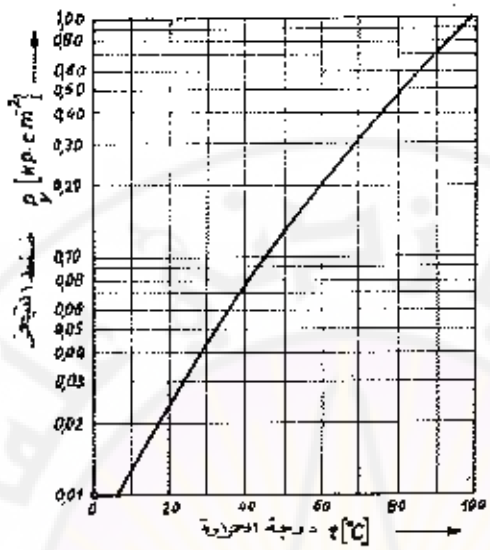
المعتبر مثل جدران الوعاء الذي يحتوي السائل . فقوة الضغط لاتتعلق باتجاه سطح الجدار ولابخشونته وإنما تؤثر ناظمياً عليه وتساوي p dA .

## ٤.٢ مفهوم ضغط التبخر

يطلق على العملية التي يتحول فيها جزء من سائل ( مائع ) تحت تأثير ضغط معين ودرجة حرارة معينة من الحالة المائعة إلى الغازية اسم ظاهرة التبخر . ولكي تتم هذه العملية يجب أن تنفذ ذرات من داخل السائل وتخترق سطحه الخارجي . وهذا يتطلب إنجاز عمل للتغلب على **قوى الإجهاد** السطحي لذرات السطح الخارجي للسائل ( راجع ٧.٢ ) .

وتعلمنا فيزياء المادة أن ذرات كل سائل تكون ذات سرعات مختلفة جداً . وبديهي أن الذرات الأسرع هي التي ستخترق أولا السطح الخارجي للسائل أثناء عملية التبخر ، ويفتقدها السائل بالتالي ، مما يؤدي إلى تخفيض السرعة الوسطية للذرات . وينتج من ذلك إنخفاض لدرجة الحرارة . ولهذا يكون الماء المكشوف دائماً أبرد قليلا من محيطه الخارجي ، وتبرد أجسامنا أكثر إذا كانت مبللة .

عندما تبدأ عملية التبخر لسائل يشغل حيزاً معيناً من إناء مغلق تماماً فإن الجزيئات المتبخرة تأخذ حجم الفراغ فوق السائل ، وتصل بعد فترة زمنية إلى كثافة معينة تتوقف عندها عملية التبخر . في هذه الحالة يصبح عدد الذرات المتبخرة يساوي تماماً لعدد الذرات المتكثفة ، وبالتالي يكون هناك توازن بين السائل وبخاره ونصل إلى **حالة الإشباع** Saturation state . ويطلق على ضغط البخار فوق سطح السائل اسم **ضغط التبخر** أو **ضغط الاشباع** $p_v$ .




الشكل ٨.٢ : تغير ضغط تبخر الماء مع درجة الحرارة

إن ضغط التبخر يتعلق بدرجة الحرارة ويزداد معها ، الشكل ( ٨.٢ ) . ولكل سائل عند درجة حرارة معينة ضغط تبخر معين . فعند درجة حرارة 20 °C يبلغ ضغط التبخر للماء $p_v = 0{,}0238 \frac{kp}{cm^2}$ ، وللجازولين $p_v = 0{,}1224 \frac{kp}{cm^2}$ وللكيروسين $p_v = 0{,}0156 \frac{kp}{cm^2}$ ، وجدير بالذكر أنه بالنسبة للسوائل المركبة مثل الجازولين ومواد الاحتراق السائلة الأخرى فإن ضغط التبخر يتعلق ، بالاضافة لدرجة الحرارة والصفات الفيزيائية – الكيميائية ، بنسبة حجم السائل لحجم البخار [21] .

إن معرفة ضغط التبخر لها أهمية عملية كبيرة بالنسبة لحالات الجريان التي يبلغ فيها الضغط قيمة قريبة من ضغط التبخر ، حيث يرتبط بذلك نشوء ظاهرة **التكهف** Cavitation التي يجب في الحالة العامة تجنبها في كافة المنشآت الهيدروليكية .

## ٢.٥ الكثافة والحجم النوعي والوزن النوعي

تعرف الكثافة المادية للسائل أو باختصار **الكثافة** $\rho$ بأنها كتلة واحدة الحجم :

$$\rho = \frac{m}{V} , \qquad (2 . 24)$$

وواحدة قياسها :

$$[\rho] = \frac{kg}{m^3} = \frac{1}{9,81} \frac{kp\ s^2}{m^4} . \qquad (2 . 25)$$

ويعرف **الحجم النوعي** $v$ بأنه حجم واحدة الكتلة ، وبالتالي فهو يساوي إلى مقلوب الكثافة :

$$v = \frac{1}{\rho} \qquad (2 . 26)$$

بينما **الوزن النوعي** $\gamma$ فيساوي إلى وزن واحدة الحجم :

$$\gamma = \rho g , \qquad (2 . 27)$$

حيث $g$ التسارع الأرضي . وتنتج واحدة القياس :

$$[\gamma] = \frac{kg}{m^3 s^2} = \frac{1}{9,81} \frac{kp}{m^3} . \qquad (2 . 28)$$

إن تغير حجم السائل تحت تأثير الضغط أو الحرارة يؤدي إلى تغير موضعي لكثافة هذا السائل التي يمكن أن تتغير أيضاً مع الزمن . وهذا ماينطبق في الحالة العامة على السوائل القابلة للانضغاط كالهواء مثلا ، ولذا توصف بأنها **غير متجانسة** [1] ويكون حسب (2 . 24) :

$$d\rho \sim d\left(\frac{1}{v}\right) \neq 0 \qquad (2 . 29)$$

بينما تبقى كثافة السوائل غير القابلة للانضغاط عملياً ثابتة وتوصف بأنها متجانسة ويكون :

$$d\rho = 0 \qquad (2.30)$$

ولكن هناك سوائل غير قابلة للانضغاط أيضاً مثل الماء الغالي أو الهواء المشحون بمواد صلبة تكون كثافتها متغيرة مع الزمان والمكان وتوصف بأنها مركبة أو **متعددة الطور** Heterogeneous ويكون بالنسبة لكل مركبة أو طور للسائل حسب [12] :

$$d\rho \sim dm. \qquad (2.31)$$

وتتناقص الكثافة ، والوزن النوعي أيضاً ، مع ازدياد درجة الحرارة . ويكون هذا التناقص بالنسبة للهواء ، كممثل نموذجي للغازات ، أكبر منه في حالة الماء بسبب الاختلاف في تماسك الذرات لكل منهما ، الجدول (٢.٢) .

الجدول ٢.٢ : تغير الوزن النوعي $\gamma$ والكثافة $\rho$ الماء والهواء مع درجة الحرارة عند ضغط جوي $p_0 = 760$ Torr حسب [9]

| | درجة الحرارة $t$ [°C] | − 20 | 0 | 10 | 20 | 40 | 60 | 80 | 100 | 200 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| الماء | $\gamma$ [kp m$^{-3}$] | – | 1000 | 1000 | 998 | 992 | 983 | 972 | 958 | – |
| | $\rho$ [kp s$^2$m$^{-4}$] | – | 101,9 | 101,9 | 101,7 | 101,1 | 100,2 | 99,1 | 97,8 | – |
| الهواء | $\gamma$ [kp m$^{-3}$] | 1,40 | 1,29 | – | 1,20 | 1,12 | 1,06 | 1,00 | 0,95 | 0,746 |
| | $\rho$ [kp s$^2$m$^{-4}$] | 0,142 | 0,132 | – | 0,123 | 0,115 | 0,108 | 0,102 | 0,096 | 0,076 |

## ٦.٢ قابلية الانضغاط ومعامل المرونة

يعتبر التغير النسبي للحجم بالنسبة لواحدة الضغط كمقياس لقابلية السائل على الانضغاط ، ويعرف **معامل الانضغاطية** Coefficient of compressibility عند درجة حرارة ثابتة بالكسر :

$$K_c = -\frac{1}{V}\frac{dV}{dp}\bigg|_{t=\text{const}} \qquad (2.32)$$

حيث $V$ الحجم البدائي ، $dp$ تفاضل الضغط الذي نتج عنه تغير في الحجم بمقدار $dV$ ، وإشارة الناقص للتدليل على أن زيادة الضغط تؤدي إلى تصغير الحجم .

في الحالة العامة يؤخذ مقلوب $K_e$ ويطلق عليه **معامل المرونة الحجمي** Bulk modulus of elasticity تيمناً بمعامل المرونة المعروف في مقاومة المواد :

$$K_B = \frac{1}{K_e} = -\frac{dp}{dV/V}, \qquad (2.33)$$

وهو يمثل ثابتة مادة تختلف من سائل لآخر وله واحدة قياس الضغط :

$$[K_B] = \frac{N}{m^2} = \frac{1}{9{,}81}\,\frac{kp}{m^2}. \qquad (2.34)$$

فإذا أدخلنا الحجم النوعي $v$ بدلا من الحجم $V$ ، وراعينا أن الكتلة بفعل الانضغاط تبقى ثابتة فإن العلاقة (2.33) تصبح بمساعدة (2.24) و (2.26) :

$$K_B = -\frac{dp}{dv/v} = -\frac{dp}{d(\ln v)} = +\frac{dp}{d\rho/\rho} = \frac{dp}{d(\ln \rho)}, \qquad (2.35)$$

التي تنتج بسهولة إذا انتبهنا أن :

$$dv = d\left(\frac{1}{\rho}\right) = -\frac{d\rho}{\rho^2}$$

لحساب $K_B$ نطبق (2.35) على جزيء حجمي متناهي الصغر ، حيث يلزم في الحالة العامة معرفة العلاقة بين الضغط والكثافة وخاصة في حالة سائل غازي ( راجع ٣.٨.٢ مثلاً ) . أما في حالة سائل مائع فيمكن أن نأخذ زيادة الضغط $\Delta p$ وتغير الحجم $\Delta V$ بدلا من $dp$ و $dv$ حيث تصبح (2.33) :

$$K_B \approx -\frac{\Delta p}{\Delta V/V}. \qquad (2.36)$$

أما مقارنة قيم $K_B$ العددية للسوائل والأجسام الصلبة ، الجدول (٣.٢) ، فيقود إلى الاستنتاج التالي :

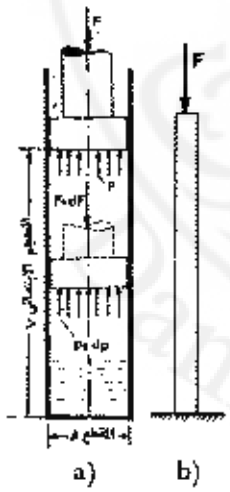
> السوائل المائعة أكثر مرونة من الأجسام الصلبة ، والسوائل الغازية هي أكثر مرونة بكثير من الموائع .

الجدول ٢.٣ : مقارنة معامل المرونة للسوائل والأجسام الصلبة حسب [74] [12]

| السائل أو الجسم الصلب | $K_E$ [kp cm$^{-2}$] |
|---|---|
| ايتر | 9 100 |
| ماء | 21 100 |
| كيروسين ( Jp — 1 ) | 14 050 |
| زيت عنفات متوسط | 17 600 |
| زئبق | 330 000 |
| ألمنيوم | 700 000 |
| فولاذ | 2 300 000 |

يستفاد من خاصة المرونة للسوائل في النوابض الهيدروليكية أو الهوائية ( البنيوماتيكية ) ، وتشبه من حيث منحيها المميز النوابض المعدنية القاسية أو اللينة [12] . ويتألف النابض الهيدروليكي ، الشكل (٢.٩ - a) ، من اسطوانة تحتوي سائلا كالزيت أو الماء مثلا ويتحرك فيها مكبس سطح قاعدته A ومجهز بمانعة خاتمية لمنع تهريب السائل . فإذا تزايد الحمل المؤثر على النابض بمقدار d F ينتج عنه تزايد في الضغط بمقدار $dp = dF/A$ ، وينتقل المكبس بمقدار $d\ell$ ، وتكون قساوة النابض :

$$c = \frac{dp}{d\ell} \qquad (2.37)$$




الشكل ٢.٩ : نابض هيدروليكي (a ومقارنته مع نابض معدني بشكل قضيب مضغوط (b .

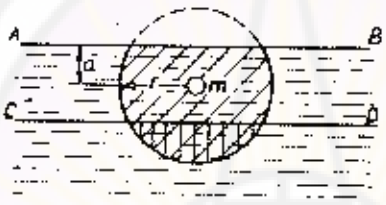
إن النوابض الهيدروليكية تعادل النوابض الحلزونية الإسطوانية من حيث النسبة بين عمل النابض ووزنه التي تبلغ حوالي $\frac{\text{kp cm}}{\text{kp}}$ 350—240 ولكنها تمتاز بصغر حجمها . ولذلك شاع استعمالها في آلات التشغيل وخاصة آلات الضغط والسحب وكذلك كمخمد صدمات . ويعمد إلى ضغط السائل مسبقاً حتى يكون مردود النابض عالياً بالنسبة لكل حمل يتعرض له [74] .

إن معامل المرونة $K_E$ يزداد مع إزدياد درجة الحرارة عند نفس الضغط ، فهو يبلغ بالنسبة للماء مثلا عند درجة حرارة $t = 0\ ^\circ C$ وضغط $p = 5\ kp/cm^2$ : $K_E = 18900\ kp/cm^2$ ، وترتفع هذه القيمة إلى $K_E = 22170\ \frac{kp}{cm^2}$ عند $p = 5\ kp/cm^2,\ t = 20\ ^\circ C$ [21] . فإذا اعتبرنا كقيمة وسطية للماء $K_E = 20000\ kp/cm^2$ فإن حجمه ينقص حسب (2 . 36) ما مقداره $\Delta V/V = 1/20000 = 0{,}05\ ‰$ بالنسبة لكل زيادة ضغط مقدارها $1\ kp/cm^2$ . وهذا مايجعلنا نعتبر الماء وبقية الموائع الأخرى سوائل ثابتة الحجم أو غير قابلة للانضغاط عملياً .

## ٧.٢ التوتر السطحي والخاصية الشعرية

إن السطح الحر المتشكل كحد فاصل بين سائلين متلاصقين غير متمازجين ( ماء — زيت ، ماء — هواء ! ) يسعى دائماً ليكون **أصغرياً** ، تماماً كما يفعل غشاء مطاطي رقيق مشدود بانتظام [1] . وسبب هذا التصرف يعود لكون كل ذرة من السائل ، سواء كانت في الداخل أو على السطح الخارجي الحر ، تخضع لتأثير قوى جذب الذرات المحيطة بها المسماة **قوى الترابط الذرية** Molecular cohesion forces .

نفرض كما في الشكل (١٠.٢) أن الجزيئة m تقع على عمق a من السطح الخارجي الحر لسائل ساكن الممثل بالمستوي الأفقي A — B . وليكن D – C مستوياً موازياً لـ A – B ومتناظراً معه بالنسبة لـ m . إن تأثير قوى الترابط الذرية على الجزيئة m لا يظهر إلا ضمن مجال صغير جداً حولها نصف قطره r . فإذا كان a > r فإن قوى الترابط الذرية المؤثرة على الجزيئة من كافة الجهات تفني بعضها وتبقى الجزيئة في حالة توازن . أما في الحالة التي تكون فيها a < r ( الشكل ١٠.٢ ) فإن قوى الترابط الذرية المؤثرة ضمن المستويين A – B و D – C فقط تفني بعضها ، ويبقى تأثير قوى




الشكل ١٠.٢ : لتوضيح نشوء التوتر السطحي

جذب الجزيئات الواقعة تحت المستوي D – C ( تمثير مضاعف في الشكل ) التي تحاول جذب m إلى الداخل . ومن هنا يتضح أن السطح الحر للسائل لايحتفظ إلا بالجزيئات الضرورية جداً اللازمة لتكوين « قشرة السطح » بأصغر مساحة ممكنة . ولهذا السبب تكون قطرات المطر وفقاعات الصابون ذات شكل كروي لأن سطحها الخارجي في هذه الحالة بالنسبة لحجم معين يكون أصغرياً .

إن المركبات المماسية لقوى الترابط الذرية الموازية للسطح الخارجي الحر للسائل والمتعامدة مع الخطوط المحددة لهذا السطح تجعله في حالة إجهاد شد ، يطلق عليه عامة **إجهاد السطوح المحددة** Interfacial tension أو **التوتر السطحي** Surface tension :

التوتر السطحي $\sigma_0$ يمثل قوة الشد F الموازية للسطح الخارجي للسائل بالنسبة لكل واحدة طول من الخط المحد s لهذا السطح والتي يجب القيام بعمل من أجل التغلب عليها أثناء تكبيره .

$$\sigma_0 = \frac{dF}{de} = \text{const} \quad (dF \perp ds) \qquad (2.38)$$

وواحدة قياسه :

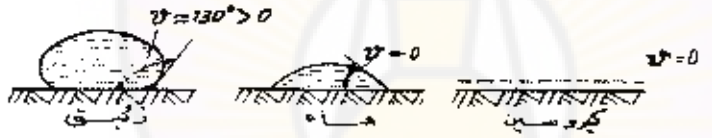
$$[\sigma_0] = \left[\frac{F}{s}\right] = N \cdot m^{-1} = \frac{1}{9{,}81} \frac{kp}{m} \; . \qquad (2.39)$$

إن قيمة $\sigma_0$ تبقى ثابتة في كل نقطة من السطح الخارجي الحر للسائل المعتبر وفي كل الاتجاهات ، ولاتتغير مع تغير السطح بعكس إجهاد الشد للغشاء المطاطي . لذا فإن التوتر السطحي يمثل احدى خواص السائل . وتتعلق قيمته بدرجة الحرارة وبقوة جذب الوسط المتاخم للسطح الخارجي [ 12] ، الجدول (٤.٢) .

الجدول ٤.٢ : التوتر السطحي لبعض السوائل عند $t = 20\,^{\circ}C$ حسب [9] [12]

| السائلان المتناخمان | $\sigma_0\ 10^5\ [kp\ m^{-1}]$ | $\sigma_0 \cdot 10^3\ [N\ m^{-1}] \doteq$ |
|---|---|---|
| ماء / هواء | 7,4 | 72,5 |
| زيت / هواء | 2,54 .... 3,06 | 25 ... 30 |
| زئبق / هواء | 48,2 | 472 |
| كحول / هواء | 2,60 | 25,5 |
| ماء / زيت زيتون | 1,85 | 18,2 |
| ماء / بتروليوم | 4,9 | 48 |
| زئبق / ماء | 38,2 | 375 |

إن جزيئات السائل القريبة جداً من السطح المحد بين سائلين متناخمين وغير متمازجين ( ماء ـ هواء ، ماء ـ زيت ! ) تخضع لتأثير قوى الترابط الذرية لكل منهما . وبالتالي تتغير قيمة $\sigma$ ويتغير أيضاً شكل السطح المحد نفسه إذا تغير الوسط المتاخم . وعلى هذا الأساس يمكن تفسير العديد من مشاهداتنا اليومية . فإذا سقطت قطرة زيت في الهواء على الماء ، الذي هو أثقل من الزيت ، فإن هذه القطرة لاتلبث أن تتحول إلى طبقة رقيقة تغطي السطح الخارجي للماء . ونلاحظ نفس الحالة إذا وضعنا قطرة ماء على سطح الزئبق . وبالعكس من ذلك فإن قطرة من الماء تبقى محافظة على شكلها إذا وضعت فوق سطح سائل أخف مثل فحمات الكبريت . ونلاحظ نفس الظاهرة إذا وضعنا قطرات من سوائل مختلفة على سطح جسم صلب . فعلى صفيحة زجاجية أفقية تبقى قطرة الزئبق محافظة على شكلها الكروي تقريباً ، بعكس قطرة الماء التي تفقد شكلها بسرعة ، أو قطرة البترول التي تزحف منتشرة

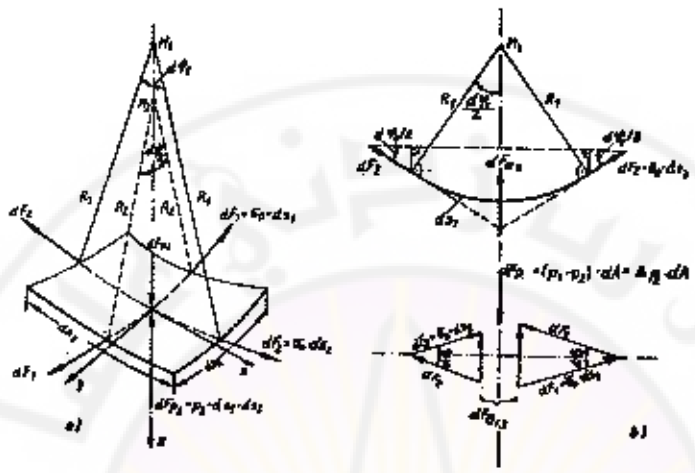



الشكل ٢ . ١١ : تشكل قطرات سوائل مختلفة على صفيحة زجاجية

بشكل طبقة رقيقة فوق الصفيحة ، الشكل (١١.٢) . ومن هنا نستنتج أن هناك سوائل مبللة للأجسام الصلبة ، مثل الماء والبترول ، تكون زاوية الحافة أو زاوية التماس بين سطحها الخارجي والسطح الصلب $\theta \to 0$ ؛ وسوائل غير مبللة مثل الزئبق تكون زاوية تماسها $\theta > 0$ .

لكي نتمكن من حساب الظواهر المتعلقة بالتوتر السطحي نطبق شروط التوازن على عنصر سطحي $dA$ بشكل مستطيل أطوال أضلاعه $da_1$ ، $da_2$ نقتطعه من السطح الخارجي المقوس للسائل ، لأنه في حالة السطوح الخارجية

المستوية تتوازن قوى التوتر السطحي فيما بينها . وليكن $R_1$ ، $R_2$ نصفي قطر الإنحناء ، $d\varphi_1$ ، $d\varphi_2$ زاويتي الانفراج ، الشكل (١٢.٢) .



الشكل ٢ . ١٢ : القوى المؤثرة على عنصر سطحي مقوس (a) ، مستويا مثلثي القوى يخترقان بعضهما بشكل قائم وتكون محصلة قوى التوتر السطحي ومحصلة قوى ضغط التقوس واقعتان على خط تقاطع المستويين (b) .

على حدود الجزيء تظهر قوى الشد الداخلية للسطح الخارجي كقوى خارجية حيث تؤثر على الضلعين $ds_1$ القوتان $dF_1 = \sigma_0\, ds_1$ وعلى الضلعين $ds_2$ القوتان $dF_2 = \sigma_0\, ds_2$ ( الشكل ١٢.٢ - a ) وتنتج محصلة قوى التوتر السطحي الأربعة $dF_\sigma$ كقوة باتجاه الناظم على العنصر السطحي ، وتكون متوازنة مع محصلة قوى الضغط $dF_p$ المؤثرة على الوجه المحدب والمقعر للعنصر السطحي [1] . ومن تطبيق شروط التوازن ينتج حسب الشكل ( ١٢.٢ - b ) :

$$dF_\sigma = 2\left[\sigma_0\, ds_1 \sin\frac{d\varphi_1}{2} + \sigma_0\, ds_2 \sin\frac{d\varphi_2}{2}\right] = dF_p = (p_1 - p_2)\, ds_1\, ds_2$$
$$= \Delta P_\sigma \,.\, ds_1\, ds_2$$

حيث $p_1$ الضغط الداخلي ، $p_2$ الضغط الخارجي . وحيث أن زاويتي الانفراج صغيرتان جداً فيمكن اعتبار :

$$\sin\frac{d\varphi_{1/2}}{2} \approx \frac{d\varphi_{1/2}}{2} = \frac{1}{2}\,\frac{ds_{1/2}}{R_{1/2}}$$

وينتج بالتالي **ضغط التقوس** أو **ضغط الخاصية الشعرية** Capilar pressure بعد الإختصار :

$$\Delta P_c = \sigma_0 \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) . \qquad (2.40)$$

وإذا اعتبرنا ارتفاع تقوس السطح عن المستوي x , y هو z فيكون الانحناء معطى بالعلاقة [42] :

$$\frac{1}{R_1} = \frac{\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}}{\left[1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]^{3/2}} \; ; \; \frac{1}{R_2} = \frac{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}}{\left[1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right]^{3/2}} ,$$

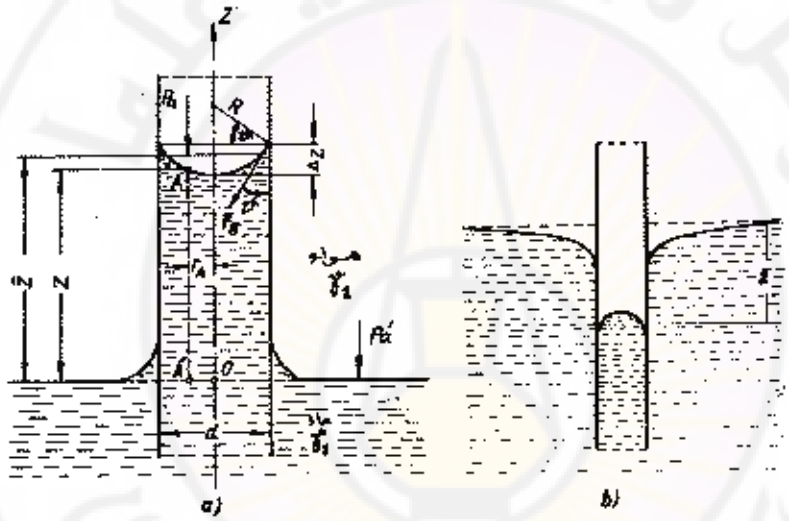
وحيث أنه عند قيم $\frac{\partial z}{\partial x}$ صغيرة يكون $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \ll 1$ فإن العلاقة (2.40) تصبح من الشكل :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\Delta p_c}{\sigma_0} \quad . \qquad (2.41)$$

ونلاحظ أنه في حالة السطوح الخارجية الحرة المستوية ، عندما يكون $R_{1/2} \to \infty$ أي $z \to 0$ ، ينعدم ضغط التقوس وكذلك التوتر السطحي . ويعتبر ضغط التقوس موجباً عندما يكون اتجاه تأثيره لداخل السائل وبالتالي في حالة كون السطح الخارجي محدباً الى الخارج ، وسالباً في حالة كونه مقعراً إلى الخارج ( الشكل ١٣.٢ ) .

إن العلاقة (2.40) تسمح لنا بتفسير وحساب ظاهرة هامة معروفة باسم **الخاصية الشعرية** Capillarity نلاحظها عندما نغمس أنبوبة شعرية في إناء فيه سائل مائع . فإذا كان السائل مبللا لجدران الأنبوبة ( ماء ! ) **يرتفع**

فيها فوق مستوى سطح السائل في الأناء ، وإذا كان غير مبلل للجدران (زئبق !) **ينخفض** فيها تحت مستوى سطح السائل ، الشكل (١٣.٢) . وكما تؤكد التجارب فإن ارتفاع (أو انخفاض) السائل في الأنبوبة يختلف من سائل إلى آخر ويتناسب عكساً مع قطر الأنبوبة ، ويكون السطح الخارجي للسائل داخل الأنبوبة مقعراً باتجاه الداخل شبيهاً بشكل هلال **Meniscus** في حالة الماء أو الكحول مثلا ، أو محدباً باتجاه الخارج في حالة الزئبق .




الشكل ١٣.٢ : السائل المبلل للجدران كالماء يرتفع في الأنبوبة الشعرية (a ؛ والسائل غير المبلل للجدران كالزئبق ينخفض في الأنبوبة الشعرية (b .

لحساب ارتفاع صعود السائل ( مثلا الماء ) ، في الأنبوبة نعتبر حسب الشكل (١٣.٢ ـ a ) النقطة A من السطح الهلالي على بعد $r_A$ من محور الأنبوبة التي قطرها $d = 2r$ . وليكن z ارتفاع A عن سطح سوية السائل الأفقي خارج الأنبوبة ، $\gamma_1$ الوزن النوعي للسائل المعتبر ( الماء ) ، $\gamma_2$ الوزن النوعي للهواء . فإذا كان $p_a$ هو ضغط الهواء الخارجي عند A فيكون

الضغط المؤثر في النقطة A′ ، مسقط A على مستوى سطح السائل خارج الأنبوبة ، يساوي إلى الضغط في A زائداً وزن عمود السائل بارتفاع $z = \overline{AA'}$ ناقصاً ضغط التقوس باعتباره سالباً في هذه الحالة :

$$p_{A'} = p_a + \gamma_1 z - \sigma_0 \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) .$$

وحيث أن السطح الأفقي المار من A′ هو سطح ضغط ثابت (راجع ١.١.٣)، وبافتراض $p'_a$ هو ضغط الهواء الخارجي المؤثر عليه والذي يزيد على $p_a$ بمقدار وزن عمود الهواء بارتفاع z ، فينتج :

$$p_{A'} = p'_a = p_a + \gamma_2 z = p_a + \gamma_1 z - \sigma_0 \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

ومنه :

$$z (\gamma_1 - \gamma_2) = \sigma_0 \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) . \qquad (2 . 42)$$

في الحالة العملية يكون $\gamma_1 \gg \gamma_2$ . فإذا أهملنا $\gamma_2$ ، واعتبرنا السطح الهلالي كروي الشكل تقريباً وبالتالي $R_1 = R_2 = R$ ، فإن ارتفاع الصعود الوسطي للسائل في الأنبوبة $\overline{z}$ ينتج من (2 . 42) ، وبرموز الشكل (١٢.٢ - a) :

$$\overline{z} = \frac{2 \sigma_0}{\gamma_1 R} = 2 \frac{\sigma_0 \cos \vartheta}{\gamma_1 r} . \qquad (2 . 43)$$

إن زاوية التماس $\vartheta$ يمكن حسابها من ارتفاع التقوس الأعظمي $\Delta z$ للسطح الهلالي :

$$\Delta z = R (1 - \sin \vartheta) = r \frac{1 - \sin \vartheta}{\cos \vartheta} \qquad (2 . 44)$$

فإذا كانت $\overline{z}$ , r , $\vartheta$ معلومة عن طريق القياس مثلا فإنه يمكن من العلاقة (2 . 43) حساب $\sigma_0$ ، الذي يطلق عليه أيضاً **معامل الخاصية الشعرية** : **Capilarity coefficient**

$$\sigma_0 = \frac{R}{2}\,\gamma_1 \bar{Z} = \frac{\gamma_1 \bar{Z}}{2}\,\frac{r}{\cos\vartheta} \qquad (2.45)$$

وتأخذ العلاقات السابقة أشكالا بسيطة إذا اعتبرنا السطح الهلالي بشكل نصف كرة ، حيث تصبح $\vartheta \approx 0$ ، وبالتالي ينتج من (2.43) :

$$\bar{Z} = \frac{2\,\sigma_0}{\gamma_1 r} = \frac{4\,\sigma_0}{\gamma_1 d}\,, \qquad (2.46)$$

حيث d قطر الانبوب الشعري . فإذا بدلنا في هذه العلاقة :

$$\gamma_1 = 10^3\ \mathrm{kp/m^3}\ ,\ \sigma_0 = 7{,}4\ .\ 10^{-5}\,\frac{\mathrm{kp}}{\mathrm{m}}$$

فينتج إذا حسبنا $\bar{Z}$ , d بالمليمتر :

$$\bar{Z} = \frac{29{,}6}{d}\ [\mathrm{mm}]\ .$$

وعليه فإن ارتفاع الصعود في الأنابيب الشعرية يتناسب عكساً وقطر الأنبوبة ، كما سبق وذكرنا ، ويمكن حساب به بصورة تقريبية :

$$\left.\begin{array}{rl} \text{الماء} & \bar{Z} \approx 30/d\ [\mathrm{mm}] \\ \text{الكحول} & \bar{Z} \approx 10/d\ [\mathrm{mm}] \\ \text{التلول} & \bar{Z} \approx 13/d\ [\mathrm{mm}] \end{array}\right\}\ , \qquad (2.47)$$

وتبلغ هذه الارتفاعات نصف قيمتها في حالة صفيحتين مستويتين متوازيتين ، لأن نصف قطر الانحناء $R_2$ في العلاقة (2.40) يصبح لا نهائياً وبالتالي ينعدم الحد $1/R_2$ .

ولعله من المفيد التنبيه أن العلاقة (2.46) يمكن استخراجها ببساطة على أساس مبدأ القدرة . فعندما نغمس أنبوبة شعرية في سائل بللت جدرانها به مسبقاً فإن العمل اللازم dW لرفع كتلة جزئية من السائل مقدارها $dm = \rho_1 \pi r^2 . dZ$

يساوي عند نهاية ارتفاع الصعود الوسطي $\bar{Z}$ إلى القدرة المتحررة لقوى التوتر السطحي $dW_\sigma$ نتيجة اختفاء جزء من السطح الخارجي المحد للسائل اثناء عملية الصعود مقداره $2\pi r\,dZ$ . وينتج بالتالي :

$$dW = dW_\sigma \Rightarrow \gamma_1 \pi r^2 dZ\, g\bar{Z} = \sigma_0 2\pi r\, dZ \quad ,$$

ومنه ، بعد الانتباه أن $\gamma_1 = \rho_1 g$ ، تنتج نفس العلاقة ( 2 . 46 ) .

إن العلاقات المستخرجة أعلاه تنطبق من حيث المبدأ أيضاً على ظاهرة **الانكماش الشعري** Capilar depression التي نلاحظها في حالة السوائل غير المبللة للجدران ، الشكل ( ١٣.٢ - b ) ، حيث يمكن حساب ارتفاع الهبوط في الأنبوب الشعري وزاوية الحافة التي تبلغ في حالة الزئبق حسب [1][9][12]

$\theta \approx 130^0 > \frac{\pi}{2}$ ، ( الشكل ١١.٢ ) .

إن ظاهرة الخاصية الشعرية معروفة منذ القديم . فقد اعتمد عليها **لورد ريليه** Lord Rayleigh عام 1879 لتفسير تفكك تيار نافورة اسطواني يتحرك ببطء في الهواء إلى قطرات صغيرة ، ذلك أن قوى التوتر السطحي بمحاولتها تصغير سطحه الخارجي تجعله غير مستقر مما يؤدي إلى تفككه لقطرات كروية الشكل . كذلك فإن عملية امتصاص شعيرات جذور النباتات للمواد المنحلة في التربة ، وصعود السوائل في الأجسام المسامية كالورق والاسفنج وغيره ، تعتمد على الخاصية الشعرية .

## ٨.٢ معادلات تغير الحالة للغازات الكاملة

تتميز السوائل الغازية بقابليتها الكبيرة للانضغاط ، حيث أنه يمكن بزيادة ضغط مناسبة حصر كتلة غازية معينة في حجم صغير ، كما تستطيع نفس الكتلة أن تتمدد وتملأ حجماً أكبر من حجمها الأصلي إذا كان

الضغط المؤثر عليها أصغر من ضغط الهواء الجوي الخارجي . والغازات لا تغير حجمها وبالتالي كثافتها تحت تأثير الضغط فقط ، وإنما تحت تأثير درجة الحرارة أيضاً وبشدة . والمعروف بالخبرة أن درجة حرارة الغاز تزداد عند الانضغاط ، وتنقص عند التمدد ، إذا لم يتوفر الوقت الكافي للتبادل الحراري مع الوسط المحيط بالغاز .

إن النظرية الحركية للمادة تعطي تفسيراً واضحاً لتصرف الغازات بهذا الشكل . فذرات الغاز التي لاتلتزم بأماكن محددة تتصادم مع بعضها البعض ومع الجدران الصلبة بسرعات عالية جداً . وينشأ الضغط كمحصلة تأثير هذه الصدمات ، بينما تتناسب درجة الحرارة مع القدرة الحركية الوسطية للذرات [39] . فإذا ضغط الغاز تزداد سرعة الجزيئات نتيجة التصادم والانعكاس المرن ، وبذلك تزداد القدرة الحركية ، وتزداد معها درجة الحرارة ؛ ويحدث العكس عند التمدد .

في الحالات العملية التي يمكن فيها اهمال الانضغاطية ، كما هو الأمر بالنسبة للجريانات ذات السرعات المتوسطة ، أو في حالة السكون عندما لايحدث أي تغير في الحجم ، فإن دراسة السوائل الغازية لاتختلف من حيث المبدأ عن دراسة السوائل غير القابلة للانضغاط . وتكون **حالة الإجهاد الايروستاتيكية** مماثلة لحالة الاجهاد الهيدروستاتيكية . أما في حالة الجريانات ذات السرعات العالية جداً التي يعالجها **الغازديناميك** ، مستعيناً بقوانين **الترموديناميك** ، فإن إهمال الانضغاطية يقود الى نتائج خاطئة جداً .

لقد ذكرنا على ص ٦١ أن الغازات أكبر مرونة بكثير من السوائل المائعة ، والواقع أن مرونتها كبيرة لدرجة يصعب تحديد معامل مرونتها الحجمي $K_E$ كثابتة مادية [12] . فحسب العلاقة (2.35) يلزم لحساب $K_E$ معرفة العلاقة التي تربط بين الكثافة $\rho$ ( أو الحجم النوعي $v$ ) والضغط

p بالاضافة لدرجة الحرارة t ، وبالتالي بين القيم التي تحدد **حالة الغاز** . وهنا يميز علم الترموديناميك بين **الغازات الكاملة** Perfect gas و**غير الكاملة** :

**الغاز الكامل هو الذي يحقق بالنسبة لكافة الضغوط العلاقة :**

$$p\,v = R\,T \qquad (2.48)$$

التي يطلق عليها **معادلة الحالة** State equation أو **قانون جي – لوساك – ماريوط** ، نسبة لمكتشفيها E. Mariotte و L. Gay - Lussac (1778 -1850) (1620 -1684) ، وهي لاتنطبق تماماً على الغازات غير الكاملة ، ولكنها تعطي نتائج أكثر دقة كلما صغر الضغط [37] . ويجدر الانتباه أن تعريف الغازات الكاملة ليس له علاقة بتعريف السوائل المثالية ص ٣٩ ، وأن الغاز الكامل يمكن أن يكون سائلاً حقيقياً أو مثالياً . وتعني في العلاقة (2.48) :

$$T\,[^0K] = 273,15 + t\,^0C \approx 273 + t \qquad (2.49)$$

**درجة الحرارة المطلقة** لأنها تقاس من الصفر المطلق عند $t = -273\,^0C$ ، وواحدة قياسها درجة كيلفين [°K] ؛ بينما تمثل R ثابتة مادية يطلق عليها **ثابتة الغاز** وتساوي العمل الذي ينجزه 1 kg ( أو 1 kp ) من الغاز عند تسخينه مقدار 1° تحت ضغط ثابت . في جملة القياس العالمية حيث $v = 1/\rho$ تصبح العلاقة (2.48) من الشكل :

$$\frac{P}{\rho} = R\,T \qquad (2.50)$$

وتنتج واحدة قياس ثابتة الغاز :

$$[R] = \frac{N\,m}{kg\,grd.} = \frac{kg\,m^2}{kg\,grd.s^2} = \frac{1}{9,81}\,\frac{kp\,m}{kg\,grd.} \qquad (2.51)$$

وفي جملة القياس التكنيكية حيث يعرف الحجم النوعي بأنه حجم واحدة

الوزن $\frac{1}{\rho g} = 1/\gamma = v$ ، تصبح (2 . 52) :

$$\frac{p}{\rho g} = R\,T \qquad (2\,.\,52)$$

وتنتج واحدة قياس ثابتة الغاز :

$$[R] = \frac{kp\ m}{kp\ grd.} \qquad (2\,.\,53)$$

ونلاحظ بالمقارنة مع (2 . 51) أن القيمة العددية لـ R لا تتغير إذا قيست بـ [kp m/kp grd.] أو [kp m / kg grd.] ، الجدول (٥.٢) .

الجدول ٥.٢ : ثابتة الغاز R بالنسبة لبعض الغازات حسب [37]

| الغـاز | R [kp m/kp °K] ≡ R [kp m/kg °K] |
|---|---|
| هواء جاف | 29,27 |
| هواء نصف رطب | 29,40 |
| الاوكسجين | 26,49 |
| الآزوت | 30,26 |
| الهيدروجين | 420,55 |

من معادلة الحالة يمكن استنتاج عدة قوانين معروفة في علم الترموديناميك باسم **قوانين تغير الحالة** [37] ، لها أهمية بالنسبة لدراستنا المقبلة .

## ١.٨.٢ قانون تغير الحالة الايزوترمي

إذا تغيرت حالة الغاز وبقيت درجة الحرارة ثابتة ، نقول إن التغير يتم بشروط إيزوترمية . وهذا يعني أنـه يلزم أن يتوفر الوقت الكافي لكي

تتساوى درجة حرارة الغاز ، التي ترتفع اثناء الانضغاط وتنقص اثناء التمدد ، مع درجة حرارة الوسط المحيط به . ونحصل على **قانون تغير الحالة الايزوترمي** Isothermal change of state من معادلة الحالة (2 . 48) بوضع T = const ، حيث ينتج باستخدام (2 . 50) :

$$p v = p/\rho = \text{const} \qquad (2 . 54)$$

وهو ما يسمى **قانون بويلي – ماريوط** نسبة للعالمين R. Boyle (1627 – 1691) الذي اكتشفه عام 1662 ، وماريوط الذي اكتشفه عام 1679 مستقلاً عن الأول .

## ٢.٨.٢ قانون تغير الحالة الايزوباري

إذا تغيرت حالة الغاز وبقي الضغط ثابتاً ، نقول إن التغير يتم بشروط ايزوبارية . وينتج **قانون تغير الحالة الإيزوباري** Isobaric change of state من (2 . 48) بوضع p = const :

$$T/v = T\rho = \text{const} \qquad (2 . 55)$$

الذي يسمى أيضاً **قانون جي – لوساك** ، الذي اكتشفه عام 1802 ، حيث وجد أن كل الغازات تحت ضغط ثابت تغير حجمها بنفس النسبة ، إذا رفعت درجة حرارتها من صفر إلى مائة درجة .

## ٣.٨.٢ قانون تغير الحالة الادبياتي

في الحالات التي يكون فيها الغاز معزولا تماماً عن الوسط الخارجي ، أو التي يتم فيها تغيز حالته ( انضغاط أو تمدد ) بسرعة لايتوفر عندها الوقت اللازم لأي تبادل حراري يؤدي إلى تعادل درجة الحرارة بين الغاز والوسط

المحيط به ، فنقول أن تغير الحالة يتم بشروط أديباتية . ويمكن بمساعدة قوانين الترموديناميك ، [37] مثلا ، البرهان أن **قانون تغير الحالة الأديباتي** Adiabatic change of state يعطى بالعلاقة :

$$p\,\rho^{\varkappa} = p/\rho^{\varkappa} = \text{const} \quad , \qquad (2\,.\,56)$$

حيث $\varkappa = c_p / c_v$ يمثل نسبة الحرارة النوعية للغاز عند ضغط ثابت على الحرارة النوعية عند حجم ثابت ويطلق عليه الأس الأديباتي . وتبلغ قيمته بالنسبة للهواء الجاف $\varkappa = 1{,}405$ .

## ٤.٨.٢ قانون تغير الحالة البوليتروبي

في الحياة العملية وبالنسبة للغازات شبه الكاملة ، كما هو الأمر في العمليات التي تحدث في اسطوانات الآلات التي نستخدمها أو في الجو الخارجي ، فإن تغير الحالة لا يمكن أن يخضع تماماً لقانون تغير الحالة الايزوترمي ، الذي يشترط تبادلا حرارياً كاملا مع الوسط الخارجي ، ولا لقانون تغير الحالة الأديباتي ، الذي يشترط عزلا كاملا عن الوسط الخارجي ، فهما يمثلان إذن قانونين حديين لتغير الحالة يحصران بينهما **قانون تغير الحالة البوليتروبي** Polytropic change of state الذي يعبر عنه في الحالة العامة بالعلاقة :

$$p\,\rho^{n} = p/\rho^{n} = \text{const} \quad , \qquad (2\,.\,57)$$

حيث n هو الأس البوليتروبي ، ويكون في الحالات العملية محققاً $1 < n < \varkappa$ . ويمكن من (2 . 57) اشتقاق كافة قوانين تغير الحالة الأخرى حسب قيمة n . فمثلا من أجل $n = 1$ نحصل على العلاقة (2 . 54) ، ومن أجل $n = 0$ على العلاقة (2 . 55) ، ومن أجل $n = \varkappa$ على العلاقة (2 . 56) . وتوجد في [17] [37] تفاصيل أكثر عن قيمة n بالنسبة للحالات المختلفة .

## ٩.٢ أسئلة مراجعة وتمارين

**س ١.٢** : ما هي اللزوجة ؟ اكتب تعريفها الرياضي وعدد واحداتها القياسية . كيف تتغير اللزوجة التحريكية والحركية للماء والهواء مع الضغط والحرارة ؟

**س ٢.٢** : ما هو الفرق بين السائل المثالي والحقيقي والغاز الكامل ؟

**س ٣.٢** : قارن بين مفهوم الاحتكاك وإجهاد القص في الأجسام السائلة والصلبة .

**س ٤.٢** : عرّف الضغط الستاتيكي في نقطة وبيّن الفرق بين حالة الإجهاد الهيدروستاتيكية وحالة الإجهاد العامة .

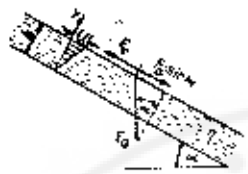
**س ٥.٢** : ما هي قوانين تغيّر الحالة للغازات الكاملة ؟

**س ٦.٢** : على طرفي أنبوب زجاجي شعري معكوف بشكل حرف U ومجهز بصمام في منتصفه توجد فقاعتان من الصابون مختلفتا الحجم . اشرح ماذا يحدث عند فتح الصمام .

**س ٧.٢** : اشرح مبدأ عمل النابض الهيدروليكي . هل يمكن مقارنته بالنابض المعدني ؟

**ت ١.٢** : بين صفيحتين أفقيتين متوازيتين مستطيلتي الشكل مقاييس كل منهما $50 \times 60\ cm$ توجد طبقة رقيقة من الزيت سماكتها $h = 0{,}01\ cm$ . عندما نميّل الصفيحتين زاوية مقدارها $\alpha = 20°$ تبدأ الصفيحة العلوية التي تزن $F_G = 5\ kp$ بالانزلاق للأسفل بسرعة $U = 10\ cm/s$ . احسب اللزوجة التحريكية للزيت بالبواز .

**الحل :** في لحظة انزلاق الصفيحة العلوية تكون مركبة قوة الوزن في اتجاه الحركة متوازنة مع قوة الاحتكاك .



الشكل ت ٢.٢

وباعتبار أن توزع السرعة بين الصفيحتين خطي ينتج حسب الشكل ( ت ٢.٢ ) ومن العلاقة (2.3) :

$$F_\tau = \tau A = \eta \frac{U}{h} A = F_G \sin \alpha$$

حيث A مساحة الصفيحة . وتنتج اللزوجة التحريكية :

$$\eta = \frac{F_G \sin \alpha \, h}{U A} = \frac{5 . 0{,}342 . 0{,}01}{10 . 50 . 60}$$

$$\eta = 0{,}57 . 10^{-6} \frac{kp\,s}{cm^2} = 5{,}7 . 10^{-3} \frac{kp\,s}{m^2} =$$

$$= 5{,}592 . 10^{-3} \frac{Ns}{m^2} = 0{,}5592\ P$$

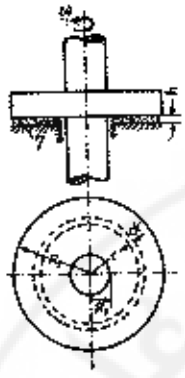
**ت ٢.٢ :** بين المضجع الخاتمي لمحور شاقولي ومسنده الأفقي توجد طبقة رقيقة منتظمة من الزيت سماكتها h . احسب عزم الدوران اللازم للتغلب على مقاومة الاحتكاك عندما يدور المحور بسرعة زاوية ثابتة $\omega$ ، إذا كانت اللزوجة التحريكية للزيت $\eta$ ، ونصف القطر للمضجع $R_1$ ، وللمحور $R_2$ .

مثال عددي :

$$n = 300\ rpm,\ R_2 = 10\ cm,\ R_1 = 20\ cm,\ \eta = 0{,}09 . 10^{-6} \frac{kp\,s}{cm^2},\ h = 0{,}01\ cm$$

**الحل :** مقاومة الاحتكاك تنتج عن إجهاد القص $\tau$ . وحيث أنه بحكم

شرط الالتصاق تتغير السرعة من الصفر على المسند وحتى قيمة السرعة المحيطية $u = r\omega$ على المضجع وبشكل خطيّ ( جريان كوئيت ) فينتج من ( 2.3 ) :



الشكل ت ٢.٢

$$\tau = \eta \frac{u}{h} = \eta \frac{r\omega}{h} \quad ; \quad R_2 \leq r \leq R_1$$

وتنتج قوة الاحتكاك الجزئية بالنسبة لخاتم رقيق من الزيت على بعد r وبسماكة dr ، الشكل ( ت ٢٠٢ ) :

$$dF_\tau = \tau \, dA = \frac{\eta \omega \, 2\pi}{h} r^3 \, dr \ ,$$

ويكون العزم الجزئي لهذه القوة :

$$dM_\tau = \frac{2\pi\eta\omega}{h} r^3 \, dr \ ,$$

وعزم الاحتكاك الكلي الذي يجب التغلب عليه :

$$M_\tau = \int_{R_2}^{R_1} dM_\tau = \frac{2\pi\eta\omega}{h} \int_{R_2}^{R_1} r^3 \, dr = \frac{\pi\eta\omega}{2h} (R_1^4 - R_2^4) = \frac{\eta\pi^2 n}{60\,h} (R_1^4 - R_2^4) \ ,$$

حيث n عدد الدورات في الدقيقة .

وبتعويض القيم العددية ينتج : $M_\tau \approx 0{,}67$ kp m

**ت ٣.٢** : نغمس أنبوبة شعرية قطرها $d = 1$ mm في حوض فيه ماء وأخرى في حوض فيه زئبق . احسب ارتفاع السائل في الأنبوبتين إذا كانت زاوية التماس في حالة الماء $\vartheta = 0$ وفي حالة الزئبق $\vartheta \approx 130°$ . هل يتغير الارتفاع إذا كانت الأنبوبة مائلة ؟

**الحل** : حسب العلاقة ( 2.43 ) ينتج الارتفاع في الأنبوبة الشعرية :

$$z = \frac{4\,\sigma_0 \cos\theta}{\gamma\, d} .$$

من الجدول (٤.٢) نجد :

$\sigma_0 = 7{,}4.10^{-6}$ kp/mm للماء ؛ $\sigma_0 = 48{,}2.10^{-6}$ kp/mm للزئبق ،

وبالتالي يكون في حالة الماء حيث $\cos\theta = 1$ ، $\gamma = 10^{-6}$ kp/mm³ :

$$\overline{z}_W = \frac{4 \,.\, 7{,}4 \,.\, 10^{-6} \,.\, 1}{10^{-6} \,.\, 1} = 29{,}6 \text{ mm} .$$

وفي حالة الزئبق حيث $\cos\theta = -0{,}643$ ، $\gamma = 13{,}6 \,.\, 10^{-6}$ kp/mm³ :

$$\overline{z}_M = -\frac{4.48{,}2 \,.\, 10^{-6} \,.\, 0{,}643}{13{,}6 \,.\, 10^{-6} \,.\, 1} = -9{,}1 \text{ mm} ,$$

أي أن الزئبق ينخفض في الأنبوبة الشعرية كسائل غير مبلل للجدران . وحيث أن $\overline{z}$ تمثل الارتفاع الشاقولي فإن قيمتها لا تتغير بتمييل الأنبوبة .

ت ٢ . ٤ : خزان يحتوي على $V_1 = 0{,}4$ m³ من الهواء بضغط مطلق $p_1 = 4$ kp/cm² . احسب الضغط اللازم $p_2$ ومعامل المرونة الحجمي $K_E$ لكي يصبح حجم الهواء $V_2 = 0{,}1$ m³ ، إذا فرضنا أن تغير الحالة يتم آ) تحت شروط إيزوترمية ، ب) تحت شروط أديباتية .

**الحل** : آ) من قانون تغير الحالة الإيزوترمي (2.54) ينتج :

$$p_2 = p_1 \frac{V_1}{V_2} = 4 \,\frac{0{,}4}{0{,}1} = 16 \text{ kp/cm}^2$$

وينتج معامل المرونة الحجمي $K_E$ حسب (2.33) :

$$K_E = -\frac{dp}{d\varphi}\,\varphi \Big|_{\theta = \text{const}}$$

ولكن من (2.54) يكون :

$$\frac{dp}{dv} = -\frac{const}{v^2} = -\frac{p}{v}$$

ومنه :

$$K_E = p = p_2 = 16\ kp/cm^2 \quad .$$

ب) من قانون تغير الحالة الأديباتي (2.56) ينتج باعتبار $\varkappa = 1,4$ للهواء :

$$p_2 = p_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\varkappa} = 4 \left(\frac{0,4}{0,1}\right)^{1,4} = 28\ kp/cm^2 \quad .$$

ويكون :

$$\frac{dp}{dv} = -\varkappa . const . v^{-(\varkappa+1)} = -\varkappa\, p/v$$

وبالتالي فإن معامل المرونة الحجمي :

$$K_E = \varkappa\, p = \varkappa\, p_2 = 1,4 . 28 = 39,2\ kp/cm^2 \quad .$$

وبصورة عامة يمكن البرهان بالنسبة لتغير الحالة البوليتروبي :

$$K_E = n\, p \qquad ; \qquad 1 < n < 1,4 \quad .$$

* * *

# الفصل الثاني

## توازن السوائل غير القابلة والقابلة للانضغاط

### ( هيدروستاتك وإيروستاتك )

ينطلق علم التوازن من إعتبار الجسم السائل في حالة سكون مطلق أو نسبي بالنسبة لحدوده ، التي يفترض أنها كتيمة لايخترقها السائل والتي يمكن أن تكون حقيقية أو وهمية، ساكنة أو متحركة . وحيث أنه في هذه الحالة لايطرأ على السائل أي تغيير في الشكل فإن القوى المماسية تكون معدومة ، وبالتالي فإن القوى المؤثرة على السائل تنحصر بقوى الضغط الناظمية وبالقوى الحجمية . وتهدف دراسة شروط التوازن لمعرفة توزع الضغط في السائل وحساب قوى الضغط المؤثرة على حدود السائل وكذلك تحديد شروط التوازن المستقر . وسندرس أولاً توازن السوائل الثابتة الحجم ومن ثم السوائل المتغيرة الحجم .

### ٣ توازن السوائل الثابتة الحجم ( المتجانسة )

سنفرض أن السائل المعتبر متجانس وبالتالي فهو ذو كثافة ثابتة $\rho = \text{const}$ ووزن نوعي ثابت تقريباً $\gamma = \rho g = \text{const}$ ، وسندرس توازنه تحت تأثير قوى حجمية مختلفة .

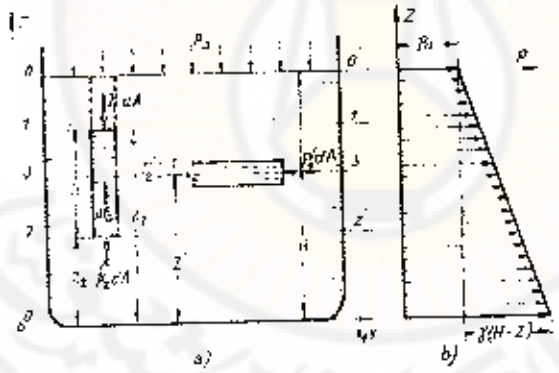
#### ١.٣ التوازن في حقل الجاذبية الأرضية

نعتبر أن القوة الحجمية الوحيدة المؤثرة على السائل المعتبر هي **قوة الجاذبية الأرضية أو قوة الثقالة** $F_v \equiv F_G = mg$ ، حيث $g$ التسارع الأرضي الذي

يفرض أنه ثابت في المكان المعتبر . وباعتبار أن كتلة الكرة الأرضية في الحالة العامة أكبر بكثير من كتلة السائل المعتبر فإن $F_m$ تعتبر دائماً كقوة شاقولية موجهة الأسفل .

## ٣ . ١ . ١ توزع الضغط في سائل متجانس - المعادلة الهيدروستاتيكية الأساسية

نعتبر سائلاً متجانساً في حوض شكله بدون تحديد ومفتوح الأعلى، ونفرض للسهولة أن قعر الحوض مستوياً ومنطبقاً على مستوي الإحداثيات $x, y$ الأفقي، بينما نأخذ المحور $z$ شاقولياً للأعلى ( الشكل ٣ . ١ - a ) . في حالة السكون فإن هذه الجملة الفيزيائية المؤلفة من السائل ومن جدران الوعاء كحدود حقيقية لها تكون متوازنة ، وبالتالي فإن كل جزيء حجمي يقتطع من السائل والذي يخضع لتأثير قوى الضغط السطحية وقوة الثقالة الحجمية هو أيضاً متوازن .



الشكل ٣ . ١ : استخراج المعادلة الهيدروستاتيكية الأساسية (a) ؛ الضغط في سائل ثقيل متجانس يزداد خطياً مع العمق عن السطح الساكب للسائل ( b ) .

لحساب توزع الضغط في السائل يكفي أن ندرس تغير الضغط في الإتجاه الأفقي $\partial p / \partial x$ والشاقولي $\partial p / \partial z$ .

نقتطع من داخل السائل اسطوانة محورها واقع في المستوي الأفقي 3 – 3′ الذي يرتفع عن قعر الحوض z ، وسطح كل من قاعدتيها dA صغير جداً بحيث يمكن إعتبار الضغط موزعاً عليها بانتظام ( الشكل ٣ . ١ – a ) . نطبق شروط التوازن على هذه الإسطوانة ونسقط كافة القوى على محورها فنجد بسهولة أن مساقط كافة قوى الضغط المؤثرة على قميص الإسطوانة والمتعامدة على محورها، وكذلك مسقط قوة الثقالة الشاقولية ، معدومة . وبالتالي يجب أن تحقق قوتا الضغط $p_1' dA$ و $p_2' dA$ المؤثرتان على قاعدتي الإسطوانة شرط التوازن :

$$p_1' dA = p_2' dA \Rightarrow p_1' = p_2' = p' = \text{const} \Rightarrow \partial p / \partial x = 0 . \quad (3.1)$$

أي أن الضغط في كل نقطة من نقاط المستوي الأفقي 3 – 3′ له قيمة ثابتة . ويطلق على أمثال هذه المستويات ، أو السطوح عامة ، التي تجمع بين كافة النقاط ذات الضغط المتساوي اسم **سطوح الضغوط المتساوية** أو **سطوح الضغط الثابت** Surface of const. Pressure أو **سطوح الكمون الثابت** Equipotential Surface ( راجع ٣ . ٣ ) . وحيث أن اختيار المستوى الأفقي 3 – 3′ كان اعتباطياً فإن النتيجة السابقة يمكن تعميمها على كل مستو أفقي آخر ، بما في ذلك السطح السائب للسائل 0 – 0′ الذي يؤثر عليه الضغط الجوي الثابت $p_a$ .

نقتطع الآن من داخل السائل اسطوانة محورها شاقولي ومحصورة بين المستويين الأفقيين 1 – 1′ و 2 – 2′ اللذين يرتفعان عن قعر الحوض $z_1$ ، $z_2$ ، فيكون ارتفاع الاسطوانة $h = z_1 - z_2$ ( الشكل ٣ . ١ – a ) . فإذا كان سطح كل من قاعدتي الإسطوانة dA ، فإن القوى الثقالية المؤثرة عليها هي : قوة الضغط على القاعدة العلوية $p_1 dA$ واتجاهها إلى الأسفل ؛ قوة الضغط على القاعدة السفلية $p_2 dA$ واتجاهها الأعلى ؛ قوة الثقالة $dF_G = g\, dm = g\, \rho\, (z_1 - z_2)\, dA$ التي تؤثر في مركز ثقل الاسطوانة وتتجه للأسفل . وحيث أن مساقط كافة قوى الضغط الجانبية على محور الاسطوانة معدومة ، فإن شروط توازن القوى الثاقولية تستلزم أن يكون :

$$p_2\,dA - p_1\,dA - \rho g\,(z_1 - z_2)\,dA = 0\,,$$

ومنه بعد الإختصار على dA ووضع $\gamma = \rho g$ :

$$\Delta p = p_2 - p_1 = \gamma\,(z_1 - z_2) = \gamma h\,. \qquad (3.2)$$

أي أن فرق الضغط بين نقطتين واقعتين على مستويين أفقيين يساوي إلى وزن عمود من السائل إرتفاعه يساوي البعد الشاقولي بين المستويين ومقطعه واحدة قياس السطح .

العلاقة ( 3.2 ) معروفة باسم **المعادلة الهيدروستاتيكية الأساسية** . وهي تنطبق بشكل عام على كل سائل متجانس واقع في حقل الجاذبية الأرضية . فإذا وضعنا بصورة خاصة $p_2 = p$ ، $p_1 = p_a$ ، حيث $p_a$ الضغط الجوي على السطح السائب للسائل على ارتفاع H من مستوي القياس المعتبر y,x ؛ p الضغط على إرتفاع z من نفس مستوي القياس فينتج من ( 3.2 ) العلاقة :

$$p = p_a + \gamma\,(H - z) = p_a + \gamma h\,, \qquad (3.3)$$

التي تسمح بحساب الضغط عند أي عمق h من السطح السائب للسائل ، الشكل ( ١٠٣ - b ) . ونجد بسهولة أنه من أجل $z = \text{const}$ يكون $p = \text{const}$ ؛ بينما تغير الضغط بالاتجاه الشاقولي :

$$dp = -\gamma\,dz\,, \qquad (3.4)$$

وهي الصيغة التفاضلية للمعادلة الهيدروستاتيكية الاساسية التي تتضمن مايلي :

> في سائل ثقيل متجانس يزداد الضغط خطياً مع العمق وبمقدار $\gamma$ لكل واحدة طول ، ويمثل كل مستو أفقي سطحاً للضغط الثابت .

هذه النتيجة لاتتعلق بالشكل الهندسي للحوض الذي يحتوي السائل ، أي بحدود الجملة الفيزيائية المعتبرة وخاصة الحدود الجانبية . وبالتالي فإن الضغط المؤثر على قعور مختلفة المساحات لأوعية مختلفة الأشكال والأحجام ويملؤها نفس السائل يتعلق فقط بارتفاع السائل عن القعر . كما تنطبق العلاقة ( 3.4 ) على السوائل

القابلة للإنضغاط ( الغازات ) الساكنة ، ولكن يلزم في حال عدم إمكانية إهمال تغير الوزن النوعي مع الإرتفاع ، أي عندما لايمكن إعتبار السائل متجانساً ، معرفة العلاقة $\gamma = f(z)$ من أجل حساب توزع الضغط .

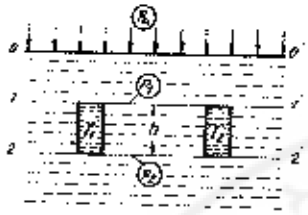
## ٢.١.٣ توزع الضغط في سائل غير متجانس ، شروط التوازن المستقر

يتميز السائل غير المتجانس بأن وزنه النوعي غير ثابت . وبالإمكان أن نتصور أن تغير الوزن النوعي ، الذي يمكن أن يكون مستمراً أي تابعاً للارتفاع $\gamma = f(z)$ ، أو فجائياً بمعنى أنه ينتقل فجأة من قيمة إلى أخرى ، يحدث بسبب تغير موضعي في درجة حرارة السائل ، أو بسبب حل أملاح بنسب مختلفة في مناطق مختلفة من السائل ، أو بسبب خلط سوائل غير متمازجة ذات أوزان نوعية مختلفة .

تعلمنا التجارب أنه إذا تواجدت عدة سوائل غير متمازجة ، أوزانها النوعية مختلفة ، في إناء واحد ، فإنها تتوضع فوق بعضها في حالة السكون بشكل طبقات تفصلها سطوح أفقية وتكون طبقة السائل الأخف في الأعلى والأثقل في الأسفل ، وحتى لو غيرنا هذا التوضع بخلطها مثلاً ، فإنها تعود اليه إذا تركت ساكنة ( الزيت يطفو دائماً على سطح الماء ! ) . إذن فان توضع طبقات السائل بهذا الشكل يدل على حالة توازنها المستقر . وسنبحث أولاً شروط التوازن المستقر لسائل غير متجانس ومن ثم ندرس توزع الضغط فيه .

نقتطع من داخل سائل غير متجانس ساكن في حوض مفتوح الأعلى وشكله على غير تعيين اسطوانة صغيرة محورها أفقي ونطبق عليها شروط التوازن ، كما فعلنا في الفقرة ( ١.١.٣ ) ، فنجد بسهولة أنه في هذه الحالة أيضاً تكون المستويات الأفقية سطوحاً للضغط الثابت . نختار من هذه المستويات المستويين $1'-1$ ، $2'-2$ ، حيث يؤثر الضغط $p_2 , p_1$ ، الشكل (٢.٣) . نقتطع الآن

اسطوانتين صغيرتين متجاورتين محصورتين بين هذين المستويين ، محورهما شاقولي ، وارتفاع كل منهما h يفترض أن يكون صغيراً بحيث يمكن اعتبار الوزن النوعي للاسطوانة الأولى $\gamma_1$ والثانية $\gamma_2$ ثابتين . نطبق شروط التوازن على الإسطوانتين فينتج حسب المعادلة الهيدروستاتيكية الأساسية ( 3.2 ) :



الشكل ٢.٣ : شروط التوازن المستقر لسائل ثقيل غير متجانس: في كل مستو أفقي $p = const$ $\gamma = const$

$$p_2 - p_1 = \gamma_1 h = \gamma_2 h \Rightarrow \gamma_1 = \gamma_2 \quad ; \quad (3.5)$$

أي أن الوزن النوعي للأسطوانتين يجب أن يكون متساوياً ، وإلا فإن السائل لا يكون في حالة توازن مستقر ويبدأ في الحركة ، تماماً كما يحدث عند تسخين إناء فيه ماء .

إن النتيجة السابقة تبقى صحيحة في الحالة التي يصبح فيها عدد أزواج الأسطوانات المتجاورة لانهائياً وارتفاعها المشترك صغيراً جداً $h \to 0$ ، وبالتالي ينطبق المستوي الأفقي $1' - 1$ على $2' - 2$ ، ونصل إلى النتيجة العامة التالية :

> يكون سائل ثقيل غير متجانس في حالة توازن مستقر عندما يكون في كل مستو أفقي الضغط ثابتاً $p = const$ والوزن النوعي ثابتاً $\gamma = const$ .

هذه النتيجة تفسر لنا لماذا يكون السطح الفاصل بين سائلين غير متمازجين أفقياً ، وأنه في حالة التوازن المستقر يتوضع السائل الأثقل في الأسفل لكي يكون مركز الثقل الكلي أخفض ما يمكن .

لحساب توزع الضغط في سائل غير متجانس وزنه النوعي يتغير بشكل فجائي نعتبر عدداً $n$ من السوائل غير المتمازجة ذات الأوزان النوعية المختلفة : $\gamma_1 < \gamma_2 < \gamma_3 < \ldots < \gamma_n$ متوضعة بشكل طبقات في حوض جدرانه

ثابتة ومفتوح إلى الأعلى حيث يؤثر الضغط الجوي $p_a$ . فإذا فرضنا أن سماكة طبقات السوائل $h_1$ ، $h_2$ ، ... ، $h_n$ فيكون الضغط على السطح الفاصل بين السائل الأول والثاني حسب (3.2) :

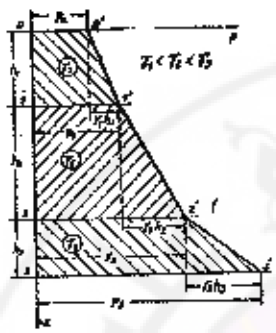
$$p_1 = p_a + \gamma_1 h_1 \quad ,$$

وبين السائل الثاني والثالث :

$$p_2 = p_1 + \gamma_2 h_2 = p_a + \gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 \quad ,$$

ونصل بالنتيجة إلى قيمة الضغط المؤثر على قعر الحوض :

$$p_n = p_a + \sum_{i=1}^{n} \gamma_i h_i \qquad (3.6)$$



الشكل ٣.٣ : مخطط توزع الضغط في ثلاثة سوائل غير ممتزجة أوزانها النوعية مختلفة .

وحيث أنه توزع الضغط في كل طبقة سائل خطي فإن مخطط توزع الضغط حسب (3.6) يمثل منحنياً منكسراً مؤلفاً من قطع مستقيمة ، الشكل (٣.٣) .

بالنسبة لسائل غير متجانس وزنه النوعي يتغير باستمرار مع العمق : $\gamma = f(z)$ فإن حساب توزع الضغط ينتج مباشرة من العلاقة (3.6) إذا حولنا المجموع إلى تكامل واعتبرنا أن الوزن النوعي في طبقة رقيقة من السائل $h_i = dz$ يبقى ثابتاً تقريباً :

$$p = p_a + \int_0^z \gamma \, dz \qquad (3.7)$$

حيث المحور z الشاقولي موجب للأعلى . ونصل إلى نفس النتيجة من المعادلة الهيدروستاتيكية التفاضلية (3.4) . فإذا كان التابع $\gamma = f(z)$ معلوماً ، فيمكن مكاملة (3.7) وحساب توزع الضغط بالنسبة للارتفاع ( راجع ٤ ) .

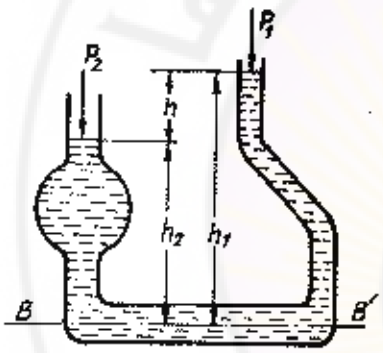
والمهم أن نلاحظ أن شروط التوازن المستقر لسائل كهذا تقضي بأن يكون توضع طبقاته بحيث يتناقص الوزن النوعي مع الارتفاع ، وبعكس ذلك

يكون في حالة **توازن قلق** ويبدأ بالحركة عند أقل تشويش . وبالمقابل كل سائل متجانس ساكن يكون في حالة **توازن مطلق** ، وبالتالي يمكن إزاحة أية طبقة منه اعتباطياً دون أن يؤثر ذلك على وضع توازنه .

## ٣.١.٣ تطبيقات للمعادلة الهيدروستاتيكية الأساسية

### ١.٣.١.٣ مبدأ الأوعية المستطرقة

يطلق على مجموعة أوعية ( آوان ، أنابيب ) شكلها على غير تعيين ومتصلة مع بعضها ، بحيث يستطيع السائل أن يتسرب من وعاء لآخر **الأوعية المستطرقة** .




الشكل ٣ ـ ٤ : مبدأ الأواني المستطرقة . عندما $p_1 = p_2$ يكون $h = 0$ .

نعتبر الوعاء المستطرق ، المبين في الشكل (٣ ـ ٤) ، المؤلف من فرعين مفتوحين للأعلى وفيه سائل متجانس وزنه النوعي $\gamma$ . هذه الجملة الفيزيائية تكون أيضاً متوازنة عندما يكون السائل ساكناً والضغط المؤثر على السطح الحر للسائل في كل من فرعي الأنبوب $p_1$ ، $p_2$ وارتفاع السائل عن إحدى المستويات الأفقية التي نختارها $B - B'$ في كل منهما $h_1$ ، $h_2$ . وحيث أن $B - B'$ يمثل سطحاً للضغط الثابت $p_B$ فينتج من المعادلة الهيدروستاتيكية الأساسية (3.2) بالنسبة لفرعي الوعاء :

$$p_B = p_2 + \gamma h_2 = p_1 + \gamma h_1 \rightarrow$$

$$p_2 - p_1 = \Delta p = \gamma (h_1 - h_2) = \gamma h , \quad (3.8)$$

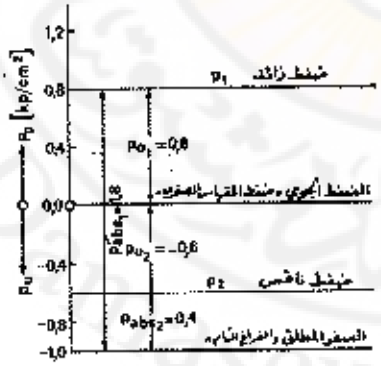
حيث $h$ فرق ارتفاع سوية السائل في فرعي الوعاء .

من العلاقة (3.8) ينتج عندما $p_2 = p_1$ ، كما هو الأمر في حال تعرض السطح الحر للسائل في فرعي الوعاء لتأثير الضغط الجوي مثلاً ، أن $h = 0$ . وهذا يعني أن سوية السطح الحر للسائل في فرعي الوعاء المستطرق ( أو في الفروع المتعددة إن وجدت ! ) سيكون لها نفس الارتفاع $h'$ ، ويكون في مثالنا $h_2 < h' < h_1$ . هذه النتيجة يمكن التوصل إليها إذا تصورنا أن الجملة الفيزيائية المعتبرة في الشكل (٤.٣) قد اقتطعت من داخل سائل متجانس ساكن.

إن للأوعية المستطرقة أهمية خاصة بالنسبة لمبدأ قياس الضغط الستاتيكي .

## ٢.٣.١.٣ مبدأ قياس الضغط ، المانومتر والبارومتر

يقاس الضغط في نقطة من السائل كفرق بين قيمته وقيمة ضغط قياسي Datum pressure معروف ، يختار عادة إما ضغط الفراغ التام ( الصفر المطلق ) أو الضغط الجوي الموضعي $p_a$ . فإذا قيس الضغط إعتباراً من الصفر المطلق سمي : **الضغط المطلق** $p_{abs}$ . أما إذا قيس الضغط في الجو الطبيعي ، كما هو الأمر عادة ، فيطلق على الفرق بين قيمة الضغط المعتبر والضغط الجوي : **ضغط المقياس** Gauge pressure فإذا كان فرق الضغط هذا موجباً سمي **ضغط المقياس الزائد أو الموجب** : $p_0 = p - p_a > 0$ ، أما إذا كان سالباً فيسمى **ضغط المقياس الناقص أوالسالب** $p_u = p - p_a < 0$ ، الشكل ( ٥.٣ ) .




الشكل ٣ . ٥ : العلاقة بين الضغط المطلق $P_{abs}$ وضغط المقياس الزائد $p_0$ والناقص $P_u$

إن مفهوم الضغط الزائد أو الناقص يتضح بسهولة بمساعدة المعادلة الهيدروستاتيكية الأساسية (2.3) ، حيث ينتج :

$$p - p_a = \gamma h .$$

عندما يكون $p > p_a$ ينتج :

$$p_a = \gamma\, h_p \quad \Rightarrow \quad h_p = + \frac{p_a}{\gamma} = \frac{p - p_a}{\gamma} , \qquad (3.9)$$

حيث $h_p$ **الضاغط الموجب أو إرتفاع الضغط** Pressure head .

وعندما يكون $p < p_a$ نجد :

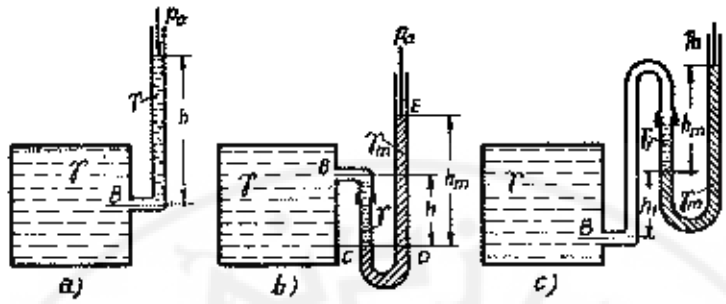
$$p_a = - \gamma\, h_s \Rightarrow h_s = - \frac{p_a}{\gamma} = \frac{p_a - p}{\gamma} , \qquad (3.10)$$

حيث $h_s$ **الضاغط السالب ، أو إرتفاع السحب** Suction head أو كما يسمى أحياناً **إرتفاع الفراغ أو التخلخل** Vacuum head .

إن الضاغط الموجب أو السالب يمكن إعتبارهما مقياساً لفرق الضغط المؤثر على طرفي عمود سائل Liquid column ( LC ) وزنه النوعي $\gamma$ وإرتفاعه $h_p$ أو $h_s$ . وعلى هذا يعتمد مبدأ **المانومتر السائلي** Liquid - Manometer لقياس الضغط الزائد أو **الباروميتر السائلي** Liquid - Barometer لقياس الضغط الناقص .

تستخدم في المخابر والصناعة ومراكز الأبحاث أنواع متعددة من المانومترات السائلية تعمل كلها على نفس المبدأ ، وتختلف من حيث دقة ومجال القياس . ويوجد منها نموذجان أساسيان : **المانومترات البسيطة** ، وتستخدم لقياس الضغط في نقطة من السائل **والمانومترات التفاضلية** Differential - Monometer ، وتستخدم لقياس فرق الضغط بين نقطتين من السائل .

لقياس الضغوط الصغيرة نسبياً يستخدم **أنبوب بيزومتري** Piezometer ، يتألف من أنبوب زجاجي صاعد شاقولياً ومفتوح في الأعلى ، يوصل في النقطة B التي يراد قياس الضغط فيها ، الشكل (٦.٣ - a) . فإذا كان ارتفاع السائل في الأنبوب البيزومتري عن المستوى الأفقي المار من B هو h ، والذي يمكن قياسه مباشرة باستخدام مسطرة مرقمة ، ينتج :



الشكل ٣.٦ : مانومترات سائلة لقياس الضغط الزائد في نقطة : أنبوب بيزومتري (a ؛ مانومتر بشكل حرف U فيه سائل مقياس (b ؛ مانومتر ذو سائلي مقياس (c .

$$p_B = p_a + \gamma h \Rightarrow p_{B_0} = \gamma h \;\; ; \;\; h_p \equiv h \, . \qquad (3.11)$$

في هذه الحالة استخدم نفس السائل الموجود في الخزان كسائل مقياس . وهذا يحد من الاستخدام العملي للأنبوب البيزومتري لقياس الضغوط العالية نسبياً . فاذا كان السائل ماء واعتبرنا وزنه النوعي $\gamma = 10^3 \; kp/m^3$ وكان الضغط المطلق $p_B = 2\, p_a = 2.10^4 \; kp/m^2$ لتوجب أن يكون حسب (3.11) ارتفاع الأنبوب البيزومتري $h = 10 \; m$ . وهذا طبعاً غير عملي . لذلك يستخدم من أجل قياس الضغوط العالية نسبياً مانومترات سائلية بشكل حرف U فيها سائل مقياس وزنه النوعي $\gamma_m$ ، يختار حسب قيمة الضغط المراد قياسه . في الشكل ( b – ٦.٣ ) نموذج من هذا النوع ربط أحد فرعيه في النقطة B لخزان فيه سائل وزنه النوعي $\gamma$ وبقي الفرع الآخر المفتوح معرضاً لتأثير الضغط الجوي $p_a$ . فاذا لاحظنا أن المستوي الأفقي C—D هو سطح للضغط الثابت ينتج بسهولة :

$$p_C = p_D \Rightarrow p_B + \gamma \, h = p_a + \gamma_m h_m \Rightarrow p_B = p_a - \gamma \, h + \gamma_m h_m \, , \qquad (3.12)$$

حيث $\overline{DE} = h_m$ فرق الارتفاع لسوية سائل المقياس ، h عمق النقطة C عن المستوي الأفقي المار من B . وفي الحالة التي يكون فيها $\gamma_m \gg \gamma$ ، كما هو

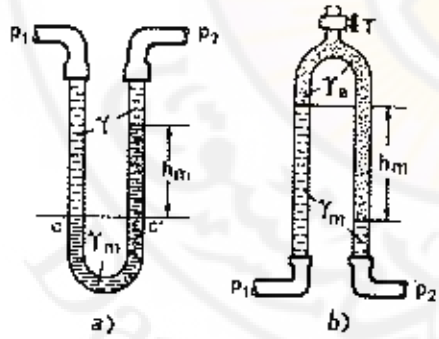
الأمر عندما يكون سائل المقياس زئبقاً مثلاً والسائل الموجود في الخزان هواء أو حتى ماء ، فيمكن عندها إهمال وزن عمود السائل بين B و C ويتبع من (3.12) :

$$p_{Bn} = p_B - p_n = \gamma_m h_m \quad . \qquad (3.13)$$

في حالات أخرى نستخدم مانومترات تحتوي سائلي مقياس ، وزنهما النوعي $\gamma_m$ ، $\gamma_1$ ، الشكل (٣.٦ – c) ، حيث نحصل بسهولة على ضغط المقياس في النقطة B من العلاقة :

$$p_{Bn} = \gamma_1 h_1 + \gamma_m h_m \quad . \qquad (3.14)$$

لقياس فرق الضغط بين نقطتين ① و ② من السائل نستخدم مانومترات تفاضلية سائلية ، أبسط أشكالها يمثله أنبوب بشكل حرف U يحتوي على سائل مقياس وزنه النوعي $\gamma_m$ ، ويوصل فرعاه في النقطتين المراد قياس فرق الضغط بينهما ، الشكل (٣.٧ – a) . مثل هذا المانومتر يستخدم مثلاً بشكل واسع لقياس فرق الضغط الناتج عن احتكاك الجريان في الأنابيب ، حيث يثقب جدار




الشكل ٣.٧ : مانومترات تفاضلية لقياس فرق الضغط بين نقطتين ① و ② .

الأنبوب ثقباً صغيراً في النقطتين ① و ② ويوصل بها فرعا مقياس الضغط . فاذا كان الوزن النوعي للسائل الجاري في الأنبوب $\gamma$ ، الذي يملأ تماماً فرعي أنبوبة

المانومتر فوق سائل المقياس ، ونفرض $h_m$ فرق ارتفاع سوية سائل المقياس ، h فرق الإرتفاع بين النقطتين ① و ② فينتج حسب الشكل (٣ . ٧ — a) وباعتبار C'—C سطحاً للضغط الثابت :

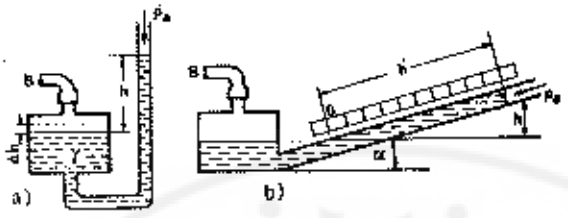
$$\Delta p = p_1 - p_2 = h_m (\gamma_m - \gamma) + \gamma h \Rightarrow \Delta p = h_m (\gamma_m - \gamma)|_{h=0} \quad (3.15)$$

في الحالات التي يكون فيها السائل المراد قياس فرق الضغط بين نقطتين منه صالحاً للاستخدام كسائل مقياس ، كالماء مثلاً ، يستعمل المانومتر التفاضلي المبين في الشكل ( ٣ . ٧ — b ) ، الذي هو عبارة عن أنبوب بشكل حرف U مقلوب يوصل فرعاه بالنقطتين ① و ② فيرتفع فيها السائل الذي وزنه النوعي $\gamma \equiv \gamma_m$ الى سويتين فرق إرتفاعهما $h_m$ ، ويبقى في القسم العلوي هواء وزنه النوعي $\gamma_m \gg \gamma_a$ ، يمكن عند الضرورة ضغطه عبر الصنبور T بواسطة مضخة هوائية صغيرة وتعييره لقياس فروق ضغط صغيرة :

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \gamma_m h_m \ . \quad (3.16)$$

لتسهيل قراءة القياسات ، وبالتالي تحسين دقة القياس ، يصمم أحد فرعي الانبوب بشكل U على شكل إناء مقطعه A اكبر بكثير من مقطع الفرع الآخر a الصاعد شاقولياً ، الشكل (٣ . ٨ — a) . عند وصل هذا **المانومتر ذي الانبوب الشاقولي** لقياس الضغط $p_1$ تنخفض سوية سائل القياس في الإناء بمقدار $\Delta h$ وترتفع في الفرع الشاقولي بمقدار h ويكون بسبب تساوي كمية السائل المزاح : $\Delta h = h \cdot a/A$ . وبالتالي يمكن غالباً إهمال $\Delta h$ والاكتفاء بقراءة h فقط.

هناك وسيلة بسيطة أخرى لزيادة حساسية المانومتر ذي الأنبوب الشاقولي تعتمد على تميل فرع المقياس المرفق زاوية $\alpha$ ، الشكل (٣ . ٨ — b) . فاذا تغيرت اثناء عملية القياس سوية سائل المقياس مقدار $h'$ فيكون فرق الإرتفاع الشاقولي $h = h' \sin \alpha$ . وعليه فانه من أجل فرق ارتفاع ضغط معين h تزداد حساسية **المانومتر ذي الأنبوب المائل** بنسبة $1 / \sin \alpha$ .




الشكل ٨.٣ : تحسين قراءة ودقة قياس الضغط بواسطة المانومتر ذو الأنبوب الشاقولي (a) والمانومتر ذو الأنبوب المائل (b) .

لقياس الضغوط الصغيرة جداً أو فروقـــا يستخدم **المكرومانومتر** Micromanometer ، الذي لاتختلف طريقة عمله بشيء عن المـانومتر سوى حساسيته العالية ودقة قراءته ، حيث تستخدم لذلك وسائل ميكانيكية وضوئية وكهربائية ومغناطيسية من أجل التحديد الدقيق لتغير سوية سائل المقياس ، وقراءته بواسطة تدريج **فورنيه** Vernier . وتوجد نماذج مختلفة من المكرومانومترات الصالحة للاستخدام في مجالات القياس الهامة عملياً ، سنكتفي بتعدادها حسب مبدأ عملها ، مع الإشارة أن [35] مثلاً يتضمن شرحاً وافياً لها .

فمن نموذج المكرومانومتر ذي الانبوب الشاقولي توجد :

ـ أجهزة ذات تكبير ضوئي لسوية سائل المقياس ، تستخدم عدسات مكبرة أو مكروسكوبات أو تلسكوبات صغيرة مركبة على جريدة مسننة ويمكن رفعها أو تخفيضها بواسطة ترس مسنن أو براغي حركة بطيئة . وقد صمم **براندل** مقياساً من هذا النوع ، يعرف باسمه ، ويستخدم السيليكون ( Silicone De 200 ) كسائل مقياس وتبلغ حساسيته 0,005 mm LC .

ـ أجهزة ذات تحسس ميكانيكي لسوية سائل القياس بواسطة فواشة ويوجد منها نوع معروف باسم **مكرومانومتر الاسقاط** Projection microman. حسب **بيتس** ، حيث يتم اسقاط التدريج على شاشة وتكبيرها ، مما يعطي دقة

قياس بحدود $0{,}1\ kp/m^2$ . وهناك **المكرومانومتر ذو المؤشر الضوئي** Light-pointer micromano. ، حيث يتم نقل حركة الفواشة على مرآة دوارة وتكبيرها بواسطة مؤشر ضوئي . وتصل حساسية بعض أنواع هذه الأجهزة حتى $0{,}002\ kp/m^2$ . كما يستعمل **المكرومانومتر ذو الفواشة المغناطيسية** الذي يستخدم الزئبق فقط كسائل مقياس .

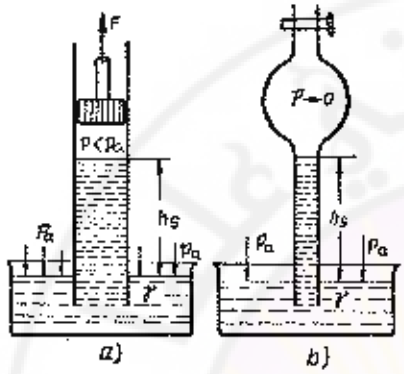
– أجهزة ذات تحسس كهربائي لسوية سائل المقياس ، يستخدم بعضها مقاومات والبعض الآخر وشائع تخريض أو مكثفات سعوية .

– أجهزة ذات تحسس كهروضوئي لسوية سائل المقياس ، يكون سائل المقياس فيها لالون له كالماء ، ومجهزة بخلية ضوئية .

ومن نموذج المكرومانومتر ذي الأنبوب المائل توجد أنواع كلاسيكية ذات ميل ثابت مثل **مكرومانومتر كريل** Krell-Microman. **ومكرومانومتر توبلر** Toepler-Microman. . ويمكن بواسطة الأخير قياس فروق ضغوط حتى $10^{-4}\ kp/m^2$ ( راجع [4a] ) . كما توجد أنواع يمكن تغيير ميل الأنبوب تدريجياً مثل **المكرومانومتر ذي الذراع** الذي صممه بيتس (راجع [35]) .

قبل التعرض لقياس الضغط الناقص يطرح نفسه سؤال هام جداً من الناحية الفيزيائية ، يتعلق بكيفية نشوء الضغط السالب ومقدار ارتفاع السحب الأعظمي $h_{s\,max}$ . لقد شغل هذا السؤال بال الأقدمين ، واكتفوا « لتفسير » عملية امتصاص السوائل بقولهم : « احذر الفراغ horror vacui » . وعندما أخفق بناة المضخات في فلورنسا في جعل مضخاتهم المائية تسحب عن عمق اكبر من 10 m عن سطح الماء السائب ، اهتم العالم **غاليليه** بالموضوع ، وتابعه بعده تلميذه **توريشلي** E. Torricelli ( 1608—1647 ) ، واستطاع استناداً على تجربة بالزئبق أجراها بتوجيه منه صديقه **فيفياني** Viviani أن يعطي عام 1643 التفسير العلمي الصحيح لهذه المسألة الكلاسيكية .

إن كيفية نشوء الضغط الناقص توضحها التجربة البسيطة التـــالية : نأخذ وعاء مفتوحاً للأعلى فيه سائل ساكن ، ونغمس فيه أنبوباً مجهزاً بمكبس محكم إغلاقه تماماً ، الشكل ( ٩.٣ – a ) . عندما نرفع المكبس للأعلى بقوة F




الشكل ٣ . ٩ : نشوء الضغط الناقص وتعريف ارتفاع السحب بمساعدة مضخة ماصة ( a وبخلية هواء ( b .

يرتفع سائل الوعاء في الأنبوب متتبعاً نهاية المكبس السفلى ، ويملأ الفراغ الناتج عن حركة المكبس . فاذا كان ارتفاع السائل في الأنبوب $h_s$ والضغط المؤثر على سطحه السائب تحت المكبس p وعلى أساس أن سوية السطح السائب للسائل في الوعاء تمثل سطحاً للضغط الجوي الثابت $p_a$ فينتج :

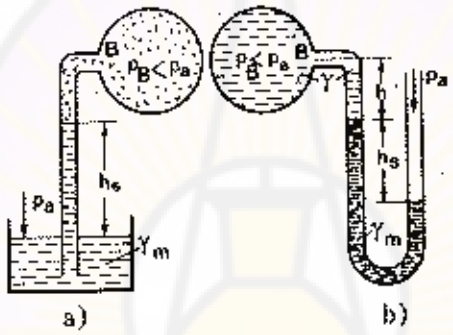
$$p_a = p + \gamma h_s \Rightarrow p = p_a - \gamma h_s < p_a \Rightarrow h_s = -p_a / \gamma \quad (3.17)$$

وبالتالي فإن الضغط المؤثر على السائل في الأنبوب هو أصغر من الضغط الجوي. وتمثل التجربة البسيطة مبدأ عمل المضخات الماصة . ويمكن الوصول الى نفس النتائج اذا استبدلنا المكبس بخلية هواء ،الشكل( ٩.٣ b) . فاذا تمت تخلية الهواء تماماً من الأنبوب يصبح $p = 0$ ويكون عندها ارتفاع السحب الأعظمي :

$$h_{s\,max} = p_a / \gamma \quad . \quad (3.18)$$

وهذا يعني أننا لانستطيع أن نسحب أكثر مما يستطيع الضغط الجوي أن يضغط . ففي حالة الماء مثلاً يبلغ ارتفاع السحب الأعظمي حسب (3.18) : $10^6/10^3 = 10$ m ، وبالتالي لا تستطيع أية مضخة مائية أن تسحب عن عمق

يزيد عن عشرة أمتار بين صمام السحب وسطح الماء السائب ؛ بينما يبلغ ارتفاع السحب الأعظمي للزئبق حوالي 0,76 m ، إذا اعتبرنا : $p_a = 10332\ kp/m^2$ والوزن النوعي $\gamma = 13596\ kp/m^3$ . وتجدر الإشارة هنا أنه في حالة السوائل المائعة تنقطع عملية السحب عندما يصبح الضغط p مساوياً لضغط تبخر السائل $p_v$ المناسب لدرجة الحرارة ، حيث تبدأ ظاهرة التبخر الموضعي (التكهف) . وبالتالي ينقص ارتفاع السحب الأعظمي بمقدار الضاغط المكافىء لضغط التبخر . فإذا أضفنا لذلك الضياعات الناتجة عن الاحتكاك في أنبوب السحب ، ينتج أن ارتفاع سحب المضخات المائية الحديثة لا يتعدى 7 – 8 m .




الشكل ٣ - ١٠ : بارمترات بسيطة لقياس الضغط الناقص :
بارومتر ذو فرع شاقولي a) ؛ بارومتر بشكل حرف U b) .

توجد نماذج مختلفة من **البارومترات السائلية** لقياس الضغط الناقص ، والتي يعتمد مبدأ عملها على التجربة المبينة في الشكل (٣-٩) . ويبين الشكل (٣-١٠-a) أحد هذه النماذج البسيطة ، حيث يوصل طرف أنبوب زجاجي شاقولي بالنقطة B ، التي يراد قياس الضغط فيها ، ويغمس طرفه الآخر في إناء فيه سائل مقياس وزنه النوعي $\gamma_m$ ومفتوح للأعلى . فإذا كان ارتفاع سائل المقياس في الانبوب الزجاجي $h_s$ ، وأهملنا وزن عمود السائل فوق سائل المقياس لان وزنه النوعي $\gamma \ll \gamma_m$ نجد بسهولة الضغط الناقص :

$$p_{uB} = p_u - p_B = \gamma_m h_s \ . \qquad (3.19)$$

مثل هذا البارومتر يستخدم عادة لقياس الضغط الناقص في السوائل الغازية ، ولقياس الضغط الناقص في السوائل المائعة أو الغازية يستعمل البارومتر بشكل حرف U المبين في الشكل ( ٣ . ١٠ - b ) . فاذا كان الوزن النوعي لسائل المقياس $\gamma_m$ ، والوزن النوعي للسائل المراد قياس الضغط في النقطة B منه $\gamma$ ، وفرق ارتفاع سوية سائل المقياس $h_s$ ينتج بسهولة :

$$p_{uB} = \gamma_m h_s + \gamma h \ , \qquad (3.20)$$

حيث h الارتفاع الشاقولي للنقطة B عن سوية سائل المقياس في الفرع المتصل بها . فاذا كان $\gamma \ll \gamma_m$ تنتج العلاقة (3.19) . كما يمكن في مثل هذه البارومترات استخدام السائل المعتبر نفسه كسائل مقياس .

تستخدم في المانومترات والبارمترات سوائل مقياس مختلفة ، يتم اختيارها وفقاً لمبدأ عمل المقياس وحساسيته ، ومجال قياسه ، كما تؤخذ بعين الاعتبار الخاصية الشعرية لهذه السوائل وتمددها الحجمي بتأثير درجة الحرارة . فالماء يمتاز بأن وزنه النوعي لايتغير إلا قليلاً مع درجة الحرارة ، ولكن خاصيته الشعرية سيئة ، لأنه يعلق بشكل غير منتظم على جدران الانابيب الزجاجية . ولذلك فهو لايصلح لمقاييس الضغط الدقيقة ، ولا لقياس الضغوط العالية بسبب صغر وزنه النوعي ، حيث يفضل في الحالة الاخيرة استخدام **الزئبق** ( $\gamma = 13,595 \ kp/dm^3$ ) . وإلى جانب هذين السائلين يستخدم **التلوول** Tohuol ( $C_6H_5 \ CH_3$ ) ( $\gamma = 0,869 \ kp/dm^3$ ) و**الكحول** ( $\gamma = 0,8 \ kp/dm^3$ ) Alcohol و**الكسيلول** Xylol ( $C_6H_4 \ (CH_3)_2$ ) التي تمتاز بإذابتها للشحوم ، ولكنها مقابل ذلك تتأثر جداً بدرجة الحرارة . ويستخدم أيضاً **رابع كلور الفحم** ( $\gamma = 1,261 \ kp/dm^3$ ) $C \ Cl_4$ و**ثاني فحمات الكبريت** ( $\gamma = 1,6 \ kp/dm^3$ ) .

والسيليكون Silicon DC 200 الذي يتصف بأنه لايتمازج مع الماء ، [4] [8] [35] [75].

إن تأثير الخاصية الشعرية لسائل القياس ( راجع ٧٠٢ ) يجب أن يؤخذ بعين الاعتبار عند تعيير مقياس الضغط ، بحيث يلحظ في تدويج القياس . وحسب [8] يمكن إهمال تأثير الخاصية الشعرية للماء اذا استعملت أنابيب أقطارها 15 m m على الأقل ، و 8 mm في حالة الزئبق . كما أن الكحول والتلوول يغيران وزنها النوعي بمعدل 0,1% لكل درجة حرارة ، مما يتطلب قياس الوزن النوعي عند كل عملية قياس دقيقة .

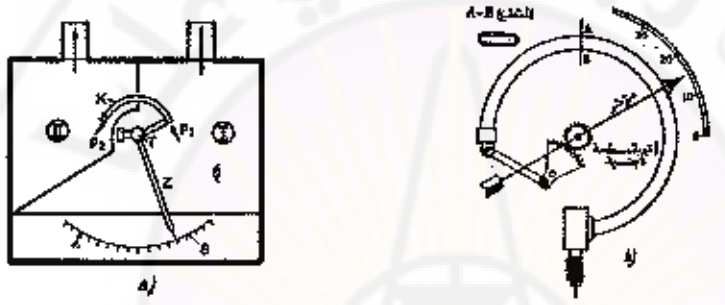
ولقد ادى استعمال المانومتر والبارومتر السائلين لإدخال واحدات قياس ضغط جديدة ، لاتزال شائعة ومستعملة ، وتعتمد على فكرة التعبير عن قيمة الضغط بارتفاع عمود سائل [LC] . فنقول مثلاً « ميليمتر عمود ماء » ورمزها [ mm WC ] أو « ميليمتر عمود زئبق » ورمزه [ mm MC ] . وقد أعطيت واحدةالقياس الاخيرة اسم تور [ Torr ] نسبة للعالم الايطالي توريشلي. ويستعمل ،خاصة في الارصاد الجوية ،الباد [bar] ،وأجزاؤه الميليباد [mb] والمكروباد [ µb ] . كماعرف الضغط الجوي التكنيكي: 1 at = 1 kp / cm² ، والضغط الجوي الفيزيائي :

1 atm ≙ 760 mm MC = 76 . $10^{-3}$ . 13, 596 = 1,0333 kp / cm² .

ويمكن بمساعدة العلاقة ( 2.20 ) ، ص ٥٤ ،تحويل هذه الواحدات الى واحدات القياس المعروفة في جملة القياس العالمية والتكنيكية والفيزيائية .

إن قياسات الضغط تشمل مجالاً واسعاً جداً يمتد عملياً بالنسبة لقياسات الجريان من $10^{-6}$ at حتى $10^{3}$ at . لذلك نجد الى جانب مقاييس الضغط السائلية مقاييس «جافة» يعتمد مبدأ عملها على تعريف الضغط كقوة مؤثرة على واحدة السطح ،حيث تُوازن قوة الضغط المؤثرة على مكبس أو جرة قياس أو أنبوب نابضي بقوة مضادة . لذلك يطلق على مقاييس الضغط هذه موازين الضغط ، ويوجد منها للاستعمالات

المختلفة في الصناعة والمخبر مانومترات ومكرومانومترات لقياس الضغوط العالية حتى الصغيرة جداً ، وكذلك بارومترات ، أو كما تسمى **مقاييس الفراغ** Vacuummeter . ومن نماذجها المعروفة يمكن تعداد مقاييس ذات سائل مقياس ( جافة ـ سائلية ) ، مقاييس نابضية وغيرهـــا . وتتضمن الكتب المختصة بقياسات الجريان مثل [35] [75] شرحاً وافياً لهذه المقاييس بما في ذلك طريقة عملها ودقة قياسها ومجال استخدامها . وسنكتفي بشرح نموذجين منها .



الشكل ١١.٣ :مانومترات جافة : ميزان ضغط ريشهارد ذو المكبس الحر المقوس (a ، مقياس بوردون ذو الأنبوب النابضي (b .

من موازين الضغط ذات المكبس الحر يعتبر **مكرومانومتر ريشهارد** Reichhardt من أحدث وأدق الأنواع ، الشكل ( ١١.٣ – a ) . يتألف المقياس من جملة دوارة تعمل حسب مبدأ المقياس الجلفاني ، مؤلفة من مكبس مقوس بشكل دائري K معلق في مركز ثقله على خيط نابضي من خليطة البلاتين ـ الإيريديوم T ، وثبت في نقطة التعليق مؤشر Z ينتهي أمام مينا مدرجة بواحدات قياس الضغط . في الجدار الفاصل بين حجرتي القياس I و II يوجد ثقب يمر عبره المكبس بخلوص لايتعدى 0,1 mm ، وبذلك يستطيع الحركة في حال كون $p_1 \neq p_2$ بدون مقاومة احتكاك تقريبـــاً ، ويتوقف عن الحركة عندما تتوازن قوة فرق الضغط المؤثرة على المكبس مع قوة الفتل للخيط النابضي ، وعندها يدل المؤشر على قيمة فرق الضغط . ويجب عند

تعبير المقياس أخذ كمية السائل البسيطة المتسربة عبر ثقب الجدار الفاصل بين حجرتي المقياس بعين الاعتبار ، ولكن يمكن تخفيف تأثيرها على دقة القياس بوصل المقياس بواسطة خراطيم كبيرة الاقطار نسبياً . وحسب اختيار الخيط النابضي توجد موازين ضغط مجال قياسها من 0,01 حتى 3 $kp/m^2$ . ويمكن بواسطتها قياس ضغوط حتى $10^{-5}$ $kp/m^2$ ، أي مايعادل سرعات هواء لاتتجاوز عدة سنتيمترات في الثانية [8] [35] .

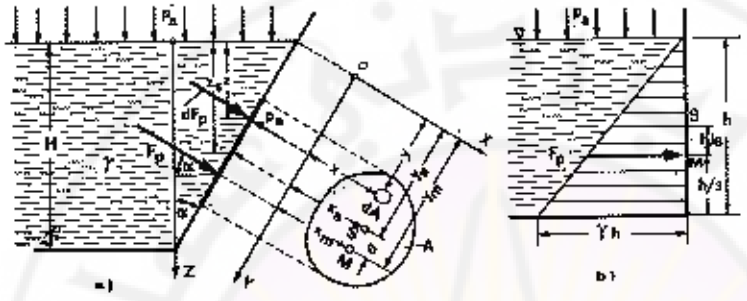
ومن مقاييس الضغط النابضية اشتهر **مقياس بوردون** Bourdon-gauge ذو النابض الانبوبي ، الشكل( ١١٠٣ -- b ). إن ضغط السائل ، الذي يدخل الأنبوبة النابضية الاهليلجية المقطع والمسدودة من الطرف الآخر ، يحاول « نفخ » الانبوبة وتقويمها وبالتالي زيادة نصف قطر انحنائها . وهذا يؤدي الى تحريك آلية ميكانيكية مؤلفة من روافع ومسننات متصلة بطرف الانبوبة المسدود ومرتبطة بمؤشر أمام ميناء مدرجة .وعند توازن قوة النابض مع قوة الضغط يدل المؤشر على قيمة الضغط. وحسب إختيار معدن الانبوبة النابضية وسماكة جدرانها صنعت مقاييس ضغط من هذا النموذج يقع مجال قياسها بين 0—0,6 at وبين 0--8000 at [35] .

## ٣.٣.١.٣ حساب قوى الضغط على جدران الأوعية المستوية

بمساعدة المعادلة الهيدروستاتيكية الاساسية يمكن حساب توزع قوى الضغط التي يؤثر بها السائل الساكن على جدران الوعاء الذي يحتويه ، ومن ثم تحديد محصلة هذه القوى من حيث القيمة ونقطة التأثير والاتجاه. وهذا ضروري لتحديد متانة الاوعية او الجدران ( مثل السدود المائية ! ) التي تخزن أو تحجز السوائل خلفها .

نعتبر وعاء ذا شكل غير محدد ، مفتوحاً في الاعلى ويملؤه سائل وزنه النوعي $\gamma$ حتى ارتفاع H . لنفرض أن قاعدة الوعاء أفقية ، وأحد جدرانه

الجانبية المستوية مائل على الشاقول المنطبق على المحور z بزاوية α . تحدد على هذا الجدار سطحاً اعتباطياً A ، يظهر في مستوي الشكل ( ١٢٠٣—a ) بعد التدوير واقعاً في مستوي الإحداثيين y , x ، حيث أختير المحور x منطبقاً على خط تقاطع السطح الحر للسائل مع الجدار ، والمحور y متعامداً معه .



الشكل ١٢٠٣ : حساب قوة الضغط على جدار مستو وتحديد مركز الضغط .(a قوة الضغط على جدار شاقولي تتناسب مع مساحة المثلث القائم المتشكل من الجدار وخط توزع الضغط ، وتؤثر على ارتفاع h/3 من قاعدته (b .

نعتبر من السطح A عنصراً سطحياً dA على عمق z من السطح الحر للسائل . إن قوة الضغط الجزئيـــة التي يؤثر بها السائل على dA من الداخل تساوي بالاستناد إلى (3.3) : $(p_a + \gamma z)\, dA$ ، بينما تؤثر عليه من الخارج قوة الضغط الجوي : $p_a\, dA$ ، وبالتالي تنتج قوة الضغط الزائد الجزئية :

$$dF_p = (p_a + \gamma z)\, dA - p_a\, dA = \gamma z\, dA \quad ,$$

ومنه بالتكامل نحصل على محصلة قوى الضغط المؤثرة على السطح A :

$$F_p = \gamma \int_{(A)} z\, dA \quad .$$

فإذا كان $z_S$ العمق الشاقولي لمركز ثقل السطح A عن السطح الحر للسائل ، فيكون حسب قانون العزم الستاتيكي للسطوح :

$$\int_{(A)} z\, dA = z_S\, A \quad ,$$

ومنه ينتج :

$$F_p = \gamma z_S \, A = p_S \, A \quad : \qquad (3.21)$$

إن قوة الضغط التي يؤثر بها سائل ساكن على سطح مستو تساوي إلى جداء مساحة هذا السطح A في الضغط الزائد المؤثر في مركز ثقل السطح $p_S = \gamma z_S$ ، وتؤثر عمودياً على A .

إن القوة $F_p$ تؤثر في نقطة M ، تسمى **مركز الضغط** Centre of pressure ولا تنطبق عادة على مركز ثقل السطح A ، الشكل ( ١٢.٣ -a ) . فإذا فرضنا أن $x_m$ ، $y_m$ يمثلان إحداثي النقطة M ، ينتج حسب قانون العزم الستاتيكي بالنسبة لمحوري الدوران x ، y ومن العلاقة (3.21) :

$$F_p \cdot x_m = \int_{(A)} dF_p \cdot x \Rightarrow \gamma z_S A \cdot x_m = \int_{(A)} \gamma z \, dA \cdot x$$

$$F_p \cdot y_m = \int_{(A)} dF_p \cdot y \Rightarrow \gamma z_S A \cdot y_m = \int_{(A)} \gamma z \, dA \cdot y$$

ولكن حسب الشكل (١٢.٣ -a) فإن : $z = y \cos\alpha$ ؛ $z_S = y_S \cos\alpha$ ، وبالتالي يكون بعد الاختصار على $\gamma \cos\alpha$ :

$$x_m y_S A = \int_{(A)} x \, y \, dA \quad ; \quad y_m y_S A = \int_{(A)} y^2 \, dA \quad . \qquad (3.22)$$

ولكن التكامل $J_{C(x,y)} = \int_{(A)} x \, y \, dA$ يمثل **العزم النابذ** Centrifugal moment للسطح A بالنسبة للمحورين x ، y ، بينما يمثل التكامل $J_x = \int_{(A)} y^2 dA$ **عزم العطالة** Inertia moment للسطح A بالنسبة للمحور x ، وكلاهما ينتميان لعزوم الدرجة الثانية . بينما يمثل الجداء $y_S A$ العزم الستاتيكي للسطح A ، أي عزم الدرجة الأولى . وتنتج بالتالي إحداثيات مركز الضغط من (3.22) :

$$\left.\begin{aligned} x_m &= \frac{\int_{(A)} x\,y\,dA}{y_S\,A} = \frac{J_{C(x,y)}}{y_S\,A} = \frac{\text{العزم النابذ للسطح A}}{\text{العزم الستاتيكي للسطح A}} \\ y_m &= \frac{\int_{(A)} y^2\,dA}{y_S\,A} = \frac{J_x}{y_S\,A} = \frac{\text{عزم العطالة للسطح A}}{\text{العزم الستاتيكي للسطح A}} \end{aligned}\right\} . \qquad (3.23)$$

ليكن $J_S$ عزم عطالة السطح A بالنسبة لمحور الثقالة المار من مركز الثقل S ، فينتج حسب علاقة شتاينر Steiner :

$$J_x = J_S + A\,y_S^2 ,$$

وبالتالي تصبح المعادلة الثانية من ( 3.23 ) :

$$y_m = y_S + \frac{J_S}{y_S\,A} , \qquad (3.24)$$

ويكون البعد بين مركز الثقل S ومركز الضغط M :

$$e = y_m - y_S = \frac{J_S}{y_S\,A} , \qquad (3.25)$$

وحيث أن عزم العطالة $J_S$ هو دائماً موجب فينتج أن $e > 0$ ، وبالتالي يكون **مركز الضغط دائماً أخفض من مركز الثقل** . وينطبقان على بعضهما ، عندما يصبح السطح أفقياً ( $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ) . لانه في هذه الحالة يكون توزع الضغط على السطح منتظماً ، كما هو الامر بالنسبة للضغط المؤثر على قعور الاوعية الافقية . وتكون **قوة ضغط القعر** لوعاء فيه سائل حتى ارتفاع H من القعر ومساحة قعره A حسب ( 3.21 ) :

$$F_{pb} = \gamma\,H\,A . \qquad (3.26)$$

وتبقى هذه القوة ثابتة بالنسبة لجملة أوعية متباينة الشكل ولكن مساحة قعورها واحدة ويملؤهـــا نفس السائل لنفس الارتفاع ، الشكل ( ١٣.٣ ) . وهذا

مايعرف باسم **التناقضة الهيدروستاتيكية** Hydrostatical Paradox :




الشكل ١٢.٣ : التناقضة الهيدروستاتيكية :
قوة الضغط على قعور الاوعية المختلفة الاشكال واحدة .

> قوة الضغط على قعر وعاء أفقي لاتتعلق بشكل الوعاء وتساوي الى وزن اسطوانة سائلية وزنها النوعي $\gamma$ وارتفاعها H وسطح قاعدتها A .

في حالات عديدة يمكن اختيار المحور y في الشكل ( ١٢.٣ — a ) كمحور تناظر للسطح المعتبر A . في هذه الحالة ينعدم العزم النابذ $J_{C(xy)}$ وتصبح $x_m = 0$ حسب ( 3.23 ) . ويتحدد بالتالي مركز الضغط M بالاحداثي $y_m$ فقط ، ويكون واقعاً على محور التناظر وعلى بعد e من مركز الثقل المعطى بالعلاقة ( 3.25 ) . ففي حالة جدار شاقولي مثلاً ، يمكن التأكد بسهولة أن قوة الضغط بالنسبة لواحدة العرض $F_p = \gamma h^2/2$ ، ومركز الضغط M يبعد $e = h/6$ عن مركز الثقل S ، وبالتالي فهي تتناسب مع مساحة المثلث القائم المتشكل من أثر الجدار وخط توزع الضغط ، وتؤثر في مركز ثقل هذا المثلث على ارتفاع h/3 من قاعدته ، الشكل ( ١٢.٣ — b ) .

## ٤.٣.١.٣ حساب قوى الضغط على جدران الأوعية المنحنية

إن حساب قوى ضغط السوائل الساكنة على السطوح المنحنية الفراغية يتطلب في الحالة العامة تحديد ثلاث مركبات للقوى في اتجاه ثلاثة محاور متعامدة وعزومها بالنسبة لهذه المحاور .

نفرض أن السطح A يمثل جزءاً من جدار خزان شكله بدون تحديد ، وفيه سائل سطحه السائب معرض لتأثير الضغط الجوي الذي يؤثر من الخارج على جدران الخزان أيضاً ، الشكل ( ١٤.٣ ) . نختار مجموعة احداثيات ديكارتية z, y, x ، بحيث يكون المستوي المشكل من y , x منطبقاً على سطح السائل الحر الافقي ، بينما المحور z مثاقولي باتجاه الاسفل .

نعتبر من السطح A جزيئاً سطحياً dA على عمق z من السطح السائب للسائل فتكون قوة الضغط الزائد الجزئية المؤثرة على dA ناظمياً من الداخل حسب ( 3.3 ) :

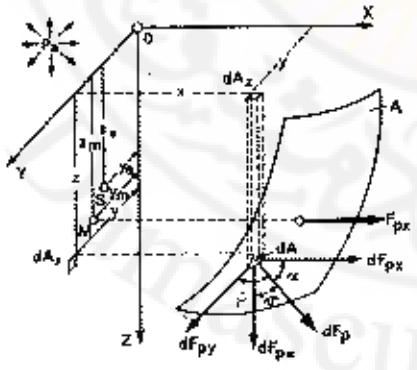
$$dF_p = \gamma z \, dA \ . \qquad (3.27)$$

فاذا كان الناظم على dA يصنع مع محاور الاحداثيات المختارة الزوايا $\gamma, \beta, \alpha$ فتكون مركبات $dF_p$ باتجاه z, y, x هي :

$$dF_{px} = \gamma \, z \, dA \, . \cos \alpha = \gamma \, z \, dA_x \ ; \ dF_{py} = \gamma z \, dA \, . \cos \beta = \gamma z \, dA_y$$

$$dF_{pz} = \gamma z \, dA \, . \cos \gamma = \gamma \, z \, dA_z \ , \qquad (3.28)$$

حيث $dA_z$ ، $dA_y$ ، $dA_x$ تمثل مساقط dA على المستويات المتعامدة على z ، y ، x . وتنتج مركبات قوى الضغط الإجمالية على السطح A




الشكل ١٤.٣ : حساب مركبات قوى الضغط على سطح منحنٍ .

بالتكامل :

$$F_{px} = \gamma \int_{(A)} z\, dA_x \; ; \; F_{py} = \gamma \int_{(A)} z\, dA_y \; ; \; F_{pz} = \gamma \int_{(A)} z\, dA_z \quad (3.29)$$

حيث تمثل $F_{py}$ ، $F_{px}$ المركبتين الافقيتين ، بينما تمثل $F_{pz}$ المركبة الشاقولية لقوى الضغط .

ليكن $A_x$ مسقط السطح A على المستوي zy المتعامد مع المحور x ، ولنفرض S مركز ثقل $A_x$ واقعاً على عمق $z_S$ من المحور y فيكون حسب قانون العزم لتحديد مركز الثقل السطحي :

$$\int_{(A)} z\, dA_x = z_S\, A_x \; .$$

وعليه تصبح المعادلة الأولى من (3.29) :

$$F_{px} = \gamma z_S A_x \; . \quad (3.30)$$

فإذا كان خط تأثير $F_{px}$ يخترق المستوي zy في مركز الضغط M المحدد بالإحداثيين $z_m$ ، $y_m$ ( الشكل ١٤.٣ ) فينتج من قانون العزم بالنسبة لمحوري الدوران z ، y :

$$F_{px}\, z_m = \int_{(A_x)} dF_{px}\, z \; ; \; F_{px}\, y_m = \int_{(A_x)} dF_{px}\, y \; .$$

ومنه ينتج باستخدام العلاقتين (3.29) ، (3.30) بعد الاختصار على $\gamma$ :

$$z_m\, z_S\, A_x = \int_{(A_x)} z^2\, dA_x = J_y \; ; \; y_m\, z_S\, A_x = \int_{(A_x)} y\, z\, dA_x = J_{c\,(y,z)}$$

$$\left.\begin{aligned} z_m &= \frac{\int_{(A_x)} z^2\, dA_x}{z_S\, A_x} = \frac{J_y}{z_S\, A_x} = \frac{\text{عزم العطالة للسطح } A_x}{\text{العزم الستاتيكي للسطح } A_x} \\ y_m &= \frac{\int_{(A_x)} y\, z\, dA_x}{z_S\, A_x} = \frac{J_{c\,(y,z)}}{z_S\, A_x} = \frac{\text{العزم النابذ للسطح } A_x}{\text{العزم الستاتيكي للسطح } A_x} \end{aligned}\right\} \; . \quad (3.31)$$

بنفس الطريقة يمكن الحصول على علاقات مشابهة لتحديد المركبة الأفقية $F_{py}$ لقوى الضغط ، حيث ينتج بالمقارنة مع العلاقتين (3.30) ، (3.31) :

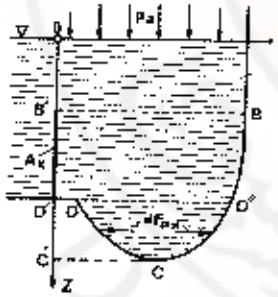
$$F_{py} = \gamma\ z_{S'}\ A_y \quad ; \quad x_{m'} = \frac{J_x}{z_{S'}\ A_y} \quad ; \quad x_{m'} = \frac{J_{C(x,z)}}{z_{S'}\ A_y} \ , \qquad (3.32)$$

حيث $z_{S'}$ بعد مركز ثقل السطح $A_y$ ، مسقط A على المستوي zx ، عن المحور x ، $J_x$ عزم عطالته بالنسبة للمحور x ، $J_{C(x,z)}$ عزمه النابذ بالنسبة للمحورين z,x ، $M'(x_{m'},z_{m'})$ مركز الضغط للمركبة $F_{py}$ .

ان مقارنة العلاقات ( 3.30 ) حتى ( 3.32 ) مع العلاقتين ( 3.21 ) و ( 3.23 ) ، مع الانتباه ان اختيار موقع محاور الاحداثيات y,x على السطح السائب للسائل كان اعتباطياً ، تسمح باستخلاص النتيجة العامة التالية :

> **ان مركبة قوى الضغط الأفقية التي يؤثر بها سائل ساكن على جدار وعاء منحني في اتجـــاه أفقي ما تساوي إلى قوة الضغط المؤثرة على السطح المستوي الناتج عن اسقاط الجدار على مستو متعامد مع الاتجاه المفروض .**

ونجدر الملاحظة أن كافة أجزاء السطح التي تتقاطع مساقطها لاتدخل في




الشكل ٣.١٥ : قوة الضغط الافقية $F_{px}$ المؤثرة على السطح D C B تتحدد بالمسقط الشاقولي $\overline{D'B'} = A_x$ فقط لان قوى الضغط الافقية المؤثرة على D C D' تلغي بعضها .

حساب المركبة الأفقية لقوى الضغط ، لأن مركبات قوى الضغط الجزئية الافقية المؤثرة على هذه الاجزاء تلغي بعضها . فعند حساب قوة الضغط $F_{px}$ المؤثرة على السطح D C B لايدخل في الحساب سوى المسقط الشاقولي

$B'D' \equiv A_x$ على المستوي z y ، لأن مركبات قوى الضغط الافقية المؤثرة على السطح DCD' متوازنة فيما بينها ، الشكل ( ١٥٠٣ ) .

لحساب **المركبة الشاقولية** لقوى الضغوط نلاحظ أن قوة الضغط الشاقولية الجزئية المؤثرة على العنصر السطحي حسب ( 3.28 ) :

$$dF_z = \gamma\, z\, dA_x = \gamma\, dV \quad ,$$

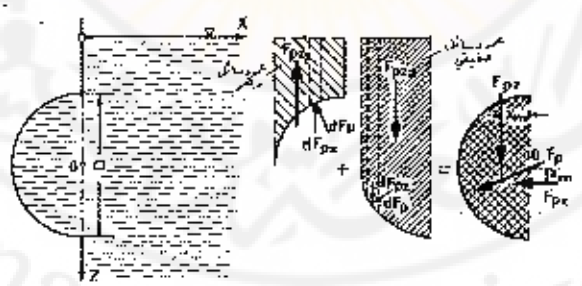
حيث $dV$ هو حجم عمود السائل القابع فوق dA بارتفاع z ومساحة قاعدة $dA_x$ ، الشكل ( ١٤٠٣ ) . وعليه ينتج من ( 3.29 ) :

$$F_{pz} = \gamma \int_{(A_x)} z\, dA_x = \gamma V \qquad , \qquad (3.33)$$

حيث $V$ حجم السائل القابع فوق السطح المعتبر A . وتكون بالتالي :

> **مركبة قوى الضغط الشاقولية** ، التي يؤثر بها سائل ساكن على سطح منحني تساوي الى وزن عمود السائل الشاقولي القابع فوق السطح والممتد حتى السطح الحر للسائل .

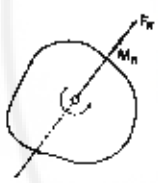
وواضح أن خط تأثير $F_{pz}$ يمر من مركز ثقل الحجم $V$ . أما اتجاهها فيمكن أن يكون **شاقولياً للأسفل أو للأعلى** ، حسب مايكون عمود السائل فوق السطح المنحني المعتبر **حقيقياً أو وهمياً** . فعند حساب قوة الضغط الشاقولية المؤثرة على نصف اسطوانة ، الشكل ( ١٦٠٣ ) ، نلاحظ أن $F_{pz_1}$ المؤثرة على




الشكل ١٦٠٣ : حساب مركبة قوى الضغط الشاقولية على نصف اسطوانة . $F_{pz}$ تساوي وزن عمود السائل القابع فوق المنحني وتمر من مركز ثقله واتجاهها شاقولي للأعلى أو للأسفل .

النصف العلوي لنصف الاسطوانة متجهة للأعلى ، ونحسب من ( 3.33 ) اذا افترضنا أن عموداً وهمياً من السائل قابع فوقها ؛ بينما تكون $F_{px_2}$ المؤثرة على النصف السفلي متجهة للأسفل لان عمود السائل القابع فوقها حقيقي ( راجع ٥٠٣ ؛ ت ٢٠ ) .

إن مركبات قوى الضغط $F_{px}$ ، $F_{py}$ ، $F_{pz}$ المؤثرة على سطح منحنٍ فراغي لاتمر في الحالة العامة من نقطة واحدة ، وبالتالي لا يمكن إيجاد محصلتها العامة ، لأن المركبة الجزئية لقوى الضغط $dF_p$ تمثل أشعة فراغية تؤثر ناظمياً على السطح وتغير اتجاهها من مكان لآخر . ولكن بالإمكان حسب طرق جمع الأشعة الفراغية التعويض عنها دائماً بقوة **إفرادية** (محصلة) **ومزدوجة** ( عزم ) . ومن بين الحلول اللانهائية التي نحصل عليها من الاختيار الحر لمركز الاختزال Reduction point توجد حالة خاصة تكون فيها القوة المحصلة والعزم من نفس الاتجاه ، وتؤلفان ما يسمى لولب القوى ، الشكل (١٧٠٣) ، [67] .



الشكل ١٧٠٣ : لولب القوى

في أكثر الحالات العملية فإن حساب قوى الضغط على السطوح المنحنية يقتصر على إيجاد مركبة أفقية $F_{px} \equiv F_{pH}$ ، ومركبة شاقولية $F_{pz} \equiv F_{pV}$ ، لأن هذه السطوح تمثل عادة جزءاً من كرة أو أسطوانة . ونحصل في هاتين الحالتين على محصلة لقوى الضغط كقوة إفرادية :

$$F_p = \sqrt{F_{pH}^2 + F_{pV}^2} \qquad (3.34)$$

ويكون خط تأثير $F_p$ ، ماراً من مركز الكرة ، لان كافة قوى الضغط الجزئية تمر منه ، أو متقاطعاً مع محور الأسطوانة لأن كافة قوى الضغط الجزئية تكون واقعة في مستويات متوازية ومتعامدة مع هذا المحور ، الشكل (١٦٠٣) :

يعتبر حساب متانة الأنابيب الدائرية الواقعة تحت تأثير ضغط داخلي من

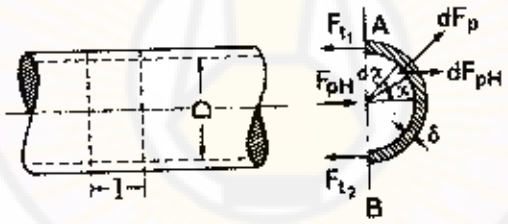
التطبيقات العملية الهامة لحساب قوى الضغط على السطوح المنحنية .

نفرض أن القطر الداخلي للانبوب $D=2r$ ، وسماكة جداره $\delta$ ، والضغط الزائد للسائل الموجود فيه $p$ . فنتيجة للضغط الداخلي يكون الانبوب معرضاً لاجهادات شد تحاول تمزيقه إلى قسمين في المستوي $A-B$ ، الشكل (١٨.٣). نقتطع من الانبوب شريحة خاقية بطول $l$ ، وعرض $ds=rd\alpha$ ، نحور نصف الشريحة ، فتكون قوتا الشد المماسيتان $F_{t_1}$ ، $F_{t_2}$ المؤثرتان على طرفيها متوازنتين مع محصلة قوى الضغط الافقية $F_{pH}$ المتعامدة مع $\overline{BA}$ . وحيث أنه من الشكل ( ١٨.٣ ) :

$$F_{pH}=\int dF_p\cos\alpha=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}p\,dA\cos\alpha=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}p\;l\,r\,d\alpha\cos\alpha$$

تنتج بالتكامل العلاقة :

$$F_{pH}=p\,l\,2r=p\,l\,D \quad . \qquad (3.35)$$




الشكل ١٨.٣ : حساب متانة الشد لأنبوب دائري وتحديد سماكة جداره

التي تنتج أيضاً مباشرة من العلاقة ( 3.30 ) اذا اعتبرنا فيها $p\equiv\gamma z_s$ ، $A_x\equiv lD$ ، وفي حالة الضغوط العالية يمكن اعتبار مركز الضغط للقوة $F_{pH}$ منطبقاً مع مركز الانبوب . ويكون بالتالي $F_{t_1}=F_{t_2}=F_t$ ، ونحصل من شرط توازن القوى :

$$2F_t=F_{pH}=plD\Rightarrow F_t=\frac{p\,l\,D}{2}=p\,l\,r \quad . \qquad (3.36)$$

فاذا فرضنا أن اجهاد الشد المسموح به لمعدن الانبوب $\sigma_{zul}$ ، فتكون متانة الانبوب ضد اجهادات الشد محققة ، عندها :

$$\frac{F_t}{\delta l} \leq \sigma_{zul}$$

ومنه ، باستخدام العلاقة ( 3.36 ) ، تنتج سماكة جدار الانبوب المطلوبة لتحمل ضغط معين :

$$\delta \geq \frac{p\,r}{\sigma_{zul}} \quad . \qquad (3.37)$$

على هذا الاساس يمكن أيضاً تحديد الضغط المسموح به بالنسبة لانبوب مواصفاته معلومة .

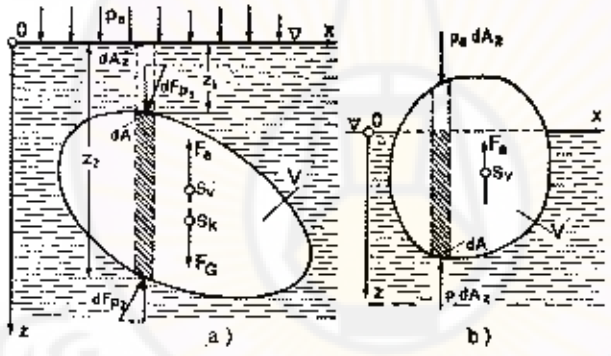
## ٥.٣.١.٣ قوة الرفع الهيدروستاتيكية « رافعة أرخميدس »

نتصور داخل سائل ساكن ثقيل وزنه النوعي $\gamma$ منطقة شكلها على غير تعيين وحجمها $V$ قد « تصلبت » مع بقاء الكثافة ثابتة . فحسب « مبدأ التصلب » ( راجع ٢.٣ ) لا يختل توازن السائل . وبالتالي يجب أن تكون قوة ثقل الجسم « المتصلب » الشاقولية للأسفل متوازنة مع قوى الضغط التي يؤثر بها السائل عليه ، والتي يجب أن تكون لها محصلة شاقولية للأعلى فقط ، بينما تفنى مركبات قوى الضغط الأفقية بعضها البعض .

نفترض الآن أنه بدلاً من الجسم « المتصلب » يوجد جسم صلب له نفس الشكل والحجم . وبالتالي فإن قوى الضغط التي يؤثر بها السائل على هذا الجسم لا تختلف عن تلك التي كانت تؤثر على الجسم « المتصلب » . ومع هذا فليس ضرورياً أن يتحقق التوازن . فإذا كان الوزن النوعي للجسم $\gamma_1 < \gamma$ ، فيكون وزنه أكبر من وزن الجسم « المتصلب » ، وبالتالي أكبر من محصلة قوى الضغط الشاقولية ، وهذا يسبب غوص الجسم للقاع . أما في حال كون $\gamma_1 > \gamma$

فإن الجسم يندفع للأعلى . ويلزم في كلتي الحالتين المحافظة على توازن الجسم بذل قوة خارجيـة ، كأن نعلق الجسم على سلك أو نربطه بقضيب مثلاً . ولكن الجسم يطفو عندما يكون $\gamma = \gamma_1$ .

إن كل جسم مغمور في سائل كلياً أو جزئياً يتعرض إذن لقوة ضغط شاقولية للأعلى ، يمكن حسابها بنفس الطريقة المتبعة في حساب قوى الضغط على السطوح المنحنية (٤.٣.١.٣) . فإذا فرضنا جسماً مـا ، حجمه $V$ ، مغموراً كلياً في سائل وزنـه النوعي $\gamma$ ، الشكل (١٩.٣ ـ a) ، فيتضح بسهولة أن مركبتي قوى الضغط الأفقيتين $F_{px}$ ، $F_{py}$ معدومتـان لأن مسقطي السطح الخارجي $A_x$ ، $A_y$ على المستويين $zx$ ، $zy$ يتقاطعان كلياً (الشكل ١٥.٣). ويبقى الجسم خاضعاً لتأثير المركبة الشاقوليـــة لقوى الضغط . فإذا اعتبرنا




الشكل ١٩.٣ : حساب قوة الدفع الهيدروستاتيكية ( دافعة أرخميدس ) $F_a$ لجسم مغمور كلياً (a) ، أو جزئياً (b) .

عنصرين سطحيين $dA$ من سطح الجسم الخارجي واقعين شاقولياً فوق بعضهما وعلى عمق $z_1$ ، $z_2$ من السطح السائب للسائل ، فتكون محصلة مركبتي قوى الضغط الشاقوليتين الجزئيتين المؤثرتين عليهما والمتجهة للأعلى :

$$dF_{pz} = (p_a + \gamma z_2)\,dA_z - (p_a + \gamma z_1)\,dA_z = \gamma (z_2 - z_1)\,dA_z = \gamma\,dV .$$

حيث $dV$ حجم المؤشور الشاقولي المحدد من العنصرين السطحيين . وينتج بالتكامل

$$F_{pz} \equiv F_a = \gamma V , \qquad (3.38)$$

حيث $V$ هو حجم السائل المزاح من قبل الجسم والمساوي طبعاً لحجم الجسم نفسه . وبما أن $F_a$ تمثل محصلة مجموعة قوى متوازية شاقولية الأعلى $dF_{pz}$ فاتجاهها هي أيضاً شاقولي للأعلى وتمر من $S_1$ مركز ثقل $V$ .

تسمى $F_a$ **قوة الطفو** Buoyancy force أو **قوة الرفع الهيدروستاتيكية** Hydrostatic lift ، وعامة **دافعة أرخيدس** Archimedes (287—212 b.Ch). وهي تؤثر أيضاً على الأجسام المغمورة جزئياً ، الشكل ( ١٩٠٣ — b ) ، حيث يمكن البرهان بسهولة أن :

$$F_a = \gamma V' \qquad (3.39)$$

عندما يكون $V'$ الحجم الجزئي المزاح من قبل الجسم . وعليه يمكن صياغة الجملة العامة التالية :

> قوة الرفع الهيدروستاتيكية (دافعة أرخيدس) التي تتلقاها الأجسام المغمورة كلياً أو جزئياً في السوائل الساكنة تساوي الى وزن السائل المزاح ، وهي تؤثر شاقولياً للأعلى وتمر من مركز ثقل الحجم المزاح .

وعلى هذا فان كل جسم مغمور في السائل يتعرض **لنقص ظاهري في وزنه** بمقدار دافعة أرخيدس . فاذا كان وزن الجسم في الهواء $F_G$ فيصبح **وزنه الظاهري** بعد غمره في السائل وبفرض $\gamma < \gamma_k$ :

$$F'_G = F_G - F_a \quad . \qquad (3.40)$$

وهذا النقص الظاهري في الوزن يتعلق فقط بحجم الجسم وبالوزن النوعي للسائل. فاذا قيس $F_G$ بواسطة ميزان نابضي مثلاً فبالامكان بمساعدة (3.40) تحديد الوزن النوعي للجسم $\gamma_K$ حيث يكون :

$$F_G = F_G - \gamma F_G/\gamma_K \Rightarrow \gamma_K = \gamma \frac{F_G}{F_G - F_G} \quad . \quad (3.41)$$

على هذا الأساس صمم مقياس **الهيدرومتر** Hydrometer لتحديد الوزن النوعي لجسم صلب متجانس ، والذي تستخدم منه نماذج مختلفة أقدمها **ميزان جولي** Jolly و**ميزان موهر** Mohr [ 36 ] .

لقد استغل الانسان منذ زمن سحيق دافعة أرخميدس في بناء وسائط النقل المائية كالعوامات والزوارق ، وذلك قبل ادراكه لطبيعتها . كما استغلها في المناطيد ، قبل أن يتصور أن بامكانه أن يطير في طائرة أثقل من وزن الهواء المزاح . ولا يزال المنطاد يستعمل حتى اليوم من أجل القيام بالعديد من التجارب المتعلقة بالأرصاد الجوية ، حيث يملأ عادة بغاز وزنه النوعي $\gamma_K < \gamma_a$ الوزن النوعي للهواء . وينتج بسهولة أن وزن حمل البالون :

$$F_G = V(\gamma_a - \gamma_K) \quad , \quad (3.42)$$

حيث $V$ هو حجم الهواء المزاح . ومن الغازات المستخدمة لنفخ البالون : غاز الإضاءة ($\gamma_K = 0{,}67 - 0{,}45$ kp/m³) ، الهيدروجين النقي ($\gamma_K = 0{,}0894$ kp/m³) والهيليوم ($\gamma_K = 0{,}1785$ kp/m³) ، وكذلك الهواء المسخن حتى درجة 370 °C تقريباً .

## ٦.٣.١.٣ شروط التوازن المستقر للأجسام الطافية

نفرض جسماً شكله على غير تعيين يطفو أو يسبح على السطح الحر لسائل وزنه النوعي $\gamma$ . فإذا كان هذا الجسم في حالة توازن ، فيجب أن تكون

ه القوى المؤثرة عليه ، وهي قوة الثقالة $F_G$ الشاقولية للأسفل ، ودافعة أرخميدس $F_a$ الشاقولية للأعلى ، معدومة ، أي أن يتحقق :

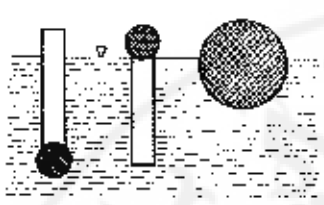
$$F_G = F_a = \gamma V , \qquad (3.43)$$

حيث $V$ حجم السائل المزاح . ولكن $F_G$ تؤثر في مركز ثقل الجسم $S_t$ ، بينما $F_a$ تؤثر في مركز ثقل الحجم المزاح $S_v$ ، وهما نقطتان مختلفتان عادة ، تطبق على الخط الواصل بينهما **محور الطفو** . وعليه فإنه مع تحقيق الشرط (3.43) يمكن أن تشكل القوتان $F_G$ ، $F_a$ مزدوجة تحاول تدوير الجسم . وحتى لا يحدث ذلك يجب أن تكون حاملتا القوتين على منحنى شاقولي واحد ، وتكون النتيجة :

> أن الشرط اللازم والكافي لتوازن جسم طاف مغمور جزئياً أو كلياً يتطلب أن تكون دافعة أرخميدس مساوية لوزن الجسم وأن يكون محور الطفو شاقولياً .

ولكن كل جسم يمكن أن يطفو بوضعيات مختلفة وعديدة ، تكون حالة توازنه في معظمها **قلقة** Labile ، بينما لا توجد غالباً سوى وضعية واحدة فقط تحقق حالة **التوازن المستقر** Stable . وهذه الوضعية بالذات ، وشروط تحقيقها لها أهمية كبيرة ، خاصة في بناء السفن . وكما هو معروف في ميكانيك الجسم الصلب فإن حالة التوازن القلق تتميز بأن الجسم عندما يتعرض لتأثيرات صغيرة خارجية من قوى أو عزوم تزيحه عن وضعية توازنه الأصلية فإن محصلة القوى والعزوم التي تنشأ نتيجة لذلك تؤدي لزيادة انحراف الجسم بحيث لا يعود إلى وضعية توازنه الأولية . وفي الحالة الخاصة التي لا يؤدي فيها انزياح الجسم لحدوث أي تغيير في القوى والعزوم المؤثرة عليه ، وبالتالي لأي تبدل في وضعية توازنه ، فإن الجسم يكون في حالة **توازن مطلق** Neutral . أما في حالة التوازن المستقر فان القوى والعزوم ، التي تنشأ نتيجة إزاحة بسيطة للجسم ،

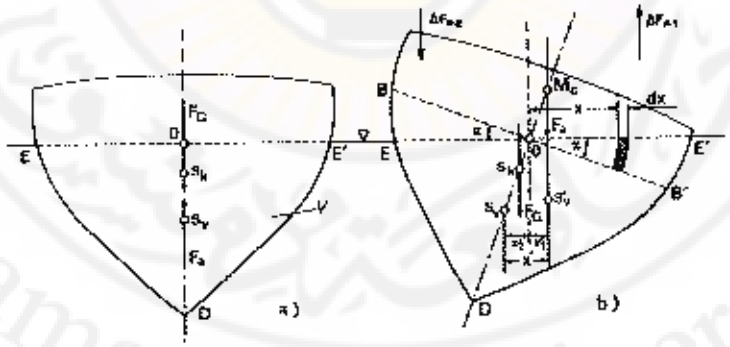
عيده إلى وضعية توازنه الأصلية . وتتميز هذه الحالة بأن الجملة الكتلية المؤلفة ، حالتنا من الجسم والسائل تملك قدرة كامنة أصغرية ، وبالتالي فان مركز ثقلها يكون أخفض ما يمكن ، ( الشكل ٢٠.٣ ) .



الشكل ٢٠.٣ : أمثلة عن حالة التوازن المستقر (a ، والقلق (b والمطلق (c للأجسام الطافية .

لتحديد شروط التوازن المستقر نعتبر جسماً ( سفينة مثلاً ) طافياً على السطح الحر لسائل ، بحيث يكون الحجم الجزئي المغمور منه V ، الشكل ( ٢١.٣ — a ) . ان وزن الجسم $F_G$ ودافعة أرخميدس $F_a$ تمثلان قوتين متضادتين ومتساويتين . يطلق على مستوي قاطع السطح السائب للسائل مع الجسم **مستوي الطفو** ، ويسمى مقطع الجسم الواقع في هذا المستوي **سطح الطفو** أو **سطح خطوط الماء** ، الذي يخترقه محور الطفو في النقطة 0 . كما يطلق على الارتفاع الشاقولي للجزء المغمور **عمق الغاطس** أو اختصاراً **الغاطس** .

عندما يزداد الغاطس بازاحة الجسم شاقولياً للأسفل فان حجم السائل المزاح يزداد ، وتزداد بالتالي دافعة أرخميدس ، وهذا يؤدي الى عودة الجسم لوضعية




**شكل ٢١.٣** : شرط الطفو ان يكون $F_G = F_a$ ومحور الطفو شاقولي (a ؛ شرط التوازن المستقر للاجسام الطافية أن يكون مركز الطفو المستنتج $M_c$ أعلى من مركز ثقل الجسم $S_k$ (b.

توازنه . ونصل الى نفس النتيجة عندما ينقص الغاطس ، حيث يصبح في هذه الحالة ثقل الجسم اكبر من دافعة أرخميدس . وعليه فان الجسم الطافي يكون في حالة توازن مستقر بالنسبة لازاحة شاقولية متوازية الأعلى أو الأسفل ، لأن محصلة القوى الناشئة نتيجة لذلك تعيده لوضعية توازنه الأصلية .

بالنسبة لازاحة متوازية باتجاه محور الجسم الطولي أو العرضي ، وكذلك بالنسبة لتدوير الجسم حول محور طفوه الشاقولي فان محصلة القوى المؤثرة عليه لاتتغير ، ويبقى محافظاً على وضعية توازنه ؛ وبالتالي فان توازن الجسم في هذه الحالات مطلق . اذن فان المقياس ، الذي يحدد حالة التوازن المستقر لجسم طافٍ ، هو تدويره حول محوريه الطولي أو العرضي المتعامدين مع محور الطفو .

لنفرض أننا دوّرنا الجسم الطافي في (الشكل ٢١٠٣ — a) حول محوره الطولي المتعامد مع مستوي الشكل زاوية صغيرة $\alpha$ ، الشكل ( ٢١٠٣ — b ) . قبل التدوير كان حجم الجزء المغمور BDB' هو $V$ وقوة الطفو المؤثرة في $S_1$ تبلغ حسب (3.38) : $F_a = \gamma V$ . وبعد تدوير الجسم فان جزءاً جديداً منه $BE'O$ ، حجمه $\Delta V_1$ ، يغطس في السائل فتؤثر عليه قوة طفو جزئية موجبة ( شاقولية الأعلى ! ) مقدارها $\Delta F_{a_1} = \gamma \Delta V_1$ . ولكن في نفس الوقت يبرز جزء آخر من الجسم $BEO$ ، حجمه $\Delta V_2$ ، مما يؤدي الى خسارة في قوة الرفع الهيدروستاتيكية ، يمكن اعتبارها كقوة طفو سالبة ( شاقولية للأسفل ! ) مقدارها $\Delta F_{a_2} = \gamma \Delta V_2$ .

نعتبر عنصراً سطحياً $dA$ من سطح الطفو $A$ ، على بعد $x$ من محور الدوران . إن التغير الكلي الذي يطرأ على حجم السائل المزاح بعد تدوير الجسم ينتج بسهولة :

$$\Delta V \approx \int_{(A)} x \, \alpha \, dA = \alpha \int_{(A)} x \, dA \quad ,$$

فاذا كان محور الدوران يمثل محور ثقالة بالنسبة لسطح الطفو ، كما هو الأمر عملياً ، فان حجم الجزء من الجسم الذي يغمر بالسائل B'E'O يساوي إلى الحجم الذي يبرز منه BEO ، وبالتالي يكون $\sum \Delta V = 0$ ، ويبقى حجم السائل المزاح قبل وبعد الدوران واحداً . وبالتالي تبقى دافعة أرخميدس ثابتة ، ولكن نقطة تأثيرها تنتقل من $S_V$ إلى $S'_V$ ، وتشكل في هذه الحالة المبينة في الشكل ( ٢١.٣ - b ) ، مع قوة الثقالة $F_G$ المارة من مركز ثقل الجسم $S_k$ مزدوجة تصحيح ، تعيد الجسم إلى وضعية توازنه الأصلية ، ويتحقق بالتالي شرط الطفو المستقر . أما في الحالة المعاكسة التي نحاول فيها هذه المزدوجة زيادة تدوير الجسم ، فان وضعية الطفو تكون قلقة ، ويمكن أن تؤدي بالنهاية لأن ينقلب الجسم .

نحدد خط تأثير $F_a$ فيلتقي مع محور الطفو في النقطة $M_c$ ، التي يطلق عليها **مركز الطفو المستنتج** Metacentre ، ويسمى البعد بينها وبين مركز ثقل الجسم $\overline{M_c S_k} = h_m$ **ارتفاع مركز الطفو المستنتج** . فاذا لاحظنا أنه في حالة التوازن المستقر ، كما في الشكل ( ٢١.٣ - b ) تكون $M_c$ أعلى من $S_k$ ، فان تحديد شرط الطفو المستقر لجسم ما يتركز على تحديد موقع $M_c$ من مركز ثقله .

لتكن $x'$ المسافة الأفقية التي انتقلها مركز ثقل حجم السائل المزاح بعد تدوير الجسم زاوية صغيرة $\alpha$ . ولنفرض أنه نتيجة التدوير لم يتغير حجم السائل المزاح فتكون قوة الطفو $F_a = \gamma V(EDE')$ المارة من $S'_V$ تمثل المحصلة للقوة $F_a = \gamma V(BDB')$ المارة من $S_V$ وللقوتين $\Delta F_{a_1} = \gamma V(OB'E')$ ، $\Delta F_{a_2} = \gamma V(OBE)$ . وبالتالي ينتج من قانون العزوم بالنسبة لمحور الدوران 0 :

$$\gamma V x'_1 \approx -\gamma V x'_2 + \gamma \int_{(OB'E')} (x \propto dA)\, x + \gamma \int_{(OBE)} (x \propto dA)\, x .$$

وبما أنه حسب الشكل ( ٢١.٣ - b ) $x'_2 + x'_1 = x'$ ، وبأخذ التكامل

بالنسبة لكامل سطح الطفو A ينتج :

$$V\,x' = \alpha \int_{(A)} x^2\,dA = \alpha\,J_0 \Rightarrow x' = \frac{\alpha\,J_0}{V}\ , \qquad (3.43a)$$

حيث $J_0$ عزم العطالة لسطح الطفو A بالنسبة لمحور الدوران 0 . وباعتبار أن الزاوية $\alpha$ صغيرة ينتج أيضاً ( الشكل ٢١.٣ ـ b ) :

$$x' \approx \overline{M_c\,S_r}\ ,\ \alpha = (\overline{M_c\,S_k} + \overline{S_k\,S_r})\,\alpha = (h_m + e)\,\alpha\ ,$$

ونحصل بالتالي من (3.43) بعد الاختصار على $\alpha$ :

$$h_m = \frac{J_0}{V} - e\ , \qquad (3.44)$$

حيث e البعد بين مركز ثقل الجسم ومركز ثقل الحجم المزاح $V$ . وتكون النتيجة :

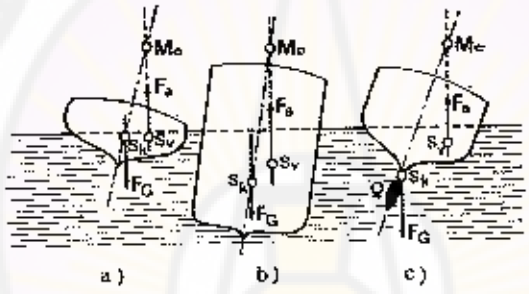
> يتحقق شرط التوازن المستقر للأجسام الطافية عندما يكون مركز الطفو المستنتج أعلى من مركز ثقل الجسم : $h_m > 0 \Rightarrow J_0/V > e$ . ويكون التوازن قلقاً عندما : $h_m < 0 \Rightarrow J_0/V < e$ .

في العلاقة (3.44) لم تدخل الزاوية $\alpha$ . وبالتالي فان $h_m$ لا تتعلق بزاوية الدوران عندما تكون صغيرة . وحيث أن $h_m$ تتعلق بعزم العطالة لسطح الطفو وبحجم السائل المزاح وبعد مركز ثقله عن مركز ثقل الجسم فان تغيير الغاطس لسفينة مثلاً يؤدي إلى تغيير قيمة $h_m$ ، التي تتراوح حسب نوع السفينة من $h_m = 0{,}3$ إلى 1,5 m . وبصورة عامة فان التوازن المستقر للأجسام الطافية يحدده شكل الجسم وتوزع الكتل فيه . وكلما كان مركز ثقل الجسم أكثر انخفاضاً للأسفل ، كلما كان الاستقرار أكبر ، وأمكن للجسم تحمّل زوايا دوران أكبر دون أن ينقلب .

في بناء السفن يكون أحياناً الشكل وأحياناً موقع مركز ثقل السفينة العامل الأساسي المحدد لاستقرارها .

في حالة زورق نهري أو بول مسطح ، الشكل ( ٢٢.٣ - a ) ، فان كل انحراف صغير عن وضعية توازنه تؤدي ، بسبب شكله ، لحرف نقطة تأثير دافعة أرخميدس لمسافة بعيدة ، بحيث أن مزدوجة التصحيح تعيده إلى حالة توازنه الأولى .

وفي حالة سفينة بحرية تجارية ، الشكل ( ٢٢.٣ - b ) ، فان استقرار توازنها يتحدد بسبب أن مركز ثقلها يكون منخفضاً جداً بسبب وضع الآلات




الشكل ٢٢.٣ : التوازن المستقر لنماذج مختلفة من السفن .
زورق نهري مسطح (a ؛ سفينة بحرية تجارية (b ؛ زورق سباق (c

والمحركات والحمولات الثقيلة في قاع السفينة . أما بالنسبة لزوارق السباق ، الشكل ( ٢٢.٣ - c ) ، فان قاع الزورق يحمل بكتلة معدنية من الرصاص مثلاً Q ، بحيث أن مركز ثقله يكون دائماً أخفض من مركز الطفو المستنتج ، ولا ينقلب الزورق إلا إذا دار 180° تقريباً .

بالنسبة لمحور دوران عرضي يوجد أيضاً مركز طفو مستنتج يحدد ارتفاعه تماماً كما في حالة الدوران حول محور طولي . كما تجدر الإشارة إلى أنه بالإمكان تحديد النقطة $M_o$ تجريبياً . فاذا أزحنا على سطح الجسم الطافي ، وهو في وضعية طفو مستقرة ، ثقلاً مقداره $F_G$ لمسافة عرضية s فان محور الطفو يميل عن

وضعه الشاقولي الاول زاوية $\alpha$ ، وتنشأ نتيجة ذلك مزدوجة تصحيح عزمها :

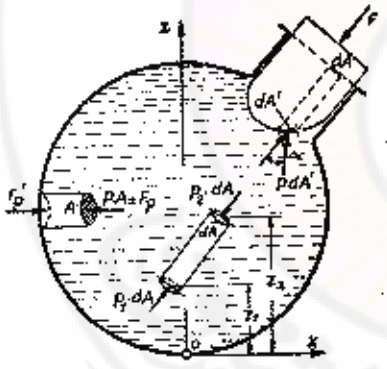
$$F_G\, h_m \sin\alpha = F_Q\, s \Rightarrow h_m = F_Q\, s / F_G \sin\alpha\,, \qquad (3.45)$$

حيث يمكن قياس الزاوية $\alpha$ بواسطة نواس مثلاً ، وتحديد $h_m$ بمعرفة ثقل الجسم $F_G$ والوزن $F_Q$ .

## ٣.٣ توزع الضغط في سائل متعادل الوزن ـ قانون باسكال

في حالات عملية عديدة يمكن أن يتعرض السائل لضغوط عالية ، بحيث يمكن اهمال قوى الثقالة بالمقارنة مع قوى الضغط . عندها يمكن دراسة توازن السائل على اساس أنه ذو كتلة « بدون » وزن .

نعتبر وعاء مملوءاً تماماً بسائل ساكن ثابت الحجم ، ومجهزاً بفتحة جانبية يتحرك فيها مكبس يغلقها باحكام كلي ، بحيث يمكن بواسطته توليد ضغوط عالية ، الشكل ( ٣٣.٣ ) . نقتطع من داخل السائل اسطوانة صغيرة ، سطح كل من قاعدتيها dA ، ويقع مركزاهما على ارتفاع $z_1$ ، $z_2$ عن المحور x . فاذا فرضنا أن الضغط المنتظم المؤثر على قاعدتي الاسطوانة $p_1$ ، $p_2$ ، وطبقنا شرط توازن القوى باتجاه محورها ، مع ملاحظة أن قوى الثقالة مهملة ومساقط قوى الضغط المؤثرة على قميص الاسطوانة معدومة فنجد بسهولة :




الشكل ٣٣.٣ : توازن سائل مضغوط مهمل الثقالة . الضغط ثابت في كل نقطة ( قانون باسكال ) .

$$p_1\, dA = p_2\, dA \Rightarrow p_1 = p_2 = p\ . \qquad (3.46)$$

وحيث أن اختيار وضعية الاسطوانة كان اعتباطياً ، فبالامكان تعميم النتيجة السابقة :

> عندما لاتؤثر على سائل متوازن قوة الثقالة أو أية قوة حجمية أخرى فان الضغط في كافة نقاط السائل وفي كل الاتجاهات تكون له نفس القيمة الثابتة .

تعرف هذه النتيجة باسم **قانون باسكال** B. Pascal (1623 – 1662) ، وهو ينطبق أيضاً على السوائل التي تملأ أوعية وأنابيب ضيقة ومتعرجة .

نفرض أن F هي القوة المؤثرة على المكبس ، اللازمة لاحداث الضغط p داخل السائل . فحسب قانون باسكال يؤثر هذا الضغط أيضاً على قاعدة المكبس المواجهة للسائل ، التي نفرض شكلها بدون تحديد . فاذا كان dA' جزيئاً سطحياً من هذه القاعدة ، فتكون قوة الضغط الجزئية المؤثرة عليه $p\,dA' \cos\alpha = p\,dA$ ، حيث dA مسقط dA' على المستوي العمودي على محور المكبس . وتنتج قوة الضغط المحورية على المكبس :

$$F_p = \int p\,dA = p\,A \quad , \qquad (3.47)$$

التي يجب ، في حال اهمال مقاومة احتكاك المكبس ، أن تتوازن مع القوة الخارجية F . **هذه القوة لاتتعلق اذن بشكل قاعدة المكبس المعرضة للضغط وانما فقط بمقطع المكبس A .**

هذه النتيجة تنطبق أيضاً على جدران الوعاء . فاذا اقتطعنا من السائل المجاور مباشرة للجدار اسطوانة تنتهي على الجدار ومحورها متعامد معه ، ومقطع قاعدتها A ، ( الشكل ٣ ٢٣ ) ، ودرسنا توازنها ، فنجد أنها واقعة تحت تأثير قوتين متضادتين ومتعاكستين : الأولى قوة الضغط $F_p = pA$ التي يؤثر بها السائل على المقطع A ، والثانية مركبة القوى $F'_p$ ، التي يؤثر بها الجزء المعتبر

من الجدار في اتجاه محور الاسطوانة . بينما يتلقى الجدار قوة تساوي وتعاكس $F'_n$ . ونلاحظ بسهولة أن التنوءات التي يمكن أن توجد على الجدار لاتؤثر على هذه النتيجة .

إن قانون **باسكال** يفسر لنا إمكانية السوائل على تخزين قدرة الضغط كطاقة كامنة ، يمكن تحريرها عند اللزوم وبالتالي نقل قوى الضغط . فاذا تم اختيار سطوح المقاطع بشكل مناسب فمن الممكن عن طريق التـــأثير بقوى صغيرة الحصول على قوى كبيرة . وتستغل هذه الامكانية في مجالات هندسية تطبيقية عديدة سنكتفي بالتعرض لمثالين منها .

## ١.٢.٣ المكبس الهيدروليكي

يعتبر **المكبس الهيدروليكي** Hydraulic press أو **الرافعة الهيدروليكية** من الآلات القديمة المستخدمة في عمليات الكبس أو العصر ( معاصر الزيتون ! ) أو رفع الأحمال ، وذلك بتطبيق قوة صغيرة نسبياً والحصول على قوة ضغط كبيرة.

الشكل ( ٢٤.٣ ) يبين مبدأ عمل المكبس الهيدروليكي . وهو يتألف بالأساس من مكبس $K_1$ صغير المقطع قطره $d_1$ ، ويغلق باحكام الاسطوانة $Z_1$ ، ومن مكبس $K_2$ كبير المقطع قطره $d_2$ ويغلق باحكام الاسطوانة $Z_2$ . عندما نؤثر بقوة F على الزراع H المتصل مع $K_1$ في النقطة $O_1$ والمتمفصل في O بحيث يرتفع $K_1$ للأعلى ، ينفتح صمام المص $V_1$ ويتسرب السائل من الخزان B الى الاسطوانة $Z_1$ ، ويغلق في نفس الوقت صمام الدفع $V_2$ . وعندما نضغط $K_1$ للأسفل يغلق $V_1$ وينفتح $V_2$ ، ويتسرب السائل من $Z_1$ الى $Z_2$ ويرتفع $K_2$ للأعلى وهكذا . وحيث أن الضغوط المتولدة في $Z_1$ ، $Z_2$ عالية فانه حسب قانون **باسكال** يكون الضغط فيها ذا قيمة ثابتة p .

نفرض أن القوة المؤثرة على الذراع H هي F ، وأن المكبس $K_2$ عليه

أن يرفع حملاً G وزنه $F_G$ . فاذا طبقنا قانون العزم حول 0 تنتج القوة المؤثرة على $K_1$ في النقطة $0_1$ ، الشكل (٢٤.٣) :

$$F_1 = F\,l/a \quad ,$$

وينتج الضغط المؤثرة في $Z_1$ :

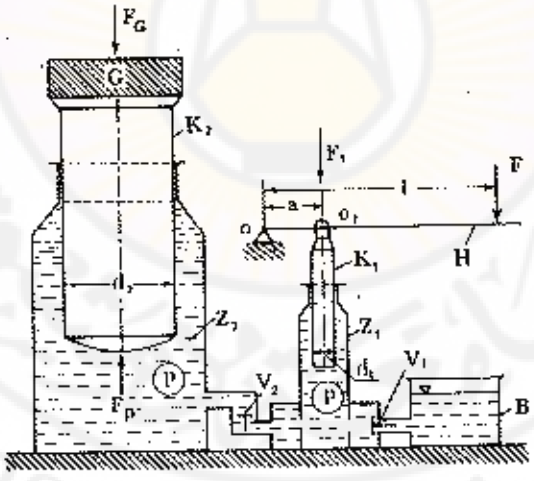
$$p = \frac{F_1}{A_1} = \frac{F\,l}{a\,\pi\,d_1^2/4} \quad ,$$

وتكون قوة الضغط المؤثرة على $K_2$ اللازمة لرفع الثقل G :

$$F_p = p\,A_2 = \frac{F\,l}{a}\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2 \geqq F_G \quad . \qquad (3.48)$$

فاذا أخذنا نسبة الأقطار $d_1/d_2 = 1/4$ ، ونسبة الأطوال $a/l = 1/4$ ينتج في الحالة الحدية عندما $F_p = F_G$ أن $F/F_G = 1/64$ ، وبالتالي فانه يلزم لرفع ثقل وزنه 64 kp التأثير على H بقوة تساوي 1 kp فقط .

عندما نهمل مقاومة الاحتكاك لحركة المكبسين $K_{1,2}$ وكذلك انضغاطية




الشكل ٢٤.٢ : توضيح نموذجي لمبدأ عمل المكبس الهيدروليكي

السائل ، وبافتراض أنـــه لا يحدث أي تسرب للسائل خارج الأسطوانتين

وتوصيلاتهما فيكون العمل الذي يقوم به $K_1$ مساوياً تماماً للعمل الذي يقوم به $K_2$ ؛ $W = F_C h_2 = F_1 h_1$ ، حيث $h_{tw}$ شوط المكبس $K_{tw}$ . ويبلغ المردود في هـــذه الحالة الواحد . أما في الواقع فان العمل المبذول أكبر من العمل المنتج ، وبالتالي يكون المردود دائماً أصغر من الواحد ، لأن مقاومـــة الاحتكاك موجودة طبعاً ، وكذلك لا يمكن منع تسرب كمية من السائل ، مهما كانت صغيرة ، إلى الخارج .

## ٢.٢.٣ صمام التحكم الهيدروليكي

يستفاد من امكانية السوائل على تخزين قدرة الضغط الصرفة ونقلها وتوجيهها بواسطة عمود سائل ، وبطريقة بسيطة نسبياً ، في **جمل نقل الحركة أو التعاشيق السائلية** Fluid gear ، التي تكون إما **هيدروليكية** أو **بنيوماتيكية** ، حسب مايكون السائل المستعمل عادة زيتاً هيدروليكياً Hydraulic oil أو هواء . وتتألف **الدارة الهيدروليكية** لكل تعشيقة من عناصر أساسية هي : مولد التيار السائلي (المضخة) ، مستهلك التيار (اسطوانة أو محرك هيدروليكي) الذي يحول قدرة الضغط إلى قدرة ميكانيكية ، بالاضافة الى أنواع مختلفة من الصمامات وظيفتها اما تحديد الضغط ( صمام ضغط Pressure valve ) أو تحديد اتجاه الجريان ( صمام عدم رجوع Stop valve ) ، أو تحديد أو خفض غزارة التيار السائلي ( صمام الغزارة Flow valve ) أو لتفريع أو جمع التيار (صمام تفريع ) ، بالاضافة لمجمع أو خزان السائل ومجموعة من الخراطيم والأنابيب .

وقد ترسخ في الآونة الأخيرة الاتجاه للتوحيد القياسي Standardiation للعناصر الأساسية للدارة الهيدروليكية ، اسوة بعناصر الدارة الكهربائية ، بما يسمح بتصنيع هذه العناصر بطريقة اقتصادية ، ومن ثم جمعها وتركيبها في مجموعات هيدروليكية مختلفة لنقل الحركة بما يخدم متطلبات **المكننة** Mechanisation

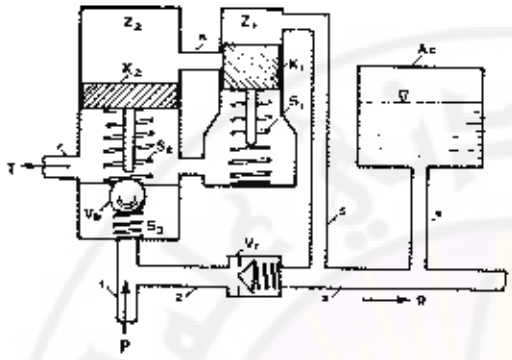
**والأتمتة والتحكم عن بعد** Remote-control [6] [30] [34] [76][77] [78] .

وتبرز أهمية التعاشيق الهيدروليكية بالنسبة لبناء الآلات والمنشآت المختلفة من خلال الميزات التالية : امكانية توليد حركات مستقيمة بطريقة مباشرة وبسيطة بواسطة الاسطوانات الهيدروليكية وحتى ضغوط عالية بحدود 320 at ؛ إمكانية التوجيه والتحكم في مجال واسع بالقوى والسرعات بطريقة بسيطة وغير مدرجة Stepless ؛ بساطة تغيير طول الشوط للحركات الترددية ؛ حصر استطاعة كبيرة في كتلة صغيرة نسبياً ؛ النقل البسيط للقدرة من منبعها الى مكان الحركة بواسطة أنابيب وخراطيم ؛ بساطة تفريع وجمع التيار السائلي المدارة بواسطة أجهزة توجيه وتحكم آلية ـ يدوية أو كهربائية أو كهروهيدروليكية من أجل وصل هذه الأجهزة ؛ عمر طويل نتيجة التزييت المثالي للأجزاء المتحركة .

هذه الميزات جعلت حمل نقل الحركة والتحكم الهيدروليكية تحل محل الحمل الميكانيكية المعروفة، خاصة لامكانية ربطها بعناصر كهربائية والكترونية . وهي تدخل كأجزاء أساسية في آلات النقل والرفع والتشغيل ، ووسائط النقل كالطائرات والسيارات والسفن ، وتلعب دوراً بارزاً في حقل هام من تطبيقات ميكانيك السوائل معروف باسم **التحكم والتوجيه الآلي الهيدروليكي والبنيوماتيكي** Hydraulic and pneumatic control (راجع مثلاً [6]، [30]).

وكمثال سنشرح مبدأ عمل صمام عدم رجوع أوتوماتيكي Automatic relief valve ، الشكل (٢٥.٣) . فعندما تكون كمية السائل التي تضخها المضخة P عبر أنبوب الدفع 1 إلى المستهلك R عبر الأنبوب 2 فصمام عدم الرجوع $V_r$ فائضة عن الاستهلاك فان السائل يتجمع في المجمع $A_c$ حتى يصبح ضغط السائل يساوي قيمة أعظمية $p_{max}$ ، الذي ينتقل عبر الأنبوب 5 إلى الأسطوانة $Z_1$ ، حيث يتحرك المكبس $K_1$ إلى الأسفل ضاغطاً النابض $S_1$ . وهكذا يعبر السائل من $Z_1$ إلى $Z_2$ عبر الأنبوب 6 ، مما يؤدي لتحرك المكبس $K_2$ الأسفل أيضاً ضاغطاً النابض $S_2$ حتى يرتطم ذراعه بالصمام الكروي

$V_h$ ، الذي يتحرك للأسفل ضاغطاً النابض $S_3$ وفاتحاً بذلك الطريق للمضخة لتضخ السائل إلى الخزان 1 عبر الانبوب 7 . وتستمر عملية الضخ حتى يصبح



الشكل ٢٥.٣ : مبدأ عمل صمام عدم رجوع أوتوماتيكي حسب [21]

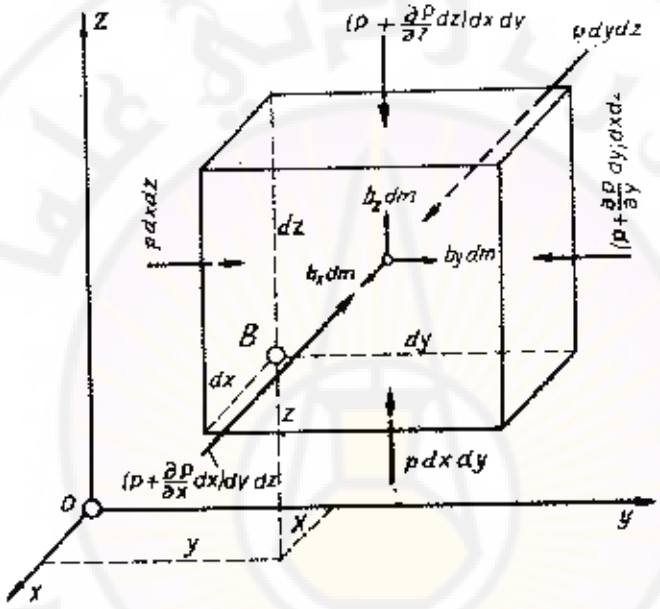
ضغط السائل ذا قيمة أصغرية $p_{min}$ ، يتمكن عنده النابض $S_1$ من إعادة المكبس $K_1$ إلى مكانه ، وبالتالي يغلق الانبوب ، ويتسرب السائل الموجود في $Z_2$ إلى الخزان ويعود المكبس $K_2$ إلى مكانه ويغلق الصمام الكروي ، وتبدأ المضخة بضخ السائل للاستهلاك . فاذا كانت قيم $p_{min}$ ، $p_{max}$ معلومة ، وكذلك مقاييس $K_1$ ، $K_2$ فبالإمكان تحديد قساوة النوابض $S_1$ حتى $S_3$ .

والجدير بالذكر أن محطات الضخ الهيدروليكية تجهز غالباً بصمامات تحكم لتحديد الغزارة أو الضغط تعمل أوتوماتيكياً ، حيث توصل بدارة تحكم هيدروليكية أو بنيوماتكية . فاذا سجلت مقاييس الغزارة أو الضغط ، التي تقيس باستمرار ، قيماً مختلفة عن القيم المطلوبة فان صمامات التحكم تتلقى إشارة لتقوم باعادة تثبيت القيم المطلوبة .

## ٣.٣ توزع الضغط في سائل ساكن تحت تأثير حقل قوى عام - المعادلة الهيدروستاتيكية العامة

نقتطع من داخل سائل ساكن ثابت الحجم ($\rho = const$) جزيئاً حجمياً متناهي الصغر بشكل متوازي مستطيلات أطوال أضلاعه $dx$ ، $dy$ ، $dz$ ،

ولتكن النقطة B إحدى زواياه محددة بالإحداثيات x ، y ، z ، الشكل (٢٦٠٣) . وبما أن هذا الجزيء في حالة توازن فيجب أن تكون محصلة القوى المؤثرة عليه معدومة ، وبالتالي يجب أن تحقق قوى الضغط $dF_p$ التي يمكن اعتبارها موزعة بانتظام على السطوح الجانبية الصغيرة جداً لمتوازي المستطيلات ،




الشكل ٢٦٠٣ : تطبيق شروط التوازن على متوازي مستطيلات متناهي الصغر مقتطع من سائل يؤثر عليه حقل قوى عام ـ استخراج المعادلة الهيدروستاتيكية العامة

مع القوى الحجمية $dF_v$ المؤثرة على كامل كتلة الجزيء الحجمي $dm = \rho\,dx\,dy\,dz$ ، شروط التوازن الستاتيكية المعروفة .

إن الضغط المؤثر في النقطة B (x, y, z) حسب ( 2.23 ) له قيمة ثابتة في كافة الاتجاهات . ولكن الضغط كتابع مكاني صرف $p = f(x, y, z)$ يغير قيمته من نقطة الى أخرى . وينتج هذا التغير بسهولة إذا نشرنا التابع بشكل سلسلة

تايلور Taylor فيكون حسب [42] الضغط في النقطة $B'(x + dx, y, z)$ مثلاً :

$$p(x + dx, y, z) = p(x,y,z) + \frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{1!} + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\frac{(dx)^2}{2!} + \dots$$

$$\approx p(x, y, z) + \frac{\partial p(x, y, z)}{\partial x}\, dx \quad , \qquad (3.49)$$

وذلك بعد إهمال كافة حدود المراتب العليا . وعلى هـذا الاساس يمكن حساب قوى الضغط المؤثرة على وجوه متوازي المستطيلات كقوى إفرادية مساوية لجداء الضغط في العنصر السطحي .

نفرض أن القوة الحجمية المؤثرة على الجزيء الحجمي ناتجة عن حقل قوى عام ( قوة عطالة مثلاً ) ، كأن نتصور أن كتلة الجزيء dm تخضع لتسارع b اتجاهه في الفراغ بدون تحديد . فيكون حسب (2.16) : $dF_v = dm\, b$ . وتنتج بالتالي مركبات القوة الحجمية باتجاه المحاور الديكارتية الثلاثة : $dF_{(x,y,z)} = dm\, b_{(x,y,z)}$ ، حيث تمثل التسارعات $b_x$ ، $b_y$ ، $b_z$ مركبات القوة الحجمية بالنسبة لواحدة الكتلة باتجاه $x, y, z$ . ويجدر الانتباه إلى أنه لا يجوز هنا إهمال القوى الكتلية بالمقارنة مع قوى الضغط ، كما فعلنا في الفقرة (٢.٣.٢) ، لأن القوى الكتلية هنا هي من مرتبة القيمة التقريبية لتغير قوى الضغط عنـــد الانتقال من أحد وجوه متوازي المستطيلات إلى الوجه المقابل .

نطبق الآن شروط توازن القوى باتجاه المحور x فينتج (الشكل ٢٦.٣):

$$\sum dF_x = p.dy\, dz - (p + \frac{\partial p}{\partial x}\, dx)\, .\, dy\, dz + p\, dx\, dy\, dz\, .\, b_x = 0.$$

وبالاختصار على $dy\, dz$ يكون :

$$\rho\, b_x\, dx = \frac{\partial p}{\partial x}\, dx \quad . \qquad (3.50)$$

وبطريقة مشابهة تماماً نحصل بالنسبة للمحورين x , y على العلاقتين :

$$\rho\, b_y\, dy = \frac{\partial p}{\partial y}\, dy \quad ; \quad \rho\, b_x\, dz = \frac{\partial p}{\partial z}\, dz \,. \qquad (3.51)$$

وبجمع هذه المعادلات الثلاثة يصبح :

$$\rho\,(b_x\, dx + b_y\, dy + b_z\, dz) = \frac{\partial p}{\partial x}\, dx + \frac{\partial p}{\partial y}\, dy + \frac{\partial p}{\partial z}\, dz = dp \quad (3.52)$$

حيث يمثل dp التفاضل التام للضغط .

نختصر الآن من طرفي المعادلات الثلاثة (3.50) (3.51) dz, dy, dx فينتج :

$$\rho\, b_x = \partial p/\partial x \quad ; \quad \rho\, b_y = \partial p/\partial y \quad ; \quad \rho\, b_z = \partial p/\partial z \quad . \qquad (3.53)$$

فاذا اشتقنا المعادلة الأولى مثلاً جزئياً بالنسبة لـ y والثانية بالنسبة لـ x ولاحظنا أن $\partial^2 p/\partial x\,\partial y = \partial^2 p/\partial y\,\partial x$ فنجد بسهولة أن المشتقات الجزئية لمركبات القوة الحجمية تحقق العلاقات التالية :

$$\partial b_x / \partial y = \partial b_y / \partial x \quad ; \quad \partial b_x /\partial z = \partial b_z / \partial x \quad ; \quad \partial b_y / \partial z = \partial b_z /\partial y \quad . \quad (3.54)$$

فاذا فرضنا وجود تابع مكاني $\Phi_s = f(x, y, z)$ يعبر عن شدة حقل القوى العام ويحقق العلاقات التالية :

$$b_x = -\frac{\partial \Phi_s}{\partial x} \quad ; \quad b_y = -\frac{\partial \Phi_s}{\partial y} \quad ; \quad b_z = -\frac{\partial \Phi_s}{\partial z} \quad . \qquad (3.55)$$

فاننا نجد بسهولة بسبب كون

$$\frac{\partial b_x}{\partial y} = -\frac{\partial^2 \Phi_s}{\partial x\,\partial y} = -\frac{\partial^2 \Phi_s}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial b_y}{\partial x}$$

ان التابع $\Phi_s$ يحقق العلاقات (3.54) ، التي نتجت من شروط توازن الجزيء الحجمي ، والتي تمثل كما هو معروف في الرياضيات ( مثلاً [42] ) الشروط اللازمة والكافية لكي يكون $\Phi_s$ يمثل تابع كمون Potential للحقل الشعاعي $dF_1$ . وعليه يمكن صياغة النتيجة العامة التالية :

يتحقق توازن سائل مثالي في حقل قوى عام فقط في الحالة التي يكون فيها لهذا الحقل كمون ، وتكون عندها مركبة القوة الحجمية بالنسبة لواحدة الكتلة في اتجاه ما تساوي الى القيمة السالبة للمشتق الجزئي لتابع الكمون $\Phi_s$ في ذلك الاتجاه .

هذه الجملة تعرف أيضاً باسم **شروط أويلر للتوازن** [9] . ويطلق على أمثال هذه القوى الحجمية **القوى المخزنة للقدرة** ، وكلمة « كمون » تشير الى القدرة الكامنة التي يخزنها حقل القوى الخارجية وبالتالي الى جاهزيته على احداث تأثير . وتدل اشارة ناقص في (3.55) على أن القدرة الكامنة تصغر في اتجاه القوة الحجمية .

باستخدام (3.55) تأخذ العلاقة (3.52) الشكل التالي :

$$dp = -\rho\left(\frac{\partial \Phi_s}{\partial x}\,dx + \frac{\partial \Phi_s}{\partial y}\,dy + \frac{\partial \Phi_s}{\partial z}\,dz\right) = -\rho\, d\Phi_s \quad (3.56)$$

حيث $d\Phi_s$ يمثل التفاضل التام لتابع الكمون ، ونحصل بمكاملة الطرفين على :

$$p = -\rho\,\Phi_s + \text{const} \quad , \qquad (3.57)$$

وهذه هي **المعادلة الهيدروستاتيكية العامة** ، التي تسمح بحساب توزع الضغط في السائل ، مع الانتباه أنه يجب أن تكون للتابع $p(x, y, z)$ والمتحول $\Phi_s(x, y, z)$ قيم متوافقة في كل نقطة . أما ثابت التكامل فيتحدد من الشروط الحدية . فاذا فرضنا أن $p_0$ ، $\Phi_{s_0}$ تمثلان قيمتين معلومتين في نقطة ما $B_0$ مثلاً فيكون حسب (3.57) :

$$p_0 = -\rho\,\Phi_{s_0} + \text{const} \Rightarrow p = p_0 - \rho\,(\Phi_s - \Phi_{s_0}) . \quad (3.58)$$

من هذه العلاقة تنتج بسهولة المعادلة الهيدروستاتيكية الأساسية . فاذا انتبهنا أن

تابع كمون حقل الجاذبية الأرضية معطى بالعلاقة :

$$\Phi_{sG} = g z \Rightarrow b_x = b_y = 0 \, , \, b_z = -g \, , \qquad (3.59)$$

واذا اعتبرنا $p_0 \equiv p_a$ ، $\Phi_{s_0} = g H$ ينتج من (3.58) .

$$p = p_a + \rho g ( H - z ) \qquad (3.60)$$

بالتطابق مع العلاقة (3.3) . وعلى هذا الأساس فانه يمكن فيما يلي تعميم النتائج التي توصلنا اليها في الفقرة (١.١.٣) .

إن **سطوح الضغط المتساوي** ، التي تمثلها في حقل الجاذبية الأرضية **مستويات أفقية** ، تأخذ في حقل القوى العام شكل **سطوح فراغية** مغلقة عادة تعطى بالعلاقة العامة :

$$F ( x, y, z ) = \text{const} \, .$$

وحيث أنه من أجل $p = \text{const}$ ينتج من (3.58) أن $\Phi_s = \text{const}$ ، فان سطوح الضغط الثابت هي في نفس الوقت **سطوح الكمون الثابت** ، وتصل بالتالي بين كافة النقاط التي تكون فيها القدرة الكامنة لحقل القوى ذات قيمة ثابتة . وواضح أنه في نقطة واحدة لايمكن أن يمر سوى سطح واحد منها فقط.

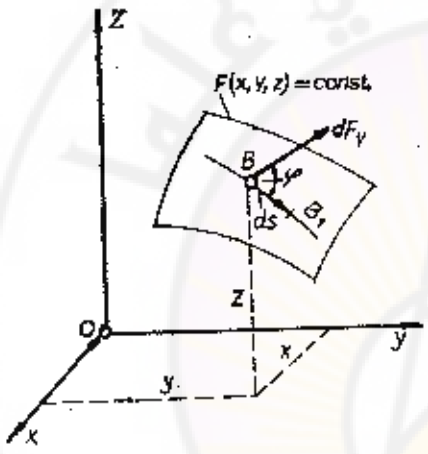
نعتبر في مجال الاحداثيات $x, y, z$ سطحاً للضغط الثابت $F(x,y,z) = \text{const}$ يمر من النقطة B ، الشكل (٢٧.٣) . نعتبر في هذا السطح عنصراً خطياً $\overrightarrow{BB_1} = ds$ مركباته $dx, dy, dz$ ، ونفرض أن $b_x , b_y , b_z$ مركبات القوة الحجمية $dF_v$ بالنسبة لواحدة الكتلة المؤثرة في B فيكون الجداء الشعاعي الداخلي :

$$dF_v \, . \, ds = b_x \, dx + b_y \, dy + b_z \, dz \quad . \qquad (3.61)$$

وحيث أن الضغط على السطح F لا يتغير فيكون $dp = 0$ ، وبالتالي ينتج من (3.52) و (3.61) :

$$b_x\,dx + b_y\,dy + b_z\,dz = 0 = \mathbf{F}_v \cdot d\mathbf{s} \quad , \qquad (3.62)$$

وهذا يعني أن شعاع القوة الحجمية متعامد مع شعاع العنصر الخطي والزاوية بينهما $\varphi = \frac{\pi}{2}$ . فإذا اعتمدنا الكتابة الشعاعية ، وجمعنا أطراف المعادلات (3.53) جمعاً شعاعياً ينتج باعتبار $\mathbf{k}, \mathbf{j}, \mathbf{i}$ أشعـــة الواحدة باتجاه المحاور $z, y, x$ :




الشكل ٢٧.٣ : القوة الحجمية $F_v$ المؤثرة في النقطة B تتعامد مع سطح الضغط الثابت المار منها

$$\rho\,(\mathbf{i}\,b_x + \mathbf{j}\,b_y + \mathbf{k}\,b_z) = \mathbf{i}\,\frac{\partial p}{\partial x} + \mathbf{j}\,\frac{\partial p}{\partial y} + \mathbf{k}\,\frac{\partial p}{\partial z} \Rightarrow$$

$$\rho\,\mathbf{F}_v = \mathbf{grad}\ p \quad , \qquad (3.63)$$

حيث $\mathbf{grad}\ p$ يمثل شعاع تدرج الضغط ، الذي تنتج قيمته المطلقة :

$$\left|\mathbf{grad}\ p\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)^2} \quad , \quad (3.64)$$

ويكون متعامداً مع سطوح الكمون الثابت للحقل السلمي التـابع له ، ويشير باتجاه الناظم نحو الجهة التي يتزايد فيها تابع الحقل الذي يمثل هنا حقل الضغط [42] . فإذا اعتبرنا $\rho F_v = F'_v$ شعـاع القوة الحجمية بالنسبـة

لواحدة الحجم ، أو **القوة الحجمية النوعية** ، فإن العلاقة (3.63) تصبح مع الانتباه للعلاقة (3.55) :

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{grad}\, p = -\rho\, \mathbf{grad}\, \Phi_e \quad . \qquad (3.65)$$

ونصل بالتالي للنتيجة العامة التالية :

> بالرغم من أن القوة الكتلية كتابع مكاني $\mathbf{F}_1 = f(x,y,z)$ يمكن أن تتغير من نقطة لأخرى فإن الضغط الستاتيكي لايتغير إلا في اتجاه تأثير هذه القوة ، أي في اتجاه تأثير خطوط القوة Force lines ، ويكون بالتالي اتجاه شعاع تدرج الضغط مطابقاً لاتجاه شعاع القوة الكتلية وقيمته المطلقة تساوي قيمتها بالنسبة لواحدة الحجم ، وتخترق خطوط القوة سطوح الكمون الثابت ، المكافئة لسطوح الضغط الثابت ، في كل نقطة بشكل عمودي .

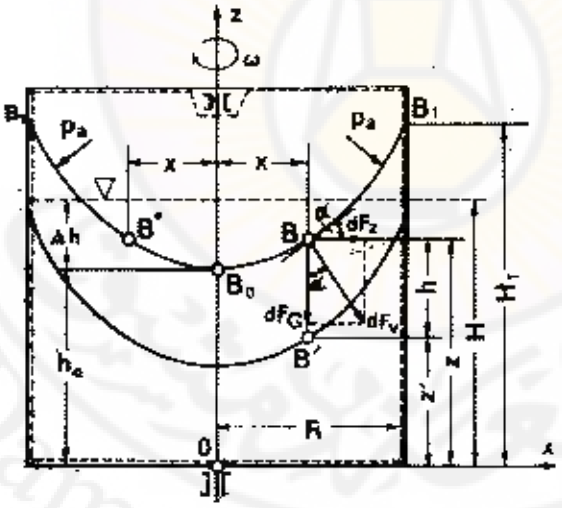
كتطبيقات على المعادلة الهيدروستاتيكية العامة سنختار مثالين هامين عن حالة ما يسمى **التوازن أو السكون النسبي** Relative equilibrium . أولها توازن سائل يدور بسرعة زاوية منتظمة حول محور شاقولي أو أفقي ( التوازن في حقل القوة النابذة ) وثانيها توازن سائل خاضع لتأثير تسارع خطي منتظم . وفي كلتي الحالتين تكون حدود الجملة الفيزيائية ، الحقيقية عادة ، في حالة حركة ولكن السائل يكون في حالة سكون بالنسبة لهذه الحدود ، وبالتالي لا تظهر أية قوى مماسية نتيجة انعدام تدرج السرعة بين طبقات السائل ، الذي يتحرك ككل وكأنه جسم صلب .

## ١.٣.٣ توازن سائل ثقيل في حقل القوة النابذة

في اناء اسطواني مفتوح في الاعلى يوجد سائل متجانس ($\rho = \text{const}$) حتى ارتفاع H ، الشكل ( ٢٨.٣ ) . نجعل السائل يدور حول المحور الشاقولي z ، وذلك اما بتدوير ريش شاقولية داخل الاناء الثابت (منقطة في الشكل !) ،

اذا فرضنا السائل مثالياً ، أو بتدوير الاناء بأكمله ، حيث تكفي قوى الاحتكاك بين طبقات السائل الحقيقي ، وبينه وبين الجدران الصلبة لكي تنتقل حركة الاناء الدورانية للسائل . وفي كلتي الحالتين ، وعندما تصبح الحركة الدورانية منتظمة وسرعتها الزاوية $\omega$ ثابتة، فان السائل يدور وكأنه جسم صلب ويكون بالنسبة لحدوده في حالة سكون نسبي . وبالتالي تنطبق على كل جزيء منه شروط التوازن الستاتيكية ، اذا اعتبرنا حسب **مبدأ دالمبير** أن الجزيء يخضع لتأثير قوة الثقالة **والقوة النابذة** كقوة عطالة اضافية .

إن السطح السائب للسائل ، الذي يمثل سطحاً للضغط الثابت $p_a = const$ ، يكون قبل الدوران أفقياً ، ويأخذ بعد التدوير شكلاً **مقعراً** ، بحيث أن السائل ينخفض في منتصف الإناء ويرتفع على جوانبه . فيهمنا إذن أن نحدد شكل سطوح الضغط المتساوي ، ونوزع الضغط بالاتجاه الشاقولي ( المحور z ).




الشكل ٣-٢٨ : توازن سائل ثقيل يدور بشكل منتظم حول محور شاقولي في اناء اسطواني مفتوح في الاعلى

لنعتبر نقطة مادية B (x, z) من السطح السائب للسائل . إن القوة الحجمية $dF_r$ بالنسبة لواحدة الكتلة المؤثرة في هذه النقطة مؤلفة من مركبتين : قوة الثقالة $dF_G$ واتجاهها شاقولي للأسفل ، والقوة النابذة $dF_Z$ واتجاهها الى خارج السائل ، ويكون إذن

$$\mathbf{dF_r} = \mathbf{dF_G} + \mathbf{dF_Z} = \vec{g} + \vec{\omega^2 x} \ . \qquad (3.66)$$

ويكون قابع كمون حقل القوى مؤلفاً أيضاً من مركبتين : كمون حقل الثقالة وكمون حقل القوة النابذة . وينتج مع مراعاة (3.55) والانتباه أن كل كمون يتعلق بمتحول واحد فقط :

$$d\Phi_r = d\Phi_{rG} + d\Phi_{rZ} = g\,dz - \omega^2 x\,dx \ . \qquad (3.67)$$

لأن القوة الكتلية $dF_r$ ، التي تشكل مع الشاقول الزاوية $\alpha$ ، تتعامد مع السطح السائب للسائل ، كسطح للكمون الثابت ، في النقطة B ، وبالتالي فان المماس على هذا السطح في B يصنع مع الأفق زاوية $\alpha$ أيضاً . وينطبق هذا على كل نقطة $B'$ تبعد مقدار x عن المحور z . ومنه نستنتج أن السطح الحر للسائل (وكافة سطوح الضغط الثابت الاخرى) يمثل سطحاً دورانياً محوره z . ويكفي لتحديد شكله دراسة **المقطع الزوالي** ( الانتصافي ) Meridional الواقع في المستوي z x .

من المعادلة الهيدروستاتيكية العامة التفاضلية ( 3.56 ) وبادخال العلاقة (3.67) ينتج بالنسبة لتفاضل الضغط التام :

$$dp = -\rho\, d\Phi_r = -\rho\,(g\,dz - \omega^2 x\,dx) \ . \qquad (3.68)$$

ومنه نجد بالنسبة لسطح السائل الحر :

$$p_0 = \text{const} \Rightarrow dp = 0 \Rightarrow g\,dz - \omega^2 x\,dx = 0 \ . \qquad (3.69)$$

بمكاملة هذه العلاقة نجد معادلة المقطع الزوالي للسطح الحر :

$$g\,z - \frac{\omega^2 x^2}{2} = \text{const} \quad \Rightarrow \quad z = \frac{\omega^2 x^2}{2g} + \text{const} \ . \qquad (3.70)$$

لتحديد ثابت التكامل نفرض أن ارتفاع أخفض نقطة من السطح الحر للسائل $B_0$ عن قعر الاناء $z = h_0$ ، فيكون بسبب $x = 0$ :

$$h_0 = \text{const} \ ,$$

وبالتالي تصبح (3.70) :

$$z = \frac{\omega^2 x^2}{2g} + h_0 \ , \qquad (3.71)$$

وهي معادلة قطع مكافيء محور تناظره الشاقولي $z$ ، وذروته تقع في $B_0$ . وعليه تكون :

| سطوح الضغط الثابت لسائل ثقيل يدور بسرعة زاوية منتظمة حول محور شاقولي تمثلها مجسمات قطوع مكافئة دورانية Paraboloid . |
|---|

في العلاقة ( 3.71 ) يبقى الارتفاع $h_0$ مجهولاً ، ويتحدد من شرط ثبات حجم السائل قبل وبعد الدوران ، وبالتالي يكون باستخدام رموز الشكل ( ٢٨.٣ ) وبافتراض $R$ نصف قطر الاناء ، $B_1(R, H_1)$ أعلى نقطة من السطح السائب للسائل :

$$\pi R^2 H = \pi R^2 H_1 - \frac{1}{2}\pi R^2 (H_1 - h_0) \Rightarrow H_1 = 2H - h_0 \ . \ (3.72)$$

من جهة اخرى نحصل على $H_1$ بتطبيق العلاقة (3.71) على النقطة $B_1$ :

$$H_1 = \frac{\omega^2 R^2}{2g} + h_0, \quad (3.73)$$

ومنه نجد :

$$h_0 = H - \frac{\omega^2 R^2}{4g} \ . \ (3.74)$$

بذلك تأخذ ( 3.71 ) الصيغة التالية :

$$z = \frac{\omega^2}{2g}\left(x^2 - \frac{R^2}{2}\right) + H \quad (3.71a)$$

ويكون السطح السائب للسائل قد انخفض نتيجة الدوران بمقدار :

$$\Delta h = H - h_0 = \frac{\omega^2 R^2}{4g} \quad . \qquad (3.75)$$

من هذه العلاقة يمكن حساب السرعة الزاوية اللازمة لاحداث انخفاض معين $\Delta h$ لسطح السائل السائب حيث ينتج :

$$\omega = \frac{2}{R}\sqrt{g\Delta h} \quad . \qquad (3.76)$$

يستفاد من هذه النتيجة عملياً في قياس السرعة الزاوية للمحاور السريعة الدوران ، حيث يوصل المحور بواسطة تعشيقة أو جملة لنقل الحركة مع إناء اسطواني فيه سائل ، ويقاس انخفاض سوية السائل $\Delta h$ فتحدد $\omega$ .

إن توزع الضغط في السائل ينتج من تكامل العلاقة ( 3.68 ) حيث نجد بسهولة :

$$p = \rho\left(\frac{\omega^2 x^2}{2} - g z\right) + const \quad . \qquad (3.77)$$

ويكون الضغط في النقطة $B(x,z)$ على السطح الحر للسائل :

$$p_B = p_0 = \rho\left(\frac{\omega^2 x^2}{2} - g z\right) + const \quad .$$

بينما يكون الضغط في النقطة $B'(x,z')$ الواقعة على نفس الشاقول المار من $B(x,z)$ وعلى عمق $h$ منها :

$$p_{B'} = \rho\left(\frac{\omega^2 x^2}{2} - g z'\right) + const \quad .$$

وبادخال قيمة الثابت const من العلاقة السابقة نجد قيمة الضغط الزائد في $B'$ :

$$p_{B'} = p_0 + \rho g (z - z') = p_a + \gamma h \Rightarrow p_{B'} - p_a = \gamma h \; . \quad (3.78)$$

هذه النتيجة تنطبق طبعاً على كافة النقاط الواقعة على نفس العمق الشاقولي من السطح الحر للسائل .

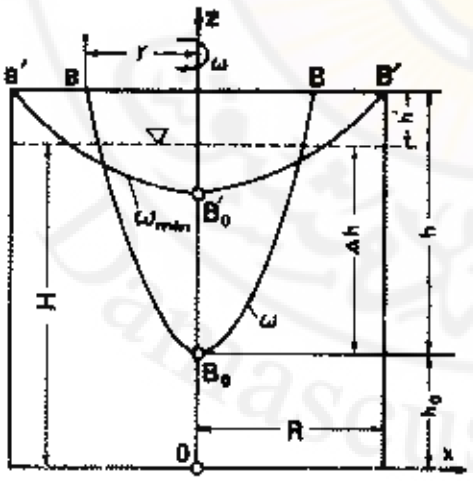
وحيث أنه في حالة السائل الساكن ( $\omega = 0$ ) لا يتغير الضغط في الاتجاه الأفقي $p(x) = \text{const}$ ، فإن العلاقة (3.77) تبين أنه نتيجة للدوران ($\omega \neq 0$) ينشأ تزايد في الضغط :

$$p(x) = \frac{\rho}{2}\omega^2 x^2 \equiv \frac{\rho}{2}\omega^2 r^2 \quad . \qquad (3.79)$$

وعليه نصل الى النتيجة التالية :

في سائل ثقيل يدور بسرعة زاوية منتظمة حول محور شاقولي فان توزع الضغط في الاتجاه **الشاقولي** يخضع للمعادلة الهيدروستاتيكية الأساسية ، أي يتناسب خطياً مع العمق ، وينشأ عن الدوران تزايد في الضغط في الاتجاه **الأفقي** يتناسب ومربع نصف القطر عن محور الدوران .

إن النتائج السابقة تنطبق من حيث المبدأ على كل سائل يدور في وعاء شكله على غير تعيين ، وكذلك على الأوعية المستطرقة ، شريطة أن تدور بسرعة زاوية منتظمة حول محور شاقولي . كما تنطبق أيضاً على الحالة التي يكون فيها الاناء مغلقاً ، الشكل ( ٢٩.٣ ) ، حيث يمكن عندها تدوير الاناء بسرعات




الشكل ٣ . ٢٩ : توازن سائل ثقيل يدور بشكل منتظم حول محور شاقولي في اناء اسطواني مغلق في الاعلى

زاوية أكبر دون أن يطفح السائل خارج الاناء ، كما هو الأمر في حالة الاناء المفتوح . وبالتالي يمكن استخدام مثل هذه الأوعية لقياس السرعات الزاوية الكبيرة جداً للمحاور .

فاذا استخدمنا رموز الشكل ( ٢٩.٣ ) فينتج من العلاقة ( 3.71 ) من أجل النقطة B :

$$z = ( h + h_0 ) = \frac{\omega^2 r^2}{2 g} + h_0 \Rightarrow \omega^2 r^2 = 2 g h ,$$

كما ينتج من تساوي حجم السائل قبل وبعد الدوران :

$$= R^2 h' - \frac{1}{2} \pi r^2 h \Rightarrow h = 2 \frac{R^2}{r^2} h' \Rightarrow r^2 = 2 R^2 \frac{h'}{h} ,$$

حيث $h'$ انخفاض سوية السائل السالب عن غطاء الإناءقبل الدوران . وبتعويض $r^2$ أو $h$ في العلاقة السابقة ينتج :

$$\omega = \frac{h}{R} \sqrt{\frac{g}{h'}} = 2 \frac{R}{r^2} \sqrt{g h'} \qquad ( 3.80 )$$

ونلاحظ بسهولة أن $\omega$ يمكن أن تبلغ قيماً كبيرة جداً ، ويبقى قياسها ممكناً حتى تنطبق $B_0$ على قعر الاناء . أما السرعة الزاوية الأصغرية التي يمكن تحديدها من ( 3.80 ) فتنتج عندما تصبح B في B' ويصبح $r = R$ :

$$\omega_{min} = \frac{2}{R} \sqrt{g h'} . \qquad ( 3.81 )$$

أما لحساب السرعات الزاوية الأقل فنطبق العلاقة ( 3.76 ) .

في تطبيقات عملية عديدة ، مثل عمليات فصل الشوائب من السوائل **بالآلات الطاردة المركزية** Centrifuge ( راجع [31] [79] ) ، تصادف حالة هامة يكون فيها الاناء الذي يحتوي السائل يدور حول محور **أفقي** بسرعة زاوية

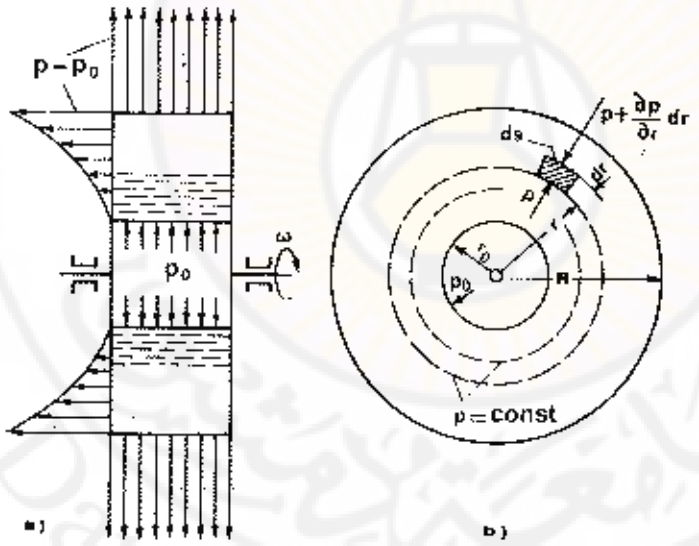
منتظمة ، الشكل ( ٣ ، ٣٠ — a ) . وغالباً ماتكون القوة النابذة أكبر بكثير من قوة الثقالة ، بحيث يمكن إهمال الأخيرة .

إن توزع الضغط بالاتجـــاه القطري ينتج من تطبيق شروط التوازن على جزيء حجمي يبعد r عن محور الدوران ومقاييسه dr , ds , 1 ، الشكل ( ٣ ، ٣٠ — b ) . كما ينتج بسهولة من العلاقة ( 3.77 ) بوضع $x \equiv r$ , $g_z \equiv 0$ فنجد :

$$p(r) = \rho \frac{\omega^2 r^2}{2} + \text{const} \quad . \qquad (3.82)$$

ويتحدد ثابت التكامل من الشروط الحدية : $p = p_0$ عند $r = r_0$ . ومنه نجد بسهولة :

$$p(r) = p_0 + \frac{\rho \omega^2}{2} (r^2 - r_0^2) \quad . \qquad (3.83)$$




الشكل ٣ ، ٣٠ : توزع الضغط في سائل مهمل الثقالة يدور حول محور أفقي . الضغط يتزايد في الاتجاه القطري مع مربع نصف القطر ( a ) ؛ سطوح الضغط الثابت تمثلها اسطوانات مركزية دائرية ( b ) .

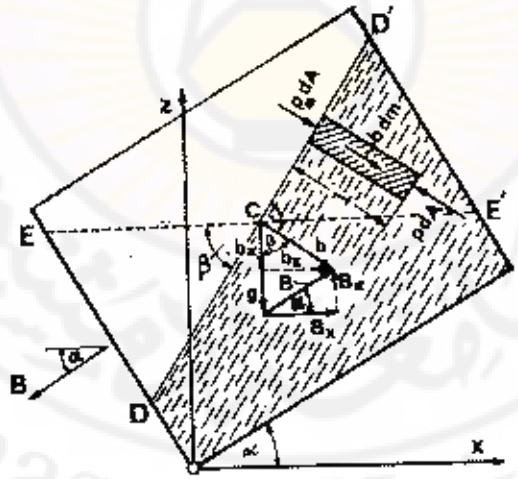
ويتضح من هذه العلاقة أن سطوح الضغط الثابت تمثلها اسطوانات دائرية مركزية، مراكزها واقعة على محور الدوران . كما تسمح هذه العلاقة بحساب **قوة الضغط أو الدفع المحورية** Thrust ، التي تؤثر على جوانب الإناء المتعامدة على محور الدوران . فاذا اعتبرنا عنصراً سطحياً خالياً $dA = 2\pi r\,dr$ ، فتكون قوة الضغط الجزئية هذه $dF_{pr} = p(r)\,dA$ ، وتنتج المحصلة بالتكامل :

$$F_{pr} = \int_{r_0}^{R} p(r)\,dA = 2\pi \int_{r_0}^{R} \left[p_0 + \frac{\rho\omega^2}{2}(r^2 - r_0^2)\right] r\,dr \quad (3.84)$$

هذه القوة تؤثر على الدولاب الدائر Impeller للمضخات النابذة ، ويجب موازنتها إما باستخدام مضاجع محورية ، أو بطريقة تصميمية تسمح بتعادل الضغط قبل وبعد الدولاب الدائر [ 80 ] ؛ ( انظر ت ٣.٣ ) .

## ٢.٣.٣ توازن سائل ثقيل في اناء يؤثر عليه تسارع خطي منتظم

نعتبر إناء فيه سائل يملؤه حتى ارتفاع معين . نجعل الإناء يتحرك على خط مستقيم وبتسارع منتظم B يميل بزاوية $\alpha$ ضد الأفق ( كأن نتصور أن الإناء




الشكل ٢١.٣ : توزع الضغط في سائل ساكن نسبياً يتحرك بشكل مستقيم تحت تأثير تسارع منتظم

يتزلق على مستو مائل ا ) ، فنلاحظ ، كما يوضح الشكل ( ٣١.٣ ) ، أن السطح الحر للسائل ، الذي كان قبل الحركة أفقياً ومنطبقاً على المستوي E – E' ، قد أصبح نتيجة التسارع في وضعية مائلة D' – D .. والمطلوب تحديد شكل سطوح الضغط الثابت وتوزع الضغط في السائل . ويكفي أن يتم ذلك بالنسبة لقطع انتصافي (زوالي) مستو .

نختار محوري احداثيات مرتبطين مع الاناء ، فيكون السائل بالنسبة لهما في حالة سكون نسبي . ويمكن ان نطبق على كل جزيء حجمي شروط التوازن الستاتيكية ، اذا اعتبرناه حسب مبدأ دالمبير خاضعاً لتأثير قوة عطالة $\mathbf{F_B}$ اضافية تسارعها $\mathbf{B}$ بعكس اتجاه تسارع الاناء ، بالاضافة لقوة الثقالة $\mathbf{F_G}$ . وعليه تنتج القوة الحجمية بالنسبة لواحدة الكتلة المؤثرة في النقطة C مثلاً من السطح السائب للسائل :

$$\mathbf{F_V} = \mathbf{F_B} + \mathbf{F_G} \; ; \; \mathbf{F_V} = \mathbf{b} \; ; \; \mathbf{F_B} = \mathbf{B} \; ; \; \mathbf{F_G} = \mathbf{g} \Rightarrow \mathbf{b} = \mathbf{B} + \mathbf{g} \quad (3.85)$$

إن القوة الحجمية $\mathbf{b}$ تتعامد مع سطح الضغط الثابت $p_a = \text{const}$ في النقطة C، وهي تميل على الشاقول بزاوية $\beta$ ، تتحدد من الشكل ( ٣١.٣ ) بسهولة حيث :

$$\tan\beta = \frac{b_x}{b_z} = \frac{B\cos\alpha}{B\sin\alpha - g} = \text{const} \; . \qquad (3.86)$$

وبالتالي فان السطح الحر للسائل يكون ممثلاً بمستو يظهر أثره في المستوي zx بشكل مستقيم D' – D يميل على الأفق بزاوية $\beta$ . وحيث أن قيمة $b_x$ ثابتة في كافة نقاط السائل ، فان كافة سطوح الضغط المتساوي تمثلها مستويات مائلة موازية للسطح الحر للسائل ، تظهر في المستوي zx كمستقيمات موازية لـ D' – D . ويمكن بسهولة استخراج معادلاتها من المعادلة الهيدروستاتيكية العامة ( 3.52 ) مع ملاحظة أن $b_y = 0$ ، $\partial p/\partial y = 0$ فيكون :

$$dp = \rho\,(b_x\,dx + b_z\,dz) = \frac{\partial p}{\partial x}\,dx + \frac{\partial p}{\partial z}\,dz =$$

$$= \rho\,[\,B\cos\alpha\,dx + (B\sin\alpha - g)\,dz\,] \quad . \quad (3.87)$$

وبالتكامل ينتج من أجل $dp = 0$ بعد اصلاح بسيط :

$$z = \frac{B\cos\alpha}{g - B\sin\alpha}\,x + \text{const} = -\tan\beta.x + \text{const} \qquad (3.88)$$

وهي معادلة حزمة من المستقيمات المتوازية المائلة على الأفق بزاوية $\beta$ . فاذا كانت الزاوية $\alpha = 0$ ، وبالتالي التسارع **B أفقياً** ، فينتج من ( 3.88 ) :

$$z = \frac{B}{g}\,x + \text{const} = -\tan\beta'.x + \text{const} \qquad (3.89)$$

وهي تمثل أيضاً معادلة حزمة من المستقيمات المتوازية المائلة بزاوية $\beta'$ على الأفق. وعندما تكون $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ، وبالتالي التسارع **B شاقولياً** فنجد :

$$z = \text{const} \qquad (3.90)$$

وهي معادلة مستقيمات أفقية . وعليه يمكن صياغة النتيجة التالية :

> إن سطوح الضغط الثابت في سائل ثقيل يؤثر عليه تسارع منتظم ثابت تمثلها مستويات مائلة متوازية ، عندما يكون التسارع مائلاً أو أفقياً ، وتمثلها مستويات أفقية ، عندما يكون التسارع شاقولياً .

لحساب توزع الضغط نكامل العلاقة ( 3.87 ) فنجد :

$$p = \rho\,[\,B\cos\alpha\,x + (B\sin\alpha - g)\,z\,] + \text{const} \quad . \quad (3.91)$$

هذه العلاقة تسمح ، بعد تحديد ثابت التكامل من الشروط الحدية ، بحساب الضغط في أية نقطة $(z, x)$ من السائل . وينتج منها تغير الضغط في الاتجاه الأفقي والشاقولي :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho\,B\cos\alpha \quad ; \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \rho\,(B\sin\alpha - g) \quad . \quad (3.92)$$

وبطريقة سهلة يمكن الحصول على توزع الضغط في اتجاه $z$ المتعامد مع سطوح الضغط الثابت ، وذلك بتطبيق شروط التوازن على اسطوانة ارتفاعها $dz$ من سطح السائل السائب ، وسطح كل من قاعدتيها $dA$ ( الشكل ٣١.٣ )فنجد :

$$p\,dA = p_0\,dA + \rho b\,dz\,dA \Rightarrow p = p_0 + \rho b z \quad . \quad (3.93)$$

ويجدر الانتباه إلى أنه في حال كون التسارع $b = 0$ فان المعادلة (3.91) تأخذ شكل المعادلة الهيدروستاتيكية الأساسية .

## ٤.٣ أسئلة مراجعة وتمارين :

س ١.٣ ماهي شروط التوازن المستقر لمجموعة سوائل غير متمازجة ؟ برهن على ذلك .

س ٢.٣ : ماهي شروط أويلر لتوازن سائل ساكن في حقل قوى عام ؟ أكتب المعادلة الهيدروستاتيكية العامة واستخرج منها المعادلة الهيدروستاتيكية الأساسية .

س ٣.٣ : المداخن لها فعل امتصاصي يؤدي لطرد الغازات العادمة . علّل السبب .

س ٤.٣ : ماذا ينص قانون **باسكال** وما هي أهم تطبيقاته العملية ؟

س ٥.٣ : اشرح مبدأ المانومتر والبارومتر السائلي . على أي أساس يتم اختيار سائل المقياس ؟

س ٦.٣ : اشرح مبدأ طريقة حساب قوى ضغط السوائل الساكنة على سطوح الأوعية المنحنية .

س ٧.٣ : ماهو الشرط اللازم والكافي للتوازن المستقر الأجسام الطافية وما هي العوامل التي تحدده ؟

س ٨.٣ : برهن أن دافعة أرخميدس $F_A$ تساوي الى المركبة الشاقولية

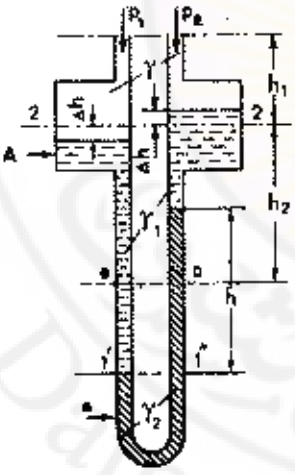
لقوى الضغط المؤثرة على سطح الجسم المغمور . هل تتغير $F_a$ مع العمق عن السطح الحر للسائل ؟

س ٩.٣ : كيف يتغير ارتفاع السحب لمضخة معممة لضخ ماء بدرجة حرارة $t = 20\,^{\circ}C$ ، عندما تصبح $t = 80\,^{\circ}C$ ؟

س ٣ . ١٠ : ماهي حالة التوازن النسبي لسائل ؟ على أي أساس يمكن حساب تغير الضغط شاقولياً وأفقياً لسائل يدور حول محور شاقولي بسرعة زاوية ثابتة اذا علمنا قيمة الضغط في نقطة معيّنة ؟

س ٣ . ١١ : اذا ألقينا من زورق يسبح على سطح بركة ماء هادىء حجراً في الماء ؛ فهل ترتفع سوية الماء أم تنخفض أم تبقى ثابتة ؟

ت ٣ . ١ : لقياس فرق الضغط الصغير $\Delta p = p_1 - p_2$ بين نقطتين من سائل وزنه النوعي $\gamma$ يوصل بهاتين النقطتين المكرومانومتر التفاضلي المبين في الشكل (ت ٣ . ١) والذي يحتوي على سائلي مقياس وزنهما النوعي $\gamma_1$ ، $\gamma_2$ ، والمصمم بحيث أن فرعي الأنبوب بشكل U الذي مقطعه a يتوسعان في الأعلى ليصبح مقطع كل منهما A . فاذا كان فرق ارتفاع سوية سائل المقياس الأثقل h فكم يكون فرق الضغط ؟



الشكل ت ٣ . ١

الحل : قبل وصل المكرومانومتر تكون سوية سائل المقياس الأثقل منطبقة على المستوي الافقي 0 — 0 ، وسوية سائل المقياس الأخف على 2—2 ، وبعد وصله تنخفض سوية الأول في الفرع الأيسر بمقدار $h/2$ والثاني بمقدار $\Delta h$ ، وترتفع سويتها في الفرع الأيمن بنفس المقدار . ومن تساوي الحجم المزاح يكون :

$$\Delta h\, A = \frac{h}{2}\, a \Rightarrow \Delta h = \frac{h}{2}\,\frac{a}{A} \qquad . \qquad (a)$$

وباعتبار أن $1' - 1'$ سطح للضغط الثابت ينتج من المعادلة الهيدروستاتيكية الأساسية :

$$p_{1'} = p_1 + (h_1 + \Delta h)\,\gamma + \left(h_2 - \Delta h + \frac{h}{2}\right)\gamma_2 =$$
$$= p_{1'} = p_2 + (h_1 - \Delta h)\,\gamma + \left(h_2 + \Delta h - \frac{h}{2}\right)\gamma_1 + h\,\gamma_h$$

وبتعويض $\Delta h$ بقيمتها من (a) ينتج :

$$\Delta p = p_1 - p_2 = h\,[\gamma_2 - \gamma_1\,(1 - a/A) - \gamma\, a/A] \qquad (b)$$

من أجل القيم العددية : $a/A = 0{,}01$ ، $h = 10$ cm ، $\gamma = 1{,}25$ kp/m³ ، $\gamma_1 = 900$ kp/m³ ، $\gamma_2 = 1000$ kp/m³ ينتج :

$$\Delta p = 0{,}1.[10^3 - 0{,}9.10^3\,(1 - 0{,}01) - 1{,}25.0{,}01] =$$
$$= 10{,}9 \text{ kp/m}^2 = 10{,}9 \text{ mm WC.}$$

ت ٢٠٣ : احسب قوة الضغط الأفقية والشاقولية ومحصلتها المؤثرة على نصف الاسطوانة المبينة في الشكل ( ١٦.٣ ) ، إذا كان محور الاسطوانة عن السطح السائب للسائل $h$ وطولها $l$ .

الحل : قوة الضغط الافقية تنتج من ( 3.30 ) :

$$F_{px} = \gamma\, z_S\, A_x = \gamma\, h\, D\, l \quad ,$$

وتؤثر حسب (3.32) في نقطة تبعد عن المركز 0 بمقدار

$$e = z_m = \frac{J_S}{z_S\, A_x} = \frac{l D^3/12}{h\, D\, l} = \frac{D^2}{12\, h} \quad .$$

وتنتج قوة الضغط الشاقولية حسب (3.33) مع مراعاة الشكل ( ١٦.٣ ) :

$$F_{pz} = F_{pz_2} - F_{pz_1} = \gamma V_1 - \gamma V_2 = \gamma V = \gamma\, \pi\, D^2\, l/8 \quad ,$$

وتؤثر في مركز ثقل الحجم $V$ داخل نصف الاسطوانة ، وبالتالي تمر من مركز ثقل نصف الدائرة وتبعد عن قطرها الشاقولي بمقدار :

$$e' = x_m - 2\,D/3\,\pi \quad .$$

$x_m$ يمكن تحديدها أيضاً على أساس أن المحصلة $F_p$ تمر من المركز 0 وبالتالي يكون :

$$F_{pz}\, z_m = F_{px}\, x_m \quad .$$

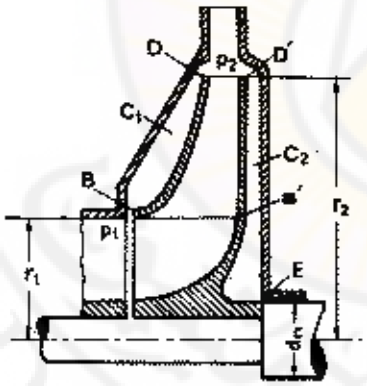
وتنتج محصلة قوى الضغط :

$$F_p = \sqrt{F_{px}^2 + F_{pz}^2} = \gamma\, l\, D \sqrt{h^2 + (\pi D/8)^2} \quad .$$

ت ٣٠٣ : لحساب قوة الضغط المحورية المؤثرة على الدولاب الدائر لمضخة نابذة ( الشكل ت ٢٠٣ ) يفرض عادة حسب [80] أن السائل الموجود في الحجرتين $C_2$ ، $C_1$ بين الدولاب الدائر وجدران المغلف الجانبية يدور بنصف سرعة دوران الدولاب الدائر n . كم تبلغ هذه القوة اذا كان :

$\gamma = 10^{-3}$ kp/cm$^3$ , $n = 3000$ rpm , $r_m = 1$ cm , $r_2 = 5$ cm , $r_1 = 2{,}5$ cm
ضغط السحب $p_1 \approx 0$ ، ضغط الدفع $p_2 \approx 40$ at ؟

الحل : كما هو واضح من الشكل ( ت ٢٠٣ ) فان الضغوط التي يؤثر بها السائل على السطوح D – B ، D′ – B′ متوازنة فيما بينها . وتنشأ بالتالي قوة الضغط المحورية $F_{pT}$ لمحصلة لقوى الضغط المؤثرة على السطح الجانبي B′ – E المحصور بين $r_m \leqslant r \leqslant r_1$ وتنتج من ( 3.84 ) بادخال $r_2$ ، $(p_2 - p_1)$ بدلاً من $r_0$ ، $p_0$ :



الشكل ت ٢٠٣

$$F_{pT} = 2\pi \int_{r_m}^{r_1} \left[ (p_2 - p_1) + \frac{\gamma}{2} \omega^2 (r^2 - r_2^2) \right] r\, dr \quad .$$

وباجراء التكامل نجد :

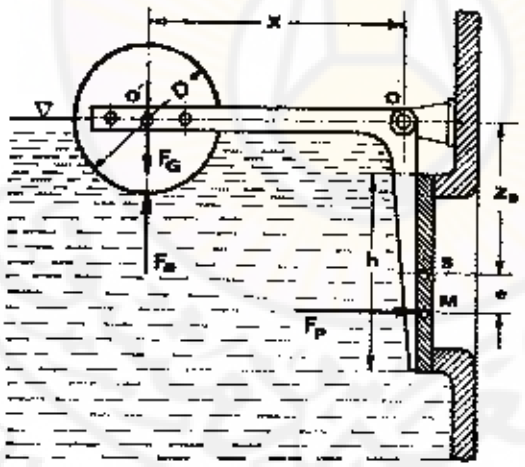
$$F_{pT} = \pi \left( r_1^2 - r_n^2 \right) \left[ (p_2 - p_1) + \frac{\rho \omega^2}{2} \left( \frac{r_1^2 + r_n^2}{2} - r_t^2 \right) \right] .$$

بالتعويض بالقيم العددية وباعتبار $\rho = \gamma / g$ ، $\omega = \pi n / 30$ ينتج :

$$F_{pT} \approx 655 \text{ kp} .$$

ت ٤٠٣ : في الجدار الشاقولي لخزان ماء ( الشكل ت ٣٠٣ ) توجد فتحة مغلقة بسدادة مستطيلة أبعادها b, h متصلة بذراع زاوي يتمفصل في النقطة O ، وينتهي بغواشة اسطوانية فارغة قطرها D وطولها $l$ ووزنها $F_G$ . فاذا كان المطلوب أن تفتح السدادة عندما تصل سوية السطح الحر للماء في الخزان الى المستوى $O' - O$ ، فكم يجب أن يكون طول الذراع x ؟ معطى :

$F_G = 25$ kp, b = 30 cm, h = 40 cm, $l$ = 60 cm, D = 39 cm, $z_S$ = 25 cm




الشكل ت ٣٠٣

الحل : عندما تبدأ السدادة بالانفتاح تكون محصلة عزوم كافة القوى المؤثرة

على السدادة وعلى الفواشة حول 0 معدومة . وعليه يكون :

$$F_p\,(z_S + e) = (F_a - F_G)\,x \Rightarrow x = \frac{F_p\,(z_S + e)}{F_a - F_G} \quad . \quad (a)$$

قوة الضغط تنتج من (3.21) :

$$F_p = \gamma\, z_S\, A = \gamma\, z_S\, b\, h \quad ,$$

وتؤثر في مركز الضغط M الذي يبعد عن مركز الثقل S حسب ( 3.52 ) مقدار :

$$e = \frac{J_S}{z_S\, A} = \frac{b\, h^3/12}{z_S\, b\, h} = \frac{h^2}{12\, z_S} \quad . \quad (b)$$

أما دافعة أرخميدس فتحسب من (3.38) على أساس أن نصف الاسطوانة مغمور وتأثير الذراع مهمل :

$$F_a = \gamma\, \pi\, D^2\, l/8 \quad . \quad (c)$$

وبالتالي ينتج من (a) بعد ادخال (b) و (c) واستخدام القيم العددية :

$$x = \frac{b\, h\,(z_S^2 + h^2/12)}{\pi\, D^2\, l/8 - F_G/\gamma} = \frac{30.40\,(25^2 + 40^2/12)}{3{,}14.39^2 .60/8 - 25/10^3} = 85 \text{ cm} \quad .$$

ت ـ ٣ـ٥ : اسطوانة فارغة قاعدتها العلوية مغلقة والسفلية مجهزة بثقب صغير ( الشكل ت ٣ـ٤ ) . تغطس الاسطوانة التي قطرها d وارتفاعها h ووزنها $F_G$ في الماء بحيث يبقى محورها شاقولياً . احسب مقدار ارتفاع الماء $h_1$ وضغط الهواء p داخل الاسطوانة ، اذا فرضنا ان جدرانها مطلقة الصلابة والانضغاط يتم بشرط إيزوترمية . تحقق اذا كانت الاسطوانة الطافية في حالة توازن مستقر .

معطى : $p_a = 1{,}03$ at , $F_G = 30$ kp , $h = 50$ cm , $d = 30$ cm

الحل : الاسطوانة ستستمر في الغوص حتى يتوازن ثقلها مع قوة الضغط الزائد للهواء المضغوط داخلها والمؤثرة على غطائها . وعليه يكون :

$$F_G = (p - p_a)\,\pi d^2/4 \Rightarrow p = p_a + 4F_G/\pi d^2 \quad , \quad (a)$$

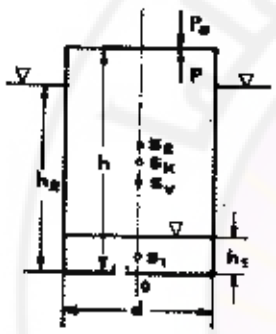
ومن قانون تغير الحالة الايزوترومي ( 2.54 ) ينتج :

$$p_a h = p(h - h_1) \Rightarrow h_1 = h\frac{p - p_a}{p} \quad , \quad (b)$$

شروط الطفو المستقر للاسطوانة تقضي حسب ( 3.44 ) أن يكون :

$$h_m = \frac{J_0}{V} - \overline{S_k S_r} > 0 \quad , \quad (c)$$

حيث $J_0 = \pi d^4/64$ عزم عطالة دائرة سطح الطفو ، $V = h_2\,\pi d^2/4$ الحجم المزاح ، $e = \overline{S_k S_r}$ بعد مركز ثقل الاسطوانة مع الماء داخلها عن مركز ثقل $V$ .



الشكل ت ٤٠٣

عمق الغاطس $h_2$ يتحدد من شرط الطفو ( 3.43 ) . فاذا كان :

$$F_W = \gamma h_1 \pi d^2/4 \quad (d)$$

وزن الماء داخل الاسطوانة ، $F_a$ دافعة أرخميدس ، فينتج :

$$F_a = \gamma h_2 \frac{\pi d^2}{4} = F_G + F_W \Rightarrow h_2 = \frac{4(F_G + F_W)}{\gamma \pi d^2} \quad , \quad (e)$$

وبافتراض $S_1$ مركز ثقل $F_W$ ، $S_2$ مركز ثقل $F_G$ ، فان موضع $S_k$ يتحدد بأخذ العزوم حول O :

$$(F_G + F_W)\,\overline{OS_k} = F_G\,h/2 + F_W\,h_1/2 \Rightarrow \overline{OS_k} = \frac{2(F_G + F_W)}{F_G\,h + F_W\,h_1} \quad , \quad (f)$$

ويكون بالتالي :

$$e = \overline{OS_k} - \overline{OS_r} = \overline{OS_k}' - h_2/2 \qquad (g)$$

بالتطبيق العددي ينتج : $h_2 = 44.48\,cm$ ، $h_1 = 1{,}98\ cm$ ، $p = 1{,}0725\ at$

$h_m = -0{,}39\ cm < 0$ ، وبالتالي فان الاسطوانة الطافية غير مستقرة .

## ٤ توازن السوائل المتغيرة الحجم ( غير المتجانسة ) .

تتميز السوائل المتغيرة الحجم ( القابلة للانضغاط ) بانها غير متجانسة في الحالة العامة ، وتتغير كثافتها (راجع ٢٠٠٢) مع المكان s ومع الضغط p :

$$\rho = f(s, p) \qquad (4.1)$$

وباعتبار ان الكثافة ، كاحدى الخواص الفيزيائية للسائل ، لاتؤثر على حالة الاجهاد ، فان حالة الاجهاد الايروستاتيكية لاتختلف عن حالة الاجهاد الهيدروستاتيكية (راجع ٢٠٣٠٢). وعليه فان المعادلة الهيدروستاتيكية الأساسية (3.4) والعامة (3.56) تنطبق من حيث المبدأ على السوائل القابلة للانضغاط . ولكن هذه السوائل لا تكون ساكنة فعلا الا اذا كانت في حالة توازن مستقر .

## ٤ . ١ شروط التوازن والاستقرار الستاتيكي لسائل متغير الحجم

اذا اقتطعنا جزيئاً حجمياً $dV$ من سائل متغير الحجم وغير متجانس يؤثر عليه حقل قوى عام ، فان شروط توازن أويلر ( انظر ص ١٣٤ ) تنطبق عليه تماماً . فإذا كانت $dF_V$ القوة الحجمية ، $\Phi_s$ تابع كمون حقل القوى ، فان القوة الحجمية النوعية الجزئية $dF'_V$ المؤثرة في الاتجاه s تنتج من ( 2.16 ) ، ( 3.65 ) :

$$dF'_V = \frac{dF_V}{dV} = -\rho \frac{\overrightarrow{d\Phi_s}}{ds} = \rho\, b = \frac{\overrightarrow{dp}}{ds} \quad ; \quad dF_V \parallel s \qquad (4.2)$$

وتتناسب بسبب ( 4.1 ) طرداً مع الكثافة . لذلك فان توزع الضغط الناتج من تكامل العلاقة ( 4.2 ) :

$$p = \int_{s_0}^{s} \rho\, b\, ds + const \qquad (4.3)$$

لا يمكن حسابه الا في الحالات الخاصة التالية :

آ ) الكثافة ثابتة تقريباً $\rho \approx const$ ، وهذا ينطبق على حالات عديدة ، خاصة عندما يكون ارتفاع الكتلة الغازية صغيراً نسبياً . وعندها يمكن تطبيق كافة العلاقات المتعلقة بتوازن السوائل المتجانسة الثابتة الحجم ( الفقرة ٣ ) .

ب ) الكثافة تتغير مع المكان فقط $\rho = f(s)$ ، وهذا ينطبق مثلاً على حالة سائل ثابت الحجم ذي درجات حرارة ، أو درجات تركيز أملاح منحلة ، مختلفة موضعياً ( راجع ٣٠١٠٢ ) .

ج ) الكثافة تابعة للضغط $\rho = f(p)$ ، وهذا ينطبق مثلاً على الحالة التي يكون فيها ارتفاع الكتلة الغازية ( الهواء ! ) كبيراً ، حيث لايمكن عندها اهمال الانضغاطية . كما يجب أن يؤخذ تأثير درجة الحرارة بعين الاعتبار . ولذلك فان حساب توزع الضغط من ( 4.3 ) يتطلب معرفة تغير الكثافة مع الضغط ، وتوزع درجة الحرارة في الكتلة الغازية ، بالاضافة للشروط الحدية التي تسمح بتحديد ثابت التكامل .

سنقتصر فيما يلي على دراسة الحالة ج ) من منطلق أن الغاز المعتبر ( الهواء الجوي بصورة خاصة ! ) يخضع لتأثير حقل الجاذبية الارضية فقط $\mathbf{F_v} \equiv \mathbf{F_G}$ ، $b \equiv g = const$ . أي أننا سنفرض أن التسارع الارضي يبقى ثابتاً مع الارتفاع $s \equiv z$ الذي سنفرضه موجباً للأعلى . وعليه تنتج من ( 4.2 ) بعد الاصلاح والانتباه لاتجاه g المعادلة الايروستاتيكية الاساسية بصيغتها التكاملية :

$$\mathbf{P}(p) = \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{\rho(p)} = g(z_0 - z) \quad , \qquad (4.4)$$

التي لاتختلف من حيث الاساس عن المعادلة الهيدروستاتيكية الاساسية (3.4) . $\mathbf{P}(p)$ (حرف « روكبير » اليوناني!) يسمى **تابع الضغط** وواحدة قياسه $[m^2/s^2]$ ونلزم معرفته من أجل حل التكامل .

لتحديد علاقة الكثافة بالضغط وتأثرها بدرجة الحرارة نستعين بمعادلة الحالة للغازات الكاملة ( 2.50 ) :

$$p/\rho = RT \Rightarrow p_0/\rho_0 = RT_0 \quad , \qquad (4.5)$$

وبقانون تغير الحالة الذي نعتبره يتم في الحالة العامة تحت شروط بوليتروبية . وبالتالي يكون حسب ( 2.57 ) :

$$p/\rho^n = p_0/\rho_0^n = \text{const} \quad , \qquad (4.6)$$

حيث $T_0$ ، $\rho_0$ ، $p_0$ الضغط والكثافة ودرجة الحرارة للغـــاز عند الارتفاع $z_0$ ، $n$ الأس البوليتروبي . فاذا حسبنا من هاتين العلاقتين الكثافة :

$$\rho = \frac{\rho_0}{p_0^{1/n}}\, p^{1/n} = \frac{\rho_0}{p_0}\, \frac{1}{p_0^{\frac{1-n}{n}}}\, p^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{RT_0\, p_0^{\frac{1-n}{n}}}\, p^{\frac{1}{n}} \qquad (4.7)$$

وادخلناها في ( 4.4 ) وأجرينا التكامل تنتج بعد الاصلاح العلاقة التي تسمح بحساب تغير الضغط مع الارتفاع :

$$g(z_0 - z) = \frac{n}{n-1}\, \frac{p_0}{\rho_0} \left[ \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{n-1}{n}} - 1 \right] =$$

$$= \frac{n}{n-1}\, RT_0 \left[ \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{n-1}{n}} - 1 \right]. \qquad (4.8)$$

كما نجد أيضاً من ( 4.5 ) و ( 4.6 ) تغير درجة الحرارة مع الضغط :

$$\frac{T}{T_0} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{n-1}{n}} \quad . \qquad (4.9)$$

وبإدخال هذه العلاقة في (4.8) ينتج توزع درجة الحرارة الخطي مع الارتفاع :

$$T = T_0 + g\frac{n-1}{nR}(z_0 - z) \quad . \qquad (4.10)$$

ومنه نجد تدرج درجة الحرارة مع الارتفاع :

$$\frac{dT}{dz} = -\frac{g}{R}\frac{n-1}{n} = \text{const} \quad . \qquad (4.11)$$

هذه العلاقة تبين أن درجة الحرارة تتناقص مع الارتفاع ، وهذا مايؤكده الواقع في الهواء الجوي مثلاً ولارتفاع عشرات الكيلومترات . كما تبين أيضاً أن الأس البوليتروبي n يتعلق مباشرة بتدرج درجة الحرارة وتتحدد قيمته العددية من قيمة dT/dz ، التي تحدد أيضاً حالة الاستقرار الستاتيكي Stability لعمود الغاز المعتبر .

ان شروط التوازن المستقر لسائل ثقيل غير متجانس تتطلب أن يكون توضع الطبقات بحيث يتناقص الوزن النوعي من الأسفل للأعلى ، بينما لا يتغير في المستوي الأفقي الممثل لسطح الضغط الثابت ( راجع ٣ ٢٠١ ) . وهذا يعني باعتبار $\gamma = \rho g$ ، $g = \text{const}$ أن :

$$\frac{d\rho(z)}{dz} < 0 \quad . \qquad (4.12)$$

هذه العلاقة تمثل في حالة السوائل القابلة للانضغاط شرطاً لازماً ولكن غير كاف . ذلك انه عند ازاحة جزيء حجمي من كتلة غازية للأعلى أو الأسفل فإن كثافته تنقص أو تزداد ، بسبب تناقص الضغط مع الارتفاع للأعلى . ولكن لايلزم في كل الأحوال أن تصبح كثافة الجزيء الحجمي مساوية لكثافة الغاز في محيطه الجديد .

فلكي يكون توضع طبقات الغاز **مستقراً** فانه يلزم عندما يرتفع الجزيء الحجمي من z ، حيث يؤثر الضغط $p(z)$ ، مقدار $\Delta z$ أن تبقى كثافته تحت تأثير الضغط $p(z) > p(z+\Delta z)$ **أكبر** من كثافة الغاز في محيطه الجديد ؛ وعندما ينخفض مقدار $\Delta z$ أن تبقى كثافته تحت تأثير الضغط $p(z) < p(z-\Delta z)$ **أصغر** من كثافة الغاز في محيطه الجديد . فعندها فقط يحاول الجزيء العودة الى مكانه الأصلي . أما في الحالة الخاصة التي تصبح فيها كثافة الجزيء الحجمي عند رفعه أو خفضه مقدار $\Delta z$ **مساوية** لكثافة الغاز في المحيط الجديد ، وبدون حدوث أي تبادل حراري ، فان توضع الطبقات الغازية يكون في حالة **توازن مطلق** ، وتغير حالة الجزيء يتم تحت شروط أديباتية (راجع ٣.٨.٢). وهذا يعني أن التمدد أو الانضغاط الناتج عن رفع أو خفض الجزيء الحجمي مقدار $\Delta z$ ، يجب أن يرافقه انخفاض أو ارتفاع في درجة الحرارة ، بحيث تصبح حرارته الناتجة عن تغير حالته مساوية تماماً لدرجة حرارة الغاز في المحيط الجديد ، وبالتالي لا يحدث اي تبادل حراري .

إن **التوضع الأديباتي** لطبقات سائل متغير الحجم وغير متجانس تؤدي لحالة توازن شبيهة تماماً بحالة توازن السوائل الثابتة الحجم والمتوازنة [1] ، ذلك أن ازاحة أي جزيء من السائل لا تؤدي لنشوء أية قوى تحاول تغيير وضعية التوازن . كما يمكن الاستنتاج أن حالة التوضع هذه تنشأ بعد عملية مزج لجزيئات **ساكنة** غازية متوضعة أصلاً بشكل مختلف ، تماماً كما يمكن بواسطة المزج أو الخض أن نحول مائعاً غير متجانس أصلاً بسبب اختلاف التركيز الموضعي للأملاح المنحلة إلى مائع متجانس . على أساس ماتقدم تنتج شروط الاستقرار الستاتيكي الحرارية لتوضع الطبقات كما يلي :

(4.13)

| | | |
|---|---|---|
| توضع أديباتي $(n = \varkappa)$ | $\Rightarrow$ | $dT/dz = (dT/dz)_{adiabatic}$ ؛ توازن مطلق |
| توضع بوليتروبي $(n < \varkappa)$ | $\Rightarrow$ | $\lvert dT/dz \rvert < \lvert dT/dz \rvert_{adiabatic}$ ؛ توازن مستقر |
| توضع إزوترمي $(n = 1)$ | $\Rightarrow$ | $dT/dz = 0 \Rightarrow T = const$ ؛ توازن مستقر جداً |
| توضع بوليتروبي $(n > \varkappa)$ | $\Rightarrow$ | $\lvert dT/dz \rvert > \lvert dT/dz \rvert_{adiabatic}$ ؛ توازن قلق |

## ٤.٢ توازن الهواء الجوي ( ايروستاتيك )

في عام 1648 أثبت بيريه Perrier بالقياس وبتوجيه من باسكال أن الضغط الجوي ينقص مع الارتفاع . كذلك اكتشف في ذلك الوقت أن حالة الطقس تتأثر بصورة مباشرة بتذبذبات الضغط الجوي . أما اليوم فإن معرفة تغير الضغط والكثافة ودرجة الحرارة للهواء الجوي لهـا أهمية كبرى في مجالات تطبيقية عديدة مثل الطيران والأرصاد الجوية وتحديد استطاعة آلات العمل والقوة . فالمضخة تستطيع أن تسحب الماء عن عمق أكبر اذا كانت تعمل في الساحل بدلاً من منطقة جبلية . واستطاعة محرك الديزل تزداد اذا كان يعمل في منطقة منخفضة ( منجم ! ) وتقل اذا كان يعمل في منطقة مرتفعة .

### ٤.٢.١ توازن الهواء الجوي تحت شروط ايزوترمية

في حالة توضع إيزوترمي لطبقات الهواء الجوي يفترض أن درجة الحرارة الوسطية تبقى ثابتة :

$$T_m\,[^\circ K] = t_m\,[^\circ C] + 273^\circ = \text{const}\,, \qquad (4.14)$$

وبالتالي ينطبق في هذه الحالة قانون بولي ـ ماريوط ( 2.54 ) :

$$p/\rho = p_0/\rho_0 = R\,T_m = \text{const}\,. \qquad (4.15)$$

حيث $p_0$ ، $\rho_0$ قيمتان معلومتان للضغط والكثافة عند ارتفاع قياس معين $z_0$ ، كمستوى سطح الأرض مثلاً .

نستخرج قيمة $\rho$ من ( 4.15 ) وندخلها في المعـــادلة الايروستاتيكية الأساسية ( 4.1 ) ونكامل فينتج :

$$g\,(z_0 - z) = \frac{p_0}{\rho_0}\int_{p_0}^{p}\frac{dp}{p} = \frac{p_0}{\rho_0}\ln\frac{p}{p_0} \;\Rightarrow\; z - z_0 = \frac{p_0}{g\,\rho_0}\ln\frac{p_0}{p}$$

التي ينتج عنها مباشرة بالنسبة لارتفاع مستوي قياس آخر $z_1$ حيث الضغط $p_1$ :

$$z - z_1 = \frac{p_0}{g\,\gamma_0}\ln\frac{p_1}{p} = H_0\ln\frac{p_1}{p}\,. \qquad (4.16)$$

هذه العلاقة معروفة باسم **قانون الارتفاع البارومتري** ، الذي يربط بين تغير الارتفاع والضغط ، ويسمى $H_0 = p_0/\gamma_0$ **ارتفاع الجو المنتظم**، ويعادل ارتفاع عمود من الهواء وزنه النوعي $\gamma_0$ ثابت وفرق الضغط بين قاعدته وقمته $p_0$ .

يمكن اصلاح العلاقة ( 4.16 ) بحيث تصبح أكثر ملاءمة لاستخدامها في تحديد ارتفاع الطائرات . فاذا وضعنا $z = z_2$ ، $p = p_2$ ، واستخدمنا اللوغارتم العشري بدلاً من الطبيعي ينتج :

$$\Delta z = z_2 - z_1 = 2{,}303\;H_0\,\lg\frac{p_1}{p_2}\,. \qquad (4.17)$$

فاذا كتبنا معادلة الحالة ( 4.5 ) بالشكل :

$$\frac{p}{\rho} = R\,(t + 273^\circ) \quad ,$$

ينتج من أجل قيم الضغط والكثافة عند $t = 0^\circ$ :

$$(p/\rho)_{t=0^\circ} = R.273^\circ \;\Rightarrow\; R = \frac{1}{273^\circ}\,(p/\rho)_{t=0^\circ}\,.$$

وبذلك نحصل من ( 4.15 ) بادخال ( 4.14 ) على ارتفاع الجو المنتظم :

$$H_0 = \frac{p_0}{g\,\rho_0} = \frac{1}{g}\,(p/\rho)_{t=0^\circ}\left(1 + \frac{t^\circ_{at}}{273^\circ}\right)\,. \qquad (4.18)$$

وتأخذ العلاقة ( 4.17 ) الشكل التالي :

$$\Delta z = 2{,}303 \frac{1}{g} \left(\frac{p}{\rho}\right)_{t=0^\circ} \left(1 + \frac{t_m}{273^\circ}\right) \lg \frac{p_1}{p_2} \qquad (4.19)$$

فإذا اعتبرنا $(g\rho = 1)_{t=0^\circ} = 1{,}29\ \mathrm{kp/m^3}$ ؛ $p_0 = 10\,333\ \mathrm{kp/m^2}$ (الجدول ٢.٢) ينتج : $\left(\frac{p}{g\rho}\right)_{t=0^\circ} = 8010\ \mathrm{m}$ . ويأخذ قانون الارتفاع البارومتري الصيغة العملية المعروفة :

$$\Delta z = z_2 - z_1\ [\mathrm{km}] = (18{,}4 + 0{,}067\, t_m\ [^\circ\mathrm{C}]) \lg \frac{p_1}{p_2} . \qquad (4.20)$$

## ٤.٢.٢ توازن الهواء الجوي تحت شروط أديباتية

عندما يتم تغير حالة الهواء بصورة سريعة ، كما هو الأمر عند سرعات جريان عالية جداً ، فلن يتوفر الوقت الكافي لحدوث تبادل حراري مع المحيط ، لأن الانتقال الحراري يتم عادة ببطء شديد نسبياً . وعليه يمكن في مثل هذه الحالات تطبيق قانون تغير الحالة الأديباتي (2.56) :

$$p/\rho^\varkappa = \mathrm{const}$$

والحصول على نتائج تقريبية مرضية جداً . ونلاحظ من مقارنة هذه العلاقة مع ( 4.6 ) أنه في حـــالة التوضع الأديباتي لطبقات الهواء الجوي يأخذ الأس البوليتروبي قيمة خاصة $n = \varkappa$ ، وعليه تنتج مباشرة من العلاقة ( 4.8 ) علاقة الارتفاع بالضغط اعتباراً من سطح الأرض $z_0 = 0$ :

$$z = \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} \frac{p_0}{g\rho_0} \left[1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right] , \qquad (4.21)$$

حيث $p_t$ ، $\rho_0$ الضغط والكثافة عند $z_0 = 0$ . ومنها نجد تغير الضغط مع الارتفاع :

$$\frac{p}{p_0} = \left[1 - \left(\frac{g\rho_0}{p_0}\frac{\varkappa-1}{\varkappa}\right) z\right]^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}} . \qquad (4.22)$$

وينتج تغير الكثافة مع الارتفاع من (4.6) بوضع $\varkappa = n$ وإدخال (4.22) :

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{\gamma}{\gamma_0} = \left[1 - \left(\frac{g\rho_0}{p_0}\frac{\varkappa-1}{\varkappa}\right) z\right]^{\frac{1}{\varkappa-1}} . \qquad (4.23)$$

ومن العلاقة ( 4.10 ) ومعادلة الحالة ( 4.5 ) نحصل على توزع درجة الحرارة مع الارتفاع :

$$T = T_0 - \left(\frac{g}{R}\frac{\varkappa-1}{\varkappa}\right) z = \frac{g}{R}\left(\frac{p_0}{g\rho_0} - \frac{\varkappa-1}{\varkappa} z\right) . \quad (4.24)$$

ويكون تدرج درجة الحرارة حسب ( 4.11 ) :

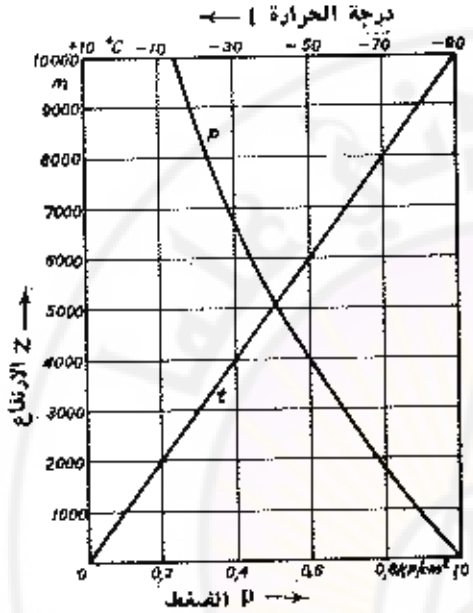
$$\frac{dT}{dz} = - \frac{g}{R}\frac{\varkappa-1}{\varkappa} . \qquad (4.25)$$

فاذا اعتبرنا بالنسبة للهواء $R/g = 29{,}3 = m\ grd^{-1}$ ، $\varkappa = 1{,}405$ ، $dz = \Delta z = 100\ m$ ينتج من ( 4.25 ) :

$$\Delta t = T_2(z_2) - T_1(z_1) = - \frac{100 \cdot 0{,}405}{29{,}3 \cdot 1{,}405} = - 0{,}98\ °C \approx - 1\ °C . \quad (4.26)$$

إذن في حالة التوضع الأديباتي لطبقات الهواء الجوي تنقص درجة الحرارة بمعدل درجة واحدة لكل مائة متر ارتفاع . وينتج من ( 4.13 ) أن توازن الهواء الجوي يكون مستقراً عندما يكون النقص في درجة الحرارة أقل من هذا المعدل ، وقلقاً عندما يكون أكبر منه .

الشكل ( ١.٤ ) يبين تغير الضغط ودرجة الحرارة مع الارتفاع حسب ( 4.22 ) و ( 4.24 ) .




الشكل ١.٤ : تغير الضغط ودرجة الحـــرارة في الهواء الجوي مع الارتفاع تحت ظروف أديباتية : t تنقص بمعدل 1 °C لكل 100 m ارتفاع .

## ٣.٢.٤ توازن الهواء الجوي النظامي

إن تغير حالة الهواء الجوي يخضع في الحقيقة لقانون تغير الحالة البوليتروبي ( 4.6 ) ، ويمثل التوضع الأديباتي والايزوترمي لطبقاته حالتين حديتين . ولكن الحساب العددي لتغير الضغط والكثافة ودرجة الحرارة بمساعدة العلاقات ( 4.7 ) حتى ( 4.10 ) يستلزم معرفة القيم الابتدائية لها على سطح الأرض $p_0$ ، $\rho_0$ ، $T_0$ ، بالاضافة لتدرج درجة الحرارة الذي تنتج منه حسب ( 4.11 ) قيمة الأس البوليتروبي n . هذه القيم تتعرض لتذبذبات مستمرة تتعلق بحالة الطقس وبرطوبة الهواء وخاصة بالعرض الجغرافي للمكان . لذلك ، ومن أجل الحصول على علاقات واضحة في مجال الطيران خاصة يمكن على اساسها اجراء

مقارنات لاستطاعة الطيران في أوقات وأماكن مختلفة ، فقد اعتمدت منظمة الطيران العالمية (International Civil Aviation Organisation = ICAO) ما يسمى **الجو النظامي** Normal atmosphere ، الذي يتميز حسب [9][12][17] بثبات القيم $p_0$ ، $\rho_0$ ، $T_0$ ، $g$ :

$$\left.\begin{aligned} & p_0 = 10332\,\mathrm{kp\,m^{-2}} \mathrel{\widehat{=}} 101\,332\ \mathrm{Nm^{-2}} \quad ; \\ & g = 9{,}80665\ \mathrm{m\,s^{-2}} \\ & \rho_0 = 0{,}125\ \mathrm{kp\,s^2\,m^{-4}} \mathrel{\widehat{=}} 1{,}226\ \mathrm{kg\,m^{-3}} \quad ; \\ & R = 29{,}3\ \frac{\mathrm{kp\,m}}{\mathrm{kp\ grd}} \mathrel{\widehat{=}} \frac{R}{g} = 29{,}3\ \frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{kg\ grd}} \quad ; \\ & \gamma_0 = 1{,}25\ \mathrm{kp\,m^{-3}} \mathrel{\widehat{=}} g\rho_0 = 12{,}07\ \mathrm{N\,m^{-3}} \quad ; \\ & t_0 = 15\ ^\circ\mathrm{C} \mathrel{\widehat{=}} T_0 = 288\ ^\circ\mathrm{K} \end{aligned}\right\} , \quad (4.27)$$

وكذلك بثبات تدرج درجة الحرارة :

$$\left.\begin{aligned} & 0 \leq z \leq 11\ \mathrm{km} \text{ من أجل } \vartheta = dT/dz = -6{,}5\ \mathrm{grd\,km^{-1}} \\ & z > 11\ \mathrm{km} \text{ من أجل } \vartheta = 0 \Rightarrow t = -(11.6{,}5 - 15) = -56{,}5\ ^\circ\mathrm{C} \end{aligned}\right\} . \quad (4.28)$$

من ( 4.28 ) نحصل مباشرة على توزع درجة الحرارة :

$$T = T_0 + \vartheta\, z = T_0\left(1 + \frac{\vartheta z}{T_0}\right) . \qquad (4.29)$$

وبادخال قيمة $\vartheta$ في ( 4.11 ) نحصل على قيمة الأس البوليتروبي :

$$\vartheta = -\frac{g}{R}\,\frac{n-1}{n} \Rightarrow \frac{n-1}{n} = -\frac{R\vartheta}{g} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{n}{n-1} = -\frac{g}{R\vartheta} \Rightarrow n = \frac{1}{1 + R\vartheta/g} \qquad (4.30)$$

وبادخال القيم العددية حسب ( 4.27 ) ( 4.28 ) نجد :

$$\frac{n-1}{n} = 0{,}19 \; ; \; \frac{n}{n-1} = 5{,}25 : \frac{1}{n-1} = 4{,}25 : n = 1{,}235 \; , \quad (4.31)$$

وبالتالي فان تغير الحالة في الجو النظامي يتم في مجال محصور بين تغير الحالة الايزوترمي والأديباتي :

$$1 < n < \varkappa \quad . \quad (4.32)$$

الآن يمكن بسهولة من (4.8) و (4.30) و (4.31) ايجاد علاقة الارتفاع مع الضغط اعتباراً من سطح الأرض $z_0 = 0$ :

$$z = \frac{n}{n-1}\frac{RT_0}{g}\left[1-\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right] = -\frac{T_0}{\vartheta}\left[1-\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{-R\vartheta}{g}}\right] \quad (4.33)$$

التي ينتج منها تغير الضغط مع الارتفاع :

$$\frac{p}{p_0} = \left(1+\frac{\vartheta z}{T_0}\right)^{\frac{-g}{R\vartheta}} = \left(1-0{,}02257\, z\,[\mathrm{km}]\right)^{5{,}25} \quad . \quad (4.34)$$

ومن معادلة تغير الحالة (4.6) تنتج علاقة الكثافة مع الضغط :

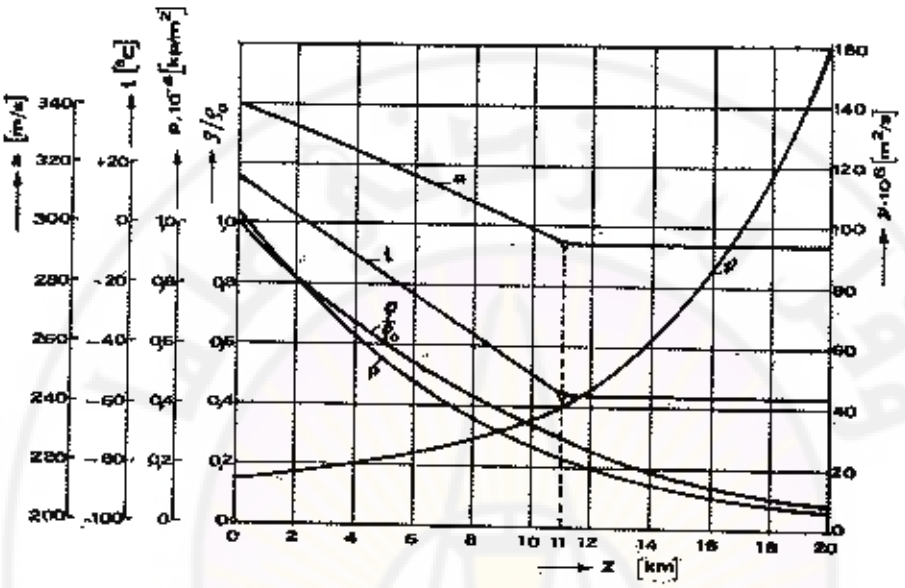
$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^n = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{1+\frac{1}{\frac{R\vartheta}{g}}} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{1{,}235} \quad , \quad (4.35)$$

وينتج بالتالي من (4.34) و (4.35) تغير الكثافة مع الارتفاع :

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{T}{T_0} = \left(1+\frac{\vartheta z}{T_0}\right)^{-\left(1+\frac{g}{R\vartheta}\right)} = \left(1+\frac{\vartheta z}{T_0}\right)^{4{,}25} =$$

$$= \left(1-0{,}02257\, z\,[\mathrm{km}]\right)^{4{,}25} \quad . \quad (4.36)$$

الشكل ( ٢٠٤ ) يبين تغير الضغط والكثافة ودرجة الحرارة حسب (4.29) ، (4.34) ، (4.36) بالاضافة لسرعة الصوت واللزوجة الحركية بدلالة




الشكل ٤ ٢ : تغير الضغط p ودرجة الحرارة t والكثافة ρ وسرعة الصوت a واللزوجة الحركية ν مع الارتفاع z في الجو النظامي العالمي حسب [17]

الارتفاع عن سطح الأرض . وبموجب الفرضيات الأساسية للجو النظامي فان هذه العلاقات والقيم العددية الناتجة عنها تصلح للاستخدام حتى ارتفاع z = 11 km عن سطح الأرض، حيث تبدأ عند العروض الجغرافية الوسطية منطقة الستراتوسفير Stratosphere .

لقد أثبتت التجارب الحديثة والقياسات التي أجريت بواسطة المناطيد ، والاقمار الصناعية خاصة ، أن درجة الحرارة عند ارتفاع z > 11 km لاتبقى ثابتة بموجب (4.28) . ففي منطقة الستراتوسفير التي تمتد من 12 الى 40 km فوق سطح الأرض تصل درجة الحرارة من 50 °C – الى 70 °C – . وفي منطقة الميزوسفير

Mesosphere المتدة من ارتفاع 40 الى 80 km ، وبسبب وجود غاز الأوزون Ozón ، ترتفع درجة الحرارة فوق الصفر وتصل عند حدود ارتفاع 60 km الى $+50\,^{\circ}C$ ، ولكنها تعود فتهبط تحت الصفر وتصبح عند ارتفاع 80 km بحدود $-80\,^{\circ}C$ وفي منطقة الجو المتأين ( إيونوسفير Ionsphere ) المتدة من 80 الى 450 km فان درجات الحرارة تكون موجبة دائماً وتصل حتى $+600\,^{\circ}C$ .

## ٤.٣ أسئلة مراجعة وتمارين

س ٤.١ : ما هي القوانين والفرضيات الأساسية اللازمة لدراسة توازن كتلة غازية ؟

س ٤.٢ : ما هي شروط التوازن المستقر لسائل متغير الحجم وغير متجانس ، وما هو تأثير توزع درجة الحرارة على الاستقرار الستاتيكي ؟

س ٤.٣ : برهن ان قيمة الأس البوليتروبي تتعلق بتدرج درجة الحرارة dT/dz .

س ٤.٤ : استخرج العلاقة التي تعطي تغير الضغط ودرجة الحرارة والكثافة مع الارتفاع عندما يسود توضع بوليتروبي في طبقات الهواء الجوي .

س ٤.٥ : في مواسير مياه الشرب يكون الضغط الزائد للماء في الطوابق العليا من الأبنية أصغر منه في الطوابق الأرضية ، بينما في مواسير غاز الاشتعال يكون العكس . علل السبب .

ت ٤.١ : بفرض أن تغير حالة الهواء الجوي يتم تحت شروط أديباتية ، والضغط عند سطح البحر $p_0 = 1{,}03\ kg/cm^2$ ، ودرجة الحرارة $t_0 = 18\,^{\circ}C$ ، والأس الأديباتي $\varkappa = 1{,}4$ ، وثابتة الغاز $\frac{R}{g} = 29{,}3\ m\ grd^{-1}$ ، فاهو الضغط الذي سيؤشر عليه مقياس ضغط موضوع على قمة جبل إيفرست التي ترتفع 8850 m ، وآخر موضوع عند البحر الميت الذي ينخفض 391 m عن سطح البحر .

الحل : من معادلة الحالة (4.5) ومن العلاقة (4.22) يتبع :

$$\frac{p}{p_0} = \left[1 - \frac{g}{R\,T_0}\,\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}\,z\right]^{\frac{\varkappa}{\varkappa - 1}} .$$

وبالتعويض بالقيم العددية نجد بالنسبة لقمة إيفرست :

$$\frac{p}{1,03} = \left[ 1 - \frac{0,4.8850}{29,3\,(18+273),1,4} \right]^{1,4/0,4} = (1-0,207)^{3,5} = 0,292 \Rightarrow p = 0,3 \text{ kp/cm}^2$$

وبالنسبة للبحر الميت حيث $z = -394$ m :

$$\frac{p}{1,03} = \left[ 1 + \frac{0,4.394}{29,3.291.1,4} \right]^{3,5} = 1,0132^{3,5} = 1,05 \Rightarrow p = 1,8 \text{ kp/cm}^2$$

ت ٢،٤ : منطادٌ وزنه فارغاً ( بدون غاز ) $F_G$ . يملأ بغاز خفيف فيصعدُ إلى ارتفاع $z_1$ ويبقى متوازناً . ما هو الوزن الذي يجب أن يرمى من المنطاد حتى يصعد إلى ارتفاع $z_2 > z_1$ ، إذا فرضنا أن تغيُّر حالة الغاز داخله والهواء خارجه يتمُّ بدرجة حرارة ثابتة $T = \text{const}$ وحجمُ المنطاد $V$ يبقى ثابتاً ، وأهملنا وزن الغاز المتدفق للخارج ، وكذلك دافعة أرخميدس المؤثرة على قفص المنطاد ؟

الحل : من قانون تغيُّر الحالة الإيزوترمي (4.15) ومن قانون الارتفاع البارومتري (4.16) ينتج بوضع $p = p_2$ ، $z = z_2$ واعتبار $\rho_{1,2}$ كثافة الهواء ، $\rho'_{1,2}$ كثافة الغاز عند $z_{1,2}$ واعتبار المسارع الأرضي ثابتاً :

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} = e^{\frac{z_2 - z_1}{RT}} \quad ; \quad \frac{\rho'_1}{\rho'_2} = \frac{\gamma'_1}{\gamma'_2} = e^{\frac{z_2 - z_1}{RT}} \quad . \quad (a)$$

في حالة توازن المنطاد عند الارتفاع $z_{1,2}$ يكون بموجب شرط الطفو :

$$F_{G1} = F_G = V(\gamma_1 - \gamma'_1) \quad ; \quad F_{G2} = V(\gamma_2 - \gamma'_2) \qquad (b)$$

وينتج أن الوزن اللازم قذفه باستخدام (a) وإجراء إصلاحات بسيطة :

$$\Delta F_G = F_{G1} - F_{G2} = F_G \left(1 - e^{-\frac{z_2 - z_1}{RT}}\right) \qquad (c)$$

فإذا كان فرق الارتفاع $\Delta z = z_2 - z_1$ صغيراً ينتج من (c) باعتبار $e^x \approx 1 + x$ :

$$\Delta F_G \approx F_G \frac{z_2 - z_1}{RT} \qquad (d)$$

★ ★ ★

# الفصل الثالث

# حركة السوائل غير القابلة والقابلة للانضغاط

## ( هيدروكينياتك وإيروكينياتك )

### المفاهيم والقوانين العامة

إن الدراسة الحركية ( الكينياتيكية ) للسوائل ، كمقدمة أساسية للدراسة التحريكية ، تتناول الحركة الصرفة للكتلة سائلة مستمرة ، بغض النظر عن أسباب نشوئها . فهي إذن دراسة هندسية صرفة تربط الوضعية المكانية لجزيئات الكتلة المتغيرة مع الزمن ، بهدف إيجاد سرعة وتسارع كل من هذه الجزيئات .

وبالرغم من تنوع طبيعة حركة السوائل فإن هناك قوانين عامة تتميز في أساس تكوينها بطابع هندسي ، وتنطبق على كافة هذه الحركات . ويهدف هذا الفصل إلى توضيح المفاهيم العامة لحركة السوائل ، واستخراج قوانينها الأساسية .

## ٥ المفاهيم الأساسية لحركة السوائل

### ١.٥ خطوط الجريان وخطوط السرعة

إذا كانت حركة الجسم الصلب يمكن إرجاعها إلى حركة نقطة مادية حرة أو مقيدة على مسار معين ، فإن حركة السوائل يجب النظر إليها كحركة وسط سائلي مستمر . وإذا كانت الدراسة السكونية للسوائل ( الفصل الثاني ) تعتمد

على كون السائل في حالة سكون بالنسبة لحدود الجملة الفيزيائية المعتبرة ، فإن الدراسة الحركية تعتبر ان السائل في حالة حركة دائمة بالنسبة لحدود تلك الجملة ، التي يمكن أيضاً ان تكون حقيقية أو وهمية .

يطلق على المنطقة الاجمالية التي يشغلها السائل المتحرك **حقل الجريان** Flow field . وتكون الجزيئات المادية التابعة لهذا الحقل خاضعة لتأثير المحيط الخارجي ، بالإضافة للتأثير المتبادل فيما بينها ، مما يجعل دراسة الحركة الافرادية لهذه الجزيئات معقدة .

لتحديد حقل الجريان نعتبر جملة إحداثيات ثابتة ( مطلقة ) ديكارتية مثلاً فيكون عند زمن معين t موقع كل جزيء حجمي من السائل محدداً بالإحداثيات z, y, x ، وتكون سرعة الجزيء ممثلة بشعاع :

$$\mathbf{V} = \mathbf{i}\, u + \mathbf{j}\, v + \mathbf{k}\, w \quad , \tag{5.1}$$

حيث w, v, u مركبات السرعة و k, j, i أشعة الواحدة باتجاه المحاور z, y, x. ومنه نحصل على القيمة المطلقة لسرعة الجزيء

$$|\mathbf{V}| = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} \quad . \tag{5.2}$$

يطلق على كافة أشعة السرعة لمجموع الجزيئات الحجمية لحقل الجريان اسم **حقل السرعة** Velocity field ، وتكون في الحالة العامة سرعة هذه الجزيئات مختلفة من حيث القيمة والاتجاه ، وتتغير في نقطة معينة مع الزمن أيضاً .

للحصول على فكرة تمثيلية واضحة عن حقل الجريان يعمد الى اختيار عدد محدد من الجزيئات السائلة ورسم طريق أو **مسار** كل منها ضمن حقل الجريان ، أو مجال معين منه ، وذلك بعد حسابه أو تحديده تجريبياً ، فتنتج لدينا **صورة الجريان** Flow pattern المطلقة . كما يمكن بطريقة أخرى أيضاً الحصول على صورة جريان آنية ، أي عند لحظة زمنية معينة t ، برسم المنحنيات المماسية لأشعة

السرعة في نقاط متعددة من حقل الجريان ( راجع ٥.٥ )

إن الدراسة الحركية التي تهدف لتحديد حقل السرعة و **حقل التسارع** Acceleration field يمكن ان تتم حسب طريقتين أساسيتين : **طريقة لاغرانج** وطريقة **أويلر** .

## ٢.٥ طريقة لاغرانج لدراسة حركة السوائل

تعتمد **طريقة لاغرانج** Lagrange-method لدراسة حركة السوائل على تتبع حركة الجزيئات السائلة الإفرادية على طول مساراتها . ولتمييز الجزيء الحجمي المراد دراسة حركته نختار من المسارات اللانهائية العدد التي يمكن ان يسلكها الجزيء، ذلك المسار الذي يمر في اللحظة $t = 0$ في النقطة $B(x_0, y_0, z_0)$ التي تمثل موضع الجزيء في لحظة البدء . ويتحدد مكان هذا الجزيء الحجمي في في أية لحظة أخرى t بالإحداثيات :

$$x = f_1(x_0, y_0, z_0, t) \quad ; \quad y = f_2(x_0, y_0, z_0, t) \quad ; \quad z = f_3(x_0, y_0, z_0, t) \qquad (5.3)$$

التي تمثل **معادلة المسار** ، بينما يطلق على $x_0, y_0, z_0, t$ **متحولات لاغرانج** . وتنتج مركبات السرعة والتسارع من (5.3) بالاشتقاق الجزئي بالنسبة للزمن مرة أو مرتين :

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial f_1(x_0,y_0,z_0,t)}{\partial t} \quad ; \quad b_x = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 f_1(x_0,y_0,z_0,t)}{\partial t^2} \\ v &= \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial f_2(x_0,y_0,z_0,t)}{\partial t} \quad ; \quad b_y = \frac{\partial^2 y}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 f_2(x_0,y_0,z_0,t)}{\partial t^2} \\ w &= \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial f_3(x_0,y_0,z_0,t)}{\partial t} \quad ; \quad b_z = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 f_3(x_0,y_0,z_0,t)}{\partial t^2} \end{aligned}\right\} \qquad (5.4)$$

ونحصل بالنسبة للضغط والكثافة على علاقات مشابهة .

وحيث أن طريقة لاغرانج تعتمد في دراسة حركة السائل على تتبع مصير كل جزيء حجمي منه لذلك يطلق عليها **الطريقة المادية** Material method . ولكنها لم تلاق نجاحاً عملياً بسبب تعقيدها والصعوبات الرياضية التي تعترض الحلول العملية لمسائل الجريان باستخدامها .

## ٣.٥ طريقة أويلر لدراسة حركة السوائل

خلافاً لطريقة لاغرانج فإن طريقة **أويلر** Euler - Method لا تهتم بتتبع تفاصيل حركة كل جزيء حجمي من السائل ، بل تركز على معرفة سرعة الجزيئات في النقاط المختلفة من حقل الجريان ، وبالتالي على تحديد حقل السرعة وتغيره مع الزمن . وهذا يعني أنه بدلاً من ربط السرعة والقيم الهيدروديناميكية كالضغط ، بجزيء حجمي معين حسب الطريقة المادية ، فإن طريقة **أويلر** تعتبر نقطة معينة من حقل الجريان B (x,y,z) وتبحث عن تغير السرعة في تلك النقطة مع الزمن . وبذلك يتم ربط القيم الهيدروديناميكية بالمكان والزمان ، وتمثل **كتوابع** لـ t, z, y, x التي يطلق عليها **متحولات أويلر** . وعليه فإن حركة السائل تصبح محددة بمعرفة مركبات السرعة .

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{dx}{dt} = g_1(x, y, z, t) \\ v &= \frac{dy}{dt} = g_2(x, y, z, t) \\ w &= \frac{dz}{dt} = g_3(x, y, z, t) \end{aligned}\right\} \quad . \qquad (5.5)$$

وبحكم استمرارية الجريان فإن $g_3, g_2, g_1$ تمثل توابع مستمرة ، وحيدة التعين وقابلة للاشتقاق بالنسبة للمتحولات t, z, y, x . وعليه ينتج من تكامل (5.5) :

$$\left.\begin{aligned} x &= f_1(a, b, c, t) \\ y &= f_2(a, b, c, t) \\ z &= f_3(a, b, c, t) \end{aligned}\right\} \quad , \qquad (5.6)$$

حيث a, b, c ثوابت يمكن تحديدها من شروط البـــدء . فاذا عزلنا من هذه المعـادلات الزمن t نحصل على **معادلة المسار** لجزيء كان في اللحظة $t = 0$ في النقطة $C_0(a, b, c)$ .

لحساب التسارع حسب طريقة أويلر نلاحظ أنه في الحالة العامة تكون سرعة الجزيء الحجمي ( المادي ) الموجود لتوه في نقطة معينة $B(x, y, z)$ مختلفة عن سرعة الجزيء الذي غادر النقطة B أو الذي سيصل اليها ، كذلك تتغير السرعة عند انتقال الجزيء الحجمي من نقطة الى اخرى من حقل الجريان ، وعليه فإن تسارع الجزيء الحجمي كتغير زمني للسرعة يتألف من قسمين : الأول ناتج عن تغير السرعة مع الزمن في كل نقطة من حقل الجريان ، وهذا مايسمى **التغير المكاني أو الموضعي** للسرعة ، والثاني ناتج عن تغير السرعة اثناء حركة الجزيء باتجاه $x = f(t)$ ، $y = f(t)$ ، $z = f(t)$ ، وهـذا مايسمى **تغير الحمل أو الانتقال** ، ومجموعهما يساوي **التغير المادي** للسرعة .

إن حقل السرعة حسب ( 5.5 ) و ( 5.7 ) يحدد بالعلاقة الشعاعية :

$$\mathbf{V} = f(t, \mathbf{r}) \quad , \qquad (5.7)$$

حيث

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z \qquad (5.8)$$

يمثل الشعاع المكاني لنقاط حقل الجريان بالنسبة للاحداثيات الديكارتية . وعليه ينتج التفاضل **التام أو الكلي** لشعاع السرعة :

$$D\mathbf{V} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}\,dt + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{r}}\,d\mathbf{r} \qquad (5.9)$$

ومنه نجد بالاشتقاق شعاع التسارع في اتجاه الجريان :

$$\mathbf{b} = \frac{\mathbf{DV}}{\mathbf{Dt}} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V}\,\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{r}} \quad ; \quad \mathbf{V} = \frac{\mathbf{dr}}{\mathbf{dt}} \qquad (5.10)$$

$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{d}{dt}$ يمثل المكسر التفاضلي **المادي** ، **b** يمثل **التسارع المادي** Substantial acceleration ، ويمكن تحديده ( قياسه ) من قبل مراقب يتحرك مع الجزيء الحجمي المعتبر ضمن حقل الجريان ، أي من نقطة مراقب في جملة احداثيات نسبية ؛ $\partial V/\partial t$ يمثل **التسارع المكاني** Local acceleration ، ويمكن تحديده من قبل مراقب ساكن، أي من نقطة مراقبة في جملة إحداثيات **مطلقة** ، وهو يعبر عن تغير شعاع السرعة مع الزمن في نقطة معينة B(x, y, z) ويمثل الفرق :

$$\mathbf{b} - \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = \mathbf{V}\,\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{r}} \qquad (5.11)$$

**تسارع الحمل** Convectiv acceleration ؛ ويعبر عن تغير شعاع السرعة أثناء حركة الجزيء المادي . وعليه فإن العلاقة (5.10) تعني :

| التسارع المادي = التسارع المكاني + تسارع الحمل |
|---|

إن مركبات شعاع التسارع باتجاه المحاور x, y, z تنتج من (5.10) بسهولة إذا لاحظنا أن $u = dx/dt,\ v = dy/dt,\ w = dz/dt$ ، وبالتالي فإن المكسر التفاضلي المادي يأخذ الشكل التالي :

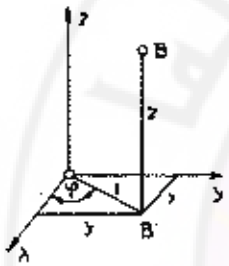
$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u\,\frac{\partial}{\partial x} + v\,\frac{\partial}{\partial y} + w\,\frac{\partial}{\partial z} \qquad (5.12)$$

وعليه نجد باعتبار مركبات شعاع التسارع تمثل التغيرات الزمنية الكلية لمركبات شعاع السرعة :

$$\left.\begin{aligned} b_x &= \frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} \\ b_y &= \frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} \\ b_z &= \frac{Dw}{Dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned}\right\} \quad (5.13)$$

حيث يمثل الطرف الأيسر مركبات شعاع التسارع المادي والطرف الأيمن مجموع مركبات شعاع التسارع المكاني وتسارع الحمل .

في حالات معينة لمسائل الجريان يفضل استخدام جملة الإحداثيات الأسطوانية r, φ, z بدلاً من الديكارتية المتعامدة x, y, z ، الشكل (١.٥) . فاذا اعتبرنا $w \equiv V_z, V_\varphi, V_r$ مركبات شعاع السرعة في الإحداثيات الأسطوانية فيكون :



الشكل ١.٥ : جملة الاحداثيات الديكارتية والاسطوانية

$$V = e_r V_r + e_\varphi V_\varphi + e_z V_z \quad (15.14)$$

حيث $e_{r,\varphi,z}$ أشعة الواحدة على محاور الإحداثيات الأسطوانية . وحيث أنه حسب الشكل (١.٥) :

$$x = r\cos\varphi \; ; \; y = r\sin\varphi \; ; \; z \equiv z \quad (5.15)$$

فإن العلاقة (5.13) تأخذ الشكل التالي :

$$\left.\begin{aligned} b_r &= \frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r\frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\varphi}{r}\frac{\partial V_r}{\partial \varphi} + V_z\frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{V_\varphi^2}{r} \\ b_\varphi &= \frac{\partial V_\varphi}{\partial t} + V_r\frac{\partial V_\varphi}{\partial r} + \frac{V_\varphi}{r}\frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + V_z\frac{\partial V_\varphi}{\partial z} + \frac{V_r V_\varphi}{r} \\ b_z &= \frac{\partial V_z}{\partial t} + V_r\frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{V_\varphi}{r}\frac{\partial V_z}{\partial \varphi} + V_z\frac{\partial V_z}{\partial z} \end{aligned}\right\} \quad (5.13\text{-a})$$

بعد تحديد حقل التسارع بموجب (5.13) فإن الدراسة التحريكية

( **الديناميكية** ) لحقل الجريان تعتمـــد أساساً على **قانون نيوتن الأساسي للتحريك** : القوة = الكتلة × التسارع ( راجع الفصل الرابع ) .

إن طريقة أويلر لدراسة حركة السوائل المعروفة باسم **الطريقة المكانيـــة** Local method تتميز بالمقارنة مع الطريقة المادية بسهولتها وخاصة من ناحية المعالجة الرياضية ، حيث يمكن الاستفادة بشكل جيد من إمكانية استخدام التحليل الشعاعي . لذلك فهي الطريقة المعتمدة بشكل أساسي في دراسة مسائل الجريان ، وخاصة تلك التي يعالجها ميكانيك السوائل التطبيقي .

## ٥.٤ تصنيف حركات السوائل ( الجريانات )

### ٥.٤.١ الجريانات غير المستقرة والمستقرة

في الحالة العامة لحركة السوائل فإن شعاع السرعة يتغير من حيث القيمة والاتجاه من نقطة الى أخرى في حقل الجريان ، كما يتغير أيضاً في نقطة محددة B (x, y, z) مع الزمن ، أي أن السرعة تكون حسب (5.5) أو (5.7) تابعاً للزمان والمكان . وسنجد فيما بعد أن الضغط p والكثافة ρ في حالة السوائل القابلة للانضغاط يتغيران أيضاً زمانياً ومكانياً :

$$p = f_1(t, \mathbf{r}) \equiv f_1(t, x, y, z) \; ; \; \rho = f_2(t, \mathbf{r}) \equiv f_2(t, x, y, z) \; . \quad (5.16)$$

يطلق على هذا النوع من حركة السوائل **الجريان غير المستقر** Unsteady flow وتظهر أمثاله عند تحريك جسم صلب في سائل ، وعنـد تفريغ سائل خزان بواسطة فتحة جانبية ، وحول جناح طائرة عند اهتزازه ، وكذلك في أنبوب الدفع لمضخة مكبسية وفي حالات أخرى كثيرة .

أما إذا تميز حقل الجريان بأن السرعة في أية نقطة محددة منه تبقى ثابتة مع الزمن ، وتتغير مـــع المكان فقط ، فيطلق على هذا النوع من حركة السوائل

**الجريان المستقر** Steady flow . وفي هذه الحالة فإن سرعة كل جزيء حجمي يصل الى نقطة معينة تساوي تماماً الى سرعة الجزيء الذي غادر تلك النقطة لتوه. وينطبق هذا على بقية القيم الهيدروديناميكية كالضغط والكثافة . فهي كلها توابع مكانية صرفة :

$$\mathbf{V} = f_1(r) \; ; \qquad p = f_4(r) \; : \qquad \rho = f_5(r) \qquad (5.17)$$

أو بشكل مركبات وبدلالة الإحداثيات الديكارتية :

$$u = f_1(x,y,z) \; ; \; v = f_2(x,y,z) \; ; \; w = f_3(x,y,z) \; ; \; p = f_4(x,y,z) \; ; \; \rho = f_5(x,y,z) \qquad (5.18)$$

وعليه فإن كافة المشتقات الجزئية بالنسبة للزمن لمركبات السرعة والضغط والكثافة تكون معدومة :

$$\frac{\partial u}{\partial t} \equiv \frac{\partial v}{\partial t} \equiv \frac{\partial w}{\partial t} \equiv \frac{\partial p}{\partial t} \equiv \frac{\partial \rho}{\partial t} \equiv 0 \quad . \qquad (5.19)$$

وهذا يعني حسب (5.13) أن كافة مركبات التسارع المكاني في حالة الجريان المستقر تكون معدومة ، ويصبح التسارع المادي مساوياً لتسارع الحمل . وفقط في حالة **الجريان الانسحابي المنتظم** المستقر Uniform flow لسائل مثالي ، الذي يتميز بسرعة ثابتة في كل نقطة من حقل الجريان قيمة واتجاهاً $\mathbf{V} = \text{const}$ ، تكون مركبات التسارع المادي جميعها مطابقة للصفر وكذلك التفاضلات التامة للضغط والكثافة :

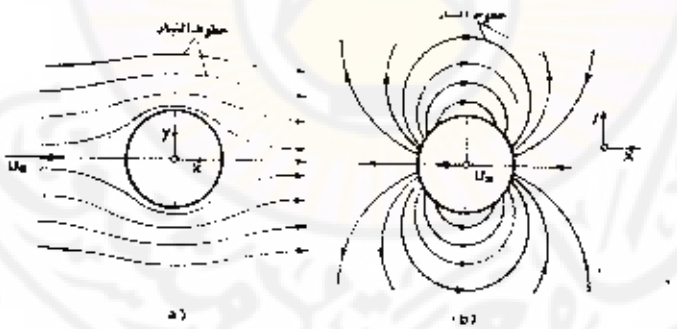
$$\frac{D\mathbf{V}}{Dt} \equiv 0 \Rightarrow \frac{Du}{Dt} = \frac{Dv}{Dt} = \frac{Dw}{Dt} = \frac{Dp}{Dt} = \frac{D\rho}{Dt} \equiv 0 \qquad (5.20)$$

بناء على ما تقدم نصل الى النتيجة التالية :

| | |
|---|---|
| الجريان غير مستقر : | $\mathbf{b} = \frac{\mathrm{D}\mathbf{V}}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V}\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{r}}$ ; $\mathbf{V} = f(t, \mathbf{r})$ |
| الجريان مستقر : | $\mathbf{b} = \mathbf{V}\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{r}}$ ; $\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = 0$ ; $\mathbf{V} = f(\mathbf{r})$ |
| الجريان مستقر انسحابي ومنتظم : | $\mathbf{b} = 0$ ; $\mathbf{V} = \text{const}$ |

إن صفة الاستقرار أو عدم الاستقرار للجريان ليست بالضرورة من الخواص الفيزيائية المميزة ، ذلك أن نفس الجريان يمكن تحت شروط معينة أن يكون مستقراً أو غير مستقر .

لنعتبر مثلاً الجريان حول أسطوانة دائرية لانهائية الامتداد ، الشكل (٢.٥) . فإذا كان التيار الوارد الى الأسطوانة ذا سرعة ثابتة بالاتجاه الأفقي تساوي $U_\infty$ ، وراقبنا الجريان من مجموعة إحداثيات x, y مثبتة على الأسطوانة، الشكل ( a – ٢.٥ ) ، فإن السرعة في كل نقطة من حقل الجريان تكون ثابتة مع الزمن من حيث القيمة والاتجاه ، وبالتالي يكون الجريان حول الأسطوانة



الشكل ٢.٥ : الجريان المستقر وغير المستقر حول أسطوانة دائرية . الجريان مستقر في جملة إحداثيات نسبية مثبتة على الجسم الساكن الذي يرد عليه تيار $U_\infty$ بسرعة a) ، الجريان غير مستقر في جملة إحداثيات مطلقة مثبتة في سائل ساكن بينما الجسم يتحرك بسرعة $U_\infty$ b) .

بالنسبة لمجموعة الاحداثيات النسبية هذه مستقراً . أما إذا حركنا الاسطوانة في سائل ساكن بسرعة ثابتة $U_\infty$ ، الشكل ( ٢.٥ - b ) ، فإن عملية الجريان حول الاسطوانة لا تختلف فيزيائياً عن العملية السابقة ، ولكن حركة السائل تكون في هذه الحالة وبالنسبة لمجموعة إحداثيات مطلقة ، أي مثبتة في السائل الساكن ، غير مستقرة ، ذلك لأن السرعة في نقطة معينة من حقل الجريان تزداد مع اقتراب الاسطوانة منها وتنقص مع ابتعادها عنها ، فهي إذن تتغير مع الزمن .

وكمثال آخر عملي فإن الجريان حول قارب ، يسبح في نهر هادىء ، يكون مستقراً بالنسبة لشخص يراقب الجريان من القارب ، وغير مستقر بالنسبة لشخص يراقبه من الشاطىء .

وبما أن دراسة الجريان المستقرة أسهل من دراسة الجريانات غير المستقرة ، فإنه حيث تتاح الإمكانية يتم اختيار محاور الإحداثيات ، بحيث يكون الجريان بالنسبة لها مستقراً .

## ٢.٤.٥ الجريانات الثلاثية ، الثنائية ، واللامحورية المقاس

إذا تميز حقل الجريان بأن المركبات الثلاثة لشعاع السرعة w ، v ، u تختلف عن الصفر ، فيطلق على هذا النوع من حركة السوائل **الجريان الثلاثي المقاس** ( البعد ) Three-dimensional أو **الفراغي** ، وتنطبق عليه العلاقات (5.5) أو (5.18) حسب ما يكون غير مستقر أو مستقراً .

وعندما يتميز حقل الجريان بأن كافة الجزيئات الواقعة في مستويات موازية لمستو ثابت يتم تحديده تقوم بنفس الحركة تماماً ، وبالتالي تكون صورة الجريان في هذه المستويات المتوازية واحدة ، وكافة جزيئات السائل الواقعة على اي مستقيم عمودي عليها تتعرض لنفس المصير ولا تقوم بأية حركة باتجاهه ، فنسمي هذا النوع من حركة السوائل **الجريان الثنائي المقاس** Two-dimensional

أو المستوي ، لأنه يكتفى بدراسة الجريان في مستو واحد فقط مثل المستوي yx . ويتحدد حقل السرعة بمركبتين فقط لشعاع السرعة u و v مختلفتين عن الصفر ، بينما تنعدم المركبة الثالثة في كامل حقل الجريان . وعليه يكون في حالة الجريان المستقر :

$$u = f_1(x,y) \; ; \; v = f_2(x,y) \; ; \; w \equiv 0 \; ; \; \frac{\partial u}{\partial z} \equiv \frac{\partial v}{\partial z} \equiv 0 \quad . \quad (5.21)$$

هناك حالات مختلفة وهامة من مسائل الجريان العملية يمكن معالجتها على أساس اعتبارها جريانات مستوية . فالجريان العمودي على الخط المولد لأسطوانة لانهائية الامتداد هو جريان ثنائي المقاس وتكفي دراسة الجريان حول دائرة في المستوي yx ، الشكل (٢.٥) . كما أن الجريان حول الجناح الحامل لطائرة Airfoil ، والذي امتداده أكبر بكثير من طول وتر مقطعه ، يمكن اعتباره بالنسبة للمقاطع البعيدة نسبياً عن نهايتيه جريانا مستوياً ، وبالتالي الاكتفاء بدراسة الجريان حول بروفيل ( مقطع ) Profile منه .

وعندما يتميز حقل الجريان بأن شعاع السرعة يتعلق باتجاه محور واحد فقط ( x مثلاً ) ، بينما تكون الحركة معدومة في الاتجاهين المتعامدين مع هذا المحور ( z , y ) ، فنسمي هذا الجريان وحيد المقاس One-dimensional أو خطياً . وتكون المعادلة الحركية لهذا الجريان في الحالة المستقرة :

$$u = f(x) \; , \; v \equiv w \equiv 0 \; ; \; \frac{\partial u}{\partial y} \equiv \frac{\partial u}{\partial z} \equiv 0 \qquad (5.22)$$

إن الجريان في الأنابيب والأقنية والمجاري المشابهة ، يتم بصورة أساسية في اتجاه محاور هذه الأنابيب والأقنية ، وبالتالي تمكن دراسته كجريان خطي يخضع للعلاقة ( 5.22 ) ، اذا اعتبرنا المحور x منطبقاً على محور الأنبوب s والسرعة u تمثل سرعة التيار الحجمي الموزعة بانتظام على كامل مقطع الأنبوب المتعامد مع محوره ، والذي يمكن ان يتغير باتجاه s .

في واقع الأمر فان كافة الجريانات هي ثلاثية المقاس . ولكن إهمال إحدى مركبات السرعة ، بسبب كونها أصغر بكثير من المركبتين الأخريتين ، ودراسة الجريان على أساس أنه مستو ، يؤدي لتسهيلات رياضية كبيرة ، ويسمح بتطبيق طرق خاصة لميكانيك السوائل تقدم حلولاً عملية تكون أقرب إلى الواقع ، كلما أمكن اعتبار الجريان مثالياً ( عديم الاحتكاك ) . أما دراسة الجريانات على أساس أنها خطية فينظر اليها كخطوة تقريبية أولية فقط . فالسرعة المحورية في الأنابيب لاتتغير فقط في اتجاه المحور وانما في الاتجاه العرضي أيضاً . لذلك يعمد إلى إدخال قيم ثابتة تجريبية في القوانين المستخدمة لحساب مثل هذه الجريانات كجريانات خطية بهدف تقريب النتائج قدر الامكان من الواقع والاستفادة من سهولة الدراسة على هذا الأساس .

## ٣.٤.٥ الجريانات الصفائحية والمضطربة

إن تصنيف الجريانات حسب ( ١.٤.٥ ) و ( ٢.٤.٥ ) ينطبق على الجريانات **المثالية** ( $\eta = 0$ ) **والحقيقية** ( $\eta > 0$ )

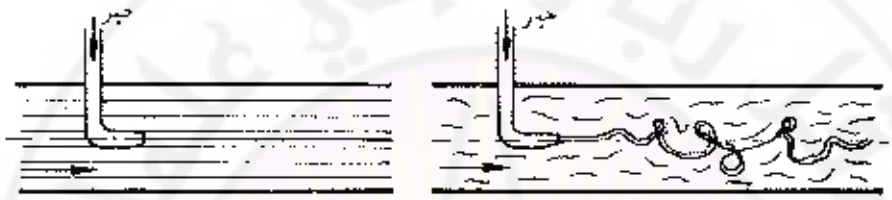
تصنف الجريانات الحقيقية ، التي سنعالجها بالتفصيل بعد دراسة الجريانات المثالية ، حسب طبيعة الجريان إلى نوعين أساسيين : الجريانات **الصفائحية والمضطربة** Laminar and turbulent flows .

يتميز الجريان الصفائحي بأن جزيئات السائل تتحرك بشكل طبقات أو **صفائح** Laminar رقيقة متوضعة فوق أو داخل بعضها البعض ، بحيث لايحدث اثناء الحركة أي تمازج أو اختلاط بين جزيئات الطبقات . وتنزلق كل طبقة على الأخرى بسرعة تزداد كلما ابتعدنا عن جدار الجسم .

وبالعكس من ذلك يتميز الجريان المضطرب بأن جزيئات السائل تقوم بحركة اعتباطية لاتخضع لنظام معين تؤدي لعملية إختلاط وتمازج مستمر بين

الجزيئات وفي كافة الاتجاهات . وينجم عن ذلك أن قيم السرعة وكذلك الضغط في نقطة محددة من حقل الجريان تتغير باستمرار مع الزمن .

إن الغالبية العظمى من الجريانات العملية تكون ذات طبيعة مضطربة . ويكون الجريان في الأنابيب والأقنية مثلاً صفائحياً عندما يكون السائل في الحالة العامة ذا لزوجة كبيرة أو أن سرعته في اتجاه محور الأنبوب أو القناة

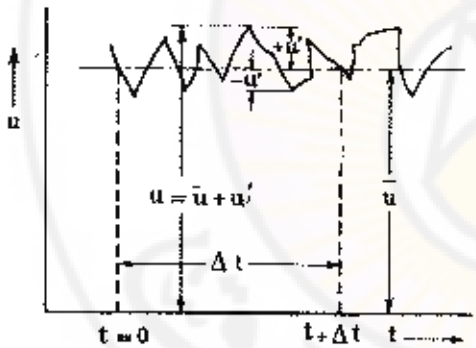



الشكل ٣ . ٥ : تجربة رينولدز لتوضيح الجريان الصفائحي حيث $V < V_{cr}$ ( a ) ؛ والمضطرب حيث $V > V_{cr}$ ( b ) .

صغيرة نسبياً . وتؤكد التجارب ، التي قام بها لأول مرة « رينولدز » عام 1883 ، أن الجريان يبقى صفائحياً طالما أن السرعة لم تتجاوز قيمة معينة يطلق عليها **السرعة الحرجة** Critical velocity $V_{cr}$ . وتصبح حركته مضطربة عندما تتجاوز السرعة قيمة $V_{cr}$ . ويمكن إثبات ذلك تجريبياً اذا جعلنا خيطاً رفيعاً من سائل ملون بالحبر ينبعث من فوهة نفاثة صغيرة المقطع داخل أنبوب يجري فيه ماء ، فنلاحظ أن خيط الحبر يأخذ اتجاهاً مستقيماً في حالة الجريان الصفائحي ( $V < V_{cr}$ ) ، الشكل ( ٣.٥ — a ) . أما إذا زادت سرعة الماء في الأنبوب عن قيمة معينة ، يمكن تحديدها ، فإن خيط الحبر يتفكك بعد مسافة قصيرة من فوهة النفاثة ويلوّن الماء في كامل مقطع الأنبوب ، الشكل ( ٣.٥ — b ) ، مما يؤكد طبيعته المضطربة ( $V > V_{cr}$ ) .

على أساس ماتقدم فان الجريان الصفائحي يمكن أن يكون مستقراً أو غير

مستقر . أما الجريان المضطرب فهو دائماً غير مستقر . ولكن اذا نظرنا الى الجريان المضطرب ككل ولاحظنا أنه ذو اتجاه رئيسي دائماً ، فبالإمكان ، كما سنرى عند الدراسة التفصيلية للجريانات المضطربة ، أن نتصور نموذجاً حركياً لهذا الجريان يعتمد على تحليل الحركة المضطربة إلى حركة رئيسية وحركات عرضانية عليها مشوشة . فاذا حسبنا سرعة **الجريان الرئيسي** خلال فترة زمنية طويلة نسبياً $\Delta t$ فان هذه **السرعة الوسطية زمنياً** $\bar{V}$ Temporal mean Velocity في نقطة معينة تكون ثابتة مع الزمن ، وبالتالي يمكن اعتبار الجريان الرئيسي **شبه مستقر Quasi-steady** ، بينما **تتذبذب قيمة السرعة الآنية** $V$ **في تلك النقطة حول قيمة** $\bar{V}$ **بمقدار** $V'$ . فاذا فرضنا $\bar{u}$ ، $\bar{v}$ ، $\bar{w}$ مركبات $\bar{V}$ في نقطة معينة ؛ $u'$ ، $v'$ ، $w'$ تمثل **تذبذبات السرعة** Velocity fluctuation التي يمكن أن تكون سالبة أو موجبة ؛ $u$ ، $v$ ، $w$ مركبات السرعة الآنية فتكون ( الشكل ٤.٥ ) :




الشكل ٤.٥ : التذبذب المضطرب لمركبة السرعة $u$ في الجريانات حول قيمة السرعة الوسطية زمنياً $\bar{u}$ . نفس الشيء ينطبق على المركبتين $v$ ، $w$ والضغط $p$ .

$$u = \bar{u} + u' \; ; \; v = \bar{v} + v' \; ; \; w = w + w \; , \qquad (5.23)$$

ويكون بالنسبة للضغط أيضاً :

$$p = \bar{p} + p' \; . \qquad (5.24)$$

على هذا الأساس تتبسط دراسة الجريانات المضطربة ، ولكنها تبقى أعقد بكثير من دراسة الجريانات الصفائحية .

ويجدر التنويه هنا ، كنتيجة مسبقة ، أن الانتقال من الجريان الصفائحي إلى المضطرب لا يتعلق بسرعة الجريان فقط ، وانما أيضاً بالطول المميز للجسم L وبلزوجة السائل الحركية ν . وبالتحديد فهو يتعلق **بالعدد التشابهي** (اللابعدي)

$$\mathrm{Re} = \frac{V\,L}{\nu} \qquad (5.25)$$

الذي أعطاه عـــام 1908 الفيزيائي الألماني **سومرفيلد** A. Sommerfeld (1868 – 1951) اسم **عدد رينولدز** Reynolds – number ( في [7] ) تخليداً للعالم الانجليزي **رينولدز** مكتشف **نظرية الاضطراب** . فاذا كان $\mathrm{Re}_{cr}$ يمثل **عدد رينولدز الحرج** فيكون :

| | | |
|---|---|---|
| $\mathrm{Re} < \mathrm{Re}_{cr}$ | عندما | الجريان صفائحياً |
| $\mathrm{Re} > \mathrm{Re}_{cr}$ | عندما | الجريان مضطرباً |

. (5.26)

## ٤.٤.٥ الجريانات تحت الصوتية ، الصوتية ، فوق الصوتية

حسب قابلية السائل للانضغاط أو التمدد وبالتالي لتغيير كثافته تحت تأثير الضغط ودرجة الحرارة نميز بين **جريانات غير قابلة للانضغاط** ($\rho = \mathrm{const}$) Incompressible flowe **وجريانات قـــابلة للانضغـــاط** ($\rho \neq \mathrm{const}$) Compressible flows .

في حدود السرعات الصغيرة جداً والصغيرة فإن تغير الكثافة في حالات عملية عديدة للجريانات يكون صغيراً لدرجة يمكن إهماله ومعالجة هذه الجريانات كأنها غير قابلة للانضغاط . أما عند سرعات متوسطة أو كبيرة وخاصة كبيرة جداً فإن تغير الكثافة يكون كبيراً ويؤثر بشكل حاسم على حركة جزيئات السائل في حقل الجريان وبالتالي لا يجوز إهماله .

كمقياس لتحديد مدى تأثير الإنضغـــاطية على القيم الأيروديناميكية والغازديناميكية لحقل الجريان يستخدم **العدد التشابهي** :

$$Ma = V/a \qquad (5.27)$$

المعروف باسم **عدد ماخ** Mach-number والذي يمثـــل النسبة بين السرعة الموضعية للجريان V وسرعة الصوت a . وقد أدخله **أكاديت** Ackeret عام 1928 تخليداً للعالم **ماخ** E. Mach (1838 1916) (حسب [7a]) . وحسب القيمة العددية لـ Ma فإننا نميز بين **الجريانات تحت الصوتية** Subsonic ويكون $Ma < 1$ ؛ **الجريانات الصوتية** Sonic ويكون $Ma = 1$ ؛ **الجريانات فوق الصوتية** Suppersonic ويكون $Ma > 1$ . وبتقسيم أدق نميز حسب [81] المجالات التالية :

| | |
|---|---|
| $Ma < 0,3$ | تأثير الانضغاطية مهمل ، الجريان يعالج كأنه غير قابل للانضغاط |
| $0,3 < Ma < 0,5$ | جريان تحت صوتي منخفض |
| $0.5 < Ma < 0,8$ | جريان تحت صوتي عالٍ |
| $0,8 < Ma < 1,2$ | جريان قرب صوتي Transsonic يظهر فيه مجال تحت وفوق صوتي |
| $1,2 < Ma < 3$ | جريان فوق صوتي بالمعنى الضيق للكلمة |
| $Ma > 3$ | جريان فوق صوتي عالٍ Hypersonic |

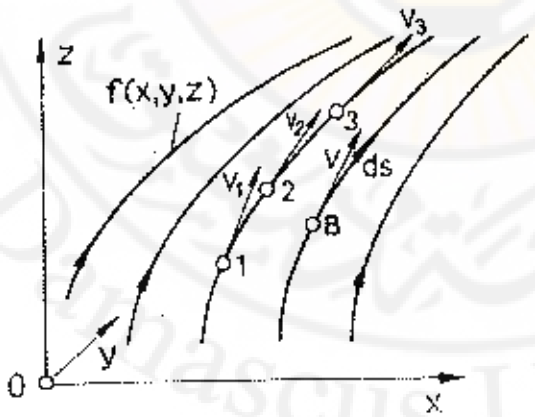
## ٥.٥ خط المسار ، خط التيار ، أنبوب التيار

إن طريقة **لاغرانج** المادية لدراسة حركة السوائل (٢٠٥) تعتمد على معرفة الطريق التي تسلكها كل جزيئة سائلة ، أي **خط المسار** Path line . فإذا

ونمثل عدداً من هـذه الخطوط لجزيئات مختلفة ، بعد استخراج **معادلة خط المسار** ، أو بعد تصويرها فوتوغرافياً باستخدام إحدى **طرق التوثية** Visualization كالتلوين بالحبر أو الدخان أو رش نُدف من المواد الصلبة الخفيفة مثل برش وريقات الألمنيوم بقياس 0,2 – 0,5 mm [4] [35] [82] ، فنحصل على صورة واضحة للجريان نطلق عليها **صورة خطوط المسار** .

خط المسار يمثل الطريق الفعلية التي تسلكها الجزيئة السائلية في حقل الجريان ، ويبين اتجاهات السرعة التي تأخذها الجزيئة تباعاً مع الزمن .

وبموجب طريقة أويلر المكانية ، التي تعتمد على تحديد حقل السرعة من حيث القيمة والاتجاه ، يمكن الحصول على صورة واضحة للجريان برسم مجموعة من المنحنيات المتجاورة ، بعد حسابها نظرياً أو تحديدهـــا تجريبياً بالتصوير الفوتوغرافي ، التي تكون في لحظة زمنية معينـة أشعة السرعة لكافة الجزيئات السائلية الواقعة عليها مماسة لها في كل نقطة . أمثال هذه المنحنيات تسمى **خطوط التيار** Stream line ، ويطلق على مجموعها **صورة خطوط التيار** أو باختصار **صورة الجريان** ، الشكل (٥.٥) .




الشكل ٥.٥ :
تعريف خط التيار
واستخراج معادلته التفاضلية

خط التيار يمثل في لحظة زمنية معينة المنحني الذي يكون المماس عليه في كل نقطة منطبقاً على شعاع السرعة في تلك النقطة .

إن خطوط التيار تمثل إذن واسطة هندسية لتوضيح حركة السائل . وقد استخدمناها قبلاً في الشكل (٢.٥) لتبيان الفرق بين الجريانات المستقرة وغير المستقرة. ويتضح أنه من معرفة صورة خطوط التيار يمكن تحديد اتجاه الجريان في كل نقطة . إذ يكون مطابقاً لاتجاه شعاع السرعة ، تماماً كما هو الحال بالنسبة لخطوط القوة لحقل قوى مغناطيسي مثلاً ، التي تؤثر على اتجاه القوة الموضعية في كل نقطة .

من الناحية الرياضية فإن خط التيار يمثل المنحني التكاملي لميل شعاع السرعة. فإذا كان ds عنصراً خطياً من خط التيار المار في النقطة B ، V شعاع السرعة في تلك النقطة ، الشكل (٥.٥) ، فيكون تعريفاً $\mathbf{V} \parallel d\mathbf{s}$ ، وبالتالي يكون الجداء الشعاعي :

$$\mathbf{V} \times d\mathbf{s} = 0 \qquad (5.28)$$

يمثل **المعادلة الشعاعية** لخط التيار . فإذا حللنا V إلى مركباته بموجب (5.1) ، وكذلك ds ، حيث :

$$d\mathbf{s} = \mathbf{i}\,dx + \mathbf{j}\,dy + \mathbf{k}\,dz \qquad (5.29)$$

وكتبنا (5.28) بشكل محدّدة ينتج :

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u & v & w \\ dx & dy & dz \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}} \qquad (5.30)$$

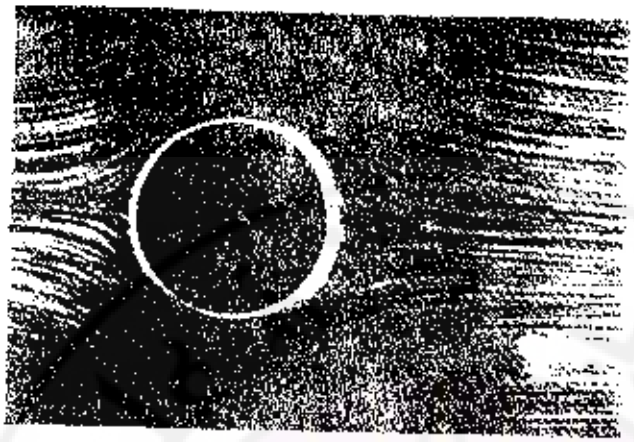
التي تمثل **المعادلة التفاضلية** لخط التيار بصيغتها العامة . وعلى أساسها يمكن استخلاص النتيجة الهامة التالية :

في حالة الجريانات غير المستقرة تكون مركبات السرعة تابعة للمكان والزمان ، وبالتالي فإن خطوط التيار تتغير شكلها مع الزمن ، ولكن يمكن الحصول على صورة آنية للجريان في لحظة زمنية معينة ، وذلك بتكامل العلاقة (5.30) على أساس اعتبار الزمن ثابتاً . وواضح ان خطوط التيار الآنية لاتكون متطابقة مع خطوط المسار . أما في حالة الجريان المستقر ، وباعتبار أن مركبات السرعة لاتتغير قيمتها مع الزمن في كل نقطة من حقل الجريان ، فإن خطوط التيار تبقى محافظة على شكلها وموضعها وتكون متطابقة مع خطوط المسار :

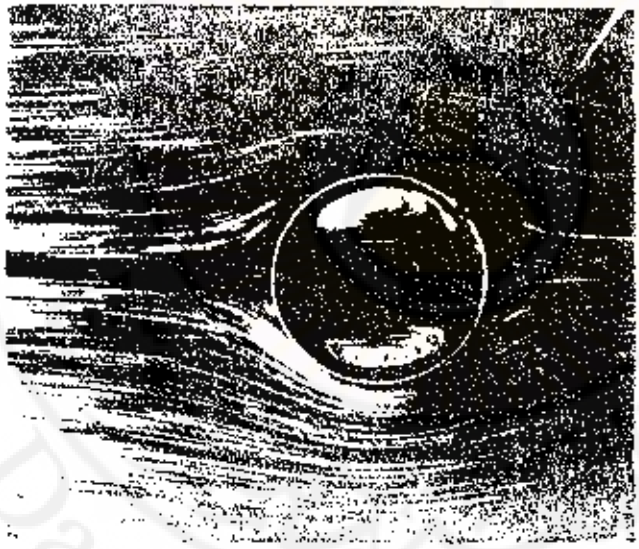
**في الجريان المستقر تكون صورة خطوط التيار متطابقة مع صورة خطوط المسار**

ومن الجدير بالانتباه أن صفة الاستقرار أو عدم الاستقرار لنفس الجريان تتعلق باختيار جملة الاحداثيات ، وبالتالي فان صورة الجريان تتغير وفقاً لهذا الاختيار . والمهم هنا هي الحركة النسبية بين جملة الاحداثيات المختـــارة هذه والجسم المعتبر . وعليه لافرق بين صورة الجريان حول جسم ساكن في تيار يجري حوله ، وبين صورة الجريان حول جسم يتحرك في سائل ساكن ، إذا راقبنا الحركة في الحالة الأولى من جملة احداثيات ثابتة ، وفي الحالة الثانية من جملة احداثيات تتحرك مع الجسم بنفس السرعة ؛ ففي الحالتين يكون الجسم ساكناً بالنسبة لجملة الاحداثيات ، الشكل (٦.٥) ، (٧.٥) ، ( ٨.٥ ) .

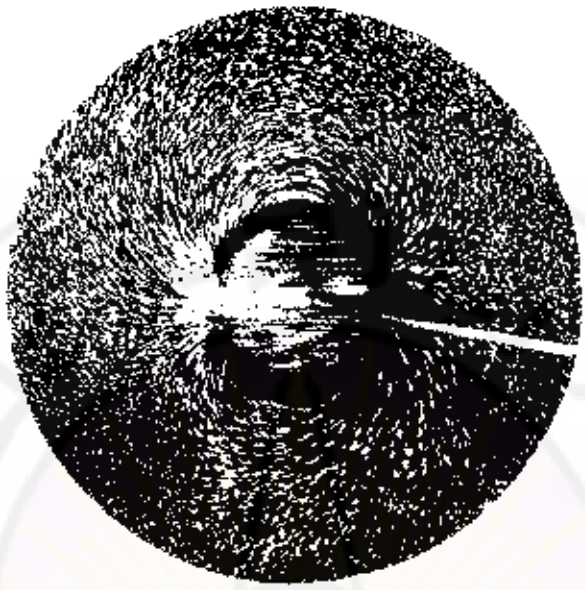
لقد طور ميكانيك السوائل التجريبي طرقاً متعددة وعملية لتوثيق الجريان وإظهـــار خطوط التيار والمسار وتصويرها فوتوغرافياً بوسائل وطرق حديثة خاصة في التصوير والاضاءة . وتعتمد المخابر ومراكز البحث المتطورة ، مثلاً [8] ، في دراساتها التجريبية لأهم المسائل الهيدروديناميكية والأيروديناميكية على هذه الطرق . ذلك أن معرفة صورة الجريان تسهل جداً الفهم الفيزيائي لعملية الجريان ، وتمهد بالتالي لايجاد الحلول العملية لها .



الشكل ٦.٥ : الجريان المثالي حول أسطوانة حسب براندل ( انظر [28] ) . الاسطوانة ثابتة والكاميرا ثابتة والجريان من اليسار الى اليمين ، خطوط التيار تعود فتلتقي خلف الاسطوانة وتكون صورة متناظرة للجريان ( انظر الشكل ٢.٥ — د ) .



الشكل ٧.٥ : الجريان المثالي حول اسطوانة حسب إيك [8] . الاسطوانة الممثلة بسلك دائري تتحرك الى اليمين في سائل ساكن ( اتجاه الجريان الى اليسار ) والكاميرا تتحرك بنفس السرعة . ونلاحظ في الصورة أن الجريان الذي يظهر داخل الاطار الدائري (ثنائية مستوية) لا يؤثر على الجريان حوله ، لأن صورة الجريان مطابقة تماماً للشكل ( ٦.٥ ) .

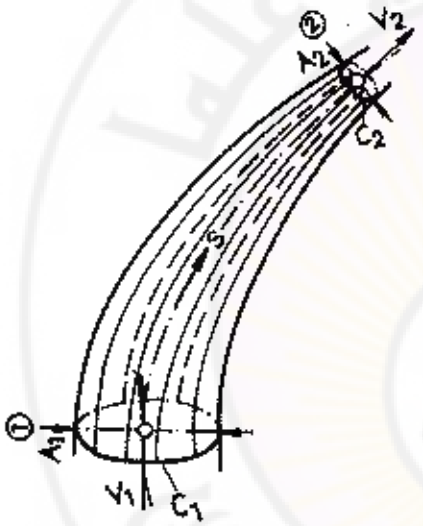


الشكل ٨٠٥ : الجريان المثالي حول اسطوانة تتحرك في سائل ساكن كما تسجلها كاميرا ثابتة ، حسب [يك ١٨] . خطوط التيار المطلقة تمثلها حزمتان من الدوائر تبدأ من محيط الاسطوانة ، التي عوض عنها بسلك دائري ، وتنتهي عليه .

في المصادر المختصة بتكنيك القياسات في السوائل ، مثلاً [ 35 ] ، يوجد شرح واف لطرق تزئية الجريان والمواد المستعملة لذلك في الحالات المختلفة وتبعاً لهدف التجربة ولنوع السائل المعتبر عندما يكون مائعاً كالماء أو غازاً كالهواء . ودون التعرض للتفاصيل نكتفي بالاشارة إلى أن أهم هذه الطرق تعتمد على اضافة مواد مرئية صغيرة الحجم وخفيفة الوزن على السطح الخارجي للسائل أو في داخله بحيث تقوم بحركة جزيئات السائل . هذه المواد يمكن أن تكون صلبة مثل ندف رقيقات الالمنيوم أو مادة الـ Platherm الزغوية البلاستيكية أو مائعة ملونة مثل الحبر أو مادة الـ Pinakryptol الحمراء أو الخضراء وأحياناً اللبن المفروز (العيران) ، أو غازية مثل فقاعات الهيدروجين أو « غيمة » بخار التيلور Tellur أو دخان بعض الزيوت المحروقة . بالاضافة لذلك تستخدم لتزئية الجريان طرق ضوئية وكهربائية . وكمصدر اضاءة عند التصوير الفوتوغرافي يستخدم الفلاش Flash وبعض المساحيق المضيئة لفترة زمنية محددة .

الحصول على صورة لخطوط المسار يفترض أن تكون الكثافة العددية للجزيئات المادية المنثورة على السائل قليلة وزمن الاضاءة طويل . أما الحصول على صورة لخطوط التيار فتنثر الجزيئات المادية بكثافة عددية أكبر ويؤخذ زمن الاضاءة أقصر . وعندئذ ترسم كل جزيئة منثورة على الصفيحة الفوتوغرافية ( الفيلم ) خطاً قصيراً . هذه الخطوط تكمل بعضها البعض لتكون حزمة من خطوط التيار .

من مفهوم خط التيار نصل بسهولة إلى مفهوم **أنبوبة التيار** Stream tube . فاذا اعتبرنا داخل حقل الجريان منحنياً مغلقاً $C_1$ ، الشكل ( ٩.٥ ) ، وأخذنا كافة خطوط التيار التي تمر من نقاط هذا المنحني فنحصل على سطح أنبوبي الشكل يطلق عليـــه : أنبوبة أو « سطح » التيار .



الشكل ٩.٥ : تتشكل أنبوبة التيار من خطوط التيار المارة من نقاط المنحني المغلق $C_1$ ، $C_2$ .

إن انبوبة التيار لا تسمح بنفوذ السائل عبر جدارها ، لأن ذلك سيعني وجود مركبة للسرعة عمودية على خط التيار ، وهذا مايتناقض مع تعريفه . وعليه فان كل أنبوبة تيار يمكن النظر إليهـا كأنبوب ذي جدران صلبـة . فاذا قسمنا كامل حقل الجريان إلى عدد محدود من أنبوبات التيار نحصل على تصور مجسم عن الجريان دون أن تتغير صورته . وتبقى في حالة الجريان المستقر كل أنبوبة تيار محافظة على شكلها وموضعهـا في حقل الجريان . أمـا في حالة الجريان غير المستقر فيكون لأنبوبة التيار شكل آني فقط ، ذلك أنـــه بين لحظة وأخرى تتبدل الجزيئات السائلة التي تكوّن أنبوبة التيار .

يطلق على كمية السائل داخل أنبوبة التيار اسم **خيط التيار** Stream filament

وتتحرك جزيئاته في اتجاه وحيد منطبق على محور انبوبة التيار s المسمى **خط التيار المركزي** ( الشكل ٥.٩ ) . ومن هنا جاءت تسمية دراسة الجريانات وحيدة البعد ، كالجريان في الأنابيب مثلاً ، باسم **نظرية خيط التيار** ( راجع ٨ ) حيث يفترض أن السرعة ( المثالية أو الوسطية ) تكون موزعة بانتظام على كامل مقطع الأنبوبة وتتغير في اتجاه الجريان فقط . وباعتبار أن السائل لايمكن أن يتسرب عبر جدار أنبوبة التيار فإن كتلة السائل التي تعبر أي مقطع من مقاطعها في واحدة الزمن تبقى ثابتة . وهذا مايعبر عنه **بشرط الاستمرار** Continuity condition لأنبوبة التيار .

## ٦.٥ أسئلة مراجعة وتمارين

س ٥.١ : اشرح الفرق بين الطريقة المادية والمكانية لدراسة حركة السوائل .

س ٥.٢ : اشرح أسس تصنيف حركة السوائل وعدّد أهم أصناف الجريانات .

س ٥.٣ : عرّف الجريان المستقر وغير المستقر . هل الاستقرار خاصة فيزيائية ؟

س ٥.٤ : ما هو التسارع المادي لجزيئة سائلية ؟ استخرج معادلته في اتجاه x .

س ٥.٥ : اشرح مفهوم خط المسار وخط التيار واستخرج المعادلة التفاضلية للأخير .

س ٥.٦ : اشرح أسس نظرية خيط التيار وبيّن أهميتها التطبيقية .

ت ٥.١ : إذا كان حقل الجريان لسائل محدداً بمركبات السرعة :

$$u = x + t \quad ; \quad v = -y + t \quad ; \quad w = 0$$

فالمطلوب :

١ — أوجد معادلة خطّ التيار اللحظي ، ومعادلة خطّ التيار المارّ من النقطة $B(-1, -1)$ في اللحظة $t = 0$ . ٢ — أوجد معادلة خط المسار للجزيئة السائلية التي كانت في اللحظة $t = 0$ موجودة في النقطة $B(-1, -1)$ . ٣ — إذا أصبح حقل الجريان مستقراً ، بيّن كيف يمكن الحصول على صورة الجريان وحقل السرعة .

الحل : الجريان ثنائي المقاس ($w = 0$) وغير مستقر $V = f(x, y, t)$ .

١ — من (5.30) نتج المعادلة التفاضلية لخط التيار :

$$\frac{dx}{x+t} = \frac{dy}{-y+t} \quad .$$

بمكاملة هذه العلاقة على أساس أن الزمن ثابت ، نجد :

$$\ln(x+1) = -\ln(-y+1) + \ln C \Rightarrow (x+1)(-y+1) = C \quad (a)$$

فإذا أعطينا للثابت C قيماً معينة فإننا نحصل في كل لحظة t على حزمة من خطوط التيار التي تمثلها قطوع زائدة . وينتج بصورة خاصة عندما $t = 0$ ، $x = -1$ ، $y = -1$ أن $C = -1$ . وبالتالي تصبح :

$$xy = 1 \quad , \quad (b)$$

وهي معادلة قطع زائد متساوي الأضلاع ، ويكون خط التيار المار من النقطة B واقعاً في الربع الثالث من المستوي yx .

٢ — من (5.4) يمكن أن نكتب :

$$u = \frac{dx}{dt} = x + t \quad ; \quad v = \frac{dy}{dt} = -y + t \ .$$

بوضع الزمن t منفرداً في الطرف الأيمن لكل من هاتين المعادلتين نحصل على معادلتين تفاضليتين خطيتين غير متجانستين وذات أمثال ثابتة حلهما العام معطى حسب [42] بالمعادلتين:

$$x = C_1 e^t - t - 1 \quad ; \quad y = C_2 e^{-t} + t - 1 \quad . \quad (c)$$

حيث $C_{1,2}$ ثابتين . ومنه يمكن تحديد إحداثي كل نقطة من خط مسار الجزيئة بدلالة الزمن t . وبصورة خاصة ينتج خط المسار للجزيئة التي كانت في اللحظة $t = 0$ في النقطة $B(-1,-1)$ بعد التعويض في (c) وعزل الزمن t :

$$C_1 = C_2 = 0 \Rightarrow x = -t - 1 \quad ; \quad y = +t - 1 \Rightarrow x + y = -2 \quad (d)$$

وهي معادلة مستقيم ، بينما خط التيار المار من نفس النقطة يمثله ضلع قطع زائد .

٣ — في حالة الجريان المستقر تصبح مركبتا السرعة مستقلتين عن الزمن :

$$v = -y \ , \ u = x \ .$$

ونجد بسهولة معادلة خط التيار من الشكل :

$$xy = \text{const} \quad , \quad (e)$$

التي تمثل حزمة من القطوع الزائدة المتساوية الأضلاع حيث يمكن للثابت أن يأخذ قيماً موجبة أو سالبة ويكون المحوران x و y مستقيمان مقاربان لهذه القطوع في اللانهاية . فإذا رسمنا حزمة من خطوط التيار وحددنا في نقاط معينة $(x, y)$ شعاع السرعة من حيث القيمة ، $|V| = \sqrt{u^2 + v^2}$ ، والاتجاه نجد بسهولة أن السائل يتحرك من الأعلى والاسفل ويشكل في النقطة $x = y = 0$ نقطة ركود تنعدم فيها السرعة . فاذا فرضنا ان خط التيار المنطبق

على المحور x قد « تصلب » ، كأن نتصوره يمثل أثر صفيحة مستوية أفقية ، نجد أن حقل الجريان يمثل حركة سائل قادم من اللانهاية ويرتطم بوجهي هذه الصفيحة .

ت ٢.٥ : اذا كانت مركبات شعاع السرعة لحقل الجريان معطاة :

$$u = -x \; ; \; v = 2y \; ; \; w = 5 - z \; ,$$

أوجد معادلة خط التيار المار من النقطة B ( 2, 1, 1 ) ؟

الحل : الجريان ثلاثي البعد ومستقر ، وحسب (5.30) تنتج المعادلة التفاضلية لخط التيار :

$$-\frac{dx}{x} = \frac{dy}{2y} = \frac{dz}{5-z} \; .$$

فاذا أخذنا المعادلة الاولى منها وأجرينا التكامل نجد :

$$-\frac{dx}{x} = \frac{dy}{2y} \Rightarrow x\sqrt{y} = \text{const} \quad , \qquad (a)$$

واذا أخذنا المعادلة الثانية وأجرينا التكامل نجد أيضاً :

$$-\frac{dx}{x} = \frac{dz}{5-z} \Rightarrow \frac{5-z}{x} = \text{const} \quad . \qquad (b)$$

وبوضع (a) = (b) نحصل على المعادلة العامة لخط التيار :

$$x\sqrt{y} = (5-z)/x = \text{const} \quad , \qquad (c)$$

التي تنتج منها معادلة خط التيار المار من النقطة B بعد تعويض قيمة إحداثييها :

$$x\sqrt{y} = (5-z)/x = 2 \quad . \qquad (d)$$

## ٦ معادلة الاستمرار أو قانون انحفاظ الكتلة

اذا اعتبرنا حقل الجريان ( أو أي جزء منه ) لسائل ما فنقول إن حركة السائل في هذا الحقل ( أو الجزء ) مستمرة ، اذا لم تكن هناك أية تجاويف Cavity أو مناطق انقطاع لايشغلها السائل . في هذه الحالة فان كتلة السائل في واحدة الزمن التي تعبر أي سطح مغلق مثبت في حقل الجريان تبقى ثابتة . وهذا مايطلق عليه قانون انحفاظ الكتلة أو المادة . ويطلق على المعادلة التفاضلية التي تعبر عن هذا القانون معادلة الاستمرار Continuity equation ، التي صاغها لأول مرة العالم الروسي لومونوسوف M. W. Lomonossow (1711–1765) عام 1748 [16] .

## ١.٦ معادلة الاستمرار وحيدة البعد ( نظرية خيط التيار )

لاشتقاق معادلة الاستمرار في صياغتها البسيطة نعتبر أنبوبـــة التيار في الشكل(٩.٥)،التي تمثل **جملة فيزيائية مفتوحة أو جملة جريان** Flow system ، حيث تدخل مقطع الدخول ① الذي مساحته $A_1$ والمحدد بالمنحني المغلق $C_1$ كتلة معينة من السائل تخرج بكاملها من مقطع الخروج ② الذي مساحته $A_2$ والمحدد بالمنحني المغلق $C_2$ .

بفرض أن خيط التيار مستمر وخالٍ من الينابيع والبالوعات ، أي أنه لا يمكن أن يظهر أي سائل جديد أو يختفي جزء من السائل المعتبر ، ولتكن $\rho = f(s)$ كثافة السائل التي نفرضها متغيرة في اتجاه الجريان s ، فتكون كتلة السائل في واحدة الزمن التي تعبر مقطعاً ما من أنبوبة التيار مساحته A والسرعة الموزعة عليه بانتظام V هي : $\dot{m} = \rho V A$ . وتبقى هذه الكتلة بموجب قانون انحفاظ المادة ثابتة على طول أنبوبـــة التيار . وعليه تأخذ **معادلة الاستمرار للجريانات وحيدة البعد المستقرة** الصياغة التالية :

$$\boxed{\dot{m} = dm/dt = \rho V A = const \;\; (V \| A); \Rightarrow \; d\dot{m} = 0} \qquad (6.1)$$

حيث $dm$ كتلة السائل التي تعبر A خلال الفترة الزمنية القصيرة جداً dt ، A شعاع الناظم على السطح . يطلق على $\dot{m}$ **غزارة التدفق الكتلي** Rate of mass discharge أو **التيار الكتلي** ، وله واحدة القياس .

$$[\dot{m}] = [m/t] = kg\ s^{-1} = \frac{1}{9,81} kp\ s\ m^{-1} \qquad (6.2)$$

بينما يسمى الجداء $\rho V$ **كثافة التيار الكتلي** . أما قيمة الثابت فتنتج من تطبيق (6.1) على مقطع مساحته معروفة بالإضافة لقيمة السرعة والكثافة . ويؤخذ

عادة مقطع الدخول ① أو الخروج ② (الشكل ٩٠٥) حيث ينتج :

$$\rho_1 V_1 A_1 = \rho_2 V_2 A_2 = \text{const} \qquad (6.3)$$

في حالة الجريانات غير القابلة للإنضغاط ، أي ذات الكثافة الثابتة $\rho = \text{const}$ تأخذ معادلة الاستمرار (6.1) شكلاً أبسط :

$$\boxed{\dot{V} = dV/dt \equiv Q = VA = \text{const} \quad (\mathbf{V} \parallel \mathbf{A}) : d\dot{V} = 0} \qquad (6.4)$$

حيث $dV$ حجم السائل الذي يعبر A خلال dt . كما تصبح العلاقة (6.3) من الشكل :

$$V_1 A_1 = V_2 A_2 = \text{const} \qquad (6.5)$$

التي تتحدد منها قيمة الثابت .

يطلق على $Q = \dot{V}$ **غزارة التدفق الحجمي أو التيار الحجمي** Volume flow وله واحدة القياس :

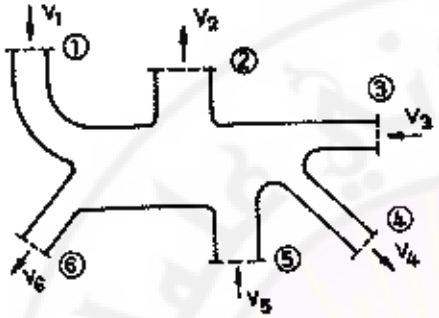
$$[Q] = [\dot{V}] = \text{m}^3\,\text{s}^{-1} \qquad (6.6)$$

على أساس ما تقدم نصل إلى صياغة الجملة التالية :

> شرط الاستمرار للجريانات وحيدة البعد المستقرة يقضي في حالة السوائل القابلة للإنضغاط بأن يكون التيار الكتلي كجداء لكثافة التيار الكتلي في مساحة المقطع ثابتاً ، وفي حالة السوائل غير القابلة للإنضغاط بأن يكون التيار الحجمي كجداء للسرعة في مساحة المقطع ثابتاً ، وذلك على طول أنبوبة التيار .

إن معادلة الاستمرار بصيغتها (6.1) أو (6.4) تنطبق أيضاً على حالة توحيد

( وصل ) أو تفريع مجموعة من أنابيب التيار ، كما في الشكل (١٠٦) ، التي يمكن تصورها عملياً تمثل شبكة من الانابيب لنقل الغاز أو الماء . ويكون في هذه الحالة :




الشكل ١٠٦ :
تطبيق معادلة الاستمرار في حالة وصل أو تفريع مجموعة من أنابيب التيار .

$$\sum_i \rho_i V_i A_i = \sum_j \rho_j V_j A_j \quad (\rho \neq \text{const}) \tag{6.7}$$

$$\sum_i V_i A_i = \sum_j V_j A_j \quad (\rho = \text{const}) \tag{6.8}$$

حيث $i = 1, 3, 5, \ldots$ يشير الى مقاطع دخول السائل و $j = 2, 4, 6, \ldots$ إلى مقاطع خروجه . وهذا يعني أن مجموع التيارات الكتلية ( أو الحجمية ) الداخلة الى الجملة الفيزيائية المفتوحة يساوي الى مجموع التيارات الكتلية ( أو الحجمية ) الخارجة منها .

إن المعادلة (6.4) تسمح لنا باستخلاص نتيجة هامة جداً : كلما صغرت مساحة مقطع أنبوبة التيار تزداد السرعة ، وبالعكس . وعلى هـــذا الأساس يمكن الحصول على فكرة واضحة عن مناطق السرعة الأعظمية والأصغرية. فإذا رسمنا صورة الجريان بحيث نقسم حقل الجريان الى عـدد لانهائي من أنبوبات التيار ذات التيار الحجمي الواحـد ، فيتضح بسهولة أن السرعة تزداد في المناطق التي تتقارب فيها خطوط التيار من بعضها ، وتقل في المناطق التي تتباعد فيها خطوط التيار عن بعضها .

هذه النتيجة تنطبق على الجريانات غير القابلة للانضغاط عامة وتنطبق على الجريانات القابلة للانضغاط حتى سرعات أقل من سرعة الصوت . أما إذا زادت السرعة عن سرعة الصوت ، أي عندما يكون تغير الكثافة كبيراً ، فتكون هناك علاقة معاكسة تماماً بين السرعة والمقطع :

$$\dot{m} = 0 \Rightarrow d(\rho V A) = VA\,d\rho + \rho A\,dV + \rho V\,dA = 0$$

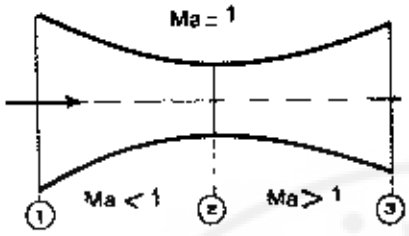
ومنه بعد التقسيم على $\rho VA$ ينتج :

$$\boxed{\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dV}{V} + \frac{dA}{A} = 0} \qquad (6.9)$$

التي تمثل حسب [23] صياغة أخرى لمعادلة الاستمرار للجريانات المستقرة القابلة للانضغاط . فاذا اعتبرنا الحالة الحدية التي يكون فيها التغير النسبي للكثافة أكبر بكثير من التغير النسبي للسرعة نجد :

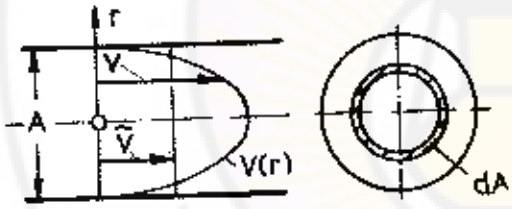
$$\frac{d\rho}{\rho} \gg \frac{dV}{V} \Rightarrow \frac{dA}{A} = -\frac{d\rho}{\rho} \Rightarrow A \sim \frac{1}{\rho} = 0 \qquad (6.10)$$

أي أن المقطع يتناسب طرداً مع الحجم النوعي للغاز . وحيث أن زيادة السرعة تؤدي لنقصان الضغط وبالتالي لزيادة الحجم النوعي فيجب توسيع المقطع للحصول على سرعات عالية أكبر من سرعة الصوت . وعلى هذا الاساس صممت **نفاثة لافال** نسبة للمهندس السويدي **دي لافال** (de Laval (1845 – 1913) ، والتي تشكل عنصراً أساسياً في بناء العنفات البخارية والغازية . وتتألف من أنبوب يتضيق في المقدمة تدريجياً حتى مقطع اصغري حرج ثم يتوسع تدريجياً ،الشكل(٢.٦). في القسم المتضيق تتزايد السرعة حتى تبلغ سرعة الصوت في منطقة الاختناق ، ومن ثم تصبح السرعة فوق صوتية . ونجدر الاشارة هنا أن تفاصيل هذا الجريان تدخل في أبحاث الغازديناميك .




الشكل ٣.٦ : نفاثة لافال
① جريان تحت صوتي Ma < 1
② جريان صوتي Ma = 1
③ جريان فوق صوتي Ma > 1

إن تطبيق معادلة الاستمرار بصيغها الواردة أعلاه يستلزم ، كما ذكرنا ، أن يكون الجريان مستقراً ، والسرعة موزعة بانتظام على المقطع . وهذا ماينطبق على الجريانات المثالية . أما في الحالة التي يكون فيها توزع السرعة V على مقطع أنبوب التيار A غير منتظم ، كما هو الحال بالنسبة للجريان الحقيقي في الأنابيب ، الشكل ( ٣.٦ ) ، فيعمد من أجل الابقاء على صحة المعادلات السابقة إلى إدخال مفهوم **كثافة التيار الكتلي الوسطية** $\overline{\rho V}$ في حالة السوائل




الشكل ٣.٦ : تعريف السرعة الوسطية للتيار الحجمي ( أو كثافة التيار الكتلي الوسطية ) لتطبيق معادلة الاستمرار على الجريانات الحقيقية .

المتغيرة الحجم ، ومفهوم **السرعة الوسطية للتيار الحجمي** Mean Velocity $\bar{V}$ في حالة السوائل الثابتة الحجم . فاذا جزأنا أنبوب التيار الى عدد لانهائي من أنبوبات التيار ذات المقاطع اللانهائية الصغر dA بحيث يمكن اعتبار السرعة موزعة عليها بانتظام فينتج بالنسبة للتيار الكتلي الاجمالي على غرار ( 6.1 ) :

$$\dot{m} = \overline{\rho V} A = \int_{(A)} \rho V \, dA \Rightarrow \overline{\rho V} = \frac{1}{A} \int_{(A)} \rho V \, dA \quad , \quad (6.11)$$

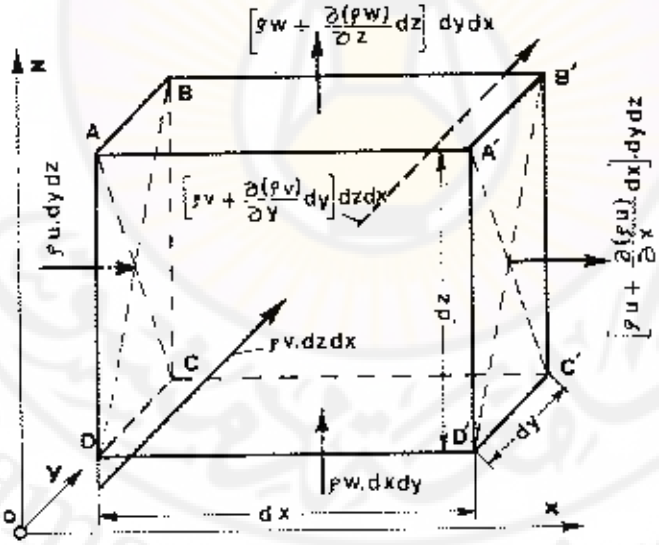
وبالنسبة للتيار الحجمي الاجمالي على غرار ( 6.4 ) :

$$Q = \bar{V}A = \int_{(A)} V\,dA \quad \Rightarrow \quad \bar{V} = \frac{1}{A}\int_{(A)} V\,dA \qquad (6.12)$$

إن الحساب العملي للجريان في الأنابيب يعتمد أساساً على $\bar{V}$ أو $\overline{\rho V}$ ، كما سنرى فيما بعد .

## ٢.٦ معادلة الاستمرار العامة

نعتبر الحركة العامة غير المستقرة لسائل قابل للانضغاط $V = f(x,y,z,t)$ ؛ $\rho = f(x,y,z,t)$ ، ونقتطع من داخل حقل الجريان جزيئاً حجمياً ما ، نفرضه للسهولة بشكل متوازي مستطيلات أطوال أضلاعه $dx, dy, dz$ التي نأخذها موازية لمحاور الاحداثيات $x, y, z$ ، الشكل ( ٤.٦ ) .




الشكل ٤.٦ : اشتقاق معادلة الاستمرار العامة للجريانات غير القابلة للانضغاط غير المستقرة .

نفرض أن $u, v, w$ ، تمثل مركبات شعاع السرعة $\mathbf{V}$ للسائل الداخل عبر وجوه متوازي المستطيلات . وباعتبار أن مساحة هذه الوجوه صغيرة جداً ، فتكون كثافة التيار الكتلي موزعة عليها بانتظام. وتكون كتلة السائل التي تدخل السطح الأيسر $D\,C\,B\,A$ الذي مساحته $dA = dy\,dz$ خلال الفترة الزمنية $dt$ باتجاه المحور $x$ هي : $(\rho u)\,dy\,dz\,dt$ . بينما تبلغ كتلة السائل التي تخرج من السطح الأيمن المقابل $D'\,C'\,B'\,A'$ خلال $dt$ بالاعتماد على طريقة نشر التابع كسلسلة تايلور وإهمال كافة الحدود ذات المراتب العليا : $\left[\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\,dx\right] dy\,dz\,dt$ . ومنه ينتج الفرق بين كتلة السائل الخارجة والداخلة باتجاه $x$ : $\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\,dx\,dy\,dz\,dt$ وبنفس الطريقة نجد قيمة هذا الفرق باتجاه المحورين الآخرين $y, z$ . ويكون بالتالي الفرق الكلي بين كتلة السائل الخارجة والداخلة عبر السطح الخارجي للجزيء الحجمي خلال الزمن $dt$ :

$$dm = \left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\right] dx\,dy\,dz\,dt\,. \quad (6.13)$$

هذا الفرق في كتلة السائل يجب أن يعادله بموجب قانون انحفاظ الكتلة تغير في كتلة السائل داخل الجزيء الحجمي ناتج عن تغير كثافة السائل مع الزمن . فإذا كانت كثافة السائل في اللحظة $t$ هي $\rho(x, y, z, t)$ فتصبح في اللحظة $t + dt$ تساوي $\rho + \frac{\partial\rho}{\partial t}\,dt$ . ويكون بالتالي التغير الذي يطرأ على كتلة السائل داخل الجزيء الحجمي :

$$dm = \left[\rho - \left(\rho + \frac{\partial\rho}{\partial t}\,dt\right)\right] dV = -\frac{\partial\rho}{\partial t}\,dt\,dx\,dy\,dz\,. \quad (6.14)$$

من تساوي العلاقتين(6.13), (6.14) ينتج بعد الاختصار على dx dy dz dt والإصلاح :

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w)}{\partial z} = 0} \qquad (6.15)$$

التي يطلق عليها **معادلة الاستمرار العامة** لجريان ثلاثي المقاس ، غير مستقر وقابل للانضغاط . فإذا أجرينا الاشتقاق الجزئي لمركبات كثافة التيار الكتلي المحصورة ضمن أقواس ولاحظنا بموجب (5.12) أن $D\rho/Dt$ يمثل التفاضل المادي التام للكثافة وأن

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \beta \; ; \quad [\beta] = s^{-1} \qquad (6.16)$$

يمثل **معامل التمدد الحجمي** أو سرعة تمدد واحدة حجم السائل ، فإن العلاقة (6.15) تأخذ الشكل التالي [16] :

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\beta = 0 \qquad (6.15\text{-a})$$

في حالة الجريان المستقر يكون $\partial\rho/\partial t = 0$ وتصبح (6.15) من الشكل :

$$\boxed{\frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w)}{\partial z} = 0} \qquad (6.17)$$

أو بالصيغة الشعاعية الأبسط :

$$\boxed{\mathrm{div}\,(\rho V) = 0} \qquad (6.18)$$

التي تعني أن شرط الاستمرار لجريان قابل للانضغاط ومستقر يقضي بأن يكون تفرق شعاع Divergence كثافة التيار الكتلي معدوماً .

بالنسبة للجريانات ثنائية المقاس، أي عندما $w = 0$ مثلاً ، ينتج من (6.15):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} = 0 \qquad (6.19)$$

للجريانات غير المستقرة ؛ ومن (6.17) :

$$\frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} = 0 \qquad (6.20)$$

للجريانات المستقرة .

في حالة الجريانات غير القابلة للانضغاط $\rho = \text{const}$، تنتج معادلة الاستمرار من (6.15) أو (6.18) باستبدال كثافة التيار الكتلي بسرعة التيار الحجمي وتأخذ الشكل الأبسط نسبياً التالي :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \text{أي} \quad \text{div } \mathbf{V} = 0 \qquad (6.21)$$

التي يمكن التعبير عنها بالجملة التالية :

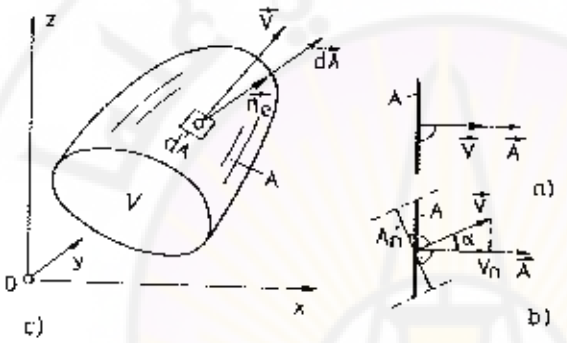
شرط الاستمرار لجريان غيرقابل للانضغاط خالٍ من الينابيع والبالوعات يقضي بأن يكون التيار الحجمي الداخل عبر السطح الخارجي لجزيء حجمي مساوياً للتيار الحجمي الخارج منه أي أن يكون تفرق شعاع السرعة معدوماً ، وهذا يعني أن معادلة الاستمرار لا تتعلق باختيار جملة الاحداثيات .

في حالة الجريانات المستوية ، أي عندما $w = 0$ مثلاً ، تصبح معادلة الاستمرار حسب (6.21) :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \qquad (6.22)$$

إن استخدام قوانين التحليل الشعاعي Vector Analysis ونظرية الحقل Field theory ( أنظر مثلاً [84] ) في صياغة قوانين ميكانيك السوائل يتيح لنا ليس فقط الحصول على صياغة أبسط ، كما رأينا بالنسبة لمعادلة الاستمرار (6.18) أو (6.21) ، وإنما ، وهذا هو المهم ، الاستفادة من الحلول المعروفة لحقول شعاعية مماثلة Analog ، كما سنرى فيما بعد ، وإعطاء القوانين الرياضية « الجافة » مضموناً فيزيائياً معبراً ، كما سيتوضح الآن .

إن التيار الحجمي الذي يخترق السطح A يحسب من (6.4) عندما يكون شعاع السرعة V موازياً لشعاع الناظم على السطح $\mathbf{A} = \mathbf{n}_0 A$ ، حيث $\mathbf{n}_0$ شعاع واحدة الناظم الذي يعتبر




الشكل ٦. ٥ :
التيار الحجمي عبر سطح لتوضيح مفهوم تفرق شعاع السرعة واستخراج قانون غوص التكاملي .

موجباً عندما يشير للخارج ، الشكل ( ٦. ٥ ـ a ) . وعندما يكون شعاع السرعة مائلاً على السطح بزاوية $\alpha$ الشكل ( ٦. ٥ ـ d ) يكون التيار الحجمي (غزارة التدفق ) :

$$Q = VA \cdot \cos\alpha = V A_n - V_n A = \mathbf{V} \cdot \mathbf{A} \qquad : \qquad (6.23)$$

التيار الحجمي لسائل ثابت الحجم يساوي الجداء الداخلي لشعاع السرعة في شعاع الناظم على السطح .

نعتبر الآن داخل حقل الجريان منطقة شكلها على نحو تعيين حجمها V ومحددة بالسطح الخارجي المغلق A الشكل ( ٦. ٥ ـ c ) . ليكن dA جزيئاً سطحياً من A ، $\mathbf{dA} = \mathbf{n}_0 \, dA$ شعاع الناظم عليه . فاذا كان V شعاع السرعة الذي يخترق dA فان التيار الحجمي عبر A ينتج :

$$Q = \int dQ = \int\limits_{(A)} \int \mathbf{V} \cdot d\mathbf{A} \qquad (6.24)$$

من جهة أخرى فان الفرق بين حجم السائل الخارج من جزيء حجمي $dV = dx\, dy\, dz$ والداخل اليه في واحدة الزمن ينتج من (6.13) من أجل $\rho = \text{const}$ :

$$d\dot{V} = \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right] dV = \text{div } \mathbf{V} . dV \quad . \qquad (6.25)$$

ويكون الفرق الإجمالي بالنسبة لكامل حجم المنطقة المعتبرة $V$ :

$$\dot{V} = \iiint_{(V)} \text{div } \mathbf{V} . dV \quad . \qquad (6.26)$$

من تساوي العلاقتين (6.24) و (6.26) تنتج العلاقة :

$$\boxed{\dot{V} = Q = \iint_{(A)} \mathbf{V} . d\mathbf{A} = \iiint_{(V)} \text{div } \mathbf{V} . dV} \quad , \qquad (6.27)$$

المعروفة باسم **قانون غوص - أوستروجرادسكي التكاملي** نسبة العالمين : الألماني C. F. Gauss (1777 – 1855) والروسي M. W. Ostrogradski (1801 – 1861) . وبواسطته يمكن رياضياً إرجاع التكامل الحجمي إلى تكامل سطحي . أما من الناحية الفيزيائية فنستخلص من (6.25) أن تفرق شعاع السرعة :

$$\text{div } \mathbf{V} = \frac{d\dot{V}}{dV} = \frac{dQ}{dV} = v_Q \qquad (6.28)$$

يمثل **الكثافة النبعية** Source density للتيار الحجمي [13] التي تنعدم عندما يكون $\text{div } \mathbf{V} = 0$ ، وتكون موجبة في النقاط التي توجد فيها ينابيع وسالبة في النقاط التي توجد فيها بالوعات . وعليه يمكن التعبير عن العلاقة (6.27) بالجملة التالية :

> إن التيار الحجمي لسائل ثابت الحجم الذي يخرج من سطح مغلق $A$ اعتباطيّ الشكل يساوي إلى التكامل الحجمي لتفرق شعاع السرعة المعبّر عن الكثافة النبعية داخل الحجم $V$ المحدد بالسطح الخارجي $A$ . يطلق على النقاط من حقل الجريان حيث $\text{div } \mathbf{V} > 0$ ينابيع ، وحيث $\text{div } \mathbf{V} < 0$ بالوعات . ويتحقق شرط الاستمرار لكل منطقة من حقل الجريان خالية من الينابيع والبالوعات عندما $\text{div } \mathbf{V} = 0$ .

هذه النتيجة تنطبق أيضاً على الجريانات القابلة للانضغاط المستقرة ، حيث يلزم فقط أن نبدل في العلاقات السابقة شعاع السرعة $\mathbf{V}$ بشعاع كثافة التيار الكتلي $(\rho \mathbf{V})$ . ولكن في الحالة العامة التي تكون فيها الكثافة متغيرة مع المكان والزمان ، وبكتابة العلاقة (6.15) بالصياغة الشعاعية التالية :

$$\text{div } (\rho \mathbf{V}) = - \frac{\partial \rho}{\partial t} \qquad (6.29)$$

نستنتج حسب [13] أن حقل الجريان القابل للانضغاط غير المستقر الذي تتغير كثافته موضعياً مع الزمن يماثل حقلاً لجريان غير قابل للانضغاط يحتوي على توزع ظاهري محدّد لنقاط شاذة فراغية تمثل في حالة التمدد ( التسارع ) بالوعات ، وفي حالة الانضغاط ( التكبيح ) ينابيع .

وأخيراً يجدر الانتباه إلى أن الصياغة الشعاعية للعلاقات السابقة تطلق الحرية في اختيار محاور الإحداثيات المناسبة . فإذا اختيرت جملة الإحداثيات الديكارتية مثلاً يصبح قانون غوص — أوستروغرادسكي من الشكل :

$$\iint_{(A)} (u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma)\, dA = \iiint_{(V)} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) dV \qquad (6.30)$$

حيث $u$ ، $v$ ، $w$ مركبات $V$ ؛ $\alpha$ ، $\beta$ ، $\gamma$ الزوايا التي يصنعها $dA$ مع المحاور $x$ ، $y$ ، $z$ .

## ٦.٣ أسئلة مراجعة وتمارين

س ٦.١ : استخرج معادلة الاستمرار العامة للسوائل القابلة للانضغاط . ما هي النتائج الأساسية التي تستخلصها ؟

س ٦.٢ : ماهو المضمون الفيزيائي لتفرق شعاع السرعة لجريان غير قابل للانضغاط ؟

س ٦.٣ : اشرح الطريقة البيانية التي تسمح بتحديد مناطق السرعة الأعظمية والأصغرية في حقل الجريان .

س ٦.٤ : ما هو الشكل الذي تأخذه العلاقة (6.12) بالنسبة للأنبوب الدائري المبين في الشكل (٦.٣) ؟

س ٦.٥ : ماذا يعبّر قانون غوص — أوستروجرادسكي رياضياً وفيزيائياً ؟

ت ٦.١ : إذا كانت غزارة التدفق الحجمي في أنبوب قطره الداخلي $d = 400$ mm تبلغ $Q = 700$ m³/h من الماء ، ويراد تفريعها عبر أنبوبين بحيث يتدفق في الأول $Q_1 = 500$ m³/h وفي الثاني $Q_2 = 200$ m³/h ، على أن تبقى سرعة التيار الحجمي في الأنابيب الثلاثة واحدة ، فكم يجب أن يكون القطر الداخلي لكل من الأنبوبين المتفرعين ؟

الحل : من معادلة الاستمرار (6.4) تنتج بسهولة السرعة في الأنابيب الثلاثة :

$$V = V_1 = V_2 = Q/A = 4\,Q/\pi\,d^2 = \frac{4 \cdot 700}{3600 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}4^2} = 1{,}548 \text{ m/s}.$$

ومنه نجد قطر الأنبوب الأول :

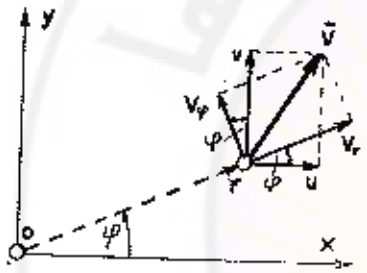
$$d_1 = \sqrt{\frac{4\,Q_1}{\pi\,V_1}} = \sqrt{\frac{4\,.\,500}{3600\,.\,3{,}14\,.\,1{,}548}} = 0{,}338\ \text{m}\ .$$

وقطر الانبوب الثاني :

$$d_2 = \sqrt{\frac{4\,Q_2}{\pi\,V_2}} = \sqrt{\frac{4\,.\,200}{3600\,.\,3{,}14\,.\,1{,}548}} = 0{,}214\ \text{m}$$

ت ٢٠٦ : ما هي الصيغة التي تأخذها معادلة الاستمرار لجريان غير قابل للانضغاط في الاحداثيات الاسطوانية ؟

الحل : بفرض $z, \varphi, r$ الإحداثيات الاسطوانية ، $V_z, V_\varphi, V_r$ مركبات شعاع السرعة فيكون حسب الشكل ( ت ١٠٦ ) :




الشكل (ت ١٠٦)

$$u = V_r \cos\varphi - V_\varphi \sin\varphi\ ;$$

$$v = V_r \sin\varphi + V_\varphi \cos\varphi\ ;\ w \equiv V_z\ .$$

وينتج من (5.15) :

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos\varphi\,\frac{\partial}{\partial r} - \sin\varphi\,\frac{\partial}{r\,\partial\varphi}\ ;$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \sin\varphi\,\frac{\partial}{\partial r} + \cos\varphi\,\frac{\partial}{r\,\partial\varphi}\ ;\ \frac{\partial}{\partial z} \equiv \frac{\partial}{\partial z}$$

وعليه تأخذ معادلة الاستمرار (6.21) الصيغة التالية في الاحداثيات الاسطوانية :

$$\text{div}\ \mathbf{V} = \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_r}{r} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial V_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0$$

أي أن المركبة القطرية للسرعة تتغير في الاتجـــاه المماسي بمقدار $V_r/r$ عندما تتغير الزاوية القطبية بمقدار $d\varphi$ .

ت ٢٠٦ : إذا كانت حركة سائل متجانس ذي كثافة متغيرة تتم بحيث أن شعـــاع السرعة لكل جزيئة يتناسب طرداً مع شعاع نصف القطر المكاني لمركز الاحداثيات ، أوجد علاقة تغير الكثافة مع الزمن .

الحل : بفرض $r$ الشعاع المكاني ، $\mathbf{V}$ شعاع السرعة ، $c$ ثابت التناسب فيكون :

$$\mathbf{V} = c\,\mathbf{r} \Rightarrow u = cx\ ;\ v = cy\ ;\ w = cz \qquad (a)$$

وينتج بالتالي من معادلة الاستمرار العامة (6.15) بعض التعويض وإجراء الاشتقاق الجزئي:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + c\left[3\rho + x\frac{\partial \rho}{\partial x} + y\frac{\partial \rho}{\partial y} + z\frac{\partial \rho}{\partial z}\right] = 0 \qquad (b)$$

وبمقارنة هـــذه العلاقة مع التفاضل المادي التام للكثافة حسب (5.12) بعد تعويض مركبات السرعة حسب (a) نحصل على المعادلة التفاضلية :

$$\frac{D\rho}{Dt} + 3c\rho = 0 \qquad (c)$$

التي يعطي حلها العام :

$$\rho = \rho_0 e^{-3ct} \qquad (d)$$

علاقة تغير الكثافة مع الزمن ؛ $\rho_0$ تمثل الكثافة في لحظة البدء .

## ٧ الحركة العامة للسوائل

من المفيد ان نتذكر أن الحركة العامة لجسم صلب ، نقاطه المختلفة تتحرك على خطوط مسار متباينة ، يمكن إرجاعها الى حركة انسحابية ( انتقالية ) Translational motion تقوم بها نقطة مميزة ( قطب ) مثبتة على الجسم ( مركز الثقل مثلاً ) ، وحركة دورانية Rotational motion للجسم الصلب كله حول محور دوران آني ، أي يتغير عادة مع الزمن، يمر من تلك النقطة المميزة . وحيث ان المسافة بين أية نقطتين من الجسم بفضل صلابته تبقى ثابتة فتتحدد السرعة $\mathbf{V}$ لأية نقطة B منه بالعلاقة الشعاعية ( راجع مثلاً [67] ) :

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_S + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \qquad (7.1)$$

حيث $\mathbf{V}_S$ ، سرعة القطب S ؛ $\boldsymbol{\omega}$ شعـــاع السرعة الزاوية المحمول على محور الدوران الآني $\mathbf{r} = \overrightarrow{SB}$ نصف القطر الشعاعي .

سنرى فيما يلي من تحليل الحركة العامة للسوائل أن دراستها أعقد بكثير من دراسة حركة الجسم الصلب ، خاصة لأن جزيئات السائل لا تستطيع المحافظة على شكلها .

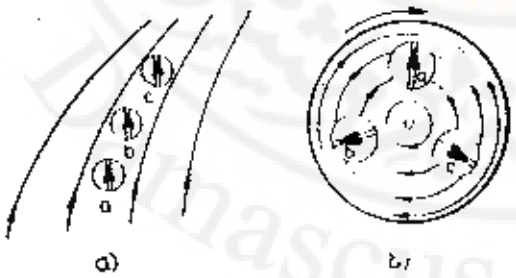
### ١.٧ مفهوم التشوه والدوران

إن دراسة الحركة العامة لسائل تتوضح من خلال العمليـــات الأولية

Elementary Processes لحركة جزيء سائلي متناهي الصغر ، التي وضع هلمهولتس أسس معالجتها الفيزيائيـة والرياضية في بحثـه المشهور عن الحركات الإعصارية ، الذي نشره عام 1858 وتوصل فيه الى صياغة المعادلة العامة لحركة الجزيئات السائلية .

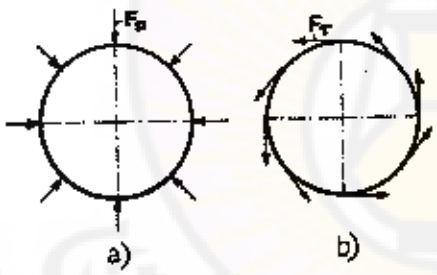
كل جزيء سائلي من حقل الجريان يستطيع ان يقوم في الحالة العامة بحركة انسحابية بالاضافة لحركة دورانيـة . وكلمة « دوران » Rotation تعبر عن السرعة الزاوية للجزيء ، التي يمكن الحصول عليها من أجل فترة زمنية قصيرة ، إذا تصورنا ان الجزيء قـد « تصلب » بدون تشوه Deformation . ويمكن التحقق من وجود أو عدم وجود الدوران بتجربة بسيطة : نضع على السطح الحر للجريان قطعة صغيرة من الفلين (عوضاً عن الجزيء « المتصلب » ! ) أشر عليها باتجاه ما ، ونتركها تسبح مع جزيئات السائل وفق خط تيار معين . فاذا بقي اتجاه السهم أثناء انتقال قطعـة الفلين موازياً لنفسـه ، وبالتالي a ∥ b ∥ c ∥ ... ، فتكون جزيئات السائل على طول خط التيار المعتبر لا تقوم بحركة دورانية ، الشكل ( ١٠٧ ـ a ) . أما إذا وضعنا قطعة الفلين على السطح الخارجي لسائل يدور في إناء اسطواني بسرعة زاوية ثابتة ، الشكل ( ١٠٧ ـ b ) ، فنلاحظ

الشكل ١٠٧ :
تجربة لتوضيح مفهوم الدوران :
الجريان لادوراني طالما بقي a ∥ b ∥ c ( a ) ، ويكون دورانياً عندما a ∦ b ∦ c كما في حالة سائل يدور في إناء بسرعة زاوية ثابتة (b) .



أن اتجاه السهم لا يأخذ وضعيات متوازية ، بل يبقى قطرياً ، وبالتالي تقوم جزيئات السائل بالنسبة لكل خط تيار بحركة دورانية .

إن الجزيء السائلي لا يستطيع الدوران إلا إذا خضع لتأثير عزم دوراني . ولكي نتصور منشأ هذا العزم نقطع من داخل سائل جزيئاً نفرضه للبساطة بشكل اسطوانة دائرية صغيرة . فإذا كان السائل عديم اللزوجة فإن عزوم قوى الضغط الصرف $F_p$ المؤثرة ناظمياً على السطح تكون معدومة ، الشكل ( ٢٠٧ ـ a ) ، وبالتالي لا يمكن ان تؤدي لدوران الجزيء مطلقاً . وعليه لا يتولد عزم دوراني إلا إذا أثرت على الجزيء قوى قص مماسية $F_t$ ، الشكل ( ٢٠٧ ـ b ) . هذه القوى تنشأ ، كما نعلم ، نتيجة للزوجة السائل عندما تتعرض جزيئاته للتشوه . ومنه ينتج أن وجود الدوران مرتبط بوجود التشوه.

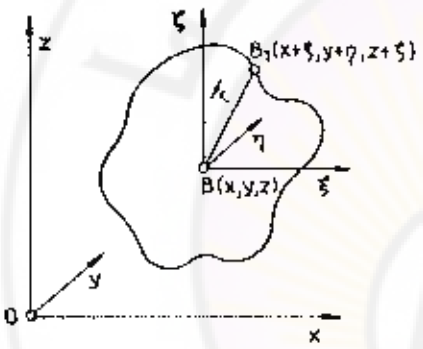



الشكل ٢٠٧ ، القوى السطحية على جزيئة اسطوانية دائرية : الجزيئة لا تستطيع الدوران إذا أثرت قوى ضغط ناظمية فقط a)، وتتولد حركة دورانية فقط عندما تؤثر قوى قص مماسية (b.

لقد كان **هلمهولتس** أول من برهن أن دوران جزيئات السائل المثالي يختلف جزرياً عن دوران جزيئات السائل الحقيقي ، أي في حالة جريان مع فواقد . وفي الواقع فإن حركة السوائل يمكن تقسيمها بصورة عامة الى فصيلتين أساسيتين تختلفان عن بعضها من الناحية **الحركية والفيزيائية**، وبالتالي من حيث المعالجة الرياضية : الأولى هي **الحركة الدورانية** وتمثلها بصورة عامة جريانات السوائل الحقيقية ، والثانية هي **الحركة اللادورانية** Irrotational motion وتمثلها عامة

جريانات السوائل المثاليـة . لذلك فانه من الضروري استخراج المعادلة العامة لحركة السوائل ، وإيجاد التعبير الرياضي الذي يسمح لنـا بالحكم فيما إذا في أية نقطة من حقل الجريان المحدد بالعلاقة (5.5) يوجد أو لا يوجد دوران .

نعتبر في لحظة معينة ، حركة جزيء حجمي متناهي الصغر مقتطع من داخل حقل جريان مستمر ، الشكل (٣.٧) . لتكن $B(x,y,z)$ نقطـــة ما داخل الجزيء محددة في مجموعة الإحداثيات الثابتة $x, y, z$ ؛ ولتكن $u = u(x,y,z)$ $v = v(x,y,z)$ $w = w(x,y,z)$ مركبات شعاع السرعة $\mathbf{V}$ في هذه النقطة .




الشكل ٣.٧ :
استخراج المعادلة العامة
لحركة جزيء حجمي

نعتبر نقطة ما $B_1(x+\xi, y+\eta, z+\zeta)$ واقعـة على سطح الجزيء ، حيث $\xi, \eta, \zeta$ مركبات شعاع نصف القطر النسبي $\mathbf{r} = \overrightarrow{BB_1}$ في مجموعة إحداثيـات مثبتة على الجزيء . إن مركبات شعاع السرعة $\mathbf{V}_1$ للنقطة $B_1$ تنتج بالشكل :

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= u(x+\xi, y+\eta, z+\zeta) \approx u + \frac{\partial u}{\partial x}\xi + \frac{\partial u}{\partial y}\eta + \frac{\partial u}{\partial z}\zeta \\ v_1 &= v(x+\xi, y+\eta, z+\zeta) \approx v + \frac{\partial v}{\partial x}\xi + \frac{\partial v}{\partial y}\eta + \frac{\partial v}{\partial z}\zeta \\ w_1 &= w(x+\xi, y+\eta, z+\zeta) \approx w + \frac{\partial w}{\partial x}\xi + \frac{\partial w}{\partial y}\eta + \frac{\partial w}{\partial z}\zeta \end{aligned}\right\} \quad (7.2)$$

وذلك بعد نشرها بشكل سلسلة **تايلور** وإهمال كافة حدود المراتب العليا

الحاوية على $\xi, \eta, \zeta$ ( قارن العلاقة ( 3.19 ) ) . لنحول صياغة هذه المعادلات بحيث يتوضح المضمون الفيزيائي لحدودها .

نضيف الى الطرف الأيمن للمعادلة الاولى المقادير $\frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial x}\eta$ و $\pm\frac{1}{2}\frac{\partial w}{\partial x}\zeta$ ونرتب الحدود فينتج بعد إصلاح بسيط :

$$u_1 = u + \frac{\partial u}{\partial x}\xi + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\eta + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\zeta + \\ + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)\zeta - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\eta \quad . \quad (7.3)$$

وبطريقة مماثلة نحول صياغة المعادلة الثانية والثالثة من (7.2) فنجد :

$$v_1 = v + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\xi + \frac{\partial v}{\partial y}\eta + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)\zeta + \\ + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\xi - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)\zeta \quad (7.4)$$

$$w_1 = w + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\xi + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)\eta + \frac{\partial w}{\partial z}\zeta + \\ + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)\eta - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)\xi \quad (7.5)$$

لاختصار الكتابة نفترض :

$$\left.\begin{aligned} \omega_x &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right); \quad \Theta_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right); \quad \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \\ \omega_y &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right); \quad \Theta_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right); \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \omega_z &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right); \quad \Theta_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right); \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned}\right\} \quad (7.6)$$

كما نستخدم حسب [16] التابع المساعد من الدرجة الثانية :

$$\varnothing_D = \frac{1}{2}(\varepsilon_x \xi^2 + \varepsilon_y \eta^2 + \varepsilon_z \zeta^2 + 2\Theta_x \eta\zeta + 2\Theta_y \zeta\xi + 2\Theta_z \xi\eta) \quad (7.7)$$

الذي تحقق مشتقاته الجزئية العلاقات التالية :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \varnothing_D}{\partial \xi} &= \varepsilon_x \xi + \Theta_y \zeta + \Theta_z \eta \\ \frac{\partial \varnothing_D}{\partial \eta} &= \varepsilon_y \eta + \Theta_x \zeta + \Theta_z \xi \\ \frac{\partial \varnothing_D}{\partial \zeta} &= \varepsilon_z \zeta + \Theta_x \eta + \Theta_y \xi \end{aligned}\right\} \quad (7.8)$$

بذلك تأخذ المعادلات ( 7.3 ) , ( 7.4 ), (7.5) الشكل التالي :

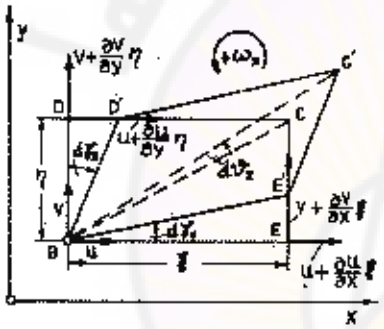
$$\left.\begin{aligned} u_1 &= u + (\omega_y \zeta - \omega_z \eta) + \frac{\partial \varnothing_D}{\partial \xi} = u + u_R + u_D \\ v_1 &= v + (\omega_z \xi - \omega_x \zeta) + \frac{\partial \varnothing_D}{\partial \eta} = v + v_R + v_D \\ w_1 &= w + (\omega_x \eta - \omega_y \xi) + \frac{\partial \varnothing_D}{\partial \eta} = w + w_R + w_D \end{aligned}\right\} \quad (7.9)$$

لتبسيط شرح المضمون الفيزيائي لحدود هذه المعادلات نعتبر حركة جزيء حجمي بسيط نتصوره في اللحظة المعتبرة t بشكل متوازي مستطيلات متناهي الصغر. ولتبسيط المسألة أكثر ندرس حركة هذا الجزيء الموازية للمستوي y x ، أي أننا نعتبر من جريان مستوٍ مواز لـ y x حركة جزيء سطحي بشكل مستطيل E C D B أطوال أضلاعه $\xi$ و $\eta$ ، الشكل (٤٠٧) .

لتكن v, u مركبات السرعة في النقطة B (x, y) . فتكون مركبات

السرعة في النقطة $E(x+\xi, v)$ هي : $v+\frac{\partial v}{\partial x}\xi$ , $u+\frac{\partial u}{\partial x}\xi$ ؛ وفي النقطة $D(x, y+\eta)$ : $v+\frac{\partial v}{\partial y}\eta$ , $u+\frac{\partial u}{\partial y}\eta$ . وحيث أنه في الحالة المستوية $z=\zeta=w=0$ فيكون حسب (7.6): $\omega_x=\omega_y=\varepsilon_z=\Theta_x=\Theta_y=0$ . وبالتالي تنتج من (7.8), (7.9) مركبات السرعة في $C(x+\xi, y+\eta)$ بالشكل :

$$\left.\begin{aligned} u_C &= u-\omega_z\eta+\Theta_z\eta+\varepsilon_x\xi \\ v_C &= v+\omega_z\xi+\Theta_z\xi+\varepsilon_y\eta \end{aligned}\right\} \quad . \qquad (7.10)$$




الشكل ٧.٤ :
تشوه جزيء سطحي بشكل مستطيل لتحديد مفهوم سرعة التشوه والدوران

إذا فرضنا $\omega_z=\Theta_z=\varepsilon_y=\varepsilon_x=0$ فيبدو جلياً أن $u, v$ تمثلان مركبتي السرعة الانسحابية للجزيء السطحي ( أو القطب منه B ) عندما يتحرك **حركة انسحابية متوازية** وكأنه جسم مطلق الصلابة . ولكن الجزيء سيتعرض أثناء حركته، كأي جزيء صلب مرن، لتشوه زاوي لزواياه القائمة ولتشوه طولي لأضلاعه ، بنفس الطريقة المعروفة في **نظرية المرونة** Theory of Elasticity .

إذا اعتبرنا الانزياح النسبي للنقاط E, C, D تجاه النقطة B فإن المستطيل سيأخذ في اللحظة $t+dt$ شكل متوازي أضلاع $E'C'D'B$ . وبما أن السرعة تساوي المسافة ( الإنزياح ) في واحدة الزمن ، والسرعة الزاوية تكافيء زاوية

الدوران في واحدة الزمن ، والزاوية الصغيرة تساوي ظلها تقريباً ، فيكون حسب الشكل (٤٠٧) التغير الزاوي في واحدة الزمن الناتج عن دوران الضلعين القائمين D B و E B .

$$\omega_1 = \frac{\partial \gamma_1}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x} \quad [s^{-1}] \; ; \quad \omega_2 = \frac{d\gamma_2}{dt} = \frac{\partial u}{\partial y} \quad [s^{-1}] \quad . \tag{7.11}$$

نأخذ كمقياس **للدوران الوسطي** Avarage rotation للجزيء السطحي ككل دوران القطرين ، ونعتبر ان قطر المستطيل يدور نصف زاوية الدوران التي يدورها ضلعه القائم [8] [17] وأن اتجاه الدوران الموجب هو بعكس اتجاه دوران عقارب الساعة ، فتكون :

$$\omega_z = \frac{d\vartheta_z}{dt} = \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{7.12}$$

تمثل **السرعة الزاوية** التي يدور بها الجزيء السطحي « المتصلب » حول محور آني يمر من النقطة B وبوازي المحور z . وتكون بالتالي $\omega_z \eta -$ و $\omega_z \xi +$ في العلاقة (7.10) تمثلان السرعة المحيطية للحركة الدورانية للجزيء السطحي في اتجاه المحورين x و y .

من جهة أخرى فإن التغير الزاوي الكلي في واحدة الزمن الذي يطرأ على الزاوية القائمة E B D ينتج من (7.11) مع الانتباه الى (7.6) ، حيث نجد :

$$\frac{d\gamma_1}{dt} + \frac{d\gamma_2}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 2\Theta_z \quad [s^{-1}] \tag{7.13}$$

وعليه فإن $\Theta_z$ تعبر عن السرعة الزاوية التي يتم بها تغير الزاوية القائمة لضلعي المستطيل في النقطة B ؛ بينما تعبر $\Theta_z \eta$ و $\Theta_z \xi$ عن **سرعة التشوه الزاوي** Angular deformation بالـ [m/s] في الاتجاهين x و y .

أخيراً فإن الحدين الباقيين في العلاقة (7.10) : $\varepsilon_x \xi = \frac{\partial u}{\partial x}\xi$ و $\varepsilon_y \eta = \frac{\partial v}{\partial y}\eta$ يمثلان بالأصل تغير السرعة [m/s] على طول المسافتين $\xi$ و $\eta$ ، فهما يعبران إذن عن **سرعة التشوه الطولي** Linear deformation لضلعي المستطيل EB و DB في الاتجاهين x و y .

إن دراسة مسألة حركة جزيء سطحي مستطيل في المستويين z x و z y تقودنا الى توضيح المضمون الفيزيائي لبقية الحدود المعرّفة في العلاقة (7.6) . وبذلك نخلص في حالة حركة ثلاثية المقاس الى نتيجة ان القيم $\varepsilon_x$ , $\varepsilon_y$ , $\varepsilon_z$ تعبر عن التشوه الطولي، والقيم $\Theta_z$ , $\Theta_y$ , $\Theta_x$ عن التشوه الزاوي، بينما تمثل $\omega_z$ , $\omega_y$ , $\omega_x$ مركبات **شعـــاع السرعة الزاوية** $\omega$ أو كما يسمى أيضاً **شعاع الاعصار** Vortex vector ، الذي يكون محمولاً على محور الدورات الآني الذي يدور حوله الجزيء الحجمي المعتبر . فاذا عدنا الى العلاقة (7.9) تتضح لدينا النتيجة الهامة التالية :

> إن الحركة العامة لجزيء حجمي سائل تتألف من حركة انتقالية متوازية لقطب منه بسرعة **انسحابية** $\mathbf{V}\,(u,v,w)$ ، وحركة **دورانية** حول محور آني يمر من هـذا القطب ذات سرعة محيطية $\mathbf{V}_R(u_R, v_R, w_R)$ تساوي جداء السرعـة الزاوية $\omega\,(\omega_x,\omega_y,\omega_z)$ في نصف القطر النسبي $\mathbf{r}(\xi,\eta,\zeta)$ ، وحركة **تشوهيـــة** يعبر عنهـا تابع التشوه $\varnothing_D(\xi,\eta,\zeta)$ . سرعتهـــا $\mathbf{V}_D\,(u_D, v_D, w_D)$ .

باستخدام علاقات التحليـل الشعاعي تأخذ المعادلات (7.9) الصياغـــة الشعاعية التالية :

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{V} + \mathbf{V}_R + \mathbf{V}_D = \mathbf{V} + \omega \times \mathbf{r} + \mathbf{grad}\ \varnothing_D \quad , \qquad (7.14)$$

التي تختلف عن العلاقة (7.1) بالحد المعبر عن سرعة التشوه ، لذلك يطلق أحياناً على حركة السوائل اسم حركة التشوه . كما ينتج من (7.6) :

$$\omega = \mathbf{i}\omega_x + \mathbf{j}\omega_y + \mathbf{k}\omega_z = \frac{1}{2}\nabla \times \mathbf{V} = \frac{1}{2}\,\mathrm{rot}\ \mathbf{V} \qquad (7.15)$$

حيث الشعاع الرمزي

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z} \qquad (7.16)$$

يمثل معامل « نابلا » ، و rot V يمثل شعاعاً يطلق عليه **دوّار شعاع السرعة** . وعليه فان العلاقة (7.15) تربط بين شعاع السرعة وشعاع الاعصار الذي تبلغ قيمته

$$|\omega| = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2}\ . \qquad (7.17)$$

بقي الآن أن نحدد متى يكون في منطقة معينة من حقل جريان يوجد أو لا يوجد دوران .

## ٢.٧ شرط الخلو من الدوران

نعتبر جرياناً ثلاثي المقاس محدداً حسب (5.5) بحقل السرعة $\mathbf{V}(u,v,w)$ . إن حركة السائل في كامل حقل الجريان أو في منطقة معينة منه ، توصف بأنها **حركة دورانية** أو **حركة إعصارية** عندما توجد لشعاع السرعة الزاوية قيمة محددة تختلف عن الصفر . وبالتالي يجب ان تكون حسب (7.15) :

$$\omega = \frac{1}{2}\,\mathrm{rot}\ \mathbf{V} \neq 0 \Rightarrow \omega_x \neq 0\ ,\ \omega_y \neq 0\ ,\ \omega_z \neq 0\ . \qquad (7.18)$$

وتكون حركة السائل **لادورانية أو لاإعصارية** ( خالية من الاعاصير ) عندما

ينعدم شعاع السرعة الزاوية ، وبالتالي تتحقق العلاقة :

$$\boxed{\omega = 0 \Rightarrow \omega_x = \omega_y = \omega_z = 0 \Rightarrow \text{rot}\, V = 0} \quad , \quad (7.19)$$

التي يطلق عليها حسب **هلمهولتس شرط انطلاق من الدورانات** Condition of irrotationality . فاذا عبّرنا عن مركبات شعاع السرعة الزاوية بمركبات شعاع السرعة ينتج من (7.6) :

$$\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \; ; \quad \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \; ; \quad \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad . \quad (7.20)$$

هذه المعادلات تمثل بموجب قانون معروف في التحليل الشعاعي ونظرية **الحقل** ( انظر [84],[42] ) الشروط اللازمة والكافية لكي يكون التفاضل الثلاثي الحدود $u\,dx + v\,dy + w\,dz$ تفاضلاً تاماً لتابع سلمي $\Phi(x,y,z)$ ، مستمر وقابل للاشتقاق في كامل المجال المعتبر . وهذا يعني أن

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\,dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\,dz = u\,dx + v\,dy + w\,dz$$

وبالتالي فان مركبات السرعة تمثل المشتقات الجزئية لهذا التابع بالنسبة للاحداثيات المناسبة ، أي :

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \; ; \; v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \; ; \; w = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Rightarrow V_s = \frac{\partial \Phi}{\partial s} \quad , \quad (7.21)$$

أو بالصياغة الشعاعية :

$$\boxed{V = \text{grad}\, \Phi} \quad , \quad (7.22)$$

بسهولة يمكن التأكد أن العلاقة (7.21) تحقق بالتطابق (7.20) . وإذا أمعنا النظر نجد أن (7.21) تماثل العلاقة (3.55) ص ١٣٣ المتعلقة بحقل الضغط الهيدروستاتيكي إذا أغفلنا إشارة السالب . لذلك يطلق على التابع $\Phi$ اسم **كمون السرعة** Velocity potential تيمناً بكمون حقل القوى الجحمية . وتسمى الجريانات التي تملك مثل هـــذا الكمون **الجريانات الكمونية** أو اللادورانية ، وتكون عادة مثالية أي عديمة الاحتكاك ، كما سنبرهن على ذلك فيما بعد .

في ضوء ما تقدم يمكن صياغة النتيجة التالية المماثلة لما توصلنا اليه ص ١٣٧ :

> بالرغم من أن السرعة $V = f(x,y,z)$ يمكن ان تتغير اعتباطياً من نقطة الى أخرى ، فإنه يوجد في حالة الجريانات المثالية تابع سلمي $\Phi$ يطلق عليه **كمون السرعة** ويتغير فقط على طول خطوط التيار ، المماثلة لخطوط القوة . ويخترق شعاع التدرج لهذا التابع المساوي لشعاع السرعة سطوح كمون السرعة الثابت ، التي تمثل عادة سطوحاً فراغية مقفولة ، في كل نقطة يمر منها خط تيار بشكل عمودي دائماً .

في حـالة الجريانات المستقرة يكون كمون السرعة تابعـــاً مكانياً صرفاً $\Phi = f(x,y,z)$ ، ويكون تابعاً للزمان والمكان في حالة الجريانات غير المستقرة $\Phi = f(x,y,z,t)$ . فإذا أدخلنا العلاقة (7.21) في معادلة الاستمرار للجريانات المستقرة غير القابلة للانضغاط (6.20) تأخذ الصياغة التالية :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \Delta \Phi = 0 \quad , \qquad (7.23)$$

أو بالشكل الشعاعي مع أخذ (7.22) بعين الاعتبار :

$$\boxed{\Delta \Phi = \text{div } \mathbf{grad}\, \Phi = 0} \qquad (7.24)$$

يعرف :

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \qquad (7.25)$$

باسم **معامل لابلاس** Laplace operator ، ولذلك تسمى معادلة الاستمرار للجريانات الكمونية (7.23) باسم **معادلة لابلاس** . وينتج منها ان كل تابع $\Phi$ يحقق هذه المعادلة يمثل كمون سرعة لجريان كموني ، فهي إذن معادلة تحديد هذا التابع .

في حالة الجريانات ثنائية البعد ينحصر شرط الدوران بأن تكون مركبة واحدة فقط من مركبات شعاع السرعة الزاوية مختلفة عن الصفر . وبالتالي يكون في حالة جريان مواز للمستوي $x\,y$ :

$$\omega_x = \omega_y = 0 \; ; \quad \omega_z \neq 0 \; . \qquad (7.26)$$

ويتحقق شرط الخلو من الدوران عندما :

$$\omega_z = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \; . \qquad (7.27)$$

نعتبر من هذا الجريان المستوي خطاً للتيار ، فتكون معادلته التفاضلية حسب (5.30) :

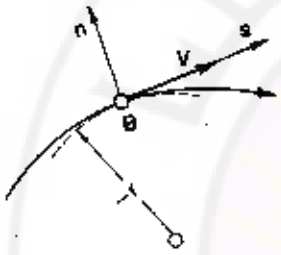
$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u}$$

نكوّن المشتق الثاني وندخل علاقة نصف قطر الانحناء $r$ لخط التيار (انظر [42]) فينتج :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{v}{u}\right) = \frac{1}{u}\frac{dv}{dx} - \frac{v}{u^2}\frac{du}{dx} = -\frac{(1+(dy/dx)^2)^{3/2}}{r} \quad (7.28)$$

نختار محاور الإحداثيات بحيث أنه في النقطة B مثلاً في الشكل (٥.٧) يأخذ المحور x إتجاه المماس s والمحور y إتجاه الناظم n على خط التيار فيكون عندئذ :

$$\frac{dy}{dx} = 0 \; ; \; \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{r} \; ; \; v = 0 \; ; \; u = V$$




الشكل ٥.٧ :
استخراج شرط الخلو
من الدوران بالنسبة لخط تيار

وينتج من (7.28) العلاقة :

$$\frac{dv}{dx} = \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{V}{r}$$

فإذا أدخلناها في (7.27) يصبح شرط الخلو من الدوران لخط التيار المعتبر:

$$\frac{V}{r} + \frac{\partial V}{\partial n} = 0 \quad . \quad (7.29)$$

هذه العلاقة لها أهمية كبيرة بالنسبة لدراسة الجريانات المستوية المثالية في جملة تدور نفسها حول المحور z بسرعة زاوية ثابتة ، كما هو الحال عند دراسة الجريان داخل الدولاب الدائر لآلة جريان، عندما يتغير البعد المحوري للجزيئات الصغيرة . فإذا كان الجريان الموجه للدولاب الدائر مستقراً وكمونياً ، فإن

الجريان داخل الدولاب الدائر يكون غير مستقر ، إذا راقبنا حركته من نقطة مطلقة ساكنة خارج الدولاب الدائر. وتكون هذه الحركة مستقرة إذا راقبناها من جملة نسبية مثبتة على الدولاب الدائر . فاذا فرضنا V السرعة المطلقة ، W السرعة النسبية ، U السرعة المحيطية فتكون :

$$\mathbf{V} = \mathbf{W} + \mathbf{U} \quad . \tag{7.30}$$

وبإدخالها في (7.29) مع مراعاة أن $U = -r\omega$ ، $\frac{\partial U}{\partial n} \equiv \frac{\partial U}{\partial r}$ ينتج :

$$\frac{W}{r} + \frac{\partial W}{\partial n} = 2\omega \quad . \tag{7.31}$$

وهـذا يعني ان **الجريان النسبي دوراني ولكنه مستقر** ، وبالتالي لا يملك كمون سرعة ، بينما كان الجريان المطلق كمونياً ولكنه غير مستقر . لهـذا فإن دراسة الجريان النسبي أكثر تعقيداً [7a], [85], [86] .

إن الصيغة المميزة للجريانات الكمونية ( اللادورانية ) بأنها تملك كمون سرعة تسهل كثيراً إيجاد حلول قريبة من الواقع بالنسبة لعدد كبير من المسائل الهيدروديناميكية والايروديناميكية والغازديناميكية ذات الاهمية التطبيقية . وسنعالج هذه الجريانات بالتفصيل فيما بعـــد . ولكن بالمقابل فإن العديد من الظواهر التي نشاهدها في الطبيعة والمسائل التكنيكية التي تعترضنا عند تصميم الآلات والمنشآت لا يمكن تحليلها وفهمها فيزيائياً بعمق ومن ثم تطوير نظريات وطرق عملية لحسابها دون الاعتماد على الحركة الاعصارية ( الدورانية ) للسائل. فعليها بنيت نظرية الجناح الحامل ، ونظرية الاضطراب التي لا تزال حتى الآن إحدى المسائل المعقدة لميكانيك السوائل الحديث . وتتجلى أهميتها العمليـة من حقيقة أن كل تشكل اعصاري يؤدي لخسارة في القدرة الميكانيكية للسائل .

## ٣.٧ المفاهيم الاولية والقوانين الاساسية للحركة الاعصارية

سنقتصر هنا على حركة السوائل المثالية (عدية الاحتكاك) ونعتبر حقل الجريان المستمر محدداً في كل نقطة منه وفي كل لحظة بشعاع السرعة V ، وأنه يحقق شرط الخلو من الدوران باستثناء بعض النقاط الشاذة Singular points التي يكون فيها rot V ≠ 0 . إن لمثل حقول الجريان هذه أهمية عملية عندما تنضم اليها حقول جريان عادية ، حيث ينبت على هذا الاساس طرق حديثة ، مثل طريقة النقاط الشاذة ، لحساب أجسام الجريان المولدة لقوة الرفع Lift .

### ١.٣.٧ مفهوم الجولان

من اجل الدراسة التفصيلية للحركة الاعصارية ، ولإعطاء حكم عام فيما إذا كانت منطقة كبيرة نسبياً من حقل الجريان تقوم بحركة دورانيـــة أم لا ، نستعين بمفهوم **الجولان** Circulation ، الذي ثبت أنه من أخصب المفاهيم التي يستخدمها ميكانيك السوائل الحديث. ولتوضيحه يفضل أن نبدأ ببعض التعاريف.

نعرّف « الخط السائلي » و « السطح السائلي » بأنه المنحني أو السطح الذي يتشكل باستمرار من نفس الجزيئات السائلية ، حتى وان تحرك أو غيّر شكله.

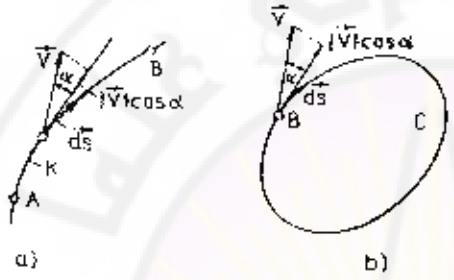
ونعرّف **التكامل الخطي** Λ على طول منحن K يصل بين نقطتين A و B ، الشكل ( ٦.٧ – a ) ، بأنه « الجريان » على طول K [9] ، ويساوي تكامل جداء مركبة السرعة المماسية على K في العنصر الخطي ds . فاذا كانت α الزاوية المشكلة بين V و ds ينتج مع اعتبار الزمن ثابت ( أي في لحظة زمنية آنية ):

$$\Lambda = \int_A^B V \cos\alpha \, ds = \int_A^B \mathbf{V}.d\mathbf{s} \qquad (٦.٧)$$

أي أنه يمثل تكامل الجداء الداخلي لشعاع السرعة في شعاع العنصر الخطي . وبالتالي فهو يمثل قيمة عددية ، يمكن حسابها في حالة السوائل الحقيقية والمثالية.

إذا كان المنحني K متعامداً مع خط التيار وبالتالي يمثل خطاً للكمون الثابت فتكون $\alpha = \pi/2$ وينتج $\Lambda = 0$ . أما إذا كان K خطاً للتيار فتكون $\alpha = 0$ و $\cos\alpha = 1$ وينتج من (7.32) :

$$\Lambda = \int_A^B V\,ds \qquad . \qquad (7.33)$$




الشكل ٧ . ٦ :
تعريف التكامل الخطي
لشعاع السرعة على طول
المنحني K (a ، والجولان على
طول المنحني المغلق C (b .

في حالة الجريانات الثلاثية البعد يكون $V=V(u,v,w)$ و $ds=ds(dx,dy,dz)$ . وبالتالي تأخذ (7.32) بصيغة مركبات السرعة الشكل التالي :

$$\Lambda = \int_A^B (u\,dx + v\,dy + w\,dz) \qquad . \qquad (7.34)$$

فاذا كان الجريان المعتبر كمونياً ، أي يملك كمون سرعة $\Phi$ يحقق العلاقة (7.21) ، فإن تكامل (7.34) يصبح سهلاً جداً إذ ينتج :

$$\Lambda = \int_A^B \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\Phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\Phi}{\partial z}dz\right) = \int_A^B d\Phi = \Phi_B - \Phi_A = \Delta\Phi_{B-A} \qquad (7.35)$$

وهذا يعني أنه في حالة الجريانات الكمونية يكون التكامل الخطي للسرعة على طول المنحني K الواصل بين النقطتين A و B مساوياً للفرق بين قيمتي كمون

السرعة في هاتين النقطتين . فاذا كان التابع $\Phi$ وحيد التعيين ، أي له قيمة واحدة في كل نقطة من المجال المعتبر ، فان قيمة $\lambda$ لاتتعلق بشكل المنحني K، أي بالطريق الواصلة بين النقطتين A و B .

من مفهوم التكامل الخطي للسرعة نصل الى مفهوم الجولان $\Gamma$ . ويعرّف بأنه **التكامل الخطي للسرعة على طول منحن مغلق** C ، الشكل (٦.٧ - b) ، مع اختيار اتجاه موجب للالتفاف يؤخذ عادة بعكس دوران عقارب الساعة . وعليه تصبح (7.32) :

$$\Gamma = \oint_{(C)} V \cos\alpha \, ds = \oint_{(C)} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{s} \qquad , \qquad (7.36)$$

ومن (7.34) نجد :

$$\Gamma = \oint_{(C)} (u\,dx + v\,dy + w\,dz) \qquad .$$

وينتج من هذه العلاقة في حالة الجريانات الكمونية مع الانتباه للعلاقة (7.35) :

$$\Gamma = \oint_{(C)} d\Phi = \Phi_{B \to A} - \Phi_A = \Delta\Phi\,(C) \qquad , \qquad (7.37)$$

حيث $\Delta\Phi\,(C)$ **فرق الكمون** عندما تلف المنحني C دورة كاملة وتعود B فتنطبق على النقطة A . فاذا كان التابع $\Phi$ وحيد التعيين فتكون قيمة الجولان بالنسبة لأي منحن مغلق تساوي الصفر . وهذا يعني ان المنطقة المعتبرة من حقل الجريان تمثل **ساحة وحيدة الترابط** . أما اذا كانت تمثل ساحة **متعددة الترابط** بمفهوم « **سطوح ريمان** » Riemann ، وكان التابع $\Phi$ متعدد القيم في نقطة معينة أو غير مستمر ، بمعنى يقفز من قيمة لأخرى ،فيكون للجولان قيمة تختلف عن الصفر بالنسبة لأي منحن مغلق أو خط تيار مغلق . وعليه نصل الى النتيجة الهامة التالية :

في ساحة وحيدة الترابط يسود في مجموعها جريان كموني فإن الجولان على طول أي منحن مغلق يساوي الصفر .

هذه النتيجة تبين بوضوح أن هناك علاقة مباشرة بين الدوران والجولان ، الذي لا ينحصر تعريفه بالجريانات المثالية فقط . كما يتضح أيضاً ان هناك جريانات كمونية خالية من الجولان وأخرى لا ينعدم فيها الجولان . وهذه بالذات لها أهمية تطبيقية كبرى سنوضحها فيما بعد .

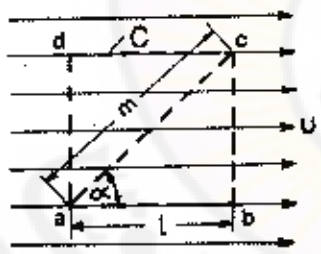
لتثبيت مفهوم الجولان نقوم بحسابه بالنسبة لبعض الامثلة البسيطة . نعتبر أولاً جريانا مثالياً منتظماً موازياً للمحور x سرعته ثابتة U ، الشكل (٧.٧) . نختار المنحني المغلق a d c b a بشكل مستطيل ضلعان منه يوازيان خطوط التيار وطول كل منهما l ، فتكون قيمة الجولان مساوية لمجموع التكامل الخطي على طول أضلاع المستطيل :

$$\Gamma = \sum \Lambda = \Lambda(ab) + \Lambda(bc) + \Lambda(cd) + \Lambda(da) =$$
$$= lU + 0 - lU + 0 \Rightarrow \Gamma = 0 \ .$$

نختار الآن المنحني المغلق المثلثي a c b a ونجري التكامل الخطي للسرعة مع ملاحظة أن $\overline{ca} = m = l/\cos\alpha$ فينتج أيضاً :

$$\Gamma = lU + 0 - m \cdot U \cos\alpha \Rightarrow \Gamma = 0 \ .$$

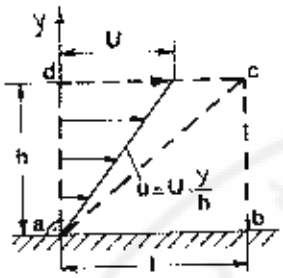
وعليه فانه في الجريان الانسحابي المنتظم ينعدم الجولان بالنسبة لأي منحن مغلق . ويلتج ان تابع كمون السرعة لهذا الجريان وحيد التعيين .




الشكل ٧.٧ :
حساب الجولان
في جريان مثالي منتظم

كمثال آخر نعتبر الجريان فوق صفيحة مستوية ونفرض ان السرعة تتغير خطياً من الصفر وحتى قيمة معينة U على بعد h من الصفيحة ، الشكل (٧.٨) . فاذا حسبنا الجولان على طول منحن مغلق بشكل مستطيل a d c b a نجد بسهولة أن $\Gamma = -Ul \neq 0$ .

وتختلف قيمة $\Gamma$ إذا اخترنا منحنياً مغلقاً مثلثياً مثل a c b a ، وتتضح هذه النتيجة إذا تذكرنا أن مثالنا ليس إلا جريان كوئيت لسائل حقيقي ، وبالتالي فهو دوراني .

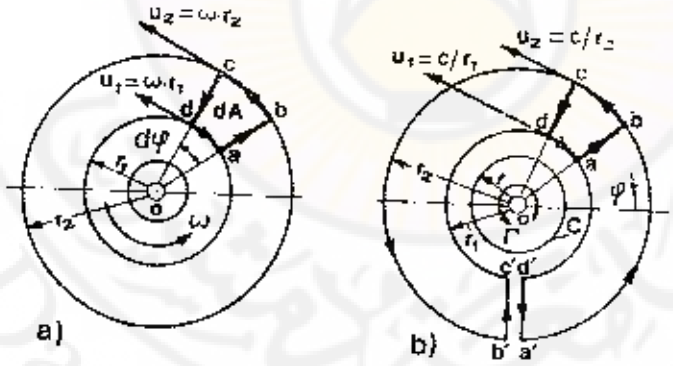



الشكل ٨٠٧ : حساب الجولان في جريان حقيقي فوق صفيحة مستوية .

نعتبر أخيراً جريانا خطوط تياره حزمة من الدوائر المركزية حول المركز 0 . نفرض أولاً ان السرعة المحيطية $u = r \cdot \omega$ تتناسب طرداً مع نصف القطر ، كما لو كان السائل كتلة يدور كجسم صلب بسرعة زاوية ثابتة $\omega$ حول محور يمر من 0 وعمودي على مستو ، الشكل (٩٠٧ - a) . نحسب الجولان بالنسبة للمنحني المغلق a d c b a المحدد بدائرتين نصفا قطريهما $r_2, r_1$ ، وبخطين قطريين يحصران الزاوية $d\varphi$ . فإذا لاحظنا ان السرعة باتجاه نصف القطر معدومة نجد بسهولة :

$$\Gamma = u_2 r_2 \, d\varphi - u_1 r_1 \, d\varphi = \omega \left( r_2^2 - r_1^2 \right) d\varphi \ .$$

فاذا حسبنا مساحة القطاع الدائري المحدد بالمنحني المغلق نجد :




الشكل ٩٠٧ : حساب الجولان في جريان سرعته تتناسب طرداً مع نصف القطر ( اعصار الجسم الصلب ) a) ، وفي جريان سرعته تتناسب عكساً مع نصف القطر ( اعصار كموني ) b) .

$$dA = \int_{r_1}^{r_2} (r\,d\varphi)\,dr = \left(r_2^2 - r_1^2\right)\frac{d\varphi}{2}$$

وبالتالي يصبح الجولان :

$$\Gamma = 2\,\omega\,dA \ . \qquad (7.38)$$

هذه النتيجة يمكن تعميمها على كل قطاع دائري آخر ، حتى لو كان متناهي الصغر . وبالتالي فإن الجولان يساوي الى ضعف قيمة جداء السرعة الزاوية الثابتة لكل جزيء سائل في السطح المحـــد بالمنحني المغلق ، وتتغير قيمته حسب اختيار هـــذا المنحني . وحيث أن $\omega_z \equiv \omega \neq 0$ فتكون حسب ( 7.28 ) كافة جزيئات السائل تقوم فعلاً بحركة دورانية بنفس السرعة الزاوية ( انظر الشكل (٧ . ٨ - b) ) . يطلق على هذا الجريان اسم **إعصار الجسم الصلب أو الاعصار القسري** .

نفرض الآن للمقارنة أن السرعة المحيطية تتناسب عكساً مع نصف القطر : $u = C/r$ ، الشكل (٧ . ٩ - b) . فإذا حسبنا الجولان على طول المنحني المغلق a d c b a ، كما في الحالة السابقة ، ينتج :

$$\Gamma = u_2\,r_2\,d\varphi - u_1\,r_1\,d\varphi = C - C = 0 \ .$$

هذه النتيجة تبقى صحيحة بالنسبة لكل منحنٍ مغلق آخر مثـــل a' d' c' b' a' شريطة ان لا يحتوي المركز 0 . بالمقابل تنتج قيمة الجولان بالنسبة لأية دائرة نصف قطرها r حول 0 ( خط تيار ) :

$$\Gamma = 2\pi\,r \cdot u = 2\pi\,C = \text{const} \ . \qquad (7.39)$$

أي ان الجولان له قيمة ثابتة لا تتعلق بنصف القطر ، ويتوضح بذلك المعنى الفيزيائي للثابت C . وعندما $0 \longleftarrow r$ تصبح $\infty \longleftarrow u$ ، وبالتالي فإن الجريان غير معقول فيزيائياً في المركز 0 الذي يمثل **نقطة شاذة** يوجد فيها **إعصار كموني** ، بينما يمثل المحور z المار من 0 **خيط إعصار** لا نهائي الامتداد شدته **الاعصارية** Vortex intensity تساوي $\Gamma$ . ويقال ان هذا الخيط الاعصاري يحرض حوله حقلاً للسرعة ، تيمناً بالحقل المغناطيسي الذي يحرضه سلك ناقل للتيار الكهربائي . والجدير بالانتباه هنا ان الجريان الكموني حول المركز يملك كمون سرعة

$\Phi = C\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi}\varphi$ يحقق العلاقة (7.23) ونستنتج منها حسب (7.21) السرعة المماسية $v = \frac{\delta\Phi}{ds} = \frac{\delta\Phi}{r\,d\varphi} = \frac{C}{r}$ ،
فاذا حسبنا فرق الكمون بعد دورة كاملة على محيط دائرة ينتج :

$$\Delta\Phi = \Phi(\varphi + 2\pi) - \Phi(\varphi) = 2\pi C = \Gamma$$

وبالتالي فان قيمة كمون السرعة تزداد بمقدار قيمة الجولان الثابت بعد كل دورة كاملة . وهذا يعني أن التابع $\Phi$ متعدد القيم ، وحقل الجريان يمثل رياضياً ساحة متعـددة الترابط يسهل تصورها اذا اعتبرنا وجود قناة للاعصار حول المركز $o$ ذات قطر محدود ومن مادة أخرى صلبة أو غازية تدور بسرعة زاوية معينة .

## ٢.٣.٧ خط الاعصار وأنبوبة الاعصار

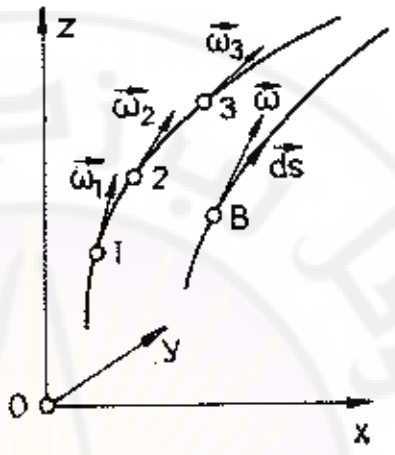
لقد تبين أنه من الأنسب لتتبع تفاصيل الحركة الدورانية اعتبار حقل **شعاع الاعصار** $\omega\ (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ والاستفادة من التماثل بينه وبين حقل شعاع السرعة $V(u,v,w)$ . فكما أن $V$ يمثل سرعة جزيء سائلي في مكان معين وزمن معين ، كذلك يمثل $\omega$ دوران الجزيء في نقطة معينة وزمن معين . وتحسب القيمـة المطلقة للشعاعين من علاقتين متماثلتين (5.2) و (7.17) .

للحصول على تصور هندسي عن الحقل الشعاعي $\omega$ ندخل مفهوم **خط الاعصار** Vortex line ، مماثلاً لمفهوم خط التيار ونعرفه **بالمنحني السائلي الذي يكون المماس عليه في لحظة زمنية معينة منطبقاً في كل نقطة منه على شعاع السرعة الزاوية**، الشكل (١٠.٧) . وتنتج معادلته التفاضلية على غرار العلاقتين (5.28) و (5.30) بالشكل :

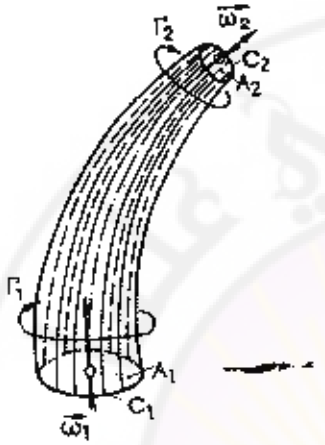
$$\omega \times ds = 0 \Rightarrow \frac{dx}{\omega_x} = \frac{dy}{\omega_y} = \frac{dz}{\omega_z} \qquad (7.40)$$

يتضح من هذا أن الصفات الهندسية لخط الاعصار تشبه تماماً تلك التي يتصف

بها خط التيار . ولكن الصفة الاساسية للأول هي أنه ، حتى ولو تحرك أو غير شكله ، يبقى مكوّناً من نفس الجزيئات السائلة .




الشكل ١٠.٧ : تعريف خط الاعصار واستخراج معادلته التفاضلية




الشكل ١١.٧ :
أنبوبة اعصار

من مفهوم خط الاعصار نصل الآن بسهولة لمفهوم **أنبوبة الاعصار** Vortex tube . الشكل(١١.٧) . ونحصل عليها ، كما في حالة أنبوبة التيار ، إذا أخذنا في حقل إعصاري مستمر ، أي خالٍ من الفجوات ، منحنياً مغلقاً صغيراً $c_1$ فإن مجموع خطوط الاعصار المارة من نقاط هذا المنحني تشكل سطحاً أنبوبياً يطلق عليه أنبوبة الإعصار ؛ ويطلق على السائل الذي تحتويه **خيط الاعصار** Vortex filament . ويقودنا التفكير على هذا المنوال للتساؤل فيما إذا كان لشرط الاستمرار ولغزارة التدفق الحجمي ( التيار الحجمي ) بالنسبة لأنبوبة التيار ما يماثلها بالنسبة لأنبوبة الاعصار . وتكون الإجابة سهلة إذا اشتقنا مركبات شعاع الاعصار $\omega_x , \omega_y , \omega_z$ حسب (7.6) جزئياً وعلى التوالي بالنسبة لـ x,y,z وأخذنا المجموع لوجدنا :

$$\frac{\partial \omega_x}{\partial x} + \frac{\partial \omega_y}{dy} + \frac{\partial \omega_z}{\partial z} = \text{div } \omega = 0 \ . \qquad (7.41)$$

هذه العلاقة تشبه تماماً معادلة الاستمرار (6.21) لجريان غيرقابل للانضغاط. فاذا لاحظنا حسب (7.15) أن $2\,\omega = \text{rot } V$ تأخذ العلاقة الاخيرة الصياغة الشعاعية :

$$\text{div (rot V)} = \text{div } (2\,\omega) = 0 \ . \qquad (7.42)$$

وعليه يمكن صياغة الجملة التالية كنتيجة مماثلة لما توصلنا اليه ص ١٩٧ :

غزارة التدفق الإعصاري أو **شدة الاعصار** لأنبوبة اعصار صغيرة المقطع بحيث يمكن اعتبار شعاع السرعة الزاوية موزعاً عليه بانتظام تساوي الى ضعف جداء السرعة الزاوية في مساحة المقطع الناظمي على محور الأنبوبة ، وتبقى قيمتها ثابتة على طول الأنبوبة أي :

$$Q_\omega = 2\,\omega_1 A_1 = 2\,\omega_2 A_2 = 2\,\omega A = \text{const}; \ \omega \parallel A \qquad (7.43)$$

وتنتج شدة الاعصار بالنسبة لأي سطح اعتباطي يشكل الناظم عليه مع الشعاع $\omega$ زاوية $\alpha$ بالتماثل مع العلاقة (6.23) :

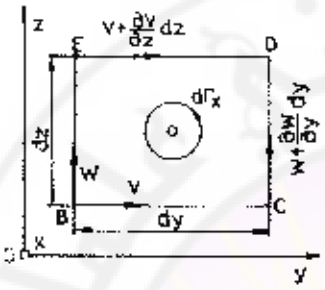
$$Q_\omega = 2\,\omega\, A \cos\alpha = 2\,\omega\, A_n = 2\,\omega_n A = 2\,\omega \,.\, A \ , \qquad (7.44)$$

حيث $A = n_\omega . A$ الشعاع السطحي ، $n_\omega$ شعاع واحدة الناظم عليه .

إن شرط الاستمرار هذا يقضي ، كما كان الأمر بالنسبة لخطوط التيار في حقل السرعة لجريان غير قابل للانضغاط ، بأن خطوط الاعصار في داخل السائل لا يمكن ان تكون لها بداية أو نهـــاية . ولكن يمكن ان تكوّن منحنيات مغلقة ، أو أن تنتهي عند حدود الجملة الفيزيائية المفتوحة ، مثل السطوح الحدّية أو الحرة للسائل .

## ٣.٣.٧ العلاقة بين الجولان والدوران ـ قانون ستوكس التكاملي

نفرض ان حقل شعاع الاعصار ω للجريان المعتبر مستمراً ، أي أن كل جزيء سائلي فيه يملك سرعة زاوية . وللسهولة نعتبر أولاً جزيئاً سطحياً بشكل مستطيل E D C B أبعاده dz, dy ، كأن يكون مقتطعاً من جريان مستوٍ موازٍ للمستوي z y ، الشكل ( ١٢.٧ ) .




الشكل ١٢.٧ :
حساب الجولان حول محيط جزيء سطحي مستطيل لاستخراج العلاقة بين الجولان والدوران .

إن الجولان على طول الخط المغلق B E D C B المحد للجزيء السطحي ينتج كمجموع للتكامل الخطي للسرعة على طول أضلاع المستطيل :

$$d\Gamma_x = \Lambda\,(BC) + \Lambda\,(CD) + \Lambda\,(DE) + \Lambda\,(EB) \quad .$$

نفرض ان w, v مركبتا السرعة في النقطة B . فتكون مركبة السرعة على طول الضلع D C هي $w + \frac{\partial w}{\partial y}\,dy$ وعلى طول الضلع D E هي $v + \frac{\partial v}{\partial z}\,dz$ . وينتج بالتالي :

$$d\Gamma_x = v\,dy + \left(w + \frac{\partial w}{\partial y}\,dy\right)dz - \left(v + \frac{\partial v}{\partial z}dz\right)dy - w\,dz \quad .$$

وبعد الاصلاح والانتباه أن مساحة الجزيء السطحي $dA_x = dy\,dz$ ، حيث الدليل x يشير الى أن الجزيء السطحي متعامد مع المحور x ، نجد :

$$d\Gamma_x = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) dA_x \quad .$$

ولكن حسب (7.6) فإن :

$$\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = 2\omega_x \quad .$$

وبالتالي تصبح العلاقة السابقة :

$$d\Gamma_x = 2\,\omega_x\, dA_x \,. \qquad (7.45)$$

بنفس الطريقة نحصل على علاقتين مشابهتين بالنسبة لجزيء سطحي في المستويين $z\,x$ و $y\,x$ المتعامدين مع $y$ و $z$ :

$$d\Gamma_y = 2\omega_y\, dA_y \;;\; d\Gamma_z = 2\,\omega_z\, dA_z \quad . \qquad (7.46)$$

هذه النتيجة يمكن تعميمها على أي جزيء سطحي مستو $dA$ بصنع الناظم عليه $n$ مع شعاع السرعة الزاوية $\omega$ زاوية $\alpha$ حيث ينتج الجولان على طول محيط هذا الجزيء :

$$d\Gamma = 2\omega_n\, dA = 2\,\omega\, dA_n = 2\omega\, dA \cos\alpha = 2\,\omega \cdot dA \qquad (7.47)$$

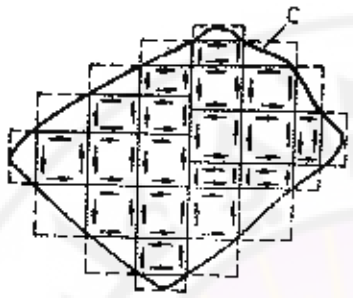
فاذا تذكرنا ان الطرف الايمن من العلاقات الاخيرة يمثل شدة الاعصار وأن السرعة الزاوية تعبر عن دوران الجزيء فنكون قد توصلنا الى العلاقة بين الجولان والدوران بالنسبة لجزيء سطحي مستوٍ صغير والتي يمكن التعبير عنها بالجملة الهامة التالية :

---

الجولان حول محيط جزيء سطحي مستوٍ صغير ( مستطيل مثلاً ) يساوي شدة الاعصار الذي يخترق هذا الجزيء السطحي : $\Gamma \equiv Q_\omega$ .

---

هذه النتيجة تبقى صحيحة بالنسبة لأي سطح مستو A ذي شكل اعتباطي ويحده المنحني C ، الشكل (١٣٠٧) . فاذا قسمنا هذا السطح بمجموعة محددة من المستقيمات الشاقولية والأفقية الى عدد كبير n من المستطيلات الصغيرة ، فإن أضلاعها الخارجية المتلاقية مع المنحني C تشكل متعدد أضلاع عدد أضلاعه m . فاذا لاحظنا عند حساب الجولان حول محيط المستطيلات الصغيرة الداخلية ، كتكامل خطي للسرعة على طول أضلاعها ، أن كل ضلع تابع لمستطيلين متجاورين يتم الالتفاف حوله باتجاهين متعاكسين ،




الشكل ١٣٠٧ : حساب الجولان على طول منحن مغلق C يحد سطحاً مستوياً اعتباطي الشكل .

فان التكامل الخطي لكافة الاضلاع الداخلية للمستطيلات ينعدم وتبقى قيمة الجولان مساوية لمجموع التكاملات الخطية على طول الأضلاع الخارجية للمستطيلات أي حول محيط متعدد الاضلاع . فاذا جعلنا عدد المستطيلات $n \longrightarrow \infty$ فإن $m \longrightarrow \infty$ أيضاً وبأخذ متعدد الاضلاع شكل المنحني C وبالتالي ينتج من (7.47) بالتكامل :

$$I = 2 \int\int_{(A)} \omega_n \, dA \quad . \qquad (7.48$$

لنعالج الآن الحالة العامة فنعتبر سطحاً فراغياً اعتباطياً A يرتكز على منحن مغلق C بدون تعيين ، الشكل (١٤٠٧) . ليكن dA جزيئاً سطحياً صغيراً من A ، وبالتالي يمكن اعتباره مستوياً تنطبق عليه العلاقة (7.47) . وبذلك تأخذ علاقة (7.48) صفة عامة ، يمكن برهان صحتها بطريقة مفصلة .

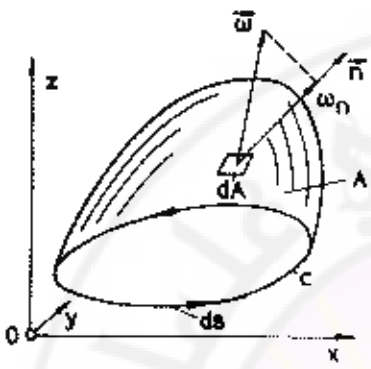
نفرض ان الناظم n على dA يصنع مع محاور الاحداثيات الديكارتية z, y, x الزوايا $\gamma, \beta, \alpha$ ، فتكون :

$$dA_x = dA \cos \alpha ;$$

$$dA_y = dA \cos \beta ;$$

$$dA_z = dA \cos \gamma$$

مساقط dA على المستويات المتعامدة مع z, y, x على التوالي . وينتج الجولان بالنسبة للسطح dA كمجموع للجولانات حول مساقطه . وبالتالي يكون حسب (7.45) و (7.46) وباستخدام علاقات الجداء الشعاعي العددي :




الشكل ٧.١٤ : حساب الجولان على طول منحن مغلق فراغي واستخراج قانون ستوكس التكاملي .

$$dI' = dI'_x + dI'_y + dI'_z = 2 (\omega_x \, dA_x + \omega_y \, dA_y + \omega_z \, dA_z) =$$

$$= 2(\omega_x \cos \alpha + \omega_y \cos \beta + \omega_z \cos \gamma) \, dA = 2 \, \omega \, . \, n \, dA = 2 \, \omega \, . \, dA \, .$$

فاذا أدخلنا حسب (7.15) : $2 \omega = \text{rot } V$ ، والجولان حسب (7.36) ينتج بتكامل العلاقة السابقة :

$$I' = \oint_{(C)} V \, . \, ds = \iint_{(A)} \text{rot } V \, . \, dA = 2 \iint_{(A)} \omega \, . \, dA \qquad (7.49)$$

هذا هو قانون ستوكس التكاملي المعروف في نظرية الحقل (مثلاً [42]) كقانون تكاملي لإرجاع التكامل السطحي الى تكامل خطي . ويعبر هنا عن العلاقة العامة بين الجولان والدوران :

التكامل السطحي للدوّار شعاع السرعة بالنسبة لجريان ثلاثي البعـــد ضمن سطح فراغي اعتباطي الشكل يساوي ضعف التكامل السطحي لشعاع السرعة الزاوية ، أي مجموع شدة الاعصارات التي تخترق هذا السطح، وبالتالي يساوي قيمة الجولان على طول المنحني الذي يرتكز عليه السطح .

فاذا عبرنا عن هذا القانون بمركبات شعاع السرعة نجد باستخدام (7.6) :

$$\Gamma = \oint_{(\Gamma)} (u\,dx + v\,dy + w\,dz) = \iint_{(A)} \left[ \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) dy\,dz + \right.$$

$$\left. + \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) dz\,dx + \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx\,dy \right] . \qquad (7.50)$$

من هذا القانون نستنتج بسهولة أنه في حالة الجريانات اللادورانية (الكمونية) أي عندما $\omega = 0$ يكون الجولان $\Gamma = 0$ . وعليه يمكن أيضاً صياغة شرط الخلو من الدوران ص ٢١٩ كالتالي :

شرط الخلو من الدوران لحقل جريان وحيـــد الترابط يقضي بأن يكون الجولان على طول أي منحنٍ مغلق ( لا يتقاطع مع نفسه ) معدوماً :

$$\Gamma = \oint \mathbf{V} . d\mathbf{s} = \oint \mathbf{grad}\,\Phi . d\mathbf{s} = \oint d\Phi = 0 \quad .$$

## ٤.٣.٧ قانون لوموسون عن ثبات الجولان مع الزمن

نعتبر جرياناً لسائل **عديم الاحتكاك ومتجانس** ، بمعنى أن الكثافة إما أن تكون ثابتة ( سائل غير قابل للانضغاط ) أو تتعلق بالضغط فقط ( سائل

باروتروبي barotropic ) . نفرض أيضاً ان القوى الحجمية ( الكتلية ) المؤثرة على السائل من النوع المخزن للقدرة ، وبالتالي يمكن اشتقاقها جزئياً من كمون قوى $\Phi_b$ وحيد التعيين (راجع ٣.٣) .

على اساس هذه الفرضيات استطاع **وليم طومسون ( لورد كيلفين )** W. Thomson (1824-1907) أن يبرهن علاقة هامة عن ثبات الجولان مع الزمن معروفة اليوم باسم **قانون طومسون** وتنص على ما يلي :

> في سائل عديم الاحتكاك ومتجانس يؤثر عليه حقل قوى حجمية كموني يكون الجولان على طول أي منحن سائلي مغلق ثابتاً مع الزمن $\Gamma'(t)=\text{const}$ .

بما أن الخط السائلي تعريفاً يجب ان يكون مؤلفاً من نفس الجزيئات السائلية فان قانون **طومسون** يقضي بأن يكون التفاضل المادي للجولان بالنسبة للزمن معدوماً ، أي :

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \frac{D}{Dt}\oint \mathbf{V}.d\mathbf{s} = 0 \quad . \tag{7.51}$$

للبرهان على هذه العلاقة نحسب أولاً التفاضل الزمني للتكامل الخطي لشعاع السرعة بين نقطتين A و B من المنحني السائلي ثم نجعل إحداهما تتناهى للاخرى فنحصل على التفاضل الزمني للتكامل الخطي المغلق . وباعتبار ان التكامل يتم عند زمن ثابت ، أي في لحظة معينة ، فيكون :

$$\frac{D}{Dt}\int_A^B \mathbf{V}.d\mathbf{s} = \int_A^B \frac{D}{Dt}(\mathbf{V}.d\mathbf{s}) = \int_A^B \left[\frac{D\mathbf{V}}{Dt}.d\mathbf{s} + \mathbf{V}\frac{D(d\mathbf{s})}{Dt}\right] . \tag{7.52}$$

نمعن النظر في الحد الاول من هذا التكامل فنجد أن $\mathbf{b} = \frac{D\mathbf{V}}{Dt}$ يمثل بموجب (5.16) التسارع

المادي . ويكون حسب القانون الاساسي للتحريك : جداء التسارع في الكتلة يساوي محصلة القوى الحجمية وقوى الضغط . فاذا كانت $\mathbf{F}'_v$ القوة الحجمية النوعية ( انظر ص ١٣٧ ) ، وكان $\mathbf{grad}\ p$ تدرج الضغط فيمكن البرهان ( راجع الفصل الرابع ) أن :

$$\mathbf{b} = \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \frac{\mathbf{F}'_v}{\rho} - \frac{\mathbf{grad}\ p}{\rho} = -\left(\mathbf{grad}\ \Phi_s + \frac{1}{\rho}\mathbf{grad}\ p\right) \quad . \qquad (7.53)$$

فإذا لاحظنا أنه بموجب علاقة معروفة في التحليل الشعاعي يكون الجداء الداخلي لشعاع التدرج في شعاع العنصر الخطي مساوياً التفاضل التام ، فإن تكامل الحد الاول من ( 7.52 ) يصبح :

$$\int_A^B \frac{D\mathbf{V}}{Dt} . d\mathbf{s} = -\int_A^B \left[\mathbf{grad}\ \Phi_s . d\mathbf{s} + \frac{\mathbf{grad}\ p}{\rho} . d\mathbf{s}\right] =$$

$$= -\int_A^B d\Phi_s - \int_A^B \frac{dp}{\rho} = -\Phi_s \Big|_A^B - \mathbf{P}(p) \Big|_A^B \quad , \qquad (7.54)$$

حيث $\mathbf{P}(p) = \int \frac{dp}{\rho}$ هو تابع الضغط ، الذي يصبح في حالة الجزيئات غير القابلة للانضغاط مساوياً إلى $p$ .

بالنسبة لتكامل الحد الثاني من (7.52) نلاحظ أن السرعة الآنية لجزيء من الخط السائلي في موقع $s$ هي : $\mathbf{V}(s) = Ds/Dt$ . وتكون في نفس اللحظة سرعة جزيء في موقع $(s + ds)$ هي : $\mathbf{V}(s + ds) = \frac{D}{Dt}(s + ds) = \mathbf{V} + d\mathbf{V}$ ؛ أي أن $d\mathbf{V}$ هو فرق السرعات المتواقتة لجزيئات الخط السائلي التي تفصلها مسافة $ds$ . وعليه يصبح :

$$\int_A^B \mathbf{V} \frac{D(d\mathbf{s})}{Dt} = \int_A^B \mathbf{V} . d\left(\frac{D\mathbf{s}}{Dt}\right) = \int_A^B \mathbf{V} . d\mathbf{V} = \frac{1}{2}\mathbf{V}^2 \Big|_A^B \quad . \qquad (7.55)$$

بذلك تصبح العلاقة (7.52) من الشكل :

$$\frac{D}{Dt}\int_A^B \mathbf{V} . d\mathbf{s} = \left[-\Phi_s - \mathbf{P} + \frac{\mathbf{V}^2}{2}\right]_A^B \quad .$$

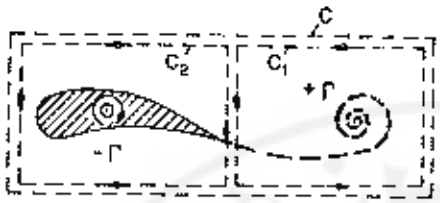
وبما ان كافة الحدود في الطرف الايمن تمثل ، كما هو مفروض ، توابع وحيدة التعيين في كل نقطة ، فينتج بسهولة أنه عندما تتناهى B إلى A يصبح الطرف الايمن مساوياً الصفر ، وبالتالي فان العلاقة (7.51) محققة ، وقيمة الجولان تبقي فعلاً ثابتة مع الزمن .

إن قانون **طومسون** يسمح باستخلاص عدة استنتاجات هامة . فاذا كان السائل قبل بدء الحركة في حالة سكون ($V = 0$) فيكون الجولان بالنسبة لأي خط سائلي مغلق بالتأكيد مساوياً الصفر . ويبقى إذن معدوماً بالنسبة لكافة جزيئات السائل التي تبدأ حركتها من السكون . وهذا يعني حسب قانون **ستوكس** أن كل جريان عديم الاحتكاك يبدأ حركته من السكون هو جريان كموني خال من الاعاصير . ولكن يجب ألا يفهم من هذا أنه لايمكن أن تتكون أعاصير في مثل هذه الجريانات . إلا أن تكونها مرهون دائماً بوجود **سطوح فاصلة** أو كما تسمى أيضاً **سطوح عدم استمرارية** Discontinuity surface يتم عبرها تغير مفاجيء للسرعة والضغط وتتصف بعدم استقرارها (راجع ٥٠٣٠٨) . هذه السطوح تنشأ بعد بدء الحركة وبالتالي لا ينطبق عليها قانون **طومسون** . ولكنه يبقى صحيحاً بالنسبة لأي خط سائلي مغلق يضم في داخله مثل هذه السطوح الفاصلة ، ويلزم عندها ان يكون الجولان الكلي للاعاصير المتشكلة في المجال المغلق معدوماً . لهذا لا تظهر عادة أعاصير إفرادية ولها أزواج أعاصير .

لنوضح هذه النتيجة الهامة على مثال بدء الحركة لجناح حامل في سائل ساكن ، الشكل ( ١٥٠٧ ) . إن الجولان حول الخط السائلي المغلق C الذي يضم الجناح وهو في حالة السكون ( أو أي خط آخر ) يساوي الصفر . بعد بدء الحركة ينشأ عند مؤخرة الجسم الحاد سطح فاصل نتيجة تلاقي التيار العلوي والسفلي للسائل بسرعتين مختلفتين عادة . هذا السطح الفاصل يتفكك بعد لحظة قصيرة الى مايسمى **اعصار بدء الحركة** .

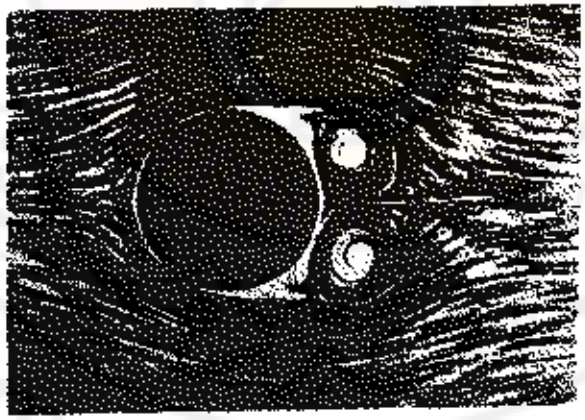
فاذا اعتبرنا الخط المغلق $C_1$ الذي يضم هذا الاعصار تنتج لدينا قيمة للجولان $\Gamma_1 \neq 0$ . وإذا حسبنا الجولان على طول الخط المغلق $C_2$ الذي يحيط بالجناح

الحامل نجد أنه من حيث القيمة يساوي شدة إعصار بدء الحركة ولكنه مخالف له بالاشارة . وعليـــه يكون الجولان بالنسبة لمجموع الخطين المغلقين $C_2, C_1$ معدوماً . وهذا يؤكد أن نشوء الجولان حول جناح حامل يبدأ حركته من السكون لا يتناقض مع قانون **طومسون** .




**الشكل ١٥.٧** : يتشكل الجولان حول جناح حامل يبدأ حركته من السكون نتيجة ظهور إعصار بدء الحركة .

التجربة تؤكد بوضوح صحة النتائج السابقة . فبالامكان بوسائل تزئية الجريان تصوير أعاصير بـدء الحركة ، كما يبين ذلك الشكل ( ١٦.٧ ) بالنسبة لاسطوانة دائرية . كما يمكن أيضاً رؤية الاعصار الجولاني حول الجنـاح الحامل إذا أوقف فجأة بعـد لحظة من بدء الحركة ، حيث يتشكل ما يسمى **اعصار التوقف** ، الشكل (١٧.٧) .



**الشكل ١٦.٧** : تكوّن إعصار بدء الحركة لاسطوانة دائرية عند الاقلاع من السكون ، حسب براندل (انظر [28] ) .

الجدير بالانتباه أن قانون طومسون، وفقاً للفرضيات التي اشتق على أساسها، لاينطبق في حالة الجريانات الحقيقية . كما لاينطبق في حالة السوائل غير المتجانسة، ولكن طريقة التحليل السابقة تسمح بحساب التغير الزمني للجولان بالنسبة لكتلة هواء مثلاً ارتفعت فيها درجة الحرارة بشكل غير متساوٍ، نتيجة تسخين موضعي.



الشكل ١٧.٧ : بعد الاقلاع بفترة قصيرة أوقف الجناح الحامل . الاعصار الجولاني ( أعصار التوقف ) بعد انفصاله عن الجناح يسبح مع اعصار بدء الحركة ، حسب إيلك [18] .

## ٥.٣.٧ قوانين هلمهولتس

لقد استخرج هلمهولتس في دراسته المشهورة الآنفة الذكر القوانين الاساسية للحركة الاعصارية في السوائل المثالية المتجانسة ( الباروتروبية ) الخاضعة لحقل قوى حجمية كموني وصاغها بالشكل التالي :

١ ـ لا يمكن ان يكون جزيء سائلي في حالة دوران إذا لم يكن في هذه الحالة منذ بدء الحركة .

٢ – كل جزيء سائلي يكون في لحظة ما تابعاً لخط إعصار فإنه يبقى كذلك عندما يتحرك خط الاعصار أو يغير شكله .

٣ – غزارة التدفق الاعصاري تبقى ثابتة على طول انبوبة الاعصار وتحافظ على قيمتها أثناء حركة الانبوبة .

سوف لا نتعرض هنا للبرهان الرياضي لهذه القوانين الذي يمكن التوصل اليه بدون صعوبة كبيرة بمساعدة قانون **ستوكس** التكاملي وقانون **طومسون** . وتجدر الاشارة الى أن **هلمهولتس** قد اشتق هذه القوانين على أساس التماثل بين الحقل الكهراطيسي وحقل الجريان .

من القانون الأول ينتج أن كل جريان عديم الاحتكاك يبدأ حركته من السكون هو جريان لادوراني. وينتج من القانون الثاني أن أنبوبة الاعصار تبقى باستمرار أنبوبة إعصار ، أي أنها لا تتفكك (طبعاً في السوائل الحقيقية لاينطبق ذلك ! ) .وينتج من القانون الثالث أن كل خط مغلق يحيط بالأنبوبة الاعصارية يمكن إزاحته على طول هذه الانبوبة دون ان يتغير الجولان حوله. ولهذا لايمكن أن يكون لخيط الاعصار بداية أو نهاية ، وإنما يجب أن ينتهي إما على الجدار أو على السطح الحر للسائل ، وإمـــا أن يشكل خيطاً إعصارياً خاتمياً نلاحظه أحياناً عند بعض المدخنين البارعين ، حيث يلوّن الدخان جزيئات الهواء التي تقوم بحركة دورانية . وكون هذه الحلقة الاعصارية تتفكك بعد فترة بعود لتأثير الاحتكاك .

إن قانون **هلمهولتس** الثالث يجد تطبيقاً عملياً هاماً في نظرية الجناح الحامل المحدود الامتداد التي وضعها **براندل** . إن الجناح الحامل يعوض عنـــه بخيط إعصاري يسمى **الاعصار المربوط** Fixed vortex بينما تكوّن خطوط الاعصار المنبعثة من نهايتيه ما يسمى **الاعصاران الحران** Free vortex . وهـــذان يشكلان مع الاعصار المربوط وإعصار بدء الحركة بعيداً خلف الجناح الحامل

ما يسمى **اعصار حدوة الحصان** المغلق ، وذلك بالتطابق مع قانون **هلمهولتس** الثالث . هـذا القانون يجد أيضاً تطبيقاً هاماً في بناء الأقنيـة الهوائية والمائية للقياسات الايروديناميكية والهيدروديناميكية، حيث يطلب ان يكون الجريان في حجرة القياس منتظماً وخالياً من الدوران قدر الامكان [4] . ويتم تحقيق ذلك بوضع مايسمى **مقوّم التيار** في مدخل النفاثة المتصلة بحجرة القياس . وهو يتألف من صفائح متصالبة أو مايشابهـا تكوّن أقنية متوازية صغيرة المقطع ( أبسطها يشبه شبك الغربال ! ) . فاذا وجدت كتلة هوائيـة في حالة دوران حول محور موازٍ لاتجاه الجريان ، فان سرعتها الزاوية تزداد بمعدل n مرة إذا صغر المقطع بنسبة 1/n ، لأن الشدة الاعصارية $A = 2\omega r^2$ تبقى ثابتة . وباعتبار أن القطر عرضانيـاً على خط التيار ينقص بنسبة $1/\sqrt{n}$ ينتـج من ذلك زيادة السرعة العرضانية ( المشوشة ! ) $v = r\omega$ بنسبة $\sqrt{n}$ بينما تزداد السرعـة في اتجاه التيار بنسبة n .

كل خيط إعصاري يولد في جواره المباشر سرعة إضافية يطلق عليها **السرعة المحرضة** ، وتلعب دوراً هاماً في نظرية **قوة الرفع** Lift المؤثرة على جناح حامل أو ريشة آلة جريان .

## ٦.٣٧ قانون بيو ـ سافار لحساب حقل السرعة المحرضة

نعتبر سائلاً عديم الاحتكاك تخترق بعض مناطقه خيوط إعصارية إفرادية . فتكون جزيئات السائل التابعة لهذه الخيوط فقط في حالة دوران ، $\omega \neq 0$ ، بينما يكون باقي حقل الجريان لادورانياً ( خالياً من الاعاصير ) . لندرس التأثير الذي يحدثه وجود خيط اعصاري ذي شكل غير محدد على محيطه المجاور ، ونسأل بالضبط عن العلاقة بين الشدة الاعصارية ( الجولان ) لهذا الخيط وحقل السرعة المحرضة منه .

إن الاجابة على هذا السؤال ، التي أعطاها لأول مرة **هلمهولتس و ستوكس** ( انظر [9] ) ، تسهل إذا اعتمـــدنا على **التماثل** بين الحقل الالكتروديناميكي والهيدروديناميكي ، الذي سبقت الاشارة اليه ، وبصورة خاصة تماثل القيم التالية لكل من الحقلين :

| الحقل الالكتروديناميكي | | الحقل الهيدروديناميكي |
|---|---|---|
| السلك الناقل للكهرباء | يماثل | الخط الاعصاري |
| شدة التيار $I_e$ | تماثل | الجولان $I'$ |
| شدة الحقل المغناطيسي المحرض $\mathbf{H}_m$ | تماثل | السرعة المحرضة $\mathbf{V}$ |
| $I_e = \oint \mathbf{H}_m \cdot d\mathbf{s} = \oint H_m \cos\alpha\, ds$ (7.57) | تماثل | $I' = \oint \mathbf{V} \cdot d\mathbf{s} = \oint V \cos\alpha\, ds$ (7.58) |

وكما أنه لايوجد سلك ناقل للكهرباء إلا اذا كان ضمن دارة مغلقة أو لانهائي الامتداد ، كذلك لا توجـــد سوى خطوط اعصارية غير محدودة أو مغلقة . والجدير بالذكر ان التماثل الالكتروديناميكي يعتبر الاساس لعـدد من طرق ميكانيك السوائل المطبقـة في حل العديد من مسائل الجريان العمليـة المختلفة ، أنظر مثلاً [13] [14] [27] [87] [88].

إن العلاقة بين شدة التيار الكهربائي في سلك ناقل وبين الحقل المغناطيسي المحرض حوله معروفـة في أسس الكهرباء باسم **قانون بيو ـ سافار** نسبة للعالمين J.B. Biot (1774-1862) و F. Savart (1791 - 1841) . وطبيعي على أساس ماتقدم أن يستخدم نفس هذا القانون لحساب حقل السرعة المحرضة من خيط إعصاري .

نأخذ الحـــالة البسيطة جداً لسلك ناقل مستقيم لانهائي الامتداد يمر فيه تيار شدته ثابتة $I_e$ . فاذا اعتبرنا دائرة نصف قطرها $r$ يخترقهـــا السلك

عمودياً في مركزها ، فتكون شدة الحقل المغناطيسي $H_m$ على طول محيط هذه الدائرة ثابتة و كذلك $\cos\alpha = 1$ ، وبالتالي ينتج من تكامل العلاقة (7.57) :

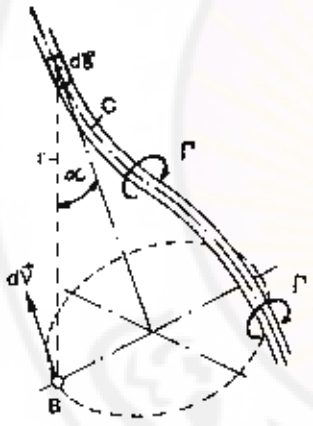
$$I_e = 2\pi r H_m \Rightarrow H_m = I_e / 2\pi r \quad . \qquad (7.59)$$

هذه العلاقة تماثل تماماً العلاقة (7.39) التي حصلنا عليها بالنسبة لخيط إعصاري مستقيم يخترق مستوى الشكل ( ٧ . ٩ ـ b ) عمودياً في المركز . فاذا اعتبرنا السرعة المحيطية $V \equiv u$ السرعة المحرضة ينتج :

$$\Gamma = 2\pi r V \Rightarrow V = \Gamma / 2\pi r \quad . \qquad (7.60)$$

نعتبر الآن خيطاً إعصارياً شكله بدون تحديد وشدته الاعصارية $\Gamma$ ، الشكل (٧ . ١٨) . ليكن ds عنصراً خطياً منه ، ولتكن B نقطة ما تبعد عن ds مسافة r ، $\alpha$ الزاوية التي يصنعها محور ds مع نصف القطر r . إن السرعة الجزئية التي يحرضها ds في النقطة B تتحدد حسب قانون بيو ـ سافار بالعلاقة :

$$dV = \frac{\Gamma}{4\pi r^2} \sin\alpha \, ds \quad . \qquad (7.61)$$



الشكل ٧ . ١٨ : استخراج قانون بيو ـ سافار لحساب السرعة المحرضة من خيط اعصاري .

dV تكون متعامدة مع المستوي المتشكل من r و ds ، وبمكاملة هذه العلاقة نحصل على السرعة المحرضة من تكامل خط إعصاري مستو :

$$V = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{(C)} \frac{\sin\alpha}{r^2} \, ds = \frac{\Gamma}{4\pi} \oint \frac{\sin\alpha}{r^2} \, ds \quad , \qquad (7.62)$$

حيث يجب ان يكون خط التكامل إما مغلقاً أو ممتـــداً الى اللانهاية . وفي الحالة العامة التي يكون فيها الخيط الاعصاري يمثل منحنياً فراغياً فيفضل ان تكتب العلاقة السابقة بشكل شعـاعي . فاذا وضعنا بموجب علاقات الجـداء الشعاعي $|\mathbf{r} \times d\mathbf{s}| = r \sin\alpha \, ds$ نجد السرعة المحرضة :

$$\mathbf{V} = \frac{I}{4\pi} \oint \frac{\mathbf{r} \times d\mathbf{s}}{r^3} \quad , \qquad (7.63)$$

حيث r يمثل شعاع نصف القطر المكاني بين ds والنقطة المعتبرة B ؛ أو بشكل مركبات باتجاه محاور الاحداثيات الديكارتية z, y, x :

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{I}{4\pi} \int \frac{(y-y')\,dz' - (z-z')\,dy'}{\left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\right]^{3/2}} \\ v &= \frac{I}{4\pi} \int \frac{(z-z')\,dx' - (x-x')\,dz'}{\left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\right]^{3/2}} \\ w &= \frac{I}{4\pi} \int \frac{(x-x')\,dy' - (y-y')\,dx'}{\left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\right]^{3/2}} \end{aligned}\right\} \qquad (7.64)$$

حيث $x', y', z'$ إحداثيات النقطة المتحولة ، $x, y, z$ إحداثيات النقطة الثابتة التي يراد حساب السرعة المحرضة فيها .

بالرغم من أنه لا توجد في الحقيقة خيوط إعصارية محدودة الطول ، كما سبق التأكيد على ذلك مراراً ، إلا أنه انطلاقاً من التصور أن كل خط مغلق يمكن اعتباره مؤلفاً من مجموعة قطع مستقيمة ، نريد الآن أن نحسب السرعة التي تحرضها قطعة طولها $\overline{D\,C}$ من خيط إعصاري مستقيم في النقطة الثابتة B . ليكن h البعد الشاقولي بين B والخط الاعصاري ، ds عنصراً خطياً منه ، فيكون حسب الشكل (١٩٠٧) :

$$\sin\alpha = \frac{h}{r} = \frac{r\,d\alpha}{ds} \Rightarrow \frac{ds}{r^2} = \frac{d\alpha}{h} \quad ,$$

وبالتالي تنتج من (7.62) السرعة المحرضة :

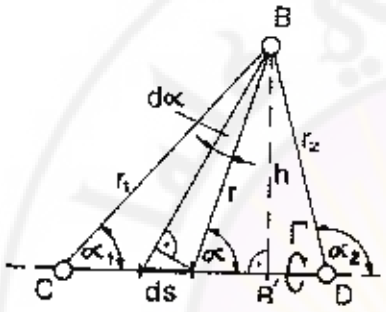
$$V = \frac{\Gamma}{4\pi h}\int_{\alpha=\alpha_1}^{\alpha_2} \sin\alpha \, d\alpha = \frac{\Gamma}{4\pi h}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2) \quad , \quad (7.65)$$

حيث $\alpha_2, \alpha_1$ الزاويتان المحصورتان بين نصفي القطرين $\overline{DB} = r_2$ , $\overline{CB} = r_1$ والخط الاعصاري . فإذا كان الخط الاعصاري لانهائي الامتداد من الطرفين تكون $\alpha_2 = \pi, \alpha_1 = 0$ ، وينتج بالتالي من (7.65) :

$$V = \Gamma/2\pi h \quad , \quad (7.66)$$

وذلك بالتطابق مع (7.60) . أما إذا كان خط الاعصار يبدأ من نقطة B' واقعة على المنحني الشاقولي المار من B ويمتد يساراً الى اللانهاية فتكون $\alpha_2 = \pi/2$ , $\alpha_1 = 0$ وينتج من (7.65) :

$$V = \Gamma/4\pi h \quad . \quad (7.67)$$




الشكل ١٩.٧ : حساب السرعة المحرضة من خط اعصاري مستقيم محدود $\overline{DC}$ .

أي ان السرعة التي يحرضها خط اعصاري نصفي تبلغ نصف السرعة التي يحرضها خط اعصاري لانهائي الامتداد . والجدير بالذكر أن الاعصارين الحرين المنبعثين من نهايتي جناح حامل محدود الامتداد ينظر إليهما كنصفي خطين إعصاريين يمتدان من طرف واحد الى اللانهاية .

## ٧.٤ أسئلة مراجعة وتمارين

س ٧.١ : لماذا يطلق على الحركة العامة للسوائل اسم الحركة التشوهية ؟ اكتب معادلتها العامة .

س ٣.٧ : ماذا تعني رياضياً وهندسياً ساحة وحيدة الترابط ومضاعفة الترابط أعط أمثلة .

س ٣.٧ : اشرح مفهوم الدوران والجولان والعلاقة بينهما في السوائل عديمة الاحتكاك.

س ٤.٧ : حدد أوجه التماثل بين كون حقل السرعة وكمون حقل القوى الحجمية .

س ٥.٧ : حدد أوجه التماثل بين الحقل الاعصاري والحقل الالكتروديناميكي . هل يمكن تبيان ذلك تجريبياً ؟

س ٦.٧ : على سطح مياه الانهار تظهر أحياناً أقماع مائية أو اعاصير فارغة ( النواة تبدو فارغة وجزيئات السائل تدور حولها ) . هل يتعارض ذلك مع القوانين الأساسية للحركة الاعصارية ؟

س ٧.٧ : ماهو الفرق بين جريان سرعته المحيطية تتناسب عكساً مع نصف القطر المكاني وآخر سرعته تتناسب طرداً مع نصف القطر ؟

س ٨.٧ : ماذا تنص قوانين **هلمهولتس** للحركة الاعصارية وماذا تستنتج منها ؟

س ٩.٧ : هل هناك تناقض بين قانون **طومسون** وبين نشوء الجولان حول جناح حامل يتحرك من السكون ؟

س ١٠.٧ هل يمكن أن تتشكل عند الزفير اعاصير خاتمية كالتي نشاهدها عند بعض المدخنين ؟

ت ١.٧ تأكد فيما إذا كانت الجريانات المستوية التالية المحددة بمركبات السرعة دورانية أم لادورانية :

(a) : $u = -2y,\ v = 3x$ ; (b) : $u = 0,\ v = 3xy$ ; (c) : $u = 2x,\ v = -2y$

الحل : شرط الخلو من الدوران بالنسبة لجريان ثنائي القاس يقضي حسب ( 7.27 ) أن يكون $\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ . وعليه يكون بالنسبة للجريان :

(a) : $\frac{\partial (3x)}{\partial x} - \frac{\partial (-2y)}{\partial y} = 5 \neq 0 \Rightarrow \omega_z = 5/2 \neq 0 \Rightarrow$ دوراني

(b) : $\frac{\partial (3xy)}{\partial x} - 0 = 3y \neq 0 \Rightarrow \omega_z = \frac{3}{2} y \neq 0 \Rightarrow$ دوراني

(c) : $\frac{\partial (-2y)}{\partial x} - \frac{\partial (2x)}{\partial y} = 0 \Rightarrow \omega_z = 0 \Rightarrow$ لادوراني ( كموني )

ت ٢.٧ : ماهي العلاقة التي يجب أن تحققها الثوابت a , b , c لكي يكون التابع:

$$\Phi = \frac{1}{2} ( a x^2 + b y^2 + c z^2 )$$

كمون سرعة لجريان مثالي ؟ حدد خطوط الكمون الثابت $\Phi = const$ وقيمة شعاع السرعة في النقطتين $B_1 ( 0, 0, 0 )$ و $B_2 ( 2, 1, 1 )$ في الحالة الخاصة التي يكون فيها $a = b$ .

الحل : لكي يكون $\Phi$ تابع كمون سرعة يجب أن يحقق حسب ( 7.23 ) معادلة لابلاس $\Delta \Phi = 0$ . وحيث أن :

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = a x \quad , \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = b y \quad ; \quad w = \frac{\partial \Phi}{\partial z} = c z \quad , \qquad (a)$$

ينتج :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = a \quad ; \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = b \quad ; \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = c \quad .$$

وبالتالي عندما :

$$a + b + c = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \Delta \Phi = 0 \quad . \qquad (b)$$

وفي الحالة الخاصة عندما $b = a$ يكون : $c = -2 a$ ، ويصبح كمون السرعة :

$$\Phi = \frac{a}{2} ( x^2 + y^2 - 2 z^2 ) .$$

ونحصل على معادلة سطوح الكمون الثابت بالشكل :

$$\Phi = const \Rightarrow x^2 + y^2 - 2 z^2 = const \quad . \qquad (c)$$

التي تمثل باعطاء الثابت قيماً عددية مختلفة مجسمات قطوع زائدة ذات فرع واحد ، متناظرة بالنسبة للمحور z . مركبات السرعة نحصل عليها من ( 7.21 ) :

$$u = a x \quad , \quad v = a y \quad , \quad w = -2 a z$$

ومنها نجد قيمة شعاع السرعة :

$$|v| = a \sqrt{x^2 + y^2 + 4 z^2} \quad .$$

وعليه تبلغ قيمة السرعة في النقطة $B_1$ : $V_1 = 0$ فهي اذن نقطة ركود ، وفي النقطة $B_2$ : $z = 3a$

* * *

# الفصل الرابع

## تحريك السوائل المثالية غير القابلة للانضغاط

### ( هيدروديناميك )

لقد رأينا في الفصل السابق أن الدراسة الحركية للسوائل تتحدد بواسطة قيم هندسية وحركية بحتة تمثل الاحداثيات الديكارتية أو الاحداثي المنحني s ، مساحة مقطع الجريان A ، السرعة V ، التسارع a . بالمقابل تهدف الدراسة التحريكية للسوائل الى معرفة القوى المؤثرة على جزيئات السائل التي سببت حركتها الحركية . كما تهدف - وهذا مهم جداً من الناحية التطبيقية - الى معرفة القوى والعزوم التي يؤثر بها السائل على حدود جملة الجريان ، التي تشكلها في الحالة العامة الجدران الصلبة التي يجري السائل حولها أو في داخلها ، ويتم حساب هذه القوى بمساعدة المعادلات والقوانين الأساسية للتحريك .

سندرس اولاً تحريك السوائل المثالية غير القابلة للانضغاط ( $\rho \approx const$ ) ، حيث نفرض ان اللزوجة معدومة ( $\eta = 0$ ) ، وبالتالي قوى الاحتكاك المماسية معدومة . وتكون جزيئات السائل معرضة لتأثير قوى الضغط الناظمية والقوى الحجمية ( الكتلية ) . وسنبدأ بدراسة الجريانات البسيطة وحيدة البعد كمقدمة لدراسة الجريانات العامة ثنائية وثلاثية البعد .

### ٨ . قوانين التحريك الأساسية للجريانات وحيدة البعد ( نظرية خيط التيار )

لقد سبق التنويه ( ص ١٩٣ ) الى أن دراسة الجريانات وحيدة البعد تعتمد على مفهوم أنبوبة التيار ( الشكل ٩.٥ ) ، التي يمكن أن تكون حدودهـــا الخارجية وهمية ( سائلية ) أو حقيقية ( صلبة ) .

نفترض في الدراسة التحريكية أن شكل أنبوبة التيار معلوماً ، وبالتالي نعلم مسارات خطوط التيار ، وخاصة مسار خط التيار المركزي s ، الذي يكون شعاع السرعة للتيار الحجمي أو الكتلي مماساً عليه في كل نقطة . وتتحدد قيمة السرعة ، التي تكون في الحالة العامة تابعة للزمان والمكان : $V = V(t,s)$ والتي يفرض أنها موزعة بانتظام على كامل أي مقطع متعامد مع s ، من معادلة الاستمرار البسيطة (6.3) أو (6.5) ، حيث

$$\dot{m} = \rho_1 V_1 A_1 = \rho_2 V_2 A = \rho V A = \text{const} \quad (\rho = \rho(s) \neq \text{const}) \qquad (8.1)$$

$$Q = V_1 A_1 = V_2 A_2 = V A = \text{const} \quad (\rho = \text{const}) \qquad (8.2)$$

## ٨.١ معادلة أويلر الحركية وعبرة البعد

للتعرف على التأثير الكتلي داخل السائل الجـــاري نعتمد على مبدأ القطع فنحرر جزيئاً حجمياً مثل قطعة صغيرة من أنبوبة التيار ، ونطبق عليه **قانون نيوتن الاساسي للتحريك** : محصلة القوى تساوي جداء الكتلة في التسارع :

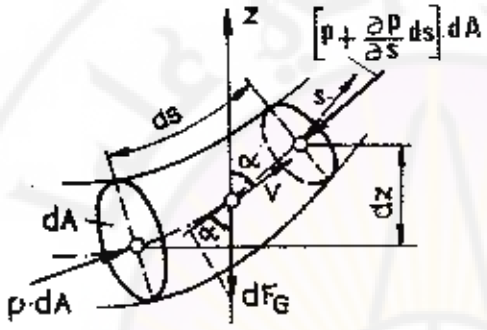
$$dF_K = dm \cdot b \quad ; \quad \left( \mathbf{F}_K \parallel \mathbf{b} = \frac{D\mathbf{V}}{Dt} \right) . \qquad (8.3)$$

$F_K$ تسمى أحياناً **القوة الحجمية الحركية** [13] ، وكذلك **قوة دالمبير** ، لأنه حسب مبدأ دالمبير يمكن ارجاع حركة الجزيء الحجمي الى مسألة توازن إذا طبقنا عليه قوة عطالة بعكس اتجاه حركته تساوي وتعاكس $F_K$ .

في حالة سائل عديم الاحتكاك يخضع الجزيء الحجمي المعتبر لتأثير القوى الحجمية الستاتيكية (الخارجية) ، كقوة الثقالة مثلاً ، بالاضافة لتأثير القوى السطحية التي تنحصر بقوى الضغط الناظمية على السطح الخارجي للجزيء . وحيث أن الضغط يمكن أن يتغير في اتجاه الجريان وناظمياً عليه : $p = p(s,n)$ فيلزم استخراج معادلة الحركة في هذين الاتجاهين .

## ١.١.٨ معادلة أويلر الحركية في اتجاه الجريان

نقتطع من أنبوبة تيار سائل ثقيل كثافته $\rho$ جزيئاً حجمياً صغيراً مقطعه $dA$ وطوله $ds$ وكتلته : $dm = \rho\, dV = \rho\, dA\, ds$ ، وليكن الاحداثي المنحني $s$ موجباً في اتجاه الجريان والاحداثي الشاقولي $z$ موجباً للأعلى ، الشكل (١٠٨) . هذا الجزيء يخضع لتأثير قوة الثقالة وقوة الضغط .




الشكل ١٠٨ : استخراج معادلة أويلر الحركية في اتجاه الجريان من توازن قوى الضغط مع قوى الثقالة .

بفرض أن $g$ هو التسارع الأرضي ، $\alpha$ الزاوية التي يشكلها $s$ مع $z$ ، فتكون مركبة قوة الثقالة في اتجاه الجريان هي :

$$dF_{Gs} = -\,g\,.\,dm\,\cos\alpha = -\,g\,.\,\rho\,dA\,ds\,.\,\frac{\partial z}{\partial s}\,.$$

ان مسقط قوى الضغط الجانبية على المحور $s$ تساوي الصفر . وبالتالي تنتج محصلة قوى الضغط المؤثرة في اتجاه الجريان من القوتين المؤثرتين على قاعدتي الجزيء الحجمي السفلى والعليا :

$$dF_{ps} = p\,dA - \left(p + \frac{\partial p}{\partial s}\,ds\right) dA = -\,\frac{\partial p}{\partial s}\,ds\,dA\,.$$

نعتبر الحالة العامة التي تكون فيها السرعة في اتجاه الجريان تتغير زمانياً ومكانياً، $V = V(t, s)$ ، فيكون التسارع المطبق على الجزيء هو التسارع المادي الذي ينتج من ( 5.10 ) بوضع $r \equiv s$ ويصبح :

$$b_s = \frac{DV}{Dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial s} \ .$$

نطبق قانون نيوتن (8.3) فنحصل على العلاقة :

$$dF_{K_s} = dF_{G_s} + dF_{P_s} = -g \rho \, dA \, ds \, \frac{\partial z}{\partial s} - \frac{\partial p}{\partial s} ds \, dA =$$

$$= \rho \, dA \, ds \, . \left( \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial s} \right) \ ,$$

أو بعد الاختصار على $\rho dA \, ds$ واجراء اصلاح بسيط :

$$\boxed{\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial s} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} + g \frac{\partial z}{\partial s} = 0} \qquad (8.4)$$

التي تمثل **معادلة أويلر الحركية** في اتجاه خط التيار لجريان وحيد البعد غير مستقر ، قابل أو غير قابل للانضغاط . وهي تتضمن ثلاثة مجاهيل $V \, , p \, , \rho$ كلها تابعة في الحالة العامة للزمان والمكان . وبالتالي يتطلب حلها معادلتين اضافيتين هما في حالة الجريانات القابلة للانضغاط ( $\rho \neq const$ ) معادلة الاستمرار (8.1) ومعادلة الحالة ( 2.50 ) : $p/\rho = RT$ . أما في حالة الجريانات غير القابلة للانضغاط ( $\rho = const$ ) فتحتوي (8.4) على مجهولين ويلزمنا لحلها معادلة الاستمرار (8.2) فقط .

في حالة الجريانات المستقرة ينعدم التسارع المكاني $\partial V / \partial t$ وتصبح السرعة والضغط تابعين للمكان فقط ، وبالتالي تتبسط معادلة أويلر الحركية وتأخذ الشكل التالي :

$$V \frac{dV}{ds} + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{ds} + g \frac{dz}{ds} = 0 \ , \qquad (8.5)$$

حيث أمكن كتابة المشتقات الجزئية كمشتقات عادية بسبب وجود متحول واحد فقط .

يبلغ تسارع الحمل $V\frac{dV}{ds}$ بالنسبة للغالبية العظمى من الجريانات العملية قيمة تضاهي عشرات أضعاف قيمةالتسارع الأرضي ، الذي يمكن في هذه الحالات اهماله دون الوقوع في خطأ يذكر . وعندها تأخذ ( 8.5 ) بالنسبة لسائل « مهمل الثقالة » الشكل البسيط التالي :

$$V\frac{dV}{ds}+\frac{1}{\rho}\frac{dp}{ds}=0\ . \qquad (8.6)$$

وكمثال نفرض أن السرعة في اتجاه محور قناة أفقية تتزايد خطياً من $V_1=15\ m/s$ عند المدخل الى $V_2=45\ m/s$ عند المخرج ؛ أي بمقدار $\Delta V=30\ m/s$ وذلك عبر وصلة بشكل نقاصة طولها $\Delta s=1\ m$ ، والسرعة فيها $V_x=30\ m/s$ . عندها تبلغ قيمة تسارع الحمل :

$$b_x\approx V\frac{\Delta V}{\Delta s}=30\ .\ 30/1=900\ m/s^2\approx 90\ g\quad ,$$

أي 90 مرة قيمة التسارع الأرضي . وهذا مبرر كاف لاهمال g بالمقارنة مع $b_x$ .

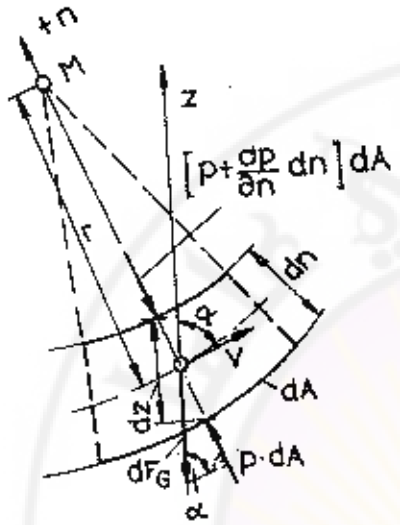
## ٢.١.٨ معادلة أويلر الحركية ناظمياً على اتجاه الجريان

نعتبر جزيئاً حجمياً مقتطعاً من أنبوبة تيار منحنية الجدران ،الشكل(٢.٨). نأخذ الاتجاه الموجب للناظم $n+$ في اتجاه مركز الانحناء M لمحور أنبوبة التيار، ونأخذ المحور الشاقولي z موجباً للأعلى . ليكن r نصف قطر الانحناء المكاني لمحور الجزيء الحجمي ، dA العنصر السطحي منه المتعامد مع n ، dn ارتفاع الجزيء في اتجاه الناظم فتكون كتلته $dm=\rho\ .\ dA\ dn$ .

بفرض $\alpha$ الزاوية التي يصنعها z مع محور أنبوبة التيار ، فتكون مركبة قوة الثقالة باتجاه الناظم هي ( الشكل ٢.٨ ) :

$$dF_{gn}=-g.\rho\ dA\ dn\ .\sin\alpha=-g\rho\ dA\ dn\frac{\partial z}{\partial n}\ .$$

وتنتج محصلة قوى الضغط في الاتجاه الموجب للناظم ( مساقط كافة قوى الضغط الجانبية معدومة ) بالشكل :




الشكل ٢.٨ : استخراج معادلة أويلر الحركية ناظمياً على اتجاه الجريان من توازن قوى الضغط وقوى الثقالة .

$$dF_{p_n} = p\,dA - \left(p + \frac{\partial p}{\partial n}\,dn\right) dA =$$

$$= -\frac{\partial p}{\partial n}\,dn\,dA .$$

فاذا لاحظنا أن التسارع في اتجاه الناظم هو التسارع النابذ $b_n = V^2/r = \omega^2 r$ تنتج من تطبيق قانون نيوتن ( 8.3 ) العلاقة :

$$dF_{K_n} = dF_{G_n} + dF_{p_n} =$$

$$= -g\rho\frac{\partial z}{\partial n}\,dA\,dn - \frac{\partial p}{\partial n}\,dn\,dA =$$

$$= \frac{V^2}{r}\,.\,\rho\,dA\,dn ,$$

أو بعد الاختصار على $\rho\,dA\,dn$ واجراء اصلاح بسيط :

$$\boxed{\frac{V^2}{r} + \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial p}{\partial n} + g\,\frac{\partial z}{\partial n} = 0} \qquad , \qquad (8.7)$$

التي تمثل معادلة اويلر الحركية ناظمياً على خط التيار لجريان وحيد البعد قابل أو غير قابل للانضغاط . وهي تسمح لنا بحساب تغير الضغط عند الانتقال بالاتجاه الناظمي من خط تيار لآخر . ولكن تلزم لحلها معرفة توزع السرعة والضغط على طول خطوط التيار ، وذلك بمساعدة معادلة الاستمرار والعلاقة (8.5) مثلاً التي استخرجناها في الفقرة السابقة .

في الحالة التي ينعدم فيها تأثير قوة الثقالة في اتجاه الناظم، كما هو الحال عندما يكون الجريان المعتبر واقعاً في مستو أفقي ، فان العلاقة (8.7) تصبح من الشكل :

$$\frac{V^2}{r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n} \qquad (8.8)$$

هـذه العلاقة تنطبق على حالات عملية عديدة يكون فيها التسارع النابذ أكبر بكثير من التسارع الارضي ، بحيث يمكن إهمال الأخير . فإذا فرضنا كمثال بسيط أن $r = 0{,}15\ m, V = 15\ m/s$ ينتج : $b_n = 15^2/0{,}15 = 1500\ m^2/s \approx 150\ g$ ، أي إن قيمة التسارع النابذ تعادل 150 مرة تقريباً قيمة التسارع الارضي .

إن إمعان النظر في العلاقتين الاخيرتين يسمح باستخلاص النتيجة الهامة التالية :

> عندما تكون خطوط التيار منحنية ( مقوسة ) فان الضغط في الاتجاه الناظمي عليها يتناقص في اتجاه مركز الانحناء ، وينعدم تغير الضغط في اتجاه الناظم عندما تكون خطوط التيار مستقيمة ($r = \infty$) .

وعليه إذا اعتبرنا الجريان في كوع فان الضغط على جداره الخارجي يكون أكبر من الضغط على جداره الداخلي .

## ٣.٨ معادلة برنولي

### ١.٢.٨ معادلة برنولي كتكامل لمعادلة أويلر الحركية

نعتبر جريانا مستقراً غير قابل للانضغاط ($\rho = const$) . في هـذه الحالة

يمكن كتابة معادلة اويلر الحركية (8.5) بالشكل التالي :

$$\frac{\rho}{2}\frac{d(V^2)}{ds}+\frac{dp}{ds}+\rho g\frac{dz}{ds}=0 \quad ,$$

حيث تمثل كافة الحدود كسوراً تفاضلية بالنسبة لاتجاه الجريان s ، ويمكن بالتالي مكاملتها بسهولة جداً جداً . وبذلك نجد العلاقة الهامة التالية :

$$\boxed{\frac{\rho}{2}V^2+p+\rho g z=C_{Bp}=\text{const}} \quad , \qquad (8.9)$$

التي تعتبر بالنسبة لحركة سائل ثابت الحجم وعديم الاحتكاك العلاقة الأساسية التي تربط بين السرعة والضغط والوضعية المكانية لخط التيار المعتبر . وقد صاغها **دانيال برنولي** عام 1738 ، أي قبل أن يضع **أويلر** نظريته عن حركة السوائل المثالية . لذلك يطلق على هذه العلاقة بصيغها المختلفة اسم **معادلة برنولي** . كما يطلق على ثابت التكامل $C_{Bp}$ اسم **ثابتة برنولي** .

العلاقة (8.9) تسمح بحساب الضغط في اتجاه الجريان . لذلك يطلق عليها أيضاً **معادلة الضغط** . ويمكن بسهولة التأكد أن كل حد من حدود الطرف الأيسر له واحدة قياس الضغط [kp/cm²] أو [N/cm²] . ويسمى الحد الاول **الضغط التحريكي** ( الديناميكي ) ، أو **ضغط السرعة** $p_{dyn}$ ، أو **ضغط الركود** Stagnation pressure q ؛ ويسمى الحدُ الثاني **الضغط الستاتيكي** ؛ والحد الثالث **ضغط الثقالة** أو ضغط القوى الحجمية عامة . وسنأتي على توضيح مفهوم هذه الضغوط فيما بعد .

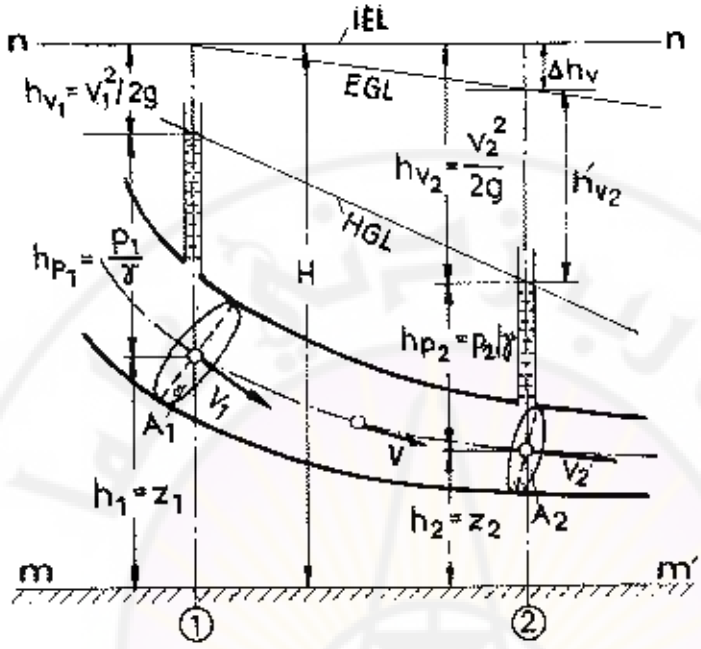
نقسم طرفي (8.9) على $\gamma=\rho g$ فتنتج العلاقة :

$$\frac{V^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + z = C_{BH} = H = \text{const} \quad , \quad (8.10)$$

التي تمثل **معادلة برنولي للارتفاعات** ، لأن كل حد من حدود الطرف الأيسر له واحدة قياس الطول [m] . يمثل الحد الاول $V^2/2g$ **ارتفاع السرعة** الذي تصل اليه نقطة مادية إذا قذفت شاقولياً للاعلى في حجرة خالية من الهواء بسرعة ابتدائية مقدارها V . ويمثل الحد الثاني $p/\gamma$ **ارتفاع الضغط أو الضاغط** ويكافيء حسب (٢.٣.١.٣) ارتفاع عمود سائل ساكن وزنه النوعي $\gamma$ الذي يولّد نتيجة ثقله الضغط p ، وبالتالي فهو يكافيء ارتفاع صعود السائل في انبوب بيزومتري شاقولي . ويمثل الحد الثالث z **الارتفاع المكاني** أو الهندسي بالنسبة لأي **مستوى قياس أفقي** Datum level أو مستوى صفري يمكن اختياره لا على التعيين . على هذا الاساس يمكن التعبير عن العلاقة (8.10) بالجملة التالية :

> بالنسبة لجريان مثالي مستقر يكون مجموع ارتفاع السرعة وارتفاع الضغط والارتفاع المكاني في كل نقطة من نقاط خط تيار ما يساوي قيمة ثابتة $C_{BH}$ تسمى **الارتفاع الهيدروليكي المثالي** Ideal hydraulic head .

إن التمثيل البياني الرمزي لهذه الجملة موضح بالشكل (٣.٨) . فاذا اعتبرنا نقطتين لا على التعيين ① و ② من محور أنبوبة تيار وحددنا اعتباراً من مستوى القياس الافقي m – m' الارتفاع المكاني وارتفاع الضغط وارتفاع السرعة لها فان نقاط النهاية لمجموع هذه الارتفاعات تقع في حالة سائل مثالي على المستوي الافقي n – n' ، الذي يطلق عليه **خط الارتفاع الهيدروليكي المثالي** . كما يطلق على المستقيم الواصل بين نهايتي ارتفاع الضغط في الانبوبين البيزومتريين **خط التدرج الهيدروليكي** Hydraulic grade line (HGL) ، الذي يدل على الضغط في كل نقطة من خط التيار .




الشكل ٢٠٨ : تمثيل بياني رمزي لمعادلة برنولي للارتفاعات . في الجريان المثالي يكون في كل نقطة من خط التيار مجموع الارتفاع المكاني وارتفاع الضغط وارتفاع السرعة ثابتاً .

إن المضمون الفيزيائي لحدود معادلة برنولي يتوضح بشكل أعمق إذا قسمنا طرفي العلاقة (8.9) على الكتلة m حيث تنتج الصيغة الثالثة لهذه المعادلة بالشكل:

$$\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = C_{BE} = \text{const} \quad , \qquad (8.11)$$

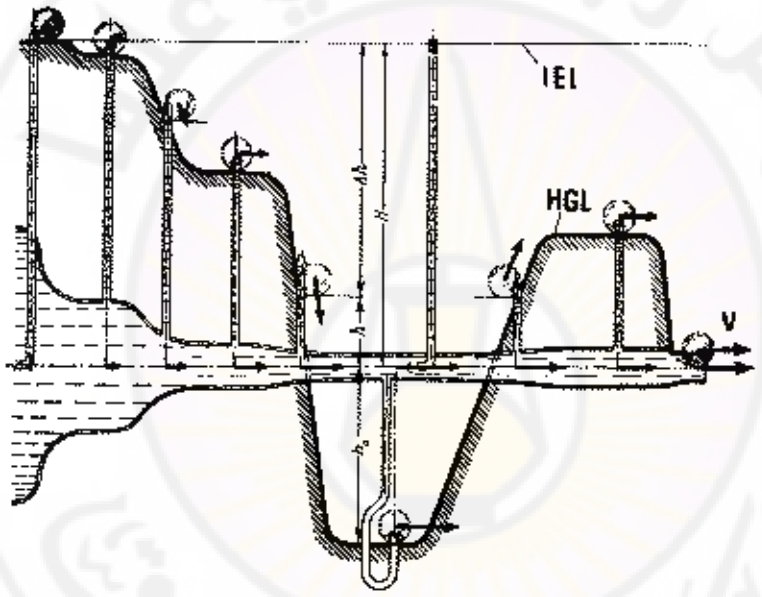
التي يطلق عليها **معادلة برنولي للقدرة** ، لأن كل حد من حدود الطرف الأيسر يمثل قدرة بالنسبة لواحدة الكتلة . فالحد الاول يمثل **القدرة الحركية** ، والثاني **قدرة الضغط** والثالث **القدرة الكامنة** . وبالتالي يكون مجموع القدرات الثلاث في كل نقطة من خط التيار يساوي قيمة ثابتة $C_{BE}$ تسمى **القدرة الميكانيكية**

و **قدرة الجريان** . وعليه فان معادلة برنولي تعبر عن قانون انحفاظ القدرة لميكانيكية على طول خيط التيار. ويمكن على هذا الاساس اشتقاقها، اذا اعتبرنا مجموع القدرات في المقطعين $A_2, A_1$ من أنبوبة تيار ، الشكل (٣.٨)، لايتغير.

إن ثبات قدرة الجريان على طول خيط تيار هو صفة مميزة للجريانات عديمة الاحتكاك. لذلك توصف بأنها جريانات « عديمة الفواقد » ، بمعنى أن «الخسارة» في القدرة الميكانيكية اثناء حركة السائل معدومة . أما في حـــالة الجريانات الحقيقية ، فان قسماً كبيراً أو صغيراً من هذه القدرة الميكانيكية « يفقده » السائل أثناء حركته ، لأنه يتحول بفعل الاحتكاك الى حرارة . ولذلك يطلق عليها الجريانات « ذات الفواقد » ، ولا تنطبق عليها معادلة برنولي بصيغهـا الواردة أعلاه . وقد مثلت الخسارة في قدرة الجريان هـذه في الشكل (٣.٨) بشكل **ارتفاع الفواقد** $\Delta h_v$ ، الذي يساوي الفرق بين الارتفاع الهيدروليكي المثالي والارتفـاع الهيدروليكي الحقيقي في النقطة ② الواقعـة في اتجاه الجريان بعد النقطة ① . بينما ينطبق **خط القدرة المثالية** Ideal Energy line (IEL) على المستقيم الافقي $n' - n$ ، ويمثل المستقيم الذي يصل في الحالة العامـــة بين نقاط النهاية للارتفاع الهيدروليكي الفعلي في النقاط المختلفة لخط التيار **خط تدرج القدرة** Energy grade line (EGL) . ونلاحظ بسهولة أنـه يبعد عن خط تدرج الضغط مسافة شاقولية تعادل ارتفاع السرعة الفعلي ( في الشكل (٣.٨) مقدار $h'_{v_2}$ ) .

لعله من المفيد هنا إقامة جسر مباشر للمقارنة بين حركة الجسم الصلب وحركة السائل . وكمثال موضح نعتبر أنبوباً متغير القطع يجري فيه ماء بدون فواقد وبغزارة ندفق ثابتة ، الشكل ( ٤.٨ ) . فحسب معادلة الاستمرار تتغير السرعة عكساً مع مساحة المقطع وتبلغ قيمة أعظمية في مقطع الاختناق الاصغري . بينما ينتج من معادلة برنولي أن الضغط يزداد كلما صغرت السرعة ويبلغ قيمة أصغرية سالبة ( ضغط ناقص ) في مقطع الاختناق الاصغري. ويمكن التأكد من هذا باستخدام أنابيب بيزومترية متصلة بثقوب في جدار الانبوب ( راجع ٦.٣.٨) . فإذا حددنا خط التدرج الهيدروليكي ( الخط المشر في الشكل ) وتصورناه يمثل

سكة انزلاق تتدحرج عليها كرة بدون احتكاك ، فان سرعتها تزداد باتجاه المنحدر ، وبالتالي تزداد قدرتها الحركية التي تبلغ قيمة أعظمية في « الوادي » بحيث تتمكن الكرة من الصعود باتجاه « القمة » نتيجة تحول فائض قدرتها الحركية الى قدرة كامنة . هكذا تماماً يتصرف الماء ، حيث تكون سرعته في أية نقطة موافقة للضغط المؤثر هناك ، ولا فرق فيما إذا كان الضغط ناشيء من عملية تفريغ خزان بالثقالة أو من مضخة . وعليه فإن سرعة الكرة تكون مساوية تماماً لسرعة الماء في المقطع الواقع على نفس الشاقول تحت أو فوق الكرة ، وتبلغ قيمة أعظمية تساوي $\sqrt{2g(H+h_0)}$ ، بينما تكون في مقطع ما مساوية $\sqrt{2gh}$ ، ولا يمكن أن تتعدى قيمتها النهائية $\sqrt{2gH}$ ( انظر ٢٠٣٠٨ ) .




الشكل ٤٠٨ : مقارنة بين حركة الهبوط والصعود لكرة تتدحرج بدون احتكاك على سكة انزلاق مطابقة لخط التدرج الهيدروليكي وحركة الماء في أنبوب متغير المقطع ، حسب إيلك [8] .

إن معادلة برنولي بصيغها الثلاث الواردة أعلاه تنطبق حسب أصول اشتقاقها على خط تيار معين . وبالتالي فان ثابتة برنولي $C_B$ ، التي تمثل القدرة الميكانيكية للجريان ، تتغير قيمتها في الحالة العامة من خط تيار الى آخر . وهنا يبرز سؤال هام : ألا توجد حالات خاصة تكون فيها $C_B = \text{const}$ في كامل حقل الجريان؟

للإجابة نعتبر سائلاً « مهمل الثقالة » ، وبالتالي ننطلق من معادلة **أويلر** البسيطة **أو المختزلة** (8.6) التي بمكاملتها نحصل على **معادلة برنولي المختزلة** :

$$\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} = C_{BE} \quad , \qquad (8.12)$$

التي تنتج من (8.11) مباشرة بإهمال g . نشتق هذه المعادلة جزئياً بالنسبة للناظم n ، الذي نفرض اتجاهه الموجب هنا من الجهة المقعرة الى الجهة المحدبة لخط التيار ( بعكس الشكل ٢.٨ ) فينتج :

$$V\frac{\partial V}{\partial n} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n} = \frac{\partial C_{BE}}{\partial n} \quad .$$

نستعين بمعادلة **أويلر** (8.8) التي تصبح هنا : $\frac{V^2}{r} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n}$ وندخلهـا في العلاقة السابقة فتصبح :

$$V\left(\frac{\partial V}{\partial n} + \frac{V}{r}\right) = \frac{\partial C_{BE}}{\partial n} \quad . \qquad (8.13)$$

فإذا كانت $C_{BE}$ متغيرة من خط تيار لآخر فيكون التفاضل $\partial C_{BE}/\partial n \neq 0$ ، وبالتالي فإن التعبير $(\partial V/\partial n + V/r) \neq 0$ أيضاً . فإذا لاحظنا أن هذا التعبير يمثل حسب (7.28) شرط الخلو من الدوران بالنسبة لخط التيار المعتبر ، فنكون قد توصلنا الى النتيجة الهامة التالية :

> في الجريانات اللادورانية ( الكمونية ) لا تتغير قيمة ثابتة برنولي في كامل حقل الجريان ، لأن قدرته الميكانيكية ثابتة في كل نقطة .

هذه النتيجة تنطبق دائماً على كل الحالات التي يكون فيها مصدر خطوط

التيار من مكان تسود فيه ظروف ستاتيكية ، أي سكون ($V = 0$) ، أو حركة مستقيمة منتظمة ($V = \text{const}$) [4] ، حيث تصبح عندها معادلة برنولي مطابقة للمعادلة الهيدروستاتيكية الاساسية : $p/\rho g + z = \text{const}$ .

## ٢.٢.٨ معادلة برنولي العامة وحيدة البعد

نعتبر سائلاً باروتروبياً ، $\rho = f(p)$ ، يخضع لتأثير حقل قوى حجمية تابع كمونه $\Phi_s$ . عندئذ تكون القوة الحجمية بالنسبة لواحدة الكتلة في اتجاه الجريان بموجب (3.55) هي $-\partial \Phi_s/\partial s$ ، وتأخذ معادلة أويلر الحركية باتجاه التيار في حالة جريان مستقر الصيغة التالية :

$$\frac{1}{2}\frac{\partial (V^2)}{\partial s} + \frac{\partial p/\rho}{\partial s} + \frac{\partial \Phi_s}{\partial s} = 0 \qquad (8.14)$$

وباعتبار أن الكثافة تابعة للضغط فقط فيمكن كتابة الحد الثاني بالشكل :

$$\frac{\partial p/\rho}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s}\int \frac{\partial p}{\rho (p)} = \frac{\partial \mathbf{P}(p)}{\partial s} ,$$

حيث $\mathbf{P}(p)$ هو تابع الضغط . وبإدخاله في (8.14) وإجراء التكامل بالنسبة لـ $s$ تنتج العلاقة :

$$\frac{V^2}{2} + \mathbf{P} + \Phi_s = C_B = \text{const} , \qquad (8.15)$$

التي تعرف باسم **معادلة برنولي العامة** وحيدة البعد للجريانات المستقرة المتغيرة الحجم . وتأخذ في حالة الجريانات الثابتة الحجم ($\rho = \text{const}$) الصيغة التالية :

$$\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \Phi_s = C_B = \text{const} , \qquad (8.16)$$

التي تصبح في حالة كون حقل القوى ينحصر بحقل الجاذبية الارضية ، وبالتالي $\Phi_s \equiv \Phi_{sg} = gz$ ، مطابقة لمعادلة برنولي (8.9) .

## ٣.٢.٨ معادلة برنولي للجريانات غير المستقرة

في حالة الجريانات غير المستقرة يكون التسارع المكاني $\partial V/\partial t \neq 0$ ، وينغير شكل خطوط التيار وبالتالي أنبوبة التيار من لحظة الى أخرى .

ننطلق من معادلة أويلر (8.4) ونكتبها بالشكل التالي :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz\right) = 0 .$$

إن التسارع المكاني يكون في الحالة العامة تابعاً للمكان s ، وبالتالي يمكن إجراء تكامل هذه العلاقة على طول خط تيار آني ، أي في لحظة زمنية معينة ، فتنتج العلاقة :

$$\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz + \int_{s=0}^{s=s} \frac{\partial V}{\partial t}\, ds = C_B(t) \quad , \qquad (8.17)$$

التي تسمى **معادلة برنولي للجريانات غير المستقرة** وغير القابلة للانضغاط . ويكون للحدود الثلاثة الأولى من الطرف الأيسر نفس المعنى الوارد لمثيلاتها في العلاقة (8.11) ، بينما يعبر الحد الرابع عن تغير الجريان مع الزمن . ويكون لثابتة التكامل $C_B(t)$ مضمون ثابتة برنولي في لحظة زمنية معينة ، ولكن قيمتها تتغير من لحظة لأخرى . وهذا يعني أن قدرة الجريانات غير المستقرة تتغير مع الزمن .

من أجل الحساب العملي لتغير الضغط والسرعة في اتجاه الجريان نعتبر نقطتين من خط التيار الآني ، بحيث تكون النقطة ② واقعة بعد ① في

اتجاه الجريان ، نطبق العلاقة (8.17) عليهما فنجد :

$$\frac{V_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + g z_1 + \int_{s=0}^{s=s_1} \frac{\partial V}{\partial t}\, ds = \frac{V_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + g z_2 + \int_{s=0}^{s=s_2} \frac{\partial V}{\partial t}\, ds$$

وبعد إصلاح بسيط :

$$\frac{V_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + g z_1 = \frac{V_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + g z_2 + \int_{s=s_1}^{s=s_2} \frac{\partial V}{\partial t}\, ds \ . \qquad (8.18)$$

وهذه صيغة أكثر ملاءمة للتطبيق العملي . فإذا وضعنا الطرف الأيسر مساوياً $C_{B_1}$ ينتج :

$$C_{B_1} = C_{B_2} + \int_{s=s_1}^{s=s_2} \frac{\partial V}{\partial t}\, ds \quad , \qquad (8.19)$$

فإذا بقي مقطع انبوبة التيار ثابتاً فإن التكامل في هذه العلاقة يصبح مساوياً $\frac{\partial V}{\partial t}(s_2 - s_1) = \frac{\partial V}{\partial t}\Delta s$ وتأخذ بالتالي الشكل الابسط التالي :

$$C_{B_1} = C_{B_2} + \frac{\partial V}{\partial t}\, \Delta s \quad . \qquad (8.20)$$

## ٤.٢.٨ معادلة الحركة والقدرة للجريانات النسبية

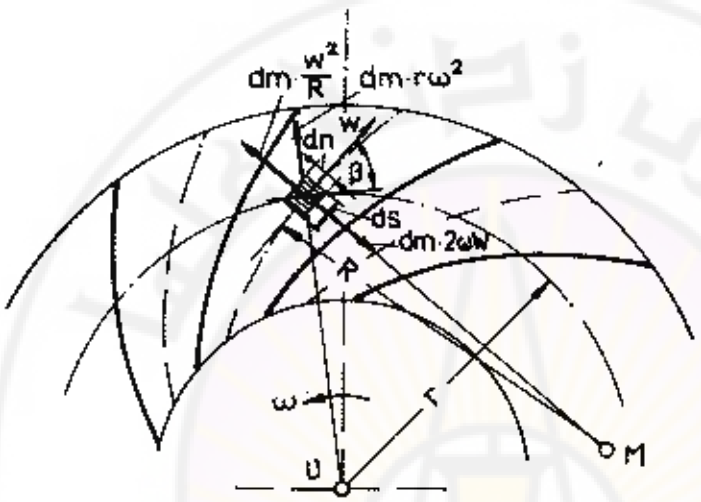
عند دراسة الجريان في قناة تقوم بحركة دورانية منتظمة أو حول جسم يدور بسرعة زاوية ثابتة $\omega = \text{const}$ فإنه من الأنسب إجراء الدراسة من وجهة نظر مراقب يقوم بنفس الحركة الدورانية ، أي في جملة إحداثيات مثبتة على القناة أو الجسم . عندها يكون الجريان النسبي الذي يلاحظه هذا المراقب في حالات مناسبة مستقراً ، بينما الجريان المطلق ، الذي يلاحظه مراقب خارجي من جملة إحداثيات مطلقة ، غير مستقر .

هذه الملاحظة ذات أهمية كبيرة بالنسبة لحقل واسع من تطبيقات ميكانيك السوائل المتعلق بآلات الجريان ، وبخاصة القطرية منها مثل المضخات النابذة وعنفات فرنسيس ، التي تمثل في الواقع أجهزة مهمتها إما شحن تيار السائل الذي يعبرها بقدرة ميكانيكية تتحول الى قدرة ضغط كما في حالة المضخات ( آلات العمل ) ، أو تستخلص من هذا التيار جزءاً من قدرته ليتحول إلى قدرة ميكانيكية كما في حالة العنفات ( آلات القوة ) . وعليه فان قدرة الجريان ( المطلقة ) عند مخرج العنفة تكون اصغر منها عنـــد المدخل ، بينما يكون في حالة المضخة العكس .

كل آلة جريان تتألف عادة من دولاب ثابت مجهز بريش لتوجيه التيار بشكل مناسب في إتجاه الدولاب الدائر Impeller ، الذي يقوم بعملية شحن التيار الذي يعبره بالقدرة او استخلاصها منه . يطلق على السرعة التي تخرج من الدولاب الثابت السرعة المطلقة ، وعلى السرعة الناتجة عن دوران الدولاب الدائر السرعة المحيطية $r\omega$ وعلى الفرق بين السرعتين السرعة النسبية . وتشكل السرعات الثلاث بموجب العلاقة الشعاعية ( 7.30 ) ما يسمى مثلث السرع . وواضح أن السرعة النسبية هي التي تكون مماسية على ريش الدولاب الدائر ، التي تمثل إذن في الجريان النفسي خطوطاً تيار . وبالتالي فان تحديد شكل هذه الريش ، الذي يلعب الدور الأساسي في عملية تحويل قدرة الجريان ، يتطلب إيجاد العلاقة بين الضغط والسرعة في جملة إحداثيات نسبية .

نعتبر جزيئاً حجمياً أبعاده $ds , dn , l$ وكتلته $dm$ من التيار الذي يعبر القنـــاة المحددة بريشتين من الدولاب الدائر لآلة جريان يدور بسرعة زاوية ثابتة $\omega$ ، الشكل ( ٥.٨ ) . هذا الجزيء يخضع في جملة إحداثيات نسبية تدور مع الدولاب إلى قوتين حجميتين إضافيتين إلى جانب القوى الحجمية المؤثرة عليه في جملة إحداثيات مطلقة . الأولى هي القوة النابذة . وتنشأ من ناحية نتيجة انحناء خط التيار وتؤثر عمودياً على اتجاه الجريان بتسارع مقداره $W^2/R$ ، حيث $R$ نصف قطر انحناء الريشة ؛ ومن ناحية أخرى نتيجة دوران الدولاب الدائر ككل وتؤثر قطرياً إلى الخارج بتسارع مقداره $r\omega^2$ ، حيث $r$ بعد الجزيء عن محور الدوران . أما القوة الثانية فهي قوة كوريولس Coriolis force . وتنشأ بسبب كون الجزيء الحجمي يقوم بحركة انسحابية بسرعة نسبية $W$ بالاضافة لحركة دورانية بسرعة زاوية $\omega$ . وهذا يؤدي لتغير السرعة المحيطية $r\omega$ نتيجة

تغير نصف القطر باستمرار ، بالاضافة للتغير المستمر لاتجاه W . وفي كل مرة يتولد تسارع بقيمة $\omega W$ ، وبالتالي يكون تسارع كوريولس مساوياً $2\omega W$ ، ويتجه عمودياً على خط التيار ، أي على W وإلى يمينها .




الشكل ٥،٨ : القوى المؤثرة على جزيء حجمي في قناة تدور بسرعة زاوية منتظمة لاستخراج معادلة الحركة والقدرة للجريان النسبي .

ندرس الآن القوى المؤثرة في اتجاه الجريان s لاستخراج المعادلة الحركية النسبية في هدى الخطوات المتبعة في الفقرة (١٠١٠٨) وبرموز الشكل (٥،٨) . فإذا أهملنا قوة الثقالة ولاحظنا أنه من القوى الاضافية المذكورة أعلاه لاتؤثر في اتجاه الجريان سوى مركبة القوى النابذة :

$$dF_{z_s} = dm \cdot \omega^2 r \cdot \sin\beta = \rho\, dn\, ds \cdot \omega^2 r \cdot \frac{dr}{ds} =$$

$$= \rho\, dn\, ds \cdot \frac{\omega^2}{2} \frac{d(r^2)}{ds} ,$$

وأن التسارع المادي للحركة النسبية المستقرة يساوي تسارع النقل .

$W \frac{dW}{ds} = \frac{1}{2} \frac{d(W^2)}{ds}$ ، فنتتج من تطبيق قانون نيوتن الأساسي للتحريك العلاقة :

$$\frac{1}{2} \frac{\partial (W^2)}{ds} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{ds} = \frac{1}{2} \omega^2 \frac{\partial (r^2)}{ds} \quad , \qquad (8.21)$$

التي تمثل **المعادلة الحركية للجريانات النسبية الشبيهة بمعادلة أويلر** ( 8.6 ) . وبتكاملها على طول s ينتج :

$$\frac{W^2}{2} + \frac{p}{\rho} = C_{rel} + \frac{\omega^2 r^2}{2} = C_{rel} + \frac{U^2}{2} \quad . \qquad (8.22)$$

**وهذه هي معادلة القدرة للجريانات النسبية الشبيهة بمعادلة برنولي** (8.12) . وقد استخرجها لأول مرة **بريشيل** F. Prâsil عام 1906 ، لذا تسمى أحياناً باسمه [ 4 ] . وهي تصبح في حال عدم إهمال قوة الثقالة من الشكل :

$$\frac{W^2}{2} + \frac{p}{\rho} + g z - \frac{U^2}{2} = C_{rel} \quad . \qquad (8.23)$$

$C_{rel}$ تمثل ثابتة التكامل التي تختلف عن ثابتة برنولي $C_B$ بالحد $U^2/2$ ، وهي تعبر عن القدرة الميكانيكية للجريان النسبي ، وتتغير في الحالة العامة من خط تيار لآخر . ولكن يمكن البرهان ( انظر [4] [85] ) ، انه في الحالة الخاصة التي يكون فيها الجريان المطلق القادم للجملة الدوّارة كمونياً ( لادورانياً ) وعامة غير مستقر ، فان قيمة $C_{rel}$ تبقى ثابتة بالنسبة لكافة خطوط التيار. هذه الجملة صاغها لأول مرة **فون ميسس** . وهي تنطبق على الحالة العملية الهامة عندما يكون التيار الخالي من الفواقد الموجه لعنفة أو مضخة ثابتة قادماً عبر مجموعة أنابيب أو أقنية ساكنة ، وبالتالي تسود عند منشأ خطوط التيار ظروف ستاتيكية . فكل جزيء سائلي يبقى في الجملة الساكنة لادورانياً ويتلقى في الجملة الدوّارة ، سرعة زاوية ثابتة يدور بها حول محور مواز لمحور دوران الجملة .

بالنسبة للقوى المؤثرة عمودياً على اتجاه الجريان نلاحظ ان محصلة القوة النابذة الناتجة عن انحناء خط التيار : $\frac{W^2}{R}\,dm$ ، وقوة كوريوليس : $-2\omega W.dm$ ، ومركبة القوة النابذة الناتجة عن الدوران الكلي : $r\omega^2.dm\cos\beta = r\omega^2.dm.\partial r/\partial n$ يجب ان تكون متوازنة مع محصلة قوى الضغط المؤثرة في اتجاه الناظم وبالتالي على سطوح الريش : $\frac{\partial p}{\partial n}\,dn.ds.1$ ، وعليه ينتج تغير الضغط ناظمياً على اتجاه الجريان بعد تطبيق شرط التوازن والاختصار على $dm$ واعتبار الريش محنية للخلف ( الشكل ٨.٥ ) وقوة الثقالة مهملة :

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \rho\left[\frac{W^2}{R} + r\omega^2\cos\beta - 2\omega W\right]. \qquad (8.24)$$

وتنتج في حالة كون الريش محنية للامام العلاقة :

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \rho\left[\frac{W^2}{R} + r\omega^2\cos\beta + 2\omega W\right] \quad . \qquad (8.25)$$

نفرض الآن في العلاقة (8.22) أن قيمة $C_{rel}$ لا تتغير من خط تيار لآخر ، فيكون $\partial C_{rel}/\partial n = 0$ ، فاذا اشتقينا هذه العلاقة بالنسبة لـ n ولاحظنا أن $\cos\beta = dr/dn$ نجد بسهولة العلاقة :

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \rho\left[r\omega^2\cos\beta - W\frac{\partial W}{\partial n}\right].$$

فإذا قارناها مع (8.24) و (8.25) نحصل على العلاقتين :

$$\frac{\partial W}{\partial n} = 2\omega - \frac{W}{R} \qquad \text{للريش المحنية للخلف} \qquad (8.26)$$

$$\frac{\partial W}{\partial n} = 2\omega + \frac{W}{R} \qquad \text{للريش المحنية للأمام} \quad . \qquad (8.27)$$

اللتين تمثلان حسب [8] المعادلتين التفاضليتين لدراسة الجريان التي عدم الاحتكاك في الاقنية الدوارة التي نجد في [85] أمثلة عديدة عليها .

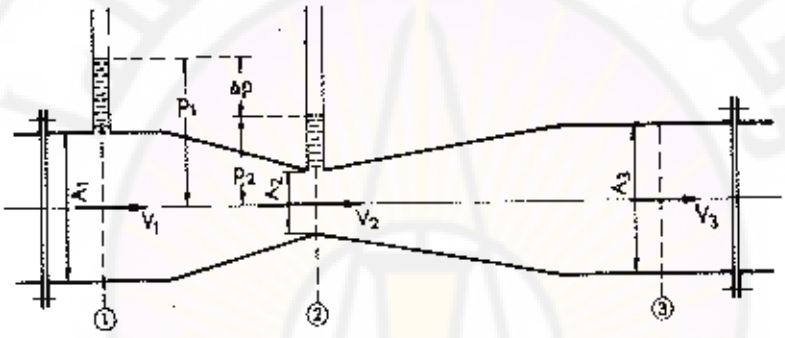
## ٣.٨ تطبيقات على معادلة برنولي

إن معادلة برنولي بصيغها المختلفة تعتبر رغم بساطتها أحد أهم القوانين الاساسية الهيدروديناميكية . ويمكن بمساعدتها حل العديد من مسائل الجريان ذات الأهمية التطبيقية

ودراسة وتحليل طريقة عمل مجموعة كبيرة من الاجهزة التي صممت على أساسها . وسنتناول فيما يلي بعض هذه التطبيقات .

## ١.٣.٨ أنبوبة فنتوري

لقياس التيار الحجمي المار في خط أنابيب تستعمل وصلة تعرف باسم **أنبوبة أو مقياس فنتوري** نسبة للعالم الايطالي (1746–1822) G. B. Venturi . وهو يتألف ، الشكل (٦.٨) ، في قسمه الاول من أنبوب بشكل **نفاثة** Nozzle




الشكل ٦.٨ : انبوبة فنتوري لقياس التيار الحجمي

يتضيق مقطعها تدريجياً من $A_1$ عند المدخل حتى مقطع أصغري $A_2$ يعادل تقريباً نصف $A_1$ . ويتألف في قسمه الثاني من أنبوب بشكل **ناشرة** Diffuser تتوسع تدريجياً حتى يصبح مقطعها $A_3 = A_1$ . يوصل في ① و ② عن طريق ثقبين في الجدار أنبوبان بيزومتريان (أو أنبوب بشكل U كمقياس ضغط تفاضلي !) لقياس الضغطين $p_1$ و $p_2$ ( أو فرقهما ) اللذين سنعتبرهما فيما يلي كقيمتين معلومتين .

نفرض أن أنبوبة فنتوري في وضعية أفقية وأن السرعة الوسطية للتيار الحجمي ( $\bar{V} \equiv V$ ؛ انظر ص ٢٠٠ ) في المقاطع ① ، ② ، ③ هي $V_1, V_2, V_3$ . فيكون حسب معادلة الاستمرار (8.2) :

$$Q = V_1 A_1 = V_2 A_2 \Rightarrow V_2 = V_1 \cdot \frac{A_1}{A_2} \quad . \qquad (8.28)$$

وتنتج من معـادلة **برنولي** (8.9) بتطبيقهـا على المقطعين ① و ② واعتبار العلاقة $z_1 = z_2 = 0$ :

$$\frac{\rho}{2} V_1^2 + p_1 = \frac{\rho}{2} V_2^2 + p_2$$

التي تصبح بعد إدخال $V_2$ حسب (8.28) من الشكل :

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2} (V_2^2 - V_1^2) = \frac{\rho}{2} V_1^2 \left[ \left( \frac{A_1}{A_2} \right)^2 - 1 \right] .$$

ومنها يمكن حساب السرعة $V_1$ ومن ثم غزارة التيار الحجمي حيث نجد :

$$Q_{id} = A_1 \sqrt{\frac{2 \Delta p}{\rho [(A_1/A_2)^2 - 1]}} = A_1 \sqrt{\frac{2 \Delta p}{\rho [(1/m)^2 - 1]}} \quad [m^3 s^{-1}] \ , \ (8.29)$$

حيث $m = A_2/A_1$ تمثل نسبة الانفتاح Aperture ratio .

في حالة السوائل الحقيقية فان قيمة $Q_{act}$ ( الفعلية ) تكون أصغر من قيمة $Q_{id} \equiv Q$ ( المثالية ) لأننا لم نراع في (8.29) الفواقد التي يخسرها التيار نتيجة الاحتكاك على جدران الانبوبة ونتيجة تغير المقاطع فيها . هذه الفواقد يمكن حسابها ، بصورة تقريبية على الأقل ، ولكنها عملياً تؤخذ بعين الاعتبار بإدخال **معامل التصريف** Discharge coefficient $\psi_D$ حيث يكون :

$$Q_{act} = \psi_D Q = \psi_D A_1 \sqrt{\frac{2 \Delta p}{\rho [(1/m)^2 - 1]}} \quad . \qquad (8.30)$$

لذلك لابد من تعيير Calibration أنبوبة فنتوري قبل استخدامها كجهاز قياس للتيار الحجمي . ويتم ذلك بقياس الغزارة وفرق الضغط وتمثيل $\psi_D$ كتابع

لعـدد رينولدز $Re = V_1 D_1/\nu$ ، حيث نحصل على منحني التعيير الذي يسمح بتحديد مجال القياس لأنبوبة فنتوري الموافق لمجال أعداد رينولدز الذي تبقى فيه قيمة $\psi_m$ ثابتة تقريباً وقريبة من الواحد ، خاصة إذا كانت تغير المقاطع يتم تدريجياً وجدران الانبوبة الداخلية ملساء . لهـــذا وضعت مواصفات قياسية ( عيارية ) Standard لتصميم أنبوبة فنتوري كجهاز لقياس التيار الحجمي ( انظر مثلاً [89] ) .

عندما تكون أبعاد انبوبة فنتوري معطاة ، وبالتالي $A_1 , m$ معلومة ، فان العلاقة (8.30) يمكن كتابتها بالشكل :

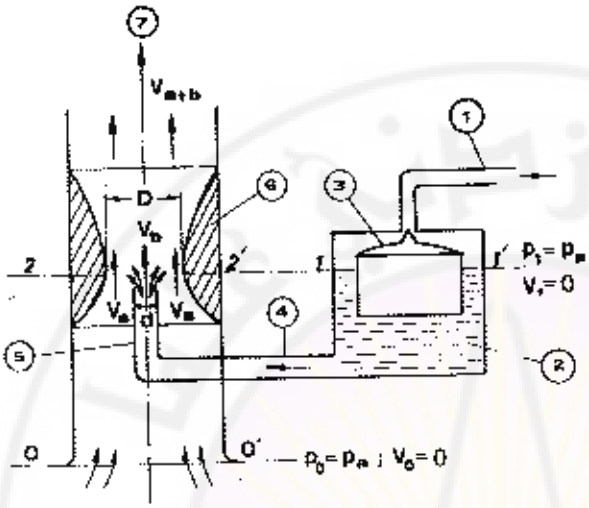
$$Q_{act} = C\sqrt{\Delta p} = C_v\sqrt{\Delta p/g\rho_m} = C_v\sqrt{\Delta h} \quad , \quad (8.31)$$

حيث $\rho_m$ كثافة سائل مقياس الضغط التفاضلي ، $\Delta h$ فرق ارتفاع سوية سائل المقياس ( انظر ٢.٣.١.٣ ) ، $C_v$ ثابت يتعلق بأنبوبة فنتوري المستخدمة . والجدير بالملاحظة أن $\Delta h$ لا تتعلق بوضعية أنبوبة فنتوري سواء كانت أفقية أو شاقولية أو مائلة . ولكن المهم أن قيـــاس فرق الضغط يجب ان يتم بين المقطعين ① و ② ( الشكل ٦.٨ ) وليس بين ② و ③ ، لأن تزايد الضغط في منطقة الناشرة يمكن ان يؤدي لحدوث فواقد إضافيـة نتيجة تشكل الاعاصير وانفصام الجريان عن الجدار ، كما سنرى فيما بعد .

تستخدم في الصناعة والمخبر أنابيب فنتوري معيّرة بنسب انفتاح : $m = 0,1$ إلى $m = 0,6$ لقيـاس التيـار الحجمي في أنابيب أقطارهـا $D_1 = 65\ mm$ إلى $D_1 = 500\ mm$ . كما طورت في الفترة الاخيرة جملة فنتوري المركبة المؤلفة من عدة أنبوبات فنتوري متداخلة بما يسمح بقياس الغزارة في مجال جريان واسع مع تضخيم لإشارة القياس وطول كلي قصير نسبياً [90] .

إن مبدأ أنبوبة فنتوري يستخدم في مجالات تطبيقية أخرى نورد منها كمثال المقحم

Carburettor الذي يستعمل في محركات الاحتراق الداخلي كأداة لقياس وتذرية ومزج الوقود مع الهواء . الشكل ( ٧٠٨ ) يبين مبدأ عمله :




الشكل ٧٠٨ مبدأ عمل المفحّم .

يصل الوقود (البنزين) من الخزان عبر الأنبوب ③ إلى حجرة ② تطفو فيها فواشة إبرية ③ لتنظم سوية الوقود الذي يخرج من الحجرة عبر الأنبوب ④ المنتهي بنفاثة ⑤ (قطر d) تتوسط مقطع العنق (قطر D) لأنبوبة فنتوري ⑥ التي يمر فيها تيار هواء .

ان سرعة الهواء تبلغ في المقطع الأصغري قيمة أعظمية $V_a$ ، مما يؤدي حسب معادلة برنولي لتوليد ضغط ناقص يسبب شفط الوقود من النفاثة فيخرج بشكل نافوري وبسرعة $V_b$ . أما مزيج الهواء والوقود فيغادر أنبوبة فنتوري بسرعة $V_{a+b}$ إلى غرفة الاحتراق ⑦ .

لحساب نسبة وزن الوقود $G_b$ إلى وزن الهواء $G_a$ في المزيج المتدفق في واحدة الزمن نطبق معادلة برنولي على المقطعين $0-0'$ و $2'-2$ بالنسبة لتيار الهواء ، وبين $1'-1$ و $2'-2$ بالنسبة لتيار الوقود فينتج باهمال كافة الفواقد والضغاطية الهواء ( الشكل ٧٠٨ ) :

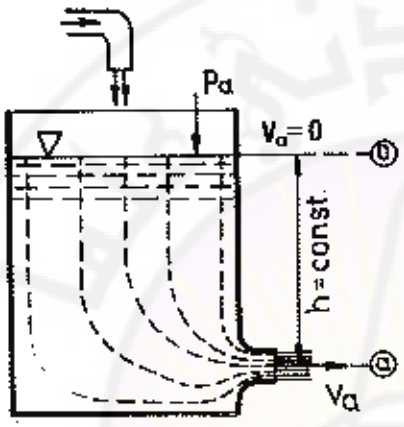
$$\frac{G_b}{G_a} = \left(\frac{d}{D}\right)^2 \sqrt{\frac{\gamma_b}{\gamma_a}} \quad ,$$

حيث $\gamma_b$ ، $\gamma_a$ الوزن النوعي للوقود وللهواء .

## ٢.٣.٨ تفريغ خزان من فتحة جانبية صغيرة تحت تأثير النقالة

نعتبر وعاء مفتوحاً في الأعلى فيه سائل كثافته $\rho$ يتدفق تحت تأثير

الثقالة عبر فتحة جانبية مقطعها صغير جداً بالمقارنة مع مقطع الوعاء . نفرض أن ارتفاع سطح السائل السائب في الوعاء h عن محور الفتحة يبقى ثابتاً ، على أساس أن النقص في كميـــة السائل يعوض عنه باستمرار بواسطة أنبوب خارجي ، الشكل ( ٨.٨ ) . في هـذه الحالة يكون الجريان مستقراً . فإذا كانت الفتحة مجهزة بأنبوبة توصيل قصيرة ومدورة بشكل جيـد بحيث لايكون في منطقة التفريغ نتوءات أو حروف حـادة ، فان خطوط التيـــار الخارجة تستطيـع أن تنثني بمجازاة الجدار وتملأ مقطع فتحة التفريغ تماماً .




الشكل ٨.٨ : تفريغ وعاء بالثقالة من فتحة جانبية صغيرة .

نختار كمستو للقياس المستوي لانفي المـار من مركز ثقل فتحة التفريغ ( طبعاً يمكن اختيار أي مستوي قياس آخر ! ) ونطبق معادلة برنولي للارتفاعات ( 8.10 ) على نقطة البداية ⓪ والنهاية ⓐ لخط تيار ما داخل الوعاء فينتج :

$$\frac{V_0^2}{2g} + \frac{p_0}{\gamma} + h = \frac{V_a^2}{2g} + \frac{p_a}{\gamma} + 0 \quad .$$

حيث أنه بموجب الفرضيات السابقة يبقى السطح الحر للسائل ساكناً ومعرضاً للضغط الجوي فيكون : $p_a = p_0 \, , \, V_0 = 0$ . وباعتبار أن التفريغ يتم في الهواء الخارجي فإن الضغط السائد حول تيار النافورة هو الضغط الجوي الذي يمكن لصغر الفتحة أن نعتبره نفس الضغط المؤثر داخل تيار النافورة . وعليه نحصل من العلاقة السابقة على سرعة التفريغ المثالية :

$$V_a = V_{a\,id} = \sqrt{2gh} = \sqrt{2g\,(z_0 - z_a)} \quad . \qquad (8.32)$$

هذه العلاقة معروفة باسم **قانون توريشلي للتفريغ** ، الذي ينص على مايلي :

> سرعة التفريغ المثـــالية لسائل يخضع لتأثير الثقالة تتعلق فقط بالارتفاع الشاقولي h بين مركز ثقل السطح الحر للسائل ومركز ثقل فتحة التفريغ وتساوي إلى السرعة النهائية التي يبلغها جسم صلب يسقط سقوطاً حراً في الخلاء من ارتفاع h وبدون سرعة ابتدائية .

هذه النتيجة تبقى صحيحة حتى لو كانت فتحة التفريغ متصلة بأنبوب طويل متغير المقطع كما في الشكل ( ٤٠٨ ) . كما تنطبق على الحـالة التي لايحدث فيها تحكم لتثبيت سوية السطح الحر للسائل ، إذا كان مقطع الوعاء $A_0$ أكبر بكثير من مقطع الفتحة A . عندئذ يكون بموجب معادلة الاستمرار $V_0 = V_a\, A/A_0$ ؛ وبالتالي فإن سرعة هبوط السطح الحر للسائل أصغر بكثير من سرعة التفريغ : $V_0 \ll V_a$ ، مما يسمح باهمالها .

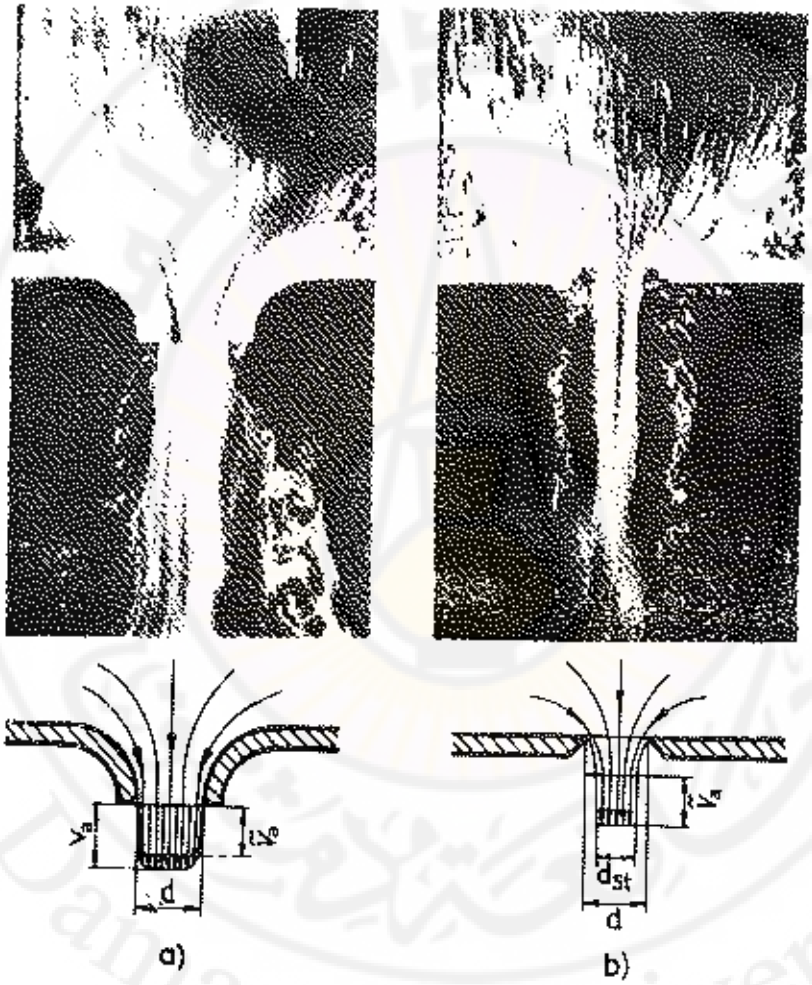
تحت الشروط السابقة وبفرض A مساحة مقطع الفتحة فإن التيار الحجمي المثالي ينتج من (8.2) و (8.32) بالصيغة :

$$Q_{id} = V_{a\,id}\, A = A\sqrt{2gh} \quad . \qquad (8.33)$$

لكن التجارب أثبتت أن التيار الحجمي الفعلي $Q_{act}$ أصغر من $Q_{id}$ بقليل أو كثير ، تبعاً لما تكون عليه جوانب فتحة التفريغ مدورة أو حادة الأطراف . فمن ناحية يؤدي تأثير الاحتكاك على جوانب الوعاء في حالة السوائل الحقيقية الى خسارة في قدرة الجريان بحيث أن سرعة التفريغ الفعلية الوسطية تكون أصغر من $V_a$ . وتراعى هذه الناحية بادخال مايسمى **معامل تصحيح السرعة** $\varphi_v$ ، بحيث تستعمل بدلاً من (8.32) العلاقة :

$$\bar{V}_u = \varphi_v \, V_{u\,id} = \varphi_v \sqrt{2\,g\,h} \ . \qquad (8.34)$$

$\varphi_v$ يتعلق حسب تجارب أجراها **فايزباخ** J. Weisbach ( انظر [9] [12] ) بالارتفاع h . وتبلغ قيمته في حالة الماء وعندما تكون فتحة التفريغ مدوّرة بشكل جيد : $\varphi_v = 0{,}96 \ldots 0{,}998$ ، أي تقريباً الواحد (الشكل ٩٠٨ –a) .




الشكل ٩٠٨ : تأثير الاحتكاك (a وتضيق فتحة الناقورة (b على التيار الحجمي الفعلي لسائل حقيقي ، حسب [42] .

وهذا يعني أن السائل الحقيقي الخارج من الفتحة متسارعاً يتصرف وكأنه سائل مثالي وبدون فواقد تقريباً .

من جهة أخرى لايلزم أن يكون مقطع تيار النافورة $A_{st}$ يساوي المقطع الهندسي للفتحة A ، كما فرضنا في العلاقة (8.33) . ذلك أن خطوط التيار داخل الوعاء التي تبدأ من السطح الحر وتتجه في اتجاه فتحة التفريغ تضطر ، في الواقع ، للانحراف الفجائي أفقياً . فإذا كانت الفتحة حادة الأطراف ، الشكل ( ٨.٩ – b ) ، تحدث ظاهرة **تضيق تيار النافورة** Jet contraction بحيث يصبح $A > A_{st}$ ، وبالتالي تنقص كمية السائل المتفرغة . وتراعى هذه الظاهرة بادخال **معامل التضيق** :

$$\mu_0 = \frac{A_{st}}{A} = \left(\frac{d_{st}}{d}\right)^2 \quad , \qquad (8.35)$$

الذي تبلغ قيمته في حالة الفتحات المدوّرة الواحد تقريباً ؛ وفي حالة الفتحات الدائرية الحادة الأطراف في جدار رقيق نسبياً : $\mu_0 = 0{,}61 \ldots 0{,}65$ [4][30] .

في الحساب العملي للتيار الحجمي الفعلي يدمج معامل السرعة مع معامل التضيق لما يسمى **معامل التصريف أو التفريغ** :

$$\psi_0 = \varphi_0 \, \mu_0 \qquad (8.36)$$

وتستخدم بدلاً من (8.33) العلاقة :

$$Q_{act} = \psi_0 \, A \sqrt{2 g h} \quad . \qquad (8.37)$$

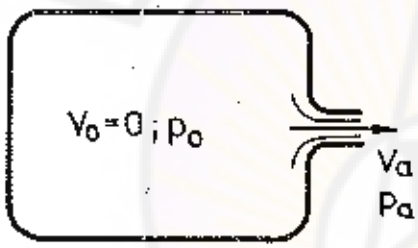
إن قيمة $\psi_0$ تحدد في الحالة العامة تجريبياً . وهي لا تختلف إلا قليلاً في حالة الفتحات غير الدائرية المقطع عن تلك في حالة الفتحات الدائرية إذا كان جدار الوعاء رقيقاً . ولكن شكل النافورة يكون معقداً . فالنافورة الخارجة من فتحة مربعة الشكل مثلاً تكوّن مقطعاً رقيقاً متصالباً ؛ بينما النافورة الخارجة

من فتحة مستطيلة الشكل فتكون بشكل شريط رفيع يتعامد مع ضلع المستطيل الاكبر [4] .

إن العلاقات السابقة لا تنطبق على حالة فتحة جانبية كبيرة المقطع نسبياً ، خاصة في جدار مائل . ولحساب التيار الحجمي المثالي هنا ينظر الى كل خيط تيار على أنه مستقل لا يؤثر على جيرانه لأن الضاغط يختلف من خيط تيار لآخر ؛ ومن ثم يحسب التكامل بالنسبة لمقطع الفتحة الاجمالي . وعند حساب التيار الحجمي الفعلي يستخدم معامل تصريف يراعي تأثير خيوط التيار على بعضها وكذلك اختلاف الضغط داخل تيار الناقورة عن الضغط الجوي الخارجي .

## ٣.٣.٨ تفريغ خزان من فتحة جانبية صغيرة تحت تأثير ضغط زائد

في الخزان المبين في الشكل (١٠.٨) يؤثر الضغط الزائد $p_0$ على سائل ثابت الحجم كثافته $\rho$ يتدفق من فتحة جانبية بسرعة $V_a$ في الهواء الخارجي حيث يسود الضغط الجوي $p_a$ .




الشكل ١٠.٨ : تفريغ خزان تحت ضغط زائد من فتحة جانبية .

نطبق معادلي برنولي للارتفاعات (8.10) على نقطتين من خط تيار أفقي يمر من مركز ثقل فتحة التفريغ . فإذا لاحظنا أن السرعة داخل الخزان معدومة تقريباً : $V_0=0$ ، ولا يوجد فرق ارتفاع مكاني ، نجد بسهولة سرعة التفريغ :

$$\frac{(p_0+p_a)}{g\rho}=\frac{V_a^2}{2g}+\frac{p_a}{g\rho}\Rightarrow V_a=\sqrt{\frac{2p_0}{\rho}}=\sqrt{2g\,h_{p_0}}\quad (8.38)$$

حيث $h_{p_0}$ الضاغط الموجب حسب (3.9) . ويتجلى بوضوح الشبه بين هذه العلاقة وقانون توريشلي (8.32) .

وعندما يتم التفريغ من خزان يؤثر فيه الضغط $p_1$ الى خزان يؤثر فيه

الضغط $p_1 > p_2$ ، فان سرعة التفريغ من فتحة الخزان الاول تصبح :

$$V_a = \sqrt{\frac{2\,(p_1 - p_2)}{\rho}} = \sqrt{\frac{2\,\Delta p}{\rho}} = \sqrt{2\,g\,h_p} \quad , \qquad (8.39)$$

حيث $h_p$ يمثل ارتفاع عمود سائل وزنه النوعي $\gamma = \rho g$ وفرق الضغط على نهايته $\Delta p$ .

العلاقة (8.39) تمكننا من تقدير السرعة الحدية المسموح بها لكي نستطيع معالجة سائل متغير الحجم كالهواء كسائل ثابت الحجم ، والتي تتعلق قيمتها بتغير الكثافة المسموح به دون ان يؤثر ذلك على دقة النتائج العملية المطلوبة .

نفرض ان الغاز يخضع لقانون تغير الحالة الأديباتي (2.56) ، وأن تغيراً في الضغط بمقدار $\Delta p$ يؤدي لتغير في الكثافة بمقدار $\Delta\rho$ فيكون :

$$1 + \frac{\Delta p}{p} = \left(1 + \frac{\Delta\rho}{\rho}\right)^{\varkappa} \approx 1 + \varkappa\,\frac{\Delta\rho}{\rho} \quad \Rightarrow \quad \Delta p \approx \varkappa p\,\frac{\Delta\rho}{\rho} \quad , \qquad (8.40)$$

وذلك بعد نشر الطرف الايمن من المعادلة الاولى بشكل سلسلة وإهمال كافة حدود المراتب العليا . فاذا سمح بتغير نسبي في الكثافة بمقدار $\Delta\rho/\rho = 0{,}01$ ، وكان الغاز هواء ($\varkappa = 1{,}405$) بضغط جوي $p = 10\,333\ \mathrm{kp/m^2}$ وكثافة وسطية $\rho = 0{,}125\ \mathrm{kps^2/m^4}$ ( الجدول ٢.٢ ) ينتج من (8.40) : $\Delta p = 144{,}5\ \mathrm{kp/m^2}$ ، ومن (8.39) : $V_{gr} \approx 48\ \mathrm{m/s}$ . أي أن كثافة الهواء تتغير بمقدار $1\%$ فقط إذا لم تتجاوز سرعته $50\ \mathrm{m/s}$ ، ويمكن عندئذ ان تدرس حركته كسائل ثابت الحجم . أما إذا كان التغير النسبي في الكثافة $10\%$ فتبلغ السرعة المسموح بها حوالي $150\ \mathrm{m/s}$ .

لحساب سرعة تفريغ غاز مضغوط من خزان يؤثر فيه الضغط $p_1$ الى خزان يؤثر فيه الضغط $p_2$ بشكل أدق مما سبق نستخدم معادلة برنولي العامة (8.15) . فإذا أهملنا

تأثير القوى الحجمية بالمقـــارنة مع قوى الضغط المزائد واعتبرنا السرعة في الخزان الاول $V_1 \approx 0$ وطبقنا هذه العادلة على نقطتين من خط تيار غير من فتحة التفريغ ينتج :

$$P_1 (p) = P_2 (p) + \frac{V_a^2}{2} \Rightarrow V_a^2 = 2 (P_1 - P_2) = 2 \int_{p_2}^{p_1} \frac{dp}{\rho} \quad . \qquad (8.41)$$

فإذا فرضنا الغاز باروتروبياً ويخضع لقانون تغير الحالة الأديباتي فيكون :

$$p_1/\rho_1^\varkappa = p/\rho^\varkappa \Rightarrow \rho = \rho_1 \, p_1^{-\frac{1}{\varkappa}} \, p^{\frac{1}{\varkappa}} \quad .$$

وينتج بالتالي من (8.41) بعد التكامل والاصلاح :

$$V_a^2 = 2 \frac{p_1}{\rho_1} \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} \left[ 1 - \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}} \right] \qquad (8.42)$$

وهـذا هو قانون دي سانت فينان وفانسل B. De Saint Venant und L. Wanzel لتفريغ غاز مضغوط الذي يحل مكان قانون توريشلي . ونلاحظ ان سرعـــة التفريغ الأعظمية تنتج عندما يكون $p_2 = 0$ ، أي عند التفريغ في خزان يسوده الفراغ التام :

$$V_{a\,max} = \sqrt{\frac{2\varkappa}{\varkappa - 1} \frac{p_1}{\rho_1}} = \sqrt{\frac{2\varkappa}{\varkappa - 1} R T_1} \quad . \qquad (8.43)$$

من هذه العلاقة تنتج بالنسبة للهواء في شروط نظامية : $\varkappa = 1{,}405$ ، $p_1 = p_n = 10\,333 \text{ kp/m}^2$ ، $\rho_1 = 0{,}125 \text{ kp s}^2/\text{m}^4$ السرعة الأعظمية :

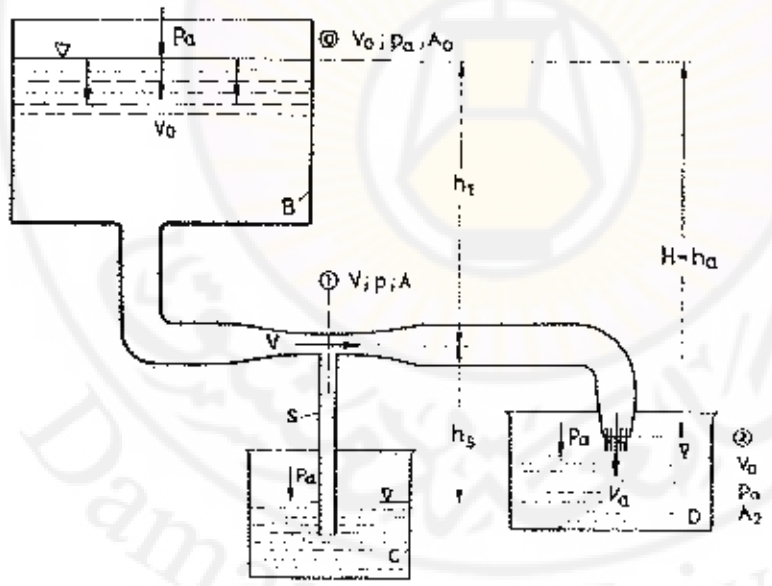
$$V_{a\,max} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}405 \cdot 10\,333}{0{,}4 \cdot 0{,}125}} = 755 \text{ m/s} \quad , \qquad (8.44)$$

أي مايعادل 2,2 مرة قيمة سرعة الصوت $a = 340 \text{ m s}$ . وتسود هذه السرعة في فتحة التفريغ عندما $\frac{p_2}{p_1} = 0{,}527$ . وتجدر الاشارة هنا أنه يلزم أن تكون أنبوبة التوصيل المتصلة بفتحة التفريغ بشكل نفاثة لافال ( الشكل ٢٠٦ ) لكي نتمكن من الحصول على سرعات أكبر من سرعة الصوت ، كما تؤكد المقارنة العددية بين العلاقة (8.39) و (8.42) انه حتى نسب ضغوط $\frac{p_2}{p_1} \approx 0{,}7$ يمكن اعتبار تأثير الانضغاطية مهملاً [17] .

## ٨.٣.٤ تولد ضغط السحب في الجريان ومبدأ المضخات النافورية

في الأنبوب المبين في الشكل ( ١١.٨ ) ، الذي يتضيق مقطعه في ① بشدة ، يتم تفريغ سائل ثابت الحجم من الخزان B الى الخزان D المفتوحين في الأعلى . نفرض أن مقاييس B كبيرة بحيث يمكن اعتبار الجريان في الأنبوب مستقراً وعديم الفواقد .

نهمل الآن وجود الأنبوب الشاقولي S المتصل بالمقطع ① وكذلك الخزان C ؛ وليكن $H = h_a$ عمق المستوى الأفقي ② المار من مركز ثقل فتحة التفريغ التي مقطعها $A_2$ عن مستوي السطح الحر للسائل ◎ في الخزان B . إن سرعة التفريغ $V_a$ تنتج من قانون تورشيلي (8.32) : $V_a = \sqrt{2gH}$ . ومنها تنتج حسب معادلة الاستمرار (8.2) السرعة في




الشكل ١١.٨ : في المقطع الأصغري ① تصبح السرعة أعظمية فيتولد ضغط ناقص يؤدي لسحب السائل من الخزان C .

المقطع ② $V_0$ وفي المقطع ① $V_1$ بالشكل :

$$V_0 = V_a\ A_2/A_0\ ;\ V = V_a\ A_2/A \quad . \qquad (8.45)$$

نعتبر المستوي الأفقي المار من مركز ثقل المقطع الأصغري ③ مستوياً للقياس ونطبق معادلة برنولي ( 8.10 ) على نقطتين من خط تيار واقعتين في ② و ① فنجد برموز الشكل ( ١١٠٨ ) :

$$\frac{V_0^2}{2g} + \frac{p_a}{\gamma} + h_1 = \frac{V^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} \Rightarrow \frac{p_a - p}{\gamma} = \frac{1}{2g}\left(V^2 - V_0^2\right) - h_1 \quad .$$

وبادخال العلاقة (8.45) وقيمة $V_a$ ينتج فرق الضغط :

$$\frac{p_a - p}{\gamma} = \frac{A_2^2\ V_a^2}{2g}\left(\frac{1}{A^2} - \frac{1}{A_0^2}\right) - h_1 = H\ A_2^2\left(\frac{1}{A^2} - \frac{1}{A_0^2}\right) - h_1 \quad (8.46)$$

وحيث أننا افترضنا $A \ll A_0$ فيكون $\frac{1}{A^2} \gg \frac{1}{A_0^2}$ ، وبالتالي يمكن إهمال $\frac{1}{A_0^2}$ في العلاقة السابقة التي تصبح :

$$\frac{p_a - p}{\gamma} = H\left(\frac{A_2}{A}\right)^2 - h_1 \quad . \qquad (8.47)$$

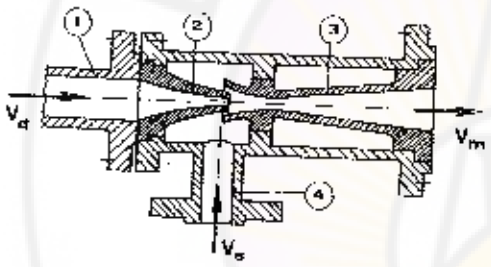
فإذا كان اختيار المقاطع والارتفاعات بشكل مناسب فإن الطرف الأيمن من هذه العلاقة يصبح موجباً ، والطرف الايسر ضغطاً ناقصاً ، أي أن الضغط p في المقطع الأصغري ① يكون أصغر من الضغط الجوي $p_a$ . فاذا ثقبنا الجدار في هذا المقطع فان السائل لا يتسرب لخارج الانبوب ، بل يدخل الهواء لداخله نتيجة **الفعل الامتصاصي للتيار** الذي يمكن الاستفادة منه عملياً .

نفرض كما في الشكل ( ١١٠٨ ) أن أنبوب التفريغ يتصل عن طريق ثقب في المقطع ① بالانبوب الشاقولي S ، الذي تنغمس نهايته السفلى في الوعاء C الحاوي على نفس السائل الموجود في B . إن السائل سيصعد في S حتى المقطع ①

إذا كان الضاغط السالب ( انظر ص ٩٨ ) أكبر من ارتفاع السحب المكاني ، وبالتالي : $\gamma h_s < p_a - p$ . ومنه بالاستناد على العلاقة (8.47) ينتج الشرط التصميمي لإمكانية الاستفادة من الفعل الامتصاصي للتيار من أجل سحب السائل من C وضخه في أنبوب التفريغ :

$$h_s < H\left(\frac{A_2}{A}\right)^2 - h_1 \Rightarrow \frac{A_2}{A} > \sqrt{\frac{h_s + h_1}{H}} \quad . \qquad (8.48)$$

إن طريقة عمل **الضواغط والمضخات النافورية** Jet Pump and Compressor تعتمد على الفعل الامتصاصي للتيار . ويبين الشكل ( ١٢.٨ ) مقطعاً طولياً نموذجياً لها . فالسائل الدافع (الماء مثلاً) يدخل الوصلة ① بسرعة $V_d$ وضغط $p_d$ ومنها الى نفاثة الدفع ② حيث تزداد السرعة وينقص الضغط الى قيمة قريبة من ضغط السحب $p_s$ . ويلتقي السائل الدافع عند مدخل نفاثة الضغط ③ ، التي تشبه أنبوبة فنتوري ، مع السائل المرفوع القادم عبر وصلة السحب ④ بسرعة صغيرة نسبياً $V_s$ . فتحدث عملية مزج يتم فيه تسريع السائل المرفوع وكبح السائل الدافع ، ويزداد ضغط المزيج عند نهاية ناشرة نفاثة الضغط ويخرج منها بسرعة $V_m$ إلى أنبوب الضخ . وواضح أنه نتيجة الاحتكاك وعملية المزج وتبادل القدرة بين السائل الدافع والمرفوع ( المشفوط ) تنشأ فواقد كبيرة جداً لم تراع في العلاقة (8.48) ؛ فهي تسمح بحساب ارتفاع السحب المثالي فقط . وقد وضع **فلوجل** G. Flügel [91] لأول مرة الاسس النظرية لحساب المضخات النافورية.



الشكل ١٢.٨ : مقطع طولي في مضخة نافورية مائية .

ثم تتالت الدراسات والابحاث النظرية والتجريبية عنها وعن الضواغط والمراوح النافورية ، مثلاً [92][93][94] .

توجد مضخات نافورية مائية وبخارية وهوائية ، حسب نوع السائل الدافع ، تستخدم في مجالات واسعة مثل ضخ الماء ، وتفريغ الاوساخ من الأقبية أو من حفر الأساسات ، وكذلك لنقل الحصى والاسماك ولتغذية المراجل بالماء . وتمتاز كلها بالمقارنة مع المضخات العادية النابذة أو المكبسية بأنها سهلة التصنيع قليلة الكلفة ، لا تحتاج لصيانة لعدم احتوائها على عناصر متحركة ، سهلة الفك والتركيب والتشغيل ، الذي لا يحتاج سوى لفتح وإغلاق بعض الصمامات ، وأخيراً فإن عمرها غير محدود تقريباً . ولكن سيئتها الأساسية أن مردودها لا يتجاوز 20% إلى 33% . ويمكن ان يصل حتى 50% إذا كانت كثافة السائل الدافع أكبر من كثافة السائل المرفوع .

إن تولد الضغط الناقص للتيار في منشأة هيدروليكية تحوف دائماً بخطر نشوء **ظاهرة التكهف** ، عندما تصل قيمة الضغط المطلق قيمة قريبة من ضغط التبخر $p_v$ ( راجع ٤.٢ ) . ولأخذ فكرة مسبقة عن ذلك نعود للشكل (١١.٨) ونفرض أن السائل في الخزان B ماء وزنه النوعي $\gamma = 10^3\ kp/m^3$ ، وأن $p_0 = 1\ at$ ، $A_2/A = 1{,}23$ ، $H = h_1 = 19{,}39\ m$ ، فيكون حسب (8.47) :

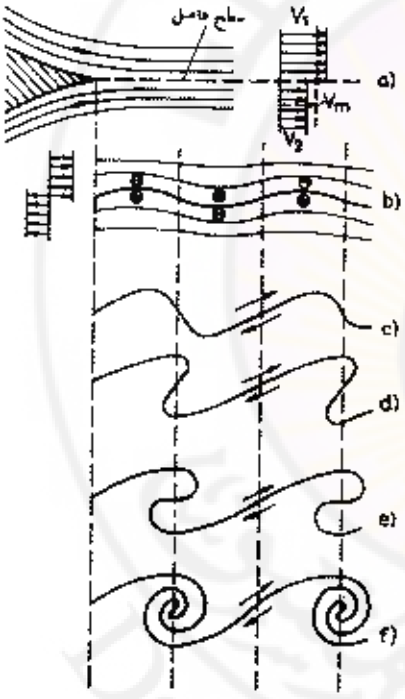
$$p = p_0 - \gamma H\left[\left(\frac{A_2}{A}\right)^2 - 1\right] = 10^4 - 10^3 \cdot 19{,}39\,(1{,}23^2 - 1) = 55\ kp/m^2$$

فإذا كانت درجة حرارة الماء 20 °C فيكون حسب الشكل (٨.٢) $p_v = 238\ kp/m^2$ ، وبالتالي فإن الماء في المقطع ① سيتعرض حتماً لتبخر موضعي (تكهف) تتولد نتيجته فقاعات مملوءة ببخار الماء وبالغازات المنحلة وغير

المنحلة فيه . ويؤدي ذلك لانقطاع الجريان وانهيار تأثيرالفعل الامتصاصي للتيار . وواضح أن معادلة برنولي لا تعود صالحة للتطبيق على المنطقة المتكهفة لزوال أحد الشروط الاساسية التي قام عليه اشتقاقها وهو شرط الاستمرار .

## ٥.٣.٨ السطوح الفاصلة وتشكل الدوّاصير

عندما يلتقي خلف المؤخرة الحادة لجسم تياران سائليان قادمان من منبعين مختلفين فليس من الضروري في الحالة العامة أن تكون قدرة الجريان لكل منهما وبالتالي ثابتة برنولي ، من نفس القيمة. وينتج من ذلك أنه على طرفي السطح الفاصل بين التيارين الذي لا يستطيع تحمل أي فرق في الضغط تكون السرعة مختلفة في القيمة ومتساوية في الاتجاه الشكل ( ١٣.٨ – a ) . وهذا يعني أن السرعة تتعرض لتغير فجائي في الاتجاه العرضي .




الشكل ١٣.٨ : الصفة المميزة للسطوح الفاصلة هي عدم الاستقرار بحيث أن أي تموج صغير يؤدي بالنهاية لتفككها لبلة أعاصير غير منتظمة .

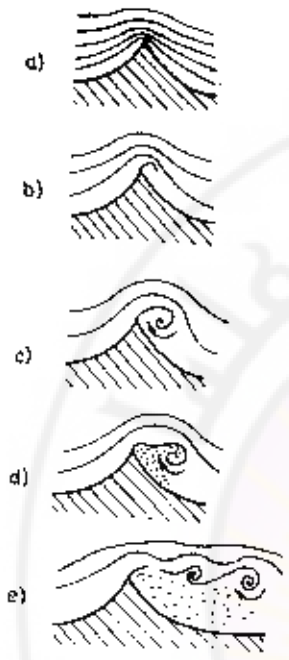
أمثال هذه السطوح الفاصلة تشاهد بكثرة. ولكنها لا تحافظ على شكلها إلا لفترة قصيرة جداً بسبب عدم استقرارها الذي تتميز به . فهي تنزع بشدة إلى أن أية تموجات تطرأ عليها صدفة ومهما كانت صغيرة تؤدي للزيادة السريعة لسعة الامواج وبالتالي الى تزايد فرق السرعة في بعض

المناطق وتناقصه في مناطق أخرى . وبالنتيجة يتفكك السطح الفاصل الى عدد كبير من الاعاصير غير المنتظمة ، الشكل ( ١٣.٨ ـ b حتى f ) . ونظراً لأهمية هذه الظاهرة بالنسبة لفهم الجريانات الفعلية وكيفية تكوّن الاعاصير سندرس بعض تفاصيلها .

نفرض كما في الشكل ( ١٣.٨ ) ان سرعة التيار الفوقي $V_1$ أكبر من سرعة التيار التحتي $V_2$ . ونفرض ان السطح الفاصل قد طرأ عليه تموج طفيف نتيجة التذبذبات في التيار القادم . هذه الامواج تتحرك الى الامام بسرعة $V_m$ تساوي متوسط السرعتين $V_2, V_1$ ، الشكل (١٣.٨ ـ a) . فاذا راقبنا حركة الامواج من جملة إحداثيات تتحرك بنفس السرعة الوسطية فإن قمم وبطون الامواج تبقى ساكنة بالنسبة لهذا المراقب الذي يرى ان السائل الفوقي يتحرك الى اليمين والتحتي الى اليسار حركة مستقرة ، الشكل ( ١٣.٨ ـ b ) . فإذا حسبنا بمساعدة معادلة برنولي توزع الضغط في اتجاه الجريان أو بمساعدة معادلة أويلر (8.8) تغير الضغط ناظمياً على اتجاه الجريان نجد أنه بالنسبة للتيار الفوقي أو التحتي يسود في قمة الموجة ضغط زائد وفي بطن الموجة ضغط ناقص (في الشكل أشير إليها بـ ⊕ و ⊖) . ولكن ، من الواضح ، ان توزعاً للضغط كهذا لا يسمح بدوام استقرار الجريان ، لأن جزيئات السائل ستتحرك من منطقة الضغط العالي الى منطقة الضغط المنخفض ، وبالتالي ستزداد سعة الموجة بسرعة الى ان يتفكك السطح الفاصل مكوناً جملة من الاعاصير الافرادية ، الشكل (١٣.٨ ـ f ) ، التي تكون في الواقع غير منتظمة كبيرة وصغيرة ، لأن التموج يكون أيضاً غير منتظم .

في حالات عملية هامة يرتبط تكوّن السطح الفاصل بنشوء إعصار في نفس الوقت . وكمثال معبر جداً ندرس الجريان حول نتوء حاد ( خشونة في الجدار مثلاً ) . في اللحظات الأولى لبدء الحركة تكون صورة الجريان كما في الشكل ( ١٤.٨ — a ) ، حيث تزدحم خطوط التيار عند طرف النتوء الحاد مما يؤدي

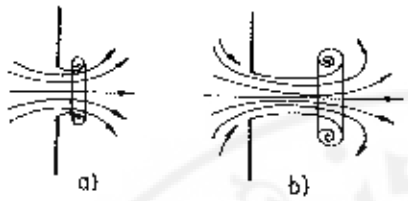
تتولد سرعة هائلة تكون في حالة الجريان المثالي نظرياً لا نهائية . ولكن نعلم بالخبرة أن السرعة لا تبلغ هذه القيمة غير المعقولة فيزيائياً ، إذ تتناقص بعد فترة قصيرة جداً من مرور التيار نتيجة تشكل اعصار عند الطرف المدبب للنتوء وكأن السائل يسعى لتخفيف حدته بهدف تجنب السرعات غير المعقولة ، الشكل ( ١٤.٨ — b ) . ولكن وجود هذا الإعصار يؤدي لالتفاف السائل خلف النتوء فيلتقي مع التيار الأصلي مما يؤدي لتغيير مفاجيء في السرعة وتشكل سطح فاصل ، الشكل ( ١٤.٨ — d,c ) ، وهذا يلتف على نفسه ويغذي الإعصار فينمو الى أن ينفصل عن الطرف الحاد مكوناً اعصار بدء الحركة ، الشكل (١٤.٨ — e) . ثم تعاود الكرة من جديد . لذلك يعتبر **براندل** [4] أن السطح الفاصل والاعصار يكونان في الواقع وحدة متكاملة وينموان مع بعضهما البعض منذ بدء تشكلها . ولكن لا بد من الاشارة مسبقاً أن وراء تشكلها تكمن في الحقيقة لزوجة السائل التي مهما كانت صغيرة لاينعدم تأثيرها على الجدار الصلب . ولكن عند دراسة تكون الأعاصير في الجريانات المثالية يكفي أخذ اللزوجة بعين الاعتبار فقط لفترة تكون اعصار بدء الحركة .



الشكل ١٤.٨ : كل نتوء حاد يعتبر منبعاً لتكوين السطوح الفاصلة والأعاصير .

إن تكون النافورة الاسطوانية من ثقب دائري في جدار وعاء يتم بعمليات مماثلة لما تقدم . ولكن السطح الفاصل هنا الذي يتكون عند حوافي الفتحة

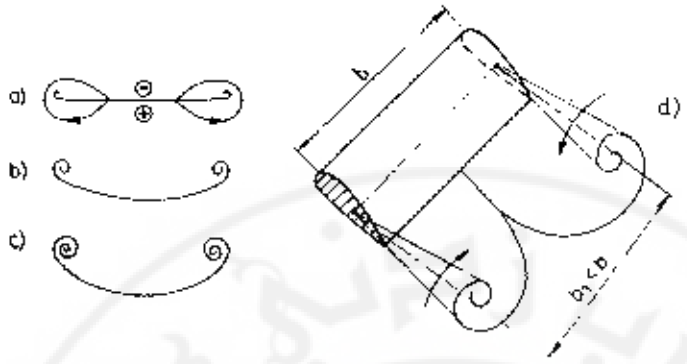
يلتف مكوّناً اعصاراً خاتمياً ، الشكل ( ١٥.٨ — a ) ، يحيط بالنافورة محافظاً على شكلها الاسطواني إلى مسافة معقولة بعد فتحة التفريغ حيث يتفكك بعدها نتيجة الاحتكاك ، الشكل ( ١٥.٨ — b ) .




الشكل ١٥.٨ : تتكوّن النافورة الأسطوانية بسبب تشكل إعصار خاتمي على حوافي فتحة الثقب .

توجد حالات هامة أخرى تتكوّن فيها سطوح فاصلة نتيجة تغيير مفاجيء للسرعة في الاتجاه العرضي . منها مثلاً عندما يتكون التياران الملتقيان خلف مؤخرة جسم قادمين من نفس المصدر ، وثابتة برنولي لكل منهما واحدة ، ولكن اتجاه السرعة للتيار الفوقي يعاكس اتجاه السرعة للتيار التحتي . مثل هذه الحالة تنشأ عندما تتحرك صفيحة مستوية تميل بزاوية ورود صغيرة على اتجاه حركتها . على الطرف العلوي للصفيحة يسود ضغط ناقص بسبب السرعة الكبيرة ، بينما يؤثر على الطرف السفلي ضغط زائد بسبب السرعة الصغيرة نسبياً . لذلك تفترق خطوط التيار على الطرف السفلي اعتباراً من مسافة مناسبة عن منتصف الصفيحة الى اليسار واليمين وتلتف على نهايتيها ثم تنحني في اتجاه منتصف الطرف العلوي . نتيجة ذلك يتشكل عند مؤخرة الصفيحة سطح فاصل تكون السرعة على طرفيه من نفس القيمة ولكن باتجاهين متعاكسين . ويبيّن الشكل ( ١٦.٨ - a - b - c ) كيف يلتف السطح الفاصل ابتداء من نهايتي الصفيحة الجانبيتين على مسافات مختلفة خلف الصفيحة ، ثم يتفكك أخيراً الى إعصارين يمكن بطرق ترئية الجوبان مشاهدتهما .

في حالة الجناح الحامل المحدود الامتداد يتحول السطح الفاصل المتشكل عند مؤخرة الجناح الى **جديلة إعصارية** ، الشكل ( ١٦.٨ — d ) ، لا غنى عن دراستها بالنسبة لتحديد قوة الرفع للجناح .

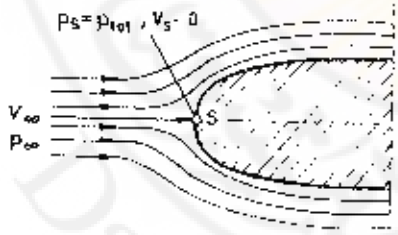



الشكل ١٦.٨ : خلف صفيحة مائلة يتشكل سطح فاصل نتيجة تغير فجائي للسرعة بالاتجاه العرضي (a, b, c) ؛ وتمتد خلف الجناح الحامل المحدود الامتداد جديلة إعصارية (d) .

## ٦.٣.٨ قياس الضغط والسرعة والتيار الحجمي

### ١.٦.٣.٨ الضغط الستاتيكي والتحريكي والكلي ومعامل الضغط

عندما يصطدم جريان انسحابي منتظم بحاجز صلب ، نتصوره مثلاً اسطوانة شاقولية في قناة مائية أو عمود جسر في نهر ، فان مقدمته تعيق حركة السائل الذي يتجمع قبل الحاجز مشكلاً ما يسمى **منطقة الركود** . فإذا اعتبرنا الجريان في أي مقطع أفقي نلاحظ كما في الشكل ( ١٧.٨ ) أن خط التيار المركزي يصطدم مع الحاجز في النقطة S ويتفرع منها الى فرعين علوي وسفلي ينطبقان على حدود مقطع الحاجز . في النقطة S تكون السرعة معدومة وإلا تعارض ذلك




الشكل ١٧.٨ : الجريان حول حاجز ، في نقطة الركود S يؤثر الضغط الكلي .

مع تعريف خط التيار . لذلك يطلق عليها **نقطة الركود** .

نطبق معادلة برنولي على نقطتين من خط التيـار الافقي المار من S . فإذا فرضنا $V_S$ ، $p_S$ السرعة والضغط في S ، $V_\infty$ ، $p_\infty$ السرعـة والضغط للجريان غير المشوش ، أي على مسافة كبيرة من الجسم ، ينتج من (8.12) :

$$p_\infty + \frac{\rho}{2} V_\infty^2 = p_S + 0 = p_{tot} .$$

إذن فإن **الضغط الستاتيكي** غير المشوش $p_\infty$ يتلقى في نقطة الركود زيادة في الضغط بمقدار **ضغط الركود أو الضغط الديناميكي** $p_{dyn} = \frac{\rho}{2} V_\infty^2$ الذي يكافيء القدرة الحركية للجريان غير المشوش بالنسبة لواحدة الحجم . ويطلق على مجموعهما اسم **الضغط الكلي** $p_{tot}$ الذي يؤثر في نقطة الركود ويعرّف في الحـالة العامة بالعلاقة :

| الضغط الكلي = الضغط الستاتيكي + الضغط التحريكي |
|---|
| $\frac{\rho}{2} V^2 + p = p_{tot}$ |

. (8.49)

ندخل هذه العلاقة في معادلة برنولي للضغط (8.9) فينتج :

$$p_{tot} + \rho g z = C_{Bp} = \text{const} \Rightarrow p_{tot} = C_{Bp} - \rho g z . \quad (8.50)$$

هذا يعني أن توزع الضغط الكلي يخضع لقوانين الهيدروستاتك (راجع ١.١.٣) ، حيث أن كل مستو أفقي ($z = \text{const}$) يمثل بالنسبة لكافة خطوط التيار الواقعة فيه سطحاً للضغط الكلي الثابت المكافيء لثابتة برنولي عندما $z = 0$ .

لتوضيح مفهوم الضغط الستاتيكي في الجريان نطبق معـادلة برنولي (8.9)

على سائل ساكن ($V = 0$) فتنتج العلاقة :

$$p + \rho g z = \text{const}' \Rightarrow p = p' = \text{const}' - \rho g z \ .$$

المطابقة لمعادلة الهيدروستاتيكية الأساسية. $p'$ يسمى ضغط التوازن أو الضغط السكوني الناتج عن وزن السائل . لذلك فان الضغط الستاتيكي في حالة الحركة يختلف عن $p'$ بالفرق $p^*$ بحيث يكون :

$$p = p' + p^* = (\text{const}' - \rho g z) + p^* \ .$$

فاذا أدخلنا هذه العلاقة في معادلة برنولي (8.9) نجد :

$$\frac{\rho}{2} V^2 + [(\text{const}' - \rho g z) + p^*] + \rho g z = \text{const} \Rightarrow \frac{\rho}{2} V^2 + p^* = \text{const} \quad (8.51)$$

في هذه الصيغة المختزلة لمعادلة برنولي يمثل $p^*$ الضغط المؤثر على جزيء سائلي ذي كتلة ولكنه « عديم الثقالة » ، وبالتالي فإن $p^*$ لايتعلق بالارتفاع المكاني . ومنه ينتج أن (8.51) تنطبق على أية نقطتين من حقل الجريان دون الارتباط بخط تيار أفقي .

إن النتيجة السابقة يمكن تفسيرها بسهولة بالنسبة لكافة حالات الجريان حول أجسام تتحرك داخل سائل لانهائي الامتداد كالماء أو الهواء حيث يتعرض كل جزيء سائلي من الجزيئات المجاورة لقوة طفو ( دافعة أرخميدس ) تساوي وزنه تماماً . لذلك يمكن دراسة حركة السائل دون أخذ وزنه بعين الاعتبار . ولكن قوة الثقالة لايمكن إهمالها على السطوح المحدة للسائل ، حيث يلزم أن يحقق الضغط $p$ ككل وليس الضغط $p^*$ الشروط الحدية هناك .

لقد مهدت المعالجة السابقة الطريق لقياس الضغط وتصميم أجهزته ، وبالتالي لإمكانية المقارنة بين القيم النظرية والتجريبية . ويمكننا معرفة توزع الضغط على حدود الجسم من تحديد محصلة القوى المؤثرة عليه بالاضافة لتحديد نقاط الضغط

الخروج التي يمكن أن تتعرض لخطر التكهف في السوائل المائعة أو اختراق جدار الصوت في السوائل الغازية . ويفضل دائماً ، خاصة بالنسبة للمقارنة بين أجسام مختلفة الأشكال ، أن يتم تمثيل توزع الضغط بشكل **لابعدي** . ويستخدم لذلك **معامل الضغط** Pressure coefficient الذي يعرف بالعلاقة :

$$c_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{\rho}{2} V_\infty^2} = \frac{\Delta p}{q_\infty} \quad , \tag{8.52}$$

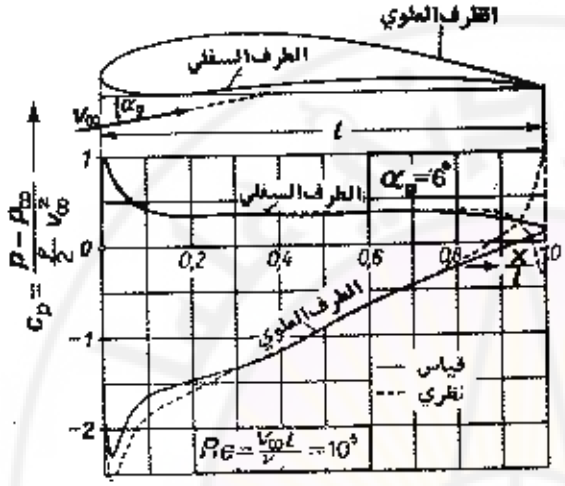
حيث p الضغط في نقطة من محيط الجسم أو في حقل الجريان ، $p_\infty$ و $V_\infty$ الضغط والسرعة في نقطة قياسية يمكن اختيارها بحرية ، ولكن من الأنسب أن تكون داخل الجريان غير المشوش، أي بعيداً جداً عن الجسم . فإذا نسبنا إحداثي النقطة المعتبرة من الجسم على طول ميزة منه ، مثل القطر في حالة الاسطوانة أو الأنبوب ، أو الوتر في حالة مقطع جناح حامل ، فنحصل على **توزع الضغط اللابعدي** بالصيغة :

$$c_p = f\,(x/\ell) \quad . \tag{8.53}$$

ويكون هذا التوزع في حالة الجريانات المثالية واحداً بالنسبة لكافة الأجسام المتشابهة هندسياً .

الشكل ( ١٨.٨ ) يبين توزع الضغط اللابعدي على محيط بروفيل (مقطع ) جناح حامل يمر عليه تيار تحت **زاوية ورود** $\alpha_\infty$ وبسرعة غير مشوشة $V_\infty$ . وقد حسبت قيم $c_p$ النظرية من توزع السرعة حول البروفيل . فإذا طبقنا معادلة **برنولي** (8.51) على نقطة من محيط البروفيل حيث الضغط $p^*$ والسرعة v وعلى نقطة بعيدة جداً عنه حيث الضغط والسرعة $p_\infty^*$ و $V_\infty$ نجد باستخدام (8.52) :

$$c_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{\rho}{2} V_\infty^2} = 1 - \left(\frac{V}{V_\infty}\right)^2 \quad , \qquad (8.54)$$




الشكل ١٨٠٨ : توزع الضغط اللابعدي على محيط بروفيل جناح حامل حسب بيتس ( انظر [17] ). اختلاف القيم النظرية والقياسة سببه لزوجة السائل .

حيث أغفل المؤشر ($^*$) بالنسبة للضغط لتبسيط الكتابة . وفي ضوء هذه العلاقة ينتج من الشكل ( ١٨٠٨ ) أن السرعة على الطرف العلوي للبروفيل تكون أكبر من $V_\infty$ لأن قيم $c_p$ سالبة ، بينما يكون العكس على الطرف السفلي . لذلك تسمى نظرية الجناح الحامل الأول باسم طرف السحب والثاني باسم طرف الضغط . ويمكن اعتبار توزع الضغط هذا نموذجياً بالنسبة لكافة الأجسام المولدة لقوة الرفع . فإذا كانت $F_{ps}$ محصلة قوى الضغط الناظمية المؤثرة على الجناح بالنسبة لواحدة العرض ، $c_A$ معامل قوة الرفع فيمكن أن نضع :

$$c_A = c_{A_0} - \frac{F_{ps}}{q_\infty l} = \int_0^1 (c_{pu} - c_{pl})\, d\frac{x}{l} \qquad (8.55)$$

حيث الدليلان $u$ و $l$ يشيران إلى طرف السحب والضغط .

في الحالة التي تكون فيها السرعة على الجسم $V$ من حيث القيمة والاتجاه

لا تختلف إلا قليلاً عن السرعة غير المشوشة $V_\infty$ ، كما هو الحال بالنسبة للجريان حول جناح حامل تحت زاوية ورود صغيرة ، فيمكن أن نكتب :

$$V = V_\infty \pm \Delta v_x \quad , \qquad (8.57)$$

حيث (+) لطرف السحب و (−) لطرف الضغط . فإذا عوضناها في (8.54) ولاحظنا أن $\Delta v_x^2$ قيمة صغيرة يمكن إهمالها ينتج :

$$c_p = \mp 2 \frac{\Delta V_x}{V_\infty} \quad . \qquad (8.56)$$

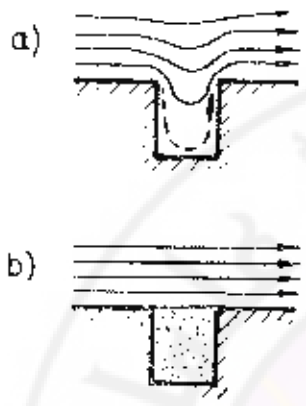
حيث إشارة (−) لطرف السحب و (+) لطرف الضغط ، والعلاقة تمثل **معادلة برنولي الخطية** . ونجدر الإشارة إلى أن فرق السرعة $\Delta v_x$ يمكن اعتباره سرعة اضافية أو سرعة محرضة ناتجة عن وجود خيط إعصار مربوط يعوض عن الجناح الحامل .

## ٢.٦.٣.٨ أجهزة قياس الضغط

إن مبدأ قياس الضغط الستاتيكي يعتمد على فكرة تكوّن السطوح الفاصلة على النتوءات والأطراف الحادة عندما يعبرهـــا تيار عرضاني . هذه السطوح الفاصلة تتشكل أيضاً على حدود الجسم خاصة إذا كانت حادة . فإذا فرضنا في الشكل ( ١٧.٨ ) وجود صفيحة مستوية عرضانية على اتجاه الجريان بدلاً من الحاجز الاسطواني فان السطوح الفاصلة المتشكلة على أطرافها تكوّن مايطلق عليه **خطوط** ( أو سطوح ) **التيار الحرة** التي تفصل الجريان الخارجي عن منطقة « السائل الميت » خلف الصفيحة . هذه تكون في الواقع معباة بالأعاصير المتشكلة من تفكك السطوح الفاصلة ، ولكن سرعة الجزيئات فيها تكون في كل الأحوال صغيرة جداً بالمقارنة مع سرعة الجريان الخارجي .

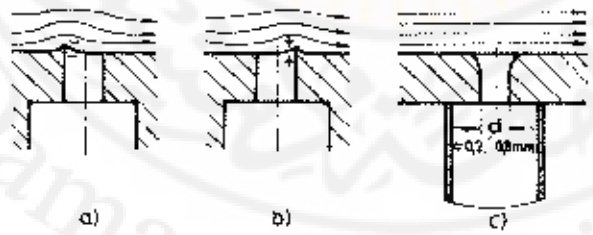
نعتبر الجريان حول جدار فيه فرضة (حز) صغيرة . فبعد اللحظات الأولى لبدء الجريان تتشكل على حوافي الفرضة سطوح فاصلة وأعاصير بحيث تكون

صورة الجريان كما في الشكل ( ١٩،٨ ـ a ) . فإذا كانت المسافة بين حافتي الفرضة صغيرة فإنه بعد ابتعاد الأعاصير عن الطرف الحاد يتكون سطح فاصل مستقر الشكل نسبياً ، وتكون صورة الجريان كما في الشكل ( ١٩،٨ ـ b ) . وتنشأ داخل الفرضة منطقة سائل ميت يسود فيها عملياً سكون وضغط ثابت يساوي إلى الضغط على الطرف الآخر للسطح الفاصل ، أي الضغط الستاتيكي للجريان . فإذا وصلنا الفرضة عن طريق أنبوب أو خرطوم مطاطي بمقياس ضغط سائلي أو معدني نتمكن من قياس الضغط الستاتيكي في الجريان .



الشكل ١٩،٨ : الجريان حول فرضة في الجدار .

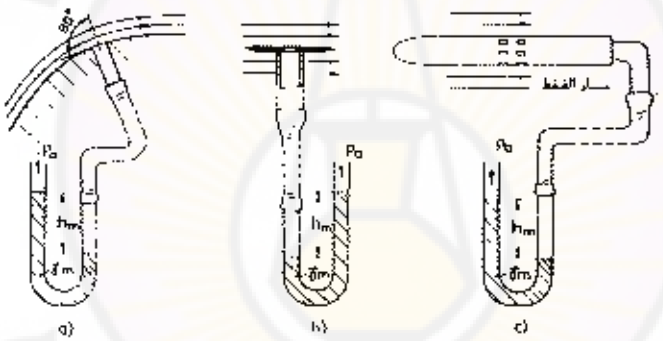
في الواقع العملي فإن قياس الضغط الستاتيكي في نقطة على جدار جسم يجري حوله أو داخله سائل يتم بفتح ثقب دائري المقطع عادة توصل به حلمة أنبوبية لوصل مقياس الضغط السائلي أو المعدني . ولكن يجب الانتباه الشديد حتى يكون محور الثقب عمودياً على الجدار وأن تكون حوافيه مدوّرة بشكل جيد وقطره صغير بحدود 0,2 إلى 0,8 mm ، الشكل (٢٠،٨ ـ c ) . فإذا وجد



الشكل ٢٠،٨ : يتم قياس الضغط الستاتيكي بوصل مقياس الضغط بثقب في الجدار يلزم ان تكون حوافيه مدوّرة خالية من النتوءات .

نتوء على حافة الثقب فسيكون كما في الشكل (٢١.٨) منبعاً لتشكل الاعاصير والسطوح الفاصلة . وحسب ما يكون موقع هذا النتوء على الحافة الامامية أو الخلفية للثقب فإننا نقيس ضغطاً أصغر أو أكبر من الضغط الفعلي ، الشكل ( b, a – ٢٠.٨ ) .

هذه الطريقة البسيطة لقياس الضغط الستاتيكي تستخدم في حالة الجريان في الأنابيب ، حيث يكفي وصل أنبوب بيزومتري بثقب الجدار لقياس الضغط في كل مقطع من الانبوب ، الشكل ( ٢١.٨ ) . كما تستخدم في حالة الجريان حول جدار منحن ، حيث يوصل بالثقب العمودي على الجدار مانومتر سائلي بشكل حرف U فيه سائل مقياس وزنه النوعي $\gamma_m$ ، الشكل (٢١.٨ – a ) . وحسب




الشكل ٢١.٨ : أجهزة قياس الضغط الستاتيكي : (a عن طريق ثقب عمودي على الجدار ، b) بواسطة قرص زير أو القرص البيزومتري ، c) بواسطة مسبار الضغط .

ما تكون قيمة الضغط في النقطة المعتبرة فإن سوية سائل المقيـــاس في فرع المانومتر الأيسر سترتفع او تنخفض حتى يتحقق التوازن في أنبوبة المانومتر . وعندئذ يكون ، برموز الشكل ( ٢١.٨ – a ) وبفرض $\gamma_m \gg \gamma$ ( $\gamma$ الوزن النوعي للسائل ) ، الضغط الستاتيكي على الجدار :

$$p = p_0 + \gamma_m h_m \Rightarrow p_e = \gamma_m h_m \ .$$

لقياس الضغط الستاتيكي داخل الجريان أو في نافورة حرة ، أي حيث لا يوجد جدار يمكن ثقبه ، يستخدم **قرص زير** Ser أو **القرص البيزومتري** ، الشكل ( ٢١.٨ - b ) . وهو يتألف من صفيحة رقيقة بشكل قرص في وسطه ثقب صغير لحمت حوله حلمة انبوبية متصلة بواسطة خرطوم مطاطي مثلاً بالمانومتر السائلي بشكل U . وتعود مسألة قياس الضغط الستاتيكي بهذا الجهاز لطريقة ثقب الجدار .

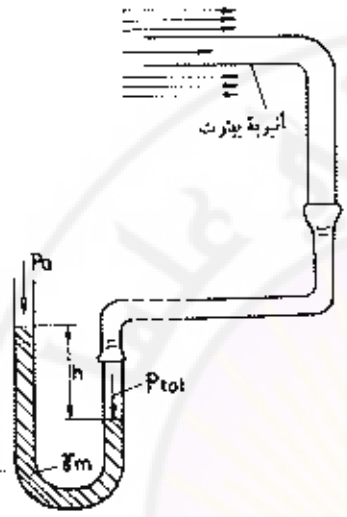
بدلاً من القرص البيزومتري يفضل استخدام **مسبار الضغط الستاتيكي** ، الشكل ( ٢١.٨ - c ) . وهو يتألف من أنبوبة قياس مقدمتها **مسدودة** ومحدبة ولكنها مجهزة بعدة ثقوب جانبية كبديل للثقب في « الجدار » ، وتتصل بها أنبوبة أخرى محنية بشكل قائم يوصل بها بواسطة خرطوم مطاطي مانومتر سائلي بشكل U أو مانومتر معدني .

إن القرص البيزومتري ومسبار الضغط يتميزان بحساسية عاليـــة ضد أي انحراف عن اتجاه الجريان . فالحصول على قيم صحيحة للضغط يلزم ان يكون مستوي القرص البيزومتري منطبقاً تماماً على اتجاه الجريان ، بينما يمكن بمسبار الضغط قياس قيم دقيقة نسبياً حتى زاوية ميل تعادل 5° درجات . كما أنه من الأنسب بغية عدم تشويش الجريان وبالتالي عملية القياس ووضع المانومتر وخراطيم التوصيل خارج التيار .

لقياس **الضغط الكلي** $p_{tot}$ تستخدم عادة **أنبوبة بيتوت** نسبة لمكتشفها H. Pitot (1695-1771) . وهي تتألف من أنبوبة قياس معكوفة بشكل قائم ومفتوحة من الطرفين ، حيث يوصل بالنهاية السفلى عن طريق خرطوم مطاطي مانومتر سائلي (أو معدني) ، الشكل (٢٢.٨) . ويعتمد مبدأ القياس على النتيجة

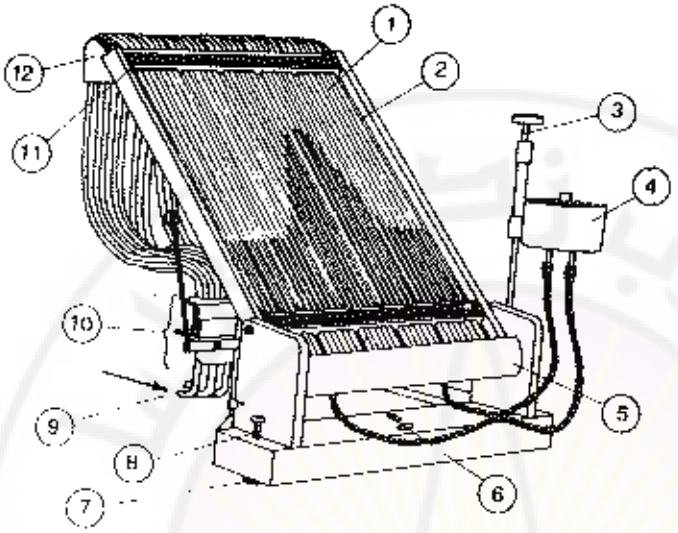
الهامة التي توصلنا اليها في (١.٦.٣.٨) بأن الضغط الكلي يؤثر في نقطة الركود S (الشكل ١٧.٨) . وعليه إذا وضعنا ساق أنبوبة بيتوت الأفقية ضد اتجاه الجريان فإن جزيئات السائل التي تدخل الفتحة الامامية تشكل منطقة ركود، وبالتالي يؤشر المانومتر على قيمة الضغط الكلي في النقطة المجاورة للفتحة. فاذا فرضنا $\gamma_m \gg \gamma$ ، h فرق ارتفاع سوية سائل المقياس فيكون :

$$p_{tot} = p_n + \gamma_m h \ .$$



الشكل ٢٢.٨ : أنبوبة بيتوت لقياس الضغط الكلي .

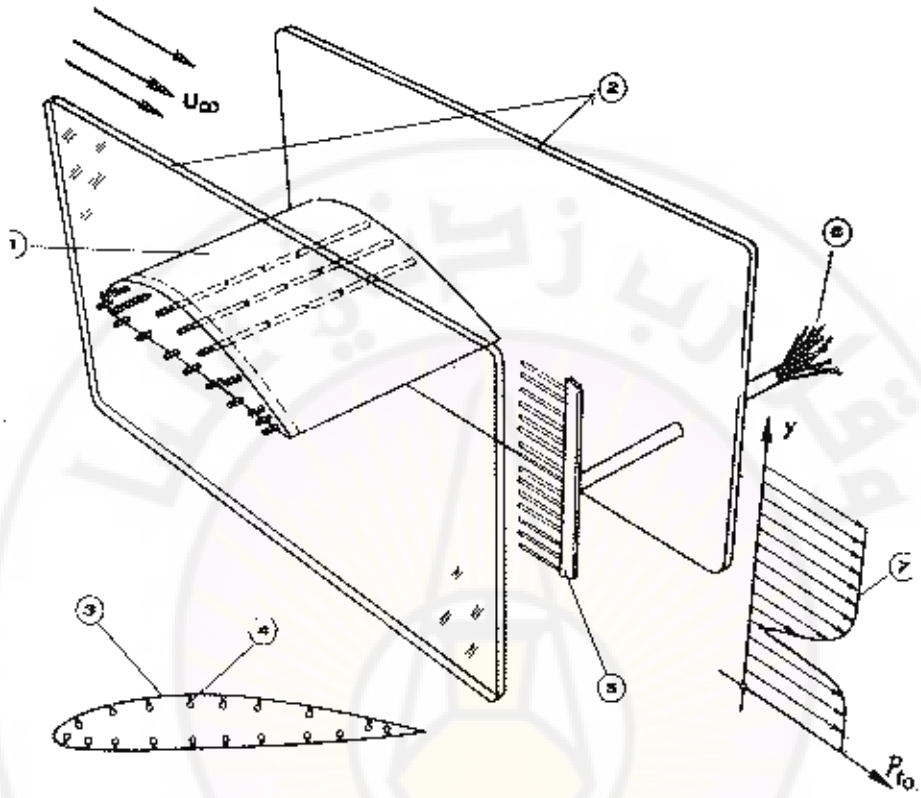
في حالات عملية عديدة للجريان عبر أقنية أو حول أجسام يطلب قياس الضغط في نقاط متعددة من مقطع القناة أو محيط الجسم بغية الحصول على صورة متواقتة لتوزع الضغط . في هذه الحالات يستخدم **المانومتر المتكرر** Multi - Manometer ، الشكل ( ٢٣.٨ ) ، الذي يكون عادة قابلاً للتمييل ويعمل بالتالي على مبدأ المانومتر ذي الذراع المائل (ص ٩٥) . فاذا أردنا بواسطته قياس توزع الضغط الستاتيكي مثلاً حول محيط بروفيل جناح حامل فيوصل بمجموعة من الثقوب الصغيرة التي يجب ثقبها بعناية في جدار الجناح الحامل . ويبين الشكل ( ٢٤.٨ ) كيفية إجراء عملية القياس في المخبر لتوزع الضغط الستاتيكي حول الجناح والضغط الكلي خلفه . وتجدر الاشارة أن الصفيحتين المتوازيتين المثبتتين على نهايتي الجناح الحامل المحدود الامتداد مهمتها منع التفاف الجريان حول نهايتي الجناح ، وبالتالي يصبح الجريان حوله وكأنه جريان مستوٍ حول جناح لانهائي الامتداد .




الشكل ٢٣.٨ : المانومتر المتكرر : (1) أنبوبة مانومترية ، (2) لوحة مرقمة قابلة للتعديل، (3) برغي تعيير، (4) إناء المنسوب ، (5) أنبوب الوصل، (6) قناعة تسوية ، (7) ساق تضبيط ، (8) برغي تضبيط ، (9) من نقاط القياس ، (10) جهاز ربط الخراطيم ، (11) حافة الكتابة ، (12) مجمع الخراطيم .

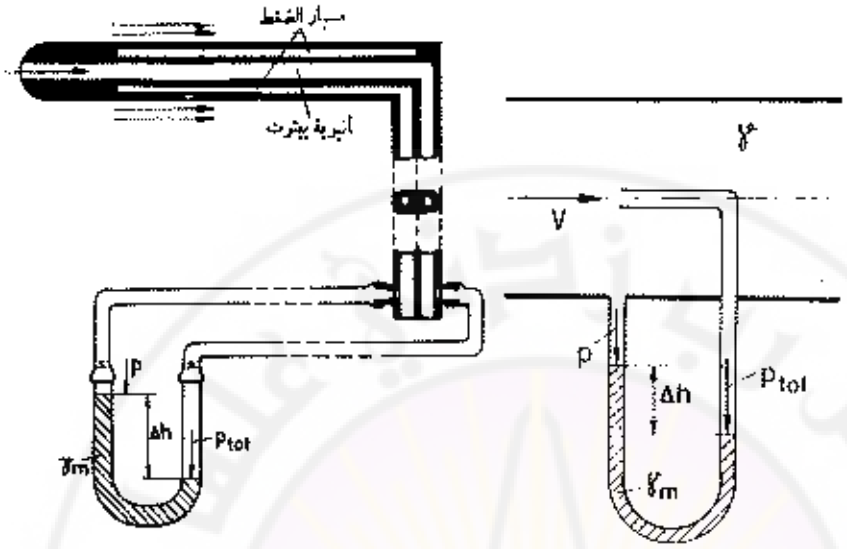
لقياس **الضغط التحويكي** $p_{dyn}$ ، الذي يساوي حسب (8.49) الفرق بين الضغط الكلي والضغط الستاتيكي ، يلزم من حيث المبدأ القيام بعمليتي قياس تستخدم فيها أنبوبة بيتوت ومسبار الضغط الستاتيكي . ولكن بالامكان قياس $p_{dyn}$ بعملية قياس واحدة ، كما يبين الشكل ( ٢٥.٨ ) ، في حالة الجريان عبر أنبوب أو قناة . فالأنبوب البيزومتري المتصل بثقب في الجدار يقيس الضغط الستاتيكي بينما تقيس أنبوبة بيتوت الضغط الكلي . فاذا وصلا بمانومتر تفاضلي وأشر على فرق ارتفاع $\Delta h$ لسوية سائل المقياس الذي نفرض وزنه النوعي $\gamma \ll \gamma_m$ فيكون :

$$q = p_{dyn} = p_{tot} - p = \frac{\rho}{2} V^2 = \gamma_m \Delta h$$




الشكل ٢٤.٨ : قياس توزع الضغط الستاتيكي على محيط بروفيل جناح حامل والضغط الكلي في خلف البروفيل : (1) الجناح الحامل ، (2) صفيحتان متوازيتان ، (3) البروفيل ، (4) ثقب لقياس الضغط الستاتيكي ، (5) مقياس بيتوت متكرر لقياس توزع الضغط الكلي ، (6) خراطيم توصل بالمانومتر المتكرر ، (7) توزع الضغط الكلي .

لقياس الضغط التحريكي داخل الجريان تستخدم **أنبوبة براندل** نسبة لمصممها ، وهي تجمع كما يبين الشكل ( ٢٦.٨ ) بين مسبار الضغط وأنبوبة بيتوت . وتتصف بعدم حساسيتها الكبيرة ضد الانحراف عن اتجاه الجريان، حيث تعطي قياسات دقيقة بما فيه الكفاية حتى زاوية ميل $\pm 12°$ ، إذا كان رأس الأنبوبة




الشكل ٢٥.٨ : قياس الضغط التحريكي والسرعة بواسطة أنبوبة بيتوت وأنبوب بيزومتري .

الشكل ٢٦.٨ : أنبوبة براندل لقياس الضغط التحريكي والسرعة .

نصف كروي . وقد صممت منها نماذج متعددة تستخدم في القياسات الهيدروليكية والإيروديناميكية والغازديناميكية تتميز عن بعضها خاصة بتصميم الرأس بغية تجنب أخطاء القياس نتيجة الانحراف على اتجاه الجريان [35] . ويمكن طبعاً أن يوصل بها بدلاً من المانومتر التفاضلي البسيط مكرومانومترات عالية الحساسية والدقة لقياس السرعات الصغيرة جداً كما في الطبقة الحدية .

## ٣.٦.٣.٨ أجهزة قياس التيار الحجمي

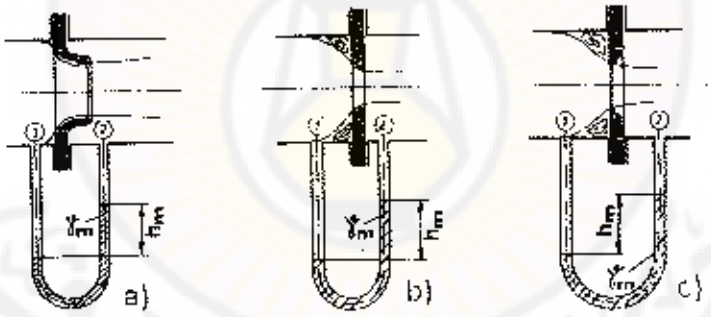
بالاضافة لأنبوبة **فنتوري** كجهاز لقياس التيار الحجمي Q يمكن في حالة الجريان في الأنابيب الدائرية خاصة استخدام **نفاثة قياس** Flow nozzle أو **حلقة قياس** Orifice ، الشكل ( ٢٧.٨ ) ، التي لاتختلف في مبدأ عملها وطريقة

القياس بها عن أنبوبة فنتوري . وعليه نجد بسهولة بمساعدة معادلة برنولي ومعادلة الاستمرار التيار الحجمي المثالي بالصيغة التالية :

$$\dot{V}_{id} = Q_{id} = V_2 A_2 = \frac{A_2}{\sqrt{1-(A_2/A_1)^2}} \sqrt{\frac{2\,\Delta p}{\rho}} \quad [m^3 s^{-1}] \quad , \quad (8.58)$$

التي تشبه جداً العلاقة (8.29) . وفيها يمثل $A_1$ مقطع الأنبوب ، $A_2$ مقطع فتحة النفاثة أو الحلقة ، $\Delta p = p_1 - p_2$ فرق الضغط بين النقطتين ① قبل و ② بعد النفاثة .

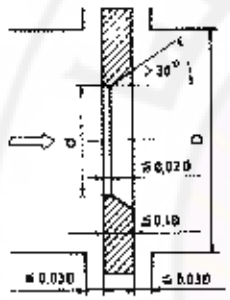
لحساب التيار الحجمي الفعلي يستخدم هنا أيضاً معامل التصريف $\psi_n$ بحيث يكون : $Q_{act} = \psi_n Q_{id}$ . ويتم تحديد $\psi_n$ بالنسبة لنموذج معين من النفاثات أو حلقات القياس بواسطة التعيير ، حيث يقاس $\psi_n$ كتابع لعدد رينولدز $Re = V_1 D_1/\nu$ .




الشكل ٢٧٠٨ : قياس التيار الحجمي بواسطة نفاثة قياس عيارية (a ، ونفاثة قياس ربع دائرية (b ، وحلقة قياس (c .

لقد صممت نماذج مختلفة من حلقات ونفاثات القياس العيارية ذات أشكال مناسبة بحيث أنه في مجال واسع لاعداد رينولدز تبقى قيم $\psi_n$ ثابتة . ويتضمن [89] قيم $\psi_n$ وكافة المقاييس المطلوبة للتصميم ، وكذلك طريقة الوصل كشرط للقياس

الصحيح . وهذا يتطلب أن توجد قبل وبعد حلقة القياس وصلة أنبوبية مستقيمة وملساء بطول 10 D ... 20 D (≈) ، تجنباً لأي تشويش للتيار الداخل إلى الحلقة أو النفاثة يؤدي لأخطاء في القياس . ومن الواضح أن كل نموذج لنفاثات وحلقات القياس يصلح في مجال قياس معين . فالنفاثة المبينة في الشكل ( ٢٧٠٨ — a ) تصلح للقياس حتى أعداد رينولدز $Re_D \geq 2.10^5$ ، بينما النفاثة المبينة في الشكل ( ٢٧٠٨ — b ) فتصلح في المجال $Re_D \approx 5.10^2 \ldots 2.10^5$ ، بينما تستخدم حلقة القياس من النوع المبين في الشكل (٢٧٠٨ — c) والتي يوضح الشكل ( ٢٨٠٨ ) مقاييسها العيارية بالتفصيل ، للقياس في مجال $Re_D \geq 10^5$ عندما تكون نسبة انفتاحها $m = (d/D)^2$ صغيرة ؛ وفي مجال $Re_D \geq 10^6$ عندما تكون m كبيرة نسبياً .



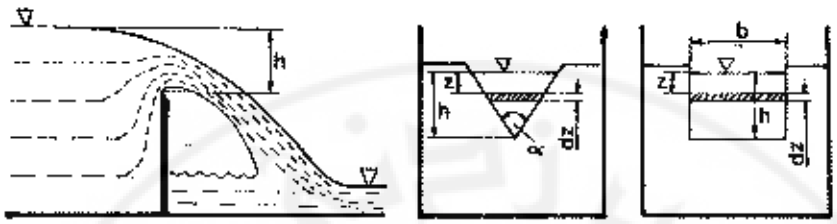

الشكل ٢٨٠٨ : حلقة قياس عيارية حسب نورم اتحاد المهندسين الالمان ( VDI ) .

لقياس غزارة التيار الحجمي في الأقنية المكشوفة مثل أقنية الري وأقنية العتفات المائية أو في مجاري الأنهار ، حيث تكون كميات الماء المتدفقة كبيرة مع فرق منسوب صغير ، فإن أنسب الطرق المستخدمة هي طريقة الهدار Weir . وهذا يمثل حاجزاً بشكل صفيحة مستوية عادة وطرفها العلوي الحاد يكون إما مستقيماً أو مجهزاً بفرضة Notche مستطيلة أو مثلثية ( حرف V ! ) أو شبه منحرفة الشكل . أما مبدأ القياس فيعتمد على أن الهدار كسد يحجز الماء خلفه حتى ارتفاع h تتعلق قيمته بغزارة التدفق الحجمي Q ، الشكل ( ٢٩٠٨ — a ) .

في كتب الهيدروليك [6] [20] والكتب المختصة بالقياسات المائية توجد دراسات مستفيضة عن الهدارات ، وسنتعرض هنا لنموذجين منها فقط بغية الحصول على فكرة عامة .

نعتبر الهدار ذا الفرضة بشكل V ، أو كما يسمى أيضاً هدار **طومسون** [8] [20] ، الشكل ( ٢٩٠٨ — b ) . لتكن $\alpha$ زاوية انفراج الفرضة ، h ارتفاع تخزين الماء . نأخذ شريحة على عمق z من السطح الحر للسائل وبسماكة dz . فإذا أهملنا كافة الفواقد فإن سرعة التفريغ المثالية عبر الشريحة تنتج من قانون **تورشيلي** (8.32) ، وينتج بالتالي التيار الحجمي :

$$Q_{id} = \int_0^h V_{id} \cdot dA = \int_0^h \sqrt{2gz} \cdot 2(h-z)\tan\frac{\alpha}{2}\,dz = \frac{8}{15}\sqrt{2g}\tan\frac{\alpha}{2}\,h^{2,5}.$$




**الشكل ٢٩،٨** : الجريان فوق هدّار (a ، هدّار طومسون أو الهدار ذو الفرضة المثلثية بشكل V (b ، الهدار ذو الفرضة المستطيلة (c .

وبادخال معامل التصريف $\psi_D$ نحصل على الغزارة الفعلية :

$$Q_{act} = \psi_D \frac{8}{15}\sqrt{2g}\tan\frac{\alpha}{2}\,h^{2,5} \quad ; \qquad (8.59)$$

التي تكتب بالنسبة لهدار معين بالشكل :

$$Q_{act} = \psi_D\, C\, h^{2,5} = C_V h^{2,5} \quad . \qquad (8.60)$$

بمساعدة هذه العلاقة يمكن تعيير الهدار وتحديد $\psi_D$ وذلك بقياس عدة قيم لـ $Q_{act}$ و $h$ . وفي هذه الحالة يفضل تمثيل النتائج بشكل لوغارتمي حيث ينتج من (8.60) :

$$\lg Q_{act} = 2,5 \lg h + \lg C_V \quad .$$

وهذه معادلة مستقيم ميله 2,5 ويتقاطع مع المحور $\lg Q_{act}$ في نقطة تحدد قيمة $\lg C_V$ التي منها تتحدد قيمة $\psi_D$ ، التي تبلغ 0,6 تقريباً .

بالنسبة للهدار ذي الفرضة المستطيلة البسيطة ، نحصل بنفس الخطوات السابقة وبرموز الشكل ( c – ٢٩،٨ ) على العلاقة التالية لغزارة التيار الحجمي الفعلي :

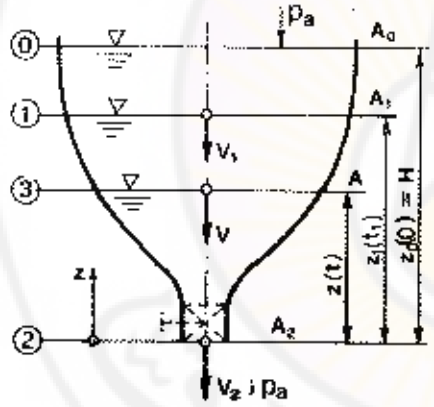
$$Q_{act} = \psi_D \frac{2}{3} b\sqrt{2g}\, h^{1,5} = C_V h^{1,5} \qquad (8.61)$$

وبكتابة لوغارتمية نحصل من (8,61) على معادلة مستقيم ميله 1,5 وتحدد نقطة تقاطعه مع المحور $\lg Q_{act}$ قيمة معامل الهدار $C_V$ وبالتالي $\psi_D$ .

## ٨.٣.٨ تفريغ خزان مع مراعاة تغير ارتفاع السطح الحر للسائل

كمثال على الجريانات غير المستقرة ندرس عملية تفريغ إناء من فتحة في القعر. نفرض أن شكل الإناء المفتوح في الأعلى اعتباطي ، وأن السائل الذي في الإناء عديم الاحتكاك وفتحة التفريغ مدوّرة بشكل جيد ، بحيث يمكن اعتبار عملية التفريغ تتم بدون فواقد وفي الهواء الحر .

ليكن عند بدء عملية التفريغ، $t = 0$ ، ارتفاع السطح الحر للسائل ⓪ عن المستوي المار من فتحة التفريغ ② هو $z_0(0) = H$ . عند الزمن $t = t_1$ يصبح ارتفاع المنسوب $z_1(t_1)$ وينطبق السطح الحر للسائل على المستوي ① وتكون سرعة هبوطه $V_1(z_1)$ ؛ بينما سرعة التفريغ $V_2(z_1) = V_a$ ، الشكل (٣٠.٨) .




الشكل ٣٠.٨ تفريغ إناء متغير القطع مع مراعاة حركة السطح الحر للسائل وحساب زمن التفريغ .

لحساب سرعة التفريغ الآنية وتحديد زمن تفريغ السائل نطبق معادلة برنولي للجريانات غير المستقرة (8.18) على خط تيار آني يبدأ من المستوي ① وينتهي من فتحة التفريغ ، التي نعتبر مستويها ② مستوياً للقياس. فإذا راعينا أن الضغط $p_1 = p_2 = p_a$ ، وأن $z_2 = 0$ نجد :

$$\frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{1}{g}\int_{s=s_1}^{s=s_2} \frac{\partial V}{\partial t}\, ds \quad . \qquad (8.62)$$

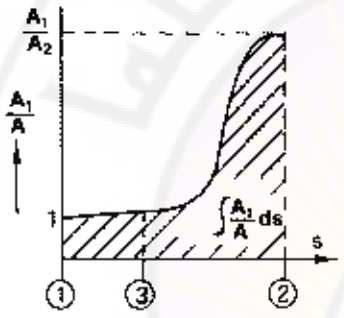
وينتج من معادلة الاستمرار (8.2) برموز الشكل (٣٠.٨) واعتبار معامل التضيق $\alpha_c = 1$ :

$$V_2 = V_1 \frac{A_1}{A_2} \quad ; \quad V = V_1 \frac{A_1}{A} \quad . \tag{8.63}$$

بذلك يصبح التكامل في الطرف الأيمن من العلاقة (8.62) وباعتبار أن المكاملة ستتم بالنسبة لخط تيار آني ، أي في لحظة زمنية معينة تكون عندها القيم $A_1$ ، $\frac{\partial V_1}{\partial t} = \frac{dV_1}{dt}$ لاتتعلق بالاحداثي s :

$$\int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial V}{\partial t}\, ds = \int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial}{\partial t}\left(V_1 \frac{A_1}{A}\right) ds = \frac{dV_1}{dt} \int_{s_1}^{s_2} \frac{A_1}{A}\, ds \quad . \tag{8.64}$$

هـذا التكامل يمكن حله بيـانياً كما يوضح الشكل ( ٣١.٨ ) ، إذا كان شكل الإناء الاعتباطي ، وبالتالي تغير مقطعه A بدلالة s معلوماً . وعليه تأخذ (8.62) الصيغة التالية :



الشكل ٣١.٨ : حل التكامل $\int \frac{A_1}{A}\, ds$ بيانياً .

$$\frac{V_1^2}{2g}\left[1 - \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2\right] + z_1 - \frac{1}{g}\frac{dV_1}{dt}\int_{s_1}^{s_2} \frac{A_1}{A}\, ds = 0 \quad . \tag{8.65}$$

وبما أن سرعة هبوط السطح الحر للسائل تتعلق بتغير الارتفاع اللحظي $z_1$ مع الزمن فيمكن مع مراعاة اتجاه $z_1$ كتابة العلاقة :

$$V_1 = -\dot{z}_1 = -\frac{dz_1}{dt} \; ; \; \frac{dV_1}{dt} = -\ddot{z}_1 = -\frac{d^2 z_1}{dt^2} \quad . \tag{8.66}$$

ندخلها في (8.65) ونستخدم لاختصار الكتابة الرموز :

$$\varphi(z_1) = \frac{1}{2g}\left[\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 - 1\right] ; \psi(z_1) = \frac{1}{g}\int_{s_1}^{s_2} \frac{A_1}{A}\, ds ; f(z_1) = \frac{\varphi(z_1)}{\psi(z_1)} ; q(z_1) = \frac{z_1}{\psi(z_1)} \quad , \tag{8.67}$$

التي تمثل توابع تتعلق بشكل الإناء ، فنجد العلاقة :

$$\ddot{z}_1 - f(z_1).(\dot{z}_1)^2 + q(z_1) = 0 \qquad (8.68)$$

التي تمثل المعادلة التفاضلية لعملية التفريغ . لحلها نستخدم طريقة برنولي (انظر [12] ) ونجري التبديل التالي :

$$\frac{dz_1}{dt} = \dot{z}_1 = u \; ; \; \ddot{z}_1 = \frac{du}{dt} = \frac{du}{dz_1} \cdot \frac{dz_1}{dt} = u \frac{du}{dz_1} = u\,u' \; . \qquad (8.69)$$

بذلك تأخذ المعادلة (8.68) صيغة معادلة تفاضلية خطية من الدرجة الاولى من الشكل .

$$u' - f(z_1).u = -\frac{q(z_1)}{u} \qquad . \qquad (8.70)$$

لحلها نضع :

$$u = v\,w \Rightarrow u' = v\,w' + w\,v' \; , \qquad (8.71)$$

فتصبح بذلك (8.70) من الشكل :

$$v\,w' + w\,[v' - f(z_1).v] = -\frac{q(z_1)}{v\,w} \qquad . \qquad (8.72)$$

نختار التابع v بحيث ينعدم التعبير المحصور بين القوسين في (8.72) . وعليه يصبح من جهة :

$$\frac{dv}{dz_1} = v' = f(z_1).v \Rightarrow \frac{dv}{v} = f(z_1)\,dz_1 \Rightarrow v = \exp\left[\int f(z_1)\,dz_1\right] ;$$

ومن جهة أخرى :

$$v\frac{dw}{dz_1} = -\frac{q(z_1)}{v\,w} \Rightarrow w\,dw = -\frac{q(z_1)}{v^2}\,dz_1 = -\frac{q(z_1)}{\exp[2\int f(z_1)\,dz_1]}\,dz_1 \; .$$

وينتج بالتكامل :

$$w^2 = -2\int \{q(z_1) \cdot \exp[-2\int f(z_1)\,dz_1]\}\,dz_1 + C .$$

فاذا لاحظنا من مقارنة (8.66) مع (8.69) أن $u = -V_1$ نحصل أخيراً على على سرعة هبوط السطح الحر للسائل اللحظية :

$$V_1 = -\frac{dz_1}{dt} = \mp \exp[\int f(z_1)\,dz_1] \cdot \sqrt{C - 2\int \{q(z_1) \cdot \exp[-2\int f(z_1)\,dz_1]\}\,dz_1} \tag{8.73}$$

حيث C ثابت التكامل ، الذي يتحدد من شروط البدء : $V_1 = 0$ عندما $z_1 = H$ .
ونحصل على زمن التفريغ $t_1$ اللازم لتهبط سوية السائل في الاناء من H حتى $z_1$ بالصيغة :

$$t_1 = \pm \int \frac{dz_1}{\exp[\int f(z_1)dz_1] \cdot \sqrt{C - 2\int \{q(z_1) \cdot \exp[-2\int f(z_1)\,dz_1]\}\,dz_1}} + C_1 \tag{8.74}$$

حيث $C_1$ ثابت التكامل ، الذي يتحدد أيضاً من شروط البدء : $z_1 = H$ عندما $t = 0$.
ونحصل على زمن التفريغ الكلي للاناء $t_0$ بمكاملة (8.74) ووضع $z_1 = 0$ .

بالنسبة لأي إناء شكله معلوم وبالتالي التابع $A = f(z_1)$ معطى ، فإن العلاقات (8.63) ، (8.73) ، (8.74) تسمح من حيث المبدأ بتحديد سرعة التفريغ الآنية والتيار الحجمي وزمن التفريغ الجزئي أو الكلي . وتكون عملية الحساب في الظروف العملية أقل تعقيداً مما يبدو في الوهلة الأولى .

عندما يكون نذير مقطع الاناء في قسمه العلوي صغيراً فان قيمة التكامل في (8.64) تبقى تقريباً ثابتة ( في الشكل (٣١٠٨) بين ① و ③ ) . بذلك تصبح أمثال المعادلة التفاضلية (8.68) ثابتة وتتحول بوضع $u = z_1^2$ إلى معادلة تفاضلية من الدرجة الاولى ، وتنتج عندئذ بدلاً من (8.73) العلاقة :

$$V_1 = \sqrt{C \cdot \exp[2f(z_1) \cdot z_1] + \frac{q(z_1)}{2f^2(z_1) \cdot z_1}[2f(z_1) + 1]} \quad . \tag{8.75}$$

في أكثر الحالات العملية تكون مقاطع الإناء أكبر بكثير من مقطع فتحة التفريغ . عندئذ فإن التسارع المكاني $-\ddot{z}_1 = \frac{dV_1}{dt}$ لجزيئات السطح الحر للسائل لا يكون له تأثير يذكر على عملية التفريغ ، وبالتالي يمكن إهماله في العلاقة (8.68) ، حيث تصبح ، مع مراعاة (8.67) ، من الشكل :

$$(\dot{z}_1)^2 = \frac{q(z_1)}{f(z_1)} = \frac{z_1}{\varphi(z_1)} = \frac{2\,g\,z_1}{\left[\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 - 1\right]} \quad .$$

ومنها نتيجة ، مع مراعاة (8.66) ، سرعة هبوط السطح الحر للسائل :

$$V_1 = \sqrt{\frac{2\,g\,z_1}{\left[\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 - 1\right]}} \approx \frac{A_2}{A_1}\sqrt{2\,g\,z_1} \quad ; \quad \left(\frac{A_1}{A_2} \gg 1\right) \quad . \qquad (8.76)$$

ونحصل من معادلة الاستمرار (8.63) على سرعة التفريغ الآنية :

$$V_2 = \sqrt{2\,g\,z_1} \quad , \qquad (8.77)$$

التي تخضع في هذه الحالة الخاصة لقانون **تورشيلي** (8.32) .

لحساب زمن التفريغ الجزئي ننطلق من (8.66) ونستخدم (8.76) فنجد :

$$-\frac{dz_1}{dt} = \frac{A_2}{A_1}\sqrt{2\,g\,z_1} \quad \Rightarrow \quad t_1 = -\frac{1}{A_2\sqrt{2\,g}}\int A_1\,z_1^{-1/2}\,dz_1 + C \quad . \qquad (8.78)$$

فإذا كان الإناء اسطوانياً أو موشورياً يكون $A_1 = A = \text{const}$ ، ويصبح عندئذ :

$$t_1 = -\frac{2\,A_1\sqrt{z_1}}{A_2\sqrt{2\,g}} + C \quad ,$$

حيث $C$ ثابت التكامل ، الذي يتحدد من شروط البدء : عندما $t_1 = 0$ يكون $z_1 = H$ ، وبالتالي فإن : $C = \frac{2\,A_1\sqrt{H}}{A_2\sqrt{2\,g}}$ . وبذلك يصبح .

$$t_1 = \frac{2\,A_1}{A_2\sqrt{2\,g}}\left(\sqrt{H} - \sqrt{z_1}\right) \quad . \qquad (8.79)$$

وينتج زمن التفريغ الكلي عندما $z_1 = 0$ :

$$t_0 = \frac{2\,A_1}{A_2}\sqrt{\frac{H}{2\,g}} \quad . \qquad (8.80)$$

ان طريقة الحساب السابقة تبقى صحيحة اذا كان $A_1 = f(z_1)$ ، ولكن الجدير بالاشارة أنه عند حساب التيار الحجمي الفعلي باستخدام معامل التصريف يجب مراعاة أن $\psi_{12}$ تتعلق بالارتفاع $z_1$ وبالتالي يكون الحساب أكثر تعقيداً من حالة المنسوب الثابت (٢،٣،٨) .

فيما سبق لم نتعرض لحركة السائل في الإناء خلال اللحظات الأولى من بدء عملية التفريغ . إن فتحة التفريغ تكون عادة مغلقة بواسطة صمام (رسم مبشراً في الشكل ٣٠،٨ ) . وطبيعي أن حركة السائل لاتتم بشكل فجائي بحيث أن سرعة التفريغ $V_2$ تصل فوراً قيمة ثابتة ، وانما يلزم لذلك زمن معين .

نفرض أن منسوب السائل في الإناء يبقى عملياً ثابتاً ، $z_0 = H = \text{const}$ ، فتكون عندئذ سرعة هبوط السطح الحر للسائل $V_1 = 0$ . وعندما يفتح صمام التفريغ في اللحظة $t = 0$ تكون السرعة $V_2 = 0$ وتتزايد مع الزمن حتى تصل إلى قيمة عظمى مطابقة لحالة الجريان المستقر .

لتحديد تغير سرعة التفريغ مع الزمن ننطلق من العلاقة (8.62) التي تصبح هنا باستخدام (8.63) والانتباه الى أن $dV_2/dt$ لايتعلق بالمكان من الشكل :

$$H = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{1}{g}\int_{s=0}^{s=s_2} \frac{\partial V}{\partial t}\, ds = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{1}{g}\frac{dV_2}{dt}\int_0^{s_2} \frac{A_2}{A}\, ds$$

لتكن $V_{2c} = \sqrt{2gH}$ سرعة التفريغ النهائية المستقرة حسب (8.32) . نلاحظ عليها سرعة التفريغ الآنية $V_2$ ونختصر الكتابة بوضع $L = \int_0^{s_2} \frac{A_2}{A}\, ds$ فنجد :

$$\frac{V_{2c}^2}{2g} = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{V_{2c}}{g}\,\frac{d(V_2/V_{2c})}{dt}\,L \ .$$

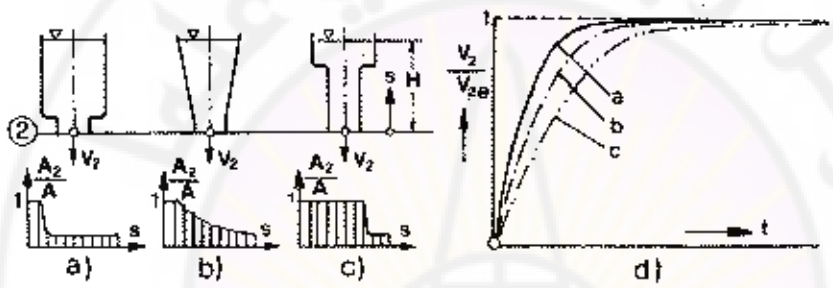
وبعد اصلاح بسيط ينتج :

$$\frac{d\left(\frac{V_2}{V_{2c}}\right)}{dt} = \frac{V_{2c}}{2L}\left[1 - \left(\frac{V_2}{V_{2c}}\right)^2\right] \Rightarrow dt = \frac{2L}{V_{2c}}\,\frac{d\left(\frac{V_2}{V_{2c}}\right)}{1 - \left(\frac{V_2}{V_{2c}}\right)^2} \ .$$

وبالمكاملة يصبح :

$$t = \frac{2L}{V_{2e}} \text{ ar tanh } \frac{V_2}{V_{2e}} \quad \text{أو} \quad \frac{V_2}{V_{2e}} = \tanh\left(\frac{V_{2e}}{2L}\, t\right) \quad . \quad (8.81)$$

بمساعدة هذه العلاقة يمكن حساب الزمن الذي تستغرقه عمليـــة تفريغ أوعية مختلفة الأشكال وذات منسوب واحد H حتى تبلغ سرعة التفريغ قيمة السرعة النهائية المستقرة ، الشكل ( ٣٢٠٨ ) . وكما هو واضح من الشكل (٣٢٠٨—d)




الشكل ٣٢٠٨ : الزمن اللازم لاستقرار الجريان عند تفريغ أوعية مختلفة الأشكال (a ، b ، c) ؛ ومنحني تغير السرعة (d) حسب [7a] .

فان فترة الجريان غير المستقر تكون في حالة قدرة جريان واحدة أقصر كلما كانت الكتلة الواجب تسريعها لتبلغ السرعة النهائية في فتحة التفريغ أقل . لهذا تكون العملية بالنسبة للاناء (a ، الذي يعطي أصغر قيمة للتكامل L ، اسرع من (b و c)

إن دراسة الحركة غير المستقرة في الأوعية المفتوحة في الأعلى ، خـــاصة مايتعلق بحساب القوى ، تلقى حديثاً إهتماماً بالغاً من الباحثين [95] .

## ٨.٣.٨ الجريان في مقطف مخروطي

في الأمثلة السابقة تطرقنا بصورة أساسية الى حساب توزع الضغط في اتجاه

الجريان. ولكن في العديد من مسائل الجريان العملية تطلب معرفة تغير الضغط في الاتجاه الناظمي على الجريان .

نعتبر جريانا خطوط تياره منحنية ، ونحسب الجولان بالنسبة لمنحن مغلق صغير مؤلف من قطعتين من خطي تيار طول الأولى $r\,d\varphi$ والثانية $(r+dn)d\varphi$ ، ومن قطعتين من نصفي قطر الانحناء اللذين يحصران الزاوية الصغيرة $d\varphi$ فنجد بسهولة (انظر ص ٢٢٩) إذا اعتبرنا السرعة على خط التيار الاول V وعلى الثاني $V+\frac{\partial V}{\partial n}dn$ وأهملنا كافة الحدود الصغيرة من المراتب العليا أن :

$$\Gamma = 2\omega\,dA = \left(\frac{V}{r}+\frac{\partial V}{\partial n}\right)dA\ ,$$

حيث $dA$ مساحة السطح المحدد بالمنحني المغلق . فاذا كان الجريان كمونياً يكون $\Gamma=0$ ، وبالتالي يتحقق شرط الخلو من الدوران (7.29) بالنسبة لكافة خطوط التيار أي :

$$\frac{V}{r}+\frac{\partial V}{\partial n}=0 \qquad , \tag{8.82}$$

وتكون ثابتة برنولي ذات قيمة واحدة بالنسبة لكامل حقل الجريان ( انظر ص ٢٦٣ ) . فاذا وضعنا في العلاقة (8.82) $\frac{\partial V}{\partial n}\equiv\frac{dV}{dr}$ فينتج بالمكاملة :

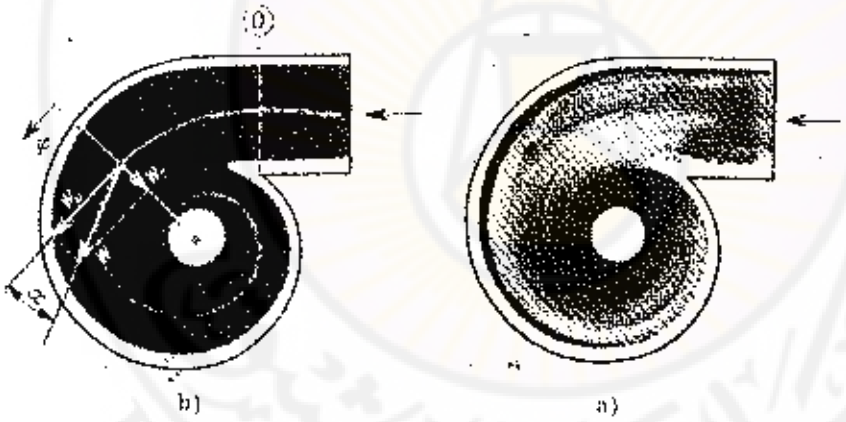
$$\frac{dV}{V}=-\frac{dr}{r}\Rightarrow V=\frac{C}{r} \qquad , \tag{8.83}$$

أي أن السرعة تتناسب عكساً مع نصف القطر ، وهذا ما ينطبق على جريان الإعصار الكموني (الشكل ٩٠٧ - b) . توزع الضغط ناظمياً على اتجاه الجريان ينتج الآن بسهولة من معادلة برنولي المختزلة (8.12) بتطبيقها على نقطتين من خطي تيار ما يختار احدهما بحيث يكون الضغط معلوماً ($p=p_1$ عندما $r=r_1$):

$$p = p_1 + \rho \frac{C^2}{2}\left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r^2}\right) \quad . \qquad (8.84)$$

إذن فإن الضغط يتناقص باتجاه المركز عكساً مع مربع نصف القطر $p \sim r^{-2}$ . بينما وجدنا في حالة دوران سائل في إناء (ص ١٤٢) علاقة عكسية للضغط : $p \sim r^2$ . وهذا يدل أن تأثير نفس القوة الحجمية ، التي تمثل هنا القوة النابذة ، يكون مختلفاً في حالة التوازن عنه في حالة الحركة .

إن النتائج السابقة تجد تطبيقهـــا العملي على الجريان ضمن مغلف حلزوني لوغارتمي ، الشكل ( ٣٣.٨ ) . فالجريان القـادم عبر أنابيب ثابتة يدخل الى المغلف في المقطع ⓪ بشكل منتظم ، وبالتالي يمكن اعتبار كافة خطوط التيار هنا متوازية وقيم السرعة والضغط وكذلك ثابتة بونولي لكل منها واحدة .




**الشكل ٨. ٣٣** : الجريان ضمن مغلف حلزوني لوغارتمي : (a صورة الجريان ؛ (b تحديد شكل خط التيار .

فاذا اعتبرنا كخطوة تقريبية أولى خطوط التيار داخل المغلف ( نفرض أن صورة الجريان في كل مستو مواز لمستوي الشكل واحدة ) بشكل دوائر مركزية بدلاً من الحلزونات اللوغارتمية ، فإن العلاقتين (8.83) و (8.84) تحددان توزع السرعة والضغط داخل المغلف الحلزوني . وعندما يكون نصف قطر مقطع

الخروج $r_1$ صغيراً بشكل كاف فإن الضغط p يمكن ان يبلغ عند المدخل قيماً عالية جداً. ولهذا السبب يستخدم الحلزون اللوغارتمي كمغلف Volute casing لآلات الجريان القطرية كوسيلة لتحويل قدرة الضغط الى قدرة حركية في حال العنفات أو بالعكس في حال المضخات، تبعاً لما يكون اتجاه الجريان كما في الشكل (٣٣٠٨) أو بالعكس . ولكن في كل الحالات يلزم اختيار نصف القطر $r_1$ بحيث لا تبلغ قيمة الضغط المطلق عنده قيمة قريبة من ضغط تبخر السائل بما يؤدي لحدوث التكهف .

لحساب أكثر دقة للجريان داخل المغلف الحلزوني يجب أن نراعي ان السرعة W المماسية على خط التيار تكون لها مركبة محيطية $W_u$ ومركبة قطرية $W_r$ ( الشكل ٣٣٠٨ - b ) . وبالتالي فإن العلاقة (8.83) تنطبق على $W_u$ . ويعرف الجداء $W_u\, r = C$ باسم **التدويم أو اللف الذاتي** Spin . بينما تنتج $W_r$ من معادلة الاستمرار (8.2) حيث يكون بالنسبة لواحدة العرض :

$$W_r \cdot 2\pi r = C' \Rightarrow W_r\, r = C\,. \qquad (8.85)$$

فإذا وضعنا $W_r = \frac{dr}{dt}$ , $W_u = \frac{r\,d\varphi}{dt}$ ، ولاحظنا حسب الشكل ( b - ٣٣٠٨ ) أن :

$$\frac{W_r}{W_u} = \tan\alpha = \text{const} \qquad , \qquad (8.86)$$

فإن معادلة خط التيار الموافق لحلزون لوغارتمي تنتج بعد عزل الزمن وإجراء التكامل بالشكل :

$$r = r_1 \exp\left[\tan\alpha \cdot (\varphi - \varphi_1)\right] \qquad . \qquad (8.87)$$

إن الحساب الدقيق للجريان داخل المغلف الحلزوني يتطلب دراسة أكثر عمقاً

وتفصيلاً ، خاصة عندما نراعي التأثير المتبادل بين الجريان في المغلف والجريان داخل الدولاب الدائر ، بالاضافة لزوجة السائل . ولا تزال جهود الباحثين مستمرة في حقل بناء آلات الجريان لتصميم مغلف الآلات وكافة عناصر توجيه التيار وقيادته بحيث يكون مردود الآلة ككل أعظمياً [14] [96] [97] .

## ٤.٨ أسئلة مراجعة وتمارين

س ١.٨ : اكتب الصيغ المختلفة لمعادلة برنولي للجريانات المستقرة وبين متى تطبق الصيغة المختزلة لهذه المعادلة .

س ٢.٨ : ثني ورقتي كرتون في المنتصف تقريباً باتجاهين متعاكسين ثم تمسكهما بأطراف أصابع اليدين على مسافة قريبة من بعضهما وننفخ بينهما فتلتصق الورقتان . علل السبب .

س ٣.٨ : اذا كان ضغط القياس في هواء الزفير يبلغ 200 mm WC والكثافة $\rho = 0{,}125 \frac{kp\,s^2}{m^4}$ ، فما هي سرعة خروجه من الفم ؟

س ٤.٨ : يعرّف عدد التكهف Cavitation Nr. بالعلاقة $\sigma = \frac{p - p_v}{\frac{\rho}{2} V_\infty^2}$ . كيف يمكن من مخطط توزع الضغط اللابعدي تحديد مناطق بدء التكهف ؟

س ٥.٨ : برهن أنه في الجريان الذي تتناسب سرعته عكساً مع نصف القطر المكاني تبقى تابثة برنولي واحدة على كافة خطوط التيار .

س ٦.٨ : التيار الحجمي الفعلي المتدفق من فتحة خزان جانبية صغيرة تبلغ أحياناً 60% من قيمة التيار الحجمي النظري . علل السبب .

س ٧.٨ : كيف تفسر رفرفة قماشة العلم المعلق على الصاوية في مهب الريح ؟

س ٨.٨ : اشرح مبدأ عمل المضخات الثاقوبية .

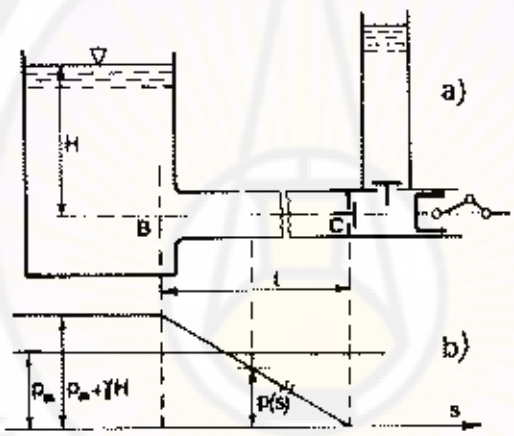
س ٩.٨ : برهن أنه عند أية قيمة محددة للتيار الحجمي لايتعلق فرق ارتفاع سوية سائل القياس في فرعي المانومتر بشكل U بوضعية أنبوبة فنتوري الموصول بها .

س ١٠.٨ : اشرح مبدأ قياس الضغط الستاتيكي والكلي والتحريكي .

ت ١٠٨ : بواسطة مضخة مكبسية يراد سحب السائل الموجود في خزان عبر أنبوب تفريغ أفقي طوله $l$ وقطره ثابت لتضخه عبر أنبوب فرعي ( الشكل ت ١٠٨ ) ، فإذا كانت سرعة مكبس المضخة معطاة بالعلاقة : $V(t) = u \sin \omega t$ عندما $0 \leq \omega t < \pi$ ؛ $V(t) = 0$ عندما $\pi \leq \omega t < 2\pi$ ، حيث $u = r\omega$ السرعة المحيطية لعمود الوفق . أحسب تغير الضغط على طول الأنبوب وحدد السرعة المحيطية الأعظمية التي يصبح عندها الضغط يساوي الصفر ؟

الحل : بتطبيق معادلة برنولي للجريانات غير المستقرة (8.18) على نقطتين من خط التيار C B نجد :

$$p_B = p_a + \gamma H = p + \frac{\rho}{2} V^2 + \rho \int_0^s \frac{\partial V}{\partial t} \, ds \qquad (a)$$




الشكل ت ١٠٨

باعتبار أن مقطع الانبوب لايتغير فتكون السرعة $V$ والتسارع المكاني $\frac{\partial V}{\partial t}$ في لحظة زمنية معينة قيم ثابتة على طول الأنبوب ، وعليه ينتج :

$$\int_0^s \frac{\partial V}{\partial t} \, ds = \frac{\partial}{\partial t} ( u \sin \omega t ) \int_0^s ds = u . \omega \cos \omega t . s \quad ,$$

ونحصل بذلك من (a) على توزع الضغط :

$$p = p_0 - \frac{\rho}{2} u^2 \sin^2 \omega t - \frac{\rho}{2} u^2 \cdot \cos \omega t \cdot \frac{\overline{2s}}{r} \quad . \qquad (b)$$

من هذه العلاقة ينتج عند لحظة زمنية معينة $t = const$ أن الضغط يتناقص خطياً باتجاه المضخة على طول الأنبوب $s$ ، الشكل ( ت ٢٠٨ – b ) . ويبلغ قيمته الأصغرية عندما $\omega t = 0$ وبالتالي $\cos \omega t = 1$ و $\sin \omega t = 0$ حيث يصبح من أجل $s = l$ :

$$p = p_{min} = p_0 - \frac{\rho}{2} u^2 \frac{l}{r} \quad . \qquad (c)$$

وعندما يصبح مساوياً للصفر ( طبعاً لايمكن أن يصل هذه القيمة الحدية حيث يبدأ التكهف عندما $p_{min} = p_V$ ! ) تكون السرعة المحيطية بلغت قيمة أعظمية :

$$u = u_{max} = r\,\omega_{max} = \sqrt{\frac{p_0}{\frac{\rho}{2} \cdot \frac{l}{r}}} = \sqrt{\frac{p_0 + \rho g H}{\frac{\rho}{2} \cdot \frac{l}{r}}} \quad . \qquad (d)$$

الموافقة لسرعة زاوية أعظمية للدولاب :

$$\omega_{max} = \sqrt{\frac{p_0 + \rho g H}{\frac{\rho}{2} \cdot l \cdot r}} \qquad (e)$$

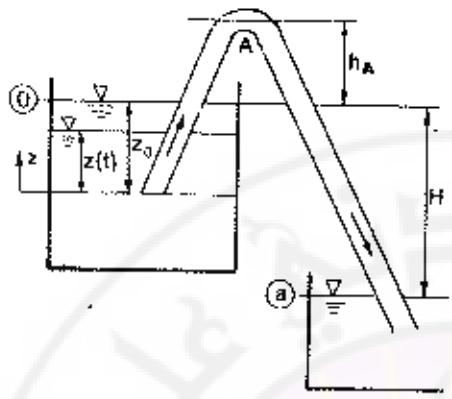
يلزم طبعاً عدم تجاوزها .

ت ٢٠٨ : برهن أن الاستطاعة بالنسبة لواحدة الحجم التي تبذلها الحيوانات ذات الأشكال المتشابهة ( الاسماك مثلاً ! ) أثناء حركتها في سائل مثالي تتناسب مع الجذر التربيعي لطول مقاسها الخطي ( قانون هفيولتس لتشابه النماذج ) .

الحل : من معادلة برنولي للارتفاعات (8.10) ينتج بالنسبة للحركات المتشابهة ان الأبعاد الطولية تتناسب مع $z$ والسرعات مع $z^{1/2}$ والضغوط مع $z$ . وعليه تتناسب القوى مع $p z^2$ أي مع $z^3$ ، والاستطاعات كجداء للقوة في السرعة مع $z^{7/2}$ . إذن فالاستطاعة المبذولة بالنسبة لواحدة الحجم تتناسب مع $\sqrt{z}$ .

ت ٢٠٨ : يتم تفريغ الماء الموجود في خزان اسطواني مقطعه $A_0$ الى قناة أخفض منه بواسطة انبوب معكوف ( مبدأ السيفون ) مقطعه ثابت $A$ غمست احدى نهايتيه في الخزان والأخرى في القناة ، الشكل ( ت ٢٠٨ ) . عند بدء عملية التفريغ كان انخفاض السطح الحائب للماء في القناة عنه في الخزان $H$ ، وبداية أنبوب السيفون مغمورة حتى عمق $z_0$ . فإذا فرضنا أن منسوب الماء في القناة لايتغير أحسب الزمن اللازم حتى تنقطع عملية التفريغ .
معطى : $A_0 / A = 30$ ، $H = 3\,m$ ، $z_0 = 1\,m$ .

الحل : إن مبدأ عمل السيفون أو مبدأ الرفع يعتمد على رفع السائل إلى مستوى أعلى من سطحه الحر ومن ثم يجري إلى مستوى أخفض ، وذلك بواسطة أنبوب يلزم أن يكون الضغط السائد في قسمه الأول على الأقل أصغر من الضغط الجوي ، ويتم ذلك إما بتخلية أنبوبة السيفون من الهواء بواسطة مضخة تفريغ تركب في أعلى نقطة منه A أو بتعبئته مسبقاً بالسائل . لذلك يلزم أن لايتجاوز ارتفاع أعلى نقطة منه A عن السطح السائب للسائل في خزان السحب قيمة ارتفاع السحب الأعظمي . وهذا يعني في حالة الماء ومع إهمال كافة الفواقد أن $h_A \leq 10\ m$ .



الشكل ت ٢٠٨ : مبدأ السيفون .

برموز الشكل ( ت ٢٠٨ ) فإن سرعة انخفاض منسوب الماء في الخزان هي $V_0 = -dz/dt$ ، وتبلغ قيمة التيار الحجمي المسحوب من الخزان والذي يصب في القناة :

$$dQ_0 = V_0 A_0 = -A_0 \frac{dz}{dt} \quad . \qquad (a)$$

وتبلغ سرعة التفريغ في أنبوبة السيفون في لحظة t بعد بدء عملية التفريغ بموجب قانون توريشلي (8.12) :

$$V_a = V_2 = \sqrt{2g\,|H - (z_0 - z)|} \quad .$$

وعليه تكون قيمة التيار الحجمي الذي يصب في القناة :

$$dQ_a = V_a A = A\sqrt{2g(H - z_0 + z)} \quad . \qquad (b)$$

من تساوي العلاقتين (a) و (b) بموجب معادلة الاستمرار ينتج :

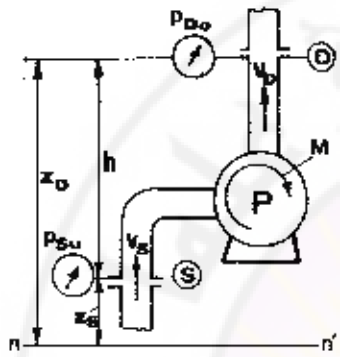
$$-A_0 \frac{dz}{dt} = A\sqrt{2g(H - z_0 + z)} \Rightarrow dt = -\frac{A_0}{A\sqrt{2g}}(H - z_0 + z)^{-\frac{1}{2}}\,dz.$$

وبمكاملة الطرف الأيسر بين 0 و $t_0$ والأيمن بين $z_0$ و 0 وبعد استبدال القيم العددية ينتج الزمن اللازم حتى ينتهي التفريغ :

$$t_n = -\frac{2A_0}{A\sqrt{2g}}\left[(H - z_0 + z)^{\frac{1}{2}}\right]_{z_0}^{0} = \frac{2A_0}{A\sqrt{2g}}\left(\sqrt{H} - \sqrt{H - z_0}\right) = 4{,}2\,(s)\ .$$

هذه النتيجة لاتتحقق طبعاً إذا راعينا الفواقد في أنبوبة السيفون .

ت ٤.٨ : كم يجب أن يكون ضاغط المضخة النابذة المبينة في الشكل ( ت ٣.٨ ) ومردودها إذا أعطت القياسات المجراة على منصة الاختبار النتائج التالية :




الشكل ت ٨ ٣

$d_D = \text{cm}$ ، $d_S = 10$ cm

$p_{Do} = 1{,}8$ at ، $p_{Su} = -0{,}2$ at

$Q = 50\ m^3/h$ ، عزم دوران المحرك

$M = 2{,}8$ kpm ، $n = 1450$ rpm

$\gamma = 10^3\ kp/m^3$ ، $h = 1{,}2$ m .

الحل : إن القدرة الميكانيكية التي تتلقاها المضخة من المحرك تنتقل إلى السائل بواسطة الدولاب الدائر . ويعرّف ضاغط المضخة $H\,[m\,LC]$ بالارتفاع الكافي لتزايد قدرة الجريان بالنسبة لواحدة الكتلة التي يكتسبها التيار الحجمي بين مدخل المضخة (S) ومخرجها (D) . وعليه فإن معادلة برنولي تأخذ بالنسبة للمقطعين (S) و (D) إذا اخترنا $n - n'$ مستوياً للقياس ، الشكل التالي :

$$\frac{\rho}{2}V_S^2 + p_S + \rho g z_S + \rho g H = \frac{\rho}{2}V_D^2 + p_D + \rho g z_D \ ,$$

ومنها ينتج ضاغط المضخة :

$$H = \frac{V_D^2 - V_S^2}{2g} + \frac{p_D - p_S}{\gamma} + h \ , \qquad (a)$$

حيث $h = z_D - z_S$ . وينتج من معادلة الاستمرار :

$$Q = A_S V_S = A_D V_D \Rightarrow V_S = \frac{4Q}{\pi d_S^2} \ , \ V_D = \frac{4Q}{\pi d_D^2} \ . \qquad (b)$$

فإذا عوضنا (b) في (a) ولاحظنا أن :

$p_D - p_S = (p_{Do} + p_o) - (p_o + p_{Su}) = p_{Do} - p_{Su}$ ينتج :

$$H = \frac{8}{g}\left(\frac{Q}{\pi}\right)^2\left[\frac{1}{d_p^4} - \frac{1}{d_s^4}\right] + \frac{p_{so} - p_{su}}{\gamma} + h \quad . \qquad (c)$$

إن مردود المضخة يمثل نسبة الاستطاعة المنتجة $P_E$ على الاستطاعة المبذولة $P_A$ ، وبالتالي يكون :

$$\eta = \frac{P_E}{P_A} = \frac{\gamma\, Q\, H}{M\, \omega} = \frac{30 \cdot \gamma\, Q\, H}{M\, \pi\, n} \quad . \qquad (d)$$

باستخدام القيم العددية ينتج من (c) :

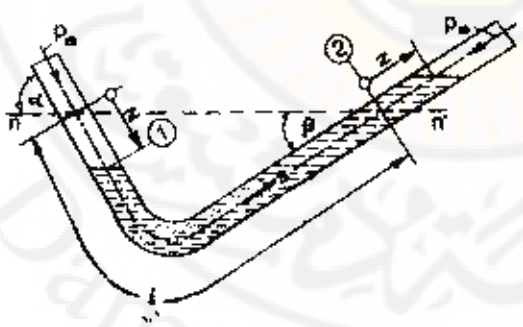
$$H = \frac{8}{9,81}\left(\frac{50}{3600 \cdot 3,14}\right)^2\left[\frac{1}{0,08^4} - \frac{1}{0,10^4}\right] + \frac{(1,8 + 0,2) \cdot 10^4}{10^3} + 1,2 =$$

$$= 21,43 \text{ m} \quad ,$$

ومن (d) :

$$\eta = \frac{30 \cdot 10^3 \cdot 50 \cdot 21,43}{3600 \cdot 2,8 \cdot 3,14 \cdot 1450} = 0,702 \doteq 70,2\ \%$$

ت ٥٠٨ : أنبوب معكوف كما في الشكل (ت ٤٠٨) ثابت المقطع ومفتوح في الأعلى وفيه سائل عديم الاحتكاك كثافته ثابتة . في وضعية السكون يكون السطح الحر لخيط السائل الذي طول محوره $l$ في ساقي الانبوب منطبقـاً على المستوي الافقي $\pi - \pi'$ . بواسطة مؤثر خارجي يرتفع السائل في الساق اليمنى باتجاه محور الأنبوب بمقدار $z$ ، وينخفض في الساق اليسرى بنفس المقدار . وبعد زوال المؤثر الخارجي يبدأ السائل بالاهتزاز . احسب الزمن الذي تستغرقه دورة اهتزاز كاملة .



الشكل ت ٤٠٨

الحل : بما أن مقطع الأنبوب ثابت فإن السرعة في لحظة زمنية معينة لا تتغير في خيط السائل $l$ في الانبوب الذي يبقى طوله ثابتاً أيضاً .

نطبق معادلة برنولي (8.18) على النقطتين ③ و ② من خط التيـــار المركزي الموافق للّحظة t . فإذا اعتبرنا المستوي الافقي المار من ① مستوياً للقياس ولاحظنا أن:

$V_1 = V_2 = V = \dot{z}$ ؛ $p_1 = p_2 = p_a$ وبالتالي $\frac{\partial V}{\partial t} = \ddot{z}$ ، $\int_0^l \frac{\partial V}{\partial t}\, ds = \ddot{z}\, l$ ؛ نجد بسهولة العلاقة :

$$\ddot{z} + \frac{g}{l} ( \sin \alpha + \sin \beta ) z = 0 \quad .$$

التي تطابق المعادلة التفاضلية للحركة الاهتزازية التوافقية . وبحلها ينتج حسب [12] :

$$z = C \cos ( \omega t + \varphi ) \quad ; \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{l} ( \sin \alpha + \sin \beta )} \quad .$$

حيث C ثابت ، $\omega$ التردد الدائري . وتكون مدة الذبذبة :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g ( \sin \alpha + \sin \beta )}} \quad .$$

عندما تكون $\alpha = \beta = \pi/2$ يصبح الأنبوب بشكل U وينتج بالتالي : $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{2g}}$ . وهذا هو الزمن الذي تستغرقه ذبذبة كاملة لنواس رياضي طوله $l/2$ . وقد سبق بالإشارة لذلك اسحق نيوتن عام 1872 .

## ٥.٨ قانون الرفع الخطي وقانون الرفع الدوراني

لقد تبين فيما سبق أعلاه أنه بمساعدة معادلة أويلر الحركية (١٠٨) ومعادلة برنولي (٢٠٨) نستطيع تحديد القوى أو القدرة الميكانيكية في كل نقطة من خط تيار تابع لجملة جريان محددة . ولكن بالنسبة للعديد من مسائل الجريان التكنيكية فإن السؤال المطروح يتركز عادة على معرفة محصلة القوى التي تؤثر بها حدود معينة لجملة الجريان على السائل ، أو رد فعل هذه المحصلة كقوة يؤثر بها السائل على هذه الحدود ، وبخاصة الجدران الصلبة . مثل هذه المسائل تعترضنا

في بنـاء آلات الجريان من عنفات ومضخات وضواغط ، وعند تصميم شبكات الأنابيب وغيرها . وواضح أن الإجابة على هذا السؤال تكون أسهل بكثير إذا تجنبنا الدخول في تفاصيل الجريان لمعرفة توزع القوى بين حدود جملة الجريان المعتبرة واكتفينا فقط بمعرفة القيم الهيدروديناميكية عند تلك الحدود فقط .

إن قوة الرفع على جناح حامل كمحصلة لقوى الضغط على الجناح يمكن حسابها بشكل تقريبي على الأقل ، كما سنرى فيما بعد ، دون ان نضطر لتحديد توزع الضغط على محيط الجناح (الشكل ١٨٠٨) والقيام بعملية حساب معقدة نسبياً . ويتم ذلك بمساعدة **قانون الدفـــع الخطي** Linear momentum . كما أن الاستطاعة التي يقدمها الدولاب الدائر لعنفة **فونسيس** يمكن حسابها بسهولة بمساعدة **قانون الدفع الدوراني أو قانون عزم الدفع** Moment of momentum. هذان القانونان معروفان جيداً في الميكانيك التطبيقي بهذه التسمية أو باسم **قانون مركز الثقل وقانون السطوح** لجملة نقاط مادية صلبة . ومن المفيد التذكير بهما تسهيلاً لاستخراجها وصياغتها بالنسبة لجملة جريان .

نعتبر جملة مادية صلبة كتلتها الاجمالية m مؤلفة من عدد محدد من الكتل الجزئية $m_i$ . لتكن V سرعة مركز ثقل m ، $V_i$ سرعة مركز ثقل $m_i$ فيكون حسب القانون الاساسي للتحريك :

$$\mathbf{F} = \sum \mathbf{F}_i = m\,\mathbf{b} = m\,\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{d}{dt}\,(m\mathbf{V}) = \frac{d}{dt}\sum (m_i\,\mathbf{V}_i) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum \mathbf{F}_i . dt = d \sum (m_i\,\mathbf{V}_i)\ , \qquad (8.88)$$

حيث $\sum \mathbf{F}_i$ يمثل المحصلة الشعاعية للقوى الخارجية فقط المؤثرة على الكتلة m ، لأن محصلة القوى الداخلية الناتجة عن تأثير الكتل $m_i$ تفني بعضها . يطلق على الجداء:

$$\mathbf{B}_i = m_i \mathbf{V}_i \ ; \quad [\mathbf{B}]\ \mathrm{kg\,m\,s^{-1}} = \mathrm{N_B} \qquad (8.89)$$

اسم **كمية الحركة** Quantity of motion ، وعلى الجداء :

$$I_i = F_i \cdot dt : \quad [F1] = Ns \tag{8.90}$$

اسم **الدفع الخطي** Impulse . وينتج من العلاقة الشعاعية (8.88) أن التغير الزمني لكمية الحركة للكتلة m التي تبقى أثناء حركتها مؤلفة من نفس الكتل الجزئية $m_i$ يساوي الى المحصلة الشعاعية لكافة القوى الخارجية المؤثرة عليها . وهذا هو مضمون قانون مركز الثقل لجملة نقاط مادية صلبة .

من جهة أخرى نفرض $r_i$ شعاع نصف القطر المكاني لمركز ثقل $m_i$ بالنسبة لمحور دوران ما . فيكون الجداء الشعاعي :

$$D_i = (m_i V_i) \times r_i = B_i \times r_i ; \quad [D] = Nsm \tag{8.91}$$

معبراً عن العزم الستاتيكي لكمية الحركة ، ويطلق عليه **عزم كمية الحركة** . بينما يعرّف الجداء الشعاعي :

$$I_{0_i} = (F_i \, dt) \times r_i \tag{8.92}$$

باسم **الدفع الدوراني** . وتنتج بمساعدة (8.88) العلاقة :

$$M = \sum M_i = \frac{d}{dt} \sum [(m_i V_i) \times r_i] \quad . \tag{8.93}$$

التي تعبر عن قانون السطوح لجملة نقاط مادية صلبة ، وتنص على أن التغير الزمني لعزم كمية الحركة للكتلة m المؤلفة من نفس الكتل الجزئية $m_i$ يساوي الى المجموع الشعاعي للعزوم الستاتيكية الناتجة عن القوى الخارجية المؤثرة على m بالنسبة لمحور دوران ما .

## ٨.٥.١ استنتاج قانون الرفع الخطي وقانون الرفع الدوراني لجريان مستقر

إن تطبيق العلاقتين (8.88) و (8.93) على جملة جريانات يصطدم بصعوبة أساسية وهي أن الكتلة المادية السائلية يجب النظر اليها كوسط مستمر ولا يمكن اعتبارها مؤلفة من نقاط مادية متميزة ، كما هو الحال في جملة النقاط الصلبة . وعليه يلزم اعتبار الكتلة السائلية m مؤلفة من جزيئات كتلية تفاضلية dm ، وبالتالي يتحول المجموع $\sum$ الى تكامل $\int$ ، يجب حسابه بالنسبة « لسطح سائلي » $A_n$ يحيط بالكتلة السائلية المعتبرة . وعليه ينتج من العلاقتين المذكورتين :

$$\mathbf{F} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \int_{(A_n)} \mathbf{V}.\mathrm{dm} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{B}}{\mathrm{dt}} \Rightarrow \mathrm{d}I = \mathrm{dB} \quad . \tag{8.94}$$

$$\mathbf{M} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \int_{(A_n)} [(\mathbf{V}\,\mathrm{dm}) \times \mathbf{r}] = \frac{\mathrm{d}\mathbf{D}}{\mathrm{dt}} \quad . \tag{8.95}$$

لإيجاد صيغة عملية للعلاقة (8.94) سهلة التطبيق نسبياً نضع $\mathrm{dm} = \rho\,\mathrm{d}I'$ ، حيث $\mathrm{d}I'$ حجم الجزيء السائلي ، فينتج :

$$\mathbf{F} = \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{dt}} = \dot{I} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \int_{(A_n)} (\rho\,\mathbf{V}).\mathrm{d}I' = \int_{(A_n)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \left[(\rho\,\mathbf{V}).\mathrm{d}I'\right] =$$

$$= \int_{(A_n)} \frac{\mathrm{d}(\rho\,\mathbf{V})}{\mathrm{dt}} . \mathrm{d}I' + \int_{(A_n)} \left[\rho\,\mathbf{V}.\frac{\mathrm{d}(\mathrm{d}I')}{\mathrm{dt}}\right] , \tag{8.96}$$

حيث $\dot{I}$ يمثل تيار الدفع أو غزارة تدفق كمية الحركة في واحدة الزمن . وبما أن السطح السائلي $A_n$ محصر كما هو مفروض نفس الجزيئات السائلية ،

وبالتالي فهو يتحرك مع السائل ، فإن التفاضل الوارد في التكامل الاول من المعادلة الاخيرة للعلاقة (8.96) يمثل اشتقاقاً بالنسبة لزمن محدد ، وبالتالي يمكن كتابته بشكل مشتق جزئي . وعليه ينتج التعبير :

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \int_{(A_n)} \frac{\partial (\rho \mathbf{V})}{\partial t} \, dV \quad , \tag{8.97}$$

الذي يمثل كما هو واضح التغير الزمني لكمية الحركة الآنية المحصورة ضمن السطح السائلي في لحظة زمنية معينة . إن حل هذا التكامل في الحالة العامة لجريان غير مستقر شبه مستحيل لصعوبة تحويله لتكامل سطحي. ولكن قيمته تنعدم عندما يكون الجريان مستقراً وبالتالي السرعة V لا تتعلق بالزمن . وعليه إذا اقتصرنا على الجريانات المستقرة فان العلاقة (8.96) تصبح من الشكل .

$$\mathbf{F} = \int_{(A_n)} \left[ \rho \mathbf{V} . \frac{d (d\mathbf{V})}{dt} \right] \quad . \tag{8.98}$$

لحل التكامل الحجمي في هذه العلاقة نفرض أن كتلة السائل المعتبرة من الجريان حول جسم ما كانت في اللحظة t محصورة ضمن السطح $A_1$ ، الذي نفرضه للبساطة بشكل مستطيل ، الشكل ( ٣٤.٨ – a ) . في اللحظة t + dt تصبح هذه الكتلة محصورة ضمن السطح $A_2$ الذي ينتج كما هو واضح بإزاحة $A_1$ بمقدار $ds = V\,dt$ . فاذا اعتبرنا $I_1$ و $I_2$ قيمتي تكامل كمية الحركة بالنسبة للسطحين $A_1$ و $A_2$ فإن تغير الدفع خلال الفترة dt يصبح :

$$dI = I_2 - I_1 \quad .$$

ولكن حسب الشكل (٣٤.٨ – a) فإن :

$$A_2 = A_1 - A_{in} + A_{out} \quad ,$$

حيث $A_{out}, A_{in}$ السطحان المبشران عند المدخل والمخرج للسطح $A_1$ . وعليه

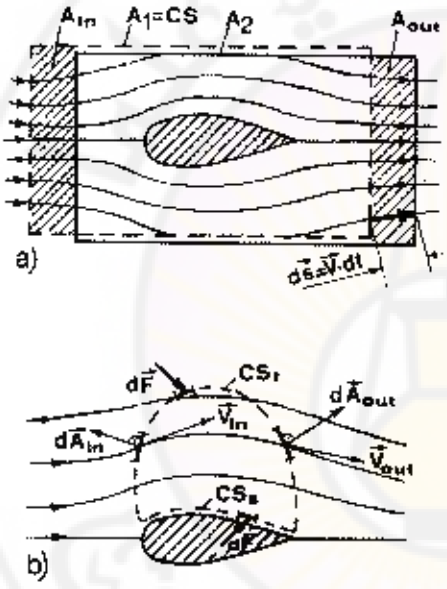
يكون أيضاً :

$$I_2 = I_1 - I_{in} + I_{out} \quad .$$

وبالتالي ينتج :

$$dI = + I_{out} - I_{in} .$$

ولكن $-I_{in}$ تمثل كمية الحركة التابعة للسطح $A_{in}$ ، وتساوي أيضاً كمية الحركة التي دخلت السطح $A_1$ ؛ بينما تمثل $+I_{out}$ كمية الحركة التابعة للسطح $A_{out}$ وتساوي الى كمية الحركة التي خرجت من $A_1$ خلال الزمن dt ، ويكون بالتالي $dI$ مساوياً كمية تيار الدفع ، أي الفرق في كمية الحركة الداخلة والخارجة للسطح $A_1$ ، خلال الزمن dt . وعليه فان التكامل الحجمي بالنسبة لسطح سائلي متحرك ، الوارد في العلاقة (8.98) يمكن تحويله الى تكامل سطحي بالنسبة لسطح ثابت يطلق عليه **سطح التحكم** Control surface ، $A_1 \equiv cs$ ، إذا راعينا أن كتلة السائل **الداخلة** لسطح التحكم هي كتلة غريبة عن الكتلة المعتبرة وبالتالي نعتبر دفعها **سالباً** $(-I_{in})$ ، بينما الكتلة **الخارجة** من سطح التحكم فهي تابعة للكتلة المعتبرة وبالتالي يكون دفعها **موجباً** $(+I_{out})$ .




الشكل ٣٤.٨ : استخراج قانون الدفع الخطي بتحويل التكامل الحجمي لتكامل سطحي بالنسبة لسطح تحكم ثابت (a ؛ حيث يعتبر الجداء $\mathbf{V}.d\mathbf{A}$ عند الدخول لسطح التحكم سالباً ، وعند الخروج منه موجباً (b .

هـذه النتيجة يمكن صياغتها رياضياً بسهولة . فإذا اخترنا من سطح التحكم المبين في الشكل (٨ . ٣٤ ـ b) عنصراً سطحياً dA واعتبرنا الشعاع السطحي dA موجباً عندما يشير الى خارج سطح التحكم عند المدخل ( الدليل in ) والمخرج ( الدليل out ) فيمكن بالاستناد للعلاقة (6.23) كتابة مشتق العنصر الحجمي بالنسبة للزمن المساوي للتيار الحجمي الذي يعتبر عنصراً سطحياً dA من سطح التحكم بالشكل :

$$\frac{d(dV)}{dt} = V_n \cdot dA \cdot \frac{dt}{dt} = V_n \cdot dA = V \cdot dA_n = \mathbf{V} \cdot \mathbf{dA} = dQ \quad . \quad (8.99$$

لذا الجداء العددي يكون سالباً عند الدخول لسطح التحكم لأن مركبة V لنـاظمية تتجه عكس dA ، بينما يكون عند الخروج من سطح التحكم موجباً لأن $V_n$ من اتجاه dA . وعليه تصبح العلاقة (8.98) من الشكل :

$$F = \frac{dI}{dt} = i = + \int_{(cs_{out})} \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{V}\, \mathbf{dA} - \int_{(cs_{in})} \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{V}\, \mathbf{dA} \quad . \quad (8.100)$$

مما سبق نستنتج كقاعدة عامة من السهل جداً تذكرها وتطبيقها :

> شعاع تيـار الدفع $i$ ، كقوة $F_i$ تؤثر على كتلة السائل المعتبرة ، يشير دائماً الى خارج سطح التحكم ؛ بينما يشير شعاع رد فعل كمية الحركة ، كقوة مضادة $F_{in}$ يؤثر بها السائل على حدود (cs) ، دائماً الى داخل سطح التحكم ، وبالتالي فاتجاهه يطابق اتجاه السرعة عند الدخول لسطح التحكم ويعاكسه عند الخروج منه .

لنستعرض الآن بالتفصيل القوى الخارجية المؤثرة على الكتلة السائلة المحدودة بسطح التحكم التي تشكل محصلتها الشعاعية F الطرف الايسر من العلاقة (8.100). هذه القوى تكون في الحـالة العامة مؤلفة من قوى حجمية $F_v$ ناتجـة

عن حقل قوى كموني ، كحقل الجاذبية الارضية مثلاً ، ومن قوى سطحية . وحيث ان قانون الدفع الخطي ينطبق ، بعكس معادلة برنولي ، على الجريانات الحقيقية أيضاً لأن تفاصيل الجريان داخل سطح التحكم لا تدخل في اشتقاقه ، فإن القوى السطحية يمكن ان تكون مؤلفة من قوى ضغط ناظمية وقوى احتكاك مماسية . بالاضافة لذلك فإنه في أغلب الحالات العملية يكون سطح التحكم مؤلفاً من « جزء حر » $cs_f$ يمر من حدود جملة الجريان المفتوحة ، ومن « جزء صلب » $cs_s$ منطبق على الجدران الصلبة للاجسام الموجودة داخل الجريان ، الشكل ( ٣٤.٨ - b ) . فإذا كانت dF القوة السطحية بالنسبة لواحدة السطح ، التي نفرضها مركبة من ضغط p وإجهاد قص $\tau$ ، وكان dA عنصراً سطحياً من سطح التحكم ، فإن المحصلة الاجمالية للقوى السطحية يمكن تحليلها الى مركبتين : الاولى تؤثر على الجزء الحر من سطح التحكم :

$$\mathbf{F}_f = \int_{(cs_f)} d\mathbf{F} . d\mathbf{A} = \mathbf{F}_{pf} + \mathbf{F}_{\tau f} , \qquad (8.101)$$

والثانية تؤثر على الجزء الصلب من سطح التحكم :

$$\mathbf{F}_s = \int_{(cs_s)} d\mathbf{F} . d\mathbf{A} = \mathbf{F}_{ps} + \mathbf{F}_{\tau s} . \qquad (8.102)$$

$\mathbf{F}_f$ تعتبر موجبة إذا أثرت من خارج إلى داخل سطح التحكم ، أي على كتلة السائل ، وسالبة بالعكس . وتعتبر $\mathbf{F}_s$ موجبة إذا نظرنا اليها كقوة يؤثر بها الجدار الصلب على السائل ، وسالبة إذا نظرنا اليها كقوة يؤثر بها السائل على الجدار . لذلك تسمى $\mathbf{F}_s$ – **قوة رد فعل السائل على الجدار** .

على أساس ما تقدم يأخذ قانون الدفع الخطي للجريانات المستقرة غير القابلة للانضغاط الصيغة الشعاعية التالية :

$$\mathbf{F_V} + \mathbf{F_f} + \mathbf{F_S} + \mathbf{F_{IR}} = 0 \; ; \; \mathbf{F_{IR}} = \rho \int\limits_{\binom{+cs_{in}}{-cs_{out}}} \mathbf{V}\, dQ \quad , \quad (8.103)$$

وينص على ما يلي :

> محصلة كافة القوى الخارجية المؤثرة على كتلة سائلية من جريان مستقر محدودة بسطح تحكم ثابت بما فيها ردود أفعال كمية الحركة تساوي الصفر ، شريطة أن نعتبر كمية الحركة الداخلة لسطح التحكم سالبة والخارجة منه موجبة ، ونعتبر القوى الخارجية التي تؤثر على السائل موجبة ، والتي يؤثر بها السائل على سطح التحكم سالبة .

إن العلاقة (8.103) يمكن تحليلها كمعادلة شعاعية إلى مركبات وتطبيقها كمعادلة جبرية في أي اتجاه مرغوب . فاذا طبقناها في اتجاه المحاور z,y,x ينتج :

$$F_{V_{x,y,z}} + F_{f_{x,y,z}} + F_{S_{x,y,z}} + F_{IR_{x,y,z}} = 0 \; ; \; F_{IR_{x,y,z}} = \rho \int\limits_{\binom{+cs_{in}}{-cs_{out}}} V_{x,y,z}\, dQ \; . \quad (8.104)$$

إن حل تكامل تيار الدفع يسهل جداً في حالة الجريانات وحيدة البعد المستقرة عندما يحسب بالنسبة لقطعة من أنبوبة تيار السرعة عند مدخلها ① ومخرجها ② موزعة بانتظام على المقطع ، والتيار الحجمي الذي يعبرها Q . فيكون عندئذ :

$$I = \rho \int\limits_{(CS)} \mathbf{V}\, dQ = \rho Q\, (\mathbf{V_2} - \mathbf{V_1}) \quad , \quad (8.105)$$

أي أن تيار الدفع يساوي الى الفرق بين كمية الحركة الخارجة من والداخلة الى أنبوبة تيار ذات حدود معينة . وحيث أن Q يبقى ثابتاً على طول أنبوبة التيار

فينتج أن تيار الدفع الذي يتلقاه الجريان المستقر في أنبوبة تيار محدودة بسطح تحكم يبقى موضعياً ثابتاً ، وهذا ما يعرف باسم **قانون انحفاظ تيـــار الدفع** :

$$\vec{I} = \overrightarrow{\text{const}} \; ; \; d\vec{I} = 0 \; .$$

إن قانون الدفع الخطي (8.103) ينطبق على الجريانات المستقرة و شبه المستقرة زمنياً ، أي التي تكون فيها السرعة موضعياً تتذبذب حول سرعة وسطية زمنياً (انظر ص ١٨٤). عندئذ تنعدم القيم الوسطية داخل سطح التحكم، ونحصل من قانون الدفع الخطي كنتيجة على قيمة وسطية زمنياً تتعلق فقط بالقيم على حدود سطح التحكم . أما في حالة الجريانات غير المستقرة فإنه يجب إضافة الحد (8.97) الى العلاقة (8.103) ونحصل بالتـالي على قانون الدفع الخطي العام بالصيغة التالية :

$$\mathbf{F} = \int \frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{V}) \, dV - \int_{(in)} \rho \mathbf{V} . V_n \, dA + \int_{(out)} \rho \mathbf{V} . V_n \, dA \quad . \quad (8.106)$$

عند تطبيق قانون الدفع الخطي على جريان مستقر غير منتظم ، أي ذي سرعة متغيرة على كامل مقطع أنبوبة التيار ، كما في حالة السوائل الحقيقية (الشكل ٣.٦) يستخدم مفهوم **السرعة الوسطية لتيار الدفع** $\bar{V}_I$ وتعرّف ، كما في حالة السرعة الوسطية للتيار الحجمي $\bar{V}$ ( ص ٢٠٠ ) ، بالعلاقة :

$$I = \dot{m} \bar{V}_I = \rho Q \bar{V}_I = \int_{(\dot{m})} V \, d\dot{m} = \rho \int_{(A)} V^2 \, dA \Rightarrow \bar{V}_I = \frac{1}{\bar{V} A} \int_{(A)} V^2 \, dA \, , \quad (8.107)$$

حيث V السرعة الموضعية الموزعة بانتظام على العنصر السطحي $dA$ $\dot{V} = Q = \bar{V} A$, التيار الحجمي حسب (6.12) . فاذا أردنا حساب تيار الدفع بمساعدة السرعة $\bar{V}$ فيلزم إدخال ما يسمى **معامل عدم انتظام تيار الدفع** أو **معامل تصحيح تيار الدفع** $C_I$ الذي يعرّف في حالة $\rho = \text{const}$ بالعلاقة :

$$I = \rho Q \bar{V}_t = C_t \cdot \rho Q \bar{V} \Rightarrow C_t = \frac{\bar{V}_t}{\bar{V}} = \frac{1}{A} \int_{(A)} \left( \frac{V}{\bar{V}} \right)^2 dA. \quad (8.108)$$

ويكون $C_t$ دائماً أكبر من الواحد وبالتالي $\bar{V}_t > \bar{V}$ . وهذا يعني أنه في حالة جريان غير منتظم يعطي حساب القوى بمساعدة قانون الدفع على أساس السرعة الوسطية $\bar{V}$ قيماً أقل من الواقع .

بنفس الخطوات السابقة يمكن استخراج **قانون الدفع الدوراني** للجريانات المستقرة وشبه المستقرة الذي يأخذ الصياغة التالية :

المجموع الهندسي لكافة العزوم الستاتيكية للقوى الخارجية بما فيها عزوم ردود أفعال كمية الحركة المؤثرة على كتلة سائلية من جريان مستقر محدودة بسطح تحكم ثابت وبالنسبة لمحور دوران ما تم اختياره يساوي الصفر ، شريطة ان نعتبر رد فعل كمية الحركة موجباً أي باتجاه السرعة عند الدخول لسطح التحكم ، وسالباً أي بعكس اتجاه السرعة عند الخروج منه ، وأن نأخذ كافة القوى الخارجية موجبة إذا أثرت على السائل وسالبة إذا أثر بها السائل على سطح التحكم :

$$\mathbf{M}_\gamma + \mathbf{M}_f + \mathbf{M}_S + \mathbf{M}_m = 0; \quad \mathbf{M}_m = \rho \int_{\binom{+cs_{in}}{-cs_{out}}} [\mathbf{V}\, dQ \times \mathbf{r}] \quad (8.109)$$

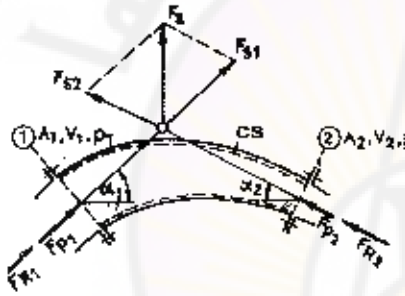
هذا القانون له أهمية خاصة بالنسبة لحساب الاستطاعة التي يقدمها الدولاب الدائر لآلة جريان للسائل ( مضخة ! ) أو التي يستخلصها من السائل ( عنفة ) .

## ٢.٥.٨ تطبيقات على قانون الدفع الخطي والدوراني

سنتوضح فيما يلي ومن خلال بعض المسائل التطبيقية أهمية قانون الدفع الخطي والدوراني كقانونين أساسيين لميكانيك السوائل . ويلزم دائماً عنـــد تطبيقهما اختيار سطح تحكم مناسب كخطوة أولى. ولا غنى عادة عن الاستعانة بمعادلة برنولي ومعادلة الاستمرار عند تحديد القوى الهيدروديناميكية على حدود سطح التحكم وخاصة عند المدخل والمخرج .

### ١.٢.٥.٨ حساب قوة الضغط المؤثرة على جدار كوع

نعتبر الجريان المستقر داخل وصلة الانابيب المبينـة في الشكل ( ٣٥.٨ ) التي تمثل كوعاً يتضيق مقطعه تدريجياً من $A_1$ عند المدخل ① ، حيث السرعة الموزعة بانتظام على المقطع $V_1$ والضغط $p_1$ ، إلى $A_2$ عند المخرج ② ، حيث السرعة $V_2$ والضغط $p_2$ . من أجـل تحديد متانة براغي وصل الشفهات (الفلنجات) للكوع والانبوب تلزم معرفة القوة التي يؤثر بها السائل على جدار الكوع .



الشكل ٣٥.٨ : حساب قوة الضغط المؤثرة على جدار كوع .

نفرض أن الجريان عديم اللزوجة وغير قابل للانضغاط ومحور الكوع واقع في مستو أفقي . نختار سطحاً للتحكم cs كما هو مبين في الشكل ونطبق قانون الدفع الخطي (8.103) على كتلة السائل المحدودة بهذا السطح :

$$\mathbf{F}_V + \mathbf{F}_P + \mathbf{F}_S + \mathbf{F}_B = 0 \quad , \qquad (8.110)$$

حيث وضعنا للبساطة $\mathbf{F}_m \equiv \mathbf{F}_B$ . إن القوة الجسمية الكمونية تنحصر هنـ

بقوة الثقالة التي تؤثر أيضاً في حالة السكون، وليس لها مركبة في اتجاه الجريان، وبالتالي تكون $F_y = 0$ . والقوى السطحية المؤثرة على الجزء الحر من سطح التحكم تنحصر بقوة الضغط $\mathbf{F}_{f_1} = \mathbf{F}_{p_1} = \overrightarrow{p_1 A_1}$ التي تؤثر عمودياً على المقطع ① واتجاهها موجب لأنها تشير الى الداخل ، وبقوة الضغط $\mathbf{F}_{f_2} = \mathbf{F}_{p_2} = \overrightarrow{p_2 A_2}$ التي تؤثر ناظمياً على المقطع ② واتجاهها موجب أيضاً، أي الى داخل cs . أما محصلة القوى السطحية $\mathbf{F}_S$ المؤثرة على الجزء الصلب من سطح التحكم فتساوي من حيث القيمة القوة $-\mathbf{F}_S$ التي يؤثر بها السائل على جدار الكوع ، أي قوة رد فعل السائل . وأخيراً بحسب رد فعل كمية الحركة ، باعتبار أن السرعة موزعة بانتظام على مقطع الدخول والخروج لسطح التحكم ، بموجب (8.105) فنجد :

$$\mathbf{F}_R = \rho \int_{(CS)} \mathbf{V}\, dQ = \rho Q (\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2) ; \mathbf{F}_{R_1} = \rho Q \mathbf{V}_1 ; \mathbf{F}_{R_2} = \rho Q (-\mathbf{V}_2) ,$$

حيث يشير كل من $\mathbf{F}_{R_1}$ و $\mathbf{F}_{R_2}$ إلى داخل سطح التحكم ، أي باتجاهي $\mathbf{F}_{p_1}$ و $\mathbf{F}_{p_2}$ على التوالي .

بادخال النتائج السابقة في ( 8.110 ) نحصل على القوة الإجمالية المؤثرة على جدار الكوع :

$$\mathbf{F}_S = \mathbf{F}_f + \mathbf{F}_R = (\mathbf{F}_{p_1} + \mathbf{F}_{R_1}) + (\mathbf{F}_{p_2} + \mathbf{F}_{R_2}) =$$

$$= [\overrightarrow{p_1 A_1} + \rho Q \mathbf{V}_1] + [\overrightarrow{p_2 A_2} + \rho Q (-\mathbf{V}_2)] = \mathbf{F}_{S_1} + \mathbf{F}_{S_2} , \quad (8.111)$$

أي أن قوة رد الفعل $\mathbf{F}_S$ على جدار الكوع تنتج كمجموع هندسي لقوتين $\mathbf{F}_{S_1}$ و $\mathbf{F}_{S_2}$ تؤثران ناظمياً على المقطعين ① و ② ، الشكل (٣٥.٨) .

لحساب القيمة المطلقة لقوة رد الفعل $F_S = |\mathbf{F}_S|$ تكفي معرفة قيمة السرعة والضغط على أحد المقطعين ① أو ② حيث يمكن بمساعدة معادلة الاستمرار، $Q = V_1 A_1 = V_2 A_2$ ، ومعادلة برنولي تحديد القيم الاخرى في (8.111) . ونحسب $F_S$ بعد ذلك إما بيانياً أو جبرياً بمساعدة قانون التجيب للمثلثات . كما يمكن بسهولة الحصول على القوة $F_S$ من تطبيق قانون الدفع (8.104) باتجاه

المحورين x و y حيث نحصل على مركبتي قوة رد الفعل $F_{S_y}, F_{S_x}$ ويكون :

$$F_S = \sqrt{F_{S_x} + F_{S_y}} .$$

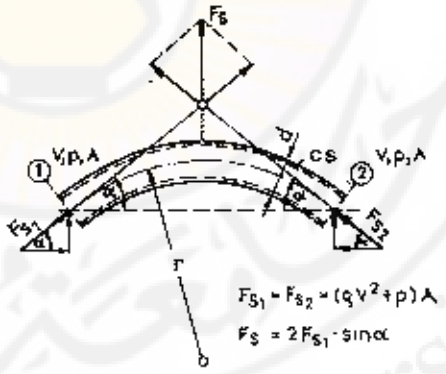
في الحالة الخاصة التي تكون فيها الوصلة الانبوبية محنية بشكل دائري وذات قطر ثابت d وبالتالي : $A_1 = A_2 = A$ ، فتكون حسب معادلة الاستمرار $V_1 = V_2 = V$ ، وينتج من معادلة برنولي $p_1 = p_2 = p$ .

فإذا فرضنا $\alpha$ الزاوية التي يصنعها وتر قوس محور الانبوب مع الناظم على مقطعي النهايتين ① و ② فتنتج برموز الشكل (٣٦.٨) وبنفس الخطوات السابقة قوة رد الفعل على جدار الكوع :

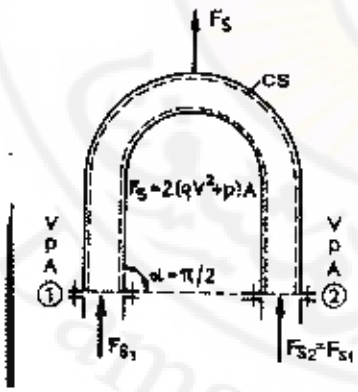
$$F_S = 2A\,(\rho V^2 + p)\,\sin\alpha \quad . \qquad (8.112)$$

وعندما $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ، وبالتالي الكوع بشكل نصف دائري ، الشكل ( ٣٧.٨ ) ، فيكون $\sin\alpha = 1$ وتصبح :

$$F_S = 2A\,(\rho V^2 + p) \quad . \qquad (8.113)$$




الشكل ٣٦.٨ : حساب قوة رد الفعل المؤثرة على قطعة من أنبوب دائري الانحناء .



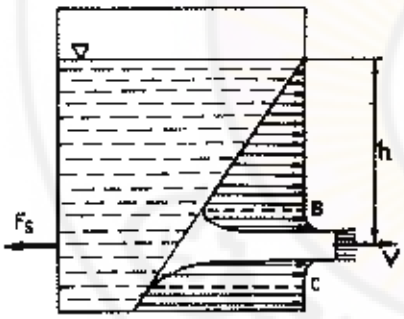

الشكل ٣٧.٨ : حساب قوة رد الفعل المؤثرة على كوع نصف دائري.

في حالة السوائل الحقيقية لا يمكن طبعاً استخدام العلاقات السابقة. ولكن يمكن تطبيق قانون الدفع الخطي شريطة ان نأخذ قوة الاحتكاك $F_f$ بعين الاعتبار وتكون قيم الضغط والسرعة الفعلية في المقطعين ① و ② معلومة .

## ٢.٢.٥.٨ حساب قوة رد فعل النافورة، ومعامل التضييق لفوهة بورد

لدينا إناء فيه سائل كثافته ρ ومجهز بفتحة تفريغ جانبية مقطعها A صغير جداً بالمقارنة مع مقطع الاناء ، ومحورها الافقي ينخفض عن سوية السائل الحر مقدار h ، الشكل (٣٨.٨) . تحت الشروط السابقة يمكن اعتبار الجريان عبر الفتحة مستقراً ، خاصة خلال فترات زمنية قصيرة نسبياً . وتكون سرعة التفريغ المثالية حسب قانون توريشلي (8.32) : $V_i = V = \sqrt{2gh}$ .

نحيط كتلة السائل الآنية بما فيها فتحة التفريغ بسطح تحكم ونطبق عليها قانون الدفع (8.103) . إن القوة الحجمية المساوية لوزن السائل متوازنة مع قوة رد فعل الجدار الذي يرتكز عليه الإناء . وحيث أن التفريغ يتم في الفضاء الخارجي والفتحة كما افترضنا صغيرة فان قوى الضغط الجوي المؤثرة على الجدران القائمة للإناء بما فيها الجزء الحر من سطح التحكم المار بفتحة التفريغ تتوازن مع بعضها . وعليه يكون $F_f = F_i = 0$ . وينتج بالتالي مع اعتبار $F_s$ — القوة الأفقية التي يؤثر بها السائل على جدران الإناء وملاحظة أن كمية الحركة الداخلة لسطح التحكم معدومة:



الشكل ٨ ٣٨ : حساب رد فعل نافورة خارجة من فتحة إناء جانبية .

$$F_s = F_B = \rho Q V = \rho A V^2 = 2 . \rho g h . A \qquad (8.114)$$

في الحالة التي يتم فيها تفريغ خزان يحتوي سائلاً بضغط ثابت $p_1$ الى حجرة يسود فيها الضغط $p_1 > p_2$ عبر فتحة صغيرة ( الشكل ١٠٠٨ ) فان سرعة التفريغ تنتج من (8.39) :

$$V_n = V = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho}} = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}} \quad .$$

وتنتج بنفس الخطوات السابقة قوة رد فعل تيار النافورة أو قوة الدفع المؤثرة على جدران الخزان بالصيغة :

$$F_S = \rho A_{st} V^2 = 2(p_1 - p_2) A_{st} = 2\Delta p A_{st} \quad , \qquad (8.115)$$

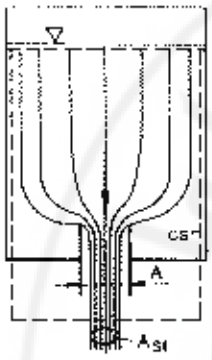
حيث $A_{st} = \mu_0 A$ مقطع تيـــار النافورة ، $\mu_0$ معامل التضيق . فإذا وضعنا $\Delta p = \rho g h_p$ يتضح أن (8.115) تعمم النتيجة المتضمنة في (8.114) .

نتصور الآن ان فتحة التفريغ مسدودة ، فيكون توزع الضغط الزائد في الاناء بموجب المعادلة الهيدروستاتيكية الاساسية خطياً ، الشكل ( ٣٨٠٨ ) . وتكون قوة الضغط المؤثرة على سدادة فتحة التفريغ هي : $F_p = \rho g h A$ (في حالة الخزان : $\Delta p A_{st} = \rho g h_p . A_{st}$ ) . وهذا يعني بموجب (8.114) ( أو (8.115)) أن **قوة دفع النافورة المؤثرة على إناء تساوي ضعف قوة الضغط الهيدروستاتيكي الزائد المؤثر على مقطع فتحة التفريغ** . هذه النتيجة تقضي بأن يكون توزع الضغط على جدار الإناء الذي يحتوي فتحة التفريغ في حالة الجريان مختلفاً عنه في حالة السكون . وهذا ينجم من ناحية بسبب تعادل الضغط داخل فتحة التفريغ وبالتالي انعدام الضغط الزائد فيها ، ومن ناحية أخرى بسبب انحراف خطوط التيار باتجاه الفتحة مما يؤدي لتناقص في الضغط قبل الدخول للفتحة ، أي اعتباراً من النقطتين B و C تقريباً في الشكل (٣٨٠٨) .

من السهل جداً إظهار تأثير قوة رد فعل النافورة . فإذا تصورنا الإناء

المبين في الشكل (٣٨.٨) مركباً على دواليب مثلاً فإنه يبدأ في الحركة بعكس اتجاه سرعة التفريغ . كما يمكن الاستفادة عملياً من عزم قوة رد الفعل هذه ، كما سنرى فيما بعد .

في الحالة الخاصة المبينة في الشكل (٣٩.٨) التي تكون فيها فتحة تفريغ الخزان متصلة بأنبوبة صغيرة المقطع بارزة بشكل كاف داخل الخزان ، مشكلة ما يعرف باسم **فتحة بوردا** ، فبالامكان بمساعدة قانون الدفع الخطي حساب معامل التضيق لهذه الفتحة ، إذا طبق على سطح تحكم cs يحيط بالسائل الموجود في الخزان وبتيار النافورة . فبما أنه يؤثر على كافة أجزاء سطح التحكم التي يكون لقوى الضغط المؤثرة عليها مركبات في اتجاه سرعة التفريغ فرق ضغط ثابت $\Delta p = p_1 - p_2$ فتكون محصلة قوى الضغط الزائد المؤثرة على مقطع أنبوبة التفريغ $A$ مساوية قوة رد الفعل لتيار دفع النافورة . وبالتالي تنتج العلاقة :



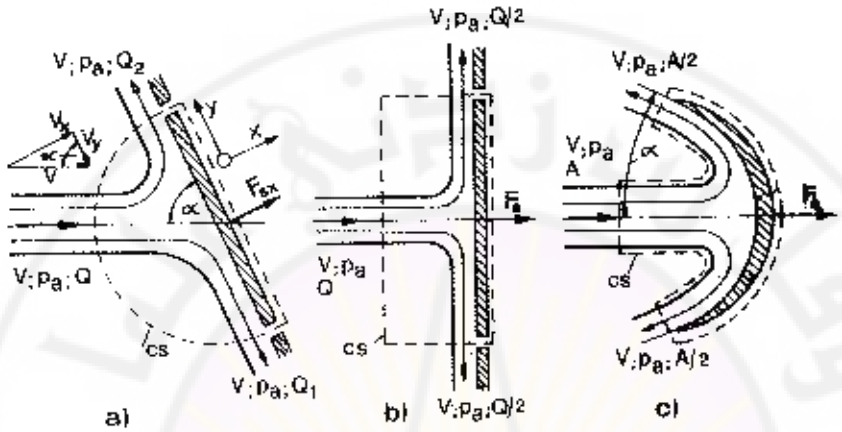

الشكل ٣٩.٨ : حساب معامل التضيق لفتحة بوردا .

$$\Delta p . A = 2 \Delta p . A_{sl} \Rightarrow \mu_c = A_{sl}/A = 0{,}5 \quad . \quad (8.116)$$

## ٣.٢.٥.٨ قوة ضغط نافورة حرة على جدار ثابت ومتحرك

من فوهة نفاثة أفقيـــة تتدفق نافورة حرة بسرعة V وغزارة Q وتصطدم بصفيحة مستوية تميل على محور النافورة زاوية $\alpha$ فتنحرف كافة جزيئات السائل عن اتجاهها الاصلي وتتحرك بمحاذاة الجدار ابتداء من نقطـــة الركود المتشكلة في مركز تلاقي خط التيار المركزي للنافورة مع الصفيحة ، الشكل (٤٠.٨-a) . فإذا كانت مقاييس الصفيحة كبيرة نسبياً وكان مقطع تيار النافورة A عمودياً على مستوي الشكل عريضاً جداً فيكون الجريان مستوياً ومستقراً .

وتهمنا من جهة معرفة النسبة $Q_1/Q_2$ التي يتوزع بها التيار الحجمي للنافورة على طرفي الصفيحة ، ومن جهة أخرى القوة الناظمية المؤثرة على الصفيحة .




الشكل ٨.٤٠ : حساب قوة ضغط نافورة مستوية على سطح ثابت بشكل : a) صفيحة مستوية مائلة ، b) صفيحة مستوية قائمة ، c) صفيحة أو ريشة محنية .

نختار محوري إحداثيات بحيث يكون المحور x عمودياً على الصفيحة و y موازياً لها ، ونحلل السرعة V باتجاهيها إلى مركبتين : $V_x = V \sin \alpha$ و $V_y = -V \cos \alpha$ . كما نختار سطحاً للتحكم cs يمر جزؤه الأمامي عبر منطقة من تيار النافورة لم تتأثر بعد من وجود الصفيحة ، ويخترق جزؤه الخلفي عبر شق وهمي وعلى مسافة بعيدة نسبياً من نقطة الركود الصفيحةويلتف حولها.

نطبق قانون الدفع الخطي ( 8.104 ) في إتجاه المحور y فينتج :

$$F_{V_y} + F_{f_y} + F_{s_y} + F_{R_y} = 0 \quad . \qquad (8.117)$$

إن القوى الحجمية الناتجة عن قوة الثقالة تكون معدومة، $F_{V_y} = 0$ ، إذا كانت

الصفيحة واقعة في مستوٍ شاقولي . كذلك فإن محصلة القوى المؤثرة على الجزء الحر من سطح التحكم تكون معدومة ، $F_{r_y}=0$ ، لأن الضغط داخل تيار النافورة الحرة وداخل التيار الموازي للصفيحة يساوي إلى الضغط الجوي $p_a$ . وإذا فرضنا أن السائل عديم الإحتكاك فإن السرعة المماسية للصفيحة تساوي إلى سرعة النافورة $V$ بموجب معادلة برنولي وتكون محصلة القوى المماسية للصفيحة معدومة ، $F_{Sy}=0$ . وعليه يجب حسب ( 8.117 ) أن ينعدم رد فعل كمية الحركة باتجاه $y$ . وينتج باستخدام رموز الشكل ( ٨.٤٠ـ a ) وملاحظة أن كمية السائل الداخلة لسطح التحكم هي $Q$ والخارجة منه هي $Q_1$ باتجاه $-y$ و $Q_2$ باتجاه $+y$ :

$$F_{By}=\rho\int_{(CS)} V_y\,dQ=+\rho\,Q\,(-V\cos\alpha)-\rho\,Q_1\,(-V)-\rho\,Q_2\,(+V)=0\,,$$

وبعد الاصلاح نجد العلاقة :

$$Q_1-Q_2=Q\cos\alpha\quad .$$

ومن معادلة الاستمرار نحصل على علاقة أخرى :

$$Q_1+Q_2=Q\quad .$$

وينتج من هاتين العلاقتين :

$$Q_1=\frac{Q}{2}\,(1+\cos\alpha)\;;\;Q_2=\frac{Q}{2}\,(1-\cos\alpha)\;\Rightarrow\;\frac{Q_1}{Q_2}=\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}\quad .(8.118)$$

نطبق الآن قانون الدفع في اتجاه المحور $x$ . وبما أنه في هذا الاتجاه أيضاً تكون القوى $F_{r_x}=F_{V_x}=0$ للأسباب الواردة أعلاه ، فينتج من (8.104) باعتبار $-F_{S_x}$ القوة التي يؤثر بها السائل على الصفيحة وملاحظة أن كمية الحركة الخارجة من سطح التحكم معدومة :

$$F_{S_x}=F_{B_x}=\rho\int_{(CS)} V_x\,dQ=\rho\,Q\,V\sin\alpha=\rho\,A\,V^2\sin\alpha\quad .\quad(8.119)$$

في الحالة الخاصة التي تكون فيها الصفيحة عمودية على محور النافورة ، الشكل ( ٤٠٨ — b ) ، وبالتالي $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ، ينتج من العلاقتين الاخيرتين :

$$Q_1 = Q_2 = \frac{Q}{2} \quad ; \quad F_S = \rho A V^2 \qquad (8.120)$$

وتنطبق هذه النتيجة أيضاً عندما يكون مقطع تيار النافورة دائرياً .

في الحالة العامة التي تكون فيها الصفيحة منحنية ، أو عندما نستبدل الصفيحة بريشة تحرف تيار النافورة زاوية $\alpha$ ، الشكل (٤٠٨ — c) ، فإن قوة الضغط الأفقية التي تؤثر بها النـــافورة على الريشة تنتج تحت نفس الشروط وبنفس الخطوات السابقة :

$$F_S = \rho A V^2 ( 1 + \cos \alpha ) \qquad . \qquad (8.121)$$

وتصبح هذه القوة في حال $\alpha = 0$ ، وبالتالي عندما يتم حرف تيار النـافورة الى إتجاهه الأولي :

$$F_S = 2 \rho A V^2 \qquad . \qquad (8.122)$$

إن القوة $F_S$ المؤثرة على جدار ثابت لا تستطيع طبعاً القيام بأي عمل ، بل تتوازن مع قوى رد الفعل لنقاط تثبيت الجدار . أما إذا كان الجدار ( أو الصفيحة ) يتحرك نفسه بسرعة $V > U$ مبتعداً عن تيار النافورة فإن القوة المؤثرة على الجدار تستطيع أن تقدم استطاعة P . ولكن عند حساب هذه القوة لايمكن استخدام العلاقات السابقة ، لأن الجريان في هذه الحالة غير مستقر في جملة احداثيات مطلقة . أما في جملة إحداثيات نسبية تتحرك مع الجدار بنفس السرعة فيكون الجريان مستقراً ويمكن بالتالي استخدام العلاقات السابقة إذا استبدلنا السرعة V بالسرعة النسبية $W = V - U$ . وعليه تصبح العلاقة (8.121) في حالة ريشة مفردة متحركة :

$$F_S = \rho A (V - U)^2 (1 + \cos \varkappa) \quad , \quad (8.123)$$

وتكون استطاعة الريشة :

$$P = F_S U = \rho A U (V-U)^2 (1 + \cos \varkappa) \quad (8.124)$$

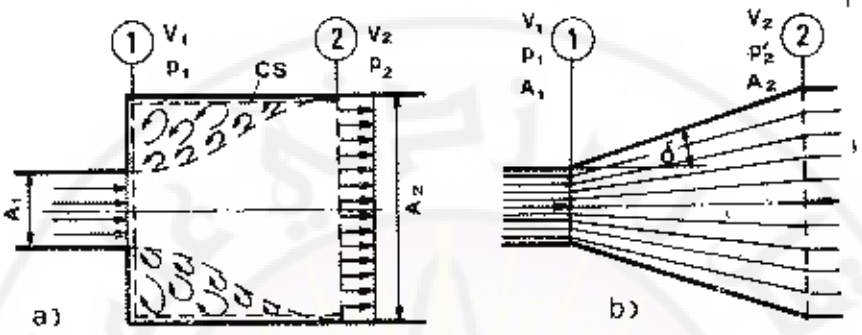
والجدير بالملاحظة أنه إذا كان $Q = A V$ التيار الحجمي للنافورة فيكون التيار الحجمي الذي يصطدم بالريشة فعلاً هو $Q' = A (V-U)$ . أما إذا وجد عدد كبير من الريش المركبة على محيط دولاب دائر ، كما في عنفة بلتون ، فإنه يمكن نظرياً تحويل كامل القدرة الحركية لتيار النافورة إلى قدرة ميكانيكية وليس جزءاً منها فقط ، كما في حالة الريشة المفردة .

## ٨ ٥.٢.٤ حساب الفقد الصدمي نتيجة تغير مفاجيء للمقطع

في أنبوب أسطواني أفقي مقطعه $A_1$ يجري سائل ثابت الحجم بسرعة منتظمة $V_1$ وضغط $p_1$ . فجأة يتوسع مقطع الأنبوب ويصبح $A_2$ ، فيدخل إليه السائل بشكل نافورة . ولكن عند منطقة التوسع المفاجيء للمقطع ① وبسبب وجود الحوافي الحادة تتشكل سطوح فاصلة لاتلبث أن تتفكك إلى أعاصير مما يؤدي لتكوّن منطقة ركود على طرفي النافورة وإلى عملية تمازج بينها وبين السائل الموجود في الأنبوب المتوسع تؤدي لانتظام الجريان على بعد كافٍ من المقطع ② فيصبح ذا سرعة منتظمة وثابتة تقريباً $V_2$ وضغط $p_2$ ، الشكل ( ٨.٤١ — a ) . لحساب الضغط $p_2$ بدلالة $p_1$ ودون التعرض لعملية المزج المعقدة بين المقطعين ① و ② نستعين بقانون الدفع الخطي ونطبقه على سطح التحكم cs المبين في الشكل . على كامل المقطع ① لسطح التحكم الذي مساحته $A_2$ يسود الضغط $p_1$ سواء في تيار النافورة الخارجة من الأنبوب الضيق أو في منطقة الركود على طرفيها . فإذا أهملنا قوى الاحتكاك ولاحظنا أن مركبة قوة الثقالة في اتجاه الجريان معدومة ، فإن القوى الخارجية تنحصر

بقوتي الضغط $p_1 A_1$ و $-p_2 A_2$ ، وتنتج من ( 8.103 ) مع استخدام (8.105) العلاقة :

$$(p_2 - p_1) A_2 = \rho Q (V_1 - V_2)$$




الشكل ٤١٠٨ : مقارنة الجريان في أنبوب يتوسع مقطعه فجائياً (a وفي ناشرة يتوسع مقطعها تدريجياً (b لحساب الفقد الصدمي .

ومنها نجد بالاستعانة بمعادلة الاستمرار ، $Q = V_1 A_1 = V_2 A_2$ ، الضغط $p_2$ أو فرق الضغط $\Delta p$ :

$$p_2 = p_1 + \rho V_2 (V_1 - V_2) \Rightarrow \Delta p = \rho V_2 (V_1 - V_2) ; \quad (8.125)$$

أو بصيغة اخرى تبين تأثير نسبة المقاطع $A_1/A_2$ :

$$\Delta p = p_2 - p_1 = 2 \frac{\rho}{2} V_1^2 \left[ \left( \frac{A_1}{A_2} \right) - \left( \frac{A_1}{A_2} \right)^2 \right] . \quad (8.126)$$

لحساب الخسارة في الضغط الناتجة من تشكل الاعاصير نقارن فرق الضغط $\Delta p$ مع فرق الضغط الناتج في حالة الجريان في ناشرة يتوسع مقطعها تدريجياً من $A_1$ إلى $A_2$ ، الشكل ( ٤١٠٨ - b ) ، فإذا كانت زاوية الانفراج ( التباعد ) $\delta$ صغيرة ( $\delta < 10°$ ) فان الجريان يمكن اعتباره عديم الفواقد ، وينتج من تطبيق معادلة برنولي على نقطتين من ① و ② واستخدام رموز الشكل :

$$\Delta p' = p'_2 - p_1 = \frac{\rho}{2}(V_1^2 - V_2^2) = \frac{\rho}{2}(V_1 + V_2)(V_1 - V_2), \quad (8.127)$$

أو بدلالة نسبة المقاطع وباستخدام معادلة الاستمرار :

$$\Delta p' = \frac{\rho}{2} V_1^2 \left[1 - \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2\right] \quad . \quad (8.128)$$

من العلاقتين (8.125) و (8.127) تنتج الخسارة في الضغط نتيجة التوسع المفاجيء للمقطع :

$$\Delta p_v = \Delta p' - \Delta p = \frac{\rho}{2}(V_1 - V_2)^2 \quad , \quad (8.129)$$

التي يطلق عليها اسم «**الفقد الصدمي**» ، ربما للتطابق بين العلاقة الاخيرة والعلاقة المعبرة عن الخسارة في القدرة الحركية عند التصادم غير المرن لجسمين صلبين ، علماً أنه لا يوجد أي شبه بين العمليتين سوى المزج بين السرعات .

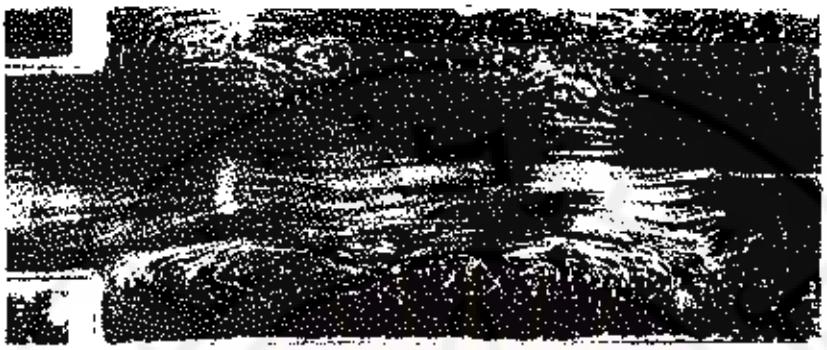
من العلاقتين (8.126) و (8.128) يمكن تحديد **المردود** $\eta_{diff}$ لعملية تحويل القدرة الحركية لقدرة كامنة ، حيث يكون :

$$\eta_{diff} = \frac{\Delta p}{\Delta p'} = \frac{2\left[\frac{A_1}{A_2} - \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2\right]}{1 - \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2} \quad . \quad (8.130)$$

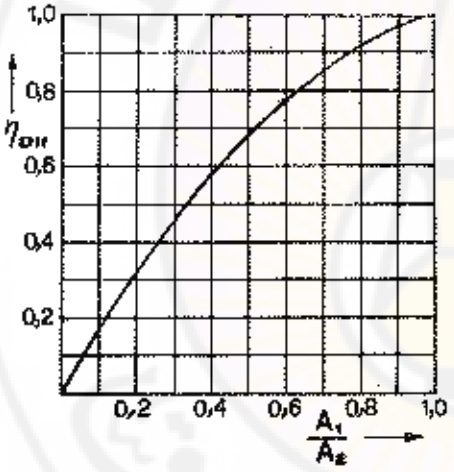
الشكل (٤٢.٨) يبيّن صورة الجريان في أنبوب يتوسع مقطعه فجائياً ، والشكل (٤٣.٨) يبين تغير $\eta_{diff}$ مع $A_1/A_2$ حسب (8.130) . ونلاحظ أن المردود يزداد كلما اقتربت نسبة المقاطع من الواحد .

إذا عكسنا اتجاه الجريان في الشكل (٤٢.٨) فإنه يمكن بنفس الخطوات

السابقة حساب الخسارة في الضغط الناتجة عن التضيق المفاجىء في المقطع بمقارنة فرق الضغط في الأنبوب المتضيق مع فرق الضغط في النفاثة . وحيث أن الجريان



الشكل ٤٢.٨ : الجريان في انبوب يتوسع مقطعه فجائياً [9] .




الشكل ٤٣.٨ : مردود تحول القدرة الحركية لقدرة كامنة في انبوب يتوسع مقطعه فجائياً من $A_1$ إلى $A_2$.

متسارع في هذه الحالة فإن تشكل الاعاصير يكون أقل، وبالتالي فإن الخسارة في الضغط من أجل نسبة مقاطع واحدة $A_1/A_2$ هي دائماً أقل منها في حالة التوسع المفاجىء .

## ٥.٢.٥.٨ تحرير المقاومة الاجمالية لجسم

بينما لا تتعرض الاجسام التي تتحرك في سوائل مثالية لانهائية الامتداد لأية

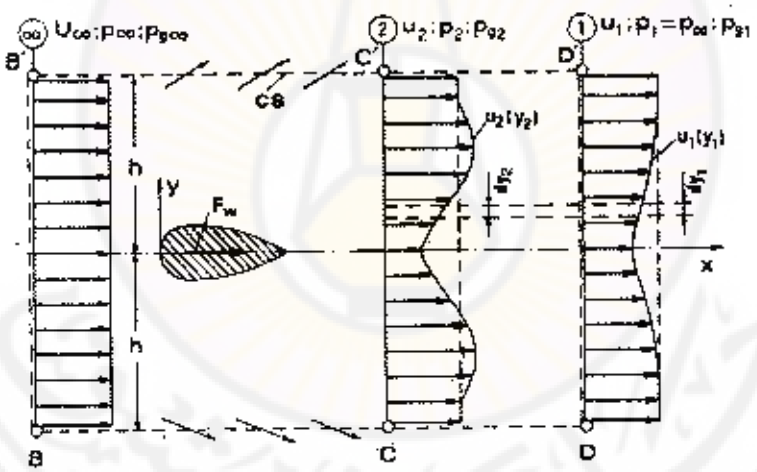
مقاومة ، بسبب انعدام القوى المماسية (تناقضة دالمبيرا) ، فإنها تتلقى في السوائل الحقيقية مقاومة إجمالية تكون كبيرة أو صغيرة حسب شكل الجسم وطبيعة الجريان . وحسب النظرية الهيدروديناميكية فإن **المقاومة الاجمالية** ( الكلية ) تساوي مجموع **مقاومة الاحتكاك** ، كتكامل للقوى المماسية الناتجة عن إجهادات القص بالنسبة لتكامل السطح الخارجي للجسم ، و**مقاومة الضغط** ، كتكامل للقوى الناظمية . ويطلق عليها في حالة الاجسام الانسيابية التي تكون أطوالها عرضانياً على اتجاه الجريان أكبر بكثير من مقاييس مقاطعها ، كالأجنحة الحاملة مثلاً ، اسم **مقاومة الشكل أو مقاومة البروفيل** (المقطع) Profile drag ، وذلك لتأثرها الشديد بشكل الجسم .

إن الحساب الدقيق لمقاومة الشكل في الحـــالة العامة يصطدم حتى اليوم بصعوبات كبيرة ، خاصة عندما تحدث ظاهرة **انفصام** الجريان Separation . فإذا لم تحدث هذه الظاهرة فبالامكان بمساعدة نظرية الطبقـة الحدية في حالات عديدة حساب مقاومة الشكل **نظرياً** والحصول على قيم مرضية جداً [28][51] [52][53][98]. ولكننا في غالب الأحيان لا نزال مضطرين للجوء الى الطرق التجريبية . وسندرس الآن طريقة هامة تعتمد على قانون الدفع الخطي لتحديد مقاومة الشكل .

بدلاً من دراسة الجريان المستقر حول جسم يتحرك في سائل ساكن في جملة إحداثيات مثبتة على الجسم ندرس الجريان حول الجسم الساكن في تيار سرعته غير المشوشة تساوي وتعاكس سرعة الجسم . نفرض أن الجسم اسطواني الشكل ولانهائي الامتداد في الاتجاه العمودي على الجريان . عندئذ تكفي دراسة الجريان حول مقطع من الجسم في المستوي x y الشكل (٨.٤٤) .

على مسافة كبيرة قبل الجسم يكون الجريان غير مشوش ، وبالتالي يكون توزع السرعة والضغط منتظماً . حول الجسم وبحكم لزوجة السائل تتشكل طبقة

حدية تكون فيها السرعة معدومة على الجدار وتتزايد باتجاه الناظم حتى تبلغ قيمة السرعة للجريان المثالي على حدود الطبقة الحدية في **جريان المؤخرة**، أو كما يسمى **أثر المخر** Wake ( الذي يخلفه الجسم المتحرك خلفه ) ، تتكون منطقة ركود كبيرة نسبياً تتميز بعدم انتظام توزع السرعة والضغط واختلاف قيمها عن قيم الجريان غير المشوش. لذلك يكون منحني توزع السرعة ذا **تجويف** يعرف باسم **تجويف جريان المؤخرة**، يزداد عرضه وتقل سماكته كلما ابتعدنا عن الحافة الخلفية للجسم الى ان يزول على بعد كاف منها ويصبح عندئذٍ توزع السرعة مكافئاً توزعها في الجريان غير المشوش. وتؤكد التجارب أن تعادل الضغط الستاتيكي مع الضغط الستاتيكي غير المشوش يتم قبل تعادل السرعة ، أي على مسافة أقرب من حافة الجسم الخلفية .




الشكل ٨ . ٤٤ : تحديد المقاومة الاجمالية لجسم من قياس توزع السرعة والضغط في أثر المخر ، حسب دجونس [100] .

إن مقدار تجويف جريان المؤخرة تحدده حالة الطبقة الحدية ، وبخاصة إمكانية انفصالها عن الجسم . ويعبر وجود هذا التجويف عن انخفاض في قدرة الجريان

يظهر بشكل مقاومة إجمالية . وعليه فإنه من قياس توزع السرعة والضغط في جريان المؤخرة يمكن بمساعدة قانون الدفع الخطي تحديد مقاومة الشكل . هذه الفكرة تتجسد في طريقتين تختلفان قليلاً من حيث الاسلوب وتتكافآن تماماً من حيث النتيجة ، الاولى تعرف باسم طريقة بيتس [99] واشتقاقها معقد قليلاً ، والثانية باسم طريقة دجونس Jones [100] وتتميز بأنها أقل تعقيداً من حيث الاشتقاق والحساب العددي ، ولذلك سنقتصر على دراستها فيما يلي بالنسبة لجريان مستو غير قابل للانضغاط .

نحيط الجسم بسطح للتحكم cs مؤلف من المستويين B′–B ( المقطع ⑩ ) و D′–D ( المقطع ⑦ ) العموديين على اتجاه الجريان ، ومن المستويين B–D و B′–D′ الموازيين لاتجاه الجريان ، الشكل ( ٤٤.٨ ) . ويتم اختيار هذه المستويات بحيث يمر المستوي الشاقولي B′–B والمستويان الافقيان B–D و B′–D′ عبر منطقة الجريان غير المشوش حيث السرعة $U_\infty$ والضغط الستاتيكي $p_\infty$ والضغط الكلي $p_{Rt_\infty} = p_{tot_\infty} = p_\infty + \frac{\rho}{2} U_\infty^2$ . أما المستوي الشاقولي D′–D فيقع على مسافة كافية من الحافة الخلفية للجسم حيث يكون الضغط الستاتيكي قد بلغ قيمته غير المشوشة ، $p_1 = p_\infty$ ، بينما لا يزال توزع السرعة $u_1(y_1)$ يحتفظ بتجويف ، وبالتالي فان الضغط الكلي $p_{Rt} = p_{tot_t} = p_\infty + \frac{\rho}{2} u_1^2$ لا يساوي الضغط الكلي غير المشوش .

نطبق قانون الدفع الخطي (8.104) في اتجاه المحور x الافقي فيكون بالنسبة لجسم ارتفاعه b = 1 :

$$F_{Vx} + F_{Px} + F_{Sx} = \rho \int_{\left(\begin{smallmatrix} -cs_{in} \\ +cs_{out} \end{smallmatrix}\right)} V_x \, dQ \quad .$$

ولكن القوة الحجمية $F_{Vx} = 0$ . كذلك فإن محصلة القوى السطحية المؤثرة

على الجزء الحر من سطح التحكم معدومة ، $F_{fx} = 0$ ، لأن كامل سطح التحكم يخضع لتأثير الضغط الثابت $p_\infty$ . وعليه تبقى المقاومة الاجمالية للجسم $F_w$ القوة الوحيدة المؤثرة على كتلة السائل المحصورة ضمن cs ، والتي تساوي وتعاكس محصلة القوى السطحية $F_{Sx}$ المؤثرة على السطح الخارجي للجسم . بذلك تصبح العلاقة الاخيرة :

$$F_w = -F_{Sx} = -\rho \int_{(cs)} V_x \, dQ \qquad (8.131)$$

لحل تكامل كمية الحركة يجب أن نأخذ بعين الاعتبار أنه بسبب وجود الجسم يكون التيار الحجمي الداخل إلى السطح B′ — B أكبر من التيار الحجمي الخارج من السطح D′ — D . وتقضي معادلة الاستمرار أن يخرج الفرق بينهما عبر السطحين الجانبين B — D و D′ — B′ ، الشكل ( ٤٤،٨ ) . فإذا وضعنا كمية السائل الداخلة لسطح التحكم سالبة والخارجة منه موجبة فإن تكامل كمية الحركة أو تيار الدفع ينتج من الجدول التالي :

| السطح | التيار الحجمي $Q =$ | تيار الدفع $I_x =$ |
|---|---|---|
| B — B′ | $-\int_{-h}^{+h} U_\infty \, dy$ | $-\rho \int_{-h}^{+h} U_\infty^2 \, dy$ |
| D — D′ | $+\int_{-h}^{+h} u_1 \, dy$ | $+\rho \int_{-h}^{+h} u_1^2 \, dy$ |
| B — D + B′ — D′ | $+\int_{-h}^{+h} (U_\infty - u_1) \, dy$ | $+\rho \int_{-h}^{+h} U_\infty (U_\infty - u_1) \, dy$ |
| $\Sigma = (cs)_1$ | $\Sigma = 0$ (معادلة الاستمرار) | $\Sigma = \rho \int_{(cs)} V_x \, dQ$ |

بجمع حدود العمود الأيمن من هذا الجدول نجد العلاقة :

$$\rho \int_{(rst)} V_x \, dQ = -\rho \int_{y=-h}^{y=+h} u_1 (U_\infty - u_1) \, dy \quad .$$

ومنها يتبين أن قيمة التكامل تنعدم عندما $U_\infty = u_1$ . لذلك يكفي أن تكون حدود التكامل $\pm h$ محصر تجويف توزع السرعة $u_1 (y_1)$ في المقطع ① فقط ، التي يمكن قياسها بمساعدة مشط برانتل كمقياس متكرر للضغط التحريكي $\frac{\rho}{2} u_1^2$ . وعليه تنتج بموجب (8.131) المقاومة الاجمالية لجسم ارتفاعه b عمودياً على مستوي الرسم :

$$F_W = b \rho \int_{(1)} u_1 (U_\infty - u_1) \, dy_1 \quad . \qquad (8.132)$$

إذا استخدمنا معامل المقاومة :

$$c_W = \frac{F_W}{\frac{\rho}{2} U_\infty^2 \, b \, l} = \frac{F_W}{q_\infty \, b \, l} \quad . \qquad (8.133)$$

حيث $l$ الطول المميز لمقطع الجسم في اتجاه الجريان ( وتر البروفيل في حالة الجناح الحامل ! ) ، فإن العلاقة ( 8.132 ) تأخذ الصيغة اللابعدية التالية :

$$c_W = 2 \int_{(1)} \frac{u_1}{U_\infty} \left( 1 - \frac{u_1}{U_\infty} \right) d\left( \frac{y_1}{l} \right) \quad . \qquad (8.134)$$

إن الصعوبة الأساسية في تحديد $F_W$ أو $c_W$ حسب الطريقة السابقة تنجم عن الشرط القاضي بوجوب إجراء القياسات في المقطع ① الذي يبعد مسافة كبيرة نسبياً عن الحافة الخلفية حتى يكون $p_\infty = p_1$ . لذلك يفضل أن تتم القياسات

في المستوي C—C' (المقطع ②) الأقرب إلى حافة الجسم الخلفية، حيث الضغط الستاتيكي $p_2 = p_\infty$. وهـــذا يستلزم تصحيح العلاقة (8.132). وقد أجراه لأول مرة بيتس وبسّطه بعد فترة دجونس، كما ذكرنا.

نفرض $u_2(y_2)$ توزع السرعة في المقطع ②. فحسب معادلة الاستمرار ينتج بالنسبة لأنبوبة تيار تمر عبر المقطعين ② و ① (الشكل ٨-٤٤) :

$u_1\, dy_1 = u_2\, dy_2$ . وبذلك تأخذ العلاقة (8.132) الصيغة التالية :

$$F_W = \rho b \int_{(2)} u_2 ( U_\infty - u_1 )\, dy_2 \qquad (8.135)$$

نفرض أيضاً حسب دجونس أن الجريان من ② الى ① خالٍ من الفواقد (مثالياً). عندئذ يبقى حسب معادلة برنولي الضغط الكلي بالنسبة لكل خيط تيار من ② إلى ① ثابتاً : $p_{tot_1} = p_{tot_2} = p_{g_2}$ . وحيث أن $p_\infty = p_1$ فيمكن بسهولة استنتاج العلاقات التالية بالنسبة للمقاطع ③ ، ② ، ① :

$$p_{tot_\infty} = p_\infty + \frac{\rho}{2} U_\infty^2 \Rightarrow U_\infty = \sqrt{\frac{2}{\rho} ( p_{tot_\infty} - p_\infty )} \quad ;$$

$$p_{tot_1} = p_\infty + \frac{\rho}{2} u_1^2 = p_{tot_2} = p_2 + \frac{\rho}{2} u_2^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u_1 = \sqrt{\frac{2}{\rho} ( p_{tot_2} - p_\infty )} \quad ; \quad u_2 = \sqrt{\frac{2}{\rho} ( p_{tot_2} - p_2 )} .$$

بذلك تأخذ (8.135) الصيغة التالية :

$$F_W = 2 b \int_{(2)} \sqrt{p_{tot_2} - p_2} \left[ \sqrt{p_{tot_\infty} - p_\infty} - \sqrt{p_{tot_2} - p_\infty} \right] dy_2 \, . \qquad (8.136)$$

المعروفة باسم **قانون دجونس**. ويكفي فيها إجراء التكامل عبر المقطع ② ضمن الحدود التي تحصر تجويف توزع السرعة فقط ، لأنه خـــارج منطقة التجويف يكون $p_{tot_2} = p_{tot_\infty}$ وتنعدم بالتالي قيمة التكامل . ونلاحظ أنه من أجل $p_\infty = p_s$ يأخذ قانون دجونس الصيغة الأبسط ( 8.132 ) .

إن القيم غير المشوشة للضغط $p_\infty$ ، $p_{tot_\infty}$ تعتبر معلومة . لذلك فإن تحديد المقاومة الاجمالية حسب ( 8.136 ) يستلزم فقط قياس توزع الضغط الكلي والستاتيكي في المقطع ② القريب من مؤخرة الجسم ( انظر الشكل ٢٤.٨ ) .

بادخال معامل المقاومة حسب ( 8.133 ) وملاحظة أن $p_{tot_\infty} = p_\infty - q_\infty$ تأخذ ( 8.136 ) الصيغة اللابعدية التالية :

$$c_W = 2 \int_{(2)} \sqrt{\frac{p_{tot_2} - p_2}{q_\infty}} \left[ 1 - \sqrt{\frac{p_{tot_2} - p_\infty}{q_\infty}} \right] d\left(\frac{y_2}{l}\right) \quad . \quad (8.137)$$

إن الطريقة المبينة أعلاه استخدمت بنجاح لتحديد مقاومة الشكل من قياسات في حالة الطيران ( الجسم متحرك ! ) ومن قياسات في القناة الهوائية وأعطت نتائج مرضية جداً . وقد أثبتت التجارب أن مستوي القياس ② يكفي ان يكون على بعد 5% من طول وتر البروفيل خلف الجناح الحامل فقط [28] . كما ان الطريقة تصلح من حيث المبدأ للتطبيق على الجريانات المستوية والمتناظرة دورانياً ، القابلة وغير القابلة للانضغاط .

عندما $\rho = \text{const}$ تأخذ العلاقة (8.135) الصيغة التالية :

$$F_W = b \int_{(2)} \rho_2 u_2 (u_\infty - u_1) \, dy_2 \quad . \quad (8.138)$$

وتعتمد هنا لحساب $u_2$ ، $u_1$ من القيم القاسة في المستوي ② فرضية مماثلة لفرضية دجونس عن ثبات الضغط الكلي في حالة $\rho = \text{const}$ تشترط أن الانتروبيا Entropy لا تتغير بين ② و ① . وعلى هذا الاساس يمكن بمساعدة قانون تغير الحالة الاديباتي $p_2/\rho_2^\kappa = p_1/\rho_1^\kappa$ وبمساعدة معادلة برنولي للجريانات القابلة للانضغاط الحصول على علاقة شبيهة بقانون دجونس (8.137) ولكنها أكثر تعقيداً ( انظر [28] ) .

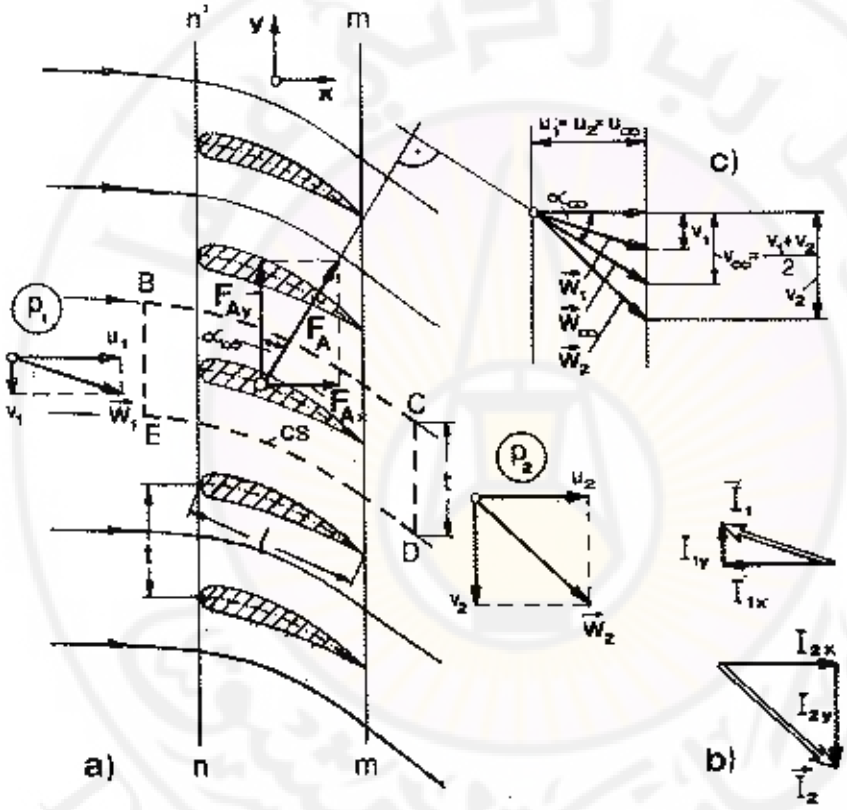
كما تجدر الاشارة أن هذه الطريقة مناسبة جداً لتحديد تأثير الخشونات السطحية على قيمة المقاومة الاجمالية .

## ٦.٢.٥.٨ حساب قوة الرفع الهيدروديناميكية ، قانون كوتا ـ يوكوفسكي

إن طيران الاجسام الأثقل من الهواء تسببه قوة تؤثر على الاجنحة الحاملة يطلق عليها **قوة الرفع الهيدروديناميكية أو الأيروديناميكية** $F_A$ Lift . هذه القوة تؤثر أيضاً على ريش دولاب التوجيه والدولاب الدائر لآلات الجريان المحورية والقطرية (عنفات ، مضخات ، ضواغط ، مراوح ، رفاصات وغيرها) ، وبالتالي تلعب دوراً أساسياً في عملية شحن الجريان عبر الآلة بالقدرة أو استخلاصها منه .

لحساب $F_A$ المؤثرة على جناح حامل فردي لانهائي الامتداد تكفي دراسة الجريان حول بروفيل واقع في مستوٍ عمودي على محور الجناح . ولكن بدلاً من حل هذه المسألة ، ولاعتبارات تتعلق بتطبيقات هندسية هامة سيشار اليها في نهاية هذه الفقرة ، سندرس الجريان عبر **سلسلة أجنحة حاملة** مستقيمة Aerofoil cascade مؤلفة من عدد لانهائي من الاجنحة الحاملة اللانهائية الامتداد المماثلة لبعضها تماماً من حيث الشكل والمقطع ( البروفيل ) والمرتبة بشكل دوري ، بحيث تفصل بين كل جناحين متوازيين ومتجاورين مسافة ثابتة $t$ تسمى **خطوة التقسيم** . هذه السلسلة تظهر في المستوي $yx$ بشكل **سلسلة بروفيلات** تعرف باسم **شبك البروفيلات المستقيم** Straight profile cascade ( اختصاراً الشبك المستقيم ) ، الشكل (٤٥.٨) . كل شبك يتحدد هندسياً بمعرفة نسبة **التقسيم** $t/l$ ، حيث $l$ طول وتر البروفيل ، و**زاوية البروفيل** $\beta_s$ التي يصنعها وتره مع أحد المستقيمين المتوازيين $n'-n$ أو $m'-m$ المماسين لأنوف البروفيلات وحافاتها الخلفية والمعروفين باسم **جبهة الشبك** . وواضح ان صورة الجريان

حول كل بروفيل في الشبك واحدة ، وبالتالي فإن خطوط التيار المتناظرة بالنسبة لأي بروفيل تكون متطابقة ، ويكون توزع السرعة والضغط عليها واحداً . لهذا يمكن دراسة الجريان المستوي عبر شبك البروفيلات هذا بمساعدة نظرية خيط التيار بالرغم من أن شعاع السرعة له مركبتان .




الشكل ٤٥.٨ : الجريان عبر سلسلة أجنحة حاملة ( شبك بروفيلات ) لاستخراج قانون كوتا ـ يوكوفسكي .

للحصول على جريان مستقر نفرض ان شبك البروفيلات ساكناً بالنسبة لمجموعة الاحداثيات التي نختارها بحيث يكون المحور x عمودياً على جبهة الشبك

والمحور y موازياً لها . لتكن $W_1$ سرعة الجريان المنتظم المستقر على بعد كاف قبل الشبك ، وليكن $p_1$ الضغط الستاتيكي المقابل . على بعد كاف خلف الشبك يكون الجريان أيضاً منتظماً ، ولكن السرعة $W_2$ تختلف عادة من حيث القيمة والاتجاه عن $W_1$ ، وبالتالي يكون $p_2 \neq p_1$ . وهذا هو فرق أساسي بين الجريان عبر سلسلة أجنحة وحول جناح حامل حيث تكون قيم السرعة والضغط في حالة الجريانات المثالية على مسافة كافية قبل وبعد الجناح الفردي واحدة ومساوية لقيم الجريان غير المشوش .

لحساب قوة الرفع الهيدروديناميكية المؤثرة على أحد بروفيلات الشبك نستعين بقانون الدفع الخطي وبمعادلة الاستمرار ومعادلة برنولي . نحلل القوة $F_A$ إلى مركبتين : $F_{Ax}$ عمودية على جبهة الشبك وتسمى **القوة الدافعة** Thrust أو المحورية ، $F_{Ay}$ موازية لجبهة الشبك وتسمى القوة المماسية أو المحيطية . كما نحلل كلا من السرعتين $W_1$ ، $W_2$ إلى مركبتين باتجاه x : $u_2$ ، $u_1$ ، وباتجاه y : $v_2$ ، $v_1$ ، الشكل ( ٤٥.٨ — a ) . نحيط البروفيل المعتبر بسطح تحكم cs مؤلف من خطي تيـــار متناظرين ومتطابقين B C و E D ، ومن قطعتين مستقيمتين E B و D C موازيتين لجبهة الشبك وواقعتين في منطقة الجريان المنتظم قبله وخلفه ، طول كل منهما t .

يفرض b عرض الشبك عمودياً على المستوي y x فيكون حسب معادلة الاستمرار (8.2) التيار الحجمي الذي يعبر cs :

$$Q = b\,t\,u_1 = b\,t\,u_2 \Rightarrow u_1 = u_2 = u \quad . \qquad (8.139)$$

هذا يعني أن الجريان يعبر شبك البروفيلات بسرعة محورية ثابتة . من جهة أخرى تنتج من معادلة برنولي المختزلة بالنسبة لنقطتين من EB و D C العلاقة :

$$p_1 + \frac{\rho}{2} W_1^2 = p_2 + \frac{\rho}{2} W_2^2 \Rightarrow p_1 + \frac{\rho}{2} (u_1^2 + v_1^2) = p_2 + \frac{\rho}{2} (u_2^2 + v_2^2) \; .$$

ومنها ينتج بمراعاة ( 8.139 ) فرق الضغط :

$$p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2} (v_2^2 - v_1^2) \quad . \qquad (8.140)$$

نطبق الآن قانون الدفع الخطي ( 8.104 ) في اتجاه x فينتج :

$$\rho \int_{(cs)} u \, dQ = F_{Px} + F_{fx} + F_{Sx} \, . \qquad (8.141)$$

إن حساب تكامل تيار الدفع ينتج بسهولة إذا لاحظنا أن $u_2 \uparrow\uparrow i_{2x}$ ، $u_1 \uparrow\downarrow i_{1x}$ ( الشكل ٨.٤٥ — b ) ، وأن $u_1 = u_2$ حسب ( 8.139 ) ، وعليه نجد :

$$\rho \int_{(cs)} u \, dQ = \rho \, Q \, ( - u_1 + u_2 ) = 0 \quad .$$

من جهة أخرى فان القوة الجسمية $F_{Px} = 0$ لأن قوة الثقالة تولد قوة رفع ستاتيكية فقط . وحيث أن قوى الضغط على خطي التيار CB و DE المتطابقين متوازنة فيما بينها فان محصلة قوى الضغط المؤثرة على الجزء الحر من سطح التحكم تنحصر بالقوة : $F_{fx} = b \, t \, ( p_1 - p_2 )$ . وعليه فإن القوة الدافعة التي يؤثر بها السائل على الجناح باعتبارها تساوي وتعاكس محصلة القوى السطحية المؤثرة على الجزء الصلب من سطح التحكم ، $- F_{Sx} = F_{Ax}$ ، تنتج من ( 8.141 ) بالصيغة :

$$F_{Ax} = b \, t \, ( p_1 - p_2 ) \quad .$$

وتصبح باستخدام ( 8.140 ) :

$$F_{Ax} = \frac{\rho}{2} \, b \, t \, ( v_2^2 - v_1^2 ) = \rho \, b \, t \, ( v_2 - v_1 ) \, . \, \frac{v_2 + v_1}{2} \quad . \qquad (8.142)$$

نطبق قانون الدفع الخطي ( 8.104 ) باتجاه y فينتج :

$$\rho \int_{(cs)} v \, dQ = F_{Py} + F_{fy} + F_{Sy} \quad . \qquad (8.143)$$

فإذا لاحظنا أن $v_1 \downarrow\downarrow I_{1y}$ و $v_2 \uparrow\uparrow I_{2y}$ ، وبسبب (8.139) ، فإن تكامل تيار الدفع يصبح :

$$\rho \int_{(cs)} v \, dQ = \rho \, Q \, (v_2 - v_1) = \rho \, b \, t \, u \, (v_2 - v_1) \quad .$$

وحيث أن القوة الحجمية ومحصلة قوى الضغط على خطي التيار المتطابقين في اتجاه y معدومتان ، $F_{Vy} = F_{Py} = 0$ ، وبوضع $-F_{Sy} = F_{Ay}$ نجد القوة المحيطية المؤثرة على البروفيل من (8.143) :

$$F_{Ay} = \rho \, b \, t \, u \, (v_1 - v_2) \quad . \qquad (8.144)$$

لإعطاء العلاقتين (8.142) ، (8.144) صياغة عملية ندخل أولاً مفهوم السرعة الانسحابية غير المشوشة $W_\infty$ كمتوسط شعاعي للسرعتين $W_1$ ، $W_2$ والتي تكافىء السرعة على بعد لانهائي ( نظرياً ) قبل وخلف الشبك . وعليه تكون تعريفاً ( الشكل ٤٠٨ — c ) :

$$W_\infty = \frac{W_1 + W_2}{2} \Rightarrow v_\infty = \frac{v_1 + v_2}{2} \quad , \quad u_\infty = \frac{u_1 + u_2}{2} = u \quad , \qquad (8.145)$$

حيث $v_\infty$ ، $u_\infty$ مركبتا $W_\infty$ . كما نحسب الجولان حول البروفيل المعتبر ، وبما أن قيمة الجولان في حالة الجريان الكموني لا تتعلق بشكل المنحني المغلق فإننا نحسب $\Gamma$ كتكامل خطي لشعاع السرعة على طول الخط المحد لسطح التحكم BEDCB ، ونعتبر اتجاه الالتفاف موجباً في اتجاه عقارب الساعة . فإذا لاحظنا أن التجول على خط التيار CB يتم بعكس التجول على ED المطابق للأول فإن التكامل الخطي على طولها يكون معدوماً وتبقى فقط قيمة التكامل الخطي للسرعة على طول BE و DC ، وبالتالي ينتج :

$$\Gamma = \oint W \, ds = t \, (v_1 - v_2) \quad , \qquad (8.146)$$

وذلك بمراعاة أن اشارة كل من $v_1$ و $v_2$ سالبة ، أي باتجاه $-y$ في الشكل ( ٤٥.٨ ) ، وبإدخال العلاقتين الأخيرتين في ( 8.142 ) و ( 8.144 ) نجد :

$$F_{Ax} = -\,b\,\rho\,\Gamma\,v_\infty \quad ; \quad F_{Ay} = b\,\rho\,\Gamma\,u_\infty \quad . \qquad (8.147)$$

وتنتج قوة الدفع الهيدروديناميكية بالصيغة :

$$\boxed{F_A = b\,\rho\,\Gamma\,W_\infty} \quad , \qquad (8.148)$$

وذلك بوضع $F_A = \sqrt{F_{Ax}^2 + F_{Ay}^2}$ ، $W_\infty = \sqrt{u_\infty^2 + v_\infty^2}$ . ويتحدد اتجاهها بسهولة من مثلث السرع ومثلث القوى ، حيث ينتج بالعودة للشكل ( ٤٥.٨ - a و c ) :

$$\frac{F_{Ax}}{F_{Ay}} = \tan\alpha_\infty = -\frac{v_\infty}{u_\infty} \quad . \qquad (8.149)$$

في ضوء ما تقدم يمكن صياغة الجملة الهامة التالية :

> يؤثر السائل المثالي الذي يعبر سلسلة من الاجنحة الحاملة على كل جناح بقوة رفع $F_A$ فقط تتناسب طرداً مع كثافة السائل ومع سرعة ورود الجريان غير المشوشة $W_\infty$ ومع الجولان $\Gamma$ حول البروفيل وتكون منحرفة عن اتجاه $W_\infty$ مقدار $90°$ بعكس اتجاه دوران عقارب الساعة إذا اعتبر الجولان موجباً باتجاه دوران عقارب الساعة .

هذه الجملة تعرف باسم **قانون كوتا - يوكوفسكي** نسبة للعالمين : **كوتا** W. Kutta [101] الذي اكتشفه عام 1902 و **يوكوفسكي** N. Joukowsky [102] الذي وجده مستقلاً عن الاول عام 1906 .

للانتقال من سلسلة أجنحة حاملة إلى جناح فردي نجعل خطوة التقسيم بين

جناحين متجاورين ؛ تزداد باستمرار إلى ان تصبح في الحالة الحدية لانهائية . وبما أن الجولان في هذه العملية يبقى ثابتاً (انظر ١.٣.٧) فيجب ، حسب (8.146) ، أن يتناقص الفرق $v_1 - v_2$ باستمرار الى ان تصبح $v_1 = v_2$ عندما $\infty \leftarrow t$ . وحيث أن العلاقة $u_1 = u_2$ تبقى محققة فتصبح أيضاً $W_1 = W_2 = W_\infty$ . فإذا وضعنا $V_\infty \equiv W_\infty$ ، التي تمثل السرعة غير المشوشة في اللانهاية ، أو السرعة التي يتحرك بها الجناح الحامل في سائل ساكن لانهائي الامتداد ، فإن قانون **كوتا ـ يوكوفسكي** لجناح حامل فردي ينتج من (8.148) بالصيغة :

$$\boxed{F_\lambda = b \rho \Gamma V_\infty} \qquad (8.150)$$

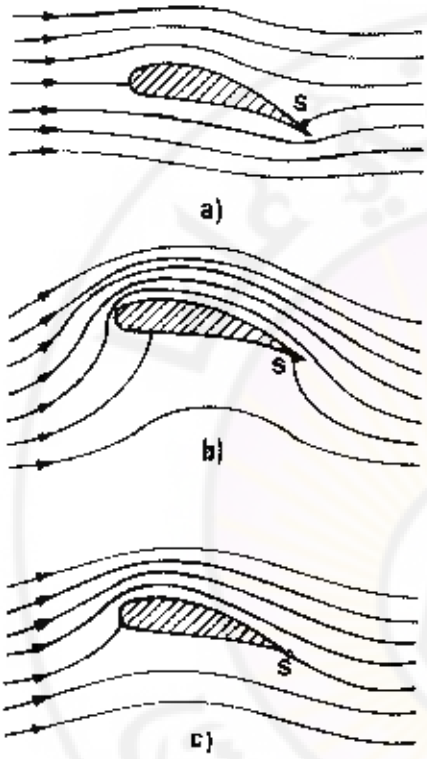
ويكون له نفس المضمون الوارد أعلاه .

بالامكان طبعاً البرهان عل قانون كوتا ـ يوكوفسكي (8.150) بطرق مختلفة . فمثلاً يمكن، كما فعل يوكوفسكي ، اختيار سطح للتحكم اسطوانة دائرية ذات قطر كبير تحيط بالجناح الحامل الفردي ومحورها منطبق على محوره . فاذا طبقنا قانون الدفع الخطي عل كتلة السائل المحصورة داخلها فإن نصف قيمة $F_\lambda$ تكافيء تيار الدفع ، بينما يساوي النصف الآخر محصلة قوى الضغط .

من قانون **كوتا ـ يوكوفسكي** نستخلص نتيجة هامة جداً مفادها ان قوة الرفع لا تتولد إلا في جريان جولاني ، وأن كل قيمة محددة لـ $F_\lambda$ تقابلها قيمة محددة للجولان . وهذه تتعلق بشكل الجسم وبزاوية ورود الجريان Angle of attack وبسرعته غير المشوشة . لذلك فان تطبيق قانون **كوتا ـ يوكوفسكي** يتطلب معرفة قيمة الجولان ، التي لا يمكن في الحالة العامة تحديدها بشكل نظري بحت وإنما تلزم لذلك الاستعانة بالخبرة .

إن معظم أشكال الاجنحة الحاملة المستخدمة عملياً تتصف بأن حافتها الخلفية حادة . لنعتبر الجريان المثالي المستوي حول بروفيل من جناح لانهائي الامتداد

وغير مفتول بحيث أن زاوية الورود بين اتجاه الجريان ووتر كل بروفيل منه تبقى ثابتة . فإذا كان الجولان معدوماً ، $\Gamma = 0$ ، فإن صورة الجريان تظهر كما في الشكل (٤٦٠٨ - a) ، وتكون نقطة الركود الخلفية S ، أي النقطة التي تلتقي فيها خطوط التيار من الطرف السفلي والعلوي للبروفيل ، واقعة على الطرف العلوي . وهذا يعني أن الجريان سيلتف من جهة الطرف السفلي حول الحافة الخلفية Trailing edge الحادة مما يسبب نظرياً ( في حالة الجريان المثالي ) بلوغ السرعة على الحافة الخلفية قيمة لانهائية ينجم عنها ضغط ناقص لانهائي القيمة أيضاً . وعندما يكون الجولان كبيراً جداً فإن صورة الجريان تكون كما في الشكل (٤٦٠٨-b) ونقطة الركود الخلفية واقعة على الطرف السفلي . وهذا يؤدي لالتفاف الجريان حول الحافة الخلفية بسرعة لانهائية القيمة وبضغط ناقص لانهائي القيمة أيضاً .




الشكل ٤٦٠٨ : جناح حامل في جريان ذي جولان مختلف القيمة . تتحدد قيمة $\Gamma$ من شرط كوتا للانسياب الناعم بحيث لا يحدث التفاف حول الحافة الخلفية من جهة الطرف السفلي في حالة $\Gamma = 0$ (a) ، ولا من جهة الطرف العلوي عندما تكون قيمة $\Gamma$ كبيرة جداً (b) ، وإنما بحيث تقع نقطة الركود على الحافة الخلفية تماماً (c) .

إن الخبرة المدعومة بالتجربة تؤكد أن كلتي الحالتين السابقتين

غير واقعيتين ، إذ أن قيمة الجولان تتحدد بحيث تقع نقطة الركود على الحافة الخلفية تماماً ، الشكل ( ٤٦٠٨ - c ) ، ولا يحدث بالتالي التفاف حولها ، وإنما ينساب **الجريان السليم** على طرفيها انسياباً . وهذا ما يعرف باسم **شرط كوتا للانسياب الناعم** الذي تؤكده الصورة الفوتوغرافية في الشكل ( ٤٧٠٨ ) . وعلى هذا الاساس يمكن بالنسبة لقوة رفع معطاة تحديد قيمة $\Gamma$ ، وبالتالي تحديد التوزع الاعصاري خلف الجنـــاح الحامل ، من معرفة شكل الجناح ووضعيته بالنسبة لاتجاه الجريان ( زاوية الورود ) ، الذي نفرضه كمونياً ، وذلك بمساعدة طرق ميكانيك السوائل مثل طريقة **التمثيل المطابق** وطريقة **النقاط الشاذة** ، التي سنعالجها فيما بعد .



الشكل ٤٧٠٨ : الجريان السليم حول جناح حامل حسب [1] .

فيما يتعلق بنشوء الجولان حول الجناح فقد سبق الحديث عنه في سياق مناقشة قانون **طومسون** ( ص ٢٤١ ) . ولزيادة الايضاح نفرض أن الجناح يتحرك في سائل ساكن . بعد بدء الحركة مباشرة يتكون حول الجناح جريان كموني لاجولاني ، $\Gamma=0$ ، وتكون صورة الجريان كما في الشكل (٤٦٠٨-a) ، التي يمكن بوسائل تولّية الجريان التأكد منها فعلاً ، كما تبين الصورة الفوتوغرافية في الشكل ( ٤٨٠٨ ) . وعليـــه فإن نقطة الركود الخلفية تكون واقعة على الطرف العلوي للجناح وبالتالي يؤثر على الحافة الخلفية نتيجة التفاف الجريان

من الطرف السفلي ضغط ناقص لانهائي ( $p = -\infty$ ) ، ويتزايد حتى يصبح مساوياً الضغط الكلي في نقطة الركود S .



الشكل ٤٨٠٨ : الجريان الكموني اللاجولاني حول جناح حامل بعد بدء الحركة مباشرة ، حسب [١١] .

هذه النتيجة تكون فقط ممكنة إذا كان السائل عديم اللزوجة (مثالياً) . لذلك لا بد أن نأخذ ، على الاقل بعد لحظة بدء الحركة ، لزوجة السائل بالحسبان ، التي تؤدي لالتصاق جزيئات السائل على جدار الجناح وتشكل طبقة حدية تتزايد فيها السرعة من الصفر على الجدار وحتى قيمة معينة . عندئذ لا تستطيع جزيئات الطبقة الحدية البطيئة في منطقة الحافة الخلفية ان تجابه تزايد الضغط فتنفصم عن الجدار وتتحرك بالتالي عكس اتجاه الجريان . وهذا يؤدي لتشكل سطح فاصل على الحافة الخلفية يتحول بسبب عدم استقراره لإعصار بدء الحركة ، الذي ينفصل بعد فترة من بدء الحركة عن الجناح ويصبح على بعد كاف خلفه بحيث لا يؤثر على الجريان في الجوار المباشر للجناح . وحيث أنه حسب قانون طومسون يجب ان يبقى الجولان الكلي بالنسبة لخط سائلي مغلق يحيط بالجناح وإعصار بدء الحركة معدوماً ( المنحني C في الشكل ١٥٠٧ ) لأنه كان

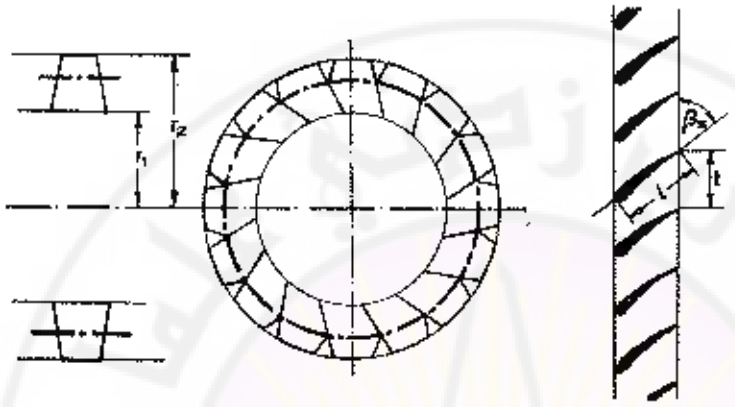
عند بدء الحركة مساوياً الصفر ، فيجب ان ينشأ داخل هذا الخط السائل ، الذي يتوسع بعد الحركة باستمرار ، حول الجناح الحامل جولان يساوي ويعاكس شدة إعصار بدء الحركة . هذا الجولان الذي يولد أخيراً قوة الرفع على الجناح يمكن اعتبار تأثيره على حقل الجريان المجاور للجناح ناتجاً عن **إعصار موبوط** أو **جملة أعاصير موبوطة** ( توزع إعصاري ) داخل الجناح الحامل .

مما سبق ينتج إذن أن لزوجة السائل هي السبب في نشوء الجولان وبالتالي قوة الرفع الهيدروديناميكية . ولكننا لتفسير نشوء قوة الرفع نحتاج لأخذها بعين الاعتبار فقط للفترة الزمنية القصيرة الكافية لتولد إعصار بدء الحركة . واعتباراً من هذه اللحظة يمكن افتراض الجريان مثالياً وبالتالي حساب قوة الرفع بموجب قانون **كوتا ـ يوكوفسكي** وشرط **كوتا** للانسياب الناعم .

في حالة الجريانات الحقيقية فإن تأثير اللزوجة يؤدي لتشكل منطقة « ماء ميت » حول الحافة الخلفية للجناح تكون سماكتها على الطرف العلوي أكبر منها على الطرف السفلي . وينتج عن ذلك انزياح خطوط التيار الى جهة طرف السحب ، وبالتالي فان شرط كوتا للانسياب الناعم لا يتحقق تماماً ، ويكون الجولان ، وبالتالي قوة الرفع ، في هذه الحالة أقل بالمقارنة مع الجريان المثالي عند زاوية ورود واحدة .

أخيراً لا بد من ملاحظة ختاميـــة تتعلق بالجريان عبر شبك البروفيلات المستقيم . إن أهمية هذا الجريان تأتي من كونه يمثل العملية الفيزيائية الاساسية في كل آلة جريان محورية ، أي التي يكون اتجاه دخول السائل اليها بشكل رئيسي موازياً للمحور . ويتوضح ذلك إذا أجرينا مقطعاً اسطوانياً موحد المركز في الدولاب الدائر لآلة محورية وفرشنا سطح القميص الاسطواني على مستو فإن بروفيلات الريش تظهر في المستوي بشكل شبك بروفيلات مستقيم ممتداً الى اللا نهاية عن الطرفين ، لأن كل ريشة تجاورها ريشتان متماثلتان ، الشكل (٤٩.٨) . فإذا كان الدولاب الدائر في مضخة أو ضاغط فإن شبك البروفيلات يحرف الجريان بحيث يحصل كبح للسرعة من $W_1$ إلى $W_2$ ويكون بالتالي الضغط

الستاتيكي خلف الشبك أكبر منه قبل الشبك ، $p_1 < p_2$ . أما في حالة عنفة فان شبك البروفيلات يحرف الجريان بحيث تزداد السرعة من $W_1$ إلى $W_2$ ،




الشكل ٤٩.٨ : نحصل على شبك بروفيلات مستقيم بنشر مقطع اسطواني موحد المركز لدولاب آلة جريان محورية على مستو .

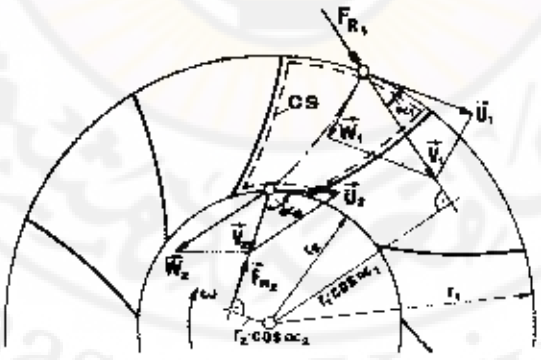
ويكون بالتالي $p_1 > p_2$ . لذا نميز بين **شبك كابح** ، يمثل مضخة محورية نموذجية مبسطة تشحن الجريان بقدرة ضغط ، وبين **شبك مسرّع** ، يمثل عنفة محورية نموذجية مبسطة تستخلص من الجريان قدرة حركية . كما يمكن أحياناً ان يتم عبر ما يسمى **الشبك المتساوي الضغط** ، $p_1 = p_2$ ، حرف اتجاه الجريان فقط . وفي كل الاحوال فان شبك البروفيلات هذا يمثل العنصر الاساسي لكل آلة جريان محورية ، ودراسة الجريان عبره تتيح إمكانية الفهم العميق لعمليات الجريان المعقدة داخل الآلة ، الذي هو في الأصل ثلاثي البعد طبعاً وغير مستقر في الدولاب الدائر . لهذا السبب فقد بقيت نظرية خيط التيار لفترة طويلة الطريقة الوحيدة المستخدمة في حساب وتصميم آلات الجريان . ولكن الابحاث النظرية والمخبرية تركزت ، خاصة خلال العقدين الاخيرين ، على دراسة الجريان عبر شبك البروفيلات من منطلق أنها ستقود الى قفزة نوعية في تطوير

آلات الجريان . وهذا ما حدث فعلاً . فقد طورت طرق حديثة هندسية في هذا المجال نستطيع بموجبها حساب الحقل المميز للآلة نظرياً ، حتى مع أخذ الفواقد بعين الاعتبار. ونكتفي هنا بذكر اسماء بعض الباحثين، على سبيل العد لا الحصر، الذين أسهموا بشكل بارز في هذا الحقل مثل **شولتس** ، **شلشتنغ** ، **بيلس** ، **شبايدل** ، **البرنج** ، **هاكيشمدت** ، **دجك** ، **كروبانوفسكي** [13][25][26] [31][49][50][57][65][66] [88][103][104][105] .

## ٧.٢.٥.٨ معادلة أويلر العنفية

بالنسبة لآلات الجريان القطرية ، أي التي يكون دخول الجريان فيها عمودياً على محور الدوران ، يمكن الحصول على جريان مستوٍ مبسط نموذجي داخل الدولاب الدائر باجراء مقطع عمودي على محور الدوران ، حيث تظهر بروفيلات الريش في المستوي بشكل نجمي حول المحور ومرتبةً بانتظام على محيط دائرتين مركزيتين نصف قطريهما $r_1$ و $r_2$ . يسمى هذا الترتيب الهندسي **شبك بروفيلات دائري** ، أو اختصاراً **الشبك الدائري** .

نعتبر الشبك الدائري المبين في الشكل ( ٥٠.٨ ) لعنفة مائية قطرية ،




الشكل ٥٠.٨ : استخراج معادلة أويلر العنفية .

ونسأل عن الاستطاعة التي يقدمها الدولاب الدائر إذا كان يدور بسرعة زاوية ثابتة $\omega$ .

ليكن $Q'$ التيار الحجمي الذي يعبر القناة المشكلة من ريشتين متجاورتين ولتكن $W_1$ السرعة النسبية ، $U_1$ السرعة المحيطية عند الدخول و $W_2$ ، $J_2$ القيم المقابلة عن الخروج من القناة . فحسب ( 7.30 ) تكون السرعة المطلقة عند الدخول : $V_1 = W_1 + U_1$ ، وتصنع مع $U_1$ الزاوية $\alpha_1$ ، وعند الخروج : $V_2 = W_2 + U_2$ ، وتصنع مع $U_2$ الزاوية $\alpha_2$ .

نفرض أن الجريان مستقراً عديم الاحتكاك ومنتظماً عند الدخول والخروج وعدد الريش كبيراً جداً بحيث أن كل جزيئات السائل التي تدخل بين ريشتين تحرف وتوجه باتجاه المحور الرئيسي للقناة تماماً . نطبق قانون الدفع الدوراني (8.109) على كتلة السائل المحدّدة بسطح التحكم cs فيكون :

$$M_f + M_I + M_S + M_R = 0 \quad .$$

فإذا اخترنا المحور المار من O محوراً للدوران فيكون عزم القوة الحجمية الممثلة بقوة الثقالة معدوماً ، $M_f = 0$ ، وكذلك عزم قوى الاحتكاك باعتبار أن الجريان مثالي ، وعزم قوى الضغط المؤثرة على الجزء الحر من سطح التحكم باعتبارها عبر من $M_I = 0$ . وبالتالي يجب أن يتوازن عزم قوى الضغط المؤثرة على الجزء الصلب من سطح التحكم ، الريش ، مع محصلة عزوم رد فعل كمية الحركة . وعليه ينتج عزم رد الفعل لقوى الضغط التي يؤثر بها السائل على الريش $M_S -$ ، أي عزم الدوران الذي ينتقل لمحور العنفة :

$$M_t = M_S = M_R = F_{R_1} \cdot r_1 \cos \alpha_1 - F_{R_2} \cdot r_2 \cos \alpha_2 \quad .$$

فإذا كان $Q = \sum Q'$ التيار الحجمي الذي يعبر كافة ريش الدولاب الدائر فيصبح باستخدام (8.105) وبغض النظر عن تفاصيل الجريان بين الريش :

$$M_t = \rho Q \left( V_1 r_1 \cos \alpha_1 - V_2 r_2 \cos \alpha_2 \right) \quad . \qquad (8.151)$$

هذه العلاقة معروفة باسم **معادلة اويلر العنفية** ، أو **المعادلة الأساسية لنظرية آلات الجريان الهيدروليكية** القطرية . وسميت كذلك لأنها تنطبق من حيث المبدأ على العنفات والمضخات .

من ( 8.151 ) تنتج بسهولة استطاعة الدولاب الدائر :

$$P = M \omega = \rho Q \omega ( V_1 r_1 \cos \alpha_1 - V_2 r_2 \cos \alpha_2 ) \quad .$$

ولكن حسب الشكل ( ٥٠.٨ ) فإن السرعة المحيطية $U = r\omega$ ، والمركبة المحيطية للسرعة المطلقة $V_u = V \cos \alpha$ . وعليه تصبح :

$$P = \rho Q ( V_{u1} U_1 - V_{u2} U_2 ) \quad . \qquad ( 8.152 )$$

وتكون هذه الاستطاعة اعظمية عندما تكون خسارة القدرة الحركية للجريان أصغرية ، أي عندما $V_{u2} = 0$ . ويتحقق ذلك عندما يخرج السائل من الدولاب الدائر بشكل قطري بحت وتكون بالتالي الزاوية $\alpha_2 = \pi/2$ $(\cos \alpha_2 = 0)$ . عندئذ تصبح :

$$P_{max} = \rho Q V_{u1} U_1 = \rho Q V_1 U_1 \cos \alpha_1 \quad . \qquad (8.153)$$

بالنسبة لآلة جريان محورية وباعتبار أن تساوي قطر دخول وخروج التيار لايتغير ، $r_1 = r_2$ ، وبالتالي $U_1 = U_2 = U = r\omega$ ، فإن معادلة **أويلر العنفية** للاستطاعة تأخذ في حالة شبك بروفيلات مستقيم الصيغة البسيطة التالية :

$$P = \rho Q U ( V_{u1} - V_{u2} ) = \rho Q U \Delta V_u \quad . \qquad ( 8.154 )$$

حيث $\Delta V_u$ تمثل الفرق بين المركبتين المحيطتين للسرعة المطلقة عند الدخول والخروج ، ويمكن تحديده من مثلثي السرع . وهذا يعني ان الاستطاعة تتعلق بالدرجة الأولى بزاوية إنحراف الجريان من $\alpha_1$ إلى $\alpha_2$ ، بغض النظر عن كيفية حدوث هذا الانحراف ، حيث لم يؤخذ شكل الريشة التصميمي بالحسبان .

إن استطاعة الآلة الحقيقية تكون طبعاً أقل من استطاعة الآلة النموذجية ( المثالية ) المحسوبة بموجب العلاقات السابقة . فمن ناحية يكون عدد ريش الدولاب الدائر محدوداً ، وبالتالي لايمكن إهمال التأثير المتبادل بينها على الجريان . ومن ناحية اخرى لايمكن إهمال الفواقد الناتجة عن لزوجة السائل . نتيجة لذلك فإن زاوية الريشة عند الدخول والخروج $\beta_{1a}$ و $\beta_{2a}$ تختلف عن زاوية دخول وخروج الجريان $\beta_{1\infty}$ و $\beta_{2\infty}$ ، وهذا يعني أن انحراف الجريان المطلوب لاستطاعة مفيدة ، وبالتالي $\Delta w_u$ ، يكون أقل ، والاستطاعة الفعلية أصغر . ويكون هذا التأثير في حالة الضخة أكبر منه في حالة المنفذ . ولمراعاة ذلك اقترح بفلايدرر C. Pfleiderer [80] من أجل الابقاء على نظرية خيط التيار لحساب آلات الجريان فكرة تضخيم الزوايا ، بمعنى وجوب زيادة زاوية الريشة عند الدخول والخروج في حالة العدد المحدود للريش بحيث نحصل على انحراف للجريان مكافىء للانحراف في حالة العدد الكبير جداً للريش ، وبالتالي نفس الاستطاعة :

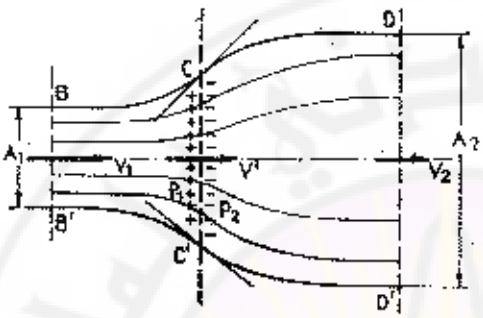
حديثاً تستخدم نظرية آلات الجريان القطرية الطرق الحديثة لميكانيك السوائل مثل طريقة النقاط الشاذة وطريقة التمثيل المطابق وغيرها الى جانب نظرية الطبقة الحدية بحيث يمكن مراعاة تفاصيل الجريان داخل الآلة وتحديد شكل الريش وعددها الأفضلي بالنسبة لجريان معين أو استطاعة مرغوبة ، انظر مثلاً [25] [80] [105] [106] [107] [108] .

## ٨.٢.٥.٨ النظرية النافورية لحساب المراوح والرفاصات اللولبية

المراوح الهوائية والدواسر المائية ( الرفاصات ) Propeller أجهزة مؤلفة من عدد قليل نسبياً ( 2 إلى 4 ) من الريش ذات المقاطع الشبيهة بيروفيلات الاجنحة الحاملة . وتكون محمولة خارج المركبة ( الطائرة أو الباخرة ) على عمود متصل مباشرة أو بواسطة علبة سرعة بعمود المحرك المركب داخل المركبة . بذلك تكتسب المروحة حركة دورانية تحتضن خلالها باستمرار كتلاً جديدة من من السائل ( الهواء أو الماء ) ، الساكن ، وتقذفها للوراء بشكل تيار نافوري فتتولد ، كرد فعل ودون انحراف اتجاه الجريان ، **قوة دافعة** Thrust تؤدي لتحريك المركبة الى الامام . وعليه فالقوة الدافعة المروحة تكون باتجاه الحركة وتستطيع بذلك توليد استطاعة مفيدة ، بينما يولد الجناح الحامل ، كما رأينا ، قوة دفع عمودية على اتجاه الحركة .

كتمهيد لحساب القوة الدافعة للمروحة ومردودها سنتعرض لمسألة عامة تطرح نفسها عندما نؤثر على تيار نافوري بوسيلة ميكانيكية ما تؤدي لكبحه أو تسارعه دون تحريف اتجاهه .

نفرض أن غزالاً $C'-C$ يعترض التيار النافوري الاسطواني أو المستوي ، الشكل (٥١٠٨) ، مما يؤدي لكبح السرعة من $V_1$ قبل الغربال الى $V_2$ خلفه . نتيجة ذلك يجب أن يتوسع مقطع التيار النافوري ( أو عرضه ) من $A_1$ الى $A_2$ ، وتأخذ خطوط التيار الخارجية (الحرة) D'C'B' و D C B المسار المبين في الشكل ، بحيث تتحقق معادلة الاستمرار : $A_1 V_1 = A_2 V_2$ . في مستوي الغربال نفسه تكون سرعة التيار النافوري $V'$ تختلف عن $V_1$ و $V_2$ وموزعة بانتظام على مقطع وسطي $\overline{C'C} \equiv A'$ .




الشكل ٥١٠٨ : الجريان عبر غربال لاستخراج موضوعة فرود .

إن خطوط التيار الخارجية تتعرض من الخارج لنفس الضغط ، لذلك فإن الجريان عبر الغربال بالشكل المبين أعلاه يستلزم وجود فرق ضغط $\Delta p$ في الجريان قبل وخلف المستوي C' C مباشرة لايمكن ان تسببه إلا القوى النابذة المتولدة نتيجة انحناء مناسب لخطوط التيار . وبالفعل فإن مركز انحناء خطوط التيار قبل C' C يقع خارج التيار النافوري ، مما يؤدي لتزايد الضغط باتجاه الداخل (انظر ص ٢٥٧) ، بينما يقع مركز انحناء خطوط التيار خلف الغربال في الداخل مما يؤدي لتناقص الضغط في هذا الاتجاه ، وتمثل بالتالي C و C' نقطتي انعطاف . لذلك يسود قبل الغربال ضغط زائد $p_1$ (+) وخلفه ضغط ناقص $p_2$ (−) ويتعرض الجريان في مستوي الغربال لتغير مفاجيء في الضغط .

لحساب السرعة $V'$ نطبق قانون الدفع الخطي (8.103) باتجاه الجريان . فإذا كان التيار الحجمي Q تنفج بمساعدة (8.103) القوة اللازمة لكبح السرعة من $V_1$ إلى $V_2$ :

$$F_x = \rho Q (V_1 - V_2),$$

التي تساوي من جهة أخرى الى القوة اللازمة لجر الغربال في سائل ساكن بسرعة $V'$ ، مما يستلزم استهلاك استطاعة مقدارها $F_x V'$ ، وهذه تساوي مقدار الخسارة في القدرة الحركية نتيجة كبح السرعة ، $\frac{\rho Q}{2} (V_1^2 - V_2^2)$ . وعليه نجد :

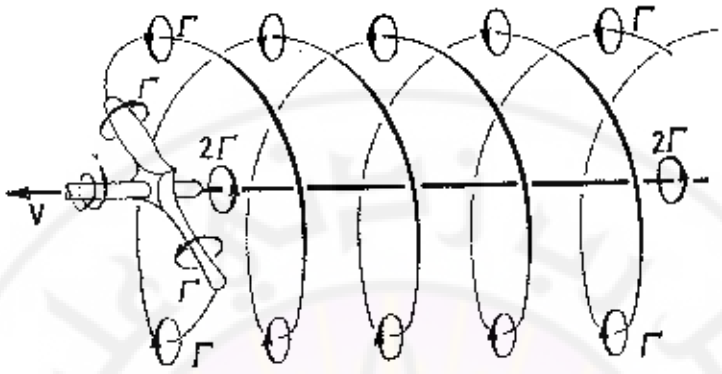
$$\rho Q (V_1 - V_2) V' = \rho Q (V_1 - V_2) \frac{V_1 + V_2}{2} \Rightarrow \boxed{V' = \frac{V_1 + V_2}{2}} \quad . \quad (8.155)$$

فإذا لاحظنا أننا لم نراع أية مواصفات خاصة للغربال باستثناء كونه أداة تؤثر بقوة $F_s$ على السائل ، لذلك يمكن تعميم العلاقة (8.155) المتضمنة مايعرف باسم موضوعة فرود Froude theorem وصياغتها بالجملة التالية :

إذا أثرت أداة ميكانيكية ما ( غربال ، طاحونة هوائية ، مروحة ، رفاص وغيرها ) على تيار نافوري بقوة $F_s$ تؤدي لكبح التيار أو تسريعه فتكون السرعة التي تخترق مستوي الأداة مساوية للمتوسط الحسابي للسرعة ما قبل وما بعد هذه الأداة .

لقد سيطرت المروحة الهوائية فترة طويلة كأداة رئيسية لتوليد القوة الدافعة في مجال الطيران حتى السرعات المتوسطة ، ولا يزال يحتل الرفاص هذا المركز في مجـــال بناء السفن . لذلك تركزت الابحاث منذ وقت طويل على حساب الجريان المعقد جداً عبر الرفاصات والمراوح ، ذلك أن حركة المروحة تتألف في الحقيقة من حركة انسحابية وحركة دورانية، وبالتالي فهي حركة لولبية . ومن هنا جاءت تسميتها بالمراوح أو الرفاصات **اللولبية** . وتتولد القوة الدافعة للمروحة في الواقع على أساس مبدأ الجناح الحامل الريشة ، الذي يتحرك هنا على خط لولبي ، بدلاً من الحركة المستقيمة للجناح الحامل الفردي . فمن نهايات الريش تنبعث جملة أعاصير ، تتحد في منطقة صرة محور المروحة لما يسمى **اعصار الصرة** ، وتلتف خلف المروحة بشكل لولبي محيطة بكامل كتلة السائل التي عبرت المروحة ، الشكل ( ٥٢٠٨ ) . فإذا كان عدد الريش كبيراً نسبياً فإن الأعاصير الخارجية تحصر داخلها كسطح فاصل تياراً نافورياً مغلقاً تقريباً ، تقوم جزيئات السائل فيه بالمقارنة مع الجزيئات الاخرى بحركة انسحابية متقدمة وبحركة دورانية ، كشر لا بد منه . فاذا أردنا بالإضافة لما تقدم مراعاة التأثير المتبادل بين المروحة وجسم المركبة يتضح أنه من شبه المستحيل ، حتى في حال إهمال لزوجة السائل ،

تطوير نظرية مرضية لحساب عمليات الجريان المعقدة داخل المروحة .




الشكل ٥٢٠٨ : مجموعة الاعاصير التي تولدها مروحة هوائية .

لأخذ فكرة مبسطة جداً عن طريقة عمل المروحة نفترض مروحة نموذجية تحقق الشروط التالية :

١ – المروحة مؤلفة من عدد لانهائي من الريش ذات السماكة الصغيرة جداً في اتجاه الجريان. وعليه يمكن اعتبارها قرصاً دائرياً رقيقاً جداً مساحته الفعالة A تساوي السطح الإجمالي لدائرة المروحة ناقصاً مساحة السطوح غير الفعالة للمنطقة المجاورة لصرة العمود بسبب سرعتها المحيطية البطيئة ولنهايات الاجنحة التي لا توجه السائل جيداً .

٢ – يهمل دوران التيار النافوري الذي يخترق المروحة ، وتهمل كذلك كافة الفواقد الناتجة عن الاحتكاك وعملية المزج .

٣ – قوة الدفع $F_s$ موزعة بانتظام على المقطع A ، أي أن كل جزيء سائلي يخترق قرص المروحة الدائري يتلقى زيادة واحدة في الضغط $\Delta p$ ، بينما لا تتعرض الجزيئات خارج التيار النافوري لأي تغير في الضغط (هذا الشرط يمكن التحقيق فعلاً إذا أحسن اختيار عرض الريش وزاوية الورود ) .

٤ – الضغط في التيار النافوري على مسافة كافية قبل وبعد قرص المروحة يساوي الضغط غير المشوش $p_\infty$ ، بينما تزداد السرعة من $V_1$ إلى $V_2$ .

هذه الشروط تمثل الفرضيات الاساسية **للنظرية النافودية البسيطة** لحساب المروحة التي صاغها لأول مرة **رانكين** Rankine عام 1865 ( انظر [9] ) . فإذا اعتبرنا الحركة الحرة للمروحة ، أي أهملنا التأثير المتبادل بينها وبين جسم المركبة ، واخترنا مجموعة إحداثيات نسبية مثبتة في مركز قرص المروحة فإن الجريان عبر المروحة يصبح مستقراً وتكون سرعة دخول التيار النافوري قبل المروحة $V_1$ تكافيء سرعتها في السائل الساكن باتجاه معاكس . ونستطيع بمساعدة قانون الدفع الخطي (8.104) ومعادلة برنولي حساب قوة الدفع ومردود المروحة بسهولة .

الشكل(٥٣٠٨)يبين شكل التيار النافوري الاسطواني الذي يعبر المروحة، وتوزع السرعة والضغط فيه . وحيث ان المروحة تؤدي لتسريع الجريان ( بعكس الغربال ، الشكل ٥١٠٨ ) فإنه يسود قبل مستوي المروحة مباشرة ضغط ناقص ، $p_1 < p_\infty$ ، وخلفه ضغط زائد $p_2 > p_\infty$ ، ويحدث بالتالي في مستوي المروحة تغير مفاجيء في توزع الضغط بمقدار $\Delta p$ .

لتكن $V'$ السرعة في مستوي المروحة . فحسب (8.155) وبرموز الشكل (٥٣٠٨ـ a) تكون :

$$V' = \frac{V_1 + V_2}{2} = \frac{V_1 + (V_1 + w)}{2} = V_1 + \frac{w}{2} \quad , \quad (8.156)$$

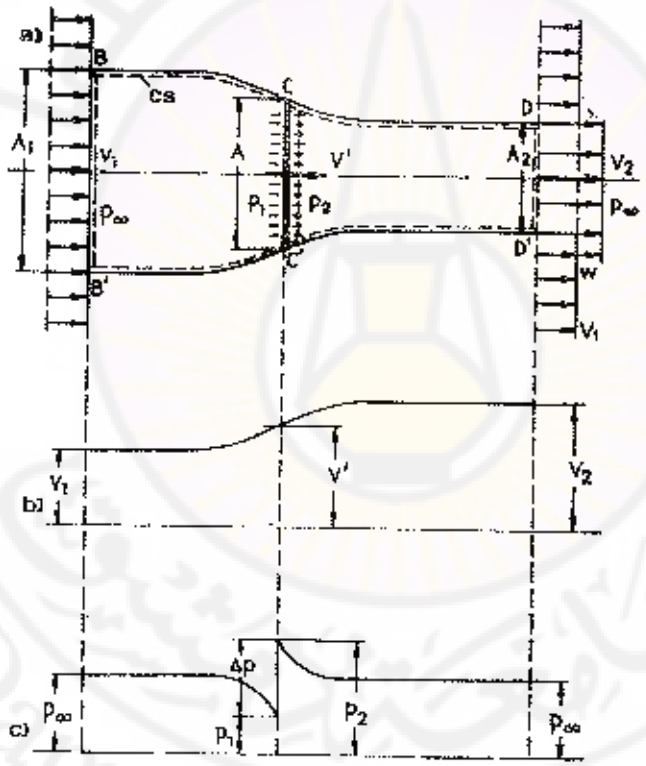
حيث $w$ السرعة الاضافية التي يكتسبها التيار النافوري خلف المروحة نتيجة تسريع الجريان . وتبلغ بالتالي السرعة الاضافية في مستوي المروحة نصف قيمتها خلف المروحة .

نطبق معادلة برنولي المحتزلة على نقطتين من B' B و C' C قبل المروحة فنجد:

$$\frac{\rho}{2} V_1^2 + p_\infty = \frac{\rho}{2} V'^2 + p_1 \Rightarrow p_1 - p_\infty = \frac{\rho}{2} (V_1^2 - V'^2) \ ,$$

وعلى نقطتين من C' C و D' D بعد المروحة فينتج :

$$\frac{\rho}{2} V'^2 + p_2 = \frac{\rho}{2} V_2^2 + p_\infty \Rightarrow p_2 - p_\infty = \frac{\rho}{2} (V_2^2 - V'^2) \ .$$




الشكل ٥٣.٨ : النظرية الناقورية لمروحة وانكين المثالية : a) حدود التيار الناقوري الاسطواني ؛ b) توزع السرعة ؛ c) توزع الضغط .

من هاتين العلاقتين وباستخدام (8.156) نجد فرق الضغط في مستوي المروحة :

$$\Delta p = p_2 - p_1 = \frac{\rho}{2}(V_2^2 - V_1^2) = \rho w \left(V_1 + \frac{w}{2}\right) .$$

وحيث أن $\Delta p$ ، كما هو مفروض ، موزع بانتظام على السطح الفعال A فتكون القوة الدافعة التي تولدها المروحة :

$$F_S = \int_{(A)} \Delta p \, . \, dA = \Delta p \, A = \rho w \left(V_1 + \frac{w}{2}\right) A \quad . \quad (8.157)$$

نفس العلاقة يمكن الحصول عليها بمساعدة قانون الدفع الخطي إذا طبق على سطح التحكم cs المؤلف من سطحي التيار الخارجيين D' C' B' , D C B ومن المستويين الشاقوليين B' B و D' D الواقعين على بعد كاف قبل وبعد المروحة في منطقة الضغط غير المشوش . فاذا لاحظنا أن قوى الاحتكاك معدومة وكذلك قوى الثقالة باتجاه الجريان وقوى الضغط على حدود cs متوازنة فيما بينها ، فينتج أن القوة الخارجية الوحيدة التي تؤثر بها المروحة على التيار الكتلي ، $\dot{m} = \rho A V'$ ، الذي يعبرها يجب ان تتوازن مع محصلة تيار الدفع الخارج والداخل الى cs . وعليه نجد باستخدام (8.156) ووضع $A = \frac{\pi d^2}{4}$ :

$$F_S = \rho A V' (V_2 - V_1) = \rho \frac{\pi d^2}{4} V' w = \rho \frac{\pi d^2}{4} \left(V_1 + \frac{w}{2}\right) w \quad . \quad (8.158)$$

وهذه هي العلاقة الاساسية بين قوة الدفع وقطر المروحة d المكافيء لضعف طول الريشة وسرعة المركبة $V_1$ .

ان **المردود النظري** $\eta_{th}$ للمروحة النموذجية يمثل النسبة بين الاستطاعة المفيدة $P_E$ والمبذولة $P_A$ . الأولى تنتج عن حركة المركبة بسرعة نسبية $V_1$ تحت

تأثيرالقوة $F_S$ ، وتساوي $F_S V_1$ ؛ والثانية نحتاجها لتوليد $F_S$ المنتقلة بسرعة $V'$ وتساوي إذن $F_S V'$ . وعليه يكون باستخدام (8.156) :

$$\eta_{th} = \frac{P_E}{P_A} = \frac{V_1}{V'} = \frac{V_1}{V_1 + \frac{w}{2}} = \frac{1}{1 + \frac{w}{2V_1}} \cdot \qquad (8.159)$$

يتضح من هذه العلاقة أن المردود النظري للمروحة النموذجية يمكن أن يبلغ قيمة قريبة جداً من الواحد، إذا كانت السرعة الاضافية في التيار النافوري الاسطواني خلف المروحة صغيرة جداً بالمقارنة مع سرعة المركبة $V_1$ . هذا يعني بموجب (8.158) أنه عند قوة دافعة مطلوبة $F_S$ يلزم ان يكون التيار الكتلي $\dot{m}$ الذي تحتضنه المروحة ، وبالتالي المقطع الفعال للمروحة ، أكبر ما يمكن . ولكن زيادة طول الريشة تقف عند حدود لا يمكن تجاوزها لأسباب ميكانيكية تتعلق بتثبيت الريش على المحور من جهة ، ولأسباب هيدروديناميكية أو غازديناميكية من جهة أخرى تتعلق بإمكانية نشوء ظاهرة التكهف أو اختراق جدار الصوت نتيجة تجاوز السرعة المحيطية للريش قيمة حرجة .

في الحساب العملي للمراوح يستخدم **معامل القوة الدافعة** ، أو كما يسمى أيضاً **معامل درجة التحميل** الذي يعرف بالعلاقة :

$$c_S = \frac{F_S}{\frac{\rho}{2} V_1^2 A} \cdot \qquad (8.160)$$

لحساب $\eta_{th}$ بدلالة $c_S$ نكتب المعادلة الأولى من ( 8.158 ) ، بوضع $w = V_2 - V_1 = 2 ( V' - V_1 )$ ، بالشكل التالي :

$$F_S = 2\rho A V' (V' - V_1) = 2\rho A (V'^2 - V' V_1) =$$
$$= 4 \cdot \frac{\rho}{2} V_1^2 A \cdot \left[ \left( \frac{V'}{V_1} \right)^2 - \frac{V'}{V_1} \right] .$$

ومنه ينتج بموجب (8.160) :

$$c_S = 4 \left[ \left( \frac{V'}{V_1} \right)^2 - \frac{V'}{V_1} \right] .$$

نصلح العلاقة فنجد :

$$\frac{1}{4} c_S + \frac{1}{4} = \left( \frac{V'}{V_1} \right)^2 - \frac{V'}{V_1} + \frac{1}{4} = \left( \frac{V'}{V_1} - \frac{1}{2} \right)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{V'}{V_1} = \frac{1}{2} \left( 1 + \sqrt{1 + c_S} \right) .$$

بذلك يصبح المردود النظري :

$$\eta_{th} = \frac{V_1}{V'} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 + c_S}} . \qquad (8.161)$$

هذه العلاقة تبين أن $\eta_{th}$ يزداد كلما صغرت قيمة معامل درجة التحميل ويصبح مساوياً الواحد عندما $c_S = 0$ .

في ضوء ما سبق فإن المردود النظري للمروحة النموذجية حسب (8.161) يمثل الحد الأعلى الذي يمكن أن يبلغه المردود الفعلي $\eta$ لأية مروحة حقيقية يتوجب عليها توليد قوة دافعة $F_S$ معينة عند مساحة محددة A لدائرة قرص المروحة وسرعة سير مطلوبة $V_1$ . لذلك يمثل $\eta_{max} = \eta_{th}$ أساساً جيداً للمقارنة بينه وبين قيمة $\eta$ المحسوبة أو المقاسة ، وترتبط بينهما العلاقة :

$$\eta = \zeta \eta_{th} = \eta_{hyd} \eta_{th} . \qquad (8.162)$$

حيث $\zeta$ معامل درجة الجودة الميكانيكي للمردود الهيدروليكي $\eta_{hyd}$ . وتبلغ

قيمته ، التي يتم تحديدها غالباً تجريبياً ، بالنسبة للمراوح الهوائية الجيدة التصميم مابين 0,85 الى 0,90 [9] وحوالي 0,6 بالنسبة للرفاصات المائية [6] .

المعامل $\zeta$ يراعي في الواقع كافة العوامل والتأثيرات التي أهملتها النظرية التـــافورية البسيطة والتي تنتج حتماً بسبب عمليـــات الجريان المختلفة على ريش المروحة الافرادية . فالاستطاعة المبذولة فعلاً $P_A$ تدخل فيها ، بالاضافة للاستطاعة المفيدة $P_E$ ، الاستطاعة المستهلكة كخسارة في القدرة الحركية $P_1$ نتيجة زيادة سرعـــة التيار الكتلي $Q = \dot{m}$ مقدار $w$ . وتكون $P_1 = \frac{\dot{m}}{2} w^2$ أصغر ما يمكن عند قوة دافعة محددة كلما كبر $\dot{m}$ وصغرت $w$ . زيادة على ذلك تستهلك استطاعة مقدارها $P_2$ للتغلب على الفوائد الناتجة عن الاحتكاك وعن تشكل الاعاصير حول الريش وفي التيار النافوري وبسبب دوران التيار النافوري وتضيق مقطعه. وعليه تكون الاستطاعة المبذولةالفعلية: $P_A = P_E + P_1 + P_2$ ، ويكون المردود الكلي الفعلي :

$$\eta_t = \frac{P_E}{P_A} = \frac{P_E}{P_E + P_1 + P_2} \quad , \qquad (8.163)$$

بينما يبلغ المردود النظري المعطى بالعلاقة (8.159) :

$$\eta_{th} = \eta_{max} = \frac{P_E}{P_E + P_1} \quad , \qquad (8.164)$$

والمردود الهيدروليكي أو معامل درجة الجودة :

$$\eta_{hyd} = \zeta = \frac{P_E + P_1}{P_E + P_1 + P_2} \quad . \qquad (8.165)$$

إن النتائج السابقة لاتنطبق تماماً على **المراوح الواقفة** (الثابتة)، عندما تكون المركبة تتأهب للاقلاع أو عند إختبار المروحة المثبتة على منصة . عندئذ تكون السرعة $V_t = 0$ ، وبالتالي فالاستطاعة المفيدة معدومة ، $P_E = 0$ ، وكذلك المردود النظري حسب ( 8.161 ) , $\eta_{th} = 0$ . بينما يلزم باستمرار بذل استطاعة لأن **قوة دفع الوقوف أو السكون** Stand thrust بموجب (8.157) :

$$F_{S0} = \frac{\rho}{2} A \, w^2 \qquad (8.166)$$

تكون غير معدومة. هذه الحالة تنطبق أيضاً على الحوامات أو الطائرات العمودية عندما « تقف » معلقة ، بعد أن تكف عن التحليق ، عند ارتفاع معين. عندئذ تكون سرعتها $V_1 \approx 0$ ، وتنعدم بالتالي استطاعتها المفيدة ، $P_u \approx 0$ ، بينما تستهلك باستمرار قدرة لتستطيع المحافظة على وضعها .

لحساب الاستطاعة النظرية اللازمـــة في حال كون الحوامة تحمل ثقلاً $F_{S0} = F_G$ نضع في ( 8.156 ) $V_1 = 0$ فتصبح $V' = w/2$ وتنتج :

$$P_{th} = F_{S0} \, V' = F_{S0} \frac{w}{2} = F_G \frac{w}{2} \quad .$$

فإذا حسبت $w$ من ( 8.166 ) نجد أخيراً العلاقة :

$$P_{th} = \frac{F_G}{2} \sqrt{\frac{2 F_G}{\rho A}} = \sqrt{\frac{F_G^3}{2 \rho A}} = \sqrt{\frac{F_{S0}^3}{2 \rho A}} \quad . \qquad (8.167)$$

التي تبين أن الاستطاعة التي تتطلبها الحوامة لرفع ثقل معين تصغر كلما كبرت مساحة قرص المروحة. وهذا مانلاحظه فعلاً عند الحوامات والطائرات العمودية. ولكن زيادة السطح A ، وبالتالي طول الريش ، تحدهـا عوامل تصميمية وأيروديناميكية سبق ذكرها ، بالاضافة لأن وزن المروحة والحوامة ينقص طبعاً الثقل الصافي الممكن رفعه .

إن النظرية الشـــافورية البسيطة تعطي فكرة واضحة نسبياً عن طريقة عمل المراوح والرفاصات وتسمح بحساب المردود الأعظمي لها . ولكنها لا تستطيع ، بحكم الفرضيات التي اعتمدت عليها ، أن تقدم أية معلومات تفصيلية عن العمليات المعقدة جداً للجريان عبر المروحة ( أو الرفاص ) التي تخضع لعوامل مختلفة ومتداخلة ، أهمهـــا عدد وشكل الريش وشكل البروفيل المستخدم ، تأثير جسم المركبة على التيار النافوري ، ولزوجة السائل طبعاً .

إن حساب القوة الدافعة للمروحة الحقيقية ومردودها مع مراعاة أهم التأثيرات السابقة

يعتمد على نظرية الريشة المحاملة Blade Theory المبنية على أساس تتبع جملة الأعاصير المتشكلة اثناء حركة ريش المروحة الافرادية ، الشكل ( ٥٢.٨ ) . هذه النظرية وضع أسسها بالاستناد على نظرية الجناح الحامل ، مع أخذ الحركة الدورانية للريشة بعين الاعتبار ، البرت بيتس وذلك أولاً للمروحة ذات التحميل الضعيف ، أي التي تولد سرعة إضافية w صغيرة بالمقارنة مع سرعة المركبة [109] [26] ، وتتميز بخسارة أصغرية في القدرة ، وبعدها المروحة ذات التحميل الشديد ، كما في حالة الرفاص المائي ، حيث تكون w كبيرة نسبياً [110] . وقد ساهم بتطوير هذه النظرية العديد من الباحثين الذين وضعوا طرقاً حسابية وتجريبية هندسية لحساب المراوح والرفاصات [32] [111] [112] [113] [114] مع مراعاة التأثير المتبادل بين المروحة والمركبة [115] [116] وتأثير ظاهرة التكهف الخطرة على الرفاصات المائية والتي أدت دراستها المعمقة لتطوير رفاصات تعمل تحت ظروف تكهف جـــزئي أو كلي Supercavitating propeller [111] [118] حتى مع أخذ تأثير اللزوجة بعين الاعتبار . وقد أدت هذه الابحاث لتطوير نماذج جديدة من المراوح والرفاصات ذات المردود العالي نذكر منها خاصة المروحة القابلة للتوجيه Controllable propeller التي يمكن توجيه ريشها تبعاً لظروف عملها .

أخيراً تجدر الاشارة إلى أن النظرية النافورية البسيطة يمكن تطبيقها بنفس الخطوات المتبعة في حالة المروحة على الطاحونة الهوائية التي تستغل قدرة الهواء وتحولها إلى قدرة ميكانيكية ( آلة قدرة ! ) ، وذلك بكبح سرعة التيار النافوري من $V_1$ إلى $V_2 < V_1$ ، تماماً كما يفعل الغربال ، الشكل ( ٥١.٨ ) . فإذا وضعنا في هذه الحالة $V_2 = V_1 - w$ يكون بموجب (8.155): $V' = V_1 - \frac{w}{2}$ . وتنتج القوة الدافعة ، ومنها الاستطاعة القابلة للتحويل ، تحت نفس فرضيات المروحة المثالية بالصيغة :

$$F_s = \rho A w (V_1 - \frac{w}{2}) \Rightarrow P = F_s . V' = \rho A w (V_1 - \frac{w}{2})^2 \quad (8.168)$$

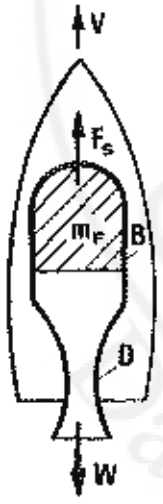
وتبلغ P قيمتها الأعظمية بالنسبة للدولاب طاحونة مساحته $A = \pi r^2$ معلومة عندما تكون السرعة خلف الدولاب $V_2 = V_1 - w = V_1/3$ ، أي عندما تكون سرعة التيار النافوري في مستوي الدولاب $V' = \frac{2}{3} V_1$ ، كما يمكن التأكد

من ذلك بسهولة . وهنا أيضاً يتطلب الحساب الدقيق للقوة الدافعة والاستطاعة الفعلية الاعتماد على نظرية الريشة الحاملة [121] [120] .

## ٩.٢.٥.٨ حساب السرعة النهائية للصاروخ ، قانون زيولكوفسكي

إن مبدأ عمل الصاروخ البسيط يشبه مبدأ عمل المروحة من حيث أنه يولّد قوة دافعة نتيجة تسريع تيار نافوري يقذف به للخلف . ولكن الفارق الأساسي أن المروحة تستطيع توليد قوة دافعة خلال فترة زمنية غير محدودة نظرياً ( طالما تدور المروحة ) بسبب كون السائل المحيط بها لانهائي الامتداد ، بينما يكون تأثير القوة الدافعة للصاروخ محدوداً زمنياً بفترة تتعلق بكتلة «الوقود» التي يحملها الصاروخ في داخله .

يتألف الصاروخ من حيث المبدأ، الشكل (٥٤.٨) ، من خزان B متحمل للضغوط العالية يحتوي كتلة « الوقود » $m_F$ التي يتم تسريعها عبر نفاثة الخروج D ، التي تكون بشكل نفاثة **لافال** ، لأن سرعة الخروج تبلغ عادة أضعاف سرعة الصوت . ويصمم جسم الصاروخ الخارجي بشكل انسيابي مناسب . أما القدرة اللازمة لتوليد التيار النافوري فيمكن تخزينها بأشكال مختلفة ، أبسطها كقدرة ضغط في حال استعمال هواء مضغوط ، حيث تغلق نفاثة الخروج بصمام يفتح عند إطلاق الصاروخ . كما يمكن أيضاً استخدام الماء الساخن . ولكن عندما يراد تخزين قدرة وكتلة أكبر فتستعمل أنواع الوقود الصلبة أو السائلة التي تحرر قدرتها نتيجة تفاعلات كيميائية كالأكسجين السائل مع الكحول أو البنزين وغيرها ، انظر مثلاً [26] .




الشكل ٥٤.٨ : مبدأ عمل الصاروخ .

لتكن $m_F$ الكتلة الاجمالية للوقود في لحظة الإقلاع ، $t = 0$ ، $m_R$ = كتلة جسم الصاروخ ، فتكون الكتلة الاجمالية في لحظة الاقلاع : $m_0 = m_R + m_F$ . نفرض $\dot{m}$ التيار الكتلي الخارج من النفاثة (أي بسرعة ثابتة عادة $W$ بالنسبة لجسم الصاروخ . فإذا اعتبرنا $\dot{m} = \text{const}$ ، وذلك في حال استهلاك ثابت للوقود ، فإن قوة رد فعل التيار النافوري المكافئة للقوة الدافعة للصاروخ والتي لا تتعلق في حال إهمال مقاومة الهواء بحركة الصاروخ تنتج :

$$F_S = \dot{m}\, W \qquad . \qquad (8.169)$$

وينتج الزمن الكلي لعمل الصاروخ :

$$T = m_F/\dot{m} \qquad . \qquad (8.170)$$

وتكون الكتلة الاجمالية الآنية للصاروخ في لحظة $t < T$ :

$$m = m_0 - \dot{m}\, t = m_R + m_F - \dot{m}\, t \qquad . \qquad (8.171)$$

نفرض أن الصاروخ لا يتعرض لأية قوى خارجية بما فيها قوة الثقالة ، وأن سرعته الآنية في اللحظة $t$ باتجاه القوة الدافعة هي $V$ . فتكون بموجب قانون المحافظ كمية الحركة ، عندما نأخذ حركة الصاروخ ككل بعين الاعتبار ، العلاقة التالية محققة :

$$F_S = m\,\frac{dV}{dt} = m\,\dot{V} = \dot{m}\, W \ , \qquad (8.172)$$

حيث $\dot{V}$ تزايد سرعة الصاروخ في واحدة الزمن . وبإدخال (8.171) نجد :

$$\dot{V} = \frac{dV}{dt} = \frac{\dot{m}}{m}\, W = \frac{\dot{m}\, W}{m_0 - \dot{m}\, t} \Rightarrow dV = \frac{\dot{m}\, W}{m_0 - \dot{m}\, t}\, dt \ .$$

فإذا اعتبرنا الشروط الحدية عند الإقلاع حيث تكون $V = 0$ عندما $t = 0$ ،

وراعينا أن $\dot{m}\,dt = -dm,\ W = const$ ، تنتج السرعة الآنية للصاروخ بعد الإقلاع بزمن $t > 1$ بالتكامل :

$$\int_0^V dV = -W\int_{m_0}^{m}\frac{dm}{m} \Rightarrow V = W\ln\frac{m_0}{m} \Rightarrow \frac{V}{W} = \ln\frac{m_R+m_F}{m_R+m_F-\dot{m}t},$$

أو باستخدام العلاقة ( 8.170 ) :

$$\frac{V}{W} = \ln\frac{m_R+m_F}{m_R+\dot{m}(T-t)} = \ln\left(1+\frac{m_F-\dot{m}(T-t)}{m_R+\dot{m}(T-t)}\right). \quad (8.173)$$

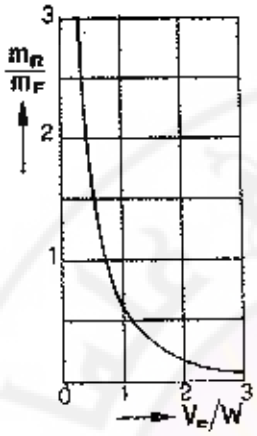
ويبلغ الصاروخ سرعته النهائية عندما تستهلك كتلة الوقود $m_F$ بكاملها ، أي عند $t = T$ ، وتكون :

$$\frac{V_e}{W} = \ln\left(1+\frac{m_F}{m_R}\right) = \ln\frac{m_0}{m_R} \Rightarrow \frac{m_R+m_F}{m_R} = e^{\frac{V_e}{W}}. \quad (8.174)$$

هذه هي العلاقة المعروفة باسم **قانون زيولكوفسكي** نسبة للعالم الروسي - السوفييتي الشهير الملقب بأبي الصواريخ ورحلات الفضاء والذي توصل إلى هذه العلاقة عام 1898 . وقد وضع بشكل مبكر جداً نظرية رياضية دقيقة لحركة الصواريخ وتصميمها وبرهن عن إمكانية استخدامها لغزو الفضاء وحسب كمية الوقود اللازمة للتغلب على الجاذبية الأرضية ومقاومة الهواء التي أهملت في العلاقات السابقة .

الشكل ( ٥٥٠٨ ) يبين العلاقة بين نسبة السرع $V_e/W$ ونسبة الكتل $m_R : m_F$ بموجب ( 8.174 ) . ونلاحظ أنه لكي تبلغ السرعة النهائية للصاروخ قيمة سرعة خروج التيار الكتلي يلزم أن تكون كتلة الوقود عند الاقلاع $m_F = m_R(e-1) = 1.718\,m_R$ ، أي تزيد بأكثر من 70 % عن كتلة جسم الصاروخ . من هذا الشكل يمكن أيضاً الحصول على سرعة الصاروخ

الآنية V إذا وضعنا $m_F - \dot{m}(T-t)$ بدلاً من $m_F$ و $m_R + \dot{m}(T-t)$ بدلاً من $m_R$ ، كما نلاحظ من الشكل أيضاً أنه بالامكان الحصول على سرعات نهائية أكبر بكثير من السرعة W . ولكن ذلك يتطلب تخزين كميات كبيرة من الوقود ، أو اللجوء لاستخدام الصواريخ المتعددة المراحل .




الشكل ٨.٥.٥ : العلاقة بين السرعة النهائية للصاروخ وكتلة الوقود الابتدائية في حال غياب القوى الخارجية والمقاومة .

إن التطور الذي تحقق في مجال بناء الصواريخ خلال العقدين الأخيرين واستخدامها في مجالات عديدة ، وخاصة في مجال غزو الفضاء ، كان مذهلاً ، وأدى إلى تطوير فرع علمي شبه مستقل ذاتياً ، يُعرف باسم تكنيك الصواريخ . وغني عن القول أن النظرية المتكاملة لحركة الصاروخ معقدة جداً إذا أردنا منهـــا التحديد الدقيق للسرعة اللحظية والنهائية للصاروخ ومساره الفعلي وموردوده عند قيم أفضلية لنسبة الكتل والسرع مع أخذ العوامل المتعددة الخارجية مثل تأثير الجاذبيـة الارضية وتغير التسارع الارضي مع الارتفاع وكذلك مقاومة الهواء التي تتعلق بعدد رينولدز وعدد ماخ وبشكل جسم الصاروخ بالاضافة للعوامل الداخلية الناتجة عن عملية احتراق الوقود وتمدد الغاز في فتحة الخروج والاحتراق اللاحق فيها .

إن مبدأ الصاروخ مستخدم في عدد كبير من آلات أو محركات الدفع الحرارية أهمها المحرك النفاثي Jet-Engine ، ومحرك لورين Ram-Jet ، والمحرك التوربيني (النفاث) المستخدم في الطائرات الحديثة بشكل واسع . ويجب العودة للمراجع المختصة لدراسة تفاصيل هذه المحركات التي نجد في [26] [27] فكرة عامة عنها .

## ٨.٥.٣.١٠ تطبيق قانون الدفع الخطي على جريان شبه مستقر

لقـــد سبق وأشرنا ( ص ٣٣١ ) إلى أن قانون الدفع الخطي ينطبق على الجريانات شبه المستقرة ، التي تتصف بأن حركتها يمكن اعتبارها مؤلفة من حركة

مسنقرة بسرعة وسطية زمنياً $\overline{V}$ لا تتغير موضعياً مع الزمن خلال المجال الزمني المختار $\Delta t$ ، وحركة مضطربة (مشوشة) تتذبذب حول $\overline{V}$ بسرعة $V'$ . وعليه تكون السرعة الموضعية تحقق العلاقات التالية (انظر ص ١٨٤ ، وخاصة العلاقة (5.23) والشكل (٤٠٥) ):

$$V = \overline{V} + V' \quad ; \quad \overline{V} = \frac{1}{\Delta t}\int_{0}^{\Delta t} V\,dt \quad ; \quad \overline{V'} = 0 . \qquad (8.175)$$

أي أن القيم الوسطية زمنياً لتذبذبات السرعة ، $\overline{w'}$ ، $\overline{v'}$ ، $\overline{u'}$ ، تكون بالتعريف معدومة ، بينما لا ينطبق ذلك على القيم الوسطية لجداءاتها أو لمربعاتها [4] .

في ضوء ما تقدم فإن تطبيق قانون الدفع الخطي على جريان شبه مستقر دون أخذ تذبذبات السرعة بعين الاعتبار ، كما حدث ذلك ضمناً عند حساب الفقد الصدمي ( ٤٠٢٠٥٠٨ ) ، يعطي كنتيجة قيمة وسطية زمنياً لمحصلة القوى لا تنطبق على الواقع تماماً ، كما يؤكد ذلك المثال البسيط التالي .

نعتبر جرياناً مستوياً مركباً سرعته حسب (8.175) : $u = \overline{u} + u'$ و $v = \overline{v} + v'$ في اتجاه المحورين x و y . لنحسب تيار الدفع في اتجاه x الذي يعبر جزءاً من سطح التحكم موازياً للمحور y ( دليل 1 ). وحيث أن كتلة السائل الجزئية التي تعبر واحدة السطح في اتجاه x خلال الزمن dt وبسرعة آنية u هي $\rho\,u\,dt$ فيكون تيار الدفع المكافىء للقيمة الوسطية لكمية الحركة في واحدة الزمن مأخوذة خلال المجال الزمني $\Delta t$ معطى بالعلاقة :

$$\frac{B_{x_1}}{\Delta t} = I_{x_1} = \frac{1}{\Delta t}\int_{0}^{\Delta t} \rho\,u^2\,dt = \rho\,\overline{u^2} \quad ,$$

حيث $\overline{u^2}$ القيمة الوسطية زمنياً لمربع السرعة الموضعية الآنية . ولكن :

$$\overline{u^2} = \overline{(\bar{u}+u')^2} = \overline{\bar{u}^2} + \overline{u'^2} + 2\,\overline{\bar{u}u'} = \bar{u}^2 + \overline{u'^2}\,;\ (\bar{u}' = 0)\ .$$

إذن يكون :

$$I_{x_1} = \rho\,\bar{u}^2 + \rho\,\overline{u'^2}\ ;\ (\overline{u'^2} \neq 0)\ . \qquad (8.176)$$

ومنه يتبين أن تيار الدفع الفعلي في اتجاه x ، في حال أخذ تذبذبات السرعة بعين الاعتبار ، يكون أكبر من تيار الدفع لجريان مستقر سرعته $\bar{u}$ بالمقدار $\rho\,\overline{u'^2}$ بالنسبة لكل واحدة من سطح التحكم الموازي للمحور y . هذا الفرق يكافيء تيار دفع إضافي رد فعله يؤثر من الخارج الى الداخل و كأنه ضغط إضافي :

$$p_u = \rho\,\overline{u'^2} \qquad . \qquad (8.177)$$

نعتبر الآن جزءاً من سطح التحكم موازياً للمحور x ( دليل 2 ) . إن كتلة السائل التي تعبر واحدة السطح خلال الزمن dt تساوي $\rho\,v\,dt$ وتتحرك باتجاه x بسرعة u . وعليه يكون تيار الدفع في اتجاه x المكافيء لكمية الحركة الوسطية في واحدة الزمن مأخوذة خلال المجال الزمني $\Delta t$ معطى بالعلاقة :

$$I_{x_2} = -\frac{B_{x_2}}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t}\int_0^{\Delta t} \rho\,v\,u\,dt = \rho\,\overline{uv}\ .$$

وحيث ان القيمة الوسطية زمنياً لجداء مركبتي السرعة الآنيتين :

$$\overline{uv} = \overline{(\bar{u}+u')\,(\bar{v}+v')} = \overline{\bar{u}\,\bar{v}} + \overline{u'v'} + \overline{u'\bar{v}} + \overline{v'\bar{u}}\ ;\ (\overline{u'} = \overline{v'} = 0)\ ,$$

ينتـــج :

$$I_{x_2} = \rho\,\bar{u}\,\bar{v} + \rho\,\overline{u'v'}\ ;\quad (\overline{u'v'} \neq 0) \qquad . \qquad (8.178)$$

وهذا يبين أن تيار الدفع الفعلي في اتجاه x ، عند أخذ تذبذبات السرعة بعين

الاعتبار ، يختلف عن تيار الدفع لجريان مستقر مركبتا سرعته $\bar{u}$ و $\bar{v}$ بمقدار يتناسب مع القيمة الوسطية لجداء مركبتي تذبذب السرعة في اتجاه x و y ويساوي $\rho\overline{u'v'}$ بالنسبة لواحدة سطح التحكم الموازي للمحور x . إن رد فعل تيار الدفع الاضافي هذا يكافيء قوة موازية للمحور x ، أي إجهاد قص إضافي :

$$\tau_w = -\rho\overline{u'v'} \qquad (8.179)$$

يطلق عليه **إجهاد القص الظاهري أو الاعصاري** Vortex shear stress ، لأنه لا ينتج عن لزوجة السائل بل عن تذبذبات السرعة . وحيث أنه في الحالة العامة يكون الجداء $\overline{u'v'}$ سالباً ، كما سنوضح ذلك فيما بعد ، فيكون بالتالي $\tau_w$ موجباً ، ويصبح إجهاد القص الكلي $\tau_{tur}$ لمثل هذه الجريانات المضطربة عادة ، مؤلفاً من جزء ناتج عن اللزوجة $\tau_{lam}$ يخضع لقانون نيوتن (2.12) وجزء ناتج عن تذبذبات السرعة التي تسببها الاعاصير :

$$\tau_{tur} = \tau_{lam} + \tau_w = \eta\frac{\partial u}{\partial n} + \rho\overline{u'v'} \quad . \qquad (8.180)$$

وعليه نخلص للنتيجة الهامة التالية :

> إن تذبذبات السرعة للجريان غير المستقر تسبب بالمقارنة مع الجريان شبه المستقر ضغطاً إضافياً يتناسب مع مربع تذبذب السرعة وإجهاد قص إضافياً يتناسب مع جداء تذبذب مركبات السرعة، بحيث تبدو مثل هذه الجريانات (المضطربة عادة) وكأنها «أكبر» لزوجة من الجريانات المستقرة (الصفائحية).

## ٦.٨ أسئلة مراجعة وتمارين

س ٦.٨ : استخرج قانون الدفع الخطي العام لجريان غير مستقر ، أوضح أهمية هذا القانون العملية في حالة جريان مستقر بالمقارنة مع معادلة برنولي .

س ١٢.٨ : لماذا تتجنب كتصميم كل تغير مفاجيء لمقاطع الأنابيب ؟

س ١٣.٨ : المردود النظري لمروحة رانكين المثالية يمثل عند قوة دفع معينة المردود الأعظمي لأية مروحة فعلية . علل السبب .

س ١٤.٨ : في المنفثات القطرية يخرج الماء من الدولاب الدائر بشكل قطري تقريباً. علل السبب .

س ١٥.٨ : محور المروج أو دولاب زيجنر Segner Wheel أبسط أشكاله يتألف من أنبوب أفقي مستقيم نهايتاه مفتوحتان ومعكوفتان بشكل قائم ويرتكز في منتصفه ، حيث يدخل الماء على محور شاقولي يستطيع الدوران حوله في دخل اليه الماء. اشرح مبدأ عمله.

س ١٦.٨ : لماذا يعتبر شبك البروفيلات المستقيم العنصر الأساسي لنقل القدرة في كل آلة جريان محورية ؟

س ١٧.٨ : ماذا ينص قانون كوتا ـ يوكوفسكي ، وكيف تفسر نشوء قوة الرفع لجناح حامل ؟

س ١٨.٨ : لماذا تبدو الجريانات المضطربة « أكبر » لزوجة من الجريانات الصفائحية ؟

س ١٩.٨ : عندما تدور اسطوانة دائرية لا نهائية الامتداد بسرعة زاوية ثابتة حول محورها الأفقي في جريان انسحابي منتظم عمودي على مولدها تتعرض لقوة شاقولية تعرف باسم تأثير ماجنوس Magnus effect . علل سبب نشوئها .

ت ٦.٨ : عندما يتحرك الجناح الحامل المحدود الامتداد بسرعة $V_\infty$ في هواء ساكن عديم اللزوجة فإنه يتعرض لقوة باتجاه الجريان تعاكس حركته تعرف باسم المقاومة المحرضة $F_{Wi}$ Induced drag ، تنتج ، حسب نظرية الجناح الحامل التي وضعها برانتل ، بسبب أن الهواء في أثر الحر يتحرك نحو الاسفل . فاذا فرضنا أن حركة الهواء نحو الأسفل هذه تمتد من حافة الجناح الخلفية على كامل مسار الجناح في منطقة مساحة مقطعها العمودي على $V_\infty$ يساوي $A'$ ، بينما خارج هذه المنطقة يبقى الهواء ساكناً ، أحسب $F_{Wi}$ بدلالة قوة الرفع $F_A$ والضغط التحريكي $q_\infty = \frac{\rho}{2} V_\infty^2$ .

الحل : عندما يكون الجناح لانهائي الامتداد فان قوة الرفع $F_A$ المؤثرة عليه تكون متعامدة مع $V_\infty$ ، حسب قانون كوتا ـ يوكوفسكي ، ولا يتعرض الجناح في حالة سائل مثالي لأية مقاومة . أما في حالة الجناح المحدود الامتداد فتتشكل خلف الجنـــاح جديلة إعصارية

(الشكل ٨-١٦-د) تحرض سرعة نحو الأسفل $v_i$ تحسب بموجب قانون بيو - سافار . وينتج من ذلك ان سرعة الهواء خلف الجناح $V_e$ تساوي المحصلة الشعاعية للسرعتين $V_\infty$ و $v_i$ ، وتكون بالتالي للقوة الفعلية المؤثرة على الجناح مركبة في اتجاه الجريان هي المقاومة المحرضة وأخرى هي قوة الرفع .

إن القدرة الحركية المتولدة في واحدة الزمن للجريان خلف الجناح تكافىء الاستطاعة التي تستهلكها المقاومة المحرضة نتيجة انتقالها بسرعة $V_\infty$ . وعليه ينتج :

$$W_{ki} = \rho A' V_\infty \frac{v_i^2}{2} = P_i = F_{Wi} V_\infty \Rightarrow F_{Wi} = \rho A' \frac{v_i^2}{2} . \qquad (a)$$

من جهة أخرى ينتج عن قانون الدفع الخطي بالنسبة لكتلة الهواء التي تعبر $A'$ أن قوة الرفع تساوي رد فعل تيار الدفع . وعليه تكون :

$$F_A = \rho A' V_\infty . v_i \Rightarrow v_i = F_A/\rho A' V_\infty \qquad (b)$$

ومنه نجد العلاقة المطلوبة :

$$F_{Wi} = \frac{F_A^2}{2\rho A' V_\infty^2} = \frac{F_A^2}{4 q_\infty A'} , \qquad (c)$$

بمساعدة نظرية الجناح الحامل يمكن البرهان (انظر [4]) أن $F_{Wi}$ تكون أصغر ما يمكن في الحالة التي تكون فيها قوة الرفع موزعة بشكل نصف قطع ناقص على امتداد الجناح $b$ . عندئذ تكون السرعة المحرضة $v_i$ ذات قيمة ثابتة على امتـــداد $b$ ويكون السطح $A'$ يكافىء سطح دائرة بقطر $b$ ، أي $A' = \frac{\pi}{4} b^2$ . فاذا فرضنا $l$ طول وتر بروفيل الجناح وأدخلنا معامل قوة الرفع $c_A = F_A/q_\infty b l$ ومعامل المقاومة المحرضة $c_{Wi} = F_{Wi}/q_\infty b l$ نجد أخيراً من (c) العلاقة المعروفة :

$$c_{Wi} = c_A^2 \frac{l}{\pi b} , \qquad (d)$$

ت ٨-٧ : أحسب القوة المحورية المؤثرة عند بدء عملية التفريغ لسائل عديم الاحتكاك من أوعية مختلفة الاشكال ، كالمبينة في الشكل (٨-٣٢) ، عندما يبقى منسوب السائل في الوعاء ثابتاً ويؤثر على سطحه السائب نفس الضغط المؤثر على فتحة التفريغ .

الحل : نطبق قانون الدفع العام لجريان غير مستقر على سطح تحكم يحيط بالكتلة الآنية في الوعاء بما فيها فتحة التفريغ فتنتج حسب (8.106) قوة رد فعل السائل $\mathbf{F}_s$ – بعد إهمال قوى الثقالة ووضع $\mathbf{F}_f = 0$ ، لأن الضغط المؤثر على الجزء الحر من سطح التحكم واحد كما هو مفروض ، بالصيغة :

$$\mathbf{F}_s = -\int \frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{V})\, dV + \int_{(-cs_{out})}^{(+cs_{in})} \rho \mathbf{V}.\mathbf{V}_n\, dA \qquad . \qquad (a)$$

إن سرعة التفريغ $V_2$ تنتج من (8.81) ، وتكون السرعة $V$ في مقطع آخر $A$ بموجب معادلة الاستمرار :

$$V = V_2 \frac{A_2}{A} = \sqrt{2gH}\,\frac{A_2}{A}\tanh\frac{\sqrt{2gH}\,t}{2L} \quad ; \left(L = \int_0^{s_2} \frac{A_2}{A}\, ds\right) \quad .$$

وعليه ينتج مشتق السرعة بالنسبة للزمن :

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{2gH}{2L}\frac{A_2}{A}\frac{1}{\cosh^2\dfrac{\sqrt{2gH}\,t}{2L}} \quad .$$

فإذا لاحظنا أن التكامل سيتمّ في لحظة معينة ، وأن العنصر الحجمي $dV = A\, ds$ ، وأن كمية السائل الداخلة لسطح التحكم معدومة فيكون تكامل تيار الدفع بالنسبة لـ $cs_{in}$ معدوماً، ويبقى بسبب $V_2 = V_{2n}$ التكامل $dA = -\rho V_2^2 A_2$ ، $\int_{(-cs_{out})} \rho V.V_n$ ونجد بالتالي من (a) بعد إصلاح بسيط :

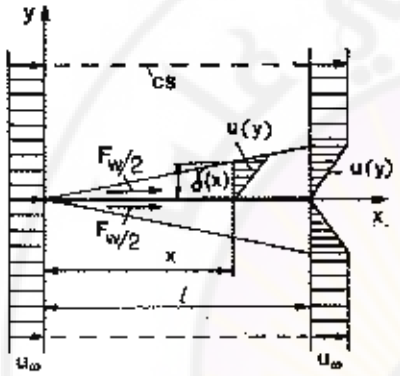
$$F_s = 2\rho g H A_2 \left\{ \frac{-H}{2L.\cosh^2\dfrac{\sqrt{2gH}.t}{2L}} - \tanh^2\frac{\sqrt{2gH}.t}{2L} \right\} . \qquad (b)$$

عند الزمن $t = 0$ ، أي فور فتح صمام التفريغ تؤثر القوة المحورية :

$$F_{s\,(t=0)} = -\frac{2\rho g H^2 A_2}{2L} \quad , \qquad (c)$$

التي تكون كبيرة كلما كانت قيمة $L$ صغيرة ، أي كلما كانت كمية السائل الواجب تسريعها في فتحة التفريغ صغيرة ، وهذا ما ينطبق على الوعاء المبين في الشكل (٣٢٠٨ - a) .

ت ٨،٨ : صفيحة مستوية أفقية طولها $l$ وعرضها $b$ ، يمر عليها جريان منتظم حقيقي مواز لمستويها بسرعة $U_\infty$ الشكل (ت ٨،٥) . حول الصفيحة تتشكل طبقة حدية سماكتها $\delta = f(x)$ وتوزع السرعة فيها يحقق الشروط الحدية التالية : $u(y) = U_\infty$ عندما $\delta < y$ ، $u(y) = c.y$ عندما $0 \leqq y \leqq \delta$ حيث $c$ ثابت التناسب . أحسب مقاومة الاحتكاك $F_W$ وأوجد علاقتها مع عدد رينولدز $\mathrm{Re} = \frac{U_\infty l}{\nu}$ واحسب قيمتها عندما: $l = b = 10\ \mathrm{cm}$ ، $U_\infty = 50\ \frac{\mathrm{m}}{s}$ ، $\nu = 1{,}01.10^{-6}\ \frac{\mathrm{m}^2}{s}$ ، $\gamma = \rho\nu = 1{,}03.10^{-1}\ \frac{\mathrm{kps}}{\mathrm{m}^3}$ .




الشكل ت ٨،٥

الحل : إن المقاومة التي تتعرض لها الصفيحة المستوية هي مقاومة احتكاك بحتة تقريباً ناتجة عن إجهادات القص المؤثرة ضمن منطقة جريان الطبقة الحدية فقط . فاذا كان $\tau_s$ إجهاد القص على كل من وجهي الصفيحة فتكون :

$$F_W = 2\int_A \tau_s\, dA = 2b\int_0^l \tau_s\, dx \qquad (a)$$

من جهة أخرى تنتج $F_W$ من العلاقة (8.132) مع مراعاة ان تجويف السرعة ينعدم خارج الطبقة الحدية :

$$F_W = \rho b\int_{-\delta}^{\delta} u(U_\infty - u)\, dy = 2\rho b\int_0^{\delta} u(U_\infty - u)\, dy \qquad (b)$$

وبمقارنة العلاقتين نجد :

$$\rho\int_0^{\delta} u(U_\infty - u)\, dy = \int_0^l \tau_s\, dx \qquad (c)$$

بموجب الشروط الحدية للمسألة فإن :

$$u(y) = U_\infty\,\frac{y}{\delta} \qquad (d)$$

وينتج بالتالي إجهاد القص من قانون نيوتن للاحتكاك (2.12) :

$$\tau_s = \eta \left(\frac{du}{dy}\right)_{y=0} = \eta \frac{U_\infty}{\delta} \quad . \qquad (e)$$

إذن يلزم تحديد $\delta$ . لذلك نشتق (c) بالنسبة لـ x ونستخدم (e) فينتج :

$$\rho \frac{d}{dx} \int_0^\delta u (U_\infty - u)\, dy = \tau_s = \eta \frac{U_\infty}{\delta} \quad .$$

نستبدل u بقيمتها حسب (d) ونصلح قليلاً فنجد بعد التكامل :

$$\rho \frac{d}{dx} \int_0^\delta U_\infty \left[\frac{y}{\delta} - \left(\frac{y}{\delta}\right)^2\right] dy = \frac{\eta}{\delta} \Rightarrow \rho U_\infty \frac{d}{dx}\left(\frac{\delta}{6}\right) = \frac{\eta}{\delta}$$

بفصل المتحولات وإجراء التكامل للطرفين وملاحظة أنه من أجل $x = 0$ تكون $\delta = 0$ نجد توزع سماكة الطبقة الحدية :

$$\delta = \sqrt{\frac{12\,\eta}{U_\infty \rho}}\, x = \sqrt{\frac{12\,\nu}{U_\infty}}\, x \quad . \qquad (f)$$

بذلك نحصل من (e) على توزع إجهاد القص على الصفيحة :

$$\tau_s = \sqrt{\frac{U_\infty^3\, \rho\, \eta}{12\, x}} = \rho \sqrt{\frac{U_\infty^3\, \nu}{12}}\, x^{-\frac{1}{2}} \quad . \qquad (g)$$

وتنتج أخيراً مقاومة الاحتكاك من (e) :

$$F_W = 2\,b\,\rho \sqrt{\frac{U_\infty^3\, \nu}{12}} \int_0^l x^{-\frac{1}{2}}\, dx = 4\,b\,\rho \sqrt{\frac{U_\infty^3\, \nu}{12}}\, l^{\frac{1}{2}} \quad .$$

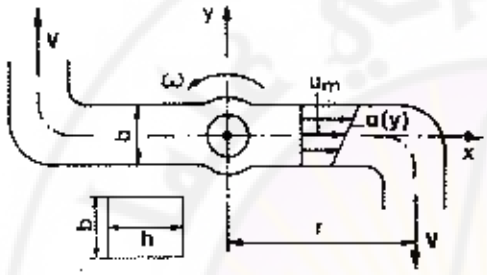
وبعد إصلاح بسيط نجد العلاقة $F_W = f(Re)$ بالصيغة :

$$F_W = \frac{2}{\sqrt{3}}\, b\, \rho\, U_\infty\, \nu \sqrt{\frac{U_\infty\, l}{\nu}} = \text{const} \cdot \sqrt{Re} \approx 1{,}165\, b\, \rho\, \nu l_\infty \sqrt{Re} \quad . \qquad (h)$$

وتنتج قيمتها العددية باستخدام القيم المعطاة : $F_W = 1{,}33$ kp .

ت ٩.٨ : قناة أفقية مقطعها بشكل مستطيل أبعاده b , h ترتكز في منتصفها على محور شاقولي تستطيع الدوران حوله بسرعة زاوية ω . إذا كان الماء يدخل من منتصف القناة ويخرج من نهايتيها المعكوفتين بشكل قائم ، الشكل (ت ٦٠٨) ، بسرعة أفقية v . أحسب عزم الدوران في جملة إحداثيات مطلقة ونسبية .

الحل : إذا كان r بعد محور نهاية القناة المعكوفة عن محور الدوران فتكون السرعة المطلقة التي يسجلها مراقب ثابت هي $V = v - \omega r$ . وتكون قوة رد فعل النافورة حسب (3.114) تساوي $\rho Q V$ . ونجد بالتالي عزم الدوران بالصيغة :



الشكل ت ٦٠٨

$$M_{abs} = \rho Q (v - \omega r) r , \quad (a)$$

حيث Q التيار الحجمي الكلي الذي يخرج من نهايتي القناة .

في جملة إحداثيات نسبية مثبتة على القناة فإن عزم رد فعل النافورة يلتج بالصيغة :

$$M' = \rho Q v . r \quad (b)$$

هذه النتيجة تختلف عن (a) لأننا لم نراع تأثير القوى الاضافية .

إن القوة النابذة تؤثر باتجاه x وتر بالتالي من مركز الدوران فعزمها إذن يساوي الصفر . وحيث ان تسارع كوريولس يتجه باتجاه y – فإن قوة كوريولس تكون متعامدة على اتجاه حركة جزيئات السائل في القناة ولا تقوم بأي عمل موجب . ولكنها تؤدي لازاحة الجزيئات على جدار القناة مما يؤدي لعدم انتظام توزع السرعة على عرض القناة ، $u = u(y)$ . وينجم عن ذلك فرق ضغط $\Delta p$ بين جداري القناة الشاقوليين ، أي باتجاه y . فاذا اعتبرنا حسب [4] [26] [85] توزع السرعة u (y) خطياً وكانت $u_m$ السرعة في اتجاه محور القناة ، فان فرق الضغط $\Delta p$ ينتج من شرط التوازن بين قوة كوريولس ومحصلة قوى الضغط على جدران القناة . وبالتالي يكون :

$$\frac{\Delta p}{b} = \rho . 2 \omega u_m \Rightarrow \Delta p = 2 \rho b \omega u_m \quad , \quad (c)$$

ويكون لمحصلة قوى الضغط $F_p = \Delta p\, h\, r$ ، التي يمكن اعتبارها تؤثر على بعد r/2 من محور الدوران ، عزم اتجاهه يعاكس دوران القناة ، أي :

$$M' = -F_p \frac{r}{2} = -\Delta p\, h \frac{r^2}{2} = -\rho\, b\, h\, \bar{u}_m \cdot \omega r^2 = -\rho\, Q\, \omega r^2 \quad , \qquad (d)$$

حيث Q التيار الحجمي عبر مقطع القناة الشاقولي ، وعليه ينتج عزم الدوران في جملة الاحداثيات النسبية :

$$M_{rel} = M' + M^* = \rho Q (v - \omega r)\, r \quad , \qquad (e)$$

وهذه طبعاً نفس العلاقة (a) لأن عزم الدوران لايمكن أن يتعلق بجملة الاحداثيات المختارة .

الجدير بالاشارة أن العلاقة (e) يمكن استخراجها بمساعدة معادلة برنولي للجريانات النسبية (8.22) مع الأخذ بعين الاعتبار أن ثابتة برنولي تكون واحدة لكافة خطوط التيار ( انظر ص ٢٦٩ ) .

## ٩ المعادلات الاساسية للجريانات المثالية ثنائية وثلاثية البعد

بينما تعتمد نظرية خيط التيار على المعرفة المسبقة لشكل أنبوبة التيار ووضعيتها المكانية، فإن صورة خطوط التيار لا تكون في الحالة العامة للجريان معلومة . لهـذا فإن دراسته التحريكية معقدة ، حتى في حالة إهمال اللزوجة .

### ١.٩ معادلات أويلر الحركية العامة

نعتبر الحركة العامة الفراغية ( ثلاثية البعد ) لسائل عديم الاحتكاك كثافته $\rho$ . لتكن $w, v, u$ مركبات شعاع السرعة V في اتجاه المحاور الديكارتية المتعامدة $z, y, x$ . نقتطع من الجريان عنصراً حجمياً متناهياً في الصغر بشكل متوازي مستطيلات أبعاده $dz, dy, dx$ ، وكتلته $dm = \rho\, dx\, dy\, dz$ ، الشكل (١.٩) . إن حركة هـذا الجزيء تخضع لقانون نيوتن الاساسي للتحريك (8.3) :

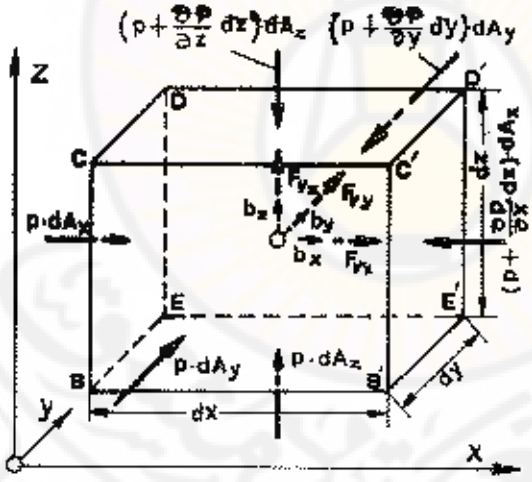
$$dF_x = dm \cdot b$$

لتكن $F_{V_x}, F_{V_y}, F_{V_z}$ مركبات محصلة القوى الحجمية $F_V$ بالنسبة لواحدة الكتلة المؤثرة على العنصر الحجمي في اتجاه المحاور الديكارتية . وحيث أن السائل عديم الاحتكاك فإن القوى السطحية تنحصر بقوى الضغط فقط . ونجد بسهولة ، باستخدام رموز الشكل (١٠٩) وإهمال كافة حدود المراتب العليا بعد نشر تابع الضغط بشكل سلسلة تايلور ، مركبات قوى الضغط في اتجاه z,y,x بالشكل التالي :

$$dF_{p_x} = -\frac{\partial p}{\partial x}\,dx \,.\, dA_x = -\frac{\partial p}{\partial x}\,dx\,.\,dy\,dz,$$

$$dF_{p_y} = -\frac{\partial p}{\partial y}\,dy \,.\, dA_y = -\frac{\partial p}{\partial y}\,dy\,.\,dz\,dx,$$

$$dF_{p_z} = -\frac{\partial p}{\partial z}\,dy \,.\, dA_z = -\frac{\partial p}{\partial z}\,dz\,.\,dx\,dy.$$




الشكل ١٠٩ : اشتقاق معادلات أويلر الحركية العامة .

أما التسارع المادي المؤثر على الجزيء الحجمي فيتألف في الحالة العامة من التسارع المكاني وتسارع الحمل وتكون مركباته حسب (5.13) هي :

$b_x = \frac{Du}{Dt}$ , $b_y = \frac{Dv}{Dt}$ , $b_z = \frac{Dw}{Dt}$ ؛ حيث $\frac{D}{Dt}$ يمثل حسب (5.12) الكسر التفاضلي المادي . وعليه تنتج من تطبيق قانون التحريك الاساسي في اتجاه المحاور x, y, z بعد الاختصار على dm وإجراء إصلاحات بسيطة جملة المعادلات التفاضلية الهامة التالية :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{Du}{Dt} = F_{V_x} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} &= \frac{Dv}{Dt} = F_{V_y} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} &= \frac{Dw}{Dt} = F_{V_z} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned}\right\} \quad , (9.1)$$

المعروفة باسم **معادلات أويلر الحركية العامة** لجريان غير مستقر عديم الاحتكاك قابل أو غير قابل للانضغاط ، وذلك نسبة لـ **ليونهارد أويلر** الذي صاغها عام 1755 . فإذا كان لحقل القوى الحجمية كمون $\Phi_s$ ، وبالتالي تكون $\mathbf{F_V} = -\,\mathbf{grad}\,\Phi_s$ بموجب (3.55) ، فإن (9.1) تكتب بالصيغة الشعاعية البسيطة التالية :

$$\frac{D\mathbf{V}}{Dt} + \frac{1}{\rho}\,\mathbf{grad}\,p + \mathbf{grad}\,\Phi_s = 0 \quad . \qquad (9.2)$$

إن معادلات أويلر الحركية تمثل في كل لحظة حالة التوازن بين قوى العطالة ( قوة دالمبير ) والقوى الحجمية وقوى الضغط المؤثرة على أي جزيء حجمي من سائل عديم الاحتكاك ، وبالتالي فهي تكوّن الاساس الذي يرتكز عليه علم الهيدروديناميك والغازديناميك . وتتضمن في حالة سائل قابل للانضغاط $\rho \neq \text{const}$ خمسة مجاهيل هي : $\rho, p, w, v, u$ . وبالتالي تلزم الاستعانة بمعادلتين إضافيتين . الاولى معادلة الاستمرار العامة (6.15) :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial (\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial (\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial (\rho w)}{\partial z}=0 \quad \text{أو} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho \mathbf{V})=0 \ , \qquad (9.3)$$

والثانية أحـــد قوانين تغير الحالة ( راجع ٨.٢ ) ، كقانون تغير الحالة الأديباتي مثلاً :

$$p/\rho^{\kappa} = \text{const} \ . \qquad (9.4)$$

أما في حالة السوائل غير القابلة للانضغاط ، $\rho = \text{const}$ ، فتتضمن (9.1) أربعة مجاهيل فقط هي $p, w, v, u$ ، وتكفي بالتالي لإيجادها الاستعانة بمعادلة الاستمرار (6.21) :

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \quad \text{أو} \quad \operatorname{div} \mathbf{V}=0. \qquad (9.5)$$

في حالة الجريانات المستقرة تنعدم في معادلات أويلر الحركية كافة المشتقات الجزئية بالنسبة للزمن ، $\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}=\frac{\partial \rho}{\partial t}=0$ ، وتتبسط صيغتها . ولكنهـــا تبقى بسبب تضمنها الحدود المعبرة عن قوى العطالة ، كالحد $u\frac{\partial u}{\partial x}$ مثلاً ، تمثل جملة معادلات تفاضلية جزئية غير خطية من الدرجة الأولى . وهـذه الصفة غير الخطية تعيق الى حد كبير جداً إيجاد حلول عامة لها إلا في بعض الحالات القليلة المعروفـة . وسنقتصر في هذا الفصل على معـالجة الحلول المتعلقـة بالجريانات المثالية فقط .

## ٢.٩ الحلول الممكنة لمعادلات أويلر الحركية

### ١.٢.٩ الشروط الحدية وشروط البدء

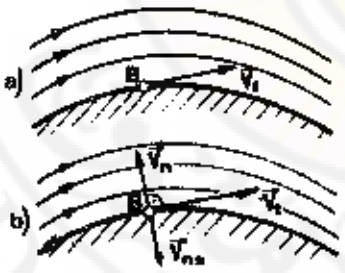
بالنسبة لغالبية مسائل الجريان ذات الاهمية العمليـة يتركز السؤال عادة على معرفة القيم الحركية والتحريكية ( السرعة والضغط ) للجريان حول سطوح

الاجسام الصلبة ، التي يمكن ان تكون ثابتة أو متحركة في السائل ، ولكنها كثيفة عادة لا تسمح بنفوذ السائل عبرها. لذلك فإن الحل العام لمعادلات أويلر الحركية يجب ان تراعي الشروط الخاصة لحقل الجريان المعتبر ، التي تنقسم الى شروط حدية Boundary conditions وشروط ابتدائية Initial conditions. وتنقسم الشروط الحدية بدورها الى شروط تحريكية وشروط حركية .

الشروط الحدية التحريكية تراعي القوى المؤثرة على الحدود الخارجية لحقل الجريان . فإذا وجد لهذا الحقل سطح حر يفصل بين السائل والهواء الجوي فإن الضغط عليه يكون ثابتاً ويساوي ضغط عمود الهواء الجوي القابع فوقه .

الشروط الحدية الحركية تراعي قيم السرعة على جدار الجسم الصلب مع أخذ طبيعة السائل والحركة النسبية بين الجسم ومحاور الاحداثيات بعين الاعتبار. فاذا كان السائل عديم الاحتكاك ، أي أن لزوجته معدومة ، $\eta = 0$ ، فانه ينزلق على الجدران الصلبة ولا يلتصق بها ، طالما أن هذه كثيفة . وهذا يعني أن جدار الجسم يجب ان يكون خط تيار ، تطابقاً مع تعريف الاخير ( انظر ٥.٥ ) .

عندما يكون الجدار الصلب ساكناً ، الشكل ( ٢٠٩ - a ) ، فإن الشروط الحدية الحركية تقضي بأن تكون المركبة الناظمية للسرعة $V_n$ في كل نقطة B على الجدار معدومة ، بينما تكون المركبة المماسية $V_t$ على طول الجدار لا تساوي الصفر عادة ، ويمكن أن تبلغ نظرياً قيماً غير محدودة . وعليه تكون :



الشكل ٢٠٩ : الشروط الحدية الحركية لجدار ساكن (a) وجدار متحرك (b).

$$V = V_t \neq 0 \; ; \; V_n = 0 \quad : (\eta = 0) \text{ على الجدار الساكن} \qquad (9.6)$$

الجدير بالانتباه هنا أنه في حالة الجريانات الحقيقية يلتصق السائل بحكم لزوجته على الجدران الصلبة ، وبالتالي ينعدم شعاع السرعة . وتقضي الشروط الحدية الحركية عندئذ ان تكون :

$$\boxed{V_t = V_n = 0 \quad ;(r_1 \neq 0) \text{ على الجدار}} \quad . \tag{9.7}$$

عندما يكون الجدار الصلب منحوتاً ، الشكل ( ٢٠٩ ـ b ) ، فإن الجريان يبقى ملاصقاً للجـــدار ولا ينفصل عنه أو ينفذ عبره فقط في الحالة التي تكون فيها المركبة الناظمية لسرعة كل نقطة B من جدار الجسم ، $V_{nB}$ ، تساوي وتعاكس المركبة الناظمية $V_n$ لسرعة السائل في B . عندئذ يكون الجدار خطاً للتيار وتتحقق الشروط الحدية الحركية عندما تكون :

$$\boxed{V_t \neq 0 \; ; \; V_n = V_{nB} \quad ;(r_1 = 0) \text{ على الجدار المتحرك}} \quad . \tag{9.8}$$

أخيراً فإن الشروط الابتدائية تراعي قيم حقل السرعة عند لحظة البدء $t = 0$ . فهي تقضي إذن أن يتضمن الحل العام لحقل السرعة القيم الخاصة عند لحظة البدء وبالتالي يمكن كتابتها بالصيغة :

$$V(s, t)_{t=0} \equiv V_0(s) . \tag{9.9}$$

إن الشروط الابتدائية لاغنى عنها لحل كافة مسائل الجريانات غيرالمستقرة.

## ٢.٣.٩ صياغة عملية لمعادلات أويلر الحركية

من المستحسن كتابة معادلات **أويلر** الحركية (9.1) بصيغة عملية تسمح بتطبيقها في حالة الجريانات **الدودانية** (الاعصارية) و **اللادودانية** (الكمونية)، لما تتصف به الاخيرة من ميزات من حيث المعالجة الرياضية بالمقارنة مع الأولى ( راجع ٢٠٧ ) .

نأخذ المعـــادلة الأولى من (9.1) ونضيف للطرف الأيسر الحدود

$\pm w\frac{\partial w}{\partial x}$ ، $\pm v\frac{\partial v}{\partial x}$ فنجد بعد إصلاح بسيط :

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial x}+w\frac{\partial w}{\partial x}\right)+v\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\right)+w\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)=F_{V_x}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

(9.10)

فإذا لاحظنا حسب (5.2) أن $|V|^2=u^2+v^2+w^2$ وأنه بموجب (7.6) و (7.15) يكون :

$$\text{rot } V=2\omega=i\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right)+j\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)+k\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)=$$

$$=2\left(i\omega_x+j\omega_y+k\omega_z\right), \qquad (9.11)$$

فيمكن كتابة حدود القوس الأول من (9.10) بالصيغة $\frac{1}{2}\frac{\partial|V|^2}{\partial x}$ ، واستبدال القوس الثاني بالحد $-2\omega_z$ ، والقوس الثالث بالحد $2\omega_y$ . فإذا اتبعنا بالنسبة للمعادلتين الثانية والثالثة من (9.1) خطوات مماثلة لما جاء أعلاه فإن معادلات أويلر الحركية تأخذ الصيغة العملية التالية :

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial|V|^2}{\partial x}+2\left(w\omega_y-v\omega_z\right)=F_{V_x}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\\
&\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial|V|^2}{\partial y}+2\left(u\omega_z-w\omega_x\right)=F_{V_y}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}\\
&\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial|V|^2}{\partial z}+2\left(v\omega_x-u\omega_y\right)=F_{V_z}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}
\end{aligned}\right\} \qquad (9.12)$$

يطلق على جملة المعادلات هذه اسم **معادلات جوروميكو ـ لامب التفاضلية** لحركة السوائل عديمة الاحتكاك ، وذلك نسبة للعالم الروسي I.S. Gromiko التي صاغها عام 1881 والانجليزي Lamb الذي صاغها بعده بفترة طويلة [16] [122]. وبالرغم من كونها لا تختلف بالمضمون عن معادلات أويلر الحركية ، فلها ميزة

أساسية هي احتواء مركبات شعاع الاعصار بشكل منفرد . وهذا يسهل إيجاد حلول مناسبة في حالة الجريانات الدورانية واللادورانية .

باستخدام العلاقات الشعاعية التالية :

$$\mathbf{V} \times 2\omega = \mathbf{V} \times \mathrm{rot}\,\mathbf{V} =$$
$$-\mathbf{i}\,(v\omega_z - w\omega_y) + \mathbf{j}\,(w\omega_x - u\omega_z) + \mathbf{k}\,(u\omega_y - v\omega_x), \quad (9.13)$$

$$\mathbf{grad}\,\frac{|\mathbf{V}|^2}{2} = \frac{\mathbf{i}}{2}\frac{\partial|\mathbf{V}|^2}{\partial x} + \frac{\mathbf{j}}{2}\frac{\partial|\mathbf{V}|^2}{\partial y} + \frac{\mathbf{k}}{2}\frac{\partial|\mathbf{V}^2|}{\partial z}\ , \quad (9.14)$$

$$\mathbf{F}_r = \mathbf{i}\,F_{r_x} + \mathbf{j}\,F_{r_y} + \mathbf{k}\,F_{r_z} = -\mathbf{grad}\,\Phi_e\ , \quad (9.15)$$

$$\mathbf{grad}\,p = \mathbf{i}\frac{\partial p}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial p}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial p}{\partial z}\ , \quad (9.16)$$

تصبح (9.12) كمعادلة شعاعية من الشكل :

$$\boxed{\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{grad}\,\frac{|\mathbf{V}|^2}{2} - \mathbf{V} \times \mathrm{rot}\,\mathbf{V} + \mathbf{grad}\,\Phi_e + \frac{1}{\rho}\mathbf{grad}\,p = 0}\ . \quad (9.17)$$

يمكن إرجاع كل حد من هذه المعادلة ، باستثناء $\mathbf{V} \times \mathrm{rot}\,\mathbf{V}$ ، الى تفاضل تام وإجراء التكامل بسهولة ، في حالة جريان مستقر . ولا يوجد في الحالة العامة لجريان دوراني وغير مستقر حل عام للمعادلة (9.17) .

## ٣.٢.٩ تكامل معادلات أويلر الحركية في حالة الجريانات الدورانية

إذا كانت جزيئات السائل تقوم بحركة دورانية حول محاور آنية وبسرعة زاوية $\omega$ فتكون حسب (7.18): $\omega = \frac{1}{2}\mathrm{rot}\,\mathbf{V} \neq 0$ ، عندئذ توجد حالتان خاصتان يمكن فيها مكاملة المعادلة (9.17) .

الحالة الأولى تتحدد من حقيقة أن الجداء الشعاعي للشعاعين V و rot V هو شعاع يتعامد على المستوي المتشكل منهما ، وبالتالي فإن $V \times \text{rot } V$ عمودي على شعاع السرعة V ، الذي يمس خط التيار في كل نقطة منه . وعليه يكون $\int_{(s)} (V \times \text{rot } V)\, ds = 0$ بالنسبة لكل خط تيار . فإذا فرضنا ds (dx,dy,dz) عنصراً خطياً من خط التيار الآني ، وضربنا طرفي (9.17) بـ ds ولاحظنا أن الجداء العددي لشعاع تدرج قيمة ما في عنصر خطي موجه يمثل التفاضل التام لهذه القيمة فإن العلاقة (9.17) تصبح بعد إهمال الحد الثالث من الشكل :

$$\frac{\partial V}{\partial t} ds + d\left(\frac{|V|^2}{2}\right) + d\Phi_s + \frac{dp}{\rho} = 0$$

فإذا كان السائل باروتروبياً وأدخلنا تابع الضغط $P(p) = \int \frac{dp}{\rho}$ تنتج بالمكاملة العلاقة :

$$\int_{(s)} \frac{\partial V}{\partial t} ds + \frac{|V|^2}{2} + \Phi_s + P = C_B(t) \ , \qquad (9.18)$$

التي تعرف باسم **معادلة برنولي العامة لجريان ثلاثي البعد باروتروبي**، $\rho = f(p)$، وغير مستقر . $C_B(t)$ تمثل **ثابتة برنولي** ويكون لها قيمة واحدة على طول خط تيار آني ، وتتغير بالتالي مع الزمن ، ومن خط تيار آني لآخر . كما يطلق على هذه المعادلة أحياناً اسم **معادلة لاغرانج ـ برنولي** .

في حالة الجريانات **المستقرة** ينعدم الحد الأول من (9.18) وتصبح من الشكل :

$$\frac{|V|^2}{2} + \Phi_s + P = \frac{|V|^2}{2} + \Phi_s + \int \frac{dp}{\rho} = C_B \ , \qquad (9.19)$$

حيث يكون لـ $C_B$ قيمة واحدة على طول خط التيار المعتبر . وتنتج قيمة تابع الضغط بالاستعانة بالعلاقة (9.4) مثلاً . وتتبسط هذه العلاقة عندما تكون

القوى الحجمية ناتجة عن حقل الجاذبية الأرضية وبالتالي $\Phi_s \equiv \Phi_m = g\,z$ .
كما يمكن في حالات عملية عديدة دراسة حركة السائل وكأنه ذو كتلة ولكن « بدون » وزن . وتأخذ عندئذ (9.19) الصيغة المختزلة :

$$\frac{|V|^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} = C_B \quad . \tag{9.20}$$

عندما تكون $\rho = \text{const}$ تتبسط المعادلات السابقة وتصبح (9.18) في حالة تأثير الثقالة كقوة خارجية من الشكل :

$$\int \frac{\partial V}{\partial t}\, ds + \frac{|V|^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = C_B \quad . \tag{9.21}$$

**وهذه هي معادلة برنولي العامة للجريانات غير المستقرة وغير القابلة للانضغاط.**
وتأخذ في حالة جريان مستقر لسائل «عديم» الوزن الصيغة المختزلة البسيطة :

$$\frac{|V|^2}{2} + \frac{p}{\rho} = C_B \quad . \tag{9.22}$$

والجدير بالملاحظة ان معادلة برنولي بصيغها الواردة أعلاه ، (9.18) حتى (9.22) ، تتميز بالمقارنة مع الصيغ المشتقة في الفقرة (٢٠٨) بكون السرعة $V = |V|$ تساوي جذر مجموع مربعات مركباتها الثلاثة $w, v, u$ لأن جزيئات السائل تتحرك في ثلاثة اتجاهات متعامدة ، بينما يكون للسرعة في نظرية خيط التيار اتجاه واحد فقط .

**الحالة الثانية** للجريانات الدورانية التي يمكن فيها إجراء تكامل العلاقة (9.17) تنتج عندما يكون **خط التيار منطبقاً على خط الاعصار** . عندئذ يكون بفضل التماثل بين مفهوميهما [قارن بين الشكل (٥.٥) و(١٠.٧)] $\text{rot}\, V \parallel V$ وبالتالي $V \times \text{rot}\, V \equiv 0$ . هـــذه الحالة تلعب دوراً هاماً في **نظرية الجناح الحامل** حيث تكون خطوط الاعصار المتشكلة خلف الجناح بنفس الوقت خطوطاً للتيار . ولكن الجريان يكون ، بالمقارنة مع الحالة الأولى ، كموتياً بالرغم من أن

جولانه غير معدوم ، ويكون بالتـالي لثابتة برنولي في العلاقات الواردة أعلاه قيمة واحدة بالنسبة لكافة خطوط التيار المستقرة أو الآنية .

## ٤.٢.٩ تأمل معادلات أويلر الحركية في حالة الجريانات اللادورانية

### ١.٤.٢.٩ كل جريان مثالي هو حل لمعادلات أويلر الحركية

لقد تبين من الدراسة الحركية ( الفصل الثالث ) أن حركة السوائل المثالية تكون في الحالة العامة لادورانيـة ، أي تحقق شرط الخلو من الدوران (7.19) باستثناء بعض النقاط الشاذة التي تخترقها أعاصير :

$$\omega = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \mathbf{V} = 0 \quad . \tag{9.23}$$

عندئذ يكون الجداء $\mathbf{V} \times \operatorname{rot} \mathbf{V} = 0$ ، وبالتالي يمكن ، كما رأينـــا أعلاه ، مكاملة المعادلة (9.17) . وعليه يمكن الاستنتاج ان الجريانات اللادورانية تمثـل حلولاً لمعادلات أويلر الحركية .

للبرهان ان هذه النتيجة الهامة تكون دائماً محققة نعود لمعادلات جروميكو-لامب ونشتق المعادلة الثانية جزئياً بالنسبة لـ z والثالثة بالنسبة لـ y ، ثم نطرح الثانية من الثالثة فنجد ، بعد إصلاح بسيط وملاحظة أن مشتق القوى الحجمية الثابتـة معدوم وأن $\frac{\partial^2}{\partial y\, \partial z} = \frac{\partial^2}{\partial z\, \partial y}$ ، العلاقة :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) - 2u\left(\frac{\partial \omega_y}{\partial y} + \frac{\partial \omega_z}{\partial z}\right) + 2\omega_x\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + \\ + 2\left(v\frac{\partial \omega_x}{\partial y} + w\frac{\partial \omega_x}{\partial z} - \omega_y\frac{\partial u}{\partial y} - \omega_z\frac{\partial u}{\partial z}\right) = 0 \quad . \tag{9.24}$$

بمساعدة العلاقة (9.11) يمكن التأكد بسهولة أن القوس الأول يساوي

$2\omega_x$ ، والثاني حسب ( 7.41 ) يساوي $-\frac{\partial \omega_x}{\partial x}$ . وبمساعدة معادلة الاستمرار ينتج أن القوس الثالث يساوي $-\frac{\partial u}{\partial x}$ . وعليه تصبح (9.24) بعد اصلاحها من الشكل :

$$\frac{\partial \omega_x}{\partial t} + u\frac{\partial \omega_x}{\partial x} + v\frac{\partial \omega_x}{\partial y} + w\frac{\partial \omega_x}{\partial z} = \omega_x\frac{\partial u}{\partial x} + \omega_y\frac{\partial u}{\partial y} + \omega_z\frac{\partial u}{\partial z} .$$

فإذا أدخلنا الكسر التفاضلي المادي $\frac{D}{Dt}$ حسب (5.12) في هـــذه العلاقة تنتج منها وبالتبديل الدوري مجموعة المعادلات التفاضلية التالية :

$$\left.\begin{aligned}
\frac{D\omega_x}{Dt} &= \omega_x\frac{\partial u}{\partial x} + \omega_y\frac{\partial u}{\partial y} + \omega_z\frac{\partial u}{\partial z} \\
\frac{D\omega_y}{Dt} &= \omega_x\frac{\partial v}{\partial x} + \omega_y\frac{\partial v}{\partial y} + \omega_z\frac{\partial v}{\partial z} \\
\frac{D\omega_z}{Dt} &= \omega_x\frac{\partial w}{\partial x} + \omega_y\frac{\partial w}{\partial y} + \omega_z\frac{\partial w}{\partial z}
\end{aligned}\right\} , \qquad (9.25)$$

التي تكتب بالصيغة الشعاعية التالية :

$$\frac{D\omega}{Dt} = (\omega\cdot\nabla)\,V \qquad (9.26)$$

وتعرف باسم **المعادلة الاعصاوية** حيث يحصر القوس الجداء الداخـــلي لشعاع الاعصار $\omega$ والشعاع الرمزي نابلا $\nabla$ حسب (7.16) .

عندما يكون الجريان لادورانياً يكون بموجب (9.23) $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$ ، وتكون بالتالي (9.25) محققة بالتطابق . وهذا يبرهن أن الجريانات اللادورانية حلول لمعادلات أويلر الحركية . كما ينتج أيضاً أن التغير الزمني لشعاع الاعصار يساوي الصفر ، وذلك بالتطابق مع قوانين **هلمهولتس** (٥.٣.٧) . فإذا كانت

جزيئات السائل في لحظة ما لا تقوم بحركة دورانية وبالتالي $\omega = 0$ ، كما هو الأمر عند لحظة بدء الحركة ، فإن حركتها فيما بعد تبقى أيضاً لادورانية . وهذا ما يمكن تأكيده بسهولة بمساعدة المعادلة الاعصارية .

ليكن $\omega_1$ شعاع الاعصار في اللحظة $t_1$ . فبعد فترة زمنية قصيرة جداً $\Delta t = t_2 - t_1$ يصبح :

$$\omega_2 = \omega_1 + \Delta t \left(\frac{D\omega}{Dt}\right)_1 . \qquad (9.27)$$

فإذا كان السائل في اللحظة $t_1$ ساكناً فيكون حكماً $\omega_1 = 0$ ، ويكون أيضاً $\left(\frac{D\omega}{Dt}\right)_1 = 0$ حسب (9.26) و $\omega_2 = 0$ حسب (9.27) . أي أن حركة السائل تكون في اللحظة $t_2$ لادورانية أيضاً وتبقى كذلك بالنسبة لأي زمن آخر $t_0 \ldots t_3$ . هذه النتيجة تبقى صحيحة أيضاً في حالة الجريان المستوي ، حيث يمكن البرهان بسهولة بمساعدة (9.25) أنه في المستوي y x يكون : $\frac{D\omega_z}{Dt} = 0$ . وعليه يمكن استخلاص النتيجة الهامة التالية :

> كل حركة لسائل مثالي ( عديم الاحتكاك ) تبدأ من السكون تمثل جريانا لادورانيا ، وبالتالي حلا لمعادلات أويلر الحركية .

## ٩.٢.٤.٢ معادلة برنولي العامة للجريانات اللادورانية

إذا كان شرط الخلو من الدوران (9.23) في حقل الجريان ( أو في منطقة منه ) محققاً ، فيكون حسب (7.22) شعاع السرعة مساوياً شعاع تدرج كمون السرعة $\Phi(x,y,z,t)$ ( انظر ص ٢٢٠ ) :

$$\mathbf{V} = \mathbf{grad}\ \Phi , \qquad (9.28)$$

ونحصل حسب (7.21) على مركبات السرعة في اتجاه المحاور z,y,x ، أو في أي اتجاه آخر s ، كمشتقات جزئية لـ Φ بالشكل :

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \; ; \; v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \; ; \; w = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \; ; \; V_s = \frac{\partial \Phi}{\partial s} \; . \qquad (9.29)$$

وينتج من ذلك أن :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right) ; \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right) ; \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = \mathbf{grad}\, \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad . \qquad (9.30)$$

فإذا كان $\Phi_s$ كمون حقل القوى الحجمية ووضعنا $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$ في (9.12) فإن معادلات أويلر الحركية للجريانات الكمونية غير المستقرة تأخذ بصيغة مركبات الشكل التالي :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial |\mathbf{V}|^2}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_s}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial |\mathbf{V}|^2}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_s}{\partial y} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial |\mathbf{V}|^2}{\partial z} + \frac{\partial \Phi_s}{\partial z} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (9.31)$$

أو بصيغة شعاعية ، نحصل عليهـــا بسهولة من (9.17) بوضع $\mathbf{rot}\, \mathbf{V} = 0$ واستخدام (9.30) :

$$\mathbf{grad}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{|\mathbf{V}|^2}{2} + \Phi_s\right) + \frac{1}{\rho}\,\mathbf{grad}\, p = 0 \; . \qquad (9.32)$$

فإذا ضربنا طرفي هذه المعادلة بالعنصر الخطي ds (dx,dy,dz) فإن كل حد

من طرفها الأيسر يصبح تفاضلاً تاماً ويمكن بالتالي مكاملتها في لحظة معينة حداً حداً حيث تنتج باستخدام تابع الضغط $P = \int \frac{dp}{\rho}$ العلاقة :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{|V|^2}{2} + P + \Phi_s = C_B(t) \ , \qquad (9.33)$$

المعروفة باسم معادلة برنولي العامة للجريانات الكمونية القابلة للانضغاط وغير المستقرة . $C_B(t)$ تمثل ثابتة برنولي وتكون في اللحظة المعتبرة ذات قيمة واحدة في كامل حقل الجريان .

في حالة الجريانات المستقرة ينعدم الحد $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ وتصبح (9.33) :

$$\frac{|V|^2}{2} + P + \Phi_s = C_B \ . \qquad (9.34)$$

عندما $\rho = \text{const}$ تنتج معادلة برنولي للجريانات الكمونية غير القابلة للانضغاط وغير المستقرة بالصيغة :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{|V|^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \Phi_s = C_B(t) \quad . \qquad (9.35)$$

وعندما يكون الجريان مستقراً ويخضع لتأثير الجاذبية الارضية فقط ، $\Phi_s \equiv \Phi_{sg} = g\,z$ ، تصبح معادلة برنولي عندئذ :

$$\frac{|V|^2}{2} + \frac{p}{\rho} + g\,z = C_B \qquad (9.36)$$

المطابقة شكلاً لمعادلة برنولي للقدرة (8.11) ، مع ملاحظة أن شعاع السرعة هنا ذو ثلاث مركبات ، وثابتة برنولي $C_B$ لا تتغير قيمتها في كامل حقل الجريان .

## ٣٠٩ المضمون الفيزيائي لكمون السرعة $\Phi$ ، ومفهوم الكتلة الهيدروديناميكية

إذا أثرت ضغوط صدمية أو دفعية Impulsiv pressure بصورة فجائية على جسم ساكن في سائل مثالي بحيث تتزايد سرعة الجسم من الصفر وحتى قيمة معينة V خلال فترة زمنية قصيرة ، فينشأ حول الجسم جريان غير مستقر وكموني لأن الحركة بدأت من السكون، وتنطبق بالتالي معادلة برنولي العامة للجريانات الكمونية (9.35) .

خلال المجال الزمني القصير جداً يكون تغير السرعة ، وتغير القوى الكتلية وكذلك تغير القدرة الإجمالية للجريان أصغر بكثير من تغير قوى الضغط الصدمية . وعليه إذا ضربنا طرفي المعادلة (9.35) بالعنصر الزمني dt وأهملنا المقادير $C_n(t)\cdot dt$ ، $\Phi_x\cdot dt$ ، $\frac{|V|^2}{2}\cdot dt$ فينتج :

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}\,dt + \frac{p}{\rho}\,dt = 0 \quad .$$

نجري التكامل بالنسبة لكامل السطح الخارجي للجسم فنجد :

$$\rho\Phi = -\int_0^{\Delta t} p\,dt\,. \qquad (9.37)$$

إن التكامل في هذه العلاقة يعبر عن العمل الإضافي الذي تنجزه قوى الضغط الصدمية التي أدت لنشوء الجريان ذي كمون السرعة $\Phi$ . وهذا يوضح المضمون الفيزيائي للتابع $\Phi$ ، إذ يرتبط بالقدرة الحركية للسائل $W_{Ki_{j=1}}$ التي تنتقل للسائل من السطح الخارجي للجسم . وعليه يمكن باختيار توزع ملائم لقوى الضغط الصدمية توليد جريان كموني مناسب يتحدد كمون سرعته بالعلاقة :

$$\Phi = -\frac{1}{\rho}\int p\,dt + const\ .$$

لنفرض أن السائل المثالي لانهائي الامتداد وأن شكل توزع الضغط الصدمي p المطبق على الجسم خلال الفترة الزمنية المعتبرة dt يبقى ثابتاً . فإذا كان dA عنصراً سطحياً من السطح الخارجي للجسم فتكون قوة الضغط الصدمية الجزئية $dF_p = p\,.\,dA$ . ويكون حسب قانون هام في الديناميك [122] العمل الذي تنجزه قوى الضغط الصدمية ، وبالتالي القدرة الحركية التي يكتسبها السائل ، يساوي القوة × المتوسط الحسابي لمركبتي السرعة البدائية والنهائية في اتجاه القوة × الزمن . وحيث أن السرعة البدائية عند الزمن $t = 0$ كانت معدومة ، وتصبح مركبتها باتجاه الناظم ، أي باتجاه p ، المتجه إلى داخل السائل بعد زمن dt مساوية $\frac{\partial\Phi}{\partial n}$ ، فتنتج القدرة الحركية الجزئية للسائل :

$$dW_{Ki_{FI}} = dF_p\,.\,V_{nm}\,.\,dt = p\,dA\,.\,\frac{1}{2}\frac{\partial\Phi}{\partial n}\,.\,dt\ .$$

باستخدام العلاقة (9,37) وإجراء التكامل بالنسبة لكامل السطح الخارجي للجسم نجد :

$$W_{Ki_{FI}} = -\frac{\rho}{2}\oint \Phi\frac{\partial\Phi}{\partial n}\,dA = -\frac{\rho}{2}\int_{(A)}\int \Phi\frac{\partial\Phi}{\partial n}\,dA\ . \qquad (9,38)$$

هذه القدرة الحركية التي يكتسبها الجريان نتيجة الحركة المتسارعة وغير المنتظمة للجسم يمكن اعتبارها متناسبة مع مربع سرعة الجسم $V_n$ إذا أدخلنا تسهيلاً للحساب مفهوم **الكتلة الهيدرودينامكية** $m_h$ ككتلة رمزية تحقق العلاقة التالية :

$$W_{Ki_{FI}} = \frac{m_h}{2}V_n^2\ . \qquad (9,39)$$

$m_h$ يمكن حسابها بمساعدة (9.38) إذا كان $\Phi$ معلوماً . وتتعلق قيمتها بشكل الجسم ووضعيته بالنسبة لاتجاه التسارع وليس لها علاقة بكتلة الجسم نفسه . فإذا كانت كتلة الجسم نفسه $m_B$ فإن القوة الإجمالية الواجب تطبيقها عليه لكي يكتسب تسارعاً مقداره $dV/dt$ يلزم أن تكون :

$$F = (m_h + m_B)\frac{dV}{dt} = m_{ap}\frac{dV}{dt} , \qquad (9.40)$$

حيث $m_{ap}$ **الكتلة الظاهرية للجسم** Apparent mass . وعليه يلزم في حالة الحركة غير المنتظمة في سائل مثالي التغلب على قوة إضافية تعاكس اتجاه التسارع ، وتسمى لذلك **مقاومة تسارع** ، مقدارها :

$$F_{wh} = m_h\frac{dV}{dt} . \qquad (9.41)$$

لهذا فإنه من الهام جداً معرفة قيمة $m_h$ ، التي تساوي في حالة الاسطوانة الدائرية كتلة السائل المزاح ، وفي حالة الكرة نصف كتلة السائل المزاح ، كما سنبرهن ذلك فيما بعد . وتلعب **الكتلة الهيدروديناميكية** و **عزوم العطالة الهيدروديناميكية** دوراً أساسياً في حركات السفن ، وخاصة عند حساب القوى المؤثرة على جسم السفينة أثناء حركتها على مسار مستقيم أو منحن لتحديد جاهزيتها على المناورة ، انظر مثلاً [123] [124] [125] .

## ١٠ الجريانات الكمونية ثنائية البعد ( المستوية )

الجريانات ثنائية البعد أو المستوية نتميز بأن شعاع السرعة V يكون في كل لحظة موازياً لمستو ثابت وله نفس القيمة في كل نقطة واقعة على الناظم على هذا المستوي .

في الطبيعة لانوجد جريانات مستوية . فحتى لو أغفلنا تأثير اللزوجة فإن الجريان على حدود منطقة الجريان المعتبرة ، أو عند نهايات الجسم ، كما في حالة الجناح الحامل المحدود الامتداد ( الشكل ١٦٠٨ ) ، يكون ثلاثي البعد . ولكن من منطلق تسهيل الدراسة فن

الأفضل في حالات عملية عديدة دراسة الجريان المستوي كخطوة تقريبية هامة لفهم الجريان الفعلي ومن ثم ادخال التصحيحات اللازمة لمراعاة تأثير حدود مجال الجريان إذا كان ذلك ضرورياً .

## ١٠.١٠ تابع الكمون $\Phi$ ، معادلة لابلاس واطئيات حلها

نفرض أن الجريان الكموني مستقراً وواقعاً في مستوي الاحداثيين x,y . فإذا كان $\Phi = \Phi(x,y,0)$ كمون السرعة ( تابع الكمون ) فإن مركبات السرعة باتجاه محاور الاحداثيات الديكارتية حسب (9.29) تصبح :

$$u(x,y) = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \; ; \; v(x,y) = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \; ; \; w = 0 \; . \qquad (10.1)$$

وفي اتجاه الاحداثيات القطبية ( الشكل ت ١.٦ ، ص ٢٠٨ ) :

$$V_r(r,\varphi) = V\cos(V,r) = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \; , V_\varphi = V\cos(V,s) = \frac{\partial \Phi}{\partial s} = \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \; . \qquad (10.2)$$

ونحصل على مركبة السرعة في اتجاه ما s كمشتق جزئي لتابع الكمون في هذا الاتجاه :

$$V_s = \frac{\partial \Phi}{\partial s} \; . \qquad (10.3)$$

إن شرط الخلو من الدوران الذي ينحصر في حالة الجريانات المستوية حسب (7.27) بالعلاقة :

$$\omega_z = 0 \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \qquad (10.4)$$

يكون محققاً بالتطابق ، كما يمكن التأكد من ذلك بسهولة بمساعدة (10.1) . بينما تأخذ معادلة الاستمرار (6.22) :

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \qquad (10.5)$$

الصيغة الهامة التالية :

$$\Delta\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = 0 \qquad (10.6)$$

المعروفة باسم **معادلة لابلاس أو معادلة الكمون** للجريانات الكمونية ثنائية البعد ، التي تجمع بين شرط الخلو من الدوران وشرط الاستمرار ، وتمثل **معادلة تحديد** التابع $\Phi$ .

عندما يكون تابع الكمون $\Phi$ معلوماً فيمكن بسهولة تحديد حقل السرعة ومن ثم تحديد حقل الضغط بمساعدة معادلة برنولي . ومن هنا فإن المسألة تتركز على إيجاد توابع كمون مناسبة $\Phi(x,y)$ تحقق الشروط الحدية الخاصة لمسائل الجريان المطروحة . وهذه مسألة معقدة جداً في الحالة العامة . ولكن من حسن الحظ أن معادلة الكمون يخضع لها عدد كبير من الظواهر الفيزيائية المعروفة في الالكتروديناميك ومقاومة المواد وغيرها . وهذا يقود إلى إمكانية الاستعانة بمبدأ **التماثل** Analogy واستخدام الحلول المعروفة في حقول أخرى من الفيزياء لحل مسائل الجريان .

من جهة أخرى فإن **الصفة الخطية** لمعادلة لابلاس (بعكس معادلات **أويلر**) تسمح باستخدام **مبدأ التضام أو التراكب** supperposition principle . فإذا كانت $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$ تمثل حلولاً إفرادية خاصة لمعادلة الكمون فيكون أيضاً **تابع الكمون الاجمالي أو الكلي** :

$$\Phi_{tot} = c_1\Phi_1 + c_2\Phi_2 + \ldots + c_n\Phi_n \qquad (10.7)$$

يمثل حلاً لهذه المعادلة . وتتحدد قيمة الثوابت $c_1 \ldots c_n$ من الشروط الحدية وشروط البدء . على هذا الأساس بنيت **طريقة النقاط الشاذة** التي تستخدم جريانات كمونية بسيطة بمثابة « لبنات » لتشييد أجسام الجريان المناسبة .

إلى جانب ما تقدم فبالإمكان الحصول على حل عام للمعادلة (10.6) بالاستعانة بطريقة نظرية التوابع Function theory والتمثيل المطابق Conformal mapping ، وذلك باستخدام ما حقوص للاعداد المركبة Complex number حيث يكون :

$$\Phi = f_1(x + iy) + f_2(x - iy) \; ; \; i = \sqrt{-1} \; . \qquad (10.8)$$

لقد طورت على الأسس السابقة طرق هندسية عديدة لحساب المسائل العملية لتطبيقات ميكانيك السوائل المختلفة . وسوف نعالج مبادئها فيما بعد . ولكن يلزم الآن توضيح مفهوم أساسي آخر .

## ٢.١٠ تابع التيار $\Psi$ ، مضمونه الفيزيائي وعلاقته مع $\Phi$

لقد رأينا أن تابع الكمون $\Phi(x,y)$ يحقق شرط الخلو من الدوران بالتطابق بينما تقود معادلة الاستمرار بالصيغة $\Delta\Phi = 0$ الى معادلة تحديد $\Phi$ .

لنعتبر تابعاً جديداً $\Psi(x,y)$ ترتبط به مركبتا السرعة بالعلاقتين التاليتين :

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \; ; \; v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \; . \qquad (10.9)$$

فإذا أدخلناهما في العلاقة (10.5) نجد :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} \equiv 0 \; ,$$

بينما ينتج بإدخالها في (10.4) :

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow \Delta\Psi = 0 \; . \qquad (10.10)$$

**إذن فان التابع $\Psi$ يحقق معادلة الاستمرار بالتطابق ، ويأخذ شرط الخلو من الدوران صيغة معادلة لابلاس كمعادلة لتحديد هذا التابع .**

لتوضيح المضمون الفيزيائي للتابع $\Psi$ ننطلق أولاً من المعادلة التفاضلية لخط التيار (5.30) ، التي يمكن كتابتها في حالة الجريان المستوي بالصيغة :

$$u\,dy - v\,dx = 0 \ ,$$

وتصبح باستخدام (10.9) من الشكل :

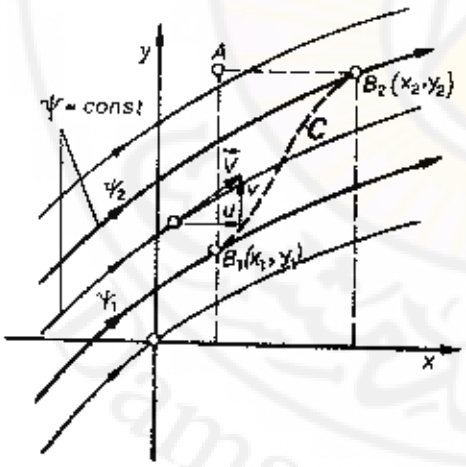
$$\frac{\partial \Psi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial \Psi}{\partial y}\,dy = d\Psi = 0 \ ,$$

حيث $d\Psi$ التفاضل التام للتابع $\Psi$ . فإذا أجرينا التكامل نحصل على معادلة خط التيار بالصيغة :

$$\Psi\,(x,y) = \text{const} \qquad (10.11)$$

لذلك يعرف $\Psi$ باسم **تابع التيار** Stream function . فإذا كان معلوماً فيمكن بسهولة الحصول على صورة الجريان المستوي باعطاء الثابت const قيماً اختيارية متغيرة موجبة وسالبة .

نعتبر الآن في المستوي $xy$ حزمة من خطوط التيار $\Psi = \text{const}$ ، ونختار منها على غير تعيين المنحنيين $\Psi_1 = \text{const}_1$ و $\Psi_2 = \text{const}_2$ ، الشكل ( ١٠ . ١٠ ) . نختار نقطة ما $B_1(x_1,y_1)$ واقعة على $\Psi_1$ وأخرى $B_2\,(x_2y_2)$ واقعة على $\Psi_2$ ونصل بينهما بالمنحني الاعتباطي الشكل C .




الشكل ١٠.١٠ : توضيح المضمون الفيزيائي لتابع التيار .

إن التيار الحجمي الذي

يعبر C بالنسبة لواحدة العرض يساوي ، كما هو واضح من الشكل (١٠ . ١) ، الفرق بين التيار الحجمي الذي يعبر القطعة المستقيمة $\overline{A\,B_1}$ بسرعة u والذي يعبر $\overline{B_2\,A}$ بسرعة v وعليه فإن :

$$Q_C = \left[\int_{y_1}^{y_2} u\,dy\right]_{x=x_1} - \left[\int_{x_1}^{x_2} v\,dx\right]_{y=y_1}$$

ويكون باستخدام (10.9) :

$$Q_{12} = Q_C = \left[\int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial \Psi}{\partial y}\,dy\right]_{x=x_1} + \left[\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \Psi}{\partial x}\,dx\right]_{y=y_1} =$$

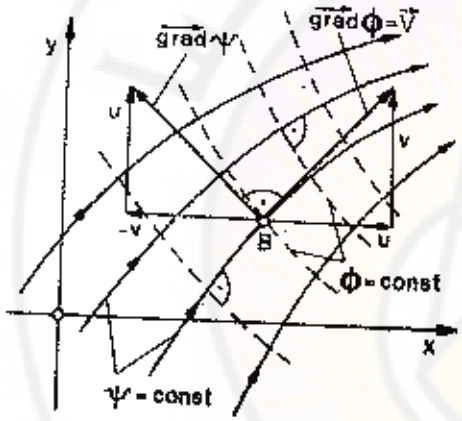
$$= \int_{(x_1,\,y_1)}^{(x_2,\,y_2)} d\Psi = \Psi_2 - \Psi_1 \qquad (10.12)$$

هذه النتيجة تعني أن التيار الحجمي الذي يعبر المنحني C الواصل بين نقطتين من خطي تيار لا يتعلق بشكل المنحني ويساوي الفرق بين قيمتي تابع التيار لخطي التيار المعتبرين . فإذا كان التابع $\Psi$ وحيد التعيين يصبح $Q_{12} = 0$ عندما تنطبق $B_1$ على $B_2$ وتصبحان بالتالي على خط تيار واحد . أما إذا كان $\Psi$ متعدد القيم فيكون الفرق $Q_{12} = \Psi_2 - \Psi_1 \neq 0$ ، وبالتالي فإن حقل الجريان يكون حاوياً في النقطة المعتبرة من خط التيار على نبع أو بالوعة .

إن مفهوم خط التيار ومعناه الفيزيائي ينحصر بالجريانات المستوية فقط ، بخلاف تابع الكمون $\Phi$ . ولكن النتيجة (10.12) تحافظ على صحتها في حالة الجريانات الحقيقية غير القابلة للانضغاط مما يتيح إمكانية جيدة لإنشاء صور للجريان بطرق بيانية تستند أيضاً على العلاقة بين تابع التيار وتابع الكمون الواجب توضيحها .

نعتبر في المستوي y x حزمة من خطوط التيار $\Psi = \text{const}$ ، نصل بين كافة نقاط حقل الجريان التي يكون فيها لتابع الكمون قيمة ثابتة فنحصل على **خطوط الكمون الثابت** Equipotential lines ، $\Phi = \text{const}$ ، الشكل (٢.١٠) . نعتبر النقطة B التي يلتقي بها أحد خطوط التيار مع أحد خطوط الكمون الثابت . وبما أن :

$$\mathbf{V} = \mathbf{grad}\ \Phi = \mathbf{i}\,\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \mathbf{j}\,\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \mathbf{i}u + \mathbf{j}v\ ,$$




الشكل ٢.١٠ : خطوط الكمون الثابت $\Phi = \text{const}$ وخطوط التيار $\Psi = \text{const}$ تؤلف حزمتين من المنحنيات المتعامدة مع بعضها .

بموجب (10.1) ، فيكون بالتالي شعاع تدرج $\Phi$ في النقطة B مماساً على خط التيار المار منها ومتعامداً في نفس الوقت مع خط الكمون الثابت المار من B . كما يكون شعاع تدرج $\Psi$ الذي يتحدد بمساعدة (10.9) بالعلاقة :

$$\mathbf{grad}\ \Psi = \mathbf{i}\,\frac{\partial \Psi}{\partial x} + \mathbf{j}\,\frac{\partial \Psi}{\partial y} = -\mathbf{i}v + \mathbf{j}u$$

متعامداً في B مع $\Psi = \text{const}$ . وهذا يعني أن الجداء الداخلي لشعاعي تدرج $\Phi$ و $\Psi$ يجب أن يكون معدوماً :

$$\mathbf{grad}\ \Phi \cdot \mathbf{grad}\ \Psi = (\mathbf{i}u + \mathbf{j}v)\ (-\mathbf{i}v + \mathbf{j}u) = -uv + uv = 0\ .$$

هذه النتيجة يمكن تعميمها على كل نقطة من حقل الجريان ، مما يسمح بصياغة الجملة الهامة التالية :

> تؤلف خطوط التيار $\Psi = \text{const}$ وخطوط الكمون $\Phi = \text{const}$ في حقل الجريان المستوي شبكة منحنيات متعامدة على بعضها البعض في كل نقطة تتقاطع بها Orthogonal flow net .

هذه الخاصة المعروفة في الحقل الكهرطيسي تسمح بتطوير طرق عملية لحل مسائل الجريان بالاعتماد على التماثل الالكتروديناميكي – الهيدروديناميكي .

إن العلاقة بين $\Phi$ و $\Psi$ تعبر عنها أصلاً المعادلات (10.1) و (10.9) . بمقارنتها نجد العلاقتين :

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \; ; \; v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \; , \qquad (10.13)$$

المعروفتين باسم **معادلات كوشي ـ ريمان التفاضلية** نسبة للعالمين A . Cauchy (1789–1857) الفرنسي و B.Riemann ( 1826 – 1866 ) الألماني . بمساعدتها يمكن من جهة تحديد $\Psi$ إذا كان $\Phi$ معلوماً ( أو بالعكس ) . فإذا كاملنا المعادلة الأولى من (10.13) نجد :

$$\Psi = \int \frac{\partial \Phi}{\partial x} \, dy + c\,(x) = f\,(x,y) + c(x) \; , \qquad (10.14)$$

حيث $c\,(x)$ تابع للاحداثي $x$ فقط . ويتحدد بسهولة باشتقاق (10.14) بالنسبة لـ $x$ ومقارنة النتيجة مع المعادلة الثانية من (10.13) ، حيث يكون :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[ f(x,y) \right] + c'(x) = f'(x,y) + c'(x) = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad . \qquad (10.15)$$

وينتج غالباً $c'(x) = 0$ ، ويكون بالتالي $c(x) = \text{const}$ . ويمكن عندئذ وضع $c(x) = 0$ أو أية قيمة عددية أخرى .

من جهة أخرى تتيح (10.13) وعلى أساس أن كلاً من $\Phi$ و $\Psi$ يحقق معادلة لابلاس ، $\Delta\Phi = \Delta\Psi = 0$ ، إمكانية تطبيق **مبدأ التبادل** بين تابع الكمون وتابع التيار ، بمعنى استبدال أحدهما بالآخر ، والحصول بذلك على جريان جديد تشكل خطوط تياره ( التي كانت أصلاً خطوطاً للكمون ا ) ، وخطوط كمونه شبكة من المنحنيات المتعامدة ، بغض النظر طبعاً فيما إذا كان لهذا الجريان الجديد أهمية عملية أم لا .

أخيراً تجدر الإشارة أن الصفة الخطية لمعادلة **لابلاس** (10.10) تسمح باستخدام **مبدأ التضام** للحصول على حل عام لتابع التيار $\Psi$ ، حيث يكون على غرار (10.7) :

$$\Psi_{tot} = c_1\Psi_1 + c_2\Psi_2 + \cdots + c_n\Psi_n \qquad (10.16)$$

**تابع التيار الاجمالي** لجريان ينتج من تضام جريانات بسيطة توابع تيارها $\Psi_n, \ldots, \Psi_2, \Psi_1$ . ويتم تحديد قيمة الثوابت $c_n, \ldots, c_2, c_1$ من الشروط الحدية . ويكون **لتابع التيار الصفري** $\Psi_{tot} = 0$ أهمية خاصة ، إذ يمكن استبداله بجسم صلب دون أن يؤثر ذلك على الجريان حوله .

## ٣.١٠ أمثلة عن الجريانات الكمونية المستوية البسيطة

سنعتبر بعض التوابع البسيطة $\Phi(x,y)$ التي نتأكد منها فيما إذا كانت تمثل توابع كمون سرعة ، وعندئذ نوجد توابع التيار $\Psi(x,y)$ وصور الجريان لها . كما سنستخدم مبدأ التضام والتبادل للحصول على جريانات جديدة .

## ١٠.٣.١٠ الجريان الانسيابي المنتظم

ليكن لدينا التابع الخطي :

$$\Phi_1 (x,y) = a\,x + b\,y\,, \qquad (10.17)$$

حيث $a\,,b$ ثابتان لأعداد حقيقية . هذا التابع يحقق معادلة لابلاس (10.6) ، وبالتالي فهو تابع كمون سرعة لجريان مستوٍ . لنوجد تابع التيار .

باستخدام (10.17) ينتج حسب (10.14) :

$$\Psi_1 = \int a\,dy + c(x) = a\,y + c(x)\,,$$

وحسب (10.15) :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = c'(x) = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} = -b \Rightarrow c(x) = -b\,x\,.$$

وعليه يصبح تابع التيار :

$$\Psi_1 (x,y) = a\,y - b\,x\,. \qquad (10.18)$$

ويمكن بسهولة التأكد أن $\Phi$ و $\Psi$ يحققان معادلات كوشي ـ ريمان (10.13) . ويتحدد المعنى الفيزيائي للثابتين $a$ ، $b$ بحساب مركبتي السرعة حسب (10.1) أو (10.9) حيث تنتج :

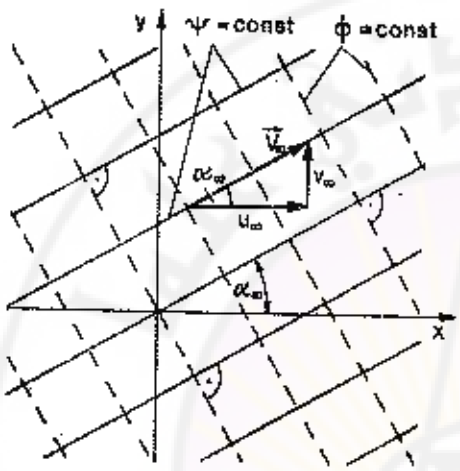
$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = a \equiv u_\infty\,,\ v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = b \equiv v_\infty\,, \qquad (10.19)$$

أي أنهما ثابتان في اتجاه المحورين $x,y$ . وعليه فإن قيمة شعاع السرعة :

$$|\mathbf{V}| = |\mathbf{V}_\infty| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{u_\infty^2 + v_\infty^2} = \text{const.} \qquad (10.20)$$

هي أيضاً ثابتة ، وكذلك فإن ميله على المحور x ثابت :

$$\tan\alpha_\infty = \frac{v_\infty}{u_\infty} = \text{const} \quad . \qquad (10.21)$$




الشكل ٣.١٠ ، الجريان الانسحابي المنتظم في المستوي x y .

هذه النتيجة تقودنا مباشرة للاستنتاج أن خطوط التيار لهذا الجريان الانسحابي المنتظم تؤلف حزمة من المستقيمات المتوازية التي تميل على المحور x زاوية ثابتة ، الشكل (٣.١٠) ، فإذا كانت السرعة $V_\infty$ معلومة فيمكن بسهولة رسم صورة الجريان بمساعدة ( 10.18 ) و ( 10.19 ) حيث تنتج معادلة خطوط التيار :

$$\Psi = \text{const} \Rightarrow u_\infty\, y - v_\infty\, x = \text{const} \, , \qquad (10.22)$$

وذلك باعطاء الثابت قيماً مختلفة ، كما نحصل على معادلة خطوط الكمون من (10.17) و (10.19) بالصيغة :

$$\Phi = \text{const} \Rightarrow u_\infty\, x + v_\infty\, y = \text{const} \, , \qquad (10.23)$$

وعليه فإن خطوط الكمون تمثلها أيضاً حزمة من المستقيمات المتوازية التي تشكل مع خطوط التيار شبكة مستقيمات متعامدة .

عندما يكون الجريان الانسحابي المنتظم موازياً للمحور x ، وبالتالي $v_\infty = 0$ ، ينتج من (10.17) و (10.18) :

$$\Phi_T = u_\infty x \; ; \; \Psi_T = u_\infty y \; ; \qquad (10.24)$$

وعندما يكون موازياً للمحور y ، وبالتالي $u_\infty = 0$ ، يكون :

$$\Phi_T = v_\infty y \; , \; \Psi_T = -v_\infty x \; . \qquad (10.25)$$

## ٢.٣.١٠ النبع والبالوعة في المستوي

ليكن لدينا التابع :

$$\Phi_Q(x,y) = \frac{E}{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{E}{2\pi} \ln r \, , \qquad (10.26)$$

حيث E عدد ثابت حقيقي موجب (أو سالب)، r نصف القطر المكاني من مركز الإحداثيين . نشتق $\Phi_Q$ جزئياً مرتين بالنسبة لـ x و y على التوالي فنجد بسهولة أن معادلة لابلاس محققة ، $\Delta\Phi_Q = 0$ ، وبالتالي يمثل $\Phi_Q$ كمون سرعة لجريان مستوٍ . وتنتج معادلة خطوط الكمون من (10.26) بالشكل :

$$\Phi_Q(x,y) = \text{const} \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = r = \text{const} \, . \qquad (10.27)$$

إذن فخطوط الكمون تمثل **مجموعة دوائر مركزية** ، تتحدد باعطاء الثابت const قيماً معينة .

لإيجـــاد تابع التيار ندخل في (10.14) المشتق $\frac{\partial \Phi_Q}{\partial x} = \frac{E}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2}$ ونكامل فنجد :

$$\Psi_Q = \frac{E}{2\pi} \int \frac{x}{x^2 + y^2} \, dy + c(x) = \frac{E}{2\pi} \int \frac{d\left(\frac{y}{x}\right)}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} + c(x) =$$

$$= \frac{E}{2\pi} \arctan \frac{y}{x} + c(x) \, . \qquad (10.28)$$

$c(x)$ ينتج من (10.15) بعد اشتقاق $\Psi_Q$ بالنسبة لـ $x$ و $\Phi_Q$ بالنسبة لـ $y$ فيكون :

$$c'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad c(x) = \text{const} \ .$$

فإذا وضعنا $c(x) = 0$ ينتج تابع التيار من (10.28) بدلالة الاحداثيات الديكارتية ، والقطبية بالشكل :

$$\Psi_Q = \frac{E}{2\pi} \arctan \frac{y}{x} = \frac{E}{2\pi} \varphi \ , \qquad (10.29)$$

باعتبار أن $\arctan \frac{y}{x} = \varphi$ . بذلك نحصل على معادلة خطوط التيار :

$$\Psi_Q = \text{const} \ \Rightarrow \ \arctan \frac{y}{x} = \varphi = \text{const} \ , \qquad (10.30)$$

التي تمثل مجموعة مستقيمات منبعثة من مركز الاحداثيات ، وتحدد ميلها قيم الثابت const ، وهي تشكل مع خطوط الكمون شبكة منحنيات متعامدة .

إن مركبتي السرعة باتجاه المحورين $y, x$ تنتج بسهولة من ( 10.1 ) حيث تكون :

$$u = \frac{E}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2} \ ; \quad v = \frac{E}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2} \ . \qquad (10.31)$$

وحيث أن شعاع السرعة يجب أن يكون مماساً على خطوط التيار ، فيتضح أن المركبة المماسية للسرعة معدومة ، $V_\varphi = 0$ ، بينما المركبة القطرية :

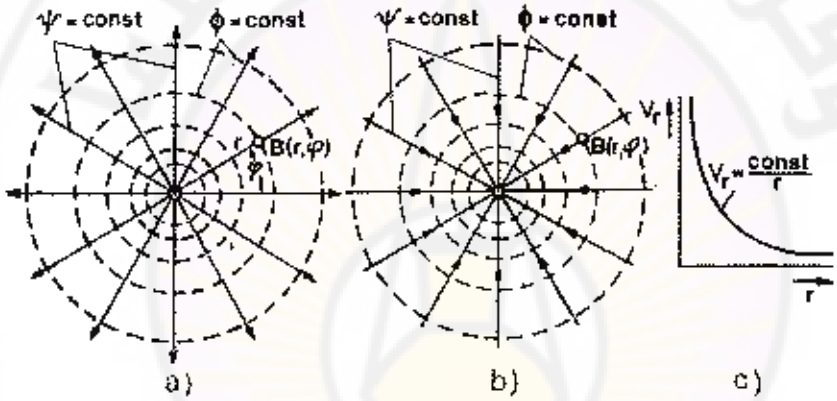
$$V_r = |V| = \sqrt{u^2 + v^2} = \frac{E}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\partial \Phi_Q}{\partial r} = \frac{E}{2\pi} \frac{1}{r} \ , \qquad (10.32)$$

أي أن السرعة تتناسب عكساً مع نصف القطر وتبلغ في المركز قيمة لا نهائية ، الشكل ( ٣-١٠ c ) . فإذا أحطنا مركز الإحداثيات باسطوانة نصف قطرها R

فيكون التيار الحجمي الذي يعبر سطحها الخارجي بالنسبة لواحدة العرض (اتجاه z ):

$$Q = 2\pi R.V_r(R) = 2\pi R.\frac{E}{2\pi}\frac{1}{R} = E \quad , [E] \sim \frac{m^2}{s} \quad . \quad (10.33)$$

إذن فإن الثابت E في العلاقة (10.26) معنى فيزيائياً يعبر عن التيار الحجمي للجريان وهو لا يتعلق بنصف القطر المكاني r . فإذا كان $E > 0$ ، فان الجريان يتدفق من المركز إلى الخارج ليغطي كامل المستوي x y ، ويمثل في هذه الحالة نبعاً Source . وعندما يكون $E < 0$ فإن خطوط التيار تصب كلها في نقطة المركز ، ويسمى الجريان عندئذ **بالوعة** Sink ، الشكل (٣.١٠) . E تمثل




الشكل ٣.١٠ ، جريان النبع (a والبالوعة (b في المستوي وتوزع السرعة (c .

**غزارة أو شدة** Strength النبع أو البالوعة بالنسبة لواحدة العرض . بينما يمثل مركز الاحداثيات **نقطة شاذة** تكون فيها فقط معادلة الاستمرار غير محققة . وعليه يمكن تصور المحور z مؤلفاً من عدد لانهائي من هذه النقاط الشاذة التي تمثل ينابيع أو بالوعات والتي تعطي في المستوي x y صورة الجريان المبينة في الشكل (٣.١٠ – a أو b ) . وواضح أن الجريان الفعلي للنبع أو البالوعة الذي يعبّر عنه تابع الكمون $\Phi_0$ لا يتحقق إلا في المنطقة المحيطة بدائرة تحيط بمركز النبع أو البالوعة تأخذ السرعة على محيطها قيماً معقولة فيزيائياً .

## ٣.٣.١٠ الرعصار المستوي

من العلاقتين (10.26) و (10.30) نحصل على جريان كموني أساسي جديد إذا طبقنا **مبدأ التبادل**، الآنف الذكر، بين تابع الكمون وتابع التيار. فاذا استبدلنا الثابت $\Gamma$ بـ $\Gamma$ نجد مباشرة تابع الكمون للجريان الجديد :

$$\Phi_{\Gamma} = +\frac{\Gamma}{2\pi}\operatorname{arc\,tan}\frac{y}{x} = +\frac{\Gamma}{2\pi}\varphi \quad , \tag{10.34}$$

وتابع التيار

$$\Psi_{\Gamma} = -\frac{\Gamma}{2\pi}\ln\sqrt{x^2+y^2} = -\frac{\Gamma}{2\pi}\ln r \quad . \tag{10.35}$$

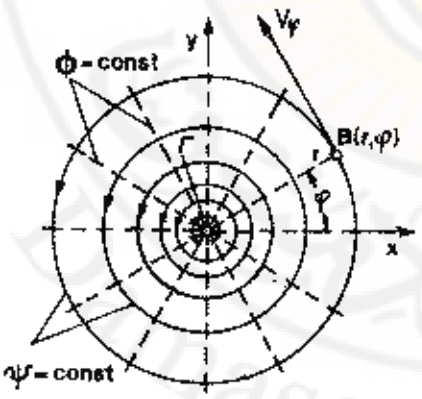
إن خطوط الكمون للجريان الجديد تتحدد بالمعادلة :

$$\Phi_{\Gamma} = \text{const} \Rightarrow \varphi = \text{const} \quad , \tag{10.36}$$

فهي تمثل **حزمة من المستقيمات المنبعثة من مركز الاحداثيات**، التي تحدد قيم الثابت const ميلها على المحور x، وبالتالي فهي تكافىء خطوط التيار للنبع. بينما تتحدد خطوط التيار بالعلاقة :

$$\Psi_{\Gamma} = \text{const} \Rightarrow r = \text{const} \quad , \tag{10.37}$$

فهي تمثل إذن **حزمة من الدوائر المركزية حول مركز الاحداثيات**، وتكافىء خطوط الكمون للنبع، الشكل (٤.١٠).




الشكل ٤.١٠ : الاعصار الكموني المستوي.

لإيجاد مركبتي السرعة ندخل (10.34) في (10.1) فنجد :

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{-\Gamma}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2} \\ v &= \frac{\Gamma}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2} \end{aligned}\right\} \tag{10.38}$$

وكما يتضح من صورة الجريان فإن المركبة القطرية لشعاع السرعة تكون معدومة ( بعكس النبع ! ) بينما المركبة المماسية :

$$V_\varphi = |V| = \sqrt{u^2 + v^2} = \frac{\Gamma}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi_\Gamma}{\partial \varphi} = \frac{\Gamma}{2\pi}\frac{1}{r}\,, \quad (10.39)$$

أي أن السرعة في نقطة ما $B\,(r,\varphi)$ تمس الدائرة التي نصف قطرها $r = \overline{OB}$ ، وتتزايد في اتجاه المركز عكساً ونصف القطر . وعندما $r \longrightarrow 0$ فإن $V = V_\varphi \longrightarrow \infty$ ، وبالتالي فإن مركز الإحداثيات يمثل نقطة شاذة .

يطلق على الجريان الذي يخضع حقل السرعة فيه بموجب (10.39) للعلاقة :

$$V_\varphi \cdot r = \text{const} \quad (10.40)$$

اسم **الاعصار الكموني** ( انظر ص ٢٢٩ ) . وبامكاننا أن نتصور مركز الإحداثيات أحد النقاط الإعصارية لخيط الإعصار المنطبق على المحور z الذي يخترق المستوي y x بشكل عمودي ويحوض حوله حقل السرعة المعطى بالعلاقة (10.40) . فإذا اعتبرنا الثابت $\Gamma > 0$ نجد بسهولة من ( 10.38 ) أن كافة الجزيئات السائلة تتحرك على دوائر مركزية **حركة دائرية** بعكس اتجاه دوران عقارب الساعة .

إن المضمون الفيزيائي للثابت $\Gamma$ يتوضح إذا حسبنا قيمة الجولان على طول خط تيار نصف قطره $r = R$ ، حيث نجد باستخدام (10.39) واعتبار اتجاه الدوران الموجب بعكس اتجاه دوران عقارب الساعة :

$$\oint_{(r=R)} V_\varphi\, ds = V_\varphi(R)\cdot 2\pi R = \frac{\Gamma}{2\pi}\frac{1}{R}\cdot 2\pi R = \Gamma\,, \quad [\Gamma] = \frac{m^2}{s}\,. \quad (10.41)$$

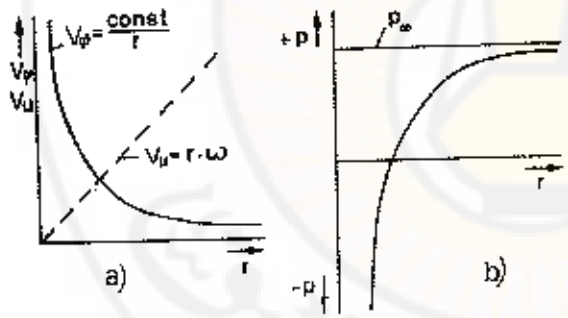
هـــذا يعني أن الثابت $\Gamma$ في العلاقة (10.34) يساوي قيمة الجولان ، أو **شدة الاعصار** بالنسبة لواحدة طول الخيط الاعصاري ، التي تبقى قيمتها بالنسبة

لكافة خطوط التيار ثابتة . هذا يقودنا إلى النتيجة التي سبق التأكيد عليها ص ٢٣٠ بأن تابع الكمون $\Phi_r$ متعدد القيم ، وتزداد قيمته بعد كل دورة كاملة على خط تيار بمقدار قيمة الجولان :

$$\Phi_r(\varphi + 2\pi) - \Phi_r(\varphi) = \Gamma . \qquad (10.42)$$

إن جريان الاعصار الكموني الذي تتحرك جزيئاته في سائل عديم الاحتكاك على دوائر مركزية بعكس اتجاه دوران عقارب الساعة وتتناسب سرعته عكساً ونصف القطر يملك كمون سرعة $\Phi_r = \frac{\Gamma}{2\pi}\varphi$ يحقق شرط الخلو من الدوران في كامل حقل الجريان باستثناء نقطة المركز $r = 0$ .

الشكل ( ٥.١٠ ـ a ) يبين توزع السرعة في الاعصار الكموني ( المثالي ) ، الذي يخضع حسب (10.40) لمعادلة قطع زائد ، بينما يخضع توزع السرعة




الشكل ٥.١٠ : مقارنة بين توزع السرعة للاعصار الكموني المثالي مع توزع السرعة للاعصار القسري ( a ) وتوزع الضغط في الاعصار الكموني ( b ) .

للاعصار القسري في حالة سائل يدور بسرعة زاوية ثابتة في إناء لعلاقة خطية ، $V_u = r\omega$ ، ونحصل على توزع الضغط من معادلة برنولي المختزلة (8.12) ، مع ملاحظة أن ثابتة برنولي لا تتغير قيمتها في كامل حقل الجريان . فاذا لاحظنا أيضاً حسب (10.39) أنه عندما $r \longrightarrow \infty$ تنعدم السرعة ، $V_\varphi \longrightarrow 0$ ، ويأخذ الضغط قيمته غير المشوشة $p \longrightarrow p_\infty$ ، نجد بسهولة :

$$p = p_\infty - \frac{\rho}{2}\left(\frac{\Gamma}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{r^2} = p_\infty - \frac{\text{const}}{r^2} \quad . \qquad (10.43)$$

**إذن فإن الضغط يتناقص باتجاه مركز الاعصار عكسامع مربع نصف القطر** $p \sim r^{-2}$ ، ويبلغ عندما $r \to 0$ قيمة سالبة لانهائية $p \to -\infty$ ، بمعنى أنه يصبح ، بمفهوم مقاومة المواد ، لإجهاد شد يسعى لتمزيق ذرات السائل .

إن السوائل الماتعة تستطيع فعلاً تحمل اجهادات شد . وتبلغ القيمة النظرية لإجهاد حد التمزق $\sigma_r$ لذرات الماء النقي حوالي 10 000 at [120] ، بينما تتراوح القيمة المقاسة بين 50 الى 280 at [33] . هذا الفرق يتعلق بصورة أساسية بدرجة نقاوة المائع وخلوه من الجزيئات الغريبة الصلبة والغازية المنحلة وغير المنحلة . والجدير بالذكر أن ظاهرة تحمل الموائع لاجهادات الشد تلعب دوراً هاماً في تحديد الضغط الحرج لبدء التكهف $p_c$ ، الذي يمكن أن يبلغ قيماً أقل بكثير أو قليل من قيمة ضغط التبخر [126] [127] [128] [129] . وفي كل الاحوال تسود في الجوار المباشر لمركز الاعصار ظروف مؤاتية جداً لنمو فقاعات التكهف المملوءة ببخار السائل وبالغازات المنحلة وغير المنحلة ، خاصة داخل الطبقة الحدية المضطربة التي تعتبر حركة جزيئاتها مؤلفة من حركة اساسية لجريان السحابي وحركة مشوشة ناتجة عن مجموعة كبيرة من الاعاصير .

لنتصور أن خط التيار للاعصار الكمومي ( الشكل ٤.١٠ ) الممثل بدائرة نصف قطرها R قد تصلب . بهذا لاتتغير صورة الجريان حول هذه الدائرة ، حتى اذا استبدلت بدائرة مقطع اسطوانة لانهائية الامتداد محورها z يخترق عمودياً المستوي y x في مركز الاحداثيات . ونحصل فعلياً على مثل هذا الجريان إذا جعلنا اسطوانة دائرية تدور حول محورها z في سائل ساكن بسرعة زاوية ثابتة . فإذا أخذنا ، في لحظة بدء الدوران فقط ، لزوجة السائل بعين الاعتبار ، فإن جزيئات السائل المحيطة بالاسطوانة ستقوم بحكم شرط الالتصاق بحركة دائرية على دوائر مركزية . فاذا كانت الاسطوانة تدور باتجاه دوران عقارب الساعة فيكون التابع :

$$\Phi = -\frac{\Gamma}{2\pi}\,\varphi \qquad (10.44)$$

يمثل كمون السرعة **للجريان الجولاني** البحت حول الاسطوانة . ويكون توزع السرعة والضغط فيه خاضعاً للعلاقتين (10.40) و (10.43) .

في ضوء ماتقدم يمكن استخلاص نتيجة هامة جداً . فالاعصار الفعلي يتألف من منطقتين : الاولى تحيط بمركز الاعصار مباشرة وتعرف باسم **نواة الاعصار** Vortex core ويبلغ نصف قطرها $r_c$ ، وتقوم جزيئاتها بحركة دورانية مماثلة تماماً لحركة الجسم الصلب ، وبالتالي فهي لا تملك كمون سرعة ؛ والثانية تحيط بالنواة والجريان فيها كموني ( لا دوراني ) . وعليه فان توزع السرعة والضغط في هذه الحالة سيكون مختلفاً عن التوزع المبين في الشكل ( ٥،١٠ ) .

في منطقة الجريان الكموني المحددة بالمجال $r_c \leq r < \infty$ فإن السرعة تتزايد من الصفر حتى تبلغ حسب ( 10.39 ) قيمتها الاعظمية على محيط النواة :

$$V_\theta (r_c) = V_{max} = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{r_c} \quad . \qquad (10.45)$$

ويتناقص الضغط في هذه المنطقة من $p_\infty$ حتى يبلغ حسب ( 10.43 ) على محيط النواة القيمة :

$$p_c = p_\infty - \frac{\rho}{2} \left( \frac{\Gamma}{2\pi} \right)^2 \frac{1}{r_c^2} \quad . \qquad (10.46)$$

في منطقة النواة المحددة بالمجال $0 \leq r \leq r_c$ فإن السرعة المحيطية تخضع لعلاقة خطية :

$$V_\theta = r\,\omega \qquad (10.47)$$

وبالتالي فهي تتزايد من الصفر وحتى قيمة اعظمية $V_\theta (r_c) = V_{max}$ على محيط النواة . أما توزع الضغط فإن حسابه بمساعدة معادلة برنولي صعب بسبب أن ثابتة برنولي تتغير من خط تيار لآخر . لذلك ننطلق من معادلات أويلر الحركية التي تأخذ حسب ( 9.1 ) في حالة جريان مستو مع إهمال القوى الحجمية الصيغة :

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\quad ;\quad u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}\quad (10.48)$$

فإذا كانت النواة تدور بعكس إتجاه دوران عقارب الساعة بسرعة زاوية $\omega$ فتكون :

$$u=-y\,\omega\ ,\ v=x\,\omega\ ,$$

وبذلك نصبح ( 10.48 ) من الشكل :

$$\omega^2 x=\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\quad ;\quad \omega^2 y=\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}$$

فإذا ضربنا طرفي العلاقة الأولى بـ $dx$ والثانية بـ $dy$ وجمعنا المعادلتين وأجرينا التكامل نجد بعد اصلاح بسيط :

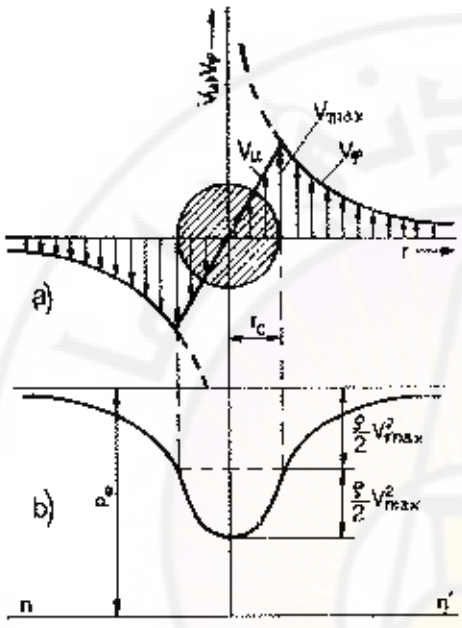
$$p=\frac{\rho}{2}\omega^2(x^2+y^2)+C=\frac{\rho}{2}\omega^2 r^2+C=\frac{\rho}{2}V_u^2+C\ ,\quad (10.49)$$

حيث $C$ ثابت التكامل ، الذي يتحدد من الشرط القاضي بوجوب كون قيم السرعة والضغط على محيط النواة ، $r=r_u$ ، واحدة سواء اقتربنا اليها من الداخل أو الخارج . وعليه ينتج من ( 10.49 ) باستخدام ( 10.45 ) و ( 10.46 ) :

$$p=p_\infty+\frac{\rho}{2}\omega^2 r^2-2\frac{\rho}{2}\left(\frac{\Gamma}{2\pi}\right)^2\frac{1}{r^2}\quad .\qquad (10.50)$$

إذن فتوزع الضغط في نواة الاعصار يخضع لمعادلة قطع مكافيء . الشكل (٦٠١٠) يبين توزع السرعة والضغط داخل وخارج نواة الاعصار . ونستنتج بسهولة أن فرق الضغط بين الجريان غير المشوش ومحيط النواة وفرق الضغط بين محيط النواة ومركز الاعصار يساوي في كل مرة ضغط الركود المحسوب بالسرعة الاعظمية . وعليه فإن فرق الضغط بين الجريان غير المشوش ومركز الاعصار يساوي إلى ضعف ضغط الركود هذا :

$$\Delta p = 2\frac{\rho}{2} V^2_{max} = 2\frac{\rho}{2}\left(\frac{\Gamma}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{r^2} . \qquad (10.51)$$

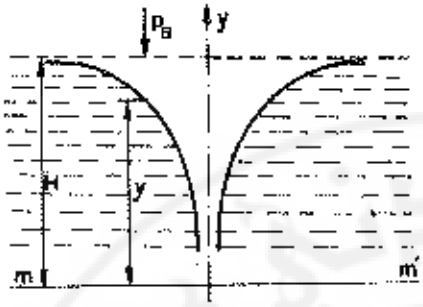



الشكل ١٠ . ٩ : توزع السرعة والضغط في الاعصار الحقيقي .

إن النتائج السابقة تسمح بتفسير العديد من الظواهر الطبيعية التي يمكن مشاهدتها . فحيث أن حركة جزيئات نواة الاعصار تختلف جذرياً عن حركة السائل المحيط بها فيمكن تصور النواة مؤلفة من جسم صلب أو من مائع أو غاز آخر ( هواء ) . على هذا الأساس تتشكل الاعاصير الفارغة Hollow vortex ، أو كما تسمى أيضاً الاقماع الهوائية ، التي نشاهدها على السطح السائب لمياه الانهار وعند تفريغ بانيو الحمام ، حيث تتألف نواة الاعصار من ذرات الهواء التي لا تشترك في الحركة الدورانية . ويأخذ السطح الخارجي للقمع الهوائي تحت تأثير الثقالة شكلا يمكن تحديده بمساعدة معادلة برنولي ، حيث تنتج برموز الشكل ( ١٠ . ٧ ) ، وبفرض $p_\infty = p_H$ الضغط المؤثر على السطح السائب للسائل ، العلاقة :

$$\frac{p_\infty}{\rho g} + y + \frac{V_y^2}{2g} = \frac{p_\infty}{\rho g} + H \Rightarrow H - y = \frac{V_r^2}{2g} = \frac{1}{2g}\left(\frac{\Gamma}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{r^4} , \qquad (10.52)$$

أي أن منحني السطح الخارجي للقمع يطابق منحني توزع الضغط في الجريان حول النواة .




الشكل ١٠-٧: قمع هوائي أو اعصار فارغ .

من جهة أخرى فان القدرة التدميرية لما يسمى البنطال الهوائي Wind hose والسيكلون الاستوائي Tropical cyclone ، الذي يصل قطره حتى [ 7a ] 1000 km وينشكل فوق البحار والبابسة ، وينشط كل ما يقع في طريقه مسبباً كوارث قومية أحياناً ، تنجم عن الفعل الامتصاصي الناتج عن انخفاض الضغط باتجاه مركز الاعصار بموجب (10.51) بالاضافة للقدرة الحركية الناتجة عن دوران النواة .

## ٤.٣.١٠ نبع وبالوعة بشدة واحدة ، الثنائية المستوية

نعتبر في مركز الاحداثيات نبعاً شدته $+E$ ، وعلى بعد $x = -e$ منه بالوعة شدتها $-E$ ونسأل عن الجريان الناتج عنها .

حسب مبدأ التضام فان تابع الكمون وتابع التيار للجريان الكلي ينتجان من (10.26) و (10.29) مع ملاحظة إشارة E ووضعية البالوعة بالصيغة :

$$\Phi_{tot} = \frac{E}{2\pi}\left[\ln\sqrt{x^2+y^2} - \ln\sqrt{(x+e)^2+y^2}\right] \qquad (10.53)$$

$$\Psi_{tot} = \frac{E}{2\pi}(\varphi_2 - \varphi_1) \quad , \qquad (10.54)$$

حيث $\varphi_1 , \varphi_2$ الزاويتان القطبيتان المقاستان من مركز النبع أو البالوعة ، الشكل (٨.١٠) . في نقطة ما C من حقل الجريان تبعد عن مركز البالوعة $r_1$ وعن مركز النبع $r_2$ تكون السرعة القطرية للبالوعة بموجب (10.32) :

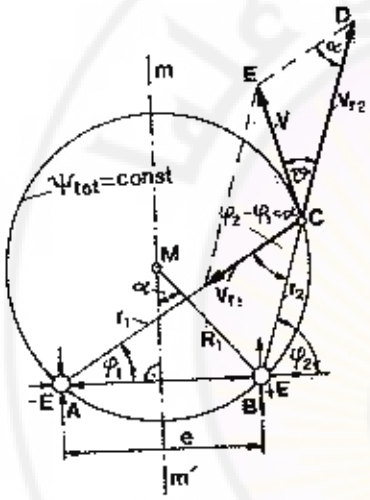
$$V_{r_1} = \frac{E}{2\pi}\frac{1}{r_1} \quad , \qquad (10.55)$$

واتجاهها إلى الداخل ، وللنبع :

$$V_{r_2} = \frac{E}{2\pi}\,\frac{1}{r_2} \quad , \qquad (10.56)$$

واتجاهها للخارج . وتنتج السرعة الكلية للجريان في النقطة C كمحصلة شعاعية :

$$V = V_{r_1} + V_{r_2} \, ,$$




الشكل ٨.١٠ : تحديد خط التيار الكلي المار من C لجريان نبع وبالوعة من نفس القوارة .

حيث تكون V مماسية على خط التيار الكلي $\Psi_{tot} = const$ المار من النقطة C . فإذا أمعنا النظر في الشكل (٨.١٠) نلاحظ أن المثلثين CBA و DEC متشابهان لأن نسبة ضلعين من الأول تساوي نسبة ضلعين من الثاني ، $V_{r_1} : V_{r_2} = r_2 : r_1$ ، ويحصران بينهما نفس الزاوية ، $\sphericalangle CDE = \sphericalangle ACB$ . إذن فإن : $V : V_{r_1} = e : r_2$ ، وبالتالي تنتج باستخدام (10.55) السرعة المحصلة :

$$V = |V| = \frac{E}{2\pi}\,\frac{e}{r_1 \cdot r_2} = \frac{E}{2\pi}\,\frac{e}{\sqrt{[(x+e)^2 + y^2]\,[x^2 + y^2]}} \quad . \qquad (10.57)$$

كما نستنتج أيضاً أن الزاوية $\sphericalangle BAC = \sphericalangle DCE$ وبالتالي :

$$\beta = -\varphi_1 \, . \qquad (10.58)$$

وبما أن V يجب أن تكون مماسية على خط التيار الكلي $\Psi_{tot} = const$ المار من النقطة C فينتج من العلاقة الاخيرة أن خط التيار هـذا ينطبق على دائرة تمر من النقاط ABC ، حق تكون الزاوية المحيطية $\varphi_1$ مساوية لزاوية المماس $\vartheta$ . هذه النتيجة يمكن تعميمها بالجملة التالية :

خطوط التيار للجريان الكلي الناتج عن تضام نبع وبالوعة من نفس الغزارة وعلى مسافة $\overline{AB} = c$ من بعضها تمثلها حزمة من الدوائر المارة من مركز النبع والبالوعة والتي مراكزها تقع على المحور التناظري $m\,m'$ للقطعة $\overline{AB}$ .

إن معادلة دوائر خطوط التيار تنتج من (10.54) بسهولة :

$$\Psi_{tot} = const = C_1 \Rightarrow \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{2\pi C_1}{E} \quad . \quad (10.59)$$

وتتحدد أنصاف أقطار هذه الدوائر من الشكل (١٠ . ٨) باعتبار أن الزاوية المركزية $\measuredangle AMB$ تساوي ضعف الزاوية المحيطية $\measuredangle ACB$ :

$$R_1 = \frac{e}{2\sin\alpha} = \frac{e}{2\sin(\varphi_2 - \varphi_1)} = \frac{e}{2\sin\left(\frac{2\pi C_1}{E}\right)} \quad . \quad (10.60)$$

وواضح أنه حسب قيمة $C_1$ تقع مراكز دوائر خطوط التيار M إما على القسم العلوي أو السفلي للمحور التناظري $m\,m'$ .

إن معادلة خطوط الكمون تنتج من ( 10.53 ) بالصيغة :

$$\Phi_{tot} = const = C_2 \Rightarrow \ln\sqrt{\frac{x^2+y^2}{(x+e)^2+y^2}} = \frac{2\pi C_2}{E} = \ln C_3 \quad .$$

ومنها بعد إصلاح بسيط نجد العلاقة :

$$y^2 + x^2 + 2e\frac{C_3^2}{C_3^2-1}x + e^2\frac{C_3^2}{C_3^2-1} = y^2 + (x+x_0)^2 - R_2^2 \quad . \quad (10.61)$$

وهي معادلة دائرة نصف قطرها :

$$R_2 = e\frac{C_3}{C_3^2-1} \quad . \quad (10.62)$$

ومركزها $M'$ يقع على المحور x ويبعد مسافة :

$$x_0 = -e\frac{C_3^2}{C_3^2-1} \quad (10.63)$$

عن مركز الاحداثيات وحسب قيمة $C_2$ التي تتحدد من قيمة $\Phi_{tot} = const$ المختارة ، يكون $M'$ واقعاً على الطرف السالب أو الموجب للمحور x . بذلك نصل للنتيجة التالية :

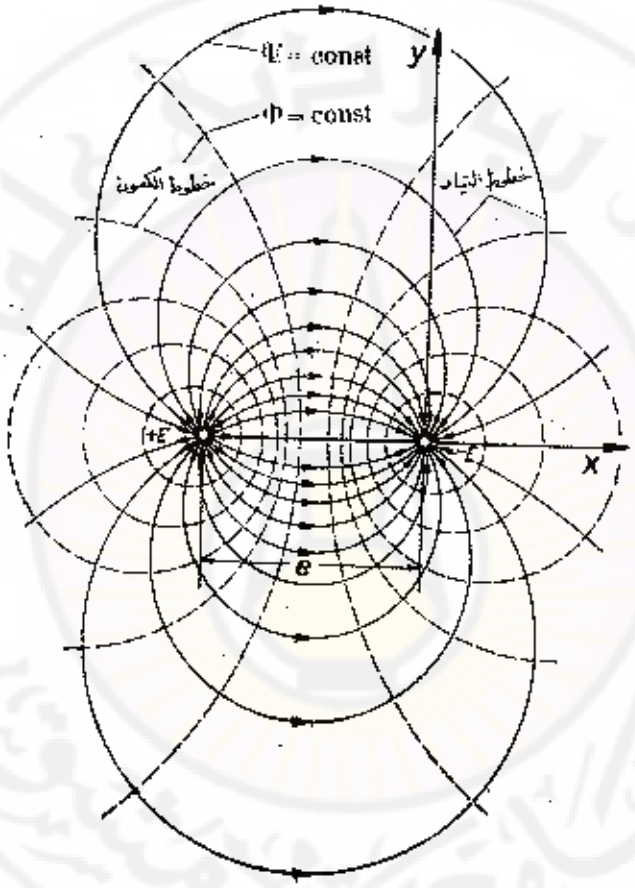
> خطوط الكمون للجريان الكلي الناتج عن تضام نبع وبالوعة من نفس الغزارة وعلى مسافة e من بعضها تمثل حزمة من الدوائر التي تقع مراكزها على الخط الواصل بين مركز النبع والبالوعة وتحيط إما بالنبع أو البالوعة .

الشكل (٩.١٠) يبين خطوط التيار $\Psi_{tot} = C_1$ وخطوط الكمون $\Phi_{tot} = C_2$ التي تشكل شبكاً من المنحنيات المتعامدة والتي نحصل عليها بمساعدة العلاقات السابقة بعد استبدال مكان النبع والبالوعة بالمقارنة مع الشكل ( ٨.١٠ ) واعطاء الثابتين $C_{1,2}$ قيماً سالبة وموجبة . ونلاحظ أن كامل الجريان الذي يتدفق من النبع يصب في البالوعة .

نتصور الآن في الشكل (٨.١٠) أن البالوعة تقترب من النبع بحيث أن المسافة بينهما تصغر باتجاه الصفر في الوقت الذي تزداد فيه الشدة النبعية باتجاه اللانهاية على أن يبقى الجداء :

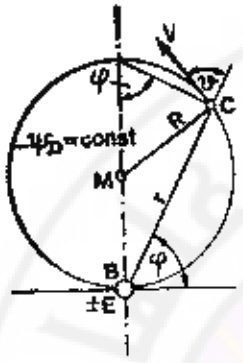
$$E e = E \Delta x = \dot{E}\, dx = M = \text{const} . \qquad (10.64)$$

خلال هـذه العملية فان الفرق بين بعد أية نقطة C من حقـل الجريان عن مركزي النبع والبالوعة سيتلاشى تدريجياً إلى أن يصبح بعد عملية التناهي ،




الشكل ٩٠١٠ : خطوط التيار $\Psi_{tot} = \text{const}$ وخطوط الكمون $\Phi_{tot} = \text{const}$ للجريان الناتج عن تضام نبع وبالوعة من نفس الغزارة مركزاهما واقعان على المحور x وعلى مسافة e من بعضهما .

أي عندما تنطبق البالونة على النبع ، مساوياً الصفر ، $r_1 = r_2 = r$ . في نفس الوقت تصبح الزوايا $\varphi = \varphi_2 = \varphi_1$ ، بينما تبقى بموجب (10.58) الزاوية $\varphi = \varphi_1 - \vartheta$ ، الشكل (١٠.١٠) . وبالتالي فإن خط التيار الممثل بالدائرة المارة من C ومن مركز النبع والبالونة ، يتحول بعد عملية التناهي إلى دائرة نصف قطرها R تمرّ من النقطة B التي يلتقي فيها النبع والبالونة ومركزها M يقع على المحور الشاقولي y المار من B . هذه النتيجة تنطبق على كل نقطة أخرى C من حقل الجريان .




الشكل ١٠.١٠ : تحديد خط التيار للثنائية المنبوعة .

لتحديد تابع الكمون وتابع التيار للجريان الجديد نفترض أن البالونة أصبحت على مسافة صغيرة $\Delta x$ من النبع . عندئذ نتتج من (10.53) و (10.64) العلاقة :

$$\Phi_D = -\frac{E \cdot \Delta x}{2\pi} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln \sqrt{[(x+\Delta x)^2 + y^2]} - \ln \sqrt{x^2+y^2}}{\Delta x} =$$

$$= -\frac{M}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} [\ln \sqrt{x^2+y^2}] = -\frac{M}{2\pi} \frac{\partial}{\partial r} (\ln r) \cdot \frac{\partial r}{\partial x} .$$

وحيث أن $r = (x^2+y^2)^{1/2}$ ، $x = r\cos\varphi$ ، $y = r\sin\varphi$ ، وبالتالي $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} = \cos\varphi$ ، فإن تابع الكمون يأخذ الصيغة :

$$\Phi_D = -\frac{M}{2\pi} \frac{x}{x^2+y^2} = -\frac{M}{2\pi} \frac{\cos\varphi}{r} \quad . \qquad (10.65)$$

ومنها نحصل على معادلة خطوط الكمون :

$$\Phi_D = \text{const} = C_1 \Rightarrow r = -\frac{M}{2\pi C_1}\cos\varphi = -C_1' \cos\varphi \ . \quad (10.66)$$

وهي تمثل معادلة حزمة من الدوائر التي تمس طرفي المحور y في مركز الاحداثيات .

تابع التيار ينتج بسهولة من (10.65) بمساعدة (10.14) و (10.15) حيث نجد :

$$\Psi_D = +\frac{M}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2} = +\frac{M}{2\pi}\frac{\sin\varphi}{r} \ . \quad (10.67)$$

ونأخذ معادلة خطوط التيار الصيغة :

$$\Psi_D = \text{const} = C_2 \Rightarrow r = \frac{M}{2\pi C_2}\sin\varphi = C_2' \sin\varphi \ . \quad (10.68)$$

وهي تمثل معادلة حزمة من الدوائر التي تمس طرفي المحور x في مركز الاحداثيات.

يطلق على الجريان الذي تابع كمونه معطى بالعلاقة (10.65) اسم المنبع المزدوج أو الثنائية المستوية Two-dimensional double . ويطلق على المحور التناظري والمماس المشترك لخطوط التيار ، المحور x ، محور الثنائية ، ويمثل الثابت M عزم الثنائية .

إن مركبتي السرعة للثنائية باتجاه x و y تنتجان من (10.65) بدلالة الاحداثيات الديكارتية والقطبية بالصيغة :

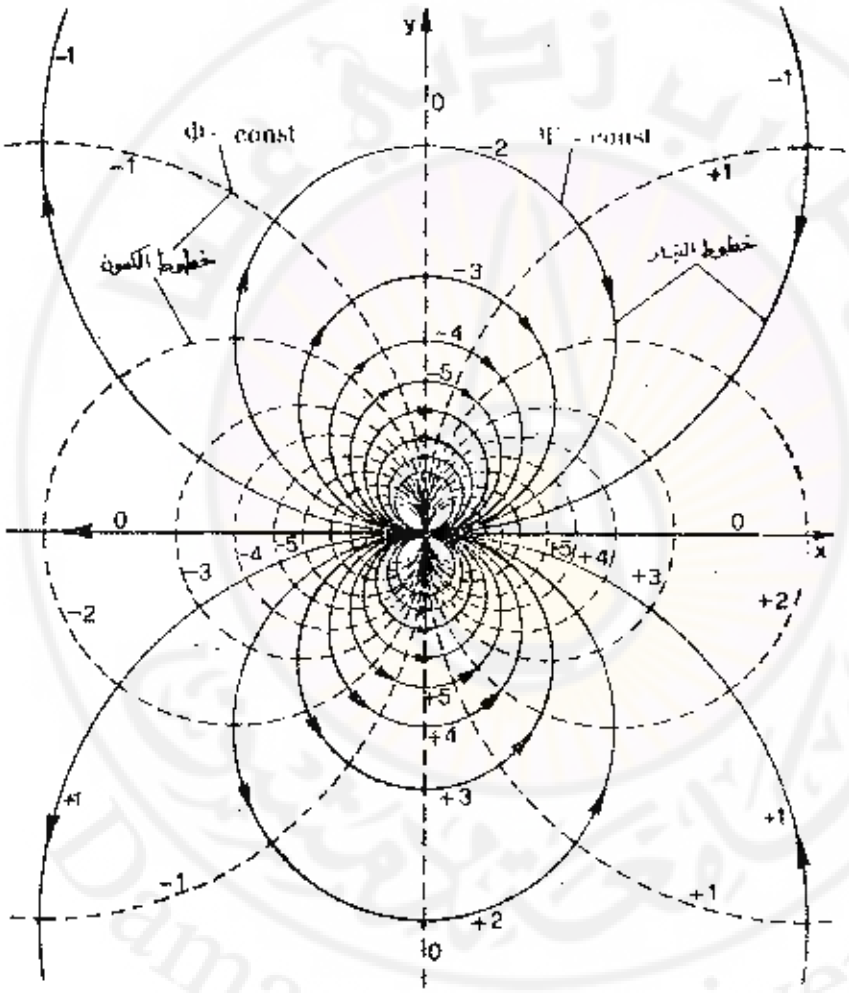
$$u = -\frac{M}{2\pi}\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{M}{2\pi}\frac{\cos 2\varphi}{r^2} \ , \quad (10.69)$$

$$v = -\frac{M}{2\pi}\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{M}{2\pi}\frac{\sin 2\varphi}{r^2} \ . \quad (10.70)$$

وتكون بالتالي قيمة شعاع السرعة :

$$|V| = V = \frac{M}{2\pi}\frac{1}{x^2+y^2} = \frac{M}{2\pi}\frac{1}{r^2} \ , \quad (10.71)$$

التي تنتج أيضاً من (10.57) بوضع $r_1 = r_2$ و $M = E \cdot e$ . ونلاحظ أن تأثير الثنائية يتلاشى باتجاه الخارج بصورة أسرع من النبع أو البالوعة ، لأن السرعة تتناقص بمعدل $\frac{1}{r^2}$ كلما ابتعدنا عن مركز الثنائية الذي يشكل نقطة شاذة




الشكل ١١٠١٠: خطوط التيار $\Psi_n = \text{const}$ وخطوط الكمون $\Phi_n = \text{const}$
للثنائية المستوية المعطاة بتابع الكمون $\Phi_n = + \frac{M}{2\pi} \frac{\cos \varphi}{r}$ .

( $V \to \infty$ ) . ويمكن أن نتصور المحور z الذي يخترق المستوي y x عمودياً في المركز مؤلفاً من عدد لانهائي من هذه النقاط الشاذة ( الثنائيات ) ، حيث تحرض كل نقطه منه في أي مستو عمودي على z حقل السرعة المعطى بالعلاقة (10.71) . ويكون بموجب هذه العلاقة اتجاه الجريان في النصف العلوي من المستوي y x بحيث أن الجزيئات تنطلق من المركز وتتحرك على دوائر بعكس اتجاه دوران عقارب الساعة لتصب في المركز أيضاً ، بينما يكون اتجاه دورانها في النصف السفلي باتجاه عقارب الساعة . وينعكس اتجاه الجريان إذا جعلنا إشارة السالب في (10.65) موجبة وبالتالي إشارة الموجب في (10.67) سالبة ، حيث نحصل عندئذ على صورة الجريان المبينة في الشكل (١١.١٠) عندما نعطي الثابتين $C_1$ و $C_2$ قيماً عددية سالبة وموجبة :

خطوط التيار للثنائية المستوية التي ينطبق مركزها على مركز الاحداثيين y,x تؤلف حزمة من الدوائر التي تمس طرفي المحور x ، المنطبق على محور الثنائية ، في المركز ، وتشكل مع خطوط الكمون ، التي تؤلف حزمة من الدوائر التي تمس طرفي المحور y في المركز ، شبكاً من المنحنيات المتعامدة . وتتزايد سرعة الثنائية باتجاه المركز عكساً ومربع نصف القطر المكاني .

إن الثنائية المستوية تعتبر من الجريانات الكمونية البسيطة الهامة جداً التي يمكن استخدامها « كحجر بناء » لانشاء أجسام جريان عملية ، وخاصة لدراسة الجريان حول اسطوانة دائرية ، كما سنرى ذلك فيما بعد .

## ٥.٣.١٠ المنبع اللامحصاري

ليكن لدينا في مستوي الاحداثيين y,x منبع غزارته E ثابتة ومنبع كمونه وتياره $\Phi_0$ و $\Psi_0$ . وليكن لدينا أيضاً في نفس المستوي اعصار جولانه $\Gamma$

ثابت أيضاً وتابع كمونه وتياره $\Psi_{\Gamma}$ و $\Phi_{\Gamma}$ . نفرض الان ان مركزي النبع والاعصار منطبقان على مركز الاحداثيين ونسأل عن صورة الجريان الكلي الناتج عنهما المعروف باسم **النبع الاعصاري** Source - Vortex .

بمساعدة مبدأ التضام ( 10.7 ) نحصل على تابع الكمون وتابع التيار للنبع الاعصاري من (10.26) و (10.34) ومن (10.30 ) و (10.35) ، حيث يكون بالاحداثيات القطبية :

$$\Phi_{Q\Gamma} = \Phi_Q + \Phi_\Gamma = \frac{1}{2\pi}\,(E\,\ln r + \Gamma\,\varphi) \quad , \qquad (10.72)$$

$$\Psi_{Q\Gamma} = \Psi_Q + \Psi_\Gamma = \frac{1}{2\pi}\,(E\,\varphi + \Gamma \ln r) \quad . \qquad (10.73)$$

من هاتين العلاقتين نحصل على معادلة خطوط الكمون وخطوط التيار بالطريقة المعهودة ، حيث نجد :

$$\Phi_{Q\Gamma} = \text{const} \Rightarrow E\,\ln r + \Gamma\,\varphi = \text{const} \quad , \qquad (10.74)$$

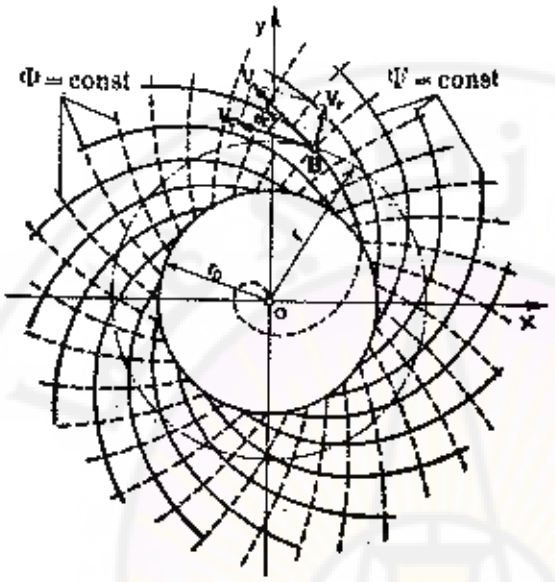
$$\Psi_{Q\Gamma} = \text{const} \Rightarrow E\,\varphi + \Gamma \ln r = \text{const} \quad . \qquad (10.75)$$

لتوضيح صورة الجريان نعتبر نقطة ما B واقعة على محيط دائرة نصف قطرها r . ان المركبة القطرية $V_r$ للسرعة في هذه النقطة تنتج من النبع فقط ، بينما تكون المركبة المماسية $V_\varphi$ مطابقة للسرعة التي يحرضها الاعصار الكموني فقط ، الشكل (١٢.١٠) . وحيث أن شعاع السرعة :

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_r + \mathbf{V}_\varphi \qquad (10.76)$$

يمس خط التيار الكلي المار من النقطة B ، فتكون الزاوية بين المماس على خط التيار والاتجاه المحيطي هي نفس الزاوية بين V و $V_\varphi$ . وبالتالي ينتج من الشكل ( ١٢.١٠ ) وباستخدام العلاقتين ( 10.32 ) و ( 10.39 ) :

$$\tan\alpha = \frac{dr}{ds} = \frac{dr}{r\,d\varphi} = \frac{V_r}{V_\varphi} = \frac{E}{F} = \text{const} \quad , \qquad (10.77)$$




الشكل ١٢.١٠ : صورة الجريان للنبع الاعصاري. خطوط التيار $\Psi=\text{const}$ تمثلها حلزونات لوغارتمية تبدأ من المركز .

حيث $d\varphi$ زاوية مركزية صغيرة جداً . هذا يعني أن خط التيار المار من B ( أو من أية نقطة أخرى ) يمثل حلزوناً لوغارتمياً يبدأ من المركز ويمتد إلى اللانهاية . ولكن بما أن المركز يمثل بالنسبة للنبع وللاعصار نقطة شاذة فإن جريان النبع الاعصاري ذو معنى فيزيائي اعتباراً من دائرة نصف قطرها $r_0$ مثلاً . فاذا كاملنا العلاقة الأخيرة بين $r_0$ و $r$ تنتج معادلة خطوط التيار للنبع الاعصاري بالصيغة :

$$r = r_0 \cdot e^{\tan\alpha \cdot \varphi} = r_0\, e^{\frac{E}{F}\cdot\varphi} \quad . \qquad (10.78)$$

إن توزع السرعة للنبع الاعصاري ينتج من مثلث السرع ( الشكل ١٢.١٠ ) ومن العلاقتين ( 10.32 ) و ( 10.39 ) :

$$|V| = \sqrt{V_r^2 + V_\varphi^2} = \sqrt{\left(\frac{E}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{r^2} + \left(\frac{I'}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{r^2}} = \frac{\text{const}}{r} \quad . \quad (10.79)$$

خطوط التيار للنبع الاعصاري تمثلهـــا حلزونات لوغارتمية وتتزايد سرعته باتجاه المركز عكساً ونصف القطر المكاني .

عندما يتحد مركز الاعصار مع مركز بالوعة بدلاً من النبع فاننا نحصل على بالوعة اعصارية Sink-Vortex . وعندئذ تتحرك الجزيئات باتجاه المركز بدلاً من ان تنطلق منه كما في حالة النبع الاعصاري . ونحصل على خطوط تيار منحنية الى الامام اذا كان اتجاه دوران الاعصار من اتجاه دوران عقارب الساعة. بينما تكون خطوط التيار منحنية للخلف اذا كان اتجاه دوران الاعصار عكس اتجاه دوران عقارب الساعة ، الشكل ( ١٢.١٠ ).

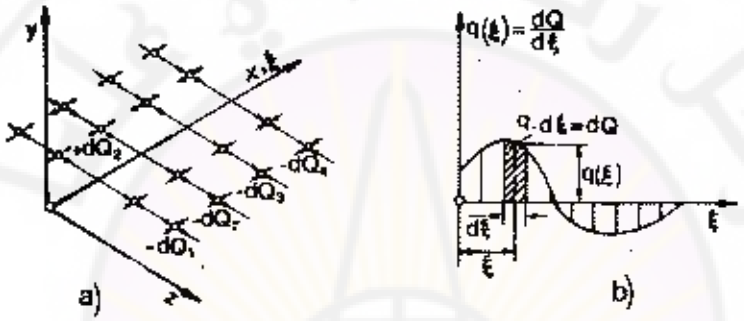
إن الأهمية العملية لجريان النبع الاعصاري والبالوعة الاعصارية تتجلى بوضوح فيما لو تصورنا أن عدداً محدوداً من خطوط التيـار قد « تصلبت » أو عوضنا عنها بريش أو جدران صلبة. وبالفعل فإن الجريان الخارجي المثالي المتولد من دولاب دائر لمضخة قطرية ( أو عنفة ) نصف قطره $r_0$ يدرس تماماً وكأنه يوجد في المركز نبع إعصاري ( أو بالوعة إعصارية ) . ويمكن بطريقة سهلة ودقيقة وبدون مفاقيد تجميع جريان النبع الاعصاري في أنبوب إذا حصر ضمن مغلف حلزوني ( راجع ٨.٣٠٨ ) كواسطة ممتازة لتحويل القدرة الحركية الى قدرة ضغط ( أو بالعكس ) .

## ٦.٣٠١٠ توزع سطحي من النابيـع والبالوعات

لغاية تطبيقية هامة تتعلق بإنشاء أجسام جريان مناسبة نفرض أن المستوي $xy$ يخترقه عدد كبير ( لا نهائي ) من الخيوط الشاذة الموازية للمحور $z$ والممتدة من $-\infty$ الى $+\infty$ والمزروعة بالينابيع والبالوعات ذات الشدة المختلفة ، الشكل ( ١٣.١٠ a ) .

في هـذه الحالة ينشأ لدينا **توزع سطحي من الينـابيع ـ البالوعات** Source-sink-surface نعبر عن **شدته** الموضعيـة بالرمز $q(\xi)=\frac{dQ}{d\xi}(\xi)$ وتتحدد غزارته الموضعية ، الشكل ( ١٠ – ١٣ – b ) ، بالعلاقة :

$$dQ = q(\xi) \cdot d\xi = \frac{dQ}{d\xi} \cdot d\xi \ , \qquad (10.80)$$




الشكل ١٠ ، ١٣ : مجموعة من الخيوط المزروعة بالينابيع والبالوعات ذات الغزارة المتغيرة $dQ_n$ $(n=1,2,3\ldots)$ على طول المحور $\xi$ ، ( a ) ، تؤلف توزعاً سطحياً من الينابيع ـ البالوعات شدته الموضعية $q(\xi)$ ، ( b ) .

حيث $\xi$ إحداثي نقطة متنقلة على المحور x . وتنتج الغزارة الكلية بين نقطة البداية $\xi_1$ ونقطة ما $\xi=\xi_2$ بالعلاقة :

$$Q = \int_{\xi=\xi_1}^{\xi=\xi_2} q(\xi)\, d\xi \ . \qquad (10.81)$$

فإذا كانت الغزارة الكلية لكل من الينابيع والبالوعات متساوية ، فيكون عندئذ التكامل بين نقطة بداية توزع الينابيع ـ البالوعات ونهايته ( مثلاً بين $\xi_1=0$ و $\xi_2=a$ ) معدوماً ، أي :

$$\int_{\xi=0}^{\xi=a} q(\xi)\, d\xi = 0 \qquad (10.82)$$

وهذا ما يعرف باسم **شرط الاغلاق** ، بمعنى أن خط التيار الصفري الناتج عن تضام مثل هذا التوزع السطحي للينابيع ـ البالوعات مع جريان انسحابي يؤلف خطاً مغلقاً يحصل داخله كامل غزارة الينابيع والبالوعات .

نعتبر الآن نقطة ما $B(x,y)$ ونستبدل في العلاقتين (10.26) و (10.29) $E$ بـ $dQ$ حسب (10.80) ، و $x$ بـ $(x-\xi)$ فنحصل على تفاضلي تابع الكمون وتابع التيار بالعلاقتين :

$$d\Phi_q = \frac{1}{2\pi} q(\xi) \ln \sqrt{(x-\xi)^2 + y^2} \cdot d\xi \ , \qquad (10.83)$$

$$d\Psi_q = \frac{1}{2\pi} q(\xi) \arctan \frac{y}{x-\xi} \cdot d\xi \ . \qquad (10.84)$$

كما نحصل على تفاضلي مركبتي السرعة في النقطة $B$ بمساعدة العلاقة (10.31) حيث تكون :

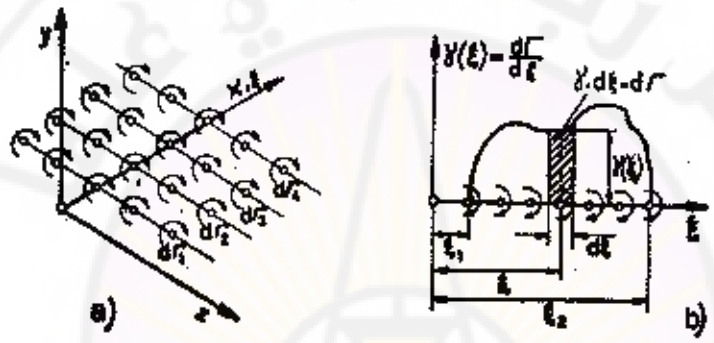
$$du_q = \frac{1}{2\pi} \frac{q(\xi).(x-\xi)}{(x-\xi)^2 + y^2} d\xi \ ; \ dv_q = \frac{1}{2\pi} \frac{q(\xi).y}{(x-\xi)^2 + y^2} d\xi \ . \qquad (10.85)$$

فإذا أجرينا التكامل بين نقطة البداية $\xi_1 = 0$ ، والنهاية $\xi_2 = a$ نحصل من العلاقات الأخيرة على التأثير الإجمالي لتوزع الينابيع ـ البالوعات ( انظر الجدول ١٠.١٠ ) .

إن طريقة النقاط الشاذة تستخدم توزع الينابيع ـ البالوعات لتصميم أجسام جريان عملية أو لحساب الجريان حولها ، حيث يتركز عندئذ السؤال على إيجاد توزع مناسب لمسألة الجريان المطروحة ( انظر ٥.٢.١٢ ) .

## ٧.٣.١٠ توزع سطحي اعصاري

بشكل مماثل تماماً لخطوات الفقرة السابقة بإمكاننا أن نتصور مجموعة كبيرة جداً من الخطوط الاعصارية الموازية للمحور z والممتدة من $z = \pm\infty$ وتخترق عمودياً المستوي y,x الشكل ( ١٤.١٠ – a ) . فإذا جعلنا المسافة بين الاعاصير تتناهى الى الصفر وأخذنا المسافة بين الخطوط الاعصارية صغيرة جداً مع افتراض




الشكل ١٤.١٠ : مجموعة خيوط اعصارية موازية للمحور z ذات جولان متغير القيمة $(n = 1, 2, \ldots)\ d\Gamma_n$ على طول المحور ξ ، ( a ) تؤلف توزعاً سطحياً اعصارياً كثافته الاعصارية الموضعية $\gamma(\xi)$ ، ( b ) .

أن شدتها الاعصارية ( الجولان ) $d\Gamma_n$ مختلفة ، فإننا نحصل على **توزع سطحي اعصاري** مستمر يمتد مثلاً من $\xi_1$ حتى $\xi_2$ ، حيث ξ احداثي متحول على المحور x ، الشكل ( ١٤.١٠ – b ) . فاذا كانت $\gamma(\xi) = \frac{d\Gamma}{d\xi}$ تمثل **الكثافة الاعصارية الموضعية** فإن الشدة الاعصارية الموضعية (أو الجولان الموضعي) تعطى بالعلاقة :

$$d\Gamma = \gamma(\xi)\,.\,d\xi = \frac{d\Gamma}{d\xi}(\xi)\,.\,d\xi \quad . \qquad (10.86)$$

ونحصل على الجولان الكلي أو الشدة الاعصارية الكليـــة لكامل التوزع الاعصاري بالتكامل :

$$\Gamma = \int_{\xi=\xi_1}^{\xi=\xi_2} \gamma(\xi) \cdot d\xi \quad . \qquad (10.87)$$

لنعتبر الآن نقطة ما $B(x,y)$ ، فحسب مبدأ التبادل القائم بين تابع الكمون $\Phi$ وتابع التيار $\Psi$ لجريان النبع والاعصار الكمونى ( راجع ٣.٣.١٠ ) نحصل مباشرة من العلاقات ( 10.83 ) حتى ( 10.85 ) على تابع الكمون وتابع التيار ومركبات السرعة المحرضة للتوزع الاعصاري ، وبالتطابق مع قانون بيو - سافار (راجع ٦.٣.٧) ، بالصيغ :

$$\Phi_\gamma = -\frac{1}{2\pi} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \gamma(\xi) \arctan \frac{y}{x-\xi} \, d\xi \quad . \qquad (10.88)$$

$$\Psi_\gamma = \frac{1}{2\pi} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \gamma(\xi) \ln \sqrt{(x-\xi)^2 + y^2} \, d\xi \quad . \qquad (10.89)$$

$$u_\gamma(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \gamma(\xi) \frac{y}{[(x-\xi)^2 + y^2]} \, d\xi \quad , \qquad (10.90)$$

$$v_\gamma(x,y) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \gamma(\xi) \frac{x-\xi}{[(x-\xi)^2 + y^2]} \, d\xi \quad . \qquad (10.91)$$

حيث اعتبرنا هنا اتجاه دوران الاعصار باتجاه دوران عقارب الساعة .

في حالات عملية تتطلبها نظرية الجناح الحامل القليل الانحناء يكتفى بحساب حقل السرعة المحرضة من التوزع الاعصاري على المحور x نفسه ، أي بالنسبة لنقطة $B'(x,0)$ ، فإذا جعلنا في ( 10.90 ) و ( 10.91 ) $y \longrightarrow 0$ نجد بسهولة :

$$u_\gamma(x) = \pm \frac{1}{2}\gamma(\xi) \quad , \qquad (10.92)$$

$$v_\gamma(x) = -\frac{1}{2\pi}\int_{\xi_1}^{\xi_2}\gamma(\xi)\frac{d\xi}{x-\xi} \quad , \qquad (10.93)$$

$+u_\gamma(x)$ تمثل السرعة باتجاه $+x$ وتسود في حالة الدوران اليميني قليلاًفوق المحور $x \equiv \xi$ الذي يمثل خيطاً إعصارياً ، بينما تمثل $-u_\gamma(x)$ السرعة باتجاه $-x$ وتسود تحت المحور $\xi$ بقليل . وبالتالي فإن اتجاه السرعة الأفقية يتغير فجائياً عند اجتياز المحور $\xi$ ، ممـــا يدل أن التوزع الاعصاري يمثل سطحاً فاصلاً ( انظر ٥.٣.٨ ) . وتتلاشى السرعة $u_\gamma(x)$ كلما ابتعدنا عن المحور $\xi$ .

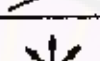
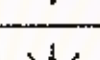
عند حساب السرعة $v_\gamma(x)$ يجب أن نلاحظ أنه عندما تنطبق النقطة المتحولة $\xi$ على النقطة الثابتة $x$ نحصل على حالة عدم تعيين بسبب وجود نقطة شاذة عند $x=\xi$ . لذلك يجب حساب التكامل ( 10.93 ) على أساس أن نأخذ منه القيمة الاساسية الكوشية ( انظر [42] ) ، وذلك بكتابته بالصيغة التالية :

$$v_\gamma(x) = -\frac{1}{2\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int_{\xi_1}^{x-\varepsilon}\gamma(\xi)\frac{d\xi}{x-\xi} + \int_{x+\varepsilon}^{\xi_2}\gamma(\xi)\frac{d\xi}{x-\xi}\right\} \quad , \qquad (10.94)$$

حيث $\varepsilon$ مجال صغير جداً إلى يمين ويسار النقطة المعتبرة .

عندما يكون التوزع الاعصاري $\gamma(\xi)$ معلوماً ، فبالامكان حساب حقل السرعة العرضة وحقل السرعة المحصلة عندما ينضام إلى الجريان الاعصاري جريان انسحابي أو أي جريان آخر يناسب المسألة المطروحة ( انظر ٦.٢.١٢ ) .

الجدول ١٠١٠ : تابع الكمون $\Phi$ وتابع التيار $\Psi$ لاهم الجريانات الكمونية المستوية البسيطة

| النقطة الشاذة | الرمز | $\Phi =$ تابع الكمون | $\Psi =$ تابع التيار |
|---|---|---|---|
| جريان منتظم (انسحابي) افقي |  | $u_\infty x$ | $u_\infty y$ |
| جريان منتظم (انسحابي) شاقولي |  | $v_\infty y$ | $-v_\infty x$ |
| جريان منتظم (انسحابي) مائل |  | $u_\infty x + v_\infty y$ | $u_\infty y - v_\infty x$ |
| نبع |  | $\frac{E}{2\pi} \ln \sqrt{x^2+y^2} = \frac{E}{2\pi} \ln r$ | $\frac{E}{2\pi} \arctan \frac{y}{x} = \frac{E}{2\pi} \varphi$ |
| بالوعة |  | $-\frac{E}{2\pi} \ln \sqrt{x^2+y^2} = -\frac{E}{2\pi} \ln r$ | $-\frac{E}{2\pi} \arctan \frac{y}{x} = -\frac{E}{2\pi} \varphi$ |
| ثنائية |  | $\frac{M}{2\pi} \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{M}{2\pi} \frac{\cos\varphi}{r}$ | $-\frac{M}{2\pi} \frac{y}{x^2+y^2} = -\frac{M}{2\pi} \frac{\sin\varphi}{r}$ |
| اعصار |  | $\frac{-\Gamma}{2\pi} \arctan \frac{y}{x} = -\frac{\Gamma}{2\pi} \varphi$ | $\frac{\Gamma}{2\pi} \ln \sqrt{x^2+y^2} = \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r$ |
| توزع سطحي من الينابيع (او البالوعات) |  | $\frac{1}{2\pi} \int_0^a q(\xi) \ln \sqrt{(x-\xi)^2+y^2}\, d\xi$ | $\frac{1}{2\pi} \int_0^a q(\xi) \arctan \frac{y}{x-\xi}\, d\xi$ |
| توزع سطحي اعصاري |  | $-\frac{1}{2\pi} \int_0^a \gamma(\xi) \arctan \frac{y}{x-\xi}\, d\xi$ | $\frac{1}{2\pi} \int_0^a \gamma(\xi) \ln \sqrt{(x-\xi)^2+y^2}\, d\xi$ |

## ٤.١٠ أسئلة مراجعة وتمارين

س ١.١٠ : استخرج معادلات أويلر الحركية العامة واستخلص منها صيغتها في حالة جريان ثنائي ووحيد البعد .

س ٢.١٠ : ماهي الشروط الحدية الحركية لجسم ساكن في جريان مثالي وحقيقي وجسم يتحرك في سائل ساكن عديم الاحتكاك ؟

س ٣.١٠ : استخرج معادلات جروميكو ـ لامب وبرهن بمساعدتهـا أن القدرة الميكانيكية الاجمالية بالنسبة لواحدة الكتلة لجريان مستقر ثلاثي البعد غير قابل للانضغاط تؤثر عليه قوى حجمية كمونية فقط ، $W = C_{BE} = \frac{|V|^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \Phi_s$ ، تبقى قيمتهـا ثابتة في كامل حقل الجريان فقط في الحالة التي يكون فيها حقل الجريان خالياً من الأعاصير أو عندما يكون شعاع الاعصار منطبقاً على شعاع السرعة .

س ٤.١٠ : استخرج المعادلة الاعصارية وبرهن بمساعدتها أن شعاع السرعة الزاوية $\omega$ لكل جزيئة من جريان مستو عديم الاحتكاك يتعرض لقوى حجمية كمونية فقط لايتغير مع الزمن .

س ٥.١٠ : اشرح سبب نشوء مقاومة التسارع وبيّن كيفية حسابها .

س ٦.١٠ : اشرح المضمون الفيزيائي لتابع الكمون $\Phi$ وتابع التيار $\Psi$ والعلاقة بينهما مستخلصاً المبادىء الأساسية لطرق حل مسائل الجريان الكموني المستوي .

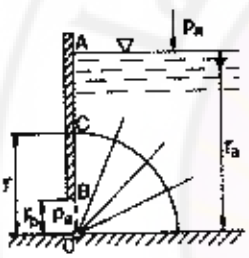
س ٧.١٠ : استخرج علاقتي توزع السرعة والضغط لاعصار حقيقي ، كيف تفسر نشوء الأقماع الفارغة والقدرة التدميرية للسيكلونات الاستوائية .

س ٨.١٠ : على المحور x يوجد في النقطة A نبع شدته $E = \frac{m^2}{s}$ وعلى بعد a منه ، في النقطة B ، يوجد نبع آخر شدته $3E$ . ما هي معادلة خط التيار الصفري ، $\Psi_{0c} = 0$ ، للجريان الناتج عنهما ؟ حدد موقع نقطة الركود S والسرعة في نقطة C تبعد عن A مسافة r وعن B مسافة $3r$ .

س ٩.١٠ : نبع شدته $E = 6 \frac{m^2}{s}$ واعصار شدته $\Gamma = 12 \frac{m^2}{s}$ ويدور باتجاه دوران عقارب الساعة . إذا انطبق مركزا النبع والاعصار على مركز الاحداثيين x,y أوجد معادلة خط التيار للنبع الاعصاري وحدد السرعة في النقطة B(2,3) من حيث القيمة والاتجاه . بيّن أهمية هذا الجريان العملية .

س ١٠.١٠ : برهن أن خط التيار الصفري الناتـــج من تضام ثنائية مستوية عزمها M مع جريان السحاب أفقي سرعته $u_\infty$ باتجاه $+x$ يمثل دائرة نصف‌قطرها R. كم يجب أن يكون M إذا كان $R = 20\ cm$ ، وكانت $u_\infty = 5\ m/s$ ؟

ت ١٠.١٠ : بوابة بشكل صفيحة مستوية شاقولية تخزن خلفها الماء حتى ارتفاع $r_a$ . ترفع البوابة لتصريف الماء مسافة $r_a - r_b$ ونفرض أن خروج الماء من الشق يماثل جريان بالوعة مستوية ، الشكل ( ت ١٠.١٠ ) . أحسب قوة الضغط الكلية المؤثرة على البوابة ونسبتها لقوة الضغط الستاتيكية . معطى : $r_b = 0,3\ m$ ، $r_a = 10\ m$ ، عرض البوابة $b = 1m$ ، $\rho g = 10^3\ kp/m^3$ .




الشكل ت ١٠.١٠

الحل : بالنسبة لبالوعة مستوية تنتج السرعة القطرية حسب ( 10.32 ) بالنسبة لنقطة ما C تبعد مسافة r عن مستوي القيـــاس ( مركز البالوعة ) :

$$V_r = V = \frac{const}{r} \qquad (a)$$

وتكون السرعة في النقطتين A و B :

$$V_A = \frac{const}{r_a} \ ; \ V_B = \frac{const}{r_b} \qquad (b)$$

وعليه تنتج من (a) و (b) :

$$V = V_A \frac{r_a}{r} \ ; \ V_B = V_A \frac{r_a}{r_b} \qquad (c)$$

نطبق معادلة برنولي على خط التيار المار من A حيث يؤثر الضغط الجوي $p_a$ و C حيث يؤثر الضغط p ، فنجد باستخدام العلاقة (c) الضغط الزائد :

$$p_e = p - p_a = \frac{\rho}{2} V_A^2 \left[ 1 - \left( \frac{r_a}{r} \right)^2 \right] + \rho g (r_a - r) \qquad (d)$$

في شق التفريغ يتعادل الضغط مع الضغط الجوي لأن التصريف يتم في الهواء الجوي ، وبالتالي ينتج من (d) بالنسبة للنقطة B :

$$\frac{\rho}{2} V_A^2 \left[ 1 - \left( \frac{r_a}{r_b} \right)^2 \right] + \rho g ( r_a - r_b ) - H \quad .$$

ومنها نجد بعد اصلاح بسيط العلاقة :

$$\frac{\rho}{2} V_A^2 = \rho g \frac{r_b^2}{r_a + r_b} \quad .$$

وباستخدامها في (b) يصبح :

$$p_o = \rho g \frac{r_b^2}{r_a + r_b} \left[ 1 - \left( \frac{r_a}{r} \right)^2 \right] + \rho g ( r_a - r ) \quad . \qquad (e)$$

إن محصلة قوى الضغط ( التحريكية ) المؤثرة على البوابة هي $F_{pd} = \int_{r_b}^{r_a} ( p_o \cdot dr \cdot 1 )$ التي نحصل عليها باستخدام (e) وإجراء التكامل بالصيغة :

$$F_{pd} = \frac{\rho g}{2} ( r_a - r_b )^2 \left( 1 - \frac{2 r_b}{r_a + r_b} \right) \quad . \qquad (f)$$

محصلة قوى الضغط الستاتيكية تنتج من ( 3.24 ) بفرض أن الماء ساكن بالصيغة :

$$F_{p_s} = p_S A = \rho g \frac{r_a - r_b}{2} ( r_a - r_b ) \cdot 1 = \frac{\rho g}{2} ( r_a - r_b )^2 \quad . \qquad (g)$$

وعليه تنتج النسبة :

$$n = \frac{F_{pd}}{F_{ps}} = 1 - \frac{2 r_b}{r_a + r_b} < 1 \quad . \qquad (h)$$

هذه النتيجة تبين أن جزءاً من قدرة الضغط الكامنة يتحول إلى قدرة حركية يحملها الجريان الخارج من شق التفريغ .

باستخدام القيم العددية نجد : $F_{pd} = 44.3$ t ; $F_{p_s} = 47,045$ t ; $n \approx 0.942$ .

ت ٢,١٠ : أوجـــد حقل السرعة للجريان المستوي المحدد بتابع العكمون

$\Phi = a(x^2-y^2)$ ، حيث $a$ عدد موجب حقيقي ، وحدد صورة الجريان ، برهن أنه بمساعدة هذا التابع يمكن دراسة الجريان المحصور ضمن جدارين مستويين متقاطعين وأنه يمثل حالة خاصة لتابع كمون يسمح بدراسة الجريان ضمن جدارين مستويين يحصران زاوية $\alpha$ .

الحل : بسهولة يمكن التأكد أن $\Phi$ يحقق معادلة لابلاس (10.6) ، $\Delta\Phi = 0$ . وبالتالي تنتج مركبتا السرعة حسب (10.1) ، ومنهما قيمة شعاع السرعة ، في كل نقطة $M(x,y)$ ، بالصيغة :

$$u = \frac{\partial\Phi}{\partial x} = 2ax \; ; \; v = \frac{\partial\Phi}{\partial y} = -2ay \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |V| = \sqrt{u^2+v^2} = 2a\sqrt{x^2+y^2} = 2ar \qquad (a)$$

حيث $r$ نصف القطر المكاني . وعليه فإن مركز الاحداثيات يمثل نقطة ركود ، $V(0,0) = 0$ . ويتحدد اتجاه الجريان بسهولة اذا اعتبرنا نقطة على المحور $x$ . فعندما يكون الاحداثي $x > 0$ ينتج من (a) أن $u > 0$ و $v = 0$ ، وبالتالي فالجزيئات تتحرك الى اليمين ، وينتج من اجل $x < 0$ أن $u < 0$ ، وبالتالي فالجزيئات تتحرك الى اليسار . واذا اعتبرنا نقطة على المحور $y$ نجد أن الجزيئات في القسم الفوقي من المستوي $yx$ تتحرك للاسفل ، وفي القسم التحتي للأعلى ، الشكل (ث ٣٠١٠) .

لإيجاد صورة الجريان نستعين بالعلاقتين (10.14) و (10.15) لاستخراج تابع التيار حيث نجد :

$$\Psi = \int \frac{\partial\Phi}{\partial x}\,dy + c(x) = \int 2ax\,.\,dy + c(x) = 2axy + c(x),$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x} = 2ay + c'(x) = -\frac{\partial\Phi}{\partial y} = 2ay \Rightarrow c'(x) = 0 \Rightarrow c(x) = \text{const.}$$

نهمل للسهولة ثابت التكامل الاعتباطي فينتج تابع التيار :

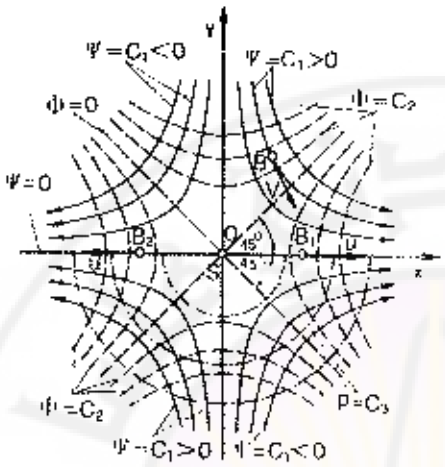
$$\Psi = 2axy \,. \qquad (b)$$

بذلك نحصل بموجب (10.11) على معادلة خطوط التيار بالصيغة :

$$\Psi = \text{const} \Rightarrow 2axy = \text{const} \Rightarrow xy = C_1 \,. \qquad (c)$$

إن خطوط التيار تمثل إذن حزمة من القطوع الزائدة . فإذا كان $C_1 > 0$ فيكون إما $x > 0$ ، $y > 0$ أو $x < 0$ ، $y < 0$ ، وبالتالي تكون فروع القطوع الزائدة واقعة في الربع الأول والثالث . وعندما يكون $C_1 < 0$ فيكون إما $x < 0$ ، $y > 0$ ، أو $x > 0$ ، $y < 0$ ، وبالتالي تقع فروع القطوع الزائدة في الربع الثاني والرابع . ويتحدد

خط التيار الصفري، $\Psi = 0$ ، بوضع $C_1 = 0$ حيث ينتج من ذلك أن $x = 0$ أو $y = 0$ . هذا يعني أن محوري الإحداثيات يمثلان خطي تيار صفريين ، وفي نفس الوقت مستقيمين متقاربين في اللانهاية لفروع القطوع الزائدة ، الشكل ( ت ٢ . ١٠ ) .




الشكل ت ٢ . ١٠ : صورة الجريان المحدد بتابع الكمون $\Phi = a(x^2 - y^2)$ المطابق للجريان الركودي المستوي أو الجريان ضمن زاوية قائمة .

إن معادلة خطوط الكمون تنتج بسهولة بوضع :

$$\Phi = \text{const} \Rightarrow x^2 - y^2 = C_2 \quad , \quad (d)$$

وبالتالي فهي تمثل حزمة من القطوع الزائدة ، التي تشكل مع خطوط التيار شبك منحنيات متعامدة . وتنتج معادلة خط الكمون الصفري بالصيغة :

$$\Phi = 0 \Rightarrow x = \pm y \quad . \quad (e)$$

وعليه فإن المستقيمين المنصفين للزاويتين القائمتين المتشكلتين من محوري الإحداثيات يمثلان خطي الكمون الصفريين ، وفي نفس الوقت المستقيمين المتقاربين في اللانهاية لفروع القطوع الزائدة الممثلة لخطوط الكمون .

نفرض الآن أن المحور x قد « تصلب » ، كأن نتصوره يمثل أثر صفيحة مستوية أفقية ، $\alpha = \pi$ . إن ذلك لا يؤثر طبعاً على طبيعة الجريان ، الذي يطلق عليه الآن الجريان الركودي المستوي ، لأن الجريان القادم من الأعلى أو الأسفل باتجاه الصفيحة المستوية يشكل كما رأينا نقطة ركود في مركز الإحداثيات ويتفرع منها يساراً ويميناً على كامل مستوي الصفيحة .

بسهولة يمكن أيضاً أن نتصور أن المحورين x و y في الربع الأول مثلاً قد تصلبا ، فنحصل في هـذه الحالة على الجريان ضمن الزاوية القائمة ، $\alpha = \pi/2$ ، المشكلة من صفيحتين مستويتين متعامدتين .

ينتج مما تقدم أن الجريان السابق يمثل حالة خاصة لجريان عام ، تابع كمونه $\Phi$ وتابع تياره $\Psi$ يتحددان بدلالة الإحداثيات القطبية بالمعادلتين :

$$\Phi = a r^{\pi/\alpha} \cos\frac{\pi\varphi}{\alpha} \quad ; \quad \Psi = a r^{\pi/\alpha} \sin\frac{\pi\varphi}{\alpha} \, . \qquad (f)$$

ويكون في هذه الحالة خط التيار الصفري محدداً بالمستقيمات $\varphi = 0$ ( المحور x ) و $\varphi = \pm\alpha$ ، التي يمكن أن نتصورها تمثل آثار جدران مستوية مما يسمح بمساعدة (f) دراسة الجريان ضمن جدارين مستويين بصنعان زاوية $\alpha$ . وفي الحالة الخاصة التي تكون فيها $\alpha = \frac{\pi}{2}$ نجد بسهولة من (f) بوضع $x = r\cos\varphi$ ، $y = r\sin\varphi$ :

$$\Phi = a r^2 \cos 2\varphi = a r^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) = a(x^2 - y^2),$$

$$\Psi = a r^2 \sin 2\varphi = a r^2 (2\sin\varphi\cdot\cos\varphi) = 2axy$$

وهذا ما ينطبق على المثال السابق . وعندما $\alpha = \frac{\pi}{3}$ ينتج من (f) :

$$\Phi = a x(x^2 - 3y^2) \; ; \; \Psi = a y(3x^2 - y^2) \qquad (g)$$

وهذان هما تابعا الكمون والتيار للجريان ضمن جدارين مستويين يصنعان زاوية $\alpha = 60°$ .

## ١١ الجريانات الكمونية المتناظرة دورانياً

تعتبر **الجريانات الكمونية المتناظرة دورانيـــاً** ( أو محورياً ) Rotationally symmetric حالة خاصة وهامة جـداً للجريانات الكمونية الفراغية ، ولكنها أقرب بكثير الى الجريانات الكمونية المستوية من حيث أن حركة جزيئات السائل تتم في مستويات تتقاطع كلها مع محور ثابت يطلق عليـه **محور التناظر** ، وتكون لهـذه الحركة في كل من هـــذه المستويات نفس الصورة . لذلك يكتفى بدراسة مثل هذه الجريانات حركياً وتجريبياً في مستو زوالي ( انتصافي ) Meridian plane ، كما كان الأمر تماماً في حالة الجريانات المستوية .

## ١٠١١ المعادلات التفاضلية الأساسية للجريانات الكمونية المتناظرة دورانياً

لاستخراج المعادلات التفاضلية الاساسية للجريانات الكمونية المتناظرة دورانياً نختار بدلاً من جملة الاحداثيات الديكارتية $z, y, x$ جملة إحداثيات اسطوانية $\rho, \varphi, x$ ونفرض أن $V_\rho , V_\varphi , V_x \equiv u$ مركبات شعاع السرعة $|V|$ باتجاه هذه الاحداثيات . عندئذ تأخذ معادلة الاستمرار العامة (9.5) الصيغة التالية ( راجع ت ٢.٦ ، ص ٢٠٨ ، وللتعمق [42] [84] ) :

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = \frac{\partial V_\rho}{\partial \rho} + \frac{V_\rho}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial V_x}{\partial x} \qquad (11.1)$$

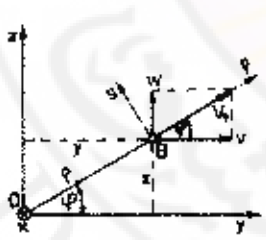
وتأخذ العلاقة (9.11) لدوّار شعاع السرعة الصيغة التالية :

$$\mathbf{e}_\rho \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_x}{\partial \varphi} - \frac{\partial V_\varphi}{\partial x} \right) + \mathbf{e}_\varphi \left( \frac{\partial V_\rho}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial \rho} \right) + \mathbf{e}_x \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\rho V_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_\rho}{\partial \varphi} \right) =$$

$$= \operatorname{rot} \mathbf{V} = 2 \left( \mathbf{e}_\rho \omega_\rho + \mathbf{e}_\varphi \omega_\varphi + \mathbf{e}_x \omega_x \right). \qquad (11.2)$$

لتكن B في الشكل (١.١١) نقطة من المستوي الزوالي للجريان المتناظر دورانياً، وليكن المحور x الذي يخترق عمودياً مستوي الشكل في 0 محور التناظر . عندئذ يكون :

$$\rho = \sqrt{y^2 + z^2} \qquad (11.3)$$



الشكل ١.١١ : لاستخراج المعادلات التفاضلية للجريانات المتناظرة دورانياً .

بعد النقطة B عن x . وتكون في النقطة B مركبة قطرية للسرعة $V_\rho$ فقط بينما تكون المركبة المحيطية باتجاه $\rho d\varphi$ معدومة ، $V_\varphi = 0$ ، لأن الجزيئات لا تتحرك في هذا

الاتجاه . $V_\rho$ يمكن تحليلهـــا الى مركبتين : $v = V_\rho \cos\varphi$ باتجـاه y و $w = V_\rho \sin\varphi$ باتجاه z .

لنفرض المستوي الزوالي منطبقاً على مستوي الاحداثيين المتعامدين $\rho, x$ فيكون موقع أية نقطة من حقل الجريان محـدداً بنصف القطر المكاني :

$$r = \sqrt{x^2 + \rho^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad . \qquad (11.4)$$

وتكون لشعاع السرعـة فيها مركبة محورية باتجاه x ، $V_x = u = f(x,\rho)$ ، ومركبة قطرية $V_\rho = f(x,\rho)$ ، على هذا الاساس نحصل من (11.1) على **معادلة الاستمرار للجريانات المتناظرة دورانياً** بالصيغة :

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = \frac{\partial V_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} V_\rho + \frac{\partial V_x}{\partial x} \quad . \qquad (11.5)$$

كما نجد أيضاً من (11.2) بسهولة أن **شرط الخلو من الدوران** (9.23) ينحصر بالنسبة للجريانات المتناظرة دورانياً بمعادلة واحدة فقط :

$$\omega_\varphi = 0 \Rightarrow \frac{\partial V_\rho}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial \rho} = 0 \, . \qquad (11.6)$$

هذه النتيجة تعبر عن إمكانية اشتقاق مركبتي السرعة $V_x$ ، $V_\rho$ من تابع كمون سرعة $\Phi$ بحيث تكون :

$$V_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \, ; \quad V_\rho = \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \, , \qquad (11.7)$$

وبالتالي فإن $\Phi$ يحقق شرط الخلو من الدوران (11.6) بالتطابق . ونحصل على المعادلة التفاضلية لتحديد $\Phi$ بادخال (11.7) في معادلة الاستمرار (11.5) حيث نجد العلاقة :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} = 0 \, , \qquad (11.8)$$

التي تمثل معادلة الكمون للجريانات المتناظرة دورانياً ، والتي تحقق في ان واحد شرط الخلو من الدوران والاستمرار ، مثلها مثل العلاقة (10.6) بالنسبة للجريانات الكمونية المستوية ، وتقوم مقام معادلة لابلاس العامة :

$$\Delta \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad . \qquad (11.8a)$$

نعتبر الآن ( راجع ٢٠١٠ ) تابعاً جديداً $\Psi_{St} = f(x, \rho)$ ترتبط بمركبتا السرعة بالعلاقتين :

$$V_x = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi_{St}}{\partial \rho} \; ; \; V_\rho = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi_{St}}{\partial x} \quad , \qquad (11.9)$$

وبالتالي يحقق معادلة الاستمرار ( 11.5 ) بالتطابق . فإذا أدخلنا ( 11.9 ) في ( 11.6 ) نحصل على المعادلة التفاضلية لتحديد $\Psi_{St}$ بالصيغة :

$$\frac{\partial^2 \Psi_{St}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi_{St}}{\partial \rho^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi_{St}}{\partial \rho} = 0 \quad . \qquad (11.10)$$

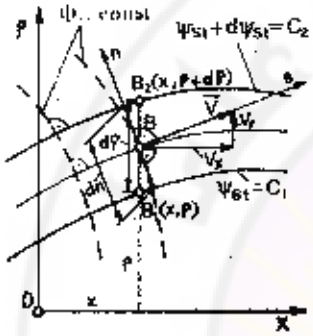
يطلق على $\Psi_{St}$ اسم **تابع تيار ستوكس** Stokes' stream function وله بالنسبة للجريانات الكمونية المتناظرة دورانياً نفس المضمون الفيزيائي لتابع التيار $\Psi$ بالنسبة للجريانات الكمونية المستوية . فالمنحنيات $\Psi_{St} = \text{const}$ تمثل خطوطاً للتيار وتشكل مع خطوط الكمون $\Phi = \text{const}$ في المستوي الزوالي شبكاً من المنحنيات المتعامدة ، الشكل ( ٢٠١١ ) . وتتحدد العلاقة بين $\Phi$ و $\Psi_{St}$ من ( 11.7 ) و ( 11.9 ) ، حيث تنتج علاقتان بديلتان لمعادلتي **كوشي - ريمان** ( 10.13 ) :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi_{St}}{\partial \rho} \quad ; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi_{St}}{\partial x} \quad ; \qquad (11.11)$$

ومنها يمكن ايجاد $\Psi_{St}$ إذا كان $\Phi$ معلوماً أو بالعكس .

نعتبر الآن في المستوي الزوالي مجموعة من خطوط التيار ، وليكن s الاحداثي المماسي على خط التيار ، n الناظم عليه ، الشكل ( ٢٠١١ ) . إن قيمة شعاع السرعة تنتج من ( 11.7 ) أو ( 11.9 ) بالصيغة :

$$|\mathbf{V}| = \sqrt{V_x^2 + V_\rho^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \rho}\right)^2} = \frac{1}{\rho}\sqrt{\left(\frac{\partial \Psi_{St}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi_{St}}{\partial \rho}\right)^2} \tag{11.12}$$



الشكل ٢٠١١ :توضيح المضمون الفيزيائي لتابع تيار ستوكس .

وباعتبار أن $\mathbf{V}$ ، s فتكون أيضاً :

$$\left.\begin{aligned} V = -\frac{\partial \Phi}{\partial s} &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial \Psi_{St}}{\partial n}\,, \\ 0 = \frac{\partial \Phi}{\partial n} &= \frac{\partial \Psi_{St}}{\partial s}\quad . \end{aligned}\right\} \tag{11.13}$$

ليكن :

$$\Psi_{St_2} = \Psi_{St} + d\Psi_{St} = C_2 \text{ و } \Psi_{St_1} = \Psi_{St} = C_1$$

خطي تيار متجاورين ، dn البعد الناظمي بينهما . فإذا اعتبرنا مستوياً متعامداً مع محور التناظر x ويتقاطع مع $\Psi_{St}$ في النقطة $B_1(x,\rho)$ ومع $\Psi_{St_2}$ في النقطة $B_2(x,\rho+d\rho)$ فيكون التيار الحجمي الذي يعبر الحاتم الدائري المار من $B_1$ و $B_2$ محدداً بالعلاقة :

$$dQ = 2\pi\rho\, d\rho\, .\, V_x \quad .$$

وحيث أن $V_x\, d\rho = V\, dn$ ، كما يتضح بسهولة من الشكل (٢٠١١) ، فيكون باستخدام المعادلة الأولى من ( 11.13 ) :

$$dQ = 2\pi\rho\, dn\, V = 2\pi\, d\Psi_{St} \quad .$$

وبإجراء التكامل بين $\rho = 0$ و $\rho = \rho_0$ نجد العلاقة :

$$Q = 2\pi \int_{\rho=0}^{\rho=\rho_0} d\Psi_{st} = 2\pi \left[ \Psi_{st}(\rho=\rho_0) - \Psi_{st}(\rho=0) \right] \quad . \quad (11.14)$$

هذا يعني أن التيار الحجمي الذي يعبر سطح دائرة نصف قطرها $\rho_0 = \rho$ يتعلق بالفرق بين قيمتي تابع تيار ستوكس من أجل نقطة من محيط هذه الدائرة ، $\rho = \rho_0$ ، ومركزها ، $\rho = 0$ .

أخيراً تجدر الاشارة أن **مبدأ التضام** ينطبق على التابعين $\Phi$ و $\Psi_{st}$ . وعليه توجد لتابع الكمون الإجمالي وتابع تيار ستوكس الاجمالي علاقتان مماثلتان للعلاقتين (10.7) و (10.16) . ولكن **مبدأ التبادل** بين $\Phi$ و $\Psi_{st}$ غير محقق بسبب اختلاف اشارة الحدين الأخيرين للعلاقتين (11.8) و (11.10) .

## ٢.١١ أمثلة على الجريانات الكمونية البسيطة المتناظرة دورانياً

توجد جريانات كمونية بسيطة فراغية أو تقطية لها نفس أهمية الجريانات الكمونية المستوية من حيث أنها تشكل « أحجار بناء » لتشييد أجسام جريان متناظرة دورانياً ينطبق محيط مقطعها الزوالي على خط تيار ستوكس الاجمالي الصفري . وسنعالج فيما يلي ، متبعين نفس الخطوات المعتمدة في (٣.١٠) ، بعض هذه الجريانات التي تسمح بالمقارنة بينها وبين مثيلاتها من الجريانات الكمونية البسيطة .

### ١.٢.١١ الجريان الوسطي المنتظم المتناظر دورانياً

إن التابع الخطي

$$\Phi_T(x,y,z) = ax + by + cz \qquad (11.15)$$

يحقق ، عندما تكون a و b و c ثوابت حقيقية ، معادلة **لابلاس** (11.8a) . وبالتالي فهو تابع كمون لجريان فراغي ، حقل سرعته يتحدد بدلالة الإحداثيات الديكارتية بالعلاقات :

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = u_\infty = a \; ; \; v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = v_\infty = b \quad ; \quad w = \frac{\partial \Phi}{\partial z} = w_\infty = c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\mathbf{V}_\infty| = \sqrt{u_\infty^2 + v_\infty^2 + w_\infty^2} = \text{const} \quad . \qquad (11.16)$$

وعليه فإن السرعة في كامل حقل الجريان ثابتة من حيث القيمة والاتجاه . لذلك يطلق عليه اسم **الجريان الانسحابي المنتظم** Translation flow . ويكون لهذا الجريان في أحد المستويات المشكلة من محاور الاحداثيات z, y, x أو في مستوٍ زوالي x ؛ ( انظر الجدول ١٠١١ ) صورة مماثلة للشكل (٣.١٠) ، ص ٤٢٠ .

## ٢.٢.١١ المنبع النقطي والبالوعة النقطية

ليكن لدينا التابع :

$$\Phi_Q = -\frac{E}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \quad , \quad -\frac{E}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{x^2+r^2}} \quad , \quad -\frac{E}{4\pi} \frac{1}{r} \quad , \qquad (11.17)$$

حيث r نصف القطر المكاني ، E عدد ثابت . هذا التابع يحقق معادلة **لابلاس** (11.8) أو (11.8a) ، كما يمكن التأكد من ذلك بسهولة . وعليه فإن $\Phi_Q$ يمثل تابع كمون لجريان فراغي .

من (11.17) نجد أن سطوح الكمون الثابت :

$$\Phi_Q = \text{const} \Rightarrow r = \sqrt{x^2+y^2} = \text{const} \qquad (11.18)$$

تمثل **كرات مركزية** حول مركز الإحداثيات ، التي تظهر في مستوٍ زوالي كدوائر مركزية . وحيث أن خطوط التيار $\Psi_{st}$ = const ، ( انظر الجدول ١٠١١ ) ، تخترق سطوح الكمون عمودياً فيجب أن تؤلف **حزمة من الأشعة القطرية المنبعثة من المركز** ، ويكون شعاع السرعة محمولاً عليها وله مركبة قطرية فقط :

$$|\mathbf{V}| = V_r = \frac{\partial \Phi_Q}{\partial r} = \frac{E}{4\pi}\frac{1}{r^2} \quad . \qquad (11.19)$$

نفس النتيجة نحصل عليها بحساب مركبات السرعة باتجاه المحاور الديكارتية ، حيث نجد :

$$u = \frac{E}{4\pi}\frac{x}{r^3} \; ; \; v = \frac{E}{4\pi}\frac{y}{r^3} \; ; \; w = \frac{E}{4\pi}\frac{z}{r^3} \Rightarrow |\mathbf{V}| = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} \qquad (11.20)$$

أو باتجاه المحورين $x$ , $\rho$ في المستوي الزوالي حيث تكون :

$$V_x = u = \frac{E}{4\pi}\frac{x}{(x^2+\rho^2)^{3/2}} \; ; \; V_\rho = \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} = \frac{E}{4\pi}\frac{\rho}{(x^2+\rho^2)^{3/2}} \Rightarrow |\mathbf{V}| = \sqrt{V_x^2 + V_\rho^2} \qquad (11.21)$$

لتحديد المضمون الفيزيائي للثابت $E$ نحسب التيار الحجمي الذي يعبر السطح الخارجي لكرة نصف قطرها $R$ ومساحة سطحها الخارجي $A = 4\pi R^2$ فنجد باستخدام (11.19) :

$$Q = V_r(R).A = \frac{E}{4\pi}\frac{1}{R^2} \cdot 4\pi R^2 = E \; ; \; [E] = \frac{m^3}{s} \quad .$$

إذن فإن $E$ يساوي التيار الحجمي الذي لا تتعلق قيمته بنصف القطر . فإذا كان $E > 0$ فإن الجريان ينبعث من نقطة المركز وتتحرك جزيئاته على مستقيمات شعاعية للخارج وفي كافة الاتجاهات ، ويسمى في هذه الحالة نبع نقطي أو فواغي Point source وتنطبق عليه كافة العلاقات السابقة . وعندما يكون $E < 0$ فإن الجريان يصب في نقطة المركز قادماً من كافة الاتجاهات ويسمى في هذه الحالة بالوعة نقطية أو فواغية Point sink ، وعندئذ يأخذ تابع الكمون الصيغة :

$$\Phi_{-Q} = +\frac{E}{4\pi}\frac{1}{r} \quad . \qquad (11.22)$$

[illegible] يمثل في الحالتين غزارة أو شدة النبع أو البالوعة . وتكون صورة الجريان لكل منهما في مقطع زوالي مماثلة تماماً للشكل ( ٣.١٠ ـ a أو b ) ، ص ٤٢٣ ، في حالة النبع والبالوعة في المستوي . ونحصل على هذه الصورة بوضع $\Psi_{st} = const$ (انظر الجدول ١.١١) . ولكن ينتج من مقارنة العلاقتين (10.32) و (11.19) أن سرعة النبع النقطي أو البالوعة النقطية تتناقص بمعدل $1/r^2$ ( بدلاً من $1/r$ في الحالة المستوية ) كلما ابتعدنا عن المركز . وعليه فإن تأثير النبع النقطي يتلاشى على مسافة أقرب من المركز بالمقارنة مع النبع المستوي . ويمثل المركز هنا أيضاً نقطة شاذة .

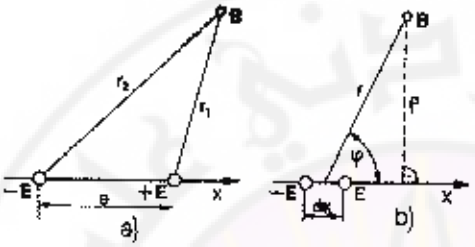
في الواقع العملي لا توجد طبعاً ينابيع وبالوعات نقطية بالصورة المبينة أعلاه . ولكن هناك أمثلة عديدة يمكن دراستها على أساس أنها مكافئة لنبع نقطي أو بالوعة نقطية. فإذا حركنا قضيباً حدب الطرفين في سائل ساكن فإن الجريان في الجوار المباشر لمقدمة القضيب التي تزيح السائل أمامها في كافة الاتجاهات يمكن اعتباره نبعاً نقطياً ، بينما تكون المنطقة المحيطة بمؤخرة القضيب ، حيث يتحرك السائل من كافة الاتجاهات ليملأ الفراغ الذي خلفه القضيب وراءه ، مكافئة لجريان بالوعة نقطية . كذلك فإن الجريان الذي تولده مروحة تهوية مثبتة في جدار شاقولي مكافىء لنصف بالوعة . ويمكن على هذا الأساس تفسير السبب لعدم تمكن شرائط الغبار الكهربائية من شفط الغبار إلا إذا لامست نهاية الشرائط الجدار ( أو السجادة ) تقريباً حتى تكون سرعة الهواء التي تتناسب مع $1/r^2$ كافية للشفط .

## ٣.٢.١١ الثنائية النقطية

نعتبر على المحور x نبعاً نقطياً وبالوعة نقطية من نفس الغزارة $E \pm$ وتفصلهما مسافة a . فإذا كانت B نقطة ما من حقل الجريان تبعد عن مركز النبع $r_1$ وعن مركز البالوعة $r_2$ ، الشكل ( ٣.١١ ـ a ) ، فيكون تابع الكمون الاجمالي للجريان الناتج عنهما معطى بموجب (11.17) و (11.22) بالعلاقة :

$$\Phi_{tot} = -\frac{E}{4\pi}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) . \qquad (11.23)$$

نجعل البالوعة تقترب من النبع إلى مسافة صغيرة جداً dx ، الشكل (٣.١١ – b) ، في الوقت الذي تزداد فيه غزارة كل منهما E بحيث يبقى الجداء




الشكل ٢.١١ :
استخراج تابع الكمون
للثنائية النقطية .

$$E\,c = E\,\Delta x = E\,dx = M = const \qquad (11.24)$$

ذا قيمة نهائية محددة M ، حتى عند إجراء عملية التناهي : $\Delta x \to 0$ ، $E \to \infty$ ، التي تنطبق فيها البالوعة على النبع ويصبح $r_1 = r_2 = r = \sqrt{x^2 + \rho^2}$ . عندئذ تأخذ (11.23) الصيغة :

$$\Phi_D = -\frac{E}{4\pi}\,d\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{E\,dx}{4\pi}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{M}{4\pi}\,\frac{\partial}{\partial x}\,(x^2 + \rho^2)^{-\frac{1}{2}} .$$

ومنها نجد بعد إصلاح بسيط :

$$\Phi_D = \frac{M}{4\pi}\,\frac{x}{r^3} = \frac{M}{4\pi}\,\frac{x}{(x^2 + \rho^2)^{3/2}} = \frac{M}{4\pi}\,\frac{\cos\varphi}{r^2} = \frac{M}{4\pi}\,\frac{\cos\varphi}{x^2 + \rho^2} , \qquad (11.25)$$

حيث $\varphi$ الزاوية التي يصنعها الشعاع r الموجه للنقطة B مع المحور x .

يطلق على الجريان الذي تابع كمونه $\Phi_D$ اسم **الثنائية النقطية أو الفواغية** ، التي عزمها M ومحورها x . وتتحدد صورة الجريان لها في مستوٍ زوالي x ρ بوضع $\Psi_{s_D} = const$ ، انظر الجدول ( ١١.١ ) ، حيث تنتج صورة مماثلة تماماً لصورة جريان الثنائية المستوية المبينة في الشكل ( ١١.١٠ ) . ونحصل على

مركبتي السرعه في هذا المستوي بسهولة ، حيث تكون بموجب (11.7) :

$$V_x = u = \frac{M}{4\pi} \frac{\rho^3 - 2x^2}{(x^2+\rho^2)^{5/2}} \quad ; \quad V_\rho = -\frac{M}{4\pi} \frac{3\,x\,\rho}{(x^2+\rho^2)^{5/2}} \,. \qquad (11.26)$$

ومنهما تنتج قيمة السرعة في أية نقطة من حقل الجريان :

$$|V| = V = \sqrt{V_x^2 + V_\rho^2} = \frac{M}{4\pi} \frac{\sqrt{\frac{3\,x^2}{x^2+\rho^2} + 1}}{(x^2+\rho^2)^{3/2}} \,. \qquad (11.27)$$

هذه النتيجة تبين أن تأثير الثنائية الفراغية يتلاشى بمعدل $1/r^3$ كلما ابتعدنا عن مركزها ، وبالتالي بشكل أسرع من الثنائية المستوية . ويمكن التأكد من ذلك بسهولة إذا حسبنا V على المحور x ( $\rho = 0$ ) وعلى المحور $\rho$ ( $x = 0$ ) .

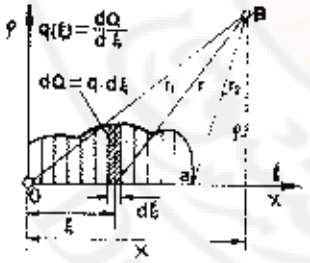
إن الثنائية النقطية لها أهمية خاصة بالنسبة لدراسة الجريان حول كرة ، كما سنرى ذلك فيما بعد .

## ٤.٢.١١ توزع خطي من الينابيع أو البالوعات النقطية

لحل مسائل الجريان حول أجسام انسيابية متناظرة محورياً يستخدم عدد لانهائي من الينابيع أو البالوعات النقطية الموزعة بشكل مستمر على طول قطعة مستقيمة مثلاً ، وبحيث تكون شدتها الموضعية بالنسبة لواحدة الطول :

$$q(\xi) = dQ/d\xi \qquad (11.28)$$

متغيرة . عندئذ نحصل على **توزع خطي من الينابيع أو البالوعات النقطية** . $q(\xi)$ تختار وفقاً لتابع مناسب . فاذا اعتبرنا التوزع الخطي من الينابيع ، المبين في الشكل (٤.١١) والممدد بالمجال



الشكل ٤.١١ : توزع خطي من الينابيع النقطية .

$a \leq \xi \leq o$ فإن التيار الحجمي الاجمالي أو الشدة الاجمالية تحسب من العلاقة :

$$E = Q = \int_{\xi=0}^{\xi=a} q(\xi)\, d\xi \quad . \qquad (11.29)$$

ونجد برموز الشكل والاستهداء بالعلاقة (11.17) تابع الكمون :

$$\Phi = -\frac{1}{4\pi} \int_{\xi=0}^{\xi=a} q(\xi) \frac{d\xi}{r} = -\frac{1}{4\pi} \int_{\xi=0}^{\xi=a} q(\xi) \frac{d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2+\rho^2}} \quad . \qquad (11.30)$$

وتنتج مركبتا السرعة المحرضة في نقطة ما $B(x,\rho)$ بالصيغة :

$$V_x = +\frac{1}{4\pi} \int_{\xi=0}^{\xi=a} q(\xi) \frac{(x-\xi)\, d\xi}{[(x-\xi)^2+\rho^2]^{3/2}} \;;$$

$$V_\rho = +\frac{1}{4\pi} \int_{\xi=0}^{\xi=a} q(\xi) \frac{\rho\, d\xi}{[(x-\xi)^2+\rho^2]^{3/2}} \quad . \qquad (11.31)$$

في حالة توزع خطي من البالوعات النقطية تبدل إشارة (+) بـ (−) . وفي الحالات العملية الهامة ، كما هو الأمر عند دراسة الجريان حول أجسام مغزلية ، يستخدم توزع خطي من الينابيع ـ البالوعات بشرط أن تكون شدتهـا الاجمالية معدومة :

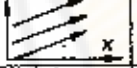
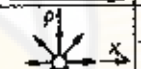
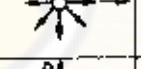
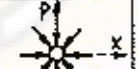
$$Q = \int_{\xi=0}^{\xi=a} q(\xi)\, d\xi = 0 \quad , \qquad (11.32)$$

حتى يتحقق شوط الاغلاق ، ويكون خط التيار الصفري للجريان الناتج عن تضامها مع جريان انسحابي منتظم مغلقاً .

في الحالة الخاصة التي يكون فيها توزع الينابيع الخطي منتظماً ، وبالتالي $q = \frac{E}{a} = \text{const}$ ، ينتج من (11.30) :

$$\Phi = -\frac{E}{4\pi a}\int_{\xi=0}^{\xi=a}\frac{d\xi}{r} . \qquad (11.33)$$

الجدول ١٠١١ : تابع الكمون $\Phi$ وتابع تيار ستوكس $\Psi_{St}$ للجريانات الكمونية البسيطة المتناظرة دورانياً .

| النقطة الشاذة | الرمز | $\Phi =$ تابع الكمون | $\Psi_{St} =$ تابع تيار ستوكس |
|---|---|---|---|
| جريان منتظم (انسحابي) افقي |  | $u_\infty x$ | $u_\infty \frac{\rho^2}{2}$ |
| جريان منتظم شاقولي |  | $V_{\rho\infty}\rho$ | $-V_{\rho\infty} x\ \rho$ |
| جريان منتظم (انسحابي) مائل |  | $u_\infty x + V_{\rho\infty}\rho$ | $u_\infty \frac{\rho^2}{2} - V_{\rho\infty} x\ \rho$ |
| نبع نقطي |  | $\frac{-E}{4\pi}\frac{1}{\sqrt{x^2+\rho^2}} = \frac{-E}{4\pi}\frac{1}{r}$ | $-\frac{E}{4\pi}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+\rho^2}}\right)$ |
| بالوعة نقطية |  | $\frac{+E}{4\pi}\frac{1}{\sqrt{x^2+\rho^2}} = \frac{+E}{4\pi}\frac{1}{r}$ | $+\frac{E}{4\pi}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+\rho^2}}\right)$ |
| ثنائية نقطية |  | $\frac{M}{4\pi}\frac{x}{(x^2+\rho^2)^{3/2}} = \frac{M}{4\pi}\frac{x}{r^2}$ | $-\frac{M}{4\pi}\frac{\rho^2}{(x^2+\rho^2)^{3/2}}$ |
| توزع خطي من الينابيع (والبالوعات) |  | $-\frac{1}{4\pi}\int_0^a q(\xi)\frac{d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2+\rho^2}}$ | $-\frac{1}{4\pi}\int_0^a q(\xi)\left[1+\frac{x-\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2+\rho^2}}\right]d\xi$ |

## ٣.١١ أسئلة مراجعة وتمارين

س ١.١١ : ما هي الخصائص المميزة للجريانات الكمونية المتناظرة دورانياً بالمقارنة مع الجريانات الكمونية العامة .

س ٢.١١ : استخرج المعادلات التفاضلية لتابع الكمون $\Phi = f(x,z)$ وتيار تابع ستوكس $\Psi = f(x,z)$ . هل يمكن تطبيق مبدأ التبادل بينهما ؟

س ٣.١١ : لماذا لا تستطيع المكانس الكهربائية شفط الغبار إلا اذا لامست فوهة التهاية السجادة .

س ٤.١١ : برهن ان سطح التيار الصفري الناتج عن تضام ثنائية نقطية عزمها M مع جريان انسحابي أفقي سرعته $u_\infty$ باتجاه x – يمثل كرة نصف قطرها R . كم يجب أن تكون قيمة M عندما $R = 20\ cm$ ، $u_\infty = 3\ m/s$ ؟

س ٥.١١ : هل يمكن دراسة الجريان عبر المروحـــة ( أو الدافع ) على أساس التعويض عن قرص المروحة بتوزع مناسب من الينابيع – البالوعات ؟

ت ١.١١ : مروحة لتجديد هواء صالة إنتاج مثبتة في الجدار ضمن فتحة دائرية قطرها $d = 300\ mm$ ، إذا كانت سرعة التيار الثابوري الخارج من الفتحة $V = 20\ m/s$ ، فعلى أي بعد من الجدار لا نشعر بتيار مزعج إذا فرضنا أن سرعة الهواء المقبولة تساوي $1\ m/s$ ؟

الحل : إذا أهملنا الاحتكاك واعتبرنا كثافة الهواء ثابتة فإن الجريان في الجوار المباشر للجدار يمكن اعتباره مكافئاً لنصف بالوعـــة نقطية ، شدتها تساوي التيار الحجمي الذي يعبر فتحة الجدار . وعليه تكون شدة البالوعة كلها :

$$E = 2.V\frac{\pi d^2}{4} = V\frac{\pi d^2}{2} \quad . \qquad (a)$$

وحيث أن السرعة القطرية للبالوعة بموجب (11.19) على محيط كرة نصف قطرها R :

$$V_r = \frac{E}{4\pi}\frac{1}{R^2} \qquad (b)$$

نجد ، بإدخال (a) في (b) ووضع $V_r = 1\ m/s$ واستخدام القيم العددية الاخرى ، المسافة اللازمة عن الجدار لكي لا نشعر بانزعاج من تيار الهواء :

$$R = \sqrt{\frac{V\,d^2}{\pi\,V_T}} = \sqrt{\frac{20.0{,}3^2}{8}} = 0{,}475\ m\ .$$

ت ٢٠١١ : برهن أن $\Phi = x^2 + y^2 - 2z^2$ هو تابع كمون سرعة للجريان الركودي المتناظر دورانياً . أوجد صورة الجريان وتوزع السرعة والضغط ( انظر ت ٢٠٧ ، ص ٢٥٠ ) .

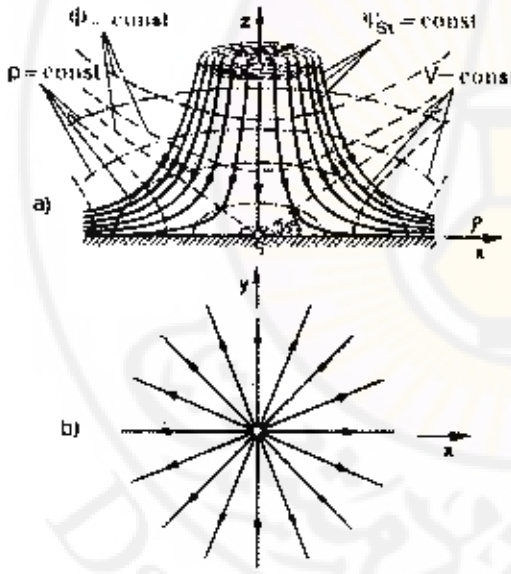
الحل : بسهولة يمكن التأكد أن $\Phi(x, y, z)$ يمثل تابع كمون لجريان ثلاثي البعد لأنه يحقق معادلة لابلاس $\Delta\Phi = 0$ . وللبرهان أنه متناظر دورانياً نحدد صورة الجريان .

إن مركبات السرعة باتجاه المحاور الديكارتية تنتج من (0,29) :

$$u = 2x\ ,\quad v = 2y\ ,\quad w = -4z\ , \qquad (a)$$

وبالتالي تكون المعادلة التفاضلية لخط التيار حسب (5,30) :

$$dx : dy : dz = u : v : w = x : y : (-2z)\ . \qquad (b)$$




الشكل ت ٢٠١١ : خطوط التيار وخطوط الكمون وخطوط الضغط الثابت والسرعة الثابتة للجريان الركودي المتناظر دورانياً .

من المعادلة الأولى نحصل على مساقط خطوط التيار في المستوي x y الأفقي :

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} \Rightarrow y = const\ .\ x, \qquad (c)$$

فهي تمثل إذن حزمة من المستقيمات المنبعثة من مركز الاحداثيات في كافة الاتجاهات ، الشكل ( ت ٢٠١١ – b ) .

في المستويين z x و z y نحصل على مساقط خطوط التيار من المعادلتين الباقيتين من (b) حيث نجد بعد إجراء التكامل :

$$z\,x^2 = const\ ;\ z\,y^2 = const\ . \qquad (d)$$

وبالتالي فإن مساقط خطوط التيار في كل من هذين المستويين تمثلها حزمة من القطوع الزائدة المكعبة التي تمس المحورين x, z

و z,y في اللا نهاية ، الشكل (ش ٢٠١١ - a) . فإذا لاحظنا بموجب (a) أن مركبات السرعة في النقطة 0 معدومة ، $u=v=w=0$ ، يتضح مما سبق أن الجريان في النصف الفوقي من الفراغ متناظر دورانياً بالنسبة للمحور z ، وان المستوي x y والذي تكون فيه مركبة السرعة $w=0$ يمكن اعتباره كصفيحة مستوية لانهائية الامتداد يصطدم فيها الجريان عمودياً حيث تتشكل في المركز نقطة ركود S يتوزع منها الجريان على كامل الصفيحة بشكل شعاعي في كافة الاتجاهات . لذلك يطلق على هذا الجريان اسم الجريان الركودي المتناظر دورانياً . وتكفي لذلك دراسته في مقطع زوالي واحد فقط z ρ .

إذا اعتبرنا $\rho^2 = x^2 + y^2$ فان تابع الكمون يصبح من الشكل :

$$\Phi = \rho^2 - 2z^2 \qquad (e)$$

ونتتج مركبتا السرعة في إتجاه ρ و z حسب (11.7) بالصيغة :

$$V_\rho = \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} = 2\rho \quad ; \quad V_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z} = -4z \qquad (f)$$

ويكون بالتالي : $\frac{1}{\rho}\frac{\partial \Phi}{\partial \rho} = 2$ ، $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2} = 2$ ، $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = -4$ . فإذا أدخلنا هذه القيم في معادلة الكمون للجريانات المتناظرة دورانياً (11.8) نتأكد أنها محققة فعلاً . وعليه نحصل على تابع تيار ستوكس بمساعدة العلاقة الأولى من (11.11) بعد إدخال (f) فيها فينتج :

$$\Psi_{St} = \int \frac{\partial \Phi}{\partial z}\rho\, d\rho + c(z) = -4z\frac{\rho^2}{2} + c(z)$$

وبمساعدة العلاقة الثانية من (11.11) نجد $c(z) = 0$ ، وبالتالي يصبح :

$$\Psi_{St} = -2z\rho^2 \qquad (g)$$

ونحصل على خطوط التيار المبينة في الشكل (ش ٢٠١١ - a) بوضع $\Psi_{St} = \text{const}$ ، الذي تمثل ، كما ذكرنا ، قطوعاً زائدة محكمية . ويمثل كلاً من $z = 0$ و $\rho = 0$ خط صفرياً للتيار ، $\Psi_{St} = 0$ .

معادلة خطوط الكمون تنتج من (e) :

$$\Phi = \text{const} \Rightarrow \rho^2 - 2z^2 = \text{const} \qquad (h)$$

فهي تمثل أيضاً قطوعاً زائدة تمس خط الكمون الصفري المحدد بالمستقيمين :

$$\Phi = 0 \quad \Rightarrow \quad z = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \rho \qquad (i)$$

في اللانهاية ( الشكل ٢٠١١ – a ) .

توزع السرعة المحصلة V ينتج من (f) حيث نجد :

$$|\mathbf{V}|^2 = V^2 = V_\rho^2 + V_z^2 = 4\rho^2 + 16 z^2 = \frac{\rho^2}{(1/2)^2} + \frac{z^2}{(1/4)^2} \quad . \qquad (j)$$

إذن فإن سطوح السرعة الثابتة ، $V = \text{const}$ ، تمثلها السطوح الخارجية لمجسات قطوع ناقصة . ونحصل على توزع الضغط من معادلة برنولي باستخدام (j) :

$$p + \frac{\rho'}{2} V^2 = C_B = p_{tot} \Rightarrow p = p_{tot} - \frac{\rho'}{2} V^2 = p_{tot} - 2\rho' (\rho^2 + 4 z^2) \quad . \qquad (k)$$

حيث $\rho'$ هنا تمثل الكثافة . وعليه فإن سطوح الضغط الثابت ، $p = \text{const}$ ، تمثلها أيضاً السطوح الخارجية لمجسات قطوع ناقصة ، ( الشكل ت ٢٠١١ – a ) .

* * *

# الفصل الخامس

## مسائل الجريان الاساسية وطرق حلها

إن مسائل الجريان التكنيكية التي نصادفها في حقل بناء آلات الجريان والطيران والسفن تتركز من حيث المبدأ على حساب حقل الجريان حول أجسام متشابهة شكلاً تمثل مقاطعها بروفيلات أجنحة حاملة . لذلك يمكن من وجهة نظر نظرية الجناح الحامل تصنيف هذه المسائل على النحو التالي :

١ – **المسألة الأساسية الأولى** : يطلب فيها شكل البروفيل الذي يحقق أفضل الشروط الميدروديناميكية أو الأيروديناميكية من أجل حقل جريان معين. هذه إذن مسألة تصميمية بحتة ، يطلق عليها أيضاً **المسألة غير المباشرة أو المعكوسة** Inverse problem .

٢ – **المسألة الأساسية الثانية** : يطلب فيها تحديد توزع السرعة والضغط على السطح الخارجي لبروفيل شكله معلوم ، وكذلك في حقل الجريان . وعليه فالمسألة تتعلق بإعادة حساب القيم الميدروديناميكية للتأكد من صحتهـــا ، أو لمقارنتها مع نتائج تجريبية ، أو لمعرفة تغيرها مع تغير حقل الجريان . لذا تسمى أيضاً **المسألة المباشرة** Direct problem .

٣ – **المسألة الأساسية الثالثة** : يطلب فيها تحديد شكل البروفيل الذي يحقق توزعاً معيناً للسرعة أو للضغط يحول مثلاً دون نشوء ظاهرة التكهف ، أو اختراق سرعة الصوت ، أو يقلل من قوى الاحتكاك والفواقد .

هذا التصنيف ينطبق أيضاً على مسائل الجريان عبر شبك بروفيلات .

لحل هذه المسائل الأساسية يفترض كخطوة تقريبية أولى أن حقل الجريان كموني ، وبالتالي يحقق معادلة لابلاس ، $\nabla^2 \Phi = 0$ . ويعتمد ميكانيك السوائل الحديث للحل على هذا الأساس الطرق الاساسية التالية :

١ – طريقة النقاط الشاذة .

٢ – طريقة التوابع المركبة وخاصة طريقة التمثيل المطابق .

٣ – الطريقة البيانية التقريبية Graphical method .

٤ – الطريقة التماثلية Analogy method .

سنعالج فيمايلي مبادىء هذه الطرق وبعض الأمثلة التطبيقية تاركين التفاصيل للأبحاث المختصة التي سنشير اليها قدر الإمكان .

## ١٢ طريقة النقاط الشاذة

### ١.١٢ أسس الطريقة

تعتمد طريقة النقاط الشاذة في جوهرها على مبدأ التضام الذي يمكن بمساعدته إيجاد حل عام لمعادلة لابلاس التفاضلية الخطية كحاصل جمع مجموعة مناسبة من الحلول الإفرادية البسيطة لهذه المعادلة كالينابيع والبالوعات والثنائيات والأعاصير . وحيث أن حقل الجريان لكافة هذه الجريانات الكمونية البسيطة يتميز بوجود نقطة شاذة في مركزها تبلغ فيها السرعة قيمة لانهائية لذلك يطلق عليها اسم النقاط الشاذة وتسمى الطريقة التي تستخدمها كلبنات لتشييد أجسام جريان مناسبة طريقة النقاط الشاذة .

إن تأثير الجسم على الجريان الاسامي ، الانسحابي المنتظم عادة ، يعوض عنه بتوزع مناسب من النقاط الشاذة ذات الشدة المعينة بحيث أن خط التيار

الصفري لحقل الجريان الاجمالي يكون مغلقاً ومطابقاً لشكل الجسم المطلوب أو المعطى .

تمتاز طريقة النقـــاط الشاذة بكونها تصلح لدراسة الجريانات المستوية والفراغية ، إضافة لكونها تملك إمكانيات متعددة تلائم المسألة المطروحة وتسمح بتكوين تصور هندسي واضح . لهذه الاسباب أفردت لها في ميكانيك السوائل التطبيقي مكانة خاصة ، وتم بمساعدتها إيجاد طرق عملية لحساب الجريان حول جناح حامل اعتباطي الشكل فردي وضمن شبك بروفيلات . وسنوضح فيما يلي هذه الطريقة من خلال حساب بعض الأمثلة التي نبدؤها بالأسهل . ولكن قبل ذلك من المفيد أن نسأل عن القوى التي تتعرض لها نقطة شاذة في جريان انسحابي منتظم .

## ١٠١٠١٢ القوى المؤثرة على النقاط الشاذة في جريان انسحابي

طالما أن تأثير الجسم على الجريان الانسحابي يمكن التعويض عنه بتوزع مناسب من النقاط الشاذة فإن القوى التي تؤثر على هذا الجسم يجب أن تظهر كتأثير متبادل بين هذه النقاط الشاذة والجريان الانسحابي . ومن أوائل من تطرق لحساب هذه القوى بشكل رياضي مفصل **لاغالي** M. Lagally [130] ومن بعده بطريقة هندسية مبسطة **بيلس** [131] .

نعتبر أولاً خيطاً اعصارياً مستقيماً يخترق عمودياً مستوي الإحداثيين x,y في المركز . ونعتبر في هذا المستوي جريانا انسحابياً منتظماً سرعته $u_\infty$ . نحيط الخيط الاعصاري بسطح تحكم cs نختاره للبساطة بشكل اسطوانة نصف قطرها r ومحورها منطبق على الخيط الاعصاري ، الشكل ( ١٠١٢ ) . نطبق قانون الدفع الخطي باتجاه المحور y فيكون حسب (8.104) :

$$F_{Vy} + F_{fy} + F_{ey} + F_{By} = 0 .$$

مركبة القوى الحجمية $F_{Vy} = 0$ . وباعتبار أن قوى الإحتكاك معدومة في

جريان مثالي فإن $F_{fy}$ تمثل قوى الضغط المؤثرة على كتلة السائل داخل cs . بينما تكون $F_A = -F_{By}$ القوة المؤثرة على الاعصار ( الذي يعوض عن وجود الجسم ! ) و $F_{By}$ مركبة رد فعل تيار الدفع . وعليه يكون :

$$F_A = F_{fy} + F_{By} \quad . \tag{12.1}$$

في النقطة B الواقعة على cs يحرض الاعصار حسب (10.39) السرعة المماسية :

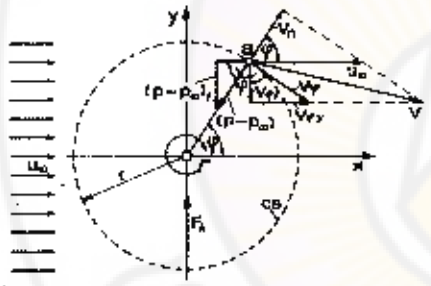
$$V_\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi}\frac{1}{r} \quad , \tag{12.2}$$

وتحسب السرعة المحصلة ، $V = u_\infty + V_\varphi$ ، في هذه النقطة من الشكل(١٠١٢) :

$$V^2 = V_x^2 + V_y^2 = (u_\infty + V_\varphi \sin\varphi)^2 + (V_\varphi \cos\varphi)^2 \, . \tag{12.3}$$

ليكن p الضغط الستاتيكي المؤثر في B ، $p_\infty$ الضغط غير المشوش . من معادلة برنولي المعتزلة (8.12) نجد :

$$p - p_\infty = \frac{\rho}{2} u_\infty^2 \left[ 1 - \left(\frac{V}{u_\infty}\right)^2 \right] \, . \tag{12.4}$$




الشكل ١٠١٢ : حساب قوة الرفع المؤثرة على اعصار كوني في جريان انسحاب .

وبالتالي فإن مركبة قوة الضغط الجزئية باتجاه y المؤثرة في B بالنسبة لواحدة العرض تبلغ :

$$dF_{py} = dF_{fy} = (p - p_\infty)_y \, . \, dA = -(p - p_\infty) \sin\varphi \, . \, r \, d\varphi \, .$$

ومنها نجد مركبة محصلة قوى الضغط باستخدام (12.2) حتى (12.4) وإجراء التكامل على طول cs :

$$F_{ry} = +\frac{\rho}{2} u_\infty^2 r \int_0^{2\pi} \left[ \left( \frac{V_\varphi}{u_\infty} \right)^2 \sin\varphi + 2 \frac{V_\varphi}{u_\infty} \sin^2\varphi \right] d\varphi = \frac{\rho}{2} u_\infty \Gamma \quad (12.5)$$

إن مركبة رد فعل تيار الدفع باتجاه y تنتج من (8.104) بمساعدة الشكل (١٠١٢) واستخدام (12.2) بالصيغة :

$$F_{By} = \rho \int_{-cs_{out}} V_y \, dQ = \rho \int_0^{2\pi} V_y \cdot V_n \, dA = \rho \int_0^{2\pi} V_\varphi \cos\varphi \cdot u_\infty \cos\varphi \cdot r \, d\varphi =$$

$$= \rho u_\infty r \frac{\Gamma}{2\pi r} \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi \, d\varphi = \frac{\rho}{2} u_\infty \Gamma \quad . \quad (12.6)$$

بادخال (12.5) و (12.6) في (12.1) نجد :

$$F_A = \rho u_\infty \Gamma \, . \quad (12.7)$$

هذا يعني أن الاعصار الكموني في جريان انسحابي يتعرض لقوة رفع تخضع لقانون كوتا ـ يوكوفسكي ، الذي سبق واستخرجناه بطريقة أخرى ( راجع ٦.٢٠٥.٨ ) . وتعني هذه النتيجة أيضاً أن الجريان في الجوار المباشر لجناح حامل لانهائي الامتداد يمكن دراسته على أساس تضام اعصار كموني مع جريان انسحابي .

بخطوات مشابهة يمكن البرهان أن الاعصار لا يتعرض لقوة في اتجاه الجريان الانسحابي وبالتالي فالمقاومة $F_W = 0$ .

من نفس المنطلقات السابقة سنحسب الآن القوة المؤثرة على نبع مستو في جريان انسحابي أفقي ، الشكل (١٢.٢) . فحسب قانون الدفع الخطي تكون

القوة المؤثرة على النبع في اتجاه x :

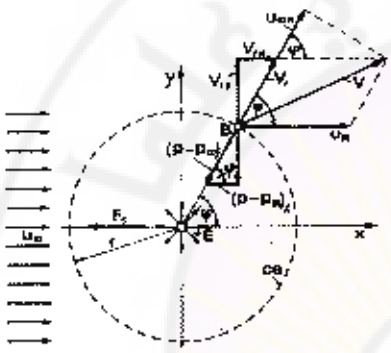
$$F_S = F_{s_x} = F_{r_x} + F_{R_x} \quad . \qquad (12.8)$$

ان السرعة التي يحرضها النبع في النقطة B من سطح التحكم تنتج من (10.32) :

$$V_r = \frac{E}{2\pi}\frac{1}{r} \qquad (12.9)$$

وتكون السرعة المحصلة في هذه النقطة حسب الشكل (٢٠١٢) :

$$V^2 = (u_\infty + V_{rx})^2 + V_{ry}^2 =$$
$$= (u_\infty + V_r \cos\varphi)^2 + (V_r \sin\varphi)^2 . \qquad (12.10)$$



الشكل ٢٠١٢ : حساب القوة الدافعة التي يولدها نبع في جريان انسحابي .

ونحصل على مركبة محصلة قوى الضغط باتجاه x وبالنسبة لواحدة العرض من (12.4) ، (12.9) ، (12.10) ، واستخدام رموز الشكل (٢٠١٢) بعد القيام باصلاح بسيط واجراء التكامل على طول cs :

$$F_{p_x} = F_{r_x} = \int_0^{2\pi} -(p - p_\infty)\cos\varphi \cdot r\, d\varphi =$$

$$-\frac{\rho}{2} u_\infty^2 r \int_0^{2\pi} \left[ \left(\frac{V_r}{u_\infty}\right)^2 \cos\varphi + 2\frac{V_r}{u_\infty}\cos^2\varphi \right] d\varphi =$$

$$-\frac{\rho}{2} u_\infty E \quad . \qquad (12.11)$$

من جهة أخرى نحصل على رد فعل تيار الدفع باتجاه المحور x حسب (8.104) وباستخدام (12.8) ورموز الشكل (٢٠١٢) :

$$F_{R_x} = \rho \int_{-CS_{out}} V_x \, dQ = -\rho \int_0^{2\pi} V_x \cdot V_n \cdot dA =$$

$$= -\rho \int_0^{2\pi} (u_\infty + V_r \cos\varphi) \cdot (V_r + u_\infty n) \cdot r \, d\varphi =$$

$$= -\rho u_\infty^2 r \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{V_r}{u_\infty} \left[ +1 + \left( \frac{V_r}{u_\infty} \right)^2 \right] \cos\varphi + \frac{V_r}{u_\infty} \cos^2\varphi \right\} d\varphi =$$

$$= -\frac{3}{2} \rho u_\infty E. \qquad (12.12)$$

بادخال (12.11) و (12.12) في (12.8) نجد

$$F_S - F_{R_x} = -\rho u_\infty E . \qquad (12.13)$$

هذه النتيجة تشبه شكلاً قانون كوتا ـ يوكوفسكي وتنص على أن النبع يولد في جريان انسحابي قوة دافعة بعكس اتجاه الجريان تساوي بالنسبة لواحدة العرض جداء الكثافة في السرعة غير المشوشة في شدة النبع. ولكن النبع لايتعرض لقوة رفع عمودية على اتجاه الجريان ، $F_{R_y} = F_A = 0$ .

إذا استبدلنا في الشكل (٢.١٢) النبع بدوامة مستوية شدتها E ـ نجد فوراً من (12.13) القوة المؤثرة عليها :

$$F_W = +\rho u_\infty E , \qquad (12.14)$$

أي أن الدوامة تتعرض لمقاومة في اتجاه الجريان ، ولكنها لا تتعرض لقوة رفع ، $F_A = 0$ . وحيث أن الثنائية ذات العزم M تنتج من تضام نبع ودوامة من نفس الشدة فإنها لا تتعرض في جريان انسحابي لأية قوة. ولكن إذا كان محورها يميل على المحور x بزاوية $\alpha$ مثلاً فإنها تتعرض لعزم دوران [131] :

$$M_1 = \rho M u_\infty \sin\alpha . \qquad (12.15)$$

## ٢.١.١٢ التحرير البياني لصورة الجريان الاجمالي الناتج عن تضام جريانات كمونية

يمكن بالاعتماد على العلاقة (10.16) الحصول بسرعة وبسهولة على صورة تقريبية للجريان الاجمالي الناتج عن تضام جريانين كمونيين أو أكثر ، وذلك باتباع الخطوات التالية :

نعتبر جريانين مستويين محددين بتابعي التيار $\Psi_1(x,y)$ و $\Psi_2(x,y)$ . نرسم صورة خطوط التيار لكل منهما بحيث يكون التيار الحجمي المار بين كل خطي تيار متجاورين ثابتاً . هذا يعني بموجب (10.12) :

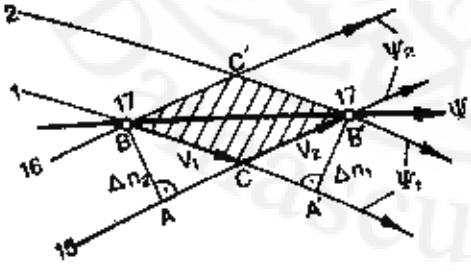
$$\Delta Q = \Delta V = \Psi_m - \Psi_{m+1} = \Delta\Psi = \text{const}. \qquad (12.16)$$

إن السرعة المحصلة في نقطة تنتج كمحصلة شعاعية للسرعات الافرادية فيها :

$$V_{tot} = V_1 + V_2 . \qquad (12.17)$$

وتكون مماسية على خط التيار الاجمالي $\Psi_{tot}$ المار من النقطة المعتبرة .

نرقم خطوط التيار لكل من الجريانين $\Psi_1$ و $\Psi_2$ بأرقام متسلسلة صحيحة ( أو عشرية ) ابتداء من رقم ما ، ولكن بحيث يكون الفرق بين قيمتي $\Psi_{1,2}$ لخطي تيار متجاورين واحداً لكي تتحقق (12.16) . في الشكل (٣.١٢) يتشكل من خطي التيار 2, 1 للجريان الأول و 16 . 15 للجريان الثاني رباعي الأضلاع C′ B′ C B .




الشكل ٣.١٢ ، خط التيار الاجمالي الناتج عن تضام جريانين ينطبق على أقطار رباعيات الاضلاع المشكلة من تقاطع خطوط التيار المتجاورة لكل منها .

ليكن n الإحداثي الناظمي على خطوط التيار ، و $\Delta n_1$ ، $\Delta n_2$ البعدين الناظميين بين خطي التيار 1 ,2 و 15, 16 . بذلك تنتج من (12.16) العلاقة :

$$V_1 \Delta n_1 = V_2 \Delta n_2 \Rightarrow V_1/V_2 = \Delta n_2/\Delta n_1 \ . \qquad (12.18)$$

وحيث ان المثلثين C B A و C B' A' متشابهان هندسياً بسبب تساوي زاويتين من الأول مع زاويتين من الثاني فنجد بسهولة أن ضلعي رباعي الاضلاع المهشر المتجاورين يطابقان سرعتي الجريان الاول والثاني في هذا المجال . وعليه فان السرعة المحصلة تكون مطابقة لقطر رباعي الاضلاع B' B الذي يمثل في نفس الوقت قطعة من خط التيار الاجمالي $\Psi_{tot}$ ، الشكل (٣٠١٢) .

هذه النتيجة تتوضح أكثر إذا استعنا بالعلاقة (10.9) واستخدمنا بدلاً من الاحداثيين الديكارتيين y ,x إحداثيين عاميين منحنيين n ,s باتجاه خط التيار وعمودياً عليه . عندئذ تصبح :

$$V = \frac{\partial \Psi}{\partial n} \ , \quad 0 = \frac{\partial \Psi}{\partial s} \ . \qquad (12.19)$$

فإذا عوضنا في المجال المحدد التفاضل بالفضل ولاحظنا أن الفضل $\Delta\Psi = const$ نجد بسهولة العلاقة (12.18) :

$$V_1 = \frac{\Delta \Psi}{\Delta n_1} \ ; \ V_2 = \frac{\Delta \Psi}{\Delta n_2} \Rightarrow V_1/V_2 = \Delta n_2/\Delta n_1 \ .$$

في ضوء ما تقدم نصل الى القاعدة التالية :

للحصول على صورة الجريان الاجمالي الناتج عن تضام جريانين مستويين ( أو متناظرين دورانياً ) نرسم في مستو واحد صورة الجريان لكل منهما بحيث تكون واحدة الفرق العددي للارقام المتسلسلة لخطوط التيار تعادل قيمة ثابتة للتيار الحجمي . ثم نكتب على كل نقطة تقاطع خطي تيار رقماً يساوي المجموع الجبري لأرقامها المتسلسلة ( في الشكل ( ٣٠١٢ ) نكتب مثلاً فوق النقطتين B

و B' الرقم 17 = 15 + 2 = 16 + 1 ) . إن التيار الاجمالي يربط بين كافة نقاط التقاطع ذات الارقام الواحدة ( انظر الشكل (١٢ . ٥) ) .

## ٢.١٢ دراسة الجريانات حول أجسام مستوية

### ١٠٢.١٢ الجريان حول جسم نصفي

نعتبر في مستوي الاحداثيين x, y نبعاً مركزه ينطبق على نقطة الصفر وشدته E + وجريانا انسحابيا منتظما موازيا للمحور x سرعته $u_\infty$ ، الشكل (١٢ . ٤) . بموجب مبدأ التضام يكون تابع الكمون الاجمالي حسب (10.7) وباستخدام (10.24) و (10.26) :

$$\Phi_{tot} = \Phi_r + \Phi_Q = u_\infty\, x + \frac{E}{2\pi} \ln r \ . \qquad (12.20)$$

وينتج تابع التيار الاجمالي بموجب (10.16) وباستخدام (10.24) و (10.29) :

$$\Psi_{tot} = \Psi_r + \Psi_Q = u_\infty\, y + \frac{E}{2\pi} \varphi \ . \qquad (12.21)$$

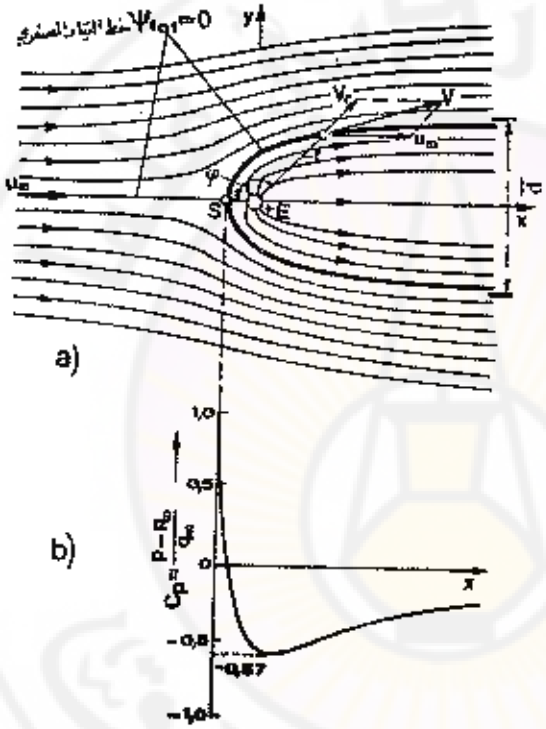
بذلك نحصل على مركبتي السرعة المحصلة في نقطة ما من حقل الجريان بوضع $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ :

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} = u_\infty + \frac{E}{2\pi} \frac{x}{x^2+y^2} = u_\infty + \frac{E}{2\pi} \frac{x}{r^2} \ , \\ v &= \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{E}{2\pi} \frac{y}{x^2+y^2} = \frac{E}{2\pi} \frac{y}{r^2} \ . \end{aligned}\right\} \qquad (12.22)$$

من هاتين العلاقتين يتبين أنه على مقربة من مركز النبع (r صغيرة) يهيمن جريان النبع على الجريان الكلي ( $V_r \gg u_\infty$ ) ، بينما يتلاشى تأثير النبع على بعد كبير من المركز ( r كبيرة ) ونهيمن صورة الجريان الانسحابي على الجريان

الكلي. كما يتبين أيضاً أنه على المحور x توجد **نقطة ركود** S تنعدم فيها السرعة، ويتحدد بعدها عن مركز الاحداثيات بوضع $u = v = 0$ من أجل $x = x_0$ ، $y = 0$ حيث ينتج :

$$x_0 = -\frac{E}{2\pi u_\infty}, \qquad (12.23)$$




الشكل ٤،١٢ : الجريان حول جسم نصفي مستو ناتج عن تضام نبع وجريان انسحابي . a) صورة الجريان ، b) توزع الضغط على سطح الجسم المكافيء لخط التيار الصفري .

فهي تقع إذن على المحور x السالب. من هذه النقطة يتفرع **خط التيار الصفري**، $\Psi_{tot} = 0$ ، الى فرعين متناظرين بالنسبة للمحور x مبتدئاً بشكل عمودي على x ومن ثم ينحني تدريجياً باتجاه $x+$ إلى ان يصبح موازياً له على بعد كاف من مركز الاحداثيات ، وتصبح السرعة المحصلة $V = u_\infty$ . وبما أن خط التيار الصفري ، كأي خط تيار آخر ، لايسمح بنفوذ السائل عبره ،لذلك يحصر داخله كامل التيار

الحجمي للمنبع . فإذا فرضنا $\bar{d}$ سماكة سطح التيار الصفري على بعد كاف من المركز فيكون بالنسبة لواحدة العرض :

$$Q = F = u_\infty \bar{d} \,. \qquad (12.24)$$

نتصور الآن أن خط التيار الصفري، المسمى أيضاً خط تيار نقطة الركود، قد نصلب ، أو أننا عوضنا عنه بجسم صلب فعلاً . إن صورة الجريان حول هذا الجسم الاسطواني المدور الأنف وذي الجنبين المتوازيين والممتد من طرف واحد الى اللا نهاية ( نظرياً ! ) ، والذي لذلك يسمى **الجسم النصفي المستوي** Plane half-body ، تبقى مطابقة لصورة الجريان المبينة في الشكل (٤٠١٢ - a) . ويمكن بسهولة نسبياً تحديد حقل السرعة والضغط لهذا الجريان كمسألة أساسية أولى أو ثانية على أساس تضام منبع مستو مع جريان انسحابي . وسنقوم بذلك فيما يلي نظراً لأهمية هذا الجريان الذي يمكن اعتباره نموذجياً بالنسبة للجريان حول الحافة الأمامية لأي جسم اسطواني مدور الأنف ، مثل بروفيل جناح حامل في جريان انسحابي متناظر ( راجع ٥.٢.١٢ ) .

إن شكل خط التيار الصفري، أو الجسم النصفي، يتحدد من (12.21) بالعلاقة:

$$\Psi_{tot} = 0 \;\Rightarrow\; u_\infty y + \frac{F}{2\pi}\varphi = 0 \,.$$

فإذا قسنا الزاوية القطبية $\varphi$ اعتباراً من نقطة الركود S ( قارن الشكل ٣.١٠ ص ٤٢٣ ) تنتج باستخدام (12.24) وبوضع $y = r \sin\varphi$ معادلة خط الحدود Boundary line ، أو معادلة تحديد شكل الجسم النصفي ، بالصيغة :

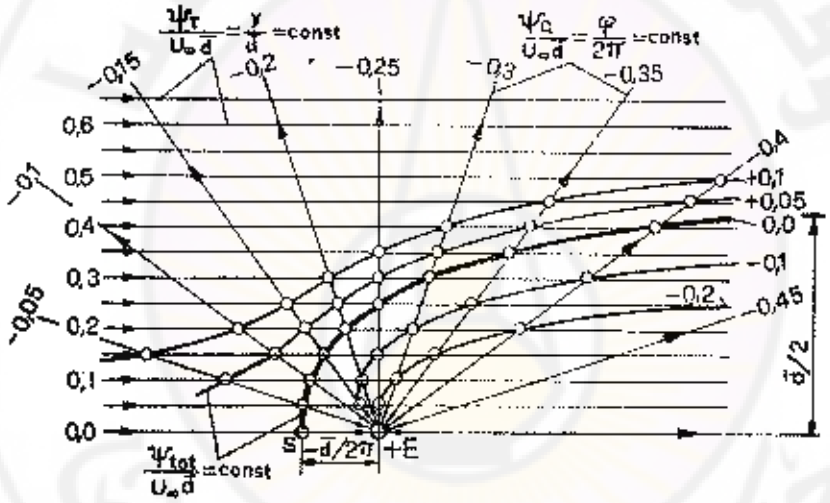
$$\frac{y}{\bar{d}} = \pm\frac{\varphi}{2\pi} \overset{\text{أو}}{\Rightarrow} \frac{r}{\bar{d}} = \frac{1}{2\pi}\frac{\varphi}{\sin\varphi} \,, \qquad (12.25)$$

وذلك حسب ما نختار إشارة $\varphi$ موجبة (+) عندما نلتف باتجاه دوران عقارب

الساعة أو سالبة (−) بالعكس . بالنسبة لخطوط التيار الاخرى فإنهما تتحدد من (12.21) بعد إدخال (12.24) بالمعادلة :

$$\Psi_{tot} = u_\infty\, y + \frac{E}{2\pi}\,\varphi = u_\infty\, y + \frac{u_\infty \bar{d}}{2\pi}\,\varphi = \text{const} \quad . (12.26)$$

من هذه العلاقة وفي ضوء الخطوات الموضحة في (٢،١،١٢) نحصل على صورة الجريان المبينة في الشكل (٤،١٢ − a) ، التي يوضح الشكل ( ٥،١٢ ) كيفية الحصول عليها بيانياً بالتفصيل ، بالنسبة للنصف العلوي من المستوي y x ،




الشكل ٥،١٢ : التحديد البياني لصورة الجريان الناتجة عن تضام نبع وجريان انسحابي.

بغية الحساب بقيم لا بعدية نكتب (12.26) بالصيغة التالية :

$$\frac{\Psi_{tot}}{u_\infty \bar{d}} = \frac{y}{\bar{d}} + \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{\Psi_T}{u_\infty \bar{d}} + \frac{\Psi_Q}{u_\infty \bar{d}} = C_1 + C_2 = C$$

نرسم الآن خطوط التيار للجريان الانسحابي وللنبع بحيث تكون كمية السائل المارة بين خطي تيار متجاورين واحدة، ويتم ذلك باعطاء الثابتين $C_1$ و $C_2$ قيماً تتغير بمعدل ثابت. في مثالنا

نختار هذا العدل 0,05 ، ونجعل $C_1 = \frac{\Psi_T}{u_\infty \bar{d}}$ تتزايد من الصفر وحتى 0,65 ونرسم خطوط التيار المتوازية ، وفوقها ، وعلى أساس افتراض أن الزاوية $\varphi$ في النصف العلوي من المستوي سالبة ، نرسم خطوط التيار الشعاعية للنبع باعطاء الثابت $C_2 = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{\Psi_Q}{u_\infty \bar{d}}$ قيما سالبة من الصفر وحتى 0,45 . نصل الآن بين كافة نقاط تقاطع خطوط تيار الجريانين الأساسيين ( المحاطة بدوائر صغيرة ) والتي يكون فيها مجموع أرقامها ، $C = C_1 + C_2$ ، ثابتاً . في الشكل ( ٥ . ١٢ ) رسمت خطوط التيار الاجمالية من أجل

$$\frac{\Psi_{tot}}{u_\infty \bar{d}} = C = +0,1 \; ; +0,05 \; ; 0 \; ; -0,1 \; ; -0,2 \; .$$

ورسم خط التيار الصفري الذي ينطبق حتى النقطة S مع المحور x السالب خط سميك .

من أجل $y > 0$ نلاحظ أن خطوط التيار التي تبدأ من مركز النبع وتكون محصورة داخل خط التيار الصفري تنتج عندما $\Psi_{tot} < 0$ ، بينما تقع خطوط التيار $\Psi_{tot} > 0$ ، التي تنطبق عند مسافة بعيدة من مركز النبع على خطوط الجريان الانسحابي ، خارج خط التيار الصفري .

لتحديد حقل السرعة نحسب السرعة الإجمالية في نقطة ما (x,y) من حقل الجريان . هذه تنتج من (12.22) و (12.24) بعد إصلاح بسيط بالشكل :

$$\frac{V^2}{u_\infty^2} = \frac{u^2 + v^2}{u_\infty^2} = \left(1 + \frac{\bar{d}}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2}\right)^2 + \left(\frac{\bar{d}}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}\right)^2 =$$

$$= 1 + \frac{2\bar{d}}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2} + \left(\frac{\bar{d}}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{x^2 + y^2} \quad . \quad (12.27)$$

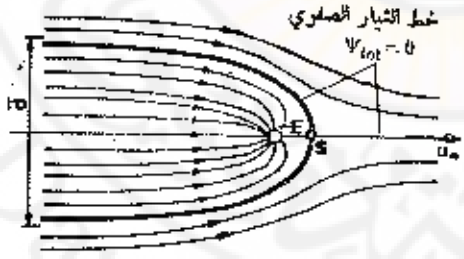
لحساب توزع السرعة على حدود الجسم النصفي يفضل استخدام الإحداثيات القطبية . فإذا وضعنا في العلاقة (12.27) $x = -r\cos\varphi$ ، $y = r\sin\varphi$ ( على أساس أن $\varphi$ تزداد من نقطة الركود باتجاه دوار عقارب الساعة ) وعوضنا بموجب (12.25) $r = \frac{\bar{d}}{2\pi} \frac{\varphi}{\sin\varphi}$ نجد :

$$\left(\frac{V}{u_\infty}\right)_R^2 = 1 - \frac{\sin 2\varphi}{\varphi} + \frac{\sin^2\varphi}{\varphi^2} \quad . \quad (12.28)$$

إن توزع الضغط اللابعدي ، معامل الضغط ، ينتج من معادلة برنولي (8.54) حيث نجد باستخدام (12.28) :

$$c_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{\rho}{2} u_\infty^2} = \frac{p - p_\infty}{q_\infty} = 1 - \left(\frac{V}{u_\infty}\right)^2 = \frac{\sin 2\varphi}{\varphi} - \frac{\sin^2 \varphi}{\varphi^2} \quad . \quad (12.29)$$

في الشكل ( ٦.١٢ - b ) رسم توزع الضغط المحسوب على هذا الأساس ، ومنه يتضح أنه في الجوار المباشر لأنف الجسم النصفي يسود ضغط زائد ، $c_p > 0$ ، يولد قوة ضغط باتجاه الجريان . بينما يسود اعتباراً من مسافة معينة من الأنف ضغط ناقص ، $c_p < 0$ ، قيمته الأعظمية $c_{pmin} = -0{,}57$ ويولد قوة تؤثر بعكس اتجاه الجريان . ويمكن البرهان أن محصلة كافة قوى الضغط هذه معدومة . هذا يعني أن **الجسم النصفي لا يتعرض في سائل مثالي لأية مقاومة.** وواضح أنّ التناقض بين هذه النتيجة والواقع سببه إهمال قوى الاحتكاك الناتجة عن لزوجة السائل الحقيقي . هذه النتيجة تبدو أيضاً للوهلة الأولى متناقضة مع حقيقة أن النبع في جريان انسحابي يتلقى قوة دافعة . هذه القوة الدافعة تؤثر فعلاً على الجسم النصفي « السائلي » المطابق لخط التيار الصفري الذي يحصر في داخله جريان النبع ، ولكنها تختفي طبعاً بالنسبة لجسم نصفي « صلب » .



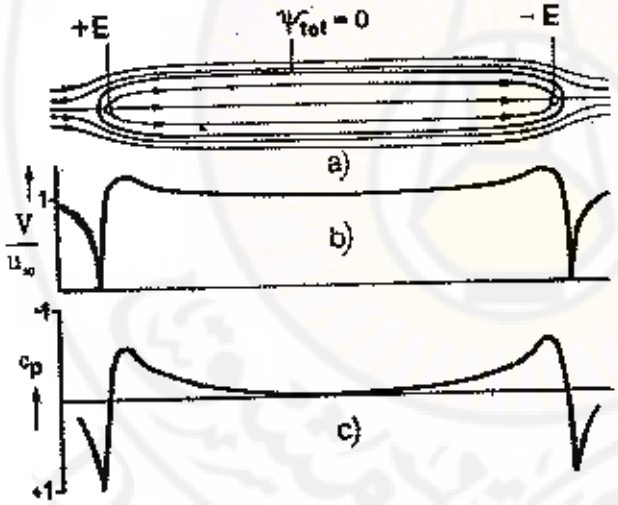
الشكل ٦.١٢ ، تضام جريان انسحابي مع بالوعة.

إن النتائج السابقة تنطبق من حيث المبدأ على تضام بالوعة مستوية مع جريان انسحابي ، حيث نحصل أيضاً على جسم نصفي مفتوح للخلف ويمتد باتجاه $x \to \infty$ إلى اللانهاية ، الشكل (٦.١٢) . ونلاحظ أن صورة الجريان مطابقة لصورة الجريان في

حالة النبع إذا استبدلنا اتجاه x الموجب بالسالب ، وأخذنا شدة البالوعة مساوية لشدة النبع . عندئذ تكون في النقاط المناسبة من الحقلين قيم السرعة والضغط واحدة .

## ٢.٢.١٢ الجريان حول أجسام رانكين المستوية

من مقارنة الشكلين ( ٤.١٢ - a ) و ( ٦.١٢ ) يتضح فوراً أنه بالامكان دراسة الجريان حول أجسام اسطوانية مدورة الأنف والمؤخرة ومحدودة الطول ، الشكل (٧.١٢ - a) ، على أساس أنه يكافيء الجريان حول خط التيار الصفري الناتج عن تضام جريان انسحابي باتجاه x مع نبع وبالوعة من نفس الشدة ، $\pm E$ ، وعلى مسافة معينة e من بعضها . مثل هذه الاجسام تعرف باسم **أجسام رانكين** Rankine body.



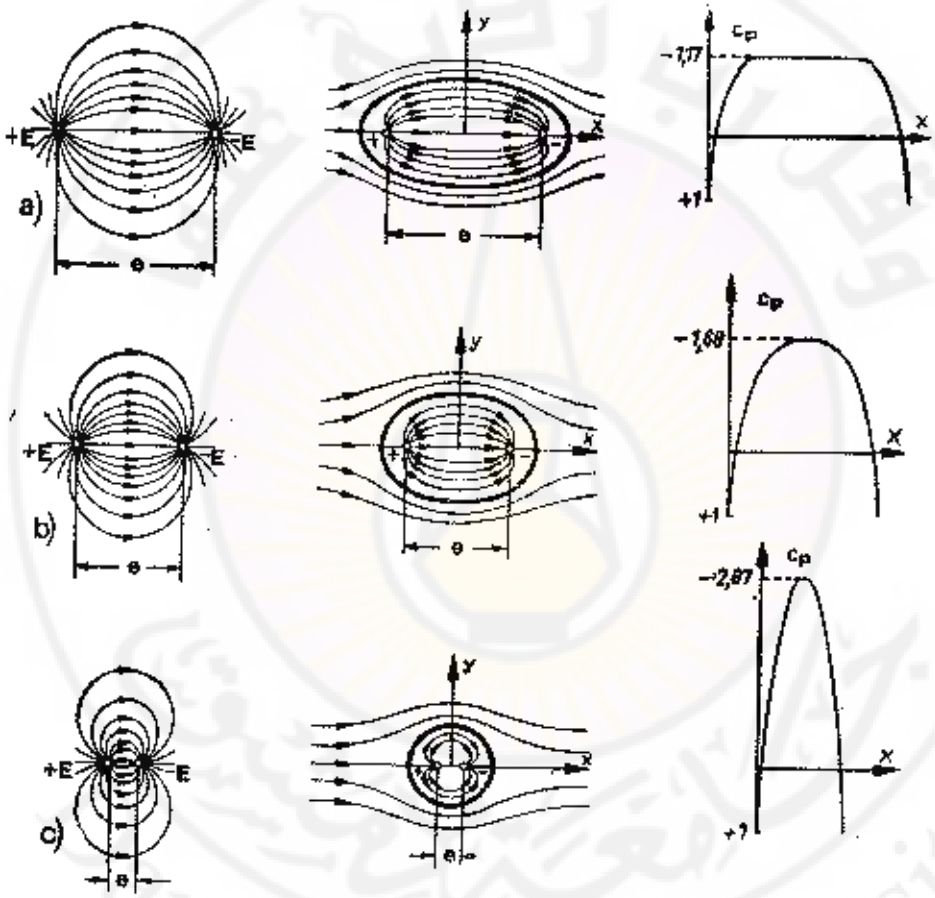

الشكل ٧.١٢ : الجريان الناتج عن تضام نبع وبالوعة وجريان انسحابي. (a صورة الجريان ، (b توزع السرعة ، (c توزع الضغط حول خط التيار الصفري .

نفرض أن النبع والبالوعة واقعان على المحور x ومتناظران بالنسبة للمحور y ، والنبع يبعد $\frac{e}{2}$ - من مركز الاحداثيات . عندئذ ينتج تابع الكمون الإجمالي بالصيغة :

$$\Phi_{tot} = u_\infty \, x + \frac{E}{2\pi} \ln \sqrt{\frac{(x+e/2)^2 + y^2}{(x-e/2)^2 + y^2}} \quad , \qquad (12.30)$$

وينتج تابع التيار الاجمالي بالشكل :

$$\Psi_{tot} = u_\infty \, y + \frac{E}{2\pi} (\varphi_1 - \varphi_2) \qquad (12.31)$$




الشكل ٨٠١٢ ، التأثير المتبادل بين النبع والبالوعة يزداد كلما قصر البعد بينهما ويتغير شكل خط التيار الصفري الناتج عن تضامهما مع جريان انسحابي وتوزع الضغط حوله ، حسب [7] .

إن خط التيار الصفري $\Psi_{tot} = 0$ يؤلف خطاً مغلقاً يحصر في داخله كامل جريان النبع والبالوعـــة ويتقاطع مع المحور x في نقطتي ركود تبعدان عن مركزي النبع والبالوعة مسافة تتحدد من شرط كون مركبة السرعة فيهما $u = 0$ . فاذا عرضنا عن خط التيار الصفري هذا بجسم صلب فان الجريان حوله لايتغير ويمكن في ضوء الفقرة السابقة تحديد صورة الجريان وحساب توزع الضغط والسرعة في حقل الجريان وعلى حدود الجسم .

إن التأثير المتبادل بين النبع والبالوعة يكون عملياً شبه معدوم إذا كانت المسافة بينهما كبيرة بما يكفي . وعند مسافة معقولة نحصل كخط تيار صفري على جسم محدب الانف والمؤخرة وذي جوانب مستوية في المنتصف تقريباً . الشكل ( ٧.١٢ ) يبين صورة الجريان وتوزع السرعة والضغط حول مثل هذا الجسم . لكن مع اقتراب النبع والبالوعة من بعضهما البعض يزداد تأثيرهما المتبادل ويصبح خط التيار الصفري بيضوياً بشكل قطع ناقص نسبة قطره الكبير للصغير تكون أقرب للواحد كلما كانت المسافة e أصغر ، مما يتيح الاستنتاج مسبقاً أنه في حالة انطباق النبع والبالوعة على بعضهما البعض يأخذ خط التيار الصفري شكل دائرة ( حالة تضام ثنائية مستوية مع جريان انسحابي ) . الشكل ( ٨.١٢ ) يبين صورة الجريان داخل وخـارج خط التيار الصفري الناتج عن تضام نبع وبالوعـة على مسافات مختلفة من بعضهما البعض مع جريان انسحابي ، وكذلك توزع الضغط حول $\Psi_{tot} = 0$ . ويتضح من الشكل أن قيمة معامل الضغط الاصغري السالبة تزداد مع اقتراب البالوعة والنبع من بعضهما البعض .

## ٣.٢.١٢ الجريان الموجود في حول اسطوانة دائرية وحساب كتلتها المرسدرو ديناميكية

لنعتبر الجريان الناتج عن تضام جريان انسحابي باتجـاه x وثنائية مستوية

مركزها ينطبق على مركز الإحداثيين y,x . إن تابع الكمون الإجمالي ينتج من (10.24) و (10.65) مع اشارة موجبة ( جزيئات السائل للثنائية تدور في النصف العلوي باتجاه دوران عقارب الساعة ) :

$$\Phi_{tot} = \Phi_T + \Phi_D = -u_\infty x + \frac{M}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2} = u_\infty\left(-r + \frac{M}{2\pi u_\infty}\frac{1}{r}\right)\cos\varphi \ , \quad (12.32)$$

وذلك بوضع $x = r\cos\varphi$ ، $r^2 = x^2 + y^2$ . كما ينتج تابع التيار الاجمالي من (10.24) و (10.68) باشارة سالبة بالصيغة :

$$\Psi_{tot} = \Psi_T + \Psi_D = u_\infty y - \frac{M}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2} = u_\infty\left(r - \frac{M}{2\pi u_\infty}\frac{1}{r}\right)\sin\varphi \ , \quad (12.33)$$

وذلك بوضع $y = r\sin\varphi$ .

إن حقل السرعة يتحدد بسهولة من (12.32) حيث نجد مركبتي السرعة :

$$u = \frac{\partial\Phi_{tot}}{\partial x} = u_\infty + \frac{M}{2\pi}\frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} \ ; \ v = \frac{\partial\Phi_{tot}}{\partial y} = -\frac{M}{2\pi}\frac{2yx}{(x^2+y^2)^2} \ . \quad (12.34)$$

ويتضح من هاتين العلاقتين أنه على المحور x $(y = 0)$ تكون $v = 0$ ، بينما تنعدم u عندما

$$0 = u_\infty - \frac{M}{2\pi}\frac{x_S^2}{x_S^4} \Rightarrow \frac{M}{2\pi} = x_S^2\, u_\infty \ . \quad (12.35)$$

هذا يدل أنه توجد على المحور x نقطتا ركود $S_1$ و $S_2$ . ويتضح ذلك أكثر إذا حددنا خط التيار الصفري الذي تنتج معادلته من (12.33) بالصيغة :

$$\Psi_{tot} = 0 \Rightarrow y = 0 \ ; \ r^2 = \frac{M}{2\pi u_\infty} = R^2 = const \ . \quad (12.36)$$

إذن فإن خط التيار الصفري يتألف من المحور x السالب والموجب ومن دائرة نصف قطرها $R = \sqrt{\frac{M}{2\pi u_\infty}}$ تحصر داخلها جريان الثنائية ومر من نقطتي الركود

المحددتين بالاحداثيين $x_{0_{1,2}} = \pm R$ . وحيث أن كل خط تيار يمكن استبداله بجسم صلب فيمكن استخلاص النتيجة الهامة التالية :

> الجريان الانسحابي اللاجولاني حول اسطوانة دائرية لا نهائية الامتداد نصف قطرها R يكافيء الجريان حول خط التيار الصفري الناتج عن تضام جريان انسحابي منتظم سرعته $u_\infty$ مع ثنائية مستوية عزمها $M = 2\pi u_\infty R^2$ ( انظر الشكل ٧.٥ ) .

بادخال (12.36) في (12.32) و (12.33) نحصل على تابع الكمون وتابع التيار للجريان اللاجولاني حول الاسطوانة بالصيغتين :

$$\Phi_C = u_\infty x \left(1 + \frac{R^2}{x^2 + y^2}\right) = u_\infty \cos\varphi \left(r + \frac{R^2}{r}\right) , \quad (12.37)$$

$$\Psi_C = u_\infty y \left(1 - \frac{R^2}{x^2 + y^2}\right) = u_\infty \sin\varphi \left(r - \frac{R^2}{r}\right) . \quad (12.38)$$

الشكل (٩.١٢) يبين صورة خطوط الكمون $\Phi_C = \text{const}$ ، وخطوط التيار $\Psi_C = \text{const}$ ، التي يمكن الحصول عليها بيانياً حسب ( ٢.١.١٢ ) من تضام صورة الجريان الانسحابي مع صورة جريان الثنائية المبينة في الشكل (١١.١٠).

إن مركبتي السرعة باتجاه y,x تتحددان في كل نقطة من حقل الجريان حول الاسطوانة بسهولة ، حيث تنتج :

$$\left.\begin{aligned} u &= u_\infty \left(1 + R^2 \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}\right) = u_\infty \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\cos 2\varphi\right) , \\ v &= -u_\infty R^2 \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = -u_\infty \frac{R^2}{r^2}\sin 2\varphi . \end{aligned}\right\} \quad (12.39)$$

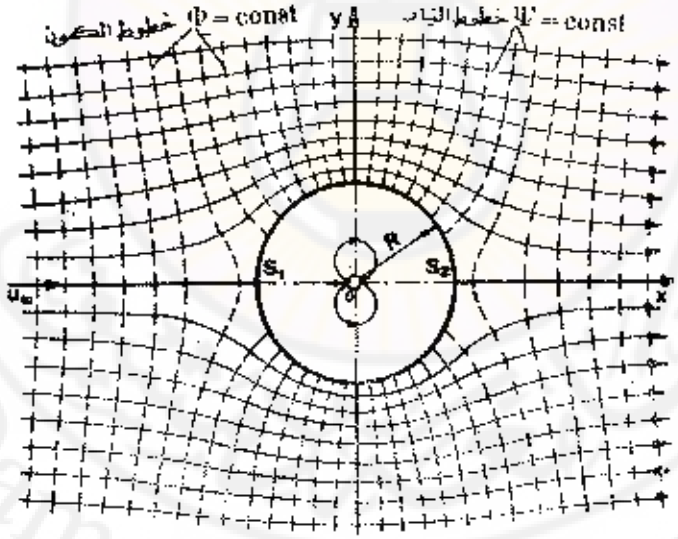
ويستحسن غالباً حسابها في اتجاه الاحداثيات القطبية حيث نجد بموجب (10.2) :

$$\left.\begin{aligned} V_r &= \frac{\partial \Phi_c}{\partial r} = u_\infty \left(1 - \frac{R^3}{r^3}\right) \cos\varphi\,, \\ V_\varphi &= \frac{\partial \Phi_c}{r\,\partial \varphi} = -\,u_\infty \left(1 + \frac{R^3}{r^3}\right) \sin\varphi\,. \end{aligned}\right\} \qquad (12.40)$$

على محيط الاسطوانة بالذات تنعدم من أجل $r = R$ المركبة القطرية $V_r = 0$ ، وتكون المركبة المحيطية أو المماسية مطابقة لقيمة شعاع السرعة :

$$|\mathbf{V}_c| \equiv |\mathbf{V}_\varphi (r = R)| = V_c = 2u_\infty \sin\varphi;\ (0 \leqq \varphi \leqq \pi)\ . \qquad (12.41)$$

وعليه فإن السرعة لكامل حقل الجريان تبلغ على محيط الاسطوانة من اجل $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ، $\frac{3\pi}{2}$ قيمتها الأعظمية $V_{c\,max} = 2u_\infty$ ، وتنعدم من أجل $\varphi = \pi, \varphi = 0$ .

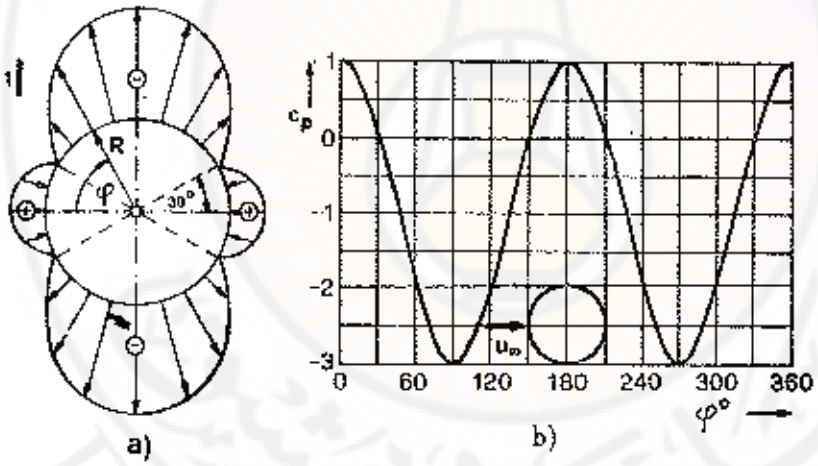



الشكل ٩.١٢ : الجريان الانسحابي اللاجولاني حول اسطوانة دائرية يكافيء الجريان الناتج عن تضام ثنائية مسنوية مع جريان انسحابي منتظم (قارن الشكل ٧.٥).

توزع الضغط على محيط الاسطوانة ينتج من معادلة برنولي المختزلة (8.12) بالنسبة لنقطة من الجريان غير المشوش ، حيث السرعة $u_\infty$ والضغط $p_\infty$ ، ونقطة على محيط الاسطوانة . ويفضل الحساب بقيم لابعدية باستخدام معامل الضغط حيث ينتج من (8.54) بوضع $u_\infty = V_\infty$ واستخدام (12.41) :

$$c_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{\rho}{2} u_\infty^2} = 1 - 4 \sin^2 \varphi \quad . \qquad (12.42)$$

الشكل (١٠.١٢) يبين توزع $c_p$ المحسوب على هذا الأساس . ونلاحظ أن معامل الضغط الاصغري يبلغ $c_{p\,min} = -3$ عند $\varphi = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ ، ويكون في النصف العلوي $c_p = 0$ من أجل $\varphi = 30°, 150°$ . وباعتبار أن توزع الضغط متناظر بالنسبة للمحورين x و y فإن محصلة قوى الضغط معدومة . هذا يعني




الشكل ١٠.١٢ : توزع الضغط على محيط اسطوانة دائرية في جريان مثالي منتظم مسجلاً بالاتجاه القطري (a وعلى محيط الدائرة المنشور (b .

أن الاسطوانة الدائرية لا تتلقى في جريان انسحابي منتظم مثالي لا جولاني قوة رفع أو مقاومة . هذه النتيجة تتناقض طبعاً مع الواقع حيث

أن تأثير لزوجة الجريان الحقيقي سيؤدي لتغيير صورة الجريان حول الاسطوانة بالمقارنة مع الشكل (٩.١٢) مما يؤدي للنشوء مقاومة كبيرة نسبياً تنتج عن فرق الضغوط وعن قوى الاحتكاك .

نفرض الآن أن الاسطوانة موجودة في سائل ساكن لانهائي الامتداد وعديم اللزوجة . نطبق عليها قوى ضغط صدمية بحيث تتحرك حركة مستقيمة غير منتظمة باتجاه $+x$ وبسرعة U تحت تأثير التسارع $dU/dt$ . فاذا راقبنا الحركة من جملة إحداثيات مطلقة (مثبتة في السائل الساكن) فإن **الجريان المطلق** الذي يتشكل حول الاسطوانة يكون **كمونياً وغير مستقر** (انظر ١٠٤.٥) . وحيث ان سرعة السائل في اللانهاية تكون معدومة فإن تابع الكمون للجريان المطلق في حالتنا ينتج من (12.37) بوضع $u_\infty = -U$ وجعل الحد الأول المعبر عن تابع الكمون للجريان الانسحابي المنتظم مساوياً للصفر . وبالتالي يكون :

$$\Phi_{c_{abs}} = -U\ R^2 \frac{x}{x^2+y^2} = -U \frac{R^2}{r} \cos\varphi , \qquad (12.43)$$

حيث $r, \varphi$ الإحداثيان القطبيان اللذان ينطبق مركزهما على مركز الاسطوانة. إن مقارنة هذه العلاقة مع (10.65) مع أخذ (12.36) بعين الاعتبار ومقارنة الشكلين (٢.٥ – b) و (٨.٥) مع (١١.١٠) يقودنا الى الاستنتاج أن **الجريان المطلق حول اسطوانة دائرية يكافيء جريان ثنائية مستوية مركزها منطبق على مركز دائرة الاسطوانة** .

لنحسب الكتلة الهيدروديناميكية للاسطوانة . فحسب (9.38) و (9.39) تكون بوضع $V_n = U$ :

$$m_h = 2\frac{W_{kin}}{U^2} = -\frac{\rho}{U^2}\oint \Phi \frac{d\Phi}{dn}\, dA . \qquad (12.44)$$

من أجل تابع الكمون والسرعة الناظمية على محيط دائرة الاسطوانة نجد ،

بوضع r = R في (12.43) ، العلاقتين :

$$\Phi_{C_{abs}}(r=R) = -\,U\,R\cos\varphi\ ,$$

$$V_n = \frac{\partial\Phi_{C_{abs}}}{\partial n} = \frac{\partial\Phi_{C_{abs}}}{\partial r} = U\,\frac{R^3}{r^3}\cos\varphi \Rightarrow V_n(r=R) = U\cos\varphi\ .$$

بفرض b إرتفاع الاسطوانة فتكون مساحة عنصر من سطحها الخارجي :

$$dA = b\,ds = b\,R\,d\varphi\ .$$

بذلك تصبح (12.44) من الشكل :

$$m_h = \rho R^2 b \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\,d\varphi = \rho\pi R^2 b = m_{fl}. \qquad (12.45)$$

هذه النتيجة تبرهن ما سبقت الإشارة إليه بأن الكتلة الهيدروديناميكية لأسطوانة دائرية تساوي كتلة السائل المزاح . وتكون حسب (9.41) مقاومة التسارع التي تتعرض لها الأسطوانة في سائل مثالي :

$$F_{Wb} = \rho\pi R^2 b\,\frac{dU}{dt} \qquad (12.46)$$

هذه المقاومة يجب أن تكافيء توزعاً للضغط حول الاسطوانة يختلف عن الشكل (١٠.١٢) في حالة الجريان المنتظم . فإذا فرضنا أن توزع الضغط الصدمي ، أو ضغط التسارع $p_b$ يبقى ثابتاً ، ينتج من جهة :

$$F_{Wb} = \int_0^{2\pi} p_{b_n}\,dA = \int_0^{2\pi} p_b\cos\varphi\,.\,bR\,d\varphi\ ,$$

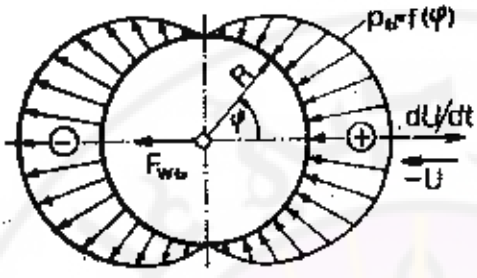
ومن جهة اخرى حسب (9.41) وباستخدام المعادلة اليسرى من (12.45) :

$$F_{Wb} = \rho R^2 b\,\frac{dU}{dt}\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\,d\varphi\ .$$

بمقارنة العلاقتين نجد :

$$p_b = \rho R \frac{dU}{dt} \cos\varphi \,. \qquad (12.47)$$

الشكل ( ١١.١٢ ) يبين $p_b = f(\varphi)$ . ونلاحظ فعلاً أنه في القسم الأمامي من الاسطوانة يسود ضغط زائد (+) وفي القسم الخلفي ضغط ناقص ( - ) ، وبالتالي فإن محصلة قوى الضغط تكافىء قوة مقاومة $F_w$ تعاكس حركة الاسطوانة .




الشكل ١١.١٢ : توزع الضغط حول اسطوانة دائرية في حالة حركة غير منتظمة .

## ٤.٢.١٢ الجريان الجولاني حول اسطوانة دائرية وحساب تأثير ماغنوس

نضم إلى الجريان الانسحابي المنتظم حول اسطوانة دائرية إعصاراً كمونياً شدته $\Gamma$ ويدور باتجاه دوران عقارب الساعة ومركزه منطبق على مركز الإحداثيين y,x المنبعثين من مركز الدائرة . إن تابع الكمون الإجمالي لهذا الجريان الجولاني حول اسطوانة دائرية ينتج من (10.44) و (12.37) بالصيغة :

$$\Phi_{\Gamma} = u_\infty x \left(1 + \frac{R^2}{x^2 + y^2}\right) - \frac{\Gamma}{2\pi} \arctan\frac{y}{x} =$$

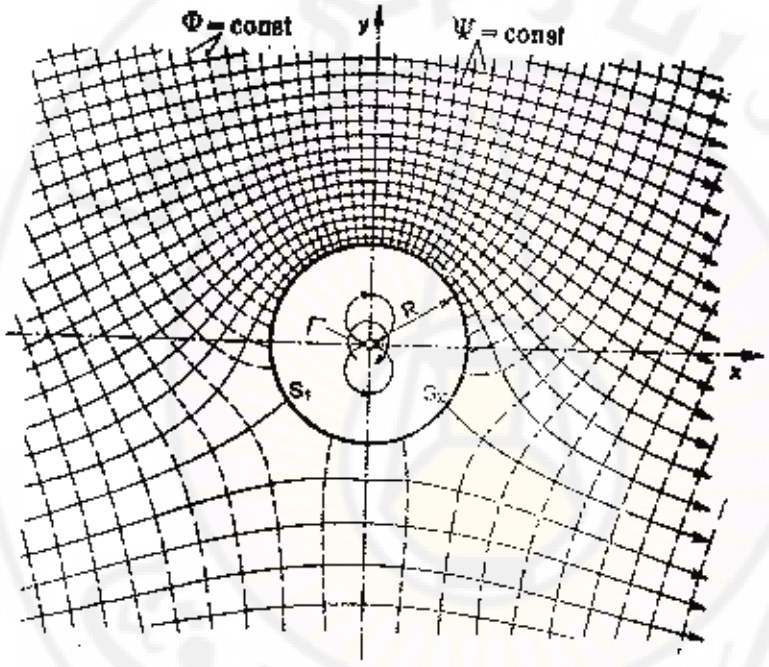
$$= u_\infty \cos\varphi \left(r + \frac{R^2}{r}\right) - \frac{\Gamma}{2\pi}\varphi \,. \qquad (12.48)$$

كما نحصل على تابع التيار الاجمالي من (10.35) مع عكس إشارة السالب و (12.33) بالصيغة :

$$\Psi_{\Gamma} = u_\infty x \left(1 - \frac{R^2}{x^2 + y^2}\right) + \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + y^2} =$$

$$= u_\infty \sin\varphi \left(r - \frac{R^2}{r}\right) + \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r \quad . \qquad (12.49)$$

الشكل (١٢.١٢) يبين صورة الجريان الإجمالي حول محيط دائرة الأسطوانة التي تمثل هنا أيضاً خط التيار الصفري ، $\Psi_{\Gamma} = 0$ ، لأن كل دائرة تمثل خط




الشكل ١٢.١٢ ، الجريان الجولاني ($\Gamma \neq 0$) حول اسطوانة دائرية يكافيء تضام جريان انسحابي منتظم مع ثنائية مستوية وإعصار كوني .

تيار بالنسبة للاعصار . هذه الصورة تنتج من (12.48) و (12.49) بوضع $\Psi_{\Gamma} = \text{const}$ و $\Phi_{\Gamma} = \text{const}$ . وتؤكد الصورة الفوتوغرافية في الشكل (١٣.١٢) أن الجريان الجولاني حول اسطوانة دائرية يمكن تحقيقه فعلاً بجعل الأسطوانة تدور بسرعة زوايا ثابتة في جريان انسحابي ( انظر ص ١٢٧ ) .

من الشكل (١٢.١٢) يتبين أن صورة الجريان الجولاني ليست متناظرة بالنسبة المحور x ولكنها متناظرة بالنسبة المحور y . هذا يتضح بسهولة إذا لاحظنا أنه في النصف العلوي من المستوي yx تزداد سرعة الجريان اللاجولاني حول الاسطوانة ( الشكل ٩.١٢ ) بمقدار السرعة التي يحرضها الإعصار الكموني ( خطوط التيار من نفس الاتجـــاه ! ) ، بينما تنقص بنفس المقدار في النصف



الشكل ١٣.١٢ : الجريان حول اسطوانة دائرية تدور بيطأ في جريان انسحابي ، ويطابق هنا إلى حد بعيد الجريان المثالي في الشكل (١٢.١٢) ، حسب [17].

السفلي ( خطوط التيار متعاكسة ! ) . وعليه فإن توزع الضغط على حدود الاسطوانة سيكون أيضاً متناظراً بالنسبة المحور y ، وغير متناظر بالنسبة المحور x . وينجم عن ذلك أن **الاسطوانة لا تتعرض لمقاومة في اتجاه** $u_\infty$ ( الجريان مثالي ! ) **ولكن تؤثر عليها قوة رفع عمودية على** $u_\infty$ .

إن السرعة على سطح الأسطوانة لها مركبة مماسية فقط ( $V_r = 0$ ) تنتج من (12.48) بالاشتقاق الجزئي بالنسبة لـ $\varphi$ :

$$|\mathbf{V}_{CI'}| = |\mathbf{V}_\varphi (r = R)| = V_{CI'} = 2u_\infty \sin\varphi + \frac{I'}{2\pi}\frac{1}{R} \quad . \quad (12.50)$$

عندما $I' = 0$ تأخذ هذه العلاقة صيغة المعادلة (12.41) وتقع نقطتا الركود $S_1$ ، $S_2$ على المحور x ، عند $\varphi = 0$ و $\varphi = \pi$ ( الشكل ٩.١٢ ) . عندما $I' \neq 0$ فإن نقطتي الركود تقعان في المجال الزاوي المحصور بين $\varphi = \pi$ و $\varphi = 2\pi$ على النصف السفلي للأسطوانة ( الشكل ١٢.١٢ ) ، وتقتربان من بعضهما البعض كلما زادت قيمة الجولان الى أن تنطبقا على بعضهما البعض عند $\varphi = \frac{3}{2}\pi$ من أجل قيمة أعظمية $I'_{max}$ تتحدد من (12.50) بوضع

$$V_{CI'}\left(\varphi = \frac{3\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow I'_{max} = 4\pi R\, u_\infty \quad . \quad (12.51)$$

إن توزع الضغط على سطح الاسطوانة ينتج من معادلة برنولي حيث يكون باستخدام (12.50) :

$$p - p_\infty = \frac{\rho}{2}(u_\infty^2 - V_{CI'}^2) = \frac{\rho}{2}u_\infty^2\left[1 - \left(2\sin\varphi + \frac{I'}{2\pi R u_\infty}\right)^2\right], \quad (12.52)$$

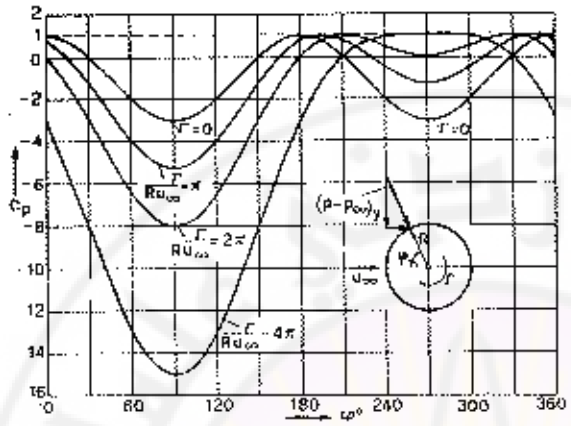
وعليه فإن معامل الضغط :

$$c_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{\rho}{2}u_\infty^2} = 1 - \left(2\sin\varphi + \frac{I'}{2\pi R u_\infty}\right)^2 \quad . \quad (12.53)$$

الشكل (١٤.١٢) يبين $c_p = f(\varphi)$ بالنسبة لقيم مختلفة للجولان $0 \leq I' \leq I'_{max}$.

من توزع الضغط نحصل الآن على قوة الرفع. فاذا فرضنا b إرتفاع الاسطوانة، $dA = R\, b\, d\varphi$ عنصراً من سطحها الخارجي فتكون ( انظر الشكل ١٠.١٢ ) :

$$dF_A = dF_{py} = -(p - p_\infty) \sin\varphi \cdot R\, b\, d\varphi$$




الشكل ١٤.١٢ : توزع الضغط على سطح اسطوانة دائرية في جريان جولاني .

فاذا أجرينا التكامل بين $\varphi = 0$ و $\varphi = 2\pi$ ولاحظنا بعد استبدال $(p - p_\infty)$ حسب (12-52) أن تكامل كافة الحدود التي يدخل فيها $\sin\varphi$ و $\sin^3\varphi$ يساوي الصفر ، بينما $\int_{\varphi=0}^{2\pi} \sin^2\varphi = \pi$ نجد بالنتيجة :

$$F_A = \rho\, u_\infty\, \Gamma\, b \qquad . \qquad (12.54)$$

هذا يعني أن قوة الرفع المؤثرة على الاسطوانة الدائرية تحسب من قانون **كوتا ـ يوكوفسكي** . وسنبرهن فيما بعد ان هذا القانون ينطبق عامة على الجريان الكموني المستوي مع جولان حول كل جسم اسطواني ذي مقطع اعتباطي .

**إن قوة الرفع الاعظمية** تنتج من (12.54) بوضع $\Gamma = \Gamma_{max}$ حسب (12.51) حيث نجد :

$$F_{A\,max} = 4\pi \frac{\rho}{2} u_\infty^2\, 2Rb = c_{A\,max}\, q_\infty\, A \,. \qquad (12.55)$$

وعليه فإن **معامل قوة الرفع الاعظمية** Coefficient of lift maximum يبلغ $c_{A\,max} = 4\pi$ ، وهي قيمة أعلى بكثير من القيمة التي يصلها بروفيل جناح حامل.

إن أول من أثبت وجود قوة الرفع هذه العالم الالماني **ماجنوس** G. Magnus (1802-1870) وذلك من خلال تجاربه على اسطوانات دائرية تقوم

بحركة مستقيمة وتدور في نفس الوقت ، ولذلك تعرف باسم تأثير ماجنوس . ولكن الذي أعطى لها تفسيراً نظرياً مقبولاً هو العالم الانجليزي لورد ديليه Lord Rayleigh (1842-1919) الذي لفت انتباهه أن كرات المضرب(التنس) التي تتلقى من المضرب حركة دورانية تنزاح عرضانياً عن مسارها .

لقد جرت محاولة قديمة للاستفادة المباشرة من « تأثير ماجنوس » لدفع السفن حيث استعيض عن الدافع ، بما يعرف باسم دوّار فليتنر Flettner rotor نسبة لمخترعه ، وهذا يتألف من اسطوانتين تبرزان فوق سطح السفينة وتدوران حول محورين شاقوليين في مهب الريح فتتولد القوة الدافعة للسفينة . وبالرغم من أن أكاريت Ackeret وبراندل قد درسا السفينة المجهزة بدوّار فليتنر من الناحية الفيزيائية النظرية والتجريبية وكان بالإمكان الحصول على قيم لعامل قوة الرفع حتى $c_A \approx 9$ إلا أن دوّار فليتنر لم يستطع ان يزيح الدروحة الهوائية أو الدافع ولاحق الشراع (أنظر [7] ، [17]) .

إن الأهمية الكبيرة للجريان الجولاني حول اسطوانة دائرية لا تكمن في الاستفادة التطبيقية المباشرة منها وإنما في تحويل صورة الجريان البسيطة هذه بمساعدة التمثيل المطابق الى صورة الجريان حول بروفيلات أجنحة حاملة ( انظر ١٣ ) .

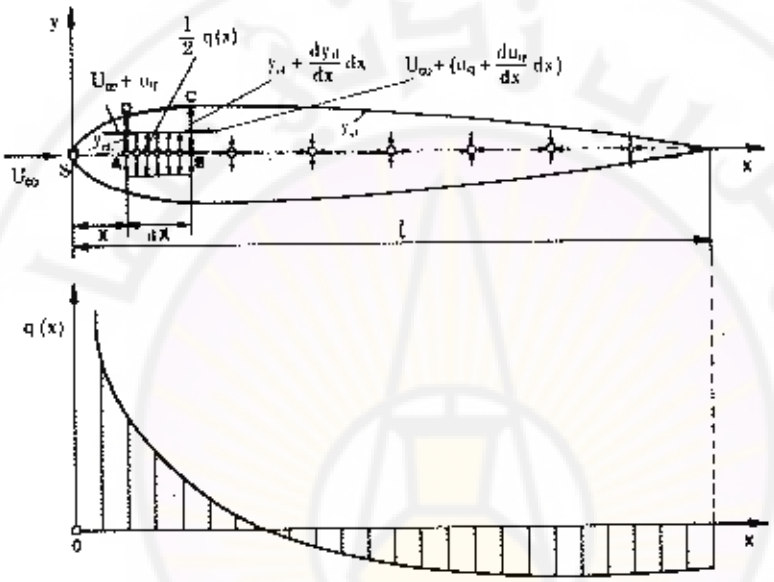
## ٥.٢.١٢ الجريان حول بروفيل متناظر ( عديم الرحنار )

### قليل السماكة

يمكن الحصول على أجسام انسيابية متناظرة (بالنسبة للمحور x مثلاً )وذات أنف مدوّر وسماكة محدودة تتزايد بدءاً من حافة الجسم الأمامية وحتى قيمة أعظمية ثم تتناقص حتى تنعدم عند الحافة الخلفية إذا انضم ،بموجب طريقة النقاط الشاذة ، الى الجريان المنتظم الموازي للمحور x وبسرعة $U_\infty$ توزع سطحي من الينابيع ـ البالوعات . في المستوي x y نفرض أن الينابيع والبالوعات موزعة على المحور x التناظري بشكل مستمر على طول وتر البروفيل l Profile chord وبحيث تكون شدتها الموضعية $q(\xi)$ تحقق شروط الاغلاق :

$$\int_{\xi=0}^{\xi=l} q(\xi)\, d\xi = 0 \qquad (12.56)$$

لكي يكون خط التيار الصفري الناتج عن تضام الجريان الانسحابي مع الينابيع ـ البالوعات مغلقاً ، الشكل (١٢.١٥) .




الشكل ١٢.١٥ : البروفيل المتناظر ينتج من تضام توزع سطحي من الينابيع ـ البالوعات مع جريان انسحابي منتظم أفقي .

إن حقل السرعة الذي يحرضه توزع الينابيع ـ البالوعات يتحدد بمركبتي السرعة $v_q, u_q$ في اتجاه $y, x$ إذا كاملنا العلاقة (10.85) بين $\xi = 0$ و $\xi = l$ . فإذا وضعنا إحداثي النقطة المتحولة $\xi = x'$ نجد :

$$\left.\begin{aligned} u_q(x,y) &= \frac{1}{2\pi}\int_{x'=0}^{x'=l} q(x')\,\frac{x-x'}{(x-x')^2+y^2}\,dx' \quad ; \\ v_q(x,y) &= \frac{1}{2\pi}\int_{x'=0}^{x'=l} q(x')\,\frac{y}{(x-x')^2+y^2}\,dx' \quad . \end{aligned}\right\} \qquad (12.57)$$

في النقاط القريبة جداً من المحور x يمكن اعتبار قيم $u_q , v_q$ مساوية تقريباً للقيم المحرضة على المحور x نفسه . فاذا جعلنا $y \to 0$ نحصل من (12.57) على علاقتين مماثلتين شكلاً لـ (10.92) و (10.93) :

$$u_q(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{x'=0}^{x'=l} q(x') \frac{dx'}{x - x'} \; ; \quad v_q(x) = \pm \frac{1}{2} q(x) \quad , \quad (12.58)$$

إن العلاقة بين شكل البروفيل المتناظر وبين توزع الينابيع ـ البالوعات تتحدد الآن من واقع ان حدود البروفيل تمثل خط التيار الصفري المغلق الذي يحصر في داخله كامل غزارة الينابيع والبالوعات . فاذا فرضنا $y_d(x)$ معادلة الطرف العلوي للبروفيل ، $l$ طول وتره وطبقنا معادلة الاستمرار على العنصر السطحي D C B A المبين في الشكل (١٥،١٢) نجد بسهولة :

$$(U_\infty + u_q)\, y_d + \frac{1}{2}\, q(x)\, dx = \left(U_\infty + u_q + \frac{du_q}{dx} dx\right) \left(y_d + \frac{dy_d}{dx} dx\right) ,$$

وبعد إصلاح بسيط ينتج :

$$q(x) = 2 \frac{d}{dx} \left[ (U_\infty + u_q)\, y_d \right] . \quad (12.59)$$

هذه العلاقة تعبر عن شرط الجريان الحركي Kinematic flow condition للبروفيل المتناظر . فاذا فرضنا سماكته معتدلة ( $y_{d\,max} / l < 0{,}1$ ) فان مركبة السرعة $u_q$ يمكن اهمالها بالمقارنة مع سرعة الورود $U_\infty$ وينتج عندئذ من (12.59):

$$q(x) = 2 U_\infty \frac{dy_d}{dx} = U_\infty \frac{dA_d}{dx} , \quad (12.60)$$

حيث $A_d = 2 y_d$ سماكة البروفيل المتناظر أو مساحة مقطع عرضي منه

بارتفاع $b = 1$ . باستخدام المعادلة الثانية من (12.58) يأخذ أخيراً شرط الجريان الحركي بالنسبة لطرف البروفيل العلوي الصياغة الرياضية التالية :

$$\frac{dy_a}{dx} = \frac{v_q(x)}{u_\infty} \quad . \tag{12.61}$$

باختيار توزع مناسب من الينابيع والبالوعات $q(x)$ يمكننا الآن حل المسألة الأساسية الأولى والثانية والثالثة وحساب كافة القيم الهيدروديناميكية .

في الحساب العملي نستخدم قيم لا بعدية ، حيث تنسب ، كما في نظرية الجناح الحامل عامة ، كافة السرع إلى السرعة غير المشوشة ، والأطوال إلى طول وتر البروفيل $l$ . فاذا اعتبرنا

$$\xi = \frac{x}{l} \quad ; \xi' = \frac{x'}{l} \; , \; \eta_a = \frac{y_a}{l} \tag{12.62}$$

نحصل من (12.58) على المعادلتين التاليتين :

$$u_q(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 q(\xi') \frac{d\xi'}{\xi - \xi'} \tag{12.63a}$$

$$v_q(\xi) = \pm \frac{1}{2} q(\xi) \quad \begin{matrix} + \Rightarrow + y \longrightarrow 0 \; (\text{الطرف العلوي}) \\ \text{من أجل} \\ - \Rightarrow - y \longrightarrow 0 \; (\text{الطرف السفلي}) \end{matrix} \tag{12.63b}$$

يبقى الآن أن نختار توزعاً مناسباً من الينابيع ـ البالوعات . ذلك يتم على أساس أن أنف البروفيل يجب أن يكون مدوّراً وأن يكون التابع $q(\xi)$ في كامل مجال التكامل نظامياً regular . وقد اقترح **غلاوبرت** H. Glauert [132]، بناء على دراسة أساسية قام بها **برنباوم** W. Birnbaum و **أكرمان** W. Ackermann [133] لحل مسألة الجريان المستوي حول جناح حامل ، سلسلة

فورييه مثلثية معروفة اليوم باسم سلسلة غلاوديت بالصيغة :

$$q(\varphi) = 2U_\infty\left(B_0 \tan\frac{\varphi}{2} + \sum_{n=1}^{n} B_n \sin n\varphi\right) \quad , \quad (12.64)$$

حيث $B_n$ ثوابت عددية تكون معطاة أو يمكن اختيارها بحرية عند حل المسألة الأساسية الأولى ، و يلزم تحديدها من شرط الجريان الحركي عند حل المسألة الأساسية الثانية ، ويرتبط الإحداثي $\xi$ مع $\varphi$ بالعلاقة :

$$\begin{aligned} \xi = 0 \ (\text{الأنف}) \quad &\Rightarrow \varphi = 0 \ , \\ \xi = \frac{1}{2}(1 - \cos\varphi) \ ; \quad &(12.65) \\ \xi = 1 \ (\text{الحافة الخلفية}) \quad &\Rightarrow \varphi = \pi \ . \end{aligned}$$

بمكاملة (12.64) بين 0 و $\pi$ تنتج الغذارة الكلية :

$$Q = \int_0^{\pi} q(\varphi)\, d\varphi = u_\infty\left(B_0 + \frac{1}{2}B_1\right) \quad , \quad (12.66)$$

وعليه يكون شرط الإغلاق (12.56) محققاً عندما $B_0 + \frac{1}{2}B_1 = 0$ . لذلك ينصح بدمج الحد الأول والثاني في العلاقة (12.64) مع بعضها البعض بحيث يحقق كل حد فيها بمفرده شرط الاغلاق ، وتصبح :

$$q(\varphi) = 2U_\infty\left[B_0\left(\cot\frac{\varphi}{2} - 2\sin\varphi\right) + \sum_{m=2}^{m} B_m \sin m\varphi\right] . \quad (12.67)$$

لحساب السرعة المحرضة ندخل (12.67) في (12.63 a,b) مع استخدام (12.65) وملاحظة أن $d\xi' = \frac{1}{2}\sin\varphi' d\varphi'$ فنحصل مباشرة على $v_q$ ، ولكن حساب $u_q$ يؤول لحل التكاملين

$$I_0 = \int_0^{\pi} \frac{d\varphi'}{\cos\varphi' - \cos\varphi} \quad ; \quad I_n = \int_0^{\pi} \frac{\cos n\varphi'}{\cos\varphi' - \cos\varphi}\, d\varphi' \ (n = 0,1,2,\ldots)$$

اللذين يتميزان بوجود نقطة شاذة عند $\varphi = \varphi'$ ، لذلك تؤخذ القيم الكوشية الأساسية ( انظر ص ٤٤٧ ) . ونجد بدون التعرض هنا للتفاصيل الرياضية ( راجع [25] [42] [103] [108] ) :

$$I_0 = 0 \quad ; \quad I_n = \int_0^{\pi} \frac{\cos n\varphi'}{\cos\varphi' - \cos\varphi}\, d\varphi' = \pi \frac{\sin n\varphi}{\sin\varphi} \,. \qquad (12.68)$$

على هذا الأساس نحصل على مركبتي السرعة العرضة على المحور x بصيغة العلاقتين البسيطتين :

$$\frac{u_q(\varphi)}{U_\infty} = [B_0(1 + 2\cos\varphi) - B_2\cos 2\varphi - B_3\cos 3\varphi - \ldots] \,, \qquad (12.69)$$

$$\frac{v_q(\varphi)}{U_\infty} = \pm [B_0(\cot\frac{\varphi}{2} - 2\sin\varphi) + B_2\sin 2\varphi + B_3\sin\varphi + \ldots] \,. \qquad (12.70)$$

عند حل **المسألة الأساسية الأولى** يفرض $q(\varphi)$ حسب (12.67) معلوماً ونبحث عن شكل البروفيل . ويتحدد هذا بادخال (12.70) في (12.61) واستخدام (12.62) فيصبح :

$$\frac{dy_d}{d\xi} = \frac{1}{2} B_0 (2\cos^2\frac{\varphi}{2} - 2\sin^2\varphi) +$$

$$+ \frac{1}{4}\sum_{m=2}^{m} [B_m\cos(m-1)\varphi - \cos(m+1)\varphi]$$

وباجراء التكامل نجد معادلة تحديد شكل البروفيل أو **توزع السماكة** Thickness distribution :

$$y_d = \frac{y_d}{l} = \frac{1}{2} B_0 (\sin\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi) +$$

$$+ \frac{1}{4}\sum_{m=2}^{m} B_m \left(\frac{\sin(m-1)\varphi}{m-1} - \frac{\sin(m+1)\varphi}{m+1}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} B_0 (\sin\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi) + \frac{1}{12} B_2 (3\sin\varphi - \sin 3\varphi) +$$

$$+ \frac{1}{16} B_3 (2\sin 2\varphi - \sin 4\varphi) + \ldots . \qquad (12.71)$$

لحساب توزع السرعة على محيط البروفيل المتناظر يفترض ، كما ذكرنا ، أن السرعة على الوتر لا تختلف إلا قليلاً عن السرعة $V_B$ على محيط البروفيل ذي السماكة القليلة ، باستثناء منطقة صغيرة في الجوار المباشر لأنف البروفيل [17]. فإذا فرضنا $V_e(x)$ السرعة على الوتر فيكون حسب ريغلس F.Riegels [134] .

$$V_B(x) = V_e(x)\,\frac{1}{\sqrt{1+y'^2_d}} = V_e(x)\,/\,\varkappa_{Rd} \quad \left(y'_d = \frac{dy_d}{dx}\right), \qquad (12.72)$$

حيث يعرف $\varkappa_{Rd}$ باسم معامل ريغلس Riegels' factor لتوزع السماكة ، وينتج باستخدام التمثيل المتطابق ( انظر ١٣ ) لمحيط البروفيل على وتره . على هذا الأساس ، وبملاحظة أن محصلة المركبة $v_q$ السرعة المعرضة تكون بسبب إشارة $\pm$ معدومة على الوتر ، وأن المركبة $u_q$ حسب (12.69) تنضم للسرعة غير المشوشة $U_\infty$ ، ينتج توزع السرعة من (12.72) بالصيغة :

$$\frac{V_B}{U_\infty} = [1 + B_0\,(1 + 2\cos\varphi) - \sum_{m=2}^{m} B_m \cos m\varphi]\,/\,\varkappa_{Rd} \quad . \qquad (12.73)$$

من توزع السرعة يمكن الآن حساب توزع معامل الضغط حيث يكون :

$$c_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{\rho}{2}U_\infty^2} = 1 - \left(\frac{V_B}{U_\infty}\right)^2 \quad . \qquad (12.74)$$

عند حل المسألة الاساسية الثانية يفترض أن شكل البروفيل معلوم ومحدد بدلالة $y_d(x)$ أو $\eta_d(\xi)$ ، ويطلب حساب توزع السرعة والضغط على محيط البروفيل . هنا يأتي كخطوة أولى تحديد الثوابت $B_m$ في سلسلة غلاورت (12.67) بمساعدة شرط الجريان الحركي (12.61) ، الذي يقضي بأن يكون محيط البروفيل خطاً للتيار . في الحساب العملي يكتفى بتحقيق هذا الشرط في عدة نقاط اختبارية Test point من محيط البروفيل أو وتره يختار عددها $n$ عادة

مساوياً لعدد الحدود $n$ في سلسلة **غلاوردت** [104] . وطبيعي أنه كلما قل العدد كلما كانت نتيجة الحساب تقريبية أكثر .

لقد تأكد من مقارنة النتائج التجريبية بالنظرية أنه إذا تم اختيار النقاط الاختبارية بموجب مايعرف باسم **فرضية ثلاثة أرباع الوتر**، مثلاً [25],[17]، تكون النتائج التقريبية لاتختلف إلا قليلاً عن نتائج الحل الدقيق . هذه الفرضية تنص أنه عند اختيار نقطة اختبارية واحدة فإن موقعها على المحور x يكون عند $x/l = \frac{3}{4}$ ، وعند اختيار n نقطة اختبارية فان مواقعها تتحدد بالعلاقة :

$$x_{\mu}^{(n)}/l = \frac{4\mu - 1}{4n} \quad , \quad \mu = 1, 2, 3, \ldots, n \qquad (12.75)$$

على هذا الاساس تنتج من شرط الجريان الحركي مجموعة معادلات خطية جبرية مؤلفة من $n$ معادلة . وغني عن البيان أن حل مثل هذه المجموعات بمساعدة الحاسبات الالكترونية مسألة بغاية البساطة . بينما يكتفى عند استخدام الآلات الحاسبة الكلاسيكية في الحالات العملية ، بثلاث نقاط اختبارية تحدد مواقعها حسب (12.75) بالاحداثيات :

$$x_1/l = 3/12; \; x_2/l = 7/12; \; x_3/l = 11/12 \; . \qquad (12.76)$$

فاذا اكتفينا أيضاً بالحدود الثلاثة الأول من سلسلة **غلاوردت** نحصل من شرط الجريان الحركي على مجموعة من ثلاثة معادلات خطية لتحديد الثوابت $B_3, B_2, B_0$.

بعد تحديد الثوابت $B_m$ نجد بسهولة توزع السرعة على محيط البروفيل حسب (12.73) ، بعد تحديد $x_{n,i}$ من $y_{,i}$ تحليلياً أو بيانياً . ونحصل على توزع الضغط من (12.74) .

إن البروفيل المتناظر في جريان مثالي باتجاه الوتر لا يتعرض طبعاً لأية

مقاومة ، ولا تؤثر عليه كذلك قوة رفع لأن $L=0$ . ويؤكد ذلك حساب محصل قوى الضغط في اتجاه الجريان وعمودياً عليه . بينما تكون المقاومة في الجريان الحقيقي غير معدومة طبعاً بسبب اللزوجة .

أخيراً تجدر الملاحظة أن المسألة الاساسية الثانية تمثل بالنسبة للبروفيل المتناظر ، وبالنسبة للجناح الحامل عامة مسألة نظرية صرفة لجريان كموني ولها حل واحد فقط محدد . بينما يكون للمسألة الاساسية الأولى حلول عديدة لا يصلح منها إلا عدد قليل فقط . ويتم اختيار الحل المناسب على أساس ان تكون مقاومة البروفيل الناتج قليلة ، أو أن يكون توزع السرعة والضغط على سطحه بحيث لا يحدث تجاوز لسرعة الصوت في حالة الهواء أو اقتراب من ضغط التبخر في حالة الماء حتى لا يتعرض الجناح لخطر التكهف .

## ٦.٢.١٢ الجريان حول بروفيل جناح حامل قليل الانحناء وعديم السماكة - طريقة برنباوم

من أنظمة توزع سطحي اعصاري حسب (٧٠٣٠١٠) مع جريان انسحابي منتظم نحصل على أجسام مستوية رقيقة جداً ( نظرياً بدون سماكة ! ) مقاطعها تمثل بروفيلات منحنية تسمى **بروفيلات الهيكل أو الخط الرئيسي** Skeleton Profile .

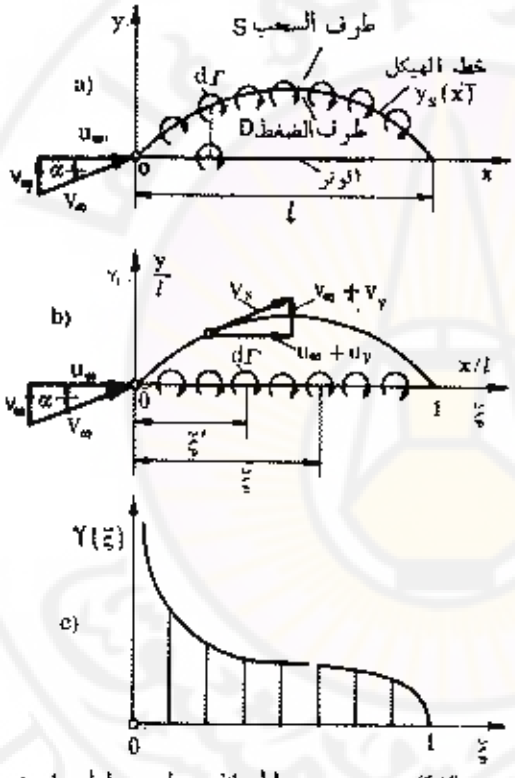
إن المبدأ الاساسي لدراسة الجريان حول جناح حامل ، أي يتعرض لقوة رفع ، يتضح من (١٠١٠١٢) حيث يمكن كخطوة تقريبية أولى بموجب **نظرية الخيط الاعصاري الحامل** التعويض عن الجناح المستوي بخيط اعصاري فردي يخترق الجناح ويوازي خطه المولد . ولكن الاعتماد على **نظرية السطح الاعصاري الحامل** يعطي طبعاً نتائج أفضل عند حل المسألة الاساسية الأولى والثانية . هذه النظرية وضع أسسها **برنباوم و أكرمان** [133] **وغلاوديت** [132] ، وطورها

فيما بعد ريغلز [134] و كويني F. Keune و ألن J. Allen (راجع مثلاً [17]) وغيرهم كثير .

نعتبر خط الهيكل المبين في الشكل ( ١٢-١٦-a ) ونختار محوري الاحداثيات بحيث ان المحور x ينطبق على وتر البروفيل الذي يتحدد شكله بالاحداثي $y_s(x)$ ، ويكون أنفه أو (حافته الامامية) منطبقاً على مبدأ الاحداثيات .

نفرض حسب برنباوم ان زاوية الوذوذ $\alpha$ المشكلة بين السرعة غير المشوشة للجريان الانسحابي $V_\infty$ والوتر صغيرة ، وأن خط الهيكل قليل الانحناء . على هذا الاساس تكون السرعات المعرضة من التوزع الاعصاري صغيرة بالمقارنة مع سرعة الجريان الانسحابي ، ويمكن بدلاً من توزيع الاعاصير على خط الهيكل توزيعها على الوتر (المحور x) دون ارتكاب خطأ يذكر ، ولكننا نكون قد تخلصنا من صعوبات رياضية كبيرة .

إذا كان التوزع الاعصاري $\gamma(x)$ يمتد من أنف البروفيل $x=0$ ، حتى حافته الخلفية ،




الشكل ١٢-١٦ : الجريان حول بروفيل منحن عديم المساكة ( خط الهيكل ) يكافيء تضام جريان انسحابي مع توزع سطحي اعصاري على محيط البروفيل (a ، فاذا كان انحناء البروفيل قليلا يكتفى بتوزيع الاعاصير على طول الوتر (b ، ويؤخذ توزع اعصاري مناسب (c .

$l - x$ ، الشكل ( c, b – ١٦٠١٢ ) فإن مركبتي السرعة المحرضة باتجاه x و y تنتجان من (10.90) و (10.91) . وبما أن قيم $v_y$ صغيرة ، كما هو مفروض ، فإن قيم $u_y$ ، $v_y$ على خط الهيكل تساوي تقريباً القيم على الوتر ، وبالتالي تخضع للعلاقتين (10.92) ، (10.94) . فاذا وضعنا على غرار (12.62) :

$$\xi = x/l; \ \xi' = x'/l : \eta_s = y_s/l \ , \qquad (12.77)$$

تكون مركبتا السرعة على الوتر :

$$u_y(\xi) = \pm \frac{1}{2} \gamma(\xi) \quad \begin{matrix} + \Rightarrow + y \longrightarrow 0 \ (\text{طرف السحب}) \\ \text{من أجل} \\ - \Rightarrow - y \longrightarrow 0 \ (\text{طرف الضغط}) \end{matrix} \ . \qquad (12.78)$$

$$v_y(\xi) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^1 \gamma(\xi') \frac{d\xi'}{\xi - \xi'} \ , \qquad (12.79)$$

حيث $\xi$ الإحداثي اللابعدي للنقطة الثابتة المعتبرة ، $\xi'$ إحداثي النقطة المتنقلة .

إن العلاقة بين التوزع الاعصاري $\gamma(\xi)$ وشكل البروفيل $\eta_s(\xi)$ تتحدد من شرط **الجريان الحوكي** الذي يقضي بأن يكون محيط البروفيل ( خط الهيكل ) خطاً صفرياً إجمالياً للتيار . فاذا فرضنا $v_\infty, u_\infty$ مركبتي السرعة $V_\infty$ للجريان الانسحابي المنتظم ، $V_s$ السرعة على محيط البروفيل فيكون حسب الشكل ( b –١٦٠١٢ ) :

$$\eta_s' = \frac{d\eta_s}{d\xi} = \frac{v_\infty + v_y}{u_\infty + u_y} \ . \qquad (12.80)$$

في نطاق الفرضيات السابقة يكون حسب **برنباوم** $u_\infty \gg u_y$ . كما يمكن أيضاً استبدال زاوية الورود الصغيرة بظلها . وبالتالي ينتج من (12.80) مع الانتباه للشكل (١٦٠١٢–b) :

$$\eta_s' \approx \frac{v_{s_0}}{u_\infty} + \frac{v_y}{u_\infty} - \alpha + \frac{v_y}{u_\infty} \quad . \tag{12.81}$$

هذه العلاقة تعني أنه بدلاً من وجوب كون مركبة السرعة المحصلة ناظمياً على خط الهيكل معدومة في كل نقطة منه ، بموجب شرط الجريان الحركي ، يكفي تحقيق هذا الشرط على الوتر ، عندما يكون انحنـــاء البروفيل صغيراً ($|f/l - \gamma_{s\,max}/l| \leq 0{,}1$) .

عندما تكون زاوية الورود معدومة $\alpha = 0$ تتبسط العلاقة (12.81) وتصبح:

$$\gamma_s' = \frac{v_y}{u_\infty} \quad . \tag{12.82}$$

ومن هنا تتبدى إمكانية دراسة تأثير زاوية الورود على الجريان .

على أساس العلاقات السابقة يمكننـــا الآن حل مسائل الجريان الاساسية الثلاثة ، وبالتـالي تحديد القيم الهيدروديناميكية ، وذلك بعد اختيـار تابع مناسب للتوزع الاعصاري $\gamma(\xi)$ . هنا يلزم ان نأخذ بعين الاعتبار أن شرط **كوتا للانسياب الناعم** ( انظر ص ٣٦٠ ) يجب ان يكون محققاً . هـذا يقضي بوجود عدم التقـــاف الجريان حول حافة البروفيل الخلفية ، وبالتالي يجب أن تكون سرعة الجريان في تلك النقطة على طرف السحب تساوي السرعـة على طرف الضغط . وحيث أن السرعة على محيط البروفيل تنتج ، باستخدام (12.78) وافتراض زاوية الورود صغيرة ، بالصيغة :

$$V_s(\xi) = V_\infty \pm u_y(\xi) \approx u_\infty \pm \frac{1}{2}\gamma(\xi) \begin{cases} + & \text{طرف السحب} \\ - & \text{طرف الضغط} \end{cases} \quad , \tag{12.83}$$

نجد أن شرط كوتا للانسياب الناعم يتطلب ان يكون :

$$\gamma(\xi) = 0 \quad \text{من أجل} \quad \xi = 1 \quad . \tag{12.84}$$

من جهة أخرى يجب ان نراعي إمكانية حدوث التفاف الجريان حول أنف البروفيل إذا كانت زاوية الورود تختلف عن زاوية ورود الجريان **اللاصدمي** Shockless flow، أو **المماسي**، $\alpha^* + \alpha$ ، التي تتحقق عندما تكون السرعة غير المشوشة $V_\infty$ مماسية على أنف البروفيل. وحيث أن التفاف الجريان حول طرف حاد يؤدي لنشوء سرعات لانهائية نظرياً فيجب أن يحوي التابع $\gamma(\xi)$ حداً يتناهى الى اللانهاية من أجل $\xi = 0$.

في الحساب العملي يتم، حسب **برنباوم وغلاوديت**، إختيار سلسلة فوريية مثلثية مطابقة شكلاً للعلاقة (12.64) :

$$\gamma(\varphi) = 2u_\infty \left(A_0 \cot\frac{\varphi}{2} + \sum_{n=1}^{n} A_n \sin n\varphi\right) \qquad (12.85)$$

حيث يرتبط الاحداثيان $\varphi$ و $\xi$ بالعلاقة (12.65) ، و $A_n$ تمثل ثوابت عددية تكون إما معطاة أو يجب تحديدها. والخاصة المميزة لهذه السلسلة أن كل حد منها يحقق مبدأ التضام وبالتالي يمكن فصل أي حد من حدودها ودراسة الجريان الناتج عن تضامه مع جريان انسحابي. فإذا جمعنا النتائج لـ $n$ حداً ( عملياً يكتفى بـ $n \leq 4$ ) نحصل على الجريان حول بروفيل اعتباطي الشكل يتحدد بمعادلة قطع مكافيء من الدرجة $n$. وتعرف خاصة الحدود الاربعة الاولى باسم **توزعات برنبادم – أكرمان الأساسية**.

بادخال (12.85) في (12.78) و (12.79) نحصل على مركبتي السرعة المحرضة بالصيغتين :

$$u_r(\varphi) = \pm u_\infty \left(A_0 \cot\frac{\varphi}{2} + A_1 \sin\varphi + A_2 \sin 2\varphi + \ldots\right) =$$

$$= \pm u_\infty \left(A_0 \cot\frac{\varphi}{2} + \sum_{n=1}^{n} A_n \sin n\varphi\right) \qquad (12.86)$$

$$v_y(\varphi) = u_\infty\left(-A_0 + A_1\cos\varphi + A_2\cos 2\varphi + \ldots\right) =$$

$$= u_\infty\left(-A_0 + \sum_{n=1}^{n} A_n\cos n\varphi\right) . \qquad (12.87)$$

وذلك بالاستعانة بالعلاقة (12.68) .

عند حل **المسألة الأساسية الأولى** يكون $\gamma(\varphi)$ أو $\gamma(\xi)$ معلوماً ويطلب تحديد شكل البروفيل الناتج عن تضام $\gamma(\varphi)$ مع جريان انسحابي . فإذا أدخلنا (12.87) في (12.82) ولاحظنا أن $d\xi = \frac{1}{2}\sin\varphi\, d\varphi$ نجد معادلة شكل البروفيل :

$$y_s = -\int_0^{\varphi} \frac{v_y}{u_\infty}\, d\xi = -\frac{1}{2}A_0\cos\varphi - \frac{1}{8}A_1\cos 2\varphi +$$

$$+\frac{1}{4}\sum_{n=2}^{n} A_n\left(\frac{\cos(n-1)\varphi}{n-1} - \frac{\cos(n+1)\varphi}{n+1}\right) . \qquad (12.88)$$

أما إذا كان التوزع الاعصاري معطى بعلاقة تختلف عن (12.85) فيلزم للحصول على شكل البروفيل أولا حساب السرعة الشاقولية المعرضة $v_y$ حسب (12.79) ومن ثم ادخالها في شرط الجريان الحركي (12.81) . وبالامكان دمج علاقتين الخطوتين بخطوة واحدة إذا أدخلنا (12.79) في (12.84) فوراً وأجرينا التكامل بالنسبة لـ $\xi$ . فاذا راعينا الشرط الحدي القاضي بوجوب كون $y_s(0) = y_s(1) = 0$ ( أنف البروفيل وحافته الخلفيـــة ينطبقان على الوتر ) تنتج العلاقة :

$$y_s(\xi) = x\xi - \frac{1}{2\pi}\int_0^1 \frac{\gamma(\xi')}{u_\infty}\ln\left|\frac{\xi-\xi'}{\xi'}\right| d\xi' . \qquad (12.89)$$

ونحصل على العلاقة بين زاوية الورود $\alpha$ والتوزع الاعصاري بوضع $y_s = 0$ من أجل $\xi = 1$ :

$$\alpha = \frac{1}{2\pi}\int_0^1 \frac{\gamma(\xi')}{u_\infty}\ln\frac{1-\xi'}{\xi'}\, d\xi' . \qquad (12.90)$$

هذان التكاملان يمكن حلها على أساس إرجاعها إلى علاقة تجوخ ، على غرار ما تم أعلاه .

عند حل **المسألة الأساسية الثانية** يفرض أن شكل البروفيل معطى بيانياً أو تحليلياً بصيغة تابع من الدرجة $n$ :

$$r_k = a_0 + a_1 \xi + a_2 \xi^2 + \ldots = \sum_{u=0}^{n} a_u \xi^u , \qquad (12.91)$$

حيث $a_n$ ثوابت عددية ، ويطلب تحديد التوزع الاعصاري المناسب $\gamma(\xi)$ بحيث يكون خط التيار الصفري الناتج عن تضام $\gamma(\xi)$ مع الجريان الانسحابي منطبقاً على البروفيل . إن خطوات الحل مماثلة تماماً للخطوات المتبعة في حالة البروفيل المتناظر ( الفقرة السابقة ) ، حيث نكتفي بتحقيق شرط الجريان الحركي على عدد $n$ من النقاط الاختبارية التي نختارها بموجب (12.75) ويكون فيها $r_{sn}$ معلوماً .

فإذا كان العدد $n$ ، هنا أيضاً ، مساوياً لعدد حدود سلسلة **غلاورت** (12.85) نحصل على مجموعة معادلات مؤلفة من $n$ معادلة خطية لحساب الثوابت $A_n$ ، وبالتالي لتحديد $\gamma(\xi)$ . بعدئذ يمكن حساب القيم الهيدروديناميكية للجريان حول البروفيل .

عند حل **المسألة الأساسية الثالثة** يكون توزع السرعة $\pm u_\gamma = f(\xi)$ معلوماً ويطلب تحديد شكل البروفيل المناسب . وهنا ، كما في الحالة السابقة ، يكتفى باستخدام العلاقة (12.85) في $n$ نقطة اختبارية من أجل حساب الأمثال المجهولة $A_n$ ، ومن ثم يتحدد شكل البروفيل بمساعدة (12.88) .

إن السرعة على الوتر لا تختلف إلا قليلاً عن السرعة على محيط البروفيل ذي الانحناء القليل . وعليه ينتج في حالة زاوية ورود معدومة أو صغيرة جداً من (12.83) و (12.86) توزع السرعة :

$$\frac{V_s(\xi)}{u_\infty} \approx \frac{u_\xi(\xi)}{u_\infty} = 1 \pm (A_0 \cot\frac{\varphi}{2} + A_1 \sin\varphi + A_2 \sin 2\varphi + \ldots) . \quad (12.92)$$

بما أن السرعة المحصلة لا تختلف إلا قليلاً جداً عن السرعة غير المشوشة فإن توزع الضغط يحسب بمساعدة معادلة برنولي الخطية (8.56)، بوضع $\Delta v_x = u_y$، ومقارنة (12.85) مع (12.86) ينتج معامل الضغط :

$$c_p = \mp 2\frac{u_y}{V_\infty} = \mp \frac{\gamma(\xi)}{V_\infty} \begin{cases} -S & \text{لطرف السحب} \\ +D & \text{لطرف الضغط} \end{cases} , \quad (12.93)$$

ويكون بالتالي الفرق بين قيمتي معامل الضغط على طرفي البروفيل :

$$\Delta c_p(\xi) = c_{pD} - c_{pS} = 2\frac{\gamma(\xi)}{V_\infty} . \quad (12.94)$$

لحساب قوة الرفع يمكن من جهة حساب (8.55) مكاملة $\Delta c_p(\xi)$ بالنسبة لـ $\xi$، كما يمكن من جهة أخرى حساب الجولان الكلي $\Gamma$ حول البروفيل بمكاملة توزع الجولان الموضعي $\gamma(x)$، حيث يكون :

$$\Gamma = \int_0^l \gamma(x)\,dx = l\int_0^1 \gamma(\xi)\,d\xi . \quad (12.95)$$

فإذا كان b عرض البروفيل تنتج قوة الرفع حسب قانون كوتا ـ يوكوفسكي (8.150) بالصيغة :

$$F_A = \rho V_\infty \Gamma b = \rho V_\infty A \int_0^1 \gamma(\xi)\,d\xi , \quad (12.96)$$

حيث $A = b\,l$ مساحة مسقط الجناح . وينتج معامل قوة الرفع :

$$c_A = \frac{F_A}{\frac{\rho}{2} V_\infty^2 A} = \frac{2}{V_\infty} \int_0^1 \gamma(\xi)\, d\xi \,. \qquad (12.97)$$

استكمالاً للقيم الهيدروديناميكية ، أو الايروديناميكية ، تلزم في نظرية الجناح الحامل ، بالاضافة لما تقدم ، معرفة **عزم الامالة** Tilting moment لتحديد نقطة تأثير قوة الرفع . فاذا حسبنا العزم بالنسبة للمحور المار من حافة البروفيل الامامية وأدخلنا **معامل العزم** Moment coefficient نجد بمساعدة معادلة **برنولي** واستخدام (12.94) :

$$c_M = \frac{M}{\frac{\rho}{2} V_\infty^2 b l^2} = \frac{-b \int_0^l (p_D - p_S)\, x\, dx}{\frac{\rho}{2} V_\infty^2 b l^2} = -\frac{2}{V_\infty} \int_0^1 \gamma(\xi)\, \xi\, d\xi =$$

$$= -\int_0^1 \Delta c_p(\xi)\, \xi\, d\xi \,. \qquad (12.98)$$

ويكون بعد نقطة تأثير قوة الرفع s عن الحافة الامامية محدداً بالعلاقة :

$$s/l = c_M/c_A \,. \qquad (12.99)$$

عندما نختار $\gamma(\xi)$ حسب (12.85) بالارتباط مع (12.65) ينتج من (12.95) باستخدام العلاقات المثلثية الجولان :

$$\Gamma = l \int_0^\pi \gamma(\varphi)\, \tfrac{1}{2} \sin\varphi\, d\varphi =$$

$$= 2 u_\infty l \int_0^\pi \left[ A_0 (1 + \cos\varphi) + \sum_{n=1}^{n} A_n \sin n\varphi \cdot \sin\varphi \right] d\varphi \,.$$

وحيث أن $\int_0^\pi \sin n\varphi \cdot \sin\varphi\, d\varphi = 0$ من أجل $n = 2, 3, \ldots$ يصبح :

$$\Gamma = u_\infty \, l \, \pi \left(A_0 + \frac{1}{2} A_1\right) \ . \qquad (12.100)$$

بذلك تنتج من (12.96) قوة الرفع :

$$F_A = \rho V_\infty \, u_\infty \, l \, b \, \pi \left(A_0 + \frac{1}{2} A_1\right) \ , \qquad (12.101)$$

وينتج من (12.97) ، وبسبب كون $u_\infty / V_\infty = \cos \alpha$ ( الشكل ١٢.١٦- b )، معامل قوة الرفع :

$$c_A = 2 \pi \left(A_0 + \frac{1}{2} A_1\right) \cos \alpha \ , \qquad (12.102)$$

الذي يصبح من أجل $\alpha = 0$ ، أو عندما نقسب $\gamma(\varphi)$ حسب (12.85) الى $V_\infty$ بدلاً من $u_\infty$ :

$$c_A = 2 \pi \left(A_0 + \frac{1}{2} A_1\right) \ . \qquad (12.102a)$$

من جهة أخرى وبملاحظة أن :

$$\gamma(\xi) \xi \, d\xi = \gamma(\varphi) \cdot \frac{1}{2} (1 - \cos \varphi) \cdot \frac{1}{2} \sin \varphi \, d\varphi = \frac{u_\infty}{2} \left[ A_0 \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=1}^{n} A_n \sin n \varphi \left(\sin \varphi - \frac{1}{2} \sin 2\varphi\right) \right] \ ,$$

ينتج معامل العزم من (12.98) بالصيغة :

$$c_M = - \frac{\pi}{2} \left(A_0 + A_1 - \frac{A_2}{2}\right) \cos \alpha \ , \qquad (12.103)$$

الذي يصبح من أجل $\alpha = 0$ ، أو عندما نقسب $\gamma(\varphi)$ الى $V_\infty$ بدلاً من $u_\infty$ :

$$c_M = -\frac{\pi}{2}\left(A_0 + A_1 - \frac{A_2}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}(A_1 - A_2) - \frac{1}{4}c_A \,. \quad (12.103\,a)$$

مما تقدم يتبين أن معامل قوة الرفع يتعلق فقط بمثلي الحد الاول والثاني ، $A_1, A_0$ ، ويتعلق معامل العزم بالاضافة اليهما بمثل الحد الثالث $A_2$ من سلسلة **غلاورت** . وعليه فإن هذه الحدود الثلاثة فقط تحدد القيم الهيدروديناميكية ( أو الايرودينامكية ) الإجمالية للبروفيل ، بينما ينحصر تأثير الحدود المتبقية من السلسلة على التوزع الموضعي للسرعة والضغط على محيط البروفيل .

لمنحنى قوة الرفع تتعلق من جهة بزاوية الورود $\alpha$ ومن جهة أخرى بانحناء البروفيل . وعليه لايكون عامة $c_A = 0$ عند $\alpha = 0$ . فاذا كانت $\alpha_0$ تمثل **زاوية قوة الرفع الصفرية** Zero lift angle ، أي التي تكون عندها $F_A$ معدومة ، فإن معامل قوة الرفع يخضع في مجال زوايا ورود متوسطة للعلاقة الخطية :

$$c_A = \frac{dc_A}{d\alpha}(\alpha - \alpha_0) \,, \quad (12.104)$$

حيث $dc_A/d\alpha$ **ميل أو تدرج معامل قوة الرفع** Lift slope . بالمقابل فإن عزم الإمالة يتألف أيضاً من جزء لا يتعلق بقوة الرفع ويسمى **العزم الصفري** Zero moment ومن جزء تربطه مع قوة الرفع ، وبالتالي مع زاوية الورود ، علاقة خطية . فاذا اعتبرنا $c_{M_0}$ **معامل العزم الصفري** يكون :

$$c_M = c_{M_0} + \frac{dc_M}{dc_A} c_A \,, \quad (12.105)$$

حيث $dc_M/dc_A$ **ميل أو تدرج معامل العزم** Moment slope .

لحساب $\alpha_0$ ، $c_{M_0}$ وعلاقتهما بشكل البروفيل يلزم أولاً حساب الأمثال $A_n$ في (12.102) و (12.103) . لهذا ندخل $v_y(\varphi)$ حسب (12.87) في شرط الجريان الحركي (12.81) فنجد :

$$\eta_s' = \frac{d\eta_s}{d\xi} = \alpha - A_0 + \sum_{n=1}^{n} A_n \cos n\varphi \ . \qquad (12.106)$$

فإذا كان $\eta_s$ معلوماً يكون $\eta_s'$ معلوماً أيضاً وبالتالي يمكن تحديد $A_n$ بمساعدة سلسلة فوريه وذلك بضرب طرفي (12.106) على التوالي بـ $\cos 3\varphi, \cos 2\varphi, \cos\varphi, 1$ وإجراء التكامل في المجال من 0 حتى $\pi$ حيث نجد ( انظر مثلاً [42] و [17] ) :

$$\left.\begin{aligned} A_0 &= \alpha - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{d\eta_s}{d\xi}\, d\varphi \quad , \\ A_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{d\eta_s}{d\xi} \cos n\varphi\, d\varphi \quad (n = 1, 2, 3, \dots n) \ . \end{aligned}\right\} \qquad (12.107)$$

ندخل الآن $A_1, A_0$ في (12.102 a) وبالاضافة إليهما $A_2$ في (12.103 a) فيصبح معامل قوة الرفع :

$$c_A = 2\pi\left[\alpha - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \eta_s'(\xi)\,(1 - \cos\varphi)\, d\varphi\right] \ , \qquad (12.108)$$

ومعامل العزم :

$$c_M = -\frac{1}{2}\int_0^{\pi} \eta_s'(\xi)[\cos\varphi - \cos 2\varphi]\, d\varphi - \frac{1}{4} c_A \ . \qquad (12.109)$$

بمقارنة هاتين العلاقتين مع (12.104) و (12.105) نجد العلاقات :

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \eta_s'(\xi)\,[1 - \cos\varphi]\, d\varphi \ , \qquad (12.110)$$

$$dc_A/d\alpha = 2\pi \ , \qquad (12.111)$$

$$c_{M_n} = -\frac{1}{2}\int_0^{\pi} \gamma_n'(\xi)\,(\cos\varphi - \cos 2\varphi)\,d\varphi \quad , \quad (12.112)$$

$$dc_M/dc_A = -\frac{1}{4} \, , \quad (12.113)$$

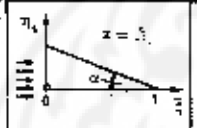
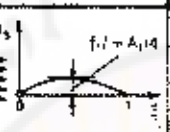
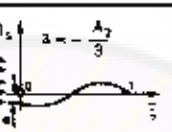
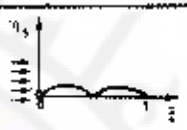
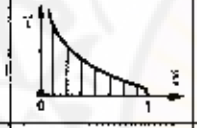
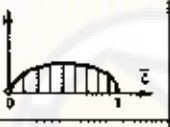
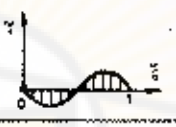
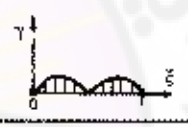
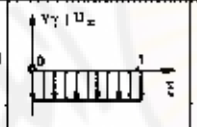
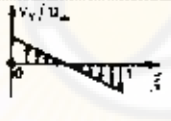
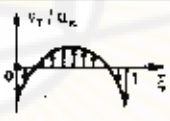
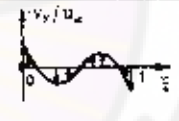
حيث يلزم لحل التكاملات الواردة أعلاه التعبير بمساعدة (12.65) عن $\gamma_n(\xi)$ بدلالة $\varphi$ .

في ضوء ما تقدم يمكن استخلاص النتيجة الهامة التالية المؤكدة بتجارب عديدة :

> بالنسبة للبروفيلات القليلة الانحناء والرقيقة جداً تقوم علاقة خطية بين معامل قوة الرفع وزاوية الورود ، وكذلك بين معامل العزم ومعامل قوة الرفع ، ويكون تدرج معامل قوة الرفع ثابتاً ويساوي $2\pi$ ولا يتعلق بشكل البروفيل ، وكذلك تدرج معامل العزم الذي يبلغ $-1/4$ .

الشكل ( ١٢.١٧ ) يتضمن نتائج حساب القيم الهيدروديناميكية للجريان حول بروفيلات رقيقة جداً ، مختلفة الاشكال ، تنتج كخطوط تيار صفرية عند انضمام التوزعات الاعصارية المبينة في الشكل مع جريان انسحابي . هذه النتائج يمكن اعتبارها حلاً للمسألة الاساسية الاولى ( $\gamma$ معلوم $\gamma_0$ مطلوب) أو الثانية ( $\gamma_0$ معلوم $\gamma$ مطلوب ) . وتعرف خاصة توزعات $\gamma$ الثلاثة الأولى ، المطابقة للحدود الثلاثة الاولى من سلسلة غلاورت (12.85) باسم التوزعات الناظمية لبرنباوم ـ اكرمان . ويعبر التوزع الأول عن الجريان حول صفيحة مستوية تميل بزاوية $\alpha$ على اتجاه الجريان ، والثاني عن الجريان حول صفيحة منحنية تحت زاوية ورود $\alpha = 0$ ، والثالث عن الجريان حول صفيحة بشكل حرف S وزاوية ورود معدومة أيضاً .

بموجب مبدأ التضام فإن معامل قوة الرفع لصفيحة منحنية تحت زاوية ورود $\alpha$ ينتج من جمع قيمتي $c_A$ في العمود الاول والثاني فيكون :

| | ① صفيحة مستوية | ② صفيحة منحنية | ③ صفيحة بشكل S | ④ صفيحة متموجة |
|---|---|---|---|---|
| شكل البروفيل في جريان منتظم بسرعة $u_\infty$ $\eta_s = \frac{y}{l}$ ; $\xi = \frac{x}{l}$ |   |   |   |   |
| $\eta_s =$ | $A_0 (1 - \xi)$ | $A_1 (\xi - \xi^2)$ | $A_2 \left(-\frac{8}{3}\xi^3 + 4\xi^2 - \xi - \frac{1}{3}\right)$ | $A_3(-1 + 8\xi^3 - 8\xi^4 + \xi)$ |
| توزع الجولان الموضعي المنسوب الاعتبارية $d\Gamma / d\xi = \tau$ |   |   |   |   |
| $\tau =$ | $2 A_0 u_\infty \sqrt{(1-\xi)/\xi}$ | $4 A_1 u_\infty \sqrt{\xi - \xi^2}$ | $8 A_2 u_\infty (2\xi - 1)\sqrt{\xi - \xi^2}$ | $8 A_3 u_\infty (2\xi - 1)^2 \sqrt{\xi - \xi^2}$ |
| توزع السرعة الثانوية المحرضة $v_T / u_\infty$ |   |   |   |   |
| $-v_T / u_\infty =$ | $A_0$ | $A_1 (2\xi - 1)$ | $A_2 (8\xi^2 - 8\xi + 1)$ | $A_3 (16\xi^3 - 24\xi^2 + 10\xi - 1)$ |
| معامل قوة الرفع $c_A =$ | $2\pi A_0$ | $\pi A_1$ | $0$ | $\frac{\pi}{2} A_3$ |
| معامل العزم حول 0 $-c_M =$ | $\frac{\pi}{2} A_1$ | $\frac{\pi}{2} A_1$ | $\frac{\pi}{4} A_1$ | $\frac{\pi}{4} A_3$ |
| $x(l - x_{SL}) / c_A =$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | $\infty$ | $\frac{1}{2}$ |

الشكل ١٢.١٧ :

حساب القيم الهيدروديناميكية بروفيلات عديمة السماكة ، ناتجة عن التوزعات النظامية الأربعة الأولى لبرنباوم — أكرمان (133) .

$$c_A = 2\pi\left(A_0 + \frac{A_1}{2}\right) = 2\pi\left(\alpha + 2\frac{f}{l}\right). \qquad (12.114)$$

العمود الأيمن من الشكل (١٧.١٢) يتضمن حساب الجريان حول صفيحة منموجة. فاذا جمعنا الآن كافة قيم الحقول الاقفية نحصل على الجريان حول بروفيل رقيق جداً اعتباطي يتحدد شكله بالتابع :

$$\gamma_{\Sigma} = \gamma_{\Sigma 1} + \gamma_{\Sigma 2} + \gamma_{\Sigma 3} + \gamma_{\Sigma 4} = \left(A_0 - \frac{A_1}{3}\right) + (-A_0 + A_1 - A_2 + A_3)\,\xi +$$

$$+(-A_1 + 4A_2 - 5A_3)\,\xi^2 + \left(-\frac{8}{3}A_2 + 8A_3\right)\xi^3 + (-4A_3)\,\xi^4 = a_0 + \sum_{n=1}^{n} a_n \xi^n. \qquad (12.115)$$

وبنفس الطريقة نحصل على القيم الهيدروديناميكية :

$$c_A = c_{A1} + c_{A2} + c_{A3} + c_{A4} \;;\quad c_M = c_{M1} + c_{M2} + c_{M3} + c_{M4} \;. \qquad (12.116)$$

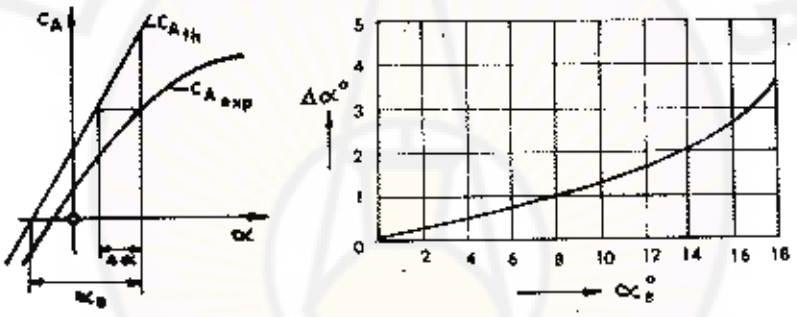
ونجد بسهولة توزع الضغط الذي يكون بموجب (12.93) متناسباً مع توزع الجولان الموضعي $\gamma(\xi)$ .

إن النتائج السابقة تشترط طبعاً سائلاً مثالياً . لذلك فإن قيم $c_A$ المقاسة عند زاوية ورود معينة ستكون بسبب تأثير اللزوجة أقل من القيم النظرية . وقد برهن **فالتس** [137] أن هذا الفرق يمكن مراعاته بإدخال زاوية تصحيح $\Delta\alpha$ ، الشكل(١٨.١٢)، التي تتعلق بزاوية الورود $\alpha_e$ المحسوبة اعتباراً من اتجاه قوة الرفع الصفرية النظرية، الشكل(١٩.١٢)، والتي لا تتأثر في الخطوة التقريبية الأولى بشكل البروفيل .

في الحالة العامة تكون قيمة الجولان الموضعي حسب (12.85) على أنف البروفيل لانهائية ، $\gamma(\xi=0) = \gamma(\varphi=0) \to \infty$ ، هذا يعني أن الجريان سيلتف حول الحافة الامامية للبروفيل (من الأعلى للأسفل أو بالعكس) بسرعة لانهائية نظرياً ، مما يسبب نشوء ضغط ناقص كبير جداً في منطقة الأنف ، ثم لابلث ان يتزايد الضغط ويصبح موجباً . نتيجة ذلك تتولد قوة **مص** Suction force

$F_{su}$ إتجاهها الى الامام نحو أنف البروفيل . إن نشوء هذه القوة يتوضح بسهولة في حالة الصفيحة المستوية التي تميل بزاوية $\alpha$ على اتجاه الجريان إذا حللنا قوة الرفع $F_A$ ، التي يجب ان تكون متعامدة مع اتجـــاه الجريان ، الى مركبة $F_p$ تمثل محصلة قوى الضغط ، التي يجب ان تكون في حالة سائل مثالي عمودية على الصفيحة ، وإلى مركبة $F_{su} = F_A \sin\alpha$ مماسية على الصفيحة وباتجاه الأنف . قيمـة $F_{su}$ لا تتعلق بسماكة الصفيحة ولا بنصف قطر الأنف ويبلـغ حسب [17] معامل قـوة المص $c_{su} = F_{su} / \frac{\rho}{2} V_\infty^2 bl$ باستخدام (12.85) و (12.87) :

$$c_{su} = \frac{-2}{V_\infty^2} \int_0^1 \gamma(\xi)\, v_\gamma(\xi)\, d\xi = \left(\frac{u_\infty}{V_\infty}\right)^2 2\pi A_0^2 \qquad (12.117)$$




الشكل ١٢.١٩: علاقة زاوية التصحيح $\Delta\alpha$ د الشكل ١٢.١٨ ؛ تعريف زاوية التصحيح بزاوية الورود $\alpha_0$ المحسوبة اعتباراً من اتجاه $\Delta\alpha$ د لمراعاة تأثير اللزوجة على قوة الرفع، قوة الرفع الصفرية النظرية ،حسب[137] .

لتجنب التفاف الجريان حول أنف الصفيحة يعمد الى حنيها واختيار زاوية الورود بحيث يكون الجريان مماساً على أنفها . وحيث ان الحد الاول فقط من سلسلة **غلاورت** يسبب حدوث السرعات اللانهائية عند $\xi = 0$ أو $\varphi = 0$ ، فإن **زاوية الورود المهمي** $\alpha^*$ تتحدد من (12.107) بوضع $A_0 = 0$ فتنتج :

$$\alpha = \alpha^* = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{dv_s}{d\xi}\, d\varphi \ , \qquad (12.118)$$

وينتج عندئذ معامل قوة الرفع من (12.102a) و (12.107) بالصيغة :

$$c_A\Big|_{\alpha=\alpha^*} = c_A^* = \pi A_1 = 2\int_0^{\pi} \frac{d\nu_s}{d\xi}\cos\varphi\, d\varphi \quad . \qquad (12.119)$$

في حالة الجريان الحقيقي لا تستطيع جزيئات السائل اللاصقة على الصفيحة في جوار الأنف مقاومة تزايد الضغط فتنفصم وتشكل ما يعرف باسم **اعصار الأنف** الذي يخفف من حدة الحافة الامامية للصفيحة ويجعله شبيها بالأنف المدور لبروفيل عادي ، وبالتالي تبقى السرعة على الانف محدودة .

## ٧.٢.١٢ الجريان بزاوية ورود حول بروفيل ذي معامل صغير السماكة والانحناء

بعد دراسة الجريان المتناظر ( بدون زاوية ورود ) حول بروفيل متناظر ذي سماكة صغيرة ، والجريان بزاوية ورود حول بروفيل ذي انحناء صغير وبدون سماكة ، يمكننا الآن دراسة الجريان بزاوية ورود حول بروفيل صغير السماكة والانحناء كتضام للحالتين . مثل هذا البروفيل يمكن اعتباره هندسياً مؤلفاً من توزع انحناء $y_s(x)$ وتوزع سماكة $y_d(x)$ ، الشكل (٢٠.١٢) . فاذا فرضنا $y_S(x)$ الإحداثي الشاقولي لطرف السحب ( الطرف العلوي ) ، $y_D(x)$ الاحداثي الشاقولي لطرف الضغط ( الطرف السفلي ) فيكون :

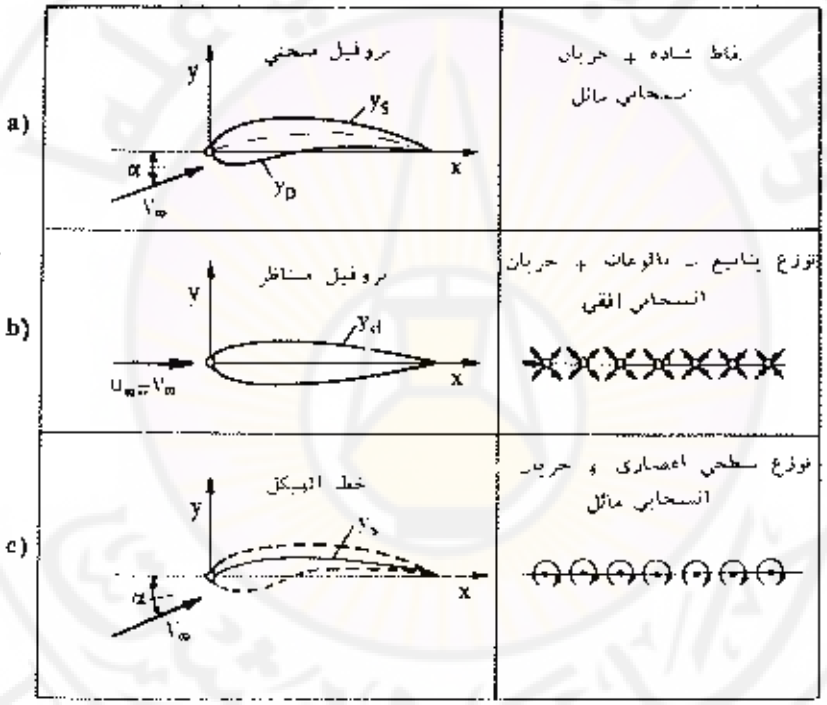
$$y_S(x) = y_s(x) + y_d(x);\ y_D(x) = y_s(x) - y_d(x) \quad , \qquad (12.120)$$

وينتج بالتالي بالنسبة لبروفيل شكله معروف :

$$y_s(x) = \frac{1}{2}[y_S(x) + y_D(x)];\ y_d(x) = \frac{1}{2}[y_S(x) - y_D(x)], \qquad (12.121)$$

أو بشكل لا بعدي بوضع $\xi = x/l$ , $\eta = y/l$ واستخدام سلسلة فورييه مثلثية حسب ديفلس [134] :

$$\left.\begin{aligned} \gamma_s(\xi) &= \frac{1}{2}\left[\gamma_S(\xi) + \gamma_D(\xi)\right] = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{n} a_n \cos n\varphi \\ \gamma_a(\xi) &= \frac{1}{2}\left[\gamma_S(\xi) - \gamma_D(\xi)\right] = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{n} b_n \sin n\varphi \end{aligned}\right\} \quad (12.122)$$




الشكل ٢٠٠١٢ : الجريان بزاوية ورود α حول بروفيل محدود السماكة والانحناء ، (a) يكافيء الجريان الناتج عن تضام توزع ينابيع - بالوعات مع جريان انسحابي بدون زاوية ورود ($\alpha = 0$) ، (b) ، وتوزع اعصاري مع جريان انسحابي بزاوية ورود α ، (c) .

إن توزع السرعة الاجمالية على محيط البروفيل ينتج كمجموع لتوزع السرعة على خط الهيكل ، وعلى البروفيل المتناظر بالاضافة لتوزع سرعة إضافية $\Delta V_a$

ناتجة عن وجود البروفيل المتناظر في جريان بزاوية ورود $\alpha = 0$ . هـذا الجزء الأخير يعطى حسب ديغلس بالعلاقة :

$$\frac{\Delta V_B}{V_\infty} = \pm \frac{\alpha}{\varkappa_{Bd}(\xi)} \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{1-\xi}{\xi}} \int_0^1 \left( \frac{d\eta_d}{d\xi'} - \frac{\eta_d}{2\xi'(1-\xi')} \right) \frac{d\xi'}{\xi - \xi'} \quad . \quad (12.123)$$

هذه السرعة الاضافية يمكن اعتبارها حسب تروكنيووت ( انظر [17] ) ناتجة عن تأثير انحناء إضافي $\Delta\eta_s$ ينضام الى الانحناء الهندسي $\eta_s$ وزاوية ورود إضافية $\Delta\alpha$ تنضام الى زاوية الورود الهندسية $\alpha$ حيث يكون :

$$\left.\begin{aligned} \Delta\eta_s &= \alpha \left[ \sqrt{\frac{1-\xi}{\xi}}\, \eta_d + 2(1-\xi) \left( \frac{d\eta_d}{d\varphi} \right)_{\xi=0} \right] , \\ \Delta\alpha &= -2\alpha \left( \frac{d\eta_d}{d\varphi} \right)_{\xi=0} \quad . \end{aligned}\right\} \quad (12.124)$$

نفرض الآن أن انحناء البروفيل قليل وسماكته معقولة بحيث يمكن توزيع النقاط الشاذة على الوتر وأن زاوية الورود صغيرة نسبياً . فاذا كانت $V_c$ السرعة على الوتر ، فتكون السرعة على محيط البروفيل منسوبة للسرعة غير المشوشة $V_\infty$ :

$$\frac{V_B(\xi)}{V_\infty} = \frac{1}{\varkappa_{Bd}(\xi)} \frac{V_c(\xi)}{V_\infty} = \frac{1}{\varkappa_{Bd} V_\infty} \left[ V_{cq} \pm V_{cv} \pm \Delta V_B \right] .$$

وتحسب حسب [17] من العلاقة :

$$\frac{V_B(\xi)}{V_\infty} = \frac{1}{\varkappa_{Bd}(\xi)} \left\{ 1 + \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{d\eta_d}{d\xi'} \frac{d\xi'}{\xi - \xi'} \pm \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{1-\xi}{\xi}} \int_0^1 \frac{d\eta_s}{d\xi'} \sqrt{\frac{\xi'}{1-\xi'}} \frac{d\xi'}{\xi - \xi'} \pm \right.$$

$$\left. \pm \alpha \sqrt{\frac{1-\xi}{\xi}} \left[ 1 + \frac{1}{\pi} \int_0^1 \left( \frac{d\eta_d}{d\xi'} - \frac{\eta_d}{2\xi'(1-\xi')} \right) \frac{d\xi'}{\xi - \xi'} \right] \right\} , \quad (12.125)$$

حيث يعبر التكامل الاول عن **تاثير الازاحة** Displacement effect أو السماكة للبروفيل المتناظر ، والتكامل الثاني عن **تأثير الانحناء** ، والحد الثالث المتضمن $\alpha$ عن تأثير زاوية الورود ، وتخص إشارة ( + ) طرف السحب وإشارة ( − ) طرف الضغط .

لحل المسألة الاساسية الثانية طور **شلشتنغ** [104] على الاسس السابقة طريقة عملية لحساب توزع السرعة والضغط على محيط بروفيل جناح حامل قليل السماكة والانحناء في جريان مثالي تحت زاوية ورود صغيرة ، وذلك في حالة **الجناح الفودي** ، والجناح ضمن **سلسلة** ( أو **شبك** ) Cascade . وسنورد هنا الخطوات العملية لهذه الطريقة في حالة الجناح الفردي .

يفرض ان الشكل الهندسي للبروفيل معطى تحليلياً أو بياناً بموجب (12.120) . بذلك يتحدد شكلا خط الهيكل (توزع الإنحناء) والبروفيل المتناظر (توزع السماكة) حسب (12.121) أو (12.122) ، وبعدئذ يمكن تحديد $\gamma'_s = dy_s/d\xi$ أو $\gamma'_d = dy_d/d\xi$ في كل نقطة اختيارية .

لحساب القيم الهيدروديناميكية وتوزع الضغط والسرعة على محيط البروفيل يلزم اجراء الخطوات الحسابية التالية :

١ ـ استخراج مجموعتي المعادلات الخطية لتحديد توزع النقاط الشاذة وحقل السرعة المحرضة . لهذا نختار توزع البنابيع ـ البالوعات حسب (12.67) وتوزع الاعاصير حسب (12.83) ، ويكتفى ، كخطوة تقريبية جيدة ، بالحدود الثلاثة الأولى فقط من السلسلتين. بذلك يتحدد حقل السرعة المحرضة من المعادلات (12.69) و(12.70) و(12.86) ، (12.87) بالصيغ :

$$\left.\begin{aligned} u_q(\varphi) &= v_\infty \{B_0(1+2\cos\varphi) - B_1\cos 2\varphi - B_2\cos 3\varphi\}, \\ v_q(\varphi) &= +v_\infty \{B_0\cot\frac{\varphi}{2} + 2\sin\varphi) + B_1\sin 2\varphi + B_2\sin 3\varphi\}, \\ u_\gamma(\varphi) &= -v_\infty \{A_0\cot\frac{\varphi}{2} + A_1\sin\varphi + A_2\sin 2\varphi\}, \\ v_\gamma(\varphi) &= v_\infty \{-A_0 + A_1\cos\varphi + A_2\cos 2\varphi\}, \end{aligned}\right\} \quad (12.126)$$

ويأخذ شرط الجريان الحركي لتوزع السماكة (12.61) الصيغة :

$$B_0(\cot\frac{\varphi}{2} - 2\sin\varphi) + B_2\sin 2\varphi + B_3\sin 3\varphi = y'_0(x)\,, \qquad (12.127)$$

وشرط الجريان الحركي لتوزع الاخناء (12.81) الصيغة :

$$-A_0 + A_1\cos\varphi + A_2\cos 2\varphi = -K + y'_k(x)\,. \qquad (12.128)$$

حيث يكون بوجب الشكل (٢٠٠١٢) معامل زاوية الورود :

$$K = v_\infty/u_\infty = \tan\alpha\,. \qquad (12.129)$$

ان حساب التوابع المثلثية بمساعدة (12.65) يعطي قيماً عامة لا تتعلق بشكل البروفيل ، فمثلا من أجل :

$$\xi = x/l = 7{,}12 \Rightarrow \cot\frac{\varphi}{2} = 0{,}8451;\ \sin\varphi = 0{,}0860;\ \sin 2\varphi = -0{,}3287;$$
$$\sin 3\varphi = -0{,}3705;\ \cos\varphi = -0{,}1667;\ \cos 2\varphi = -0{,}9444;\ \cos 3\varphi = 0{,}4815;$$
$$1 + \cos 2\varphi = 0{,}0607;\ \cot\frac{\varphi}{2} - 2\sin\varphi = -1{,}1269\,.$$

بتطبيق (12.127), (12.128) على ثلاث نقاط اختبارية مواقعها محددة حسب (12.76) نحصل على مجموعتي معادلات كل منها مؤلفة من ثلاث معادلات خطية لحساب المجاهيل $B_3, B_2, B_0$ و $A_2, A_1, A_0$ لأن قيم $y'^{(n)}_{sp}(x) = \gamma'^{(n)}_{sp}(\xi)$ و $y'^{(n)}_{dp}(x) = \gamma'^{(n)}_{dp}(\xi)$ معلومة . ولكن ينصح عند إجراء دراسة منظمة (Systematical) وخاصة من اجل تحديد تأثير زاوية الورود على القيم الهيدروديناميكية ، شطر الثوابت $A_p$ الى قسم لايتعلق بزاوية الورود ( الدليل الثاني 0 ) وقسم يتعلق بزاوية الورود ( الدليل الثاني $\alpha$ ) ، حيث نضع :

$$A_0 = A_{00} + K\,A_{0\alpha};\ A_1 = A_{10} + K\,A_{1\alpha};\ \ldots \qquad (12.130)$$

بذلك نحصل في الحقيقة على ثلاث مجموعات من المعادلات الخطية من اجل $B_{n0}$ ، $A_{n0}$ ، $A_{n\alpha}$ . ونحصل بالنسبة للمجموعة الاخيرة على حل عام بسيط بالصيغة :

$$A_{0\alpha} = 1;\ A_{1\alpha} = A_{2\alpha} = \ldots = 0 \quad \text{من أجل} \quad n \geq 1\,. \qquad (12.131)$$

بذلك يكون حسب (12.130) :

$$A_0 = A_{00} + K;\ A_1 = A_{10};\ A_2 = A_{20};\ \ldots \qquad (12.132)$$

إذن يكفي لتحديد الأمثال $A_n$ ، $B_n$ حل مجموعتي المعادلات الخطية التالية :

$$\frac{x_1}{l}=\frac{3}{12}\ \Rightarrow\ 0{,}8660\,B_2=y'_{d_1}\ ;$$

$$-A_{00}+0{,}5\,A_{10}-0{,}5\,A_{20}=y'_{s_1}\ ,$$

$$\frac{x_2}{l}=\frac{7}{12}\ \Rightarrow\ -1{,}1269\,B_0-0{,}3287\,B_2-0{,}8765\,B_3=y'_{d_2}\ ; \qquad (12.133)$$

$$-A_{00}-0{,}1667\,A_{10}-0{,}9444\,A_{20}=y'_{s_2}\ ,$$

$$\frac{x_3}{l}=\frac{11}{12}\ \Rightarrow\ -0{,}8080\,B_0-0{,}9213\,B_2+0{,}9827\,B_3=y'_{d_3}\ ;$$

$$-A_{00}-0{,}8333\,A_{10}+0{,}3889\,A_{20}=y'_{s_3}\ .$$

٢ – حساب الامثال $B_m$ و $A_{m0}$ . بحل مجموعة المعادلات الاولى من (12.133) نحصل على $B_3,\ B_2,\ B_0$ ، وبحل المجموعة الثانية نجد $A_{20},\ A_{10},\ A_{00}$ ، وبالتالي بمساعدة (12.132) $A_3,\ A_1,\ A_0$ . بذلك يصبح توزع النقاط الشاذة وحقل السرعة المعرضة معدومين تماماً .

٣ – حساب القيم الهيدروديناميكية (أو الايرودينامية) اللابعدية. إن الجولان الكلي $\Gamma$ لا يتغير بالمقارنة مع البروفيل ذي الساكة المعدومة . وبالتالي فهو يحسب من (12.100). وتنتج قوة الرفع من (12.101). وينتج معامل قوة الرفع من العلاقة (12.102) التي يمكن كتابتها بالصيغة :

$$c_A=2\pi\left[\left(A_{00}+\frac{1}{2}\,A_{10}\right)\cos\alpha+\sin\alpha\right]\ , \qquad (12.134)$$

وبالتالي يكون :

$$\left(\frac{dc_A}{d\bar{x}}\right)_{\bar{x}=0}=2\pi\ , \qquad (12.135)$$

حيث تصح هذه القيمة بدقة في حالة الصفيحة المستوية فقط .

ان توزع السرعة $V_R$ على محيط البروفيل يحسب من من توزع السرعة على وتره $V_c$. ونجد باستخدام (12.126) و (12.130) .

$$\frac{V_R(x)}{v_\infty}=\frac{1}{x_{Rl}}\,\frac{V_c(x)}{v_\infty}=\frac{1}{x_{Rl}}\,\frac{v_\infty+v_{ql}+v_\gamma}{v_\infty}=\frac{1}{x_{Rl}}\left\{\left[1+B_0(1+2\cos\varphi)-\right.\right.$$

$$\left.-B_2\cos 2\varphi-B_3\cos 3\varphi\right]+\left(A_{00}\cot\frac{\varphi}{2}+A_{10}\sin\varphi+\right.$$

$$\left.\left.+A_{20}\sin 2\varphi\right)+K\cot\frac{\varphi}{2}\right\}\ , \qquad (12.136)$$

حيث تعني $(+)$ طرف السحب و $(-)$ طرف الضغط . في هذه العلاقة يعبر الحد الاول

المحصور بين القوسين الزاويين عن توزع السرعة للبروفيل المتناظر في جريان انسحابي أفقي بسرعة $u_\infty$ ($x=0$) ، ويعبر الحد الثـــاني المحصور بين القوسين الدائريين عن توزع السرعة الناتج عن الانحناء عند زاوية ورود معدومة ، بينما يعبر الحد الثالث عن تأثير زاوية الورود $x = \arctan k$ وهو نفس الحد في حالة الصفيحة المستوية التي يمر عليها جريان انسحابي بزاوية $x$ .

زاوية الورود المؤثر تتحدد من أجل $A_0 = 0$ ، وبالتالي ينتج من (12,136) و (12,134) :

$$\tan x^* = -A_{01} \quad . \qquad (12,137)$$

في حالة البروفيل ذي السماكة المحدودة تبقى السرعة على أنف البروفيل ($x=0$ ، $y=0$) محدودة وتكون :

$$\left(\frac{V_B}{U_\infty}\right)_{x=0} = A_0\sqrt{2\,r_N} \quad , \qquad (12,138)$$

حيث $r_N$ نصف قطر دائرة أنف البروفيل

أخيراً نحصل على توزع معامل الضغط على محيط البروفيل من معادلة برنولي :

$$\frac{p_B - p_\infty}{\frac{\rho}{2}V_\infty^2} = 1 - \left(\frac{V_B}{V_\infty}\right)^2 = 1 - \left(\frac{V_B}{U_\infty}\cdot\cos\varepsilon\right)^2 \quad . \qquad (12,139)$$

في [104] حسبت القيم الهيدروديناميكية بموجب هذه الطريقة التقريبية وقورنت النتائج مع نتائج محسوبة بموجب طرق دقيقة رياضياً ( طريقة التمثيل المطابق ) ، كانت النتيجة مرضية تماماً .

لحل المسألة الاساسية الاولى نكتفي بالاشارة الى أن **شولتس** [103] قـد طور طريقة عملية على أسس مماثلة لأسس طريقة شليشتنغ ، تسمح بتحديد شكل البروفيل القليل السماكة والانحناء لجناح حامل فردي أو ضمن شبك . وهنـاك طرق عملية عديدة أخرى لحل المسائل الاساسية لنظرية الجناح الحامل على أساس طريقة النقـاط الشاذة ، نجدها في المراجع والابحاث المختصـة التي جاء ذكـر القليل منها أعلاه .

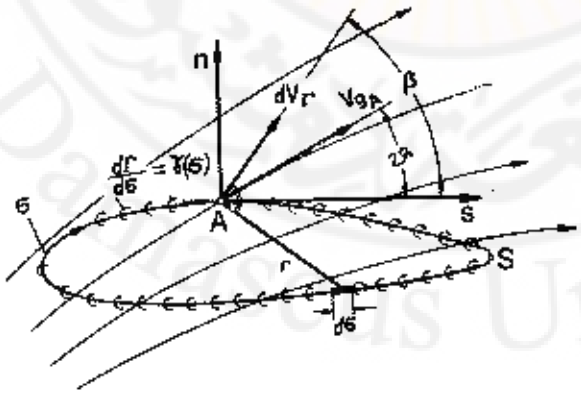
## ٨٠٢٠١٢ الجريان حول بروفيل جناح حامل كبير السماكة والانحناء

في حالات عملية تخرج في الحقيقة عن نطاق نظرية الجناح الحامل الفردي (الطيران!) ولكنها ذات أهمية كبيرة بالنسبة لنظرية شبك البروفيلات، وبخاصة في مجال بناء العنفات البخارية، تهمنا دراسة الجريان حول بروفيلات ذات انحناء وسماكة كبيرين. عندئذ لا يجوز، كما فعلنا في الفقرة السابقة، التعويض عن تأثير الجناح الحامل بتوزع مناسب من النقاط الشاذة على وتر البروفيل. إضافة لذلك فإن زاوية الورود تكون عادة كبيرة بحيث لا يمكن تعويضها بظلها.

لنعتبر الحالة العامة لبروفيل ذي سماكة وانحناء كبيرين واقع في جريان عام (دليل ∞) سرعته تتغير قيمة واتجاهاً من مكان لآخر. في هذه الحالة يمكن البرهان، [25][135]، أن حساب الجريان حول البروفيل يمكن إذا عوضنا عنه بتوزع مناسب من الاعاصير الموزعة على محيطه، الشكل (٢١٠١٢).

ليكن σ الاحداثي المنحني المنطبق على محيط البروفيل. عندئذ تكون الشدة الاعصارية الموضعية:

$$\gamma(\sigma) = \frac{dl'}{d\sigma} = f(\sigma) \qquad . \qquad (12.140)$$




الشكل ٢١٠١٢، التعويض عن تأثير بروفيل ذي سماكة وانحناء كبيرين على جريان اساسي عام بتوزع مستمر من الاعاصير الموزعة على محيطه.

إن حقل الجريان الكلي المؤلف من تضام حقل الجريان الاساسي وحقل التوزع الاعصاري يجب ان يحقق شرط الجريان الحركي وشرط **كوتا** للانسياب الناعم الذي يقضي بأن تكون الحافة الخلفية نقطة ركود S تنعدم فيها السرعة المحصلة . فاذا اعتبرنا نقطة ما A من محيط البروفيل ، وكان $\theta$ اتجاه المماس ، $n$ اتجاه الناظم في هذه النقطة ، فيلزم بموجب شرط الجريان الحركي أن تكون المركبة الناظمية للسرعة $V_n$ معدومة لكي تكون السرعة المحصلة للجريان الكلي مماسية على محيط البروفيل الذي يمثل عندئذ خطاً للتيار . وعليه نحصل باستخدام رموز الشكل ( ٢١٠١٢ ) والاعتماد على قانون **بيو ـ سافار** وبالنسبة لواحدة عرض البروفيل على المعادلتين التكاملتين التاليتين :

$$V_n^{(\sigma)} = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\sin \beta \; \gamma(\sigma) \, d\sigma}{r} + V_{\infty A} \sin \theta = 0 \; , \quad (12.141)$$

$$V_s^{(\sigma)} = V = \frac{1}{2} \gamma(\sigma)_A + \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\cos \beta \; \gamma(\sigma) \, d\sigma}{r} + V_{\infty A} \cos \theta \; . \quad (12.142)$$

في الطرف الايمن للمعادلة الاولى يمثل الحد الاول محصلة المركبات الناظمية للسرعات المحرضة في النقطة A من كامل التوزع الاعصاري ، ويمثل الحد الثاني المركبة الناظمية لسرعة الجريان الاساسي في A . وفي الطرف الايمن للمعادلة الثانية يمثل الحد الاول السرعة المماسية التي يحرضها الخيط الاعصاري المار من A ، ويمثل الحد الثاني محصلة السرعات المماسية المحرضة في A من باقي الخيوط الاعصارية ، بينما يمثل الحد الثالث المركبة المماسية لسرعة الجريان الاساسي في A . في نقطة الركود الخلفية S تكون :

$$V_s \; (\sigma = S) = 0 \; .$$

لقد أوضح **شولتس** [25] الحل المبدئي للمسألة الاساسية الاولى حيث أدخل لحساب حقل السرعة المحرضة من الاعاصير ما أسماه **توابع تأثير عـــامة**

Universal influence function ، التي تعبر عن التأثير الناتج عن توزيع الاعاصير على محيط البروفيل بدلاً من الوتر ، وهي تتعلق فقط بالمسافة النسبية بين النقطة المعتبرة والعنصر الاعصاري في النقطة المتحولة .

لحل المسألة الاساسية الثانية يلزم معرفة $\gamma(\sigma)$ . فاذا جزأنا ، حسب [7]، محيط البروفيل إلى n قطعة بطول $\Delta\sigma$ واعتبرنا التوزع الاعصاري في كل منها ثابتاً والجولان المرضعي $\Gamma_n = \gamma(\sigma).\Delta\sigma$ مركزاً في منتصف كل قطعة ، فإن التكاملين الواردين في العلاقتين (12.141) و(12.142) يمكن تحويلها الى مجموعين:

$$\sum^{n} \frac{\sin \beta_n \Gamma_n}{2\pi r_n} + V_{GA} \sin \vartheta = 0 \qquad (12.143)$$

$$\frac{1}{2}\frac{\Gamma_{nA}}{\Delta\sigma} + \sum^{n} \frac{\cos \beta_n \Gamma_n}{2\pi r_n} + V_{GA} \cos \vartheta = V_s \qquad (12.144)$$

نطبق المعادلة (12.143) على $(n-1)$ نقطة اختبارية من محيط البروفيل ، والمعادلة (12.144) على نقطة الركود الخلفية S حيث $V_s = 0$ ، فنحصل على مجموعة معادلات مؤلفة من n معادلة خطية لحساب المجاهيل $\Gamma_n$ . لحلها يلزم في الحالة العملية استخدام الحاسبات الالكترونية التي توفر ، بالمقارنة مع طرق الحساب العادية ، الجهد الحسابي الكبير .

بمعرفة $\Gamma_n$ يمكن حساب الجولان الكلي $\Gamma$ ومنه ، بموجب قانون كوتا ـ يوكوفسكي (8.150) ، قوة الرفع $F_A$ ومعامل قوة الرفع $c_A$ . ويتحدد من (12.144) توزع السرعة $V_s$ على طول محيط البروفيل وبمساعدة معادلة برنولي توزع الضغط ومعامل الضغط $c_p$ .

## ٩.٢.١٢ الجريان عبر شبك بروفيلات مستقيم

تعرضنا في الفقرة (٦.٢.٥.٨) في سياق استخراج قانون كوتا ـ يوكوفسكي

لحساب قوة الرفع الى أهمية دراسة الجريان عبر شبك بروفيلات مستقيم باعتبار أنه يمثل العنصر الاساسي لنقل القدرة في كل آلة جريان محورية .

إن الدراسات المنظمة العديدة للجريان عبر شبك بروفيلات تهدف إلى تحديد شبك البروفيلات الذي يكون عند ظروف تشغيل مطلوبة ذا مردود أفضلي . هذا الهدف يتحقق بإيجاد العلاقة بين المتحولات الهندسية والايروديناميكية (أو الهيدروديناميكية) للشبك وذلك من خلال الخطوتين التاليتين :

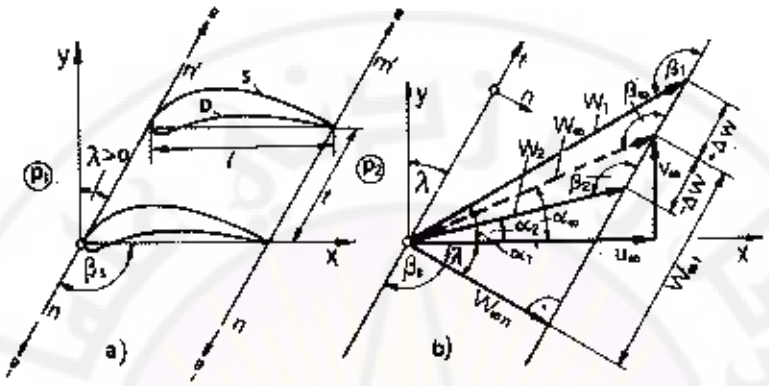
١ - حساب القيم الايروديناميكية للجريان المثالي الكموني بما فيها توزع الضغط حول البروفيل في الشبك .

٢ - حساب القيم المميزة للطبقة الحدية حول البروفيل من أجل تحديد مفاقيد الجريان .

إن المتحولات الهندسية لشبك بروفيلات مستو حسب الشكل (٢٢،١٢) هي: بروفيل الربشة المحدد بوجب (12.120)، نسبة التقسيم $t/l$ ، زاوية البروفيل $\beta_s$ أو **زاوية تعاقب أو تدريج الشبك** $\lambda = \beta_s + \frac{\pi}{2}$ . وتضم المتحولات الايروديناميكية : سرعة دخول الجريان الى الشبك $W_1$ ، والخروج منه $W_2$ ، وذلك على مسافة كافية قبل وبعد الشبك ، زاوية الدخول $\beta_1$ والخروج $\beta_2$ ، فرق الضغط الستاتيكي $\Delta p = p_2 - p_1$ ، توزع الضغط حول البروفيل $p(x)$ والخسارة في قدرة الجريان التي تمثل في حالة سائل ثابت الحجم الفرق بين الضغط الكلي ما قبل وما بعد الشبك $\Delta p_{tot} = p_{tot_1} - p_{tot_2}$ .

في نظرية شبك البروفيلات ميز ، كما في نظرية الجناح الحامل ( الفردي ) ، ثلاث مسائل أساسية للجريان . الأولى والثالثة منها مسألتان تصميميتان يطلب فيها تصميم شبك البروفيلات ، أي إيجاد متحولاته الهندسية ، بحيث يؤمن تحت ظروف تشغيل معينة أفضل القيم الأيرو - أو الهيدروديناميكية . بينما يطلب في المسألة الاساسية الثانية تحديد المتحولات الايروديناميكية لشبك بروفيلات

متحولاته الهندسية معلومة ، فهي إذن مسألة إعادة حساب وتأكد وتطرح خاصة عند إجراء دراسات منظمة يتم فيها تغيير المتحولات الهندسية بهدف إيجاد شبك البروفيلات ذي المواصفات الايروديناميكية الافضلية .




الشكل ٢٢.١٢ : المتحولات الهندسية والايروديناميكية لشبك بروفيلات مستوية. a) الشبك ، b) مخطط السرع . في حالة شبك مسرّع (عنفة) تكون زاوية التعاقب $\lambda<0$ ، وفي حالة شبك كابح (مضخة) $\lambda>0$ .

إن حساب الجريان الكموني عبر شبك بروفيلات على أساس طريقة النقاط الشاذة وبالنسبة للمسائل الاساسية الثلاثة يعتمد أساساً على حساب الجريان حول جناح فردي مع أخذ تأثير الشبك بعين الاعتبار. هذا التأثير ينتج بالدرجة الأولى من واقع أن السرعة المحرضة في نقطة من محيط أحد بروفيلات الشبك تتألف من السرعة التي تحرضها النقاط الشاذة على محيط أو وتر البروفيل المعتبر ، مضافاً اليها السرعة المحرضة من النقاط الشاذة التي تعوض عن تأثير باقي البروفيلات. لهذا السبب لايمكن ، كما في حالة البروفيل الفردي ، اعتبار مركبتي السرعة المحرضة $v, u$ صغيرة جداً بالمقارنة مع المركبة الافقية $u_\infty$ للسرعة غير المشوشة $W_\infty = \frac{W_1 + W_2}{2}$ حسب (8.145). كما ان المركبة الشاقولية $v_\infty$ لاتكون عادة صغيرة بالمقارنة مع $u_\infty$ .

في حالة شبك يتألف من بروفيلات ذات سماكة وانحناء قليلين كالتي تتألف

منها خاصة ريش الضواغط، تستخدم طريقة عملية طورها شولتس [103] لحل المسألة الاساسية الأولى ، وأخرى طورها شلشتنغ [104] لحل المسألة الثانية ، التي سنورد فيما يلي أهم نتائجها. وقد بنيت كلتا الطريقتين على أساس نتائج نظرية الجناح الحامل الفردي التي عالجناها في (٧.٢.١٢) .

نفرض أن بروفيل الشبك معلوم بموجب (12.120) ، ولتكن أيضاً زاوية تدريج الشبك $\lambda$ ونسبة تقسيمه $t/l$ معطاة. إن تأثير الشبك على الجريان الانسحابي ( غير المشوش ) يؤدي عادة لتغيير اتجاه قيمة السرعة من $W_1$ قبل الشبك إلى $W_2$ بعد الشبك، وذلك نتيجة تحريض سرعة إضافية موازية لجبهة الشبك قيمتها $w \pm \Delta w$ بحيث تكون :

$$W_1 = W_\infty + \Delta w \; ; \quad W_2 = W_\infty - \Delta w \; . \qquad (12.145)$$

وتقوم بين $\Delta w$ والجولان حول البروفيل العلاقة :

$$\Delta w = \Gamma / 2\, t \; , \qquad (12.146)$$

التي يمكن بسهولة استخراجها من (8.146) باستخدام رموز الشكل (b-٢٢.١٢) .

نستعيض عن تأثير كل بروفيل في الشبك بتوزع ينابيع ـ بالوعات $q(x)$ وتوزع أعاصير $\gamma(x)$ مزروعة على الوتر . هذه النقاط الشاذة تحرض حقلاً للسرعة يحسب بالنسبة لنقاط وتر البروفيل حسب [103] من العلاقة :

$$w(x,0) = u(x) - i\, v(x) =$$

$$= \frac{e^{i\lambda}}{2t} \int_{x'=0}^{t} [\, q(x') + i\, \gamma(x') \,] \cot h \left( \pi \frac{x - x'}{t}\, e^{i\lambda} \right) dx', \quad (12.147)$$

حيث $i = \sqrt{-1}$ (راجع ١٣) ، $x'$ نقطة متحولة ، $x$ نقطة اختبارية محددة .

في الحالة العامة لشبك مدرّج ($\lambda \neq 0$) لا يمكن حساب السرعة المخرضة w بطرق تحليلية . لذا يجب استخدام الطرق العددية لحل التكامل في (12.147) على أساس أن نأخذ قيمته الكوشية الأساسية . ولكي يتم ذلك بسهولة نسبياً يقترح شلشتنغ ، من أجل التخلص من النقطة الشاذة للتكامل عندما $x = x'$ ، شطر السرعة الكلية المخرضة إلى قسم ناتج عن البروفيل الفردي المعتبر ( دليل E ) وقسم ناتج عن بقية بروفيلات الشبك ، التي سنسميها الشبك الباقي ( دليل G ). وعليه نضع :

$$w = w_E + w_G \Rightarrow u = u_E + u_G \; ; \; v = v_E + v_G \tag{12.148}$$

وبتمييز السرعة المخرضة من الأعاصير بالدليل $\gamma$ والمخرضة من الينابيع ـ البالوعات بالدليل q تصبح :

$$\left.\begin{aligned} u_E &= u_{qE} + u_{\gamma E} \; ; \; u_G = u_{qG} + u_{\gamma G} \\ v_E &= v_{qE} + v_{\gamma E} \; ; \; v_G = v_{qG} + v_{G\gamma} \end{aligned}\right\} \tag{12.149}$$

نختار من أجل $q(x)$ ، $\gamma(x)$ سلسلتي غلاورت (12.67) ، (12.85) ، مع اعتبار $u_\infty$ مركبة $W_\infty$ ونكتفي في حالة الشبك أيضاً بالحدود الثلاثة الاولى منها ، عندئذ تتحدد مركبتا السرعة المخرضة $u_E$ ، $v_E$ بموجب (12.126) . أما المركبتان $u_G$ ، $v_G$ المخرضتان من الشبك الباقي فتنتجان بدلالة تابع تأثير عام نظامي ، أي لا يحتوي أية نقطة شاذة ، مما يسهل الحساب العددي لحقل السرعة $w_G$ . على هذا الأساس تنتج العلاقات التالية المماثلة لـ (12.126) :

$$\left.\begin{aligned} u_{\gamma G} &= u_\infty [A_0\, g_{\gamma_0} + A_1\, g_{\gamma_1} + A_2\, g_{\gamma_2}] \, , \\ v_{\gamma G} &= u_\infty [A_0\, f_{\gamma_0} + A_1\, f_{\gamma_1} + A_2\, f_{\gamma_2}] \, , \\ u_{qG} &= u_\infty [B_0\, g_{q_0} + B_2\, g_{q_2} + B_3\, g_{q_3}] \, , \\ v_{qG} &= u_\infty [B_0\, f_{q_0} + B_2\, f_{q_2} + B_3\, f_{q_3}] \, , \end{aligned}\right\} \tag{12.150}$$

حيث تعني $g_{\gamma n}$ ، $g_{qm}$ ( $n = 0,1,2$ ; $m = 0,2,3$ ) مركبات السرعةاللابعدية للشبك الباقي المعرضة من الاعاصير والينابيع والبالوعات باتجاه x ، وتعني $f_{\gamma n}$ ، $f_{qm}$ المركبات في اتجاه y . هذه القيم تنتج بدلالة $\lambda$ ، $t/l$ ، $x/l$ ، مما يسمح بحسابها مرة واحدة ودرج قيمهـــا العددية في قوائم التيار الهابط Downward air ، انظر [104] ، أو تمثيلها بمخططات بيانية ، مما يعطي لهذه الطريقة الحسابية ميزة خاصة . وحيث أنه بموجب مبدأ التبادل بين الاعصار والنبع أو البالوعة تقوم العلاقات التالية :

$$\left.\begin{aligned} g_{q0} &= -f_{\gamma 0} + 2f_{\gamma 1} \; ; \; g_{q2} = -f_{\gamma 2} \; ; \; g_{q3} = -f_{\gamma 3} \\ f_{q0} &= g_{\gamma 0} - 2g_{\gamma 1} \; ; \; f_{q2} = g_{\gamma 2} \; ; \; f_{q3} = g_{\gamma 3} \end{aligned}\right\} , \quad (12.151)$$

لذلك يكفي حساب السرعات $g_{\gamma n}$ و $f_{\gamma n}$ فقط ، وبالنسبة لشبك كابح (مضخة : $\lambda > 0$) ، حيث تنتج القيم لشبك مسرّع ( عنفة : $\lambda < 0$) من العلاقات :

$$\left.\begin{aligned} g_{\gamma n}(-\lambda) &= -g_{\gamma n}(\lambda) \; ; \; g_{qm}(-\lambda) = g_{qm}(\lambda) \\ f_{\gamma n}(-\lambda) &= f_{\gamma n}(\lambda) \; ; \; f_{qm}(-\lambda) = -f_{qm}(\lambda) \end{aligned}\right\} . \quad (12.152)$$

لحساب القيم الايروديناميكية لبروفيل الشبك وتوزع السرعة والضغط على محيطه يلزم الآن تحديد الامثال العددية $A_n$ ، $B_m$ للسلسلتين (12.67) و (12.85) وذلك بمساعدة شرطي الجريان الحركيين لتوزع الانحناء $y_s$ وتوزع السماكة $y_d$ . هذان الشرطان يكتبان في حالة الشبك بالصيغتين العمليتين :

$$y'_s\left(1 + \frac{u}{u_\infty}\right) = \frac{v_\infty}{u_\infty} + \frac{v}{u_\infty} = K_\infty + \frac{v}{u_\infty} \; , \quad \left(y'_s = \frac{dy_s}{dx}\right) \; , \quad (12.153)$$

$$y'_d\left(1 + \frac{u}{u_\infty}\right) = \frac{1}{2}\frac{q(x)}{u_\infty} \; , \quad \left(y'_d = \frac{dy_d}{dx}\right) \; , \quad (12.154)$$

حيث يمثل على غرار (12.129) :

$$K_x = \tan \alpha_x = v_x / u_x \qquad (12.155)$$

معامل زاوية الورود الرمزية $\alpha_x$ التي تصنعها السرعة غير المشوشة $W_x$ مع وتر البروفيل المنطبق على المحور x ( قارن الشكل ٢٢،١٢ - b مع الشكل ٤٥،٨ ) .

في إطار هذه الطريقة التقريبية يكفي تحقيق شرطي الجريان الحركيين على الوتر بدلاً من خط الهيكل . عندئذ تنتج مركبتا السرعة المحرضة u و v الداخلتان في العلاقتين (12.153) و (12.154)، بسبب كون محصلة كل من $v_{\eta E}$ و $u_{\gamma E}$ حسب (12.126) معدومة على الوتر لوجود إشارتي (±) ، من (12.148) و (12.149) بالصيغتين :

$$u = u_c = u_{\xi E} + u_{\xi G} + u_{\gamma G} \; ; \quad v = v_c = v_{\gamma E} + v_{\gamma G} + v_{\eta G} \; , \qquad (12.156)$$

نختار ثلاث نقاط اختبارية ($n = 3$) مواقعها محددة بموجب فرضية ثلاثة أرباع الوتر حسب (12.75) أو (12.76) ونطبق فيها (12.153) و(12.154) بعد إدخال (12.156) والاستعانة بالعلاقات (12.126) و (12.150) فنحصل على مجموعة ست معادلات خطية لتحديد الثوابت $A_\mu$ ، $B_\mu$ :

$$\left.\begin{aligned} B_0 Q_{0\mu} + B_2 Q_{2\mu} + B_3 Q_{3\mu} &= y'_{d\mu} + A_0 S_{0\mu} + \\ &+ A_1 S_{1\mu} + A_2 S_{2\mu} \; ; \\ A_0 P_{0\mu} + A_1 P_{1\mu} + A_2 P_{2\mu} &= -K_x + y'_{s\mu} \\ &- [B_0 R_{0\mu} + B_2 R_{2\mu} + B_3 R_{3\mu}] \; , \end{aligned}\right\} \qquad (12.157)$$

حيث $\mu = 1,2,3$ وأدخلت للاختصار الرموز التالية :

$$\left.\begin{aligned} Q_{0\mu} &= \cot \frac{\varphi_\mu^{(3)}}{2} - 2 \sin \varphi_\mu^{(3)} - y'_{d\mu} (g_{q0} + 2 \cos \varphi + 1) \; , \\ Q_{2\mu} &= \sin 2\varphi_\mu^{(3)} - y'_{d\mu} \; (g_{q2} - \cos 2\varphi) \; , \\ Q_{3\mu} &= \sin 3\varphi_\mu^{(3)} - y'_{d\mu} \; (g_{q3} - \cos 3\varphi) \; : \end{aligned}\right\} \qquad (12.158)$$

$$S_{0\mu} = y'_{d\mu}\, g_{\gamma_0}\ ,\ S_{1\mu} = y'_{d\mu}\, g_{\gamma_1}\ ;\ S_{2\mu} = y'_{d\mu}\, g_{\gamma_2}\ ; \quad (12.159)$$

$$P_{0\mu} = (f_{\gamma_0} - 1) - y'_{s\mu}\, g_{\gamma_0}\ ;\ P_{1\mu} = (f_{\gamma_1} + \cos\varphi) - y'_{s\mu}\, g_{\gamma_1}\ ,$$

$$P_{2\mu} = (f_{\gamma_2} + \cos 2\varphi) - y'_{s\mu}\, g_{\gamma_2}\ ; \quad (12.160)$$

$$R_{0\mu} = f_{q_0} - y'_{s\mu}\,(g_{q_0} + 2\cos\varphi + 1)\ ,\ R_{2\mu} = f_{q_2} - y'_{s\mu}\,(g_{q_2} - \cos 2\varphi), R_{3\mu} = f_{q_3} - y'_{s\mu}\,(g_{q_3} - \cos 3\varphi)\ . \quad (12.161)$$

بمساعدة قوائم التيار الهابط نجد قيم $f_{\gamma n}$ ، $g_{\gamma n}$ ( الجدول ١٠١٢ ) وحسب (12.151) قيم $f_{qm}$ ، $g_{qm}$ . وللسهولة نظمت في [104] قائمة مستقلة للحدود المحصورة ضمن أقواس دائرية في العلاقات الأربعة أعلاه كتوابع محصلة ميزت بالمؤشر (*) ، مثلاً $g^*_{q_0} = g_{q_0} + 2\cos\varphi + 1$ . وحيث أن قيم $y'_{d\mu}$ ، $y'_{s\mu}$ ، $t/l$ ، $\lambda$ معلومة كمتحولات هندسية للشبك المعطى ، فيمكن حل مجموعة

الجدول ١٠١٢ : نموذج من قوائم التيار الهابط لحساب الدرعة المحرضة للشبك الباقي ، حسب [104] .

$\beta_1 = 120°$ $\lambda = 30°$ $t/l = 0{,}75$

| $\varphi$ | $\pi' g_{q_0}$ | $\pi' g_{q_1}$ | $\pi' g_{q_2}$ | $\pi' g_{q_3}$ | $\pi' f_{q_0}$ | $\pi' f_{q_1}$ | $\pi' f_{q_2}$ | $\pi' f_{q_3}$ | $\pi' g_{q_m}$ | $\pi' f_{q_m}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | -440 | 606 | -448 | -36,7 | 395 | 380 | -173 | +25,8 | 901 | -356 |
| 0,05 | 366 | 561 | -460 | +61,9 | 901 | 393 | +102 | +20,9 | 396 | -296 |
| 0,1 | 870 | 391 | -161 | -61,6 | 251 | 705 | +188 | +11,5 | 389 | +159 |
| 0,15 | 149 | 319 | -101 | +60,1 | 172 | 211 | +159 | -9,9 | 361 | +154 |
| 0,2 | 65 | 280 | -200 | +36,4 | 78 | 235 | -194 | +1,3 | 389 | +29 |
| 0,25 | -36 | 259 | -218 | -30,5 | 1 | 199 | +193 | 0 | 375 | +214 |
| 0,3 | -140 | 195 | -234 | +63,2 | -78 | 159 | -185 | 2,6 | 356 | -380 |
| 0,35 | -247 | 148 | -248 | -34,9 | -124 | 115 | +195 | 5,9 | 337 | +545 |
| 0,4 | -330 | 100 | -259 | +29,5 | -159 | 80 | +194 | 3,6 | 399 | +533 |
| 0,45 | -423 | 50 | -265 | -19,1 | -201 | 40 | -194 | 1,8 | 404 | +525 |
| 0,5 | -509 | 0 | -267 | 0 | -107 | 0 | +191 | 0 | 403 | -505 |
| 0,55 | +979 | -50 | -265 | 19,1 | +104 | -40 | +194 | +1,8 | 404 | +479 |
| 0,6 | -469 | -100 | -259 | 29,9 | -365 | -80 | +194 | +3,6 | 403 | -468 |
| 0,65 | -705 | -147 | -249 | 30,3 | -451 | -119 | +195 | -3,9 | 399 | +431 |
| 0,7 | -766 | -191 | -234 | 19,3 | -501 | -158 | -193 | +2,6 | 394 | +404 |
| 0,75 | -808 | -231 | -216 | 30,5 | -519 | -197 | +195 | 0 | 385 | +384 |
| 0,8 | -850 | -265 | -200 | 36,4 | -543 | -235 | +194 | 1,3 | 373 | +294 |
| 0,85 | -866 | -319 | -161 | 60,1 | -505 | -219 | +199 | 3,2 | 369 | +254 |
| 0,9 | -919 | -791 | -161 | 61,6 | -555 | -310 | -196 | +4,5 | 359 | +217 |
| 0,95 | -943 | -301 | -140 | 61,1 | +1010 | -305 | +182 | 20,2 | 350 | +181 |
| 1,0 | +966 | -808 | -118 | 58,7 | +1059 | -303 | +115 | 15,8 | 337 | +140 |
| $\frac{t}{l}$ | -96 | 809 | -278 | -50,9 | 1 | 191 | +199 | 0 | 385 | -318 |
| $\frac{t}{l}$ | -489 | -49 | -462 | 19,6 | -557 | -67 | +194 | +2,6 | 403 | -459 |
| $\frac{t}{l}$ | -966 | -961 | -154 | 61,4 | -977 | -398 | +196 | 16,4 | 335 | +304 |

$\beta_1 = 120°$ $\lambda = 30°$ $t/l = 0{,}5$

| $\varphi$ | $\pi' g_{q_0}$ | $\pi' g_{q_1}$ | $\pi' g_{q_2}$ | $\pi' g_{q_3}$ | $\pi' f_{q_0}$ | $\pi' f_{q_1}$ | $\pi' f_{q_2}$ | $\pi' f_{q_3}$ | $\pi' g_{q_m}$ | $\pi' f_{q_m}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 822 | 685 | -489 | -105,4 | 659 | 759 | -273 | -91,3 | 704 | -527 |
| 0,05 | 653 | 648 | -491 | +122,4 | 849 | 691 | +303 | +86,1 | 796 | -448 |
| 0,1 | 460 | 600 | -317 | -118,5 | 186 | 631 | -532 | -78,4 | 725 | -784 |
| 0,15 | 365 | 550 | -250 | +149,8 | 525 | 564 | -196 | +68,3 | 903 | +771 |
| 0,2 | 44 | 490 | -319 | -193,1 | 155 | 482 | +577 | -55,1 | 529 | -345 |
| 0,25 | -193 | 420 | -370 | +168,8 | -173 | 410 | -395 | +42,0 | 855 | -972 |
| 0,3 | -318 | 344 | -416 | +138,7 | -193 | 340 | +410 | -30,9 | 812 | +1206 |
| 0,35 | -402 | 263 | -456 | -111,5 | -377 | 259 | +423 | +20,8 | 797 | -1013 |
| 0,4 | -642 | 171 | -486 | +79,5 | +546 | 178 | -632 | +12,8 | 824 | -996 |
| 0,45 | -776 | 80 | -509 | +41,3 | -344 | 88 | +438 | +5,1 | 892 | -894 |
| 0,5 | -899 | 0 | -513 | 0 | -816 | 0 | -640 | 0 | 838 | +858 |
| 0,55 | -1028 | -90 | -505 | +41,3 | -1033 | -88 | +699 | -5,1 | 851 | -805 |
| 0,6 | -1098 | -171 | -486 | -79,5 | +1166 | -178 | -632 | +12,8 | 818 | +742 |
| 0,65 | -1158 | -265 | -456 | +111,5 | -1283 | -258 | +685 | -20,4 | 778 | -633 |
| 0,7 | -1250 | -366 | -416 | -134,7 | +1409 | -340 | +610 | +30,7 | 729 | -562 |
| 0,75 | -1314 | -470 | -370 | +146,8 | -1503 | +410 | -599 | +42,0 | 680 | +474 |
| 0,8 | -1370 | -580 | -319 | -155,1 | +1613 | -488 | +578 | -55,1 | 634 | -390 |
| 0,85 | -1418 | -690 | -268 | +149,3 | -1682 | +461 | -598 | +68,3 | 578 | +312 |
| 0,9 | -1448 | -806 | -217 | -136,3 | +1682 | -631 | +558 | -78,4 | 526 | -266 |
| 0,95 | -1480 | -668 | -171 | +122,4 | -1852 | +689 | -507 | +86,1 | 466 | +194 |
| 1,0 | -1500 | -685 | -139 | -105,4 | +1918 | -590 | +279 | -91,3 | 414 | -134 |
| $\frac{t}{l}$ | -153 | 596 | -370 | +146,8 | -15 | 618 | -399 | +42,0 | 695 | -373 |
| $\frac{t}{l}$ | -1268 | -469 | -489 | -69,8 | +1128 | -466 | +635 | -10,0 | 830 | +770 |
| $\frac{t}{l}$ | -1480 | -617 | -209 | +135,9 | -1808 | -628 | -328 | +81,6 | 501 | -396 |

المعادلات (12.157) وحساب الثوابت $A_n, B_m$ كتوابع خطية لمعامل زاوية الورود $K_\infty$ . وينصح ، من أجل تجنب حل مجموعة المعادلات (12.157) كلما تغيرت زاوية الورود $\alpha_\infty = \arctan K_\infty$ ، عند إجراء دراسة منظمة فصل الثوابت $A_n, B_m$ إلى جزء يتعلق بزاوية الورود وآخر لا يتعلق بها بموجب العلاقات :

$$\left.\begin{aligned} A_0 &= A_{00} + K_\infty A_{0\alpha} \quad ; \quad B_0 = B_{00} + K_\infty B_{0\alpha} \\ A_2 &= A_{10} + K_\infty A_{1\alpha} \quad ; \quad B_2 = B_{20} + K_\infty B_{2\alpha} \\ A_3 &= A_{30} + K_\infty A_{2\alpha} \quad ; \quad B_3 = B_{30} + K_\infty B_{3\alpha} \end{aligned}\right\} . \qquad (12.162)$$

بذلك نحصل من (12.157) ، مرة بوضع $K_\infty = 0$ ، وأخرى بوضع $K_\infty = 1$ ، على مجموعتي معادلات كل منها مؤلفة من ست معادلات نحصل بحلهـــا على قيم $A_{n0}, B_{m0}$ و $A_{n\alpha}, B_{m\alpha}$ ، وبمعرفتها يمكن حساب كافة القيم الايروديناميكية لبروفيل الشبك .

قوة الرفع بالنسبة لواحدة عرض البروفيل المتعامدة مع اتجاه $W_\infty$ (الشكل ٤٥.٨ ) تنتج من قـانون **كوتا - يوكوفسكي** (8.148) بوضع $\Gamma$ حسب (12.146) بالصيغة :

$$F_A = 2\rho W_\infty t \Delta w \quad , \qquad (12.163)$$

وبالتالي يكون معامل قوة الرفع :

$$c_A = \frac{F_A}{\frac{\rho}{2} W_\infty^2 l} = 4 \frac{\Delta w}{W_\infty} \frac{t}{l} . \qquad (12.164)$$

بحسـاب $\Gamma$ من (12.100) وإدخال $A_1, A_0$ حسب (12.162) نجد بمساعدة الشكل (٢٢.١٢ - b ) :

$$c_A - 2\pi\left(A_0 + \frac{1}{2}A_1\right)\cos\alpha_\infty = 2\pi\left\{\left(A_{00} + \frac{1}{2}A_{10}\right)\cos\alpha_\infty + \right.$$

$$\left. + \left(A_{0\alpha} + \frac{1}{2}A_{1\alpha}\right)\sin\alpha_\infty\right\} \quad , \quad (12.165)$$

وذلك بدلاً من (12.134) بالنسبة للبروفيل الفردي .

ليكن n الاتجاه الناظمي على جبهة الشبك ، t الاتجاه المماسي عليها (الشكل ٢٢.١٢) فيكون بموجب شرط الاستمرار $W_{n1} = W_{n2} - W_{\infty n} = W_n$ ، ونحصل من مخطط السرع باستخدام (12.164) على العلاقة الاساسية لنظرية شبك المقاطع التي تربط بين معامل قوة الرفع وزوايا اتجاه الجريان بالصيغة :

$$c_A = 2\,\frac{t}{l}\sin\beta_\infty\,(\cot\beta_1 - \cot\beta_2). \quad (12.166)$$

كما نحصل بسهولة على العلاقات التي تربط بين السرعات وزواياها بالصيغ :

$$-\cot\beta_1 = \frac{\tan\lambda + K_\infty + (1/\cos\lambda)\,(\Delta w/u_\infty)}{1 - K_\infty\tan\lambda} \quad , \quad (12.167)$$

$$-\cot\beta_2 = \frac{\tan\lambda + K_\infty - (1/\cos\lambda)\,(\Delta w/u_\infty)}{1 - K_\infty\tan\lambda} \quad , \quad (12.168)$$

$$-\cot\beta_\infty = -\frac{1}{2}(\cot\beta_1 + \cot\beta_2) = \frac{\tan\lambda + K_\infty}{1 - K_\infty\tan\lambda} \quad , \quad (12.169)$$

حيث تكون بموجب (12.100) و (12.146) :

$$\frac{\Delta w}{u_\infty} = \frac{1}{2}\frac{l'}{u_\infty\,t} = \frac{\pi}{2}\frac{l}{t}\left[\left(A_{00} + \frac{1}{2}A_{10}\right) + \right.$$

$$\left. + K_\infty\left(A_{0\alpha} + \frac{1}{2}A_{1\alpha}\right)\right] . \quad (12.170)$$

من هذه العلاقات ، وبعد تحديد الأمثال $A_{10}$ ، $A_{11}$ ، $A_{0\alpha}$ ، $A_{1\alpha}$ ، يمكن حساب

زاوية الدخول $\beta_1$ والخروج $\beta_2$ بدلالة معامل زاوية الورود $K_\infty$ ، ومن ثم نحصل بمساعدة معادلة الاستمرار والشكل ( ١٢ ـ ٢٢ ـ b ) على نسبة السرع

$$W_2/W_1 = \sin\beta_1/\sin\beta_2 \quad . \qquad (12.171)$$

ونحصل بمساعدة معادلة برنولي على نسبة الضغط وبالتالي هبوط الضغط Pscessure drop المتحول داخل الشبك منسوباً إلى الضغط التحريكي لسرعة الدخول بالصيغة :

$$\frac{p_2 - p_1}{\frac{\rho}{2} W_1^2} = 1 - \frac{\sin^2\beta_1}{\sin^2\beta_2} \quad . \qquad (12.172)$$

إن السرعة على محيط بروفيل الشبك تنتج على غرار (12.136) من السرعة على الوتر مضروبة بمقلوب معامل ديفلس :

$$W_B(x) = \frac{1}{\varkappa_{Bd}} V_C(x) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy_d}{dx}\right)^2}} (u_\infty + u_{\gamma B} + u_{\gamma C} + u_{qE} + u_{qG}) \quad . \qquad (12.173)$$

بإدخال (12.126) و (12.150) في (12.173) ومراعـــاة (12.162) نحصل حسب [104] على الصيغة الافضلية للحساب العددي للسرعة بالشكل :

$$\frac{W_B(x)}{u_\infty} = \frac{1}{\varkappa_{Bd}} \{ 1 + B_{00} g^*_{q_0} + B_{20} g^*_{q_2} + B_{30} g^*_{q_3} + K_\infty (B_{0\infty} g^*_{q_0} +$$
$$+ B_{2\infty} g^*_{q_2} + B_{3\infty} g^*_{q_3}) + A_{00} g_{\gamma_0} + A_{10} g_{\gamma_1} + A_{20} g_{\gamma_2} +$$
$$+ K_\infty (A_{0\infty} g_{\gamma_0} + A_{1\infty} g_{\gamma_1} + A_{2\infty} g_{\gamma_2}) \pm [(A_{00} \cot\frac{\varphi}{2} +$$
$$+ A_{10} \sin\varphi + A_{20} \sin 2\varphi) + K_\infty (A_{0\infty} \cot\frac{\varphi}{2} +$$
$$+ A_{1\infty} \sin\varphi + A_{2\infty} \sin 2\varphi)] \} \qquad (12.174)$$

حيث $g^*_{q_{n1}}$ تمثل هنا أيضاً سرعات لا بعدية محصلة تكافىء الحدود المحصورة ضمن

أقواس دائرية في (12.158) ويمكن تحديدها بمساعدة قوائم التيار الهابط إلى جانب $g_{\infty}$ . وتنتج السرعة على طرف السحب العلوي للبروفيل بأخذ إشارة (+) وعلى طرف الضغط السفلي بأخذ إشارة (−) . أما السرعة على أنف البروفيل فتنتج من (12.138) مع مراعاة (12.162) بالصيغة :

$$\left(\frac{W_B}{u_\infty}\right)_{x=0} = (A_{00} + K_\infty A_{0\infty}) \sqrt{\frac{2l}{r_N}} \quad . \qquad (12.175)$$

بعد تحديد أمثال توزع النقاط الشاذة $A_{n0,\infty}$ ، $B_{n0,\infty}$ يمكن اعطاء $K_\infty$ قيماً مختلفة وحساب توزع السرعة بالنسبة لزوايا ورود $\alpha_\infty$ متعددة . وينصح ، خاصة عند مقارنة النتائج الحسابية التجريبية ، ان ننسب السرع الى سرعة الدخول $W_1$ بدلاً من $u_\infty$ ، ويتم ذلك بسهولة بمراعاة العلاقة :

$$W_1/u_\infty = (\cos\lambda - K_\infty \sin\lambda)/\sin\beta_1 \; , \qquad (12.176)$$

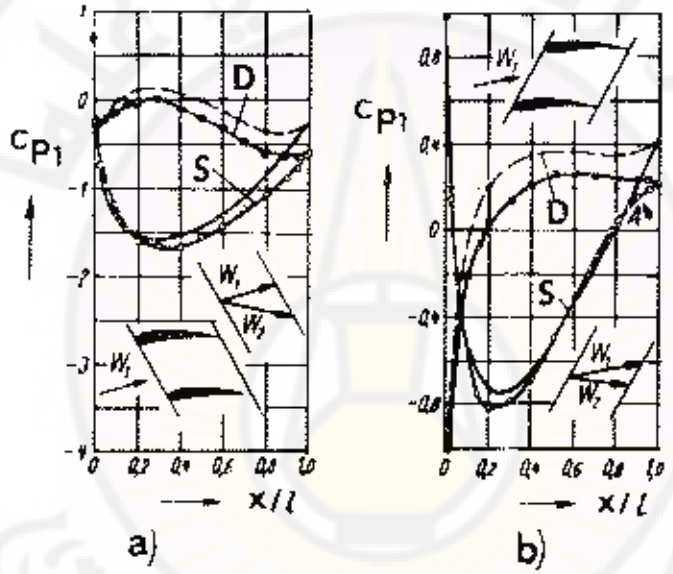
التي تنتج مباشرة من الشكل (١٢,٢٢ – b) .

توزع الضغط ينتج من معادلة برنولي ، حيث نجد معامل الضغط :

$$c_{p_1} = \frac{p_n - p_1}{\frac{\rho}{2}W_1^2} = 1 - \left(\frac{W_n}{W_1}\right)^2 \quad . \qquad (12.177)$$

من أجل تحديد دقة الطريقة التقريبية ومجال استخدامها حسب شلشتنغ في [104] أمثلة عديدة وقارن نتائج بعضها بنتائج طرق دقيقة رياضياً ، واعتمد لحساب 20 مثالا منها البروفيل NACA 8410 ( نسبة الانحناء : $f/l = 0{,}08$ ، نسبة السماكة : $d/l = 0{,}10$ ) من التصنيف الرباعي الارقام للجنة الاستشارية الوطنية للطيران الامريكية NACA – National Advisory Committee for Aeronautics ، وذلك لان هذا البروفيل يصلح سواء في شبك كابح أو شبك مسرّع ، ثم قورنت النتائج النظرية بالتجريبية بالنسبة لتوزع الضغط . نتيجة لهذه الدراسة المنظمة

يتبين أن هذه الطريقة تسمح بتحديد تأثير المتحولات الهندسية للشبك ، سواء كعنفة أو كمضخة ، كل على حدة وتأثير زاوية الورود على القيم الايروديناميكية ، وتعطي نتائج عددية مرضية جداً ، كما يؤكد ذلك كمثال الشكل (٢٣٠١٢) خاصة لأن تأثير اللزوجة لم يراعَ في القيم النظرية . ويجدر التنويه أن حساب القيم الايروديناميكية بما فيها توزع الضغط على بروفيل الشبك مع أخذ ست قيم لزاوية الورود يستغرق بالنسبة للمتدرب جيد على الآلات الحاسبة العادية من 20 إلى 25 ساعة .




الشكل ٢٣٠١٢ : مقارنة بين القيم النظرية والتجريبية لتوزع معامل الضغط على محيط بروفيل شبك مؤلف من بروفيلات NACA 8410 ، وذلك في حالة : a) شبك مسرّع ( عنفة ) محدد بنسبة التقسيم $t/l = 0{,}75$ ، بزاوية البروفيل $\beta_s = 60°$ ، بزاوية الدخول $\beta_1 = 15°$ ؛ b) شبك كابح ( مضخة ) محدد بنسبة التقسيم $t/l = 0{,}75$ ، بزاوية البروفيل $\beta_s = 120°$ ، بزاوية الدخول $\beta_1 = 10°$ . الدوائر السوداء تمثل القيم المقاسة على طرف الضغط ( I ) ، والفارغة تلك على طرف السحب S ، وذلك عند عدد رينولدز $W_2 l/\nu = 6.10^5$ . تأثير اللزوجة على شبك المضخة بالمقارنة مع شبك العنفة يبدو جلياً من نشوء انفصال الطبقة الحدية في النقطة A ؛ حسب [104] .

هناك طرق عديدة جداً لحل مسائل الجريان المثالي المختلفة عبر شبك بروفيلات مستو، مثلاً [25] [138] [139] . وقد طور شاه Ch . Shah [140] على أساس طريقي شولتس [103] و شلشتنغ [104] طريقة عملية لحل المسألة الأساسية الثالثة التي تسمح بتحديد شكل بروفيل الشبك الأفضلي ومثلثات السرع اذا كان توزع السرعة على محيط البروفيل معلوماً جزئياً وكان توزع السماكة معطى .

أما لحساب الجريان عبر شبك من بروفيلات كبيرة السماكة والانحناء فقد وضع ريشتر W.Richter [141] طريقة عددية - بيانية تخفف الجهد الحسابي جداً وتعتبر توسيعاً لمجال استخدام طريقة شلشتنغ [104] . بينما استطاع إيزاي Isay [142] أن يستخرج رياضياً المعادلات التكاملية العامة الدقيقة للجريان عبر شبك بروفيلات اعتباطية الشكل وذلك باستبدال تأثير كل بروفيل بتوزع اعاصير على محيطه (راجع ٨.٢٠١٢). وعلى أساس هذه الطريقة طور مارتنزن E . Martensen [143] طريقة عملية لحساب القيم الايرودينامية تعتمد أساساً على استخدام الحاسبات الالكترونية .

## ٣.١٢ دراسة الجريانات حول أجسام متناظرة دورانياً

سنوضح فيما يلي بأمثلة بسيطة امكانيات تطبيق طريقة النقاط الشاذة لحساب الجريانات الكمونية حول أجسام فراغية . وقد اختيرت هذه الأمثلة مماثلة للحالة المستوية حتى نتمكن من المقارنة بين النتائج ونختصر الشرح .

### ١.٣.١٢ الجريان حول جسم نصفي متناظر دورانياً

على غرار ما فعلنا في الفقرة ( ١.٢.١٢ ) نحصل على الجريان حول جسم نصفي متناظر دورانياً من تضام جريان انسحابي باتجاه المحور التناظري x سرعته $u_\infty$ مع نبع نقطي غزارته E ، الشكل (٢٤.١٢ - a) .

تابع الكمون الاجمالي للجريان ينتج من (10.24) و (11.17) بالصيغة :

$$\Phi_{int} = \Phi_T + \Phi_Q = u_\infty x - \frac{E}{4\pi}\frac{1}{r} , \qquad (12.178)$$

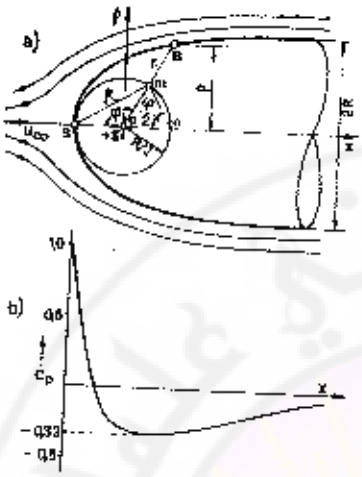
حيث $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{x^2+\rho^2}$ نصف القطـــر المكاني . كما نحصل بمساعدة الجدول ( ١٠١١ ) على تابع تيار ستوكس الاجمـــالي

$$\Psi_{St_{tot}} = \Psi_{St_T} + \Psi_{St_Q} .$$

بذلك تنتج حسب (9.29) مركبات السرعة للجريان الاجمالي في اتجاه المحاور الديكارتية بالصيغ :

$$u = u_\infty + \frac{E}{4\pi}\frac{x}{r^3} ; \; v = \frac{E}{4\pi}\frac{y}{r^3} ;$$

$$w = \frac{E}{4\pi}\frac{z}{r^3} , \quad (12.179)$$




الشكل ٢٤.١٢ : الجريان حول جسم نصفي متنـــاظر دورانياً يكافىء تضام جريان السحاب مع نبع نقطي. a) صورة الجريان ، b) توزع الضغط حول سطح الجسم المكافىء لسطح التيار الصفري .

وباتجاه المحورين x , ρ للمستوي الزوالي تنتج مركبتا السرعة :

$$v_x = u = u_\infty + \frac{E}{4\pi}\frac{x}{(x^2+\rho^2)^{3/2}} , \; v_\rho = \frac{E}{4\pi}\frac{\rho}{(x^2+\rho^2)^{3/2}} . \quad (12.180)$$

نقطة الركود S تقع على الطرف السالب للمحور x وتتحدد ، على غرار (12.23) ، بالاحداثي :

$$x_0 = -\sqrt{E/4\pi u_\infty} . \quad (12.181)$$

وحيث أن كامل غزارة النبع تخرج على بعد كبير من مركز النبع عبر دائرة نصف قطرها R ، الشكل (٢٤.١٢ – a) ، وبسرعة $u_\infty$ ، نجد :

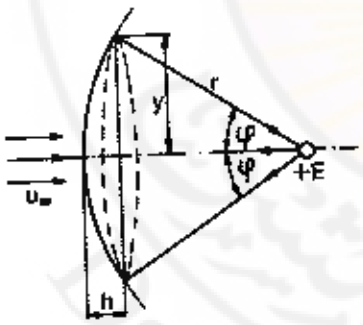
$$Q = E = u_\infty \pi R^2 \Rightarrow R = \sqrt{E/\pi u_\infty} , \quad (12.182)$$

ويصبح بالتالي حسب (12.181) :

$$x_0 = -\,R/2\ . \qquad (12.183)$$

إن شكل الجسم النصفي المكافيء لسطح التيـــار الصفري الاجمالي يتحدد بمساعـدة الجدول (١٠١١) بوضع $w_{S_{tot}} = 0$ . وبما ان سطح التيار الصفري لا يسمح بنفوذ السائل عبره فإن شكله يتحدد أيضاً من الشرط القاضي بوجوب تساوي التيار الحجمي للجريان الانسحابي $Q_T$ الذي يعبر دائرة نصف قطرها y بسرعـة $u_\infty$ مع التيـار الحجمي الجزئي للنبـع $Q_\varphi$ المحصور ضمن مخروط دائري نصف زاوية انفتاحه $\varphi$ وطول مولده r يساوي بعد نقطة ما من سطح الجسم النصفي عن مركز النبع ، والذي يعبر السطح الخارجي لقطعة الكرة الملتصقة على قاعدة المخروط . وعليه نجـــد بمساعدة الشكل ( ٢٥٠١٢ ) واستخدام العلاقة (12.182) :

$$Q_T = u_\infty\,\pi\,y^2 = Q_\varphi = E\,\frac{A_\varphi}{A} = u_\infty\,\pi\,R^2\,\frac{2\,\pi\,r\,h}{4\,\pi\,r^2}\ .$$




الشكل ٢٥٠١٢ : لتحديد شكل الجسم النصفي المتناظر دورانياً .

وبما أن $y = r\sin\varphi$ و $h = r(1-\cos\varphi)$ تنتج بوضع $y \equiv \rho$ معـادلة تحديد شكل الجسم النصفي في المستوي $\rho, x$ بالصيغة :

$$\rho = R\sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{2}} = R\sin\frac{\varphi}{2}, \qquad (12.184)$$

أو بالصيغة :

$$r = R\,\frac{\sin\varphi/2}{\sin\varphi}\ . \qquad (12.185)$$

على أساس العلاقتين (12.183) و (12.184) يمكننا بطريقة بيانية صرفة تحديد شكل الجسم النصفي. نرسم دائرة نصف قطرها R/2 ومركزها منطبق على مركز الإحداثيات 0 ،

الشكل (١٢ـ٢٤ـ a) ، فتحدد على المحور x نقطة الركود S . نختار زاوية ما $\varphi = s0m$ فتكون الزاوية $\frac{\varphi}{2} = s\,n\,m$ ، ويكون بالتالي البعد $\overline{SM} = \rho$ الإحداثي الشاقولي للنقطة B من سطح الجسم النصفي التي تبعد عن المركز 0 بمقدار نصف القطر المكاني $\overline{0B} = r$ المار من m .

في الرسم العملي يستخدم ورق ميلمتري ويقسم النصف العلوي للمستوي لمجالات زاويّة بحيث تتزايد $\varphi$ بمعدل $\Delta\varphi = 10^\circ$ ، مثلاً ، باتجاه دوران عقارب الساعة وبدءاً من نقطة الركود S ، ثم يوصل بين كافة النقاط B التي تم تحديدها ، وبين نظيراتها بالنسبة للمحور x فنحصل على الجسم النصفي كاملاً .

لحساب السرعة $V_B = \sqrt{V_x^2 + V_\rho^2}$ في نقطة ما B من محيط الجسم النصفي ، الشكل (١٢ـ٢٤ـ a) ، نضع في (12.180) ، باعتبار أن الزاوية $\varphi$ تتجول بيناً بدءاً من S ، $\rho = r \sin\varphi$ ، $x = -r\cos\varphi$ ، $(x^2 + \rho^2)^{3/2} = r^3$ ، ونستبدل E بقيمتها حسب (12.182) و r بقيمته حسب (12.185) فنجد باستخدام العلاقات المثلثية للزوايا وإجراء الاصلاح :

$$\left(\frac{V_B}{u_\infty}\right)^2 = 4\sin^2\frac{\varphi}{2} - 3\sin^4\frac{\varphi}{2}\,. \qquad (12.186)$$

بذلك ينتج توزع معامل الضغط من معادلة برنولي :

$$c_p = \frac{p_B - p_\infty}{\frac{\rho}{2}u_\infty^2} = 1 - \left(\frac{V_B}{u_\infty}\right)^2 = 1 - 4\sin^2\frac{\varphi}{2} + 3\sin^4\frac{\varphi}{2}\,. \qquad (12.187)$$

الشكل (١٢ـ٢٤ـ b) يبين توزع الضغط المحسوب بموجب هذه العلاقة . ونحصل على قيمة الضغط الاصغري ونقطة تأثيره بوضع $dc_p/d\frac{\varphi}{2} = 0$ فينتج $c_{p_{min}} = -0{,}33$ من أجل $\varphi = 109^\circ$ ، وذلك بالمقارنة مع $c_{p_{min}} = -0{,}57$ في حالة الجسم النصفي المستوي ، الشكل (١٢ـ٤) .

باستبدال النبع ببالوعة نقطية في الشكل (١٢ـ٢٤ـ a) نحصل ، كما في

الحالة المستوية ، على جسم نصفي مفتوح للخلف ، وتنطبق عليه من حيث المبدأ كافة العلاقات السابقة .

## ٢٠٣.١٢ الجريان حول أجسام رانكين المغزلية

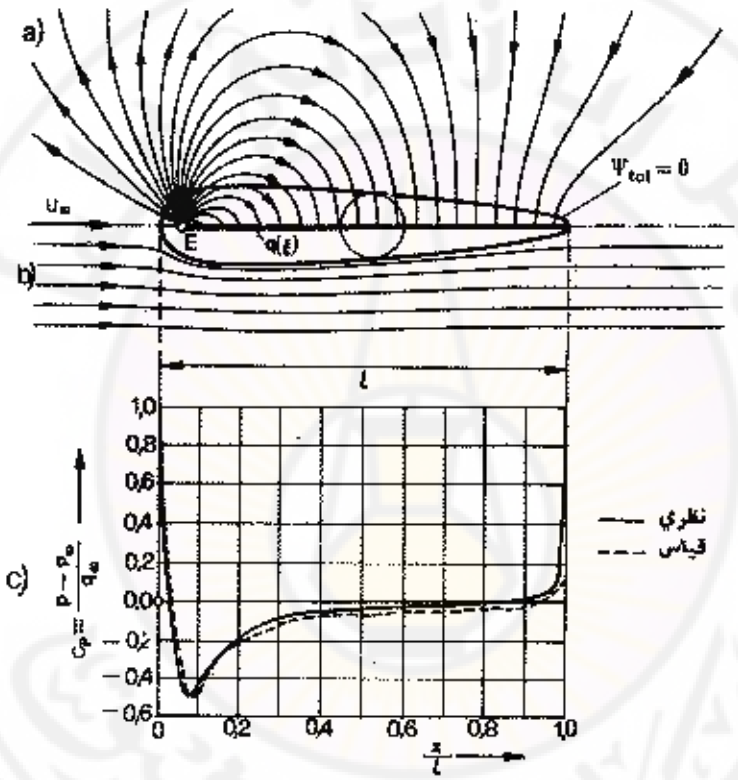
من تضام نبع نقطي وبالوعة نقطية من نفس الغزارة وتفصلهما مسافة محددة e مع جريان منتظم أفقي بسرعة $u_\infty$ نحصل كسطح تيار صفري اجمالي على جسم بشكل بجسم قطع ناقص نسبة أقطاره تقترب من الواحد كلما صغرت المسافة e ويمرُ من نقطي الركود $S_{1,2}$ للجريان الواقعتين على المحور x . أمثال هذا الجسم تعرف باسم **أجسام رانكين المتناظرة دورانياً** .

يمكن الحصول على أجسام جريان انسيابية مغزلية معروفة باسم **أجسام خطوط التيار** Stream line body ، لأن قسمها الخلفي رفيع وتبدي في الجريانات الحقيقية مقاومة صغيرة نسبياً ، اذا استبدلنا في الحالة السابقة البالوعة الافرادية بعدد مناسب n من البالوعات النقطية الموزعة على المحور x والتي مجموع غزاراتها $\sum - E_m = - E$ تساوي غزارة النبع . كما يمكن استبدال النبع أيضاً بعدد معين m من الينابيع النقطية التي مجموع غزارتها $\sum E_m = E$ .

في التطبيق العملي يتم اختيار توزع خطي مستمر مناسب من الينابيع ـ البالوعات النقطية ، الشكل (٤.١١) ، بحيث تحقق شدتها الموضعية $q(\xi)$ شرط الاغلاق (11.32) ، حتى يكون سطح التيار الصفري الاجمالي الناتج عن تضامها مع الجريان الانسحابي مغلقاً . وكما كان الأمر في الحالة المستوية يحدد شرط الجريان الحركي العلاقة بين $q(\xi)$ وشكل الجسم . فاذا كان $r_d$ نصف قطر دائرة مقطع الجسم فيكون حسب (12.60) :

$$q(\xi) = u_\infty \pi \frac{d(r_d^2)}{dx} \quad . \qquad (12.188)$$

الشكل (٢٦.١٢) يبين كمثال جسماً مغزلياً بسيطاً نشأ كسطح تيارصفري إجمالي، $\Psi_{St_{tot}} = 0$، من تضام نبع نقطي إفرادي واقع في مركز الاحداثيات وتوزع مستمر منتظم من البالوعات النقطية التي تنطبق نقطة بدايتها على مركز النبع وتبقى شدتها الموضعية ثابتة، $q(\xi) = -\frac{E}{l} = \text{const}$ . بمراعـــاة ذلك




الشكل ٢٦.١٢ : الجريان حول جسم رانكين مغزلي ، ناتج عن تضام نبع نقطي مع توزع خطي ثابت من البالوعات النقطية مـــع جريان انسحابي أفقي. (a صورة الجريان للنبع والبالوعات ، b صورة الجريان الاجمالي حول الجسم ، c مقارنة بين توزع الضغط المحسوب نظرياً والمقاس ، حسب فورمان ( انظر [9] ) .

وبمساعدة الجدول (١٠١١) يمكننا تحديد تابع تيار ستوكس للجريان الناتج عن تضام النبع والبالوعات فقط ، ومنه تتحدد صورة الجريان في الشكل (٢٦.١٢-a). كما يمكننا تحديد تابع تيار ستوكس الاجمالي كمجموع لتابع تيار الجريان الانسحابي والنبع وتوزع البالوعات، $\Psi_{St_{tot}} = \Psi_{St_T} + \Psi_{St_Q} + \Psi_{St_q}$، ومنه نحصل بوضع $\Psi_{St_{tot}} = 0$ على معادلة تحديد شكل الجسم المغزلي، وبوضع $\Psi_{St_{tot}} = const$ نحصل على صورة الجريان حول هذا الجسم المبينة في الشكل ( ٢٦.١٢ - b ) . بعدئذ نستعين بالعلاقة (11.12) لحساب توزع السرعة ، وبمعادلة برنولي لحساب توزع الضغط المبين في الشكل (٢٦.١٢ - c ) . ويتضح من مقارنة قيم معامل الضغط المحسوبة على هذا الاساس مع القيم المقاسة ( التجريبية ) تطابق هذه القيم مع بعضها البعض بشكل جيد ، باستثناء المنطقة القريبة من الحافة الخلفية للجسم نتيجة تأثير قوى الاحتكاك .

إن طريقة الينابيع ـ البالوعات ، التي وضع أسسها **رانكين** ، قد طورها **فورمان** G. Fuhrmann [144] واستخدمها عملياً في مطلع هذا القرن لحساب الجريان حول المناطيد الهوائية المسيّرة . وتستخدم اليوم بنجاح أيضاً لحساب أجسام السفن والطائرات Fuselage [18] .

## ٣.٣.١٢ الجريان حول كرة وحساب كتلتها الريمروديناميكية

بطريقة مماثلة تماماً لحساب الجريان الانسحابي اللاجولاني حول اسطوانة دائرية ، الفقرة (٣.٢.١٢) ، يمكننا حساب الجريان حول كرة على أساس أنه يكافيء تضام جريان انسحابي أفقي سرعته $u_\infty$ مع ثنائية نقطية عزمها M ومركزها يقع في مركز الاحداثيات ومحورها منطبق على المحور x ، الذي هو أيضاً محور تناظر .

للحصول على تابع الكمون وتابع تيار ستوكس للجريان الاجمالي نستعين بالجدول (١٠١١) فنجد :

$$\Phi_{tot} = u_\infty x + \frac{M}{4\pi}\frac{x}{r^3} = u_\infty x + \frac{M}{4\pi}\frac{x}{(x^2+\rho^2)^{3/2}} \quad , \qquad (12.189)$$

$$\Psi_{St_{tot}} = u_\infty \frac{\rho^2}{2} - \frac{M}{4\pi}\frac{\rho^2}{r^3} = u_\infty \frac{\rho^2}{2} - \frac{M}{4\pi}\frac{r^2}{(x^2+\rho^2)^{3/2}} \quad . \qquad (12.190)$$

بذلك نحصل على معادلة خط التيار الصفري في المستوي الزوالي $\rho x$ ( أو $y x$ ) بالصيغة :

$$\Psi_{St_{tot}} = 0 \Rightarrow \rho = 0 \, ; \, r = R = \sqrt[3]{\frac{M}{2\pi u_\infty}} = const. \qquad (12.191)$$

إذن فإن سطح التيار الصفري يتألف من المحور x السالب والموجب ومن كرة نصف قطرها R تحصر داخلها كامل جريان الثنائية النقطية ومز من نقطتي الركود $S_{1,2}$ المحددتين بالاحداثيين $x_{S_{1,2}} = \pm R$ ، وتكون صورة الجريان في المستوي الزوالي مكافئة تماماً للشكل (٩٠١٢) .

إن تابع الكمون للجريان حول الكرة ينتج باستبدال M في (12.189) بقيمتها حسب (12.191) ووضع $x = r \cos\varphi$ بالصيغة :

$$\Phi_{Sp} = u_\infty x \left(1 + \frac{1}{2}\frac{R^3}{r^3}\right) = u_\infty \left(r + \frac{1}{2}\frac{R^3}{r^2}\right)\cos\varphi \quad . \qquad (12.192)$$

إن السرعة على محيط الكرة ليس لها إلا مركبة مماسية $V_\varphi$ ، لأن المركبة القطرية $V_r = \frac{\partial\Phi}{\partial r} = 0$ من أجل $r = R$ ، بسبب أنه لا يمكن أن ينفذ السائل عبر سطح الكرة . وبما أنه يكفي حساب توزع السرعة على محيط دائرة مقطع الكرة الزوالي تنتج من (12.192) المركبة المماسية للسرعة في جوار الكرة :

$$V_\varphi = \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi_{Sp}}{\partial\varphi} = -u_\infty \left(1 + \frac{1}{2}\frac{R^3}{r^3}\right)\sin\varphi \quad . \qquad (12.193)$$

ومنها نجد السرعة على سطح الكرة :

$$V_{Sp} = |\mathbf{V}_{Sp}| = V_\varphi\,(r = R) = \frac{3}{2}\,u_\infty \sin\varphi\,;\ (0 \leqq \varphi \leqq \pi)\,. \qquad (12.194)$$

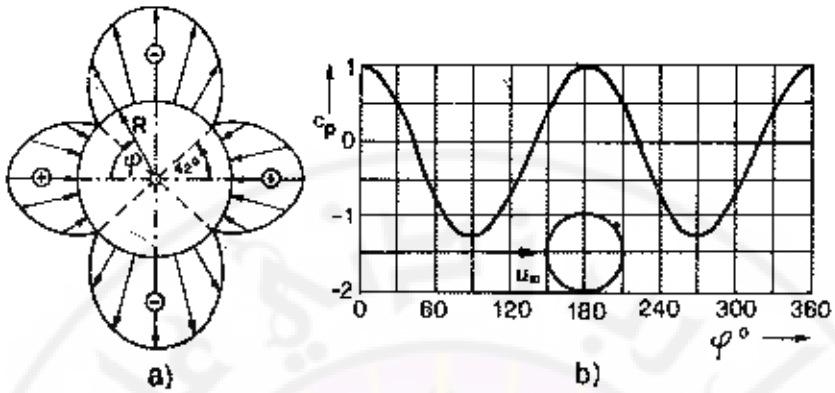
$V_{Sp}$ تنعدم إذن من أجل $\varphi = \pi, \varphi = 0$ ، أي في نقطتي الركود $S_{1,2}$ ، وتبلغ بالنسبة لكامل حقل الجريان قيمة أعظمية $V_{Sp_{max}} = \frac{3}{2}\,u_\infty$ من أجل $\varphi = \frac{\pi}{2}$ و $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ ، فهي إذن أصغر من السرعة الأعظمية على محيط الاسطوانة التي تنتج من (12.41) .

توزع الضغط على سطح الكرة ينتج بإدخال (12.194) في معادلة برنولي بالصيغة :

$$c_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{\rho}{2}u_\infty^2} = 1 - \frac{9}{4}\sin^2\varphi\,. \qquad (12.195)$$

في الشكل (٢٧.١٢) رسم توزع معامل الضغط المحسوب بموجب هـذه العلاقة ، وفيه يتبين أن $c_p = 0$ عندما تكون في النصف العلوي $\varphi = 42°,138°$ . ويبلغ $c_p$ قيمته الأصغرية ، $c_{p_{min}} = -\frac{9}{4}$ ، من أجل $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ ، $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ، فهي أصغر من قيمة معامل الضغط الاصغري في حالة الاسطوانة (انظر الشكل (١٠.١٢) ).

من الشكل (٢٧.١٢) نستنتج أيضاً كما في حالة الاسطوانة ، أن **الكرة لا تتعرض في جريان انسحابي منتظم مثالي لأية قوة رفع أو مقاومة** ، ولكنها تتلقى طبعاً في جريان حقيقي مقاومة كبيرة أو صغيرة تبعاً للزوجة المـ وطبيعة الجريان . وقد اتخذها الباحثون ببساطة شكلها مثالاً مفضلاً لاستخ انون المقاومة .




الشكل ٢٧.١٢ : توزع الضغط على سطح كرة في جريان مثالي منتظم مسجلاً في الاتجاه القطري (a) ، وعلى المحيط المنشور لدائرة المقطع الزوالي (b) .

نفرض الآن أن الكرة تتحرك في سائل ساكن عديم اللزوجـــة ولانهائي الامتداد حركة مستقيمة غير منتظمة باتجاه $+x$ وبتسارع مقداره $dU/dt$ ، نتيجة تطبيق قوى ضغط صدمية . إن الجريان المطلق حول الكرة يكافىء ، كما رأينا في حالة الاسطوانة (انظر ص ٤٩٣) ، ثنائية نقطية مركزها ينطبق على مركز الكرة ، وبالتالي فإن تابع الكمون لهذا الجريان :

$$\Phi_{Sp_{abs}} = -\frac{U}{2} \times \frac{R^3}{r^3} = -\frac{U}{2}\frac{R^3}{r^2}\cos\varphi \ , \qquad (12.196)$$

وتبلغ قيمته على سطح الكرة نفسها :

$$\Phi_{Sp_{abs}}(r=R) = -\frac{U}{2} R\cos\varphi \ .$$

إن السرعة الناظمية على سطح الكرة تنتج من (12.196) بالصيغة :

$$V_n = \frac{\partial\Phi}{\partial n} = \frac{\partial\Phi_{Sp_{abs}}}{\partial r} = U\frac{R^3}{r^3}\cos\varphi \Rightarrow \frac{\partial\Phi_{Sp_{abs}}}{\partial r}(r=R) = U\cos\varphi \ .$$

وتبلغ مساحة عنصر من السطح الخارجي للكرة حسب الشكل (١٢ ٢٨) :

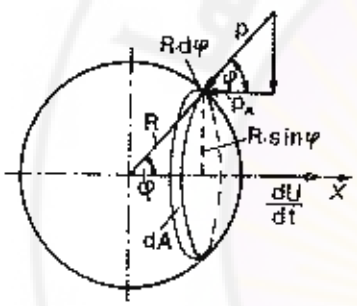
$$dA = 2\pi R \sin\varphi \cdot R\, d\varphi \ .$$

بإدخال هذه العلاقات في (12.44) وإجراء التكامل بين 0 و $\pi$ مع ملاحظة أن $\int \sin\varphi \cos^2\varphi \, d\varphi = -\frac{\cos^3\varphi}{3}$ تنتج الكتلة الهيدروديناميكية للكرة :

$$m_h = \frac{2}{3}\rho\pi R^3 = \frac{1}{2}\rho V_{Sp} = \frac{1}{2} m_{fl} \ , \qquad (12.197)$$

حيث $V_{Sp}$ حجم الكرة . هذا يعني أن **الكتلة الهيدروديناميكية للكرة تساوي نصف كتلة السائل المزاح** ، كما سبقت الاشارة لذلك . وتكون بموجب (9.41) مقاومة التسارع التي تتعرض لها الكرة :

$$F_{wb} = \frac{2}{3}\rho\pi R^3 \frac{dU}{dt} \ . \qquad (12.198)$$



الشكل ١٢.٢٨ : لحساب الكتلة الهيدروديناميكية ومقاومة التسارع للكرة.

إن توزع الضغط حول الكرة في حالة الحركة غير المنتظمة يختلف طبعاً عن توزع الضغط المبين في الشكل (١٢.٢٧٠)، ونحصل عليه بمساعدة الشكل (١٢.٢٨٠) واتباع خطوات مماثلة للخطوات المتبعة في حالة الاسطوانة (ص ٤٩٤) بالصيغة :

$$p_h = \frac{\rho}{2} R \frac{dU}{dt} \cos\varphi \ . \qquad (12.199)$$

$p_h$ يطابق شكلاً بالنسبة لمقطع زوالي للكرة التوزع المبين في الشكل (١٢.١١٠).

## ٤.١٢ أسئلة مراجعة وتمارين

س ١.١٢ : أوضح المنطلقات الرياضية والفيزيائية التي تعتمد عليها طريقة النقاط الشاذة .

س ٢.١٢ : الجريانات الكونية البسيطة تعتبر « أحجار بناء » لتشييد أجسام جريان انسيابية . أوضح مضمون هذه الجملة ، وفكر بإمكانية تسمح بالتأكيد منها تجريبياً .

س ٣.١٢ : ماهي الأسس والفرضيات التي تعتمد عليها طريقة برنباوم ـ اكرمان؟ استخرج النتائج المدونة في الشكل ( ١٧.١٢ ) .

س ٤.١٢ : اشرح أسس طريقة شلشتنغ لحساب الجريان حول جناح حامل قليل السماكة والانحناء .

س ٥.١٢ : ارسم تغير معامل قوة الرفع بدلالة زاوية الورود ، $c_A = f(\alpha)$ ، بالنسبة لصفيحة رقيقة ولبروفيل محدود السماكة ، وذلك في حالتي وجود وعدم وجود إنحناء .

س ٦.١٢ : أوضح أهمية حساب توزع الضغط على محيط بروفيل شبك ، وبين الصعوبات الرياضية التي تعترض ذلك وكيفية حلها .

ت ١.١٢ : في جريان انسحابي منتظم سرعته $u_\infty$ – يوجد نبع وبالوعة من نفس الشدة ، $\pm E$ ، مركزاهما الواقعان على المحور x ببعدان عن مركز الإحداثيات نفس المسافة ، $\pm \frac{e}{2}$ . برهن أن الجريان الإجمالي يكافيء الجريان حول جسم مستو أهليلجي بشكل قطع ناقص نصفا قطريه a و b يتحددان بدلالة $\frac{u_\infty e}{2E}$ . أحسب السرعة في نقطتي النهاية للمحور 2b .

الحل : من (10.24) مع ملاحظة اتجاه $u_\infty$ و (10.54) ينتج تابع التيار الإجمالي بالصيغة :

$$\Psi_{tot} = -u_\infty y + \frac{E}{2\pi}(\varphi_2 - \varphi_1) = -u_\infty y + \frac{E}{2\pi}\alpha \quad , \qquad (a)$$

حيث $\varphi_1$ ، $\varphi_2$ ، $\alpha$ الزوايا المحددة في الشكل ( ٨.١٠ ) . ولكن بالنسبة لنقطة ما (y,x) من حقل الجريان فان :

$$\tan\varphi_1 = \frac{y}{x + \frac{e}{2}} \quad , \quad \tan\varphi_2 = \frac{y}{x - \frac{e}{2}} \quad ,$$

وبالتالي ينتج باستخدام العلاقات المثلثية :

$$\tan\alpha = \tan(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{\tan\varphi_2 - \tan\varphi_1}{1+\tan\varphi_2\tan\varphi_1} = \frac{c\,y}{y^2+x^2-\left(\frac{c}{2}\right)^2} \quad .$$

بذلك تصبح (a) :

$$\psi_{tot} = -u_\infty\, y + \frac{E}{2\pi}\arctan\frac{c\,y}{y^2+x^2-\left(\frac{c}{2}\right)^2} \quad . \qquad (b)$$

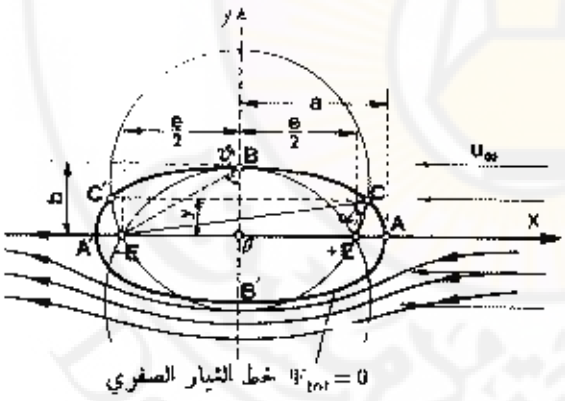
معادلة خط التيار الصفري نحصل عليها بوضع $\psi_{tot} = 0$ فتنتج من (a) العلاقة :

$$y = \frac{E}{2\pi\, u_\infty}\alpha \quad , \qquad (c)$$

ومن (b) العلاقة :

$$y^2 + x^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2 = c\,y\cot\left(\frac{2\pi u_\infty}{E}y\right) \quad , \qquad (d)$$

وهي معادلة منحنٍ مغلق بشكل قطع ناقص نصف قطره الكبير a والصغير b ، الشكل (ت ١٠١٢) ، ويحصر في داخله كامل جريان النبع والبالوعة بحيث يمكن دراسة الجريان حوله وكأنه جسم صلب .




الشكل ت ١٠١٢

إن شكل خط التيار الصفري يمكن تحديده ببساطة باتباع الخطوات المبينة في الفقرة ( ٢٠١٠١٢ ) التي يوضحها الشكل (ت ١٠١٢) بالنسبة للنقطة C ( ونظيرتها C' ) : نرسم كخط تيار لجريان النبع والبالوعة دائرة مركزها يقع على المحور y ونمر من مركزي النبع والبالوعة . ثم نرسم خطاً للتيار موازياً للمحور x ويبعد عنه المسافة y المحددة بالعلاقة (c) ، فيتقاطع مع الدائرة في النقطة C (و C') التي تمثل رأس الزاوية المحيطية $\alpha$ ، وبالتالي نقطة من خط التيار الصفري .

إن نصف القطر b يتحدد بتعيين موقع النقطة B التي تمر منها دائرة مماسية لخط التيار الصفري بحيث تصبح حسب الشكل (ت ١٠٠١٢) الزاوية المحيطة $\beta = 2\theta$ ، عندئذ نستنتج من (e) بوضع $y = b$ العلاقة :

$$\tan\ \theta = \tan\frac{\alpha}{2} = \tan\frac{\pi u_\infty b}{E} = \frac{e}{2b} \quad . \qquad (e)$$

نضع في (e) $b' = \frac{b}{e/2}$ ، $k = \frac{\pi u_\infty e}{2E}$ ، فنجد العلاقة :

$$b' = \cot(kb') \quad . \qquad (f)$$

نفس العلاقة نستنتج من (d) بوضع $x = 0$ ، $y = b$ .

إن طول نصف القطر a ينتج من الشرط الماضي بكون النقطة A (a,0) ( أو A' ) تمثل نقطة ركود ، وبالتالي يجب أن تكون السرعة فيها :

$$u(a,0) = \left(\frac{\partial\Psi_{tot}}{\partial y}\right)_A = -u_\infty + \frac{E}{2\pi}\left(\frac{1}{a-2/e} - \frac{1}{a+2/e}\right) = 0 \quad .$$

وبعد الإصلاح وإدخال نصف القطر اللابعدي $a' = \frac{a}{e/2}$ والمعامل k نجد العلاقة :

$$a'^2 = 1 + 1/k \quad . \qquad (g)$$

بذلك يكون نصفا القطر a' و b' قد تحددا بدلالة المعامل $\frac{k}{\pi} = \frac{u_\infty e}{2E}$ . ونستنتج من (f) و (g) أنه عند سرعة $u_\infty$ وغزارة E محددتين ينقص a' و يزداد b' كلما صغرت المسافة e بين النبع والبالوعة ، الشكل ( ٨،١٢ ) .

في النقطة B ( أو B' ) تبلغ السرعة قيمة أعظمية ( والضغط قيمة أصغرية ! ) ذلك أن السرعتين الجزئيتين الناتجين عن النبع والبالوعة تصبحان موازيتين للمحور x − وبالتالي من اتجاه $u_\infty$ . وعليه تنتج قيمة السرعة في B باستخدام رموز الشكل (ت ١٠٠١٢) وبفرض $r_B$ بعد B عن مركز النبع أو البالوعة :

$$V_B = -u_\infty - 2\frac{E}{2\pi r_B}\sin\theta = -u_\infty - \frac{Ee}{2\pi\left[b^2 + \left(\frac{e}{2}\right)^2\right]} \quad ,$$

أو بصياغة أخرى بعد إدخال المعامل k ونصف القطر اللابعدي b' :

$$V_B = -u_\infty\left[1 + \frac{1}{k(1+b'^2)}\right] \quad . \qquad (h)$$

ت ١٢.٢ : بالنسبة للبروفيل المتناظر NACA 0010 والمحدد شكلا حسب [104] بموجب تصنيف NACA الرباعي الأرقام بمعادلة توزع السماكة :

$$y_{ul} = 0{,}1485\sqrt{\xi} - 0{,}0630\,\xi - 0{,}1758\,\xi^2 + \\ + 0{,}1422\,\xi^3 - 0{,}0508\,\xi^4 , \qquad (a)$$

حيث $y_{ul} = \frac{y_{ul}}{l}$ ، $x_{ul} = \frac{x}{l}$ ، يطلب حساب توزع الضغط على محيطه إذا وجد في جريان انسحابي منتظم موازٍ لوتر البروفيل الأفقي سرعته $u_\infty$ ( أنظر الشكل ١٢ ١٥ ) .

الحل : المطلوب هنا حل المسألة الأساسية الثانية للبروفيل عديم الانحناء ذي سماكة قليلة في جريان متناظر . وعليه يمكن بموجب ( ٥.٢.١٢ ) التعويض عن تأثير البروفيل بتوزع من البنابيع - البالوعات بخطاره مطابقاً لسلسلة غلاورت (12.67) . ونجري الحساب العملي لتوزع السرعة والضغط وفقاً لطريقة شلشتنغ الموضحة في الفقرة ( ٧.٢.١٢ ) مع اعتبار الانحناء $y_s = 0$ .

لحساب الأمثال $B_1$ ، $B_2$ ، $B_n$ لسلسلة غلاورت (12.67) نحدد أولاً ميل المماس على محيط البروفيل ، حيث ينتج من (a) :

$$y'_{ul} = \frac{dy_{ul}}{dx} = 0{,}07425\sqrt{1-\xi} - 0{,}0630 - 0{,}3516\,\xi + \\ + 0{,}4266\,\xi^2 - 0{,}203\,\xi^3 , \qquad (b)$$

بذلك يمكن تنظيم الجدول (1) المتضمن معاملات ريفلس $\varkappa_{ul} = \sqrt{1+y'^2_{ul}}$ لحساب توزع السرعة .

وتنتج قيم ميل المماس على محيط البروفيل في النقاط الاختبارية الثلاثة التي نختارها بموجب (12.75) كما في الجدول (2) .

جدول ٢ :

| $n$ | $\frac{x_n}{l}$ | $y'_n$ |
|---|---|---|
| 1 | $3/12 = 0{,}025$ | 0,0210 |
| 2 | $7/12 = 0{,}583$ | $-0{,}0660$ |
| 3 | $11/12 = 0{,}917$ | $-0{,}1055$ |

جدول ١ :

| $\frac{x}{l} = \frac{\xi}{2}$ | 0 | 0,025 | 0,05 | 0,10 | 0,15 | 0,20 | 0,25 | 0,30 | 0,40 | 0,50 | 0,60 | 0,70 | 0,80 | 0,90 | 0,95 | 1,0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\varkappa_{ul}$ | $\infty$ | 1,076 | 1,031 | 1,011 | 1,003 | 1,001 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,001 | 1,002 | 1,003 | 1,004 | 1,005 | 1,005 | 1,006 |

ندخل هذه القيم في المجموعة الأولى من المعادلات (12.133) فنحصل على ثلاث معادلات خطية لحساب الأمثال $B_0$ ، $B_2$ ، $B_3$ ، وبحلها ينتج :

$$B_0 = 0{,}0716 \;\; ; \;\; B_2 = 0{,}0242 \;\; ; \;\; B_3 = -\,0{,}0260 . \qquad (a)$$

بإدخال هذه القيم في ( 12.67 ) نحصل على توزع الينابيع - الماليوعات بالصيغة :

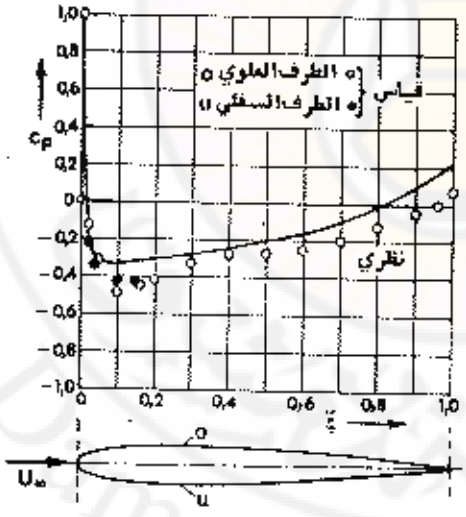
$$q(\varphi) = 2a_\infty \left[0{,}0716\left(\cot\frac{\varphi}{2} - 2\sin\varphi\right) + 0{,}0242\sin 2\varphi - 0{,}0260\sin 3\varphi\right]. \qquad (b)$$

بذلك تصبح مركبتا السرعة $u_{||}$ ، $v_{||}$ بموجب ( 12.69 ) و ( 12.70 ) عددة تماماً في كل نقطة من وتر البروفيل $\xi = x/l$ التي نختار مواقعها حسب الجدول (1) ، وذلك بعد حساب القيم المقابلة للتوابع المثلثية $\cot\frac{\varphi}{2}$ ، $\sin\varphi$ ، $\sin 2\varphi$ ، $\sin 3\varphi$ ، $\cos\varphi$ بمساعدة العلاقة (12.65) والعلاقات المثلثية المعروفة .

توزع السرعة على محيط البروفيل ينتج من (12.73) بالصيغة :

$$\frac{V_B}{U_\infty} = \frac{1}{\tau_{B0}(\xi)}\left[1 + 0{,}0716\,(1 + 2\cos\varphi) - 0{,}0242\cos 2\varphi - \right.$$
$$\left. - \,0{,}0260\cos 3\varphi\right], \qquad (c)$$

وينتج توزع معامل الضغط $c_p$ من (12.74) . فإذا حسبنا قيم $c_p$ في مجموعة النقاط $\xi$ المحددة في الجدول (1) نحصل على توزع الضغط النظري كمنحن مستمر في الشكل (ت ٢٠١٢) ، الذي يتضمن أيضاً قيم $c_p$ المقاسة على الطرف العلوي والسفلي للبروفيل . ويتبين من تطابق القيم النظرية والمقاسة ، باستثناء منطقة صغيرة في جوار الحافة الخلفية للجناح ، صحة طريقة الحساب المتبعة . أما الفرق بين القيم المقاسة والمحسوبة فهو ناجم عن تأثير اللزوجة .




الشكل ت ٢٠١٢ ، مقارنة بين توزع الضغط حول البروفيل المتناظر NACA 0010 المحسوب نظرياً والمقاس في جريان متناظر بدون زاوية ورود حسب [17] .

ت ٣.١٢ ، يراد قياس الضغط الستاتيكي قبل صرة محور دولاب آلة جريان محورية . على أي بعد x من المركز يجب وضع مسبار الضغط إذا كان قطر الصرة $D = 100\ mm$ ومعامل الضغط $c_p$ يجب ألا يتجاوز 1% ؟

الحل : إن الجريان حول صرة المحور يمكن اعتباره مكافئاً للجريان حول جسم نصفي متناظر دورانياً ( الشكل ٢٤.١٢ ) ، وبالتالي ناشئاً عن تضام نبع تقطي شدته E مع جريان أفقي منتظم سرعته $u_\infty$ . في نقطة القياس M الواقعة على محور التناظر x السالب تبلغ السرعة حسب (12.180) مع ملاحظة أن إشارة x سالبة و $\rho = 0$ :

$$u_M = u_\infty - \frac{E}{4\pi x^2} \quad . \qquad (a)$$

باستبدال E بقيمتها حسب (12.182) بعد وضع $D = 2R$ نجد بعد الإصلاح :

$$u_M = u_\infty \left(1 - \frac{D^2}{16\,x^2}\right) \quad . \qquad (b)$$

نطبق معادلة برنولي بين M ونقطة على بعد كبير من المركز فنجد معامل الضغط :

$$c_p = \frac{p_M - p_\infty}{\frac{\rho}{2} u_\infty^2} = 1 - \left(\frac{u_M}{u_\infty}\right)^2 \quad . \qquad (c)$$

بإدخال (b) في (c) وملاحظة أنه في نقطة القياس M التي تبعد $x_M$ عند المركز يجب أن يكون $c_p = \frac{1}{100}$ نجد :

$$\frac{1}{100} = 1 - \left[1 - \frac{D^2}{16\,x_M^2}\right]^2 \Rightarrow x^4 - 12{,}5\,D^2 x^2 + 0{,}39\,D^4 = 0 \quad .$$

حل هذه المعادلة وإدخال القيم العددية ينتج :

$$x_M \approx 355\ mm \quad .$$

ت ٤.١٢ ، إن طريقة الإنذار الهيدروليكي المبكر تعتمد على قياس تغير الضغط الناتج عن حركة السائل حول جسم يقترب من مركز القياس .

نعتبر كرة نصف قطرها $R = 600\ mm$ تتحرك في هواء ساكن عديم الاحتكاك بسرعة $u_\infty = 200\ \frac{m}{s}$ . على المحور x ثبت في النقطة M مقياس براندل المصمم بحيث يبدأ بتسجيل تغير الضغط عندما يكون الضغط التحريكي $q_M = 1\ mm\ WC$ . عند أية

مسافة $x_M$ من مركز الكرة يبدأ جهاز الضغط بالقياس إذا اعتبرنا كثافة الهواء $\rho = 1{,}225\ kg/m^3$ ؟

الحل : إن المراقب الواقف في نقطة القياس M يسجل الجريان المطلق حول الكرة المكافىء للثنائية قراغية تابع كمونها حسب (11.25) :

$$\Phi_{Sp\ dis} = \Phi_D = \frac{M}{4\pi} \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \quad . \qquad (a)$$

عندما يبدأ مقياس براندل بتسجيل تغير الضغط تكون السرعة $u_M$ على المحور x قد بلغت قيمة بحيث يكون :

$$q_M = \frac{\rho}{2} u_M^2 = 1\ mmWC = 9{,}80\ N/m^2 \ . \qquad (b)$$

إن السرعة على المحور x تنتج باشتقاق (a) جزئياً بالنسبة لـ x ووضع $y = z = 0$ :

$$u\ (\ y = z = 0\ ) = -\frac{M}{2\pi}\ \frac{1}{x^3} \quad . \qquad (c)$$

في نقطة الركود الامامية عند $x = R$ تكون $u(y=z=0) = u_\infty$ ، وبالتالي ينتج من (c) عزم الثنائية $M = -\ 2\pi\ u_\infty R^3$ وتصبح بذلك السرعة :

$$u\ (\ y = z = 0\ ) = u_\infty \left(\frac{R}{x}\right)^3 \quad . \qquad (d)$$

بوضع $x_M = x$ ، $u_M = u\ (y=z=0)$ يصبح ضغط الركود في نقطة القياس M حسب (b):

$$q_M = \frac{\rho}{2} u_\infty^2 \left(\frac{R}{x_M}\right)^6 \ , \qquad (e)$$

وتكون المسافة بين M ومركز الكرة :

$$x_M = R\ \sqrt[3]{u_\infty / u_M} \quad . \qquad (f)$$

بإدخال القيم العددية نجد حسب (e) :

$$u_M = \sqrt{\frac{2\ q_M}{\rho}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 9{,}80}{1{,}225}} = 4\ m/s \ ,$$

ونجد حسب (f) :

$$x_M = 0{,}6\ \sqrt[3]{200/4} = 2{,}208\ m \ .$$

* * *

## ١٣ طريقة التوابع المركبة لحساب الجريانات الكمونية المستوية

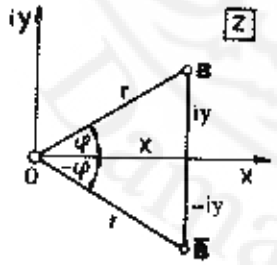
تستغل مزايا **نظرية التوابع المركبة** Theory of complex function في طرق عملية متعددة لحساب الجريانات الكمونية **المستوية** فقط . لذلك فمن المفيد أولاً أن نعيد الذاكرة ، وباختصار شديد ، بعض الخصائص الرياضية لهذه التوابع .

### ١٣.١ الاعداد المركبة وتمثيلها

بدلاً من تحديد موقع نقطـــة في المستوي الديكارتي x y بواسطة العددين الحقيقيين x و y يمكن تحديده بمساعدة عدد واحـد فقط يطلق عليه **العدد المركب** Complex number ويعرف بالعلاقة :

$$z = \sqrt{+1}\, x + \sqrt{-1}\, y = x + i y \,, \qquad (13.1)$$

حيث تمثل $\sqrt{+1} = 1$ قيمة واحدة **الاعداد الحقيقية** Real numbers و $\sqrt{-1} = i$ قيمة واحدة **الاعداد التخيلية** Imaginary numbers . وعليه يطلق على المحور x الذي يحتوي كافة الاعداد الحقيقية اسم **المحور الحقيقي** ، وعلى المحور y الحاوي على كافة الاعـــداد التخيلية اسم **المحور التخيلي** . ويتشكل من هذين المحورين المتعامدين **المستوي المركب** Complex plane أو **مستوي غوص العددي** ، نسبة للعالم الالماني **غوص** ، الشكل (١٠١٣) (في بعض المصادر العربية يسمى هـذا المستوي أيضاً الساحة العقدية ) .



الشكل ١٠١٣ : المستوي المركب حسب غوص .

كل عدد مركب z يمثل في المستوي المركب $\boxed{z}$ نقطة معينة B ، وتكون **القيمة المطلقـــة** Modulus لهـذا العدد ، $|z|$ ، مساوية للقيمـة

المطلقة للشعاع $r = \overrightarrow{OB}$ ( ويطلق عليها البعض **طويلة** العدد المركب ) . أما الزاوية القطبية $\varphi$ فتمثل **الازاحة الزاوية** Argument ( ويطلق عليها البعض **العمدة** ! ) للعدد المركب . ونجد بسهولة من الشكل (١٠١٣) أن :

$$\left.\begin{aligned} r = |r| = |z| &= \sqrt{x^2 + y^2} \ , \\ \varphi = \arg z &= \operatorname{arc\,tan} \frac{y}{x} \ . \end{aligned}\right\} \qquad (13.2)$$

باستخدام الاحداثيين القطبيين $r, \varphi$ ووضع $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ تأخذ العلاقة (13.1) ، المعروفة باسم **الصيغة الجبرية** للعدد المركب، الشكل :

$$z = r\,(\cos \varphi + i \sin \varphi) = r\, e^{i\varphi} \ , \qquad (13.3)$$

ونكون قد حصلنا على **الصيغة المثلثية** و**الصيغة الأسّية** للعدد المركب .

كل عدد مركب ، أو تابع للاحداثي المركب $F = f(z)$ ، يتألف من **جزء حقيقي** $Re\,(z)$ , Real part ، ومن **جزء تخيلي** $Im(z)$, Imaginary part . ويتساوى عددان مركبان إذا تساوى جزآهما الحقيقيان وجزآهما التخيليان مع بعضها البعض . أما إذا تساوى الجزآن الحقيقيان لعددين مركبين z و $\bar{z}$ مع بعضها البعض واختلف جزآهما التخيليان بالاشارة فقط ، فيطلق على $\bar{z}$ **العدد المركب المرافق** للعدد z Conjugate complex number ، ويكون :

$$\bar{z} = x - i\,y = r\,(\cos \varphi - i \sin \varphi) = r\, e^{-i\varphi} \ . \qquad (13.4)$$

$\bar{z}$ يمثل في المستوي $\boxed{z}$ نقطة $\bar{B}$ هي الصورة المرآوية ( المطابقة ) للنقطة B ، الشكل ( ١٠١٣ ) . ويمكن بالنسبة لكل عددين مركبين مترافقين استنتاج العلاقات التالية :

$$|z| = |\bar{z}| = r = \sqrt{z\,\bar{z}} \ , \qquad (13.5)$$

$$Re(z) = x = \frac{\bar{z}+z}{2} \quad ; Im(z) = y = i\,\frac{\bar{z}-z}{2} \quad . \qquad (13.6)$$

إذا ضربنا العدد المركب $z = re^{i\varphi}$ بواحدة الاعداد التخيلية i التي تمثل حسب التعاريف السابقة شعاعاً قيمته المطلقة « واحد » وإزاحته الزاوية $\frac{\pi}{2}$ ( إتجاه y ) نجد :

$$z.i = re^{i\varphi}.1e^{i\frac{\pi}{2}} = re^{i(\varphi+\frac{\pi}{2})} \qquad . \qquad (13.7)$$

هذا يعني أن عملية الضرب هذه تكافيء تدوير الشعاع المكاني $r = \overrightarrow{OB}$ زاوية مقدارها $\frac{\pi}{2}$ .

إن العمليات الحسابية الاربعة تجرى بالنسبة للاعداد المركبة بنفس الطريقة التي تجرى بها هذه العمليات في حالة ذوات الحدين مع ملاحظة أن $i^2 = -1$ . في حالة تقسيم عدد مركب على آخر فانه بالامكان التخلص بسهولة من الجزء التخيلي للمخرج إذا ضربنا صورة ومخرج الكسر بالعدد المركب المرافق للمخرج ولاحظنا أن $\bar{z}.z = (x+iy)(x-iy) = x^2+y^2$ ، أي أن المخرج يصبح عدداً حقيقياً .

إن رفع عدد مركب للقوة m يتم بموجب قانون موبفري A. de Moivre : (1667 – 1754)

$$\left[\, r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)\,\right]^m = r^m\left[\,\cos m\varphi + i\sin m\varphi\right], \qquad (13.8)$$

ويفضل أحياناً استخدام الصيغة الاسية :

$$\left[re^{i\varphi}\right]^m = r^m\, e^{im\varphi} \quad . \qquad (13.9)$$

m يمكن ان يكون عدداً صحيحاً أو كسرياً موجباً أو سالباً ، وعليه فان استخراج الجزر n لعدد مركب يتم أيضاً حسب قانون موبفري :

$$\sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right). \qquad (13.10)$$

كل تابع لعدد مركب متحول يتألف من جزء حقيقي وجزء تخيلي :

$$F(z) = F(x + iy) = Re(x,y) + i\,Im(x,y)\,. \qquad (13.11)$$

نسمي التابع $F(z)$ **تابعاً تحليلياً** Analytical function في نقطة أو في ساحة وحيدة الترابط إذا كان هذا التابع قابل للاشتقاق في النقطة المعتبرة ، أو في أية نقطة من الساحة ، بمعنى أن قيمة المشتق $\frac{dF(z)}{dz}$ لاتتعلق باتجاه وقيمة العنصر $dz$.

على هذا الاساس يمكن البرهان ( راجع [84] ) أن :

الشرط اللازم والكافي لكي يكون التابع $F(z)$ تحليلياً هو أن يحقق كل من جزئيه الحقيقي والتخيلي معادلة **لابلاس التفاضلية** ، $\Delta Re = 0, \Delta Im = 0$ ، وترتبط عندئذ بينهما معادلتا **كوشي ـ ريمان التفاضليتان** :

$$\frac{\partial Re}{\partial x} = \frac{\partial Im}{\partial y}\,;\quad \frac{\partial Re}{\partial y} = -\frac{\partial Im}{\partial x}\,. \qquad (13.12)$$

## ٢.١٣ تابع الكمون المركب والسرعة المركبة

بما أن تابع الكمون $\Phi$ وتابع التيار $\Psi$ لجريان ستو يحققان بموجب (10.13) معادلتي **كوشي ـ ريمان التفاضليتين** وكل منها يحقق معادلة **لابلاس التفاضلية** ينتج على أساس (13.11) و (13.12) أن التابع :

$$F(z) = \Phi(x,y) + i\,\Psi(x,y) \qquad (13.13)$$

هو تابع تحليلي يطلق عليه **تابع الجريان** Flow function ، وغالباً تابع **الكمون المركب** Complex potential function . من جهة أخرى يمكن اعتبار الجزء الحقيقي لكل تابع تحليلي ، $F(z)$ ، تابع كمون سرعة ،

$Im\,(x,y) \equiv \Psi(x,y)$ ، والجزء التخيلي تابع تيار ، $Re\,(x,y) \equiv \Phi(x,y)$ ، لجريان كموني مستوٍ بغض النظر فيما إذا كان لهذا الجريان أهمية تطبيقية أم لا .

إن النتيجة السابقة تتيح لنا إمكانية الاستفادة من التوابع التحليلية المتعددة المعروفة في نظرية التوابع . فاذا فصلنا الجزء الحقيقي عن الجزء التخيلي لأي تابع تحليلي نحصل مباشرة على تابع الكمون $\Phi$ وتابع التيار $\Psi$ لجريان كموني مستوٍ تنطبق عليه كافة العلاقات المستخرجة في الفقرة (١٠) .

كل تابع تحليلي يخضع لمبدأ التبادل ( ص ٤١٨ ). فاذا ضربنا طرفي العلاقة (13.13) بـ $i$ ، فنكون بموجب (13.7) قد دورنا محاور الاحداثيات $90°$ ، ويكون بالتالي التابع :

$$\hat{F}(z) = iF(z) = i(\Phi + i\Psi) = i\Phi - \Psi \equiv \hat{\Phi} + i\hat{\Psi} \qquad (13.14)$$

أيضاً تابعاً تحليلياً جزؤه الحقيقي والتخيلي يكافئان على التوالي الجزء التخيلي والحقيقي للتابع $F(z)$ . هذا يعني أن كل تابع تحليلي يسمح من حيث المبدأ بتمثيل نوعين من الجريانات الكمونية المستوية . ولكن السؤال يتركز في التطبيق العملي على إيجاد التابع التحليلي الذي يعطي صورة للجريان تحقق الشروط الحدية للمسألة المطروحة .

كذلك يمكن استخدام مبدأ التضام للحصول على توابع جريان أكثر شمولاً بواسطة الجمع الخطي لعدد من توابع الجريان البسيطة :

$$F(z) = F_1(z) + F_2(z) + \ldots + F_n(z) . \qquad (13.15)$$

نكوّن الآن التفاضل التام لتابع الجريان المركب المعطى بالعلاقة (13.13) فنجد :

$$dF(z) = \frac{\partial F(z)}{\partial x}\,dx + \frac{\partial F(z)}{\partial y}\,dy = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x} + i\,\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right]dx + \left[\frac{\partial \Phi}{\partial y} + i\,\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right]dy$$

بإدخال العلاقة (10.13) ومراعاة العلاقة (13.1) يصبح :

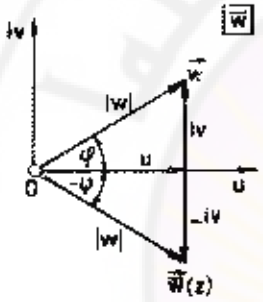
$$dF(z) = (u - iv)\,dx + (u - iv)\,i\,dy = (u - iv)\,dz \ .$$

بذلك تنتج بموجب (13.4) و(13.5) العلاقة الهامة :

$$\boxed{\frac{dF(z)}{dz} = u - iv = \overline{w}(z) = |w|\,e^{-i\varphi}} \quad , \qquad (13.16)$$

التي تنص على ما يلي ، الشكل (٢٠١٣) :

الكسر التفاضلي لتابع الكمون المركب $F(z)$ بالنسبة للمتحول المركب $z$ يساوي القيمة المركبة **المرافقة** للسرعة المركبة $w = u + iv$.




الشكل ٢٠١٣: السرعة المركبة.

$\overline{w}(z)$ إذن ، التي تمثل الصورة المرآوية للسرعة المركبة $w$ بالنسبة للمحور الحقيقي $x$ ، هي تابع تحليلي للمتحول المركب $z$ .

بمعرفة تابع الجريان يمكن بسهولة تحديد حقل السرعة وقيمة شعاع السرعة في كل نقطة من حقل الجريان حيث نجد بموجب (13.5) :

$$|w| = |\overline{w}| = \left|\frac{dF(z)}{dz}\right| = u^2 + v^2 = V \quad , \qquad (13.17)$$

وبمعرفة توزع السرعة يمكن بعدئذ بمساعدة معادلة برنولي تحديد توزع الضغط .

## ٣.١٣ أمثلة عن توابع الكمون المركبة البسيطة

سنختار بعض الامثلة لجريانات بسيطة سبقت دراستها في الفقرة (١٠) بمساعدة تابع الكمون وتابع التيار الحقيقيين وذلك لتبيان ميزات طريقة التوابع المركبة، التي تتجلى

يكون الجزء الحقيقي والتخيلي لتابع الجريان المركب يحققان حكماً معادلة لابلاس التفاضلية . وعليه فالخطوة الاولى لهذه الطريقة هي فصل الجزء الحقيقي لتابع الجريان المركب عن الجزء التخيلي ومن ثم تحديد حقل السرعة وصورة الجريان حول بعض خطوط التيار المتميزة التي نختارها ونفرض أنها قد تصلبت .

## ١٠٣٠١٣ الجريان الانسحابي المنتظم

لنعتبر التابع التحليلي الخطي :

$$F_T(z) = c\,z\;;\quad c = c_1 + i c_2\quad , \tag{13.18}$$

حيث $c_{1,2}$ عددان حقيقيان. نفصل الجزء الحقيقي عن التخيلي لهذا التابع فينتج:

$$F_T(z) = (c_1 + i c_2)(x + i y) = (c_1 x - c_2 y) + i (c_2 x + c_1 y) .$$

وعليه يكون بموجب (13.13) تابع الكمون وتابع التيار :

$$\Phi_T(x,y) = c_1 x - c_2 y;\ \Psi_T(x,y) = c_2 x + c_1 y. \tag{13.19}$$

إن خطوط التيار $\Psi = \text{const}$ تمثلها حزمة من المستقيمات المتوازية المائلة على المحور x بزاوية ثابتة ، وتشكل مع خطوط الكمون التي تمثلها أيضاً حزمة مستقيمات متوازية شبكاً من الخطوط المتعامدة .

حقل السرعة يتحدد من (13.16) بالعلاقة :

$$\overline{w} = u - i v = dF/dz = c \Rightarrow V = |\overline{w}| = |c| = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} = \text{const}. \tag{13.20}$$

التابع $F_T(z) = c\,z$ يمثل إذن جريانا انسحابياً منتظماً مائلاً على المحور x بزاوية ثابتة ، ( انظر ١٠٣٠١٠ ) . فاذا كان الجريان المنتظم موازياً للمحور x وبسرعة $u_\infty$ يصبح $F_T(z) = u_\infty z$ ، وعندما يكون موازياً للمحور y وبسرعة $v_\infty$ يصبح : $F_T(z) = -i v_\infty z$ .

## ٢.٣.١٣ النبع والبالوعة والدوعصار الكموني

لنعتبر التابع التحليلي :

$$F_Q(z) = \frac{E}{2\pi} \ln z \ , \qquad (13.21)$$

حيث E عدد ثابت حقيقي موجب أو سالب . لتحليل هذا التابع إلى جزئه الحقيقي والتخيلي نستبدل z بموجب (13.3) فنجد :

$$F_Q(z) = \Phi_Q + i\,\Psi_Q = \frac{E}{2\pi} \ln r + i\,\frac{E}{2\pi}\varphi \ . \qquad (13.22)$$

وعليه يكون تابع الكمون وتابع التيار :

$$\Phi_Q = \frac{E}{2\pi} \ln r \quad ; \quad \Psi_Q = \frac{E}{2\pi}\varphi \ , \qquad (13.23)$$

وذلك بالتطابق مع (10.26) و (10.29) . إذن فإن تابع الجريان المركب $F_Q(z)$ يمثل نبعاً مستوياً في حالة $E > 0$ ، وبالوعة مستوية في حالة $E < 0$ ، حيث تعبر E عن شدة النبع أو البالوعة ( راجع ٢.٣.١٠ ) :

نضرب طرفي (13.21) بـ $i -$ ونستبدل E بـ $I'$ فنجد :

$$F_{I'}(z) = -\,i\,F_Q(z) = -\,i\,\frac{I'}{2\pi} \ln z \ . \qquad (13.24)$$

بتحليل هذا التابع إلى جزئه الحقيقي والتخيلي نحصل على تابع الكمون وتابع التيار :

$$\Phi_{I'} = \frac{I'}{2\pi}\varphi \quad ; \quad \Psi_{I'} = -\,\frac{I'}{2\pi} \ln z \ . \qquad (13.25)$$

وذلك بالتطابق مع (10.34) و (10.35) . إذن فإن تابع الجريان المركب

$F_n(z)$ يمثل إعصاراً كمونياً جولانه $\Gamma$ بعكس اتجاه دوران عقارب الساعة (انظر ٣.٣.١٠) .

## ٣.٣.١٣ التوابع المنوية والجريان حول اسطوانة

باستخدام مبدأ التضام يمكننا الآن الحصول على تابع الجريان المركب لنبع وبالوعة من نفس القوة. فإذا فرضنا أن النبع واقع في مركز الإحداثيات ، $z = 0$ ، والبالوعة تقع على المحور الحقيقي السالب وعلى بعد e من النبع فإن تابع الجريان المركب للجريان الناتج عنها يأخذ الصيغة :

$$F_{m}(z) = \frac{E}{2\pi}\left[\ln z - \ln (z+e)\right] \quad . \qquad (13.26)$$

بتحليل هذا التابع إلى جزئه الحقيقي والتخيلي نحصل على تابع الكمون وتابع التيار للجريان الكلي بصيغتين مطابقتين للعلاقتين (10.53) و (10.54) ، وتتحدد صورة خطوط التيار كما في الشكل (٨٠١٠) .

نجعل الآن البالوعة تقترب من النبع بحيث يبقى الجداء $M = E\,e - E\,\Delta x$ ذا قيمة ثابتة حتى في حالة تناهي البعد بين النبع والبالوعة إلى الصفر . عندئذ ينتج من (13.26) :

$$F_{D}(z) = \frac{M}{2\pi}\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\ln z - \ln (z+\Delta x)}{\Delta x} = -\frac{M}{2\pi}\frac{d}{dz}\ln z \quad ,$$

$$F_{D}(z) = -\frac{M}{2\pi}\frac{1}{z} \quad . \qquad (13.27)$$

بتحليل هذا التابع إلى جزئه الحقيقي والتخيلي نحصل على تابع الكمون وتابع التيار :

$$\left.\begin{aligned}\Phi_D &= -\frac{M}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2} = -\frac{M}{2\pi}\frac{\cos\varphi}{r}\\ \Psi_D &= \frac{M}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2} = -\frac{M}{2\pi}\frac{\sin\varphi}{r}\end{aligned}\right\}\ , \qquad (13.28)$$

وذلك بالتطابق مع العلاقتين (10.65) و (10.67) . إذن فان تابع الجريان $F_D(z)$ يمثل ثنائية مستوية محورها منطبق على المحور الحقيقي x وعزمها M ( راجع ٤.٣.١٠ وخاصة الشكل ١١.١٠) . بالنسبة لثنائية محورها منطبق على المحور التخيلي y ينتج تابع الجريان بسهولة من العلاقة :

$$\hat{F}_D(z) = i\,F_D(z) = -i\frac{M}{2\pi}\frac{1}{z}\ . \qquad (13.29)$$

إن الجريان الانسحابي اللاجولاني، $\Gamma = 0$ ، حول اسطوانة دائرية نصف قطرها R ينتج ، كما نعلم ، من تضام ثنائية مستوية مع جريان منتظم . فإذا فرضنا الجريان الانسحابي باتجاه x - ومرعته $u_\infty$ نجد باستخدام (13.18) و (13.27) ووضع عزم الثنائية $M = 2\pi u_\infty R^2$ ، حسب (12.36) ، تابع الكمون المركب للجريان اللاجولاني حول الاسطوانة بالصيغة :

$$F_C(z) = -u_\infty\left(z + \frac{R^2}{z}\right)\ . \qquad (13.30)$$

يتحليل هذا التابع إلى جزئه الحقيقي والتخيلي نحصل على تابع الكمون $\Phi_C$ وتابع التيار $\Psi_C$ بصيغتين مطابقتين للعلاقتين (12.37) و (12.38) مع عكس إشارة $u_\infty$ فقط ، وتكون بالتالي صورة الجريان مطابقة للشكل (٩.١٢) إذا عكسنا فيه إتجاه خطوط التيار .

للحصول على حقل السرعة نستعين بالعلاقة (13.16) فنجد بسهولة :

$$\overline{w}(z) = u - i\,v = -u_\infty\left(1 - \frac{R^2}{z^2}\right)\ . \qquad (13.31)$$

بفصل الجزء الحقيقي عن التخيلي نتيجة مركبتا السرعة u و v بصيغتين مطابقتين للعلاقتين المحددتين في (12.39) مع عكس إشارة $u_\infty$ فقط .

على أساس ما تقدم يمكن أيضاً حساب الجريان الجولاني ، $\Gamma \neq 0$ ، حول اسطوانة دائرية . فإذا أضفنا تابع الكمون المركب للاعصار الكموني حسب (13.24) إلى (13.30) ينتج تابع الجريان :

$$F_{CI}(z) = -u_\infty \left(z + \frac{R^2}{z}\right) - i\frac{\Gamma}{2\pi} \ln z \ . \qquad (13.32)$$

إن الجزء الحقيقي لهذا التابع يمثل تابع الكمون $\Phi_{CI}$ ، والجزء التخيلي تابع التيار $\Psi_{CI}$ . ونحصل على صورة للجريان مطابقة للشكل (١٢.١٢) إذا عكسنا فيه إتجاه خطوط التيار . كما نحصل مباشرة على حقل السرعة باشتقاق $F_{CI}$ بالنسبة لـ z حسب (13.16) .

## ٤.٣.١٣ الجريان ضمن الفراغ المزاوي لجدارين مستويين

لنعتبر التابع التحليلي

$$F(z) = \frac{a}{n} z^n \ , \qquad (13.33)$$

حيث a و n أعداد حقيقية . نفصل الجزء الحقيقي عن التخيلي لهذا التابع باستخدام العلاقة (13.13) وقانون مويفوي (13.9) فنجد :

$$F(z) = \Phi + i\Psi = \frac{a}{n} r^n e^{in\varphi} = \frac{a}{n} r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) \ ,$$

وينتج بالتالي تابع الكمون :

$$\Phi(r, \varphi) = \frac{a}{n} r^n \cos n\varphi \ , \qquad (13.34)$$

وتابع التيار :

$$\Psi(r,\varphi) = \frac{a}{n} r^n \sin n\varphi \quad . \qquad (13.35)$$

معادلة خطوط التيار للجريان تنتج بوضع $\Psi = \text{const}$ بالصيغة :

$$\frac{a}{n} r^n \sin n\varphi = \text{const} = C \quad . \qquad (13.36)$$

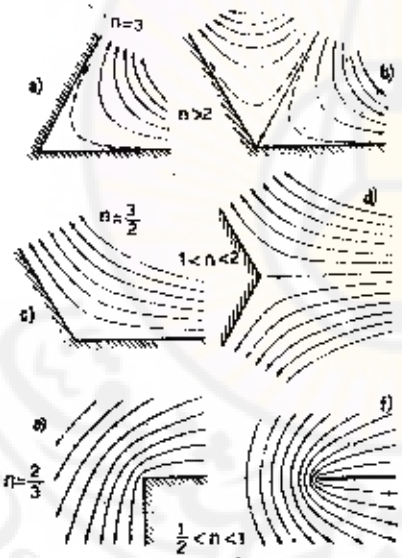
فإذا حددنا قيمتي الثابتين a و n نحصل على حزمة من خطوط التيار بإيجاد العلاقة بين r و $\varphi$ واعطاء الثابت C قيماً مختلفة . وبصورة خاصة تنتج معادلة خط التيار الصفري من (13.35) بوضع $\Psi = 0$ فنجد :

$$\sin n\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{k\pi}{n} \ , \ k = 0,1,2,\ldots \qquad (13.37)$$

إذن فإن المستقيمات المارة من مركز الإحداثيات والمائلة بزوايا

$$\varphi = 0 \ , \ \frac{\pi}{n} \ , \ 2\frac{\pi}{n} \ , \ 3\frac{\pi}{n} \ \ldots$$

تمثل خطوط تيار صفرية . فإذا اعتبرناها تمثل آثار جدران صلبة مستوية يخترق خط تقاطع كل اثنين منها مستوي الشكل عمودياً نحصل حسب قيمة n العددية على جريانات مختلفة محصورة في المجال الزاوي بين جدارين مستويين . الشكل (٣.١٣) يبين أمثلة متعددة عن هذه الجريانات، حيث أختير الثابت $a > 0$ بالنسبة للمثال (b) ، واختير $a < 0$

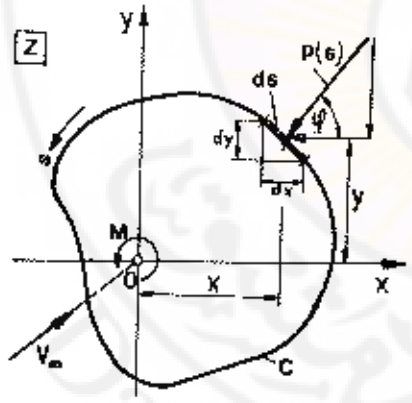



الشكل ٣.١٣ ، أمثلة عن الجريانات ضمن الفراغ الزاوي لجدارين مستويين تنتج من أجل قيم مختلفة للثابتين a و n في تابع الجريان المركب حسب (13.33) . في المثال (b) فقط اختير $a > 0$ وفي الامثلة الباقية اختير $a < 0$ .

الأمثلة الباقية . وفي الحالة الخاصة التي تكون فيها $n = 2$ ، $a > 0$ نحصل على صورة الجريان المبينة في الشكل (ت ٢٠١٠) ، ص٤٥٣ ، إذا أخذنا نصف المستوي العلوي فقط . والجدير بالملاحظة أنه في حالة $n = \frac{2}{3}$ نحصل على الجريان حول زاوية قائمة ، الشكل ( ٣٠١٣ - ه ) ، وعندما $n = \frac{1}{2}$ نحصل على الجريان حول الطرف الحاد لصفيحة مستوية ، الشكل (٣٠١٣ - f) ، وفي كلتي الحالتين تبلغ السرعة على الطرف الحاد قيمة لا نهائية ( نظرياً ) .

## ٤٠١٣ قانونا بلازيوس - تشابليجين لحساب محصلة قوى الضغط وعزمها

نعتبر جسماً اسطوانياً اعتباطي الشكل واقعاً في جريان انسحابي مثالي سرعته $V_\infty$ ، ونسأل عن محصلة قوى الضغط المؤثرة على هذا الجسم وعن عزمها بالنسبة لمحور نختاره . لقد أجاب عن هذا السؤال لأول مرة عام 1910 كل من العالم الالماني بلازيوس H.Blasius في دراسته « طرق نظرية التوابع المركبة في الهيدروديناميك » ( انظر [17] ) والعالم الروسي تشابليجين S. A. Tschaplygin في دراسته « حول الضغط المؤثر على جسم في جريان انسحابي مستوٍ » ( انظر [16] ) .



الشكل ٤٠١٣ : لاستخراج قانوني بلازيوس - تشابليجين لحساب محصلة قوى الضغط وعزمها .

نفرض أن مقطع الجسم المحدد بالمنحني C منطبق على المستوي $\boxed{z}$ ، الشكل (٤٠١٣) . ليكن ds عنصراً خطياً من C ، $p(s)$ الضغط المؤثر عليه ،

ولتكن $F_p$ محصلة قوى الضغط بالنسبة لواحدة عرض الجسم . نحلل $F_p$ إلى مركبتين $F_{px}$ ، $F_{py}$ .

بفرض s الإحداثي المنحني المتجول على طول محيط الجسم بعكس دوران عقارب الساعة فيكون برموز الشكل ( ٤ . ١٣ ) : $dx = -ds.\sin\varphi$ و $dy = ds.\cos\varphi$ . بذلك تصبح المركبتان الجزئيتان لمحصلة قوى الضغط المؤثرة على ds :

$$\left.\begin{aligned} dF_{px} &= -p\,ds.\cos\varphi = -p\,dy \\ dF_{py} &= -p\,ds.\sin\varphi = p\,dx \end{aligned}\right\} . \qquad (13.38)$$

بإجراء التكامل المغلق لهاتين العلاقتين نجد :

$$F_{px} = -\oint_{(C)} p\,dy \quad ; \quad F_{py} = \oint_{(C)} p\,dx \quad . \qquad (13.39)$$

لحل هذين التكاملين نحسب الضغط بمساعدة معادلة برنولي فينتج بالنسبة لنقطة من محيط الجسم ونقطة في الجريان غير المشوش حيث يسود الضغط الكلي الثابت $p_{tot\infty}$ :

$$p + \frac{\rho}{2} V^2 = p_\infty + \frac{\rho}{2} V_\infty^2 = p_{tot\infty} = C_{Bp} \Rightarrow p = C_{Bp} - \frac{\rho}{2} V^2 . \qquad (13.40)$$

من جهة أخرى ، ولأن الخط المحدد للجسم C يمثل خطاً للتيار ، تكون للسرعة على الجسم مركبة مماسية فقط $V_s$ . فإذا كان $\Phi$ تابع الكمون ، $\Psi$ تابع التيار ، $F(z) = \Phi + i\Psi$ تابع الجريان المركب ، فتنطبق على محيط الجسم C العلاقة :

$$V = V_s = \frac{\partial\Phi}{\partial s} = \frac{d}{ds}(\Phi + i\Psi) = \frac{dF(z)}{ds} \quad (\Psi = \text{const}) . \qquad (13.41)$$

بإدخال القوة المركبة المرافقة $\overline{F}_p$ وملاحظة أنه بسبب $C_{Bp} = \text{const}$ يكون $\oint C_{Bp}\,dx = 0$ تنتج من (13.39) ، (13.40) و (13.41) العلاقة :

$$\overline{F}_p = F_{px} - i F_{py} = -\oint_{(C)} p\,dy - i\oint_{(C)} p\,dx =$$

$$-\frac{\rho}{2}\oint_{(C)}\left[\left(\frac{dF(z)}{ds}\right)^2 (i\,dx + dy)\right] . \quad (13.42)$$

ولكن بموجب (13.1) و (13.4) فإن $dz = dx + i dy$ ، $d\overline{z} = dx - i dy$ وبالتالي يكون : $dy + i dx = i d\overline{z}$ . من جهة أخرى ينتج من (13.5) ومن الشكل (٤٠١٣) :

$$|dz|^2 = (ds)^2 = dx^2 + dy^2 = dz.d\overline{z} \Rightarrow d\overline{z} = \frac{(ds)^2}{dz} .$$

بذلك تأخذ (13.42) بعد إصلاح بسيط الصيغة التالية :

$$\overline{F}_p = F_{px} - i F_{py} = \frac{\rho}{2} i \oint \left(\frac{dF(z)}{dz}\right)^2 dz = \frac{\rho}{2} i \oint [\overline{w}(z)]^2 dz , \quad (13.43)$$

حيث $\overline{w}(z) = u - iv$ السرعة المرافقة بموجب (13.16) . هذه العلاقة معروفة باسم **قانون بلازيوس ـ تشابليجين الأول** .

لتحديد نقطة تأثير المحصلة $|F_p| = \sqrt{F_{px}^2 + F_{py}^2}$ ، أو كما تسمى في الايروديناميك **مركز الضغط** ، يلزم حساب العزم $M_t$ الذي يتلقاه الجسم في الجريان .

لنفرض أن محور الدوران يخترق مستوي الشكل (٤٠١٣) في مركز الإحداثيات ، ونعتبر اتجاه دوران العزم الموجب بعكس اتجاه دوران عقارب الساعة . إن العزم الجزئي الناتج عن قوة الضغط الجزئية المؤثرة على العنصر الخطي ds يحسب من العلاقة :

$$dM_t = dF_{py}\,x - dF_{px}\,dy .$$

وباستخدام العلاقة (13.39) ولإجراء التكامل على طول المنحني المغلق C نجد :

$$M_1 = \oint_{(C)} [p\,(x\,dx + y\,dy)] \quad . \qquad (13.44)$$

باتباع خطوات مماثلة لما ورد أعلاه نحصل بالنتيجة على **قانون بلازيوس - تشابليجين الثاني** بالصيغة :

$$M_1 = -\frac{\rho}{2} Re \left\{ \oint_{(C)} [\overline{w}(z)]^2 z\,dz \right\} , \qquad (13.45)$$

حيث $Re$ الجزء الحقيقي للتكامل الواجب إجراؤه على طول محيط الجسم .

يتبين مما تقدم أنه بمعرفة تابع الجريان المركب يمكن بطريقة بسيطة حساب محصلة قوى الضغط وتحديد نقطة تأثيرها بالنسبة لجسم اعتباطي الشكل في جريان مستو عديم الاحتكاك .

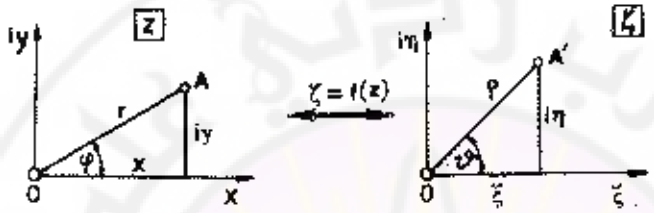
## ٥.١٣ التمثيل المطابق

### ١.٥.١٣ المفاهيم والمبادىء الأساسية لطريقة التمثيل المطابق

في الأمثلة التي عالجناها حتى الآن في الفقرة (١٣) انطلقنا من حقيقة أن كل تابع تحليلي $F(z)$ يمكن اعتباره تابع جريان مركب جزؤه الحقيقي يمثل تابع الكمون ، $Re\,F(z) = \Phi(x, y)$ ، والتخيلي تابع التيار ، $Im\,F(z) = \Psi(x, y)$ ، لجريان ما . فإذا تصورنا أحد خطوط التيار $\Psi = \text{const}$ قد تصلب ، فإن خطوط التيار الباقية تعطي صورة الجريان حول جسم صلب ليس من الضرورة في الحالة العامة أن تكون له أهمية تطبيقية واقعية . إذن فإن الميزة الأساسية لهذه الطريقة ، التي تتجلى في سهولة الحساب ، تقابلها سيئة أساسية تكمن في حقيقة أن نتيجة الحساب يمكن أن لا تكون لها أية قيمة عملية .

إذن فإن طرح المسألة العكسية التي يطلب فيها تحديد تابع الكمون

المركب للجريان حول جسم شكله معلوم تكتسب من الناحية العملية أهمية أكبر بكثير . ولكن الصعوبة فيها هي إيجاد تابع الجريان المناسب ، F(z) ، وبالتالي فإن حلها يحتاج لجهد حسابي أكبر بالمقارنة مع المسألة السابقة . لذا يستعان عند حل العديد من مسائل الجريان المستوية الهيدرو ـ والايروديناميكية،




الشكل ٥.١٢ ، مستوي الاصل z ومستوي الصورة ζ .

وخاصة في نظرية الجناح الحامل ، **بطريقة التمثيل المطابق** ، Methode of conformal mapping ،التي نجد في [27] عرضاً شاملاً لنتائجها . هذه الطريقة تستند على المبادىء الأساسية التالية :

في المستوي المركب z تتحدد كل نقطة A بالعدد المركب $z = x + iy = re^{i\varphi}$ ، وفي المستوي المركب ζ تتحدد كل نقطة A' بالعدد المركب $\zeta = \xi + i\eta = \rho e^{i\theta}$ ، الشكل (٥.١٣) . نفرض أن هناك علاقة بين هذين العددين المركبين محددة بالتابع :

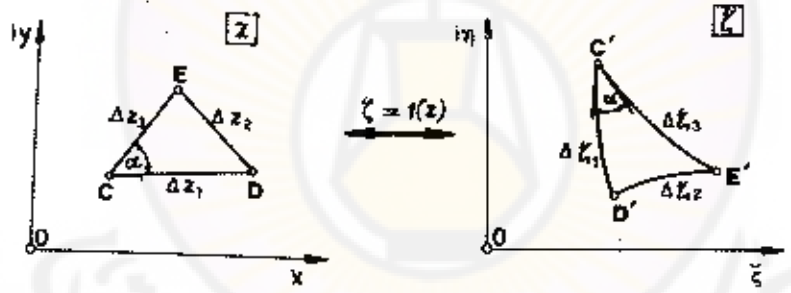
$$\zeta = f(z) \Rightarrow \xi(x,y) + i\eta(x,y) = f(x + iy) , \qquad (13.46)$$

الذي بموجبه تكون لكل نقطة أصلية A من z نقطة مقابلة A' ، كصورة ، من ζ . وإذا تصورنا أن النقطة A تحركت على منحنٍ ما في z فإن النقطة A' سترسم منحنياً في ζ يمثل صورة المنحني الذي رسمته A . هذا يعني من ناحية هندسية صرفة أنه بمساعدة العلاقة (13.46) يمكن نقل Transformation أو تمثيل Mpping المستوي المركب z المعروف باسم **مستوي الأصل**

Original plane على المستوي المركب $\boxed{\zeta}$ المعروف باسم **مستوي الصورة** Image plane . كما يمكن أن تتم عملية التمثيل بالنسبة لمجال محدد من المستوي $\boxed{z}$ والمستوي $\boxed{\zeta}$ .

لنفرض الآن أن $\zeta = f(z)$ تابع تحليلي للعدد المركب z ( وليس لـ z )، بمعنى أنه قابل للاشتقاق ويحقق معادلات كوشي ـ ريمان التفاضلية (13.12) . ولنشترط أنه في المجال المعتبر من المستوي $\boxed{z}$ يكون المشتق $f'(z) = \frac{d\zeta}{dz}$ قيمة محددة في كل نقطة تختلف عن 0 أو $\infty$ ، وذلك بغض النظر عن اتجاه عملية الاشتقاق .

لنعتبر في المستوي $\boxed{z}$ المثلث E D C الذي نفترض أطوال أضلاعه $\Delta z_1$ ، $\Delta z_2$ ، $\Delta z_3$ لا نهائية الصغر . بواسطة التابع التحليلي $\zeta = f(z)$ نحصل في المستوي $\boxed{\zeta}$ كصورة ، على المثلث E' D' C' ، الذي أطوال أضلاعه $\Delta\zeta_1$ ، $\Delta\zeta_2$ ، $\Delta\zeta_3$ ، الشكل (٦٠١٣) .




الشكل ٦٠١٣ : في التمثيل المطابق تبقى الزوايا ثابتة ونسبة الأطوال اللانهائية الصغر واحدة .

في النقطة C مثلاً يكون المشتق $f'(z)$ قيمة واحدة لا تتعلق بالاتجاه . وحيث أنه يمكن تحت الشروط السابقة استبدال التفاضل بالفضل فيكون بالنسبة لـ C :

$$\frac{\Delta\zeta_1}{\Delta z_1} = \frac{\Delta\zeta_2}{\Delta z_2} \Rightarrow \frac{\Delta z_1}{\Delta z_2} = \frac{\Delta\zeta_1}{\Delta\zeta_2} ,$$

وبالنسبة للنقطة D :

$$\Delta z_1 / \Delta z_2 = \Delta \zeta_1 / \Delta \zeta_2 .$$

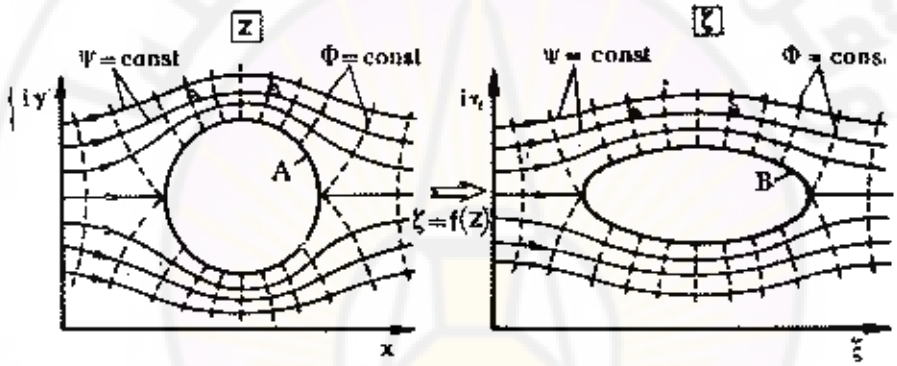
من هذا يتبين أن المثلثين اللانهائي الصغر EDC و E′D′C′ متشابهان ، وأنه على الأخص تبقى الزاوية التي يتقاطع بها منحنيان في مستوي الأصل مساوية للزاوية التي يتقاطع بها المنحنيان المقابلان في مستوي الصورة : $\alpha = \sphericalangle ECD = \sphericalangle E'C'D'$ . لذلك يطلق على عملية التمثيل هذه حسب غوص اسم **التمثيل المطابق** ، بمعنى المحافظة على الزوايا بأمانة :

> بواسطة التابع التحليلي $\zeta = f(z)$ يمكن تمثيل مستوي الأصل $[z]$ على مستوي الصورة $[\zeta]$ بحيث تبقى الزوايا ثابتة ونسبة الأطوال اللانهائية الصغر واحدة ، أي أن المجالات الصغيرة جداً في المستويين تكون متشابهة . يطلق على $\zeta = f(z)$ اسم **تابع التمثيل المطابق** ، وعلى مشتقة $|d\zeta/dz| = |\zeta'|$ اسم **معامل التمثيل** Mapping modulus أو **مقياس التشويه** ، الذي يمكن أن يتغير من نقطة إلى أخرى بحيث لا يلزم في الحالة العامة أن تكون المجالات المحدودة ( الكبيرة ) متشابهة .

إن فكرة استخدام الخصائص الهندسية للتمثيل المطابق في حل مسائل الجريان الكموني تتجلى بوضوح من حقيقة أن شبكة الخطوط المتعامدة المؤلفة من خطوط الكمون $\Phi = \text{const}$ وخطوط التيار $\Psi = \text{const}$ لجريان كموني في المستوي $[z]$ تابع كمونه المركب $F(z)$ ستنتقل بواسطة تابع التمثيل المطابق إلى المستوي $[\zeta]$ لتظهر أيضاً كشبكة منحنيات متعامدة ، لأن الزوايا تبقى ثابتة . وبالتحديد فإن خطوط التيار في $[z]$ تظهر كخطوط تيار في المستوي $[\zeta]$ وخطوط الكمون كخطوط كمون .

لنعود للمسألة المطروحة في بداية هذه الفقرة ، ولنفرض أن الجريان في المستوي $\boxed{z}$ بسيط ومعروف لدينا، كالجريان حول مقطع اسطوانة دائرية A ، الشكل (٧.١٣) .

ليكن B مقطع الجسم المراد دراسة الجريان حوله في المستوي $\boxed{\zeta}$ . إن حل هذه المسألة يتطلب **إيجاد تابع التمثيل** $\zeta = f(z)$ الذي بواسطته ينقل محيط الجسم A في المستوي $\boxed{z}$ على محيط الجسم B في المستوي $\boxed{\zeta}$ . في نفس الوقت تنقل مجموعة خطوط التيار وخطوط الكمون حول A في $\boxed{z}$




الشكل ٧.١٣ بواسطة تابع التمثيل المطابق $\zeta = f(z)$ تتحول خطوط التيار $\Psi = \text{const}$ وخطوط الكمون $\Phi = \text{const}$ للجريان حول مقطع الجسم A في مستوي الأصل $\boxed{z}$ إلى خطوط تيار وخطوط كمون للجريان حول مقطع الجسم B في مستوي الصورة $\boxed{\zeta}$ .

لتظهر كصورة للجريان المطلوب حول الجسم B في المستوي $\boxed{\zeta}$ . من هنا يتبين ان المعضلة الأساسية في حل هذه المسألة هي إيجاد تابع التمثيل المناسب .

بعد تحديد $\zeta = f(z)$ ، وبفرض أن تابع الكمون المركب $F(z)$ للجريان في المستوي $\boxed{z}$ معلوماً فبالامكان بسهولة تحديد حقل السرعة حول الجسم B في المستوي $\boxed{\zeta}$ بمساعدة العلاقة (13.16) حيث يكون :

$$\overline{w}(\zeta) = \frac{d\overline{F}}{d\zeta} = \frac{dF(z)}{dz}\frac{dz}{d\zeta} = \overline{w}(z)\,\frac{1}{\overline{F'(z)}}\ , \qquad (13.47)$$

حيث $\overline{w}(\zeta) = u_\zeta - iv_\zeta$ السرعة المركبة المرافقة في $\boxed{\zeta}$ و $\overline{w}(z) = u_z - iv_z$ السرعة المركبة المرافقة في $\boxed{z}$ و $\frac{dz}{d\zeta} = \frac{1}{F'(z)}$ مقلوب الكسر التفاضلي لتابع التمثيل ، أو مقلوب معامل التمثيل .

هناك ميزة هامة جداً للتمثيل المطابق تتعلق بالجولان . لنعتبر خطاً مغلقاً في المستوي $\boxed{z}$ لا يحتوي في داخله أية ينابيع أو بالوعات . إن الجولان على طول هذا الخط يحسب من العلاقة :

$$\Gamma_z = \oint \left(\frac{dF}{dz}\right) dz = \oint \overline{w}(z)\,dz\ .$$

وبما أن $dz = \frac{dz}{d\zeta}\,d\zeta$ يصبح باستخدام (13.47) :

$$\Gamma_z = \oint \left(\frac{d\overline{F}}{d\zeta}\right) d\zeta = \Gamma_\zeta\ . \qquad (13.48)$$

هذا يعني أن **التمثيل المطابق لا يغير قيمة الجولان** . ويتبع من ذلك أنه بواسطة التمثيل المطابق يمكن حساب قوة الرفع المؤثرة على الجسم المراد دراسة الجريان حوله بالاستعانة بقانون **كوتا ـ يوكوفسكي** .

إن إمكانيات استخدام طريقة التمثيل المطابق لحل مسائل الجريان العملية تكمن في جملة ليس من الصعب برهانها ( انظر [27] ) تنص على ما يلي : باستثناء عدد قليل من الحالات الخاصة غير الهامة عملياً يمكن دائماً إجراء التمثيل المطابق لساحة وحيدة الترابط على دائرة . هذه الجملة المعروفة باسم **قانون ريمان للتمثيل المطابق** تعني أن حساب الجريان المستوي حول جسم ما شكله معلوم ممكن من حيث المبدأ ، على أساس أن الجريان حول دائرة معلوم ( انظر ١٢.٢.٣ و ١٢.٢.٤ ) . غير أن الصعوبة الفعلية عند التطبيق العملي هي ،

كما ذكر أعلاه ، إيجاد تابع التمثيل المناسب ، الذي يكون في حالات كثيرة ذا تكوين معقد جداً ( انظر الجدول ١٣.١ ) .

## ٢.٥.١٣ أمثلة عن توابع التمثيل المطابق

لتوضيح الخطوات العملية لطريقة التمثيل المطابق عند استخدامها لحل مسائل الجريان الاساسية سنعالج فيما يلي بعض الامثلة لتوابع التمثيل المعروفة في نظرية الجناح الحامل والتي يمكن استخدامها لتطوير ما يعرف باسم **البروفيلات النظرية** Theoretical profiles .

### ١.٢.٥.١٣ تابع تمثيل يوكوفسكي

#### آ ـ تحديد شكل بروفيلات يوكوفسكي :

تنتمي لعائلة البروفيلات النظرية البسيطة زمرة بروفيلات تعرف باسم **بروفيلات يوكوفسكي** ، نسبة للعالم الروسي المعروف الذي طور هذه الزمرة باستخدام التمثيل المطابق للجريان حول دائرة في المستوي $\boxed{z}$ على الجريان حول البروفيل المطلوب في المستوي $\boxed{\zeta}$ .

لنعالج أولاً الخصائص الهندسية لتابع تمثيل يوكوفسكي :

$$\zeta = z + \frac{c^2}{z} \quad , \tag{13.49}$$

حيث c عدد حقيقي . إن نقطة B (x,iy) في المستوي $\boxed{z}$ محددة بالعدد المركب $z = x + iy$ يقابلها في المستوي $\boxed{\zeta}$ نقطة $B'(\xi,i\eta)$ محددة بالعدد المركب $\zeta = \xi + i\eta$ بحيث يكون بموجب (13.49) :

$$\xi + i\eta = (x + iy) + \frac{c^2}{x+iy} \quad .$$

بضرب صورة ومخرج الكسر بـ $(x - iy)$ وإجراء بعض الاصلاح وبعد مقارنة الجزء الحقيقي والتخيلي للطرف الايمن مع الجزء الحقيقي والتخيلي في الطرف الايسر من المعادلة نحصل على إحداثيي النقطة $B'$ بدلالة إحداثيي النقطة $B$ بالصيغة :

$$\xi(x,y) = x\left(1 + \frac{c^2}{x^2 + y^2}\right) , \qquad (13.50)$$

$$\eta(x,y) = y\left(1 - \frac{c^2}{x^2 + y^2}\right) . \qquad (13.51)$$

بمساعدة هاتين العلاقتين يمكننا الآن دراسة عدة إمكانيات تطبيقية هامة :

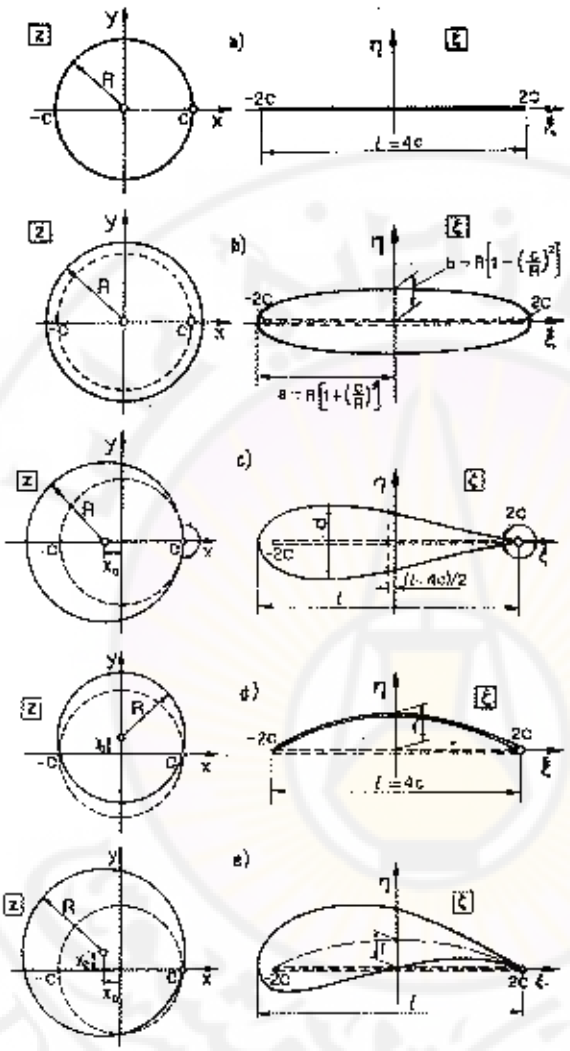
١ – نعتبر في المستوي $\boxed{z}$ دائرة نصف قطرها $R = c$ ومركزها منطبق على مركز الاحداثيات . عندئذ يكون $R^2 = x^2 + y^2 = c^2$ وينتج بالتالي من (13.50) و (13.51) :

$$\xi = 2x \quad ; \quad \eta = 0 . \qquad (13.52)$$

وبما أن نقاط محيط الدائرة تتحدد في المجال $-c \leqq x \leqq c$ فإن النقاط التي تمثلها في المستوي $\boxed{\zeta}$ تتحدد في المجال $-2c \leqq \xi \leqq 2c$ ، وعليه فان صورة الدائرة في هذه الحالة تظهر كقطعة مستقيمة طولها $\ell = 4c$ منطبقة على المحور $x$ . هذا يعني أن اسطوانة دائرية نصف قطرها $R = c$ تتحول بواسطة تابع التمثيل المطابق (13.49) إلى صفيحة مستوية أفقية طولها $\ell = 4c$ منطبقة على المحور $x$ ومتناظرة بالنسبة للمحور $y$ ، الشكل (١٣.٨ – a) .

٢ – نعتبر في المستوي $\boxed{z}$ دائرة مركزها منطبق على مركز الإحداثيات ولكن نصف قطرها $R > c$ ، الشكل (١٣.٨ – b) .

بالنسبة لنقاط الدائرة يكون $x = R\cos\varphi$ , $y = R\sin\varphi$ ، وبالتالي يصبح حسب (13.50) و (13.51) :




الشكل ٨،١٣ تطوير زمرة من عائلة بروفيلات يوكوفسكي بواسطة تابع التمثيل المطابق (13.49) ، a) صفيحة مستوية أفقية ، b) بروفيل بشكل قطع ناقص ، c) بروفيل متناظر عديم الانحناء ، d) بروفيل بشكل قوس دائرة ، e) بروفيل ذي سماكة وانحناء .

$$\xi = R\left(1+\frac{c^2}{R^2}\right)\cos\varphi,$$

$$\eta = R\left(1-\frac{c^2}{R^2}\right)\sin\varphi.$$

من هاتين العلاقتين نجد بعد إصلاح بسيط العلاقة :

$$\frac{\xi^2}{R^2\left[1+\left(\frac{c}{R}\right)^2\right]^2}+\frac{\eta^2}{R^2\left[1-\left(\frac{c}{R}\right)^2\right]^2}=1, \quad (13.53)$$

وهي معادلة قطع ناقص نصف قطره الكبير a والصغير b يرتبطان بالصيغتين :

$$a=R[1+(c/R)^2]\ ;$$

$$b=R[1-(c/R)^2]\ , \quad (13.54)$$

بذلك نجد حسب (13.50) و (13.51) العلاقتين :

$$\xi=\frac{a}{R}x\ ;$$

$$\eta=\frac{b}{R}y\ , \quad (13.55)$$

اللتين تسمحان بالانتقال من نقاط الدائرة إلى نقاط القطع الناقص .

في المسألة العكسية التي يطلب فيها أن تكون نسبة قطري القطع الناقص $a/b$ محددة ، يلزم تحديد نصف قطر الدائرة بدلالة الثابت $c$ . فاذا استعنا بالعلاقة (13.54) نجد بعد إصلاح بسيط :

$$\frac{R}{c} = \sqrt{\frac{a/b + 1}{a/b - 1}} \qquad (13.56)$$

٣ – نختار مركز الدائرة على المحور الحقيقي وعلى بعد $x_0$ – من مركز الإحداثيات ونحدد نصف قطرها ، $R > c$ ؛ بحيث تمر من النقطة $z = c$ وتمس بالتالي الدائرة المركزية التي نصف قطرها $c$ ، الشكل (٨٠١٣–c) .

في المستوي $\boxed{\zeta}$ تظهر صورة الدائرة في هذه الحالة كمقطع جناح حامل ، معروف باسم **بروفيل يوكوفسكي المتناظر** ، ذي أنف مدور وحافة خلفية حادة جداً مما كتها تتناهى إلى الصفر . هذا البروفيل يحيط بشق ( رسم مبشراً في الشكل ) يمتد من نقطة الحافة الخلفية المنطبقة على النقطة $\zeta = +2c$ وحتى $\zeta = -2c$ ، وتتعلق مماكته الاعظمية $d$ بالمسافة $x_0$ بين مركز الدائرة ومركز الإحداثيات .

بمساعدة تابع التمثيل (13.49) يمكن البرهان ، [17] [27] ، أن نقطة الدائرة $z = c$ والمنطقة الصغيرة الخارجية حولها المحدودة في المجال الزاوي بين $\theta = \frac{\pi}{2}$ الى $\theta = -\frac{\pi}{2}$ تنقل كصورة الى نقطة الحافة الخلفية البروفيل $\zeta = 2c$ والمنطقة الصغيرة الخارجية حولها المحدودة في المجال الزاوي بين $\theta = \pi$ إلى $\theta = -\pi$ ، الشكل (٨٠١٣–c) . هذا يعني أن زاوية الحافة الخلفية للبروفيل تتناهى إلى الصفر ، وتكون خاصية تطابق الزوايا غير محققة في الجوار الخارجي المحيط بالنقطة $\zeta = 2c$ .

لاستخراج معادلة تحديد شكل البروفيل نختار $x_0 = \varepsilon_1 c$ فيكون في المستوي $\boxed{z}$ :

$$R = x_0 + c = c(1 + \varepsilon_1) \quad ; \quad \varepsilon_1 = x_0/c \ , \tag{13.57}$$

$$z = -x_0 + R e^{i\varphi} \ . \tag{13.58}$$

بذلك تأخذ العلاقتان (13.50) و (13.51) الصيغتين :

$$\frac{\xi}{c} = [(1+\varepsilon_1)\cos\varphi - \varepsilon_1]\left[1 + \frac{1}{1 + 2\varepsilon_1(1+\varepsilon_1)(1-\cos\varphi)}\right] \tag{13.59}$$

$$\frac{\eta_1}{c} = (1+\varepsilon_1)\sin\varphi\left[1 - \frac{1}{1 + 2\varepsilon_1(1+\varepsilon_1)(1-\cos\varphi)}\right] . \tag{13.60}$$

بالنسبة للبروفيلات الصغيرة السماكة يكون $\varepsilon_1^2 \ll 1$ وتنتج من (13.59) و(13.60) حسب [17] العلاقتان البسيطتان :

$$\frac{\xi}{c} = 2\cos\varphi \ ; \ \frac{\eta_1}{c} = 2\varepsilon_1 \sin\varphi(1 - \cos\varphi) \ . \tag{13.61}$$

عندما تكون سماكة البروفيل صغيرة جداً يكون حسب العلاقة الأولى من (13.61) طول وتره .

$$l = 4c \ , \tag{13.62}$$

وتتحدد سماكته الاعظمية :

$$\frac{d}{l} = \frac{3}{4}\sqrt{3}\varepsilon_1 = 1{,}299\,\varepsilon_1 \ , \tag{13.63}$$

من أجل $\varphi = 120°$ ، وبالتالي تبعد $l/4$ عن حافته الامامية ( الانف ) .

بادخال (13.62) في (13.61) وعزل $\varphi$ نحصل على معادلة بسيطة لتحديد شكل البروفيل المتناظر بالصيغة :

$$\frac{\eta_1}{l} = \pm\frac{1}{2}\varepsilon_1\left(1 - 2\frac{\xi}{l}\right)\sqrt{1 - (2\xi/l)^2} \ . \tag{13.64}$$

في حالة السماكات المتوسطة تستخدم معادلة تحديد شكل البروفيل بالصيغة $\eta/d = f(\bar{\xi})$ ، حيث $\bar{\xi}$ الإحداثي المقاس من مركز الإحداثيات في [3] يقع في النقطة $\xi = 2c - l/2$ ، [7a] .

٤ – نختار مركز الدائرة على المحور التخيلي وعلى بعد $+iy_0$ من مركز الإحداثيات ونحدد نصف قطرها $R > c$ ، بحيث تمر من النقطتين $z = \pm c$، الشكل (٨.١٣-d) ، بمساعدة تابع تمثيل يوكوفسكي نحصل في المستوي $\boxed{\zeta}$ كصورة لهذه الدائرة على قوس دائري مضاعف يمتد من $\xi = 2c$ إلى $\xi = -2c$، وبالتالي يبلغ طول وتر البروفيل $l = 4c$ ، ويتعلق ارتفاع إنحنائه الاعظمي $f$ بقيمة $y_0$ ، حيث يكون بفرض $y_0 = c\varepsilon_2$ :

$$f = 2y_0 \Rightarrow f/l = \frac{\varepsilon_2}{2} \quad . \tag{13.65}$$

لاستخراج معادلة شكل البروفيل في $\boxed{\zeta}$ نلاحظ في $\boxed{z}$ أن :

$$R = \sqrt{c^2 + y_0^2} = c\sqrt{1+\varepsilon_2^2} \quad , \tag{13.66}$$

$$z = iy_0 + Re^{i\varphi} \quad . \tag{13.67}$$

بذلك نجد بمساعدة (13.49) إحداثيي أية نقطة من محيط البروفيل كتابعين : $\xi/l = f(\varphi,\varepsilon_2)$ و $\eta/l = f(\varphi,\varepsilon_2)$ . فاذا اقتصرنا على بروفيلات قليلة الانحناء ، يكون عندئذ $\varepsilon_2^4 \ll 1$ ويتحدد شكل البروفيل بالإحداثيين :

$$\frac{\xi}{l} = \frac{1}{2}\cos\varphi \quad ; \quad \frac{\eta}{l} = \frac{\varepsilon_2}{2}\sin^2\varphi \quad . \tag{13.68}$$

بعزل $\varphi$ واستخدام العلاقة (13.65) تأخذ معادلة تحديد شكل البروفيل الصيغة :

$$\frac{\eta}{l} = \frac{\varepsilon_2}{2}\left[1 - \left(\frac{2\xi}{l}\right)^2\right] = \frac{f}{l}\left[1 - \left(\frac{2\xi}{l}\right)^2\right] \quad . \tag{13.69}$$

٥ – نختار أخيراً مركز الدائرة في النقطة $z_0 = -x_0 + iy_0$ ونحدد نصف قطرها، $R > c$ ،بحيث تمر من النقطة $z = +c$ التي هي في نفس الوقت نقطة من الدائرة التي نصف قطرها $c$ ، الشكل (٨.١٣-e) . في المستوي $\boxed{\zeta}$ نحصل

كصورة لهذه الدائرة على بروفيل يوكوفسكي المنحني ، الذي تتعلق سماكته d وانحناؤه f بموقع مركز الدائرة في $\boxed{z}$ ، ويتصف بأن زاوية حافته الخلفية تساوي الصفر ( انظر ت ١٠١٣ ) .

كافة بروفيلات يوكوفسكي تتصف بأن زاوية الحافة الخلفية معدومة ، مما يحرمها من المتانة المطلوبة في الاستخدام العملي . بالاضافة لذلك فانه في حالة السماكات الصغيرة يكون توزع الانحناء ( الخط الرئيسي ) بشكل قوس دائرة تقريباً مما يؤثر على خاصية الاستقرار في الطيران . لذلك لم تلق هذه البروفيلات أهمية عملية .

بإجراء تغير بسيط في صياغة تابع تشبل يوكوفسكي ( الجدول ١٠١٣ ) يمكن الحصول على بروفيلات نظرية ذات مواصفات فنية حسنة إذا ما قورنت ببروفيلات يوكوفسكي . إلى هذه البروفيلات المحسنة تنتمي عائلة بروفيلات كرمان ـ تريفتس و بيتس ـ كويني التي تتصف بأن حافة البروفيل الخلفية مدورة أو ذات زاوية محددة معطاة ؛ وعائلة بروفيلات فون ميسس von Mises-Profiles ، التي تتصف بأن نقطة تأثير قوة الرفع ثابتة . بالرغم من ذلك فإن الأهمية العملية لهذه البروفيلات بقيت قليلة ، ( راجع خاصة [27] ) .

إن القيمة الفعلية للبروفيلات النظرية تكمن في حقيقة كونها تقدم حلولاً دقيقة لمسائل الجريان الأساسية ، التي يمكن استخدام نتائجها مقياساً لتدقيق صحة الطرق التقريبية مثل طريقة النقاط الشاذة .

## ب ـ حساب القيم الهيدرو أو الايروديناميكية .

نفرض أن الاسطوانة في المستوي $\boxed{z}$ واقعة في جريان انسحابي سرعته غير المشوشة $V_\infty$ ، ليكن $F(z)$ تابع الكمون المركب للجريان حول الاسطوانة . بواسطة تابع تمثيل يوكوفسكي نحصل في المستوي $\boxed{\zeta}$ على حقل الجريان الكموني حول بروفيل يوكوفسكي كصورة للجريان حول الدائرة .

إن حقل السرعة في $\boxed{\zeta}$ يتحدد بموجب (13.47) بعد حساب $F'(z)=d\zeta/dz$ من (13.49) بالصيغة :

$$|w_\zeta| = |w_z| \cdot \left|\frac{1}{d\zeta/dz}\right| = |w_z| \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{x^2\left(1 - \frac{c^2}{x^2+y^2}\right)^2 + y^2\left(1 + \frac{c^2}{x^2+y^2}\right)^2}} \qquad (13.70)$$

حيث $|w_z|$ ، $|w_\zeta|$ القيم المطلقة للسرعة في المستويين $z$ و $\zeta$ ، التي سنستخدمها فيما يلي للاختصار بدون خطوط شاقولية .

في النقطتين $x = \pm c$ ، $y = 0$ تصبح قيمة الجذر لا نهائية ، وبالتالي تصبح $w_\zeta \to \infty$ عندما تكون قيمة $w_z$ محدودة . لذلك يلزم ، لتجنب هذه السرعات غير المعقولة فيزيائياً ، أن تكون هاتان النقطتان في المستوي $z$ تمثلان نقطتي ركود ، $w_z(\pm c, 0) = 0$ ، حتى تبقى قيمة $w_\zeta$ في النقطتين المطابقتين من $\zeta$ محدودة أو مساوية للصفر .

هذه النتيجة تتجلى أهميتها إذا لاحظنا أن النقطة $(+c, 0)$ من الدائرة تقابلها في $\zeta$ نقطة الحافة الخلفية من بروفيلات يوكوفسكي في الحالات (a ، c) ، (d ، e) من الشكل (٨.١٣) . كما يمكن أن تصبح السرعة لا نهائية على نقطة الأنف في الحالتين (a و d) . لذلك فإن شرط كوتا للانسياب الناعم لايتحقق إلا إذا تم التمثيل المطابق بحيث تنقل نقطة الركود الخلفية للدائرة على نقطة الحافة الخلفية للبروفيل .

لنعتبر الحالة (e من الشكل (٨.١٣) ونفرض أن الدائرة في $z$ واقعة في جريان انسحابي جولاني سرعته غير المشوشة $V_\infty$ تصنع مع المحور x الزاوية $\alpha$ ، ولتكن $\Gamma$ قيمة الجولان الإجمالي . على أساس هذا الجريان المعروف لدينا جيداً يمكن حل المسألة الأساسية الاولى والثانية ، حيث يتم بواسطة تابع تمثيل يوكوفسكي إما نقل الدائرة وحقل الجريان حولهـــا إلى المستوي $\zeta$ أو نقل البروفيل المعطى والجريان حوله إلى المستوي $z$ .

إن تابع الكمون المركب للجريان الجولاني حول الدائرة ينتج من (13.32)

إذا استبدلنا فيهـــا $u_\infty$ ـ بالسرعة المركبة المرافقة للسرعة غير المشوشة ،
$V_\infty = u_\infty - iv_\infty = V_\infty e^{-i\alpha}$ ، وكذلك z بـ $(z - z_0)$ لأن مركز الدائرة
لا يقع في مركز الإحداثيات وإنما في النقطة $z_0$ . وعليه يكون :

$$F(z) = V_\infty\left[(z-z_0)\,e^{-i\alpha} + \frac{R^2}{z-z_0}\,e^{+i\alpha}\right] + \frac{i\,\Gamma}{2\pi}\ln(z-z_0)\ . \quad (13.71)$$

بذلك نحصل على السرعة المركبة في المستوي $\boxed{z}$ حسب (13.6) بالصيغة :

$$\overline{w}_z = \frac{dF(z)}{dz} = V_\infty\left[e^{-i\alpha} - \frac{R^2}{(z-z_0)^2}\,e^{+i\alpha} + \frac{i\,\Gamma}{2\pi V_\infty}\,\frac{1}{z-z_0}\right]. \quad (13.72)$$

على محيط الدائرة ، الذي يمثل خط التيار الصفري ، تكون السرعة مماسية في كل
نقطة A ، وتنتج قيمتها من (13.72) :

$$|w_z| = V_C = 2V_\infty \sin\vartheta + \frac{\Gamma}{2\pi R}\quad ;\quad (\vartheta = \alpha + \varphi')\quad , \quad (13.73)$$

حيث $\vartheta$ الزاوية التي يصنعها نصف قطر الدائرة R الواصل إلى نقطة منها A مع
اتجاه سرعة الورود غير المشوشة $V_\infty$ ، الشكل (٩.١٣) .

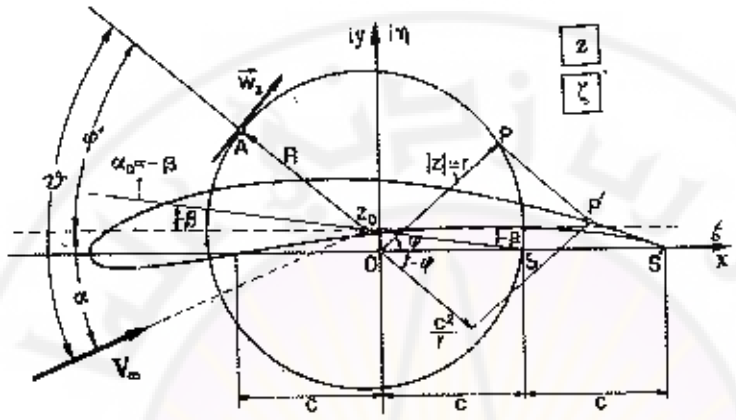
لكي يتحقق شرط كوتا للانسياب الناعم يجب أن تحدد قيمة الجولان بحيث
تكون نقطة الركود الخلفية للدائرة S تطابق نقطة الركود على الحافة الخلفية
للبروفيل S' . وعليه يجب أن تكون السرعة $w_z$ في النقطة $(x = c,\ y = 0)$ ،
حيث $\vartheta = \pi + \alpha + \beta$ ، معدومة . بذلك نجد من (13.73) :

$$\Gamma = 4\pi V_\infty R \sin(\alpha + \beta)\ . \quad (13.74)$$

وتصبح السرعة على محيط الدائرة :

$$w_{zC} = V_C = 2V_\infty[\sin\vartheta + \sin(\alpha + \beta)]\ . \quad (13.75)$$

توزع السرعة في المستوي $\boxed{z}$ ينتج بادخال (13.74) في (13.72) وملاحظة أن
$z = z_0 + Re^{-i\beta}$ .




الشكل ٩ . ١٣ : لحساب القيم الهيدروديناميكية لبروفيل يوكوفسكي المنحني بمساعدة التمثيل المطابق ، وقد رسم المستويان المركبان $\boxed{z}$ و $\boxed{\zeta}$ من مركز إحداثيات واحد فوق بعضهما البعض . $\varphi'$ الزاوية التي يصنعها نصف قطر الدائرة مع المحور x ، $\vartheta$ الزاوية التي يصنعها نصف القطر المكاني $r = |z|$ مع المحور x .

على محيط البروفيل (دليل P) في المستوي $\boxed{\zeta}$ نحصل على توزع السرعة من (13.70) و (13.75) بالصيغة :

$$\frac{w_{(P}}{V_\infty} = \frac{2[\sin\vartheta + \sin(\alpha+\beta)]\,r}{\sqrt{x^2\left(1-\frac{c^2}{x^2+y^2}\right)^2 + y^2\left(1+\frac{c^2}{x^2+y^2}\right)^2}}\,;\ (r = |z|)\,, \quad (13.76)$$

ومنها بمساعدة معادلة برنولي نجـــد توزع الضغط على محيط البروفيل ، الشكل (١٨.٨) .

لحساب قوة الرفع يمكن طبعاً الاستعانة بقانون بلازيوس ـ تشابليجين الاول بادخال $w_z$ في العلاقة (13.43) وإجراء التكامل . كما يمكن بسهولة

حساب $F_A$ من قانون كوتا - يوكوفسكي (8.150) بادخال قيمة $\Gamma$ حسب (13.74) فينتج بالنسبة لواحدة عرض البروفيل :

$$F_A = 4\pi\rho V_\infty^2 R \sin(\alpha+\beta) \quad , \tag{13.77}$$

ويكون بذلك معامل قوة الرفع :

$$c_A = 8\pi \frac{R}{l} \sin(\alpha+\beta) \quad , \tag{13.78}$$

حيث $l$ طول وتر البروفيل في [٤] ، $\beta$ و $R$ متحولان هندسيان للبروفيل تتحدد من معطيات الدائرة في [٤] .

إن قوة الرفع تنعدم من أجل زاوية الورود :

$$\alpha(c_A = 0) = \alpha_0 = -\beta \quad , \tag{13.79}$$

لذلك يطلق على المحور الواصل بين النقطتين S و $z_0$ ، الشكل (٩.١٣) ، إتجاه قوة الرفع الصفرية أو المحور الأول للبروفيل .

إن النتائج السابقة تسمح لنا دون صعوبة كبيرة حساب القيم الهيدروديناميكية لبروفيلات يوكوفسكي الاخرى المبينة في الشكل (٨.١٣-a حتى d) .

في حالة الصفيحة المستوية ، الشكل (٨.١٣-a) ، يكون نصف قطر الدائرة $R = \sqrt{x^2+y^2} = r = |z| = c$ وتكون الزاوية $\beta = 0$ بينما $\psi = -\vartheta$ باعتبار $\psi$ في الشكل (٩.١٣) تتجول باتجاه دوران عقارب الساعة . بذلك تنتج السرعة على الصفيحة من (13.76) مع أخذ (13.72) بعين الاعتبار :

$$\frac{w_\xi}{V_\infty} = u = \frac{\sin\vartheta + \sin\alpha}{\sin\psi} = \cos\alpha \pm \sin\alpha \sqrt{\frac{1-2\xi/l}{1+2\xi/l}} \, . \tag{13.80}$$

على أنف الصفيحة ، أي في النقطة $\xi = -2R$ $(\psi = 0)$ ، تصبح $w_\xi$ لانهائية بينما تبقى السرعة على الحافة الخلفية ، $\xi = 2R$ ، نهائية .

معامل قوة الرفع للصفيحة ينتج من (13.78) بوضع $l = 4R$ بالصيغة المعروفة :

$$c_A = 2\pi \sin \alpha \quad . \tag{13.81}$$

في حالة البروفيل بشكل قطع ناقص، الشكل (١٣ - ٨ b)، يكون $|z| = R$، $\beta = 0$، ونجد في الحالة الخاصة التي تكون فيها زاوية الورود $\alpha = 0$ وبالتالي $\varphi = \vartheta$، من (13.76) السرعة على محيط البروفيل :

$$\frac{w_{\xi P}}{V_\infty} = \left(1 + \frac{b}{a}\right) \sqrt{\frac{1 - (\xi/a)^2}{1 - [1 - (b/a)^2] (\xi/a)^2}} \quad , \tag{13.82}$$

حيث $a$ و $b$ نصفا قطر القطع الناقص حسب (13.54) . وتبلغ السرعة قيمتها الاعظمية في نقطتي النهاية للمحور الصغير، من أجل $x_1 = \pm b$ .

في حالة البروفيل المتناظر الشكل ( ١٣ - ٨ c ) ، تكون $\beta = 0$ ونجد بوضع $z = -x_0 + Re^{i\varphi}$ ( $\varphi$ تتجول يساراً ) السرعة على محيط البروفيل حسب (17) :

$$\frac{w_{\xi P}}{V_\infty} = [\sin(\varphi - \alpha) + \sin\alpha] \frac{1 + 2\varepsilon_1(1 + \varepsilon_1)(1 - \cos\varphi)}{(1 + \varepsilon_1)\sqrt{\varepsilon_1^2(1 - \cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi}} \quad , \tag{13.83}$$

حيث $\varepsilon_1 = x_0/c$ . وينتج معامل قوة الرفع من (13.78) بادخال (13.57) و (13.62) بالصيغة

$$c_A = 8\pi \frac{R}{l} \sin\alpha = 2\pi(1 + \varepsilon_1)\sin\alpha \quad , \tag{13.84}$$

وبالتالي يكون $c_A = 0$ من أجل $\alpha = 0$ .

في حالة البروفيل بشكل قوس دائري، الشكل (١٣ - ٨ d) تكون $\beta \neq 0$ ونجد بوضع $z = +iy_0 + Re^{i\varphi}$ السرعة على محيط البروفيل :

$$\frac{w_{\xi P}}{V_\infty} = \left[\cos\alpha + \sin\alpha \frac{\cos\beta - \cos\varphi}{\sin\beta + \sin\varphi}\right] \frac{1 + 2\varepsilon_2^2 + 2\varepsilon_2\sqrt{1 + \varepsilon_2^2}\sin\varphi}{1 + \varepsilon_2^2} \quad , \tag{13.85}$$

حيث $\varepsilon_2 = y_0/c$ . ونلاحظ ان السرعة على الحافة الخلفية للبروفيل، $\varphi = -\beta$، تصبح معدومة، بينما تبلغ في الحالة العامة على الحافة الامامية، $\varphi = \pi + \beta$، قيمة لانهائية . وفي الحالات التي يكون فيها انحناء البروفيل صغيراً، وبالتالي $\cos\beta \approx 1$, $\varepsilon_2^2 \ll 1$، وزاويا الورود $\alpha$ صغيرة ينتج توزع السرعة باستخدام (13.65) و (13.68) بالصيغة :

$$\frac{w_{\xi P}}{V_\infty} = 1 + 2\varepsilon_2 \sin\varphi + \alpha \tan\frac{\varphi}{2} = 1 \pm 4\frac{f}{l}\sqrt{1 - \left(\frac{2\xi}{l}\right)^2} \pm \alpha\sqrt{\frac{1 - 2\xi/l}{1 + 2\xi/l}} \tag{13.86}$$

حيث إشارة (+) تخص طرف السحب العلوي و (−) طرف الضغط السفلي للبروفيل .
معامل قوة الرفع ينتج من (13.78) بوضع $R = c/\cos\beta$ و $l = 4c$ بالصيغة :

$$c_A = 2\pi \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\beta} \quad , \tag{13.87}$$

ولحصل بالنسبة للبروفيل ذي الخنساء قليل حيث يمكن ان نضع $\cos\beta \approx 1$ و $\beta \approx \frac{1}{2} w$ بوجب (13.65) :

$$c_A = 2\pi \sin\left(\alpha + 2\frac{f}{l}\right) \quad . \tag{13.88}$$

من هذه العلاقة يتجلى بوضوح تأثير الانحناء على قوة الرفع .

## ٢.٢.٥.١٣ تابع تمثيل كوينغ

إن التابع المعروف باسم **تابع تمثيل كوينغ** E. König [145] :

$$\zeta = e^z \Rightarrow z = \ln\zeta \, , \tag{13.89}$$

له أهمية تطبيقية كبيرة بالنسبة لدراسة الجريان حول أجسام مرتبة بنظام دوري، كما في شبك بروفيلات قطري .

إن نقطة $z = x + iy$ تقابلها نقطة $\zeta = \rho e^{i\theta} = e^{x+iy}$ . وعليه ينتج بعد عزل الجزء الحقيقي عن التخيلي :

$$\rho = e^x \Rightarrow x = \ln\rho \quad ; \quad y = \theta \, . \tag{13.90}$$

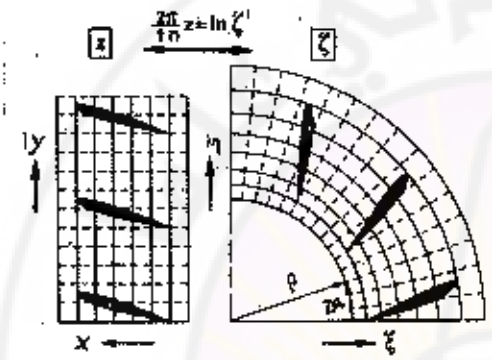
إذن فالمستقيمات $y = \text{const}$ الموازية المحور x في المستوي $\boxed{z}$ تقابلها في المستوي $\boxed{\zeta}$ مستقيمات منبعثة من المركز $\zeta = 0$ ، والمستقيمات $x = \text{const}$ الموازية للمحور y تقابلها دوائر مركزية حول $\zeta = 0$ .

هذا يعني أنه بواسطة التابع (13.89) يتحول الجريان الانسحابي المنتظم الموازي للمحور x في $\boxed{z}$ إلى جريان نبع في $\boxed{\zeta}$ ، ويتحول الجريان الانسحابي المنتظم الموازي للمحور y إلى جريان إعصار كموني ، كما يتحول الجريان الانسحابي

المائل على المحور x زاوية α الى جريان نبع اعصاري ( راجع ١٠.٣.٥) ، لأن أي خط التيار في $\boxed{z}$ يصنع مع كافة المستقيمات y = const نفس الزاوية α ، وبالتالي فان صورته في $\boxed{\zeta}$ يجب ان تصنع مع كافة المستقيمات المنبعثة من مركز الاحداثيات نفس الزاوية α وتمثل بالتالي حلزوناً لوغارتمياً .

من جهة أخرى يمكن البرهان أن مجالاً عرضه $2\pi$ أو $2\pi\cos\alpha$ محدداً بمستقيمين متوازيين في المستوي $\boxed{z}$ (خطي تيار!) ينقل بواسطة التابع (13.89) على كامل المستوي $\boxed{\zeta}$ . أما اذا كان عرض المجال t فنحقق نفس النتيجة اذا استخدمنا بدلاً من (13.89) التابع :

$$\zeta = e^{\frac{2\pi z}{t}} \quad (13.91)$$



الشكل ١٠.١٣ ، بواسطة تابع تمثيل كوينغ ينقل شبك بروفيلات مستقيم في $\boxed{z}$ على شبك بروفيلات قطري مستور في $\boxed{\zeta}$ .

بواسطة هذا التابع ينقل شبك بروفيلات مستقيم في $\boxed{z}$ جيبته موازية للمحور y وخطوة تقسيمه t على بروفيل جناح فردي منحن في $\boxed{\zeta}$ . أما التابع :

$$\zeta = e^{\frac{2\pi z}{nt}} \quad (13.92)$$

فيسمح بنقل الجريان عبر شبك بروفيلات مستقيم في $\boxed{z}$ على الجريان عبر شبك بروفيلات قطري في $\boxed{\zeta}$ مؤلف من n ريشة ، الشكل (١٠.١٣) . ويكون في هذه الحالة بدلاً من (13.90) :

$$x = \frac{t n}{2\pi} \ln \rho ; \; y = \frac{t n}{2\pi} \vartheta + t n . k \; (k = 0, 1, 2, \ldots) \; . \quad (13.93)$$

فاذا فرضنا حقل السرعة $V_z = |w_z|$ للجريان في $\boxed{z}$ معلوماً ( راجع

(٩.٢.١٢) فتكون السرعة في $\boxed{\zeta}$ حسب (13.47) :

$$|w_\zeta| = \frac{t\,n}{2\pi\rho} V_x \quad , \qquad (13.94)$$

حيث $\rho = |\zeta|$ .

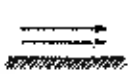
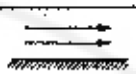
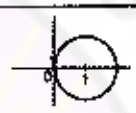
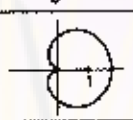
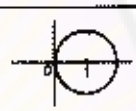
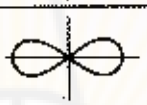
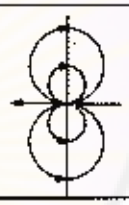
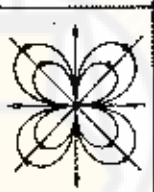
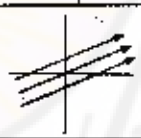
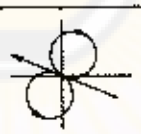
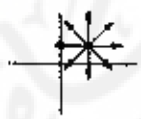
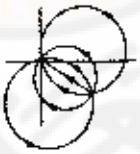
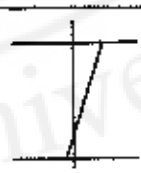
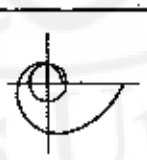
توجد طرق عملية عديدة تستخدم تابع تمثيل كوبنغ بالصيغة (13.92) أو بصيغ معدلة قليلاً ( انظر الجدول ١٠١٣ ) لحساب الجريان عبر شبك بروفيلات قطوي كمقطع في الدولاب الثابت أو الدائر لمضخة أوعنفة وذلك كمسألة أساسية أولى أو ثانية [7] [27] [106] [146] .

ونجدر الملاحظة أنه في هذه الحالة وفي حالات تطبيقية عديدة أخرى يمكن الاستفادة من مزايا طريقة النقاط الشاذة ، مثلاً لحساب حقل السرعة في المستوي $\boxed{z}$ ، ومن مزايا طريقة التماثل الالكتروليتي [87] بربطها مع طريقة التمثيل المطابق .

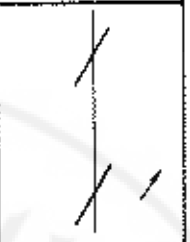
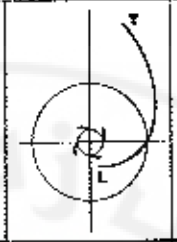
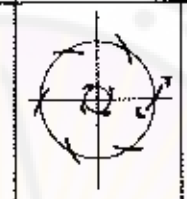
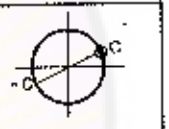
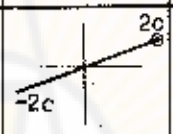
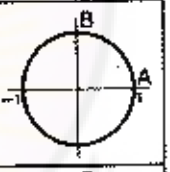
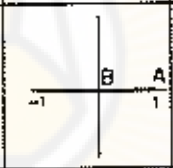
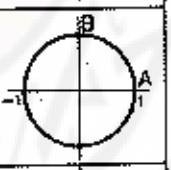
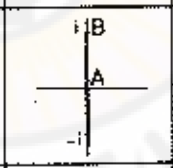
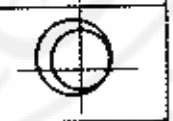
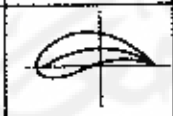
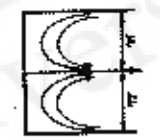
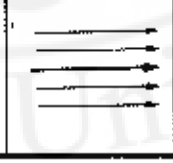
## ٣٠٢٠٥.١٣ طريقة الهودوغراف

توجد مسائل مستوية عديدة ذات أهمية تطبيقية تتميز بأن السرعة تبقى ثابتة على طول قطعة على الاقل من حدود حقل الجريان . في هذه الحالة يستحسن تحديد مسار هذا الجزء من حدود حقل الجريان وحقل الجريان الكموني نفسه في ما يسمى **مستوي الهودوغراف** $\boxed{w}$ الذي يتم فيه الربط بين تابع الكمون المركب $F(z)$ ومركبات السرعة مع أخذ خصائص النقاط الشاذة ( نبع ، دوامة ، إعصار الخ ... ) بعين الاعتبار ( الهودوغراف هو المنحني الذي يصل بين نقاط النهاية الأشعة المنبعثة من مركز واحد والمساوية من حيث القيمة والاتجاه لأشعة سرعة نقطة مادية تتحرك على مسار محدد ! ) .

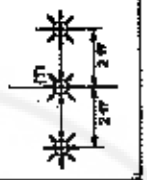
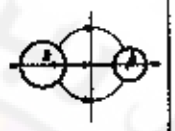
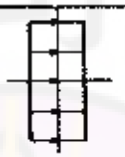
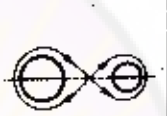
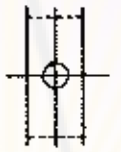
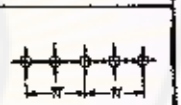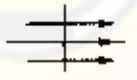
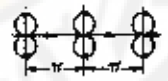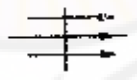
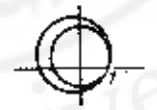
الجدول ١٢ ـ ١٠: بعض توابع التمثيل المطابق ذات الاهمية العملية ، حسب [27] .

| المستوي z | المستوي ζ | تابع التمثيل | التمثيل المطابق |
|---|---|---|---|
|  |  | $\zeta = z^2$ | لجريان انسحابي على جريان يلتف حول مقدمة سفيحة مستوية . |
|  |  | $\zeta = z^{1/2}$ | لجريان انسحابي على جريان نسمن جدارين متماسين . |
|  |  | $\zeta = z^{3/4}$ | لجريان انسحابي على جريان نسمن جدارين متفرجي الزاوية. |
|  |  | $\zeta = z^{3/2}$ | لجريان انسحابي على جريان حول الزاوية القائمة لجداوين |
|  |  | $\zeta = z^2$ | لخطوط الكمون لنبع على منحنيات كارديوليدية (قلبية) Cardioid |
|  |  | $\zeta = z^{1/2}$ | لخطوط الكمون لنبع على منحنيات لامنكاتية Lemniscate |
|  |  | $\zeta = z^{1/2}$ | لجريان الثنائية على جريان كوادروبول Qudrupole . |
|  |  | $\zeta = \frac{1}{z}$ | لجريان انسحابي مائل على جريان ثنائية . |
|  |  | $\zeta = \frac{1}{z}$ | لنبع على جريان نبع ـ بالوعة. |
|  |  | $\zeta = e^z$ | لمستقيم على منحنى لوغارتم حلزوني ؛ لجريان انسحابي مائل على جريان النبع الاعصاري . |

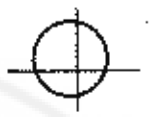
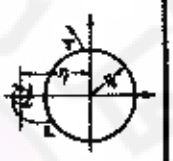
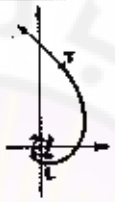
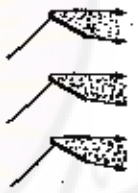
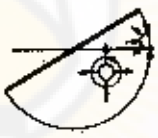
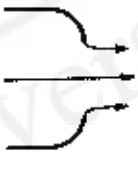
الجدول ١٠١٣ : تتمة

| المستوي z | المستوي ζ | تابع التمثيل | التمثيل المطابق |
|---|---|---|---|
|  |  | $\zeta = e^{2\pi z/t}$ | لشبك سلسلة بروفيلات مستقيم مؤلف من سفائح مستوية مائلة على بروفيل فردي. t خطوة التقسيم |
|  |  | $\zeta = e^{2\pi z/nt}$ | لشبك بروفيلات مستقيم مؤلف من سفائح مستوية مائلة على شبك دائري مؤلف من n ريشة . |
|  |  | $\zeta = z + \frac{c^2}{z}$ | لمحيط دائرة نصف قطرها c على قطعة مستقيمة طولها 4c . |
|  |  | $\zeta = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ | لمحيط دائرة الوحدة على قطعة مستقيمة افقية . |
|  |  | $\zeta = \frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)$ | لمحيط دائرة الوحدة على قطعة مستقيمة شاقولية . |
|  |  | $\zeta = z + \frac{1}{z}$ | لمحيط دائرة على محيط بروفيل جوكوفسكي ولمحيط دائرة الوحدة على خطه الرئيسي . |
|  |  | $\zeta = \cosh z$ | لجريان انسحابي في المستوي ζ |

الجدول ١٠١٣ : تتمة

| المستوي $z$ | المستوي $\zeta$ | تابع التمثيل | التمثيل المطابق |
|---|---|---|---|
|  |  | $\zeta = 4 \cosh z$ | لسلسلة بتابيع على تبع مفرد بنصف الغزارة . |
|  |  | $\zeta = \ln \frac{z-a}{z-b}$ | لجريان تبع بالوعة حول دائرتين على جريان انسحابي افقي ضمن مستطيل . |
|  |  | $\zeta = \ln \frac{z-a}{z-b}$ | للمنطقة المحيطه بدائرتين لجولان حولهما من نفس القيمة والاتجاه على جملة اعاصير مضاعفة الدورية . |
|  |  | $\zeta = \tan z$ | لجملة بتابيع وبالوعات على تبع افرادي . |
|  |  | $\zeta = \cot z$ | لجملة بتابيع وبالوعات على بالوعة افرادية . |
|  |  | $\zeta = \tan z$ | لسلسلة ثنائيات على جريان انسحابي افقي. |
|  |  | $\zeta = \cot z$ | لسلسلة ثنائيات على جريان انسحابي افقي. |
|  |  | $\frac{\zeta - a}{\zeta + a} = \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{\alpha}$ | لدائرة تمس دائرة الوحدة على بروفيل كرمان ـ تريفتس Kârmân - Trefftz |

الجدول ١٠١٣ : تتمة

| المستوي $z$ | المستوي $\zeta$ | تابع التمثيل | التمثيل المطابق |
|---|---|---|---|
|  |  | $\ln\frac{\zeta-u}{\zeta+u} = k\ln\frac{z-1}{z+1} + i\frac{\mu}{2}$ | لدائرة على بروفيل بيتس - كويني Betz - Keune ( الخط الرئيسي مؤلف من تضام قوس دائرة ومنحنى بشكل 8 ) . |
|  |  | $\zeta = \frac{z+r_1}{\left(\frac{z r_1 + r_0^2}{r_1 z}\right)^n}$ | لدائرة في حقل نبع اعصاري على قطعة من جلزون لوغارتمي . |
|  |  | $\zeta = \overline{w}(z)$ ; $\overline{w} = \frac{dF(z)}{dz}$ | للجريان عبر شبك من قضبان رقيقة قائمة على الهودوغراف Hodograph المنعكس في مستوى السرعة المركبة المرافقة $\overline{w}$ |
|  |  | $\zeta = \overline{w}(z)$ | للجريان عبر شبك من صفائح مائلة على مستوى الهودوغراف المنعكس . |
|  |  | $\zeta = \overline{w}(z)$ | للجريان عبر فتحة تفريغ ذات انحناء غير مستمر على مستوى الهودوغراف المنعكس . |
|  |  | $\zeta = \overline{w}(z)$ | للجريان عبر فتحة تفريغ ذات حدود انحناؤها مستمر على مستوى الهودوغراف المنعكس . |

إن **طريقة الهودوغراف** تستند تحليلياً على العلاقة (13.16) التي تتضمن أن مشتق تابع الكمون المركب يساوي السرعة المرافقة للسرعة المركبة ، $\overline{w} = dF(z)/dz$ ، وأن $\overline{w}$ هي تابع تحليلي للاحداثي المركب $z$ . لذلك يمكن اعتبار التابع $\overline{w} = F(z)$ كتابع تمثيل مطابق يسمح بنقل حقل الجريان في المستوي $\boxed{z}$ على مستوي الهودوغراف $\boxed{\overline{w}}$ الذي تمثل محوري إحداثياته مركبتا السرعة المرافقة للسرعة المركبة $w$ . ولكن يمكن أيضاً استخدام $w$ بدلاً من $\overline{w}$ للتمثيل المطابق حيث نحصل بهذه الطريقة على القيم المرآوية لمنحني الهودوغراف ، أي صورتها المعكوسة بالنسبة للمحور الحقيقي $x$ ( الشكل ٢٠١٣ ) .

لاستخراج العلاقات بين النقاط المتقابلة في المستويين $\boxed{z}$ و $\boxed{\overline{w}}$ نكتب العلاقة (13.16) بالصيغة :

$$\overline{w} = u - iv = \frac{dF}{dz} = |w|\,(\cos\varphi - i\sin\varphi) \quad ,$$

حيث $F = F(z)$ تابع الكمون المركب . بمكاملة هذه العلاقة نحصل على قيمة $z$ :

$$z = x + iy = \int \frac{dF}{|w|\,(\cos\varphi - i\sin\varphi)} + \text{const} \quad . \qquad (13.95)$$

بموجب (13.13) ينتج $dF = d\Phi + i\,d\Psi$ . فاذا تتبعنا شعاع السرعة $w$ على طول خط تيار معين ، $\Psi = \text{const}$ ، يكون $d\Psi = 0$ وبالتالي يصبح $dF = d\Phi$ ، ونأخذ بذلك العلاقة (13.95) ، بعد ضرب المخرج والصورة للكسر في الطرف الأيمن بـ $(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ ، الصيغة :

$$x + iy = \int \frac{(\cos\varphi + i\sin\varphi)\,d\Phi}{|w|} + \text{const} \quad .$$

بفصل الجزء الحقيقي عن التخيلي نجد :

$$x = \int \frac{\cos\varphi . d\Phi}{|w|} + const_1 \; ; \quad y = \int \frac{\sin\varphi . d\Phi}{|w|} + const_2 \; . \qquad (13.96)$$

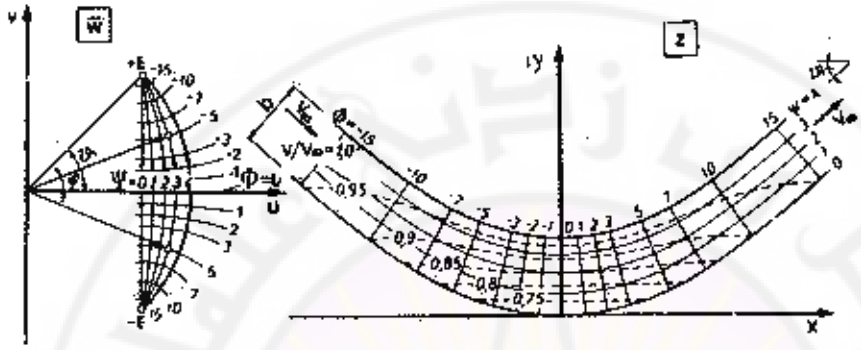
لتحديد ثابتي التكامل نتتبع في المستوي $\boxed{w}$ أحـــد خطوط الكمون $\Phi = const$ . عندئذ يكون $d\Phi = 0$ وبالتالي $dF = i\, d\Psi$ . فإذا أدخلنا هذه القيمة في (13.95) وأجرينا التكامل بين $\Psi_1, \Psi_2$ نجد بعد فصل الجزء الحقيقي عن التخيلي:

$$x = -\int_{a}^{\Psi} \frac{\sin\varphi \; . \; d\Psi}{|w|} \; ; \quad y = \int_{a}^{\Psi} \frac{\cos\varphi \; . \; d\Psi}{|w|} \; . \qquad (13.97)$$

بذلك تتحدد العلاقة بين السرعة $\bar{w}$ وكافة النقاط z التي تـرد فيها هذه السرعة ، وبالتالي يتحدد توزع السرعة في المستوي $\boxed{z}$ .

تستخدم طريقـــة الهودوغراف بنجاح خاصة لحساب **النافورات الحرة** Free jet التي تعبر شبكاً مؤلفاً من قضبان رفيعـة أو صفائح رقيقة ( الجدول ١٠١٢ ) ، و كذلك لحساب الجريان عبر النواشر Diffuser وفتحات التفريغ من إناء [7a][14][27] . كما استخدمت أيضاً بنجاح لتصميم شبك بروفيلات للضغط المتساوي بميزات ايروديناميكية أفضلية [147]. كمثال تطبيقي يوضح استخدام لطريقة نعتبر في المستوي $\boxed{w}$ قطاعاً من حقل الجريان الناتج عن نضام نبع وبالوعة (الشكل ٩٠١٠)، وفي المستوي $\boxed{z}$ الجريان عبر كوع مستوي عرضه b وسرعة دخول لجريان فيه $V_\infty$، الشكل (١١٠١٣) . إن خطوط التيار في $\boxed{w}$ تمثلها أقواس دائرية ويقع مركز انحناء خط التيار $\Psi = 0$ في مركز الاحداثيات، وتكون قيمة شعاع السرعة $|w|$ على طول خط التيار هذا ثابتة . في مقطع الدخول للكوع تسود من حيث القيمة نفس السرعة السائدة في مقطع الخروج (يميناً) . وتتناقص السرعة على خطوط التيار $\Psi < 1$ في الكوع حتى $x = 0$ ثم تتزايد . أما ذروة خطوط التيار في $\boxed{z}$ فتتحدد بإجراء تكامل (13.95) على طول خط الكمون الصفري $\Phi = 0$ حيث تكون عندئذ الزاوية $\varphi = 0$ وبالتالي $x = 0 = const$ وينتج من (13.97) :

$$y_n = \int_0^{\Psi_n} \frac{d\Psi}{|w|} \qquad (13.98)$$




الشكل ١١.١٣ : تتحدد خطوط التيار وتوزع السرعة للجريان داخل كوع مستوٍ في $z$ من خطوط التيار لشبع وبالوعة في مستوي الهودوغراف $w$ ، حسب [7a] .

## ٦.١٣ أسئلة مراجعة وتمارين

س ١.١٣ : اشرح أسس طريقة التوابع المركبة وخصائصها المميزة وامكانيات استخدامهـــا .

س ٢.١٣ : استوضح الخصائص الرياضية للتوابع المركبة واستخرج الشرط اللازم والكافي الذي بحدد متى يكون $F(z)$ تابعاً تحليلياً .

س ٣.١٣ : استخرج قانوني بلازيوس ـ تشابلجين الأول والثاني وأوضح أهميتها العملية .

س ٤.١٣ : اشرح أسس طريقة التمثيل المطابق وبرهن خاصية ثبات الزوايا ونسبة الأطوال اللانهائية الصغر .

س ٥.١٣ : برهن أن التمثيل المطابق لا يغير قيمة الجولان . كيف تحدد قيمة الجولان الإجمالي في التمثيل المطابق للجريان حول دائرة على الجريان حول بروفيل جناح حامل ؟

س ٩.١٣ : اشرح مبادىء طريقة الهودوغراف .

ت ١٠١٣ : بمساعدة تابع تمثيل يوكوفسكي (13.10) يراد نقـــل الدائرة C من المستوي $\boxed{z}$ إلى المستوي $\boxed{\zeta}$ .

ليكن M مركز الدائرة C ونصف قطرها $\overline{BM} = R > c$ ، حيث B نقطة من C ومن المحور x السالب على بعد c من مركز الإحداثيات والتي تمر منها ومن نظيرتهـــا النقطة A الدائرة $C_0$ ، الشكل (ت ١٠١٣) . أوجد بطريقة تحليلية ـ بيانية صورة الدائرة C في $\boxed{\zeta}$ .

الحل : في الشكل (ت ١٠١٣) رسم المستويان $\boxed{z}$ و $\boxed{\zeta}$ فوق بعضهما البعض من مركز إحداثيات واحد 0 . ونلاحظ أن المركز M يتحدد بالطول $\overline{0M} = m$ وبالزاوية $\measuredangle M0y = \alpha$ .

لتكن $P(r,\varphi)$ نقطة من C فيكون $\overline{MP} = R$ ، ونتنتج من المثلث 0MP العلاقة :

$$R^2 = r^2 + m^2 - 2rm \sin(\alpha + \varphi) \qquad (a)$$

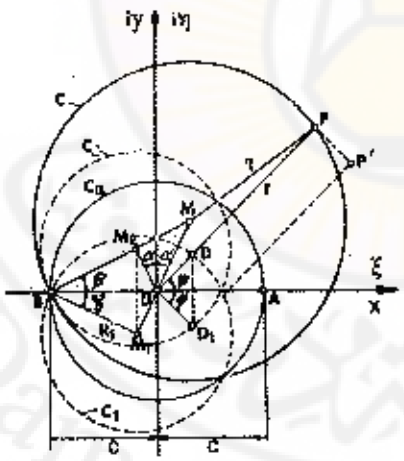
بواسطة تابع الانعكاس Inversion:

$$\zeta = \frac{c^2}{z} \quad , \qquad (b)$$

الذي ينقـــل الدوائر والمستقيمات في المستوي $\boxed{z}$ إلى دوائر ومستقيمات في المستوي $\boxed{\zeta}$ ، نجد بوضع $\zeta = \rho e^{i\theta}$ ، $z = re^{i\varphi}$ وبعد فصل الجزء الحقيقي عن التخيلي أن

$$\rho = \frac{c^2}{r} \qquad (c)$$

فإذا كانت D نقطة واقعة على $\overline{0P}$ وتمثل صورة P المرآوية ( الإنعكاسية ) بالنسبة للمركز 0 ، وبالتالي تحقق العلاقة (c) فيكون $\overline{0D} = \rho = c^2/r$ ، بذلك تنتج من (a) العلاقة :




الشكل ت ١٠١٣

$$\rho^2(R^2 - m^2) + 2mc^2\rho\sin(\alpha + \varphi) - c^4 = 0 \ ,$$

التي تصبح بوضع :

$$a_1 = \frac{mc^2}{R^2 - m^2} \ , \ a_2^2 = \frac{c^4}{R^2 - m^2}$$

من الشكل :

$$\rho^2 + 2a_1\rho\sin(\alpha + \varphi) - a_2^2 = 0 \ . \qquad (d)$$

بادخال إحداثيي النقطة D : $x = \rho\cos\varphi$ ، $y = \rho\sin\varphi$ ( الشكل ت ١٠١٣ ) في (d) تنتج معادلة المحل الهندسي للنقاط D بالصيغة :

$$(x + a_1\cos\alpha)^2 + (y + a_1\sin\alpha)^2 = a_1^2 + a_2^2 \ , \qquad (e)$$

وهي معادلة الدائرة $C_1$ التي تمثل الصورة المرآوية للدائرة C بالنسبة للمركز 0 ، والتي يقع مركزها $M_1$ على امتداد 0M ويتحدد بالاحداثيين :

$$x_1 = -a_1\cos\alpha \ ; \ y_1 = -a_1\sin\alpha \Rightarrow 0M_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = a_1 \ , \qquad (f)$$

ويبلغ نصف قطرها

$$R_1 = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = \frac{Rc^2}{R^2 - m^2} \ . \qquad (g)$$

لتكن $\gamma$ الزاوية التي يصنعها $BM_1$ مع x ، من المثلث $0BM_1$ ينتج :

$$\overline{0M_1}/\overline{M_1B} = a_1/R_1 = \sin\gamma/\cos\alpha \Rightarrow \sin\gamma = \frac{a_1}{R_1}\cos\alpha = \frac{m\cos\alpha}{R} \ . \qquad (h)$$

ولكن من الشكل (ت ١٠١٣) نجد بسهولة أن $m\cos\alpha = R\sin\beta$ ، حيث $\beta$ الزاوية التي يصنعها $\overline{BM}$ مع x ، وعليه تكون الزوايا .

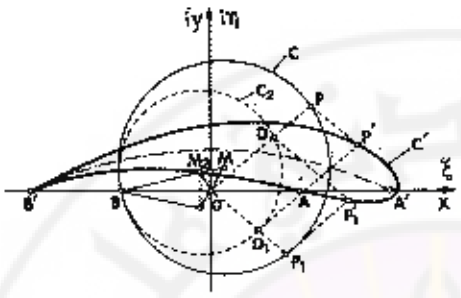
$$\gamma = \beta \ , \qquad (i)$$

وبالتالي فالمستقيمان MB ، $M_1B$ متناظران بالنسبة للمحور x . فإذا عكسنا الدائرة $C_1$ بالنسبة للمحور x نحصل على الدائرة $C_2$ التي يقع مركزها $M_2$ على BM ويكون المستقيمان $M_2 0$ ، M 0 متناظران بالنسبة للمحور x ، بذلك يتحدد موقع $M_2$ مباشرة .

نعود الآن لتابع تمثيل يوكوفسكي $\zeta = z + c^2/z$ ونكتبه بوضع $z = re^{i\varphi}$ واستخدام رموز الشكل (ت ١٠١٣) والعلاقة (٢) بالصيغة :

$$\zeta = re^{i\varphi} + \frac{c^2}{r}e^{-i\varphi} = \overline{OP}\cdot e^{i\varphi} + \overline{OD}\cdot e^{-i\varphi} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OD_1} = \overrightarrow{OP'} \quad (j)$$

على أساس ما تقدم طور تريفتس ( راجع [27] ) طريقة بيانية عملية لتحديد شكل بروفيل يوكوفسكي يوضحها الشكل (ت ٢٠١٣) ( انظر أيضاً الشكل ٩،١٣ ) ، حيث يكتفي برسم الدائرة C والدائرة $C_2$ التي مركزها $M_2$ ونصف قطرها $R_1$ حسب (g). ويتم تحديد مجموعة من النقاط P' التي توصل مع بعضها البعض فيتحدد بذلك شكل البروفيل C'.




الشكل ت ٢٠١٣ ، طريقة تريفتس البيانية لتحديد شكل بروفيل يوكوفسكي .

ت ٢٠١٣ : أوجد بمساعدة قانوني بلازيوس ـ تشابليجين محصلة قوى الضغط المؤثرة على أسطوانة دائرية نصف قطرها R تدور بسرعة زاوية ثابتة $\omega$ في جريان منتظم باتجاه x – سرعته $u_\infty$ ، وعزم هذه المحصلة .

الحل : الجريان حول الاسطوانة يكافىء جريانا جولانيا ينتج من تضام جريان إنسحابي مع ثنائية مستوية وإعصار كوني جولا $\Gamma = \oint u\,ds = 2\pi R^2\omega$ . وعليه فإن تابع الكمون المركب للجريان يعطى بالعلاقة (13.32) التي نشتقها بالنسبة لـ z فنجد :

$$\overline{W}(z) = \frac{dF_{cJ}}{dz} = -u_\infty\left(1 - \frac{R^2}{z^2}\right) - \frac{i\Gamma}{2\pi}\frac{1}{z} \quad , \qquad (a)$$

ندخل ( a ) في قانون بلازيوس ـ تشابليجين الاول (13.43) :

$$F_{px} - iF_{py} = i\frac{\rho}{2}\oint\left(\frac{dF_{cJ}}{dz}\right)^2 dz \quad , \qquad (b)$$

ونلاحظ أن النقطة الشاذة $z = 0$ تمثل قطباً بالنسبة للمشتق $dF_{cJ}/dz$ الذي يمثل نفسه تابعاً تحليلياً. وعليه يكون بموجب قانون الرواسب التكامل المغلق لكافة الحدود ماعدا الحد الذي يدخل فيه $\frac{1}{z}$ معدوماً . وبالتالي ينتج من (b) باعتبار $\oint\frac{dz}{z} = 2\pi i$ :

$$F_{px} - i F_{py} = -i \rho u_\infty \Gamma \Rightarrow F_{px} = 0 \quad ; \quad F_{py} = \rho u_\infty \Gamma \ . \qquad (c)$$

هذا يعني أن القوة باتجاه x ، أي المقاومة ، معدومة ، بينما تتعرض الاسطوانة لقوة شاقولية عمودية على اتجاه $u_\infty$ ، أي لقوة رفع قيمتها بالنسبة لواحدة ارتفاع الاسطوانة:

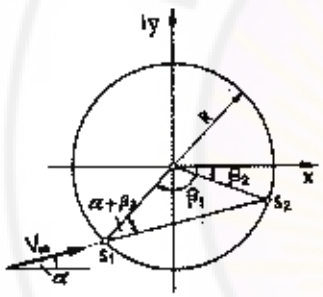
$$F_A = \rho u_\infty \Gamma = \rho u_\infty 2\pi R^2 \omega \ . \qquad (d)$$

من قانون بلازيوس ـ تشابلجين الثاني (13.15) نجد بنفس الخطوات السابقة $M_1 = 0$ ، وبالتالي فان القوة $F_A$ تؤثر في مركز الاسطوانة المنطبق على مركز الاحداثيات .

ت ٣.١٣ : إن تابع الكمون المركب لجريان الجولان حول اسطوانة دائرية نصف قطرها R يعطى بالعلاقة :

$$F_C(z) = V_\infty \left( z e^{-i\alpha} + \frac{R^2}{z} e^{i\alpha} \right) + \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln z \ , \qquad (a)$$

حيث $\alpha$ الزاوية بين السرعة غير المشوشة $V_\infty$ والمحور x ، الشكل ( ت ٣.١٣ ) . ما هي قيمة الجولان عندما يطلب أن يشكل نصف القطر المار من نقطة الركود الخلفية $S_2$ مع المحور x زاوية محددة $\beta_2$ ؟ برهن أنه في هذه الحالة تكون نقطة الركود الأمامية $S_1$ واقعة على الخط الموازي لاتجاه $V_\infty$ والمار من $S_2$ . كم تبلغ الزاوية $\alpha$ عندما تنطبق نقطتا الركود على بعضهما البعض ؟



الشكل ت ٣.١٣

الحل : في نقطتي الركود الامامية والخلفية تكون السرعة معدومة . من (13.16) نحصل على السرعة المركبة المرافقة باشتقاق (a) :

$$\overline{w}(z) = V_\infty \left( e^{-i\alpha} - \frac{R^2}{z^2} e^{+i\alpha} + \frac{i\Gamma}{2\pi V_\infty} \frac{1}{z} \right) \ . \qquad (b)$$

في النقطة $S_2$ حيث $z_2 = R e^{-i\beta_2}$ تكون $\overline{w}(z) = 0$ ، وعليه ينتج من (b) بعد وضع $z = z_2$ وضرب طرفيها بـ $e^{-i\beta_2}$ وملاحظة أن :

$$\frac{1}{2i}(e^{-i(\alpha+\beta_2)} - e^{i(\alpha+\beta_2)}) = -\sin(\alpha + \beta_2) \qquad (c)$$

وإجراء إصلاح بسيط الجولان :

$$\Gamma = 4\pi R V_\infty \sin(\alpha+\beta_2) \ . \qquad (d)$$

نرسم الآن من $S_2$ مستقيماً موازياً لاتجاه $V_\infty$ فيتقاطع مع الدائرة في $S_1$ ونجد نصف القطر المار من $S_1$ مع x الزاوية $\beta_1 = \pi - (2\alpha + \beta_2)$ . في $S_1$ ، المحددة بموجب الشكل

( ت ٣٠١٣ ) ولأن $e^{-i\pi} = -1$ بالاحداثي $z_1 = -R\, e^{i(2\alpha+\beta_2)}$ ، يجب إن تنعدم السرعة إذا كانت $S_1$ تمثل نقطة ركود . نستبدل في (b) $z$ ب $z_1$ و $\Gamma$ حسب (d) فنجد بعد الاصلاح والانتباه للعلاقة (c) أن :

$$\overline{W}(z_1) = \frac{dF_{c\Gamma}}{dz}\bigg|_{z=z_1} = 0 \quad , \qquad (e)$$

وبالتالي فالنقطة $S_1$ هي نقطة ركود .

عندما تزداد قيمة الجولان تقترب نقطتا الركود $S_1$ و $S_2$ من بعضهما البعض . وتنتج حسب (d) القيمة الاعظمية للجولان من أجل $\sin(\alpha+\beta_2) = 1$ وبالتالي من أجل $\alpha+\beta_2 = \frac{\pi}{2}$ ، عندئذ يكون:

$$\Gamma = \Gamma_{max} = 4\pi V_\infty R \quad \text{من أجل} \quad \alpha = \frac{\pi}{2} - \beta_2 \qquad (f)$$

★ ★ ★

## ١٤ الطريقة البيانية ( الهندسية ) لحساب الجريانات المستوية

يتميز حقل الجريان الكموني المستوي بأن خطوط التيار $\Psi = const$ وخطوط الكمون $\Phi = const$ تشكل شبكة منحنيات متعامدة ( ص ٤١٧ ) ، وتكون نسبة طول كل عين من عيون الشبكة ، إلى عرضها ، $\Delta s/\Delta n$ ، تابعة لعلاقة محددة ، كالمعادلة اللاحقة (14.5).

على هـــذا الاساس يمكن إيجاد حل بياني ( هندسي ) لمعادلة لابلاس (10.6) أو (10.10) التي يحققها كل من تابع الكمون $\Phi$ وتابع التيار $\Psi$ .

لنفرض ان خطوط التيار قد رسمت بحيث يمر مابين كل خطي تيار متجاورين نفس التيـار الحجمي $\Delta Q$ ، الشكل ( ١٠١٤ ) . عندئذ يكون بموجب (10.12):

$$\Psi_m - \Psi_{m-1} = \Delta\Psi = \Delta Q = const \qquad (14.1)$$




الشكل ١٠١٤: شبكة منحنيات متعامدة مؤلفة من خطوط التيار $\Psi = const$ وخطوط الكمون $\Phi = const$ .

حيث $m = 0,1,2...$ . لنفرض أيضاً أن خطوط الكمون في كامل حقل الجريان تحقق العلاقة :

$$\Phi_n - \Phi_{n-1} = \Delta\Phi = \text{const} , \qquad (14.2)$$

حيث $n = 0,1,2...$ و $\Delta$ تعني هنا فرقاً وليس له علاقةبعامل لابلاس .

ليكن s الاحداثي باتجاه خط التيار و n الاحداثي الناظمي عليه . عندئذ تكون السرعة بموجب (10.3) :

$$V_s = \frac{\partial\Phi}{\partial s} \approx \frac{\Delta\Phi}{\Delta s} , \qquad (14.3)$$

وينتج من معادلة الاستمرار والانتباه للشكل (١٠١٤) :

$$\Delta\Psi = \Delta Q = V_s \cdot \Delta n \Rightarrow V_s = \frac{\Delta\Psi}{\Delta n} . \qquad (14.4)$$

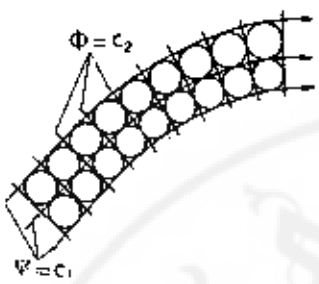
بذلك نجد العلاقة الهامة التالية :

$$\frac{\Delta\Psi}{\Delta\Phi} = \frac{\Delta n}{\Delta s} = \text{const} , \qquad (14.5)$$

**التي تعني أن نسبة طول الى عرض عين الشبكة المتشكلة من خطوط التيار وخطوط الكمون لجريان غيرقابل للانضغاط تبقى ثابتة** . فاذا اعتبرنا للبساطة $\Delta n/\Delta s=1$ فإن عيون الشبكة تصبح بشكل مربعات ويمكن في كل الاحوال رسم دوائر ضمنها ، الشكل (٢٠١٤) .

إن الطريقة الهندسية الموضحة أعلاه تصلح لحل مسائل الجريان الاساسية الثلاثة . ولكن حل المسألة الأساسية الثانية التي يكون فيها شكل الجسم معلوماً أو تكون الحدود الثابتة لحقل الجريان معطاة يتطلب جهداً مضنياً في الرسم لضرورة

اتبـــاع طريقة الخطوات التقريبية المتتالية وبالتالي إجراء تصحيحات عديدة للحصول على صورة الجريان الصحيحة . بالمقابل فإن حل المسألة الاساسية الأولى يكلف جهداً أقل لأن حدود حقل الجريان المطلوبة تتحدد من خلال رسم شبكة الخطوط المتعامدة . ويخف جهد الرسم كثيراً إذا استخدمت مجموعة جاهزة من الصفائح الدائرية ذات الاقطار المتزايدة تدريجياً حيث يلزم عندئذ الانتباه لكي تكون الخطوط المماسية والناظمية على الصفائح المتجاورة متعامدة مع بعضها البعض .

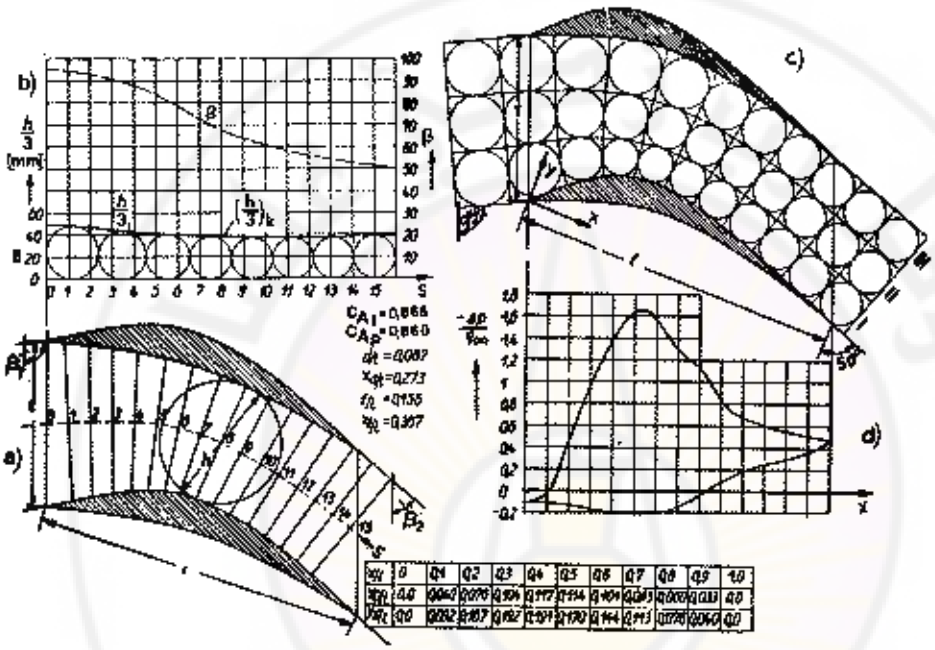



الشكل ٢٠١٤ : عيون شبكة الخطوط المتعامدة لجريان مستو غير قابل للانضغاط تكون بشكل مربعات يمكن رسم دوائر ضمنها .

إذا كانت حدود قناة الجريان الصلبة معلومة ترسم في التصميم البدائي حزمة من خطوط الكمون التقريبية متعامدة مع هـذه الحدود التي تمثل خطوط التيار الخارجية . ثم ترسم حزمة من خطوط التيار التقريبية أيضاً والمتعامدة مع خطوط الكمون . وينصح ان تؤخـــذ خطوة التقسيم $\Delta s$ و $\Delta n$ في اتجاه الجريان وناظمياً عليه صغيرة قدر الامكان ولكن بحيث تكون $\Delta s \approx \Delta n$ . في التصميم اللاحق يصحح التصميم البدائي باستخدام الصفائح الدائرية . ولكن ينصح في المناطق التي يتغير فيها مسار الحدود الثابتة كثيراً أن ترسم أقطار عيون الشبكة المربعة باتجاهين فتشكل هذه الاقطار نفسها مربعات يمكن بواسطة الصفائح الدائرية تصحيحها للحصول على صورة أدق للجريان .

لقد استخدم **ألبرنغ** W. Albring [7a] [148] طريقة الصفـائح الدائرية لحساب الجريان المستوي غير القابل للانضغاط عبر شبك بروفيلات مستقيم كمسألة أساسية أولى ، حددت فيها زاوية الدخول $\beta_1$ والخروج $\beta_2$ ، وبالتالي زاوية انحراف الجريان $\vartheta = \beta_1 - \beta_2$ ، ونسبة التقسيم $t/l$ ونسبة السماكة للبروفيل $d/l$.

واستعمل لهذه الغاية صفائح دائرية أقطارها تتزايد ما بين 25 إلى 65 mm ، بمعدل 1 mm . ويبين الشكل (٣.١٤) الخطوات العملية لتصميم شبك من أجل زاوية دخول $\beta_1 = 95°$ وخروج $\beta_2 = 50°$ ونسبة تقسيم $t/l = 0{,}5$ .




| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_k/l$ | 0 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 | 1,0 |
| $\frac{h}{3}$ [mm] | 4,0 | 0,064 | 0,078 | 0,104 | 0,117 | 0,114 | 0,101 | 0,083 | 0,060 | 0,031 | 4,0 |
| $(\frac{h}{3})_k$ | 0,0 | 0,052 | 0,067 | 0,087 | 0,101 | 0,100 | 0,094 | 0,073 | 0,046 | 0,021 | 0,0 |

الشكل ٣.١٤ ، استخدام طريقة الصفائح الدائرية لتصميم شبك مسرّع يحقق القيم المعطاة : $t/l = 0{,}5$, $\beta_2 = 50°$, $\beta_1 = 95°$ . a) التصميم البدائي ، b) تحديد أقطار الصفائح الدائرية لخط التيار الانتصافي ، $\Delta n_{II} = h/3$ ، وزاوية ميلها $\beta$ ؛ $(h/3)_k$ القيم المصححة لـ $\Delta n_{II}$ ، c) التصميم الاول للشبك وتحديد شكل البروفيل ، d) توزع معامل الضغط $c_p = \Delta p/q_\infty$ ، $c_{A1}$ معامل قوة الرفع بموجب قانون الدفع الخطي ، $c_{A2}$ معامل قوة الرفع الناتج من توزع الضغط ، $x_k/l$, $d/l$ الساكة العظمى وبعدهـا عن أنف البروفيل ، $x_t/l$, $t/l$ الانحناء الاعظمي وبعده عن أنف البروفيل ، حسب [7a] .

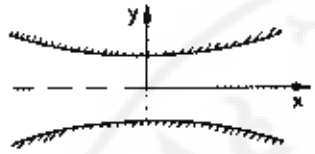
في التصميم البدائي ، الشكل (٣.١٤ – a) ، رسم كخطوة أولى خط التيار الانتصافي s ، وحددت خطوة التقسيم t وطول الوتر $l$ بحيث تتحقق نسبة التقسيم

المعطاة . كما رسم شكل البروفيل التقريبي بحيث يحقق السماكة المرغوبة تقريباً . بعدئذ قسم عرض قناة الجريان b مابين بروفيلين الى ثلاثة خيوط تيار III, II, I ( يمكن طبعاً أخذ عدد أكبر ! ) ، فيكون العرض الوسطي لكل منها $\Delta n_{II} = b/3$ . في الشكل ( b – ٣.١٤ ) رسم تغير $\Delta n_{II}$ على طول s ، وبذلك تحددت أقطار الصفائح الدائرية . وتتحدد وضعيتها من زاوية الميل الموضعية $\beta = f(s)$ لخيط التيار الانتصافي .

في التصميم المصحح للشبك كخطوة تقريبية أولى ، الشكل (٣.١٤ – c)، ترتب الصفائح الدائرية لخيط التيار الانتصافي II مع مراعاة زاوية الميل β ، ومن ثم ترتب دوائر خيط التيار العلوي III والسفلي I ما بين النواظم المشتركة لدوائر خيط التيار II . بذلك يتحدد شكل الطرف السفلي D (طرف الضغط) للبروفيل كماس مشترك لدوائر خيط التيار III ، وشكل الطرف العلوي S (طرف السحب) كماس مشترك لدوائر خيط التيار I . ويتحدد شكل البروفيل إذا رسمنا من نقاط الماس المشترك العلوي أو السفلي قطعاً مستقيمة موازية لجبهة الشبك بطول t ووصلنا نهاياتها مع بعضها البعض .

طريقة الصفائح الدائرية تصلح أيضاً لحساب حقل الجريان المتناظر دورانياً غير القابل للانضغاط . ولكن في هذه الحالة تكون نسبة طول عين الشبكة على عرضها تابعة للبعد عن المحور التناظري [7a][8] . كما يمكن أيضاً استخدام الطريقة البيانية لحساب حقل الجريان المستوي القابل للانضغاط ، حيث تتعلق نسبة طول الى عرض عين الشبكة بكثافة السائل $\rho = \text{const}$ . وفي هذه الحالة ينصح ، بدلاً من الصفائح الدائرية ، باستخدام صفائح جاهزة بشكل قطوع ناقصة نسبة أقطارها متغيرة . وقد استخدمت مثل هذه الصفائح فعلاً لحساب الجريان تحت وفوق الصوتي عبر شبك بروفيلات يصلح لحرف التيار حتى زوايا كبيرة $\vartheta = \beta_1 - \beta_2$ [148][149] .

كمثال يوضح استخدام طريقة الصفائح الدائرية سنرسم شبكة خطوط التيار والكمون لجريان غير قابل للانضغاط يمر القناة المستوية المبينة في الشكل (٤.١٤) والمحددة أبعادها كتصميم بدائي في الجدول (١.١٤) ، كما سنحدد توزع السرعة $V/V_0$ على المحور x المنطبق على محور القناة وعلى طول جدارهـــا ، بفرض $V_0$ السرعة في مقطع القناة الاصغري .



الشكل ٤.١٤ ، قناة مستوية.

إن القناة متناظرة بالنسبة للمحورين y و x ، لذا نكتفي برسم شبكة خطوط التيار والكمون المتعامدة في الربع الاول فقط ، وننطلق من تقسيم مقطع الجريان إلى ثلاثة خيوط تيار ( أنابيب تيار ) عرض كل منها $\Delta n = y/3$ ، الجدول (١.١٤) :

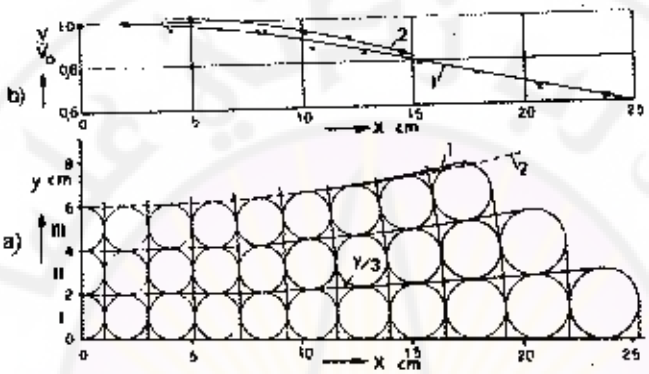
الجدول ١.١٤ :

| x cm | 0 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| y cm | 6،00 | 6،16 | 6،64 | 7،44 | 8،58 | 10،00 |
| y/3 cm | 2،00 | 2،05 | 2،21 | 2،48 | 2،86 | 3،33 |

نرسم المنحني $\frac{y}{3} = f(x)$ ثم نرسم بدءاً من $x = 0$ دوائر تمس المحور x والمنحني y/3 وبعضها البعض، الشكل (a-٤.١٤) ؛ فيتحدد شكل خيط التيار I . نرسم المماسات المشتركة لهذه الدوائر بشكل عمودي على المنحني y/3 ، أي على اتجاه الجريان ، وغددها للاعلى ، ثم نرسم ضمن المجالات المحددة فوق دوائر خيط التيار I دوائر خيط التيار II. فاذا رسمنا المماس المشترك لكل دائرتين متجاورتين منها في اتجاه الجريان يتحدد خط التيار المحد لأنبوبة التيار II . بنفس الطريقة نرسم مجموعة الدوائر III ، فيتحدد مماسها المشترك في اتجاه الجريان جدار القناة . (المنحني 2 في الشكل a-٤.١٤). ونلاحظ من الشكل ان التصميم البدائي والنهائي لجدار القناة متطابقان باستثناء منطقة صغيرة في نهاية القناة . ولكن هذا التطابق لا يمكن اعتباره قاعدة عامة في كل الأحوال . ويجدر الانتباه أن عدم الدقة في الرسم أو نقل قيم y/3 للتصميم البدائي يؤدي لعدم انتظام أشكال عيون الشبكة وبالتالي لعدم انتظام مسار خطوط التيار المتجاورة .

لحساب توزع السرعة $V/V_0 = f(x)$ على المحور x وعلى جدار القناة نقيس أطوال عيون الشبكة $\Delta s$ على المحور x وعلى الجدار . وحيث أن $V = \Delta\Phi/\Delta s$، بموجب (14.3) ، فتكون السرعة $V_0 = \Delta\Phi/\Delta s_0$ . وبالتالي يكون :

$$V/V_0 = \Delta s_0/\Delta s \quad . \qquad (14.6)$$




الشكل ٥.١٤ : تحديد صورة الجريان وحقل السرعة في قناة مستوية .
(a شبكة خطوط التيار وخطوط الكمون المتعامدة : (1) جدار القناة بموجب التصميم البدائي ، (2) جدار القناة النهائي ، (b توزع السرعة على طول محور القناة (1) وعلى جدار القناة (2) ، حسب [7a] .

فاذا وضعنا $\Delta s_0 = 2\,cm$ ورسمنا قيم $V/V_0$ فوق منتصف كل عين شبكة نحصل على توزع السرعة المبين في الشكل (٥.١٤ b) ، حيث يمثل المنحني (1) توزع السرعة على محور القناة والمنحني (2) توزع السرعة على جدارها . ونلاحظ أن الفرق بين السرعة على محور القناة وعلى جدارها صغير جداً بسبب كون توسع القناة التدريجي ضعيف جداً . كما نلاحظ أن آخر قيمة للسرعة على الجدار أمكن تسجيلها كانت من اجل $x = 14.5cm$ .

## ١٥ الطرق التحليلية

### ١.١٥ الاسس الفيزيائية والرياضية

كلما كانت أشكال أجسام الجريان معقدة ( لنفكر مثلاً بالدولاب الدائر والثابت أو بمغلف عنفة أو مضخة ، أو بالصمامات ووصلات الانابيب الاخرى )

كلما ازداد الجهد الحسابي اللازم لتحديد القيم الهيدروديناميكية لحقل الجريان . وحتى مع استخدام الحاسبات الالكترونية فإن استخراج المعادلات الرياضية وبرمجتها يتطلب جهداً لا بأس به . لذلك يقتصر استخدام الطرق التحليلية لحل مسائل الجريان الكموني الاساسية على الحالات التي يطلب فيهـــا تحديد القيم الهيدروديناميكية بدقة عالية ، بهدف استخدامها كأساس لتحديد دقة النتائج لطرق تقريبية ، مثل الطرق البيانية أو طريقة النقاط الشاذة ، ومجال تطبيقها .

بالنسبة لعدد كبير من مسائل الجريان العملية هذه، التي لا يؤثر على نتائجها الحسابية وجود خطأ نسبي بحدود 3 % إلى 5 % ينصح باستخدام إحدى **الطرق التماثلية** Analogy-Methods التجريبية لقياس حقل الجريان الكموني [13]. هذه الطرق تعتمد على الاسس الفيزيائية والرياضية التالية :

تسمى ظاهرتان أو **عمليتان** من حقلين فيزيائيين مختلفين **عمليتين متماثلتين** أو **تناظريتين** Analogical processes إذا خضعتا لنفس المعادلة التفاضلية . مثل هذه الخواص التماثلية ترتبط فعلاً، كما سبق التنويه، بين الحقل الهيدروديناميكي وحقول فيزيائية متعددة مثل الحقل الإلكتروديناميكي والكهراطيسي، ويمكن استخدامها لحل مسائل الجريان من جهة أو لتطبيق الطرق الحسابية المعروفة في الهيدروديناميك لحل مسائل من حقول فيزيائية أخرى مثل الجريان عبر أجسام مسامية ، والانتقال الحراري .

لنعتبر ظاهرة فيزيائية ما تخضع لقانون طبيعي مصاغ بحيث أن **شعاع التدفق** Flux vortex ، f ، يتناسب مع **شعاع التدرج** لقيمة عددية B . فاذا وضعنا معامل التناسب مساوياً الواحد يكون :

$$\mathbf{f} = \mathbf{grad}\ B \quad , \quad . \qquad (15.1)$$

إضافة لذلك نفرض أن **الكمية** M المشتركة في العملية الفيزيائية تبقى ثابتة ،

حيث لا يمكن أن يعبر أي جزء منها **خطوط المساد** ( أو خطوط القوة أو خطوط التيار ! ) . عندئذ تكون ( انظر ص ٢٠٥ ) :

$$M = \int\int f.dA \quad , \tag{15.2}$$

حيث dA شعاع الناظم على العنصر السطحي dA الذي يخترقه جزء من الكمية M .

على أساس ما تقدم ، وبفرض أن الظاهرة الفيزيائية ( المستوية ) يمكن حصر دراستها في المستوي y x ، تكون العلاقات الاساسية التالية محققة :

$$\frac{\partial f_x}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial x} = (\text{rot } f)_z = 0 \quad , \tag{15.3}$$

$$\frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} = \text{div } f = 0 \quad , \tag{15.4}$$

$$\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial y^2} = \Delta B = 0 \quad , \tag{15.5}$$

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial y^2} = \Delta M = 0 \quad , \tag{15.6}$$

حيث $\Delta$ معامل **لابلاس** . القيمة B يمكن ان تمثل أيضاً قيمة فراغية وتحقق عندئذ معادلة **لابلاس** التفاضلية ثلاثية البعد ؛ بينما تخضع M لمعادلات ثنائية البعد فقط .

باختيار M,B,f كقيم متماثلة لعمليات فيزيائية مختلفة تحقق جميعها معادلة **لابلاس** التفاضلية نحصل على الجدول (١٠١٥) ( انظر أيضاً الجدول ١٠١ ) الذي يتضمن الخواص التماثلية بين حقل الجريان الهيدروديناميكي وحقول فيزيائية مختلفة .

الجدول ١٠١٥ : مقارنة بين القيم المتماثلة
لعمليات فيزيائية مختلفة تخضع كلها لمعادلة لابلاس التفاضلية .

| الحقل الفيزيائي | F | B | M |
|---|---|---|---|
| الحقل الهيدروديناميكي | السرعة v | تابع الكمون $\Phi$ | تابع التيار $\Psi$ |
| الحقل الكهربائي (الكهروديناميكي) | كثافة التيار $j_e$<br>شدة الحقل $H_e$ | الكمون الكهربائي $\Phi_e$ | تابع التيار الكهربائي $\Psi_e$ |
| الغشاء الصابوني | زاوية ميل الغشاء ضد المستوي x y | | إرتفاع تقوس الغشاء المشدود z |
| الجريان الزاحف أو الرشحي | السرعة v | الضغط الستاتيكي $p_s$ | كمية السائل أو التيار الحجمي Q |
| النقل الحراري | التيار الحراري أو السيالة الحرارية $Q_T$ | درجة الحرارة T | كمية الحرارة $Q_T$ |

بالنسبة للحقل الهيدروديناميكي المستوي يتضح من الجدول (١٠١٥) أن العلاقة (15.3) تمثل شرط الخلو من الدوران (10.4) ، والعلاقة (15.4) شرط الاستمرار (10.5) ، والعلاقتين (15.5) و (15.6) معادلتي **لابلاس** لتحديد تابع الكمون (10.6) وتابع التيار (10.10) .

فيما يلي سنوضح باختصار الطرق المبنيـــة على الخواص التماثلية المتضمنة في الجدول (١٠١٥) . هـذه الطرق طورها واستخدمها بنجاح حل مسائل عملية **البرنغ** [7a] وتلاميذه ، خاصة **هاكيشمت** [13][14] ، وتتميز بالمقارنة مع الطرق التحليلية بالافضليات التالية :

١ – جهـد تكنيكي وزمني ومادي قليل نسبياً ، عندما يكتفى بدقة

محدودة ، وخاصـــة في حالة تغيير برنامج البحث نتيجة تعديـل مطاليب المسألة المطروحة .

٢ – إجراء الحسابات بزمن قصير نسبياً حتى عند حل مسائل معقدة .

٣ – وضوح كبير في تمثيل القيم المعطاة وتابعياتها .

## ٢.١٥ التماثل مع الحقل الكهروديناميكي والكهرطيسي

تعرضنـا مراراً للتماثل بين الحقل الهيدروديناميكي والكهروديناميكي ( الإلكتروديناميكي )، حيث بني عليه قانون بيو–سافار لتحديد حقل السرعة الطرحة من خيط إعصاري ( انظر ص ٢٤٥ ) .

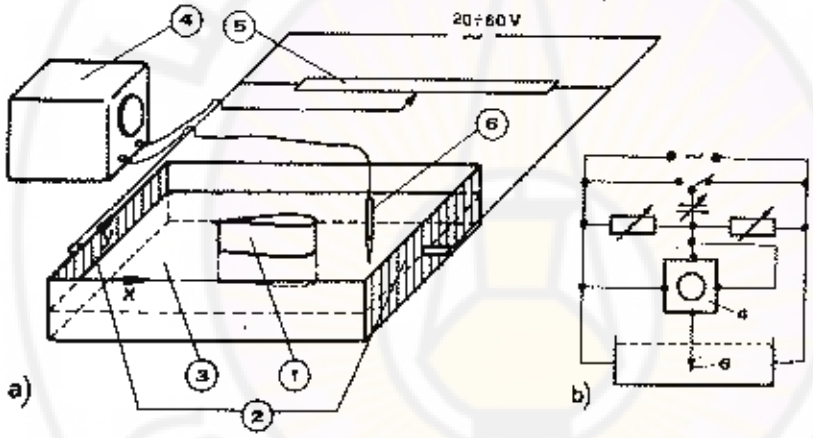
الجدول (١.١) ، ص ٢٤ و ٢٥ ، يتضمن معادلات القيم الاساسية للحقل الكهروديناميكي والكهرطيسي . وكما هو معلوم يتولد بين المصعد ، كقطب موجب (+) ، والمهبط ، كقطب سالب (–) ، تيار من الجزيئات اللانهائية الصغر المشحونة كهربائياً ، حيث تتحرك باتجاه المصعد الالكترونات Electron أو الشاردات السالبة ، وباتجاه المهبط الايونات Ione أو الشاردات الموجبة . ويربط بين الجهد $U_e$ وشدة التيار $I_e$ والمقاومة $R_e$ **قانون أوم** $U_e = I_e R_e$ : Ohm. إن الجهد ينتج عن فرق كمون كهربائي ، $U_e = -\Delta\Phi_e$ ، ونحصل على شدة الحقل الكهربائي في اتجاه ما كمشتق جزئي للكمون الكهربائي :

$$H_{ex} = \frac{\partial \Phi_e}{\partial x} \; ; \quad H_{ey} = \frac{\partial \Phi_e}{\partial y} \; . \qquad (15.7)$$

بمقارنة هذه العلاقة مع (10.1) ، التي بموجبها تنتج مركبتا السرعة لجريان هيدروديناميكي كمشتقات جزئية لتابع كمون السرعة $\Phi$ ، يتجـــلى التماثل بين الحقـل الهيدروديناميكي والكهروديناميكي . كما يمكن باستخدام تابع التيار

الكهربائي إيجاد علاقة تماثل تماماً العلاقة (10.9) . ويحقق كل من تابع الكمون وتابع التيار الكهربائيين معادلة لابلاس التفاضلية، حيث يكون بموجب (15.5) و(15.6) والجدول (١٠١٥) : $\Delta\Phi_e = 0$, $\Delta\Psi_e = 0$ . كما أن المعادلتين التفاضليتين (15.4) و (15.9) ، اللتين تمثلان شرط الاستمرار وشرط الخلو من الدوران بالنسبة للحقل الهيدروديناميكي ، معروفتان في علم الكهرباء باسم **قانوني كيرشهوف الأول والثاني** .

الاستفادة من التماثل الهيدرو ـ كهروديناميكي لحل مسائل الجريان يستخدم **الحوض الالكتروليتي** Electrolytical tank المبين في الشكل (١٠١٥) .




الشكل ١٠١٥ : الحوض الإلكتروليتي لدراسة الجريان اللاجولاني حول بروفيل بالاستفادة من التماثل الهيدرو ـ كهروديناميكي . المنظور التوضيحي (a رسم مبسطاً بالمقارنة مع دارة التوصيل (b . ① نموذج للبروفيل ، ② قطبان من النحاس أو الغرافيت ، ③ قاعدة الحوض ، ④ أوسيلوسكوب ، ⑤ مقاومة منزلقة ، ⑥ مسبار ثابت .

يتألف الحوض من مادة عازلة باستثناء جدارين متقابلين يقومان مقام القطبين ويصنعان من معدن كالنحاس أو من الغرافيت ، ويوصلان بمقاومة كهربائية منزلقة أو مقسمة عشرياً متصلة بمنبع التيار الكهربائي المتناوب . أما قاعدة

الحوض فتكون مستوية وأفقية تماماً . كمحلول إلكتروليتي يستخدم الماء ، ويغطس فيه نموذج للجسم المراد دراسة الجريان حوله ( جناح حامل مثلاً ) الذي يصنع من مادة عازلة أيضاً .

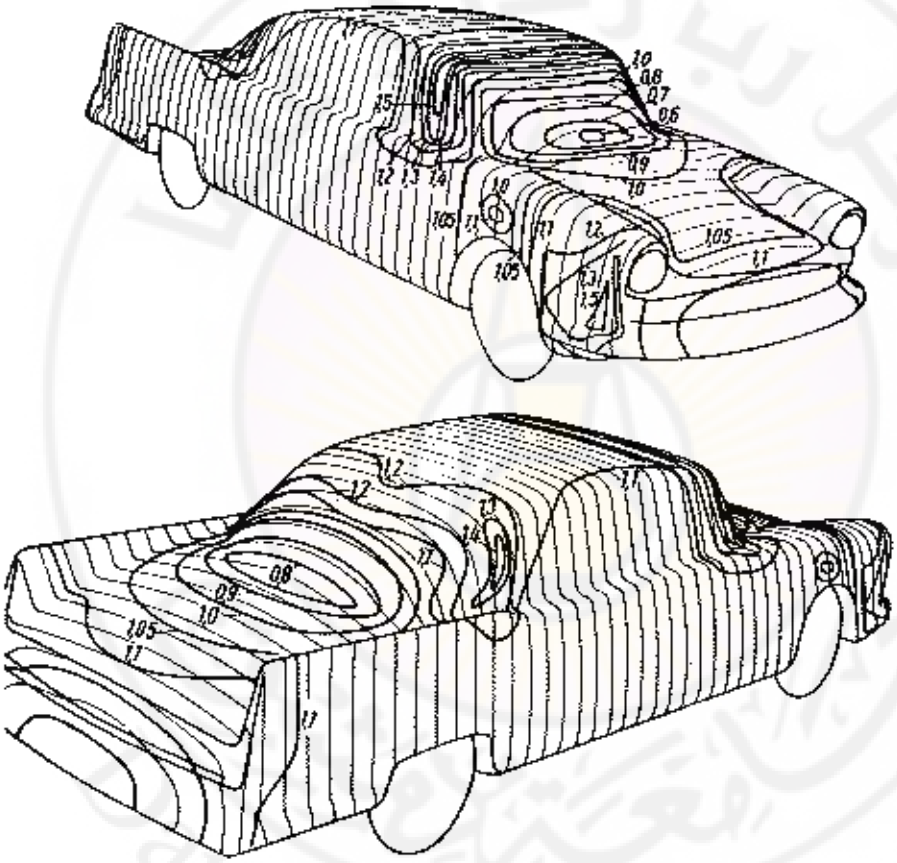
إن توصيل الدارة الكهربائية للحوض الالكتروني يطابق تماماً جسر **وطسطون** Wheatston bridge ، ويعمد بواسطة مسبار قياس ذي مقبض معزول ورأس مدبب الى تحديد نقاط المنحنيات في المستوي y x التي من أجلها لا يمر في الجسر أي « تيار » . هذه المنحنيات تمثل عندئذ خطوطاً للكمون الثابت . من أجل مقاومة معينة نحصل على كمون معين ، ثم تغيّر المقاومة مقداراً ثابتاً فنحصل على خط كمون آخر وهكذا . فاذا جعلنا قفزات تغيير المقاومة ثابتة في كامل الحقل فإن فرق الكمون يبقى ثابتاً ، $\Delta\Phi \equiv \Delta\Phi_0 = \text{const}$ . لتحديد حقل السرعة نقيس الابعاد الناظمية $\Delta s$ بين خطوط الكمون المتجاورة فنجد :

$$V = \Delta\Phi/\Delta s \ . \qquad (15.8)$$

بدلاً من الحوض الإلكتروليتي الذي يصلح لدراسة المسائل الفراغية المعقدة ، والمستوية يمكن استخدام **ورق خاص** ناقل كهربائياً لدراسة المسائل المستوية ، حيث يقص من الورقة الناقلة للكهرباء شكل الجسم وترسم عليها مباشرة خطوط الكمون حول الجسم .

لقد طورت طريقة النماثل الكهربائي خلال حقبة قصيرة إلى مستوى عال جداً ، خاصة من قبل **هاكيشمت** [13][14] . ودون التعرض هنا لتفاصيل أكثر نشير إلى أنه بمساعدة هذه الطريقة يمكن مثلاً قياس حقل السرعة في المصافي على أساس مراعاة **معامل دشح** يتعلق بالمكان [13] ، كما يمكن ربطها مع طريقة التمثيل المطابق لدراسة الجريان الجولاني واللاجولاني حول بروفيل جناح حامل [87] وعبر شبك بروفيلات مستقيم [88] ، وذلك دون حاجة لاستخدام طريقة

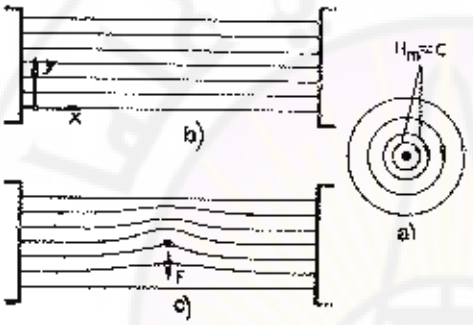
الخطوات المتقاربة من أجل تحقيق شرط انعدام السرعة على الحافة الخلفية ، كذلك يمكن بمساعدتها دراسة الجريان عبر الدولاب الدائر لآلة قطرية، وتحديد حقل السرعة داخل وصلات الانابيب المعقدة ومغلفات آلات الجريان أو تصميمها بشكل أفضل [97] . ويبين الشكل(٢.١٥)، كمثال، استخدام طريقة التماثل الكهربائي لتحديد حقل السرعة حول هيكل سيارة . إن تحليل الشكل



الشكل ٢.١٥ : تحديد حقل السرعة حول هيكل سيارة مرعتها الكافية ١=٧.
خطوط السرعة الثابتة رسمت بشكل اسمك قليلاً
من خطوط الكمون الثابت ، حسب [131] .

يسمح بتحديد المناطق التي تتعرض لخطر انفصام الطبقة الحدية ، كما يسمح أيضاً باستخلاص نتائج تتعلق بتصميم الهيكل بحيث يصبح أقل مقاومة . فمثلاً يكون من الأنسب إذا كان تقوس السقف بشكل ربع قطع ناقص وليس كربع دائرة.

بالإمكان أيضاً استغلال التماثل الهيدرو- كهرطيسي ( انظر ص ٢٤٥ ) . إن شدة التيار التي يحرضها حقل مغناطيسي في سلك ناقل للكهرباء تماثل الجولان، وشدة الحقل المغناطيسي $H_m$ تماثل السرعة V ، وخطوط الحقل تماثل خطوط التيار . وعليه فإن خطوط القوة حول سلك مستقيم ناقل الكهرباء تأخذ شكل دوائر مركزية، الشكل ( a - ٣.١٥ ) ، تماماً مثل خطوط التيار ، أو خطوط السرعة الثابتة للاعصار الكموني . وتكون خطوط القوة بين قطبين مغناطيسيين مستويين ودائمين ممثلة بمستقيمات متوازية ، الشكل ( b - ٣.١٥ ) ، تماماً مثل خطوط التيار لجريان انسحابي منتظم . فاذا وضعنا السلك الناقل في مثل هذا الحقل المغناطيسي ، فإن خطوط القوة تتعرض لانحراف كما هو مبين في الشكل ( c - ٣.١٥ )، ويتعرض السلك الناقل نفسه لقوة F متعامدة مع $H_{mx} = \text{const}$ . هذه القوة تماثل قوة الرفع $F_A$ التي تتعرض لهـا اسطوانة في جريان جولاني ( كتضام لجريان انسحابي مع إعصار كموني ) وتحسب بموجب قانون **كوتا - يوكوفسكي** ، وتكون متعامدة مع اتجاه السرعة غير المشوشة للجريان الانسحابي .




الشكل ٣.١٥ : التماثل الهيدرو- كهرطيسي.
(a خطوط الحقل حول سلك ناقل للكهرباء،
(b خطوط الحقل لمغناطيس دائم ،
(c انضمام a) و (b) .

إن الهيدروديناميك المغناطيسي يعالج العلاقة بين الوسط السائلي المتحرك ، والتيار الكهربائي المحرض والحقل المغناطيسي .

## ٣.١٥ التماثل مع الغشاء الصابوني

إذا فرضنا أن ضغط التقوس $\Delta p_c$ المؤثر على غشاء أو قشرة صابونية معدوماً، وبالتالي إذا جعلنا الضغط الداخلي مساوياً للضغط الخارجي $p_1 = p_2$ ، الشكل (١٢.٢) ، فإن العلاقة (2.41) تأخذ الصيغة :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \Delta z = 0 \quad , \tag{15.9}$$

التي تبيّن أن ارتفاع تقوس الغشاء الصابوني يحقق معـــادلة لابلاس التفاضلية التي يخضع لها تابع الكمون وتابع التيـار للحقل الهيدروديناميكي المستوي . لذلك يمكن اعتبار z تماثل $\Phi$ أو $\Psi$ . ولكن بالنسبة لجريان جولاني ، $\Gamma \neq 0$ ، فإن تابع كمون السرعة $\Phi$ يمكن ان يكون في بعض نقاط حقل الجريان متعدد القيم ( ص ٢٢٦ ) ، كما أن قيمته يمكن ان تتغير فجأة ، بينما لا يمكن لارتفاع التقوس z أن يتعرض لمثل هذه القفزات ، وبالتالي لا يمكن في حالة الجريانات الجولانية وضع z مماثلاً لـ $\Phi$ ، ولكن يمكن وضع :

$$z \doteq \Psi \tag{15.10}$$

لأن تابع التيار $\Psi$ تابع مستمر ووحيد التعيين دائماً [7a] .

إن التماثل بين الحقل الهيدروديناميكي وغشاء المحلول الصابوني بموجب (15.10) يسمى **التماثل العكسي** Inverse analogy . وهو معروف منـذ زمن طويل ، ولكنه لم يستغل لحل مسائل تكنيكية إلا منذ حوالي 20 عاماً بسبب الصعوبة الكبيرة في قياس ارتفاع التقوس $z(x,y)$ بدقة كافيـة تسمح بتحديد حقل السرعة المماثل .

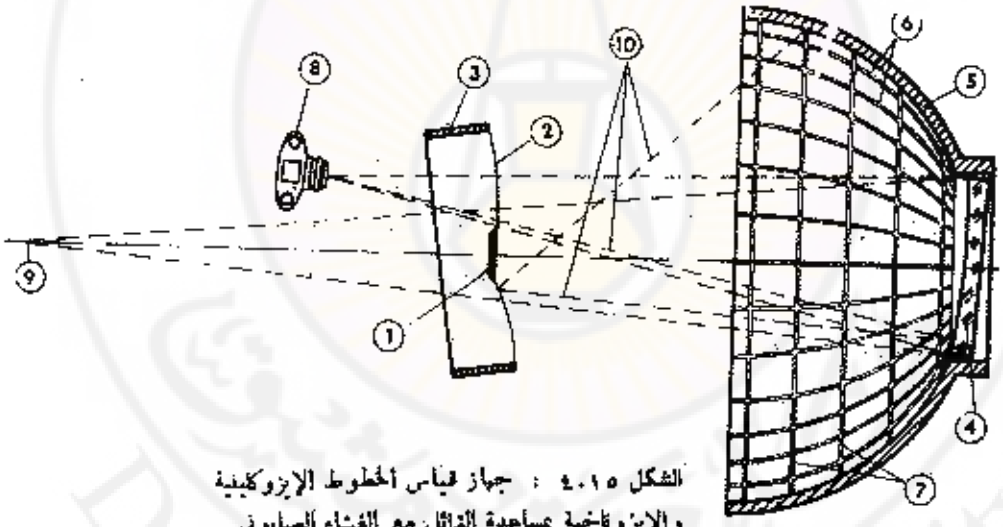
إن مركبتي السرعة تنتجان حسب (10.9) كمشتقات جزئية لتابع التيار :

$$u = \partial\Psi/\partial y \; ; \quad v = -\partial\Psi/\partial x \quad , \qquad (15.11)$$

وعليه يكون بموجب (15.10) ميلا الغشاء الصابوني كمشتقين جزئيين بالنسبة لـ x و y مماثلان لمركبتي السرعة :

$$|\partial z/\partial y| \propto u \; ; \quad |\partial z/\partial x| \propto v \quad . \qquad (15.12)$$

في ضوء ماتقدم فإن صعوبة الطريقة ناتجة من صعوبة تحديد **خطوط الميل الثابت** أو **الخطوط الايزوكلينية** Isoclinic lines بدقة كافية ، لكي يتم تحديد **خطوط السرعة الثابتة** أو **الخطوط الايزوتاخية** Isotachic lines . لهذه الغاية استخدمت حديثاً بنجاح طريقة القياس المبينة في الشكل (٤.١٥) والموضحة في [7a][150].




الشكل ٤.١٥ : جهاز قياس الخطوط الإيزوكلينية والإيزوتاخية بمساعدة التماثل مع الغشاء الصابوني .

① النموذج ، ② غشاء صابوني ، ③ إطار الغشاء الصابوني ، ④ مرآة مقعرة ، ⑤ طاسة نصف كروية ، ⑥ دوائر طولية (زوالية) لتحديد الخطوط الايزوتاخية ، ⑦ دوائر عرضية لتحديد الخطوط الايزوكلينية ، ⑧ كاميرا ، ⑨ نقطة تقاطع الاشعة الضوئية ، (10) طريق شعاع ضوئي ، حسب [7a] .

يثبت نموذج للجسم المراد دراسة الجريان حوله بشكل يمكن إزاحته في اتجاه z ( الشكل ٥.١٥ ) داخل إطار ينصب فوق جوانبه الغشاء الصابوني . فوق النموذج والغشاء توجد نصف كرة فارغة في قعرهـــا مرآة مقعرة وعلى جدارها رسمت دوائر عرضية وطولية ، تظهر ، بعد انعكاسها على الغشاء الصابوني ، في موقع الكاميرا كخطوط إيزوتاخية وخطوط إيزوكلينية . فالعملية لا تعدو كونها عملية تمثيل مطابق تجريبية لدوائر الطول والعرض .

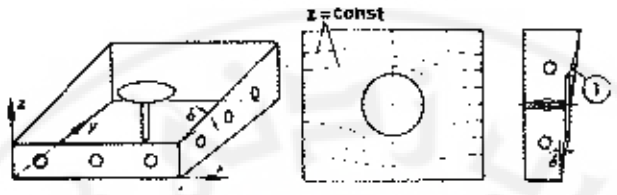
لدراسة الجريان الانسحابي المستوي حول دائرة مثلاً ، الشكل (٥.١٥) ، يستخدم إطار مفتوح جدرانه مثقوبة (لتحقيق تساوي الضغط l) وذات ارتفاع متغير . كنموذج تستخدم صفيحة دائرية حادة الاطراف. إن زاوية ميل الاطار الثابتة δ تماثل حسب (15.12) السرعة غير المشوشة للجريان :

$$u_\infty = \frac{\partial z}{\partial y} = \tan \delta \,, \qquad (15.13)$$

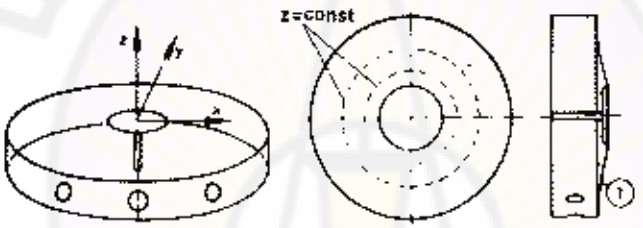
فاذا حددنا خطوط الميل الثابت ، z = const ، للغشاء الصابوني المشدود فوق الاطار والنموذج (الخطوط المبينة في الشكل ٥.١٥) نحصل على صورة الجريان الانسحابي اللاجولاني حول دائرة ( الشكل ٩.١٢ ) .

لدراسة الجريان الجولاني البحت حول الدائرة يستخدم إطار ذي جوانب ثابتة الارتفاع ، الشكل (٦.١٥) . عندئذ تكون δ = 0 وبموجب (15.13) السرعة غير المشوشة أيضاً معدومة . فاذا أزحنا نموذج الدائرة في اتجاه z إلى ما فوق مستوي الإطار فإن خطوط الميل الثابت ، z = const ، للغشاء الصابوني تظهر كدوائر مركزية ، تماماً مثل خطوط التيار لإعصار كوني ، الشكل (٤.١٠). وعليه إذا أزحنا نموذج الدائرة في الشكل (٥.١٥) باتجاه z الموجب، فإن ذلك يماثل تضام جريان انسحابي منتظم مع إعصار، ونحصل على صورة لخطوط

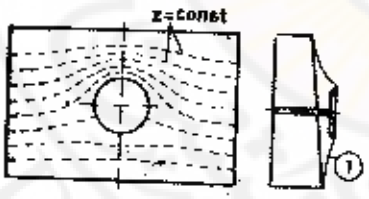
الميل الثابت للغشاء الصابوني ، الشكل (٧.١٥) ، مماثلة لصورة الجريان الجولاني حول دائرة ، الشكل (١٢.١٢) .




الشكل ٥.١٥ : دراسة الجريان الانسحابي اللاجولاني حول دائرة باستخدام التماثل مع الغشاء الصابوني ① ، حسب [7a] .




الشكل ٦.١٥ : دراسة الجريان الجولاني البحت حول دائرة باستخدام التماثل مع الغشاء الصابوني ① ، حسب [7a] .




الشكل ٧.١٥ : دراسة الجريان الجولاني حول دائرة باستخدام التماثل مع الغشاء الصابوني ① ،

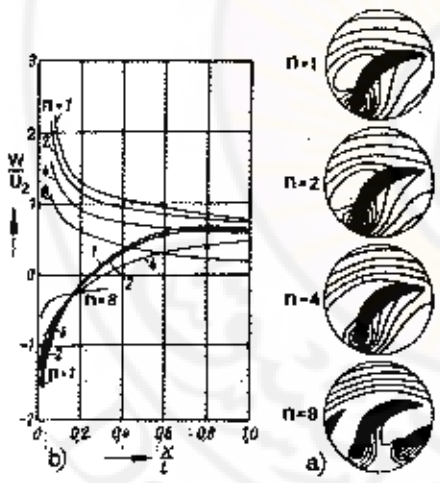
إن طريقة التماثل مع الغشاء الصابوني استخدمت بنجاح لحل مسائل معقدة ، يتطلب حلها بموجب الطرق العادية زمناً طويلاً وجهداً حسابياً كبيراً . من هذه المسائل دراسة الجريان عبر شبك مستقيم من بروفيلات كبيرة السماكة والانحناء ، كما هي مستخدمة في بعض مراحل العنفات البخارية . كما استخدمت الطريقة أيضاً لدراسة

الجريان عبر شبك قطري لدولاب دائر . ولكن في هـذه الحالة ، وبسبب أن تابع التيـار لحقل الجريان النسبي الدوراني داخل الدولاب الدائر يحقق معادلة بويسون Poisson ( انظر ص ٢٢٣ ) [27] :

$$\Delta \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 2\omega \quad . \qquad (15.14)$$

وليس معادلة لابلاس ، يلزم لتحقيق التماثل مع الغشاء الصابوني أن نعطي ضغط التقوس $\Delta p_c$ في العلاقة (2.41) قيمة تختلف عن الصفر ، وتماثل السرعة الزاوية $\omega$ [7a] . بعدئذ يمكن تحديد صورة الخطوط الايزوتاخيـة ، وبالتالي توزع السـرعة ، حول بروفيل الشبك ، الشكل (٨.١٥) .

بمساعدة التماثل مع الغشاء الصابوني يمكن أيضاً تحديد إجهادات القص الناتجة عن فتل قضيب اسطواني وذلك بنفخ غشاء صابوني حول بروفيل القضيب [27] . في هـذه الحالة يخضع تابع إجهاد القص لمعادلة بويسون . كذلك يمكن دراسة الجريانات الصفائحية في أنابيب اسطوانية ذات مقاطع اعتباطية [7a] ، والجريان الناتج عن حركة صفيحتين مستويتين تفصلهما مسافة صغيرة في سائل ذي لزوجة كبيرة ، حيث أن لهذه المسألة أهميـة خاصة في النظرية الهيدروديناميكية للتزييت [150] ، وأخيراً يمكن أيضاً بمساعـدة التماثل مع الغشاء الصابوني دراسة مسائل النقل الحراري المستوي المستقر ، حيث تكون في هـذه الحالة $T \sim z$ .




الشكل ٨.١٥ : الخطوط الإزوتاخية لشبك بروفيلات قطري عدد ريشه $n = 1$ حتى 8 ، وتوزع السرعة حول البروفيل ، حسب [7a] .

## ٤.١٥ التماثل مع الجريان الزاحف أو الرسّحي

عندما تكون لزوجة السائل كبيرة جداً ، أو السرعة صغيرة جداً ، بحيث أن عدد رينولدز (5.25) :

$$\mathrm{Re} = \frac{\bar{V}\, l}{\nu} < 1 \quad , \tag{15.15}$$

( ولا يتجاوز بأي حال العشرة ، [7a] ) فنسمي عندئذ حركة السائل **حركة زاحفة** Creeping motion أو **حركة رشحية** Seepage motion . مثل هذه الجريانات الزاحفة تتحقق عندما يتسرب مائع أو غاز عبر كتل رملية ، أو طبقات أرضية مسامية (حركة المياه الجوفية) أو أية مواد مرشّحة Filter mass. وتتحقق أيضاً عندما يجري سائل بين جدارين متوازيين تفصلهما مسافة صغيرة جداً. في كل هذه الحالات تكون قوى العطالة بالمقارنة مع قوى اللزوجة صغيرة لدرجة يمكن إهمالها. وتكون المعادلة الحركية لهذه الجريانات (راجع [28a]):

$$\mathbf{grad}\ p_s = \eta\, \Delta \mathbf{V} \quad , \tag{15.16}$$

حيث $\Delta$ هنا معامل **لابلاس** . فاذا أخذنا تفرق طرفي المعادلة ولاحظنا أنه يمكن استبدال موقعي $\Delta$ و div وأن $\mathrm{div}\ \mathbf{V} = 0$ نجد :

$$\mathrm{div}\ \mathbf{grad}\ p_s = \eta \Delta\, \mathrm{div}\ \mathbf{V} \Rightarrow \Delta p_s = 0 \quad , \tag{15.17}$$

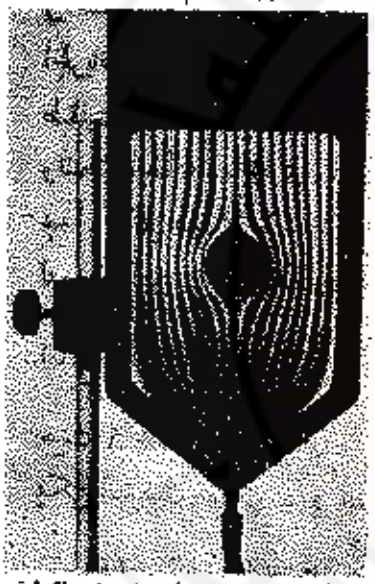
هذا يعني أن **الضغط يخضع لمعادلة لابلاس** ، مع اعتبار أن $p_s$ يمثل هنا مجموع الضغط الستاتيكي وضغط الثقالة في معادلة برنولي (8.9): $p_s = p + \rho g z$ . على هذا الأساس فإن خطوط الضغط الثابت للجريان الزاحف تماثل خطوط الكمون للحقل الهيدروديناميكي اللادوراني المستوي . وتكون بالاضافة لذلك ، كما في الجدول (١٠١٥) القيم التالية للحقلين متماثلة :

$$V \triangleq V\,,\quad \Phi \triangleq p_s\,;\quad \Psi \triangleq \psi\quad . \qquad (15.18)$$

لقد كان **داوسي** Darcy أول من أثبت تجريبياً عام 1856 أن مركبتي سرعة الرشح للجريانات الزاحفة تتناسب طرداً مع تدرج الضغط في الاتجاه الإحداثي المطلوب . فإذا فرضنا k معامل التناسب تكون :

$$u = -\frac{1}{k}\frac{\partial p_s}{\partial x}\,;\quad v = -\frac{1}{k}\frac{\partial p_s}{\partial y}\quad . \qquad (15.19)$$

أما **هل ـ شو** Hell-Shaw فكان أول من طور جهازاً عام 1898 يعرف اليوم باسمه ، لترئية الجريان المستوي حول نماذج معينة ، الشكل (٩.١٥) . فحيث أن خيوط التيار تأخذ اتجاه السرعة فإنها تخترق في الجريان الزاحف عمودياً سطوحاً للضغط الثابت . لذلك إذا لونّا بعض خيوط التيار للجريان بين صفيحتين زجاجيتين متوازيتين قريبتين جداً من بعضهما وثبت بينهما نموذج للجسم المراد ترئية الجريان حوله (صفيحة دائرية) فإننا نحصل بالتصوير مثلاً على صورة الجريان الهيدروديناميكي المستوي المماثل حول هذا الجسم . ولكن لا يمكن بمساعدة هذا الجهاز ترئية الجريان الجولاني حول جناح حامل . وعليه تبقى أهمية هذا الجهاز توضيحية أكثر منها علمية .



الشكل ٩.١٥ : جهاز هل- شو لترئية الجريان حول دائرة باستخدام التماثل مع الجريان الزاحف .

من جهة أخرى يمكن بمساعدة التماثل مع الجريان الزاحف حل مسائل معقدة لعمليات جريان المياه الجوفية باستخدام النتائج المعروفة للحقل الهيدروديناميكي .

فمثلاً يمكن على هذا الاساس تحليل عملية الرشح للمياه الجوفية والقوى الناتجة عنها المؤثرة على أساسات محطة طاقة كهرمائية أو سد [7a] [9] [13] .

## ٥.١٥ التماثل مع النقل الحراري

باعتبار أن السيالة الحرارية أو التدفق الحراري $Q_h$ تتناسب طرداً مع معامل النقل الحراري ومع تدرج درجة الحرارة السالب فانه بموجب الجدول (١.١٥) تكون خطوط الكمون للحقل الهيدروديناميكي المستوي مماثلة لخطوط درجة الحرارة الثابتة ، وخطوط التيار مماثلة لخطوط التيار الحراري . وعليه يمكن اعتبار صورة الجريان اللاجولاني حول دائرة كما في الشكل (٩.١٢) مماثلة لصورة النقل الحراري لصفيحة مستوية ذات ثقب دائري ودرجة الحرارة على طرفها الايسر والأيمن ذات قيمة محددة .

## ٦.١٥ أسئلة مراجعة وتمارين

س ١.١٥ : اشرح الأسس الرياضية والفيزيائية للطرق التماثلية المستخدمة في حل مسائل الجريان وحدد مزاياها العامة بالمقارنة مع الطرق الأخرى المعروفة .

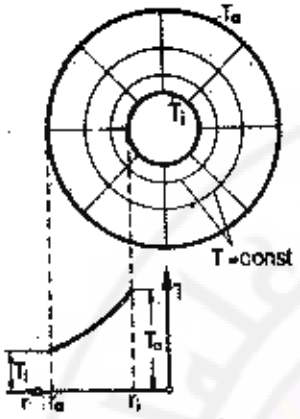
س ٢.١٥ : قارن بين الطرق التماثلية المدرجة في الجدول (١.١٥) وبيّن أهمية كل منها العملية .

س ٣.١٥ : بيّن كيف يمكن بمساعدة التماثل مع الغشاء الصابوني حساب إجهادات القص الناتجة عن فتل قضيب مثبت في جدار من طرف واحد بفرض G معامل الانزياح ، $\theta$ زاوية الفتل ، $r$ تابع الإجهاد .

ت ١.١٥ : الشكل (ت ١.١٥) يمثل مقطع أنبوب مستقيم طويل جداً ذي جدران سميكة ومبرد داخله بخار بدرجة حرارة ثابتة $T_i$ . خارج الأنبوب تنتقل الحرارة بالاشعاع، إذا كانت درجة الحرارة على جدار الأنبوب الخارجي $T_0$ أوجد في حالة الاستقرار توزع درجة الحرارة في جدار الأنبوب .

الحل: إن الحقل الحراري في هذه الحالة يماثل هيدروديناميكياً حقل النبع المستوي،

وبالتالي فإن تابع كمون المنبع يماثل بموجب الجدول (١٠١٥) درجة الحرارة T. وبما أن معادلة لابلاس من الدرجـــة الثانية فإن إضافة ثابت اعتباطي $C_2$ للطرف الأيمن للمعادلة (10.26) ممكن حيث يصبح :




الشكل ت ١٠١٥.

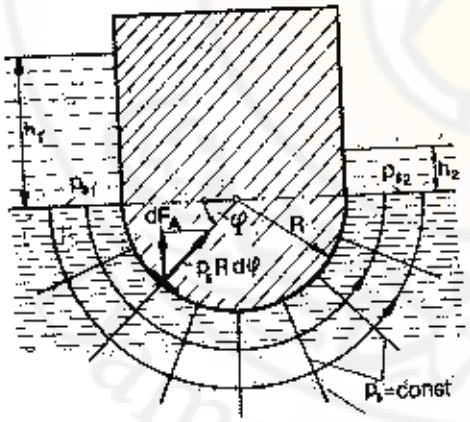
$$\Phi_Q = C_1 \ln r + C_2 \Rightarrow T = C_1 \ln r + C_2 \quad (a)$$

الثابتان $C_{1,2}$ يتحددان بمساعدة الشروط الحدية حيث تكون بموجب الشكل (ت ١٠١٥): $T=T_i$ من أجل $r=r_i$ ، $T=T_a$ من أجل $r=r_a$ . بذلك نجد من (a) أولاً $C_1$ و $C_2$ ومن ثم بعـــد إصلاح بسيط العلاقة :

$$\frac{T(r)}{T_i} = \left(\frac{T_a}{T_i} - 1\right) \frac{\ln \frac{r}{r_i}}{\ln \frac{r_a}{r_i}} + 1 \quad (b)$$

من أجل $T = \text{const}$ ينتج $r = \text{const}$ وبالتالي فإن خطوط درجة الحرارة الثـــابتة $T = \text{const}$ تمثلها دوائر مركزية، تماماً مثل خطوط الكمون الثابت للمنبع $\Phi_Q = \text{const}$ .

ت ٢٠١٥ : جدار لحجز الماء نهايته السفلية بشكل نصف اسطوانة دائرية مغموسة في وسط مسامي الشكل ( ت ٢٠١٥ ). أحسب قوة الرفع $F_A$ المؤثرة على واحدة عرض الجدار $b = 1$ .




الشكل ت ٢٠١٥

الحل : سنعالج المسألة كمسألة مستوية وسنهمل أولاً دافعـــة أرخميدس $F_n$ المؤثرة على الجدار. فإذا فرضنا ان الطبقة المسامية عميقة جداً فيمكن اعتبار الجريان الرشحي ( الراحف ) يمـــاثل هيدروديناميكياً الجريان الجولاني البحت حول اسطوانة، أي جريان إعصار كوني . وعليه يكون على محيط الدائرة بموجب (10.44) مع ملاحظة اتجاه $\varphi$ في الشكل ( ت ٢٠١٥ ) :

$$\Phi = C_1 \varphi + C_2 \quad , \qquad (a)$$

حيث $C_2$ ثابت ادخال بسبب كون $\Phi$ من الدرجة الثانية .

بموجب الجدول (٢٠١٥) يكون $p_s \triangleq \Phi$ وبالتالي ينتج من (a) :

$$p_s = C_1 \varphi + C_2 \quad . \qquad (b)$$

الثابتان $C_{1,2}$ يتحددان من الشروط الحدية ، حيث نجد بمساعدة الشكل ( ت ٢٠١٥ ) والعلاقة (b) :

$$p_s (\varphi = 0) = p_{s1} = \rho g h_1 = C_2 \quad , \qquad (c)$$

$$p_s (\varphi = \pi) = p_{s2} = \rho g h_2 \Rightarrow C_1 = \frac{\rho g (h_2 - h_1)}{\pi} \quad . \qquad (d)$$

بذلك يصبح :

$$p_s = \rho g \left[ (h_2 - h_1) \frac{\varphi}{\pi} + h_1 \right] \quad . \qquad (e)$$

من أجل $p_s = \text{const}$ ينتج $\varphi = \text{const}$ وبالتالي فإن خطوط الضغط الثابت تمثلها حزمة من المستقيمات الشعاعية المنبعثة من مركز الدائرة، تماماً كخطوط الكمون الثابت للاعصار.

إن قوة الرفع الجزئية تطابق المركبة الشاقولية لقوة الضغط الجزئية المؤثرة على عنصر سطحي $ds = R\,d\varphi.1$ ، وبالتالي تكون بموجب الشكل (ت ٢٠١٥) :

$$dF_A = p_s \cdot ds \sin\varphi = p_s R \sin\varphi \, d\varphi \quad .$$

بإدخال (e) وإجراء التكامل نجد أخيراً :

$$F_A = \rho g R \left[ \frac{h_2 - h_1}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi \sin\varphi \, d\varphi + h_1 \int_0^{\pi} \sin\varphi \, d\varphi \right] =$$

$$= \rho g R (h_1 + h_2) \quad [kp/m] \quad . \qquad (f)$$

بأخذ دافعة أرخيدس المؤثرة على نصف الاسطوانة بعين الاعتبار والبالغة $F_\pi = \rho g \frac{\pi R^2}{2}$ نصبح :

$$F_A = \rho g R \left[ (h_1 + h_2) + \frac{\pi R}{2} \right] \quad . \qquad (g)$$

★ ★ ★

# فهرس أهم الرموز والأدلة المستخدمة

## مرتبـــة أبجدياً

| الرمز | المعنى | انظر (المعادلة) [الصفحة] {الفقرة} | واحدة القيـــاس | |
|---|---|---|---|---|
| | | | الجملة التكنيكية | الجملة العالمية |
| A | السطح ، مساحة المقطع | (2.18) | $m^2$ | $m^2$ |
| **A** | شعاع الناظم على السطح | (2.18) | $m^2$ | $m^2$ |
| $A_n$ | أمثال عددية للتوزع الإحصاري | (12.85) | 1 | 1 |
| $A_{xt}$ | مساحة مقطع تيار الناقورة | (8.155) | $m^2$ | $m^2$ |
| $A_{x,y,z}$ | السطوح المتعامدة مع z,y,x | (2.21) | $m^2$ | $m^2$ |
| a | سرعة الصوت | (5.27) | $ms^{-1}$ | $ms^{-1}$ |
| $a_n$ | أمثال عددية | (12.91) | 1 | 1 |
| B | تسارع خطي منتظم | (3.86) | $ms^{-2}$ | $ms^{-2}$ |
| **B** | كمية الحركة | (8.89) | $kgms^{-1}$ | $kgms^{-1}$ |
| $B_m$ | أمثال عددية لتوزع الينابيع ـ البالوعات | (12.64) | 1 | 1 |
| b | التسارع | (5.10), [١٢٢] | $ms^{-2}$ | $ms^{-2}$ |
| b | عرض جدار ، ارتفاع اسطوانة | (8.133) | m | m |
| $b_{x,y,z}$ | مركبات التسارع باتجاه z,y,x | (5.13),(3.55) | $ms^{-2}$ | $ms^{-2}$ |
| $b_{r,\varphi,z}$ | مركبات التسارع باتجاه r,φ,z | (13.5-a) | $ms^{-2}$ | $ms^{-2}$ |
| C=const | رمز عام لقيمة ثابتة | {١٠}،(5.57) | 1 | 1 |
| $c_A$ | معامل قوة الرفع | (12.97) | 1 | 1 |
| $C_B$ | ثابتة برنولي | {٢٠٨} | | |
| $C_{BE}$ | ثابتة برنولي للقدرة | (8.11) | $m^2s^{-1}$ | $m^2s^{-1}$ |
| $C_{BH}$ | ثابتة برنولي للارتفاعات | (8.10) | m | m |
| $C_{Bp}$ | ثابتة برنولي للضغط | (8.9) | $kpm^{-3}$ | $Nm^{-3}$ |

| الرمز | المعنى | انظر (المعادلة) [الصفحة] {الفقرة} | واحدة القياس | |
|---|---|---|---|---|
| | | | الجملة التكنيكية | الجملة العالمية |
| $c_i$ | معامل عدم انتظام تيار الدفع | (8.108) | 1 | 1 |
| $c_M$ | معامل العزم للبروفيل | (12.98) | 1 | 1 |
| $c_{M_0}$ | معامل العزم الصفري للبروفيل | (12.105) | 1 | 1 |
| $c_N$ | معامل القوة الناظمية على البروفيل | (8.55) | 1 | 1 |
| $c_\vartheta$ | الحرارة النوعية مع ضغط ثابت | [٧٧] | $\frac{kcal}{kp\,°K}$ | $\frac{Nm}{kg\,°K}$ |
| $c_p$ | معامل الضغط | (8.52) | 1 | 1 |
| cp | السنتيبواز | (2.5) | | |
| $C_{rel}$ | ثابتة برنولي للجريانات النسبية | (8.23) | $m^2\,s^{-2}$ | $m^2\,s^{-1}$ |
| cs | سطح التحكم | {١٠٥٠٨} | | |
| $c_S$ | معامل درجة التحميل للمروحة | (8.160) | 1 | 1 |
| c St | الستتيستوكس | (2.10) | | |
| $c_{su}$ | معامل قوة المص | (12.117) | 1 | 1 |
| $C_v$ | معامل أنبوبة فنتوري أو الهدار | (8.61),(8.31) | 1 | 1 |
| $c_v$ | الحرارة النوعية مع حجم ثابت | [٧٧] | $\frac{kcal}{kp\,°K}$ | $\frac{Nm}{kg\,°K}$ |
| D, d | القطر | (3.48),(3.55) | m | m |
| **D** | عزم كمية الحركة | (8.91) | kp m s | N m s |
| $\frac{D...}{Dt}$ | التفاضل المادي لـ ... | (5.12) | | |
| $d=2y_{dmax}$ | السماكة الأعظمية للبروفيل | [٥٤٤] | m | m |
| E | غزارة النبع أو البالوعة | (10.33) | $m^2\,s^{-1}$ | $m^2\,s^{-1}$ |
| °E | درجة الجلد | (2.11) | | |
| e | البعد بين مركز ثقل السطح ومركز الضغط | (3.25) | m | m |
| e | البعد بين مركزي ثقل الجسم المغمور والحجم المزاح | (3.44) | m | m |
| $e_{r,\varphi,z}$ | شعاع الواحدة باتجاه r,φ,z | (5.74) | 1 | 1 |
| **F** | القوة | [٢٢] | kp | N |
| F (z) | تابع الكمون المركب | (13.13) | | |
| $F_A$ | قوة الرفع الهيدروديناميكية | (8.150) | kp | N |

| الرمز | المعنى | انظر (المعادلة) [الصفحة] {الفقرة} | وحدة القياس | |
|---|---|---|---|---|
| | | | الجملة التكنيكية | الجملة العالمية |
| $F_a$ | دافعة أرخميدس | (3.38) | kp | N |
| $F_G$ | قوة الثقالة ، الوزن | (2.16) | kp | N |
| $F_{in}$ | رد فعل كمية الحركة | (8.103) | kp | N |
| $F_K$ | القوة الحجمية الحركية (قوة العطير) | (8.3) | kp | N |
| $F_p$ | قوة الضغط | (2.18) | kp | N |
| $F_{ph}$ | قوة الضغط على قعر الإناء | (3.26) | kp | N |
| $F_{pN}$ | قوة الضغط الناظمية على البروفيل | (8.55) | kp | N |
| $F_{pT}$ | قوة الضغط المحورية | (3.84) | kp | N |
| $F_S$ | القوة الدافعة لمروحة | (8.158) | kp | N |
| $F_{S0}$ | القوة الدافعة عند الوقوف | (8.166) | kp | N |
| $F_S$ | قوة رد فعل السائل على الجدار الصلب | (8.103) | kp | N |
| $F_v$ | القوة الحجمية | (2.16) | kp | N |
| $F_w$ | قوة المقاومة | (1,1) | kp | N |
| $F_{wb}$ | قوة مقاومة التسارع | (9.41) | kp | N |
| $F_Z$ | القوة النابذة | (2.16) | kp | N |
| $F_\tau$ | قوة الاحتكاك | (8.101) ، [٢٢] | kp | N |
| f | التواتر ، التردد | [٢٢] | $s^{-1}$ | $s^{-1}$ |
| f | السرعة الثانقولية اللابعدية المخرضة من الشبك الباقي | (12.151) | 1 | 1 |
| G | قيمة فيزيائية | (1.3) | | |
| G | معامل الانزياح الزاوي | (2.13) | $kp\,m^{-2}$ | $N\,m^{-2}$ |
| g | التسارع الارضي | (2.16) | $m\,s^{-2}$ | $m\,s^{-2}$ |
| g | السرعة الافقية اللابعدية المخرضة من الشبك الباقي | (12.151) | 1 | 1 |
| H | ارتفاع السطح السائب للسائل عن مستوي القياس | (3.3) | m | m |
| H | الارتفاع الهيدروليكي في معادلة برنولي | (8.10) | m | m |

| الرمز | المعنى | انظر (المعادلة) [الصفحة] {الفقرة} | واحدة القياس | |
|---|---|---|---|---|
| | | | الجملة التكنيكية | الجملة العالمية |
| $H_e$ | شدة الحقل الكهربائي | [٢٤] | V m$^{-1}$ | V m$^{-1}$ |
| $H_m$ | شدة الحقل المغناطيسي الخرض | (7.56), [٣٥] | A m$^{-1}$ | A m$^{-1}$ |
| $H_0$ | ارتفاع الجو المنتظم | (4.16) | m | m |
| h | سماكة الخلوس | (2.1) | m | m |
| h | إرتفاع شاقولي | (3.3) | m | m |
| $h_m$ | فرق ارتفاع سوية سائل مقياس المانومتر | (3.14) | m | m |
| $h_m$ | إرتفاع مركز الطفو المستنتج | (3.44) | m | m |
| $h_p$ | إرتفاع الضغط | (3.9) | m | m |
| $h_s$ | إرتفاع السحب | (3.10) | m | m |
| $h_{s\,max}$ | إرتفاع السحب الأعظمي | (3.18) | m | m |
| $I$ | الدفع الخطي | (8.90) | kp s | N s |
| $\bar{I}$ | تيار الدفع الخطي | (8.96) | kp | N |
| $I_0$ | الدفع الدوراني | (8.92) | kp m s | N m s |
| $I_e$ | شدة التيار الكهربائي | (7.57), [٢٥] | A | A |
| $Im$ | الجزء التخيلي لعدد أو تابع مركب | (13.12) | | |
| i, j, k | أشعة الواحدة باتجاه z, y, x | (5.1) | 1 | 1 |
| $i = \sqrt{-1}$ | واحدة الأعداد التخيلية | (13.1) {١٣} | | |
| $J_{e(x,y)}$ | العزم النابذ لسطح بالنسبة لـ y,x | (3.23) | m$^4$ | m$^4$ |
| $J_S$ | عزم عطالة سطح بالنسبة لمحور ثقالة | (3.24) | m$^4$ | m$^4$ |
| $J_x$ | عزم عطالة سطح بالنسبة لـ x | (3.23) | m$^4$ | m$^4$ |
| $J_y$ | عزم عطالة سطح بالنسبة لـ y | (3.31) | m$^4$ | m$^4$ |
| $J_0$ | عزم عطالة سطح الطفو | (3.43) | m$^4$ | m$^4$ |
| $j_e$ | كثافة التيار الكهربائي | [٢٥] | A m$^{-2}$ | A m$^{-2}$ |
| K | معامل زاوية الورود لبروفيل فردي | (12.129) | 1 | 1 |
| $K_e$ | معامل زاوية الورود لشبك بروفيلات | (12.162) | 1 | 1 |
| $K_C$ | معامل الانضغاطية | (2.32) | m$^2$ kp$^{-1}$ | m$^2$ N$^{-1}$ |
| $K_E$ | معامل المرونة الحجمي | (2.33) | kp m$^{-2}$ | N m$^{-2}$ |

| الرمز | المعنى | انظر (المعادلة) [الصفحة] الفقرة | واحدة القياس | |
|---|---|---|---|---|
| | | | الجملة التكنيكية | الجملة العالمية |
| L | طول ، الطول المميز لجسم | (5.25), [٢٣] | m | m |
| l | طول | (3.35) | m | m |
| $l$ | طول وتر البروفيل | ٥.٢.١٢ | m | m |
| M | مركز الضغط | [١٠٥] | | |
| M | عزم الثنائية المستوية | (10.61) | $m^3 s^{-1}$ | $m^3 s^{-1}$ |
| M | عزم الثنائية النقطية | (11.24) | $m^4 s^{-1}$ | $m^4 s^{-1}$ |
| Ma | عدد ماخ | (5.27) | 1 | 1 |
| Mc | مركز الطفو المستنتج | [١٢٢] | | |
| $M_{f/R}$ | عزم رد فعل كمية الحركة | (8.109) | kp m | N m |
| $M_t$ | عزم الدوران أو الإمالة | (13.45), [٢٤] | kp m | N m |
| $M_t$ | عزم قوى الاحتكاك | [٨٠] | kp m | N m |
| m | الكتلة | (2.34) | $kp\,s^2 m^{-1}$ | kg |
| $\dot{m}$ | التيار الكتلي | (6.1) | $kp\,s\ m^{-1}$ | $kg\,s^{-1}$ |
| m | نسبة الانفتاح | (8.29) | 1 | 1 |
| m=0,1,2,... | عدد طبيعي | (12.67) | 1 | 1 |
| m | أس | (13.8) | 1 | 1 |
| $m_{ap}$ | الكتلة الظاهرية لجسم متسارع | (9.40) | $kp\,s^2 m^{-1}$ | kg |
| $m_F$ | كتلة وقود الصاروخ | (8.171) | $kp\,s^2 m^{-1}$ | kg |
| $m_h$ | الكتلة الهيدروديناميكية | (9.39) | $kp\,s^2 m^{-1}$ | kg |
| $m_R$ | كتلة جسم الصاروخ | (8.171) | $kp\,s^2 m^{-1}$ | kg |
| n | عدد الدورات في الدقيقة | [٧٩] | rpm | rpm |
| n | الأس البوليتروبي | (2.57) | 1 | 1 |
| $n_e$ | شعاع واحدة الناظم | [١٠٥] | 1 | 1 |
| n | الاحداثي الناظمي على السطح أو على اتجاه الجريان | (7.29), [٢٤] | m | m |
| n=0,1,2,... | أعداد طبيعية | (12.85) | 1 | 1 |
| n | عدد ريش دولاب دائرقطري | (13.92) [٦٠١] | | |
| n, s | الاحداثي الناظمي والماسي على جبهة شبك | [٥٢٥] | m, m | m, m |

| الرمز | المعنى | انظر (المعادلة) [الصفحة] {الفقرة} | واحدة القياس | |
|---|---|---|---|---|
| | | | الجملة التكنيكية | الجملة العالمية |
| P | الاستطاعة | [٢٣] | $kp\,m\,s^{-1}$ | $J\,s^{-1}=W$ |
| P | البواز | (2.5) | | |
| $P_A$ | الاستطاعة المبذولة | [٢٧٧] | $kp\,m\,s^{-1}$ | W |
| $P_E$ | الاستطاعة المفيدة | (8.163) | $kp\,m\,s^{-1}$ | W |
| p | الضغط الستاتيكي | (8.9),(2.17) | $kp\,m^{-2}$ | $N\,m^{-2}$ |
| $p_a$ | الضغط الجوي | [٩١] | $kp\,m^{-2}$ | $N\,m^{-2}$ |
| $p_B$ | الضغط في النقطة B | (3.8) | $kp\,m^{-2}$ | $N\,m^{-2}$ |
| $p_b$ | الضغط الصدمي | (12.47) | $kp\,m^{-2}$ | $N\,m^{-2}$ |
| $p_{dyn}$ | الضغط التحريكي | (8.49) | $kp\,m^{-2}$ | $N\,m^{-2}$ |
| $p_e$ | الضغط الزائد | (3.9) | $kp\,m^{-2}$ | $N\,m^{-2}$ |
| $p_S$ | الضغط في مركز ثقل سطح | (3.21) | $kp\,m^{-2}$ | $N\,m^{-2}$ |
| $p_{tot}$ | الضغط الكلي | (8.49) | $kp\,m^{-2}$ | $N\,m^{-2}$ |
| $p_u$ | الضغط الناقص | (3.10) | $kp\,m^{-2}$ | $N\,m^{-2}$ |
| $p_v$ | ضغط التبخر | [٥٧] | $kp\,m^{-2}$ | $N\,m^{-2}$ |
| $p_{x,y,z}$ | الضغط في اتجاه z,y,x | (2.23) | $kp\,m^{-2}$ | $N\,m^{-2}$ |
| $p_\omega$ | الضغط الإضافي الناتج عن الاضطراب | (8.177) | $kp\,m^{-2}$ | $N\,m^{-2}$ |
| p' | تذبذب الضغط لجريان مضطرب | (5.24) | $kp\,m^{-2}$ | $N\,m^{-2}$ |
| p' | الضغط السكوني | [٢٩٢] | $kp\,m^{-2}$ | $N\,m^{-2}$ |
| p* | الضغط الستاتيكي في سائل مهمل الوزن | (8.51) | $kp\,m^{-2}$ | $N\,m^{-2}$ |
| $\overline{p}$ | الضغط الوسطي زمنياً | (5.24) | $kp\,m^{-2}$ | $N\,m^{-2}$ |
| $Q=\dot{V}$ | غزارة التدفق أو التيار الحجمي | (6.4) | $m^3\,s^{-1}$ | $m^3\,s^{-1}$ |
| $Q_{real}$ | غزارة التصريف الفعلية | (8.30) | $m^3\,s^{-1}$ | $m^3\,s^{-1}$ |
| $Q_{id}$ | غزارة التصريف المثالية | (8.33) | $m^3\,s^{-1}$ | $m^3\,s^{-1}$ |
| $Q_P$ | كمية الحرارة | [٦٢٠] | kcal | J |
| $\dot{Q}_P$ | السيالة الحرارية | [٦٢٠] | $kcal\,s^{-1}$ | $J\,s^{-1}$ |
| $Q_w$ | غزارة التدفق الاعصاري | (7.43) | $m^2\,s^{-1}$ | $m^2\,s^{-1}$ |
| q | ضغط الركود أو الضغط التحريكي | [٢٥٨] | $kp\,m^{-2}$ | $N\,m^{-2}$ |
| q | توزع سطحي للينابيع أو البالوعات | (10.80) | $m\,s^{-1}$ | $m\,s^{-1}$ |
| q | توزع خطي للينابيع أو البالوعات | (11.28) | $m^2\,s^{-1}$ | $m^2\,s^{-1}$ |

| الرمز | المعنى | انظر (المعادلة) [الصفحة] الفقرة | وحدة القياس | |
|---|---|---|---|---|
| | | | الجملة التكنيكية | الجملة العالمية |
| R | نصف قطر الانحناء | (8.24),(2.40) | m | m |
| R | نصف قطر الاسطوانة أو الكرة | (12.191),(12.37) | m | m |
| R | ثابتة الغاز | (2.48) | $\frac{kp\,m}{kp\,°K}$ | $\frac{N\,m}{kg\,°K}$ |
| Re | عدد رينولدز | (5.25) | 1 | 1 |
| $Re$ | الجزء الحقيقي لعدد مركب أو تابعه | (13.12) | | |
| $Re_{cr}$ | عدد رينولدز الحرج | (5.26) | 1 | 1 |
| $R_e$ | مقاومة كهربائية | [٢٥] | Ω | Ω |
| r | شعاع نصف القطر المكاني | (5.8) | m | m |
| r | نصف قطر الأنبوب أو الدائرة | (8.21),(3.36) | m | m |
| r | نصف قطر الانحناء المكاني | (8.7) | m | m |
| r, φ, z | الاحداثيات الاسطوانية | [١٧٦] | m, rad, m | m, rad, m |
| S | رمز عام لمركز ثقل سطح أو جسم | {٣٠٣٠١٠٣} | | |
| S | رمز عام لنقطة الركود | [٢٩٠] | | |
| $S_k$ | مركز ثقل الجسم المغمور | [١٢٢] | | |
| St | الستوكس | (2.10) | | |
| $S_v$ | مركز ثقل الحجم المزاح | [١٢٢] | | |
| s | المسافة أو البعد | (1.21) | m | m |
| s | إحداثي باتجاه الجريان | {١٠١٠٨} | m | m |
| ds | عنصر خطي موجه | (7.40) | m | m |
| T | درجة الحرارة المطلقة | (2.49)، [٢٤] | °K | °K |
| T | زمن القيادة | [٢٢٢] | s | s |
| t | الزمن | [٢٢] | s | s |
| t | درجة الحرارة المئوية | (2.49) | °C | °C |
| t | خطوة التقسيم لشبك بروفيلات | {٦٠٢٠٥٠٨} | m | m |
| U | السرعة الأفقية المنتظمة | (2.1) | $m\,s^{-1}$ | $m\,s^{-1}$ |
| U, u | السرعة المميطية | (7.30),(7.39) | $m\,s^{-1}$ | $m\,s^{-1}$ |
| $U_e$ | الجهد الكهربائي | [٦٢١] ، [٢٤] | V | V |
| u, v, w | مركبة شعاع السرعة باتجاه z,y,x | (5.1) | $m\,s^{-1}$ | $m\,s^{-1}$ |

| الرمز | المعنى | انظر (المعادلة) [الصفحة] {الفقرة} | واحدة القياس | |
|---|---|---|---|---|
| | | | الجملة التكنيكية | الجملة العالمية |
| $u_\infty$ | المركبة الأفقية لسرعة الورود غير المشوشة | (8.145) | $ms^{-1}$ | $ms^{-1}$ |
| $u', v', w'$ | مركبات تذبذب السرعة المضطربة باتجاه $z,y,x$ | (5.23) | $ms^{-1}$ | $ms^{-1}$ |
| $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}$ | مركبات السرعة الوسطية زمنياً | (5.23) | $ms^{-1}$ | $ms^{-1}$ |
| $\mathbf{V}$ | شعاع السرعة | (5.1) | $ms^{-1}$ | $ms^{-1}$ |
| $V = \lvert\mathbf{V}\rvert$ | القيمة المطلقة لشعاع السرعة | (5.2) | $ms^{-1}$ | $ms^{-1}$ |
| $V$ | السرعة المطلقة | (7.30) | $ms^{-1}$ | $ms^{-1}$ |
| $V$ | الحجم | (2,36)؛ [٢٣] | $m^3$ | $m^3$ |
| $\dot{V} = Q$ | التيار الحجمي | (6.4) | $m^3 s^{-1}$ | $m^3 s^{-1}$ |
| $V_a$ | سرعة التفريغ من فتحة خزان | (8.32) | $ms^{-1}$ | $ms^{-1}$ |
| $V_{ex}$ | السرعة الخارجة | [١٨٣] | $ms^{-1}$ | $ms^{-1}$ |
| $\widetilde{V}_I$ | السرعة الوسطية لتيار الدفع | (8.107) | $ms^{-1}$ | $ms^{-1}$ |
| $V'$ | السرعة في مستوي المروحة | (8.155) | $ms^{-1}$ | $ms^{-1}$ |
| $\overline{V}$ | السرعة الوسطية زمنياً | [١٨٤] | $ms^{-1}$ | $ms^{-1}$ |
| $\widetilde{V}$ | السرعة الوسطية للتيار الحجمي | (6.12) | $ms^{-1}$ | $ms^{-1}$ |
| $\widetilde{\rho V}$ | كثافة التيار الكتلي الوسطية | (6.11) | $kgs^{-1}m^{-2}$ | $kps m^{-3}$ |
| $V_\infty$ | سرعة الورود غير المشوشة | (8.150) | $ms^{-1}$ | $ms^{-1}$ |
| $v$ | الحجم النوعي | (2.26i) | $m^3 kg^{-1}$ | $m^3 kp^{-1}$ |
| $v_r$ | سرعة إجهاد القص | (2.7) | $ms^{-1}$ | $ms^{-1}$ |
| $v_\infty$ | المركبة الشاقولية لسرعة الورود غير المشوشة | (8.145) | $ms^{-1}$ | $ms^{-1}$ |
| $W$ | القدرة ، العمل | [٢٢] | $J = N m$ | $kp m$ |
| $W$ | السرعة النسبية | (7.30) | $ms^{-1}$ | $ms^{-1}$ |
| $W_H$ | السرعة على بروفيل شبك | (12.179) | $ms^{-1}$ | $ms^{-1}$ |
| $W_{1,2}$ | السرعة المنتظمة قبل وبعد شبك بروفيلات مستقيم | (8.145) | $ms^{-1}$ | $ms^{-1}$ |
| $W_\infty$ | سرعة الورود غير المشوشة لشبك بروفيلات مستقيم | (8.145) | $ms^{-1}$ | $ms^{-1}$ |

| الرمز | المعنى | انظر (المعادلة) [الصفحة] { الفقرة } | واحدة القياس | |
|---|---|---|---|---|
| | | | الجملة التكنيكية | الجملة العالمية |
| $W_{ki}$ | القدرة الحركية | (9.36) | kp m | J |
| w | السرعة الاضافية المعرضة خلف المروحة | (8.156) | $ms^{-1}$ | $ms^{-1}$ |
| $\Delta w$ | السرعة المعرضة باتجاه جبهة الشبك | (12.145) | $ms^{-1}$ | $ms^{-1}$ |
| w | السرعة المركبة | [٥٦٩] | $ms^{-1}$ | $ms^{-1}$ |
| $\overline{w}(z)$ | السرعة المركبة المرافقة | (13.16) | $ms^{-1}$ | $ms^{-1}$ |
| x,y,z | الاحداثيات الديكارتية المتعامدة | {٢٠٣٠٢} | m,m,m | m,m,m |
| $x_a$ | فاصلة موقع السباكة العظمى للبروفيل عن أنفه | [٦١٤] | m | m |
| $x_f$ | فاصلة موقع الانحناء الاعظمي للبروفيل عن أنفه | [٦١٤] | m | m |
| y | إحداثي ناظمي على الجدار ، أو على وتر البروفيل | (2.12) [٥٢٥] | m | m |
| $y_a$ | إحداثي توزع السباكة للبروفيل | (12.121) | m | m |
| $y_s$ | إحداثي توزع الانحناء للبروفيل | (12.128) | m | m |
| z | معامل القيمة العددية | (1.10) | | |
| z | إرتفاع منسوب السائل في وعاء | { ٣ } | m | m |
| z | إرتفاع تقوس الغشاء الصابوني | (15.9),(2.41) | m | m |
| z | الارتفاع المكاني | (8.10) | m | m |
| z | العدد المركب | (13.1) | m | m |
| $\overline{z}$ | العدد المركب المرافق | (13.4) | m | m |
| Z | ارتفاع الصعود في انبوب شعري | (2.43) | m | m |
| $z_s$ | العمق الشاقولي لمركز ثقل سطح عن السطح الحر لسائل | (3.21) | m | m |
| α, β, γ | أس | (1.6) | | |
| z, β, γ | زاوية ميل الناظم على المحاور x,y,z | (2.24) | ° | ° |
| z | زاوية الورود ( الهجوم ) | {٦٠٣٠١٢} | ° | ° |

| الرمز | المعنى | انظر (المعادلة) [الصفحة] { الفقرة } | وحدة القياس | |
|---|---|---|---|---|
| | | | الجملة التكنيكية | الجملة العالمية |
| $\alpha$ | زاوية اتجاه دخول أو خروج الجريان عبر شبك مع x | [٥٢٥] | ° | ° |
| $\alpha_g$ | زاوية الورود الهندسية | [٢٩٢] | " | ◇ |
| $\alpha_0$ | زاوية قوة الرفع الصفرية | (12.110) | ° | ° |
| $\alpha^*$ | زاوية الورود اللاصدمي | (12.118) | ° | ° |
| $\beta$ | معامل التمدد الحجمي | (6.16) | $s^{-1}$ | $s^{-1}$ |
| $\beta$ | زاوية اتجاه دخول أو خروج الجريان مع جبهة الشبك | [٥٣٥] | ° | ° |
| $\beta_s$ | زاوية البروفيل | [٢٥٣] | ° | ° |
| $\Gamma$ | الجولان ، الشدة الإعصارية | (7.36) | $m^2 s^{-1}$ | $m^2 s^{-1}$ |
| $\Gamma$ | الانزياح الزاوي | (2.13) | 1 | 1 |
| $\gamma$ | الوزن النوعي | (2.27) | $kp\,m^{-3}$ | $kg\,m^{-2}\,s^{-2}$ |
| $\gamma$ | توزع سطحي اعصاري ( الشدة الاعصارية الموضعية) | (10.86) | $m\,s^{-1}$ | $m\,s^{-1}$ |
| $\gamma_m = \rho_m g$ | الوزن النوعي لسائل المقياس | (3.14) | $kp\,m^{-3}$ | $kg\,m^{-2}\,s^{-2}$ |
| $\Delta$ | رمز للفرق بين قيمتين | | | |
| $\Delta$ | معامل لابلاس | (7.25) | $m^{-2}$ | $m^{-2}$ |
| $\Delta h_v$ | إرتفاع الفواقد | [٢٦٠] | m | m |
| $\Delta p$ | فرق الضغط بين نقطتين | (3.2) | $kp\,m^{-2}$ | $N\,m^{-2}$ |
| $\Delta p_c$ | ضغط التقوس | (2.40) | $kp\,m^{-2}$ | $N\,m^{-2}$ |
| $\Delta p_v$ | الفقد الصدمي (الخسارة في الضغط) | (8.129) | $kp\,m^{-2}$ | $N\,m^{-2}$ |
| $\Delta w$ | السرعة المعرضة الموازية لجبهة الشبك | (12.146) | $m\,s^{-1}$ | $m\,s^{-1}$ |
| $\delta$ | سماكة جدار الانبوب | (3.37) | m | m |
| $\delta$ | نصف زاوية انفراج الناشرة | [٣٤٢] | ° | ° |
| $\delta$ | سماكة الطبقة الحدية | [٢٩٠] | m | m |
| $\varepsilon$ | الاستطالة النسبية | [٢٢] | 1 | 1 |
| $\varepsilon$ | مجال صغير جداً | (10.94) | m | m |
| $\varepsilon_{x,y,z}$ | الاستطالة النسبية باتجاه z,y,x | (7.6) | 1 | 1 |

| الرمز | المعنى | انظر (المعادلة) [الصفحة] \ الفقرة | واحدة القياس | |
|---|---|---|---|---|
| | | | الجملة التكنيكية | الجملة العالمية |
| $\xi$ | معامل درجة الجودة للمروحة | (8.126) | 1 | 1 |
| $\zeta$ | إحداثي مركب في مستوي الصورة | [٥٨٠] | m | m |
| $\zeta = \Gamma(z)$ | تابع التمثيل المطابق | (13.46) | | |
| $\eta_l$ | اللوجة التحريكية | (2.4) | $kps\,m^{-2}$ | $N\,s\,m^{-2}$ |
| $\eta_r$ | المردود | (8.169) | 1 | 1 |
| $\eta$ | الاحداثي الشاقولي لمستوي الصورة المركب | [٥٨٠] | m | m |
| $\eta_{ot}$ | الاحداثي الشاقولي اللابعدي لتوزع سماكة البروفيل | (12.71) | 1 | 1 |
| $\eta_{oll}$ | مردود الناشرة | (8.130) | 1 | 1 |
| $\eta_{hyd}$ | المردود الهيدروليكي | (8.165) | 1 | 1 |
| $\eta_s$ | الاحداثي الشاقولي اللابعدي لتوزع انحناء البروفيل | (12.77) | 1 | 1 |
| $\eta_{th}$ | المردود النظري | (8.159) | 1 | 1 |
| $\Theta_{x,y,z}$ | السرعة الزاوية للشوه الزاوي حول x,y,z | (7.6) | $s^{-1}$ | $s^{-1}$ |
| $\theta$ | زاوية التماس (الحافة) | (2.43) | ° | ° |
| $\theta$ | ميل الناظم على سطح منحن ضمد المحور z | (3.28) | ° | ° |
| $\vartheta$ | تدرج درجة الحرارة مع الارتفاع | (4.28) | $°K\,m^{-1}$ | $°K\,m^{-2}$ |
| $\vartheta$ | الزاوية القطبية في مستوي الصورة | [٥٨٠] | rad | rad |
| $\varkappa$ | الأس الأديباتي | (2.56) | 1 | 1 |
| $\varkappa_{Rd}$ | معامل ريفلس | (12.72) | 1 | 1 |
| $\Lambda$ | التكامل الخطي | (7.32) | | |
| $\lambda$ | زاوية تدريج شبك بروفيلات | [٥٣٥] | rad | rad |
| $\mu=1,2,3,...$ | أعداد طبيعية متسلسلة | (12.75) | | |
| $\mu_D$ | معامل التضييق | (8.35) | 1 | 1 |

| الرمز | المعنى | انظر (المعادلة) [الصفحة] {الفقرة} | واحدة القياس | |
|---|---|---|---|---|
| | | | الجملة التكنيكية | الجملة العالمية |
| $\nu$ | اللزوجة الحركية | (2.8) | $m^2 s^{-1}$ | $m^2 s^{-1}$ |
| $\nu_Q$ | الكثافة التبعية | (6.28) | $s^{-1}$ | $s^{-1}$ |
| $\xi$ | معامل واحدات القياس | (1.10) | | |
| $\xi,\eta,\zeta$ | الاحداثيات الديكارتيـــة أو الانزياحات الموازية لـ x,y,z | (7.2) | m,m,m | m, m, m |
| $\xi$ | إحداثي أفقي لابعدي | (12.65)(12.62) | 1 | 1 |
| $\xi'$ | إحداثي أفقي لابعدي للنقطة المتحولة | (12.62) | 1 | 1 |
| $\xi$ | الاحداثي الافقي في مستوي الصورة المركب | [٥٨٠] | m | m |
| $P(p)$ | تابع الضغط | (4.4) | $m^2 s^{-2}$ | $J kg^{-1}$ |
| $\rho$ | الكثافة | (2.24) | $kp s^2 m^{-4}$ | $kg m^{-3}$ |
| $\rho$ | نصف القطر المكاني في المستوي الزوالي | (11.3) | m | m |
| $\rho$ | إحداثي شاقولي في المستوي الزوالي | [٥٤٧] | m | m |
| $\rho$ | نصف القطر المكاني في مستوي الصورة المركب | [٥٨٠] | m | m |
| $\sigma$ | إجهاد الشد | [٢٣] | $kp m^{-2}$ | $N m^{-2}$ |
| $\sigma$ | احداثي منحني | (12.140) | m | m |
| $\sigma_D$ | التوتر السطحي | (2.38) | $kp m^{-1}$ | $N m^{-1}$ |
| $\sigma_{zul}$ | إجهاد الشد المسموح به | (3.37) | $kp m^{-2}$ | $N m^{-2}$ |
| $\tau$ | اجهاد القص | (2.12) | $kp m^{-2}$ | $N m^{-2}$ |
| $\tau_{lam}$ | اجهاد القص الصفائحي | (8.180) | $kp m^{-2}$ | $N m^{-2}$ |
| $\tau_s$ | إجهاد القص على جدار الصفيحة | [٣٩٠] | $kp m^{-2}$ | $N m^{-2}$ |
| $\tau_{tur}$ | اجهاد القص المضطرب | (8.180) | $kp m^{-2}$ | $N m^{-2}$ |
| $\tau_w$ | اجهاد القص الاحصاري | (8.179) | $kp m^{-2}$ | $N m^{-2}$ |
| $\Phi$ | تابع كمون السرعة | (7.23) | $m^2 s^{-1}$ | $m^2 s^{-1}$ |
| $\Phi_e$ | تابع الكمون الكهربائي | (15.7) | V | V |
| $\Phi_D$ | تابع التشوه | (7.7) | $m^2 s^{-1}$ | $m^2 s^{-1}$ |

| الرمز | المعنى | انظر (المعادلة) [الصفحة] {الفقرة} | واحدة القياس: الجملة الكتلية | واحدة القياس: الجملة العالمية |
|---|---|---|---|---|
| $\Phi_s$ | تابع كمون حقل القوى الحجمية | (3.55),(8.16) | $m^2s^{-2}$ | $m^2s^{-2}$ |
| ? | زاوية مركزية أو قطبية | [١٧٦],(13.2) | rad | rad |
| ? | احداثي زاوي في سلسلة غلاورت | (12.65) | 1 | 1 |
| ?? | عامل تصحيح السرعة | (8.31) | 1 | 1 |
| $\Psi$ | تابع التيار | (10.10) | $m^2s^{-1}$ | $m^2s^{-1}$ |
| $\Psi_{St}$ | تابع تيار ستوكس | (11.10) | $m^3s^{-1}$ | $m^3s^{-1}$ |
| $\Psi_m$ | تابع التيار الكهربائي | [٦٢٢] | | |
| $\psi_{ij}$ | معامل التضريب | (8.30) | 1 | 1 |
| $\omega$ | شعاع السرعة الزاوية أو شعاع الاعصار | (7.14) | $s^{-1}$ | $s^{-1}$ |
| $\omega$ | السرعة الزاوية | {٢،١٦} | $s^{-1}$ | $s^{-1}$ |
| $\omega$ | التردد الدائري | [٢٢٢] | $s^{-1}$ | $s^{-1}$ |
| $\omega_{x,y,z}$ | سرعة الدوران حول x,y,x | (7.6) | $s^{-1}$ | $s^{-1}$ |

## فهرس أهم الأدلة المستخدمة

| الدليل | المعنى المشار اليه | انظر (المعادلة) [الصفحة] {الفقرة} |
|---|---|---|
| A | قوة الرفع | {٦،٢،٥،٨} |
| A | الاستطاعة المبذولة | (8.163) |
| A | انفصام الطبقة الحدية | [٥٤٥] |
| a | الهواء الجوي | (3.9) |
| a | دافعة ارخيمدس | (3.36) |
| a | التفريغ من فتحة | (8.32) |
| abs | قيمة مطلقة | [٩١] |
| act | حقيقي ، فعلي | (8.30) |
| B | نقطة محددة | (3.11) |
| b | القارع | (9.41) |
| C | العزم النابذ | (3.31) |
| C | الاسطوانة | (12.34) |
| c | اواة الإعصار | (10.45) |
| c | وتر البروفيل | (12.125) |

| الدليل | المعنى المشار اليه | انظر (المعادلة) [الصفحة] أو الفقرة | الدليل | المعنى المشار اليه | انظر (المعادلة) [الصفحة] أو الفقرة |
|---|---|---|---|---|---|
| cr | قيمة حرجة | (5.26) | N,n | اتجاه الناظم | (9.6) |
| D | طرف الضغط للبروفيل | (8.55) | N | أنف البروفيل | (12.138) |
| D | الثنائية | (10.66) | o | الضغط الزائد | (3.9) |
| d | توزع سماكة البروفيل | (12.60) | o | الطرف العلوي للبروفيل | [٥٦١] |
| dyn | ديناميكي أو تحريكي | [٢٩١] | out | الخروج من سطح التحكم | (١٠٤٠٨) |
| E | الاستطاعة المفيدة | (8.163) | P | البروفيل | (13.76) |
| E | البروفيل الفردي | (12.149) | p | الضغط | (3.21) |
| e | كهربائي | [٢٤] | ± Q | النبع أو البالوعة | (10.26) |
| e | السرعة النهائية (الحدية) | (8.174) | $Q'$ | امصار كموني | (10.72) |
| f | سطح التحكم الحر | (8.101) | q | توزع ينابيع بالوعات | (10.85) |
| fl, Fl | السائل ، سائلي | (8.94),(9.38) | R | رد فعل كمية الحركة | (8.103) |
| G | الجاذبية الأرضية | (2.16) | r,φ,z | احداثيات اسطوانية | (5.14) |
| G | شبك البروفيلات الباقي | (12.149) | r | قطري | |
| g | غاز | (3.42) | rel | نسبي | (8.23) |
| gr | حدي | [٢٨٠] | S | مركز الثقل | (3.21) |
| H | أفقي | (3.34) | S | طرف السحب للبروفيل | (8.55) |
| hyd | هيدروليكي | (8.165) | Sp | الكرة | (12.192) |
| I | تيار الدفع | (8.103) | S | سطح التحكم الصلب | (8.102) |
| i | قيمة محرضة | [٢٨٨] | s | اتجاه الجريان | (8.1) |
| id | مثالي | (8.32) | s | اتجاه المماس | (9.6) |
| in | الدخول لسطح التحكم | (١٠٥٠٨) | s | توزع انحناء البروفيل | (12.77) |
| K | الجسم | (3.41) | st | النافورة | (8.115) |
| lam | جريان صفائحي | (8.180) | T | حراري | [٢٤] |
| M | نقطة قياس | [٥٦٢] | T | الجريان الانسحابي | (10.17) |
| m | مغناطيسي | [٢٥] | t | مماسي | (3.36) |
| m | سائل المقياس | (3.12) | th | نظري | (8.159) |
| m | مركز الضغط | (3.22) | tot | كلي ، إجمالي | (8.49) |
| max | قيمة أعظمية | (3.18) | tur | جريان مضطرب | (8.180) |
| min | قيمة أصغرية | (3.81) | u | الضغط الناقص | (3.10) |

| الدليل | المعنى المشار اليه | انظر (المعادلة) [الصفحة] { الفقرة } |
|---|---|---|
| u | محيطي | (8.86) |
| u | الطرف السفلي للبروفيل | [٥٦١] |
| V | شاقولي | (3.34) |
| V | القوة الحجمية ، الحجم المزاح | (2.16)، [١٢١] |
| W | المقاومة | (1.1) |
| x,y,z | المحاور الديكارتية | (2.21) |
| Z | القوة النابذة | (3.67), (2.16) |
| z | مستوي الاصل المركب | (13.48) |
| $\alpha$ | زاوية الورود | (12.162) |
| $\Gamma$ | الاحصار | (10.34) |
| $\gamma$ | توزع احصاري | (10.88) |

| الدليل | المعنى المشار اليه | انظر (المعادلة) [الصفحة] { الفقرة } |
|---|---|---|
| $\zeta$ | مستوي الصورة المركب | (13.48) |
| $\rho$ | قطري أو شاقولي في المستوي الزوالي | (11.2) |
| $\sigma$ | خاصية شعرية | [٢٢] |
| $\tau$ | إجهاد القص | [٨٠] |
| $\omega$ | إحصاري | (8.177),(7.43) |
| $\infty$ | الجريان غير المشرش | (8.54) |
| 0 | المنسوب الصفري | [١٥٧] |
| 0 | السطح الساتب للسائل | { ٣ } |
| 1 | مقطع دخول الجريان المنتظم | (6.3), [٢٥٤] |
| 2 | مقطع خروج الجريان المنتظم | (6.3), [٢٥٤] |

## فهرس أهم الاشارات والرموز الرياضية

| الرمز أو الاشارة | المعنى | الرمز أو الاشارة | المعنى |
|---|---|---|---|
| $\nabla$ | معامل نابلا التفاضلي | $<$ | أصغر |
| $\pm$ | زائد أو ناقص | $\leqq$ | أصغر أو يساوي |
| . | مضروب بـ | $\parallel$ | يوازي |
| / أو $\div$ | مقسوم على | $\nparallel$ | لا يوازي |
| $\sim$ | يتناسب مع | $\perp$ | متعامد مع |
| $=$ | يساوي | $\neq$ ; $\neq$ | لا يساوي |
| $\equiv$ | يساوي بالتطابق | $a \longrightarrow$ | يتناهى الى a |
| $\triangleq$ | يماثل ، يطابق | $\Rightarrow$ | ومنه ينتج |
| $\approx$ | يساوي تقريباً | $\infty$ | اللانهاية |
| $>$ | أكبر | $\sphericalangle \ldots$ | الزاوية ... |
| $\geqq$ | أكبر أو يساوي | $\Sigma \ldots$ | مجموع ... |

| الرمز أو الاشارة | المعنى | الرمز أو الاشارة | المعنى |
|---|---|---|---|
| $\sqrt{}$ | الجذر التربيعي | $\overline{\dots}$ | مستوي العدد المركب ... |
| $\sqrt[m]{}$ | الجذر m | $Re\ z$ | الجزء الحقيقي لـ z |
| $\lvert \dots \rvert$ | القيمة المطلقة لـ ... | $Im\ z$ | الجزء التخيلي لـ z |
| $\lim_{x \to 0} y$ | نهاية y عندما x يتناهى للصفر | $\Delta = \nabla^2$ | معامل لابلاس |
| ln | اللوغارتم الطبيعي | $\nabla$ | نابلا |
| log | اللوغارتم العشري | $f(x), F(x)$ | تابع لـ x |
| n! | عاملي n ، مضروب n | $y' = dy/dx$ | تفاضل تام أو عادي لـ y بالنسبة لـ x |
| $\exp x = e^x$ | التابع الأسي لـ x | $\partial y/\partial x$ | تفاضل جزئي لـ y بالنسبة لـ x |
| sin x, cos x<br>tan x, cot x | التوابع المثلثية الدائرية لـ x | $\dot{y} = dy/dt$ | مشتق y بالنسبة الزمن t |
| arc sin x<br>arc cos x<br>arc tan x<br>arc cot x | التوابع المثلثية المعكوسة لـ x | $\ddot{y} = d^2y/dt^2$ | مشتق ثان لـ y بالنسبة لـ t |
| sinh x, cosh x<br>tanh x, coth x | التوابع الزائدية لـ x | $\frac{D\dots}{Dt}$ | تفاضل مادي |
| ar sinh x<br>ar cosh x<br>ar tanh x<br>ar coth x | التوابع الزائدية المعكوسة لـ x | $\int y\,dx$ | تكامل غير محدود لـ y بالنسبة لـ x |
| $\overline{AB}$ | القطعة المستقيمة من A إلى B | $\int_a^b y\,dx$ | تكامل محدود لـ y بالنسبة لـ x |
| $\overrightarrow{AB}$ | الشعاع AB | $\oint y\,dx$ | تكامل مغلق لـ y بالنسبة لـ x |
| $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ | الشعاع B, A | grad Φ | تدرج Φ |
| $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ | الجداء العددي للشعاعين B,A | rot V | دوّار الشعاع V |
| $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ | الجداء الشعاعي للشعاعين B,A | div V | تفرق الشعاع V |
| $\lvert \mathbf{A} \rvert = A$ | القيمة المطلقة للشعاع A | $\overline{\dots} = \frac{1}{\Delta t}\int_0^{\Delta t} \dots dt$ | قيمة وسطية زمنياً مأخوذة خلال $\Delta t$ |
| arg z | الازاحة الزاوية ( العمدة ) للعدد المركب z | $\overline{\dots} = \frac{1}{A}\int_{(A)} \dots dA$ | قيمة وسطية موزعة بانتظام على المقطع A |

# فهـرس المصـــادر


[1] **N. J. Kotschin, J. A. Kiebel, N. W. Rose :** Theoretische Hydromechanik. Bd. I 1954; Bd. II 1955, Akademie - Verlag, Berlin

[2] **L. M. Milne-Thomson :** Theoretical Hydrodynamics. Macmillan and Comp. Ltd., London 1960

[3] **L. M. Milne-Thomson :** Theoretical Aerodynamics. Macmillan and Comp. Ltd., London

[4] **L. Prandtl :** Strömungslehre. Friedrich Vieweg und Sohn, Braunschweig 1960 ( Abriss der Strömungslehre 1931 )

[4a] **L. Prandtl :** Essential of Fluid Dynamics, Blackie and sons Ltd., London and Glasgow 1952

[5] **O. Tietjens :** Strömungslehre, Physikalische Grundlagen vom technischen Standpunkt. Bd. I : Hydro - und Aerostatik, 1960 ; Bd. II : Bewegung der Flüssigkeiten und Gase, 1970, Springer-Verlag Berlin/Göttingen/Heidelberg

[6] **V. L. Streeter :** Fluid Mechanics. Mc Graw Hill Books comp., Kogakusha 1966

[7] **W. Albring :** Angewandte Strömungslehre. Verlag von Theodor Steinkopff, Dresden und Leipzig, 1. Auflage 1961

[7a] **W. Albring :** Angewandte Strömungslehre. Verlag von Theodar Steinkopff, Dresden und Leipzig, 4. Auflage 1970

[8] **B. Eck** : Technishe Strömungslehre. Springer - verlag, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1961

[9] **W. Kaufmann** : Technische Hydro - und Aerodynamik. Springer-Verlag, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1963

[10] **E. Truckenbrodt** : Strömungsmechanik, Grundlagen und technische Anwendungen. Springer - Verlag, Berlin/ Göttingen/Heidelberg/New York 1968

[11] **R. L. Daugharty and J. B. Franzini** : Fluid Mechanics with Engineering Applications. Mc Graw-Hill Books comp., New York 1965

[12] **M. Hackeschmidt** : Grundlagen der Strömungstechnik, Bd. I : Einführung. VEB Verlag für Grundstoffindustrie, Leipzig 1969

[13] **M. Hackeschmidt** : Grundlagen der Strömungstechnik. Bd. II : Felder. VEB Verlag für Grundstoffindustrie, Leipzig 1970

[14] **M. Hackeschmidt** : Strömungsmechanik : Aehnlichkeit-Analogie-Modell. VEB Verlag für Grundstoffindustrie, Leipzig 1972

[15] **E. Neunass** : Praktische Strömungslehre. VEB Verlag Technik, Berlin 1967

[16] **N. S. Arshanikow und W. N. Malzew** : Aerodynamik. VEB Verlag Technik, Berlin 1960

[17] **H. Schlichting und E. Truckenbordt** : Aerodynamik des Flugzeuges, Bd. I, Springer-Verlag, Berlin/Göttingen/ Heidelberg 1962

[18] **H. Schlichting und E. Truckenbrodt** : Aerodynamik des

Flugzeuges, Bd. II. Springer-Verlag, Berlin/Göttingen/ Heidelberg 1960

[19] **H. Richter** : Rohrhydraulik. Springer-Verlag, Berlin/ Göttingen/Heidelberg 1962

[20] **A. Wechmann** : Hydraulik. VEB Verlag für Bauwesen, Berlin 1966

[21] **B. Nekrasov** : Hydraulics. Mir Publishers, Moscow 1969

[22] **A. Hausschild** : Wasserversorgungsanlagen. VEB Verlag Technik, Berlin 1966

[23] **R. Sauer** : Einführung in die Gasdynamik. Springer - Verlag, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1951

[24] **K. Oswatitsch** : Gasdynamik. Springer-Verlag, Wien 1952

[25] **N. Scholz** : Aerodynamik der Schaufelgitter, Bd. I, Verlag G. Braun, Karlsruhe 1965

[26] **A. Betz** : Einführung in die Theorie der Strömungsmaschinen. Verlag G. Braun, Karlruhe 1959

[27] **A. Betz** : Konforme Abbildung. Springer-Verlag, Berlin/ Göttingen/Heidelberg 1964

[28] **H. Schlichting** : Grenzschicht-Theorie. Verlag G. Braun, Karlsruhe 1958

[28a] **H. Schlichting** : Boundary-layer Theory. McGraw-Hill Book comp., New York, 1960

[29] **H. Görtler und W. Tollmien** : 50 Jahre Grenzschichtforschung. Verlag F. Vieweg und Sohn, Braunschweig 1955.

[30] **Auorenkolleutiv** : Taschenbuch Maschinenbau, Bd. I :

Grundlagen. VEB Verlag Technik, Berlin 1966.

[31] **Autorenkollertiv :** Taschenbuch Maschinenbau, Bd. II : Energieumformung und Verfahrenstechnik. VEB Verlag Technik, Berlin 1966.

[32] **Autorenkollektiv :** Hütte I : Theoretische Grundlagen. 28. Auflage, Verlag von W. Ernst und Sohn, Berlin 1955

[33] **M. Kornfeld :** Elastizität und Festigkeit von Flüssigkeiten. VEB Verlag Technik, Berlin 1952

[34] **G. F. Berg :** Hydraulische Bauelemente in der Automatisierungstechink. Reihe Automatisierungstechnik, Bd. 29, VEB Verlag Technik, Berlin 1968

[35] **W. Wuest :** Strömungsmesstechnik. Uni-Text, Friedrich Vieweg und Sohn, Braunschweig 1969

[36] **W. H. Westphal :** Physik. Springer - Verlag, Berlin/ Göttingen/Heidelberg 1959

[37] **E. Schmidt :** Einführung in die technische Thermodynamik. Springer-Verlag, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1963

[38] **J. Wallot :** Grössengleichungen, Einheiten und Dimensionen. J. A. Barth-Verlag, Leipzig 1957

[39] **G. Oberdorfer : Das** internationale Mass-System und die Kritik seines Aufbaus. VEB Fachbuchverlag, Leipzig 1970

[40] **K. Diebner und H. Völcker :** Eine praktische Einführung in das internationale Mass-System. HANSA, Schiffahrt-Schiffbau-Hafen, 98. Jg. ( 1961 ), S. 2015-2018

[41] **Gesetzblatt der DDR :** Anordnung über die Tafel der gesetzlichen Einheiten vom 26. 11. 1968

[42] **I. N. Bronstein und K. A. Semendjajew :** Taschenbuch der Mathematik. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1958

[43] **W. Albring :** Helmholz schuf eine Aehnlichkeitstheorie für Strömungen. Maschinenbautechnik 15 ( 1966 ), S. 113-118

[44] **E. Truckenbrodt :** Ein Qudraturverfahren zur Berechnung der laminaren und turbulenten Grenzschicht bei ebener und rotationssymmetrischer Strömung. Ing. - Archiv 20 ( 1952 ), S. 211-228

[45] **N. Scholz :** Ergänzungen zum Grenzschichtquadraturverfahren von E. Truckenbrodt. Ing. - Archiv 29 ( 1960 ), S. 82-92

[46] **K. Kraemer :** Praktische Berechnung von Grenzschichten. Luftfahrttechnik ( 1956 ), S. 8-13

[47] **K. Kraemer :** Grenzscichtberechnung an zwölf Profilen. Bericht 55/A/01 der Aerodyn. Versuchsanstalt Göttingen ( 1955 )

[48] **M. J. Lighthill :** On Displacment Thickness. Journal of Fluid Mechanics. Vol. 4 ( 1958 ), P. 383-392

[49] **H. Schlichting :** Anwendung der Grenschicht-Theorie auf Strömungsprobleme von Turbomaschinen. Siemens-Zeitschrift 33 ( 1959 ), S. 429-438
( Application of Boundarg-Layer Theory in Turbomachinery. Trans. ASME, Journ. Basic Engineering 81 (1959) P. 543-551 )

[50] **H. Schlichtig :** Neuere Untersuchungen über Schaufelgitterströmungen. Siemens-Zeitschrift 37 (1963), S. 827-837

[51] **Th. von Kármán :** Theorie des Reibungswiderstandes. Hydrodynamische Probleme des Schiffsantriebes, Hamburg, S. 50-73

[52] **N. Scholz :** Ueber eine rationelle Berechnung des Strömungswiderstandes schlanker Körper mit beliebig rauher Oberfläche. Jahrbuch der Schiffbautechnischen Gesellschaft 45 ( 1951 ), S. 244-259, Diskussion dazu : S. 259-263

[53] **G. Kempf und K. Karhan :** Zur Oberflächenreibung des Schiffes. Jahrbuch der Schiffbautechnischen Gesellschaft, S. 228-236

[54] **J. Rotta :** Schubspannungsverteilung und Energiedissipation bei turbulenten Grenzschichten . Ing - Archiv 20 ( 1952 ) S. 195-207

[55] **W. Szablewski :** Wandgesetze inkompressibler turbulenter Grenzschichten und Prandtlscher Mischungsweg. Monatsbericht der deutschen Akad. d. Wissenschaften zu berlin, Bd. 6 ( 1964 ), S. 805-809

[56] **O. Parr :** Untersuchungen der dreidimensionalen Grenzschicht an rotierenden Drehkörpern bei axialer Anströmung. Ing. - Archiv 32 ( 1963 ), S. 393-413

[57] **N. Scholz :** Berechnung der Kennlinie eines Axialverdichters auf Grund grenzschichttheoretischer Gitteruntersuchungen. Jahrbuch der WGL ( 1955 ), S. 205-213

[58] **E. Wolff :** Einfluss der Abrundung scharfer Eintrittskanten auf den Widerstand von Flügeln. Ing. - Archiv 4 ( 1933 ), S. 521-544.

[59] **A. Betz und J. Lotz :** Verminderung des Auftriebes von Tragflügeln durch den Widerstand. Zeitschrift für Flugtechnik und Motorschiffahrt 23 ( 1932 ), S. 277-279

[60] **A. Ackl :** Auftriebsmaximum an Flügeln und an rotierenden Rädern. Kleine Studienarbeit an der Schiffbautechnischen Fakultät der Universität Rostock, 1962 ( unveröffentlicht )

[61] **H. Himmelskamp :** Profiluntersuchungen an einem umlaufenden Propeller. Mitteilung aus dem Max-Planck-Institut für Strömungsforschung, Nr. 2, Göttingen 1950

[62] **A. Betz :** Höchstauftrieb von Flügeln an umlaufenden Rädern. Zeitschrift für Flugwissenschaften 9 ( 1961 ), S. 97-99

[63] **H. Schlichting :** Aerodynamische Probleme des Höchstauftriebes. Zeitschrift für Flugwissenschaften 13 ( 1965 ), S. 1-14

[64] **H. Schlichting :** Entwicklung der Grenzschicht-Theorie in den letzten drei Jahrzehnten. Zeitschrift für Flugwissenschaften 8 ( 1960 ), S. 93-111

[65] **H. Schlichting und N. Scholz :** Ueber die theoretische Berechnung der Strömungsverluste eines ebenen Schaufelgitters. Ing. - Archiv 19 ( 1951 ), S. 42-65

[66] **L. Speidel und N. Scholz :** Untersuchungen über die Strömungsverluste in ebenen Schaufelgittern. VDI-Forschungsheft 464 ( 1957 ), Düsseldorf.

[67] **L. Szabó :** Einführung in die technische Mechanik. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York 1966

[68] **L. Melton, Jr., and A. Rogowski :** The Interaction of Air Motion, Fuel Spray and Combustion in the Diesel Combustion Process. Trans. ASME, Journal of Engineering for Power ( 1972 ), P. 11-16

[69] **W. Albring :** Vermischen, Verdampfen, Verbrennen, Verteilen, ein Beitrag des Strömungstechnikers zu einigen Kraftwerkproblemen . Energietechnik 22 ( 1972 ), S. 142-147

[70] **M. Lawson and H. von Ohain :** Electrofluid Dynamic Energy Conversion, Present Status and Research Areas. Trans. ASME, Journal of Engineering for Power ( 1971 ), P. 201-220

[71] **E. Minardi :** Computed Performance Characteristics of Electrofluid Dynamic Colloid Generators. Trans. ASME, Journal of Engineering for Power ( 1971 ), P. 183-161

[72] **G. Vogelpohl :** Betriebssichere Gleitlager. Springer-Verlag, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1958

[73] **K. Spiegel und G. Noack :** Tragfähigkeitsdiagramme zum optimalen Auslegen von Radialgleitlagern. Konstruktion 24 ( 1972 ), S. 473-477

[74] **L. Johnson :** The hydraulic springs. Machine Design 32 ( 1960 ), P. 114-117 ( zitiert in Konstruktion 13 ( 1961 ), S. 499-500 )

[75] **A. Linford :** Flow Measurment and Meters. E. & F. N. Spon Ltd., London 1961

[76] **G. F. Berg :** Anwendung der Hydraulik in der Automatisierungstschnik. Reihe Automatisierungstechnik, Bd. 37, VEB Verlag Technik, Berlin 1973

[77] **Autorenkollektiv :** Das Fachwissen des Ingenieurs, Bd. I/1, VEB Fachbuchverlag, Leipzig 1967

[78] **I. Weinberg and K. Kaltenko :** Instrumentation and

Controls in the Oil and Petrochemical Industries. Mir Publishers, Moscow 1971

[79] **E. Heidenreich :** Valuation of Centrifuge-Processes. Paper presented on the 13 th Science Week of the SAR, Aleppo, 18. - 24. Nov. ( 1972 )

[80] **C. Pfleiderer und H. Petermann :** Strömungmaschinen, Springer-Verlag, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1964

[81] **Autorenkollektiv :** Strömungslehre, Lehrbriefe I, 2, 3, 4 für das Hochschulfernstudium. VEB Verlag Technik, Berlin 1971

[82] **W. Wuest :** Sichtbarmachung von Strömungen, II. : Flüssigkeitsströmungen. Archiv für Technisches Messen V 144-3 ( 1963 ), S. 123-128

[83] **H. Bippes und P. Colak-antic' :** Der Wasserschleppkanal der DFVLR in Freiburg i. Br., Zeitschrift für Flugwissenschaften ( 1973 ), P. 113-120

[84] **W. I. Smirnow :** Lehrgang der Höheren Mathematik, Teil II. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1961

[85] **W. Kucharski :** Strömungen einer reibungslosen Flüssigkeit bei Rotation fester Körper. Verlag R. Oldenburg, München und Berlin 1918

[86] **W. Albring :** Beschaufelung radialer Strömungsmaschinen, Bericht Nr. I 225/3 des Instituts für angewandte Strömungslehre der T H Dresden ( 1957 )

[87] **M. Hackeschmidt :** Zur konformen Abbilung der Strömung um beliebige Tragflügelprofile unter Verwendung

des elektrolytischen Troges. Maschinenbautechnik 8 ( 1959 ), S. 259-262

[88] **M. Hackeschmidt :** Zur Berechnung der Potentialströmung um beliebige ebene gerade Profilgitter unter Verwendung des elektrolytischen Troges. Maschinbautechnik 8 ( 1959 ), S. 357-363

[89] **DIN 1952 :** Durchflussmessung mit genormten Düsen, Blenden und Venturidüsen (VDI - Durchflussmessregeln), 1971

[90] **E. D. Klomp and G. Sovran :** The Fluid Mechanics of Multiple-Venturi-Systems and their Application to Flow-Rate Metering. Trans. ASME, Journal of Basic Engeneering ( 1972 ), P. 39-45

[91] **G. Flügel :** Berechnung von Strahlapparaten. VDI - Forschungsheft 393 ( 1951 ), VDI - Verlag, Düsseldorf

[92] **R. Jung :** Die Berechnung und Anwendung des Strahlgebläses. VDI - Forchungsheft 479 ( 1960 ), VDI - Verlag, Düsseldorf

[93] **B. Bauer :** Theoretische und experimentelle Untersuchungen an Strahlapparaten für kompressible Strömungsmittel ( Strahlverdichter ). VDI - Horschungsheft 514 ( 1966 ), VDI - Verlag, Düsseldorf

[94] **W. Pohlenz :** Pumpen für Flüssigkeiten. VEB Verlag Technik, Berlin 1970

[95] **E. Truckenbrodt :** Zur Ermittlung der Kräfte bei instationären Flüssigkeitsbewegungen in oben offenen Gefässen. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, Bd. 53 ( 1973 ), S. 729-735

[96] **R. C. Worster :** The Flow in Volutes and its Effect on Centrifugal Pump Performance. Proc. Instn. Mech. Engrs., Vol. 177 ( 1963 ), P. 843-864

[97] **W. Albring :** Probleme bei der Gestaltung verlustarmer Gehäuse von Strömungsmaschinen. Wiss. Zeitschrift der TH Dresden 8 ( 1958/59 )

[98] **E. Truckenbrodt :** Die Berechnung des Profilwiderstandes aus der vorgegebenen Profilform. Ing. Archiv 21 ( 1953 ), S. 176-186

[99] **A. Betz :** Ein Verfahren zur direkten Ermittlung des Profilwiderstandes. Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt, Bd. 16 ( 1925 ), S. 42-44

[100] **B. B. Jonse :** The Measurement of Profile Drag by the Pitot Traverse Methode. Aeronautical Research Commitee Report 1688 ( 1936 )

[101] **W. Kutta :** Auftriebskräfte in strömenden Flüssigkeiten. Sitzungsberichte Bayr. Akad. Wiss., Math. Phys. Kl. ( 1910 ) und ( 1911 )

[102] **N. Joukowsky :** Ueber die Konturen der Tragflächen der Drachenflieger, Zeitschrift für Flugtechink und Motorluftschiffahrt Bd. 1 ( 1910 ) S. 281-284, Bd. 3 ( 1912 ) S. 81-86

[103] **N. Scholz :** Strömungsuntersuchungen an Schaufelgittern. VDI-Forschungsheft 442 ( 1954 ), Düsseldorf

[104] **H. Schlichting :** Berechnung der reibungslosen inkompressiblen Strömung für ein vorgegebenes ebenes Schaufelgitter. VDI-Forshungsheft 447 ( 1955 ), Düsseldorf.

[105] **M. E. Deje und B. M. Trojanovskij :** Untersuchungen und

Berechnungen axialer Turbinenstufen. VEB Verlag Technik, Berlin 1973

[106] **M. Hoffmeister :** Die Entwicklung von radialen Laufschaufeln unter Benutzung des Singularitätenverfahrens. Maschinenbautechnik 8 ( 1959 ), S. 77-83

[107] **Y. R. Reddy and S. Kari :** Optimum Vane Number and Angle of Centrifugal Pumps with Logarithmic Vanes. Trans ASME, Jour. Bas. Eng. 1971, P. 411-425

[108] **A. Ackl :** Die Verfahren der Singularitätenmethode zur Berechnung der ebenen Strömung in radialen Schaufelgittern. Hauptentwurf am Institut für Strömungsmaschinen der Schiffbautechnischen Fakultät der Univ. Rostock ( unveröfentlicht )

[109] **A. Betz :** Schraubenpropeller mit geringstem Energieverlust. In : Vier Abhandlungen zur Hydro-und Aerodynamik, von Prandtl und Betz, Göttingen 1927

[110] **A. Betz und H. Helmbold :** Zur Theorie stark belasteter Schraubenpropeller. Ing. Archiv, Bd. 3 ( 1932 ), S. 1

[111] **Th. Theodorson :** Theory of propellers. Mc Graw Hill Books Comp., New York/Toronto/London, 1948

[112] **M. Strscheletzky :** Berechnungskurven für dreiflüglige Schiffsschrauben. Verlag G. Braun, Karlsruhe 1955

[113] **H. W. Lerbs :** Moderately Loaded Propellers with Afinite Number of Blades and an Arbitrary Distribution of Circulation. Trans of SNAME, Vol. 60 ( 1952 ), P. 73-117

[114] **K. O. Edel :** Der Entwurf von Nachstrompropellern nach Lerbs, Eckart und Morgan. Schiffbauforschung, H. 1-2 ( 1973 ), S. 56-60

[115] **F. Weinig :** Aerodynamik der Luftschraube, Berlin 1940

[115] **D. Weicker :** Die Vortriebswirkung des Schiffsruders im Propellerstrahl. Schiffbauforschung, H. 5+6 ( 1965 )

[117] **M. P. Tulin :** Supercavitating Propellers : History, Operating Charakteritics, Mechanism of Operation. 4. Symposium on Naval Hydrodynamics, Washington, 1962

[118] **E. Dörp :** Propeller bei voller Saugseitenkavitation und Wirbeltheorie des Propellers. Schiffbauforschung H. 5+6 ( 1972 ), S. 169-185

[119] **K. Kafali :** An Investigation of the Pressure Distribution Around the Profiles Suitable for Marine Propeller. International Shipbuilding Progress, Vol. 12 ( 1965 ), Nr. 128, P. 139-154

[120] **A. Betz :** Windenergie und ihre Anwendung durch Windmühlen. Verlag Vandenboeck und Ruprecht, Göttingen 1926

[121] **G. Schmitz :** Theorie und Entwurf von Windrädern optimaler Leistung. Wiss. Zeitschrift der Universität Rostock ( 1955/56 )

[122] **H. Lamb :** Lehrbuch der Hydrodynamik, Uebersetzung der 5. englischen Ausgabe, Leipzig 1931

[123] **K. Wendel :** Hydrodynamische Massen und hydrodynamische Massenträgheitsmomente, Jahrbuch der Schiffbautechnischen Gesellschaft, 1950, S. 207-255

[124] **G. Schmitz :** Kräfte und Momente infolge der Bewegung eines Schiffes auf gerader und gekrümmter Bahn. Sonderbeilage der Schiffbautechnik ( 1956 ), S. 10-18

[125] **G. Schmitz :** Querkraft und Moment infolge Schräganströmung von Schiffsrudern, Schiffskörpern und Gleit-

flächen. Schiffbautechnik 9 ( 1959 ), S. 561-569

[126] **R. W. Kermeen, I. T. Mc Graw and B. R. Parkin :** Mechanism of Cavitation Inception and the Related Scale Effects Problems. Trans ASME 77 ( 1955 ), P. 533-541

[127] **G. Ziegler :** Zugspannungen in strömendem Wasser. Maschinenbau und Wärmewirtschaft, 9. Jg., S. 343-349

[128] **J. W. Daily and V. E. Johnson :** Turbulence and Boundary Layer Effects on Cavitation Inception from Gas Nuclei Trans. ASME 78 ( 1956 ), P. 1695-1706

[129] **A. Ackl :** Zur Bestimmung des Kavitationsbeginns an ebenen Gitterprofilen in realen Strömungen. Dissertation an der Universität Rostock, 1967

[130] **M. Lagally :** Berechnung der Kräfte und Momente, die strömende Flüssigkeiten auf ihre Begrenzung ausüben. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Meschanik, Bd. 2 ( 1922 ), S. 409-422

[131] **A. Betz :** Singularitätenverfahren zur Ermittlung der Kräfte und Momente auf Körper in Potentialströmungen Ing. Archiv, Bd. 3 ( 1932 ), S. 454-462

[132] **H. Glauert :** Grundlagen der Tragflügel-und Luftschraubentheorie. Berlin 1929

[133] **W. Birnbaum und W. Ackermann :** Die tragende Wirbelfläche als Hilfsmittel zur Behandlung des ebenen Problems der Tragflügeltheorie. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, Bd. 3 ( 1923 ), S. 290-297

[134] **F. Riegels :** Das Umströmungsproblem bei inkompressiblen Potentialströmungen.Ingenieur-Archiv, Bd. 16 (1948), S. 373-376 ( I. Mitteilung ); Bd. 17 ( 1949 ), S. 94-106 ( II. Mitteilung ) ; Bd. 18 ( 1950 ), S. 321

[135] **E. G. Feindt :** Beitrag zu den Grundlagen des Singularitätenverfahrens der Strömungsmechanik. Zeitschrift für Flugwissenschaften ( 1962 ), S. 446-456

[136] **I. Weissinger :** Neue Entwicklungen in der Tragflügeltheorie bei inkompressibler Strömung. Zeitschrift für Flugwissenschaften ( 1956 ), S. 225-236

[137] **A. Walz :** Uebertragung gemessener Druckverteilungen auf beliebige Anstellwinkel. Luftfahrtforschung 16 (1939), S. 121

[138] **R. Döge :** Ueber die Genaudigkeit der Methoden zur Berechnung der inkompressiblen Potentialströmung durch ein ebenes gerades Schaufelgitter und ihre Brauchbarkeit für die Praxis. Maschinenbautechnik 9 ( 1960 ), S. 22-39

[139] **F. W. Riegels :** Fortschritte in der Berechnung der Strömung durch Schaufelgitter. Zeitschrift für Flugwissenschaften 9 ( 1961 ), S. 2-15

[140] Ch. **Shah :** Methode für den Entwurf optimaler ebener Verzögerungsgitter in inkompressibler Strömung bei gegebenem Geschwindigkeitsdreieck. Dissertation T H Aachen, 1961

[141] **W. Richter :** Berechnung der Druckverteilung von ebenen Schaufelgittern mit stark gewölbten dicken Profilen bei inkompressibler ebener Strömung. Ingenieur - Archiv ( 1960 ), S. 351-373.

[142] **W. H. Isay :** Beitrag zur Potentialströmung durch axiale Schaufelgitter. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik (33), S. 397-409

[143] E. Marcensen : Die Berechnug der Druckverteilung an dicken Gitterprofilen nit Hilfe von Fredholmschen In-

tegralgleichungen zweiter Art. Mitteilung aus dem Max-Planck-Institut für Strömungsforschung und der Aerodynamischen Versuchsanstalt, Nr. 23 ( 1959 )

[144] **G. Fuhrmann :** Theoretische und experimentelle Untersuchungen an Ballonmodellen. Jahrbuch der Motorluftschiff-Studiengesellschaft, Bd. 5 ( 1911/12 ), S. 63-123

[145] **E. König :** Potentialströmung durch Gitter. Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, Bd. 2 ( 1922 ), S. 422-429

[146] **A. J. Acosta :** An Experimental and Theoretical Investigation of Two-Dimensional Centrifugal pump Impeller. Trans. ASME ( 1954 ), P. 749-763

[147] **M. Hackeschmidt :** Der Entwurf aerodynamisch günstiger Gleichdruck-Gitterprofile unter Verwendung des Hodographenverfahrens. Maschinenbautechnik 12 ( 1963 ), S. 638-643, und 13 ( 1964 )

[148] **W. Albring :** Ein Näherungsverfahren zur Konstruktion ebener stossfrei angeströmeter Schaufelgitter und Berechnung ihrer Druckverteilung bei stationärer Strömung. Maschinenbautechnik 5 ( 1956 ), S. 207-219

[149] **F. Schlender :** Erweiterung des Kreisscheibenverfahrens für starkumlenkende Gitter mit grossen Teilungsverhältnissen. Maschinenbautechnik 8 ( 1959 ) S. 661-663

[150] **H. Ihlenfeld :** Aufzeichnung von Isklinen und Isotachen mit Hilfe der Seifenhautanalogie bei Schaufelgittern. Maschinenbautechnik 9 ( 1969 ), S. 374-380

[151] **D. Beutscher und D. Sturm :** Elektrolytische Analogiemessungen zur Bestimmung der Geschwindigkeit bei dreidimensionaler Strömung, am Beispiel eines Automobilmodells dargestellt. Maschinenbautechnik 10 ( 1961 )


وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

# معجم المصطلحات العلمية

## مرتبة ابجديا بالانجليزية

| انكليزي | الماني | عربي |
|---|---|---|
| Absolute flow | Absolute Strömung | جريان مطلق |
| Absolute pressure | Absoluer Druck | ضغط مطلق |
| Absolute temperature | Absolute Temperatur | حرارة مطلقة |
| Absolute velocity | Absolute Geschwindigkeit | سرعة مطلقة |
| Acceleration field | Beschleunigungsfeld | حقل التسارع |
| Accelerating cascade | Beschleunigungsgitter | شبك بروفيلات مسرّع |
| Accelerating drag | Beschleunigungswiderstand | مقاومة التسارع |
| Adiabatic change of state | Adiabatische Zustandsänderung | تغير الحالة الادياباتي |
| Adiabatic lamination | Adiabatische Schichtung | التوضع الادياباتي |
| Adhesion condition | Haftbedingung | شرط الالتصاق |
| Aerodynamics | Aerodynamik | ايرودينامبك ( تحريك الهواء ) |
| Aerokinematics | Aerokinematik | ايروكينماتك ( حركة الهواء ) |
| Aerostatics | Aerostatik | ايروستاتك ( توازن الهواء ) |
| Aerostatical basic equation | Aerostatische Grundgleichung | المعادلة الاساسية الايروستاتيكية |
| Aerostatical stress state | Aerostatischer Spannungszustand | حالةالاجهاد الايروستاتيكية |
| Airfoil | Tragflügel | جناح حامل |
| Airfoil theory | Tragflügeltheorie | نظرية الجناح الحامل |
| Alcohol | Alkohol | كحول |
| Ambignons function | Mehrdeutige Funktion | تابع متعدد القيم |
| Analog ( ous ) | Analog | مماثل |
| Analogy | Analogie | تماثل |
| Analogy method | Analogiemethode | طريقة التماثل |
| Analytical | Analytisch | تحليلي |
| Analytical function | Analytische Funktion | تابع تحليلي |
| Angle of attack | Anstellwinkel | زاوية الورود ( الهجوم ) |

| انكليزي | الماني | عربي |
|---|---|---|
| Angular deformation | Winkeldeformation | تشوه زاوي |
| Angular velocity vector | Winkelgeschwindigkeitsvektor | شعاع السرعة الزاوية |
| Apparent mass | Scheinbare Masse | كتلة ظاهرية |
| Aperture ratio | Oeffnungsverhältnis | نسبة الانفتاح |
| Argument | Argument | زاوية ، عمدة ، العدد مركب |
| Atom | Atom | ذرة |
| Atmospheric pressure | Atmosphärischer Druck | ضغط جوي |
| Automatic relief valve | Automatisches Rückschlagventil | صمام تخفيف ارجوع أوتوماتيكي |
| Automatisation | Automatisation | الاتمتة |
| Avarage rotation | Mittlere Drehung | الدوران الوسطي |
| Axial flow | Axiale Strömung | جريان محوري |
| Axial flow pump | Axialpumpe | مضخة محورية |
| Axial flow turbine | Axialturbine | تنفة محورية |
| | | |
| Barotropic | Barotrop | باروتروبي |
| Basic unit | Grundeinheit | واحدة اساسية |
| Bearing lubrication | Lagerschmierung | تزييت المساجع |
| Bernoulli equation | Bernoullische Gleichung | معادلة برنولي |
| Blade theory of propeller | Flügelblatt - Theorie des propellers | نظرية الريش الحاملة المروحة |
| | | |
| Boundary conditions | Randbedingungen | شروط حدية |
| Boundary layer | Grenzschicht | طبقة حدية |
| Boundary layer theory | Grenzschicht-Theorie | نظرية الطبقة الحدية |
| Boundary line | Konturlinie | خط حدود الشكل |
| Bourdon pressure gauge | Bourdon Druckmesser | مقياس بوردون للضغط |
| Borda mouthpiece | Borda - Mündung | فتحة بوردا |
| Bulk modulus of elasticity | Elastizitätsmodul | معامل المرونة |
| Bupyancy axis | Schwimmachse | محور الطفو |
| Bupyancy force | Statischer Auftrieb | قوة الرفع الستاتيكية |
| | | |
| Calibration | Eichung | تعيير |
| Capillarity | Kapillarität | الخاصية الشعرية |
| Capillar depression | Kapillare Depression | الانكماش الشعري |
| Capillarity coefficient | Kapillaritätskoefficient | معامل الخاصية الشعرية |
| Capillar pressure | Kapillardruck | ضغط الخاصية الشعرية |
| Capillary rise | Kapillare Steighöhe | ارتفاع الصعود الشعري |

| انكليزي | الماني | عربي |
|---|---|---|
| Camber ratio | Wölbungsverhaltnis | نسبة الانحناء |
| Carburettor | Vergaser | مغحم |
| Cascade | Gitter | شبك بروفيلات |
| Cascade front | Gitterfront | جبهة الشبك |
| Cascade theory | Gittertheorie | نظرية شبك البروفيلات |
| Cascade of equal pressure | Gleichdruckgitter | شبك الضغط المتساوي |
| Cardioid | Herzkurve | المنحني القلبي ( الكارديوئيدي ) |
| Casing | Gehäuse | غلاف ( الآلة ) |
| Cauchy-Riemann-conditions | Cauchy-Riemannsche Bedingungen | شروط كوشي ـ ريمان |
| Cauchy main value | Cauchyscher Hauptwert | القيمة الاساسية الكوشية |
| Causality principle | Kausalitätsprinzip | مبدأ السببية |
| Cavitation | Kavitation | التكهف |
| Cavitation number | Kavitationszahl | عدد التكهف |
| Center of Buoyncy | Zentrum der verdrängten Flüssikeitsmasse | مركز الكتلة المزاحة |
| Central streamline | Zentrale Stromlinie | خط التيار المركزي |
| Centre of pressure | Druckzentrum | مركز الضغط |
| Centrifuge | Zentrifuge | آلة طاردة |
| Centrifugal force | Zentrifugalkraft | قوة نابذة |
| Centrifugal moment | Zentrifugalmoment | عزم نابذ |
| Centrifugal pump | Zentrifugalpumpe | مضخة نابذة |
| Chemical Kinetics | Chemische Kinetik | كيمياء حركية |
| Circulation | Zirkulation | جولان |
| Circulation distribution | Zirkulationsverteilung | توزع الجولان |
| Circular cascade | Kreisgitter | شبك دائري |
| Closed physical system | Geschlossenes physikalisches System | جملة فيزيائية مغلقة |
| Closing condition | Schliessungsbedingung | شرط الاغلاق |
| Coefficienf for non-uniformity of impuls flow | Ungleichförmigkeitsfaktor für Impulsstrom | معامل عدم انتظام تيار الدفع |
| Coefficient for orifice meter | Koefficient für Messblende | معامل حلقة القياس |
| Coefficient for nozzle | Koefficient für Messdüse | معامل ثفاثة القياس |
| Coefficient for venturimeter | Koefficient für Venturimesser | معامل مقياس فنتوري |
| Coefficient for weir | Ueberfallbeiwert | معامل الهدار |
| Coefficient of compressibility | Kompressibilitäskoefficient | معامل الانضغاطية |
| Cofficient of contraction | Kontraktionsziffer | معامل التضييق |
| Coefficient of discharge | Ausflussziffer | معامل التصريف |
| Coefficient of Lift | Auftriebsbeiwert | معامل قوة الرفع |

| انكليزي | الماني | عربي |
|---|---|---|
| Coefficient of lift maximum | Auftriebsmaximumbeiwert | معامل قوة الرفع الاعظمية |
| Coherent units | Kohärente Einheiten | واحدات قياس مترابطة |
| Colloidal | Kolloidal | غروي |
| Complex function | Komplexe Funktion | تابع مركب |
| Complex number | Komplexe Zahl | عدد مركب |
| Complex plane | Komplexe Ebene | المستوي المركب ( مستوي غوص ) |
| Complex potential function | Komplexe Potentialfunktion | تابع الكمون المركب |
| Compressor | Kompressor | ضاغط |
| Compressible flow | Kompressible Strömung | جريان قابل للانضغاط |
| Compessible fluid | Kompressible Flüssigkeit | سائل قابل للانضغاط |
| Conformal Mapping | Konforme Abbildung | التمثيل المطابق |
| Conformal transformation | Konforme Transformation | النقل ( التحويل ) المطابق |
| Conjugate complex number | Konjugiert komplexe Zahl | عدد مركب مرافق |
| Conjugate complex velocity | Konjugiert komplexe Geschwindigkeit | سرعة مركبة مرافقة |
| Contact angle | Randwinkel | زاوية الحافة ( التماس ) |
| Continuity condition | Kontinuitätsbedingung | شرط الاستمرار |
| Control Surface | Kontrollfläche | سطح تحكم |
| Controllable propeller | Verstellbarer Propeller | مروحة ( رفاص ) قابلة للتوجيه |
| Convectiv acceleration | Konvektive Beschleunigung | تسارع الحمل |
| Coriolis force | Coriolis Kraft | قوة كوريولس |
| Correction factor | Korrekturfaktor | معامل تصحيح |
| Correction function | Korrekturfunktion | تابع تصحيح |
| Couple | Kräftepaar | مزدوجة |
| Couette flow | Couette - Strömung | جريان كوئيت |
| Critical pressure | Kritischer Druck | ضغط حرج |
| Critical volocity | Kritische Geschwindigkeit | سرعة حرجة |
| Creeping flow | Schleichströmung | جريان زاحف |
| | | |
| D'Alembert's force | D'Alembertsche Kraft | قوة دالمبير |
| D'Alembert's principle | D'Alembertsches Prinzip | مبدأ دالمبير |
| Datum level | Bezugsniveau | مستوى القياس ( الاسناد ) |
| Datum pressure | Bezugsdruck | ضغط القياس ( الاسناد ) |
| Definition equation | Definitionsgleichung | معادلة التعريف |
| decelerating cascade | Verzögerungsgitter | شبك كابح |
| Deformation | Deformation | تشوه |

| انكليزي | الماني | عربي |
|---|---|---|
| Deformation motion | Deformationsbewegung | حركة تشوهيـة |
| Density | Dichte | كثافـة |
| Density of mass flow | Massenstromdichte | كثافة التيار الكتلي |
| Depth of immersion | Tauchtiefe | الغاطس |
| Derived quantity | Abgeleitete Grösse | قيمة مشتقة |
| Differential-Manometer | Differentialmanometer | مانومتر تفاضلي |
| Diffuser | Diffusor | ناشرة |
| Dimension | Dimension | مقاس ( بعد ) |
| Dimensional analysis | Dimensionalanalyse | تحليل بعدي |
| Dimension constant | Dimensionskonstante | ثابتة المقاس |
| Dimension less | Dimensionslos | لابعدي |
| Dirct problem | Direktes Problem ( 2. Hauptaufgabe ) | المسألة المباشرة(المسألة الاساسية الثانية) |
| Discontinuity surface | Unstetigkeitsfläche ( Trennungsfläche ) | سطح عدم استقرار ( سطح فاصل ) |
| Discharge | Ausfluss, Durchfluss | تدفق ، تصريف |
| Discharge coefficient | Ausflussziffer | معامل التصريف |
| Discharge rate of motion quantity | Ergiebigkeit der Bewegungsgrösse | غزارة تدفق كمية الحركة |
| Displacment | Verdrängung | الازاحـة |
| Displacment effect | Verdrängungseffekt | تأثير الازاحة |
| Divergence | Divergenz | تفرق |
| Downward air | Abwind | الهواء الهابط |
| Downwash velocity | Awärtsgesdwindigkeit | سرعة متجهة للاسفل |
| Drag | Widerstand | مقاومـة |
| Drag coefficient | Widerstandsbeiwert | معامل المقاومة |
| Dynamics | Dynamik | التحريك ( ديناميك ) |
| Dynamic pressure | Dynamischer Druck | ضغط تحريكي ( ديناميكي ) |
| Dynamic vigcosity | Dynamische Viskosität | لزوجة تحريكية |
| Eddy viscosity | Wirbelviskosität | لزوجة اعصارية |
| Efficiency | Wirkungsgrad | مردود |
| Electron | Elektron | الكترون |
| Electrodynamical field | Elektrodynamisches Feld | حقل الكترودينامكي |
| Electrolytical tank | Elektrolytischer Trog | حوض الكتروليتي |

| انكليزي | الماني | عربي |
|---|---|---|
| Electro-Hydrodynamic Generator | Elektrohydrodynamischer Generator | مولد الكترو – هيدروديناميكي |
| Elementary process | Elementarprozess | عملية أولية ( اساسية ) |
| Energy line | Energielinie | خط القدرة |
| Entropy | Entropie | الانتروبيا |
| Energie gradient | Energiegradient | تدرج القدرة |
| Equation of physical quantities | Gleichung physikalischer Grössen | معادلة قيم فيزيائية |
| Equation of state | Zustandsgleichung | معادلة الحالة |
| Equation of units | Einheitengleichung | معادلات واحداث قياس |
| Equipotential line | Aequipotentiallinie | خط الكمون الثابت |
| Equipotential surface | Aequipotentialfläche | سطح الكمون الثابت |
| Euler's equations of motion | Eulersche Bewegungsgleichungen | معادلات اويلر الحركية |
| External force | Aeussere Kraft | قوة خارجية |
| Field force | Feldkraft | قوة حقلية |
| Field theory | Feldtheorie | نظرية الحقل |
| Filteration cœfficient | Filterbeiwert | معامل الرشح ( التصفية ) |
| Filtering mass | Filterungsmasse | كتلة ( مادة ) مرشحة |
| First fundamental problem | Erste Hauptaufgabe | المسألة الاساسية الاولى |
| Fixed vortex | Gebundener Wirbel | اعصار مربوط |
| Flash | Blitz | الفلاش ، الضوء الومضي |
| Flettner rotor | Flettner Rotor | دوّار فلتنر |
| Flow energy | Strömungsenergie | قدرة الجريان |
| Flotation surface | Schwimmfläche | سطح الطفو |
| Flotation plane | Schwimmebene | مستوى الطفو |
| Flow field | Strömungsfeld | حقل الجريان |
| Flow function | Strömungsfunktion | تابع الجريان |
| Flow nozzle | Messdüse | لفاثة قياس |
| Flow pattern | Strömungsbild | صورة الجريان |
| Flow reaction force | Reaktionskraft der Strömung | قوة رد فعل الجريان |
| Flow Similarity | Strömungsähnlichkeit | تشابه الجريان |
| Flow system | Strömungssystem | جملة جريان |
| Flow technique | Strömungstechnik | تكنيك الجريان |
| Flow valve | Durchflussventil | صمام خوارة |
| Flow with circulation | Strömung mit Zirkulation | جريان جولاني |

| انكليزي | الماني | عربي |
|---|---|---|
| Flow without circulation | Strömung ohne Zirkulation | جريان لاجولاني |
| Fluid | Flüssigkeit | سائـــل |
| Fluid gear | Flüssikeitsgetriebe | تعشيقة سائلية |
| Fluid mechanics | Strömungslehre | ميكانيك السوائل |
| Flux vector | Flussvektor | شعاع التدفق |
| Force line | Kraftlinie | خط القوة |
| Forced vortex | Gezwungener Wirbel | اعصار قسري |
| Form drag | Formwiderstand | مقاومة الشكل |
| Fourier series | Forier-Reihe | سلسلة فوريه |
| Francis turbine | Francis-Turbine | عنفة فرنسيس |
| Free jet | Freistrahl | نافورة حرة |
| Free streamline | Freie stromlinie | خط تيار حر |
| Free surface | Freie Oberfläche | السطح الحر ( السائب ) |
| Free vortex | Freier Wirbel | اعصار حر |
| Friction drag | Reibungswiderstand | مقاومة الاحتكاك |
| Function theory | Funktionstheorie | نظرية التوابع |
| Fuselage | Rumpf | جزع الطائرة او السفينة |
| Gauge liquid | Messflüssigkeit | سائل المقياس |
| Gauge pressure | Messdruck | ضغط المقياس ( الزائد او الناقص ) |
| Gas constant | Gaskonstante | ثابتة الغاز |
| General equation of continuity | Allgemeine Kontinuitätsgleichung | معادلة الاستمرار العامة |
| General hydrostatic equation | Allgemeine hydrostatische Gleichung | المعادلة الهيدروستاتيكية العامة |
| Geodetical hight | Geodätische Höhe | الارتفاع المكاني |
| Glauert's series | Glauertsche Reihe | سلسلة غلاورت |
| Gradient | Gradient | تـــدرج |
| Gradient of velocty potential | Gradient des Geschwindigkeitspotentials | تدرج كمون السرعة |
| Grading angle | Staffelungswinkel | زاوية تدريج ( الشبك ) |
| Graphical method | Graphische (Geometrische) Methode | طريقة بيانية ( هندسية ) |
| Gravitation field | Gravitationsfeld | حقل الجاذبية الارضية |
| Gravitation force | Gravitationskraft | قوة الثقالة |
| Gravitation pressure | Gravitationsdruck | ضغط الثقالة |
| Ground pressure | Bodendruck | الضغط على القعر |
| Ground water flow | Grundwasserströmung | جريان المياه الجوفية |
| Guide wheel | Leitrad | دولاب موجه |

| انكليزي | الماني | عربي |
|---|---|---|
| Hetrogenous | Hetrogen | متعدد الطور |
| Hodograph | Hodograph | هودوغراف |
| Hodograph plane | Hodographenebene | مستوي الهودوغراف |
| Hodograph methode | Hodographenmethode | طريقة الهودوغراف |
| Homogenous | Homogen | متجانس |
| Horseshoe vortex | Hufeisenwirbel | اعصار حدوة الحصان |
| Hub | Nabe | صرة ( محور ) |
| Hub vortex | Nabenwirbel | اعصار الصرة |
| Hydraulics | Hydraulik | الهيدروليك |
| Hydraulic control | Hydraulikreglung | تحكم هيدروليكي |
| Hydraulic transport | Hydraulischer Transport | نقل هيدروليكي |
| Hydraulic circuit | Hydraulischer Kreis | دارة هيدروليكية |
| Hydraulic grade line | Standrohrspiegellinie | خط التدرج الهيدروليكي |
| Hydraulic oil | Hydrauliköl | زيت هيدروليكي |
| Hydraulic press | Hydraulische Presse | مكبس هيدروليكي |
| Hydraulic loss | Hydraulischer Verlust | فقد هيدروليكي |
| Hydro - Electrodynamic - analogy | Hydroelektrodynamische Analogie | تماثل هيدرو ـ الكترودينامكي |
| Hydro-Electromagnetics | Hydroelektromagnetik | هيدروديناميك كهرومغناطيسي |
| Hydrodynamics | Hydrodynamik | هيدروديناميك ( تحريك الموائع ) |
| Hydrodynamic filed | Hydrodynamisches Feld | حقل هيدروديناميكي |
| Hydrofoil | Tragflügel | جناح حامل ( مائي ) |
| Hydrofoil propeller | Tragflügelpropeller | مروحة ذات ريش حاملة |
| Hydrodynamic interia moment | Hydrodynamisches Trägheitsmoment | عزم عطالة هيدروديناميكي |
| Hydrodynamic mass | Hydrodynamische Masse | كتلة هيدروديناميكية |
| Hydrometer | Hydrometer | هيدرومتر |
| Hydrokinematics | Hydrokinematik | هيدروكينماتك ( حركة الموائع ) |
| Hydrostatics | Hydrostatik | هيدروستاتك ( توازن الموائع ) |
| Hydrostatic basic equation | Hydrostatische Grundgleichung | المعادلة الهيدروستاتيكية الاساسية |
| Hydrostatic lift | Hydrostatischer Auftrieb | قوة الرفع الهيدروستاتيكية |
| Hydrostatical stress state | Hydrostatischer Spannungszustand | حالة الاجهاد الهيدروستاتيكية |
| Hypersonic | Ueberschall | فوق صوتي |
| Ideal energy line | Ideale Energielinie | خط تدرج القدرة المثالي |
| Ideal flow | Ideale Strömung | جريان مثالي |

| انكليزي | ألماني | عربي |
|---|---|---|
| Ideal fluid | Ideale Flüssigkeit | سائل مثالي |
| Ideal hydraulic head | Ideale hydraulische Höhe | الارتفاع الهيدروليكي المثالي |
| Image plane | Bildebene | مستوي الصورة |
| Imaginary number | Imaginärzahl | عدد تخيلي |
| Imaginary part | Imaginärteil | جزء تخيلي |
| Imaginary boundary | Imaginärberandung | حدود وهمية |
| Impeller | Laufrad | دولاب دائر |
| Impulse | Impuls | دفع |
| Impulse flow | Impulsstrom | تيار دفع |
| Impulsiv pressure | Impulsiver Druck | ضغط صدمي |
| Incompressible fluid | Inkompressible Flüssigkeit | مسائل غير قابل للانضغاط |
| Incompressible flow | Inkompressible Strömung | جريان غير قابل للانضغاط |
| Inertia moment | Trägheitsmoment | عزم عطالة |
| Induced drag | Induzierter Widerstand | مقاومة محرضة |
| Induced velocity | Induzierte Geschwindigkeit | سرعة محرضة |
| Inflow | Zuströmung | جريان المدخل |
| Initial conditions | Anfangsbedingungen | شروط البدء |
| Instantaneous | Momentan | لحظي |
| Interfacial tension | Grenzflächenspannung | اجهاد السطوح المحدة |
| Internal energy | Innere Energie | طاقة داخلية |
| Internal force | Innere kraft | قوة داخلية |
| International System of units | Internationales Mass-System | جملة الواحدات العالمية |
| Inverse analogy | Inverse Analogie | تماثل عكسي |
| Inverse problem | Indirekes Problem | المسألة المعكوسة ( المسألة الاساسية الاولى ) |
| Inversion circle | Inversionskreis | دائرة انعكاسية ( مرآوية ) |
| Ion | Ion | شاردة |
| Ionized | Ionisiert | متأين |
| Irrotationality | Drehungsfreiheit | خلو من الدوران |
| Irrotational motion | Drehungsfreie Bewegung | حركة لا دورانية |
| Isobaric change of state | Isobarische Zustandsänderung | تغير حالة إزوباري |
| Isoclinic line | Isocline | خط الميل الثابت |
| Isotachic line | Isotache | خط السرعة الثابتة |
| Isothermal change of state | Isothermische Zustandsänderung | تغير حالة إيزوترمي |
| Isothermal lamination | Isothermische Schichtung | توضع إيزوترمي |
| Isotropic | Isotropisch | موحد الخواص |

| انكليزي | ألماني | عربي |
|---|---|---|
| Jet | Strahl | نافورة ( تيار نافوري ) |
| Jet engine | Strahlmaschine | آلة نافورية |
| Jet contraction | Strahlkontraktion | تضيق مقطع النافورة |
| Jet force | Strahlkraft | قوة النافورة |
| Jet propulsion | Strahlantrieb | قوة دفع النافورة |
| Jet reaction | Strahlreaktion | رد فعل النافورة |
| Jet theory of propeller | Strahltheorie des Propellers | النظرية النافورية للمروحة |
| Joukowski profile | Joukowski-Profil | بروفيل يوكوفسكي |
| Journal bearing | Gleitlager | مضجع إنزلاقي |
| Kaplan - turbine | Kaplan-Turbine | عنفة كابلان |
| Kinematics | Kinematik | علم الحركة ( الكينيماتك ) |
| Kinematic boundary conditions | Kinematische Randbedingungen | شروط حدية حركية |
| Kinematic viscosity | Kinematische Viscosität | لزوجة حركية |
| Kinematic volume force | Kinematische Volumenkraft | قوة حجمية حركية |
| Kinetic energy | Kinetische Energie | طاقة حركية |
| Kinetic theory of materials | Kinetische Theorie der Materie | النظرية الحركية للمادة |
| Kutta - Joukowski theorem | Kutta-Joukowskischer Satz | قانون كوتا ـ يوكوفسكي |
| Labile equilibrium | Labiles Gleichgewicht | توازن قلق |
| Lagrange method | Lagrange-Methode | طريقة لاغرانج |
| Laminar | Laminar | صفائحي |
| Laminar flow | Laminarströmung | جريان صفائحي |
| Laplace operator | Laplace Operator | معامل لابلاس |
| Lemniscate | Lemniskate | لامنسكات |
| Lift | Auftrieb | قوة الرفع |
| Lift slope | Auftriebsanstieg | تدرج معامل قوة الرفع |
| Light-pointer micromanometer | Lichtzeiger-Mikromanometer | مكرومانومتر ذو مؤشر ضوئي |
| Limiting velocity | Grenzgesdwindigkeit | سرعة حدية |
| Linear deformation | Lineare Deformation | تشوه طولي |
| Line element | Linienelement | عنصر خطي |
| Line integral | Linienintegral | تكامل خطي |
| Liquid | Tropfbare Flüssigkeit | مائع |
| Liquid - Barmeter | Flüssigkeitsbarometer | بارومتر سائلي ( مائعي ) |

| الانكليزي | الماني | عربي |
|---|---|---|
| Liquid column | Flüssigkeitssäule | عمود سائل ( مائع ) |
| Liquid - Monometer | Flüssigkeitsmanometer | مانومتر سائلي ( مائعي ) |
| Local acceleration | Lokalbeschleunigung | تسارع مكاني |
| Local intensity of vorticity | Oertliche Wirbelintensität | شدة اعصارية موضعية |
| Local intensity of sources | Oertliche Quellintensität | شدة نبعية موضعية |
| Local method | Lokalmethode | طريقة مكانية |
| Lost head | Verlusthöhe | إرتفاع الفواقد |
| Mach - number | Machsche Zahl | عدد مائع |
| Magnetogasdynamics | Magnetogasdynamik | الغازديناميك المغناطيسي |
| Magnetohydrodynamics | Magnetohydrodynamik | الهيدروديناميك المغناطيسي |
| Magnus - effect | Magnus-Effekt | تأثير ماجنوس |
| Main flow | Hauptströmung | جريان رئيسي |
| Mapping | Abbildung | تمثيل |
| Mapping function | Abbildungsfunktion | تابع تمثيل |
| Mapping modulus | Abbildungsmodul | معامل التمثيل |
| Mass system | Massensystem | جملة كتلية |
| Material-method | Materielle Methode | الطريقة المادية |
| Mean density of mass flow | Mittlere Massenstromdichte | كثافة التيار الكتلي الوسطية |
| Mean velocity of Impuls flow | Mittlere Geschwindigkeit des Impulsstromes | سرعة تيار الدفع الوسطية |
| Mechanical energy | Mechanische Energie | قدرة ميكانيكية |
| Mechanics of continuum | Kontinuumsmechanik | ميكانيك الوسط المستمر |
| Mechanics of point particles | Massenpunktmechanik | ميكانيك النقطة المادية |
| Mechanisation | Mechanisation | مكننة |
| Meniscus | Meniskus | تقعر هلالي |
| Meridional section | Meridionalschnitt | مقطع زوالي ( النصفي ) |
| Mesosphere | Mesosphäre | الميزوسفير |
| Metacentre | Metazentrum | مركز الطفو المستنتج |
| Momont coefficient | Momentenbeiwert | معامل العزم |
| Modulus | Modul | معامل |
| Moivre - law | Moivrescher Satz | قانون موبفري |
| Molecular cohesion force | Molekulare Kohäsionskraft | قوة الترابط الذرية |
| Moment of momentum | Impulsmoment | عزم الدفع ( عزم كمية الحركة ) |
| Moment slope | Momentenanstieg | تدريج العزم |
| Momentum theory of propeller | Impulstheorie des Propellers | نظرية الدفع للمروحة |

| انكليزي | الماني | عربي |
|---|---|---|
| Multiply convected region | Mehrfach zusammenhängendes Gebiet | ساحة متعددة الترابط |
| Multistage rocket | Mehrstufige Rakete | صاروخ متعدد المراحل |
| Natural fluid | Natürliche ( reale ) Flüssigkeit | ساحل حقيقي |
| Negative pressure | Negativer Druck | ضغط سالب |
| Neutral Equilibrium | Neutrales Gleichgewicht | توازن مطلق |
| Newtonian fluid | Newtonsche Flüssigkeit | سائل نيوتوني |
| Non - Newtonian fluid | Nicht-Newtonsche Flüssigkeit | سائل لانيوتوني |
| Non-uniform flow | Ungleichförmige Strömung | جريان غير منتظم |
| Non-vortical | Wirbellos, Wirbelfrei | لاعصاري، خال من الاعاصير |
| Normal atmosphere | Normalatmosphäre | جو نظامي |
| Nose vortex | Nasenwirbel | اعصار الانف |
| Notche | Nut | فرضة |
| One - dimensional | Eindimensional | وحيد البعد ( المقاس ) |
| One - stage rocket | Einstufige Rakete | صاروخ ذو مرحلة واحدة |
| Open system | Offenes System | جملة مفتوحة |
| Original plane | Originalebene | مستوي الاصل |
| Orifice | Blende | حلقة قياس |
| Orthogonal flow net | Orthogonales Strömungsnetz | شبكة خطوط جريان متعامدة |
| Overpressure | Ueberdruck | ضغط زائد |
| Paraboloid | Paraboloid | مجسم قطع مكافيء |
| Path line | Bahnlinie | خط المسار |
| Pelton - turbine | Pelton-Turbine | عنفة بلتون |
| Perfect gas | Vollkommenes Gas | غاز كامل |
| Peripheral velocity | Umfangsgeschwindigkeit | سرعة محيطية |
| Phase | Phase | طور |
| Physical system | Physikalisches System | جملة فيزيائية |
| Physical system of units | Phycikalisches Einheitensystem | جملة واحدات القياس الفيزيائية |
| Piezometer | Steigrohrdruckmesser | أنبوب ساعد لقياس الضغط |
| Pipe branching | Rohrverzweigung | تفريع الانابيب |
| Pitot - tube | Pitotrohr | انبوبة بيتوت |
| Plane half - body | Ebener Halbkörper | جسم نصفي مستو |
| Plasma physics | Plasmaphysik | فيزياء البلازما |

| انكليزي | الماني | عربي |
|---|---|---|
| Point sink | Punktsenke | بالوعة نقطية |
| Point source | Punktquelle | نبع نقطي |
| Poisson equation | Poissonsche Gleichung | معادلة بويسون |
| Polytrapic change of state | Polytropische Zustandsänderung | تغير حالة بوليتروبي |
| Potential | Potential | كمون ، كموني |
| Potential energy | Potentielle Energie | قدرة كامنة |
| Potential equation | Potentialgleichung | معادلة الكمون ( معادلة لابلاس ) |
| Potential flow | Potentialströmung | جريان كموني |
| Potential vortex | Potentialwirbel | اعصار كموني |
| Pressure | Druck | ضغط |
| Pressure balance | Druckwaage | ميزان ضغط |
| Pressure coefficient | Druckbeiwert | معامل الضغط |
| Pressure drag | Druckwiderstand | مقاومة الضغط |
| Pressure distribution | Druckverteilung | توزع الضغط |
| Pressure drop | Druckabfall | انخفاض ( تناقص ) الضغط |
| Pressure function | Druckfunktion | تابع الضغط |
| Pressure head | Druckhöhe | ارتفاع الضغط |
| Profile angle | Profilwinkel | زاوية البروفيل |
| Profile chord | Profilsehne | وتر البروفيل |
| Profile camber | Profilwölbung | انحناء ( تقوس ) البروفيل |
| Profile drag | Profilwiderstand | مقاومة البروفيل ( الشكل ) |
| Profile thickness | Profildicke | سماكة البروفيل |
| Projection micromanometer | Projektionsmikromanometer | مكرومانومتر اسقاط |
| Propeller | Propeller | مروحة ، دافع |
| Proportionality | Proportionalität | تناسب |
| Pump cascade | Pumpengitter | شبك مضخة ( كابح ) |
| Quadrupole | Quadrupol | مقطب رباعي ( كوادروبول ) |
| Quantity of motion | Bewegungsgrösse | كمية حركة |
| Quasisteady | Quasistationär | شبه مستقر |
| Radial flow | Radialströmung | جريان قطري |
| Radial pump | Radialpumpe | مضخة قطرية |
| Radial turbine | Radialturbine | عنفة قطرية |
| Ram jet | Lorinantrieb | محرك لورين النفاث |

| انكليزي | الماني | عربي |
|---|---|---|
| Rankine body | Rankinescher Körper | جسم رانكين |
| Rate of discharge | Durchfluss, Volumenstrom | غزارة التدفق ، التيار الحجمي |
| Rate of mass discharge | Massendurchfluss, Massenstrom | غزارة التدفق الكتلي ،التيارالكتلي |
| Real flow | Reale Strömung | جريان حقيقي |
| Real numbre | Realzahl | عدد حقيقي |
| Real part | Realteil | جزء حقيقي |
| Real Boundary | Reale Berandung | حد حقيقي |
| Real vortex | Realwirbel | اعصار حقيقي |
| Relative equilibrium | Relatives Gleichgewicht | توازن نسبي |
| Relative flow | Relativströmung | جريان نسبي |
| Relative velocity | Realtivgeschwindigkeit | سرعة نسبية |
| Relief valve | Entlastungsventil | صمام تخفيف ( او تنفيس ) |
| Remote - contral | Fernsteuerung | توجيه ( تحكم ) عن بعد |
| Reynolds number | Reynolds - Zahl | عدد رينولدز |
| Riegels' factor | Reigels - Faktor | معامل ريغلس |
| Riemann Surface | Riemannsche Fläche | سطح ريمان |
| Ring vortex | Ringwirbel | اعصار خاتمي |
| Rocket | Rakete | صاروخ |
| Rotation | Drehung | دوران |
| Rotationaly symmetric | Rotationssymetrisch | متناظر دورانيا |
| Rotational motion | Drehungsbehaftete Bewegung | حركة دورانية |
| Rotation vector | Rotationsvector | شعاع الدوران ( الدوار ) |
| | | |
| Saturation state | Sättigungszustand | حالة الاشباع |
| Scalar | Skalar | عددي |
| Secondary flow | Sekundärströmung | جريان ثانوي |
| Second fundamental problem | Zweites Hauptproblem | المسألة الاساسية الثانية |
| Seepage flow | Sickerströmung | جريان زاحف ( رشحي ) |
| Segner wheel | Segnersches Rad | دولاب ريغنر |
| Separation | Ablösung | انفصـــام |
| Series | Reihe | سلسلـــة |
| Series expansion | Reihenentwicklung | نشر ( تابع ، كسلسلة |
| Series of vanes | Flügelreihe | سلسلة ريش |
| Shear stress | Schubspannung | اجهاد قص |
| Shear stress velocity | Schubspannungsgeschwindigkeit | سرعة اجهاد القص |

| انكليزي | الماني | عربي |
|---|---|---|
| Shockless | Stossfrei | لاصدمي ، مماسي |
| Shock loss | Stossverlust | فقد صدمي |
| Similarity | Aehnlichkeit | تشـابـه ، |
| Similarity number | Aehnlichkeitszahl | عدد التشابه |
| Simply connected region | Einfach zusammenhängendes Gebiet | ساحة وحيدة الترابط |
| Singular point | Singularitätspunkt | نقطة شاذة |
| Siphon principle | Siphonprinzip, Heberprinzip | مبدأ السيفون او الرفع |
| Skeleton proffie | Skelettprofil | بروفيل الهيكل ، الخط الرئيسي |
| Slide | Gleiten | انزلق |
| Sonic | Schall | صـوتي |
| Source density | Quelldichte | كثافة نبعيـة |
| Sources-sinks-distribution | Quell-Senken-Verteilung | توزع ينابيع ـ بالوعات |
| Sources - sinks - surface | Quell-Senken-fläche | سطح ينابيع وبالوعات |
| Source strength | Quellstärke ( Ergiebigkeit ) | شدة او غزارة النبع |
| Source - vortex | Wirbelquelle | نبع اعصاري |
| Spacing ratio | Teilungsverhältnis | نسبة التقسيم |
| Specific heat | Spezifische Wärme | حرارة نوعية |
| Specific volume | Spezifisches Volumen | حجم نوعي |
| Specific volume force | Spezifische Volumenkraft | قوة حجمية نوعية |
| Specific weight | Spezifisches Gewicht | وزن نوعي |
| Spin | Drall | تدويم زالقي |
| Spiral volute | Spiralgehäuse | مغلف حلزوني |
| Stream function | Stromfunktion | تابع الجريان |
| Stabile | Stabil | ( توازن ) مستقر |
| Stability | Stabilität | استقرار |
| Stagnation flow | Stauströmung | جريان ركودي |
| Stagnation point | Staupunkt | نقطة ركود |
| Stagnation pressure | Staudruck | ضغط الركود |
| Stagnation region | Staugebiet | منطقة ركود |
| Standard | Norm, Standard | عيار ، قياس ، ستاندرد |
| Stadardization | Standardisierung | توحيد المقاييس ، معايرة |
| Standard orifice | Normblende | حلقة قياسية |
| Stand thrust | Standschub | قوة دفع الوقوف |
| Starting vortex | Anfahrwirbel | اعصار بدء الحركة |
| State equation | Zustandsgleichung | معادلة الحالة |
| Statics | Statik | علم التوازن ( الستاتيك ) |

| انكليزي | الماني | عربي |
|---|---|---|
| Static pressure | Statischer Druck | ضغط ستاتيكي |
| Statical stability | Statische Stabilität | استقرار ستاتيكي |
| Steady flow | Stationäre Strömung | جريان مستقر |
| Stepless | Stufenlos | بدون تدرج |
| Stop valve | Sperrventil | صمام ايقاف او قطع |
| Stop vortex | Stoppwirbel | اعصار التوقف |
| Straight profile cascade | Gerades Profilgitter | شبك بروفيلات مستقيم |
| Stratosphere | Stratosphäre | ستراتوسفير |
| Stream filament | Stromfaden | خيط تيار |
| Stream line | Stromlinie | خط تيار |
| Stream lined body | Stromlinienkörper | جسم انسيابي |
| Stream tube | Stromröhre | انبوبة تيار |
| Stress | Spannung | اجهاد |
| Stokes stream function | Stokessche Stromfunktion | تابع تيار ستوكس |
| Subsonic | Unterschall- | تحت صوتي |
| Substantial acceleration | Substantielle Beschleunigung | تسارع مادي |
| Suction effect of flow | Saugwirkung der Strömung | الفعل الامتصاصي للجريان |
| Suction force | Saugkraft | قوة مص |
| Suction head | Saughöhe | ارتفاع السحب ( المص ) |
| Suction pressure | Saugdruck | ضغط السحب |
| Sudden contraction | Plötzliche Verengung | تضيق فجائي ( للمقطع ) |
| Sudden expansion | Plötzliche Erweiterung | توسع فجائي ( للمقطع ) |
| Supercavitation propeller | Propeller mit Vollkavitation | مروحة متكهفة كليا |
| Superposition principle | Superpositionsprinzip | مبدا التضام او التراكب |
| Supersonic | Ueberschall | فوق صوتي |
| Surface | Fläche | سطح |
| Surface element | Flächenelement | عنصر سطحي |
| Surface force | Oberflächenkraft | قوة سطحية |
| Surface of constant pressure | Fläche gleichen Drucks | سطح ذو ضغط ثابت |
| Surface tension | Oberflächenspannung | توتر ( اجهاد ) سطحي |
| Systeme international d'unités ( SI ) | Internationales Einheitensystem | جملة واحدات القياس العالمية |
| Taylor series | Taylorsche Reihe | سلسلة تايلور |
| Technical system of units | Technisches Einheitensystem | جملة واحدات القياس التكنيكية |
| Temporal mean velocity | Zeitlich mittlere Geschwindigkeit | سرعة وسطية زمنيا |

| انكليزي | الماني | عربي |
|---|---|---|
| Tensor | Tensor | تنزور |
| Test point | Aufpunkt | نقطة اختبارية |
| Theory of Elasticity | Elastizitätstheorie | نظرية المرونة |
| Theory of sources and sinks | Quell-Senken-Theorie | نظرية الينابيع ـ البالوعات |
| Thermal Fluid dynamics | Thermische Strömungslehre | ميكانيك السوائل الحراري |
| Thermodynamics | Thermodynamik | ترموديناميك |
| Thickness distribution | Dickenverteilung | توزع السماكة |
| Thickness ratio | Dickenverhältnis | نسبة السماكة |
| Third fundamental problem | Drittes Hauptproblem | المسألة الاساسية الثالثة |
| Thrust | Schubkraft | قوة دافعة |
| Thrust coefficient of propeller | Schubbeiwert des Propellers | معامل القوة الدافعة للمروحة |
| Tilting moment | Kippmoment | عزم الماثلة |
| Time of discharg | Entleerungszeit | زمن التفريغ |
| Tip vortex | Randwirbel | اعصار الطرف ( النهاية ) |
| Toluene = Toluol | Toluol | تولوين أو تولول |
| Total | Gesamt-, total | كلي ، اجمالي |
| Total drag | Gesamtwiderstand | مقاومة اجمالية |
| Total potential function | Totale Potentialfunktion | تابع كمون اجمالي |
| Total stream function | Totale Stromfunktion | تابع تيار اجمالي |
| Trailing edge | Hinterkante | حافة خلفية |
| Trailing flow | Nachlaufströmung | جريان المؤخرة ، الاثر |
| Transformation | Transformation | نقل ، تمثيل |
| Translation flow | Translationsströmung, Parallelströmung | جريان انسحابي ، او متواز |
| Transsonic | Schalinah - | قرب صوتي |
| Turbine casade | Turbinengitter | شبك عنفة |
| Turbomachinery | Turbomaschinen | آلات الجريان |
| Turbulence theory | Turbulenztheorie | نظرية الاضطراب |
| Turbulent fluctuation | Turbulente Schwankungen | تذبذبات مضطربة |
| Two-dimensional | Zweidimensional | ثنائي البعد |
| Under pressure | Unterdruck | ضغط ناقص |
| Uniform flow | Gleichförmige ( Parallel - ) Strömung | جريان منتظم ( متوار ) |
| Universal influence function | Universelle Einflussfunktion | تابع تأثير عام |
| Unique function | Eindeutige Funktion | تابع وحيد التعيين |
| Unsteady flow | Instationäre Strömung | جريان غير مستقر |

| انكليزي | الماني | عربي |
|---|---|---|
| Vacuum head | Vakuumhöhe | ارتفاع الفراغ ( السحب ) |
| Vacuum meter | Vakuummeter | مقياس الفراغ |
| Vane | Schaufel | جناح ، ريشة |
| Vapor pressure | Dampfdruck | ضغط التبخر |
| Vector analysis | Vektoranalysis | تحليل شعاعي |
| Vector equation | Vektorgleichung | معادلة شعاعية |
| Velocity | Geschwindigkeit | سرعـــة |
| Velocity coefficient | Geschwindigkeitsbeiwert | معامل السرعة |
| Velocity distribution | Geschwindigkeitsverteilung | توزع السرعة |
| Velocity field | Geschwindigkeitsfeld | حقل السرعة |
| Velocity fluctuation | Geschwindigkeitsschwankungen | تذبذبات السرعة |
| Velocity potential | Geschwindigkeitspotential | كمون السرعة |
| Velocity profile | Geschwindigkeitsprofil | بروفيل السرعة |
| Velocity pressure | Geschwindigkeitsdruck | ضغط السرعة |
| Viscosity | Viskosität | لزوجـــة |
| Visualization | Sichtbarmachung | ترئية ( المجريـــان ) |
| Volume flow | Volumenstrom | تيار حجمي |
| Volume force | Volumenkraft | قوة حجمية |
| Volute ( Casing ) | Gehäuse | مغلف |
| Vortical | Wirbelig | اعصـــاري |
| Vortices distribution | Wirbelverteilung | توزع اعاصير |
| Vortex center | Wirbelzentrum | مركز الاعصـــار |
| Vortex core | Wirbelkern | نواة الاعصـــار |
| Vortex intensity ( strength ) | Wirbelintensität (Stärke) | شدة الاعصار |
| Vortex filament | Wirbelfaden | خيط اعصار |
| Vortex layer | Wirbelschicht | طبقة اعصارية |
| Vortex line | Wirbellinie | خط اعصار |
| Vortex motion | Wirbelbewegung | حركة اعصارية |
| Vortical shear stress | Wirbelschubspannung | اجهاد قص اعصاري |
| Vortex tube | Wirbelröhre | انبوبة اعصـــار |
| Vortex vector | Wirbelvektor | شعاع الاعصار |
| | | |
| Wake | Nachlauf | جريان خلفي ، الاثر |
| Water funnel | Wassertrichter | قمع مائي |
| Water Level | Wasserspiegel | سطح الماء الساكب |
| Water line area | Wasserlinienfläche | سطح خطوط الماء |

| انكليزي | الماني | عربي |
|---|---|---|
| Wave | Welle | موجـــة |
| Weir | Ueberfall | هـــدّار |
| Wheatston bridge | Wheatstonsche Brücke | جسر وطسطون |
| Windmill | Windmühle | طاحونة هوائية |
| Windtunnel | Windkanal | قناة هوائية |
| Xylol | Xylol | كـــيلول |
| Yield stress | Fliessspannung | اجهاد السيولة |
| Zero lift angle | Nullauftriebswinkel | زاوية قوة الرفع الصفرية |
| Zero moment | Nullmoment | عزم صفري |
| Zero Potential function | Nullpotentialfunktion | تابع كمون صفري |
| Zero stream function | Nullstromfunktion | تابع تيار صفري |


وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University