



جامعة دمشق
كلية الاقتصاد
قسم المصارف والتأمين

نظم دعم القرارات

د. ليلى بركات

٢٠٢٣/٢٠٢٢

الفصل الأول

أساسيات نظم دعم القرار

١-١- مقدمة

الهدف الرئيسي من أي نظام للمعلومات هو تزويد المستخدمين بالمعلومات والبيانات اللازمة لاتخاذ القرارات بمختلف أنواعها وتسيير أنظمة العمليات وإنجازها. تلعب نظم المعلومات دوراً أساسياً في نجاح المصارف وغيرها من المؤسسات والمنظمات من خلال تزويد الإدارة والموظفين بالمعلومات وزيادة سرعة إنجاز العمليات. يُعرف نظام المعلومات بشكل مبسط على أنه مجموعة من المكونات المترابطة مع بعضها البعض تعمل على جمع البيانات وتحويلها إلى معلومات وإيصال هذه المعلومات إلى المستخدمين.

١-٢- مفهوم نظام دعم القرار

نظام دعم القرار هو نظام معلومات يهدف إلى تقديم المعلومات اللازمة لترشيد عملية اتخاذ القرار. المكونات الأساسية لنظام دعم القرار تشمل قاعدة البيانات، نظام إدارة قاعدة البيانات، قاعدة النماذج (نماذج الطرق الكمية: نموذج البرمجة الخطية، النقل والتخصيص، المسار الحرج، الخ)، نظام إدارة قاعدة النماذج ونظام إدارة الحوار (واجهة المستخدمين)

١-٣- عملية اتخاذ القرار

القرار هو اختيار حل ما بين عدة حلول لمشكلة معينة وعملية اتخاذ القرار هي مجموعة متتالية من الخطوات والإجراءات التي تؤدي إلى اختيار أفضل الحلول البديلة. بعبارة أخرى هي عملية الاختيار بين مجموعة من البدائل لتحقيق هدف واحد أو عدة أهداف على ضوء المعلومات المتاحة.

١-٤- مراحل عملية اتخاذ القرار

تمر عملية اتخاذ القرار بعدة مراحل يمكن تلخيصها كمايلي :

- تشخيص المشكلة: فهم وتعريف المشكلة: ماهي المشكلة؟ لماذا نريد حلها؟ ما هي أسبابها؟
- تصميم الحلول: تحليل المشكلة وتحديد البدائل (اكتشاف الحل)
- مرحلة الاختيار: تقييم البدائل المتاحة لحل المشكلة واختيار الحل الأفضل
- التطبيق: اختبار الحل الذي تم اختياره

١-٥- معايير اختيار البديل الأفضل

- درجة المخاطرة المتوقعة من اختيار البديل
- الاقتصاد في الجهد والنفقات
- الإمكانيات والموارد المتاحة
- الوقت الذي يستغرقه اختيار البديل وتنفيذه
- آثار البديل وما يثير تنفيذه من مشاكل
- الأهداف التي يحققها البديل

١-٦- التحليل الكمي

صياغة المشكلة الإدارية في نماذج تصويرية أو رياضية، والنموذج هو صيغة رياضية أو مجموعة رموز تمثل مكونات المشكلة المدروسة والعلاقة بين أجزائها. من أهم أنواع الطرق الكمية: الطرق الاحصائية وطرق بحوث العمليات.

١-٦-١- دواعي استخدام التحليل الكمي في اتخاذ القرار

- تعقد المشكلة المدروسة (عدم امكانية ايجاد حل بسيط لها)
- أهمية المشكلة المدروسة
- عدم توافر الخبرة اللازمة لحل المشكلة المدروسة

- بناء حل روتيني كمي للمشاكل المتكررة

١-٦-٢- أنواع النماذج الرياضية الكمية

• النماذج الاحتمالية

– مثال: نظرية القرار، صفوف الانتظار

• النماذج المحددة: تفترض أن قيم متغيرات النموذج معروفة بشكل مؤكد وثابتة

– مثال: البرمجة الخطية، نماذج الشبكات

• النماذج المختلطة: تجمع بين النماذج الاحتمالية والمحددة

– مثال: بيرت والمسار الحرج

الفصل الثاني

نظرية القرار

٢-١- مكونات المسألة القرارية

- مجموعة البدائل لحل المسألة القرارية:
 $A_i = (a_1, a_2, \dots, a_m)$
- مجموعة حالات الطبيعة المؤثرة على البدائل:
 $\theta_j = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$
- التوزيع الاحتمالي لكل حالة من حالات الطبيعة:
 $P(\theta_j), j = 1: n$
- العائد المرتبط بكل قرار لكل حالة من حالات الطبيعة:
 g_{ij}

حالات الطبيعة

البدائل

θ_j	θ_1	θ_2	...	θ_j	...	θ_n
A_i						
a_1	g_{11}	g_{12}	...	g_{1j}	...	g_{1n}
a_2	g_{21}	g_{22}	...	g_{2j}	...	g_{2n}
...	...	...	...	...	...	...
a_i	g_{i1}	g_{i2}	...	g_{ij}	...	g_{in}
...	...	...	...	...	...	...
a_m	g_{m1}	g_{m2}	...	g_{mj}	...	g_{mn}
احتمال تحقق كل بديل	$P(\theta_1)$	$P(\theta_2)$	...	$P(\theta_j)$	...	$P(\theta_n)$

الشكل ٢-١: مصفوفة القرار

٢-٢- صياغة مصفوفة القرار

المثال ١: تقوم إحدى الشركات بالاستكشاف عن الغاز الطبيعي في موقع ما، فإذا قام صاحب الموقع بقبول عرض الشركة وكان لا يتوافر الغاز في الأرض فإنه سيأخذ مقابل ذلك ٢٠٠ ألف وحدة نقدية أما إذا توافر الغاز في الأرض فإنه سيأخذ مقابل ذلك ٨٠٠ ألف وحدة نقدية. أما إذا قام بالاستكشاف ولم يتوافر غاز في الموقع فإنه سيتحمل تكلفة أولية ٤٠٠ ألف، أما إذا وجد الغاز فإن صاحب الأرض من المتوقع أن يحقق عائد مقداره ١٠ مليون وحدة نقدية. المطلوب: إيجاد مصفوفة القرار

الحل:

θ_j	وجود الغاز في الأرض	عدم وجود الغاز في الأرض
A_i		
قبول عرض الشركة	800000	200000
استكشاف الغاز بنفسه	1000000	-400000

المثال ٢:

عرض على أحد المزارعين في الخريف ٥٠٠ ألف وحدة نقدية نظير محصول البرتقال الذي سيجنى في بداية العام التالي. إذا قبل المزارع بهذا العرض فإن النقود ستكون له بغض النظر عن جودة أو كمية المحصول. أما إذا لم يقبل المزارع العرض فيجب عليه بيع المحصول في السوق بعد جنيته وتحت الظروف العادية. يتوقع المزارع الحصول على ٩٠٠ ألف وحدة نقدية نظير بيع محصوله في السوق، أما إذا تعرض المحصول للصقيع فإن جزء كبير من المحصول سيتلف ويتوقع عندها الحصول على ١٠٠ ألف وحدة نقدية المطلوب: إيجاد مصفوفة القرار

الحل:

θ_j	الظروف العادية	الظروف غير العادية
A_i		
قبول العرض	500000	500000
عدم قبول العرض	900000	100000

٢-٣- نماذج اتخاذ القرار

- حالة التأكد التام: معرفة كاملة بالنتائج لكل بديل من بدائل اتخاذ القرار لحل المشكلة
- حالة عدم التأكد (المخاطرة): معرفة التوزيع الاحتمالي لنتائج كل بديل من بدائل اتخاذ القرار
- حالة عدم التأكد التام: عدم القدرة على تحديد أي احتمال لنتائج البدائل المتاحة

٢-٣-١- أساليب اتخاذ القرار في حالة عدم التأكد

- أسلوب القيمة النقدية المتوقعة
- أسلوب شجرة القرارات

أسلوب القيمة النقدية المتوقعة

تم حساب القيمة المتوقعة لبديل ما من خلال متوسط القيم المختلفة لهذا البديل مرجحة باحتمالات حدوث كل قيمة:

$$E(a_i) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n g_{ij} p(\theta_j)$$

حيث:

a_i : تمثل بديل معين

θ_j : تمثل حالة معينة من حالات الطبيعة المؤثرة على البديل المختار

g_{ij} : تمثل العائد المرتبط بالبديل a_i عند تحقق الحالة الطبيعية θ_j

يتم اختيار البديل الذي يحقق أعلى قيمة متوقعة في حال كون مصفوفة القرار مصفوفة أرباح والبديل الذي يحقق التكلفة الأدنى في حال كون مصفوفة القرار مصفوفة تكاليف.

مثال ١: لتكن لدينا مصفوفة القرار التالية:

θ_j	θ_1	θ_2	θ_3
A_i			
a_1	120	100	-100
a_2	200	-300	100
a_3	400	300	200
$P(\theta_j)$	0.25	0.50	0.25

المطلوب: إيجاد القرار الأمثل باستخدام طريقة القيمة النقدية المتوقعة.

$$E(a_1) = 120 * 0.25 + 100 * 0.5 + (-100) * 0.25 = 55$$

$$E(a_2) = 200 * 0.25 + (-300) * 0.5 + 100 * 0.25 = -75$$

$$E(a_3) = 400 * 0.25 + 300 * 0.5 + 200 * 0.25 = 300$$

البديل الثالث هو الأفضل في ظل المعلومات المتاحة.

مثال ٢

- لنفرض لدينا مصفوفة القرار (العائد) التالية:

θ_j	θ_1	θ_2
A_i		
a_1	400000	-360000
a_2	200000	-40000
$P(\theta_i)$	0.60	0.40

المطلوب: إيجاد القرار الأمثل باستخدام طريقة القيمة النقدية المتوقعة

$$E(a_1) = 400000 * 0.60 + (-360000) * 0.40 = 96000$$

$$E(a_2) = 200000 * 0.60 + (-40000) * 0.40 = 104000$$

البديل الثاني هو الأفضل في ظل المعلومات المتاحة

قيمة المعلومات الكاملة

- تُحسب قيمة المعلومات من خلال الفرق بين القيمة المضافة التي يُحدثها استثمار تلك المعلومات وتكلفة هذه القيمة

- مصفوفة الأرباح:

قيمة المعلومات الكاملة =

القيمة المتوقعة للمعلومات الكاملة – القيمة المتوقعة لأفضل بديل في ظل المعلومات المتاحة

- مصفوفة التكاليف:

قيمة المعلومات الكاملة =

|القيمة المتوقعة للمعلومات الكاملة – القيمة المتوقعة لأفضل بديل في ظل المعلومات المتاحة|

قيمة المعلومات الكاملة: مثال ١

- بالعودة إلى مصفوفة القرار في المثال ٢ :

θ_j	θ_1	θ_2
A_i		
a_1	400000	-360000
a_2	200000	-40000
$P(\theta_i)$	0.60	0.40

القيمة المتوقعة في حالة المعلومات الكاملة:

$$224000 - 104000 = 120000$$

قيمة المعلومات الكاملة :

$$400000 * 0.60 - 40000 * 0.40 = 224000$$

- ليس من مصلحة اتخاذ القرار دفع أكثر من 224000 للحصول على معلومات جديدة

قيمة المعلومات الكاملة: مثال ٢

- لنفرض لدينا مصفوفة القرار التالية التي تمثل تكاليف مجموعة من البدائل:

θ_j	θ_1	θ_2	θ_3
A_i			
a_1	1000	900	1300
a_2	1500	1100	800
a_3	500	1800	1000
$P(\theta_i)$	0.3	0.50	0.2

المطلوب: إيجاد القرار الأمثل باستخدام طريقة القيمة النقدية المتوقعة وحساب قيمة المعلومات الكاملة

$$E(a_1) = 1000 * 0.30 + 900 * 0.50 + 1300 * 0.20 = 1010$$

$$E(a_2) = 1500 * 0.30 + 1100 * 0.50 + 800 * 0.20 = 1160$$

$$E(a_3) = 500 * 0.30 + 1800 * 0.50 + 1000 * 0.20 = 1250$$

البديل الأول هو الأفضل في ظل المعلومات المتاحة

قيمة المعلومات الكاملة: مثال ٢

مصفوفة القرار (التكلفة)

θ_j	θ_1	θ_2	θ_3
A_i			
a_1	1000	900	1300
a_2	1500	1100	800
a_3	500	1800	1000
$P(\theta_i)$	0.3	0.50	0.2

القيمة المتوقعة في ظل المعلومات الكاملة =

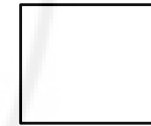
$$500 * 0.30 + 900 * 0.50 + 800 * 0.20 = 760$$

$$|760 - 1010| = 250 \quad \text{قيمة المعلومات الكاملة} =$$

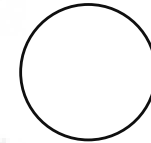
أسلوب شجرة القرارات

- تمثيل لتتابع الأحداث والاحتمالات والخطوات لمشكلة معينة في صورة فروع لشجرة
- يمكن تمثيل أكثر من مصفوفة قرار في شجرة واحدة
- رموز شجرة القرار:

يشير إلى نقطة القرار (عند هذه النقطة يجب اختيار بديل من بين مجموعة من البدائل)



يشير إلى إحدى حالات الطبيعة



يشير إلى إحدى بدائل الحل الممكنة

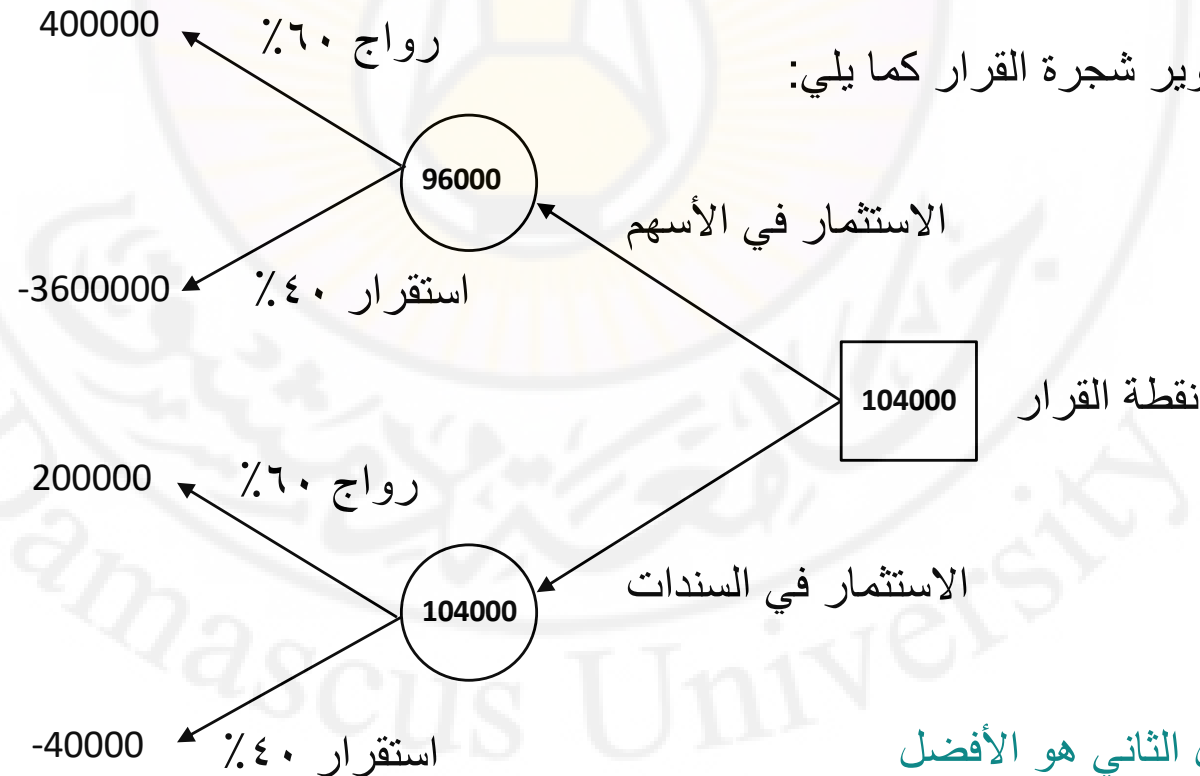


أسلوب شجرة القرارات: مثال ١

- بالعودة إلى مصفوفة الأرباح التالية:

θ_j	رواج	استقرار
A_i		
الاستثمار في الأسهم	400000	-360000
الاستثمار في السندات	200000	-40000
$P(\theta_i)$	0.60	0.40

- يمكن تصوير شجرة القرار كما يلي:



البديل الثاني هو الأفضل

أسلوب شجرة القرارات: مثال ٢

- يفكر مدير الإنتاج في إحدى الشركات في تقديم منتج جديد للسوق وتتوقف الأرباح المتولدة عن المنتج الجديد على وجود أو عدم وجود منافسة في السوق وتقديمهم منتجات منافسة وعلى أسعار هذه المنتجات. وقد استعان مدير الإنتاج بوحدة بحوث السوق والتي استطاعت القيام بدراسة مسحية لسوق المنتج الجديد والمنتجات المنافسة المتوقعة دخولها السوق. وقد أسفرت نتائج الدراسة عن أنه من المتوقع أن تواجه الشركة ظروف منافسة باحتمال ٨٠٪. كما أن الشركة يمكنها تحديد ثلاث مستويات لسعر المنتج، وستتوقف أرباح الشركة على استراتيجيات السعر التي يتبعها المنافسون كما يلي:

- الأرباح المتوقعة في حال تبني الشركة لسعر مرتفع لمنتجاتها:

مستوى سعر المنافسين	الاحتمال	الأرباح
مرتفع	0.3	150
متوسط	0.5	0
منخفض	0.2	-200

- الأرباح المتوقعة في حال تبني الشركة لسعر متوسط لمنتجاتها:

مستوى سعر المنافسين	الاحتمال	الأرباح
مرتفع	0.1	250
متوسط	0.6	100
منخفض	0.3	-50

أسلوب شجرة القرارات: مثال ٢ (تتمة)

- الأرباح المتوقعة في حال تبني الشركة لسعر منخفض لمنتجاتها:

الأرباح	الاحتمال	مستوى سعر المنافسين
100	0.1	مرتفع
50	0.2	متوسط
-100	0.7	منخفض

- في حال عدم وجود منافسة في السوق فإن الشركة ستحقق أرباح ٥٠٠ وحدة نقدية إذا قررت تحديد سعر مرتفع و ٣٠٠ إذا قررت تحديد سعر متوسط و ١٠٠ إذا قررت تحديد سعر منخفض

المطلوب: رسم شجرة القرارات وتحديد القرار المناسب للشركة

أساليب اتخاذ القرار في حالة عدم التأكد التام

- معيار لابلاس
- معيار وولد أو المعيار المتشائم
- المعيار المتفائل
- معيار هورويز
- معيار سافاج

معييار لابلاس

- خطوات تحديد البديل الأمثل:
 - إعطاء أوزان نسبية متساوية لنتائج كل بديل
 - حساب قيمة متوسط المنفعة الناتجة عن كل بديل
 - اختيار البديل ذات المنفعة الأكبر
- مثال: لنفرض لدينا مصفوفة القرار (العائد) التالية:

θ_j	θ_1	θ_2
A_i		
a_1	400000	-360000
a_2	200000	-40000

المطلوب: إيجاد القرار الأمثل حسب معيار لابلاس

$$E(a_1) = 400000 * 0.50 + (-360000) * 0.50 = 20000$$

$$E(a_2) = 200000 * 0.50 + (-40000) * 0.50 = 80000$$

البديل الثاني هو الأفضل

معيار وولد

- يلجأ متخذ القرار وفق هذا المعيار إلى تجنب الخسائر المحتملة عن طريق تحديد العوائد الدنيا لكل بديل لكل حالة من حالات الطبيعة ثم اختيار البديل الذي يحقق أقصى منفعة

مثال: لنفرض لدينا مصفوفة القرار (العائد) التالية:

θ_j	θ_1	θ_2
A_i		
a_1	400000	-360000
a_2	200000	-40000

المطلوب: إيجاد البديل الأمثل حسب معيار وولد

أولاً نحدد أدنى منفعة لكل بديل:

أدنى منفعة للبديل الأول: -٣٦٠.٠٠٠

أدنى منفعة للبديل الثاني: -٤٠.٠٠٠

ثانياً نحدد أقصى منفعة من البدائل: -٤٠.٠٠٠

البديل الثاني هو الأفضل لأنه يقلل الخسائر إلى أدنى حد ممكن

المعيار المتفائل

- يفترض متخذ القرار حدوث أفضل النتائج حيث يقوم هذا المعيار على تحديد أقصى عائد لكل بديل من بين البدائل المتاحة ثم اختيار البديل الذي يحقق أقصى منفعة

مثال: لنفرض لدينا مصفوفة القرار (العائد) التالية:

θ_j	θ_1	θ_2
A_i		
a_1	400000	-360000
a_2	200000	-40000

المطلوب: إيجاد البديل الأمثل حسب المعيار المتفائل

أولاً نحدد أعلى منفعة لكل بديل:

أعلى منفعة للبديل الأول: ٤٠٠٠٠٠

أعلى منفعة للبديل الثاني: ٢٠٠٠٠٠

ثانياً نحدد أقصى منفعة من البدائل: ٤٠٠٠٠٠

البديل الأول هو الأفضل

معيار هورويز

- معيار توافقي بين النزعتين المتفائلة والمتشائمة
 - يعتمد على تعديل قاعدة وولد عن طريق ادخال معامل α الذي تتراوح قيمته بين الصفر والواحد
 - خطوات تحديد البديل الأمثل:
 - تحديد أقصى وأدنى قيمة لكل بديل
 - تطبيق القانون التالي بعد افتراض قيمة α :
- $$\max(\alpha \max g_{ij} + (1-\alpha) \min g_{ij})$$
- مثال: لنفرض لدينا مصفوفة القرار (العائد) التالية:

θ_j	θ_1	θ_2	θ_3
A_i			
a_1	2	3	4
a_2	5	4	1
a_3	7	2	8

المطلوب: ايجاد القرار الأمثل حسب معيار هورويز علماً أن $\alpha=0.6$

معيار هورويز

أولاً نحدد أقصى وأدنى قيمة لكل بديل:

البدائل	Max	Min
a ₁	4	2
a ₂	5	1
a ₃	8	2

ثانياً نطبق القانون $a \max g_{ij} + (1-a) \min g_{ij}$:

النتيجة المتوقعة من البديل الأول: $4 * 0.60 + 2 * 0.40 = 3.2$

النتيجة المتوقعة من البديل الثاني: $5 * 0.60 + 1 * 0.40 = 3.4$

النتيجة المتوقعة من البديل الثالث: $8 * 0.60 + 2 * 0.40 = 5.6$

البديل الثالث هو الأفضل لأنه يحقق أفضل النتائج

معيار سافاج

- ينظر متخذ القرار وفق هذا المعيار نظرة تشاؤمية بالنسبة للظروف المحيطة المؤثرة في قراره بحيث يجعل الأسف الأعظمي في حدوده الدنيا
- خطوات تحديد البديل الأمثل:
 - تشكيل مصفوفة الندم (مصفوفة خسارة الفرصة الضائعة):
 - مصفوفة الأرباح: نأخذ أكبر قيمة في كل عمود ونطرح منها بقية القيم
 - مصفوفة التكاليف: نأخذ أصغر قيمة في كل عمود ونطرحها من بقية القيم
 - اختيار القيمة الأعلى لكل بديل (الأسف الأعظمي)
 - اختيار أدنى قيمة من القيم المختارة في الخطوة السابقة

معيار سافاج

مثال: لنفرض لدينا مصفوفة القرار (العائد) التالية:

θ_j	θ_1	θ_2	θ_3
A_i			
a_1	2	3	4
a_2	5	4	1
a_3	7	2	8

المطلوب: إيجاد القرار الأمثل باستخدام معيار سافاج

معيار سافاج

أولاً نشكل مصفوفة خسارة الفرصة الضائعة:

θ_j	θ_1	θ_2	θ_3
A_i			
a_1	5	1	4
a_2	2	0	7
a_3	0	2	0

ثانياً نختار القيمة العظمى للخسارة لكل بديل:

البديل	القيمة العظمى لخسارة الفرصة الضائعة
a_1	5
a_2	7
a_3	2

البديل الثالث هو الأفضل لأنه يحقق أدنى قيمة للخسائر

الفصل الثالث

الطرق الإحصائية لاتخاذ القرارات

تحليل الانحدار

(Regression Analysis)

- تحديد العلاقة الرياضية بين متغيرين أو أكثر
- التنبؤ بقيم متغير ما من خلال معرفة قيم متغير واحد أو أكثر
- نماذج الانحدار
 - الانحدار البسيط: العلاقة الرياضية تحتوي على متغير مستقل واحد
 - الانحدار المتعدد: العلاقة الرياضية تحتوي على أكثر من متغير مستقل

معامل الارتباط

معامل الارتباط الخطي البسيط (Pearson) بين المتغيرين X, Y

$$r_{xy} = \frac{\sum x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{(n-1) s_x s_y} = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{\sqrt{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \sqrt{n \sum y_i^2 - (\sum y_i)^2}}$$
$$r_{xy} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{(n-1) s_x s_y},$$

تتراوح قيمة معامل الارتباط بين -1 و +1

-1 ----- 0 ----- 1

علاقة عكسية قوية جداً

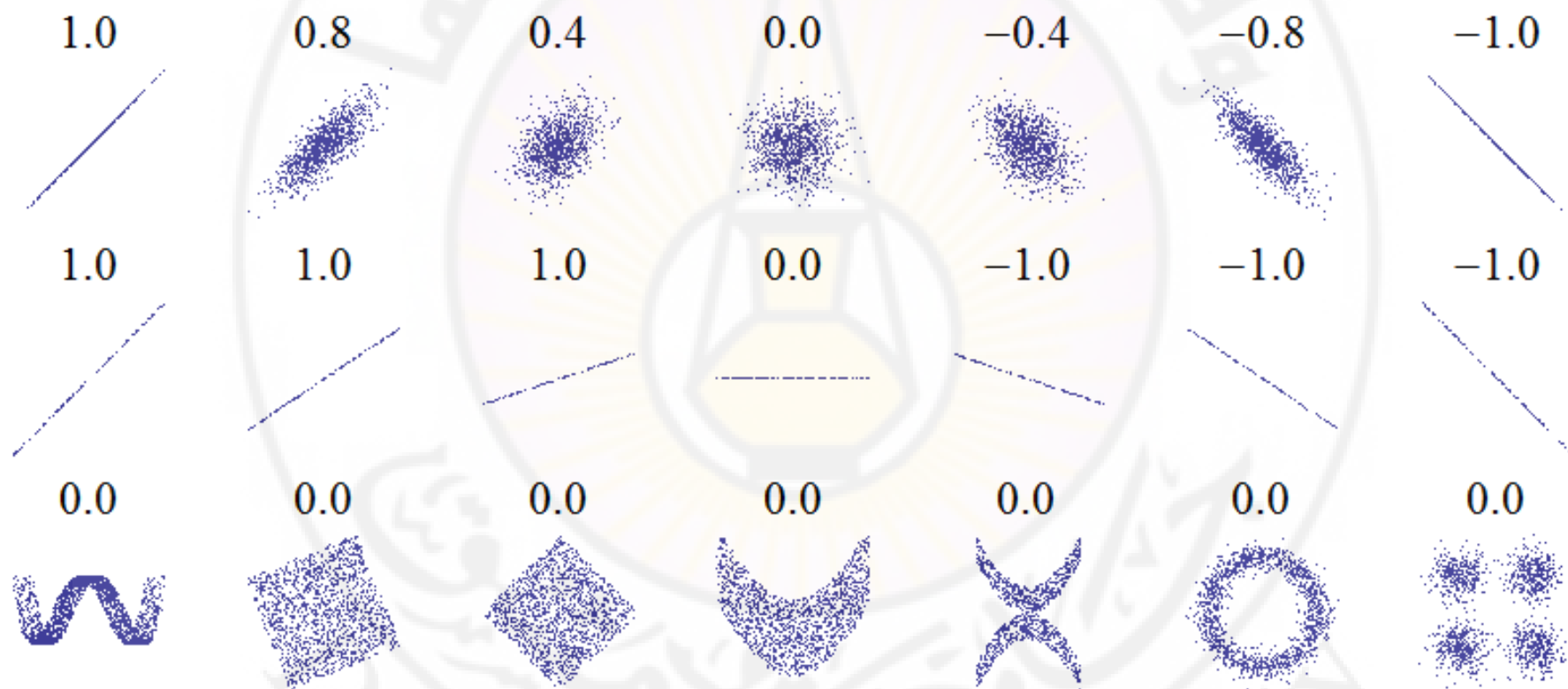
العلاقة معدومة

علاقة طردية قوية جداً

$r_{xy}=0.1$?

إذا تغيرت قيمة X بمقدار 1 فإن قيمة Y تتغير بمقدار 0.1 في نفس اتجاه التغير

معامل الارتباط الخطي البسيط



الانحدار الخطي

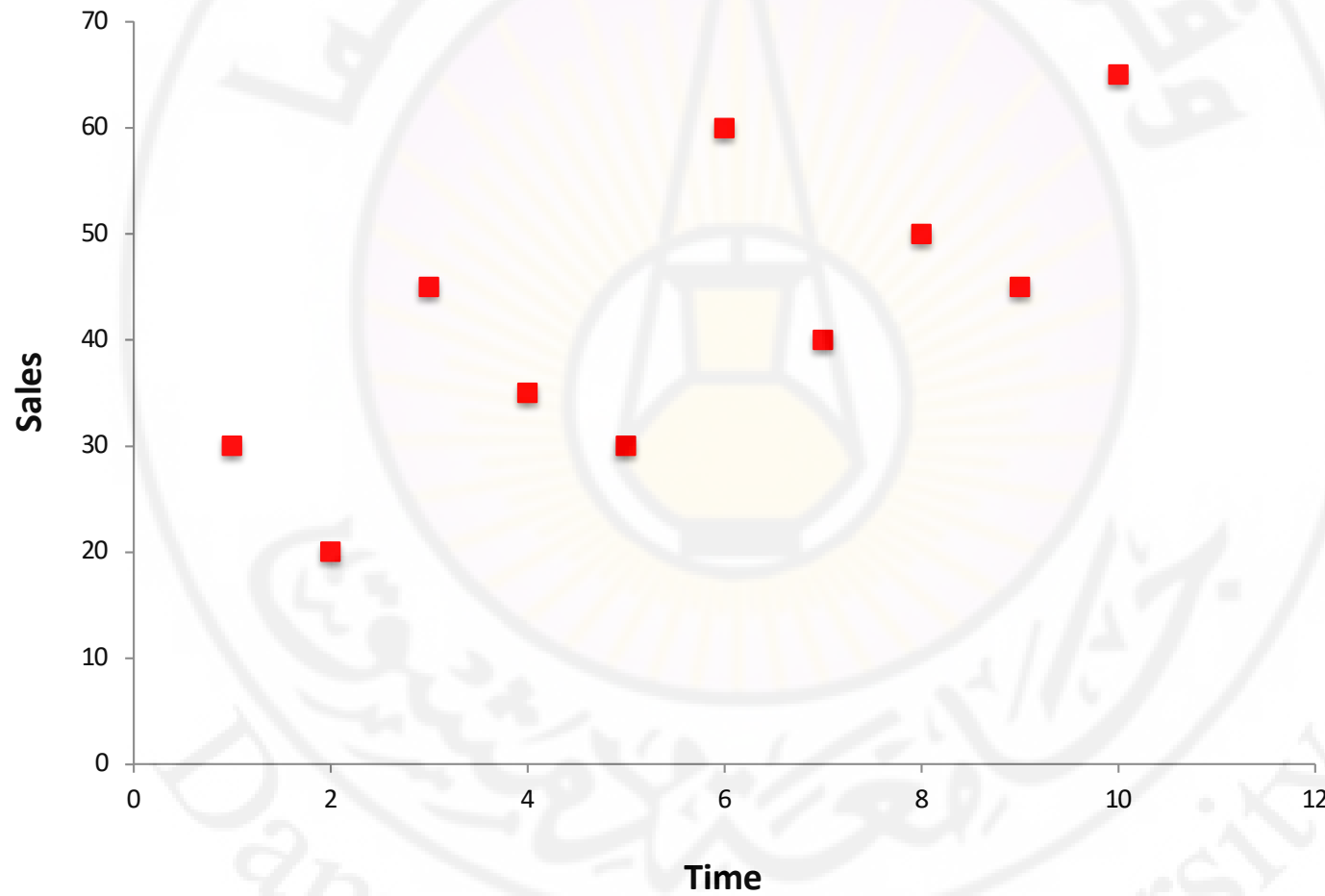
- لنفترض وجود مجموعة من البيانات التاريخية المتاحة على شكل ثنائيات:

$$(x_i, y_i) \text{ for } i=1,2,3,\dots,n$$

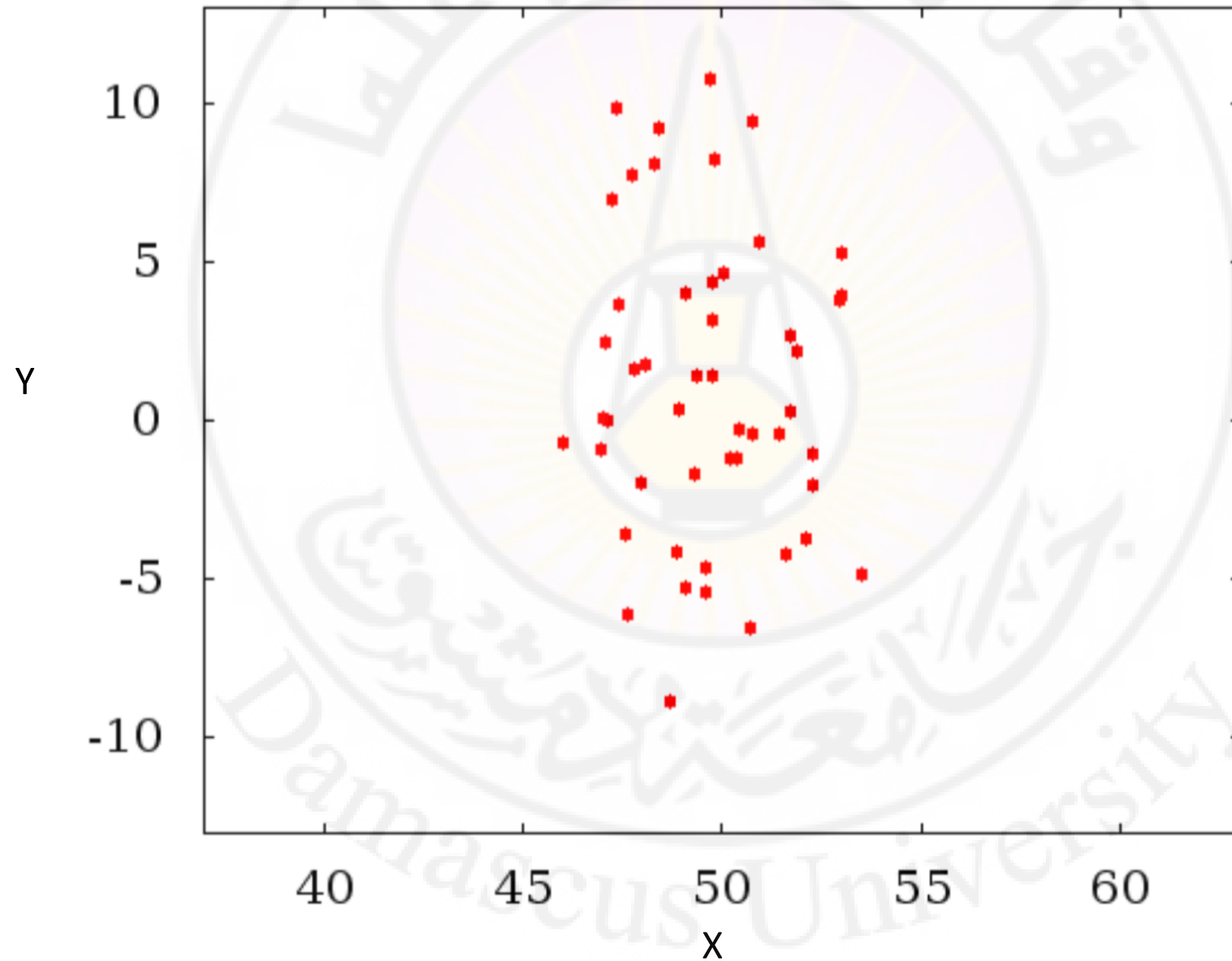
- مثال:

الفترة الزمنية	x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
المبيعات	y_i	30	20	45	35	30	60	40	50	45	65

رسم نقاط الانتشار (Scatterplot)



رسم نقاط الانتشار



دالة الانحدار الخطي البسيط

- افتراض وجود علاقة خطية بين المتغيرين X و Y :

$$Y = a + bX + e$$

- تقدير معاملات الانحدار a و b للمعادلة $\hat{Y} = a + bX$ باستخدام طريقة المربعات الصغرى (Least Squares Estimation)

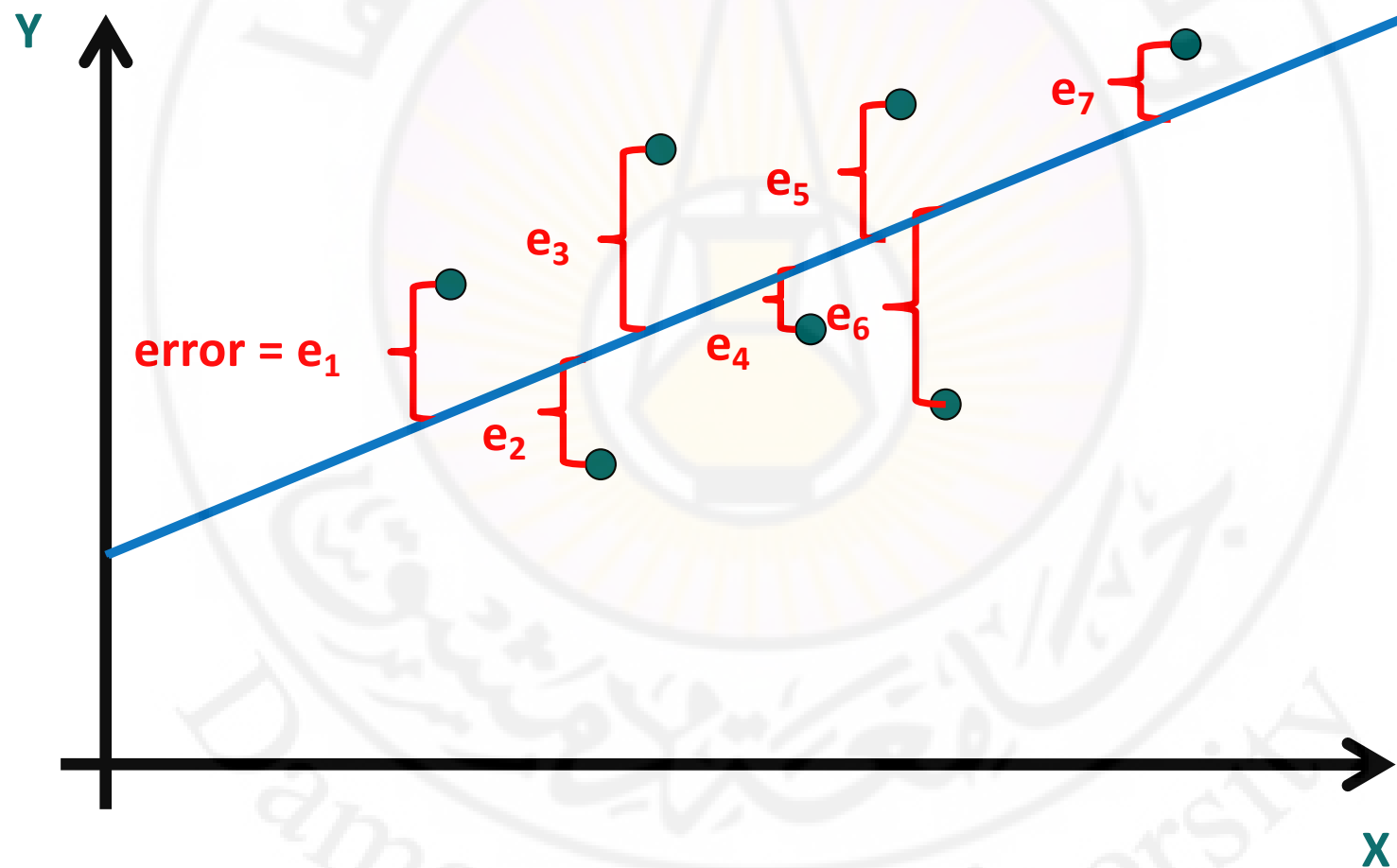
$$Y = \alpha + \beta X + \varepsilon$$

العلاقة الحقيقية ←

$$\hat{Y} = a + bX + e$$

العلاقة التقديرية ←

طريقة المربعات الصغرى



طريقة المربعات الصغرى

- تصغير مجموع مربعات انحرافات القيم الحقيقية y_i عن القيم التقديرية $\hat{y}_i$

$$e_i = y_i - \hat{y}_i$$

$$SSE = e_1^2 + e_2^2 + \cdots + e_n^2 = \sum_{i=1}^n e_i^2$$

$$y_i = \hat{y}_i + e_i$$

$$\sum_{i=1}^n e_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - a - bx_i)^2$$

تقدير نموذج الانحدار الخطي البسيط

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$$

$$a = \bar{Y} - b\bar{X}$$

المثال السابق:

الفترة الزمنية	X_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
المبيعات	Y_i	30	20	45	35	30	60	40	50	45	65

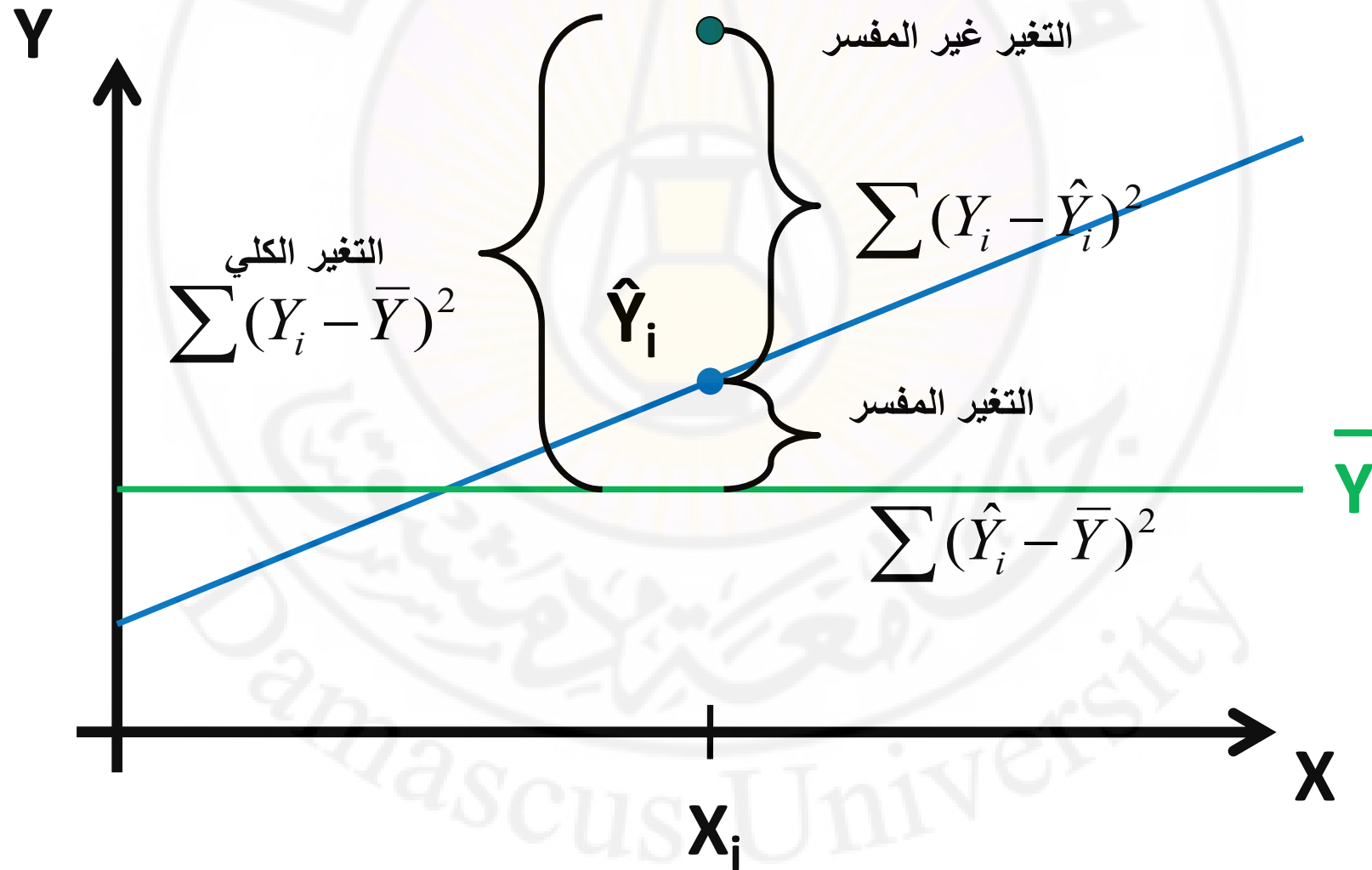
$$Y = 23.33 + 3.39X$$

معامل التحديد
(Coefficient of Determination R^2)

$$R^2 = \frac{\text{Explained Variation}}{\text{Total Variation}} = \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2 - \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}$$

$$0 \leq R^2 \leq 1$$

معامل التحديد



مثال

• أي من المعادلات التالية هي الأفضل للتنبؤ بمتغير المبيعات Y ؟

1. $Y = 0.207 + 0.003 \text{ Temperature}$ $R^2 = 0.602$
2. $Y = 0.923 - 2.047 \text{ Price}$ $R^2 = 0.067$
3. $Y = -0.113 + 0.004 \text{ Temperature} + 0.004 \text{ Income}$ $R^2 = 0.702$

معامل التحديد المعدل Adjusted R²

$$1 - (1 - R^2) \frac{n - 1}{n - p - 1}$$

تمثل p عدد المتغيرات في النموذج الخطي

ملاحظة: $\text{adj. } R^2 \leq R^2$

معامل التحديد المعدل

1. $Y = 0.207 + 0.003 \text{ Temperature}$ $R^2 = 0.60 - \text{adj. } R^2 = 0.59$
2. $Y = 0.923 - 2.047 \text{ Price}$ $R^2 = 0.07 - \text{adj. } R^2 = 0.03$
- ⇒ 3. $Y = -0.113 + 0.004 \text{ Temperature} + 0.004 \text{ Income}$ $R^2 = 0.70 - \text{adj. } R^2 = 0.68$

فرضيات الانحدار الخطي البسيط

- العلاقة بين المتغير المستقل والمتغير التابع هي علاقة خطية
- قيم الأخطاء (ε_i) مستقلة عن بعضها البعض
- قيم الأخطاء تخضع للتوزيع الطبيعي مع متوسط صفر وتباين σ_ε^2

$$\varepsilon|X \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

- يتم تقدير قيمة التباين للخطأ من خلال المعادلة التالية:

$$s_e^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n e_i^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$$

الدلالة الإحصائية للنموذج بشكل عام

F- test

■ اختبار وجود علاقة ذات دلالة إحصائية بين المتغيرين Y و X

■ فرضيات الاختبار:

$$H_0 : \mathbb{E}(Y|X = x) = \beta_0 = \bar{Y}$$

$$H_1 : \mathbb{E}(Y|X = x) = \beta_0 + \beta_1 x$$

$$F - statistic = \frac{\sum(\hat{y}_i - \bar{y})^2 / (m - 1)}{\sum(y_i - \hat{y}_i)^2 / (n - m)}$$

حيث m هي عدد المعاملات و n حجم العينة

العلاقة بين F- test ومعامل التحديد

$$F - statistic = \frac{R^2 / (m - 1)}{(1 - R^2) / (n - m)}$$

F- test

مثال:

ANOVA^b

Model		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
1	Regression	10287.173	1	10287.173	54.865	.000 ^a
	Residual	10687.511	57	187.500		
	Total	20974.684	58			

a. Predictors: (Constant), diam

b. Dependent Variable: time

F-value

p-value

تشير P-value إلى احتمال الحصول على قيمة F التي حصلنا عليها من البيانات المتاحة إذا كانت القيمة الحقيقية لمعامل الانحدار (b_1) هي الصفر

تحديد مجالات الثقة لمعاملات الانحدار

$$\beta_0: b_0 \pm t^* s.e.(b_0)$$

$$\beta_1: b_1 \pm t^* s.e.(b_1)$$

• يشير الرمز s.e الى الخطأ المعياري

$$s.e.(b_0) = \sigma_\varepsilon \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2}}$$

$$s.e.(b_1) = \sigma_\varepsilon \sqrt{\frac{1}{\sum (x_i - \bar{x})^2}}$$

$$s_e = \sqrt{\frac{\sum (y_i - \hat{y}_i)^2}{n - 2}}$$

اختبار الدلالة الاحصائية للمعاملات

t-test

$$t_{b_0} = \frac{b_0}{s.e.(b_0)}$$

$$t_{b_1} = \frac{b_1}{s.e.(b_1)}$$

مثال:

Parameter	Estimate	s.e.	t	P
β_0	$b_0=-4.208$	1.040	-4.0465	0.0008
β_1	$b_1=1.599$	0.129	12.4387	0.0000

تشير P-value إلى احتمال الحصول على قيمة t التي حصلنا عليها من البيانات المتاحة إذا كانت القيمة الحقيقية للمعامل الذي يتم اختباره هي الصفر

التنبؤ باستخدام الانحدار الخطي البسيط

$$\hat{y}_0 = b_0 + b_1 x_0$$

- تشير x_0 إلى القيمة الجديدة للمتغير X

- تشير $\hat{y}_0$ إلى القيمة المتوقعة للمتغير Y بناءً على القيمة الجديدة x_0

• تقدير القيمة المتوقعة عند احتمال معين (تقدير حدي الثقة):

$$\hat{y}_0 \pm t^* s.e. (\hat{y}_0)$$

- يشير $s.e. (\hat{y}_0)$ إلى الخطأ المعياري للقيمة المتوقعة للمتغير Y

$$s.e. (\hat{y}_0) = s_e \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2}}$$

- تحسب قيمة t^* من جدول t-student بناءً على حجم العينة المستخدمة لتقدير معادلة الانحدار ومستوى الثقة المطلوب

مثال

لكن لدينا البيانات التالية عن الناتج المحلي الإجمالي (GDP) والمبيعات الصناعية لفترة ١٩ سنة

GDP (X)	Industry Sales (Y)
7.9	8.45
7.92	8.52
7.91	8.25
7.96	8.58
7.98	8.58
8.01	8.63
8.05	8.74
8.06	8.7
8.06	8.61
8.07	8.59
8.09	8.77
8.11	8.8
8.14	8.79
8.17	8.83
8.19	8.91
8.23	8.97
8.27	8.97
8.29	9.04
8.3	9.05

مثال

المطلوب:

- تقدير معادلة الانحدار المعبرة عن العلاقة بين الناتج المحلي الإجمالي والمبيعات
- حساب معامل التحديد
- تحديد مجالات الثقة لمعاملات الانحدار عند مستوى ثقة 95% (علماً أن قيمة t هي 2.11)
- التنبؤ بقيمة المبيعات باحتمال 90% عند القيم التالية للناتج المحلي الإجمالي:
7.5, 8, 8.5 (علماً أن قيمة t هي 1.74)

مثال

أولاً: معادلة الانحدار المقدرة

$$y_i = -4.21 + 1.60x_i$$

ثانياً: حساب معامل التحديد

$$r = 0.949$$

معامل الارتباط

$$R^2 = (0.949)^2 = 0.901$$

معامل التحديد

تفسير معامل التحديد: ٩٠٪ من التغيرات في المبيعات يمكن تفسيرها من خلال العلاقة الخطية مع الناتج المحلي الإجمالي

مثال

ثالثاً: مجالات الثقة لمعاملات الانحدار:

$$s_e = 0.0689$$

$$s.e.(b_0) = 1.040$$

$$s.e.(b_1) = 0.129$$

$$-4.208 \pm 2.11(1.040) = [-6.40, -2.03]$$

$$1.599 \pm 2.11(0.129) = [1.33, 1.87]$$

مثال

رابعاً: التنبؤ بقيم المبيعات

$$y_i = -4.21 + 1.60x_i$$

7.78 when X is 7.5

8.58 when X is 8

9.38 when X is 8.5

مثال

- مجالات الثقة للقيم المقدرة

$$s.e.(\hat{y}_0) = 0.0689 \sqrt{1 + \frac{1}{19} + \frac{(X_0 - 8.09)^2}{0.288}}$$

$$s.e.(\hat{y}_0) = 0.1036 \text{ when } X \text{ is } 7.5$$

$$s.e.(\hat{y}_0) = 0.0716 \text{ when } X \text{ is } 8$$

$$s.e.(\hat{y}_0) = 0.0881 \text{ when } X \text{ is } 8.5$$

مثال

- مجالات الثقة للقيم المقدرة

$$7.78 \pm 1.74(0.1036) = [7.60, 7.96]$$

$$8.58 \pm 1.74(0.0716) = [8.46, 8.71]$$

$$9.38 \pm 1.74(0.0881) = [9.23, 9.5]$$

تحليل الانحدار المتعدد (Multivariate Regression)

- علاقة رياضية تجمع بين متغير تابع و عدة متغيرات مستقلة
- استخدام عدة عوامل عند بناء نموذج الانحدار الخطي

نموذج الانحدار الخطي المتعدد

النموذج الفعلي

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \cdots + \beta_p X_p + \varepsilon$$

النموذج التقديري

$$\hat{Y} = b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2 + \cdots + b_p X_p + e$$

معادلة الانحدار المتعدد

متوسط قيمة y $E(Y) = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \cdots + \beta_p X_p$

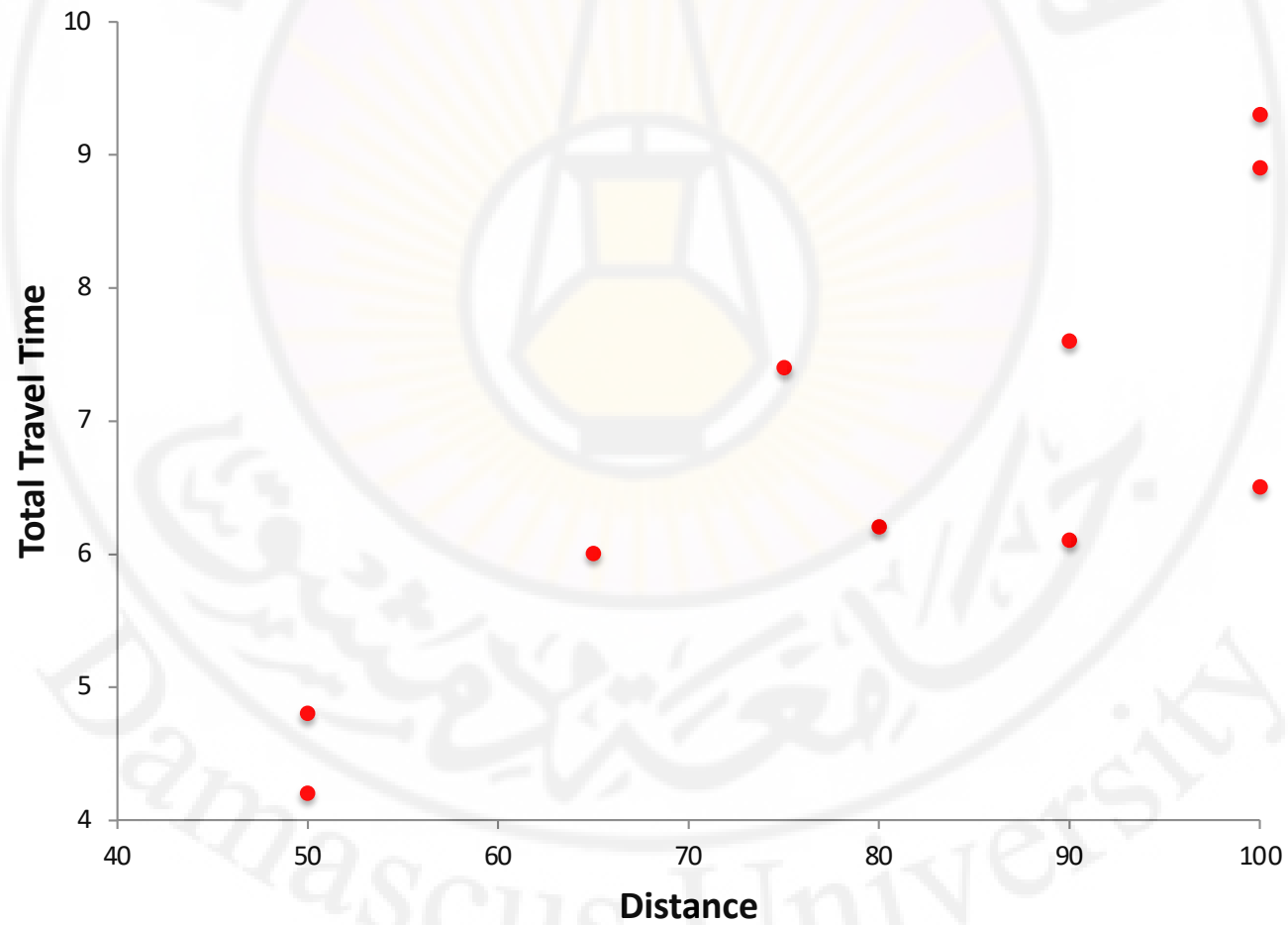
معادلة الانحدار المتعدد المقدرة

$$\hat{Y} = b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2 + \cdots + b_p X_p$$

مثال ١ - الانحدار الخطي البسيط

X=Distance Travelled (kilometres)	Y=Travel time (hours)
100	9.3
50	4.8
100	8.9
100	6.5
50	4.2
80	6.2
75	7.4
65	6.0
90	7.6
90	6.1

رسم نقاط الانتشار



مثال ١ - الانحدار الخطي البسيط

معادلة الانحدار الخطي البسيط المقدرة بين المتغيرين

$$\hat{Y} = b_0 + b_1 X_1$$

$$\text{Time} = 1.27 + 0.0687 \text{ Distance}$$

$$R^2 = 0.664$$

Parameter	Estimate	s.e.	t	P	f	P
Constant	$b_0=1.27$	1.401	0.91	0.390	15.81	0.004
Distance	$b_1=0.0687$	0.017	3.98	0.004		

مثال ١- الانحدار الخطي المتعدد

X1=Distance Travelled (kilometres)	X2=Number of deliveries	Y=Travel time (hourd)
100	4	9.3
50	3	4.8
100	4	8.9
100	2	6.5
50	2	4.2
80	2	6.2
75	3	7.4
65	4	6.0
90	3	7.6
90	2	6.1

مثال ١- الانحدار الخطي المتعدد

معادلة الانحدار الخطي المتعدد المقدرة بين المتغيرات

$$\hat{Y} = -0.869 + 0.0611 X_1 + 0.923X_2$$

$$\text{Time} = -0.869 + 0.0611\text{Distance} + 0.923 \text{ Deliveries}$$

$$R^2 = 0.904$$

Parameter	Estimate	s.e.	t	P	F	P
Constant	-0.869	0.9515	-0.91	0.392	32.88	0.000
Distance	0.0611	0.0099	6.18	0.000		
Deliveries	0.9234	0.2211	4.18	0.004		

تفسير المعاملات؟

يمثل b مقدار التغير المتوقع في Y عند تغير X بمقدار وحدة واحدة مع ثبات المتغيرات المستقلة الأخرى

معامل التحديد

(Multiple Coefficient of Determination R^2)

$$R^2 = \frac{\text{Explained Variation}}{\text{Total Variation}} = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2}{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}$$

$$0 \leq R^2 \leq 1$$

معامل التحديد المعدل Adjusted R²

$$1 - (1 - R^2) \frac{n - 1}{n - p - 1}$$

تمثل p عدد المتغيرات في النموذج الخطي

$$\text{adj. } R^2 \leq R^2$$

معامل التحديد المعدل في المثال السابق:

$$\text{adj } R^2 = 1 - (1 - 0.904) \frac{10 - 1}{10 - 2 - 1} = 0.88$$

الدلالة الإحصائية للنموذج بشكل عام

F- test

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \dots + \beta_p X_p + \varepsilon$$

$$H_0: \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_p = 0$$

H_1 : one or more of the parameters is not equal to zero

فرضيات اختبار F في المثال السابق:

$$H_0: \beta_1 = \beta_2 = 0$$

H_1 : β_1 and/or β_2 is not equal to zero

نرفض فرضية العدم إذا كانت قيمة p-value أصغر أو تساوي مستوى الدلالة (5%)

مثال ٢ - اختبار الدلالة الاحصائية للمعاملات

t-test

$$\text{Ice Cream Sales} = 0.197 + 0.003(\text{Temperature}) - 1.044(\text{Price}) + 0.003(\text{Income})$$

Coefficients^a

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
		B	Std. Error	Beta		
1	(Constant)	.197	.270		.730	.472
	Temperature	.003	.000	.863	7.762	.000
	Price	-1.044	.834	-.132	-1.252	.222
	Income	.003	.001	.314	2.824	.009

استبعاد
المتغير

a. Dependent Variable: Ice Cream_Sales

b

s_b

t=b/s_b

p-value

فرضيات اختبار t لأي معامل b_i

$$H_0: \beta_i = 0$$

$$H_1: \beta_i \neq 0$$

الفصل الرابع

البرمجة الخطية Linear Programming

٤-١- مفهوم البرمجة الخطية

البرمجة الخطية هي أسلوب من الأساليب الكمية التي تهدف إلى تخصيص الموارد المتاحة بالشكل الأمثل، أي توزيع مجموعة من الموارد والإمكانات المحدودة على عدد من الحاجيات المتنافسة على هذه الموارد ضمن مجموعة من القيود والعوامل الثابتة بحيث يحقق هذا التوزيع أفضل نتيجة ممكنة

٤-٢- مكونات نموذج البرمجة الخطية:

- دالة الهدف (Objective Function): تبين الهدف الذي نرغب في تحقيقه ويكون عادة الوصول إلى أقصى ربح ممكن أو أقل تكلفة ممكنة. المعامل الخاص بكل متغير يشير إلى ربح الوحدة الواحدة (في حالة تعظيم دالة الهدف) أو تكلفة الوحدة الواحدة (في حالة تخفيض دالة الهدف)
- متغيرات الدراسة (Decision Variables): المتغيرات التي تدخل في دالة الهدف. قيم متغيرات الدراسة لا يمكن أن تكون سالبة (إما موجبة أو صفرية)
- القيود (Constraints): تشير إلى كميات الموارد المتاحة المؤثرة على اختيار قيم متغيرات الدراسة

وفيما يلي نطرح مثالا لتوضيح عملية صياغة نموذج البرمجة الخطية:
مثال:

استلمت شركة كيميائية طلب للحصول على ١٤٠٠ كيلوغرام من خليط مكون من ثلاث مركبات وبالمواصفات التالية:

- يجب أن لا يحتوي الخليط على أكثر من ٤٠٠ كيلوغرام من المركب الأول.
 - يجب أن يحتوي الخليط على الأقل من ٢٠٠ كيلوغرام من المركب الثاني.
 - يجب أن يحتوي الخليط على الأقل من ١٥٠ كيلوغرام من المركب الثالث.
- إذا علمت أن كلفة الكيلوغرام من المركب الأول، المركب الثاني والمركب الثالث هي على التوالي: ٢.

٣. ٤. ل. س^١

المطلوب:

أكتب نموذج البرمجة الخطية لهذه المسألة والذي يحقق أقل تكلفة ممكنة
الحل:

المتغيرات التي ترتبط بالمسألة عبارة عن عدد الكيلوغرامات من كل مركب والتي ستدخل في تكوين الخليط الكيميائي.

^١فتحي خليل حمدان ورشيد رفيق مرعي، مقدمة في بحوث العمليات، دار وائل للنشر عمان الأردن الطبعة الرابعة سنة ٢٠٠٤ ص ٢٠. ١٥. ٢٢ بتصرف.

1. دالة الهدف: نفرض أن:

X_1 : عدد الكيلو غرامات من المركب الأول.

X_2 : عدد الكيلو غرامات من المركب الثاني.

X_3 : عدد الكيلو غرامات من المركب الثالث.

كلفة الكيلوغرام الواحد من المركب الأول تساوي ٢ ل.س فإذا استخدمنا (X_1) كيلوغرام من هذا المركب فستكون الكلفة $2X_1$ ل.س، بنفس الطريقة إذا استخدمنا X_2 كيلوغرام من المركب الثاني فستكون الكلفة $3X_2$ ل.س، كذلك إذا استخدمنا (X_3) كيلوغرام من المركب الثالث ستكون التكلفة $4X_3$ ل.س. وحيث أن الهدف هو تقليل الكلفة minimization وتختصر min لذا فإن دالة الهدف ستكون على

$$\text{الصورة: } \min Z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3$$

٢. القيود الفنية:

■ القيد الفني الأول: حيث أن شرط الطلبية أن لا يحتوي الخليط على أكثر من ٤٠٠ كيلوغرام من المركب الأول لذا فإن القيد الأول سيكون على الصورة $x_1 \leq 400$

■ القيد الفني الثاني: يجب أن يحتوي الخليط على الأقل ٢٠٠ كيلوغرام من المركب الثاني أي أن $x_2 \geq 200$

■ القيد الفني الثالث: يجب أن يحتوي الخليط على الأقل ١٥٠ كيلوغرام من المركب الثالث أي أن $x_3 \geq 150$

■ القيد الفني الرابع: مجموع ما نستنتج من الخليط يجب أن يساوي ١٤٠٠ كيلوغرام

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1400$$

سيعود القيد الرابع هو: $x_1 + x_2 + x_3 = 1400$ والذي سيؤدي إلى تخفيض التكاليف سيكون بالصيغة التالية^١

$$\min Z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3$$

تحت القيود الفنية

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 \leq 400 \\ x_2 \geq 200 \\ x_3 \geq 150 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1400 \\ x_j \geq 0 \quad j=1,2,\dots,n \end{array} \right.$$

^١ فحي رزق السوافيري، مدخل معاصر في بحوث العمليات، الدار الجامعية الاسكندرية، مصر سنة ٢٠٠٤ ص ٢٨.

مثال:

مصنع لصناعة الأثاث المتري يقوم بإنتاج نوعين من الأثاث . كراسي و طاولات خشبية، في المصنع وحدتين إنتاجيتين (قسم التصنيع و قسم التجميع، و إليك الوضع الإنتاجي لهذا المصنع.

القسم	عدد الساعات اللازمة لإنتاج السلعة		الطاقة الإنتاجية بالشهر
	كراسي (x1)	طاوالت (x2)	
التصنيع	٣	١	١٥٠٠
التجميع	١	١	١٠٠٠
العوائد بالليرة	٣	٢	

المطلوب كتابة القيود اللازمة لإيجاد حجم الإنتاج الأمثل و الذي يحقق أفضل العوائد.

الحل

١. دالة الهدف

$$\max Z = 3x_1 + 2x_2$$

٢. القيود الفنية

$$3x_1 + 1x_2 \leq 1500$$

$$1x_1 + 1x_2 \leq 1000$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

ثانيا: طرق حل نموذج البرمجة الخطية

في هذا الجزء سنتعرف على كيفية حل هذا النموذج أي ما هي المتغيرات التي تحدد على ربح أو أقل تكلفة ويمكن حل النموذج البرمجة الخطية بطريقتين هما:

١. الطريقة البيانية la méthode graphique
٢. الطريقة المبسطة la méthode du simplex

١. الطريقة البيانية: la méthode graphique

إذا كانت الطريقة البيانية تتميز في الكثير من الحالات بالبساطة والوصول إلى الحل الأمثل بطريقة تتميز بالسرعة النسبية فإن استخدامها مقيد بضرورة أن ينطوي النموذج على متغيرين فقط يمثلهما المحور الأفقي والرأسي.

سوف نقوم بشرح الطريقة من خلال المثال التالي

مثال: أوجد حل النموذج التالي باستخدام الطريقة البيانية

$$\begin{cases} \text{Min } Z = 5x_1 + 3x_2 \\ x_1 + 2x_2 \geq 2 \\ 2x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1 \leq 1 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n$$

الحل:

١. نلغي المتراحجات و نحولها إلى مساواة

القيد الفني الأول يصبح x_1

$$x_1 + 2x_2 = 2$$

$$x_1 = 0 \rightarrow x_2 = 1$$

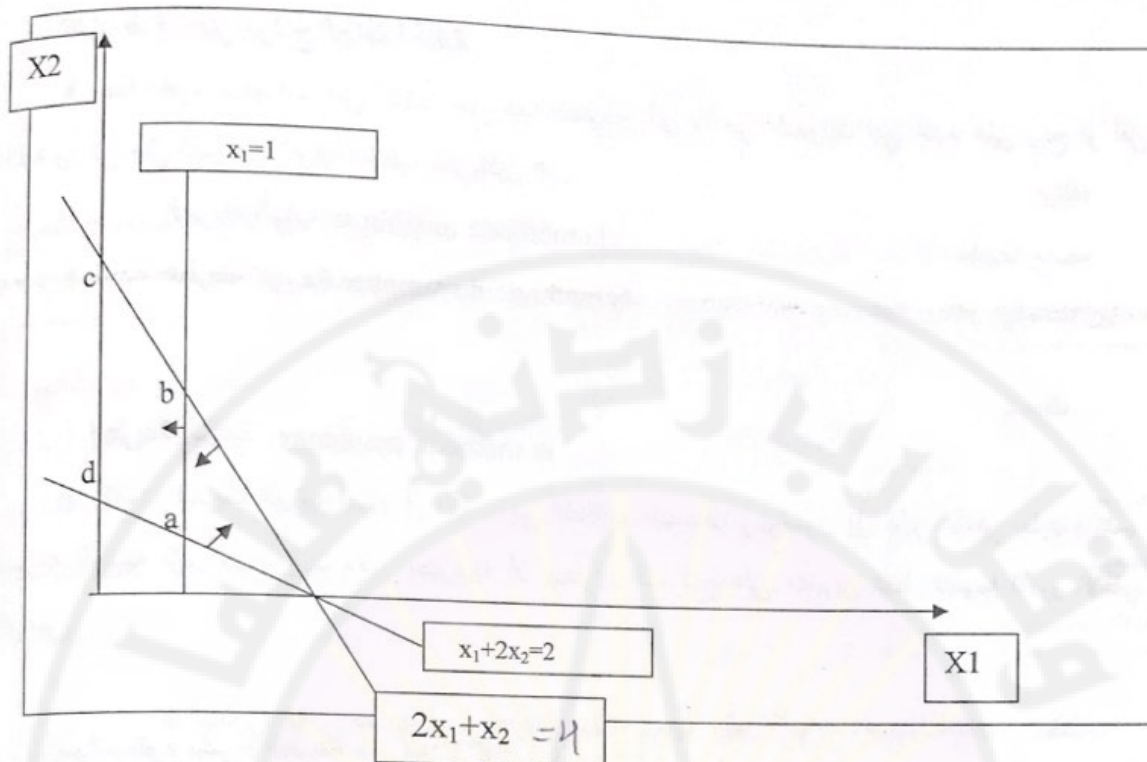
$$x_2 = 0 \rightarrow x_1 = 2$$

القيد الفني الثاني يصبح

$$2x_1 + x_2 = 4$$

$$x_1 = 0 \rightarrow x_2 = 4$$

$$x_2 = 0 \rightarrow x_1 = 2$$



القيد الفني الثالث يصبح:

$$x_1=1$$

فتكون منطقة الحل محدودة

بالنقاط d. b. c. a

ولإيجاد أقل تكلفة نحددها بالجدول:

نقاط الحدود	X_1	X_2	Z
A	1	0.5	٦,٥
B	1	٢,١	١١,٣
C	0	4	12
D	0	1	3

وبالتالي يكون الحل الأمثل هو:

$$x_1=0, x_2=1, \min Z=3.$$

مثال:

مصنع لصناعة الأثاث المنزلي يقوم بإنتاج نوعين من الأثاث، كراسي وطاولات خشبية. وفي المصنع وحدتين إنتاجيتين (قسم الصنع، قسم التجميع). وإليك الوضع الإنتاجي لهذا المصنع:

القسم	عدد الساعات اللازمة لإنتاج السلعة		الطاقة الإنتاجية بالشهر
	كراسي x_1	طاولات x_2	
الصنع	3	1	1500
التجميع	1	1	1000
العوائد بالدينار	3	2	

والمطلوب:

1) إيجاد حجم الإنتاج الشهري الأمثل والذي يحقق أفضل العوائد الممكنة للمصنع علماً بأن حجم الطلب على الكراسي والطاولات يستوعب كافة إنتاج المصنع وذلك بالطريقة البيانية.

الحل:

$$Z = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \text{Max} \quad (\text{دالة الهدف})$$

$$3x_1 + 1x_2 \leq 1500 \dots (1)$$

القيود:

$$1x_1 + 1x_2 \leq 1000 \dots (2)$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$$

شرط عدم السلبية

نرسم المعادلة (1) بعد مساواتها للصفر:

$$3x_1 + x_2 = 1500$$

$$x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 1500 \quad A(0; 1500)$$

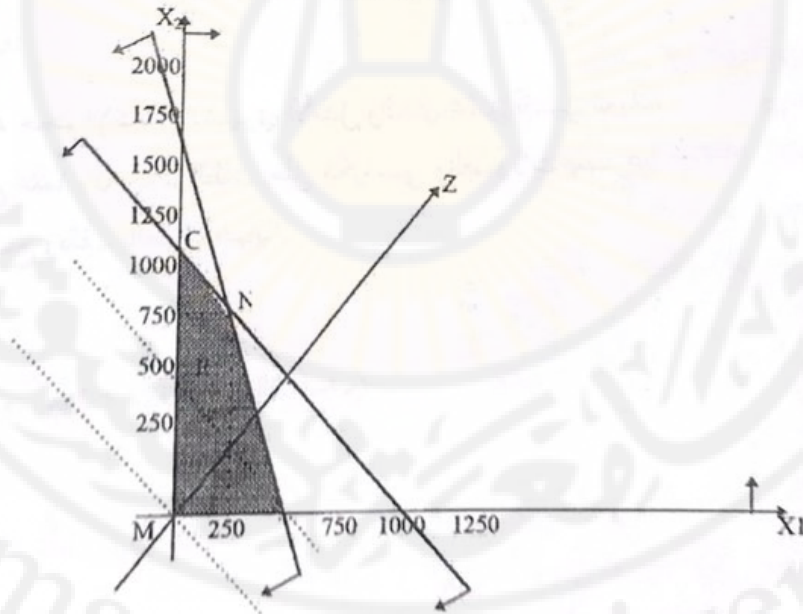
$$x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 500 \quad B(500; 0)$$

نرسم المعادلة (2) بعد مساواتها للصفر:

$$x_1 + x_2 = 1000$$

$$x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 1000 \quad C(0; 1000)$$

$$x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 1000 \quad D(1000; 0)$$



نرسم المستقيم الأول ونحدد اتجاهه استناداً إلى ما يلي:

نبدل بإحداثيات المركز $M(0; 0)$ فإذا كانت النتيجة تحقق المتراجحة فيعني ذلك أنّ اتجاه المستقيم باتجاه المركز أمّا إذا لم تتحقق المتراجحة فيعني اتجاه المستقيم بالاتجاه المخالف للمركز.

إذاً منطقة الحلول الممكنة هي المنطقة R التي تحصر من قبل المستقيمات المرسومة.

نحدد اتجاه دالة الهدف Z : بأن نأخذ معامل كل من x_1 و x_2 في معادلة دالة الهدف ونرسمها كما في الشكل. ثم نرسم خط متقطع عمودي عليه من المركز (M) ومن ثم نرسم خطوط موازية لهذا المستقيم المتقطع أو عمودية على خط اتجاه دالة الهدف من نقاط الحلول المشتركة ونأخذ أبعد مستقيم فتكون هذه النقطة هي المثلى.

N هي أبعد نقطة في اتجاه دالة الهدف بإحداثياتها نسقط عمود على x_1 وعمود على x_2 فنجد:

$$N(250; 750)$$

نبدل في دالة الهدف فنجد:

$$Z = 3 \cdot 250 + 2 \cdot 750 = 750 + 1500 = 2250 \text{ قيمة أعلى}$$

ويمكن إثبات ذلك جبرياً بأن نقطة التقاطع N هي ملتقى المعادلتين (1)

مع (2). أي:

$$3x_1 + x_2 = 1500$$

$$x_1 + x_2 = 1000$$

بالحساب نجد:

$$x_1 = 250 \text{ ما تنتجه من الكراسي}$$

$$x_2 = 750 \text{ ما تنتجه من الطااولات}$$

أي أن استخدام هذه الطريقة تتطلب:

- (1) تحديد دالة الهدف تحديداً رياضياً أو رقمياً.
- (2) صياغة القيود المفروضة على المشكلة رياضياً.
- (3) رسم الشكل البياني الذي يحدد بالقيود المفروضة
- (4) تقييم تقاطع المستقيمات.
- (5) اختيار النقطة التي تشير إلى أقصى عائد ممكن تحقيقه.
- (6) استخدام المعادلات الجبرية للتأكد من النتائج.
- (7) في حالة كون المعادلة (القيود) مساواة تكون منطقة الحلول فقط نقاط هذا المستقيم المرسوم.

مثال 2:

تقوم إحدى المؤسسات العربية بتنظيم دورات تدريبية للمشاركين من الأقطار العربية . بإمكان المنظمة تقديم برنامجين تدريبيين لعام 1982، يشتمل كل برنامج على ثلاث مراحل:

إن المعلومات حول الدورتين والإمكانات المتاحة مشار إليها في الجدول التالي، وإن العوائد تتمثل بمقدار الخدمات الإضافية التي سيقدمها المشارك لقطره مستقبلاً من جراء مشاركته في الدورة مقدرة بالدينانير. والمطلوب: تحديد العدد الملائم لكل دورة يحقق أقصى العوائد الممكنة للأقطار ذات العلاقة باستخدام الطريقة البيانية.

مجموع الساعات المتاحة	مراحل التدريب والإمكانات المتاحة		مراحل التدريب
	الدورة الثانية (X_2) بالساعة	الدورة الأولى (X_1) بالساعة	
84	3	2	مرحلة أولى
60	2	2	مرحلة ثانية
96	2	4	مرحلة ثالثة
	6000	5000	العوائد بالدينانير

الحل: نشكل دالة الهدف والقيود:

$$Z = 6000 X_2 + 5000 X_1 \rightarrow \text{Max}$$

$$2X_1 + 3X_2 \leq 84$$

القيود:

$$2X_1 + 2X_2 \leq 60$$

$$4X_1 + 2X_2 \leq 96$$

$$X_1 \geq 0; X_2 \geq 0 \quad \text{شرط عدم السلبية}$$

يترك للطالب إيجاد الحل بالرسم البياني حيث النتائج:

$$x_2 = 24, \quad x_1 = 1$$

$$Z = 194 \text{ القيمة العظمى.}$$

مثال 3:

لتكن لدينا دالة الهدف:

$$Z = x_2 - x_1 \rightarrow \text{Max}$$

القيود:

$$-2x_1 + x_2 \leq 2 \quad (1)$$

$$-x_1 + 2x_2 \geq 8 \quad (2)$$

$$x_1 + x_2 \geq 5 \quad (3)$$

$$x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0.$$

ندرس كل معادلة على حدى:

$$(1): \text{نعطي: } A(0;2) \quad x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 0$$

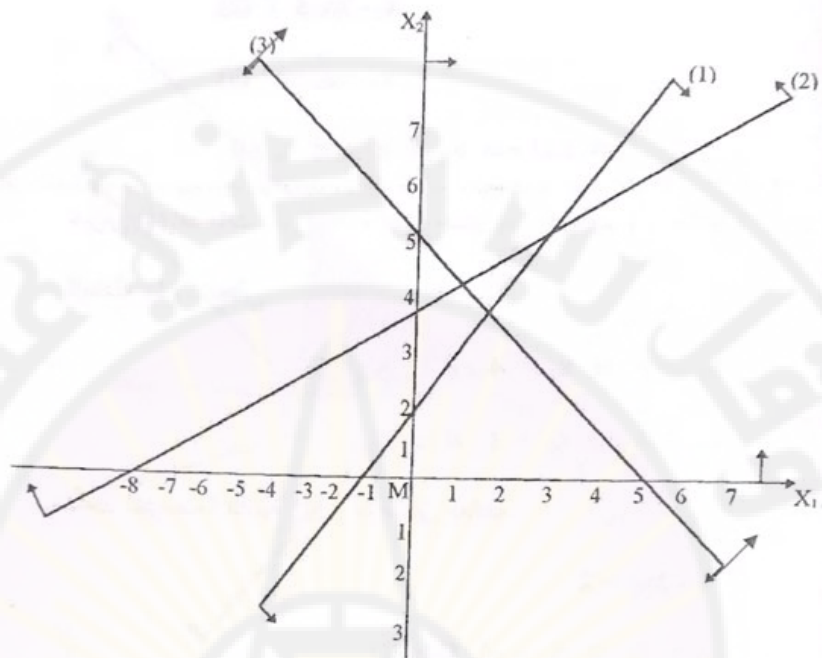
$$x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = -1 \quad B(-1;0)$$

$$(2): \text{نعطي: } C(0;4) \quad x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 4$$

$$x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = -8 \quad D(-8;0)$$

$$(3): \text{نعطي: } E(0;5) \quad x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 5$$

$$x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 5 \quad F(5;0)$$



من خلال الملاحظة نجد بأنه لا يوجد حلول مشتركة وبالتالي نقول : إن القيود غير سليمة.

مثال 4: ليكن لدينا:

$$Z = X_2 - X_1 \rightarrow \min$$

القيود:

$$2X_1 - X_2 \leq 4 \quad (1)$$

$$x_1 - 2x_2 \leq 2 \quad (2)$$

$$x_1 + x_2 \leq 5 \quad (3)$$

شروط عدم السلبية. $x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$

ندرس المتراجحات كل واحدة على حدى بعد تحويلهم إلى معادلات:

المعادلة (1) : نعطي:

$$x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = -4 \quad A(0; -4)$$

$$x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 2 \quad B(2; 0)$$

نأخذ المتراجحة الثانية (2) ونحولها إلى معادلة:

$$x_1 - 2x_2 = 2$$

$$x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = -1 \quad C(0; -1)$$

$$x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 2 \quad D(2; 0)$$

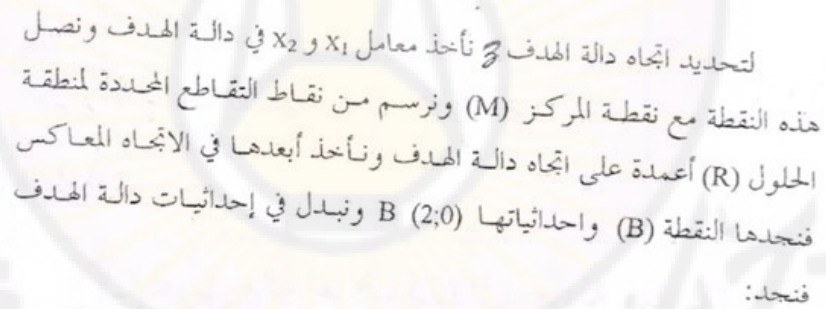
نأخذ المتراجحة الثالثة (3) ونحولها إلى معادلة:

$$x_1 + x_2 = 5$$

$$x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 5 \quad F(0; 5)$$

$$x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 5 \quad N(5; 0)$$

Damascus University



أصغر قيمة نحصل عليها.

طريقة السمبليكس هي وسيلة رياضية ذات كفاءة عالية في استخراج الحل الأمثل لمسائل البرمجة الخطية
من النظر عن عدد متغيرات المسألة توصل إليها الباحث "جورج دانفنج" سنة ١٩٤٧ نتيجة استمراره في
حث.

أولاً : الطريقة المبسطة في حالة الأرباح:

سيتم شرح هذه الطريقة من خلال المثال التالي:

$$Z = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \text{Max}$$

القيود:

$$x_1 + x_2 \leq 15$$

$$2x_1 + x_2 \leq 28$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 20$$

شروط عدم السلبية $x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$

الخطوات:

1- تحويل دالة الهدف (Z) إلى معادلة صفرية:

$$Z - 3x_1 - 2x_2 = 0$$

2- تحويل المتباينات إلى معادلات مع إضافة متغيرات راكمدة (إضافية)

نرمز لها بالرمز t_j حيث: $j = 1, n$

حيث: $t_j \geq 0$

$$x_1 + x_2 + t_1 = 15$$

$$2x_1 + x_2 + t_2 = 28$$

$$x_1 + 2x_2 + t_3 = 20$$

$$x_1 \geq 0 ; x_2 \geq 0 ; t_1 ; t_2 \geq 0$$

3- نوضح التحويلات والقيود في الجدول التالي:

جدول رقم (1)

المتغيرات	Z	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3	الثوابت B
Z	1	-3	-2	0	0	0	0
t_1	0	1	1	1	0	0	15
t_2	0	2	1	0	1	0	28
t_3	0	1	2	0	0	1	20

4- من الجدول نحسب:

(أ) المتغير الداخل: هو أكبر قيمة بإشارة سالبة في حقل دالة الهدف (Z) ومساوية هنا (-3) أي أنه المتغير (x_1).

ب) المتغير الخارج : وهنا لا بد من قسمة الثوابت أي الحدود المطلقة
(15; 28; 20) في الجانب الأيمن من المعادلات الممثلة للقيود على المعاملات
العددية التي تقع تحت المتغير الداخل هي (1; 2; 1):

$$\text{Min } (15/1; 28/2; 20/1) = 14$$

أي أن (14) هو العدد الأصغر والذي يشير إلى المتغير الخارج وهنا هو
(t_2). نستبعد القيم السالبة والصفر. نسمي نقطة تقاطع السطر المحوري مع
العمود المحوري بالعنصر المحوري (2).

وبالتالي يحل t_2 محل x_1 ونحسب المعادلة المحورية (المهدة) وذلك بقسمة
السطر المحوري على العنصر المحوري (2) وينتج:

$$\text{سطر } x_1 \text{ في الجدول التالي: } = \frac{0; 2; 1; 0; 1; 0, 28}{2} =$$

$$(0; 1; 1/2; 0; 1/2; 0; 14)$$

فتحل هذه المعادلة الجديدة محل المعادلة (t_2) الذي سينخرج ليحل محله
المتغير الداخل (x_1) كما في الجدول التالي:

جدول رقم (2)

المتغيرات	Z	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3	الثوابت
Z	1	0	-1/2	0	3/2	0	42
t_1	0	0	1/2	+1	-1/2	0	1
x_1	0	1	1/2	0	1/2	0	14
t_3	0	0	3/2	0	-1/2	1	6

بعدها ندرس تأثير x_1 (المتغير الخارج) على كل من دالة الهدف (z) و t_1 و t_3 (المتغيرات الإضافية).

أ) تأثيره على Z (دالة الهدف):

ليان هذا التأثير نغير إشارة المعامل العددي تحت عمود المتغير الداخل في حقل دالة الهدف (-3) لتصبح $(+3)$ ونقوم بضربه في المعادلة الممهدة ومن ثم نجمع الناتج مع القيم في حقل دالة الهدف كما في الجدول الثاني ويتم ذلك على الشكل التالي:

$$3 (0; 1; 1/2; 0; 1/2; 0; 14)$$

$$0; 3; 3/2; 0; 3/2; 0; 42$$

+

$$\underline{1; -3; -2; 0; 0; 0; 0} \quad \text{نضيف معادلة الهدف في الجدول الأول}$$

$$1; 0; -1/2; 0; 3/2; 0; 42$$

قيمة Z في الجدول الثاني

ب) تأثير x_1 علي كل من t_1 و t_3 .

1- على t_1 : ننظر إلى معامل t_1 في العمود المحوري ونغير إشارته ونضربه في المعادلة الممهدة في الجدول الثاني ونجمعها مع معادلة t_1 السابقة في الجدول الأول والناتج نضعه في الجدول الثاني في سطر t_1 :

$$-1 \ (0; 1; 1/2; 0; 1/2; 0; 14)$$

$$0; -1; -1/2; 0; -1/2; 0; -14$$

+

$$0; 1; 1; 1; 0; 0; 15$$

$$0; 0; 1/2; 1; -1/2; 0; 1$$

وبنفس المنطق بالنسبة لـ t_3 نأخذ معاملته في الجدول الأول ونغير إشارته ونضربه في المعادلة الممهدة في الجدول الثاني ونجمع له سطر (t_3) في الجدول الأول فينتج لدينا سطر t_3 في الجدول الثاني.

(5) ننظر إلى الجدول الثاني إلى سطر دالة الهدف (Z) فإذا كان هناك قيم سالبة فنأخذ أشدها سلبيا ونكرر نفس العمليات السابقة إلى أن نصل إلى جدول فيه سطر دالة الهدف كلها قيم موجبة أو صفر.

نجد في الجدول رقم (2) أن عمود (x_2) هو الأكبر ($-\frac{1}{2}$) فهذا يسمى العمود عمود الدوران أو محور الدوران.

نقسم الثوابت على عناصر العمود المحوري ونأخذ الأصغر:

$$\text{Min} (1/1/2; 14/1; 6/3/2) = \{2; 14; 4\} = 2$$

إذاً المتحول x_2 محل المتغير الراكد $t_1 \dots$

ونتبع نفس الخطوات السابقة بحيث نشكل المعادلة الممهدة بتقسيم سطر

عنصر الدوران على نفسه (عنصر الدوران $\frac{1}{2}$) فنجد:

$$0; 0; 1; 2; -1; 0; 2$$

ونضعه في الجدول رقم (3) ومن ثم ندرس تأثير المتغير الخارج x_2 على كل من دالة الهدف (Z) وعلى x_1 و t_3 بنفس الخطوات أعلاها فنحصل على الجدول الثالث:

جدول رقم (3)

الثوابت	t_3	t_2	t_1	x_2	x_1	Z	المتغيرات
43	0	1	1	0	0	1	Z
2	0	-1	2	1	0	0	x_2
13	0	1	1	0	1	0	x_1
3	0	1	3	0	0	0	t_3

ننظر إلى الجدول رقم (3) لسطر دالة الهدف فنجد كله قيم موجبة أو صفر وبالتالي:

$$x_1 = 13$$

$$x_2 = 2$$

$$Z = 43 \text{ دينار}$$

إذاً أعظم قيمة هي 43 دينار.

طريقة أخرى للحل

سنوضح خطوات إيجاد الحل لنموذج البرمجة الخطية باستخدام هذه الطريقة من خلال المثال التالي:

مثال: ليكن لدينا نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$\text{دالة الهدف هي } \max Z = 2x_1 + 3x_2$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 20$$

$$x_1 + x_2 \leq 12$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

المطلوب: إيجاد الحل الأمثل باستخدام الطريقة المبسطة

الحل:

٢. تحويل نموذج البرمجة الخطية من الشكل الكانوني إلى الشكل القياسي:

ذلك في حالة المثال بإضافة متغيرات جديدة تسمى متغيرات الفرق (Si) إلى الطرف الأيسر من كل قيد في فتحول القيد الفني من شكل متباينة إلى مساواة^١
أما إذا كان اتجاه القيد الفني هو أكبر أو يساوي فإننا نطرح متغير الفرق (Si) من الطرف الأيسر لهذا القيد، مع إضافة متغيرات الفرق (S₁) و (S₂) إلى دالة الهدف بمعامل صفر.

وعلى ذلك فإن الشكل القياسي للنموذج سيكون:

$$\text{Max } Z = -2x_1 - 3x_2 + 0S_1 + 0S_2$$

$$x_1 + 2x_2 + S_1 = 20$$

$$x_1 + x_2 + S_2 = 12$$

$$x_1, x_2, S_1, S_2 \geq 0$$

٢.٢. نصمم الجدول كما في أدناه:

ذلك باعتماد معاملات المتغيرات جميعها وفي جميع المعادلات ومن ضمنها معادلة دالة الهدف ونسمي هذا الجدول بجدول الحل الابتدائي (الأولي)

الحل bi	متغيرات الفرق		المتغيرات الأساسية	
	S ₁	S ₂	X ₁	X ₂
متغيرات دالة الهدف Z	0	0	0	0
معاملات دالة الهدف Z	0	0	-3	-2
S ₁	1	0	2	1
S ₂	0	1	1	1

"الجدول الأول"

٣.٢ تحديد المتغيرات الداخلة والخارج:

- المتغيرات الداخلة: في مسائل المتغير الداخلة الذي له أصغر معامل سابق في دالة الهدف في جدول الحل الابتدائي، ففي الجدول الأول نجد أن المتغير X_2 له أصغر معامل بالسالب (-٣) في صف دالة الهدف وبالتالي سيكون هو المتغير الداخلة
- المتغير الخارج: يتحدد عن طريق تقسيم عمود الموارد (b_i) على معاملات المتغير الداخلة (X_2) في القيود الفنية (a_{ij}) مع إهمال القيم السالبة والصفرية: أي b_i/a_i بحيث: $b_i \geq 0$ ، $a_{ij} > 0$
- ويكون المتغير الخارج متغير الفرق (S_i) في الصف الذي يتضمنه أقل نسبة لا سلبية ناتجة عن عمود المعاملات الموجبة للمتغير الداخلة، ففي مثالنا نجد:

$$S_1 \text{ إزاء } 20/2 = 10$$

$$S_2 \text{ إزاء } 12/1 = 12$$

إذن فالمتغير الخارج يكون (S_1) والمتغير الداخلة الذي نحل محله هو (X_2) إن المعامل تحت المتغير الداخلة وإزاء المتغير الخارج في الجدول (١) يسمى بالعنصر المحوري (أي المعامل الذي يتقاطع عنده عمود المتغير الداخلة مع صف المتغير الخارج وفي مثالنا يحدث التقاطع عند قيمة (٢)).

٤.٢ تقسيم القيم في صف المتغير الخارج على العنصر المحوري:

ينتج عن ذلك قيم جديدة تسمى معادلة المحور* وهي (١٠، ١/٢، ١، ١/٢) ولغرض بيان تأثير دخول المتغير (X_2) إلى قاعدة الحل على دالة الهدف وعلى القيد الآخر للمشكلة يتم إجراء ما يلي:

■ التأثير على دالة الهدف:

دالة الهدف الجديدة = دالة الهدف القديمة - معاملات العنصر الداخلة في دالة الهدف $\times$ (المعادلة المحورية)

ففي معادلة دالة الهدف في الجدول (١) نجد أن معامل X_2 هو (-٣) إذا نضرب معادلة المحور الجديد

ب(-٣)

$$(30, -3/2, 3, -3/2) = (-3/2, 3, -3, 3/2) \times (-3)$$

نطرح قيم هذه المعادلة التي تكونت من إجراء عملية الضرب من القيم المناظرة لها في معادلة دالة الهدف فينتج لنا معادلة دالة الهدف الجديدة.

$$\begin{array}{cccccc} -2 & -3 & 0 & 0 & 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} -\frac{3}{2} & -3 & -\frac{3}{2} & 0 & -30 & \end{array}$$

معادلة Z القديمة:

$$\begin{array}{cccccc} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} & 0 & 30 & \end{array}$$

maxZ=

معادلة Z الجديدة:

نضع هذه القيم في جدول حل جديد في الأعمدة منظرية لتمثيل معادلة دالة الهدف الجديد.

■ التأثير على القيد الآخر للمسألة:

معادلة S₂ الجديدة = معادلة S₁ القديمة - (المعامل المتغير الداخلة في S₂) × (المعادلة المحورية)

معادلة القيد الثاني S₂ وفيها معامل X₂ وهو (١) إذا ضرب معادلة المحور في "١" لنحصل على:

$$(1/2, 1, 1/2, 0, 10) - (1/2, 1, 1/2, 0, 10) = (0, 0, 0, 1, 0)$$

ونطرح هذه القيم من القيم المناظرة لها في معادلة القيد الثاني لنحصل على معادلة S₂ الجديدة

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 12 & \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 10 & \end{array}$$

معادلة S₂ القديمة:

$$\begin{array}{cccccc} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 2 & \end{array}$$

معادلة S₂ الجديدة:

نضع هذه القيم في الجدول الجديد في الأعمدة المناظرة:

الحل	متغيرات الفرق		متغيرات الأساسية		متغيرات دالة الهدف
	S ₁	S ₂	X ₁	X ₂	
30	2/3	0	-2/1	0	Z
10	2/1	0	2/1	1	X ₂
2	2/1-	1	2/1	0	S ₂

الجدول الثاني

إن الحل الأمثل لمشكلة التعظيم يتحقق عندما تكون جميع المعاملات في دالة الهدف في جدول الحل إما مساوية للصفر أو قيمة موجبة أما إذا كان أحد المعاملات في دالة الهدف سالبا فهذا يعني عدم التوصل إلى الحل الأمثل، عندئذ يجب إجراء محاولة ثانية للبحث عن الحل الأمثل.

وعندئذ يتوجب ثانية تحديد المتغير الداخلة والمتغير الخارج وإجراء العمليات الحسابية السابقة.

٥.٢ نلاحظ من الجدول (٢): أن هناك قيمة سالبة في دالة الهدف وهي معامل (x_1) تعطي دلالة على أنه توجد إمكانية لتحسين الحل وبالتالي فإن x_1 هو المتغير الداخل إلى قاعدة الحل. أما المتغير الخارج فهو المتغير ذو النسبة اللاسلبية الأقل، وفي هذه الحالة يكون المتغير (S_2). على قيمة دالة الهدف وعلى قيود x_1 نعيد دورة الحسابات مرة أخرى، وذلك لبيان أثر دخول المتغير (المسألة الأخرى فنحصل على جدول المحاولة الثانية كما يلي:

الحل	متغيرات الفرق		متغيرات الأساسية		متغيرات دالة الهدف Z
	S_1	S_2	X_1	X_2	
٣٢	١	١	٠	٠	معاملات دالة الهدف Z
٨	١	١-	٠	١	X_2
٤	١-	٢	١	٠	X_1

الجدول الثالث

وكما يوضح الجدول (٣) فإن جميع المعاملات في دالة الهدف إما موجبة أو صفرية، وهذا يعني التوصل إلى الحل الأمثل للمشكلة قيد الدراسة والذي يكون: $x_1=4$ و $x_2=8$

وقيمة دالة الهدف : $\max Z=32$

ولغرض التأكد من هذه القيم بالإمكان تعويض قيم x_1 و x_2 في دالة الهدف الأصلية كما يلي:

$$\max Z = 3x_1 + 2x_2 = 3(4) + 2(8) = 12 + 16 = 28$$

في الجدول (٣).

لاحظنا في المثال السابق إن كل القيود الفنية في المعادلات أقل من أو يساوي ($\geq$) ودالة الهدف هي تعظيم، ولكن إذا احتوت القيود على إشارة أكبر من أو يساوي ($\leq$) أو إشارة يساوي (=) أو كانت دالة الهدف تقليل، فإننا نضيف إلى القيود التي تحول إشارة مساواة أو أكبر من أو يساوي متغير آخر يسمى المتغير الاصطناعي سوف نوضح هذا في فيما يلي.

2- طريقة السيمبلكس في حالة التكاليف:

ندرس هذه الحالة من خلال المثال التالي:

تحتاج المؤسسة العامة لصناعة الإلكترونيات لعاملين: الأول ماهر وفني نرسم له بالرمز (x_1) وأجرة الساعة له (2.5) دينار والثاني عامل غير مهني (x_2) وأجره بالساعة (4) دينار وإن الساعات التي تحتاجها المؤسسة العامة من كل من العامل الماهر المؤهل لا يزيد عن (100 ساعة) بينما تحتاج من العامل غير الماهر بما لا تقل عن (200) ساعة. وإن مجموع ما تحتاجه من كليهما يساوي 250 ساعة.

والمطلوب:

تحديد عدد ساعات العمل لكليهما محققين أقل تكلفة ممكنة.

الحل:

$$Z = 2.5x_1 + 4x_2 \rightarrow \text{Min} \quad \text{دالة الهدف}$$

القيود:

$$x_1 \leq 100$$

$$x_2 \geq 200$$

$$x_1 + x_2 = 250$$

$$x_1 \geq 0 ; x_2 \geq 0$$

إن هذه القيود تتميز بوجود متراجحات ومعادلات من الأنواع الثلاث أي ($>$ و $<$ و $=$).

وهنا لا بد من إضافة متغيرات راکدة من (z) موجبة وسالبة وهنا نؤكد بأنه للتخلص من المتغيرات الراكدة السالبة يجب إضافة متغيرات اصطناعية نرسم لها بالرمز (y_j) مضروبة بالرمز (M) تكنيك.

- إن قيمة المتغير الاصطناعي يجب أن تكون مساوية للصفر في جدول الحل النهائي ويجري عمل ذلك من خلال إضافة معامل لكل متغير اصطناعي قيمته (M) في حالة التقليل ، ($-M$) في حالة الأرباح يظهر في سطر دالة الهدف.

- عند إعداد الجدول الأول يتم ضرب كل معادلة تحتوي على متغير اصطناعي بالرمز (M) في حالة التكاليف و ($-M$) في حالة التعظيم. ثم نجمع الناتج مع دالة الهدف الأصلية لتظهر دالة هدف جديدة يتم تأشيرها في الجدول اللاحق.

- وما إن وجدنا دالة الهدف الجديدة فإننا ننقل بقية المعادلات كما هي ليتكون لدينا الجدول الابتدائي الجديد والذي لا يختلف عن الجدول الابتدائي للتعظيم إلا في تعاملنا في تحديد العنصر الداخل أو المتغير الداخل الذي يجب أن يتضمن أكبر معامل بإشارة موجبة وليس سالبة كما هو الحال في التعظيم أما بقية الخطوات فتبقى نفسها وصولاً إلى الجدول النهائي الذي تكون دالة الهدف فيه كلها قيم صفرية أو سالبة.

الخلاصة يمكن أن نوجز الخطوات بما يلي:

(أ) استخدام المتغيرات الاصطناعية بالإضافة إلى المتغيرات الراكدة.

(ب) استخدام M تكنيك [M. Technique] .

جـ) إن المتغير الداخلى يتصف بأكبر معامل بإشارة موجبة.

د) يتحقق الحل الأمثل عندما تكون جميع المعاملات في دالة الهدف كلها صفر أو سالبة.

نعود لمثالنا السابق:

(1) المتراجحات تصبح كما يلي:

$$Z - 2.5 x_1 - 4x_2 - My_1 - My_2 = 0$$

$$x_1 + t_1 = 100$$

$$x_2 - t_2 + y_1 = 200$$

$$x_1 + x_2 + y_2 = 250$$

حيث y_1 و y_2 يظهران في الجدول النهائي بقيمة الصفر.

$$t_1 \geq 0 ; x_1 \geq 0 ; x_2 \geq 0$$

(2) نشكل جدول الإدخال:

جدول الإدخال

المتغيرات	Z	x_1	x_2	t_1	t_2	y_1	y_2	الثوابت B
Z	1	-2.5	-4	0	0	-M	-M	0
t_1	0	1	0	1	0	0	0	100
y_1	0	0	1	0	-1	+1	0	200
y_2	0	1	1	0	0	0	1	250

لم ندخل t_2 لأنها تحمل إشارة سالبة.

2- نتخلص من العنصر الاصطناعي y_1 و y_2 بضرب سطر y_1 و y_2 بالرمز (M) وهي قيمة موجبة كبيرة جداً ونجمعهما مع بعضهما والناتج نضيفهما إلى دالة الهدف (Z) في جدول الإدخال فنحصل على دالة هدف جديدة نضعها في الجدول الأول أما بقية القيم الموجودة في جدول الإدخال تبقى كما هي وندعوه بالجدول الأول:

$$M.y_1 = 0 ; 0; M; 0; -M; +M; 0; 200M$$

+

$$M.y_2 = 0; M; ; M; 0; 0; 0; M; 250M$$

$$0; M; 2M; 0; -M; +M; M; 450M$$

+

$$Z: 1; -2.5; -4; 0; 0; -M; -M; 0$$

$$1; -2.5 + m; -4 + 2M; 0; -M; 0; 0; 450M$$

جدول رقم 1

المتغيرات	Z	x_1	x_2	t_1	t_2	y_1	y_2	الثوابت B
Z	1	$-2.5+M$	$-4+2M$	0	$-M$	0	0	450M
t_1	0	1	0	1	0	0	0	100
y_1	0	0	1	0	-1	1	0	200
y_2	0	1	1	0	0	0	1	250

نبحث عن أكبر قيمة موجبة في سطر دالة الهدف ونحدد بالتالي عمود الدوران، ومن ثم نقسم الثوابت على عمود الدوران بعد استبعاد القيم السالبة والصفر ونأخذ أصغر قيمة سالبة وبالتالي يتحدد معنا سطر الدوران ومن ثم العنصر المحوري (عنصر الدوران).

$$\text{Min} \left(\frac{250}{1}; \frac{200}{1} \right) = 200$$

أي أن تحل x_2 محل y_1 .

نقسم سطر الدوران على العنصر المحوري (1) فينتج لدينا المعادلة المهمة في جدول رقم -2- وذلك تبعاً للخطوات السابقة.

جدول رقم 2

المتغيرات	θ	x_1	x_2	t_1	t_2	y_1	y_2	الثوابت
θ	1	$-2.5+M$	0	0	$-4+M$	$4-2M$	0	$50M+800$
t_1	0	1	0	1	0	0	0	100
x_2	0	0	1	0	-1	1	0	200
y_2	0	1	0	0	1	-1	1	50

ندرس تأثير المتغير الخارج (x_2) على كل من معادلة الهدف θ و t_1 و y_2 .

لدراسة تأثيره على (3) نأخذ معامل دالة الهدف (3) في الجدول رقم (1) ونغير اشارتها ونضربه في المعادلة الممهدة في الجدول رقم (2) والناتج نضيفه إلى سطر دالة الهدف في الجدول رقم (1) والناتج نضعه في الجدول رقم (2).

أما تأثير (x_2) على t_1 بنفس المنطق السابق وكذلك تأثيره على y_2 وبالتالي نحصل على الجدول رقم (2).

من الجدول رقم (2) ننظر إلى سطر دالة الهدف فنجد أكبر قيمة موجبة هي في العمود الثاني (x_1) وبالتالي ندرسه بأن نقسم الثوابت على هذا العمود بعد استبعاد القيم السالبة والصفر ونأخذ أصغر قيمة ونحدد بالتالي سطر الدوران ومن ثم عنصر الدوران فهو الواحد الموجود في سطر y_2 أي أن (x_1) المتغير الخارج سيحل محل (y_2) .

$$\text{Min } (100/1; 50/1) = 50$$

ونتبع نفس الخطوات السابقة بأن نقسم سطر الدوران على العنصر المحوري نحصل على المعادلة الممهدة التي نضعها في الجدول رقم (3) ومن ثم ندرس تأثيره على كل من $(z, t_1 \text{ و } x_2)$ بنفس المنطق المشار إليه أعلاه.

معامل المتحول في الجدول السابق بعد تغيير إشارته ونضربه بالمعادلة الممهدة والناتج نضيفه لسطره في الجدول السابق ومن ثم ما نحصل عليه نضعه في الجدول اللاحق (3). وهكذا...

جدول رقم 3

المتغيرات	z	x_1	x_2	t_1	t_2	y_1	y_2	القيمة
z	1	0	0	0	-1.5	1.5-M	+2.5-M	925
t_1	0	0	0	1	-1	1	-1	50
x_2	0	0	1	0	-1	1	0	200
x_1	0	1	0	0	1	-1	1	50

ننظر إلى سطر دالة الهدف في الجدول (3) فنجد كلها قيم سالبة أو صفر أي لا يوجد إمكانية لتحسين الحل ونستنتج:

$$x_1 = 50$$

$$x_2 = 200$$

$$z = 925 \text{ أدنى قيمة.}$$

للتأكد فلو بدلنا بدالة الهدف فنجد:

$$z = 2.5 \cdot 50 + 4 \cdot 200 = 925 \text{ دينار}$$

ملاحظة: بالنسبة لدالة الهدف عندما تكون هادفة إلى قيم موجبة عظمى (Max) من الأرباح والقيود التي تحددها يوجد فيها متراجحات من الأنواع الثلاثة ($>$, $<$, $=$).

فهنا يجب ضرب كل من المتغيرات الصناعية بـ (+M) ونجمعها مع سـ دالة الهدف الأساسية وبالتالي نحصل على دالة هدف جديدة نضعها في جدول الإدخال أما بقية القيم للمتحولات تبقى كما هي وتبضع نفس الخطوات السابقة خطوة خطوة إلى أن نصل إلى جدول نهائي فيه سطر دالة الهدف (Z) كلها سالبة أو صفر وبالتالي لا يوجد إمكانية لتحسين الحل وهنا نستنتج القيم كما هي واردة في عمود الثوابت.

طريقة أخرى

مثال: أوجد الحل الأمثل للنموذج التالي:

$$\text{دالة الهدف: } \min Z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\text{القيود: } (1) \dots -2x_1 + 3x_2 = 3$$

$$(2) \dots 4x_1 + 5x_2 \geq 10$$

$$(3) \dots x_1 + 2x_2 \leq 5$$

$$\text{شرط عدم السلبية } x_1, x_2 \geq 0$$

١/ نضع القيود على الشكل القياسي لتصبح:

$$(1) \dots -2x_1 + 3x_2 = 3$$

$$(2) \dots 4x_1 + 5x_2 - S_1 = 10$$

$$(3) \dots x_1 + 2x_2 + S_2 = 5$$

$$x_1, x_2, S_1, S_2 \geq 0$$

ولنستخدم x_3, x_4 كميتغيرات وهمية بدلا من S_1, S_2 فيصبح القيدان الثاني والثالث:

$$(2) \dots 4x_1 + 5x_2 - x_3 = 10$$

$$(3) \dots x_1 + 2x_2 + x_4 = 5$$

وأن هناك احتمال أن يكون $x_1, x_2 = -$ فهذا يعطي في القيد الأول والثاني نوعا من الخطأ ولذلك لابد

من إضافة متغير آخر مهمته تغطية هذا الاحتمال ويسمى بـ (متغير اصطناعي) R فيصبح القيدان الأول والثاني

كالتالي:

$$(1) \dots -2x_1 + 3x_2 + R_1 = 3$$

$$4x_1 + 5x_2 - x_3 + R_2 = 10 \dots (2)$$

وحتى يكون الحل الأمثل صحيح يجب إضافة المتغيرات الاصطناعية إلى دالة الهدف وذلك بعد ضربها في

$$\min Z = 2x_1 + 3x_2 + MR_1 + MR_2$$

قيمة ثابتة M وهي قيمة كبيرة جدا، فتصبح دالة الهدف كالتالي:

ولأن R_1, R_2 متغيرات أساسية في القيود يجب أن يكون معاملها في دالة الهدف في الحل الابتدائي صفر لذلك يجب التعويض عنها في دالة الهدف من القيدين الأول والثاني حيث: $R_1 = 3 - 2x_1 - 3x_2$ و $R_2 = 10 - 4x_1 - 5x_2 + x_3$

فتصبح دالة الهدف كالآتي:

$$\min Z = (-2 + 2M)x_1 + (-3 + 8M)x_2 - Mx_3 = 13M$$

جدول الحل الابتدائي سيكون بالصورة التالية:

	x_1	x_2	x_3	x_4	R_1	R_2	الحل
Z	$-2 + 2M$	$-3 + 8M$	M	0	0	0	$13M$
$\leftarrow R_1$	3	0	0	0	1	0	3
R_2	4	0	1	0	0	1	10
x_4	1	2	0	1	0	0	5

جدول (١)

المتغير الداخل x_2 والمتغير الخارج هو R_1

$$3 = \text{العنصر المحوري}$$

$$\text{المعادلة المحورية} = (3, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 3) / 3$$

$$(-2/3, 1, 0, 0, 1/3, 0, 1)$$

$$\text{دالة الهدف الجديدة} = (-2 + 2M, -3 + 8M, -M, 0, 0, 0, 13M)$$

$$--(-3 + 8M)(-2/3, 1, 0, 0, 1/3, 0, 1)$$

$$--(-2 + 2M, -3 + 8M, -M, 0, 0, 0, 13M)$$

$$--(2 - 16/3M, -3 + 8M, 0, 0, -1 + 8/3M, 0, 3 + 5M)$$

$$R_2 \text{ الجديد} = (4, 5, -1, 0, 0, 1, 10) - (-10/3, 5, 0, 0, 5/3, 0, 5)$$

$$-(22/3, 0, -1, 0, -5/3, 1, 5)$$

$$x_4 \text{ الجديدة} = (1, 2, 0, 1, 0, 0, 5) - (-4/3, 2, 0, 0, 2/3, 0, 2)$$

$$-(7/3, 0, 0, 1, -2/3, 0, 3)$$

جدول الحل الثاني سيكون:

	$x_1 \downarrow$	X_2	X_3	X_4	R_1	R_2	الحل
Z	$-4+22/3M$	.	$M-$	.	$1-8/3M$	.	$3+5M$
x_2	$-2/3$	1	.	.	$1/3$	.	1
$\rightarrow R_2$	$22/3$	.	$1-$	.	$-5/3$	1	5
x_4	$7/3$	.	.	1	$-2/3$	.	3

جدول ٢

المتغير الداخلى x_1 والمتغير الخارج R_2

العنصر المحوري $= 3/22$

المعادلة المحورية $(15/22 \cdot 3/22 \cdot -5/22 \cdot 0 \cdot -3/22 \cdot 0 \cdot 1) = (1 \cdot 0 \cdot -3/22 \cdot 0 \cdot -5/22 \cdot 3/22 \cdot 15/22)$

دالة الهدف الجديدة $Z = (-4+22/3M \cdot 0 -M \cdot 0 \cdot 1 \cdot -8/3M \cdot 0 \cdot 3+5M)$

$=(0.0 \cdot -6/11 \cdot 0.2/22 -M \cdot 12/22 -M \cdot 63/11)$

x_2 الجديدة $(-2/3 \cdot 1 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 1/3 \cdot 0 \cdot 1)$

$=(2/3 \cdot 0 \cdot -2/22 \cdot 0 \cdot -5/33 \cdot 2/22 \cdot 5/11)$

$=(0.1 \cdot -2/22 \cdot 0.6/33 \cdot 2/22 \cdot 16/11)$

x_4 الجديدة $(7/3 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 1 \cdot -2/3 \cdot 0 \cdot 3)$

$=(7/3 \cdot 0 \cdot -7/22 \cdot 0 \cdot -35/66 \cdot 7/66 \cdot 35/22)$

$=(0.0 \cdot 7/22 \cdot 1 \cdot -3/22 \cdot -7/22 \cdot 31/22)$

جدول الحل الثالث:

	x_1	X_2	$X_3 \downarrow$	X_4	R_1	R_2	الحل
Z	.	.	$-6/11$	.	$1/11-M$	$6/11-M$	$63/11$
x_2	.	1	$-2/22$	.	$6/33$	$2/22$	$16/11$
x_1	1	.	$-3/22$	.	$-5/22$	$3/22$	$15/22$
$\leftarrow x_4$	.	.	$7/22$	1	$-3/22$	$-7/22$	$31/22$

جدول (٣)

المتغير الداخلى x_3 والمتغير الخارج x_4

العنصر المحوري $= 7/22$

المعادلة المحورية $(0.0 \cdot 1 \cdot 22/7 \cdot -3/7 \cdot -1 \cdot 31/7)$

دالة الهدف الجديدة $Z = (0.0 \cdot -6/11 \cdot 0.1/11 -M \cdot 6/11 -M \cdot 63/11)$

$=(0.0 \cdot 6/11 \cdot 12/7 \cdot 18/77 \cdot -6/11 \cdot 186/77)$

$=(0.0 \cdot 0.12/7 \cdot -1/7 -M \cdot -M \cdot 57/7)$

$$X_2 = (0.1, -2/22, 0.2/11, 2/22, 16/11) \\ + (0.0, 2/22, 2/7, -3/77, -2/22, 31/77) \\ - (0.1, 0.2/7, 1/7, 0.13/7)$$

$$X_1 = (0.1, -3/22, 0, -5/22, 3/22, 15/22) \\ + (0.0, 3/22, 3/7, -9/154, -3/22, 93/154) \\ - (1.0, 0.3/7, -2/7, 0.9/7)$$

ويكون جدول الحل النهائي هو:

	x_1	x_2	$x_3 \downarrow$	x_4	R_1	R_2	الحل
Z	.	.	0	12/7	-1/7-M	-M	57/5
x_2	.	1	0	2/7	1/7	.	13/7
x_1	1	.	0	3/7	-2/7	.	9/7
x_3	.	.	1	22/7	-3/7	-1	31/7

جدول "ع"

وبالتالي الحل الأمثل للنموذج هو:

$$\text{Min} Z = 57/7$$

$$x_1 = 9/7$$

$$x_2 = 13/7$$

$$x_3 = 31/7$$

ولغرض التأكد من صحة القيم بإمكاننا التعويض في دالة الهدف.

ملاحظة:

عند التعامل مع مسائل التعظيم max فإننا نضرب قيم R في دالة الهدف في (-M)

الفرع الثاني: نموذج البرمجة الديناميكية

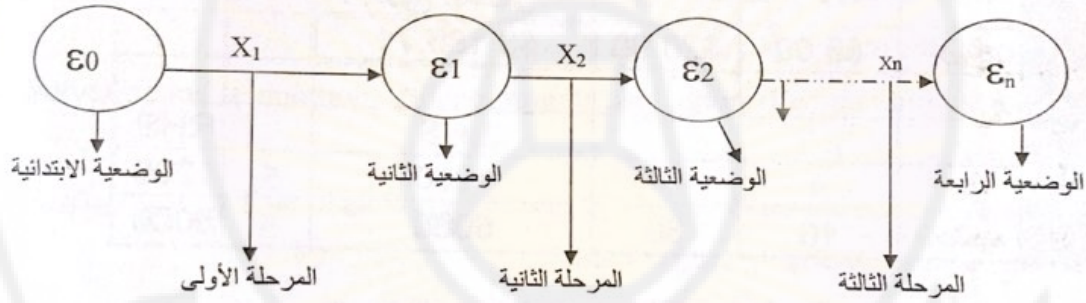
أولاً: أهم المفاهيم والقواعد

البرمجة الديناميكية هي طريقة تساعد على إيجاد الحل المثل للمسألة التي تقسم عملية اتخاذ القرار فيها إلى عدة مراحل (خطوات أو أجزاء) هذا النوع من المسائل يسمى بالمسائل الديناميكية أو متعددة المراحل (الخطوات) البرمجة الديناميكية هي جزء من البرمجة الرياضية، بدأ ظهورها في السنوات الخمسينات، يرجع الفضل في تأسيسها إلى أعمال الاقتصادي الرياضي الأمريكي R.Bellman وزملاءه.

تستند هذه الطريقة على اعتبار أن الظاهرة المدروسة تتغير تحت تأثير العوامل، المؤثرة فيها وتتحول من الوضعية الابتدائية لها (ϵ_0) إلى الوضعية النهائية (ϵ_n).

هذا يفترض أن عملية التحول يمكن تقسيمها أو تجزئتها إلى عدة خطوات أو مراحل عددها مثلاً n . نفترض أن ($\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$) هي الوضعيات المختلفة التي تأخذها الظاهرة المدروسة، بعد المراحل الأولى، الثانية، الثالثة... المرحلة n .

يمكن توضيح ذلك من خلال المخطط التالي:



إن عملية التحول المتتالي للظاهرة من وضعية إلى أخرى نسميه بالمرحلة (étape) والممثل على الرسم

بالسهم.

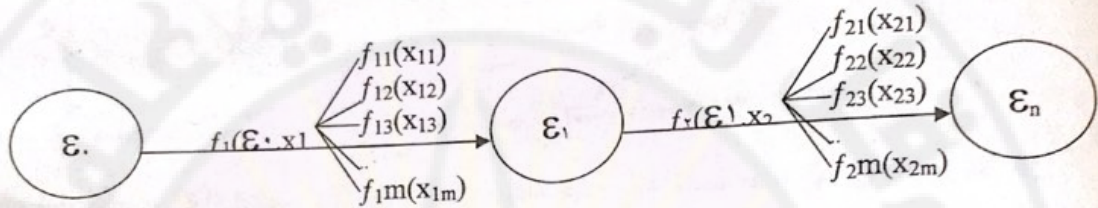
فالمرحلة الأولى هي عملية تحول الظاهرة من الوضعية الابتدائية (ϵ_0) إلى الوضعية الثانية (ϵ_1). هذا التحول يتم تحت تأثير العوامل المؤثرة في الظاهرة، إذا سمينا العنصر الأساسي المؤثر في الظاهرة ب (X_i) مثلاً فإننا نرمز لقيمة هذا العنصر خلال كل مرحلة ب (X_k) (بحيث $k=1, 2, \dots, n$) ونسميه بمتغير المرحلة.

نسمي متغير الوضعية في نهاية كل مرحلة (k) ب (ϵ_k) تعتم قيمة متغير الوضعية (ϵ_k) على قيمة متغير الوضعية السابقة لها وهي (ϵ_{k-1}) وقيمة متغير هذه المرحلة (X_k) هذه العلاقة يمكن التعبير عنها بالعلاقة التالية:

$$\epsilon_k = h(\epsilon_{k-1}, X_k)$$

تسمى هذه المعادلة بمعادلة الوضعية، تنقسم دالة الهدف للمسألة ككل إلى دوال هدف جزئية خاصة بكل مرحلة، بمعنى تصبح لكل مرحلة من المراحل دالة هدفها التي يمكن التعبير عنها كالتالي: $F_k = f_k(\epsilon_k, X_k)$

تأخذ (f_k) عدة قيم على حسب القيم التي يأخذها (X_k) فكل قيمة يأخذها (X_k) تعطي ل (f_k) قيمة مقابلة والحل الأمثل لهذه الدالة المرحلية يتمثل في اختيار أعظم أو أدنى قيمة ل (f_k) من بين القيم السابقة يمكن تمثيل ذلك بالتالي: ^١



ثم نختار أعظم أو أدنى قيمة ل (f_1) في المرحلة الأولى فتكون هي الحل الأمثل في هذه المرحلة. يمكن أيضا أن نختار أعظم أو أدنى قيم (f_2) وتكون هي الحل المثل للمرحلة الثانية. **ثانيا: حل مسألة البرمجة الديناميكية: ^٢**

حل المسألة المطروحة يتمثل في إيجاد قيم متغيرات المرحلة (X_k) التي تؤدي إلى إيجاد حل أمثل لدالة الهدف لهذه المسألة ككل، التصور البسيط الذي يمكن أن تهتدي إليه هو أن نجد الحل المثل لكل مرحلة (خطوة أو جزء) على حدة، ثم نجمع الحلول المثلى لكل هذه المراحل من أجل الحصول على الحل الأمثل للمسألة ككل، لكن ليس الجمع الحسابي البسيط للحلول المثلى المحلية للمراحل التي تتكون منها المسألة يعطينا الحل الأمثل للمسألة ككل. بمعنى أن المقدار $\sum_{k=1}^n f_{opt}(\epsilon_{k-1}, x_k) Z^{opt}$

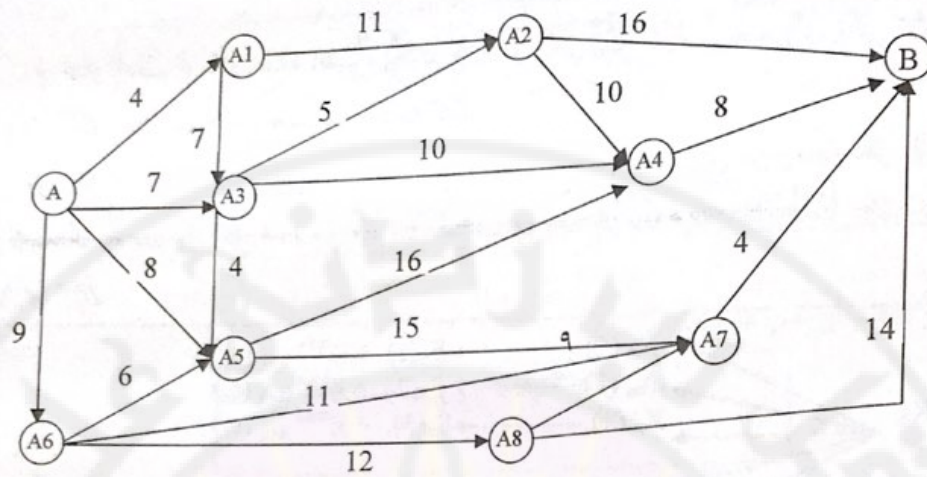
لا يشكل حلا امثلا للمسألة ككل هنا تكمن فكرة "بلمان Bellman" لقد برهن "بلمان Bellman" أن الحل الأمثل لأي مرحلة يجب أن يكون أمثل من وجهة نظر حل المسألة المطروحة ككل وليس حل أمثل من وجهة نظر تلك المرحلة فقط.

أي أن الحل الأمثل للمرحلة (k) يجب أن ينطلق أو يعتمد على الحل المثل للمرحلة السابقة لها $(k-1)$ ويحضر شروط إيجاد الحل المثل للمرحلة اللاحقة $(k+1)$ هذا هو مبدأ الأمثلة في حل مسائل النماذج الديناميكية الذي اعتمد عليه (Bellman).

مثال تطبيقي:

يمكن توضيح دور هذا المبدأ من خلال مسألة اختيار أقصر مسار الانتقال من النقطة (A) إلى النقطة

(B) إذا كان هذا المسار يمر عبر عدة نقاط أخرى وسيطية.



إذا كنا نعتد في حل هذه المسألة على جميع الحلول المثلى المحلية لكل خطوة (لكل مرحلة) فقط (أي البحث عن أقصر مسار بين كل نقطة والنقاط التالية لها)، فإنه يجب التحرك عبر المسار $(A, A_1, A_3, A_2, A_4, B)$ الذي طوله ٣٤.

هذا المسار في الواقع لا يمثل حلاً أمثلاً لهذه المسألة أي لا يشكل المسار الأقصر الذي يمكن من خلال التنقل من (A) إلى (B).

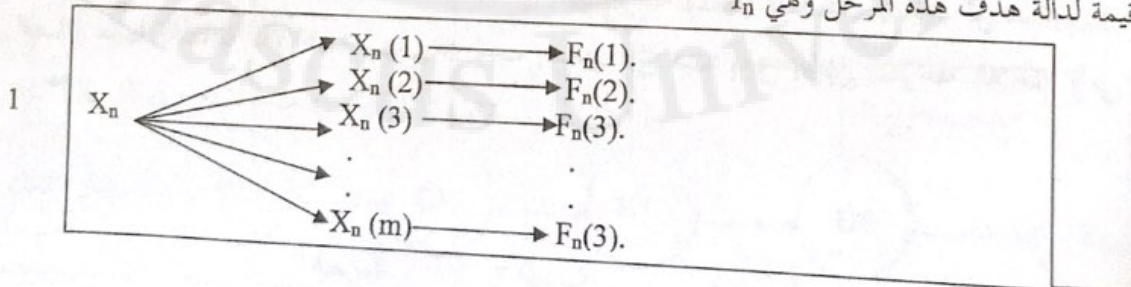
فمثلاً طول المسار (A, A_3, A_4, B) هو أقصر من الأول ويساوي ٢٥ نقطة.

بالرغم من ذلك فإن حل هذه المسألة سيوضح أن المسار الثاني لا يشكل حلاً أمثلاً لهذه المسألة (فمثلاً المسار (A, A_6, A_7, B) يساوي ٢٤ نقطة فقط).

لذلك ومن أجل حل هذا النوع من المسائل وبالاكتفاء على مبدأ الأمثلية اقترح (Bellman) أن يبدأ الحل من المرحلة الأخيرة (n) على أساس أنه يوجد بعدها مراحل أخرى، نجد الحل الأمثل لهذه المرحلة: $Z_n^{\max}(\epsilon_{n-1})$ ونحتفظ به

ثم ننتقل إلى المرحلة السابقة (n-1) ونجد حلولاً لهذه المرحلة بالاعتماد على الحل الأمثل للمرحلة اللاحقة وهي n.

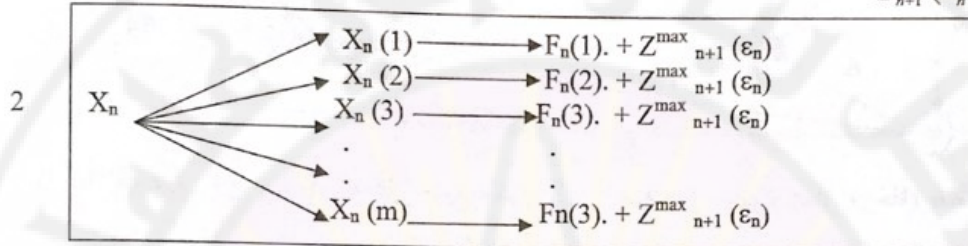
المرحلة n: حلول المرحلة (n) تعتمد على القيم التي يأخذها متغير المرحلة (X_n) فكل قيمة ل (X_n) تقابلها قيمة لدالة هدف هذه المرحلة وهي f_n



ثم نختار أعظم أو أدنى هذه القيم ويكون هذا هو الحل الأمثل لهذه المرحلة (أي الحل الأمثل المحلي لها) فقط ولا يشكل حل أمثل من وجهة نظر المسألة ككل.¹

من أجل أن يكون الحل الأمثل المحصل عليه في هذه المرحلة هو حلاً أمثل من وجهة نظر المسألة المطروحة ككل يجب أن نضيف إلى كل قيمة من قيم دالة الهدف في هذه المرحلة قيمة الحل الأمثل للمرحلة اللاحقة لها

$$\text{أي } Z_{n+1}^{\max}(\epsilon_n)$$



وحيث أن المرحلة (n+1) غير موجودة في المسألة المطروحة فإن

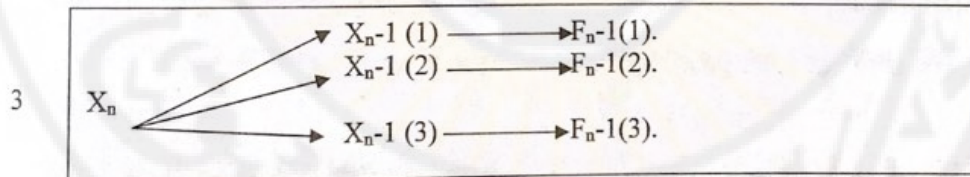
$$Z_{n+1}^{\max}(\epsilon_n) = 0$$

لذلك فإن قيمة الحل الأمثل للمسألة حتى المرحلة (n) هو $Z_n^{\max}(\epsilon_{n-1})$ فقط أي

$$\text{فقط أي أن: } Z_n^{\max}(\epsilon_{n-1}) = \max f_n$$

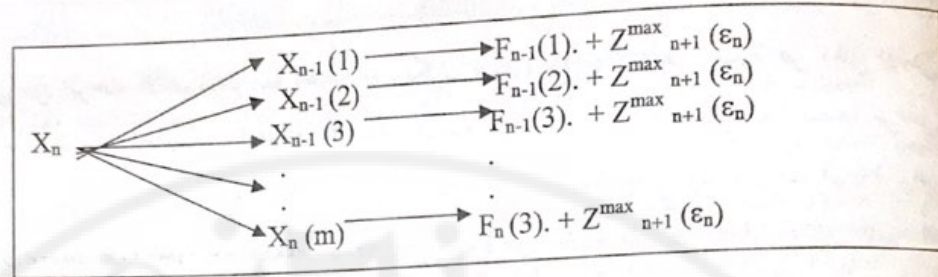
المرحلة n-1: قيم حلول المرحلة (n-1) تعتمد على القيم المختلفة التي يأخذها متغير المرحلة (X_{n-1})

فكل قيمة ل (X_{n-1}) تعطينا حلاً لهذه المرحلة يساوي f_{n-1}.



إذا أردنا أن نجد حلاً أمثلاً محلياً لهذه المرحلة فقط فيجب أن نبحث عن أعظم أو أدنى قيمة من بين قيم (f_{n-1}) لكن إذا أردنا أن نجد حلاً أمثلاً للمسألة ككل حتى المرحلة (n-1) فهنا يجب إضافة كل قيمة (f_{n-1}) التي تحصلنا عليها والمقابلة لكل قيمة ل (X_{n-1}) يجب إضافتها إلى قيمة الحل الأمثل للمرحلة اللاحقة وهي $Z_n^{\max}(\epsilon_{n-1})$ الذي وجدنا قيمته في الخطوة السابقة من الحل أي أن:

4



ثم نختار أعظم أو أدنى هذه المقادير، أي:

$$f_{n-2}(\epsilon_{n-2}) = \max(\min)\{f_{n-1} + Z_n^{\max} + (\epsilon_{n+1})\}$$

إن الحل الأمثل المحصل في هذه الحالة نسميه بالحل الأمثل للمسألة حتى المرحلة التي نحن بصدد حلها وهي (n-1). بمعنى الحل الأمثل للمرحلتين (n) و (n-1) مع بعض وهكذا حتى نصل إلى المرحلة الأولى.
المرحلة n-2: متغير المرحلة في هذه الحالة هو x_{n-2} ومتغير الوضعية ϵ_{n-3} ودالة الهدف هنا هي:

$$f_{n-2}(\epsilon_{n-3}, x_{n-2})$$

المرحلة هو:

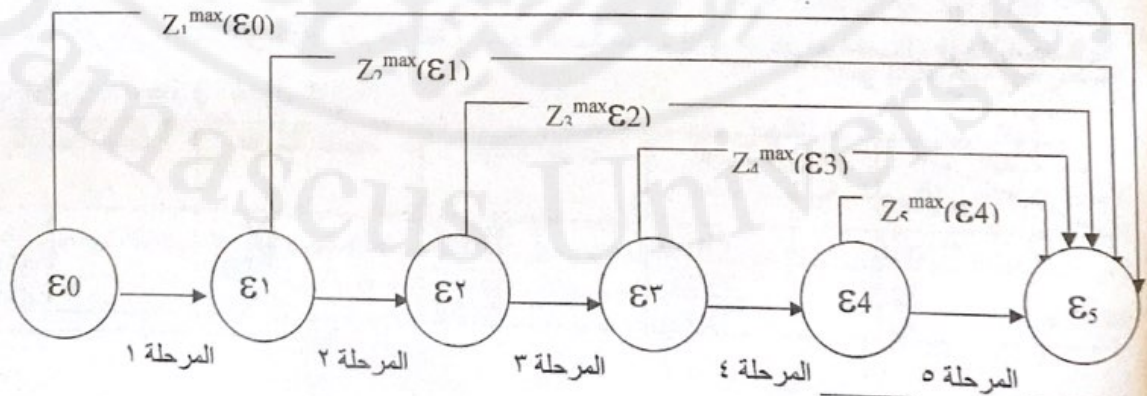
الحل الأمثل للمسألة حتى هذه

$$f_{n-2}^{\max}(\epsilon_{n-3}) = \max(\min)\{f_{n-2}(\epsilon_{n-3}, x_{n-2}) + Z_{n-1}^{\max}(\epsilon_{n-2})\}$$

نستمر هكذا حتى نصل إلى المرحلة الأولى، منطقي أن الحل المثل للمسألة حتى المرحلة الأولى يساوي الحل الأمثل للمسألة ككل

$$Z_1^{\max}(\epsilon_0) = \max(\min)\{f_1(\epsilon_0, x_1) + Z_2^{\max}(\epsilon_1)\}$$

لو كانت لدينا مسألة تتكون من خمس (5) مراحل مثلاً فإن خطوات البحث عن الحل الأمثل لهذه المسألة يمكن التعبير عنها كالتالي:



يبدأ الحل من المرحلة الأخيرة (المرحلة الخامسة) وتكون قيمتها $Z_5^{\max}(\varepsilon_4)$ هي عبارة عن الحل الأمثل للمسألة ككل حتى المرحلة الخامسة، مادام أن المرحلة الخامسة هي المرحلة الأخيرة (لا يوجد بعدها مراحل أخرى) فإن الحل المحلي الخاص بهذه المرحلة هو نفسه الحل المثل للمسألة حتى هذه المرحلة الرابعة وهو يساوي $Z_4^{\max}(\varepsilon_3)$ ، قيمة هذا الحل كما أشرنا سابقا ليس عبارة عن الجمع البسيط للحلين المحليين للمرحلة الخامسة والرابعة بل تتمثل في الاختيار بين قيم حلول المرحلة الرابعة مضاف إليها الحل الأمثل حتى المرحلة الخامسة.

من هذه القيم نختار القيمة المثلى (العظمى أو الدنيا) التي تشكل الحل الأمثل للمسألة ككل حتى المرحلة الرابعة بقية عملية البحث عن الحل الأمثل للمسألة يتسلسل حسب المنهج المشار إليه أعلاه حتى تصل إلى الحل حتى المرحلة الأولى $Z_1^{\max}(\varepsilon_0)$ قيمة هذا الحل تمثل الحل الأمثل للمسألة ككل.

ثالثا: تطبيقات نموذج البرمجة الديناميكية:

من بين التطبيقات الكثيرة لنموذج البرمجة الديناميكية نشير إلى ميدان توزيع الاستثمارات، تعويض الآلات والتجهيزات الإنتاجية، تسيير المخزون وغيرها... الخ.

١/ توزيع الاستثمارات: إن منهج البرمجة الديناميكية في معالجته يمكن توضيحه من خلال المثال التالي:

مثال تطبيقي:

نفترض أن إدارة مؤسسة ما تريد توزيع مبلغ من الموارد المالية المتاحة لها (ε_0) على أربعة مؤسسات إنتاجية تابعة لها (E_1, E_2, E_3, E_4) لتمويل نشاطها الاستثماري تهدف المؤسسة من خلال ذلك إلى الحصول على أقصى ربح ممكن من نشاط هذه المؤسسات مجتمعة. الإشكالية التي تطرح لتمويل نشاط المؤسسات الأربعة من أجل الحصول على أكبر ربح ممكن من نشاطها.

مع العلم أن المبلغ المتبقي (الفائض) عن نشاط المؤسسة (k) يستعمل في تمويل نشاط المؤسسة ($k+1$) توزيع المبلغ المالي (ε_0) على المؤسسات الأربعة وكذلك القيمة الحالية للأرباح المتوقعة الحصول عليها باستعمال المبالغ الموزعة معطاة في الجدول التالي:

المبلغ المستعمل	المؤسسة الأولى ε_1	المؤسسة الثانية ε_2	المؤسسة الثالثة ε_3	المؤسسة الرابعة ε_4
المؤسسة				
x_1	$F_1(x_1)$	$F_2(x_1)$	$F_3(x_1)$	$F_4(x_1)$
x_2	$F_1(x_2)$	$F_2(x_2)$	$F_3(x_2)$	$F_4(x_2)$
x_3	$F_1(x_3)$	$F_2(x_3)$	$F_3(x_3)$	$F_4(x_3)$

x_4	$F_1(x_4)$	$F_2(x_4)$	$F_3(x_4)$	$F_4(x_4)$
-------	------------	------------	------------	------------

معطيات هذا الجدول تعني أن المؤسسة الأولى إذا تلقت مبلغ لتمويل نشاطها مقداره ب (x_1) فإن القيمة الحالية للربح الذي تتوقع الحصول عليه هو $f_1(x_1)$. أما إذا تلقت مبلغ مقداره (x_2)، يكون الربح المتوقع الحصول عليه هو $f_1(x_2)$ ، وهكذا بالنسبة للمؤسسة الثانية إذا تلقت مبلغا استثماريا مقداره (x_1) فإن الربح الذي تتوقع الحصول عليه هو $f_2(x_1)$ أما في حالة حصولها على مبلغ مقداره (x_2) فيكون الربح الذي نحصل عليه هو $f_2(x_2) \dots$ الخ.

لو أردنا حل المشكلة المطروحة دفعة واحدة أو في مرحلة واحدة فإنه يصعب بل وحتى يستحيل علينا فعل ذلك.

لذلك فإنه يتعين علينا من أجل حلها إتباع منهج البرمجة الديناميكية المتمثل في النظر إلى نشاط المؤسسة ككل على أساس أنه عملية متصلة متعددة الخطوات أو المراحل، من أجل إمكانية استعمال البرمجة الديناميكية في الحل نعتبر أن نشاط كل مؤسسة من المؤسسات الأربع هو خطوة أو مرحلة من نشاط المؤسسة ككل.

في المرحلة الأولى، المبلغ المتاح للتوزيع هو المبلغ الابتدائي (ϵ_0) تستعمل منه المؤسسة الأولى E_1 فعلا مبلغ (x_1) لتمويل نشاطها، ما يتبقى للتوزيع في المرحلة الثانية هو مبلغ $\epsilon_1 = \epsilon_0 - x_1$ حيث ϵ_1 في المرحلة الثانية، المبلغ المتبقي المتاح للتوزيع هو (ϵ_1) تأخذ منه المؤسسة الثانية فعلا مبلغ (x_2) لتمويل نشاطها ويبقى للمرحلة الثالثة مبلغ (ϵ_2)، وهكذا يمكن تلخيص عملية توزيع المبالغ على المؤسسات الأربع كالتالي¹:

المبلغ المتبقي (الفائض) الزائد عن حاجتها	المبلغ المستعمل من طرفها	المبلغ الابتدائي المتاح لنشاط المؤسسة	المبالغ الموزعة المؤسسة
ϵ_1	x_1	ϵ_0	E_1
ϵ_2	x_2	ϵ_1	E_2
ϵ_3	x_3	ϵ_2	E_3
ϵ_4	x_4	ϵ_3	E_4

$F_k(x_k)$: دالة الهدف المؤسسة رقم (k) وهي تعبر عن الأرباح المحصل عليها من نشاط المؤسسة k إذا ما

استثمر فيها مبلغ بقيمة x_k

$Z_k(\epsilon_{k-1}, x_k)$ الربح المحصل عليه من طرف المؤسسة (k) وكل المؤسسات اللاحقة لها، أي الربح

المحصل عليه حتى المؤسسة رقم k .

$Z_k^{\max}(\epsilon_{k-1})$ أقصى ربح يمكن الحصول عليه حتى المؤسسة الحالية k بمعنى من المؤسسة الأخيرة وحتى

المؤسسة k .

فمثلا $Z_4^{\max}(\varepsilon_3)$ هو أقصى ربح تحصل عليه المؤسسة حتى المرحل الرابعة وهو يساوي الربح المحصل من طرف المؤسسة الرابعة لأنها هي الأخيرة.

$Z_3^{\max}(\varepsilon_2)$ هو الربح الأقصى المحصل عليه حتى المؤسسة الثالثة (المرحلة الثالثة). بمعنى الربح الأقصى المحصل عليه من نشاط المؤسسة الرابعة والثالثة.

$Z_2^{\max}(\varepsilon_1)$ الربح الأقصى المحصل عليه من طرف المؤسسة من نشاط المؤسسات الرابعة، الثالثة والثانية.

$Z_1^{\max}(\varepsilon_0)$ هو الربح الأقصى المحصل عليه من نشاط المؤسسات الأربعة، وهو بالتالي يعبر عن الربح

الكل للمؤسسة الذي يمكن أن نحصل عليه من توزيع مواردها الأولى (ε_0) على المؤسسات الأربعة، (الرابعة والثالثة والثانية والأولى).

كل العمليات المتسلسلة لمعالجة المشكلة المطروحة يمكن تلخيصها في الجدول التالي:

الربح الكل الأقصى للمؤسسة حتى هذه المرحلة	قيمة الربح الأقصى للمراحل اللاحقة+قيمة الربح في المرحلة الحالية	قيمة الأرباح القصى للمراحل اللاحقة	قيمة دالة الهدف للمرحلة	المبلغ المتبقي للتوزيع للمراحل اللاحقة	المبلغ الموزع لصالحها	المبلغ الابتدائي المتاح لنشاط المؤسسة	
	$Z_5^{\max}(\varepsilon_4)$ $f_{4(x4)+}$	$Z_5^{\max}(\varepsilon_4) = 0$	$F4(x4)$	$\varepsilon_4 = \varepsilon_3 - x4$	$X4$	ε_3	المرحلة IV نشاط المؤسسة الرابعة
	$Z_4^{\max}(\varepsilon_3)$ $f_{3(x3)+}$	$Z_4^{\max}(\varepsilon_3) = 0$	$F3(x3)$	$\varepsilon_3 = \varepsilon_2 - x3$	$X3$	ε_2	المرحلة III نشاط المؤسسة الثالثة
	$Z_3^{\max}(\varepsilon_2)$ $f_{2(x2)+}$	$Z_3^{\max}(\varepsilon_2) = 0$	$F2(x2)$	$\varepsilon_2 = \varepsilon_1 - x2$	$X2$	ε_1	المرحلة II نشاط المؤسسة الثانية
	$Z_2^{\max}(\varepsilon_1)$ $f_{1(x1)+}$	$Z_2^{\max}(\varepsilon_1) = 0$	$F1(x1)$	$\varepsilon_1 = \varepsilon_0 - x3$	$X1$	ε_0	المرحلة I نشاط المؤسسة الأولى

٢/ مسألة استبدال (تعويض التجهيزات الإنتاجية):

■ واحدة من أهم المسائل الاقتصادية التي نصادفها في الواقع الاقتصادية هي مسألة تحديد الإستراتيجية المثلى لتعويض وسائل الإنتاج القديمة (المستعملة) (آلات) تجهيزات... وغيرها.

■ بعبارة أخرى تعويض وسيلة إنتاجية قديمة بأخرى جديدة.

■ إن تقادم الآلات و التجهيزات الإنتاجية. بمرور الزمن نجد منعه في الاهتلاك الفيزيائي والمعنوي. نتيجة لذلك تزداد تكاليف الإنتاج باستعمال هذه الآلات. إن هذا يرجع لزيادة مصاريف استغلال وصيانة هذه الآلات.

■ كما تنخفض إنتاجيتها المسترجعة في نهاية عمرها الإنتاجي.

■ يحين الوقت الذي يجب فيه استبدال التجهيزات القديمة بأخرى جديدة و تكون هذه العملية أكثر منفعة وأكثر فائدة من مواصلة استعمال الآلات القديمة بتكاليف متصاعدة، التجهيزات القديمة يمكن استبدالها بأخرى جديدة في نفس النوع أو بتجهيزات أكثر تطورا من الناحية التقنية

١.٢ الإستراتيجية المثلى: لتعويض التجهيزات الإنتاجية تتمثل في تحديد أجال المثلى لاستغلال التجهيزات القديمة.

١.٢.١. مقياس الأمثلية المعتمد لاتخاذ القرار:

بتحديد أجال الاستبدال يمكن إن يكون الربح المحقق من استغلال هذه التجهيزات أو تدنية تكاليف استغلال هذه الآلات في خلال مدة معينة.

■ إن أهم خاصية يتخذ على أساسها قرار استبدال الآلات هو عمرها الإنتاجي (درجة قدمها)، الآن هذا العامل هو الذي يحدد تكاليف الاستغلال، تكاليف الإنتاج، إنتاجية العمل، قيمة استرجاع التجهيزات بأنفسها فهو يحدد مستوى الناتج عن استعمال هذه الآلات وبالتالي مستوى الأرباح الممكن الحصول عليها، كلما زاد العمر الإنتاجي للآلات كلما زادت تكاليف الاستقلال وانخفض مستوى الأرباح

■ نموذج البرمجة الديناميكية يوفر الجهاز الأمثل لحل مسائل الاستبدال أو التعويض.

■ من أجل إمكانية استعماله نعتبر أن عملية الاستبدال هي مسألة متعددة المراحل (الخطوات) وذلك بتقسيم الفترة التي نريد أن ندرس فيها استغلال التجهيزات إلى أجزاء زمنية (سنوات، فصول...) وغيرها رقمها هو k وعددها هو n ونعتبر أن قرار الاستبدال يتخذ في بداية كل سنة.

١.٢.٢. ب. متغير الحالة X_k :

■ في بداية كل سنة إذن يتخذ إما بالاحتفاظ بالآلات القديمة أو بتعويضها، لذلك فمتغير الحالة في خلال كل مرحلة (k) وهو X_k يأخذ شكلين فقط (ينحصر في إكمانيتين فقط) "قرار الاحتفاظ بالتجهيزات القديمة يمثلته متغير الحالة (X_1)". و "القرار البديل (استبدالها) بأخرى جديدة يمثلته: X_2 "



١.٢ ج. دالة الهدف $f_k(x_k)$: نتيجة للآن متغير الحالة خلال كل مرحلة يمكن أن يأخذ قيمتين فقط،

فإن دالة الهدف $f_k(x_k)$ خلال كل مرحلة تأخذ أيضا قيمتين فقط:

$$f_k(x_k) = \begin{cases} f_k^x \rightarrow x_1 \\ f_k^{x2} \rightarrow x_2 \end{cases}$$

أي أنها تعكس قيمة الربح الأقصى (التكاليف الدنيا) الممكن الحصول عليها في خلال مرحلة ما إذا ما اتخذ قرار بالاحتفاظ بالآلات القديمة حالة (x_1) ، أو تعكس قيمة الربح الأقصى (التكاليف الدنيا) المحققة في خلال السنة المعنية، إذا ما اتخذ قرار باستبدالها (حالة x_2)

■ إذن الحل الأمثل في خلال كل مرحلة يتمثل في حساب قيمتي دالة الهدف f_k^{x2}, f_k^{x1} واختيار

أكبرهما أو (أقلهما) حسب الحالة التعظيم أو التدنية.

■ نفترض أننا نقوم باستغلال تجهيزات إنتاجية خلال فترة تتكون من n سنة إذا كان معروف:

P : القيمة الابتدائية للتجهيزات

F_t : قيمة الإنتاج السنوي المحصل عليه باستعمال تجهيزات ذات العمر t سنة

r_t : تكاليف الإنتاج السنوية باستعمال الآلات ذات عمر (t) سنة

$\rho(t)$: القيمة المسترجعة للتجهيزات ذات العمر (t) سنة في حالة التخلي عنها.

■ تقسيم عملية الاستغلال إلى (n) مرحلة (خطوة) بحيث كل مرحلة (k) تمثل سنة الاستغلال

رقم $k: (k=1, \dots, n)$.

■ متغير الحالة (x_k) : كما أشرنا إلى ذلك أعلاه يمكن أن نأخذ اتجاهين فقط x_1, x_2

بحيث x_1 : الاحتفاظ بالتجهيزات القديمة وموصلة استعمالها

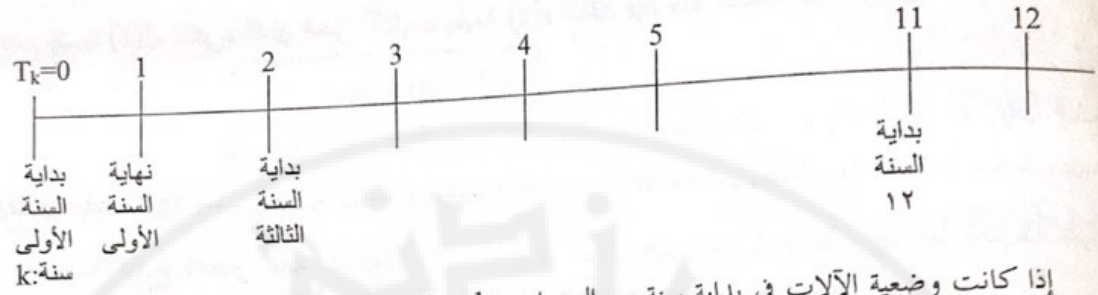
x_2 : تعويض التجهيزات القديم

■ متغير الوضعية t_k : وضعية الآلات كما أشرنا أعلاه، تتميزها بالخصوص عمرها الإنتاجي،

لذلك فإن متغير الوضعية في هذه المسألة هو (t_k) : هو العمر الإنتاجي للتجهيزات.

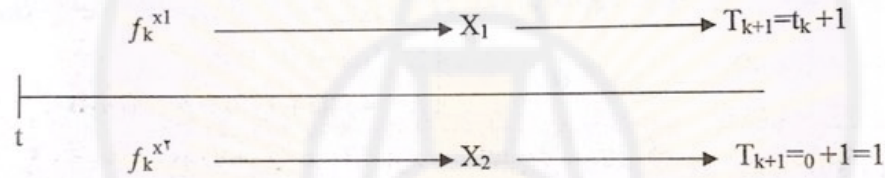
تعتبر أنه في بداية الفترة (بداية السنة الأولى) $k=1$ العمر الإنتاجي للآلات هو $t_1=0$ سنة.

■ مثال تطبيقي: عن مسألة استبدال (تعويض) التجهيزات.^٢



إذا كانت وضعية الآلات في بداية سنة من السنوات (k) مثلاً يميزها عمرها الإنتاجي (t_k) وعمر في بداية هذه السنة اتخاذ قرار الاحتفاظ بها وعدم استبدالها (القرار X_1) فإن الوضعية العمرية لهذه الآلات في نهاية السنة تتحول إلى

$T_{k+1} = t_k + 1$. أي أن عمر الآلات يزداد بـ ١ سنة، أما إذا ما اتخذ في بداية هذه السنة قرار باستبدالها (القرار X_2)، فإن الوضعية العمرية تتحول في نهاية السنة إلى الوضعية $t_{k+1} = 1$ يعني أن الاستبدال في بداية السنة k أما في نهايتها فإن عمر الآلات يصبح يساوي ١ سنة



بمعنى في بداية السنة الموالي ($k+1$) متغير الوضعية يصبح $t_{k+1} = t_k + 1$ أو $t_{k+1} = 1$ على حسب القرار

المتخذ في بداية السنة k

$$\begin{cases} t_k \rightarrow t_{k+1} = t_k + 1 \rightarrow X_2 & \text{القرار ١} \\ t_k \rightarrow 1 \rightarrow X_2 & \text{القرار ٢} \end{cases}$$

لذلك فإن متغير الوضعية في بداية أي سنة k ، ماعدا السنة الأولى، يمكن أن يأخذ القيم من ١ إلى k

١ سنة/١.

مثلاً:

في بداية السنة الثالثة:

عمر الآلة يمكن أن يكون ٢ سنة إذا ما لم يتم استبدال الآلات منذ بداية السنة الأولى، ويمكن أن يكون

$1 \leq t_k \leq k-1$ في حالة ما إذا تم استبدالها في بداية السنة الماضية، كما يمكن أن يكون بينهما أي

دالة الهدف f : قيمة دالة الهدف خلال مرحلة ما (k) تأخذ كما أشرنا سابقاً، قيمتين

(أ)

على حسب القرار المتخذ X_2, X_1 .

إذا ما تم اتخاذ القرار (x_1) خلال المرحلة k ، فإنه باستعمال الآلات القديمة سوف يتم الحصول على إنتاج بقيمة $f(t)$ ، الشيء الذي تحمل تكاليف بقيمة $r(t)$ لذلك فإن دالة الهدف (دالة الربح) ستكون:

$$f_t^{x_1} = f(t) - r(t)$$

أما إذا ما اتخذ القرار بالتعويض $3x_2$ في بداية هذه المرحلة، فإننا نحصل على دخل قيمته $\phi(t)$ الناتج عن بيع الآلات القديمة (قيمة الاسترجاع) $+ f(0)$:

قيمة الناتج المحصل عليه باستعمال الآلة الجديدة خلال هذه السنة (-) مطروح منها تكاليف شراء باستعمال الآلات الجديدة p و $r(0)$ تكاليف الإنتاج خلال هذه السنة باستعمال الآلات الجديدة لذلك فإن دالة الهدف (دالة الربح) في هذه الحالة تكون

$$= \phi(t) + f(0) - p - r(0)$$

(ب) القيمة العظمى لدالة الهدف Z_K^{MAX}

إن القيمة العظمى لدالة الهدف Z_K^{MAX} خلال هذه المرحلة k تساوي

$$z_k^{max}(t_k) = \max \begin{cases} f_k^{x_1} f(t) - r(t) \rightarrow x_1 \\ f_k^{x_1} = f(t) + f(0) - p - r(0) \rightarrow x_2 \end{cases}$$

من اجل تحديد الإستراتيجية المثلى لاستغلال التجهيزات الانتاجية المعطاة لا يكفي أن نعرف القيمة المثلى لدالة الهدف خلال كل مرحلة على حدة ثم جمع هذه القيم، بل يجب تحديد قيمة دالة الهدف خلال كل مرحلة باعتماد على قيمتها في المراحل الأخرى، لذلك نبدأ الحساب من الخلف (من المرحلة الأخيرة).

■ الربح الأقصى الممكن الحصول عليه حتى المرحلة الأخيرة (n) يساوي:

$$z_n^{max}(t_n) = \max \begin{cases} f(t) - r(t) \rightarrow x_1 \\ \phi(t) + f(0) - p - r(0) \rightarrow x_2 \end{cases}$$

نظراً لأن: $z_{n+1} \max(t_{n+1}) = 0$

الربح الأقصى الممكن الحصول عليه حتى المرحلة الأخيرة (n-1) يكون:

$$z_{n-1}^{max}(t_{n-1}) = \max \begin{cases} f(t_{n-1}) - r(t_{n-1}) + z_n^{max}(t_{n+1}) \rightarrow x_1 \\ \phi(t_{n-1}) - f(0) - p - r(0) + z_n^{max}(t_{n+1}) \rightarrow x_2 \end{cases}$$

■ قيمة $z_n^{max}(1)$ تعني الربح الأقصى المحصل عليه حتى السنة n ، إذا كان عمر الآلات في بداية السنة n كان يساوي 1 سنة.

بمعنى أن هذه الآلة تم تجديدها في بداية هذه السنة أي السنة (n-1) التي نحن بصدددها وهكذا حتى المرحلة الأولى:
أي نحسب:

$$z_1^{\max}(t_1); z_2^{\max}(t_2) \dots; z_{n-1}^{\max}(t_{n-1}), z_n^{\max}(t_n)$$

الربح الأقصى المحصل عليه من استغلال الآلات حتى بداية الفترة (أي حتى السنة الأولى) عندما يكون $t=0$.

■ إذا كانت إستراتيجية الاستبدال تعتمد ليس على تحقيق أعلى ربح ممكن من استغلال الآلات ولكن على تحقيق أقل تكلفة من هذا الاستغلال، أي إذا كان المطلوب هو: تحديد الآجال المثلى لاستبدال الآلات القديمة الجديدة خلال فترة استغلال عددها (n) سنة، من أجل تحقيق أدنى تكلفة استغلال ممكنة.

*/ دالة الهدف في هذه الحالة هي:

$$\min\{f_k^{x1}, f_k^{x2}\}$$

قيمة هذه الدالة خلال كل سنة (k) تعتمد كما رأينا في الحالة السابقة على القرار المتخذ بالاحتفاظ (X_1) أو باستبدال (X_2).

■ عندما يتخذ قرار بالاحتفاظ فإن قيمة دالة الهدف خلال سنة (k) $f_k^{x1} = r(t)$
أي قيمة تكاليف الاستغلال خلال هذه السنة.

■ أما عند اتخاذ القرار (X_2) فإن دالة الهدف هي $f_k^{x2} = p_k + r(0) - \phi(t)$

حيث أن:

p - هي القيم الابتدائية للآلات

$\phi(t)$ - هي قيمة الاسترجاع بعد البيع

$r(0)$ - تكاليف الاستغلال خلال السنة الأولى (عندما $t=0$) إذا بدأنا الحساب من الخلف فإن قيمة

التكاليف الدنيا المحققة حتى السنة n هي:

$$z_n^{\min}(t_n) = \min \begin{cases} r(t) \rightarrow x_1 \\ p_n \rightarrow r(0) - \phi(t) \rightarrow x_2 \end{cases}$$

$$z_{n+1}^{\min}(t_{n+1}) = 0 \quad \text{الآن}$$

أما قيمة التكاليف الدنيا حتى السنة n-1 وهي:

$$z_{n-1}^{\min}(t_{n-1}) \text{ فتكون:}$$

إلى هنا تأتي
الفرع وسنتطرق
طريقة إدارة ومراقبة تنفيذ المشاريع (PERT).

$$z_{n-1}^{\min}(t_{n-1}) = \min \begin{cases} r(t_{n-1}) + z_n^{\min}(t_n = t_{n+1}) \rightarrow x1 \\ p_{n-1} + r(0) \phi(t_{n-1}) + z_n^{\min}(t_{n=1}) \rightarrow x2 \end{cases}$$

طريقة إدارة ومراقبة تنفيذ المشاريع (PERT).

الفرع الثالث: إدارة ومراقبة تنفيذ المشاريع:

في هذا الفرع نتعرض لدراسة طريقة إدارة ومراقبة تنفيذ المشاريع، هذه الطريقة تسمى PERT* أي طريقة مراجعة وتقييم المشاريع أو تسمى أحيانا بطريقة المسار الحرج**. إن نظام PERT يعتبر بدون شك النظام الأكثر حداثة وفعالية من ضمن كل طرق بحوث العمليات المعروفة. ظهرت هذه الطريقة إلى الوجود بمناسبة صنع صاروخ polaris من طرف مؤسسة الأبحاث الفضائية الأمريكية (NASA) سنة ١٩٥٤.

من أجل إمكانية استعمال هاته الطريقة يلزم:

- أن يكون المشروع قابلا للتجزئة إلى نشاطات محددة ومستقلة نسبيا.
 - معرفة تسلسل هاته النشاطات وترتيبها زمنيا: أي تبعيتها لبعضها البعض في الزمن.
 - يلزم معرفة المدة المتوقعة لتنفيذ كل نشاط.
- إن استعمال طريقة PERT أو cpm يتم خلال المراحل التالية:
١. مرحلة تخطيط المشروع: بناء الشبكة الخاصة بالمشروع.
 ٢. تحديد الخريطة الزمنية (الجدول الزمني) لتنفيذ المشروع.
 ٣. علاقة الزمن بالتكلفة: أي تأثير المواد المخصصة لتنفيذ المشروع على زمن تنفيذ المشروع.
 ٤. مراقبة وتقييم المشروع، مقارنة بين ما خطط ونفذ.
 - ٥.

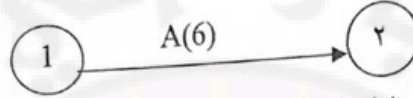
أولاً: قواعد إعداد وتكوين الشبكة:

١/ قواعد إعداد الشبكة: إن المرحلة الأولى من استعمال طريقة PERT هي تحديد كل النشاطات التي يتكون منها المشروع وتمثيلها في مخطط يوضح أو يبين علاقة التابع بينها وهذا ما يسمى بالشبكة. إن القيام بهاته المرحلة (تكوين شبكة PERT) يخضع لعدة قواعد وطرق أهمها:

أ) أهم المصطلحات والمفاهيم المستعملة في تكوين الشبكة:

المشروع: هو مجموعة من النشاطات المختلفة ومتسلسلة بحيث يبدأ تنفيذ بعضها فقط عند الانتهاء من تنفيذ البعض الآخر. أي بمعنى أن النشاطات تنفذ في تسلسل زمني.

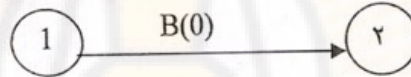
النشاط: هو جزء من المشروع وهو يتكون من مجموعة من العمليات المنظمة يجب القيام بها، بحيث يتطلب وقت لإتمامه وتصريف أموال (إمكانات ووسائل) في شبكة PERT النشاط يمثل بقوس (سهم) وعلى هذا القوس يوضع عادة مدة تنفيذ هذا النشاط أي الوقت اللازم لتنفيذه ونوع هذا النشاط: مثلاً:



بحيث A هو اسم النشاط (مثلاً الطلاء الخارجي لبناية، حفر الأساس... الخ) و 6 هو الوقت اللازم لتنفيذ هذا النشاط مثلاً (6 أسابيع، 6 أشهر... الخ) هذا النشاط يبدأ بالحادثة 1 وينتهي بالحادثة 2، واتجاه السهم يمثل الاتجاه الزمني في تنفيذ النشاط.

والسهم الذي يبين فقط تبعية نشاط ما الآخر يسمى بالسهم الوهمي والنشاط الذي يمثله يسمى بنشاط الوهمي.

مثلاً:



الحادث: نقطة النهاية والبداية الزمنية للنشاط تسمى بالحادث، والحادث هو نقطة زمنية لا تستغرق وقت وهي تمثل بداية نشاط ما، بداية نشاط أو نهاية آخر، أو نهاية نشاط فقط.

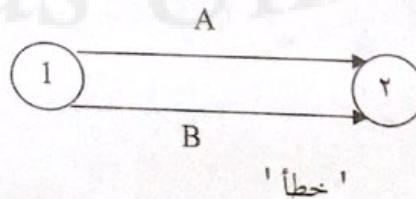
الحادث يعبر عليه في الشبكة بدائرة وبداخلها رقم وهو رقم الحادث.

ب) قواعد إعداد الشبكة:

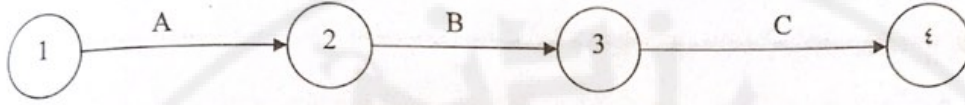
أولاً: قبل أن يبدأ أي نشاط يلزم أن تنتهي كل النشاطات السابقة له.

ثانياً: السهم يوضح فقط منطق الأولوية، أي أولوية التتابع في تنفيذ النشاطات. فطول السهم واتجاهه مثلاً ليس متناسباً مع طول المدة الزمنية اللازمة لتنفيذ النشاط.

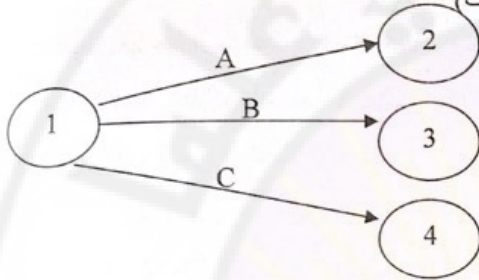
ثالثاً: لا يمكن لحادثين مختلفين أن يجمعهما أكثر من قوس. بمعنى لا يمكن أن يجمعهما أكثر من نشاط، بعبارة أخرى: لا يمكن لنشاطين أو أكثر مختلفين أن يكون لهما نفس البداية ونفس النهاية.



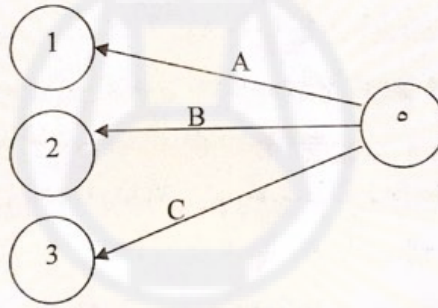
رابعاً: أرقام الحوادث لا يمكن أن تتكرر أثناء الشبكة الواحدة.
 خامساً: لكل شبكة لا يمكن أن يكون إلا حادث ابتدائي واحد وحادث نهائي واحد.
 سادساً: النشاطات إما أن تكون متتالية في تنفيذها ويرمز إليها كالتالي



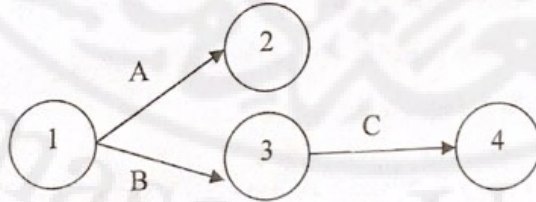
وإما أن تبدأ أي تبدأ مع بعضهما (تنتقل من نفس الحدث)



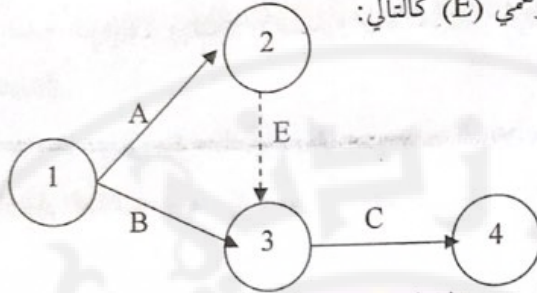
وإما أن تنتهي مع بعضهما (أي تنتهي عند نفس الحادثة)



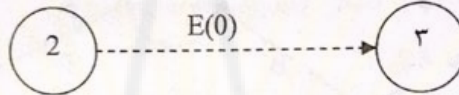
سابعاً: النشاط الوهمي هو ذلك النشاط الذي لا يتطلب لتنفيذه لا مال، لا وسائل ولا وقت. فهو نشاط
 نضطر إلى استعماله في تكوين الشبكة لإبراز تبعية نشاط ما في تنفيذه لنشاط آخر سابق له فقط.
 مثال: إذا كانت لدينا الشبكة الجزئية التالية: ¹



نرى هنا أن النشاط (C) لا يتوقف في تنفيذه على الانتهاء من تنفيذ النشاط (A) بل يتوقف على الانتهاء من (B) فقط ولكن إذا أردنا أن نجعل النشاط (C) يتوقف في تنفيذه النشاطين السابقين له (B,A) مع بعض فما علينا إلا أن نضيف النشاط الوهمي (E) كالتالي:



بحيث أن السهم المتقطع الذي ينطلق من الحادثة (٢) وينتهي عند الحادثة (٣) يرمز إلى هذا النشاط الوهمي:



وهو يعني أن النشاط (C) لا يبدأ حتى تنتهي النشاطات (B , A)

٢/ تكوين الشبكة:

بعد معرفة أهم المصطلحات، التعاريف والقواعد الخاصة بتكوين الشبكة نبدأ في تكوين شبكة انجاز المشروع، والشبكة عبارة عن تمثيل بياني في مجمله حيث يعبر عن كل نشاط بسهم، ويفصل هاته الأسهم تتحدد الحوادث الزمنية.

ومن أجل تكوين الشبكة يلزم تكوين قائمة بالنشاطات الضرورية اللازمة لتنفيذ المشروع وتحديد علاقات التابع في تنفيذ هاته النشاطات ابتداء من النشاطات التي يبدأ بها المشروع إلى النشاطات التي ينتهي بها. سوف نوضح كيفية تكوين شبكة PERT من خلال المثال التالي.

مثال:

لدينا مشروع يتمثل في تخطيط وتنفيذ (دراسة) لحالة سوق سلعة ما.

■ أولاً: نقوم بتحديد النشاطات التي يتكون منها المشروع ومنطق التابع بينهم علاقة السابق

باللاحق.

-نفترض أن المشروع يبدأ من قيام المسؤولين على تحقيق دراسة وتحديد أهداف هذا التحقيق (النشاط

نسميه A)

- بعد هاته الدراسة يمكن أن يبدأ المسؤولون في توظيف الموظفين الذين يقومون بجمع المعلومات

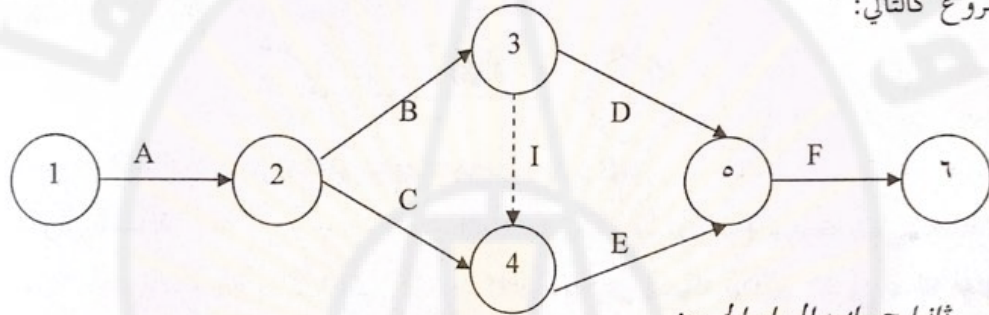
(المحققين) (النشاط B)

وفي نفس الوقت انطلاق عملية التوظيف تبدأ عملية إعداد الاستمارة التي تملأ من طرف العائلان (النشاط C)

-بعد عملية التوظيف وإعداد الاستمارة يبدأ تدريب الموظفين (المحققين) على استعمال وملاءمته الاستمارة (نشاط D)

-بعد إعداد الاستمارة يقوم المسؤولون باختبار قائمة العائلات التي يشملها التحقيق (النشاط E)
-بعد اختيار العائلات وبعد إنهاء تدريب المحققين يمكن إنجاز التحقيق الميداني و إجراء تحليل نتائجه (النشاط F)

■ ثانياً: بعد أن حددنا النشاطات وعلاقتها ببعضها يمكن الآن تكوين الشبكة الخاصة بهذا المشروع كالتالي: ^١



ثانياً حساب المسار الحرج:

بعدما تم رسم الشبكة حسب القواعد المشار إليه آنفا نأتي الآن إلى تحديد المسار الحرج وذلك بعد حساب أزمدة المسارات المختلفة للشبكة، فمالقصد بالمسار الحرج؟
يعرف المسار الحرج على أنه: أطول مسارات شبكة الأعمال زمناً. والمسار يتكون من النشاطات المتعاقبة من بداية الشبكة حتى نهايتها ^٢
وهناك طريقتين لحساب أزمدة هاته المسارات:

١. طريقة الحساب إلى الأمام (من بداية الشبكة إلى نهايتها)

٢. طريقة الحساب من الخلف (من نهاية الشبكة إلى بدايتها)

١. الحساب إلى الأمام:

يعني الحساب إلى الأمام بداية حساب أزمدة النشاطات من الحادث الأول (الابتدائي) للمشروع (للشبكة) في اتجاه النهاية، والهدف من ذلك هو 'حساب الأوقات المبكرة لبداية أو نهاية' النشاطات المكونة للمشروع.

هذا الحساب يبدأ من أكبر وقت مبكر لبداية الحادث الأول (الابتدائي) في المشروع والذي نفرضه
(عشوائيا) = صفر أي $Es_1 = 0 \text{ temps}$

من أجل أن تتمكن من إجراء الحساب إلى الأمام يجب معرفة المصطلحات التالية:
- الوقت المبكر للحادثة (j) نرسم له ب Es_j :

البداية المبكرة لحادث ما (j) (Earliest start).

- الوقت المبكر لبداية نشاط ما (jz):

أو البداية المبكرة لنشاط ما (jz) نرسم له ب ES_{jz} .

- الوقت المبكر لنهاية نشاط ما (jz):

النهاية المبكرة (Earliest complétion).

ويجب أيضا معرفة القواعد التالية:

I (مهمما كانت بداية الحادث مبكرة فإنها لا تحصل إلا بعد أن تنتهي كل النشاطات السابقة له وخاصة أطولهم إنجازا (وقت) بمعنى النشاط ذو النهاية المبكرة الأطول (Ec_{jz} الأطول) وبالتالي فالبداية المبكرة لأي حادث وهي:

Es_{jz} : أكبر نهاية مبكرة (Ec_{jz}) للنشاطات التي تسبق أو تصب في هذا الحادث يعني:

$$Es_z = \{Ec_{jz}\}$$

$$J=1 \dots n$$

II) النهاية المبكرة لأي نشاط (Ec_{jz}) تساوي البداية المبكرة لهذا النشاط (Es_{jz}) زائد الطول الزمني

لهذا النشاط وهي d_{jz} أي:

$$Ec_{jz} = Es_{jz} + d_{jz}$$

III) إذا كان لدينا نشاط ما (jz) فإن البداية المتكررة له Es_{jz} هي عبارة عن البداية المبكرة (Es_j)

للحادث الذي يبدأ منه هذا النشاط أي: $Es_{jz} = Es_j$.

IV) إذا كانت هناك عدة نشاطات تنطلق من الحادث (j) فإن الوقت المبكر لبداية هاته النشاطات

كلها = الوقت المبكر لبداية الحادث 'j' الذي تنطلق منه:

$$Es_j = Es_{jz1} = Es_{jz2} = Es_{jz3} = \dots$$

V) انطلاقا من I، II، III، IV، فإنه بإمكاننا حساب النهاية المبكرة لكل نشاط كالتالي

$$Es_j = Es_j + D_{jz}$$

وبالتالي (I) يمكن كتابتها كالتالي: ^١

$$Es_z = \max \{ Es_j + Dj_z \}$$
$$J = 1 \dots n$$

٢. الحساب إلى الخلف

الحساب إلى الخلف يعني حساب أزمدة النشاطات المكونة للمشروع (الشبكة) ابتداء من نهاية الشبكة، أي ابتداء من الحادث (النشاط) الذي يشكل نهاية المشروع.

والهدف من ذلك هو حساب الأزمدة المتأخرة والمسموح بها لبداية ونهاية كل نشاط أي أن الحادث الأخير يلزم أن يكون الوقت المبكر لبدايته = الوقت المتأخر لبدايته = الوقت المتأخر لبدايته

$$Es_z = Ls_z$$

إذن الحساب إلى الخلف يبدأ من الحادث الأخير للشبكة. وعبرة الوقت المتأخر المسموح يمكن أن يتعطل به بداية تنفيذ هذا النشاط بدون أن يتسبب في زيادة (إطالة) الوقت الكلي لإنجاز المشروع ككل من أجل أن تتمكن من إجراء الحساب للخلف يجب معرفة المصطلحات التالية:

-البداية المتأخرة (المسموح بها) لحادث ما (j): ASTEST START Is_j

-البداية المتأخرة (المسموح بها) لنشاط ما (j): LS_{jz}

-النهاية المتأخرة (المسموح لها) لنشاط ما (j): LASTAST COMPLETION LC_{jz} لكي نستطيع أن نجري

الحساب إلى الخلف يلزم أن نعرف كيف نحسب البدايات المتأخرة للحوادث التي تنطلق منها.

النشاطات وكذلك البدايات والنهايات المتأخرة للنشاطات المشكلة للمشروع، وبالتالي نستطيع ان نعرف الزمن الأكثر والأكثر تأخيرا لبداية المشروع والأكثر تأخيرا الانتهاء. وهذا يتطلب معرفة القواعد التالية:

I (البداية المتأخرة لأي حادث (j) مثلا وهي (Is_j) = أقل أو أقصر بداية متأخرة للنشاطات التي تنطلق من هذا الحادث يعني:

$$Ls_j = \min \{ Is_{jz} \}$$
$$Z = 1 \dots n$$

وهذا لأن الحادث يبدأ عندما يبدأ أقل النشاطات تأخيرا، حيث أن النشاط الذي تكون له أقل بداية متأخرة هو الذي عمليا يبدأ قبل غيره. وبالتالي فالحادث الذي تنطلق منه لا يمكن أن يتأخر أكثر من ذلك. ولكن كل بداية متأخرة لأي نشاط (Ls_{jz}) = النهاية المتأخرة له (LC_{jz}) ناقص مدة هذا النشاط (d_{jz}) أي: ^٢

$$Ls_{jz} = LC_{jz} - d_{jz}$$

وبالتالي:^١

$$L_{sj} = \min \{L_{sjz} - d_{jz}\} \\ Z=1 \dots n$$

(II) النهاية المتأخرة لأي نشاط (L_{cjz}) = البداية المتأخرة للحادث الذي يأتي بعده (L_{S_z}) أو: البداية المتأخرة لأي حادث (l_{s_z}) = النهاية المتأخرة للنشاط السابق له (l_{cjz}) أو النشاط الذي يصب فيه أي:
 $l_{cj} = l_{s_z}$ ، $l_{s_z} = l_{cjz}$

(III) وإذا كانت هناك عدة نشاطات تصب في الحادث Z فإن الوقت المتأخر لنهاية هاته النشاطات = الوقت المتأخر لبداية الحادث الذي تصب فيه هاته النشاطات : $l_{s_z} = l_{cj1z} = l_{cj2z} = \dots$

(IV) انطلاقا من I, II, III فإنه يمكن أن تكتب البداية المتأخرة لأي نشاط كالتالي:^١

$$L_{sjz} = L_{s_z} - d_{jz}$$

وتصبح البداية المتأخرة لأي حادث كالتالي:

$$L_{sj} = \min \{L_{s_z} - d_{jz}\} \\ Z=1 \dots n$$

بعد أن قمنا بشرح طريقتين المعتمدة لحساب الأزمنة المسارات تأتي ل:

تحديد الوقت الاحتياطي لتحديد وحساب المسار الحرج.

حساب المسار (الوقت) الحرج وتحديد الوقت الاحتياطي.

المسار الحرج:

نقول أن النشاط (jz) يقع على المسار الحرج إذا وفقط إذا:

$$Es_{jz} = Ls_{jz} \quad (^\circ 1)$$

$$Ec_{jz} = Lc_{jz} \quad (^\circ 2)$$

$$Ec_{jz} - Es_{jz} = Lc_{jz} - Ls_{jz} = 0 \quad (^\circ 3)$$

- مجموعة مدد النشاطات الوقعة على المسار الحرج تعطينا مدة إنجاز المشروع.

- نستطيع تركيز الموارد على النشاطات الحرجة وذلك بتحويل الوسائل من النشاطات غير الحرجة إلى

النشاطات الحرجة.

- في كل شبكة يوجد على الأقل مسار حرج واحد.

- يمكن أن يكون كل المسارات في الشبكة حرجة.

الوقت الاحتياطي الفائض أو الكلي:^١

الوقت الاحتياطي الكلي هو المدة التي يمكن أن نحرك فيها تنفيذ نشاط ما بدون أن يؤثر على مدة إنجاز المشروع ككل.

إن كل النشاطات التي لا تقع على المسار الحرج بصفة منطقية تمتلك وقتاً فائضاً احتياطياً كلياً. فتحدد الوقت الاحتياطي الكلي يلعب دوراً مهماً في تخفيض تكاليف إنجاز النشاطات غير الحرجة وذلك من خلال تمديد سرعة إنجاز النشاط، وهذا ما يتطلب وسائل أقل مما كان مخطط وبالتالي تحمل تكاليف أقل.

وعليه يمكن تحديد الوقت الاحتياطي الكلي كما يلي:

"الوقت الاحتياطي الكلي = البداية المتأخرة لنشاط ما - البداية المبكرة له" أي:

$$TF = Ls_{jz} - Es_{jz}$$

أو: "النهاية المتأخرة لهذا النشاط - النهاية المبكرة له" أي:

$$TF = Lc_{jz} - Ec_{jz}$$

الوقت الاحتياطي الحر:

الوقت الاحتياطي الحر (الهامش الزمني الحر) لأي نشاط هو المدة القصوى التي نستطيع أن نؤخر بها بداية إنجاز هذا النشاط بدون ما نؤثر أو نؤخر البداية المبكرة للحادث الذي يأتي بعده، وعليه يمكن تحديد الوقت الاحتياطي الحر كما يلي:

"الوقت الاحتياطي الحر = الوقت المبكر لبداية الحادث - النهاية مبكرة لهذا النشاط" أي: $FF = Es_z -$

Ec_{jz}

ملاحظة:

من أجل أن نعرف أو نحدد المسار الحرج لابد من أن نتحقق الشروط المذكورة أنفاً أي أن:

$$0 = FF = TF$$

'فيما بعد يأتي المثال الموضح لذلك'.

ثالثاً: علاقة الزمن بالتكلفة: ^٢

توجد علاقة وطيدة بين مدة تنفيذ أي نشاط ومستوى تكلفته فعادة ما يؤدي تخفيض آجال تنفيذ أي نشاط ما يعني تحمل تكلفة إضافية وذلك بإضافة موارد ووسائل إضافية (ساعات عمل إضافية، تأجير عمال إضافيين، استخدام وسائل وموارد بكميات أكبر...) .

فالسؤال المطروح: عند تخفيض مدة إنجاز مشروع ما هي تكلفة هذا التخفيض؟

من أجل الإجابة على السؤال المطروح لابد من اعتماد البيانات التالية:

المدة العادية: (D_n) لتنفيذ كل نشاط

المدة السريعة: (D_c) لتنفيذ كل نشاط

من هنا نعرف حدود المدة الزمنية القصوى المتاحة لتخفيض مدة تنفيذ كل نشاط، وذلك بطرح المدة السريعة لتنفيذ النشاط من مدة تنفيذه العادية أي: $(Dn-Dc)$

تكلفة المدة العادية: Cn لإنجاز النشاط

تكلفة المدة السريعة: Cc لإنجاز هذا النشاط

ثم نحسب الزيادة في التكلفة الناتجة عن تخفيض مدة تنفيذ كل نشاط إلى أقصاها وذلك بطرح التكلفة العادية من تكلفة تنفيذه السريعة أي: $(Cc-Cn)$ ، ثم نحسب الزيادة التي سوف تتحملها المؤسسة والناتجة على تخفيض (الإسراع) في مدة تنفيذ كل نشاط بوحدة زمنية واحدة (ساعة، أسبوع، شهر، سنة... الخ) وذلك بالفرق في تكلفة كل نشاط على الفرق في مدة تنفيذ هذا النشاط أي:

$$(Cc-Cn)/Dn-Dc$$

ثم نقوم بتكوين جدول يشمل كل هاته المعطيات

النشاط	normal عادي		crach سريع		مدة التخفيض القصوى	الزيادة في التكلفة	الزيادة في التكلفة لكل وحدة زمنية
	المدة duration ١	التكلفة Cost ٢	المدة Duration ٣	التكلفة cost ٤	٣-١	٢-٤	٢-٤/٣-١

في هذا الحال نكون قد حصلنا على التكلفة الإضافية التي تتحملها المؤسسة عن تخفيضها مدة تنفيذ كل نشاط بوحدة زمنية واحدة.

فبعد قرار المؤسسة بتخفيض مدة إنجاز المشروع السؤال المطروح هو: ما هي الأنشطة التي يجب الإسراع في تنفيذها قبل غيرها؟

لقد رأينا أن مدة تنفيذ الأنشطة الحرجة هي التي تتحكم في مدة إنجاز المشروع ككل. أي هي التي تشكل أقصى مدة مثلى لإنجاز المشروع. ومن هنا فإن تقليص مدة إنجاز المشروع الإجمالية تعني مبدئياً تقليص مدة تنفيذ نشاطاته الحرجة.

فما هو النشاط الحرج الذي نبدأ بإنقاص مدة تنفيذه قبل غيره؟ أم هل هذا بدون اعتبار؟ في الحقيقة نختار النشاط الذي يكون إنقاص وقته يتطلب زيادة في تكلفة إنجاز المشروع أقل من غيره. أن نختار أرخص تخفيض لهذا وقبل إجراء عملية التقليص يجب أن نعرف المسار الحرج والنشاطات المكونة له ومددها الزمنية وكذلك الأوقات الاحتياطية للمسارات غير الحرجة.

نبدأ في عملية التخفيض وذلك بدأ بالنشاط الأرخص ولكن بكم نخفض؟ هل بكل المدة المتاحة لتخفيض كل نشاط أم نخفض بالوحدة الزمنية (اليوم، الشهر، بالسنة...) لماذا؟

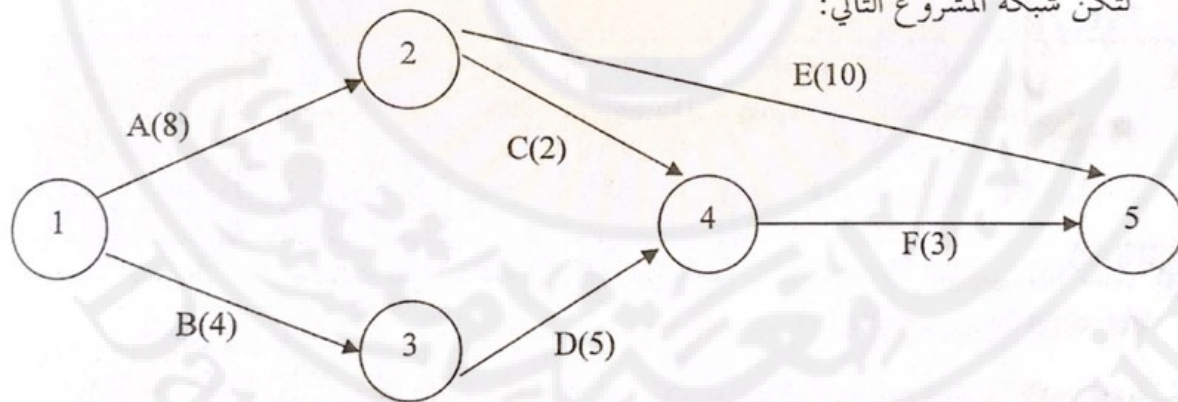
لأننا لو قلصنا النشاط الأرخص بكل المدة الزمنية المتاحة لتخفيضه، نخشى أن يظهر لنا بعد ذلك مساراً حرجاً آخر وبالتالي ربما يكون جزء من المدة المخفضة من ذلك النشاط غير ضرورية وغير مجدية، لذلك نخفض بالتدريج بالوحدة الزمنية ونتبع في كل مرة ظهور مسار حرج جديد.

ومن أجل أن نتمكن من ذلك نقوم مسبقاً بترتيب المسارات الأخرى (غير الحرجة) في الشبكة حسب الوقت الاحتياطي المتاح لهاته المسارات، أي حسب قربها من المسار الحرج فأقرب مسار إلى المسار الحرج هو ذلك الذي يكون عنده أقل وقت احتياطي، ونقارن مدته مع مدة المسار الحرج (وهي تكافئ مدة تنفيذ المشروع)، فنستخرج المدة التي يلزم أن نخفض بها الانشطة الرخيصة للمسار الحرج الحالي حتى يتساوى هذا المسار الحرج مع اقرب المسارات غير الحرجة الجديد والمسار الأقرب إليه وهكذا.¹

وسوف نوضح كل هذا في المثال التالي:

مثال: ²

لتكن شبكة المشروع التالي:



الجدول التالي يعطينا الأزمنة العادية (التي على الشبكة) والسريعة لتنفيذ كل نشاط وكذلك التكاليف العادية والسريعة لكل نشاط.

النشاط	العادية		السريعة	
	المدة	التكلفة	المدة	التكلفة
Djz				
(A) ١-٢	٨ أسبوع	١٠٠ مليون د	٦ أسبوع	٢٠ م د
(B) ١-٣	٤ أسبوع	١٥٠ مليون	٢ أسبوع	٣٥٠ م د
(C) ٢-٤	٢ أسبوع	٥٠	١ أسبوع	٩٠ م د

٢٠٠ م	أسبوع ٥	١٠٠	أسبوع ١٠	٢-٥ (E)
٢٠٠ م	أسبوع ١٤	١٠٠	أسبوع ٥	٣-٤ (D)
١٠٠ م	أسبوع ١٤	٨٠	أسبوع ٣	٤-٥ (F)

المطلوب:

١/ ما هي مقدار الزيادة في التكاليف الذي يلزم أن تتحملها المؤسسة إذا أرادت أن تخفض مدة إنجاز المشروع ب ٦ أسابيع فقط.

٢/ ما هي الزيادة في التكاليف إذا أرادت هاته المؤسسة تخفيض مدة الانجاز إلى أقصى حد ممكن.

