



منشورات جامعة دمشق
كلية العلوم

الهندسة التحليلية

الدكتور
منير محمد الشحاف
جامعة دمشق - كلية العلوم

الأستاذ الدكتور
محمد صبح
جامعة دمشق - كلية العلوم

الأستاذ الدكتور
محي الدين بجبوح
جامعة دمشق - كلية العلوم

المقَّومون العلمون

الأستاذ الدكتور محي الدين بجبوح - الأستاذ الدكتور محمد صبح

١٤٣٣-١٤٣٢ هـ
٢٠١٢-٢٠١١ م

جامعة دمشق



المقدمة

نضع بين أيدي الطلاب الأعزاء كتاب الهندسة التحليلية وفق منهاج السنة الأولى (ر.ف) وهو يتألف من ستة فصول. يعرض الفصل الأول المتجهات وأهم خواصها من جداء سلمي ومتجهي لتجهين وجداء مختلط ومتجهي مضاعف لثلاثة متجهات، ويبحث في نقل المحاور سواء بالانسحاب أو بالدوران أو بالانسحاب والدوران. ويعد هذا الفصل مدخلاً يساعد في الفصل الثالث والخامس على رد معادلات منحنيات ومسطوح الدرجة الثانية لأشكالها النظامية.

ويعرض الفصل الثاني المستويات والمستقيمات في الفضاء الثلاثي وأوضاع هذه المستويات والمستقيمات في الفضاء الثلاثي وأوضاع هذه المستويات والمستقيمات وحزمها وتلاقيها وتوازيها وزواياها معينين بشكل خاص عن كل ما سبق بمعادلات متجهية وديكارتية ووسطية.

ويدرس الفصل الثالث المعادلة العامة لمنحنيات الدرجة الثانية بمتحولين ورد هذه المعادلة للشكل النظامي، كما يدرس أهم الخواص لهذه المنحنيات وأوضاع المستقيمات بالنسبة لهذه المنحنيات ويتعرض للمراكز والأقطار والمستقيمات المماسية.

أما الفصل الرابع فيتعرض للكرة في الفضاء الثلاثي وأوضاع مستوٍ ومستقيم بالنسبة لكرة والمستوي الأساسي لكرتين والمحور الأساسي لثلاث كرات والتعامد، كما يدرس الدائرة ومعادلتها في الفضاء الثلاثي.

أما في الفصل الخامس فتتعرّف على المعادلات الديكارتية والوسيطية لسطح ومنحني في الفراغ وعلى المعادلة المختزلة والعامّة لسطوح الدرجة الثانية وتدرس رد المعادلة العامّة إلى الشكل المختزل وتصنيف السطوح التي تحملها حسب قيم أمثالها وذلك من خلال القيم غير المتبدلة ثم نقدم لمحة عن السطوح المسطرة وكيفية كتابة معادلة سطح أسطوانتي و سطح مخروطي.

ويتعرض الفصل السادس لرسم المنحنيات ديكارتياً أو وسيطياً أو قطبياً.

هذا ولقد قسمنا كل فصل إلى فقرات وكل فقرة إلى عدد من البنود وأوردنا مجموعة من الأمثلة المحلولة تبعاً للعناوين المدروسة كما أوردنا في نهاية كل فصل عدداً غير قليل من التمارين والمسائل حول موضوعات ذلك الفصل .

إننا نأمل أن نكون قد أضفنا للمكتبة العربية مرجعاً مناسباً في الهندسة التحليلية. كما نأمل أن نكون قد وفقنا بأداء بعض الواجب العلمي في هذا المضمار.

الدكتور
منير الشحف

الأستاذ الدكتور
محمد صبيح

الأستاذ الدكتور
محي الدين بحبوح

الفصل الأول

المتجهات والإحداثيات

1 - الأنظمة الإحداثية :

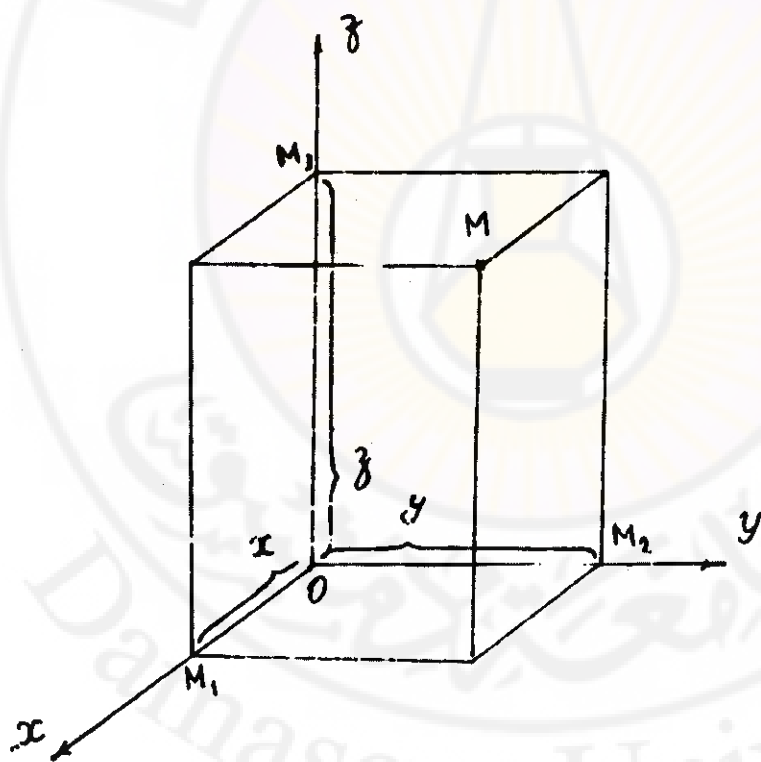
لما كانت الأشكال الهندسية والمنحنيات والسطوح هي مجموعات جزئية من الفراغ الثلاثي، وكما نعلم أن دراسة هذه الأشكال هي الموضوع الأهم في الهندسة التحليلية، من هنا نرى الحاجة للربط بين مجموعة نقاط الفراغ وبين نقاط المجموعة:

$R^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$ ليتاح لنا النظر لهذه الأشكال على أنها مجموعات جزئية منها وبالتالي تمثيلها رياضياً بعلاقات في عدة متحولات، وهذا بدوره يسمح لنا بمذجة أي مسألة في الهندسة التحليلية رياضياً. وبعد إيجاد الحل المطلوب نقوم بتمثيله هندسياً. لذلك لا بد عند دراسة الهندسة التحليلية من الخطوة الأولى دراسة الأنظمة الإحداثية ومنها :

1-1 الإحداثيات الديكارتية.

سنفرض ثلاثة محاور موجهة متقاطعة في O نرمز لها بـ $x'Ox$ و $y'Oy$ و $z'Oz$ بحيث تكون $x'Ox$ و $y'Oy$ متعامدين وموازيين للمستوي الأفقي و $z'Oz$ عمودياً على هذا المستوى ومتجهاً نحو الأعلى. وإذا كانت M نقطة ما مثبتة في الفراغ، نرسم منها ثلاثة مستويات عمودية على ox و oy و oz فتقطع الأول بـ M_1 والثاني بـ M_2 والثالث بـ M_3 شكل (1-1) (لاحظ أن المستويات والنقاط وحيدة من أجل M) نرمز بـ x و y و z للبعد الجبري لـ M_1 و M_2 و M_3 على الترتيب عن O ، وندعوها

الإحداثيات الديكارتية للنقطة M بالنسبة للحملة المعروفة، حيث سندعو O مبدأ الإحداثيات وندعو x و y و z بفاصلة وترتيب وراقم M على التالي. وعندما نكون قد وجدنا تمثيلاً وحيداً لـ M في $\mathbb{R}^3$. إذا لاحظنا أنه من أجل أي ثلاثة أعداد حقيقية يمكننا أن نحدد النقاط M_1 و M_2 و M_3 وأن نرسم منها المستويات المتعامدة على المحاور المقامة عليها لتتقفي في نقطة واحدة (تكون هذه النقطة تمثيلاً وحيداً لـ M في $\mathbb{R}^3$ وبالتالي نرى أنه هناك تقابلاً بين المجموعة $\mathbb{R}^3$ وبين مجموعة نقاط الفراغ وكما أن المحور $x'Ox$ هو تمثيل هندسي لـ $\mathbb{R}$ ونقاط المستوي $\mathbb{R}^2$ هي تمثيل هندسي لـ $\mathbb{R}^2$ فإن مجموعة نقاط الفراغ هي تمثيل هندسي لـ $\mathbb{R}^3$.



الشكل (1-1)

لاحظ أن التمثيل الهندسي للمعادلة $x = c$ في المسعى الذي هو عبارة عن مستقيم عمودي على ox في النقطة التي فاصلتها c أصبح في الفراغ مسجياً عمودياً على ox في النقطة نفسها و $z = -1$ مثلاً هي معادلة المستوي الذي يقع تحت oxy ويوازيه ويبعد عنه بمقدار واحد. وأن $x = 0$ و $y = 0$ و $z = 0$ تمثل على الترتيب المستويات oyz و oxz و oxy ، كما ونلاحظ أن $y = x$ منتصف الربع الأول في المستوي oxy هي في الفراغ معادلة المستوي الذي يحوي oz ويشترك مع المستوي oxy بمنتصف الربع الأول. وهكذا ...

نحصل عند نمذجة بعض المسائل في الهندسة التحليلية على علاقات طويلة مما يؤدي إلى تعقيد الحل الشيء الذي يدعو للبحث عن طريقة أخرى لتمثيل نقطة في الفراغ، بمعنى لتعيين نقطة بطريقة وحيدة سنستعير عن x, y, z بقم (متحولات) أخرى هي (r, θ, z) أو (ρ, θ, ϕ) والتي سنعرضها في الفقرة التالية وذلك حسب طبيعة المسألة المفروضة.

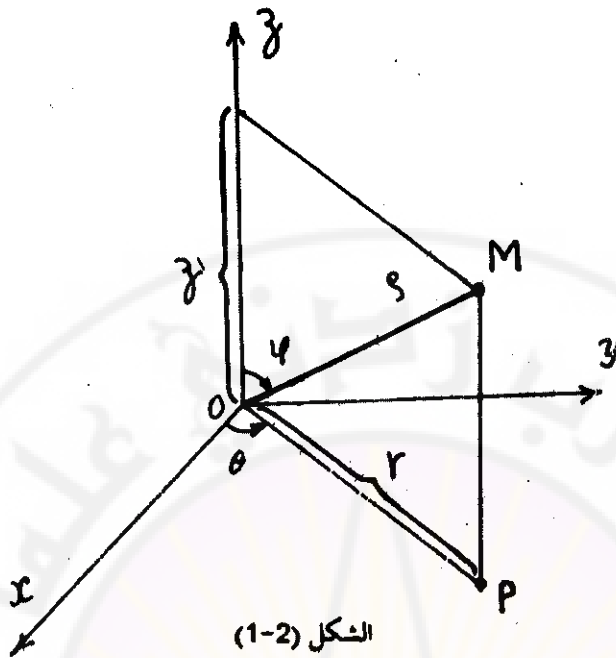
2-1 الإحداثيات الأسطوانية :

لتكن xyz جملة ديكارتية قائمة ومباشرة و M نقطة ما من الفراغ سنعرّف القيم التالية (r, θ, z) حيث (r, θ) هي الإحداثيات القطبية لـ p (مسقط M على oxy) و z راقم M وسندعوها الإحداثيات الأسطوانية للنقطة M . فكما نعلم r هو بعد p عن o أي $0 \leq r < \infty$ والزاوية θ هي الزاوية الموجبة بين المحور ox والمحور op : $0 \leq \theta < 2\pi$ أما z فهو متحول حقيقي $-\infty < z < \infty$. بسهولة يمكن التحقق من صحة العلاقات التالية بين الإحداثيات الأسطوانية والإحداثيات الديكارتية (الشكل (1-2)).

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta \quad z = z \quad (1-1)$$

ويمكن أن نعين r, θ بدلالة x و y :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \tan \theta = \frac{y}{x} \quad z = z \quad (2-1)$$



ويجب أن نلاحظ أن للعلاقة الثانية حلين θ_1, θ_2 يرتبطان وفق $|\theta_2 - \theta_1| = \pi$ موافقين لنقطة واحدة ويجب أن نختار القيمة المناسبة لإشارات y, x فتكون P في الربع الأول أو الثاني أو الثالث أو الرابع حسبما تكون إشارات (y, x) هي $(+, +)$ أو $(+, -)$ أو $(-, -)$ أو $(-, +)$ على الترتيب.

3-1 الإحداثيات الكروية :

لتكن نقطة منسوبة إلى جملة ديكارتية قائمة ومباشرة. وتعرف الإحداثيات الكروية للنقطة M بأنها القيم (ρ, θ, ϕ) حيث ρ هو بعد النقطة M عن مبدأ الإحداثيات، إذا $0 \leq \rho < \infty$ و θ هي الزاوية بين ox و op (P هي إسقاط M على oxy) ونفرض $0 \leq \theta < 2\pi$ ، بينما ϕ هي الزاوية بين oz و om وعندها $0 \leq \phi < \pi$ وبهذا التعريف لاحظ أنه إذا تغير كل متحول ضمن المجال المحدد له فإن M تمسح جميع نقاط الفراغ مرة واحدة فقط. ببساطة يمكن أن نستنتج العلاقات التالية بين الإحداثيات الديكارتية والكروية للنقطة M (انظر الشكل (1-2)).

$$x = \rho \sin \varphi \cos \theta \quad y = \rho \sin \varphi \sin \theta \quad z = \rho \cos \varphi \quad (3-1)$$

ومن هنا نستنتج الإحداثيات الكروية بدلالة الديكارتية :

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad , \quad \lg \theta = \frac{y}{x} \quad , \quad \lg \varphi = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \quad (4-1)$$

ويمكن من (1-1) و (2-1) و (3-1) أن نوجد العلاقات التالية بين الإحداثيات الكروية (ρ, θ, φ) والإحداثيات الأسطوانية (r, θ, z) .

$$r = \rho \sin \varphi \quad , \quad \theta = \theta \quad , \quad z = \rho \cos \varphi \quad (5-1)$$

$$\rho = \sqrt{r^2 + z^2} \quad , \quad \theta = \theta \quad , \quad \lg \varphi = \frac{r}{z}$$

ملاحظة (1) : إن الزاوية θ في النظامين الأسطواني والكروي لنقاط المحور oz غير معرفة والزاوية φ لمبدأ الإحداثيات في النظام الكروي غير معرفة أيضاً لذلك ندعو هذه النقاط بالنقاط المخرجة.

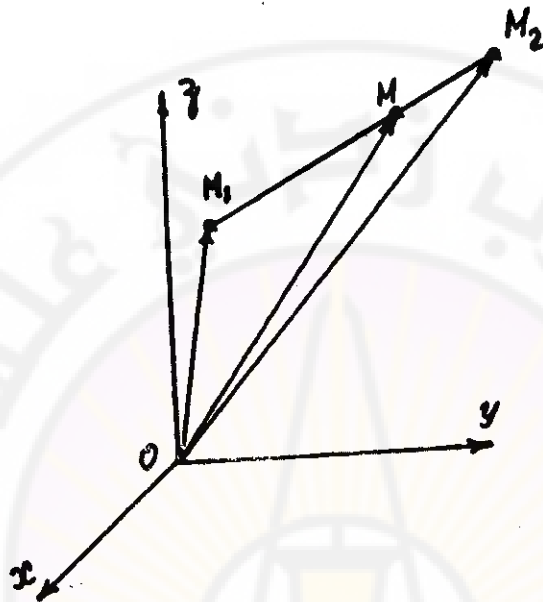
4-1 إحداثيات نقطة تقسم قطعة مستقيمة:

لتكن $M_1(x_1, y_1, z_1)$ و $M_2(x_2, y_2, z_2)$ نقطتين منسوبتين لجملة محاور إحداثية قائمة ومباشرة $oxyz$ و $M(x, y, z)$ نقطة تقع على القطعة المستقيمة M_1M_2 أو على امتدادها، ولنفرض أن الاتجاه من M_1 إلى M_2 هو الاتجاه الموجب وأن :

$$\frac{\overline{M_1M}}{\overline{MM_2}} = \lambda \quad (6-1)$$

حيث $\overline{M_1M}$ هو القياس الجبري لـ M_1M . نقول إن M تقسم M_1M_2 بنسبة λ داخلياً أو خارجياً عندما $\lambda > 0$ أو $\lambda < 0$ على الترتيب. لتعيين إحداثيات النقطة M بدلالة إحداثيات M_1 و M_2 نرسم الأشعة $\overrightarrow{OM_1}$ ، $\overrightarrow{OM}$ ، $\overrightarrow{OM_2}$ ومن الشكل (3-1) يتضح أن:

$$\vec{OM} = \vec{OM}_1 + \vec{M_1M}$$



الشكل (1-3)

إذا لاحظنا أن العلاقة (6-1) تكافئ

$$\vec{M_1M} = \lambda \vec{MM_2}$$

وعوضنا في المساواة السابقة

$$\vec{OM} = \vec{OM}_1 + \lambda \vec{MM_2}$$

$$\vec{OM} = \vec{OM}_1 + \lambda (\vec{OM}_2 - \vec{OM})$$

أو :

$$\vec{OM} = \frac{\vec{OM}_1 + \lambda \vec{OM}_2}{1 + \lambda} \quad (7-1)$$

نسقط هذه العلاقة على المحاور الإحداثية فنكون إحداثيات M :

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} , y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} , z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}$$

ملاحظة (2) : عندما نغير λ في منتصف M_1, M_2 نكون $\lambda = 1$ ونصبح

إحداثيات M :

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} , y = \frac{y_1 + y_2}{2} , z = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

2 - الأشعة (المجهرات) في الفضاء الثلاثي :

2-1 الأشعة وخواصها :

تعريف: الشعاع المقيد هو قطعة مستقيمة حُدِّد عليها اتجاه. استناداً على التعريف يمكن أن نقول : إن الشرط اللازم والكافي لتعين شعاعاً مقيداً هو تحديد نقطتين واتجاه لهما أو نقطة بداية ومنحى وطول واتجاه وهي ما تسمى بعناصر الشعاع المقيد. نرمز للشعاع عادةً بحرف يملؤه إشارة سهم مثل $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots$ فإذا كان $\vec{a} = \vec{PQ}$ فيكون طوله (أو طويلته) والتي سنرمز لها بـ $|\vec{a}|$ المسافة بين P و Q ، ونعرف الشعاع المعاكس لـ $\vec{a}$ والذي سنرمز له بـ $-\vec{a}$ بأنه $\vec{b} = -\vec{a}$ أي هو الشعاع المنطبق على $\vec{a}$ والمخالف له بالاتجاه. أما الشعاع الصفري فهو الشعاع الذي طوله يساوي الصفر ونرمز له بـ $\vec{0}$ ونقول عن شعاعين $\vec{a}$ و $\vec{b}$ أنهما متوازيان (نعبّر عن ذلك بالرمز $\vec{a} // \vec{b}$) إذا كان لهما حاملان متوازيان.

لنعرّف الآن علاقة المساواة التالية على مجموعة كل الأشعة في الفراغ: $\vec{a} = \vec{b}$ التي تتحقق إذا وفقط إذا كانا متوازيين ولهما نفس الاتجاه والطويلة، علاقة المساواة هذه عبارة عن علاقة تكافؤ فهي تجزئ مجموعة جميع الأشعة إلى مجموعات جزئية ندعوها صفوف تكافؤ، حيث يتألف كل صف من جميع الأشعة المتساوية

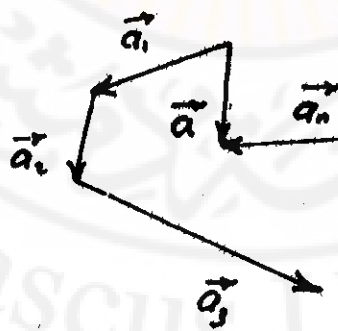
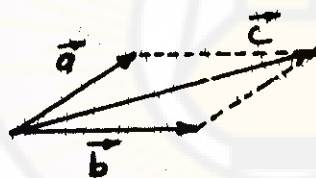
وفق التعريف السابق، فإذا اخترنا شعاعاً ما ينتمي إلى أحد هذه الصفوف فسوف لا نفرق بينه وبين أي شعاع ينتمي إلى صفه (يكفي لشعاعين كي يتساوبا أن ينتميا إلى صف واحد) أي لا فرق بين شعاعين متساويين في الطويلة والاتجاه والمنحني ومختلفين في نقطة البداية .

2-2 العمليات على الأشعة :

نختار من كل صف تكافؤ ممثلاً لعناصر صفه ونعرف على مجموعة الأشعة هذه عملية الجمع التالية $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ حيث $\vec{c}$ هو قطر متوازي الأضلاع المنشأ على الشعاعين $\vec{a}, \vec{b}$ (الشكل (2-1)) المتحدين في المبدأ. ويمكن تعميم هذه العملية لنعرف بمجموع الأشعة $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$:

$$\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_n = \vec{a}$$

وذلك بأن نجعل بداية الشعاع $\vec{a}$ تنطبق على نهاية $\vec{a}_1$ فتكون بداية $\vec{a}$ هي بداية $\vec{a}_1$ ونهايته هي نهاية $\vec{a}_n$ الشكل (2-1).



الشكل (2-1)

بناءً على تعريف مجموع شعاعين يمكن أن نعرف فرق شعاعين $\vec{a}, \vec{b}$
 $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ بأنه مجموع $\vec{a}, -\vec{b}$.

$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

وبالتالي يمكن أن نتحقق من أن مجموعة الأشعة مزودة بعملية الجمع تشكل زمرة تبديلية، عنصراً محايداً الشعاع الصفري ونظير $\vec{a}$ هو $-\vec{a}$.

ضرب شعاع بعدد حقيقي: سنعرف عملية ضرب شعاع بعدد حقيقي كما يلي:
 نأخذ $\vec{a} \neq \vec{0}$ شعاعاً حقيقياً، α عدد حقيقي، الشعاع $\vec{b} = \alpha \vec{a}$ هو الشعاع الذي له منحنى $\vec{a}$ ويتفق معه بالاتجاه أو يخالفه حسبما تكون $\alpha > 0$ أو $\alpha < 0$ على الترتيب وطوله يساوي $|\vec{b}| = |\alpha| |\vec{a}|$.

بناءً على ذلك يمكن ببساطة التحقق من صحة ما يلي :

- (1) $0 \vec{a} = \vec{0}$
- (2) $\alpha (\beta \vec{a}) = (\alpha \beta) \vec{a}$
- (3) $(\alpha + \beta) \vec{a} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{a}$
- (4) $\alpha (\vec{a} + \vec{b}) = \alpha \vec{a} + \alpha \vec{b}$

حيث : $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

شعاع الوحدة : سنعرف شعاع الوحدة بأنه أي شعاع طوله يساوي 1. أما شعاع الوحدة لشعاع مفروض $\vec{a}$ والذي سنرمز له بـ $\vec{u}_a$ هو شعاع الوحدة الذي له حامل واتجاه $\vec{a}$ ويمكن التحقق من :

$$\vec{u}_a = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a} \quad (2-2)$$

ملاحظة: مجموعة الأشعة في $\mathbb{R}^3$ المزودة بالعمليتين السابقتين تشكل فراغاً شعاعياً ثلاثي البعد.

الإثبات : بفرض أن المحاور ox, oy, oz تحمل الأشعة المستقلة خطياً :

$$\vec{a} = \vec{OA}, \vec{b} = \vec{OB}, \vec{c} = \vec{OC}$$

على الترتيب الشكل (2-2) و $\vec{d} = \vec{OD}$. بما أن الأشعة مستقلة خطياً، فلا يمكن أن تقع في مستوٍ واحد وبالتالي المستويات π_1, π_2, π_3 المارة من D والموازية لـ $(\vec{a}, \vec{b})$ و $(\vec{a}, \vec{c})$ و $(\vec{b}, \vec{c})$ تتقاطع مع المحاور ox, oy, oz في النقاط M_x, M_y, M_z عندها يتضح أنه :

$$\vec{d} = \vec{OM}_x + \vec{OM}_y + \vec{OM}_z$$

وحسب النتيجة الأولى يوجد α, β, γ بحيث :

$$\vec{OM}_x = \alpha \vec{a}, \vec{OM}_y = \beta \vec{b}, \vec{OM}_z = \gamma \vec{c}$$

وبالتالي $\vec{d} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c}$ والمبرهنة صحيحة.

ندعو أي ثلاثة أشعة لا تقع في مستوٍ واحد قاعدة أو أساساً لمجموعة الأشعة في الفراغ ونقول إن القاعدة ما متعامدة إن كانت أشعتها الثلاثة متعامدة مثنى وتكون منظمة إن كانت أطوال هذه الأشعة متساوية وتساوي الواحد، ومباشرة إن كانت موجهة حسب قاعدة اليد اليمنى.

2-3 مركبات شعاع :

التوطئة السابقة تساعدنا في دراسة المنحنيات بشكل تحليلي وذلك بأن نتخذ ثلاثة محاور متعامدة ومباشرة $x'ox, y'oy, z'oz$ تتقاطع في O ونحمل المنحنيات المنظمة $\vec{a}, \vec{j}, \vec{k}$ على الترتيب وعندها أي شعاع $\vec{q} = \vec{OM}$ وحسب المبرهنة السابقة يكتب:

$$\vec{a} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k} \quad (4-2)$$

هنا (x, y, z) إحداثيات M . أي أنه وفقاً لهذه القاعدة يتعين أي شعاع تماماً بثلاثة أعداد حقيقية (مساقط نهائية)، ندعوها مركبات أو مساقط الشعاع $\vec{a}$ على المحاور المفروضة أو أمثال توجيه الشعاع $\vec{a}$ ونعبر عن ذلك بالرمز $\vec{a}(x, y, z)$.

مثال (1): إذا فرضنا أن xyz جملة محاور متعامدة ومنظمة ومباشرة وأن

$\vec{u}_1(a_1, b_1, c_1)$, $\vec{u}_2(a_2, b_2, c_2)$ شعاعين اختياريين و $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ أي نقطتين من $\mathbb{R}^3$ و $\alpha \in \mathbb{R}$ واستخدمنا العلاقات (1-2) نجد :

$$1) \quad \vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 = (a_1 + a_2) \vec{i} + (b_1 + b_2) \vec{j} + (c_1 + c_2) \vec{k}$$

$$2) \quad \alpha \vec{u}_1 = \alpha a_1 \vec{i} + \alpha b_1 \vec{j} + \alpha c_1 \vec{k}$$

$$3) \quad -\vec{u}_1 = -a_1 \vec{i} - b_1 \vec{j} - c_1 \vec{k}$$

(5-2)

$$4) \quad |\vec{u}_1| = \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}$$

$$5) \quad \vec{u}_1 = 0 \Leftrightarrow a_1 = b_1 = c_1 = 0$$

$$6) \quad \vec{u}_1 // \vec{u}_2 \Leftrightarrow u_1 = \lambda u_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \lambda$$

$$7) \quad \vec{M_1 M_2} = \vec{OM_2} - \vec{OM_1} = (x_2 - x_1) \vec{i} + (y_2 - y_1) \vec{j} + (z_2 - z_1) \vec{k}$$

والبعد بين M_2 و M_1 :

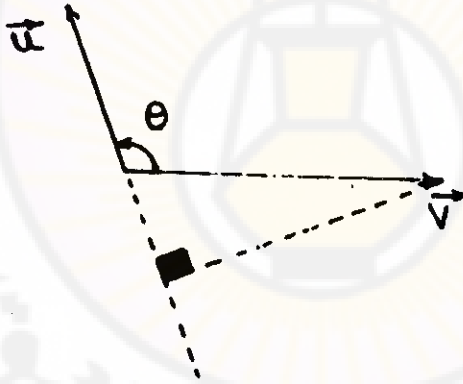
$$|\vec{M_1 M_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

2-4 الجداء الداخلي لشعاعين :

تعريف: الجداء الداخلي تحليلياً اعتماداً على التعريف الهندسي له. كما نعلم أن الجداء الداخلي لشعاعين $\vec{u}$, $\vec{v}$ الذي يرمز له بـ $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos \theta \quad (6-2)$$

حيث θ الزاوية بينهما وهي دائماً $0 \leq \theta \leq \pi$. لاحظ أن الجداء الداخلي لشعاعين هو كمية عددية تساوي جداء طوليهما أحدهما في مسقط الآخر عليه وتكون موجبة أو سالبة حسبما تكون الزاوية θ حادة أو منفرجة الشكل (2-3).



الشكل (2-3)

إذا فرضنا $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ ثلاثة أشعة اختيارية في الفراغ الثلاثي و α قيمة عددية يمكن ببساطة التحقق من صحة الخواص التالية :

- a) $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$
b) $\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$
c) $(\alpha \vec{A}) \cdot \vec{B} = \vec{A} \cdot (\alpha \vec{B}) = \alpha (\vec{A} \cdot \vec{B})$ (7-2)
d) $\vec{A} \cdot \vec{A} = |\vec{A}|^2$
e) $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0 \Leftrightarrow \vec{A} \perp \vec{B}$

ليكن شعاعين $\vec{A} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}$, $\vec{B} = b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + b_3 \vec{k}$ منسوبين للحزمة المتعامدة المنظمة المباشرة $Oxyz$ فاعتماداً على ما سبق نجد الصيغة التحليلية للجداء الداخلي :

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \quad (8-2)$$

والذي منه واعتماداً على (8-2) يمكن تعيين الزاوية θ بين الشعاعين $\vec{A}$ و $\vec{B}$:

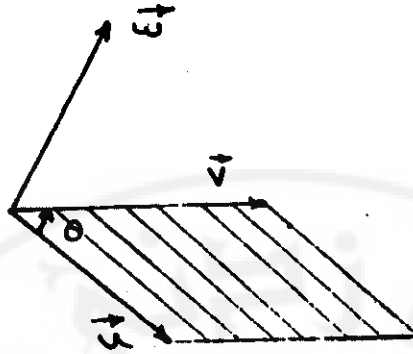
$$\cos \theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}| \cdot |\vec{B}|} = \frac{a_1 a_1 + b_1 b_1 + c_1 c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}} \quad (9-2)$$

5 - 2 الجداء الخارجي لشعاعين:

تعريف : الجداء الخارجي للشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ والذي يرمز له بـ $\vec{u} \wedge \vec{v}$ أو $\vec{u} \times \vec{v}$ هو الشعاع $\vec{W}$ الذي طوله :

$$|\vec{W}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin \theta \quad 0 \leq \theta \leq \pi \quad (10-2)$$

(حيث θ الزاوية بين $\vec{u}$ و $\vec{v}$) ومنحاه عمودي على مستويهما واتجاهه هو الاتجاه الذي يجعل الثلاثية $\vec{u}, \vec{v}, \vec{W}$ مباشرة . الشكل (4-2).



الشكل (2-4)

بفرض $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ ثلاثة أشعة اختيارية في الفراغ الثلاثي. نستنتج اعتماداً على التعريف السابق أن :

- 1) $|\vec{A} \times \vec{B}|$ هي مساحة متوازي الأضلاع المنشأ على الشعاعين $\vec{A}$, $\vec{B}$
- 2) $\vec{A} \times \vec{B} = 0 \Leftrightarrow \vec{A} \parallel \vec{B}$
- 3) $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$
- 4) $(\lambda \vec{A}) \times \vec{B} = \vec{A} \times (\lambda \vec{B}) = \lambda (\vec{A} \times \vec{B})$ (11-2)
- 5) $(\vec{A} + \vec{B}) \times \vec{C} = \vec{A} \times \vec{C} + \vec{B} \times \vec{C}$
- 6) $\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}$

ويمكن تعميم الخاصتين الأخيرتين . مثلاً :

$$7) \vec{A} \times \left(\sum_{i=1}^n \vec{B}_i \right) = \sum_{i=1}^n (\vec{A} \times \vec{B}_i)$$

بناءً على ما سبق نستنتج الصيغة التحليلية للجداء الخارجي للشعاعين

$$\vec{A}(a_1, a_2, a_3) \cdot \vec{B}(b_1, b_2, b_3) \quad \text{مفروضين:}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = (a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}) \times (b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + b_3 \vec{k}) =$$

$$= (a_2 b_3 - a_3 b_2) \vec{i} + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \vec{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \vec{k}$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \quad (12-2)$$

مثال (1) : لنفرض مبدأ الإحداثيات بداية الشعاعين :

$$\vec{op} = 2\vec{i} + \vec{k} \quad \vec{oq} = -\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$$

احسب مساحة متوازي الأضلاع opmq وزواياه. عيّن شعاع واحدة الناظم على مستوية.

الحل: حسب (1) في (11-2) مساحة متوازي الأضلاع S تساوي طول الجداء الخارجي للشعاعين المفروضين:

$$\vec{op} \times \vec{oq} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -3\vec{i} + 3\vec{j} + 6\vec{k}$$

حسب (4) في (5-2) نجد :

$$S = |\vec{op} \times \vec{oq}| = 3\sqrt{6}$$

ومن التعريف $\vec{n} = -3\vec{i} + 3\vec{j} + 6\vec{k}$ هو شعاع عمودي على مستوي $\vec{op}$. وبالتالي :

$$\vec{u}_n = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = -\frac{1}{\sqrt{6}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{j} + \frac{2}{\sqrt{6}}\vec{k}$$

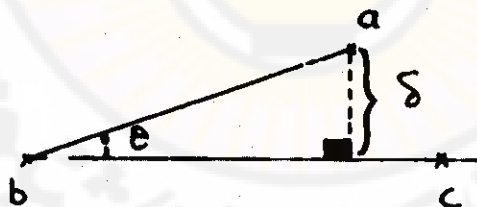
بفرض θ الزاوية بين $\vec{A}$. $\vec{B}$ ، من (2-9) نجد :

$$\cos \theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}| \cdot |\vec{B}|} = \frac{-4}{\sqrt{5.14}}$$

مثال (2) : احسب البعد بين النقطة $a(1,2,3)$ والمستقيم المار من $b(-1,2,1)$ و $c(4,3,2)$.

الحل : واضح من الشكل (2-5) أن البعد المطلوب δ :

$$\delta = |\vec{ba}| \sin \theta$$



الشكل (2-5)

لكن :

$$|\vec{ba} \times \vec{bc}| = |\vec{ba}| \cdot |\vec{bc}| \sin \theta$$

ومنه :

$$\delta = \frac{|\vec{ba} \times \vec{bc}|}{|\vec{bc}|}$$

لحساب هذه القيمة نجد أولاً :

$$\vec{ba} = 2\vec{i} + 2\vec{k} , \quad \vec{bc} = 5\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$$

$$\vec{ba} \times \vec{bc} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2\vec{i} + 8\vec{j} + 2\vec{k}$$

نعوض في δ :

$$\delta = \frac{|-2\vec{i} + 8\vec{j} + 2\vec{k}|}{|5\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}|} = \frac{2}{3} \sqrt{6}$$

مثال (3) :

بفرض الأشعة $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ تحقق $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$ أثبت أن :

$$\vec{c} \times \vec{a} = \vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c}$$

الحل :

$$\vec{c} \times \vec{a} - \vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} \times \vec{a} + \vec{b} \times \vec{a} =$$

$$= (\vec{c} + \vec{b}) \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{a} = 0$$

أي $\vec{c} \times \vec{a} = \vec{a} \times \vec{b}$ بالطريقة نفسها يمكن إثبات $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c}$.

2 - 6 الجداء المختلط لثلاثة متجهات :

تعريف : لتكن $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ ثلاثة أشعة من الفراغ الثلاثي. نعرف الجداء المختلط لها ونرمز له بـ $(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C})$ بالعلاقة :

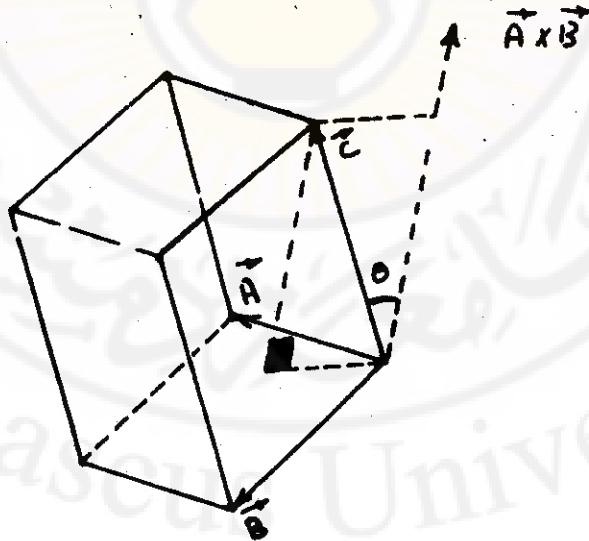
$$(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}) = (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} \quad (13-2)$$

خواص الجداء المختلط :

(1) إن لم تكن الأشعة $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ صفيرية ولا تقع في مستوي واحد، فالقيمة المطلقة للجداء المختلط يساوي حجم متوازي السطوح المنشأ عليها :
لأنه من التعريف ومن تعريف الجداء الداخلي :

$$(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}) = (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} = |\vec{A} \times \vec{B}| \cdot |\vec{C}| \cos \theta$$

فإذا لاحظنا أن $|\vec{A} \times \vec{B}|$ تساوي مساحة متوازي الأضلاع المنشأ على $\vec{A}$ و $\vec{B}$ و $|\vec{C}| \cdot |\cos \theta|$ طول ارتفاع متوازي السطوح المتعلق به نجد مباشرة أن الجداء المختلط هو حجم متوازي السطوح المذكور. انظر الشكل (2-6).



الشكل (2-6)

(2) إذا فرضنا :

$$\vec{A} (a_1, a_2, a_3) , \vec{B} (b_1, b_2, b_3) , \vec{C} (c_1, c_2, c_3)$$

فإن :

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \quad (14-2)$$

من (8-2) و (12-2) نجد :

$$\begin{aligned} (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} &= [(a_2 b_3 - a_3 b_2) \vec{i} + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \vec{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \vec{k}] \cdot (c_1 \vec{i} + c_2 \vec{j} + c_3 \vec{k}) \\ &= c_1 (a_2 b_3 - a_3 b_2) + c_2 (a_3 b_1 - a_1 b_3) + c_3 (a_1 b_2 - a_2 b_1) \end{aligned}$$

والنتيجة هو منشور المحدد في (14-2) حسب سطره الأخير.

(3) المساواة التالية صحيحة $(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}) = (\vec{B}, \vec{C}, \vec{A}) = (\vec{C}, \vec{A}, \vec{B})$

هذه الخاصية تنتج مباشرة من الخاصية (2) ومن خواص المحددات (لا تتغير قيمة محدد نتيجة تبديل سطرين مرتين).

(4) إن كانت المتجهات $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ ليست صفيرية ، فالشرط اللازم

والكافي لكي تقع في مستوى واحد هو $(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}) = 0$. أيضاً هذه الخاصية نتيجة مباشرة لـ (14-2) وخواص المحددات.

مثال (4) : ما هو الشرط اللازم والكافي لكي تقع النقطة $P(x, y, z)$ في

المستوي المار من النقاط الثلاث التالية :

$$P_3(-1, 3, 0) , P_2(2, -1, 1) , P_1(1, 2, 2)$$

الحل : يلزم ويكفي لكي تقع النقاط الأربع P, P_1, P_2, P_3 في مستوى واحد

أن تقع الأشعة الثلاثة $\vec{P_1 P}, \vec{P_1 P_2}, \vec{P_1 P_3}$ في مستوى واحد وحسب الخاصية (4) السابقة نجد الشرط المطلوب :

$$(\vec{P_1P_2}, \vec{P_1P_3}, \vec{P_1P_4}) = 0$$

$$\vec{P_1P_2} = (x-1)\vec{i} + (y-2)\vec{j} + (z-2)\vec{k}$$

$$\vec{P_1P_3} = \vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k}$$

$$\vec{P_1P_4} = -2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$$

بالتعويض :

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-2 \\ 1 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

وبنشر المحدد نجد :

$$7x + 4y - 5z - 5 = 0$$

وهذا الشرط كما سنجد لاحقاً ليس إلا معادلة المستوي المار من النقاط المفروضة

. P_3, P_2, P_1

2- الجداء الشعاعي لثلاثة متجهات :

تعريف : بفرض $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ ثلاث متجهات من الفراغ الشعاعي الثلاثي نعرف

الجداء الشعاعي لها بأنه الجداء الخارجي للشعاعين $\vec{A}$ و $\vec{B} \times \vec{C}$:

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$$

سنثبت العلاقة :

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C}) \cdot \vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B}) \cdot \vec{C} \quad (15-2)$$

والتي تفيد في حساب الجداء الشعاعي تحليلياً بطريقة أبسط من استخدام التعريف.

الإثبات : نفرض

$$\vec{A} = (a_1, a_2, a_3), \quad \vec{B} = (b_1, b_2, b_3), \quad \vec{C} = (c_1, c_2, c_3)$$

لحساب الطرف الأيمن :

$$\bar{A} \times (\bar{B} \times \bar{C}) = \bar{A} \times [(b_2 c_3 - b_3 c_2) \bar{I} + (b_3 c_1 - b_1 c_3) \bar{J} + (b_1 c_2 - b_2 c_1) \bar{K}]$$

$$= \begin{vmatrix} \bar{I} & \bar{J} & \bar{K} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_2 c_3 - b_3 c_2 & b_3 c_1 - b_1 c_3 & b_1 c_2 - b_2 c_1 \end{vmatrix}$$

$$= (a_2 (b_1 c_2 - b_2 c_1) - a_3 (b_3 c_1 - b_1 c_3)) \bar{I} + \\ + (a_3 (b_2 c_3 - b_3 c_2) - a_1 (b_1 c_2 - b_2 c_1)) \bar{J} + \\ + (a_1 (b_3 c_1 - b_1 c_3) - a_2 (b_2 c_3 - b_3 c_2)) \bar{K}$$

ثم الطرف الأيمن :

$$(\bar{A} \cdot \bar{C}) \cdot \bar{B} - (\bar{A} \cdot \bar{B}) \cdot \bar{C} = \\ (a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3) (b_1 \bar{I} + b_2 \bar{J} + b_3 \bar{K}) - \\ (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) (c_1 \bar{I} + c_2 \bar{J} + c_3 \bar{K}) = \\ = [a_2 (b_1 c_2 - b_2 c_1) - a_3 (b_3 c_1 - b_1 c_3)] \bar{I} + \\ + [a_3 (b_2 c_3 - b_3 c_2) - a_1 (b_1 c_2 - b_2 c_1)] \bar{J} + \\ + [a_1 (b_3 c_1 - b_1 c_3) - a_2 (b_2 c_3 - b_3 c_2)] \bar{K}$$

بمقارنة الناتجين نستنتج صحة المساواة (15-2).

نتيجة : من العلاقة (15-2) يتضح أن الجداء الشعاعي للمتجهات الثلاثة

$\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ هو متجه يقع في مستوي $\bar{B}$ و $\bar{C}$ وعمودى على المتجه $\bar{A}$.

3 - تحويل الإحداثيات :

لمسألة تحويل الإحداثيات تطبيقات عديدة في مختلف فروع الرياضيات. من هذه التطبيقات كما سنرى في الفصول القادمة: عندما يتعذر علينا معرفة نوع بيان معادلة إن كان في المستوي أو في الفراغ نلجأ لتبسيطها وذلك بفرض متحولات جديدة تربطها بمتحولات المعادلة المفروضة علاقات تدعى علاقات التحويل وكتابة المعادلة بدالاتها نجعلها أبسط ويتاح لنا معرفة بيانها وهذا

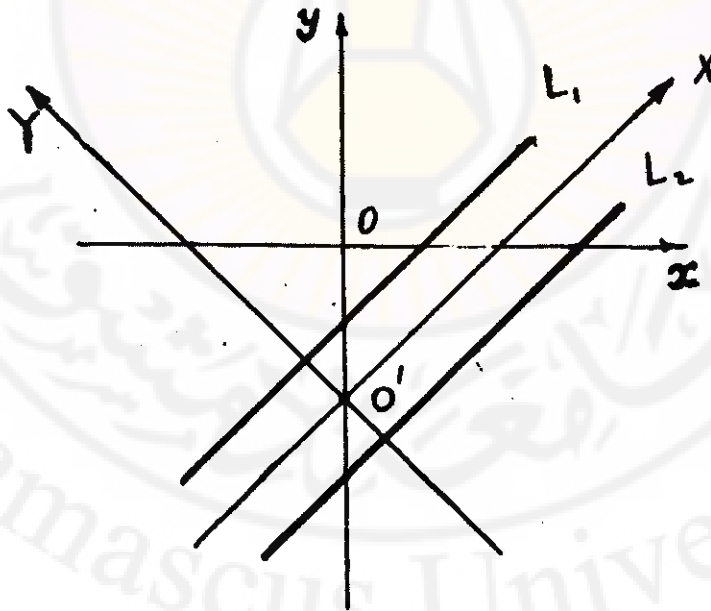
العمل يكافئ كتابة معادلات ذلك السطح (المنحني) بالنسبة لجملة جديدة تنطبق محاورها على محاور تناظره ومبدؤها ينطبق على مركزه إن كان السطح أو المنحني متناظراً أو مركزياً. وهذا ما يوضحه المثال التالي.

مثال (1) : لنفرض oxy جملة محاور متعامدة في المستوي و $O'XY$ جملة متعامدة أخرى، مركزها $O' (0, -2\sqrt{2})$ والمحور $O'X$ يصنع مع المحور القديم ox زاوية مقدارها $\frac{\pi}{4}$ ، الشكل (3-1) وليكن L_1 , L_2 مستقيمين معادلتها بالنسبة للجملة الأولى:

$$y = x - 3\sqrt{2} \quad , \quad y = x - \sqrt{2}$$

ولهما المعادلات التالية بالنسبة للجملة الثانية :

$$Y = -1 \quad , \quad Y = 1$$



الشكل (3-1)

وكذلك زوج المستقيمان L_1, L_2 هو بيان المعادلة :

$$x^2 + y^2 - 2xy - 4\sqrt{2}x + 4\sqrt{2}y + 6 = 0$$

بالنسبة للحملة الأولى وبيان المعادلة :

$$y^2 = 1$$

بالنسبة للحملة الثانية، وهي تبسيط للمعادلة السابقة، وكل منها تنتج عن الأخرى، فالمتحولات فيها ترتبط بالعلاقات التالية التي تدعى علاقات التحويل:

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} (X - Y + 2) \quad , \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}} (X + Y - 2)$$

والتي تحول المعادلة الأولى إلى الشكل المبسط $Y^2 = 1$ (تحقق من ذلك). أما العلاقات التي تعين المتحولات الجديدة بدلالة المتحولات القديمة:

$$X = \frac{1}{\sqrt{2}} (x + y) \quad , \quad Y = \frac{1}{\sqrt{2}} (-x + y + 2\sqrt{2})$$

فندعوها علاقات التحويل العكسية ، حيث نستطيع كتابة هذه العلاقات بصيغة المصفوفات :

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{2}} \\ \frac{-2}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

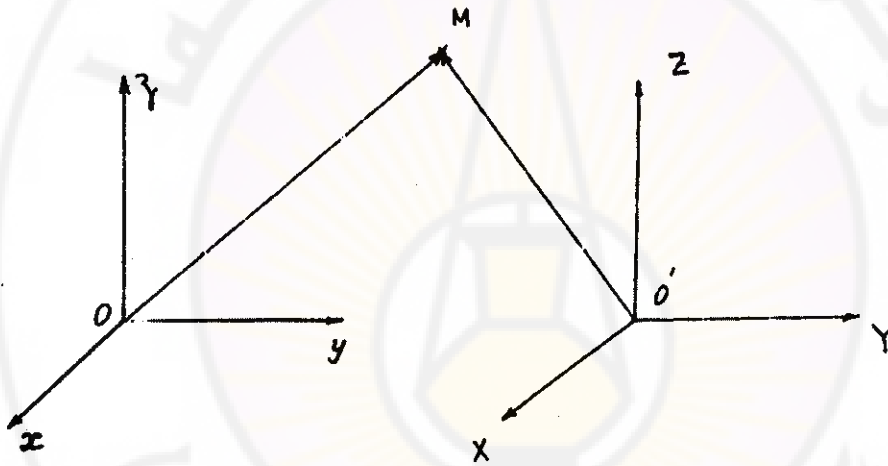
سندرس بدايةً حالات خاصة لتحويل الإحداثيات أو تغيير المحاور الإحداثية.

١-3 سحب المحاور الإحداثية :

نفترض xyz جملة محاور متعامدة ومباشرة ومعرف عليها الأشعة المنظمة $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ نقوم بسحب هذه الجملة بحيث تبقى محاورها موازية لنفسها، نرمز

للحملة الناتجة بـ $O'XYZ$ ونفترض أن $O'(x_0, y_0, z_0)$ بالنسبة للحملة القديمة و $\bar{I}, \bar{J}, \bar{K}$ هي أشعة الواحدة على محاور الحملة الجديدة. لتكن M نقطة اختيارية في الفراغ إحداثياتها بالنسبة للحملة القديمة والجديدة على الترتيب (x, y, z) و (X, Y, Z) ولنبحث عن علاقات التحويل. من الشكل (3-2) نجد العلاقة الشعاعية :

$$\vec{OM} = \vec{OO'} + \vec{O'M}$$



الشكل (3-2)

أو :

$$x\bar{I} + y\bar{J} + z\bar{K} = x_0\bar{I} + y_0\bar{J} + z_0\bar{K} + X\bar{I} + Y\bar{J} + Z\bar{K}$$

فإذا لاحظنا أن :

$$\bar{I} = \bar{I}, \bar{J} = \bar{J}, \bar{K} = \bar{K}$$

نجد :

$$x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} = (x_0 + X)\bar{i} + (y_0 + Y)\bar{j} + (z_0 + Z)\bar{k}$$

وبالتالي :

$$\begin{aligned} x &= x_0 + X \\ y &= y_0 + Y \\ z &= z_0 + Z \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \quad (1-3)$$

وهي علاقات التحويل إلى الوضع الجديد للحملة والتي يكفي استيعابها معرفة إحداثيات المبدأ الجديد $O'(x_0, y_0, z_0)$.

مثال (2): لننظر في المعادلة :

$$xy + 2xz - 3y - 6z + x - 3 = 0$$

النسوبة لجملة محاور إحداثية متعامدة xyz ، ولكتابتها تلك المعادلة بالنسبة لجملة محاور جديدة $O'XYZ$ نتج عن القدمة بانسحاب معين باحداثيات $O'(x_0, y_0, z_0)$ ، يكفي أن نستعير في المعادلة عن المتحولات $x, y, z \rightarrow X, Y, Z$ من (1-3) نجد :

$$(X+x_0)(Y+y_0) + 2(X+x_0)(Z+z_0) - 3(Y+y_0) - 6(Z+z_0) + (X+x_0) - 3 = 0$$

أو :

$$\begin{aligned} XY + 2XZ + (y_0 + 2z_0 + 1)X + (x_0 - 3)Y + (2x_0 - 6)Z \\ + x_0y_0 + 2x_0z_0 - 3y_0 - 6z_0 + x_0 - 3 = 0 \end{aligned}$$

بما أنه لا توجد قيود على مكان O' فنستطيع اختياره بنية تبسيط المعادلة الناتجة لذلك نبحث عن إحداثيات O' التي تجعل المعادلة لا تحوي حدوداً خطية لأن

لذلك نجعل :

$$y_0 + 2z_0 + 1 = 0 \quad , \quad x_0 = 3 \quad , \quad 2x_0 - 6 = 0$$

ولنختار $O'(3, -1, 0)$ ، لاحظ أن هناك عدداً لا نهائياً من النقاط التي يمكن أن تكون مبدأً جديداً للجملة وتجعل المعادلة لا تملك حدوداً خطية. تصبح المعادلة :

$$XY + 2XZ = 0$$

وهي أبسط وبيانها عبارة عن المستويين $X=0$ و $Y=-2Z$.

2-3 تدوير الجملة الإحداثية حول أحد محاورها :

نفرض xyz جملة متعامدة ومباشرة. $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ أشعة الواحدة ، ولندور هذه الجملة حول المحور oz زاوية مقدارها θ ، نرمز بـ $OXYZ$ للجملة الجديدة، وبـ $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ لأشعة الواحدة لها. لتكن M نقطة اختيارية في الفراغ، نرمز بـ (x, y, z) و (X, Y, Z) لإحداثياتها بالنسبة للجملتين القديمة والجديدة على الترتيب. ولنعين العلاقات بينها. نسقط الشعاع $\vec{OM}$ على الجملتين فنجد :

$$x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$$

ثم نكتب الأشعة $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ بالنسبة للجملة القديمة. الشكل (3-3).

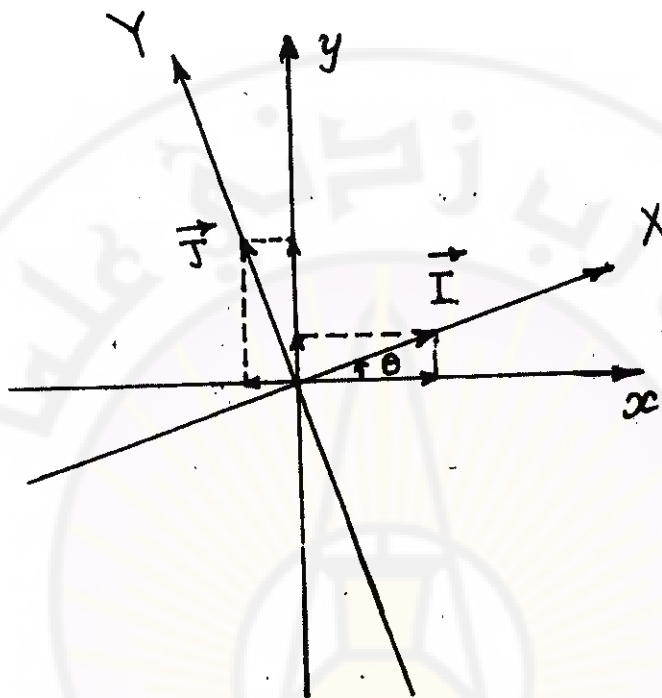
$$\vec{i} = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j} + 0 \vec{k}$$

$$\vec{j} = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j} + 0 \vec{k} \quad (2-3)$$

$$\vec{k} = 0 \vec{i} + 0 \vec{j} + \vec{k}$$

ونعوض في العلاقة السابقة :

$$\begin{aligned}
 x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} &= X(\cos\theta\bar{i} + \sin\theta\bar{j}) + Y(-\sin\theta\bar{i} + \cos\theta\bar{j}) + Z\bar{k} \\
 &= (X\cos\theta - Y\sin\theta)\bar{i} + (X\sin\theta + Y\cos\theta)\bar{j} + Z\bar{k}
 \end{aligned}$$



الشكل (3-3)

لنحصل على العلاقات التالية :

$$x = X \cos \theta - Y \sin \theta$$

$$y = X \sin \theta + Y \cos \theta$$

$$z = Z$$

(3-3)

أو :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \quad (4-3)$$

والتي منها تنتج مباشرة علاقات التحويل العكسية والتي تعطي X, Y, Z بدلالة

x, y, z .

$$X = x \cos \theta + y \sin \theta$$

$$Y = -x \sin \theta + y \cos \theta \quad (5-3)$$

$$Z = z$$

أو :

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (6-3)$$

ملاحظة (1): إن العلاقات (4-3) و (6-3) تدعى دساتير التحويل والتحويل

العكسي وندعو المصفوفتين من المرتبة الثالثة فيهما بمصفوفتي الدوران.

ملاحظة (2): من (3-2) نجد أن مركبات $\bar{I}, \bar{J}, \bar{K}$ بالنسبة للحملة

القديم هي أعمدة مصفوفة التحويل في (4-3) وكذلك أعمدة مصفوفة

التحويل العكسي في (5-3) هي مركبات $\bar{I}, \bar{J}, \bar{K}$ بالنسبة للحملة الجديدة

أي :

$$\bar{I} = \cos \theta \bar{I} - \sin \theta \bar{J} + 0 \bar{K}$$

$$\bar{J} = \sin \theta \bar{I} + \cos \theta \bar{J} + 0 \bar{K}$$

$$\bar{K} = 0 \bar{I} + 0 \bar{J} + 1 \bar{K}$$

(تحقق من ذلك).

بصورة مماثلة يمكن استنتاج علاقات الانتقال أو التحويل الموافقة لدوران
الجملة الإحداثية القائمة $oxyz$ حول المحور ox بزاوية θ ، وذلك بفرض $OXYZ$ و
 $\bar{K}, \bar{J}, \bar{I}$ الجملة الجديدة وأشعة الواحدة عليها:

$$x = X$$

$$y = Y \cos \theta - Z \sin \theta \quad (7-3)$$

$$z = Y \sin \theta + Z \cos \theta$$

أما دساتير الانتقال إلى الجملة الجديدة الناتجة عند القدمة بدوران زاوية
مقدارها θ حول المحور oy :

$$x = Z \sin \theta + X \cos \theta$$

$$y = Y \quad (8-3)$$

$$z = Z \cos \theta - X \sin \theta$$

بشكل مشابه لما سبق نستطيع من هذه الدساتير استنتاج دساتير العكس التي
تتيح لنا حساب الإحداثيات الجديدة بدلالة القديمة، وذلك إما بالحساب المباشر أو
بأخذ منقول مصفوفة التحويل المشابهة لمصفوفة التحويل في (3-4).

مثال (3): أثبت أن بيان المعادلة :

$$x^2 + 3xy + y^2 + 2x + 3y - 1 = 0$$

هو قطع زائد. عيّن محاوره وارسمه .

الحل :

إذا نقلنا المحاور الإحداثية oxy بإجراء انسحاباً ودوراناً مناسبين لتصبح O'
مبدأ الجملة الجديدة هو مركز القطع والمحور $O'X$ هو المحور الأساسي له وأجرينا
التغيير الموافق لذلك نحصل على الصيغة النموذجية التالية للقطع الزائد:

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$$

لذلك أولاً نسحب الجملة oxy المنسوب إليها القطع لينطبق المبدأ الجديد
للحملة $O'(\alpha, \beta)$ للحملة $O'x'y'$ على مركز القطع. ومن (3-1) نكتب علاقات التحويل :

$$x = \alpha + x', y = \beta + y'$$

ونعوض في المعادلة المفروضة لنحصل على معادلة منسوبة للحملة الجديدة
: $O'x'y'$

$$x'^2 + 3x'y' + y'^2 + (2\alpha + 3\beta + 2)x' + (3\alpha + 2\beta + 3)y' + (\alpha^2 + 3\alpha\beta + \beta^2 + 2\alpha + 3\beta - 1) = 0$$

لكن المعادلة الناتجة لا يمكن أن تحوي حدوداً خطية (لماذا؟).
لذلك نكتب :

$$2\alpha + 3\beta + 2 = 0, 3\alpha + 2\beta + 3 = 0$$

$$\text{إذا : } \alpha = -1, \beta = 0$$

وتصبح المعادلة :

$$x'^2 + 3x'y' + y'^2 - 2 = 0$$

نجري تغييراً ثانياً للمتحويلات وذلك بتدوير الجملة $O'x'y'$ بزاوية مقدارها θ
لنحصل على الجملة $O'XY$ ، التي محورها $O'X$ ينطبق على محور القطع ، فمن
(3-3) نكتب دساتير الانتقال :

$$x' = X \cos \theta - Y \sin \theta, y' = X \sin \theta + Y \cos \theta$$

ونعوض في المعادلة الأخيرة :

$$(\cos^2 \theta + 3 \sin \theta \cos \theta + \sin^2 \theta) X^2 + (3 \cos^2 \theta - 3 \sin^2 \theta) XY + (\sin^2 \theta - 3 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta) Y^2 - 2 = 0$$

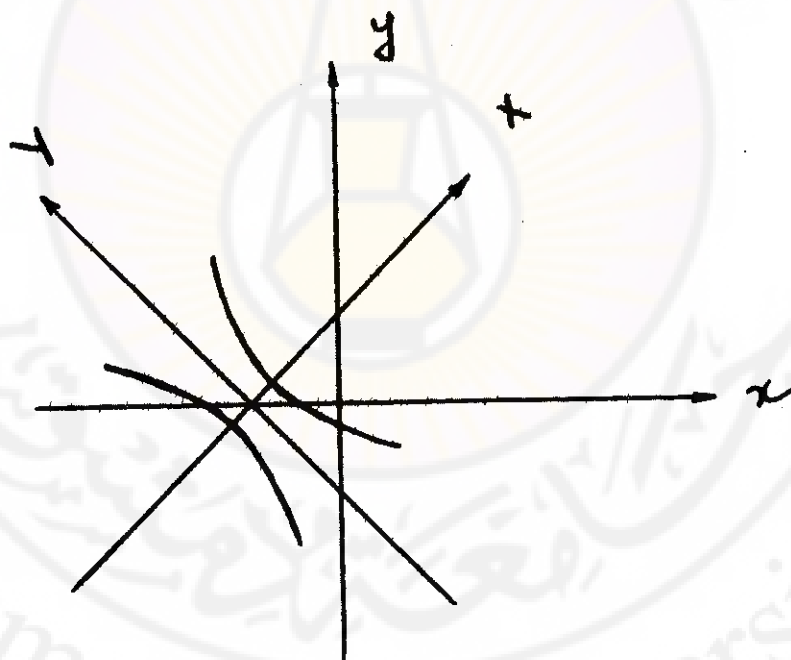
والمعادلة الناتجة لا يمكن أن تحوي الحد XY لذلك نجعل أمثاله مساوية للصفر وتصبح
المعادلة الجديدة :

$$(1 + \frac{3}{2} \sin 2\theta) X^2 + (1 - \frac{3}{2} \sin 2\theta) Y^2 - 2 = 0$$

حيث $\cos 2\theta = 0$ أو $\theta = \pi/4$ تجعل أمثال الحد المختلط معدومة والمعادلة:

$$\frac{X^2}{4/5} - \frac{Y^2}{4} = 1$$

تمثل قطعاً زائداً منسوباً لمحاوره (الشكل (3-4))، مركزه $O'(-1, 0)$ ومحاوره تميل
عن المحاور القديمة بزاوية $\theta = \frac{\pi}{4}$.



الشكل (3-4)

بعد أن درسنا بعض الحالات الخاصة لنقل المحاور الإحداثية، سنستعرض:

3 - 3 تغيير المحاور الإحداثية في الحالة العامة :

لتكن xyz ثلاث محاور مباشرة تحمل الأشعة المستقلة $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ (فهى تصلح لأن تكون قاعدة للفراغ الشعاعي الثلاثي) ولتكن $O'XYZ$ ثلاثة محاور مباشرة أخرى تحمل جملة أشعة مستقلة أخرى $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3$ ، حيث :

$$\vec{E}_1 = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3$$

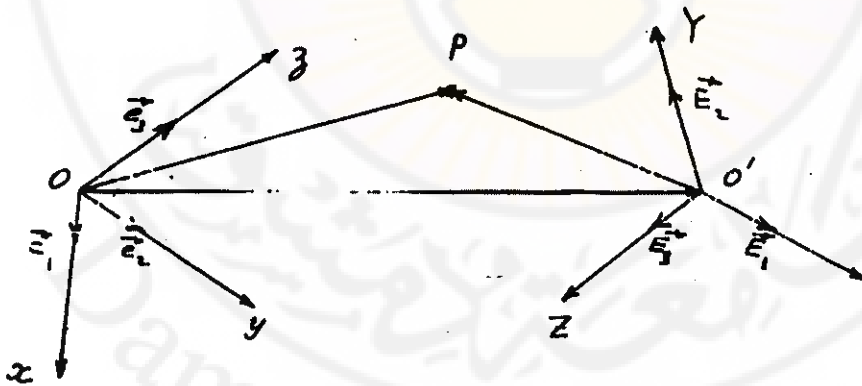
$$\vec{E}_2 = b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2 + b_3 \vec{e}_3$$

(9-3)

$$\vec{E}_3 = c_1 \vec{e}_1 + c_2 \vec{e}_2 + c_3 \vec{e}_3$$

$$O'(\alpha, \beta, \gamma)$$

ولنعين العلاقات بين إحداثيات نقطة اختيارية P بالنسبة لـ xyz و $O'XYZ$ إحداثياتها بالنسبة للجملة $O'XYZ$ وذلك بدلالة إحداثيات O' ومركبات الأشعة $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3$ على المحاور القديمة .



الشكل (3-5)

من الشكل (3-5) نكتب المعادلة الشعاعية :

$$\vec{OP} = \vec{OO'} + \vec{O'P}$$

أو :

$$x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 = \alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2 + \gamma\vec{e}_3 +$$

$$X\vec{E}_1 + Y\vec{E}_2 + Z\vec{E}_3$$

نستبدل الأشعة $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3$ في هذه العلاقة بقيمها بدلالة $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ من

(9-3) .

$$x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 = \alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2 + \gamma\vec{e}_3 +$$

$$X(a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3) +$$

$$Y(b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3) +$$

$$Z(c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2 + c_3\vec{e}_3) +$$

وهذه المعادلة الشعاعية تكافئ المعادلات :

$$x = \alpha + a_1 X + b_1 Y + c_1 Z$$

$$y = \beta + a_2 X + b_2 Y + c_2 Z \quad (10-3)$$

$$z = \gamma + a_3 X + b_3 Y + c_3 Z$$

باستخدام المصفوفات نكتب المعادلة :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \quad (11-3)$$

فإذا رمزنا بـ u و U لمصفوي التحويلات $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$ على الترتيب و

$$\Delta = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

تصبح العلاقة (3-11) :

$$u = \Delta + AU \quad (3-12)$$

وهي العلاقة المطلوبة التي تعين إحداثيات نقطة اختيارية بالنسبة لجملة مفروضة بدلالة إحداثياتها بالنسبة لجملة جديدة ولوضع هذه الجملة (إحداثيات مبدؤها ومركبات أشعتها بالنسبة للجملة الأولى).

ندعو $u(x, y, z)$ الإحداثيات القديمة أو الأساسية و $U(X, Y, Z)$ الإحداثيات الجديدة أو الثانية و A مصفوفة التحويل أو الانتقال، فإذا لاحظنا أن أعمدة A هي مركبات الأشعة المستقلة خطياً $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ نجد أن محدداتها لا يمكن أن يساوي الصفر، والمصفوفة A تملك معكوس A^{-1} وبناءً عليه وعلى (3-11) نكتب :

$$U = A^{-1}(u - \Delta)$$

أو :

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x - \alpha \\ y - \beta \\ z - \gamma \end{pmatrix} \quad (3-13)$$

من هذه المعادلة نستنتج دساتير التحويل العكسي التي تعين الإحداثيات الجديدة (X, Y, Z) بدلالة الإحداثيات القديمة (x, y, z) وبدلالة Δ و A (وضع الجملة الجديدة بالنسبة للقديمة).

نفرض الآن xyz متعامدة ومنظمة ونبحث عن $OXYZ$ بإجراء انسحاب ودوران محددتين بالشعاع Δ وبالمصفوفة A على الترتيب فستكون الثانية أيضاً متعامدة ومنظمة. هذا يعني أن العلاقات التالية صحيحة :

$$\bar{e}_1 \bar{e}_2 = \bar{e}_1 \bar{e}_3 = \bar{e}_2 \bar{e}_3 = 0$$

$$|\bar{e}_1| = |\bar{e}_2| = |\bar{e}_3| = 1$$

وكذلك :

$$\vec{E}_1 \vec{E}_2 = \vec{E}_1 \vec{E}_3 = \vec{E}_2 \vec{E}_3 = 0$$

$$|\vec{E}_1| = |\vec{E}_2| = |\vec{E}_3| = 1$$

ومنه نجد :

$$\begin{aligned} AA' &= \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\vec{E}_1|^2 & \vec{E}_1 \vec{E}_2 & \vec{E}_1 \vec{E}_3 \\ \vec{E}_2 \vec{E}_1 & |\vec{E}_2|^2 & \vec{E}_2 \vec{E}_3 \\ \vec{E}_3 \vec{E}_1 & \vec{E}_3 \vec{E}_2 & |\vec{E}_3|^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I \end{aligned}$$

$$A'A = I$$

كذلك :

حيث A' متقول المصفوفة A وهي مصفوفة أسطرها أعمدة A وأعمدتها أسطر A . حسب تعريف مقلوب مصفوفة نستنتج أن :

$$A^{-1} = A'$$

وتدعى المصفوفة التي تحقق هذه المساواة بالمصفوفة المتعامدة .

نستنتج بناءً على ما سبق :

إذا كانت الجملتان xyz و $O'XYZ$ متعامدتين ومنظمتين والثانية تنتج عن الأولى بانسحاب ودوران محددتين بالشعاع Δ والمصفوفة A . فإن علاقة التحويل المكسبي تصبح :

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = A' \begin{pmatrix} x - \alpha \\ y - \beta \\ z - \gamma \end{pmatrix}$$

أو :

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = -A' \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} + A' \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (14-3)$$

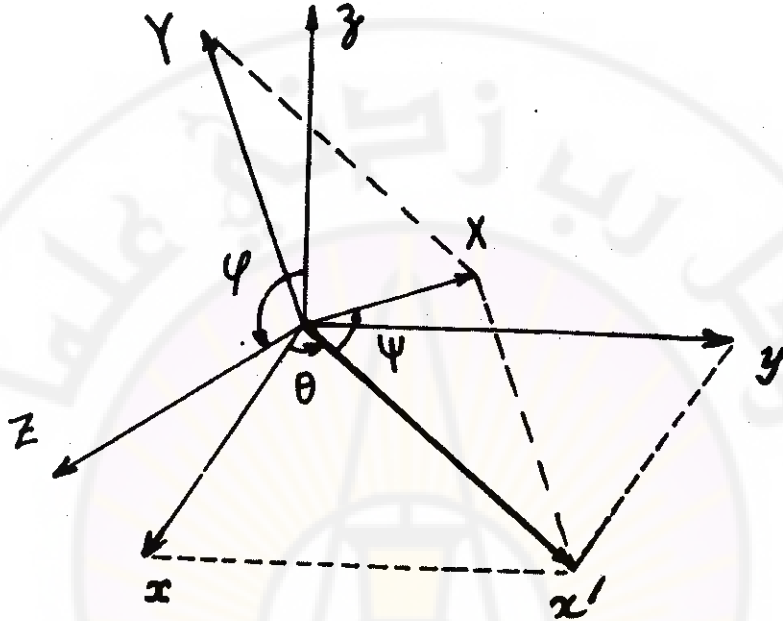
4 - 3 زوايا أولر :

لتكن xyz جملة متعامدة ومنظمة ثابتة و XYZ جملة متعامدة ومنظمة تنتج بدوران معين، حسب (3-10) يمكن تعيين (x, y, z) الإحداثيات القديمة لنقطة اختيارية M بدلالة (X, Y, Z) إحداثياتها الجديدة وذلك بتسع قيم هي عناصر مصفوفة الانتقال في (3-11) مع اعتبار $\alpha = \beta = \gamma = 0$. وبما أن الجملتين متعامدتين فإن هذه القيم ترتبط بست علاقات فإنه يمكن أن نستعير عن هذه القيم التسع بثلاث فقط سنرمز لها بـ ψ, ϕ, θ ، نفرض كل منها زاوية الدوران حول أحد المحاور وتدعى زوايا أولر. إذا فرضنا أن للجملتين السابقتين التوجيه نفسه وليكن التوجيه المباشر فأياً كان وضع الجملة XYZ بالنسبة للثابتة xyz بشرط أن لا يتطابق المستويان oxy و OXY الشكل (3-8)، (حيث هذه الحالة الخاصة قد درست آنفاً) وعلى فرض أن مبدأ الجملتين نفسه O فإن المستويين oxy و OXY يتقاطعان بمستقيم يمر من O نرمز له بعد توجيهه بـ ox' ونرمز بـ oy' للمحور العمودي على $ox'z'$ والذي يجعل الجملة $ox'y'z'$ مباشرة وهي بذورها تنتج عن الجملة الثابتة بدوران حول المحور OZ بزاوية نرمز لها بـ θ . إذا رمزنا بـ (x, y, z) و (x', y', z') لإحداثيات النقطة M بالنسبة للجملتين القديمة والجديدة على الترتيب، حسب (3-4) نكتب علاقات التحويل:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \quad (15-3)$$

نلاحظ أن ox' عمودي على كل من OZ و Oz (لأنه الفصل المشترك لـ oxy و OXY) وبما أن oy' عمودي على ox' (من الانشاء) فهو يقع في مستوي OZ و Oz وهو الفصل المشترك للمستويين oxy و OYZ ، لنفرض oy'' المحور الذي يجعل الجملة $Ox'y''z'$ متعامدة ومباشرة عندها الجملة الأخيرة تنشأ عن $ox'y'z'$ بتدويرها زاوية ϕ حول ox' فإذا رمزنا بـ (x', y', z') و (x'', y'', z'') للإحداثيات القديمة والجديدة على الترتيب نكتب علاقات التحويل :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y'' \\ z \end{pmatrix} \quad (16-3)$$



الشكل (3-8)

وأخيراً إن الجملة OXYZ تنتج عن الجملة $ox' y'' z$ (وذلك لأن المحورين ox', oy'' متعامدان في المستوي OXY العمودي على OZ) بدوران زاوية، نرمز لها بـ ψ حول المحور OZ، وإذا رمزنا بـ $(x' y'' z)$ وبـ (X, Y, Z) للإحداثيات القديمة والجديدة لـ M تصبح علاقات التحويل :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y'' \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \quad (17-3)$$

من العلاقات الثلاث السابقة نكتب :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \quad (18-3)$$

أو :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \psi - \sin \theta \sin \psi \cos \varphi & -(\sin \psi \cos \theta + \sin \theta \cos \varphi \cos \psi) \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \cos \psi + \sin \psi \cos \theta \cos \varphi & -\sin \theta \sin \psi + \cos \theta \cos \varphi \cos \psi & -\sin \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \sin \psi & \sin \varphi \cos \psi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

والجدير بالملاحظة هنا أن مصفوفة التحويل الناتجة لا تحوي إلا الوسطاء الثلاثة وهي متعامدة (منقولها يساوي مقلوبها) لأنها جداء ثلاث مصفوفات متعامدة، وهي تعطينا الإحداثيات القديمة بدلالة الجديدة.

$$x = (\cos \theta \cos \psi - \sin \theta \sin \psi \cos \varphi) X - (\sin \psi \cos \theta + \sin \theta \cos \varphi \cos \psi) Y + \sin \theta \sin \varphi Z$$

$$y = (\sin \theta \cos \psi + \sin \psi \cos \theta \cos \varphi) X - (\sin \theta \sin \psi - \cos \theta \cos \varphi \cos \psi) Y - \sin \varphi \cos \theta Z$$

$$z = \sin \varphi \sin \psi X + \sin \varphi \cos \psi Y + \cos \varphi Z$$

4 - تطبيقات وأمثلة على نقل المحاور الإحداثية :

مثال (1): سنثبت العلاقة (2-15) بطريقة ثانية تعتمد على نقل المحاور :

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C}) \cdot \vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{C}$$

لتكن xyz جملة متعامدة منظمة ومباشرة $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ أشعة الواحدة. فإذا

جعلنا oz ينطبق على $\vec{C}$ و $\vec{B}$ يقع في أحد المستويين oxz أو oyz فسيكون :

$$\vec{C} = c \vec{k}$$

$$\vec{B} = b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + b_3 \vec{k}$$

$$\vec{A} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}$$

و :

$$\bar{B} \times \bar{C} = (b_2 \bar{j} + b_3 \bar{k}) \times c \bar{k} = b_2 c \bar{i}$$

$$\bar{A} \times (\bar{B} \times \bar{C}) = (a_1 \bar{i} + a_2 \bar{j} + a_3 \bar{k}) \times b_2 c \bar{i} = -a_2 b_2 c \bar{k} + a_3 b_2 c \bar{j}$$

$$a_3 b_3 c \bar{k} \quad \text{نضيف ونطرح :}$$

$$\bar{A} \times (\bar{B} \times \bar{C}) = a_3 b_2 c \bar{j} + a_3 b_3 c \bar{k} - (a_2 b_2 c \bar{k} + a_3 b_3 c \bar{k})$$

$$= (a_3 c) (b_2 \bar{j} + b_3 \bar{k}) - (a_2 b_2 + a_3 b_3) c \bar{k}$$

فإذا لاحظنا أن :

$$\bar{A} \cdot \bar{C} = a_3 c$$

$$\bar{A} \cdot \bar{B} = a_2 b_2 + a_3 b_3$$

نجد :

$$\bar{A} \times (\bar{B} \times \bar{C}) = (\bar{A} \cdot \bar{C}) \bar{B} - (\bar{A} \cdot \bar{B}) \cdot \bar{C}$$

مثال (2) : بفرض آ بيان المعادلة :

$$x^2 + xy - x - y - 1 = 0$$

في oxy . اكتب معادلته منسوباً للحملة الموازية للأولى والتي مبدؤها مركز تناظر Γ .

الحل : إن مبدأ الإحداثيات ليس مركز تناظر للمنحنى لأننا لو بدلنا x بـ $-x$

و y بـ $-y$ فإن المعادلة ستتغير وذلك بسبب وجود حدود خطية في المعادلة. لذلك

نسحب المحاور إلى مركز تناظر $\Gamma (\alpha, \beta)$ ونكتب علاقات الانسحاب (3-1) :

$$x = \alpha + X$$

$$y = \beta + Y$$

بالتبديل في المعادلة المفروضة نحصل على معادلة Γ بالنسبة للحملة $O'XY$:

$$(\alpha + X)^2 + (\alpha + X)(\beta + Y) - (\alpha + X) - (\beta + Y) - 1 = 0$$

أو :

$$X^2 + XY + (2\alpha + \beta - 1)X + (\alpha - 1)Y + \alpha^2 + \alpha\beta - \alpha - \beta - 1 = 0$$

والتي يجب ألا تحوي حدوداً خطية (مبدأ الإحداثيات O' مركز للمنحنى Γ).

$$2\alpha + \beta - 1 = 0$$

$$\alpha - 1 = 0$$

وجود حلاً وحيداً $\beta = -1$ و $\alpha = 1$ للحملة يعني أن للمنحنى Γ مركزاً وحيداً

$O'(1, -1)$. وبالتالي تصبح معادلة Γ بالنسبة لـ $O'XY$.

$$X^2 + XY - 1 = 0$$

مثال (3) : ليكن S سطحاً معادلته :

$$x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xy - 4x - 4y = 0$$

دور المحاور الإحداثية بزاوية مناسبة حول المحور Oz ليصبح المحور Ox محوراً

تناظرياً له. ثم اكتب معادلته بالنسبة للحملة الجديدة.

الحل : إذا فرضنا أن θ زاوية الدوران. من العلاقات (3-3) نجد :

$$(X \cos \theta - Y \sin \theta)^2 + (X \sin \theta + Y \cos \theta)^2 + 2Z^2 - 2(X \cos \theta - Y \sin \theta)(X \sin \theta + Y \cos \theta)$$

$$- 4(X \cos \theta - Y \sin \theta) - 4(X \sin \theta + Y \cos \theta) = 0$$

أو

$$(1 - 2 \sin \theta \cos \theta) X^2 + (1 + 2 \sin \theta \cos \theta) Y^2 + 2 Z^2$$

$$- 2(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) XY - 4(\cos \theta + \sin \theta) X + 4(\sin \theta - \cos \theta) Y = 0$$

بما أن المحور Ox هو محور تناظر، فإن المعادلة السابقة يجب أن لا تتغير إذا

بدلنا Y بـ $-Y$ و Z بـ $-Z$ وهذا يقتضي أن لا تحوي المعادلة الحدود Y, Z, XY, XZ ,

أي الزاوية θ هي التي تجعل أمثال هذه الحدود معلومة :

$$\sin \theta = \cos \theta$$

$$\sin^2 \theta = \cos^2 \theta$$

إذا : $\theta = \frac{\pi}{4}$ أو $\theta = \frac{5\pi}{4}$

فمن أجل $\theta = \frac{\pi}{4}$ تصبح معادلة السطح بالنسبة للحملة الجديدة :

$$Y^2 + Z^2 - 2\sqrt{2}X = 0$$

أما إن كانت $\theta = \frac{5\pi}{4}$

$$Y^2 + Z^2 + 2\sqrt{2}X = 0$$

تطبيق: لدينا معادلة من الدرجة الثانية :

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

والمطلوب إثبات :

(1) إذا تحقق الشرط $b^2 - 4ac = 0$ فإنه يمكن أن نكتب :

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f =$$

$$(\alpha x + \beta y + \gamma)^2 + px + qy + r = 0$$

حيث :

$$\alpha = \sqrt{a}, \beta = \sqrt{c}, p = d - 2\sqrt{a}\gamma, q = e - 2\sqrt{c}\gamma, r = f - \gamma^2$$

(2) بفرض $\frac{d}{\sqrt{a}} \neq \frac{e}{\sqrt{c}}$ توجد قيمة لـ γ تجعل المستقيمين التاليين متعامدين:

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0$$

$$px + qy + r = 0$$

الحل : لنضيف ونطرح الحدود التالية من المعادلة المفروضة :

$$2\sqrt{ac}xy, 2\sqrt{a}\gamma x, 2\sqrt{c}\gamma y, \gamma^2$$

حيث γ قيمة اختيارية فنجد :

$$ax^2 + cy^2 + \gamma^2 + 2\sqrt{ac}xy + 2\sqrt{a}\gamma x + 2\sqrt{c}\gamma y +$$

$$+ (b - 2\sqrt{ac})xy + (d - 2\sqrt{a}\gamma)x + (e - 2\sqrt{c}\gamma)y + f - \gamma^2 = 0$$

وبما أن : $b = 2\sqrt{ac}$

$$(\sqrt{a}x + \sqrt{c}y + \gamma)^2 + (d - 2\sqrt{a}\gamma)x + (e - 2\sqrt{c}\gamma)y + f - \gamma^2 = 0$$

أو :

$$(\alpha x + \beta y + \gamma)^2 + px + qy + r = 0$$

حيث :

$$\alpha = \sqrt{a}, \beta = \sqrt{c}, p = d - 2\sqrt{a}\gamma, q = e - 2\sqrt{c}\gamma, r = f - \gamma^2$$

(2) نكتب شرط تعامد المستقيمين :

$$\alpha p + \beta q = 0$$

أو :

$$\sqrt{a}(d - 2\sqrt{a}\gamma) + \sqrt{c}(e - 2\sqrt{c}\gamma) = 0$$

ومنه :

$$\gamma(2a + 2c) = \sqrt{a}.d + \sqrt{c}.e$$

أي :

$$\gamma = \frac{\sqrt{a}d + \sqrt{c}e}{2a + 2c}$$

$$p = \frac{\sqrt{c}(\sqrt{c}d - \sqrt{a}e)}{a + c}, \quad q = \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}e - \sqrt{c}d)}{a + c}$$

نلاحظ أنه يجب أن نشترط $p^2 + q^2 \neq 0$ (و p و q لا يبعدان معاً) لتبقى :

$px + qy + \gamma = 0$ معادلة مستقيم وهذا يكافئ أن :

$$\sqrt{c}.d \neq \sqrt{a}.e \text{ وهذا محقق فرضاً.}$$

مثال (4) : استعمل التطبيق السابق في اختزال المعادلة :

$$x^2 + 4xy + 4y^2 + 10x + 5y + 1 = 0$$

الحل :

بما أن الشرطين $b^2 - 4ac = 0$ و $\frac{d}{\sqrt{a}} \neq \frac{e}{\sqrt{c}}$ محققان فيمكن أن نكتب

المعادلة على الشكل :

$$(x + 2y + \gamma)^2 + px + qy + r = 0$$

وهناك قيمة لـ γ تجعل المستقيمين التاليين متعامدين :

$$x + 2y + \gamma = 0 , \quad px + qy + r = 0$$

لنبحث عنها :

$$(x + 2y + \gamma)^2 + (10 - 2\gamma)x + (5 - 4\gamma)y + 1 - \gamma^2 = 0$$

فمن الشرط :

$$10 - 2\gamma + 2(5 - 4\gamma) = 0$$

أي $\gamma = 2$ تصبح المعادلة :

$$(x + 2y + 2)^2 + 3(2x - y - 1) = 0$$

فإذا فرضنا PX, PY محورين منطبقين على المستقيمين المتعامدين $x + 2y + 2 = 0$

و $2x - y - 1 = 0$ على الترتيب.

تصبح المعادلة بالنسبة لـ PXY :

$$5X^2 + 3\sqrt{5}Y = 0$$

أما دساتير الانتقال :

$$x + 2y + 2 = \sqrt{5}X$$

$$2x - y - 1 = \sqrt{5}Y$$

أو :

$$x = \frac{X + 2Y}{\sqrt{5}} , \quad y = \frac{2X - Y}{\sqrt{5}} - 1$$

أو :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \star$$

ملاحظة (1):

لو اعتبرنا أن الجملة الجديدة $Q x' y'$ ودساتير التحويل هي :

$$x + 2y + x = x' \quad \text{و} \quad 2x - y - 1 = y'$$

تصبح علاقات التحويل:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \star \star$$

والمعادلة المفروضة بالنسبة للجملة $Q x' y'$:

$$x'^2 + 3y' = 0$$

فمن $\star$ و $\star \star$ نجد :

$P = Q$ المبدأين منطبقين، ومصنوفتي التحويل أحدهما تنتج عن الأخرى

بضربها بالعدد $\frac{1}{\sqrt{5}}$ ، فإذا لاحظنا أن :

$$\bar{I} = \frac{1}{\sqrt{5}} \bar{I} + \frac{2}{\sqrt{5}} \bar{J} \quad , \quad \bar{J} = \frac{2}{\sqrt{5}} \bar{I} - \frac{1}{\sqrt{5}} \bar{J}$$

نجد أن $\bar{I} \cdot \bar{J} = 0$ ، $|\bar{I}| = |\bar{J}| = 1$ (الجملة متعامدة ومنظمة).

وكذلك نجد :

$$\bar{I}' = \frac{1}{5} \bar{I} + \frac{2}{5} \bar{J} \quad , \quad \bar{J}' = \frac{2}{5} \bar{I} - \frac{1}{5} \bar{J}$$

و $\bar{I}' \cdot \bar{J}' = 0$ بينما $|\bar{I}'| = |\bar{J}'| = \frac{1}{\sqrt{5}} \neq 1$ (الجملة متعامدة ليست

منظمة، أي محاور الجملتين منطبقة لكن أشعتها مختلفة).

ملاحظة (2):

باستخدام (3-13) نكون علاقات التحويل العكسية من $Ox'y'$ هي :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y+1 \end{pmatrix}$$

وحسب (3-14) علاقات التحويل العكسية من PXY هي :

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y+1 \end{pmatrix}$$

مثال (5) :

لتكن $Oxyz$ جملة متعامدة ومنظمة ولتكن $OXYZ$ جملة أخرى تتحد معها بالمبدأ والعلاقة التالية تربط (x, y, z) إحداثيات نقطة اختيارية بالنسبة للجملة الثابتة (X, Y, Z) إحداثياتها بالنسبة للجملة الجديدة.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

والمطلوب :

1 - هل الجملة $OXYZ$ متعامدة ومنظمة ؟

2 - أثبت أن معادلة المنحنى Γ في الجملة الثابتة :

$$x - y + z = 0 \quad \text{و} \quad xy - xz + yz - 2 = 0$$

تصبح في الجملة الجديدة :

$$Y = 0 \quad X^2 + Z^2 = 4$$

3 - اكتب علاقات التحويل العكسية وعين معادلة القطع الناقص

$$3Y^2 - 6Z^2 = 1 \text{ و } X = C \text{ في الجملة القديمة.}$$

4 - عين النقاط الثابتة بالنسبة لهذا التحويل .

الحل :

1 - إن الجملة OXYZ متعامدة ومنظمة وذلك لأن مصفوفة الانتقال متعامدة

أي $A' = A^{-1}$ (تحقق من ذلك) أو إذا استنتجنا مركبات أشعة الواحدة على الجملة

الجديدة :

$$\bar{I} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right), \bar{J} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right), \bar{K} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}} \right)$$

نرى بوضوح أن :

$$\bar{I} \bar{J} = \bar{I} \bar{K} = \bar{J} \bar{K} = 0$$

$$|\bar{I}| = |\bar{J}| = |\bar{K}| = 1$$

2 - نكتب علاقات التحويل ونبدل في معادلة المنحني :

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} X + \frac{1}{\sqrt{3}} Y + \frac{1}{\sqrt{6}} Z$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}} X - \frac{1}{\sqrt{3}} Y - \frac{1}{\sqrt{6}} Z$$

$$z = \frac{1}{\sqrt{3}} Y - \frac{2}{\sqrt{6}} Z$$

$$x - y + z = 0, \quad xy - xz + yz - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x - y + z = 0, \quad y^2 - xz - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$Y = 0, \quad \frac{1}{2} X^2 + \frac{1}{2} Z^2 - \frac{3}{\sqrt{6}} XY + \frac{3}{\sqrt{18}} YZ - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$Y = 0, \quad X^2 + Z^2 = 4$$

3 - نستبدل أمكنة الإحداثيات القديمة والجديدة ونستبدل مصفوفة الانتقال بمصفوفة جديدة ناتجة عنها بجعل الأسطر أعمدة والأعمدة أسطراً.

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

ومنه :

$$X = \frac{1}{\sqrt{2}} (x + y)$$

$$Y = \frac{1}{\sqrt{3}} (x - y + z)$$

$$Z = \frac{1}{\sqrt{6}} (x - y - 2z)$$

نعرض في معادلة القطع :

$$X = C, \quad 3Y^2 - 6Z^2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$x + y = \sqrt{2} c, \quad (x - y + z)^2 - (x - y - 2z)^2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$x + y = \sqrt{2} c, \quad -3z^2 + 6xz - 6yz = 1 \Leftrightarrow$$

$$x + y = \sqrt{2} c, \quad z^2 - 2xz + 2yz + \frac{1}{3} = 0$$

$$x + y = \sqrt{2} c, \quad z^2 - 4xz + 2\sqrt{2} cz + \frac{1}{3} = 0$$

4 - النقطة الثابتة هي النقطة التي إحداثياتها متساوية بالنسبة للمحلتين أي :

$$(x, y, z) = (X, Y, Z)$$

أو :

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} x + \frac{1}{\sqrt{3}} y + \frac{1}{\sqrt{6}} z$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}} x - \frac{1}{\sqrt{3}} y - \frac{1}{\sqrt{6}} z$$

$$z = \frac{1}{\sqrt{3}} y - \frac{2}{\sqrt{6}} z$$

وهي جملة ثلاث معادلات خطية متجانسة مصفوفة أمثلتها:

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{3}-\sqrt{6} & \sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{3} & -(\sqrt{6}+\sqrt{2}) & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & -(2+\sqrt{6}) \end{pmatrix}$$

محددها يساوي الصفر (نحقق من ذلك). وللجملة عدد لانهائي من الحلول.
ويمكن تمثيل النقاط الثابتة بأي زوج من المعادلات:

$$(\sqrt{3} - \sqrt{6})x + \sqrt{2}y + z = 0$$

$$\sqrt{3}x - (\sqrt{2} + \sqrt{6})y - z = 0$$

$$\sqrt{2}y - (2 + \sqrt{6})z = 0$$

اعتبر مثلاً جملة المعادلتين الثانية والثالثة حيث بيانها مستقيم في الفراغ (راجع الفصل الثاني)، خذ نقطة اختيارية منه مثل $(\sqrt{3} + \sqrt{6}, \sqrt{3}, 3 - \sqrt{6})$ ونحقق أن صورتها وفق هذا التحويل لا تتغير.

مسائل الفصل الأول وتمارينه

1 - أثبت أن النقاط:

$$Q(6, 10, 10), P(1, 0, -5), M(6, -10, 0)$$

هي رؤوس لثلث قائم الزاوية، احسب محيطه ومساحته .

2 - عيّن زوايا المثلث الذي رؤوسه :

$$Q(1, 2, 4), P(1, 0, 2), M(2, 1, 2)$$

واحسب محيطه ومساحته .

3 - عيّن نقطة تلاقي المستقيمات المتوسطة في المثلث الذي رؤوسه :

$$Q(2, 4, 2), P(2, 1, -1), M(1, 2, 3)$$

4 - عيّن α لكي تقع النقاط التالية في مستوى واحد .

$$a(\alpha, -1, -5), b(3, 9, 4), c(-52, 4, 4), d(4, 5, 1)$$

5 - اعتمد على تعريف الجداء الخارجي لشعاعين في حساب مساحة المثلث MPQ

في التمرين الثاني وفي حساب مساحة المثلث المنشأ على الشعاعين :

$$\vec{b} = -3\vec{i} + 4\vec{j} - 12\vec{k} \quad \vec{a} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$$

6 - بفرض $a, b_1, b_2, c_1, c_2, c_3$ قيماً لا تساوي الصفر. برهن أن الأشعة:

$$\vec{c}(c_1, c_2, c_3), \vec{b}(b_1, b_2, 0), \vec{a}(a, 0, 0)$$

مستقلة عطيلاً .

7 - ليكن الأشعة :

$$\vec{d}(0, 1, 1), \vec{c}(1, -4, 3), \vec{b}(2, 1, 0), \vec{a}(1, 2, -1)$$

بين أي من الأشعة التالية مستقلة خطياً :

$$(\bar{a}, \bar{b}), (\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}), (\bar{a}, \bar{b}, \bar{d}), (\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d})$$

8 - أثبت أن النقاط التالية :

$$Q(1, 1, 1), P(0, -1, 1), M(-1, 3, 1)$$

لا تقع على استقامة واحدة ، أوجد نقطة من Oxy تكون متساوية البعد عنها ثم اكتب معادلة كرة تمر منها.

9 - ما هو الشكل العام لأمثال توجيه المناحي الموازية للمحاور والمستويات الإحداثية .

10 - ما هي قسطاء توجيه وجيوب تمام توجيه المنحى الموازي للمستوي Oxy والذي يقامد المتجه $\vec{v}(2, -1, 1)$.

11 - أوجد الإحداثيات الديكارتية والأسطوانية للنقطة التي إحداثياتها الكروية :

$$\left(20, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3} \right)$$

12 - أوجد الإحداثيات الأسطوانية والكروية للنقطة $M(2\sqrt{3}, 2, 1)$.

13 - أوجد الإحداثيات الديكارتية والكروية للنقطة المعينة بالإحداثيات الأسطوانية:

$$z=1, \theta = \frac{\pi}{4}, \rho = 2$$

14 - اكتب معادلات السطوح التالية بالإحداثيات الكروية والأسطوانية :

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 5 = 0 \quad (\text{أ})$$

$$ax^2 + by^2 - cz^2 = 0 \quad (\text{ب})$$

15 - ما هي المعادلات القطبية للمنحنيات التالية ؟

$$x y - y + z = 0 \quad (أ)$$

$$(x^2 + y^2)^2 = 2 a x y \quad (ب)$$

$$y^2 = \frac{x^3}{2 a - x} \quad (ج)$$

$$(x^2 + y^2 - 2 a x)^2 = a^2 (x^2 + y^2) \quad (د)$$

16 - اكتب المعادلات الديكارتية للمنحنيات التالية :

$$r = a \cos \theta \quad , \quad r = \cos \frac{\theta}{3}$$

$$r = \frac{a}{1 - \cos \theta} \quad , \quad r = \frac{1}{2 \cos \frac{\theta}{2}}$$

$$r = \frac{\sin \theta}{4 \lg \theta - 1}$$

17 - بفرض M , N نقطتين على دائرة مركزها مبدأ الإحداثيات. استخدم تعريف

الجداء الداخلي والجداء الخارجي للشعاعين $\vec{OM}$ و $\vec{ON}$ في إثبات العلاقاتين :

$$\sin (\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos (\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

حيث α و β زاويتا الشعاعين $\vec{OM}$ و $\vec{ON}$ مع المحور $\vec{OX}$ على الترتيب.

18 - لتكن $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ أشعة اختيارية غير صفرية .

أثبت صحة العلاقات التالية :

$$a) \quad \vec{a} \times (\vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{d})) = (\vec{b} \cdot \vec{d}) (\vec{a} \times \vec{c}) - (\vec{b} \cdot \vec{c}) (\vec{a} \times \vec{d})$$

$$b) \quad (\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{b}, \vec{d}) \vec{c} - (\vec{a} \cdot \vec{b}, \vec{c}) \vec{d}$$

$$c) \quad (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = \vec{c} \cdot (\vec{d} \times (\vec{a} \times \vec{b}))$$

$$d) \quad (\vec{a} \times \vec{b}, \vec{b} \times \vec{c}, \vec{c} \times \vec{a}) = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})^2$$

$$e) \quad (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) (\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d}) (\vec{b} \cdot \vec{c})$$

19 - أثبت أنه يمكن تفريق أي شعاع b إلى مركبتين b_1 و b_2 ، الأولى عمودية على شعاع مفروض $\bar{a}$ والثانية عمودية عليه و :

$$b_1 = \frac{(\bar{a} \cdot \bar{b}) \bar{a}}{\bar{a}^2} \quad , \quad b_2 = \frac{(\bar{a} \times \bar{b}) \times \bar{a}}{\bar{a}^2}$$

20 - لتكن $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ ثلاثة أشعة تحقق $\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} = 0$

احسب القيمة العددية للمقدار: $\bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{b} \cdot \bar{c} + \bar{c} \cdot \bar{a}$

21 - أثبت صحة الإقتضاء :

$$\bar{a} \times \bar{b} + \bar{b} \times \bar{c} + \bar{c} \times \bar{a} = 0 \Rightarrow (\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = 0$$

22 - عين الانسحاب المناسب لجملة المحاور الإحداثية لحذف الحدود الخطية في المعادلة :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 2z - 2 = 0$$

ثم اكتب علاقات التحويل.

23 - عين زاوية الدوران حول المحور oz المناسبة لحذف الحد المستطيل في المعادلة:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 3xy + x - 1 = 0$$

واكتب علاقات التحويل .

24 - هل يمكن أن تكون العلاقات التالية دساتير تحويل من جملة إلى أخرى؟ (ولماذا؟).

$$x = 1 + X + 2Y - Z$$

$$y = -1 + 2X + Y + 3Z$$

$$z = -5X - Y - 10Z$$

25 - بفرض xyz جملة متعامدة منتظمة :

(1) عين α و β لكي تكون العلاقات التالية ، دساتير تحويل إلى جملة

متعامدة منتظمة أخرى $OXYZ$:

$$x = 1 + \frac{3}{7} X + \frac{6}{7} Y + \frac{2}{7} Z$$

$$y = -1 + \alpha X + \beta Y + \frac{6}{7} Z$$

$$z = 5 - \frac{6}{7} X + \frac{2}{7} Y + \frac{3}{7} Z$$

(2) اكتب علاقات التحويل العكسية .

(3) عين النقطة الثابتة بالنسبة لهذا التحويل.

26 - أحر انسحاباً ودوراناً للمحاور الإحداثية النظامية xyz لإثبات أن كلاً من المنحنيين:

$$3x^2 + 2xy + 3y^2 - 2ax - 2ay = 0$$

$$3x^2 - 2xy + 3y^2 - 8x + 8y + 7 = 0$$

قطع ناقص. عين مركز كل منهما ومحاوره. واكتب مصفوفات التحويل.

27 - أوجد المحل الهندسي لمجموعة نقاط الفراغ التي نسبة بعديها عن :

$$a(1, -1, -1) \text{ و } b(-3, 3, 3) \text{ هي } \frac{1}{3}$$

28 - يتحرك نقطة في الفراغ ليبقى بعدها عن oz مساوياً لضعفي بعدها عن ox .

أوجد المحل الهندسي لمسار تلك النقطة.

29 - برهن سماعياً أن قطري متوازي أضلاع a, b, c, d متناصفان وإن كانت

$a(a_1, a_2)$ ، $c(c_1, c_2)$ رأسين متقابلين في مربع. عين إحداثيات المركز

والرأسين الآخرين واحسب محيطه ومساحته.

30 - برهن شعاعياً أن القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفَي ضلعين في مثلث توازي وتساوي نصف الضلع الثالث فيه.

31 - أوجد إحداثيات النقط المتناظرة مع النقطتين $a(1, 2, 3)$ و $b(-1, 3, -1)$

بالنسبة للمحاور والمستويات الإحداثية، ثم احسب بعدي النقطتين c و d القاسمتين a و b بالنسب $\frac{1}{2}, \frac{1}{2} -$ (على الترتيب) عن المستويات والمحاور الإحداثية.

الفصل الثاني

المستويات والمستقيمات في الفضاء الثلاثي

ندرس في هذا الفصل إيجاد معادلة المستوي ومعادلة المستقيم في الفضاء الثلاثي بالنسبة لجملة متعامدة ديكارتية $Oxyz$ وكل ما له صلة بالمستقيم والمستوي.

1 - معادلة المستوي :

كما هو معلوم من الدراسة الثانوية فإن المستوي يتعين بأي من الحالات التالية:

أ - بمستقيمين متقاطعين .

ب - بمستقيم ونقطة لا تقع عليه.

ج - بثلاثة نقاط لا تقع على استقامة واحدة.

د - باحتوائه مستقيمين متوازيين.

هـ - بنقطة وتعامده مع مستقيم.

لهذا نورد مختلف أشكال معادلة المستوي بالنسبة لمعطيات تكفي لتحينه تماماً.

1 - 1 معادلة مستوي يمر بنقطة ويوازي متجهين غير متوازيين:

لتكن النقطة $M_0(x_0, y_0, z_0)$ والمتجهان غير المتوازيين :

$$\vec{a}(x_1, m_1, n_1) \quad , \quad \vec{b}(x_2, m_2, n_2)$$

عندها لإيجاد معادلة المستوي المار بالنقطة M_0 والموازي للمتجهين $\vec{a}$, $\vec{b}$ نرسم من النقطة M_0 متجهين $\vec{a}_1$, $\vec{b}_1$ موازيين للمتجهين $\vec{a}$, $\vec{b}$ فيكون لهما الأمثال التوجيهية نفسها التي للمتجهين $\vec{a}$, $\vec{b}$ أي :

$$\vec{a}_1(\ell_1, m_1, n_1) \quad , \quad \vec{b}_1(\ell_2, m_2, n_2)$$

وبفرض $M(x, y, z)$ نقطة متحولة ترسم المستوى المطلوب عندها يتحقق المطلوب إذا وقعت المتجهات الثلاثة $\vec{a}_1$, $\vec{b}_1$, $\vec{M_0M}$ في مستوي واحد أي إذا كان $(\vec{M_0M} , \vec{a}_1 , \vec{b}_1) = 0$ كجاء مختلط وهذا معناه أن :

$$(\vec{M_0M} , \vec{a} , \vec{b}) = 0 \quad (1-1)$$

التي تمثل المعادلة التجهية لمستوي يمر بالنقطة M_0 وموازي المتجهين $\vec{a}$, $\vec{b}$ وبإسقاط المعادلة (1-1) على المحاور الإحداثية ox, oy, oz نجد :

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ \ell_1 & m_1 & n_1 \\ \ell_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (2-1)$$

التي تمثل المعادلة الديكارتية للمستوي المار من النقطة M_0 والموازي للمتجهين $\vec{a}$, $\vec{b}$.

ملاحظة (1) : ليس بالضرورة رسم $\vec{a}_1$ مساوياً لـ $\vec{a}$ و $\vec{b}_1$ مساوياً لـ $\vec{b}$ بل يكفي أن يكون $\vec{a}_1$ متناسباً مع $\vec{a}$ و $\vec{b}_1$ متناسباً مع $\vec{b}$ أي $\vec{a}_1 = \lambda \vec{a}$, $\vec{b}_1 = \mu \vec{b}$ حيث λ, μ عددان حقيقيان غير معدومين $\lambda, \mu \neq 0$ وعندها :

$$(\lambda \vec{a} , \mu \vec{b} , \vec{M_0M}) = \lambda \mu (\vec{a} , \vec{b} , \vec{M_0M}) = 0$$

ومن جديد نحصل على المعادلة (1-1). بشكل آخر يمكن القول إنه لتقع المتجهات الثلاثة $\vec{a}_1$, $\vec{b}_1$, $\vec{M_0M}$ في مستوي واحد يكفي أن يكون المتجه $\vec{M_0M}$ محصلة لمتجهين الأول محمول على $\vec{a}_1$ والثاني على $\vec{b}_1$ وعندها نجد المعادلة التجهية:

$$\vec{M_0M} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} \quad (3-1)$$

حيث λ, μ وسيطان حقيقيان. وتمثل المعادلة (3-1) المعادلة المتجهية الوسيطة لمستوى يمر بالنقطة M_0 ويوازي المتجهين $\vec{a}, \vec{b}$ التي بإسقاطها على المحاور Ox, Oy, Oz تعطي المعادلات :

$$\begin{aligned} x - x_0 &= \lambda \ell_1 + \mu \ell_2 \\ y - y_0 &= \lambda m_1 + \mu m_2 \\ z - z_0 &= \lambda n_1 + \mu n_2 \end{aligned} \quad (4-1)$$

أو :

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \lambda \ell_1 + \mu \ell_2 \\ y &= y_0 + \lambda m_1 + \mu m_2 \\ z &= z_0 + \lambda n_1 + \mu n_2 \end{aligned}$$

التي تمثل المعادلات الوسيطة للمستوى المار بالنقطة M_0 والموازي للمتجهين $\vec{a}, \vec{b}$ والتي تتعلق بوسيطين حقيقيين λ, μ .

المعادلة (2-1) تكتب بعد نشر محدها بالشكل :

$$\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix} (x - x_0) + \begin{vmatrix} n_1 & \ell_1 \\ n_2 & \ell_2 \end{vmatrix} (y - y_0) + \begin{vmatrix} \ell_1 & m_1 \\ \ell_2 & m_2 \end{vmatrix} (z - z_0) = 0 \quad (5-1)$$

$$A = m_1 n_2 - m_2 n_1, B = n_1 \ell_2 - n_2 \ell_1, C = \ell_1 m_2 - \ell_2 m_1 \quad \text{وبفرض}$$

$$D = - (A x_0 + B y_0 + C z_0) \quad (6-1)$$

نجد أن معادلة المستوى تأخذ الشكل :

$$P = P(M) = P(x, y, z) = Ax + By + Cz + D = 0 \quad (7-1)$$

التي ستفرضها هنا تمثل الشكل القانوني المألوف لمعادلة المستوى.

مثال (1) : اكتب معادلة المستوى المار بالنقطة $M_0 (1, 0, 1)$ والموازي

للمتجهين :

$$\vec{a} (1, 1, 1) , \vec{b} (2, 3, 4)$$

الحل : المعادلة المتجهة ($\vec{M}_0 M, \vec{a}, \vec{b}$) والديكارتية :

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{أي } (x-1) - 2(y) + z-1 = 0 \text{ ومنه نجد } x - 2y + z - 2 = 0$$

مثال (2) : اكتب المعادلة الديكارتية للمستوي الذي معادلته الوسيطة:

$$x = u + v, y = u - v, z = 6 + 6u - 4v$$

الحل : لكتابة المعادلة الديكارتية المطلوبة يكفي حذف الوسيطين u, v

ويعمل الأولى والثانية وطرحهما من اليسار نجد :

$$u = \frac{x+y}{2} \quad v = \frac{x-y}{2}$$

وبالتبديل في المعادلة الثالثة نجد $z = 3(x+y) - 2(x-y) + 6$ أي نجد المعادلة

$$x + 5y - z + 6 = 0 \text{ المطلوبة .}$$

ملاحظة (2) : معادلة المستوي في أي فضاء تتعلق بوسيطين هما μ, λ أو u, v

أو

2 - 1 معادلة مستوي يمر بنقطتين ويوازي متجه:

لتكن النقطتان $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ والمتجه $\vec{a} = (l, m, n)$ غير الموازي للمتجه $\overrightarrow{M_1 M_2}$ عندها يمكن رد هذه المسألة للمسألة السابقة بفرض المستوي يمر بالنقطة M_1 ويوازي المتجهين $M_1 M_2$, $\vec{a}$ لنجد بفرض النقطة المتحولة التي ترسم المستوي المطلوب:

$$(\overrightarrow{M_1 M}, \overrightarrow{M_1 M_2}, \vec{a}) = 0 \quad (8-1)$$

التي تعطى بإسقاطها على المحاور الإحداثية Ox, Oy, Oz بفرض :

$$\overrightarrow{M_1 M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$$

المعادلة الديكارية للمستوي المار بالنقطتين M_1, M_2 والموازي للمتجه .

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0 \quad (9-1)$$

ومرة أخرى بنشر المحدد (9-1) نجد :

$$\begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m & n \end{vmatrix} (x - x_1) + \begin{vmatrix} z_2 - z_1 & x_2 - x_1 \\ n & l \end{vmatrix} (y - y_1) + \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ l & m \end{vmatrix} (z - z_1) = 0 \quad (10-1)$$

وبفرض :

$$A = n(y_2 - y_1) - m(z_2 - z_1), B = l(z_2 - z_1) - n(x_2 - x_1),$$

$$C = m(x_2 - x_1) - l(y_2 - y_1), D = -(Ax_1 + By_1 + Cz_1) \quad (11-1)$$

نجد من جديد أن لمعادلة المستوي (الشكل 7-1).

هنا أيضاً إذا كتبنا أن المتجه $\vec{M_1 M_2}$ هو محصلة لمتجهين الأول عمود على $\vec{q}$ والثاني على $\vec{M_1 M_2}$ نجد المعادلة المتجهية الوسيطة :

$$\vec{M_1 M_2} = \lambda \vec{M_1 M_2} + \mu \vec{q} \quad (12-1)$$

والتي بإسقاطها على المحاور الإحداثية تعطي المعادلات الديكارتية الوسيطة:

$$\begin{aligned} x - x_1 &= \lambda (x_2 - x_1) + \mu l \\ y - y_1 &= \lambda (y_2 - y_1) + \mu m \end{aligned} \quad (13-1)$$

$$z - z_1 = \lambda (z_2 - z_1) + \mu n$$

أو :

$$x = x_1 + \lambda (x_2 - x_1) + \mu l$$

$$y = y_1 + \lambda (y_2 - y_1) + \mu m$$

$$z = z_1 + \lambda (z_2 - z_1) + \mu n$$

مثال (3) : اكتب معادلة مستوي يمر بالنقطتين $M_1 (1, 1, 0)$, $M_2 (1, 0, 1)$ والموازي للمتجه $\{1, -1, 1\}$.

الحل : المعادلة الديكارتية هي :

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-0 \\ 1-1 & 0-1 & 1-0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (x-1) \cdot 0 + (y-1) \cdot 1 + z \cdot 1 = 0$$

$$\text{أو } y + z - 1 = 0$$

3 - 1 معادلة مستوي يمر بثلاث نقاط :

لتكن النقط الثلاث $M_i (x_i, y_i, z_i)$ ($i = 1, 2, 3$) عندها لإيجاد معادلة المستوي

المر بهذه النقط يمكن رد المسألة للمسألة الأولى بفرض النقطة هي : $M_1 (x_1, y_1, z_1)$ والمتجهين هما :

$$\overrightarrow{M_1 M_2} \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}, \quad \overrightarrow{M_1 M_3} \{x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1\}$$

والمعادلة المتجهة بفرض $M(x, y, z)$ النقطة المتحولة التي ترسم هذا المستوي هي:

$$(\overrightarrow{M_1 M}, \overrightarrow{M_1 M_2}, \overrightarrow{M_1 M_3}) = 0 \quad (14-1)$$

والديكارتية :

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0 \quad (15-1)$$

والتي بنشرها تعطى :

$$\begin{vmatrix} y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} (x-x_1) + \begin{vmatrix} z_2-z_1 & x_2-x_1 \\ z_3-z_1 & x_3-x_1 \end{vmatrix} (y-y_1) +$$

(16-1)

$$+ \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix} (z-z_1) = 0$$

وبفرض :

$$A = \begin{vmatrix} y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} z_2-z_1 & x_2-x_1 \\ z_3-z_1 & x_3-x_1 \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}$$

$$D = -(A x_1 + B y_1 + C z_1) \quad (17-1)$$

نجد من جديد أن معادلة المستوي ترد للشكل (7-1) .

ملاحظة : يمكن أن تكتب المعادلة المطلوبة بالشكل :

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (18-1)$$

هنا أيضاً إذا كتبنا أن $\vec{M_1 M}$ عمدة لمتجهين عمولين على $\vec{M_1 M_2}$ ، $\vec{M_1 M_3}$ نجد
المعادلة المتجهة الوسيطة :

$$\vec{M_1 M} = \lambda \vec{M_1 M_2} + \mu \vec{M_1 M_3} \quad (19-1)$$

التي بإسقاطها على المحاور الإحداثية ox , oy , oz تعطي المعادلات الديكارتية
الوسيطة:

$$\begin{aligned} x - x_1 &= \lambda (x_2 - x_1) + \mu (x_3 - x_1) \\ y - y_1 &= \lambda (y_2 - y_1) + \mu (y_3 - y_1) \\ z - z_1 &= \lambda (z_2 - z_1) + \mu (z_3 - z_1) \end{aligned} \quad (20-1)$$

أو :

$$\begin{aligned} x &= x_1 + \lambda (x_2 - x_1) + \mu (x_3 - x_1) \\ y &= y_1 + \lambda (y_2 - y_1) + \mu (y_3 - y_1) \\ z &= z_1 + \lambda (z_2 - z_1) + \mu (z_3 - z_1) \end{aligned}$$

مثال (4) : أوجد معادلة المستوي المار بالنقط الثلاث :

$$M_1 (0, 0, 1), M_2 (1, 1, 1), M_3 (1, 9, 3)$$

الحل :

$$\vec{M_1 M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\} = \{1, 1, 0\}, \vec{M_1 M_3} = \{1, 9, 2\}$$

والمعادلة هي :

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 9 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2x - 2y + 8(z - 1) = 0$$

مثال (5) : اكتب معادلة المستوي القاطع للمحاور الإحداثية في النقط الثلاث $(a,0,0), (0,b,0), (0,0,c)$ حيث $a, b, c \neq 0$ (a, b, c أعداد حقيقية).

الحل : المعادلة هي :

$$\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = bc(x-a) + acy + abz = 0$$

وبالتقسيم على a, b, c نجد معادلة المستوي غير المار بالمبدأ القاطع للمحاور الإحداثية الثلاثة هي :

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \quad (21-1)$$

ملاحظة (4) : في المعادلات المتجهية (1-1) ، (8-1) ، (14-1) وبفرض قيمة الجداء المختلط تساوي الصفر يمكن ترتيب المتجهات الثلاثة في الجداء المختلط كفيماً دون أن يؤثر ذلك في شكل المعادلة.

4 - 1 معادلة مستوي يمر بنقطة ويتعامد مع متجه :

لتكن النقطة $M_0(x_0, y_0, z_0)$ والمتجه $\vec{N} \{ A, B, C \}$ والنقطة $M(x, y, z)$ النقطة المتحولة التي ترسم المستوي المار بالنقطة M_0 والمتعامد مع $\vec{N}$ الذي سندعوه ناظم المستوي. عندها يكفي تعامد المتجه $\vec{M_0M}$ مع $\vec{N}$ لنجد المستوي المطلوب وتكون المعادلة المتجهية:

$$\vec{M_0M} \cdot \vec{N} = 0 \quad (22-1)$$

وبإسقاط هذه المعادلة على المحاور الإحداثية ox, oy, oz نجد المعادلة

الديكارتية:

$$P(x, y, z) = (x - x_0)A + (y - y_0)B + (z - z_0)C = 0 \quad (23-1)$$

وبفرض $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$ نجد من جديد المعادلة (7-1).

إذن وكما نلاحظ فإن معادلة المستوي ترد دوماً للشكل (7-1). ويمكن أن تثبت العكس وهو أنه في المعادلة (7-1) فإن المتجه $\vec{N}(A, B, C)$ يمثل ناظم المستوي أي أنه يتعامد مع أي متجه يمر بنقطتين واقعتين في المستوي.

في الواقع بفرض $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$ نقطتان من المستوي عندهما تحققان المعادلة (7-1) ؟ أي أن :

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0 \quad , \quad Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = 0$$

وبطرح اليسرى من اليمنى نجد :

$$A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) + C(z_2 - z_1) = 0$$

وهذه العلاقة تعني أن المتجهين :

$$\{A, B, C\}, \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$$

متعامدان.

نتيجة : إن شرط توازي متجه $\vec{a} = \{-l, m, n\}$ مع المستوي المعطى.

بالمعادلة (7-1) هو أن يتعامد المتجه مع ناظم المستوي $\vec{N}(A, B, C)$ أي أن يتحقق

الشرط :

$$lA + mB + nC = 0 \quad (24-1)$$

مثال (6) : اكتب معادلة المستوى المار بالنقطة $M_0(1, 2, 3)$ والمتعامد مع المتجه $(2, -1, 0)$.

الحل : المعادلة هي :

$$(x-1) \cdot 2 + (y-2) \cdot (-1) + (z-3) \cdot 0 = 0$$

$$2x - y = 0 \quad \text{أي :}$$

مثال (7) : اكتب معادلة المستوى المار بالنقطة $(1, 2, 3)$ والموازي للمستوي :

$$x - y + 2z + 4 = 0$$

الحل : لتوازي مستويين يكفي أن يتوازي ناظماهما (لهما الناظم نفسه أو أنهما متناسبان). وحيث أن ناظم المستوى المعطى $\{1, -1, 2\}$ فإن المعادلة المطلوبة :

$$x - 1 - (y - 2) + 2(z - 3) = 0$$

$$x - y + 2z - 5 = 0 \quad \text{أو}$$

مثال (8) : اكتب معادلة المستوى المتعامد مع كل من المستويين

$$x + 2y - z + 5 = 0 \text{ و } 3x - y + 2z + 4 = 0 \text{ المار بالنقطة } (1, 1, 1).$$

الحل : المستوى العمودي على المستويين هو مستوٍ ناظمه عمودي على ناظميهما وبالتالي يوازي متجه جدائهما الخارج جي بفرضهما :

$$\vec{N}_1\{1, 2, -1\}, \vec{N}_2\{3, -1, 2\}$$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \{3, -5, -7\}$$

ومعادلة المستوي المطلوب :

$$3(x-1)-5(y-1)-7(z-1)=0$$

$$3x-5y-7z+9=0 \quad \text{أي :}$$

أو بشكل آخر بفرض $\vec{N}(A, B, C)$ ناظم المستوي المطلوب فهو عمودي على كل من $\vec{N}_1, \vec{N}_2$ أي :

$$A+2B-C=0, 3A-B+2C=0$$

وبنفس الوقت معادلة المستوي المطلوب :

$$(x-1)A+(y-1)B+(z-1)C=0$$

ولإيجاد C , B بدلالة A أي بضرب الأولى مرة بالعدد 2 وجمعها للثانية $5A+3B=0$ ومنه $B=-\frac{5}{3}A$ وكذلك بضرب الثانية بالعدد 2 وجمعها للأولى نجد $7A+3C=0$ ومنه $C=-\frac{7}{3}A$ وبالتبديل في معادلة المستوي نجد :

$$(x-1)A-(y-1)\frac{5}{3}A-(z-1)\frac{7}{3}A=0$$

إذن : $3x-5y-7z+9=0$ وهو ما وجدناه .

بشكل خاص عندما نختار $\vec{N}$ متجه الواحدة نجد أن :

$$\vec{N} \left\{ \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \right\}$$

وعندها تأخذ المعادلة (23-1) الشكل :

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}(x-x_0) + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}(y-y_0) + \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}(z-z_0)=0 \quad (25-1)$$

أو بفرض :

$$\cos \alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \cos \beta = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \cos \gamma = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$P = x_0 \cos \alpha + y_0 \cos \beta + z_0 \cos \gamma \quad (26-1)$$

تأخذ المعادلة الأخيرة الشكل :

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - P = 0 \quad (27-1)$$

التي تسمى المعادلة الناطمية للمستوي .

مثال (9) :

أعد للشكل الناطمي معادلات المستويات :

$$\text{أ - } 10x + 2y - 11z + 60 = 0$$

$$\text{ب - } 2x - 9y + 6z + 22 = 0$$

$$\text{ج - } 6x - 6y - 7z + 33 = 0$$

الحل : من أجل :

أ - لدينا $\sqrt{100 + 4 + 121} = 15$ والمعادلة الناطمية هي :

$$\frac{10}{15}x + \frac{2}{15}y + \frac{11}{15}z + 4 = 0$$

ومن أجل ب - لدينا $\sqrt{4 + 81 + 36} = 11$ والمعادلة الناطمية هي :

$$\frac{2}{11}x - \frac{9}{11}y + \frac{6}{11}z - 2 = 0$$

ومن أجل ج - لدينا $\sqrt{36 + 36 + 49} = 11$ والمعادلة الناطمية هي :

$$\frac{6}{11}x - \frac{6}{11}y - \frac{7}{11}z + 3 = 0$$

5-1 معادلة المستويات الإحداثية والموازية أو القاطعة للمحاور:

نلاحظ أن جميع المستويات الإحداثية تمر بنقطة المبدأ (0, 0, 0) فإذا كان المطلوب معادلة المستوي:

أ - oxy فهو يوازي المتجهين (1, 0, 0) المحمول على ox و (0, 1, 0) المحمول على oy ومعادلته :

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = z = 0$$

وكل مستوي يوازيه يوازي المتجهين السابقين نفسيهما فإذا كان يمر بالنقطة $M_0(x_0, y_0, z_0)$ فمعادلته :

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = z - z_0 = 0 \Rightarrow z = z_0$$

ب - oxz فهو يوازي المتجهين (1, 0, 0) المحمول على ox و (0, 0, 1) المحمول على oz ومعادلته :

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = y = 0$$

وكل مستوي يوازيه يوازي المتجهين السابقين نفسيهما فإذا كان يمر بالنقطة $M_0(x_0, y_0, z_0)$ فمعادلته :

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = y - y_0 = 0 \Rightarrow y = y_0$$

ج - oyz فهو يوازي المتجهين $\{0, 1, 0\}$ المحمول على oy و $\{0, 0, 1\}$ المحمول على oz ومعادلته :

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = x = 0$$

وكل مستوي يوازيه يوازي المتجهين السابقين نفسيهما فإذا كان يمر بالنقطة $M_0(x_0, y_0, z_0)$ فمعادلته :

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = x-x_0=0 \Rightarrow x=x_0$$

نتيجة : معادلة المستوي حيث يوجد في المعادلة x فقط هي معادلة مستوي يوازي oyz هي $x = x_0$ وعندما $x_0 = 0$ فهي معادلة مستوي الإحداثيات oyz ومعادلة المستوي حيث يوجد في المعادلة y فقط هي معادلة مستوي يوازي oxz وهي $y = y_0$ أو $y - y_0 = 0$ وعندما $y_0 = 0$ فهي معادلة مستوي الإحداثيات oxz ، ومعادلة المستوي حيث يوجد في المعادلة z فقط هي معادلة مستوي يوازي oxy وهي : $Cz + D = 0$ أو $z = z_0$ وعندما $z_0 = 0$ فهي معادلة مستوي الإحداثيات oxy .

أما فيما يتعلق بالمستويات التي تقطع إحدى المحاور فنورد الخواص :

أ - إذا قُطع المستوي المحور ox كان $A \neq 0$ وإذا لم يقطعه كان $A = 0$.

ب - إذا قُطع المستوي المحور oy كان $B \neq 0$ وإذا لم يقطعه كان $B = 0$.

ج - إذا قُطع المستوي المحور oz كان $C \neq 0$ وإذا لم يقطعه كان $C = 0$.

في الواقع نفرض أن المستوي معطى بالمعادلة $Ax + By + Cz + D = 0$ ويقطع المحور ox ولا يمر باللبداً عندها تم جد نقطة على ox تحقق معادلته ولتكن $(x_0, 0, 0)$

ولذا فهي تحقق المعادلة السابقة أي $Ax_0 + D = 0$ وبفرض $D \neq 0$ لأن المستوى لا يمر بالمبدأ فإن $A = -D/x_0 \neq 0$ وبالعكس عندما $A \neq 0$ فإن النقطة $(-D/A, 0, 0)$ التي تقع على ox تحقق معادلته.

أما عندما $A = 0$ فنحصل على المعادلة $By + Cz + D = 0$ التي تمثل معادلة مستوى ناظمة $\vec{n}(0, B, C)$ وهو عمودي على المتجه $(1, 0, 0)$ المحمول على ox لأن جداءهما الداخلي يساوي الصفر والمستوي يوازي المحور ox فهو لا يقطعه .

بالأسلوب نفسه نبين أنه إذا كان المستوى لا يمر بالمبدأ $D \neq 0$ والمستوي يقطع المحور oy عندها توجد نقطة على oy تحقق معادلته ولتكن $(0, y_0, 0)$ وبالتعويض في معادلة المستوى نجد أن $y_0 = -D/B$ وبالعكس عندما $B \neq 0$ فإن النقطة $(0, -D/B, 0)$ التي تقع على oy تحقق معادلة المستوى، ومن أجل $B = 0$ نجد المعادلة $Ax + Cz + D = 0$ وناظم المستوى له المركبات $(A, 0, C)$ وهو عمودي على المتجه $(0, 1, 0)$ المحمول على المحور oy ولذا فالمستوي يوازيه.

كذلك بالأسلوب نفسه نجد عندما يقطع المستوى المحور oz فالنقطة $z_0 = D/C \neq 0$ وبالعكس فالنقطة $(0, 0, -D/C)$ عندما $C \neq 0$ تحقق معادلته وهي واقعة على oz .

إذن غياب المتحول x عن معادلة المستوى يعني أن المستوى يوازي المحور ox وغياب المتحول y يعني أن المستوى يوازي المحور oy وغياب المتحول z يعني، أن المستوى يوازي المحور oz وحيث إن أي مستوي لا بد أن يقطع أحد المحاور لذا فإن عدد المتحولات التي يمكن أن تغيب هما اثنان وعندها المستوى يوازي محوريهما.

- وإذا غاب المتحولين xy في المعادلة فإن المستوى يوازي oxy .
- وعند غياب المتحولين x, z في المعادلة فإن المستوى يوازي oxz .
- وعند غياب المتحولين y, z في المعادلة فإن المستوى يوازي oyz .

مثال (10):

اكتب معادلة المستوي المار بالنقطة (2, 6, -3) والموازي للمستوي :

$$\text{أ} - oxy \quad \text{ب} - oxz \quad \text{ج} - oyz$$

الحل : المستوي الموازي لـ oxy معادلته $Cz + D = 0$ وبفرض النقطة (2, 6, -3)

تحققه نجد $-3C + D = 0$ إذن $D = 3C$ وللمعادلة $C(z + 3) = 0$ أي $z = -3$.

والمستوي الموازي لـ oxz معادلته $By + D = 0$ أو $y = -D/B$ وحيث إنه يمر

بالنقطة (2, 6, -3) فهي تحقق معادلته و $6 = -D/B$ ومعادلته $y = 6$.

والمستوي الموازي لـ oyz معادلته $Ax + D = 0$ أو $x = -D/A$ والنقطة (2, 6, -3)

تحققه أي $-D/A = 2$ ومعادلته $x = 2$.

مثال (11):

أوجد نقط تقاطع المستوي $x - y + 7z - 4 = 0$ مع المحاور الإحداثية.

الحل :

أ - للتقاطع مع المحور ox نضع $y = 0, z = 0$ لنجد $x = 4$ والنقطة هي

$$(4, 0, 0)$$

ب - للتقاطع مع المحور oy نضع $x = 0, z = 0$ لنجد $y = -4$ والنقطة هي

$$(0, -4, 0)$$

ج - للتقاطع مع المحور oz نضع $x = y = 0$ لنجد $z = 4/7$ والنقطة هي

$$(0, 0, +4/7)$$

مثال (12):

هل تقع النقط الأربع (3, 1, 0), (0, 7, 2), (-1, 0, -5), (4, 1, 5) في مستوي واحد؟

واحد؟

الحل : لنكتب معادلة المستوي المار بثلاث نقط نجد :

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-1 & z \\ -3 & 7-1 & 2 \\ -1-3 & 0-1 & -5 \end{vmatrix} = -28(x-3) - (y-1) \cdot 23 + 27z = -28x - 23y + 27z + 107 = 0$$

ولندرس وضع النقطة الرابعة بالنسبة للمستوي حيث بالتبديل في المعادلة بقيم النقطة (4,1,5) نجد: $-28 + 110 \neq 0$ - وهي لا تحققه. والنقطة الرابعة لا تقع في المستوي نفسه. ومن النقط الأربع لا يمر مستوي.

نتيجة : المعادلة (18-1) تبين أن الشرط لتقع النقط الأربع $M_i(x_i, y_i, z_i)$ ($i = 1, 2, 3, 4$) في مستوي واحد هو تحققها بعد تبديل $x \rightarrow x_i$ و $y \rightarrow y_i$ و $z \rightarrow z_i$ وأن عدم تحققها يعني أن لا تقع النقط في مستوي واحد.

2 - أوضاع المستويات :

1 - 2 أوضاع مستويين :

لتكن لدينا المعادلتان :

$$P_1(M) = A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad (1-2)$$

$$P_2(M) = A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

عندما انطبق هذين المستويين يعني توازيهما ووجود نقطة مشتركة بينهما .

أما توازيهما فيعني توازي ناظميتهما :

$$\vec{N}_1(A_1, B_1, C_1) , \vec{N}_2(A_2, B_2, C_2) \text{ أي :}$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \lambda \quad (2-2)$$

وأما وجود نقطة مشتركة وليكن $M_0(x_0, y_0, z_0)$ فهي تحقق معادلتين المستويين أي

$$A_1 x_0 + B_1 y_0 + C_1 z_0 + D_1 = 0 \quad (3-2)$$

$$A_2 x_0 + B_2 y_0 + C_2 z_0 + D_2 = 0$$

وبضرب الثانية في λ وطرحها من الأولى نجد $D_1 - \lambda D_2 = 0$ أي أن $\frac{D_1}{D_2} = \lambda$ ومنه نجد شرط الانطباق :

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2} \quad (4-2)$$

نتيجة : توازي مستويين دون انطباقهما يعني عدم وجود نقطة مشتركة بينهما ويصبح شرط التوازي دون الانطباق هو :

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2} \quad (5-2)$$

أما شرط التقاطع فنجد من شرط عدم التوازي بكلمات أخرى عدم توازي ناظمي المستويين ويصبح الشرط اختلافاً أي من المساواتين أي :

$$\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2} \quad \text{أو} \quad \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{C_1}{C_2} \quad (6-2)$$

مثال (1) :

بين أوضاع أزواج المستويات التالية :

- 1) $2x + 3y - z + 5 = 0$, $4x + 6y - 2z + 10 = 0$
- 2) $x - y + z + 7 = 0$, $2x - 2y + 2z + 1 = 0$
- 3) $x - y + z + 1 = 0$, $2x + y - z + 3 = 0$

الحل : في الواقع للزوج الأول نجد :

$$\frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{-1}{-2} = \frac{5}{10}$$

وهما متطابقان.

وللزوج الثاني نجد :

$$\frac{1}{2} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2} \neq \frac{7}{1}$$

وهما متوازيان وغير متطابقين.

وللزوج الثالث نجد : $\frac{1}{2} \neq \frac{-1}{1}$ وهما متقاطعان.

من وجهة نظر جبرية فإن المسألة ترد إلى رتبة المصفوفتين :

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix}$$

الممثلتان لمصفوفة الأمثال A والمصفوفة الموسعة B انجد الجدول التالي :

الشروط	وضع المستويين
رتبة A = 2 $(Rg A = 2)$	المستويان متقاطعان
رتبة A = 1 ورتبة B = 2	المستويان متوازيان
رتبة B = 1	المستويان متطابقان

2 - 2 بعد نقطة عن مستو :

ليكن المستوي الذي معادلته $Ax + By + Cz + D = 0$ والنقطة $M_1 (x_1, y_1, z_1)$ من الفراغ الثلاثي عندها البعد بين هذه النقطة والمستوي تعطى بالعلاقة:

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

في الواقع بفرض $M_0 (x_0, y_0, z_0)$ نقطة من المستوي ومتجه ناظم المستوي الواحدي هو :

$$\vec{N} = \left\{ \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right\}$$

عندها مسقط $\vec{M_0 M_1}$ على الناظم يعطى بالعلاقة :

$$d = \left| \vec{M_0 M_1} \cdot \vec{N} \right| = \left| \vec{M_0 M_1} \right| \cdot \left| \vec{N} \right| \cos \left| \vec{M_0 M_1}, \vec{N} \right|$$

لنحدد :

$$d = \left| \frac{(x_1 - x_0)A + (y_1 - y_0)B + (z_1 - z_0)C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right| =$$

$$= \left| \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|$$

لأن :

$$\frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0$$

بفرض $M_0(x_0, y_0, z_0)$ نقطة من المستوي فهي تحقق معادلته إذن :

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad (7-2)$$

ملاحظة : إذا كان $d = 0$ فإن هذا يعني أن النقطة $M_1(x_1, y_1, z_1)$ تقع في المستوي .

مثال (2): أوجد بعد النقطة $(2, -3, 1)$ عن المستوي $x - y + z + 4 = 0$ وبعد كل من النقطتين $(0, 1, -1)$ ، $(1, 1, 1)$ عن المستوي $3x + 2y - z - 1 = 0$.

الحل : بعد النقطة $(2, -3, 1)$ عن المستوي $x - y + z + 4 = 0$ هو :

$$\frac{2 + 3 + 1 + 4}{\sqrt{1 + 1 + 1}} = \frac{10}{\sqrt{3}}$$

وبعد $(0, 1, -1)$ عن المستوي $3x + 2y - z - 1 = 0$ هو :

$$\frac{|2 - 1 - 1|}{\sqrt{9 + 4 + 1}} = 0$$

والنقطة تقع في المستوي وبعد النقطة $(1, 1, 1)$ عن المستوي نفسه هو :

$$\frac{3 + 2 - 1 - 1}{\sqrt{9 + 4 + 1}} = \frac{3}{\sqrt{14}}$$

لنذكر أنه إذا توازى مستويان ولم ينطبقا فإن البعد بينهما هو بعد نقطة من

أحدهما عن الآخر.

وعندما تكون معادلتاهما :

$$A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$$

$$A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$$

حيث :

$$\lambda = \frac{A_2}{A_1} = \frac{B_2}{B_1} = \frac{C_2}{C_1} \neq \frac{D_2}{D_1}$$

فإن البعد يعطى بالعلاقة :

$$d = \frac{|A_1 D_2 - A_2 D_1|}{A_1 \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} = \frac{|B_1 D_2 - B_2 D_1|}{B_1 \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} = \frac{|C_1 D_2 - C_2 D_1|}{C_1 \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

(8-2)

في الواقع بفرض $M_0(x_0, y_0, z_0)$ نقطة من الأول فهي تحقق معادلته :

$$A_1 x_0 + B_1 y_0 + C_1 z_0 + D_1 = 0$$

ولدينا البعد :

$$d = \frac{|A_2 x_0 + B_2 y_0 + C_2 z_0 + D_2|}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

أي :

$$d = \frac{|\lambda(A_1 x_0 + B_1 y_0 + C_1 z_0 + D_1) + D_2 - \lambda D_1|}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} =$$

$$= \frac{|D_2 - \lambda D_1|}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} = \frac{|D_2 - \frac{A_2 D_1}{A_1}|}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} = \frac{|A_1 D_2 - A_2 D_1|}{A_1 \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

مثال (3) : أوجد البعد بين المستويين المتوازيين :

$$4x + 6y - 2z + 11 = 0, \quad 2x + 3y - z + 4 = 0$$

الحل : النقطة (0, 0, 4) من المستوي الأول وهي تبعد عن المستوي الثاني

بمقدار :

$$\frac{-8 + 11}{\sqrt{16 + 36 + 4}} = \frac{3}{\sqrt{56}}$$

3 - 2 النقاط ذات القوى الموجبة والسالبة لمستوي :

لنعد إلى معادلة المستوي $Ax + By + Cz + D = 0$ ولنبين أن جميع نقاط المستوي الواقعة في إحدى جهتيها الإشارة نفسها بالنسبة للعبارة والنقاط الواقعة في الجهة الأخرى لها إشارة مخالفة .

في الواقع نفرض النقطتين $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ تقعان في جهتين مختلفتين بالنسبة للمستوي . عندها إذا وصلنا بينهما بمستقيم نجد نقطة $M(x, y, z)$ بينهما وتقع في المستوي وبفرض أن M تقسم القطعة المستقيمة $M_1 M_2$ داخلاً بالنسبة λ نجد :

$$\lambda = \frac{\overline{M_1 M}}{\overline{M M_2}} > 0$$

ومنه بالإسقاط على المحاور $oxyz$ نجد :

$$\lambda = \frac{x - x_1}{x_2 - x}$$

إذن :

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda} \quad (9-2)$$

وهذه الإحداثيات تحقق معادلة المستوي لأن M نقطة منه. إذن :

$$\frac{1}{1 + \lambda} [A(x_1 + \lambda x_2) + B(y_1 + \lambda y_2) + C(z_1 + \lambda z_2)] + D = 0$$

أي :

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D + \lambda (Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D) = 0$$

ومنه :

$$\lambda = - \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D} > 0 \quad (10-2)$$

وهذا معناه أن :

$$\frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D} < 0$$

أي أن $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D$ و $Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D$ من إشارتين مختلفتين. لثبت الآن إحدى النقطتين ولتكن M_1 ونفتش على نقطة أخرى تقع في جهة M_2 ولتكن M_3 نجد بالأسلوب نفسه أن $Ax_1 + By_1 + Cz_2 + D$ و $Ax_3 + By_3 + Cz_3 + D$ من إشارتين مختلفتين أي أن M_2 و M_3 من إشارة واحدة. وهكذا نجد أن أية نقطة في جهة M_2 لها إشارة M_2 نفسها في العبارة. وبالأسلوب نفسه نجد جميع نقاط جهة M_1 لها إشارة مخالفة لإشارة M_2 في عبارة $Ax + By + Cz + D$ وبالتالي من إشارة M_1 نفسها.

مثال (4) :

عَيِّن أوضاع النقط $M_0(0, 0, 0)$ ، $M_1(-1, 1, 5)$ ، $M_2(1, 0, -1)$ ، $M_3(-7, 0, 0)$ ، بالنسبة للمستوي $-x + 7y - 7 = 0$.

الحل :

$$P(M_0) = -7 , P(M_1) = 1 , P(M_2) = -8 , P(M_3) = 0$$

والنقطتان M_0 ، M_2 في جهة واحدة بالنسبة للمستوي المعطى و M_1 في جهة أخرى بينما M_3 تقع في المستوي.

4 - 2 زاوية مستويين ومعادلة المستوي النصف :

بالتعريف فإن زاوية مستويين هي الزاوية الحاصلة بين مستقيمين متقاطعين في نقطة من الفصل المشترك الأول يقع في المستوي الأول والثاني يقع في المستوي الثاني وكلاهما عمودي على الفصل المشترك.

وبالتالي هي الزاوية التي جيب تمامها يعطى بالعلاقة :

$$\cos(\pi_1, \pi_2) = \cos \varphi = \mp \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \quad (11-2)$$

في الواقع ليكن :

$$P_1(M) = A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$$

$$P_2(M) = A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$$

عندها ناظماتها :

$$\vec{N}_1 \{ A_1, B_1, C_1 \} , \vec{N}_2 \{ A_2, B_2, C_2 \}$$

وزاوية الناظمين هي زاوية المستويين، فإذا كانت حادة:

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2|}{|\vec{N}_1| |\vec{N}_2|} = \frac{|A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

ملاحظة (1) : وضعنا في (11-2) إشارة + لأنه توجد زاويتين في الحالة

العامة إحداها حادة جيب تمامها موجب والثانية منفرجة جيب تمامها سالب.

ملاحظة (2) : من العلاقة (11-2) نستطيع أن نقول إن شرط تعامد

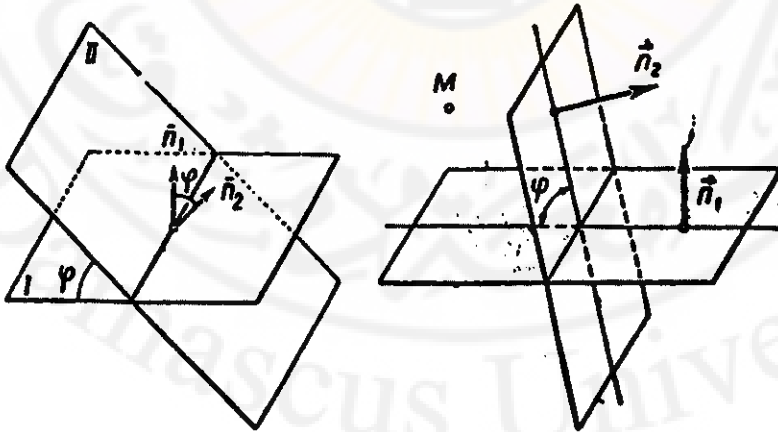
مستويين هو :

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0 \quad (12-2)$$

وذلك لأن الناطمين عندها يكونان متعامدين . أي أن $\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2 = 0$.

ولإيجاد معادلة المستوي النصف للمستويين P_1 و P_2 يكفي القول إن هذا المستوي هو المحل الهندسي لجميع النقاط المتساوية البعد عن كلا المستويين. وإذا لاحظنا وجود مستويين منصفين إحداهما للمستويين حيث يصنعان بينهما زاوية حادة والآخر حيث يصنعان زاوية منفرجة ولكننا معادلة هذين المستويين:

$$P_{1,2} = \frac{A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} = \mp \frac{A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \quad (13-2)$$



أي :

$$\left(\frac{A_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} - \frac{A_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \right) x + \left(\frac{B_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} - \frac{B_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \right) y + \left(\frac{C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} - \frac{C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \right) z + \left(\frac{D_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} - \frac{D_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \right) = 0$$

وللمستوي الثاني :

$$\left(\frac{A_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} + \frac{A_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \right) x + \left(\frac{B_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} + \frac{B_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \right) y + \left(\frac{C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} + \frac{C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \right) z + \left(\frac{D_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} + \frac{D_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \right) = 0$$

ولكانت مركبات ناظميهما :

$$\begin{aligned} \vec{N}_1 & \left\{ \frac{A_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} - \frac{A_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}, \frac{B_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} - \frac{B_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}, \frac{C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} - \frac{C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \right\} \\ \vec{N}_2 & \left\{ \frac{A_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} + \frac{A_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}, \frac{B_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} + \frac{B_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}, \frac{C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} + \frac{C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \right\} \end{aligned}$$

ولكان :

$$\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2 = \frac{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} - \frac{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2} = 0$$

والمستويان المنصفان دوماً متعامدان .

مثال (5) : عيّن الزاوية بين المستويين :

$$\text{آ} \quad 2x - y + 3z = 0, x + 4y - 6z = 0$$

$$\text{ب} \quad x - y - z + 8 = 0, 2x - y + 3z + 7 = 0$$

الحل : ناظم المستوي الأول (2, -1, 3) وناظم المستوي الثاني (6, -4, -1) في (آ) ومنه جيب تمام زاويتيها :

$$\cos \varphi = \mp \frac{2 - 4 - 18}{\sqrt{53} \sqrt{14}}$$

وكذلك نجد للمستويين الآخرين في (ب) :

$$\cos \varphi = \frac{2 + 1 - 3}{\sqrt{} \sqrt{}} = 0$$

والمستويان متعامدان.

مثال (6) : اكتب معادلة المستويين المنصفين للمستويين :

$$4x - 5y + 3z - 1 = 0, x - 4y - z + 9 = 0$$

وتأكد أنهما متعامدان .

الحل :

$$\frac{4x - 5y + 3z - 1}{\sqrt{16 + 25 + 9} = 5\sqrt{2}} = \mp \frac{x - 4y - z + 9}{\sqrt{1 + 16 + 1} = 3\sqrt{2}}$$

إذن بعد الاختصار على $\sqrt{2}$ نجد :

$$12x - 15y + 9z - 3 = \mp (5x - 20y - 5z + 45)$$

ومنه نجد معادلتى المنصفين :

$$7x + 5y + 14z - 48 = 0$$

$$17x - 35y + 4z + 42 = 0$$

ونأظميها $\vec{N}_1 (7, 5, 14), \vec{N}_2 (17, -35, 4)$

وواضح أن : $\vec{N}_1, \vec{N}_2 = 0$

5 - 2 أوضاع المستويات وحزمها :

نعرف الحزمة المتقاطعة من المستويات بأنها تلك التي تقاطع في مستقيم (لها فصل مشترك) كما نعرف الحزمة المتوازية بأنها تلك التي تتوازي مستوياتها وليس بين أي اثنين من مستوياتها أية نقطة مشتركة. ولتشكيل الحزم لا بد من مستويين غير منطبقين يمثلان أساس الحزمة أو استنادها وعندها يفرض المستويين :

$$P_1 = A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$P_2 = A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

أساس الحزمة فإن جميع مستويات الحزمة تعطى بالمعادلة :

$$P_1 + \lambda P_2 = A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda (A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0 \quad (14-2)$$

التي هي تركيب خطي للمستويين P_1, P_2 .

ويمكن التأكد أن كل نقطة $M_0(x_0, y_0, z_0)$ تقع على الفصل المشترك تحقق معادلة أي مستوي من مستويات الحزمة.

في الواقع لدينا بفرض M_0 نقطة من الفصل المشترك :

$$A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1 = 0$$

وكذلك $A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2 = 0$ وبالتالي (2 - 14) محققة .

ملاحظة : يمكن كتابة معادلة الحزمة بالشكل :

$$\lambda \pi_1 + \mu \pi_2 = \lambda(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0 \quad (\lambda^2 + \mu^2 \neq 0)$$

مثال (7) : اكتب معادلة المستوي المار بنقطة المبدأ وبالفصل المشترك

للمستويين :

$$2x + 5y - 6z + 4 = 0 \quad , \quad 3y + 2z + 6 = 0$$

الحل : معادلة الحزمة $2x + 5y - 6z + 4 + \lambda(3y + 2z + 6) = 0$ ولكتابة

معادلة المستوي المطلوب نختار مستوي الحزمة الحاوي النقطة $(0, 0, 0)$ لنجد :

$$4 + 6\lambda = 0 \quad \text{ومنه} \quad \lambda = -2/3 \quad \text{ومعادلة المستوي المطلوب :}$$

$$2x + 5y - 6z + 4 - 2/3(3y + 2z + 6) = 0$$

$$6x + 9y - 22z = 0 \quad \text{أي :}$$

ولتشكل ثلاثة مستويات :

$$A_i x + B_i y + C_i z + D_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (15-2)$$

حزمة متوازية يجب أن تتوازي النواظم $\vec{N}_i(A_i, B_i, C_i) \quad (i = 1, 2, 3)$ وعندها إذا تحقق أن :

$$\frac{\vec{N}_1}{\vec{N}_3} = \frac{D_1}{D_3} \quad \text{و} \quad \frac{\vec{N}_1}{\vec{N}_2} = \frac{D_1}{D_2}$$

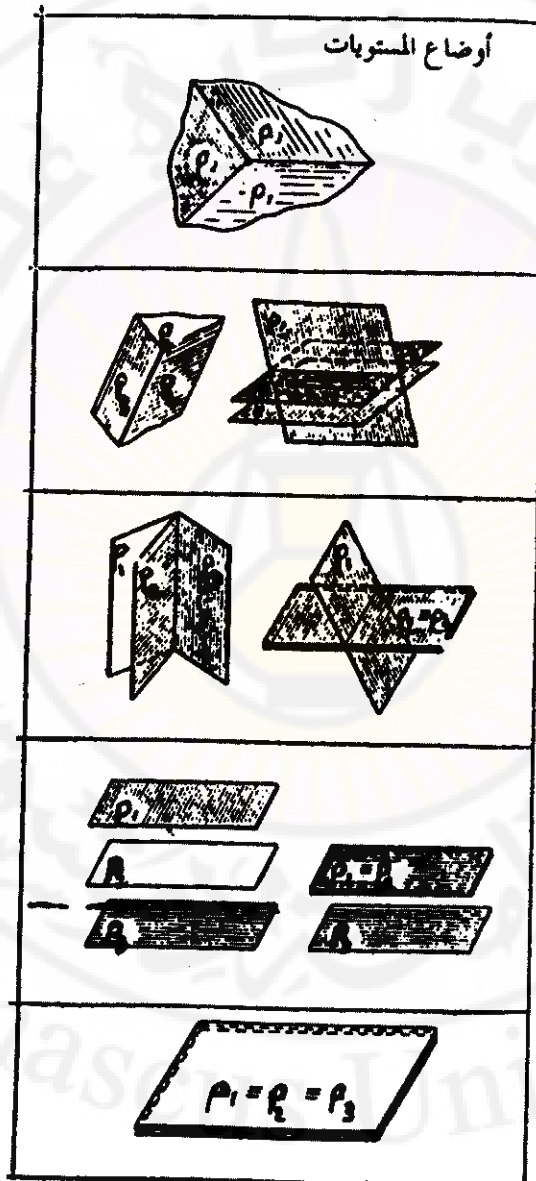
فالمستويات متطابقة وتشكل مستوي واحد

$$\frac{\vec{N}_1}{\vec{N}_2} \neq \frac{D_1}{D_2} \quad \text{و} \quad \frac{\vec{N}_1}{\vec{N}_3} \neq \frac{D_1}{D_3}$$

فالمعادلات الثلاث تمثل مستويين متطابقين من الثلاثة أما عندما

$$\frac{\bar{N}_1}{\bar{N}_2} \neq \frac{D_1}{D_2}, \quad \frac{\bar{N}_1}{\bar{N}_3} \neq \frac{D_1}{D_3}$$

فتشكل الحزمة ثلاثة مستويات متوازية. أما عندما $\bar{N}_1 \parallel \bar{N}_2$ فمستوياتهما متوازيان
وعندما $\bar{N}_1 \nparallel \bar{N}_3$ فالمستوي الثالث قاطع للأول وللثاني المتوازيين.



لما حصلنا $\bar{N}_1 \propto \bar{N}_2$ و $\bar{N}_1 \propto \bar{N}_3$ و $\bar{N}_2 \propto \bar{N}_3$ فالمستويات متقاطعة. ومن وجهة نظر حركية الشكل مصفوفة الأمثال A والمصفوفة الموسعة B للمعادلات (15-2) :

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} \cdot B = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix} \quad (15-2)$$

وعندما $R_0 A = R_0 B = 2$ تكون رتبة المصفوفة الموسعة $R_0 B = 2$ ورتبة مصفوفة الأمثال A تساوي 2. ولتشكل حزمة متوازية يجب أن تكون رتبة $R_0 A = 1$.

في الواقع بفرضه أن رتبة A = رتبة B = 2 أي $R_0 A = R_0 B = 2$. عندها فإن الجملة للمعادلات (15-2) لا نهاية من الحلول والمستويات متقاطعة في فصل مشترك.

وعندما تكون $R_0 A = 1$ فإن أسطرها متناسبة ويتحقق التوازي وحتى لا يتحقق التطابق يجب التحقق أن $R_0 B = 2$.

انطلاقاً مما سبق يمكن مناقشة أوضاع ثلاثة مستويات معطاه بالمعادلات (15-2) من خلال المصفوفتين (16-2) لنكتب الجدول التالي :

الحالة	رتبة A	رتبة B	أوضاع المستويات الثلاثة
1	3 أو $ A \neq 0$	3	المستويات متقاطعة في نقطة واحدة.
2	2	3	كل مستويين متقاطعان وليس لهما نقطة مشتركة.
3	2	2	المستويات تشكل حزمة متقاطعة في فصل مشترك.
4	1	2	مستويان متوازيان أو متطابقان والثالث قاطع لهما.
5	1	1	المستويات متطابقة جميعها.
6	0	1	لا توجد معادلات مستويات.

هذا ويمكن مناقشة هذه الأوضاع اعتماداً على محدد المصفوفة A والمحددات Δ_2 من المرتبة الثانية و Δ_1 المحددات من المرتبة الأولى تاركين ذلك للطالب والعودة للمحير في دراسة وجود حل أو عدمه لثلاث معادلات.

مثال (8) : بين أن المستويات الثلاثة :

$$x - y + z - 1 = 0$$

$$3x + 2y - 2z + 3 = 0$$

$$7x - 2y + 2z - 1 = 0$$

تشكل حزمة مستويات .

الحل : لنبين أن إحدى المعادلتين تشكل تركيباً خطياً للباقيتين :

$$3x + 2y - 2z + 3 + \lambda(x - y + z - 1) = 7x - 2y + 2z - 1$$

$$3 + \lambda = 7, 2 - \lambda = -2, -2 + \lambda = 2, 3 - \lambda = -1 \quad \text{أي :}$$

وبحل المعادلات الأربع نجد القيمة نفسها للوسيط λ أي : $\lambda = 4$.

مثال (9) : عيّن a, b لتكون المستويات الثلاثة :

$$2x - 4y + a = 0, x + by - 3z = 0, 6x + y + z - 30 = 0$$

(أ) متقاطعة في نقطة . (ب) حزمة متقاطعة .

الحل : مصفوفة الأمثال :

$$|A| = 82 + 2b \quad \text{و} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 1 & b & -3 \\ 6 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

وعندما $b \neq -41$ فإن المستويات تتقاطع في نقطة لأن $\Delta = |A| \neq 0$ أما عندما

$b = -41$ فحتى تشكل المستويات حزمة يجب أن تحقق :

$$R_0 A = R_0 B = 2$$

بفرض :

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 & a \\ 1 & -41 & -3 & 0 \\ 6 & 1 & 1 & -30 \end{pmatrix}$$

ونجد : $R_0 B = 2$ عندما $a = -180/19$ وعندها تشكل المستويات حزمة متقاطعة.

كذلك اعتماداً على ما سبق يمكن القول إن المستويات الأربع:

$$A_i x + B_i y + C_i z + D_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (17-2)$$

تتقاطع في نقطة واحدة أو توازي استقامة ما لتشكل ما يسمى مستويات الربطة إذا تحقق أن :

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix} = 0$$

وبالعكس. وسوف ندعو الربطة غير المتقاطعة في نقطة بالمتلة والمتقاطعة في نقطة بغير المتلة. في الواقع لو تقاطعت المستويات في النقطة $M_0(x_0, y_0, z_0)$ فعندها يتحقق أن $A_i x_0 + B_i y_0 + C_i z_0 + D_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4)$ والمعادلات (17-2) مرتبطة خطياً وهذا معناه أن $\Delta = 0$.

وبالعكس لو كانت $\Delta = 0$ فهذا معناه أن المعادلات (17-2) مرتبطة خطياً وعندها بفرض :

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{pmatrix}$$

عندها عندما $R_0 A = 3$ فإن بين المستويات الأربعة مستويات ثلاثة متقاطعة في نقطة وهي مستقلة إذن هذه النقطة تحقق معادلة المستوى الرابع لكون المستويات مرتبطة. حيث :

$$A_4 = \lambda A_1 + \mu A_2 + \nu A_3, \quad B_4 = \lambda B_1 + \mu B_2 + \nu B_3$$

$$C_4 = \lambda C_1 + \mu C_2 + \nu C_3, \quad D_4 = \lambda D_1 + \mu D_2 + \nu D_3$$

أما عندما $R_0 A = 2$ فين المعادلات (2-17) توجد اثنتان مستقلتان لهما حل مشترك وهو حل للباقيين بسبب الخطئية.

وعندما $R_0 A = 1$ عندها المستويات متوازية وقد يتطابق بعضها أو كلها ولذا فهي توازي استقامة معينة.

نترك للقارئ أن يبين أنه إذا كان :

$$(1) \quad |B| \neq 0 \quad \text{عندها} \quad R_0 A = 3 < R_0 B = 4$$

وعندها لا تشكل المستويات أية ربطة.

$$(2) \quad |B| = 0 \quad \text{أو أن} \quad R_0 A = R_0 B \quad \text{فإن المستويات متقاطعة.}$$

أما إذا كان $R_0 A < R_0 B$ فإنه لا توجد نقطة مشتركة بين المستويات الأربع.

مثال (5) : بين تقاطع المستويات الأربعة :

$$x + y + z - 3 = 0$$

$$x - 4z + 3 = 0$$

$$x + 3y + 2z - 6 = 0$$

$$2x - y - z = 0$$

الحل : لنوجد قيمة المحدد :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -6 \\ 1 & 0 & -4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & -3 & 6 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & -5 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} -3 & -3 & 6 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & -5 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

والمستويات هي مستويات ربطة.
النقطة (1, 1, 1) هي النقطة المشتركة بين المستويات.

3 - معادلة المستقيم في الفضاء الثلاثي :

كما هو معروف فإن المستقيم يتعين بأي من الحالات التالية :
(أ) بنقطتين. (ب) بنقطة وموازاته لمتجه. (ج) بتقاطع مستويين.
لهذا نورد مختلف أشكال معادلة المستقيم بالنسبة لمعطيات تكفي لتحديد ملامحه.

1 - 3 معادلة مستقيم يمر بنقطة ويوازي متجه :

بفرض $M_0(x_0, y_0, z_0)$ نقطة يمر بها المستقيم و $\vec{a} = (l, m, n)$ متجه يوازي هذا المستقيم عندها إذا كانت $M(x, y, z)$ نقطة متحولة ترسم هذا المستقيم فإنه لكتابة معادلة المستقيم يكفي كتابة شرط توازي المتجهين $\vec{a}$ و $\vec{M_0M}$ لنجد عندها المعادلة المتجهية:

$$\vec{M_0M} \wedge \vec{a} = 0 \quad \text{لأن} \quad \vec{M_0M} // \vec{a} \quad (1-3)$$

الذي يعني تناسب المركبات بسبب توازي $\vec{a}$ و $\vec{M_0M}$ وبإسقاط المعادلة (1-3) على المحاور الإحداثية ox, oy, oz نجد المعادلة الديكارية :

$$L(x, y, z) : \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} \quad (2-3)$$

بشكل آخر فإن شرط التوازي للمتجهين $\vec{a}$ و $\vec{M_0M}$ يعطى بالشكل :

$$\vec{M_0M} = \lambda \vec{a} \quad (3-3)$$

حيث λ وسيط حقيقي وهي تمثل المعادلة الوسيطة المتجهية التي بإسقاطها على المحاور :

$$x - x_0 = \lambda l$$

$$y - y_0 = \lambda m \quad (4-3)$$

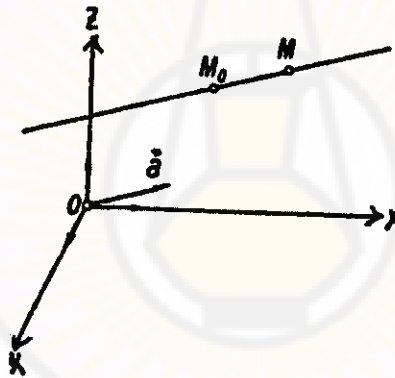
$$\text{أو} \quad z - z_0 = \lambda n$$

$$L(x, y, z): \begin{cases} x = x_0 + \lambda l \\ y = y_0 + \lambda m \\ z = z_0 + \lambda n \end{cases}$$

التي تمثل المعادلات الديكارتية الوسيطة لمستقيم يمر بنقطة ويوازي متجه.

مثال (1) : اكتب المعادلة الديكارتية والمعادلات الوسيطة للمستقيم المار

بالنقطة (1, 1, 1) والموازي للمتجه $\{-2, 3, -4\}$.



الحل : المعادلة الديكارتية :

$$\frac{x - 1}{-2} = \frac{y - 1}{3} = \frac{z - 1}{-4}$$

والمعادلات الوسيطة الديكارتية :

$$L: x = 1 - 2\lambda, \quad y = 1 + 3\lambda, \quad z = 1 - 4\lambda$$

ملاحظة (1) : إذا كانت إحدى المركبات أو مركبتان من مركبات المنتج (لثلاث) مساوية للصفر فعندها تصبح المعادلة بأحد الأشكال :

$$\frac{x-x_0}{0} = \frac{y-y_0}{0} = \frac{z-z_0}{n}$$

أو :

$$\frac{x-x_0}{0} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$$

أو :

$$\dots \text{ أو } \frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{0} = \frac{z-z_0}{n}$$

وليكون لهذه المعادلات معنى يجب أن يساوي بسط الكسر الذي مقامه يساوي الصفر، الصفر أيضاً فمن أجل المعادلة :

$$\frac{x-x_0}{0} = \frac{y-y_0}{0} = \frac{z-z_0}{n}$$

يجب تحقق أن $x = x_0$ و $y = y_0$ وهذا معناه أن x, y ثابتان بالنسبة للمستقيم أي أن المستقيم عمودي على Ox وعلى Oy فهو عمودي على مستويهما. ومن أجل المعادلة :

$$\frac{x-x_0}{0} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$$

فإن $x = x_0$ والمستقيم عمودي على Ox وهكذا يمكن المناقشة بالمفهوم نفسه لبقية المعادلات والمحاور .

مثال (2) : أكتب المعادلة الديكارتية والمعادلات الوسيطة الديكارتية للمستقيم المار بالنقطة (13, 4, -5) والموازي للمحور Oy .

الحل : بفرضه يوازي المحور oy فهو يوازي متجه الواحدة الواقع عليه ، أي $\{0, 1, 0\}$ والمعادلة الديكارتية :

$$\frac{x-5}{0} = \frac{y+4}{1} = \frac{z-13}{0}$$

والمعادلة الديكارتية الوسيطة :

$$x = 5, y = -4 + \lambda \quad z = 13$$

مثال (3) : اكتب معادلة المستقيم المار بالنقطة $(7, -6, 4)$ والموازي للمستقيم:

$$x = 2 - 5t, \quad y = 1 + 4t, \quad z = 7t$$

الحل : معادلة المستقيم المعطى الديكارتية :

$$\frac{x-2}{-5} = \frac{y-1}{4} = \frac{z}{7} = t$$

وهو يوازي المتجه $\{-5, 4, 7\}$ والمستقيم المطلوب يمر بالنقطة المعطاة ويموازي هذا المتجه ولذا فمعادلته الديكارتية :

$$\frac{x-7}{-5} = \frac{y+6}{4} = \frac{z-4}{7} = \lambda$$

والمعادلات الديكارتية الوسيطة :

$$x = -5\lambda + 7, \quad y = 4\lambda - 6, \quad z = 7\lambda + 4$$

ملاحظة (2) : لتقع ثلاث نقاط $M_i (x_i, y_i, z_i)$ على استقامة واحدة يجب

تحقق أن : $M_1\vec{M}_2 // M_1\vec{M}_3$ أي تحقق الشرط :

$$\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1} = \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}$$

مثال (4) : بين أي من النقاط الثلاث تقع على مستقيم واحد وأبها لا تقع .

أ) $M_1 (3, 0, 1), M_2 (0, 2, 4), M_3 (-3, 4, 7)$

ب) $M_1 (1, 2, 3), M_2 (10, 8, 4), M_3 (3, 0, 2)$

الحل : من أجل أ) نجد :

$$\{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\} = \{3, -2, -3\}$$

$$\{x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1\} = \{-6, 4, 6\}$$

ونتحقق أن :

$$\frac{3}{-6} = \frac{-2}{4} = \frac{-3}{6}$$

والنقط الثلاث على استقامة واحدة .

من أجل ب) نجد :

$$\{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\} = \{9, 6, 1\}$$

$$\{x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1\} = \{2, -2, -1\}$$

ونتحقق أن :

$$\frac{9}{2} \neq \frac{6}{-2}$$

والنقط الثلاث لا تقع على استقامة واحدة .

ملاحظة (2) : أي من النقاط الثلاث يمكن أن تسمى M_1 وأي من النقطتين

الباقيتين تسمى M_2 والثالثة M_3 .

3 - 2 معادلة مستقيم يمر بنقطتين :

لتكن النقطتان $M_1 (x_1, y_1, z_1)$ ، $M_2 (x_2, y_2, z_2)$ عندها المتجه $\vec{M_1M_2}$ له المركبات $\{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$ وأصبح المستقيم يمر بالنقطة M_1 ويوازي المتجه $\vec{M_1M_2}$ ورُدت هذه الحالة للحالة السابقة ولذا فالمعادلة المتجهة بفرض $M (x, y, z)$ نقطة متحركة ترسم هذا المستقيم هي :

$$\vec{M_1M_2} // \vec{M_1M} \text{ أو } \vec{M_1M_2} \wedge \vec{M_1M} = 0 \quad (5-3)$$

والمعادلة الديكارتية نجدتها من كتابة تناسب مركبات المتجهين $\vec{M_1M_2}$ و $\vec{M_1M}$.

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \quad (6-3)$$

كذلك يمكن كتابة المعادلة المتجهة بالشكل:

$$\vec{M_1M} = t \vec{M_1M_2} \quad (7-3) \quad (t \text{ وسيط})$$

لنجد بإسقاطها على المحاور المعادلات الديكارتية الوسيطة:

$$x - x_1 = t(x_2 - x_1)$$

$$y - y_1 = t(y_2 - y_1) \quad (8-3)$$

$$\text{أو : } z - z_1 = t(z_2 - z_1)$$

$$L: \begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1) \\ z = z_1 + t(z_2 - z_1) \end{cases}$$

مثال (5): اكتب المعادلة الديكارتية والمعادلات الوسيطة الديكارتية

للمستقيم المار بالنقطتين $M_1(6, 4, 5)$, $M_2(-3, 5, 8)$.

الحل: للمتجه المار بالنقطتين أمثال توجيهية $\vec{M_1M_2} \{ -3 - 6, 5 - 4, 8 - 5 \}$

أي $\{ -9, 1, 3 \}$ والمعادلة الديكارتية:

$$\frac{x - 6}{-9} = \frac{y - 4}{1} = \frac{z - 5}{3}$$

والمعادلات الديكارتية الوسيطة :

$$x = 6 - 9t, \quad y = 4 + t, \quad z = 5 + 3t$$

مثال (6) : اكتب المعادلة الديكارتية والمعادلات الوسيطة للمستقيم المار

بالنقطتين $M_1(2, -2, 3)$, $M_2(2, -2, 4)$.

الحل : المستقيم يوازي المتجه $(0, 0, 1)$ ومعادلته الديكارتية :

$$\frac{x - 2}{0} = \frac{y + 2}{0} = \frac{z - 4}{1}$$

ومعادلته الديكارتية الوسيطة : $x = 2, \quad y = -2, \quad z = 4 + t$

لنذكر أنه لتقع نقطة على مستقيم يجب أن تحقق معادلته.

مثال (7) : بين أي من النقط $A(5, 8, 15)$, $B(-1, -1, -3)$, $C(5, 7, 1)$

$D(0, \frac{1}{2}, 0)$, $E(0, 0, 1)$ تقع على المستقيم $x = 1 + 2t, y = 2 + 3t, z = 3 + 6t$

الحل : معادلة المستقيم الديكارتية :

$$\frac{x - 1}{2} = \frac{y - 2}{3} = \frac{z - 3}{6}$$

ولنبين أي من النقط تحقق معادلته وأيها لا تحقق.

لأجل النقطة $A(5, 8, 15)$ نجد : $\frac{+4}{2} = \frac{+6}{3} = \frac{12}{6}$ وهي تقع عليه.

لأجل النقطة $B(-1, -1, -3)$ نجد : $\frac{-2}{2} = \frac{-3}{3} = \frac{-6}{6}$ وهي تقع عليه.

لأجل النقطة $C(5, 7, 1)$ نجد : $\frac{4}{2} \neq \frac{5}{3}$ وهي لا تقع عليه.

لأجل النقطة $D(0, \frac{1}{2}, 0)$ نجد : $\frac{-1}{2} = \frac{\frac{1}{2} - 2}{3} = \frac{-3}{6}$ وهي تقع عليه.

لأجل النقطة $E(0,0,1)$ نجد : $\frac{-1}{2} \neq \frac{2}{3}$. وهي لا تقع عليه .

3 - 3 معادلة المستقيم كتقاطع مستويين :

يمكن إعطاء المستقيم بفرضه الفصل المشترك لمستويين متقاطعين :

$$A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 , \quad A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$$

ولذا يجب ألا يتطابق المستويان أو يتوازيا أي يجب أن لا تتحقق العلاقة :

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

أي يجب أن يتحقق، أن :

$$\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{C_1}{C_2} \quad \text{أو} \quad \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$$

وعندها بفرض $\vec{N}_1 \{A_1, B_1, C_1\}$ أمثال توجيه ناظم المستوي الأول و

$\vec{N}_2 \{A_2, B_2, C_2\}$ أمثال توجيه ناظم المستوي الثاني فإن الجداء الشعاعي (المتجهي)

لهما يمثل متجهاً موازياً للفصل المشترك. أي أن :

$$\vec{A} = \vec{N}_1 \wedge \vec{N}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$$

وأمثال توجيه الفصل المشترك :

$$\vec{a} \left\{ \begin{aligned} l &= \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, m = \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, n = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (9-3)$$

وهو غير مطابق للصفر عندما لا يتوازي المستويان كما اشترطنا أي عندما

$\vec{N}_1 \nparallel \vec{N}_2$ ويتعامد مع كل من الناظمين $\vec{N}_1, \vec{N}_2$. في الواقع:

$$\bar{N}_1 \cdot \bar{a} = A_1 \ell + B_1 m + C_1 n = A_1 \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} + B_1 \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} +$$

$$+ C_1 \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0$$

وكذلك :

$$\bar{N}_2 \cdot \bar{a} = A_2 \ell + B_2 m + C_2 n = A_2 \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} + B_2 \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} +$$

$$+ C_2 \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0$$

وبالبحث عن نقطة واقعة على الفصل المشترك مثلاً $x = x_0$ وحل المعادلتين :

$$A_2 x_0 + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \quad , \quad A_1 x_0 + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$$

نجد : y_0, z_0 .

من الأسر فرض $x = x_0 = 0$ وإذا أدى ذلك لحل مستحيل نفرض $y = y_0 = 0$

وهنا أيضاً إذا أدى ذلك لحل مستحيل نفرض $z = 0$ ونجد إمكانية ذلك. لأن

المستقيم المطلوب لا بد أن يقطع أحد المستويات الإحداثية. إذن بفرض x_0, y_0, z_0

نقطة من الفصل المشترك فإن معادلة المستقيم التي يمكن أن نقبلها كتقاطع مستويين :

$$A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \quad (10-3)$$

$$A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$$

نأخذ الشكل الديكارتي :

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} \quad (11-3)$$

أو إذا كانت المعادلة المتجهة للمستقيم $\vec{M_0 M} = t\vec{a}$ بفرض النقطة M ترسم المستقيم المطلوب فإن المعادلات الديكارتية الوسيطة:

$$x = x_0 + t \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, y = y_0 + t \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, z = z_0 + t \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \quad (12-3)$$

مثال (8) : اكتب المعادلة الديكارتية والمعادلات الديكارتية الوسيطة للمستقيم الممثل بتقاطع المستويين :

$$x + y + z + 3 = 0, \quad 2x - 3y + 4z - 1 = 0$$

الحل : لدينا :

$$\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} = \{7, -2, -5\}, \quad \vec{N}_1 \{1, 1, 1\}, \quad \vec{N}_2 \{2, -3, 4\}$$

ولفرض $x = 0$ نجد $y + z + 3 = 0$ و $-3y + 4z - 1 = 0$ وبحلها نجد : $z = \frac{-8}{7}$ وعندها $y = -3 + \frac{8}{7} = \frac{-13}{7}$ والمعادلة الديكارتية :

$$\frac{x}{7} = \frac{y + \frac{13}{7}}{-2} = \frac{z + \frac{8}{7}}{-5}$$

والمعادلات الوسيطة :

$$x = 7t, \quad y = -2t - \frac{13}{7}, \quad z = -5t - \frac{8}{7}$$

لنذكر أنه يمكن رد المعادلة الديكارتية للمستقيم التي هي :

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

إلى معادلات ديكارتية وسيطة بكتابة النسب المتساوية مساوية للنسبة 1.

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} = t$$

وحل كل نسبة مع الأخيرة:

$$\frac{z - z_0}{n} = t \text{ و } \frac{y - y_0}{m} = t \text{ و } \frac{x - x_0}{l} = t$$

لنجد :

$$L: x = x_0 + lt, \quad y = y_0 + mt, \quad z = z_0 + nt$$

كما يمكن رد المعادلات الديكارتية الوسيطة :

$$x = x_0 + lt, \quad y = y_0 + mt, \quad z = z_0 + nt$$

بنقل x_0, y_0, z_0 من الأطراف الثانية والتقسيم على l, m, n على التوالي التي هي أمثال t لنجد :

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

ويحل كل نسبتين نجد معادلة المستقيم كتقاطع مستويين .

مثال (9) : اكتب معادلة المستقيم المار بالنقطة $(0, -5, 0)$ والموازي للمستقيم المعطى بتقاطع المستويين :

$$z = 5, -x + 2y + 6 = 0$$

الحل : ناظم الأول $\vec{N}_1 \{ -1, 2, 0 \}$ وناظم الثاني $\vec{N}_2 \{ 0, 0, 1 \}$ والمتجه الموازي للفصل المشترك :

$$\vec{a} = \vec{N}_1 \wedge \vec{N}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \{ 2, 1, 0 \}$$

ومعادلة المستقيم الديكارتية إذن :

$$\frac{x}{2} = \frac{y+5}{1} = \frac{z}{0}$$

والمعادلة الديكارتية الوسيطة :

$$x=2t, \quad y=t-5, \quad z=0$$

4 - أوضاع المستقيمات في الفضاء الثلاثي :

4-1 أوضاع مستقيمين في الفضاء الثلاثي :

ليكن المستقيمان اللذان معادلتهما :

$$\frac{x-x_1}{\ell_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}, \quad \frac{x-x_2}{\ell_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}$$

والمستقيم الأول من اليسار يمر بالنقطة $M_1 (x_1, y_1, z_1)$ ويوازي المتجه $\{ \ell_1, m_1, n_1 \}$ والثاني يمر بالنقطة $M_2 (x_2, y_2, z_2)$ ويوازي المتجه $\{ \ell_2, m_2, n_2 \}$. ولنصل بين النقطتين M_1, M_2 لنجد أمثال توجيه المتجه :

$$\vec{M_1M_2} \{ x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \}$$

وحتى لا تقع هذه المستقيمات في مستوي واحد يجب تحقق أن الجداء المختلط :

$$(\vec{M_1M_2}, \vec{a}, \vec{b}) \neq 0$$

ويكون المستقيمان متخالفين. وإذن فشرط كون المستقيمين متخالفين هو :

$$(\vec{M_1M_2}, \vec{a}, \vec{b}) \neq 0 \quad (1-4)$$

أو بالإسقاط على المحاور الإحداثية نجد الشرط :

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ \ell_1 & m_1 & n_1 \\ \ell_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} \neq 0 \quad (2-4)$$

أما الشرط :

$$\Delta = 0 \quad \text{أو} \quad (\vec{M_1M_2}, \vec{a}, \vec{b}) = 0 \quad (3-4)$$

فيعني أن المستقيمين يقعان في مستوٍ واحد. وعندما يكون المستقيمان في مستوٍ واحد أي عند تحقق الشرط (3-4) فإنه إذا كان $\vec{a} // \vec{b}$ و $\vec{M_1M_2} \nparallel \vec{b}$ فالمستقيمان متوازيان ولا يشتركان في نقطة وديكارياً :

$$\frac{\ell_1}{\ell_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} \quad (4-4)$$

ولكن أما :

$$\frac{\ell_1}{x_2 - x_1} \neq \frac{n_1}{z_2 - z_1} \quad \text{أو} \quad \frac{\ell_1}{x_2 - x_1} \neq \frac{m_1}{y_2 - y_1} \quad (5-4)$$

أما إذا كان $\vec{a} // \vec{b}$ و $\vec{M_1M_2} // \vec{a}$ فالمستقيمان منطبقان وديكارياً يتحقق (4-4) إضافة إلى تحقق :

$$\frac{\ell_1}{x_2 - x_1} = \frac{m_1}{y_2 - y_1} = \frac{n_1}{z_2 - z_1} \quad (6-4)$$

ونلخص ذلك في الجدول التالي :

	المستقيمان متخالفان		$\Delta \neq 0$
المستقيمان متقاطعان	$\vec{a} \nparallel \vec{b}$		$\Delta = 0$
المستقيمان متوازيان	$\vec{a} \nparallel \vec{M_1M_2}$	$\vec{a} // \vec{b}$	
المستقيمان منطبقان	$\vec{a} // \vec{M_1M_2}$		

جبرياً واعتماداً على المصفوفات فإنه إذا كتبنا المصفوفة A والمصفوفة الموسعة B :

$$B = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 & 0 \\ \ell_1 & m_1 & n_1 & D_1 \\ \ell_2 & m_2 & n_2 & D_2 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ \ell_1 & m_1 & n_1 \\ \ell_2 & m_2 & n_2 \end{pmatrix}$$

فإن $\Delta \neq 0$ يعني أن رتبة المصفوفة A و B هو 3 $\text{rank } A = \text{rank } B = 3$ والمستقيمان متخالفان .
وبفرض :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} n_1 & \ell_1 \\ n_2 & \ell_2 \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} \ell_1 & m_1 \\ \ell_2 & m_2 \end{vmatrix}$$

نجد عندما $\Delta = 0, \Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 \neq 0$ أن رتبة A تساوي 2 ورتبة المصفوفة B هي 2 أيضاً والمستقيمان متقاطعان .

أما عندما $\Delta = 0$ و $\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 = 0$ فإن رتبة المصفوفة A أصغر من 2 فإذا كانت $R_A = 1$ وكانت رتبة الموسعة 2 فالمستقيمان متوازيان دون أن يتطابقا ونلخص ذلك في الجدول التالي :

شرح المحددات	رتبة A	رتبة B	وضع المستقيمين
$\Delta \neq 0$	3	3	المستقيمان متخالفان (لا يقعان في مستوى واحد)
$\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 \neq 0$	2	2 أو 3	المستقيمان متقاطعان
$\Delta = 0$	1	2	المستقيمان متوازيان
$\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$	1	1	المستقيمان متطابقان

مثال (1) : عيّن أوضاع أزواج المستقيمات التالية :

$$\text{أ) } x = 1 + 2t, y = 7 + t, z = 3 + 4t \quad \text{و}$$

$$x = 6 + 3t, y = -1 - 2t, z = -2 + t$$

و (ب) $x=1+2t, y=2-2t, z=-t$

$x=-2t, y=-5+3t, z=4$

و (ج) $x=2+4t, y=-6t, z=-1-8t$

$x=7-6t, y=6+9t, z=12t$

الحل : من أجل آ) نجد المعادلتين ونجد أن :

الأول يوازي المتجه $\{2, 1, 4\}$ ويمر بالنقطة $M_1(1, 7, 3)$.

والثاني يوازي المتجه $\{3, -2, 1\}$ ويمر بالنقطة $M_2(6, -1, -2)$ وأمثلة توجيه :

و $M_1\vec{M}_2 \{5, -8, -5\}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -8 & -5 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

فهما يقعان في مستوى واحد . حيث $\Delta = 21 \neq 0$ فهما متقاطعان .

من أجل ب) فإن المستقيم الأول // المتجه $\{2, -2, -1\}$ والثاني يوازي المتجه

$\{-2, 3, 0\}$ والأول يمر بالنقطة $M_1(1, 2, 0)$ والثاني يمر بالنقطة $M_2(0, -5, 4)$ و

$M_1\vec{M}_2 \{-1, -7, 4\}$ ولدينا :

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & -7 & 4 \\ 2 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

والمستقيمان متخالفان .

من أجل ج) فإن الأول // المتجه $\{4, -6, -8\}$ ويمر بالنقطة $M_1(2, 0, -1)$

والثاني يوازي المتجه $\{ -6, 9, 12 \}$ ويمر بالنقطة $M_2(7, 6, 0)$ و

$M_1\vec{M}_2 \{5, 6, 1\}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 1 \\ +4 & -6 & -8 \\ -6 & 9 & 12 \end{vmatrix} = 0$$

وحيث $\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 = 0$ فهما متوازيان لكن $\vec{M_1M_2} \times \{4, -6, 8\}$ لذا
فلا يوجد تطابق .

مثال (2) : عيّن أوضاع المستقيمات المعطاة بتقاطع مستويين في الأزواج

التالية :

$$\begin{array}{ll} \left. \begin{array}{l} x - 2y + 3 = 0 \\ y + 2z - 8 = 0 \end{array} \right\} \text{ و } & \left. \begin{array}{l} x + z - 1 = 0 \\ 3x + y - z + 13 = 0 \end{array} \right\} \text{ (أ)} \\ \left. \begin{array}{l} z - 4 = 0 \\ 2x + 3z - 7 = 0 \end{array} \right\} \text{ و } & \left. \begin{array}{l} 2x + 3y = 0 \\ x + z - 8 = 0 \end{array} \right\} \text{ (ب)} \\ \left. \begin{array}{l} 2x + 3y + 6z = 0 \\ 3x + 4y + 7z = 0 \end{array} \right\} \text{ و } & \left. \begin{array}{l} x + y + z - 1 = 0 \\ y + 4z = 0 \end{array} \right\} \text{ (ج)}$$

الحل : من أجل (أ) نجد أن المستقيم الأول يوازي المتجه :

$$\vec{a} = \vec{N}_1 \wedge \vec{N}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \{-1, 4, 1\}$$

ويمر بالنقطة $(x=0 \Rightarrow z=1, y=-12)$ أي $(0, -12, 1)$. والثاني يمر بالنقطة
 $(y=0 \Rightarrow x=3, z=4)$ أي $(3, 0, 4)$ ويوازي المتجه :

$$\vec{b} = \vec{N}_1 \wedge \vec{N}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \{-4, -2, 1\}$$

$$\text{و } \vec{M_1M_2} = \{-3, +12, 3\} \text{ و}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -3 & +12 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \\ -4 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Delta_1 = 6$$

المستقيمان واقعان في مستوي واحد ولكن $\Delta_1 \neq 0$ فالمستقيمان متقاطعان .
من أجل ب) نجد أن المستقيم الأول // المتجه :

$$\vec{a} = \vec{N}_1 \wedge \vec{N}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \{3, -2, -3\}$$

ويعر بالنقطة $(x=0, y=0, z=8)$ والثاني // المتجه :

$$\vec{b} = \vec{N}_1 \wedge \vec{N}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \{0, +2, 0\}$$

ويعر بالنقطة $z=4$ و $x = \frac{-5}{2}$ ومهما y أي مثلاً $\left(\frac{-5}{2}, 1, 4\right)$ و :

$$\text{إذن : } \vec{M_1 M_2} \left\{ \frac{-5}{2}, 1, -4 \right\}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{-5}{2} & 1 & 4 \\ \frac{2}{3} & -2 & -3 \\ 0 & +2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

والمستقيمان متخالفان .

من أجل ج) المستقيم الأول يوازي المتجه :

$$\vec{a} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \{3, -4, 1\}$$

ويعر بالنقطة $x=1, y=0, z=0$ أي $(1, 0, 0)$ والمستقيم الثاني يوازي

المتجه :

$$\vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & 6 \\ 3 & 4 & 7 \end{vmatrix} = \{-3, 4, -1\}$$

وبمر بالنقطة $z=0 \Rightarrow y=-18, x=24$ أي $(24, -18, 0)$ و :

$$\vec{M_1M_2} = \{23, -18, 0\}$$

وإذن :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 23 & -18 & 0 \\ 3 & -4 & 1 \\ -3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

والمستقيمان واقعان في مسترٍ واحد لكن $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$ والمستقيمان متوازيان.

2-4 زاوية مستقيمين :

إذا أنشأنا من أية نقطة في الفضاء الثلاثي مستقيماً موازياً لمستقيم معطى ومستقيماً آخر موازياً لمستقيم معطى ثانٍ فإن الزاوية الحاصلة بين المستقيمين الجديدين هي زاوية المستقيمين القديمين وإذا لم تكن هذه الزاوية قائمة أي إذا لم يكن المستقيمان متعامدين فلدوماً توجد بين المستقيمين زاوية حادة وزاوية منفرجة مجموعهما π أي (180 درجة) وبفرض أن معادلي المستقيمين :

$$\frac{x-x_1}{\ell_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}, \quad \frac{x-x_2}{\ell_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}$$

فإن زاوية هذين المستقيمين هي الزاوية الحاصلة بين المتجهين المنشأين من أية نقطة من الفضاء وأماثلهما التوجيهية $\vec{a} = \{\ell_1, m_1, n_1\}$, $\vec{b} = \{\ell_2, m_2, n_2\}$. ولذا فإن الزاوية الحاد ϕ تعطى جيب تمامها بالعلاقة :

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{|\ell_1 \ell_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2|}{\sqrt{\ell_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \sqrt{\ell_2^2 + m_2^2 + n_2^2}} \quad (7-4)$$

نتيجة (2) : شرط تعامد مستقيمين هو $\ell_1 \ell_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$

مثال (3) : أوجد الزاوية الحادة الواقعة بين المستقيمين :

$$\text{و} \quad \frac{x-1}{4} = \frac{y-5}{-3} = \frac{z+2}{12} \quad (\text{أ})$$

$$\frac{x}{12} = \frac{-y-5}{9} = \frac{z+3}{20}$$

$$4x + y - 6z - 2 = 0 \quad 3x - 4y - 2z = 0 \quad (\text{ب})$$

$$y - 3z + 2 = 0 \quad 2x + y - 2z = 0$$

الحل : من أجل : (أ) نجد أن المستقيم الأول يوازي المتجه $\{4, -3, 12\}$ والثاني

يوازي المتجه $\{12, 9, 20\}$ والزاوية الحادة بينهما تعطى بالعلاقة :

$$\cos \varphi = \frac{|4 \times 12 - 3 \times 9 + 12 \times 20|}{\sqrt{144 + 81 + 400} \sqrt{16 + 9 + 144}} = \frac{261}{25 \times 13}$$

ومن أجل : (ب) نجد أن المستقيم الأول يوازي المتجه :

$$\vec{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & -4 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \{10, 2, 11\}$$

والمستقيم الثاني يوازي المتجه :

$$\vec{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = \{3, 12, 4\}$$

والزاوية الحادة بين المستقيمين :

$$\cos \varphi = \frac{98}{\sqrt{100+4+121}\sqrt{9+144+16}} = \frac{98}{15 \times 13}$$

مثال (4) : بين أن المستقيمين :

$$x=2+8t, y=1+4t, z=1, \quad x=3+t, y=7-2t, z=4+3t$$

متعامدان وأوجد وضعهما.

الحل : المستقيم الأول يوازي المتجه $\{1, -2, 3\}$ ويمر بالنقطة $(3, 7, 4)$.

والثاني يوازي المتجه $\{8, 4, 0\}$ ويمر بالنقطة $(2, 1, 1)$ ولدينا :

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 8 \times 1 - 4 \times 2 + 0 = 0$$

والمستقيمان متعامدان و : $\vec{M_1 M_2} \{-1, -6, -3\}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & -6 & -3 \\ 1 & -2 & 3 \\ 8 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 192 \neq 0$$

والمستقيمان متخالفان .

3 - 4 معادلة المستقيم المار من نقطة وعمودي على مستقيم معطى ويقطعه في نقطة :

لتكن النقطة $M_0(x_0, y_0, z_0)$ من الفضاء الثلاثي والمستقيم الذي معادلته :

$$L: \frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}$$

ولنميز حالتين :

الأولى : عندما M_0 تقع على المستقيم المعطى L وعندها للمسألة لا نهاية من

الحلول وبفرض أنه يوازي المتجه المجهول (l, m, n) فيجب أن يحقق بأن :

$l_1 + m m_1 + n n_1 = 0$ ويمكن أخذ m و l عشوائياً وإيجاد n بدالتهما من علاقة التعامد أعلاه، وتكون معادلة المستقيم المطلوب :

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

الثانية عندما M_0 لا تقع على المستقيم L المعطى وعندما نجد المستقيم المطلوب من تقاطع مستويين الأول يحوي المستقيم المعطى :

$$\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1}$$

و يمر بالنقطة $M_0(x_0, y_0, z_0)$ ومعادلته :

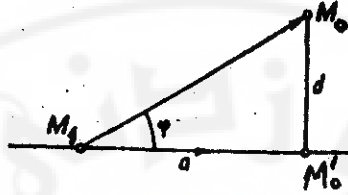
$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \end{vmatrix} = 0 \quad (I)$$

والثاني: يمر بالنقطة M_0 ويتعامد مع المستقيم المعطى أي أن ناظمه $\{l_1, m_1, n_1\}$ ولذا فمعادلته :

$$l_1(x - x_0) + m_1(y - y_0) + n_1(z - z_0) = 0 \quad (II)$$

أما طوله وهو طول القطعة الواقعة ما بين M_0 ونقطة تقاطعه مع المستقيم المعطى. فنحلله من إيجاد مساحة المثلث $M_0 M_1 M_0'$ حيث M_0' النقطة التي يمر بها المستقيم المطلوب و M_1 النقطة التي يمر بها المستقيم المعطى و M_0' مسقط M_0 على المستقيم المعطى لنجد :

$$d = \frac{|\vec{M_0 M_1} \wedge \vec{a}|}{|\vec{a}|}$$



لنجد بعد الإسقاط أن :

$$d = \frac{\begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ \ell_1 & m_1 & n_1 \end{vmatrix}}{(\ell_1^2 + m_1^2 + n_1^2)}$$

هذا ويمكن فرض $\vec{a}$ المتجه الواحد لنجد عندها أن :

$$d = \left| \vec{M_0 M_1} \wedge \vec{a} \right|$$

مثال (5) : أوجد المسافة من النقطة (1,3,5) حتى المستقيم المعطى :

أ) بتقاطع المستويين $2x + y + z - 1 = 0, 3x + y + 2z - 3 = 0$

ب) بالشكل الوسيط $x = t, y = 1 - 2t, z = 3 + t$

الحل : من أجل أ) فإن المستقيم المعطى يوازي المتجه :

$$\vec{a} = \vec{N}_1 \wedge \vec{N}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \{1, -1, -1\}$$

وعمر بالنقطة $x=0 \Rightarrow z=2, y=-1$ ولذا فإن :

$$d = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}}^2 = \sqrt{\frac{1+16+25}{3}} = \sqrt{14}$$

ومن أجل ب) فإن المستقيم المعطى يوازي المتجه $\{1, -2, 1\}$ ويمر بالنقطة

$(0, 1, 3)$ ولهذا فإن :

$$d = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}}^2}{\sqrt{1+4+1}} = \sqrt{\frac{53}{6}}$$

مثال (6) : اكتب معادلة المستقيم المتعامد مع المستقيم :

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{-2}$$

والمار بالنقطة $(1, 0, -1)$.

الحل : المستقيم المعطى يوازي المتجه $\{2, 3, -2\}$ ويمر بالنقطة $(1, 1, 1)$

ومعادلة المستوي الحاوي لهذا المستقيم والمار من النقطة $(1, 0, -1)$ هي :

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z+1 \\ 1-1 & 1-0 & 1+1 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -8x+4y-2z+6=0 \quad (I)$$

والمستوي المار بالنقطة $(1, 0, -1)$ والمتعامد مع المستقيم المعطى أي الذي

ناظمه $\{2, 3, -2\}$ هي :

$$2(x-1)+3(y-0)-2(z+1)=0$$

أي :

$$2x+3y-2z-4=0$$

(II)

والمعادلتان (I) و (II) تشكلاان معادلة الفصل المشترك المطلوب.

ملاحظة : لإيجاد البعد بين مستقيمين متوازيين يكفي إيجاد بعد نقطة من أحدهما عن الآخر.

4 - 4 معادلة العمود المشترك لمستقيمين متخالفين وإيجاد طوله:

ليكن المستقيمان :

$$\frac{x - x_1}{\ell_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1}$$

و

$$\frac{x - x_2}{\ell_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}$$

عندها ليكونا متخالفين يجب تحقق الشرط :

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ \ell_1 & m_1 & n_1 \\ \ell_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

ومعادلته تعطى بقة.اطع مستويين الأول بخري المستقيم الأول ويتعامد مع

$\vec{a} \wedge \vec{b}$ فهو يوازي $\vec{a} \wedge \vec{b}$ والثاني يحوي المستقيم

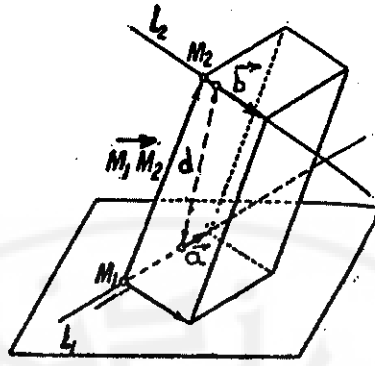
الثاني ويوازي $\vec{a} \wedge \vec{b}$ ولذا فمعادلاتهما المتجهة :

$$(\vec{M}_1 M, \vec{b}, \vec{a} \wedge \vec{b}) = 0 \quad \text{و} \quad (\vec{M}_2 M, \vec{b}, \vec{a} \wedge \vec{b}) = 0 \quad (8-4)$$

وبفرض :

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \ell_1 & m_1 & n_1 \\ \ell_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} n_1 & \ell_1 \\ n_2 & \ell_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \ell_1 & m_1 \\ \ell_2 & m_2 \end{vmatrix} \right\}$$

إذن بالإسقاط على المحاور نجد أنه تقاطع المستويين:



$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ \ell_1 & m_1 & n_1 \\ m_1 & n_1 & \ell_1 \\ m_2 & n_2 & \ell_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (9-4)$$

$$\begin{vmatrix} x - x_2 & y - y_2 & z - z_2 \\ \ell_2 & m_2 & n_2 \\ m_1 & n_1 & \ell_1 \\ m_2 & n_2 & \ell_2 \end{vmatrix} = 0$$

أما طوله فنجد من حساب حجم متوازي المستطيلات المنشأ على المتجهات الثلاث:

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{M_1M_2}$$

لنجد أن :

$$|(\vec{a}, \vec{b}, \vec{M_1M_2})| = d |\vec{a} \wedge \vec{b}|$$

بفرض $|\vec{a} \wedge \vec{b}|$ سطح القاعدة و d الارتفاع ومنه بالإسقاط على المحاور

نجد:

$$d = \frac{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ \ell_1 & m_1 & n_1 \\ \ell_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} i & j & k \\ \ell_1 & m_1 & n_1 \\ \ell_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}}^2} = \frac{|\Delta|}{|\vec{a} \wedge \vec{b}|} \quad (10-4)$$

حيث البسط بالقيمة المطلقة والمقام طولية المتجه $\vec{a} \wedge \vec{b}$.

مثال (7) :

أوجد معادلة العمود المشترك للمستقيمين :

$$L_1: x=3+t, y=1-t, z=2+2t, \quad L_2: x=-t, y=2+3t, z=3t$$

الحل : المستقيم L_1 يوازي المتجه $\{1, -1, 2\}$ ويمر بالنقطة $(3, 1, 2)$.

والمستقيم L_2 يوازي المتجه $\{-1, 3, 3\}$ ويمر بالنقطة $(0, 2, 0)$.

ولدينا :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3-0 & 1-2 & 2-0 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = -18 \neq 0$$

والمستقيمان متخالفان إذن : $|\Delta| = 18$

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \{-9, -5, 2\}, \quad d = \frac{|\Delta|}{|\vec{a} \wedge \vec{b}|} = \frac{18}{\sqrt{110}}$$

ومعادلته تقاطع المستويين :

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-1 & z-2 \\ 1 & -1 & 2 \\ -9 & -5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y-2 & z \\ -1 & 3 & 3 \\ -9 & -5 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$8x - 20y - 14z + 24 = 0$$

$$21x - 25y + 32z + 50 = 0$$

5 - 4 معادلة مستقيم يقطع مستقيمين ويوازي متجه :

لنفرض أن المستقيمين هما المعادلات الوسيطة:

$$L_1 : x = x_1 + \ell_1 \lambda$$

$$y = y_1 + m_1 \lambda$$

$$z = z_1 + n_1 \lambda$$

$$L_2 : x = x_2 + \ell_2 \mu$$

$$y = y_2 + m_2 \mu$$

$$z = z_2 + n_2 \mu$$

وأن المستقيم المطلوب يوازي المتجه $\{ \ell, m, n \}$ لهذا لنكتب معادلة مستقيم

أمثاله التوجيهية :

$$\{ x_2 - x_1 + \ell_2 \mu - \ell_1 \lambda, y_2 - y_1 + m_2 \mu - m_1 \lambda, z_2 - z_1 + n_2 \mu - n_1 \lambda \}$$

وهي متعلقة بالوسيطين λ و μ . نعين هذين الوسيطين بكتابة أنها متناسبة مع

$\{ \ell, m, n \}$ (شرط التوازي) لنجد :

$$\begin{aligned} \frac{x_2 - x_1 + \ell_2 \mu - \ell_1 \lambda}{\ell} &= \frac{y_2 - y_1 + m_2 \mu - m_1 \lambda}{m} = \\ &= \frac{z_2 - z_1 + n_2 \mu - n_1 \lambda}{n} \end{aligned} \quad (11-4)$$

وبحل الأولى والثانية والأولى والثالثة مثلاً نجد معادلتين مجهولين هما λ و μ

بمحلها نجد μ و λ نعوضهما لنجد نقطة على الأول هي :

$$(X_1 = x_1 + \lambda \ell_1, Y_1 = y_1 + \lambda m_1, Z_1 = z_1 + \lambda n_1)$$

ونقطة على الثاني :

$$(X_2 = x_2 + \mu \ell_2, Y_2 = y_2 + \mu m_2, Z_2 = z_2 + \mu n_2)$$

. وبكتابة معادلة مستقيم يمر بهاتين النقطتين نجد المستقيم المطلوب. ويمكن كتابته بدلالة إحدى النقطتين وموازاته للمتجه $\{l, m, n\}$.

ملاحظة : إذا كان المستقيمان L_1, L_2 متوازيين ووازاها المتجه $\{l, m, n\}$ فالمسألة تصبح غير ممكنة .

مثال (8) :

أوجد معادلة المستقيم القاطع للمستقيمين :

$$x = 1 + 2\lambda, y = 2 - 2\lambda, z = -\lambda, x = -2\mu, y = -5 + 3\mu, z = -\mu$$

والموازي للمتجه $\{1, 1, 1\}$. بعد أن تعين وضع المستقيمين.

الحل : لنبين وضع المستقيمين فالأول يوازي المتجه $\{2, -2, -1\}$ ويمر بالنقطة $(1, 2, 0)$ والثاني يوازي المتجه $\{-2, 3, -1\}$ ويمر بالنقطة $(0, -5, 0)$ ولدينا :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 33 \neq 0$$

والمستقيمان متعالفان. ولنكتب شرط التوازي المذكور :

$$\frac{0 - 1 + (-2\mu - 2\lambda)}{1} = \frac{-5 - 2 + 3\mu + 2\lambda}{1} = \frac{0 - 0 - \mu + \lambda}{1}$$

إذن بحل الأولى والثانية نجد :

$$5\mu + 4\lambda - 6 = 0$$

وبحل الأولى والثالثة نجد :

$$\mu + 3\lambda + 1 = 0$$

وبحلها معاً نجد :

$$\lambda = -1, \mu = 2$$

ومنه المستقيم المطلوب يوازي المتجه $\{1, 1, 1\}$ فمعادلته :

$$x + 1 = y - 4 = z - 1$$

وهو المستقيم المطلوب .

6 - 4 مسقط نقطة على مستقيم :

لتكن النقطة $M_1(x_1, y_1, z_1)$ والمستقيم :

$$L: \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

ولنوجد مسقط M_1 على المستقيم L ، لهذا لنكتب معادلة المستوي المار من M_1 والمتعامد مع المستقيم L أي الذي ناظم $\vec{N} \{l, m, n\}$ وتقاطعه مع المستقيم المطلوب نجد النقطة المطلوبة. إذن النقطة تعطى بالحل المشترك للمعادلتين :

$$l(x - x_1) + m(y - y_1) + n(z - z_1) = 0 \quad \text{المستوي}$$

$$x = \lambda l + x_0, y = \lambda m + y_0, z = \lambda n + z_0 \quad \text{والمستقيم المعطى}$$

وبالتعويض في معادلة المستوي نجد :

$$l(\lambda l + x_0 - x_1) + m(\lambda m + y_0 - y_1) + n(\lambda n + z_0 - z_1) = 0$$

أي :

$$\lambda(l^2 + m^2 + n^2) = l(x_1 - x_0) + m(y_1 - y_0) + n(z_1 - z_0)$$

ومنه نجد :

$$\lambda = \frac{l(x_1 - x_0) + m(y_1 - y_0) + n(z_1 - z_0)}{l^2 + m^2 + n^2}$$

وإحداثيات نقطة التقاطع هي :

$$x = x_0 + \frac{\ell(x_1 - x_0) + m(y_1 - y_0) + n(z_1 - z_0)}{\ell^2 + m^2 + n^2} \ell$$

$$y = y_0 + \frac{\ell(x_1 - x_0) + m(y_1 - y_0) + n(z_1 - z_0)}{\ell^2 + m^2 + n^2} m \quad (12-4)$$

$$z = z_0 + \frac{\ell(x_1 - x_0) + m(y_1 - y_0) + n(z_1 - z_0)}{\ell^2 + m^2 + n^2} n$$

مثال (9) :

أوجد مسقط نقطة المبدأ (0, 0, 0) على المستقيم :

$$\frac{x - 1}{3} = \frac{y - 2}{2} = \frac{z - 3}{1}$$

الحل : لدينا المستقيم المعطى يوازي المتجه {3, 2, 1} ويمر بالنقطة {1, 2, 3}

وإحداثيات النقطة :

$$x = 1 + \frac{3(-1) + 2(-2) + 1(-3)}{9 + 4 + 1} \cdot 3 = \frac{-8}{7}$$

$$y = 2 + \frac{3(-1) + 2(-2) + 1(-3)}{14} \cdot 2 = \frac{4}{7}$$

$$z = 3 + \frac{3(-1) + 2(-2) + 1(-3)}{14} \cdot 1 = \frac{16}{7}$$

نتيجة : مسقط قطعة مستقيمة على مستقيم هو القطعة الواصلة بين مسقط

البداية ومسقط النهاية وبفرض أن $M_1(x_1, y_1, z_1)$ نقطة البداية و $M_2(x_2, y_2, z_2)$ نقطة

النهاية فإننا من الدساتير السابقة نجد مسقط M_1 ثم بتبديل M_1 بـ M_2 نجد مسقط M_2

وبالتالي مسقط $M_1 M_2$.

5 - أوضاع المستقيم والمستوي في الفضاء الثلاثي :

5 - 1 وضع مستقيم ومستوي :

المستقيم إما أن يقع في المستوي أو يوازيه أو يقطعه. وبفرض :

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

معادلة المستقيم و $Ax + By + Cz + D = 0$ معادلة المستوي عندها يقع المستقيم في المستوي يجب أن تحقق النقطة $M_0 (x_0, y_0, z_0)$ معادلة المستوي وأن يتعامد ناظم المستوي مع المستقيم ويصبح الشرطان لذلك :

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0, Al + Bm + Cn = 0 \quad (1-5)$$

وبالعكس عند تحقيق الشرطين (1-5) فإن نقطة M_0 تقع على المستقيم وفي المستوي ويتعامد ناظم المستوي $\{A, B, C\}$ مع المتجه الذي يوازيه المستقيم والذي هو $\vec{a} \{l, m, n\}$ وهذا معناه الانطباق .

أما التوازي فيتم عندما يتعامد المستقيم مع ناظم المستوي ولكن لا تحقق النقطة $M_0 (x_0, y_0, z_0)$ معادلة المستوي، أي أن الشرطين لذلك :

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0, Al + Bm + Cn = 0 \quad (2-5)$$

وعندئذ تحقق شرط تعامد المستقيم مع ناظم المستوي فإن المستقيم يقطع المستوي ويصبح الشرط :

$$Al + Bm + Cn \neq 0 \quad (3-5)$$

مثال (1) :

عَيِّن في الأزواج التالية وضع المستقيم والمستوي :

آ) 1 - المستقيم :

$$\frac{x-13}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-4}{3}$$

$$-8x-2y+4z+1=0 \quad \text{والمستوي}$$

2 - المستقيم :

$$\frac{x-7}{5} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-5}{4}$$

$$3x-y+2z-5=0 \quad \text{والمستوي}$$

الحل : من أجل آ) : المستقيم يوازي $\{1, 2, 3\}$ ويمر بالنقطة $(13, 1, 4)$ والمستوي ناظمه $\{-8, -2, 4\}$ ويتحقق أن :

$$-8 \times 1 - 2 \times 2 + 4 \times 3 = 0$$

فالمستقيم والمستوي متوازيان لكن النقطة $(13, 1, 4)$ لا تحقق معادلة المستوي لذا فالتوازي دون التطابق .

من أجل ب) : المستقيم يوازي $\vec{a} \{5, 1, 4\}$ ويمر بالنقطة $(7, 4, 5)$ والمستوي ناظمه $\vec{N} \{3, -1, 2\}$ ولدينا $3 \times 5 - 1 \times 1 + 2 \times 4 \neq 0$ والمستقيم يقطع المستوي .

مثال (2) :

اكتب معادلة المستقيم المار من نقطتي تقاطع المستوي $2x + y - 3z + 1 = 0$

مع كل من المستقيمين :

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{-5} = \frac{z+1}{2}, \quad \frac{x-5}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z+4}{-6}$$

الحل : نقطة تقاطع المستقيم الأول مع المستوي نبحثها بتبديل العلاقات :

$$x = \lambda + 3, y = -5\lambda + 5, z = 2\lambda - 1$$

في معادلة المستوي أي :

$$2(\lambda + 3) + (-5\lambda + 5) - 3(2\lambda - 1) + 1 = -9\lambda + 15 = 0 \quad \lambda = 5/3$$

إذن النقطة :

$$x = 3 + \frac{5}{3} = \frac{14}{3}, y = \frac{-25}{3} + 5 = \frac{-10}{3}, z = \frac{7}{3}$$

أما نقطة تقاطع المستقيم الثاني مع المستوي فنحدها بتبديل العلاقات :

$$x = 2\mu + 5, y = 4\mu + 3, z = -6\mu - 4$$

في معادلة المستوي:

$$2(2\mu + 5) + (4\mu + 3) - 3(-6\mu - 4) + 1 = 0 \Rightarrow 26\mu = -26$$

$$x = 3, y = -1, z = 2 \quad \text{إذن } \mu = -1 \text{ والنقطة}$$

ومعادلة المستقيم المطلوب :

$$\frac{x - 3}{\frac{14}{3} - 3} = \frac{y + 1}{\frac{-10}{3} + 1} = \frac{z - 2}{\frac{7}{3} - 2}$$

5 - 2 زاوية مستقيم مع مستوي :

الزاوية بين المستوي $Ax + By + Cz + D = 0$ الذي ناظمه $\vec{N} \{ A, B, C \}$

والمستقيم :

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

الذي يوازي المتجه $\{l, m, n\}$ هي مكمل الزاوية بين الناظم $\vec{N}$ و $\vec{a}$ ويعطى

جيب الزاوية الحادة :

$$\sin \varphi = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{N}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{N}|} = \frac{|\ell A + m B + n C|}{\sqrt{\ell^2 + m^2 + n^2} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad (4-5)$$

ولهذا فشرط التوازي هو تعامد الناظم مع المستقيم أي :

$$\ell A + m B + n C = 0$$

وشرط التعامد هو توازي الناظم مع المستقيم أي :

$$\frac{A}{\ell} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}$$

مثال (3) :

أوجد الزاوية بين المستقيم :

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{4} = \frac{z}{3}$$

$$3x - 3y + 2z - 5 = 0 \quad \text{والمستوي :}$$

الحل : المستقيم يوازي $\vec{a} \{2, 4, 3\}$ والمستوي ناظمه $\vec{N} \{3, -3, 2\}$ والزاوية

الحادة بين المستقيم والمستوي تعطى بالعلاقة :

$$\sin \varphi = \frac{|3 \times 2 - 3 \times 4 + 2 \times 3|}{\sqrt{22} \sqrt{29}} = 0$$

إذن المستقيم يوازي المستوي.

5-3 معادلة المستقيم المار من نقطة وعمودي على مستو :

لتكن النقطة $M_1(x_1, y_1, z_1)$ من الفضاء والمستقيم :

$$L: \frac{x - x_0}{\ell} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

عندها المستوي المار من النقطة M_1 وعمودي على المستقيم L يكون ناظمه

موازيًا للمتجه $\{ \ell, m, n \}$ $\vec{N} // \vec{a}$ ومعادلة المستوي :

$$P = (x - x_1)l + (y - y_1)m + (z - z_1)n = 0$$

أي :

$$xl + ym + zn - (x_1l + y_1m + z_1n) = 0 \quad (5-5)$$

ونقطة تقاطع هذا المستوي مع المستقيم هي مسقط M_1 على المستقيم تعطى

بحل المعادلة (5-5) مع معادلة المستقيم L لنجد :

$$(\lambda l + x_0 - x_1)l + (\lambda m + y_0 - y_1)m + (\lambda n + z_0 - z_1)n = 0$$

إذن :

$$\lambda = \frac{(x_1 - x_0)l + (y_1 - y_0)m + (z_1 - z_0)n}{l^2 + m^2 + n^2}$$

والنقطة هي :

$$X' = l \frac{(x_1 - x_0)l + (y_1 - y_0)m + (z_1 - z_0)n}{l^2 + m^2 + n^2} + x_0$$

$$Y' = m \frac{(x_1 - x_0)l + (y_1 - y_0)m + (z_1 - z_0)n}{l^2 + m^2 + n^2} + y_0 \quad (6-5)$$

$$Z' = n \frac{(x_1 - x_0)l + (y_1 - y_0)m + (z_1 - z_0)n}{l^2 + m^2 + n^2} + z_0$$

أما المستقيم المار بالنقطة $M_1(x_1, y_1, z_1)$ عمودي على المستوي :

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

فإنه يوازي ناظم المستوي $\vec{N}\{A, B, C\}$ ومعادلته :

$$\frac{x - x_1}{A} = \frac{y - y_1}{B} = \frac{z - z_1}{C} = \lambda$$

بإتقاطع مع المستوي بحل المعادلتين لنجد :

$$A(A\lambda + x_1) + B(B\lambda + y_1) + C(C\lambda + z_1) + D = 0$$

ومنه :

$$\lambda = - \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{A^2 + B^2 + C^2}$$

ونقطة التقاطع هي:

$$X_0 = x_1 - A \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{A^2 + B^2 + C^2},$$

$$Y_0 = y_1 - B \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{A^2 + B^2 + C^2}, \quad (7-5)$$

$$Z_0 = z_1 - C \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{A^2 + B^2 + C^2}$$

كتطبيق يمكن أن نبحث عن النقطة النظرية لنقطة بالنسبة لمستقيم .

فبفرض $M_1(x_1, y_1, z_1)$ نقطة من الفراغ والمستقيم L وإحداثيات المسقط من

العلاقة (6-5) عندها بفرض النقطة النظرية (x'', y'', z'') يتحقق أن :

$$x' = \frac{x_1 + x''}{2} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} x'' &= 2x' - x_1 \\ y'' &= 2y' - y_1 \\ z'' &= 2z' - z_1 \end{aligned} \right\} \quad (8-5)$$

وكذلك للبحث عن نظير النقطة $M_1(x_1, y_1, z_1)$ بالنسبة للمستوي P نستفيد

من العلاقات (7-5) وبفرض النقطة النظرية $(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z})$ نجد :

$$\frac{\tilde{X} + x_1}{2} = x_0$$

$$\left. \begin{aligned} \tilde{X} &= 2x_0 - x_1 \\ \tilde{Y} &= 2y_0 - y_1 \\ \tilde{Z} &= 2z_0 - z_1 \end{aligned} \right\} \quad \text{وبالقياس نجد} \quad (9-5)$$

مثال (4) :

أوجد معادلة المستوي المار بالنقطة $(0, 1, -1)$ والعمودي على المستقيم :

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{4}$$

الحل : المستوي يمر بالنقطة $(0, 1, -1)$ وناظمه $\{3, 2, 4\}$ فمعادلته :

$$3x + 2(y-1) + 4(z+1) = 3x + 2y + 4z + 2 = 0$$

مثال (5) :

أوجد معادلة المستقيم المار بالمبدأ والعمودي على المستوي :

$$2x + 3y - 4z + 11 = 0$$

الحل : ناظم المستوي المتجه $\{2, 3, -4\}$ يوازي المستقيم لذا فمعادلته :

$$\frac{x-0}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{-4} = t$$

$$. x = 2t, y = 3t, z = -4t \quad \text{ووسيطياً}$$

مثال (6) :

أوجد مسقط النقطة $(1, 2, 3)$ من المستقيم :

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{6}$$

$$x - y + z - 8 = 0$$

على المستوي

الحل : ناظم المستوي $\vec{N}\{1, -1, 1\}$ ومعادلة عمود الإسقاط :

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{1} = t$$

ويعطاه مع المستوي بفرض $x=t+1, y=-t+2, z=t+3$ نجد :

$$t+1+t-2+t+3-8=3t-6=0 \Rightarrow t=2$$

وإذن نقطة التقاطع :

$$(x=3, y=0, z=5)$$

تمارين الفصل الثاني ومسائله

1 - اكتب المعادلة الديكارتية والمعادلات الوسيطة الديكارتية للمستوي المار بالنقطة (2, 3, -5) والموازي للمتجهين $\{-5, 6, 4\}$ و $\{4, -2, 0\}$.

2 - اكتب المعادلة الديكارتية للمستوي الذي معادلاته الوسيطة:

$$x = 2 + 3u - 4v \quad y = u - v \quad z = 2 + 3u$$

3 - اكتب المعادلة الديكارتية للمستوي المار بالنقطتين $M_1(1, 7, 8)$, $M_2(2, -6, -1)$ والموازي للمحور Oy ثم اكتب معادلاته الديكارتية الوسيطة.

4 - اكتب المعادلة الديكارتية والمعادلات الديكارتية الوسيطة للمستوي المار بالنقط:

$$M_1(2, 3, 1) , M_2(3, 1, 4) , M_3(2, 1, 5)$$

5 - اكتب معادلة المستوي المار بالنقطة (1, 1, 2) ويقطع من ox القطعة 5 بدءاً من المبدأ ومن oy القطعة 7.

6 - اكتب معادلة المستوي المار بالنقطة (3, 5, -7) ويقطع المحاور بقطع متساوية.

7 - اكتب معادلة المستوي المار بالنقطتين $A(3, 5, 1)$, $B(7, 7, 8)$ ويقطع المحورين ox , oy بقطعتين متساويتين .

8 - اكتب معادلة المستوي الحاوي للمحور Oy والمار بالنقطة (2, -5, 1).

9 - أوجد حجم الهرم المشكل من المستويات الإحداثية والمستوي :

$$2x + 3y + 6z - 13 = 0$$

10- اكتب معادلة المستوى الموازي للمستوي $x - y + 4z = 0$ والمار بالنقطة $(3, 3, -3)$.

11- عيّن وضع النقاط $A(-3, 3, 5)$, $B(0, -7, -4)$, $C(6, 5, 1)$, $D(-3, -5, 2)$ بالنسبة للمستوي $2x - 3y + 4z = 0$.

12- ما هو الشرط اللازم والكافي لتقع النقطة بين المستويين المتقاطعين $(i = 1, 2)$ $A_i x + B_i y + C_i z + D_i = 0$ في الزاوية الحادة ثم بين المستويين المتوازيين السابقين.

13- عيّن زاوية أزواج المستويات :

$$x + 3y - 4z + 5 = 0 \quad (\text{أ})$$

$$2x + 2y + 2z - 7 = 0$$

$$4x - 5y + 3z - 6 = 0 \quad (\text{ب})$$

$$x - 4y - 2z + 9 = 0$$

14- اكتب معادلة المستوى المار بمبدأ الإحداثيات وعمودي على المستوى $5x - 2y + 5z + 5 = 0$ ويشكل مع المستوى $x - 4y - 8z = 0$ زاوية $\pi/4$.

15- اكتب معادلة المستوى المار بالنقطة $P(2, 6, -4)$ التي هي مسقط نقطة المبدأ عليه.

16- بفرض النقطة $A(6, 0, 5)$ والنقطة $B(3, -2, 1)$ اكتب معادلة المستوى المار من النقطة A ويتعامد مع المتجه $\vec{AB}$.

17- أوجد جيوب تمام الزوايا التي تصنعها المستويات الإحداثية مع المستوى:

$$2x + 3y + 6z - 12 = 0$$

18 - احسب القطع التي تقطعها للمحاور الإحداثية المستويات :

(a) $2x - 3y - z + 12 = 0$ (b) $5x + y - 3z + 1 = 0$ (c) $x - 7 = 0$

19- اذكر خاصية كل من المستويات :

(a) $2x + 3y - 7z = 0$ (b) $3x - 5z + 1 = 0$ (c) $3z - y = 0$

20- عيّن أوضاع أزواج المستويات :

(أ) $2x + 3y - 4z = 0$

$6x + 4y - 12z - 13 = 0$

(ب) $x - y + z + 1 = 0$

$2x + y - z = 0$

(ج) $x - 3y + 2z = 1$

$2x + 2y + 2z = 7$

21- عيّن أوضاع المستويات الثلاثة :

$2x - 4y + 5z - 21 = 0$

$2x + 4y - 6z - 1 = 0$

$6x + y + z - 30 = 0$

$x + 2y - 3z = 0$

$x - 3z + 16 = 0$

$3x + 6y - 9z + 10 = 0$

22- أوجد النقطة المتناظرة مع المبدأ بالنسبة للمستوي $6x + 2y - 9z + 121 = 0$.

23- بين وقوع النقط الأربع أو عدم وقوعها (5,6,7), (3,3,3), (0,2,4), (1,-1,1) في مستوي واحد.

24- أوجد بعد النقط A (-1, -1, 2), B (1, -2, 3), C (0, 0, 0) عن المستوي :

$2x + y + 3z - 9 = 0$

25- اكتب معادلة المنصفين للمستويين :

$3x + 5y - 4z + 1 = 0$, $x - z - 5 = 0$

26- أوجد البعد بين المستويين المتوازيين :

$$2x + 4y + 6z - 15 = 0 , \quad x + 2y + 3z + 17 = 0$$

27- أوجد على المحور Oz نقطة متساوية البعد عن النقطة (2, 3, 4) والمستوي:

$$2x + 3y + z - 17 = 0$$

28- أكتب معادلة المستوي الموازي للمستوي $2x + 4y - 4z + 5 = 0$ والواقع على

بعد $\sqrt{21}$ من النقطة (1, 2, 0) . ناقش.

29- ليكن الهرم الذي رؤوسه A (0,0,2), B (3,0,5), C (1,1,0), D (4,1,2) أوجد

معادلة أوجهه واحسب طول الارتفاع النازل من D على الوجه ABC ومعادله.

30- أوجد على الفصل المشترك للمستويين :

$$2x - y + z - 8 = 0, \quad 4x + 3y - z + 14 = 0$$

$$2x + 3y - 6z - 10 = 0 \text{ مقدار } 7.$$

31- أكتب معادلة مستوي عمودي على المتجه $\{l, m, n\}$ ويقع على بعد d من النقطة

$$M_0(x_0, y_0, z_0)$$

$$M_0(0, 0, 0) , \quad d = 5 \quad \{1, -1, 2\} \quad \text{تنسيق :}$$

32- أكتب معادلة مستوي يمر بالفصل المشترك للمستويين:

$$x + 28y - 2z + 13 = 0, \quad 5x + 8y - z + 1 = 0$$

ويبعد عن نقطة المبدأ (0, 0, 0) بمقدار 4.

33- أكتب معادلة مستوي يمر بالنقطتين A (5, 2, 0), B (6, 1, -1) ويقع على بعد 3 من

$$C(0, 5, 4) \text{ النقطة}$$

34- داخل المثلث الناتج عن تقاطع المستوي oxy مع المستويات الثلاثة :

$$5x + y - \sqrt{3}z + 6 = 0, 3x + 2y + 4z - 7 = 0, 2x - 5y + 1 = 0$$

أوجد نقطة متساوية البعد عن المستويات الثلاثة الأخيرة.

35- أكتب معادلة المستوي المار بنقطة تقاطع المستويات الثلاثة :

$$x - y = 0, x + y - 2z + 1 = 0, 2x + z - 4 = 0$$

(أ) الحوازي المحور oy .

(ب) الموازي للمستوي oxy .

(ج) المار بالنقطتين $(2, 1, 7)$ والمبدأ.

36- بين وجود نقطة مشتركة بين المستويات الأربع التالية أو عدم وجودها :

$$(أ) 5x - z + 3 = 0, 2x - y - 4z + 5 = 0, 3y + 2z - 1 = 0, 3x + 4y + 5z - 3 = 0$$

$$(ب) 5x + 2y - 6 = 0, x + y - 3z = 0, 2x - 3y + z + 8 = 0, 3x + 2z - 1 = 0$$

37- هل تقع النقط الثلاث $(1, 1, 1)$, $(-1, 1, 1)$, $(1, -1, 1)$ على استقامة واحدة وما

هو الشرط لتقع النقطة $(a, 2, 3)$ في مستوي النقاط الثلاث؟

38- أكتب المعادلة الديكارتية والمعادلات الوسيطة للمستقيم المار بالنقطتين:

$M_1(2, 3, 1)$ و $M_2(4, 6, 9)$ وأوجد المستوي المار من M_1 عمودي على هذا

المستقيم.

39- أكتب المعادلة الديكارتية والمعادلات الوسيطة للمستقيم الذي هو الفصل

$$\text{المشترك للمستويين } 3x - 2y + 5z = 0, x - 2y + 4z = 0.$$

40- أكتب المعادلة الديكارتية للمستقيم المعطى بمعادلاته الديكارتية الوسيطة :

$$x = 3 + 5t, y = 7 - 4t, z = -6 + t$$

ثم عبّر عنه بتقاطع مستويين.

41- بين أي من النقط الثلاث تقع على استقامة واحدة وأيها لا تقع :

أ) $(-6, 0, 10), (3, 0, 1), (1, 0, 1)$

ب) $(1, 2, 3), (0, 8, 4), (3, 0, 2)$

42- أكتب معادلة المستقيم المار بالنقطة $(3, 5, 1)$ والموازي للمستقيم:

$$x = 2 + 4t, \quad y = -3t, \quad z = 3 + 6t$$

43 - أوجد معادلة مسقط المستقيم على المستوي بفرض معادلة المستقيم:

$$2x + 4y + z - 1 = 0 \quad 5x + 8y - 3z + 9 = 0$$

والمستوي $2x + 8y + z + 8 = 0$

44- عيّن أوضاع أزواج المستقيمتين التاليتين:

أ) $x = 7 + 6t, y = 6 + 4t, z = 5 + 2t$

$x = 1 + 9t, y = 2 + 6t, z = 3 + 3t$

ب) $2x - y + 2z = 0, \quad x + y - z = 0$

$x = 1, y = -8 - 4t, \quad z = -3 + 3t$

ج) $x + y - z + 4 = 0, \quad x - 3y + z = 0$

$x = 3 + t, \quad y = 1 + 2t, \quad z = 4$

45- ما هي الشروط اللازمة والكافية حتى يقع المستقيمان:

و $A_i x + B_i y + C_i z + D_i = 0 \quad i = 1, 2$

في مستوي واحد. $A_i x + B_i y + C_i z + D_i = 0 \quad i = 3, 4$

46- عيّن أوضاع المستوي والمستقيم فيما يلي:

أ) المستقيم $\frac{x - 12}{4} = \frac{y - 9}{3} = \frac{z - 1}{1}$

والمستوي $3x + 5y - z - 2 = 0$ (متقاطعان)

ب) المستقيم $\frac{x + 1}{2} = \frac{y - 3}{4} = \frac{z}{3}$

والمستوي $3x + 3y - 2z - 5 = 0$ (مقاطعان)

$$\frac{x - 13}{5} = \frac{y - 1}{2} = \frac{z - 4}{3} \quad \text{جـ) المستقيم}$$

والمستوي $x + 2y - 4z + 1 = 0$ (مقاطعان)

47- أوجد نقطة تقاطع المستقيم $x = 2t$, $y = 1 - t$, $z = 3 + t$ مع المستوي $x + y + z - b = 0$.

48- أكتب معادلة المستقيم الواقع في المستوي $y + 2z = 0$ والقاطع للمستقيمين $x = 2 - t$, $y = 4 + 2t$, $z = 1$ و $x = 1 - t$, $y = t$, $z = 4t$.

49- أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة $(3, -1, -4)$ والقاطع للمحور Oy ويقع في المستوي $y + 2z = 0$.

50- أكتب معادلة المستقيم الواقع مع المستقيم $x - 3y + z = 0$, $x + y - z + 4 = 0$ في مستوي واحد والقاطع للمستقيمين :

$$x = 3 + t, \quad y = -1 + 2t, \quad z = 4t$$

$$x = 2 + 3t, \quad y = -1, \quad z = 4 - t$$

الفصل الثالث

المعادلة العامة لمنحنيات الدرجة الثانية

1 - النظرية العامة لمنحنيات الدرجة الثانية بمتحولين :

ندرس في هذا الفصل المعادلة العامة لمنحنيات الدرجة الثانية لمتحولين بالنسبة لجملة إحداثية متعامدة oxy والتي يعبر عنها عادة في المراجع بأحد الأشكال التالية :

$$A x^2 + 2 B xy + C y^2 + 2 D x + 2 E y + F = 0 \quad (1-1)$$

$$a_{11} x^2 + 2 a_{12} xy + a_{22} y^2 + 2 a_1 x + 2 a_2 y + a = 0 \quad (2-1)$$

$$a_{11} x^2 + 2 a_{12} xy + a_{22} y^2 + 2 a_{13} x + 2 a_{23} y + a_{33} = 0 \quad (3-1)$$

بفرض أن $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$ في (1-1) أو $a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \neq 0$ في (2-1) أو في (3-1) أي أن أحد أمثال (معاملات) حدود الدرجة الثانية x^2, xy, y^2 على الأقل لا يساوي الصفر.

العددان A, C أو a_{11}, a_{22} هما أمثال الحدين التربيعيين x^2, y^2 والعدد $2 B$ أو $2 a_{12}$ أمثال الحد المستطيلي xy أي أن a_{ij} هو أمثال الحد التربيعي لحدود الدرجة الثانية عندما $i = j$ وأمثال الحد المستطيلي عندما $i \neq j$.

سوف نفرض الأمثال المتناظرة متساوية $a_{ij} = a_{ji}$ مهما i, j و $2a_{ij} = 2a_{ji} = a_{ij} + a_{ji}$.
ولذا لم نكتب حداً يحوي yx بل اكتفينا بحد يحوي xy .

سوف نفرض الشكل (2-1) هو الشكل الأنسب لدراستنا والذي سنستخدمه على مدى هذا الفصل وهو يعبر عن تسع منحنيات تبعاً للأمثال البتة

$a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_1, a_2, a$ هي : القطوع :

- 1 - الناقصية
- 2 - الزائدة.
- 3 - المكافية والتي درست في المرحلة الثانوية كما درست الدائرة التي هي حالة خاصة من القطع الناقص .
- 4 - القطوع الناقصية التخيلية.
- 5 - المستقيمان المتقاطعان التخيليان.
- 6 - المستقيمان المتقاطعان الحقيقيان. إضافة إلى تعبيرها عن :
- 7 - المستقيمان المتوازيان.
- 8 - المستقيمان المتوازيان التخيليان.
- 9 - المستقيمان المتوازيان.

1 - 1 المنحنيات التي ترد إليها معادلة منحنيات الدرجة الثانية:

نبين هنا أشكال منحنيات الدرجة الثانية (2-1) فنورد المبرهنة الرئيسية التالية:

مبرهنة رئيسية : بمساعدة الدوران والانحدار تمثل المعادلة العامة لمنحنيات الدرجة الثانية (2-1) أحد الأنماط الرئيسية الثلاثة التالية :

$$\begin{array}{ll}
 a_{11}' X^2 + a_{22}' Y^2 + D = 0 & \text{حيث } a_{11}' \cdot a_{22}' \neq 0 \quad \text{I} \\
 a_{11}' X^2 + 2a_2' Y = 0 & \text{حيث } a_{11}' \cdot a_2' \neq 0 \quad \text{II} \\
 a_{22}' Y^2 + 2a_1' X = 0 & \text{حيث } a_{22}' \cdot a_1' \neq 0 \quad \text{III} \\
 a_{11}' X^2 + D = 0 & \text{حيث } a_{11}' \neq 0 \quad \text{III}
 \end{array}
 \quad (4-1)$$

الإثبات: لنبين بداية أنه يمكن اعتماداً على دوران المحورين الإحداثيين بزاوية مناسبة θ جعل أمثال الحد المستطيلي في المعادلة الجديدة الناتجة عن المعادلة القديمة مساوية للصفر. لهذا بفرض M نقطة من المنحني (2-1) إحداثياتها في الجملة oxy القديمة $M(x, y)$ وإحداثياتها في الجملة الجديدة x', y' , $M(x', y')$ ولنختار علاقتي الدوران :

$$x = x' \cos \theta - y' \sin \theta \quad y = x' \sin \theta + y' \cos \theta$$

عندها تأخذ المعادلة (2-1) بعد التعويض الشكل الجديد:

$$\begin{aligned} & a_{11} (x' \cos \theta - y' \sin \theta)^2 + 2 a_{12} (x' \cos \theta - y' \sin \theta) (x' \sin \theta + y' \cos \theta) + \\ & + a_{22} (x' \sin \theta + y' \cos \theta)^2 + 2 a_1 (x' \cos \theta - y' \sin \theta) + \\ & + 2 a_2 (x' \sin \theta + y' \cos \theta) + a = 0 \end{aligned}$$

وبكتابة الشكل الجديد المشابه للشكل (2-1):

$$a_{11}' x'^2 + 2 a_{12}' x' y' + a_{22}' y'^2 + 2 a_1' x' + 2 a_2' y' + a' = 0$$

واختيار θ بحيث أن $a_{12}' = 0$ نجد :

$$\left. \begin{aligned} a_{11}' &= a_{11} \cos^2 \theta + 2 a_{12} \cos \theta \sin \theta + a_{22} \sin^2 \theta \\ a_{12}' &= a_{12} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + (a_{22} - a_{11}) \sin \theta \cos \theta \\ a_{22}' &= a_{11} \sin^2 \theta - 2 a_{12} \sin \theta \cos \theta + a_{22} \cos^2 \theta \\ a_1' &= a_1 \cos \theta + a_2 \sin \theta, \quad a_2' = -a_1 \sin \theta + a_2 \cos \theta, \quad a' = a \end{aligned} \right\} (5-1)$$

وليكون $a_{12}' = 0$ يجب تحقق أن :

$$a_{12} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + (a_{22} - a_{11}) \sin \theta \cos \theta = 0$$

وحيث :

$$\cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \cos 2\theta \quad 2 \sin \theta \cos \theta = \sin 2\theta$$

نجد أن الشرط $a_{12}' = 0$ يعني أن :

$$\tan 2\theta = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}} \quad (6-1)$$

بشكل خاص عندما $a_{11} = a_{22} \neq 0$ نختار :

$$\theta = \frac{\pi}{4} \text{ أي } 2\theta = \frac{\pi}{2}$$

وعندها تأخذ علاقتي الدوران الشكل :

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} (x' - y'), \quad y = \frac{\sqrt{2}}{2} (x' + y')$$

وتأخذ المعادلة (2-1) الشكل الجديد :

$$\begin{aligned} & \frac{a_{11} + 2a_{12} + a_{22}}{2} x'^2 + \frac{a_{11} - 2a_{12} + a_{22}}{2} y'^2 + \\ & + \frac{\sqrt{2}}{2} [(a_1 + a_2)x' + (a_2 - a_1)y'] + a = 0 \end{aligned}$$

أما عندما $a_{12} = 0$ فعندها $x = x', y = y'$ ولا حاجة لأي دوران وفي هذه الحالة يبقى علينا إجراء انسحاب مناسب لرد المعادلة للشكل النظامي. أما في الحالة العامة حيث الزاوية θ نختارها بحيث أن $a'_{12} = 0$ فنجد أن (2-1) تأخذ الشكل العام :

$$a'_{11} x'^2 + a'_{22} y'^2 + 2a'_1 x' + 2a'_2 y' + a = 0 \quad (7-1)$$

وعندها نميز الحالات التالية :

1) إذا كان $a'_{11} \cdot a'_{22} \neq 0$ عندها بالإتمام إلى مربع كامل لكل من الحدود الحاوية المتحول x' والحدود الحاوية y' نجد للمعادلة (7-1) الشكل :

$$a'_{11} \left(x' + \frac{a'_1}{a'_{11}} \right)^2 + a'_{22} \left(y' + \frac{a'_2}{a'_{22}} \right)^2 + a - \frac{a'^2_1}{a'_{11}} - \frac{a'^2_2}{a'_{22}} = 0$$

وبسحب المحورين ox', oy' للمحورين $o'X, o'Y$ حيث :

$$O' \left(\frac{-a'_1}{a'_{11}}, \frac{-a'_2}{a'_{22}} \right)$$

نجد :

$$X = x' + \frac{a'_1}{a'_{11}}, \quad Y = y' + \frac{a'_2}{a'_{22}} \quad (8-1)$$

لنجد للمعادلة (7-1) الشكل الأخير :

$$a'_{11} X^2 + a'_{22} Y^2 + D = 0 \quad (9-1)$$

حيث :

$$D = a - \frac{a'^2_1}{a'_{11}} - \frac{a'^2_2}{a'_{22}}$$

وسوف ندعو المنحنيات (9-1) بمنحنيات النمط الأول.

ملاحظة : بالإمكان جمع الدوران والانسحاب لنكتب :

$$\left. \begin{aligned} x &= \left(X - \frac{a'_1}{a'_{11}} \right) \cos \theta - \left(Y - \frac{a'_2}{a'_{22}} \right) \sin \theta \\ y &= \left(X - \frac{a'_1}{a'_{11}} \right) \sin \theta + \left(Y - \frac{a'_2}{a'_{22}} \right) \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (10-1)$$

و θ تحقق العلاقة (6-1) لنجد فوراً المعادلة (9-1).

2' $a'_{11} = 0$ أو $a'_{22} = 0$ ولكن $a'_{11}^2 + a'_{22}^2 \neq 0$ عندها تأخذ المعادلة

(7-1) أحد الشكلين :

$$\text{حيث } a'_2 \neq 0 \quad a'_{11} x'^2 + 2a'_1 x' + 2a'_2 y' + a = 0$$

$$\text{حيث } a'_1 \neq 0 \quad a'_{22} y'^2 + 2a'_1 x' + 2a'_2 y' + a = 0$$

وبالتمام كل منهما مربع كامل نجد للشكل الأول المعادلة :

$$a'_{11} \left(x' + \frac{a'_1}{a'_{11}} \right)^2 + 2a'_2 y' + a - \frac{a'^2_1}{a'_{11}} = 0$$

وبإجراء الإنسحاب :

$$X = x' + \frac{a'_1}{a'_{11}}, \quad Y = y' + \frac{a}{2a'_2} - \frac{a'^2_1}{2a'_2 a'_{11}}$$

نجد أن المعادلة تصبح :

$$X^2 + 2PY = 0$$

حيث :

$$P = \left| \frac{a'_2}{a'_{11}} \right|$$

كما نجد للشكل الثاني المعادلة :

$$a'_{22} \left(y' + \frac{a'_2}{a'_{22}} \right)^2 + 2a'_1 x' + a - \frac{a'^2_2}{a'_{22}} = 0$$

وبإجراء الإنسحاب :

$$X = x' + \frac{a}{2a'_1} - \frac{a'^2_2}{2a'_1 a'_{22}}, \quad Y = y' + \frac{a'_2}{a'_{22}}$$

نجد أن المعادلة تصبح :

$$Y^2 + 2PX = 0$$

حيث :

$$P = \left| \frac{a'_1}{a'_{22}} \right|$$

ونحصل في هذه الحالة على إحدى المعادلتين :

$$Y^2 = \pm 2PX \quad \text{أو} \quad X^2 = \mp 2PY \quad (11-1)$$

التي تمثلان النمط الثاني الممثل للقطوع المكافئة .

ملاحظة (2) : هنا أيضاً يمكن إجراء الدوران والإنسحاب اللازمين معاً.

تاركين للقارئ إيجاداه لكل من الشكلين.

$$(3) \quad a_{11}' = a_1' = 0 \quad \text{أو} \quad a_{22}' = a_2' = 0 \quad \text{لكن} \quad a_{22}'^2 + a_{11}'^2 \neq 0 \quad \text{وعندها تأخذ}$$

المعادلة (9-1) أحد الشكلين :

$$a_{22}' y'^2 + 2 a_2' y' + a = 0 \quad \text{الذي يمكن كتابته بالشكل :$$

$$a_{22}' \left(y' + \frac{a_2'}{a_{22}'} \right)^2 + a - \frac{a_2'^2}{a_{22}'} = 0$$

أي :

$$D = \frac{a}{a_{22}'} - \frac{a_2'^2}{a_{22}'^2} \quad \text{حيث} \quad Y^2 + D = 0 \quad (12-1)$$

أو :

$$a_{11}' \left(x' + \frac{a_1'}{a_{11}'} \right)^2 + a - \frac{a_1'^2}{a_{11}'} = 0$$

أي :

$$X^2 + D = 0$$

حيث :

$$D = \frac{a}{a_{11}'} - \frac{a_1'^2}{a_{11}'^2}$$

التي تمثل منحنيات النمط الثالث.

وهكذا نجد أن المعادلة (2-1) تمثل ثلاثة أنماط رئيسية (4-1).

ولتبين المنحنيات الرئيسية لكل نمط من الأنماط الثلاثة السابقة:

فللنمط الأول : $a_{11}' X^2 + a_{22}' Y^2 + D = 0$ نميز خمسة أنواع من منحنيات الدرجة الثانية هي نوعان :

أ - إذا كان $a_{11}' a_{22}' > 0$ أي a_{11}' , a_{22}' من إشارة واحدة عندها نميز الحالات الثلاث التالية :

1 - إذا كان $a_{11}' < 0$ و $a_{22}' < 0$ عندها بالتقسيم على $-D$ وفرض :

$$\frac{-D}{a_{11}'} = a^2, \quad \frac{-D}{a_{22}'} = b^2$$

نجد المعادلة :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

التي تمثل قطعاً ناقصاً .

2 - إذا كان $a_{11}' > 0$ و $a_{22}' > 0$ عندها بالتقسيم على D وفرض أن :

$$\frac{D}{a_{11}'} = a^2, \quad \frac{D}{a_{22}'} = b^2$$

نجد المعادلة :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$$

التي تمثل قطعاً ناقصاً تخيلياً بفرض :

$$a^2 = \frac{1}{|a_{11}'|}, \quad b^2 = \frac{1}{|a_{22}'|}$$

3 - 0 = D وعندما نجد :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$$

التي تمثل مستقيمين تخيليين متقاطعين في المبدأ معادلتهما :

$$\left(\frac{x}{a} + i \frac{y}{b} \right) \left(\frac{x}{a} - i \frac{y}{b} \right) = 0$$

ب - إذا كان $a'_{11} a'_{22} < 0$ أي أن a'_{11} ، a'_{22} من إشارتين مختلفتين عندها نميز

حالتين هما :

4 - 0 ≠ D وعندما بفرض :

$$a^2 = \left| \frac{D}{a'_{11}} \right| , b^2 = \frac{D}{a'_{22}}$$

نجد المعادلة :

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = \mp 1$$

التي تمثل قطعاً زائداً .

5 - 0 = D وعندما بفرض :

$$a^2 = \left| \frac{1}{a'_{11}} \right| , b^2 = \left| \frac{1}{b'_{11}} \right|$$

نجد المعادلة :

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 0$$

التي تمثل مستقيمين متقاطعين معادلتهما :

$$\left(\frac{X}{a} - \frac{Y}{b} \right) \left(\frac{X}{a} + \frac{Y}{b} \right) = 0$$

وللنمط الثاني $a_{11}' X^2 + 2 a_2' Y = 0$ حيث $a_{11}' a_2' \neq 0$ وبفرض :

$$P = \left| \frac{a_2'}{a_{11}'} \right|$$

نجد المعادلة : $X^2 = \mp 2 P Y$ أو $Y^2 + 2 a_1' X = 0$ حيث $a_{22}' a_1' \neq 0$ وبفرض :

$$P = \left| \frac{a_1'}{a_{22}'} \right|$$

نجد المعادلة :

$$Y^2 = \mp 2 P X$$

وفي كل من الحالتين نجد إحدى المعادلتين :

$$X^2 = \mp 2 P Y \quad \text{أو} \quad Y^2 = \mp 2 P X \quad - 6$$

الممثلة لقطع مكافئ .

وللنمط الثالث $a_{11}' X^2 + D = 0$ و $a_{11}' \neq 0$ نجد الحالات الثلاث :

$$X^2 = \alpha^2 \quad \text{عندما} \quad a_{11}' D < 0 \quad - 7$$

حيث :

$$\alpha^2 = + \frac{D}{a_{11}'}$$

وهي تمثل معادلة مستقيمين متوازيين $X = \mp \alpha$.

$$X^2 = \alpha^2 \quad \text{عندما} \quad a_{11}' D > 0 \quad - 8$$

حيث :

$$\alpha^2 = + \frac{D}{a_{11}'}$$

وهي تمثل معادلة مستقيمين متوازيين تخيلين $X = \mp i \alpha$.

$$X^2 = 0 \quad \text{عندما} \quad D = 0 \quad - 9$$

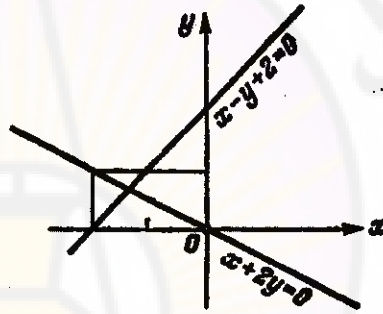
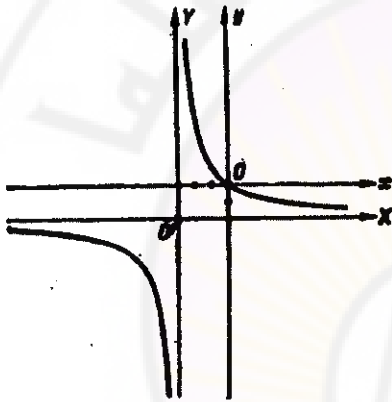
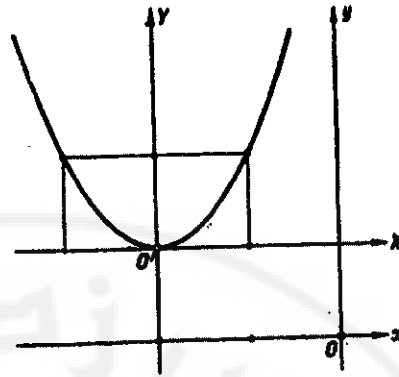
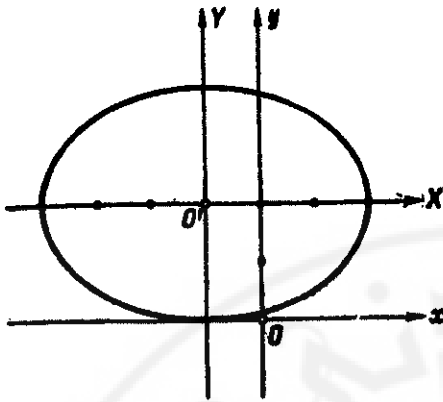
وهي تمثل معادلة مستقيمين منطبقين $X=0$.

والأمر نفسه لهذا النمط عند كونه من الشكل $a_{22}' Y^2 + D = 0$ حيث نجد ثلاثة أنواع من المنحنيات.

والمعادلة العامة لمنحنيات الدرجة الثانية (2-1) أو (7-1) تمثل تسعة منحنيات أوردناها جميعها.

نورد فيما يلي جدولاً يمثل هذه المنحنيات ومعادلتها النظامية بعد الدوران والإانسحاب:

النمط	معادلة النمط	المعادلة النظامية الرئيسية	اسم المنحني	رقم المنحني
I	$a_{11}' X^2 + a_{22}' Y^2 + D = 0$	$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$	قطع ناقص حقيقي	1
		$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = -1$	قطع ناقص تخيلي	2
		$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 0$	مستقيمان تخيليان	3
		$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = \mp 1$	قطع زائد	4
		$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 0$	مستقيمان متقاطعان	5
II	$a_{11}' X^2 + 2 a_{21}' Y = 0$ أو $a_{22}' Y^2 + 2 a_{11}' X = 0$	$X^2 = \pm 2 P Y$ أو $Y^2 = \pm 2 P X$	قطع مكافئ	6
III	$a_{11}' X^2 + D = 0$	$X^2 = \alpha^2 (\alpha \neq 0)$	مستقيمان متوازيان	7
		$X^2 = -\alpha^2$	مستقيمان متوازيان تخيليان	8
		$X^2 = 0$	مستقيمان منطبقان	9



مثال (1) : بين نوع كل من المنحنيين :

$$9x^2 + 4y^2 - 36x + 8y + 4 = 0 \quad (\text{أ})$$

$$25x^2 + 16y^2 - 150x - 128y + 81 = 0 \quad (\text{ب})$$

وذلك بإجراء الإنسحاب اللازم.

الحل : لنكتب المعادلة (أ) بالشكل :

$$9(x-2)^2 + 4(y+1)^2 - 36 = 0$$

أو بعد الإصطاح والتقسيم على $4 \times 9 = 36$ نجد :

$$\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$$

وبإجراء الإنسحاب $X = x - 2$, $Y = y + 1$ نجد المعادلة :

$$\frac{X^2}{4} + \frac{Y^2}{9} = 1$$

وهي معادلة قطع ناقص مركزه $(-1, -2)$ وأنصاف محوريه 2, 3 (من الدراسة الثانوية) لنكتب المعادلة (ب) بالشكل :

$$25(x-3)^2 + 16(y-4)^2 + 400 = 0$$

وبالتقسيم على 400 نجد :

$$\frac{(x-3)^2}{16} + \frac{(y-4)^2}{25} + 1 = 0$$

وهي معادلة قطع ناقص تخيلي بإجراء الإنسحاب $X = x - 3$, $Y = y - 4$ نجد المعادلة النظامية له :

$$\frac{X^2}{16} + \frac{Y^2}{25} = -1$$

مثال (2) : بين نوع كل من المنحنيين :

$$6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0 \quad (\text{أ})$$

$$x^2 - 4xy + 4y^2 + 4x - 3y - 7 = 0 \quad (\text{ب})$$

الحل : من أجل :

$$a_{11} = 0, a_{12} = 3, a_{22} = 8 \quad (\text{أ})$$

ومنه :

$$\tan 2\theta = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}} = \frac{6}{-8} = -\frac{3}{4}$$

إذن :

$$\frac{1}{\cos^2 2\theta} = 1 + \frac{9}{16} = \frac{25}{16}$$

ومنه :

$$\sin 2\theta = \frac{3}{5} \quad , \quad \cos 2\theta = \frac{-4}{5}$$

ولدينا :

$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2} = \frac{1}{10} \quad , \quad \sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2} = \frac{9}{10}$$

إذن :

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{10}} \quad , \quad \sin \theta = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

وبإجراء الدوران :

$$x = \frac{x' - 3y'}{\sqrt{10}} \quad , \quad y = \frac{3x' + y'}{\sqrt{10}}$$

نجد المعادلة :

$$9x'^2 - y'^2 - \frac{90}{\sqrt{10}}x' + \frac{10}{\sqrt{10}}y' + 11 = 0$$

أو :

$$9\left(x' - \frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 - \left(y' - \frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 - 9 = 0$$

وبإجراء الإنسحاب :

$$X = x' - \frac{\sqrt{10}}{2} \quad , \quad Y = y' - \frac{\sqrt{10}}{2}$$

والتقسيم على 9 نجد المعادلة النظامية :

$$\frac{X^2}{1} - \frac{Y^2}{9} = 1$$

وهي تمثل قطعاً زائداً نصفاً محورية 1, 3 ومركزه :

$$\left(\frac{\sqrt{10}}{2}, \frac{\sqrt{10}}{2} \right)$$

ومن أجل (ب) $a_{11} = 1, a_{12} = -2, a_{22} = 4$ ومنه :

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{-4}{1-4} = \frac{4}{3}$$

إذن :

$$\cos 2\theta = \frac{3}{5}$$

وبالتالي :

$$\cos \theta = \frac{2}{\sqrt{5}}, \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

وبإجراء الدوران :

$$x = \frac{2x' - y'}{\sqrt{5}}, y = \frac{x' + 2y'}{\sqrt{5}}$$

نجد :

$$y'^2 - 2\sqrt{5}y' + \sqrt{5}x' - 7 = 0$$

أو :

$$(y' - \sqrt{5})^2 + \sqrt{5} \left(x' - \frac{12}{\sqrt{5}} \right) = 0$$

وبإجراء الانسحاب :

$$Y = y' - \sqrt{5}, X = x' - \frac{12}{\sqrt{5}}$$

نجد المعادلة النظامية $Y^2 + \sqrt{5}X = 0$ وهي معادلة قطع مكافئ.

ملاحظة : لأن معادلة منحنيات الدرجة الثانية تحوي ستة وسطاء غير مستقلة

هي : $a, a_1, a_2, a_{11}, a_{12}, a_{22}$ لذا فلتعين هذه المعادلة يلزمنا عادة لحس معادلات.

وعدم استقلالية الوسطاء بفرض أن أحد الوسطاء a_{11}, a_{12}, a_{22} غير معلوم فإذا قسمنا عليه بقيت لدينا خمس وسطاء .

مثال (3) : اكتب معادلة منحنى الدرجة الثانية المار بالنقط :

$$M_0 (0, 0), M_1 (0, 2), M_2 (-1, 0), M_3 (-2, 1), M_4 (-1, 3)$$

الحل : لتكن المعادلة:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a = 0$$

والنقاط الخمس المعطاة تحقق هذه المعادلة لنجد :

- (1) $a = 0$
- (2) $4a_{22} + 4a_2 + a = 0$
- (3) $a_{11} - 2a_1 + a = 0$
- (4) $4a_{11} - 4a_{12} + a_{22} - 4a_1 + 2a_2 + a = 0$
- (5) $a_{11} - 6a_{12} + 9a_{22} - 2a_1 + 6a_2 + a = 0$

ومنه نجد :

$$a = 0, a_{22} + a_2 = 0, a_{11} - 2a_1 = 0 \Rightarrow a_{22} = -a_2, a_{11} = 2a_1$$

إذن :

$$a = 0, a_{12} = -\frac{1}{2}a_2, a_{22} = -a_2, a_{11} = \frac{3}{2}a_2, a_1 = \frac{3}{4}a_2$$

وتأخذ المعادلة الشكل :

$$3x^2 + 2xy + 2y^2 + 3x - 4y = 0$$

مثال (4) : اكتب معادلة قطع مكافئ يمر بالنقط :

$$M_0 (0, 15), M_1 (3, 0), M_2 (5, 0), M_3 (2, 1)$$

الحل : من المعادلة :

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a = 0$$

وكون النقاط المعطاة تحققها نجد :

- (1) $225 a_{22} + 30 a_2 + a = 0$
- (2) $9 a_{11} + 6 a_1 + a = 0$
- (3) $25 a_{11} + 10 a_1 + a = 0$
- (4) $4 a_{11} + 4 a_{12} + a_{22} + 4 a_1 + 2 a_2 + a = 0$

ولدينا : $I_2 = a_{11} a_{22} - a_{12}^2 = 0$ لأنه قطع مكافئ وبحل هذه المعادلات نجد:

$$a = 15 a_{11}, a_1 = -4 a_{11}, a_2 = -\frac{a_{11}}{2} - \frac{15 a_{22}}{2}$$

إذن : $a_{11} + 2 a_{12} - 7 a_{22} = 0$ و $a_{11} a_{22} - a_{12}^2 = 0$ أي :

$$\frac{a_{12}^2}{a_{22}} = 7 a_{22} - 2 a_{12}$$

وبحلها نجد : $a_{12} = (-1 + 2\sqrt{2}) a_{22}$ فإذا اخترنا $a_{12} = (-1 + 2\sqrt{2}) a_{22}$ نجد :

$$a_1 = (135 - 60\sqrt{2}) a_{22} \quad \text{و} \quad a_{11} = (9 - 4\sqrt{2}) a_{22}$$

$$a = (-36 + 16\sqrt{2}) a_{22} \quad a_2 = (-12 + 2\sqrt{2}) a_{22}$$

وبالتعويض والاختصار على a_{22} نجد المعادلة .

2-1 الشكل التربيعي والقيم غير المتبدلة:

لما كانت العبارة $a_{11} x^2 + 2 a_{12} xy + a_{22} y^2$ تلعب دوراً أساسياً في معرفة نوع المنحني (2, 1) لهذا فسوف ندرس تحت هذا العنوان الأشكال التربيعية التي هي على صلة بالمعادلة العامة من الدرجة الثانية (2-1).

تعريف (1) : التحويلات المرتبطة بالدوران والتي لها الشكل :

$$x = C_{11} x' + C_{12} y' \quad y = C_{21} x' + C_{22} y' \quad (12-1)$$

تسمى تحويلات خطية متجانسة أما المرتبطة بالدوران والإنسحاب والتي لها

الشكل :

$$x = C_{11} x' + C_{12} y' + C_1 \quad y = C_{21} x' + C_{22} y' + C_2 \quad (13-1)$$

فتسمى تحويلات خطية غير متجانسة عندما $C_1^2 + C_2^2 \neq 0$ ، ومصنوفة التحويلات الخطية هي :

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} \quad (14-1)$$

ومعادلة الشكل التربيعي، بمتغيريه :

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= a_{11} x^2 + 2 a_{12} xy + a_{22} y^2 \\ &= (x \ y) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x \ y) A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (15-1)$$

عند إجراء التحويل الخطي المتجانس عليها ترد للشكل التربيعي :

$$\begin{aligned} \varphi'(x', y') &= a_{11}' x'^2 + 2 a_{12}' x' y' + a_{22}' y'^2 \\ &= (x' \ y') \begin{pmatrix} a_{11}' & a_{12}' \\ a_{12}' & a_{22}' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = (x' \ y') B \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (16-1)$$

وبين مصفوفتي الأمثال A و B في (15-1) و (16-1) ومصنوفة التحويلات الخطية C في (14-1) العلاقة :

$$B = C' A C$$

حيث C' منقول المصفوفة C وبين محدداتها العلاقة :

$$|B| = |A| |C|^2$$

باعتبار :

$$|C| = |C'|$$

تعريف (2) : مصفوفة التحويل الخطي (14-1) تسمى متعامدة منتظمة إذا حققت العلاقة :

$$C \cdot C' = I$$

بفرض :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

المصفوفة الواحدية أي إذا كان :

$$C_{11}^2 + C_{12}^2 = 1 \quad C_{21}^2 + C_{22}^2 = 1 \quad (17-1)$$

$$C_{11} C_{12} + C_{12} C_{22} = C_{21} C_{11} + C_{22} C_{21} = 0$$

تعريف (3) : بفرض :

$$f(x, y) = a_{11} x^2 + 2 a_{12} xy + a_{22} y^2 + 2 a_1 x + 2 a_2 y + a \quad (18-1)$$

$$f'(x', y') = a_{11}' x'^2 + 2 a_{12}' x'y' + a_{22}' y'^2 + 2 a_1' x' + 2 a_2' y' + a'$$

عندما الدالة $I(a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_1, a_2, a)$ حيث $a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_1, a_2, a$ الأمثال

في التابع $f(x, y)$ من (17-1) و $I'(a_{11}', a_{12}', a_{22}', a_1', a_2', a')$ حيث

$a_{11}', a_{12}', a_{22}', a_1', a_2', a'$ الأمثال في $f'(x', y')$ من (17-1) تسمى متعامدة غير

متبدلة إذا حققت المساواة:

$$I(a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_1, a_2, a) = I'(a_{11}', a_{12}', a_{22}', a_1', a_2', a')$$

وبفرض $f'(x', y')$ تنتج عن $f(x, y)$ نتيجة للتحويلات الخطية. لذلك نورد

المبرهنة الأساسية للأشكال التربيعية المتعلقة بمعادلة منحنيات الدرجة الثانية العامة

(2-1) وذات الصلة بالدوران والانسحاب أو بأحدهما .

مبرهنة أساسية . الدوال الأربع :

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= a_{11} + a_{22}, I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, K_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a \end{vmatrix} \\ K_2 &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_1 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_2 \\ a_2 & a \end{vmatrix} = (a_{11} + a_{22})a - (a_1^2 + a_2^2) \end{aligned} \right\} \quad (19-1)$$

متعامدة غير متبدلة عند إجراء أية تحويلات خطية متعامدة متجانسة والثلاث الأول I_1, I_2, K_3 غير متبدلة حتى عند إجراء أية تحويلات خطية غير متجانسة (14-1) بينما K_2 قد تكون متبدلة .

الإثبات : لنبدأ بإجراء التحويل الخطي المتجانس عندها نجد أن :

$$\begin{aligned} f(x,y) &= a_{11} (C_{11} x' + C_{12} y')^2 + 2 a_{12} (C_{11} x' + C_{12} y') (C_{21} x' + C_{22} y') + \\ &+ a_{22} (C_{21} x' + C_{22} y')^2 + 2 a_1 (C_{11} x' + C_{12} y') + 2 a_2 (C_{21} x' + C_{22} y') + \\ &+ a = f'(x', y') = a_{11}' x'^2 + 2 a_{12}' x' y' + a_{22}' y'^2 + 2 a_1' x' + 2 a_2' y' + a \end{aligned}$$

لوجدنا أن :

$$a_{11}' = a_{11} C_{11}^2 + 2 a_{12} C_{11} C_{21} + a_{22} C_{21}^2$$

$$a_{22}' = a_{11} C_{12}^2 + 2 a_{12} C_{12} C_{22} + a_{22} C_{22}^2$$

$$a_{12}' = a_{11} C_{11} C_{12} + (C_{11} C_{22} + C_{12} C_{21}) a_{12} + a_{22} C_{21} C_{22} \quad (20-1)$$

$$a_1' = a_1 C_{11} + a_2 C_{21}, \quad a_2' = a_1 C_{12} + a_2 C_{22}, \quad a' = a$$

وإذا أخذنا (17-1) بالحسبان لوجدنا أن :

$$a_{11}' + a_{22}' = a_{11} (C_{11}^2 + C_{12}^2) + 2 a_{12} (C_{11} C_{21} + C_{12} C_{22}) + a_{22} (C_{21}^2 + C_{22}^2) = a_{11} + a_{22}$$

و $I_1' = I_1$ إذن I_1 دالة متعامدة غير متبدلة. لذلك :

$$\begin{aligned} I_2' &= a_{11}' a_{22}' - a_{12}'^2 = (a_{11} C_{11}^2 + 2 a_{12} C_{11} C_{21} + a_{22} C_{21}^2) (a_{11} C_{12}^2 + \\ &+ 2 a_{12} C_{12} C_{22} + a_{22} C_{22}^2) - (a_{12} C_{11} C_{12} + (C_{11} C_{22} + C_{12} C_{21}) a_{12} + \\ &+ a_{22} C_{21} C_{22})^2 = a_{11} a_{22} - a_{12}^2 = I_2 \end{aligned}$$

حيث أخذنا من جديد (17-1) بالحسبان . إذن I_2 دالة غير متبدلة.

من أجل الدالة K_2 نكتب :

$$K_2' = \begin{vmatrix} a_{11}' & a_1' \\ a_1' & a' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22}' & a_2' \\ a_2' & a' \end{vmatrix} = a' (a_{11}' + a_{22}') - (a_1'^2 + a_2'^2)$$

أما الحد الأول بعد المساواة من اليمين وبفرض $a = a'$ و $I_2' = I_2$ فهو غير متبدل ويكفي إثبات أن : $a_1'^2 + a_2'^2$ غير متبدل وبعد التعويض من (1-20) نجد :

$$a_1'^2 + a_2'^2 = (a_1 C_{11} + a_2 C_{21})^2 + (a_1 C_{12} + a_2 C_{22})^2 = a_1^2 + a_2^2$$

وهو ما أردنا إثباته.

أما فيما يتعلق بـ K_3' حيث :

$$K_3' = a' I_2' - (a_1'^2 a_{22}' + a_2'^2 a_{11}') + 2 a_1' a_2' a_{12}'$$

وبفرض $a - I_2'$ غير متبدل فإن العبارة $(a_1'^2 a_{22}' + a_2'^2 a_{11}') + 2 a_1' a_2' a_{12}'$

غير متبدل الأمر الذي نتركه للقارئ ليتمه بإجراء الضرب المباشر. أما فيما يتعلق

بأن K_3, I_2, I_1 غير متبدلة بالنسبة لتحويلات خطية غير متجانسة (دوران وانسحاب)

فيكفي إثبات أنها غير متبدلة بالنسبة للإنسحاب لأننا بينا أنها غير متبدلة بالنسبة للدوران.

فبإجراء الإنسحاب $x = x' + C_1, y = y' + C_2$ نجد عندها أن $f(x, y)$ يأخذ

الشكل :

$$f(x, y) = a_{11} (x' + C_1)^2 + 2 a_{12} (x' + C_1)(y' + C_2) + a_{22} (y' + C_2)^2 + 2 a_1 (x' + C_1) + 2 a_2 (y' + C_2) + a = a_{11}' x'^2 + 2 a_{11}' x' y' + a_{22}' y'^2 + 2 a_1' x' + 2 a_2' y' + a'$$

وبالمطابقة نجد :

$$a_{11}' = a_{11}, a_{22}' = a_{22}, a_{12}' = a_{12}$$

وهذا يعني أن I_1, I_2 غير متبدلين.

من أجل K_3 نترك أمر المتابعة بتعيين $a_1' a_2' a_{12}'$ والأخذ بالحسبان أن I_1, I_2 غير

متبدلة وأن :

$$K_3' = a' I_2' - (a_1'^2 a_{22}' + a_2'^2 a_{11}') + 2 a_1' a_2' a_{12}'$$

أما فيما يتعلق بـ K_2 فنوضح في الأمثلة القادمة أنها متبدلة عند الإنسحاب أو

عند الدوران والإنسحاب أي عند التحويل الخطي غير المتجانس (1-13).

مثال (4) : رد المعادلتين الواردتين في المثال الثاني للنمط الرئيسي وأوجد المعادلة النظامية وبين الدوال المتبدلة وغير المتبدلة.

الحل : بالنسبة للمعادلة $6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0$ نجد :

$$a_{11} = 0, a_{12} = 3, a_{22} = 8, a_1 = -6, a_2 = -13, a = 11$$

ومنه :

$$I_2 < 0, I_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = -9, I_1 = a_{11} + a_{22} = 8$$

$$K_2 = aI_1 - (a_1^2 + a_2^2) = -117, K_3 = 81$$

$$\sin \theta = \frac{3}{\sqrt{10}} \text{ و } \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{10}} \text{ و } \operatorname{tg} 2\theta = -\frac{3}{4}$$

فمن العلاقات (5-1) نجد :

$$a_{11}' = 9, a_{12}' = 0, a_{22}' = -1$$

إذن : $9 - 1 = 8$ وهي غير متبدلة $I_2' = a_{11}'a_{22}' - a_{12}'^2 = -9$ وهي دالة غير متبدلة أيضاً .

وتأخذ المعادلة بعد الانسحاب الشكل :

$$9x'^2 - y'^2 - 9 = 0$$

ونجد أيضاً : $K_3' = 81$ و $K_2 = -9 \times 8 = -72$ وهي متبدلة .

أما بشأن المعادلة :

$$x^2 - 4xy + 4y^2 + 4x - 3y - 7 = 0$$

فنجد :

$$a_{11} = 1, a_{12} = -2, a_{22} = 4$$

$$I_2 = +4 - 4 = 0 \text{ و } I_1 = 5$$

وكذلك :

$$a_1 = 2, a_2 = -\frac{3}{2}, a = -7$$

ومنه :

$$K_2 = -7 \times 0 - (4 \times 1 + \frac{9}{4} \times 16 - 6 \times -2) = -\frac{165}{4}$$

وهي متبدلة :

$$K_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -\frac{3}{2} \\ 2 & -\frac{3}{2} & -7 \end{vmatrix} = -\frac{25}{4}$$

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}} = \frac{-4}{1 - 4} = \frac{4}{3} = \frac{2 \operatorname{tg} \theta}{1 - \operatorname{tg}^2 \theta} \quad \text{ولدينا :}$$

$$\cos \theta = \frac{2}{\sqrt{5}}, \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{إذن :}$$

$$x = \frac{2x' - y'}{\sqrt{5}}, y = \frac{x' + 2y'}{\sqrt{5}} \quad \text{إذن :}$$

ومن (5-1) نجد :

$$a'_{22} = 5, a'_1 = \sqrt{5}, a'_2 = -2\sqrt{5}, a' = -7$$

وتأخذ المعادلة الشكل :

$$5y'^2 + \sqrt{5}x' - 2\sqrt{5}y' - 7 = 0$$

$$5\left(y' - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 + \sqrt{5}\left(x' - \frac{8}{\sqrt{5}}\right) = 0$$

بحساب القيم غير المتبدلة لهذه المعادلة:

$$I'_1 = 5, I'_2 = 0, K'_2 = -\frac{165}{4}, K'_3 = -\frac{25}{4}$$

وبالإنسحاب :

$$X = x' - \frac{8}{\sqrt{5}}, Y = y' - \frac{1}{\sqrt{5}}$$

تصبح القيم غير المتبدلة :

$$I_1' = 5, I_2' = 0, K_2' = -\frac{5}{4}, K_3' = -\frac{25}{4}$$

ونجد المعادلة :

$$Y^2 + \frac{1}{\sqrt{5}} X = 0$$

التي تمثل قطعاً مكافئاً.

3-1 النظرية العامة لمعادلة منحنيات الدرجة الثانية:

لتكن المعادلة العامة لمنحنيات الدرجة الثانية (2-1) وليكن I_1, I_2, K_2, K_3 التي ورد ذكرها في (1-19) ولنبين هنا الشروط العامة لتتضمن منحنيات الدرجة الثانية للنمط الأول أو الثاني أو الثالث والشروط الخاصة لتتضمن هذه المنحنيات في كل نمط لأحد منحنياته وذلك بإيراد المبرهنة .

مبرهنة (1) : لتمثل المعادلة العامة لمنحنيات الدرجة الثانية (2-1) منحنيات من النمط :

الأول : يلزم ويكفي تحقق الشرط $I_2 \neq 0$.

الثاني : يلزم ويكفي تحقق الشرطين $I_2 = 0$ و $K_3 \neq 0$.

الثالث : يلزم ويكفي تحقق الشروط $I_2 = 0$ و $K_3 = 0$ و $I_1 \neq 0$.

الإثبات : نبدأ بإثبات اللزوم. فإذا فرضنا أن معادلة منحنيات الدرجة الثانية

(2-1) ردت للنمط الأول بتحويل خطي مناسب (1-13) فيكون لها الشكل

$$a_{11}' X^2 + a_{22}' Y^2 + D = 0 \text{ حيث } a_{11}' a_{22}' \neq 0 \text{ وعندها نجد أن :}$$

$$I_2' = \begin{vmatrix} a_{11}' & 0 \\ 0 & a_{22}' \end{vmatrix} = a_{11}' a_{22}' \neq 0$$

وحيث إن $I_2' = I_2$ لأنها دالة غير متبدلة فهي تحقق الشرط المذكور. أما إذا ردت
المعادلة (2-1) للنمط الثاني $a_{11}' X^2 + 2 a_2' Y = 0$ حيث $a_{11}' a_2' \neq 0$ فإننا نجد عندها أن:

$$I_2 = \begin{vmatrix} a_{11}' & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad K_3 = \begin{vmatrix} a_{11}' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2' \\ 0 & a_2' & 0 \end{vmatrix} = -a_{11}' a_2'^2 \neq 0$$

وتحقق الشرطان اللذان أوردناهما. والأمر نفسه لو كانت معادلة النمط الثاني

$$a_{22}' Y^2 + 2 a_1' X = 0 \text{ حيث } a_{22}' a_1' \neq 0 \text{ لنجد عندها :}$$

$$I_2 = 0, \quad K_3 = -a_{22}' a_1'^2 \neq 0$$

وعندما ترد المعادلة (2-1) للنمط الثالث $a_{11}' X^2 + D = 0$ حيث $a_{11}' \neq 0$

نجد:

$$I_2 = \begin{vmatrix} a_{11}' & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad K_3 = \begin{vmatrix} a_{11}' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D/a_{11}' \end{vmatrix} = 0$$

بينما $I_1' = a_{11}' \neq 0$ والشروط الثلاثة التي أوردناها تكون محققة والأمر نفسه

لو كانت معادلة النمط الثالث $a_{22}' Y^2 + D = 0$ حيث $a_{22}' \neq 0$ لنجد أن $I_2 = K_3 = 0$

$$\text{بينما } I_2 = a_{22}' \neq 0.$$

ولنثبت الآن كفاية الشروط. ونحصل على هذا الإثبات من أسلوب النقص

فإذا فرضنا أن $I_2 \neq 0$ عندها يجب أن نثبت أن المعادلة (2-1) تنتمي للنمط الأول.

في الواقع في هذه الحالة إذا لم يتحقق ذلك فعندها إما أن تنتمي للنمط الثاني

أو الثالث واعتماداً على اللزوم في هذه الحالة فإن $I_2 = 0$ وهذا مناقض للفرض ولهذا

فإن المعادلة (2-1) تنتمي للنمط الأول. والأمر نفسه عند فرض أن $I_2 = 0$ و $K_3 \neq 0$

عندها لن تنتمي المعادلة (2-1) للنمط الأول بل إما للنمط الثاني أو الثالث ولو

فرضنا انتماءها للثالث لكان حسب اللزوم $I_2 = 0$ و $K_3 = 0$ وهو أمر مناقض للزوم.

إذن المعادلة في هذه الحالة عندما $I_2 = 0$ و $K_3 \neq 0$ تنتمي للنمط الثاني وبقي لدينا حالة عندما $K_3 = 0$, $I_2 = 0$ و $I_1 \neq 0$ حيث (2-1) لن تنتمي للنمط الأول ولا للثاني فهي تنتمي للنمط الثالث.

مبرهنة (2) : معادلة منحنيات الدرجة الثانية (2-1) تعطى بالأشكال البسيطة :

$$I \quad \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \frac{K_3}{I_2} = 0 \quad \text{حيث } \lambda_1 \lambda_2 \neq 0 \text{ عندما تنتمي للنمط الأول.}$$

$$II \quad \lambda_1 X^2 + 2 \sqrt{\frac{-K_3}{I_1}} Y = 0 \quad \text{حيث } \lambda_1 K_3 I_1 \neq 0 \text{ عندما تنتمي}$$

$$\text{للمنمط الثاني أو ربما } X = 0 \text{ } \lambda_1 Y^2 + 2 \sqrt{\frac{-K_3}{I_1}} X = 0$$

$$III \quad I_1 X^2 + \frac{K_2}{I_1} = 0 \text{ أو ربما } I_1 Y^2 + \frac{K_2}{I_1} = 0 \text{ حيث } I_1 \neq 0 \text{ عندما تنتمي للنمط الثالث.}$$

بفرض λ_1, λ_2 جذري المعادلة $\lambda^2 - I_1 \lambda + I_2 = 0$ أي المعادلة المميزة :

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

وعندها من أجل $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ تمثل معادلة النمط الأول المجموعة الناقصية ونجد:

$$(1) \quad \text{قطعا ناقصا عندما } \lambda_1 \frac{K_3}{I_2} < 0$$

$$(2) \quad \text{قطعا ناقصا تخيليا عندما } \lambda_1 \frac{K_3}{I_2} > 0$$

$$(3) \quad \text{مستقيمان تخيليان عندما } K_3 = 0$$

ومن أجل $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ تمثل معادلة النمط الأول المجموعة الزائدية ونجد :

$$(4) \quad \text{قطعا زائدا عندما } K_3 \neq 0$$

$$(5) \quad \text{مستقيمان متقاطعان عندما } K_3 = 0$$

ومن أجل $\lambda_1 \lambda_2 = 0$ و $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 \neq 0$ و $K_3 I_1 \neq 0$ تمثل معادلة النمط الثاني.
(6) قطعاً مكافئاً .

أما معادلة النمط الثالث $K_3 = 0$, $I_2 = 0$ و $I_1 \neq 0$ فهي تمثل مجموعة المستقيمات المتوازية ونجد :

(7) مستقيمين حقيقيين متوازيين عندما $K_2 < 0$.

(8) مستقيمين تخيليين متوازيين عندما $K_2 > 0$.

(9) مستقيمين منطبقين عندما $K_2 = 0$.

الإثبات : لنفرض أن منحنيات الدرجة الثانية تنتمي للنمط الأول :

$$I_2 = a_{11}' \cdot a_{22}' \neq 0 \quad \text{حيث} \quad a_{11}' X^2 + a_{22}' Y^2 + D = 0$$

عندها تأخذ المعادلة المميز الشكل :

$$\lambda_1 = a_{11}' , \lambda_2 = a_{22}' \quad \text{وجذرهما} \quad \lambda^2 - (a_{11}' + a_{22}') \lambda + a_{11}' a_{22}' = 0$$

وكذلك :

$$K_3 = \begin{vmatrix} a_{11}' & 0 & 0 \\ 0 & a_{22}' & 0 \\ 0 & 0 & D \end{vmatrix} = a_{11}' a_{22}' D = I_2 D$$

ومنه :

$$D = \frac{K_3}{I_2}$$

وهو ما أردنا بيانه.

ومن أجل $\lambda_1 \lambda_2 > 0$ فإن λ_1, λ_2 من إشارة واحدة وعندها نجد المجموعة الناقصة :

$$(1) \quad \text{عندما} \quad \lambda_1 \cdot \frac{K_3}{I_2} < 0 \quad \text{فإن إشارة} \quad \lambda_1, \frac{K_3}{I_2} \quad \text{مختلفتان} .$$

إذن نجد المعادلة :

$$\frac{X^2}{-K_3/\lambda_1 \cdot I_2} + \frac{Y^2}{-K_3/\lambda_2 \cdot I_2} = 1$$

وبفرض :

$$a^2 = \frac{-K_3}{\lambda_1 \cdot I_2}, b^2 = \frac{-K_3}{\lambda_2 \cdot I_2}$$

نجد المعادلة النظامية :

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$$

التي تمثل قطعاً ناقصاً .

(2) عندما $\frac{K_3}{I_2} > 0$ فإن إشارة $\lambda_1 \cdot \frac{K_3}{I_2}$ من إشارة λ_1 نفسها ومنه :

$$\frac{X^2}{K_3/\lambda_1 \cdot I_2} + \frac{Y^2}{K_3/\lambda_2 \cdot I_2} = -1$$

وبفرض :

$$a^2 = \frac{K_3}{\lambda_1 \cdot I_2}, b^2 = \frac{K_3}{\lambda_2 \cdot I_2}$$

نجد المعادلة النظامية :

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = -1$$

التي تمثل قطعاً ناقصاً تخيلياً .

(3) عندما $K_3 = 0$ نجد :

$$\frac{X^2}{\frac{1}{\lambda_1}} + \frac{Y^2}{\frac{1}{\lambda_2}} = 0$$

وبفرض :

$$a^2 = \frac{1}{|\lambda_1|}, b^2 = \frac{1}{|\lambda_2|}$$

ونجد المعادلة النظامية :

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 0$$

التي تمثل مستقيمين متقاطعين تخيليين .

أما عندما $\lambda_1 \lambda_2 < 0$ فإن λ_1, λ_2 من إشارتين مختلفتين ونجد عندها المجموعة

الزائدية :

(4) عندما : $K_3 \neq 0$

$$\frac{X^2}{K_3/\lambda_1 \cdot I_2} - \frac{Y^2}{K_3/\lambda_2 \cdot I_2} = 1$$

وبفرض :

$$a^2 = \left| \frac{K_3}{\lambda_1 \cdot I_2} \right|, \quad b^2 = \left| \frac{K_3}{\lambda_2 \cdot I_2} \right|$$

نجد المعادلة :

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = \mp 1$$

التي تمثل قطعاً زائداً .

(5) عندما $K_3 = 0$ نجد :

$$\frac{X^2}{\frac{1}{\lambda_1}} - \frac{Y^2}{\frac{1}{\lambda_2}} = 0$$

وبفرض :

$$a^2 = \frac{1}{|\lambda_1|}, \quad b^2 = \frac{1}{|\lambda_2|}$$

ومن المعادلة النظامية :

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 0$$

وهي تمثل مستقيمين متقاطعين في المبدأ.

أما إذا ردت المعادلة (2-1) للنمط الثاني $a_{11}' X^2 + 2 a_2' Y = 0$ وعندها:

$$I_1 = a_{11}' \quad K_3 = -I_1 a_2'^2$$

$$a_2' = \mp \sqrt{\frac{-K_3}{I_1}}$$

والأمر نفسه لو كانت معادلة النمط الثاني :

$$a_{22}' Y^2 + 2 a_1' X = 0 \text{ وعندها } K_3 = -I_1 a_1'^2 \text{ و } I_1 = a_{22}' \text{ ومنه :}$$

$$a_1' = \mp \sqrt{\frac{-K_3}{I_1}}$$

وفي كل من الحالتين فإن أي من المعادلتين :

$$(6) \quad a_{11}' X^2 + 2 a_2' Y = 0 \text{ أو } a_{22}' Y^2 + 2 a_1' X = 0 \text{ تمثل قطعاً مكافئاً.}$$

وأخيراً إذا ردت المعادلة (2-1) للنمط الثالث عندها نجد الشكل المبسط:

$$a_{11}' X^2 + D = 0 \text{ وعندها } I_2 = 0 \text{ و } K_3 = 0 \text{ بينما } I_1 = a_{11}' \text{ بفرض :}$$

$$K_2 = \begin{vmatrix} a_{11}' & 0 \\ 0 & D \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D \end{vmatrix} = a_{11}' D$$

$$\text{فإن } D = \frac{K_2}{I_1} \text{ وتأخذ المعادلة المبسطة الشكل :}$$

$$I_1 X^2 + \frac{K_2}{I_1} = 0 \text{ أو } X^2 + \frac{K_2}{I_1^2} = 0 \text{ ونميز الحالات الثلاث :}$$

$$(7) \quad K_2 < 0 \text{ نجد عندها أن } X^2 = -\frac{K_2}{I_1^2} = \alpha^2 \text{ وهي تمثل معادلة مستقيمين متوازيين.}$$

$$(8) \quad K_2 > 0 \text{ نجد عندها أن } X^2 = -\alpha^2 \text{ وهي تمثل معادلة مستقيمين تخيليين متوازيين.}$$

$$(9) \quad K_2 = 0 \text{ نجد عندها } X^2 = 0 \text{ وهي تمثل معادلة مستقيمين منطبقين.}$$

ونلخص جميع الشروط اللازمة والكافية السابقة في الجدول التالي :

اسم النحني	ملاحظات	المعادلة النظامية	الشرط الخاص	شرط المجموعة	الشرط العام	النمط	رقم النحني
قطع ناقص	$a^2 = \frac{-K_3}{\lambda_1 I_2}, b^2 = \frac{-K_3}{\lambda_2 I_2}$	$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$	$K_3 I_2 < 0$	$I_2 > 0$	$I_2 \neq 0$	I	1
قطع ناقص مخملي	$a^2 = \frac{K_3}{\lambda_1 I_2}, b^2 = \frac{K_3}{\lambda_2 I_2}$	$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = -1$	$K_3 I_2 > 0$				2
مستقيمات متقابلتان	$a^2 = \frac{1}{ \lambda_1 }, b^2 = \frac{1}{ \lambda_2 }$	$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 0$	$K_3 = 0$				3
قطع زائد	$a^2 = \frac{K_3}{\lambda_1 I_2}, b^2 = \frac{K_3}{\lambda_2 I_2}$	$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = \mp 1$	$K_3 \neq 0$	$I_2 < 0$			4
مستقيمات متقابلتان	$a^2 = \frac{1}{ \lambda_1 }, b^2 = \frac{1}{ \lambda_2 }$	$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 0$	$K_3 = 0$				5
قطع مكافئ	$p = \frac{ K_2 }{I_1^2}$	$Y^2 = \pm 2PX$ $X^2 = \pm 2PY$	$I_2 = 0, K_3 \neq 0$	$I_2 = 0, K_3 \neq 0$	$I_2 = 0, K_3 \neq 0$	II	6
مستقيمات متوازيتان	$\alpha^2 = \frac{-K_2}{I_1^2}$	$X^2 = \alpha^2$	$K_2 < 0$		$I_2 = K_3 = 0$	III	7
مستقيمات متوازيتان	$\alpha^2 = \frac{K_2}{I_1^2}$	$X^2 = -\alpha^2$	$K_2 > 0$		$I_1 \neq 0$		8
مستقيمات متطابقتان		$X^2 = 0$	$K_2 = 0$				9

مثال (5) : عيّن أنواع المنحنيات التالية وأوجد معادلاتها النظامية :

$$6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0 \quad (\text{أ})$$

$$x^2 + 2xy + y^2 - 8x + 4 = 0 \quad (\text{ب})$$

$$x^2 + 4y^2 - 5xy + x + 2y - 2 = 0 \quad (\text{ج})$$

$$x^2 + y^2 + 2xy + 1 = 0 \quad (\text{د})$$

$$x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 2y + 1 = 0 \quad (\text{هـ})$$

الحل : من أجل (أ) لدينا :

$$I_2 = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = -9 < 0$$

والمنحني ينتمي للنمط الأول المجموعة الزائدية.

$$K_3 = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -6 \\ 3 & 8 & -13 \\ -6 & -13 & 11 \end{vmatrix} = 81 \neq 0$$

والمنحني قطع زائد ولدينا : $I_1 = 0 + 8 = 8$.

والمعادلة المميزة $\lambda^2 - 8\lambda - 9 = 0$ إذن $\lambda_1 = 9$ و $\lambda_2 = -1$ والمعادلة الجديدة :

$$9X^2 - Y^2 + \frac{81}{-9} = 0$$

$$X^2 - \frac{Y^2}{9} = 1 \quad \text{أي :}$$

ومن أجل (ب) نجد :

$$I_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

و :

$$K_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -16$$

و $I_1 = 2$ والمنحني قطع مكافئ معادلته النظامية :

$$2Y^2 - 2\sqrt{-\frac{-16}{2}}X = 0$$

$$Y^2 = 2\sqrt{2}x \quad \text{أي :}$$

ومن أجل (ج) لدينا :

$$I_2 = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} & 4 \end{vmatrix} = -\frac{9}{4} < 0$$

والمنحني ينتمي للنمط الأول المجموعة الزائدية و :

$$K_3 = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{5}{2} & 4 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

لذا فهو يمثل مستقيمين متقاطعين .

$$x^2 - 5xy + 4y^2 + x + 2y - 2 = (x - y - 1)(x - 4y + 2) = 0$$

بفرض $I_1 = 5$ نجد المعادلة المميزة $\lambda^2 - 5\lambda - \frac{9}{4} = 0$ ومنه :

$$\lambda_2 = \frac{5 - \sqrt{34}}{2}, \quad \lambda_1 = \frac{5 + \sqrt{34}}{2}$$

إذن المعادلة :

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 = \frac{5 + \sqrt{34}}{2} X^2 - \frac{\sqrt{34} - 5}{2} Y^2 = 0$$

ومن أجل (د) نجد :

$$I_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

و :

$$K_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$I_1 = 2 \neq 0 \quad \text{و}$$

والمنحني ينتمي للنمط الثالث ويكفي أن نكتب $(x + y)^2 = -1$ لنجد معادلة مستقيمين متوازيين تخيليين $x + y = \pm i$.

من أجل (هـ) نجد :

$$I_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

و :

$$K_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$I_1 = 2 \neq 0 \quad \text{و}$$

والمنحني ينتمي للنمط الثالث من المنحنيات ويكفي أن نكتب $(x - y + 1)^2 = 0$ لنجد معادلة مستقيمين منطبيين .

2 - المراكز والأقطار والمماسات لمنحنيات الدرجة الثانية :

2 - 1 مراكز منحنيات الدرجة الثانية :

مركز منحنى الدرجة الثانية هو مركز تناظر هذا المنحني ويتصف المركز بخاصة أنه إذا وقعت النقطة $M(x, y)$ على هذا المنحني فإن نظيرتها $M'(x', y')$ بالنسبة للمركز $C(x_0, y_0)$ تقع أيضاً على هذا المنحني أي يتحقق أن :

$$x_0 = \frac{x + x'}{2}, y_0 = \frac{y + y'}{2}$$

وعندما يكون $x_0 = y_0 = 0$ فإن نظيرة النقطة $M(x, y)$ بالنسبة للنقطة $O(0, 0)$

هي $M'(-x, -y)$.

ولنبين بالنسبة لمعادلة منحنيات الدرجة الثانية العامة :

$$F(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a = 0 \quad (1-2)$$

الشروط لتكون (1-2) متناظرة بالنسبة للمبدأ في المبرهنة التالية :

مبرهنة (1) : ليكون المبدأ نقطة تناظر لمنحني الدرجة الثانية (1-2) يلزم

ويمكفي أن تكون أمثال المتحولين من الدرجة الأولى مساوية للصفر $a_1 = a_2 = 0$ وعندها نجد المعادلة :

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a = 0 \quad (2-2)$$

الإثبات : لبدأ بالضرورة ولنفرض أن المبدأ $(0, 0)$ هي مركز التناظر عندها

النقطتان (x, y) و $(-x, -y)$ متناظرتان وتنتميان معاً للمنحني بإتسواء إحداهما لهذا المنحني، أي إذا تحققت (1-2) فإن :

$$\begin{aligned} F(x, y) &= a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a = \\ &= (a_1x + a_2y)g(x, y) \end{aligned}$$

إذن لا بد أن يكون $g(x, y)$ من الشكل :

$$g(x, y) = px + qy + r \quad (3-2)$$

بفرض النقاط (x, y) المحققة للمعادلة (1-2) تحقق المعادلة (3-2) إذن :

$$px + qy + r = (a_1x + a_2y)k$$

وبالتالي :

$$\frac{p}{a_1} = \frac{q}{a_2} = \frac{r}{0}$$

ولهذا فإن : $r=0$ و :

$$F(x, y) = K(a_1 x + a_2 y)^2 = 0$$

والمعادلة الأخيرة لا تحوي حدوداً من الدرجة الأولى وأمثال (x, y) تساوي الصفر أي أن $a_1 = a_2 = 0$ وبالعكس إذا كانت المعادلة (1-2) لا تحوي حدوداً من الدرجة الثانية يكون لها الشكل (2-2) التي تمثل منحنيًا متناظرًا بالنسبة للمبدأ لأنه إذا حققتها النقطة $M(x, y)$ فإن النقطة $M_1(-x, -y)$ تحققها .

أما عن إحداثي مركز منحنى الدرجة الثانية فنورد لهما المبرهنة التالية:
مبرهنة (2) : مركبتا مركز المعادلة من الدرجة الثانية (2-1) تفرقان من العلاقتين :

$$a_{21}x + a_{22}y + a_2 = 0 \quad a_{11}x + a_{12}y + a_1 = 0 \quad (4-2)$$

وعند وجود حل وحيد للجملة (4-2) فالمنحنى مركزي أما عند عدم وجود حل لها فليس للمعادلة (1-2) أي مركز تناظر بينما إذا وجد للجملة (4-2) لا نهاية من الحلول فإن للمنحنى (1-2) لا نهاية من مراكز التناظر الواقعة على المستقيم الممثل بإحدى المعادلتين (4-2).

الإثبات : لنفرض وجود مركز للمنحنى، النقطة $O'(x_0, y_0)$ ولنفرض لكل نقطة من المنحنى $M(x, y)$ الإحداثيين بالنسبة للمحورين القديمين oxy و $M(x', y')$ الإحداثيين بالنسبة للمحورين الجديدين $O'x'y'$ عندها :

$$x = x' + x_0, \quad y = y' + y_0$$

وتأخذ المعادلة (2-1) الشكل :

$$a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + 2(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1)x' + 2(a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_2)y' + a_{11}x_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + a_{22}y_0^2 + a = 0$$

وحتى يكون المبدأ الجديد مركز تناظر للمنحني يجب أن تساوي أمثال حدود الدرجة الأولى الصفر أي يجب تحقق أن :

$$a_{11} x_0 + a_{12} y_0 + a_1 = 0 \quad a_{21} x_0 + a_{22} y_0 + a_2 = 0$$

وعندها إذا كان :

$$I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

كان للحملة حل وحيد وللمنحني مركز تناظر وحيد (النمط الأول من المنحنيات).

أما إذا كان :

$$\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{a_1}{a_2} = \lambda$$

كان للحملة لا نهاية من الحلول، تحقق المستقيم :

$$a_{11} x_0 + a_{12} y_0 + a_1 = 0$$

وكانت معادلة مستقيم التناظر :

$$a_{11} x + a_{12} y + a_1 = 0$$

أو : $a_{12} x + a_{22} y + a_2 = 0$ (الأمثال متناسبة).

$$I_2 = 0 \quad K_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_2 \\ a_{21} & a_{22} & a_2 \\ \lambda a_2 & a_2 & a \end{vmatrix} = 0$$

والمنحنيات تنتمي للنمط الثالث.

أما عندما :

$$\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} \neq \frac{a_1}{a_2}$$

فلا يوجد للمجموعة حل وعندها $K_3 \neq 0$, $I_2 = 0$ والمنحنيات تنتمي للنمط الثاني الذي ليس له أي مركز تناظر مجموعة القطوع المكافئة.

ملاحظة : بفرض :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2(a_{11}x + a_{12}y + a_1) , \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2(a_{21}x + a_{22}y + a_2)$$

فإن مركز التناظر يمكن إيجاده بحل المعادلتين :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \quad (5-2)$$

مثال (6) : بين أيًا من المنحنيات الواردة في المثال (5). ذات مركز وأي منها ليس بذوي مركز .

الحل : من أجل (آ) نجد :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 6y - 12 = 0 \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 6x + 16y - 26 = 0$$

ومنه : $y = 2$ و $x = -1$ فهو ذو مركز ومركزه $(-1, 2)$.

من أجل (د) :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x + 2y = 0 , \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2x + 2y = 0$$

وللمعادلتين لا نهاية من الحلول ولذا توجد لا نهاية من مراكز التناظر ومعادلة مستقيم التناظر $x + y = 0$ وهو نفسه يمثل معادلة المنحني .

من أجل (ج) :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x - 5y + 1 = 0 , \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -5x + 8y + 2 = 0$$

ولهما حل وحيد $x = 2, y = 1$ يمثل مركز التناظر.

من أجل (ب) :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x + 2y - 8 = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2x + 2y = 0$$

وهي جملة لا حل لها ولا يوجد مركز تناظر.

من أجل (هـ) :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x - 2y + 2 = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -2x + 2y - 2 = 0$$

وللجملة لا نهاية من الحلول لأنهما معادلة واحدة وتوجد لا نهاية من مراكز

التناظر ومعادلة مستقيم التناظر $x - y + 1 = 0$.

2-2 أوضاع المستقيمات بالنسبة لمنحنيات الدرجة الثانية :

ليكن المستقيم المار بالنقطة (x_0, y_0) والموازي للمتحه $\{l, m\}$ فمعادلته

الوسيطية :

$$x = x_0 + lt, y = y_0 + mt \quad (6-2)$$

وبحل المعادلتين الوسيطيتين مع معادلة منحنيات الدرجة الثانية (2-1) نجد :

$$\begin{aligned} & (a_{11}l^2 + 2a_{12}lm + a_{22}m^2)t^2 + 2[l(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1) + \\ & + m(a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_2)]t + a_{11}x_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + \\ & + a_{22}y_0^2 + 2a_1x_0 + 2a_2y_0 + a = 0 \end{aligned} \quad (7-2)$$

وهي معادلة من الدرجة الثانية بالنسبة للوسيط t .

$$\begin{aligned} \Delta' = & [l(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1) + m(a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_2)]^2 - (a_{11}l^2 + \\ & + 2a_{12}lm + a_{22}m^2)(a_{11}x_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + a_{22}y_0^2 + 2a_1x_0 + 2a_2y_0 + a) \end{aligned}$$

نميز الحالات الثلاث التالية :

(أ) $\Delta' > 0$ نجد أن المستقيم يقطع المنحنى في نقطتين.

(ب) $\Delta' = 0$ نجد أن المستقيم ممس المنحنى.

(ج) $\Delta' < 0$ فلا يوجد تقاطع بين المستقيم والمنحنى.

طبعاً عندما $\Delta' > 0$ يوجد جذران t_1, t_2 ونقطتا التقاطع :

$$x = x_0 + t t_1, y = y_0 + m t_1 \quad \text{و} \quad x = x_0 + t t_2, y = y_0 + m t_2$$

وعندما $\Delta' = 0$ فالجذر مضاعف $t_1 = t_2$.

نفرض أن أمثال t^2 معدومة أي :

$$a_{11} t^2 + 2 a_{12} t m + a_{22} m^2 = 0 \quad (8-2)$$

(آ) إذا لم تنعدم أمثال t فتوجد حتماً نقطة تقاطع وحيدة هي نقطة تماس.

(ب) إذا انعدمت أمثال t عندها لا يبقى في المعادلة سوى الحد الحر وعندها لا يمكن للمستقيم أن يقطع المنحنى عندما لا ينعدم الحد الحر.

أما عندما ينعدم الحد الحر إضافة لأمثال t^2 وأمثال t فإن المستقيم في هذه الحالة يشكل ما يسمى بالمنحنى المقارب لمنحنى الدرجة الثانية وأمثال توجيه هذا المنحنى المقارب هو المتجه $\{t, m\}$.

وبالنسبة لمنحنيات الدرجة الثانية فإنها تقسم إلى ثلاثة مجموعات هي :

(آ) المنحنيات الناقصية وتضم القطوع الناقصية الحقيقية والتخيلية والمستقيمان التخيليان المتقاطعان وليس لهذه المجموعة مناحٍ مقاربة .

(ب) المنحنيات الزائدة وتضم القطوع الزائدة والمستقيمين المتقاطعين ويوجد لهذه المنحنيات منحنيان مقاربان.

(ج) المنحنيات المكافئة وتضم القطع المكافئ والمستقيمات المتوازية الحقيقية والتخيلية والمنطبقة ولها منحنى مقارب وحيد.

ولقد بينا أن الشرط $I_2 > 0$ يجعل المعادلة (2-1) تمثل المجموعة الناقصة و $I_2 < 0$ تمثل المجموعة الزائدية و $I_2 = 0$ تمثل القطع المكافئ والمستقيمات المتوازية. وإذا عدنا للشرط (8-2) حيث $l^2 + m^2 \neq 0$ عندهما يمكن المناقشة من خلال إحدى النسبتين $k = m/l$ أو $k' = l/m$ حيث نفرض $a_{11} \neq 0$ أو $a_{22} \neq 0$ لنجد أن الشرط (8-2) عند التقسيم على l أو m يعطى بإحدى المعادلتين :

$$a_{22} k^2 + 2 a_{12} k + a_{11} = 0 \text{ أو } a_{11} k'^2 + 2 a_{12} k' + a_{22} = 0 \quad (9-2)$$

ووجود جذرين حقيقيين أو عقديين أو جذر مضاعف يؤول للشرط:

$$a_{11} a_{22} - a_{12}^2 = I_2 > 0$$

أو $I_2 < 0$ أو $I_2 = 0$ وعندما $I_2 > 0$ نجد المجموعة الناقصة أما عندما $I_2 < 0$ فنجد المجموعة الزائدية ومن أجل $I_2 = 0$ نجد المجموعة المكافئة. وفي هذه الحالة نعين k أو k' من العلاقة :

$$k = \frac{-a_{12}}{a_{21}} = \frac{-a_{11}}{a_{12}}$$

وعندما $a_{12} = a_{22} = 0$ فإن المنحنى المقارب هو منحنى oy والمعادلة التي تعرف المناحي المقاربة هي $a_{11} l^2 = 0$ أي $l = 0$ والأمر نفسه عندما $a_{12} = a_{11} = 0$ حيث المنحنى المقارب ox وبالمعادلة التي تعرف المناحي المقاربة هي $a_{22} m^2 = 0$ أي $m = 0$. ومن أجل $a_{11} = a_{22} = 0$ نجد المعادلة:

$$2 a_{12} xy + 2 a_1 x + 2 a_2 y + a = 0$$

ومعادلة مناحيها المقاربة $2 a_{12} l m = 0$ وحيث $I_2 = -a_{12}^2 < 0$ فإن المنحنى من المجموعة الزائدية وعندما $l = 0$ أو $m = 0$ نجد منحنيين مقاربين يوازنان المحورين. طبعاً المعادلة :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

المثلة لقطع زائد والمعادلة :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

المثلة لمستقيمين متقاطعين تحددان المنحنيين المقاربين من المعادلة :

$$\frac{\ell^2}{a^2} - \frac{m^2}{b^2} = 0$$

أي :

$$\left(\frac{\ell}{a} - \frac{m}{b} \right) \left(\frac{\ell}{a} + \frac{m}{b} \right) = 0$$

ومنهما نجد :

$$K = \frac{b}{a} \quad \text{أو} \quad K = -\frac{b}{a}$$

أما معادلة المنحني المقارب للقطع المكافئ $x^2 = 2py$ فلها الشكل $m^2 = 0$ أي $m = 0$ وللقطع المكافئ $y^2 = 2px$ المنحني المقارب $\ell = 0$ أي للأول منحني يوازي المحور oy والثاني يوازي ox . وعندما نعبر معادلة منحنيات الدرجة الثانية مستقيمات متوازية فالمنحني المقارب هو منحني هذه المستقيمات .

مثال (7) : اكتب للمنحنيات التالية معادلة المقاربات :

$$6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0 \quad (\text{أ})$$

$$x^2 + xy - 2y^2 + 2x + 4y = 0 \quad (\text{ب})$$

الحل : من أجل (أ) لنلاحظ أن :

$$I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -9 < 0$$

و :

$$K_3 = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -6 \\ 3 & 8 & -13 \\ -6 & -13 & 11 \end{vmatrix} \neq 0$$

والمعادلة تمثل قطعاً زائداً.

إذا غيرنا العدد 11 بـ C وجعلنا المعادلة (آ) تمثل معادلة مستقيمين فإنهما المقارين ولهذا بوضع C عوضاً عن 11 نجد :

$$K_3 = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -6 \\ 3 & 8 & -13 \\ -6 & -13 & C \end{vmatrix} = 0$$

ومنه $C = 20$ والمعادلة $6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 20 = 0$ تمثل معادلة

المقارين المطلوبة وهي تكتب بالشكل $(3x + 4y - 5)(y - 2) = 0$.
من أجل (ب) لدينا :

$$I_2 = 1 \times 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{3}{4} < 0 \quad K_3 = 3 \neq 0 \quad \text{فهو قطع زائد.}$$

وبوضع C كثابت نجد :

$$K_3 = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -2 & 2 \\ 1 & 2 & C \end{vmatrix} = -\frac{9}{4}C = 0 \quad (\text{ب})$$

ومنه $C = 0$ ونجد المعادلة :

$$(x - y + 2)(x + 2y) = 0 \quad \text{أي} \quad x^2 + xy - 2y^2 + 2x + 4y = 0$$

$$\text{ومعادلة المقارين} \quad x - y + 2 = 0 \quad x + 2y = 0$$

ملاحظة : من الممكن تعيين المركز من المعادلتين :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x + y + 2 = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = x - 4y + 4 = 0$$

لنجد :

$$\left(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3} \right)$$

ثم تعيين ميل المقارب من إحدى المعادلتين (2-9) :

$$a_{11} + 2a_{12}k + a_{22}k^2 = 0$$

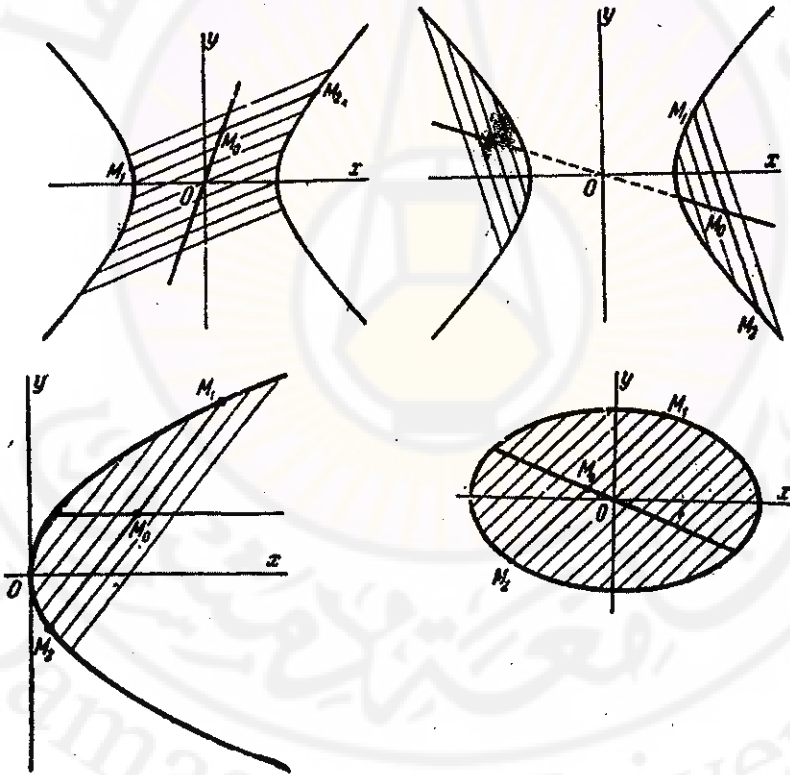
لنجد $1 + k - 2k^2 = 0$ لنجد إما $k = 1$ أو $k = -\frac{1}{2}$ ومعادلة المقارين نكتبهما

بفرضهما يمران من المركز وعلم ميلهما لنجدهما ما سبق.

3 - 2 الأقطار المرافقة لمنحني الدرجة الثانية :

نسبي المستقيم الواصل بين نقطتين تقعان على منحنى الدرجة الثانية والموازي

لمتجه لا يشكل منحنى مقارب بوتر المنحنى.



وحول منتصفات هذه الأوتار نورد المبرهنة التالية :

مبرهنة (3) : المحل الهندسي لمنتصفات الأوتار التي توازي المتجه $\{l, m\}$ وغير الموازية لمنحى مقارب لمنحى الدرجة الثانية هو مستقيم ندعوه بالقطر المرافق، لمنحى المتجه المعطى والمحل الهندسي لمنتصفات الأوتار الموازية لهذا القطر هو مستقيم وندعوه هذين المستقيمين بالقطرين المترافقين ومعادلة القطر المرافق:

$$l(a_{11}x + a_{12}y + a_1) + m(a_{12}x + a_{22}y + a_2) = 0 \quad (10-2)$$

الإثبات : بفرض أن المستقيم الموازي للمتجه $\{l, m\}$ وغير الموازي لمنحى مقارب لمنحى الدرجة الثانية يقطعه في النقطتين $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ وبفرض النقطة $M_0(x_0, y_0)$ نقطة تقع في منتصف القطعة المستقيمة M_1M_2 ومعادلة المستقيم الوسيطة:

$$x = x_0 + lt, \quad y = y_0 + mt \quad (11-2)$$

وبالتبديل في معادلة منحنيات الدرجة الثانية (1-2) نجد المعادلة :

$$\begin{aligned} &(a_{11}l^2 + 2a_{12}lm + a_{22}m^2)t^2 + 2[l(a_{11}x_0 + a_{21}y_0 + a_1) + \\ &+ m(a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_2)]t + a_{11}x_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + \\ &+ a_{22}y_0^2 + 2a_1x_0 + 2a_2y_0 + a = 0 \end{aligned} \quad (12-2)$$

وجذريها t_1, t_2 يوافقان النقطتين $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ وبالتالي فإن t الموافقة للمتصف هي بحيث :

$$t = \frac{t_1 + t_2}{2}$$

ولهذا فإن $t_1 + t_2 = 0$ وهو الشرط لتقع النقطة M_0 في منتصف النقطتين

M_1, M_2 وهذا يمثل مجموع الجذرين للمعادلة (12-2) لهذا فإن الشرط:

$$l(a_{11}x_0 + a_{21}y_0 + a_1) + m(a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_2) = 0 \quad (13-2)$$

يمثل الشرط لتقع M_0 في منتصف الوتر M_1, M_2 حيث M_1, M_2 نقطتان من منحنى الدرجة الثانية وسوف نجد أن جميع النقاط $M_0(x_0, y_0)$ التي تقع في منتصفات الأوتار M_1, M_2 الموازية للمتجه $\{l, m\}$.

وبفرض $M(x, y)$ نقطة متحركة تمثل المنتصفات للأوتار الموازية للمتجه $\{l, m\}$ فإن معادلة المستقيم المار بهذه النقط هي :

$$l(a_{11}x + a_{12}y + a_1) + m(a_{21}x + a_{22}y + a_2) = 0 \quad (14-2)$$

هذا من جهة ومن جهة أخرى فإن كل مستقيم يوازي $\{l, m\}$ يقطع المنحنى في نقطتين حقيقتين مختلفتين أو متطابقتين أو تخيليتين. لهذا فإن المحل الهندسي لمنتصفات الأوتار الموازية للمتجه $\{l, m\}$ هو المستقيم الذي معادلته (14-2) حيث لا تنعدم أمثال x و y معاً في هذه المعادلة لأنه لو تحقق ذلك لكان:

$$la_{11} + ma_{21} = 0, \quad la_{12} + ma_{22} = 0$$

ولتحققت العلاقة :

$$l(a_{11}l + ma_{21}) + m(la_{21} + ma_{22}) = a_{11}^2l^2 + 2a_{12}lm + a_{22}m^2 = 0$$

ولكان المتجه $\{l, m\}$ يوازي منحنى مقارباً وهو الأمر الذي نفيناه منذ البداية. من هذه المعادلة نجد أن مركبتى المتجه المرافق للمتجه $\{l, m\}$ وهما $\{l', m'\}$ تعطيان بالعلاقين :

$$m' = +(a_{11}l + a_{12}m), \quad l' = -(a_{12}l + a_{22}m) \quad (15-2)$$

وبضرب اليسرى بـ m' واليمنى بـ l' نجد :

$$-l'm' + l'm' = a_{11}ll' + a_{12}(l'm + lm') + a_{22}mm' = 0 \quad (16-2)$$

الذي يمثل الشرط الذي يربط بين مركبتى المتجه $\{l, m\}$ ومركبتى المتجه المرافق له $\{l', m'\}$ وهذا الشرط بدوره يمثل الشرط الكافي لأن تحققه يعني أن :

$$\frac{\ell'}{m'} = - \frac{a_{21} \ell + a_{22} m}{a_{11} \ell + a_{12} m}$$

لنذكر أن العلاقة (2-16) تتحقق أيضاً حتى من أجل المنحى المقارب للمنحني
الدرجة الثانية لأن $\ell = \lambda \ell'$, $m = \lambda m'$ يعني أن :

$$a_{11} \ell^2 + 2 a_{12} \ell m + a_{22} m^2 = 0$$

وهذا معناه أن المنحى المقارب مرافق لنفسه. حول الأقطار المرافقة
والمنحنيات المركزية نورد المبرهنة التالية :

مبرهنة (4) : إذا كانت منحنيات الدرجة الثانية ذات مركز وحيد فإن :

1 - المستقيم الواصل بين منتصفات الأوتار المتوازية والتي لا توازي منحى
مقارباً يشكل قطراً لهذه المنحنيات. والمستقيم المار بمنتصفات الأوتار الموازية لهذا
القطر يشكل القطر الآخر وهذان القطران مترافقان.

2 - أي مستقيم يمر بالمركز ولا يوازي منحى مقارباً هو قطر لهذا المنحني.

الإثبات: لنبدأ بإثبات أولاً ولتكن معادلة منحنيات الدرجة الثانية (2-1)
والمنحني مركزي، أي أن $I_2 \neq 0$ وليكن المتجه $\{\ell, m\}$ حيث $\ell^2 + m^2 \neq 0$ ولا يوازي
المنحى المقارب للمنحني ولنأدرس معادلة القطر المرافق (2-10) للأوتار الموازية لهذا
المتجه ولنفرض أن هذا القطر يوازي المتجه $\{\ell, m\}$ عندها وجدنا أن $\{\ell, m\}$ تعطى
بالعلاقين (2-15) وهذان المتجهان غير متوازيين لأن $\{\ell, m\}$ لا يوازي منحى مقارباً
وبفرض $I_2 \neq 0$ فإن :

$$a_{11} \ell' + a_{12} m', a_{21} \ell' + a_{22} m'$$

لا يتعلمان معاً. لهذا يمكن النظر إلى $\{\ell, m\}$ كمجهولين في المعادلة:

$$\ell (a_{11} \ell' + a_{12} m') + (a_{21} \ell' + a_{22} m') = 0$$

وليس لها حلان مستقلان وأحد حليها $\{l, m\}$ والآخر يرتبط فيه بالعلاقة (16-2) التي يبدو واضحاً أنها متناظرة بالنسبة لـ $\{l, m\}$ و $\{l', m'\}$ وحيث إن المنحني مركزي فإن القطر المرافق للأوتار الموازية للمتجه $\{l, m\}$ يوازي المتجه $\{l', m'\}$ وبالعكس.

ندعو القطرين الذين يقسم كل منهما الأوتار الموازية للآخر بالقطرين المترافقين والشرط :

$$a_{11}ll' + a_{12}(l'm + lm') + a_{22}mm' = 0 \quad (17-2)$$

هو شرط لازم وكاف ليكون قطر منحني الدرجة الثانية المركزي مترافقين. ومن أجل $ll' \neq 0$ فإن الشرط يكتب بالشكل :

$$a_{11} + a_{12}(k + k') + a_{22}kk' = 0 \quad (18-2)$$

حيث :

$$k = \frac{m}{l}, \quad k' = \frac{m'}{l'}$$

بفرض k, k' ميلي القطرين المترافقين.

لإثبات ثانياً فلقد وجد أن المنحني مركزي عندما $I_2 \neq 0$ وعندها يعين المركز

من العلاقات :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

و :

$$a_{11}x + a_{12}y + a_1 = 0, \quad a_{21}x + a_{22}y + a_2 = 0$$

ومعادلة أي مستقيم يمر بالمركز يعطى كمستقيم حزمة.

$$(l^2 + m^2 \neq 0) l (a_{11}x + a_{12}y + a_1) + m (a_{12}x + a_{22}y + a_2) = 0 \quad (19-2)$$

وهذا المستقيم هو قطر مرافق للأوتار الموازية للمتجه (l, m) وهذا يعني أنه قطر لمنحني الدرجة الثانية (2-1) وهو ما أردناه .

عند تمثيل المعادلة العامة لمنحني قطع مكافئ فإننا نورد البرهنة التالية :

مبرهنة (5) : إذا مثلت المعادلة (1-2) قطعاً مكافئاً فإن القطر المرافق لأوتار هذا المنحني غير الموازية لمنحني مقارب له منحني مقارب وقطر القطع هو كل مستقيم يوازي منحني مقارباً.

الإثبات : ليكن المتجه (l', m') موازياً للقطر المرافق للأوتار الموازية للمتجه (l, m) الذي لا يوازي منحني مقارباً عندها بفرض :

$$l' = -(a_{21}l + a_{22}m), \quad m' = a_{11}l + a_{12}m$$

إذن :

$$I_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$$

ومنه :

$$a_{21}l' + a_{22}m' = I_2l = 0$$

و :

$$a_{11}l' + a_{12}m' = -I_2m = 0$$

إذن :

$$l' (a_{11}l' + a_{12}m') + m' (a_{21}l' + a_{22}m') = \\ = a_{11}l'^2 + 2a_{12}l'm' + a_{22}m'^2 = 0$$

والمتجهان :

$$\{-a_{22}, a_{21}\}, \{-a_{12}, a_{11}\}$$

غير المعلومين معاً في آن واحد يمثلان المنحني المقارب للمنحني المكافئ.

هذا وإذا كان المنحني من النمط المكافئ فإن كل أقطاره لها اتجاه المنحني المقارب وبالعكس فإن أي مستقيم له منحني مقارب في معادلة منحنيات الدرجة

الثانية (1-2) ذات النمط المكافئ هو قطر له. في الواقع لناخذ نقطة ما $M_0 (x_0, y_0)$ على المستقيم المذكور وليكن $\{l, m\}$ متجه غير معدوم وليس من المنحنى المقارب ومركبته تحققان العلاقة :

$$l (a_{11} x_0 + a_{12} y_0 + a_1) + m (a_{21} x_0 + a_{22} y_0 + a_2) = 0$$

ومن أجل هذا يكفي مثلاً اختيار :

$$l = - (a_{21} x_0 + a_{22} y_0 + a_2), m = a_{11} x_0 + a_{12} y_0 + a_1$$

عندها يكون $\{l, m\}$ غير معدوم وتكون الجملة :

$$a_{11} x + a_{12} y + a_1 = 0, \quad a_{21} x + a_{22} y + a_2 = 0$$

غير قابلة للحل والمتجه $\{l, m\}$ ليس بمنحنى مقارب.

في الواقع بفرض $I_2 = 0$ لأن المنحنى قطع مكافئ فإن :

$$a_{11} l + a_{12} m = a_{12} a_1 - a_{11} a_2 = 0, \quad a_{21} l + a_{22} m = a_{22} a_1 - a_{12} a_2 = 0$$

ولكان للمعادلتين حل. إذن باختيار $\{l, m\}$ بشكل مناسب فإن معادلة المستقيم المطلوب تكون :

$$l (a_{11} x + a_{12} y + a_1) + m (a_{21} x + a_{22} y + a_2) = 0 \quad (20-2)$$

عندما يكون للمنحنى مستقيم تناظر فإن كل نقطة من المنحنى تنتمي لقطر من أقطار المنحنى وبالتالي فمستقيم التناظر وحيد. وعندما تمثل معادلة منحنيات الدرجة الثانية مستقيمين متوازيين منطبقين أو غير منطبقين فإن مستقيم التناظر ينطبق عليهما. لنذكر أخيراً أقطار منحنيات الدرجة الثانية عندما تكون هذه المنحنيات معطاة بمعادلات نظامية .

ففي المجموعة الناقصية حيث المعادلة 0 أو 1 - أو $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ نجد أن

معادلة القطر المرافق للأوتار الموازية للمتجه غير الصفري $\{l, m\}$ لها الشكل :

$$\frac{\ell x}{a^2} + \frac{m y}{b^2} = 0 \quad (21-2)$$

ومعادلة القطر المرافق له :

$$m x - \ell y = 0 \quad (22-2)$$

وفي المجموعة الزائدية :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1 \quad \text{أو} \quad 0$$

فمعادلة القطر المرافق للأوتار الموازية للمتجه غير الصفري $\{\ell, m\}$ الذي لا

يوازي منحنى مقارباً لها الشكل :

$$\frac{\ell x}{a^2} - \frac{m y}{b^2} = 0 \quad (23-2)$$

ومعادلة القطر المرافق له :

$$m x - \ell y = 0 \quad (24-2)$$

أما من أجل القطع المكافئ الذي معادله النظامية $y^2 = 2 p x$ فإن معادلة القطر

المرافق للأوتار الموازية للمتجه $\{\ell, m\}$ غير الصفري لها الشكل :

$$\ell p - m y = 0$$

أو :

$$y = \frac{\ell}{m} p = \frac{p}{k}$$

حيث :

$$k = \frac{m}{\ell}$$

أمثال ميل الوتر وهي تمثل معادلة مستقيمات توازي محوره التناظري .

مثال (8) : أوجد المناحي المقاربة للقطع الزائد الوارد في المثال (7) .

الحل : من المعادلة :

$$a_{11}l^2 + 2a_{12}lm + a_{22}m^2 = 0$$

نجد من أجل (آ) أن $6l^2 + 8lm + m^2 = 0$ وباختيار $l = 1$ نجد : $m = 0$ أو :

$m = -\frac{3}{4}$ والمتجهان $(1, 0)$ أو $\{1, -\frac{3}{4}\}$ يوازنان الناحي المقاربة .

من أجل (ب) نجد $l^2 + lm - 2m^2 = 0$ وباختيار $l = 1$ نجد المعادلة :

$$2m^2 - m - 1 = 0$$

ومنه :

$$m = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = 1 \quad \text{و} \quad m = -\frac{1}{2}$$

والمتجهان : $(1, 1)$ و $\{1, -\frac{1}{2}\}$ يوازنان الناحي المقاربة .

2 - 4 المماسات لمنحنيات الدرجة الثانية :

نسمي النقطة $M_0(x_0, y_0)$ الواقعة على منحنى الدرجة الثانية (2-7) نقطة

شاذة (غير عادية) إذا كان المتجه $\{a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1, a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_2\}$ صفرياً

ونسُميها نقطة عادية إذا لم يكن المتجه السابق صفرياً. وحيث إن حل الجملة :

$$a_{11}x + a_{12}y + a_1 = 0 \quad a_{21}x + a_{22}y + a_2 = 0 \quad (25-2)$$

يعطي إحداثيات مراكز المنحني لهذا فإن M_0 هي نقطة شاذة فقط فقط عندما

تكون مركزاً لمنحني الدرجة الثانية وبين المنحنيات ذات النمط :

1 - الناقصي فإن المنحني الممثل لمستقيمين متقاطعين تخيلين له نقطة شاذة هي

نقطة التقاطع .

2 - الزائدي فإن المنحني الممثل لمستقيمين متقاطعين له نقطة شاذة هي نقطة التقاطع .

3 - المستقيمت المتوازية فإن المنحني الممثل لمستقيمين منطبقين كل نقاطه هي

نقط شاذة .

على هذا الأساس فإن المماس لمنحني الدرجة الثانية في نقطة عادية منه هو المستقيم الذي لا يقطع هذا المنحني إلا في هذه النقطة .

حول معادلة المماس نورد المبرهنة التالية :

مبرهنة (6) : معادلة المماس لمنحني الدرجة الثانية (2-1) في نقطة عادية منه $M(x_0, y_0)$ تعطى بالشكل .

$$(a_{11} x_0 + a_{12} y_0 + a_1) x + (a_{21} x_0 + a_{22} y_0 + a_2) y + a_1 x_0 + a_2 y_0 + a = 0 \quad (26-2)$$

الإثبات : لنكتب المعادلة الوسيطة للمستقيم المار بالنقطة $M_0(x_0, y_0)$ والموازي للمتجه (l, m) نجدها :

$$x = x_0 + lt \quad y = y_0 + mt$$

ولنقاطعها مع منحني الدرجة الثانية (2, 1) نجد :

$$a_{11} (x_0 + lt)^2 + 2 a_{12} (x_0 + lt) (y_0 + mt) + a_{22} (y_0 + mt)^2 + 2 a_1 (x_0 + lt) + 2 a_2 (y_0 + mt) + a = 0$$

أي :

$$(a_{11} l^2 + 2 a_{12} l m + 2 a_{22} m^2) t^2 + 2 [l(a_{11} x_0 + a_{12} y_0 + a_1) + m(a_{21} x_0 + a_{22} y_0 + a_2)] t + a_{11} x_0^2 + 2 a_{12} x_0 y_0 + a_{22} y_0^2 + 2 a_1 x_0 + 2 a_2 y_0 + a = 0$$

وحيث $M_0(x_0, y_0)$ تقع على المنحني إذن :

$$a_{11} x_0^2 + 2 a_{12} x_0 y_0 + 2 a_{22} y_0^2 + 2 a_1 x_0 + 2 a_2 y_0 + a = 0 \quad (27-2)$$

وتأخذ معادلة الدرجة الثانية بالنسبة للمتحول t الشكل :

$$(a_{11} l^2 + 2 a_{12} l m + 2 a_{22} m^2) t^2 + 2 [l(a_{11} x_0 + a_{12} y_0 + a_1) + m(a_{21} x_0 + a_{22} y_0 + a_2)] t = 0$$

وأحد جذريها $l=0$ ويعطى $x=x_0, y=y_0$ وحتى يكون المستقيم مماساً يجب تحقق أن مميز المعادلة من الدرجة الثانية مساو للصفر. أي أن :

$$l(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1) + m(a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_2) = 0$$

ولهذا فإن الأمثال التي تعين المتجه الموازي للمماس هي :

$$l = -(a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_2) \quad \text{و} \quad m = a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1$$

وهو يمثل متجهاً غير معدوم لأن $M_0(x_0, y_0)$ نقطة عادية ليست شاذة وعندما يكون المتجه السابق غير مواز لمنحى مقارب فإن :

$$a_{11}l^2 + 2a_{12}lm + a_{22}m^2 \neq 0$$

ومعادلة المماس تعطى بالشكل :

$$k = m/l \quad \text{حيث} \quad y - y_0 = k(x - x_0)$$

إذن :

$$(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1)(x - x_0) + (a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_2)(y - y_0) = 0$$

أي :

$$(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1)x + (a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_2)y - [a_{11}x_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + a_{11}x_0 + a_{22}y_0^2 + a_2y_0] = 0$$

وإذا أخذنا (27-2) بالحسبان نجد أخيراً أن معادلة المماس في نقطة منه هي :

$$(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1)x + (a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_2)y + a_1x_0 + a_2y_0 + a = 0 \quad (28-2)$$

مثال (9) : اكتب معادلة المماس للمنحني :

$$(أ) \quad 2x^2 + 4xy + 5y^2 - 6x - 8y + 3 = 0 \quad \text{في النقطة } (1, 1)$$

$$(ب) \quad x^2 - 2x + 6y + 9 = 0 \quad \text{في النقطة } (1, 1)$$

الحل : (أ) النقطة (1,1) تقع على المنحني ومعادلة المماس من (2-28).

$$(2+2-3)x + (2+5-4)y - 3 - 4 + 3 = 0$$

$$\text{أي : } x + 3y - 4 = 0$$

ومن أجل (ب) : $(0-2-1)x + (-2+1+3)y + (-1+3+9) = 0$

$$\text{ومعادلة المماس : } -3x + 2y + 11 = 0$$

3 - معادلة منحنيات الدرجة الثانية بالنسبة للأقطار :

1 - 3 معادلة منحنيات الدرجة الثانية منسوبة لقطريها المترافقان :

نبدأ هنا بدراسة الشروط على المعادلة من الدرجة الثانية :

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a = 0 \quad (1-3)$$

ليكون لأحد المحورين منحى القطر المرافق للأوتار الموازية للآخر فنورد
المبرهنة التالية :

مبرهنة (1) : ليكون لأحد المحورين منحى القطر المرافق للأوتار الموازية
للآخر في معادلة منحنيات الدرجة الثانية (1-3) يلزم ويكفي انعدام أمثال الحد
المستطيلي $a_{12} = 0$ لتأخذ المعادلة الشكل :

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a = 0 \quad (2-3)$$

وإذا كان المنحني مركزياً ومركزه في المبدأ والقطران المترافقان هما المحورين
الإحداثيين فإن (1-3) تأخذ الشكل :

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a = 0 \quad (3-3)$$

$$\text{حيث : } a_{11} a_{22} \neq 0$$

الإثبات : بفرض أن المحور ox غير مواز المنحى المقارب عندها مركبات المتجه الموازي للقطر المرافق الموازية للأوتار الموازية ox هي :

$$\{l, m\} = \{a_{12}, a_{11}\} = \{0, a_{11}\}$$

وهو يوازي oy إذن عندما فقط عندما $l = 0$. وإذا كان المحوران الإحداثيان لمنحى الدرجة الثانية (1-3) مترافقين فإن $a_{12} = 0$ بفرض أن مركز المنحى هو مبدأ الإحداثيات وتأخذ المعادلة (1-3) الشكل (3-3) وبالعكس إذا كان منحى الدرجة الثانية معطى بالشكل (3-3) فإن ذلك يعنى أن مبدأ الإحداثيات هو مركز تناظر للمنحى وبالتالي $I_2 = a_{11} a_{22} \neq 0$ وبفرض أمثال الجند المستطيلي معدومة فالمحوران مترافقان .

2 - 3 الاتجاهات والأقطار الأساسية لمنحى الدرجة الثانية :

نبدأ هنا بتعريف المناحي الأساسية. فالمنحى غير المقارب لمنحنيات الدرجة الثانية يسمى أساسياً أو رئيسياً إذا تعامد مع القطر المرافق للأوتار الموازية لهذا المنحى وعندها يسمى هذا القطر بالقطر الأساسي وهو يشكل محوراً تناظرياً للمنحى من الدرجة الثانية .

نورد فيما يلي المبرهنة التي تبين الشروط لتعريف المناحي الأساسية :

مبرهنة (2) : مركبتا المتجه غير الصفري $\{l, m\}$ التي تعرف المنحى الأساسي لمنحنيات الدرجة الثانية (1-3) تعرفان من المعادلتين:

$$a_{11}l + a_{12}m = \lambda l \quad a_{21}l + a_{22}m = \lambda m \quad (4-3)$$

حيث λ تعرف من المعادلة المميزة :

$$\lambda^2 - I_1\lambda + I_2 = 0$$

الإثبات : لنفرض أن $\{l, m\}$ متجه غير صفري لا يوازي منحنى مقارباً لمنحنى الدرجة الثانية (3-1) عندها معادلة القطر المرافق لأوتار المنحنى (3-1) الموازية للمتجه السابق لها الشكل :

$$(a_{11}x + a_{12}y + a_1)l + (a_{21}x + a_{22}y + a_2)m = (a_{11}l + a_{12}m)x \quad (5-3)$$

$$+ (a_{21}l + a_{22}m)y + (a_1l + a_2m) = 0$$

وبفرض الجملة oxy متعامدة فشرط التعامد بين القطر المرافق والمتجه الموازي للأوتار هو بحيث يتوازي المتجهان :

$$\{a_{11}l + a_{12}m, a_{21}l + a_{22}m\} // \{l, m\}$$

أي وجود $\lambda \neq 0$ بحيث تتحقق المعادلتان (3-4).

طبعاً عندما $\lambda = 0$ فإن :

$$a_{21}l + a_{22}m = 0, a_{11}l + a_{12}m = 0$$

أي :

$$(a_{11}l + a_{12}m)l + (a_{21}l + a_{22}m)m = 0$$

وبالتالي :

$$a_{11}l^2 + 2a_{12}lm + a_{22}m^2 = 0$$

وهذا معناه أن المتجه $\{l, m\}$ متجه يوازي المنحنى المقارب وهو أمر مناقض لما فرضناه في البداية.

يمكن كتابة (3-4) بالشكل :

$$(a_{11} - \lambda)l + a_{12}m = 0, a_{21}l + (a_{22} - \lambda)m = 0$$

وشرط وجود حل غير الحل الصفري لجملة المعادلتين هو :

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$$

وهي معادلة من الدرجة الثانية. بالنسبة للوسيط λ . ومميزها :

$$\Delta = (a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}^2) = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2 \geq 0$$

ونميز لهذا المميز الحالات الثلاث التالية :

(1) $\lambda_1 \neq \lambda_2, \lambda_1 \lambda_2 \neq 0$ ونجد قطعاً ناقصاً حقيقياً أو تخليصاً أو مستقيمين متقاطعين تخليصين أو قطعاً زائداً أو مستقيمين متقاطعين. أي أحد منحنيات النمط الأول الخمسة. وفي هذه الحالة من أجل $\lambda = \lambda_1$ نجد :

$$a_{21}l + a_{22}m = \lambda m \quad a_{11}l + a_{12}m = \lambda l$$

ومن الشرط :

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

نجد حلاً غير الحل الصفري هو l_1, m_1 الذي بتعويضه نجد :

$$a_{11}l_1 + a_{12}m_1 = \lambda_1 l_1, \quad a_{21}l_1 + a_{22}m_1 = \lambda_1 m_1$$

أي أن :

$$(a_{11}l_1 + a_{12}m_1)l_1 + (a_{21}l_1 + a_{22}m_1)m_1 = \lambda_1(l_1^2 + m_1^2) \neq 0$$

أو :

$$a_{11}l_1^2 + 2a_{12}l_1m_1 + a_{22}m_1^2 \neq 0$$

والحل لا يوازي المنحى المقارب لمنحى الدرجة الثانية (1-3) والمنحى (l_1, m_1)

يحدد منحى أساسياً للمنحنى (1-3).

بشكل مماثل من أجل $\lambda = \lambda_2$ نجد منحى غير صفري $\{l_2, m_2\}$ ويمثل المنحى

$\{l_1, m_1\}$ و $\{l_2, m_2\}$ منحيين رئيسيين ولنبين أنهما متعامدان في الواقع لدينا :

$$(a_{11}l_1 + a_{12}m_1)l_2 + (a_{21}l_1 + a_{22}m_1)m_2 = \lambda_1(l_1l_2 + m_1m_2)$$

$$(a_{11}l_2 + a_{12}m_2)l_1 + (a_{21}l_2 + a_{22}m_2)m_1 = \lambda_2(l_1l_2 + m_1m_2)$$

وبالطرح نجد :

$$\lambda_1 (l_1 l_2 + m_1 m_2) = \lambda_2 (l_1 l_2 + m_1 m_2)$$

أي أن :

$$(\lambda_1 - \lambda_2) (l_1 l_2 + m_1 m_2) = 0$$

وحيث إن $\lambda_1 \neq \lambda_2$ إذن :

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 = 0$$

وهذه العلاقة تمثل التعامد بين المتجهين المذكورين وهو ما ادعينا.

(2) عندما $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$ ونحصل عندها على دائرة حقيقية أو تخيلية أو مستقيمين تخيليين (نقطة) ولا يوجد في هذه الحالة منحنى مقارب ومعادلة القطر المرافق للأوتار الموازية للمتجه غير الصفري $\{l, m\}$ تأخذ الشكل :

$$a_{11}lx + a_{22}my + a_1l + a_2 = 0$$

وتمثل معادلة مستقيم متعامد مع المتجه $\{l, m\}$ والقطر الأساسي هو أي مستقيم يمر بمركز المنحنى.

(3) عندما $\lambda_1 = 0$ و $\lambda_2 \neq 0$ ونحصل على قطع مكافئ أو مستقيمين متوازيين حقيقيين أو تخيليين أو مستقيمين منطقيين ونجد عندها أن $I_2 = 0$ والجمل (3-4) من أجل $\lambda = \lambda_2 \neq 0$ لها الحل غير الصفري وليكن $\{l_1, m_1\}$ وهو لا يمثل منحنى مقارباً للمنحنى (1-3) وللمنحنى منحنى أساسي.

أما من أجل $\lambda = \lambda_1 = 0$ والجمل (3-4) يصبح لها الشكل $a_{11}l_1 + a_{12}m_1 = 0$ و $a_{21}l_1 + a_{22}m_1 = 0$ وهاتين المعادلتين عدا الحل الصفري حل غير صفري وليكن $\{l_1, m_1\}$ وهو يمثل منحنى مقارباً للمنحنى (1-3) وهو ينتج عن العلاقتين السابقتين بضرب الأولى بـ l_1 والثانية بـ m_1 لنجد :

$$a_{11} l_1^2 + 2 a_{12} l_1 m_1 + a_{22} m_1^2 = 0$$

والحلان السابقان متعامدان لهذا فإن للمعادلتين :

$$a_{11} l + a_{12} m = 0 \quad , \quad a_{21} l + a_{22} m = 0$$

حل وحيد غير صفري إضافة للحل الصفري وأي حلين مستقلين ولذلك فإن المتجهين :

$$\{-a_{12} , a_{11}\} , \{-a_{22} , a_{21}\}$$

لهما منحنى مقارب سواء أكان المنحنى قطعاً مكافئاً أو مستقيمين متوازيين بأنواعهما واحد المنحنيين المقاربين غير صفري والمنحنى الرئيسي يحدده أحد المتجهين $\{a_{21} , a_{22}\} , \{a_{11} , a_{12}\}$ غير الصفري.

وللمنحنيات ذات النمط المكافئ يوجد قطر رئيسي معادلته :

$$a_{11} (a_{11} x + a_{12} y + a_1) + a_{21} (a_{21} x + a_{22} y + a_2) = 0$$

أو :

$$a_{21} (a_{11} x + a_{12} y + a_1) + a_{22} (a_{21} x + a_{22} y + a_2) = 0$$

ونختار المعادلة التي من أجلها نجد أن العليدين :

$$a_{21} x + a_{22} y + a_2 \quad , \quad a_{11} x + a_{12} y + a_1$$

لا يتعدان معاً في آن واحد .

في حالة القطع المكافئ فإن هذا المستقيم هو محور تناظر حر في حالة المستقيمتين المتوازيتين فإن القطر الرئيسي ينطبق على معادلة المنحنى نفسه.

لنذكر أخيراً أنه عندما $I_2 \neq 0$ فإن توجيه أي من القطرين الرئيسيين هو رئيسي أما عندما $I_2 = 0$ فإن الرئيسي يكون عمودياً على القطر الرئيسي الوحيد.

3 - 3 وضع منحنى الدرجة الثانية بالنسبة لجملة متعامدة :

معادلة منحنيات الدرجة الثانية (3-1) تتعلق بستة وسطاء :

$$a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_1, a_2, a$$

غير مستقلة ولقد وجدنا أن هذه المعادلة يمكن ردها لأحد الأشكال التسعة التي سميناها بالنظامية ومن أجل النمط الأول حيث المجموعة الناقصية والزائدة يجب أن نجد نصف محور و إحداثي المركز والمحور المحرق حيث يقع المحوران ويمر بالمركز والمحور العمودي عليه والمار بالمركز من أجل المجموعة الناقصية وأن نجد : نصف محور والمركز والمحور المحرق والمحور العمودي عليه والمار بالمركز والمستقيمان المقاربان في حالة المجموعة الزائدة.

وعندما تمثل المعادلة (1-3) قطعاً مكافئاً يجب تعيين وسيط القطع والذروة واتجاه أحد المحورين المار بالمحرق والذروة والمحور المتعامد معه والمار بالذروة.

أما إذا مثلت المعادلة (1-3) مستقيمين متوازيين حقيقيين لا بد من إيجاد معادلة كل منهما ونقطة تقاطعهما التي تمثل كمركز وفي حال الانطباق معادلة ذلك المستقيم .

ولقد بينا سابقاً أنه بدوران مناسب وانسحاب مناسب أو بانسحاب مناسب ودوران مناسب أو بدوران وانسحاب ترد المعادلة (1-3) للمعادلة النظامية لأحد الأنماط الرئيسية التالية :

$$a_{11}' X^2 + a_{22}' Y^2 + D = 0 \quad I$$

$$\text{حيث : } a_{11}' \cdot a_{22}' \neq 0$$

$$a_{11}' X^2 + a_2' Y = 0 \quad II$$

$$\text{حيث : } a_{11}' \cdot a_2' \neq 0 \text{ أو } a_{22}' Y^2 + a_1' X = 0 \text{ حيث } a_{22}' \cdot a_1' \neq 0$$

$$a_{11}' X^2 + D = 0 \quad III$$

$$\text{حيث } a_{11}' \neq 0 \text{ أو } a_{22}' Y^2 + D = 0 \text{ حيث } a_{22}' \neq 0$$

وأوجدنا الأمثال a_{11}' , a_{22}' , a_{12}' , a_{21}' لنجد أن الأنماط الثلاثة السابقة لها

الشكل:

$$I_2 = \lambda_1 \lambda_2 \neq 0 \text{ حيث } \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + K_3/I_2 = 0 \quad I$$

$$\lambda_2 Y^2 + 2 \sqrt{\frac{-K_3}{I_1}} X = 0 \text{ أو } \lambda_1 X^2 + 2 \sqrt{\frac{-K_3}{I_1}} Y = 0 \quad II$$

$$I_2 = \lambda_1 \lambda_2 = 0 \text{ و } I_1 = \lambda_1 : \text{ حيث}$$

$$I_1 = \lambda_1 \text{ حيث } \lambda_1 X^2 + K_3/I_1 = 0 \quad III$$

ووجدنا من الدوران أن :

$$a_{11}' = \lambda_1 = a_{11} \cos^2 \theta + 2 a_{12} \cos \theta \sin \theta + a_{22} \sin^2 \theta$$

$$a_{22}' = \lambda_2 = a_{11} \sin^2 \theta - 2 a_{12} \cos \theta \sin \theta + a_{22} \cos^2 \theta$$

$$a_{12}' = a_{12} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + (a_{22} - a_{11}) \sin \theta \cos \theta = 0$$

وبضرب الأولى بـ $\cos \theta$ والثالثة بـ $\sin \theta$ والجمع نجد:

$$\lambda_1 \cos \theta = a_{11} \cos \theta + a_{12} \sin \theta$$

وميل المحور الجديد :

$$\tan \theta = k = \frac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}}$$

ونميز الحالات التالية :

1) إذا كانت المعادلة تمثل قطعاً ناقصاً وبفرض :

$$|\lambda_1| \leq |\lambda_2|$$

فإن معادلته :

$$\frac{X^2}{\left(\sqrt{\frac{-K_3}{\lambda_1 I_2}}\right)^2} + \frac{Y^2}{\left(\sqrt{\frac{-K_3}{\lambda_2 I_2}}\right)^2} = \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$$

حيث :

$$a = \left(\frac{-K_3}{\lambda_1 I_2} \right) , \quad b = \left(\frac{-K_3}{\lambda_2 I_2} \right)$$

و $a \geq b$ و k تمثل ميل المحور الكبير ومركزه :

$$O \left(\frac{a_{12} a_1 - a_{11} a_2}{I_2} , \frac{-(a_{12} a_2 - a_{22} a_1)}{I_2 = \lambda_1 \lambda_2} \right)$$

2) إذا كانت المعادلة تمثل قطعاً زائداً وبفرض الجذر الذي من إشارة K_3

عندها نكتب :

$$\frac{X^2}{\left(\frac{-K_3}{\lambda_1 I_2} \right)^2} - \frac{Y^2}{\left(\frac{-K_3}{\lambda_2 I_2} \right)^2} = \frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$$

حيث :

$$a = \frac{-K_3}{\lambda_1 I_2}$$

و :

$$b = \frac{-K_3}{\lambda_2 I_2}$$

أما الميل والمركز فيعرفان من العلاقات السابقة نفسها :

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}}$$

و :

$$O \left(\frac{a_{12} a_1 - a_{11} a_2}{I_2} , \frac{-(a_{12} a_2 - a_{22} a_1)}{I_2} \right)$$

أما معادلتا المقارين فنجدهما من العلاقة :

$$Y = \mp \frac{b}{a} X$$

حيث عرفنا كلاً من a و b . وبالعودة للمعادلة النظامية :

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + K_3/I_2 = 0$$

فإن معادلة المقارين $\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 = 0$ وحيث I_1, I_2, K_3 غير متبدلة لذا فإن

معادلة المقارين :

$$F(x, y) = K_3/I_2$$

وعندما تمثل المعادلة (1-3) قطعاً مكافئاً فإن المعادلة البسيطة هي :

$$\lambda_1 X^2 \mp 2 \sqrt{\frac{-K_3}{I_1}} Y = 0$$

حيث $\lambda_1 = I_1$ ومنه الوسيط :

$$p = \sqrt{\frac{-K_3}{I_2}}$$

وذروة القطع نجدها بأخذ نقطة من القطع ومركبتها الناطم n للمماس T في

هذه النقطة هما :

$$a_{11}x + a_{12}y + a_1 = 0, \quad a_{21}x + a_{22}y + a_2 = 0$$

وتكون النقطة هي الذروة عندما يكون لمتجه الناطم منحى أقطار القطع

المكافئ أي يجب أن يتحقق أن :

$$a_{11}x + a_{12}y + a_1 = -a_{12}t, \quad a_{21}x + a_{22}y + a_2 = a_{11}t \quad (6-3)$$

وبضرب اليسرى بـ $-a_{12}$ واليمنى بـ a_{11} وجمعهما نجد :

$$a_2 a_{11} - a_1 a_{12} = (a_{11}^2 + a_{12}^2) t$$

ومنه :

$$t = (a_2 a_{11} - a_1 a_{12}) / (a_{11}^2 + a_{12}^2)$$

وبكتابة المعادلة (1-3) بالشكل :

$$(a_{11}x + a_{12}y + a_1)x + (a_{21}x + a_{22}y + a_2)y + a_1x + a_2y + a = 0$$

نجد اعتماداً على ما سبق أن :

$$(-a_{12}x + a_{11}y)t + a_1x + a_2y + a = 0$$

وبحل هذه المعادلة مع (3-6) بعد وضع قيمة t نجد إحداثيي الذروة .

أما ميل المماس للقطع في الذروة فنجدها من العلاقة :

$$K = \frac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}}$$

حيث $\lambda_1 \neq 0$ وعندما $\lambda_1 = 0$ نجد ميل قطر القطع .

لإيجاد مركبتى المتجه الموازي لقطر القطع المكافئ والموجه نحو قطره نلاحظ

أن المعادلة (1-3) في حالة $I_2 = 0$ يمكن كتابتها بالشكل :

$$(\alpha x + \beta y)^2 + px + qy + r = 0$$

والنقطة $M_0(x_0, y_0)$ نقطة تقاطع المستقيمين :

$$px + qy + r = 0 \quad \text{و} \quad \alpha x + \beta y = 0$$

هي نقطة من القطع ولهذا فإن $px + qy + r = 0$ تمثل معادلة المماس في M_0

بينما المعادلة $\alpha x + \beta y = 0$ تمثل معادلة قطر القطع المار من النقطة $M_0(x_0, y_0)$.

مثال (1) : بين محرقى القطع من الدرجة الثانية ودليليه الذي معادلته :

$$6x^2 + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0$$

الحل : $I_1 = 8$ و $I_2 = -9$ و $K_3 = 81 \neq 0$ والمنحني يمثل قطعاً زائداً.

المعادلة المميزة $\lambda^2 - 8\lambda - 9 = 0$ تعطي الجذرين $\lambda_1 = 9$ و $\lambda_2 = -1$ له

إشارة K_0 والمعادلة البسيطة للمنحنى:

$$\frac{X^2}{1} - \frac{Y^2}{9} = 1 \quad \text{أو} \quad 9X^2 - Y^2 - \frac{81}{9} = 0$$

ومنه :

$$c = \sqrt{1+9} = \sqrt{10} \quad \text{و} \quad a=1, b=3$$

واحداثي المركز نجده من حل المعادلتين :

$$O' (x = -1, y = 2) \quad \text{أي} \quad 6x + 16y - 26 = 0 \quad \text{و} \quad 6y - 12 = 0$$

وميل المحور الحقيقي:

$$K = \frac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}} = \frac{9 - 0}{3} = 3$$

وبفرض θ زاوية الدوران. فإن زاوية هذا المحور مع المحور القديم Ox هي

$$\text{tg } \theta = 3 \quad \text{ومنه :}$$

$$\sin \theta = \frac{3}{\sqrt{10}}, \quad \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

ونجد بالدوران والإنسحاب أن :

$$x = \frac{X - 3Y}{\sqrt{10}} - 1, \quad y = \frac{3X + Y}{\sqrt{10}} + 2$$

واحداثيا المحرقين في الجملة الجديدة $O'XY$ هما:

$$(x_1 = -\sqrt{10}, y_1 = 0)$$

و :

$$(x_2 = \sqrt{10}, y_2 = 0)$$

لهذا فإن إحداثياتهما بالنسبة للحملة القديمة oxy:

$$x_1 = -\frac{\sqrt{10} - 3 \cdot 0}{\sqrt{10}} - 1 = -2 \quad y_1 = -\frac{3\sqrt{10}}{\sqrt{10}} + 2 = -1$$

$$x_2 = \frac{\sqrt{10} - 3 \cdot 0}{\sqrt{10}} - 1 = 0 \quad y_2 = \frac{3\sqrt{10}}{\sqrt{10}} + 2 = 5$$

ومعادلة الدليلين في الحملة الجديدة :

$$X = \mp \frac{1}{\sqrt{10}} \text{ أي } X = \mp \frac{a^2}{c}$$

ومنه :

$$X = \frac{x+1+3(y-2)}{\sqrt{10}} \quad Y = \frac{-3(x+1)+y-2}{\sqrt{10}}$$

$$x+3y-6=0 \quad x+3y-4=0 \quad \text{إذن المعادلتان :}$$

مثال (2) : بين أن المعادلة $x^2 + 2xy + y^2 - 8x + 4 = 0$ تمثل قطعاً مكافئاً

وعين عناصره ..

الحل :

$$K_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -16 \neq 0 \quad \text{و} \quad I_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

والمعادلة المعطاة تعين قطعاً مكافئاً فيه :

$$I_1 = 1 + 1 = 2$$

$$p = \frac{\sqrt{-K_3}}{I_1} = \frac{\sqrt{16}}{I_1^2} = 2 \quad \text{و} :$$

وبفرض :

$$-a_{12}p + a_{11}q = -1x - 8 + 1.8 = 8 > 0$$

فإن المتجه $(a_{12}, -a_{11})$ هو $(1, -1)$ موجه من ذروة القطع لمحرقه وبفرض θ

الزاوية بين المحور ox القديم والمتجه $(1, -1)$ نجد :

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

وإحداثيا الرأس نجدها من حل المعادلتين :

$$x + y - 2 = 0 \quad \text{و} \quad x^2 + 2xy + y^2 - 8x + 4 = 0$$

لنجد أن $O^*(x=1, y=1)$

وتحويلات المحور تعطى بالعلاقتين :

$$X = \frac{x+y}{\sqrt{2}} + 1, \quad Y = \frac{-x+y}{\sqrt{2}} + 1$$

ومركبتا المحرق في المحاور الجديدة :

$$X = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad Y = 0$$

ومنه :

$$X = \frac{\sqrt{2}/2 + 0}{\sqrt{2}} + 1 = \frac{3}{2}, \quad Y = \frac{\frac{-\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2}} + 1 = \frac{1}{2}$$

وبما سبق نجد أن :

$$X = \frac{x-1-(y-1)}{\sqrt{2}} = \frac{x-y}{\sqrt{2}}, \quad Y = \frac{x+y-2}{\sqrt{2}}$$

ومن معادلتي الدليل بالنسبة للحملة الجديدة :

$$x = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

وبالنسبة للقديمة :

$$\frac{x - y}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

وبالتالي : $x - y + 1 = 0$.

تمارين الفصل الثالث ومسائله

1 - ما نوع المنحني من الدرجة الثانية المار بالنقط :

$$M_0(0, 0), M_1(0, 3), M_2(6, 0), M_3(2, 2), M_4(-2, 1)$$

2 - بين إلى أي الأنماط تنتمي المنحنيات :

$$(1) 7x^2 + 4xy + 4y^2 - 40x - 32y + 5 = 0$$

$$(2) x^2 - 2xy + 2x + 2y + 1 = 0$$

$$(3) 6x^2 - 4xy + 9y^2 - 4x - 32y - 6 = 0$$

3 - بين ما تمثله منحنيات الدرجة الثانية التالية :

$$(1) x^2 + 2xy + 2y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$$

$$(2) x^2 - 2xy - 2y^2 + 4x - 6y + 5 = 0$$

$$(3) x^2 - 2xy + y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$$

$$(4) x^2 - 2xy + 2y^2 - 4x - 6y + 29 = 0$$

$$(5) x^2 - 2xy - 2y^2 - 4x - 6y - \frac{13}{3} = 0$$

4 - ما هو الشكل الجديد للمعادلة : $x^2 - 4xy + 3y^2 - 2x + 1 = 0$ إذا نقلنا المحاور للمبدأ

الجديد $O'(1, 0)$.

5 - ما هو الشكل الجديد للمعادلة : $xy - 6x + 2y + 3 = 0$ إذا نقلنا المحاور للمبدأ

الجديد $O'(2, 6)$.

6 - ما هو الشكل الجديد للمعادلة : $x^2 + 6x - 8y + 1 = 0$ إذا نقلنا المحاور للمبدأ

الجديد $O'(-3, -1)$.

7 - رد للشكل النظامي المعادلات :

- (1) $x^2 + 6xy + y^2 + 6x + 2y - 1 = 0$
- (2) $3x^2 - 2xy + 3y^2 + 4x + 4y - 1 = 0$
- (3) $x^2 - 4xy + 3y^2 + 2x - 6y + 6 = 0$
- (4) $x^2 - xy + y^2 - x - y = 0$
- (5) $2x^2 + 8xy + 12y - 3 = 0$
- (6) $x^2 + y^2 - 4x - 6y = 0$
- (7) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$
- (8) $x^2 - 4xy + 4y^2 + 2x - 2y - 1 = 0$

8 - ما هي الشروط على الوسيطين (a, b) لتمثل المعادلة :

$$x^2 + 6xy + ay^2 + 3x + by - 4 = 0$$

معادلة منحنى (آ) ذو مركز. (ب) قطع مكافئ.

(ج) ذو مستقيم مركزي.

9 - بنشر الطرف الأيسر إلى مضروبين بين المعنى الهندسي للمنحنيات :

- (1) $xy - bx - ay + ab = 0$
- (2) $x^2 - 2xy + 3x = 0$
- (3) $x^2 - 4xy + 4y^2 = 0$
- (4) $9x^2 + 30xy + 25y^2 = 0$
- (5) $4x^2 - 12xy + 9y^2 - 25 = 0$

10 - أوجد مراكز المنحنيات التالية :

- (1) $x^2 - 2xy + 2y^2 + 4x + 6y + 3 = 0$
- (2) $3x^2 - 2xy + 3y^2 + 4x + 4y - 4 = 0$
- (3) $2x^2 - 4xy + 5y^2 - 8x + 6 = 0$
- (4) $2x^2 - 3xy + y^2 - 3x + 2y = 0$
- (5) $x^2 - 2xy + y^2 - 3x - 6y + 5 = 0$
- (6) $x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y - 4 = 0$

$$(7) \quad x^2 + 2xy + 3y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$$

$$(8) \quad 9x^2 - 6xy + 3y^2 + 2x - 7 = 0$$

$$(9) \quad x^2 + 4xy + 4y^2 + 10x - 20y + 25 = 0$$

$$(10) \quad 5x^2 - 3xy + y^2 + 4 = 0$$

11 - ما هو الشكل الجديد للمعادلة $x^2 - 6xy + 5y^2 - 2x + 2y = 0$ إذا نقلنا

المحاور لمركز المنحني ؟

12 - أوجد المحل الهندسي للمنحنيات ذات المركز ومن الدرجة الثانية المارة بالنقط

الأربع: $M_0(0, 0), M_1(2, 0), M_2(0, 1), M_3(1, 2)$

13 - اكتب معادلة منحنى من الدرجة الثانية يمر بالنقط الثلاث:

$M_0(0, 0), M_1(0, 1), M_2(1, 0)$ ومركزه النقطة $C(2, 3)$.

14 - أوجد المحل الهندسي لمركز المنحنيات :

$$x^2 + 2xy - y^2 - 2ax + 4ay = 0 \text{ بفرض } a \text{ وسيط .}$$

15 - اكتب معادلة منحنى الدرجة الثانية المار برؤوس المثلث:

$M_1(6, 0), M_2(0, 4), M_3(6, 4)$ ومركزه $C(4, 3)$.

16 - بين أن المعادلة $y^2 - xy - 5x + 7y + 10 = 0$ تمثل معادلة مستقيمين وأوجدتهما.

17 - أوجد معادلة أزواج المستقيمات:

$$(1) \quad 21x^2 + xy - 10y^2 = 0$$

$$(2) \quad x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y - 1 = 0$$

$$(3) \quad y^2 - 4xy - 5x^2 + 5x - y = 0$$

$$(4) \quad 4x^2 - 4xy + y^2 + 12x + 6y + 9 = 0$$

18 - أثبت أن كل معادلة من الشكل $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0$ تمثل

مستقيمين متقاطعين في المبدأ.

19 - ادرس المنحنيات :

(1) $2x^2 + 3xy - 5y^2 = 0$

(2) $x^2 + 4xy + 4y^2 = 0$

(3) $10x^2 - 7xy + y^2 = 0$

(4) $5x^2 - 4xy + y^2 = 0$

20 - أوجد قيمة الوسيط a في المعادلة $x^2 + 2ay^2 - x + 4 = 0$ لتمثل هذه المعادلة.

(أ) منحنيًا مكافئًا . (ب) منحنيًا تخيليًا (مزدبًا).

21 ... ما هي قيمة الوسيط a في المعادلة $x^2 + 2axy + y^2 - 5x - 7y + 6 = 0$ لتمثل :

(أ) زوج مستقيمات. (ب) منحنيًا من النمط المكافئ.

22 - ما هو الثابت الذي يجب إضافته للطرف الأيسر من المعادلة :

$2x^2 + 5xy - 3y^2 + 3x + 16y = 0$ لتمثل المعادلة الجديدة مستقيمين.

23 - ما هي قيمتا الوسيطين a, b لتمثل المعادلة :

$x^2 + 4xy + ay^2 - 3x + 2by = 0$ زوجًا من المستقيمتين المتوازيتين .

24 - لتكن المعادلة $x^2 + 2xy + \lambda y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$ فماذا تمثل من أجل قيمة

مختلفة للوسيط λ .

25 ... ما هو نوع المنحنيات $2x^2 + 5xy - 3y^2 - 3x + \lambda y - 2 = 0$ من أجل قيم مختلفة لـ λ .

26 - أوجد نقطة تقاطع المنحنى $x^2 + xy + 2y^2 - 7x - 12y + 10 = 0$ مع المحورين

ox, oy

27 - بين ما هو الوضع بالنسبة للمحورين للمنحنيات التالية :

(1) $x^2 + 4xy - 4x - y + 4 = 0$

(2) $x^2 + 4x - y + 3 = 0$

(3) $x^2 + 6xy + 9y^2 - 18y = 0$

28 - احسب طول الوتر المقطوع بالمحور ox للمنحني $-4xy + 5y^2 - 8x + 6 = 0$.

29 - ما هي قيمة λ ليقطع المحور oy المنحني $2x^2 - 3xy + y^2 - 7x + \lambda y + 4 = 0$:

في وتر طوله 3. وما هي قيمة λ ليمس المنحني المحور oy .

30 - أوجد نقط تقاطع المنحني $x^2 - 2xy - 3y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$ مع المستقيمات:

(1) $5x - y - 4 = 0$

(2) $x + 2y + 2 = 0$

(3) $x + 4y - 1 = 0$

(4) $x - 3y = 0$

31 - اكتب معادلات المماسات للمنحني $x^2 - 2y^2 - 5x + 4y + 6 = 0$ في نقط

تقاطعه مع المحورين.

32 - اكتب معادلات المماسات للمنحني $x^2 + 3xy + 2y^2 + 3x - 4y = 0$ المارة

بالنقطة التي ترتيبها 2.

33 - اكتب معادلة المماسات لمنحنيات الدرجة الثانية :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, y^2 = 2px$$

$xy = m$ المارة من النقطة (x_0, y_0) الواقعة على المنحني.

34 - اكتب معادلة المماس المار من المبدأ للمنحني:

$$3x^2 + 7xy + 5y^2 + 4x + 5y + 1 = 0$$

35 - اكتب معادلة المماس المار من النقطة $(3, 4)$ للمنحني :

$$2x^2 - 4xy + y^2 - 2x + 6y - 3 = 0$$

36 - اكتب معادلة المماس المار من النقطة $(-2, 1)$ للمنحنيات :

$$2x^2 - xy - y^2 - 15x - 3y + 18 = 0 \quad (\text{أ})$$

$$3x^2 + 2xy + 2y^2 + 3x - 4y = 0 \quad (\text{ب})$$

وبين لماذا نجد مماساً واحداً يمر بهذه النقطة.

37 - بين المماسات للمنحني $x^2 - xy - y^2 - 2x + 3y - 3 = 0$ أوجد المماسات الموازية لـ oy .

38 - اكتب معادلة المماسات للمنحني $x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y - 3 = 0$ الموازية للمستقيم $3x + 3y - 5 = 0$ وحدد نقط التماس.

39 - اكتب معادلة القطع المكافئ المماس للمحور ox في النقطة $(3, 0)$ و oy في النقطة $(0, 5)$.

40 - اكتب معادلة منحنى الدرجة الثانية المار بالمبدأ ويمس المستقيم $4x + 3y + 2 = 0$ في النقطة $(1, -2)$ كما ويمس المستقيم $x - y - 1 = 0$ في النقطة $(0, -1)$.

41 - لمنحنى الدرجة الثانية $5x^2 - 7xy + y^2 - 3x + 2y - 5 = 0$ اكتب معادلة القطر المار من منتصف الوتر الذي يصنعه المستقيم $x - 2y + 1 = 0$ مع المنحنى.

42 - لمنحنى الدرجة الثانية $5x^2 - 6xy + 3y^2 - 2x = 0$ اكتب معادلة القطر الموازي للمستقيم $2x - 3y = 0$.

43 - لمنحنى الدرجة الثانية $4xy - 5y^2 + 2x + 6y + 1 = 0$ اكتب معادلة القطر المار بالنقطة $(-4, 2)$.

44 - أوجد معادلة القطر المشترك للمنحنيين :

$$x^2 - 2xy - y^2 - 2x - 2y = 0$$

$$x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 2y = 0$$

45 - نعطي منحنى الدرجة الثانية $x^2 - 3xy + y^2 - 3x + 2y - 5 = 0$ والنقطتين $M_1(2, 1)$, $M_2(1, 4)$ اكتب معادلة الوتر المار بالنقطة M_2 ومتوازي مع القطر المار بـ M_1 .

46 - في منحنى الدرجة الثانية $x^2 - 6xy + y^2 + 4 = 0$ مرسوم متوازي أضلاع أحد أضلاعه على المستقيم $x - 1 = 0$ اكتب معادلة الأضلاع البقية.

47 - اكتب معادلة منحنى الدرجة الثانية المار بالنقط :
 $M_1(1, 0)$, $M_2(3, 2)$, $M_3(0, 2)$, $M_4(0, -2)$ بعد معرفة أن $M_1 M_2$ و $M_3 M_4$ هما اتجاهان متوازيان.

48 - نعطي المنحنيات :
 $3x^2 - 2xy - y^2 + 6y - 10 = 0$, $3x^2 - 2xy + y^2 + 6x - 10 = 0$
 أوجد زوجاً من الأقطار المترافقة لكل منحنى بحيث يكون الزوجان متوازيين.

49 - أوجد معادلة المقارين للقطوع الزائدة :

$$(1) \quad 10x^2 + 21xy + 9y^2 - 41x - 39y + 4 = 0$$

$$(2) \quad x^2 - 3xy - 10y^2 + 6x - 8y = 0$$

$$(3) \quad 3x^2 + 2xy - y^2 + 8x + 10y - 14 = 0$$

$$(4) \quad 3x^2 + 7xy + 4y^2 + 5x + 2y - 6 = 0$$

$$(5) \quad 10xy - 2y^2 + 6x + 4y + 21 = 0$$

50 - نعطي المعادلة $(\alpha x + \beta y + \gamma)^2 + 2(Ax + By + C) = 0$ حيث $\alpha\beta - A\beta \neq 0$ أثبت

أن هذه المعادلة تمثل :

1 - قطعاً ناقصاً. 2 - المستقيم $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ هو قطر له.

3 - $Ax + By + C = 0$ هو مماس له في نقطة تقاطع القطع مع القطر.

51 - نعطي المعادلة $(\alpha x + \beta y)^2 + 2a_1x + 2a_2y + a = 0$ حيث $a_2\alpha - a_1\beta \neq 0$

اكتب معادلة المماس للقطع في نقطة ما من (x_0, y_0) ومعادلة القطر المرافق.

52 - بين أن منحنى الدرجة الثانية الذي يمكن رسم متوازي أضلاع فيه أو رسمه في

متوازي أضلاع هو دوماً مركزي ومركزه نقطة تقاطع قطري متوازي الأضلاع.

53 - بين أن المنحنى من الدرجة الثانية الذي يمكن رسمه في مثلث ومركزه منطبق

مع مركز ثقل المثلث هو قطع ناقص.

54 - عيّن معادلة محاور منحنيات الدرجة الثانية التالية :

(1) $5x^2 + 8xy + 5y^2 - 15x - 18y + 9 = 0$

(2) $2xy - 4x + 2y - 3 = 0$

(3) $x^2 + 4xy + 4y^2 - 5x + 10y + 6 = 0$

(4) $2x^2 + 3xy - 2y^2 + 5y - 2 = 0$

(5) $x^2 - 4xy + 4y^2 - 5x + 6 = 0$

55 - بين أن معادلة المحور التناظري للقطع المكافئ يعطى بإحدى المعادلتين :

$$a_{11}(a_{11}x + a_{12}y + a_1) + a_{12}(a_{12}x + a_{22}y + a_2) = 0$$

$$a_{21}(a_{11}x + a_{12}y + a_1) + a_{22}(a_{12}x + a_{22}y + a_2) = 0 \text{ أو}$$

56 - أوجد المحل الهندسي لمراكز القطوع الناقصة الحاوية لمثلث معطى.

57 - عيّن نوع منحنيات الدرجة الثانية :

(1) $x^2 - 2xy + y^2 + y = 0$

(2) $(x + 2y)^2 - 3y = 1$

(3) $x^2 - 2xy + y^2 + x + y = 0$

(4) $2xy - 4y^2 + 6x + 6y + 1 = 0$

(5) $(2x - y)(x - y) = 1$

$$(6) \quad 2x^2 - 3xy + 4y^2 - 5x + 2y - 1 = 0$$

$$(7) \quad 2x^2 - 4xy + y^2 - 8x + 6y + 2 = 0$$

58 - عيّن نوع المنحنيات التالية :

$$(1) \quad x^2 - 2y^2 + 4x - 4y = 0$$

$$(2) \quad 4x^2 - y^2 - 8x - 6y - 4 = 0$$

$$(3) \quad 4x^2 + 4x + 2y - 1 = 0$$

$$(4) \quad 6x^2 + 8y^2 + 3x - 4y + 1 = 0$$

$$(5) \quad 6x^2 + 8y^2 + 3x - 4y + 1 = 0$$

$$(6) \quad 2x^2 - 3xy + 4y^2 - 5x + 2y - 1 = 0$$

$$(7) \quad 4x^2 + 4x - 2y + 1 = 0$$

59 - رد للشكل النظامي وبيّن نمط المنحنى ثم نوعه :

$$(1) \quad 5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0$$

$$(2) \quad 9x^2 + 24xy + 16y^2 - 230x + 110y - 475 = 0$$

$$(3) \quad 3x^2 + 12xy - 22x - 12y - 19 = 0$$

$$(4) \quad x^2 + 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0$$

$$(5) \quad x^2 - 2xy + 4y^2 + x + 2y - 2 = 0$$

$$(6) \quad 4x^2 - 12xy + 9y^2 - 2x + 3y - 9 = 0$$

60 - بيّن أن $4xy + 3y^2 + 16x + 12y - 36 = 0$ قطع زائد وأوجد أنصاف المحاور

وإحداثيات المركز ومعادلة المقارين.

61 - ليكن القطع المكافئ حيث $(x \cos t + y \sin t)^2 = 2p(x \sin t - y \cos t + a)$

عيّن الخواص والوضع بفرض $0 < t < \pi/2$.

62 - أوجد سطح القطع الناقص الذي معادلته :

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a = 0$$

63 - بين أن الشروط $I_1^2 = 4 I_2$ و $I_1 K_2 < 0$ هي الشروط اللازمة والكافية لتمثل المعادلة من الدرجة الثانية معادلة دائرة.

64 - بين أنه إذا مثلت المعادلة العامة لمنحنيات الدرجة الثانية $F(x, y) = 0$ قطعاً زائداً فإن معادلة مقاريين هي :

$$F(x, y) = \frac{K_1}{I_2}$$

65 - بين الشرط اللازم والكافي لتمثل معادلة منحنيات الدرجة الثانية مستقيمين متقاطعين.

66 - بفرض المعادلة العامة لمنحنيات الدرجة الثانية فيها الحد الحر مرة a ومرة b وتمثلان قطعين زائدين فما هي الشروط مع a و b ليكون القطعان أحدهما أفقي والآخر شاقولي.

67 - بين أن المعادلة $(A_1 x + B_1 y + C_1)^2 - (A_2 x + B_2 y + C_2)^2 = 1$ حيث $A_1 B_2 - A_2 B_1 \neq 0$ تمثل قطعاً زائداً واكتب معادلة مقارييه.

68 - أوجد معادلة القطع الزائد الذي محرقه $F_1(-2, 2)$ ومعادلة مقارييه :

$$x + 2y - 7 = 0 \quad \text{و} \quad 2x - y + 1 = 0$$

69 - أوجد معادلة القطع الزائد الذي يمر بالنقطة $(0, 1)$ ومحرقه نقطة المبدأ. ومعادلة أحد مقارييه $x - 1 = 0$.

الفصل الرابع

الكرة والدائرة في الفضاء الثلاثي

1 - السطح الكروي :

1 - 1 معادلة السطح الكروي :

السطح الكروي هو المحل الهندسي للنقاط التي تبعد عن نقطة ثابتة أبعاداً متساوية. وبفرض $O_0(x_0, y_0, z_0)$ النقطة الثابتة التي ندعوها بمركز السطح الكروي و R نصف القطر و $M(x, y, z)$ نقطة متحولة ترسم السطح الكروي فالمعادلة المتجهية لهذا السطح الكروي :

$$|\vec{O_0M}| = R \quad \text{أي} \quad (\vec{O_0M})^2 = R^2$$

وبالإسقاط على المحاور الإحداثية نجد المعادلة :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2 \quad (1-1)$$

أو بعد الإصلاح نجد :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2(x x_0 + y y_0 + z z_0) + x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - R^2 = 0$$

وبفرض :

$$-2x_0 = a, \quad -2y_0 = b, \quad -2z_0 = c, \quad x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - R^2 = d$$

نجد المعادلة :

$$s(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0 \quad (2-1)$$

ومركزها ونصف قطرها يعطى بالعلاقات :

$$O_0 \left(x_0 = \frac{-a}{2}, y_0 = \frac{-b}{2}, z_0 = \frac{-c}{2} \right), R^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - d \quad (3-1)$$

ولهذا نجد عندما : $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - d < 0$ أن السطح الكروي (3-1) يمثل

سطحاً كروياً تخيلياً وعندما : $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - d = 0$ فالسطح (3-1) أو (2-1)

يمثل معادلة نقطة $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = 0$ ونجد المعادلات :

$$x - x_0 = 0, \quad y - y_0 = 0, \quad z - z_0 = 0$$

التي تمثل تقاطع ثلاثة مستويات في النقطة $O_0(x_0, y_0, z_0)$.

تبين المعادلة (1-1) أو (2-1) أن أمثال x^2, y^2, z^2 دوماً متساوية ولهذا إذا

أعطينا معادلة من الشكل :

$$A(x^2 + y^2 + z^2) + Bx + Cy + Dz + E = 0$$

فإننا نقسم على A غير المعلوم لئلا نلحق بالشكل :

$$x^2 + y^2 + z^2 + \frac{B}{A}x + \frac{C}{A}y + \frac{D}{A}z + \frac{E}{A} = 0$$

ولنجد أن :

$$O_0 \left(\frac{-B}{2A}, \frac{-C}{2A}, \frac{-D}{2A} \right)$$

و :

$$R^2 = \frac{B^2 + C^2 + D^2}{4A^2} - \frac{E}{A}$$

مثال (1) : عيّن إحداثيات المركز ونصف القطر للسطح الكروي :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 12x + 4y - 6z = 0 \quad (\text{أ})$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6z - 7 = 0 \quad (\text{ب})$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 8x = 0 \quad (\text{ج})$$

الحل : من أجل (أ) نجد إحداثيات المركز :

$$\left(\frac{12}{2}, \frac{-4}{2}, \frac{6}{2} \right) = (6, -2, 3)$$

$$R^2 = 36 + 4 + 9 = 49 \Rightarrow R = 7 \text{ نصف القطر}$$

من أجل (ب) نجد إحداثيات المركز $(0, 0, 3)$ ونصف

$$\text{القطر : } R = \sqrt{9 + 7} = 4$$

من أجل (ج) نجد إحداثيات المركز $\left(\frac{-8}{2}, 0, 0 \right)$ ونصف القطر $R = 4$.

مثال (2) : اكتب معادلة السطح الكروي الذي مركزه $(2, -1, 3)$ ونصف قطره 6 والسطح الكروي الذي مركزه النقطة $(0, 0, 0)$ ومار بالنقطة $(6, -2, 3)$.

الحل: معادلة السطح الكروي الذي مركزه $(2, -1, 3)$ ونصف قطره 6 هي :

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 + (z - 3)^2 = 36$$

ومعادلة السطح الكروي الذي مركزه $(0, 0, 0)$ ويمر بالنقطة $(6, -2, 3)$ بفرض

البعد بين النقطتين يمثل نصف القطر $R^2 = 36 + 4 + 9 = 49$ إذن $R = 7$ والمعادلة:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 49$$

2 - 1 وضع نقطة بالنسبة لكرة :

لتكن النقطة $M_1 (x_1, y_1, z_1)$ والسطح الكروي الذي معادلته $(1-1)$ أو

$(2-1)$ عندها إذا كان بعد مركز الكرة $M_0 (x_0, y_0, z_0)$ عن النقطة $M_1 (x_1, y_1, z_1)$

أصغر من نصف القطر R فالنقطة تقع داخل الكرة. أما إذا كان مساوياً لنصف القطر R فالنقطة تقع على السطح الكروي وعندما يكون أكبر من نصف القطر R فالنقطة تقع خارج الكرة.

ونلخص ذلك في الجدول :

الشرط	$ \vec{O_0M_1} > R$	$ \vec{O_0M_1} = R$	$ \vec{O_0M_1} < R$
وضع النقطة M_1	النقطة خارج الكرة	النقطة على السطح الكروي	النقطة داخل الكرة

أو ديكارتياً نكتب بفرض :

$$(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2 = \delta^2$$

الحالات :

- (أ) $R > \delta$ فالنقطة داخل الكرة .
 (ب) $R = \delta$ فالنقطة على السطح الكروي .
 (جـ) $R < \delta$ فالنقطة خارج الكرة .

مثال (3) : عيّن وضع النقاط :

$$A(3, 0, 4), B(-3, 9, 0), C(3, 4, 4), D(5, 4, 6)$$

بالنسبة للسطح الكروي :

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 49$$

الحل : للنقطة A نجد :

$$\delta^2 = (3 - 1)^2 + 2^2 + (4 - 1)^2 = 17 < 49$$

والنقطة داخل الكرة .

والنقطة B نجد :

$$(-4)^2 + (11)^2 + 1^2 = 138 > 49$$

والنقطة خارج الكرة.

والنقطة C نجد :

$$4 + 36 + 9 = 49$$

والنقطة على السطح الكروي.

والنقطة D نجد :

$$16 + 36 + 25 = 77 > 49$$

والنقطة خارج الكرة .

طبعاً في جميع الحالات استخدمنا إحداثيات مركز السطح المعطى هي
(1, -2, 1) .

مثال (4) : عيّن المحل الهندسي لمنتصفات الأوتار المارة بالنقطة $M_1(x_1, y_1, z_1)$ للسطح الكروي :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$$

وعيّن المميزات للسطح الجديد.

تطبيق :

$$(x_1 = y_1 = \frac{R\sqrt{2}}{2}, z_1 = 0), M_0(x_0 = 0, y_0 = 0, z_0 = 0)$$

الحل : بفرض $M_1(x_1, y_1, z_1)$ النقطة التي تمر فيها جميع الأوتار والنقطة
(x, y, z) من الكرة نقطة التقاطع الثانية للوتر مع السطح الكروي عندها نقطة
المنتصف هي :

$$\left(X = \frac{x + x_1}{2}, Y = \frac{y + y_1}{2}, Z = \frac{z + z_1}{2} \right)$$

ومنه $x = 2X - x_1, y = 2Y - y_1, z = 2Z - z_1$ وهي تحقق العلاقة :

$$(2X - x_1 - x_0)^2 + (2Y - y_1 - y_0)^2 + (2Z - z_1 - z_0)^2 = R^2$$

$$X^2 + Y^2 + Z^2 - [X(x_1 + x_0) + Y(y_1 + y_0) + Z(z_1 + z_0)] + \\ + \frac{1}{4} [(x_1 + x_0)^2 + (y_1 + y_0)^2 + (z_1 + z_0)^2 - R^2] = 0$$

وهي معادلة سطح كروي مركزه :

$$\left(\frac{x_1 + x_0}{2}, \frac{y_1 + y_0}{2}, \frac{z_1 + z_0}{2} \right)$$

ونصف قطره :

$$\frac{R^2}{4} = r^2$$

إذن :

$$r = \frac{R}{2}$$

كذلك بفرض معادلة السطح الكروي هي (2-1) والنقطة $M_1 (x_1, y_1, z_1)$

نقطة خارج هذا السطح أو عليه أو داخل الكرة عندها إذا أنشأنا من النقطة M_1

محوراً يقطع السطح الكروي في نقطتين M', M'' معادلته :

$$x = x_1 + ft, y = y_1 + mt, z = z_1 + nt$$

وكانت $M (z, y, z)$ نقطة من هذا الوتر $p = |\vec{M_1 M}|$ ولنفتش عن

$$p' = |\vec{M M'}| \text{ و } p'' = |\vec{M M''}| \text{ المثلثين لجذري المعادلة:}$$

$$(x_1 + pt)^2 + (y_1 + pm)^2 + (z_1 + pn)^2 + a(x_1 + pt) + b(y_1 + pm) + \\ + c(z_1 + pn) + d = 0.$$

أي :

$$(l^2 + m^2 + n^2) \rho^2 + [2(x_1 l + y_1 m + z_1 n) + a l + b m + c n] \rho + x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + a x_1 + b y_1 + c z_1 + d = 0$$

ولأنه يمكننا فرض $\{l, m, n\}$ أمثال توجيه لمتجه واحد $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ نجد

أن المعادلة السابقة تأخذ الشكل :

$$\rho^2 + [2(x_1 l + y_1 m + z_1 n) + a l + b m + c n] \rho + x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + a x_1 + b y_1 + c z_1 + d = 0 \quad (4-1)$$

$$+ x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + a x_1 + b y_1 + c z_1 + d = 0$$

كما نجد أن حاصل ضرب الجذرين :

$$\rho^+ \cdot \rho^- = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + a x_1 + b y_1 + c z_1 + d \quad (5-1)$$

مقدار لا علاقة له بـ l, m, n أي أنه لا يتعلق بـ M^+ و M^- بل يتعلق بالنقطة $M_1(x_1, y_1, z_1)$ ومعاملات السطح الكروي a, b, c, d أي مركز السطح الكروي ونصف قطره وهذا معناه أنه لأي مستقيم قاطع يمر بالنقطة M_1 فإن :

$$\rho^+ \cdot \rho^- = \left| \vec{M_1 M^+} \right| \left| \vec{M_1 M^-} \right|$$

مقدار ثابت والعلاقة (5-1) تكون عقيقة. تسمى هذه القيمة بقوة النقطة M_1 بالنسبة للكرة وهي تنعدم عندما تقع النقطة على السطح الكروي لأن M_1 تحقق عندها معادلة السطح الكروي لنجد حسب (5-1) أنها تساوي الصفر وتكون موجبة عندما تقع M_1 خارج السطح الكروي وسالبة عندما تكون داخلها ونرمز لها بالرمز (M_1, O') بفرض O' مركز الكرة.

مثال (5) : اعتماداً على مفهوم قوة نقطة بالنسبة للسطح الكروي :

$$(x - 3)^2 + (y - 4)^2 + (z - 5)^2 = 225$$

عين أوضاع النقط $M_1(4, 1, 8)$, $M_2(10, 10, 20)$, $M_3(5, 14, 18)$

الحل : قوة النقطة M_1 بالنسبة للكرة $0 < -206 = -225 - 9 - 9 + 1$ والنقطة داخل الكرة .

وقوة النقطة M_2 بالنسبة للكرة $85 > 0 = 225 - 225 + 36 + 49$ والنقطة خارج الكرة.

وقوة النقطة M_3 بالنسبة للكرة $0 = 225 - 121 - 100 + 4$ والنقطة تقع على السطح الكروي.

يمكن المناقشة بشكل آخر حيث مركز الكرة $O^*(3, 4, 5)$ ونصف قطرها 15.

وبعد M_1 عن المركز $15 < \sqrt{19} = \sqrt{1 + 9 + 9}$ والنقطة داخل الكرة .

وبعد M_2 عن المركز $\sqrt{310} - \sqrt{49 + 36 + 225}$ والنقطة خارج الكرة.

وبعد M_3 عن المركز $15 = \sqrt{4 + 100 + 121}$ والنقطة على السطح الكروي.

3 - 1 معادلة السطح الكروي المار من أربع نقط:

لتكن النقط الأربع :

$$M_i (x_i, y_i, z_i) \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

غير الواقعة في مستوي واحد عندها من هذه النقاط الأربع يمر سطح كروي واحد مركزه النقطة $O_0(x_0, y_0, z_0)$ متساوية الأبعاد عن هذه النقطة وهذه الأبعاد تساوي نصف القطر. إذن :

$$(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2 + (z_i - z_0)^2 = R^2 \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (6-1)$$

وبحل هذه المعادلات الأربع نجد المجاهيل الأربعة التي هي إحداثيات مركز الكرة $O_0(x_0, y_0, z_0)$ ونصف قطرها R .

والأمر نفسه إذا اخترنا معادلة السطح الكروي (1-2) نجد المعادلات الأربع :

$$x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 + ax_i + by_i + cz_i + d = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

التي يحلها نجد المجاهيل الأربعة a, b, c, d .

هندسياً من أية ثلاث نقط من النقط الأربع M_i ($i = 1, 2, 3, 4$) غير الواقعة في مستوى واحد بشكل مثلثاً وليكن M_1, M_2, M_3 والنقط المتساوية البعد عن هذه النقط الثلاث تشكل المستقيم العمودي على مستوي المثلث المنشأ من نقطة تلاقي محاور هذا المثلث .

وكذلك فإن النقط المتساوية البعد عن أية نقطتين مثلاً M_1 و M_4 هو المستوي المنشأ من منتصف $M_1 M_4$ عمودياً عليه لهذا فإن تقاطع العمود الذي ذكرناه وهذا المستوي يحدد مركز السطح الكروي المار بالنقط الأربع .

مثال (6) : اكتب معادلة السطح الكروي المار بالنقط الأربع :

$$M_1 (1, 0, 0), M_2 (0, 1, 0), M_3 (0, 0, 1), M_4 (0, 0, 0)$$

الحل : لنبين أن النقط الأربع لا تقع في مستوى واحد. لهذا نكتب :

$$(M_1\vec{M}_2, M_1\vec{M}_3, M_1\vec{M}_4) = \begin{vmatrix} -1 & +1 & 0 \\ -1 & 0 & +1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

وهذا معناه أن النقط الأربع لا تقع في مستوى واحد .

وبفرض (x_0, y_0, z_0) إحداثيات مركز الكرة نجد من $(1-1)$ أن :

$$(1-x_0)^2 + y_0^2 + z_0^2 = x_0^2 + (y_0-1)^2 + z_0^2 = x_0^2 + y_0^2 + (z_0-1)^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = R^2$$

وبحل الأولى والرابعة والثانية والرابعة والثالثة والرابعة نجد :

$$-2x_0 + 1 = 0, -2y_0 + 1 = 0, -2z_0 + 1 = 0$$

إذن :

$$x_0 = \frac{1}{2}, y_0 = \frac{1}{2}, z_0 = \frac{1}{2}$$

و :

$$R^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

أي :

$$R = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

والمعادلة :

$$(x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 + (z - \frac{1}{2})^2 = \frac{3}{4}$$

ملاحظة : من الممكن الاعتماد على المعادلة (2-1) لنجد بفرض جميع النقط

تحقق هذه المعادلة أن :

$$1+a+d=0, \quad 1+b+d=0, \quad 1+c+d=0, \quad d=0$$

ومنه نجد $d=0$ و $a=b=c=-1$ إذن معادلة السطح الكروي هي :

$$x^2 + y^2 + z^2 - x - y - z = 0$$

ومن جديد نجد أن مركزها : $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ونصف قطرها بحيث $R^2 = \frac{3}{4}$.

4 - 1 أوضاع مستوي ومستقيم بالنسبة للكرة :

ليكن السطح الكروي (3-1) :

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$$

حيث مركزه :

$$R^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4} - d \quad \text{و} \quad O_0 \left(\frac{-a}{2}, \frac{-b}{2}, \frac{-c}{2} \right)$$

والمستوي $Ax + By + Cz + D = 0$ عندها بعد مركز الكرة عنه :

$$d' = \frac{\left| \frac{-a}{2} A - \frac{b}{2} B - \frac{c}{2} C + D \right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad (7-1)$$

فإن كان $d' > R$ كان المستوي خارج الكرة ولا يقطعها وإن كان $d' = R$ كان

المستوي ممسها أما إذا كان $d' < R$ فإن المستوي يقطع الكرة ضمن دائرة معادلتها :

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$$

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

أما وضع الكرة بالنسبة للمستقيم والذي معادلته :

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

أو المعطى بالشكل الوسيطى :

$$x = x_0 + lt, y = y_0 + mt, z = z_0 + nt$$

فإن الوضع يتعين بحل معادلة المستقيم مع معادلة الكرة لنجد المعادلة :

$$(l^2 + m^2 + n^2)t^2 + 2[(x_0 + \frac{a}{2})l + (y_0 + \frac{b}{2})m + (z_0 + \frac{c}{2})n]t$$

$$+ x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + x_0 a + y_0 b + z_0 c + d = 0$$

والأمر يزول إلى مميز المعادلة (المختزل) :

$$\Delta' = [(x_0 + \frac{a}{2})l + (y_0 + \frac{b}{2})m + (z_0 + \frac{c}{2})n]^2 - \quad (8-1)$$

$$- (l^2 + m^2 + n^2) [x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + x_0 a + y_0 b + z_0 c + d]$$

فإذا كان $\Delta' > 0$ يوجد جذران t_1, t_2 له t ولدينا نقطتا تقاطع أما إذا كان

$\Delta' = 0$ فالمستقيم مماس للكرة لوجود جذر واحد وعندما $\Delta' < 0$ فالمستقيم لا يقطع

الكرة وهو خارجها .

مثال (7) : عين الوضع بالنسبة للكرة :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 8y + 2z + 10 = 0$$

للمستويات التالية :

$$2x - y + z + 7 = 0 \quad (أ)$$

$$2x + 2y - z + 1 = 0 \quad (ب)$$

$$x + y + z + 1 = 0 \quad (ج)$$

الحل : مركز الكرة $M_0(3, -4, -1)$ ونصف قطرها :

$$R = \sqrt{9 + 16 + 1} = 10 = 4$$

وبالنسبة لـ (آ) فإن بعد المركز عن المستوي :

$$\frac{|6 + 4 - 1 + 7|}{\sqrt{4 + 1 + 1}} = \frac{16}{\sqrt{6}} > 4$$

والمستوي خارج الكرة .

أما بالنسبة للمستوي (ب) فنجد :

$$d' = \frac{|2(3) + 2(-4) - (-1) + 1|}{\sqrt{4 + 4 + 1}} = 0$$

والمستوي يمسه .

وأما بالنسبة للمستوي (ج) فنجد :

$$\frac{|3 - 4 - 1 + 1|}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} < 4$$

والمستوي قاطع للكرة ضمن دائرة .

مثال (8) : عيّن الوضع بالنسبة للكرة :

$$(x-3)^2 + (y-7)^2 + (z+1)^2 = 25$$

لكل من المستقيمات :

$$(آ) \quad \frac{x-1}{1} = \frac{y-7}{1} = \frac{z-1}{1}$$

$$(ب) \quad \frac{x-6}{3} = \frac{y-4}{3} = \frac{z+1-\sqrt{7}}{0}$$

$$(ج) \quad x = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{1}$$

الحل : مركز الكرة $M_0(3, 7, -1)$ ونصف قطرها $R=5$ وبحل معادلة الكرة

والمستقيم نجد من أجل : (آ) حيث :

نجد $x=t+1, y=t+7, z=t+1$ وبالحل مع معادلة السطح نجد:

$$(t-2)^2 + t^2 + (t+2)^2 = 25 \Rightarrow 3t^2 - 17 = 0$$

نجد أن $\Delta > 0$ فالمستقيم يقطع السطح الكروي.

ومن أجل (ب) حيث $x=3t+6, y=+3t+4, z=-1+\sqrt{7}$ وبالحل مع معادلة السطح نجد :

$$(3t+3)^2 + (3t-3)^2 + 7 = 25 \Rightarrow 18t^2 = 0$$

ومنه نجد $t=0$ جذر مضاعف والنقطة $x=6, y=4, z=-1+\sqrt{7}$ نقطة تماس والمستقيم ممس الكرة .

ومن أجل (ج) حيث $x=t, y=t+1, z=t+2$ وبالحل مع معادلة السطح نجد :

$$(t-3)^2 + (t-6)^2 + (t+3)^2 = 25$$

ومنه : $3t^2 - 12t + 29 = 0$ و $\Delta = 144 - 348 < 0$ والمستقيم لا يقطع السطح الكروي.

5 - 1 معادلة المستوي المماس للسطح الكروي :

لنكتب معادلة المستوي المماس للسطح الكروي في ثلاث حالات :

(أ) المستوي يمر بنقطة معلومة $M_1(x_1, y_1, z_1)$ تقع على السطح الكروي (3-1) عندها مركز الكرة $M_0(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{c}{2})$ وبفرض $M(x, y, z)$ نقطة متحركة ترسم هذا المستوي المماس عندها المعادلة المتجهية للمستوي المماس تنتج من شرط تعامد $\vec{M_0M_1}$ (المستقيم المار من مركز السطح والنقطة الواقعة على السطح) مع أي متجه يقع في المستوي المماس $\vec{M_1M}$ لنجد :

$$\vec{M_0M_1} \cdot \vec{M_1M} = 0 \quad (9-1)$$

التي تعطى بإسقاطها على المحاور المعادلة :

$$(x - x_1)(x_1 - x_0) + (y - y_1)(y_1 - y_0) + (z - z_1)(z_1 - z_0) = 0 \quad (10-1)$$

مثال (9) : ليكن السطح الكروي الذي معادلته :

$$(x - 1)^2 + (y + 3)^2 + (z - 2)^2 = 49$$

اكتب معادلة المستوي المماس المار بالنقطة $M_1(7, -1, 5)$.

الحل : النقطة تقع على السطح الكروي لأنها تحقق معادلته $36 + 4 + 9 = 49$ ومركز الكرة $M_0(1, -3, 2)$ والأشكال التوجيهية للمتجه المار من المركز والنقطة $\vec{M_0 M_1}$ والمعادلة المتجهية :

$$\vec{M_0 M_1} \cdot \vec{M_1 M} = 0$$

$$6(x - 7) + 2(y + 1) + 3(z - 5) = 0 \quad \text{أي :}$$

$$6x + 2y + 3z - 55 = 0 \quad \text{والشكل الأخير لمعادلة المستوي المماس}$$

ب) المستوي المماس يمر بمستقيم معطى (يقع خارج الكرة) وعندها بفرض أن معادلة هذا المستقيم معطاة بتقاطع مستويين :

$$P_i(x, y, z) = A_i x + B_i y + C_i z + D_i = 0 \quad (i = 1, 2)$$

فإنه يكفي كتابة مستوي الخزمة المتحول :

$$(A_1 + \lambda A_2)x + (B_1 + \lambda B_2)y + (C_1 + \lambda C_2)z + D_1 + \lambda D_2 = 0$$

والمجهول الوحيد λ لتعيينه يكفي كتابة أن بعد مركز الكرة عنه يساوي نصف القطر :

$$d_1 = \left\{ \begin{aligned} & \frac{\left| -\frac{a}{2}(A_1 + \lambda A_2) - \frac{b}{2}(B_1 + \lambda B_2) - \frac{c}{2}(C_1 + \lambda C_2) + D_1 + \lambda D_2 \right|}{\sqrt{(A_1 + \lambda A_2)^2 + (B_1 + \lambda B_2)^2 + (C_1 + \lambda C_2)^2}} = \\ & = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4} - d \end{aligned} \right. \quad (11-1)$$

ونجد للوسيط λ قيمتين بشكل عام إذا وقع المستقيم خارج الكرة وقيمة واحدة إذا مسها، إذن من مستقيم خارج كرة يمكن إنشاء مستويين مماسين لسطحها يحويان هذا المستقيم ومن مستقيم لمس السطح الكروي يمكن إنشاء مستوي مماس واحد لهذا السطح الكروي يحوي ذلك المستقيم.

مثال (10) : اكتب معادلة المستوي المماس الحاوي للمحور ox والذي لمس السطح الكروي الذي معادلته :

$$(x+5)^2 + (y-8)^2 + (z+1)^2 = 16$$

الحل : معادلة المحور ox كتقاطع مستويين هي $z = 0$, $y = 0$ والمستوي المماس المطلوب معادلته $y + \lambda z = 0$ ونعيّن λ بحيث يكون بعد مركز الكرة $(-5, 8, -1)$ عنه مساوياً لنصف قطر الكرة $R = 4$ أي :

$$\frac{|8 - \lambda|}{\sqrt{1 + \lambda^2}} = 4$$

$$15\lambda^2 + 16\lambda - 48 = 0 \quad \text{أي} \quad 16\lambda^2 + 16 = 64 - 16\lambda + \lambda^2 \quad \text{ومنه}$$

$$\lambda = \frac{-16 \pm 56}{30}$$

ومنه :

$$\lambda_1 = \frac{-12}{5}, \lambda_2 = \frac{4}{3}$$

وبالتعويض نجد معادلة مستويين مماسين : $3y + 4z = 0$, $5y - 12z = 0$.

سـ المستوي المماس يوازي مستوياً معطى. ليكن المستوي المماس المطلوب موازياً للمستوي $Ax + By + Cz + D = 0$ والمستوي المماس لمس السطح الكروي (3-1) الذي مركزه :

$$\frac{-a}{2}, \frac{-b}{2}, \frac{-c}{2}$$

ونصف قطره .

$$R^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4} - d$$

عندها نكتب المعادلة المطلوبة بالشكل :

$$Ax + By + Cz + D' = 0$$

وبعد مركز الكرة عنه يساوي نصف القطر أي :

$$\frac{\left| -\frac{a}{2}A - \frac{b}{2}B - \frac{c}{2}C + D' \right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = R = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{4} - d}$$

ومن هنا نجد للمجهول D' قيمتين :

$$D' = \mp R \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} + \frac{aA + bB + cC}{2}$$

ولنجد مستويين مماسين معادلتهما :

$$\left. \begin{aligned} &A\left(x + \frac{a}{2}\right) + B\left(y + \frac{b}{2}\right) + C\left(z + \frac{c}{2}\right) \mp \\ &\mp \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - 4d}}{2} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (12-1)$$

مثال (11) : اكتب معادلة المستوي المماس الموازي للمستوي :

$$10x - 11y - 2z + 3 = 0 \text{ للسطح } (x-4)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 225$$

الحل : مركز الكرة $(4, 0, 2)$ ونصف قطرها 15 ومعادلة المستوي المماس

المطلوب الموازي للمستوي المعطى هي $10x - 11y - 2z + D = 0$ ولتعيين D يكفي

كتابة أن بعد مركز الكرة عن المستوي المماس يساوي نصف قطر الكرة:

$$\frac{|40 - 4 + D|}{\sqrt{100 + 121 + 4}} = 15$$

إذن : $|36 + D| = 225$ ومنه $D = -225 - 36$ أو $D = -261$ إما $D_1 = -261$ أو

$D_2 = 189$ والمعادلتان $10x - 11y - 2z - 261 = 0$ أو $10x - 11y - 2z + 189 = 0$.

مثال (12) : اكتب معادلة السطح الكروي الذي مركزه (3, -8, 6) ويمس

المستوي $6x + 6y - 7z + 42 = 0$.

الحل : بعد مركز الكرة عن المستوي :

$$\frac{|36 - 48 - 21 + 42|}{\sqrt{36 + 36 + 49}} = \frac{9}{11}$$

وهو يمثل نصف قطر الكرة لذا فمعادلة السطح الكروي :

$$(x - 6)^2 + (y + 8)^2 + (z - 3)^2 = \frac{81}{121}$$

6 - 1 التمثيل الوسيط للسطح الكروي :

إذا تمكنا من إجراء مقابلة بين نقاط السطح الكروي ونقاط مستوي بحيث تقابل كل نقطة من السطح بنقطة من المستوي أو يجزء منه عندها نقول إننا قد أوجدنا تمثيلاً وسيطاً للسطح الكروي .

لنختار المحاور المتعامدة $oxyz$ والمستوي oxy والسطح الكروي المماس للمستوي oxy ومركزه على oz وإحداثياته $(0, 0, R)$ عندها النقطة العليا من السطح الكروي الواقع على oz إحداثياتها $E(0, 0, 2R)$ ولنختار التمثيل بحيث نرسم دوماً مستقيماً ماراً من E ويقطع السطح الكروي في النقطة $M(x, y, z)$ والمستوي في النقطة $P(u, v)$ عندها لتكتب أن النقط E, M, P على استقامة واحدة أي أن :

$$\vec{EM} \parallel \vec{EP}$$

ومنه نجد المعادلات الوسيطة :

$$\frac{x-0}{u-0} = \frac{y-0}{v-0} = \frac{z-2R}{0-2R} = t$$

إذن :

$$x=ut, y=vt, z=2R-2Rt$$

وحيث معادلة السطح الكروي :

$$x^2+y^2+(z-R)^2=R^2$$

إذن :

$$u^2t^2+v^2t^2+(R-2Rt)^2=R^2$$

ومنه :

$$(u^2+v^2+4R^2)t^2=4R^2t$$

أي أن :

$$t = \frac{4R^2}{u^2+v^2+4R^2}$$

ومنه نجد تمثيلاً وسيطياً بدلالة الوسيطين u, v وبالتالي :

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{4R^2 u}{u^2+v^2+4R^2}, y = \frac{4R^2 v}{u^2+v^2+4R^2}, \\ z &= 2R \frac{u^2+v^2}{u^2+v^2+4R^2} \end{aligned} \right\} \quad (13-1)$$

يمكن المناقشة بشكل آخر حيث : معلوم لدينا أن العلاقة بين الإحداثيات

الكروية والديكارتية هي :

$$\begin{aligned} x-x_0 &= \rho \sin \theta \cos \varphi & 0 \leq \theta \leq \pi \\ y-y_0 &= \rho \sin \theta \sin \varphi & 0 \leq \varphi < 2\pi \\ z-x_0 &= \rho \cos \theta \end{aligned} \quad (14-1)$$

حيث θ زاوية نصف القطر الشعاعي $\vec{OM}$ للنقطة M مع المحور oz و φ زاوية om مع ox في المستوي oxy والذي يمكن فرضه ممثلاً وسيطياً للكرة.

مثال (13) : أوجد معادلة السطح الكروي الديكارتية التي معادلاته

الوسيطية:

$$x = 3 + 5 \sin \theta \cos \varphi$$

$$y = 8 + 5 \sin \theta \sin \varphi$$

$$z = -5 + 5 \cos \varphi$$

وعين نصف القطر ومركزه.

الحل : لدينا $(x-3)^2 + (y-8)^2 + (z+5)^2 = 25$ وإحداثيات المركز $(3, 8, -5)$ ونصف القطر $R=5$.

مثال (14) : أوجد المعادلات الوسيطية للسطح الكروي :

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 121$$

الحل : لدينا :

$$x = 1 + 11 \sin \theta \cos \varphi$$

$$y = -2 + 11 \sin \theta \sin \varphi$$

$$z = 3 + 11 \cos \varphi$$

مثال (15) : ما هي معادلة السطح الكروي الديكارتية بفرض أن معادلاته

الوسيطية :

$$x = \frac{400u}{u^2 + v^2 + 400} , \quad y = \frac{400v}{u^2 + v^2 + 400} ,$$

$$z = 20 \frac{u^2 + v^2}{100 + u^2 + v^2}$$

الحل : لدينا $4R^2 = 400$ ومنه $R = 10$ نصف قطر الدائرة ونجد أن المعادلة هي :

$$x^2 + y^2 + (z - 10)^2 = 100$$

إذن عندما نعطي المعادلة السطح الكروي بالشكل (1-1) يمكن تحويلها للشكل الوسيط (14-1) أو للشكل (13-1) وبالعكس.

2 - معادلة الدائرة في الفضاء الثلاثي :

1 - 2 معادلة الدائرة في الفضاء الثلاثي :

الدائرة يمكن أن تنتج إما عن تقاطع سطح كروي ومستوي أو تقاطع أسطوانة قائمة دورانية ومستوي فإذا كانت ناتجة عن تقاطع سطح كروي ومستوي فمعادلتها :

$$\left. \begin{aligned} S(x, y, z) &= x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0 \\ P(x, y, z) &= Ax + By + Cz + D = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1-2)$$

وعندها مركز الكرة يعطى بالشكل :

$$M_0 \left(\frac{-a}{2}, \frac{-b}{2}, \frac{-c}{2} \right)$$

ونصف قطرها بحيث :

$$R^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4} - d$$

وبعد مركز الكرة عن المستوي الذي تقع فيه الدائرة هو :

$$\delta = \left| \frac{-\frac{1}{2}(aA + bB + cC) + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|$$

وشرط تقاطع المستوي مع الكرة هو تحقق أن : $0 \leq \delta < R$

وفي حال التقاطع فإن الكرة تقطع المستوي بدائرة معادلتها معادلتني السطح

الكروي والمستوي أي (1-2) ونصف قطر الدائرة r نحسبه من العلاقة :

$$r^2 = R^2 - \delta^2$$

حيث δ بعد مركز الكرة عن المستوي و R نصف قطر الكرة وعندما $\delta = 0$

فإننا نحصل على الدائرة العظمى التي مركزها مركز الكرة وتقع في المستوي المعطى

أما عندما $\delta > 0$ فإن إحداثيات مركز الدائرة نوجدتها من كتابة معادلة المستقيم المار

من مركز الكرة متعامداً مع المستوي المعطى أي يوازي ناظمه $N(A, B, C)$ ومعادلته:

$$\frac{x + \frac{a}{2}}{A} = \frac{y + \frac{b}{2}}{B} = \frac{z + \frac{c}{2}}{C} = t$$

أي :

$$x = At - a/2, \quad y = Bt - b/2, \quad z = Ct - c/2$$

وتقاطعه مع المستوي يعني أن :

$$A(At - a/2) + B(Bt - b/2) + C(Ct - c/2) + D = 0$$

أي أن :

$$t = \frac{\frac{aA + bB + cC}{2} - D}{A^2 + B^2 + C^2}$$

وإحداثيات المركز الدائرة :

$$x = \frac{ABb + ACc - aB^2 - aC^2 - 2AD}{2(A^2 + B^2 + C^2)}$$

$$y = \frac{BAa + BCc - bA^2 - bC^2 - 2DB}{2(A^2 + B^2 + C^2)}$$

$$z = \frac{CAa + CBb - cA^2 - cB^2 - 2DC}{2(A^2 + B^2 + C^2)}$$

مثال (1) : عيّن مركز الدائرة ونصف قطرها ذات المعادلة :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 12x + 4y - 6z + 24 = 0$$

$$2x + 2y + z + 1 = 0$$

الحل : مركز السطح الكروي (6, -2, 3) ونصف القطر :

$$R = \sqrt{36 + 4 + 9 - 24} = 5$$

ومعادلة المستقيم المار من مركز الكرة ومركز الدائرة الموازي للناظم {2, 2, 1} هي :

$$\frac{x - 6}{2} = \frac{y + 2}{2} = \frac{z - 3}{1} = t$$

ومنه :

$$x = 2t + 6, \quad y = 2t - 2, \quad z = t + 3$$

وبمقاطعته مع المستوي :

$$4t + 12 + 4t - 4 + t + 3 + 1 = 9t + 12 = 0$$

إذن :

$$t = \frac{-12}{9} = \frac{-4}{3}$$

ومركز الدائرة :

$$x = \frac{-8}{3} + 6 = \frac{10}{3}, \quad y = \frac{-8}{3} - 2 = \frac{-14}{3}, \quad z = \frac{-4}{3} + 3 = \frac{5}{3}$$

وبعد مركز الكرة عن المستوي :

$$\delta = \frac{12 - 4 + 3 + 1}{\sqrt{4 + 4 + 1}} = 4$$

ونصف قطر الدائرة $r^2 = R^2 - \delta^2 = 25 - 16 = 9$ إذن $r = 3$.

مثال (2) : عيّن مركز الدائرة ونصف قطرها ذات المعادلة :

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \quad Ax + By + Cz + D = 0$$

الحل : مركز الكرة (0, 0, 0) ونصف قطرها R وبعد هذا المركز عن المستوي

هو :

$$\delta = \frac{|D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

وإذن :

$$r^2 = R^2 - \delta^2 = R^2 - \frac{D^2}{A^2 + B^2 + C^2}$$

ومنه نجد r .

أما المركز فنكتب معادلة المستقيم المار من (0, 0, 0) ويوازي ناظم المستوي

{A, B, C}

$$\frac{x}{A} = \frac{y}{B} = \frac{z}{C} = t$$

ومنه : $x = At$, $y = Bt$, $z = Ct$ وبمقاطعته مع معادلة المستوي نجد :

$$(A^2 + B^2 + C^2)t + D = 0$$

إذن :

$$t = \frac{-D}{A^2 + B^2 + C^2}$$

ومن إحداثيات مركز الدائرة :

$$x = \frac{-DA}{A^2 + B^2 + C^2} , y = \frac{-DB}{A^2 + B^2 + C^2} ,$$

$$z = \frac{-CD}{A^2 + B^2 + C^2}$$

أما إذا كانت الدائرة ناتجة عن تقاطع أسطوانة دورانية قائمة ومستوي عمودي

عليها فمعادلتها مثلاً عندما يوازي المحور الدوراني oz هي :

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad Cz + d = 0 \quad (2-2)$$

وعندها مركز الدائرة $(0, 0, z_0)$ وهو يحقق معادلة المستوي لهذا فإن :
 $z_0 = -d/c$ ($c \neq 0$) وأما نصف قطرها فهو نصف قطر الأسطوانة أي R .

مثال (3) : عيّن مركز الدائرة ونصف قطرها :

$$x^2 + z^2 = 25 \quad 2y + 10 = 0$$

الحل : مركز الدائرة $(0, y_0, 0)$ وهو يحقق معادلة المستوي لهذا فإن
 $y_0 = -10/2 = -5$ والمركز $(0, -5, 0)$ ونصف القطر $R=5$ نصف قطر الأسطوانة نفسها.

2-2 أوضاع كرتين :

ليكن معادلة السطحين الكرويين :

$$S_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \quad (3-2)$$

$$S_2(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

عندها إحداثيات مركز الأولى :

$$O_1 \left(\frac{-a_1}{2}, \frac{-b_1}{2}, \frac{-c_1}{2} \right)$$

ونصف قطرها :

$$R_1 = \frac{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 - 4d_1}}{2}$$

وإحداثيات مركز الثانية :

$$O_2 \left(\frac{-a_2}{2}, \frac{-b_2}{2}, \frac{-c_2}{2} \right)$$

ونصف قطرها :

$$R_2 = \frac{\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 - 4d_2}}{2}$$

والبعد بين المركزين :

$$\delta = \left| \vec{O_1 O_2} \right| = \sqrt{\frac{(a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2 + (c_2 - c_1)^2}{4}}$$

وعندها إذا كان :

(1) البعد بين المركزين أكبر من مجموع نصفي القطرين $\delta < R_1 + R_2$ فإن السطحين

الكرويين غير متقاطعين وكل كرة خارج الأخرى.

(2) البعد بين المركزين يساوي مجموع نصفي القطرين $\delta = R_1 + R_2$ فالسطحان

الكرويان متماسان خارجاً .

(3) البعد بين المركزين أصغر من مجموع نصفي القطرين وأكبر من فرقهما

$|R_2 - R_1| < \delta < R_1 + R_2$ فالسطحان الكرويان متقاطعان في دائرة تعطى

معادلتها بالشكل (2-3) أو بطرح إحداها من الأخرى لنجد معادلة الدائرة

هي :

$$S_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0$$

$$P(x, y, z) = S_2(x, y, z) - S_1(x, y, z) = (a_2 - a_1)x + (b_2 - b_1)y \quad (4-2)$$

$$+ (c_2 - c_1)z + d_2 - d_1 = 0$$

(4) البعد بين المركزين يساوي فرق نصفي القطرين (الكبير ناقصاً الصغير)

$|R_2 - R_1| = \delta$ والسطحان الكرويان متماسان داخلياً.

(5) البعد بين المركزين أصغر من فرق نصفي القطرين، نصف القطر الأكبر ناقصاً

نصف القطر الأصغر $|R_2 - R_1| < \delta$ عندها إحدى الكرتين تقع داخل الأخرى.

مثال (3): أوجد أوضاع السطح الكروي $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 3$

مع السطوح الكروية :

$$(x - 10)^2 + (y - 10)^2 + (z - 10)^2 = 1 \quad (\bar{A})$$

$$(x + \frac{1}{2})^2 + (y + \frac{1}{2})^2 + (z + \frac{1}{2})^2 = \frac{3}{4} \quad (ب)$$

$$(x + 1)^2 + (y + 1)^2 + (z + 1)^2 = 3 \quad (ج)$$

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 1 \quad (د)$$

الحل : المركز (1, 1, 1) ونصف القطر $\sqrt{3}$.

في (أ) المركز (10, 10, 10) ونصف قطر 1 والبعد بين هذا المركز والمركز

السابق هو :

$$\sqrt{3(10 - 1)^2} = 9\sqrt{3}$$

وهو أكبر من مجموع نصفي القطرية $1 + \sqrt{3}$ وكل كرة تقع خارج الأخرى.

في (ب) المركز $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ ونصف القطر $\frac{\sqrt{3}}{2}$ والبعد بين هذا المركز

ومركز الأول :

$$\sqrt{3 \cdot \frac{9}{4}} = \frac{3}{2} \sqrt{3} = \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ومجموع نصف القطرين هو $1 + \sqrt{3}$ وحيث $1 > \frac{\sqrt{3}}{2}$ إذن مجموع نصفي

القطرين أكبر من البعد بين المركزين و $\frac{\sqrt{3}}{2} < 3 - 1$ والسطحان متقاطعان في

دائرة تمثل بمعادلة السطحين الكرويين.

في (ج) لدينا المركز $(-1, -1, -1)$ ونصف القطر $\sqrt{3}$ والبعد بين المركزين هذا

والأول:

$$\sqrt{3 \cdot 4} = 2\sqrt{3}$$

ومجموع نصفي القطرية $2\sqrt{3}$ والوضع وضع تماس خارجي.

في (د) المركز (1, 1, 1) ونصف القطر 1 والبعد بين المركزين هذا والأول هو

صفر وهو أصغر من فرق نصفي القطرين وهذه الكرة ضمن الكرة الأولى.

3 - 2 تعامد كرتين :

لتكن معادلتى الكرتين S_1 و S_2 :

$$S_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \quad (5-2)$$

$$S_2(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

تكون هاتان الكرتان متعامدتين إذا تعامد المستويان المماسان لهما في إحدى نقط تقاطعهما وبما أن نصف القطر المار من نقطة التماس لأي منهما عمودي على المستوي المماس. إذن يمكن القول: تتعامد كرتان إذا تعامد نصفا قطريهما المتشأين إلى نقطة من نقاط تقاطعهما وعندها يكون شرط التعامد بفرض :

$$O_1 \left(\frac{-a_1}{2}, \frac{-b_1}{2}, \frac{-c_1}{2} \right)$$

مركز الأولى و :

$$R_1 = \frac{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 - 4d_1}}{2}$$

نصف قطرها و :

$$O_2 \left(\frac{-a_2}{2}, \frac{-b_2}{2}, \frac{-c_2}{2} \right)$$

مركز الثانية و :

$$R_2 = \frac{\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 - 4d_2}}{2}$$

نصف قطرها هو أن مربع البعد بين المركزين يساوي مجموع مربعي نصفي القطرين لكون المثلث الذي وتره القطعة الواصلة بين المركزين وضلعاه القائمان نصفا القطرين، مثلثاً قائماً . أي :

$$R_1^2 + R_2^2 = \frac{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 - 4d_1}{4} + \frac{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 - 4d_2}{4}$$

$$= \frac{(a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2 + (c_2 - c_1)^2}{4}$$

وبفك المقدار والاختصار نجد الشرط :

$$a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 2 (d_1 + d_2) \quad (6-2)$$

مثال (4) : بين تعامد أزواج الكرات التالية أو عدم تعامدها :

$$(A) \quad x^2 + y^2 + z^2 = 9, (x+5)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 21$$

$$(B) \quad (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 36, (x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 20$$

الحل : من أجل (أ) مركز الأولى (0, 0, 0) ونصف قطرها 3 ومركز الثانية (-5, 1, -2) ونصف قطرها $\sqrt{21}$ ومربع البعد بين المركزين $25 + 1 + 4 = 30$ ومجموع مربعي نصفي القطرين $9 + 21 = 30$ والكرتان متعامدتان.

ومن أجل (ب) مركز الأولى (1, 2, 3) ومركز الثانية (-1, -2, -3) ومربع البعد بين المركزين $4 + 16 + 36 = 56$ ومجموع مربعي نصفي القطرين $36 + 20 = 56$ والكرتان متعامدتان .

3 - حزم الكرات :

3 - 1 حزم الكرات :

كما عرفنا حزم المستويات كذلك يمكن أن نعرف حزم الكرات. فإذا فرضنا أن معادلة سطحين كرويين هما :

$$S_1 = S_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0 \quad (1-3)$$

$$S_2 = S_2(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0$$

عندها المعادلة :

$$S_2 + \lambda S_1 + (1 + \lambda)(x^2 + y^2 + z^2) + (a_2 + \lambda a_1)x \quad (2-3)$$

$$+ (b_2 + \lambda b_1)y + (c_2 + \lambda c_1)z + d_2 + \lambda d_1 = 0$$

تمثل سطحاً كروياً عندما $1 + \lambda \neq 0$ مركزه :

$$\left(x_0 = -\frac{a_2 + \lambda a_1}{2(1 + \lambda)}, y_0 = -\frac{b_2 + \lambda b_1}{2(1 + \lambda)}, z_0 = -\frac{c_2 + \lambda c_1}{2(1 + \lambda)} \right) \quad (3-3)$$

ونصف قطرها :

$$R^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - (d_2 + \lambda d_1)$$

وهي قيم تتعلق بالوسيط λ .

وتكون الحزمة موجودة عندما $R^2 > 0$ ونسمي عندها S_1, S_2 بكرتي القاعدة.

أما عندما $1 + \lambda = 0$ فنحصل على ما يسمى المستوي الأساسي للكرتين ولهذا يمكن إعطاء معادلة الحزمة أيضاً بمعادلة أحد السطحين الكرويين $S_1 = 0$ أو $S_2 = 0$ ومعادلة المستوي الأساسي. ويمثل تقاطع الحزمة دائرة مركزها في المستوي الأساسي وتقع مراكز جميع الكرات على مستقيم عمودي على المستوي الأساسي وماربمركز إحدى الكرات.

مثال (1) : اكتب معادلة حزمة الكرات التي قاعدتها السطحان الكرويان:

$$x^2 + y^2 + z^2 + x + y + z - \frac{1}{4} = 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y - 4z - 13 = 0$$

وبين الشرط على λ لوجود هذه الحزمة ممثلة لسطح كروي والشرط لتمثل مستوي.

الحل :

$$(x^2 + y^2 + z^2)(1 + \lambda) + (1 - 4\lambda)x + (1 - 4\lambda)y + (1 - 4\lambda)z - \frac{1}{4} + 13\lambda = 0$$

ومن أجل $\lambda = -1$ نجد المستوي : $x + y + z + \frac{51}{4} = 0$

أما من أجل $\lambda \neq -1$ فنجد سطح كروي مركزه :

$$\frac{4\lambda - 1}{2(\lambda + 1)} , \frac{4\lambda - 1}{2(\lambda + 1)} , \frac{4\lambda - 1}{2(\lambda + 1)}$$

ومربع نصف قطره :

$$R^2 = \frac{3}{4} \left(\frac{4\lambda - 1}{\lambda + 1} \right)^2 + 13\lambda + \frac{1}{4}$$

ولوجود سطح حقيقي يجب تحقق أن $R^2 > 0$.

2 - 3 معادلة كرة تحوي دائرة وتمر بنقطة لا تقع في مستويها :

لتكن معادلة الدائرة معطاة كتقاطع كرة ومستوي :

$$S(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$$

$$P(x, y, z) = Ax + By + Cz + D = 0$$

ولتكن النقطة $M_1(x_1, y_1, z_1)$ وعندها لكتابة معادلة الكرة المطلوبة نكتب

معادلة حزمة الكرات :

$$S(x, y, z) + \lambda P(x, y, z) = 0$$

لنجد :

$$\tilde{S}(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + (a + \lambda A)x + (b + \lambda B)y \quad (4-3)$$

$$+ (c + \lambda C)z + d + \lambda D = 0$$

والجهول الوحيد λ نعينه بحيث تقع النقطة $M_1(x_1, y_1, z_1)$ على السطح

الكروي لنجد :

$$\lambda = - \frac{S(x_1, y_1, z_1)}{P(x_1, y_1, z_1)} = - \frac{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + ax_1 + by_1 + Cz_1 + d}{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}$$

وبتعمير هذه القيمة في (3-4) نجد السطح الكروي المطلوب:

أما إذا كانت الكرة معطاة كقطع كرتين :

$$S_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$$

$$S_2(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

عندها إما أن نرد هذه الحالة للحالة السابقة لنجد معادلة المستوي:

$$P(x, y, z) = S_2(x, y, z) - S_1(x, y, z) = (a_2 - a_1)x$$

$$+ (b_2 - b_1)y + (c_2 - c_1)z + (d_2 - d_1) = 0$$

ونختار معادلة أي من الكرتين مع هذه المعادلة أو نكتب معادلة حزمة

الكرات:

$$S_1(x, y, z) + \lambda S_2(x, y, z) = 0$$

ونعين λ من كون $M_1(x_1, y_1, z_1)$ تحقق هذه المعادلة لنجد :

$$\lambda = - \frac{S_1(x_1, y_1, z_1)}{S_2(x_1, y_1, z_1)}$$

ولنجد أن معادلة الكرة المطلوبة هي :

$$S_1(x, y, z) - \frac{S_1(x_1, y_1, z_1)}{S_2(x_1, y_1, z_1)} S_2(x, y, z) = 0 \quad (5-3)$$

مثال (2) : أوجد معادلة السطح الكروي الحاوي للدائرة :

$$(x-3)^2 + (y-4)^2 + z^2 = 36 \quad , \quad 4x + y - z - 9 = 0$$

والمرار بالنقطة (1, -3, 7) وعين مركزها ونصف قطرها .

الحل : من :

$$S(x, y, z) + \lambda P(x, y, z) = 0$$

نجد :

$$16 + 49 + 1 - 36 + \lambda (28 - 3 - 1 - 9) = 0$$

ومن $\lambda = 2$ إذن $\lambda = 2$ ومعادلة السطح الكروي هي :

$$(x - 3)^2 + (y - 4)^2 + z^2 - 36 + 2(4x + y - z - 9) = 0$$

أي :

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y - 2z - 29 = 0$$

ومركزها $(-1, +3, 1)$ ونصف قطرها :

$$R^2 = 1 + 9 + 1 + 29 = 40$$

مثال (3) : اكتب معادلة الكرة المارة بالدائرة تقاطع الكرتين :

$$(x - 3)^2 + (y - 3)^2 + (z - 3)^2 = 4, (x - 5)^2 + (y - 5)^2 + (z - 5)^2 = 9$$

ومن النقطة $(0, 0, 0)$ وعين مركزها ونصف قطرها.

الحل :

$$\lambda = - \frac{25 + 25 + 25 - 9}{9 + 9 + 9 - 4} = - \frac{66}{23}$$

ومعادلة الكرة المطلوبة :

$$(x - 5)^2 + (y - 5)^2 + (z - 5)^2 - 9 - \frac{66}{23} [(x - 3)^2 + (y - 3)^2 + (z - 3)^2 - 4] = 0$$

أي :

$$-43(x^2 + y^2 + z^2) + 166(x + y + z) = 0$$

أي :

$$x^2 + y^2 + z^2 - \frac{166}{43}(x + y + z) = 0$$

والمركز :

$$\left(\frac{+83}{43}, \frac{+83}{43}, \frac{+83}{43} \right)$$

ونصف القطر بحيث :

$$R^2 = \frac{3(83)^2}{(43)^2} \Rightarrow R = \frac{83}{43} \cdot \sqrt{3}$$

3 - 3 المستوي والمحور الأساسي لكرتين :

بفرض معادلة الكرتين معطاة بالشكل (1-3) عندها المعادلة:

$$S_1(x, y, z) = S_2(x, y, z) \quad (6-3)$$

تمثل معادلة مستوي من الشكل :

$$(a_2 - a_1)x + (b_2 - b_1)y + (c_2 - c_1)z + d_2 - d_1 = 0 \quad (7-3)$$

يسمى بالمستوي الأساسي للكرتين ويحقق أن نقاطه متساوية القوة عن السطحين الكرويين (1-3).

في الواقع بفرض $M_1(x_1, y_1, z_1)$ نقطة من المستوي فهي تحقق المعادلة (7-3) وبالتالي تحقق المعادلة (6-3) المكافئة لها أي أن قوة M_1 بالنسبة للكرة الأولى يساوي قوتها بالنسبة للكرة الثانية وبالعكس إذا حققت النقطة $M_1(x_1, y_1, z_1)$ العلاقة (6-3) فهي تحقق العلاقة (7-3) الناتجة عن (6-3) بنقل الطرف الأيسر للأيمن (أو العكس).

ولنثبت أن المستوي الأساسي عمودي على خط المراكزين حيث مركز الأولى:

$$\left(\frac{-a_1}{2}, \frac{-b_1}{2}, \frac{-c_1}{2} \right)$$

ومركز الثانية :

$$\left(\frac{-a_2}{2}, \frac{-b_2}{2}, \frac{-c_2}{2} \right)$$

والأمثال التوجيهية للمستقيم الواصل بينهما :

$$\left\{ \frac{a_2 - a_1}{2}, \frac{b_2 - b_1}{2}, \frac{c_2 - c_1}{2} \right\}$$

وهي متناسبة مع الأمثال التوجيهية لناظم المستوي (3-7) التي هي :

$$\{a_2 - a_1, b_2 - b_1, c_2 - c_1\}$$

وهذا معناه أن خط المركزين يوازي لناظم المستوي فهو عمودي على المستوي الأساسي.

وفي حالة تماس السطحين الكرويين داخلياً أو خارجياً فإن المستوي المطلوب يمر بنقطة تماسهما طبعاً متعامداً مع خط المركزين . وسواء تقاطعت الكرتان أم لم تتقاطعا أم كانت إحداهما ضمن الأخرى فإن المستوي الأساسي عمودي على خط المركزين وبحيث أن قوة أية نقطة منه بالنسبة للكرة الأولى يساوي قوتها بالنسبة للكرة الثانية: أي أن (3-6) محققة . وعندما يكون للسطحين الكرويين مركز واحد فإنه لا يوجد أي مستويات أساسية لأن :

$$a_2 - a_1 = 0, \quad b_2 - b_1 = 0, \quad c_2 - c_1 = 0, \quad d_2 - d_1 \neq 0$$

حيث :

$$R_2^2 = \frac{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}{4} - d_2, \quad R_1^2 = \frac{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}{4} - d_1$$

وتقرض :

$$R_2^2 - R_1^2 = d_1 - d_2 \neq 0$$

بينما :

$$\frac{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}{4} = \frac{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}{4}$$

وفي هذه الحالة فإن اتجاه خط المركزين غير معرف (لأنه نقطة).

نتيجة : لأي سطحين كرويين ليس لهما مركز مشترك دوماً يوجد لهما مستوى

أساسي.

مثال (4) : عين المستوى الأساسي للكرتين:

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 4, \quad (x-3)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 20$$

وبين أنه عمودي على خط المركزية.

الحل : معادلتا السطحين :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + 10 = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 4y - 2z - 6 = 0$$

ومعادلة المستوى الأساسي :

$$x - z + 4 = 0 \quad \text{أي} \quad 4x - 4z + 16 = 0$$

وأمثال توجيه ناظمه $\{1, 0, -1\}$ والمركزان $(3, 2, 1)$ و $(1, 2, 3)$.

وأمثال توجيه خط المركزين $\{-2, 0, 2\}$ وهو $\parallel \{1, 0, -1\}$ لتناوبه معه وخط

المركزين عمودي على المستوى الأساسي.

3 - 4 المحاور الأساسية :

إذا أعطينا ثلاث كرات لا تقع مراكزها على استقامة واحدة ولها مراكز

مختلفة :

$$S_i = S_i(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + a_i x + b_i y + c_i z + d_i = 0 \quad (i=1,2,3)$$

فنعدها المعادلتان :

$$P_1(x, y, z) = S_2(x, y, z) - S_1(x, y, z) = 0 \quad (8-3)$$

$$P_2(x, y, z) = S_3(x, y, z) - S_1(x, y, z) = 0$$

تمثلان معادلة مستويين أساسيين الأول لكرتين S_1, S_2 والثاني للكرتين S_1, S_3 فإذا تقاطع هذان المستويان (وهما متقاطعان طالما لا تقع المراكز الثلاثة على استقامة واحدة) شكلاً مستقيماً نسميه بالمحور الأساسي للكرات الثلاث ونقاط المستقيم متساوية القوة عن الكرات الثلاث :

$$S_i(x, y, z) = 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

بالأسلوب نفسه إذا أعطينا أربع كرات $S_i(x, y, z) = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4)$ لا تقع مراكزها في مستوي واحد وشكلنا لثلاث منها محوراً أساسياً ولثلاث أخرى مختلفة عن السابقة محوراً أساسياً فإن هذين المحورين يتقاطعان في نقطة تسمى بالمركز الأساسي للكرات الأربع وهي متساوية القوة عن الكرات الأربع.

تطبيق : ليكن المنطوخ الكروية الأربعة التي معادلاتها :

$$x^2 + y^2 + z^2 + a_i x + b_i y + c_i z + d_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

اكتب معادلة المستويات والمحاور الأساسية لها وإحداثيات المركز الأساسي .

الحل : لكل سطحين يوجد مستوي أساسي وعند هذه المستويات الأساسية (متوافقات أربعة عناصر مأخوذة اثنان اثنان) :

$$C_4^2 = \frac{4!}{2!2!} = \frac{4 \times 3}{2} = 6$$

ومعادلاتها :

$$P_k(x, y, z) = (a_i - a_j)x + (b_i - b_j)y + (c_i - c_j)z + (d_i - d_j) = 0$$

$$1 \leq j < i \leq 4 \quad 1 \leq k \leq 6$$

ولكل ثلاث كرات محور أساسي وعند هذه المحاور هي : $C_4^3 = 4$

ومعادلاتها :

$$P_{k'}(x, y, z) = P_{k''}(x, y, z)$$

$$1 \leq k' < k'' \leq 6$$

والحل المشترك للمحاور الأساسية (المستويات الأساسية) يعطى المركز الأساسي ولكل أربع كرات يوجد مركز أساسي وحيد.

مثال (6) : لتكن السطوح الكروية :

$$S_1 : (x-1)^2 + y^2 + z^2 = 4$$

$$S_2 : x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 9, \quad S_3 : x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 16$$

$$S_4 : (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 25$$

أوجد معادلات المستويات الأساسية والمحاور الأساسية والنقطة الأساسية.

الحل : لنكتب معادلة السطوح الكروية على الشكل :

$$S_1 = x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 3 = 0$$

$$S_2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 8 = 0$$

$$S_3 = x^2 + y^2 + z^2 - 2z - 15 = 0$$

$$S_4 = x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 11 = 0$$

ومن معادلة المستويات الأساسية الستة :

$$P_1(x, y, z) = S_2 - S_1 = 2x - 2y - 5 = 0$$

$$P_2(x, y, z) = S_3 - S_1 = 2x - 2z - 12 = 0$$

$$P_3(x, y, z) = S_4 - S_1 = -4y - 6z - 8 = 0$$

$$P_4(x, y, z) = S_3 - S_2 = 2y - 2z - 7 = 0$$

$$P_5(x, y, z) = S_4 - S_2 = -2x - 2y - 6z - 3 = 0$$

$$P_6(x, y, z) = S_4 - S_3 = -2x - 4y - 4z + 4 = 0$$

ومعادلة المحاور الأساسية الأربعة فهي :

للسطوح S_1, S_2, S_3 هي :

$$P_1(x, y, z) = 2x - 2y - 5 = 0$$

$$\frac{1}{2} P_2(x, y, z) = x - z - 6 = 0$$

للسطوح S_1, S_2, S_4 هي :

$$P_1(x, y, z) = 2x - 2y - 5 = 0$$

$$\frac{1}{2} P_3(x, y, z) = 2y - 3z - 4 = 0$$

للسطوح S_1, S_3, S_4 هي :

$$\frac{1}{2} P_2(x, y, z) = x - z - 6 = 0$$

$$\frac{1}{2} P_3(x, y, z) = 2y - 3z - 4 = 0$$

للسطوح S_2, S_3, S_4 هي :

$$P_4(x, y, z) = 2y - 2z - 7 = 0$$

$$-P_5 = 2x + 2y + 6z + 3 = 0$$

والنقطة الأساسية هي الحل المشترك للمحاور الأساسية.

5 - 3 معادلة كرة تمر بدائرتين :

سوف نميز الحالات التالية :

الحالة الأولى: عندما تكون كل من الدائرتين معطاة كتقاطع كرة ومستوى :

$$P_1(x, y, z) = A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$S_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \quad (9-3)$$

$$P_2(x, y, z) = A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

$$S_2(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

الحالة الثانية : عندما تكون كل من الدائرتين معطاة كتقاطع أسطوانة دورانية ومستوى عمودي على محورها مثلاً :

$$P_1(x, y, z) = C_1 z + D_1 = 0 \text{ و}$$

$$C_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + a_1 x + b_1 y + d_1 = 0 \quad (10-3)$$

$$P_2(x, y, z) = B_2 y + D_2 = 0 \text{ و}$$

$$C_2(x, y, z) = x^2 + z^2 + a_2 x + c_2 z + d_2 = 0$$

الحالة الثالثة : عندما تكون إحدى الدائرتين معطاة كقطاع كرة ومستوى إحدى معادلتى (9-3) والدائرة الثانية معطاة كقطاع أسطوانة دورانية ومستوى إحدى معادلتى (10, 3) .

وسوف نُمَيِّز لمستويي الدائرتين الحالتين :

(أ) المستويان غير متوازيين .

(ب) المستويان متوازيان .

وعندما يكون المستويان غير متوازيين نجد للحالة الأولى نكتب معادلة المستقيم المار من مركز الأولى عمودياً على المستوي الأول (يوازي ناظمه) ومعادلة المستقيم المار من مركز الثانية عمودياً على المستوي الثاني (يوازي ناظمه).

$$\left. \begin{aligned} \text{و} \quad \frac{x + \frac{a_1}{2}}{A_1} = \frac{y + \frac{b_1}{2}}{B_1} = \frac{z + \frac{c_1}{2}}{C_1} = \lambda \\ \frac{x + \frac{a_2}{2}}{A_2} = \frac{y + \frac{b_2}{2}}{B_2} = \frac{z + \frac{c_2}{2}}{C_2} = \mu \end{aligned} \right\} \quad (11-3)$$

أو :

$$x = A_1 \lambda - \frac{a_1}{2}, \quad y = B_1 \lambda - \frac{b_1}{2}, \quad z = C_1 \lambda - \frac{c_1}{2}$$

$$x = A_2 \mu - \frac{a_2}{2}, \quad y = B_2 \mu - \frac{b_2}{2}, \quad z = C_2 \mu - \frac{c_2}{2}$$

ونقطة تقاطعهما هي مركز الكرة المطلوبة ويتم ذلك بمطابقة الإحداثيات لنجد المعادلات :

$$\left. \begin{aligned} A_1 \lambda - \frac{a_1}{2} &= A_2 \mu - \frac{a_2}{2} , B_1 \lambda - \frac{b_1}{2} = B_2 \mu - \frac{b_2}{2} , \\ C_1 \lambda - \frac{c_1}{2} &= C_2 \mu - \frac{c_2}{2} \end{aligned} \right\} \quad (12-3)$$

وبإيجاد λ, μ مثلاً :

$$\lambda = \left(\frac{a_2 B_2 - b_2 A_2 - a_1 B_2 + A_2 b_1}{2} \right) / (B_1 A_2 - A_1 B_2)$$

من معادلتين من المعادلات الثلاثة السابقة نجد أن هاتين القيمتين يجب أن تحقق المعادلة الثالثة وعندها يوجد حل نجده بالتبديل بقيمة λ أو μ لنجد المركز ونصف قطر الدائرة فنجده من العلاقة :

$$R^2 = \delta_1^2 + r_1^2 = \delta_2^2 + r_2^2 \quad (13-3)$$

حيث δ_1 بعد مركز الكرة الأولى عن المستوي الأول و r_1 نصف قطر الدائرة الأولى و δ_2 بعد مركز الكرة الثانية عن المستوي الثاني و r_2 نصف قطر الدائرة الثانية.

أما إذا لم تحقق قيمتا λ, μ المعادلة الثالثة فالمسألة غير ممكنة ولا يمكن إمرار كرة من الدائرتين المعطيتين.

وللحالة الثانية نجد معادلة محور الأسطوانة الأولى المار من مركزها عمودياً على المستوي الأول ومعادلة محور الأسطوانة الثانية المار من مركزها عمودياً على المستوي الثاني القاطع لها :

$$\left. \begin{aligned} \text{و} \quad \frac{x + \frac{a_1}{2}}{0} &= \frac{y + \frac{b_1}{2}}{0} = \frac{z + \frac{D_1}{C_1}}{1} = \lambda \\ \frac{x + \frac{a_2}{2}}{0} &= \frac{y + \frac{D_2}{B_2}}{1} = \frac{z + \frac{c_2}{2}}{0} = \mu \end{aligned} \right\} \quad (14-3)$$

وبحلها نجد :

$$x = \frac{-a_1}{2} = \frac{-a_2}{2}, \quad y = \frac{-b_1}{2} = -\frac{D_2}{B_2} + \mu, \quad z = \lambda - \frac{D_1}{C_1} = \frac{-c_2}{2}$$

التي تمثل إحداثيات مركز الكرة المطلوبة في حال تحقق الشروط السابقة وإلا فالمسألة مستحيلة. أما إيجاد نصف قطر الكرة المطلوبة فنجدده كما سبق من العلاقة :

$$R^2 = r_1^2 + \delta_1^2 = r_2^2 + \delta_2^2$$

للمسألة الثالثة نكتب معادلة المستقيم المار من مركز الكرة الأولى عمودياً على

المستوى الأول

$$\frac{x + \frac{a_1}{2}}{A_1} = \frac{y + \frac{b_1}{2}}{B_1} = \frac{z + \frac{c_1}{2}}{C_1} = \lambda$$

ومعادلة محور الأسطوانة العمودي على دائرة المقطع والمار من مركز

الأسطوانة :

$$\frac{x + \frac{a_2}{2}}{0} = \frac{y + \frac{D_2}{B_2}}{1} = \frac{z + \frac{c_2}{2}}{0} = \mu, \quad C_2(x, y, z) = 0$$

ونقطة تقاطعها يعطى مركز الكرة المطلوبة في حال تحقق الشروط وإلا

فالمسألة مستحيلة على المنوال السابق نفسه.

أما عندما يكون مستويا الدائرتين متوازيين عندها نفرض أن (x_0, y_0, z_0) إحداثيات مركز الكرة المطلوبة ونوجد بعد هذا المركز عن المستوي الأول δ_1 وبعده عن المستوي الثاني δ_2 ثم نصف قطر الدائرة الأولى r_1 ونصف قطر الدائرة الثانية r_2 للحالة الأولى ونصف قطر الأسطوانة الأولى r_1 ونصف قطر الأسطوانة الثانية r_2 للحالة الثانية أو نصف قطر الأسطوانة الدائرة r_1 ونصف قطر الأسطوانة r_2 للحالة الثالثة وفي كل الحالات يجب تحقق أن :

$$R^2 = r_1^2 + \delta_1^2 = r_2^2 + \delta_2^2$$

كذلك يجب أن تحقق النقطة (x_0, y_0, z_0) معادلة المستقيم المنشأ من مركز الدائرة الأولى (أو الأسطوانة الأولى) والمستقيم المنشأ من مركز الدائرة الثانية (أو الأسطوانة الثانية) والمتعامد مع المستوي الأول والمستوي الثاني لنجد معادلات نحلها فنجد x_0, y_0, z_0 :

ملاحظة: يمكن للحالة الأولى :

$$S_1(x, y, z) + \lambda P_1(x, y, z) = 0 \quad S_2(x, y, z) + \mu P_2(x, y, z) = 0 \quad (15-3)$$

والبحت عن الكرة المشتركة بمطابقة إحداثيات المركز الناتج من الحزمة الأولى مع إحداثيات المركز الناتج عن الحزمة الثانية :

$$\left. \begin{aligned} -\frac{a_1 + \lambda A_1}{2} &= -\frac{a_2 + \mu A_2}{2}, \quad -\frac{b_1 + \lambda B_1}{2} = -\frac{b_2 + \mu B_2}{2}, \\ -\frac{c_1 + \lambda C_1}{2} &= -\frac{c_2 + \mu C_2}{2} \end{aligned} \right\} (16-3)$$

وبحل اثنتين وتحقق الثالثة نجد مركز السطح الكروي المطلوب .

مثال (6) : أوجد معادلة الكرة المارة بالدائرتين :

$$x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 9, z=2 \quad \text{و} \quad x^2 + (y-2)^2 + z^2 = 9 \quad y=2$$

الحل : معادلة الحزمة الأولى :

$$x^2 + y^2 + z^2 + (\lambda - 4)z - 9 - 2\lambda = 0$$

ومعادلة الحزمة الثانية :

$$x^2 + y^2 + z^2 + (\mu - 4)y - 9 - 2\mu = 0$$

وبإيجاد مركز الحزمة الأولى ومركز الحزمة الثانية ومطابقتها نجد :

$$(0, 0, 2 - \frac{\lambda}{2}) = (0, 2 - \frac{\mu}{2}, 0)$$

ومنه $\lambda = \mu = 4$ والمعادلة المطلوبة :

$$x^2 + y^2 + z^2 = 17 \quad \text{أي} \quad x^2 + y^2 + z^2 - 9 - 8 = 0$$

مثال (7) : أوجد معادلة الكرة المارة بالدائرتين :

$$z = 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 6 = 0$$

$$z = \frac{3}{2}, \quad x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 4z + 5 = 0$$

الحل : مستويي الدائرتين متوازيان وبفرض (x_0, y_0, z_0) إحداثيات مركز الكرة وإحداثيات مركز الكرة الأولى $(1, 1, 1)$ ونصف قطرها 3 ومعادلة المستقيم-المر من هذا المركز ومركز الكرة عمودياً على المستوي $z = 0$ يحقق أن :

$$\frac{x_0 - 1}{0} = \frac{y_0 - 1}{0} = \frac{z_0 - 1}{1} = \lambda$$

ومركز الكرة الثانية $(1, 1, 2)$ ونصف قطرها 1، ومعادلة المستقيم العمودي

على المستوي $z = \frac{3}{2}$ يحقق أن :

$$\frac{x_0 - 1}{0} = \frac{y_0 - 1}{0} = \frac{z_0 - 2}{1} = \mu$$

إذن :

$$x_0 = 1, \quad y_0 = 1, \quad z_0 = \lambda + 1 = \mu + 2$$

ومنه $\lambda = \mu + 1$ ويجب تحقق أن :

بعد مركز الكرة الأولى عن المستوي $z=0$ هو $\delta_1 = 1$ ونصف قطر الدائرة $\sqrt{8}$.

بعد مركز الكرة الثانية عن المستوي $z = \frac{3}{2}$ هو $\delta_2 = \frac{1}{2}$ ونصف قطر الدائرة $\sqrt{3}/2$.

وبعد مركز الكرة المطلوبة عن $z=0$ هو $|z_0|$ وعن $z=2$ هو $|z_0 - \frac{3}{2}|$.
ويجب تحقق أن :

$$R^2 = \delta_1^2 + r_1^2 = 8 + z_0^2 = \frac{1}{4} + (z_0 - \frac{3}{2})^2$$

ومنه $z_0 = -\frac{11}{6}$ ومعادلة الكرة المطلوبة :

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z + \frac{11}{6})^2 = \frac{409}{36}$$

مثال (8) : اكتب معادلة الكرة المارة بالدائرتين $z=0$ و $x^2 + y^2 = 9$ و $x^2 + y^2 = 25$, $z=2$.

الحل : الدائرة الأولى مركزها $(0, 0, 0)$ ونصف قطرها 3 والدائرة الثانية مركزها $(0, 0, 2)$ ونصف قطرها 5 ومستويي الدائرتين متوازيان. وبفرض (x_0, y_0, z_0) إحداثيات مركز الكرة المطلوبة عندها معادلة المستقيم المار بمركز الدائرة الأولى ومتعامد مع المستوي $z=0$ (وهو يمر بمركز الكرة) هي :

$$\frac{x_0}{0} = \frac{y_0}{0} = \frac{z_0}{1} = \lambda$$

ومعادلة المستقيم المار من مركز الدائرة الثانية ومركز الكرة ومتعامد مع المستوي $z=2$ هي :

$$\frac{x_0}{0} = \frac{y_0}{0} = \frac{z_0 - 2}{1} = \mu$$

ومنه نجد :

$$z_0 = \lambda = \mu + 2 \quad \text{و} \quad x_0 = y_0 = 0$$

ولدينا بعد مركز الكرة من المستوي $z=0$ هو $\delta_1 = |z_0|$ وبعد مركز الكرة

عن المستوي $z=2$ هو $\delta_2 = |z_0 - 2|$ ويجب أن يتحقق أن :

$$R^2 = z_0^2 + 9 = (z_0 - 2)^2 + 25$$

ومنه $z_0 = 5$ إذن مركز الكرة المطلوبة $(0, 0, 5)$ ونصف قطرها بحيث

$R^2 = 34$ فمعادلتها :

$$x^2 + y^2 + (z - 5)^2 = 34$$

تمارين الفصل الرابع ومسائله

1 - عيّن مركز كل من الكرات التالية وأنصاف قطرها :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 11 = 0 \quad (\text{أ})$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 10y + 14z - 38 = 0 \quad (\text{ب})$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 12z = 0 \quad (\text{ج})$$

$$(x - 1)^2 + (x - 3)^2 + (z - 7)^2 = 144 \quad (\text{د})$$

2 - اكتب معادلة الكرة المارة بالنقط الأربع :

$$(0, 0, 0), (0, 0, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 1) \quad (\text{أ})$$

$$(0, 0, 0), (2, 0, 0), (0, 5, 0), (0, 0, 3) \quad (\text{ب})$$

3 - عيّن بالنسبة للكرة $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 2)^2 = 9$ وضع النقط :

$$(7, 6, 6) \quad (\text{أ}) \quad (0, 0, 0) \quad (\text{ب}) \quad (12, 2, 3) \quad (\text{ج}) \quad (5, 1, 2) \quad (\text{د})$$

4 - عيّن بالنسبة للكرة $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 4)^2 = 25$ وضع المستويات التالية :

$$2x + 2y + z + 2 = 0 \quad (\text{أ})$$

$$2x + 2y + z + 5 = 0 \quad (\text{ب})$$

$$7x + 2y + z + 11 = 0 \quad (\text{ج})$$

5 - اكتب معادلة المستوي المماس للسطح $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 49$

والحاوي للمستقيم :

$$\frac{x-3}{-1} = \frac{y-5}{1} = \frac{z-2}{5}$$

6 - اكتب معادلة السطح الكروي الذي مركزه النقطة :

(أ) $(2, -1, 3)$ ونصف قطره $R=6$.

(ب) $(0, 0, 0)$ ويمر بالنقطة $(6, -2, 3)$.

(ج) $(1, 4, -7)$ ويمس المستوي $6x + 6y - 7z + 42 = 0$

7 - ما هو الشرط ليكون المستوي $Ax + By + Cz + D = 0$ مماساً للسطح الكروي

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

تطبيق : ما هي D ليمس المستوي $x + y + z + D = 0$ الكرة $x^2 + y^2 + z^2 = 16$

8 - من نقط تقاطع المستقيم :

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{2}$$

مع السطح الكروي $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 6$ اكتب معادلة المستويات المماس لهذا السطح الكروي.

9 - اكتب معادلة المستوي المماس لكل سطح كروي وارد في المسألة الأولى موازياً للمستوي $x + y + z + 1 = 0$.

10 - اكتب معادلة السطح الكروي الذي مركزه $(4, 5, -2)$ ويمس السطح الكروي $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 12y + 36 = 0$.

11 - اكتب معادلة السطح الكروي المماس للمستقيم :

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{2}$$

في النقطة $(1, -4, 6)$ والمماس للمستقيم :

$$\frac{x-4}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-2}{-6}$$

في النقطة (4, -3, 2) .

12 - أوجد مركز الدائرة ونصف قطرها :

$$(x-4)^2 + (y-7)^2 + (z+1)^2 = 36 \quad \text{و} \quad 3x + y - z - 9 = 0 \quad (\text{أ})$$

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \quad (\text{ب})$$

13 - ما هو الشرط ليمس السطح الكروي $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ المستقيم :

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$$

14 - أوجد معادلة السطح الكروي المار بالنقطة :

$$(0, -3, 1) \quad \text{والمار بالدائرة } z=0 \quad \text{و} \quad x^2 + y^2 = 16 \quad (\text{أ})$$

$$(7, -3, 1) \quad \text{والمار بالدائرة } 4x + y - z - 9 = 0 \quad (\text{ب})$$

$$(x-3)^2 + (y-2)^2 + z^2 - 36 = 0$$

$$(0, 0, 0) \quad \text{والمار بالدائرة } 2x + 2y - z + 4 = 0 \quad (\text{ج})$$

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+2)^2 - 49 = 0$$

15 - أوجد مسقط الدائرة $2x - y - 2z - 10 = 0$ و

$$(x-3)^2 + (y-7)^2 + (z+1)^2 = 25 \quad \text{على } \text{oxz}.$$

16 - اكتب معادلة السطح الكروي المار بالدائرة :

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 25 \quad \text{و} \quad x - 2y - 2z + 1 = 0$$

$$2x + 2y + z - 7 = 0 \quad \text{والمماس للمستوي}$$

17 - اكتب معادلة المحل الهندسي للنقاط التي لها القوة نفسها بالنسبة :

آم للكرتين :

$$(x - 5)^2 + (y - 3)^2 + (z + 1)^2 = 9$$

$$(x - 7)^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 16$$

(ب) للكرات الثلاث :

$$x^2 + y^2 + z^2 + 10x - 2y + 21 = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4y - 6z + 7 = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 8z + 8 = 0$$

18 - أوجد معادلة السطح الكروي المتعامد مع الكرات الأربع:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9$$

$$x^2 + (y + 1)^2 + (z - 2)^2 = 10$$

$$(x + 1)^2 + y^2 + (z + 3)^2 = 39$$

$$(x + 5)^2 + (y - 1)^2 + (z + 2)^2 = 53$$

19 - بكم وسيط تتعلق مجموعات السطوح الكروية التي :

(أ) تمر بنقطة معطاة.

(ب) تمر بنقطتين معطيتين .

(ج) تمر بثلاث نقط معطاة.

(د) تمس مستقيماً معلوماً.

(هـ) تمس مستويّاً معلوماً.

(و) تمس مستويّاً ولها نصف قطر معلوم.

(ز) لها مركز يقع في مستوٍ معلوم.

(حـ) لها مركز يقع على محيط دائرة معلومة.

(ط) تمر من دائرة معلومة.

20 - عيّن المحل الهندسي لمتصفات الأوتار المارة من النقطة (5, 3, 4) الواقعة على

$$\text{السطح الكروي } (x - 3)^2 + (y - 2)^2 + (z - 4)^2 = 3$$

21 - أوجد المحل الهندسي لمراكز الكرات التي تمس ثلاثة مستويات معطاة:

$$A_i x + B_i y + C_i z + D_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (\text{ناقش المسألة؟})$$

22 - ليكن السطح الكروي $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 = 25$ اكتب معادلة

الدائرتين اللتين توازيان المستوي $x + y + z - 4 = 0$ ونصف قطريهما 4 ثم اكتب معادلة المستويين المماسين الموازيين لهذا المستوي.

23 - على المستقيم المار بالنقطتين (1,1,1) والمبدأ أوجد نقطة أطوال المماسات المنشأة

منها حتى نقطة التماس للسطح الكروي $(x - 4)^2 + (y - 5)^2 + (z - 6)^2 = 25$ تكون متساوية.

24 - أوجد المحل الهندسي لمراكز الكرات الماسة لمستقيمين معادلتهما :

$$\frac{x - x_i}{\ell_i} = \frac{y - y_i}{m_i} = \frac{z - z_i}{n_i} \quad (i = 1, 2)$$

و $\{\ell_i, m_i, n_i\}$ متجهات واحدة .

25 - اكتب معادلة السطح الكروي الحاوي للدائرتين :

$$y^2 + z^2 = 25 \quad x = 2 \quad (\text{أ})$$

$$y^2 + z^2 = 9 \quad x = 0 \quad (\text{ب})$$

26 - أوجد معادلة الكرة المارة بالدائرتين :

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 25 \quad z = 1 \quad (\text{أ})$$

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 3)^2 = 9 \quad z = 4$$

$$y = 0, \quad x^2 + z^2 = 9, \quad x^2 + z^2 = 25, \quad y = 2 \quad (\text{ب})$$

الفصل الخامس

السطوح والمنحنيات

1 - المدخل للسطوح :

1-1 تمهيد :

قبل أن نبدأ بدراسة سطوح الدرجة الثانية سنعرض بعض التعاريف والمفاهيم المتعلقة بالسطوح بشكلها العام والتي تساعدنا في دراسة السطح والتعرف على شكله وهي المسألة التي ستكون محور اهتمامنا. لذلك لا بد لنا بداية من فرض جملة متعامدة منظمة مثل $oxyz$ ثابتة لیتاح لنا دراسة السطوح تحليلياً وذلك بصياغة القاعدة التي تنظم مجموعة نقاطه على شكل علاقة تحليلية تربط بين إحداثيات نقاطه وعندها نقوم بدراسة تلك العلاقة لنصل من خلالها لمعرفة صفات السطح المفروض وميزاته ومن ثم تمثيله هندسياً.

تعريف: السطح في الفراغ الثلاثي هو مجموعة نقاط تحقق إحداثياتها علاقة مثل :

$$f(x, y, z) = 0 \quad (1-1)$$

ندعوها المعادلة الديكارتية للسطح. هذا يعني إن كانت $M(x, y, z)$ تنتمي إلى السطح فإن إحداثياتها يجب أن تحقق (1 - 1) وبالعكس أي ثلاثة قيم تحقق

(1 - 1) يجب أن تكون إحداثيات لنقطة تنتمي إلى السطح. نقول إن المعادلة (1-1) تمثل السطح S وإن السطح S هو بياناً للمعادلة (1-1). إذا أمكن كتابة المعادلة الديكارتية على الشكل $z = g(x, y)$ ، وبفرض $x = u$ و $y = v$ نحصل على المعادلات :

$$z = g(u, v) \quad \text{و} \quad y = v \quad \text{و} \quad x = u$$

التي ندعوها المعادلات الوسيطة للسطح وبالعكس لو كانت المعادلات الوسيطة للسطح:

$$z = f_3(u, v) \quad \text{و} \quad y = f_2(u, v) \quad \text{و} \quad x = f_1(u, v)$$

وأمكن حذف u و v لحصلنا على المعادلة الديكارتية له.

نجد بتزيع المعادلات التالية وجمعها :

$$x = a \sin u \cos v$$

$$y = a \sin u \sin v$$

$$z = a \cos u$$

علاقة لا تحوي أيّاً من الوسيطين u و v :

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

فالعلاقات السابقة هي المعادلات الوسيطة لكرة مركزها O ونصف قطرها a .

بفرض أن $f_1(x, y, z) = 0$ و $f_2(x, y, z) = 0$ معادلتا السطحين S_1 و S_2

المتقاطعين في المنحني Γ . فإننا نعبّر عن المعادلات الديكارتية لهذا المنحني بجملة

المعادلتين :

$$f_1(x, y, z) = 0 \quad , \quad f_2(x, y, z) = 0 \quad (2-1)$$

وللحصول على المعادلات الوسيطة للمنحنى Γ ، نبدل أحد المتحولين
بوسيط مثل t ونعين الحل المشترك للجملة (2-1) بالنسبة للمتحولين الباقيين بدلالة
 t لنحصل على ثلاث معادلات بوسيط t .

$$x = f(t) , y = g(t) , z = h(t) \quad (3-1)$$

ندعو هذه الجملة بالمعادلات الوسيطة لـ Γ .
وبالعكس إذا أمكن حساب t من إحدى المعادلات السابقة وتم تعويضها في
المعادلتين الباقيتين نحصل جملة معادلتين من الشكل (2-1) للمنحنى Γ .

ملاحظة (1): إذا تمكنا من الحصول على معادلة واحدة نتيجة حذف t من
المعادلات الوسيطة لمنحنى نكون قد حصلنا على معادلة سطح يحوي هذا المنحنى.
ملاحظة (2): إن المعادلات الوسيطة (3-1) لمنحنى Γ ليست وحيدة
ونستطيع إيجاد عدد لا نهائي من جمل المعادلات من النمط (3-1) والتي كل منها
تمثل Γ وسيطياً.

مثال : لاحظ أن أيّاً من الجملتين :

$$x = \frac{3}{4} , y = t , z = \sqrt{\frac{7}{16} - t^2}$$

$$x = \frac{3}{4} , y = \frac{\sqrt{7}}{4} \sin t , z = \frac{\sqrt{7}}{4} \cos t \quad \text{و}$$

تعد تمثيلاً وسيطياً للدائرة γ التي معادلاتها الديكارتية :

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

$$(x-2)^2 + y^2 + z^2 = 2$$

وإن أيّاً من المعادلتين التاليتين تنتج من حذف t من المعادلات الوسيطة.

$$(x-1)^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{2}$$

$$x + y^2 + z^2 = \frac{19}{10}$$

فكل منها تمثل سطحاً يحوي Γ .

ملاحظة (3) : بالنظر إلى المعادلات الديكارتية (2-1) للمنحني Γ نرى وضوحاً لو استطعنا حذف أحد المتحولات مثل z لحصلنا على معادلة لا تتضمن z :

$$f_2(x, y, g(x, y)) = 0$$

وهذه المعادلة تمثل سطحاً Σ في الفراغ، فلو كانت $M \in \Gamma$ نقطة اختيارية من Γ فهي تحقق الجملة (2-1) وبالتالي فهي تحقق معادلة Σ كذلك أي $M \in \Gamma$ وهذا يقودنا إلى ما يلي :

تمثل المعادلة الناتجة عن حذف أحد المتحولات من المعادلات الديكارتية لمنحني Γ سطحاً يحوي هذا المنحني.

فإذا عدنا للمثال السابق وحذفنا x مثلاً نجد المعادلة :

$$y^2 + z^2 = \frac{7}{10}$$

وهي تمثل سطحاً أسطوانياً عمودياً على oyz ويحوي الدائرة المفروضة وإذا حذفنا y, z نجد $x = \frac{3}{4}$ التي تمثل مستوياً عمودياً على ox ويحوي الدائرة γ أيضاً.

2 - 1 غياب المتحولات من معادلة السطح :

مبرهنة: إن كانت معادلة السطح S ، $f(x, y) = 0$ لا تحوي المتحول z فهي تمثل سطحاً أسطوانياً يولده مستقيم يتحرك موازياً لـ oz لرسم نقطة تقاطعه مع oxy المنحني $f(x, y) = 0$.

الإثبات :

بفرض $M(x, y, z) \in S$ نقطة اختيارية من S فهي تنتمي للمستقيم :

$$D : X=x , Y=y , Z=t$$

المولد للسطح الأسطواني (الذي دليله $f(x, y) = 0$) وبالتالي فإن M نقطة منه.

وبالعكس لو كانت $M(x, y, z)$ تنتمي إلى السطح الأسطواني فهي تقع على أحد

مولداته ذات المعادلة $X=x, Y=y, Z=t$ حيث $f(x, y) = 0$ أي أن $M \in S$.

إذا كانت معادلة سطح S لا تحوي إلا متحولاً واحداً $f(z) = 0$ وقابلة للحل

فإن السطح هو مجموعة المستويات الموازية لـ oxy والتي معادلاتها $z = c_1, \dots,$

حيث $z = c_n$ حيث $c_1, c_2, \dots, c_n$ هي حلول المعادلة $f(z) = 0$.

3 - 1 العاظر بالنسبة للمحاور والمستويات الإحداثية :

نقول إن النقطتين M, M' متناظرتان بالنسبة لمستوي π إذا كان المستوي π

عمودياً على القطعة MM' في منتصفها، وتكون متناظرتين بالنسبة لمستقيم D إذا

كانت القطعة المستقيمة MM' تقع في مستوي، يكون المستقيم D عمودياً عليه في

منتصفها. بناءً على هذه التعاريف وبفرض S سطحاً ما، يكون هذا السطح متناظراً

بالنسبة للمستوي oxy إذا تحقق ما يلي :

$$M(x, y, -z) \in S \Leftrightarrow M(x, y, z) \in S$$

فإذا فرضنا $f(x, y, z) = 0$ معادلة السطح S يكون :

$$f(x, y, -z) = 0 \Leftrightarrow f(x, y, z) = 0$$

بمعنى آخر الشرط اللازم والكافي لكي يكون السطح متناظراً بالنسبة لـ oxy

هو أن لا تتبدل صيغة التابع f إذا بدلنا z بـ $-z$ وبشكل مشابه نقول إن السطح

متناظر بالنسبة لـ oxz و oyz إذا لم تتبدل معادلة السطح نتيجة تعويض $x \rightarrow -x$ و $y \rightarrow -y$.

وكما هو واضح لكي يكون سطح متناظراً بالنسبة للمحور oz يجب أن يكون متناظراً بالنسبة لـ oxz و oyz وعندها يكون الشرط اللازم والكافي هو ألا تتبدل المعادلة $f=0$ نتيجة تبديل $y \rightarrow -y$ و $x \rightarrow -x$ وبشكل مشابه يكون السطح متناظراً بالنسبة لـ oxy إذا فقط إذا لم تتبدل معادلة السطح نتيجة تبديل $y \rightarrow -y$ و $z \rightarrow -z$ و $x \rightarrow -x$.

نقول إن السطح S متناظر بالنسبة لمبدأ الإحداثيات إذا فقط إذا كان متناظراً بالنسبة للمستويات الإحداثية ويصبح الشرط اللازم والكافي هو : ألا تتغير معادلة السطح $f=0$ إذا بدلنا $x \rightarrow -x$ و $y \rightarrow -y$ و $z \rightarrow -z$.

تطبيق : أوجد الشرط اللازم والكافي الذي يجب أن يتحقق لكي يكون السطح S بيان المعادلة $f(x, y, z) = 0$ متناظراً بالنسبة للمستوي:

$$ax + by + cz + d = 0$$

الحل : لتبسيط الحل نفرض أن : $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ وهذا لا يقلل من عمومية المسألة، لأنه كما نعلم إذا لم يتحقق هذا الشرط وقسمنا حدود المعادلة على :

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

تبقى المعادلة القائمة تمثل المستوي نفسه.

إذا فرضنا $M(x', y', z') = 0$ نقطة اختيارية من السطح S أي $f(x', y', z') = 0$ عندها يكون الشرط المطلوب هو أن تنتمي نظيرتها بالنسبة لـ π إلى السطح. فإذا رمزنا بـ $M''(x'', y'', z'')$ لتلك النقطة وكتبنا معادلة المستقيم D الناظم على π والمار من M' :

$$x = x' + at, \quad y = y' + bt, \quad z = z' + ct$$

نجد أن 0 و t_0 و t'' قيم التحول t الموافقة للنقاط M' و M_0 و M'' على الترتيب، حيث M_0 نقطة تقاطع D مع π وهي تقع في منتصف $M'M''$ لذلك :

$$\frac{x' + x' + at''}{2} = x' + at_0 \Rightarrow t'' = 2t_0$$

نعين t_0 بتقاطع D مع π فنجد :

$$a(x' + at_0) + b(y' + bt_0) + c(z' + ct_0) + d = 0$$

$$t'' = 2t_0 = -2(ax' + by' + cz' + d) \quad \text{و}$$

وعندما تكون :

$$M''(x' + at'', y' + bt'', z' + ct'')$$

ويكون الشرط المطلوب $M'' \in S$:

$$f(x' + at'', y' + bt'', z' + ct'') = 0$$

حيث :

$$t'' = -2(ax' + by' + cz' + d)$$

1 - 4 المستوي المماس والمستقيم الناقص لسطح ومنحن :

(1) السطح S معطى بمعادلاته الديكارتية.

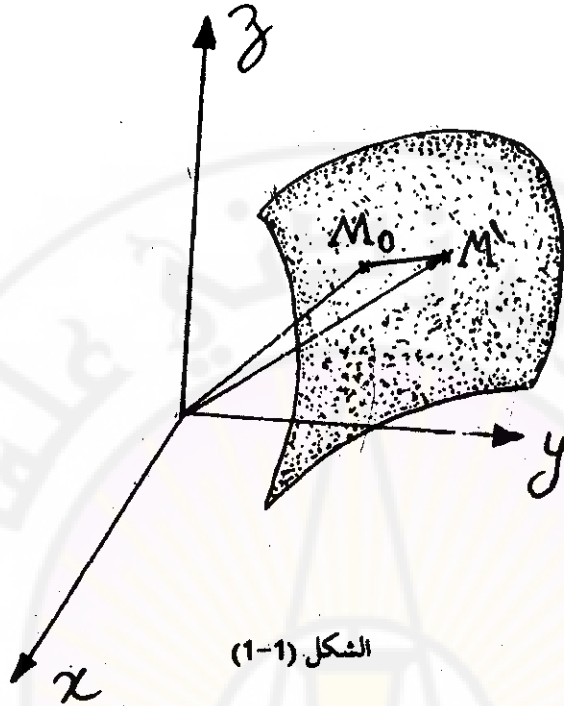
مبرهنة : بفرض $f(x, y, z) = 0$ المعادلة الديكارتية للسطح S . بفرض

$M_0(x_0, y_0, z_0)$ نقطة مثبتة من S . عندئذ تكون معادلة المستقيم الناقص عند M_0 :

$$\frac{x - x_0}{f'_x|_{M_0}} = \frac{y - y_0}{f'_y|_{M_0}} = \frac{z - z_0}{f'_z|_{M_0}} \quad (4-1)$$

ومعادلة المستوي المماس في النقطة نفسها:

$$f'_x|_{M_0} (x - x_0) + f'_y|_{M_0} (y - y_0) + f'_z|_{M_0} (z - z_0) = 0 \quad (5-1)$$



الإثبات : لتكن نقطة $M' (x', y', z')$ من S مجاورة لـ M_0 الشكل (1-1)، فتكون أمثال توجيه الشعاع :

$$\vec{M_0M'} (x' - x_0, y' - y_0, z' - z_0)$$

أو :

$$\vec{M_0M'} (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$$

فإذا جعلنا $M' \rightarrow M_0$ تقرب بلا حدود من M_0 فإن الشعاع $\vec{M_0M'}$ يصبح مماساً للسطح في M_0 أي :

$$\vec{M_0M'} \rightarrow \vec{V} (dx, dy, dz)$$

وحسب قانون التزايدات المخلوطة :

$$0 = f(M') - f(M_0) = \Delta f = \frac{\partial f}{\partial x}|_{M_0} dx + \frac{\partial f}{\partial y}|_{M_0} dy + \frac{\partial f}{\partial z}|_{M_0} dz$$

وهذا يعني أن :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \Big|_{M_0}$$

هي مركبات لمتجه $\vec{N}$ عمودي على المماس $\vec{V}(dx, dy, dz)$ في M_0
وبما أن M اختيارية فهذا المتجه عمودي على أي مماس للسطح في M_0 فهو
عمودي على المستوي المماس للسطح في تلك النقطة إذا :

$$\vec{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{M_0}, \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{M_0}, \frac{\partial f}{\partial z} \Big|_{M_0} \right)$$

هو متجه النازم للسطح في S_0 وبذلك نكون قد أثبتنا المطلوب.
مثال : اكتب معادلي المستوي المماس والمستقيم النازم للسطح :

$$x^3y + 3xy^2 + yz - 2 = 0 \text{ في النقطة } (0, 1, 2)$$

الحل :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \Big|_{M_0} = 3, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \Big|_{M_0} = 2, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) \Big|_{M_0} = 1$$

بالتبديل في (4-1) نجد معادلة المستوي المماس :

$$3x + 2(y - 1) + z - 2 = 0$$

أو :

$$3x + 2y + z - 4 = 0$$

وبالتبديل في (5-1) نحصل على معادلة المستقيم النازم :

$$\frac{x}{3} = \frac{y - 1}{2} = \frac{z - 2}{1}$$

(2) السطح S معطى بدلالة معادلاته الوسيطة .

مبرهنة : بفرض :

$$x = f_1(u, v), \quad y = f_2(u, v), \quad z = f_3(u, v)$$

هي المعادلات الوسيطة للسطح S و $M_0(x_0, y_0, z_0) \in S$ عندها تكون
معادلة المستقيم الناقص :

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \quad (6-1)$$

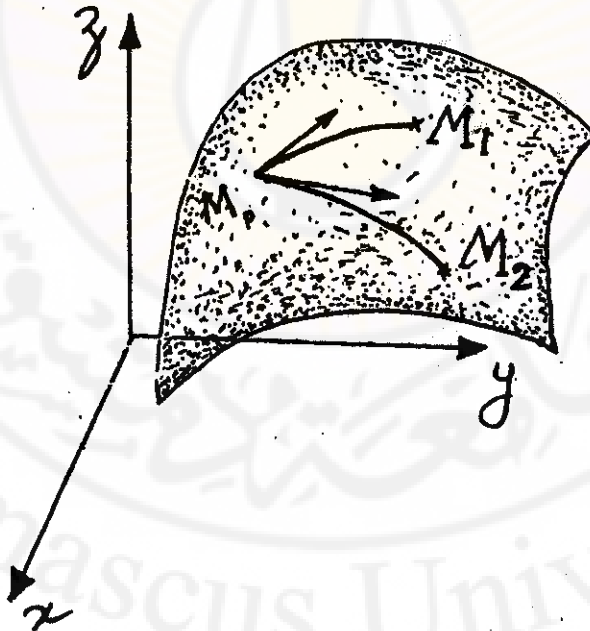
والمستوي المماس :

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \quad (7-1)$$

حيث :

$$\vec{V} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial u} \vec{i} + \frac{\partial f_2}{\partial u} \vec{j} + \frac{\partial f_3}{\partial u} \vec{k} \right) \Big|_{M_0}$$

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial v} \vec{i} + \frac{\partial f_2}{\partial v} \vec{j} + \frac{\partial f_3}{\partial v} \vec{k} \right) \Big|_{M_0}$$



الشكل (1-2)

الإثبات : لتكن M_1, M_2 نقطتين من السطح S محاورتين لـ M_0 الشكل (1-2)،
الأولى تنتج عنها بتغيير قيمة u فقط والثانية تنتج عنها بتغيير قيمة v فقط فتكون
مركبات الشعاع :

$$\vec{M_0 M_1} (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$$

فإذا رمزنا بـ $\vec{T}_1(dx, dy, dz)$ لمماس مسار M_1 في النقطة M_0 والذي مركباته
تتعلق فقط بالمتحول u و بـ M_0 وجعلنا M_1 تسعى إلى M_0 بلا حدود نجد أن :

$$\lim_{M_1 \rightarrow M_0} \vec{M_0 M_1} = \vec{T}_1 (dx, dy, dz)$$

$$\vec{T}_1 \left(\frac{\partial f_1}{\partial u} \Big|_{M_0} du, \frac{\partial f_2}{\partial u} \Big|_{M_0} du, \frac{\partial f_3}{\partial u} \Big|_{M_0} du \right)$$

أو :

$$\vec{T}_1 \left(\frac{\partial f_1}{\partial u}, \frac{\partial f_2}{\partial u}, \frac{\partial f_3}{\partial u} \right) \Big|_{M_0}$$

وبالطريقة نفسها نجد مركبات متجه المماس لمسار M_2 هي :

$$\vec{T}_2 \left(\frac{\partial f_1}{\partial v}, \frac{\partial f_2}{\partial v}, \frac{\partial f_3}{\partial v} \right) \Big|_{M_0}$$

وعندها ناظم المستوي المماس في M_0 هو :

$$\vec{V} = \vec{T}_1 \times \vec{T}_2$$

وبهذا يتم المطلوب.

نتيجة : بفرض Γ منحنٍ معطاة معادلاته الديكارتية :

$$\Gamma : g(x, y, z) = 0, \quad f(x, y, z) = 0$$

وبفرض $M \in \Gamma$ فإذا رمزنا بـ $\vec{T}$ لمنحنى المستقيم المماس له في M وأدركنا أن

M تنتمي إلى السطحين S, Σ المعينين بمعادلاتهما الديكارتية $f = 0, g = 0$ وأن

المماس لـ Γ هو الفصل المشترك للمستويين المماسين π و Δ للسطحين S , Σ على الترتيب والمعرفين بالبرهنة الأولى، نجد أن منحى المماس $\vec{T}$ هو منحى الفصل المشترك لـ π و Δ وبالتالي فهو الجداء الخارجي لمنحىي الناظمين :

$$\vec{T} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k} \right) \Big|_{M_0} \times \left(\frac{\partial g}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial g}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial g}{\partial z} \vec{k} \right) \Big|_{M_0} \quad (8-1)$$

فإذا رمزنا بـ $\vec{T}(a, b, c)$ لمركبات منحى المماس نكتب معادلة المستقيم المماس في M_0 :

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

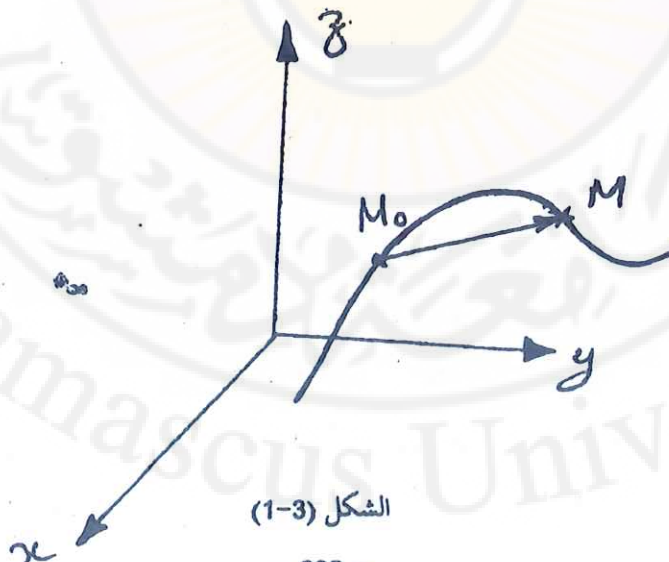
والمستوي الناظم في M_0 :

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

أما إذا كان المنحى Γ معطى وسيطياً :

$$\Gamma : x = f(t) , \quad y = g(t) , \quad z = h(t)$$

نفرض $M_0(x_0, y_0, z_0)$ نقطة ثانية من Γ ، $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z)$ نقطة أخرى من Γ قريبة من M_0 ، الشكل (1-3).



الشكل (1-3)

كما رأينا إذا رمزنا بـ $\vec{T}$ لمنحى المماس في M_0 يكون :

$$\vec{T} = \lim_{M \rightarrow M_0} \vec{M_0 M}$$

إذا :

$$\vec{T} = \lim_{M \rightarrow M_0} (\Delta x \vec{i} + \Delta y \vec{j} + \Delta z \vec{k})$$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta x}{\Delta t} \Delta t \vec{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t} \Delta t \vec{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t} \Delta t \vec{k} \right) \Big|_{M_0}$$

وإذا تذكرنا أن $\vec{T}$ ترمز لمنحى المماس في M_0 فيمكن التقسيم على Δt قبل

أخذ النهاية ولنجد :

$$\vec{T} = \left(\frac{df}{dt} \vec{i} + \frac{dg}{dt} \vec{j} + \frac{dh}{dt} \vec{k} \right) \Big|_{M_0} \quad (9-1)$$

عندها يمكن أن نكتب معادلة المستقيم المماس والمستوي الناظم في M_0 .

مثال : أكتب معادلتى المستقيم المماس والمستوي الناظم للمنحنى Γ :

$$x = 1 + \sin \varphi, \quad y = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \varphi, \quad z = -1 + \sqrt{2} \cos \varphi$$

في كلتا الحالتين :

(1) في النقطة $(1, 0, \sqrt{2} - 1)$.

(2) المستوي الناظم يوازي oxy .

الحل :

(1) واضح أن قيمة φ الموافقة لـ M_0 هي $\varphi = 0$ وعندها من (9-1) :

$$\vec{T} \left(1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right)$$

أكتب معادلة المستقيم الذي يمر من $(1, 0, \sqrt{2} - 1)$ ويوازي $\vec{T}$

$$x - \sqrt{2} y - 1 = 0, \quad z - \sqrt{2} + 1 = 0$$

وهي معادلة المستقيم المماس لـ Γ في النقطة المفروضة.

والمستوي الناظم هو المستوي الذي يمر من النقطة المفروضة ومنحى ناظمه

: $\bar{T}$

$$x + \frac{\sqrt{2}}{2} y - 1 = 0$$

(2) نكتب معادلة المستوي الناظم في نقطة اختيارية منه $M_0(x_0, y_0, z_0)$:

$$\cos \varphi (x - x_0) + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \varphi (y - y_0) - \sqrt{2} \sin \varphi (z - z_0) = 0$$

تكون هذه المعادلة معادلة مستوي يوازي oxy إذا لم نحول إلا متحولاً واحداً هو

$z = c$ أي z وهذا يتحقق من أجل $\varphi = \pi/2$ أو $\varphi = 3\pi/2$ وتأخذ معادلة المستوي الشكل :

$$z = z_0$$

ومن المعادلات الوسيطة للمنحني نجد أن: $z_0 = -1$ فتصبح معادلة المستوي :

$$z + 1 = 0$$

أما المستقيم المماس فهو يمر من النقطة $(2, \frac{\sqrt{2}}{2}, -1)$ ويوازي المنحى

$\bar{T}(0, 0, 1)$ لذا تأخذ معادلته الشكل :

$$x = 2, \quad y = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

2 - سطح الدرجة الثانية :

2 - 1 التعريف بالسطوح :

نقول عن سطح S أنه من الدرجة الثانية إذا أخذت معادلته الشكل التالي :

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + d = 0 \quad (1-2)$$

حيث جميع الأمثال أعداداً حقيقية بشرط أن يكون واحد من الستة الأولى على الأقل لا يساوي الصفر، ولأنها معادلة من الدرجة الثانية دعونا ببيانها بسطح الدرجة الثانية. ندعو الحدود الثلاثة الأولى بالحدود المربعة والحدود الثلاثة التالية بالحدود المستطيلة بينما الحدود الثلاثة التالية بالحدود الخطية والحد الأخير ندعوه الحد الثابت.

كما قد نوهنا آنفاً بأن موضوع معرفة شكل السطح S المفروضة معادلته هو الموضوع الأهم. ومما لا شك فيه تعيين مركز تناظره إنه كان موجوداً يساعد في تحديد طبيعة هذا السطح، لهذا سنتبحث في الفقرة التالية مسألة تعيين مركز التناظر بعد التحقق من وجوده.

2 - 2 مركز تناظر سطح الدرجة الثانية :

نعرض $C(\alpha, \beta, \gamma)$ مركز للسطح S بيان المعادلة (2-1) وبإجراء انسحاب للحملة xyz ليصبح C مركز التناظر مبدأ للحملة الجديدة $CXYZ$. نكتب معادلة S بالنسبة لها وذلك بعد كتابة دساتير التحويل :

$$x = \alpha + X$$

$$y = \beta + Y \quad (2-2)$$

$$z = \gamma + Z$$

فنحصل على المعادلة التالية :

$$\begin{aligned} & a_{11} X^2 + a_{22} Y^2 + a_{33} Z^2 + 2 a_{12} XY + 2 a_{13} XZ + 2 a_{23} YZ + \\ & + 2 (a_{11} \alpha + a_{12} \beta + a_{13} \gamma + a_1) X + 2 (a_{22} \beta + a_{12} \alpha + a_{23} \gamma + a_2) Y + \\ & + 2 (a_{33} \gamma + a_{13} \alpha + a_{23} \beta + a_3) Z + f(\alpha, \beta, \gamma) = 0 \end{aligned}$$

حيث استخدمنا $f(x, y, z)$ للرمز للطرف الأيسر لمعادلة السطح. ما دام مبدأ الإحداثيات الجديد هو مركز تناظر للسطح S فلا يجب أن تتغير معادلته إذا بدلنا

(z, y, x) - z, - y, - x على الترتيب وهذا يتطلب اختفاء الحدود الخطية في المعادلة السابقة ، أي سنشترط :

$$a_{11} \alpha + a_{12} \beta + a_{13} \gamma + a_1 = 0$$

$$a_{12} \alpha + a_{22} \beta + a_{23} \gamma + a_2 = 0 \quad (3-2)$$

$$a_{13} \alpha + a_{23} \beta + a_{33} \gamma + a_3 = 0$$

أو :

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{M=C} &= 0 \\ \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{M=C} &= 0 \\ \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)_{M=C} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4-2)$$

وهنا إذا فرضنا (3-2) جملة معادلات بالمتحولات (α, β, γ) وكانت تملك حلاً وحيداً، نقول إن للسطح S مركزاً تناظرياً وحيداً (إحداثياته هو حل الجملة)، أما إن كانت مجموعة الحلول تمثل مستقيماً فإن جميع نقاط هذا المستقيم مراكز تناظر للسطح وهذا يتحقق عندما تمثل معادلتان من (3-2) مستويين منطبقين. وتمثل المعادلة الثالثة مستويًا قاطعاً لهما، أو عندما تمثل المعادلات السابقة ثلاثة مستويات لها فصل مشترك واحد. أما إذا كان بيان حلول الجملة المذكورة هو مستوي فإن جميع نقاط ذلك المستوي مراكز تناظر للسطح وهذا يتحقق عندما تمثل المعادلات ثلاثة مستويات منطبقية. وإذا كانت الجملة غير قابلة للحل نقول إنه ليس للسطح مركز تناظر وهذا يتحقق مثلاً عندما تمثل (3-2) ثلاثة مستويات متوازية وليست منطبقية أو لكل مستويين فصل مشترك والفصول الثلاثة متوازية .

إذا رمزنا بـ :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_3 \end{pmatrix}$$

لمصفوفة الأمثال ومصفوفة الأمثال الموسعة للجملة (2-3) يمكن أن نصنف
وفق الجدول التالي طبيعة مركز السطح وذلك حسب رتب A, B والتي كما نعلم
تحدد طبيعة حلول الجملة .

طبيعة المركز	r (B)	r (A)
نقطة وحيدة	3	3
لا يوجد مراكز	3	2
	2	1
مستقيم	2	2
مستوي	1	1

حيث r (A) و r (B) ترمز لرتبة المصفوفتين A و B.

مثال (1) : عيّن مركز تناظر السطح S ببيان المعادلة :

$$x^2 + y^2 + 5z^2 + 6xy + 2xz + 2yz + 2x - 2y + 6z = 0$$

الحل : لكي يكون للسطح S مركز يجب أن تكون جملة المعادلات التالية

قابلة للحل:

$$f_x = 2x + 6y + 2z + 2 = 0$$

$$f_y = 6x + 2y + 2z - 2 = 0$$

$$f_z = 2x + 2y + 10z + 6 = 0$$

وببساطة نرى أن لهذه الجملة الحل الوحيد :

$$\alpha = \frac{2}{3}, \quad \beta = -\frac{1}{3}, \quad \gamma = -\frac{2}{3}$$

وهي إحداثيات مركز السطح S. لاحظ أن :

$$\text{ran } k(A) = \text{ran } k(B) = 3$$

مثال (2) : ما هي طبيعة مركز السطح :

$$z^2 + 4xy + 2xz + 2yz - 4y - 2z + 1 = 0$$

الحل : نكتب المعادلات (2-3) :

$$4y + 2z = 0$$

$$4x + 2z = 4$$

$$2x + 2y + 2z = 2$$

$$\text{ran } k(A) = \text{ran } k(B) = 2 \quad \text{يمكن أن نتحقق من :}$$

ومراكز تناظر السطح تشكل مستقيماً (الحل المشترك للمعادلات السابقة).

3 - 2 مقاطع سطح من الدرجة الثانية بمستوي :

قد تكون طريقة التعرف على السطح من خلال معرفتنا لمقاطع مع بعض المستويات المختارة هي الأسهل، وفي كل الأحوال تحديد طبيعة تلك المقاطع هو خطوة أساسية لمعرفة السطح المفروض. المبرهنة التالية من شأنها أن تبين الأشكال العامة لمقطع سطح من الدرجة الثانية بمستوي.

مبرهنة : أن مقطع سطح من الدرجة الثانية بأي مستوي لا يمكن أن يكون إلا قطعاً مخروطياً (ناقص - زائد - مكافئ) أو دائرة أو مستقيمين (متقاطعين، متوازيين، منطبقين) أو نقطة وحيدة أو المجموعة الخالية أو المستوي ذاته .

الإثبات :

بفرض S سطح من الدرجة الثانية ببيان المعادلة $f(x, y, z) = 0$ و $\pi(x, y, z) = 0$

مستوي ما. نجري انسحاباً ودوراناً للحملة xyz مناسبين لإنطباق المستوي OXY في الحملة الجديدة على المستوي π المفروض نكتب علاقات التحويل (انظر (3-11) من الفصل الأول):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \quad (5-2)$$

ثم نعوض x, y, z من هذه العلاقات في المعادلة (1-2) لنحصل على معادلة S بالنسبة للحملة الجديدة :

$$a'_{11}X^2 + a'_{22}Y^2 + a'_{33}Z^2 + a'_{12}XY + a'_{13}XZ + a'_{23}YZ + a'_1X + a'_2Y + a'_3Z + d' = 0$$

وما دام بيان المقطع المدروس بالنسبة للحملة الجديدة يقع في المستوي OXY إذاً نحصل على معادلته بجعل $Z = 0$ في المعادلة الناتجة، فنجد :

$$a'_{11}X^2 + a'_{22}Y^2 + a'_{12}XY + a'_1X + a'_2Y + d' = 0$$

معادلة من الدرجة الثانية (انظر منحنيات الدرجة الثانية) أما أن يكون $|a'_{11}| + |a'_{22}| + |a'_{33}| \neq 0$ فهي تمثل قطعاً مخروطياً أو دائرة أو مستقيمين (متقاطعين، متوازيين، منطبقين) أو نقطة وحيدة أو المجموعة الخالية أو تأخذ المعادلة الشكل :

$$a'_1X + a'_2Y + d' = 0$$

وعندها بيان المعادلة هو المستوي ذاته ، إذا :

$$a'_1 = a'_2 = d' = 0$$

أو المجموعة الخالية إذا :

$$a'_1 = a'_2 = 0 \quad d' \neq 0$$

أو مستقيماً غيماً عدا ذلك. وبهذا تكون المبرهنة صحيحة.

إن هذه المبرهنة أعطتنا تصوراً عاماً لطبيعة القطع وللتعرف على طبيعة المقطع

سندرس :

4 - 2 المساقط القائمة لمقطع سطح من الدرجة الثانية بمستوي:

ليكن Γ بيان مقطع السطح S (بيان المعادلة (2-1)) بالمستوي π بيان المعادلة:

$$ax + by + cz + d = 0$$

أي المعادلات الديكارتية لـ Γ هي :

$$ax + by + cz + d = 0 \quad , \quad f(x, y, z) = 0 \quad (6-2)$$

فإذا فرضنا $a \neq 0$ عندها يمكن كتابة x بدلالة y و z :

$$x = b'y + c'z + d'$$

وبالتبديل في معادلة السطح نحصل على المعادلة التالية في المتحولين y, z :

$$f(b'y + c'z + d', y, z) = 0 \quad (7-2)$$

نلاحظ :

1 - Σ : بيان المعادلة (7-2) هو سطح يحوي Γ (انظر الملاحظة (3)). أي :

$$\Gamma = \pi \cap S = \pi \cap \Sigma = S \cap \Sigma$$

2 - بيان المعادلة (7-2) هو سطح أسطوانى عمودي على oyz .

3 - بيان الجملة :

$$f(b'y + c'z + d', y, z) = 0 \quad ; \quad x = 0$$

هو منحنى تقاطع Σ مع المستوي oyz والجملة تمثل مسقط Γ القائم على oyz .

أيضاً الجملتان :

$$f(x, a_1x + c_1z + d_1, z) = 0 \quad , \quad y = 0$$

$$f(x, y, a_2x + b_2y + d_2) = 0 \quad , \quad z = 0$$

تمثلان مسقطي Γ القائمين على oxy و oxz على الترتيب.

3 - المعادلات المختزلة لسطوح الدرجة الثانية :

3 - 1 مجسم القطع الناقص :

تعريف : مجسم القطع الناقص هو سطح من الدرجة الثانية معادلته :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (1-3)$$

حيث : a, b, c أعداد حقيقية موجبة تماماً، منتهية، ليست متساوية جميعها ندعوها أنصاف محاور المجسم.

للتعرف على شكله نلاحظ ما يلي:

(أ) لا تتغير معادلة السطح إذا بدلنا x بـ $-x$ أو y بـ $-y$ أو z بـ $-z$. لذا فإن السطح S متناظر بالنسبة للمستويات الإحداثية فهو متناظر كذلك بالنسبة للمحاور الإحداثية وبالتالي بالنسبة لمبدأ الإحداثيات.

(ب) مهما كانت $M(x, y, z) \in S$ فإن :

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{d^2} \leq \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad d = \max(a, b, c)$$

أي :

$$|\vec{OM}| \leq d$$

وهذا يعني أن السطح S يقع ضمن كرة نصف قطرها d .

(ج) لندرس مقاطعه بمستويات موازية للمستويات الإحداثية. فنرى مقاطعه

بالمستويات $z = t$ هي المنحنيات المثلثة بالمعادلات :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad z = t$$

والمعادلة الناتجة من حذف z :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{c^2 - t^2}{c^2}, \quad z = 0$$

تمثل المساقط القائمة للمنحنيات على oxy والتي هي عبارة عن المجموعة

الخالية أو نقطة وحيدة $(0, 0, \pm c)$ أو قطع ناقص وذلك عندما :

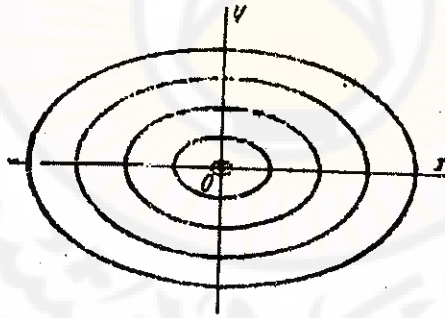
$$|z| < c \quad \text{أو} \quad z = \pm c \quad \text{أو} \quad |z| > c$$

على الترتيب.

لنرسم هذه المنحنيات من أجل $|z| < c$.

$$\left(\frac{x}{a^*(t)} \right)^2 + \left(\frac{y}{b^*(t)} \right)^2 = 1 \quad (2-3)$$

$$(a^*, b^*) = \left(a \sqrt{1 - \left(\frac{t}{c} \right)^2}, b \sqrt{1 - \left(\frac{t}{c} \right)^2} \right)$$



الشكل (3-1)

يتبين من هذه المناقشة أن المسقط على oxy يكون المجموعة الخالية عندما $z < -c$

ثم مبدأ الإحداثيات من أجل $z = -c$ و ثم يصبح قطعاً ناقصاً بيان المعادلة (2-3)

أخذاً بالاتساع مع اقتراب المستوي $z = t$ من المستوي oxy ليبلغ عندها شكله الأعظمي ثم يقلص ليصبح مرة أخرى نقطة وحيدة مع ابتعاد $z = t$ عن oxy واقترابه من $z = c$ ثم يصبح مجموعة خالية (الشكل (3-1)، ونظراً لتناظر الجسم فتعاد المناقشة ذاتها عند دراسة مقاطعه مع مستويات مثل $x = g$ أو $y = h$ وتحدد الإشارة هنا إلى أنه إذا تساوى وسيطان من a, b, c وليكن $a = b = c$.

تأخذ المعادلة (1-3) الشكل :

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

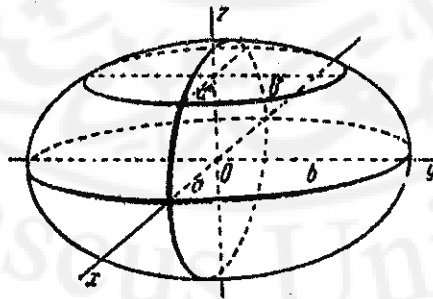
ويدعى عندها بمحسم قطع ناقص دوراني لأنه ينتج منه دوران أي من القطعين :

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 , \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

حول المحور oz .

نلاحظ أن مساقط مقاطعه بالمستويات $z = t$ ($|t| < c$) هي دوائر في المستوي oxy ، لاحظ أيضاً إذا تساوت الوسطاء $a = b = c$ يصبح بيان المعادلة كرة مركزها المبدأ ونصف قطرها a .

من هذه الدراسة نستنتج أن محسم القطع الناقص عبارة عن شكل فراغي يضيوي مركزه مبدأ الإحداثيات ومحاوره تنطبق على المحاور الإحداثية وبينه الشكل (3-2).



الشكل (3-2)

ملاحظة (1) : ندعو ببيان المعادلة :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1 \quad (3-3)$$

التي لا تتحقق مهما كانت x, y, z بمجسم قطع ناقص تخيلي.

مثال : ما هو بيان كل من المعادلتين :

$$9x^2 + 36y^2 + 4z^2 - 18x + 144y + 117 = 0$$

$$2x^2 + 3y^2 + z^2 - 6y + 4z + 13 = 0$$

الحل : بإكمال حدود المعادلة الأولى إلى مربعات كاملة وتقسيمها على

الطرف الأيمن الثابت نجد :

$$\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{1} + \frac{z^2}{9} = 1$$

وهذه المعادلة تمثل مجسم قطع ناقص مركزه $C(1, 2, 0)$ وأنصاف محاوره

. 2, 1, 3

نصلح المعادلة الثانية بالطريقة ذاتها فنجد :

$$\frac{x^2}{3} + \frac{(y-1)^2}{2} + \frac{(z+2)^2}{6} = -1$$

وهي تمثل المجموعة الخالية أو مجسم قطع ناقص وهمي.

2 - 3 مجسم القطع الزائد وحيد الفرع :

نعرف مجسم القطع الزائد ذي الفرع الواحد بأنه سطح من الدرجة الثانية

لمعادلته الشكل التالي :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad a, b, c > 0 \quad (4-3)$$

نكرر الإجراءات السابقة للتعرف على هذا السطح :

(أ) نلاحظ أن المعادلة لا تتغير عند تبديل x و y و z بـ $-x$ و $-y$ و $-z$ - على الترتيب فالسطح متناظر بالنسبة للمستويات والمحاور الإحداثية وكذلك بالنسبة لمبدأ الإحداثيات.

(ب) مقاطعه بمستويات توازي المستويات الإحداثية: إن مقطع السطح بالمستويات $z = t$ هي المنحنيات بيان المعادلتين :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad z = t$$

ومساقطها على oxy هي بيان المعادلة التالية :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{c^2 + t^2}{c^2}$$

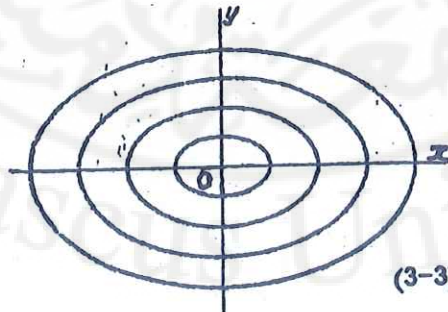
أو :

$$\frac{x^2}{a^{*2}} + \frac{y^2}{b^{*2}} = 1 \quad (5-3)$$

وهي معادلات قطوع ناقصة مركزها المبدأ وأنصاف أقطارها:

$$(a^*, b^*) = \left(a \sqrt{1 + \frac{t^2}{c^2}}, b \sqrt{1 + \frac{t^2}{c^2}} \right)$$

وذلك من أجل أي t ، لكن a^*, b^* تتزايدان مع بعد المستوي $z = t$ عن oxy وتتناقصان لتبلغا النهاية الصغرى $(a, b) = (a^*, b^*)$ عندما ينطبق المستوي $z = t$ على المستوي oxy . انظر الشكل (3-3) الذي يمثل هذه المنحنيات .



الشكل (3-3)

(ج) لنقطع السطح بالمستويات $x = t$. نعوض في المعادلة (3-4) x بـ t فنحصل

على المعادلة :

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{t^2}{a^2}$$

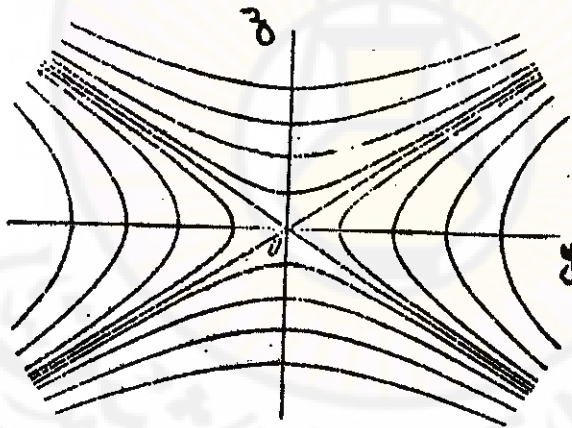
فإذا كانت $|t| < a$ فالمعادلة الناتجة :

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (6-3)$$

تمثل قطعاً زائدياً مركزها المبدأ، أنصاف محاورها :

$$(b^*, c^*) = \left(b \sqrt{1 - \frac{t^2}{a^2}}, c \sqrt{1 - \frac{t^2}{a^2}} \right)$$

وهي ذات محاور مشتركة، محورها القاطعة oy . كما في الشكل (3-4).



الشكل (3-4)

أما إن كانت $|t| = a$ فالمعادلة المساقط هي :

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$$

$$(cy - bz)(cy + bz) = 0 \quad (7-3)$$

وهي تمثل مستقيمين في المستوي oyz متقاطعين في المبدأ. بينما المقاطع فهي كذلك مستقيمين لكن معادلاتهما :

$$cy - bz = 0 \quad , \quad x = a$$

$$cy + bz = 0 \quad , \quad x = a$$

وعندما $|t| > a$ تأخذ معادلة المساقط الشكل التالي :

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (8-3)$$

حيث :

$$(c^*, b^*) = \left(c \sqrt{\frac{t^2}{a^2} - 1}, b \sqrt{\frac{t^2}{a^2} - 1} \right)$$

وهي تمثل قطوعاً زائدية مركزها المبدأ ومحاورها مشتركة . المحور القاطع هو oz . من هذه المناقشة نقول إن مقاطع السطح بالمستوي $x = t$ هي قطوع زائدية تقع في المستويات $x = t$ ومحاورها القاطعة توازي المحور oy وذلك عندما $-a < t < a$ وهي مستقيمان متقاطعان في كل من المستويين $x = \pm a$ وقطوع زائدية تقع في المستوي $x = t$ ومحاورها القاطعة توازي oz من أجل $-a < t < a$.

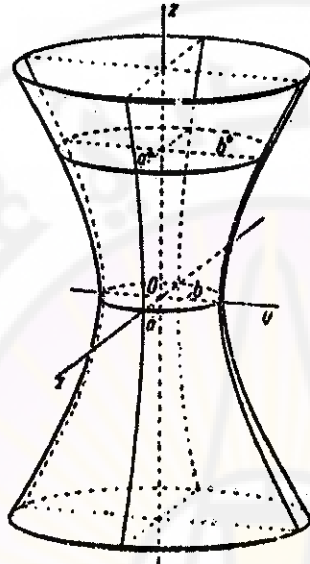
لو قطعنا السطح بالمستويات $y = t$ حصلنا على نتائج مشابهة.

نستنتج مما تقدم أن مجسم القطع الزائد ذي الفرع الواحد عبارة عن سطح فراغي له شكل أنبوب محوره oz ومقاطعته الموازية لـ oxy هي قطوع ناقصة أضيقها يقع في المستوي oxy وتزداد اتساعاً كلما ابتعدنا عنه. الشكل (3-5).

ندعو a, b, c بأنصاف محاور المجسم إذا كانت $a = b$ ندعوه بمجسم قطع زائد دوراني وعندما مقاطعه تصبح دوائر مراكزها على oz ويتولد من دوران أحد القطعين الزائدين:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

حول المحور oz.



الشكل (3-5)

مثال : بين نوع السطح S بيان المعادلة :

$$2x^2 - 3y^2 + 6z^2 - 12x - 6y - 27 = 0$$

الحل : بعد الإصلاح نجد :

$$\frac{(x - 3)^2}{21} - \frac{(y + 1)^2}{14} + \frac{z^2}{7} = 1$$

وهي تمثل مجسم قطع زائد وحيد الفرع مركزه (3, -1, 0) وأنصاف محاوره:

$$\sqrt{21}, \quad \sqrt{14}, \quad \sqrt{7}$$

ومحوره غير القاطع يوازي oy ومعادلته :

$$x = 3, \quad z = 0$$

3-3 مجسم القطع الزائد ذي الفرعين :

مجسم القطع الزائد ذي الفرعين سطح من الدرجة الثانية لمعادلته الصيغة التالية:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \quad a, b, c > 0 \quad (9-3)$$

(أ) كما يتضح فالمعادلة لا تتغير إذا بدلنا x و y و z بـ $-x$ و $-y$ و $-z$ على الترتيب فالسطح متناظر بالنسبة للمحاور والمستويات الإحداثية وبالتالي بالنسبة لمبدأ الإحداثيات.

(ب) ندرس مقاطع السطح بالمستويات $z = t$ ، بالتعويض في (9-3) نجد أن مساقط هذه المقاطع على oxy هي بيان المعادلة :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{t^2}{c^2} = -1$$

وسنميز طبيعة هذه المنحنيات حسب وضع المستوي $z = t$. إذا كان $|t| < c$ فالمعادلة تمثل المجموعة الخالية والمستوي $z = t$ لا يتقاطع مع السطح وإذا كان $|t| = c$ فالمعادلة تمثل النقطة الوحيدة O بينما المقاطع عبارة عن النقطتين $P(0, 0, c)$ ، $P'(0, 0, -c)$ ، أما عندما $|t| > c$ تأخذ المعادلة المذكورة الشكل التالي:

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$$

حيث :

$$(\alpha, \beta) = \left(a \sqrt{\frac{t^2}{c^2} - 1}, b \sqrt{\frac{t^2}{c^2} - 1} \right)$$

وهي تمثل قطعاً ناقصاً أنصاف محاورها مرتبطة بـ t ، تتزايد طردياً مع $|t|$ بدءاً من $|t| = c$.

(ج) أما لو قطعنا السطح بالمستويات $x = t$ فنرى أن معادلة المساقط على المستوي oyz :

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{t^2}{a^2}$$

أو :

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (10-3)$$

$$(c^*, b^*) = \left(c \sqrt{1 + \frac{t^2}{a^2}}, b \sqrt{1 + \frac{t^2}{a^2}} \right)$$

فالمساقط هي قطع زائدية، لا تتغير محاورها بتغير المستوي $x = t$ (المحور القاطع هو oz)، ذراها تتباعد عن المركز مع ابتعاد المستوي القاطع $x = t$ عن oyz . من المعادلة (9-3) نرى أنه سنحصل على نتائج مشابهة لو قاطعنا السطح بمستويات موازية لـ oxz . مما تقدم نستنتج أن السطح يقع في المنطقة التالية $|z| > c$ من الفراغ وله ذروتان $P(0, 0, c)$, $P^*(0, 0, -c)$ فهو ذو فرعين متناظرين الفرع الأسفل عبارة عن قبة تقعها نحو الأسفل وذروتها $(0, 0, -c)$ ومحورها المحور oz ومقاطعها الموازية لـ oxy قطع ناقصة تتسع بابتعاد المقطع عن oxy . انظر الشكل (3-6). ندعو a, b, c أنصاف محاور الجسم وعندما $a = b$ يصبح مجسم قطع زائد دوراني يتولد من دوران القطع الزائد بيان المعادلة :

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

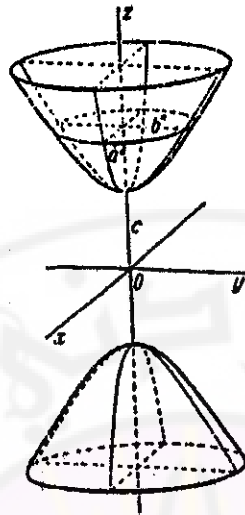
حول oz .

مثال : بين نوع بيان المعادلة التالية :

$$x^2 - 2y^2 - 2z^2 + 2x + 4y + 8z - 17 = 0$$

الحل : تتم إلى مربعات كاملة ، ونجعل الحد الثابت مساوياً + 1 :

$$-\frac{(x+1)^2}{8} + \frac{(y-1)^2}{4} + \frac{(z-2)^2}{4} = -1$$



الشكل (3-6)

فترى أنها من غط المعادلة (3-9) مع تبديل وضعي x و z ، بالمقارنة نرى أنها معادلة مجسم قطع زائدي ذي فرعين دوراني، مركزه $c(-1, 1, 2)$ ومحوره الدوراني موازي ox ويمر منه c ويشترك مع السطح بالنقطتين :

$$c(-1 - \sqrt{8}, 1, 2), c(-1 + \sqrt{8}, 1, 2)$$

3 - 4 الجسم المخروطي (مخروط الدرجة الثانية) :

نعرف مخروط الدرجة الثانية بأنه السطح الذي معادلته :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad (11-3)$$

حيث a, b, c أعداد حقيقية موجبة تماماً.

(أ) كما يتضح من المعادلة فإن مخروط الدرجة الثانية سطح متناظر بالنسبة للمحاور والمستويات الإحداثية ولبدأ الإحداثيات.

(ب) يتقاطع المستوي $z = t$ مع السطح بنقطة وحيدة من أجل $t = 0$ أو بقطع ناقص معادلته :

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \quad z = t \quad (12-3)$$

حيث :

$$(\alpha, \beta) = \left(\frac{a}{c} |t|, \frac{b}{c} |t| \right)$$

وذلك عندما $t \neq 0$ ، فنرى أن أنصاف المحاور α, β للمقطع تتناسب طردياً مع $|t|$ وتسمى إلى اللانهاية مع $|t|$.

(ج) أما المستوي $x = t$ من أجل $t = 0$ فيقطع السطح بمستقيمين بيان

المعادلة:

$$(cy - bz)(cy + bz) = 0 \quad x = 0$$

الواقعين في المستوي oyz والمتقاطعين في المبدأ. أما من أجل $t \neq 0$ تكون المقاطع قطعاً زائدة معادلاتها :

$$\frac{z^2}{\gamma^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \quad x = t$$

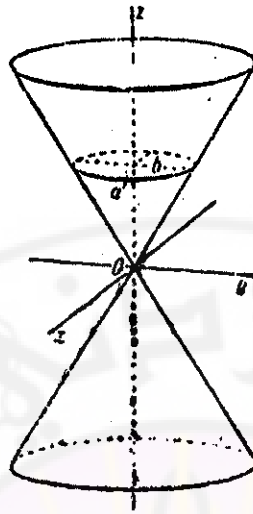
حيث :

$$(\gamma, \beta) = \left(\frac{c}{a} |t|, \frac{b}{a} |t| \right)$$

محاورها القاطعة توازي المحور oz وإحداثيات الذرى :

$$P(t, 0, \frac{c}{a} |t|) , P^*(t, 0, -\frac{c}{a} |t|)$$

يتضح من هذا العرض أن مخروط الدرجة الثانية بيان المعادلة (11-3) هو سطح مخروطي رأسه مبدأ الإحداثيات ومحوره الرئيسي oz ومقاطعته مع مستويات توازي oxy قطع ناقص تتزايد أنصاف محاورها مع ابتعاد المستويات عن oxy .
الشكل (3-7).



الشكل (3-7)

وعندما $a = b$ ندعوه مخروطاً دورانياً مقاطعه الموازية لـ oxy تصبح دوائر تقع مراكزها على المحور oz وأنصاف أقطارها $a \frac{|z|}{c}$.

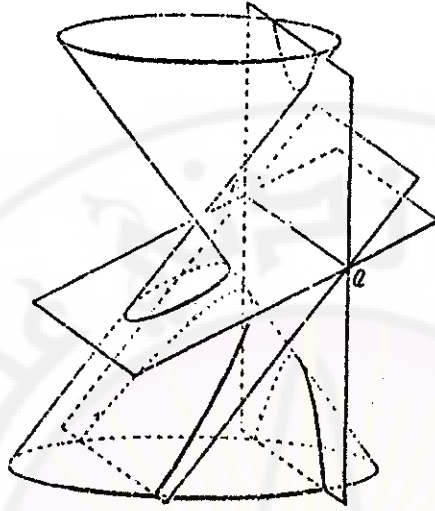
نلاحظ من الشكل (3-7) أن المخروط المفروض يتألف من جميع المستقيمات التي تمر من مبدأ الإحداثيات وتلاقي القطع الناقص بيان المعادلة :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad z = c \quad (13-3)$$

ويمكن القول عندها إنه يتولد من دوران مستقيم يمر من O ويستند على القطع السابق، ندعو المستقيم بالمولد والقطع بالدليل.

ملاحظة (2): إذا فرضنا π_1 و π_2 و π_3 ثلاثة مستويات تمر من مبدأ الإحداثيات، حيث الأول يقطع بيان المعادلة (13-3) بنقطتين والثاني بمسه والثالث لا يتقاطع معه، عندها نلاحظ أن مجموعة جميع المستويات التي لا تمر من المبدأ وتوازي π_1 تقطع السطح المخروطي بقطوع زائدة ومجموعة المستويات التي لا تمر من المبدأ وتوازي π_2 تقطع السطح المخروطي بقطوع مكافئة بينما تقطع المستويات التي

لا تمر من O وتوازي π_3 بقطاع ناقصة (الشكل 3-8). ومن هنا أتت تسمية القطاع المخروطية.



الشكل (3-8)

ملاحظة (3): إذا قارنا بين (3-5) و (3-12) معادلتين مقطعتين بحجم القطع الزائد وحيد الفرع والجسم المخروطي بالمستوي $z = t$ على الترتيب التي هي قطاع ناقصة تقع في المستوي $z = t$ أنصاف محاورها .

$$(a^*, b^*) = \left(a \sqrt{1 + \frac{t^2}{c^2}}, b \sqrt{1 + \frac{t^2}{c^2}} \right)$$

$$(\alpha, \beta) = \left(\frac{a}{c} |t|, \frac{b}{c} |t| \right)$$

نجد أنه مهما كانت $c > 0$ و $t < \infty$:

$$\alpha = \frac{a}{c} |t| < \frac{a}{c} \sqrt{t^2 + c^2} = a \sqrt{1 + \frac{t^2}{c^2}} = a^*$$

$$\beta = \frac{b}{c} |t| < \frac{b}{c} \sqrt{t^2 + c^2} = b \sqrt{1 + \frac{t^2}{c^2}} = b^*$$

وهذا يقودنا إلى أن القطع الناقص بيان المعادلة (3-5) في $z = t$ يحوي بيان المعادلة (3-12) وبالتالي فإن مجسم القطع الزائد وحيد الفرع بيان المعادلة (3-4) يحوي مخروط الدرجة الثانية بيان المعادلة (3-11).

(2) لنقارن بين المقاطع عندما $t \rightarrow \infty$ ، نحسب

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} (a^* - \alpha) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{a}{c} \sqrt{t^2 + c^2} - \frac{a}{c} |t| \right) \\ &= \frac{a}{c} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{t^2 + c^2} - |t|)(\sqrt{t^2 + c^2} + |t|)}{\sqrt{t^2 + c^2} + |t|} \\ &= \frac{a}{c} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{c^2}{\sqrt{t^2 + c^2} + |t|} = 0 \end{aligned}$$

أي المقطعان يتقاربان بلا حدود عندما $t \rightarrow \infty$ وبالتالي نستنتج أن مخروط الدرجة الثانية بيان المعادلة (3-11) سطح مقارب مجسم القطع الزائد وحيد الفرع بيان المعادلة (3-4).

ملاحظة (4) : ندعو بيان المعادلة :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$$

مجسماً مخروطياً تخيلياً .

3 - 5 مجسم القطع المكافئ الناقصي :

مجسم القطع المكافئ الناقصي هو سطح من الدرجة الثانية تمثله المعادلة :

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = \mp 2z \quad (3-14)$$

حيث a, b حقيقيان موجبان تماماً.

(أ) نلاحظ أن السطح متناظر بالنسبة للمستويين oxz و oyz فهو متناظر كذلك بالنسبة للمحور oz .

(ب) إذا كانت إشارة الطرف الأيمن موجبة فالمتحول z لا يمكن أن يكون إلا موجباً وإذا كانت الإشارة سالبة فالمتحول z يجب أن يكون سالباً.

(ج) نكتب معادلة مقطعه بالمستوي $z = t$:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad z = t$$

حيث:

$$(a'', b'') = (\sqrt{2a|t|}, \sqrt{2b|t|})$$

فترى أنها تمثل قطعاً ناقصاً أنصاف محاورها متناسبة طردياً مع $|t|$.

(د) أما معادلة المقطع بالمستوي $x = t$ فهي:

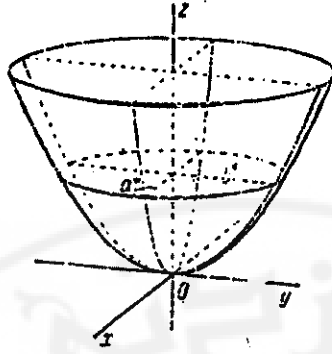
$$y^2 = \mp 2bz - \frac{b}{a} t^2, \quad x = t$$

حيث تمثل قطعاً مكافئاً محوره يوازي oz ومقعراً نحو الأعلى أو الأسفل إذا كانت الإشارة + أو - على الترتيب.

نلاحظ أن المقاطع لسطح من الشكل $y = t$ هي أيضاً قطعاً مكافئاً محاورها موازية لـ oz وبالتالي وبما سبق يمكن أن نستنتج أن مجسم القطع المكافئ الناقص هو سطح على شكل قبة أو قبة مقلوبة إذا كانت الإشارة - أو + على الترتيب تلامس المستوي oxy في المبدأ. وهو ذروة السطح، انظر الشكل (9-3). ندعو a, b وسيطي الجسم. عندما $a = b$ ندعوه مجسم قطع مكافئ دوراني حيث ينتج منه دوران القطع المكافئ:

$$\frac{x^2}{a} = \mp 2z, \quad y = 0$$

حول المحور oz .



الشكل (3-9)

مثال : بين نوع السطح بيان المعادلة التالية وحدد عناصره:

$$3y^2 + 2z^2 + 12x - 6y + 4z - 31 = 0$$

الحل : نجد بإصلاح المعادلة :

$$\frac{(y - 1)^2}{2} + \frac{(z + 1)^2}{3} = -2(x - 3)$$

بالمقارنة مع المعادلة النموذجية (3-14) نجد أنها تمثل مجسم قطع مكافئ ناقصي وسيطاه 2, 3 محوره يوازي ox ومقعر نحو الاتجاه السالب لـ ox ، وذروته $P(3, 1, -1)$ ومعادلة محوره $z = -1$ ، $y = 1$ ، المستوي $x = 3$ مماس له في الذروة.

3 - 6 مجسم القطع المكافئ الزائدي :

نعرفه بأنه السطح من الدرجة الثانية الذي تأخذ معادلته الشكل :

$$\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} = 2z \quad (3-15)$$

حيث $a \cdot b > 0$.

سندرس ذلك السطح بفرض $a \geq 0$ و $b > 0$.

(أ) السطح متناظر بالنسبة لـ oxz و oyz وبالتالي بالنسبة للمحور oz ، ومعرف
 مهما كانت قيم المتحولات الثلاثة فهو غير محدود.

(ب) لندرس مقاطعه بمستويات من الشكل $z = t$ ، حيث $t > 0$ (الشكل (3-10))
 يبين مساقط هذه المقاطع على المستوي (oxy) .
 نرى أن معادلة المقطع :

$$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1, \quad z = t$$

تمثل قطعاً زائداً تقع فوق المستوي oxy ومحاورها القاطعة موازية لـ ox
 أنصاف محاورها:

$$(\alpha, \beta) = (\sqrt{2at}, \sqrt{2bt})$$

(ج) أما معادلة مقطعه بمستويات $z = t$ حيث $t < 0$ فهي :

$$\frac{y^2}{\beta^2} - \frac{x^2}{\alpha^2} = 1, \quad z = t$$

تمثل قطعاً زائداً أيضاً تقع تحت المستوي oxy ومحاورها القاطعة موازية
 للمحور oy .. أنصاف محاورها :

$$(\beta, \alpha) = (\sqrt{-2bt}, \sqrt{-2at})$$

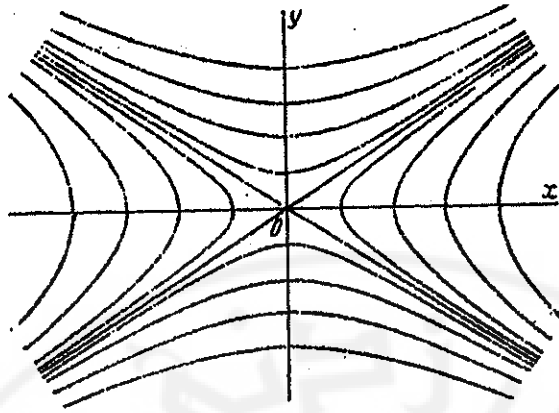
بينما المستوي oxy فيقطعه بمستقيمين تمثلهما المعادلات:

$$(\sqrt{b}x - \sqrt{a}y)(\sqrt{b}x + \sqrt{a}y) = 0 \quad z = 0$$

(د) ومقطعة بالمستوي $y = t$ هو بيان المعادلة :

$$x^2 = 2az + \frac{a}{b}t^2 \quad y = t$$

وهي تمثل قطعاً مكافئاً مقعراً نحو الأعلى، لكن مقطعه بالمستوي $x = t$ بيان
 المعادلة :



الشكل (3-10)

$$y^2 = -2bz + \frac{b}{a} t^2 \quad x=t$$

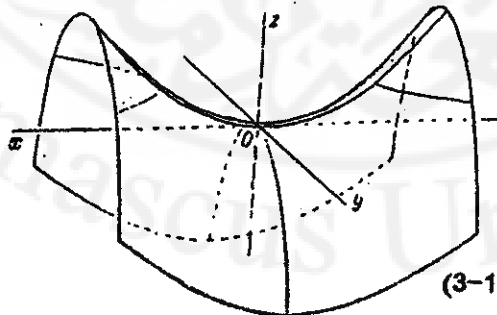
فهي قطعوع مكافئة مقعرة نحو الأسفل .

نستنتج من هذه الدراسة أن الجزء الواقع فوق المستوي oxy يتألف من قطعوع زائدة محاورها القاطعة مجموعة مستقيمات واقعة في oxz وموازية لـ ox بينما الجزء الواقع تحت المستوي oxy يتألف من مجموعة القطوع الزائدة التي محاورها القاطعة هي مجموعة مستقيمات واقعة في oyz وموازية لـ oy . يبين الشكل (3-11) صورة تقريبية لهذا السطح الذي يشبه سرج الحصان.

ملاحظة (5) : لو كانت $b < 0$, $a < 0$ تصبح المعادلة :

$$\frac{y^2}{|b|} - \frac{x^2}{|a|} = -2z$$

وهي تمثل سرجاً مقلوباً.



الشكل (3-11)

7 - 3 السطوح الأسطوانية والوهمية :

نعرف السطوح الأسطوانية التي معادلاتها من الشكل :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (16-3)$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (17-3)$$

$$\frac{x^2}{a^2} - 2y = 0 \quad (18-3)$$

بالأسطوانة الناقصية والزائدية والمكافئة على الترتيب الشكل (3-12). أما بيان ما

يشبه المعادلات :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \quad (19-3)$$

$$x^2 = a^2 \quad (20-3)$$

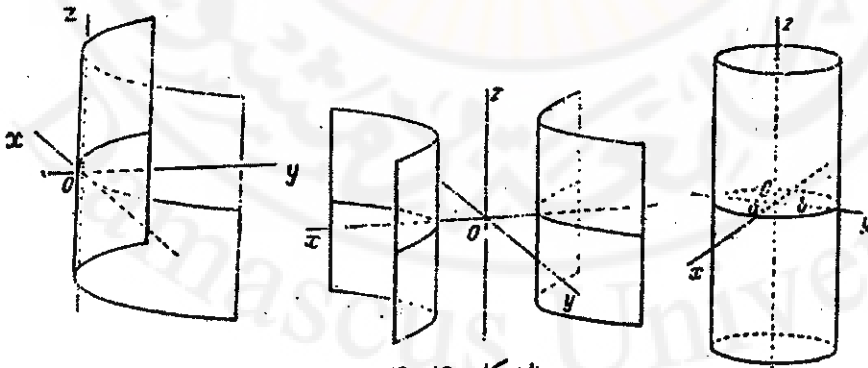
$$x^2 = 0 \quad (21-3)$$

فهو مستويان متقاطعان (لأولى) ومتوازيان (لثانية) ومنطبقان (لثالثة) الشكل

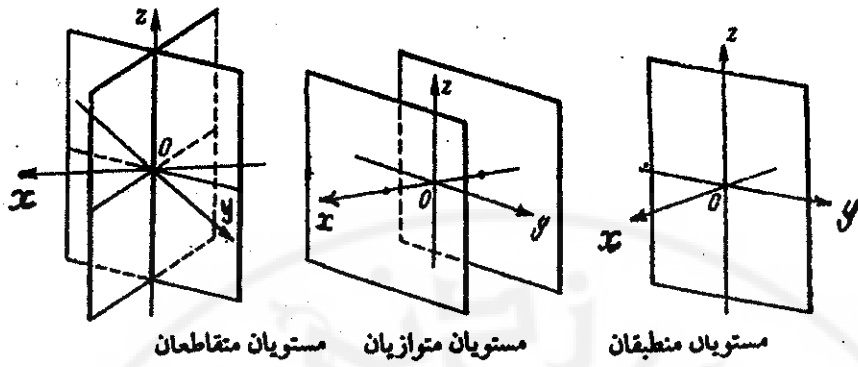
(3-13) وتمثل المعادلات التالية مبدأ الإحداثيات والمحور oz على الترتيب :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad (22-3)$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0 \quad (23-3)$$



الشكل (3-12)



الشكل (13-3)

ندعو بيان الأولى بحسماً مخروطياً وهمياً والثانية مستويين متوازيين متقاطعين وهميين .

أما بيان المعادلات التالية فهو المجموعة الخالية :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1 \quad (24-3)$$

$$x^2 + a^2 = 0 \quad (25-3)$$

ويدعى بيان الأولى أسطوانة ناقصة تخيلية والثانية مستويين متوازيين وهميين.

4- المعادلة العامة لسطوح الدرجة الثانية :

سبق وتعرفنا في الفقرة الثانية على صيغة المعادلة العامة لسطوح الدرجة الثانية (المعادلة (1-2)) ثم استعرضنا في الفقرة السابقة حالات خاصة لها ودعوناها المعادلات المختزلة لسطوح الدرجة الثانية، والتي تميزت جميعها بغياب الحدود المستطيلة (المختلطة) والخطية ولهذا كنا قد وجدنا أن للسطوح الممثلة لبعضها مراكز هي مبدأ الإحداثيات ومحاور ومستويات تناظر هي المحاور والمستويات الإحداثية.

سنعرض في هذا البند بعض الحقائق التي تساعد في إرجاع المعادلة العامة إلى معادلة مختزلة والتي بدورها ستمثل السطح ذاته بالنسبة لجملة محاور جديدة وهذا ما يمكننا من معرفة نوع السطح الذي تمثله المعادلة المفروضة .

1 - 4 اختزال الشكل التربيعي :

تعريف الشكل التربيعي: بفرض A مصفوفة متناظرة من المرتبة الثالثة :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

وبفرض :

$$W = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

مصفوفة عمود .

الشكل التربيعي للمصفوفة A هو كثير الحدود من الدرجة الثانية في المتحولات x, y, z ونرمز له بـ $\varphi(A)$ تعرفه المساواة :

$$\varphi(A) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz \quad (1-4)$$

ويكتب بصيغة المصفوفات كما يلي :

$$\varphi(A) = W^T A W$$

نلاحظ أن الشكل التربيعي يتحدد تماماً بمعرفة مصفوفته .

تعريف : المعادلة المميزة للمصفوفة A هي المعادلة (من الدرجة الثالثة) التالية :

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^3 + (a_{11} + a_{22} + a_{33})\lambda^2 + (a_{11}a_{22} + a_{11}a_{33} + a_{22}a_{33} -$$

$$- (a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{23}^2))\lambda + |A| = 0 \quad (2-4)$$

مبرهنة (1) : إذا كانت A مصفوفة متناظرة فلمعادلتها المميزة ثلاثة جذور حقيقية ، ندعوها الجذور المميزة (القيم الذاتية) للمصفوفة A.

مبرهنة (2) : بفرض A مصفوفة متناظرة $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ جذورها المميزة فتوجد مصفوفة متعامدة منظمه (وهي ليست وحيدة) مثل P تحقق الشرط:

$$P^*AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

نتيجة : أي شكل تربيعي مثل (1-4) يمكن اختزاله إلى شكل تربيعي لا يحوي حدوداً مستطيلة.

الإثبات : بفرض المعادلة (1-4) شكلاً تربيعياً مصفوفته A فإذا كانت $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ قيمها المميزة الموجودة (حسب المبرهنة (1)) وكانت P هي مصفوفة متعامدة تعرفها المبرهنة (2)، نجري التغيير التالي للمتحويلات:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = P^* \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

وبما أن P متعامدة ($P^{-1} = P^*$) فإذا ضربنا العلاقة السابقة بـ P نجد :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

وعوضنا في صيغة الشكل التربيعي :

$$\begin{aligned} \phi(A) &= (X \ Y \ Z) P^* A P \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \\ &= (X \ Y \ Z) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \lambda_3 Z^2 \end{aligned}$$

والعبارة الناتجة شكل تربيعي مختزل (لا يحوي حدوداً مستطيلة).

لنتمكن من ترجمة هذه الأفكار النظرية واختزال الشكل التربيعي بغية التخلص من الحدود المستطيلة سنعرض الطريقة دون التطرق للبرهان. لذلك سيكون هدفنا تعيين الأمثال الجديدة للشكل المختزل ومن ثم مصفوفة مثل P تنقلنا إلى هذه المعادلة. لهذا سنناقش عدة حالات :

(آ) إذا كانت جذور المعادلة (2-4) $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ مختلفة نعين من أجل كل قيمة λ_i شعاعاً مثل $\vec{v}_i \neq \vec{0}$ ندعوه الشعاع الذاتي لـ λ_i من المعادلة التالية :

$$(A - \lambda_i I) V_i = 0$$

حيث ما داخل القوس - مصفوفة من المرتبة الثالثة و V_i مصفوفة عمود والصفير مصفوفة عمود مركباتها أصفار.
فإذا فرضنا أن :

$$V_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}, \quad V_3 = \begin{pmatrix} \alpha_3 \\ \beta_3 \\ \gamma_3 \end{pmatrix}$$

هي الأشعة الذاتية الموافقة لـ $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ على الترتيب والتي كل منها حلّ للحملة السابقة موافقة لقيمة من قيم λ_i . يمكن التحقق من أن هذه الأشعة (إذا كانت منظمة) هي أعمدة المصفوفة P الواردة في المبرهنة (2)، فإذا ما أخذنا بالحسبان أن $\det(A - \lambda_i I) = 0$ حيث $i = 1, 2, 3$ والذي يعني أن الحل ليس وحيداً (للمهمة حلّ واحد على الأقل هو الشعاع الصفري) نكون على يقين من أن أيّاً من V_i ليس وحيداً ($\forall C$ فإن CV_i أيضاً حلّ). وهذا ما يقودنا إلى أن تلك المصفوفة ليست وحيدة.

نعرف الآن الأعمدة :

$$P_1 = \frac{V_1}{|V_1|}, \quad P_2 = \frac{V_2}{|V_2|}, \quad P_3 = \frac{V_3}{|V_3|}$$

فتكون طولية أي شعاع P_i تساوي الواحد. وبالتالي المصفوفة :

$$P = \begin{pmatrix} \frac{\alpha_1}{|V_1|} & \frac{\alpha_2}{|V_2|} & \frac{\alpha_3}{|V_3|} \\ \frac{\beta_1}{|V_1|} & \frac{\beta_2}{|V_2|} & \frac{\beta_3}{|V_3|} \\ \frac{\gamma_1}{|V_1|} & \frac{\gamma_2}{|V_2|} & \frac{\gamma_3}{|V_3|} \end{pmatrix}$$

متعامدة ومنظمة.

مثال : استنتج علاقات التحويل المناسبة لاختزال الشكل التربيعي :

$$\varphi = x^2 + y^2 + 5z^2 + 6xy + 2yz + 2xz$$

الحل : لو كتب الشكل التربيعي بصيغة المصفوفات :

$$\varphi = (x \ y \ z) A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

حيث :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

مصفوفته (مصفوفة الأمثال) . فنكتب المعادلة (2-4) :

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 3 & 1 \\ 3 & 1 - \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

أو :

$$\lambda^3 - 7\lambda^2 + 36 = 0$$

ولهذه المعادلة الجذور :

$$\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 6, \lambda_3 = -2$$

نعيّن شعاعاً ذاتياً

$$V_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix}$$

موافق لـ $\lambda_1 = 3$. وذلك بحل جملة المعادلات:

$$(A - 3I)V_1 = 0$$

أو :

$$-2\alpha + 3\beta_1 + \gamma_1 = 0$$

$$3\alpha_1 - 2\beta_1 + \gamma_1 = 0$$

$$\alpha_1 + \beta_1 + 2\gamma_1 = 0$$

سنعتبر :

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(أحد حلول هذه الجملة).

بشكل مشابه لو كتبنا المعادلات الموافقة لـ $\lambda_2 = 6$ واحترنا :

$$V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

أحد حلولها .

وكذلك ليكن :

$$V_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

أحد الحلول الموافقة لـ $\lambda_3 = -2$.

نكتب :

$$P_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

أشعة الواحدة لـ V_1, V_2, V_3 على الترتيب :

وبالتالي فالمصفوفة :

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \end{pmatrix}$$

هي مصفوفة متعامدة ومنظمة من أجلها صحيحة المساواة التالية (مبرهنة

((2):

$$P'AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

وسنترك للطلاب التحقق من ذلك.

وهي مصفوفة التحويل المطلوبة وعلاقات التحويل تكون :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

أو :

$$x = \frac{1}{\sqrt{3}} X + \frac{1}{\sqrt{6}} Y - \frac{1}{\sqrt{2}} Z$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}} X + \frac{1}{\sqrt{6}} Y + \frac{1}{\sqrt{2}} Z$$

$$z = \frac{-1}{\sqrt{3}} x + \frac{2}{\sqrt{6}} y$$

عندها حسب النتيجة السابقة يصبح الشكل التربيعي :

$$\varphi = 3 x^2 + 6 y^2 - 2 z^2$$

وهو شكل مخترل مضفوفته قطرية ومتحولاته x, y, z .

(ب) إذا كان للمعادلة المميزة (2-4) جذران متساويان. وليكن مثلاً

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ عندها بفرض V_1, V_2, V_3 هي أشعة ذاتية موافقة لـ $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ على الترتيب، فإن V_2, V_3 الموافقتين للقيمتين المتساويتين λ_1, λ_2 تقعان في مستوي واحد لكن بالحالة العامة غير متعامدين لذلك وبما أن أي شعاع يقع في هذا المستوي هو ذاتي لـ λ_2 فسنثبت V_2 مثلاً ونختار بدلاً عن V_3 شعاعاً عمودياً على V_2 من ذلك المستوي ولنرمز له بـ V_3^* :

$$V_3^* = V_2 \times V_3 \quad , \quad V_3^* \cdot V_2 = 0$$

فنجد θ الموافقة :

$$\theta = - \frac{V_2^2}{V_2 \cdot V_3}$$

و :

$$V_3^* = V_2 - \frac{V_2^2}{V_2 \cdot V_3} V_3$$

وعندها (V_1, V_2, V_3^*) ثلاثة أشعة متعامدة و

$$(P_1, P_2, P_3) = \left(\frac{V_1}{|V_1|}, \frac{V_2}{|V_2|}, \frac{V_3^*}{|V_3^*|} \right)$$

هي الأشعة الثلاثة المتعامدة والمنظمة التي نبحث عنها لتكون أعمدة لمصفوفة

التحويل P .

مثال : اختزل الشكل التربيعي بعد حساب علاقات التحويل المناسبة:

$$\varphi = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2xz + 2yz$$

الحل : نكتب الشكل التربيعي :

$$\varphi = (x \ y \ z) A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

حيث :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

نكتب المعادلة المميزة :

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$(\lambda - 1)^2 (\lambda - 4) = 0$$

ونجد أن لها جذراً بسيطاً $\lambda = 4$ وجذراً مضاعفاً 1 بفرض :

$$\lambda_1 = 4, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 1$$

نكتب المعادلات التي تعين V_1 الشعاع الذاتي لـ $\lambda_1 = 4$:

$$-2\alpha_1 - \beta_1 - \gamma_1 = 0$$

$$-\alpha_1 - 2\beta_1 + \gamma_1 = 0$$

$$-\alpha_1 + \beta_1 - 2\gamma_1 = 0$$

وليكن :

$$V_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

نكتب المعادلات المشابهة الموافقة لـ $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$:

$$\alpha_2 - \beta_2 + \gamma_2 = 0$$

$$- \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 = 0$$

$$- \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 = 0$$

وهي تكافئ معادلة واحدة. ولنختار V_2, V_3 :

$$V_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

بحققان المعادلات السابقة وبشرط $V_2 \neq V_3$ ثم نثبت V_2 مثلاً ونحسب θ ثم

V_3^* المتعامد مع V_1 و V_2 فنجد :

$$V_3^* = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \theta = -2$$

وبالتالي مصفوفة التحويل :

$$P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

وهي متعامدة ومنظمة ، وتعرف لنا علاقات التحويل التالية :

$$x = -\frac{1}{\sqrt{3}} X + \frac{2}{\sqrt{6}} Y$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}} X + \frac{1}{\sqrt{6}} Y - \frac{1}{\sqrt{2}} Z$$

$$z = \frac{1}{\sqrt{3}} X + \frac{1}{\sqrt{6}} Y + \frac{1}{\sqrt{2}} Z$$

المناسبة لاختزال الشكل التربيعي المفروض والذي سيأخذ الشكل التالي :

$$\varphi = 4x^2 + y^2 + z^2$$

ملاحظة (1) : في هذا المثال كان ممكناً أن نختصر العمل ونختار أي شعاعين متعامدين مثل :

$$V_3 = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} \quad V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

بحققان جملة المعادلات الموافقة لـ $\lambda_1 = 1$.

ملاحظة (2) : لا تكون للمعادلة المميزة جذور متساوية $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ إلا إذا كان الشكل التربيعي المفروض مختزلاً.

2-4 اختزال معادلة سطوح الدرجة الثانية بتدوير المحاور (تعيين نوع السطح):

لنرمز بـ S لسطح الدرجة الثانية ببيان المعادلة (1-2) ولتكن :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 2a_1 \\ 2a_2 \\ 2a_3 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (3-4)$$

ثلاث مصفوفات : المصفوفة A : مصفوفة أمثال حدود الدرجة الثانية و a مصفوفة أمثال الحدود الخطية و w شعاع (مصفوفة) المتحولات في النظام الإحداثي xyz ، فالمعادلة (1-2) تأخذ الشكل :

$$w^T A w + w^T a + d = 0$$

حيث $w = (xyz)$ (مصفوفة سطر) نرمز لنقول w لو فرضنا أن $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ هي القيم الذاتية لـ A وأن المصفوفة P هي المصفوفة الواردة في إثبات نتيجة المبرهنة (1) في البند السابق وأن $W = (XYZ)$ هي مصفوفة المتحولات في الجملة الجديدة الناتجة بدوران موافق للمصفوفة P. أي :

$$w = P W \quad \text{أو} \quad W = P' w$$

تصبح المعادلة السابقة بعد استبدال المتحول $w \rightarrow W$:

$$(PW)' A (PW) + (PW)' a + d = 0$$

$$W' (P' A P) W + W' (P' a) + d = 0$$

فإذا لاحظنا أن $P' a$ هي مصفوفة عمود وفرضنا أن :

$$P' a = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{21} & p_{31} \\ p_{12} & p_{22} & p_{32} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 a_1 \\ 2 a_2 \\ 2 a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 q_1 \\ 2 q_2 \\ 2 q_3 \end{pmatrix} = q$$

وبدلنا في المعادلة السابقة نجد :

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \lambda_3 Z^2 + 2 q_1 X + 2 q_2 Y + 2 q_3 Z + d = 0 \quad (4-4)$$

الصيغة المعتزلة للمعادلة المفروضة والتي تمثل السطح نفسه بالنسبة للحمالة OXYZ التي محاورها توازي محاور السطح. لنبين نوع هذا السطح تبعاً لأشكال المعادلة السابقة، نميز عدة حالات :

I - إذا تحقق الشرط $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \neq 0$ يمكن دائماً رد المعادلة السابقة إلى

الشكل :

$$\lambda_1 \left(X + \frac{q_1}{\lambda_1} \right)^2 + \lambda_2 \left(Y + \frac{q_2}{\lambda_2} \right)^2 + \lambda_3 \left(Z + \frac{q_3}{\lambda_3} \right)^2 + d' = 0$$

حيث :

$$d' = d - \left(\frac{q_1^2}{\lambda_1} + \frac{q_2^2}{\lambda_2} + \frac{q_3^2}{\lambda_3} \right)$$

وفي هذه الحالة نقول أن السطح مركزي وإحداثيات مركزه :

$$C \left(- \frac{q_1}{\lambda_1}, - \frac{q_2}{\lambda_2}, - \frac{q_3}{\lambda_3} \right)$$

فإذا جعلناه مبدأ للإحداثيات الجديدة، تصبح معادلة السطح بالنسبة لتلك
الجملة :

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + d' = 0 \quad (5-4)$$

مبرهنة (1): بفرض $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \neq 0$:

(أ) إذا كانت $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ من إشارة واحدة فالسطح عبارة عن مجسم قطع
ناقصي وهمي أو حقيقي أو مجسم مخروطي وهمي وذلك حين تكون إشارة d'
موافقة أو مخالفة لإشارة λ_i أو تساوي الصفر على الترتيب.

(ب) إذا كانت $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ مختلفة بالإشارة فالسطح عبارة عن مجسم
قطع زائد وحيد أو ثنائي الفرع أو مجسم مخروطي (وذلك حسب قيمة المقدار
 $d', \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$) إن كان أكبر أو أصغر أو يساوي الصفر على الترتيب .
الإثبات :

(أ) إن كانت λ_i إشارة واحدة .

(1) و d' تخالفها بالإشارة تصبح المعادلة (5-4).

$$\frac{x'^2}{\frac{d'}{\lambda_1}} + \frac{y'^2}{\frac{d'}{\lambda_2}} + \frac{z'^2}{\frac{d'}{\lambda_3}} = 1 \quad (6-4)$$

وهي من غط المعادلة (1-3) تمثل مجسم قطع ناقص حيث :

$$a^2 = -\frac{d'}{\lambda_1}, \quad b^2 = -\frac{d'}{\lambda_2}, \quad c^2 = -\frac{d'}{\lambda_3}$$

(2) d' تتفق بالإشارة مع λ_i . بتقسيم (4-5) على d' بعد تغيير إشاراتها

إن كانت سالبة .

$$\frac{x'^2}{\frac{d'}{\lambda_1}} + \frac{y'^2}{\frac{d'}{\lambda_2}} + \frac{z'^2}{\frac{d'}{\lambda_3}} = -1 \quad (7-4)$$

المعادلة من نمط (3-3) تمثل مجسم قطع ناقص وهمي :

$$a^2 = \frac{d'}{\lambda_1}, \quad b^2 = \frac{d'}{\lambda_2}, \quad c^2 = \frac{d'}{\lambda_3}$$

(3) $d' = 0$ تأخذ المعادلة الشكل :

$$\frac{x'^2}{\frac{1}{\lambda_1}} + \frac{y'^2}{\frac{1}{\lambda_2}} + \frac{z'^2}{\frac{1}{\lambda_3}} = 0 \quad (8-4)$$

وهي تمثل نقطة وحيدة أو سطحاً مخروطياً وهمياً انظر (3-22).

(ب) لو كانت λ_1 مختلفة بالإشارة .

(4) و $d' \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 > 0$ ، عندها إشارات $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, d')$ لن تكون

على الترتيب إلا $(+, +, -, -)$ أو $(-, -, +, +)$ وفي كلتا الحالتين تأخذ

المعادلة الشكل ذاته:

$$\frac{x'^2}{\frac{d'}{\lambda_1}} + \frac{y'^2}{\frac{d'}{\lambda_2}} - \frac{z'^2}{\frac{d'}{\lambda_3}} = 1 \quad (9-4)$$

المقامات على الترتيب هي : $a^2 \quad b^2 \quad c^2$

وهي من النمط (3-4) تمثل مجسم قطع زائد وحيد الفرع .

(5) $d' \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 < 0$ ، عندها إشارات $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, d')$ لن تكون على

الترتيب إلا $(+, +, -, -)$ أو $(-, -, +, +)$ وتصبح المعادلة (4-5) .

$$\frac{x'^2}{\frac{d'}{\lambda_1}} + \frac{y'^2}{\frac{d'}{\lambda_2}} - \frac{z'^2}{\frac{d'}{\lambda_3}} = -1 \quad (10-4)$$

(أو إشارة أمثال x^2 هي - وأمثال y^2 و z^2 هي +) وفي الحالتين المعادلة من

نمط (3-9) تمثل مجسم قطع زائد ثنائي الفرع.

(6) إذا كانت $d' = 0$. مهما كانت إشارات λ_i (المختلفة) تصبح المعادلة من الشكل :

$$\frac{x'^2}{\frac{1}{\lambda_1}} + \frac{y'^2}{\frac{1}{\lambda_2}} - \frac{z'^2}{\frac{1}{\lambda_3}} = 0 \quad (11-4)$$

المعادلة من النموذج (11-3) ، بيانها مجسم مخروطي.

يمثل الجدول التالي الاحتمالات الممكنة كافة للمعادلة (5-4) حسب إشارات أمثلها .

نوع السطح	d'	λ_1	λ_2	λ_3	d'	نوع السطح
نقطة وحيدة أو مجسم مخروطي تخيلي	0	+	+	+	-	مجسم قطع ناقص
		-	-	-	+	
		+	+	+	+	مجسم قطع ناقص وهي
		-	-	-	-	
مجسم مخروطي		+	+	-	-	مجسم قطع زائد وحيد الفرع
		-	-	+	+	
		+	+	-	+	مجسم قطع زائد ثنائي الفرع
		-	-	+	-	

الحلول (2) تصنيف السطوح حسب أمثال المعادلة المختلة (5-4)

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, d' \neq 0$$

II - إحدى قيم λ_i فقط مساوية للصفر ولكن $\lambda_3 = 0$ مثلاً تصبح المعادلة (4-4):

$$\lambda_1 \left(X + \frac{q_1}{\lambda_1} \right)^2 + \lambda_2 \left(Y + \frac{q_2}{\lambda_2} \right)^2 + q_3 Z + d' = 0$$

$$d' = d - \left(\frac{q_1^2}{\lambda_1} + \frac{q_2^2}{\lambda_2} \right)$$

والتي تدل على أنه ليس للسطح مركز تناظر إذا كانت $q_3 \neq 0$. نسحب المحاور ليصبح المبدأ على المستقيم :

$$Y = -\frac{q_2}{\lambda_2} \quad X = -\frac{q_1}{\lambda_1}$$

ولتصبح معادلة السطح :

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + q_3 z' = 0 \quad (12-4)$$

لكن إن كانت $q_3 = 0$ حسب المعادلة (3-2) يصبح المستقيم :

$$X = -\frac{q_1}{\lambda_1} \quad Y = -\frac{q_2}{\lambda_2} \quad (13-4)$$

هو المحل الهندسي لمراكز السطح. نسحب المحاور ليقع المبدأ الجديد على المستقيم السابق تصبح معادلة السطح :

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + d' = 0 \quad (14-4)$$

مبرهنة (2): بفرض $\lambda_3 = 0$ و $\lambda_1 \lambda_2 \neq 0$.

(أ) إذا $q_3 \neq 0$ ، السطح مجسم قطع مكافئ زائدي أو ناقصي إذا كانت :

$\lambda_1 \lambda_2 < 0$ أو $\lambda_1 \lambda_2 > 0$ على الترتيب.

(ب) إذا $q_3 = 0$ و $\lambda_1 \lambda_2 > 0$ السطح هو أسطوانة ناتئة حقيقية أو

تخيلية أو مستقيمان متقاطعان وهميان إذا $d' \neq 0$ مخالف أو موافق λ بالإشارة أو تساوي الصفر على الترتيب.

(ج) إذا $q_3 = 0$ و $\lambda_1 \lambda_2 < 0$ ، فالسطح أسطوانة زائدية أو مستويان

متقاطعان إذا $d' \neq 0$ أو $d' = 0$ على الترتيب.

الإثبات : نفرض $\lambda_3 = 0$ و $\lambda_1 \lambda_2 \neq 0$

(أ) $q_3 \neq 0$ نجد من (12-4) أن معادلة السطح :

(7) عندما $\lambda_1 \lambda_2 < 0$ ، هي :

$$\frac{x'^2}{\frac{1}{\lambda_1}} - \frac{y'^2}{\frac{1}{\lambda_2}} = \mp q_3 z' \quad (15-4)$$

من النمط (15-3) وبيانها مجسم قطع مكافئ زائدي.

(8) وعندما $\lambda_1 \lambda_2 > 0$ ، فهي :

$$\frac{x'^2}{\frac{1}{\lambda_1}} + \frac{y'^2}{\frac{1}{\lambda_2}} = \mp q_3 z' \quad (16-4)$$

من النمط (14-3) التي بيانها مجسم قطع مكافئ ناقصي.

(ب) نفرض $q_3 = 0$ و $\lambda_1 \lambda_2 > 0$ ، تصبح المعادلة (14-4).

(9) إذا $\lambda_1 d' < 0$

$$\frac{x'^2}{\frac{d'}{\lambda_1}} + \frac{y'^2}{-\frac{d'}{\lambda_2}} = 1 \quad (17-4)$$

وهي من النموذج (16-3) تمثل أسطوانة ناقصية .

(10) وإذا $\lambda_1 d' > 0$

$$\frac{x'^2}{\frac{d'}{\lambda_1}} + \frac{y'^2}{\frac{d'}{\lambda_2}} = -1 \quad (18-4)$$

وهي من النموذج (24-3) تمثل أسطوانة ناقصية تخيلية.

(11) وإذا $d' = 0$

$$\frac{x'^2}{\frac{1}{\lambda_1}} + \frac{y'^2}{\frac{1}{\lambda_2}} = 0 \quad (19-4)$$

من النمط (23-3) تمثل المستقيم oz' (أو مستويين وهميين متقاطعين).

(جـ) بفرض $q_3 = 0$ و $\lambda_1 \lambda_2 < 0$ ، تأخذ معادلة السطح .

(12) إذا كانت $d' \neq 0$ الشكل :

$$\frac{x'^2}{\frac{d'}{\lambda_1}} - \frac{y'^2}{\frac{d'}{\lambda_2}} = 1 \quad (21-4)$$

الذي بيانه أسطوانة زائدية (المعادلة (3-17)) .

(13) والصيغة التالية إذا كانت $d' = 0$

$$\frac{x'^2}{\frac{1}{\lambda_1}} - \frac{y'^2}{\frac{1}{\lambda_2}} = 0$$

وهي تمثل مستويين متقاطعين (انظر (3-19)) .

يبين الجدول التالي جميع الحالات الواردة في المبرهنة .

λ_1	λ_2	q_3	d'	نوع السطح
$\pm$	$\pm$	0	$+$	أسطوانة ناقصية
			$\pm$	الخالية (أسطوانة ناقصية وهمية)
			0	مستقيم (مستقيمان متقاطعان وهميان)
		$\neq 0$		مجسم قطع مكافئ ناقص
$\pm$	$+$	0	$\neq 0$	أسطوانة زائدية
			0	مستويان متقاطعان
		$\neq 0$		مجسم قطع مكافئ زائدي

جدول (3) تصنيف السطوح حسب أشكال المعادلة المعتزلة

($\lambda_3 = 0$ فقط)

III - إحدى قيم λ_1 فقط لا يساوي الصفر لنفرض $\lambda_1 \neq \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ تصبح

معادلة السطح S :

$$\lambda_1 \left(X + \frac{q_1}{\lambda_1} \right)^2 + 2 q_2 Y + 2 q_3 Z + d' = 0 \quad (22-4)$$

$$d' = d - \frac{q_1^2}{\lambda_1}$$

للسبب نفسه كما في الحالة السابقة إذا كانت إحدى القيمتين q_2, q_3 لا تساوي الصفر فإن جملة المعادلات (2-3) لا تملك حلاً مشتركاً والسطح لا يملك مركز تناظر بينما يكون المحل الهندسي لمراكز السطح مستوياً عندما $q_2 = q_3 = 0$.

مبرهنة (3) : بفرض $\lambda_1 \neq \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

(أ) إذا $|q_2| + |q_3| \neq 0$ يكون السطح S أسطوانة مكافئة .

(ب) إذا $q_2 = q_3 = 0$ السطح مستويان متوازيان حقيقيان أو وهميان أو مستويان منطبقان وذلك عندما $d' = \lambda_1$ أصغر أو أكبر أو تساوي الصفر.

الإثبات : نفرض تحقق الشرط $\lambda_1 \neq \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ و

(أ) الشرط $|q_2| + |q_3| \neq 0$ الذي يكافئ

$$(14) \quad q_2 \neq 0, q_3 = 0 \text{ أو } q_2 = 0, q_3 \neq 0 \text{ أو } (q_2 \neq 0, q_3 \neq 0).$$

إذا $q_2, q_3 \neq 0$ يمكن تثبيت منحنى المحور OX وتدوير الجملة حول OX لينطبق المحور OY على المستقيم $q_2 Y + q_3 Z = 0$ لتصبح المعادلة (4-22) في الجملة الجديدة:

$$(4-23) \quad \lambda_1 \left(X + \frac{q_2}{\lambda_1} \right)^2 + 2qY + d' = 0$$

وإذا كانت $q_2 = 0$ و $q_3 \neq 0$ أو $q_3 = 0$ و $q_2 \neq 0$ ففرد المعادلة إلى الشكل السابق ذاته والذي يمثل سطحاً أسطوانياً مكافئاً مهما كانت أمثالهما (عققة لشروط المبرهنة). انظر النموذج (3-18).

(ب) إذا $q_2 = q_3 = 0$ يتضح أن المعادلة (4-22) .

(15) عندما $d' < 0$ ، λ_1 تصبح من النمط (3-20) والتي تمثل مستويين متوازيين.

(16) وعندما $d' > 0$ ، λ_1 تصبح من النمط (3-25) والتي تمثل مستويين متوازيين وهميين.

(17) وإذا $d' = 0$ تصبح من النمط (3-21) والتي تمثل مستويين منطبقين.

يوضح الجدول التالي الاحتمالات الواردة كافة في هذه المبرهنة :

q_2	q_3	$\lambda_1 \cdot d'$	نوع السطح
$= 0$	$\neq 0$		أسطوانة مكافئة
$\neq 0$	$= 0$		
$\neq 0$	$\neq 0$		
0	0	< 0	مستويان متوازيان
		> 0	مستويان متوازيان وهميان (الخالية)
		$= 0$	مستويان منطبقان

جدول (4) تصنيف السطوح حسب أمثال المعادلة

$$(\lambda_2 = \lambda_3 = 0)$$

مثال : ليكن S بيان المعادلة :

$$10x^2 + 7y^2 + 7z^2 - 4xy + 4xz - 2yz + 2x + 3y - z + e = 0$$

والمطلوب : اعتزل المعادلة السابقة وذلك بإجراء الدوران والإنسحاب

المناسين ثم ناقش نوع السطح حسب قيم e .

الحل : نعين المصفوفة P وعلاقات التجويل.

لتعين P يجب أن نوجد $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ القيم المميزة لمصفوفة أمثال حدود

الدرجة الثانية A :

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -2 & 2 \\ -2 & 7 & -1 \\ 2 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 10-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 7-\lambda & -1 \\ 2 & -1 & 7-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (10 - \lambda) ((7 - \lambda)^2 - 1) + 2(-2(7 - \lambda) + 2) + 2(2 - 2(7 - \lambda)) = 0$$

$$\Leftrightarrow (10 - \lambda)(6 - \lambda)(8 - \lambda) + 8(\lambda - 6) = 0$$

$$\Leftrightarrow (6 - \lambda)((10 - \lambda)(8 - \lambda) - 8) = 0$$

$$\Leftrightarrow (6 - \lambda)^2(\lambda - 12) = 0$$

القيم المميزة $\lambda_1 = \lambda_2 = 6$, $\lambda_3 = 12$.

نوجد الأشعة الذاتية لها. لذلك نحل المعادلة $(A - \lambda_1 I)X = 0$ من أجل كل

القيم λ_1 فنجد من أجل : $\lambda_1 = 6$:

$$4x - 2y + 2z = 0$$

$$-2x + y - z = 0$$

$$2x - y + z = 0$$

وهي مرتبطة خطياً لذلك وتكافئ المعادلة التالية :

$$2x - y + z = 0$$

نعطي قيمتين اختياريتين لـ x و y وليكن 1 ، 1 فنجد أن $z = -1$ ثم $2, 1$ مثلاً

لنجد $z = 0$ وليكن الشعاعان الذاتيان الواقعان λ_1, λ_2 :

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

نثبت V_1 مثلاً ونبحث عن V_2^* بدلاً من V_2 يحقق المعادلة السابقة وعمودي

على V_1 . انظر البند (4-1) فيكون :

$$V_2^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{3}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

نكتب المعادلات التي تعين الشعاع الذاتي لـ $\lambda_3 = 12$:

$$-2x - 2y + 2z = 0$$

$$-2x - 5y - z = 0$$

$$2x - y - 5z = 0$$

وليكن :

$$V_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

نشكل المصفوفة P :

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

نكتب علاقات التحويل :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

نحسب أمثال الحدود الخطية في المعادلة الجديدة :

$$\begin{pmatrix} 2q_1 \\ 2q_2 \\ 2q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} \\ -\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

وتصبح معادلة السطح :

$$6X^2 + 6Y^2 + 12Z^2 + 2\sqrt{3}X - \sqrt{2}Y + 6 = 0$$

أو :

$$6\left(X + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2 + 6\left(Y - \frac{\sqrt{2}}{12}\right)^2 + 12Z^2 + 6 - \frac{7}{12} = 0$$

فنجد أن السطح مركزي ، مركزه :

$$C\left(-\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{2}}{12}, 0\right)$$

- 1 - إذا كانت $e = 7/12$ فبيانها النقطة c (بحسب محروطي تخيلي).
- 2 - إذا كانت $e > 7/12$ فبيانها بحسب قطع ناقص تخيلي.
- 3 - أما إذا كانت $e < 7/12$ يكون السطح بحسب قطع ناقص دوراني لأن :

$$a = b = \frac{1}{6} \sqrt{\frac{7 - 12e}{2}} , \quad c = \frac{\sqrt{7 - 12e}}{12}$$

مثال : اكتب المعادلة التالية بالشكل النموذجي بتدوير وسحب مناسب للمحاور ثم بين أنها تمثل سطحاً أسطوانياً . اكتب معادلة محوره في الجملة القديمة:

$$2x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xz - 2yz + 4y - 2z = 0$$

الحل : نكتب المعادلة المميزة لمصفوفة أمثال حدود الدرجة الثانية :

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

المعادلة من الدرجة الثالثة، لها ثلاثة جذور هي القيم الذاتية :

$$\lambda_1 = 0 , \quad \lambda_2 = 2 , \quad \lambda_3 = 3$$

نحسب الأشعة الذاتية لها .

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} , \quad V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

نكتب مصفوفة التحويل :

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

نحسب مصفوفة الأمثال للحدود الخطية :

$$2. \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -\frac{\sqrt{2}}{6} \end{pmatrix}$$

تصبح معادلة السطح منسوبة للحملة الجديدة :

$$2Y^2 + 3Z^2 - \frac{4}{\sqrt{2}}Y + \frac{6}{\sqrt{3}}Z = 0$$

أو :

$$\frac{\left(Y - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{1} + \frac{\left(Z + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}{\frac{2}{3}} = 1$$

وهي تمثل سطحاً أسطوانياً ناقصياً محوره يوازي OX معادلته منسوبة للحملة

الجديدة:

$$Y = \frac{\sqrt{2}}{2} , \quad Z = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

والحملة القديمة :

$$x - y = 1$$

$$x + y - z = -1$$

وسنجد النتيجة ذاتها لو كتبنا معادلة مستقيم المراكز (2-4) :

$$2x - z = 0$$

$$2y - z = -2$$

$$x + y - z = -1$$

لاحظ أن الجملتين متكافئتان، تمثل كل منهما محور السطح الأسطواني.

5 - القيم غير المتبدلة لسطوح الدرجة الثانية :

5 - 1 القيم غير المتبدلة في معادلة الدرجة الثانية :

سنعرض في هذا البند بعض المبرهنات المتعلقة بالقيم غير المتبدلة في معادلة الدرجة الثانية ثم سنطبق نتائج تلك المبرهنات لتصنيف السطح ببيان المعادلة المفروضة دون أن نلجأ لحساب الأشعة الذاتية ومصفوفة التحويل، وذلك عندما تكون غايتنا معرفة شكل السطح فقط

لنكتب المعادلة العامة لسطوح الدرجة الثانية :

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + \quad (15-5)$$

$$+ 2a_{23}yz + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + d = 0$$

ولنعرف التوابع التالية لأمثالها :

$$I_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$I_3 = \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$K_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_1 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_2 \\ a_2 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & a_3 \\ a_3 & d \end{vmatrix}$$

$$K_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_1 \\ a_{13} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_3 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{23} & a_{33} & a_3 \\ a_2 & a_3 & d \end{vmatrix}$$

$$K_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & d \end{vmatrix}$$

لاحظ أن جميع هذه المحددات متناظرة .

مبرهنة (1) : لا تتبدل قيم التوابع I_1, I_2, I_3, K_4 بين معادلتين سطح منسوب لجمليتين متعامدتين تنتج الثانية عند الأولى بانسحاب ودوران .

نتيجة (1) : إذا أجرينا دوراناً للجملة $oxyz$ مناسباً لحذف الحدود المختلطة من معادلة السطح وكانت معادلة السطح منسوبة للجملة الجديدة $OXYZ$.

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \lambda_3 Z^2 + 2q_1 x + 2q_2 y + 2q_3 z + d = 0 \quad (2-5)$$

فإن التوابع : $I_1, I_2, I_3, K_2, K_3, K_4$ تصبح بدلالة أمثال المعادلة المختزلة :

$$I_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_3 \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$$

$$K_2 = \begin{vmatrix} \lambda_1 & q_1 \\ q_1 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda_2 & q_2 \\ q_2 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda_3 & q_3 \\ q_3 & d \end{vmatrix} \\ = (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) d - (q_1^2 + q_2^2 + q_3^2) = I_1 d - (q_1^2 + q_2^2 + q_3^2)$$

$$K_3 = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & q_1 \\ 0 & \lambda_2 & q_2 \\ q_1 & q_2 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & q_1 \\ 0 & \lambda_3 & q_3 \\ q_1 & q_3 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda_2 & 0 & q_2 \\ 0 & \lambda_3 & q_3 \\ q_2 & q_3 & d \end{vmatrix} \\ = (\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3) d - (\lambda_2 + \lambda_3) q_1^2 - (\lambda_1 + \lambda_3) q_2^2 - (\lambda_1 + \lambda_2) q_3^2$$

$$K_4 = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & q_1 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & q_2 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & q_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 & d \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 (\lambda_3 d - q_3^2)$$

$$= \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 d - \lambda_1 \lambda_2 q_3^2 = I_3 d - \lambda_1 \lambda_2 q_3^2$$

نتيجة (2) : بما أن $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ جذور للمعادلة المميزة (2-4) نستطيع كتابتها:

$$\det (A - \lambda I) = (\lambda - \lambda_1) (\lambda - \lambda_2) (\lambda - \lambda_3) = 0$$

أو :

$$\lambda^3 - I_1 \lambda^2 + I_2 \lambda - I_3 = 0$$

نتيجة (3): بفرض أن $I_3 = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \neq 0$ ، فإن السطح يملك مركزاً. فإذا دورنا وسحبنا المحاور إلى الجملة التي مبدؤها مركز السطح تأخذ المعادلة الشكل (5-4).

حيث تحافظ التتابع I_1, I_2, I_3 على قيمها بدلالة λ_i وتصبح K_i :

$$\begin{aligned} K_2 &= (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) d' \\ K_3 &= (\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3) d' \\ K_4 &= \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 d' \end{aligned} \quad (3-5)$$

اعتماداً على ما سبق سنبين نوع السطح تبعاً لأشكال المعادلة المعتزلة والتي يمكن تعيينه بحساب القيم غير المتبدلة للتتابع K_i, I_i للمعادلة العامة المفروضة.

2 - 5 كشف نوع السطح حسب القيم غير المتبدلة :

نورد الآن المبرهنة التالية :

مبرهنة (2) :

I - إذا كانت $I_3 \neq 0$:

(أ) و $I_2 > 0$ و $I_1 \cdot I_3 > 0$ فإن السطح S بيان (1-5)

1 - مجسم قطع ناقص إذا كانت $K_4 < 0$.

2 - مجسم قطع ناقص تخيلي إذا كانت $K_4 > 0$.

3 - مجسم مخروطي تخيلي إذا كانت $K_4 = 0$.

(ب) وكانت $I_2 \leq 0$ و $I_1 \cdot I_3 \leq 0$ فالسطح S.

4 - مجسم قطع زائد وحيد الفرع إذا كانت $K_4 > 0$.

5 - مجسم قطع زائد ثنائي الفرع إذا كانت $K_4 < 0$.

6 - مجسم مخروطي إذا كانت $K_4 = 0$.

II - إذا كانت $I_3 = 0$:

(أ) و $I_2 \neq 0$ فإن السطح S عبارة عن :

7 - مجسم قطع مكافئ زائدي إذا كانت $K_4 > 0$.

8 - مجسم قطع مكافئ ناقصي إذا كانت $K_4 < 0$.

(ب) وكانت $I_2 > 0$ و $K_4 = 0$ يكون السطح S :

9 - أسطوانة ناقصية عندما $I_1 K_3 < 0$.

10 - المجموعة الخالية (أسطوانة ناقصة تخيلية) عندما $I_1 K_3 > 0$.

11 - مستويين متقاطعين وهميين من أجل $K_3 = 0$.

(ج) وكانت $I_2 < 0$ و $K_4 = 0$ يكون السطح :

12 - أسطوانة زائدية إذا كانت $K_3 \neq 0$.

13 - مستويين متقاطعين إذا $K_3 = 0$.

III - وإذا $I_3 = I_2 = K_4 = 0$ ، فالسطح هو :

14 - أسطوانة مكافئة عندما $K_3 \neq 0$.

15 - مستويان متوازيان إذا $K_3 = 0$ و $K_2 < 0$.

16 - مستويان متوازيان وهميان إذا $K_3 = 0$ و $K_2 > 0$.

17 - مستويان منطبقان إذا $K_2 = K_3 = 0$.

الإثبات :

I - بفرض $I_3 = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \neq 0$ فيمكن اختزال المعادلة إلى الشكل (4-5).

وبفرض :

(أ) $I_2 > 0$ و $I_1 I_3 < 0$

فستثبت أن λ_1 من إشارة واحدة .

جداً λ_1 مختلفة بالإشارة، فرضاً $\lambda_1 = \alpha_1^2$, $\lambda_2 = \alpha_2^2$, $\lambda_3 = -\alpha_3^2$ فيكون

لدينا (من الفرض) $I_1 I_3 = -(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)^2 (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - \alpha_3^2) > 0$ وهذا يقتضي $\alpha_3^2 > \alpha_1^2 + \alpha_2^2$ وبتعويض هذه المراجعة في عبارة I_2 الموجبة فرضاً .

$$I_2 = (\alpha_1 \alpha_2)^2 - \alpha_3^2 (\alpha_1^2 + \alpha_2^2) < (\alpha_1 \alpha_2)^2 - (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^2 \\ = -\alpha_1^4 - \alpha_2^4 - \alpha_1^2 \alpha_2^2 < 0$$

وهذا تناقض . بطريقة مشابهة لو كانت $\lambda_1 = \alpha_1^2$, $\lambda_2 = -\alpha_2^2$, $\lambda_3 = -\alpha_3^2$ لكانت

المراجعة $I_1 I_3 = (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)^2 (\alpha_1^2 - (\alpha_2^2 + \alpha_3^2)) > 0$ صحيحة (فرضاً) والتي منها نستنتج $\alpha_1^2 > \alpha_2^2 + \alpha_3^2$ ، ثم بتبديلها في عبارة I_2 الموجبة:

$$I_2 = (\alpha_2 \alpha_3)^2 - \alpha_1^2 (\alpha_2^2 + \alpha_3^2) < (\alpha_2 \alpha_3)^2 - (\alpha_2^2 + \alpha_3^2)^2 < 0$$

وهذا تناقض أيضاً وبالتالي الفرض الجدي خاطئ λ_1 من إشارة واحدة .

بناءً على ما سبق وبفرض $K_4 = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 d'$ (من (3-5)) .

1 - $K_4 < 0$ فإن d' و λ_1 مختلفتان بالإشارة و S مجسم قطع ناقص .

2 - $K_4 > 0$ فإن d' و λ_1 متفقة بالإشارة و S مجسم قطع ناقص وهمي .

3 - $K_4 = 0$ فإن $d' = 0$ (لأنه $0 \neq \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = I_3$) والسطح S نقطة وحيدة أو

نقول إنه مجسم مخروطي تخيلي . انظر المبرهنة (1) في الفقرة الرابعة .

(ب) إذا فرضنا الآن $I_2 \leq 0$ أو $I_1 I_3 \leq 0$ فإن λ_1 لا يمكن أن تكون جميعها

موجبة أو جميعها سالبة لأنه في كلتا الحالتين سيكون $I_2 > 0$ و $I_1 I_3 > 0$. إذاً λ_1

مختلفة بالإشارة .

فإذا فرضنا :

4 - $K_4 = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 d' > 0$ فإن إشارة d' ستكون موجبة إذا كانت قيمة

واحدة فقط من القيم موجبة وستكون سالبة إذا كانت قيمة واحدة فقط من λ_1

سالبة وحسب المبرهنة (1) السطح S مجسم قطع زائد وحيد الفرع .

5 - $K_4 < 0$ فتكون إشارة d' سالبة إذا كانت قيمة واحدة فقط من λ_1 موجبة وستكون موجبة إذا كانت قيمة واحدة فقط منها سالبة وهذا يؤدي إلى أن السطح S هو مجسم قطع زائد ذي فرعين .

6 - $K_4 = 0$ فإن $d' = 0$ والسطح مجسم مخروطي.

II - نفرض $I_3 = 0$:

(أ) و $I_2 \neq 0$ (وهذا الشرط يعني أن قيمة واحدة فقط من القيم λ_1 معلومة). تكون المعادلة (4-12) هي معادلة السطح منسوباً للمحاور المسحوبة والقيم التالية هي القيم غير المتبدلة:

$$I_2 = \lambda_1 \lambda_2$$

$$I_1 = \lambda_1 + \lambda_2$$

$$K_4 = -\lambda_1 \lambda_2 q_3^2$$

$$K_3 = \lambda_1 \lambda_2 d' - (\lambda_1 + \lambda_2) q_3^2$$

$$K_2 = (\lambda_1 + \lambda_2) d' - q_3^2$$

7 - إن $K_4 > 0$ تقتضي $q_3 \neq 0$ و $\lambda_1 \lambda_2 < 0$ والسطح مجسم قطع مكافئ زائدي.

8 - أما $K_4 < 0$ تقتضي $q_3 \neq 0$ و $\lambda_1 \lambda_2 > 0$ والسطح مجسم قطع مكافئ ناقصي. انظر المبرهنة (1) في الفقرة الرابعة.

(ب) إذا $I_2 > 0$ و $K_4 = 0$ تصبح (4-14) هي معادلة السطح والقيم غير المتبدلة للتوابع I_2, I_3 تبقى كما في الحالة السابقة وتصبح :

$$K_4 = 0, \quad K_3 = \lambda_1 \lambda_2 d', \quad K_2 = (\lambda_1 + \lambda_2) d'$$

9 - إن $K_4 < 0$ و $I_1 K_3 < 0$ ($\lambda_1 + \lambda_2$) $\lambda_1 \lambda_2 d' < 0$) تقتضي لـ d' و λ_1 إشارتين متعاكستين وحسب المبرهنة (1) السطح S أسطوانة ناقصية.

10 - وإن $I_1, K_3 > 0$ تقتضي أن $d' \neq 0$ والإشارة نفسها والسطح أسطوانة ناقصية تخيلية.

11 - إذا كانت $K_3 = 0$ فتكون $d' = 0$ والسطح عبارة عن مستقيم أو مستقيمين متقاطعين تخيليين .

(ج) عندما $I_2 < 0$ و $K_4 = 0$ تبقى المعادلة (4-14) تمثل السطح وهو :

12 - من أجل $K_3 \neq 0$ ($d' \neq 0$) أسطوانة زائدية .

13 - ومن أجل $K_3 = 0$ عبارة عن مستويين متقاطعين (حسب المبرهنة (1)).

III - نفرض الآن $I_3 = I_2 = K_4 = 0$ وهذا يعني قيمة واحدة فقط من λ_i لا

تساوي الصفر وتدوير المحاور حول ox تأخذ معادلة السطح الشكل :

$$\lambda_1 x'^2 + q y' + d' = 0$$

والتوابع التي قيمها لا تبدل تحقق العلاقات:

$$I_3 = I_2 = K_4 = 0$$

$$K_3 = -\lambda_1 q^2$$

$$K_2 = \lambda_1 d - q^2$$

14 - إذا $K_3 \neq 0$ فإن $q \neq 0$ والمعادلة تمثل أسطوانة مكافئة.

15 - إذا $K_3 = 0$ و $K_2 < 0$ ، المعادلة تمثل مستويين متوازيين.

16 - $K_3 = 0$ و $K_2 > 0$ ، المعادلة تمثل مستويين متوازيين تخيليين .

17 - $K_2 = K_3 = 0$ بيان المعادلة هو مستويان منطبقان.

وبهذا يتم إثبات المبرهنة.

يبين الجدول التالي جميع هذه الحالات :

$I_3 \neq 0$	$I_2 > 0$ و $I_1, I_3 > 0$	$K_4 > 0$ مجسم قطع ناقص تخيلي		
		$K_4 < 0$ مجسم قطع ناقص		
		$K_4 = 0$ مجسم مخروطي تخيلي		
	$I_2 \leq 0$ أو $I_1, I_3 \leq 0$	$K_4 > 0$ مجسم قطع زائد وحيد الفرع		
		$K_4 < 0$ مجسم قطع زائد ثنائي الفرع		
		$K_4 = 0$ مجسم مخروطي		
$I_3 = 0$	$K_4 > 0$	$I_2 < 0$ مجسم قطع مكافئ زائدي		
	$K_4 < 0$	$I_2 > 0$ مجسم قطع مكافئ ناقصي		
	$K_4 = 0$	$I_2 > 0$	$K_3 = 0$	مستقيم (مستويين تخيليين متقاطعين)
			$I_1, K_3 > 0$	المجموعة الخالية (أسطوانة ناقصية تخيلية)
			$I_1, K_3 < 0$	أسطوانة ناقصية
		$I_2 < 0$	$K_3 = 0$	مستويان متقاطعان
			$K_3 \neq 0$	أسطوانة زائدية
			$K_3 \neq 0$	أسطوانة مكافئة
		$I_2 = 0$	$K_3 = 0$	$K_2 > 0$ الخالية (مستويان متوازيان تخيليان)
				$K_2 = 0$ مستويان منطبقان
				$K_2 < 0$ مستويان متوازيان

جدول (4) تصنيف السطوح حسب القيم غير المتبدلة

مثال : (آ) : عيّن أنواع السطوح التالية :

$$1) \quad x^2 + y^2 + 5z^2 + 6xy + 2xz + 2yz + 2x - 2y + 6z = 0$$

$$2) \quad x^2 - y^2 + z^2 + 2xy - 2xz + 2yz + 2x + 2y + 2z + 10 = 0$$

(ب) ناقش حسب قيمة α نوع السطوح ببيان المعادلة :

$$\alpha z^2 + 4xy + 2xz + 2yz - 4y - 2z + \alpha = 0$$

الحل : (آ) :

1 - نعيّن القيم غير المتبدلة :

$I_3 = 0$ و $I_3 = -36 \neq 0$ فمن الجدول يكفي لمعرفة نوع السطح أن نحسب K_4 ،

لكن $K_4 = 36 > 0$. إذا المعادلة الأولى تمثل مجسم قطع زائد وحيد الفرع.

$I_3 = -4 \neq 0 - 2$ ، $I_2 = -4 < 0$ و $I_2 = -28 < 0$ K_4 السطح مجسم قطع زائد

ثنائي الفرع.

(ب) :

$$I_3 = 4(1 - \alpha)$$

$$K_4 = 4\alpha(1 - \alpha)$$

$$I_2 = -6$$

$$K_3 = 4 - 10\alpha$$

$$I_1 = \alpha$$

$$K_2 = \alpha^2 - 5$$

مجسم قطع زائد ثنائي الفرع $K_4 < 0$ $I_2 < 0$ $I_3 \neq 0$ أو $\alpha < 0$ أو $\alpha < 1$

مجسم مخروطي $K_4 = 0$ $I_2 < 0$ $I_3 \neq 0$ $\alpha = 0$

مجسم قطع زائد وحيد الفرع $K_4 > 0$ $I_2 < 0$ $I_3 \neq 0$ $0 < \alpha < 1$

مستويان متقاطعان $K_4 = 0, K_3 \neq 0$ $I_2 < 0$ $I_3 = 0$ $\alpha = 1$

6. السطوح المسطرة :

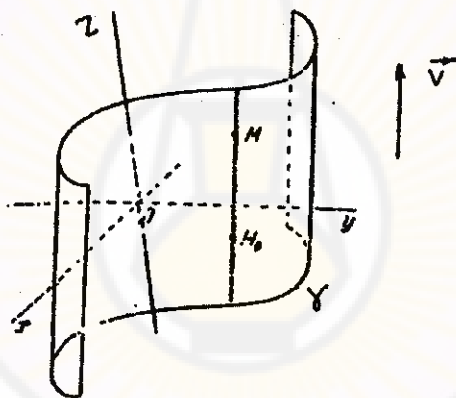
ندعو تلك السطوح التي تتولد بحزمة من المستقيمات بالسطوح المسطرة،

حيث يمكن تغطيتها تماماً ربما بأكثر من حزمة. هذه السطوح هي السطوح

الأسطوانية والسطوح المخروطية (التي تمكنا هذه الخاصة من استنتاج معادلاتها من معادلات المستقيمات المولدة لها) ومجسم القطع الزائد وحيد القرع ومجسم القطع المكافئ الزائدي.

6-1 السطح الأسطواني :

تعريف : السطح الأسطواني هو السطح الذي يولده مستقيم يتحرك موازياً لمنحنى ثابت $\bar{V}(t, m, n)$ ومستنداً على منحنى γ مفروض ندعوه دليل السطح الأسطواني، وندعو المستقيم المتحرك بالمولد. الشكل (6-1).



الشكل (6-1)

فإذا لاحظنا أن السطح الأسطواني هو مجموعة كل المستقيمات المتوازية المستندة على γ ندرك أن معادلات هذه المستقيمات هي المعادلات الوسيطة للسطح.

(1) إذا كان γ معرفاً وسيطياً :

$$\gamma : \quad x = x(t) , \quad y = y(t) , \quad z = z(t)$$

ستكون معادلات المستقيمات المارة من γ والموازية لـ $\bar{V}$:

$$\frac{x - x(t)}{l} = \frac{y - y(t)}{m} = \frac{z - z(t)}{n} = S$$

أو :

$$x = x(t) + lS$$

$$y = y(t) + mS \quad (1-6)$$

$$z = z(t) + nS$$

ومنها نحصل على المعادلة الديكارتية بمحذف S و t .

(2) إذا كان γ معرفاً ديكارتياً :

$$\gamma : \quad F(x, y, z) = 0 \quad , \quad G(x, y, z) = 0$$

نلاحظ من (1-6) أن :

$$x(t) = x - ls$$

$$y(t) = y - ms$$

$$z(t) = z - ns$$

إحدى نقاط γ بالتعويض في المعادلات الديكارتية لـ γ نحصل على المعادلات

الوسيطية للسطح :

$$F(x - ls, y - ms, z - ns) = 0$$

(2-6)

$$G(x - ls, y - ms, z - ns) = 0$$

والتي تنتج منها المعادلة الديكارتية بمحذف S .

مثال : اكتب المعادلات الوسيطية والديكارتية للسطح الأسطوانى الذي دليته

القطع الزائد :

$$x^2 - y^2 = 1 \quad , \quad z = 0$$

ومولده موازى لـ $\vec{V} (1, -1, 1)$.

الحل : من (2-6).

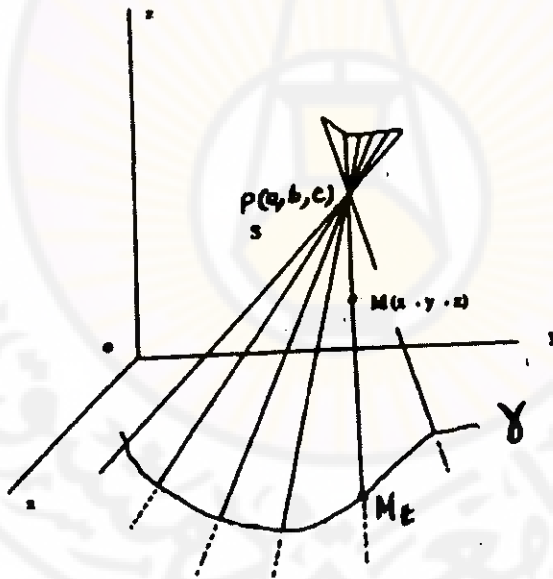
$$(x - S)^2 - (y + S)^2 = 1 \quad z = S$$

والمعادلة الديكارتية :

$$-x^2 + y^2 + 2xz + 2yz + 1 = 0$$

6-2 السطوح المعروطة :

نعرف السطح المعروطي بالسطح الذي يولده مستقيم يمر منه نقطة ثابتة $P(a, b, c)$ ويتحرك على منحنٍ مفروض γ ، ندعو P رأس المعروط و γ دليله. من التعريف يتضح أن P تحدد السطح المعروطي وأنه يتشكل من جميع المستقيمات المارة من P والقاطعة لـ γ ، ولتعيين معادلته نكتب معادلة المستقيمات المارة من P ومن $M_t \in \gamma$ الشكل (6-2).



الشكل (6-2)

(1) إذا كان γ معطى وسيطاً كما في الفقرة السابقة، تكون معادلات المستقيمات المولدة :

$$\frac{x - a}{x(t) - a} = \frac{y - b}{y(t) - b} = \frac{z - c}{z(t) - c} = S$$

ومن هنا نكتب المعادلات الوسيطة للسطح المعروطين :

$$x = a + (x(t) - a) S$$

$$y = b + (y(t) - b) S \quad (3-6)$$

$$z = c + (z(t) - c) S$$

بمذف S و t نجد المعادلة الديكارتية .

(2) إذا كان γ معطى ديكارتياً، نستبدل المتحولات في تلك المعادلات بـ :

$$x(t) = a + \frac{x - a}{S}$$

$$y(t) = b + \frac{y - b}{S}$$

$$z(t) = c + \frac{z - c}{S}$$

لنحصل على المعادلتين :

$$F\left(a + \frac{x - a}{S}, b + \frac{y - b}{S}, c + \frac{z - c}{S}\right) = 0 \quad (4-6)$$

$$G\left(a + \frac{x - a}{S}, b + \frac{y - b}{S}, c + \frac{z - c}{S}\right) = 0$$

والتي منها نستنتج المعادلات الديكارتية والوسيطية .

مثال : اكتب معادلة السطح المعروطين الذي رأسه $P(-1, 0, 5)$ ودليله

المنحني :

$$\gamma : \quad x^2 + 2y^2 = 4 \quad z = 0$$

الحل : نفرض أن $M_1 (x(t), y(t), z(t))$ من γ . نكتب معادلة حزمة المستقيمات المارة من P ومن M_1 .

$$\frac{x+1}{x(t)+1} = \frac{y}{y(t)} = \frac{z-5}{z(t)-5} = S$$

منها نبدل إحداثيات M_1 في معادلة γ :

$$\left(\frac{x+1}{S} - 1 \right)^2 + 2 \left(\frac{y}{S} \right)^2 = 4 \quad \text{و} \quad 5 + \frac{z-5}{S} = 0$$

بحذف S ، نحصل على المعادلة الديكارتية:

$$25x^2 + 50y^2 - 3z^2 + 10xz + 40z - 100 = 0$$

3-6 سطوح الدرجة الثانية المسطرة :

لقد وجدنا أن كلاً من السطوح الأسطوانية والمخروطية يتولد بحركة مستقيم وبالتالي يمكن تغطية كل منها بحزمة من المستقيمات وقبلنا بذلك كتعريف عام لها. لكن في الحقيقة هناك من بين سطوح الدرجة الثانية، مجسم القطع الزائد وحيد الفرع، ومجسم القطع المكافئ الزائدي، كل منها يتشكل بحزمتين من المستقيمات وستثبت ذلك من أجل مجسم القطع الزائد وحيد الفرع.

مبرهنة: يتشكل مجسم القطع الزائد وحيد الفرع بيان المعادلة (3-4) من حزمة المستقيمات :

$$D_1 \begin{cases} \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - \lambda \left(1 - \frac{x}{a} \right) = 0 \\ \frac{y}{b} - \frac{z}{c} - \frac{1}{\lambda} \left(1 + \frac{x}{a} \right) = 0 \end{cases} \quad \lambda \neq 0 \quad (4-6)$$

الإثبات : نكتب معادلة السطح S بالشكل :

$$\left(\frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right)\left(\frac{y}{b} - \frac{z}{c}\right) = \left(1 + \frac{x}{a}\right)\left(1 - \frac{x}{a}\right) \quad (5-6)$$

نأخذ نقطة اختيارية من S ونثبت أنه توجد قيمة للوسيط :

$\lambda(M_0)$ بحيث :

$$M_0 \in D_{\lambda}(M_0)$$

نضرب طرفي العلاقة (5-6) بقيمة $\lambda \neq 0$ فتكون المساواة التالية صحيحة

مهما كانت $\lambda \neq 0$.

$$\lambda \left(\frac{y_0}{b} + \frac{z_0}{c}\right)\left(\frac{y_0}{b} - \frac{z_0}{c}\right) = \lambda \left(1 + \frac{x_0}{a}\right)\left(1 - \frac{x_0}{a}\right) \quad (6-6)$$

(أ) إذا كانت $x_0 = a$ (فإن $\frac{x_0}{a} + 1 \neq 0$) نرى أن :

$$\frac{1}{\lambda(M_0)} = \frac{\frac{y_0}{b} - \frac{z_0}{c}}{1 + \frac{x_0}{a}}$$

نحقق العلاقة الثانية في (4-6) وبتعويضها في (6-6) (الحققة مهما كانت λ) نجد :

$$\left(\frac{y_0}{b} + \frac{z_0}{c}\right)\left(1 + \frac{x_0}{a}\right) = 0$$

وهي تبين صحة العلاقة الأولى في (4-6) أي وجدنا مستقيم من الحزمة D_{λ} تنتمي

إليه M_0 .

(ب) إن كانت $x_0 \neq a$ من أجل :

$$\lambda(M_0) = \frac{\frac{y_0}{b} + \frac{z_0}{c}}{1 - \frac{x_0}{a}}$$

تكون العلاقة التالية محققة :

$$\frac{y_0}{b} + \frac{z_0}{c} = \lambda(M_0) \left(1 - \frac{x_0}{a}\right)$$

وبالتالي محققة العلاقة الأولى في (6-4) بينما العلاقة الثانية فستكون أيضاً صحيحة (حسب (6-6)) وعندها وجدنا القيمة $\lambda (M_0)$ التي من أجلها:

$$M_0 \in D_{\lambda(M_0)}$$

وبالعكس : لو أخذنا جداء علاقتي (6-4) لحصلنا على المعادلة (6-5) وهذا يعني أن أي مستقيم D_{λ} من الحزمة سيقع على السطح S وبالتالي S يطابق حزمة المستويات D_{λ} .

ملاحظة (1) : إن حزمة المستقيمات Δ_{λ} :

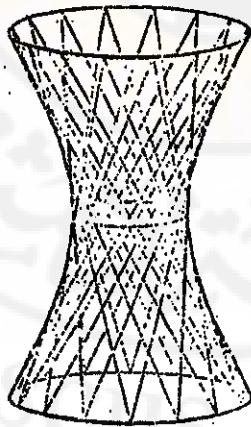
$$\frac{y}{b} + \frac{z}{c} - \lambda \left(1 + \frac{x}{a} \right) = 0$$

Δ_{λ} :

$$\lambda \neq 0$$

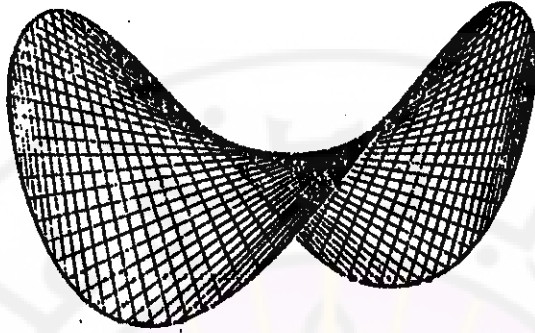
$$\frac{y}{b} - \frac{z}{c} - \frac{1}{\lambda} \left(1 - \frac{x}{a} \right) = 0$$

تختلف عن D_{λ} ، حيث يمكن أن نثبت بشكل مشابه أن هذه الحزمة تغطي السطح S ، وهذا يقودنا إلى أنه يمكن تغطية مجسم القطع الزائد وحيد الفرع كلياً بحزمتين مختلفتين من المستقيمات. الشكل (6-3).



الشكل (6-3)

ملاحظة (2) : نرى من بالطريقة ذاتها أنه يمكن تغطية مجسم القطع المكافئ
الزائدي بيان المعادلة (3-15) بمزمتين مختلفتين من المستقيمات. الشكل (4-6).



الشكل (4-6)

تمارين الفصل الخامس ومسائله

1 - عيّن المستويات والمستقيمات الناقطة لكل من السطوح التالية في نقاط التقاطع

$$D: x=0, z=1$$

مع المستقيم

a) $3x^2 + 3y^2 + 2z^2 + 4xy - 2xz - 2yz - 10 = 0$

b) $4x^2 + 6y^2 + 4z^2 + 4xz - 8y - 4z - 20 = 0$

c) $2x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz + 4x - 2y + 2 = 0$

2 - عيّن مركز كل من السطوح التالية، ثم اكتب معادلاتها المختزلة واذكر نوعها.

1) $2x^2 + y^2 - z^2 + 6x - 4y - 3z - 5 = 0$

2) $-3x^2 + y^2 + 2z^2 - 6x + 4y - 4z - 9 = 0$

3) $4x^2 - 2y^2 + 3z^2 + 12y + 6z + 27 = 0$

4) $x^2 + 4y^2 + z^2 - 4x - 8y + 8z + 15 = 0$

3 - ناقش حسب قيم λ تقاطع السطح S مع المستوي π في كلتا الحالتين :

a) $S: -x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$

$\pi: \sqrt{3}y + z + \lambda = 0$

b) $S: 5x^2 + y^2 + 2z^2 - 10x + 4y - 12z + 26 = 0$

$b: x + y + z - \lambda = 0$

4 - ادرس مساقط مقاطع $2x^2 - y^2 + z^2 + 1 = 0$ بالمستوي $x + y + z = 0$ على المستويات الإحداثية.

5 - ما هو الحل الهندسي للنقاط التي تتساوى مسافة كل منها عن المستوي :

$$x + y - 4 = 0 \quad \text{والنقطة } M(3, 1, 2).$$

6 - اكتب معادلتين للمستويين المتوازيين للمستوي $2x - y + z = 0$ والمماسين للسطح

$$2x - 16 = 0 \quad x^2 + y^2 + z^2 = 16$$

7 - ناقش نوع السطح التالي حسب قيم α .

$$\frac{x^2}{\alpha - 1} + \frac{y^2}{\beta - 1} + \frac{z^2}{\gamma - 1} = 1 \quad \alpha < \beta < \gamma$$

8 - ما هو الحل الهندسي للنقاط التي مربع بعدها عن المستقيم :

$$x = 2 + t, \quad y = 1 + t, \quad z = 1 - t$$

يساوي ضعف بعدها عن المستوي :

$$x + y - z - 2 = 0$$

9 - ما هو الحل الهندسي لمجموعة النقاط التي مجموع بعدها عن النقطتين :

$$(2, 1, 0), (-2, 1, 0) \text{ يساوي } 10.$$

10 - اكتب معادلة مجسم القطع الناقص الذي مركزه $P(1, 2, -3)$ ومحاوره توازي

المحاور الإحداثية وتمر من النقاط :

$$M_1(1, 4, 3), \quad M_2(1, 4, -3), \quad M_3(2, 3, -2)$$

11 - اكتب معادلة مجسم قطع مكافئ زائدي نموذجي يحوي المستقيم

$$z = 0 \quad \text{و} \quad 2x + y = 0 \quad \text{وتمر من النقطة } M_0(6, 8, 16).$$

12 - اكتب معادلة مجسم قطع زائد وحيد الفرع نموذجي محوره بوازي Oz ويمر من النقطتين $M_1(2, 1, 0)$, $M_2(5, 2, \sqrt{69})$

13 - اعتزل المعادلات التالية بعد تعيين النوران والانسحاب المناسبين ثم عين أنواع السطوح التي تمثلها وحدد عناصرها :

- 1) $x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy + 2xz - 4yz + x + y = 0$
- 2) $2z^2 + 4xy + 6x + 2y - 4z + 5 = 0$
- 3) $4x^2 + 4z^2 + 4xz - 22x - 2y - 14z + 33 = 0$
- 4) $-x^2 + y^2 + 6z^2 + xz + 5yz + 2y + 5z = 0$
- 5) $-2z^2 - 2xy + xz + 2yz - 3x + y - 2z - 2 = 0$
- 6) $10x^2 + 26y^2 + 20z^2 - 16xy - 4xz - 36yz - 16x + 52y - 36z + 25 = 0$
- 7) $5x^2 + 5y^2 - 4z^2 - 14xy + 4xz + 4yz - 32x + 16y + 16z + 8 = 0$
- 8) $4x^2 + 9y^2 + 4z^2 + 12xy + 8xz + 12yz + 10x + 4y + z + 1 = 0$
- 9) $18x^2 + 2y^2 + 20z^2 - 12xz + 12yz - 2x + 22y + 6z - 2 = 0$
- 10) $8x^2 + 3y^2 - 24z^2 - 10xy + 16xz - 14yz + 2x + 22z - 4 = 0$
- 11) $x^2 + 36y^2 + 4z^2 - 12xy - 4xz + 24yz - 28x + 4y + 16z - 3 = 0$
- 12) $6x^2 - 18xy + 2xz - 6yz + 5x - 5y - 9z + 2 = 0$

14 - احسب القيم غير المتبدلة لكل معادلة وصنف السطوح التي تمثلها :

- 1) $x^2 + 4y^2 + z^2 + 4xy + 2xz + 4yz - 6y + 1 = 0$
- 2) $x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy - 10xz + 2x + 4y - 10z - 1 = 0$
- 3) $2x^2 + 2y^2 + 5z^2 + 2xy - 2xz + 4yz = 0$
- 4) $4x^2 + 4y^2 + 6z^2 + 4xy - 4x - 8z + 3 = 0$
- 5) $x^2 - 3y^2 + z^2 - 6xy - 2xz - 6yz + 2x + 6y + 2z = 0$

- 6) $x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy - 8xz - 4yz - 14x - 4y + 14z + 16 = 0$
- 7) $x^2 + y^2 + 5z^2 + 6xy + 2xz + 2yz - 6x - 2y + 6z = 0$
- 8) $y^2 + 2xy + 4xz + 2yz - 4x - 2y = 0$
- 9) $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2xz - 2yz - 1 = 0$
- 10) $x^2 - 2y^2 + xy - xz + yz + x - y = 0$
- 11) $4x^2 + y^2 + z^2 - 4xy + 4xz - 2yz + 4 = 0$
- 12) $2x^2 + y^2 + 4z^2 + 2xy - 4xz - 2y - 4z + 2 = 0$

15 - عيّن نوع كل من السطوح التالية حسب قيم λ :

- 1) $x^2 + y^2 + z^2 + 4xz + \lambda yz - \lambda y + \lambda z + 6 = 0$
- 2) $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2xz - 2yz + 2\lambda(x + y - z) + \lambda^2 - \lambda = 0$
- 3) $y^2 + z^2 - 4xz - 4yz + 4y - 6z + \lambda = 0$
- 4) $(4\lambda + 1)x^2 + y^2 + (\lambda + 4)z^2 + 2xy - 4(\lambda - 1)xz + 4yz - (4\lambda - 1)x + 2\lambda z + \lambda = 0$

16 - اكتب معادلة السطح الأسطوانتي في الحالات التالية :

(أ) بمس الكرة $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ ويمر من النقطة $(5, 1, 2)$.

(ب) متعامد مع المستوي $x + y - 2z = 1$ ويمس الكرة السابقة.

(ج) بمس الكرتين :

$$x^2 + y^2 + z^2 = 25 \quad , \quad x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y - 19 = 0$$

(د) بمس داخلياً مجسم القطع الزائد :

$$2x^2 - y^2 + z^2 = 1$$

(هـ) دوراني محوره مواز لـ $\vec{V}(l, m, n)$ ونصف قطره R .

17 - عيّن نوع السطح ببيان المعادلة :

$$(x-3y)^2 + (2x-3z)^2 + (2y-z)^2 - 1 = 0$$

18 - أثبت أن المعادلة التالية تمثل مجسماً مخروطياً رأسه مبدأ الإحداثيات :

$$x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 2(x+y+z)^2$$

ويعر من المنحني ببيان المعادلات :

$$x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 2 \quad , \quad x+y+z=1$$

19 - حدد r لتقاطع الكرة والقطع الناقص :

$$x^2/4 + y^2/9 + z^2 = 1$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

ثم عيّن α, β, γ لتمثل المعادلة التالية مجسماً مخروطياً يعر من منحنى التقاطع :

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + z^2 = r^2$$

20 - اكتب معادلة سطح مخروطي في كل من الحالات التالية :

(أ) رأسه $(-2, 3, -1)$ ودليله :

$$-x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad , \quad x+y \cdot z = 0$$

(ب) رأسه $(a, 0, 0)$ ودليله :

$$y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1 \quad x = -1$$

حيث $a \neq -1$.

(ج) دوراني محوره $z=1, y=1$ ويعر من النقطة $(3, -4, 10)$.

(د) دوراني محوره المستقيم :

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+1}{-1}$$

ورأسه في oyz والنقطة $(1, 1, -\frac{1}{2})$ تقع على سطحه .

(هـ) رأسه $(10, 2, 1)$ وبمس الكرة $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 2 = 0$

الفصل السادس

رسم المنحنيات

١ - رسم المنحنيات الديكارتية :

١ - ١ الفروع المتزايدة والمتناقصة :

إن أول ما نفكر به عند دراسة تابع تزايد وتناقصه فالتابع $y = f(x)$ يكون متزايداً في المجال $[a, b]$ فيما إذا تغير كل من التابع y والمتحول x في اتجاه واحد. أي إذا تزايد المتحول x تزايد التابع y وبالعكس إذا تناقص المتحول x تناقص التابع y . ينتج عن ذلك أنه بفرض $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$ فإن $\Delta y = y_2 - y_1$ و $\Delta x = x_2 - x_1$ هما من إشارة واحدة وبالتالي تكون النسبة $\Delta y / \Delta x$ موجبة .

وبمحل $\Delta x \rightarrow 0$ فالنسبة تنتهي إلى المشتق y' ويكون موجباً.. وبالعكس إذا كان y' موجباً في مجال ما فهنا يعني أن $\Delta y / \Delta x$ موجب وبالتالي Δx و Δy من إشارة واحدة.

نستنتج أن الشرط اللازم والكافي لكي يكون التابع $y = f(x)$ متزايداً في مجال ما هو أن يكون مشتقه y' موجباً.

كما يكون التابع متناقصاً في المجال $[a, b]$ فيما إذا كان تغير كل من x و y في اتجاهين مختلفين. أي إذا تزايد المتحول x تناقص التابع y وبالعكس.

ينتج عن ذلك أن $\Delta y = y_2 - y_1$ و $\Delta x = x_2 - x_1$ هما من إشارتين مختلفتين. وبالتالي تكون النسبة $\Delta y / \Delta x$ سالبة.

ويعمل $\Delta x \rightarrow 0$ فالنسبة $\Delta y / \Delta x$ تنتهي إلى المشتق y' ويكون سالباً وبالعكس

إذا كان y' سالباً في مجال ما فالتابع $y = f(x)$ متناقص.

نستنتج أن الشرط اللازم والكافي لكي يكون التابع $y = f(x)$ متناقصاً في مجال ما هو أن يكون مشتقه سالباً.

2 - 1 النهايات العظمى والصغرى :

نقول عن التابع $y = f(x)$ المعروف والمستمر في المجال $[a, b]$ أنه يبلغ نهاية عظمى من أجل $x = c$ الواقعة داخل المجال $[a, b]$ فيما إذا أصبحت قيمة التابع $y = f(x)$ عند النقطة c أي $f(c)$ أعظم من جميع القيم التي يأخذها من أجل قيم المتحول المجاورة لـ c . أي إذا كانت M نقطة من منحنى التابع $y = f(x)$ فصلها c وترتيبها $f(c)$ فهذه النقطة تمثل النهاية العظمى، عندما يكون ترتيبها أعظم من جميع ترتيبات نقاط المنحنى المجاورة لها.

ينتج عن ذلك أن المنحنى إذا بلغ نهاية عظمى في M فقبل هذه النقطة يكون التابع متزايداً وبالتالي يكون y' موجباً وبعد هذه النقطة يكون التابع متناقصاً وبالتالي يكون y' سالباً، وبما أن y' يتغير باستمرار من الموجب إلى السالب فلا بد له إلا أن يتعلم من أجل النهاية العظمى.

نستنتج أن منحنى التابع المستمر يبلغ نهاية عظمى عندما ينعدم مشتقه مغزاً إشارته من الموجب إلى السالب.

نقول عن التابع $y = f(x)$ المعروف والمستمر في المجال $[a, b]$ إنه يبلغ نهاية صغرى من أجل $x = c$ الواقعة داخل المجال $[a, b]$ فيما إذا أصبحت قيمة التابع $f(x)$ أصغر من جميع القيم التي يأخذها من أجل قيم المتحول المجاورة إلى c . أي إذا كانت P نقطة من منحنى التابع فصلها c وترتيبها $f(c)$ فهذه النقطة تمثل النهاية الصغرى عندما يكون ترتيبها أصغر من جميع ترتيبات نقاط المنحنى المجاورة لها.

نتج عن ذلك أنه قبل P يكون التابع متناقصاً وبالتالي يكون y سالباً وبعد P يصبح التابع متزايداً وبالتالي يكون y موجباً، وبما أن المشتق يتغير باستمرار من السالب إلى الموجب فلا بد له إلا أن يتعدى من أجل النهاية الصغرى.

نستنتج أن منحنى التابع المستمر يبلغ نهاية صغرى عندما يتعدى مشتقه مغزراً إشارته من السالب إلى الموجب.

لاحظنا أن إشارة المشتق تدل على طبيعة التابع إن كان متزايداً أو متناقصاً، كما أن انعدامه مع تغير إشارته يدل على وجود نهاية صغرى أو عظمى لهذا إذا أردنا دراسة تحولات التابع فإننا نعتمد على مشتقه.

مثال : ادرس تحولات التابع :

$$y = \frac{x}{x^2 + 1}$$

هذا التابع معرف ومستمر من أجل جميع قيم x ولدراسة تحولاته نحسب المشتق :

$$y' = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$$

يتعدى المشتق من أجل $x = \pm 1$ ويكون $y = \pm \frac{1}{2}$.
ولدراسة التحولات نرتب الجدول التالي :

x	$-\infty$	-1	$+1$	$+\infty$
y'	-	0	+	-
y	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

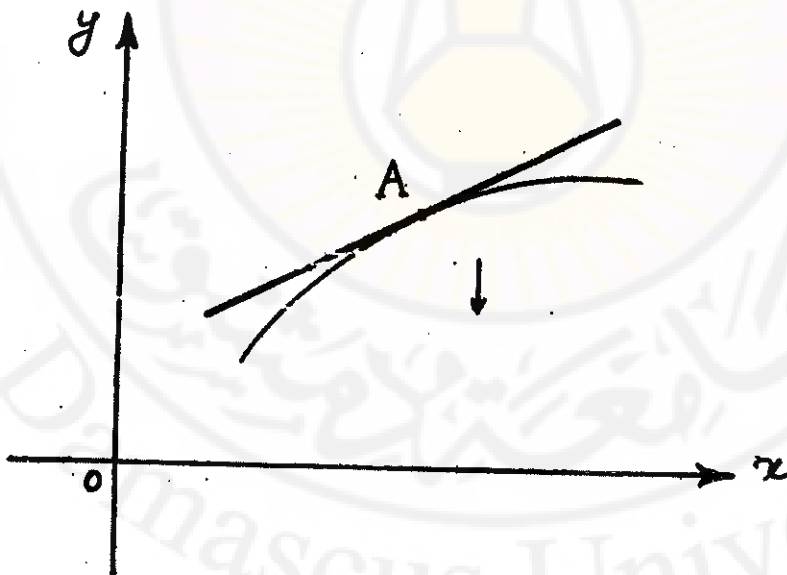
3-1 القطر والانعطاف :

ليكن التابع $y = f(x)$ المعرف في المجال $[a, b]$ ، فلكل قيمة تعطى إلى x يقابلها قيمة إلى y ، والقيمتان تعينان نقطة في مستوي المجهزين الإحداثيين. فإذا أعطينا x

جميع قيم المجال $[a, b]$ وحسبنا القيم المقابلة لـ y ثم عينا النقاط المقابلة لكل زوج من هذه القيم نحصل على عدد غير متناه من النقاط تشكل عطاءً بيانياً للتابع.

نقول إن تقعر هذا المنحني في جوار النقطة A التي فصلها $x = a$ يتجه نحو الأسفل أو نحو الراتب السالبة فيما إذا رسمنا المماس للمنحني في A ووقعت نقاط المنحني المارة إلى A تحت المماس. وبالعكس إذا وقعت نقاط المنحني المارة لنقطة التماس فوق المماس نقول إن تقعر يتجه نحو الأعلى أو نحو الراتب الموجبة.

تعيين اتجاه تقعر المنحني: ليكن التابع $y = f(x)$ ولنفرض أن عطفه البياني بجوار النقطة A يتجه نحو الأسفل كما في الشكل (1-1) نلاحظ أنه عندما تزداد x فإن ميل المماس يتناقص أي y' يتناقص، ولما كان y' يتبع بدوره إلى x وهو متناقص فيجب أن يكون مشتقه y'' سالباً نستنتج أن تقعر المنحني يتجه نحو الأسفل عندما يكون مشتقه الثاني سالباً.



الشكل (1-1)

وبالطريقة نفسها نستنتج أن تقعر المنحنى يتجه نحو الأعلى عندما يكون مشتقه الثاني موجباً.

نقطة الانعطاف: هي النقطة التي يكون التقعر عن يسارها ويمينها باتجاهين مختلفين، ومن البديهي أن المماس في نقطة الانعطاف يخرق المنحنى. ليكن التابع $y = f(x)$ ولنفرض أن منحنيه يدرك نقطة انعطاف في A فقبل A التقعر نحو الأسفل مثلاً إذن y'' سالب، وبعد A التقعر نحو الأعلى إذن y'' موجب، وبما أن y'' يتغير باستمرار من السالب إلى الموجب فلا بد له أن يتعدى من أجل نقطة الانعطاف. نستنتج أن منحنى التابع يدرك نقطة انعطاف عندما يتغير y'' مغزاً إشارة.

4 - 1 المقاربات :

نقول إن لمنحنى فرعاً لا نهائياً إذا ابتعدت نقاط هذا الفرع من المنحنى باتجاه اللانهاية .

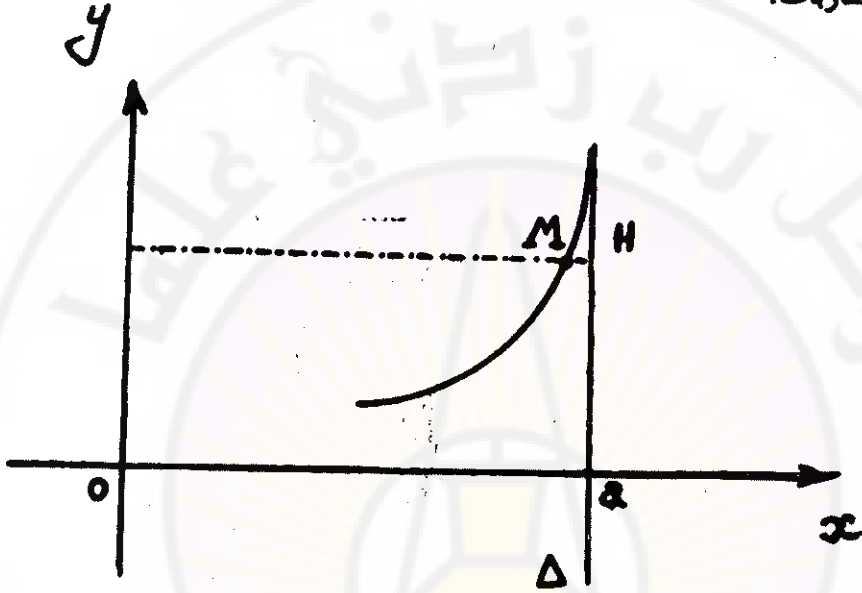
نقول عن منحنى التابع $y = f(x)$ إنه يقبل المستقيم Δ كمستقيم مقارب فيما إذا انتهى بعد نقطة M من المنحنى عن Δ إلى الصفر عندما تسمى M إلى اللانهاية. ولنستعرض بعض المقاربات بأدئين بالمقارب الموازي محور الراتب.

ليكن المستقيم $x = a$ الموازي محور الراتب والمقارب لمنحنى التابع $y = f(x)$ الشكل (1-2) ولتكن $M(x, y)$ نقطة من منحنى التابع $y = f(x)$ ، نلاحظ أن بعد M عن المستقيم Δ هو $MH = y - a$ ونلاحظ أن هذا البعد يصغر كلما ابتعدت M ، فعندما $a - x \rightarrow 0$ فإن $y \rightarrow \infty$ أي أن :

$$x \rightarrow a \text{ عندما } y \rightarrow \infty$$

ومنه نستنتج أن منحنى التابع $y = f(x)$ يقبل مستقيماً مقارباً موازياً محور الراتب ومعادلته $x = a$ فيما إذا جعلنا في معادلة المنحنى $x \rightarrow a$ ونتج عن ذلك $y \rightarrow \infty$.

بمعنى آخر لإيجاد المحاور المقاربة والموازية لمحور الترتيب يكفي أن نبحث في معادلة المنحنى عن قيم x التي تجعل y تسمى إلى اللانهاية، وهذه القيم هي معادلات المقاربات.



الشكل (1-2)

مثال : للتابع :

$$y = \frac{1}{x^2 - 1}$$

مستقيمان مقاربان يوازيان محور الترتيب هما :

$$x = -1 \quad , \quad x = 1$$

ومن أجل المستقيم المقارب الموازي لمحور الفواصل ليكن المستقيم $y = b$

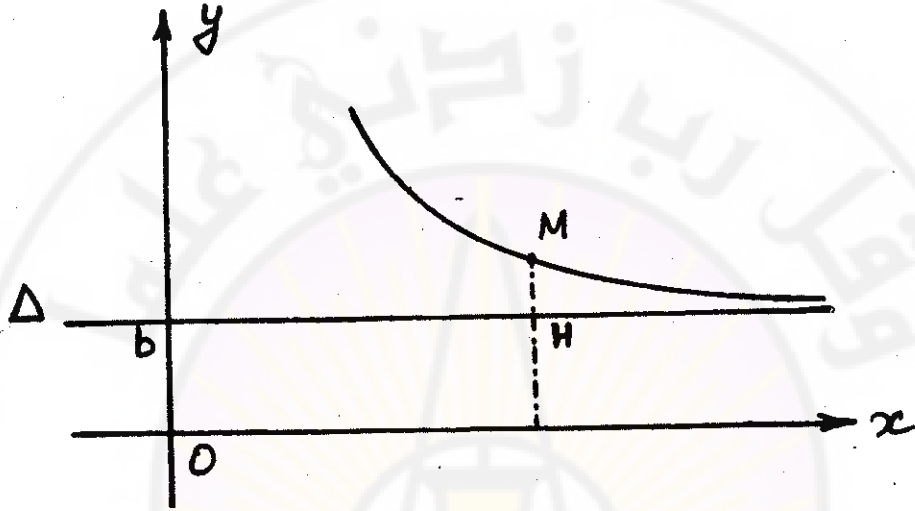
الموازي محور الفواصل والمقارب لمنحنى التابع $y = (x)$ الشكل (1-3) وليكن $M(x, y)$

نقطة من المنحنى. نلاحظ أن بعد M عن المستقيم Δ هو $MH = y - b$ وأن هذا البعد

يصغر كلما ابتعدت M ، فعندما $y - b \rightarrow 0$ فإن $x \rightarrow \infty$ أي أن $y \rightarrow b$ عندما

$$x \rightarrow \infty$$

ومنه نستنتج أن منحنى التابع $y = f(x)$ يقبل مستقيماً مقارباً موازياً لمحور
 الفواصل ومعادلته $y = b$ فيما إذا جعلنا في معادلة المنحنى $x \rightarrow \infty$ وننتج عن ذلك
 $y \rightarrow b$.



الشكل (1-3)

مثال : للتابع :

$$y = \frac{x^2}{2x^2 + 3}$$

مستقيم مقارب موازٍ لمحور الفواصل ومعادلته $y = \frac{1}{2}$.

هذا ويمكن أن توجد مقاربات مائلة ولإيجاد معادلة المستقيم المقارب المائل
 للتابع $y = f(x)$ ولتكن من الشكل $y = mx + h$ يكفي أن نحسب ميله m من العلاقة:

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x}$$

ونحسب h من العلاقة :

$$h = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - mx)$$

كما توجد منحنيات مقارنة إذا كانت معادلة التابع $y = f(x)$ معطاة مثلاً بالشكل :

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

حيث $p(x)$, $q(x)$ حدوديتان ودرجة $p(x)$ أكبر من درجة $q(x)$ وبفرض $T(x)$ ناتج القسمة الصحيح لـ $p(x)$ على $q(x)$ و $p_1(x)$ باقي القسمة :

$$f(x) = T(x) + \frac{p_1(x)}{q(x)}$$

عندما $y = T(x)$ معادلة المنحنى المقارب لمنحنى التابع :

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

وذلك لأن :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{p_1(x)}{q(x)} = 0$$

5 - 1 رسم المنحنيات الديكارتية :

لدراسة تحولات تابع ورسم معطى البياني نقوم بالخطوات التالية :

- 1 - نعين مجموعة تعريف التابع وهي أكبر مجموعة جزئية من R يكون التابع معرفاً عليها ، مع التنويه إلى أنه يمكن دراسة تحولات التابع على مجموعة جزئية من مجموعة التعريف، إذا لاحظنا وجود تناظر لمنحنى التابع.
- 2 - نعين الخطوط المقاربة إن وجدت.
- 3 - نعين نقاط مساعدة هي نقاط تقاطع منحنى التابع مع كل من المحورين الإحداثيين.
- 4 - حساب المشتق الأول وجنوده ودراسة إشارته.
- 5 - حساب المشتق الثاني لتعيين اتجاه التقعر ونقاط الانعطاف.

6 - نكتب للطوباء السابقة في جدول.

7 - رسم المنحنى البياني على ضوء للطوباء السابقة.

مقال (1): افترض انحرافات التابع :

$$y = \frac{(x-1)^2}{x}$$

وارسم خطه البياني.

التابع كسري ومعرف على $\mathbb{R}^*$ ، أي التابع معرف على المجموعة التالية:

$$]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$$

$$x \rightarrow 0 \quad y \rightarrow \pm\infty$$

فالمستقيم $x=0$ محور مقارب.

نكتب معادلة التابع بالشكل :

$$y = x - 2 + \frac{1}{x}$$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = 1$$

و :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (y - mx) = -2$$

ومنه $y = x - 2$ محور مقارب مائل.

المشتق الأول :

$$y' = \frac{x^2 - 1}{x^2}$$

$$\left. \begin{array}{l} y = -4 \Leftrightarrow x = -1 \\ y = 0 \Leftrightarrow x = 1 \end{array} \right\} \quad y' = 0$$

$$y'' = \frac{2}{x^3}$$

نلاحظ أن المشتق الثاني لا يسلم وبالتالي لا يوجد نقاط انعطاف.

ومن أجل $x > 0$ فإن $y > 0$ والتغير نحو الراتب الموجبة.

ومن أجل $x < 0$ فإن $y < 0$ والتغير نحو الراتب السالبة.

نكتب المعلومات السابقة في الجدول التالي :

x	$-\infty$	-1	0	+1	$+\infty$
y		+	0	-	+
y	$-\infty$		-4		$+\infty$
			$-\infty$		
				0	
					$+\infty$

نرسم المنحنى المطلوب (الشكل 4-1).

2 - رسم المنحنيات الوسيطة والقطبية :

1 - 2 رسم المنحنيات الوسيطة :

تعرفنا على طريقة رسم المنحنى البياني للتابع $y = f(x)$ ولكن المنحنى قد يمثل

بشكل وسيطي بالمعادلتين :

$$x = x(t) , y = y(t)$$

حيث كل قيمة للوسيط t يقابلها قيمة واحدة لكل من x و y أي أن كل

قيمة للوسيط t تعين نقطة على المنحنى.

ولكن قد تواجهنا أحياناً قيم مختلفة لـ t تعين القيم نفسها للتابعين x و y أي

النقطة نفسها، فنقول عندها إن هذه النقطة هي نقطة مضاعفة.

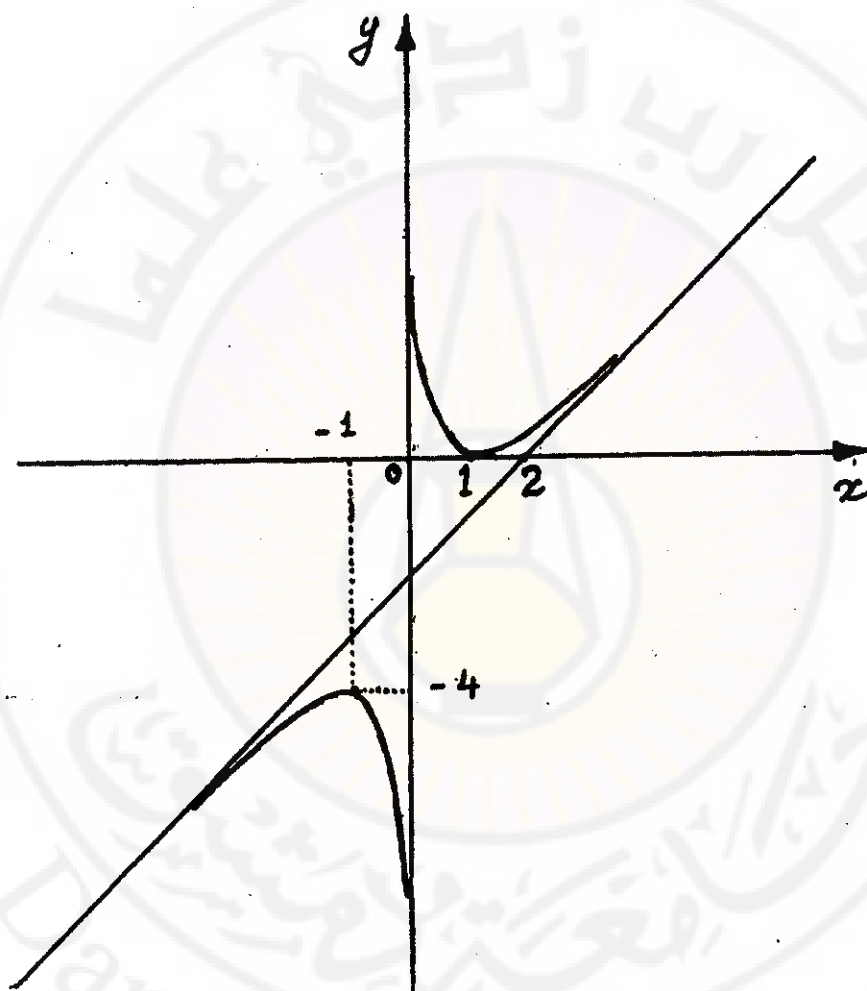
مثلاً إذا كانت :

$$y(t_1) = y(t_2) \quad \text{و} \quad x(t_1) = x(t_2)$$

فإن $M(x, y)$ المقابلة للقيمتين $t = t_1$ و $t = t_2$ تدعى نقطة مضاعفة .

أي أن المنحنى البياني :

$$y = y(t) \quad \text{و} \quad x = x(t)$$



الشكل (4-1)

يمر مرتين من النقطة M هذا يعني أن للمنحنى فرعين يمر كل منهما بهذه النقطة.

لرسم المنحنى البياني المعرف بالمعادلتين الوسطيتين:

$$y = y(t) \quad \text{و} \quad x = x(t)$$

نقوم بالخطوات التالية :

- 1 - نعين مجالات تحوّل الوسيط t التي تغطي كلاً من x و y قابلاً حقيقياً معرّفاً ونحدد المجالات التي يجب أن يتحوّل فيها الوسيط t لتوسم النقطة (x, y) المنحنى بكامله مرة واحدة فقط وندرس التحولات ضمن هذه المجالات فقط.
- قد نختصر مجال الدراسة إذا لاحظنا وجود تناظرات للمنحنى حول محاور الفواصل أو القوائم أو المبدأ .

- 2 - نعين المحاور المقاربة بالشكل التالي :

من أجل $t \rightarrow a$ إذا كان $x \rightarrow \infty$ و $y \rightarrow \infty$ فإن $t \rightarrow a$ محور مقارب مواز لمحور القوائم.

من أجل $t \rightarrow a$ إذا كان $x \rightarrow \infty$ و $y \rightarrow b$ فإن $t \rightarrow a$ محور مقارب مواز لمحور الفواصل.

أما إذا سعت كل من x و y إلى اللانهاية من أجل $t \rightarrow a$ عندها نبحث عن :

$$\lim_{t \rightarrow a} \frac{y}{x}$$

فإذا وجدت هذه النهاية ولتكن a نبحث عن النهاية :

$$\lim_{t \rightarrow a} (y - ax)$$

فإن وجدت ولتكن b مثلاً فإن للمنحنى محوراً مقارباً معادلاً له :

$$y = ax + b$$

- 3 - نعين نقاط التقاطع مع المحورين ox و oy .

- 4 - نحسب $\frac{dx}{dt}$ و $\frac{dy}{dt}$ ونقيم t التي تعلم كلاً منهما.

- 5 - دراسة تحولات كل من x و y بحلول واحد .

6 - رسم المنحنى البياني على ضوء المعلومات السابقة .

مقال : ارسم الخط البياني للتابع المعرف بالمعادلتين الوسيطيتين :

$$x = \frac{3t}{1+t^3} , \quad y = \frac{3t^2}{1+t^3}$$

يمكن لـ t أن تأخذ القيم كافة في R عدا $t = -1$ التي تعدم المقام.

من أجل $t \rightarrow -1$ فإن $x \rightarrow \infty$ و $y \rightarrow \infty$ ومنه :

$$a = \lim_{t \rightarrow -1} \frac{y}{x} = \lim_{t \rightarrow -1} t = -1$$

وبالتالي :

$$b = \lim_{t \rightarrow -1} (y - ax) = \lim_{t \rightarrow -1} (y + x) = \lim_{t \rightarrow -1} \frac{3t(t+1)}{t^3+1} = -1$$

إذن $y = -x - 1$ محور مقارب مائل يوازي منتصف الربع الثاني.

$$\frac{dx}{dt} = 3 \frac{1-2t^3}{(1+t^3)^2}$$

و :

$$\frac{dy}{dt} = 3 \frac{t(2-t^3)}{(1+t^3)^2}$$

$$\frac{dx}{dt} = 0 \Rightarrow t = \frac{\sqrt[3]{4}}{2} \Rightarrow x = \sqrt[3]{4}, \quad y = \sqrt[3]{2}$$

$$\frac{dy}{dt} = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \Rightarrow x = 0, \quad y = 0 \\ t = \sqrt[3]{2} \Rightarrow x = \sqrt[3]{2}, \quad y = \sqrt[3]{4} \end{cases}$$

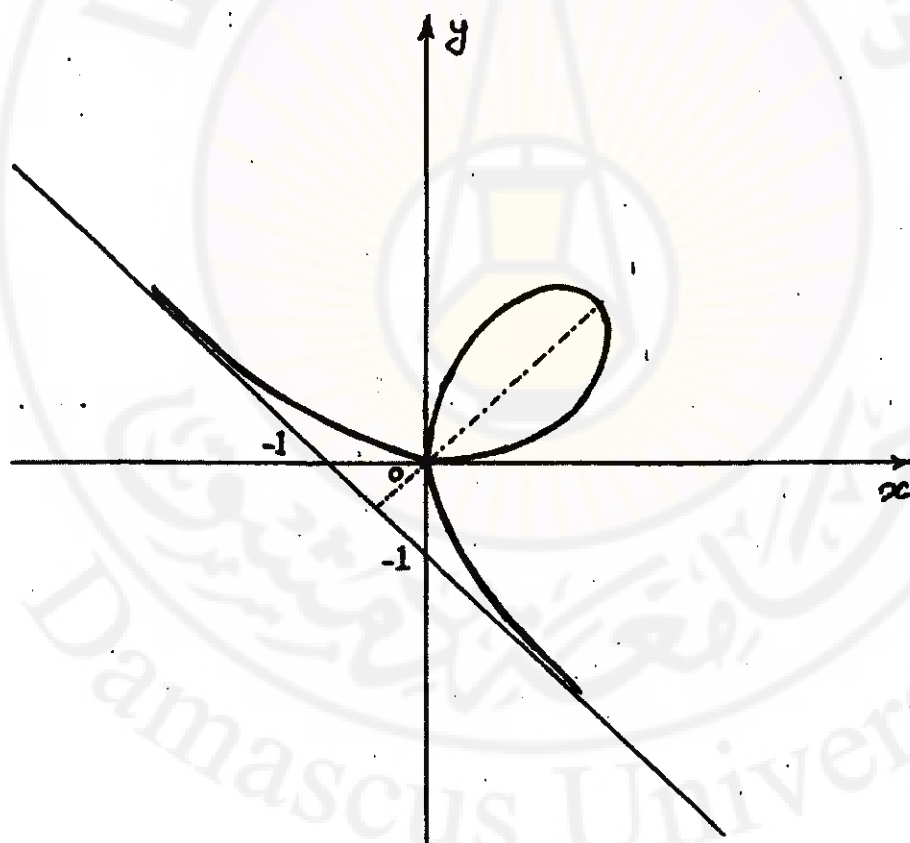
$$x = 0 \Rightarrow t = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$y = 0 \Rightarrow t = 0 \Rightarrow x = 0$$

نشكل جدول دراسة التحولات:

t	$-\infty$	-1	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$\sqrt{2}$	$+\infty$
x'	+	+	+	0	-	-	-
x	0 $\nearrow +\infty$	$-\infty \nearrow 0$	$\nearrow \sqrt{4}$	$\searrow 1.5$	$\searrow \sqrt{2}$	$\searrow 0$	
y'	-	-	0	+	+	+	0
y	0 $\searrow -\infty$	$+\infty \searrow 0$	$\nearrow \sqrt{2}$	$\nearrow 1.5$	$\nearrow \sqrt{4}$	$\searrow 0$	

نرسم المنحني المطلوب الشكل (2-1) :



الشكل (2-1)

مثال : ارسم الخط البياني للتابع المعرف بالمعادلتين الوسيطيتين :

$$x = \frac{2t^2 - 1}{t(t+1)} , y = \frac{2t^2 - 1}{t+1}$$

إن x معين من أجل جميع قيم t باستثناء $t=0$ و $t=-1$

y معين من أجل جميع قيم t باستثناء $t=-1$.

من أجل $t \rightarrow 0$ فإن $x \rightarrow +\infty$ و $y \rightarrow -1$

ومنه $y = -1$ محور مقارب موازي لمحور الفواصل.

من أجل $t \rightarrow -1$ فإن $x \rightarrow \infty$ و $y \rightarrow \infty$

ومنه :

$$a = \lim_{t \rightarrow -1} \frac{y}{x} = \lim_{t \rightarrow -1} t = -1$$

$$b = \lim_{t \rightarrow -1} (y - ax) = \lim_{t \rightarrow -1} (y + x)$$

$$= \lim_{t \rightarrow -1} \frac{2t^2 - 1}{t} = -1$$

إذن : $y = -x - 1$ محور مقارب مائل.

ومن أجل $t \rightarrow \infty$ فإن $x \rightarrow 2$ و $y \rightarrow \infty$

ومنه : $x = 2$ محور مقارب موازي لمحور الراتب.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2t^2 + 2t + 1}{t^2(t+1)^2}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{2t^2 + 4t + 1}{(t+1)^2}$$

نلاحظ أن المشتق $\frac{dx}{dt}$ لا يتعدى أبداً فهو موجب دوماً.

بينما يتعدى المشتق $\frac{dy}{dt}$ من أجل $t = \frac{-2 \pm \sqrt{2}}{2}$

نعين النقط المضاعفة لذلك نوجد حل المعادلتين التاليتين :

$$\frac{2t_1^2 - 1}{t_1 + 1} = \frac{2t_2^2 - 1}{t_2 + 1}$$

و :

$$\frac{2t_1^2 - 1}{t_1(t_1 + 1)} = \frac{2t_2^2 - 1}{t_2(t_2 + 1)}$$

بإصلاح المعادلتين وتقسيم كل منهما على $t_1 - t_2$ نجد :

$$2t_1t_2 + 2(t_1 + t_2) + 1 = 0$$

$$2t_1t_2 + (t_1 + t_2) + 1 = 0$$

$$t_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{و} \quad t_1 = \frac{-1}{\sqrt{2}} \quad \text{ومنه}$$

بالتعويض نجد أن النقطة (0, 0) هي النقطة المضاعفة الوحيدة للمنحنى .

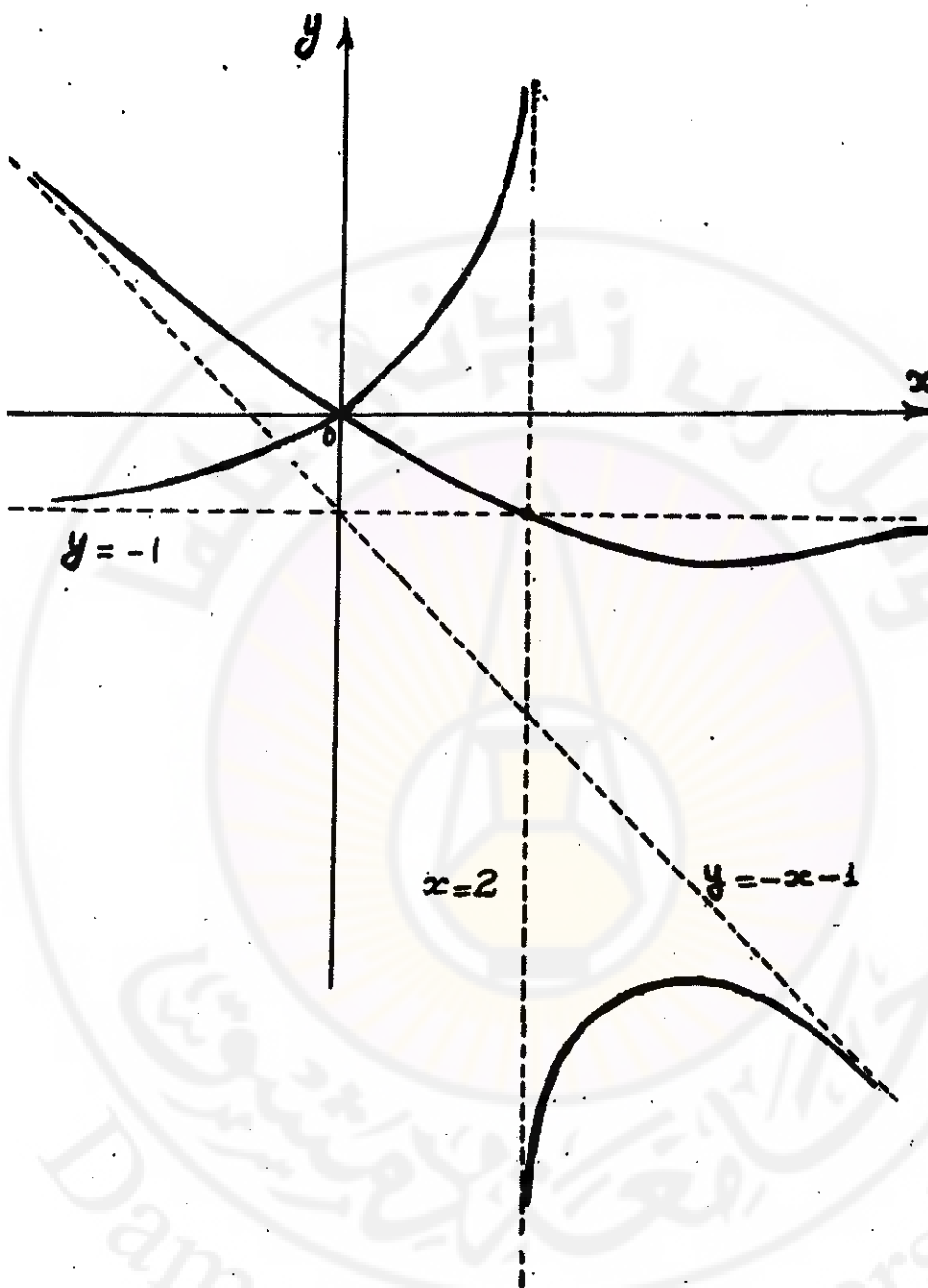
نشكل جدول دراسة التحولات :

t	$-\infty$	$\frac{-2-\sqrt{2}}{2}$	-1	$\frac{-1}{\sqrt{2}}$	$\frac{-2+\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$+\infty$
x'	+		+			+		
x	2	↗	4	↗	0	↗	4	↗
y'	+		0	-	-	-	0	+
y	↘		$-2(2+\sqrt{2})$	↘	0	↘	$2(-2+\sqrt{2})$	↘

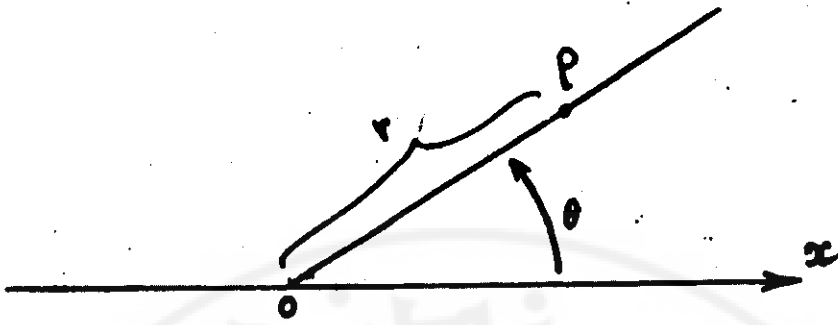
نرسم المنحنى المطلوب الشكل (2-2) :

2-2 رسم المنحنيات القطبية :

يمكن تعيين موضع نقطة p في مستر بالزاوية θ التي يصنعها الشعاع $\vec{op}$ مع الاتجاه الموجب لمحور ثابت ox يقع في المستوي ويطول op . فإذا رمزنا لطول op بالرمز r فإن النقطة p تعين بالإحداثيين r و θ اللذين يدعيان بالإحداثيين القطبيين للنقطة p ونكتب $p(r, \theta)$ كما في الشكل (2-3) .



الشكل (2-2)



الشكل (2-3)

ox يسمى المحور القطبي، o القطب، r نصف القطر الشعاعي، θ الزاوية القطبية. إذا نسبنا المستوي لـ محورين متعامدين ox و oy فإنه بالإمكان إيجاد العلاقة بين الإحداثيين الديكارتيين للنقطة $p(x, y)$ والإحداثيين القطبيين لها r و θ حيث:

$$y = r \sin \theta \quad \text{و} \quad x = r \cos \theta$$

كما أن بالإمكان حساب r و θ بدلالة x و y كما يلي:

$$\tan \theta = \frac{y}{x} \quad , \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

إن المعادلة $r = f(\theta)$ تعين منحنياً. لرسم هذا المنحنى نقوم بالخطوات التالية:

1 - نعين المجال، فإن كانت معادلة التابع خالية من النسب المثلثية فإن المجال يكون عادة $[-\infty, +\infty]$ وإن كانت تحتوي النسب المثلثية اكتفينا بدراسة التابع خلال الدور.

2 - دراسة التناظر، يمكن الاستفادة من التناظر في اختصار المجال، إذ ندرس جزءاً من المنحنى بالطريقة المباشرة ونستنتج بقية الأجزاء من التناظر والبحث عن التناظر نقوم بما يلي:

نغير $\theta \rightarrow -\theta$ - فإذا لم يتغير r كان المنحنى متناظراً بالنسبة للمحور القطبي ox.
نغير $\theta \rightarrow \theta$ - فإذا لم يتغير r وأصبح r - فالمنحنى متناظر بالنسبة للمحور oy،
كذلك إذا غيّرنا $\theta \rightarrow \pi - \theta$ ولم يتغير r فالمنحنى متناظر بالنسبة للمحور oy.

تغير θ بـ $\pi + \theta$ فإذا لم يتغير r فالمنحنى متناظر بالنسبة للقطب.

3 - نحسب المشتق $r' = f'(\theta)$ ونوجد قيم θ التي تعدل المشتق.

4 - نعطي قيماً خاصة للمتحول θ ونحسب قيم r المقابلة لها.

5 - نكتب جدول التحولات.

6 - نرسم المنحنى المطلوب على ضوء المعلومات السابقة .

ملاحظة : إذا رمزنا بـ V للزاوية التي يصنعها المماس مع نصف القطر الشعاعي

فإن :

$$\operatorname{tg} V = \frac{r}{r'}$$

مثال : ارسم منحنى التابع المعطى بالمعادلة القطبية التالية :

$$r = a \sin 2\theta$$

التابع دوري دوره $\pi = \frac{2\pi}{2}$ إذن ندرسه في المجال $[0, \pi]$.

إذا بدلنا θ بـ $\theta - \theta$ فإن r تتغير وتصبح $-r$ فهو متناظر بالنسبة للمحور oy

فيكفي دراسة في المجال $[0, \pi/2]$.

إذا بدلنا θ بـ $\theta - \pi/2$ فإن r لا تتغير فهو متناظر بالنسبة لـ $\frac{1}{2}$ من الربع الأول

إذن يكفي دراسته في المجال $[0, \pi/4]$.

إذا بدلنا θ بـ $\theta + \pi$ فإن r لا تتغير فهو متناظر بالنسبة للقطب المشتق

$$r = 2a \cos 2\theta \text{ يتعلم من أجل } \theta = \pi/4 \text{ وبالتالي :}$$

$$\operatorname{tg} V = \frac{r}{r'} = \infty \Rightarrow V = \frac{\pi}{2}$$

أي نصف القطر الشعاعي عمودي على المماس.

إن المشتق موجب دوماً من أجل قيم المجال إذن التابع متزايد .

من أجل $\theta = 0$ فإن $r = 0$.

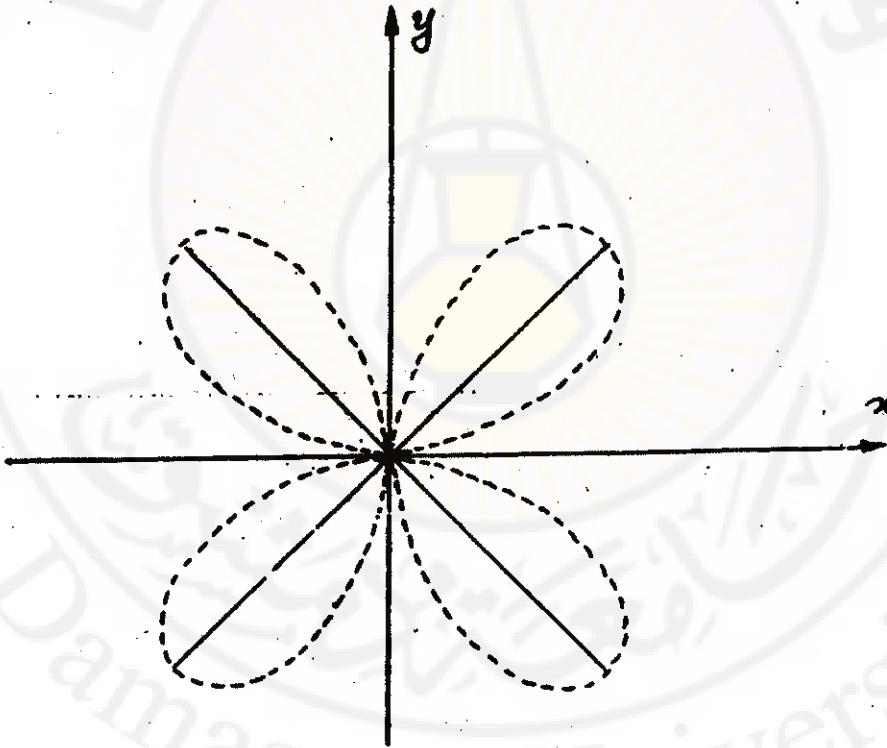
من أجل $\theta = \frac{\pi}{8}$ فإن $r = a \frac{\sqrt{2}}{2}$.

من أجل $\theta = \frac{\pi}{4}$ فإن $r = a$

نكتب جدول التحولات :

θ	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$
r		+	+
r	0	$\frac{a\sqrt{2}}{2}$	a

نرسم المنحنى المطلوب الشكل (2-4) :



الشكل (2-4)

مقال : ارسم منحنى التابع المعطى بالمعادلة القطبية :

$$r = a(1 + \cos \theta) ; a > 0$$

إن المنحنى متناظر بالنسبة للمحور القطبي ox لأنه إذا بدلنا $\theta \rightarrow \theta - \theta$ فإن r لا

تغير .

ندرس التابع في المجال $[0, \pi]$.

$$r' = -a \sin \theta \quad \text{المشتق}$$

$$r' = 0 \Rightarrow \begin{cases} \theta = 0 \Rightarrow r = 2a \\ \theta = \pi \Rightarrow r = 0 \end{cases}$$

نأخذ قيمة خاصة مساعلة :

$$\theta = \frac{\pi}{3} \Rightarrow r = \frac{3a}{2}$$

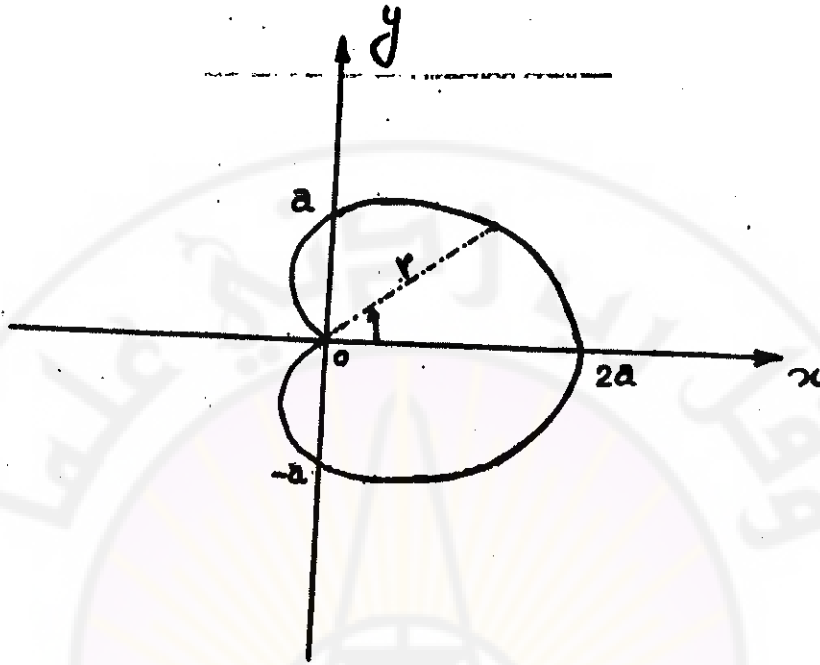
$$\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow r = a$$

$$\theta = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow r = \frac{a}{2}$$

نكتب جدول التحولات :

θ	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π
r	0	$\frac{3a}{2}$	a	$\frac{a}{2}$	0
r'	0	-	-	-	0

نرسم المنحنى المطلوب الشكل (5-2) :



الشكل (2-5)

يدعى هذا المنحنى بالكارديوئيد.

تمارين الفصل السادس ومسائله

1 - ادرس تحويلات التابع :

$$y = \frac{2x^2 + x + 7}{x + 1}$$

وارسم خطه البياني .

2 - ادرس تحويلات التابع الآتي وارسم خطه البياني :

$$y = \pm x \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

3 - ادرس تحويلات التابع الآتي وارسم خطه البياني :

$$y = \pm \sqrt{x^2 - 3x + 2}$$

4 - ارسم الخط البياني للتابع المعرف بالمعادلتين الوسيطيتين :

$$x = r(t - \sin t)$$

$$y = r(1 - \cos t)$$

5 - ارسم المنحني المعين بالمعادلتين الوسيطيتين :

$$x = \frac{t^2 + 1}{4(1 - t)} , \quad y = \frac{t}{t + 1}$$

6 - ارسم المنحني المعين بالمعادلتين الوسيطيتين :

$$x = a \cos^3 t , \quad y = a \sin^3 t$$

7 - ارسم منحني التابع المعطى بالمعادلة القطبية التالية :

$$r = a \sin 3 \theta$$

8 - ارسم منحنى التابع المعطى بالمعادلة القطبية التالية :

$$r = \frac{a \cos \theta}{1 - \cos \theta}$$

9 - أنشئ الخط البياني للتابع $r = a \cdot \theta$ حيث a عدد ثابت موجب.



دليل المصطلحات العلمية

A	
Abscissa	فاصلة
Axes	محاور
Angle	زاوية
Asymptote	مقارب
Asymptotic	تقاربي
Asymptotic direction	منحى مقارب
B	
Basis	أساس
Bounded	محدودة
C	
Coordinates	إحداثيات
Cartesian coordinates	إحداثيات ديكارتية
Cote	راقص
Circle	دائرة
Circular	دائري

Cylinder	أسطوانة
Cylindrical	أسطواني
Cross product	جداء عارجي (شعاعي)
Collinear	على استقامة واحدة
Consecutive	متعاقبة
Coplanar	في مستو واحد
Converse	عكس
Conclusion	نتيجة
Coordinate system	جملة إحداثيات
Center	مركز
Canonical	نموذجية (قانونية)
Cone	مخروط
Conic section	قطع مخروطي
Conjugate	مرافق
Circular cone	مخروط دائري

D

Direction	الجهة
Direction angle	زاوية توجيه
Directed	موجهة
Directed segment	قطعة مستقيمة موجهة
Decomposition	تحليل - تفريق

Dot product	جداء داخلي
Dependent	مرتبط
Direction cosines	جيوب تمام التوجيه
Domain	منطلق (مجموعة تعريف)
Directrix	دليل
Distance	مسافة

Equation	معادلة
Ellipse	قطع ناقص
Elliptic	ناقصي
Eccentricity	تباعد مركزي
Ellipsoid	مجسم قطع ناقص
Elliptic paraboloid	مجسم قطع مكافئ ناقص
Ellipsoid of revolution	مجسم قطع ناقص دوراني
Element	عنصر

Function	تابع
Family	جنبة
Focus	مركز
Finite	متهبة

G

Graph	بيان (مخط بياني)
Grade	درجة
Geometry	هندسة

H

Hyperbola	قطع زائد
Hyperboloid	مجسم قطع زائد
Hyperboloid of one sheet	مجسم قطع زائد ذي فرع واحد
Hyperboloid of two sheets	مجسم قطع زائد ذي فرعين
Hyperbolic paraboloid	مجسم قطع مكافئ زائدي

I

Inclination	ميل
Inner product	جداء داخلي
Inverse	مقلوب
Infinite	غير منتهية
Inequality	مراجعة
Integer	عدد صحيح
Increment	تزايد
Implicit function	تابع ضمني
Increasing function	تابع متزايد
Intercepts	الأجزاء المقطوعة من المحاور

Interval	مجال
Isoclines	متساوية الميل
Imaginary axis	محور تخيلي (غير قاطع)

L

Line	خط
Linear combination	تركيب خطي
Linearly dependent	مرتبطة خطياً
Linearly independent	مستقلة خطياً
Left-handed	غير مباشرة

M

Major axis	المحور الكبير
Minor axis	المحور الصغير
Method	طريقة
Monotonic	على نمط واحد
Maximum	نهاية عظمى
Minimum	نهاية صغرى

N

Normal	ناظم
Null vector	شعاع صغرى
Regation	نقطة
Nonempty set	مجموعة غير خالية

Notation

رمز

O

One dimensional	أحادي البعد
Ordered pair	ثنائي مرتب
Ordered triple	ثلاثي مرتب
Origine	نقطة الأصل (المبدأ)
Ordinate	ترتيب
Ortholating plane	متعامد
Osculating plane	مستوي ملاصق
Outer product	جداء خارجي

P

Parabola	قطع مكافئ
Paraboloid	مجسم قطع مكافئ
Period of a function	دور التابع
Parametric equation	معادلة وسيطة
Parallelogram	متوازي أضلاع
Perpendicular	عمودي
Plane	مستوي
Point of Inflection	نقطة انعطاف
Polar coordinates	إحداثيات قطبية
Product	جداء

Position	وضع
Parallelepiped	متوازي سطوح

Q

Quadrant	ربع
Quadric surface	سطح تربيعي
Quotient	نسبة

R

Radian	راديان
Radius	نصف قطر
Range of a function	مجموعة قيم التابع
Rational numbers	الأعداد العادية
Real axis	محور حقيقي
Ruled surface	سطح مسطر
Radical	أساسي
Right-handed	مباشرة
Rotation	دوران
Reciprocal	عكسي

S

Scalar	سلمي
Scalar product	جداء سلمي
Scalar triple product	جداء مختلط

Straight line	خط مستقيم
Substitution	تعويض
Sum	مجموع
Surface	سطح
Space	فراغ أو فضاء
Sphere	كرة
Spherical coordinates	إحداثيات كروية
Sliding vector	شعاع منزلق
Slope	ميل
Square roots	جذور تربيعية
T	
Tangent line	خط مماس
Translation of axes	انسحاب المحاور
Tranverse axis	المحور القاطع
Terminal point	نقطة النهاية
Two-dimentional	ثنائي البعد
Three dimentional	ثلاثي البعد
U	
Unite vector	شعاع الواحدة
Uniform convergence	تقارب منتظم
Unbounded	غير محدود

V

Vector

شعاع

Vertex

ذروة

Volume

حجم

W

Well-defined

معرف جيداً

Well ordering principle

مبدأ الترتيب الجيد



المصادر باللغة العربية

1 - الهندسة التحليلية

د. محي الدين مجبوح - 1985 - 1986 - جامعة دمشق

2 - موجز الهندسة التحليلية - ج،

أ. وحيه القدسي - 1975 - 1976 - جامعة دمشق

3 - الأسس المعاصرة للهندسة التحليلية

أ. د. خضر الأحمد - 1973

4 - الهندسة التحليلية في الفراغ

د. محمد وداد طرايشي - 1981 - 1982

5 - الهندسة التحليلية -

د. فوزي دنان

باللغتين الروسية والانكليزية

1 - الهندسة التحليلية

ب. س. مودينوف - 1992 - موسكو

2 - مسائل في الهندسة التحليلية

ع. ن. توبرلر - 1993 - موسكو

3 - مسائل في الهندسة التحليلية

بجفالوف ، مودينوف ، بارخامنكو - 1994 - موسكو

الفهرس

الصفحة

3

- المقدمة

الفصل الأول

المنجهاات والإحداثيات

5

1 - الأنظمة الإحداثية

5

1-1 الإحداثيات الديكارتية

7

1-2 الإحداثيات الأسطوانية

8

1-3 الإحداثيات الكروية

9

1-4 إحداثيات نقطة تقسم قطعة مستقيمة

11

2 - الأشعة (المنجهاات) في الفضاء الثلاثي

11

2-1 الأشعة ومعواصها

12

2-2 العمليات على الأشعة

16

2-3 مركبات شعاع

18

2-4 الجداء الداخلي لشعاعين

19

2-5 الجداء الخارجي لشعاعين

24

2-6 الجداء المختلط لثلاثة منجهاات

26

2-7 الجداء الشعاعي لثلاثة منجهاات

27	3 - تحويل الإحداثيات
28	3-1 سحب المحاور الإحداثية
32	3-2 تدوير الجملية الإحداثية حول أحد محاورها
38	3-3 تغيير المحاور الإحداثية في الحالة العامة
42	3-4 زوايا أولر
44	4 - تطبيقات وأمثلة على نقل المحاور الإحداثية
55	مسائل الفصل الأول وتمارينه

الفصل الثاني

المستويات والمستقيمات في الفضاء الثلاثي

61	1 - معادلة المستوي
61	1-1 معادلة مستوي يمر بنقطة ويوازي متجهين غير متوازيين
65	1-2 معادلة مستوي يمر بنقطين ويوازي متجه
66	1-3 معادلة مستوي يمر بثلاث نقاط
69	1-4 معادلة مستوي يمر بنقطة ويتعامد مع مسطح
74	1-5 معادلة المستويات الإحداثية والموازية أو القاطعة للمحاور
78	2 - أوضاع المستويات
78	2-1 أوضاع مستويين
81	2-2 بعد نقطة عن مستوي
84	2-3 النقاط ذات القوى الموجبة والسالبة لمستوي

86	2-4 زاوية منستويين ومعادلة المستوي النصف
90	2-5 أوضاع المستويات وحزمها
97	3 - معادلة المستقيم في الفضاء الثلاثي
97	3-1 معادلة مستقيم يمر بنقطة ويوازي متجه
101	3-2 معادلة مستقيم يمر بنقطتين
104	3-3 معادلة المستقيم كقطاع مستويين
108	4 - أوضاع المستقيمت في الفضاء الثلاثي
108	4-1 أوضاع مستقيمين في الفضاء الثلاثي
114	4-2 زاوية مستقيمين
	4-3 معادلة المستقيم المار من نقطة وعمودي على مستقيم
116	معطى ويقطعه في نقطة
120	4-4 معادلة العمود المشترك لمستقيمين متخالفين وإيجاد طوله
123	4-5 معادلة مستقيم يقطع مستقيمين ويوازي متجه
125	4-6 مسقط نقطة على مستقيم
127	5 - أوضاع المستقيم والمستوي في الفضاء الثلاثي
127	5-1 وضع مستقيم ومستوي
129	5-2 زاوية مستقيم ومستوي
130	5-3 معادلة المستقيم المار من نقطة وعمودي على مستوي
135	تمارين الفصل الثاني ومسائله

الفصل الثالث

المعادلة العامة لمنحنيات الدرجة الثانية

- 1 - النظرية العامة لمنحنيات الدرجة الثانية لمحولين 142
- 1-1 المنحنيات التي ترد إليها معادلة منحنيات الدرجة الثانية 143
- 1-2 الشكل التربيعي والقيم غير المتبدلة 158
- 1-3 النظرية العامة لمعادلة منحنيات الدرجة الثانية 165
- 2 - المراكز والأقطار والمماسات لمنحنيات الدرجة الثانية 175
- 2-1 مراكز منحنيات الدرجة الثانية 175
- 2-2 أوضاع المستقيمات بالنسبة لمنحنيات الدرجة الثانية 180
- 2-3 الأقطار المرافقة لمنحني الدرجة الثانية 185
- 2-4 المماسات لمنحنيات الدرجة الثانية 193
- 3 - معادلة منحنيات الدرجة الثانية بالنسبة للأقطار 196
- 3-1 معادلة منحنيات الدرجة الثانية منسوبة لقطريها المرافقين 196
- 3-2 الاتجاهات والأقطار الأساسية لمنحني الدرجة الثانية 197
- 3-3 وضع منحني الدرجة الثانية بالنسبة لجملة متعامدة 201
- تمارين الفصل الثالث ومسائله 211

الفصل الرابع

الكرة والدائرة في الفضاء الثلاثي

- 1 - السطح الكروي 221

221	1-1 معادلة السطح الكروي
223	1-2 وضع نقطة بالنسبة لكرة
228	1-3 معادلة السطح الكروي المار من أربع نقاط
230	1-4 أوضاع مستوي ومستقيم بالنسبة لكرة
233	1-5 معادلة المستوى المماس للسطح الكروي
237	1-6 التمثيل الوسيط للسطح الكروي
240	2 - معادلة الدائرة في الفضاء الثلاثي
240	2-1 معادلة الدائرة في الفضاء الثلاثي
244	2-2 أوضاع كرتين
247	2-3 تعامد كرتين
248	3 - حزم الكرات
248	3-1 حزم الكرات
250	3-2 معادلة كرة تحوي دائرة وتمر بنقطة لا تقع في مستويها
253	3-3 المستوي والمحور الأساسي لكرتين
255	3-4 المحور الأساسي
258	3-5 معادلة كرة تمر بدائرتين
266	تمارين الفصل الرابع ومسائله

الفصل الخامس

السطوح والمنحنيات

271	1 - المدخل للسطوح
-----	-------------------

271	1-1 تمهيد
274	1-2 غياب المتحولات من معادلة السطح
275	1-3 التناظر بالنسبة للمحاور والمستويات الإحداثية
277	1-4 المستوي المماس والمستقيم الناطم لسطح ومنحن
284	2 - سطوح الدرجة الثانية
284	2-1 التعريف بالسطوح
285	2-2 مركز تناظر سطح الدرجة الثانية
288	2-3 تقاطع سطح من الدرجة الثانية بمستوي
290	2-4 المساقط القائمة لمقطع سطح من الدرجة الثانية بمستوي
291	3 - المعادلات المختزلة لسطوح الدرجة الثانية
291	3-1 مجسم القطع الناقصي
294	3-2 مجسم القطع الزائد وحيد الفرع
299	3-3 مجسم القطع الزائد ذي الفرعين
301	3-4 المجسم المعروطي (مخروط من الدرجة الثانية)
305	3-5 مجسم القطع المكافئ الناقصي
307	3-6 مجسم القطع المكافئ الزائدي
310	3-7 السطوح الأسطوانية والوهمية
311	4 - المعادلة العامة لسطوح الدرجة الثانية
312	4-1 اختزال الشكل التربيعي
	4-2 اختزال معادلة سطوح الدرجة الثانية بتدوير المحاور
321	(تعيين نوع السطح)

335	5 - القيم غير المتبدلة لسطوح الدرجة الثانية
335	5-1 القيم غير المتبدلة في معادلة الدرجة الثانية
337	5-2 كشف نوع المسطح حسب القيم غير المتبدلة
343	6 - السطوح المسطرة
344	6-1 السطح الأسطوانى
346	6-2 السطح المعروطية
348	6-3 سطوح الدرجة الثانية المسطرة
352	تمارين الفصل الخامس ومسائله

الفصل السادس

رسم المنحنيات

357	1 - رسم المنحنيات الديكارتية
357	1-1 التوابع المتزايدة والمتناقصة
358	1-2 النهايات العظمى والصغرى
359	1-3 التقعر والانعطاف
361	1-4 المقاربات
364	1-5 'رسم المنحنيات الديكارتية
366	2 - رسم المنحنيات الوسيطة والقطبية
366	2-1 رسم المنحنيات الوسيطة
372	2-2 رسم المنحنيات القطبية
379	تمارين الفصل السادس ومسائله

381

- دليل المصطلحات العلمية

390

-- المصادر

391

- الفهرس

