بحوث العمليات.

وقل رب زدني علما
Damascus University

منشورات جامعة دمشق
كلية الاقتصاد

بحوث العمليات

تأليف

الدكتور
حسين القاضي
الأستاذ في قسم المحاسبة

الدكتور
خلف مطر الجراد
الأستاذ في قسم الاحصاء

١٤٣٧ - ١٤٣٨هـ
٢٠١٦ - ٢٠١٧م

جامعة دمشق

وقل رب زدني علما
Damascus University

الفهـــرس

المحتويات **الصفحة**

الفصل الأول: نظرية الشكبات ١٩

١-١- عرض وتعريف. ٢٩

١-٢- تعريف مكونات الشبكة. ٢٢

١-٢-١- النقاط ٢٢

١-٢-٢- الأقواس ٢٣

١-٢-٣- الطريق ٢٤

١-٢-٤- الدورة ٢٥

١-٣- أنواع الشبكات ٢٦

١-٣-١- الشبكة التامة ٢٦

١-٣-٢- الشبكة الجزئية ٢٦

١-٣-٣-مقطع من الشبكة ٢٧

١-٣-٤-الشبكة المترابطة بشدة ٢٨

١-٣-٥-الشبكة المكملة لشبكة أخرى ٢٩

١-٣-٦-الشبكة التناظرية ٣٠

١-٣-٧-الشبكة الغير تناظرية ٣١

١-٣-٨-الشبكة بدون دورة ٣٢

١-٣-٩-الشبكة المقيمة ٣٣

١-٤-خصائص العلاقة الازدواجية بين نقاط الشبكة ٣٣
١-٤-١-الخاصة الانعكاسية ٣٣
١-٤-٢-الخاصية التناظرية ٣٤
١-٤-٣-خاصية التعدي ٣٥
١-٤-٤-الخاصية الغير تناظرية ٣٦
١-٥-أنواع العلاقة الازدواجية ٣٦
١-٥-١-علاقة الترتيب الأولي ٣٧
١-٥-٢-علاقة التكافؤ ٣٧
١-٥-٣-علاقة ترتيب دقيق ٣٨
١-٥-٤-علاقة الترتيب غير دقيق ٤٠
١-٥-٥-علاقة الترتيب الكامل والجزئي ٤١
١-٥-٦-علاقة التجميع ٤٢

الفصل الثاني تطبيق نظرية الشبكات ٤٣

٢-١-مقدمة ٤٥
٢-٢-المسار الأمثل مسار فورد ٤٥
٢-٣-مسار بيلمان ٥٢
٢-٤-المسار الحرج ٥٥
٢-٤-١-إيجاد المسار الحرج بطريقة CPM ٥٦
٢-٤-٢-طريقة بيرت ٦١

الفصل الثالث: تطبيق الدورة على مشكلة البحار المسافر...٦٧

٣-١-مقدمة..... ٦٩

٣-٢-التفريع والتقييم..... ٦٩

٣-٣-مشكلة البحار المسافر..... ٧٢

الفصل الرابع: التدفقات في شبكة النقل..... ٩١

٤-١-الفعاليات والتدفقات..... ٩٣

٤-٢-التعريف المتاقب للتدفق ٩٥

٤-٢-١-التدفق الأعظمي المدين ٩٦

٤-٢-١-١-برهان النظرية ٩٧

٤-٢-١-٢-برهان النظرية بمثال عملي ١٠٠

الفصل الخامس: النماذج الرياضية ١١١

٥-١-عرض وتعريف..... ١١٣

٥-٢-استخدام النماذج الرياضية ١١٥

٥-٣-بناء النموذج وتجربته..... ١١٦

٥-٤-فوائد النماذج الرياضية..... ١١٧

٥-٥-المأخذ على النماذج ١١٩

٥-٦-أنواع النماذج..... ١٢٠

الفصل السادس: نموذج توزيع الاستثمارات بين مختلف القطاعات الاقتصادية ١٢٧

٦-١-عرض المشكلة ١٢٩

٦-٢-حالة الاستثمار في قطاعين اقتصاديين ١٣٣

٦-٣-حالة الاستثمار بثلاث قطاعات اقتصادية ١٣٦

٦-٤-حالة الاستثمار في أربع قطاعات اقتصادية ١٤٠

٦-٥-الاستراتيجية المثلى للاستثمار ١٤٢

الفصل السابع: البرمجة الخطية ١٤٩

٧-١-البرنامج الأولي ١٥١

٧-٢-البرنامج المقابل ١٥٤

٧-٣-أمثلة على البرامج الخطية ١٥٤

٧-٣-١- الإنتاج الضروري بهدف تلبية الطلب بأقل كلفة ممكنة..١٥٤

٧-٣-٢-استخدام مصادر الإنتاج في تحقيق الحد الأعظمي للدخل...١٥٩

٧-٣-٣- مشكلة الغذاء..... ١٦٣

٧-٣-٤- مشكلة النقل ١٦٧

٧-٣-٥- مشكلة التعيين ١٧٠

الفصل الثامن: حل البرنامج الخطي..... ١٧٣

٨-١-عرض ومقدمة ١٧٥

٨-٢-الحل البياني للبرمجة الخطية ١٧٥
٨-٢-١-استخدام المفهوم الأساسي للبرمجة..... ١٧٦
٨-٢-٢-حساب الحد الأعظمي بيانياً ١٨٢
٨-٢-٣-تحقيق الحد الأصغري بيانياً..... ١٨٦
٨-٣-استخدام جداول السمبلكس في حل البرنامج الخطي ١٨٩
٨-٣-١-اختيار المتحولات ١٩١
٨-٣-٢-تكوين الجدول..... ١٩٢
٨-٣-٣-الحل الممكن..... ١٥٩٣
٨-٣-٤-اختيار المتحولات الوسيطية ١٩٤
٨-٣-٥-اختيار متحول المنطلق ١٩٥
٨-٣-٦-تحديد الحل المتفائل..... ١٩٧
٨-٣-٧-برنامج تحقيق الحد الأدنى ٢٠٠
٨-٣-٨-ثنائي البرمجة الخطية..... ٢٠٦

الفصل التاسع : القيمة المقابلة ٢١١

٩-١-استخدام الحل البياني في حساب القيمة المقابلة ٢١٣
٩-٢-استخدام جداول السمبلكس في حساب أسعار الطلب ٢٢٣
٩-٣-تحليل الحساسية..... ٢٢٧

الفصل العاشر: مشكلة النقل ٢٣٣

١٠-١-عرض وشرح المشكلة..... ٢٣٥

١٠-٢-حل مشكلة النقل ٢٤٠
١٠-٢-١-حل مشكلة النقل بعد تحديد شروط التسليم ٢٤١
١٠-٢-١-١-قاعدة الحد الأدنى لكلفة النقل حسب المنتج ٢٤١
١٠-٢-١-٢-قاعدة الحد الأدنى لكلفة النقل حسب المستهلك ٢٤٣
١٠-٢-٢-حساب الحد الأدنى لكلفة النقل عند عدم تحديد شروط التسليم..٢٤٤
١٠-٢-٢-١-قاعدة الركن الشمالي الغربي ٢٤٤
١٠-٢-٢-٢-قاعدة الحد الأدنى لكلفة نقل الوحدة ٢٤٥
١٠-٢-٢-٣-طريقة فوجل التقريبية..... ٢٤٦
١٠-٣-اختبار الحل ٢٤٨

الفصل الحادي عشر: مشكلة التخصيص والتعيين.... ٢٥٩

١١-١عرض وتعريف..... ٢٦١
١١-٢-طريقة التراتيب ٢٦٢
١١-٣-طريقة الحل المباشر ٢٦٤

الفصل الثاني عشر: نموذج المخزون ٢٧١

١٢-١-عرض وتعريف ٢٧٣
١٢-٢-تكاليف التخزين..... ٢٧٤
١٢-٢-١-تكلفة شراء وإنتاج السلعة..... ٢٧٤
١٢-٢-٢-تكلفة إعداد الطلبية..... ٢٧٤
١٢-٢-٣-تكاليف التخزين ٢٧٥

١٢-٢-٤كلفة العجز في المخزون ٢٧٦
١٢-٣نموذج كمية الطلب الاقتصادية ٢٧٧
١٢-٣-١-الحل عن طريق التجربة ٢٨٠
١٢-٣-٢-معادلة كمية الطلب الاقتصادية ٢٨٤
١٢-٣-٣-الحل البياني ٢٨٤
١٢-٣-٤-الحل الجبري ٢٨٥
١٢-٤- تحليل الحساسية ٢٨٧
١٢-٤-١-حساسية الكلفة بإعطاء قيمة الطلب..... ٢٨٧
١٢-٤-٢-حساسية الكلفة بتغير كمية الطلب..... ٢٨٩
١٢-٤-٣-حساسية الطلب بتغير البيانات..... ٢٨٩
١٢-٥-احتياطي الأمان..... ٢٩١
١٢-٥-١-مستوى الخدمة..... ٢٩٢
١٢-٥-٢-إيجاد أفضل مستوى لاحتياطي الأمان ٢٩٤

الفصل الثالث عشر: نماذج صفوف الانتظار..... ٢٩٩

١٣-١-عرض وتقدمة ٣٠١
١٣-٢-عناصر نموذج الانتظار..... ٣٠١
١٣-٢-١-وصول الزبائن إلى مركز الخدمة ٣٠٢
١٣-٢-٢-استراتيجية الانتظار..... ٣٠٢
١٣-٢-٣-آلية الخدمة..... ٣٠٢
١٣-٢-٤-الطاقة ٣٠٣

١٣-٢-٥-المجتمع الإحصائي ٣٠٣
١٣-٣-حساب متوسط زمن الوصول والخدمة ٣٠٣
١٣-٤- صفوف الانتظار البسيطة ٣٠٥
١٣-٥-نموذج صف الانتظار بأكثر من نقطة خدمة ٣١٣

الفصل الرابع: عشر سلسلة ماركوف ٣١٩

١٤-١-عرض وتقدمة ٣٢١
١٤-٢-مصفوفة ماركوف ٣٢١
١٤-٣-شعاع احتمالات المنطلق ٣٢٢
١٤-٤-الشعاع الاحتمالي الثابت ٣٢٤
١٤-٥-مصفوفة ماركوف النظامية ٣٢٦
١٤-٦-مصفوفة ماركوف الماصة ٣٣٠
١٤-٧-تطبيق سلسلة ماركوف على صفوف الانتظار ٣٣٩

الفصل الخامس عشر: جدول المدخلات والمخرجات. ٣٥٣

١٥-١-النظام الساكن ٣٥٥
١٥-١-١-النموذج الساكن المفتوح ٣٥٥
١٥-١-٢-النظام الكمي المفتوح ليونيتيف ٣٥٦
١٥-١-٢-١-وصف النظام ٣٥٦
١٥-١-٢-٢-الفرضية الرئيسية لنظام ليونيتيف ٣٥٨
١٥-١-٢-٣-الشكل المصفوفي لمعادلات التوازن ٣٥٩

١٥-١-٢-٤-إدخال علاقات التوازن ٣٦٠
١٥-١-٥-٢-حل النظام المفتوح ليونيتيف..... ٣٦٢
١٥-١-٣-نظام ليونيتيف المفتوح بالقيمة النقدية..... ٣٦٧
١٥-١-٣-١-وصف النظام ٣٦٧
١٥-١-٣-٢-النظرية الأساسية ٣٦٩
١٥-١-٤-النظام الساكن والمغلق ٣٧٠
١٥-١-٤-١-وصف النموذج..... ٣٧٠
١٥-١-٤-٢-الفرضية الأساسية للنموذج على شكل مصفوفات ... ٣٧٣
١٥-١-٤-٣-حل النظام المغلق ٣٧٥
١٥-٢-النموذج الديناميكي لليونيتيف ٣٧٨
١٥-٢-١-النظام المفتوح ٣٧٩
١٥-٢-٢-النظام المغلق..... ٣٨٠
تمارين حول البرمجة ٣٨١
تتمة التمارين ٣٨٩
معجم المصطلحات العربي والانكليزي ٤١٥
المراجع ٤٢٣

Damascus University

وقل رب زدني علما
Damascus University

مقدمة عامة

إن ظاهرة بحوث العمليات كعلم ابتدأ مع النصف الثاني من القرن العشرين إلا أن أصولها تعود إلى العصور الغابرة....

من ناحية أخرى إن تطوير بحوث العمليات يعود في أصوله إلى كلمة قرر وذلك لأن القرار ينطوي بحد ذاته على الاختيار الواعي للحل الأمثل من بين مجموعة من الحلول المطروحة أمام المقرر. وبما أن الإحصاء كان وما يزال يعتبر وسيلة لتجميع المعطيات وتنسيقها وقد تطور بعد ذلك إلى فكرة التحليل الرياضي واستخلاص النتائج، فإنه ما زال بعيد جداً عن مفهوم الاختيار الأمثل في حال تعدد الإمكانيات في العديد من القضايا المعاصرة. ولكن الرياضيون والاقتصاديون وبعد دراسات طويلة ومعمقة تمكنوا من ابتكار تقانات جديدة للتحليل الرياضي واستخلاص النتائج وقياس كمية المعلومات. من ناحية أخرى فلقد شهد التاريخ فكرة تشكل فرق عمل في ميدان بحوث العمليات. هذه الفرق مكونة من العديد من المختصين ودورها حل مشكلة أو أمر عارض طرأ على حياة المجموعة. من هذه الفرق تلك التي دعا إليها نابليون ومهمتها إيجاد أسلوب أو حل لتفادي مشكلة مثل تلك المشكلة التي واجهته إثر إعصار رهيب حدث في يوم ١٨٥٤/١١/١٤ وأدى إلى تحطيم شامل للأسطولين الفرنسي والإنكليزي على شواطئ سيباستوبول Sebastopol

إن قابلية بحوث العمليات في الرسوخ كعلم قائم بذاته له قواعده وأساليبه ونظرياته بدأت ملامحها منذ أن شهد العالم تزايداً غير مألوف في توسع مؤسساته وتعقد مفاصلها البنيوية ونشوء نظريات متعددة حول أساليب العمل وتوزيعه وتحمل المسؤوليات والمشاركة في القرار. إن تراكم مثل هذه الأمور شكل جواً ملائماً لنمو بذور بحوث العمليات كعلم كما هيأ ذلك مناخ مناسب لتطورها وبلوغها مقامها

المرموق والمعتبر بين بقية العلوم. ولا بد من الإشارة إلى أن العامل الأساسي في تطور بحوث العمليات هو الشعور المتزايد بأخطار الحروب وذلك لأن مختلف القيادات العسكرية في الجيوش المتحاربة وجدت أن بحوث العمليات هي من أفضل الوسائل التي يمكن استخدامها في بناء الاستراتيجية المثلى للحروب ولهذا السبب فإن تلك القيادات قامت بتشكيل فرق مختلفة لهذا الغرض وقامت هذه الفرق بعدة دراسات وتوصلت في النهاية إلى نتائج مذهلة كان لها الدور الفعال في تحديد مسارات القوافل البحرية وتحديد حجم المخزون من المؤن والذخائر والعتاد الحربي.

بعد أن حققت بحوث العمليات هذا النجاح الكبير في المجال العسكري فإن أصحاب رؤوس الأموال ورجال الأعمال لجأوا إليها وذلك المنهجية وقاموا بوضع نماذج رياضية قابلة للتطبيق في مختلف المجالات العملية وقد كان عام ١٩٥١ بداية تشكل مراكز علمية متخصصة في إجراء البحوث العملية وأول هذه المراكز كان في بريطانيا ثم بعد ذلك تشكلت مراكز أخرى في الولايات المتحدة الأمريكية.

وفي النهاية فإن هذه الأهمية الكبرى لبحوث العمليات دفعتنا إلى تأليف هذا الكتاب الذي يتكون من خمسة عشر فصلاً حيث إننا في الفصول الثلاث الأولى قمنا بشرح نظرية الشبكات واستخدامها في المجال العملي. ثم بعد ذلك انتقلنا إلى شرح النماذج الرياضية التي منها توصلنا إلى شرح البرمجة الخطية وطرق حلها وقمنا بعرض المشاكل التي يمكن حلها باستخدام البرمجة الخطية من هذه المشاكل مشكلة النقل والتخصيص والتعيين وبما أن بحوث العمليات واسعة النطاق فلقد قمنا وفي الفصل الثاني عشر بشرح نموذج المخزون وكرسنا الفصل الثالث عشر لشرح نماذج صفوف الانتظار، وبما أن سلسلة ماركوف تعتبر تطبيق عملي هام لبحوث العمليات فلقد خصصنا الفصل الرابع عشر لشرح سلسلة ماركوف، وأخيرا ختمنا هذا الكتاب بشرح

جداول المدخلات والمخرجات ونأمل من الله سبحانه وتعالى أن نكون قد وفقنا في إعداد هذا الكتاب.

أخيراً لا بد من الإشارة إلى أن هذا الكتاب يقع في خمسة عشر فصلاً قام الأستاذ الدكتور حسين القاضي بتأليف الفصل الأول فقط أما باقي الفصول فهي أربعة عشر فصلاً قد قام الأستاذ الدكتور خلف مطر الجراد بتأليفها وكتابتها جميعاً ونأمل الله سبحانه وتعالى أن نكون قد وفقنا في هذا الكتاب وإنه بداية لكتب أخرى سوف يتم كتابتها لاحقاً.

المؤلفان

Damascus University

وقل رب زدني علما
Damascus University

الفصل الأول

نظرية الشبكات

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

وقل رب زدني علما
Damascus University

١-١- عرض وتعريف:

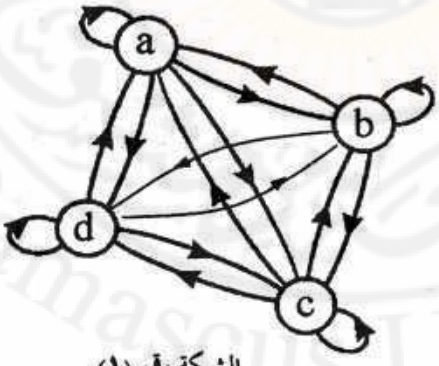
لقد بقيت نظرية المجموعات زمناً طويلاً علماً رياضياً تجريدياً، و لم يحاول أي عالم أو كاتب وضعها موضع التطبيق العلمي؛ بهدف الاستفادة منها في خدمة مختلف العلوم، حتى جاء في الفترة الأخيرة للقرن العشرين مجموعة من العلماء وفي مقدمتهم بيرج، حيث أجروا مجموعة من التجارب للاستفادة من هذه النظرية. في النهاية توصلوا إلى نتيجة هامة؛ وهي أن العلاقة الازدواجية بين عناصر المجموعة الواحدة يمكن أن تشكل شكلاً يطلق عليه اسم الشبكة، لو افترضنا أنه لدينا المجموعة التالية:

$$E = \{a,b,c,d\}$$

فإن الجداء الديكارتي لهذه المجموعة يأخذ الشكل التالي:

$$Z = \{(a,a),(a,b),(a,c),(a,d)$$
$$(b,a),(b,b),(b,c),(b,d)$$
$$(c,a),(c,b),(c,c),(c,d)$$
$$(d,a),(d,b),(d,c),(d,d)$$

وأن التمثيل البياني لمجوعة E ومربعها يأخذ الشكل التالي:



الشبكة رقم (١)

هذا الشكل يطلق عليه اسم الشبكة، وكما نلاحظ أن هذه الشبكة مكونة من مجموعة من النقاط والأقواس وقد احتوت على المجموعة E ومربعها، ومنه يمكن تعريف الشبكة بأنها مجموعة من النقاط والأقواس؛ حيث إن النقاط هي عناصر المجموعة الأساسية والأقواس هي العلاقات التي تربط بين عناصر هذه المجموعة، ولقد عرف بيرج الشبكة بالعلاقة التالية:

$$G = (E, U)$$

E : هي مجموعة النقاط

U : هي مجموعة الأقواس

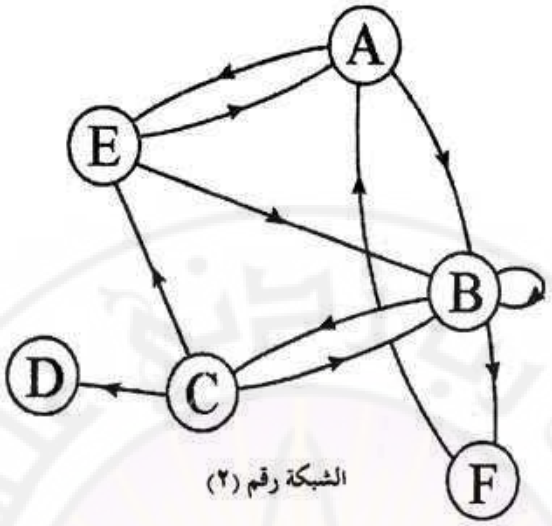
بعد أن قمنا بتعريف الشبكة لا بد من التساؤل عن مكونات هذه الشبكة؛ وعن التعاريف التي يمكن إيرادها عن هذه المكونات سواء كانت النقاط أم الأقواس أم الطريق أم الدورة.

١-٢ تعريف مكونات الشبكة:

في أي شبكة معطاة إن المكونات الرئيسة لها النقاط والأقواس، ومن هذه النقاط والأقواس يمكن أن نصل إلى تعريف الطريق والدورة، إذاً إن أول ما يجب أن نبدأ به هو تعريف النقاط.

١-٢-١ النقاط:

في الشبكة G إن عناصر المجموعة الأساسية E هي نقاط هذه الشبكة؛ فلو أخذنا الشبكة التالية:



الشبكة رقم (٢)

فإن A,B,C,D,E,F هي نقاط هذه الشبكة؛ أي إن النقاط هي العناصر الرئيسة للشبكة.

١-٢-٢- الأقواس:

إن الأقواس تعرف بأنها العلاقات التي تربط بين نقاط الشبكة؛ وإن كل عنصر في المجموعة:

$$G = E \times E$$

يطلق عليه اسم قوس، لو أخذنا الشبكة السابقة فإن:

$$AB, AE, BC, CB, EB, CE, CD, FA, BT$$

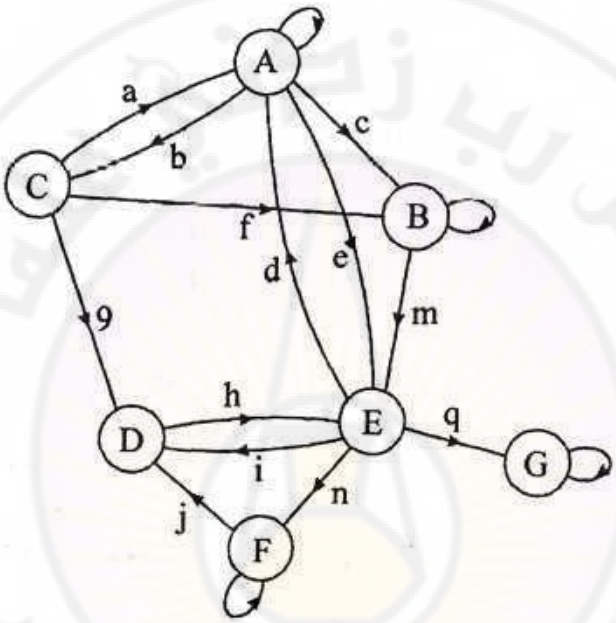
هي أقواس هذه الشبكة وبالمقابل فإن الأزواج:

$$ED, CF, EC, BE, BA, AT$$

ليست أقواساً في هذه الشبكة.

١-٢-٣- الطريق:

يعرف الطريق بأنه سلسلة متعاقبة من الأقواس؛ حيث إن نهاية كل قوس هي بداية للقوس الذي يليه، وقد يتكون الطريق من قوس واحد أو أكثر، لو أخذنا الشبكة التالية:



الشبكة رقم (٣)

فإنه في هذه الشبكة يوجد لدينا مجموعة من الطرق هي:

1) (a,c,m,i) 2) (f,m,d,b,a)

3) (g,h,n,j,h,q) 4) k 5) (k,e,m,d)

ويمكن التعبير عن هذه الطرق بالنقاط المكونة لها

1) (C,A,B,E,D) 2) (C,B,E,G,A)

ويكون الطريق بسيطاً إذا لم يحتو على أي قوس إلا مرة واحدة وكمثال على هذا الطريق: ـــ الطريق: a,c,m,i

أما إذا ورد فيه القوس لأكثر من مرة؛ فإننا نقول عن هذا الطريق بأنـــه طريـــق معقد وكمثال على هذا الطريق: ـــ الطريق: g,h,n,j,h,q

١-٢-٤- الدورة

تعرف الدورة بأنها الطريق الذي يبدأ وينتهي في النقطة نفسها أي إن نقطة البداية هي نفسها نقطة النهاية، ويمكن التعبير عن الدورة إما بالنقاط أو بالأقواس، فلو رجعنا إلى الشبكة رقم (٣) لوجدنا أنها تحوي على ثلاث دورات هي:

1) A,B,E,A
2) C,A,B,B,A,C
3) d,b,g,h

ولا بد من الإشارة إلى أن الدورة التي لا تحتوي إلا على نقطة واحدة فقط يطلق عليها اسم الحلقة، وكمثال على ذلك الدورة A,A والدورة B,B والدورة G,G والدورة F,F

طول الطريق:

إن طول الطريق يمكن أن يعبر عنه بعدد الأقواس المكونة لهذا الطريق، فلو افترضنا أن:

μ هي الطريق فإن طول هذا الطريق هو $\rho\mu$

فلو أخذنا الطريق : $\mu_1 = (A,B,E,F,D)$

وطول هذا الطريق هو: $\ell_1\mu_1 = (A,B,E,F,D) = 4$

أما الطريق: $\mu_2 = (A,B,E,A)$

فإن طوله هو: $\ell_1\mu_2 = (A,B,E,A) = 3$

والطريق: $\mu_3 = (F,F)$

طوله هو: $\ell\mu_3 = (F,F) = 1$

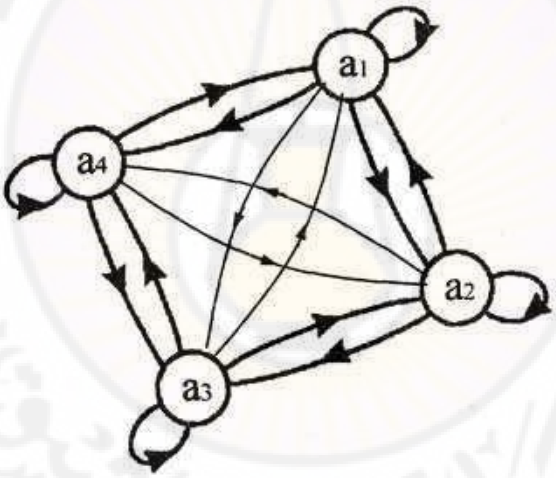
ويمكن أن يكون طول الطريق مساوياً إلى الصفر إذا لم يحتو على أي قوس.

١-٣- أنواع الشبكات:

يوجد للشبكات أنواع متعددة تختلف باختلاف تكوينها؛ وباختلاف العلاقة بين نقاطها هذه الأنواع هي التالية:

١-٣-١- الشبكة التامة:

إن أي شبكة يكون فيها عدد الأقواس المنطلقة من أي نقطة من نقاطها يساوي عدد النقاط المكونة لهذه الشبكة، يطلق عليها اسم الشبكة التامة أو الشبكة المملوءة؛ وكمثال على هذه الشبكة التالية:

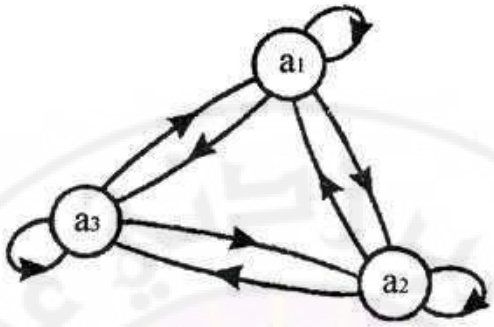


الشبكة رقم (٤)

١-٣-٢- الشبكة الجزئية:

عند حذف بعض نقاط الشبكة التامة فإننا نحصل على شبكة جزئية تكون محتواة بكامل نقاطها وأقواسها داخل الشبكة التامة، كما أنها تتمتع بالخواص نفسها

والمميزات لهذه الشبكة، فلو أخذنا الشبكة رقم ٤ وحذفنا منها النقطة a_4 لحصلنا على الشبكة الجزئية التالية:

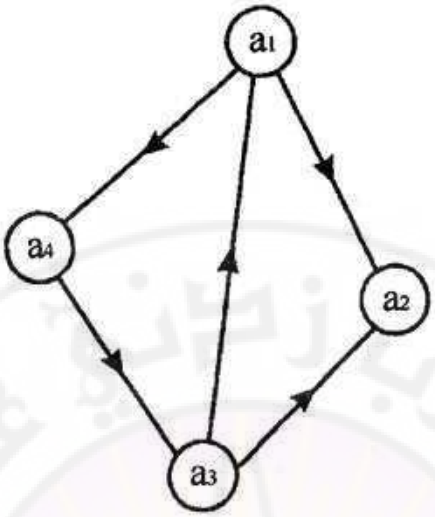


الشبكة رقم (٥)

وكما نلاحظ أن هذه الشبكة محتواة بكامل تقاطعها وأقواسها داخل الشبكة رقم (٥)، ولذلك فإنها شبكة جزئية من هذه الشبكة.

١-٣-٣- مقطع من الشبكة:

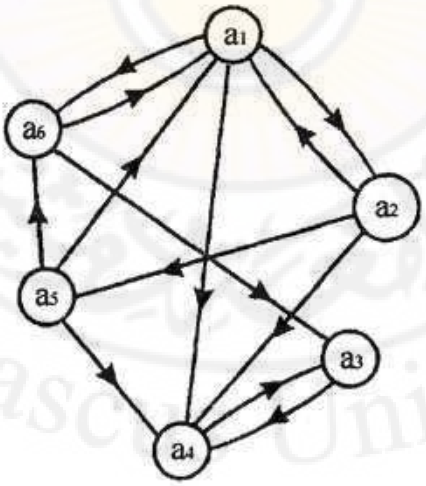
عندما نقوم بحذف عدد من الأقواس الموجودة في الشبكة التامة مع الإبقاء على العدد نفسه للنقاط فإننا نحصل على ما يطلق عليه اسم مقطع من الشبكة فلو أخذنا الشبكة رقم (٤) وحذفنا جزءاً من أقواسها لحصلنا على الشبكة التالية:



الشبكة رقم ٦ ـــ هذه الشبكة هي مقطع من الشبكة رقم (٤)

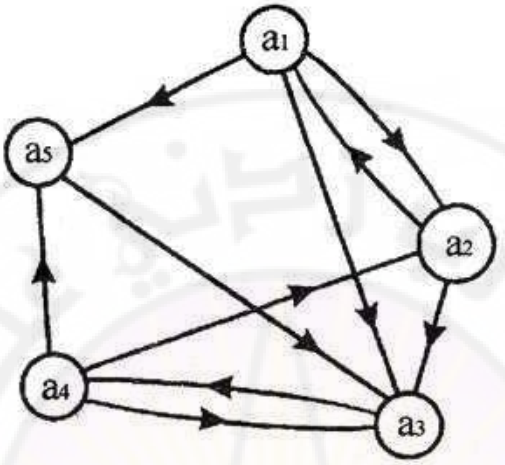
١-٣-٤- الشبكة المترابطة بشدة:

إن أي شبكة يقال عنها مترابطة بشدة، إذا كان هناك على الأقل طريق واحد يربط بين أي نقطتين من نقاطها. لو أخذنا الشبكة التالية:



الشبكة رقم (٧)

فنجد أن الشبكة السابقة مترابطة بشدة لأنها تحقق الشرط المطلوب؛ أما لو أخذنا الشبكة التالية:



الشبكة رقم ٨

فإنها غير مترابطة بشدة لعدم وجود طريق من النقطة a_5 والنقطة a_4 ، إلى النقطة a_1

١-٣-٥- الشبكة المكملة لشبكة أخرى:

لو افترضنا أن:

$$G = (E, U)$$

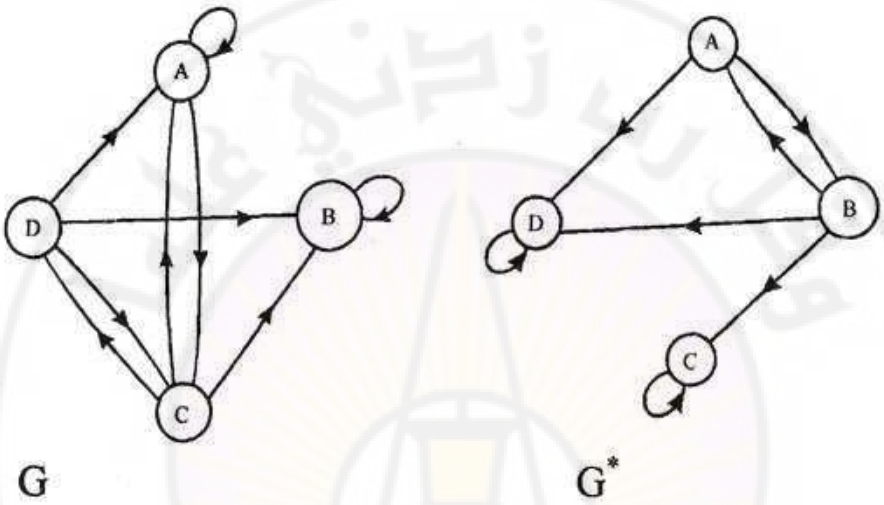
هي شبكة فإن الشبكة:

$$G^* = (E, U^*)$$

هي شبكة مكملة للشبكة G فيما إذا تحقق الشرط التالي:

$$U^* = (E \times E) - U$$

أي إن اجتماع الشبكتين G و G^* يعطي الشبكة التامة؛ ولا يفوتنا القـــول إن مكمل الشبكة G^* يعطينا الشبكة G ويمكن التعبير عن الشبكة G^* والشبكة G وفق ما يلي:

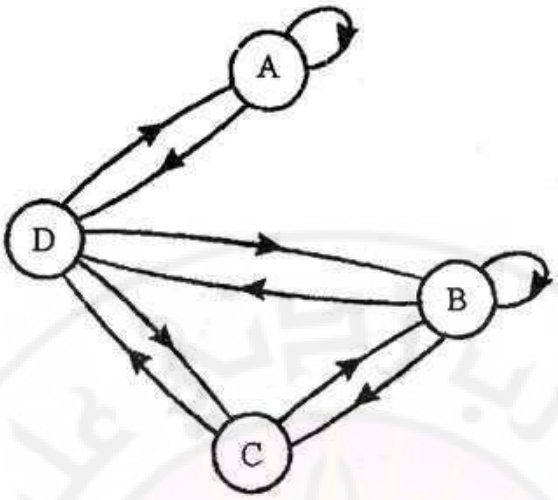


G G^*

الشبكة رقم (٩)

١-٣-٦- الشبكة التناظرية:

إن أي شبكة تكون تناظرية فيما إذا كان وجود القوس (x,y) الذي ينتمي إلى مجموعة الأقواس u يترافق بوجود القوس (y,x) الذي ينتمي بـــدوره إلى مجموعـــة الأقواس u فلو أخذنا الشبكة التالية:

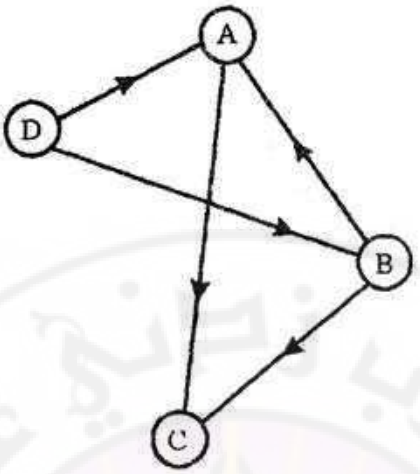


الشبكة رقم (١٠)

فإنها تحقق شرط التناظر لذلك فإننا نطلق عليها اسم الشبكة التناظرية.

١-٣-٧- الشبكة غير التناظرية:

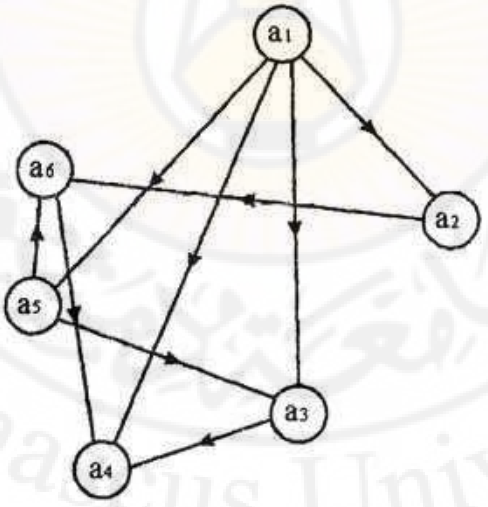
إذا كان وجود القوس (x,y) الذي ينتمي إلى مجموعة الأقواس U يمنع وجود القوس (y,x)؛ فإن الشبكة التي تحتوي على القوس (x,y) هي شبكة غير تناظرية، وكمثال على هذه الشبكة لدينا الشبكة التالية:



الشبكة رقم ١١

١-٣-٨- الشبكة بدون دورة:

كما يشير اسمها فإن هذه الشبكة لا تحتوي على أي دورة، فلو أخذنا الشبكة التالية:

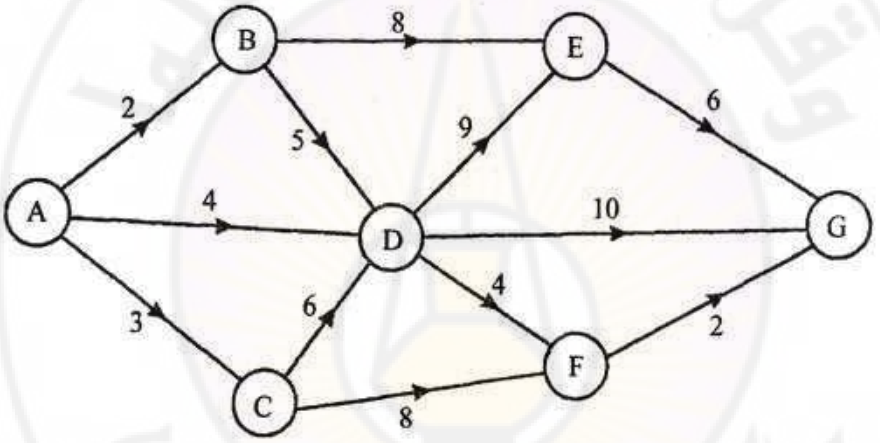


الشبكة رقم (١٢)

لوجدنا أنها لا تحتوي على أي دورة، لذلك فإننا نطلق عليها اسم شبكة بـــدون دروة.

١-٣-٩- الشبكة المقيمة:

إن أي شبكة تكون فيها العلاقات بين نقاطها مقيمة؛ أي يكون فيها هناك قيمة لأي قوس واصل بين أي نقطتين من نقاطها يطلق عليها اسم الشبكة المقيمة؛ ومثـــال على هذه الشبكة التالية:



الشبكة رقم (١٣)

١-٤- خصائص العلاقة الازدواجية بين نقاط الشبكة:

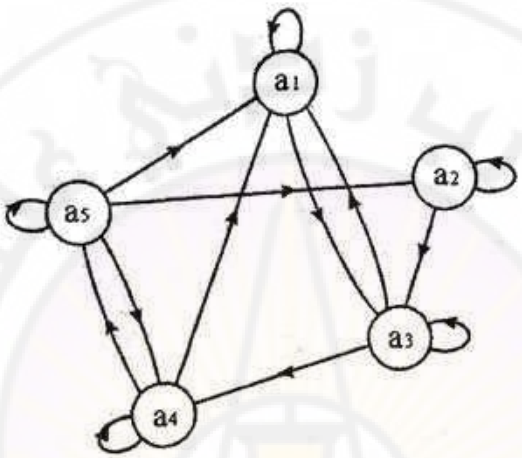
إن للعلاقة الازدواجية بين نقاط الشبكة الواحدة مجموعة من الخصائص نستعرضها فيما يلي:

١-٤-١- الخاصة الانعكاسية:

إن العلاقة الازدواجية تكون انعكاسية فيما إذا تحقق الشرط التالي:

$$\forall x \in E \Rightarrow (x,x) \in G$$

أي إن كل زوج (x,x) ينتمي إلى العلاقة الازدواجية، ومثال على ذلك الشبكة التالية:



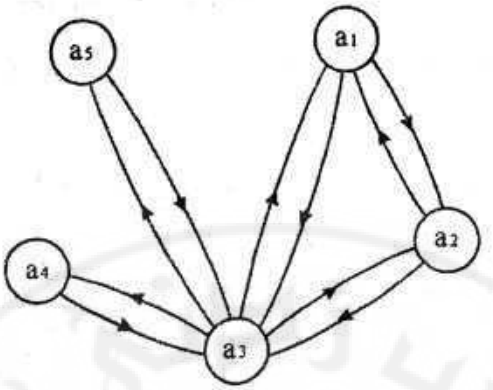
الشبكة (١٤)

١-٤-٢- الخاصية التناظرية

إن العلاقة الازدواجية تكون تناظرية فيما إذا تحقق الشرط التالي:

$$(x,y) \in G \Rightarrow y,x \in G$$

أي إنه إذا كانت القوس (x,y) ينتمي إلى الشبكة فإن القوس (y,x) هو بدوره ينتمي إلى الشبكة نفسها وإن هذه الخاصية يمكن التعبير عنها بالشبكة التالية:



الشبكة رقم ١٥

١-٤-٣- خاصة التعدي:

إن العلاقة بين نقاط الشبكة الواحدة تحقق خاصية التعدي فيما إذا تحقق الشرط التالي:

$$\begin{Bmatrix} x,y \in G \\ y,z \in G \end{Bmatrix} \quad (x,z) \in G$$

أي إن وجود قوس بين النقطتين x,y وبين النقطتين z,y يتطلب وجود قوس يربط بين النقطتين z,x ، وإن الشبكة التي تحقق خاصية التعدي هي التالية:



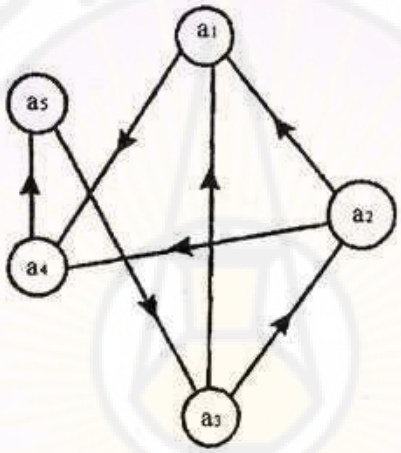
الشبكة رقم (١٦)

١-٤-٤- الخاصية الغير تناظرية:

في الشبكة العلاقة الازدواجية بين نقاطها تحقق الخاصة غير التناظرية إذا تحقق الشرط التالي:

$$\forall (x,y) \in G : (x,y) \in G \text{ ——— } y,x \notin G$$

وبشكل آخر يمكن القول إنه إذا كان الزوج أو القوس (x,y) ينتمي إلى العلاقة الازدواجية فإن الزوج المعاكس لا ينتمي إلى هذه العلاقة، وإن الشبكة التي تمثل هذه العلاقة هي التالية:



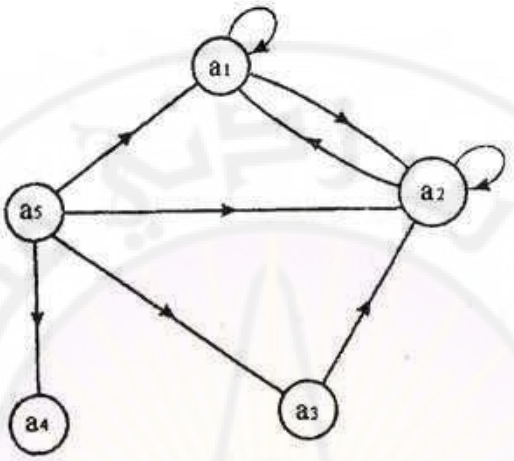
الشبكة رقم (١٧)

١-٥- أنواع العلاقة الازدواجية:

إن العلاقة الازدواجية، التي تحقق الترابط بين نقاط الشبكة الواحدة، أنواع مختلفة حسب عدد الخصائص التي تحققها هذه العلاقة، وسوف نستعرض هذه الأنواع وفق لما يلي:

١-٥-١- علاقة الترتيب الأولي:

إن العلاقة الازدواجية تكون علاقة ترتيب أولي فيما إذا حققت في الوقت نفسه الخاصية الانعكاسي وخاصية التعدي وكمثال على هذه العلاقة نعرض الشبكة التالية:



الشبكة رقم ١٨

١-٥-٢- علاقة التكافؤ:

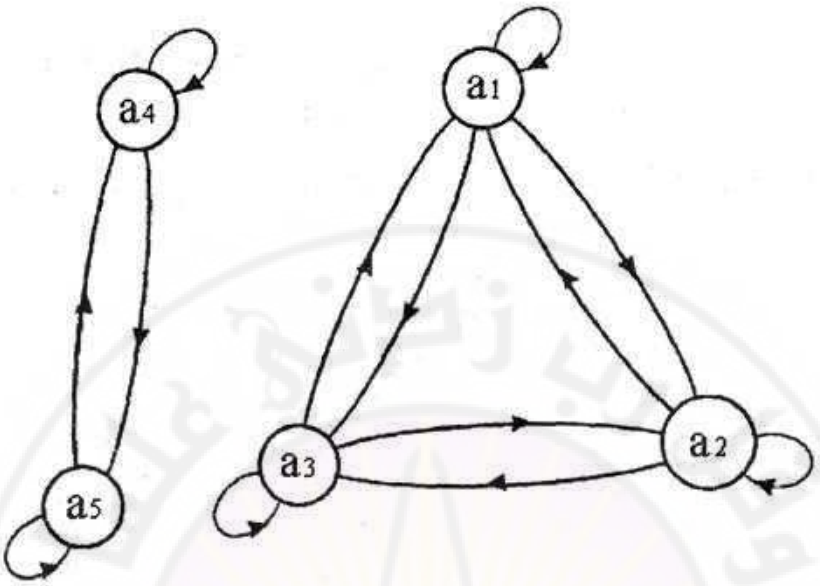
إن العلاقة الازدواجية بين نقاط الشبكة الواحدة تكون علاقة تكافؤ فيما إذا حققت الخصائص الثلاث التالية:

١- الخاصية الانعكاسية

٢- الخاصية التناظرية

٣- خاصية التعدي

وهناك أنواع كثيرة من الشبكات التي تحقق علاقة التكافؤ بين نقاطها؛ من هذه الشبكات تأخذ ما يلي:



الشبكة رقم (١٩)

١-٥-٣- علاقة ترتيب دقيق:

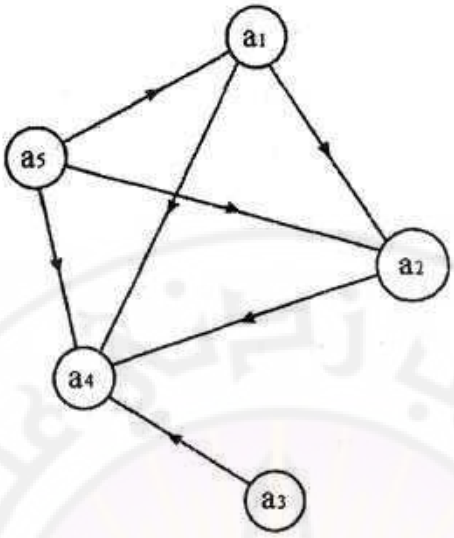
العلاقة الازدواجية بين نقاط الشبكة تكون علاقة ترتيب دقيق فيما إذا حُققت الخاصتان التاليتان:

١- خاصية التعدي

٢- الخاصية غير التناظرية بدقة

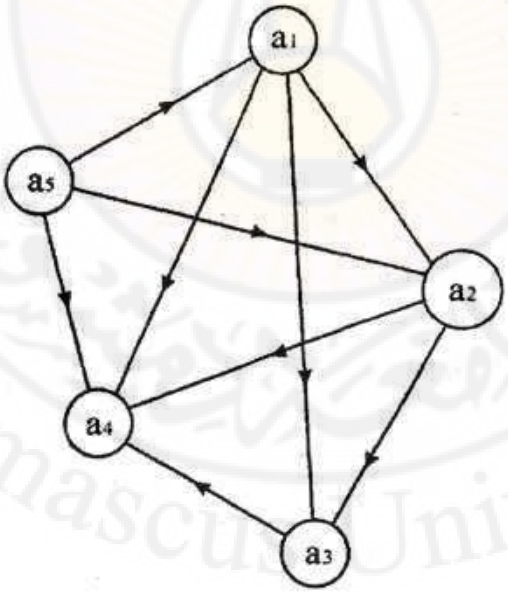
وإن الشبكة التي تحقق علاقة الترتيب الدقيق هي التالية:

Damascus University



الشبكة رقم (٢٠)

وهناك شبكة أخرى تحقق هذه العلاقة بين نقاطها هي الشبكة التالية:



الشبكة رقم (٢١)

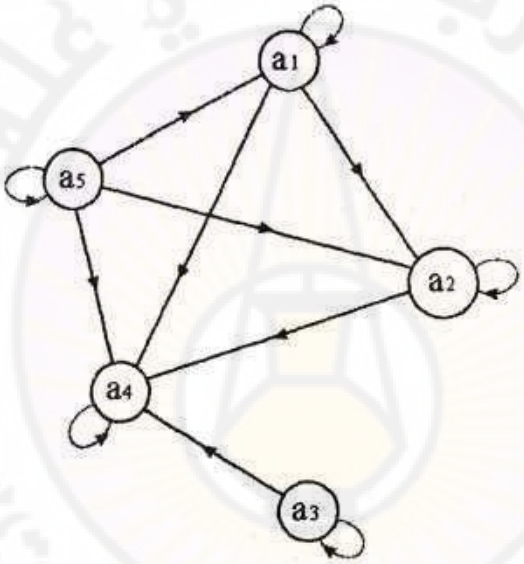
١-٥-٤- علاقة الترتيب الغير دقيق:

في الشبكة تكون العلاقة بين نقاطها علاقة ترتيب غير دقيق إذا تحققت الخصائص التالية:

١- الخاصية الانعكاسية

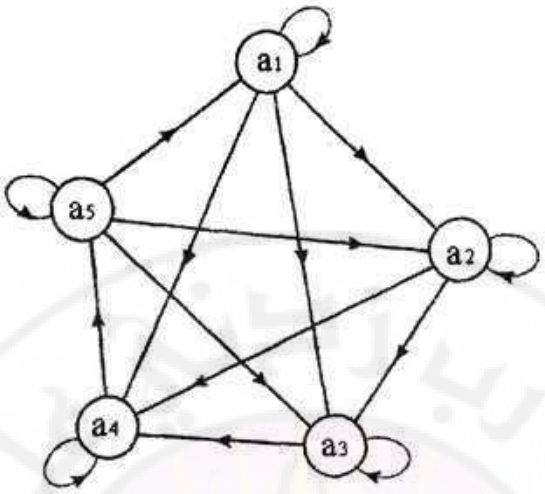
٢- الخاصية الغير تناظرية بشكل دقيق

وإن الشبكة التي تحقق هذه العلاقة هي الشبكة التالية:



الشبكة رقم (٢٢)

كما أنه هناك شبكة أخرى تحقق هذه العلاقة هي الشبكة التالية:



الشبكة رقم (٢٣)

١-٥-٥- علاقة الترتيب الكامل والجزئي:

لنستخدم الرمز التالي: $x > y$.

فيما إذا كانت x تسبق y في علاقة الترتيب. لو رجعنا إلى علاقة الترتيب الدقيق؛ وقمنا بمقارنة الشبكة رقم ٢٠ مع الشبكة رقم ٢١ لوجدنا أنه وفي الشبكة رقم ٢١

$$a_5 < a_4 < a_2 < a_4$$

وأيضاً $a_3 < a_4$

ولا يمكننا ربط a_3 مع a_5 أو a_2 وهذا ما يدعونا إلى أن نطلق عليها علاقة ترتيب جزئي. بالمقابل وفي الشبكة رقم ٢٣ نلاحظ أن:

$$a_5 < a_1 < a_3 < a_4$$

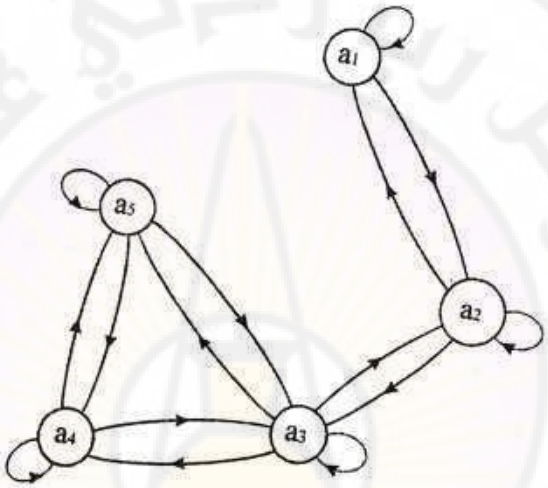
لذلك فإن الشبكة رقم ٢٣ تحقق علاقة الترتيب الكامل.

١-٥-٦- علاقة التجميع:

في الشبكة العلاقة الازدواجية بين نقاطها تكون علاقة تجميع فينا، إذا حُققت الخاصتان التاليتان:

١- الخاصية الانعكاسية ٢- خاصية التناظر

وأن الشبكة التي تحقق علاقة التجميع هي الشبكة التالية:



الشبكة رقم ٢٤

الفصل الثاني

تطبيق نظرية الشبكات

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

وقل رب زدني علما
Damascus University

٢-١- مقدمة:

بعد أن قمنا بتقديم نظرية الشبكات فإننا ننتقل الآن إلى عرض الجانب التطبيقي لهذه النظرية. هذا الجانب التطبيقي يتمثل في استخدام الشبكات في دراسة وحساب المسارات، تلك المسارات تمثل الجانب الاقتصادي للشبكات؛ بسبب أنها تستخدم كثيراً في تخفيض تكلفة النقل التي تحتل مكانة بارزة في تكلفة الإنتاج، وهناك ثلاثة أنواع من المسارات الأول منها ما يستخدم في نقل المواد الغذائية ويقوم بشكل أساس على تخفيض زمن الانتقال؛ وقد قدم هذا المسار من قبل فورد Ford، أما الثاني فيستخدم في نقل المواد الأولية من أماكن استخراجها إلى المصانع ويقوم على أساس تخفيض تكلفة النقل وإلى أدنى حد ممكن وقد قدم من قبل بيلمان Bellman.

أما الثالث فإن الهدف الأساس من استخدامه هو تقدير الزمن اللازم لتنفيذ أي مشروع اقتصادي، ويطلق عليه اسم المسار الحرج. وسوف نقوم باستعراض هذه الأنواع الثلاثة من المسارات.

٢-٢- المسار الأمثل (مسار فورد Chemin de Ford)

إن مسار فورد يعرف بأنه المسار أو الطريق الذي يمكننا من نقل المواد الغذائية من أماكن إنتاجها إلى أسواق استهلاكها وبأقل زمن ممكن، فلو افترضنا أن :

λ_i هي الطريق حتى النقطة x_i ، λ_j هي الطريق حتى النقطة x_j

$v(x_i,x_j)$ هي قيمة القوس الواصل بين النقطتين x_i و x_j فإنه سوف يكون لدينا:

$$\lambda_j - \lambda_i \geq v(x_i,x_j \ldots\ldots\ldots(1)$$

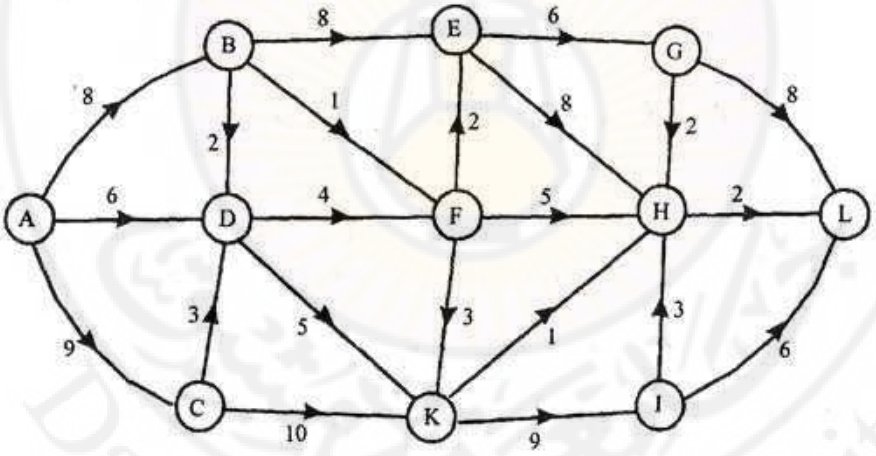
وتكون:

$$\lambda_j - \lambda_i = v(x_i, x_j \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

عندما لا يوجد بين النقطتين x_i ، x_j إلا طريق واحد مكـــون مـــن القـــوس (x_i, x_j)، أما في باقي الحالات فدوماً يكون لـــدينا العلاقـــة (1)، بتحويـــل λ_i إلى الطرف الثاني من المتراجحة يكون لدينا:

$$\lambda_j \geq \lambda_i + v(x_i, x_j)$$

وتكون λ_j هي المسار الأمثل حتى النقطة x_j فيما لو حققت الحد الأدنى للزمن اللازم للانتقال من نقطة البداية حتى النقطة x_j ونرمز لها بـــ λ_j^* . لو افترضنا أنـــه لدينا الشبكة التالية:



فإنه في هذه الشبكة نجد أن النقطة A لا ينتهي فيها أي قوس؛ وإنما هناك مجموعة من الأقواس تنطلق منها لذلك فإنها تمثل نقطة البداية، أما النقطة L فإن هناك مجموعة من الأقواس التي تنتهي فيها هي IL,HL,GL ولا يوجد أي قوس ينطلـــق منـــها؛ لذلك فإن هذه النقطة تمثل نقطة النهاية في هذه الشبكة بعد أن قمنا بتعريف وتحديـــد

نقطة البداية والنهاية؛ فإنه لا بد من البحث عن المسار الأمثل الذي يربط بين هـــاتين النقطتين L,A

إن الزمن عند النقطة A هو 0 لذلك يكون لدينا $\lambda_A^* = 0$

أما النقطة B، بما أنه لا يوجد إلا قوس واحد ينتهي عندها فإن المسار الأمثل هو التالي:

$$\lambda_B^* = \lambda_A + v(A-B) = 0+8 = 8$$

ونضع القيمة 8 حول هذه النقطة B. بالطريقة نفسها وبما أنه لا يوجد إلا قوس واحد ينتهي عند النقطة C؛ فإن المسار الأمثل لهذه النقطة هو:

$$\lambda_C^* = \lambda_A + v(A,C) = 0+9 = 9$$

نضع القيمة 9 عند هذه النقطة. أما النقطة D فيوجد ثلاث أقواس تنتهي فيهـــا، لذلك يوجد لدينا ثلاثة مسارات هي:

$$\lambda_D = \lambda_B^* + v(B,D) = 8+2 = 10$$

$$\lambda_D = \lambda_A^* + v(A,D) = 0+6 = 6$$

$$\lambda_D = \lambda_C^* + v(C+D) = 9+3 = 12$$

من بين هذه المسارات الثلاثة المسار الثاني هو الذي يحقق الحد الأدنى من الـــزمن اللازم للانتقال، لذلك فإن المسار الأمثل للنقطة D هو المسار التالي:

$$\lambda_D^* = \lambda_A^* + v(A,D) = 6$$

نضع القيمة 6 عند هذه النقطة. للوصول إلى النقطة F يوجد لدينا مساران هما:

$$\lambda_F = \lambda_B^* + v(B,F) = 8+1 = 9$$

$$\lambda_F = \lambda_D^* + v(D,F) = 6+4 = 10$$

وكما نلاحظ أن المسار الأول هو الذي يحقق الحد الأدنى في الزمن اللازم للوصول إلى النقطة F لهذا السبب فإن المسار الأمثل هو:

$$\lambda_F^* = \lambda_B^* + v(B,T) = 9$$

ونضع القيمة 9 عند هذه النقطة. عند النقطة k يوجد ثلاث أقواس، وهذا ما يقودنا للقول إنه للوصول إلى هذه النقطة يوجد ثلاثة مسارات هي:

$$\lambda_K = \lambda_F^* + v(F,K) = 9+3 = 112$$

$$\lambda_K = \lambda_D^* + v(D,K) = 6+6 = 12$$

$$\lambda_K = \lambda_C^* + v(C,K) = 9+10 = 19$$

بين هذه المسارات يوجد مساران يحققان الحد الأدنى في الزمن اللازم للوصول إلى النقطة k، وهو مساو إلى 12 وحدة زمنية؛ هذه القيمة تقودنا إلى القول إن المسار الأمثل للنقطة k يأتي من نقطتين هما D و F ، وبالتالي فإن هذا المسار هو الآتي:

$$\lambda_K^* = \lambda_F^* + v(F,K) = 12$$

$$= \lambda_D^* + v(D,K) = 12$$

وتضع القيمة 12 عند هذه النقطة. للوصول إلى النقطة E لدينا مساران هما:

$$\lambda_E = \lambda_E^* + v(B,E) = 8+8 = 16$$

$$= \lambda_F^* + v(F,E) = 9+2 = 11$$

وكما نلاحظ فإن المسار الثاني يحقق الحد الأدنى في الزمن اللازم للوصول إلى النقطة E انطلاقاً من نقطة البداية A، وبالتالي فإن المسار الأمثل لهذه النقطة هو:

$$\lambda_E^* = \lambda_F^* + v(F,E) = 11$$

ونضع القيمة 11 عند النقطة E. للوصول إلى النقطة G، فإنه لا يوجد إلا مسار واحد فقط وهو:

$$\lambda_G^* = \lambda_E^* + v(E,G) = 11 + 6 = 17$$

هذا المسار يعد مساراً أمثل ونضع القيمة 17 عند هذه النقطة، في الوقت نفسه فإن النقطة I لا ينتهي عندها إلا قوس واحد فقط قادم من النقطة k، وبالتالي فإن المسار الأمثل لهذه النقطة هو المسار التالي:

$$\lambda_I^* = \lambda_K^* + v(K,I) = 11 + 9 = 20$$

ونضع القيمة 20 عند هذه النقطة. للوصول إلى النقطة H يوجد خمسة مسارات هي:

$$\lambda_H = \lambda_G^* + v(G,H) = 17 + 2 = 19$$

$$= \lambda_E^* + v(E,H) = 11 + 8 = 19$$

$$= \lambda_F^* + v(F,H) = 9 + 5 = 14$$

$$= \lambda_K^* + v(K,H) = 11 + 1 = 12$$

$$= \lambda_I^* + v(I,H) = 20 + 3 = 23$$

من بين هذه المسارات المسار الرابع هو الذي يحقق الحد الأدنى في الزمن اللازم للوصول إلى النقطة H، وهذا ما يقودنا إلى القول إن المسار الأمثل لهذه النقطة هو:

$$\lambda_H^* = \lambda_K^* + v(K,H) = 12$$

ونضع القيمة 12 عند هذه النقطة في النهاية وللوصول إلى نقطة النهاية L يوجد لدينا ثلاثة مسارات هي:

$$\lambda_L = \lambda_G^* + v(G,L) = 12 + 2 = 14$$
$$= \lambda_H^* + v(H,L) = 17 + 8 = 25$$
$$= \lambda_I^* + v(I,L) = 20 + 6 = 26$$

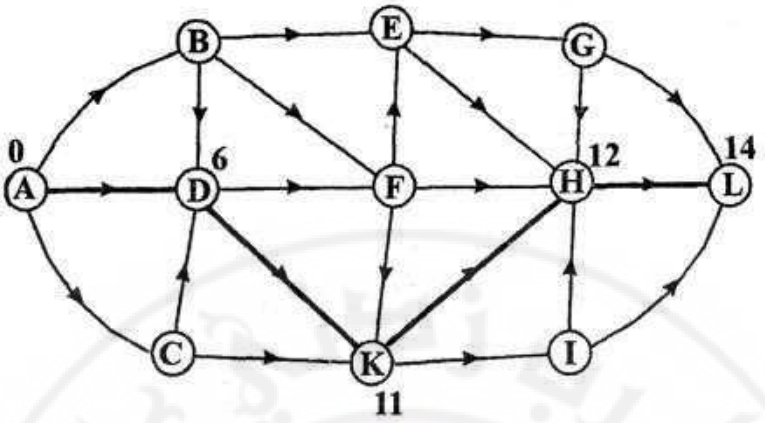
وكما هو واضح فإن المسار الأمثل هو الذي يحقق الحد الأدنى في الزمن اللازم للوصول إلى نقطة النهاية L : إذاً فإن المسار الأمثل هو:

$$\lambda_L^* = \lambda_H^* + v(H,L) = 14$$

هذه القيمة تقودنا إلى القول إن الحد الأدنى للزمن اللازم للانتقال من نقطة البداية A إلى نقط النهاية L هو 14 وحدة زمنية، وإن هذا المسار هو:

A, D ,K ,H ,L

وذلك بجمع المسارات المثلى لهذه النقاط. ويمكن تمثيل هذا المسار على الشبكة وفق ما يلي:



وهناك طريقة أخرى للتعرف على المسار الأمثل. هذه الطريقة تعتمد بشكل أساس على عدد الأقواس المكونة للمسار، وتبدأ من نقطة البداية التي لا يكون عنده أي مسار ويكون الزمن مساوياً إلى العنصر، ثم نبدأ بالمسار المكون من قوس واحد فالمسار المكون من ثلاث أقواس وهكذا حتى نصل إلى نقطة النهاية؛ ونستمر حتى لا يبقى عندنا أي مجال لتخفيض الزمن. لو افترضنا أن m_i هي المسار المكون من i قوس على الأكثر فإنه يمكننا أن نقوم بحساب المسار الأمثل وفق الجدول التالي:

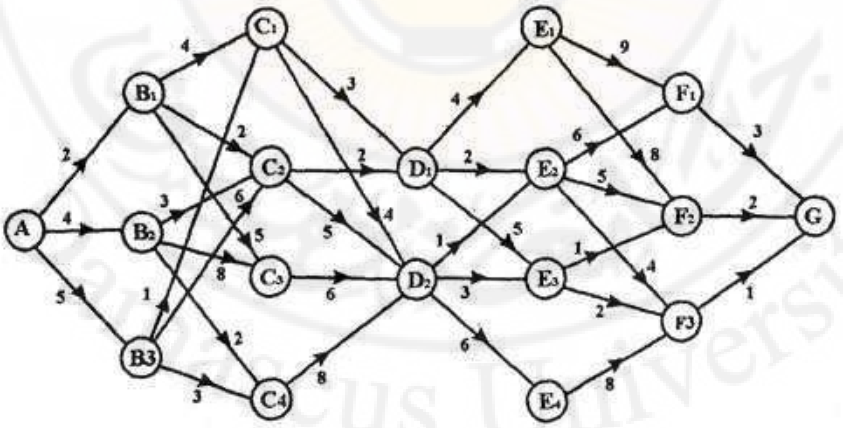
	A	B	C	D	E	F	H	G	K	I	L
m_0	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
m_1	0	8	9	6	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
m_2	0	8	9	6	16	9	00	00	11	∞	∞
m_3	0	8	9	6	16	9	12	22	11	20	∞
m_4	0	8	9	6	11	9	12	22	11	20	14
m_5	0	8	9	6	11	9	12	22	11	20	14

وهكذا نلاحظ أن المسار الأمثل بين النقطتين A , L يتكون من اربع أقواس، وأن الحد الأدنى للزمن اللازم للانتقال من النقطة A إلى النقطة L هو 14 وحدة

زمنية. وأن النقاط التي يتكون منها هذا المسار هي A,D,K,H,L وهذا المسار هو المسار نفسه الذي وصلنا إليه في الطريقة السابقة. أما الآن فإننا ننتقل إلى نوع آخر من المسار الأمثل. هذا المسار يقوم بشكل أساس على الكلفة وقد قدم من قبل بيلمان.

٢-٣- مسار بيلمان Bellman

حسب طريقة بيلمان فإن المسار الأمثل يعرف بأنه المسار الذي بموجبه يمكن نقل المواد الأولية من أماكن استخراجها إلى أماكن تصنيعها بأقل كلفة ممكنة، وقد استخدم بيلمان في حساب هذا المسار البرمجة الديناميكية التي تنص على تقسيم الشبكة إلى عدة مراحل مرحلة بداية ومرحلة النهاية؛ ونقاط عبور لا بد من المرور بها حتى يمكن الوصول إلى نقطة النهاية، وفي كل مرحلة من مراحل العبور يوجد عدة نقاط تمثل مداخل ومخارج هذه المرحلة لو افترضنا أنه لدينا الشبكة التالية:



من أجل التعرف على المسار الأمثل فإنه يتوجب علينا تقسيم نقاط هذه الشبكة إلى مجموعات جزئية، وذلك وفق ما يلي:

$$\chi_0 \in \{A\}$$

$$\chi_1 \in \{B_1, B_2, B_3\}$$

$$\chi_2 \in \{C_1, C_2, C_3, C_4\}$$

$$\chi_3 \in \{D_1, D_2\}$$

$$\chi_4 \in \{E_1, E_2, E_3, E_4\}$$

$$\chi_5 \in \{F_1, F_2\}$$

$$\chi_6 \in \{G\}$$

وكما هو واضح فإن χ_0 هي مرحلة البداية و χ_6 هي مرحلة النهاية أما النقـــاط $\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4, \chi_5$ فهي مراحل عبور، وكما هو معلوم فإنه كلفة النقل عند البداية هي مساوية إلى الصفر. أما عند الانتقال من χ_0 إلى χ_1 فإن هناك مجموعـــة من الطرق وبكلف نقل مختلفة هي:

$$A \xrightarrow{2} B_1 = 2$$

$$A \rightarrow B_2 = 4$$

$$A \rightarrow B_3 = 5$$

من هذه الطرق نلاحظ أن الطريق الأول هو الذي يحقق الحد الأدنى من كلفـــة النقل؛ لهذا فإن النقطة B_1 تعد أفضل مدخل للمرحلة X_1، لهذا فإننا نضع القيمة 2 عند هذه النقطة. للانتقال من X_0 إلى X_2 فإننا نأخذ بالحسبان الأقواس المنطلقة من

النقطة مدخل المرحلة x_1 ونقارن قيمة أدنى قوس مع قيم بقية الأقواس المنطلقة من هذه المرحلة، فإذا وجدنا قيمة أدنى؛ نأخذ هذه القيمة لتكون مساراً قابلاً للمقارنة. بالرجوع إلى الشبكة نجد أنه بين المرحلة x_0 والمرحلة x_2 يوجد طريقان هما:

$$A \xrightarrow{2} B_1 \xrightarrow{2} C_2 = 4$$

$$A \xrightarrow{5} B_3 \xrightarrow{1} C_1 = 6$$

بإجراء المقارنة نجد أن المسار الأول هو الذي يحقق الحد الأدنى في كلفة النقل، لذلك فإن النقطة B_1 هي التي تكون مخرج المرحلة x_1 والنقطة c_2 تكون مدخل x_2، ونضع القيمة 4 عند النقطة c_2. بين المرحلة x_0 والمرحلة x_3 يوجد طريق واحد فقط هو:

$$A \xrightarrow{2} B_1 \xrightarrow{2} C_2 \xrightarrow{2} D_1 = 6$$

وذلك لعدم وجود قوس قيمته أدنى من قيمة القوس المنطلق من C_2. لهذا فإننا نضع القيمة 6 عند النقطة D_1. بين المرحلة x_0 والمرحلة x_4 يوجد طريقان هما:

$$A \xrightarrow{2} B_1 \xrightarrow{2} C_2 \xrightarrow{2} D_1 \xrightarrow{2} F_2 = 8$$

$$A \xrightarrow{2} B_1 \xrightarrow{4} C_1 \xrightarrow{5} D_2 \xrightarrow{1} E_2 = 12$$

وكما هو واضح فإن الطريق الأول هو الذي يحقق الحد الأدنى في كلفة النقل لذلك نضع القيمة 5 عند النقطة E_2. للانتقال من x_0 إلى x_5 يوجد لدينا طريقان هما:

$$A \xrightarrow{2} B_1 \xrightarrow{2} C_2 \xrightarrow{2} D_1 \xrightarrow{2} E_2 \xrightarrow{4} F_3 = 12$$

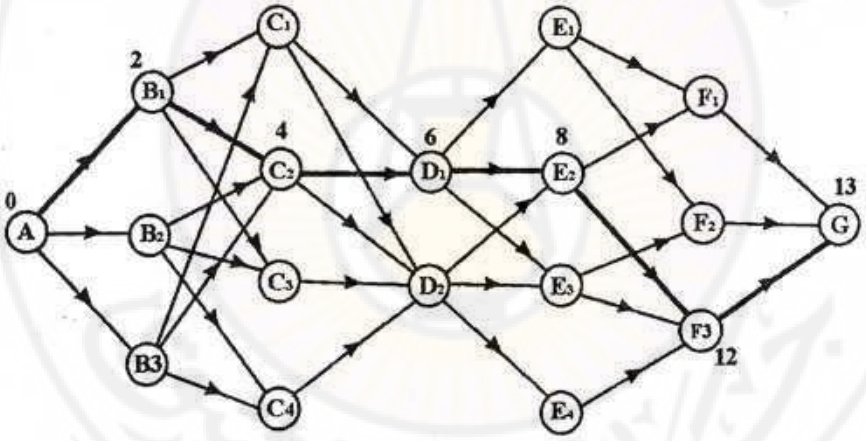
$$A \xrightarrow{2} B_1 \xrightarrow{2} C_2 \xrightarrow{2} D_1 \xrightarrow{5} E_3 \xrightarrow{1} F_2 = 12$$

وهنا نلاحظ أن كلا الطريقين يحقق الحد الأدنى في كلفة النقل والمساوية إلى 12 لذلك فإننا نضع هذه القيمة عند النقطة F_3 والنقطة F_2 بين البداية x_0 والنهاية x_6 يوجد طريقان هما:

$$A \xrightarrow{2} B_1 \xrightarrow{2} C_2 \xrightarrow{2} D_1 \xrightarrow{2} E_2 \xrightarrow{4} F_3 \xrightarrow{1} G = 13$$

$$A \xrightarrow{2} B_1 \xrightarrow{2} C_2 \xrightarrow{2} D_1 \xrightarrow{5} E_3 \xrightarrow{1} F_2 \xrightarrow{2} G = 14$$

وكما هو واضح أن الطريق الأول هو الذي يحقق الحد الأدنى في كلفة النقل، وهذا ما يدعونا إلى أن نعده المسار الأمثل، وتمثيل هذا المسار على الشبكة يأخذ الشكل التالي:



أما الآن فإننا ننتقل إلى نوع آخر من المسارات وهو المسار الحرج.

٢-٤- المسار الحرج:

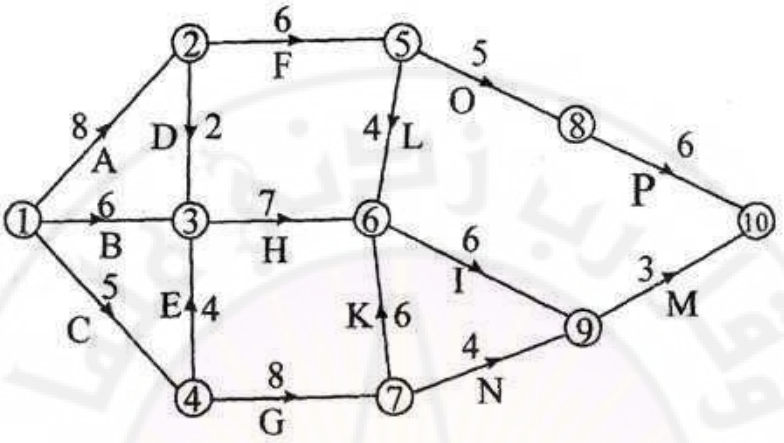
إن الهدف الأساس من وضع المسار الحرج هو دراسة المشروعات الاقتصادية التي يمكن تنفيذها في أي اقتصاد وطني، وبموجب هذا المسار يتم التفريق بين نوعين من مراحل تنفيذ المشروع، مراحل حرجه تحقق المساواة بين الحد الأدنى والحد الأعلى

للزمن اللازم لتنفيذها، ومراحل ثانوية يكون فيها فرق بين الحد الأدنى والحد الأعلى للزمن اللازم لتنفيذها؛ أي يكون فيها مهلة تأخير ولا يكون لهذا التأخير أي أثر على الزمن اللازم لتنفيذ المشروع، ويوجد لحساب المسار الحرج طريقتان هما CPM و PERT وسوف نستعرضهما فيما يأتي:

٢-٤-١- إيجاد المسار الحرج بطريقة CPM(Critical Path Method)

حسب هذه الطريقة يكون الزمن اللازم لتنفيذ أي مرحلة من مراحل المشروع معلوم منذ البداية ويتوجب على الباحث حساب البداية المبكرة والمتأخرة وحساب النهاية المبكرة والمتأخرة لكل مرحلة من مراحل المشروع، وبالتالي التفريق بين المراحل الحرجة والثانوية. عند حساب المسار الحرج يتوجب علينا أخذ خطين الأول هو خط الذهاب ويبدأ من نقطة البداية، أي من القيمة صفر؛ ثم نتبع اتجاه الأسهم ونختار أعلى القيم وأن القيم التي نقوم بحسابها في هذا الخط هي عبارة عن البدايات والنهاية المبكرة لجميع مراحل المشروع. أما الخط الثاني فإنه يبدأ من نقطة النهاية ومن الحد الأقصى للزمن الذي قمنا بحسابه في مرحلة الذهاب؛ ونأخذ الاتجاه المعاكس للأقواس ونختار أدنى القيم، وإن القيم التي نقوم بحسابها في هذه المرحلة تمثل البداية والنهاية المتأخرة لكل مرحلة من مراحل المشروع. بعد أن نقوم بحساب القيم في مرحلة الذهاب والإياب؛ فإننا نحدد المراحل الحرجة وهي تلك التي تحقق المساواة بين البداية المبكرة والمتأخرة بين النهاية المبكرة والمتأخرة أيضاً ومن ناحية أخرى فإن البداية المبكرة لكامل المشروع هي صفر والنهاية المبكرة لهذه المراحل المتصلة بمراحل المرحلة الأولى هي عبارة عن النهاية المبكرة للمراحل التي تسبقها، أما النهاية المتأخرة فتبدأ من نقطة النهاية، وإن أي مرحلة متصلة بنقطة النهاية تكون بدايتها المتأخرة هي عبارة عن زمن إنجاز المشروع مطروحاً منه زمن تنفيذ المرحلة، أما المراحل المتصلة بالنقاط قبل النهائية

فإن نهايتها المتأخرة هي عبارة عن البداية المتأخرة للمرحلة التي تليها؛ وهكذا حتى نصل إلى نقطة البداية لو افترضنا أنه لدينا الشبكة التالية:



من هذه الشبكة وكما قلنا سابقاً فإن حساب المسار الحرج يتم على مـــرحلتين: ذهاب ويبدأ من الصفر؛ وكما نلاحظ أن المراحل المتصلة في البداية هـــي: C,B,A ولذلك فإن البداية المبكرة لكل من هذه المراحل هي 0 .

أما النهاية المبكرة للمرحلة A فهي:

$$0 + 8 = 8 \text{ أيام}$$

والنهاية المبكرة للمرحلة B هي:

$$0 + 6 = 6 \text{ أيام}$$

والنهاية المبكرة للمرحلة C هي:

$$0 + 5 = 5 \text{ أيام}$$

البداية المبكرة للمرحلة D هي 8 أيام ونهايتها المبكرة هي:

أيام $8+2=10$

البداية المبكرة للمرحلة E هي 5 أيام ونهايتها المبكرة هي:

أيام $5+4=9$

لحساب البداية المبكرة للمرحلة H لدينا ثلاث قيم هي: 9,6,10 تختار أعلى هذه القيم أي إن:

البداية لمبكرة هي 10 أما النهاية المبكرة فهي: يوم $10+7=17$

المرحلة G بدايتها المبكرة هي 5 أيام ونهايتها المبكرة هي: يوم $5+8=13$

المرحلة F بدايتها المبكرة هي 8 أيام ونهايتها المبكرة هي: يوم $8+6=14$

المرحلةL بدايتها المبكرة هي 14 يوماً ونهايتها المبكرة هي: يوم $14+4=18$

المرحلة O بدايتها المبكرة هي 14 يوماً ونهايتها المبكرة هي: يوم $14+5=19$

المرحلة K بدايتها المبكرة هي 13 يوماً ونهايتها المبكرة هي: يوم $13+6=19$

المرحلةN بدايتها المبكرة هي13 يوماً ونهايتها المبكرة هي: يوم $13+4=17$

المرحلة I لدينا ثلاث إمكانيات 19,17,18 .نختار أعلى قيمة وبذلك تكون بدايتها المبكرة هي 19 يوماً ونهايتها المبكرة هي : يوم $19+6=25$

المرحلة M لدينا إمكانتان 25 , 17 نختار أعلى قيمة وهي 25 ، وتكون بدايتها المبكرة هي 25 ونهايتها المبكرة هي:

يوماً $25+3=28$

المرحلة P بدايتها المبكرة هي 19 يوماً ونهايتها المبكرة هي: يوماً $19+6=25$

في النهاية فإن الحد الأقصى للزمن هو 28 يوماً من هذا الحد ننطلق إلى حساب البدايات والنهايات المتأخرة لكل مرحلة من مراحل المشروع.

لو أخذنا المرحلة P فإن نهايتها المتأخرة هي 28 يوماً وبدايتها المتأخرة هي:

$$28 - 6 = 22 \text{ يوم}$$

المرحلة 0 نهايتها المتأخرة هي 22 يوماً وبدايتها المتأخرة هي: $22 - 5 = 17$ يوماً

المرحلة M نهايتها المتأخرة هي 28 يوماً وبدايتها المتأخرة هي: يوم

$$28 - 3 = 25$$

المرحلة N نهايتها المتأخرة هي 25 يوماً وبدايتها المتأخرة هي: يوماً

$$25 - 4 = 21$$

المرحلة I نهايتها المتأخرة هي 25 يوماً وبدايتها المتأخرة هي: $25 - 6 = 19$ يوماً

المرحلة L نهايتها المتأخرة هي 19 يوماً وبدايتها المتأخرة هي: $19 - 4 = 15$ يوماً

المرحلة K نهايتها المتأخرة هي 19 يوماً وبدايتها المتأخرة هي: $19 - 6 = 13$ يوماً

المرحلة H نهايتها المتأخرة هي 19 يوماً وبدايتها المتأخرة هي: $19 - 7 = 12$ يوماً

المرحلة G لدينا إمكانتين 21,13 نختار أدنى القيم؛ وهنا تكون نهايتها المتأخرة هي: يوم $13 - 8 = 5$

المرحلة F نهايتها المتأخرة هي إما 15 أو 17 . نختار أدنى القيم وهي 15 وتكون بدايتها المتأخرة هي : يوم $15 - 6 = 9$

المرحلة D نهايتها المتأخرة هي 12 يوماً وبدايتها المتأخرة هي: يوم $12 - 2 = 10$

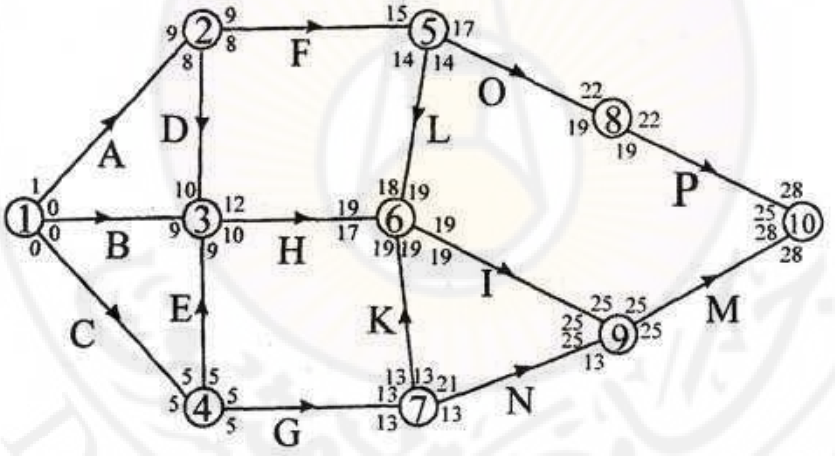
المرحلة E نهايتها المتأخرة هي 12 يوماً وبدايتها المتأخرة هي: يوم 8 = 4 – 12

المرحلة B نهايتها المتأخرة هي 12 يوماً وبدايتها المتأخرة هي: يوم 6 = 6 – 12

المرحلة A لدينا إمكانتين هي 10,9 نختار أدنى القيم وتكون نهايتها المتأخرة هي 9 يوم وبدايتها المتأخرة هي: يوم 1 = 8 – 9

أما المرحلة C فيوجد لدينا إمكانيتين إما 8 أيام أو 5 أيام نختار القيمة الدنيا وتكون نهايتها المتأخرة هي 5 أيام وبدايتها المتأخرة هي: يوم 0 = 5 – 5

بهذا الشكل نكون قد قمنا بحساب البدايات والنهايات المبكرة والمتأخرة لجميع مراحل المشروع. بتمثيل الأرقام التي حصلنا عليها على الشبكة نحصل على ما يلي:



من هذه الشبكة نلاحظ أن المراحل التي تحقق المساواة بين البداية المبكرة والمتأخرة والنهاية المبكرة والمتأخرة هي:

$$C, G, K, I, M$$

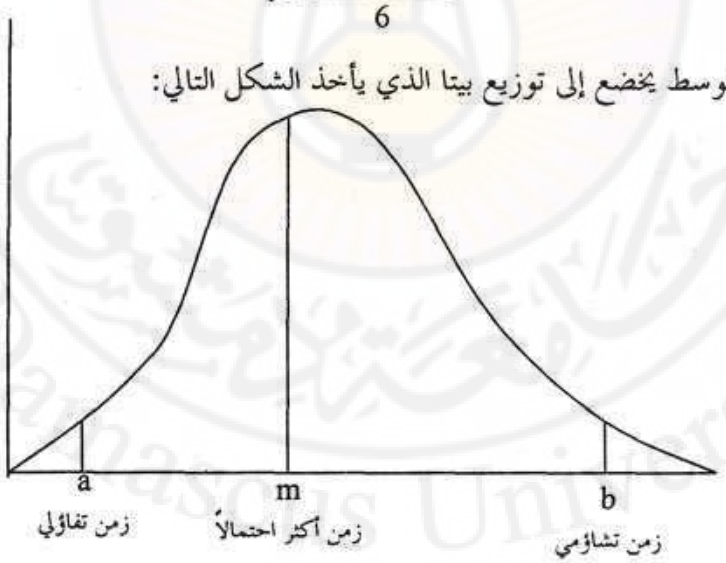
لهذا السبب فإننا نطلق على هذه المراحل اسم المراحل الحرجة، أما بقية المراحل فإنها مراحل غير حرجة، وإن أي تأخير في زمن إنجازها لا يؤثر على المشروع. أما الآن فإننا ننتقل إلى الطريقة الثانية لحساب المسار الحرج وهي طريقة بيرت.

٢-٤-٢- طريقة بيرت:

حسب هذه الطريقة فإنه عند دراسة أي مشروع اقتصادي يكون معلوماً لدينا منذ البداية ثلاثة أنواع من الأزمن،ة وذلك لكل مرحلة من مراحل المشروع. هذه الأزمنة هي الزمن المتفائل ونرمز له بـ a والزمن المتشائم ونرمز له بـ b، والزمن الأكثر احتمالاً ونرمز له بـ m، ويعطى وزن واحد للزمن التشاؤمي ووزن للزمن التفاؤلي، وأربعة أوزان للزمن الأكثر احتمالاً بحيث يصبح متوسط الزمن اللازم لتنفيذ أي مرحلة من مراحل المشروع مساوياً إلى ما يلي:

$$t = \frac{a + 4m + b}{6}$$

هذا المتوسط يخضع إلى توزيع بيتا الذي يأخذ الشكل التالي:



أما تباين هذا المتوسط فإنه يأخذ الشكل التالي:

$$6^2 = \frac{b - a}{6}$$

والانحراف المعياري يأخذ الشكل التالي:

$$6 = \sqrt{\frac{b - a}{6}}$$

لو افترضنا أنه لدينا مشروع مكون من مجموعة من المراحل؛ وأن أزمنة كل من هذه المراحل معطاة وفق الجدول التالي:

المرحلة	الزمن المتفائل	الزمن الأكثر احتمالاً	الزمن المتشائم
A	1	2	3
B	1	2	3
C	1	2	3
D	1	2	9
E	2	3	10
G	3	6	15
H	2	5	14
I	1	4	7
J	4	9	20
K	1	2	9
L	4	4	4

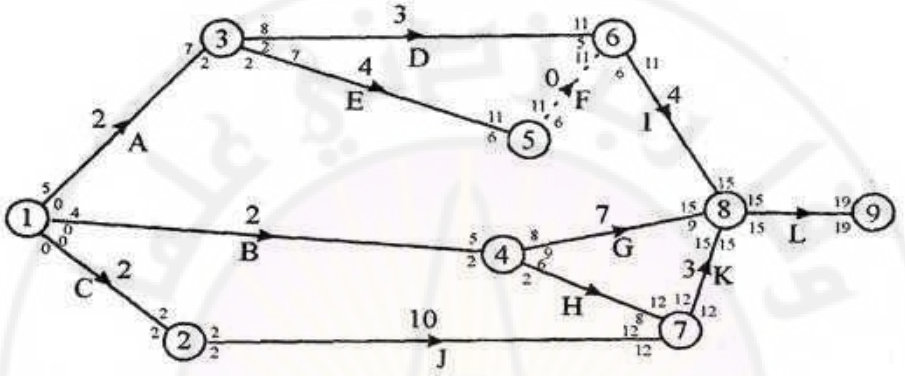
من هذه الأزمنة يمكن تقدير متوسط الزمن اللازم لتنفيذ أي مرحلة من مراحل المشروع وفق الجدول التالي:

المرحلة	متوسط الزمن	σ
A	2	0.33
B	2	0.33
C	2	0.33
D	3	1.33
E	4	1.33
F	0	0
G	7	2.00
H	6	2.00
I	4	1.00
J	10	2.67
K	3	1.33
L	4	0

من الجدولين السابقين يمكن تقدير البداية المبكرة والمتأخرة وأيضاً النهاية المبكرة والمتأخرة أيضاً لجميع المشروع وفق الجدول التالي:

المرحلة	البداية		النهاية		زمن التأخير
	مبكرة	متأخرة	مبكرة	متأخرة	
A	0	5	2	7	**5**
B	0	4	2	6	4
C	0	0	2	2	0
D	2	8	5	11	6
E	2	7	6	11	5
G	2	8	9	15	6
H	2	6	8	12	4
I	6	11	10	15	5
J	2	2	12	12	0
K	12	12	15	15	0
L	15	15	19	19	0

حسب هذا الجدول نلاحظ أن المراحل التي لا يوجد فيها زمن تأخير هي A,C,J,K,L، وهذا ما يدعونا إلى القول إن هذه المراحل هي مراحل حرجة وتكون المسار الحرج، وإن الشبكة التي تعكس مراحل العمل في المشروع هي التالية:



من هذه الشبكة وكما هو واضح نجد إن متوسط الزمن اللازم لإنجاز المشروع هو ١٩ أسبوعاً وأن الانحراف المعياري لهذا المتوسط هو الجذر التربيعي لمجموع تباينات الأوساط الحسابية للمراحل الحرجة والذي هو مساو إلى ما يلي:

$$6 = \sqrt{(0.33)^2 + (2.67)^2 + (1.33)^2 + (0)^2}$$

$$= \sqrt{0.1089 + 7.1289 + 1.7689 + 0}$$

$$= \sqrt{9.01} = 3$$

أخيراً وبعد أن قمنا بحساب متوسط الزمن اللازم لإنجاز كامل المشروع والانحراف المعياري لهذا المتوسط؛ فإنه يمكن استخدام هاتين الثابتتين لحساب احتمال إنجاز المشروع في زمن يختلف عن هذا المتوسط وفق القانون التالي:

$$Z = \frac{X - M}{6}$$

حيث إن X هي زمن إنجاز المشروع.

M متوسط الزمن المقدر لإنجاز المشروع.

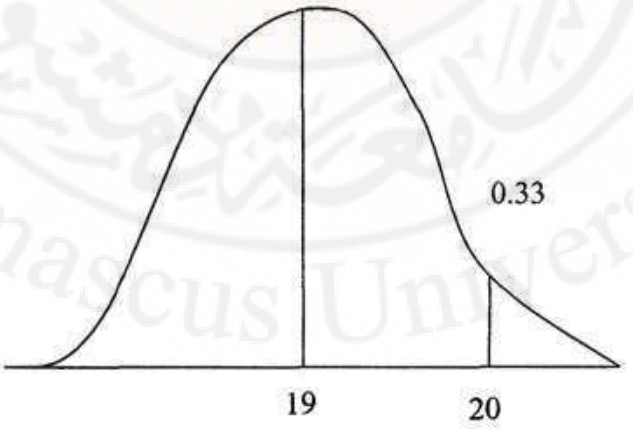
6 هي الانحراف المعياري لهذا المتوسط

Z هي عدد الانحرافات المعيارية؛ والتي تعطينا احتمال إنجاز المشـــروع وفق التوزيع الطبيعي المعياري.

لو افترضنا أنه يمكن إنجاز المشروع في 20 أسبوعاً فإن احتمال أن يتحقق ذلك يتطلب منا حساب قيمة Z وذلك وفق ما يلي:

$$Z = \frac{20-19}{3} = 0.33$$

بالرجوع إلى جدول التوزيع الطبيعي المعياري نجد أن الاحتمال المقابل لهذه القيمة هي 0.62930، وعلى أساس ذلك نقول إن احتمال إنجاز المشروع في 20 أسبوعاً هو 60% وأن تمثيل ذلك بيانياً يأخذ الشكل التالي:



وقل رب زدني علما
Damascus University

الفصل الثالث
تطبيق الدورة على
مشكلة البحار المسافر

Damascus University

وقل رب زدني علما
Damascus University

٣-١- مقدمة

بعد أن قمنا بشرح القسم الأول في تطبيق نظرية الشبكات على المجال الاقتصادي مستخدمين في ذلك مفهوم الطريق في دراسة مختلف أنواع المسارات؛ فإننا ننتقل إلى فرع آخر من مجال استخدام نظرية الشبكات في المجال التطبيقي، في هذا القسم سوف نستخدم مفهوم الدورة في دراسة مشكلة البحار المسافر؛ تلك المشكلة تتلخص بأن هذا البحار يرغب في أن يجري دورة كاملة حول العالم بشكل يمر في كل دولة مرة واحدة فقط، ثم يعود إلى الدولة التي انطلق منها وبأقصر وقت ممكن. ولقد بقيت هذه المشكلة زمناً طويلاً دون حل حتى جاء في الآونة الأخيرة العالم الرياضي ليتل؛ وقام بحلها مستخدماً في ذلك مفهوم الدورة الهاملتونية، هذه الدورة تعتمد بشكل أساسي على مفهوم التفريع والتقييم.

٣-٢- التفريع والتقييم:

لنفترض أنه لدينا المجموعة التالية:

$$E = \{S_1, S_2, S_3, \ldots\ldots, S_n\}$$

هذه المجموعة تمثل مختلف الحلول الممكنة للمشكلة ولنفترض أن B_i هو التابع المتعلق بكل حل من هذه الحلول ولنفترض أن المجموعة الجزئية $\mathrm{E_m}$ هي مجموعة الحلول المساعدة على تحقيق الحد الأدنى في قيمة التابع $F_{(si)}$ في الوقت نفسه فإن المجموعة الجزئية $\mathrm{E\mu}$ هي مجموعة الحلول التي تقود إلى تحقيق الحد الأعلى في قيمة التابع الاقتصادي $F_{(si)}$

ليكن لدينا مجموعة المواصفات التالية: P_A, P_B, P_C

حيث إن المواصفة P_A تسمح لنا بتجزئة المجموعة E إلى مجمـــوعتين جـــزئيتين $A, \overline{A}$ وإن الحد الأدنى لقيم الحلول الممكنة للمشكلة هو b_0 هذا الحد يمكن الوصول إليه انطلاقاً من المجموعة E وبعد استخدام المواصفة P_A .

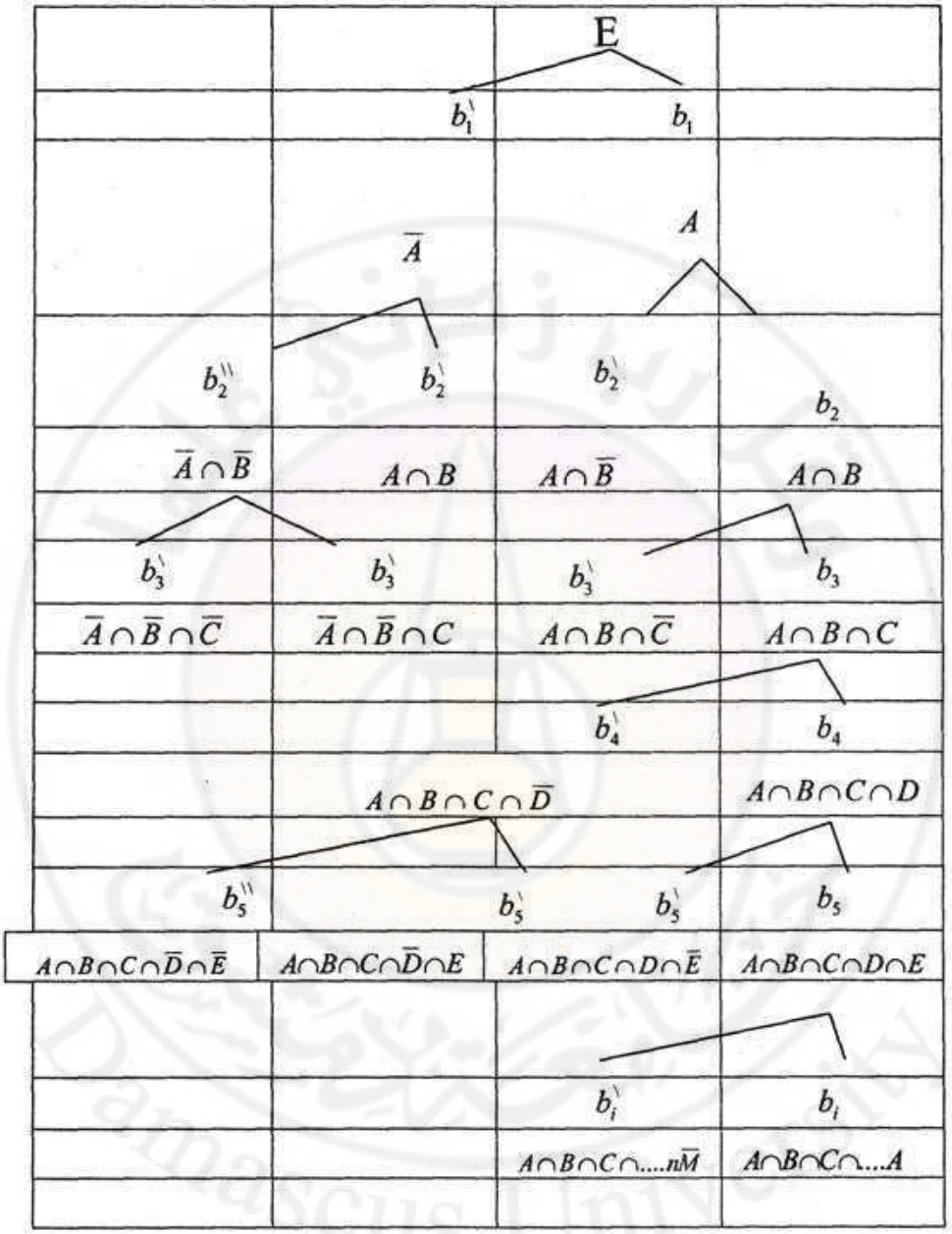
المواصفة P_B تسمح لنا بتجزئة المجموعة A إلى مجموعتين جزئيتين؛ والحد الأدنى لقيم الحلول الممكنة للمشكلة هو b_1 حيث إن $b_1 \geq b_0$ وإن:

$$P_A \cap P_B \in A \cap B$$
$$\overline{P}_A \cap P_B \in \overline{A} \cap B$$
$$P_A \cap \overline{P}_B \in A \cap \overline{B}$$
$$\overline{P}_A \cap \overline{P}_B \in \overline{A} \cap \overline{B}$$

المواصفة T_C تسمح بتجزئة المجموعة الناتجة إلى مجموعات جزئيـــة، وإن الحـــد الأدنى لقيمة عناصر الحلول الممكنة للمشكلة هو b_2 حيث إن $b_2 \geq b_1 \geq b_0$ وأن:

$$P_A \cap P_B \cap P_C \in A \cap B \cap C$$
$$\overline{P}_A \cap P_B \cap P_C \in \overline{A} \cap B \cap C$$
$$\overline{P}_A \cap \overline{P}_B \cap P_C \in \overline{A} \cap \overline{B} \cap C$$
$$\overline{P}_A \cap \overline{P}_B \cap \overline{P}_C \in \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$$

وهكذا نستمر باستخدام المواصفات لتجزئة المجموعات إلى مجموعات جزئية حتى نصل إلى المرحلة التي تكون فيها $b_i = b_j$ فتوقف، وبذلك نكون قد وصلنا إلى الحد الأدنى لقيمة الحلول الممكنة للمشكلة هذه التجزئة قد مثلناها في الشجرة التالية:


E
b_1'
b_1
$\overline{A}$
A
b_2''
b_2'
b_2'
b_2
$\overline{A}\cap\overline{B}$
$A\cap B$
$A\cap\overline{B}$
$A\cap B$
b_3'
b_3'
b_3'
b_3
$\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}$
$\overline{A}\cap\overline{B}\cap C$
$A\cap B\cap\overline{C}$
$A\cap B\cap C$
b_4'
b_4
$A\cap B\cap C\cap\overline{D}$
$A\cap B\cap C\cap D$
b_5''
b_5'
b_5'
b_5
$A\cap B\cap C\cap\overline{D}\cap\overline{E}$
$A\cap B\cap C\cap\overline{D}\cap E$
$A\cap B\cap C\cap D\cap\overline{E}$
$A\cap B\cap C\cap D\cap E$
b_i'
b_i
$A\cap B\cap C\cap....n\overline{M}$
$A\cap B\cap C\cap....A$

٣-٣- مشكلة البحار المسافر:

إن مشكلة البحار المسار بقيت زمناً طويلاً دون أن يوجد لها أي حل حتى جـــاء في عام ١٩٦٣ العالم الرياضي J.D.C Little وكتاب آخرون واستخدموا الطرق الشهيرة في إيجاد الحد المتفائل؛ وطبقوها على هذه المشكلة، وتتلخص هذه المشكلة بأن البحار المسافر يتوجب عليه استخدام الدورة الهاملتونية؛ منطلقاً من المدينة X ومارّاً في كل مدينة من المدن الأخرى مرة واحدة فقط؛ حتى يعود إلى المدينة التي انطلق منها X

لنأخذ مثلاً الشبكة التامة التالية:

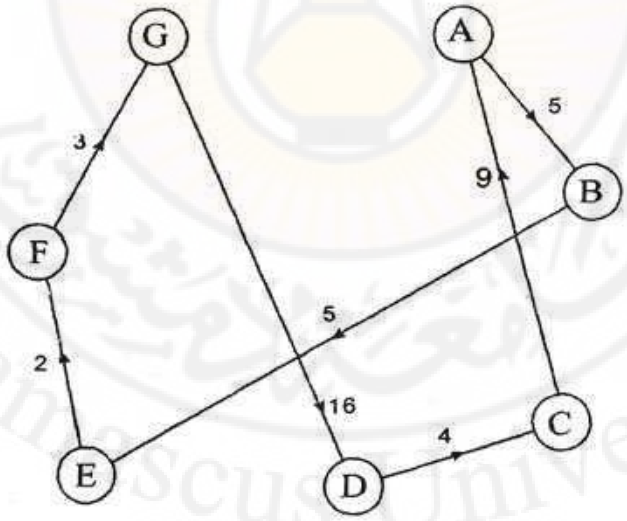


في هذه الشبكة كل قوس واصل بين أي نقطتين (χ_i,χ_j) له قيمـــة $V(\chi_i,\chi_j)$ هذه القيم تأخذ شكل الجدول التالي:

	A	B	C	D	E	F	G
A	∞	5	9	6	3	5	**9**
B	8	∞	8	8	5	9	**2**
C	6	9	∞	1	6	7	**3**
D	7	11	4	∞	4	2	**9**
E	4	6	3	2	∞	2	**8**
F	5	2	2	8	4	∞	**3**
G	8	1	3	16	5	3	∞

جدول رقم (١)

في الشبكة التامة من أي نقطة من نقاطها يوجد على الأقل دورة؛ مثلاً من النقطة A لدينا الدورة التالية:



وكما نلاحظ أن الزمن اللازم لقطع هذه الدورة هو 14 وحدة زمنية.

من أجل إيجاد الدورة الهاملتونية التي تحقق الحد الأدنى في الزمن اللازم لقطع الدورة، فإنه يتوجب علينا تغيير الجدول السابق بحيث يظهر الرقم صفر في كل سطر من اسطره، في كل عمود من أعمدة الجدول أيضاً، وذلك عن طريق أخذ أدنى رقم في كل سطر وعمود ونطرحه من بقية قيم السطر أو العمود، بإجراء هذه العملية نصل إلى الجدول التالي:

	A	B	C	D	E	F	G	الفروق
A	∞	2	6	3	0	2	6	3
B	6	∞	6	6	3	7	0	2
C	5	8	∞	0	5	6	2	1
D	5	9	2	∞	2	0	7	2
E	2	4	1	0	∞	0	6	2
F	3	0	0	6	2	∞	1	2
G	7	0	2	15	4	2	∞	1

جدول رقم (٢)

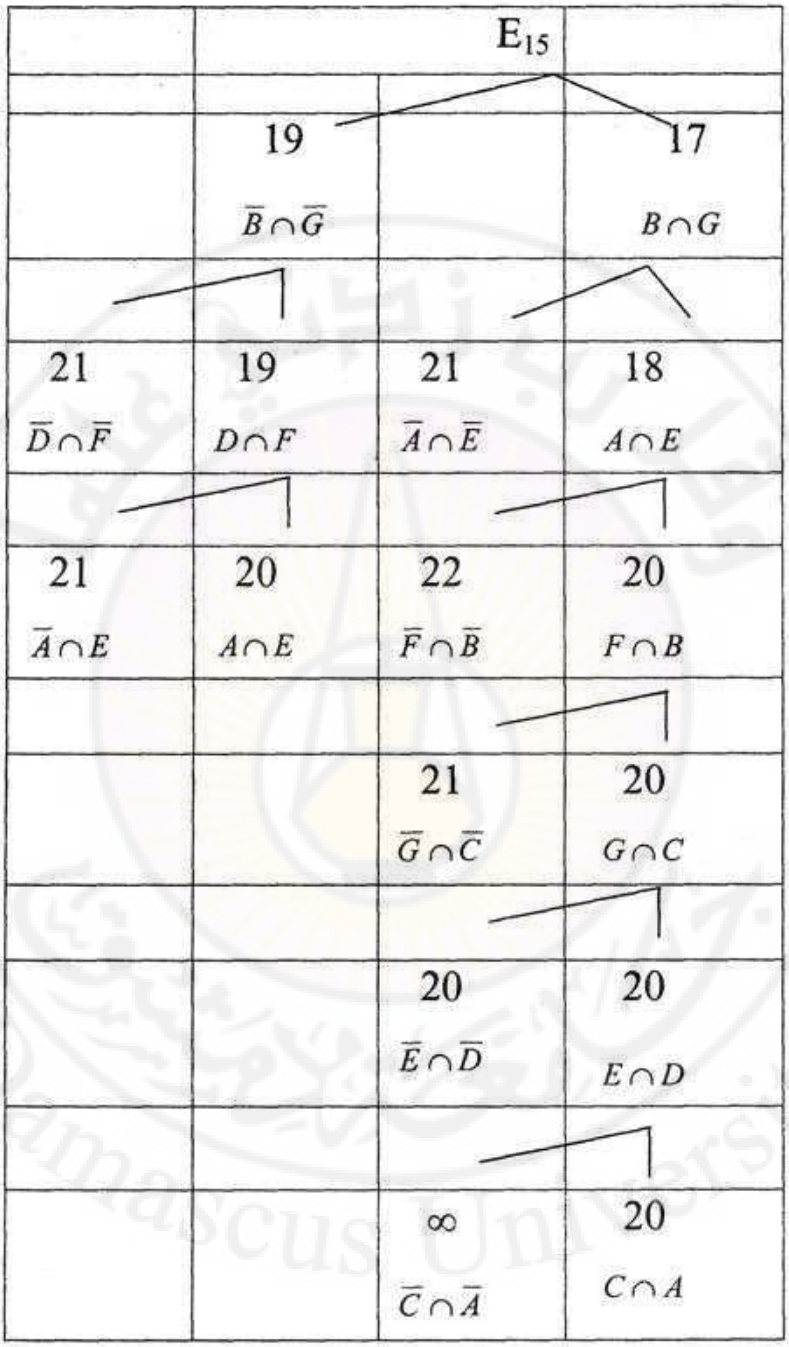
في هذا الجدول مجموع الفروق هو 13 ولكن العمود الأول لا يحتوي على القيمة صفر، وإن أصغر قيمة في هذا العمود هي 2 بطرح هذه القيمة من بقية قيم العمود نحصل على الجدول التالي:

	A	B	C	D	E	F	G	فروق
A	∞	2	6	3	0	2	6	**3**
B	4	∞	6	6	3	7	0	**2**
C	3	8	∞	0	5	6	2	**1**
D	3	9	2	∞	2	0	7	**2**
E	0	4	1	0	∞	0	6	**2**
F	1	0	0	6	2	∞	1	**2**
G	5	0	2	15	4	2	∞	**1**
فروق	2							**15**

جدول رقم (٣)

وكما نلاحظ أن مجموع القيم الدنيا للأسطر والأعمدة هو 15. بين هذه القيم أكبر قيمة 3 . هذه القيمة هي القيمة الأدنى في العمود E، وتشكل نقطة التقاء لهذا العمود مع السطر A . لذلك نبدأ الشجرة بالنقطة E ونضع القيمة 15 حول هذه النقطة.

Damascus University

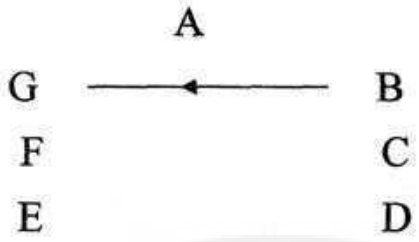

E15
19
$\overline{B} \cap \overline{G}$
17
$B \cap G$
21
$\overline{D} \cap \overline{F}$
19
$D \cap F$
21
$\overline{A} \cap \overline{E}$
18
$A \cap E$
21
$\overline{A} \cap E$
20
$A \cap E$
22
$\overline{F} \cap \overline{B}$
20
$F \cap B$
21
$\overline{G} \cap \overline{C}$
20
$G \cap C$
20
$\overline{E} \cap \overline{D}$
20
$E \cap D$
∞
$\overline{C} \cap \overline{A}$
20
$C \cap A$

وبعد ذلك نعود إلى الجدول رقم ٣ ونأخذ الخانات التي رقمها صفر؛ ونجمع أدنى قيمتين في السطر؛ والعامودين المتقاطعين عند هذه الخانة، ونضع الناتج في الخانة صفر، وهذا يعطينا الجدول التالي:

	A	B	C	D	E	F	G	فروق
A	∞	2	6	3	0	2	6	
B	4	∞	6	6	3	7	0	
C	3	8	∞	0	5	6	2	
D	3	9	2	∞	2	0	7	
E	0	4	1	0	∞	0	6	
F	1	0	0	6	2	∞	1	
G	5	0	2	15	4	2	∞	
فروق								

جدول رقم ٤

وكما نلاحظ إن أكبر القيم 4 وتقع عند $A \cap E$ و $B \cap G$ نعود إلى الشجرة؛ ونضيف هذا الرقم إلى القيمة 15 فينتج لدينا الرقم 19 .هذا الرقم نضعه عند $\overline{B} \cap \overline{G}$، وهذا ما يدعونا إلى القول إن مجموع الحلول التي تمر بـ $B \cap G$ هو 15 . وبما أن تقاطع G مع B هو 2 فإن مجموع الحلول التي تمر بتقاطع B مع G هو 17 ونضع هذا الرقم عند $B \cap G$ في الشجرة. بعد ذلك نرسم نقاط الشبكة ونضع سهماً من B إلى G كما يلي :



بعد ذلك نحذف السطر B والعمود G ونضع القيمة ∞ في الخانة $G \cap B$ فنحصل على الجدول التالي:

	A	B	C	D	E	F		
A	∞	2	6	3	0	2		
C	3	8	∞	0	5	6		
D	3	9	2	∞	2	0		
E	0	4	1	0	∞	0		
F	1	0	0	6	2	∞		
G	5	0	2	15	4	2		

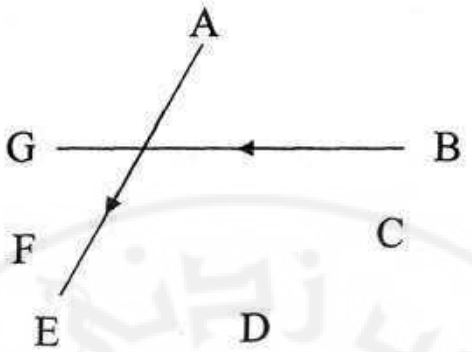
جدول رقم (٥)

وكما نلاحظ أن السطر G لا يحتوي على القيمة صفر، وأدنى قيمة فيه هي 2 بطرح هذه القيمة من باقي قيم السطر وبجمع القيم الدنيا للأسطر و الأعمدة التي تقاطعها صفر؛ تحصل على الجدول التالي :

	A	B	C	D	E	F
A	∞	2	6	3	0	2
C	3	8	0	0	5	6
D	3	9	2	0	2	0
E	0	4	1	0	∞	0
F	1	0	0	6	2	∞
G	3	∞	0	13	4	0

جدول رقم (٦)

وكما نلاحظ أن أكبر قيمة 4 وتقع في الخانة $A\cap E$:بما أن في الشجرة أدنى قيمة هي 17 ؛ فإن عدد الحلول التي لا تمر بـ $A\cap E$ هو 21 . وبما أن تقاطع السطر E مع العمود A يعطي القيمة 1 فإن عدد الحلول التي تمر بـ $A\cap E$ هو 18 حلاً، نعود إلى الشجرة ونضع الرقم 18 عند $A\cap E$ والرقم 21 عند $\bar{A}\cap\bar{E}$ ثم نعود إلى الشبكة؛ ونرسم سهماً بين النقطة A والنقطة E وذلك وفق ما يلي:



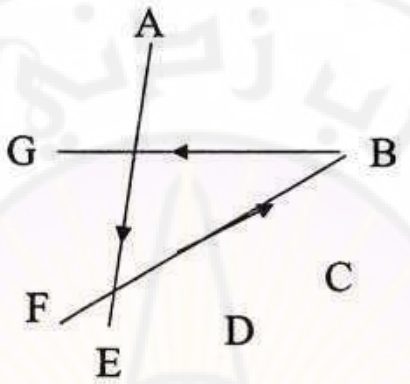
بعد ذلك نحذف السطر A والعمود E ونجمع القيمة الدنيا لكل سطر مع القيمة الدنيا للعمود الذي يتقاطع معه عند القيمة صفر، ونضع ∞ في الحقل $E \cap A$ فنحصل على الجدول التالي:

	A	B	C	D	F
A	3	8	∞	0^2	6
D	3	9	2	∞	0^2
E	∞	4	1	0^0	0^0
F	1	0^4	0^1	6	∞
G	3	∞	0^0	13	0^0

جدول رقم (٧)

وكما نلاحظ أن أكبر قيمة مجموع في الحقول التي قيمتها صفر هي 4، وتقع عند $F \cap B$ إذاً مجموع الحلول التي لا تمر بـ $F \cap B$ هو $= 4 + 18$ 22 بحذف السطر F والعمود B يصبح العمود الأول لا يحتوي على القيمة صفر،

وإن أدنى قيمة في هذا العمود هو 2، وهذا يدل على أن الحد الأدنى لمجموع قيم الحلول التي تمر بـ $F \cap B$ هو 20=2+18 . إذاً نعود إلى الشجرة ونضع القيمة 22 عند $\overline{F} \cap \overline{B}$، والقيمة 20 عند $F \cap B$، ثم بعد ذلك نعود إلى الشبكة ونرسم سهماً من F إلى B ، وذلك وفق ما يلي:



ثم بعد ذلك نعود إلى الجدول رقم 8 ونضع ∞ عند $G \cap F$، وذلك حتى لا تحصل دورة جزئية غير كاملة بعد حذف السطر F والعمود B؛ وطرح القيمة 2 من قيم العمود الأول نحصل على الجدول التالي:

	A	C	D	F
C	0	∞	0	6
D	0	2	∞	0
E	∞	1	0	0
G	0	0	13	∞

جدول رقم (٩)

الآن وبما أن القيمة 20 أكبر من الحد الأدنى لعدد الحلول التي تمر بـ $\overline{B} \cap \overline{G}$ والمساوية إلى 19 ،فإننا نعود إلى الجدول رقم ٣ ونضع ∞ عند $B \cap G$؛ ثم نطرح القيمة 3 من قيم السطر B والقيمة 1 من قيم العمود G ؛ فنحصل على الجدول التالي:

	A	B	C	D	E	F	G
A	∞	2	6	3	0	2	5
B	1	∞	3	3	0	4	∞
C	3	8	∞	0	5	6	1
D	3	9	2	∞	2	0	6
E	0	4	1	0	∞	0	5
F	1	0	0	16	2	∞	0
G	5	0	2	15	4	2	∞

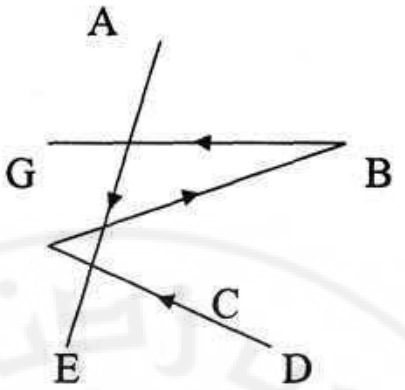
جدول رقم (١٠)

بجمع القيمة الدنيا لكل سطر مع القيمة الدنيا للعمود الذي يتقاطع عند القيمة صفر؛ نحصل على الجدول التالي:

	A	B	C	D	E	F	G
A	∞	2	6	3	0^2	2	5
B	1	∞	3	3	0^1	4	∞
C	3	8	∞	0^1	5	6	1
D	3	9	2	∞	2	0^2	6
E	0^1	4	1	0^0	∞	0^0	5
F	1	0^0	0^1	6	2	∞	0^1
G	5	0^2	2	15	4	2	∞

جدول رقم (١١)

وكما نلاحظ أن أكبر القيم 2 وتقع عنـــد $A \cap E$ و $D \cap F$ و $G \cap B$، وبما أننا أخذنا سابقاً $A \cap E$ و $B \cap G$؛ فإننا الآن نأخذ $D \cap F$ونقول إن عدد الحلول التي لا تمر بـــ $D \cap F$هو مساو إلى 21 = 2 + 19، وبما أن مجمـــوع القيم الدنيا للسطر F مع القيمة الدنيا للعمود D هو مساو إلى صـــفر، إذاً فـــإن مجموع الحلول التي تمر بـــ $D \cap F$ هو مساو على 19 . إذاً نعود إلى الشـــجرة ونرسم سهمين من $\overline{B} \cap \overline{G}$، الأول ينتهي عند $D \cap F$ وقيمتـــه 19، والثـــاني ينتهي عند $\overline{D} \cap \overline{F}$وقيمته 21، ثم بعد ذلك نعود إلى الشبكة ونرسم سهماً مـــن النقطة D إلى النقطة F؛ وذلك كما يلي:



بعد ذلك نحذف السطر D والعمود F ونضع ∞ في الحقل $F \cap D$ ، ثم نجمع القيمة الدنيا لكل سطر مع القيمة الدنيا للعمود؛ والذي يتقاطع معه عند القيمة صفر فنحصل على الجدول التالي:

	A	B	C	D	E	G
A	∞	2	6	3	0^2	5
B	1	∞	3	3	0^1	∞
C	3	8	∞	0^1	5	1
E	0^1	4	1	0^1	∞	5
F	1	0^0	0^1	∞	2	0
G	5	0	2	15	4	∞

جدول رقم (١٢)

وكما نلاحظ أن أكبر مجموع هو 2 ويقع عند تقاطع A مع E، إذاً فإن مجموع الحلول التي لا تمر بـ $A \cap E$ هو 21 = 2 + 19 في الوقت نفسه وبما أن $E \cap A$ هو واحد فإن مجموع الحلول التي تمر بـ $A \cap E$ هو 20 = 1 + 19، إذاً نعود إلى الشجرة ونضع 21 عند $\overline{A} \cap \overline{E}$ و20 عند $A \cap E$، ثم بعد ذلك نحذف السطر A والعمود E ونضع ∞ عند $E \cap A$ ونحصل على الجدول التالي:

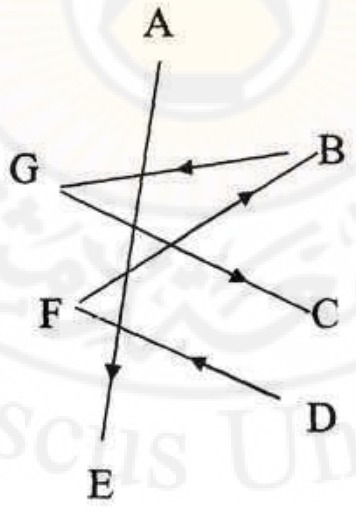
	A	B	C	D	G
B	1	∞	3	3	∞
C	3	8	∞	0	1
E	∞	4	1	0	5
F	1	0	0	∞	0
G	5	0	2	15	∞

جدول رقم (١٣)

بما أننا وصلنا إلى هذه القيمة فإننا نعود إلى الجدول رقم 9 ونجمع القيمة الدنيا لكل سطر مع القيمة الدنيا للعمود الذي يتقاطع معه في القيمة صفر، فنحصل على الجدول التالي:

	A	C	D	F
C	0^0	∞	0^0	6
D	0^0	2	∞	0^0
E	∞	1	0^0	0
G	0^0	0^1	13	∞

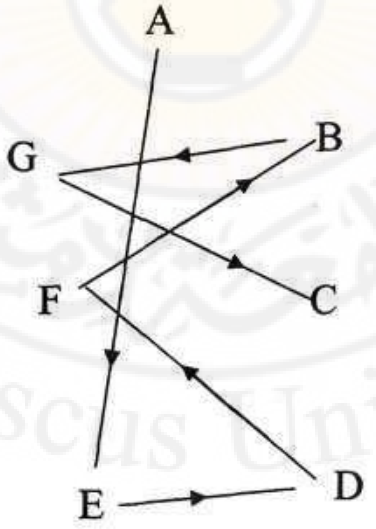
وكما نلاحظ لا يوجد إلا القيمة (وتقع عند $G \cap C$ لذلك فإن مجموع الحلول التي تمر بـ $G \cap C$ هو 20 حلاً، وتلك التي تمر بـ $\overline{G} \cap \overline{C}$ هو 21، إذاً نعود إلى الشجرة ونضع القيمة 20 عند $G \cap C$ والقيمة 21 عند $\overline{G} \cap C$، ثم نعود إلى الشبكة ونرسم سهماً من النقطة G إلى النقطة C، وذلك وفق ما يلي:



بعد ذلك نحذف السطر G والعمود C ونضع ∞ عند $C \cap F$، فنحصل على الجدول التالي:

	A	D	F
C	0	0	∞
D	0	∞	0
E	∞	0	0

بجمع القيم الدنيا لا نحصل إلا على أصفار، أي إنه ليس هناك أي إمكانية لتخفيض زمن الدورة؛ كما أنه لم يبق لدينا إلا معبران الأول من E إلى D؛ والثاني من C إلى A. نأخذ المعبر الأول ونضع على الشجرة $E \cap D$ وحولها القيمة 20 و $\overline{E} \cap \overline{D}$ وحولها القيمة 21 ، ثم ننتقل إلى الشبكة فنضع سهماً من E إلى D، وذلك وفق ما يلي:



ثم بعد ذلك نحذف السطر E والعمود D ونضع القيمة ∞ عند $D \cap A$ ، فنحصل على الجدول التالي:

	A	F
C	0	∞
D	∞	0

من هذا الجدول نلاحظ أنه يعني لدينا معبر من C إلى A، وبذلك تكون الدورة قد اكتملت ونعود إلى الشجرة ونضع 20 عند $C \cap A$ و ∞ عند $\overline{C} \cap \overline{A}$؛ وذلك وفق ما يلي:



أما الزمن اللازم لقطع هذه الدورة فهو معطى في الجدول التالي:

	A	B	C	D	E	F	G
A					3		
B							2
C	6						
D						2	
E				2			
F		2					
G			3				

وكما نلاحظ فإن الحد الأدنى للزمن اللازم لقطع الدورة من A إلى A مساراً بجميع النقاط B,C,D,E,F,G هو 20 وحدة زمنية.

Damascus University

وقل رب زدني علما
Damascus University

الفصل الرابع
التدفقات في شبكة النقل

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

وقل رب زدني علما
Damascus University

٤-١- الفعاليات والتدفقات:

في الحياة العملية فإننا نطلق اسم شبكة نقل على أي شبكة يكون فيها هناك قيمة لأي قوس واصل بين أي نقطتين $k(x,y)$، ونطلق على هذه القيمة اسم الفعالية.

ويمكن بسهولة أن تقدم $k(x,y)$ كتابع غير سالب معرف على مجموعة الأقواس (x,y) في الشبكة G، ودوماً تعطى القيمة صفر إلى الفعالية $k(x,y)$ عندما لا يكون هناك قوس واصل بين النقطتين x,y، ولا يفوتنا الافتراض بأن شبكة النقل هي شبكة تامة.

بصورة عامة فإننا نفترض أن N هي مجموعة نقاط الشبكة A,B هي أي نقطتين من هذه النقاط. من أجل جميع التوابع g المعرف على N سوف تستخدم ما يلي:

$$g(A,y):\sum_{x\in A} g(x,y)$$

$$g(x,B):\sum_{x\in B} g(x,y)$$

$$g(A,B):\sum_{x\in A} g(x,y):\sum_{x\in A} g(A,y)$$

وإننا نطلق على اسم التدفق في شبكة النقل G على أي تابع حقيقي $g(x,y)$ حيث إن:

$$0\le g(x,y)\le k(x,y)$$

عندما تكون قيمة التدفق معلومة فإنه يمكن في كل نقطة z من مجموعة النقاط N حساب الفرق بين ما يخرج من هذه النقطة وما يدخل إليها حيث إن:

$$\delta, z = \sum_{y} g(z,y) - \sum_{x} g(x,z)$$

$$g(z, N - g(N,z))$$

وإن النقطة z تكون:

مدخل إذا كان $\delta(z) > 0$

عبور إذا كان $\delta(z) = 0$

مخرج إذا كان $\delta(z) < 0$

ويمكن بكل سهولة وحول كل زوج من النقاط:

$$(x,y) \in N^2$$

أن تقوم بحساب الفرق:

$$f(x,y) : g(x,y) - g(y,x)$$

أحياناً نطلق على التدفق اسم التدفق الصافي إذا تحقق الشرطان التاليان

$$f(x,y) = -f(y,x) \quad (١)$$

$$f(x,y) \le k(x,y) \quad (2)$$

من الناحية المقابلة وعندما تكون N^2 أي تابع $f(x,y)$ يحقق الشـــرطان (١) و (٢)؛ فإنه يمكن تعريف التدفق $g(x,y)$، حيث إن $f(x,y)$ هي تدفق صـــافٍ. إذا كان الزوج (x,y) فيه $f(x,y) \ge 0$ يكفي أن تأخذ:

$$g(x,y) = f(x,y)$$

$$g(y,x) = 0$$

وإذا كان $f(x,y) \le 0$ فإنه يكون الآن:

$$g(x,y) = 0$$

$$g(y,x) = -f(x,y) = f(y,x)$$

وفي هذه الحالة فإن التابع $\delta(z)$ يعرف بما يلي:

$$\delta(z) = f(z,N)$$

وهذا التابع يظهر دوماً عندما تكون $y = x$

٤-٢- التعريف المتعاقب للتدفق:

حتى يمكن إجراء مثل هذه التعاريف لا بد من تعريف التابع $f(A,B)$ على مجموعة الأزواج A,B التي تشكل جزءاً من مجموعة الأقواس $\mathbf{N}$ مع الشروط التالية:

$$f(A,A) = 0 \ldots\ldots\ldots (1')$$

$$f(A,B) \le k(A,B) \ldots\ldots\ldots (2')$$

في الواقع الشرط (1) يقود إلى القول إنه من أجل جميع النقاط $\mathbf{x}$ فإنه لدينا:

$f(x,x) = 0$ وهذا ما يبرهن الشرط $(1')$ في الحالة التي تكون فيها $\mathbf{A}$ فردية في جميع الفرضيات الأخرى المتعلقة بـ $\mathbf{A}$ فإنه يمكن دوماً جمع النقاط زوجاً فزوجاً، حيث إنه $f(A,A)$ هي المجموع وهذا ما يقود إلى ظهور نقاط جزئية:

$$f(x,y) + f(y,x) = 0$$

ذ١وهذا أيضاً محقق الشرط 1 من هذا التحقق يمكن القول إن ('1) هي موجودة في جميع الحالات التي تكون فيها $A \subset N$. وهذا يقود إلى القول إن ('2) هي نتيجة فورية لـــ2 .

في الناحية المقابلة إذا تحققت ('1) ، ('2) من أجل جميع الأزواج، فإنه يكفي القول إذا كانت A فردية فإنه $f(x,x)=0$ بعد ذلك تؤخذ A زوجية حتى يمكن التأكد من تحقق الشرط 1؛ من أجل تحقق الشرط 2 ، فإنه يكفي أخذ A و B فردية $\{x\}$ و $\{y\}$.

٤-٢-١- التدفق الأعظمي المدين (نظرية فورد وفولكورمون)

في الحياة العملية دوماً نرغب في التدفقات التي من أجلها نبحث في شبكة النقل عن نقطة البداية الوحيدة S. وبالوقت نفسه عن نقطة النهاية الوحيدة أيضاً s' ، أي إنه دوماً لدينا:

$$f(S,N)=F(N,s')$$

في الواقع لدينا:

$$0=f(N,N)=f(s,N)+f(s',N)+f(N-s-s')=x$$

ولكن جميع النقاط X من $N-s-s'$ هي نقاط عبور إذن

$$f(N-s-s',N)=0$$

ويكون لدينا:

$$f(s,N) = f(s',N)$$

بالتعريف تطلق على القيم الموجبة المشتركة لهذين الرقمين اسم مديونية التـــدفق قيد الدراسة.

ويمكن أن نقوم بحل المشكلة التالية: لدينا شبكة نقل G مع فعاليات $k(x,y)$ ونقطة دخول S ونقطة خروج S' أوجد التدفق بمديونية عظمى.

من أجل هذه المشكلة إنه من المفيد جداً الدخول إلى شبكة نقطة دخول وخروج (s,s')؛ وكل تجزئة لمجموعة النقاط N إلى مجموعتين جزئية S' , S يجب أن تقود إلى احتواء المجموعة الأولى S على نقطة الدخول S المجموعة الثانية S' على نقطة الخروج S، وإن فعالية الزوج $(S\cdot S')$ سوف تكون معرفة بما يلي:

$$k(s,s') : \sum_{\substack{x\in s \\ y\in s'}} k(x,y)$$

وهذا ما يقود إلى نظرية فور وملكيرسوف التي تنص على أن المديونية العظمى لأي تدفق تساوي الفعالية الدنيا للقطع.

٤-٢-١-١- برهان النظرية:

١- لو افترضنا أن f هي أي تدفق وكانت $(s\ ,\ s')$ قطع فإنه يكون لدينا:

$$f(s,N) = k(s,s')$$

وفي الواقع لدينا سلسلة المساواة:

$$f(s,N) = \underset{\alpha}{f}(s,N) + f(S \cdot s,N)$$

$$\underset{\beta}{f}(s,N) = \underset{\gamma}{f}(s,s) + f(s,s') \underset{\delta}{=} f(s,s')$$

المساواة α تتطلب حساب الحدود الصفرية، وذلك لأن نقـاط العبـور هـي s , s' والمساواة β تقود إلى تركيب S ، S-s. المساواة لا تقود إلى تركيب N في S و S والمساواة 8 تقود إلى إعطاء القيمة صفراً إلى التابع $f(s,s)$ من الشـرط الأول:

$$f(s,s') = k(s,s')$$

ومن الشرط الثاني

$$f(s,N) \le k(s,s')$$

٢- إذا كانت $\hat{f}$ تدفق بمديونية عظمى $\hat{f}(x,N)$ ، فإنه يوجد قطع (s,s') حيث إن:

$$\hat{f}(s,N) = k(s,s')$$

من البرهان فإننا سوف نعود إلى تعريف الطريق المغلقة من S إلى x، والمكونة من ما يلي:

$$sx_1, x_2, x_3 \ldots\ldots x_{n-1}, x$$

حيث إن كل واحد من الأقواس X_{i-1},X يعطى بالعلاقة التالية:

$$\hat{f}(x_{i-1},x_i) \le k(x_{i-1}) = x$$

ومنه يمكن تعريف $\hat{S}$ بأنها مجموعة مغلقة للنقطة S ولجميع النقاط X، بحيث يصبح وجود طريق مغلقة من S إلى X . المخرج $S^{\backprime}$ لا ينتمي إلى $\hat{S}$، وذلك لأنه يصبح وجود طريق غير مغلقة بين S و $S^{\backprime}$. إن التدفق $\hat{f}$ سوف يكون بمديونية عظمى، ويمكننا أن نزيد على جميع قيم الأقواس $(x_{i-1}x_i)$ لهذا الطريق منطلقين من أصغر قيمة للفارق.

$$k(x_{i-1},x_i) - \hat{f}(x_{i-1}x_i)$$

ودون المساس بالشرط 2 فإن المجموعة:

$$\hat{s}^{\backprime} = N - \hat{s}$$

سوف تحتوي بالتأكيد $S^{\backprime}$ و $(\hat{s},\hat{s}^{\backprime})$ تكون قطعاً

ولكن من أجل هذا القطع يجب التحقق من أن:

$$f(s,\hat{s}^{\backprime}) = k(s,\hat{s}^{\backprime})$$

وفي الواقع من أجل النقطة X وفي $\hat{s}$ و Y في $\hat{s}^{\backprime}$ لدينا:

$$f(x,y) = k(x,y)$$

وذلك لأنه إذا كانت:

$$\hat{f}(x,y) < f(x,y)$$

فإنه يصبح وجود طريق غير مغلقة من s إلى y يمكن الحصول عليها بالانطلاق من القوس x,y إلى طريق غير مغلقة تصل بين s و x

في الحالة التي يكون فيها:

$$f(S,N) = f(S,S')$$

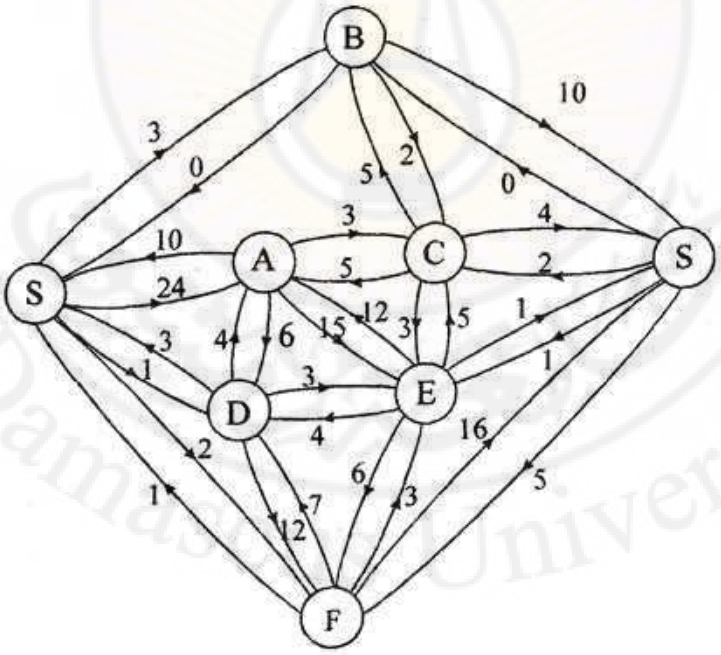
ينتج أنه من أجل المديونية العظمى للتدفق $\hat{f}$، والقطع العلاقة التالية $\hat{S},\hat{S}'$

$$\hat{f}(s,N) = f(\hat{s},\hat{s})$$

وهذه المساواة هي نظرية فورد وفولكيرسون.

٤-٢-١-٢- برهان النظرية بمثال عملي:

لنفترض أنه لدينا الشبكة التالية:



من هذه الشبكة يمكن التحسين المتعاقب للتدفق المعروف بصور مسبقة حتى يمكن أن نصل في النهاية إلى حساب المديونية العظمى للتدفق والقطع بفعالية دنيا.

إن قيم الأقواس التي تصل بين نقاط الشبكة.

K_0	S	A	B	C	D	E	F	S´
S	-	24	3	-	(1)	-	2	-
A	10	-	(1)	3	6	[15]	-	-
B	-	[1]	-	2	-	-	-	10
C	-	S	S	-	-	3	-	4
D	3	4	-	-	-	3	12	-
E	-	12	-	2	4	-	3	1
F	[1]	-	-	-	7	(6)	-	16
Ś	-	-	[ ]	2	-	1	5	-

المديونية على الطريق $SFEABS^{\backslash}$

ننطلق من التدفق $f_0 = 0$ ، ثم نبحث بعد ذلك عن الطرق التي تحتوي على أقواس جميع قيمها موجبة؛ لنفترض بأننا وجدنا الطريق $SFEABS^{\backslash}$، في هذا الطريق فإن أقل فعالية في هذا الطريق هي مساوية إلى الواحد وهي قيمة القوس الواصل بين النقطتين A,B . هذه القيمة تمكننا من الانطلاق إلى التدفق $f_1 = 1$ وتكون مديونية التدفق تساوي إلى الواحد. هذه المديونية تقودنا إلى تخفيض قيم الأقواس المكونة للطريق *SFABS* بقيمة واحد، وبالفرق نفسه تتم زيادة الأقواس المكونة للطريق *S BAFS* .

وهذا ما يعطينا الجدول التالي:

K_0	S	A	B	C	D	E	F	S´
S	-	24	3	-	1	-	1	-
A	10	-	-	3	(6)	16	-	-
B	-	2	-	2	-	-	-	9
C	-	5	5	-	-	3	-	4
D	3	4	-	-	-	3	(12)	-
E	-	11	-	2	4	-	4	1
F	2	-	-	-	7	5	-	(16)
S	-	1	2	-	-	1	5	-

المديونية 6 للطريق $SADFS'$ والتدفق f_2

من هذا الجدول نختار الطريق $SADFS'$ الذي فيه قيمة أقل قوس هي 6، وهي عبارة عن قيمة مديونية التدفق. نقوم بتخفيض هذه القيمة ثم الأقواس المكونة للطريق المختار وبالوقت نفسه تقوم بإضافة هذه القيمة للأقواس المكونة للطريق في الاتجاه المعاكس ونحصل على الجدول التالي.

K_0	S	A	B	C	D	E	F	S´
S	-	(18)	3	-	1	-	1	-
A	[16]	-	-	3	-	(16)	-	-
B	-	2	-	2	-	-	-	9
C	-	5	5	-	-	3	-	4
D	3	10	-	-	-	[3]	-	[6]
E	-	11	-	2	(4)	-	4	1
F	2	-	-	-	[13]	5	-	(0)
Ś	-	-	1	2	-	1	[11]	-

التدفق F_4 والمديونية هي 4 في الطريق $SAEFS'$

من هذا الجدول نختار الطريق $SAEFS'$ وبما أن قيمة أقل قوس هي 4 فإننا نقوم بتخفيض قيم الأقواس لهذا الطريق بهذه القيمة، وزيادة قيم الأقواس للطريق المعاكسة، ونحصل على الجدول التالي:

K_0	S	A	B	C	D	E	F	S´
S	-	(10)	3	-	1	-	1	-
A	[24]	-	-	(3)	-	٨	-	-
B	-	2	-	[2]	-	-	-	9
C	-	[5]	(5)	-	-	3	-	4
D	3	10	-	-	-	7	-	-
E	-	19	-	2	-	-	4	1
F	2	-	-	-	17	9	-	2
Ś	-	-	[1]	2	-	1	19	-

التدفق f_5 بمديونية 3 للطريق $SACBS'$

بما أن الطريق التي تم اختيارها هي $SACBS'$ تحتوي على قيم أقواس أقل قيمة فيها هي 5 نقوم بتخفيض قيم أقواس هذا الطريق بتلك القيمة التي تستخدم في الوقت نفسه في زيادة قيم أقواس الطريق في الاتجاه المعاكس، وهذا ما يعطينا الجدول التالي:

K_0	S	A	B	C	D	E	F	S´
S	–	7	③	-	1	-	1	-
A	27	–	-	–	–	8	-	-
B		2	-	5	-	-	-	⑥
C	–	8	5	-	-	3	-	4
D	3	10	-	-	-	7	–	–
E	–	19	-	2	–	-	4	1
F	2	-	-	-	17	9	-	2
Ś	–	–	4	2	-	1	19	-

التدفق هو f_6 بمديونية 3 على الطريقة $SBS^{\backprime}$

بما أن أقل قيمة قوس هي $SBS^{\backprime}$ هي 3 فإننا نقوم بطرح هذه القيمة من قيم هذا الطريق، وإضافتها إلى قيم أقواس الطريق المعاكسة، ونحصل على الجدول التالي:

K_0	S	A	B	C	D	E	F	S´
S	–	⑦	-	-	1	-	1	-
A	27	–	-	–	–	⑧	-	-
B	3	2	-	5	-	-	-	3
C	–	8	2	-	-	3	-	④
D	3	10	-	-	-	7	2	–
E	–	19	-	②	–	-	-	1
F	2	-	-	-	17	9	-	2
Ś	–	–	7	2	-	1	19	-

التدفق هو f_7 بمديونية 2 على الطريق $SAECS'$، وكما نلاحظ من هذا الجدول أن الطريق الواصل بين S,S' وغير متصلة هي الطريق $SAECS'$ وأن أقل قيمة قوس في هذا الطريق هي 2 . هذه القيمة هي مديونية التدفق وتستخدمها في تخفيض قيمة الأقواس المكونة للطريق $SAECS'$ وفي الوقت نفسه تستخدمها في رفع قيم أقواس الطريق المعاكسة، وهذا ما يعطينا الجدول التالي.

K_0	S	A	B	C	D	E	F	S´
S	-	(5)	-	-	1	-	1	-
A	[29]	-	-	-	-	(6)	-	-
B	3	2	-	5	-	-	-	3
C	-	8	2	-	-	5	-	2
D	3	10	-	-	-	7	2	-
E	-	[21]	-	-	-	-	-	(1)
F	2	-	-	-	17	9	-	2
Ś	-	-	7	4	-	[1]	19	-

التدفق f_8 بمديونية الطريقة $SAES'$

في هذا الجدول نلاحظ أن الطريق $SAES'$ يحتوى أدنى قيمة قوس، وهي 1 التي هي قيمة مديونية التدفق. تستخدمها تخفيض قيم أقواس هذا الطريق ورفع قيم أقواس الطريق المعاكسة، وهذا ما يعطينا الجدول التالي:

K_0	S	A	B	C	D	E	F	S´
S	–	4	-	-	①	-	1	-
A	30	–	-	–	–	5	-	-
B	3	2	-	٥	-	-	-	3
C	–	8	2	-	-	5	-	2
D	3	10	-	-	-	7	②	–
E	–	22	-	–	–	-	-	–
F	2	-	-	-	17	9	-	②
Ś	–	–	7	4	-	21	9	-

التدفق هو f_9 بمديونية على الطريق $SDFS'$

كما نلاحظ من هذا الجدول أن الطريق الواصلة بين S , S´ هي الطريق $SDFS'$ وأدنى قيمة قوس في هذا الطريق هي القيمة 1 . هذه القيمة تمثل مديونية التدفق تستخدمها في تخفيض قيم أقواس الطريق $SDFS'$ ؛ ورفع قيم أقواس الطريق المعاكسة، وهذا ما يعطينا الجدول التالي.

K_g	S	A	B	C	D	E	F	S´
S	–	4	-	-	-	-	①	-
A	30	–	-	–	–	5	-	-
B	3	2	-	5	-	-	-	3
C	–	8	2	-	-	5	-	2
D	4	10	-	-	-	7	1	–
E	–	22	-	–	–	-	-	–
F	2	-	-	-	18	9	-	①
Ś	–	–	7	4	-	2	20	-

التدفق f_5 بمديونية 1 على الطريقة SFS^1

كما هو واضح أن الطريق الواصل بين S , S´ هو SFS^1 تحتوي على قوس بقيمة دنيا مساوية إلى الواحد؛ بإنقاص هذه القيمة من قيم أقواس الطريق وإضافتها إلى قيم أقواس الطريق المعاكسة نحصل على الجدول التالي:

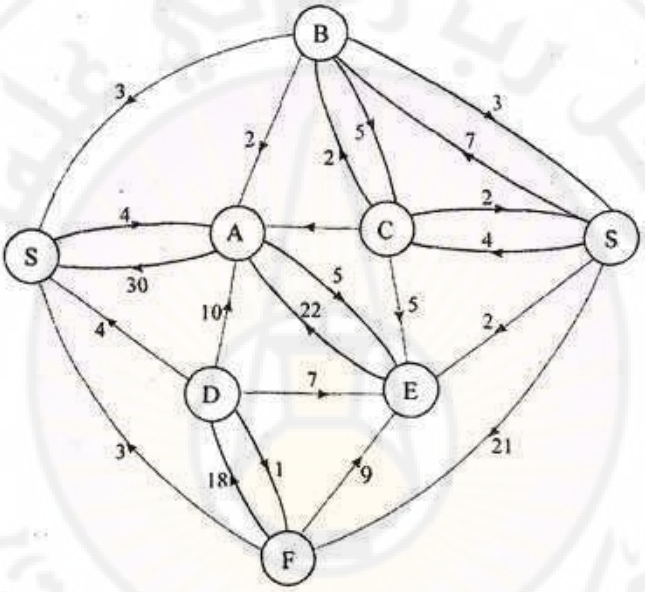
K_{10}	S	A	B	C	D	E	F	S´
S	–	4	-	-	-	-	1	-
A	30	–	-	–	–	5	-	-
B	3	2	-	5	-	-	-	3
C	–	8	2	-	-	5	-	2
D	4	10	-	-	-	7	1	–
E	–	22	-	–	–	-	-	–
F	3	-	-	-	18	9	-	-
Ś	–	–	7	4	-	2	21	-

هذا الجدول لا يسمح لنا مطلقاً بزيادة مديونية التدفق؛ وذلك لأنه لا يوجد إلا منطقة واحدة يمكن الانطلاق إليها من S وهي A التي ينطلق منها قوس إلى E

إذن المجموعة $\hat{S}\{SAE\}$ للمقطع $\hat{S},\hat{S}^{\backslash}$ في الشبكة تعطى:

$$\hat{S}^{\backslash} = SB, C, D, F, S^{\backslash}S$$

بالعودة إلى شبكة المتطلب يمكن أن نحل على الشبكة التالية:



ومنه يمكن أن نقوم بحساب مجموع التدفق كما يلي:

$$f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6 + f_7 + f_8 + f_9 + f_{10}$$
$$= 1 + 6 + 4 + 3 + 3 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 = 26$$

بطرح الجدول k_{10} من الجدول k_1 نحصل على الجدول التالي:

$\hat{f}$	S	A	B	C	D	E	F	S´
S	–	20	3	-	-	-	2	-
A	-20	–	1	3	6	10	-	-
B	-3	-1	-	-3	-	-	-	7
C	–	-3	3	-	-	-2	-	2
D	-1	-6	-	-	-	-4	11	–
E	–	-10	-	2	4	-	3	1
F	-2	-	-	-	-11	-3	-	16
Ś	–	–	-7	-2	-	-1	-16	-

وكما هو واضح أن مجموع السطر الأول والمقابل للنقطة S يساوي إلى مجموع التدفق أي ٢٦. في الوقت نفسه نلاحظ أن مجموع القيم المقابل للعمود الأول يساوي تماماً القيم المقابلة للسطر الأخير وتساوي إلى -٢٦.

الفصل الخامس

النماذج الرياضية

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

وقل رب زدني علما
Damascus University

٥ــ ١ ــ عرض وتعريف:

إن النموذج الرياضي ليس هو إلا عبارة عن مجموعة من التوابع أو التوزيعات الاحتمالية، التي قد يتم وضعها في صيغة مجموعة من القيود الرياضية؛ بعدد من المتغيرات الرياضية، إن تعويض هذه التوابع أو التوزيعات الاحتمالية بقيمها الرقمية يمكن الوصول إليه عن طريق الاستقصاء الإحصائي أو إنجاز تجربة محاكاتية لواقع ما فيما إذا كانت المحاكاة ممكنة، وتؤدي إلى تبيان كل الحالات الممكنة بتبعية تلك العلاقات.

بما أن الصيغة الرياضية للعلاقات التابعية لكثير من الظواهر متماثلة رياضياً (مثل حركة رقاص الساعة، مرونة السلع الاقتصادية.....) فإنه يمكن التعبير عنها بمعادلة تفاضلية ومن المرتبة الثانية. هذه الصيغة الرياضية تمكننا من القول إن النموذج الواحد يمكن أن يتعرض إلى مجموعة من الحوادث ذات الطبيعة المختلفة، والتي تقع في أزمنة وميادين متباعدة تماماً، هذه الإمكانية تسمح لنا بالاستفادة من النموذج الواحد في أكثر من ميدان واحد من ميادين العلم.

في كل بحث عاملي، إن العامل الأساس هو صياغة المشكلة هذه الصياغة تعد الخطوة الأولى التأسيسية للبحث العاملي، وأنها تساعد كثيراً في اختيار النموذج المناسب لحل هذه المشكلة، ومن صياغة المشكلة نستطيع تحديد المكونات الرئيسة للنموذج الرياضي إذ إنه في هذه الصياغة يتم التعرف على المتغيرات والعلاقات التي تربط بين هذا المتغيرات.

إن التعبير عن المشكلة الاقتصادية بمجموعة من القيود الرياضية يعطي للباحث أسلوباً رياضياً دقيقاً يسمح بإجراء التنبؤ حول أي متغير من المتغيرات الأساسية

للمشكلة، هذه القيود الرياضية والنموذج الرياضي تعد من أفضل الوسائل المستخدمة في التمييز بين البحث العاملي والبحوث الأخرى، إن النماذج الرياضية يمكن أن تأخذ صيغاً مختلفة نوردها فيما يلي :

١ــ إن أي نموذج رياضي يحدد بمقادير معينة ومحدد تماماً، وذلك لأن المستقبل لا يمكن التنبؤ به إلا إذا كان محدد تماماً. هذا التحديد يسمح لنا و باستخدام المنطق والتجربة اختيار الحل أو الحلول المواتية للأهداف التي تجعل التابع، الممثل للمشكلة، في حالته المثلى.

إذا كان النموذج معقداً فإن تلك المقادير يمكنها، وحسب الحال، تشكيل علاقات خطية التي تصادفها في التوابع الخطية التالية :

آ) تفسح المجال لتدخل علاقات الرتب ومثالها قضايا الأفضليات وعلاقات لعدة مجموعات تتفحصها من خلال مظهرها التوافقي ومثالها قضايا التخطيط.

ب) تشكل علاقات تتابعية زمنية وكل حالة تحدد الحالة التي تليها، ومثال على ذلك سلسلة ماكوف.

٢ــ كل قرار مقترن بمتسلسلة من الحالات العشوائية حيث تكون فيها بعض المقادير محددة؛ وبعضها الآخر عشوائي أي تأخذ قيمتها المصادفة، ولكن التوزيع الاحتمالي لكل من هذه المقادير العشوائية معروف، كما أن هناك أنواعاً متعددة من العلاقات.

في مثل هذه الأحوال فإننا غالباً ما نجد أنفسنا أمام حادث من طبيعة عشوائية Stochastique متحولة بتحول احتمالاتها مع الزمن عند تحقق هذه الأحوال؛

فإننا نستبق القول استناداً إلى المعرفة الإحصائية حول كل ما هـو قابـل للملاحظـة والقياس، ونصادف ذلك مثلاً في قضايا التخزين والاستبدال.

٣ــ من الملاحظ عدم وجود تفاعل متكافئ بين الحـالتين السـابقتين للوسـط الخارجي؛ رغم أن هذا التفاعل موجود غالباً، ومثال على ذلك حالة التنافس وإعـداد القرار الذي يأخذ مظهراً من مظاهر الألعاب للاستراتيجية الـتي تصـور التصـرفات الممكنة لخطة وتربطها بالاحتمال.

٤ــ يوجد لدينا مجموعة من المعلومات حول صياغة المشكلة ولكـن الأحـوال المستقبلية المقرونة بقراراتنا تعتبر مجهولة من وجهة النظر الاحتمالية.

٥ ــ ٢ استخدام النماذج الرياضية :

إن استخدام النماذج الرياضية يعد أمراً ضرورياً جداً في جميـع العلـوم، إذ إن التقدم العلمي يعتمد بشكل أساس على استخدام النماذج الرياضية. ففـي الفيزيـاء هناك النموذج الذي ابتدعه اسحق نيوتن المتعلق بالجاذبية؛ كما أن هناك نموذج النسبية الذي أوجده لاتشتين.

أما في مجال الكيمياء فلدينا أمثلة كثيرة عن استخدام النماذج الرياضية منها قوانين الغازات والجدول الدوري، بالإضافة إلى هذين النموذجين فإنه يوجد نموذج انتقـال الخصائص الو راثية والمستخدم بصورة واسعة في علم الأحياء.

في حقل الطب فإن استخدام النماذج الرياضية يعد أمراً ضرورياً جداً، فمثلاً لدينا النموذج الذي يشرح جهاز الدورة الدموية وهناك نماذج أخرى تستخدم لشرح ردود فعل الجسم البشري لمجابهة الجراثيم التي تغزوه.

ولا بد من الإشارة أنه في حقل الإدارة قد تم استخدام كثيراً من النماذج الرياضية مثل نموذج نظرية المباريات ونموذج تشكل صفوف الانتظار ونموذج النقل ونموذج الاستثمار ، بالإضافة إلى نموذج المخزون وحساب الحد الأدنى لكلفة التخزين، ونموذج ماركوف ونموذج تحليل نقطة التعادل.....إلخ.

إن الهدف الأساس من استخدام النموذج الرياضي هو التنبؤ والمساعدة على اتخاذ القرار المناسب؛ في ضوء المعطيات التي توفرها المعلومات المتعلقة بالمشكلة قيد الدراسة.

٥ ــ ٣ ــ بناء النموذج وتجربته :

عندما يكون هناك مشكلة تجذب اهتمام الباحث فإن هذا الباحث يقوم باختيار العوامل أو المتغيرات التي يعتقد أنها هامة في عمل هذه الظاهرة والتنبؤ بها، ثم بعد ذلك يقوم بالتعبير عنها بمجموعة من القيود الرياضية التي يطلق عليها اسم النموذج الرياضي. هذا النموذج يوضح العلاقات بين المتغيرات المكونة للمشكلة، من ناحية أخرى فإن مصمم النموذج الرياضي يجرد الوضع الحقيقي بشكل يجعل النموذج يقتصر على المتغيرات أو العوامل التي لها علاقة أكبر بالمشكلة موضوع البحث ، هذا الشرط يجعلنا أن نصف النموذج بأنه عرض مبسط للوضع الحقيقي أو العلمي، وكلما كان النموذج مبسطاً كان ذلك أفضل بشرط أن يقوم بتمثيل الواقع تمثيلاً معقولاً.

بالإضافة إلى ذلك فإنه يتوجب على مصمم النموذج أن يقوم بتصميم نموذج بسيط جداً؛ يتطلب أقل ما يمكن من التكاليف مع الاحتفاظ بالحقائق والمتغيرات الهامة في المشكلة. هذا النموذج يستخدم بالتنبؤ بدرجة معقولة ويعطي النتائج جيدة في حال استخدامه.

إن بناء النموذج الرياضي بحد ذاته لا يشكل إلا طرفاً واحداً من المشكلة؛ أما الطرف الآخر فهو نجاح هذا النموذج عند تجربته ونجاحه أو عدمه؛ يكون التنبؤ دقيقاً أو غير ذلك. إذ إن دقة التنبؤ بالحالة التي وضع النموذج لها يقود إلى التأكيد على ضرورة الاهتمام بالمعلومات المستمدة من المواقع، وذلك لأن الحكم على صحة النموذج يتطلب وجود هذه المعلومات لمقارنتها مع النتائج التي تم الوصول إليها باستخدام النموذج، في حال عدم تمكننا من الحصول على تلك المعلومات؛ فإنه لا يمكن الحكم على دقة النموذج الرياضي ويصبح بناء النموذج الرياضي مضيعة للوقت.

إن بناء النموذج الرياضي لابد أن يمر بالخطوات التالية :

١ ــ وضع الإطار العام للمشكلة : أي يتم التعرف على الموضوع الذي سيتخذ القرار فيه، وهنا يجب معرفة جميع جوانب المشكلة إذ إن المشكلة هي التي تحدد الهدف الذي من أجله يتم بناء النموذج.

٢ ــ تحديد العوامل والمتغيرات التي تعد أساسية في المشكلة.

٣ ــ وضع النموذج المناسب لحل المشكلة.

٤ ــ اختبار النموذج والتأكد من صحته.

٥ ــ تطبيق النموذج.

٥ ــ ٤ ــ فوائد النماذج الرياضية :

إن أي نموذج رياضي يعطينا مجموعة من الفوائد نعرضها فيما يلي :

١ ــ الإمكانية الواسعة للتطبيق :

إن كثيراً من النماذج الرياضية التي طورت دون وجود هدف محـــدد أو غـــرض معين من وراء تطويرها قد وجدت مجالات واسعة للتطبيق، فبعض النماذج يستخدم في أكثر من حقل واحد من حقول العلم.

٢ ــ تخفيض تكاليف الإنتاج :

لما كانت النماذج تعد تمثيلاً مبسطاً للواقع العلمي؛ لذلك فإنها تعـــد أداة غـــير مكلفة لدراسة وتحليل المشاكل إذ من الأوفر والأسهل بناء نموذج رياضـــي، وتعـــيير معاملاته إلى أن يتم الحصول على الحل الملائم للمشكلة بدلاً من تجربة الحلول المختلفة على الواقع العملي.

٣ ــ النموذج الرياضي يزودنا بإطار عام للمشكلة.

٤ ــ تسهيل عملية الدراسة والتحليل :

فالنماذج تسهل على متخذي القرارات عملية دراسة وتحليل المشاكل المعقدة عن طريق التركيز على العناصر الرئيسة والملائمة فقط؛ والعلاقات بينها بدلاً مـــن تجميـــع ودراسة كثير من المعلومات المتعلقة بالعناصر التي قد لا تكون ذات تأثير كـــبير علـــى المشكلة وحلها.

٥ــ يظهر النموذج الرياضي عند استخدامه الثغرات في المعلومات المتوفرة، والتي يجب التغلب عليها لحل المشكلة تحت الدراسة.

٦ــ يعد النموذج الرياضي أفضل وسيلة للتنبؤ بسبب دقته شـــريطة أن تكـــون الافتراضات للنماذج سليمة.

٥ ــ ٥ ــ المآخذ على النماذج :

إن النماذج الرياضية التي تحمل في طياتها كثيراً من الفوائد؛ لها في الجهة المقابلة بعض العيوب نوردها فيما يلي :

١ــ عدم إمكان تمثيل النماذج للمشاكل الواقعية تمثيلاً كاملاً في صورة رياضية:

إن الانتقاد الرئيس الذي يوجه إلى النماذج الرياضية هو أنها لا تمثل الواقع تمثيلاً صادقاً؛ نظراً لما يتميز به هذا الواقع من تعقد وتشعب، وعدم تأكد مما يصعب تخيله وفهمه بالكامل.

غير أن يرد على ذلك بأنه على الرغم من صحة هذا الانتقاد؛ فإن الفروض ولا شك تعد نقطة بداية نافعة حيث يمكن بعد ذلك إسقاط هذه الفروض غير الواقعية فرضاً بعد الآخر إلى أن تقترب من الواقع قدر الإمكان، كما أن مصمم النموذج يمكن له أن يتأكد من متخذ القرار من أن الفروض التي وضع النموذج من أجلها هي مقبولة، وبذلك تضمن تمثيل النموذج للواقع.

٢ ــ إن معظم النماذج مثل البرمجة الخطية والبرمجة العددية و نماذج النقل تسعى إلى تحقيق هدف واحد مثل تنظيم الربح، وهذا في الواقع لم يعد يناسب الواقع العملي في الوقت الحاضر حيث إنه يندر الآن أن يعمل المدير على تحقيق هدف واحد مثل تنظيم الربح فغالباً ما تكون لهم أهداف أخرى بخلاف هدف تعظيم الربح أو تدنية التكاليف، مثل الرغبة في البقاء والاستمرار في ظل الظروف التضخمية التي تسود العالم اليوم، ولكن وفي الواقع ليس جميع النماذج الموجودة بدا له هدف واحد، بل إن هناك كثيراً من النماذج التي تسعى إلى تحقيق أهداف مقصودة.

٣ــ إن كثيراً من المشاكل العملية يتطلب تمثيلها رياضياً باستخدام مجموعة كبيرة من المعادلات التي قد يصعب على العقل البشري حلها، ولكن انتشار الحاسبات الإلكترونية وما تتميز به من سرعة فائقة وقدرة كبيرة على حل العمليات المعقدة يسهل من عملية النماذج ذات التركيب الرياضي المعقد.

٤ــ إن بناء النماذج يعد في بعض الأحيان مكلفاً حيث تفوق تكلفة بنائه واستخدامه المنافع التي تعود من وراء استخدامه، فضلاً عن أن كثيراً من المديرين قد يجدون صعوبة في فهم النتائج التي تنتج من تطبيقها لعدم وجود الخلفية الرياضية التي تمكنهم من فهم النماذج وعلاقاتها لديهم والواقع هذا لا يعد عيباً في النماذج نفسها وإنما عيب في فئة المديرين الذين ليس لديهم، الدراية أو الخلفية الرياضية، ويجب عليهم تطوير أنفسهم حتى يمكنهم التمشي مع متطلبات العصر الحاضر، أضف إلى ذلك أن هناك النماذج التي يتطلب بناؤها وتفسيرها مثل هذه الخلفية الرياضية المتقدمة مثل نماذج ديناميكية النظم، وبالتالي يمكنهم استخدامها لحل المشاكل؛ ولا سيما في المشاكل المعقدة والمتشابكة والتي تتم بالديناميكية أي التي يكون فيها لعنصر الزمن أهمية على سلوك النظام.

٥ ــ ٦ ــ أنواع النماذج :

يمكن تصنيف النماذج إلى أنواع مختلفة حسب ما ينظر إليها فقد يتم تقسيمها، إما تبعاً لوظيفتها أو غرضها أو حسب هيكلها و أبعادها، أو حسب عناصرها تبعاً للزمن أو تبعاً لعنصر التأكد أو حسب درجة عموميتها أو وفقاً لطريقة حلها وسوف نعرض فيما يلي الأنواع المختلفة للنماذج :

أولاً : التصنيف حسب غرض النموذج :

يمكن تقسيم النماذج تبعاً للغرض من استخدامها إلى أنواع هي ما يلي:

١ ــ نماذج وصفية :

وهي النماذج التي يتم بناؤها لوصف المشكلة أو الطريقة التي تتبع مثلاً في النظام الموجود، ويمكن القول إن النماذج الوصفية تعطي صورة للوضع الحقيقي دون أن يكون لها القدرة على تحديد أحسن طريقة عمل، وتستخدم هذه النماذج لوصف الحالة أو النظام موضوع الدراسة، وكمثال على هذه النماذج الخرائط التنظيمية للمشروعات التي توضح الإدارات المختلفة التي تتكون منها الشركة، وموقع السلطة والمسؤولية بالشركة والرسم التخطيطي للمصنع الذي يوضح طريقة عمل مختلف الآلات والمواد والعمل.

٢ ــ نماذج تنبؤية :

وتعرف هذه النماذج بأنها لها القدرة على التنبؤ بما يحدث؛ إذا ما اتخذ القرار، وذلك عن طريق الربط بين المتغيرات التابعة والمستقلة، أي باختصار إن هذه النماذج متخصصة بالتنبؤ بسلوك النظام أو نتائج القرار في ظل ظروف مختلفة، ومن أمثلتها نموذج نقطة التعادل و الموازنات التخطيطية، نموذج صفوف الانتظار.

٣ ــ نماذج معيارية :

وهي النماذج التي تبين ما يجب أن يكون عليه الوضع أو الكيفية المثلى لاتخاذ القرار وبعبارة أخرى هذه النماذج تعطي الحل الأمثل للمشكلة التي يمثلها النموذج، وكمثال على هذه النماذج البرمجة الخطية والبرمجة غير الخطية ونموذج الحجم الاقتصادي للطلبية.

ثانياً : التصنيف تبعاً لهيكل النموذج :

يمكن تقسيم النماذج تبعاً لهيكلها وأبعادها إلى ثلاثة أنواع من النماذج وهي :

١ ــ النماذج الطبيعية :

وتعرف بأنها النماذج التي تحافظ عند بنائها على بعض الخصائص الطبيعية للأشياء التي تمثلها، وتستخدم هذه النماذج في وصف الأحداث أو المشاكل عند نقطة زمنية وصفية؛ ومن أمثلتها الصور ولعب الأطفال، وهذه النماذج تتميز بسهولة ملاحظتها وبنائها ووصفها، غير أنه يصعب معالجتها وغالباً ما تستخدم النماذج الطبيعية ذات ثلاثة الأبعاد مثل نموذج تصميم المباني أو تخطيط المدن في عملية تحسين وتطوير تفاصيل الأشياء التي تمثلها غير أنها لا تستخدم في التنبؤ.

٢ ــ النماذج المتناظرة :

وهي تلك التي تمثل النظام المراد دراسته باستخدام مجموعة من الخصائص البديلة غير الخصائص الأصلية للنظام الذي يمثله النموذج، ومن أمثلة هذه النماذج نماذج الخرائط، هذا النوع من النماذج قياسي تمثيل العلاقات الكمية بين خصائص الأنواع المختلفة من الأشياء، وتمتاز هذه النماذج بسهولتها.

٣ ــ النماذج الرمزية :

هذا النوع من النماذج يستخدم الرموز والعلاقات الرياضية لتمثيل الواقع العملي المرغوب في دراسته، وتعد المعادلات الرياضية أكثر أنواع النماذج الرمزية استخداماً في بحوث العمليات، وتتميز هذه النماذج بالدقة والعمومية والتجريد سهولة معالجتها باستخدام القوانين الرياضية.

ثالثاً : التصنيف حسب خصائص سلوك النموذج :

هذه النماذج يمكن تقسيمها إلى نوعين هما :

١ ــ نماذج ساكنة :

وهي النماذج التي تختص بإيجاد حل للمشكلة في ظل افتراض مجموعة معينة من الشروط والظروف الثابتة؛ أي التي لا تتغير من فترة زمنية إلى أخرى، أي إن هذه النماذج هي مستقلة عن الزمن، ومن أمثلة هذه النماذج البرمجة الخطية، وتتصف هذه النماذج بأنها تساعد متخذ القرار في الوصول إلى أحسن حل للمشكلة التي يمثلها النموذج؛ مثل تنظيم الربح أو تخفيض الكلفة.

٢ ــ نماذج ديناميكية :

وتعرف بأنها تلك النماذج التي تتغير خصائصها من فترة زمنية إلى أخرى، وتستخدم هذه النماذج في تحديد الحل الأمثل أو في الوصول إلى القرار الأمثل، ومن أمثلة هذه النماذج البرمجة الديناميكية ونموذج ديناميكية النظم.

رابعاً : التصنيف حسب درجة التأكد :

يمكن تقسيم النماذج على أساس عنصر التأكد إلى نوعين :

١ ــ نماذج تحديدية :

وهي النماذج التي تفترض حالة التأكد التام والمعرفة الكاملة عند تصميمها، أي إن معاملات النموذج تكون معلومة على وجه التعميم وكل استراتيجية تؤدي إلى عائد أو نتيجة واحدة معروفة على وجه اليقين، وتعرف النماذج التحديدية بأنها عبارة

عن النماذج الكمية التي لا تشتمل على احتمال حدوث حالات الطبيعة، حيث تكون حالة الطبيعة معلومة بكل دقة؛ من هذه النماذج نموذج البرمجة الخطية و المسار الحرج ونموذج تحديد الحجم الاقتصادي للطلبية.

٢ ــ النماذج الاحتمالية :

وهي تلك النماذج التي تكون فيها معاملات النموذج غير معلومة على وجه الدقة، فبموجبها تتخذ القرار لا يعرف أي حالة من حالات الطبيعة ستحدث عند أخذ قرار معين؛ وإن كان يعرف أو يستطيع تحديد احتمالات حدوث حالات الطبيعية المختلفة، كما أن كل استراتيجية تؤدي إلى أكثر من نتيجة أو عائد واحد، وأن هذا النوع من النماذج يقوم على فكرة الاحتمالات وتختص بحالة عدم التأكد أو المخاطرة، وتساعد هذه النماذج في عملية اتخاذ القرار في ظل المخاطرة.

خامساً : التصنيف حسب عموميتها :

يمكن تصنيف النماذج على أساس درجة عموميتها ومدى تعلقها إلى نوعين :

١ ــ النماذج العامة أو النمطية :

وهي النماذج التي يمكن استخدامها لحل المشاكل في عدة مناطق وظيفية بالمنشأة أي أنها نماذج بأغراض عامة ومتعددة، ومن أمثلة هذه النماذج البرمجة الخطية ونموذج صفوف الانتظار؛ إذ إنه يمكن تطبيق هذه النماذج لحل المشاكل الإنتاجية أو التسويقية أو المالية في المنشأة المختلفة.

٢ ــ النماذج المتخصصة :

وهي تلك النماذج التي تصمم خصيصاً لحل مشكلة معينة بـذاتها، فهـي ذات غرض معين على عكس النماذج العامة، ومن أمثلة هذه النمـاذج نمـوذج المزايـدة الاحتمالية.

سادساً : التصنيف حسب إجراءات الحل :

بما أنه يمكن حل النماذج الرياضية بإحدى الطريقتين :

آ ــ طريقة التحليل الرياضي.

ب ــ طريقة أسلوب المحاكاة.

فإن لدينا نوعين من هذه النماذج هي التالية :

١ ــ نماذج تحليلية :

وهي التي تتميز بصيغتها الرياضية ويتم حلها باستخدام التحليل الرياضي، وقـد يتم الحل إما بأسلوب مباشر أو بأسلوب غير متكرر عن طريق استخدام الحل العـام، وحسب هذا الحل لا يتم حل المشكلة مباشرة؛ وإنما بتطبيق عدة خطوات متتالية بحيث يتم في الخطوات الأولى الوصول إلى حل رقمي، ثم بعد ذلك تجرى عـدة خطـوات متتالية حتى تصل إلى الحل الأمثل، ومن أمثلة هذه النماذج طريقة السمبلكس.

٢ ــ نموذج المحاكاة :

هذه النماذج تصف ما يحدث للنظام لفترة زمنية معينة مختاره تحت مجموعة مـن الظروف المفترضة، هذه النماذج يتم حلها باتباع سلسلة متتابعة من الحسابات، هـذا

النوع من النماذج يناسب المشاكل ذات العلاقات المعقدة؛ حيث يكون من الأسهل في هذه الحالة حل المشكلة عن طريق بناء نموذج تجريبي لمحاكاة الوضع أو المشكلة وحله على الحاسب الآلي، وإن البيانات التي تستخدم في نموذج المحاكاة قد تكون بيانات فعلية أو مشتقة.

الفصل السادس
نموذج توزيع الاستثمارات
بين مختلف القطاعات الاقتصادية

Damascus University

وقل رب زدني علما
Damascus University

٦-١- عرض المشكلة:

إن مشكلة توزيع الاستثمارات بين مختلف القطاعات المكونة للاقتصاد الـوطني تلعب دوراً هاماً وأساسياً في الوقت الحاضر ، إذ إنه على أمثلية توزيع الاسـتثمارات بين مختلف القطاعات الاقتصادية ، تتوقف على إمكانية تحقيق الحد الأعظمي في الناتج القومي، وبالتالي تحقيق الفائض الذي يعد المرجع الأساسي في تمويل الاستثمارات التي على أساسها يمكن تحقيق التنمية في الاقتصاد الوطني ، لنفرض أن الاقتصـاد الـوطني يتكون من أربعة قطاعات :

١ ــ قطاع الزراعة ونرمز له بالرمز A

٢ ــ قطاع الصناعة ونرمز له بالرمز B

٣ ــ قطاع التجارة ونرمز له بالرمز C

٤ ــ قطاع الخدمات ونرمز له بالرمز D

ولنفرض أنه يوجد لدينا مئة مليون ليرة سورية نرغب في اسـتثمارها في هـذه القطاعات الأربعة؛ بهدف تحقيق الحد الأعظمي في دالة الربح، حيث إن الأرباح الـتي يمكن الحصول عليها تأخذ شكل الجدول التالي (هذا بعد أن تم تقسيم المئة مليون ليرة إلىعشر وحدات كل وحدة مكونة من عشرة ملايين ليرة سورية) :

قطاع / استثمار	A	B	C	D
0	0	0	0	0
1	0.28	0.25	0.15	0.20
2	0.45	0.41	0.25	0.33
3	0.65	0.55	0.40	0.42
4	0.78	0.65	0.50	0.48
5	0.90	0.75	0.62	0.35
6	1.02	0.80	0.73	0.56
7	1.13	0.83	0.82	0.58
8	1.23	0.88	0.90	0.60
9	1.32	0.96	0.90	0.60
10	1.38	1.00	0.90	0.60

إن مثل هذه المشكلة تكون من طبيعة توافقية (أي إن كل استراتيجية مكونة من تجمع أربعة عناصر يتوضع كل منها في عامود مقابل للقطاع الاقتصادي؛ أو عدد هذه التوافقيات يبلغ في هذه الحالة ٢٨٦ توافقية ممكنة ، أي استراتيجية استثمارية ممكنة ، ويمكن أن نوضح هذا العدد فيما يلي :

إن المشكلة هنا هي توزع عشرة وحدات على أربعة قطاعات اقتصادية ، هذه الوحدات التي يمكن أن تستثمر، يمكن أن نستثمر بعضها في قطاع اقتصادي واحد أي إنها يمكن أن تستثمر في قطاعين أو ثلاثة أو أربعة كل منها يستثمر في قطاع؛ أخذنا

إمكانية الاستثمار في قطاعين اقتصاديين فقط فإن التوزيع الأمثل لهذه الوحدات العشر يأخذ الصور التالية :

$$(1-9)\ ،\ (2-8)\ ،\ (3-7)\ ،\ (4-6)\ ،\ (5-5)$$

أما في حال الاستثمار في ثلاثة قطاعات اقتصادية، فإن لدينا ثماني صور، وهي التالية :

$$(8-1-1),(7-2-1),(6-2-2),(6-3-1),$$
$$(5-4-1),(5-3-2),(4-3-3),(4-4-2)$$

في حال الاستثمار في القطاعات الاقتصادية الأربعة فإن لدينا تسع صور، وهي التالية :

$$(7-1-1-1),(6-2-1-1),(5-1-1-3),$$
$$(5-2-1-2),(4-2-2-2),(4-2-1-3),$$
$$(4-1-1-4),(3-3-3-1),(3-2-2-1),$$

وحسب هذه التقسيمات فإنه يمكننا أن نعين توزع الاستثمار على القطاعات الاقتصادية الأربعة وفق ما يلي :

١ ــ في حالة الاستثمار في قطاع اقتصادي واحد (0 – 0 – 0 – 10) :

القطاعات الاقتصادية			
A	B	C	D
10	0	0	0
0	10	0	0
0	0	10	0
0	0	0	10

أي إن هناك أربع استراتيجيات ممكنة للاستثمار.

Damascus University

٦-٢- حالة الاستثمار في قطاعين اقتصاديين :

(9 - 1)

القطاعات الاقتصادية

A	B	C	D
9	1	0	0
9	0	1	0
9	0	0	1
0	9	0	1
0	9	1	0
1	9	0	0
1	0	9	0
0	1	9	0
0	0	9	1
0	0	1	9
0	1	0	9
1	0	0	9

هنا عدد الاستراتيجيات الممكنة هو ١٢ استراتيجية

(8 - 2)

القطاعات الاقتصادية

A	B	C	D
8	2	0	0
8	0	2	0
8	0	0	2
0	8	0	2
0	8	2	0
2	8	0	0
2	0	8	0
0	2	8	0
0	0	8	2
0	0	2	8
0	2	0	8
2	0	0	8

هنا عدد الاستراتيجيات الممكنة هو ١٢ استراتيجية

وبالطريقة نفسها يمكن حساب عدد استراتيجيات الاستثمار لكل من الصور (3 - 7) و(4 - 6)؛ فنجد لكل منها ١٢ استراتيجية ممكنة .

أما صورة الاستثمار (5 - 5) فإن الاستراتيجيات الممكنة فيها يمكن حسابها فيما يلي :

قطاعات الاستثمار			
A	B	C	D
5	5	0	0
5	0	5	0
5	0	0	5
0	5	0	5
0	0	5	5
0	5	5	0

أي إن عدد الاستراتيجيات الممكنة هو ست استراتيجيات في حال وجود كتل متماثلة؛ فإنه يمكن حساب عدد الاستراتيجيات الممكنة باستخدام دستور التبادل وذلك وفق ما يلي :

لو افترضنا أن A ترمز إلى عدد القطاعات الاقتصادية .

B ترمز إلى كتلة الاستثمار .

فإن عدد الاستراتيجيات يمكن حسابه وفق الدستور التالي :

$$P_{k_1,k_2,k_3.....k} = \frac{P_n}{P_{k_1}.P_{k_2}.....P_k} =$$

$$= \frac{n!}{k_1!k_2!.....k!.}$$

$$\sum_{i=1}^{\lambda} k_i = n$$

بتطبيق هذا الدستور على الحالات السابقة باستثناء الحالة (5 - 5) يكون عدد الاستراتيجيات هو :

$$P_{2,1,1} = \frac{P_4}{P_2.P_2.P_1} = \frac{4!}{2!.1!.1!} =$$

$$= \frac{4.3.2.1}{2.1\times1\times1} = 12$$

وهذا يسبب وجود عنصرين متشابهين، وهما الصفران (0 - 0) أما لـو أخذنا الصورة (5 - 5) فإن العناصر الأربعة مؤلفة من مجموعتين كل منـهما يتكون من عنصرين متماثلين الـ (0 - 0) (5 - 5) وبالتالي فإن عدد الاستراتيجيات هو معادل إلى ما يلي :

$$P_{2,2} = \frac{P_4}{P_2.P_2} = \frac{4!}{2!.2!} = 6$$

ومنه فإنه يمكننا القول إنه إذا رغبنا توزيع الاستثمارات على قطاعين اقتصاديين فقط فإن عدد الاستراتيجيات الممكنة هو : $12 + 6 = 54\times S_2 = 4$

٦-٣- حالة الاستثمار بثلاثة قطاعات اقتصادية :

في هذه الحالة يمكن حساب عدد الاستراتيجيات الممكنة وفق الخطوات التالية :

صورة الاستثمار (1 – 1 – 8)

القطاعات الاقتصادية			
A	B	C	D
8	1	1	0
8	1	0	1
8	0	1	1
1	8	1	0
0	8	1	1
1	8	0	1
1	1	8	0
1	0	8	1
0	1	8	1
0	1	1	8
1	0	1	8
1	1	0	8

أي إن ، في هذه الصورة الاستثمارية يوجد لدينا استراتيجية ممكنة . من ناحية أخرى فإن عدد الاستراتيجيات الممكنة لكل الصور $(6-2-2)(4-3-3)(4-4-2)$ هو ١٢ استراتيجية .

بما أنه في كل صورة من الصور:

$(6-2-2)$ ، $(4-3-3)$ $(4-4-2)$ $(8-1-1)$

(يوجد عنصران متشابهان فإنه يمكن استخدام قانون التباديل لحساب عدد الاستراتيجيات الممكنة لكل من هذه الصور وفق ما يلي :

$$P_{2,1,1} = \frac{P_4}{P_2.P_1.P_1} = \frac{4!}{2!.1!.1!} = 12$$

وبالتالي فإن عدد الاستراتيجيات الممكنة في حالة الاستثمار بثلاثة قطاعات اقتصادية، وعندما يكون المبلغ المستثمر متماثلاً في قطاعين اقتصاديين ، هو مساو إلى ما يلي :

$$SI = 12 \times 4 = 48$$

أما عندما يكون المبلغ المستثمر غير متماثل، فإن عدد الاستراتيجيات الممكنة هو مساو إلى ما يلي :

$$P_{1,1,1,1} = \frac{P_4}{P_1.P_1.P_1.P_1} = \frac{4!}{1!.1!.1!.1!} = 24$$

وبما أنه يوجد لدينا أربع صور فإن عدد الاستراتيجيات الممكنة لهذه الحالة هو :

$$S_{II} = 24 \times 4 = 96$$

أي إن ،مجموع عدد الاستراتيجيات الممكنة في حالة الاستثمار بثلاثة قطاعات اقتصادية هو مساو إلى ما يلي :

$$S3 = S_I + S_{II} = 48 + 96 = 144$$

ولو أخذنا صورة واحدة من الصور:

(7 – 2 – 1) (6 – 3 – 1) (5 – 4 – 1)(5 – 3 – 2)

ولكن الصورة (1 – 2 – 7) تمكننا من توضيح الاستراتيجيات الممكنة وفق الجدول التالي :

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

(7 – 2 – 1)

القطاعات الاقتصادية			
A	B	C	D
7	2	1	0
7	2	0	1
7	0	2	1
7	1	0	2
7	1	2	0
7	0	1	2
1	7	0	2
1	7	2	0
0	7	1	2
2	7	0	1
2	7	1	0
0	7	2	1
2	0	7	1
0	2	7	1
0	0	7	2
1	1	7	2
1	2	7	0
2	1	7	0
0	2	1	7
0	1	2	7
1	2	0	7
1	0	2	7
2	0	1	7
2	1	0	7

ومنه نلاحظ أن عدد الاستراتيجيات الممكنة لهذه الصورة هو ٢٤ استراتيجية .

٦-٤- الاستثمار في أربعة قطاعات اقتصادية :

لو رغبنا في توزيع الاستثمار على أربعة قطاعات اقتصادية فإن الصور الممكنة للاستثمار هي التالية :

A) (7 – 1 – 1 – 1), (4 – 2 – 2 – 2), (3 – 3 – 3 – 1)

B) (6 – 2 – 1 – 1), (5 – 1 – 1 – 3) , (5 –1 – 2 –2)

C) (4 – 1 – 1 – 4), (3 – 2 – 2 – 3)

D) (4 – 2 – 1 – 3)

فلو أخذنا المجموعة (A) لوجدنا أن هناك ثلاث مبالغ متماثلة في كل صورة من صور هذه المجموعة، ومنه وباستخدام قانون التباديل فإن عدد الاستراتيجيات الممكنة لهذه المجموعة هو مساو إلى ما يلي :

$$P_{3,1} = \frac{P_4}{P_3.P_1} = \frac{4!}{3!.1!} = 4$$

$$SA = 4 \times 3 = 12$$

أما بالنسبة للمجموعة (B) فإن هناك مبلغين فقط متماثلان ومنه فإن عدد الاستراتيجيات الممكنة هو مساو إلى ما يلي :

$$P_{2,1,1} = \frac{P_4}{P_2.P_1.P_1} = \frac{4!}{2!.1!.1!} = 12$$

$$SB = 12 \times 3 = 36$$

أما بالنسبة للمجموعة (D) فإنه يوجد تماثل بين كل مبلغين، وبالتالي فإن عـــدد الاستراتيجيات الممكنة هو مساو إلى ما يلي :

$$P_{2,2} = \frac{P_4}{P_2.P_2} = \frac{4!}{2!.2!} = 6$$

$$SD = 6 \times 2 = 12$$

وفي المجموعة (C) لا يوجد أي تماثل، وبالتالي فإن عدد الاستراتيجيات الممكنـــة هو مساو إلى ما يلي :

$$P_{1,1,1,1} = \frac{P_4}{P_1.P_1.P_1.P_1} = \frac{4!}{1!.1!.1!.1!} = 24$$

ومنه يمكن القول إنه في حالة الاستثمار في أربعة قطاعات اقتصادية، فإن عـــدد الاستراتيجيات الممكنة هو مساو إلى ما يلي :

$$S4 = SA + SB + SD + SC$$
$$= 12 + 36 + 12 + 24 = 84$$

من النتائج السابقة فيمكن القول إن عدد الاستراتيجيات الممكنة هو مساو إلى ما يلي :

$$S = S1 + S2 + S3 + S4$$
$$= 4 + 54 + 144 + 84 = 286 \quad \text{استراتيجية}$$

هذا فيما إذا كان المبلغ المستثمر تم تقسيمه إلى عشر وحدات (كل وحده بعشرة ملايين) أما لو كان أكثر من عشر وحدات فإن عدد الاستراتيجيات يصـــبح كـــبيراً جداً.

بعد أن تم تحديد عدد الاستراتيجيات الممكنة للاستثمار؛ فإنه يتوجب علينا الآن أن نتعرف على الاستراتيجية المثلى للاستثمار (أي الاستراتيجية التي تحقق الحد الأعظمي في الربح).

٦-٥- الاستراتيجية المثلى للاستثمار :

لو رغبنا التعرف على الاستراتيجية المثلى، فإنه يتوجب علينا أن نلجأ إلى المعالجة التتابعية وفق ما يلي :

لنفرض أن

X_1 هي المبلغ المستثمر (بعشرات الملايين في القطاع الأول)

X_2 هي المبلغ المستثمر (بعشرات الملايين في القطاع الثاني)

X_3 هي المبلغ المستثمر (بعشرات الملايين في القطاع الثالث)

X_4 هي المبلغ المستثمر (بعشرات الملايين في القطاع الرابع)

ولنفرض أيضاً أن :

$V_1(X_1)$ هي أرباح استثمارات القطاع الأول .

$V_2(X_2)$ هي أرباح استثمارات القطاع الثاني .

$V_3(X_3)$ هي أرباح استثمارات القطاع الثالث .

$V_4(X_4)$ هي أرباح استثمارات القطاع الرابع .

كما أن دالة الربح تأخذ الشكل التالي :

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = V_1(x_1) + V_2(x_2) + V_3(x_3) + V_4(x_4)$$

مع شرط : $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$

علماً بأن المتغيرات الأربعة x4 , x3 , x2 , x1 لا يمكن لأي منها أن يأخذ إلا إحدى القيم الصحيحة (1,2,3,4,5,6,7,8,9,10)

لنفرض أن :

$$x_1 + x_2 = u_1$$
$$u_1 + x_3 = u_2$$
$$u_2 + x_3 = A$$

حيث إن :

$$u_1 < A$$
$$u_2 < A$$

وبالتالي فإن تأخذ على التتالي القيم :

$$0\ ,1\ ,2\ ,3\ ,\ 4\ ,5\ ,6\ ,7\ ,8\ ,9\ ,10$$

وبالرجوع إلى دالة الربح فإنها تأخذ الشكل التالي :

$$F(x_1,u_1,u_2,A)=V_1(x_1)+V_2(u_1-x_1)+V_3(u_2-u_1)+V_4(A-u_2)$$

ويمكن تطبيق نظرية الأمثلة وفق ما يلي :

$$f_{1,2}(u_1) = Max\ [V_1(x_1)+V_2(u_1-x_1)]$$
$$x_1 = 0,1,2,3,\ldots\ldots,u_1$$
$$f_{1,2,3} = Max\ [f_{1,2}(u_1)+V_3(u_2-u_1)]$$
$$u_1 = 0,1,2,3,\ldots\ldots,u2$$

$$f_{1,2,3,4}(A) = Max[f_{1,2,3}(u_2) + V_4(A - u_2)]$$

$$U_2 = 0,1,2,3,\ldots\ldots,A$$

فأعظمي دالة الربح F تكون له القيمة $f_{1,2,3,4}(A)$ كقيمة أعظمية من أجل

$$A = 10$$

لحساب قيمة الدالة $f_{1,2}(u_1)$ تكون الجدول التالي حيث إن العاموذان ٢ ، ٣ تم أخذهما من جدول الأرباح أما العاموذان ٤ ، ٥ فقد تم حساب قيمهما وفق ما يلي:

1	2	3	4	5
x_1, x_2, u_1	$V_1(x_1)$	$V_2(x_2)$	$f_{1,2}(u_1)$	الاستراتيجية
0	0	0	0	(0 , 0)
1	0.28	0.25	0.28	(1 , 0)
2	0.45	0.41	0.63	(1 , 1)
3	0.65	0.55	0.70	(2 , 1)
4	0.78	0.65	0.90	(3 , 1)
5	0.90	0.75	1.06	(3 , 2)
6	1.02	0.80	1.20	(3 , 3)
7	1.13	0.85	1.33	(4 , 3)
8	1.23	0.90	1.57	(5 , 3)
9	1.32	0.90	1.68	(6 , 3)
10	1.38	0.90	1.68	(7 , 3)

الجدول رقم (٢)

$$f_{1,2}(u_1 = 0) = Max[V_1(0) + u_2(0)] = 0 + 0 = 0$$

$$f_{1,2}(u_1 = 1) = Max[V_1(0) + u_2(1), V_1(1) + u_2(0)] =$$

$$= Max[0.25, 0.28] = 0.28$$

$$f_{1,2}(u_1 = 2) = Max\,[V_1(0) + V_2(2), V_1(1) + V_2(1), V_1(2) + V_2(0),]$$
$$= Max[0.41, 0.53, 0.45] = 0.53$$

هكذا على التوالي حتى نحصل على جميع قيم العامود ٤ .

العامود رقم (٥) يعطي الاستراتيجيات الجزائية المثلى؛ وهكذا عندما يكون بأيدينا خمس عشرات من الملايين للاستثمار في القطاعين A وB ؛ فإن الاستراتيجية الجزائية المثلى هي $X_1 = 3$ و $X_2 = 2$ عندما نرغب في استثمار تسعين مليون ليرة فإن الاستراتيجية الجزائية المثلى هي $X_1=60$ و $X_2 = 30$.

من أجل حساب قيمة الدالة $f_{1,2,3}(u_2)$ فإننا نكون الجدول التالي:

u_1, x_3	$f_{1,2}(u_1)$	$V_3(x_3)$	$f_{1,2,3}(u_2)$	استراتيجية جزئية مثلى I , II , III	استراتيجية جزئية مثلى
0	0	0	0	(0 , 0)	(0 , 0 , 0)
1	0.28	0.15	0.28	(1 , 0)	(1 , 0, 0)
2	0.53	0.25	0.53	(1 , 1)	(1 , 1, 0)
3	0.70	0.40	0.70	(2 , 1)	(2 , 1, 0)
4	0.90	0.50	0.90	(3 , 1)	(3 , 1 , 0)
5	0.06	0.62	0.06	(3 , 2)	(3 , 2, 0)
6	1.29	1.73	1.21	(3 , 3)	(3 , 2 , 1)
7	1.33	1.28	1.33	(4 , 3)	(3 , 3 , 1)
8	1.45	1.90	0.48	(5 , 3)	(4 , 3, 1)
9	1.57	1.90	0.60	(6 , 3)	(3 , 3, 3)
10	1.68	1.00	0.73	(7 , 3)	(4 , 3, 3)

هذا الجدول قد تم الحصول عليه من الجدول رقم (٢) باستخدام الدالة :

$$f_{1,2,3}u_2 = Max\ [f_{1,2}(u_1) + V_3(u_2 - u_1)]$$

ولو استخدمنا الدالة :

$$f_{1,2,3,4}(A) = Max\ [f_{1,2,3}(u_2) + V_4(A - u_2)]$$

واعتماداً على نتائج الجدول رقم (٣) لحصلنا على الجدول التالي :

u_2, x_3	$f_{1,2,3}(u_2)$	$V_4(x_4)$	$f_{1,2,3,4}(A)$	استراتيجية جزئية مثلى	استراتيجية جزئية مثلى
0	0	0	0	(0 , 0 , 0)	(0,0,0,0)
1	0.28	0.20	0.28	(1 , 0, 0)	(1,0,0,0)
2	0.55	0.33	0.53	(1 , 1, 0)	(1,1, 0,0)
3	0.70	0.42	0.73	(2 , 1, 0)	(1,1,0,1)
4	0.90	0.48	0.90	(3 , 1 , 0)	(3,1,1,0)
5	1.06	0.53	1.10	(3 , 2, 0)	(3,1,0,1)
6	1.21	0.56	1.26	(3 , 2 , 1)	(3,2,0,1)
7	1.35	0.56	1.41	(3 , 3 , 1)	(3,2,1,1)
8	1.48	0.60	1.55	(4 , 3, 1)	(3,3,1,1)
9	1.60	0.60	1.68	(5 , 3, 1)	(3,3,1,2)
10	1.73	0.60	1.81	(4 , 3, 3)	(4,3,1,2)

من هذا الجدول نلاحظ أن الحد الأعظمي للربح هو (١,٨١) مليون ليرة سورية ، هذا الربح يمكن الحصول عليه فيما لو استثمرنا أربعين مليون ليرة في قطاع الزراعة، و ثلاثين مليون ليرة في قطاع الصناعة و عشرة ملايين ليرة في قطاع التجارة وعشرون مليون ليرة في قطاع الخدمات، وهذا هو التوزيع الأمثل للاستثمارات أي إن الاستراتيجية التي تنص على هذا التوزيع هي الاستراتيجية المثلى .

وقل رب زدني علما
Damascus University

الفصل السابع
البرمجة الخطية

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

وقل رب زدني علما
Damascus University

٧-١- أولاً: البرنامج الأولي

إن مشاكل البرمجة الخطية تطرح دوماً عندما نبحث عن الحد المتفائل لتابع خطي بعدة متحولات، هذه المتحولات قد حددت وأعطيت على أشكال قيود خطية. لنأخذ مثالاً على البرنامج الخطية البرنامجين التاليين:

١- أوجد قيم:

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots\ldots x_n \geq 0$$

حيث إن:

$$a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots\ldots + a_{1,n}x_n \leq R_1$$

$$a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots\ldots + a_{2,n}x_n \leq R_2$$

$$a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots\ldots + a_{m,n}x_n \leq R_m$$

التي يحصل التابع:

$$P = p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots\ldots\ldots + p_nx_n$$

يأخذ حده الأعظمي:

٢- أوجد قيم:

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, \ldots\ldots\ldots, y_m \geq 0$$

بحيث إن:

$$y_1a_{1,1} + y_2a_{2,1} + \ldots\ldots\ldots\ldots + y_ma_{m,1} \geq D_1$$

$$y_1 a_{1,2} + y_2 a_{2,2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + y_m a_{m,2} \geq D_1$$

$$y_1 a_{1,n} + y_2 a_{2,n} + \ldots\ldots\ldots\ldots + y_m a_{m,n} \geq D_n$$

التي تجعل الناتج:

$$C = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots\ldots\ldots + c_m y_m$$

بأخذ حده الأصغري

هذان البرنامجان يمكن وباستخدام المصفوفات أن تأخذ الشكل التالي:

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \ldots\ldots\ldots a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \ldots\ldots\ldots a_{2,n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m,1} & a_{m,2} \ldots\ldots\ldots a_{m,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ \\ x_n \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \\ \\ R_m \end{bmatrix}$$

$$\text{Max } P = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots\ldots\ldots + p_n x_n$$

$$[y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n] \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \ldots\ldots\ldots a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \ldots\ldots\ldots a_{2,n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m,1} & a_{m,2} \ldots\ldots\ldots a_{m,n} \end{bmatrix} \geq [D_1, D_2, \ldots\ldots, D_n]$$

وبصورة مختصرة يمكن أن تأخذ الشكل التالي:

البرنامج الأول	البرنامج الثاني
أوجد $x \geq 0$	أوجد $y \geq 0$

حيث إن: $AX \le R$ حيث إن

$Ay \ge D$

التي تعطى $MaxPX$ التي تعطى

$MinCY$

أي إنها تأخذ الصيغة التالية:

البرنامج الأول	البرنامج الثاني
$x \ge 0$	$y \ge 0$
$AX \le R$	$Ay \ge D$
$MaxPX$	$MinCY$

البرامج القانونية:

إن الشكل الذي عرضناه سابقاً للبرنامج الخطية

هو الشكل العام بحيث إن:

٢- جميع المجاهيل هي دوماً بإشارة موجبة.

٣- جميع القيود تأخذ شكل متراجحات

وهذا ما يقود إلى القول إن تلك البرامج هي برامج خطية قانونية:

٧-٢- ثانياً: البرنامج المقابل:

إن البرنامجين اللذين عرضناهما سابقاً هي برامج خطية بالتقابل، بحيث إن التقابل لهما هو عبارة عن إمكانية الانتقال من برنامج إلى آخر بالشكل التالي:

١- إن المجاهيل سواء في البرنامج الأول أو الثاني هي دوماً موجبة.

٢- في البرنامج الأول المجاهيل تأخذ شكل شعاع عمود؛ بينما في البرنامج الثاني فإنها تأخذ شكل شعاع سطر.

٣- إن المتراجحات في البرنامج الأول تأخذ شكل ≤ بينما في البرنامج الثاني، فإنها تأخذ ≥

٤- إن الهدف في البرنامج الأول هو تعظيم الربح بينما في البرنامج الثاني، فإن الهدف هو تصغير الكلفة.

٥- إن عدد المجاهيل في البرنامج الأول يساوي إلى عدد القيود في البرنامج الثاني والعكس صحيح بحيث إن عدد القيود في البرنامج الثاني يساوي عدد المجاهيل في البرنامج الأول.

٧-٣- أمثلة على البرامج الخطية:

بعد أن قمنا بعرض أشكال البرامج الخطية فإننا ننتقل الآن إلى عرض وشرح بعض البرامج المأخوذة من واقع النشاط الاقتصاد؛ والتي تأخذ شكل البرنامج الخطي.

٧-٣-١-**الإنتاج الضروري بهدف تلبية الطلب بأقل كلفة:** ممكنة لنأخذ برنامج خطي للإنتاج؛ يمكننا من مضاعفة الإنتاج باستخدام عوامل الإنتاج بشكل مضاعف؛ بحيث إن كلفة استخدام هذه المصادر هي

متناسبة مع عدد الوحدات المستخدمة من عوامل الإنتاج كما أن مضاعفة الإنتاج تقود إلى تحقيق الحد الأعظمي للربح.

لنفترض أن أحد المصانع يطرح عند المنطلق m تقنة إنتاج وهي:

$$T_1, T_2, T_3, \ldots\ldots, T_m$$

هذه التقنات تقود إلى إنتاج n سلعة هي:

$$B_1, B_2, B_3, \ldots\ldots\ldots, B_n$$

وإن المصفوفة التالية:

$$A = \begin{array}{c} \\ T_1 \\ T_2 \\ \\ T_i \\ \\ T_m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} B_1 & B_2 & \ldots\ldots & B_j & \ldots\ldots & B_n \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,1} & \ldots\ldots & a_{1,j} & \ldots\ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots\ldots & a_{2,j} & \ldots\ldots & a_{2,n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \ldots\ldots & a_{i,j} & \ldots\ldots & a_{i,n} \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \ldots\ldots & a_{m,j} & \ldots\ldots & a_{m,n} \end{bmatrix} \end{array}$$

$$C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \\ \\ c_m \end{bmatrix}$$

$$D = d_1, d_2, \ldots\ldots, d_n$$

تعبر عن معاملات التقنات بحيث تعطى الكميات المنتجة من كل سلعة باستخدام عدد محدد من وحدات كل تقنة من تقنات الإنتاج، ويمكن تفسير هذه العوامل وفق ما يلي:

$a_{i,j}$ هي عدد الوحدات المنتجة من السلعة B_j باستخدام التقنية T_i

C هي شعاع و-ات الكلفة لتقنات الإنتاج بحيث إن C_i هي كلفة استخدام كل وحدة من التقنة T_i

D هي شعاع الطلب على السلع المنتجة بحيث إن d_j هي عدد الوحدات المطلوبة من السلعة B_j

إن المصنع يتوجب عليه تلبيه الطلب على منتجاته، ولكنه دوماً يبحث عن طريقة استخدام تقنات الإنتاج بأقل كلفة ممكنة. أي إنه يبحث عن برنامج لاستخدام تقنات الإنتاج حيث إن:

$$y = [y_1, y_2, y_3, \ldots\ldots, y_m]$$

$y_1 \geq 0$: هي عدد الوحدات المستخدمة من التقنة الأولى T_1

$y_2 \geq 0$: هي عدد الوحدات المستخدمة من التقنة الثانية T_2

$y_m \geq 0$: عدد الوحدات المستخدمة من التقنة $T_m \ldots . m$

لنقل إن $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_m$ هي أسطر المصفوفة A و $A^1, A^2, \ldots, A^n$ هي أعمدة المصفوفة A من ذلك يمكن القول إن برنامج استخدام التقنات يعطى مـــا يلي:

YA^1 عدد الوحدات المنتجة من السلعة B_1

YA^2 عدد الوحدات المنتجة من السلعة B_2

YA^n عدد الوحدات المنتجة من السلعة B_n

هذه الكميات يجب أن تكون على الأقل مساوية إلى كمية الطلب علـــى هـــذه السلع، وهذا ما يعطينا القيود التالية:

$$YA^1 \geq d_1$$
$$YA^2 \geq d_2$$
$$\vdots$$
$$YA^n \geq d_n$$

التابع الاقتصادي وكما نلاحظ هو تابع كلفة إنتاج أو كلفة استخدام تقنيات الإنتاج. هذا يؤدي إلى القول إن مدير المصنع يبحث عن الحد الأدنى للتابع:

$$\text{Min } YC = y_1c_1 + y_2c_2 + \ldots\ldots + y_mc_m$$

والمشكلة التي تواجهه تتخذ القرار هي حساب قيم الشعاع y ، والبرنامج الخطي يأخذ الشكل التالي:

$$Y \geq 0$$
$$YA \geq D$$
$$\text{Min } YC$$

أما البرنامج المقابل للبرنامج السابق فإنه يتطلب البحث عن قيم الشعاع

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ \\ x_n \end{bmatrix} \quad \vdots$$

ما تفسير هذا البرنامج؟

إن قيود البرنامج هي:

$$A_1X \le C_1$$
$$A_2X \le C_2$$
$$\vdots$$
$$A_mX \le C_m$$

وهذا ما يقود إلى القول إن الشعاع y هو شعاع الأسعار، وذلك بسبب أن الشعاع c هو شعاع كلف استخدام التقنات.

إذن لدينا مجموعة من n سعر وذلك لأن المصنع يتوجب عليه إنتاج كل سلعة وكل وحدة منتجة من السلع B يكون سعرها معطى في الشعاع X من هذا القول فإن المتحولات المقابلة للكميات هي متحولات الأسعار. ويمكن أن نتصور أن المشكلة الثانية هي مطروحة أمام الشخص الثاني الذي يبحث عن طريقة لبيع منتجاته بأعلى سعر ممكن. ويمكن القول إن C_i هي كلفة استخدام كل وحدة من التقنة T_i

A_iX هي الكلفة الممكنة للتقنة T_i

إن الشخص الثاني يتوجب عليه طرح نظام الأسعار $y \ge 0$ حيث إن $A_iX \le C_i$ والقيود تأخذ الشكل التالي:

$$A_1X \le C_1$$
$$A_2X \le C_2$$
$$\vdots$$
$$A_mX \le C_m$$

٧-٣-٢- استخدام مصادر الإنتاج المتوفرة في تحقيق الحد الأعظمي للدخل:

لنفترض نموذج خطي للإنتاج، في هذا النموذج مصفوفة معاملات التقنات تعطي عدد الوحدات من المواد الأولية M_i اللازمة لإنتاج وحدة واحدة من السلعة B_j وهذه المصفوفة تأخذ الشكل التالي:

$$A = \begin{array}{c} \\ M_1 \\ M_2 \\ \\ M_i \\ \\ M_m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} B_1 & B_2 & \cdots & B_j & \cdots & B_n \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,j} & \cdots & a_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,j} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix} \end{array} \qquad R = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \\ \\ r_m \end{bmatrix}$$

$P\ [p_1, p_2, \ldots\ldots, p_n]$

$a_{i,j}$ عدد الوحدات المطلوبة من المادة الأولية M_i لإنتاج وحدة واحدة من السلعة B_j

R هي شعاع الكميات المتوفرة من المواد الأولية، حيث إن r_i هي عدد الوحدات المتوفرة من المادة الأولية M_i

P هي شعاع أسعار المواد المنتجة حيث إن P_j هي سعر مبيع الوحدة الواحدة من السلعة B_j

نطرح الآن مشكلة المصانع التي تعرض مصادر الإنتاج التي تستخدم في إنتاج لسلع $B_1, B_2, \ldots, B_n$ بكميات غير معلومة $x_1, x_2, \ldots, x_n$ هذه المصانع تبيع

منتجاتها بأسعار تأخذ الشكل التالي $p_1,p_2,\ldots,p_n$ ، ونبحث عن عدد الوحـــدات الممكن إنتاجها. إن مشكلة هذه المصانع هي إيجاد برنامج للإنتاج:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

X_1 هي عدد الوحدات المنتجة من السلعة B_1 $\quad x_1 \geq 0$

X_2 هي عدد الوحدات المنتجة من السلعة B_2 $\quad x_2 \geq 0$

X_n هي عدد الوحدات المنتجة من السلعة B_n $\quad x_n \geq 0$

في هذا البرنامج إن المصانع في إنتاجها لا يمكن أن تتجاوز الكميات المتوفرة مـــن المواد الأولية بحيث إن:

A_1X هي الكميات المستخدمة من المادة الأولية M_1

A_1X هي الكميات المستخدمة من المادة الأولية M_2

A_mX هي الكميات المستخدمة من المادة الأولية M_m

وإن قيود برنامج الإنتاج تأخذ الشكل التالي:

$$A_1X \leq r_1$$

$$A_2X \leq r_2$$

$$\vdots$$

$$A_mX \leq r_m$$

أي إن :

$$a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{1,n}x_n \le r_1$$

$$a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{2,n}x_n \le r_2$$

$$\vdots$$

$$a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{m,n}x_n \le r_n$$

وشكلها المختصر هو التالي:

$$AX \le R$$

وإن التابع الاقتصادي لهذه المشكلة يأخذ الشكل التالي:

$$\text{Max } P = p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots\ldots + p_nx_n = PX$$

هذا التابع يقودنا إلى القول إن مشكلة هذه المصانع هي معرفة قيم مكونات شعاع العمود X حيث إن:

$$X \ge 0$$

$$AX \le R$$

$$\text{Max } PX$$

أما البرنامج المقابل لهذا البرنامج فإنه يبحث عن القيم المكونة للشعاع:

$$Y = [y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n]$$

حيث إن:

$$Y \ge 0$$

$$AY \ge P$$

$$\text{Min } YR$$

ما معنى ذلك؟

إن قيود هذا البرنامج هي:

$$YA^1 \geq P_1 , XA^2 \geq P_2 , \ldots., YA^n \geq P_A$$

هذه القيود تقود إلى القول إن المتحولات y_i هي أسعار وذلك لأن p_i هي أيضاً أسعار. إذاً لدينا مجموعة بـ m سعر هي أسعار المواد الأولية. في هذا البرنامج إن المصانع تبحث عن أسعار المواد الأولية. هذا يقود إلى القول إن هذه الصناعة الثانية تبحث عن أسعار الشراء y لموادها الأولية.

$$M_1, M_2, \ldots\ldots\ldots, M_m$$

هذا النظام في التسعير يبحث عن أقل الأسعار أي جعل yR تأخذ قيمتها الدنيا.

إذاً

P_j هي سعر الوحدة من السلعة B_j

YA^j هي الدخل الإجمالي الذي يمكن أن نحصل عليه من جزء بيع المواد الأولية المستخدمة لإنتاج السلعة B_j وهذا ما يقود إلى القول إن هذه الصناعة تطرح نظام للتسعير بحيث إن:

$$YA^j \geq P_j$$

ومنه فإن:

$$YA1 \geq P^1$$

$$YA^2 \geq P^2$$

$$YA^n \geq P_n$$

إذاً إن:

$$y_1a_{1,1} + y_2a_{2,1} + \ldots\ldots\ldots + y_ma_{m,1} \geq p_1$$

$$y_1a_{1,2} + y_2a_{2,2} + \ldots\ldots\ldots + y_ma_{m,2} \geq p_2$$

$$\vdots$$

$$y_1a_{1,n} + y_2a_{2,n} + \ldots\ldots\ldots + y_ma_{m,n} \geq p_n$$

وشكلها المختصر هو :

$$YA \geq P$$

٧-٣-٣ مشكلة الغذاء:

هذه المشكلة تعتبر وصلة هامة في تصميم البرنامج الخطية وتتكون من تأمين الغذاء لأكبر عدد من الأشخاص وبأقل ما يمكن من تكاليف الحياة.

هذه المشكلة هي مطروحة أمام الشخص المسؤول عن تأمين الغذاء لهذه المجموعة. هذا المسؤول يطرح m مادة غذائية (خبز ــ لحم ــ بطاطا... إلخ) ونرمز لها بما يلي:

$$D_1, D_2, \ldots\ldots, D_m$$

وإن أسعار هذه المواد هي:

$$P_1, P_2, \ldots\ldots, P_m$$

وهذا المسؤول يبحث عن تركيبه الوجبة التي يمكن أن تحتوي على y_1 من المادة الأولى هو y_2 من المادة الثانية D_2 و .....و y_m من المادة D_m والتي تتطلب أقل كلفة ممكنة أي إن:

$$\text{Min } P = y_1p_1 + y_2p_2 + \ldots\ldots + y_mp_m$$

لنفترض أن عناصر التغذية الضرورية هي:

$$N_1, N_2, \ldots\ldots, N_n$$

وإن الكميات الدنيا من هذه العناصر هي:

$$q_1, q_2, \ldots\ldots, q_n$$

إن المصفوفة التالية:

$$A = \begin{array}{c} \\ D_1 \\ D_2 \\ \\ D_i \\ \\ D_m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} N_1 & N_2 \ldots\ldots & N_j \ldots\ldots & N_n \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,1} & a_{1,j} & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,j} & a_{2,n} \\ a_{i,1} & a_{i,2} & a_{i,j} & a_{i,n} \\ a_{m,1} & a_{m,2} & a_{m,j} & a_{m,n} \end{bmatrix} \end{array}$$

تعطى الكميات الواجب توفرها في كل سلعة غذائية بحيث إن a_{ij} هي عدد الوحدات من الغذاء x_i المحتواة في المادة D_i

الوجبة:

$$Y = y_1, y_2, \ldots\ldots, y_m$$

تحتوي على:

$$YA^j = y_1a_{1j} + y_2a_{2j} + \ldots\ldots\ldots + y_ma_{mj}$$

من الغذاء x_j

إن المشكلة تطرح كما يلي:

ابحث عن الوجبة:

$$y_1, y_2, \ldots, y_m$$

بحيث إن:

$$\begin{aligned} &y_1 a_{1,1} + y_2 a_{2,1} + \ldots\ldots + y_m a_{m,1} \geq a_1 \\ &y_1 a_{1,2} + y_2 a_{2,2} + \ldots\ldots + y_m a_{m,2} \geq a_2 \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Leftrightarrow \\ &y_1 a_{1,n} + y_2 a_{2,n} + \ldots\ldots + y_m a_{m,n} \geq a_n \end{aligned}$$

ابحث عن

$Y \geq 0$

$YA \geq Q$

$\text{Min } YP$

$$\text{Min } P = y_1 p_1 + y_2 p_2 + \ldots\ldots + y_m p_m$$

$$Y = [y_1, y_2, \ldots\ldots, y_m]$$

$$P = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \\ \\ P_m \end{bmatrix}$$

$$Q = [q_1, q_2, \ldots\ldots, q_n]$$

البرنامج المقابل لهذا البرنامج يأخذ الشكل التالي:

ابحث عن: $X \geq 0$

بحيث إن:

$$AX \leq P$$

$$\text{Max } QX$$

القيود تكتب على الشكل التالي:

$$a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{1,n}x_2 \leq p_1$$

$$a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{2,n}x_2 \leq p_2$$

$$a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{m,n}x_2 \leq p_m$$

والدالة تأخذ الشكل التالي:

$$\text{Max } Q = q_1y_1 + q_2y_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + q_nx_n$$

ولا يفوتنا القول إن p_i هو سعر الغذاء D_i وأن $a_{i,j}$ هي كمية عناصر الغذاء المتوفرة في الغذاء D_i وأن الشعاع:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ \\ x_n \end{bmatrix}$$

هو شعاع أسعار عناصر الأغذية. ويمكن أن نطرح هذه المشكلة على الشكل التالي:

صيدلي يطرح في الأسواق عناصر التغذية على شكل عبوات بالأسعار $x_1,x_2,\ldots,x_n$ هذا الصيدلي يبحث عن نظام أسعار x يؤمن له الحد الأعظمي للدخل فيما إذا اشترى الحد الأدنى من ضروريات الحياة ولكن بسعر مقبول من قبل الزبائن.

٧-٣-٤- مشكلة النقل:

إن قطاع الصناعة يقوم بتصنيع سلع مختلفة في m مصنع هي $u_1,u_2,\ldots,u_m$ متواجدة في أمكنة مختلفة في هذه المصانع إن كمية السلع المنتجة هي:

$$Q_1,Q_2,\ldots,Q_m$$

هذه السلع مطلوبة من قبل n سوق هي:

$$M_1,M_2,\ldots,M_n$$

وإن الكميات المطلوبة من قبل هذه الأسواق هي:

$$d_1,d_2,\ldots,d_n$$

في النهاية إن $C_{i,j}$ هي سعر نقل وحدة واحدة من منتجات المصنع u_i إلى السوق M_j. وأن قطاع الصناعة يبحث عن طريقة يتم بموجبها نقل هذه المنتجات بحيث إن:

١- طلب كل سوق يكون قد تم تلبيته بالكامل.

٢- عرض كل مصنع يكون قد تم تصريفه بالكامل.

٣- الكلفة الإجمالية للنقل تكون في أدنى قيمة.

إن البحث عن طريقة للنقل هي البحث عن mn وتم بحيث إن $y_{i,j}$ تمثل كمية لسلع المنقولة من المصنع u_i إلى السوق M_j

$$y_{i,j} \geq 0$$

$$\sum_{i=1}^{m} y_{i,j} \geq d_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_{i,j} \geq O_j$$

$$\text{Min} \sum C_{i,j}\, y_{i,j}$$

بجعل المتراجحات بنفس الاتجاه نحصل على ما يلي:

$$y_{i,j} \geq 0$$

$$\sum_{i=1}^{m} y_{i,j} \geq d_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} (-y_{i,j}) \geq -O_i$$

$$\text{Min} \sum C_{i,j}\, y_{i,j}$$

وإن الشكل المصفوفي لهذه المشكلة هو التالي:

$$Y \geq 0$$

$$AY \geq Q$$

$$\text{Min } CY$$

البرنامج المقابل لهذا البرنامج سوف يتكون من m,n مجهول و m,n قيد ونبحث عن المجاهيل X حيث إن:

$$Y \geq 0$$

$$AY \geq Q$$

$$\text{Max } CY$$

أي إن:

$$x_i \geq 0 \quad , \quad x_j \geq 0$$

$$x_j - xi \leq C_{i,j} \quad I - 1,2, \ldots, m] \quad j = 1,2,\ldots,m$$

$$Max[\sum_{j=1}^{n} x_j^2 d_j - \sum_{i=1}^{m} x_i O_i]$$

في هذا البرنامج المتراجحات تشير إلى أن x_i و x_j' متجانسة بالكلفة ويمكن أن تستخدم كأسعار.

x_i هي أسعار الوحدات للسلع المنتجة في المصانع.

x_j' هي أسعار الوحدات للسلع المباعة في الأسواق.

هذه المشكلة يمكن أن تطرح كبرنامج نقل يطرح السلع المنتجة على زبائنه، كما أنه يعرض شراء السلع بالأسعار المحددة من قبل المصنع والمساوية إلى x_i؛ وإعادة بيعها في الأسواق بالأسعار المحددة في السوق M_j والمساوية إلى x_j' .

وإن المصانع لها مصلحة في عرض الناقل؛ وذلك لأن تكلفة نقل الوحدة الواحدة من السلع u_i إلى السواق M_j هي أكثر من الفرق بين هذه الأسعار، ويمكن التعبير عن ذلك بما يلي:

$$x_j' - x_i \leq C_{i,j}$$

٧-٣-٥ مشكلة التعيين:

إن مشاكل تعيين العمال على الآلات هي من النوع الذي يأخذ شكل البرنامج الخطي.

لنفترض أنه يوجد في أحد المصانع m عامل موزعين على n آلة، ولكن بفعاليات مختلفة ولنرمز إلى مجموعة العمال بما يلي:

$$O_1, O_2, \ldots\ldots, O_m$$

وإلى مجموعة الآلات بما يلي:

$$M_1, M_2, \ldots\ldots, M_m$$

ولنفترض أن $C_{i,j}$ هي مقياس فعالية العامل O_i الذي يعمل على الآلة M_j خلال وحدة الزمن (يوم ،شهر،....). إن الفعالية يمكن أن تقاس بالدخل العائد من بيع المنتجات المصنع من مختلف العمال الذين يعملون على مختلف الآلات.

لنفترض أيضاً أن كل آلة لا يمكن أن تستخدم إلا من قبل عامل واحد فقط، من هذا الافتراض نلاحظ أن المشكلة هي البحث عن mn عدد؛ حيث إن $y_{i,j}$ تمثل نسبة الزمن المستخدم من قبل العامل O_i على الآلة M_i خلال الزمن المتاح ما الطريقة المثلى لتوزيع العمال على الآلات؟

إن الإجابة على هذا السؤال تكون بما يلي؟

$$y_{i,0} \geq 0$$

العامل O_i لا يستطيع العمل لوقت طويل خلال الزمن المتاح $\sum_{j=1}^{n} g_{i,j}$

الآلة لا تعمل لزمن طويل خلال الزمن المتاح $\sum_{j=1}^{m} y_{i,j}$

إن الهدف الأساس هو رفع الفعاليات إلى أعلى حد $Max \sum_{j=1} e_{i,j}, y_{i,j}$

هذه المشكلة هي من طبيعة برنامج النقل نفسها وتأخذ الشكل التالي:

بمجهول: $y \geq 0 \quad m,n$

قيد $YA \leq Q \quad (m+n)$

$$Max\ EY$$

أما البرنامج المقابل لهذا البرنامج هو التالي:

$$X \geq 0$$

$$XA \geq E$$

$$Min\ XQ$$

أي إن:

$$x_1 \geq 0 \quad x'_j \geq 0$$

$$x_1 + x'_j \geq e_{i,j}$$

$$Min(\sum_{i=1}^{m} x_i + \sum_{j=1}^{m} x'_j)$$

وقل رب زدني علما
Damascus University

الفصل الثامن
حل البرنامج الخطي

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

وقل رب زدني علما
Damascus University

٨-١- عرض ومقدمه:

بعد أن قمنا بتقديم البرمجة الخطية وبينا تعريف هذه البرمجة، بالإضافة إلى المشاكل التي يمكن أن تحل باستخدام البرمجة الخطية نتساءل كيف يمكن حل البرنامج الخطي؟

في رأينا أن أي برنامج خطي يحمل في طياته طريقة حله، وذلك بحسب القيود والمتغيرات المكونة لهذا البرنامج كما أن مصادر الإنتاج تلعب دوراً كبيراً جداً في تحديد طريقة حل البرنامج فإذا كانت مصادر الإنتاج متساوية، فإننا نرى أن أفضل طريقة لحل البرنامج الخطي هي طريقة الحل العام. أما إذا اختلفت قيم مصادر الإنتاج وكان البرنامج مكوناً من عدة قيود ومتغيرين فقط؛ فإن أفضل طريقة لحل هذا البرنامج هي طريقة الحل البياني. أما إذا كان البرنامج الخطي يتكون من عدة قيود وبأكثر من متغيرين فإن أفضل طريقة لحل البرنامج هي طريقة استخدام جداول السمبلكس. وسوف نستعرض هذه الطرق الثلاثة فيما يلي:

٨-٢- الحل البياني للبرمجة الخطية:

في الحياة الاقتصادية لا بد من التأكيد على أن أغلب الصناعات تقوم على أساس استخدام مصادر الطبيعة الموجودة بشكل محدود جداً، مما يتطلب منا البحث عن طريقة تمكننا من حل مشاكل الصناعة باستخدام أقل ما يمكن من مصادر الإنتاج، وإن أفضل الطرق في هذا المجال هو البرمجة الخطية حيث إن هذه الطريقة تمكننا من تحقيق أكبر ما يمكن من الربح باستخدام أقل كمية من مصادر الإنتاج، ولكن حتى يمكن استخدام البرمجة الخطية لا بد من البحث عن الطرق التي بموجبها يمكن حل البرنامج الخطي. من هذه الطرق وأولها هو الحل البياني (سواء تحقيق الحد الأعظمي للربح أو

لتحقيق الحد الأدنى في دالة الكلفة)، ولكن لا بد أولاً من استخدام المفهوم الأساس للبرمجة.

٨-٢-١- استخدام المفهوم الأساسي للبرمجة:

حتى يمكن تفهم وعرض المفهوم الأساس للبرمجة فإننا نفترض أن لدينا ثلاثة مصانع للنسيج، وكل من هذه المصانع الثلاثة ينتج المنسوجات الصوفية والقطنية، وأن إنتاج كل متر من هذه المنسوجات يتطلب زمناً بالدقائق كما هو معطى في الجدول التالي:

مصنع / سلعة	1	2	3
منسوجات صوفية	40	24	20
منسوجات قطنية	30	32	24

ولنفرض أن الزمن المتاح أمام كل من هذه المصانع الثلاثة هو ٤٨٠ دقيقة، وإن إنتاج كل متر من المنسوجات الصوفية يحقق ربحاً قدره خمس ليرات سورية، وإنتاج كل متر من المنسوجات القطنية يحقق ربح قدره ثماني ليرات سورية.

في هذه المشكلة نلاحظ أن الصناعة تبحث عن تحقيق الحد الأعلى للربح باستخدام أقل ما يمكن من الموارد التي هي في هذه المشكلة عدد الدقائق المتاحة للعمل، أو حتى يمكن حل هذه المشكلة لا بد من وضعها في صيغة برنامج خطي، وذلك وفق ما يلي:

X_1 ترمز إلى المنسوجات الصوفية.

X_2 ترمز إلى المنسوجات القطنية

ومنه فإن القيود الاقتصادية تأخذ الشكل التالي:

$$40\,x_1 + 30\,x_2 \le 480$$
$$24\,x_1 + 32x_2 \le 480$$
$$20\,x_1 + 24x_2 \le 480$$

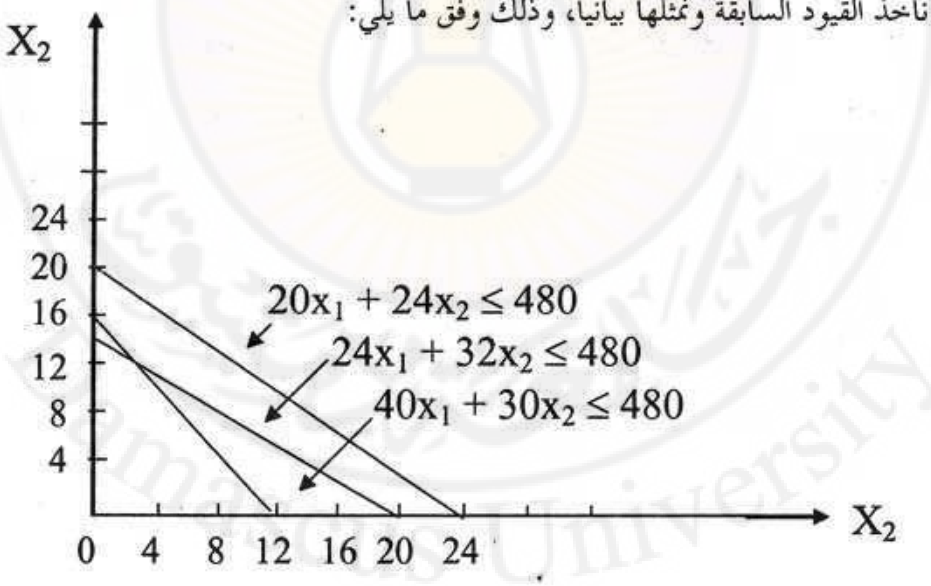
وبأخذ التابع الاقتصادي بالحسبان فإن البرنامج السابق يأخذ الشكل التالي:

$$P = 5x_1 + 8x_2$$
$$40\,x_1 + 30x_2 \le 480$$
$$24\,x_1 + 32x_2 \le 480$$
$$20\,x_1 + 24X_2 \le 480$$
$$x_1 \ge 0$$
$$x_2 \ge 0$$

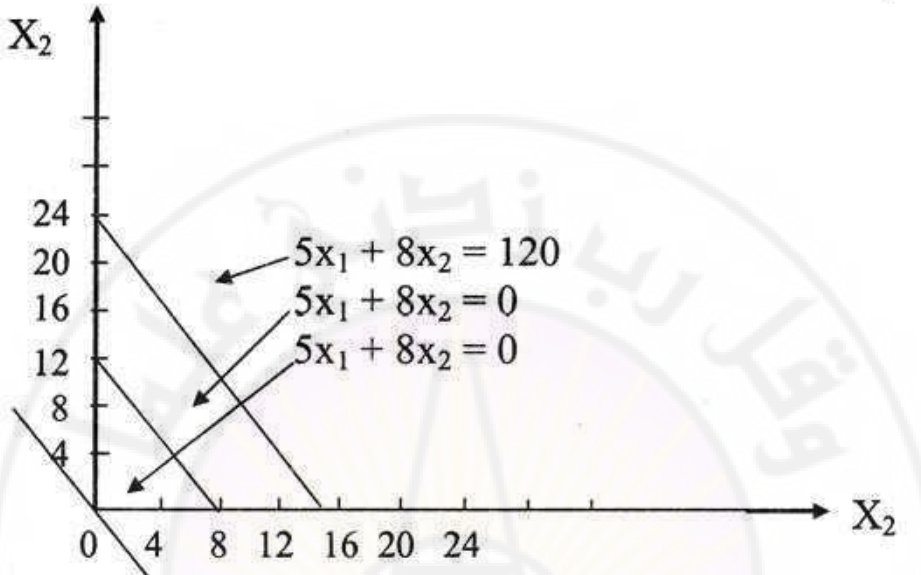
إن حل هذا البرنامج يقوم على أساس البحث عن قيم x_2, x_1 اللتين تحققان الحد الأعظمي في قيمة التابع الاقتصادي P. حتى يمكن حساب هذه القيم لا بد من اتباع الخطوات التالية:

تصنيع المنسوجات القطنية	تصنيع المنسوجات الصوفية
$30x_2 \le 480 \Rightarrow x_2 \le 16$ $32x_2 \le 480 \Rightarrow x_2 \le 20$ $24x_2 \le 480 \Rightarrow x_2 \le 24$ من النتائج السابقة نلاحظ أن أدنى قيمة يمكن أن يأخذها المتحول X_2 هي 15 وحدة. بأخذ هذه القيمة وتعويضها في التابع الاقتصادي نحصل على ما يلي: $P_{X2} = 15 \cdot 8 = 120$	$40x_1 \le 480 \Rightarrow x_1 \le 12$ $24x_1 \le 480 \Rightarrow x_1 \le 20$ $20x_1 \le 480 \Rightarrow x_1 \le 24$ من النتائج السابقة نلاحظ أن أدنى قيمة يمكن أن يأخذها المتحول X_1 هي 12 . بتعويض هذه القيمة في التابع الاقتصادي نحصل على ما يلي: $P_{X1} = 5 \cdot 12 = 60$
$\text{Max } P = P_{X2} = 120$	

أي إن الحد الأعظمي للربح الذي يمكن تحقيقه يمكن أن نحصل عليه فيما لو أنتجنا 15 متراً من المنسوجات القطنية، وحتى يمكن تحديد منطقة الحلول الممكنة فإننا نأخذ القيود السابقة ونمثلها بيانياً، وذلك وفق ما يلي:



أما لو رغبنا في تمثيل مختلف الحالات الممكنة للتابع الاقتصادي؛ فإنه يأخذ الشكل التالي:



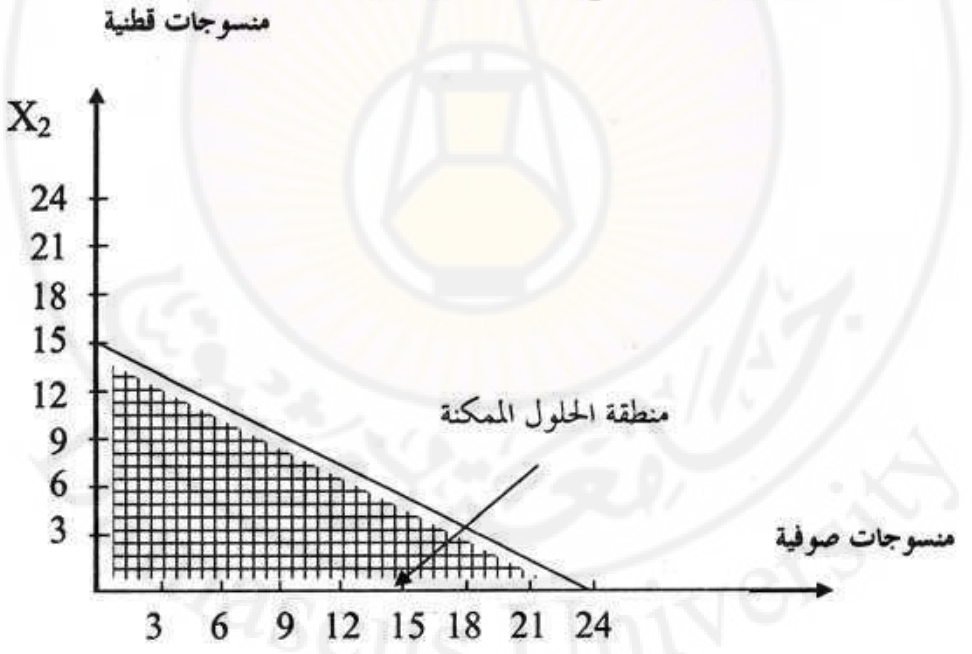
حيث إن P هي عبارة عن أي قيمة ثابتة، وتتغير تبعاً لتغير عدد الوحدات المنتجة من كل من X_2, X_1 فلو أخذنا الحالة التي حصلنا على الحد الأعظمي للربح لوجدنا أن:

$$\text{Max } P = 8x_2 = 8 \cdot 15 = 120$$

هذه القيمة تضعنا أمام عدة خيارات فإما أن تنتج 15 متراً من المنسوجات القطنية فقط أو 24 متراً من المنسوجات الصوفية فقط أو تنتج الاثنتان معاً وفقاً لما يلي:

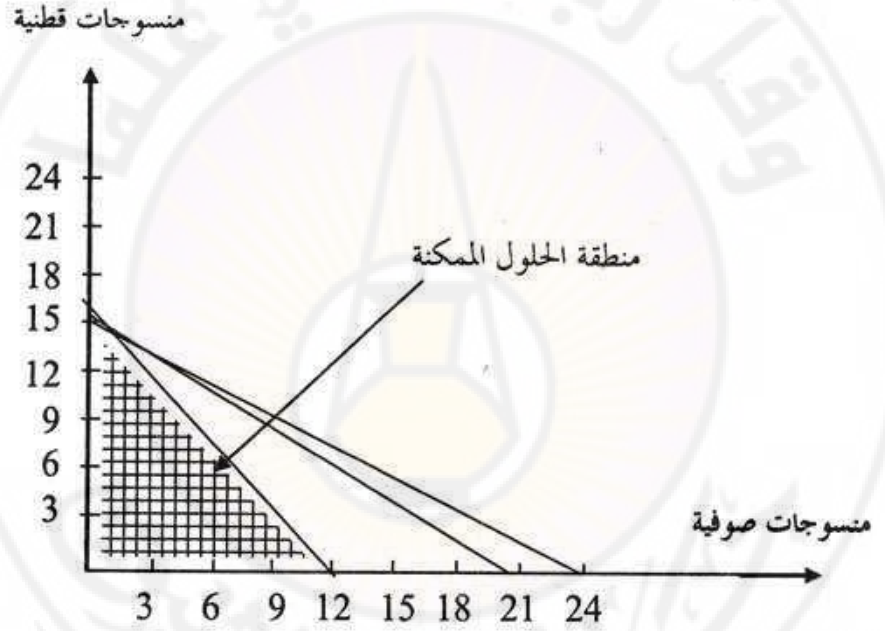
منسوجات صوفية	منسوجات قطنية	ربح
0	15	120
8	10	120
16	5	120
24	10	120

إن التمثيل البياني لهذه النتائج يأخذ الشكل التالي:



أما لو أخذنا الحالة التي كانت فيها $P = 60$ فإن هذا الربح يمكن تحقيقه فيما لو تم إنتاج 12 متراً من المنسوجات الصوفية مع الاستغناء عن المنسوجات القطنية. ولكن وبما أن $Px_2 = 13 \cdot 8 = 120$ أكبر من $Px_1 = 5 \cdot 12 = 60$ فإنه يمكن القول إن الحد الأعظمي للربح يمكن تحقيقه فيما لو تم إنتاج 15 متراً من المنسوجات القطنية.

وإن التابع الاقتصادي في هذه الحالة يأخذ الشكل التالي:



من ناحية أخرى، بما أن إنتاج (15متراً) من المنسوجات القطنية، مع الاستغناء عن المنسوجات الصوفية، يحقق الحد الأعظمي للربح والبالغ 120 وحدة نقدية، فإنه يمكن حساب الوقت الضائع في كل من المصانع الثلاثة وذلك وفق ما يلي:

الوقت اللازم لإنتاج 15 متراً من المنسوجات القطنية هو"

في المصنع الأول $15 \times 30 = 450$ دقيقة

في المصنع الثاني $15 \times 32 = 480$ دقيقة

في المصنع الثالث $15 \times 24 = 360$ دقيقة

وبما ان الزمن المتاح أمام كل من المصانع الثلاثة هو 480 دقيقة فإنه يمكن القول إن أفضل المصانع لإنتاج المنسوجات القطنية، هو المصنع الثاني، أما المصنع الأول والثالث فيوجد فيهما وقت ضائع مساو إلى 30 دقيقة في المصنع الأول؛ و 20 دقيقة في المصنع الثالث.

أما لو أخذنا المنسوجات الصوفية فإن الحد الأعظمي للربح والبالغ 120 وحدة نقدية يمكن الحصول عليه فيما لو تم إنتاج 24 متراً من هذه المنسوجات وإن الزمن اللازم لإنتاج هذا الحد في كل من المصانع الثلاثة يأخذ الشكل التالي:

في المصنع الأول $40 \times 24 = 960$ دقيقة

في المصنع الثاني $24 \times 24 = 576$ دقيقة

في المصنع الثالث $20 \times 24 = 480$ دقيقة

ومنه نلاحظ أن أفضل المصانع لإنتاج المنسوجات الصوفية هو المصنع الثالث أما بقية المصانع فإنما تحتاج إلى زمن إضافي حتى يمكن الوصول إلى هذه الكمية من الإنتاج. هذا الزمن الإضافي هو مساو إلى ثماني ساعات في المصنع الأول وإلى ساعة وست وثلاثين دقيقة في المصنع الثاني.

٨-٢-٢- حساب الحد الأعظمي بيانياً:

إن استخدام الطريقة البيانية في الوصول إلى الحد الأعظمي لقيمة التابع الاقتصادي تتطلب منا أن نقوم أولاً بتمثيل البرنامج الخطي بيانياً، ثم نأخذ بالحسبان

نقاط التقاء القيود المكونة للبرنامج، ومنها نقوم بحساب قيم المتغيرات المكونة للبرنامج؛ ونختار النقطة التي تحقق الحد الأعظمي للتابع الاقتصادي ونطلق عليها اسم نقطة التفاؤل، فلو افترضنا أنه لدينا البرنامج التالي:

$$4x_1 + x_2 \leq 800$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 900$$

$$x_1 \leq 180$$

$$\text{Max } P = 6x_1 + 5x_2$$

فإن الحل البياني لهذا البرنامج يتطلب منا الخطوات التالية:

$$4x_1 \leq 180 \Rightarrow x_1 \leq 200$$

$$2x_1 \leq 900 \Rightarrow x_1 \leq 450$$

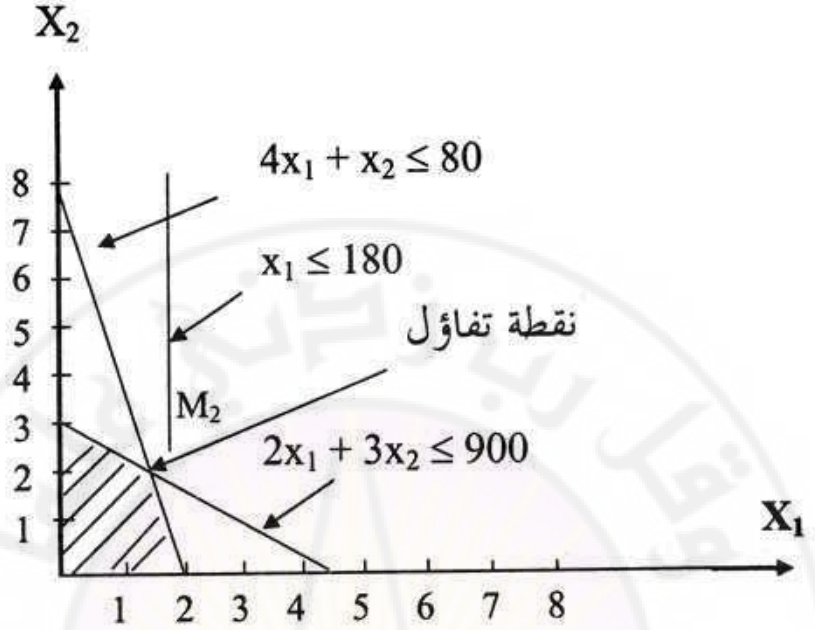
$$x_1 \leq 180$$

هذا فيما لو تم إنتاج السلعة X_1 فقط مع الاستغناء عن السلعة X_2 . أما لو كانت هناك رغبة في إنتاج السلعة X_2 مع الاستغناء عن السلعة X_1 ، فإن القيم التي يمكن أن يأخذها هذا المتحول هي التالية:

$$x_2 \leq 800$$

$$3x_2 \leq 900 \Rightarrow x_2 \leq 300$$

وإن التمثيل البياني للنتائج السابقة يأخذ الشكل التالي:



من هذا الشكل نلاحظ أنه يوجد نقطتا التقاء M_1, M_2 ، حيث إن النقطة M_1 تمثل التقاء القيد الأول مع الثاني والنقطة الثانية M_2 تمثل التقاء القيد الثاني مع الثالث. انطلاقاً من النقطة M_1 يمكن حساب قيم x_1, x_2 انطلاقاً من القيدين الأول والثاني، وذلك وفق ما يلي:

$$4x_1 + x_2 = 800 \quad \text{.....(1)}$$

$$2x_1 + 3x_2 = 900 \quad \text{.....(2)}$$

بضرب المعادلة (2) بـ 2 نحصل على ما يلي:

$$4x_1 + x_2 = 800 \quad \text{.....(3)}$$

$$4x_1 + 6x_2 = 1800 \quad \text{.....(4)}$$

بطرح 3 من 4 نحصل على ما يلي:

$$5x_2 = 1000$$

$$x_2 = 200$$

بالتعويض في المعادلة الأولى نحصل على ما يلي:

$$4x_1 + 200 = 800$$

$$4x = 600 \Rightarrow x_1 = 150$$

وبالتعويض في دالة الهدف نحصل على ما يلي:

$$P1 = 6 \times 150 + 5 \times 200 = 1900$$

أما النقطة M_2 فإنها تمثل التقاء القيد الأول مع الثالث، أي إن:

$$4x_1 + x_2 = 800 \quad .....(1)$$

$$x_1 = 180 \quad .....(2)$$

بتعويض x_1 بقيمتها في المعادلة (1) نحصل على ما يلي:

$$4 \,.\, 180 + x_2 = 800$$

$$x_2 = 800 - 720 = 80$$

بتعويض x_1 و x_2 بقيمتها في دالة الهدف نحصل على ما يلي:

$$P_2 = 6 \,.\, 180 + 5 \,.\, 80 = 1080 + 400 = 1480$$

ومنه نلاحظ أن:

$$MaxP = P_2 = 1900$$

وهذا ما يقودنا إلى القول إن الحد الأعظمي للربح يتحقق فيما لو كانت قيمة

$x_1 = 150$ وقيمة $x_2 = 200$ ، وأن النقطة M_1 هي عبارة عـــن نقطـــة التفاؤل.

٨- ٢- ٣- تحقيق الحد الأصغري بيانياً:

حسب مفهوم الحل البياني فإن تحقيق الحد الأصغري لدالة الهدف التي هي عبارة عن دالة كلفة يقوم على أساس تمثيل القيود، المكونة للبرنامج الخطي بيانياً، وأخذ نقاط التقاء القيود ثم من خلالها يتم حساب قيم المتغيرات؛ وتعوض في دالة الهدف، ويـــتم اختيار النقطة التي تحقق الحد الأصعري في دالة الهدف كنقطة تفاؤل. فلو افترضنا أنـــه لدينا البرنامج التالي:

$$6x_1 + 2x_2 \geq 12$$

$$2x_1 + 2x_2 \geq 8$$

$$4x_1 + 12x_2 \geq 24$$

فإن حل هذا البرنامج يقوم على الخطوات التالية:

$$6x_1 \geq 12 \Rightarrow x_1 \geq 2$$

$$2x_1 \geq 8 \Rightarrow x_1 \geq 4$$

$$4x_1 \geq 24 \Rightarrow x_1 \geq 24/4 = 6$$

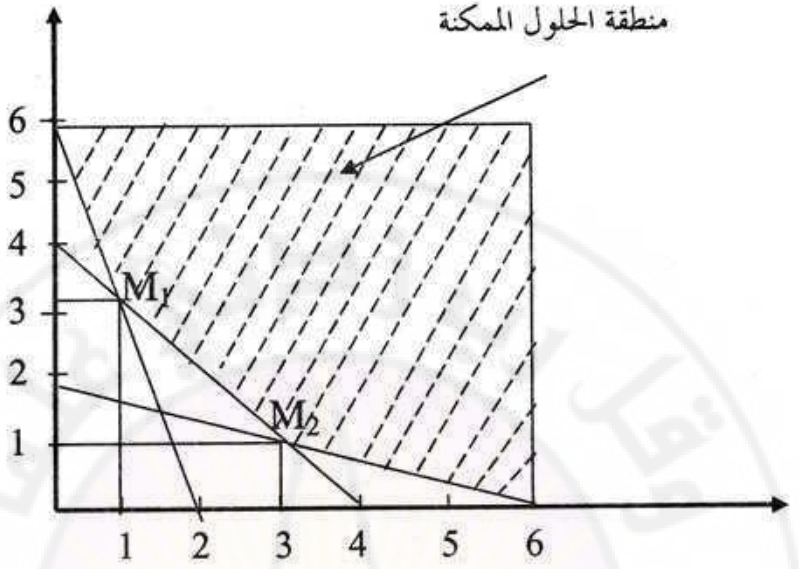
هذا وفي حال إنتاج x_1 فقط أما في حال إنتاج x_1 فقط فلدينا ما يلي:

$$2x_2 \geq 12 \Rightarrow x_2 \geq 6$$

$$2x_2 \geq 8 \Rightarrow x_2 \geq 4$$

$$12x_2 \geq 24 \Rightarrow x_2 \geq 2$$

وإن تمثيل هذه النتائج بيانياً يأخذ الشكل التالي:



ومن هذا الشكل نلاحظ أنه عند النقطة M_1 تكون:

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = 3$$

بالتعويض في دالة الهدف نحصل على:

$$C_1 = 200 \times 1 + 160 \times 3 = 680$$

أما عند النقطة M_2 فلدينا:

$$x_1 = 3$$

$$x_2 = 1$$

وبالتعويض في دالة الهدف نحصل على:

$$G2 = 200 \,.\, 3 + 16 \times 1 = 760$$

ومنه نلاحظ :

$$\text{Min } C = C_1 = 680$$

ويمكن أن نحصل على نفس النتيجة باستخدام الطريقة الجبرية إذ إن النقطة M_1 تمثل التقاء القيد الأول مع الثاني أي إن:

$$6x_1 + 2x_2 = 12 \ldots\ldots\ldots(1)$$
$$2x_1 + 2x_2 = 8$$

بطرح 2 من 1 نحصل على ما يلي:

$$4x_1 = 4 \Rightarrow x_1 = 1$$

بالتعويض في المعادلة (1) نحصل على:

$$6.1 + 2X_2 = 12 \Rightarrow 2X_2 = 6 \Rightarrow x_1 = 3$$

بالتعويض في دالة الهدف نحصل على ما يلي:

$$C1 = 200 + 160 \times 3 = 680$$

أما النقطة M_2 فتمثل التقاء القيد الثاني مع الثالث أي إن:

$$2x_1 + 2x_2 = 8 \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$
$$4x_1 + 12x_2 = 24 \ldots\ldots\ldots(3)$$

بضرب 2 بـــ 2 نحصل على ما يلي:

$$4x_1 + 4x_2 = 16 \ldots\ldots\ldots(4)$$
$$4x_1 + 12x_2 = 24 \ldots\ldots\ldots(5)$$

بطرح 4 من 5 نحصل على:

$$8x_2 = 8 \Rightarrow x_2 = 1$$

بالتعويض في المعادلة 2 نحصل على ما يلي:

$$2x_1 + 2 = 8$$

$$2x_1 = 6 \Rightarrow x_1 = 3$$

وباستخدام دالة الهدف نحصل على ما يلي:

$$C2 = 200 \times 3 + 160 \times 1 = 600 + 160 = 760$$

ومنه نلاحظ أن:

$$\text{Min } C = C_1 = 680$$

وهذا ما يقودنا إلى القول إن النقطة M_1 هي عبارة عن نقطة التفاؤل وذلك لأن الحد الأدنى لدالة الهدف، التي هي عبارة عن دالة الكلفة يتحقق عن هذه النقطة.

٨-٣- استخدام جداول السمبلكس في حل البرنامج الخطي:

من أجل حل البرمجة الخطية فإننا الآن سوف نقوم بعدة خطوات وفي كل خطوة نقوم بوضع جدول يساعدنا على تسهيل الحل والوصول إلى أفضل النتائج. هذه الجداول يطلق عليها اسم جداول السمبلكس.

بصورة عامة نحن نرغب في تحقيق الحد الأعلى أو الأدنى في قيمة التابع الاقتصادي (تحقيق الحد الأعلى في قيمة تابع الربح والحد الأدنى في قيمة تابع الكلفة). يمكن أن نلخص الحل رياضياً وفق ما يلي:

$$\text{Max } Z = p_1x_1 + p_3x_2 + \ldots\ldots + p_nx_n$$

الموضوع

$$\begin{cases} a_{1,1}\, x_1 + a_{1,2}\, x_2 \ldots\ldots \le r_1 \\ a_{2,1}\, x_1 + a_{2,2}\, x_2 \ldots\ldots \le r_2 \\ \vdots \\ a_{m,1}\, x_1 + a_{m,2}\, x_2 \ldots\ldots \le r_n \end{cases}$$

$$x_j \ge 0$$

p_j هي عبارة عن ربح الوحدة المنتجة من x_j

x_j هي عبارة عن ربح الوحدات المنتجة أو الفعاليات

$a_{i,j}$ هي مجموع المصادر i المطلوبة من قبل الفعالية j

r_i مجموع المصادر i

في الخطوة التالية علينا أن نبحث عن تحقيق الحد الأعلى من الربح باستخدام أقل ما يمكن من المصادر.

٨-٣-١- اختيار المتحولات:

من أجل اختيار المتحولات علينا أن نقلب المتراجحات إلى معادلات خطية تسهل عملية اختيار المتحولات الأساسية التي تساعد في تحقيق الحد الأعلى للـــربح. وحـــتى يمكن شرح جداول السمبلكس بشكل واضح فإننا نفترض أن لدينا المشكلة التالية:

$$\text{Max } P = 4x_1 + 3x2$$

$$\text{الموضوع} \begin{cases} x_1 + 2/3\ x_2 \le 6000 \\ x_1 \le 4000 \\ x_2 \le 6000 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

الخطوة الأولى من الحل تقوم على أساس اختيار المتحولات التي تقلب كل مـــن المتراجحات السابعة إلى معادلة. مثلاً نفترض أن المتحول S_1 يقلب المتراجحة.

$$x_1 + 2/3\ x_2 \le 6000$$

إلى المعادلة التالية:

$$x_1 + 2/3\ x_2 + S_1 = 6000$$

والمتحول S_2 يعطي المتراجحة الثانية الشكل التالي:

$$x_1 + S_2 = 4000$$

والمتحول S_3 يعطى المتراجحة الثالثة الشكل التالي:

$$x_2 + S_3 = 6000$$

من هذه الافتراضات فإن البرنامج الخطي السابق يأخذ الوضع التالي:

$$\text{MaxP} = 4x_1 + 3x_2 + 0 \cdot S_1 + 0 + 0 \cdot S_2 + 0 \cdot S_3$$

$$\text{الموضوع} \begin{cases} x_1 + 2/3\, x_2 + s_1 = 6000 \\ x_1 + s_2 = 4000 \\ x_2 + s_3 = 6000 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0$$

هذا البرنامج يمكن أن يوضع على شكل مصفوفة جبرية وذلك وفق ما يلي:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2/3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6000 \\ 4000 \\ 6000 \end{bmatrix}$$

٨-٣-٢- تكوين الجدول:

بعد وضع البرنامج في صيغة مصفوفة جبرية، يمكننا تكوين الجدول الذي يلخص جميع المعلومات، المتعلقة بهذا البرنامج. هذا الجدول يحتوي على المتحولات الأساسية للبرنامج، كما إنه يحتوي على كمية المصادر المتوفرة من أجل الإنتاج، بالإضافة إلى ذلك فإنه يشير إلى كمية الأرباح التي يمكن تحقيقها. إذاً يمكن وضع البرنامج السابق في الجدول التالي:

P_i	أساس	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	r_i
0	S_1	1	2/3	1	0	0	6000
0	x_2	1	0	0	1	0	4000
0	S_3	0	1	0	0	1	6000
	Z_j	0	0	0	0	0	
	P_j	4	3	0	0	0	

٨-٣-٣- الحل الممكن:

هناك مجموعة من الخطوات المتعاقبة الواجب اتباعها من أجل الوصول إلى الحل المتفائل للبرمجة الخطية. هذه الخطوة تقوم بشكل أساس على البحث عن قيم المتحولات التي تحقق الربح.

بما أن x_2, x_1 هي المتحولات التي تحقق الربح، و S_1, S_2, S_3 هي المتحولات التي لا تحقق أي ربح، إذاً يتوجب علينا البحث عن عدد الوحدات الواجب إنتاجها من كل من x_2, x_1 من أجل تحقيق الحل الأعلى للربح.

من الجدول السابق يمكن أن نلاحظ أن:

$$x_1 = x_2 = 0$$
$$S_1 = 6000$$
$$S_2 = 4000$$
$$S_3 = 6000$$

٨-٣-٤- اختيار المتحولات الوسيطية:

باختيار المتحولات الوسيطية يتوجب علينا الوصول إلى الحل المتفائل. هذا الحـــل يمكن الوصول إليه عن طريق استخدام جداول السمبلكس.

من أجل المتحولات غير الأساسية فإن قاعدة السمبلكس معبر عنها بما يلي:

$$\Delta ofj = P_j - \sum a_{i,j} P_i$$

أي إن:

$$\Delta ofj = P_j - Z_i$$

هي قيمة قاعدة السمبلكس من أجل المتحولات غير الأساسية.

P_j هي معامل المتحولات غير الأساسية.

P_i هي معامل التابع الاقتصادي للمتحولات الأساسية.

$a_{i,j}$ مجموع المصادر المطلوبة من قبل الفعالية j

من أجل حساب Δofj، لنفترض أن المتحول x_1 هو غير أساس. هذا الافتراض يقودنا إلى ما يلي:

$$\Delta ofj = 4 - 1 \times 0 = 4$$

حيث إن:

$$a_{1,1} = 1$$
$$a_{2,1} = 1$$
$$a_{3,1} = 0$$

كما أن P_3,P_2,P_1 هي جميعها معادلة إلى الصفر؛ مما يقود إلى عدم تحقيق أي ربح.

٨-٣-٥- اختيار متحول المنطلق:

في هذه المرحلة يتوجب علينا اختيار متحول المنطلق، فلو رجعنا إلى الأسطر المكونة للمصفوفة لوجدنا أن متحولات المنطلق هي:

$$S_3,S_2,S_1$$

من الرجوع إلى البرنامج السابق نلاحظ أن:

$$S_1 = 6000$$
$$S_2 = 4000$$
$$S_3 = 6000$$

إن أي قرار يمكن اتخاذه عن طريق فحص العمود $\frac{r_i}{a_{i,j}}$ واختيار أصغر قيمة في هذا الشعاع ثم أخذ السطر المقابل لها كمنطلق. من البرنامج السابق يمكن حساب الشعاع $\frac{r_i}{a_{i,j}}$ وفق ما يلي:

P_i	أساس	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	r_i	$\frac{r_i}{a_{i,j}}$
0	S_1	1	2/3	1	0	0	6000	6000
0	S_2	1	0	0	1	0	4000	4000
0	S_3	0	1	0	0	1	6000	6000
	P_j	4	3	0	0	0		
	Δofi	4	3	0	0	0		

من هذا الجدول نلاحظ أن أدنى قيمة في الشعاع $\frac{r_i}{a_{i,j}}$ تقع مقابل السطر الثاني كما أن $a_{1,1}=a_{2,1}=1$. إذن يمكننا القول إن $a_{2,1}$ هي عنصر محوري وبما أنها تقع في العمود الأول فإنه يمكننا اعتبار المتحول x_1 متحول منطلق. لو طرحنا عناصر السطر الثاني من عناصر السطر الأول لحصلنا على الجدول التالي:

P_i	أساس	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	r_i
0	S_1	0	2/3	1	-1	0	2000
4	x_2	1	0	0	1	0	4000
0	S_3	0	1	0	0	1	6000
	P_j	4	3	0	0	0	16000
	Δofi	0	3	0	-4	0	

من هذا الجدول نلاحظ أن:

$$P = 4 \times 4000 + 0 \times 2000 + 0 \,.\, 6000 = 16000$$

٨-٣-٦- تحديد الحل المتفائل:

إن حل جداول السمبلكس يحتاج إلى إجراء عدة خطوات للوصول إلى الحل المتفائل للبرمجة الخطية. هذه المتحولات يمكن عرضها فيما يلي:

لو تفحصنا الجدول السابق لوجدنا أن:

$$a_{1,2} \,.\, 3/2 = a_{3,2}$$

بضرب عناصر السطر الأول بـ 3/2 وقسمة عناصر العمود r_i على العمود x_2 نحصل على الجدول التالي:

P_i	أساس	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	r_i	$\frac{r_i}{a_{i,j}}$
0	S_1	0	1	3/2	-3/2	0	2000	3000
4	x_1	1	0	0	1	0	4000	00
0	S_3	0	0	0	0	1	6000	6000
	P_j	4	3	0	0	0		
	Δofi	0	3	0	-4	0	16000	

بطرح عناصر السطر الأول من عناصر السطر الثالث نحصل على الجدول التالي:

P_i	أساس	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	r_i	$\frac{r_i}{a_{i,j}}$
3	x_2	0	1	3/2	-3/2	0	3000	سالب
4	x_1	1	0	0	1	0	4000	4000
0	S_3	0	0	-3/2	3/2	1	3000	2000
	P_j	4	3	0	0	0		
	Δofi	0	0	-3/2	1/2	0	25000	

من هذا الجدول نلاحظ أن التابع الاقتصادي يأخذ القيمة التالية:

$$P = 3000 \cdot 3 + 4000 \cdot 4 + 3000 \cdot 0 = 25000$$

بما أن:

$$a_{1,4} = - a_{3,4}$$

إذاً لو جمعنا عناصر السطر الثالث مع عناصر السطر الأول، ثم بعد ذلك ضربنا عناصر السطر الثالث بـ 2/3 وطرحناها من عناصر السطر الثاني لحصلنا على الجدول التالي:

C_i	أساس	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	r_i
3	x_2	0	1	0	0	1	6000
4	x_1	1	0	1	0	-2/3	2000
0	S_2	0	0	-1	1	2/3	2000
	p_j	4	3	0	0	0	
	Δofi	0	0	-4	0	-1/3	26000

من هذا الجدول نلاحظ أن التابع الاقتصادي يأخذ الشكل التالي:

$$P = 6000 \cdot 3 + 2000 \cdot 4 + 2000 \cdot 0 = 26000$$

هذه القيمة تمثل الحد الأعلى للربح الذي يمكن الحصول عليه، وبالتالي فإن تحقيق هذا الحد يتطلب إنتاج 2000 من السلعة x_1 و 6000 وحدة من السلعة x_2 . أما

كمية المصادر الواجب استخدامها من أجل إنتاج هذه الكمية من السلع فهي معادلة إلى ما يلي:

$$2000 + 2/3\ 6000 = 6000$$

$$2000 + 2000 = 4000$$

$$6000 = 6000$$

٨-٣-٧- برنامج تحقيق الحد الأدنى:

لقد بينا في البحث السابق كيف يمكن وباستخدام جداول السمبلكس معرفة عدد الوحدات الواجب إنتاجها من كل سلعة؛ من أجل تحقيق الحد الأعلى في الربح. في هذا البحث سوف نبين كيف يمكن وباستخدام جداول السمبلكس تقدير عدد الوحدات الممكن إنتاجها، من كل سلعة، وبأدنى كلفة ممكنة.

لنفترض أنه لدينا البرنامج التالي:

$$\text{Min } C = 2x_1 + 3x_2$$

$$\text{الموضوع} \begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ 6x_1 + 2x_2 \geq 8 \\ x_1 + 5x_2 \geq 8 \end{cases}$$

$$x_j\ ,\ x_2 \geq 0$$

من أجل إمكانية استخدام جداول السمبلكس، في حل هذا البرنامج، فإن لا بـد من قلب هذه المتراجحات إلى معادلات، وذلك وفق ما يلي:

$$x_1 + x_2 = 4$$

$$6x_1 + 2x_2 - S_1 = 8$$

$$x_1 + 5x_2 - S_2 = 8$$

ثم، بعد ذلك، ننتقل إلى اختبار المتحولات الأساسية، في هذا البرنامج، المتحولات الأساسية، هي:

$$S_1 = -8$$

$$S_2 = -8$$

بما أن قيمة كل من هذين المتحولين هي سالبة فلا يمكـن اعتبارهمـا متحـولين رئيسين بل نعتبرهما متحولين وهميين، ونبحث عن متحولات أخرى تعد رئيسة. على ضوء ذلك فإن المشكلة تأخذ الوضع التالي:

$$\text{Min } C = 2x_1 + 3x_2 - 0 \cdot S_1 - 0 \cdot S_2 + M(A_1+A_2+A_3)$$

الموضوع

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + A_1 = 4 \\ x_1 + x_2 - S_1 + A_2 = 8 \\ x_1 + x_2 - S_2 + A_3 = 8 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \ , \ 1 \leq j \leq 7$$

الآن يمكننا استخدام جداول السمبلكس لو افترضنا أن المتحولات:

$$x_5, x_6 , x_7$$

هي متحولات رئيسة، أي متحولات المنطلق، فإن البرنامج الخطي يأخذ شـــكل الجدول التالي:

C_i	أساس	x_1	x_2	S_1	S_2	A_1	A_2	A_3	r_i
M	A_1	1	1	0	0	1	0	0	4
M	A_2	6	2	-1	0	0	1	0	8
M	A_3	1	5	0	-1	0	0	1	8
	C_j	2	3	0	0	M	M	M	
	Δof_j	2	3	M	M	0	0	0	20M
		-8H	-8M						

من قراءة هذا الجدول نلاحظ أن أعلى قيمة في مصفوفة السلع هي (٦)، وتقع في السطر الثاني والعمود الأول؛ فلو ضربنا السطر الثاني بـــ $\frac{1}{2}$ وقسمنا عناصر العمود r_i على عناصر العمود x_1 لحصلنا على الجدول التالي:

C_i	أساس	x_1	x_2	S_1	S_2	A_1	A_2	A_3	r_i	$\frac{r_i}{a_{i,j}}$
M	A_1	1	1	0	0	1	0	0	4	4
M	A_2	1	1/3	-1/6	0	0	1/6	0	8	8/6
M	A_3	1	5	0	-1	0	0	1	8	8
	C_j	2	3	0	0	M	M	M		
	Δof_j	2 -8M	3 -8M	M	M	0	0	0	20M	

بطرح عناصر السطر الثاني من عناصر السطر الأول والثالث؛ نحصل على الجدول التالي:

C_i	أساس	x_1	x_2	S_1	S_2	A_1	A_3	r_i
y	A_1	0	2/3	1/6	0	1	0	8/3
2	xy	1	1/3	-1/6	0	0	0	4/3
M	A_3	0	14/3	1/6	-1	0	1	20/3
	C_j	2	3	0	0	M	M	
	Δofi	0	7/3	1/3	M	0	0	8/3
			-16/3M	-M/3				28/3M

من هذا الجدول نلاحظ أن أكبر قيمة في مصفوفة السلع تقع في السطر الثالث والعمود الثاني. لو ضربنا السطر الثالث بـ $\frac{1}{14}$ وطرحنا الناتج من السطر الثاني؛ لحصلنا على ما يلي:

x_1	x_2	S_1	S_2	A_1	r_i
0	2/3	1/6	0	1	8/3
1	0	-15/84	1/14	0	6/7
0	1/3	1/64	-1/4	0	20/42

بضرب السطر الثالث بـ ٣ نحصل على الشعاع التالي:

[0 1 3/8 -3/4 0 60/42]

بطرح هذا الشعاع من السطر الأول نحصل على الجدول التالي:

C_i	أساس	x_1	x_2	S_1	S_2	A_1	r_i	$\frac{r_i}{a_{i,j}}$
M	A_1	0	0	1/7	1/7	1	12/7	12
2	x_1	1	0	-15/84	1/14	0	6/7	سالب
3	x_2	0	1	1/28	-3/4	0	10/7	40
	C_j	2	3	0	0	M	6	
	Δofj	0	0	1/4	1/2	0	12/7M	
				-M/7	-M/7			

بضرب السطر الأول بـــ $\frac{1}{15}$ وجمعه مع السطر الثاني؛ نحصل على ما يلي:

C_i	أساس	x_1	x_2	S_1	S_2	r_i
M	A_1	0	0	15/84	15/84	15/7
2	x_1	1	0	0	¼	3
3	x_2	0	1	1/28	-3/4	10/7

بضرب السطر الأول بـــ $\frac{3}{15}$ وطرحه من السطر الثالث؛ نحصل على ما يلي:

C_i	أساس	x_1	x_2	S_1	S_2	r_i
M	A_1	0	0	1/28	1/28	3/y
2	x_1	1	0	0	1/4	3
3	x_2	0	1	0	-1/4	1

وبضرب السطر الأول بـــ 28؛ نحصل على ما يلي:

C_i	أساس	x_1	x_2	S_1	S_2	r_i
0	S_1	0	0	1	1	12
2	x_1	1	0	0	¼	3
3	x_2	0	1	0	- ¼	1
	C_j	2	3	0	0	-
	Δofj	0	0	0	¼	9

من هذا الجدول نلاحظ أن:

$$x_1 = 3$$

$$x_2 = 1$$

ومنه فإن التابع الاقتصادي يأخذ الشكل التالي:

$$\text{Min } C = 3 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 9$$

وهذا يمثل الحد الأدنى لكلفة الإنتاج.

٨-٣-٨- ثنائي البرنامج الخطي:

بعد أن تم تقديم الحل الأولي للبرمجة الخطية فإنه يمكن القول إن الحل المتفائل للبرنامج الأولي يمكن الوصول إليه عن طريق استخدام جداول السمبلكس. من ناحية

أخرى يمكن القول إنه لكل برنامج أولي يوحد برنامج بديل يعرف باسم ثنائي البرمجة الخطية.

إن ثنائي البرمجة الخطية يمكن الوصول إليه عن طريق إدخال متغيرات جديدة تعرف باسم المتغيرات البديلة للمتغيرات الأولية. لو افترضنا أنه لدينا البرنامج التالي:

$$\text{Max } P = 4x_1 + 3x_2$$

$$x_1 + 2/3x_2 \leq 6000$$

$$x_1 \leq 4000$$

$$x_2 \leq 6000$$

$$x_1 \geq 0 \quad , \quad x_2 \geq 0$$

فإن ثنائي هذا البرنامج هو التالي:

$$\text{Min } C = 6000\, y_1 + 4000y_2 + 6000y_3$$

$$y_1 + y_2 \geq 4$$

$$2/3y_1 + y_3 \geq 3$$

$$y_1 \geq 0 \ , \ x_2 \geq 0 \ , \ y_3 \geq 0$$

من هذا العرض يمكن أن نلاحظ أن المتحولات البديلة هي:

$$y_1, y_2, y_3$$

من ناحية أخرى يمكن إجراء المقارنة بين البرنامج الأولي، والبرنامج البديل وفق الجدول التالي:

	أولي	بديل
عدد متغيرات القرار	2	3
عدد القيود	3	2
الثوابت	المصادر	ربح الوحدة المنتجة
المعاملات	مواد أولية	أسعار الظل

حتى يمكن حل البرنامج البديل، باستخدام جداول السمبلكس، فإنه يتوجب علينا التفريق بين المتحولات الأساسية والمتحولات التي ترغب بإحلالها لتحديد الحل الأولي الممكن. إن البرنامج السابق يمكن أن يوضع في الصيغة التالية.

$$\text{MinC} = 6000y_1 + 4000y_2 + 6000y_3 - 0S_1 - 0S_2$$

$$\text{الموضوع} \begin{cases} y_1 + y_2 - S_1 = 4 \\ 2/3\, y_1 + y_3 \quad S_2 = 3 \end{cases}$$

$$y_1 \geq 0 \,,\, y_2 \geq 0 \,,\, y_3 \geq 0$$

من القيود السابقة يمكن القول إن:

$$S_1 = -4$$

$$S_2 = -3$$

وإن الجدول الأولي لهذا البرنامج هو التالي:

C	أساس	y_1	y_2	y_3	S_1	S_2	r_i
4000	y_2	1	1	0	-1	0	4
6000	y_3	2/3	0	1	0	-1	3
	Z	8000	4000	6000	-4000	-6000	
	C	6000	4000	6000	0	0	
	C-Z	-2000	0	0	4000	6000	34000

من هذا الجدول نلاحظ، ومن قراءة السطر C-Z، أن أدنى قيمة هي (2000-). هذه القيمة تعد قيمة المنطلق؛ وذلك لأننا نبحث عن الحد الأدنى في قيمة التابع الاقتصادي.

لو قسمنا العمود r_i على العمود y_1 لحصلنا على ما يلي:

$$r_i/y_1$$

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 4,5 \end{bmatrix}$$

في هذا الشعاع نلاحظ أن أدنى قيمة هي 4 وهذه القيمة تقابل المتحول y_2 أي إنه يمكن أن نقوم بإحلال y_1 بدلاً من y_2، وذلك وفق ما يلي:

لو ضربنا السطر الأول بـ 2/3 وطرحنا الناتج من السطر الثاني لحصلنا على الجدول التالي:

C	أساس	y_1	y_2	y_3	S_1	S_2	r_i
4000	y_1	2/3	2/3	0	-2/3	0	83/
6000	y_3	0	-2/3	1	2/3	-1	1/3

بضرب السطر الأول بـ 3/2، نحصل على الجدول التالي:

C	أساس	y_1	y_2	y_3	S_1	S_2	r_i
6000	y_1	1	1	0	-1	0	4
6000	y_3	0	-2/3	1	2/3	-1	1/3
	Z	6000	2000	6000	-2000	-6000	
	C	6000	4000	6000	0	0	
	C-Z	0	2000	0	2000	6000	26000

من هذا الجدول يمكن إعطاء الحل المتفائل للبرنامج البديل فيما يلي:

$$y_1 = 4$$

$$y_2 = 0$$

$$y_3 = 1/3$$

$$\text{Min } C = 4 \cdot 6000 + 0 \cdot 4000 + 1/3 \cdot 6000 = 26000$$

الفصل التاسع
القيمة المقابلة

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

وقل رب زدني علما
Damascus University

٩-١- استخدام الحل البياني في حساب القيمة المقابلة :

لنفترض أنه لدينا مصنع وأن هذا المصنع بإمكانه أن يقوم بإنتاج كل من السلعتين x_1 و x_2 و أن المعلومات المتوفرة حولها تبين السلعتين تأخذ شكل الجدول التالي:

X_2	X_1	
1	4	مواد أولية الصنع وحدة واحدة (مقداره بالكيلو غرام)
3	2	ساعات عمل لازم لصنع وحدة واحدة
11	12	كلفة إنتاج كل وحدة
16	24	أسعار مبيع كل وحدة
320	180	الحد الأعظمي لكمية الإنتاج

من ناحية أخرى إن مقدار المتوفر من المواد الأولية هو (٨٠٠) بالرجوع كما أن هناك (٩٠٠) ساعة عمل متاحة .

حسب المعطيات السابقة يمكن القول إن ربح كل وحدة منتجة من x1 و x2 هو مساوي إلى ما يلي :

$$P_{(X1)} = 24 - 18 = 6$$

$$P_{(X2)} = 16 - 11 = 5$$

من ناحية أخرى إن البرنامج المناسب لهذه المشكلة يأخذ الشكل التالي :

$$\text{Max } P = 6x_1 + 5x_2$$

$$4x_1 + x_2 \leq 800$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 900$$

$$x_1 \leq 180$$

$$x_2 \leq 320$$

$$x_2 \geq 0 \text{ ، } x_1 \geq 0$$

هذا البرنامج يمكن أن يجري حله إما بطريقة جداول السمبلكس أو بالطريقة البيانية .

وسوف نقوم الآن بحله عن طريق استخدام الطريقة البيانية.

إن استخدام الطريقة البيانية يتطلب القيام بعدة خطوات أهمها ما يلي:

١- التعبير عن المشكلة المطروحة بصفة جبرية (أي وضع المشكلة بصيغة برنامج خطي).

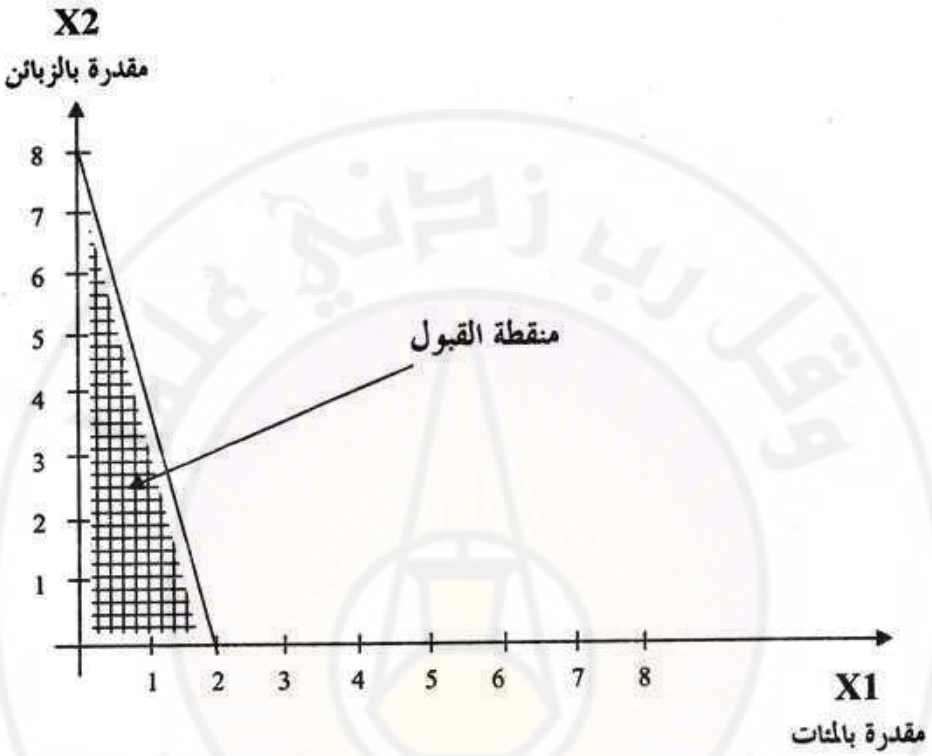
٢- تمثيل القيود المكونة للبرنامج بيانياً بحيث إن كل قيد يأخذ شكل منحنى .

٣- تحديد منطقة القبول

٤- تمثيل دالة الهدف و ذلك عن طريق استخدام النقطة المتفاعلة التي هي عبارة عن أعلى نقطة التقاء في منطقة القبول هذا فيما إذا كان البرنامج يهدف إلى تحقيق الحد الأعظمي في الربح .

٥- قلب المتراجحات إلى معادلات والعمل على إيجاد يتم المتغيرات الأساسية وذلك عن طريق استخدام القيود التي تقاطع عند نقطة التفاؤل .

لو أخذنا البرنامج السابق استخدمنا القيد الأول فقط لوجدنا أن تمثيل هذا القيد يأخذ الشكل التالي:



هذا يقودنا إلى القول إن المصنع لو قرر استخدام المواد الأولية فقط فإن الحد الأعظمي لإنتاجه هو (٢٠٠) وحدة من السلعة x_1 أو (٨٠٠) وحدة من السلعة x_2 . باستخدام دالة الهدف نجد أن الربح يأخذ الشكل التالي :

$$P = 6 \times 200 = 1200$$

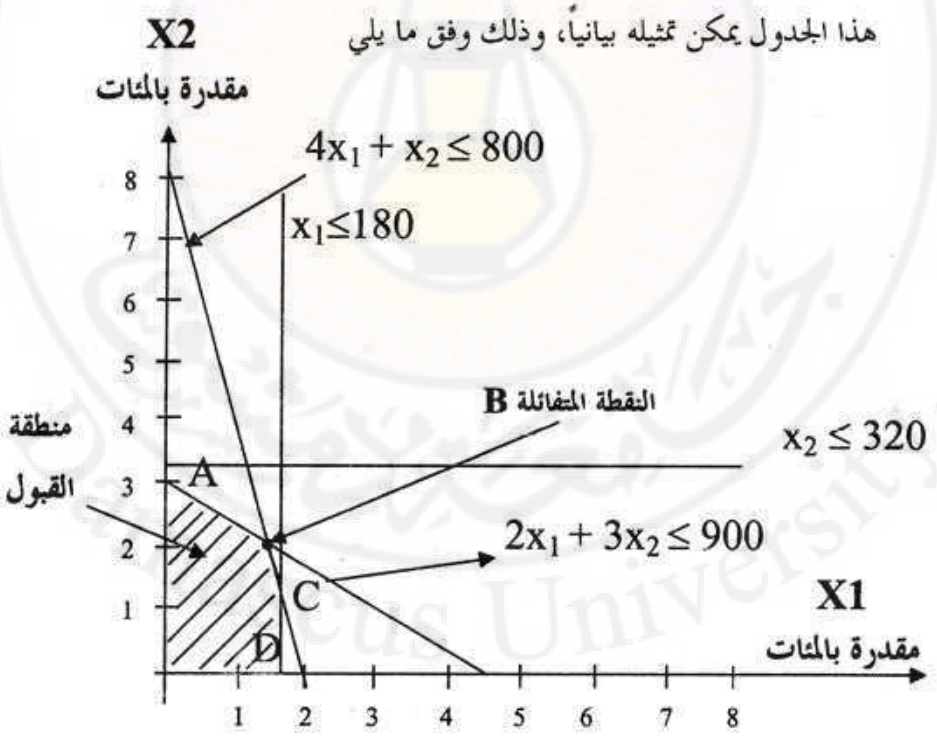
أو

$$P = 5 \times 800 = 400$$

ومنه نلاحظ أن الحد الأعظمي للربح هو ٤٠٠٠ ليرة سورية ، وهذا الحد الأعظمي يتحقق فيما لو اقتصر الإنتاج على x_1 ولم نستخدم الساعات العاملة (لكن هذا غير ممكن، وذلك لأنه لا يمكن تصنيع أي سلعة إلا باستخدام الساعات العاملة)، أي إنه لا بد من استخدام جميع قيود البرنامج، وذلك وفق ما يلي :

إنتاج x_1	إنتاج x_2
$4x_1 \le 800 \Rightarrow x_1 \le 200$	$X_2 \le 800$
$2x_1 \le 900 \rightarrow x_1 \le 450$	$3x_2 \le 900 \rightarrow x_2 \le 300$
$x_1 \le 180$	$x_2 \le 320$

هذا الجدول يمكن تمثيله بيانياً، وذلك وفق ما يلي



من قراءة هذا الرسم البياني يمكن القول إن منطقة القبول هي المنطقة ABCD. وبما أن النقطة B هي أعلى نقطة التقاء، والدالة تنص على تحقيق الحد الأدنى الأعظمي في الربح، فيمكننا القول إن القيم المقابلة لهذه النقطة؛ ولكن من x_1 و x_2 هي القيم التي تساعد على تحقيق الحد الأعظمي في الربح .

بما أن النقطة B هي نقطة التقاء القيد الأول مع الثاني؛ فإنه يمكننا أن نقوم بحساب قيم x_1 و x_2 من هذين القيدين .

لو أخذنا هذين القيدين وأخذنا إمكانية المساواة لحصلنا على ما يلي:

$$4x_1 + x_2 = 800 \text{ -------1}$$

$$2x_1 + 3x_2 = 900 \text{ -----2}$$

بضرب المعادلة ١ بـ ٣ نحصل على ما يلي:

$$12x_1 + 3x_2 = 2400 \text{ ------(1)}$$

$$2x_1 + 3x_2 = 900 \text{ ------ (٢)}$$

بطرح (٢) من (١) نحصل على:

$$10x_1 = 1500$$

$$x1 = 150$$

بالتعويض في المعادلة ١ نحصل على:

$$4 \cdot 150 + x_2 = 800$$

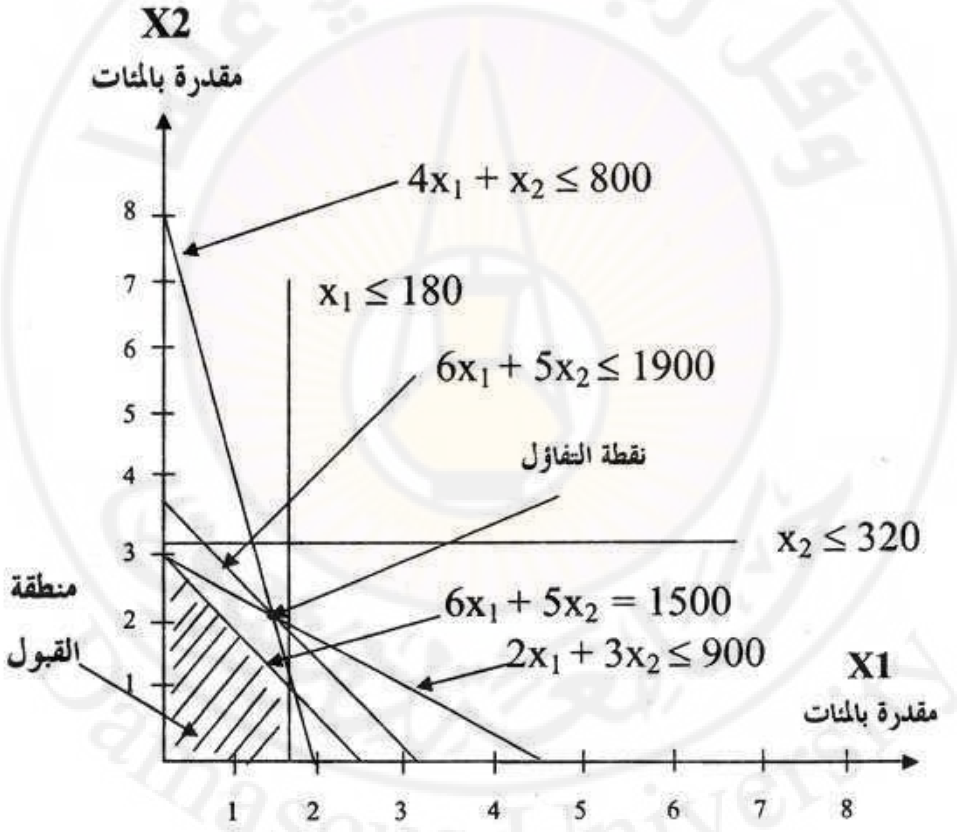
$$600 + x_2 = 800$$

$$x_2 = 200$$

لو رجعنا إلى دالة الهدف لوجدنا أن:

$$\text{Max } P = 900 + 1000 = 1900$$

ومنه يمكن القول إن الحد الأعظمي للربح هو ١٩٠٠ ليرة سورية . هذا الربح يمكن الحصول عليه فيما لو أنتج المصنع (١٥٠) وحدة من السلعة x_1 و (٢٠٠) وحدة من السلعة x_2. إن تمثيل دالة الهدف بيانيا يأخذ الشكل التالي:



من هذا الشكل البياني نلاحظ أن أعلى قيمة للربح والذي يمكن الحصول عليه، هي (١٩٠٠) ليرة سورية، وهذا الربح يتحقق عند النقطة B . هذا ما يدعونا إلى أن نطلق على النقطة B اسم نقطة التفاؤل .

إن القيمة المقابلة لكل من المواد الأولية والساعة العاملة (حيث إن القيمة المقابلة تعرف بأنها عبارة عن التغيير الذي يطرأ على دالة الهدف نتيجة زيادة استخدام المواد الأولية، أو الساعة العاملة بوحدة واحدة ٩ يمكن حسابها عن طريق استخدام القيدين الأساسيين الأول و الثاني، حيث إن القيد الأول يعبر عن المتوفر من المواد الأولية وما يلزم لإنتاج وحدة واحدة من كل من x_1 و x_2، وبالوقت نفسه فإن القيد الثاني يعبر عن المتوفر من الساعات العاملة و عدد الساعات اللازمة لإنتاج وحدة واحدة من كل من x_1 و x_2 .

لو أخذنا بالحسبان القيدين الأول و الثاني وقررنا زيادة استخدام المواد الأولية بمقدار كيلو غرام واحد واكتفينا بإمكانية المساواة لوجدنا ما يلي:

$$4x_1 + x_2 = 801 \text{ ------(1)}$$

$$2x_1 + 3x_2 = 900 \text{ -----(2)}$$

بضرب (١) ب (٣) نحصل على ما يلي:

$$12x_1 + 3x_2 = 2403 \text{ -----I}$$

$$2x_1 + 3x_2 = 900 \text{ -----II}$$

بطرح II من I نحصل على ما يلي:

$$10x_1 = 1503$$

$$x_1 = 150,3$$

بالتعويض في المعادلة (١) نحصل على:

$$4 \cdot 150{,}3 + x_2 = 801$$

$$601{,}2 + x_2 = 801$$

$$x_2 = 801 - 601{,}2 = 199{,}8$$

بالتعويض نجد دالة الهدف نحصل على:

$$\text{Max } P = 6x_1 + 5x_2 =$$

$$= 6 \cdot 150{,}3 + 5 \cdot 199{,}8 =$$

$$= 901{,}8 + 999 = 1900{,}8$$

ومنه يمكن القول إن القيمة المقابلة لزيادة استخدام المواد الأولية بكيلو غرام واحدة هي ٠,٨ ليرة سورية، وهذا ما يدعونا إلى القول إن الحد الأعظمي لسعر هذا الكيلو غرام من المواد الأولية هو ٠,٨ ليرة سورية.

أما لو زدنا استخدام الساعات العاملة (ساعات العمل) بساعة واحدة فقط؛ فإن القيدين الأول و الثاني سوف يأخذان الشكل التالي:

$$4x_1 + x_2 = 800 \ldots\ldots\ldots (١)$$

$$2x_1 + 3x_2 = 901 \ldots\ldots\ldots (2)$$

بضرب المعادلة (1) بـ 3 نحصل على ما يلي:

$$12x_1 + 3x_2 = 2400 \text{ ----- I}$$

$$2x_1 + 3x_2 = 901 \text{ ------ II}$$

بطرح II من I نحصل على ما يلي:

$$10x_1 = 1499$$

$$x_1 = 149,9$$

بالتعويض في المعادلة (١) نحصل على:

$$4 \cdot 1499,9 + x_2 = 800$$

$$x_2 = 800 - 599,9 = 200,4$$

بالرجوع إلى دالة الهدف نجد أن:

$$\text{Max } P = 6x_1 + 5x_2$$

بتعويض x_1 و x_2 بقيمهما نحصل على:

$$\text{Max } P = 6 \cdot 149.9 + 5 \cdot 200.4 =$$

$$= 899,4 + 1002 = 1901,4$$

هذه النتيجة تقودنا إلى القول إن القيمة المقابلة لزيادة ساعات العمل بساعة واحدة فقط هي مساوية إلى

$$1901,4 - 1900 = 1,4$$

أي إن الحد الأعظمي لأجر هذه الساعة الإضافية هو ١,٤ ليرة سورية . هذا الأجر يطلق عليه أحياناً اسم القيمة المضافة، وأحياناً أخرى يطلق عليه اسم سعر الظل.

فلو افترضنا أن الأجر الأساس هو (٢) ليرة سورية؛ فإن الحد الأعظمي لأجر الساعة العاملة هو ٣,٤٠ ليرة سورية ولا يمكن مطلقاً تجاوز هذا الحد.

من النتائج السابقة يمكن القول إن زيادة الإنتاج بوحدة واحـــدة مـــن X_1 و X_2 يحتاج إلى زيادة استخدام المواد الأولية بثلاثة بالرجوع، وزيادة عدد ساعات العمل ب أربع ساعات وهذه الزيادة في نفقات الإنتاج تعادل إلى ما يلي:

$$3 \times 0,8 + 4 \times 1,4 = 8 \text{ ليرة سورية}$$

أما لو أردنا تقدير نفقات تصنيع الوحدة الواحدة من كل مـــن X_1 و X_2 فإنـــه يمكن القول إن نفقات تصنيع أي وحدة إضافية من X_1 يجب أن لا تتجاوز ستة لـــيرة سورية . هذه القيمة تم الحصول عليها عن طريق القيدان الأول و الثـــاني، و الأخـــذ بالحسبان ما يلزم لتصنيع هذه الوحدة من كل من المواد الأولية و ساعات العمل و هذا وفق ما يلي:

$$4 \times 0,8 + 2 \times 1,4 = 6$$

من ناحية أخرى أن نفقات تصنيع أي وحدة إضـــافية مـــن X_2 يجـــب أن لا تتجاوز خمس ليرات سورية.

وهذه القيمة قد تم الحصول عليها عند الأخذ بالحسبان بمستلزمات إنتاج، هـــذه الوحدة الإضافة وثمن هذه المستلزمات، وذلك وفق ما يلي:

$$1 \times 0,8 + 3 \times 1,4 = 5$$

من هذه النتائج يمكن القول إن القيمة المقابلة لنفقات إنتاج كل من السلع X_1 و X_2 يجب أن لا تزيد عن ستة ليرات بالنسبة لكل وحدة منتجة من X_1 وعن خمسة ليرات بالنسبة لـــكل وحدة منتجة من X_2 .

٩-٢- استخدام جداول السمبلكس في حساب أسعار الظل :

تـــــعريف:

إن أسعار الظل هي عبارة عن مقدار التغير الذي يطرأ على دالة الهدف عند زيادة استخدام المصادر بوحدة واحدة . ويمكن شرح أسعار الظل وفق الخطـــوات التاليـــة لو افترضنا أنه لدينا البرنامج الخطي التالي:

$$\text{Max } P = 5x_1 + 12x_2$$

$$\text{الموضوع} \begin{cases} 5/4\, x_1 \leq 30 \\ 5/4\, x_1 + 2x_2 \leq 50 \\ x_2 \leq 15 \end{cases}$$

$$x_2 \geq 0 \qquad x_1 \geq 0$$

من أجل حل هذا البرنامج لا بد من قلب المتراجحات إلى معادلات، وذلك وفق ما يلي:

$$\text{Max } P = 5x_1 + 12x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$\text{الموضوع} \begin{cases} 5/4\, x_1 + x_3 = 30 \\ 5/4\, x_1 + 2x_2 + x_4 = 50 \\ x_2 + x_5 = 15 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$

وحتى يمكن استخدام طريقة السمبلكس في إيجاد الحل الأمثل لا بد من وضع البرنامج في صيغة جدول؛ وذلك وفق ما يلي:

p_i	أساس	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	r_i
0	x_3	5/4	0	1	0	0	30
0	x_4	5/4	2	0	1	0	50
0	x_5	0	1	0	0	1	15
	Z	0	0	0	0	0	
	pj	5	12	0	0	0	
	ΔF	5	12	0	0	0	

من قراءة هذا الجدول نلاحظ أن أكبر قيمة في السطر ΔF هي 12 وتقع في العمود x_2 . أي إن العمود x_2 هو عمود المنطلق وبقسمة العمود r_i على العمود x_2 نجد:

$$\frac{r_i}{a_{i,j}}$$

$$\begin{bmatrix} 00 \\ 25 \\ 15 \end{bmatrix}$$

ومنه نلاحظ أن أدنى sقيمة هي 15 وتقع في السطر الثاني، ثم بتقسيم السطر الثالث على 2 نجد الجدول التالي:

p_i	أساس	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	r_i
0	x_3	5/4	0	1	0	0	30
0	x_4	5/4	0	0	1	-2	20
12	x_5	0	1	0	0	1	15
	Z	0	12	0	0	12	
	pj	5	12	0	0	0	
	ΔF	5	0	0	0	-12	180

من هذا الجدول ومن قراءة السطر ΔF نلاحظ أن أكبر قيمة هي 5 ، وأن العمود x_1 هو عمود المنطلق . لو قسمنا العمود r_i على العمود x_1 لوجدنا التالي:

$$\frac{r_i}{a_{i,j}}$$

$$\begin{bmatrix} 37,5 \\ 25 \\ 00 \end{bmatrix}$$

ومنه نلاحظ أن أدنى قيمة هي 25 وتقع في السطر الثاني، وهذه القيمة هي قيمة المنطلق السطر الثاني هو سطر المنطلق . لو طرحنا السطر الثاني من السطر الأول ثم بعد ذلك قسمنا السطر الثاني على ٤/٥ لوجدنا الجدول التالي:

p_i	أساس	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	r_i
0	x_3	0	0	1	-1	2	10
5	x_4	1	0	0	4/5	-8/5	16
12	x_5	0	1	0	0	1	15
	Z	5	12	0	4	4	260
	pj	5	12	0	0	0	
	ΔF	0	0	0	-4	-4	

من هذا الجدول نلاحظ أن:

$$x_1 = 16$$

$$x_2 = 15$$

كما أن دالة الهدف تأخذ الشكل التالي

$$\text{Max } P = 5x_1 + 12x_2 =$$

$$= 5 \cdot 16 + 12 \cdot 15 = 260$$

أي إن الحد الأعلى للربح هو 260

من هذا الجدول الذي يظهر الحل المتفائل، نلاحظ إن القيود الأساسية هي القيد الثاني و الثالث ، لو أخذنا القيد الثالث و أضفناه إلى الجانب الأيمن منه واحد لوجدنا :

$$x_2 = 16$$

وبالتعويض في القيد الثـــاني نجد:

$$5/4\ x_1 + 32 = 50$$

$$5/4\ x_1 = 18$$

$$x_1 = 18 \cdot 4/5 = 14{,}4$$

وبالتعويض في دالـــــة الهـــدف نجد

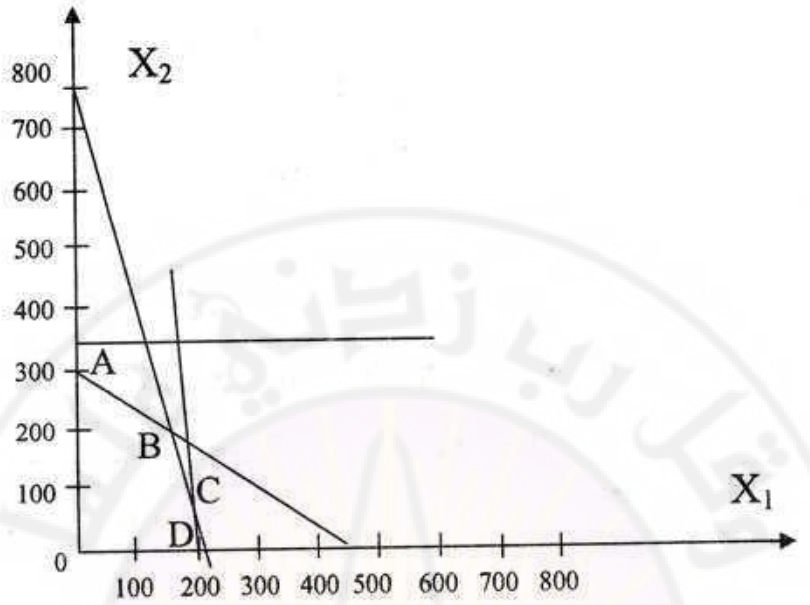
$$\text{Max } P = 14{,}4 \cdot 5 + 12 \cdot 16 = 264$$

وبمقارنة هذه القيمة مع قيمة الدالـــــة الأصلية، نجد أن دالـــــة الهدف قـــد ازدادت بمقدار أربع . هذه الزيادة هي عبارة عن أسعار الظل .

٩-٣- تحليل الحساسية:

في هذه الفقرة سوف نقوم بشرح طريقة خاصة من طرق بحوث العمليات. هذه الطريقة نلجأ إليها عندما لا يكون لدينا أي معلومة حول تفسير الثوابـــت للبرنـــامج الخطي. حتى نقوم بشرح تلك الطريقة فإننا نطرح التساؤلات التالية: هل يمكن وضع نموذج حول ثورة الإنتاج؟ ماذا يحدث لو ازدادت أسعار الموارد بنسبة ٤٥% مثلاً؟ ما نتائج التغيير الذي يمكن أن يطرأ على القيود؟

لنفترض أن أسلوب الإنتاج مقسم بين إمكانية الاســـتمرار في الإنتـــاج الحـــالي وإدخال سلع جديدة؛ وإمكانية التوقف نهائياً عن الإنتاج لو ألقينا نظرة إلى الشـــكل التالي:



لوجدنا أن النقطة B تمثل الحد المتفائل للإنتاج وأن عدد الوحدات المنتجة من x_1 والمساوية إلى 150 ، وعدد الوحدات المنتجة من x_2 والمساوية إلى 200 يقود إلى تحقيق الحد الأعلى للربح. لو أخذ البرنامج الأصلي هو:

$$\text{Max } P = 6x_1 + 5x_2$$

$$4x_1 + x_2 \leq 800$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 900$$

$$x_1 \leq 180$$

$$x_2 \leq 320$$

وأخذنا منه القيدين الأول والثاني اللذين يجمعان بين المتغيرين x_1, x_2 بآن واحد لوجدنا:

$$4x_1 + x_2 \leq 800$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 900$$

وأخذنا إمكانية المساواة فقط لتمكنا من كتابة ما يلي:

$$2x_1 + 3x_2 = 800$$

$$x_2 = 800 - 4x_1$$

هذا بالنسبة للقيد الأول، أما القيد الثاني فإنه يأخذ الشكل التالي:

$$2x_1 + 3x_2 = 900$$

$$x_1 = 300 - 2/3\ x_1$$

وبما أن ربح كل وحدة ننتجه من x_1 هو 6 وحدات نقدية وربح كل وحـــدة ننتجه من x_2 هو 5 وحدات نقدية، فإنه يمكن كتابة المتراجحة التالية:

$$2/3 \leq 6/5 \leq 4$$

أي إن:

$$2/3 \leq \frac{P_1}{P_2} \leq 4$$

بالتعويض عن P_1 بقيمتها نحصل على ما يلي:

$$6/P_2 \leq 4$$

أي إن:

$$4P_2 \geq 6$$

وهذا ما يقود إلى أن:

$$P_2 \geq 6/4 \Rightarrow P_2 \geq 3/2 \Rightarrow P_2 \geq 1{,}5$$

أما الطرف الثاني من المتراجحة فإنه يعطي ما يلي:

$$2/3\ P_2 \leq 6 \Rightarrow P_2 \leq 9$$

هذه النتيجة تقودنا إلى القول إن ربح كل وحدة من x_2 يأخذ شكل المتراجحة التالية:

$$1{,}5 \leq p_2 \leq 9$$

من ناحية أخرى لو أخذنا المتراجحة:

$$2/3 \leq \frac{P_1}{P_2} \leq 4$$

وعوضنا عن p_2 بقيمتها المعطاة في الدالة لحصلنا على المتراجحة التالية:

$$2/3 \leq \frac{P_1}{5} \leq 4$$

أي:

$$10/3 \leq P_1 \leq 20$$

هذه النتيجة تقودنا إلى القول إن ربح كل وحدة ننتجه من السلعة x_1 يجب أن لا يقل عن 10/3 ولا يزيد عن 20 وحدة نقدية.

لو رجعنا إلى المتراجحة:

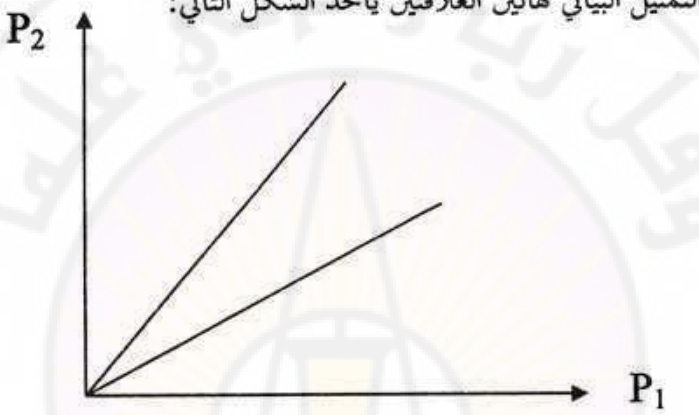
$$2/3 \leq \frac{P_1}{P_2} \leq 4$$

لأمكننا أن نكتب:

$$\frac{P_1}{P_2} \geq 2/3 \Rightarrow P_2 \geq 1{,}5\ P_1$$

$$\frac{P_2}{P_1} \geq 1/4 \Rightarrow P_2 \geq\ 0{,}25\ P_1$$

وإن التمثيل البياني لهاتين العلاقتين يأخذ الشكل التالي:



من هذا الشكل نلاحظ أن المنطقة المظللة هي عبارة عن المنطقة التي يتحقق فيهـــا الحد الأعظمي للربح.

لو رجعنا إلى نتائج حل البرنامج لوجدنا أن:

$$x_1 = 150$$

$$x_2 = 200$$

هذه القيم تمكننا من القول إن ربح المشروع يجب أن لا يقل عن:

$$150 \times 10/3 + 200 \times 1{,}5 = 800$$

وأنه لا يزيد عن:

$$20 \times 150 + 200 \times 9 = 4800$$

وقل رب زدني علما
Damascus University

الفصل العاشر
مشكلة النقل

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

وقل رب زدني علما
Damascus University

١٠- ١- عرض وشرح المشكلة :

إن مشكلة النقل تشكل حالة خاصة من حالات البرمجة الخطية، وإن هذه الحالة تعد أساسية لأنها تحتل مكانة بارزة في تقييم تكلفة الإنتاج، وإن تحقيق الحد الأدنى في تكلفة النقل يساعد كثيراً على تخفيض كلفة الإنتاج من ناحية أخرى، فإن تكلفة نقل المنتجات من أماكن إنتاجها إلى أسواق استهلاكها يساعد على تحقيق الحد الأعلى في قيمة دالة الربح .

عند التعرض إلى مشكلة النقل فإننا نفترض وجود مجموعة من الشركات المنتجة للسلع، ومجموعة من الأسواق التي يتم فيها تصريف هذه المنتجات، لنفرض أن مجموعة الشركات المنتجة تأخذ الشكل التالي :

$$P = p_1, p_1, \ldots\ldots, p_m$$

ومجوعة الأسواق الاستهلاكية تأخذ شكل المجموعة التالية :

$$D = d_1, d_1, \ldots\ldots, d_m$$

وإن التبادل التجاري بين الشركات المنتجة والأسواق الاستهلاكية يأخذ شكل الجدول التالي :

أسواق استهلاكية / شركات منتجة	1	2	....j.....	n	الإنتاج
1	$x_{1,1}$	$x_{1,2}$	$....x_{1,j}....$	$x_{1,n}$	P_1
2	$x_{2,1}$	$x_{2,2}$	$....x_{2,j}....$	$x_{2,n}$	P_2
3	$x_{3,1}$	$x_{3,2}$	$....x_{3,n}....$	$x_{3,n}$	P_3
i	$x_{i,1}$	$x_{i,2}$	$....x_{i,j}....$	$x_{i,n}$	P_i
....	.....	.....	.....	.....	....
m	$x_{m,1}$	$x_{m,2}$	$....x_{m,j}....$	$x_{m,n}$	P_m
الطلب					

في هذا الجدول نلاحظ أن :

$$\sum_{i=1}^{m} x_{i,1} = d_1$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{i,2} = d_2$$

.....

$$\sum_{i=1}^{m} x_{i,n} = d_n$$

كما أنه فيما لو أخذنا بالحسبان الشركات المنتجة لدينا المعادلات التالية :

$$\sum_{j=1}^{n} x_{1,j} = P_1$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{2,j} = P_2$$

.....

$$\sum_{j=1}^{n} a_{m,j} = P_m$$

وإن :

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = P = \sum_{j=1}^{n} d_j = D$$

من ناحية أخرى عند إجراء التبادل التجاري بين هاتين المجموعتين، فإن تكلفة نقل كل وحدة من السلع المتبادلة تأخذ شكل الجدول التالي :

أسواق استهلاكية / شركات منتجة	1	2	3	.....	n
1	$C_{1,1}$	$C_{1,2}$	$C_{1,3}$	.....	$C_{1,n}$
2	$C_{2,1}$	$C_{2,2}$	$C_{2,3}$	.....	$C_{2,n}$
3	$C_{3,1}$	$C_{3,2}$	$C_{3,3}$	.....	$C_{3,n}$
.	.	.	.	.....	.
.	.	.	.	.....	.
m	$C_{m,1}$	$C_{m,2}$	$C_{m,3}$	.....	$C_{m,n}$

في هذا الجدول $C_{1,1}$ تمثل تكلفة نقل كل وحدة من السلع المنقولة من الشركة الأولى إلى السوق الاستهلاكية الأولى؛ أي تكلفة نقل كل وحدة من الكمية $x_{1,1}$ ، أما $C_{1,2}$ فإنها تعبر عن تكلفة نقل كل وحدة من الكمية $x_{1,1}$ وهكذا ..، أما C_{ij} فإنها تعبر عن تكلفة تقل كل وحدة منقولة من الشركة المنتجة i إلى السوق الاستهلاكية j بعد هذه الاقتراحات فإنه يمكن القول إن دالة كلفة النقل تأخذ الشكل التالي :

$$C = x_{1,1} C_{1,1} + x_{1,1} C_{1,2} + \ldots\ldots + x_{m,n} C_{m,n}$$

وإن مشكلة النقل تأخذ شكل البرنامج التالي :

$$\text{Min } C = C_{1,1}x_{1,1} + C_{1,2} x_{1,2} + \ldots\ldots + C_{m,n} x_{m,n}$$

$$x_{1,1} + x_{1,2} + \ldots\ldots + x_{1,n} = P_1$$

$$x_{2,1} + x_{2,2} + \ldots\ldots + x_{2,n} = P_2$$

$$\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots$$

$$x_{m,1} + x_{m,2} + \ldots\ldots + x_{m,n} = P_m$$

هذا بالنسبة لقيود الإنتاج في برنامج الإنتاج i بالنسبة للطلب؛ فإن القيود تأخذ الشكل التالي:

$$x_{1,1} + x_{2,1} + \ldots\ldots + x_{m,1} = d_1$$

$$x_{1,2} + x_{22} + \ldots\ldots + x_{m,2} = d_2$$

$$\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots$$

$$x_{1,n} + x_{2,n} + \ldots\ldots + x_{m,n} = d_n$$

وإن تحقيق الحد الأدنى في كلفة النقل يتطلب منا حل هذا البرنامج عن طريق البحث عن الحدود الدنيا لـ $C_{i,j}$ ، حتى يتسنى لنا شرح طريقة الحل وبصورة واضحة فإننا نفترض أن لدينا المثال التالي :

الكميات المنتجة ، مصفوفة كلفي النقل للوحدات المتبادلة

$$\begin{bmatrix} 8 & 9 & 11 & 16 \\ 12 & 7 & 5 & 8 \\ 14 & 10 & 6 & 7 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 50 \\ 80 \\ 120 \end{bmatrix}$$

الطلب $[90 \quad 70 \quad 40 \quad 50]$

من هذه المعطيات يمكن كتابة ما يلي :

$$\text{Min } C = 8x_{1,1} + 9x_{1,2} + 11\,x_{1,3} + 16x_{1,4} +$$
$$12x_{2,1} + 7x_{2,2} + 5\,x_{2,3} + 8x_{2,4} +$$
$$14x_{3,1} + 10x_{3,2} + 6\,x_{3,3} + 7x_{3,4}$$

وإن قيود البرنامج تأخذ الشكل التالي :

$$x_{1,1} + x_{1,2} + x_{1,3} + x_{1,4} = 50$$

$$x_{2,1} + x_{2,2} + x_{2,3} + x_{2,4} = 80$$
$$x_{3,1} + x_{3,2} + x_{3,3} + x_{3,4} = 120$$

هذا بالنسبة لقيود الإنتاج، أما قيود الطلب فإنها تأخذ الشكل التالي :

$$x_{1,1} + x_{2,1} + x_{3,1} = 90$$
$$x_{1,2} + x_{2,2} + x_{3,2} = 70$$
$$x_{1,3} + x_{2,3} + x_{3,3} = 50$$

هذا البرنامج يمكن أن يوضح في الصيغة التالية :

$$Min \quad C = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{i,j} x_{i,j}$$
$$\sum_{j=1}^{n} x_{i,j} = P_i$$
$$\sum_{i=1}^{m} c_{i,j} = d_j$$
$$x_{i,j} \geq 0$$

كما أن :

$$\sum_{i=1}^{n} x_{i,j} = \sum_{j=1}^{m} x_{i,j}$$

١٠ ــ ٢ ــ حل مشكلة النقل :

بعد أن قمنا بشرح واستعراض مشكلة النقل التي تشكل حالة خاصة جداً من حالات البرمجة الخطية، بل إنها تعد من التطبيقات الهامة للبرمجة الخطية؛ فإننا سوف ننتقل إلى عرض وشرح طرق حل مشكلة النقل.

إن حل مشكلة النقل يختلف باختلاف شروط التسليم فإذا كانت شروط التسليم محددة بصورة مسبقة فإن لدينا طريقتين لحساب الحد الأدنى لكلفة النقل، أما إذا لم تحد شروط التسليم فإن لدينا ثلاث طرق ، وسوف نستعرض طرق حل مشكلة النقل وفق ما يلي :

١٠ ــ ٢ ــ ١ ــ حل مشكلة النقل بعد تحديد شروط التسليم :

عندما يتم الاتفاق بين المنتجين والأسواق المستهلكة؛ فإنه لدينا إمكانتين: فإما يكون التسليم أرض المشتري وتكون القاعدة هي حساب الحد الأدنى لكلفة النقل انطلاقاً من الحدود الدنيا للأسطر؛ ويطلق عليها قاعدة حساب الحد الأدنى حسب مصلحة المنتج ، أما إذا كان شرط التسلم أرض البائع فإن المشتري في هذه الحالة هو الذي يتحمل تكاليف نقل الإنتاج، وهذا ما يجعل كلفة النقل تقوم بشكل أساس على الحدود الدنيا للأعمدة، ويطلق على هذه القاعدة قاعدة حسب الحل الأدنى لكلفة النقل حسب المستهلك، وسوف نستعرض هاتين القاعدتين وفق ما يلي :

١٠ ــ ٢ ــ ١ ــ ١ ــ قاعدة الحد الأدنى لكلفة النقل حسب المنتج :

بالرجوع إلى المصفوفة التي تعبر عن كلفة نقل كل وحدة منتجة نلاحظ أن الشركة الأولى من مصلحتها أن تبيع إلى الشركة الأولى، وذلك لأن أقل قيمة في السطر الأول هي القيمة الأولى، وبما أن إنتاج هذه الشركة أقل من الطلب عليه؛ فإنها تبيع كامل إنتاجها إلى الشركة الأولى أما الشركة الثانية، وبما أن إنتاج هذه الشركة يساوي إلى 80 وحدة وأقل قيمة في السطر الثاني هي 5 هي القيمة الثالثة المقابلة للشركة الثالثة، ولكن بما أن طلب هذه الشركة لا يساوي إلى 40 وحدة؛ فإنه من

مصلحة الشركة المنتجة الثانية أن تبحث عن القيمة الدنيا الثانية ، هذه القيمة تقع في العمود الثاني وهذا ما يدل أن من مصلحة المنتج الثاني أن يبيع باقي إنتاجه في السوق الثانية، وهو مساو إلى 40 وحدة ، أما الشركة الثالثة فإنها تبحث عن القيم الدنيا لكلفة نقل الوحدة هذه القيمة الدنيا تقع في العمود الثالث، ولكن وبما أن هذا السوق قد اكتفى وأخذ كامل حاجته، فإنه ليس لديه أي طلب على منتجات هذه الشركة، وهذا ما يجبر الشركة على البحث عن القيمة الدنيا الثانية والمساوية إلى 7 والواقعة في العمود الرابع، ولكن بما أن هذا السوق حاجته هي 50 وحدة؛ فإن الشركة المنتجة الثالثة تبيع جزءاً من إنتاجها في هذه السوق؛ والباقي والمساوي إلى 70 تبيع 30 وحدة منه في السوق الثانية و40 وحدة في السوق الأولى، ويمكن تمثيل هذه الطريقة في الجدول التالي:

مستهلك / منتفع	1	2	3	4	P
1	8 [50]	9	11	16	50
2	12	7 [40]	5 [40]	8	80
3	14 [40]	10 [30]	6	7 [50]	120
D	90	70	40	50	250

من هذا الجدول فإن الحد الأدنى من تكلفة النقل حسب المنتج هو مساو إلى مـــا يلي :

$$C = 8.50 + 7.40 + 5.40 + 14.40 + 10.30 + 7.50 = 2490$$

١٠ ــ ٢ ــ ١ــ٢ ــ قاعدة الحد الأدنى لكلفة النقل حسب المستهلك :

بأخذ الحدود الدنيا للأعمدة للجدول نفسه فإنه يمكن توزيع المنتجات وفق ما يلي:

مستهلك / منتفع	1	2	3	4	P
1	8 [50]	9	11	16	50
2	12 [40]	7 [40]	5	8	80
3	14	10 [30]	6 [40]	7 [50]	120
D	90	70	40	50	250

ويكون الحد الأدنى لكلفة النقل حسب المستهلك مساوياً إلى ما يلي :

$$\text{Min } C = 8.50 + 12.40 + 7.40 + 10.30 + 6.40 + 7.50 = 2050$$

وهذا ما يقودنا إلى القول إن الحد الأدنى لكلفة النقل حسب المستهلك هو أقل من الحد الأدنى لكلفة النقل حسب المنتج .

وننتقل الآن إلى استعراض قواعد حساب الحد الأدنى لكلفة النقل؛ فيما إذا لم يكن هناك اتفاق على شروط التسليم .

١٠ ــ ٢ــ٢ ــ قواعد حساب الحد الأدنى لكلفة عند عدم تحديد شروط النقل:

عندما لا يكون هناك أي اتفاق بين المنتجين والمستهلكين على شروط التسليم فإن لدينا ثلاث قواعد لحساب الحد الأدنى لكلفة النقل وهي :

١ ــ قاعدة الركن الشمالي الغربي .

٢ ــ قاعدة الحد الأدنى للكلفة بكامل الجدول .

٣ ــ قاعدة فوجل .

وسوف نستعرض هذه القواعد الثلاث فيما يلي :

١٠ ــ ٢ــ٢ ــ١ ــ قاعدة الركن الشمالي الغربي :

تعد قاعدة الركن الشمالي الغربي من أبسط الطرق، وتتلخص خطوات الحل فيما يلي:

١ ــ نبدأ من الخلية التي تقع في الزاوية الشمالية الغربية، وهي التي تقع فيها الكلفة $C_{1,1}$ ونضع فيها أكبر كمية .

٢ ــ إذا تم تصريف كامل الإنتاج ولم يلب الطلب نحذف السطر الأول، ثم بعد ذلك نختار الخلية التي تقع في الركن الشمالي الغربي ونضع فيها باقي الكمية .

٣ ــ إذا لم يتم تصريف كامل الإنتاج وتتم تلبية الطلب بالكامل؛ فإننا نحذف العمود الأول ثم نختار الخلية التي تقع في الركن الشمالي الغربي باقي الإنتاج وهكذا؛ حتى يتم توزيع كامل الإنتاج على جميع الأسواق .

فإذا أخذنا الجدول السابق فإن تطبيق قاعدة الركن الشمالي الغربي يعطينا الجدول التالي:

مستهلك / منتفع	1	2	3	4	P
1	8 [50]	9	11	16	50
2	12 [40]	7 [40]	5	8	80
3	14	10 [30]	6 [40]	7 [50]	120
D	90	70	40	50	250

من هذا الجدول نلاحظ أن الحد الأدنى لكلفة النقل حسب هذه القاعدة هو مساو إلى ما يلي :

$$\text{Min } C = 8.50 + 12.40 + 7.40 + 10.30 + 6.40 + 7.50$$
$$= 400 + 480 + 300 + 240 + 350 = 2050$$

١٠ ــ ٢ــ٢ ــ٢ ــ قاعدة الحد الأدنى لكلفة نقل الوحدة :

حسب هذه القاعدة فإننا نقوم بدراسة الجدول، ونختار الخلية التي تقع فيها أدنى قيمة ونعطيها أكبر إنتاج، ثم ننتقل إلى الخلية التالية؛ وهكذا حتى يتم توزيع كامل الإنتاج، فإذا أخذنا الجدول السابق فإن تطبيق هذه القاعدة يعطينا الجدول التالي :

مستهلك / منتفع	1	2	3	4	P
1	8 50	9	11	16	50
2	12 40	7 40	5 40	8	80
3	14 40	10 30	6	7 50	120
D	90	70	40	50	250

ويكون الحد الأدنى لكلفة النقل مساوياً إلى ما يلي :

$$\text{Min } C = 8.50 + 14.40 + 7.40 + 10.30 + 5.40 + 7.50$$
$$= 400 + 560 + 280 + 300 + 200 + 350 = 2090$$

١٠ ــ ٣ ــ٣ ــ طريقة فوجل التقريبية :

إن هذه الطريقة تقوم على أساس حساب الفرق بين أقل كلفتين في نقل الوحدات، ثم توزع في السطر أو العمود الذي يقابل أكبر فرق وتكرر العملية نفسها لمرات معدودات حتى يتم تصريف الإنتاج بكامله؛ وتلبية طلب المستهلكين، فلو أخذنا الجدول السابق لتوصلنا إلى الجدول التالي :

مستهلك / منتفع	1	2	3	4	P	VAM
1	8 50	9	11	16	50	1
2	12	7 70	5 10	8	80	2,2,3
3	14 40	10	6 30	7 50	120	1,1,1
D	90	70	40	50	250	
VAM	4 2 2	2 3	1 1 1	1 1 1		

ومنه فإن الحد الأدنى لكلفة النقل هو مساو إلى ما يلي :

$$\text{Min } C = 8.50 + 14.40 + 7.70 + 5.10 + 6.30 + 7.50$$
$$= 400 + 560 + 490 + 50 + 180 + 350 = 2030$$

وهكذا فإننا نلاحظ أن أقل قيمة في كلفة النقل قد تحققت حسب طريقة فوجل، وهذا يقودنا إلى القول إن هذه الطريقة تعد من أفضل الطرق، ولكن حتى يمكن الحكم لا بد من اختيار الحل فيما إذا كان أمثل .

١٠ ــ ٣ ــ اختبار الحل :

بالرجوع إلى الجدول الذي يعطي تكاليف نقل الوحدات المنتجة إلى الأسواق الاستهلاكية؛ فإننا نجد أنه يوجد أربعة أسواق استهلاكية وثلاث شركات منتجة؛ أي إنه يكون من ثلاثة أسطر وأربعة أعمدة ، لو رمزنا لى الأعمدة بـــ k_1, k_2, k_3, k_4 إلى الأسطر بـــ R_1, R_2, R_3 لأخذنا الجدول بالشكل التالي :

أعمدة / أسطر	k_1	k_2	k_3	k_4
R_1	$C_{1,1}$	$C_{1,2}$	$C_{1,3}$	$C_{1,4}$
R_2	$C_{2,1}$	$C_{2,2}$	$C_{2,3}$	$C_{2,4}$
R_3	$C_{3,1}$	$C_{3,2}$	$C_{3,3}$	$C_{3,4}$

من هذا الجدول وحتى نتمكن من تحقيق الحد الأدنى في كلفة النقل؛ فإنه يتوجب علينا اختيار الأسطر والأعمدة التي تحقق المساواة التالية :

$$C_{i,j} = R_i + k_j$$

وتحذف الأسطر والأعمدة التي لا تحقق الشرط التالي :

$$R_i + k_j = < C_{i,j}$$

حتى يمكن التعرف على الأسطر والأعمدة التي تحقق الشرطين السابقين لا بد من حساب قيم R , K وذلك وفق الخطوات التالية :

بالرجوع إلى الجدول الذي بموجبه تم توزيع الإنتاج على الأسواق الاستهلاكية حسب طريقة فوجل نجد أن :

$$R_1 + k_1 = C_{1,1} = 8$$
$$R_3 + k_1 = C_{3,1} = 14$$
$$R_2 + k_2 = C_{2,2} = 7$$
$$R_2 + k_3 = C_{2,3} = 5$$
$$R_3 + k_3 = C_{3,3} = 6$$
$$R_3 + k_4 = C_{3,4} = 7$$

بفرض أن :

$$R_1 = 0$$

نجد أن :

$$k_1 = 8 \Rightarrow 0 + k_1 = 8$$
$$R_3 + 8 = 14 \Rightarrow R_3 = 6$$
$$R_3 + k_3 = 6 \Rightarrow k_3 = 0$$
$$R_2 + 0 = 5 \Rightarrow R_2 = 5$$
$$R_3 + k_4 = 7 \Rightarrow 6 + k_4 = 7 \Rightarrow k_4 = 1$$

من هذه النتائج يمكن تكوين الجدول التالي :

$C_{i,j}-(R_i+K_j)$	القيم	الناتج
$C_{1,2}-(R_1+K_2)$	$9-(0+2)$	7
$C_{1,3}-(R_1+K_3)$	$11-(0+0)$	11
$C_{1,4}-(R_1+K_4)$	$16-(0+1)$	15
$C_{2,1}-(R_2+K_1)$	$12-(5+8)$	-1
$C_{2,4}-(R_2+K_4)$	$8-(5+1)$	2
$C_{3,2}-(R_3+K_2)$	$10-(6+2)$	2

وبما أن قيمة :

$$C_{2,1}-(R_2+K_1)=-1$$

سالبة فإنه يتوجب علينا شغل الخانة التي هي تقاطع السطر الثاني مع العمود الأول، أي إنه يتوجب على الشركة الثانية بيع جزء من إنتاجها والبالغ 10 وحدات في السوق الأول بدلاً من السوق الثالثة هذه العملية تجعل المعادلة :

$$C_{2,1}-(R_2+K_1)$$

غير صحيحة، وحتى تصبح صحيحة فيجب تعديل قيمة R_2 بحيث تصبح مساوية إلى ما يلي:

$$R_2+8=12 \Rightarrow R_2=4$$

ولكن تغيير قيمة R_2 وجعلها تساوي 4 يجبر على إعادة النظر في المعادلة :

$$R_2+K_2=C_{2,2}$$

وبالتعويض يصبح لدينا :

$$4 + K_2 = 7 \Rightarrow K_2 = 3$$

أي إن مؤشر العمود الثاني قد تغير من 2 إلى ثلاث ، هذا التغير يجبرنا على إعادة العمليات الحسابية وفق ما يلي :

$C_{1,2} - (R_1 + K_2)$	$= 9 - (0 + 3) =$	6
$C_{1,3} - (R_1 + K_3)$	$= 11 - (0 + 0) =$	11
$C_{1,4} - (R_1 + K_4)$	$= 16 - (0 + 1) =$	15
$C_{2,3} - (R_2 + K_3)$	$= 5 - (4 + 0) =$	1
$C_{2,4} - (R_2 + K_4)$	$= 8 - (4 + 1) =$	3
$C_{3,2} - (R_3 + K_2)$	$= 10 - (6 + 3) =$	1

هذه العمليات الحسابية تقودنا إلى القول إن كلفة نقل المنتجات من أماكن إنتاجها إلى أسواق استهلاكها تأخذ شكل الجدول التالي :

الكمية	كلفة نقل الوحدة	كلفة النقل
50	8	400
10	12	120
30	14	420
70	7	490
40	6	240
50	7	350
		2020

هذه القيمة تمثل الحد الأدنى لنقل المنتجات وتوزيعها في أسواق الاستهلاك. أما الشكل الأمثل للتوزيع فإنه يأخذ الجدول التالي :

أعمدة / أسطر	$k = 8$	$k_2 = 3$	$k_3 = 0$	$k_4 = 1$	التابع
$R_1 = 0$	8 | 50	9 |	11 |	16 |	50
$R_2 = 4$	12 | 10	7 | 70	5 |	8 |	80
$R_3 = 6$	14 | 30	10	6 | 40	7 | 50	120
الطلب	90	70	40	50	250

وكما نلاحظ أن كمية المنتجات الموزعة في السوق الأول من قبل الشركة المنتجة الثالثة قد أنخفض من 40 وحدة إلى 30 ، وهذا التوزيع وبما أنه حقق الحد الأدنى لكلفة النقل فإنه يعد توزيعاً أمثل ويجب المحافظة عليه .

أما لو رجعنا إلى الجدول الذي بموجبه تم توزيع المنتجات حسب مصلحة المستهلك؛ وأعطينا إلى مؤشر السطر الأول القيمة صفر، فإن مؤشرات بقية الأسطر والأعمدة تأخذ الشكل التالي :

$$R_1 + k_1 = 0 + k_1 = 8 \Rightarrow k_1 = 8$$

$$R_3 = 6 \Rightarrow R_3 + k_1 = R_3 + 8 = 14$$

$$k_2 = 4 \Rightarrow R_3 + k_2 = 6 + k_2 = 10$$

$$R_2 = 3 \Rightarrow R_2 + k_2 = R_2 + 4 = 7$$

$$k_3 = 2 \Rightarrow R_2 + k_3 = 3 + k_3 = 5$$

$$k_4 = 1 \Rightarrow R_3 + k_4 = 6 + k_4 = 7$$

من هذه النتائج يمكن تكوين الجدول التالي :

$C_{i,j} - (R_i + K_j)$	القيم	الناتج
$C_{1,2} - (R_1 + K_2)$	$9 - (0 + 4)$	5
$C_{1,3} - (R_1 + K_3)$	$11 - (0 + 2)$	9
$C_{1,4} - (R_1 + K_4)$	$16 - (0 + 1)$	15
$C_{2,1} - (R_2 + K_1)$	$12 - (3 + 8)$	1
$C_{2,4} - (R_2 + K_4)$	$8 - (3 + 1)$	4
$C_{3,3} - (R_3 + K_3)$	$6 - (6 + 2)$	-2

في هذا الجدول نلاحظ أن القيمة السالبة تقع عند ملتقى السطر الثالث مع العمود الثالث، وبما أنها تساوي قيمة K_3 تماماً، فإنه يمكن التخلص من هذه القيمة السالبة بإعطاء $K_3 = 0$ ولكن حتى يمكن جعل K_3 تساوي القيمة صفر؛ فإن الشركة الثالثة للإنتاج يتوجب عليها تصريف جزء من منتجاتها في السوق الثالثة . وهذا الجزء من منتجاتها هو مساو إلى 30 وهذا التصريف يقود إلى تخفيض مبيعات الشركة الثانية في السوق الثالثة من 40 وحدة إلى 10 وحدات، ويرفع من مبيعات هذه الشركة في السوق الثانية من 40 وحدة إلى 70 وحدة ، بإجراء هذه الخطوات فإنه كلفة النقل تصبح معادلة إلى ما يلي :

عدد الوحدات المباعة	كلفة نقل الوحدة	كلفة النقل
50	8	400
70	7	490
10	5	50
40	14	560
30	6	180
50	7	350
		2030

ولكن إعطاء K_3 القيمة صفر يجعل المعادلة :

$$C_{2,3} = R_2 + K_3$$

غير محققة إلا إذا أعطينا R_2 القيمة 5 لو أعطينا R_2 القيمة 5 ، لحصلنا على النتائج التالية :

$C_{i,j} - (R_i + K_j)$	القيم	الناتج
$C_{1,2} - (R_1 + K_2)$	$9 - (0 + 2)$	7
$C_{1,3} - (R_1 + K_3)$	$11 - (0 + 0)$	11
$C_{1,4} - (R_1 + K_4)$	$16 - (0 + 1)$	15
$C_{2,1} - (R_2 + K_1)$	$12 - (5 + 8)$	-1
$C_{2,4} - (R_2 + K_4)$	$8 - (5 + 1)$	2
$C_{3,2} - (R_3 + K_2)$	$10 - (6 + 2)$	2

أي إنه يمكن تخفيض الكلفة فيما لو أصبحت :

$$C_{2,1} = R_2 + K_1$$

أي إنه يجب على الشركة المنتجة الثانية أن تبيع 10 وحدات من منتجاتها إلى الشركة الأولى بدلاً من الشركة الثانية ، لو أعطينا القيمة 4 إلى R_2 لحصلنا على النتائج التالية :

$C_{1,2} - (R_1 + K_2)$	$= 9 - (0 + 2) =$	7
$C_{1,3} - (R_1 + K_3)$	$= 11 - (0 + 0) =$	11
$C_{1,4} - (R_1 + K_4)$	$= 16 - (0 + 1) =$	15
$C_{2,3} - (R_2 + K_3)$	$= 5 - (4 + 0) =$	1
$C_{2,4} - (R_2 + K_4)$	$= 8 - (4 + 1) =$	3
$C_{3,2} - (R_3 + K_2)$	$= 10 - (6 + 2) =$	2

ومنه فإن الحد الأدنى لكلفة النقل يمكن أن يأخذ الشكل التالي :

عدد الوحدات المباعة	كلفة نقل الوحدة	كلفة النقل
50	8	400
10	12	120
70	7	490
30	14	420
40	6	240
50	7	350
		2020

ومنه نلاحظ أن الحد الأدنى لكلفة النقل هو 2020 ليرة سورية، وإن الجدول الذي يمكن التوزيع الأمثل هو التالي :

أعمدة / أسطر	$k = 8$	$k_2 = 3$	$k_3 = 0$	$k_4 = 1$	الإنتاج
$R_1 = 0$	8 50	9	11	16	50
$R_2 = 4$	12 10	7 70	5	8	80
$R_3 = 6$	14 30	10	6 40	7 50	120
الطلب	90	70	40	50	250

وحسب هذا الجدول يتوجب تصريف منتجات الشركات الإنتاجية في الأسواق الاستهلاكية .

الفصل الحادي عشر
مشكلة التخصيص والتعيين

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

وقل رب زدني علما
Damascus University

١١ ــ ١ ــ عرض وتعريف :

إن مشكلة التخصيص والتعيين ما هي إلا فرع خاص جداً من مشكلة النقل التي تعد تطبيقاً أساسياً للبرمجة الخطية ، هذه المشكلة تتعلق بتعيين عدد من العمال على عدد من الآلات لإنجاز الوظائف الإنتاجية، وذلك عن طريق تعيين عامل واحد فقط على كل آله، هذا التعيين يتطلب تساوي عدد العمال مع عدد الآلات ، إن حل مشكلة التعيين هو عبارة عن إيجاد الطريقة المثلة لتوزيع العمال على الآلات بشكل يحقق تخفيض تكاليف الإنتاج إلى أدنى حد ممكن .

حتى يمكن حل مشكلة التعيين فإنه لا بد من حقيق مجموعة من الشروط، هي التالية:

١ ــ إن عدد العمال يجب أن يساوي تماماً عدد الآلات.

٢ ــ إن كل عامل يجب أن يعمل على آلة واحدة فقط.

٣ ــ يمكن استخدام دالة هدف واحدة للتقييم، ويكون هدف هذه الدالة تخفيض تكاليف الإنتاج.

عند توفر هذه الشروط الثلاثة فإنه يمكن حل مشكلة التعيين بإحدى الطريقتين :

١ ــ طريقة التراتيب .

٢ ــ طريقة الحل المباشر .

١١ ــ ٢ ــ طريقة التراتيب :

حسب هذه الطريقة فإن عدد العمال وعدد الآلات يجب أن لا يتجاوز ثلاثة، وعند توفر هذا الشرط فإننا نبدأ بالحل عن طريق حساب التراتيب والتكاليف المقابلة لكل ترتيب، ثم بعد ذلك يتم اختيار الترتيب الذي يحقق الحد الأدنى في كلفة الإنتاج .

لو افترضنا أنه يوجد لدينا ثلاثة عمال وثلاث آلات، وإن تكاليف التشغيل تأخذ شكل الجدول التالي:

آلات / عمال	1	2	3
A	18	14	16
B	15	10	12
C	10	8	2

فإن التعرف على الطريقة المثلى لتوزيع العمال على الآلات يتطلب منا حساب عدد التراتيب الذي هو مساو إلى ما يلي :

$$\frac{3!}{(3-3)!} = 3! = 3.2.1 = 6$$

أي إنه يوجد لدينا ستة تراتيب لكل من الآلات والعمال ، هذه التراتيب هي التالية:

ABC ACB CAB CBA BCA BAC

وإن تكاليف الإنتاج لكل من هذه التراتيب الستة تأخذ شكل الجدول التالي :

الترتيب	العمال	التكاليف
1	ABC	18 + 10 + 2 = 30
2	ACB	18 + 8 + 12 = 38
3	CAB	10 + 14 + 12 = 36
4	CBA	10 + 10 + 16 = 36
5	BCA	15 + 8 + 16 = 39
6	BAC	15 + 14 + 2 = 31

من هذا الجدول نلاحظ أن أقل كلفة هي 30 وتقابل الترتيب ABC ، وهذا ما يقود إلى القول إن هذا الترتيب هو أقل كلفة أي إن العامل A يعمل على الآلة رقم 1 والعامل B يعمل على الآلة رقم 2 والعامل C يعمل على الآلة رقم 3 ، هذا فيما إذا كان لدينا فقط ثلاثة عمال وثلاث آلات، أما إذا كان عدد العمال أكثر من ذلك وليكن أربعة عمال فإن هذه الطريقة تصبح صعبة وطويلة ، هذه الصعوبة تقودنا إلى الطريقة الثانية وهي طريقة الحل المباشر .

١١ ــ ٣ ــ طريقة الحل المباشر

حسب هذه الطريقة فإن الوصول إلى أفضل توزيع على الآلات يتطلب تحديد أفضل خلية في كل سطر وكل عمود ، عندما يكون الجدول يتضمن التكاليف، فإن أفضل خلية هي تلك التي تحتوي على أقل كلفة تشغيل، فإذا قمنا بطرح تكلفة هذه الخلية من تكاليف السطر الذي يحتوي على هذه الخلية وبالوقت نفسه نقوم بطرح تكلفة التشغيل الدنيا لكل عمود من باقي التكاليف؛ فإن هذه العملية تعطينا جدولاً جديداً يكون فيه كل سطر وكل عمود يحتوي على الأقل على صفر ، هذه الطريقة في الحل تتطلب منا المرور بالخطوات التالية :

١ ــ بالنسبة لكل سطر نطرح أقل رقم من باقي أرقام السطر، مما يجعل كل سطر يحتوي على الأقل على صفر .

٢ ــ بالنسبة لكل عمود أيضاً يقوم بطرح أقل رقم من باقي أرقام العمود بشكل يصبح كل عمود يحتوي على الأقل على صفر .

٣ ــ نقوم برسم مجوعة من الخطوط المستقيمة الأفقية والعمودية .

٤ ــ إذا كان عدد الخطوط المستقيمة أقل من عدد العمال أو عدد الآلات فإننا نقوم بأخذ أقل رقم من الأرقام غير المعطاة، ثم نقوم بطرحه من باقي الأرقام وأضافته إلى الأرقام التي تشكل تقاطع المستقيمات .

٥ ــ إذا أصبح عدد الخطوط يساوي عدد العمال أو عدد الآلات، فإننا نختار السطر الذي يحتوي على صفر واحد، ثم بعد ذلك نحذف السطر والعمود التي يكون الصفر تقاطعها، ثم تكرر العملية حتى يتم توزيع جميع العمال على جميع الآلات، وهذا يعطينا التوزيع الأمثل للعمال على الآلات داخل المصنع .

لو افترضنا أنه لدينا أربعة عمال وأربع آلات، وأن تكاليف التشغيل تأخذ شكل الجدول التالي :

آلات / عمال	1	2	3	4
A	70	50	50	60
B	30	30	90	110
C	30	10	20	60
D	50	20	70	60

في هذا الجدول نلاحظ أن أقل قيمة في السطر الأول هي 50 وفي السطر الثاني هي 30 وفي السطر الثالث 10 وفي السطر الرابع هي 20 لو قمنا بطرح هذه القيم من باقي قيم الأسطر لحصلنا على الجدول التالي :

آلات / عمال	1	2	3	4
A	20	0	0	10
B	0	0	60	80
C	20	0	10	50
D	30	0	50	40

من هذا الجدول نلاحظ أن العمود الرابع لا يحتوي على صفر، وأن أقل قيمة في هذا العمود هي 10 . بطرح هذه القيمة من باقي قيم العمود و نحصل على الجدول التالي :

آلات / عمال	1	2	3	4
A	20	0	0	0
B	0	0	60	70
C	20	0	10	40
D	30	0	50	30

هذا الجدول يحتوي على الأقل صفر في كل عمود وكل سطر وبرسم الخطوط المستقيمة التي تصل بين الأصفار نحصل على الجدول التالي :

آلات / عمال	1	2	3	4
A	20	0	0	0
B	0	0	60	70
C	20	0	10	40
D	30	0	50	30

من دراسة هذا الجدول نلاحظ أن عدد الخطوط المستقيمة هو ثلاثة، أي أقل من عدد العمال والآلات وهذا يقودنا إلى القول إنه لا يوجد حل أمثل .

بعد دراسة الأرقام غير المغطاة نلاحظ أن قيمة هي 10 ، بطرح هذه القيمة من القيم والمغطاة وإضافتها إلى أرقام الخانات التي تكون تقاطع المستقيمات نحصل على الجدول التالي:

Damascus University

آلات / عمال	1	2	3	4
A	20	10	0	0
B	0	10	60	70
C	10	0	0	30
D	20	0	40	20

برسم الخطوط المستقيمة نحصل على الجدول التالي :

آلات / عمال	1	2	3	4
A	~~20~~	10	~~0~~	~~0~~
B	~~0~~	10	~~60~~	~~70~~
C	10	0	0	30
D	20	0	40	20

من هذا الجدول نلاحظ أن عدد الخطوط المستقيمة هي أربع خطوط أي يساوي تماماً عدد العمال وعدد الآلات ، بتحقق هذه المساواة يمكن القول إننا قد توصلنا إلى الحل الأمثل بإجراء الخطوات التالية :

في السطر الرابع يوجد صفر واحد فقط، ويشغل ملتقى العمود الثاني مع السطر الرابع، وهذا ما يقودنا إلى القول إن العامل يجب أن يعين على الآلة الثانية ، نقوم بحذف العمود الثاني والسطر الرابع نحصل على الجدول التالي :

	آلات / عمال	1	3	4
	A	~~20~~	~~0~~	~~0~~
	B	~~0~~	~~60~~	~~70~~
	D	10	~~0~~	30

في هذا الجدول نلاحظ أن السطرين الثاني والثالث يحتوي كل منهما على صفر واحد ، هذه النتيجة تقودنا إلى القول بضرورة تعيين العامل B على الآلة الأولى والعامل D على الآلة الثانية والعامل A على الآلة الربعة ، بعد ذلك يمكن القول إن التخصيص الأمثل يأخذ شكل الجدول التالي :

العامل	الآلة	تكاليف التشغيل
A	4	60
B	1	30
D	3	20
C	2	20

أي إن الحد الأدنى لتكاليف التشغيل هو مساو إلى ما يلي :

$$\text{Min } C = 60 + 30 + 20 + 20 = 130$$

وفي النهاية لا بد من الإشارة إلى عدة حقائق وهي :

١ ــ يمكن أن يستخدم الأسلوب في حالة تنظيم الربح .

٢ ــ يمكن أن يستخدم الأسلوب نفسه في حال عدم تساوي عدد العمال مع عدد الآلات، وذلك بإضافة متغيرات (عامل ــ آلة) وهمية بتكاليف أو عائد صفر في الجدول الأصلي ، وفي هذه الحالة سوف ينطوي الحل الأمثل على آلة عاطل أو عامل لا يعمل.

٣ ــ في حالة المواقف الأكثر تعقيد يمكن استخدام طريقة النقل أو البرمجة الخطية للوصول إلى الحل الامثل .

٤ ــ في حالة عدم إمكانية تخصيص عامل معين على آلة معينة لأسباب تقنية، فإنه يتم وضع تكاليف مرتفعة في الخلية التي هي التقاء سطر العامل مع عمود الآلة.

الفصل الثاني عشر

نموذج المخزون

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

وقل رب زدني علما
Damascus University

١٢-١- عرض وتعريف:

يعرف المخزون بأنه ما يتم تخزينه من مواد أو بضائع للانتفاع بها أو استهلاكها مستقبلا، مثل المواد الأولية والبضائع المنتجة والمواد الغذائية، أو مياه السدود أو الدم في بنك الدم.

إن جميع الأنظمة الاقتصادية والتجارية الصغيرة منها أو الكبيرة بحاجة ماسة إلى المخزون وإن الاحتفاظ بالمخزون يحمل الشركة أو المصنع أو المتجر مصاريف إضافية.هذه التكاليف تتطلب من الإداريين أخذها بالحسبان وذلك لأن لها دوراً هاماً وبارزاً في تكلفة الإنتاج، وإن أي تخفيض في هذه التكاليف يقود إلى تخفيض مماثل في كلفة إنتاج السلع وترك هامش كبير في الربح؛ مما يساعد على التحكم في أسعار المواد والدخول في أسواق المنافسة.

من ناحية أخرى فإن زيادة حجم المخزون قد تؤدي إلى خسارة أو إفلاس كبير في الشركة أو المصنع، وذلك لأن تخزين المواد يحمل الشركة تكاليف إضافية، وبالتالي تجميد جزء من رأس مال الشركة، كما أن المواد المخزنة معرضة للتلف مع مرور الزمن.ولكن للمخزون إيجابيات كثيرة تفوق سلبياته؛ وذلك لأن أي نقص في حجم المخزون قد يجعل الشركة عاجزة عن تلبية طلبات الزبائن؛ وبالتالي فقدانهم، مما يؤدي إلى نقصان مبيعات الشركة، وبالتالي تعرضها إلى خسارة كبيرة. حتى يمكن دراسة المخزون وتحقيقه بصورة واضحة لا بد من التعرض إلى :

١٢-٢-تكاليف التخزين

عناصر تكاليف المخزون

إن تكلفة المخزون تتكون من عدة عناصر نذكرها في ما يلي:

١٢-٢-١- تكلفة شراء أو إنتاج السلعة

إن مفهوم تكلفة الوحدة يختلف من التاجر إلى المنتج،فبالنسبة للتاجر هذه التكلفة تشمل السعر المدفوع للحصول على هذه الوحدة بما فيه أجور الشحن،أما بالنسبة للمنتج فإن هذه التكلفة هي عبارة عن مجموع المصاريف المدفوعة لإنتاج هذه الوحدة بحيث تصبح جاهزة للاستعمال؛ سواء كسلعة استهلاكية أم كسلعة وسيطية تستخدم في إنتاج سلع أخرى هذه التكلفة تتأثر بالقرار المتعلق بحجم المخزون، وذلك لأن بعض موردي المواد يمنحون خصماً معينا على مبيعاتهم كلما زاد حجم الكمية المشتراة، وهذا يقود إلى القول أن كلفة تخزين الوحدة يتناقص بازدياد حجم الطلبية، ويطلق على هذا النوع من الخصم اسم تكاليف الخصم.

١٢-٢-٢-تكلفة إعداد الطلبية

هذه التكلفة ثابتة وهي مقترنة مع إعداد كل طلبية أو مع التجهيزات الأساسية لدورة الإنتاج، وهذه التكلفة مستقلة عن حجم الطلبية، وتتكون من العناصر التالية:

١- تكاليف إصدار الطلب ومتابعته

٢- تكاليف استلام البضاعة

٣- تكاليف وضع البضاعة ضمن المخازن

٤- تكاليف تسديد قيمة البضاعة

٥- تكاليف التجهيز للإنتاج

هذه التكاليف في بعض الأحيان،تزداد بازدياد نمو الطلبات، أي إن زيادة هذه التكاليف يؤدي إلى نقصان حجم المخزون، وبالتالي تكون لدينا دالة متناقصة، وتتكون تكاليف الطلبية مما يلي:

١- رواتب مدير الشراء

٢- رواتب الموظفين إلى إدارة المشتريات

٣- رواتب المساعدين

٤- رواتب المحاسبين

٥- رواتب موظفي الاستلام

٦- رواتب موظفي المتابعة

كما أن ثمن الأدوات الكتابية المستخدمة في إعداد الطلبية يعد جزءاً من هذه التكاليف

١٢-٢-٣- تكاليف التخزين

هذه التكاليف تشتمل على ما يلي:

١- تكاليف رأس المال المدفوع ثمنا للمخزون

٢- تكاليف صيانة المخزون وأجور التدفئة والتبريد والحراسة، وكذلك أجور المخزن إذا لم يكن ملكاً وتكاليف النور والكهرباء والمياه.

٣- التكاليف الناتجة عن تلف المخزون أثناء فترة التخزين.

٤- تكاليف وضع وترتيب المواد داخل المخزن.

٥- الضرائب والتأمينات المدفوعة للمخزن.

هذه التكاليف يعبر عنها عادة إما بالتكلفة العائدة لكل وحدة من المخزون خلال فترة زمنية معينة؛ ولتكن سنة كنسبة مئوية من قيمة متوسط المخزون. أو إن هذه التكاليف تزداد بازدياد حجم المخزون، أي إن دالة هذه التكاليف هي تتزايد.

١٢-٢-٤- كلفة العجز في المخزون :

يحدث العجز عند نفاذ أحد أنواع المخزون، وبالتالي العجز عن تلبية الطلب على المخزون؛ وقد تحتوي كلفة العجز على ما يلي:

١- في حالة المواد الخام:كلفة عدم الإنتاج، والتالف من مواد الإنتاج، وبالتالي وكلفة الأمر بطلبه خاصة.

٢- في حالة السلع المنتهية الصنع:فإن كلفة العجز تتكون من كلفة عدم رضا المستهلك، والتي تنعكس نتيجتها على المستقبل وفقدان الزبائن، وبالتالي انخفاض حجم المبيعات.

٣- في حالة قطع غيار الآلات فإن كلفة العجز تتكون من كلفة الآلات المتعطلة وأجور الأيدي العاملة، وثمن المواد التالفة وكلفة التأخير في التوريد.

٤- في الحالات الأخرى العجز في الدم أو سيارات الإسعاف قد تكون كلفته حياة شخص ما، والعجز في معدات الحرس يمكن أن ينتج عنه تلف كبير في المواد للحرس .

أما الآن وبعد أن تعرفنا العناصر المكونة لكلفة التخزين؛ واستعرضنا أهم أنواع كلفة التخزين، فإننا نتساءل: كيف يمكن تخفيض كلفة التخزين على أدنى الحدود؟ إن التخفيض في كلفة التخزين تتطلب منا أولا معرفة كمية الطلب الاقتصادية للمخزون؛ والتي تجعل المخزون غير عاجز عن تلبية أي طلب.

١٢-٣- نموذج كمية الطلب الاقتصادية:

إن أول نموذج لكمية الطلب الاقتصادية تم إيجاده قبل الحرب العالمية الأولى.ويعد هذا النموذج من أبسط أنواع النماذج والهدف الأساس لهذا النموذج هو تحديد الكمية الاقتصادية للطلب.هذا النموذج يعطي الإجابة الصحيحة على السؤالين التاليين

١- متى يلزم إعداد طلبية المخزون وما الكمية المطلوبة؟

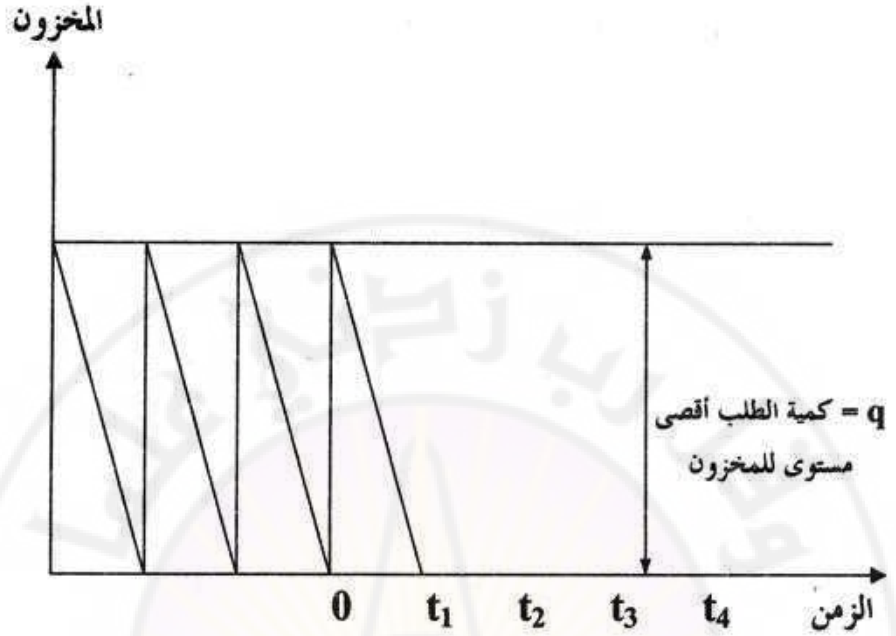
٢- ما الكلفة الكلية المناظرة؟ قبل أن نقوم بشرح واستعراض هذا النموذج لا بد من وضع الفرضيات التالية:

١- الطلب على نوع معين ثابت بتقادم الزمن

٢- كلفة التخزين للوحدة والطلبية لا تعتمد على الكمية المطلوبة

٣- عند وصول المخزون إلى الصفر تصل كمية جديدة، أي لا يوجد عجز في المخزون.

٤- يتم اعتماد نوع واحد فقط؛ مما يؤدي إلى طلب أنواع مختلفة كل منها مستقل عن الآخر؛ وإن الشكل التالي:



يبين مستوى المخزون في ظل الافتراضات السابقة، وهذا واضح إذ إن جميع الدورات متساوية، مما يقود إلى القول إن الطلبيات تصل تماما عندما يكون مستوى المخزون صفراً، وان حجم الطلبية هو متساو في جميع دورات المخزون.

مثال:

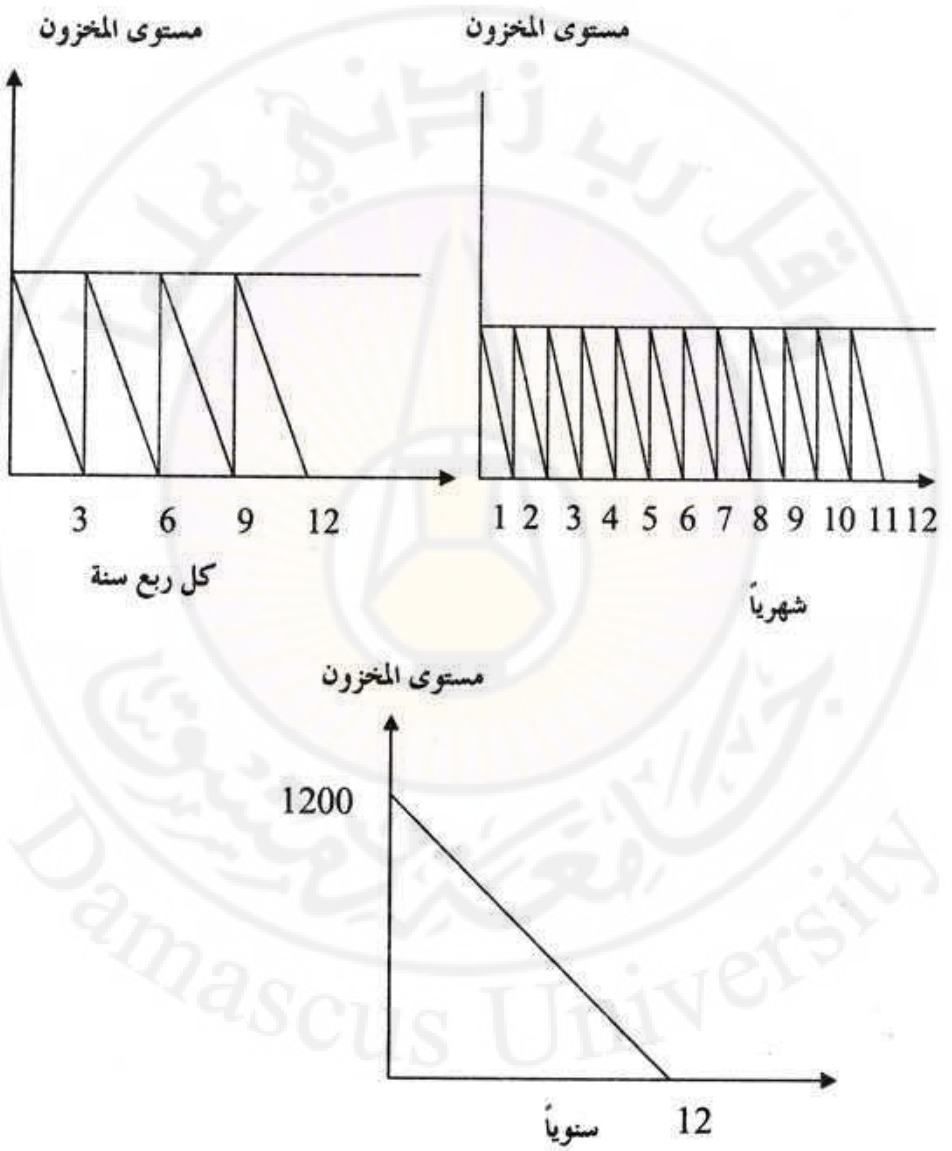
لنفترض أن جامعة دمشق تستخدم ١٢٠٠ صندوق من ورق الطباعة في كل عام، وإن الجامعة تحاول تحديد عدد الصناديق الممكن طلبها في كل مرة؛ ويتوفر للجامعة المعلومات التالية:

كمية الطلب السنوي هي ١٢٠٠ صندوق

كلفة إعداد كل طلبية هي ٥٠ ليرة سورية

كلفة تخزين كل صندوق ورق هي ١٢ ليرة في السنة

في هذا المثال المشكلة التي تواجهنا هي إيجاد الكمية الواجب طلبها في كل مرة، إذ إن هذه الكمية هي التي تحدد زمن الشراء؛ وإن هذا الزمن يمكن أن يكون سنويا أو كل سنة أو شهريا، وهذا نوضح في الأشكال التالية:



ويمكن إضافة سياسات أخرى مثل طلبية كل شهرين أو مرتين في السنة.ويمكن إيجاد الحجم الاقتصادي للطلبية الواحدة بطرق مختلفة نستعرضها فيما يلي:

١٢-٣-١- الحل عن طريق التجربة

إن إحدى الطرق الممكنة لإيجاد الحجم الاقتصادي هي حساب كلفة التخزين السنوية الكلية لكل من السياسات السابقة، ويتم اختيار السياسة التي تحقق أدنى كلفة تخزين، في المعادلة التالية لدينا كلفة التخزين الكلية؛ وهي مساوية إلى كلفة تخزين المواد وكلفة إعداد الطلبية

C_t هي كلفة التخزين الكلية

C_0 كلفة المواد الطلبية هي

iC_m كلفة تخزين الوحدة في السنة

$\frac{A}{q} = n$ عدد الطلبيات

$\frac{q}{2}$ متوسط المخزون

فإن معادلة التخزين الكلية تأخذ الشكل التالي:

$$C_t = C_d + C_s$$

حسب هذه المعادلة فإننا نبدأ أولا بحساب كلفة الطلب

أ- كلفة الطلب:

إن كلفة الطلب الكلية السنوي هي عبارة عن حاصل ضرب عدد الطلبيات n في كلفة الطلب الواحد C_0 أي إن:

$$C_d = n\, C_0$$

وبما أن عدد الطلبيات السنوية هو عبارة عن حاصل قسمة الطلب الكلي السنوي A على حجم الطلبية الواحدة q أي إن:

$$n = \frac{A}{q}$$

بالتعويض تكون كلفة الطلب السنوية تأخذ الشكل التالي:

$$C_d = \frac{A}{q} C_0$$

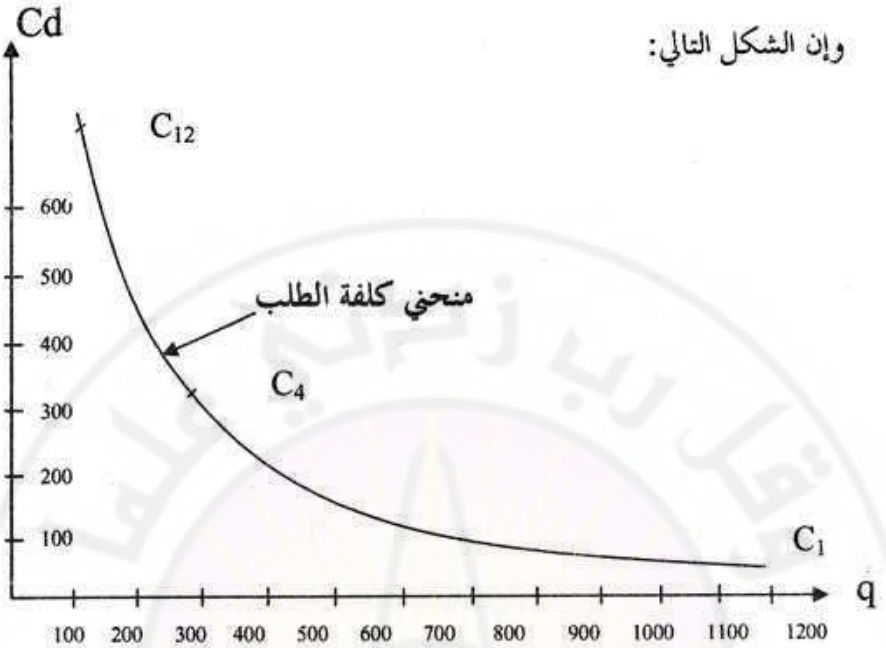
بالرجوع إلى السياسات المقترحة نجد أن عندما يكون عدد الطلبات واحداً فإن كلفة الطلب تساوي إلى 50 ليرة سورية، أما عندما يكون عدد الطلبيات هو أربع طلبيات فإن كلفة الطلب هي مساوية إلى:

$$50 = 200 \times 4$$

يكون الطلب شهرياً فإن كلفة الطلب تكون مساوية إلى:

$$50 = 600 \times 12$$

وإن الشكل التالي:



يبين النقطة C_1 و C_4 و C_{12} وإن:

$$C_1 > C_4 > C_{12}$$

أي إنه كلما قل حجم الطلبية زادت الكلفة،وبعد أن قمنا بحساب الطلب فإننا ننتقل إلى حساب كلفة تخزين المواد.

ب- كلفة تخزين المواد: C_s

إن كلفة التخزين السنوية للمواد نحصل عليها بضرب عدد الوحدات المخزنة ب. وبما أن حجم المخزون ثابت مع الزمن؛ فإننا نستخدم متوسط حجم المخزون.هذا المتوسط هو مساو إلى ما يلي:

$$\bar{q} = \frac{q}{2}$$

ومنه فإن كلفة التخزين الكلية السنوية هي مساوية إلى ما يلي

$$C_s = C_m \frac{q}{2}$$

بالرجوع إلى مثالنا نجد أن تلك الكلفة تأخذ القيم التالية

كل سنة

$$C_s = 12\frac{1200}{2} = 7200$$

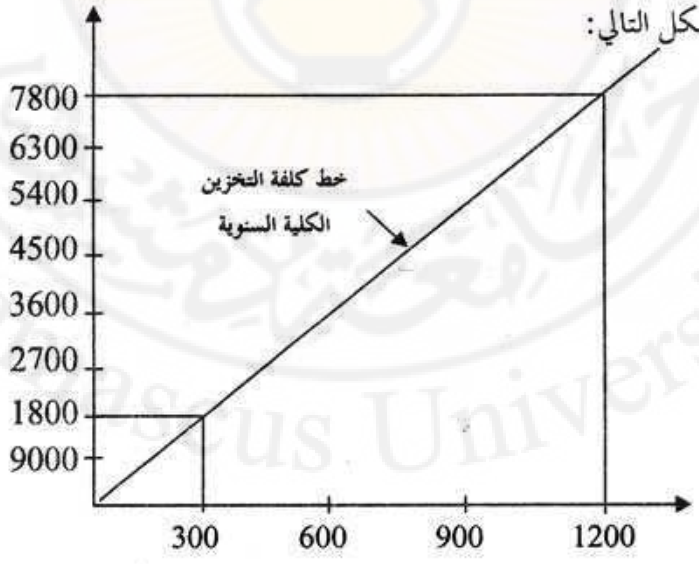
كل ربع سنة

$$C_s = 12(\frac{300}{2}) = 1800$$

كل شهر

$$C_s = 12(\frac{100}{2}) = 600$$

وهكذا نلاحظ أن كلفة التخزين الكلية السنوية تتزايد مع تزايد حجم الطلبية، وتأخذ الشكل التالي:



بعد ذلك ننتقل إلى حساب كمية الطلب الاقتصادية

١٢-٣-٢- معادلة كمية الطلب الاقتصادية

من الفقرات السابقة تبين لنا أن الكلفة الكلية للتخزين تأخذ شكل المعادلة التالية:

$$C_t = C_d + C_s = C_o \frac{A}{q} + iC_m \frac{q}{2}$$

في هذه المعادلة:

A هي كمية الطلب السنوي

C هي كلفة طلبية المخزون

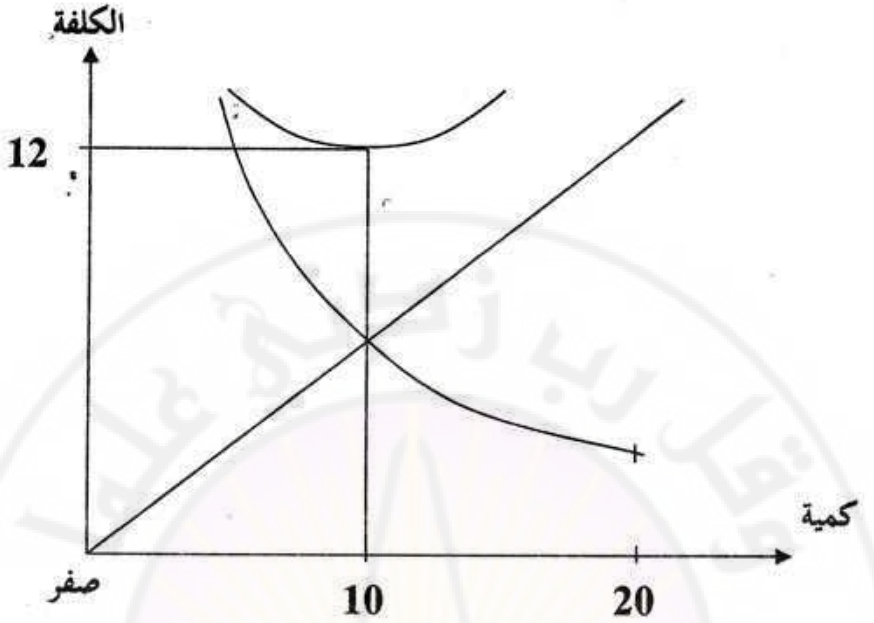
iC_m هي كلفة وحدة المخزون في السنة

q هي حجم المخزون

وحتى يمكن التوصل إلى حجم الأمثل للمخزون فإن هناك طرقاً مختلفة نستعرضها في ما يلي:

١٢-٣-٣- الحل البياني:

إن إحدى الطرق التي يمكن استخدامها في حساب كمية الطلب الاقتصادي هي الحل البياني، وحسب هذا الحل فإننا نقوم بتمثيل كلفة الطلب وكلفة التخزين والكلفة الكلية، وإن الحجم الأمثل للمخزون هو الذي يقابل نقطة التقاء منحنى كلفة التخزين مع منحنى كلفة الطلب، وذلك كما هو موضح في الشكل التالي:



حسب هذا الشكل فإن كمية الطلب الاقتصادية هي مساوية إلى 100وحدة.

هناك حل آخر يدعى الحل الجبري نستعرضه فيما يلي

١٢-٣-٤- الحل الجبري:

بعد أخذ معادلة الكلفة الكلية للتخزين وإجراء المساوات بين كلفة الطلب وكلفة التخزين السنوية نحصل على المعادلة التالية:

$$iC_m \frac{q}{2} = C_o \frac{A}{q}$$

بضرب الطرفين بـــ q نحصل على ما يلي:

$$\frac{iC_m}{2} q^2 = C_o A$$

بضرب الطرفين بـ $\frac{2}{iC_m}$ نحصل على ما يلي:

$$q^2 = \frac{C_o A2}{iC_m}$$

بأخذ الجذر التربيعي للطرفين نحصل على ما يلي:

$$q = \sqrt{\frac{C_o A2}{iC_m}}$$

فلو رجعنا إلى مثال الجامعة لوجدنا :

$$q = \sqrt{\frac{2 \cdot 50 \times 1200}{12}} = \sqrt{10000} = 100$$

أي إن الحل الأمثل يستدعي شراء 100 صندوق في كل مرة. وبما أن الحاجة السنوية هي 1200 صندوق؛ فإنه يتوجب على الجامعة إجراء 12 طلبية شراء حجم كل منها 100 صندوق أي إنه يتوجب عليها إجراء طلبية كل شهر.

من الكمية الاقتصادية للطلب على المخزون فإنه يمكن أن تقوم بحساب عدد الطلبيات السنوية والمساوية إلى :

$$\frac{1200}{100} = 12 \text{ طلبية}$$

ومتوسط حجم المخزون والمساوي إلى:

$$\frac{q}{2} = \frac{100}{2} = 50 \text{ طلبية}$$

وزمن دورة المخزون والمساوي إلى:

$$\frac{365}{12} = 30{,}4 \text{ يوم}$$

وإن كلفة الطلب هي مساوية إلى:

$$C_d = n\,C_o = 12 \times 50 = 600$$

وكلفة التخزين والمساوية إلى:

$$Cs = Cm\ \frac{q}{2} = 12\ .\ 50 = 600$$

والحد الأدنى لكلفة التخزين والمساوية إلى:

$$C_d + C_s = 600 + 600 = 1200 \text{ ليرة سورية}$$

وكما هو واضح فإن كلفة التخزين السنوية هي مساوية تماما إلى كلفة الطلب.

١٢-٤- تحليل الحساسية

إن كمية الطلب الاقتصادية التي قمنا بحسابها في الفقرة السابقة يمكن أن تتأثر بعدة عوامل نذكرها فيما يلي:

١٢-٤-١- حساسية الكلفة بإعطاء قيمة الطلب:

في بعض الأحيان، يعطى الطلب لنوع معين بالقيمة وليس بالكمية، وبالتالي فإنه يلزم أن تعدل حسابات كمية الطلب الاقتصادية، بحيث إن كلفة التخزين يعبر عنها كجزء من قيمة لمخزون ولنأخذ المثال التالي:

إذا كانت ميزانية إحدى الهيئات لشراء الأدوات الكتابية هي 200000 ليرة سورية، وكلفة الطلبية الواحدة هي 50 ليرة سورية وكلفة التخزين هي 20% من قيمة متوسط المخزون، فما قيمة كمية الطلب الاقتصادية وعدد طلبيات الشراء وكلفة المخزون الكلية؟

الحل:

بفرض أن A قيمة طلب الشراء السنوي والمساوي إلى 200000 ليرة سورية.

C_O كلفة طلب الشراء والمساوي إلى 50 ليرة سورية.

C_m كلفة التخزين كجزء من قيمة متوسط المخزون 0,2

q قيمة كل طلب شراء.

فإنه باستخدام معادلة كمية الطلب الاقتصادية نحصل على:

$$q^* = \sqrt{\frac{2AC_o}{C_m}}$$

بالتعويض نحصل على ما يلي:

$$q^* = \sqrt{\frac{2 \cdot 50 \cdot 2000AC_o}{0,2}} = 10000 \text{ ليرة سورية}$$

أي إن الاستراتيجية المثلى للتخزين هي التي تقوم على أساس شراء ما قيمته 1000 ليرة سورية في كل مرة، وبما أن قيمة الطلب السنوي هي 200000 فإن عدد طلبيات الشراء هو مساو إلى:

$$\frac{200000}{10000} = 20 \text{ طلبية}$$

وكلفة التخزين السنوية هي مساوية إلى:

$$C_t - C_d + C_s = \frac{200000}{10000} + \frac{10000 \times 0,2}{2} = 2000 \text{ ليرة}$$

١٢-٤-٢- حساسية الكلفة بتغير كمية الطلب:

في بعض الأحيان يكون من الصعب شراء كمية الطلب الاقتصادية بل نكون مضطرين؛ إما لشراء أكثر من كمية الطلب أو أقل منها، وهذا يؤثر على كلفة التخزين كما هو الحال في المثال الثاني.

لو أخذنا مثال جامعة دمشق ووجدنا أن صناديق الورق محزمة كل أربعين صندوق في علبة كرتون، فإنه في هذه الحالة لا يمكن شراء مئة صندوق بل يتوجب علينا إما شراء 80 صندوقاً أو 120 صندوقاً ولنقم بحساب الكلفة في هاتين الحالتين:

في حال شراء 80 صندوقاً فإن كلفة التخزين تأخذ الشكل التالي:

$$C_t = \frac{AC_o}{q} + C_m \frac{q}{2} = \frac{1200 \cdot 50}{80} + \frac{12 \cdot 80}{20} =$$

$$= \frac{60000}{80} + \frac{960}{2} = \frac{6000 + 3840}{8} = \frac{9840}{8} = 1230$$

وهكذا نرى أن كلفة التخزين قد ازدادت بمقدار ثلاثين ليرة سورية.

في حال شراء 120 فإن كلفة التخزين تأخذ الشكل التالي:

$$C_t = \frac{AC_o}{q} + C_m \frac{q}{2} = \frac{1200 \cdot 50}{120} + \frac{12 \cdot 120}{2} = 500 + 720 = 1220$$

وفي هذه الحالة أيضاً فإن كلفة التخزين قد ازدادت بمقدار 20 ليرة سورية.

١٢-٤-٣- حساسية كمية الطلب بتغير البيانات:

بالرجوع إلى معادلة كمية الطلب الاقتصادية:

$$q^* = \sqrt{\frac{2AC_o}{C_m}}$$

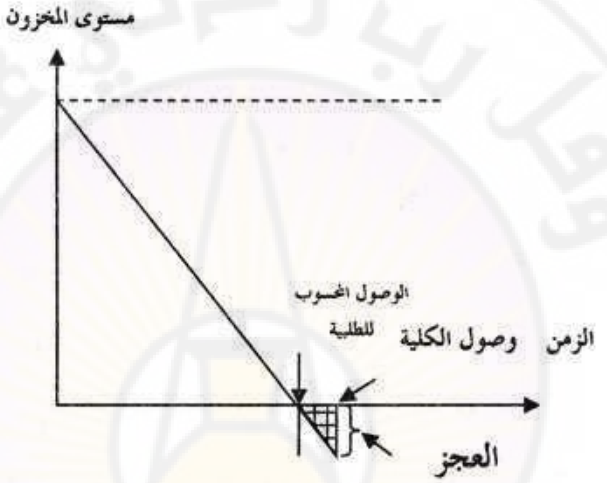
نجد أن كمية الطلب الاقتصادية q^* متناسبة مع الجذر التربيعي للبيانات المعطاة A, C_o, C_m أي إنه عندما تزداد كلفة الطلب أو كمية الطلب السنوي إلى أربعة أضعاف مثلاً فإن كمية الطلب الاقتصادية تزداد بمقدار الضعف، وعندما تزداد كلفة التخزين السنوية للوحدة إلى أربعة أضعاف فإن كمية الطلب الاقتصادية تنخفض إلى النصف لو أخذنا الجدول التالي:

المشكلة الأصلية	التغير 1	التغير 2	التغير 3
$A = 1200$	$A = 4800$	$A = 1200$	$A = 1200$
$C_o = 50$	$C_o = 50$	$C_o = 200$	$C_o = 50$
$C_m = 12$	$C_m = 12$	$C_m = 12$	$C_m = 48$
$q = 100$	$q = 200$	$q = 200$	$q = 50$

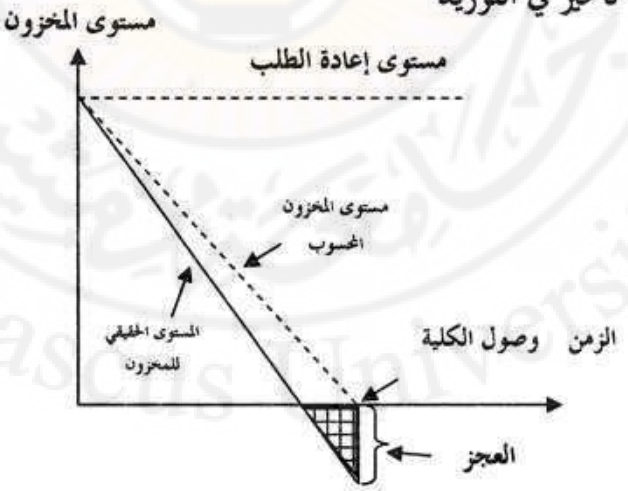
لوجدنا أن الزيادة أو النقصان في كمية الطلب لا تتغير تغيراً طردياً مع التغير في البيانات المعطاة، بل أن كمية الطلب الاقتصادية تتناسب تناسباً طردياً مع الجذر التربيعي للطلب. لهذا السبب فإننا نود أن نقول إن المسؤولين عن إدارة المخزون يرتكبون خطأ كبيراً عندما يزيدون الكمية الاقتصادية للطلب إلى الضعف عندما يزيد الطلب إلى الضعف. وذلك لأنه في هذه الحالة يجب أن تكون الزيادة هي (فقط $\sqrt{2} = 1{,}41$)، وذلك لأنه كما هو واضح في الجدول السابق أن كمية الطلب الاقتصادية تتناسب تناسباً طردياً مع الجذر التربيعي للطلب؛ والآن ننتقل إلى مشكلة أخرى وهي مشكلة إمكانية نفاذ المخزون قبل ورود الطلب وهذا ما يتطلب تشكيل احتياطي الأمان الذي سوف نناقشه في الفقرة التالية.

١٢-٦- احتياطي الأمان:

عندما تكون الفترة الزمنية الفاصلة بين الطلب ووصول الطلبية ثابتة فإنه من الممكن اتباع سياسة تخزين تحافظ على مستوى معين من المخزون، ولا يحدث أي نفاذ في المخزون. ولكن هذا لا يتحقق دوماً ويحدث في بعض الأحيان نفاذ في كمية المخزون، وتعجز الإدارة عن تلبية طلبات الزبائن؛ وإن هذا العجز يأخذ أحد الشكلين التاليين:



أ- تأخير في التوريد



ب- زيادة غير متوقعة في الطلب

للحماية من نفاذ المخزون فإنه يتوجب على الإدارة حساب وقت إصدار الطلب بشكل يجعل الطلبية تصل والمخزون لم يصل إلى النقطة صفر. إذاً المشكلة التي تواجه الإدارة هي تحديد المستوى الأمثل لاحتياطي الأمان، وحتى يمكن شرح هذا الاحتياطي أو حسابه لا بد من التعرض إلى ما يطلق عليه اسم مستوى الخدمة.

١٢-٥-١- مستوى الخدمة:

إن احتياطي الأمان الذي يتوجب على الإدارة الاحتفاظ به قد يكون مرتفع الكلفة وتكون كلفة الاحتفاظ بهذا الاحتياطي أكبر بكثير من كلفة نفاذ المخزون. لهذا السبب فإنه من غير المرغوب به الاحتفاظ بهذا الاحتياطي بنسبة 100% ، ولكن يمكن للإدارة الاحتفاظ بهذا الاحيتاطي بنسبة مئوية تقل عن هذا الحد. هذه النسبة للاحتياطي يطلق عليها اسم مستوى الخدمة.

باستخدام جدول التوزيع الطبيعي يمكن استخراج قيمة Z المقابلة لمستوى الخدمة، وذلك عن طريق طرح نصف مساحة المنحني من قيمة مستوى الخدمة والبحث في جدول التوزيع عن قيمة لـ Z مقابلة لهذه المساحة الإجمالية. بعد استخراج قيمة Z يمكن أن نقوم بضربها بقيمة الانحراف المعياري، وبذلك نصل إلى قيمة احتياطي الأمان أي إن:

$$\text{احتياطي الأمان} = 6 \times Z$$

لو افترضنا أنه في شركة ميروتكس يقدر الطلب المتوسط من أحد منتجاتها بعشر وحدات في اليوم. وفي هذه الشركة كان زمن التأخير في توريد هذا المنتج هو ستة أيام. فإنه يمكن القول إن الطلب المتوسط أثناء فترة التأخير هو:

$$6 \times 10 = 60 \text{ وحدة}$$

وإن الطلب أثناء فترة التأخير يخضع إلى التوزيع الطبيعي بانحراف معياري مساو إلى 8,59

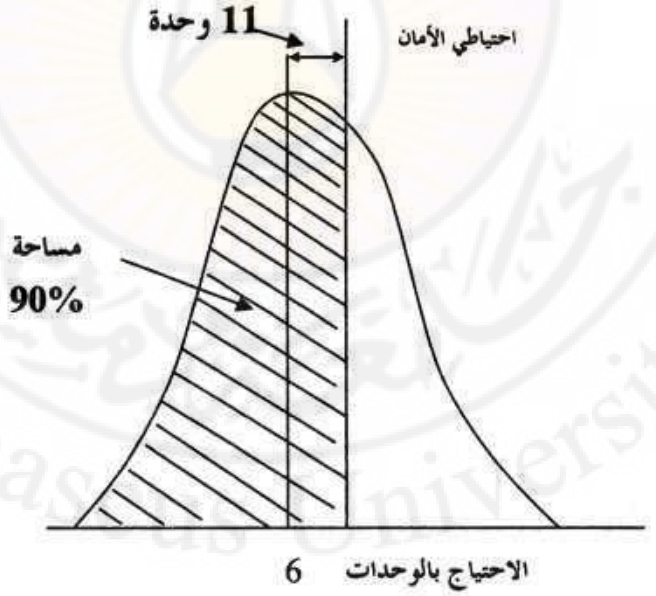
في هذه الحالة، وإذا كانت إدارة الشركة ترغب في الوصول إلى مستوى خدمة 90% إن قيمة Z والمقابلة للمساحة الإجمالية:

$$0,90 - 0,50 = 0,40$$

هي مساوية إلى 1,28 . من هذه القيمة يمكن القول إن احتياطي الآمان هو مساو إلى:

$$1,28 \times 8,59 = 11 \text{ وحدة}$$

ويمكن تمثيل ذلك بيانياً وفق ما يلي:



من هذا الشكل نلاحظ أنه بالإضافة إلى الطلب المتوسط والمساوي إلى 60 وحدة فإن احتياطي الأمان مساو إلى 11 وحدة لضمان مستوى خدمة مساو إلى 90% .

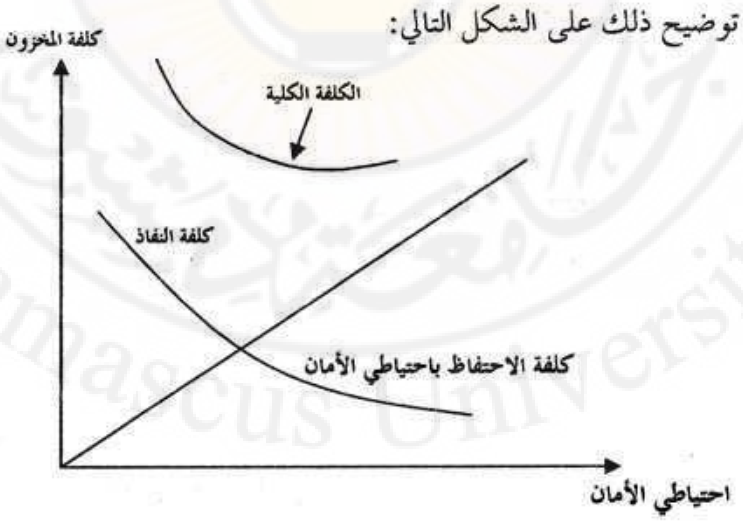
١٢-٥-٢- إيجاد أفضل مستوى لاحتياطي الأمان:

من المعادلة التي بموجبها قمنا بحساب احتياطي الأمان المقابل لمستوى الخدمة يمكن حساب الكلفة والمقابلة لهذا الاحتياطي؛ وتشمل كلفة احتياطي الأمان على ما يلي:

١- كلفة النفاذ والتي تقل كلما زاد مخزون احتياطي الأمان.

٢- كلفة الاحتفاظ بالمخزون الاحتياطي والتي تزداد كلما زاد الاحتياطي.

في حساب كلفة الاحتياطي الإدارة ترغب دوماً في تخفيض هذه الكلفة إلى أدنى حد ممكن يتوجب على الإدارة خدمة العلاقة بين الكلفة الكلية ومستوى الخدمة. ويمكن للإدارة التفكير في مستوى خدمة يخفض الكلفة الكلية إلى أدنى حد ممكن: ويمكن توضيح ذلك على الشكل التالي:



ويمكن أن تقوم التكاليف المكونة لكلفة احتياطي الأمان وفق ما يلي:

كلفة النفاذ

لو افترضنا أن:

P_s هي احتمال نفاذ المخزون.

C_f هي كلفة النفاذ الواحد.

A الطلب السنوي.

q كمية الطلب.

فإن كلفة النفاذ تأخذ شكل المعادلة التالية:

$$C_f = \frac{P_s C_f A}{q}$$

كلفة تخزين احتياطي الأمان.

لو افترضنا أن:

C_m كلفة الوحدة في السنة.

Z عدد الانحرافات المعيارية اللازمة للاحتفاظ بمستوى خدمة:

δ الانحراف المعياري.

فإن الكلفة السنوية للتخزين:

$$C = C_m Z6$$

بما أن كلفة الاحتفاظ باحتياطي الأمان هي مساوية إلى:

$$+ C_m Z6 \frac{P_s C_f A}{q} CA =$$

لو أخذنا مثال شركة سيرونكس وافترضنا أنه لدينا البيانات التالية:

زمن التأخير = 6 أيام.

الطلب اليومي هو 10 وحدات.

الانحراف المعياري هو مساو إلى 8,59

كلفة الطلب C_o هي 160 ليرة.

كلفة التخزين السنوية للوحدة هي 20 ليرة.

كلفة النفاذ هي 100 ليرة لكل قناة.

وإن إدارة الشركة ترغب في مستوى خدمة 90%

فإنه من هذه البيانات يمكن القول إن كمية الطلب الاقتصادية هي مساوية إلى (بافتراض أن أيام العمل السنوية هي 250 يوماً):

$$q = \sqrt{\frac{2AC_o}{C_m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 160 \cdot 2500}{20}} = 200$$

وإن احتياطي الأمان المقابل لمستوى خدمة 50% هو:

$$1,28 \times 8,55 = 11 \text{ وحدة}$$

وإن كلفة التخزين السنوي للاحتياطي هي:

$$20 \cdot 11 = 220$$

وكلفة النفاذ هي مساوية إلى:

$$C_T = \frac{AC_f P}{q} = \frac{(0,1)(100)(2500)}{200} = 125 \text{ ليرة}$$

ومنه فإن الكلفة الكلية هي مساوية إلى:

$$220 + 125 = 345 \text{ليرة}$$

وقل رب زدني علما
Damascus University

الفصل الثالث عشر
نماذج صفوف الانتظار

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

وقل رب زدني علما
Damascus University

١٣ ــ ١ عرض ومقدمة :

في هذا الفصل سوف نقوم بعرض مشكلة صفوف الانتظار أي وصول مجموعة من الزبائن إلى مركز خدمة (مكتب بريد ، مطار جوي ، مركز تسجيل الطلاب ، مركز إصلاح الآلات ، مركز الفحص الدوري للسيارات .... الخ) .

في مركز الخدمة لا يمكن تقديم الخدمة إلا بشكل إفرادي، أي تقدم الخدمة إلى كل زبون بشكل مستقل، وبالتالي يتم خدمة الزبائن بالتعاقب . عندما يكون هذا المركز شاغراً فليس هناك أي مشكلة ، إذ إنه تقدم الخدمة إلى الزبون في اللحظة نفسها التي يصل فيها إلى مركز الخدمة .

من الناحية المقابلة عندما يكون المركز مشغولاً، فإنه يتوجب على الزبون الذي يصل إلى المركز أن يأخذ مكانه في صف الانتظار؛ وحتى يمكن دراسة مشكلة الانتظار فإنه لا بد من التعرف إلى عناصر نموذج الانتظار .

١٣ ــ ٢ عناصر نموذج الانتظار :

بصورة عامة إن نظام الانتظار يتميز بعدة خصائص، ويتطلب وجود مجموعة من العناصر وهي التالية :

١ - طريقة وصول الزبائن إلى مركز الخدمة .

٢ - مواصفات نظام الانتظار .

٣ - آلية الخدمة .

٤ - القدرة أو الفعالية لمركز الخدمة .

٥- المجتمع الإحصائي .

١٣ ــ ٢ ــ ١ وصول الزبائن إلى مركز الخدمة .

إن نظام وصول الزبائن إلى مركز الخدمة يجب أن يكون محدداً، وبصورة عامة يجب أن يكون عشوائياً فيمكن أن يصل الزبائن بشكل إفرادي أو جماعي، وأن هؤلاء الزبائن يشكلون ما يطلق عليه صف الانتظار؛ أي إن كل زبون هو عنصر في صف الانتظار. إن معدل وصول الزبائن إلى مركز الخدمة، أي عدد الزبائن الذين يصلون في الوحدة الزمنية يمكن أن يكون ثابتاً أو متحولاً، وإن الزبائن يمكن أن يكونوا متماثلين أو مختلفين .

١٣ ــ ٢ ــ ٢ استراتيجية الانتظار:

إن أبسط طريقة للترتيب هي FIFO (أي من يصل أولاً يخدم أولاً)، وهناك طريقة أخرى هي LIFO أي من يصل آخراً يخدم أولاً؛ وطريقة تقديم الخدمة إلى الزبائن هي عشوائية في صف الانتظار، إن طريقة ترتيب الزبائن قد تكون ثابتة وقد تتغير من وقت لآخر . وقد يكون زمن الانتظار للزبائن محدوداً جداً، أي إن الزبون يصل إلى مركز الخدمة ويأخذ مكانه في صف الانتظار قبل أن تقدم له الخدمة .

١٣ ــ ٢ ــ ٣ آلية الخدمة :

أن هناك طرقاً مختلفة لتقديم الخدمة إلى الزبائن، وقد تكون هذه الطرق ثابتة أو مختلفة من وقت لآخر، ولكن بصورة عامة فإن آلية تقديم الخدمة إلى الزبائن هي عشوائية؛ في بعض مراكز الخدمة تكون طريقة تقديم الخدمة ذاتية؛ أي إن الزبون يقوم بخدمة نفسه .

١٣ ــ ٢ ــ ٤ الطاقة :

في بعض مراكز الخدمة تكون طاقة المركز محدودة بشكل مسبق ، أي يتم تحديد عدد العناصر المكونة للنظام، أي في يوم العمل يمكن القول إن المركز لا يمكن أن يستقبل إلا عدداً محدداً من الزبائن، ويرفض أي زبون يزيد عن هذا الحد .

١٣ ــ ٢ ــ ٥ المجتمع الإحصائي :

في نظام الانتظار إن المجتمع الإحصائي قد يكون منتهياً أو غير منتهٍ وتختلف التوافيق الرياضية التي يمكن استخدامها بين المجتمع المنتهي وغير المنتهي .

١٣ ــ ٣ حساب متوسط زمن الوصول والخدمة :

حتى يمكن دراسة مشكلة الانتظار فإنه لا بد من معرفة متوسط زمن خدمة الزبون؛ ومتوسط زمن وصول الزبون إلى مركز الخدمة، لو أفرضنا أن :

P احتمال وصول الزبون إلى مركز الخدمة .

r احتمال خدمة الزبون .

فإن احتمال عدم وصول الزبون هو مساو إلى $\overline{P}=1-P$ ، واحتمال عدم خدمة الزبون هو $\overline{r}=1-r$ ، كما أن احتمال مغادرة الزبون لمركز الخدمة وفي اللحظة j هو مساو إلى ما يلي :

$$\overline{r}^{\,j-1}r$$

من هذا الاحتمال يمكن القول إن متوسط الزمن اللازم لخدمة الزبون الواحد هو مساو إلى :

$$\bar{t}_s = 1.\bar{r}^{1-1}r + 2.\bar{r}^{2-1}r + 3.\bar{r}^{3-1}r + \ldots\ldots =$$

$$= r + 2.\bar{r}r + 3.\bar{r}^2 r + \ldots\ldots$$

بوضع r خارج قوس نحصل على ما يلي :

$$\bar{t}_s = r(1 + 2.\bar{r} + 3.\bar{r}^2 + \ldots\ldots) =$$

$$= r[(1 + \bar{r} + \bar{r}^2 + \ldots\ldots) + (\bar{r} + \bar{r}^2 + \ldots\ldots)\ldots\ldots]$$

في هذه المعادلة نلاحظ أن الحدود الموجودة داخل كل قوس تكون متوالية هندسية، حيث إن القوس الأول يكون متوالية هندسية تناقصية غير منتهية، وبأساس $\bar{r}$ وحد أول مساو إلى الواحد؛ والقوس الثاني يكون أيضاً متوالية هندسية تناقصية بحد أول $\bar{r}$ وبأساس $\bar{r}$ بحساب مجموع حدود هذه المتوالية نحصل على ما يلي :

$$\bar{t}_s = r[\frac{1}{1-\bar{r}} + \frac{\bar{r}}{1-\bar{r}} + \frac{\bar{r}^2}{1-\bar{r}} + \ldots\ldots]$$

بوضع $\frac{1}{1-\bar{r}}$ خارج قوس نحصل على ما يلي :

$$\bar{t}_s = 1 + \bar{r} + \bar{r}^2 + \ldots\ldots$$

أي متوالية هندسية تناقصية غير منتهية بحد أول واحد وأساس $\bar{r}$ بحساب مجموع حدود هذه المتوالية نحصل على ما يلي :

$$\bar{t}_s = \frac{1}{1-\bar{r}} = \frac{1}{r}$$

أي إن متوسط زمن خدمة الزبون الواحد هو مقلوب احتمال خدمة الزبون .

بالطريقة نفسها يمكن حساب متوسط زمن وصول الزبون إلى مركز الخدمة، والذي هو مساو إلى :

$$\bar{t}_A = \frac{1}{1-\bar{p}} = \frac{1}{p}$$

١٣ ــ ٤ صفوف الانتظار البسطة :

عند التعرض على نموذج صفوف الانتظار البسيطة، فإن هناك مجموعة كبيرة من الشروط التي يجب تحقيقها ، نذكر أهمها فيما يلي :

١ ــ الوصول والخدمة عشوائية .

٢ ــ مجتمع إحصائي كبير وعدد كبير من الزبائن .

٣ ــ صف انتظار واحد وقدره غير محدده .

٤ ــ نموذج الانتظار هو FIFO .

٥ ــ نقطة خدمة واحدة فقط .

٦ ــ وقت خدمة فردي .

٧ ــ معدل الخدمة ومعدل الوصول محدد بصورة مسبقة .

وهناك مجموعة من الرموز نذكر منها ما يلي :

λ معدل الوصول (أي متوسط عدد الزبائن الذين يصلون إلى مركز الخدمة في الوحدة الزمنية).

μ معدل الخدمة (أي متوسط عدد الزبائن الذين تتم خدمتهم في الوحدة الزمنية).

وبما أن وصول الزبائن عشوائي فإن العدد المتوقع للزبائن الذين يصلون إلى مركز الخدمة في فترة زمنية قصيرة هو معطى بواسطة توزيع بواسون، ويمكن القول إن احتمال وصول n زبون إلى مركز الخدمة في فترة زمنية T هو معطى بالقانون التالي :

$$p_{(nT)} = (\lambda T)^n \frac{e^{-\lambda T}}{n!}$$

فلو افترضنا أن متوسط عدد الزبائن الذين يصلون إلى مركز الخدمة هو ٠,٤ زبون في الثانية؛ فإن احتمال وصول ثلاثة زبائن إلى مركز الخدمة خلال ثانيتين هو مساو إلى ما يلي :

$$p_{(3,2)} = \frac{(0.8)^3 e^{-0.8}}{3!} = 0.03834$$

وفي جدول توزيع بواسون يمكن الحصول على قيمة الاحتمال بعد معرفة قيمة λ, T, n ، وإذا كان شكل الوصولات بواسوني؛ فإن توزيع الزمن بين الوصولات هو أسي سالب، ويأخذ الشكل التالي :

$$f_{(T)} = \lambda . e^{-\lambda T}$$

حيث إن $f_{(T)}$ هو تابع الكثافة الاحتمالية؛ ويعبر عن أن الفاصل الزمني بين كل وصولين هو أكثر من T ثانية .

عند مناقشة نموذج تشكل صف الانتظار البسيط؛ فإن هناك مجموعة من القوانين الرياضية التي نعرضها فيما يلي :

إن سرعة جريان Ψ هي مساوية إلى العلاقة بين معدل الوصول λ ومعدل الخدمة μ ، وتأخذ الشكل التالي :

$$\Psi = \frac{\lambda}{\mu}$$

واحتمال أن يكون هناك n زبون في النظام (أي عدد الزبائن الموجودين في مركز الخدمة) هو مساو إلى ما يلي :

$$p_n = \Psi^n (1 - \Psi)$$

واحتمال أن يكون هناك على الأقل n زبون في النظام هو مساو إلى:

$$\Psi^n$$

وإن متوسط عدد الزبائن الموجودين في مركز الخدمة هو مساو إلى ما يلي:

$$\bar{n} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

ومتوسط طول هذه الانتظار هو مساو إلى ما يلي :

$$\bar{\gamma} = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$$

وعند أخذ عدم إمكانية تشكل صف؛ فإن متوسط طول صف الانتظار هو مساو إلى :

$$\bar{\gamma}_0 = \frac{\mu}{\mu - \lambda}$$

ومتوسط زمن الانتظار في مركز الخدمة هو مساو :

$$\bar{t}_n = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

ومتوسط زمن الانتظار الزبون في صف الانتظار هو مساو :

$$\bar{t}_\gamma = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$$

ومتوسط عدد الزبائن الذين يتلقون الخدمة هو مساو إلى :

$$n_s = \frac{\lambda}{\mu}$$

مثال :

لدينا محطة تزويد الوقود وفي هذه المحطة ، أن متوسط عدد السيارات التي تصل في الدقيقة هو ثلاث سيارات، كما أن المحطة يمكن أن تزود ثلاثين سيارة في الساعة، أي إن متوسط زمن خدمة السيارة الواحدة دقيقتان والمطلوب :

١ – حساب سرعة الجريان .

٢ – ما متوسط عدد السيارات الموجودة في المحطة؟

٣ – ما متوسط زمن بقاء السيارة الموجودة في المحطة؟

٤ – ما متوسط عدد السيارات في صف الانتظار؟

٥ – ما متوسط زمن بقاء السيارة في صف الانتظار؟

الحل :

بما أن متوسط عدد السيارات التي تصل إلى المحطة هو سيارتان في الدقيقة الواحدة، وفي الدقيقة يمكن خدمة ثلاث سيارات فإن سرعة الجريان هي مساوية إلى مايلي :

$$\Psi = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{2}{3}$$

وإن متوسط عدد السيارات الموجودة في المحطة هو مساو إلى ما يلي :

$$\overline{n} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{2}{3-2} = 2 \quad \text{سيارة}$$

وإن متوسط عدد السيارات في صف الانتظار هو مساو إلى ما يلي :

$$\bar{\gamma} = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{4}{3(3-2)} = \frac{4}{3}$$

وإن متوسط زمن بقاء السيارة في صف الانتظار هو مساو إلى ما يلي :

$$Z_\gamma = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{2}{3(3-2)} = \frac{2}{3}$$ دقيقة

مثال ٢ :

أن وصول الزبائن إلى كوة الهاتف يتبع توزيع بواسون بمتوسط قدره ١٠ دقائق بين كل وصولين، وإن طول المكالمة يخضع إلى التوزيع الأسي بمتوسط قدره ثلاث دقائق والمطلوب :

١ - ما احتمال انتظار الزبون عند وصوله؟

٢ - وما متوسط عدد الزبائن عند كوة الهاتف؟

٣ - إن الشركة سوف تقوم بوضع كوة آخرى عندما يكون من المتوقع انتظار الزبون على الأقل ثلاث دقائق ، فما احتمال تزايد وصول الزبائن مما يجبر الشركة على وضع كوة آخرى .

٤ ـــ قدر الجزء من اليوم الذي يظل فيه الهاتف مشغولاً .

الحل :

في مثالنا هذا إن :

$$\lambda = 0.1 \quad , \quad \mu = 0.33$$

واحتمال انتظار الزبون عند وصوله هو مساو إلى :

$$\Psi = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{0.1}{0.33} = 0.3$$

وإن متوسط الزبائن عند كوة الهاتف هو :

$$\bar{n} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{0.1}{0.33 - 0.1} = \frac{0.1}{0.23} = \frac{10}{23} \text{ زبون}$$

ومتوسط زمن انتظار الزبون في صف الانتظار هو :

$$\bar{t}_\gamma = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{\lambda}{0.33(0.33 - \lambda)} = 0.33$$

إذا ثبتنا μ عند ونبحث عن القيمة الجديدة لـ λ عندما يكون زمن الانتظار ثلاث دقائق، أي إن:

$$3 = \frac{\lambda}{0.33(0.33 - \lambda)}$$

وبإجراء الحسابات نجد أن : $\lambda = 0.16$

أي إنه عندما يزيد عدد الزبائن عن 6 زبائن في الساعة إلى 10 زبون في الساعة يتوجب على الشركة تركيب كوة جديدة .

أخيراً إن الجزء المتوقع من اليوم الذي يكون فيه الهاتف مشغولاً هو مساو إلى :

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{0.3}{0.33} = 0.3$$

مثال :

مجموعة من الزبائن يصلون إلى أحد المخازن بمعدل ٤٢ في الساعة، وإن المخزن يقدم الخدمة إلى الزبائن بمعدل زبون واحد في الدقيقة والمطلوب :

١ ـــ ما سرعة الجريان وما احتمال أن ينتظر الزبون عند وصوله إلى الخزن؟

٢ ـــ ما متوسط زمن انتظار الزبائن في المخزن؟

٣ ـــ ما احتمال وجود ثلاث زبائن في المخزن؟

٤ ـــ ما احتمال أن يكون هناك بون واحد في صف الانتظار؟

٥ ـــ ما احتمال وجود على الأقل أربع زبائن في المخزن؟

٦ـــ ما احتمال وجود على الأقل ثلاث زبائن في المخزن؟

الحل:

إن احتمال الزبون عند وصوله إلى المخزن هو مساو إلى ما يلي :

$$\Psi = \frac{42}{60} = 0.7$$

وإن متوسط زمن انتظار الزبون في صف الانتظار هو مساو إلى :

$$Z_\gamma = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{42}{60(60-42)} = \frac{7}{180} = 2\frac{1}{3}$$ دقيقة

واحتمال وجود ثلاثة زبائن في المخزن هو :

$$p_3 = \Psi^3(1-\Psi) = (1-0.7)\times 0.7^3 = 0.1025$$

وإن كان هناك زبون يتلقى الخدمة؛ فإنه يتبقى زبونان في صف الانتظار واحتمال تحقق ذلك مساو إلى ما يلي:

$$p_2 = (1-0.7)\times 0.72 = 0.147$$

و احتمال وجود على الأقل أربعة زبائن في المخزن هو مساو إلى ما يلي:

$$p_{(x\le 3)} = \Psi^4 = 0.7^3 = 0.2401$$

وإن احتمال وجود على الأكثر ثلاثة زبائن في المخزن هو مساو إلى ما يلي:

$$p_{(x\le 3)} = 1 - p_{(x\le 4)}$$
$$= 1 - 0.2401 = 0.7599$$

١٣ ــ ٥ نموذج صف الانتظار بأكثر من نقطة خدمة :

هناك عدة طرق للتخلص من الشروط الموجودة في صف الانتظار البسيط ، إحدى هذه الطرق هي وضع أكثر من نقطة خدمة ، حسب هذه الطريقة يوجد صف انتظار واحد وعدة نقاط خدمة، وإنه يمكن تمثيل ذلك وفق ما يلي :

	نقاط الخدمة	الزبائن المغادرة
صف الانتظار 00000000		00
		000
		0000
		000

في هذا النوع من مراكز الخدمة، وبعد الافتراض أنه يوجد في هذا المركز α نقطة خدمة فإن احتمال انتظار الزبون عند وصوله إلى المركز هو مساو إلى ما يلي :

$$= \frac{(\Psi\alpha)^{\alpha}}{\alpha!(1-\Psi)} p_0$$

ومتوسط عدد الزبائن في مركز الخدمة هو مساو إلى :

$$\bar{n} = \frac{\Psi(\Psi\alpha)^{\alpha}}{\alpha!(1-\Psi)^2} p_0 + \Psi\alpha$$

ومتوسط عدد الزبائن في صف الانتظار هو مساو إلى :

$$\bar{\gamma} = \frac{\Psi(\Psi\alpha)^{\alpha}}{\alpha!(1-\Psi)^2} p_0$$

ومتوسط زمن بقاء الزبون في مركز الخدمة هو مساو إلى :

$$\bar{t}_n = \frac{(\Psi\alpha)^{\alpha}}{\alpha!(1-\Psi)^2 \alpha\mu} p_0 + \frac{1}{\mu}$$

ومتوسط زمن بقاء الزبون في الانتظار هو مساو إلى :

$$\bar{t}_\gamma = \frac{(\Psi\alpha)^\alpha}{\alpha!(1-\Psi)^2\alpha\mu} p_0$$

في هذه التوافيق :

$$p_0 = \frac{\alpha!(1-\Psi)}{(\Psi\alpha)^\alpha + \alpha!(1-\Psi)\sum_{n=0}^{n=1}\frac{1}{n!}(\Psi\alpha)^n}$$

و

$$\Psi = \frac{\lambda}{\alpha\mu}$$

مثال ١ :

في أحد المصارف فإنه في الصندوق يوجد ثلاث نقاط خدمة، وأمام هذه النقاط يوجد صف انتظار واحد، وإن وصول الزبائن إلى هذا المصرف يتم بمعدل ٧٢ زبوناً في الساعة، كما أن كل نقطة من نقاط الخدمة تخدم الزبون الواحد في دقيقتين ،وإن إدارة المصرف تفكر في وضع الصرف الآلي، مما يجعل هناك نقطة خدمة واحدة؛ وأن هذا الصراف يخدم الزبون الواحد بـــ ٤٠ ثانية ، ما أسهل طريقة لخدمة الزبائن ؟

الحل :

في هذا التمرين لدينا:

$$\lambda = 30 \quad , \quad \alpha = 3 \quad \mu = 72 \quad ,$$

وإن :

$$\Psi = \frac{\lambda}{\alpha\mu} = \frac{72}{3\times 30} = 0.8$$

حتى يمكن إجراء المقارنة بين النظام الحالي ونظام الصراف الآلي لا بد من حساب متوسط زمن الانتظار ، وإن حساب متوسط زمن الانتظار في النظام الحالي يتطلب معرفة قيمة P_0 التي هي مساوية إلى ما يلي :

$$p_0 = \frac{3.2.1(1-0.8)}{(0.8\times 3)^3 + 3.2.1(1-0.8)[\frac{1}{1}(2.4)^0 + \frac{1}{1}(2.4)^1 + \frac{1}{2}(2.4)^2]}$$

$$= \frac{1.2}{21.36}$$

ومنه فإن متوسط زمن الانتظار في النظام الحالي هو مساو إلى ما يلي :

$$\bar{t}_n = \frac{(\Psi\alpha)^\alpha}{\alpha!(1-\Psi)^2\alpha\mu} p_0 + \frac{1}{\mu}$$

وبالتعويض نحصل على ما يلي :

$$\bar{t}_n = \frac{(1.2)^3}{6(0.2)^2 3\times 30} \times \frac{1.2}{21.36} + \frac{1}{30}$$

$$= \frac{13.824}{6(0.2)^2 90} \times \frac{1.2}{21.36} + \frac{1}{30}$$

$$\bar{t}_n = \frac{16.5888}{461.376} + \frac{1}{30} = 0.069288 \quad \text{ساعة}$$

أي أربع دقائق وتسع ثواني ، أما متوسط زمن الانتظار في نظام الصراف الآلي فإنه مساو إلى :

$$\bar{t}_n = \frac{1}{\mu\lambda} = \frac{1}{90-72} \quad \text{ساعة}$$

أي ثلاث دقائق و 20 هذه النتيجة تقودنا إلى القول إن نظام الصراف الآلي هو أفضل ، وحتى يسهل الحكم على كلا النظامين لا بد من إجراء المقارنة؛ وفق الجدول التالي:

البيانات	أمين صندوق	صراف آلي
احتمال انتظار الزبون	0.6472	0.8
متوسط عدد الزبائن في المصرف	4.99	4
متوسط عدد الزبائن في صف الانتظار	2.59	3.2
متوسط زمن بقاء الزبائن في المصرف	4.9	3.2
متوسط زمن انتظار الزبون	2.9	2.4

وهكذا نرى أنه ليس في جميع الأحوال نظام الصرف الآلي أفضل من نظام أمين الصندوق، وأنه إذا تم إعادة التنظيم بوضع صف انتظار أمام كل صندوق؛ فإن متوسط زمن الانتظار في كل صندوق هو :

$$t_n = \frac{1}{\mu\lambda} = \frac{1}{30-24} = \frac{1}{6} = 10 \quad \text{دقائق}$$

ولكن في عشر الدقائق هذه تم خدمة ثلاثة زبائن، وبالتالي يصبح متوسط زمن الانتظار في المصرف هو مساوياً إلى 3.33 دقيقة لكل زبون ، وهذا ما يجعل النظام الجديد أفضل من نظام الصراف الآلي.

وقل رب زدني علما
Damascus University

الفصل الرابع عشر

سلسلة ماركوف

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

وقل رب زدني علما
Damascus University

١٤ ــ١ــ عرض ومقدمة :

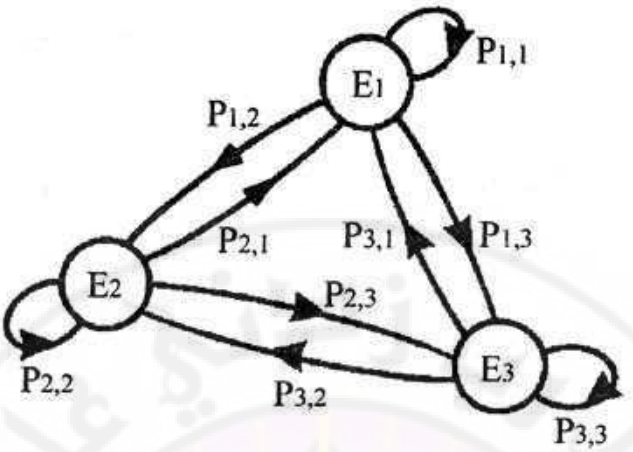
لنفرض أنه لدينا مجموعة من الحالات $E_1, E_2, \ldots\ldots E_n$ بحيث إنها عبارة عن مجموعة من الظواهر العشوائية ، وإن احتمال ظهور أي منها ليس من الضروري يعتمد على احتمال ظهور بقية الظواهر، بل إنه على الأكثر يعتمد على احتمال ظهور الحالة التي تسبق الحالة قيد الدراسة، من ناحية أخرى إن احتمال الانتقال بين مختلف الحالات $E_1, E_2, \ldots\ldots E_n$ يأخذ الشكل $P_{i,j}$ ، بحيث إن مجموع احتمالات الانتقال من أي حالة من الحالات $E_1, E_2, \ldots\ldots E_n$ هو دوماً مساو إلى الواحد ، هذه الحالات كما نلاحظ تكون فيما بينها سلسلة ، تلك السلسلة يطلق عليها اسم سلسلة، وأول خطوة في معالجة سلسلة ماركوف هي مصفوفة ماركوف .

١٤-٢- مصفوفة ماركوف :

إن هذه الفقرة مخصصة لإظهار إمكانية تطبيق نظرية المصفوفات على سلسلة ماركوف، وحتى يمكن تقريب البحث إلى ذهن القارئ فإننا نفترض أنه لدينا سلسلة مكونة من ثلاث حالات E_1, E_2, E_3 احتمالات التنقل بين هذه الحالات الثلاث تأخذ شكل المصفوفة التالية :

$$\begin{array}{c} \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} E_1 & E_2 & E_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} P_{1,1} & P_{1,2} & P_{1,3} \\ P_{2,1} & P_{2,2} & P_{2,3} \\ P_{3,1} & P_{3,2} & P_{3,3} \end{bmatrix} \end{array} = MP$$

هذه المصفوفة يطلق عليها اسم مصفوفة ماركوف فيما إذا كان مجموع كل سطر من سطورها هو دوماً مساوياً إلى الواحد، وإن قيمة أي عنصر من عناصرها يتـــراوح بين الصفر والواحد وإن الشبكة الممثلة لتلك المصفوفة تأخذ الشكل التالي :



هذه الشبكة تكون ممثلة لسلسلة ماركوف فيما إذا كان مجموع قيم الأقواس المنطلقة من أي نقطة من نقاطها هو مساوياً إلى الواحد، كما أن قيمة أي قوس من أقواسها تتراوح بين الصفر والواحد .

١٤-٣- شعاع احتمالات المنطلق :

حتى يمكن الحصول على سلسلة ماركوف لا بد من معرفة حالة المنطلق ، أي لا بد من تحديد احتمال الانطلاق من أي حالة من الحالات المكونة للسلسلة، وهذا بسبب أن جميع الحالات المكونة للسلسلة هي ظواهر عشوائية، فلو افترضنا أن :

p_1^0 هي احتمال الانطلاق من الحالة E_1 .

p_2^0 هي احتمال الانطلاق من الحالة E_2 .

p_3^0 هي احتمال الانطلاق من الحالة E_3 .

فإن شعاع احتمالات المنطلق يأخذ الشكل التالي :

$$P^0 = [p_1^0, p_2^0, p_3^0]$$

وبعد مرور فترة زمنية واحدة فإن هذا الشعاع يأخذ الشكل التالي :

$$P^0 = [p_1^0, p_2^0, p_3^0] \begin{bmatrix} P_{1,1} & P_{1,2} & P_{1,3} \\ P_{2,1} & P_{2,2} & P_{2,3} \\ P_{3,1} & P_{3,2} & P_{3,3} \end{bmatrix}$$

وهذا ما يدعونا إلى القول إن احتمال الوصول إلى الحالة E_1 بعد مرور فتـــرة زمنية واحدة ما هو إلا حاصل ضرب الشعاع P^0 بالعامود الأول للمصفوفة، وذلك وفق ما يلي :

$$p_1^1 = p_1^0 p_{1,1} + p_2^0 p_{2,1} + p_3^0 p_{3,1}$$

وإن احتمال الوصول إلى الحالة E_2 بعد مرور فترة زمنية واحدة هو عبارة عن حاصل ضرب الشعاع P^0 بالعمود الثاني للمصفوفة Mp ، وذلك وحسب ما يلي:

$$p_2^1 = p_1^0 p_{1,2} + p_2^0 p_{2,2} + p_3^0 p_{3,2}$$

بعد مرور فترة زمنية واحدة يمكن الوصول إلى الحالة E_3 بالاحتمال :

$$p_3^1 = p_1^0 p_{1,3} + p_2^0 p_{2,3} + p_3^0 p_{3,3}$$

وإن :

$$p_1^0 + p_2^0 + p_3^0 = p_1^1 + p_2^1 + p_3^1 = 1$$

وهذا ما يمكننا من القول إن :

$$p^1 = p^0 Mp$$

$$p^2 = p^1 Mp = p^0 M^2 p$$

$$p^3 = p^2 Mp = p^0 M^3 p$$

$$p^{n-1} = p^{n-2} Mp = p^0 M_p^{n-1}$$

$$p^n = p^{n-1} Mp = p^0 M_p^n$$

أي إن احتمالات الوصول إلى مختلف الحالات المكونة للسلسلة بعد مرور **n** فترة زمنية ما هي إلا حاصل ضرب شعاع احتمالات المنطلق P^0 بمصفوفة احتمالات الانتقال؛ مرفوعة إلى القوى التي هي عبارة عن الفترة الزمنية المحددة :

١٤-٤- الشعاع الاحتمالي الثابت :

إن أي شعاع من أشعة احتمالات المنطلق يكون شعاعاً احتمالياً ثابتاً فيما إذا حقق الشرط التالي :

$$w = wM_p$$

أي إنه إذا كان حاصل ضرب الشعاع P^0 بالمصفوفة MP يعطينا الشعاع P^0 فإننا نقول عن هذا الشعاع إنه شعاع احتمالي ثابت ، فلو افترضنا أنه لدينا المصفوفة التالية:

$$MP = \begin{array}{c} \\ E_1 \\ E_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} E_1 & E_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{array}$$

وإن احتمالات الانطلاق لكل من الحالتين E_1, E_2 تأخذ شكل الشعاع التالي:

$$P^0 = [\frac{3}{5}, \frac{2}{5}]$$

فإن حاصل ضرب الشعاع P^0 بالمصفوفة MP يعطينا ما يلي :

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{18}{30} & \frac{12}{30} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

أي إن : $P^0 M_p = p^0$

وهذا يدعونا إلى القول إن الشعاع P^0 هو شعاع احتمالي ثابت ونرمز له بـ ω ويمكن أن نعمم ونكتب :

$$wM_p = w$$

$$wM_p^2 = w$$

$$wM_p^n = w$$

أي إن احتمالات الانطلاق من مختلف الحالات المكونة للسلسلة تبقى ثابتة مهما كانت الفترة الزمنية التي نقضيها في التنقل بين هذه الحالات .

١٤-٥- مصفوفة ماركوف النظامية :

إن مصفوفة ماركوف تكون نظامية فيما إذا كانت هذه المصفوفة في أي مرحلة من مراحل قواها لا تحتوي إلا عناصر موجبة تختلف عن الصفر ، فلو أخذنا المصفوفة التالية :

$$MP = \begin{array}{c} \\ E_1 \\ E_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} E_1 & E_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{array}$$

لوجدنا أن :

$$MP2 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{18} & \frac{7}{18} \\ \frac{7}{12} & \frac{5}{12} \end{bmatrix}$$

وبما أن المصفوفة M_p^2 لا تحتوي إلا على عناصر موجبة تختلف عن الصفر، وعلى أن المصفوفة M_p هي بدورها لا تحتوي إلا على عناصر موجبة تختلف عن الصفر، فإنه يمكن القول عن هذه المصفوفة هي مصفوفة نظامية .

من ناحية أخرى لا بد من ملاحظة أنه إذا كانت المصفوفة M_p نظامية فـإن المصفوفة M_p^n سوف تنحدر نحو مصفوفة الاحتمالات الثابتة w لها، وذلـك لأن كل سطر من سطورها هو شعاع ثابت w لها، وهذا ما يقودنا إلى القـول إنـه إذا كانت لدينا المصفوفة :

$$M_p = \begin{bmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{bmatrix}$$

فإنه يمكن حساب العنصر المكونة للشعاع الثابت W ، وذلك وفق ما يلي :

$$[w_1, w_2]\begin{bmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{bmatrix} = [w_1(1-a)+bw_2, aw_1+(1-b)w_2]$$

من هذا الشعاع نلاحظ:

أي إن :

$$aw_1 = bw_2$$

وبما أن :

$$w_1 + w_2 = 1 \Rightarrow w_2 = 1 - w_1$$

فإنه بالتعويض نحصل على :

$$aw_1 = b(1-w_1)$$

$$aw_1 = b - bw_1$$

$$w_1(a+b)=b$$

$$w_1=\frac{b}{a+b}$$

أما لو أخذنا المركب الثاني من الشعاع W فإننا نحصل على :

$$aw_1+(1-b)w_2=w_2$$

$$aw_1=bw_2$$

بالتعويض نحصل على :

$$bw_2=a(1-w_2)$$

$$=a-aw_2$$

$$w_2(a+b)=a$$

$$w_2=\frac{a}{a+b}$$

مثال :

لو افترضنا أن مصفوفة ماركوف تأخذ الشكل التالي :

$$MP = \begin{array}{c} \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} E_1 & E_2 & E_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{2}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{array}$$

فإنه يمكن حساب العنصر المكونة للشعاع الثابت w ، وذلك وفق ما يلي :

$$w=[w_1,w_2,w_3]\begin{bmatrix}3/4 & 1/4 & 0\\ 0 & 2/3 & 1/3\\ 1/4 & 1/4 & 1/2\end{bmatrix}=$$

$$=[3/4.w_1+1/4.w_3,1/4.w_1+2/3.w_2+1/4.w_3,1/3.w_2+1/2.w_3]=$$

ومن المركب الأول :

$$3/4w_1+1/4w_3=w_1\Rightarrow 1/4w_1=1/4w_3\Rightarrow w_1=w_3$$

ومن المركب الثالث :

$$\left.\begin{array}{l}1/3w_2+1/2w_3=w\\ 1/3w_2=1/2w_3\end{array}\right\}\Rightarrow w_2=3/2w_3$$

وبما أن :

$$\left.\begin{array}{l}w_1+w_2+w_3=1\\ w_1=w_3\end{array}\right\}\Rightarrow w_2=1-2w_3$$

فإنه بالتعويض في المعادلة :

$$w_2=3/2w_3$$

نحصل على ما يلي :

$$1-2w_3 = 3/2w_3$$

$$1=(2+3/2)w_3 = 7/2w_3$$

$$w_3 = 2/7 = w_1$$

$$w_2 = 2/7 \times 3/2 = 3/7$$

وهذا يدعونا إلى القول إن شعاع الاحتمالات الثابتة يأخذ الشكل التالي :

$$w = \left[2/7 \ , \ 3/7 \ , \ 2/7 \right]$$

١٤-٦- مصفوفة ماركوف الماصة :

في سلسلة ماركوف : إن أي حالة من الحالات تكون ماصة فيما إذا كان هناك تأكيد على البقاء في هذه الحالة؛ واستحالة الانتقال من هذه الحالة إلى أي حالة من الحالات المكونة للسلسلة . وإن أي سلسلة من سلاسل ماركوف تكون ماصة فيما إذا تحقق الشرطان التاليان :

١ ــ يوجد في السلسلة على الأقل حالة ماصة .

٢ ــ إمكانية الانتقال من أي حالة من الحالات المكونة للسلسلة إلى تلك الحالة الماصة، وليس من الضروري أن يكون خلال خطوة واحدة .

لو افترضنا أن سلسلة ماركوف تأخذ شكل المصفوفة التالية :

$$\begin{array}{c} \\ E_0 \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} E_0 & E_1 & E_2 & E_3 & E_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

فإنه يمكن القول إن الحالتين E_0, E_4 هما حالتان ماصتان؛ أما بقية الحالات E_1, E_2, E_3 فهي حالات غير ماصة؛ ولكن يمكن الانتقال من أي من هذه الحالات إلى الحالات الماصة، وهذا يدعونا إلى القول إن سلسلة ماركوف هي سلسلة ماصة.

من ناحية أخرى إنه عندما يكون لدينا سلسلة ماركوفية تحتوي على بعض الحالات الماصة ، كما هو الحال في مثالنا السابق ، فإنه يمكن حساب عدد الخطوات اللازمة للوصول إلى الحالة الماصة فيما لو قمنا بإعادة تنظيم المصفوفة، وذلك عن طريق التفريق بين الحالات الماصة وغير الماصة وفق ما يلي :

$$MP= \begin{array}{c} \\ E_0 \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} E_0 & E_1 & E_2 & E_3 & E_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

في هذه المصفوفة نلاحظ أن :

$$I = \begin{array}{c} \\ E_1 \\ E_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} E_1 & E_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

تمثل الحالات الماصة فقط ولهذا فإنها أخذت شكل المصفوفة الأحادية .

أما المصفوفة :

$$0 = \begin{array}{c} \\ E_1 \\ E_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} E_1 & E_2 & E_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

فإنها تمثل العلاقة بين الحالات الماصة والحالات غير الماصة . أما العلاقة بين الحالات غير الماصة والحالات الماصة فإنها أخذت شكل المصفوفة :

$$R = \begin{array}{c} \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} E_1 & E_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \end{array}$$

والعلاقة بين الحالات غير الماصة فإنها أخذت شكل المصفوفة التالية :

$$Q = \begin{array}{c} \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} E_1 & E_2 & E_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

أي إن المصفوفة M_p يمكن أن توضع وفق الشكل التالي :

$$M_p = \begin{bmatrix} I & o \\ R & Q \end{bmatrix}$$

وبما أننا نبحث عن عدد الخطوات اللازمة للوصول إلى الحالة الماصة فإنه لدينا :

$$I + Q + Q^2 + Q^3 + \ldots\ldots = \frac{1}{[I-Q]} = [I-Q]^{-1}$$

ويمكن حساب قيمة المصفوفة $[I-Q]^{-1}$ وفق ما يلي :

$$I-Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

Damascus University

ومقلوب هذه المصفوفة يأخذ الشكل التالي :

$$[I-Q]^{-1} = \begin{array}{c} \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} E_1 & E_2 & E_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3/2 & 1 & 1/2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 3/2 \end{bmatrix} \end{array} = N$$

وهذا ما يقودنا إلى القول إن زمن البقاء في الحالة الأولى E_1 قبل الوصول إلى الحالة الماصة هو مساو إلى :

$$E_1 = 3/2 + 1 + 1/2 = 3$$

و زمن البقاء في الحالة الماصة E_2 قبل الوصول إلى الحالة الماصة هو مساو إلى:

$$E_2 = 1 + 2 + 1 = 4$$

أما زمن البقاء في الحالة الماصة E_3 ، و قبل الوصول إلى الحالة الماصة فهو مساو إلى :

$$E_3 = 1/2 + 1 + 3/2 = 3$$

ومنه فإن شعاع الزمن يأخذ الشكل التالي :

$$T = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix}$$

من ناحية أخرى إن احتمال الوصول إلى الحالات الماصة E_0, E_4 انطلاقاً من الحالات غير الماصة E_1, E_2, E_3 فيمكن حسابها وفق ما يلي :

وبما أننا قد قمنا بحساب المصفوفة N فإن المصفوفة B تأخذ الشكل التالي :

$$B = \begin{bmatrix} 3/2 & 1 & 1/2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 3/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 3/4 \end{bmatrix}$$

وهذا ما يدعونا إلى القول إن احتمال الوصول إلى الحالة الماصة E_0 انطلاقاً من الحالة غير الماصة E_1 هو مساوي إلى 3/4 ، و إن احتمال الوصول إلى الحالة الماصة E_4 انطلاقاً من الحالة غير الماصة E_1 هو مساو إلى 1/4 ، أي إن المصفوفة B تمثل بالتحديد احتمالات الوصول إلى الحالات الماصة E_0, E_4 انطلاقاً من الحالات غير الماصة E_1, E_2, E_3 .

مثال عملي :

لنأخذ إحدى المؤسسات ولنأخذ الأشخاص المسئوولين عن تسيير العمل في هذه المؤسسة .

١ ــ المدير (D) ويقوم بتقسيم العمل مناصفة؛ النصف يقوم به هو، أما النصف الآخر فيفوض به مساعده .

٢ ــ مساعد المدير (A) ويقوم بتفويض سكرتيره بـ (3/4) من عمله، ويترك (1/8) من عمله جانباً وينجز الجزء الباقي .

٣ ــ سكرتير المدير (SD) فينجز (3/8) من عمله، ويحول (1/4) من عمله إلى المدير و(1/4) من عمله إلى سكرتير المدير المساعد، ويترك الجزء الباقي من العمل.

٤ ــ سكرتير المدير المساعد فينجز (3/8) من عمله، ويحول (1/4) من عمله إلى المدير المساعد و(1/4) من عمله إلى سكرتير المدير، أما باقي العمل ويساوي (1/8) فيتركه جانباً .

ويطلب إلى الباحث حساب زمن عمل كل من الإداريين الأربعة وحساب نسبة العمل المنجز .

الحل :

في هذه المشكلة لدينا أربع حالات غير ماصة وهي :

المدير D

المدير المساعد A

سكرتير المدير SD

سكرتير المدير المساعد SA

وحالتان ماصتان هما :

إنجاز العمل I

ترك العمل جانباً II

وإن مصفوفة ماركوف تأخذ الشكل التالي :

$$MP = \begin{array}{c} \\ \text{I} \\ \text{II} \\ \text{D} \\ \text{A} \\ \text{SD} \\ \text{SA} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \text{I} & \text{II} & \text{D} & \text{A} & \text{SD} & \text{SA} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/8 & 1/8 & 0 & 0 & 0 & 3/4 \\ 3/8 & 1/8 & 1/4 & 0 & 0 & 1/4 \\ 3/8 & 1/8 & 0 & 1/4 & 1/4 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

من هذه المصفوفة نلاحظ أن :

$$R = \begin{array}{c} \\ \text{D} \\ \text{A} \\ \text{SD} \\ \text{SA} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{I} & \text{II} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1/8 & 1/8 \\ 3/8 & 1/8 \\ 3/8 & 1/8 \end{bmatrix} \end{array}$$

Damascus University

$$R = \begin{array}{c} \\ D \\ A \\ SD \\ SA \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} D & A & SD & SA \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3/4 \\ 1/4 & 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

من هذه المصفوفة يمكن حساب N ، والتي هي مساوية إلى ما يلي :

$$N = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} D & A & SD & SA \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1/2 & 0,8 & 0,8 & 0,8 \\ 0,075 & 1,3 & 0,3 & 1,05 \\ 0,375 & 0,3 & 1,3 & 0,55 \\ 0,1 & 0,4 & 0,4 & 1,8 \end{bmatrix} \end{array}$$

أما المصفوفة B والتي تمثل العلاقة بين الحالات غير الماصة والحالات الماصة فهي مساوية إلى ما يلي :

$$B = N \cdot R = \begin{bmatrix} 1/2 & 0,8 & 0,8 & 0,8 \\ 0,075 & 1,3 & 0,3 & 1,05 \\ 0,375 & 0,3 & 1,3 & 0,55 \\ 0,1 & 0,4 & 0,4 & 1,4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1/8 & 1/8 \\ 3/8 & 1/8 \\ 3/8 & 1/8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,67 & 0,33 \\ 0,73 & 0,27 \\ 0,725 & 0,275 \end{bmatrix}$$

من هذه الخطوات السابقة نلاحظ أن المدير يعمل في اليوم مدة ثلاث ساعات ونصف وست دقائق؛ ينجز خلالها 70% من عمله، أما مساعد المدير فإنه يعمل في اليوم لمدة ساعتين وثلاثة وأربعين دقيقة ينجز خلالها 67% من عمله ، أما سكرتير المدير فإنه يعمل في اليوم لمدة ساعتين و28 دقيقة ينجز خلالها 73% من عمله ، أما سكرتير المدير المساعد فإنه يعمل في اليوم لمدة ساعتين وثماني دقائق ينجز خلالها 725% من عمله .

١٤-٧- تطبيق سلسلة ماركوف على صفوف الانتظار :

إن مشكلة صفوف الانتظار تطرح فيما لو رغبنا في دراسة طريقة وصل مجموعة من الزبائن إلى مركز خدمة ، كوة الهاتف ، وصول الطائرات إلى المطار ، انتظار الآلات للإصلاح في مركز الصيانة، وحتى يمكن دراسة هذه المشكلة وبشكل دقيق لا بد من تحديد طريقة وصول الزبائن إلى مركز الخدمة والتوزيع الاحتمالي الذي يخضع له زمن خدمة الزبائن، من أجل ذلك فإننا نفترض أن احتمال وصول الزبون إلى مركز الخدمة هو مساو إلى P ، و احتمال عدم وصول الزبون هو $\overline{P}$ من ناحية أخرى فإننا نفترض أن احتمال خدمة الزبون هو مساو إلى r و احتمال عدم خدمة الزبون هو مساو إلى $\overline{r}$ ويكون لدينا :

$$\overline{P}+P=1$$

$$\overline{P}=1-P$$

$$\overline{r}+r=1$$

$$\overline{r}=1-r$$

انطلاقا من هذه الافتراضات يمكن استخدام سلسلة ماركوف فيما لو افترضنا أن عدد الزبائن الموجودين في صف الانتظار في كل لحظة من الزمن هو حالة من الحالات والمكونة السلسلة ، وبشكل طبيعي لا بد من تحديد طول صف الانتظار من البداية، وذلك لأن له اثراً كبيراً وفعالاً في تحديد عدد الحالات المكونة للسلسلة . فلو افترضنا أن طول صف الانتظار المقبول هو N فإنه يمكن القول إن سرعة الجريان هي مساوية إلى :

$$u = \frac{p}{r}$$

أي العلاقة بين احتمال وصول الزبائن إلى مركز الخدمة واحتمال خدمة الزبون، وهي أيضاً عبارة عن حاصل ضرب احتمال الوصول بمتوسط زمن انتظار الزبائن في مركز الخدمة، ويمكن حساب هذا الزمن وفق ما يلي :

$$\bar{t} = 1.r + 2\bar{r}r + 3\bar{r}^2 r + 4\bar{r}^3 r + \ldots\ldots + i\bar{r}^{i-1} r + \ldots$$

$$= r(1 + 2\bar{r} + 3\bar{r}^2 + 4\bar{r}^3 + \ldots\ldots + i\bar{r}^{i-1} + \ldots)$$

$$= r[(1 + \bar{r} + \bar{r}^2 + \ldots.) + (\bar{r} + \bar{r}^2 + \ldots.) + \ldots..]$$

$$= r[(\frac{1}{1-\bar{r}} + \frac{\bar{r}}{1-\bar{r}} + \ldots\ldots)]$$

$$= \frac{r}{1-\bar{r}}(1+\bar{r}+\bar{r}^2+....) = \frac{r}{1-\bar{r}}.\frac{1}{1-\bar{r}}$$

$$= \frac{r}{(1-\bar{r})^2} = \frac{r}{r^2} = \frac{1}{r}$$

إذا فترضنا أن مركز الخدمة قد بدأ العمل؛ و لم يكن هناك أي زبـــون في صـــف الانتظار فإنه وخلال وحدة الزمن المعتمدة يمكن أن يكون لدينا وصول زبون باحتمال مساو إلى P ، وعدم وصول زبون باحتمال مساو إلى $\overline{P}$. وبأخذ متوســـط طـــول صف الانتظار بالحسبان، فإنه يمكن القول إن هذا المتوسط يمكن أن يزيـــد بوحـــدة واحدة باحتمال مساو إلى rP (أي يقدم خدمة الزبون ووصول زبون إضـــافي)، كما أنه يمكن أن ينقص بوحدة واحدة فيما لو تم خدمة، زبون و لم يكن هناك وصول لزبون إضافي، أي إن احتمال نقصان صف الانتظار بوحدة واحدة هـــو مســـاو إلى $r\overline{P}$. من الاحتمالين السابقين يمكن القول إن احتمال بقاء صف الانتظار على حاله يعطى بالعلاقة:

$$1-\bar{r}P = r\overline{P}$$

لو فترضنا أن عدد الزبائن الذين هم بحاجة إلى خدمة المركز هو مساو لأربعة زبائن ، فإن مختلف الأوضاع والحالات التي يمكن أن يأخذها صف الانتظار تأخذ شكل المصفوفة التالية :

$$M_P = \begin{array}{c} \\ E_0 \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} E_0 & E_1 & E_2 & E_3 & E4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \bar{P} & P & 0 & 0 & 0 \\ \bar{P}r & 1-\bar{P}r-P\bar{r} & P\bar{r} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{P}r & 1-\bar{P}r-P\bar{r} & P\bar{r} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{P}r & 1-\bar{P}r-P\bar{r} & P\bar{r} \\ 0 & 0 & 0 & r & \bar{r} \end{bmatrix} \end{array}$$

من هذه المصفوفة يمكن صياغة الشعاع الاحتمالي الثابت؛ فيما لو تمكنا من تحديد جزء الزمن اللازم للبقاء في كل حالة من الحالات E_0, E_1, E_2, E_3, E_4 أو عدد الخطوات اللازمة للانتقال من حالة إلى حالة أخرى مثلاً لو أخذنا الحالة E_i فإن جزء الزمن اللازم للبقاء في هذه الحالة هو مساو إلى w_i ، وعدد الخطوات اللازمة للانتقال من حالة E_i إلى حالة E_{i+1} هو مساو إلى :

$$w_i P_{i,i+1}$$

بالطريقة نفسها فإن جزء الزمن اللازم للبقاء في هذه الحالة E_{i+1} هو مساو إلى ω_{i+1} ، وعدد الخطوات اللازمة للانتقال من حالة E_{i+1} إلى حالة E_i هو مساو إلى:

$$w_{i+1} P_{i+1,i}$$

وحتى تكون الاحتمالات صحيحة لا بد من وجود المساواة :

$$w_i P_{i,i+1} = w_{i+1} P_{i+1,i}$$

أي إن :

$$\frac{w_i}{w_{i+1}} = \frac{p_{i+1,i}}{p_{i,i+1}}$$

وهذا يمكننا من القول إن العلاقة بين زمن انتظار الزبون في الحالة E_i ، وزمن انتظار الزبون في الحالة E_{i+1} هي مساوية تماماً إلى العلاقة بين احتمال انتقال الزبون؛ من الحالة E_{i+1} إلى الحالة E_i ؛ و بين احتمال انتقال الزبون من الحالة E_i إلى الحالة E_{i+1} ؛ من هذه النتائج يمكن القول إن الشعاع الاحتمالي الثابت يأخذ الشكل التالي :

$$w_4 = \frac{r-p}{r\bar{r} - p\bar{p}s^4}(\bar{r}, s, s^2, s^3, \bar{p}s^4)$$

$$s = \frac{p\bar{r}}{\bar{p}r}$$

في الحالة التي يكون فيها عدد الزبائن الذين هم بحاجة إلى خدمة المركز هو مساو إلى n زبون فإن الشعاع الاحتمالي الثابت يأخذ الشكل التالي :

$$w_4 = \frac{r-p}{r\bar{r} - p\bar{p}s^n}(\bar{r}, s, s^2, s^3, \ldots, \bar{p}s^n)$$

من هذا الشعاع ما يهمنا مركبان فقط هما w_0, w_n حيث w_0 تدل على وجود زمن ضائع (أي إن مركز الخدمة مفتوح ولكن لا يوجد أي زبون)، ويأخذ هذا المركب الشكل التالي :

$$w_0 = \frac{r-p}{r\bar{r}}\bar{r} = \frac{r-p}{r} = 1-u$$

وهذا ما يطلق عليه اسم احتمال عدم تكون صف الانتظار، أما المركب w_n فإنه يدل على أن صف الانتظار قد اكتمل، ولم يعد هناك أي محل لقبول أي زبون إضافي وإن هذا المركب يأخذ الشكل التالي :

$$w_n = \frac{p-r}{p} = 1 - \frac{1}{u}$$

من هذه النتائج يمكن القول إن مختلف الحالات تكون صف الانتظار نأخذ الشكل التالي :

احتمال عدم تكون صف الانتظار هو مساو إلى :

$$w_0 = \frac{r-p}{r\bar{r} - p\bar{p}s^0}\bar{r} = \frac{r-p}{r\bar{r}}\bar{r}$$

احتمال أن يتكون صف الانتظار من زبون واحد هو :

$$w_1 = \frac{r-p}{r\bar{r}-p\bar{p}s^n}s$$

احتمال أن يتكون صف الانتظار من زبونين هو :

$$w_2 = \frac{r-p}{r\bar{r}-p\bar{p}s^n}s^2$$

احتمال أن يتكون صف الانتظار من n زبون هو مساو إلى :

$$w_n = \frac{r-p}{r\bar{r}-p\bar{p}s^n}\bar{p}s^n$$

ومنه فإن يمكن القول إن متوسط طول صف الانتظار هو مساو إلى :

$$m = 0w_0 + 1w_1 + 2w_2 + \ldots\ldots + nw_n$$

بالتعويض ينتج :

$$m = \frac{r-p}{r\bar{r}-p\bar{p}s^n}s + 2\frac{r-p}{r\bar{r}-p\bar{p}s^n}s^2 + \ldots\ldots + n\frac{r-p}{r\bar{r}-p\bar{p}s^n}\bar{p}s^n$$

بوضع $\frac{r-p}{r\bar{r}-p\bar{p}s^n}$ خارج قوسين نحصل على ما يلي :

$$m = \frac{r-p}{r\bar{r} - p\bar{p}s^n}(s + 2s^2 + ... + n\bar{p}s^n)$$

عندما يكون احتمال الوصول أقل من احتمال الخدمة فإن سرعة الجريان تكون أقل من الواحد، وبالتالي فإن الاحتمالات السابقة تأخذ الشكل التالي :

احتمال عدم تكون صف الانتظار هو :

$$w_0 = \frac{r-p}{r\bar{r}}\bar{r}$$

احتمال أن يتكون صف الانتظار من زبون واحد فقط هو :

$$w_1 = \frac{r-p}{r\bar{r}}s$$

احتمال أن يتكون صف الانتظار من زبونين هو :

$$w_2 = \frac{r-p}{r\bar{r}}s^2$$

احتمال أن يتكون صف الانتظار من n زبون هو :

$$w_n = \frac{r-p}{r\bar{r}}s^n$$

وأن متوسط طول صف الانتظار يأخذ بالشكل التالي :

$$m = 0w_0 + 1w_1 + 2w_2 + \ldots\ldots + nw_n$$

بالتعويض ينتج :

$$m = \frac{r-p}{r\bar{r}}s + 2\frac{r-p}{r\bar{r}}s^2 + \ldots\ldots + n\frac{r-p}{r\bar{r}}s^n$$

بوضع $\frac{r-p}{r\bar{r}}$ خارج قوسين ينتج :

$$m = \frac{r-p}{r\bar{r}}(s + 2s^2 + \ldots\ldots + ns^n)$$

$$m = \frac{r-p}{r\bar{r}}[(s + s^2 + \ldots\ldots) + (s^2 + s^3 + \ldots\ldots) + \ldots\ldots]$$

ومنه نلاحظ أن كل قوس الشكل متوالية هندسية أساسها s ، باستخدام قانون حساب مجموع حدود المتوالية الهندسية نحصل على ما يلي :

$$m = \frac{r-p}{r\bar{r}}(\frac{s}{1-s} + \frac{s^2}{1-s} + \ldots\ldots)$$

بوضع $\frac{s}{1-s}$ خارج القوس ينتج :

$$m = \frac{r-p}{r\bar{r}} \cdot \frac{s}{1-s}(1 + s + s^2 \ldots\ldots)$$

ومنه نلاحظ أيضاً أن الحدود داخل القوس تشكل فيما بينها متوالية هندسية أساسها s وحدها الأول واحد ، باستخدام قانون حساب مجموع حدود المتوالية الهندسية نحصل على ما يلي :

$$m = \frac{r-p}{r\bar{r}} \cdot \frac{s}{1-s} \cdot \frac{1}{1-s} = \frac{r-p}{r\bar{r}} \cdot \frac{s}{(1-s)^2}$$

Damascus University

مثال ١ :

لو افترضنا أن احتمال الوصول هو مساو $\frac{1}{4}$ و احتمال الخدمة هو مساو إلى $\frac{1}{2}$ ، فإنه عندما يكون الحد الأعظمي لطول صف الانتظار هو مساوياً إلى أربعة زبائن يمكن القول إن مصفوفة احتمالات الانتقال تأخذ الشكل التالي :

$$M_P = \begin{array}{c} \\ E_0 \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} E_0 & E_1 & E_2 & E_3 & E4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 3/8 & 4/8 & 1/8 & 0 & 0 \\ 0 & 3/8 & 4/8 & 1/8 & 0 \\ 0 & 0 & 3/8 & 4/8 & 1/8 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \end{array}$$

وإن شعاع الاحتمالات الثابتة يأخذ الشكل التالي :

$$w = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}}{\frac{1}{4} - \frac{3}{16} \cdot \frac{1}{81}} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{81}\right)$$

$$= \left[\frac{1}{107}(54,36,12,4,1)\right]$$

مثال ٢ :

لنفترض أن لدينا مركز خدمة وأن الحد الأقصى لإمكانية هذا المركز هو أن يستقبل أربعة زبائن في اليوم، واحتمال وصول الزبون إلى مركز الخدمة هو مساو إلى $\frac{8}{10}$ واحتمال تقديم الخدمة إلى الزبون هو مساو إلى $\frac{4}{10}$ ، والمطلوب وضع مصفوفة احتمالات الانتقال وحساب العناصر المكونة للشعاع الاحتمالي الثابت .

الحل :

بما أن الطاقة القصوى لمركز الخدمة هو أن يستقبل أربعة زبائن في اليوم الواحد، فإنه لدينا خمس حالات وهي :

$$E_0, E_1, E_2, E_3, E_4$$

حيث إن :

E_0 تعبر عن عدم وجود أي زبون في صف الانتظار .

E_1 تعبر عن وجود زبون واحد في صف الانتظار .

E_2 تعبر عن وجود زبونين في صف الانتظار .

E_3 تعبر عن وجود ثلاثة زبائن في صف الانتظار .

E_4 تعبر عن وجود أربعة زبائن في صف الانتظار .

وهذه الحالات تمكننا من القول إن مصفوفة احتمالات الانتقال تأخذ الشكل التالي:

$$M_P = \begin{array}{c} \\ E_0 \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} E_0 & E_1 & E_2 & E_3 & E4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1/5 & 4/5 & 0 & 0 & 0 \\ 2/23 & 11/25 & 12/25 & 0 & 0 \\ 0 & 2/25 & 11/25 & 12/25 & 0 \\ 0 & 0 & 2/25 & 11/25 & 12/25 \\ 0 & 0 & 0 & 2/5 & 3/5 \end{bmatrix} \end{array}$$

أما العناصر المكونة للشعاع الاحتمالي الثابت فيمكن حسابها وفق ما يلي :

$$w = \frac{r-p}{r\bar{r} - p\bar{p}s^4}(\bar{r}, s, s^2, s^3, \bar{p}s^4)$$

$$w = \frac{\frac{2}{5} - \frac{4}{3}}{\frac{5}{25} - \frac{4}{25}\cdot\frac{120}{6}}[\frac{2}{5}, 6, 36, 216, \frac{1296}{5}]$$

$$= \frac{1}{5178}[6, 60, 360, 2160, 2552]$$

$$= [0.001, 0.012, 0.07, 0.417, 0.501]$$

وقل رب زدني علما
Damascus University

الفصل الخامس عشر
جدول المدخلات والمخرجات

Damascus University

وقل رب زدني علما
Damascus University

١٥ــ١ ــ النظام الساكن

١٥ ــ١ــ ١ النموذج الساكن المقترح :

إن الإدخال البسيط لشروط التوازن الاقتصادي يطرح السؤال التالي : ما المبلغ الواجب إيداعه في البداية للحصول على عائد ثابت مساو إلى C ؟

إذا كانت الفترات الزمنية هي عام فإن إيداع مبلغ مساو إلى S بمعدل فائدة مساوية إلى i يعطي فائدة مساوية إلى Si ، ويصبح مجموع المبلغ في نهاية العام الأول مساوياً إلى S + Si أي S(1+i) ، فإذا كان $s=\frac{c}{1+i}$ فإن جملة هذا المبلغ تصبح في نهاية العام الأول مساوية إلى c لو افترضنا أن $\alpha=\frac{1}{1+i}$ فإن $s=\alpha c$ يمكن القول:

من أجل الحصول على المبلغ c فوراً فيتوجب علينا إيداع المبلغ c .

من أجل الحصول على المبلغ c في الفترة اللاحقة أي في نهاية العام الأول فيتوجب فوراً إيداع المبلغ $\alpha \cdot c$.

من أجل الحصول على المبلغ c في نهاية العام الثاني؛ فإن المبلغ المودع يجب أن يكون مساوياً $\alpha^2 \cdot c$ ، وهكذا حتى تصبح جملة المبلغ وخلال فترة زمنية غير محدودة مساوية إلى :

$$c+\alpha \cdot c+\alpha^2 \cdot c+....\alpha^n \cdot c=c(1+\alpha+\alpha^2+.....)$$

وبما أن الحدود الموجودة داخل القوس تشكل متوالية هندسية تناقصية وغير منتهية وبأساس مساو إلى α فإن هذه الجملة تأخذ الشكل التالي :

$$\frac{c}{1-\alpha} = \alpha$$

١٥ ــ ١ ــ ٢ النظام الكمي المفتوح ليونتيف:

١٥ ــ ١ ــ ٢ــ ١ وصف النظام :

إن الاقتصاد المغلق مكون من مجموعة من القطاعات الإنتاجية، بحيث إن كل قطاع ينتج سلعة واحدة فقط والسلع المنتجة من قبل القطاعات المختلفة ، من ناحية أخرى فنفترض وجود طلب نهائي على منتجات القطاعات من قبل المستهلكين، في كل قطاع يتم إنتاج السلعة باستخدام منتجات بقية القطاعات والعمل . وكما هو واضح أن العمل لا ينتج من بقية السلع، وأن وصف هذا الاقتصاد يمكن أن يتم وفق الجدول التالي :

	قطاعات				استهلاك نهائي	الإنتاج
	1	2	j	n		
1	$x_{1,1}$	$x_{1,2}$	$x_{1,j}$	$x_{1,n}$	C_1	x_1
2	$x_{2,1}$	$x_{2,2}$	$x_{2,j}$	$x_{2,n}$	C_2	$x_{1,2}$
j	$x_{i,1}$	$x_{i,1}$	$x_{i,j}$	$x_{i,n}$	C_i	x_i
n	$x_{n,1}$	$x_{n,2}$	$x_{n,j}$	$x_{n,n}$	C_n	x_n

عمل t_1 t_2 —— t_j —— t_n 0 t

في هذا الجدول :

الـ n سطر الأولى تخص القطاعات الإنتاجية وآخر قيمة تخص العمل و الأعمدة أيضاً تعبير عن القطاعات الإنتاجية، ولكن استخدامات هذه القطاعات ، وآخر عمود يعبر عن الاستهلاك ويمكن قراءة محتويات هذا الجدول وفق ما يلي :

$x_{i,j}$ كمية السلع المنتجة من قبل القطاع i والمستخدمة في القطاع j .

c_i الاستهلاك النهائي للسلعة i والمنتجة من قبل القطاع i .

t_j كمية العمل المستخدمة من قبل القطاع j في الإنتاج .

ولا بد من الإشارة أن هذا النموذج يفترض أن قطاع المستهلكين لا يستخدم العمل . أما العمود الأخير فيعبر عن إنتاج كل قطاع مثلاً x_i هو مجموع إنتاج القطاع i انطلاقاً من ذلك فإن الناتج الكلي x_i للقطاع i ينقسم إلى قسمين: سلع وسيطية وسلع مستخدمة في الاستهلاك، ويمكن التعبير عن ذلك بما يلي :

-١

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{i,j} + c_i$$

حيث $i = 1,2,3....n$

إن مجموع ساعات العمل المستخدمة في الاقتصاد هو مساو إلى ما يلي :

$$t = \sum_{j=1}^{n} t_j \qquad -٢$$

ويمكن أن نطرح شرط التوازن عن طريق إدخال أسعار المنتجات، إذ إنه حسب نموذج ليونتيف الاقتصاد يتطور بوجود المنافسة الكاملة دون أن يحقق أي قطاع للربح، يكون دائماً مجموع دخل كل قطاع مساوياً تماماً إلى مجموع الكلفة المستخدمة في الإنتاج. فلو افترضنا أن :

$$p_1, p_2, \ldots\ldots p_n$$

هي أسعار منتجات مختلف القطاعات في مختلف الأسواق و w هي معدل الأجور، فإنه يمكننا أن يصل إلى المعادلة التالية :

$$p_j x_j = \sum_{i=1}^{n} p_i x_{i,j} + \omega t_j$$

حيث $j = 1,2,\ldots.n$

١٥ ــ ١ ــ ٢ــ ٢ الفرضية الرئيسة لنظام ليونتيف :

الشروط التقنية لإنتاج مختلف القطاعات هي مقترحة لشرط واحد، وهو أن استهلاكات السلع والعمل في كل قطاع هي متناسبة مع إنتاج هذا القطاع . إذن لنفترض بأنه يوجد نظام بمعاملات تقنية $a_{i,j}$, b_j حيث إن :

$$x_{i,j} = a_{i,j} x_j \Rightarrow a_{i,j} = \frac{x_{i,j}}{x_j} \geq 0$$

$$t_j = b_j x_j \Rightarrow b_j = \frac{t_j}{x_j} \geq 0$$

$a_{i,j}$ تمثل استهلاك السلعة الضرورية i في القطاع j من أجل تصنيع السلعة j

b_j تمثل استهلاك العمل الضروري في القطاع j من أجل تصنيع إنتاج السلعة j . ومنه نلاحظ أن $a_{i,j}$ ، b_j تمثل الوحدات الضرورية الداخلة لكل وحدة خارجة من هذه الغرض، فإن شروط التوازن تكتب على الشكل التالي :

1- $x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j + c_i$ $\quad i = 1,2,.....$

2- $t = \sum_{j=1}^{n} b_j x_j$

3- $p_j x_j = \sum_{i=1}^{n} p_i a_i, x_j + \omega b_j x_j$

$$p_j = \sum_{i=1}^{n} p_i a_{i,j} + \omega b_j$$

حيث $j = 1,2,....n$

١٥ ــ ١ ــ ٢ــ ٣ الشكل المصفوفي لمعادلات التوازن :

تطرح ما يلي :

نظام الإنتاج

$$1 = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,j} & a_{1,n} \\ a_{i,1} & a_{i,1} & \cdots & a_{i,1} & a_{i,1} \\ \multicolumn{5}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,j} & a_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_i \\ c_n \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_i \\ x_n \end{bmatrix} = X$$

$$b = [b_1 \quad b_2,\ldots,b_j\ldots b_n]$$

وإن معادلات التوازن هي بكل سهولة ما يلي :

$$x = Ax + c \qquad 3'$$

$$p = pA + wb \qquad 4$$

$$t = bx \qquad 3''$$

مع ملاحظة أن :

هذا إذا كانت المصفوفة تحتوي على $(1-A)x = c$ حصراً و n عامود .

إن المصفوفة A يمكن أن تستخدم إدخال لبرنامج إنتاج x هذا الإدخال يحتم علينا استخدام كمية السلع الممثلة في شعاع العمود، وفق هذا المدخل يمكن أن نقترب من العامل α في شكله تكوين رأس المال الذي يقود على الحصول على المبلغ c، فيما إذا تم إيداع المبلغ αC عند المنطلق

١٥ ــ ١ ــ ٢ــ ٤ إدخال علاقات التوازن :

في الاقتصاد المستوفي لشروط ليونيتف يمكن أن نتساءل من أي كمية من المواد البدائية يمكن أن ننطلق حتى تحقق كل فترة زمنية الشعاع c للاستهلاك ؟ هنا تطرح مشكلة التوازن، وذلك لأن نموذج ليونيتف يبحث دوماً عن الكمية الواجب إنتاجها من كل قطاع حتى ثبات حاجة المستهلكة وبصورة دائمة :

إن السلسلة المتعاقبة للإنتاج والتي تخص السلع الاستهلاكية يمكن أن تأخذ الشكل التالي :

$$c + Ac + A^2 \cdot c + ...A^n \cdot c = c(1 + A + A^2 + ...)$$

وهذا ما يطلق عليه اسم شعاع التوازن الذي يؤمن المردود C ، ويأخذ الشكل التالي:

$$x = c(1 + A + A^2 + ...) = \frac{I}{(I - A)}c$$

$$= (I - A)^{-1}c$$

من هذه السلسلة نلاحظ بأننا نبحث عن شعاع الإنتاج C ، حيث إن هذا الشعاع يعطينا ما يلي :

١ ــ يمكن إنتاج C والمخصصة للاستهلاك .

٢ ــ أما الباقي من الإنتاج فيمكن أن يقود إلى أن الحالة نفسها في الفترة الزمنية اللاحقة .

من هذين الاستنتاجين يمكن القول إن الإنتاج X يتطلب أن نبدأ من الكمية X-C فيما إذا كانت :

$$x - c = Ax$$

وبتحويل X إلى الطرف الثاني نحصل على ما يلي :

$$-c = Ax - x$$

بضرب الطرفين بـــ -١ يصبح :

$$c = x - Ax$$

$$c = (1 - A)x$$

$$x = (1 - A)^{-1}c$$

أي إن :

$$1 + A + A^2 + ...A^n + ... = (I - A)^{-1}$$

هذه العلاقة تعمم العلاقة المستخدمة في حساب القيمة الحالية :

$$1 + \alpha + \alpha^2 + ... + \alpha^n + ... = \frac{1}{1 - \alpha} \qquad \alpha < 1$$

١٥ ــ ١ ــ ٢ــ ٥ حل النظام المفتوح ليونيتيف :

في المعادلات 3',3",4,3 المعاملات $x_{i,j}$, b_j هي من معطيات النظام، فإذا كان النظام مفتوحاً فإن هناك كميات أخرى يجب أن تحدد. يمكن مثلاً أن تفترض أن شعاع الطلب النهائي c يعطي، هذا الافتراض يقود إلى القول إن معدل الأجور ω يمكن أن يحسب فيما إذا كانت المصفوفة (I-A) نظامية، وذلك لأن :

3' تحمل n معادلة بـــ n مجهول $x_1, x_2, ..., x_n$

3" تعطي العمل الإجمالي L الضروري لإنتاج x

4 تحتوي n معادلة تعطي النظام بـ n سعر $p_1, p_2, \ldots, p_n$

فإذا لم تثبت w فإننا يمكن أن نحصل على الأسعار الكلية .

$$p_1, p_2, \ldots, p_n$$

والأسعار النسبية :

$$\frac{p_1}{U_1}, \frac{p_2}{U_2}, \ldots, \frac{p_n}{U_n}$$

وإن إدخال الناتج يعطي

المعادلة 3' بحلها ومع الافتراض أن المصفوفة (I-A) نظامية تأخذ الشكل التالي:

$$x = (1 - A)^{-1} c$$

ومع الافتراض أن :

$$\mu = (1 - A)^{-1} = \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & \ldots & m_{1,n} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & \ldots & m_{2,n} \\ . & . & \ldots & . \\ . & . & \ldots & . \\ m_{n,1} & m_{n,2} & \ldots & m_{n,n} \end{bmatrix}$$

فإن الشرط 3' يأخذ الشكل التالي :

$$x = Mc \quad 5$$

بفرض أن $M^1, M^2, M^3, ..., M^n$ هي أشعة الأعمدة

$M_1, M_2, M_3 ...., M_n$ هي أشعة الأسطر.

فإنه يمكن أن نكتب :

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} m_{i,j} c_j = m_{i,1} c_1 + m_{i,2} c_2 + ... + m_{i,n} c_n = \mu_{ic}$$

وهذا ما يجعل الإنتاج الإجمالي لـــ x يأخذ شكل تابع خطي للطلب النهائي b) الشرط "3 وباستخدام 5 يعطي ما يلي :

$$t = bx = bMc = b(1-A)^{-1} c$$

-٦

$$= (bM^1)c_1 + (bM^2)c_2 + ... + (bM^j)c_j + ... + (bM^n)c_n$$

ومنه فإن :

$$bM^j = b_1 m_{1,j} + b_2 m_{2,j} + ... + b_n m_{n,j}$$

إن المعادلة ٦ تعطي كمية العمل الضرورية لإنتاج كمية السلع الاستهلاكية c ، هذه الكمية يمكن أن تتوزع على القطاعات الإنتاجية وفق ما يلي :

$$b = bI = bMM^{-1} = bM(1-A)$$

$$b_j = bM(1-A)^{-j}$$

حيث إن :

b_j هو شعاع السطر bM مضروباً بالعمود j من المصفوفة $(1-A)$.

c) الشرط ٤ يعطي :

$$p - pA = \omega b \Rightarrow p(1-A) = \omega b$$

$$p = \omega b(1-A)^{-1}\omega(bM)$$

وهذا يعطي :

$$p_j = \omega(bM^j) \Rightarrow bM^j = \frac{p_j}{\omega} \qquad 7$$

هذه المعادلة تعبر أن سعر السلعة j هو متناسب معدل الأجور أو العلاقة .

$$\frac{bM^j}{bM^h}$$

فإنها هي المعدل الهامشي للتبادل بين السلعة j والسلعة h وهذا ما يعطينا :

$$\frac{bM^j}{bM^h} = \frac{b_J}{b_h}$$

هذا المعدل للتبادل بين السلع يحدد الأسعار النسبية للسلع i,j

d) التوازن إن القيمة الإجمالية للاستهلاك النهائي يأخذ الشكل التالي :

$$p_1c_1 + p_2c_2 + \ldots\ldots + p_nc_n = pc$$

والكلفة الإجمالية للعوامل هي wt ، وهذا ما يقودنا إلى كتابة معادلة التوازن وفق ما يلي:

$$pc = wt \qquad 8$$

$$wt = w(bM^1)c_1 + w(bM^2)c_2 + ... + w(bM^n)c_n$$

أو

$$w(bM^j) = p_j \Rightarrow wt = p_1c_1 + p_2c_2 + ... + p_nc_n$$

هذه المعادلة تبرهن لنا أن نظام ليونتيف مكون من نظامين متقابلين، بحيث إن التابع الاقتصادي هو pc, wt

باستخدام البرمجة الخطية فإن wt تأخذ الشكل التالي :

$$wt = w(bx)$$

وهذا ما يقودنا إلى إعطاء المشكلة الشكل التالي :

$$x \geq 0$$

$$x \geq Ax + c$$

$$\min \quad w(bx)$$

أو بالشكل التالي :

$$x \geq 0$$

$$(I - A)x \geq c$$

$$\min \quad w(bx)$$

والبرنامج المقابل لهذا البرنامج هو التالي :

$$p \geq 0$$

$$p[I - A] \leq wb$$

$$\max \quad pc$$

وهذا ما يبرهن أن المجهول في البرنامج الأولي هو الكميات الممكن إنتاجها من مختلف أنواع السلع في كافة القطاعات الإنتاجية أما في البرنامج المقابل فإن المجهول هو أسعار السلع.

١٥ــ ١ــ ٣ نظام ليونتيف المفتوح بالقيمة النقدية:

١٥ــ ١ــ ٣ ــ ١ وصف النظام :

لنفترض أن لـ $B_{i,j}$ القيمة النقدية لكمية السلعة i والمنقولة إلى القطاع j في جدول ليونتيف والسطر الأخير يخص العمل المقيم نقدياً، العمود الأخير أيضاً يخص الاستهلاك النهائي، وفي النهاية فإن الناتج الإجمالي المجهول سوف يكون أيضاً مقيماً بالنقود، إذاً يتوجب علينا أن نفترض أن :

$$B_i = p_i x_i, B_{i,j} \quad \gamma = B_i C_i \quad \omega = wt$$

وعلاقات التوازن تأخذ الشكل التالي :

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{i,j} + c_i \Rightarrow p_i x_i = \sum_{j=1}^{n} p_i x_{i,j} + p_i c_i$$

$$B_i = \sum_{j=1}^{n} B_{i,j} + \gamma_i \qquad i = 1,2,...n$$

$$t = \sum_{j=1}^{n} t_j \Rightarrow wt = \sum_{j=1}^{n} wt_j \Rightarrow \omega = \sum_{j=1}^{n} wt_j$$

$$p_j x_j = \sum_{i=1}^{n} p_i x_{i,j} + \omega b_j \Rightarrow \beta_j = \sum_{i=1}^{n} \beta_{i,j} + \omega b_j$$

$$i = 1,2,3....n$$

$$wt = rc = r_1 c_1 + r_2 c_2 + ... + r_n c_n \Rightarrow w \sum_{i=1}^{n} \gamma_i$$

من هذه المعادلات فإن جدول اليونيتيف يأخذ الشكل التالي :

	1	2	j	n	طلب نهائي	
1	$B_{1,1}$	$B_{1,2}$ ------	$B_{1,j}$ ------	$B_{1,n}$	γ_1	B_1
2	$B_{2,1}$	$B_{2,2}$ ------	$B_{2,j}$ ------	$B_{2,n}$	γ_2	B_2
i	$B_{i,1}$	$B_{i,2}$ ------	$B_{i,j}$ ------	$B_{i,n}$	γ_i	B_i
n	$B_{n,1}$	$B_{n,2}$ ------	$B_{n,j}$ ------	$B_{n,n}$	γ_n	B_n
العمل	wt_1	wt_2	wt_j	wt_n	0	w

في هذا الجدول الأسهم الأفقية تعبر عن مجموع الأسطر، والأسهم والعامود يعبر عن مجموع الأعمدة مع ملاحظة ما يلي :

$B_{i,j}$ هي القيمة النقدية للسلسلة أو المباعة إلى القطاع j

γ_i هي القيمة النقدية للاستهلاك من السلعة i

wt_i هي القيمة النقدية لساعات العمل المستخدمة في القطاع j

١٥ــ١ــ ٣ــ ٢ النظرية الأساسية :

بموجب هذه النظرية فإن القيمة النقدية للاستهلاك والعمل المستخدم في كل قطاع هي متناسبة تماماً مع قيمة الإنتاج لهذا القطاع ، لو افترضنا أن :

$$B_{i,j} = \alpha_{i,j} B_j \Rightarrow \alpha_{i,j} = \frac{B_{i,j}}{B_j} \geq 0$$

$$wt_j = \xi_j B_j \Rightarrow \xi_j = \frac{wt_j}{B_j} \geq 0$$

وأن هذا الإدخال يقود إلى ما يلي :

$$B_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j} B_j + \gamma_i$$

$$\omega = \sum_{j=1}^{n} \xi_j B_j$$

$$B_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,j} B_j + \xi B_j \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,j} + B_j = 1$$

وإن شكل المصفوفة لهذه المعادلات هو التالي :

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} \text{ ----- } \alpha_{1,j} \text{ --- } \alpha_{1,n} \\ \alpha_{i,1} & \alpha_{i,1} \text{ ----- } \alpha_{i,1} \text{ --- } \alpha_{i,1} \\ \text{----------} \\ \alpha_{n,1} & \alpha_{n,2} \text{ ----- } \alpha_{n,j} \text{ --- } \alpha_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_i \\ \gamma_n \end{bmatrix} = \gamma \qquad \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_i \\ \beta_n \end{bmatrix} = \beta$$

$$\zeta = [\zeta_1 \quad \zeta_2 \quad \zeta_j \quad \zeta_n]$$

حسب هذا الشكل فإن معادلات التوازن هي التالية :

$$B = \alpha B \qquad \text{أو} \qquad (1-\alpha)B = \gamma$$

$$w = \zeta\beta$$

$$J\alpha + \xi = J \qquad \text{أو} \qquad j(1-\alpha) = \xi$$

١٥ــ١ــ٤ النظام الساكن المغلق :

١٥ــ١ــ ٤ ــ ١- وصف النموذج:

في النموذج المقترح افترضنا أنه لدينا الاستهلاك النهائي $C_1, C_2, \ldots, C_n$ ومعدل الأجور W و لم تعد قطاعات منتجة .

في النموذج المغلق فإن الاستهلاك يعد كبقية القطاعات المنتجة، ويكون الإنتاج المقدم من هذا القطاع هو العمل . في هذا القطاع فإن المدخل هو الاستهلاك والمخرج هو العمل، هذه الإضافة تجعل الجدول مكوناً من $n+1$ سطر و $n+1$ عامود يمكن التعبير عن هذا الجدول وفق ما يلي :

$$\begin{bmatrix} x_{1,1} & \cdots & x_{1,2} & \cdots & x_{1,n} & \cdots & x_{1,n+1} \\ x_{2,1} & \cdots & x_{2,2} & \cdots & x_{2,n} & \cdots & x_{2,n+1} \\ & & \cdots\cdots\cdots & & & & \\ x_{i,1} & \cdots & x_{i,2} & \cdots & x_{i,n} & \cdots & x_{i,n+1} \\ & & \cdots\cdots\cdots & & & & \\ x_{n,1} & \cdots & x_{n,2} & \cdots & x_{n,n} & \cdots & x_{n,n+1} \\ x_{n+1,1} & \cdots & x_{n+1,2} & \cdots & x_{n+1,n} & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$x_{i,n+1}$ هي الكمية المنتجة من قبل القطاع i والمستخدمة في القطاع الاستهلاكي

$x_{n+1,j}$ هي الكمية المنتجة من قبل القطاع $n+1$ والمعطاة إلى القطاع j

لنفترض أن :

$$p_1, p_2, \ldots, p_n, p_{n+1}$$

هي أسعار وحدات السلع المنتجة في مختلف القطاعات

وأن

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}$$

هي كمية السلع المنتجة في مختلف القطاعات . من هذين الافتراضين فإن شروط التوازن الاقتصادي تأخذ الشكل التالي :

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{i,j} + c_i \Rightarrow x_i = \sum_{j=1}^{n+1} x_{i,j} \qquad i = 1,2,3...n$$

$$t = \sum_{j=1}^{n} t_j \Rightarrow x_{n+1} = \sum_{j=1}^{n+1} x_{n+1,j}$$

$$p_j x_j = \sum_{i=1}^{n} p_i x_{i,j} + \omega t_j \Rightarrow p_j x_j = \sum_{i=1}^{n} p_i x_{i,j} + p_{n+1} + x_{n+1,j}$$

$$j = 1,2,3 \ldots\ldots n$$

ويمكن أن نضيف شرطاً آخراً يخص المساواة بين الدخل والكلفة في كل قطاع . هذا الشرط يأخذ الشكل التالي :

$$p_1 x_{1,n+1} + p_2 x_{2,n+1} + \ldots\ldots + p_n x_{n,n+1} + p_{n+1} = p_{n+1} x_{n+1}$$

هذا الشرط يؤدي إلى ما يلي :

$$p_{n+1} x_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} p_i x_{i,n+1}$$

هذه المعادلة يمكن أن تأخذ الشكل التالي :

$$p_1c_1 + p_2c_2 + ... + p_nc_n = wt$$

الشروط 1' , 1" , 2' , 2" يمكن أن تلخص فيما يلي :

$$x_i = \sum_{j=1}^{n+1} x_{i,j} \qquad i = 1,2,3,...n$$

$$p_j x_j = \sum_{i=1}^{n+1} p_i x_{i,j} \qquad j = 1,2,3,..n$$

١٥ ــ١ــ ٤ ــ ٣ الفرضية الأساسية للنموذج على شكل مصفوفات :

كما هو الحال في النموذج المفتوح يوجد نظام بمعاملات تقنية $a_{i,j}$ ثابتة، حيث إن الاستهلاك في كل قطاع هو متناسب مع إنتاج هذا القطاع أي إن :

$$x_{i,j} = a_{i,j}x_j$$

مع ملاحظة أن :

$$x_{i,n+1} = a_{i,n+1}x_{n+1}$$

وهذا يدل على أن الاستهلاك لقطاع المستهلكين هو متناسب تماماً مع العمل المقدم من قبلهم .

هذا يقود إلى القول إن شروط التوازن تأخذ الشكل التالي :

$$x_i = \sum_{j=1}^{n+1} a_{i,j} x_j \qquad i = 1,2,3,..n$$

$$p_j x_j = \sum_{i=1}^{n+1} p_i a_{i,j} x_j$$

$$p_j = \sum_{i=1}^{n+1} p_i a_{i,j} \qquad j = 1,2,3,..n$$

وباستخدام المصفوفات فإن هذه الشروط تأخذ الشكل التالي :

$$A = \begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \cdots & x_{1,n} & x_{1,n+1} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & \cdots & x_{2,n} & x_{2,n+1} \\ & & & & \\ x_{i,1} & x_{i,2} & \cdots & x_{i,n} & x_{i,n+1} \\ & & & & \\ x_{n,1} & x_{n,2} & \cdots & x_{n,n} & x_{n,n+1} \\ x_{n+1,1} & x_{n+1,2} & \cdots & x_{n+1,n} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_i \\ \\ x_n \\ x_{n+1} \end{bmatrix} = x$$

النظام 4 , 3 يأخذ الشكل التالي :

$$x = Ax \qquad (3)$$

$$p = pA \qquad (4)$$

أو

$$(1-A)x = 0 \qquad (3)$$

$$p(1-A) = 0 \qquad (4)$$

مع الإشارة إلى i هو مصفوفة أحادية بـــ n+1 سطر و n+1 عامود .

١٥ــ١ــ٤ ــ ٣ حل النظام المغلق :

إن الشروط 5 , 4 هي شروط خطية متجانسة وقابلة للحل، وحتى يمكن حل هذه الشروط فإن المصفوفة (I – A) يجب أن تكون بين المتحولات . وبالعكس في النظام المفتوح فإن يعطي سلم الاقتصاد . النظام المغلق يعطي التركيب مع ملاحظة ما يلي :

١ ــ x , p هي أشعة نظيفة من اليمين والشمال للمصفوفة A وكلا الشعاعين مشترك في القيمة 1

٢ ــ (I – A) التي محددها تساوي إلى الصفر، وهذا يقود إلى تحقيق العلاقة بين المعاملات $a_{i,j}$

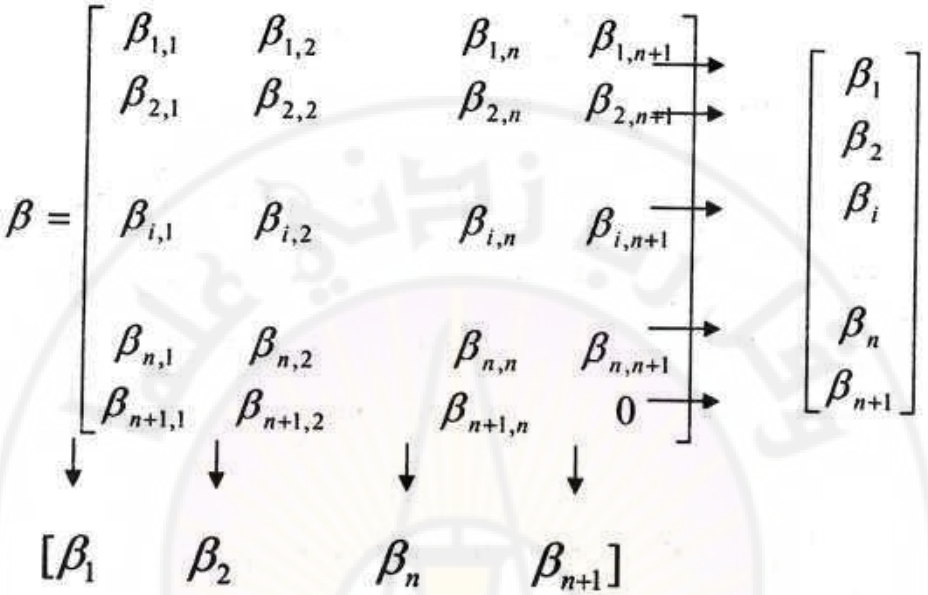
٢ ــ ٢ النظام النقدي المغلق ليونيتيف :

لنفترض أن :

$$B_i = p_i x_i \qquad B_{i,j} = p_i x_{i,j}$$

$$I , j = 1,2,3....n$$

وإن مصفوفة التبادل القطاعي تأخذ الشكل التالي :



من هذا الشكل المصفوفة فإن معادلات التوازن في الأحجام تعطي ما يلي :

$$B_i = \sum_{j=1}^{n} B_{i,j} \qquad i = 1,2,3....n$$

هذا يترجم الأسهم الأفقية، أما الأسهم العمودية فإنها تترجم وفق ما يلي :

$$B_j = \sum_{i=1}^{n} B_{i,j} \qquad j = 1,2,3....n$$

هنا تجري أيضاً فرضية أساسية للتناسب بين الاستهلاك والإنتاج في مختلف القطاعات، وتطرح ما يلي :

$$B_{i,j} = \alpha_{i,j} B_j$$

وتصبح شروط التوازن على الشكل التالي :

$$B_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j} B_j \qquad i = 1,2,3....n$$

$$B_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,j} B_j \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,j} = 1$$

ونطرح ما يلي :

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \cdots\cdots & \alpha_{1,n} & \alpha_{1,n+1} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \cdots\cdots & \alpha_{2,n} & \alpha_{2,n+1} \\ \multicolumn{5}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ \alpha_{n+1,1} & \alpha_{n+2,2} & \cdots\cdots & \alpha_{n,n} & \alpha_{n,n+1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \\ \beta_n \\ \beta_{n+1} \end{bmatrix} = \beta$$

ونكتب المعادلة على الشكل التالي :

$$B = \alpha B$$

حيث إن المصفوفة α هي مصفوفة ماركوفية، وهذا يبرهن على شرك التوازن الاقتصادي .

١٥ ــ ٢ النموذج الديناميكي لليونتيف :

بدلاً من أن نعطي وصف ساكن للتبادل القطاعي؛ فإننا يمكن أن نواجه سلسلة ديناميكية نأخذ بالحسبان مخزون السلع الموجودة في مختلف القطاعات الاقتصادية ولنفترض أن :

$x_j(t)$ هي كمية السلعة j المنتجة من قبل القطاع j في الوقت t .

$a_{i,j}(t)$ هي كمية السلعة i المنقولة إلى القطاع j في الوقت t .

$s_{i,j}(t)$ هي مخزون السلعة i الموجودة في القطاع j في الوقت t .

$$x_{i,j}(t) = a_{i,j}x_j(t)$$

$$s_{i,j}(t) = b_{i,j}x_j(t)$$

المعاملات $a_{i,j}$ هي معاملات تقنية للتبادل بين القطاعات و $b_{i,j}$ وتتعلق بمخزون الإنتاج، وتحض المواد الأولية لسلع الإنتاج . لذلك فإن المصفوفة A تعكس تركيب التبادل القطاعي بينما المصفوفة B ، فإنها تعكس تركيب رأس المال، حيث إن $a_{i,j}$ هي عدد الوحدات من السلعة i ، والداخلة إلى القطاع j عن طريق مخارج هذا القطاع .

$b_{i,j}$ هي عدد الواحدات من السلعة i ؛ والداخلة إلى القطاع j عن طريق مخارج هذا القطاع .

١٥ ــ ٢ ــ ١ النظام المفتوح :

لنفترض وجود n قطاع إنتاجي وطلب نهائي مكون من قبل الشعاع C(t) الذي يأخذ الشكل التالي :

$$C(t)=\begin{bmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \\ \\ \\ C_n(t) \end{bmatrix}$$

مع ملاحظة أن $C_i(t)$ هي الطلب النهائي على السلعة i في الوقت t لو كنا متقيدين بشرط التوازن في الكميات؛ فإن هذه الشروط تأخذ الشكل التالي :

$$x_i(t)=c_i(t)+\sum_{j=1}^{n}x_{i,j}(t)=\sum_{j=1}^{n}[s_{i,j}(t)-s_{i,j}(t+1)]$$

$$i=1,2,3...n$$

وإنتاج كل قطاع يتوزع على ثلاثة أنماط .

١ــ تلبية الطلب النهائي $C_i(t)$ في الزمن t .

٢ ــ تلبية طلب القطاعات بالسلع الوسطية .

٣ ــ تأمين زيادة المخزون من رأس المال بين الزمن t -1 والزمن t .

هذه الأنماط الثلاثة لتوزيع الإنتاج تأخذ شكل المعادلة التالية :

$$x_i(t)=c_i(t)+\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}x_j(t)=\sum_{j=1}^{n}b_{i,j}[x_j(t)-x_j(t+1)]$$

أو يمكن أن تكتب على الشكل التالي :

$$x_i(t) = c_i(t) + Ax(t) + Bx(t) = Bx(t-1)$$
$$[I - 1(A+B)]x(t) + Bx(t-1) = ct$$

١٥ ــ ٢ ــ ٢ النظام المغلق :

إذا تم إدخال الاستهلاك بشكل اندماجي مع بقية القطاعات؛ فإن مدخلات هذا القطاع سوف تكون الاستهلاكات، ومخرجاته سوف تكون العمل المعطى لجميع القطاعات . وشروط التوازن بالكميات تأخذ الشكل التالي :

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^{n+1} x_{i,j}(t) + \sum_{j=1}^{n+1} [s_{i,j}(t) - s_{i,j}(t-1)]$$

$$= \sum_{j=1}^{n+1} a_{i,j} x_j(t) + \sum_{j=1}^{n+1} b_{i,j} [x_j(t) - x_j(t-1)]$$

هذا يؤدي إلى كتابة ما يلي :

$$[I - 1(A+B)]x(t) + Bx(t-1) = 0$$

تمارين حول البرمجة

تمرين رقم ١ :

ليكن لدينا البرنامج الخطي التالي :

$$Max \quad C = 7X_1 + 6,75X_2$$

$$40X_1 + 30X_2 \,?\, 325$$

$$X_1 \le 7$$

$$X_2 \le 10$$

والمطلوب إيجاد قيم X_1 و X_2 باستخدام جدول السمبلكس .

الحل :

من أجل استخدام السمبلكس لا بد من قلب المتراجحات إلى معادلات، وذلك وفق ما يلي:

$$Min \quad C = 7X1 + 6,75.X2 + 0X5 + 0X6 - 0X3 + MX4$$

$$40X1 - 30X2 - S1 + A1 = 325$$

$$X1 + S2 = 7$$

$$X2 + S3 = 10$$

ومنه فإن الجدول الأولي هو التالي :

Ci	أساس	Xy	X2	S1	A	S2	S3	ri
0	A1	40	30	-1	1	0	0	325
5	S2	1	0	0	0	1	0	7
12	S3	0	1	0	0	0	1	10
	Cj	7	6.75	0	M	0	0	
	ΔF	7	6.75	M	0	0	0	
		-40M	-30M					325M

من هذا الجدول وإذا تفحصنا السطر ΔF لوجدنا أن أكبر قيمة سالبة تقع في العمود الأول، إذاً فإن العمود الأول هو عمود المنطلق فلو قسمنا العمود ri على العمود X1 لوجدنا أن :

$$\frac{ri}{ai,1}$$

$$\begin{vmatrix} 325 \\ 40 \\ 7 \\ 00 \end{vmatrix}$$

من هذا العمود نلاحظ أن أدنى قيمة هي 7 وتقع في السطر الثاني، إذاً القيمة التي تقع في السطر الثاني والعمود الأول هي قيمة المنطلق . لو ضربنا السطر الثاني بـ 40

وطرحناه من السطر الأول، ثم بعد ذلك قسمنا محتويات السطر الثاني على 40 لوجدنا الجدول التالي:

Ci	أساس	Xy	X2	S1	A	S2	S3	ri
M	A1	0	30	-1	1	-40	0	45
7	X1	1	0	0	0	1	0	7
0	S3	0	1	0	0	0	1	10
	Cj	7	6.75	0	M	0	0	
	Δ0F	7 - 40M	6.75 - 30M	M	0	-7 + 40M	0	49 + 45M

من هذا الجدول نلاحظ أن أدنى قيمة هي 30M- وتقع في العمود الثاني المقابل لـ X2 هذا العمود هو عمود المنطلق . لو قسمنا محتويات العمود ri على محتويات العمود X2 لحصلنا على العمود التالي :

$$\frac{ri}{ai,_2}$$

$$\begin{vmatrix} 2/3 \\ 00 \\ 10 \end{vmatrix}$$

ومنه نلاحظ أن أدنى قيمة هي 3/2 وتقع في السطر الأول . إذاً هذه القيمة هي قيمة المنطلق . لو ضربنا محتويات السطر الأول من الجدول بـ 1/30 ، وطرحنا من السطر الثالث لحصلنا على الجدول التالي :

Ci	أساس	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	r_i
M	X_2	0	1	-1/30	-4/3	0	3/2
7	X_1	1	0	0	1	0	7
0	S_3	0	0	1/30	1/3	1	17/2
	Cj	7	6.75	0	0	0	
	Δ0F	0	0	9/40	2	0	59 1/8

ومنه نلاحظ أن :

$$X1 = 7$$

$$X2 = 3/2$$

كما أن :

$$Min = 7.X1 + 6{,}75.X2$$
$$= 49 + 3/2.6{,}75$$
$$= 49 + 10{,}125 = 59{,}125$$

من هذا الجدول نلاحظ أن في لسطر ΔF إن أعلى قيمة هي 20 تقع في العمود X1 ، أي إن هذا العمود يشكل عمود المنطلق . لو قسمنا العمود ri على عمود المنطلق لوجدنا ما يلي :

$$\frac{ri}{ai,1}$$

$$\begin{vmatrix} 210 \\ 250 \\ 400 \end{vmatrix}$$

من هذا الشعاع يلاحظ أن أدنى قيمة هي الأولى ، أي إن السطر الأول هو المنطلق ، لو ضربنا العمود الأول بـــ 1/5 لوجدنا ما يلي :

(1)

$$\begin{vmatrix} 1 & 3/5 & 1/5 & 0 & 0 & 2/0 \end{vmatrix}$$

وبطرحه من السطر الثالث نجد :

0 7/5 9/5 -1/5 1 190

ثم بعد ذلك لو ضربنا (1) بـــ (4) ، وطرحناه من السطر الثاني في الجدول لوجدنا :

0 3/5 6/5 -4/5 1 0 160

من النتائج السابقة يمكن وضع الجدول الثاني وفق ما يلي :

P_i	أساس	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	r_i
20	X1	1	3/5	1/5	1/5	0	0	210
0	X5	0	3/5	6/5	-4/5	1	0	160
0	X6	0	7/5	9/5	-4/5	0	1	190
	Z	20	12	4	4	0	0	
	Pj	20	10	5	0	-7	0	
	ΔF	0	-2	1	-4	40M	0	4200

من قراءة السطر Δ F نجد أن أعلى قيمة هي 1 وتقع في العمود المقابل لـX_3، أي إن العمود X_3 هو عمود المنطلق ، لو قسمنا العمود ri على العمود X_3

$$\frac{ri}{ai,3}$$

لوجدنا ما يلي :

$$\left|\begin{matrix}1050\\96\\38\end{matrix}\right|$$

ومنه نلاحظ أن أدنى قيمة هي الثالثة ، أي إن السطر الثالث هو سطر المنطلق ، لو ضربنا السطر الثالث بـ 1/9 لوجدنا ما يلي :

0 7/45 1/5 -1/45 0 1/9 190/9

لو ضربنا ناتج ضرب السطر الثالث بـــ 1/9 بـــ 6 ؛ وطرحنا من السطر الثاني لوجدنا:

0 -1/3 0 2/3 1 -6/3 33,33

ثم بعد ذلك ضربنا بـــ 5/6 لوجدنا :

0 7/9 1 -1/9 0 5/9 105,56

من هذه النتائج يمكننا وضع الجدول التالي :

Pi	أساس	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	ri
20	X_1	1	4/9	0	2/3	0	-1/9	188,89
0	X_5	0	-1/3	0	2/3	1	-6/5	33,33
5	X_3	0	7/9	1	-1/9	0	5/9	105,56
	Z	20	15/9	5	55/9	0	5/9	
	Pj	20	10	5	0	0	0	
	ΔF	0	-25/9	0	-55/9	0	-5/9	4305,6

هذا الجدول يمثل الحل المتفائل أي الحل الأمثل، ومن هذا الجدول نلاحظ أن :

X1 = 188,89

X3 = 105,56

كما أن الحد الأعلى للربح هو 4305,6

وقل رب زدني علما
Damascus University

تتمـــــــــة التماريـــــــن

تمرين رقم ١

لدينا البرنامج التالي:

$$Max\,P = 3x_1 + 2x_2 + 3x_3$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 \le 430$$
$$3x_1 + 2x_3 \le 460$$
$$x_1 + 4x_2 \le 420$$

والمطلوب:

حساب قيم x_1 , x_2 التي تقود إلى تحقيق الحد الأعظمي في دالة الربح وذلـــك باستخدام جداول السمبلكس.

الحل:

حتى يمكن استخدام جداول السمبلكس لا بد من قلب المتراجحات إلى معادلات وذلك عن طريق إدخال المتغيرات الوهمية s_1, s_2, s_3 بحيث يصبح لـــدينا البرنـــامج التالي:

$$Max\,P = 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3$$

القيود
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + s_1 = 430 \\ 3x_1 + 2x_3 + s_2 = 460 \\ x_1 + 4x_2 + s_3 = 420 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0 \qquad x_2 \geq 0 \qquad x_3 \geq 0$$

إذ إن:

$$s_1 = 340$$
$$s_2 = 460$$
$$s_3 = 420$$

من هذا البرنامج يمكن استخدام جداول السمبلكس وذلك وفق ما يلي:

P	أساس	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	R
0	s_1	1	2	1	1	0	0	430
0	s_2	3	0	2	0	1	0	460
0	s_3	1	4	0	0	0	1	420
	Z	0	0	0	0	0	0	
	P	3	2	3	0	0	0	
	P-Z	3	2	3	0	0	0	0

من قراءة السطر P-Z نلاحظ أن القيمة العظمى هي 3 وهذه القيمة تقابل كل من العمود x_1 والعمود x_2 وبما أن العمود x_3 لا يحتوي إلا على قيمتين فقط بينما العمود x_1 يحتوي على ثلاث قيم إذن يمكننا أن نبدأ بإحلال السلعة x_3 وحتى يمكن التعرف على السلعة التي يمكن الاستغناء عنها لا بد من قسمة العمود R على عمود المنطلق x_3 وذلك وفق ما يلي:

$$R / x_3$$

$$\begin{bmatrix} 430 \\ 230 \\ 00 \end{bmatrix}$$

وبما أن أقل قيمة هي 230 وتقابل المتغير s_2 إذن يمكن الاستغناء عن السلعة s_2 لإحلال السلعة s_3 ولا بد من إجراء الخطوات التالية:

نضرب السطر الثاني بـ $\frac{1}{2}$

$$(2) \quad 3/2 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1/2 \quad 0 \quad 230$$

وبطرح هذا السطر من السطر الأول نحصل على ما يلي:

$$(2) \quad [-1/2 \quad 2 \quad 0 \quad 1 \quad -1/2 \quad 0 \quad 200]$$

بعد ذلك يمكننا إعداد الجدول التالي:

P	أساس	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	R
2	x_2	-1/2	2	0	1	-1/2	0	200
3	x_3	3/2	0	1	0	1/2	0	230
0	s_3	1	4	0	0	0	1	420
	Z	4/5	0	3	0	1,5	0	
	P	3	2	3	0	0	0	
	P-Z	-1,5	2	0	0	-1,5	0	690

بقسمة العمود R على العمود x_2 نحصل على ما يلي:

$$R/x_2$$

$$\begin{bmatrix} 100 \\ 00 \\ 105 \end{bmatrix}$$

من هذه القيم نلاحظ أنه بإمكاننا أن نقوم بإحلال السلعة x_2 بدلاً من السلعة s_1 وذلك وفق الخطوات التالية:

بضرب السطر الأول بـــ 2 نحصل على:

$$I \quad [-1 \quad 4 \quad 0 \quad 2 \quad -1 \quad 0 \quad 400]$$

وبالطرح من السطر الثالث نحصل على:

$$(3) \quad [2 \quad 0 \quad 0 \quad -2 \quad 1 \quad 1 \quad 20]$$

وبضرب I بـــ $\frac{1}{4}$ نحصل على:

$$(1) \quad [-1/4 \quad 1 \quad 0 \quad 1/2 \quad -1/4 \quad 0 \quad 100]$$

بعد هذه الخطوات يمكننا أن نقوم بإعداد الجدول التالي:

P	أساس	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	R
2	x_2	-1/4	1	0	1/2	-1/4	0	100
3	x_3	3/2	0	1	0	1/2	0	230
0	s_3	2	0	0	-2	1	1	20
	Z	4	2	3	1	1	0	
	P	3	2	3	0	0	0	
	P-Z	-1	0	0	-1	-1	0	890

ومنه يمكن القول إنه من أجل تحقيق الحد الأعظمي في الربح لابد مـــن إنتـــاج (100) وحدة من السلعة x_2 و (230) وحدة من السلعة x_3 و 20 وحـــدة مـــن السلعة s_3 وهذا ما يقود إلى تحقيق الحد الأعظمي في الـــربح المســـاوي إلى (890) وحدة نقدية.

تمرين رقم ٢

حل البرنامج التالي باستخدام جداول السمبلكس.

$$MaxP = 4x_1 + 5x_2$$
$$2x_1 + 3x_2 \le 6$$
$$2x_1 + 2x_2 \le 5$$
$$x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0$$

الحل:

حتى يمكن استخدام جداول السمبلكس لا بد من قلب المتراجحات إلى معادلات وذلك وفق الخطوات التالية:

$$MaxP = 4x_1 + 5x_2 + 0s_1 + 0s_2$$
$$2x_1 + 3x_2 + s_1 = 6$$
$$2x_1 + 2x_2 + s_2 = 5$$

أي إن:

$$s_1 = 6$$
$$s_2 = 5$$

وهذه ما تعتبر المصادر الممونة للإنتاج. بعد ذلك يمكننا إعداد الجدول الأول.

P	أساس	x_1	x_2	s_1	s_2	R
0	s_1	2	3	1	0	6
0	s_2	2	2	0	1	5
	Z	0	0	0	0	
	P	4	5	0	0	
	P-Z	4	5	0	0	0

من قراءة السطر P-Z نلاحظ أن عمود المنطلق هو العمود x_2 أي إنه يمكننا أن نبدأ بإحلال السلعة x_2. بقسمة عمود المصادر R على العمود x_2 نحصل على ما يلي:

$$R / x_2$$
$$\begin{bmatrix} 2 \\ 2{,}5 \end{bmatrix}$$

ومنه نلاحظ أنه بإمكاننا أن نقوم بإحلال السلعة x_2 بدلاً من السلعة s_1 وذلك وفق ما يلي:

نضرب السطر الأول بـ 2/3

$$I \quad [4/3 \quad 2 \quad 2/3 \quad 0 \quad 4]$$

بالطرح من السطر الثاني نحصل على :

$$(2) \quad [2/3 \quad 0 \quad -2/3 \quad 1 \quad 1]$$

بضرب I بـ 1/2 نحصل على:

$$R/x_2$$
$$\begin{bmatrix} 2 \\ 2,5 \end{bmatrix}$$

ومنه يمكن أن نقوم بإعداد الجدول التالي:

P	أساس	x_1	x_2	s_1	s_2	R
5	s_1	2/3	1	1/3	0	2
0	s_2	2/3	0	-2/3	1	1
	Z	10/3	5	5/3	0	
	P	4	5	0	0	
	P-Z	2/3	0	-5/3	0	10

بقسمة العمود R على العمود x_1 نحصل على:

$$R/x_1$$
$$\begin{bmatrix} 6 \\ 1,5 \end{bmatrix}$$

ومنه نلاحظ أنه بإمكاننا أن نقوم بإحلال السلعة x_1 بدلاً من السلعة s_2 وذلك وفق الخطوات التالية:

بطرح السطر الثاني من السطر الأول ينتج:

(1) [0 1 1 −1 1]

بضرب السطر الثاني بـ 3/2 نحصل على:

(2) [1 0 −1 3/2 3/2]

ومنه يمكن أن نقوم بإعداد الجدول التالي:

P	أساس	x_1	x_2	s_1	s_2	R
5	x_2	0	1	1	-1	1
4	x_1	1	0	-1	3/2	3/2
	Z	4	5	1	1	
	P	4	5	0	0	
	P-Z	0	0	-1	-1	11

ومنه نلاحظ أنه يمكن تحقيق الحد الأعظمي للأرباح والمساوي إلى (11) وحدة نقدية فيما لو تم إنتاج وحدة واحدة من السلعة x_2 و (1,0) وحدة من السلعة x_1.

تمرين رقم ٣

لنفترض أنه لدينا البرنامج التالي:

$$Max P = 4x_1 + 5x_2$$

$$2x_1 + 3x_2 \le 6$$

$$3x_1 + x_2 \le 3$$

$$x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0$$

والمطلوب استخدام جداول السمبلكس وإيجاد الحد الأعظمي للربح؟

Damascus University

الحل:

إن إمكانية استخدام جداول السمبلكس تتطلب منا أن نقوم بقلب المتراجحات إلى معادلات وذلك وفق ما يلي:

$$2x_1 + 3x_2 + s_1 = 6$$
$$3x_1 + x_2 - s_2 = 3$$

أي إن:

$$s_1 = 6$$
$$s_2 = -3$$

وبما أن قيمة s_2 هي سالبة لا بد من إدخال متغير مصطنع وليكن A بحيث يأخذ البرنامج الصيغة التالية:

$$\text{القيود} \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + s_1 = 6 \\ 3x_1 + x_2 - s_2 + A = 3 \end{cases}$$

$$MaxP = 4x_1 + 5x_2 + 0s_1 - 0s_2 + MA$$

بعد ذلك يمكننا إعداد الجدول الأول وذلك وفق ما يلي:

P	أساس	x_1	x_2	s_1	s_2	A	R
0	s_1	2	3	1	0	0	6
M	A	3	1	0	-1	1	3
	Z	3M	M	0	-M	M	
	P	4	5	0	0	M	
	P-Z	-34M	5-M	0	M	0	3M

من قراءة السطر P-Z نلاحظ أن أكبر قيمة سالبة في الـ M هي 3M- لهذا فـإن العمود x_1 هو عمود المنطلق وأي إنه يمكننا أن نبدأ بإحلال السـلعة x_1 ، بقسـمة العمود R على العمود x_1 نحصل على ما يلي:

$$R / x_1$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

ومنه يمكننا القول إن السطر الثاني هو سطر المنطلق أي يمكن أن نستغني عن السـلعة A، يمكن أن نبدأ بإحلال السلعة x_1 بدلاً من السلعة A ونستغني نهائياً عن السـلعة A التي التي هي وهمية وذلك وفق ما يلي:

نضرب السطر الثاني بـ $\frac{2}{3}$

$$II \quad [2 \quad 2/3 \quad 0 \quad -2/3 \quad 2]$$

نطرح من السطر الأول:

$$(1) \quad [0 \quad 7/3 \quad 1 \quad 2/3 \quad 4]$$

نضرب II بـ $\frac{1}{2}$

$$(2) \quad [1 \quad 1/3 \quad 0 \quad -1/3 \quad 1]$$

بعد ذلك يمكن أن نقوم بإعداد الجدول التالي:

أساس	P	x_1	x_2	s_1	s_2	R
0	s_1	0	7/3	1	2/3	4
M	A	1	1/3	0	-1/3	1
	Z	4	4/3	0	-4/3	
	P	4	5	0	0	
	P-Z	0	11/3	0	4/3	4

من قراءة السطر P-Z نلاحظ أن أكبر قيمة هي $\frac{4}{3}$ وتقع في العمود x_2 وهـذا مـا يدعونا إلى القول إن العمود x_1 هو عمود المنطلق، أي يمكن أن نقول بإحلال السلعة x_2 ، بقسمة العمود R على العمود x_1 نحصل على ما يلي:

$$R / x_1$$

$$\begin{bmatrix} 12/7 \\ 3 \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن أقل قيمة هي 12/7 وتقابل السلعة s_1 وهذا ما يدعونا إلى القول إنه يمكن أن نقوم بإحلال السلعة x_2 بدلاً من السلعة s_1 وفق ما يلي:

نضرب السطر الأول بـ 1/7

$$I \quad [0 \quad 1/3 \quad 1/7 \quad 2/2 \quad 4/7]$$

نطرح من السطر الثاني:

$$(2) \quad [1 \quad 0 \quad -1/7 \quad -3/7 \quad 3/7]$$

نضرب I بـ 3:

$$(1) \quad [0 \quad 1 \quad 3/7 \quad 2/7 \quad 12/7]$$

بعد ذلك يمكننا أن نعد الجدول التالي:

P	أساس	x_1	x_2	s_1	s_2	R
5	x_2	0	1	3/7	2/7	12/7
4	x_1	1	0	-1/7	-3/7	3/7
	Z	4	5	11/7	-2/7	
	P	4	5	0	0	
	P-Z	0	0	-11/7	2/7	72/7

بقسمة العمود R على العمود s_2 نحصل على:

$$R/s_2$$

$$\begin{bmatrix} 6 \\ \text{سالب} \end{bmatrix}$$

أي إنه يتوجب علينا أن نقوم بإحلال السلعة s_2 بدلاً من السلعة x_2 وذلك وفق مـــا يلي:

نضرب السطر الأول بـــ 3/2

$$I \quad [0 \qquad 3/2 \qquad 9/14 \qquad 3/7 \qquad 18/7]$$

نجمع مع السطر الثاني:

$$(2) \quad [1 \qquad 3/2 \qquad 1/2 \qquad 0 \qquad 3]$$

نضرب I بـــ 7/3

$$(1) \quad [0 \qquad 7/2 \qquad 2 \qquad 1 \qquad 6]$$

بعد ذلك يمكننا أن نعد الجدول التالي:

P	أساس	x_1	x_2	s_1	s_2	R
0	s_2	0	7/2	2	1	6
4	x_1	1	3/2	1/2	0	3
	Z	4	6	2	0	
	P	4	0	0	0	
	P-Z	0	-6	-2	0	12

وحسب هذا الجدول نلاحظ أن الحد الأعظمي للأرباح هو (12) وحدة نقدية.

تمرين رقم ٤

حل البرنامج التالي باستخدام جداول السمبلكس:

$$Max\,P = 5x_1 + 8x_2$$
$$4x_1 + 6x_2 \le 24$$
$$2x_1 + x_2 \le 18$$
$$3x_1 + 9x_2 \le 36$$
$$x_1 \ge 0 \quad , \quad x_2 \ge 0$$

الحل:

حتى يمكن استخدام جداول السمبلكس لابد من قلب المتراجحات إلى معادلات وذلك عن طريق إدخال المتغيرات s_1, s_2, s_3 وذلك وفق ما يلي:

$$Max\,P = 5x_1 + 8x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3$$
$$4x_1 + 6x_2 + s_1 = 24$$
$$2x_1 + x_2 + s_1 = 18$$
$$3x_1 + 9x_2 + s_3 = 36$$

أي إن:

$$s_1 = 24$$
$$s_2 = 18$$
$$s_3 = 56$$

وبعد ذلك يمكننا استخدام جداول السمبلكس التي بموجبها نقوم بإحلال x_2, x_1 بدلاً من s_3, s_2, s_1 وذلك حسب ما يلي:

P	أساس	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	R
0	s_1	4	6	1	0	0	24
0	s_2	2	1	0	1	0	18
0	s_3	3	9	0	0	1	36
	Z	0	0	0	0	0	
	P	5	8	0	0	0	
	P-Z	5	8	0	0	0	0

من قراءة هذا الجدول وملاحظة القيم المكونة للسطر (P-Z) نجد أن أكبر قيمة هي 8 وهذه القيمة مقابلة للعمود x_2 وهذا ما يدعونا إلى القول إنه يجب أن نبدأ بإحلال السلعة x_2 بقسمة العمود R على العمود x_2 نحصل على:

$$R/x_2$$

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 18 \\ 4 \end{bmatrix}$$

ومنه نلاحظ أنه هناك قيمتان متساويتان وتمثلان أدنى القيم وهما مقابلتان للسطرين الأول والثالث وحتى يمكن المفاضلة ما بين هذين السطرين واختيار السلعة التي يكن الاستغناء عنها لإحلال السلعة x_2 نرجع إلى قيم عمود المنطلق x_2 ونقارن بين القيمتان الواقعتان في السطر الأول والثالث ونختار القيمة الأعلى كمؤشر على السلعة التي يمكن الاستغناء عنها، من قراءة القيمة الأولى والثالثة في العمود x_1 نجد أن القيمة الأكبر هي القيمة الثالثة وهذا ما يدعونا إلى القول إنه يمكن أن نستغني عن السلعة s_3 لإحلال السلعة x_2 وذلك وفق ما يلي:

نضرب السطر الثالث بـ 1/9 :

(3) [1/3 1 0 0 1/9 4]

نطرح من السطر الثاني:

(2) [5/3 0 0 1 −1/9 14]

نضرب (3) بـ 6 :

III [2 6 0 0 2/3 24]

نطرح من السطر الأول:

(1) [2 0 1 0 −2/3 0]

بعد ذلك يمكن أن نقوم بإعداد الجدول التالي:

P	أساس	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	R
0	s_1	2	0	1	0	-2/3	0
0	s_2	5/3	0	0	1	-1/9	14
8	x_2	1/3	1	0	0	1/9	4
	Z	8/3	8	0	0	8/9	
	P	5	8	0	0	0	
	P-Z	7/5	0	0	0	-8/9	32

ومنه نلاحظ أن أكبر قيمة في السطر P-Z هـي 7/3 وتقابـل العمـود x_1 أي إن السلعة x_1 هي الواجبة الإحلال بقسمة العمود R على العمود x_1 نحصل على:

$$R/x_1$$
$$\begin{bmatrix} 0 \\ 42/5 \\ 12 \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن أصغر قيمة هي الصفر ويقابل السلعة S_1، أي إنه يمكن أن نقوم بـــإحلال السلعة X_1 بدلاً من السلعة S_1 وذلك وفق ما يلي:

نضرب السطر الأول بـــ $\frac{1}{6}$:

$$I \quad [1/3 \quad 0 \quad 1/6 \quad 0 \quad -1/9 \quad 0]$$

نطرح من السطر الثالث:

$$3 \quad [0 \quad 1 \quad -1/6 \quad 0 \quad 2/9 \quad 4]$$

نطرب I بـــ 5 :

$$I` \quad [5/3 \quad 0 \quad 5/6 \quad 0 \quad -5/9 \quad 0]$$

نطرح من السطر الثاني:

$$(2) \quad [0 \quad 0 \quad -5/6 \quad 1 \quad 4/9 \quad 14]$$

نضرب I` بـــ 3/5

$$(1) \quad [1 \quad 0 \quad 1/2 \quad 0 \quad -1/3 \quad 0]$$

بعد هذه الخطوات والتي بينا فيها كيف تم إحلال السلعة X_1 بدلاً من السلعة S_1 يمكننا أن نقوم بإعداد الجدول التالي:

P	أساس	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	R
5	s_1	1	0	1/2	0	-1/3	0
0	s_2	0	0	-5/6	1	4/9	14
8	x_2	0	1	-1/6	0	2/9	4
	Z	5	8	7/6	0	1/9	
	P	5	8	0	0	0	
	P-Z	0	0	-7/6	0	-1/9	32

ومنه نلاحظ أن:

$$x_1 = 0$$
$$x_2 = 4$$

بالتعويض في دالة الهدف نحصل على:

$$Max\ P = 5 \times 0 + 8 \times 4 = 32$$

أي إن الحد الأعظمي للأرباح هو 32 وحدة نقدية.

تمرين رقم ٥

حل البرنامج التالي باستخدام جداول السمبلكس

$$Min\ C = 60x_1 + 40x_2 + 80x_3$$
$$3x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 2$$
$$4x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 4$$
$$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 3$$

الحل:

إن امكانية استخدام جداول السمبلكس تتطلب منا قلب المتراجحات إلى معـــادلات وعن طريق إدخال المتغيرات S_3,S_2,S_1 وفق ما يلي:

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 - s_1 = 2$$
$$4x_1 + x_2 + 3x_3 - s_2 = 4$$
$$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - s_3 = 3$$

أي إن:

$$s_1 = -2$$
$$s_2 = -4$$
$$s_3 = -3$$

وبما أن قيم المتغيرات الأساسية سالبة فلا بـــد مـــن إدخـــال المـــتغيرات المصـــطنعة A_3,A_2,A_1 بحيث يأخذ البرنامج الصورة التالية:

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 - s_1 + A_1 = 2$$
$$4x_1 + x_2 + 3x_3 - s_2 + A_2 = 4$$
$$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - s_3 + A_3 = 3$$

$$MinC = 60x_1 + 40x_2 + 80x_3 - 0(s_1 + s_2 + s_3) + M(A_1 + A_2 + A_3)$$

أي إنه في المرحلة الأولى يتوجب علينا إحلال السلع X_3,X_2,X_1 بـــدلاً مـــن الســـلع A_3,A_2,A_1 وذلك عن طريق استخدام جداول السمبلكس. على ضوء ذلك يمكـــن أن تقوم بإعداد الجدول الأول:

P	أساس	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	A_1	A_2	A_3	R
M	A_1	3	2	1	-1	0	0	1	0	0	2
M	A_2	4	1	3	0	-1	0	0	1	0	4
M	A_3	2	2	2	0	0	-1	0	0	1	3
	Z	9M	5M	6M	-M	-M	-M	M	M	M	
	C	60	40	80	0	0	0	M	M	M	
	C-Z	60 - 9M	40 - 5M	80 - 6M	M	M	M	0	0	0	9M

من قراءة الجدول نلاحظ أن أكبر قيمة سالبة في الـ M هي 9M- إذن يمكننا أن نبدأ بإحلال السلعة x_1 بقسمة العمود R على العمود x_1 نحصل على:

$$R / x_1$$

$$\begin{bmatrix} 2/3 \\ 1 \\ 1{,}5 \end{bmatrix}$$

ومنه نلاحظ أن أقل قيمة هي 2/3 وتقابل A_1 أي إنه يمكننا أن نقوم بإحلال x_1 بدلاً من A_1 وذلك وفق ما يلي:

نضرب السطر الأول بـ 2/3 :

$$I: \quad [4/3 \quad 2/3 \quad -2/3 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 4/3]$$

طرح من السطر الثالث:

$$(3): \quad [0 \quad 2/3 \quad 4/3 \quad 2/3 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 5/3]$$

ضرب I بـ 2 :

$$\Gamma \quad [4 \quad 8/3 \quad 4/3 \quad -4/3 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 8/3]$$

نطرح من السطر الثاني:

$$2 \quad [0 \quad -5/3 \quad 5/3 \quad 4/3 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 4/3]$$

نضرب `I بـ 1/4 :

$$(1) \quad [1 \quad 2/3 \quad 1/3 \quad -1/3 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 2/3]$$

بعد ذلك يمكننا أن نقوم بإعداد الجدول التالي:

P	أساس	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	A_2	A_3	R
60	x_1	1	2/3	1/3	-1/3	0	0	0	0	2/3
M	A_2	0	-5/3	5/3	4/3	-1	0	1	0	4/3
M	A_3	0	2/3	4/3	2/3	0	-1	0	1	5/3
	Z	60	40 -M	20 +3M	-20 +2M	-M	-M	M	M	
	C	60	40	80	0	0	0	M	M	
	C-Z	0	M	60 -3M	20 -2M	M	M	0	0	9M

بقسمة العمود R على العمود x_3 نحصل على:

$$R / x_s$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 4/5 \\ 5/4 \end{bmatrix}$$

ومنه نلاحظ أن أقل قيمة هي 4/5 وتقابل A_2 أي إنه يمكننا أن نقوم بإحلال السلعة x_2 بدلاً من السلعة A_2 وذلك وفق ما يلي:

نضرب السطر الثاني بـــ 1/5

$$II \quad [0 \quad -1/3 \quad 1/3 \quad 4/15 \quad -1/5 \quad 0 \quad 0 \quad 4/15]$$

نطرح من السطر الأول:

$$(1) \quad [1 \quad 1 \quad 0 \quad -3/5 \quad 1/5 \quad 0 \quad 0 \quad 2/5]$$

نضرب II بـــ 4

$$II' \quad [0 \quad -4/3 \quad 4/3 \quad 16/15 \quad -4/5 \quad 0 \quad 0 \quad 16/15]$$

نطرح من السطر الثالث:

$$(3) \quad [0 \quad 2 \quad 0 \quad -2/5 \quad 4/5 \quad -1 \quad 1 \quad 3/5]$$

نضرب `II بـــ 3/4

$$II' \quad [0 \quad -1 \quad 1 \quad 4/5 \quad -3/5 \quad 0 \quad 0 \quad 4/5]$$

بعد ذلك يمكننا أن نقوم بإعداد الجدول التالي:

P	أساس	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	A_3	R
60	x_1	1	1	0	-3/5	1/5	0	0	2/3
80	x_3	0	-1	1	4/5	-3/5	0	0	4/3
M	A_3	0	2	0	-2/5	4/5	-1	1	5/3
	Z	60	-20 +2 M	80	28 - 2/5M	-36 +4/5 M	-M	M	
	C	60	40	80	0	0	0	M	
	C-Z	0	60 -2M	0	-28 +2/5 M	36 - 4/5 M	M	0	40 - 3/5 M

من قراءة الجدول نلاحظ أن أكبر قيمة سالبة في الـ M هي $-2M$ وتقابل x_2 إذن نقوم بقسمة العمود R على العمود x_2

$$R/x_2$$
$$\begin{bmatrix} 2/5 \\ \text{الب} \\ 3/10 \end{bmatrix}$$

ومنه نلاحظ أن أقل قيمة هي 3/10 وتقابل A_3 ، إذن يمكننا أن نقوم بإحلال السلعة x_2 بدلاً من A_3 وذلك وفق ما يلي:

نضرب السطر الثالث بـ 1/2

$$(3)\quad [0 \quad 1 \quad 0 \quad -1/5 \quad 4/10 \quad -1/2 \quad 3/10]$$

نجمع منع السطر الثاني:

$$(2)\quad [0 \quad 0 \quad 1 \quad 3/5 \quad -1/5 \quad -1/2 \quad 11/10]$$

ثم بعد ذلك نقوم بطرح (3) من السطر الأول:

$$(1)\quad [1 \quad 0 \quad 0 \quad -2/5 \quad -2/10 \quad 1/2 \quad 1/10]$$

بعد ذلك يمكننا أن نقوم بإعداد الجدول التالي:

C	أساس	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	R
60	x_1	1	0	0	-2/5	-2/10	1/2	1/10
80	x_3	0	0	1	3/5	-1/5	-1/2	11/10
40	x_2	0	1	0	-1/5	4/10	-1/2	3/10
	Z	60	40	80	16	-12	-M	
	C	60	40	80	0	0	0	
	C-Z	0	0	0	-16	12	M	106

بقسمة العمود R على العمود s_1 نحصل على:

$$R/s_1$$

$$\begin{bmatrix} \text{سالب} \\ 2/11 \\ \text{سالب} \end{bmatrix}$$

ومنه نلاحظ أن القيمة الوحيدة الموجبة هي 2/11 وتقابل السلعة x_3 إذن يمكننـــا أن نقوم بإحلال السلعة s_1 بدلاً من السلعة x_3 وذلك وفق ما يلي:

نضرب السطر الثاني بـــ 2/3 :

$$II \quad [0 \quad 0 \quad 2/3 \quad 2/5 \quad -2/5 \quad -1/3 \quad 22/30]$$

نجمع مع السطر الأول:

$$(1) \quad [1 \quad 0 \quad 2/3 \quad 0 \quad -1/3 \quad 1/6 \quad 25/30]$$

نضرب II بـ 1/2 :

II' [0 0 1/3 1/5 −1/5 −1/6 11/30]

نجمع مع السطر الثالث:

(3) [0 1 1/3 0 1/3 −2/3 20/30]

نضرب بـ II` بـ 5 :

(2) [0 0 5/3 1 −1/3 −5/6 55/30]

بعد ذلك يمكننا أن نقوم بإعداد الجدول التالي:

C	أساس	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	R
60	x_1	1	0	2/3	0	-1/3	1/6	25/30
0	x_3	0	0	5/3	1	-1/3	-5/6	55/30
40	A_3	0	1	1/3	0	1/3	-2/3	20/30
	Z	60	40	53/34	0	$-6\frac{2}{3}$	$-26\frac{2}{3}$	
	C	60	40	80	0	0	0	
	C-Z	0	0	26,66	0	$6,\frac{2}{3}$	$26,\frac{2}{3}$	$76,\frac{2}{3}$

ومنه نلاحظ أن:

$$x_1 = 25/30$$
$$x_2 = 20/30$$

ولا يمكن أن نقوم بإحلال السلعة x_3 وذلك لأنها سوف تحملنا خسارة، بالتعويض في دالة الهدف ينتج:

$$Min\, C = 60x_1 + 40x_2 + 80x_3 - 0s_1$$

$$= 60\frac{25}{30} + 40\frac{20}{30} + 0 - 0\frac{55}{30}$$

$$= 50 + 26,\frac{2}{3} + 0 + 0 = 76,\frac{2}{3}$$

إذن فإن الحد الأدنى لكلفة الإنتاج هو 76, 2/3 وحدة نقدية.

وقل رب زدني علما
Damascus University

معجم المصطلحات العربي والإنكليزي

Activity	نشاط
Additional work	عمل إضافي
Arithmetic method	طريقة حسابية
Arrival pattern	نموذج وصول
Arrival rate	معدل وصول
Assinment problems	قضايا التعيين
Artificial variables	المتغيرات الاصطناعية
Bar – Chart	مخططات زمنية
Basic solution	حل أساس
Bens fit area	منطقة حلول ممكنة
Basic variables	المتغيرات الأساسية
Buffer stock	مستوى احتياطي
Canonical brom	النموذج العام
Capital cost	تكاليف رأسمالية
Critical path	المسار الحرج
Criteria	معايير
Constraints	قيود
Construction of the network plan	إنشاء مخطط شبكي
Cost of the network plan	كلفة المخطط الشبكي
Crashing	تعجيل

Cycle time period	زمن (وقت) الدورة
Degenerate	حلول منحلة ــ متردية
Determinative models	نماذج محددة
Directed network	مخطط شبكي (شبكة) موجه
Discount rate plan	معدل الخصم
Dummy activity	نشاط وهمي
Dominated strategies	استراتيجيات مسيطرة
Finite gueue model	نموذج خط انتظار محدد وسعة
First come – first – in – line basis (FCFO)	قاعدة الواصل أولا بأخذه دوره أولاً
First – come – first – in – line basis	حل الواصل أولاً يخدم أولاً
First pass solution	حل أولي مقبول
Finite markof chains	سلاسل ماركوف المحددة
Finite source population	مصدر طلب غير محدود
Finding a positive – flow path	إيجاد مسار تدفق موجب
Float time	الأزمنة الفائضة
Free foat (ff)	زمن فائض حر
Game value	قيمة المباراة
Game theory	نظرية المباراة
Generating an initial possible solution	إيجاد حل أولي ممكن
Graphical method	تمثيل بياني
Holding cost inevantory	كلفة الاحتفاظ بالمخزون

Hujgarian method	الطريقة الهنغارية
Idle time	وقت ضائع (عاطل)
Independent activities	أنشطة مستقلة
Indirect cost	كلفة غير مباشرة
Inequalities	متراجحات
Improving the solution	تحسين الحل
Infinite gueue model	نموذج خط انتظار غير محدود
Initial solution	حل أولي
Inventory control	رقابة المخزون
Infinite population	مصدر طلب غير محدود
Labor utilization	استخدام العمالة
Lateness time	وقت التأجير (مجال الضغط)
	قاعدة الواصل أخيراً تخدم أولاً
Latest finish time (LC)	آخر زمن مسموح به للنهاية
Latest start time (LS)	آخر زمن مسموح به للبدء
Last cost method	أسلوب التكلفة الأقل
Lea time export	فترة التوريد
Learving variable	المتغير الخارج
Line efficiency	كفاءة الخط
Linear programming	البرمجة الخطية
Limited length gueue	صف انتظار محدود
Markeovanalysis	تحليل ماركوف

Markeov chains	سلاسل ماركوف
Maximize	تعظيم
Maximum flow problems	قضايا التدفق الأعظمي
Maximum inventory level	الحد الأعلى للمخزون
Mathematical formulation	الصيغ الرياضية
Minimse	تصغير (أدنى)
Minimum inventory level	الحد الأدنى للمخزون
Maxied strategies method	أسلوب الاستراتيجيات المختلطة
Modified distribution method	أسلوب لنقل (التوزيع) المعدل
Most likely (realistic)time(m)	الزمن الأكثر احتمالاً (المعتدل)
Multiple optimal solutions	تعدد الحلول البديلة
Minimum span problems	قضايا النطاق (شبكة) الأدنى
	التحليل الشبكي
Node	نقطة (النقل)
Non – negative constraints	قيود غير سالبة
N – person – zero – sum games	مباريات بين الأشخاص ذات
	مجموع صفري
North west corner method	طريقة الزاوية الشمالية الغربية
	مباريات ذات المجموع غير الصفري
	توزيع غير ثابت
Objective function	دالة الهدف
Operation research	بحوث العمليات

Opportunity cost	تكلفة الفرصة الضائعة
Optimistic	تفاؤل
Optimistic estimate	التقدير المتفائل
Optimum (pivot) column	العمود الأمثل (العمود الدليل)
Optimum (pivot) row	الصف الأمثل (السطر الدليل)
Optimum strategy	الاستراتيجية المثلى
Ordered pairs	أزواج مرتبة
Ordering cost	كلفة الطلب
Ordering period	فترة الطلب
Pay off matrik	مصفوفة المدفوعات
Pessimistic time (b)	الزمن المتشائم
Production problems	قضايا الإنتاج
Probability models	النماذج الاحتمالية
Project evaluation and review technigue (PERT)	أسلوب تقويم ومراجعة البرامج (المشروعات) أسلوب بيرة.
Procurement waiting period	زمن (فترة) الانتظار المتشريات
Probabilistic project scheduling	الوقت المتوقع لتنفيذ الأنشطة
Problem formulation	صياغة شكله
Pure strategy	الاستراتيجية الخالصة
Queue characteristics	خصائص الصف
Queue disciplines	قاعدة الدور

Quantity order	حجم الطلبية
Quantity discount	علاقة حجم الطلبية بخصم الأسعار
Queuing theory	نظرية الأرتال (الصفوف)
Range of optimality	المدى الأمثل
Recurrence	تراجعية
Restrictions	قيود
Rows	صفوف
Reorder	نقطة إعادة الطلب
Sensitivity analysis	تحليل الحساسية
Saddle point	نقطة استقرار
Set – up cost	تكلفة صدار الطلبية
Service patterns	أنماط الخدمة
Shadow stations	أسعار الظلل
Service stations	محطة تأدية الخدمة
Slack variable	المتغيرات الحرة البطئ الرخو غير المحكمة
Stationrary distribution	توزيع ثابت
Shortages inventory cost	تكلفة نفاذ البضاعة
Single quque multiple channels	صف انتظار متعدد الأقنية
Standard form	الصيغة القياسية
Shortest-route problems	مسائل أقصر مسار
Strategies	الاستراتيجيات

System capacity	طاقة النظام
Simultaneous changes	التغيرات المتزامنة
Sable point	نقطة التوازن
Surplus variable	المتغيرات الفائضة
	قاعدة الخدمة بنظام عشوائي
Servicing rate	معدل الخدمة
Setting time	وقت الأعداد
Simplex method	طريقة السمبلكس
Single –channel, multiple phase case	خط واحد ومركز خدمة واحد وتتم الخدمة على عدة مراحل
Slack time	الوقت الفائض (الخامل)
Source	مصدر (مركز توزيع)
Station service time	وقت خدمة المحطة
Statistical inventory method	نموذج إحصائي لتخزين
Task	واجب / مهمة
Total float (TF)time	زمن فائض كلي
Total make – span	وقت التشغيل الكلي
Transition matrix	مصفوفة انتقال
Transportation method	طريقة /أسلوب/ النقل
	مباراة بين طرفين ذات مجموع صغري
The traveling salesman problem	قضية البحار المسافر
Two – phase method	أسلوب المرحلتين

Traffic – intensity	نسبة /كثافة/ التشغيل
Unbounded solution	حلول غير محدودة
Unform distribution	التوزيع غير المنظم
Unbalanced cases	حالات غير متوازنة
Uncrashing	تبطئ
Values	قيم
Variable cost	تكاليف متغيرة
Variables decision	قرارات متغيرة
Variable processing	تشغيل متغير
Variance	تباين
Vogal approximation method	طريقة فوجيل التقريبية
Zero –sum game	المباراة ذات المجموع الصفري
Zoning constraints	قيود مكانية

المراجع في اللغة العربية

١- الدكتور تركي ابراهيم سلطان

التحليلات الكمية في اتخاذ القرار، جامعة الملك سعود الرياضي ١٩٨٤

٢- د.صباح الدين بقجه جي

بحوث العمليات

منشورات جامعة دمشق عام ٢٠٠٠

٣- د.صباح الدين بقجه جي، وخلف مطر الجراد

بحوث العمليات، جامعة دمشق ١٩٨٣

٤- د.صباح الدين بقجه جي، د. وائل معلا، وحسام مراد، ومحمد نايفة

بحوث العمليات، المركز العربي للترجمة والتأليف والنشر ١٩٩٨

٥- د. فهمي أحمد جلال

مقدمة في بحوث العمليات

دار الفكر العربي القاهرة ١٩٩٠

٦- د. فؤاد الشيخ سالم، الدكتور فالح محمد حسن

بحوث العمليات، مجدلاوي ١٩٨٣

وقل رب زدني علما
Damascus University

المراجع في اللغة الفرنسية

1- All A.FAURE
Guide de la recherche opérationnelle
Masson Paris 1986
2- D.BRUNEL
Les mathématiques modernes. Technique de décision
DUNOD Paris 1970
3- P.DARNA
L éntrepreneur face á linves tissement
DUNOD Paris 1964
4- J.G.GOAER
Le. P.D.G.face au hasard
DUNOD Paris 1970
5- .....: GEOFFROY. DAUMALE
la programmation des décisions Presses universitaires de FRANCE 1968
6- FAURER
Preis de récherche opérationnelle
DUNOD Paris 1970
7- A. KUUFMANN
La méthode du chémin critiques
DUNOD Paris 1965
8- KAUFMANN GULL MANN
Des points el des fléches, la theorie de graphes.
DUNOD Paris 1968

وقل رب زدني علما
Damascus University

المراجع في اللغة الإنكليزية

1- ABRAHAM WALD
statistical decision fonction
CHELSED Pablishing company mew yourk 1950
2- S.K BASU D.K PAL H.BAGCHI
operations researche for engineers new delhe Bombay calcullce Oxford C.R IBH 1989
3- DAVID W MILLER MARRIN K.STARR
Executive decisions and operations researche
PRENTICE HALL 1960
4- FREDERICK S.HILLER
Introduction to operations resarche
Newyork: Mc GRAW HILL 1990
5- John VON NEWMANN AND MOREENSTON
theory of games and economic behavior John wiley&sono inc NEWYORK LONDON 1946
6- KOTHARI
An introduction to operational researche
Newyork. The Macmillan 1968
7- RICHARD I LENIN DAVIDS RUBIN JOEL. P STINSON.
Quantitative approaches to Management.
MC GRAW-HILL BOOK Company 2000
8- F.M WILKES
Elements of operational researche
MC GRAW – HILL BOOK Company 1980

وقل رب زدني علما
Damascus University

المدقق اللغوي :

الدكتور ماجد أبو ماضي

– حقوق الطبع و الترجمة و النشر محفوظة لمديرية الكتب و المطبوعات –

وقل رب زدني علما
Damascus University

وقل رب زدني علما
Damascus University

وقل رب زدني علما
Damascus University