



جامعة دمشق

كلية العلوم

قسم الرياضيات

أطروحة أعدت لنيل درجة الماجستير في الرياضيات بعنوان

دراسة حول نظرية التوزيعات 1 شوارتز و
تطبيقاتها

Une étude de la Théorie des
distributions de Schwartz et ses
applications

إعداد الطالبة: هنادي أحمد القزاز.

بإشراف الأستاذ الدكتور: محمد بشير قابيل.

العام الدراسي: 2011-2012



تعديل من خلال WPS Office

المقدمة:

نشأ التحليل الدالي في أوائل القرن العشرين، و رغم حداثة سنه نسبياً إلا أنه يشغل حالياً مركزاً متميزاً بين العلوم الرياضية المعاصرة. وليس من قبيل المبالغة القول بأن التحليل الدالي أحدث انعطافاً في الفكر الرياضي شبيهاً بذلك الذي خلفه إدخال المتغيرات في علم الرياضيات في القرن السابع عشر.

و في حين يُعنى التحليل الرياضي بدراسة مجموعة منتهية من الدوال و العلاقات التي تربط بينها، فإن التحليل الدالي يستعيز عن هذا بدراسة فضاءات الدوال و العمليات عليها.

ومن المواضيع الهامة في التحليل الدالي موضوع نظرية التوزيعات، و التي تعد تعميماً للدوال الكمولة محلياً و L^1 - قياسات رادون لذلك تدعى الدوال المعممة، و قد خصصت هذه الأطروحة لدراسة نظرية التوزيعات لشوارتز و تطبيقاتها في حل المعادلات التفاضلية الجزئية، و يعود تأسيس هذه النظرية إلى الرياضياتي الفرنسي Laurent Schwartz (5 mars 1915 Paris - 4 juillet 2002 Paris) في كتابه *théorie des distributions*، وقد نال ميدالية Fields (30 août 1950) عن أعماله في نظرية التوزيعات.

و تعتبر نظرية المعادلات التفاضلية الجزئية (EDP) من أقوى مبررات دراسة نظرية التوزيعات، و على الرغم من أن هذه النظرية (EDP) تختص بالجزء الأكثر كلاسيكية في التحليل إلا أنها قد أحرزت تقدماً هاماً منذ اكتشاف نظرية التوزيعات و التي ساعدت في توضيح مفهوم الحل الأساسي (الابتدائي) للمؤثر التفاضلي الجزئي بالمعاملات الثابتة.

و قد كان لاكتشاف هذه النظرية أثر في الاهتمام بنظرية الفضاءات المتجهية التبولوجية.

من جهة أخرى ابتكرت عدة طرائق لتعريف نظرية التوزيعات تتجنب الا



استخدام الصريح للفضاءات المتجهية التبولوجية، و سميت تلك الطرائق بالطرائق الابتدائية.

و قد تم عرض التوزيعات في **الفصل الأول** من هذه الأطروحة بالطريقة الابتدائية

و ذلك بأنها أشكالٌ خطية و مستمرة (حسب المتتاليات) على فضاء دوال الاختبار

(فضاء الدوال العقدية المعرفة على R و القابلة للاشتقاق عدداً غير منته من المرات و دعامتها متراصة) $D(R)$ ، و تم طرح بعض الأمثلة عن التوزيعات و من أهمها توزيع ديراك δ ، و تم في هذا الفصل دراسة بعض العمليات على التوزيعات و من أهم هذه العمليات عملية الاشتقاق، حيث تمكن نظرية التوزيعات من تحرير الحساب التفاضلي من بعض الصعوبات التي تنشأ عن وجود دوال غير قابلة للاشتقاق ،

و أكثر من ذلك من أجل الدوال القابلة للاشتقاق فإن التعريف الجديد للاشتقاق يتطابق مع التعريف الكلاسيكي. تابعنا في **الفصل الثاني** دراسة بعض العمليات على التوزيعات فقمنا بدراسة الجداء التنسوري للتوزيعات و خواصه، و تلاف التوزيعات و خواصه، و تأتي أهمية التلاف في أنه يمكن اعتبار أي توزيع بأنه تلاف هذا التوزيع بتوزيع ديراك، و في حل المعادلات التفاضلية الجزئية يمكن اعتبار مشتقات أي توزيع بأنها تلاف هذا التوزيع بمشتقات توزيع ديراك، كما تم في هذا الفصل عرض جبر التلاف، و في **الفصل الثالث** سندرس تحويلات فورييه في الفضاء $L^1(R)$ و خواصها، و فضاء الدوال ذات التناقص السريع $(S(R^n))$ و تحويلات فورييه فيه، كما سيتم عرض التوزيعات المعتدلة على أنها أشكالٌ خطية و مستمرة (حسب المتتاليات) على الفضاء $S(R^n)$ ، و دراسة العمليات عليها و تحويلات فورييه لها، بالإضافة إلى دراسة التوزيعات الدورية و التوزيعات المعرفة على $\mathbb{T}$.

أما في **الفصل الرابع** فسنبين أهمية نظرية التوزيعات في حل المعادلات التفاضلية الجزئية و التي تعد نمذجة للعديد من الظواهر الفيزيائية و الهندسية، وذلك بعد التعرف على أنواعها (ناقصية، زائدية، مكافئية)، و سنقدم تعريف الحل الأساسي للمؤثر التفاضلي و سنقدم حلولاً أساسية لبعض المؤثرات التفاضلية البسيطة وهي مؤثر لابلاس، مؤثر الحرارة، مؤثر الأمواج، و مؤثر كوشي ريمان. و سنبين كيفية استخدام التوزيعات



في حل بعض المعادلات التفاضلية العادية.

لمحة تاريخية:

- أدخل الفيزيائي البريطاني *P.A.M. Dirac* عام 1926 (دالة دلتا) δ ، وهي دالة معرفة و مستمرة على $\mathbb{R}$ و $\delta(x) = 0$ من أجل $x \neq 0$ و $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$ إلا أن كل هذا ليس له معنى في الرياضيات الدقيقة ، و δ ليست دالة بالمعنى الكلاسيكي إذ أن الدالة المعدومة من أجل $x \neq 0$ تكون ذات تكامل معدوم، و قد قاد التبرير الرياضي الدقيق لهذه الدالة إلى تمديد مفهوم الدالة، أما التعريف الرياضي الدقيق لهذه الدالة فهو يُعطى بتوزيع ديراك أي أن اكتشاف الأساس الرياضي لتعريف و خواص التابع δ تم خلال ثلاثين عاماً.
- خلال ثلاثينات القرن الماضي و بمجهود الرياضياتيين *Leonid Sobolev* و *Jean Leary* ظهر مفهوم الحل الضعيف و الذي يشكل أساس التوزيعات ، و ما بين عامي 1945-1950 أعد *Laurent Schwartz* نظرية عامة مستوحياً ذلك من أعمال *J. Leary* و *L. Sobolev*، وهي نظرية التوزيعات.
- مباشرة بعد نشر أعمال *Laurent Schwartz* استخدمت هذه الأعمال من قبل عدد كبير من الباحثين و وضعت نظرية حديثة



للمعادلات التفاضلية الجزئية، و أصبحت نظرية التوزيعات أداة
جوهريّة في دراستها.



أهم المصطلحات:

- أ -

أسرة

اشتقاق

dérivation انسحاب

translation

- ت -

تحاكي

homothétie

تحويل فورييه

transformation de Fourier

تطبيق

application

تطبيق خطي

application linéaire

on biunivoque

تطبيق واحد لواحد

تغطية

تقارب

convergence

تقريباً في كل مكان

Presque partout

تكامل

intégrale

تلاف

Convolution

توافقية

توزيع

distribution

distribution توزيع أصلي
primitive

distribution توزيع (الجزء المنتهي)
(prtie finie)

distribution (valeur توزيع القيمة الرئيسية
principale)

distribution توزيع ثابت
constant

ion périodique توزيع دوري

توزيع ديراك
distribution de Dirac

distribution associée à une توزيع مرافق لدالة
function

توزيع معتدل
distribution tempérée

n régulière توزيع منتظم

distribution توزيع موجب
positive

- ج -

Algèbre جبر التلاف
de convolution

nsoriel جداء تنسوري
جماعة

- ح - خ -

Solution (élémentaire) حل أساسي (ابتدائي)
fondamentale

propriété de خاصة هاين بوريل



CIX

تعديل من خلال WPS Office

Heine-Borel

- د- ر -

دالة

fonction

دالة تحليلية

analytique

polynôme

دالة كثير حدود

دالة دورية

fonction périodique

n à croissance lente

دالة ذات تزايد بطيء

fonction à

دالة ذات تناقص سريع

décroissance rapide

fonction

دالة كمولة محليا

localement intégrable

fonction continûment dérivable

دالة قابلة للاشتقاق قطعيا

par morceaux

Heaviside

دالة هفيسايد

دعامة

support

دوال الاختبار

fonctions-tests

دوال معممة

fonctions généralisées

دور

- ش- ص -

aux limites

شروط حدية

شفعية

parité



CX

تعديل من خلال WPS Office

شكل خطي
forme linéaire

صيغة غرين
formule de Green

- ق -

k fois continûment
قابلة للاشتقاق k مرة
différentiables

indéfiniment
قابلة للاشتقاق عدداً غير منته من المرات
continûment dérivable

قفزة
saut
قياس
mesure

- ك- ل -

كثيفة
dense
لصاقة (غلاقة)
adhérence

- م - ن -

متتالية
suite

متتالية كوشي
متسلسلة فورييه
مجموعة متراسة
compact
مجموعة محدودة
ensemble borné

ensemble



CXI

تعديل من خلال WPS Office

مجموعة مغلقة

مجموعة مفتوحة

مسألة الإطار المهتز

مسألة الوتر المهتز

مسألة انتشار الحرارة

مستمر

مشتق

مشتقات جزئية

مشتقات متتالية

معادلة تلاف

معادلة زائدية

معادلة مكافئة

معادلة ناقصية

معادلات تفاضلية جزئية

dériviées partielles

معادلات تفاضلية عادية

différentielles

معدوم

nulle

مؤثر تفاضلي خطي بمعاملات ثابتة

Opérateur différentiel linéaire à coefficients constants

de Laplace

مؤثر لابلاس

ur de la chaleur

مؤثر الحرارة

مؤثر الأمواج

opérateur des ondes

ateur de Cauchy-Riemann

مؤثر كوشي ريمان

point discontinuité de

نقطة انقطاع من النوع الأول

première espèce

المراجع:

[1] J.Bass - cours de mathématiques-tome(3) ,masson et cie 1971.

[2] F.Bayen, C.Margaria - problèmes de mathématiques appliquées distributions analyse de Fourier transformations de Laplace, ellipses 1988.

[3]R.cristescu,G.Marinescu - application of the theory of distributions, Bucharest 1973.

[4] J.Garsoux – espaces vectoriels topologiques et distributions, Dunod 1963.

[5] I.M.Gelfand et G.E.Chilove – les distributions- tome (1,2), Dunod 1962.

[6] F. Hirsch et G.Lacombe - éléments d'analyse fonctionnelle cours et exercices ,masson 1997.



- [7] J. Horvath, *An introduction to distributions*, Amer. Math. Monthly, vol.77 ,pp.227-240, 1970
- [8] B.Lucquin - *équations aux dérivées partielles et leurs approximations*, ellipses 2004 .
- [9] H.Mascart- *calcul intégral distributions transformations de Fourier*, U.P.S 1975.
- [10] W.Rudin - *principes d'analyse mathématique*, Ediscience international, 1995.
- [11] W.Rudin - *analyse fonctionnelle* , Ediscience international 1995.
- [12] W.Rudin - *analyse réelle et complexe*, masson 1980.
- [13] C.Zuily, *éléments de distributions et d'équations aux dérivées partielles*, Dunod 2002.

الفهرس

المقدمة

لمحة تاريخية

الفصل الأول:مدخل إلى نظرية توزيعات شوارتز في التحليل الدالي:

- 1- تعاريف:
1
- 2- الفضاء $D(R^n)$:
1-2- تعريف الفضاء $D(R^n)$:
3
- 2-2- خواص الفضاء $D(R^n)$:
5



..... : $D(R^n)$ التقارب في 3-2
6

..... : خواص دالية: 4-2
8

3- التوزيعات المعرفة على R^n :

..... : تعريف و أمثلة: 1-3
10

..... : العمليات على التوزيعات: 2-3
14

..... : دعامة توزيع: 3-3
15

..... : جداء توزيع بدالة: 4-3
16

..... : تقارب التوزيعات: 5-3
19

..... : اشتقاق التوزيعات: 6-3
23

..... : تكامل التوزيعات: 7-3
31

الفصل الثاني: تلاف التوزيعات:

1- الجداء التنسوري لتوزيعين:

..... : تعريف 1-1
33

..... : مبرهنة 2-1
36

..... : خواص الجداء التنسوري: 3-1
37



.....	4-1- أمثلة:	39
.....	5-1- اشتقاق الجداء التنسوري:	40
.....	6-1- دعامة الجداء التنسوري:	40
	2- تلاف التوزيعات:	
.....	1-2- تعريف تلاف التوزيعات:	43
.....	2-2- أمثلة:	45
.....	3-2- خواص التلاف:	46
.....	4-2- تلاف توزيع بدالة:	48
.....	5-2- دعامة التلاف:	49
.....	6-2- استمرار جداء التلاف:	50
.....	7-2- جبر التلاف:	51

الفصل الثالث: تحويلات فورييه و التوزيعات المعتدلة:

.....	1- تحويلات فورييه في الفضاء $L^1(\mathbb{R}^n)$:	54
.....	2- الفضاء $S(\mathbb{R}^n)$:	66



3- التوزيعات المعتدلة:

- 3-1- تعريف: 70
- 3-2- ملاحظات: 70
- 3-3- أمثلة: 70
- 3-4- تقارب التوزيعات المعتدلة: 72

4- العمليات على التوزيعات المعتدلة:

- 4-1- جداء توزيع معتدل بتوزيع آخر: 73
- 4-2- تحويلات فورييه للتوزيعات المعتدلة: 76
- 4-3- تلاف التوزيعات المعتدلة: 80
- 5- التوزيعات الدورية: 83

الفصل الرابع: أهم تطبيقات نظرية التوزيعات:

1- في حل المعادلات التفاضلية الجزئية:

- 1-1- تصنيف المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية من المرتبة الثانية: 91
- 1-2- الحل الابتدائي: 92
- 1-3- معادلة لابلاس: 93
- 1-4- معادلة الحرارة: 96



.....:معادلة الأمواج: 5-1	98
.....:معادلة كوشي ريمان: 6-1	101
.....:2- في حل المعادلات التفاضلية العادية:	102
..... <u>المصطلحات</u>	108
..... <u>المراجع</u>	112
..... <u>الفهرس</u>	113



Avant- propose

On a consacré ce travail pour étudier la théorie des distributions de Schwartz " fonctions généralisées " et ses applications.

Cet ouvrage est divisé en cinq chapitres. **Le première** est une introduction à la théorie des distributions, dans laquelle on a présenté les distributions comme des forms linéaires séquentiellement continues sur l'espace $\mathcal{D}$ " l' espace des fonctions indéfiniment continûment dérivables et à support compact ", on a proposé quelque exemples de distributions, le plus important est: distribution de Dirac, et on a étudié les opérations sur les distributions comme translation,dérivation,...

Le deuxième chapitre est consacrée pour étudier: le produit tensoriel des distributions et ses propriétés, le convolution des distribution et ses propriétés, l'algèbre de convolution.

à **le troisième** chapitre on a étudié les transformations de Fourier dans l'espace $\mathcal{L}^1$ et ses propriétés, on a présenté les distributions tempérées comme des forms linéaires séquentiellement continues sur l'espace $\mathcal{S}$ " l' espace des fonctions à décroissance rapide ", on a étudié les opérations sur les distributions tempérées, les transformations de Fourier des distributions tempérées. enfin on a présenté les distributions périodique et les distributions définies sur $\mathbb{T}$.

Vient ensuite, **Le quatrième** chapitre qui est consacrée pour une étude topologique des espaces $\mathcal{D}, \mathcal{D}', \mathcal{S}, \mathcal{S}'$, et pour cela on a étudié les espaces vectorielles topologiques, et surtout les espaces localement convexes, les semi- normes, et la topologie faible. Et on a étudié l'ordre d'une distribution.



Les équations aux dérivées partielles, et trouver les solutions fondamentales de ses équations font l'objet de la dernière chapitre.

Une étude de Théorie des distributions de Schwartz et ses applications



CXX

تعديل من خلال WPS Office

الفصل الثاني

تلاف التوزيعات

Convolution des distributions

مقدمة [1 p 173] : إن جداء توزيعين بشكل عام غير ممكن. فمثلاً : جداء التوزيع T_f المرافق للدالة f (الكمولة محلياً) حيث:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad \text{بنفسه غير ممكن. لأن الدالة} \quad f^2(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad \text{غير كمولة}$$

محلياً. لذلك نحن بحاجة إلى التعرف على نوع آخر من جداء التوزيعات.

1- الجداء التنسوري لتوزيعين

produit tensoriel de deux :

distributions

[13 p 64] [2 p 22] سنبدأ أولاً بتعريف الجداء التنسوري لدالتين: لتكن ϕ دالة من $D(R^n)$ و ψ دالة من $D(R^m)$, يُعرف الجداء التنسوري للدالتين ϕ و ψ بأنه الدالة الحقيقية ϕ المعرفة على R^{n+m} بالشكل: $(x, y) \mapsto \phi(x) \cdot \psi(y)$ حيث $x \in R^n$ و $y \in R^m$, إن الدالة ϕ قابلة للاشتقاق عدداً غير منته من المرات، و دعامتها تحقق $\text{supp } \phi = \text{supp } \phi \times \text{supp } \psi$ أي أنها محدودة.

إذا الدالة ϕ (الجداء التنسوري للدالتين ϕ و ψ) هي دالة من $D(R^{n+m})$ نرمز لها بالرمز $\phi \otimes \psi$ ، ونكتب: $\phi \otimes \psi(x, y) = \phi(x) \cdot \psi(y)$.

و بمثال: ليكن T_f توزيعاً معرفاً على R^n مرافقاً للدالة f ، و T_g توزيعاً معرفاً على R^m مرافقاً للدالة g :

$$\begin{aligned} \forall \phi \in D(R^{n+m}): \langle T_{f \otimes g}, \phi \rangle &= \int_{R^n} \int_{R^m} f(x) g(y) \cdot \phi(x, y) dy dx = \int_{R^n} f(x) \int_{R^m} g(y) \cdot \phi(x, y) dy dx \\ &= \left\langle T_f(x), \int_{R^m} g(y) \cdot \phi(x, y) dy \right\rangle = \left\langle T_f(x), \langle T_g(y), \phi(x, y) \rangle \right\rangle \end{aligned}$$

1-1- تعريف: [9 p 24][13 p 64]

ليكن s توزيعاً معرفاً على R^n و $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$ ، سنكتب $s(x)$ بدلاً من s .



ليكن T توزيعاً معرفاً على R^m و $y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in R^m$ ، سنكتب $T(y)$ بدلاً من T .

ليكن $z = (x, y) = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) \in R^{n+m}$. يُعرّف الجداء التنسوري s و T بالشكل: $\forall \varphi \in D(R^{n+m}): \langle s \otimes T, \varphi \rangle = \langle s(x), \langle T(y), \varphi(x, y) \rangle \rangle$.

لنثبت أن $s \otimes T$ توزيع معرف على R^{n+m} :

- من أجل x مثبتة، الدالة $y \mapsto \varphi(x, y)$ معرفة على R^m قابلة للاشتقاق عدداً غير منتهٍ من المرات، ودعامتها محدودة فهي من $D(R^m)$. (أي يمكن تطبيق التوزيع T عليها).

- الدالة $x \mapsto \varphi(x) = \langle T(y), \varphi(x, y) \rangle$ معرفة على R^n ، و تحقق:

1- الدالة φ مستمرة: لنثبت أن $\varphi(x+h) - \varphi(x) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ أي لنثبت أن:

$$\langle T(y), \varphi(x+h, y) - \varphi(x, y) \rangle \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

المتتالية $\{y \mapsto \varphi(x+h, y) - \varphi(x, y)\}$ تتقارب من الصفر في $D(R^m)$.

بما أن الدالة φ قابلة للاشتقاق على R^{n+m} فيوجد M بحيث:

$$\frac{|\varphi(x+h, y) - \varphi(x, y)|}{\|h\|} \leq M \Leftrightarrow |\varphi(x+h, y) - \varphi(x, y)| \leq M \cdot \|h\|$$

$\varphi(x+h, y) - \varphi(x, y) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ في R ، كذلك إذا استبدلنا φ بـ $\varphi^{(q)}$ نجد أن

$$\varphi^{(q)}(x+h, y) - \varphi^{(q)}(x, y) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \text{ في } R.$$

دعامات الدوال $(x, y) \mapsto \varphi(x+h, y) - \varphi(x, y)$ محتواة في نفس المجموعة المغلقة والمحدودة A ، ومنه دعامات الدوال $y \mapsto \varphi(x+h, y) - \varphi(x, y)$ محتواة في مسقط المجموعة A على R^m .

2- الدالة φ قابلة للاشتقاق: ليكن $h = (0, \dots, h_i, \dots, 0)$ متجهاً من R^n و لنثبت أن

$$\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h_i} = \left\langle T(y), \frac{\varphi(x+h, y) - \varphi(x, y)}{h_i} \right\rangle$$

تسعى h_i

للصفر، وبما أن T مستمر يكفي إثبات أن المتتالية

$$\left\{ y \mapsto \frac{\varphi(x+h, y) - \varphi(x, y)}{h_i} \right\}$$

لها نهاية في $D(R^m)$. لدينا الدالة



$(x, y) \mapsto \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2}(x, y)$ محدودة، فيوجد M' حيث:

$$\frac{\varphi(x+h, y) - \varphi(x, y)}{h_i} \rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x, y) \Leftarrow \left| \frac{\varphi(x+h, y) - \varphi(x, y)}{h_i} - \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x, y) \right| \leq M' |h_i|$$

في R ، كذلك إذا استبدلنا الدالة φ بمشتقاتها بالنسبة لـ $y_1, y_2, \dots, y_m$ نجد أن: $\varphi^{(q)}(x+h, y) - \varphi^{(q)}(x, y) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ في R .

دعامات الدوال $(x, y) \mapsto \varphi(x+h, y) - \varphi(x, y)$ محتواة في نفس المجموعة المغلقة و المحدودة A ، ومنه دعامات الدوال $y \mapsto \frac{\varphi(x+h, y) - \varphi(x, y)}{h_i}$ محتواة في مسقط المجموعة A على R^m .

3- بالطريقة نفسها نثبت أن الدالة ψ قابلة للاشتقاق عدداً غير منتهٍ من المرات.

4- دعامة الدالة ψ محدودة: بما أن دعامة الدالة $(x, y) \mapsto \varphi(x, y)$ محدودة $\Leftarrow$ إذا كان $\|x\|$ كبيرة كفاية فإن: $\forall y \in R^m : \varphi(x, y) = 0$ من أجل $\|x\|$ كبيرة كفاية، وهذا يعني أن الدالة ψ تنعدم خارج مجموعة محدودة، أي أن دعامتها محدودة.

أي أن الدالة ψ هي دالة من $D(R^n)$ (أي يمكن تطبيق التوزيع s عليها).

- التطبيق $s \otimes T$ خطي: لتكن φ و ψ دالتين من $D(R^{n+m})$ ، و α, β من R عندئذ:

$$\begin{aligned} \langle s \otimes T, \alpha \cdot \varphi + \beta \cdot \psi \rangle &= \langle s(x), \langle T(y), (\alpha \cdot \varphi + \beta \cdot \psi)(x, y) \rangle \rangle \\ &= \langle s(x), \alpha \cdot \langle T(y), \varphi(x, y) \rangle + \beta \cdot \langle T(y), \psi(x, y) \rangle \rangle \\ &= \alpha \cdot \langle s(x), \langle T(y), \varphi(x, y) \rangle \rangle + \beta \cdot \langle s(x), \langle T(y), \psi(x, y) \rangle \rangle \\ &= \alpha \cdot \langle s \otimes T, \varphi \rangle + \beta \cdot \langle s \otimes T, \psi \rangle \end{aligned}$$

- التطبيق $s \otimes T$ مستمر: لتكن $\{\varphi_p\}_{p \geq 1}$ متتالية من $D(R^{n+m})$ تتقارب من الصفر في

$D(R^{n+m})$ ، و لنثبت أن $\langle s \otimes T, \varphi_p \rangle = \langle s(x), \langle T(y), \varphi_p(x, y) \rangle \rangle \rightarrow 0$ بما أن

s مستمر يكفي إثبات أن المتتالية $\{\psi_p\}_{p \geq 1}$ حيث $\psi_p(x) = \langle T(y), \varphi_p(x, y) \rangle$ تتقارب من الصفر في $D(R^n)$.

1- بما أن المتتالية $\{\varphi_p\}_{p \geq 1}$ تتقارب من الصفر، فدعامات كل الدوال

$(x, y) \mapsto \varphi_p(x, y)$ محتواة في المجموعة المغلقة و المحدودة نفسها و لتكن B ،



وبالتالي دعامت كل الدوال $\{\psi_p\}_{p \geq 1}$ محتواة في مسقط المجموعة B على R^n ،
أي الدوال ψ_p ($p \geq 1$) تنعدم خارج الكرة نفسها .

2- لثبت أن المتتالية $\{\psi_p^{(q)}(x)\}_{p \geq 1}$ تتقارب بانتظام نحو الصفر في R ، لنفرض جد

لا أن المتتالية $\{\psi_p(x)\}_{p \geq 1}$ لا تتقارب من الصفر في R ، أي لنفرض أنه يوجد

$\varepsilon > 0$ و متتالية $\{x_v\}$ من نقاط R^n ، و متتالية $\{p_v\}$ متزايدة، حيث:

$$|\psi_{p_v}(x_v)| = |\langle T(y), \varphi_{p_v}(x_v, y) \rangle| \geq \varepsilon$$

دعامت الدوال $y \mapsto \vartheta_v(y) = \varphi_{p_v}(x_v, y)$ محتواة في مسقط B على R^m ، أي محتواة في المجموعة المغلقة والمحدودة نفسها.

كما أن $\varphi_{p_v}^{(q)}(x_v, y) \rightarrow 0$ في R ، وبالتالي متتالية الدوال

$y \mapsto \vartheta_v(y) = \varphi_{p_v}(x_v, y)$ و مشتقاتها تتقارب من الصفر بانتظام في R .

ومنه متتالية الدوال $y \mapsto \vartheta_v(y) = \varphi_{p_v}(x_v, y)$ تتقارب من الصفر في $D(R^m)$. و

بما أن T توزيع من $D'(R^m)$ نجد أن: $\langle T(y), \varphi_{p_v}(x_v, y) \rangle \rightarrow 0$ وهذا

تناقض. إذا المتتالية $\{\psi_p^{(q)}(x)\}_{p \geq 1}$ تتقارب بانتظام نحو الصفر في R . إذا

التطبيق $s \otimes T$ مستمر.

وبالتالي $s \otimes T$ يكون توزيعاً من $D'(R^{m+n})$.

ملاحظات: ندعو الجداء التنسوري بالجداء المباشر.

يمكن أن نكتب: $\langle s \otimes T, \varphi \rangle = \langle s, \langle T, \varphi(x, \cdot) \rangle \rangle$: $\forall \varphi \in D(R^{n+m})$.

2-1- مبرهنة: [9 p 29]

إذا كانت φ دالة من $D(R^{n+m})$ فإنها نهاية لمتتالية من الشكل: $\sum a_i \otimes \beta_i$ (حيث

$$(\alpha_i \in D(R^n) \text{ و } \beta_i \in D(R^m))$$

الإثبات: لنفرض أن دعامة الدالة φ محتواة في المجال المعرف φ .

لدينا الدالة φ قابلة للاشتقاق عدداً غير منتهى من المرات $\Leftrightarrow$

حسب مبرهنة التقارب لـ وايرشترافوس يوجد كثير حدود ω_p تحقق:



$$\cdot \|x\| \leq 2a, \|y\| \leq 2a : \left| \varphi(x, y) - \omega_p(x, y) \right| \leq \frac{1}{p}; \left| \varphi^{(q)}(x, y) - \omega_p^{(q)}(x, y) \right| \leq \frac{1}{p}$$

لنعرف الدالتين ψ_1 من $D(R^n)$ و ψ_2 من $D(R^m)$ بالشكل:

$$\psi_1(x) = \begin{cases} 1 & \|x\| \leq a \\ 0 & \|x\| \geq 2a \end{cases} \quad \psi_2(y) = \begin{cases} 1 & \|y\| \leq a \\ 0 & \|y\| \geq 2a \end{cases}$$

الدالة $\psi_1 \otimes \psi_2$ من $D(R^{n+m})$ ، والدوال ω_p قابلة للاشتقاق عدداً غير منتهٍ من المرات $\Leftarrow$ الدوال $(\omega_p \cdot (\psi_1 \otimes \psi_2))(x, y) = \omega_p(x, y) \cdot \psi_1(x) \cdot \psi_2(y)$ من $D(R^{n+m})$.

كما أن المتتالية $\{\omega_p \cdot (\psi_1 \otimes \psi_2)\}_p$ تتقارب من الدالة φ في $D(R^{n+m})$ لأن:

- دعاءات الدوال $\varphi, \omega_p \cdot (\psi_1 \otimes \psi_2)$ محتواة في نفس المجموعة المحدودة

$$(\|x\| \leq 2a, \|y\| \leq 2a).$$

- بما أن الدوال $\omega_p \cdot (\psi_1 \otimes \psi_2) - \varphi$ مستمرة و

$$\left| \omega_p(x, y) \cdot \psi_1(x) \cdot \psi_2(y) - \varphi(x, y) \right| = \begin{cases} \left| \omega_p(x, y) - \varphi(x, y) \right| \leq \frac{1}{p} \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{} 0 & \|x\| \leq a, \|y\| \leq a \\ 0 & \|x\| \geq 2a, \|y\| \geq 2a \end{cases}$$

نجد أن المتتالية $\{(\omega_p \cdot (\psi_1 \otimes \psi_2))(x, y) - \varphi(x, y)\}_p$ تتقارب من الصفر في R

بانتظام. كذلك نثبت أن المتتالية $\{(\omega_p \cdot (\psi_1 \otimes \psi_2) - \varphi)^{(q)}(x, y)\}_p$ تتقارب من

الصفر في R بانتظام.

$\Leftarrow$ المتتالية $\{\omega_p \cdot (\psi_1 \otimes \psi_2)\}_p$ تتقارب من الدالة φ في $D(R^{n+m})$ ، وهي من

$$\text{الشكل: } \sum a_i \otimes \beta_i.$$

1-3- خواص الجداء التنسوري: [28 p 9][191 p 1]

(1) إذا كان T توزيعاً من $D'(R^m)$ و s توزيعاً من $D'(R^n)$ ، و β دالة من $D(R^m)$ و α دالة من $D(R^n)$ عندئذ:



$$\begin{aligned}
\langle s \otimes T, a \otimes \beta \rangle &= \langle s(x), \langle T(y), (a \otimes \beta)(x, y) \rangle \rangle = \langle s(x), \langle T(y), a(x) \cdot \beta(y) \rangle \rangle \\
&= \langle s(x), a(x) \cdot \langle T(y), \beta(y) \rangle \rangle = \langle T(y), \beta(y) \rangle \cdot \langle s(x), a(x) \rangle \\
&= \langle T, \beta \rangle \cdot \langle s, a \rangle
\end{aligned}$$

(2) الجداء التنسوري تبديلي: إذا كان T توزيعاً من $D'(R^m)$ و s توزيعاً من $D'(R^n)$ عندئذ:

$$\forall \varphi \in D(R^{n+m}): \langle s \otimes T, \varphi \rangle = \langle T \otimes s, \varphi \rangle$$

- إذا كان التوزيع T مرافقاً للدالة f ، و التوزيع s مرافقاً للدالة g :

$$\begin{aligned}
\forall \varphi \in D(R^{n+m}): \langle T_f \otimes T_g, \varphi \rangle &= \langle T_f(x), \langle T_g(y), \varphi(x, y) \rangle \rangle \\
&= \left\langle T_f(x), \int_{R^n} g(y) \cdot \varphi(x, y) dy \right\rangle = \int_{R^m} f(x) \int_{R^n} g(y) \cdot \varphi(x, y) dy dx
\end{aligned}$$

و حسب فوبيني نجد:

$$\begin{aligned}
\langle T_f \otimes T_g, \varphi \rangle &= \int_{R^n} g(y) \int_{R^m} f(x) \cdot \varphi(x, y) dx dy = \left\langle T_g(y), \int_{R^m} f(x) \cdot \varphi(x, y) dx \right\rangle \\
&= \langle T_g(y), \langle T_f(x), \varphi(x, y) \rangle \rangle = \langle T_g \otimes T_f, \varphi \rangle
\end{aligned}$$

- إذا كانت الدالة φ من الشكل $\varphi(x, y) = a(x) \otimes \beta(y)$ حيث a دالة من $D(R^n)$ و β دالة من $D(R^m)$ عندئذ:

$$\begin{aligned}
\langle s \otimes T, \varphi \rangle &= \langle s(x), \langle T(y), \varphi(x, y) \rangle \rangle = \langle s(x), \langle T(y), a(x) \cdot \beta(y) \rangle \rangle \\
&= \langle s(x), \langle T(y), \beta(y) \rangle \cdot a(x) \rangle = \langle s(x), a(x) \rangle \cdot \langle T(y), \beta(y) \rangle \\
&= \langle T(y), \langle s(x), a(x) \cdot \beta(y) \rangle \rangle = \langle T(y), \langle s(x), \varphi(x, y) \rangle \rangle = \langle T \otimes s, \varphi \rangle
\end{aligned}$$

- إذا كانت الدالة φ من الشكل $\varphi(x, y) = \sum_i a_i(x) \otimes \beta_i(y)$ حيث a_i دالة من $D(R^n)$ و β_i دالة من $D(R^m)$ عندئذ:

$$\begin{aligned}
\langle s \otimes T, \varphi \rangle &= \left\langle s \otimes T, \sum_i a_i \otimes \beta_i \right\rangle = \sum_i \langle s \otimes T, a_i \otimes \beta_i \rangle \\
&= \sum_i \langle T \otimes s, a_i \otimes \beta_i \rangle = \left\langle T \otimes s, \sum_i a_i \otimes \beta_i \right\rangle = \langle T \otimes s, \varphi \rangle
\end{aligned}$$



- إذا كانت الدالة φ اختيارية من $D(R^{m+n})$ فهي نهاية متتالية من الشكل
 $\varphi = \lim \sum_i a_i \otimes \beta_i$ حيث a_i دالة من $D(R^n)$ و β_i دالة من $D(R^m)$ أي $\varphi = \lim \sum_i a_i \otimes \beta_i$

$$\begin{aligned}\langle s \otimes T, \varphi \rangle &= \left\langle s \otimes T, \lim \sum_i a_i \otimes \beta_i \right\rangle = \lim \left\langle s \otimes T, \sum_i a_i \otimes \beta_i \right\rangle \\ &= \lim \left\langle T \otimes s, \sum_i a_i \otimes \beta_i \right\rangle = \left\langle T \otimes s, \lim \sum_i a_i \otimes \beta_i \right\rangle = \langle T \otimes s, \varphi \rangle\end{aligned}$$

تدعى الخاصة $\langle s(x), \langle T(y), \varphi(x, y) \rangle \rangle = \langle T(y), \langle s(x), \varphi(x, y) \rangle \rangle$ بـ مبرهنة فوبيني للتوزيعات.

(3) الجداء التنسوري تجميعي: إذا كان τ_1 توزيعاً من $D'(R^m)$ و τ_2 توزيعاً من $D'(R^n)$ و τ_3 توزيعاً من $D'(R^p)$ ، و φ دالة من $D(R^{m+n+p})$ فهي من الشكل:
 $\varphi = \lim \sum_i a_i \otimes \beta_i \otimes \gamma_i$ حيث a_i دالة من $D(R^m)$ و β_i دالة من $D(R^n)$ و γ_i دالة من $D(R^p)$ عندئذ:

$$\begin{aligned}\langle (T_1 \otimes T_2) \otimes T_3, \varphi \rangle &= \left\langle (T_1 \otimes T_2) \otimes T_3, \lim \sum_i a_i \otimes \beta_i \otimes \gamma_i \right\rangle = \lim \sum_i \langle (T_1 \otimes T_2) \otimes T_3, a_i \otimes \beta_i \otimes \gamma_i \rangle \\ &= \lim \sum_i \langle T_1 \otimes T_2, \langle T_3, a_i \otimes \beta_i \otimes \gamma_i \rangle \rangle = \lim \sum_i \langle T_1 \otimes T_2, a_i \otimes \beta_i \rangle \cdot \langle T_3, \gamma_i \rangle \\ &= \lim \sum_i \langle T_1, a_i \rangle \cdot \langle T_2, \beta_i \rangle \cdot \langle T_3, \gamma_i \rangle = \lim \sum_i \langle T_1, a_i \rangle \cdot \langle T_2 \otimes T_3, \beta_i \otimes \gamma_i \rangle \\ &= \lim \sum_i \langle T_1 \otimes (T_2 \otimes T_3), a_i \otimes \beta_i \otimes \gamma_i \rangle = \left\langle T_1 \otimes (T_2 \otimes T_3), \lim \sum_i a_i \otimes \beta_i \otimes \gamma_i \right\rangle \\ &= \langle T_1 \otimes (T_2 \otimes T_3), \varphi \rangle\end{aligned}$$

(4) الجداء التنسوري مستمر: بما أن الجداء التنسوري تبديلي نكتفي بالإثبات من جهة واحدة، لتكن $\{s_r\}_{r \geq 1}$ متتالية من التوزيعات من $D'(R^n)$ تتقارب نحو التوزيع s في $D'(R^n)$ ، و ليكن τ توزيعاً من $D'(R^m)$ ، و لنثبت أن متتالية التوزيعات $\{s_r \otimes \tau\}_{r \geq 1}$ تتقارب من التوزيع $s \otimes \tau$ في $D'(R^{n+m})$:

لدينا الدالة $x \mapsto \varphi(x) = \langle T(y), \varphi(x, y) \rangle$ من $D(R^n)$ و منه:

$$\langle s_r \otimes \tau, \varphi \rangle = \langle s_r(x), \langle T(y), \varphi(x, y) \rangle \rangle \longrightarrow \langle s(x), \langle T(y), \varphi(x, y) \rangle \rangle = \langle s \otimes \tau, \varphi \rangle$$

4-1- أمثلة: [23 p 2] [27 p 9]



(1) ليكن τ_f توزيعاً من $D'(R^n)$ مرافقاً للدالة f الكمولة محلياً ، و τ_g توزيعاً من $D'(R^m)$ مرافقاً للدالة g الكمولة محلياً.

$$\begin{aligned}\forall \varphi \in D(R^{n+m}): \langle \tau_f \otimes \tau_g, \varphi \rangle &= \langle \tau_f(x), \langle \tau_g(y), \varphi(x, y) \rangle \rangle = \left\langle \tau_f(x), \int_{R^m} g(y) \cdot \varphi(x, y) dy \right\rangle \\ &= \int_{R^n} f(x) \int_{R^m} g(y) \cdot \varphi(x, y) dy dx = \int_{R^n} \int_{R^m} f(x) g(y) \cdot \varphi(x, y) dy dx \\ &= \langle \tau_{f \otimes g}, \varphi \rangle\end{aligned}$$

أي أن الجداء التنسوري لتوزيعين مرافقين لدالتين هو التوزيع المرافق للجداء التنسوري للدالتين .

(2) الجداء التنسوري لتوزيعي ديراك:

لتكن a نقطة من R^n و δ_a توزيع ديراك في $D'(R^n)$ و b نقطة من R^m و δ_b توزيع ديراك في $D'(R^m)$:

$$\begin{aligned}\forall \varphi \in D(R^{n+m}): \langle \delta_a \otimes \delta_b, \varphi \rangle &= \langle \delta_a(x), \langle \delta_b(y), \varphi(x, y) \rangle \rangle = \langle \delta_a(x), \varphi(x, b) \rangle = \varphi(a, b) = \langle \delta_{(a,b)}, \varphi \rangle \\ \text{أي } \delta_a \otimes \delta_b &= \delta_{(a,b)}.\end{aligned}$$

(3) الجداء التنسوري للتوزيعين γ_x, γ_y :

$$\langle \gamma_x \otimes \gamma_y, \varphi \rangle = \langle \gamma_x, \langle \gamma_y, \varphi(x, y) \rangle \rangle = \left\langle \gamma_x, \int_0^\infty \varphi(x, y) dy \right\rangle = \int_0^\infty \int_0^\infty \varphi(x, y) dy dx$$

5-1- اشتقاق الجداء التنسوري: [2 p 23]

ليكن s توزيعاً من $D'(R^n)$ و τ توزيعاً من $D'(R^m)$ ، عندئذ:



XL

تعديل من خلال WPS Office

$$\begin{aligned}\forall \varphi \in D(R^{n+m}): \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i} (S \otimes T), \varphi \right\rangle &= - \left\langle S \otimes T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle = - \left\langle T, \left\langle S, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle \right\rangle \\ &= - \left\langle T, - \left\langle \frac{\partial S}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle \right\rangle = \left\langle T, \left\langle \frac{\partial S}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle \right\rangle = \left\langle \frac{\partial S}{\partial x_i} \otimes T, \varphi \right\rangle\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\forall \varphi \in D(R^{n+m}): \left\langle \frac{\partial}{\partial x_j} (S \otimes T), \varphi \right\rangle &= - \left\langle S \otimes T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right\rangle = - \left\langle S, \left\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right\rangle \right\rangle \\ &= - \left\langle S, - \left\langle \frac{\partial T}{\partial x_j}, \varphi \right\rangle \right\rangle = \left\langle S, \left\langle \frac{\partial T}{\partial x_j}, \varphi \right\rangle \right\rangle = \left\langle S \otimes \frac{\partial T}{\partial x_j}, \varphi \right\rangle\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\gamma_x \otimes \gamma_y) = \frac{\partial \gamma_x}{\partial x} \otimes \frac{\partial \gamma_y}{\partial y} = \delta_0 \otimes \delta_0 = \delta_{(0,0)} \quad \text{مثال:}$$

1-6- دعامة الجداء التنسوري: [9 p 30]

مبرهنة:

إذا كان T توزيعاً من $D'(R^m)$ و S توزيعاً من $D'(R^n)$ ، و كان
 $\text{supp} T = B, \text{supp} S = A$ عندئذ فإن $\text{supp}(S \otimes T) = \text{supp} S \times \text{supp} T = A \times B$.

الإثبات:

- لتكن $(x, y) \in A \times B$ ولنبرهن أن $(x, y) \in \text{supp}(S \otimes T)$

لتكن Ω مجموعة مفتوحة تحوي (x, y) ، عندئذ توجد مجموعتان E, E' حيث:
 $E \times E' \subset \Omega$ و $x \in E, y \in E'$.

$$(x \in E \wedge x \in \text{supp} S) \Rightarrow \exists \alpha \in D(R^n): (\text{supp} \alpha \subset E \wedge \langle S, \alpha \rangle \neq 0)$$

$$(y \in E' \wedge y \in \text{supp} T) \Rightarrow \exists \beta \in D(R^m): (\text{supp} \beta \subset E' \wedge \langle T, \beta \rangle \neq 0)$$

لنأخذ الدالة $a \otimes \beta$ - دالة من $D(R^{n+m})$

$$\text{supp}(a \otimes \beta) = \text{supp}(a) \times \text{supp}(\beta) \subset E \times E' \quad -$$

وبالتالي: $\langle S \otimes T, a \otimes \beta \rangle = \langle S, a \rangle \cdot \langle T, \beta \rangle \neq 0$ لا ينعدم على $E \times E'$

$$\Leftarrow E \times E' \not\subset \text{supp}(S \otimes T)^c \Leftarrow \Omega$$

$\Leftarrow (E \times E') \cap (\text{supp}(S \otimes T)) \neq \emptyset$ من أجل أي مجموعة مفتوحة Ω تحوي

(x, y) فإن: $\Omega \cap (\text{supp}(S \otimes T)) \neq \emptyset$ و بما أن الدعامة مغلقة فإن



$$(x, y) \in \text{supp}(S \otimes T)$$

$$A \times B \subset \text{supp}(S \otimes T) \quad (1)$$

- لتكن $(x, y) \notin A \times B$ ولنبرهن أن $(x, y) \notin \text{supp}(S \otimes T)$

لنفرض أن $y \notin B$ عندئذ توجد مجموعة مفتوحة $E' \subset \mathbb{R}^m$ حيث :

$$\forall \varphi: \text{supp} \varphi \subset E' \Rightarrow \langle T, \varphi \rangle = 0$$

لتكن φ دالة من $D(\mathbb{R}^{m+n})$ ، و لتكن المجموعة S_m مسقط دعامتها على $\mathbb{R}^m$ ،
ولنفرض أن $S_m \subset E'$

وبالتالي: $\langle S \otimes T, \varphi \rangle = 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n: \langle T, \varphi(x, \cdot) \rangle = 0$

مجموعة مفتوحة تحوي $(\cdot) \times E'$ $\Leftrightarrow (\cdot) \times E' \subset (\text{supp}(S \otimes T))^c$

$\Leftrightarrow ((\cdot) \times E') \cap (\text{supp}(S \otimes T)) = \emptyset \Leftrightarrow (x, y) \notin \text{supp}(S \otimes T)$ ومنه:

$$\text{supp}(S \otimes T) \subset A \times B \quad (2)$$

من (1) و (2) نجد أن : $\text{supp}(S \otimes T) = \text{supp}(S) \times \text{supp}(T)$

2- تلاف التوزيعات (Convolution des distributions):

[12 p 139] [1 p 189] سنبدأ أولاً بتعريف تلاف الدوال في $\mathbb{R}$ ، لتكن لدينا الدالتان f و g (حقيقتان معرفتان على $\mathbb{R}$) و يُعرّف الدالة h بالشكل:

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot g(x-t) dt$$

- ندعو الدالة h بـ تلاف الدالتين f و g ، ونرمز لها بـ $f * g$ أي:

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot g(x-t) dt$$

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot g(x-t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) \cdot g(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot f(x-t) dt = g * f(x) \quad -$$



أي أن: $f * g = g * f$.

- الدالة h موجودة في كل من الحالات التالية:

(1) كل من الدالتين f و g كمولة محلياً ودعامتها محدودة:

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot g(x-t) dt = \int_a^b f(x) \cdot g(x-t) dt < \infty$$

(2) الدالة f كمولة أي: $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$ ، $\forall x \in \mathbb{R}$ ، والدالة $|g|$ محدودة أي:

$$\exists A < \infty, \forall x \in \mathbb{R} : |g(x)| \leq A$$

$$|h(x)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot g(x-t) dt \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \cdot |g(x-t)| dt \leq A \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$$

(3) كل من الدالتين f و g كمولة تربيعياً أي: $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty$ ، $\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^2 dx < \infty$

$$|h(x)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(x-t) dt \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \cdot |g(x-t)| dt$$

$$|h(x)| \leq \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx} \cdot \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |g(x-t)|^2 dt} < \infty$$

(4) كل من الدالتين f و g كمولة محلياً ومعدومة من أجل $t < 0$ أي $g(x-t)$ معدومة من أجل $x < t$:

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot g(x-t) dt = \int_0^x f(t) \cdot g(x-t) dt < \infty$$

(5) كل من الدالتين f و g كمولة على $\mathbb{R}$.

مبرهنة: لتكن لدينا الدالتين الكمولتين f و g ، عندئذ الدالة $f * g$ موجودة تقريباً في كل مكان و كمولة.

الإثبات: ليكن I جداء التكاملين $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ ، $\int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx$ ، بما أن كلا f و g

كمولة على $\mathbb{R}$ فإن: $I = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx < \infty$ ، نجري التحويل $x = t$ ، $y = x - t$ ،

ونطبق فوبيني:



$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot g(y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot g(x-t) dt dx < \infty$$

- الدالة $h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot g(x-t) dt$ موجودة تقريباً في كل مكان.

- الدالة $h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot g(x-t) dt$ تحقق

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot g(x-t) dt \right) dx < \infty$$

أي كمولة على R .

إن الحالة الأخيرة هي الحالة الأعم.

2-1- تعريف تلاف التوزيعات:

2-1-1- خاصة هامة في التوزيعات: [9 p 31]

(1) ليكن T توزيعاً من $D'(R^n)$ دعامته A محدودة، ولتكن φ دالة معرفة على R^n قابلة للاشتقاق عدداً غير منتهٍ من المرات، عندئذٍ من الممكن حساب $\langle T, \varphi \rangle$ بالشكل التالي:

لتكن a دالة من $D(R^n)$ حيث $a=1$ على مجموعة مفتوحة تحوي A ، عندئذٍ الدالة $a \cdot \varphi$ هي دالة من $D(R^n)$ ويمكن حساب $\langle T, a \cdot \varphi \rangle$ ، لنضع:

$$\langle T, \varphi \rangle := \langle T, a \cdot \varphi \rangle$$

لنثبت أن هذا التعريف مستقل عن اختيار a ، لتكن α و β دالتين من $D(R^n)$ حيث $\alpha=1$ على مجموعة مفتوحة E تحوي A و $\beta=1$ على مجموعة مفتوحة E' تحوي A ، ولنبرهن أن $\langle T, a \cdot \varphi \rangle = \langle T, \beta \cdot \varphi \rangle$ ، لدينا: الدالة $(\alpha - \beta) \cdot \varphi$ من $D(R^n)$ و $(\alpha - \beta) \cdot \varphi = 0$ على المجموعة المفتوحة $E \cap E'$ التي تحوي A . عندئذٍ

$$\langle T, (\alpha - \beta) \cdot \varphi \rangle = 0 \text{ وبالتالي: } \langle T, \alpha \cdot \varphi \rangle = \langle T, \beta \cdot \varphi \rangle$$

(2) ليكن T توزيعاً من $D'(R^n)$ دعامته A ، ولتكن φ دالة معرفة على R^n قابلة للاشتقاق عدداً غير منتهٍ من المرات، و لتكن المجموعة $A' = \text{supp} T \cap \text{supp} \varphi$ محدودة. عندئذٍ من الممكن حساب $\langle T, \varphi \rangle$ بالشكل التالي:

لتكن a دالة من $D(R^n)$ حيث $a=1$ على مجموعة مفتوحة تحوي A' ، عندئذٍ



الدالة $a \cdot \varphi$ هي دالة من $D(R^n)$ و يمكن حساب $\langle T, a \cdot \varphi \rangle$ ، لنضع:

$$\langle T, \varphi \rangle := \langle T, a \cdot \varphi \rangle$$

لنثبت أن هذا التعريف مستقل عن اختيار a ، لتكن a و β دالتين من $D(R^n)$ حيث $a=1$

على مجموعة مفتوحة E تحوي A' و $\beta=1$ على مجموعة مفتوحة E' تحوي A' ، و لنبرهن

أن $\langle T, a \cdot \varphi \rangle = \langle T, \beta \cdot \varphi \rangle$ ، لدينا: الدالة $(a - \beta) \cdot \varphi$ من $D(R^n)$ و $(a - \beta) \cdot \varphi = 0$ على المجموعة المفتوحة $E \cap E'$ التي تحوي A' . عندئذ $\langle T, (a - \beta) \cdot \varphi \rangle = 0$ وبالتالي:

$$\langle T, a \cdot \varphi \rangle = \langle T, \beta \cdot \varphi \rangle$$

إذا بإمكاننا تطبيق التوزيع T على دالة φ قابلة للاشتقاق عدداً غير منته من المرات، حتى لو كانت ذات دعامة غير محدودة، وذلك بشرط أن تكون المجموعة $supp T$ محدودة أو المجموعة $supp \varphi$ محدودة.

2-1-2- مثال: [13 p 67]

لتكن g, f دالتين كمولتين محلياً إحداهما ذات دعامة محدودة. وليكن $T_{f * g}$ التوزيع المرافق للدالة $f * g$:

$$\begin{aligned} \langle T_{f * g}, \varphi \rangle &= \int_{R^n} f * g(x) \cdot \varphi(x) dx = \int_{R^n} \left(\int_{R^n} f(t) g(x-t) dt \right) \varphi(x) dx \\ &= \int_{R^n} \int_{R^n} f(t) g(x-t) \varphi(x) dt dx = \int_{R^n} \int_{R^n} f(t) g(y) \varphi(t+y) dt dy \\ &= \int_{R^n} g(y) \int_{R^n} f(t) \varphi(t+y) dt dy = \langle T_f \otimes T_g, \varphi(x+y) \rangle \end{aligned}$$

2-1-3- تعريف: [9 p 32] [1 p 192]

ليكن T توزيعاً معرفاً على R^n دعامته A ، و S توزيعاً معرفاً على R^n دعامته B ، ولتكن φ دالة من $D(R^n)$. إن الدالة φ المعرفة على R^n بالشكل $x \mapsto \varphi(x)$ قابلة للاشتقاق عدداً غير منته من المرات و دعامتها محدودة أي أنها تنعدم خارج مجموعة محدودة و لنفرض أنها تنعدم من أجل $\|x\| > a$ ، أما الدالة المعرفة على

$$R^{2n} \text{ بالشكل } (x, y) \mapsto \varphi(x+y)$$

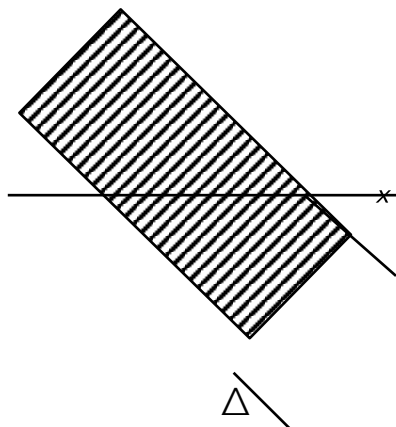
فهي قابلة للاشتقاق عدداً غير منته من المرات

y



XLV

تعديل من خلال WPS Office



و تنعدم من أجل $\|x + y\| > a$ ، أي دعامتها هي

الشريط Δ المعرف بـ $\|x + y\| \leq a$ فهي غير محدودة

0

نلاحظ أنها تكون ذات دعامة محدودة فقط إذا

كانت الدالة φ هي الدالة الصفريّة.

ومع ذلك من الممكن تطبيق التوزيع $s \otimes T$ على الدالة $(x, y) \mapsto \varphi(x + y)$ أي من الممكن حساب:

$\langle s(x) \otimes T(y), \varphi(x + y) \rangle = \langle s(x), \langle T(y), \varphi(x + y) \rangle \rangle = \langle s(x), \varphi(x) \rangle$ وذلك بشرط أن تكون المجموعة

$\text{supp}(s \otimes T) \cap \text{supp} \varphi = (\text{supp} s \times \text{supp} T) \cap \text{supp} \varphi = (A \times B) \cap \Delta$ محدودة ، و ذلك

يتحقق في الحالات التالية:

y

(1) المجموعة B محدودة:

الدالة $x \mapsto \varphi(x) = \langle T(y), \varphi(x + y) \rangle$ قابلة

للاشتقاق عدداً غير منتهى من المرات ولكن

دعامتها ليست بالضرورة محدودة (أي أن الدالة φ ليست

بالضرورة من $D(\mathbb{R}^n)$)، ولكن بما أن دعامة التوزيع

s محدودة فمن الممكن تعريف $\langle s(x), \varphi(x) \rangle$ وبالتالي

من الممكن تعريف $\langle s(x) \otimes T(y), \varphi(x + y) \rangle$.

$B \cap A$

(2) المجموعة A محدودة:

$n = 1$

الدالة $x \mapsto \varphi(x) = \langle T(y), \varphi(x + y) \rangle$ قابلة للاشتقاق

y



عدداً غير منتهى من المرات، و دعامتها محدودة لأن:

$$\|x\| - \|x+y\| \leq \|y\|$$

وإذا كانت $\|x\|$ كبيرة كفاية عندئذ $\|y\|$ تكون كذلك $\Leftarrow$

$$\Leftarrow \text{supp } T \cap \text{supp } (y \mapsto \varphi(x+y)) = \emptyset$$

الدالة $\varphi(x)$ من $D(R^n)$ فمن الممكن تعريف $\langle S(x), \varphi(x) \rangle$

وبالتالي من الممكن تعريف $\langle S(x) \otimes T(y), \varphi(x+y) \rangle$.

$n=1$

(3) من أجل $n=1$ كل من المجموعتين A و B محدودة من جانب واحد من الأعلى أو من الأدنى:

لنفرض أن دعامة التوزيع T محتواة في نصف

المستقيم المعرف بـ $\{t: t \leq c\}$ عندئذ دعامة الدالة

$$\Leftarrow y \mapsto \varphi(x+y) \text{ محتواة في المجال } [-x-a, -x+a]$$

من الممكن تعريف الدالة φ بالشكل:

$$\varphi(x) = \langle T(y), \varphi(x+y) \rangle \text{ وتكون معدومة من أجل}$$

$$-x-a > c \text{ أي من أجل } x < -c-a \text{ وبالتالي}$$

$$\text{supp } S \cap \text{supp } (x \mapsto \langle T(y), \varphi(x+y) \rangle) \text{ محدودة}$$

ومنه من الممكن تعريف $\langle S(x), \langle T(y), \varphi(x+y) \rangle \rangle$.

تعرف تلاف التوزيعين S و T (في حال وجوده) بالشكل :

$$\forall \varphi \in D(R^{2n}): \langle S * T, \varphi \rangle = \langle S(x) \otimes T(y), \varphi(x+y) \rangle = \langle S(x), \langle T(y), \varphi(x+y) \rangle \rangle$$

2-2- أمثلة: [6 p 286] [9 p 34]

$$T * \delta = T \text{ (دعامة } \delta \text{ محدودة)}$$



$$\begin{aligned}\langle T * \delta, \varphi \rangle &= \langle T(x) \otimes \delta(y), \varphi(x+y) \rangle = \langle T(x), \langle \delta(y), \varphi(x+y) \rangle \rangle \\ &= \langle T(x), \varphi(x+0) \rangle = \langle T(x), \varphi(x) \rangle = \langle T, \varphi \rangle\end{aligned}$$

$$- \quad T * \delta' = T' \quad (\text{دعامة } \delta' \text{ محدودة})$$

$$\begin{aligned}\langle T * \delta', \varphi \rangle &= \langle T(x) \otimes \delta'(y), \varphi(x+y) \rangle = \langle T(x), \langle \delta'(y), \varphi(x+y) \rangle \rangle \\ &= \langle T(x), -\varphi'(x+0) \rangle = \langle T(x), -\varphi'(x) \rangle = \langle T'(x), \varphi(x) \rangle = \langle T', \varphi \rangle\end{aligned}$$

$$- \quad T * \delta^{(q)} = T^{(q)}, \dots, T * \delta'' = T''$$

$$- \quad \delta_a * \delta_b = \delta_{a+b} \quad (\text{دعامة كل من } \delta_a \text{ و } \delta_b \text{ محدودة})$$

$$\begin{aligned}\langle \delta_a * \delta_b, \varphi \rangle &= \langle \delta_a(x) \otimes \delta_b(y), \varphi(x+y) \rangle \\ &= \langle \delta_a(x), \langle \delta_b(y), \varphi(x+y) \rangle \rangle = \langle \delta_a(x), \varphi(x+b) \rangle \\ &= \varphi(a+b) = \langle \delta_{a+b}, \varphi \rangle\end{aligned}$$

$$- \quad T * \delta_a = \tau_a T \quad (\text{دعامة } \delta_a \text{ محدودة}).$$

$$\begin{aligned}\langle T * \delta_a, \varphi \rangle &= \langle T(x) \otimes \delta_a(y), \varphi(x+y) \rangle = \langle T(x), \langle \delta_a(y), \varphi(x+y) \rangle \rangle \\ &= \langle T(x), \varphi(x+a) \rangle = \langle T(x), \tau_{-a} \varphi(x) \rangle = \langle T, \tau_{-a} \varphi \rangle = \langle \tau_a T, \varphi \rangle\end{aligned}$$

$$- \quad f \text{ و } g \text{ دوال كمولة محليا } (T_f * T_g = T_{f*g}) \text{ وذلك بفرض أن دعامة } f \text{ أو دعامة } g \text{ محدودة):}$$

$$\begin{aligned}\langle T_f * T_g, \varphi \rangle &= \langle T_f(x) \otimes T_g(y), \varphi(x+y) \rangle = \langle T_f(x), \langle T_g(y), \varphi(x+y) \rangle \rangle \\ &= \left\langle T_f(x), \int_{\mathbb{R}} g(y) \varphi(x+y) dy \right\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x) \int_{\mathbb{R}} g(y) \varphi(x+y) dy dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x) g(y) \varphi(x+y) dy dx\end{aligned}$$

نجري التحويل $x+y=u$ ثم نطبق فوبيني



$$\begin{aligned}\langle T_f * T_g, \varphi \rangle &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x) g(u-x) \varphi(u) du dx = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x) g(u-x) \varphi(u) dx du = \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x) g(u-x) dx \varphi(u) du = \int_{\mathbb{R}} f * g(u) \varphi(u) du = \langle T_{f * g}, \varphi \rangle\end{aligned}$$

2-3- خواص التلاف: [13p 68] [2 p 27] [9 p 37] [1 p 193]

(1) عملية التلاف عملية تبديلية:

ليكن T و S توزيعين من $D(\mathbb{R}^n)$ ، ولنفرض أن التوزيعين $S * T$ و $T * S$ موجودان، أي لنفرض أن دعامة T أو دعامة S محدودة عندئذ:

$$\forall \varphi \in D(\mathbb{R}^{2n}): \langle S * T, \varphi \rangle = \langle S(x) \otimes T(y), \varphi(x+y) \rangle = \langle T(y) \otimes S(x), \varphi(x+y) \rangle = \langle T * S, \varphi \rangle$$

أي: $T * S = S * T$.

(2) عملية التلاف عملية تجميعية:

لتكن T و S و U ثلاث توزيعات من $D(\mathbb{R}^n)$ ، ولنفرض أن التوزيعين $S * (T * U)$ و $(S * T) * U$ موجودان، أي لنفرض أن اثنين على الأقل من التوزيعات الثلاثة دعامتهما محدودة عندئذ من أجل أي دالة φ دالة من $D(\mathbb{R}^{3n})$:

$$\begin{aligned}\langle (S * T) * U, \varphi \rangle &= \langle (S * T)(t) \otimes U(z), \varphi(t+z) \rangle = \langle (S * T)(t), \langle U(z), \varphi(t+z) \rangle \rangle \\ &= \langle S(x) \otimes T(y), \langle U(z), \varphi(x+y+z) \rangle \rangle = \langle (S(x) \otimes T(y)) \otimes U(z), \varphi(x+y+z) \rangle \\ &= \langle S(x) \otimes (T(y) \otimes U(z)), \varphi(x+y+z) \rangle = \langle S(x), \langle T(y) \otimes U(z), \varphi(x+y+z) \rangle \rangle \\ &= \langle S(x), \langle (T * U)(u), \varphi(x+u) \rangle \rangle = \langle S(x) \otimes (T * U)(u), \varphi(x+u) \rangle = \langle S * (T * U), \varphi \rangle\end{aligned}$$

أي: $(T * S) * U = S * (T * U)$.

ملاحظة: من الممكن أن يكون كل من التوزيعين $S * (T * U)$ و $(S * T) * U$ موجوداً ولكن $(T * S) * U \neq S * (T * U)$ (بسبب عدم تحقق شرط الدعامة).

مثال:

$\text{supp}(\delta') = \{0\}$ محدودة، $\text{supp}(\gamma) = [0, \infty[$ غير محدودة، و $\text{supp}(1) = \mathbb{R}$ غير محدودة.

$$\left. \begin{aligned} (1 * \delta') * \gamma &= 0 * \gamma = 0 \\ 1 * (\delta' * \gamma) &= 1 * \gamma' = 1 * \delta = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow (1 * \delta') * \gamma \neq 1 * (\delta' * \gamma)$$



أي أن عملية التلاف بشكل عام عملية غير تجميعية.

(3) لتكن τ_1 و τ_2 و s ثلاثة توزيعات من $D'(R^n)$ و λ_1 و λ_2 من R ، و لنفرض أن دعامة كل من τ_1 و τ_2 أو دعامة s محدودة عندئذ من أجل أي دالة φ من $D(R^{2n})$.

$$: s * (\lambda_1 \tau_1 + \lambda_2 \tau_2) = \lambda_1 (s * \tau_1) + \lambda_2 (s * \tau_2)$$

$$\begin{aligned} \langle s * (\lambda_1 \tau_1 + \lambda_2 \tau_2), \varphi \rangle &= \langle s \otimes (\lambda_1 \tau_1 + \lambda_2 \tau_2), \varphi(x+y) \rangle = \langle s, \langle (\lambda_1 \tau_1 + \lambda_2 \tau_2), \varphi(x+y) \rangle \rangle \\ &= \langle s, \lambda_1 \langle \tau_1, \varphi(x+y) \rangle + \lambda_2 \langle \tau_2, \varphi(x+y) \rangle \rangle \\ &= \lambda_1 \langle s, \tau_1, \varphi(x+y) \rangle + \lambda_2 \langle s, \tau_2, \varphi(x+y) \rangle \\ &= \lambda_1 \langle s * \tau_1, \varphi \rangle + \lambda_2 \langle s * \tau_2, \varphi \rangle = \langle \lambda_1 (s * \tau_1) + \lambda_2 (s * \tau_2), \varphi \rangle \end{aligned}$$

(4) ليكن τ و s توزيعين من $D(R^n)$ و λ من R ، و لنفرض أن دعامة τ أو دعامة s محدودة عندئذ:

$$: \lambda \cdot (s * \tau) = (\lambda \cdot s) * \tau = s * (\lambda \cdot \tau)$$

$$\begin{aligned} \langle \lambda \cdot (s * \tau), \varphi \rangle &= \lambda \cdot \langle s * \tau, \varphi \rangle = \lambda \cdot \langle s(x), \langle \tau(y), \varphi(x+y) \rangle \rangle \\ &= \langle \lambda \cdot s(x), \langle \tau(y), \varphi(x+y) \rangle \rangle = \langle (\lambda \cdot s) * \tau, \varphi \rangle \end{aligned}$$

(5) ليكن τ و s توزيعين من $D'(R^n)$ ، و لنفرض أن دعامة τ أو دعامة s محدودة عندئذ:

$$: (s * \tau)' = s' * \tau = s * \tau'$$

$$\begin{aligned} \forall \varphi \in D(R^{2n}): \langle (s * \tau)', \varphi \rangle &= -\langle s * \tau, \varphi' \rangle = -\langle s \otimes \tau, \varphi(x+y) \rangle \\ &= -\langle s, \langle \tau, \varphi'(x+y) \rangle \rangle = \langle s, \langle \tau', \varphi(x+y) \rangle \rangle \\ &= \langle s \otimes \tau', \varphi(x+y) \rangle = \langle s * \tau', \varphi \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall \varphi \in D(R^{2n}): \langle (s * \tau)', \varphi \rangle &= -\langle s * \tau, \varphi' \rangle = -\langle s \otimes \tau, \varphi(x+y) \rangle \\ &= -\langle \tau, \langle s, \varphi'(x+y) \rangle \rangle = \langle \tau, \langle s', \varphi(x+y) \rangle \rangle \\ &= \langle s' \otimes \tau, \varphi(x+y) \rangle = \langle s' * \tau, \varphi \rangle \end{aligned}$$

(6) ليكن τ و s توزيعين من $D'(R^n)$ ، و لنفرض أن دعامة τ أو دعامة s محدودة عندئذ:

$$\tau_a (s * \tau) = \tau_a s * \tau = s * \tau_a \tau$$



$$\begin{aligned}
-\forall \varphi \in D(R^{2n}) : \langle \tau_a(S * T), \varphi \rangle &= \langle S * T, \tau_{-a}\varphi \rangle = \langle S \otimes T, \tau_{-a}\varphi(x+y) \rangle \\
&= \langle S, \langle T, \tau_{-a}\varphi(x+y) \rangle \rangle = \langle S, \langle \tau_a T, \varphi(x+y) \rangle \rangle \\
&= \langle S \otimes \tau_a T, \varphi(x+y) \rangle = \langle S * \tau_a T, \varphi \rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\forall \varphi \in D(R^{2n}) : \langle \tau_a(S * T), \varphi \rangle &= \langle S * T, \tau_{-a}\varphi \rangle = \langle S \otimes T, \tau_{-a}\varphi(x+y) \rangle \\
&= \langle T, \langle S, \tau_{-a}\varphi(x+y) \rangle \rangle = \langle T, \langle \tau_a S, \varphi(x+y) \rangle \rangle \\
&= \langle \tau_a S \otimes T, \varphi(x+y) \rangle = \langle \tau_a S * T, \varphi \rangle
\end{aligned}$$

2-4- تلاف توزيع بدالة: [1 p 193]

مبرهنة: إذا كان τ_f توزيعاً مرافقاً للدالة f القابلة للاشتقاق عدداً غير منتهٍ من المرات و T توزيعاً ما، و كان التوزيع $\tau * \tau_f$ موجوداً، عندئذٍ فإنه مرافق للدالة g حيث $\tau * f = \langle T, f(y - \cdot) \rangle$ أي $g(y) = \langle T(x), f(y - x) \rangle$

الإثبات:

لنثبت أولاً أن الدالة $\psi(y) = \langle T(x), \varphi(y - x) \rangle$ قابلة للاشتقاق عدداً غير منتهٍ من المرات، لدينا:

$$\frac{\varphi(y+h) - \varphi(y)}{h} = \frac{\langle T(x), \varphi(y+h-x) \rangle - \langle T(x), \varphi(y-x) \rangle}{h} = \left\langle T(x), \frac{\varphi(y+h-x) - \varphi(y-x)}{h} \right\rangle$$

و منه:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{\varphi(y+h) - \varphi(y)}{h} \right] = \left\langle T, \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{\varphi(y+h-\cdot) - \varphi(y-\cdot)}{h} \right] \right\rangle = \left\langle T, \frac{\partial \varphi(y-\cdot)}{\partial y} \right\rangle$$

$$\langle \tau * \tau_f, \varphi \rangle = \langle T(x) \otimes \tau_f(y), \varphi(x+y) \rangle = \langle T(x), \langle \tau_f(y), \varphi(x+y) \rangle \rangle = \left\langle T(x), \int_{\mathbb{R}} f(y) \varphi(x+y) dy \right\rangle$$

نجري التحويل $x+y=y$:

$$\begin{aligned}
\langle \tau * \tau_f, \varphi \rangle &= \left\langle T(x), \int_{\mathbb{R}} f(y-x) \varphi(y) dy \right\rangle = \langle T(x), \langle T_\varphi(y), f(y-x) \rangle \rangle \\
&= \langle T_\varphi(y), \langle T(x), f(y-x) \rangle \rangle = \langle T_\varphi(y), g(y) \rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi(y) g(y) dy \\
&= \langle T_g(y), \varphi(y) \rangle = \langle T_g, \varphi \rangle
\end{aligned}$$



$$. T * T_f = T_g \text{ ومنه}$$

2-5- دعامّة التلاف: [9 p 36]

مبرهنة:

إذا كان T توزيعاً من $D'(R^n)$ دعامته B محدودة، و S توزيعاً من $D'(R^n)$ دعامته A محدودة، عندئذٍ فإن دعامّة التوزيع $S * T$ محدودة و تحقق:

$$supp(S * T) \subset supp(S) + supp(T) = A + B = C$$

حيث: $A + B = \{x + y : x \in A, y \in B\}$

الإثبات:

لتكن φ دالة من $D(R^{2n})$ دعامتها محتواة في متممة المجموعة C أي:

$$supp(\varphi) \subset C^c \quad (1)$$

عندئذٍ دعامّة الدالة $(x, y) \mapsto \varphi(x + y)$ محتواة في الشريط المعرف بـ $\{(x, y) : x + y \in C^c\}$

لتكن $(x, y) \in supp(S \otimes T) = A \times B$ أي $x \in A, y \in B$ ، ومنه $x + y \in A + B = C$ أي $x + y \notin C^c$ وهذا يعني أن (x, y) ليست من دعامّة الدالة $(x, y) \mapsto \varphi(x + y) \Leftarrow$

$$supp(S \otimes T) \cap supp((x, y) \mapsto \varphi(x + y)) = \emptyset \text{ ومنه:}$$

$$(2) \quad \langle S * T, \varphi \rangle = \langle S(x) \otimes T(y), \varphi(x + y) \rangle = 0 \text{ من (1) و (2) و بما أن}$$

$[supp(S * T)]^c$ هي أكبر مجموعة مفتوحة ينعلم عليها التوزيع $S * T$ نجد أن:

$$supp(S * T) \subset C \Leftarrow C^c \subset [supp(S * T)]^c$$

مبرهنة:

إذا كان T توزيعاً من $D'(R)$ دعامته B محدودة من الأعلى، و S توزيعاً من $D'(R)$ دعامته A محدودة من الأعلى، عندئذٍ فإن دعامّة التوزيع $S * T$ محدودة من الأعلى.

الإثبات:

لتكن دعامّة S محتواة في نصف المستقيم المعرف بـ $x \leq c$ ، و دعامّة T محتواة في نصف المستقيم المعرف بـ $y \leq c'$ ، و لنبرهن أن دعامّة $T * S$ محتواة في نصف المستقيم المعرف بـ $t = x + y \leq c + c'$

لتكن لدينا الدالة $x \mapsto \varphi(x)$ دعامتها محتواة في نصف المستقيم $t > c + c'$ ، عندئذٍ
دعامة الدالة $(x, y) \mapsto \varphi(x + y)$ محتواة في $D = \{x + y > c + c'\}$.

لتكن $x + y \notin D \iff y \leq c' \text{ و } x \leq c \iff (x, y) \in \text{supp}(S \otimes T) = \text{supp}S \times \text{supp}T$

و منه: $\langle S * T, \varphi \rangle = 0 \iff \text{supp}((x, y) \mapsto \varphi(x + y)) \cap \text{supp}(S * T) = \emptyset$

$$\text{supp}(S * T) \subset \{t \leq c + c'\} \iff (\text{supp}(S * T))' \supset \{t > c + c'\}$$

و بطريقة مشابهة:

إذا كان T توزيعاً من $D'(R)$ دعامته B محدودة من الأدنى، و S توزيعاً من $D'(R)$ دعامته A محدودة من الأدنى، عندئذٍ فإن دعامة التوزيع $S * T$ محدودة من الأدنى.

2-6- استمرار جداء التلاف: [9 p 39]

لتكن $\{S_r\}_{r \geq 1}$ متتالية من التوزيعات من $D'(R^n)$ تتقارب نحو التوزيع s في $D'(R^n)$ ،
و ليكن T توزيعاً من $D'(R^n)$ ، و لنثبت أن متتالية التوزيعات $\{S_r * T\}_{r \geq 1}$ تتقارب من
التوزيع $S * T$ في $D'(R^n)$.

- الحالة الأولى: دعامة كل من التوزيعات $\{S_r\}_{r \geq 1}$ محتواة في مجموعة واحدة
مغلقة ومحدودة A .

لتكن φ دالة من $D(R^{2n})$ و لنثبت أن $\langle S_r * T, \varphi \rangle \longrightarrow \langle S * T, \varphi \rangle$

لدينا الدالة $\varphi(x) = \langle T(y), \varphi(x + y) \rangle$ قابلة للاشتقاق عدداً غير منتهٍ من المرات،
ولنأخذ الدالة α من $D(R^{2n})$ حيث $\alpha = 1$ على المجموعة A ، إن الدالة $\alpha \cdot \varphi$ من
 $D(R^{2n})$.

$$\langle S_r * T, \varphi \rangle = \langle S_r(x), \langle T(y), \varphi(x + y) \rangle \rangle = \langle S_r(x), \varphi(x) \rangle = \langle S_r, \alpha \cdot \varphi \rangle \longrightarrow \langle S, \alpha \cdot \varphi \rangle$$

ولكن لدينا:

$$\langle S, \alpha \cdot \varphi \rangle = \langle S(x), (\alpha \cdot \varphi)(x) \rangle = \langle S(x), \varphi(x) \rangle = \langle S(x), \langle T(y), \varphi(x + y) \rangle \rangle = \langle S * T, \varphi \rangle$$

- الحالة الثانية: دعامة التوزيع T محدودة.



لتكن φ دالة من $D(R^{2n})$ و ليثبت أن $\langle S_r * T, \varphi \rangle \longrightarrow \langle S * T, \varphi \rangle$

لدينا الدالة $\varphi(x) = \langle T(y), \varphi(x+y) \rangle$ قابلة للاشتقاق عدداً غير منته من المرات، ودعامتها محدودة لأن دعامه التوزيع T محدودة.

$$\begin{aligned} \langle S_r * T, \varphi \rangle &= \langle S_r(x), \langle T(y), \varphi(x+y) \rangle \rangle \\ &= \langle S_r(x), \psi(x) \rangle \longrightarrow \langle S, \psi \rangle = \langle S(x), \langle T(y), \varphi(x+y) \rangle \rangle = \langle S * T, \varphi \rangle \end{aligned}$$

- الحالة الثالثة: $n=1$ و دعامه كل من التوزيعات $\{S_r\}_{r \geq 1}$ و T محدودة من الأعلى.

$$\begin{aligned} \langle S_r * T, \varphi \rangle &= \langle S_r(x), \langle T(y), \varphi(x+y) \rangle \rangle \\ &= \langle S_r(x), \psi(x) \rangle = \langle S_r(x), a(x) \cdot \psi(x) \rangle \end{aligned}$$

حيث a دالة من $D(R)$ و $a=1$ على مجموعة مفتوحة تحوي

$\text{supp}(S_r) \cap \text{supp} \psi$ ، الدالة $a \cdot \psi$ من $D(R)$ ، ومنه

$$\langle S_r * T, \varphi \rangle \longrightarrow \langle S, \psi \rangle = \langle S(x), \langle T(y), \varphi(x+y) \rangle \rangle = \langle S * T, \varphi \rangle$$

7-2- جبر التلاف *Algèbre de convolution* :

2-7-1- تعريف جبر التلاف: [1 p 194]

لتكن E مجموعة من التوزيعات بحيث تلاف أي توزيعين من E موجود وينتمي إلى E ، و عملية التلاف في E عملية تجميعية، عندئذ :

(1) المجموعة E تشكل فضاءً متجهياً مع العمليات :

عملية الجمع: $\langle S + T, \varphi \rangle = \langle S, \varphi \rangle + \langle T, \varphi \rangle$ ، عملية الضرب بعدد من R :

$$\langle \lambda \cdot T, \varphi \rangle = \lambda \cdot \langle T, \varphi \rangle$$

(2) عملية التلاف تحقق:

من أجل التوزيعات T و S و U من E ، ومن أجل العدد الحقيقي λ من R .



$$(T * S) * U = S * (T * U) \quad \text{عملية التلاف تجميعية} \quad -$$

$$S * (T + U) = (S * T) + (S * U) \quad -$$

$$(T + U) * S = (T * S) + (U * S) \quad \text{(عملية التلاف توزيعية على عملية الجمع)}$$

$$\lambda \cdot (S * T) = (\lambda \cdot S) * T = S * (\lambda \cdot T) \quad -$$

أي أن المجموعة E تشكل جبراً.

(3) عملية التلاف هي عملية تبديلية $S * T = T * S$. أي أن المجموعة E تشكل جبراً تبديلياً.

(4) إذا كان $\delta \in E$ عندئذٍ عملية التلاف في E تقبل عنصر واحدة $T * \delta = T$. أي أن المجموعة E تشكل جبراً تبديلياً واحدياً.

ندعو الجبر E جبر التلاف (جبر تبديلي، واحدي في حالة انتماء توزيع ديراك).

أمثلة عن جبر التلاف:

- مجموعة التوزيعات ذات الدعامة المحدودة ونرمز لها بـ $\mathcal{E}'$.
- مجموعة التوزيعات من $D'(R)$ والتي دعامتها محتواة في نصف المحور الحقيقي الموجب ونرمز لها بـ $D'^+(R)$.
- مجموعة التوزيعات من $D'(R)$ والتي دعامتها محتواة في نصف المحور الحقيقي السالب.
- مجموعة التوزيعات المرافقة لدوال كمولة محلياً مضافاً إليها توزيع ديراك.

2-7-2- معادلات التلاف (les équations de convolution)

[1 p 216] [2 p 30] : (convolution)

تعريف:

- ليكن E جبر تلاف، نعرّف معادلة التلاف بأنها معادلة من الشكل: $A * X = B$ حيث A و B هما توزيعان من E و X توزيع مجهول.
- ليكن A توزيعاً من E نعرّف مقلوب التوزيع A في E بأنه حل المعادلة $A * X = \delta$, و نرمز له بـ A^{-1} .



- ليكن E جبر تلاف و $A * X = B$ معادلة تلاف في E ، نعرّف الحل الابتدائي Solution élémentaire (الأساسي fondamentale) لمعادلة التلاف بأنه حل المعادلة $A * X = \delta$.

نظرية:

ليكن E جبر تلاف لا يحوي قواسماً للصفر (بالنسبة لعملية التلاف)، و ليكن A توزيعاً من E يملك مقلوباً، عندئذٍ المقلوب A^{-1} يكون وحيداً، و المعادلة $A * X = B$ لها حل وحيد في E .

الإثبات:

لنثبت أولاً وجود حل للمعادلة $A * X = B$:

$$A * X = B \Rightarrow A^{-1} * A * X = A^{-1} * B \Rightarrow X = A^{-1} * B$$

أما لإثبات وحدانية الحل:

نفرض وجود حلين في E أي يوجد X_1 و X_2 حيث $A * X_1 = A * X_2$ ، ومنه:

$$A * X_1 - A * X_2 = 0 \Rightarrow A * (X_1 - X_2) = 0$$

بما أن E لا تحوي قواسم للصفر و $A \neq 0$ فإن $X_1 = X_2$ $\Leftarrow$ المعادلة $A * X = B$ لها حل وحيد A له مقلوب وحيد.

ملاحظات:

- المعادلة $A * X = B$ لها حل وحيد في E ، وقد يوجد حلول أخرى لا تنتمي إلى E .
- إذا كان A لا يملك مقلوباً في E فإن المعادلة $A * X = B$ لا تقبل الحل في E من أجل $B = \delta$.
- الحل الأساسي للمعادلة $A * X = B$ هو مقلوب التوزيع A وهو وحيد في E .
- حل معادلة التلاف $A * X = B$ هو تلاف التوزيع B بالحل الابتدائي للمعادلة.

مثال:

مقلوب التوزيع $U = \delta' - a\delta$ (حيث $a \in \mathbb{R}^*$) هو التوزيع $[Y(x) + c] \cdot e^{ax}$ حيث c توزيع ثابت.



يكفي إثبات أن $\cdot [Y(x) + c] \cdot e^{ax} * U = \delta$

$$\begin{aligned}
 [Y(x) + c] \cdot e^{ax} * U &= [Y(x) + c] \cdot e^{ax} * (\delta' - a\delta) \\
 &= [Y(x) + c] \cdot e^{ax} * \delta - a \cdot ([Y(x) + c] \cdot e^{ax} * \delta) \\
 &= ([Y(x) + c] \cdot e^{ax})' - a \cdot [Y(x) + c] \cdot e^{ax} \\
 &= \delta(x) \cdot e^{ax} + a \cdot [Y(x) + c] \cdot e^{ax} - a \cdot [Y(x) + c] \cdot e^{ax} \\
 &= \delta(x) \cdot e^{ax} = e^0 \cdot \delta = \delta
 \end{aligned}$$



الفصل الثالث

التوزيعات المعتدلة و تحويلات فورييه في s'

Les distributions tempérées et transformations de Fourier dans s'

1- تحويلات فورييه في الفضاء $L^1(\mathbb{R}^n)$:

1-1- مقدمة عن الفضاء $L^p(\mathbb{R}^n)$: [12 p 62]

ليكن $0 < p < \infty$ ، يُعرّف الفضاء $L^p(\mathbb{R}^n)$ بأنه فضاء الدوال العقدية المعرفة على $\mathbb{R}^n$ ، والتي تحقق $\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx < \infty$ ، (أي فضاء الدوال f التي تحقق أن الدالة $|f|^p$ كمولة (قابلة للمكاملة) على $\mathbb{R}^n$ بحسب ليبيغ).

من أجل $1 \leq p < \infty$ ، يُعرّف على $L^p(\mathbb{R}^n)$ تنظيمٌ بالشكل $\|f\|_p = \left[\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}}$.

ملاحظات:

- الفضاء $L^p(\mathbb{R}^n)$ فضاء متجهي عقدي.
- إن عناصر الفضاء $L^p(\mathbb{R}^n)$ هي صفوف تكافؤ حيث f تكافئ g تعني أن $f = g$ تقريباً في كل مكان. ولكن للتبسيط يمكن أن نعتبر الفضاء $L^p(\mathbb{R}^n)$ بأنه فضاء دوال.
- لتكن $\{f_n\}_{n \geq 1}$ متتالية من $L^p(\mathbb{R}^n)$ و $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ، نقول عن المتتالية f_n أنها تتقارب من f في $L^p(\mathbb{R}^n)$ ، إذا كان $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_p = 0$.

2-1- الفضاء $L^1(\mathbb{R})$: [9 p 41]

من أجل $p=1$ ، الفضاء $L^1(\mathbb{R})$ هو فضاء الدوال f التي تحقق $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$ ، و هو فضاء

متجهي عقدي، يُعرّف عليه تنظيمٌ بالشكل: $\|f\| = \|f\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$. سنكتب L^1 بدلا من $L^1(\mathbb{R})$.

ملاحظات وخواص:

- 1- إذا كانت الدالة f من L^1 ، فهذا يكافئ أن الدالة $|f|$ من L^1 .
- 2- إذا كانت f دالةً من L^1 و $a \in \mathbb{R}$ و $\lambda \in \mathbb{R}$ حيث $\lambda \neq 0$ ، عندئذٍ λf فإن كلا f و λf من L^1 .



الدالتين $\tau_a f$ (انسحاب الدالة f بـ a) و f_λ (تعاكس الدالة f بـ λ) تنتمي إلى L^1 .

3- لتكن f دالة من L^1 ، و لتعرف الدالة $\bar{f}$ بالشكل $\bar{f}(x) = \overline{f(x)}$ عندئذ الدالة $\bar{f}$ تكون من L^1 .

4- لتكن f دالة من L^1 و g دالة محدودة على $\mathbb{R}$ عندئذ الدالة $f \cdot g$ تكون من L^1 .

5- لتكن f و g دالتين من L^1 ، عندئذ الدالة $f * g$ موجودة تقريباً في كل مكان، و تكون من L^1 .

3-1- تحويل فورييه (Fourier transformation) $\mathcal{F}$: دالة من L^1

1-3-1 تعريف: [9 p 41]

لتكن f دالة من L^1 عندئذ الدالة $|f|$ من L^1 ، كما أن:
 $\forall s \in \mathbb{R} : |f(x)| = |e^{-2i\pi sx} \cdot f(x)| \Leftrightarrow$ الدالة $x \mapsto e^{-2i\pi sx} \cdot f(x)$ من L^1 ، فهي كمولة

على $\mathbb{R}$ و بالتالي يمكن أن نعرف الدالة F بالشكل $F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi sx} \cdot f(x) dx$.

الدالة F تدعى تحويل فورييه $\mathcal{F}$ و يرمز لها بـ $\mathcal{F}f$ أي:

$$\mathcal{F}f(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi sx} \cdot f(x) dx$$

في بعض الأحيان يُقصد بتحويل فورييه التطبيق $\mathcal{F} : f \mapsto \mathcal{F}f$ و هو تطبيق خطي.

1-3-2 تحويلات على متغير الدالة f : [9 p 42]

قبل دراسة خواص الدالة $\mathcal{F}f$ سندرس التغيرات التي تطرأ عليها عند إجراء بعض التحويلات البسيطة على متغير الدالة f .

1. الانسحاب (translation) :

لتكن f دالة من L^1 و ليكن a من $\mathbb{R}$ ، عندئذ لإيجاد تحويل فورييه للدالة $\tau_a f$:



$$\begin{aligned} (\mathcal{I}(\tau_a f))(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi s x} \cdot \tau_a f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi s x} \cdot f(x-a) dx \\ &= e^{-2i\pi s a} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi s t} \cdot f(t) dt = e^{-2i\pi s a} \cdot \mathcal{I}f(s) \end{aligned}$$

وبالعكس لتكن لدينا الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بالشكل : $g(x) = e^{2i\pi a x} \cdot f(x)$ ، إن الدالة g هي دالة من L^1 ، فهي تملك تحويل فورييه ويكون :

$$\begin{aligned} \mathcal{I}g(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi s x} \cdot g(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi s x} e^{2i\pi a x} \cdot f(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi x(s-a)} \cdot f(x) dx = \mathcal{I}f(s-a) = \tau_a(\mathcal{I}f)(s) \end{aligned}$$

نتيجة: - إذا أجرينا على الدالة f الانسحاب τ_a ، فإن الدالة $\mathcal{I}f$ تضرب بالدالة الأسية $e^{-2i\pi a}$.
- إذا ضربنا الدالة f بالدالة الأسية $e^{2i\pi a}$ ، فإن الدالة $\mathcal{I}f$ يُجرى عليها الانسحاب τ_a .

2. التحاكي (homothétie):

لتكن f دالة من L^1 و ليكن $\lambda \neq 0$ من $\mathbb{R}$ ، لإيجاد تحويل فورييه للدالة f_λ نميز الحالتين:
- $\lambda > 0$:

$$\begin{aligned} (\mathcal{I}(f_\lambda))(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi s x} \cdot f_\lambda(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi s x} \cdot f(\lambda x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi s (\frac{t}{\lambda})} \cdot f(t) \frac{dt}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \mathcal{I}f\left(\frac{s}{\lambda}\right) \\ &\quad - \lambda < 0 : \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\mathcal{I}(f_\lambda))(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi s x} \cdot f_\lambda(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi s x} \cdot f(\lambda x) dx = \int_{\infty}^{-\infty} e^{-2i\pi s (\frac{t}{\lambda})} \cdot f(t) \frac{dt}{\lambda} = -\frac{1}{\lambda} \mathcal{I}f\left(\frac{s}{\lambda}\right) \\ &\quad \text{و منه:} \end{aligned}$$

$$(\mathcal{I}(f_\lambda))(s) = \frac{1}{|\lambda|} (\mathcal{I}f)_{\frac{s}{\lambda}}(s)$$

3. الشفعية (parité):

لتكن f دالة من L^1 ، تحويل فورييه للدالة $\bar{f}$ يُعطى بـ :



$$(\overline{f})(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi sx} \cdot \overline{f(x)} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi sx} \cdot \overline{f(x)} dx = \overline{\int_{-\infty}^{\infty} e^{2i\pi sx} \cdot f(x) dx} = \overline{f(-s)}$$

$$(\overline{f})(s) = \overline{f(-s)} \quad \text{أي أن:}$$

1-3-3- خواص الدالة f : [1 p 207] [9 p 45]

• الدالة f محدودة بانتظام :

لتكن f دالة من L^1 و لنبرهن أن $\forall s \in \mathbb{R} : |f(s)| < \infty$.

$$\begin{aligned} \forall s \in \mathbb{R} : |f(s)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi sx} \cdot f(x) dx \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |e^{-2i\pi sx} \cdot f(x)| dx = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx = \|f\| < \infty \end{aligned}$$

أي أن الدالة f محدودة بانتظام على $\mathbb{R}$.

• الدالة f تتناقص في اللانهاية (تسعى نحو الصفر):

لتكن f دالة من L^1 و لنبرهن أن $|f(s)| \xrightarrow{|s| \rightarrow \infty} 0$ ، حسب مبرهنة التكامل 1 .
ليبيغ يوجد من أجل أي $\varepsilon > 0$ دالة درجية g دعامتها محدودة تحقق:

$$\|f - g\| = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - g(x)| dx < \varepsilon$$

إن الدالة g هي دالة من L^1 ويكون:

$$\begin{aligned} |f(s) - g(s)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi sx} \cdot (f(x) - g(x)) dx \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |e^{-2i\pi sx}| \cdot |f(x) - g(x)| dx = \|f - g\| < \varepsilon \end{aligned} \quad (1)$$

ليكن a_i و a_{i+1} من $\mathbb{R}$ ، و ليكن $g(x) = a_i \neq 0$ ، $\forall x \in [a_i, a_{i+1}]$ ، عندئذ :

$$\int_{a_j}^{a_{j+1}} e^{-2i\pi sx} \cdot g(x) dx = a_j \cdot \frac{e^{-2i\pi sa_j} - e^{-2i\pi sa_{j+1}}}{2i\pi s}$$

$$\text{وبالتالي : } \left| \int_{a_j}^{a_{j+1}} e^{-2i\pi sx} \cdot g(x) dx \right| = \frac{|a_j|}{2\pi|s|} \cdot |e^{-2i\pi sa_j} - e^{-2i\pi sa_{j+1}}| \leq \frac{|a_j|}{2\pi|s|} \cdot 2 = \frac{|a_j|}{\pi|s|}$$

$$|g(s)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi sx} \cdot g(x) dx \right| \leq \frac{\sum_{j=1}^n |a_j|}{\pi|s|} \xrightarrow{|s| \rightarrow \infty} 0 \quad (2)$$

من (1) و (2) نجد أن : $|f(s)| \xrightarrow{|s| \rightarrow \infty} 0$.

• الدالة f مستمرة بانتظام على $\mathbb{R}$:



لتكن f دالة من L^1 و لنبرهن أن الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$ أي لنبرهن أن :

$$\forall s \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists h > 0 : |f(s+h) - f(s)| < \varepsilon$$

- إذا كان $\|f\| = 0 \Leftrightarrow f = 0 \Leftrightarrow f$ فهي مستمرة بانتظام .

- إذا كان $\|f\| \neq 0$:

$$\begin{aligned} |f(s+h) - f(s)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-2i\pi(s+h)x} - e^{-2i\pi sx}) \cdot f(x) dx \right| \\ &= \left| -2i \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\pi(2s+h)x} \cdot \sin(\pi hx) f(x) dx \right| \leq 2 \int_{-\infty}^{\infty} |\sin(\pi hx)| \cdot |f(x)| dx \end{aligned}$$

و لكن لدينا: $\forall f \in L^1; \forall \varepsilon > 0; \exists A > 0 : \int_{-\infty}^{-A} |f(x)| dx < \varepsilon, \int_A^{\infty} |f(x)| dx < \varepsilon$

$$\forall x \in [-A, A] : |\sin(\pi hx)| \leq \pi |h| A$$

و منه:

$$\begin{aligned} |f(s+h) - f(s)| &= 2 \int_{-\infty}^{-A} |\sin(\pi hx)| \cdot |f(x)| dx + 2 \int_{-A}^A |\sin(\pi hx)| \cdot |f(x)| dx \\ &\quad + 2 \int_A^{\infty} |\sin(\pi hx)| \cdot |f(x)| dx \\ &\leq 2 \int_{-\infty}^{-A} |f(x)| dx + 2 \int_{-A}^A |\sin(\pi hx)| \cdot |f(x)| dx + 2 \int_A^{\infty} |f(x)| dx \\ &< 2\varepsilon + 2\pi A |h| \int_{-A}^A |f(x)| dx + 2\varepsilon \\ &\leq 4\varepsilon + 2\pi A |h| \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx = 4\varepsilon + 2\pi A |h| \cdot \|f\| \end{aligned}$$

نختار $|h| < \frac{\varepsilon}{2\pi A \|f\|}$ و منه $|f(s+h) - f(s)| < 5\varepsilon \Leftrightarrow 2\pi A |h| \cdot \|f\| < \varepsilon$

وبما أن اختيار h مستقل عن s فإن الدالة f مستمرة بانتظام .

● مشتق تحويل فورييه:

لتكن f دالة من L^1 ، ولنعرّف الدالة g بالشكل $g(x) = x \cdot f(x)$ ، إذا كانت الدالة g

من L^1 فإن الدالة f تكون قابلة للاشتقاق و يكون: $(-2i\pi g)' = (f)'$.

لنبرهن أن:

$$\left| \frac{f(s+h) - f(s)}{h} + 2i\pi \cdot g(s) \right| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

$$\begin{aligned} f(s+h) - f(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} -2i \cdot \sin(\pi hx) \cdot e^{-i\pi(2s+h)x} \cdot f(x) dx \\ &= -2i\pi h \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\pi hx)}{\pi hx} \cdot e^{-i\pi hx} \cdot e^{-2i\pi sx} x \cdot f(x) dx \end{aligned}$$



ولكن لدينا : $\forall \varepsilon > 0; \exists B > 0 : \int_{-\infty}^{-B} |x \cdot f(x)| dx < \varepsilon, \int_B^{\infty} |x \cdot f(x)| dx < \varepsilon$

$$\left| e^{-i\pi x} \frac{\sin(\pi h x)}{\pi h x} - 1 \right| \leq \left| e^{-i\pi x} \frac{\sin(\pi h x)}{\pi h x} \right| + 1 \leq 2$$

و منه:

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(s+h) - f(s)}{h} + 2i\pi \cdot g(s) \right| &\leq 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \left| e^{-i\pi h x} \cdot \frac{\sin(\pi h x)}{\pi h x} - 1 \right| \cdot |x \cdot f(x)| dx \\ &\leq 2\pi \int_{-\infty}^{-B} \left| e^{-i\pi h x} \cdot \frac{\sin(\pi h x)}{\pi h x} - 1 \right| \cdot |x \cdot f(x)| dx + 2\pi \int_{-B}^B \left| e^{-i\pi h x} \cdot \frac{\sin(\pi h x)}{\pi h x} - 1 \right| \cdot |x \cdot f(x)| dx \\ &\quad + 2\pi \int_B^{\infty} \left| e^{-i\pi h x} \cdot \frac{\sin(\pi h x)}{\pi h x} - 1 \right| \cdot |x \cdot f(x)| dx \\ &\leq 4\pi \int_{-\infty}^{-B} |x \cdot f(x)| dx + 2\pi \int_{-B}^B \left| e^{-i\pi h x} \cdot \frac{\sin(\pi h x)}{\pi h x} - 1 \right| \cdot |x \cdot f(x)| dx + 4\pi \int_B^{\infty} |x \cdot f(x)| dx \\ &< 8\pi\varepsilon + 2\pi \int_{-B}^B \left| e^{-i\pi h x} \cdot \frac{\sin(\pi h x)}{\pi h x} - 1 \right| \cdot |x \cdot f(x)| dx \end{aligned}$$

بما أن $\lim_{\pi h x \rightarrow 0} \left| e^{-i\pi h x} \frac{\sin(\pi h x)}{\pi h x} - 1 \right| = 0$ فإنه يوجد η حيث إذا كان $|\pi h x| < \pi B \eta$ فإنه

$$\begin{aligned} &\left| e^{-i\pi h x} \frac{\sin(\pi h x)}{\pi h x} - 1 \right| < \varepsilon \quad \text{و بما أن } x \in [-B, B] \text{ فإن المتراحة} \\ &\Leftrightarrow |h| < \eta \text{ تتحقق من أجل} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(s+h) - f(s)}{h} + 2i\pi \cdot g(s) \right| &< 8\pi\varepsilon + 2\pi\varepsilon \int_{-B}^B |x \cdot f(x)| dx \\ &\leq 8\pi\varepsilon + 2\pi\varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} |x \cdot f(x)| dx = 8\pi\varepsilon + 2\pi\varepsilon \|g\| \end{aligned}$$

ومنه الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ، وتقبل الدالة $(-2i\pi g)$ مشتقاً لها، كما أن الدالة

$(f)'$ مستمرة بانتظام.

من الممكن تعميم ذلك:

لتكن f دالة من L^1 ، إذا كانت الدالة $g(x) = x^p \cdot f(x)$ من L^1 فإن الدالة f قابلة للاشتقاق n مرة و مشتقها من المرتبة p هو تحويل فورييه للدالة $x \mapsto (-2i\pi)^p \cdot x^p \cdot f(x)$.

ملاحظة:

الدالة f تكون قابلة للاشتقاق بمرتبة أعلى بقدر ما يتسارع جداء الدالة f ب قوى x بانتمائه إلى الفضاء L^1 ، أي يتسارع بتناقصه في اللانهاية. وبشكل خاص إذا كانت الدالة f مستمرة فهي تكون قابلة للاشتقاق بقدر ما



LIX

تعديل من خلال WPS Office

تتناقص الدالة f في اللانهاية.

● تحويل فورييه لمشتق:

لتكن f دالة من L^1 قابلة للاشتقاق، ومشتقها f' دالة من L^1 عندئذٍ تحويل فورييه للدالة f هو الدالة $s \mapsto 2i\pi s \cdot f(s)$:

لدينا $\int_{-\infty}^{\infty} f'(t) dt = f(t) \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0$ وبالتالي $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$ وبما أن الدالة $|f|$

كمولة فإن

$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$ ومنه $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$ حيث $a \neq 0$ ، $\infty \neq a \neq 0$

كذلك نثبت أن $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$

$$\begin{aligned} (f')(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi sx} f'(x) dx = e^{-2i\pi sx} f(x) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} (-2i\pi s) \cdot e^{-2i\pi sx} f(x) dx \\ &= +2i\pi s \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi sx} f(x) dx = 2i\pi s f(s) \end{aligned}$$

من الممكن تعميم ذلك: لتكن f دالة من L^1 قابلة للاشتقاق p مرة، ومشتقها $f^{(p)}$ حيث $n \leq p$ دالة من L^1 عندئذٍ تحويل فورييه $f^{(p)}$ هو الدالة

$$s \mapsto (2i\pi)^p \cdot s^p \cdot f(s)$$

ملاحظة:

الدوال $s \mapsto (2i\pi)^p \cdot s^p \cdot f(s)$ هي تحويلات فورييه لـ $f^{(p)}$ (دوال من L^1) $\Leftrightarrow$

$$f(s) \xrightarrow{|s| \rightarrow \infty} 0 \Leftrightarrow s^p \cdot f(s) \xrightarrow{|s| \rightarrow \infty} 0 \Leftrightarrow (2i\pi)^p \cdot s^p \cdot f(s) \xrightarrow{|s| \rightarrow \infty} 0$$

أسرع من $\frac{1}{s^n}$.

الدالة f | تتناقص في اللانهاية أسرع بقدر ما تكون الدالة f قابلة للاشتقاق بمرتبة أعلى.

● جداء دالة بتحويل فورييه لدالة أخرى:

لتكن f و g دالتين من L^1 ، عندئذٍ فإن كلا من الدالتين f و g محدودة على $\mathbb{R}$ ، وبالتالي فإن الدالتين $f \cdot g$ و $f \cdot |g|$ من L^1 . لنبرهن أن

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(s) \cdot g(s)| ds = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot |g(x)| dx$$

الدالة $(x, s) \mapsto e^{-2i\pi sx} |f(x)| |g(s)|$ كمولة على $\mathbb{R}^2$ ، فمن الممكن تطبيق فوبيني

على التكامل $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi sx} f(x) \cdot g(s) dx ds$ و يكون:



LX

تعديل من خلال WPS Office

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi sx} f(x) \cdot g(s) dx ds = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi sx} f(x) dx \right) g(s) ds = \int_{-\infty}^{\infty} |f(s)| \cdot g(s) ds \quad (1)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi sx} f(x) \cdot g(s) dx ds = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi sx} g(s) ds \right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot |g(x)| dx \quad (2)$$

$$\cdot \int_{-\infty}^{\infty} |f(s)| \cdot g(s) ds = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot |g(x)| dx \quad \text{من (1), (2) نجد أن}$$

• تحويل فورييه لجداء التلاف:

لتكن f و g دالتين من L^1 ، عندئذ $|f * g| = |f| \cdot |g|$ أي أن تحويل فورييه يحول جداء التلاف إلى الجداء الاعتيادي.

الدالة $(x, t) \mapsto e^{-2i\pi s(x-t)} |f(x-t)| \cdot e^{-2i\pi st} |g(t)|$ كمولة على $\mathbb{R}^2$ ، فمن الممكن تطبيق

فوبيني على التكامل: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi sx} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) \cdot g(t) dt \right) dx$ و يكون:

$$\begin{aligned} |(f * g)(s)| &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi sx} (f * g)(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi sx} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) \cdot g(t) dt \right) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi s(x-t)} f(x-t) dx \right) e^{-2i\pi st} g(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi sy} f(y) dy \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi st} g(t) dt = |f(s)| \cdot |g(s)| \end{aligned}$$

1-3-4- تحويل فورييه العكسي: [52 p 9] [34 p 2] [178 p 12]

• إيجاد:

يمكن في بعض الأحيان إيجاد الدالة f بمعرفة تحويل فورييه لها. الدالة $s \mapsto e^{2i\pi sx} |f(s)|$ مستمرة على $\mathbb{R}$ فهي كمولة محلياً على $\mathbb{R}$ ، ليكن $A > 0$ ، و لنعرّف الدالة f_A بالشكل:

$$f_A(x) = \int_{-A}^A e^{2i\pi sx} |f(s)| ds = \int_{-A}^A e^{2i\pi sx} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi st} f(t) dt \right) ds$$

الدالة $(t, s) \mapsto e^{2i\pi(x-t)s} f(t)$ كمولة على $\mathbb{R}^2$ ، فمن الممكن تطبيق فوبيني على التكامل السابق و نجد:



$$\begin{aligned}
 f_A(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-A}^A e^{2i\pi s(x-t)} ds \right) f(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(2\pi A(t-x))}{\pi(t-x)} \cdot f(t) dt \\
 &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(2\pi A u)}{u} \cdot f(x+u) du \\
 &= \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\infty} \frac{\sin(2\pi A u)}{u} \cdot \frac{f(x-u) + f(x+u)}{2} du
 \end{aligned}$$

لدينا $\int_0^{\infty} \frac{\sin(2\pi A u)}{u} du = \int_0^{\infty} \frac{\sin v}{v} dv = \frac{\pi}{2}$ ، و لنرمز بـ φ_x للدالة

$$\frac{f(x+u) + f(x-u)}{2} \text{ فيكون:}$$

$$\begin{aligned}
 f_A(x) - f(x) &= \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\infty} \frac{\sin(2\pi A u)}{u} \cdot \frac{f(x-u) + f(x+u)}{2} du - f(x) \\
 &= \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\infty} \frac{\sin(2\pi A u)}{u} \cdot \varphi_x(u) du
 \end{aligned}$$

و لكن لدينا $\forall \varepsilon > 0, \exists \beta > 0 : \int_0^{\beta} \frac{\varphi_x(u)}{u} du < \varepsilon$

$$\left| \int_0^{\beta} \frac{\sin(2\pi A u)}{u} \cdot \varphi_x(u) du \right| \leq \int_0^{\beta} \frac{|\varphi_x(u)|}{u} du < \varepsilon$$

لنأخذ الدالة ϕ المعرفة بالشكل:

$$\phi(u) = \begin{cases} 0 & u < \beta \\ \frac{f(x+u) - f(x-u)}{2u} & u \geq \beta \end{cases}$$

عندئذ :

$$\int_{\beta}^{\infty} \sin(2\pi A u) \frac{f(x+u) - f(x-u)}{2u} du = 2i \int_{-\infty}^{\infty} (e^{2i\pi A u} - e^{-2i\pi A u}) \cdot \phi(u) du$$

$$= 2i (\phi(-A) - \phi(A)) \xrightarrow{A \rightarrow \infty} 0$$

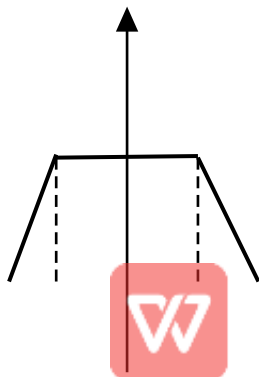
كما أن التكامل $\int_0^{\infty} \frac{\sin v}{v} dv$ متقارب $\Leftarrow$

$$\int_{\beta}^{\infty} \frac{\sin(2\pi A u)}{u} \cdot f(x) du = f(x) \cdot \int_{\beta}^{\infty} \frac{\sin(2\pi A u)}{u} du = \int_{2\pi A \beta}^{\infty} \frac{\sin v}{v} dv \xrightarrow{A \rightarrow \infty} 0$$

أصبح لدينا: $|f_A(x) - f(x)| \xrightarrow{A \rightarrow \infty} 0$ و منه:

$$f(x) = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A e^{2i\pi s x} \cdot f(s) ds$$

وحدانيته:



لنفرض أن $f = 0$ أي: $\forall s \in \mathbb{R} : |f(s)| = 0$

و لنبرهن أن $f = 0$ في L^1 أي $f = 0$ تقريباً في كل مكان. $0 \quad a \quad a + \varepsilon \quad -a - \varepsilon \quad -a$

و لنعرف الدالة g على $\mathbb{R}$ كما في الشكل المجاور

$$g(x) = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A e^{2i\pi sx} |g(s)| ds = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2i\pi sx} |g(s)| ds \quad \text{و } L^1 \text{ من } g$$

لنحسب $|g|$:

$$\begin{aligned} |g(s)| &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi sx} g(x) dx = 2 \int_0^{\infty} \cos(2\pi sx) g(x) dx |g(s)| \\ &= 2 g(x) \frac{\sin(2\pi sx)}{2\pi s} \Big|_0^{\infty} - 2 \int_0^{\infty} \frac{\sin(2\pi sx)}{2\pi s} g'(x) dx = \frac{1}{\pi s \varepsilon} \int_a^{a+\varepsilon} \sin(2\pi sx) dx \end{aligned}$$

لدينا الدالة $(t, s) \mapsto e^{2i\pi(x-t)s} |f(t)| |g(s)|$ كمولة على $\mathbb{R}^2$ فمن الممكن تطبيق فوبيني، و يكون:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(x-t) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{2i\pi(x-t)s} |g(s)| ds \right) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi st} f(t) dt \right) e^{2i\pi sx} |g(s)| ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| e^{2i\pi sx} |g(s)| ds = 0 \end{aligned}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \int_{x-a-\varepsilon}^{x+a+\varepsilon} f(t) g(x-t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(x-t) dt = 0 \quad (1)$$

$$\left| \int_{x+a}^{x+a+\varepsilon} f(t) g(x-t) dt \right| \leq \int_{x+a}^{x+a+\varepsilon} |f(t)| |g(x-t)| dt \leq \int_{x+a}^{x+a+\varepsilon} |f(t)| dt \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 \quad (2)$$

$$\int_{x-a-\varepsilon}^{x-a} f(t) g(x-t) dt \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 \quad \text{كذلك نثبت أن : (3)}$$

من (1), (2), (3):

$$\begin{aligned} \int_{x-a}^{x+a} f(t) dt &= \int_{x-a}^{x+a} f(t) g(x-t) dt \\ &= - \int_{x-a-\varepsilon}^{x-a} f(t) g(x-t) dt + \int_{x-a-\varepsilon}^{x+a+\varepsilon} f(t) g(x-t) dt - \int_{x+a}^{x+a+\varepsilon} f(t) g(x-t) dt \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

أصبح لدينا $\int_{x-a}^{x+a} f(t) dt = 0$ ، أي أن تكامل الدالة f ينعدم على أي مجال طوله منته،

و منه $f = 0$ تقريباً في كل مكان أي $f = 0$ في L^1 .
نتيجة هامة:

إذا كانت f و g دالتين من L^1 و كان $|f| = |g|$ ، عندئذ $f = g$ تقريباً في كل مكان، أي $f = g$ في L^1 .

■ ملاحظات:



1- يمكن كتابة الدالة f بالشكل: $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2i\pi sx} \cdot |f(s)| ds$ ، و لكن التكامل $\int_{-\infty}^{\infty}$ هو

نهاية التكامل $\int_{-A}^B$ عندما $B \rightarrow \infty, A \rightarrow \infty$ معا و لكن بشكل مستقل، أما هنا لدينا $A = B$ أي: $B \rightarrow \infty, A \rightarrow \infty$ معا و لكن بشكل غير مستقل .

2- كما أن الدالة f لا تنتمي بشكل عام إلى الفضاء L^1 ، فمثلا إذا كانت الدالة

$$f \text{ معرفة بالشكل: } f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ e^{-x} & x > 0 \end{cases} \text{ فإن :}$$

$$|f(s)| = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi sx} f(x) dx = \int_0^{\infty} e^{-(1+2i\pi s)x} dx = \frac{1}{1+2i\pi s} \notin L^1$$

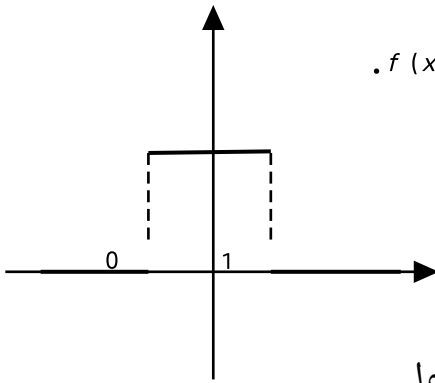
3- إذا كانت الدالة f من L^1 مستمرة قطعياً، وكانت f أو f' تملك عدداً منتهياً من نقاط الانقطاع من النوع الأول، عندئذ :

$$\frac{1}{2} [f(a^-) + f(a^+)] = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A e^{2i\pi sa} \cdot |f(s)| ds$$

مثال:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [-1, 1] \\ 0 & x \notin [-1, 1] \end{cases} \text{ لنكن لدينا الدالة } f \text{ المعرفة بـ :}$$

الدالة f من L^1 ،



$$f(-1^-) = 0 \neq 1 = f(-1^+) \text{ و } f(1^-) = 1 \neq 0 = f(1^+) \text{ و}$$

-1

أي أن كلا $(1), (-1)$ نقطة انقطاع من النوع الأول

$$|f(0)| = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi x \cdot 0} \cdot f(x) dx = \int_{-1}^1 dx = 2 : s = 0 \quad -$$

$$|f(s)| = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi xs} \cdot f(x) dx = \int_{-1}^1 e^{-2i\pi xs} dx = \frac{1}{-2i\pi s} e^{-2i\pi xs} \Big|_{-1}^1 = \frac{\sin(2\pi s)}{\pi s} : s \neq 0 \quad -$$

$$f(x) = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A e^{2i\pi sx} \cdot |f(s)| ds \text{ لنحسب الآن الدالة } f \text{ اعتماداً على}$$



$$\lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A e^{2i\pi s x} \cdot |f(s)| ds = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A e^{2i\pi s x} \cdot \frac{\sin(2\pi s)}{\pi s} ds = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A \cos(2\pi s x) \cdot \frac{\sin(2\pi s)}{\pi s} ds$$

$$= \frac{1}{2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(2\pi(1+x)s)}{\pi s} ds + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(2\pi(1-x)s)}{\pi s} ds \right]$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}(0+0) = 0 & x > 1, x < -1 \\ \frac{1}{2}(1+0) = \frac{1}{2} & x = 1, x = -1 \\ \frac{1}{2}(1+1) = 1 & -1 < x < 1 \end{cases}$$

أي أن:

$$\frac{1}{2} [f(1^-) + f(1^+)] = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A e^{2i\pi s} \cdot |f(s)| ds, \frac{1}{2} [f(-1^-) + f(-1^+)] = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A e^{2i\pi s(-1)} \cdot |f(s)| ds$$

ويمكن القول أن $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2i\pi s x} \cdot |f(s)| ds$ تقريباً في كل مكان.

1-3-5- تحويل فورييه في $L^1(\mathbb{R}^n)$: [9 p 95]

تعريف:

- الفضاء $L^1(\mathbb{R}^n)$: هو فضاء الدوال العقدية بـ n متحول حقيقي و التي

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx < \infty \text{ تحقق}$$

- تحويل فورييه لدالة من $L^1(\mathbb{R}^n)$: لتكن f دالة من $L^1(\mathbb{R}^n)$ ، يُعرّف تحويل

فورييه f بأنه الدالة العقدية $|f|$ المعرفة على $\mathbb{R}^n$ بـ:

$$|f(s) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2i\pi(s \cdot x)} f(x) dx$$

حيث: $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ و $s = (s_1, s_2, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^n$ و $s \cdot x$ تمثل الجداء

السلمي $s \cdot x = s_1 x_1 + s_2 x_2 + \dots + s_n x_n$ أي: و منه:

$$|f(s_1, s_2, \dots, s_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi(s_1 x_1 + s_2 x_2 + \dots + s_n x_n)} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_{n-1} dx_n$$

- في حالة $n=2$ $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ و يكون:

$$|f(s_1, s_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi(s_1 x_1 + s_2 x_2)} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi s_1 x_1} \cdot e^{-2i\pi s_2 x_2} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$



بما أن الدالة $x_2 \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi s_1 x_1} f(x_1, x_2) dx_1$ كمولة على R ، فمن الممكن تطبيق

فوبيني، و يكون: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi s_2 x_2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi s_1 x_1} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi s_1 x_1} f(x_1, x_2) dx_1$. كما أنه من

الممكن اعتبار الدالة $s_1 \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi s_1 x_1} f(x_1, x_2) dx_1 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi s_1 x_1} f_{x_2}(x_1) dx_1$ بأنها

تحويل فورييه للدالة $x_1 \mapsto f_{x_2}(x_1) = f(x_1, x_2)$ ، فيمكن أن نكتب:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi s_2 x_2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi s_1 x_1} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi s_2 x_2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi s_1 x_1} f_{x_2}(x_1) dx_1 dx_2$$

بأنها تحويل فورييه للدالة $s_2 \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi s_2 x_2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi s_1 x_1} f_{x_2}(x_1) dx_1 dx_2$ ، فيمكن

أن نكتب أخيراً: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi s_2 x_2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi s_1 x_1} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi s_2 x_2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi s_1 x_1} f_{x_2}(x_1) dx_1 \right) dx_2$.

أي أننا نحصل على تحويل فورييه للدالة $(x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2)$ بحساب تحويل فورييه للدالة $x_1 \mapsto f(x_1, x_2)$ ، ومن ثم حساب تحويل فورييه للدالة الناتجة

$$x_2 \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi s_2 x_2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi s_1 x_1} f_{x_2}(x_1) dx_1 \right) dx_2$$

أو بنفس الطريقة: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi s_2 x_2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi s_1 x_1} f_{x_2}(x_1) dx_1 \right) dx_2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi s_2 x_2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi s_1 x_1} f_{x_2}(x_1) dx_1 \right) dx_2$.

- في حالة $n > 2$ يمكن تعميم ما سبق:

لنحصل على تحويل فورييه للدالة $(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ نقوم بحساب

تحويل فورييه للدالة $x_1 \mapsto f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ، ومن ثم حساب تحويل فورييه

للدالة الناتجة، ومن ثم حساب تحويل فورييه للدالة الناتجة، وهكذا ... n مرة.

خواص:

كل ما أثبتناه في $L^1(R)$ يمكن إثباته في $L^1(R^n)$ وذلك بأخذ التكاملات المتتالية، و من أهم الخواص:

(1) الدالة f محدودة بانتظام، الدالة f مستمرة، الدالة f تتناقص في النهاية.

(2) لتكن أعداداً حقيقية من R ، حيث: $\lambda_i \neq 0, i = 1, 2, \dots, n$ ، عندئذ الدالة g

المعرفة بـ $g(x_1, \dots, x_n) = f(\lambda_1 x_1, \dots, \lambda_n x_n)$ تقبل الدالة

$$(s_1, \dots, s_n) \mapsto \frac{1}{|\lambda_1| \dots |\lambda_n|} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi s_1 x_1} \dots e^{-2i\pi s_n x_n} f(\lambda_1 x_1, \dots, \lambda_n x_n) dx_1 \dots dx_n$$

(3) إذا كانت الدالة h المعرفة بـ $h(x) = x_i f(x)$ من $L^1(R^n)$ ، فإن الدالة f قابلة لـ



لاشتقاق بالنسبة للمتحويل s_i و يكون لدينا : $\frac{\partial}{\partial s_i} |f\rangle = |(-2i\pi h)\rangle$. كذلك يمكننا حساب المشتقات المتتالية $1, 2, \dots, n$ لـ $|f\rangle$.

(4) إذا كانت الدالة $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ من $L^1(\mathbb{R}^n)$ ، فإن تحويل فورييه لها هو الدالة $s \mapsto 2i\pi s_i |f(s)\rangle$ كذلك يمكننا التعميم وحساب تحويل فورييه لمشتقات الدالة f .

(5) من الممكن (ضمن بعض الشروط) إيجاد الدالة f بمعرفة تحويل فورييه لها و يكون:

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2i\pi(s \cdot x)} |f(s)\rangle ds$$

2- الفضاء s :

2-1- مقدمة: [9 p 60]

لتكن f دالة من $L^1(\mathbb{R})$ ، و لتكن φ دالة من $D(\mathbb{R})$ فهي كمولة على $\mathbb{R}$ أي هي من $L^1(\mathbb{R})$ ، عندئذ يكون:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x) \cdot \varphi(x)| dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot |\varphi(x)| dx \quad (1)$$

إن الدالة $|f\rangle$ مستمرة فهي كمولة محلياً أي من الممكن أن نعرف التوزيع $T_{|f\rangle}$

وبالتالي من الممكن اعتبار التكامل $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x) \cdot \varphi(x)| dx$ بأنه صورة φ وفق التوزيع

$T_{|f\rangle}$ ، أما التكامل $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot |\varphi(x)| dx$ فلا يمكن اعتباره صورة $|\varphi\rangle$ وفق التوزيع T_f

لأن الدالة $|\varphi\rangle$ إذا كانت قابلة للاشتقاق عدداً غير منته من المرات فهي ليست بالضرورة ذات دعامة متراصة (دعامة $|\varphi\rangle$ تكون متراصة فقط إذا كانت $\varphi=0$)، أي أن الدالة $|\varphi\rangle$ ليست بالضرورة من $D(\mathbb{R})$.

و مع ذلك من الممكن تطبيق التوزيع T_f على دوال لا تنتمي للفضاء $D(\mathbb{R})$ مثل الدالة $|\varphi\rangle$ ، و ذلك لأن التكامل الثاني في العلاقة (1) متقارب.

أي من الممكن كتابة العلاقة $\langle T, |\varphi\rangle \rangle = \langle |T\rangle, \varphi \rangle$ ، لكنها لا تكون صحيحة من أجل أي توزيع اختياري T .

و أكثر من ذلك الدالتان φ و φ لا تتمتعان بنفس الخواص، لذلك نحن بحاجة لتعريف فضاء أوسع من الفضاء $D(R)$ يحوي كلا φ و φ ، أي فضاء مغلق ب النسبة لتحويل فورييه .

2-2- الدالة ذات التناقص السريع: [9 p 98] [13p 107] [11p179]

لتكن φ دالة عقدية معرفة على R^n وقابلة للاشتقاق عدداً غير منته من المرات، نقول عن φ إنها ذات تناقص سريع (fonction à décroissance rapide) إذا كانت φ و كل مشتقاتها تتناقص أسرع من قوى $\frac{1}{|x|}$ أي :

$$\forall k, l \quad \exists M_{k,l} > 0 : |\varphi^{(k)}(x)| < \frac{M_{k,l}}{|x|^l} \quad \text{أي:}$$

$$\forall k, l \quad \exists M_{k,l} > 0 : |\varphi^{(k)}(x)| \cdot |x|^l < M_{k,l}$$

أو

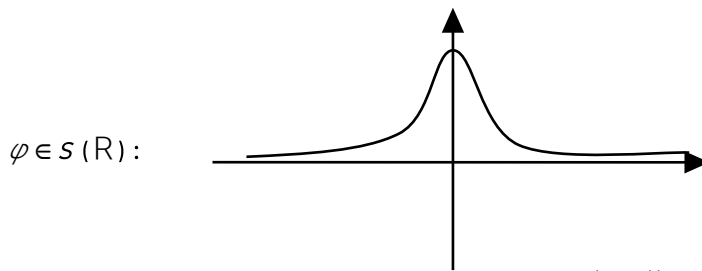
$$\forall k, l : |x|^l \cdot |\varphi^{(k)}(x)| \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 0$$

2-3- تعريف الفضاء $S(R^n)$: [9 p 98] [2 p 18] [13 p107] [11p 179]

يُعرّف الفضاء $S(R^n)$ بأنه فضاء الدوال العقدية المعرفة على R^n القابلة للاشتقاق عدداً غير منته من المرات و ذات التناقص السريع أي فضاء الدوال التي تحقق:

$$\forall k, l : |x|^l \cdot |\varphi^{(k)}(x)| \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 0$$

سنرمز للفضاء $S(R^n)$ بـ S .



أمثلة:

- الدالة $\varphi(x) = e^{-|x|^2}$ تنتمي للفضاء $S(R^n)$.
- بشكل أعم، إذا كان $z \in \mathbb{C}$ حيث: $\text{Re}(z) > 0$ فالدالة $\varphi(x) = e^{-z|x|^2}$ تنتمي للفضاء $S(R^n)$.

- الدالة $\varphi(x) = \frac{1}{\text{ch}(x)}$ تنتمي للفضاء $S(R)$.



2-4- خواص الفضاء S و ملاحظات: [13 p] [9 p 61] [1 p 209] 108]

- الفضاء S فضاء متجهي عقدي:
 - إذا كانت φ و ψ دالتين من S ، و α و β من R عندئذ الدالة $\alpha\varphi + \beta\psi$ قابلة للاشتقاق عدداً غير منته من المرات و ذات تناقص سريع، أي أنها من S .
 - الفضاء D فضاء متجهي جزئي من الفضاء S :
 لتكن φ دالة من D فهي قابلة للاشتقاق عدداً غير منته من المرات، كما أن دعامتها محدودة فهي تحقق: $\lim_{|x| \rightarrow \infty} |x|^l \cdot \varphi^{(k)}(x) = 0$ و $\forall k, l$ وهذا يعني أن الدالة φ من S .
 - إذا كانت φ دالة من S و P كثير حدود فإن الدالة $P \cdot \varphi$ من S .
 - إذا كانت φ دالة من S ، عندئذ مشتقات φ المتتالية هي دوال من S .
 - إذا كانت φ و ψ دالتين من S فإن الدالة $\varphi \cdot \psi$ هي دالة من S .
 - إذا كانت الدالة φ من S فإن الدالة $\varphi^{(n)}$ تكون من S ، سنثبت هذه الخاصة في حالة $n=1$:
 - لإثبات أن الدالة $\varphi^{(n)}$ قابلة للاشتقاق عدداً غير منته من المرات يكفي إثبات أن الدالة $\varphi \cdot x^n$ من L^1 ، أي أن الدالة φ تتناقص بسرعة في اللانهاية (وهذا محقق).
 - الدالة $\varphi^{(n)}$ ذات تناقص سريع : لدينا $(\varphi^{(n)})(s) = (-2i\pi)^n \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi sx} x^n \varphi(x) dx$ ومنه :
- $$s^k \cdot (\varphi^{(n)})(s) = (-2i\pi)^n \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi sx} x^n s^k \varphi(x) dx$$
- $$= (-2i\pi)^{n-k} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{dx^k} (e^{-2i\pi sx}) \cdot x^n \varphi(x) dx$$
- نكامل بالتجزئة k مرة فنحصل على:
- $$s^k \cdot (\varphi^{(n)})(s) = (-2i\pi)^{n-k} (-1)^k \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi sx} \frac{dk}{dx^k} (x^n \varphi) dx$$
- وبالتالي:
- $$\|s^k \cdot (\varphi^{(n)})(s)\| = \|s^k (\varphi^{(k)})(s)\| \leq (2\pi)^{n-k} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{dk}{dx^k} (x^n \cdot \varphi) \right| dx$$
- أي أنه أصبح لدينا:



$$\forall k : |s|^k \cdot (\varphi)^{(k)}(s) \xrightarrow{|s| \rightarrow \infty} 0$$

2-5- التقارب في الفضاء S : [1 p 179] [11 p 62] [9 p 108] [13 p 210]

تعريف:

لتكن $\{\varphi_p\}_{p \geq 1}$ متتالية من عناصر S ، نقول إن المتتالية $\{\varphi_p\}_{p \geq 1}$ تتقارب من الدالة الصفرية في S إذا كان: $|x|^n \cdot \varphi_p^{(q)}(x) \xrightarrow{R} 0$ من أجل أي q, n . ونقول عن المتتالية $\{\varphi_p\}_{p \geq 1}$ إنها تتقارب من الدالة φ في S إذا كانت المتتالية $\{\varphi_p - \varphi\}_{p \geq 1}$ تتقارب من الدالة الصفرية في S .

نتائج و ملاحظات:

- إذا كانت $\{\varphi_p\}_{p \geq 1}$ متتالية من الفضاء D تتقارب من الصفر في D فإنها تتقارب من الصفر في S . لأن التقارب في D يعني أن $\varphi_p^{(q)}(x) \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0$ و منه $|x|^n \cdot \varphi_p^{(q)}(x) \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0$.
- إذا كانت $\{\varphi_p\}_{p \geq 1}$ متتالية من الفضاء D تتقارب من الصفر في S فهي ليست من الضرورة تتقارب من الصفر في D (لأن شرط الدعامه قد لا يكون محققا).

مثال: لتكن لدينا $\{\varphi_p\}_{p \geq 1}$ متتالية من $D(R)$ معرفة بالشكل: $\varphi_p(x) = \frac{1}{p} \varphi\left(\frac{x}{p}\right)$ حيث:

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{|x|^2 - a^2}} & |x| < a \\ 0 & |x| \geq a \end{cases}$$

$D(R)$

ولكن $|x|^n \cdot \varphi_p^{(q)}(x) = x^n \cdot \frac{1}{p} \cdot e^{\frac{1}{|x|^2 - a^2}} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0$ أي أن المتتالية $\{\varphi_p\}_{p \geq 1}$ تتقارب من الصفر في الفضاء $S(R)$.

- إذا كانت المتتالية $\{\varphi_p\}_{p \geq 1}$ تتقارب من الصفر في الفضاء S فإن المتتالية $\{\varphi_p^{(q)}\}_{p \geq 1}$ تتقارب من الصفر في الفضاء S . أي أن التطبيق المعرف على الفضاء S بالشكل: $\varphi \mapsto \varphi^{(q)}$ مستمر.

- إذا كانت المتتالية $\{\varphi_p\}_{p \geq 1}$ تتقارب من الصفر في الفضاء S فإن المتتالية $\{P \cdot \varphi_p\}_{p \geq 1}$ (من



أجل أي كثير حدود p) تتقارب من الصفر في الفضاء S . أي أن التطبيق المعرف على الفضاء S بالشكل: $\varphi \mapsto p \cdot \varphi$ مستمر.

- إذا كانت المتتالية $\{\varphi_p\}_{p \geq 1}$ تتقارب من الصفر في الفضاء S فإن المتتالية

$\{\varphi_p\}_{p \geq 1}$ تتقارب

من الصفر في الفضاء S . أي أن التطبيق المعرف على الفضاء S بالشكل: $\varphi \mapsto \varphi$ مستمر.

سنثبت هذه الخاصة في حالة $n=1$ ، لنعرف الدالة f_p بالشكل:

$$f_p(x) = (-2i\pi x)^q \varphi_p^{(n)}(x)$$

إن الدالة f_p تنتمي إلى الفضاء S وبالتالي فهي من L^1 و تحقق:

وبالتالي: $\|f_p\| = (2\pi)^n \int_{-\infty}^{\infty} |s|^n \cdot (|\varphi_p|^{(q)}(s)) ds$ ولكن لدينا :

$$\begin{aligned} \|f_p\| &= \int_{-\infty}^{-1} |f_p(x)| dx + \int_{-1}^1 |f_p(x)| dx + \int_1^{\infty} |f_p(x)| dx \\ &= \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2} |x^2 f_p(x)| dx + \int_{-1}^1 |f_p(x)| dx + \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} |x^2 f_p(x)| dx \\ &\leq \sup_{x \leq -1} |x^2 f_p(x)| + 2 \sup_{|x| \leq 1} |f_p(x)| + \sup_{x \geq 1} |x^2 f_p(x)| \\ &\leq 2 \sup_{|x| \leq 1} |f_p(x)| + 2 \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^2 f_p(x)| \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

ومنه : $0 \xrightarrow{R} s^n \cdot (|\varphi_p|^{(q)})$ أي أن المتتالية $\{\varphi_p\}_{p \geq 1}$ تتقارب من الصفر في الفضاء S .

2-6- تحويل فورييه العكسي لدالة من $S(R)$: [9 p 68] [5 p 126]

لتكن φ دالة من الفضاء $S(R)$ ، عندئذ φ من $L^1(R)$ ، و بالتالي من الممكن إيجاد

تحويل فورييه لها، و يكون $\varphi(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi sx} \varphi(x) dx$.

كما أنه لدينا:

(1) الدالة φ قابلة للاشتقاق في كل نقطة.

(2) الدالة φ من الفضاء $S(R)$ ، فهي من $L^1(R)$.

$$(3) \lim_{A, B \rightarrow \infty} \int_{-B}^A e^{2i\pi sx} |\varphi(s)| ds = 0$$

من (1) و (2) و (3):

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A e^{2i\pi sx} |\varphi(s)| ds = \lim_{B, A \rightarrow \infty} \left[\int_{-B}^{-A} e^{2i\pi sx} |\varphi(s)| ds + \int_{-A}^A e^{2i\pi sx} |\varphi(s)| ds \right] \\ &= \lim_{B, A \rightarrow \infty} \int_{-B}^A e^{2i\pi sx} |\varphi(s)| ds = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2i\pi sx} |\varphi(s)| ds \end{aligned}$$



لنرمز للتحويل الذي يربط كل دالة ψ من الفضاء s بالدالة $x \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} e^{2i\pi sx} \psi(s) ds$ ؛

الرمز $\bar{\cdot}$ ، و نكتب $\bar{\psi}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2i\pi sx} \psi(s) ds$. ندعو التحويل $\bar{\cdot}$ بـ تحويل فورييه العكسي و يمكن إثبات أنه يملك نفس خواص تحويل فورييه $\bar{\cdot}$ وأكثر من ذلك، لتكن φ و ψ دالتين من الفضاء s عندئذ:

$$\bar{\bar{\varphi}} = \varphi, \bar{\bar{\psi}} = \psi$$

أي أن التحويل $\bar{\cdot}$ هو عكس التحويل $\bar{\cdot}$ في الفضاء s ، والتحويل $\bar{\cdot}$ هو عكس التحويل $\bar{\cdot}$ في الفضاء s .

وبالتالي يمكن القول إن: كل من التحويلين $\bar{\cdot}$ و $\bar{\cdot}$ هو أوتومورفيزم على الفضاء المتجهي s ، وكل منهما مستمر، وكل منهما عكس الآخر. نتيجة: كل عنصر من الفضاء s هو تحويل فورييه لعنصر وحيد من الفضاء s .

3-التوزيعات المعتدلة:

3-1- تعريف: [9 p 63]

التوزيع المعتدل (distribution tempérée) المعروف على R^n : هو شكل خطي معرف على $s(R^n)$ ومستمر أي يحقق:

من أجل كل متتالية $\{\varphi_p\}_{p \geq 1}$ متقاربة من الصفر في $s(R^n)$ تكون المتتالية $T(\varphi_p)$ متقاربة من الصفر.

أو من أجل كل متتالية $\{\varphi_p\}_{p \geq 1}$ متقاربة من φ في $s(R^n)$ تكون المتتالية $T(\varphi_p)$ متقاربة من

$T(\varphi)$ (و ذلك لأن T خطي).

سنكتب $\langle T, \varphi \rangle$ بدلا من $T(\varphi)$.

3-2- ملاحظات: [9 p 63] [2 p 21]

- كل توزيع معتدل يكون توزيعا :

ليكن T توزيعا معتدلا ولنثبت أنه توزيع.

(1) شكل خطي على $s(R^n)$ فهو شكل خطي على الفضاء المتجهي الجزئي $D(R^n)$.

(2) إذا كانت $\{\varphi_p\}_{p \geq 1}$ متتالية متقاربة من الصفر في $D(R^n)$ فهي متقاربة من الصفر في $s(R^n)$ ، ويكون T مستمرا على $D(R^n)$ ، فهو توزيع.



- أما التوزيع فليس بالضرورة أن يكون توزيعاً معتدلاً :
مثال: التوزيع المرافق للدالة $f(x) = e^x$ (كمولة محليا) لا يكون توزيعاً معتدلاً

لأن الدالة $\varphi(x) = \frac{1}{sh(x)}$ من الفضاء $s(R)$ ولكن

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{sh(x)} dx = \infty$$

- التوزيعات المعتدلة مزودة بعملية الجمع: $\langle s + T, \varphi \rangle = \langle s, \varphi \rangle + \langle T, \varphi \rangle$ و عملية الضرب بعدد من C : $\langle \lambda \cdot T, \varphi \rangle = \lambda \cdot \langle T, \varphi \rangle$ تشكل فضاءً متجهياً عقدياً ، نرسم لهذا الفضاء $s'(R^n)$.

نستنتج مما سبق أن الفضاء $s'(R^n)$ فضاء متجهي جزئي من الفضاء المتجهي $D'(R^n)$.

3-3- أمثلة: [9 p 64]

- التوزيع الذي دعامته متراسة، هو توزيع معتدل:
ليكن $T: D \rightarrow C$ توزيعاً دعامته متراسة، و لنبرهن أنه توزيع معتدل.
(1) نمدد T إلى s بالشكل: لتكن a دالة من D مساوية للواحد على مجموعة مفتوحة تحوي دعامة T . عندئذ من أجل أي دالة φ من الفضاء s تكون الدالة $a \cdot \varphi$ من D ونعرف $\langle T, \varphi \rangle$ بالشكل: $\langle T, \varphi \rangle = \langle T, a \cdot \varphi \rangle$.
(2) T خطي على s .
(3) إذا كانت $\{\varphi_p\}_{p \geq 1}$ متتالية من الفضاء s تتقارب نحو الصفر، فإن المتتالية $\{a \cdot \varphi_p\}_{p \geq 1}$ من الفضاء D تتقارب نحو الصفر في D لأن:
- $\text{supp } a \cap \text{supp}(a \cdot \varphi_p) \subset \text{supp}(a)$ محدودة.
- الدالة a محدودة و $\varphi_p^{(q)}(x) \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0 \Leftrightarrow (a \cdot \varphi_p)^{(q)}(x) \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0$ وبالتالي:
 $\langle T, \varphi_p \rangle = \langle T, a \cdot \varphi_p \rangle \rightarrow 0$.
أي أن ممدد T على الفضاء s هو شكل خطي و مستمر، فهو توزيع معتدل.
فمثلاً "توزيع ديراك هو توزيع معتدل.

- المشتقات المتتالية (dérivées successives) للتوزيعات المعتدلة هي توزيعات معتدلة:
ليكن T توزيعاً معتدلاً " من $s'(R^n)$:

- إذا كانت φ دالة من $s(R^n)$ فإن الدالة $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$ تكون من $s(R^n)$.



- إذا كانت $\{\varphi_p\}_{p \geq 1}$ متتالية متقاربة من الصفر في $s(R^n)$ فإن المتتالية $\left\{ \frac{\partial \varphi_p}{\partial x_i} \right\}_{p \geq 1}$

تكون متقاربة من الصفر في $s(R^n)$ وبالتالي $\left\langle \frac{\partial \tau}{\partial x_i}, \varphi_p \right\rangle = - \left\langle \tau, \frac{\partial \varphi_p}{\partial x_i} \right\rangle \rightarrow 0$ أي أن $\frac{\partial \tau}{\partial x_i}$ مستمر.

- بما أن τ شكل خطي فإن $\frac{\partial \tau}{\partial x_i}$ شكل خطي على $s(R^n)$.

و هذا يعني أن مشتق توزيع معتدل يكون توزيعاً معتدلاً. كذلك نبرهن من أجل المشتقات المتتالية.

• لتكن f دالة من $L^1(R^n)$ ، عندئذٍ التوزيع المرافق 1 - f هو توزيع معتدل.

لتكن $\{\varphi_p\}_{p \geq 1}$ متتالية من الفضاء $s(R^n)$ متقاربة من الصفر في $s(R^n)$ أي تحقق :
 $x^n \cdot \varphi_p^{(q)}(x) \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0$ من أجل أي q, n وبشكل خاص $\varphi_p(x) \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0$ عندئذٍ:

$$\begin{aligned} \left| \langle \tau, \varphi_p \rangle \right| &= \left| \int_{R^n} f(x) \cdot \varphi_p(x) dx \right| \leq \int_{R^n} |f(x)| \cdot |\varphi_p(x)| dx \\ &\leq \int_{R^n} |f(x)| \cdot \sup_{x \in R^n} |\varphi_p(x)| dx = \|f\| \cdot \sup_{x \in R^n} |\varphi_p(x)| \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

• لتكن f دالة كمولة محلياً على R تحقق: $\exists A > 0, B > 0, r \in N$ حيث:
 $|x| \geq A \Rightarrow |f(x)| \leq B |x|^r$ عندئذٍ التوزيع τ_f المرافق 1 - f يكون توزيعاً معتدلاً.

- τ معرف على الفضاء s لأنه من أجل أي دالة φ من الفضاء s ، تكون الدالة φ محدودة أي يوجد $A' > 0$ حيث: $\forall x \in R \quad |\varphi(x)| \leq A'$ ، وتكون الدالة $x \mapsto x^{r+2} \cdot \varphi(x)$ من الفضاء s فهي محدودة أي يوجد $B' > 0$ حيث:
 $\forall x \in R \quad |x^{r+2} \cdot \varphi(x)| \leq B'$ وبالتالي:



$$\begin{aligned}
|\langle T, \varphi \rangle| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot \varphi(x) dx \right| \leq \int_{-\infty}^{-A} |f(x) \cdot \varphi(x)| dx + \int_{-A}^A |f(x) \cdot \varphi(x)| dx + \int_A^{\infty} |f(x) \cdot \varphi(x)| dx \\
&\leq \int_{-\infty}^{-A} |x^{-r} \cdot f(x)| |x^{r+2} \cdot \varphi(x)| \frac{dx}{x^2} + \int_{-A}^A |f(x) \cdot \varphi(x)| dx + \int_A^{\infty} |x^{-r} \cdot f(x)| |x^{r+2} \cdot \varphi(x)| \frac{dx}{x^2} \\
&\leq B \left[\sup_{x \leq -A} |x^{r+2} \cdot \varphi(x)| \right] \int_{-\infty}^{-A} \frac{dx}{x^2} + \left[\sup_{|x| \leq A} |\varphi(x)| \right] \int_{-A}^A |f(x)| dx + B \left[\sup_{x \geq A} |x^{r+2} \cdot \varphi(x)| \right] \int_A^{\infty} \frac{dx}{x^2} \\
&\leq 2 \frac{B}{A} \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^{r+2} \cdot \varphi(x)| + \left[\sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi(x)| \right] \int_{-A}^A |f(x)| dx \leq 2 \frac{B}{A} B' + A' \int_{-A}^A |f(x)| dx < \infty
\end{aligned}$$

- إذا كانت $\{\varphi_p\}_{p \geq 1}$ متتاليةً متقاربةً من الصفر في S فإن $x^n \cdot \varphi_p^{(q)}(x) \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0$ من أجل أي q, n ، و بشكل خاص $\varphi_p(x) \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0$ وبالتالي $x^{r+2} \cdot \varphi_p(x) \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0$

$$|\langle T, \varphi_p \rangle| \leq 2 \frac{B}{A} \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^{r+2} \cdot \varphi_p(x)| + \left[\sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi_p(x)| \right] \int_{-A}^A |f(x)| dx \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0$$

فمثلاً : التوزيع المرافق لدالة كمولة محلياً محدودة هو توزيع معتدل.
التوزيع المرافق لدالة حدودية هو توزيع معتدل.

3-4- تقارب التوزيعات المعتدلة: [13 p 113]

- لتكن $\{T_r\}_{r \geq 1}$ متتاليةً من التوزيعات المعتدلة، نقول عن $\{T_r\}_{r \geq 1}$ إنها تسعى نحو التوزيع الصفري في $S'(R^n)$ عندما $\frac{1}{r}$ تسعى للصفر، إذا كانت المتتالية $\{\langle T_r, \varphi \rangle\}_{r \geq 1}$ تسعى نحو الصفر من أجل أي دالة φ من $S(R^n)$.
- لتكن $\{T_r\}_{r \geq 1}$ متتاليةً من التوزيعات المعتدلة، نقول عن $\{T_r\}_{r \geq 1}$ إنها تسعى نحو التوزيع T في $S'(R^n)$ عندما $\frac{1}{r}$ تسعى للصفر، إذا كانت المتتالية $\{T_r - T\}_{r \geq 1}$ تسعى نحو الصفر في $S'(R^n)$.
- إذا كانت $\{T_r\}_{r \geq 1}$ متتاليةً من التوزيعات المعتدلة تتقارب نحو التوزيع T في $S'(R^n)$ عندئذٍ المتتالية $\{T'_r\}_{r \geq 1}$ تتقارب نحو التوزيع T' في $S'(R^n)$.

4-العمليات على التوزيعات المعتدلة:

4-1- جداء توزيع معتدل بتوزيع آخر:

4-1-1- مقدمة: [9 p 71]

ليكن لدينا التوزيع T والدالة f القابلة للاشتقاق عدداً غير منته من المرات، عندئذ جداء التوزيع T_f المرافق للدالة f (سنرمز له بـ $f \cdot T$) بالتوزيع T هو التوزيع المعرف بالشكل:

$$\forall \varphi \in D(R) : \langle f \cdot T, \varphi \rangle = \langle T, f \cdot \varphi \rangle$$

أما جداء التوزيع f بتوزيع معتدل T فهو ليس بالضرورة توزيعاً معتدلاً، لذلك نحن بحاجة لفرض جديد على الدالة f ليكون للمساواة معنى. $\forall \varphi \in S(R) : \langle f \cdot T, \varphi \rangle = \langle T, f \cdot \varphi \rangle$

نلاحظ أن التوزيع T سيُطبق على الدالة $f \cdot \varphi$ ، فنحن بحاجة إلى فرض انتماءها للفضاء S من أجل أي دالة φ من الفضاء S .

إذا كانت الدالة $f \cdot \varphi$ من الفضاء S ، فإن المشتقات المتتالية لكل φ من $f \cdot \varphi$ تكون أيضاً من الفضاء S ، وكذلك تكون الدالة $f^{(q)} \cdot \varphi$ من الفضاء S .

سنبرهن أن هذا الفرض يكافئ الخاصة التالية: $\forall q \exists n : \frac{f^{(q)}(x)}{x^n} \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 0$

لزوم الشرط:

سنفرض أن الدالة $f^{(q)} \cdot \varphi$ من الفضاء S ، ولنبرهن أن الدالة f تحقق

$$\forall q \exists n : \frac{f^{(q)}(x)}{x^n} \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 0$$

سنثبت ذلك بنقض الفرض، لنفرض أن الشرط $\frac{f^{(q)}(x)}{x^n} \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 0$ لا يتحقق من

أجل أي n ، ومن أجل $q=0$ ، أي لنفرض وجود متتالية $\{x_p\}_{p \geq 1}$ من الأعداد

الحقيقية حيث: $|x_p| \geq 1$ و $|x_p| + 2 \leq |x_{p+1}|$ يكون من أجلها:

$$\left| (x_p)^{-p} \cdot f(x_p) \right| \geq A > 0$$

ولنأخذ الدالة φ المعرفة بالشكل:

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2-1}} & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geq 1 \end{cases} \text{ والدالة } \varphi(x) = \sum_{p=1}^{\infty} (x_p)^{-p} \varphi(x - x_p) \text{ إن الدالة } \varphi$$

قابلة للاشتقاق عدداً غير منته من المرات، و إذا كان $|x_p| - 1 \leq |x| \leq |x_p| + 1$ فإن

$$x^r \cdot \varphi(x) = \left(\frac{x}{x_p} \right)^r \frac{\varphi(x - x_p)}{(x_p)^{p-r}} \text{ ولدينا:}$$

$$\frac{1}{(x - x_p)^2 - 1} \leq -1 \Rightarrow e^{\frac{1}{(x - x_p)^2 - 1}} \leq e^{-1} \Rightarrow 0 \leq \varphi(x - x_p) \leq \frac{1}{e} \quad (1)$$

$$|x_p|^{p-r} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} \infty \quad (3) \quad |x| \leq |x_p| + 1 \Rightarrow \left| \frac{x}{x_p} \right| \leq 1 + \frac{1}{|x_p|} \leq 2 \quad (2)$$

من (1), (2), (3) نستنتج أن $x^r \varphi(x) \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 0$ كذلك نثبت أن $x^r \varphi^{(q)}(x) \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 0$

ومنه الدالة φ المعرفة سابقاً تنتمي للفضاء S ، ولكن:

$$f(x_p) \cdot \varphi(x_p) = \frac{1}{e} \cdot f(x_p) \cdot (x_p)^{-p} \geq \frac{1}{e} \cdot A > 0$$

الفضاء S .

كفاية الشرط:

سنفرض أن الدالة f تحقق $\frac{f^{(q)}(x)}{x^n} \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 0$ ، ولنبهرن أن الدالة

$f^{(q)} \cdot \varphi$ من الفضاء S .

بما أن الدالة φ من الفضاء S ، فإن كل من الدوال $x \mapsto x^{n+p} \cdot \varphi^{(q)}(x)$ هي أيضاً من الفضاء S (من أجل أي (q, p) ، أصبح لدينا

$$\frac{f^{(q)}(x)}{x^n} \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 0, \quad x^{n+p} \cdot \varphi(x) \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 0 \text{ وبالتالي:}$$

$$x^p \cdot f^{(q)}(x) \cdot \varphi(x) \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 0 \text{ (من أجل أي } (q, p) \text{ أي أن الدالة } f^{(q)} \cdot \varphi \text{ هي دالة}$$

من الفضاء S .)

ملاحظة:

إذا كانت الدالة f تحقق الشرط السابق فهي تكتب بالشكل: $f = \varpi \cdot g$ حيث ϖ كثير حدود والدالة g من الفضاء L^1 ، و مشتقات الدالة f تكتب أيضاً بالشكل: $f^{(q)} = \varpi \cdot g$ حيث درجة كثير حدود ϖ تتعلق بمرتبة الاشتقاق (q) .

4-1-2- الفضاء O_M : [9 p 73] [2 p 19]

الفضاء O_M هو فضاء التوزيعات المرافقة للدوال f القابلة للاشتقاق عدداً غير منته

$$\text{من المرات، والمحققة للشرط: } \forall q \exists n: \frac{f^{(q)}(x)}{x^n} \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 0$$

ملاحظات:

- إذا كانت الدالة f من الفضاء O_M ، فهي قابلة للاشتقاق عدداً غير منته من المرات، و تحقق: من أجل أي q يوجد كثير حدود p



حيث: $|f^{(q)}(x)| \leq |P(x)|$.

- دوال الفضاء O_M تدعى الدوال ذات التزايد البطيء (fonction à croissance lente).
- سنستخدم الرمز f للدالة على الدالة ، وللدالة على التوزيع المرافق لها.

4-1-3- خواص الفضاء O_M : [9 p 73]

- (1) الفضاء O_M فضاء متجهي جزئي من الفضاء S' :
ليكن f توزيعاً من O_M ، عندئذٍ الدالة f قابلة للاشتقاق عدداً غير منته من المرات (فهي كمولة محلياً)، وتحقق: $|f(x)| \leq |P(x)|$ ($\exists P$: فهي محدودة)، فالتوزيع المرافق لها يكون توزيعاً معتدلاً.
- (2) المشتقات المتتالية لتوزيعات من O_M هي توزيعات من O_M .
- (3) جداء توزيع f من O_M بتوزيع معتدل T هو توزيع معتدل.
- لتكن φ دالة من S ، عندئذٍ الدالة $f \cdot \varphi$ تكون دالة من S .
- إذا كانت $\{\varphi_p\}_{p \geq 1}$ متتاليةً مقاربة من الصفر في S فإن المتتالية $\{x^n \cdot (f \cdot \varphi_p)^{(q)}(x)\}_{p \geq 1}$ تكون مقاربة من الصفر بانتظام في R (من أجل أي n, q)، وبالتالي المتتالية $\{f \cdot \varphi_p\}_{p \geq 1}$ تكون مقاربة من الصفر في S و يكون:
$$\langle f \cdot T, \varphi_p \rangle = \langle T, f \cdot \varphi_p \rangle \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0$$
 أي $f \cdot T$ مستمر.
- بما أن T خطي فإن $f \cdot T$ شكل خطي على S .
أي أن جداء توزيع f من O_M بتوزيع معتدل T يكون توزيعاً معتدلاً.

4) التقارب في O_M :

- لتكن $\{f_p\}_{p \geq 1}$ متتالية من التوزيعات من O_M ، نقول إنها مقاربة من الصفر في O_M إذا كانت المتتالية $\{f_p \cdot \varphi\}_{p \geq 1}$ مقاربة من الصفر في S (من أجل أي دالة φ من S).

ملاحظات:

- إذا كانت $\{f_p\}_{p \geq 1}$ متتالية من التوزيعات من O_M تتقارب من الصفر في O_M ، عندئذٍ لدينا من أجل أي دالة φ من S المتتالية $\{f_p \cdot \varphi\}_{p \geq 1}$ تتقارب من الصفر في $S \Leftarrow$ المتتالية $\{(f_p)^{(q)} \cdot \varphi\}_{p \geq 1}$ تتقارب من الصفر في $S \Leftarrow$ المتتالية $\{(f_p)^{(q)}\}_{p \geq 1}$ تتقارب من الصفر في O_M .



- إذا كانت $\{f_p\}_{p \geq 1}$ متتالية من التوزيعات من O_M تتقارب من الصفر في O_M ، عندئذ لدينا من أجل أي دالة φ من S المتتالية $\{f_p \cdot \varphi\}_{p \geq 1}$ تتقارب من الصفر في S $\Leftrightarrow (f_p \cdot \varphi)(x) \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0 \Leftrightarrow \langle f_p, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f_p(x) \cdot \varphi(x) dx \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0$ (من أجل أي دالة φ من S) $\Leftrightarrow$ المتتالية $\{f_p\}_{p \geq 1}$ تتقارب من الصفر في S' .

4-1-4- استمرار الجداء: [9 p 74] O ضرب مستمر بالنسبة للمعامل الأول:

- لتكن $\{f_p\}_{p \geq 1}$ متتالية من التوزيعات من O_M المتقاربة من الصفر في O_M ، و ليكن T توزيعاً معتدلاً من S' ، عندئذ لدينا من أجل أي دالة φ من الفضاء S $\langle f_p \cdot T, \varphi \rangle = \langle T, f_p \cdot \varphi \rangle \rightarrow 0$ أي أن متتالية التوزيعات المعتدلة $\{f_p \cdot T\}_{p \geq 1}$ تتقارب من الصفر في S' .

O ضرب مستمر بالنسبة للمعامل الثاني:

- لتكن $\{T_r\}_{r \geq 1}$ متتالية من التوزيعات المعتدلة المتقاربة من التوزيع المعتدل T في S' ، و ليكن f توزيعاً من O_M ، عندئذ لدينا من أجل أي دالة φ من الفضاء S : $\langle f \cdot T_r, \varphi \rangle = \langle T_r, f \cdot \varphi \rangle \rightarrow \langle T, f \cdot \varphi \rangle = \langle f \cdot T, \varphi \rangle$ أي أن متتالية التوزيعات المعتدلة $\{f \cdot T_r\}_{r \geq 1}$ تتقارب من التوزيع المعتدل $f \cdot T$ في S' .

4-2- تحويلات فورييه للتوزيعات المعتدلة:

4-2-1- تعريف: [9 p 67]

- ليكن T توزيعاً معتدلاً من S' ، يُعرّف تحويل فورييه للتوزيع T بالشكل:
 $\forall \varphi \in S : \langle T, \varphi \rangle = \langle T, 1 \cdot \varphi \rangle$

إن $1 \cdot T$ توزيع معتدل:

- بما أن كلا T و تحويل فورييه خطي فإن $1 \cdot T$ شكل خطي على S .

- إذا كانت $\{\varphi_p\}_{p \geq 1}$ متتالية متقاربة من الصفر في S فإن المتتالية $\{1 \cdot \varphi_p\}_{p \geq 1}$

تكون متقاربة من الصفر في S وبالتالي يكون:

$$\langle 1 \cdot T, \varphi_p \rangle = \langle T, 1 \cdot \varphi_p \rangle \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0 \text{ أي أن } 1 \cdot T \text{ مستمر.}$$



أي أن تحويل فورييه لتوزيع معتدل يكون توزيعاً معتدلاً .

4-2-2- خواص تحويلات فورييه: [9 p 67]

■ تحويل فورييه هو اندومورفيزم على الفضاء المتجهي s' أي أن التطبيق $\tau \mapsto \tau$ خطي ومستمر .

- من أجل أي توزيعين τ و s : $\tau + s = \tau + s$.

- من أجل أي توزيع τ ومن أجل أي عدد حقيقي λ : $\lambda \tau = \lambda \tau$.

- إذا كانت $\{\tau_r\}_{r \geq 1}$ متتالية من التوزيعات تسعى نحو التوزيع τ في s' ، عندئذ:

$$\{\tau_r\}_{r \geq 1} \text{ المتتالية } \forall \varphi \in s : \langle \tau_r, \varphi \rangle = \langle \tau_r, \tau \rangle \longrightarrow \langle \tau, \tau \rangle = \langle \tau, \tau \rangle$$

تسعى نحو التوزيع τ .

■ حساب المشتقات المتتالية للتوزيع المعتدل τ :

ليكن τ توزيعاً معتدلاً ، و s جداء التوزيع المرافق للدالة $x \mapsto x$ (من O_M) ؛
التوزيع τ ، إن s توزيع معتدل و $(\tau)' = (-2i\pi s)$ لأن:

$$\langle (\tau)', \varphi \rangle = -\langle \tau, \varphi' \rangle = -\langle \tau, (s\varphi) \rangle = -\langle \tau, 2i\pi s\varphi \rangle$$

من الفضاء s . و منه $\langle (\tau)', \varphi \rangle = -\langle \tau, 2i\pi s\varphi \rangle = \langle -2i\pi s, \tau \rangle = \langle (-2i\pi s), \tau \rangle$

■ حساب تحويل فورييه للمشتقات المتتالية للتوزيع المعتدل τ :

ليكن τ توزيعاً معتدلاً و u جداء التوزيع المرافق للدالة $x \mapsto x$ (من O_M) ؛
التوزيع τ ، إن u توزيع معتدل و $(\tau)' = 2i\pi u$ لأن:

$$\langle (\tau)', \varphi \rangle = \langle \tau', \tau \rangle = -\langle \tau, (\tau)' \rangle = -\langle \tau, (-2i\pi \phi) \rangle$$

دالة من الفضاء s . و منه

$$\langle (\tau)', \varphi \rangle = -\langle \tau, (-2i\pi \phi) \rangle = \langle \tau, 2i\pi \phi \rangle = \langle 2i\pi u, \tau \rangle$$

4-2-3- تحويل فورييه العكسي لتوزيع معتدل: [9 p 68]

• تعريف:

ليكن τ توزيعاً معتدلاً يُعرّف تحويل فورييه العكسي للتوزيع τ بالشكل:

$$\langle \bar{\tau}, \varphi \rangle = \langle \tau, \bar{\varphi} \rangle$$

ليكن τ و s توزيعين معتدلين و لنثبت أن $\bar{\tau} = \tau$ ، $\bar{s} = s$:

$$\forall \psi \in S : \langle \bar{1} | \tau, \psi \rangle = \langle 1 | \tau, \bar{\psi} \rangle = \langle \tau, 1 | \bar{\psi} \rangle = \langle \tau, \psi \rangle$$

$$\forall \varphi \in S : \langle 1 | \bar{\tau} s, \varphi \rangle = \langle \bar{\tau} s, 1 | \varphi \rangle = \langle s, \bar{1} | \varphi \rangle = \langle s, \varphi \rangle$$

أي أن كلا من التحويلين τ و $\bar{\tau}$ هو أوتومورفيزم على الفضاء المتجهي S' ، وكلا منهما مستمر، وكلا منهما عكس الآخر.
كل عنصر من الفضاء S' هو تحويل فورييه لعنصر وحيد من الفضاء S' .
● ملاحظة:

إذا كانت f دالة من L^1 ، عندئذ ليس من الضروري أن يكون $\tau f = f$ ، $\bar{\tau} f = f$ ، أما التوزيع τ_f المعتدل المرافق للدالة f فهو يحقق $\tau_f = \tau_f$ ، $\bar{\tau}_f = \tau_f$.

4-2-4- أمثلة: [9 p 70][1 p 211]

(1) تحويل فورييه لتوزيع ديراك δ :

$$1 | \delta = 1 \text{ أي: } \langle 1 | \delta, \varphi \rangle = \langle \delta, 1 | \varphi \rangle = \left\langle \delta(s), \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi s x} \varphi(x) dx \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = \langle 1, \varphi \rangle$$

حيث 1 هو التوزيع المرافق للدالة الكمولة محلياً والمحدودة $x \mapsto 1$ ، أي هو توزيع معتدل.

$$1 | (1) = \delta \quad (2)$$

$$\langle 1 | (1), \varphi \rangle = \langle 1, 1 | \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} 1 | \varphi(s) ds = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi s x} \varphi(x) dx \right) ds = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{2i\pi s x} \varphi(x) dx \right) ds$$

$$\forall \varphi \in S(R) : \langle 1 | \varphi \rangle = \langle \bar{1}, \varphi \rangle \text{ أي } \langle 1 | (1), \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{1} \varphi(s) ds = \langle 1, \bar{\varphi} \rangle = \langle \bar{1}(1), \varphi \rangle \text{ ومنه}$$

$$\Leftrightarrow 1 | (1) = \bar{1}(1) \text{ و بما أن } 1 | \delta = 1 \text{ فإن } \delta = \bar{1}(1) \text{ وبالتالي } 1 | (1) = \bar{1}(1) = \delta.$$

(3) ليكن τ_a التوزيع المعتدل المرافق للدالة $x \mapsto e^{-2i\pi a x}$ عندئذ:

$$1 | \delta_a = \tau_a : -$$

$$\langle 1 | \delta_a, \varphi \rangle = \langle \delta_a, 1 | \varphi \rangle = \left\langle \delta_a(s), \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi s x} \varphi(x) dx \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi a x} \varphi(x) dx = \langle \tau_a, \varphi \rangle$$

$$: 1 | \tau_a = \delta_{-a} -$$

$$\langle 1 | \tau_a, \varphi \rangle = \langle \tau_a, 1 | \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi a s} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi s x} \varphi(x) dx \right) ds = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2i\pi a s} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{2i\pi s x} \varphi(x) dx \right) ds$$

$$\text{ومنه } \langle 1 | \tau_a, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2i\pi a s} \bar{1} \varphi(s) ds = \langle \tau_{-a}, \bar{1} \varphi \rangle = \langle \bar{1} \tau_{-a}, \varphi \rangle \text{ أي } 1 | \tau_a = \bar{1} \tau_{-a} \text{ و بما أن}$$

$$1 | \tau_a = \bar{1} \tau_{-a} = \delta_{-a} \text{ وبالتالي } \delta_{-a} = \bar{1} \tau_{-a}$$

(4) لتكن f دالة من L^1 وليكن τ_f التوزيع المعتدل المرافق لـ f عندئذ:

$$\langle 1 | \tau_f, \varphi \rangle = \langle \tau_f, 1 | \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) 1 | \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} 1 | f(x) \varphi(x) dx = \langle \tau_{1f}, \varphi \rangle$$

(5) تحويل فورييه لتوزيع دعامة متراصة:



ليكن T توزيعاً معتدلاً ، دعامته متراصة عندئذٍ $T = T_g$ حيث الدالة g معرفة بـ

$$\text{الشكل: } g(t) = \langle T(x), e^{-2i\pi tx} \rangle \text{ أي: } \langle T, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \langle T(x), e^{-2i\pi xt} \rangle \varphi(t) dt.$$

لنثبت أولاً ، أن الدالة g قابلة للاشتقاق:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(t+h) - g(t)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\langle T(x), \alpha(x) \cdot e^{-2i\pi tx} \frac{e^{-2i\pi hx} - 1}{h} \right\rangle \\ &= \langle T(x), \alpha(x) \cdot e^{-2i\pi tx} (-2i\pi x) \cdot e^0 \rangle = \langle T(x), -2i\pi x \alpha(x) \cdot e^{-2i\pi tx} \rangle \end{aligned}$$

حيث α دالة من $D(R)$ مساوية للواحد على دعامة T .

$$\begin{aligned} \forall \varphi \in D(R): \langle T_g, \varphi \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \varphi(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \langle T(x), e^{-2i\pi tx} \rangle \varphi(t) dt \\ &= \left\langle T(x), \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi tx} \varphi(t) dt \right\rangle = \langle T, I \varphi \rangle = \langle I T, \varphi \rangle \end{aligned}$$

4-2-5- الفضاء O'_c : [9 p 75]

✓ مقدمة:

ليكن f توزيعاً من الفضاء O_M ، عندئذٍ كل من التوزيعين f و $I f$ يكون توزيعاً معتدلاً لا ، كما أن الدالة f تكتب بالشكل $f = \varpi \cdot g$ حيث g دالة من L^1 قابلة للاشتقاق عدداً غير منته من المرات و ϖ كثير حدود، ويكون التوزيع g توزيعاً معتدلاً ، و التوزيع g توزيعاً معتدلاً ، مرافقاً للدالة المستمرة و المحدودة g .

وبالتالي التوزيع $I f$ يكتب بوصفه تركيباً خطياً لتوزيع مرافق لدالة من L^1 مستمرة (كمولة و محدودة) و مشتقاته المتتالية. كما أن الجداء $I f \cdot \varpi$ حيث ϖ توزيع مرافق لكثير حدود يكتب أيضاً يكتب بوصفه تركيباً خطياً لتوزيع مرافق لدالة من L^1 مستمرة (كمولة و محدودة) و مشتقاته المتتالية.

✓ تعريف الفضاء O'_c :

هو فضاء التوزيعات التي تحقق الخاصة السابقة ، أي التوزيعات T حيث يمكن للتوزيع $\varpi \cdot T$ (من أجل أي كثير حدود ϖ) أن يكتب بوصفه تركيباً خطياً لتوزيع مرافق لدالة من L^1 كمولة و محدودة (مستمرة) و مشتقاته المتتالية .

ملاحظة:

من أجل أي توزيع f من O_M يكون التوزيع $I f$ محققاً للخاصة السابقة فهو من O'_c ، أي يمكن القول أن تحويل فورييه تطبيق خطي من O_M في O'_c .

✓ خواص الفضاء O'_c :

- الفضاء O'_c فضاء متجهي جزئي من الفضاء s' :
ليكن T توزيعاً من O'_c ، فهو يُكتب بوصفه تركيباً خطياً لتوزيع مرافق لدالة مستمرة (فهي كمولة محلياً) و محدودة و مشتقاته المتتالية، أي أنه يُكتب بوصفه تركيباً خطياً لتوزيعات معتدلة، فهو توزيع معتدل.
- التقارب في O'_c :

لتكن $\{T_p\}_{p \geq 1}$ متتالية من التوزيعات من O'_c ، نقول إنها متقاربة من الصفر في O'_c إذا كانت المتتالية $\{\varpi \cdot T_p\}_{p \geq 1}$ متقاربة من الصفر في s' (من أجل أي توزيع مرافق لكثير حدود ϖ).

ملاحظة: إذا كانت المتتالية $\{f_p\}_{p \geq 1}$ تتقارب من الصفر في O_M ، فإن المتتالية المتشكلة من التوافيق الخطية $1 - f_p$ و مشتقاته تتقارب من الصفر في O_M .

- تحويل فورييه من O_M في O'_c مستمر:

لتكن $\{f_p\}_{p \geq 1}$ متتالية من التوزيعات من O_M تتقارب من الصفر في $O_M \Leftarrow$ المتتالية $\{f_p\}_{p \geq 1}$ تتقارب من الصفر في s' $\Leftarrow$ المتتالية $\{|f_p|\}_{p \geq 1}$ تتقارب من الصفر في s' $\Leftarrow$ المتتالية $\{\varpi \cdot |f_p|\}_{p \geq 1}$ تتقارب من الصفر في s' (من أجل أي كثير حدود ϖ) $\Leftarrow$ المتتالية $\{|f_p|\}_{p \geq 1}$ تتقارب من الصفر في O'_c .

- تحويل فورييه يطبق O'_c في O_M و مستمر:

ليكن T توزيعاً من O'_c فهو يُكتب بوصفه تركيباً خطياً لتوزيع مرافق لدالة من L^1 و مشتقاته المتتالية، وبالتالي التوزيع $|T|$ يُكتب على شكل جداء توزيع مرافق لدالة حدودية بتوزيع مرافق لدالة مستمرة ومحدودة، أي أن التوزيع $|T|$ هو توزيع مرافق لدالة f مستمرة وتحقق: $\exists n: \frac{f(x)}{x^n} \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 0$.

كذلك نثبت من أجل التوزيع $\varpi \cdot T$ (من أجل أي توزيع مرافق للدالة الحدودية ϖ)، أي أن

التوزيع $|(\varpi \cdot T)|$ هو توزيع مرافق لدالة f_{ϖ} مستمرة وتحقق:



$$\exists n: \frac{f_{\omega}(x)}{x^n} \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 0$$

وبالتالي التوزيع $(\tau)'$ (يكتب بالشكل $(\tau \cdot \omega)$) مرافق لدالة مستمرة g تحقق الشرط السابق. و بما أن التوزيعات الأصلية لـ $(\tau)'$ لا تختلف عن بعضها إلا بالتوزيعات المرافقة للدوال الثابتة، فالتوزيع τ مرافق للدالة الأصلية للدالة g ، وتكون الدالة الأصلية لـ g مساوية للدالة f تقريباً في كل مكان، و مشتق الدالة f هو الدالة g . أي أثبتنا أن الدالة f' تحقق $\exists n: \frac{f'(x)}{x^n} \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 0$ و كذلك نثبت أن $f^{(q)}$ تحقق: $\exists n: \frac{f^{(q)}(x)}{x^n} \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 0$ وبالتالي التوزيع τ مرافق للدالة f القابلة للاشتقاق عدداً غير منته من المرات والمحققة: $\forall q, \exists n: \frac{f^{(q)}(x)}{x^n} \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 0$ أي أن التوزيع τ من الفضاء O_M .

النتيجة:

التحويلان $\bar{\tau}, \tau$ ايزومورفيزمان جبريان مستمران من الفضاء المتجهي العقدي O_M على الفضاء المتجهي العقدي O'_C ، و من الفضاء المتجهي العقدي O'_C على الفضاء المتجهي العقدي O_M ، و بما أن $\bar{\tau} \tau = \tau \bar{\tau} = \tau$ من أجل أي توزيع τ من O'_C أو من O_M . نستنتج أن:

التحويلين: $\bar{\tau}: O'_C \longrightarrow O_M, \tau: O_M \longrightarrow O'_C$ متعاكسان.

التحويلين: $\tau: O'_C \longrightarrow O_M, \bar{\tau}: O_M \longrightarrow O'_C$ متعاكسان.

4-3- تلاف التوزيعات المعتدلة و تحويلات فورييه:

4-3-1- مقدمة و تعريف: [9 p 77]

إن تلاف توزيعين معتدلين ليس بالضرورة توزيعاً معتدلاً (إلا ضمن بعض الشروط).

(1) ليكن لدينا توزيعان دعامتھما متراسة، فهما معتدلان وتلافھما توزيع دعامتھ متراسة فهو معتدل.

(2) لتكن f, g دالتين من L^1 ، فهما كمولتان محلياً، ولتكن دعامة إحداھما محدودة أو دعامة كل منهما محدودة من الأعلى، عندئذ تلاف التوزيعين المعتدلين المرافقين لـ f, g هو توزيع مرافق للدالة $f * g$ (التي من L^1) فهو توزيع



معتدل.

(3) ليكن τ توزيعاً معتدلاً من s' و s توزيعاً من o'_c ، عندئذٍ تلافهما توزيع معتدل من s' .

الإثبات:

يُعرّف تلاف s و τ بالشكل:

$$\forall \varphi \in S(R) \quad \langle s * \tau, \varphi \rangle = \langle s(x), \langle \tau(y), \varphi(x+y) \rangle \rangle$$

لنثبت أن التوزيع $s * \tau$ معرف:

- الدالة $y \mapsto \varphi(x+y)$ من الفضاء $S(R)$: لأنها قابلة للاشتقاق عدداً غير منته من المرات و مشتقتها من المرتبة (q) هو الدالة $y \mapsto \varphi^{(q)}(x+y)$ ، كما أنها

$$\text{تحقق: إذا كانت } |y| \text{ كبيرة كفاية} \Leftrightarrow |x+y| > |x| \Leftrightarrow x+y \neq 0, \quad \left| \frac{y}{x+y} \right| < 2$$

و بما أن $|y| \rightarrow \infty \Leftrightarrow |x+y| \rightarrow \infty$ فإن:

$$|y^n \cdot \varphi(x+y)| = \left| \frac{y}{x+y} \right|^n \cdot |(x+y)^n \cdot \varphi(x+y)| < 2^n \cdot |(x+y)^n \cdot \varphi(x+y)| \xrightarrow{|y| \rightarrow \infty} 0$$

كذلك نثبت من أجل الدالة $y \mapsto \varphi^{(q)}(x+y)$ ، و هذا يعني أن الدالة $y \mapsto \varphi(x+y)$ ذات تناقص سريع أي أنها من الفضاء $S(R)$. فمن الممكن تطبيق التوزيع τ عليها.

- الدالة $x \mapsto \varphi(x) = \langle \tau(y), \varphi(x+y) \rangle$ قابلة للاشتقاق عدداً غير منته من المرات :

يكفي إثبات أن

$$\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} = \left\langle \tau(y), \frac{\varphi(x+h+y) - \varphi(x+y)}{h} \right\rangle \xrightarrow{h \rightarrow 0} \langle \tau(y), \varphi'(x+y) \rangle$$

أو إثبات أن:

$$y \mapsto \frac{\varphi(x+h+y) - \varphi(x+y)}{h} = \varphi'(x + \theta h + y) \xrightarrow{h \rightarrow 0} y \mapsto \varphi'(x+y)$$

سنفرض أن $|h| \leq 1$: $(\forall z : |z| < 1) : |h| \leq 1 \Rightarrow |y^n \varphi'(x+z+y)| < \frac{\varepsilon}{2}$ $\forall \varepsilon > 0, \exists A : |y| \geq A$

(وذلك لأن $|y^n \cdot \varphi'(x+y)| \xrightarrow{|y| \rightarrow \infty} 0$)

$$|y| \geq A : |y^n [\varphi'(x + \theta h + y) - \varphi'(x+y)]| < \varepsilon \quad (1)$$

الدالة φ' مستمرة بانتظام على المجال المغلق $[-A - |x| - 1, A + |x| + 1]$ و ؛
التالي:

$$\forall 0 < \eta < 1 : |z| < \eta \Rightarrow A^n |\varphi'(x+z+y) - \varphi'(x+y)| < \varepsilon$$



وذلك من أجل $|x + y| \leq A + |x|$ ومنه:

$$|y| \leq A, |h| < \eta: |y^n [\varphi'(x + \theta h + y) - \varphi'(x + y)]| < \varepsilon \quad (2)$$

من (1), (2): $y^n [\varphi'(x + \theta h + y) - \varphi'(x + y)] \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ ، كذلك إذا استبدلنا الدالة φ بمشتقاتها. أي أن الدالة $\langle T(y), \varphi(x + y) \rangle$ قابلة للاشتقاق عدداً غير منته من المرات.

- ليكن s توزيعاً من O_c' ، يمكن تطبيق التوزيع s على الدالة ψ إذا و فقط إذا

$$\text{حققت: } \frac{\psi^{(q)}(x)}{x^n} \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 0, \forall q, \exists n.$$

و بما أن الدالة $x \mapsto \varphi(x) = \langle T(y), \varphi(x + y) \rangle$ تحقق الشرط السابق، فمن الممكن تطبيق التوزيع s عليها.

لنثبت أن التوزيع $s * T$ مستمر:

إذا كانت $\{\varphi_p\}_{p \geq 1}$ متتالية من الفضاء s تتقارب من التوزيع الصفري في s فإن

المتتالية $\{\langle s(x), \langle T(y), \varphi_p(x + y) \rangle \rangle\}_{p \geq 1}$ تتقارب من الصفر، أي أن التوزيع

$s * T$ مستمر.

مما سبق نستنتج أن التوزيع $s * T$ توزيع معتدل.

ملاحظة: من الممكن تلاف عدد منته من التوزيعات المعتدلة إذا كان واحد * منها على الأكثر لا ينتمي إلى O_c' .

يمكن إثبات أن عملية تلاف التوزيعات السابقة تبديلية، تجميعية، مستمرة:

إذا كانت $\{s_p\}_{p \geq 1}$ متتالية من التوزيعات من الفضاء O_c' تتقارب من الصفر في

O_c' ، فإن المتتالية $\{s_p * T\}_{p \geq 1}$ تتقارب من الصفر في s' . (من أجل أي توزيع معتدل T) و إذا كانت

$\{T_p\}_{p \geq 1}$ متتالية من التوزيعات من الفضاء s' تتقارب من الصفر في s' ، فإن

المتتالية $\{T_p * s\}_{p \geq 1}$ تتقارب من الصفر في s' ، (من أجل أي توزيع s من O_c').

4-3-2- تحويلات فورييه و التلاف: [9 p 81][1 p 214]

إذا كان s توزيعاً من O_m (التوزيع $I(s)$ من O_c')، و T توزيعاً من s'

(التوزيع $I(T)$ من s')، فإن: التوزيع $s \cdot T$ من s' (التوزيع $I(s \cdot T)$ من s' و

التوزيع $I(s) * I(T)$ من s')، و يتحقق:

$$I(s \cdot T) = I(s) * I(T)$$

إذا كان s توزيعاً من O_c' (التوزيع $I(s)$ من O_m)، و T توزيعاً من s' (التوزيع



(T) من s' ، فإن: التوزيع $s * T$ من s' (التوزيع $(s * T)$ من s' والتوزيع $(s) \cdot (T)$ من s' ، و يتحقق:

$$\cdot (s * T) = (s) \cdot (T)$$

لنثبت ذلك من أجل التوزيعات ذات الدعامة المتراسة:

ليكن s توزيعاً من O_c' و دعامته متراسة (تحويل فورييه له هو التوزيع المرافق للدالة $\langle T(y), e^{-2i\pi ty} \rangle$ ، و T توزيعاً من s' و دعامته متراسة (تحويل فورييه له هو التوزيع المرافق للدالة $\langle s(x), e^{-2i\pi tx} \rangle$).

لدينا التوزيع $s * T$ دعامته متراسة و بالتالي تحويل فورييه له هو التوزيع المرافق للدالة $\langle s * T, e^{-2i\pi tx} \rangle$ ، ومنه:

$$\begin{aligned} (s * T) &= \langle s * T, e^{-2i\pi tx} \rangle = \langle s(x) \otimes T(y), e^{-2i\pi t(x+y)} \rangle \\ &= \langle s(x), \langle T(y), e^{-2i\pi tx} e^{-2i\pi ty} \rangle \rangle = \langle s(x), e^{-2i\pi tx} \langle T(y), e^{-2i\pi ty} \rangle \rangle \\ &= \langle s(x), e^{-2i\pi tx} | T \rangle = | T \langle s(x), e^{-2i\pi tx} \rangle = (s) \cdot (T) \end{aligned}$$

5-التوزيعات الدورية والتوزيعات المعرفة على Γ : [9 p 201][1 p 82]

5-1- التوزيعات الدورية:

تذكرة: لتكن f دالة عقدية بمتحول حقيقي، نقول عن الدالة f إنها دورية (périodique) من الدور p (période) إذا كان: $\tau_p f = f$ أي إذا كان: $\forall x \in \mathbb{R} : f(x - p) = f(x)$.

تعريف: ليكن T توزيعاً معرفاً على $\mathbb{R}$ ، نقول عن التوزيع T إنه دوري (périodique) من الدور p إذا كان: $\tau_p T = T$ أي إذا كان:

$$\forall \varphi \in D(\mathbb{R}) : \langle \tau_p T, \varphi \rangle = \langle T, \tau_{-p} \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle$$



5-2- التوزيعات المعرفة على Γ :

- الفضاء $D(\Gamma)$: ليكن Γ المجال $[0, p]$ ، يُعرّف الفضاء $D(\Gamma)$ بأنه فضاء الدوال المعرفة على Γ و القابلة للاشتقاق عدداً غير منتهى من المرات، و هو فضاء متجهي عقدي.
- التقارب في $D(\Gamma)$: لتكن $\{\tilde{a}_p\}_{p \geq 1}$ متتالية من $D(\Gamma)$ ، نقول عن $\{\tilde{a}_p\}_{p \geq 1}$ إنها تقارب من الصفر في $D(\Gamma)$ إذا كانت المتتالية $\{\tilde{a}_p^{(q)}(x)\}_{p \geq 1}$ تقارب بانتظام نحو الصفر على Γ (من أجل أي q). ونقول عن المتتالية $\{\tilde{a}_p\}_{p \geq 1}$ إنها تقارب من $\tilde{a}$ في $D(\Gamma)$ إذا كانت المتتالية $\{\tilde{a}_p - \tilde{a}\}_{p \geq 1}$ تقارب من الصفر في $D(\Gamma)$.
ملاحظة: شرط الدعامة لا نجده في تعريف التقارب في الفضاء $D(\Gamma)$ لأن المجموعة Γ محدودة.
- التوزيع المعروف على Γ هو شكل خطي $\tilde{\tau}$ معرف على $D(\Gamma)$ و مستمر أي يحقق: إذا كانت $\{\tilde{a}_p\}_{p \geq 1}$ متتالية من $D(\Gamma)$ تقارب نحو الصفر في $D(\Gamma)$ فإن المتتالية $\{\langle \tilde{\tau}, \tilde{a}_p \rangle\}_{p \geq 1}$ تقارب من الصفر، يُرمز لفضاء التوزيعات المعرفة على Γ بـ $D'(\Gamma)$ و هو فضاء متجهي عقدي.

5-3- لنثبت أن كل توزيع معرف على $D(\Gamma)$ يُمكن أن نرفقه بتوزيع دوري من الدور p .

- ليكن $\tilde{\tau}$ توزيعاً معرفاً على Γ ، ولنأخذ التوزيع τ المعروف بالطريقة:

$$\theta_n(x) = \begin{cases} \varphi(x) & x \in [np, (n+1)p] \\ 0 & x \notin [np, (n+1)p] \end{cases}$$

- الدالة θ_n لا تنتمي إلى الفضاء $D(R)$ ، و تحقق: $\varphi(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \theta_n(x)$ ، و دعامتها محتواة في المجال $[np, (n+1)p]$.



- لتعرف الدالة ψ بالشكل $\psi(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \theta_n(x + np)$ أي:

$$\psi(x) = \dots + \theta_{-2}(x - 2p) + \theta_{-1}(x - p) + \theta_0(x) + \theta_1(x + p) + \theta_2(x + 2p) + \dots$$

(1) بما أن دعامه الدالة φ محدودة فإن المجموع السابق يكون لعددٍ منتهٍ من الحدود.

(2) إذا كان $x + np < np$ أو $x + np > (n+1)p$ فإن كلا $\theta_n(x + np)$ و $\theta_{n+1}(x + (n+1)p)$ تنعدم وهذا يعني أن دعامه الدالة ψ محتواة في المجال $[0, p]$.

(3) الدالة ψ قابلة للاشتقاق عدداً غير منتهٍ من المرات على المجال $[0, p]$.

(4) من أجل أي q الدالة ψ تحقق:

$$\psi^{(q)}(0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \theta_n^{(q)}(np) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi^{(q)}(np) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi^{(q)}((n+1)p) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \theta_n^{(q)}((n+1)p) = \psi^{(q)}(p)$$

- لتعرف الدالة $\tilde{\varphi}$ على Γ بالشكل: $\forall x \in [0, p[\quad \tilde{\varphi}(x) = \psi(x)$

(1) الدالة $\tilde{\varphi}$ قابلة للاشتقاق عدداً غير منتهٍ من المرات على Γ فهي من $D(\Gamma)$.

(2) إذا كانت $\{\varphi_p\}_{p \geq 1}$ متتاليةً من $D(R)$ متقاربة من الصفر في $D(R)$ ، فإن المتتالية $\{\varphi_p^{(q)}(x)\}_{p \geq 1}$ تتقارب من الصفر بانتظام على R و دعامه كل من الدوال $\{\varphi_p\}_{p \geq 1}$ محتواة في نفس المجموعة المغلقة و المحدودة، وبالتالي المتتالية $\{\tilde{\varphi}_p^{(q)}(x)\}_{p \geq 1}$ تتقارب من الصفر بانتظام على Γ و منه المتتالية $\{\tilde{\varphi}_p\}_{p \geq 1}$ تتقارب من الصفر في $D(\Gamma)$ ، أي أن التطبيق $\varphi \mapsto \tilde{\varphi}$ مستمر.

- لتعرف التطبيق τ بالشكل: $\forall \varphi \in D(R) \quad \langle \tau, \varphi \rangle = \langle \tilde{\tau}, \tilde{\varphi} \rangle$

التطبيق τ خطي، و إذا كانت $\{\varphi_n\}_{n \geq 1}$ متتاليةً من $D(R)$ تتقارب من الصفر في $D(R)$ ، فإن المتتالية $\{\tilde{\varphi}_n\}_{n \geq 1}$ تتقارب من الصفر في $D(\Gamma)$ ، وبالتالي المتتالية $\{\langle \tilde{\tau}, \tilde{\varphi}_n \rangle\}_{n \geq 1}$ تتقارب من الصفر أي المتتالية $\{\langle \tau, \varphi_n \rangle\}_{n \geq 1}$ تتقارب من الصفر، أي أن التطبيق τ مستمر، و من أجل أي دالة φ من $D(R)$ فإن: $\tilde{\varphi} = \widetilde{\tau_{-p}\varphi}$ ، ومنه $\langle \tau, \varphi \rangle = \langle \tilde{\tau}, \tilde{\varphi} \rangle = \langle \tilde{\tau}, \widetilde{\tau_{-p}\varphi} \rangle = \langle \tau, \tau_{-p}\varphi \rangle$ أي أن التوزيع τ دوري من الدور p .

استطعنا أن نرفق التوزيع $\tilde{\tau}$ المعروف على Γ بتوزيع τ دوري من الدور p .



5-4- لنثبت أن كل توزيع دوري من الدور p يمكن أن نرفقه بتوزيع معرف على $D(\Gamma)$:

- ليكن τ توزيعاً دورياً من الدور p ، ولنأخذ التوزيع $\tilde{\tau}$ المعرف بالطريقة:
 • لتكن x_4, x_3, x_2, x_1 أعداداً حقيقية تحقق $0 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < p$ ، عندئذ
 توجد دالة a من $D(R)$ حيث:
$$a(x) = \begin{cases} 1 & x \in [x_2, x_3] \\ 0 & x \notin [x_1, x_4] \end{cases}$$
- لتكن الدالة α مقصور الدالة a على Γ أي على المجال $[0, p[$ ، و بما أن الدالة a تحقق $a(0) = a(p) = a^{(q)}(0) = a^{(q)}(p) = 0$ فإن الدالة α قابلة للاشتقاق عدداً غير منته من المرات على Γ فهي من $D(\Gamma)$.
- لنعرف الدالة β بالشكل: $\beta(x) = 1 - a(x)$ ، الدالة β قابلة للاشتقاق عدداً غير منته من المرات على Γ فهي من $D(\Gamma)$ ، أو نكتب: $a(x) + \beta(x) = 1$
- لتكن ψ دالةً من $D(\Gamma)$ عندئذ $\psi = \alpha \cdot \psi + \beta \cdot \psi$
 - الدالة $\alpha \cdot \psi$ هي مقصور لدالة A على $[0, p[$ ، بحيث تكون الدالة A معرفة على R وقابلة للاشتقاق عدداً غير منته من المرات و دعامتها محتواة في $[x_1, x_4]$ وبالتالي محتواة في $[0, p]$ فهي من $D(R)$.
 - الدالة $\beta \cdot \psi$ هي مقصور للمجموع $C + D$ على $[0, p[$ ، الدالة C قابلة للاشتقاق عدداً غير منته من المرات على $[0, x_2]$ و دعامتها محتواة في $[0, x_2]$ ، الدالة D قابلة للاشتقاق عدداً غير منته من المرات على $[x_3, p]$ و دعامتها محتواة في $[x_3, p]$ ، وتحققان: $\lim_{x \rightarrow p} D^{(q)}(x) = C^{(q)}(0)$.
- لنعرف الدالة B على R بالشكل: $B(x) = C(x) + D(x + p)$ ، الدالة B معرفة على R وقابلة للاشتقاق عدداً غير منته من المرات، و دعامتها محتواة في $[-p, p]$ ، فهي من $D(R)$.
- لتكن $\{\psi_p\}_{p \geq 1}$ متتالية من $D(\Gamma)$ حيث: $\psi_p \rightarrow \psi$ ، عندئذ
 - المتتاليات A_p المرافقة تحقق: $A_p^{(q)}(x) \rightarrow A^{(q)}(x)$ و $\text{supp}(A_p) \subset [0, p]$

$$A_p \rightarrow A \text{ في } D(R)$$
 - المتتاليات B_p المرافقة تحقق: $B_p^{(q)}(x) \rightarrow B^{(q)}(x)$ و $\text{supp}(B_p) \subset [-p, p]$

$$B_p \rightarrow B \text{ في } D(R)$$



- $A_p + B_p \longrightarrow A + B = \varphi$ في $D(R)$. إذا أوجدنا الدالة $\tilde{\varphi}$ كما سبق نجد أن $\tilde{\varphi} = \varphi$.

- لنعرف التطبيق s على Γ بالشكل: $\langle s, \psi \rangle = \langle T, A + B \rangle$ $\forall \psi \in D(\Gamma)$
 التطبيق s خطي، و إذا كانت $\{\psi_n\}_{n \geq 1}$ متتالية من $D(\Gamma)$ متقاربة من ψ في $D(\Gamma)$ فإن المتتالية $\{A_n + B_n\}_{n \geq 1}$ تتقارب من $A + B$ في $D(R)$ ، وبالتالي
 $\{\langle s, \psi_n \rangle\}_{n \geq 1}$ المتتالية $\langle s, \psi_n \rangle = \langle T, A_n + B_n \rangle \longrightarrow \langle T, A + B \rangle = \langle s, \psi \rangle$
 تتقارب من الصفر، أي أن التطبيق s مستمر، كما أنه من أجل أي دالة ψ من $D(\Gamma)$
 $\langle s, \psi \rangle = \langle T, A + B \rangle = \langle T, \varphi \rangle = \langle \tilde{T}, \tilde{\varphi} \rangle = \langle \tilde{T}, \psi \rangle$.

استطعنا أن نرفق التوزيع الدوري (من الدور p) τ بتوزيع $\tilde{\tau}$ معرف على Γ .

النتيجة: هناك تطبيق واحد لواحد (application biunivoque) بين مجموعة التوزيعات المعرفة على R و الدورية من الدور p ، ومجموعة التوزيعات المعرفة على Γ ، وفق التطبيقين: $\tilde{\tau} \mapsto \tau, \tau \mapsto \tilde{\tau}$ ، كما أن كلاهما خطي و مستمر.

5-5-الأمثلة:

(1) لنعرف التوزيع $\tilde{\tau}$ على Γ بالشكل: $\langle \tilde{\tau}, \tilde{a} \rangle = \tilde{a}(0)$ $\forall \tilde{a} \in D(\Gamma)$ ، و لنوجد التوزيع الدوري المرافق لـ $\tilde{\tau}$. نوجد أولاً الدالة θ_n :

$$\psi(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \theta_n(x + np) \quad \text{بشكل } \theta_n(x) = \begin{cases} \varphi(x) & x \in [np, (n+1)p] \\ 0 & x \notin [np, (n+1)p] \end{cases}$$

و الدالة $\tilde{\varphi}$ بالشكل: $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x) \quad \forall x \in [0, p[$ و من ثم نعرف التوزيع τ :

$$\langle \tau, \varphi \rangle = \langle \tilde{\tau}, \tilde{\varphi} \rangle = \tilde{\varphi}(0) = \varphi(0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \theta_n(np) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(np) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_{np}$$

$\Leftarrow$ التوزيع الدوري من الدور p هو التوزيع: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_{np}$. ونرمز للتوزيع $\tilde{\tau}$ بـ $\tilde{\sigma}$ ،

و نلاحظ أن توزيع ديراك ليس توزيعاً دورياً.

(2) لتكن f دالة كمولة محلياً على R ، و دورية من الدور p $\Leftarrow$ التوزيع المرافق لها توزيع دوري لأن:

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x+p) \cdot \varphi(x+p) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot \varphi(x+p) dx = \langle T_f, \tau_{-p} \varphi \rangle$$

لنوجد التوزيع المعروف على Γ المرافق لـ T_f :



$$\begin{aligned}\langle T_f, \varphi \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \theta_n(x) dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot \theta_n(x) dx \right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x+np) \cdot \theta_n(x+np) dx \right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot \psi(x) dx = \int_0^p f(x) \cdot \psi(x) dx = \int_{\Gamma} \tilde{f}(x) \cdot \tilde{\varphi}(x) dx = \langle T_{\tilde{f}}, \tilde{\varphi} \rangle\end{aligned}$$

حيث الدالة $\tilde{f}$ هي مقصور الدالة f على Γ ، وهي كمولة على Γ .

إذاً التوزيع المعرف على R المرافق لدالة f كمولة محلياً و دورية من الدور p ،
يُمكن أن نرفقه بتوزيع معرف على Γ ، وهو التوزيع المرافق لمقصور الدالة f
على Γ .

و بالعكس: إذا كانت $\tilde{g}$ دالة كمولة على Γ ، فإن التوزيع $T_{\tilde{g}}$ معرف على Γ ، و
التوزيع الدوري المرافق له هو التوزيع T_g حيث الدالة g (وحيدة) كمولة
محلياً و دورية من الدور p ، و مقصورها على Γ الدالة $\tilde{g}$.

(3) حالة خاصة: لنأخذ $w = \frac{2\pi}{p}$ ، و لنعرف الدالة الدورية e_n على R بالشكل
 $e_n(x) = e^{niwx}$ ، ولنرمز بـ E_n للتوزيع الدوري المرافق لها. و بـ $\tilde{e}_n$ لمقصور
الدالة e_n على Γ و بـ $\tilde{E}_n$ للتوزيع المعرف على Γ و المرافق لـ $\tilde{e}_n$.

5-6- خواص التوزيعات $\tilde{E}_n$:

■ المجموع $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{E}_n$ متقارب:

لدينا المجموع $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{e}_n(x)}{n^2}$ يتقارب بانتظام على Γ ، فالدالة $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{e}_n(x)}{n^2}$ مستمرة و
كمولة على Γ ، و التوزيع المرافق لها و المعرف على Γ هو $\tilde{T} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{E}_n}{n^2}$ و بما أن
المشتق مستمر على $D'(\Gamma)$ فيمكن أن نكتب

$$\tilde{T}'' = \lim_{p,q \rightarrow \infty} \sum_{-p}^q -w^2 \tilde{E}_n, \tilde{T}' = \lim_{p,q \rightarrow \infty} \sum_{-p}^q \frac{wi \tilde{E}_n}{n}$$

وبالتالي المجموع $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{E}_n$ متقارب.

$$\blacksquare \quad X \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{E}_n = 0$$

بما أن الدالة $\tilde{e}_n$ قابلة للاشتقاق عدداً غير منتهى من المرات على Γ ، فمن



الممكن ضرب التوزيع $\tilde{E}_1$ بالتوزيع $\sum_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}_n$ ويكون:

$$\tilde{E}_1 \cdot \sum_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}_n = \sum_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}_1 \cdot \tilde{E}_n = \sum_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}_{n+1} = \sum_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}_n \quad (1) \text{ ومنه: } (\tilde{E}_1 - 1) \cdot \sum_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}_n = 0 \text{ ، حيث}$$

$\tilde{1}$ هو التوزيع المرافق للدالة الواحدية المعرفة على Γ والقابلة للاشتقاق عدداً غير منته من المرات. الدالة $\tilde{e}_1 - \tilde{1}$ قابلة للاشتقاق عدداً غير منته من المرات عند الصفر فيمكن نشرها وفق متسلسلة تايلور وبالتالي يوجد دالة $\tilde{a}$ من $D(\Gamma)$ حيث: $(\tilde{e}_1 - 1)(x) = x \cdot \tilde{a}(x)$ ، كذلك أي دالة من $D(\Gamma)$ يمكن كتابتها بالشكل $\tilde{a} \cdot \tilde{\varphi}$. ولكن إذا كان $\tilde{s}$ توزيعاً يحقق $(\tilde{E}_1 - 1) \cdot \tilde{s} = 0$ فإن:

$$x \cdot \tilde{s} = 0 \quad \langle x \cdot \tilde{s}, \tilde{a} \cdot \tilde{\varphi} \rangle = \langle \tilde{s}, x \cdot \tilde{a} \cdot \tilde{\varphi} \rangle = \langle \tilde{s}, (\tilde{e}_1 - 1) \cdot \tilde{\varphi} \rangle = \langle (\tilde{E}_1 - 1) \cdot \tilde{s}, \tilde{\varphi} \rangle = 0$$

ومن (1) نجد أن: $x \cdot \sum_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}_n = 0$.

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}_n = p \cdot \tilde{\delta} \quad \blacksquare$$

بما أن $x \cdot \sum_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}_n = 0$ فإن التوزيع $\sum_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}_n$ متناسب مع $\tilde{\delta}$ أي $\sum_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}_n = \lambda \cdot \tilde{\delta}$ لنثبت أن $\lambda = p$ ، بما أن المجموع $\sum_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}_n$ متقارب: (1) $\langle \sum_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}_n, \tilde{1} \rangle = \sum_{-\infty}^{\infty} \langle \tilde{E}_n, \tilde{1} \rangle$ ولكن:

$$n \neq 0 \quad \langle \tilde{E}_n, \tilde{1} \rangle = \int_0^p e^{niwx} dx = \frac{1}{niw} e^{niwx} \Big|_0^p = \frac{1}{niw} [e^{ni2\pi} - 1] = 0 \quad (2)$$

$$n = 0 \quad \langle \tilde{E}_0, \tilde{1} \rangle = \int_0^p dx = p \quad (3)$$

من (1), (2), (3): $\langle \sum_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}_n, \tilde{1} \rangle = \langle \tilde{E}_0, \tilde{1} \rangle = p$ و لكن:

$$\lambda = p \quad \langle \sum_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}_n, \tilde{1} \rangle = \langle \lambda \cdot \tilde{\delta}, \tilde{1} \rangle = \lambda \cdot \tilde{1}(0) = \lambda$$

■ ملاحظات:

(1) المتسلسلة $\sum_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}_n$ متقاربة في $D'(\Gamma)$ ، أما المتسلسلة $\sum_{-\infty}^{\infty} \tilde{e}_n = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{niwx}$ فهي غير متقاربة في $D(\Gamma)$ ، لأنها غير متقاربة عند كل نقطة من Γ مثلاً: لا تتقارب من أجل $x = 0$.

(2) إذا كانت $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ أسرة من الأعداد العقدية تحقق: $\exists p: n^p \cdot a_n \xrightarrow{|n| \rightarrow \infty} 0$



أو $\exists p, M : |a_n| < M \cdot n^p$ فإن المتسلسلة $\sum_{-\infty}^{\infty} a_n \tilde{E}_n$ متقاربة: لدينا المجموع $\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{a_n \tilde{e}_n(x)}{n^2}$ يتقارب بانتظام على Γ ، فالدالة $\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{a_n \tilde{e}_n}{n^{p+2}}$ مستمرة وكمولة على Γ ، والتوزيع المرافق لها $\tilde{T} = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{a_n \tilde{E}_n}{n^{p+2}}$ معرف على Γ . و بما أن المشتق مستمر على $D'(\Gamma)$ فيمكن أن نكتب:

$$\tilde{T}' = \lim_{p,q \rightarrow \infty} \sum_{-p}^q a_n \frac{wi \tilde{E}_n}{n^{p+1}}, \tilde{T}'' = \lim_{p,q \rightarrow \infty} \sum_{-p}^q a_n \frac{-w^2 \tilde{E}_n}{n^p}, \dots, \tilde{T}^{(p+2)} = \lim_{p,q \rightarrow \infty} \sum_{-p}^q a_n (wi)^2 \tilde{E}_n :$$

وهذا يعني أن النهاية موجودة وبالتالي المجموع $\sum_{-\infty}^{\infty} a_n \tilde{E}_n$ متقارب.

(3) الدالة الثابتة الواحدية $\tilde{T}$ معرفة على Γ وقابلة للاشتقاق عدداً غير منته من المرات فهي من $D(\Gamma)$. أما الدالة الثابتة T_1 المعرفة على R ، فهي قابلة للاشتقاق عدداً غير منته من المرات ولكن دعامتها غير متراصة فهي لا تنتمي إلى $D(R)$.

$$(4) \text{ بما أن } \sum_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}_n = p \cdot \tilde{\sigma} \text{ فإن: } \sum_{-\infty}^{\infty} E_n = p \cdot \sum_{-\infty}^{\infty} \delta_{np}$$

5-7-متسلسلة فورييه (série de Fourier):

تذكرة: إذا كانت f دالة كمولة محلياً على R ، و دورية من الدور p ، منشور فورييه f هو المتسلسلة: $\sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{niwx}$ حيث: $a_n = \int_0^p e^{-niwx} \cdot f(x) dx$. أما لإيجاد متسلسلة فورييه لتوزيع معرف على Γ :

- إن دراسة الفضاءين $D(\Gamma), D'(\Gamma)$ مشابهة لدراسة الفضاءين $D(R), D'(R)$ ، ولكنها أكثر بساطة لأن Γ مجموعة محدودة وليس هناك شروط على الدعامة. وبالتالي يمكن تعريف تلاف أي توزيعين معرفين على Γ بنفس طريقة تعريف تلاف التوزيعات المعرفة على R .

- إذا كان $\tilde{T}$ توزيعاً معرفاً على Γ فإن:

$$\begin{aligned} \langle \tilde{T} * \tilde{\sigma}, \tilde{\varphi} \rangle &= \langle \tilde{T}(x) \otimes \tilde{\sigma}(y), \tilde{\varphi}(x+y) \rangle = \langle \tilde{T}(x), \langle \tilde{\sigma}(y), \tilde{\varphi}(x+y) \rangle \rangle \\ \text{أي: } \tilde{T} * \tilde{\sigma} &= \tilde{T} \quad \langle \tilde{T}(x), \tilde{\varphi}(x+0) \rangle = \langle \tilde{T}(x), \tilde{\varphi}(x) \rangle = \langle \tilde{T}, \tilde{\varphi} \rangle \end{aligned}$$

- إذا كان $\tilde{T}$ توزيعاً معرفاً على Γ و كان التوزيع $\tilde{\sigma}$ مجموعاً لمتسلسلة متقاربة من التوزيعات في $D'(\Gamma)$ فإن التوزيع $\tilde{T}$ هو أيضاً مجموعاً لمتسلسلة متقاربة من التوزيعات في $D'(\Gamma)$.

- لدينا: $\tilde{T} = \tilde{\sigma} * \tilde{T} = \frac{1}{p} \left(\sum_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}_n * \tilde{T} \right) = \frac{1}{p} \sum_{-\infty}^{\infty} (\tilde{E}_n * \tilde{T})$ ولكن من أجل أي دالة $\tilde{\varphi}$ من



$\Gamma) : D$

$$\begin{aligned} \langle \tilde{E}_n * \tilde{T}, \tilde{\varphi} \rangle &= \langle \tilde{T} * \tilde{E}_n, \tilde{\varphi} \rangle = \langle \tilde{T}(x) \otimes \tilde{E}_n(y), \tilde{\varphi}(x+y) \rangle = \langle \tilde{T}(x), \langle \tilde{E}_n(y), \tilde{\varphi}(x+y) \rangle \rangle \\ &= \left\langle \tilde{T}(x), \int_0^p e^{inwx} \tilde{\varphi}(x+y) dy \right\rangle = \left\langle \tilde{T}(x), \int_x^{x+p} e^{inw(z-x)} \tilde{\varphi}(z) dz \right\rangle \\ &= \left\langle \tilde{T}(x), e^{-inwx} \int_0^p e^{inwz} \tilde{\varphi}(z) dz \right\rangle = \langle \tilde{T}(x), e^{-inwx} \rangle \cdot \int_0^p e^{inwz} \tilde{\varphi}(z) dz \\ &= \langle \tilde{T}(x), e^{-inwx} \rangle \langle e^{inwz}, \tilde{\varphi}(z) \rangle = \langle \tilde{T}, \tilde{e}_{-n} \rangle \langle \tilde{E}_n, \tilde{\varphi} \rangle \end{aligned}$$

أي $\tilde{T} = \frac{1}{p} \sum_{-\infty}^{\infty} (\tilde{E}_n * \tilde{T}) = \frac{1}{p} \sum_{-\infty}^{\infty} \langle \tilde{T}, \tilde{e}_{-n} \rangle \tilde{E}_n$ ندعو هذه المتسلسلة منشور فورييه للتوزيع $\tilde{T}$.

ملاحظات حول متسلسلة فورييه:

1- كل توزيع $\tilde{T}$ معرف على Γ يمكن نشره وفق متسلسلة فورييه، وتكون المتسلسلة متقاربة في $D'(\Gamma)$ ومجموعها التوزيع $\tilde{T}$.

2- إذا كان τ توزيعاً دورياً من الدور p ، مرافقاً للتوزيع $\tilde{T}$ عندئذٍ:

$$\tau = \frac{1}{p} \sum_{-\infty}^{\infty} \langle \tilde{T}, \tilde{e}_{-n} \rangle E_n$$

متسلسلة فورييه، وتكون المتسلسلة متقاربة في $D'(R)$ ومجموعها التوزيع τ .

3- إذا كانت f دالة كمولة محلياً و دورية من الدور p ، فإن منشور فورييه لها لن يكون متقارباً بشكل عام وليس بالضرورة مساوياً لـ f . أما إذا كان τ_f التوزيع المرافق لـ f فإن منشور فورييه له متقارب و مساو لـ τ_f .

4- شرط تقارب المتسلسلة $\sum_{-\infty}^{\infty} a_n \tilde{E}_n$ (نشر فورييه للتوزيع $\tilde{T}$ المعرف على Γ) في

$D'(\Gamma)$ ، وتقارب المتسلسلة $\sum_{-\infty}^{\infty} a_n E_n$ (نشر فورييه للتوزيع الدوري τ) في $D'(R)$

هو: $\exists p: n^p \cdot a_n \xrightarrow{|n| \rightarrow \infty} 0$ وبالتالي $\exists p: n^p \cdot \langle \tilde{T}, \tilde{e}_{-n} \rangle \xrightarrow{|n| \rightarrow \infty} 0$.

5- التوزيع المعرف على Γ هو مشتق لتوزيع مرافق لدالة مستمرة على Γ ، و التوزيع المعرف على R والدوري من الدور p هو مشتق لتوزيع مرافق لدالة مستمرة على R .

6- يمكن اعتبار $\langle \tilde{T}, \tilde{\varphi} \rangle = \frac{1}{p} \sum_{-\infty}^{\infty} (\langle \tilde{T}, \tilde{e}_{-n} \rangle \langle \tilde{E}_n, \tilde{\varphi} \rangle) = \frac{1}{p} \sum_{-\infty}^{\infty} \left(\langle \tilde{T}, \tilde{e}_{-n} \rangle \int_0^p e^{niwx} \tilde{\varphi}(x) dx \right)$ بأنه



XCV

تعديل من خلال WPS Office

جاء $\frac{1}{p}$ بمجموع معاملات فورييه لكل من التوزيع $\tilde{\tau}$ و الدالة $\tilde{\varphi}$.

5-8-تطبيقات:

ليكن τ توزيعاً معرفاً على R و دورياً من الدور p ، فهو مشتق لتوزيع مرافق لدالة مستمرة و محدودة على R ، أي هو مشتق لتوزيع معتدل وبالتالي التوزيع τ معتدل. كما أن التوزيعات $a_n E_n$ هي توزيعات مرافقة لدوال مستمرة ومحدودة فهي توزيعات معتدلة. و حسب استمرار تحويل فورييه :

توزيعات متناسبة مع توزيع ديراك عند نقاط موزعة بانتظام على R . ملاحظات:

1- المتسلسلة $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n E_n$ متقاربة $\Leftrightarrow \exists p: n^p \cdot a_n \xrightarrow{|n| \rightarrow \infty} 0 \Leftrightarrow$ المتسلسلة $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \delta_{\frac{n}{p}}$ متقاربة والتوزيع τ معتدل.

2- إذا وجد p يحقق: $\exists p: n^p \cdot a_n \xrightarrow{|n| \rightarrow \infty} 0$ ، فإن التوزيع $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \delta_{\frac{n}{p}}$ هو تحويل فورييه لتوزيع دوري من الدور p . و تحويل فورييه τ هو التوزيع الدوري

$$\cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n E_{-n}$$

نتيجة: في حالة الدور $p=1$:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} E_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_n \Leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_n = p \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_{np}$$

$$\text{ولدينا: } \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_n \Leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_n = p \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_{\frac{n}{p}}$$

كل من التوزيعات السابقة هو توزيع معتدل، من أجل أي دالة φ من الفضاء $S(R)$:

$$\left\langle \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_n, \varphi \right\rangle = \left\langle \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_n, \varphi \right\rangle = \left\langle \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_n, \varphi \right\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(n) \quad (1)$$

$$\left\langle \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_n, \varphi \right\rangle = \left\langle \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_n, \varphi \right\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(n) \quad (2)$$

من (1), (2) نجد أن: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(n)$ أي مجموع قيم الدالة φ المأخوذ على $\mathbb{Z}$ لأعداد الصحيحة يساوي مجموع قيم الدالة φ المأخوذ أيضاً على الأعداد الصحيحة.



الفصل الرابع

بعض تطبيقات نظرية التوزيعات

Quelques applications de la théorie des distributions

أولاً :- في حل المعادلات التفاضلية الجزئية:

1- تصنيف المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية من المرتبة

الثانية و الشروط الحدية: [8 p 12][6 p 266]

لتكن $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ مجموعة مفتوحة، إن المعادلة التفاضلية الجزئية (EDP) (équation aux dérivées partielles) هي علاقة بين دالة بعدة متحولات u و مشتقاتها، أي هي علاقة من الشكل:

$$\forall x \in \Omega, \quad F\left(u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \dots, \frac{\partial^m u}{\partial x_n^m}\right)(x) = f(x) \quad (1)$$

حيث f دالة معرفة على Ω .

ندعو المجموعة Ω مجال المعادلة التفاضلية الجزئية.

ندعو أعلى مرتبة اشتقاق في المعادلة بدرجة المعادلة التفاضلية.

نقول عن المعادلة (1) إنها خطية إذا كانت الدالة F خطية بالنسبة لمتغيراتها.

الشكل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية الخطية من المرتبة الثانية هو:

$$C : \nabla(\nabla u) + b \cdot \nabla u + a \cdot u = f \quad (2)$$

حيث: $C(x) \in \mathbb{R}^{n \times n}, b(x) \in \mathbb{R}^n, a(x) \in \mathbb{R}$ تدعى معاملات المعادلة.

$$\nabla u(x) = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)^T \text{، والمصفوفة } \nabla(\nabla u) \text{ هي المصفوفة } \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right) \text{ و}$$

$$\text{الجداء } \nabla(\nabla u) : C \text{ معرف بـ } : C : \nabla(\nabla u) = \sum_{i,j=1}^n c_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$$

نقول عن المعادلة إنها ذات معاملات ثابتة إذا كانت معاملاتها مستقلة عن x .



إذا استبدلنا u بـ 1 ، $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ بـ z_i ، و $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$ بـ $z_i z_j$ ، في العلاقة (2) فإنها تصبح من الشكل:

$$z^T \cdot c \cdot z + b \cdot z + a = f \quad (3) \quad \text{حيث: } z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$$

إذا كانت المعادلة (3) هي معادلة قطع ناقص (مجسم قطع ناقص في حالة $n \geq 2$) فإننا نقول عن المعادلة التفاضلية إنها معادلة ناقصية (équation elliptique)، وإذا كانت المعادلة (3) معادلة قطع مكافئ (مجسم قطع مكافئ في حالة $n \geq 2$) نقول عن المعادلة التفاضلية إنها معادلة مكافئية (équation parabolique)، وأما إذا كانت المعادلة (3) معادلة قطع زائد (مجسم قطع زائد في حالة $n \geq 2$) فإننا نقول عن المعادلة التفاضلية إنها معادلة زائدية* (équation hyperbolique*).

إن المعادلة التفاضلية الجزئية الخطية ذات المعاملات الثابتة، تكون من الشكل:

$$p(D)u = f \quad (4)$$

حيث p حدودية من الدرجة m أي: $p(x) = \sum_{|p| \leq m} a_p x_1^{p_1} \dots x_n^{p_n}$ و

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, p = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in \mathbb{N}^n, |p| = p_1 + p_2 + \dots + p_n, a_p \in \mathbb{R}$$

المؤثر $p(D) = \sum_{|p| \leq m} a_p D^p$ يُدعى مؤثراً تفاضلياً خطياً بمعاملات ثابتة

(opérateur différentiel linéaire à coefficients constants)

$$D^p = D_1^{p_1} D_2^{p_2} \dots D_n^{p_n} = \frac{\partial^{|p|}}{\partial x_1^{p_1} \partial x_2^{p_2} \dots \partial x_n^{p_n}} \quad \text{حيث: } m, \text{ من الدرجة } m$$

لتعيين u بشكل وحيد لا بد من معلومات إضافية على جبهة Ω (Γ)، وهذه المعلومات تُدعى الشروط الحدية (conditions aux limites).

مثل: الدالة $u(x)$ تساوي دالة معطاة من أجل أي x من Γ ، و يُدعى هذا الشرط شرط ديرخلية الحدي.

الدالة $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x)$ تساوي دالة معطاة من أجل أي x من Γ ، و يُدعى هذا الشرط شرط نيومان.

ملاحظة: من الممكن أن يكون كل من u و f توزيعاً.



2-الحل الابتدائي (Solution élémentaire) الأساسي (fondamentale): [13 p 55] [11p 203]

ليكن $P(D)$ مؤثراً تفاضلياً خطياً بمعاملات ثابتة، يُعرّف الحل الابتدائي 1 -
 $P(D)$ بأنه توزيع E من $D'(R^n)$ حيث: $P(D)(E) = \delta$.

مبرهنة:

إذا كان $P(D)$ مؤثراً تفاضلياً خطياً بمعاملات ثابتة، و كان E حلاً ابتدائياً 1 -
 $P(D)$ ، عندئذ فإنه من أجل أي توزيع S دعمته محدودة يوجد توزيع T من
 $D'(R^n)$ حيث: $P(D)(T) = S$

الإثبات:

لنضع $T = E * S$ عندئذ: $P(D)(T) = P(D)(E * S) = P(D)(E) * S = \delta * S = S$.

3- معادلة لابلاس: [8 p 13][6 p 267]

إذا كان $P(x) = x_1^2 + \dots + x_n^2$ ، فإن المؤثر التفاضلي $P(D) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ يُدعى مؤثر لابلا

س (opérateur de Laplace) ونرمز له بـ Δ ، و معادلة لابلاس
تكون من الشكل:

$$\Delta u(x) = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \right)(x) = f(x) \quad (5)$$

وحسب (3)، معادلة لابلاس تكون من الشكل: $z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_n^2 = f(x)$ ، وهي
معادلة ناقصية.



لقد وجدنا في الفصل الأول أنه في حالة $n=3$ يكون $\Delta \frac{1}{r} = -4\pi\delta$ ، أي أن حل

معادلة لابلاس الابتدائي في R^3 هو التوزيع $-\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{r}$.

لنوجد الآن حل معادلة لابلاس الابتدائي في R^n من أجل أي n .

مبرهنة:

إذا كان لدينا التوزيع E المعروف بالشكل:

$$E = \begin{cases} \frac{r}{2} & n=1 \\ \frac{1}{2\pi} \log r & n=2 \\ -\frac{1}{s_n(n-2)} \frac{1}{r^{n-2}} & n>2 \end{cases} \text{ حيث}$$

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n), r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

عندئذ فإن E يكون حلاً ابتدائياً لمؤثر لابلاس. ($s_n = n \cdot w_n$ حيث w_n مساحة الكرة $\bar{B}(0,1)$)

الإثبات:

لنبرهن أنه إذا كان $n=1$ فإن $\Delta(E) = \left[\frac{r}{2}\right]'' = \delta$

$$\begin{aligned} \forall \varphi \in D(R) : \left\langle \frac{|x|''}{2}, \varphi \right\rangle &= \left\langle \frac{|x|}{2}, \varphi'' \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|x|}{2} \cdot \varphi''(x) dx \\ &= \frac{|x|}{2} \cdot \varphi'(x) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|x|'}{2} \cdot \varphi'(x) dx = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{2} \cdot \varphi'(x) dx - \int_0^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \varphi'(x) dx \\ &= \frac{1}{2} \varphi(x) \Big|_{-\infty}^0 - \frac{1}{2} \varphi(x) \Big|_0^{\infty} = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle \end{aligned}$$

في حالة $n=2$:

إن الدالة $f(x) = \log(r)$ لا تحقق شروط وُ لأن الدالة $\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r}$ غير كمولة محلياً



على R^2 , لذلك سنوجد متتالية f_ε تحقق شروط هذه المبرهنة، وبحيث يكون

$$T_{f_\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} T_f$$

لنعرف المتتالية f_ε بالشكل: $f_\varepsilon(x) = \begin{cases} \log r & r \geq \varepsilon \\ a_\varepsilon r^2 + b_\varepsilon & r \leq \varepsilon \end{cases}$ حيث $\varepsilon \in]0,1[$.

لنختار $a_\varepsilon, b_\varepsilon$ بحيث تكون الدالة f_ε مستمرة هي ومشتقها، أي تحقق

$$a_\varepsilon = \frac{1}{2\varepsilon^2}, b_\varepsilon = \log(\varepsilon) - \frac{1}{2} \quad \text{ومنه} \quad \log(\varepsilon) = a_\varepsilon \varepsilon^2 + b_\varepsilon, \frac{1}{\varepsilon} = 2a_\varepsilon \varepsilon$$

لدينا من أجل $x \in R^2$ حيث $r \leq \varepsilon$:

$$\begin{aligned} |a_\varepsilon r^2 + b_\varepsilon| &= \left| \frac{1}{2\varepsilon^2} r^2 + \log(\varepsilon) - \frac{1}{2} \right| = \left| -\frac{1}{2\varepsilon^2} r^2 + \log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + \frac{1}{2} \right| \\ &= \left| \log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + \frac{1}{2} \left[1 - \frac{r^2}{\varepsilon^2} \right] \right| \leq \log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

أصبح لدينا من أجل أي $x \in R^2$:

$|f_\varepsilon(x)| \leq |\log(r)| + \frac{1}{2}$ محدودة وبالتالي يكون لدينا (حسب التقارب الراجح)

$$\iint_{R^2} f_\varepsilon(x_1, x_2) \varphi(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{R^2} f(x_1, x_2) \varphi(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

$$\Delta T_{f_\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \Delta T_f \quad \text{ومنه} \quad T_{f_\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} T_f \quad \text{أي}$$

تحقق شروط المبرهنة الواردة في الفصل الأ

$$\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial x_i}(x) = \begin{cases} \frac{x_i}{r^2} & r \geq \varepsilon \\ \frac{x_i}{\varepsilon^2} & r \leq \varepsilon \end{cases} \quad \text{الدالة}$$

ول (5-6-3) $\Leftrightarrow$

$$\frac{\partial^2 T_{f_\varepsilon}}{\partial x_i^2} = T_{\frac{\partial^2 f_\varepsilon}{\partial x_i^2}} \quad \text{و} \quad \frac{\partial^2 f_\varepsilon}{\partial x_i^2}(x) = \begin{cases} \frac{1}{r^2} - 2 \frac{x_i^2}{r^4} & r \geq \varepsilon \\ \frac{1}{\varepsilon^2} & r \leq \varepsilon \end{cases}$$

أصبح لدينا $\Delta T_{f_\varepsilon} = \frac{2}{\varepsilon^2} \cdot 1_{\bar{B}(0, \varepsilon)}$ حيث $1_{\bar{B}(0, \varepsilon)}$ هي الدالة المميزة للكرة $\bar{B}(0, \varepsilon)$, ولكن

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi \varepsilon^2} \cdot 1_{\bar{B}(0, \varepsilon)} = \delta \quad \text{في } D'(R^2), \text{ و بالتالي:}$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi \varepsilon^2} \cdot 1_{\bar{B}(0, \varepsilon)} = \delta = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \frac{\Delta T_{f_\varepsilon}}{2} = \frac{\Delta T_f}{2\pi}$$

وهذا يعني أن التوزيع $E = \frac{T_f}{2\pi} = \frac{\log r}{2\pi}$ حل ابتدائي لمؤثر لابلاس .

$n > 2$: نتبع الخطوات السابقة مع الدالة $f(x) = r^{2-n}$ وهي لا تحقق شروط المبرهنة الواردة في الفصل الأول (5-6-3), لذلك سنوجد متتالية f_ε تحقق



شروط هذه المبرهنة وبحيث يكون $T_{f_\varepsilon} \xrightarrow{r \rightarrow 0} T_f$.

لنعرف المتتالية f_ε بالشكل: $f_\varepsilon(x) = \begin{cases} r^{2-n} & r \geq \varepsilon \\ a_\varepsilon r^2 + b_\varepsilon & r \leq \varepsilon \end{cases}$ حيث $\varepsilon > 0$.

لنختار $a_\varepsilon, b_\varepsilon$ بحيث تكون الدالة f_ε مستمرة هي ومشتقتها، أي تحقق

$$a_\varepsilon = \frac{2-n}{2} \varepsilon^{-n}, b_\varepsilon = \frac{n}{2} \cdot \varepsilon^{2-n} \quad \text{ومنه} \quad \varepsilon^{2-n} = a_\varepsilon \varepsilon^2 + b_\varepsilon, (2-n) \cdot \varepsilon^{2-n} = 2 a_\varepsilon \varepsilon$$

لدينا من أجل $x \in \mathbb{R}^n$ حيث $r \leq \varepsilon$:

$$|a_\varepsilon r^2 + b_\varepsilon| = \varepsilon^{2-n} \left(\frac{n}{2} - \frac{n-2}{2} \left(\frac{r}{\varepsilon} \right)^2 \right)$$

أصبح لدينا من أجل أي $x \in \mathbb{R}^2$: $0 \leq |f_\varepsilon(x)| \leq \frac{n}{2} r^{2-n}$ محدودة وبالتالي يكون

$$\text{لدينا (حسب التقارب الراجح)} \quad \int_{\mathbb{R}^n} f_\varepsilon(x) \varphi(x) dx \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \varphi(x) dx \quad \text{أي}$$

$$\text{ومنه} \quad T_{f_\varepsilon} \xrightarrow{r \rightarrow 0} T_f$$

$$\Delta T_{f_\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \Delta T_f$$

$$\text{تحقق شروط المبرهنة الواردة في الفصل} \quad \frac{\partial f_\varepsilon}{\partial x_i}(x) = \begin{cases} \frac{x_i}{r^n} & r \geq \varepsilon \\ (2-n) \frac{x_i}{\varepsilon^n} & r \leq \varepsilon \end{cases} \quad \text{الدالة}$$

الأول (3-6-5) $\Leftarrow$

$$\frac{\partial^2 T_{f_\varepsilon}}{\partial x_i^2} = T_{\frac{\partial^2 f_\varepsilon}{\partial x_i^2}} \quad 9 \quad \frac{\partial^2 f_\varepsilon}{\partial x_i^2}(x) = \begin{cases} (2-n)(r^{-n} - n x_i^2 r^{-n-2}) & r \geq \varepsilon \\ \frac{2-n}{\varepsilon^n} & r \leq \varepsilon \end{cases}$$

أصبح لدينا $\Delta T_{f_\varepsilon} = n(2-n) \varepsilon^{-n} \cdot 1_{\overline{B}(0, \varepsilon)}$ حيث $1_{\overline{B}(0, \varepsilon)}$ هي الدالة المميزة للكرة

$$\text{و لكن } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{w_n \varepsilon^n} \cdot 1_{\overline{B}(0, \varepsilon)} = \delta \quad \text{بالتالي:}$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{w_n \varepsilon^n} \cdot 1_{\overline{B}(0, \varepsilon)} = \delta = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{w_n} \frac{\Delta T_{f_\varepsilon}}{n(2-n)} = \frac{\Delta T_f}{w_n n(2-n)}$$

وهذا يعني أن التوزيع $E = \frac{T_f}{w_n n(2-n)} = -\frac{r^{2-n}}{S_n(n-2)}$ حل ابتدائي لمؤثر لابلاس.



4-معادلة الحرارة: [8 p 8] [6 p 269]

يُعرّف مؤثر الحرارة (opérateur de la chaleur) في $R \times R^n = R^{n+1}$ بأنه

$$\text{المؤثر: } \frac{\partial}{\partial t} - c \cdot \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} = \frac{\partial}{\partial t} - c \cdot \Delta$$

حيث: $t \in R, x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$ و معادلة الحرارة تكون من الشكل:

$$\cdot \rho u(x, t) = \left(\frac{\partial u}{\partial t} - c \cdot \Delta u \right) (x, t) = f(x, t) \quad (6)$$

وحسب (3)، معادلة الحرارة تكون من الشكل: $z_1 - z_2^2 - z_3^2 - \dots - z_n^2 = f(x)$ وهي معادلة مكافئة.

و من أهم تطبيقاتها مسألة انتشار الحرارة (problème de la diffusion de la chaleur)، و التي تتمثل بتحديد درجة حرارة جبل مرّن تم تسخينه من الطرفين و وضعه في لحظة ابتدائية ضمن حجرة درجة حرارتها معطاة. إن هذا الجبل يُشبه بالقطعة المستقيمة $[a, b]$ ، و يكون علينا إيجاد دالة $u : [a, b] \times [0, T] \longrightarrow R$ تحقق معادلة الحرارة في $R \times R$ ، أي تحقق:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = f(x, t) \quad x \in]a, b[; t \in]0, T[$$

و تحقق الشروط الحدية: $u(a, t) = u_a(t), u(b, t) = u_b(t) \quad t \in]0, T[$

و تحقق الشروط الابتدائية: $u(x, 0) = u_0(x) \quad x \in]a, b[$

حيث f مصدر الحرارة الخارجي، و u_a, u_b درجتَي حرارة طرفي الجبل.



مبرهنة:

إذا كان لدينا الدالة Γ المعرفة على $\mathbb{R}^{n+1}$ بالشكل:

$$\Gamma(t, x) = \chi_{[0, \infty[}(t) \cdot \frac{1}{(4c\pi t)^{n/2}} \cdot e^{-|x|^2/(4ct)}$$

عندئذ فإن: $\Gamma \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^{n+1})$ و $\rho(\Gamma) = \delta$ في $D'(\mathbb{R}^{n+1})$. أي أن Γ هو حل ابتدائي لمعادلة الحرارة.

الإثبات:

لنأخذ $t > 0$ و لنضع $u = \frac{x}{\sqrt{2ct}}$ عندئذ $\therefore$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(t, x) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{[0, \infty[}(t) \cdot \frac{1}{(4c\pi t)^{n/2}} \cdot e^{-|x|^2/(4ct)} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(4c\pi t)^{n/2}} \cdot e^{-|x|^2/(4ct)} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(2ct)^{n/2}}{(4c\pi t)^{n/2}} \cdot e^{-|u|^2/2} du = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \cdot e^{-|u|^2/2} du \\ &= \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} dx \right]^n = \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{2\pi} \right]^n = (1)^n = 1 \end{aligned}$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(t, x) dx = 1 \quad (1) \quad \Leftarrow$$

لتكن φ دالة من $D(\mathbb{R}^{n+1})$ عندئذ $\therefore$

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \Gamma}{\partial t}, \varphi \right\rangle &= - \left\langle \Gamma, \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\rangle = - \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(t, x) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, x) dx dt \\ &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\varepsilon^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(t, x) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, x) dx dt = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \int_\varepsilon^\infty \Gamma(t, x) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, x) dt dx \end{aligned}$$

وذلك بتطبيق (فوبيني) و منه:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \Gamma}{\partial t}, \varphi \right\rangle &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(t, x) \cdot \Gamma(t, x) \Big|_0^\infty dx - \int_{\mathbb{R}^n} \int_\varepsilon^\infty \varphi(t, x) \cdot \frac{\partial \Gamma}{\partial t}(t, x) dt dx \right] \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(\varepsilon, x) \cdot \varphi(\varepsilon, x) dx + \int_{\mathbb{R}^n} \int_\varepsilon^\infty \varphi(t, x) \cdot \frac{\partial \Gamma}{\partial t}(t, x) dt dx \right] \end{aligned}$$



و لدينا من أجل $t > 0$:

$$\Gamma(t, x) = \frac{1}{(4c\pi t)^{n/2}} \cdot e^{-\frac{|x|^2}{4ct}} = t^{-n/2} \cdot \frac{1}{(4c\pi)^{n/2}} \cdot e^{-\frac{|x|^2}{4ct}} = t^{-n/2} \cdot \Gamma\left(1, \frac{x}{\sqrt{t}}\right) \quad (2)$$

- من العلاقتين (1) و (2) نجد:

$$\begin{aligned} [1] \quad \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(\varepsilon, x) \cdot \varphi(\varepsilon, x) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(\varepsilon, \sqrt{\varepsilon}u) \cdot \varphi(\varepsilon, \sqrt{\varepsilon}u) (\sqrt{\varepsilon})^n du = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma\left(1, \frac{\sqrt{\varepsilon}u}{\sqrt{\varepsilon}}\right) \cdot \varphi(\varepsilon, \sqrt{\varepsilon}u) (\varepsilon)^{-n/2} (\sqrt{\varepsilon})^n du \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(1, u) \cdot \varphi(\varepsilon, \sqrt{\varepsilon}u) du \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(1, u) \cdot \varphi(0,0) du = \varphi(0) \end{aligned}$$

- و بالاشتقاق بالمفهوم الاعتيادي نجد:

$$[2] \quad \int_{(t \geq \varepsilon) \mathbb{R}^n} \varphi(t, x) \cdot \frac{\partial \Gamma}{\partial t}(t, x) dt dx \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(t, x) \cdot c \cdot \Delta \Gamma(t, x) dt dx$$

من العلاقتين [1] و [2] نجد أن:

$$\left\langle \frac{\partial \Gamma}{\partial t}, \varphi \right\rangle = \varphi(0) + \langle c \cdot \Delta \Gamma, \varphi \rangle \Rightarrow \left\langle \frac{\partial \Gamma}{\partial t} - c \cdot \Delta \Gamma, \varphi \right\rangle = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle$$

و هذا يعني أن: $\frac{\partial \Gamma}{\partial t} - c \cdot \Delta \Gamma = \delta$ أي $\varphi(\Gamma) = \delta$ في $D'(\mathbb{R}^{n+1})$, أي أن Γ حل ابتدائي لمعادلة الحرارة.

5- معادلة الأمواج في $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$: [8 p 6,8] [13 p 95]

يُعرّف مؤثر الأمواج (opérateur des ondes) () و يُدعى



مؤثر d'Alembertien (في $R \times R^n = R^{n+1}$ بأنه المؤثر:

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \cdot \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} = \frac{\partial}{\partial t} - c^2 \cdot \Delta_x$$

حيث: $t \in R, x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$ و معادلة الأمواج تكون من الشكل:

$$\square u(x, t) = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \cdot \Delta u \right)(x, t) = f(x, t) \quad (7)$$

وحسب العلاقة (3)، فإن معادلة الأمواج تكون من الشكل:

$$z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 - \dots - z_n^2 = f(x) \text{ وهي معادلة زائدية.}$$

إن دراسة معادلة الأمواج هي نموذج لدراسة فيزيائية لظواهر انتشار الأمواج،
مثل مسألة الوتر المهتز (problème de la corde vibrante):

ليكن لدينا وتر مرن يهتز في المستوى، لتحديد موضعه في كل لحظة علينا إيجاد
دالة $u: [0, 1] \times [0, T] \rightarrow R$ تحقق معادلة الأمواج في $R \times R$ ، أي تحقق:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - c^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = f(x, t) \quad x \in]0, 1[; t \in]0, T[$$

و تحقق الشروط الحدية: $u(0, t) = u(1, t) = 0 \quad t \in]0, T[$

و تحقق الشروط الابتدائية: $u(x, 0) = u_0(x); \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x) \quad x \in]0, 1[$

حيث c سرعة انتشار الصوت في الوتر، u_0 موضع الوتر في اللحظة (0)، و u_1 سرعة الوتر في اللحظة (0).

كذلك مسألة الإطار المهتز (problème d'une membrane vibrante):

علينا إيجاد دالة $u: \bar{\Omega} \times [0, T] \rightarrow R$ تحقق معادلة الامواج في $R \times R^2$ ، أي تحقق:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - c^2 \cdot \Delta u(x, t) = f(x, t) \quad x \in \Omega; t \in]0, T[$$

و تحقق الشروط الحدية: $u(x, t) = 0 \quad t \in]0, T[, x \in \Omega$

و تحقق الشروط الابتدائية: $u(x, 0) = u_0(x); \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x) \quad x \in \Omega$



لنوجد الحل الابتدائي لمؤثر الأمواج في $R \times R^3$:

$$\text{لنأخذ التوزيع } T_t \text{ المعرف على } R^3 \text{ بالشكل: } \langle T_t, \varphi \rangle = \frac{t}{4\pi} \int_{S^2} \varphi(t\omega) d\omega$$

حيث S^2 كرة الوحدة في R^3 ، و $d\omega$ قياس لوبيغ على S^2 .

مبرهنة [61 p 13]:

- إذا كان T_t توزيعاً معرفاً على R^n ، و كان التطبيق المعرف على R بـ $\langle T_t, \varphi \rangle$ قابلاً للاشتقاق عدداً غير منته من المرات، عندئذ فإنه يوجد توزيع (من أجل كل l من N) (نرمز له بـ $T_t^{(l)}$) يحقق:

$$\forall t_0 \in R: \langle T_t^{(l)}, \varphi \rangle(t_0) = \left(\frac{d}{dt} \right)^l \langle T_{t_0}, \varphi \rangle$$

- إذا كان T_t توزيعاً معرفاً على R^n ، و كان التطبيق المعرف على R بـ $\langle T_t, \varphi \rangle$ قابلاً للاشتقاق، عندئذ فإنه من أجل أي دالة ψ من $D(R \times R^n)$ يكون التطبيق المعرف على R بـ $\langle T_t, \psi(t, \cdot) \rangle$ قابلاً للاشتقاق، و يكون:

$$\frac{d}{dt} \langle T_t, \psi(t, \cdot) \rangle = \langle T_t^{(1)}, \psi(t, \cdot) \rangle + \left\langle T_t, \frac{\partial \psi}{\partial t}(t, \cdot) \right\rangle$$

مبرهنة: إن التوزيع T_t يحقق:

$$-1 \quad \forall l \in \mathbb{N}: \langle T_t^{(l)}, \varphi \rangle = \left(\frac{d}{dt} \right)^l \langle T_t, \varphi \rangle \text{ حيث } T_0^{(2)} = 0, T_0^{(1)} = \delta_0, T_0 = 0$$

$$-2 \quad \forall t > 0: T_t^{(2)} - \Delta T_t = T_t^{(3)} - \Delta T_t^{(1)} = 0$$

الإثبات:

$$-1 \quad \langle T_0, \varphi \rangle = \frac{0}{4\pi} \int_{S^2} \varphi(0) d\omega = 0$$



$$\begin{aligned}
\langle T_t^{(1)}, \varphi \rangle &= \left(\frac{d}{dt} \right) \langle T_t, \varphi \rangle = \left(\frac{d}{dt} \right) \frac{t}{4\pi} \int_{S^2} \varphi(t\omega) d\omega \\
&= \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} \varphi(t\omega) d\omega + \frac{t}{4\pi} \sum_{i=1}^3 \int_{S^2} \omega_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(t\omega) d\omega \\
\langle T_0^{(1)}, \varphi \rangle &= \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} \varphi(0) d\omega = \frac{1}{4\pi} \varphi(0) \int_{S^2} d\omega = \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle
\end{aligned}$$

و منه: $\langle T_0^{(1)}, \varphi \rangle = \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} \varphi(0) d\omega = \frac{1}{4\pi} \varphi(0) \int_{S^2} d\omega = \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle$

$$:T_t^{(2)} = \Delta T = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial T}{\partial x_i} \quad \text{أن} \quad \text{لنثبت أولاً}$$

لدينا:

$$\langle T_t^{(2)}, \varphi \rangle = \left(\frac{d}{dt} \right)^2 \langle T_t, \varphi \rangle = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^3 \int_{S^2} \omega_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(t\omega) d\omega + \frac{t}{4\pi} \sum_{i,j=1}^3 \int_{S^2} \omega_i \omega_j \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}(t\omega) d\omega \quad (1)$$

$$\langle \Delta T_t, \varphi \rangle = \langle T_t, \Delta \varphi \rangle = \frac{t}{4\pi} \int_{S^2} \Delta \varphi(t\omega) d\omega \quad (2)$$

ولكن حسب صيغة غرين:

$$\frac{\partial}{\partial n} = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^3 x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad \text{حيث} \quad \int_{|x|=r} \Delta \varphi(x) dx = \int_{|x|=r} \frac{\partial \varphi}{\partial n}(x) d\sigma_r$$

لنتقل إلى الإحداثيات القطبية في العلاقة السابقة أي لنأخذ $x = t\omega$ و منه:

$$d\sigma_r = r^2 d\omega, dx = t^2 dt d\omega \quad \text{فيكون:}$$

$$\int_0^r \int_{S^2} \Delta \varphi(t\omega) t^2 d\omega dt = r^2 \sum_{i=1}^3 \int_{S^2} \omega_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(r\omega) d\omega$$

لنشتق العلاقة السابقة بالنسبة لـ r ، فنجد:

$$\begin{aligned}
F(r) &:= \int_{S^2} \Delta \varphi(r\omega) r^2 d\omega = 2r \sum_{i=1}^3 \int_{S^2} \omega_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(r\omega) d\omega \\
&+ r^2 \sum_{i,j=1}^3 \int_{S^2} \omega_i \omega_j \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}(r\omega) d\omega \quad (3)
\end{aligned}$$

من (2) و (3) نجد: $\langle \Delta T_t, \varphi \rangle = \frac{1}{4\pi t} F(r)$ و من (1) و (3) نجد:

$$\langle T_t^{(2)}, \varphi \rangle = \frac{1}{4\pi t} F(r)$$



$$\text{أي أن: (4)} \quad \langle \Delta T_0, \varphi \rangle = \langle T_0^{(2)}, \varphi \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle \Delta T_t, \varphi \rangle = \langle T_t^{(2)}, \varphi \rangle$$

2- من (4) نجد أن: $\langle \Delta T_t, \varphi \rangle - \langle T_t^{(2)}, \varphi \rangle = 0$ و باشتقاق العلاقة

$$\langle T_t, \Delta \varphi \rangle - \langle T_t^{(2)}, \varphi \rangle = 0 \quad \text{بالنسبة لـ } t \text{ نجد أن } \langle T_t^{(1)}, \Delta \varphi \rangle - \langle T_t^{(3)}, \varphi \rangle = 0$$

$$\text{أي أن} \quad \langle \Delta T_t^{(1)}, \varphi \rangle - \langle T_t^{(3)}, \varphi \rangle = 0$$

لنأخذ التوزيع s_t المعرف على R^3 بالشكل:

$$s_t = \begin{cases} T_t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

والتوزيع E المعرف على R^4 بالشكل:

$$\forall \varphi \in D'(R^4): \langle E, \varphi \rangle = \int_R \langle s_t, \varphi(t, \cdot) \rangle dt = \int_0^\infty \langle T_t, \varphi(t, \cdot) \rangle dt = \int_0^\infty \frac{t}{4\pi} \int_{|\omega|=1} \varphi(t, t\omega) d\omega dt$$

و لنبرهن أن التوزيع E هو حل ابتدائي لمؤثر الأمواج.

مبرهنة:

إذا أخذنا التوزيع E المعرف سابقاً، عندئذ فإن E يكون حلاً ابتدائياً لمؤثر الأمواج أي أنه يكون: $\square E = 0$.

الإثبات:

لدينا حسب المبرهنة السابقة:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\langle T_t, \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, \cdot) \right\rangle = \left\langle T_t^{(1)}, \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, \cdot) \right\rangle + \left\langle T_t, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}(t, \cdot) \right\rangle$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\langle T_t^{(1)}, \varphi(t, \cdot) \right\rangle = \left\langle T_t^{(1)}, \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, \cdot) \right\rangle + \left\langle T_t^{(2)}, \varphi(t, \cdot) \right\rangle$$

و منه: $\left\langle T_t, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}(t, \cdot) \right\rangle = \frac{\partial}{\partial t} \left\langle T_t, \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, \cdot) \right\rangle - \frac{\partial}{\partial t} \left\langle T_t^{(1)}, \varphi(t, \cdot) \right\rangle + \left\langle T_t^{(2)}, \varphi(t, \cdot) \right\rangle$

بمكاملة الطرفين على المجال $[0, \infty[$ و بملاحظة أن $\left. \varphi(t, 0) \right|_\infty = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, 0) \right|_\infty = 0$

نجد:



$$\begin{aligned}\int_0^\infty \left\langle T_t, \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}(t, \cdot) \right\rangle dt &= \left\langle T_0, \frac{\partial \psi}{\partial t}(0, \cdot) \right\rangle - \left\langle T_0^{(1)}, \psi(0, \cdot) \right\rangle + \int_0^\infty \left\langle T_t^{(2)}, \psi(t, \cdot) \right\rangle dt \\ \left\langle E, \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right\rangle &= \left\langle \delta_0, \psi(0, \cdot) \right\rangle + \int_0^\infty \left\langle \Delta T_t, \psi(t, \cdot) \right\rangle dt \\ &= \psi(0, 0) + \int_0^\infty \left\langle T_t, \Delta \psi(t, \cdot) \right\rangle dt = \langle \delta, \psi \rangle + \langle E, \Delta \psi \rangle\end{aligned}$$

$$\langle \square E, \psi \rangle = \left\langle E, \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right\rangle - \langle E, \Delta \psi \rangle = \langle \delta, \psi \rangle \Leftrightarrow$$

مواجه.

6- مؤثر كوشي ريمان: [6 p 270]

يُعرف مؤثر كوشي ريمان (opérateur de Cauchy-Riemann) في $\mathbb{R}^2$

$$\text{بأنه المؤثر: } \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \text{ حيث: } z = x + iy.$$

مبرهنة:

إن $\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\pi z} \right) = \delta$ في $D'(\mathbb{R}^2)$. أي أن $\frac{1}{\pi z}$ هو الحل الابتدائي لمؤثر كوشي ريمان.

الإثبات:

كما تم الإثبات في مؤثر لابلاس :

إن الدالة $f(x) = \frac{1}{z}$ لا تحقق شروط المبرهنة الواردة في الفصل الأول (3-6-5)،

لذلك سنوجد متتالية f_ε تحقق شروط هذه المبرهنة وبحيث يكون

$$T_{f_\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} T_f$$

$$\text{لنعرف المتتالية } f_\varepsilon \text{ بالشكل: } f_\varepsilon(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{z} & |z| > \varepsilon \\ \frac{z}{\varepsilon^2} & |z| \leq \varepsilon \end{cases} \text{ حيث } \varepsilon > 0.$$

إن الدالة f_ε محدودة وبالتالي يكون لدينا (حسب مبرهنة التقارب الراجح) :

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f_\varepsilon(x, y) \varphi(x, y) dx dy \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) \varphi(x, y) dx dy$$

$$\text{أي } T_{f_\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} T_f \text{ ومنه } \frac{\partial T_{f_\varepsilon}}{\partial z} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial T_f}{\partial z}, \text{ و بالتالي الدالة } f_\varepsilon \text{ تحقق شروط}$$

المبرهنة الواردة في الفصل الأول (3-6-5)



$$\frac{\partial T_{f_\varepsilon}}{\partial x} = T_{\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial x}} \quad \text{و} \quad \frac{\partial f_\varepsilon}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} -\frac{1}{z^2} & |z| > \varepsilon \\ \frac{1}{\varepsilon^2} & |z| \leq \varepsilon \end{cases} \quad \Leftarrow$$

$$\text{و} \quad \frac{\partial f_\varepsilon}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} -\frac{i}{z^2} & |z| > \varepsilon \\ -\frac{i}{\varepsilon^2} & |z| \leq \varepsilon \end{cases}$$

$$\frac{\partial T_{f_\varepsilon}}{\partial y} = T_{\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial y}}$$

$$\Leftarrow \quad \frac{\partial}{\partial z} T_{f_\varepsilon} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x} T_{f_\varepsilon} + i \frac{\partial}{\partial y} T_{f_\varepsilon} \right] = \begin{cases} 0 & |z| > \varepsilon \\ \frac{1}{\varepsilon^2} & |z| \leq \varepsilon \end{cases} \quad \text{نجد الآن أن:}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} T_{f_\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot 1_{\overline{B(0, \varepsilon)}} \quad \text{حيث } 1_{\overline{B(0, \varepsilon)}} \text{ تعني الدالة المميزة للكرة } \overline{B(0, \varepsilon)}.$$

$$\text{ولكن } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot 1_{\overline{B(0, \varepsilon)}} = \pi \cdot \delta \quad \text{، بالتالي: } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial T_{f_\varepsilon}}{\partial z} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial T_f}{\partial z} = \pi \delta \quad \text{وهذا}$$

يعني أن التوزيع $E = \frac{1}{\pi z}$ هو حل ابتدائي لمؤثر كوشي ريمان .

ثانياً: في حل المعادلات التفاضلية العادية

(équations différentielles) [3 p : 221] [2 p : 217] [1 p : 105]

1- المعادلات التفاضلية ذات المعاملات الثابتة:

لتكن لدينا المعادلة التفاضلية

$$a_0 x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x' + a_n x = f \quad (1)$$

حيث $a_0, a_1, \dots, a_n$ ثوابت عقدية، $a_0 \neq 0$ ، و f توزيع دعامته متراصة. إن المعادلة السابقة تكتب بالشكل $(A \delta) * x = f$ ، (حيث $A = a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1} D + a_n$) أي أنها معادلة تلاف. و إذا كان g توزيعاً يحقق المعادلة:

$$a_0 g^{(n)} + a_1 g^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} g' + a_n g = \delta \quad (2)$$

فإنه يُدعى حلاً ابتدائياً للمعادلة ⁽¹⁾. و حل المعادلة ⁽¹⁾ يكون التوزيع x حيث $x = g * f$.



لتكن $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ جملة أساسية من حلول المعادلة المتجانسة:

$$a_0 x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x' + a_n x = 0 \quad (3)$$

و لنضع:

$$g(t) = \begin{cases} \varphi_0(t) & t < 0 \\ \varphi_1(t) & t > 0 \end{cases} \quad \begin{aligned} \varphi_0(t) &= a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) + \dots + a_n x_n(t) \\ \varphi_1(t) &= \beta_1 x_1(t) + \beta_2 x_2(t) + \dots + \beta_n x_n(t) \end{aligned}$$

بما أن مشتق دالة Heaviside هو توزيع ديراك، فإنه كي يكون g حلاً للمعادلة

$$(2) \text{ يكفي أن يتحقق: } \frac{1}{a_0} \varphi_0^{(k)}(0) = \varphi_1^{(k)}(0) : k = 0, 1, \dots, n-2, \varphi_0^{(n-1)}(0) = \varphi_1^{(n-1)}(0)$$

بوضع $\gamma_i = \beta_i - a_i$ نجد:

$$\gamma_1 x_1(0) + \gamma_2 x_2(0) + \dots + \gamma_n x_n(0) = 0$$

$$\gamma_1 x_1^{(n-2)}(0) + \gamma_2 x_2^{(n-2)}(0) + \dots + \gamma_n x_n^{(n-2)}(0) = 0$$

$$\gamma_1 x_1^{(n-1)}(0) + \gamma_2 x_2^{(n-1)}(0) + \dots + \gamma_n x_n^{(n-1)}(0) = \frac{1}{a_0}$$

إن محدد هذه الجملة يُدعى رونسكياني (wronskienne)، و بما أن الحلول $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ مستقلة خطياً فإن المحدد لا يساوي الصفر، و بحل جملة المعادلات السابقة نحصل على حلول وحيدة من $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ ، و أسرة غير منتهية من الأعداد $a_1, a_2, \dots, a_n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$.

ليكن $x = \varphi(t)$ حلاً للمعادلة المتجانسة (3)، محققاً للشروط:

$$\varphi^{(k)}(0) = 0 : k = 0, 1, \dots, n-2, \varphi^{(n-1)}(0) = \frac{1}{a_0}$$

$$\text{و لنضع: } g(t) = \gamma(t) \cdot \varphi(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \varphi(t) & t > 0 \end{cases}$$

فإن g يكون حلاً ابتدائياً للمعادلة (1) لأن:

$$A(g) = (A \delta) * g = (A \delta) * (\gamma \cdot \varphi) = \delta$$

كما أن الحل الابتدائي g المحقق لـ 1: $g(t) = 0$ من أجل $t < 0$ يلعب دوراً هاماً في التطبيقات.



سنوجد حلول بعض المعادلات الخاصة:

- المعادلة التفاضلية $x'' = f$:

إن المعادلة المتجانسة $x'' = 0$ تقبل جملة الحلول الأساسية $x_1(t) = 1, x_2(t) = t$ ،
و بالتالي المعادلة $x'' = \delta$ لها الحل:

$$g(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ at + \beta & t > 0 \end{cases}$$

و من الشروط الابتدائية $\varphi(0) = 0, \varphi'(0) = 1$ نجد أن $\alpha = 1, \beta = 0$ ، والحل الا
بتدائي للمعادلة يكون:

$$g(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & t > 0 \end{cases}$$

و نرمز لهذا التوزيع بالرمز t_+ ، أما حل المعادلة $x'' = f$ فيكون من الشكل:
 $x = t_+ * f$

- المعادلة التفاضلية $x'' + x' + x = f$:

إن المعادلة المتجانسة $x'' + x' + x = 0$ تقبل الحل $\varphi(t) = e^{-\frac{1}{2}t} \left(\alpha \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + \beta \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t \right)$

، و من الشروط الابتدائية $\varphi(0) = 0, \varphi'(0) = 1$ نجد أن $\alpha = 0, \beta = \frac{2}{\sqrt{3}}$ ، وحل المعادلة ا
لابتدائي يكون:

$$g(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-\frac{1}{2}t} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t & t > 0 \end{cases}$$

- المعادلة التفاضلية $x'' + \omega^2 x = f$ حيث $\omega \neq 0$:

إن المعادلة المتجانسة $x'' + \omega^2 x = 0$ تقبل الحل $\varphi(t) = \alpha \sin \omega t + \beta \cos \omega t$ ، و من
الشروط

الابتدائية $\varphi(0) = 0, \varphi'(0) = 1$ نجد أن $\alpha = \frac{1}{\omega}, \beta = 0$ ، وحل المعادلة الابتدائي يكون:



$$g(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{1}{\omega} \sin \omega t & t > 0 \end{cases}$$

أما حل المعادلة $x'' + \omega^2 x = f$ فهو من الشكل: $x = g * f$ ، و بشكل خاص إذا كان التوزيع f مرافقاً لدالة كمولة محلياً دعامتها محتواة في نصف المحور الحقيقي الموجب، فإن الحل يكون من الشكل: $x(t) = \gamma(t) \cdot \int_0^t \frac{\sin(t-s)}{\omega} f(s) ds$.

2- المعادلات التفاضلية ذات المعاملات المتغيرة:

- لتكن f دالة مستمرة، و لتكن لدينا المعادلة التفاضلية الخطية ذات المعاملات المستمرة:

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x = f \quad (1)$$

ولتكن $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ جملة من الحلول الأساسية للمعادلة المتجانسة المرافقة لها:

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x = 0 \quad (2)$$

إن المعادلة (1) تكتب بالشكل: (3) $T' = AT + S$ حيث:

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & -a_{n-2}(t) & \dots & -a_1(t) \end{bmatrix}, T = \begin{bmatrix} x \\ x' \\ x'' \\ \vdots \\ x^{(n-1)} \end{bmatrix}, S = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f \end{bmatrix}$$

و المعادلة المتجانسة (4) $T' = AT$ تقبل جملة الحلول الأساسية

$$X_i = \begin{bmatrix} x_i \\ x_i' \\ x_i'' \\ \vdots \\ x_i^{(n-1)} \end{bmatrix} \quad \text{حيث } X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$$

أما المعادلة (3) فهي تقبل الحل $T = X \cdot C$ ، حيث $C' = X^{-1} \cdot S$ أي أن التوزيع C هو التوزيع الأصلي للتوزيع $S \cdot X^{-1}$.



$$x_1 c_1' + x_2 c_2' + \dots + x_n c_n' = 0$$

$$x_1' c_1' + x_2' c_2' + \dots + x_n' c_n' = 0$$

.....

$$x_1^{(n-2)} c_1' + x_2^{(n-2)} c_2' + \dots + x_n^{(n-2)} c_n' = 0$$

$$x_1^{(n-1)} c_1' + x_2^{(n-1)} c_2' + \dots + x_n^{(n-1)} c_n' = f$$

و بحل جملة المعادلات السابقة حسب صيغة غرامر نجد أن:

$$c_i'(t) = \frac{(-1)^{n+i}}{\Delta(t)} A_{ni}(t) f(t)$$

حيث Δ هو المحدد ، و A_{ni} هو محدد المصفوفة

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1' & x_2' & \dots & x_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{(n-1)} & x_2^{(n-1)} & \dots & x_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1' & x_2' & \dots & x_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{(n-2)} & x_2^{(n-2)} & \dots & x_n^{(n-2)} \end{bmatrix}$$

محذوفاً منها السطر الأول و العمود i .

ومنه: $c_i(t) = (-1)^{n+i} \int_0^t \frac{A_{ni}(s)}{\Delta(s)} f(s) ds$ ، و حل المعادلة (1) يُعطى بـ :

$$x(t) = \sum_{i=1}^n x_i(t) c_i(t) = \sum_{i=1}^n (-1)^{n+i} x_i(t) \int_0^t \frac{A_{ni}(s)}{\Delta(s)} f(s) ds = \int_0^t e(t,s) f(s) ds$$

$$e(t,s) = \sum_{i=1}^n (-1)^{n+i} x_i(t) \frac{A_{ni}(s)}{\Delta(s)}$$

حيث:

$$= \frac{(-1)^{n-1}}{\Delta(s)} \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \dots & x_n(t) \\ x_1(s) & x_2(s) & \dots & x_n(s) \\ x_1'(s) & x_2'(s) & \dots & x_n'(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{(n-2)}(s) & x_2^{(n-2)}(s) & \dots & x_n^{(n-2)}(s) \end{vmatrix}$$

و من هذه العلاقة نجد أن الدالة $e(t,s)$ هي حل المعادلة المتجانسة (2) و المحققة للشروط:



CIX

تعديل من خلال WPS Office

$$\cdot \left(\frac{\partial^k e(t, s)}{\partial t^k} \right)_{t=s} = 0 : k = 0, 1, \dots, n-2; \left(\frac{\partial^{n-1} e(t, s)}{\partial t^{n-1}} \right)_{t=s} = 1$$

• بشكل مشابه يمكن حل المعادلة

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x = \delta_s \quad (5)$$

حيث $a_1, a_2, \dots, a_n$ دوال مستمرة، ويكون حلها من الشكل : $x(t) = \sum_{i=1}^n x_i(t)c_i(t)$

$$، c_i(t) = \frac{(-1)^{n+i}}{\Delta} A_{ni} Y_s - \text{prim} \left[\left(\frac{(-1)^{n+i}}{\Delta} A_{ni} \right)' Y_s \right] \text{ ومنه } ، c_i' = \frac{(-1)^{n+i}}{\Delta} A_{ni} \delta_s$$

حيث:

$$\text{prim تعني التوزيع الأصلي و } Y_s(t) = Y(t-s) = \begin{cases} 0 & t < s \\ 1 & t > s \end{cases} \text{ و يكون:}$$

$$c_i(t) = \begin{cases} 0 & t < s \\ (-1)^{n+i} \frac{A_{ni}(s)}{\Delta(s)} & t > s \end{cases} \text{ وحل المعادلة (5) يأخذ الشكل:}$$

$$. g_s(t) = \begin{cases} 0 & t < s \\ e(t, s) & t > s \end{cases}$$

• أما حل المعادلة (6) $x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x = f$ حيث

$a_1, a_2, \dots, a_n$ دوال قابلة للاشتقاق و مشتقاتها مستمرة حتى المرتبة m ، و f توزيع مرتبته $m+1$ و دعامته محدودة من اليسار. فهو من الشكل $x = G \circ f$ ، حيث g_s هو التوزيع المرافق للدالة g_s حل المعادلة (5)، و التوزيع $G \circ f$ يُعطى بـ :

$$\psi(s) = \langle G \circ f, \varphi \rangle = \langle f, \psi \rangle \text{ حيث } \psi(s) = \langle g_s(t), \varphi(t) \rangle$$

و إذا كانت الدوال $a_1, a_2, \dots, a_n$ قابلة للاشتقاق عدداً غير منته من المرات فالمعادلة (6) تقبل التوزيع $G \circ f$ كحل من أجل أي توزيع f دعامته محدودة من اليسار.

• لنفرض أن $m=0$ ، و لنأخذ المعادلة (7) $x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \dots + a_n(t)x = \delta_s'$ فهي

تقبل الحل $x = G \circ \delta_s'$ ، و يكون: $\langle G \circ \delta_s', \varphi \rangle = \langle \delta_s', \psi \rangle = -\psi'(s) = -\left\langle \frac{\partial}{\partial s} g_s, \varphi \right\rangle$ و بـ



$$x(t) = \begin{cases} 0 & t < s \\ -\frac{\partial e(t,s)}{\partial s} & t > s \end{cases} \text{ التالي حل المعادلة (7) يكون:}$$

• مثال:

لتكن لدينا المعادلة التفاضلية (8) $x'' + \frac{t}{t^2+1}x' - \frac{1}{t^2+1}x = \delta_s$ ، إن الحل العام

للمعادلة المتجانسة المرافقة لها يكون من الشكل

$$x(t) = \alpha(t + \sqrt{t^2+1}) + \beta(t - \sqrt{t^2+1}) \text{ و من الشروط الابتدائية } \left(\frac{\partial e(t,s)}{\partial t}\right)_{t=s} = 1$$

$$(e(t,s))_{t=s} = 0 \text{ نجد أن: } \alpha = \frac{s^2+1-s\sqrt{s^2+1}}{2}, \beta = \frac{s^2+1+s\sqrt{s^2+1}}{2} \text{، فيكون حل}$$

المعادلة المتجانسة $e(t,s) = t(s^2+1) - s\sqrt{(s^2+1)(t^2+1)}$ و حل المعادلة (8) يكون:

$$x_s(t) = \begin{cases} 0 & t < s \\ t(s^2+1) - s\sqrt{(s^2+1)(t^2+1)} & t > s \end{cases}$$

أما حل المعادلة $x'' + \frac{t}{t^2+1}x' - \frac{1}{t^2+1}x = \delta'_s$ فهو

$$y_s(t) = \begin{cases} 0 & t < s \\ -2st + (2s^2+1)\sqrt{\frac{(t^2+1)}{(s^2+1)}} & t > s \end{cases}$$



CXI

تعديل من خلال WPS Office