مبادئ الهيدروليك الهندسي

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

منشورات جامعة دمشق

كلية الهندسة المدنية

مبادئ الهيدروليك الهندسي

الدكتور
وائل جميل معلا
الأستاذ في قسم الهندسة المائية

الدكتور
أمجد سعيد زينو
الأستاذ المساعد في قسم الهندسة المائية

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الفهرس

الموضوع	الصفحة
الفهرس	٥
المقدمة	١٥
الفصل الأول: مفاهيم أساسية في الهيدروليك	١٧
١-١. مقدمة	١٧
١-٢. طبيعة المائع	١٨
١-٣. الهيدروليك	١٨
١-٤. لمحة تاريخية عن الهيدروليك	١٩
١-٥. الأبعاد والواحدات	٢٣
١-٥-١. نظم الأبعاد	٢٣
١-٥-٢. نظم الواحدات	٢٤
١-٦. حقل الإجهادات	٢٦
١-٧. الخواص الفيزيائية للسائل	٢٩
١-٧-١. الكتلة النوعية	٢٩
١-٧-٢. الوزن النوعي	٣٠
١-٧-٣. اللزوجة	٣١
١-٧-٤. التوتر السطحي	٣٧
١-٧-٥. الخاصية الشعرية	٣٩
١-٧-٦. انضغاطية السائل	٤٠

١-٧-٧. ضغط التبخر..... ٤٢
١-٨. السائل المثالي..... ٤٣
مسائل محلولة حول الفصل الأول..... ٤٤
مسائل غير محلولة حول الفصل الأول..... ٤٩
الفصل الثاني: توازن السوائل..... ٥٣
٢-١. تمهيد..... ٥٣
٢-٢. الضغط..... ٥٣
٢-٣. الضغط عند نقطة من سائل ساكن (قانون باسكال)..... ٥٤
٢-٤. المعادلات الأساسية لتوازن السوائل..... ٥٥
٢-٥. تغير الضغط مع العمق في سائل ساكن..... ٥٧
٢-٦. الضغط والضاغط..... ٦٠
٢-٧. الضغوط المطلقة والنسبية..... ٦١
٢-٨. استخدام مبدأ نقل ضغط السائل في تكبير القوى..... ٦٣
٢-٩. طرائق قياس الضغط..... ٦٤
٢-٩-١. تمهيد..... ٦٤
٢-٩-٢. الأنبوب البيزومتري..... ٦٥
٢-٩-٣. المانومتر البسيط..... ٦٦
٢-٩-٤. المانومتر المائل..... ٦٨
٢-٩-٥. مقياس بوردون..... ٧٠
٢-٩-٦. أجهزة قياس الضغط الإلكترونية..... ٧٢
٢-١٠. قوى ضغط السائل الساكن على السطوح المغمورة..... ٧٣
٢-١٠-١. تمهيد..... ٧٣

٢-١٠-٢.قوى الضغط المؤثرة على السطوح الأفقية المغمورة..... ٧٣
٢-١٠-٣. قوى الضغط المؤثرة على السطوح المغمورة في مستوٍ مائل..... ٧٤
٢-١٠-٤. قوى الضغط المؤثرة على الجدران المستطيلة..... ٧٨
٢-١٠-٥. قوى الضغط المؤثرة على السطوح المغمورة المنحنية الأسطوانية..... ٨٢
٢-١١. الطفو واستقرار الأجسام المغمورة والعائمة..... ٨٤
٢-١١-١. دافعة أرخميدس..... ٨٤
٢-١١-٢. استقرار الأجسام المغمورة..... ٨٥
٢-١١-٣. استقرار الأجسم العائمة..... ٨٧
٢-١١-٤. تحديد ارتفاع مركز الدوران تجريبياً..... ٨٨
٢-١١-٥. تحديد ارتفاع مركز الدوران حسابياً..... ٨٩
مسائل محلولة حول الفصل الثاني..... ٩٢
مسائل غير محلولة حول الفصل الثاني..... ١٢١
الفصل الثالث: حركة السوائل..... ١٣١
٣-١. تمهيد..... ١٣١
٣-٢. تصنيف الجريان..... ١٣١
٣-٣. الجريان المستقر والجريان غير المستقر..... ١٣١
٣-٤. الجريان اللزج والجريان غير اللزج..... ١٣٢
٣-٥. الجريان المنتظم والجريان غير المنتظم..... ١٣٣
٣-٦. الجريان الانضغاطي والجريان غير القابل للانضغاط..... ١٣٤
٣-٧. الجريان الصفحي والجريان المضطرب..... ١٣٥
٣-٨. الجريان الداخلي والجريان الخارجي..... ١٣٦

٣-٩. المسارات وخطوط التيار وأنابيب التيار..... ١٣٧
٣-١٠. الجريان أحادي البعد وثنائي البعد وثلاثي البعد..... ١٣٩
٣-١١. السرعة والتسارع..... ١٤٠
٣-١٢. الغزارة والسرعة الوسطية للجريان..... ١٤٤
٣-١٣. استمرارية الجريان..... ١٤٦
٣-١٤. معادلة الاستمرار التفاضلية..... ١٥٠
٣-١٥. الجريان الدوراني والجريان غير الدوراني..... ١٥٤
٣-١٦. الجولان والتدوم..... ١٥٩
٣-١٧. الجريان الكموني..... ١٦١
٣-١٧-١. تابع التيار..... ١٦١
٣-١٧-٢. تابع كمون السرعة..... ١٦٣
٣-١٧-٣. العلاقة بين خطوط التيار وخطوط تساوي الكمون... ١٦٥
٣-١٧-٤. أمثلة عن بعض الجريانات النموذجية..... ..... ١٦٧
٣-١٧-٤-١. الجريان المستقيم المنتظم..... ١٦٧
٣-١٧-٤-٢. جريان النبع والبالوعة..... ١٦٨
٣-١٧-٤-٣. الدوامة..... ١٧١
٣-١٧-٥. جمع الجريانات..... ١٧٣
٣-١٧-٥-١. جريان نبع مع بالوعة..... ١٧٣
٣-١٧-٥-٢. نبع ضمن جريان منتظم..... ١٧٤
٣-١٧-٥-٣. نبع وبالوعة ضمن جريان منتظم..... ١٧٦
مسائل محلولة حول الفصل الثالث..... ١٧٨
مسائل غير محلولة حول الفصل الثالث..... ١٨٣

الفصل الرابع: الجريان المثالي..... ١٨٧
٤-١. تمهيد..... ١٨٧
٤-٢. المعادلات التفاضلية للجريان المثالي- معادلات أويلر..... ١٨٧
٤-٣. الجريان المثالي المستقر أحادي البعد على خط تيار..... ١٩٢
٤-٣-١. معادلة الطاقة للجريان المثالي على خط تيار- معادلة برنوللي..... ١٩٢
٤-٣-٢. الطاقة الميكانيكية للسائل- المفهوم الفيزيائي لمعادلة برنوللي ١٩٤
٤-٣-٣. معامل تصحيح الطاقة الحركية..... ١٩٧
٤-٣-٤. خط الطاقة وخط التدرج الهيدروليكي..... ١٩٨
٤-٤. تطبيقات معادلة برنوللي..... ٢٠٢
٤-٤-١. تمهيد..... ٢٠٢
٤-٤-٢. أنبوب بيتو..... ٢٠٢
٤-٤-٣. أنبوب براندتل..... ٢٠٤
٤-٤-٤. جهاز فنتوري..... ٢٠٧
٤-٤-٥- فتحات الأنابيب..... ٢١١
٤-٤-٦. التصريف عبر فتحة صغيرة..... ٢١١
٤-٤-٧. التصريف عبر فتحة كبيرة..... ٢١٧
٤-٤-٨. الجريان غير المستقر من الفتحات (زمن تفريغ الخزانات).. ٢١٩
٤-٤-٩. الهدارات..... ٢٢٣
٤-٤-٩-١. الهدار المستطيل رقيق الحافة..... ٢٢٣
٤-٤-٩-٢. الهدار المثلثي رقيق الحافة..... ٢٢٦
٤-٤-١٠. الجريان الشعاعي..... ٢٢٧

٤-٤-١١. الجريان في مسار منحنٍ..... ٢٢٩
٤-٤-١٢. الحركة الدوامية..... ٢٣١
٤-٤-١٢-١. الدوامة القسرية..... ٢٣١
٤-٤-١٢-٢. الدوامة الحرة..... ٢٣٣
مسائل محلولة حول الفصل الرابع..... ٢٣٦
مسائل غير محلولة حول الفصل الرابع..... ٢٦٣
الفصل الخامس: الجريان الحقيقي..... ٢٧٥
٥-١. مقدمة..... ٢٧٥
٥-٢. الجريان الصفحي..... ٢٧٦
٥-٢-١. وصف الجريان الصفحي..... ٢٧٦
٥-٢-٢. المعادلات التفاضلية للجريان الصفحي- معادلات (نافييه-ستوكس)..... ٢٧٧
٥-٢-٣. حل معادلات نافييه- ستوكس في بعض الحالات الخاصة.. ٢٨٣
٥-٢-٣-١. الجريان الصفحي المتطور بين صفيحتين أفقيتين متوازيتين ثابتتين..... ٢٨٣
٥-٢-٣-٢. الجريان الصفحي المتطور بين صفيحتين أفقيتين متوازيتين الأولى ثابتة والثانية تتحرك بسرعة ثابتة ٢٨٨
٥-٢-٣-٣. الجريان الصفحي المتطور على سطح مستوٍ يميل على الأفق بزاوية..... ٢٩٠
٥-٢-٣-٤. الجريان الصفحي في أنبوب..... ٢٩٤
٥-٢-٣-٥. الجريان بين أسطوانتين متداخلتين تدوران بسرعتين زاويتين مختلفتين..... ٢٩٧
٥-٣. الجريان المضطرب..... ٣٠٠
٥-٣-١. وصف الجريان المضطرب - تأرجح السرعة..... ٣٠٠

٥-٣-٢. إجهادات القص في الجريان المضطرب..... ٣٠٣
٥-٣-٣. المعادلات التفاضلية العامة للجريان المضطرب- معادلات (نافييه-ستوكس-رينولدز)- إجهادات رينولدز..... ٣٠٥
٥-٣-٤. نماذج الاضطراب..... ٣٠٨
٥-٣-٤-١. نموذج براندتل..... ٣٠٩
٥-٣-٤-٢. نموذج كارمن..... ٣١١
٥-٣-٤-٣. نموذج تايلور..... ٣١٢
٥-٣-٤-٤. نموذج بوسينيسك..... ٣١٢
٥-٣-٤-٥. نماج أخرى..... ٣١٣
مسائل محلولة حول الفصل الخامس..... ٣١٤
مسائل غير محلولة حول الفصل الخامس..... ٣٢٣
الفصل السادس: معادلةكمية الحركة ٣٢٥
٦-١. تمهيد..... ٣٢٥
٦-٢. معادلة كمية الحركة للجريان أحادي البعد..... ٣٢٥
٦-٣. معادلة كمية الحركة للجريانات ثنائية وثلاثية البعد..... ٣٢٧
٦-٤.تطبيقات معادلة كمية الحركة..... ٣٢٩
٦-٤-١. القوة المؤثرة من تيار يصطدم بصفيحة..... ٣٢٩
٦-٤-٢. القوة المؤثرة على الأنابيب..... ٣٣٢
٦-٤-٣. القوة المؤثرة على ريشة..... ٣٣٦
٦-٤-٣-١. القوة المؤثرة على ريشة ثابتة..... ٣٣٦
٦-٤-٣-٢. القوة المؤثرة على ريشة متحركة..... ٣٣٨
مسائل محلولة حول الفصل السادس..... ٣٤٠

مسائل غير محلولة حول الفصل السادس..... ٣٦٥
الفصل السابع: الطبقة الحدية..... ٣٧٥
٧-١. مفهوم الطبقة الحدية..... ٣٧٥
٧-٢. خصائص الجريان في الطبقة الحدية..... ٣٧٦
٧-٣. سماكة الطبقة الحدية..... ٣٧٨
٧-٤. المعادلة التكاملية لكمية الحركة..... ٣٨١
٧-٥. استخدام المعادلة التكاملية لكمية الحركة..... ٣٨٤
٧-٦. انفصال الطبقة الحدية..... ٣٩٦
٧-٧. معادلات الطبقة الحدية..... ٣٩٨
٧-٧-١. معادلات الطبقة الحدية الصفحية – معادلات براندتل.... ٣٩٨
٧-٧-٢. معادلات الطبقة الحدية المضطربة..... ٣٩٨
٧-٨. الجريان حول الأجسام..... ٤٠١
٧-٨-١. تمهيد..... ٤٠١
٧-٨-٢. قوة الإعاقة..... ٤٠١
٧-٨-٢-١. الجريان يوازي صفيحة مستوية ملساء..... ٤٠٣
٧-٨-٢-٢. الجريان بشكل عمودي على صفيحة مستوية ملساء..... ٤٠٩
٧-٨-٢-٣. الجريان حول كرة ملساء..... ٤١٠
٧-٨-٢-٤. الجريان حول أسطوانة ملساء..... ٤١١
٧-٨-٢-٥. الجريان حول الجناح ذو الشكل المتناظر..... ٤١١
٧-٨-٢-٦. الجريان حول سفينة..... ٤١٢
٧-٨-٢-٧. الجريان حول أجسام مختلفة..... ٤١٣

٧-٨-٣. قوة الرفع..... ٤١٧
مسائل محلولة حول الفصل السابع..... ٤٢٠
مسائل غير محلولة حول الفصل السابع..... ٤٤١
الفصل الثامن: الجريان في الأنابيب وشبكات المياه ٤٤٧
٨-١. تمهيد..... ٤٤٧
٨-٢. لمحة تاريخية..... ٤٤٧
٨-٣. عدد رينولدز في الأنابيب..... ٤٤٩
٨-٤. معادلة كمية الحركة للجريان في الأنابيب..... ٤٥٠
٨-٥. الجريان الصفحي في الأنابيب..... ٤٥٢
٨-٥-١. معادلة هاجن بواسوي..... ٤٥٢
٨-٥-٢. الجريان الصفحي عند مدخل أنبوب..... ٤٥٥
٨-٦. الجريان المضطرب في الأنابيب..... ٤٥٨
٨-٧. الأنابيب الملساء والأنابيب الخشنة..... ٤٦٣
٨-٨. معادلة الطاقة في الأنابيب..... ٤٦٦
٨-٩. حساب فواقد الطاقة..... ٤٦٧
٨-٩-١. فواقد الاحتكاك في الأنابيب– معادلة (دراسي–فايسباخ) ٤٦٧
٨-٩-١-١. معامل الاحتكاك للجريان الصفحي..... ٤٦٩
٨-٩-١-٢. معامل الاحتكاك للجريان المضطرب..... ٤٦٩
٨-٩-١-٣. علاقات تجريبية ومخططات لحساب فواقد الاحتكاك..... ٤٧٥
٨-٩-٢. الفواقد المحلية..... ٤٧٩
٨-٩-٢-١. التوسع المفاجئ في المقطع..... ٤٨٠

٨-٩-٢-٢. الجريان من أنبوب إلى خزان..... ٤٨٣
٨-٩-٢-٣. التضيق المفاجئ في المقطع..... ٤٨٣
٨-٩-٢-٤. الجريان من خزان إلى أنبوب..... ٤٨٥
٨-٩-٢-٥. معامل الفواقد المحلية لملحقات الأنابيب..... ٤٨٥
٨-١٠. وصل الأنابيب على التسلسل والتوازي..... ٤٨٩
٨-١٠-١. ثابت مقاومة أنبوب..... ٤٨٩
٨-١٠-٢. المنحني المميز للأنبوب..... ٤٩٠
٨-١٠-٣. الأنابيب المكافئة..... ٤٩١
٨-١٠-٤. الأنبوب المكافئ لمجموعة من الأنابيب الموصولة على التسلسل..... ٤٩١
٨-١٠-٥. الأنبوب المكافئ لمجموعة من الأنابيب الموصولة على التوازي..... ٤٩٣
٨-١١. مسألة الخزانات الثلاثة..... ٤٩٥
٨-١٢. شبكات الأنابيب..... ٤٩٦
٨-١٢-١. تمهيد..... ٤٩٦
٨-١٢-٢. حل شبكات الأنابيب بطريقة هاردي-كروس..... ٥٠٠
مسائل محلولة حول الفصل الثامن..... ٥٠٢
مسائل غير محلولة حول الفصل الثامن..... ٥٤٠
جدول التحويلات من الواحدات الإنكليزية إلى الواحدات الدولية..... ٥٤٧
معجم المصطلحات..... ٥٤٩
المراجع المستخدمة..... ٥٥٩

المقدمة

نضع بين أيدي طلابنا الأعزاء وزملائنا المهندسين، كتاباً جامعياً ومرجعاً يعدّ من العلوم الهامة في الهندسة المدنية بشكل عام، والحجر الأساس للهندسة المائية بشكل خاص. فالهيدروليك علم واسع جداً، ويتناول مواضيع عديدة. إنه يضع القوانين الفيزيائية والرياضية لحركة السوائل وتوازنها، وهذا يزود المهندس في فهم الظواهر الهيدروليكية وتحليلها، ويشكل قاعدة أساسية للاستخدام في تصميم السدود والمنشآت المائية والأقنية ومحطات الضخ وشبكات المياه والصرف الصحي والمرافئ البحرية وشبكات الري وغيرها من المشاريع.

يتألف الكتاب من ثمانية فصول. تناول الفصل الأول شرح المفاهيم الأساسية لعلم الهيدروليك، ولاسيّما الخواص الفيزيائية للسوائل. وخُصص الفصل الثاني لدراسة توازن السوائل، فاستنتجت القوانين العامة للتوازن، وأسس حساب الضغوط الساكنة المؤثرة على الأجسام المغمورة كلياً وجزئياً. أما الفصل الثالث فخصص للتعرف إلى المفاهيم الأساسية الفيزيائية المتعلقة بحركة السوائل. وتناول الفصل الرابع دراسة الجريان المثالي، وتم فيه التركيز على معادلة الطاقة وتطبيقاتها لما لها من أهمية كبيرة واستخدامات متعددة. وفي الفصل الخامس تم بإيجاز إلقاء الضوء على الجريان الحقيقي بنوعية الصفحي والمضطرب، والتفصيل في دراسة الطبيعة الفيزيائية لهذين الجريانين، ووضعت المعادلات الخاصة بهما. وقد خصص الفصل السادس لمعادلة كمية الحركة وتطبيقاتها. وتم التطرق بالتفصيل لكيفية حساب القوى المؤثرة على الأنابيب والصفائح. أما الفصل السابع فخصص لموضوع حديث قياساً إلى باقي علوم الهيدروليك الأخرى وهو الطبقة الحدية. وحاولنا أن نهتم بالجوانب التطبيقية للطبقة الحدية، لندرة هذا الموضوع في المراجع العربية. أما الفصل الثامن والأخير فتناول وبشيء من التفصيل موضوعاً هاماً جداً للمهندس المدني، وهو الجريان في الأنابيب وشبكات المياه. حيث عرضت علاقات كثيرة وجداول عديدة تفيد المهندس في التصميم الهيدروليكي للأنابيب وشبكات المياه.

ولفهم موضوعات الكتاب كافة بشكل أمثل، فقد تم تزويدها بعدد كبير من الأمثلة والمسائل المحلولة وغير المحلولة. ولقد حاولنا أن تكون المسائل عملية ومتنوعة، وهذا يساعد الطالب والمهندس على حد سواء في استيعاب القوانين الهيدروليكية واستخدامها في التطبيقات العملية.

ولقد استخدمت في الكتاب مراجع أمريكية وإنكليزية وبولندية عديدة وحديثة. وتمت الاستعانة بالعديد من المسائل والرسومات من هذه المراجع. ونخص بالذكر: *Fundamental of Fluid Mechanics* للمؤلفين *Munson, Young ,Okiishi* من جامعة *Iowa* في أمريكا، و *Introduction to Fluid Mechanics* لمؤلفيه *Fox, McDonald* من جامعة *Purdue*، و *Hydraulics in Civil and Environmental Engineering* لمؤلفيه *Chadwick* من جامعة *Plymouth* في بريطانيا و *Morfett* من جامعة *Brighton* في بريطانيا، وكتاب *Michanika Plynow w Przykladach* للبروفيسور البولندي *Burka*.

وأخيراً نأمل أن يكون هذا الكتاب عوناً لأعزائنا الطلاب، ومرجعاً غنياً لزملائنا المهندسين. كما نأمل أن يكون خير رافد لمكتبتنا العربية في هذا الموضوع، وقد بذلنا فيه من الجهد ما يجعله سهل المأخذ محكم التبويب يليق بالمكانة العلمية لجامعة دمشق الحبيبة.

و الله ولي التوفيق

دمشق في ٢٠٠٥/٤/٢٠

المؤلفان

وائل جميل معلا أمجد سعيد زينو

الفصل الأول

مفاهيم أساسية في الهيدروليك
FUNDAMENTAL CONCEPTS IN HYDRAULICS

١-١. مقدمة Introduction

علم ميكانيك الموائع ***Fluid Mechanics*** هو علم يعنى بدراسة سلوك الموائع من سوائل وغازات في حالة الحركة وفي حالة السكون. وهو علم واسع جداً يبدأ من دراسة حركة الدم في الشرايين الشعرية داخل جسم الإنسان، إلى تدفق النفط ضمن أنابيب طويلة جداً وصلت في منطقة ألاسكا حتى *800mile*. ويمكن لعلم ميكانيك الموائع أن يجيب على كثير من التساؤلات التي تصادف يومياً مثل:

- لماذا يرتفع ضغط الدم عند الإنسان المصاب بتصلب أو تضيق في الشرايين؟
- لماذا تتشكل دوامة على سطح الماء في حوض الغسيل أثناء تفريغه؟
- لماذا تتحرك قطرة الماء على زجاج نافذة الغرفة وفق مسار متعرج وليس وفق مستقيم شاقولي؟
- كيف يجري الماء في قناة أو نهر بسرعة صغيرة نسبياً مقابل ميل طولي قليل جداً، ولا يحصل ذلك عندما يجري الماء في الأنابيب؟
- لماذا يتم طهي الطعام بسرعة في وعاء ضغط البخار؟
- لماذا يعاني الإنسان من صداع في الرأس، وطنين في الأذنين عندما يذهب إلى المناطق المرتفعة جداً؟
- لماذا يرتفع الزئبق في مانومتر جهاز قياس ضغط الدم عند الإنسان؟
- ما الذي يجعل الماء يخرج من الصنبور في الطوابق السفلية من الأبنية العالية بسرعة أكبر من خروجه في الطوابق العلوية من ذات الأبنية؟!

- كيف نشاهد الطائرات السريعة جداً على ارتفاع منخفض تعبر فوق رؤوسنا أولاً ثم يصل الصوت إلينا بعد فترة وجيزة؟
- كيف يمكن للسفينة أن تطفو فوق سطح الماء؟

وهناك العديد، العديد من الأسئلة التي تبين الأهمية الكبيرة لعلم ميكانيك الموائع، والمجال الواسع لتطبيقاته.

١-٢. طبيعة المائع Fluid Nature

المائع ***Fluid*** هو مادة يمكن لها أن تتدفق. أي أن لكل جزيء من جزيئاتها القدرة على الحركة النسبية بالنسبة لجزيء آخر. وهو لا يمتاز بالمرونة تجاه إجهادات القص التي يتعرض له. لذلك فهو يتشوه تحت تأثيرها، ولا يملك إمكانية الرجوع إلى هيئته الأصلية عند زوال هذا التأثير.

يمكن تقسيم الموائع إلى قسمين:

- **السوائل**: لها حجم ثابت من أجل كتلة معينة وقابليتها للانضغاط ضئيلة، وتشكل دوماً سطحاً حراً (سائباً) فيما لو تم حصرها في وعاء.
- **الغازات**: تتميز بقابليتها للانضغاط، وفي حال حصرها ضمن وعاء تتمدد لتملأ كامل الوعاء دون أن تشكل سطحاً سائباً محدداً.

يبدو للوهلة الأولى أن هناك اختلافاً كبيراً بين السوائل والغازات، وبخاصة بسبب الفرق الكبير في الكتلة النوعية التي تكون في السوائل أكبر بمئات أو بآلاف المرات منها في الغازات. إلا أن مواصفات جريان الهواء في أنبوب تشبه إلى حد كبير مواصفات جريان الماء فيه، كذلك فإن جريان ماء البحر حول الغواصة يشبه جريان الهواء حول الطائرة، كما أن النماذج الفيزيائية للغواصات تجرب في أنفاق هوائية عوضاً عن الماء.

١-٣. الهيدروليك Hydraulics

ميكانيك السوائل ***Liquid Mechanics*** أو **الهيدروليك** ***Hydraulics*** هو فرع من ميكانيك الموائع يهتم بحركة وتوازن السوائل فقط، ويعتمد في تحليل سلوك سائل

معين على القوانين الأساسية للميكانيك التطبيقي، مثل معادلات انحفاظ الكتلة والطاقة وكمية الحركة وغيرها من المفاهيم والمعادلات، التي سبق للطالب التعرف عليها في **ميكانيك الجسم الصلب** ***Solid Mechanics***.

غير أن هناك خاصتين رئيستين لميكانيك السوائل (الهيدروليك) تختلف فيهما عن ميكانيك الأجسام الصلبة. الأولى تتعلق بطبيعة السائل نفسه وصفاته التي تختلف اختلافاً كبيراً عن تلك العائدة للجسم الصلب. والثانية تكمن في أنه بدلاً من التعامل مع أجسام منفردة أو عناصر محدودة الكتلة، فنحن نكون معنيين بدراسة سلوك جريان سائل مستمر بدون بداية أو نهاية.

يهتم المهندسون المدنيون غالباً بسائل وحيد هو الماء. حيث تخدم التجمعات السكنية بشبكات مياه الشرب والصرف الصحي، وتزود الحقول بشبكات الري، وتبنى السدود للري ودرء الفيضانات وتوليد الكهرباء، وتقام محطات الضخ لرفع المياه إلى مناسيب مرتفعة، وتنقل المياه لمسافات بعيدة في الأنابيب والأقنية المكشوفة، .....الخ.

١-٤. لمحة تاريخية عن الهيدروليك History of Hydraulics

الهيدروليك علم قديم جداً. فقد عرف المصريون والبابليون بناء أقنية الري، ولازالت النواعير شاهداً على اهتمام وتقدم الرومان في هذا المجال. غير أنه في ذلك الوقت لم تبذل أية محاولات لفهم قوانين حركة السوائل. ولعل أولى المحاولات الملحوظة لفهم طبيعة ضغط السائل ونماذج الجريان تلك التي قام بها اليونانيون، حيث تم وضع قوانين توازن السوائل والطفو. فقام ***Hero, Ctesibius*** بتصميم معدات هيدروليكية مثل المضخة المكبسية والساعة المائية، وقام **أرخميدس** باختراع **مضخته الحلزونية** ***Archimedean Screw***. لكن الملاحظ أن الرومان وكذلك المصريين قد أبدوا اهتماماً أكبر بالنواحي التطبيقية والإنشائية للهيدروليك من النواحي النظرية.

استمر التقدم بعد ذلك بشكل بطيء لحين حلول عصر النهضة الأوروبية حين بدأ علماء كبار مثل الإيطالي **ليوناردو دافنتشي** ***Leonardo De Vinci (1452-1519)*** بنشر نتائج ملاحظاتهم، والأفكار التي ظهرت في تلك الفترة تخص مبدأ انحفاظ الكتلة

واستمرارية الجريان، ومقاومة الاحتكاك، وسرعة الموجات الصوتية التي مازالت مطبقة حتى الآن. بعد ليوناردو دافنتشي وغاليلو شهدت المدرسة الإيطالية تطوراً كبيراً في القرنين السادس عشر والسابع عشر. فقد قام **توريشيلي** ***Evangelista Torricelli*** وزملاؤه بدراسة سلوك التيارات المائية، وقارنوا بين المسار الذي يتبعه تيار حر وحركة القذائف، ونسبوا سرعة خروج التيار إلى الجذر التربيعي للضغط المسبب للجريان. كذلك قام ***Guglielmini*** وزملاؤه بنشر نتائج ملاحظاتهم عن جريان الأنهار. حتى هذا الوقت لم يلعب علم الرياضيات أي دور هام في هذا الحقل من العمل العلمي، وكانت الرياضيات حينها مقتصرة على مبادئ الهندسة المستوية.

شهد القرن السابع عشر ظهور عدد من العلماء اللامعين جداً. حيث قام الفرنسيان **ديكارت** ***Descart (1564-1642)*** **وباسكال** ***Pascal (1623-1662)*** وكل من الباحثين الإنكليز **اسحق نيوتن** ***Newton (1642-1727)*** **وروبرت بويل** ***Boyle (1627-1691)*** **وروبرت هوك** ***Hook (1635-1703)*** والألماني **ليبنتز** ***Leibnitz (1646-1716)***، بوضع أسس علمي الرياضيات والفيزياء الحديثين. وقد مكن ذلك الباحثين من إدراك مختلف أوجه علم الميكانيك بشكل منطقي أفضل، وعلى هذا الأساس وضع أربع رواد عظام هم: السويسري **دانييل برنوللي** ***Bernoulli (1700-1782)*** وصديقه **ليونارد أولر** ***Euler (1707-1783)***، **ودالامبير** ***Dalembert***، **وكليرو** ***Clairaut*** العلم الأكاديمي المعروف باهيدروديناميك أو تحريك السوائل، الذي جمعوا فيه ما بين إطار رياضي صحيح وإدراك مرهف للظاهرة الفيزيائية التي كانو يحاولون تمثيلها.

في القرن الثامن عشر أحرز تقدم آخر في كل من الناحيتين التجريبية والتحليلية. ففي إيطاليا على سبيل المثال قام **بوليني** ***Poleni*** بتحري مفهوم معاملات التصريف. غير أنه في ذلك الوقت كانت الريادة للمفكرين الألمان والفرنسيين. فقد أنشأ الفرنسي **هنري بيتو** ***Pitot (1695-1771)*** أنبوباً لقياس سرعة الجريان. ووضع الفرنسي **أنطوان شيزي** ***Chezy (1718-1798)*** معادلة الجريان في الأقنية، وقدم كل من القبطان **بوردا** ***Borda*** **وديبوي** ***Dubuat*** **وبوسي** ***Bossut*** مساهمات كبيرة في نشر حركة

التيارات المائية. ثم جاء **ولتمان** ***Waltman*** **وفنتوري** ***Venturi*** فاستخدما عمل برنوللي منطلقاً لوضع مبادئ قياس التصريف.

شهد القرن التاسع عشر فترة تقدم أخرى. حيث قام الباحث الألماني **هاجن** ***Hagen (1797-1884)*** بتجارب مخبرية لتحري تاثير الحرارة على الجريان في الأنابيب، وكان فهمه لطبيعة لزوجة المائع مقتصراً على أفكار نيوتن، ومع ذلك تجلت دقة عمله في أن نتائجه تقع ضمن 1% من القياسات الحديثة، وقد حقن في بعض تجاربه نشارة الخشب في السائل للتمكن من تصوير الجريان. وربما كان هاجن الأول الذي يتعرف على ظاهرة الاضطراب ***Turbulence***، رغم عدم فهمه الكامل حينها لهذه الظاهرة. في الوقت نفسه تقريباً كان طبيب فرنسي يدعى بواسوي ***Poiseuille (1799-1869)*** يقوم أيضاً بإجراء تجارب على الجريان في الأنابيب لفهم طبيعة الجريان في الأوعية الدموية، وقد أدت دراساته إلى ظهور معادلات الجريان الصفحي في الأنابيب. وقد جرت في نفس الإطار مساهمات أخرى كبيرة من قبل كل من: الألماني **فايسباخ** ***Weisbach*** **وبريس** ***Bress*** **ودارسي** ***Darcy*** الذين وضعوا معادلات لحساب فواقد الاحتكاك في الأنابيب والأقنية المكشوفة. وفي النصف الثاني من القرن التاسع عشر حدثت تطورات هامة في الهيدروليك التجريبي. فقد نجح العالم الإنكليزي **أوزبورن رينولدز** ***Osborn Reynolds (1842-1912)*** في تحديد مختلف أنواع الجريان، وفي التمييز ما بين الجريان الصفحي والجريان المضطرب، ولا زالت تجربته الشهيرة المتعلقة بذلك هي الأساس في مراقبة نوع الجريان. كما قام الإنكليزي **وليام فراود** ***William Froude (1810-1879)*** ببناء أول خزان قطر لاختبار نماذج حركة السفن.

حتى هذه المرحلة، كانت دراسات جريان السوائل تقسم إلى: الهيدروديناميك الكلاسيكي الذي كان يعتمد الرياضيات أساساً لتحليل الظواهر المدروسة، مع اهتمام ضئيل بالنواحي التجريبية لتفسير هذه الظاهرة. والهيدروليك التجريبي. وقد ساهم الرياضي الفرنسي **نافييه** ***Navier (1758-1836)*** والإنكليزي السير ستوكس ***Stocks (1819-1903)*** وغيرهم من الهيدروديناميكيين في وضع كم هائل من المعادلات والطرائق الرياضية، مثل معالادت نافييه-ستوكس الشهيرة التي تعتبر المعادلات

الأساسية للجريانات الحقيقية. غير أن عملهم لم يتوافق مع الهيدروليكيين التطبيقيين إلا بشكل متقطع. وبالفعل كان هناك تباين ما بين النتائج المقترحة من قبل المدرستين.

تطلب النمو السريع للصناعة في القرنين التاسع عشر والعشرين، وبخاصة صناعة الطائرات والسيارات حاجة كبيرة لفهم ظاهرة جريان الموائع. وقد جاء التقدم الهائل مع العالم الألماني الكبير **براندتل** ***Prandtl (1875-1953)***، الذي اقترح عام ١٩٠١ أن الجريان ينقسم إلى قسمين يرتبطان ببعضهما ارتباطاً وثيقاً. جريان السائل الحر الذي يمكن اعتباره لا احتكاكياً ويتبع قوانين الهيدروميكانيكيين، والجريان في الطبقة الحدية حيث تسيطر قوى الاحتكاك. وبهذه البصيرة النابغة، استطاع براندتل فعلياً دمج المدرستين معاً واضعاً بذلك الأساس لتطور علم ميكانيك السوائل الموحد.

شهد القرن العشرين تبعاً لذلك تطوراً واسعاً في فهم وتطبيق علم ميكانيك السوائل في جميع فروع الهندسة تقريباً. وقد قام براندتل والعالم المجري الكبير **فون كارمن** ***Von Karmen (1881-1963)*** بنشر عدد كبير من الأبحاث العلمية في العشرينات والثلاثينات من القرن العشرين غطت مختلف أوجه موضوع **الطبقة الحدية** ***Boundary Layer*** وظاهرة **الاضطراب** ***Turbulence*** ، وقد دعم عملهم بأبحاث مخبرية متزايدة في التعقيد. وكان لهذه الجهود وقع كبير على جميع أوجه الهيدروليك الهندسي. ففي الثلاثينات من القرن العشرين وبخاصة مع انتشار صناعة الأنابيب وبدأ نقل المياه، استطاعت جهود **نيكورادسي** ***Nikuradse*** في ألمانيا و**مودي** ***Moody*** في الولايات المتحدة الأمريكية و**كولبروك** ***Colbrook*** في بريطانيا وغيرهم، تقديم فهم أوضح للجريان في الأنابيب وبالأخص العوامل المؤثرة على الاحتكاك في الأنابيب والأقنية.

منذ عام ١٩٤٥ وحتى الآن أحدث الحاسوب ونظم القياسات الإلكترونية ثورة حقيقية في العديد من أوجه الهيدروليك. وقد تعمق فهمنا باستمرار لمسائل الجريانات المستقرة وغير المستقرة ولحركة الرسوبيات. وبعد ظهور نظرية العناصر المحدودة ***Finite Element Method*** في النصف الثاني من القرن العشرين، ومع التطور الهائل في سعة الحواسيب في التسعينات منه وبداية القرن الحادي والعشرين، استطاع الباحثون

حل معادلات نافييه-ستوكس في الحالة ثلاثية البعد، واستطاعوا حل معالادت الجريان المضطرب في بعض الحالات والتي كان التفكير بحلها مجرد حلم. كما ساعد ظهور أجهزة الليزر الدقيقة جداً في قياس سرع الجريان للجريانات المضطربة في فهم الطبيعة المعقدة جداً لهذا الجريان، ومقارنة النتائج التجريبية مع الحلول العددية لحل معادلات نافييه-ستوكس-رينولدز.

١-٥. الأبعاد والواحدات Dimensions and Units

١-٥-١. نظم الأبعاد Systems of Dimensions

يمكن التعبير عن جميع **الكميات الفيزيائية** ***Physical Quantities*** بأبعاد **كالطول** ***Length*** **والزمن** ***Time*** **والكتلة** ***Mass*** **والحرارة** ***Temperature***. و تصنف الكميات الفيزيائية في زمرتين. الأولى هي **الكميات الأساسية** ***Primary Quantities*** وتضم الطول L والزمن T والكتلة M والحرارة. والثانية هي **الكميات الثانوية** ***Secondary Quantities*** المشتقة من الكميات الأساسية مثل: المساحة L^2، والحجم L^3، والسرعة $\frac{L}{T}$، والكتلة النوعية $\frac{M}{L^3}$، والقوة $\frac{M \cdot L}{T^2}$. فنقول إن أبعاد المساحة طول مربع، والحجم طول مكعب، والسرعة طول مقسم على زمن، والكتلة النوعية كتلة مقسم على طول مكعب، والقوة كتلة مضروبة بطول مقسم على مربع الزمن.

ويوجد عملياً نظامان للأبعاد:

- النظام الأول: هو نظام MLT ويشير إلى الكتلة M والطول L والزمن T، إضافة لدرجة الحرارة θ.
- النظام الثاني: هو نظام FLT ويشتق من النظام الأول ويشير إلى القوة F والطول L والزمن T، إضافة لدرجة الحرارة θ.

حيث أن أبعاد القوة حسب النظام الأول هي $F = \frac{M \cdot L}{T^2}$، وأبعاد الكتلة حسب النظام الثاني هي $M = \frac{F \cdot T^2}{L}$.

١-٥-٢. نظم الواحدات Systems of Units

يستعمل في الهندسة نظامان قياس هما: **النظام العالمي** أو المتري ***International System (SI)*** **والنظام البريطاني** ***British System (BS)***. حيث يعبر في النظام العالمي عن الطول بالمتر، والزمن بالثانية، والكتلة بالكيلو غرام، والقوة بالنيوتن، والعمل بالجول، والاستطاعة بالواط،والضغط بالباسكال.....الخ. وبالنسبة لدرجة الحرارة فيعبر عنها **بالكيلفن** ***Kelvin(K)*** ، الذي يعطى قيمته بالعلاقة:

$$K = C^{0} + 273.15 \qquad (١-١)$$

ورغم أن مقياس **سيليوس** ***Celsius (C^{0})*** لا ينتمي للواحدات الدولية إلا أنه يستخدم بشكل شائع ضمنها.

أما في النظام البريطاني فيعبر عن الطول بالقدم، والزمن بالثانية، والقوة بالباوند....الخ.

وسوف نستخدم في هذا الكتاب النظام العالمي لأنه الأكثر انتشاراً في المراجع. حيث الواحدات الأساسية هي المتر والثانية والكتلة، ويمكن اشتقاق كافة الواحدات الأخرى منها. فمثلاً: واحدة القوة في النظام العالمي هي نيوتن، وتساوي:

$$N = \frac{kg \cdot m}{s^2}$$

وواحدة الضغط هي باسكال، وتساوي:

$$Pa = \frac{N}{m^2} = \frac{kg}{m \cdot s^2}$$

وواحدة العزم هي الجول، وتساوي:

$$J = N \cdot m = \frac{kg \cdot m^2}{s^2}$$

وواحدة الإستطاعة هي الواط، وتساوي:

$$W = \frac{J}{s} = \frac{N \cdot m}{s} = \frac{kg \cdot m^2}{s^3}$$

يبين الجدول (١-١) بعض الكميات الفيزيائية وأبعادها في كل من النظامين MLT و FLT وواحداتها في النظام العالمي.

ولكل واحدة من الواحدات الدولية مضاعفات وأجزاء. ويبين الجدول (١-٢) هذه الأجزاء والمضاعفات.

الجدول (١-١). بعض الكميات الفيزيائية وأبعادها، وواحداتها في الجملة الدولية

الكمية الفيزيائية	نظام الأبعاد		الواحدة	
	MLT	FLT	MLT	FLT
الطول	L	L	m	m
الزمن	T	T	t	t
الكتلة	M	$FL^{-1}T^{2}$	kg	$N\cdot s^{2}/m$
القوة	MLT^{-2}	F	$kg.m/s^{2}$	N
الضغط-الإجهاد-معامل المرونة	$ML^{-1}T^{-2}$	FL^{-2}	$kg/(m\cdot s^{2})$	N/m^{2}
الاستطاعة	$ML^{2}T^{-3}$	FLT^{-1}	$kg\cdot m^{2}/s^{3}$	$N\cdot m/s$
العمل-العزم	$ML^{2}T^{-2}$	FL	$kg\cdot m^{2}/s^{2}$	$N\cdot m$
المساحة	L^{2}	L^{2}	m^{2}	m^{2}
الحجم	L^{3}	L^{3}	m^{3}	m^{3}
السرعة	L/T	L/T	m/s	m/s
السرعة الزاوية	T^{-1}	T^{-1}	rad/s	rad/s
التسارع	LT^{-2}	LT^{-2}	m/s^{2}	m/s^{2}
التسارع الزاوي	T^{-2}	T^{-2}	rad/s^{2}	rad/s^{2}
عزم العطالة	L^{4}	L^{4}	m^{4}	m^{4}
الكتلة النوعية	ML^{-3}	$FL^{4}T^{2}$	kg/m^{3}	$N\cdot s^{2}/m^{4}$
الوزن النوعي	$ML^{-2}T^{-2}$	FL^{-3}	$kg/(m^{2}\cdot s^{2})$	N/m^{3}
اللزوجة التحريكية	$ML^{-1}T^{-1}$	$FL^{-2}T$	$kg/m\cdot s$	$N\cdot s/m^{2}$
اللزوجة الحركية	$L^{2}T^{-1}$	$L^{2}T^{-1}$	m^{2}/s	m^{2}/s
الشد السطحي	MT^{-2}	FL^{-1}	kg/s^{2}	N/m

الجدول (١-٢). مضاعفات وأجزاء الواحدات الدولية

الرمز	الاسم	المعامل
T	tera	10^{12}
G	giga	10^{9}
M	mega	10^{6}
k	kilo	10^{3}
h	hecto	10^{2}
da	deka	10
d	deci	10^{-1}
c	centi	10^{-2}
m	milli	10^{-3}
μ	micro	10^{-6}
n	nano	10^{-9}
p	Pico	10^{-12}
f	femto	10^{-15}
a	atto	10^{-18}

١-٦. حقل الإجهادات Stresses Field

لنتخيل وجود سطح ما من سائل، كما في الشكل (١-١). ولنأخذ منه مساحة صغيرة δA، ولنفترض أن هذه المساحة تخضع لتأثير قوة مقدارها $\delta\vec{F}$. إن هذه القوة يمكن تحليلها إلى مركبين، الأولى δF_n عمودية على السطح، والثانية δF_t تقع في المستوي وتحلل بدورها إلى مركبتين $\delta F_1, \delta F_2$. هذه القوى الفاعلة في المساحة سوف تولد نوعين من الإجهادات، الأولى هي إجهادات ناظمية عمودية على السطح تساوي:

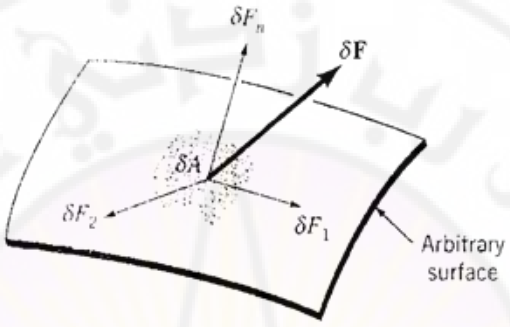
$$\sigma = \lim_{\delta A \to 0} \frac{\delta F_n}{\delta A} \qquad (١-٢)$$

والثانية إجهادات مماسية أو إجهادات قص تقع في المستوي، يمكن تحليلها إلى مركبتين هما:

$$\tau_1 = \lim_{\delta A \to 0} \frac{\delta F_1}{\delta A} \qquad (٣-١)$$

و:

$$\tau_2 = \lim_{\delta A \to 0} \frac{\delta F_2}{\delta A} \qquad (٤-١)$$



الشكل(١-١). مفهوم الإجهادات المؤثرة في سطح [6]

فلو درسنا الحالة في الإحداثيات الديكارتية، وأخذنا عنصراً مستوياً صغيراً مساحته δA_x موازياً للمستوي yoz وعمودياً على المحور x، كما في الشكل (١-٢). نلاحظ أن القوة المؤثرة في هذا المستوي يمكن تحليلها إلى ثلاث مركبات، المركبة الأولى δF_x عمودية على العنصر، والثانية δF_y تقع في مستوي العنصر وموازية للمحور y، والثالثة δF_z تقع في مستوي العنصر وموازية للمحور z. وينتج عن هذه المركبات الثلاث للقوة δF ثلاثة إجهادات، الأول هو إجهاد ناظمي عمودي على مستوي العنصر يساوي:

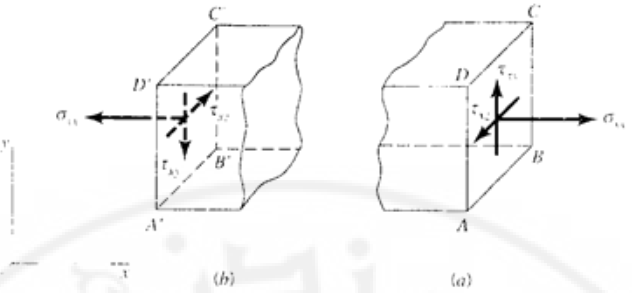
$$\sigma_{xx} = \lim_{\delta A_x \to 0} \frac{\delta F_x}{\delta A_x} \qquad (٥-١)$$

والثاني إجهاد مماسي يقع في مستوي العنصر ويوازي المحور y يساوي:

$$\tau_{xy} = \lim_{\delta A_x \to 0} \frac{\delta F_y}{\delta A_x} \qquad (٦-١)$$

والثالث إجهاد مماسي يقع في مستوي العنصر ويوازي المحور z يساوي:

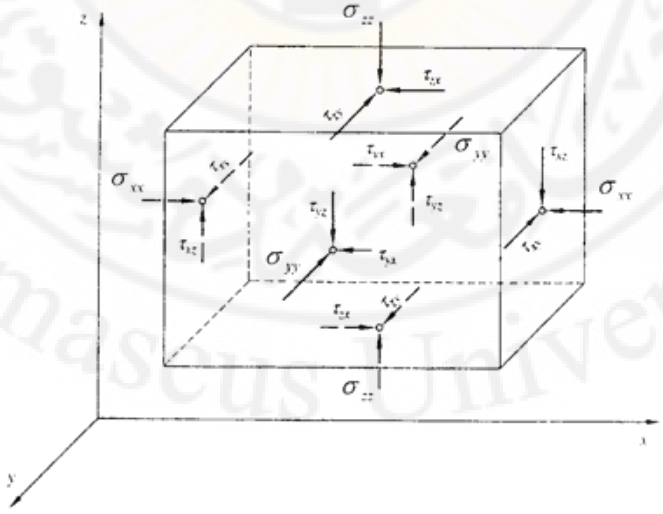
$$\tau_{xz} = \lim_{\delta A_x \to 0} \frac{\delta F_z}{\delta A_x} \qquad (٧-١)$$



الشكل(١-٢). مركبات القوة والإجهادات المؤثرة في عنصر مستوٍ [6]

لو أخذنا في الحالة الفراغية عنصراً حجمياً على شكل متوازي مستطيلات، كما في الشكل (١-٣)، أبعاده dx, dy, dz. فإننا بنفس المحاكمة السابقة نلاحظ أن هناك تسعة إجهادات تؤثر على وجوه المكعب هي: $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yx}, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{zy}$. ويتم التعبير عادة في المراجع عن هذه الإجهادات **بمصفوفة الإجهادات *Stresses Matrix*** كما يلي:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$



الشكل(١-٣). حقل الإجهادات في الحالة الفراغية [5]

١-٧. الخواص الفيزيائية للسائل Physical Properties of Liquid

١-٧-١. الكتلة النوعية (الكثافة) Density

وهي بالتعريف: كتلة واحدة الحجم من السائل، ويرمز لها بـ ρ، وتعطى بالعلاقة:

$$\rho = \frac{M}{\forall} \qquad (١-٨)$$

حيث: $M, \forall$ - كتلة السائل وحجمه على التوالي. ويعبر عن الكثافة في جملة الواحدات الدولية بالواحدة:

$$\rho = \frac{kg}{m^3} = kg/m^3$$

تتأثر الكتلة النوعية للغازات بشكل كبير بتغير درجة الحرارة والضغط المطبق، أما في السوائل فإن تأثيرهما يكون ضئيلاً جداً. فعلى سبيل المثال تبلغ الكتلة النوعية للماء $\rho = 1000 kg/m^3$ عند درجة الحرارة $C = 4^0$، وتصبح حوالي $\rho = 960 kg/m^3$ عند درجة الحرارة $C = 100^0$، كما يتضح من الشكل (١-٤).

في بعض المراجع وبخاصة الأمريكية يستخدم مفهوم **الثقالة النوعية** (SG) ***Specific Gravity*** أو **الكثافة النسبية** ***Relative Density***، والتي تساوي النسبة ما بين الكتلة النوعية للسائل و الكتلة النوعية للماء عند درجة الحرارة $4C^0$، أي أن:

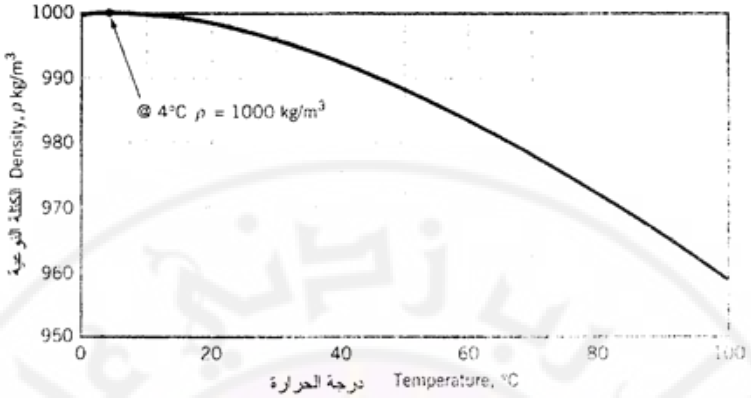
$$SG = \frac{\rho}{\rho_{H2O}}$$

وعلى سبيل المثال تبلغ الكثافة النوعية للماء:

$$SG_{Hg} = \frac{\rho_{H2o}}{\rho_{H2O}} = \frac{1000}{1000} = 1.0$$

و للزئبق:

$$SG_{Hg} = \frac{\rho_{Hg}}{\rho_{H2O}} = \frac{13600}{1000} = 13.6$$



الشكل(١-٤). تغير الكتلة النوعية (الكثافة) للماء مع درجة الحرارة [6]

١-٧-٢. الوزن النوعي Specific Weight

وهو بالتعريف: وزن واحدة الحجم من السائل ويرمز لـه بـ γ، ويعطى بالعلاقة:

$$\gamma = \frac{W}{\forall} \qquad (١-٩)$$

حيث: W، $\forall$ - وزن السائل وحجمه. ويعبر عن الوزن النوعي في جملة الواحدات الدولية بالواحدة:

$$\gamma = \frac{N}{m^3} = N/m^3$$

ويرتبط الوزن النوعي γ مع الكتلة النوعية ρ بالعلاقة:

$$\gamma = \rho \cdot g \qquad (١-١٠)$$

حيث: g - تسارع الجاذبية الأرضية.

إن الكتلة النوعية للسائل ρ قيمة مطلقة بالنسبة لسائل عند درجة حرارة معينة، حيث أنها تعتمد على الكتلة ولا تعتمد على الموقع. أما الوزن النوعي فهو على النقيض من ذلك، حيث أن قيمته تعتمد على تسارع الجاذبية الأرضية، لذلك فهو يتغير من موقع لآخر تبعاً لخط العرض والإرتفاع عن سطح البحر. وبافتراض أن تسارع الجاذبية الأرضية $g = 9.81 m/s^2$، فإن الوزن النوعي للماء عند درجة الحرارة

$C = 4^0$ يساوي:

$$\gamma = g \cdot \rho = 9.81 \cdot 1000 = 9810 N/m^3$$

١-٧-٣. اللزوجة Viscosity

اللزوجة ***Viscosity*** هي الخاصية التي يقاوم بها السائل قوى القص أو التشوه الزاوي الذي يتعرض لهما. وتتأثر لزوجة السائل تأثراً كبيراً بدرجة حرارته. فمع زيادة الحرارة تنخفض لزوجة جميع السوائل، لأن قوى التماسك تتناقص مع ارتفاع الحرارة. أما بالنسبة للغازات فالوضع عكس ذلك، حيث أن لزوجتها تزداد مع زيادة الحرارة، لأن العامل السائد هو تبادل الجزيئات بين الطبقات ذات السرعات المختلفة الذي يؤدي إلى توالد قوى قص فيما بينها، كما أن الزيادة في النشاط الجزيئي عند زيادة درجات الحرارة يسبب زيادة لزوجة الغازات.

لفهم موضوع لزوجة السائل واستنتاج العلاقات الخاصة به، نأخذ صفيحتين مستويتين متوازيتين، كما في الشكل (١-٥)، تفصلهما المسافة b. ونفترض أن الفراغ بينهما ممتلئ بسائل، ولنفترض أن الصفيحة السفلى ثابتة والعليا قابلة للحركة. ولنطبق قوة أفقية P على الصفيحة العليا تؤدي إلى تحريكها بسرعة مقدارها U.

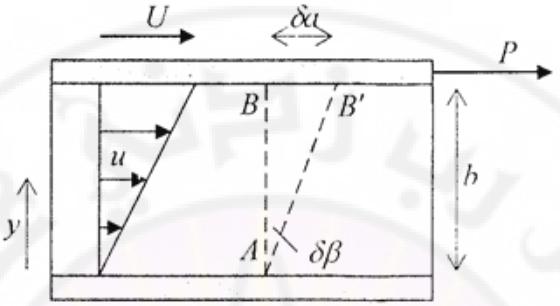
إن جزيئات السائل الملامسة لكل صفيحة تظل ملتصقة بها، أي يكون لجزيئات السائل الملامسة للصفيحة العليا نفس سرعتها U، بينما تبقى جزيئات السائل الملامسة للصفيحة السفلى ساكنة. أما بالنسبة لجزيئات السائل الموجودة بين الصفيحتين فسرعتها تتعلق بموضع الجزيء، أي ببعد الجزيء المدروس عن الصفيحة السفلى: $u = f(y)$، وتزداد السرعة كلما كان هذا الجزيء أقرب إلى الصفيحة المتحركة. ولقد وجد أن توزع سرعة جزيئات السائل بين الصفيحتين هو توزع خطي، يعبر عنه بالمعادلة التالية:

$$u = U \cdot \frac{y}{b} \qquad (١١-١)$$

بعد زمن قصير جداً δt من بداية تحريك الصفيحة العليا نجد أن الخط العمودي AB بين الصفيحتين سوف يتشوه، وسيدور بزاوية $\delta\beta$، وسينتقل إلى الوضع الجديد

AB' . ويكون التشوه الزاوي الحاصل مساوياً:

$$\tan \delta\beta \approx \delta\beta = \frac{\delta\alpha}{b} \qquad (١٢-١)$$



الشكل(١-٥). سلوك السائل المتوضع بين صفيحتين متوازيتين العليا متحركة والسفلى ثابتة

وبما أن $\delta\alpha = U \cdot \delta t$ ، لذلك يصبح التشوه الزاوي:

$$\delta\beta = \frac{U \cdot \delta t}{b} \qquad (١٣-١)$$

ويكون معدل التشوه الزاوي خلال الزمن هو:

$$\frac{\delta\beta}{\delta t} = \frac{d\beta}{dt} = \frac{U}{b}$$

أو:

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{U}{b} = \frac{du}{dy} \qquad (١٤-١)$$

لقد وجد أن إجهاد القص τ بين جزيئات السائل يكون تابعاً لمعدل التشوه الزاوي $\frac{d\beta}{dt}$ ، وبالتالي فهو تابع لتدرج السرعة أيضاً وفق العلاقة:

$$\tau = f(\frac{d\beta}{dt}) = f(\frac{du}{dy}) \qquad (١٥-١)$$

وقد تبين تجريبياً أن الإجهاد المماسي τ يتناسب وتدرج السرعة بشكل خطي لبعض أنواع السوائل كالماء والزيوت ، ومنه أمكن كتابة:

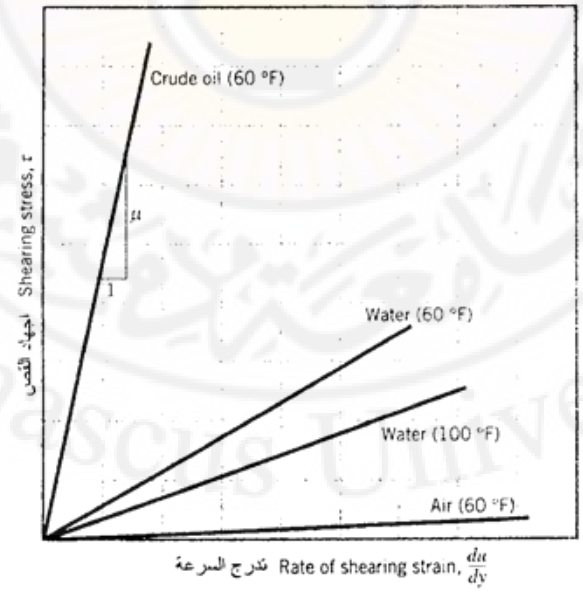
$$\tau \propto \frac{du}{dy} \Rightarrow \tau = \mu \cdot \frac{du}{dy} \qquad (١٦-١)$$

حيث: μ – معامل التناسب، ويدعى **اللزوجة التحريكية** ***Dynamic Viscosity***. وتسمى العلاقة السابقة قانون نيوتن. وبناء على ذلك يطلق على السوائل التي يتناسب فيها الإجهاد المماسي بشكل خطي مع تدرج السرعة **بالسوائل النيوتونية** ***Newtonian Fluids*** . ويبين الشكل (١-٦) العلاقة بين إجهاد القص وتدرج السرعة لبعض السوائل النيوتونية.

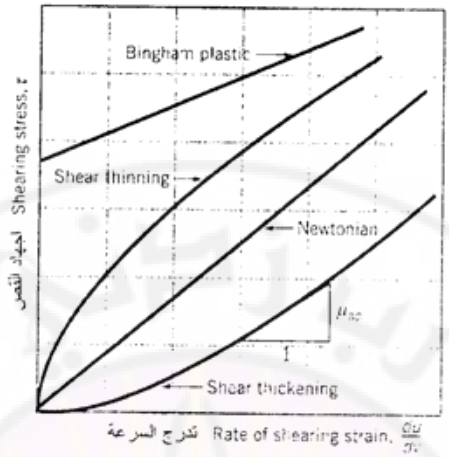
أما السوائل التي يكون فيها إجهاد القص تابعاً بشكل غير خطي لتدرج السرعة فتدعى **السوائل غير النيوتونية** ***Non-Newtonian Fluids*** ، لأنها لاتتبع قانون نيوتن، ويكون إجهاد القص من أجلها مساوياً:

$$\tau = k \cdot \left(\frac{du}{dy}\right)^n \qquad (١٧-١)$$

حيث: n, k هما معاملان يتعلقان بنوع السائل. وفي حالة السوائل النيوتونية يكون $n = 1, k = \mu$. ويبين الشكل (١-٧) العلاقة التي تربط بين إجهاد القص وتدرج السرعة لبعض النماذج من السوائل غير النيوتونية. مع التذكير هنا أن معظم السوائل التي يتعامل معها المهندس المدني هي سوائل نيوتونية.



الشكل(١-٦). العلاقة بين إجهاد القص وتدرج السرعة في بعض السوائل النيوتونية [6]



الشكل(١-٧). العلاقة بين إجهاد القص وتدرج السرعة في بعض نماذج السوائل غير النيوتونية [5]

اللزوجة التحريكية *Dynamic Viscosity*

يرمز لها كما وجدنا سابقاً بـــ μ. وتتغير اللزوجة التحريكية من سائل لآخر، كما تتغير في نفس السائل بتغير درجة الحرارة. يبين الشكل (١-٨) العلاقة التي تربط بين اللزوجة التحريكية لبعض السوائل والغازات ودرجة الحرارة. حيث يلاحـــظ أن اللزوجة التحريكية تتناقص بالنسبة للسوائل مع زيادة درجة الحرارة، وتزداد مع زيادة درجة الحرارة بالنسبة للغازات.

بالنسبة للسوائل النيوتونية يمكن استخدام العلاقة التجريبية التالية في حـــساب اللزوجة التحريكية لسائل ما عند درجة حرارة معينة:

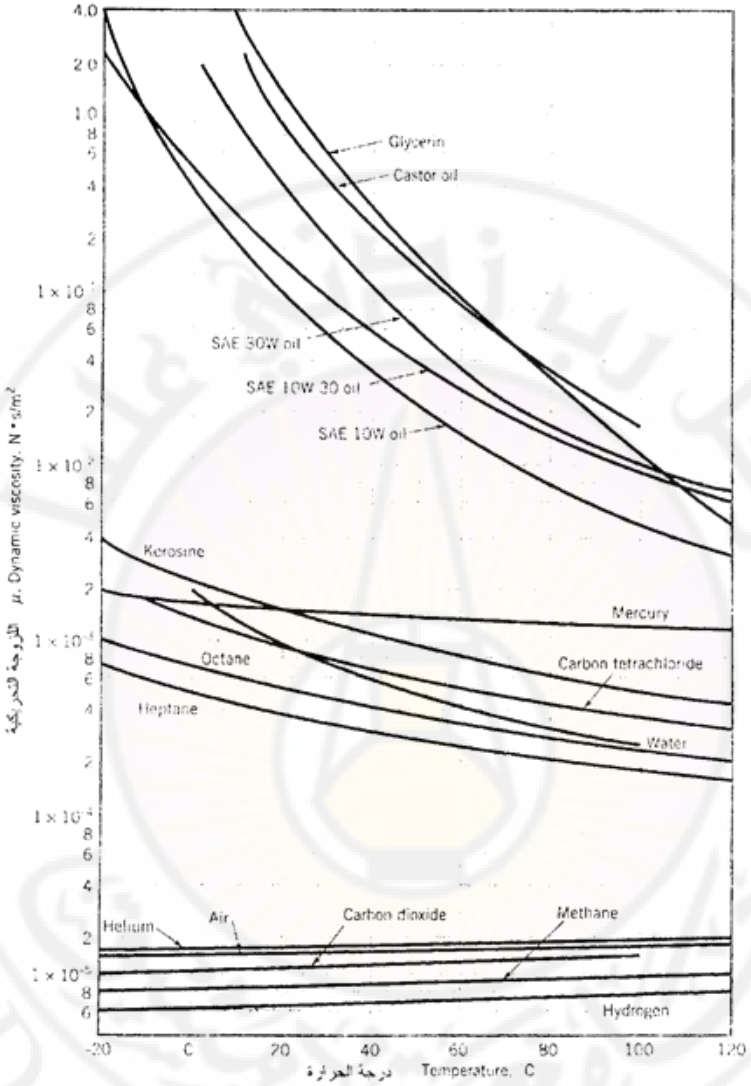
$$\mu = D \cdot e^{B/T} \qquad (١-١٨)$$

حيث أن:

- D, B : هي ثوابت تتعلق بنوع السائل.
- T :درجة الحرارة.

أما واحدات اللزوجة التحريكية فيمكن الحصول عليها من علاقة نيوتن:

$$\mu = \tau \cdot \frac{dy}{du} = \frac{\tau}{du/dy} = \frac{N/m^2}{m/s/m} = \frac{N \cdot s}{m^2} = \frac{kg}{m \cdot s}$$



الشكل(١-٨). العلاقة بين اللزوجة التحريكية μ ودرجة الحرارة لبعض أنواع السوائل والغازات [6]

اللزوجة الحركية *Kinematic Viscosity*

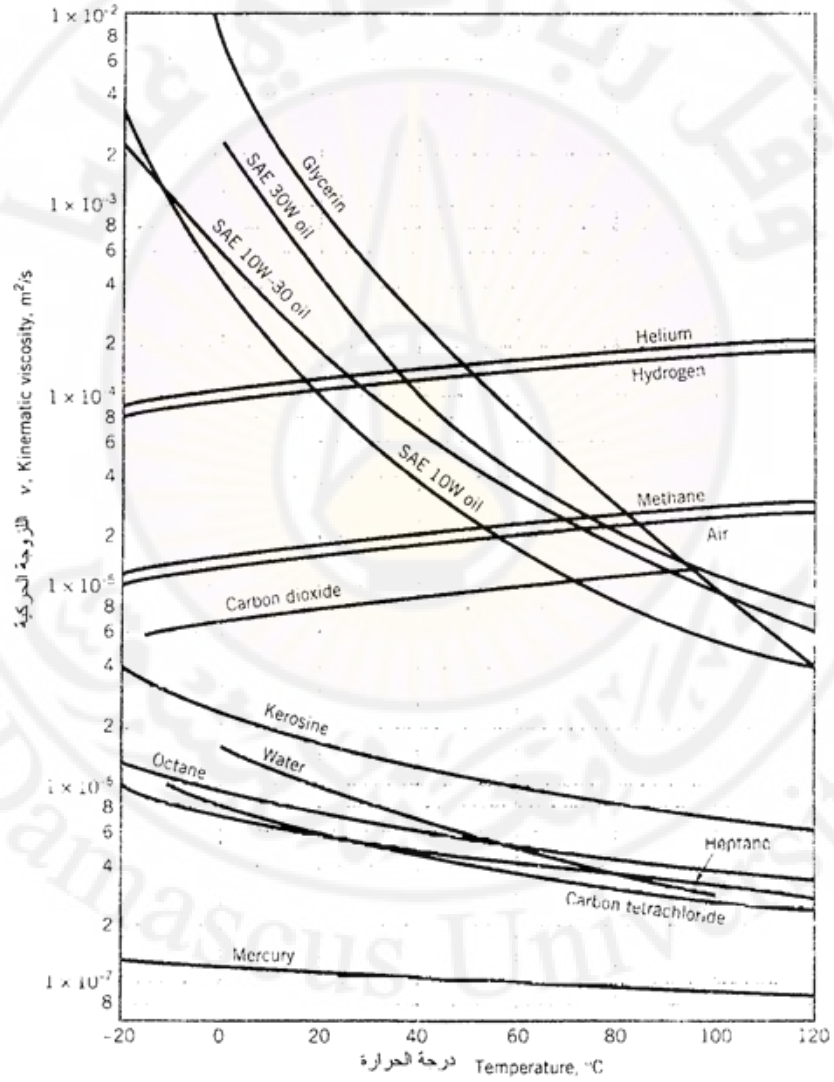
تدعى نسبة اللزوجة التحريكية للسائل إلى كتلته النوعية **باللزوجة الحركية** ***Kinematic Viscosity*** ، ويرمز لها بـ ν، وتعطى بالعلاقة:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \qquad (١٩-١)$$

أما واحدتها فهي:

$$\nu = \frac{\frac{kg}{m \cdot s}}{\frac{kg}{m^3}} = m^2 / s$$

ويبين الشكل (١-٩) اللزوجة الحركية لبعض السوائل والغازات.



الشكل(١-٩). العلاقة بين اللزوجة الحركية ν ودرجة الحرارة لبعض أنواع السوائل والغازات [6]

مثال ١-١

صفيحة متحركة علوية تبعد عن صفيحة سفلية ثابتة مسافة $0.5mm$، وتسير بسرعة مقدارها $0.25m/s$، فإذا علمت أنها تحتاج لإجهاد مقدارة $2N/m^2$ للمحافظة على هذه السرعة. فالمطلوب حساب اللزوجة التحريكية والحركية للسائل ذي الكتلة النوعية $\rho = 850kg/m^3$ الكائن بين الصفيحتين.

الحل:

يعطى إجهاد القص بالعلاقة:

$$\tau = \mu \cdot \frac{du}{dy}$$

ومنه:

$$\mu = \frac{\tau}{\frac{du}{dy}} = \frac{2}{\frac{0.25-0}{0.5\times10^{-3}}} = 4\times10^{-3}\,N\cdot s/m^2$$

أما اللزوجة الحركية، فتساوي:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} = \frac{4\times10^{-3}}{850} = 4.71\times10^{-6}\,m^2/s$$

١-٧-٤. التوتر السطحي Surface Tension

لنعتبر حجماً ما من سائل ساكن، ولندرس القوى المؤثرة في مختلف جزيئاته. فنجد أن كل جزيء من جزيئات السائل، يخضع لقوى تجاذب من قبل الجزيئات المجاورة. بالنسبة لجزيئات السائل الموجودة في عمق السائل مثل الجزيء A (الشكل ١-١٠)، تكون قوى التجاذب هذه متساوية ومتعاكسة في الاتجاه، وبالتالي فإن محصلتها معدومة. أما بالنسبة لجزيئات السائل الموجودة على السطح مثل الجزيء B فإنها تخضع لقوى مماسية تمس السطح تكون محصلتها معدومة، ولقوى ناظمية على السطح متجهة نحو الأسفل، وينتج عن ذلك توتر في سطح السائل يسمى **التوتر السطحي** ***Surface Tension***. يرمز له بـ σ أما واحدته فهي N/m.

لفهم موضوع التوتر السطحي نضع أبرة رفيعة جداً طولها L على سطح الماء

(الشكل ١-١١)، فنلاحظ أن هذه الإبرة تطفو على سطح السائل لأنها تتعرض لقوى تجاذب F_k من جزيئات السائل المجاورة، ويكون التوتر السطحي هو:

$$\sigma = \frac{F_k}{L} \qquad (٢٠-١)$$

إن هذه القوى تكون في حالة توازن مع وزن الإبرة G، وعليه يمكن أن نكتب:

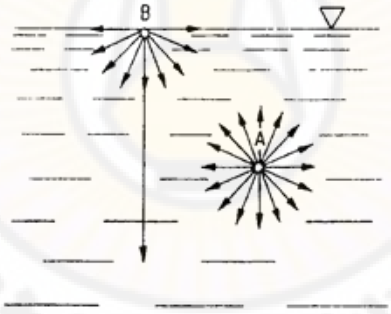
$$2 \cdot F_k \cdot \sin\alpha = G \qquad (٢١-١)$$

$$2 \cdot \sigma \cdot L \cdot \sin\alpha = G$$

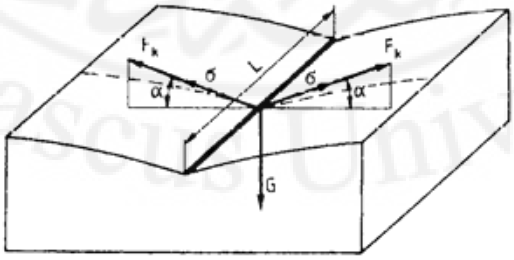
وبالتالي يكون التوتر السطحي:

$$\sigma = \frac{G}{2 \cdot L \cdot \sin\alpha} \qquad (٢٢\ ١)$$

تتغير قيم التوتر السطحي للسوائل بتغير درجة الحرارة. ويبين الجدول (١-٣) قيم التوتر السطحي للماء تبعاً لدرجة الحرارة. كما يبين الجدول رقم (١-٤) قيم التوتر السطحي لبعض السوائل عند درجة حرارة 4^0.



الشكل(١-١٠). شرح لمفهوم التوتر السطحي [6]



الشكل(١-١١). توازن الإبرة على سطح الماء بفعل التوتر السطحي [6]

الجدول(١-٣). قيم التوتر السطحي للماء في درجات حرارة مختلفة

درجة الحرارة	0	4	10	20	30	40	60	80	100
$\sigma(N/m)$	0.0756	0.0751	0.0743	0.0729	0.0712	0.0697	0.0663	0.0626	0.059

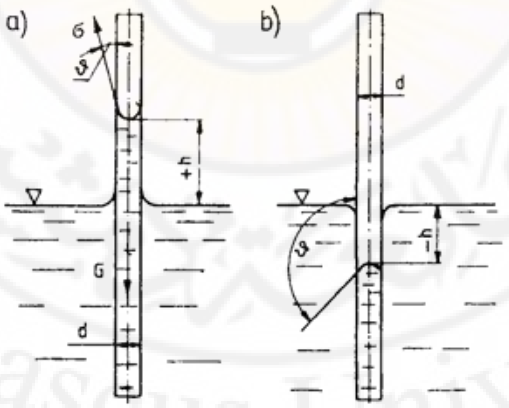
الجدول(١-٤). قيم التوتر السطحي لبعض السوائل عند درجة حرارة "4

السائل	ماء	بنزين	زنبق	كحول اتيلي	زيت زيتون
$\sigma(N/m)$	0.0751	0.030	0.450	0.0220	0.0320

١-٧-٥. الخاصية الشعرية Capillary

لنغطس أنبوباً رفيعاً مفتوحاً من جهتيه قطره d في حوض من الماء (الشكل١-١٢)، فنلاحظ أن الماء يرتفع في الأنبوب فوق سطح الماء بالمقدار h، وذلك بتأثر التوتر السطحي. إن القوى المؤثرة على عمود الماء الموجود في الأنبوب مع إهمال وزن عمود الهواء فوق الماء، هي:

- قوة يسببها التوتر السطحي على طول التصاق الهلال مع الأنبوب.
- وزن عمود الماء.



الشكل(١-١٢). تأثير الخاصية الشعرية في الأنابيب الرفيعة [6]

بما أن عمود الماء في حالة توازن لذلك فإن محصلة القوى المؤثرة عليه في الاتجاه الشاقولي يجب أن تكون معدومة، أي أن:

$$\gamma \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot h - \pi \cdot d \cdot \sigma \cdot \cos\vartheta = 0 \qquad (٢٣-١)$$

ومنه يكون ارتفاع الماء في داخل الأنبوب مساوياً:

$$h = \frac{4 \cdot \sigma \cdot \cos\vartheta}{\gamma \cdot d} \qquad (٢٤-١)$$

وفي حالة الماء تكون الزاوية α صغيرة جداً وبالتالي فإن $\cos\alpha \approx 1$، ومنه يمكن كتابة:

$$h = \frac{4 \cdot \sigma}{\gamma \cdot d} \qquad (٢٥-١)$$

مثال ١-٢

احسب ارتفاع الماء في أنبوب شعري قطره $d = 0.01mm$. إذا علمت أن $\sigma = 0.075N/m$.

الحل:

لدينا:

$$h = \frac{4 \cdot \sigma}{\gamma \cdot d}$$

وبالتعويض، نجد أن:

$$h = \frac{4 \cdot 0.075}{9810 \cdot 10^{-5}} = 3.06m$$

١-٧-٦. انضغاطية السائل Compressibility of Fluid

تعبر **انضغاطية السائل** ***Compressibility*** عن تغير حجمه نتيجة تغير الضغط المؤثر فيه. ولنفترض أن السائل قد تعرض لازدياد ضغط مقداره dp، فنتيجة لذلك سوف يتغير حجمه بالمقدار $d\forall$، حيث $\forall$ هو حجم السائل.

تدل التجربة أن ازدياد الضغط dp يتناسب مع التغير النسبي لحجم السائل. أي أن العلاقة التي تربط بين dp و $d\forall$ هي:

$$dp \propto \frac{d\forall}{\forall} \qquad (٢٦-١)$$

وبالانتقال لعلاقة المساواه يكون لدينا:

$$dp = -K \cdot \frac{d\forall}{\forall} \qquad (٢٧-١)$$

حيث: K - ثابت التناسب ويدعى بمعامل انضغاطية السائل، أما الإشارة السالبة فتوضح أن الحجم يتناقص بازدياد الضغط.

إن التغير في الحجم من أجل كتلة معطاة سوف ينتج عن التغير في الكتلة النوعية للسائل، وبالتالي يمكن كتابة العلاقة السابقة كما يلي:

$$dp = -K \cdot \frac{d\rho}{\rho} \qquad (٢٨-١)$$

إن الانضغاطية هي خاصية تتميز بها الغازات بشكل واضح. أما السوائل فإن قابليتها للإنضغاط ضعيفة جداً وهي مهملة في أغلب الأحيان باستثناء بعض الظواهر الخاصة كالمطرقة المائية. وتبلغ قيمة معامل الإنضغاطية للماء في درجات الحرارة العادية $K = 2.2 \times 10^9 N/m^2$.

إذا سبب تغير الضغط dp تغيراً في الكتلة النوعية $d\rho$ في سائل ما، يمكن البرهان (خارج مفردات المنهاج) أن النسبة بين تغير الضغط والكتلة النوعية تساوي مربع سرعة انتشار الصوت في هذا السائل. ويرمز لسرعة انتشار الموجة الصوتية في السائل بـ c، وتساوي:

$$c = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} \qquad (٢٩-١)$$

وباعتبار أن: $dp = K \cdot \frac{d\rho}{\rho}$ ، لذلك تكتب العلاقة السابقة في الشكل التالي:

$$c = \sqrt{\frac{K}{\rho}} \qquad (٣٠-١)$$

تتعلق شدة انضغاطية السوائل والغازات بالنسبة بين سرعة الجريان V لهذا السائل وسرعة انتشار الصوت فيه c، وتدعى هذه النسبة عدد ماخ Ma نسبة للفيزيائي والفيلسوف النمساوي ***Ernst Mach (1838-1916)***:

$$Ma = \frac{V}{c}$$

مثال ١-٣

إذا تعرض $1m^3$ من الماء لزيادة في الضغط مقدارها $10^5\,N/m^2$. فما هو التغير في الحجم. إذا كان معامل انضغاطية الماء $K = 2.2\times10^9\,N/m^2$.

الحل:

لدينا:

$$dp = -K\cdot\frac{d\forall}{\forall}$$

أو:

$$d\forall = -\forall\cdot\frac{dp}{K}$$

وبالتعويض بالمعطيات العددية، نجد أن:

$$d\forall = -1\cdot\frac{10^5}{2.2\cdot10^9} = -45.45\times10^{-6}\,m^3$$

١-٧-٧. ضغط التبخر Vapor Pressure

تسمى حادثة تحول السائل إلى بخار بحادثة التبخر. ويمكن أن تتم هذه الحادثة في جو غير محدد مثل تبخر مياه الأنهار والبحار وتجفيف الغسيل، كما يمكن أن تتم في جو محدود مثل تبخر الماء في المراجل حيث يملأ الماء قسماً من المرجل فقط. و يبدأ التبخر بانطلاق جزيئات من كتلة السائل إلى الجو الذي يعلوه، ويتزايد عدد هذه الجزيئات إلى أن يبلغ تركيزها حد يصبح فيه معدل إنطلاق الجزيئات من السائل مساوياً ما يعود من هذه الجزيئات إلى السائل، وعند هذا الوضع المتوازن يقال إن ضغط بخارالسائل قد بلغ حد الإشباع.

تتعلق درجة الحرارة الموافقة لبداية تبخر السائل بالضغط المطلق المطبق. فعلى سبيل المثال عند سطح البحر حيث الضغط المطلق هو $10.3m$ عمود ماء يبدأ تبخر الماء عند درجة الحرارة 100^0 ، وتنخفض درجة حرارة تبخر الماء عند انخفاض الضغط عن القيمة السابقة والعكس صحيح.

ندعو الضغط الموافق لبداية تبخر السائل في درجة الحرارة السائدة **بضغط**

التبخر ***Vapor Pressure*** p_v. ويعتبر مفهوم ضغط تبخر الماء على درجة كبيرة من الأهمية في المضخات، حيث يمكن للماء أن يتبخر عند طرف امتصاص المضخة بسبب انخفاض الضغط، ثم يتكاثف البخار من جديد بارتفاع الضغط داخل المضخة مسبباً قوى كبيرة جداً، وتدعى هذه الظاهرة **بالتكهف** ***Cavitation***.

١-٨. السائل المثالي Ideal Fluid

رأينا أن التبدل في درجات الحرارة والضغط يؤديان إلى تبدل طفيف جداً في حجم السائل نظراً لضعف قابلية الانضغاط، وهو ما يسمح كتقريب أولي بعدّ السائل جسماً غير قابل للانضغاط في معظم الحالات، مما يسهل كثيراً حل المسائل الهندسية ذات الصلة. من ناحية أخرى فإن لزوجة السائل وقوى الاحتكاك تلعب دوراً مهماً في العديد من المسائل العملية بمقارنتها مع القوى الأخرى التي يخضع لها السائل، لذا يمكن تسهيلاً لحل هذه المسائل إهمال تأثير قوى الإحتكاك واعتبار أن السائل لا يمتلك خاصية اللزوجة.

ندعو السائل مهمل اللزوجة وغير القابل للانضغاط **بالسائل المثالي** ***Ideal Fluid***. إلا أن فرضية السائل المثالي هي مجرد تقريب، الغاية منه تبسيط حل بعض مسائل الهيدروليك، التي يصعب حلها كثيراً عند وضع اللزوجة وانضغاطية السائل بالحسبان. لأن قوة اللزوجة في السائل موجودة عملياً، حتى لو كانت قيمها صغيرة جداً.

مسائل محلولة حول الفصل الأول

المسألة الأولى

خزان مملوء بالبنزين، سعته $\forall = 10m^3$. فإذا علمت أن الكتلة النوعية للبنزين $\rho = 740kg/m^3$. احسب وزن البنزين في الخزان.

الحل:

لدينا:

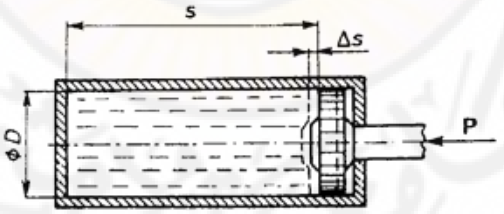
$$W = \rho \cdot g \cdot \forall$$

وبالتعويض، نجد أن:

$$W = \frac{740 \cdot 9.81 \cdot 10}{1000} = 72.6kN$$

المسألة الثانية

مكبس هيدروليكي أسطواني، قطره $D = 80mm$ ، وطوله $s = 50cm$ ، مملوء بالزيت، كما في الشكل. أحسب الانزياح Δs الناتج عن تطبيق قوة مقدارها $30kN$ على ذراع المكبس. علماً بأن معامل الانضغاطية للزيت $K = 1.79 \times 10^9 N/m^2$.



الحل:

لدينا:

$$dp = -K \cdot \frac{d\forall}{\forall}$$

و:

$$\forall = \frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot s$$

و:

$$d\forall = \frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot \Delta s$$

ومنه:

$$dp = -K \cdot \frac{\Delta s}{s}$$

أو:

$$\Delta s = -\frac{s \cdot dp}{K}$$

حيث:

$$dp = \frac{4 \cdot 30000}{\pi \cdot 0.08^2} = 6 \times 10^6 \, Pa$$

والتالي، نجد أن قيمة الانزياح هو:

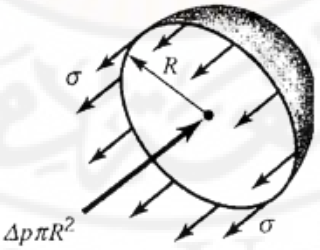
$$\Delta s = -\frac{0.5 \cdot 6 \times 10^6}{1.79 \times 10^9} = 0.00168m = 1.68mm$$

المسألة الثالثة

احسب قيمة الضغط Δp داخل قطرة ماء مطر نصف قطرها $R = 0.25mm$. علماً بأن التوتر السطحي هو $\sigma = 0.072N/m$.

الحل:

من الشكل، يمكن كتابة أن:



$$2 \cdot \pi \cdot R \cdot \sigma = \Delta p \cdot \pi \cdot R^2$$

أو:

$$\Delta p = \frac{2 \cdot \sigma}{R}$$

وبالتعويض، نجد أن:

$$\Delta p = \frac{2 \cdot 0.073}{0.25 \times 10^{-3}} = 584 Pa$$

المسألة الرابعة

احسب اللزوجة الحركية للماء عند درجة حرارة $C = 20^{\circ}$.

الحل:

نعلم أن:

$$\nu_{C=20} = \frac{\mu_{C=20}}{\rho_{C=20}}$$

ومن الأشكال (١-٤)،(١-٨) نجد أن:

$$\mu_{C=20} = 10^{-3} kg/m \cdot s$$

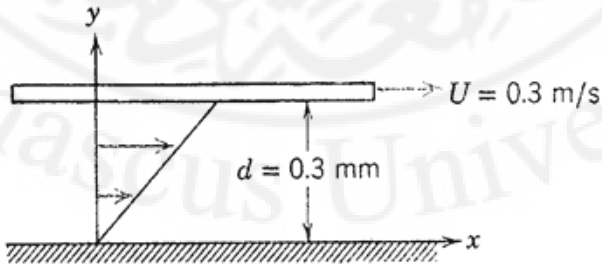
$$\rho_{C=20} = 999 kg/m^3$$

ومنه:

$$\nu_{C=20} = \frac{10^{-3}}{999} = 10^{-6} m^2/s$$

المسألة الخامسة

صفيحة علوية متحركة تبعد عن صفيحة سفلية ثابتة مسافة $0.3mm$، وتتحرك بسرعة مقدارها $U = 0.3m/s$، كما في الشكل. فإذا علمت السائل الموجود بين الصفيحتين ذو لزوجة تحريكية $\mu = 0.65 \times 10^{-3} kg/m \cdot s$. يطلب حساب إجهاد القص على الصفيحة العلوية، وتحديد اتجاهه.



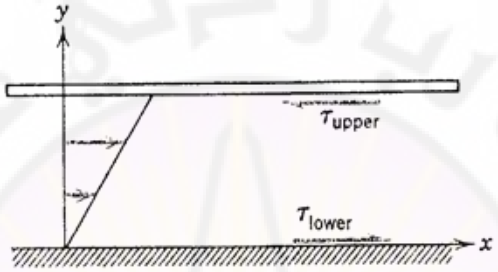
الحل:

لدينا:

$$\tau = \mu \cdot \frac{du}{dy}$$

وبالتعويض، نجد أن:

$$\tau = 0.65\times10^{-3} \cdot \frac{0.3}{0.3\times10^{-3}} = 0.65Pa$$



أما اتجاه القص فهو عكس اتجاه حركة الصفيحة كما هو مبين في الشكل.

المسألة السادسة

أسطوانة دائرية قطرها $0.24m$، تدور بشكل متمركز ضمن أسطوانة دائرية أخرى قطرها $0.26m$. طول كلتا الأسطوانتين $0.3m$. احسب اللزوجة التحريكية للسائل الذي يملأ الفراغ بين الأسطوانتين، إذا علمت أن العزم اللازم لتدوير الأسطوانة بسرعة زاوية مقدارها $2\pi rad/s$ هو $0.88N\cdot m$.

الحل:

بفرض أن τ هو إجهاد القص في نقطة من السائل تبعد مسافة r عن مركز الأسطوانتين. ونظراً لأن الحركة الدورانية منتظمة، فإن العزم اللازم لتدوير الأسطوانة يساوي عزم قوى الإحتكاك، أي ان:

$$0.88 = \tau \cdot (2 \cdot \pi \cdot r \cdot 0.3) \cdot r$$

ومنه:

$$\tau = \frac{0.467}{r^2}$$

ولكن لدينا من قانون نيوتن:

$$\tau = \mu \cdot \frac{du}{dy} = \frac{0.467}{r^2}$$

وباعتبار $dy = -dr$، نجد أن:

$$du = -\frac{0.467}{\mu \cdot r^2} \cdot dr$$

وبتكامل هذه العلاقة بين r_1, r_2، مع ملاحظة أن السرعة عند r_1 تساوي السرعة المحيطية للأسطوانة الداخلية، والسرعة عند r_2 معدومة، نحصل على:

$$u_1 = \omega \cdot r_1 = 2 \cdot \pi \cdot r_1 = 0.754 m/s$$

ومنه:

$$\int_{0.754}^{0} du = -\frac{0.467}{\mu} \cdot \int_{0.12}^{0.13} \frac{dr}{r^2} = \frac{0.467}{\mu} \cdot \left[\frac{1}{r}\right]_{0.12}^{0.13}$$

وبالتكامل، نجد أن:

$$0 - 0.754 = \frac{0.467}{\mu} \cdot \left[\frac{1}{0.13} - \frac{1}{0.12}\right]$$

ومنه:

$$\mu = 0.397 kg/m \cdot s$$

مسائل غير محلولة حول الفصل الأول

المسألة الأولى

ما هو حجم الماء الذي يمكن أن يضخ إلى خزان ضغط حجمه $\forall = 0.5m^3$، علماً أن الزيادة في الضغط يجب أن لا تتجاوز $1.0MPa$. وأن معامل انضغاطية الماء $K = 2.2\times10^9 N/m^2$.

المسألة الثانية

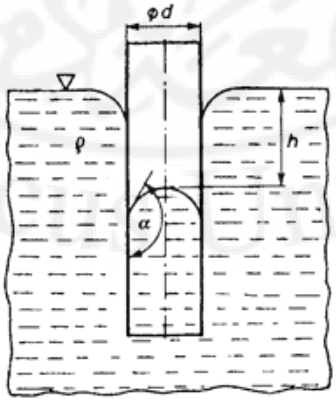
إذا علمت أن اللزوجة الحركية للنفط $\nu = 7.6\times10^{-6} m^2/s$. وأن الكتلة النوعية له $\rho = 786kg/m^3$. احسب اللزوجة التحريكية.

المسألة الثالثة

وضع أنبوب زجاجي قطره $d = 1.5mm$ شاقولياً في سائل كتلته النوعية $\rho = 900kg/m^3$، فارتفع السائل في الأنبوب مقدار $15mm$. احسب قيمة التوتر السطحي بين السائل والهواء.

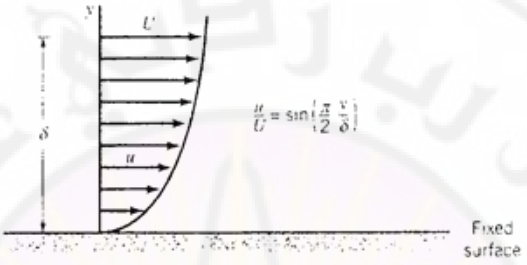
المسألة الرابعة

وضع أنبوب زجاجي قطره $d = 2mm$ في الزئبق. إذا علمت أن التوتر السطحي بين الزئبق والهواء هو $\sigma = 0.47N/m$، وأن $\alpha = \frac{2}{3}\cdot\pi$، و $\rho = 13600kg/m^3$. احسب قيمة h.



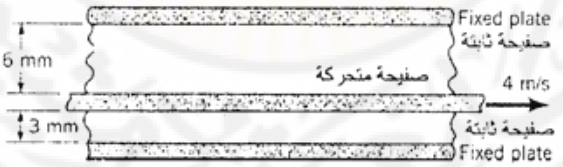
المسألة الخامسة

سائل يتدفق على صفيحة ثابتة، توزع سرعة الجريان كما هو مبين في الشكل. فإذا علمت أن $\rho = 920kg/m^3, \nu = 4\times10^{-4}m^2/s$. أثبت أن إجهاد القص المؤثر على الصفيحة هو $\tau = 0.578\cdot\left(\frac{U}{\delta}\right)$.



المسألة السادسة

تتحرك صفيحة مستوية بسرعة $u = 4m/s$ بين صفيحتين ثابتتين، كما في الشكل. فإذا علمت أن الفراغ بين الصفيحة العلوية والصفيحة المتحركة يساوي $6mm$ ومملوء بسائل لزوجته التحريكية $\mu_1 = 0.02kg/m\cdot s$ ، أما الفراغ بين الصفيحة السفلية و الصفيحة المتحركة فيساوي $3mm$ ومملوء بسائل لزوجته التحريكية $\mu_2 = 0.01kg/m\cdot s$. وبفرض أن توزع السرعة خطي، يطلب حساب إجهاد القص المؤثر على الصفيحتين الثابتتين.

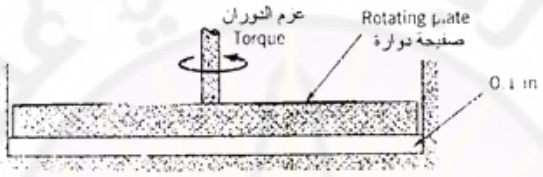


المسألة السابعة

طبقة رقيقة من الغليسرين سماكتها $h = 7.5mm$ ، تتدفق على صفيحة ملساء تميل على الأفق بزاوية $\alpha = 20^0$. أحسب السرعة U عند سطح الغليسرين، إذا علمت أن معادلة توزع سرعة الجريان يعطى بالعلاقة: $\frac{u}{U} = 2\cdot\frac{y}{h} - \frac{y^2}{h^2}$. أدرس المسألة في واحدة العرض من الصفيحة.

المسألة الثامنة

تدور صفيحة أفقية مستوية دائرية الشكل، قطرها $12in$، حول المحور الشاقولي المار من مركزها بحيث تكون بعيدة عن صفيحة سفلية ثابتة بمسافة تساوي $0.1in$، كما في الشكل. احسب عزم الدوران الواجب تطبيقه على محور الدوران ليصبح عدد الدورات مساوياً $2rpm$. بافتراض أن توزع السرعة خطي بين الصفيحتين، وأن الفراغ بينهما مملوء بالغليسيرين.



Damascus University

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الفصل الثاني

توازن السوائل
FLUID STATIC

٢-١. تمهيد Preface

تكون السوائل عادة إما في حالة حركة كالجريان ضمن أنبوب أو نهـر، أو في حالة سكون كما هو الحال في الخزانات أو بحيرات السدود. وتختلف معادلات السائل الساكن عن السائل المتحرك، بسبب عدم وجود سرعة للسائل في حالة السكون. كما أن أي عنصر من السائل الساكن لا يغير موقعه، ولا يبدل من خصائصه أو شكله، ولا يتشوه، كما أنه لا يتعرض لإجهادات قاصة (مماسية) كما هو الحال أثناء الحركة. فلو درسنا أي عنصر فراغي من سائل متحرك، فإننا نجد أنه يتعرض على كل وجه منه إلى إجهادات ناظمية على سطح الوجه تمثل الضغط، وإلى إجهـادات مماسـية تـؤثر في مستوي الوجه تمثل القص. أما في حالة السكون فالإجهادات المؤثرة هـي إجهـادات ناظمية فقط.

٢-٢. الضغط Pressure

يعرف **الضغط** ***Pressure*** بأنه القوة المؤثرة في واحدة المساحة. فإذا كانـت F تمثل القوة الكلية المؤثرة في جزء من مساحة محدودة A ، و δF القوة المؤثرة في مساحة متناهية الصغر δA ، فإن الضغط يساوي:

$$p = \frac{\delta F}{\delta A} \qquad (٢-١)$$

وإذا كان الضغط منتظماً على المساحة الكلية فإن:

$$p = \frac{F}{A} \qquad (٢-٢)$$

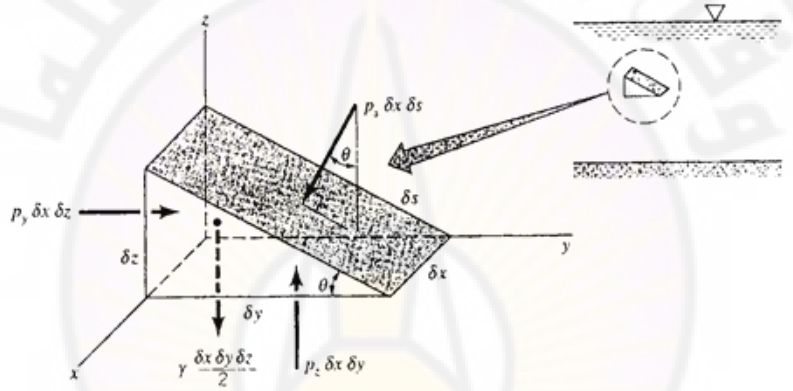
من المعادلة السابقة نستنتج أنه، إذا كانت واحدة القوة هي النيوتن N وواحدة

السطح هي المتر المربع m^2، فإن واحدة الضغط تكون N/m^2 وتسمى أيضاً بالباسكال.

٢-٣. الضغط عند نقطة من سائل ساكن (قانون باسكال)

Pressure at a Point (Pascal's Law)

لنعزل جزيئاً موشورياً صغيراً من سائل ساكن، كما في الشكل (٢-١). أطوال أضلاعه هي $\delta x, \delta y, \delta z$. فنجد أن القوى المؤثرة في هذا الجزيء هي قوى الضغط على وجوه الموشور ووزنه الذاتي الذي يمكن إهماله لصغره.



الشكل (٢-١). توازن عنصر موشوري من سائل ساكن [6]

لكي يتوازن هذا العنصر، يجب أن تكون محصلة القوى المؤثرة فيه معدومة. فبالنسبة لمحصلة القوى بالاتجاه y ، نجد أن:

$$\sum F_y = p_y \cdot \delta x \cdot \delta z - p_s \cdot \delta x \cdot \delta s \cdot \sin\theta = 0$$

أو:

$$p_y \cdot \delta z = p_s \cdot \delta s \cdot \sin\theta \qquad (٢-٣)$$

وبما أن:

$$\delta z = \delta s \cdot \sin\theta \qquad (٢-٤)$$

إذاً يصبح لدينا:

$$p_y \cdot \delta s \cdot \sin\theta = p_s \cdot \delta s \cdot \sin\theta$$

ومنه:

$$p_y = p_s \qquad (٥-٢)$$

وبالإسقاط باتجاه المحور z، يكون:

$$\sum F_z = p_z \cdot \delta x \cdot \delta y - p_s \cdot \delta x \cdot \delta s \cdot \cos\theta = 0$$

أو:

$$p_z \cdot \delta y = p_s \cdot \delta s \cdot \cos\theta \qquad (٦-٢)$$

لكن:

$$\delta y = \delta s \cdot \cos\theta \qquad (٧-٢)$$

وبالتعويض يكون:

$$p_z \cdot \delta s \cdot \cos\theta = p_s \cdot \delta s \cdot \cos\theta$$

ومنه:

$$p_z = p_s$$

نستنتج مما سبق أن:

$$p_z = p_y = p_s \qquad (٨-٢)$$

أي أن الضغط في نقطة من سائل ساكن يكون متساوي في كافة الاتجاهات. وتعرف هذه النتيجة الهامة بقانون باسكال نسبة للعالم الفرنسي ***Blaise Pascal (1623-1662)***، الذي عمل كثيراً في حقل توازن السوائل.

٢-٤. المعادلات الأساسية لتوازن السوائل

Basic Equations of Fluid Statics

إذا عزلنا عنصراً على شكل متوازي مستطيلات. أبعاده هي $\delta x, \delta y, \delta z$ من سائل ساكن، كما في الشكل (٢-٢)، فإن شرط توازن هذا العنصر هو أن تكون محصلة القوى المؤثرة عليه معدومة في جميع الاتجاهات. وهذه القوى هي الوزن الذاتي وقوى الضغط المطبقة على وجوه متوازي المستطيلات الستة.

فبالإسقاط باتجاه المحور y، لدينا:

$$\left(p-\frac{\partial p}{\partial y}\cdot\frac{\delta y}{2}\right)\cdot\delta x\cdot\delta z-\left(p+\frac{\partial p}{\partial y}\cdot\frac{\delta y}{2}\right)\cdot\delta x\cdot\delta z=0 \qquad (٩-٢)$$

ومنه:

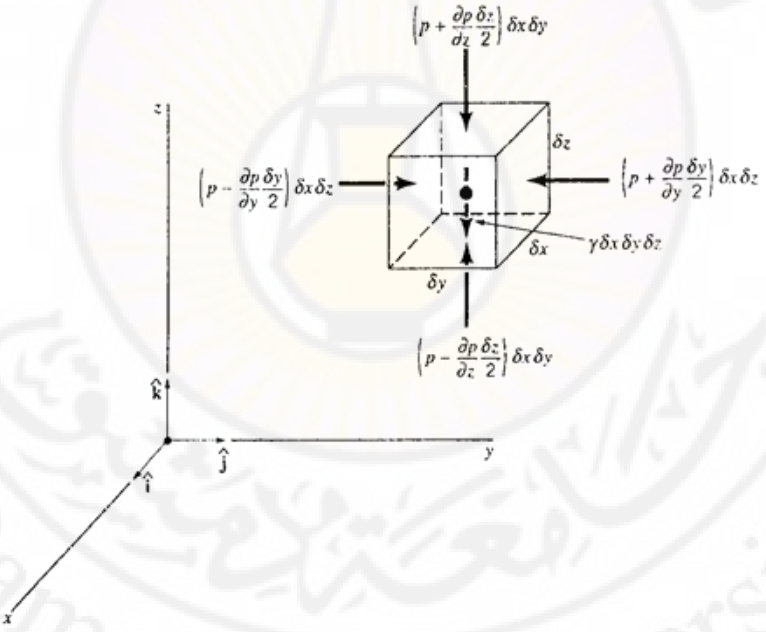
$$\frac{\partial p}{\partial y}=0 \qquad (١٠-٢)$$

وبالإسقاط باتجاه المحور x، لدينا:

$$\left(p-\frac{\partial p}{\partial x}\cdot\frac{\delta x}{2}\right)\cdot\delta y\cdot\delta z-\left(p+\frac{\partial p}{\partial x}\cdot\frac{\delta x}{2}\right)\cdot\delta y\cdot\delta z=0 \quad (١١-٢)$$

ومنه:

$$\frac{\partial p}{\partial x}=0 \qquad (١٢-٢)$$



الشكل (٢-٢). استنتاج المعادلات الأساسية لتوازن السوائل [6]

أما بالنسبة للمحور z، فلدينا:

$$\left(p-\frac{\partial p}{\partial z}\cdot\frac{\delta z}{2}\right)\cdot\delta x\cdot\delta y-\left(p+\frac{\partial p}{\partial z}\cdot\frac{\delta z}{2}\right)\cdot\delta x\cdot\delta y-\gamma\cdot\delta x\cdot\delta y\cdot\delta z=0 \quad (١٣-٢)$$

ومنه:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\gamma \qquad (١٤-٢)$$

تدعى المعادلات:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \frac{\partial p}{\partial y} =, 0 \frac{\partial p}{\partial z} = -\gamma \qquad (١٥-٢)$$

التي يمكن كتابتها أيضاً بالشكل التفاضلي الكلي:

$$\frac{dp}{dx} = 0, \frac{dp}{dy} =, 0 \frac{dp}{dz} = -\gamma \qquad (١٦-٢)$$

بالمعادلات الأساسية لتوازن السوائل في حالة السكون

The Basic Equations of Fluid Statics.

يتضح من المعادلات السابقة، أن تغير الضغط في جميع النقاط الواقعة في مستوٍ أفقي واحد يساوي الصفر. وهذا يعني أن جميع النقاط الواقعة في مستو أفقي واحد من سائل ساكن مستمر تخضع لضغوط متساوية. وسوف تفيدنا هذه النتيجة في حل العديد من مسائل توازن السوائل.

٢-٥. تغير الضغط مع العمق في سائل ساكن

Pressure Variation in a Static Fluid

نلاحظ من المعادلات الأساسية لتوازن السوائل أن الضغط يتغير فقط باتجاه المحور z وفق العلاقة:

$$\frac{dp}{dz} = -\gamma = -\rho \cdot g$$

أي أن ضغط السائل في حالة السكون يتغير مع تغير العمق. كما تبين هذه العلاقة أن تدرج الضغط في الاتجاه الشاقولي يكون سالباً، أي أن الضغط يتناقص في سائل ساكن باتجاه الأعلى.

ولحساب تغير الضغط بين مستويين مختلفين يقعان على عمقين مختلفين، كما في الشكل (٢-٣)، يمكن كتابة:

$$\frac{dp}{dz} = -\rho \cdot g$$

أو:

$$dp = -\rho \cdot g \cdot dz \qquad (٢-١٧)$$

حيث نجد بالمكاملة أن:

$$\int_{p_1}^{p_2} dp = -\int_{z_1}^{z_2} \rho \cdot g \cdot dz \qquad (٢-١٨)$$

يمكن عملياً في معظم المسائل الهندسية اعتبار أن تسارع الجاذبية الأرضي g ثابت، كما يمكن اعتبار أن قيمة ρ ثابتة إذا كان السائل غير قابل للانضغاط. وبناءً عليه يكون:

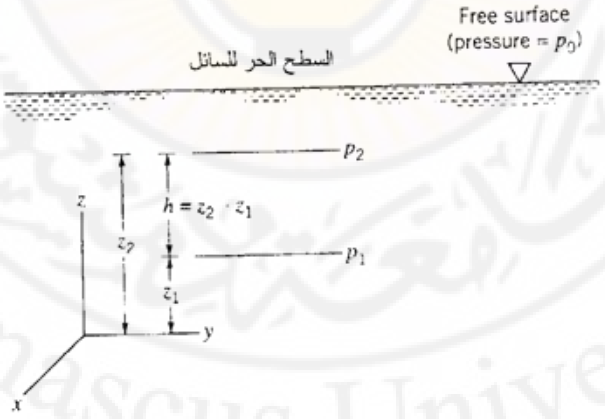
$$\int_{p_1}^{p_2} dp = -\rho \cdot g \int_{z_1}^{z_2} dz$$

وبالمكاملة، نجد أن:

$$p_2 - p_1 = -\rho \cdot g \cdot (z_2 - z_1)$$

ومنه:

$$p_1 - p_2 = \rho \cdot g \cdot (z_2 - z_1) \qquad (٢-١٩)$$



الشكل (٢-٣). تغير الضغط مع العمق في سائل ساكن [4]

حيث p_1, p_2 تمثل قيمتي الضغطين عند الارتفاعين الشاقوليين z_1, z_2. وبالاستفادة من الشكل السابق، يمكن كتابة المعادلة (٢-١٩) كما يلي:

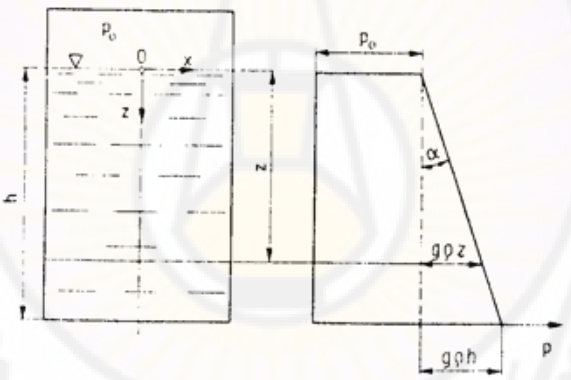
$$p_1 - p_2 = \rho \cdot g \cdot h$$

أو:

$$p_1 = \rho \cdot g \cdot h + p_2 \qquad (٢٠-٢)$$

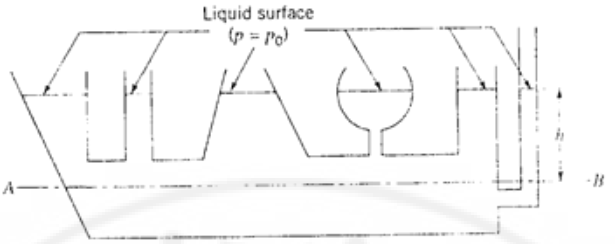
حيث: h - فرق الإرتفاع.

يمكن من المعادلة السابقة استنتاج أن الضغط يزداد بشكل خطي مع زيادة الارتفاع في حالة السوائل الساكنة غير القابلة للانضغاط. وبفرض وجود وعاء ارتفاعه h، ويطبق على سطحه ضغط $p_1 = p_0$، فإن الضغط المطبق أسفل الوعاء يبلغ $p_2 = p_0 + \rho \cdot g \cdot h$. وندعو المخطط الذي يعبر عن توزع الضغط على طول ارتفاع الخزان **بتوزع الضغط الهيدرستاتيكي** ***Hydrostatic Distribution***، كما في الشكل (٢-٤).



الشكل (٢-٤). مخطط توزع الضغط الهيدروستاتيكي [7]

يلاحظ من المعادلات السابقة، أن قيم الضغط عند مقطع معين على عمق h من سائل وزنه النوعي γ، يتعلق فقط بالعمق h بغض النظر عن شكل أو حجم أو مساحة الوعاء. فمثلاً للوعاء المبين في الشكل (٢-٥) والذي يبلغ الضغط عند سطحه p_0، يكون الضغط واحداً في جميع النقاط الواقعة في المستوي الأفقي AB بغض النظر عن شكله. وهذا المبدأ يعرف بمبدأ الأواني المستطرقة. ويستنتج من ذلك أن الضغط الذي يؤثر على بوابات السدود لا يتعلق بمساحة بحيرة السد ومدى امتداد هذه البحيرة، وإنما بارتفاع البوابة عن سطح الماء فقط.



الشكل (٢-٥). تساوي قيم الضغط عند جميع النقاط الواقعة في مستوٍ أفقي واحدمن سائل ساكن بغض النظر عن شكل الوعاء الذي يوجد فيه (مبدأ الأواني المستطرقة)

مثال ٢-١

يهبط غواص إلى عمق $30m$ تحت سطح البحر، والمطلوب حساب الزيادة في قيمة الضغط ما بين سطح البحر والعمق الذي يصل إليه الغواص، إذا كانت الكتلة النوعية لماء البحر تساوي $\rho_{\text{ب}} = 1025kg/m^3$.

الحل:

بافتراض أن سطح ماء البحر هو مستوى المقارنة نجد أن:

$$\Delta z = 30m$$

و:

$$\Delta p = \rho \cdot g \cdot \Delta z$$

وبالتعويض بالقيم العددية، نحصل على:

$$\Delta p = 1025 \cdot 9.81 \cdot 30 = 301.7 \times 10^3 N/m^2$$

٢-٦. الضغط والضاغط Pressure and Head

بالعودة للمعادلة (٢-٢٠):

$$p_1 = \rho \cdot g \cdot h + p_2$$

نجد أنه يمكن كتابتها أيضاً على الشكل التالي:

$$h = \frac{p_1 - p_2}{\rho \cdot g} \qquad (٢١-٢)$$

ممّا يسمح بالتعبير عن فرق الضغط بين مستويين من سائل ساكن وزنه النوعي γ،

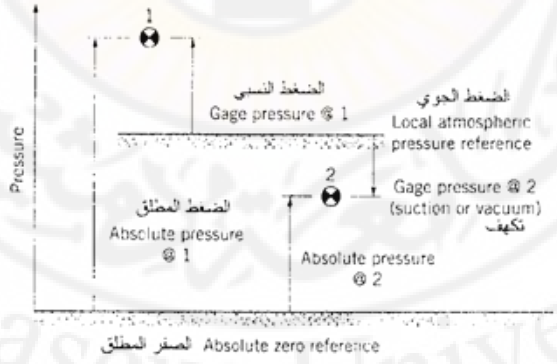
بارتفاع عمود السائل h المحصور بين هذين المستويين. ويطلق على هذا الارتفاع اسم **الضاغط** ***Head***.

وتجدر الإشارة هنا أنه عندما يعبر عن قيمة الضغط بما يكافئه من ضاغط لا بد من معرفة نوع السائل المدروس وقيمة كتلته النوعية. فبفرض أن الضغط في نقطة معينة هو $p = 100kPa$ ، فنقول إن الضاغط هو $h_{H2O} = \frac{100000}{1000 \cdot 9.81} = 10.19m$ عمود ماء، أو أن الضاغط هو $h_{Hg} = \frac{100000}{13600 \cdot 9.81} = 0.75m$ عمود زئبق.

٢-٧. الضغوط المطلقة والنسبية Absolute and Gauge Pressure

إذا تم قياس الضغط بالنسبة إلى الصفر المطلق، فإنه يعرف **بالضغط المطلق** p_{abs} ***Absolute Pressure***. وإذا قيس نسبة إلى الضغط الجوي p_{abs} ***Atmospheric Pressure*** ، فإنه يعرف **بالضغط النسبي أو المقيس** p_{gauge} ***Gauge Pressure*** ، لأن جميع أجهزة قياس الضغط تسجل صفراً إذا كانت تحت تأثير الضغط الجوي، وبالتالي فهي تقيس الفرق بين ضغط السائل المتصلة به والهواء المحيط به. أما العلاقة بين الضغط المطلق والنسبي فهي (الشكل ٢-٦):

$$p_{abs} = p_{atm} + p_{gauge} \qquad (٢٢-٣)$$

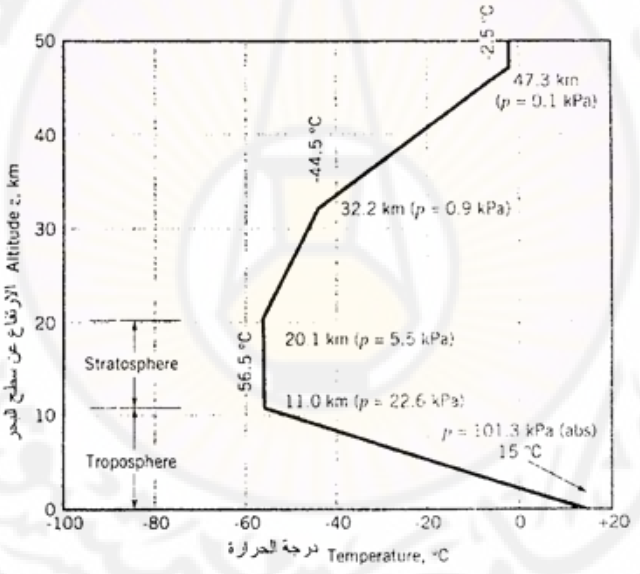


الشكل (٢-٦). الضغوط المطلقة والمقيسة [6]

تكون جميع قيم الضغط المطلق موجبة. أما الضغط النسبي فيكون سالباً إذا كان أقل من الضغط الجوي وموجباً إذا كان أكبر منه. وإذا كان الضغط في نقطة معينة أقل

من الضغط الجوي، فإنه يعبر عنه **بالتفريغ *Vacuum*** الذي تساوي قيمته النسبية الفرق ما بين الضغط الجوي والضغط عند هذه النقطة.

يسمى الضغط الجوي أيضاً الضغط البارومتري، وهو يتغير مع الارتفاع عن سطح البحر، كما يتغير قليلاً بتغير الأحوال الجوية. وتبلغ قيمة الضغط الجوي المطلق في درجة الحرارة 15^{0} عند سطح البحر $101.33kPa$، وهي تكافئ ضاغطاً من عمود الماء $h_{H2O} = \frac{101330}{1000 \cdot 9.81} = 10.33m$، كما تكافئ ضاغطاً من عمود زئبق $h_{H2O} = \frac{101330}{13600 \cdot 9.81} = 0.76m = 76cm$. ويبين الشكل (٢-٧) تغير الضغط الجوي المطلق تبعاً للارتفاع عن سطح البحر والحرارة.



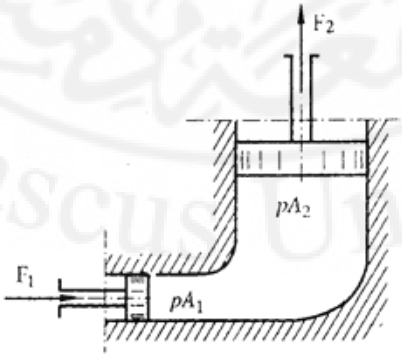
الشكل (٢-٧). تغير الضغط الجوي تبعاً للارتفاع عن سطح البحر ودرجة الحرارة [6]

لفهم أعمق لمبدأ الضغط المطلق والنسبي والضاغط، سنأخذ المثال التالي الذي يمكن أن يصادف كل إنسان في الحياة العملية. فلو ذهب أحدنا إلى الطبيب لقياس ضغط الدم، واستخدم الطبيب مقياس الضغط الزئبقي (أدق طريقة لقياس الضغط الدم)، وقال لنا إن الضغط الانقباضي (المرتفع) $130mm$. لأمكننا بعد التفكير بهذه القيمة استخلاص النتائج التالية:

- إن الضغط الانقباضي النسبي يكافئ ضاغطاً مقداره $130mm$ زئبق، أي أن قيمة الضغط الانقباضي تساوي $0.13 \cdot 13600 \cdot 9.81 = 17344Pa$.
- إن ضغط الدم داخل الجسم أعلى من الضغط الجوي بمقدار $17344Pa$.
- لو استخدم الطبيب مقياساً فيه ماء عوضاً عن الزئبق لارتفع الماء في الجهاز بمقدار $h = \frac{17344}{1000 \cdot 9.81} = 1.77m$.
- إن ضغط الدم المطلق يكافئ $130 + 760 = 890mm$ عمود زئبق.

٢-٨. استخدام مبدأ نقل ضغط السائل في تكبير القوى

هل فكر أحد منا لماذا يتم تحريك مقود السيارة الهيدروليكي بسهولة أكثر من المقود العادي؟ أو كيف يمكن لرافعة هيدروليكية أن تحمل مئات الأطنان. للإجابة عن هذين السؤالين وأسئلة أخرى، نأخذ المنظومة المبينة في الشكل (٢-٨)، التي هي عبارة عن مكبس مؤلف من فرعين متفاوتي المساحة، حيث تبلغ مساحة الفرع الأيسر A_1 والفرع الأيمن A_2. فعند تطبيق قوة مقدارها F_1 على الفرع الأيسر سيتولد ضغط مقداره $p = \frac{F_1}{A_1}$، وسينتقل هذا الضغط بنفس القيمة عبر السائل الساكن المستمر إلى الفرع الأيمن (بإهمال فرق المنسوب بين فرعي المكبس)، وستولد فيه قوة تساوي $F_2 = p \cdot A_2$. وبهذه الطريقة يمكن تكبير القوة المطبقة على الفرع الأيسر F_1 لتصبح في الفرع الأيمن مساوية $F_2 = F_1 \cdot \frac{A_2}{A_1}$. وبالتالي للحصول على قوة أكبر في الفرع الأيمن علينا تكبير مساحته A_2 حسب الحاجة!



الشكل (٢-٨). مبدأ تكبير القوى [5]

مثال ٢-٢

بفرض أن مساحة الفرع الأيسر من المكبس المبين على الشكل (٢-٨) تساوي $1cm^2$، وأن القوة المطبقة عليه هي $100N$. فما هي القوة التي يمكن الحصول عليها من المكبس في فرعه الأيمن إذا كانت مساحة مقطعه تساوي $20cm^2$؟ افرض أن الفرعين على نفس المنسوب.

الحل:

لدينا:

$$p_1 = \frac{F_1}{A_1} = \frac{100}{1\times10^{-4}} = 10^6\,Pa$$

و:

$$p_2 = p_1 = 10^6\,Pa$$

أي أن:

$$F_2 = p_2 \cdot A_2$$

وبالتعويض بالقيم المعطاة، نجد أن:

$$F_2 = 10^6 \cdot 20\times10^{-4} = 2000N$$

أي أنه تم تكبير القوة عشرين مرة.

٢-٩. طرائق قياس الضغط Measurement of Pressure

٢-٩-١. تمهيد Preface

يعتبر قياس ضغط السوائل والغازات هام جداً نظراً لاستخداماته المتعددة في الحياة العملية. ومن هذه الاستخدامات:

- قياس ضغط الدم داخل جسم الإنسان.
- قياس الضغط داخل أنابيب نقل المياه.
- قياس الضغط عند طرف دفع وامتصاص مضخة.
- قياس الضغط الجوي تبعاً لتغير العوامل المناخية.

- قياس الضغط داخل محركات الآلات بأنواعها كافة.

وتوجد طرائق عديدة لقياس ضغط السائل. نذكر منها:

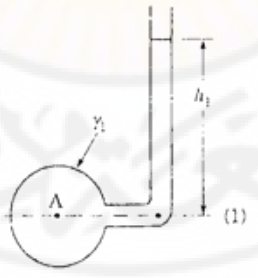
- الأنبوب البيزومتري.
- المانومتر البسيط على شكل حرف **U**.
- المانومتر المائل.
- مقياس بوردون.
- أجهزة قياس الضغط الكهربائية

٢-٩-٢. الأنبوب البيزومتري Piezometer Tube

يعد **الأنبوب البيزومتري** ***Piezometer Tube*** أو اختصاراً البيزومتر من أبسط أجهزة قياس الضغط. وهو عبارة عن أنبوب شاقولي مفتوح من الأعلى وموصول مع الأنبوب أو الوعاء الذي يحتوي السائل المضغوط. فعند وصل البيزومتر إلى الأنبوب المبين في الشكل (٢-٩)، سوف يرتفع السائل فيه بمقدار h_1 تحت تأثير الضغط p_A في الأنبوب، وتكون قيمة الضغط:

$$P_A = \gamma_1 \cdot h_1 \qquad (٢٣-٢)$$

حيث: γ_1 - الوزن النوعي للسائل.



الشكل (٢-٩). الأنبوب البيزومتري

ورغم أن البيزومترات تعتبر طريقة سهلة جداً لقياس الضغط، إلا أن أهم مساوئها عدم صلاحيتها من الناحية العملية لقياس الضغوط الكبيرة، بسبب ارتفاع السائل في البيزومتر إلى مناسيب عالية. فلو تخيلنا مثلاً وصل بيزومتر إلى أنبوب ضخ

ضاغطه $10bar$ أي $100m$ عمود ماء، فعندها سيرتفع الماء في البيزومتر بمقدار $100m$، وبطبيعة الحال ليس من المنطقي استخدام أنبوب بزومتري بارتفاع $100m$. كما أن البيزومترات لا تصلح لقياس ضغوط الغازات، بسبب عدم تشكل سطح سائب للغاز في الأنبوب البيزومتري.

مثال ٢-٣

ما هو أكبر ضغط للماء يمكن قياسه باستخدام أنبوب بيزومتري ارتفاعه $2m$.

الحل:

لدينا:

$$p = \gamma \cdot h$$

أي أن:

$$p = 9.81 \cdot 1000 \cdot 2 = 19.6kPa$$

٢-٩-٣. المانومتر البسيط U-Tube Manometer

بما أن الأنبوب البيزومتري لايصلح لقياس الضغوط العالية للسوائل، ولا يمكن استخدامه لقياس الضغط في الغازات، فإن **المانومتر البسيط *U-Tube Manometer*** يعد وسيلة مناسبة للقيام بهذه المهمة.

يتألف المانومتر من أنبوب معكوف على شكل حرف **U** يحتوي على سائل ذي وزن نوعي معلوم، كما في (الشكل ٢-١٠). وأثناء القياس يوصل طرف الأنبوب المانومتري مع الأنبوب أو الوعاء الذي يحتوي السائل أو الغاز المراد قياس ضغطه، حيث نجد أنه بمعرفة مقدار الانزياح الذي يحصل في المانومتر يمكننا حساب قيمة الضغط السائد.

فلحساب الضغط عند النقطة A من الأنبوب باستخدام المانومتر، وبفرض أن الوزن النوعي للسائل في الأنبوب والمانومتر هو γ_1 و γ_2 على التوالي، لدينا:

$$p_2 = p_A + \gamma_1 \cdot h_1 \qquad (٢٤-٢)$$

و:

$$p_3 = \gamma_2 \cdot h_2 \qquad (٢٥-٢)$$

ولكن الضغط عند النقطتين 2,3 له نفس القيمة لأنهما تقعان في مستو أفقي واحد من سائل ساكن مستمر ، لذلك يمكن كتابة العلاقة:

$$p_2 = p_3$$

وبالتعويض عن p_2 , p_3 بما يساويهما، نجد أن:

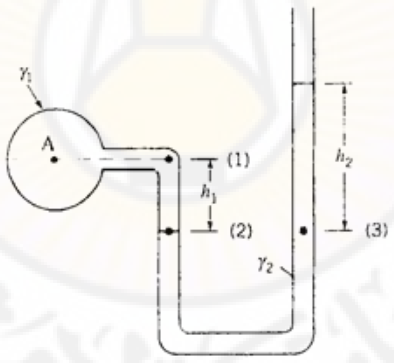
$$p_A + \gamma_1 \cdot h_1 = \gamma_2 \cdot h_2$$

أي أن:

$$p_A = \gamma_2 \cdot h_2 - \gamma_1 \cdot h_1 \qquad (٢٦-٢)$$

وبفرض وجود غاز عوضاً عن السائل في الأنبوب نلاحظ أنه يمكن إهمال عمود الغاز دون ارتكاب خطأ يذكر، ويصبح الضغط:

$$p_A = \gamma_2 \cdot h_2 \qquad (٢٧-٢)$$



الشكل (٢-١٠). المانومتر البسيط

في العديد من الحالات يكون المطلوب قياس فرق الضغط بين نقطتين من ناقل، أو بين ناقلين مختلفين. لذلك يوصل في هذه الحالة طرفا المانومتر بالنقطتين المراد قياس فرق الضغط بينهما، وبقياس انحراف السائل في المانومتر يمكن تحديد قيمة فرق الضغط.

لنأخذ المثال المبين في الشكل (٢-١١)، حيث يراد حساب فرق الضغط بين

الناقلين عند النقطتين A, B . فإذا كان الوزن النوعي للسائل في الناقل الأيسر γ_1، وللسائل في الناقل الأيمن γ_2 ولسائل المانومتر γ_3 . فإنه يمكن كتابة:

$$p_2 = p_A + \gamma_1 \cdot h_1$$

و:

$$p_3 = p_B + \gamma_3 \cdot h_3 + \gamma_2 \cdot h_2$$

وبما أن:

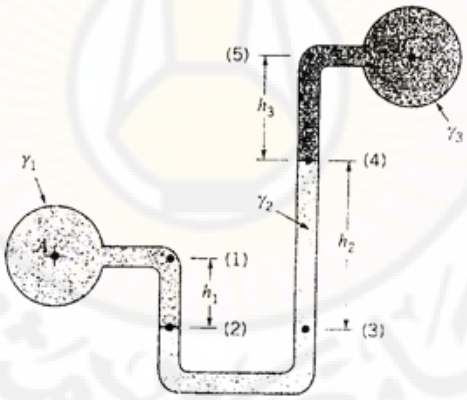
$$p_2 = p_3$$

يكون:

$$p_A + \gamma_1 \cdot h_1 = p_B + \gamma_3 \cdot h_3 + \gamma_2 \cdot h_2$$

وأخيراً نحصل على:

$$p_A - p_B = \gamma_3 \cdot h_3 + \gamma_2 \cdot h_2 - \gamma_1 \cdot h_1$$



الشكل (٢-١١). قياس فرق الضغط بين نقطتين من ناقلين مختلفين [6]

٢-٩-٤. المانومتر المائل Inclined-Tube Manometer

عندما يكون فرق الضغط بين نقطتين صغيراً نسبياً، يلاحظ أن استخدام المانومتر العادي للقياس يؤدي إلى ارتكاب خطأ كبير بسبب صغر انحراف السائل في المانومتر، ومن المناسب عندها استخدام **المانومتر المائل** ***Inclined-Tube Manometer*** المبين في الشكل (٢-١٢). الذي يمكن بوساطته قياس المسافة المائلة التي تكون عادة

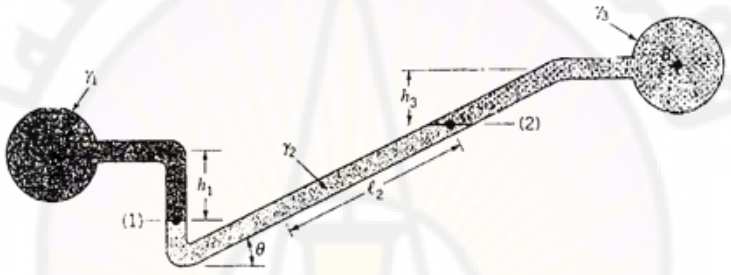
كبيرة نسبياً، ولا نقيس المسافة الشاقولية للسائل المنحرف بسبب صغرها.

لنأخذ المثال المبين في الشكل (٢-١٢)، ونحاول حساب فرق الضغط بين الناقلين عند النقطتين A, B. حيث أن الوزن النوعي للسائل في الناقل الأيسر γ_1 وللسائل في الناقل الأيمن γ_2 و لسائل المانومتر γ_3. من الشكل نستطيع أن نكتب:

$$p_1 = p_A + \gamma_1 \cdot h_1$$

و:

$$p_3 = p_B + \gamma_3 \cdot h_3 + \gamma_2 \cdot \ell_2 \cdot \sin\theta$$



الشكل (٢-١٢). المانومتر المائل [6]

لكن:

$$p_1 = p_3$$

بالتعويض يكون:

$$p_A + \gamma_1 \cdot h_1 = p_B + \gamma_3 \cdot h_3 + \gamma_2 \cdot \ell_2 \cdot \sin\theta$$

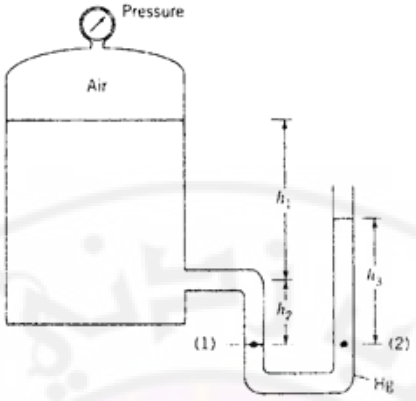
ومنه:

$$p_A - p_B = \gamma_3 \cdot h_3 + \gamma_2 \cdot \ell_2 \cdot \sin\theta - \gamma_1 \cdot h_1$$

مثال ٢-٤

لقياس الضغط السائد في خزان المغلق المبين في الشكل (٢-١٣). تم استخدام مانومتر زئبقي. والمطلوب حساب الضغط النسبي في أعلى الخزان. علماً أن:

$$\rho_{oil} = 900kg/m^3, \rho_{Hg} = 13600kg/m^3, h_1 = 91.44cm, h_2 = 15.24cm, h_3 = 22.86cm$$



الشكل (٢-١٣).

الحل:

لدينا:

$$p_1 = p_{air} + \gamma_{oil} \cdot (h_1 + h_2)$$

و:

$$p_2 = \gamma_{Hg} \cdot h_3$$

وباعتبار أن:

$$p_1 = p_2$$

لذلك يكون لدينا:

$$p_{air} + \gamma_{oil} \cdot (h_1 + h_2) = \gamma_{Hg} \cdot h_3$$

ومنه:

$$p_{air} = \gamma_{Hg} \cdot h_3 - \gamma_{oil} \cdot (h_1 + h_2)$$

وبالتعويض بالقيم العددية المعطاة، نجد أن:

$$p_{air} = 9.81 \cdot 13600 \cdot 0.2286 - 9.81 \cdot 900 \cdot (0.9144 + 0.1524) = 21.08 kPa$$

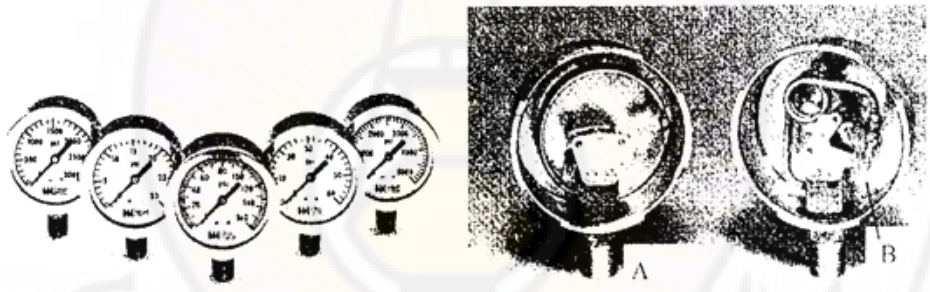
٢-٩-٥. مقياس بوردون Bourdon Gauge

وتدعى أيضاً ساعة الضغط. وهي أكثر الطرائق استعمالاً، لأنها عملية وسهلة

الاستخدام، ورخيصة الثمن نسبياً. وتعتمد على تغير الشكل الميكانيكي لجسم نتيجة تعرضه للضغط. ويستفاد عادة من العلاقة شبه الخطية التي تربط بين تغير الشكل والضغط المسبب لذلك.

تتألف ساعة الضغط من أنبوب معدني مرن إسطواني الشكل، ومعكوف، وفارغ، مقطعه على شكل قطع ناقص. يثبت بشكل محكم عند النقطة A في المكان المراد قياس الضغط عنده، ويوصل في النقطة B مؤشر عن طريق رافعة صغيرة بحيث يدور المؤشر حول محور، كما مبين في الشكل (٢-١٤).

عند وصل هذا المقياس بالمقطع المراد قياس الضغط عنده، يصبح الضغط داخل الأنبوب المكعوف مساوياً الضغط المقيس ويؤثر على جدرانه. فيحاول الأنبوب أن يأخذ شكلاً دائرياً مما يؤدي إلى تغير شكله الطولي، وتغير انحناء الأنبوب.



الشكل (٢-١٤). مقياس بوردون [6]

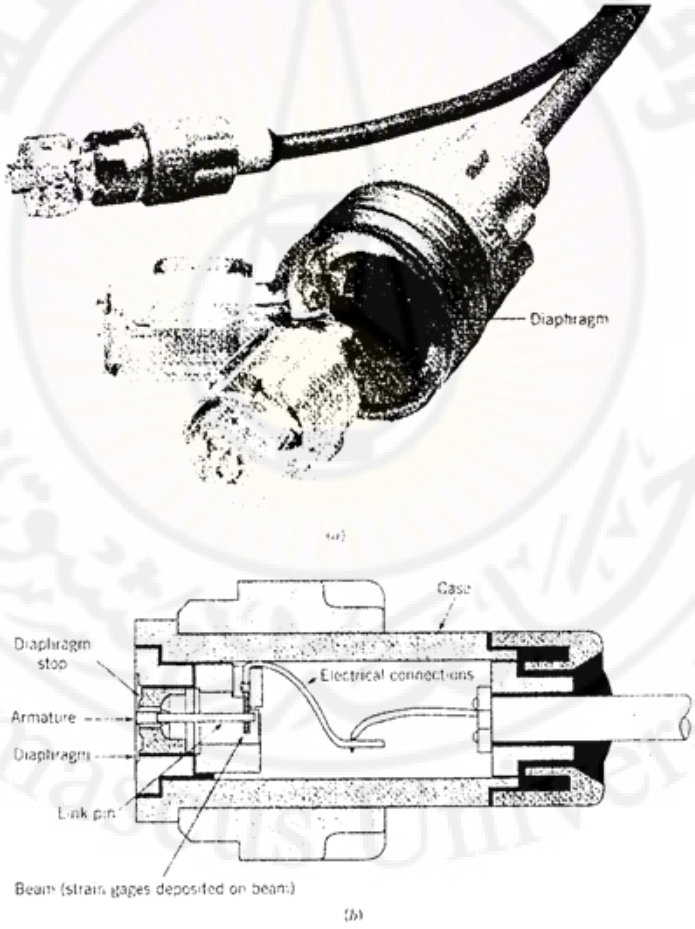
إن التغير في الانحناء يتناسب مع الضغط الداخلي، ونتيجة لتغير الإنحناء هذا تنتقل النقطة B مما يؤدي إلى تحريك المؤشر عن طريق الرافعة. ولما كان الأنبوب المعكوف يتعرض من الخارج للضغط الجوي، فإن هذا المقياس يقيس الفرق بين الضغط الجوي والضغط في المكان المراد إجراء القياس فيه، لذلك فهو يعطي قيمة الضغط النسبي.

يمكن باستعمال أنابيب ذات سماكات مختلفة ومصنوعة من مواد مختلفة أيضاً تصنيع أجهزة لقياس الضغوط في مجالات واسعة جداً، تبدأ من قيم منخفضة جداً لتصل إلى مئات الكيلو باسكال.

٢-٩-٦. أجهزة قياس الضغط الإلكترونية

Electronic Pressure Measuring Devices

جهاز قياس الضغط الإلكتروني عبارة عن **بللورة كهربائية** ***Piezoelectric Crystal*** تقوم بتحويل طاقة الضغط إلى طاقة كهربائية. فعندما يطبق الضغط على البللورة الكهربائية يحصل فيها تشوه يسبب تغيراً في **الجهد الكهربائي** ***Voltage***. ويتعلق هذا التغير في الجهد بشكل مباشر مع **التشوه** ***Deformation***، وبالتالي مع الضغط المطبق. يتم وصل البللورة الكهربائية مع سلك كهربائي يتصل بوسيلة إظهار هي عبارة عن مقياس فولت، كما في الشكل (٢-١٥).



الشكل (٢-١٥). مقاييس ضغط إلكترونية [6]

تمتاز أجهزة القياس الكهربائية باتساع مجالات الضغوط المقاسة، حيث يمكن قياس ضغوط قليلة ومنها قياس ضغط الدم وضغوط عالية جداً. كذلك تمكننا هذه الأجهزة من قياس الضغوط الساكنة والديناميكية على حد سواء بدقة عالية.

تكمن الميزة الأساسية لأجهزة قياس الضغط الإلكترونية، في أنه يمكن وصلها مع الحاسوب عن طريق بطاقة خاصة، بحيث يتم تسجيل قيم الضغوط مباشرة بأسلوب أوتوماتيكي. وتعتبر هذه الميزة مهمة جداً، لأنه في كثير من الحالات وخاصة في **الجريانات شبه المستقرة** ***Quasisteady Flow*** والجريانات عالية الاضطراب، التي يحصل فيها تذبذب كبير في قيم الضغوط، بحيث يكون من المتعذر تقديرها دون تسجيل. وبتسجيل هذه القيم على الحاسوب، وباستخدام برامج معينة يمكن معالجة النتائج بشكل سهل ودقيق، عن طريق تحديد القيم الوسطية والعظمى للضغوط، وهو ما يساعد على تحديد المستوى العام لعدم الاستقرار في الجريان المدروس.

٢-١٠. قوى ضغط السائل الساكن على السطوح المغمورة

Hydrostatic Force on Submerged Surface

٢-١٠-١. تمهيد Preface

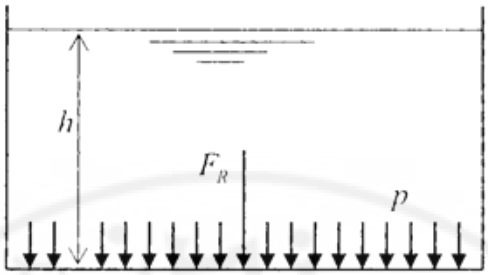
تتعرض السطوح المغمورة في سائل إلى قوى ضغط تؤثر عليها بشكل ناظمي. ويأخذ تحديد هذه القوى حيزاً هاماً في عملية تصميم الخزانات والسدود والبوابات والمنشآت المائية الأخرى. ونعلم من خلال دراستنا السابقة أن قيمة الضغط الهيدروستاتيكي عند نقطة من سائل ساكن تتعلق بشكل أساسي بعمق هذه النقطة وبالوزن النوعي للسائل، وأن هذا الضغط يتغير بشكل خطي مع العمق.

٢-١٠-٢. قوى الضغط المؤثرة على السطوح الأفقية المغمورة

Hydrostatic Forces on Submerged Horizontal Surface

لنأخذ سطحاً أفقياً مساحته A على عمق h من السطح السائب لسائل ساكن كما في الشكل (٢-١٦). فنجد أن الضغط p المؤثر على هذا السطح ثابت، ويساوي:

$$p = \gamma \cdot h$$



الشكل (٢-١٦). قوى الضغط المؤثرة على السطوح الأفقية المغمورة

أما القوة المؤثرة على هذا السطح فتساوي:

$$F_R = p \cdot A = \gamma \cdot h \cdot A \qquad (٢-٢٨)$$

ونلاحظ هنا أن الحد $\gamma \cdot h \cdot A$ يساوي وزن السائل الموجود فوق السطح A. إلا أنه ليس من الضروري أن تكون القوة المؤثرة على السطح A مساوية وزن الماء فوقه، وسنتعرض إلى ذلك في الفقرات القادمة.

٢-١٠-٣. قوى الضغط المؤثرة على السطوح المغمورة في مستوٍ مائل

Hydrostatic Forces on an Inclined Plane Submerged Surface

ليكن لدينا سطحاً مستوياً يميل على الأفق بزاوية θ، كما في الشكل (٢-١٧). ولنفرض أن h العمق المتغير لأي نقطة من هذا السطح، و y المسافة المناظرة من المحور ox الناتج عن تقاطع السطح المستوي مع سطح السائل الحر.

إن الضغط على السطح يختلف من نقطة لأخرى تبعاً للعمق. إلا أن النقاط الواقعة في مستوٍ أفقي واحد تخضع لنفس الضغط. فإذا أخذ ضمن السطح A شريحة أفقية لامتناهية في الصغر مساحتها dA، تقع على عمق h من سطح السائل، واعتبرنا كما سبق أن:

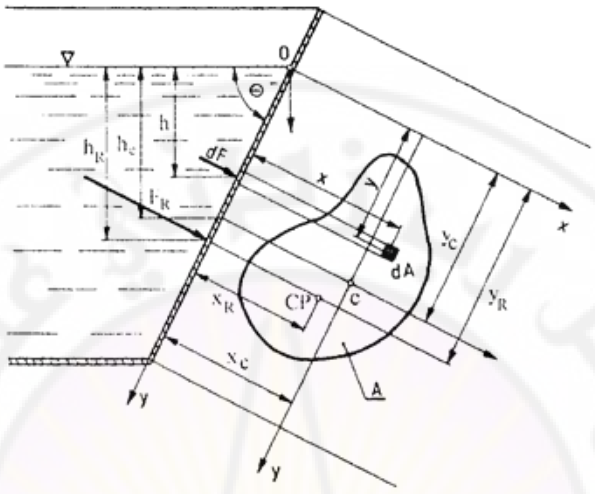
$$p = \gamma \cdot h$$

حيث:

$$h = y \cdot \sin\theta \qquad (٢-٢٩)$$

فإن القوة dF المؤثرة في الشريحة تكون:

$$dF = p \cdot dA = \gamma \cdot y \cdot \sin\theta \cdot dA \qquad (٣٠-٢)$$



الشكل (٢-١٧). قوى الضغط المؤثرة على السطوح المغمورة في مستوٍ مائل [7]

وبمكاملة المعادلة السابقة نحصل على قوة الضغط F_R المؤثرة على السطح المائل:

$$F_R = \int_A \gamma \cdot y \cdot \sin\theta \cdot dA$$

أو:

$$F_R = \gamma \cdot \sin\theta \cdot \int_A y \cdot dA \qquad (٣١-٢)$$

ولكن $\int_A y \cdot dA$ يمثل العزم الساكن للسطح المستوي، وهو يساوي :

$$\int_A y \cdot dA = y_c \cdot A \qquad (٣٢-٢)$$

حيث y_c هي بعد مركز ثقل السطح عن المحور ox.

وبالتعويض في المعادلة (٢-٣١)، نجد أن:

$$F_R = \gamma \cdot \sin\theta \cdot y_c \cdot A \qquad (٣٣-٢)$$

فإذا رمزنا بـــ h_c لعمق مركز ثقل السطح A عن السطح الحر للسائل الساكن، يكون لدينا:

$$h_c = y_c \cdot \sin\theta \qquad (٣٤-٢)$$

وأخيراً نحصل على:

$$F_R = \gamma \cdot h_c \cdot A \qquad (٣٥-٢)$$

ومنه نستنتج أن قوة الكلية الضغط الكلية على أي سطح مستو مغمور في سائل تكون ناظمية على هذا السطح، وتساوي جداء مساحته بالضغط عند مركز ثقله.

مركز الضغط Center of Pressure

تعرف نقطة تأثير محصلة قوى الضغط السائل الساكن على سطح مستو ما **بمركز الضغط** ***Center of Pressure***. بأخذ المحور ox كمحور للعزوم، نجد أن عزم القوة dF المؤثرة في الشريحة dA يساوي:

$$dM = y \cdot dF = \gamma \cdot y^2 \cdot \sin\theta \cdot dA \qquad (٣٦-٢)$$

وبالمكاملة نحصل على محصلة عزم القوى المؤثرة على السطح:

$$M = \int_A \gamma \cdot y^2 \cdot \sin\theta \cdot dA \qquad (٣٧-٢)$$

فإذا رمزنا لبعد مركز تطبيق محصلة قوى الضغط F_R عن المحور ox بالرمز y_R، يكون لدينا:

$$F_R \cdot y_R = \int_A \gamma \cdot y^2 \cdot \sin\theta \cdot dA \qquad (٣٨-٢)$$

مع ملاحظة أن الحد $\int_A y^2 \cdot dA$ يمثل عزم العطالة I_x للسطح المستوي بالنسبة للمحور ox، وبتعويض F_R بقيمتها، يمكن كتابة المعادلة السابقة على الشكل:

$$\gamma \cdot h_c \cdot A \cdot y_R = \gamma \cdot \sin\theta \cdot I_x \qquad (٣٩-٢)$$

وأخيراً نستنتج أن:

$$y_R = \frac{I_x}{A \cdot y_c} \qquad (٤٠-٢)$$

أي أن بعد مركز الضغط عن المحور الناتج عن تقاطع السطح المستوي مع سطح السائل الحر يساوي حاصل قسمة عزم عطالة السطح المستوي حول هذا المحور على

العزم الستاتيكي حول نفس المحور.

وبما أن:

$$I_x = \overline{I_x} + A \cdot y_c^2 \qquad (٤١-٢)$$

حيث: $\overline{I_x}$ – تمثل عزم عطالة السطح المستوي حول المحور المار بمركز ثقله والموازي للمحور x.

بعد التعويض في المعادلة (٢-٤٠) نجد أن:

$$y_R = y_c + \frac{\overline{I_x}}{A \cdot y_c} \qquad (٤٢-٢)$$

ويلاحظ من المعادلة السابقة أن الحد الثاني يكون موجباً دوماً، لذا فإن مركز الضغط يكون دائماً أعمق من مركز ثقل السطح.

وبطريقة مماثلة يمكن تعيين الإحداثي الثاني x_R لمركز قوة الضغط. وذلك بأخذ العزوم حول المحور oy، فنجد أن:

$$x_R \cdot F_R = \int_A x \cdot dF \qquad (٤٣-٢)$$

أو:

$$x_R \cdot \gamma \cdot y_c \cdot A \cdot \sin\theta = \int_A \gamma \cdot \sin\theta \cdot x \cdot y \cdot dA \qquad (٤٤-٢)$$

ومنه:

$$x_R = \frac{I_{xy}}{A \cdot y_c} \qquad (٤٥-٢)$$

حيث: I_{xy} – جداء عطالة السطح A.

وبما أن:

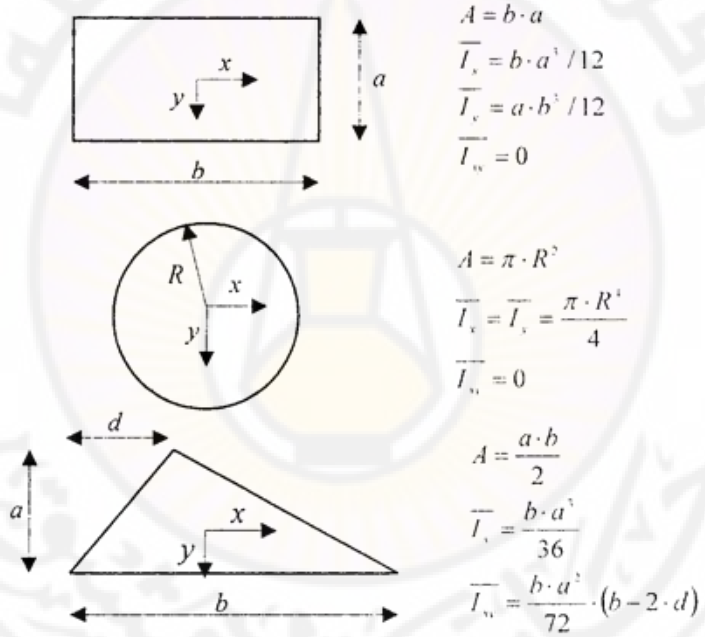
$$I_{xy} = \overline{I_{xy}} + A \cdot x_c \cdot y_c \qquad (٤٦-٢)$$

لذا فإن:

$$x_R = x_c + \frac{\overline{I_{xy}}}{A \cdot y_c} \qquad (٤٧-٢)$$

يمثل $\overline{I_{xy}}$ جداء عطالة السطح A بالنسبة لمحورين يمران من مركز ثقله ويوازيان المحورين ox, oy. وفي حال كان المحور oy محور تناظر للسطح، فإن $\overline{I_{xy}} = 0$، ويقع مركز السطح ومركز الضغط على محور التناظر. ولا ينطبق مركز الضغط على مركز السطح إلا في السطوح الأفقية.

يبين الشكل (٢-١٨) عزوم العطالة لبعض الأشكال المستخدمة في المنشآت المائية كبوابات، مع الملاحظة أن الشكل المستطيل هو الأكثر استخداماً للبوبات وخاصة المتوسطة والصغيرة لسهولة الرفع والتحريك.



$$A = b \cdot a$$
$$\overline{I_x} = b \cdot a^3 / 12$$
$$\overline{I_y} = a \cdot b^3 / 12$$
$$\overline{I_{xy}} = 0$$

$$A = \pi \cdot R^2$$
$$\overline{I_x} = \overline{I_y} = \frac{\pi \cdot R^4}{4}$$
$$\overline{I_{xy}} = 0$$

$$A = \frac{a \cdot b}{2}$$
$$\overline{I_x} = \frac{b \cdot a^3}{36}$$
$$\overline{I_{xy}} = \frac{b \cdot a^2}{72} \cdot (b - 2 \cdot d)$$

الشكل (٢-١٨). الخواص الهندسية لبعض الأشكال المستخدمة في المنشآت المائية

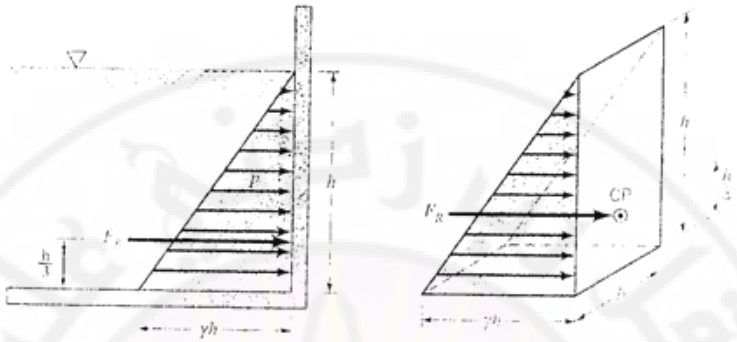
٢-١٠-٤. قوى الضغط المؤثرة على الجدران المستطيلة

Hydrostatic Forces on Rectangular Walls

جدار شاقولي Vertical Wall

بافتراض أن جداراً شاقولياً في خزان يتعرض سطحه للضغط الجوي، كما في الشكل (٢-١٩). فإن توزع الضغط على سطح هذا الجدار الشاقولي يأخذ شكلاً

خطياً، لأن الضغط يتناسب مع العمق، ويتراوح مابين الصفر (الضغط الجوي) عند السطح و $p = \gamma \cdot h$ عند القاع.



الشكل (٢-١٩). مخطط توزع الضغط الهيدروستاتيكي على جدار مستطيل شاقولي [6]

إن محصلة القوى المؤثرة في الجدار الشاقولي حسب ما ورد في الفقرة السابقة تساوي جداء مساحة هذا الجدار بالضغط عند مركز ثقله، أي أن:

$$F_R = \gamma \cdot h_c \cdot A$$

ومنه:

$$F_R = \gamma \cdot \frac{h}{2} \cdot b \cdot h = \gamma \cdot b \cdot \frac{h^2}{2} \qquad (٤٨-٢)$$

حيث: h – عرض الجدار.

أما بعد مركز الضغط عن سطح السائل فيساوي:

$$y_R = y_c + \frac{\overline{I_x}}{A \cdot y_c}$$

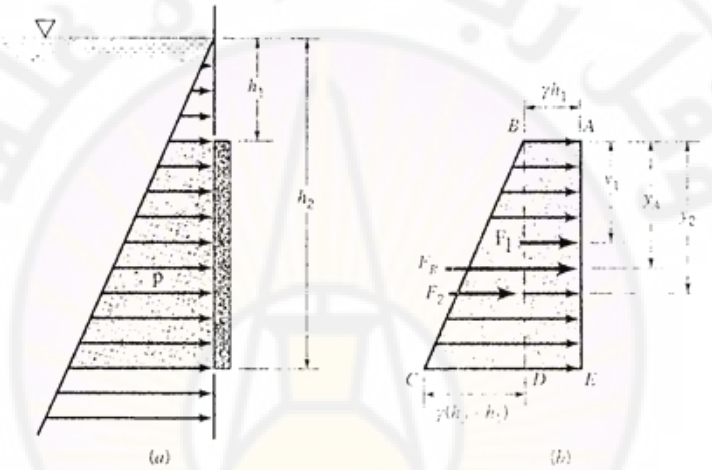
ومنه:

$$y_R = \frac{h}{2} + \frac{\frac{b \cdot h^3}{12}}{b \cdot h \cdot \frac{h}{2}} = \frac{2}{3} \cdot h \qquad (٤٩-٢)$$

يلاحظ من العلاقات السابقة أن محصلة قوى ضغط السائل على الجدار الشاقولي تساوي مساحة مخطط الضغط مضروباً في عرض الجدار، أي أنها تساوي ما يدعى

بحجم موشور الضغط ***Pressure Prism***. أما مركز الضغط فيقع في مركز ثقل مخطط الضغط.

أما إذا أردنا حساب قوى الضغط على بوابة مستطيلة شاقولية ضمن جدار شاقولي، كما هو مبين في الشكل (٢-٢٠). فإننا نرسم مخطط الضغط على الجدار كلّه، ثم نأخذ منه الجزء المؤثر على البوابة فقط. ولحساب محصلة قوى الضغط ومركز الضغط يمكن اتباع إحدى الطريقتين التاليتين:



الشكل (٢-٢٠). مخطط توزع الضغط الهيدروستاتيكي على بوابة مستطيلة في جدار شاقولي [6]

١- نوجد مساحة مخطط الضغط الذي يكون على شكل شبه منحرف ونضربه بعرض البوابة فنحصل على محصلة قوى الضغط. أما مركز الضغط فهو مركز ثقل شبه المنحرف. وبناء على ذلك نجد أن:

$$F_R = \left(\gamma \cdot h_1 + \frac{\gamma \cdot h_2}{2} \right) \cdot (h_2 - h_1) \cdot b \qquad (٢-٥٠)$$

٢- نجزء مخطط الضغط إلى قسمين: الأول مستطيل محصلة قوى الضغط فيه F_1 ومركز الضغط y_1 يقع في منتصفه، والثاني مثلث محصلة قوى الضغط فيه F_2 ومركز الضغط y_2. أي أن:

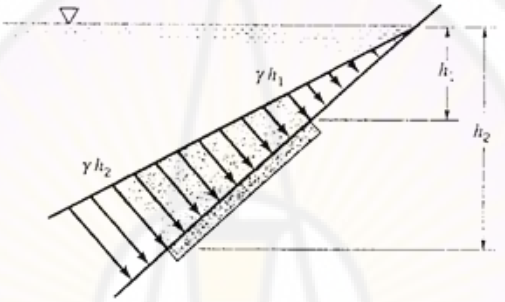
$$F_R = F_1 + F_2$$

و:

$$y_A = \frac{F_1 \cdot y_1 + F_2 + y_2}{F_R} \qquad (٢-٥١)$$

جدار مائل Inclined Wall

لحساب محصلة قوة الضغط وإيجاد مركز الضغط على بوابة مستطيلة ضمن جدار يميل على الأفق بزاوية ما وعرضه b، كما في الشكل (٢-٢١)، نطبق نفس المفهوم السابق في الحل. فنرسم أولاً مخطط الضغط، ثم نأخذ منه القسم المؤثر على البوابة، فنجد أن مساحة مخطط الضغط مضروباً في عرض البوابة تمثل محصلة قوة الضغط. وأما مركز الضغط فيقع في مركز ثقل مخطط الضغط.



الشكل (٢-٢١). مخطط توزع الضغط الهيدروستاتيكي على بوابة مستطيلة في جدار مائل [6]

مثال ٢-٥

في الشكل (٢-١٦)، بفرض أن الوعاء أسطواني ويحتوي على الماء، قطر قاعدته $D = 1m$، ارتفاع الماء $h = 1.5m$. احسب محصلة قوى الضغط على القاع.

الحل:

لدينا:

$$F_R = p \cdot A = \gamma \cdot h \cdot A$$

$$F_R = 9.81 \cdot 1000 \cdot 1.5 \cdot \frac{\pi \cdot 1^2}{4} = 11.55kN$$

مثال ٢-٦

جدار شاقولي مستطيل الشكل عرضه $b = 2m$، ويحجز خلفه الماء بارتفاع $h = 4m$. احسب محصلة قوى الضغط المؤثر على هذا الجدار.

الحل:

بما أن:

$$F_R = \gamma \cdot \frac{h}{2} \cdot b \cdot h = \gamma \cdot b \cdot \frac{h^2}{2}$$

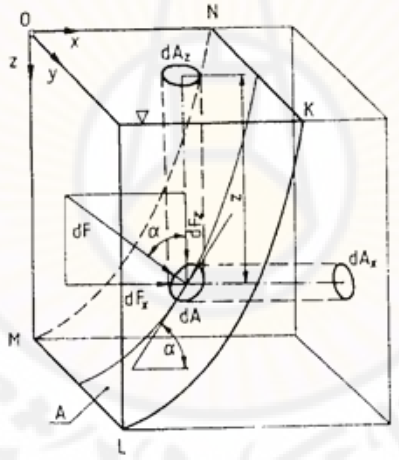
ومنه:

$$F_R = 9.81 \cdot 1000 \cdot 2 \cdot \frac{4^2}{2} = 156.96kN$$

٢-١٠-٥. قوى الضغط المؤثرة على السطوح المغمورة المنحنية الأسطوانية

Hydrostatic Forces on Curved Submerged Cylindrical Surfaces

ليكن لدينا السطح المنحني الأسطواني المغمور في سائل وزنه النوعي γ المبين في الشكل (٢-٢٢). ونريد حساب محصلة قوى الضغط المؤثرة على هذا السطح.



الشكل (٢-٢٢). الضغط المؤثر على السطوح المنحنية الأسطوانية المغمورة [7]

نأخذ من السطح شريحة لامتناهية في الصغر مساحتها dA. فنجد أن الضغط المؤثر على هذه الشريحة يساوي:

$$p = \gamma \cdot h$$

إن مسقط الشريحة في المستوي العمودي على المحور ox هو dA_x، ومسقطها في المستوي العمودي على المحور oz هو dA_z. وباعتبار أن α هي الزاوية التي يصنعها

المماس للشريحة مع الأفق، يمكن كتابة:

$$dA_x = dA \cdot \sin\alpha \qquad (٥٢-٢)$$

و:

$$dA_z = dA \cdot \cos\alpha \qquad (٥٣-٢)$$

بما أن الشريحة المدروسة صغيرة، لذلك فإن قوى الضغط المؤثرة عليها تكون منتظمة وثابتة وتؤثر بشكل ناظمي على سطحها، وتساوي:

$$dF = p \cdot dA = \gamma \cdot h \cdot dA = \gamma \cdot z \cdot dA \qquad (٥٤-٢)$$

فإذا حللنا هذه القوة إلى مركبتين وفق المحورين oz, ox على الترتيب، نجد أن:

$$dF_x = dF \cdot \sin\alpha = \gamma \cdot z \cdot dA \cdot \sin\alpha \qquad (٥٥-٢)$$

أو:

$$dF_x = \gamma \cdot z \cdot dA_x \qquad (٥٦-٢)$$

و:

$$dF_z = dF \cdot \cos\alpha = \gamma \cdot z \cdot dA \cdot \cos\alpha \qquad (٥٧-٢)$$

أو:

$$dF_z = \gamma \cdot z \cdot dA_z \qquad (٥٨-٢)$$

وبالمكاملة يمكن الحصول على مركبات قوى الضغط على السطح المنحني:

$$F_x = \gamma \cdot \int_{A_x} z \cdot dA_x \qquad (٥٩-٢)$$

و:

$$F_z = \gamma \cdot \int_{A_z} z \cdot dA_z \qquad (٦٠-٢)$$

نلاحظ من العلاقتين السابقتين، أن المركبة الأفقية F_x لقوة الضغط المؤثرة على السطح المنحني تساوي محصلة قوة الضغط على مسقط السطح المنحني على مستو شاقولي، وأن المركبة الشاقولية F_z لقوة الضغط المؤثرة على السطح المنحني تساوي

وزن السائل المحصور بين السطح المنحني وسطح السائل السائب.

وتجدر الإشارة هنا إلى أن اتجاه المركبة الشاقولية للمحصلة يكون للأسفل، إذا كان السائل موجوداً فوق السطح المنحني المدروس مباشرة. ويكون نحو الأعلى إذا لم يكن هنالك سائل فوق السطح المنحني المدروس مباشرة. وتكون المركبة الشاقولية مطبقة في مركز ثقل وزن السائل الحقيقي أو الوهمي المحصور بين السطح المنحني وسطح السائل أو ممدده ومستويين شاقوليين يمران من بداية السطح ونهايته.

أخيراً للحصول على شدة محصلة قوى الضغط المؤثرة على السطح المنحني نطبق العلاقة:

$$F_R = \sqrt{F_x^2 + F_z^2} \qquad (٦١-٢)$$

وتميل هذه المحصلة على الأفق بزاوية θ، تحسب قيمتها من العلاقة:

$$\tan\theta = \frac{F_z}{F_x} \qquad (٦٢-٢)$$

٢-١١. الطفو واستقرار الأجسام المغمورة والعائمة

Flotation and Stability of Floating and Submerged Bodies

٢-١١-١. مبدأ (دافعة) أرخميدس Archimedes Principle

ليكن لدينا جسم مغمور في سائل وزنه النوعي γ، كما في الشكل (٢-٢٣)، ولنأخذ من هذا الجسم شريحة شاقولية حجمها $d\forall$ ومساحتة مقطعها dA. إن القوة المؤثرة في السطح العلوي تساوي:

$$dF_1 - p_1 \cdot dA = \gamma \cdot h_1 \cdot dA \qquad (٦٣-٢)$$

ولهذه القوة مركبة شاقولية تساوي:

$$dF_{z1} = \gamma \cdot h_1 \cdot dA_z \qquad (٦٤-٢)$$

حيث: dA_z - مسقط dA على مستو أفقي. أما القوة المؤثرة في السطح السفلي:

$$dF_2 = p_2 \cdot dA = \gamma \cdot h_2 \cdot dA \qquad (٦٥-٢)$$

ولها مركبة شاقولية تساوي:

$$dF_{z_2} = \gamma \cdot h_2 \cdot dA_z \qquad (٦٦-٢)$$

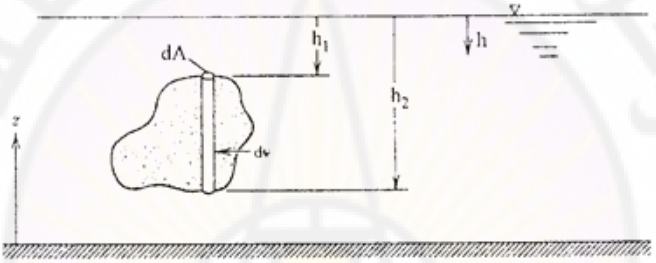
والقوة الشاقولية المؤثرة في كامل الشريحة تساوي:

$$dF_z = dF_{z_2} - dF_{z_1} = \gamma \cdot (h_2 - h_1) \cdot dA_z = \gamma \cdot d\forall \qquad (٦٧-٢)$$

حيث: $d\forall$ – حجم الشريحة.

وللحصول على القوة الكلية الفاعلة في الاتجاه الشاقولي نكامل العلاقة السابقة، فنجد:

$$F_z = \int_{\forall} dF_z = \gamma \cdot \int_{\forall} d\forall = \gamma \cdot \forall \qquad (٦٨-٢)$$



الشكل (٢-٢٣). استنتاج دافعة أرخميدس [4]

ومنه نستنتج أن هناك قوة شاقولية تؤثر على الجسم المغمور اتجاهها من الأسفل نحو الأعلى، وقيمتها تساوي وزن السائل الذي يشغله الجسم في هذا السائل، وتحاول هذه القوة دوماً رفع الجسم باتجاه الأعلى. وهي تسمى عادة دافعة أرخميدس لنسبة للفيلسوف والرياضي اليوناني ***Archimedes(287-212 B.C)***.

إن ضغط السائل على الجسم في باقي الاتجاهات متساو ومتعاكس. أما نقطة تطبيق دافعة أرخميدس فتقع في مركز ثقل وزن السائل المزاح.

٢-١١-٢. استقرار الأجسام المغمورة Stability of Submerged Bodies

ليكن لدينا جسماً مغموراً كلياً في سائل ما، ولندرس شروط توازن هذا الجسم.

من الواضح أن أول شرط من شروط التوازن، هو أن يكون وزن الجسم W مساوياً ومعاكساً لقوة الرفع أو دافعة أرخميدس F_B ، أي أن:

$$W = F_B \qquad (٦٩-٢)$$

حيث: W - وزن الجسم الذي وزنه الحجمي γ_b، ويساوي:

$$W = \gamma_b \cdot \forall \qquad (٧٠-٢)$$

إن القوة W تؤثر في مركز ثقل الجسم المغمور CG. أما القوة F_B فتساوي وزن السائل الذي أزاحه الجسم عند غمره، أي أن:

$$F_B = \gamma \cdot \forall \qquad (٧١-٢)$$

حيث: γ - الوزن الحجمي للسائل الذي يغمر فيه الجسم، و $\forall$ حجم هذا الجسم. وهي تؤثر في مركز ثقل وزن السائل المزاح c.

مما سبق يمكن كتابة:

$$\gamma \cdot \forall = \gamma_b \cdot \forall \qquad (٧٢-٢)$$

أو:

$$\rho \cdot g \cdot \forall = \rho_b \cdot g \cdot \forall \qquad (٧٣-٢)$$

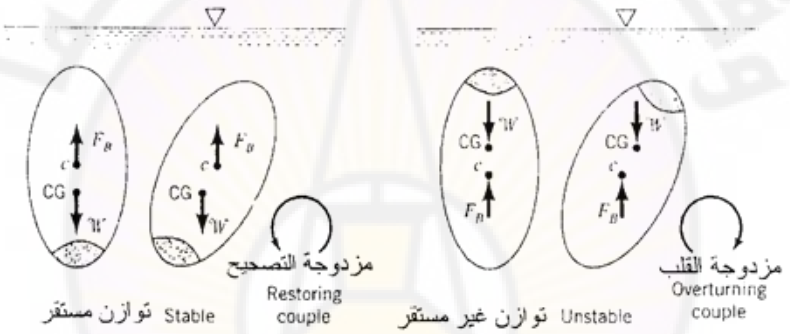
ومنه:

$$\rho = \rho_b \qquad (٧٤-٢)$$

وعليه فإن أول شرط من شروط استقرار الجسم المغمور كلياً، هو أن تكون الكتلة الحجمية للجسم تساوي الكتلة النوعية للسائل. وعندما يكون $\rho_b > \rho$ فإن وزن الجسم سيكون أكبر من دافعة أرخميدس، وسيؤدي ذلك إلى سقوط الجسم. وعندما يكون $\rho_b < \rho$ فإن دافعة أرخميدس ستكون أكبر من وزن الجسم، وسيؤدي ذلك إلى رفع الجسم نحو سطح السائل السائب، وإلى غمر الجسم جزئياً، بحيث يتحقق معه تساوي وزن الجسم ودافعة أرخميدس.

إن توافر الشرط $\rho = \rho_b$ ليس كافياً لتحقيق التوازن المستقر للجسم، والمثال التالي يوضح ذلك. لنأخذ جسماً مغموراً كلياً ومتوازناً. تؤثر فيه قوتان. الأولى هي وزنه، وتؤثر في مركز ثقله. والثانية هي دافعة أرخميدس، وتؤثر في مركز ثقل وزن السائل المزاح، كما في الشكل (٢-٢٤). ولنفترض أن مركز ثقل الجسم أخفض من

مركز ثقل وزن السائل المزاح، فإذا دورنا هذا الجسم قليلاً ثم تركناه، نلاحظ أن القوتين W . F_B تشكلان مزدوجة تحاول تدوير الجسم وإعادته إلى وضعه الأول. ويسمي هذا النوع من التوازن بالتوازن المستقر، إذ يحاول الجسم دوماً العودة إلى وضعيته المستقرة البدائية. أما إذا كان مركز ثقل الجسم أعلى من مركز ثقل السائل المزاح، فإن أي انحراف عن وضع التوازن يولد مزدوجة تحاول متابعة تدوير هذا الجسم وقلبه. ويسمى هذا النوع من التوازن بالتوازن غير المستقر. وإذا انطبقت نقطة تأثير كل من القوتين على الأخرى، فإن هذا سيؤدي إلى استقرار الجسم في أية وضعية يأخذها. ويسمى هذا النوع من التوازن بالتوازن الحيادي.



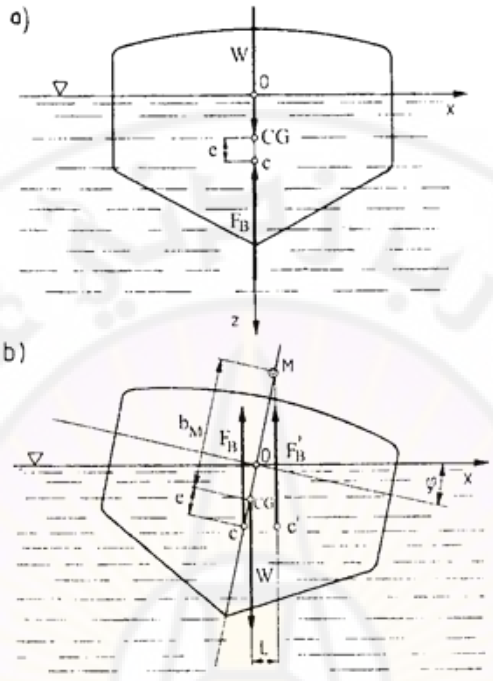
الشكل (٢-٢٤). استقرار الأجسام المغمورة [6]

نلاحظ إذن أن الشرط $\rho = \rho_b$ ليس كافياً ليكون الجسم المغمور في سائل مستقراً. بل لابد من إضافة شرط آخر، وهو أن يكون مركز ثقل الجسم أخفض من مركز حجمه.

٢-١١-٣. استقرار الأجسام العائمة Stability of Floating Bodies

ليكن لدينا الجسم العائم (المغمور جزئياً) المبين في الشكل (٢-٢٥). فنجد هذا الجسم يخضع لقوتين، الأولى هي الوزن W وتقع نقطة تطبيقها في مركز ثقل الجسم CG، والثانية هي دافعة أرخميدس F_B وتقع نقطة تطبيقها في مركز ثقل وزن السائل المزاح c. فإذا دور هذا الجسم حول محوره الطولي، فإن أجزاء جديدة منه تغمر، وأجزاء أخرى تطفو. كما وينتقل مركز ثقل وزن السائل المزاح من c إلى c' حيث تؤثر دافعة أرخميدس، وتتولد عزم مزدوجة تسمى مزدوجة التصحيح، لأنها تحاول

تصحيح وضع الجسم وإعادته إلى حالته السابقة.



الشكل (٢-٢٥). استقرار الأجسام العائمة [7]

تسمى نقطة تقاطع منحى القوة F'_B مع محور تناظر الجسم (النقطة M) بمركز الدوران. ويسمى الطول b_M (المسافة التي تفصل بين مركز الدوران ومركز ثقل الجسم) بارتفاع مركز الدوران. ونلاحظ أن الجسم المغمور جزئياً يطفو بشكل متوازن، إذا حاولت مزدوجة التصحيح إعادة الجسم إلى وضعيته الأفقية. ومن الواضح أن هذا لايتحقق إلا إذا كانت النقطة M أعلى من مركز ثقل الجسم، أي عندما يكون b_M موجباً. أما إذا كان سالباً أي عندما تكون النقطة M أخفض من مركز ثقل الجسم، فإن مزدوجة التصحيح الناتجة عن تدوير الجسم حول محوره الطولي سوف تحاول متابع تدوير هذا الجسم وقلبه.

٢-١١-٤. تحديد ارتفاع مركز الدوران تجريبياً

لنفترض جسماً متحركاً وزنه P فوق زورق، كما في الشكل (٢-٢٦). فعندما يتحرك الجسم مسافة مقدارها x بالاتجاه العمودي على المحور الطولي للزورق،

فإنه يميل بالزاوية φ ويتوازن عند هذا الوضع.

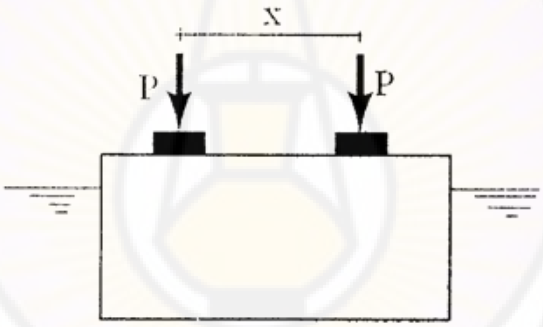
إن عزم الدوران الناتج عن إزاحة الجسم المتحرك P لمسافة x، يساوي عزم مزدوجة التصحيح الناتجة عن الوزن الذاتي للجسم W، وعن دافعة أرخميدس F_B بعد انتقالها إلى مركز الحجم الجديد. أي يمكن كتابة العلاقة:

$$P \cdot x = W \cdot b_M \cdot \varphi \qquad (٧٥-٢)$$

ومنه:

$$b_M = \frac{P \cdot x}{W \cdot \varphi} \qquad (٧٦-٢)$$

وبقياس زاوية الدوران φ (باستخدام نواس بسيط على سبيل المثال)، يمكن تحديد ارتفاع مركز الدوران.



الشكل (٢-٢٦). تحديد ارتفاع مركز الدوران تجريبياً

٢-١١-٥. تحديد ارتفاع مركز الدوران حسابياً

لندور الجسم المبين في الشكل (٢-٢٧) بزاوية مقدارها φ. فينتج عن ذلك دخول جزء جديد من الجسم في السائل يولد قوة دافعة إضافية تساوي $\Delta F +$، ونقطة تأثيرها في مركز هذا الحجم، الذي يبعد عن محور الدوران بالمسافة y_1. ويؤدي خروج حجم من السائل إلى إنقاص القوة الدافعة، أي توليد قوة دافعة سلبية تساوي $\Delta F -$، ونقطة تأثيرها تقع في مركز ثقل هذا الحجم الخارج من الماء الذي يبعد عن محور الدوران بالمسافة $y_1 -$. وتولد هاتان القوتان عزم التصحيح M الذي يعمل على إعادة الجسم الطافي إلى وضعيته الأصلية، وهو يساوي:

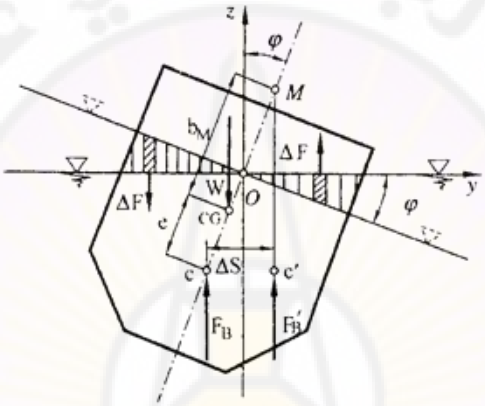
$$M = 2 \cdot y_1 \cdot \Delta F = F_B \cdot \Delta S = \gamma \cdot \forall \cdot \Delta S \qquad (٢-٧٧)$$

حيث: ΔS – المسافة التي يقطعها مركز حجم الجزء المغمور من الجسم عند تدويره بالزاوية φ، وهي تساوي:

$$\Delta S = \varphi \cdot (b_M + e) \qquad (٢-٧٨)$$

أي أن:

$$M = \gamma \cdot \forall \cdot \varphi \cdot (b_M + e) \qquad (٢-٧٩)$$



الشكل (٢-٢٧). تحديد ارتفاع مركز الدوران حسابياً [5]

ونحصل على العزم الكلي أيضاً بجمع العزوم الناتجة عن قوى الدفع الجزئية لمجموع الشرائح. فالعزم الذي تولده شريحة عرضها dy وارتفاعها $y \cdot \sin\varphi$ وطولها هو طول الجسم الطافي L، يساوي:

$$dM = y \cdot \gamma \cdot d\forall \qquad (٢-٨٠)$$

أو:

$$dM = y \cdot \gamma \cdot y \cdot \sin\varphi \cdot dy \cdot L \qquad (٢-٨١)$$

أي أن العزم الكلي، ينتج بالعلاقة:

$$M = \int_{-b/2}^{b/2} y \cdot \gamma \cdot y \cdot L \cdot \sin\varphi \cdot dy \qquad (٢-٨٢)$$

وبافتراض أن زاوية الدوران صغيرة، يمكن اعتبار:

$$\sin\varphi \approx \tan\varphi \approx \varphi \qquad (٨٣-٢)$$

وبالتالي يمكن كتابة العزم الكلي كما يلي:

$$M = \gamma \cdot \varphi \cdot \int_{-b/2}^{b/2} L \cdot y^2 \cdot dy = \gamma \cdot \varphi \int_{-b/2}^{b/2} y^2 \cdot dA \qquad (٨٤-٢)$$

وبمقارنة المعادلتين (٢-٧٩) و (٢-٨٤) مع بعضهما، نجد أن:

$$\gamma \cdot \varphi \cdot \int_{-b/2}^{b/2} y^2 \cdot dA = \gamma \cdot \forall \cdot \varphi \cdot (b_M + e) \qquad (٨٥-٢)$$

ومنه:

$$b_M = \frac{I}{\forall} - e \qquad (٨٦-٢)$$

حيث أن:

- $I = \int y^2 \cdot dA$: عزم عطالة سطح الجسم الناجم عن تقاطع حجم الجسم المغمور مع سطح السائل السائب.
- $\forall$: حجم الجزء المغمور من الجسم.
- e : بعد مركز ثقل الجسم العائم عن مركز حجم السائل المزاح.

مما سبق نستنتج أن شرط التوازن المستقر لجسم طاف هو:

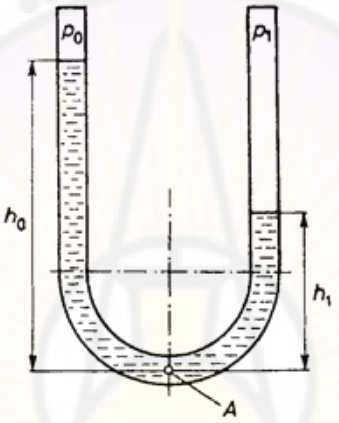
$$b_M > \frac{I_{min}}{\forall} - e \qquad (٨٧-٢)$$

وباعتبار أنه لسطح أي جسم عزما عطالة، لذلك نأخذ في المعادلة السابقة عزم العطالة الأقل لأنه يقابل الحالة الأخطر.

مسائل محلولة حول الفصل الثاني

المسألة الأولى

احسب فرق الارتفاع $h_0 - h_1$ للسائل الموجود في المانومتر الموضح في الشكل. علماً أن الضغوط المطبقة على فرعي المانومتر هي p_0, p_1 ، وأن الكتلة النوعية للسائل هي ρ .



الحل:

يمكن للفرع الأيسر من المانومتر كتابة العلاقة:

$$p_A = p_0 + \rho \cdot g \cdot h_0$$

وللفرع الأيمن كتابة العلاقة:

$$p_A = p_1 + \rho \cdot g \cdot h_1$$

وبمساواة العلاقتين السابقتين، نجد أن:

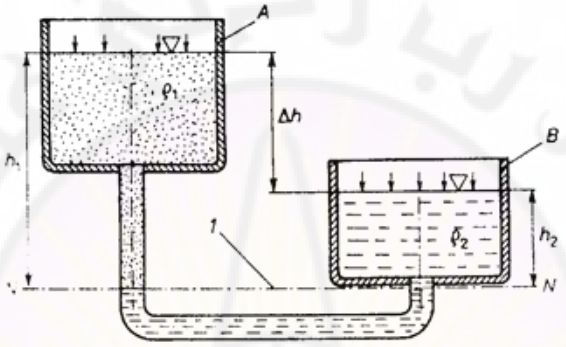
$$p_0 + \rho \cdot g \cdot h_0 = p_1 + \rho \cdot g \cdot h_1$$

ومنه:

$$h_0 - h_1 = \frac{p_1 - p_0}{\rho \cdot g}$$

المسألة الثانية

خزانان مكشوفان A,B ، مملوءان بسائلين، الكتلة النوعية للأول $\rho_1 = 900kg/m^3$ ، وللثاني $\rho_2 = 1000kg/m^3$. ويتصلان مع بعضهما عن طريق أنبوب. احسب قيمة كل من الارتفاعين h_1, h_2 بالنسبة لمنسوب المقارنة $N-N$. علماً أن فرق المنسوب بين سطحي السائلين في الخزانين $\Delta h = 0.2m$.



الحل:

بأخذ نقطتين من المستوي $N-N$ ، الضغط فيهما متساوٍ، الأولى عند الفرع الأيسر من المانومتر والثانية عند الفرع الأيمن، يمكن كتابة أن:

$$\rho_1 \cdot g \cdot h_1 = \rho_2 \cdot g \cdot h_2$$

ولكن لدينا من الشكل:

$$h_1 = h_2 + \Delta h$$

وبالتعويض يكون:

$$\rho_1 \cdot g \cdot (h_2 + \Delta h) = \rho_2 \cdot g \cdot h_2$$

ومنه:

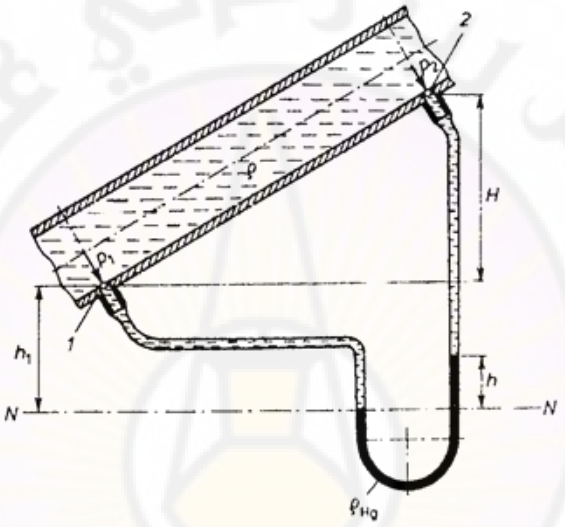
$$h_2 = \left(\frac{\rho_2}{\rho_2 - \rho_1}\right) \cdot \Delta h$$

وأخيراً بعد التعويض بالمعطيات الواردة في نص المسألة، نجد أن:

$$h_2 = 1.8m, h_1 = 2m$$

المسألة الثالثة

يجري الماء بين نقطتين من أنبوب مائل، مقطعه العرضي ثابت، وهو موصول مع مانومتر يحتوي على الزئبق، كما هو مبين في الشكل. فإذا علمت أن $H = 2m, h = 1m, \rho_{Hg} = 13600kg/m^3$. احسب قيمة فرق الضغط $\Delta p = p_1 - p_2$.



الحل:

بأخذ نقطتين من المستوي $N-N$، الضغط فيهما متساوٍ، الأولى عند الفرع الأيسر من المانومتر، والثانية عند الفرع الأيمن، يكون:

$$p_{N-N} = p_1 + \rho_{H2o} \cdot g \cdot h_1$$

و:

$$p_{N-N} = p_2 + \rho_{H2o} \cdot g \cdot (H + h_1 - h) + \rho_{Hg} \cdot g \cdot h$$

ومنه:

$$p_1 + \rho_{H2o} \cdot g \cdot h_1 = p_2 + \rho_{H2o} \cdot g \cdot (H + h_1 - h) + \rho_{Hg} \cdot g \cdot h$$

أي أن:

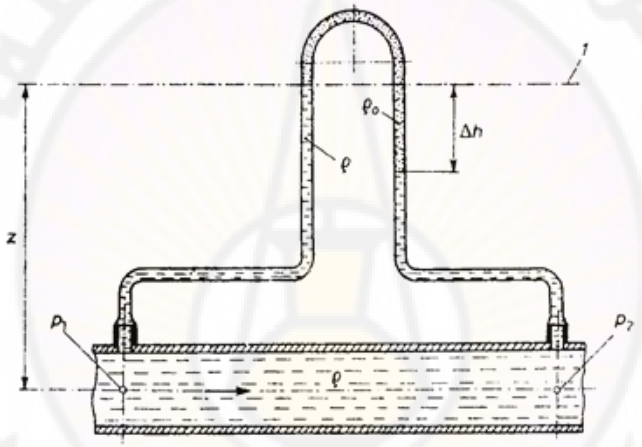
$$\Delta p = p_1 - p_2 = g \cdot \left(\rho_{H2o} \cdot H + h \cdot \left(\rho_{Hg} - \rho_{H2o}\right)\right)$$

وبالتعويض بالقيم العددية المعطاة نحصل على:

$$\Delta p = 9.81 \cdot \left[1000 \cdot 2 + 1 \cdot \left(13600 - 1000\right)\right] = 143.226kPa$$

المسألة الرابعة

احسب فرق الضغط بما يعادل عمود ماء بين مقطعي أنبوب أفقي يجري فيه الماء كما في الشكل. علماً أن سائل المانومتر هو زيت كتلته النوعيـــة $860kg/m^3$، وأن $\Delta h = 160mm$.



الحل:

بأخذ نقطتين من المستوي 1-1 الضغط فيهما متساوٍ، الأولى عند الفرع الأيسر من المانومتر، والثانية عند الفرع الأيمن منه، نجد أن :

$$p_{1\text{-}1} = p_1 - \rho \cdot g \cdot z$$

و:

$$p_{1\text{-}1} = p_2 - \rho \cdot g \cdot \left(z - \Delta h\right) - \rho_0 \cdot g \cdot \Delta h$$

ومنه:

$$p_1 - \rho \cdot g \cdot z = p_2 - \rho \cdot g \cdot \left(z - \Delta h\right) - \rho_0 \cdot g \cdot \Delta h$$

أي أن:

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \Delta h \cdot g \cdot (\rho - \rho_0)$$

أو:

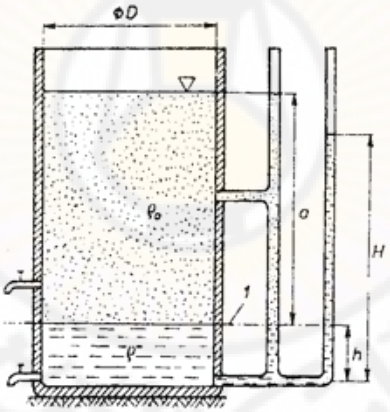
$$\Delta p(mmH2O) = \Delta h \cdot \left(\frac{\rho - \rho_0}{\rho} \right)$$

وأخيراً بالتعويض نجد بعد التعويض بالقيم العددية المعطاة أن:

$$\Delta p = 22.4 mmH2O$$

المسألة الخامسة

يتعرض سطح خزان أسطواني الشكل قطره $D = 500mm$ للضغط الجوي. ويحتوي على ماء وزيت، كما هو مبين في الشكل. ويشير البيزومتران الموصولان به إلى القيمتين $h = 500mm, H = 2000mm$. احسب حجم الزيت في الخزان علماً أن كتلته النوعية $\rho_0 = 860kg/m^3$.



الحل:

إن حجم الزيت الموجود في الخزان يساوي:

$$\forall = \frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot a$$

ويمكن تحديد قيمة a من مساواة الضغط عند المستوي 1 في كل من البيزومترين الأيسر والأيمن:

$$p_1 = \rho_0 \cdot g \cdot a$$

و:

$$p_1 = \rho \cdot g \cdot (H - h)$$

ومنه:

$$\rho_0 \cdot g \cdot a = \rho \cdot g \cdot (H - h)$$

أي أن:

$$a = \frac{\rho}{\rho_0} \cdot (H - h)$$

وبالتالي فإن حجم الزيت يساوي:

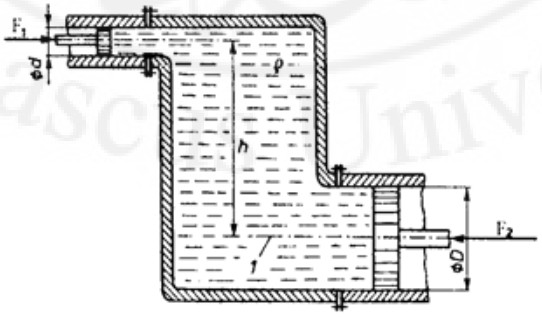
$$\forall = \frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot (H - h) \cdot \frac{\rho}{\rho_0}$$

وبالتعويض بما ورد من قيم عددية في نص المسألة نحصل على:

$$\forall = \frac{\pi \cdot 0.5^2}{4} \cdot (2 - 0.5) \cdot \frac{1000}{860} = 0.342 m^3$$

المسألة السادسة

مكبس هيدروليكي مملوء بزيت كتلته النوعية $\rho = 860 kg/m^3$. ومزود بأسطوانتين ضاغطتين، العليا قطرها $d = 25mm$ وتؤثر عليها قوة مقدارها $F_1 = 1kN$ ، والسفلى قطرها $D = 100mm$. فإذا كان فرق الإرتفاع بين محوري الأسطوانتين $h = 0.5m$. احسب القوة F_2 الواجب تطبيقها على الأسطوانة السفلية لمنعها من الحركة.



الحل:

إن الضغط عند محور الأسطوانة السفلية يساوي:

$$p = \frac{F_1}{A_1} + \rho \cdot g \cdot h$$

والقوة الواجب تطبيقها على الأسطوانية السفلية هي:

$$F_2 = p \cdot A_2$$

وبما أن:

$$A_1 = \frac{\pi \cdot d^2}{4}, A_2 = \frac{\pi \cdot D^2}{4}$$

فإنه يمكن كتابة:

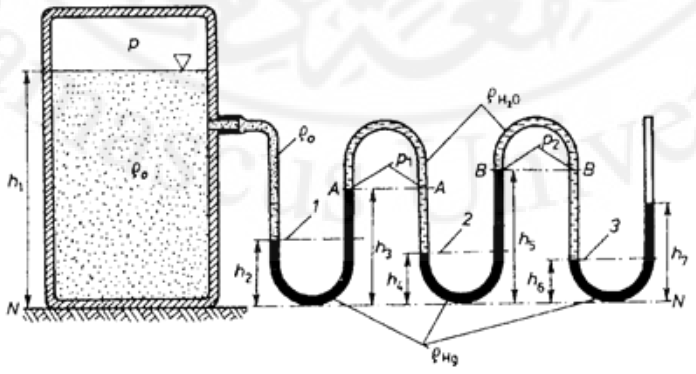
$$F_2 = \frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot \left(\frac{4 \cdot F_1}{\pi \cdot d^2} + \rho \cdot g \cdot h \right)$$

وبالتعويض نجد:

$$F_2 = 16kN$$

المسألة السابعة

بناء على القراءات التي تشير إليها المانومترات، يطلب حساب قيمة الضغط p المؤثر على سطح الخزان المبين في الشكل والمملوء بزيت كتلته النوعية $\rho_0 = 860kg/m^3$. علماً أن الكتلة النوعية للزئبق $\rho_{Hg} = 13600kg/m^3$ ، وقراءات المانومترات هي: $h_1 = 5m, h_2 = 2m, h_3 = h_7 = 2.5m, h_4 = h_6 = 1m, h_5 = 3m$.



الحل:

بكتابة معادلات التوازن عند المقاطع 1 – 2 – 3 على التوالي يكون لدينا:

$$p + g \cdot \rho_0 \cdot (h_1 - h_2) = p_1 + g \cdot \rho_{Hg} \cdot (h_3 - h_2)$$

و:

$$p_1 + g \cdot \rho_{H2O} \cdot (h_3 - h_4) = p_2 + g \cdot \rho_{Hg} \cdot (h_5 - h_4)$$

و:

$$p_2 + g \cdot \rho_{H2O} \cdot (h_5 - h_6) = g \cdot \rho_{Hg} \cdot (h_7 - h_6)$$

بحل جملة المعادلات السابقة حلاً مشتركاً، نجد أن:

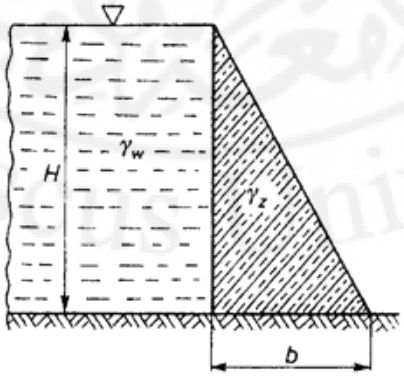
$$p = g \cdot \begin{bmatrix} \rho_{Hg} \cdot (h_3 - h_2 + h_5 - h_4 + h_7 - h_6) \\ - \rho_{H2O} \cdot (h_3 - h_4 + h_5 - h_6) + \rho_0 \cdot (h_1 - h_2) \end{bmatrix}$$

وبالتعويض بالقيم العددية المفترضة يكون:

$$p = 474 kPa$$

المسألة الثامنة

سد بيتوني مقطعه على شكل مثلث عرض قاعدته b وارتفاعه H. يحجز الماء بعمق يساوي ارتفاعه، كما هو مبين في الشكل. فإذا علمت أن الوزن النوعي لمادة السد هي γ_z. احسب النسبة $\frac{H}{b}$ بحيث يكون عزم القلب مساوياً نصف عزم التثبيت.



الحل:

بأخذ عزوم القوى المؤثرة حول النقطة O، نجد أن عزم التثبيت يساوي:

$$M_u = G \cdot y = G \cdot \frac{2}{3} \cdot b$$

أو:

$$M_u = \gamma_z \cdot \frac{b \cdot H}{2} \cdot L \cdot \frac{2}{3} \cdot b = \gamma_z \cdot \frac{b^2 \cdot H}{3} \cdot L$$

أما عزم القلب فيبلغ:

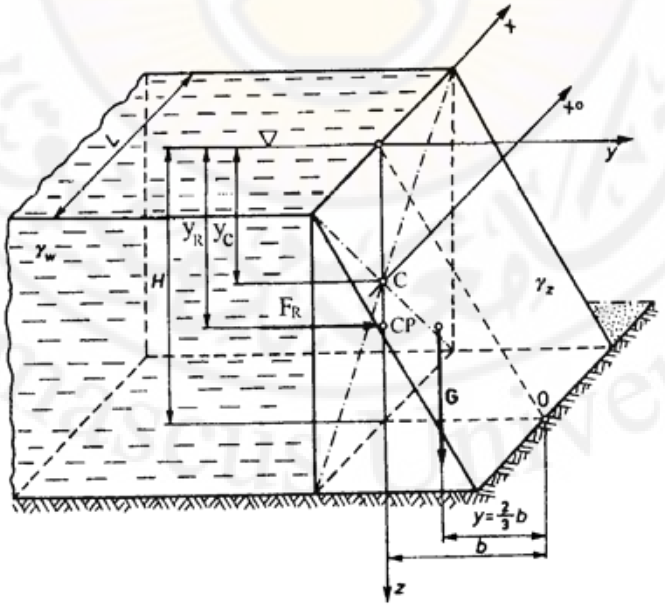
$$M_w = F_R \cdot \frac{H}{3}$$

حيث:

$$F_R = \gamma_w \cdot L \cdot \frac{H^2}{2}$$

أي أن:

$$M_w = \gamma_w \cdot L \cdot \frac{H^3}{6}$$



من شرط المسألة لدينا:

$$M_w = \frac{1}{2} \cdot M_u$$

وبالتالي فإن:

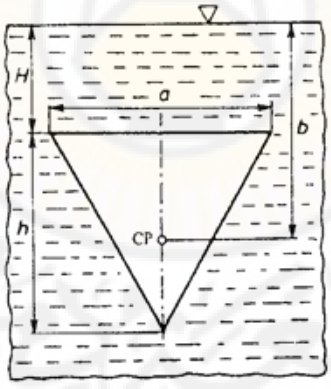
$$\gamma_w \cdot L \cdot \frac{H^3}{6} = \frac{1}{2} \cdot \gamma_z \cdot \frac{b^2 \cdot H}{3} \cdot L$$

وأخيراً نحصل على:

$$\frac{H}{b} = \sqrt{\frac{\gamma_z}{\gamma_w}}$$

المسألة التاسعة

على أي عمق H من سطح الماء يجب أن توضع بوابة مثلثية مستوية؟ بحيث يمر مركز الضغط من النقطة التي تبعد عن سطح الماء مسافة $b = 10m$، كما هو في الشكل. علماً أن عرض قاعدة البوابة $a = 4m$، وارتفاعها $h = 6m$. وكم تبلغ محصلة قوى الضغط المؤثرة على هذه البوابة؟



الحل:

كما نعلم فإن مركز الضغط يقع على العمق:

$$y_R = y_c + \frac{\overline{I_x}}{A \cdot y_c}$$

حيث:

$$A = \frac{a \cdot h}{2}$$

و:

$$\overline{I_x} = \frac{a \cdot h^3}{36}$$

و:

$$y_c = H + \frac{h}{3}$$

وبالتالي فإن:

$$b = H + \frac{h}{3} + \frac{\frac{a \cdot h^3}{36}}{\frac{a \cdot h}{2} \cdot \left(H + \frac{h}{3} \right)}$$

ومنه:

$$H^2 - 6 \cdot H - 14 = 0$$

وبحل المعادلة السابقة، نجد:

$$H = 7.8m$$

ولحساب محصلة قوة الضغط لدينا:

$$F_R = \gamma \cdot h_c \cdot A$$

وبالتعويض بالقيم العددية الواردة في نص المسألة يكون:

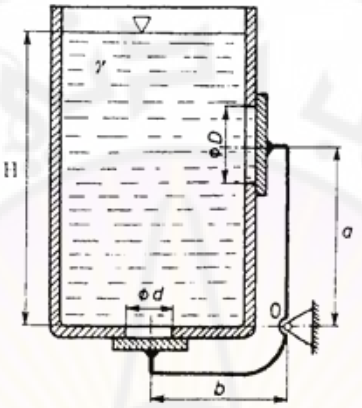
$$F_R = 9.81 \cdot 1000 \cdot \left(7.8 + \frac{6}{3} \right) \cdot \frac{4 \cdot 6}{2}$$

$$F_R = 1153.66kN$$

المسألة العاشرة

يحتوي خزان مكشوف من الأعلى ومملوء بسائل وزنه النوعي γ حتى العمق H على فتحتين دائريتين، الأولى جانبية قطرها D، والثانية تقع في أرضية الخزان قطرها d. فإذا كانت الفتحتان تغلقان بوساطة صفيحتين تتصلان مع ذراع صلب

قابل للدوران حول المفصل O، بحيث تتشكل منظومة صلبة تتحرك كتلة واحدة كما هو في الشكل. احسب عمق الماء H في الخزان بحيث تبقى الفتحتان مغلقتين. علماً أن مركزي الفتحتين يبعدان بمقدار a,b عن المفصل O، كما هو مبين في الشكل، وأن الاحتكاك عند المفصل مهمل.

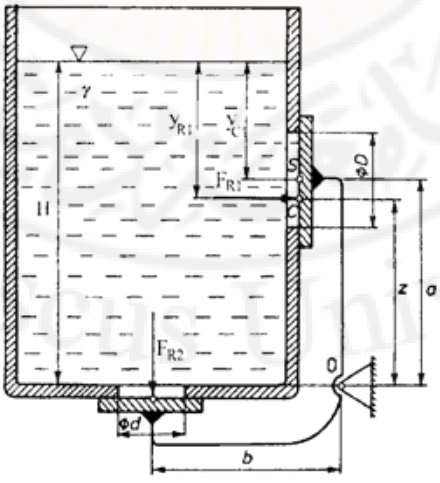


الحل:

إن محصلة قوى الضغط المؤثرة على الصفيحة الجانبية تساوي:

$$F_{R1} = \gamma \cdot (H - a) \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4}$$

أما محصلة قوى الضغط المؤثرة على الصفيحة السفلية فتساوي:



$$F_{R2} = \gamma \cdot H \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4}$$

كما أن مركز الضغط للصفيحة العليا يقع على عمق:

$$y_{R1} = (H-a) + \frac{\frac{\pi \cdot D^4}{64}}{(H-a) \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4}}$$

ويبعد عن المفصل O بمقدار:

$$z = H - y_{R1}$$

أو:

$$z = \frac{16 \cdot a \cdot H - 16 \cdot a^2 - D^2}{16 \cdot (H-a)}$$

بأخذ العزوم حول المفصل O يكون:

$$M_o = 0$$

أي أن:

$$\gamma \cdot (H-a) \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot \frac{16 \cdot a \cdot H - 16 \cdot a^2 - D^2}{16 \cdot (H-a)} = \gamma \cdot H \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot b$$

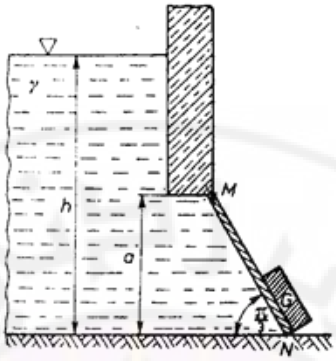
ومنه:

$$H = \frac{D^2 \cdot (D^2 + 16 \cdot a^2)}{16 \cdot (D^2 \cdot a - d^2 \cdot b)}$$

المسألة الحادية عشرة

لمعايرة منسوب الماء في قناة مستطيلة المقطع العرضي، تم استخدام بوابة MN مستطيلة المقطع أيضاً عرضها $b = 5m$ يساوي عرض القناة. فإذا كانت البوابة قابلة للدوران حول المفصل M، وتميل على الأفق بزاوية $\frac{\pi}{3}$، كما هو في الشكل. ما هو الوزن G الواجب إضافته عند نهاية البوابة N بحيث تبقى مغلقة حتى اللحظة التي لا يتجاوز فيها عمق الماء في القناة $h = 4m$. علماً أن المفصل يبعد عن أرضية القناة

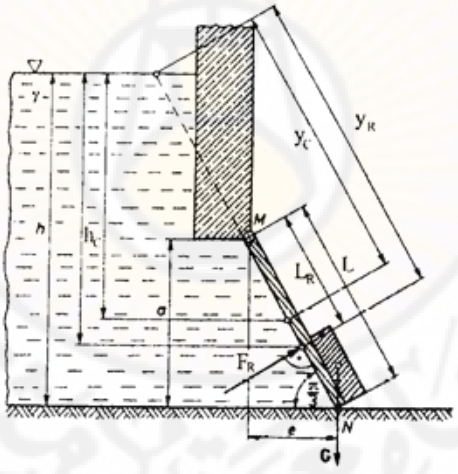
مسافة $a = 2m$ ، وأن الاحتكاك فيه مهمل.



الحل:

إن محصلة قوى الضغط المؤثرة على البوابة هي:

$$F_R = \gamma \cdot h_c \cdot A$$



لكن:

$$h_c = 2 + \frac{2}{2} = 3m, A = L \cdot b$$

و:

$$L = \frac{a}{\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{2}{\sin\frac{\pi}{3}} = 2.31m$$

إذاً:

$$F_R = 9.81 \cdot 1000 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2.31 = 340kN$$

بعد مركز الضغط من المفصل M يساوي:

$$L_R = y_R - y_c + L/2$$

حيث:

$$y_R = y_c + \frac{\overline{I_x}}{A \cdot y_c} \Rightarrow y_R - y_c = \frac{\overline{I_x}}{A \cdot y_c}$$

ومنه:

$$L_R = \frac{\overline{I_x}}{A \cdot y_c} + L/2$$

ولكن:

$$y_c = \frac{h_c}{\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{3}{\sin\frac{\pi}{3}} = 3.36m$$

وبالتالي:

$$L_R = \frac{\frac{b \cdot L^3}{12}}{b \cdot L \cdot y_c} + \frac{L}{2}$$

وبالتعويض بالمعطيات العددية، نجد:

$$L_R = \frac{2.31^2}{12 \cdot 3.46} + \frac{2.31}{2} = 1.284m$$

أخيراً بأخذ معادلة العزوم حول المفصل M يكون:

$$F_R \cdot L_R = G \cdot e$$

ومنه:

$$G = \frac{F_R \cdot L_R}{e}$$

ولكن:

$$e = L \cdot \cos\frac{\pi}{3} = \frac{L}{2}$$

أي أن:

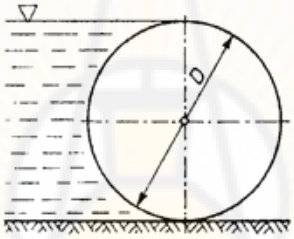
$$G = \frac{2 \cdot F_R \cdot L_R}{L}$$

وبالتعويض نجد:

$$G = \frac{2 \cdot 340 \cdot 1.283}{2.31} = 378kN$$

المسألة الثانية عشرة

احسب محصلة قوى الضغط المؤثرة على أسطوانة قطر قاعدتها D، وطولها L. علماً أنها تحجز أمامها سائلاً وزنه النوعي γ، كما هو مبين في الشكل.



الحل:

إن المركبة الأفقية F_x لقوى الضغط تساوي القوة المؤثرة في مسقط الأسطوانة على الشاقول، والذي هو عبارة عن مستطيل ارتفاعه D وعرضه L، أي أن:

$$F_x = \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot D^2 \cdot L$$

أما المركبة الشاقولية F_z فتتجه نحو الأعلى وتؤثر في مركز ثقل نصف الدائرة المبينة في الشكل التالي، وتساوي وزن السائل الذي تشغله نصف الأسطوانه، أي أن:

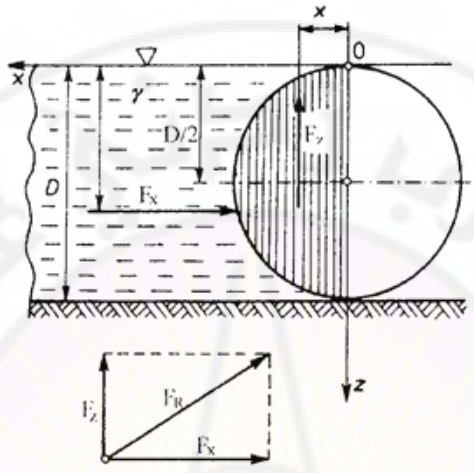
$$F_z = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot L \cdot \gamma = \frac{\pi \cdot D^2}{8} \cdot L \cdot \gamma$$

أما محصلة قوى الضغط الساكن فتساوي:

$$F_R = \sqrt{F_x^2 + F_z^2}$$

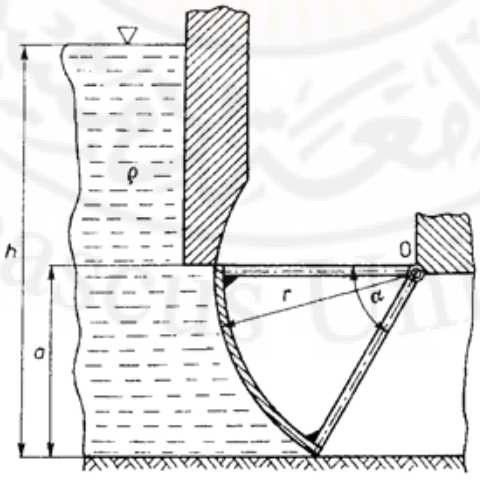
ومنه:

$$F_R = \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot L \cdot D^2 \cdot \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{16}}$$



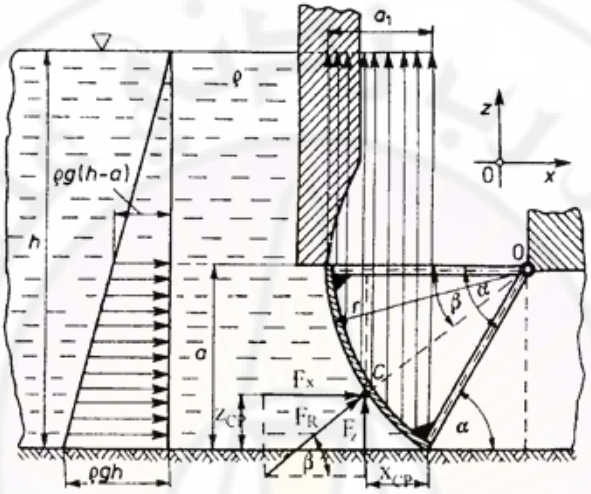
المسألة الثالثة عشرة

تحجز بوابة قوسية نصف قطرها r وعرضها $b = 5m$ الماء في قناة بعمق $h = 4m$، كما هو مبين في الشكل. احسب قيمة واتجاه ونقطة تطبيق محصلة قوى الضغط الساكن المؤثر على سطح البوابة. علماً أن الزاوية المركزية للبوابة $\alpha = \frac{\pi}{3}$، وأن ارتفاع محور دوران البوابة عن الأرضية $a = 2m$.



الحل:

لحساب المركبة الأفقية F_x، نرسم أولاً مخطط الضغط المؤثر على مسقط البوابة على الشاقول كما هو موضح في الشكل، فنجد أن قيمتها تساوي مساحة مخطط الضغط مضروباً بعرض البوابة، أي أن:



$$F_x = \left[\frac{\rho \cdot g \cdot h + \rho \cdot g \cdot (h-a)}{2}\right] \cdot a \cdot b$$

أو:

$$F_x = \rho \cdot g \cdot a \cdot b \cdot \left(\frac{2 \cdot h - a}{2}\right)$$

وبالتعويض بالقيم العددية، نحصل على:

$$F_x = 1000 \cdot 9.81 \cdot 2 \cdot 5 \cdot \left(\frac{2 \cdot 4 - 2}{2}\right) = 294.3kN$$

أما قيمة المركبة الشاقولية، فتساوي وزن السائل المحصور بين سطح البوابة الملامس للماء ومستويين شاقوليين يمران من بداية ونهاية هذا السطح وممدد سطح الماء السائب، كما هو موضح في الشكل السابق، أي أن:

$$F_z = \left[a_1 \cdot (h-a) + \pi \cdot r^2 \cdot \frac{\pi/3}{2 \cdot \pi} - (r - a_1) \cdot \frac{a}{2}\right] \cdot \rho \cdot g \cdot b$$

حيث:

$$r = \frac{a}{\sin\frac{\pi}{3}} = 2.31m$$

و:

$$a_1 = r \cdot \left(1 - \cos\frac{\pi}{3}\right) = 1.155m$$

وبالتعويض نجد:

$$F_z = 193.3kN$$

بناءً على ما سبق فإن محصلة قوى الضغط الساكن تساوي:

$$F_R = \sqrt{294.3^2 + 193.3^2} = 352kN$$

أما اتجاهها فيحدد من العلاقة:

$$\beta = \arctan\frac{F_z}{F_x}$$

أو:

$$\beta = \arctan\frac{193.3}{294.3} = 0.185 \cdot \pi$$

وتكون إحداثيات نقطة تطبيقها كما يلي:

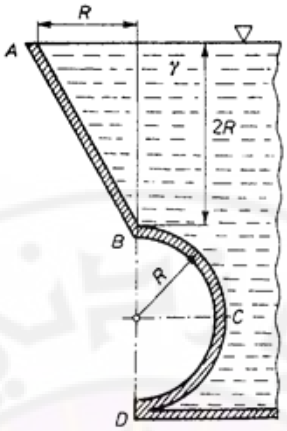
$$x_{CP} = r \cdot (\cos\beta - \cos\alpha) = 0.78m$$

و:

$$z_{CP} = a - r \cdot \sin\beta = 0.73m$$

المسألة الرابعة عشرة

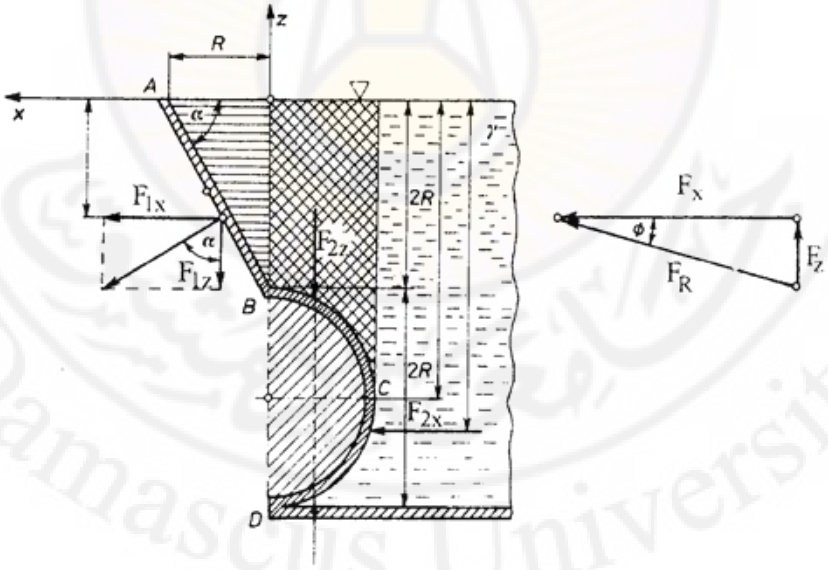
احسب محصلة واتجاه قوى ضغط السائل الساكن المؤثر على واحدة العرض من السطح الأسطواني $ABCD$ المبين في الشكل، والمؤلف من جزأين، الأول هو الجزء المائل AB، والثاني هو الجزء BCD على شكل نصف دائرة نصف قطرها R. علماً أن الوزن النوعي للسائل هو γ.



الحل:

سوف نجزء السطح الكلي إلى جزئين. الأول هو الجزء المائل AB وسنحسب أولاً قوى الضغط المؤثرة عليه، فنجد أن المركبة الأفقية F_{1x} تساوي:

$$F_{1x} = \gamma \cdot \frac{(2 \cdot R)^2}{2} = 2 \cdot \gamma \cdot R^2$$



أما المركبة الشاقولية F_{1z} فتساوي:

$$F_{1z} = \gamma \cdot R \cdot \frac{2 \cdot R}{2} = \gamma \cdot R^2$$

ثم نحسب قوى الضغط المؤثرة على نصف الدائرة، فنجد أن المركبة الأفقية F_{2x} تساوي:

$$F_{2x} = \gamma \cdot 3 \cdot R \cdot 2 \cdot R = 6 \cdot \gamma \cdot R^2$$

أما المركبة الشاقولية F_{2z} فتساوي:

$$F_{2z} = \gamma \cdot \frac{\pi \cdot R^2}{2}$$

وتكون المركبة الأفقية الكلية F_x المؤثرة على الجزأين:

$$F_x = F_{1x} + F_{2x}$$

أي أن:

$$F_x = 2 \cdot \gamma \cdot R^2 + 6 \cdot \gamma \cdot R^2 = 8 \cdot \gamma \cdot R^2$$

أما المركبة الشاقولية الكلية F_z المؤثرة على الجزأين فتكون:

$$F_z = F_{2z} - F_{1z}$$

أي أن:

$$F_z = \gamma \cdot \frac{\pi \cdot R^2}{2} - \gamma \cdot R^2 = \gamma \cdot R^2 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$$

أخيراً نجد أن المحصلة الكليه F_R المؤثرة على الجزأين:

$$F_R = \sqrt{F_x^2 + F_z^2}$$

أو:

$$F_R = \frac{\gamma \cdot R^2}{2} \cdot \sqrt{\pi^2 - 4 \cdot \pi + 260}$$

أما اتجاهها فيحدد من العلاقة:

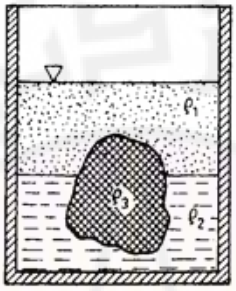
$$\phi = \arctan \frac{F_z}{F_x}$$

ومنه:

$$\phi = \arctan\left(\frac{\pi - 2}{16}\right)$$

المسألة الخامسة عشرة

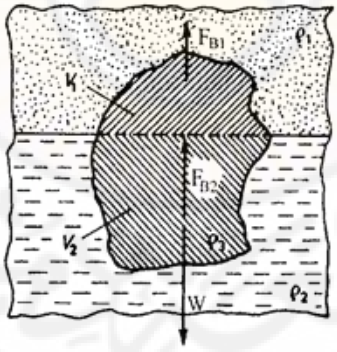
رميت قطعة شمع كتلتها النوعية $\rho_3 = 960kg/m^3$ في وعاء يحتوي على مـــاء وزيت كما هو في الشكل. احسب النسبة المئوية للجزء المغمور من قطعة الـــشمع في الماء. علماً أن الكتلة النوعية للزيت $\rho_1 = 900kg/m^3$.



الحل:

بفرض أن وزن قطعة الشمع W وحجمها $\forall$، وأن حجم الجزء المغمور منـــها في الزيت هو $\forall_1$ والجزء المغمور منها في الماء $\forall_2$، يمكن كتابة:

$$W = \rho \cdot g \cdot \forall$$



إن دافعة أرخميدس المؤثرة على كل جزء من جزئي قطعة الشمع يعطى بالعلاقتين:

$$F_{B1} = \rho_1 \cdot g \cdot \forall_1$$

و:

$$F_{B2} = \rho_2 \cdot g \cdot \forall_2$$

لكن:

$$\forall = \forall_1 + \forall_2$$

ومن توازن قطعة الشمع لدينا:

$$W = F_{B1} + F_{B2}$$

ومنه:

$$\forall \cdot \rho_3 = \forall_1 \cdot \rho_1 + \forall_2 \cdot \rho_2$$

بالتبديل نجد أن:

$$\frac{\forall_2}{\forall} = \frac{\rho_3 - \rho_1}{\rho_2 - \rho_1}$$

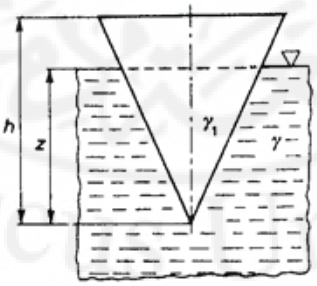
ومنه فإن:

$$\frac{\forall_2}{\forall} = \frac{960 - 900}{1000 - 900} = 0.6, \frac{\forall_1}{\forall} = 0.4$$

أي أن الجزء الأكبر وهو 60% من حجم القطعة مغمور في الماء، و 40% منها مغمور في الزيت.

المسألة السادسة عشرة

وضع مخروط ارتفاعه h وقطر قاعدته D، في سائل وزنه النوعي γ كما هو في الشكل. احسب عمق الجزء المغمور منه، علماً أنه مصنوع من مادة وزنها النوعي γ_1.



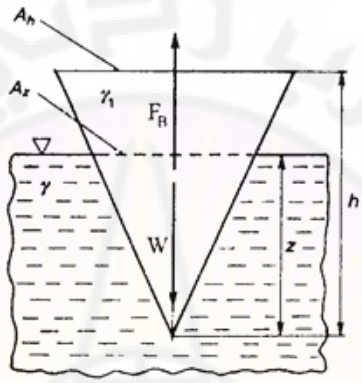
الحل:

بفرض أن مساحة قاعدة المخروط هي A_h، فإن وزنه يساوي:

$$W = \frac{1}{3} \cdot \gamma_1 \cdot A_h \cdot h$$

وإذا اعتبرنا أن A_z هي مساحة الشكل الناتج عن تقاطع المخروط مع سطح السائل، فإن دافعة أرخميدس تكون :

$$F_B = \frac{1}{3} \cdot \gamma \cdot A_z \cdot z$$



من شرط التوازن يمكن كتابة:

$$W = F_B$$

أي أن:

$$\gamma_1 \cdot A_h \cdot h = \gamma \cdot A_z \cdot z$$

وبناء عليه يكون:

$$z = h \cdot \frac{A_h}{A_z} \cdot \frac{\gamma_1}{\gamma}$$

ومن تشابه المثلثات لدينا:

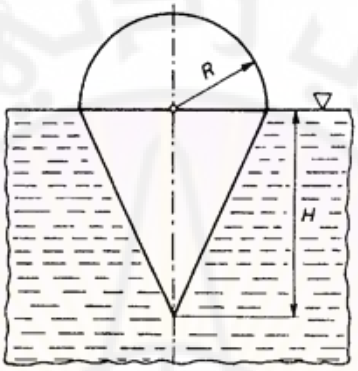
$$\frac{A_h}{A_z} = \frac{h^2}{z^2}$$

وأخيراً نحصل على:

$$z = h \cdot \sqrt[3]{\frac{\gamma_1}{\gamma}}$$

المسألة السابعة عشرة

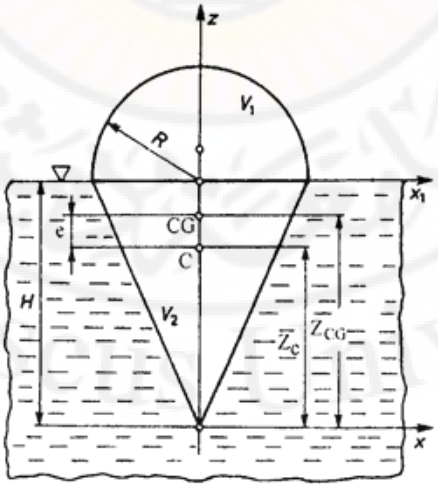
جسم مؤلف من نصف كرة ومخروط كما هو مبين في الشكل. يطفو على سطح سائل، بحيث يمر هذا السطح من قاعدة المخروط. فإذا علمت أن ارتفاع المخروط هو H، ونصف قطر الكرة R. أوجد العلاقة التي يجب أن تكون بين H,R بحيث يتحقق التوازن المستقر للجسم.



الحل:

كما نعلم فإن شرط التوازن المستقر للأجسام الطافية يعطى بالعلاقة:

$$b_M = \frac{I}{\forall} - e > 0$$



لذلك نحسب بعد مركز ثقل الجسم z_{CG} عن المحور x، فنجد:

$$\forall_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot R^3$$

و:

$$\forall_2 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot H$$

أي أن:

$$z_{CG} = \frac{\frac{2}{3} \cdot \pi \cdot R^3 \cdot \left(H + \frac{3}{8} \cdot R \right) + \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot H \cdot \frac{3}{4} \cdot H}{\frac{2}{3} \cdot \pi \cdot R^3 + \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot H}$$

أو:

$$z_{CG} = \frac{\frac{2}{3} \cdot R \cdot \left(H + \frac{3}{8} \cdot R \right) + \frac{1}{4} H^2}{\frac{2}{3} R + \frac{1}{3} \cdot H}$$

نوجد حدود علاقة الاستقرار:

$$e = z_{CG} - z_c$$

بالتعويض يكون:

$$e = \frac{\frac{2}{3} \cdot R \cdot \left(H + \frac{3}{8} \cdot R \right) + \frac{1}{4} H^2}{\frac{2}{3} R + \frac{1}{3} \cdot H} - \frac{3}{4} \cdot H$$

وبما أن:

$$I = \frac{\pi \cdot R^4}{4}$$

و:

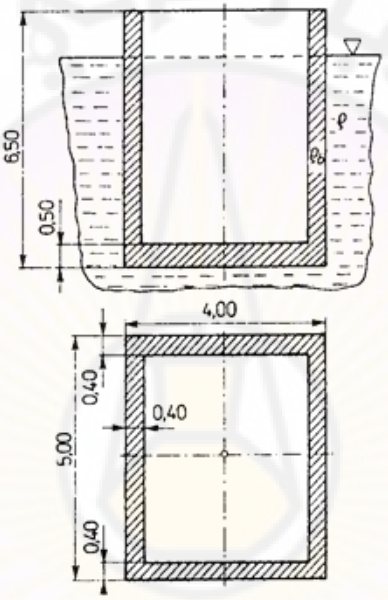
$$\forall = \forall_2 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot H$$

وبالتعويض في شرط التوازن المستقر للأجسام الطافية، نحصل على:

$$\frac{H}{R} < \sqrt{3}$$

المسألة الثامنة عشرة

المطلوب من أجل الصندوق البيتوني المبين في الشكل والمغمور جزئياً في الماء تحديد فيما إذا كان مستقراً أم لا. علماً أن الكتلة النوعية لمادة الصندوق $\rho_b = 2200kg/m^3$ ، وأن أبعاده معطاة على الشكل.



الحل:

نحسب أولاً وزن الصندوق:

$$W = 2.2 \cdot 9.81 \cdot (5 \cdot 4 \cdot 6.5 - 4.2 \cdot 3.2 \cdot 6) = 1065kN$$

ثم نحسب عمق الجزء المغمور من شرط التوازن:

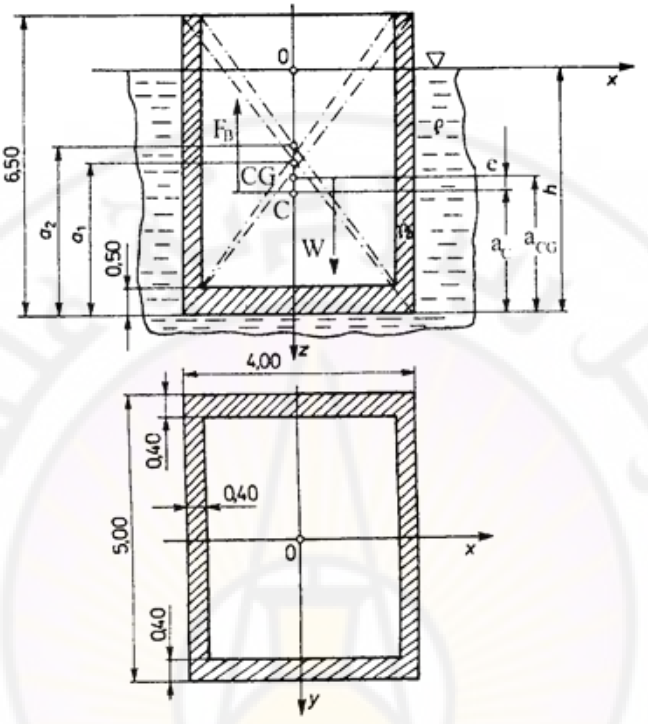
$$W = F_B$$

أو:

$$1065 = 1000 \cdot 9.81 \cdot h \cdot 5 \cdot 4$$

فنجد:

$$h = 5.43m$$



إن حجم الجزء المغمور يساوي:

$$\forall = 5.43 \cdot 5 \cdot 4 = 108.6m^3$$

وعزم العطالة الأصغر يساوي:

$$I_{\min} = \frac{5 \cdot 4^3}{12} = 26.67m^4$$

والبعد بين مركز ثقل الجسم ومركز الحجم المغمور هو:

$$e = a_{CG} - a_c$$

بالتعويض نجد:

$$a_{CG} = \frac{6.5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3.25 - 6 \cdot 4.2 \cdot 3.2 \cdot 3.5}{6.5 \cdot 5 \cdot 4 - 6 \cdot 4.2 \cdot 3.2} = 2.84$$

و:

$$e = 2.84 - \frac{5.43}{2} = 0.125m$$

إذاً بتطبق علاقة اختبار الاستقرار:

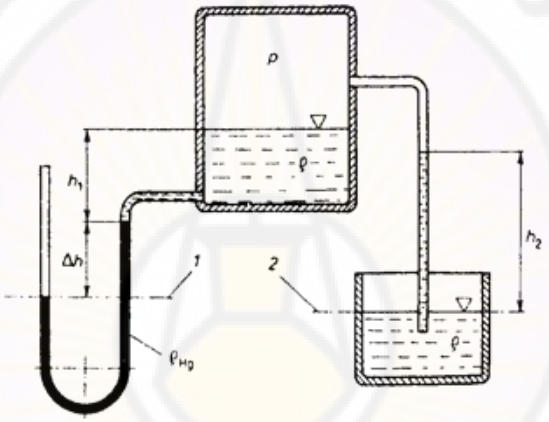
$$b_M = \frac{26.67}{108.6} - 0.125 = 0.121 > 0$$

نستنتج إذاً أن التوازن مستقر.

مسائل غير محلولة حول الفصل الثاني

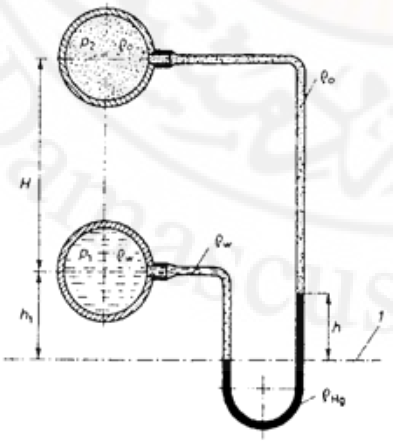
المسألة الأولى

احسب قيمة الضغط p المطبق في الخزان المبين في الشكل، الذي يحتوي على الماء. أحسب كذلك قيمة h_2. إذا علمت أن الوعاء السفلي معرض للضغط الجوي، وأن انحراف الزئبق في المانومتر $\Delta h = 0.15m$، كما أن عمق الماء في الخزان $h_1 = 0.8m$.



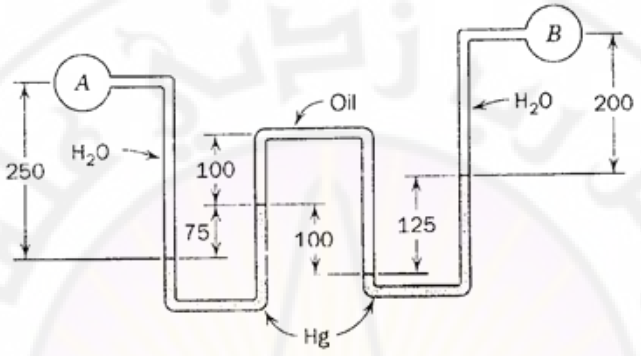
المسألة الثانية

أنبوبان، الأول علوي يتدفق فيه زيت كتلته النوعية $\rho_0 = 815kg/m^3$، والثاني سفلي يتدفق فيه الماء، كما في الشكل. فإذا كان فرق الارتفاع بين محوري الأنبوبين $H = 2m$. احسب فرق الضغط في الأنبوبين علماً أن انحراف الزئبق في المانومتر يشير إلى $h = 0.5m$، كما أن $h_1 = 0.8m$.



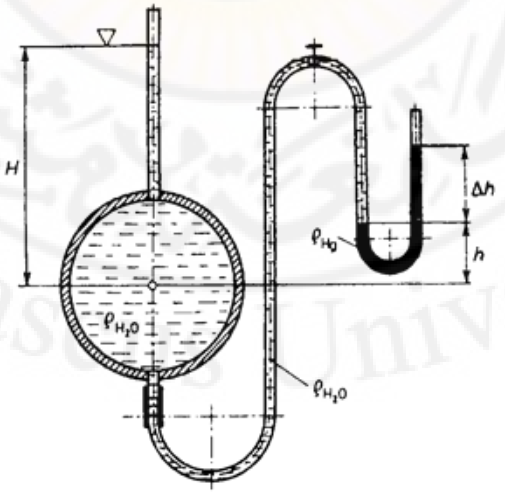
المسألة الثالثة

بناء على القراءات في المانومترات المبينة في الشكل، يطلب حساب فرق الضغط بين الأنبوبين الذين يتدفق فيهما الماء. إذا كان $\rho_{Hg} = 13600kg/m^3, \rho_{oil} = 800kg/m^3$، وجميع الأبعاد على الشكل بالملم.



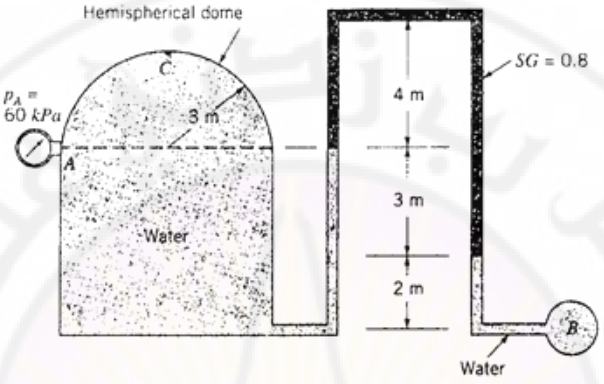
المسألة الرابعة

يتدفق الماء في أنبوب موصول من الأعلى ببيزومتر، ومن الأسفل بمانومتر. فإذا علمت أن انحراف الزئبق في المانومتر يدل على $\Delta h = 300mm$، وأن $h = 200mm$، وكذلك $\rho_{Hg} = 13600kg/m^3$. احسب الضغط داخل الأنبوب وارتفاع الماء H في البيزومتر.



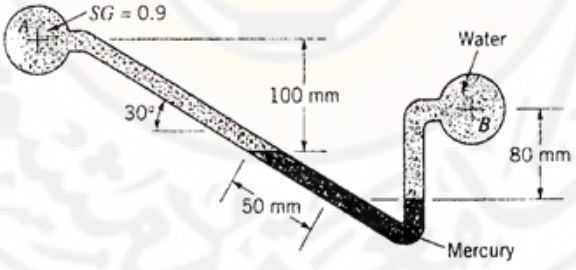
المسألة الخامسة

اعتماداً على المعطيات الواردة في الشكل المبين. يطلب حساب قيمة الضغط في الأنبوب B ، وعند النقطة C من الخزان.



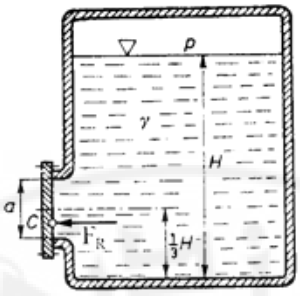
المسألة السادسة

بعد الاستعانة بالشكل المبين أدناه، واعتماد المعطيات الواردة عليه. احسب القراءات الجديدة في المانومتر المائل المبين. بافتراض أن الضغط في الأنبوب A قد نقص بمقدار $10kPa$، وأن قيمة الضغط في الأنبوب B بقيت على حالها.



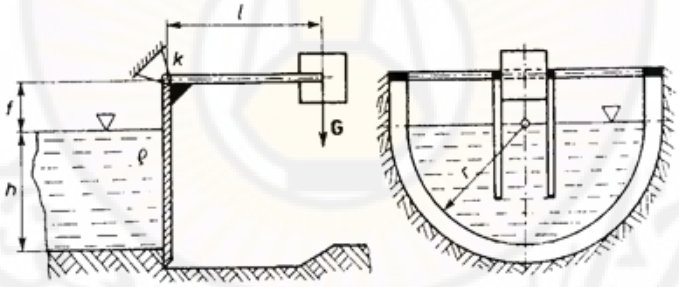
المسألة السابعة

يحتوي الجدار الجانبي لخزان مغلق فيه سائل وزنه النوعي γ وعمقه H ، على فتحة مربعة أبعادها $a \times a$ كما في الشكل. فإذا علمت أن مركز الفتحة يبعد عن أرضية الخزان بمقدار $H/3$ ، وأن الضغط المطبق على سطح السائل هو p . احسب محصلة ونقطة تطبيق القوة المؤثرة على الفتحة.



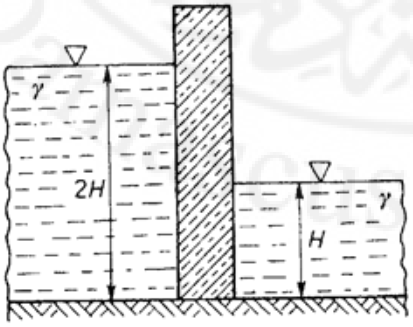
المسألة الثامنة

وضعت في قناة بوابة على شكل نصف دائرة نصف قطرها $r = 0.6m$، ووصلت مع ذراع طوله $l = 0.5m$، بحيث كانت قابلة للدوران حول المفصل k. وثبت وزن مقداره G في نهاية الذراع. احسب قيمة هذا الوزن بحيث لاتفتح البوابة عندما يصل ارتفاع الماء h إلى قيمة عظمى تساوي نصف قطر البوابة r. علماً أن بعد المفصل k عن سطح الماء $f = 0.1m$.



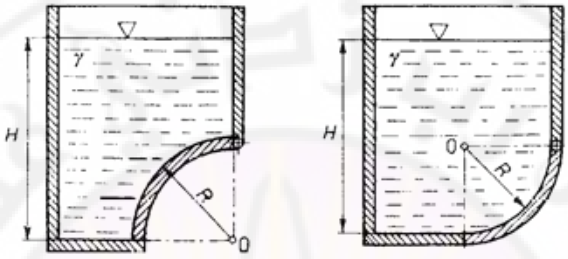
المسألة التاسعة

يحجز جدار بيتوني سائلاً وزنه النوعي γ، كما في الشكل. فإذا كان ارتفاع السائل أمام الجدار $2 \cdot H$، وخلفه H. وكان عرض الجدار L. احسب العزم المؤثر بالنسبة لقاعدة الجدار.



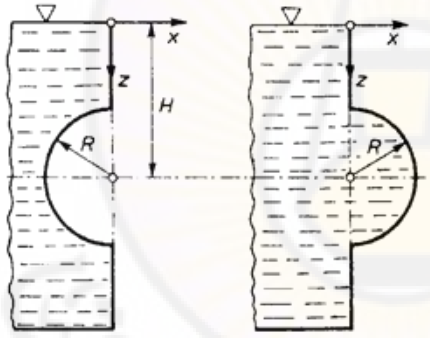
المسألة العاشرة

احسب محصلة قوى الضغط المؤثرة على البوابتين ربع الأسطوانيتين المبينتين في الشكل. إذا كان نصف قطر القاعدة R، والطول L، وارتفاع السائل H، والكتلة النوعية له ρ.



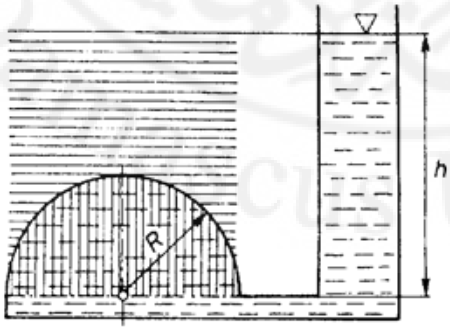
المسألة الحادية عشرة

احسب محصلة القوة المؤثرة على واحدة العرض من نصفي الإسطوانتين المبينتين في الشكل. علماً أن البعد بين مركز قاعدة نصف الأسطوانة وسطح الماء $H = 4m$، وأن نصف قطر القاعدة $R = 2m$.



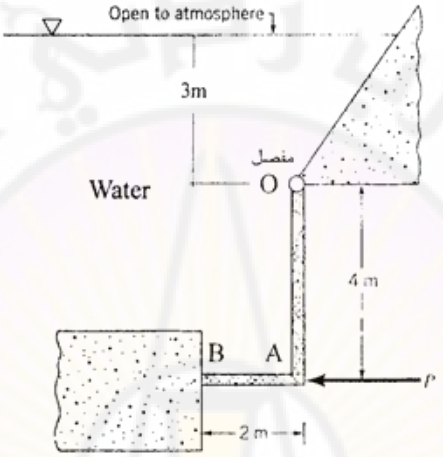
المسألة الثانية عشرة

احسب محصلة قوى الضغط المؤثرة على نصف الكرة المبينة في الشكل، والمتصلة مع خزان عمق الماء فيه $h = 10m$، بوساطة أنبوب أفقي. علماً بأن نصف قطر الكرة $R = 2m$.



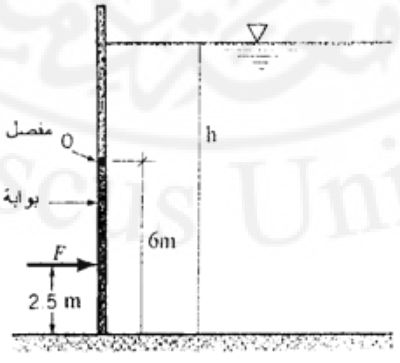
المسألة الثالثة عشرة

يطلب حساب القوة الأفقية الدنيا P الواجب تطبيقها عند أسفل البوابة الصلبة OAB القابلة للدوران حول المفصل O كما في الشكل، بحيث تبقى هذه البوابة مغلقة. بافتراض أن عرضها يبلغ $3m$، وأن وزنها مهمل.



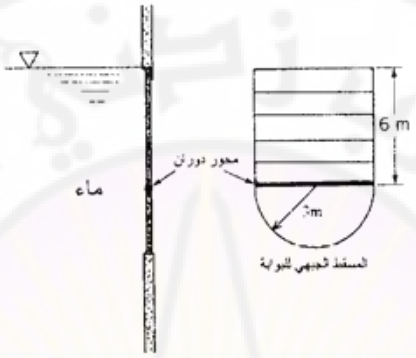
المسألة الرابعة عشرة

بوابة مستطيلة الشكل أبعادها $(6\times5)m$، قابلة للدوران حول المفصل O. تقوم بحجز الماء في خزان، كما في الشكل. احسب ارتفاع الماء h في الخزان بحيث تمر نقطة تطبيق محصلة قوى الضغط المؤثرة على البوابة من النقطة التي تبعد عن أرضية الخـــزان بمقدار $2.5m$. ثم احسب قيمة هذه المحصلة بناء على الشرط السابق.



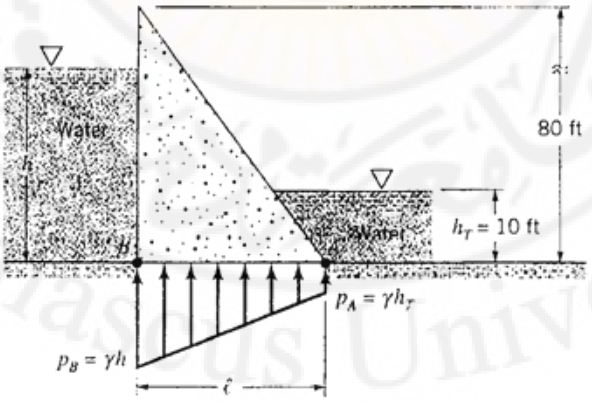
المسألة الخامسة عشرة

البوابة المبينة في الشكل قابلة للدوران حول محور أفقي، وتستند في نهايتها العليا على جدار. فهل يمكن للبوابة أن تنفتح أم تبقى مغلقة؟ وما هي محصلة قوى الضغط المؤثرة عليها؟



المسألة السادسة عشرة

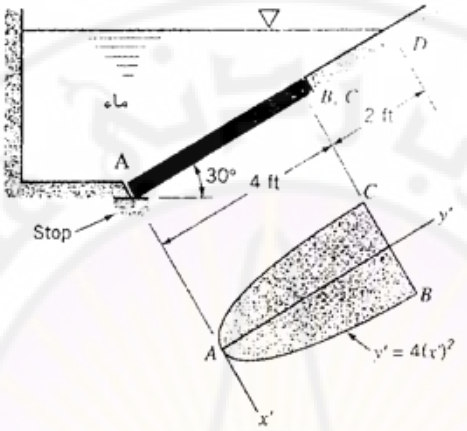
يقوم السد البيوني المبين في الشكل بحجز الماء. احسب ارتفاع الماء الأعظمي أمام السد من أجل عدة قيم لعرض قاعدته $\ell = (20,30,40,50,60)ft$ ، بحيث لاينقلب حول النقطة A . بافتراض أن الكتلة الحجمية للبيتون $2400kg/m^3$ ، وأن مخطط ضغط التسرب تحت قاعدة السد مبين على نفس الشكل.



المسألة السابعة عشرة

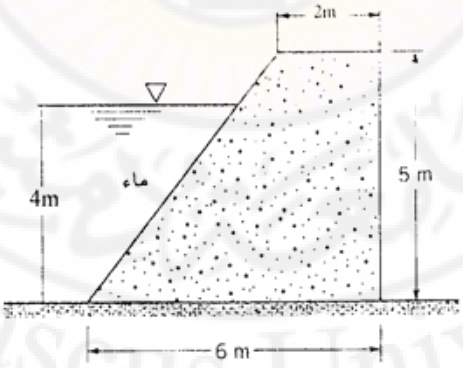
تقوم البوابة ACB المبينة على الشكل والمتمفصلة في الأعلى عند النقطتين

B,C، والمرتكزة بشكل بسيط في الأسفل عند النقطة A بحجز الماء خلفها. يطلب حساب محصلة قوى الضغط الساكن المؤثرة عليها. علماً بأنها على شكل قطع مكافئ معادلته $y = 4x^2$. وأن باقي الأبعاد والزوايا معطاة على الشكل.



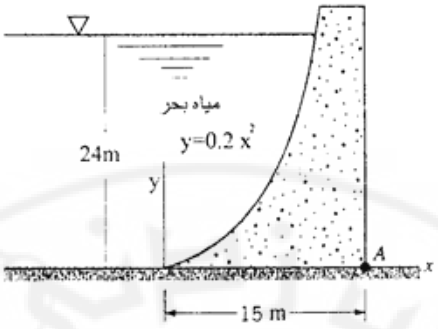
المسألة الثامنة عشرة

يطلب حساب معامل الاحتكاك الأدنى الواجب توفره بين الأرض وقاعدة السد البيتوني المبين في الشكل، بحيث لايتزلق هذا السد. علماً أن الكتلة الحجمية لمادة السد تساوي $2400kg/m^3$.



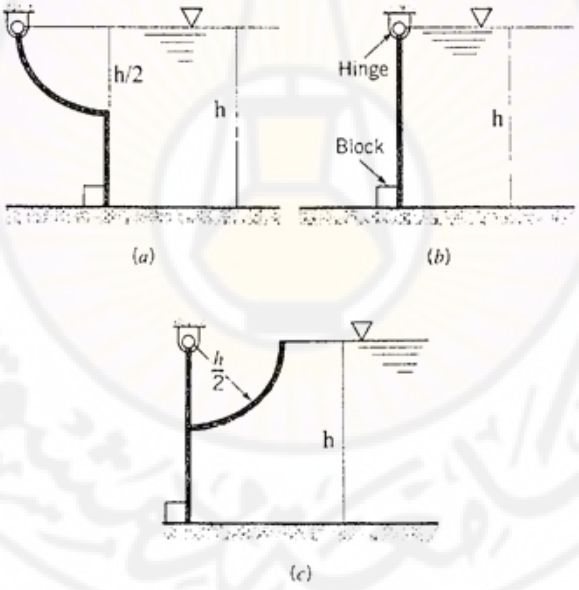
المسألة التاسعة عشرة

احسب محصلة قوى الضغط الساكن المؤثر على واحدة العرض من السد البيتوني المبين في الشكل.



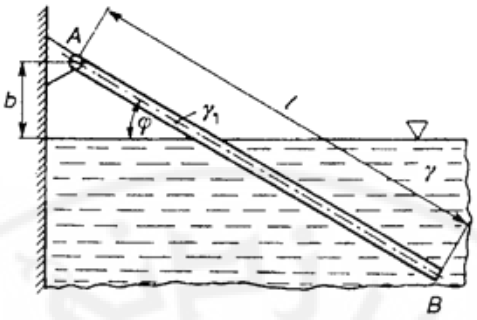
المسألة العشرون

احسب القوة الأفقية الواجب تطبيقها عند أسفل البوابات الـثلاث المبينـة في الشكل أدناه لتبقى مغلقة.



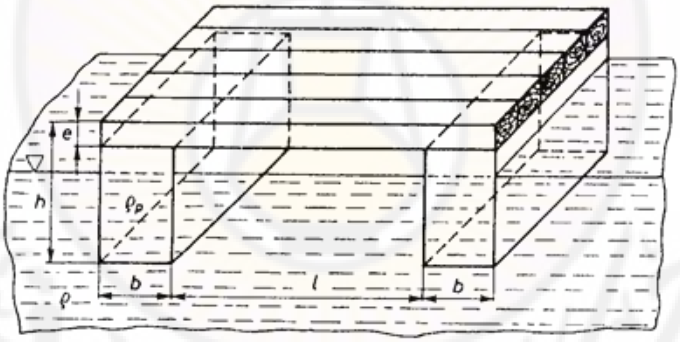
المسألة الحادية والعشرون

صفيحة AB طولها l، والوزن النوعي لمادتها γ_1. وهي متمفصلة عند النقطـة A، ومغمورة جزئياً في سائل وزنه النوعي γ. احسب الزاوية φ اللازمة لتبقى هذه الصفيحة في حالة توازن.



المسألة الثانية والعشرون

تأكد أن الجسم المبين في الشكل والمغمور جزئياً في الماء، فيما إذا كان مستقراً أم لا. علماً أن الكتلة النوعية لمادة الجسم $\rho_h = 800kg/m^3$. وأن $h = 0.8m, b = 0.4m, e = 0.05m, l = 2.0m$.



Damascus University

الفصل الثالث

حركة السوائل
FLUID KINEMATICS

٣-١. تمهيد Preface

إن مسائل توازن السوائل الساكنة التي بحثت في الفصول السابقة، تمثل جزءاً ضئيلاً من الهيدروليك، وقد تعاملت بشكل رئيس مع الضغط والكتلة النوعية والعمق. وقد وجد أن هناك توافقاً كبيراً بين نتائج الحلول النظرية والإختبارات لهذه المسائل.

أما بالنسبة لدراسة السوائل في حالة الحركة والتي سيتناولها هذا الفصل، فإن مسائلها تصبح أكثر تعقيداً، وغير قابلة للحل النظري في بعض الحالات، وخاصة عند التعامل مع جريانات السوائل الحقيقية، حيث لا يمكن إهمال قوى اللزوجة، أو انضغاطية السائل في بعض المسائل.

٣-٢. تصنيف الجريان Classification of Flow

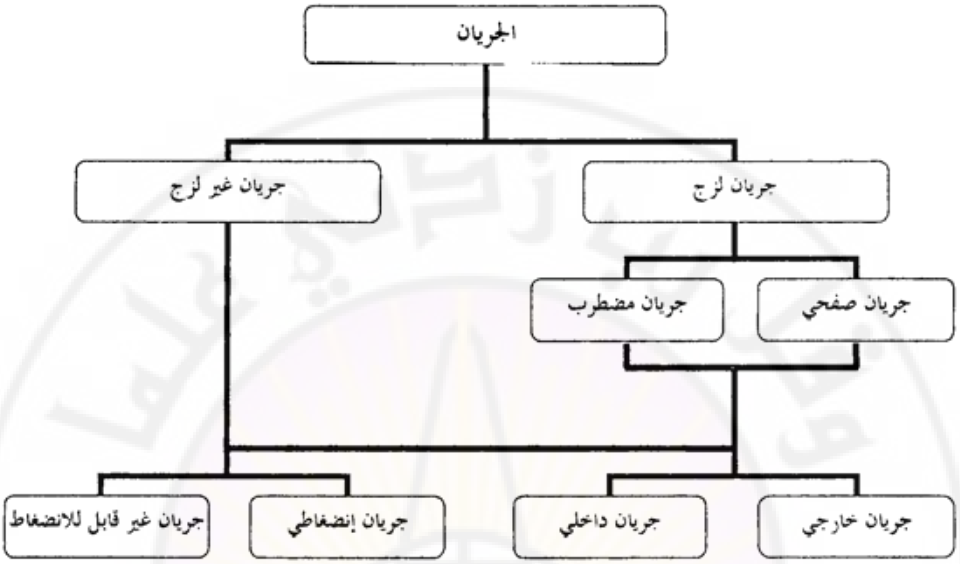
يمكن تصنيف الجريانات بأشكال مختلفة ووفق معايير متعددة، وذلك حسب طبيعة وشكل الجريان والشروط المحيطة به، أو حسب التغيرات التي تطرأ على المميزات الحركية والتحريكية لكتلة السائل مع تغير الزمن والمكان. ويوضح الشكل (٣-١) مخططا عاماً لتصنيف الجريانات.

٣-٣. الجريان المستقر والجريان غير المستقر Steady and Unsteady Flow

الجريان المستقر ***Steady Flow*** هو الجريان الذي تبقى خواصه مثل: السرعة والضغط عند أية نقطة معينة منه ثابتة بالنسبة للزمن. كما هو الحال عندما يجري الماء في أنبوب أو قناة بغزارة ثابتة مع الزمن.

الجريان غير المستقر ***Unsteady Flow*** هو الجريان الذي تتغير خواصه عند نقطة معينة ضمن السائل من لحظة لأخرى. ومثال ذلك جريان الأنهر أثناء الفيضانات،

حيث تتغير غزارة الجريان في النهر من لحظة لأخرى أثناء فترة مرور الموجة.

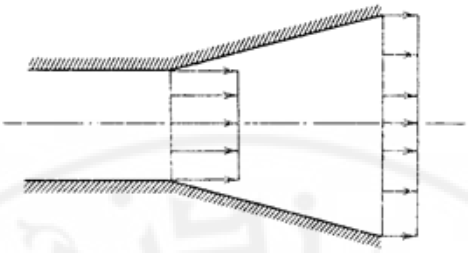


الشكل (٣-١). تصنيف الجريانات [4]

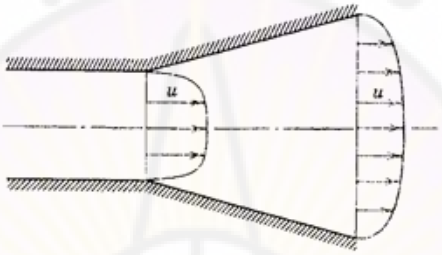
٣-٤. الجريان اللزج والجريان غير اللزج Viscous and Inviscid Flow

الفرق بين **الجريان اللزج** ***Viscous Flow*** **والجريان غير اللزج** ***Inviscid Flow*** هو في إهمال لزوجة السائل أو في عدم إهمالها. وكما هو معلوم فإن الجريان غير اللزج لا يوجد عملياً، لكن العديد من المسائل تحل بإهمال اللزوجة لتبسيط المسألة وجعلها قابلة للحل. ففي حالة الجريان غير اللزج في أنبوب، تتحرك جميع الجزيئات وفق خطوط متوازية فيما بينها، وبسرعات متساوية، كما في الشكل (٣-٢). أما في حالة الجريان اللزج فإن سرعة جزيئات السائل الجاري تكون معدومة عند ملامستها للسطح الصلب المحيط بالجريان، ثم تزداد هذه السرعة كلما ابتعدنا عن السطح الصلب، كما هو مبين في الشكل (٣-٣). ويؤدي هذا إلى نشوء إجهادات قص بين جزيئات السائل المتجاورة الجارية بسرعات جريان مختلفة كما تبين العلاقة:

$$\tau = \mu \cdot \frac{du}{dy} \qquad (١-٣)$$



الشكل (٣-٢). تصور لمخطط توزع السرعة في أنبوب متغير المقطع في حالة السائل غير اللزج [6]



الشكل (٣-٣). مخطط توزع السرعة في أنبوب متغير المقطع في حالة السائل اللزج [6]

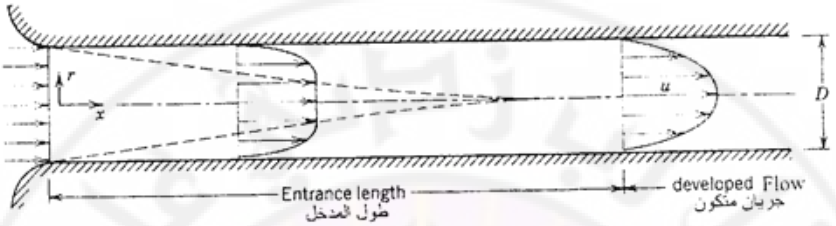
٣-٥ . الجريان المنتظم والجريان غير المنتظم

Uniform and Nonuniform Flow

الجريان المنتظم ***Uniform Flow*** هو الجريان الذي يكون فيه مخطط توزع السرعة ثابتاً في جميع المقاطع. أما **الجريان غير المنتظم** ***Nonuniform Flow*** فهو الجريان الذي تتغير فيه السرعة من مقطع لآخر.

إن جريان السائل بمعدل ثابت في أنبوب ثابت المقطع هو جريان منتظم، لأن السرعة الوسطية ثابتة من مقطع لآخر. أما جريان السائل في أنبوب على شكل جزع مخروط فهو جريان غير منتظم، لأن السرعة الوسطية تتغير من مقطع لآخر. ويمكن أن يكون الجريان منتظماً أو غير منتظم في أنبوب ذي مقطع ثابت، كما في حالة أنبوب يخرج من خزان كالمبين في الشكل (٣-٤). حيث يلاحظ أنه في الجزء الأول من الأنبوب والذي يدعى **طول المدخل** ***Entrance Length***، يختلف مخطط توزع السرعة من مقطع لآخر. أما في الجزء الثاني الذي يدعى **منطقة الجريان المتكون** ***Fully Developed Velocity Profile***، فإن مخطط توزع السرعة يكون ثابتاً في جميع

المقاطع. وسوف يناقش هذا الموضوع بشكل مفصل في الفصول القادمة. أي أن الجريان في الجزء الأول من الأنبوب هو جريان غير منتظم، أما في الجزء الثاني فهو جريان منتظم.



الشكل (٣-٤). الجريان المنتظم وغير المنتظم في أنبوب [6]

ويجب هنا عدم الخلط بين الجريان المستقر وغير المستقر والجريان المنتظم وغير المنتظم. فالجريان المنتظم يمكن أن يكون جرياناً مستقراً أو غير مستقر، كذلك فإن الجريان غير المنتظم يمكن أن يكون مستقراً أو غير مستقر. فجريان سائل بغزارة ثابتة في أنبوب مستقيم وطويل وثابت المقطع يعد جرياناً مستقراً ومنتظماً. وجريان السائل بغزارة ثابتة في أنبوب مخروطي يعد جريانا مستقراً وغير منتظم. وبتغير غزارة الجريان مع الزمن تصبح الحالات السابقة غير مستقرة ومنتظمة أو غير مستقرة وغير منتظمة.

٣-٦ . الجريان الانضغاطي والجريان غير القابل للانضغاط

Compressible and Incompressible Flow

ندعو الجريان الذي لا تتغير فيه الكتلة النوعية للسائل الجاري بالجريان **غير القابل للانضغاط** ***Incompressible Flow***. أما عندما تتغير الكتلة النوعية للسائل أثناء الجريان فيكون **الجريان انضغاطياً** ***Compressible Flow***. وتعامل معظم السوائل أثناء الجريان على أنها غير قابلة للانضغاط، ما عدا بعض الحالات الخاصة مثل ظاهرة **المطرقة المائية** ***Water Hammer*** في الأنابيب والآلات المائية. وتصادف أكثر حالات الجريانات الانضغاطية عند دراسة حركة الغازات ذات السرعات المرتفعة نسبياً والتي يعبر عنها رياضياً **بعدد ماخ** ***Mach Number***:

$$Ma = \frac{V}{c} \qquad (٣-٢)$$

حيث أن:

- V: سرعة الجريان في المائع.
- c: سرعة انتشار الصوت في المائع.

فإذا كان $Ma < 0.3$ فإن التغير في الكتلة النوعية للغازات لا يتجاوز 5%، ويمكن التعامل مع الجريان على أنه غير قابل للانضغاط. أما إذا كان $Ma > 0.3$ فإن جريان الغازات يعامل على أنه انضغاطي. وكقيمة معيارية يكون جريان الهواء انضغاطياً عندما تتجاوز سرعته $100m/s$، وهذا ما يفسر حصول أصوات مرتفعة عندما تطير الطائرات بسرع كبيرة نتيجة انضغاط الهواء.

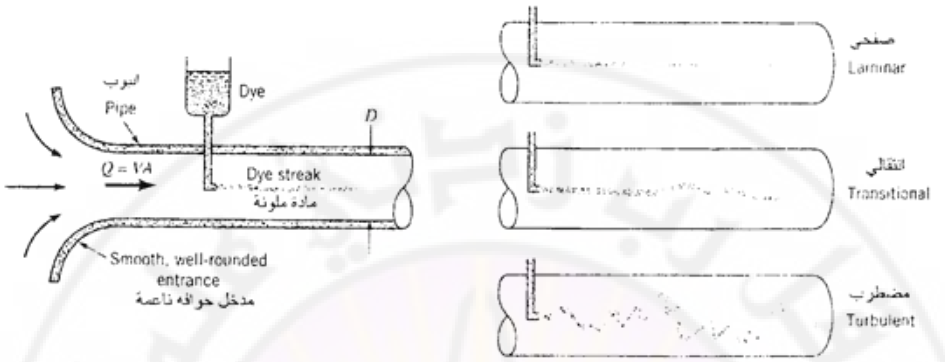
٣-٧. الجريان الصفحي والجريان المضطرب

Laminar and Turbulent Flow

يعرف **الجريان الصفحي** ***Laminar Flow*** بأنه الجريان الذي يتم على شكل صفائح متوازية، دون أن تمتزج جزيئات السائل في طبقة ما مع جزيئات السائل في الطبقات الأخرى. أما **الجريان المضطرب** ***Turbulent Flow*** فهو الجريان الذي تمتزج فيه جزيئات السائل ببعضها، ويحصل انتقال عشوائي لهذه الجزيئات بين الطبقات المختلفة للسائل. ومن الممكن أن يكون جريان السوائل الحقيقية جريانـاً صفحياً أو مضطرباً.

ويعدّ العالم الإنكليزي أوزبورن رينولدز ***Osborne Reynolds (1842-1912)*** أول من ميز بين الجريان الصفحي والجريان المضطرب عام ١٨٨٣، حين قام بتجربته الشهيرة. التي تتلخص بحقن مادة ملونة في بداية أنبوب زجاجي طويل نسبياً يتفرع عن حوض مائي، وينتهي بسكر يمكن بوساطته التحكم بغزارة الجريان، كما في الشكل (٣-٥). وقد لاحظ ريينولدز أنه عندما كان معدل الجريان صغيراً فإن خطوط الجريان الملونة في الأنبوب الزجاجي كانت شبه مستقيمة، ودعى الجريان في هذه الحالة بالصفحي ***Laminar***. ومع زيادة فتحة السكر وزيادة معدل الجريان المار في الأنبوب بدأت خطوط الجريان بالاضطراب والتعرج، وقال إن الجريان في هذه الحالة يمر بمرحلة انتقالية ***Transitional***. أما عند فتح السكر بالكامل فإن خطوط الجريان اضطربت

اضطراباً كلياً، وانتشرت المادة الملونة في جميع أنحاء السائل بحيث لم يستطع تمييز خطوط الجريان، ودعا هذا الجريان بالجريان المضطرب ***Turbulent***.



الشكل (٣-٥). الجريان الصفحي والمضطرب وفق تجربة رينولدز [6]

ويعتبر الجريان المضطرب أكثر مصادفة في التطبيقات الهندسية، مثل جريان الماء في الأنابيب والأقنية والجريان بين ريش المضخات والعنفات. ونادراً ما يصادف الجريان الصفحي في التطبيقات المائية، وينحصر وجوده في السوائل ذات اللزوجة العالية والسرعات المنخفضة نسبياً. وسوف نأتي على دراسة الجريان الصفحي والمضطرب بشكل مفصل في الفصل الخامس.

٣-٨. الجريان الداخلي والجريان الخارجي

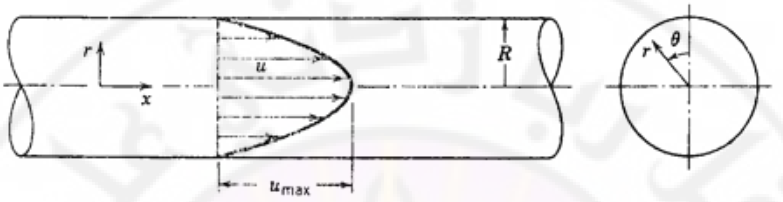
Internal and External Flow

تدعى الجريانات المحاطة من جميع الجهات بسطوح صلبة: **الجريانات الداخلية** ***Internal Flow***. أما الجريانات غير المحاطة من جميع الجهات بسطوح صلبة فتدعى: **الجريانات الخارجية** ***External Flow***. يمكن لكل من الجريانين الداخلي والخارجي أن يكون لزجاً أو غير لزج، وصفحياً أو مضطرباً، وانضغاطياً أو غير قابل للانضغاط.

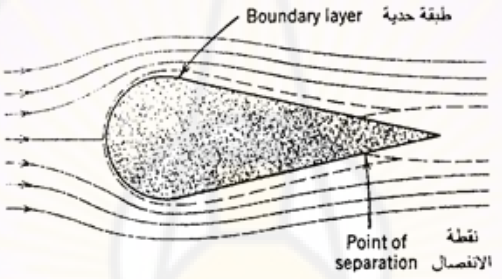
إن جريان السائل في الأنابيب والمضخات والعنفات يعتبر جريانا داخليا، لأن السائل محاط من جميع الجهات بسطوح صلبة، كما في الشكل (٣-٦). أما جريان السائل على سطح الغواصات والسفن وجريان الهواء على أجنحة الطائرات والأجسام فيعتبر جريانا خارجياً، لأن الجريان يكون على تماس مع السطح الصلب من جهة وحر

من الجهة الأخرى، كما في الشكل (٣-٧).

يمكن أن يطلق اسم **الجريان المضغوط** ***Pressured Flow*** على الجريان الداخلي، لأن الجريان المحاط من جميع الجهات بسطوح صلبة يكون مضغوطاً (الضغط فيه لا يساوي الضغط الجوي).



الشكل (٣-٦). الجريان الداخلي-جريان في أنبوب [6]



الشكل (٣-٧). الجريان الخارجي-جريان حول جسم [6]

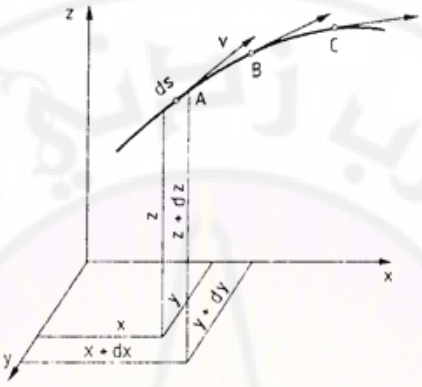
٣-٩. المسارات وخطوط التيار وأنابيب التيار

Path Line, Stream line and Stream Tube

يعرف **خط المسار** ***Path Line*** بأنه المحل الهندسي للنقاط التي يأخذها جزيء من سائل أثناء حركته، أو الطريق الذي يسلكه جزيء من سائل أثناء حركته ضمن حقل جريان ما. ويوضح خط المسار، اتجاه سرعة الجزيء عند لحظات متتالية من الزمن.

خط التيار ***Stream Line*** هو منحنٍ وهمي، تكون فيه متجهات سرعة جريان جميع جزيئات السائل في كل نقطة منه مماسة له عند تلك اللحظة (الشكل ٣-٨). وتكون خطوط التيار من أجل جريان مستمر للسائل عبارة عن خطوط مستمرة تمتد إلى مالانهاية باتجاه المنبع وباتجاه المصب، أو تشكل منحنيات مغلقة حول محيط أي

جسم مغمور في السائل. وعندما يكون الجريان مستقراً، فإن خطوط التيار تنطبق على خطوط المسارات. أما إذا كان الجريان غير مستقر فإن خطوط التيار لا تنطبق على خطوط المسارات. ويبين الشكل (٣-٩) خطوط التيار حول جناح طائرة.



الشكل (٣-٨). خط تيار [7]



الشكل (٣-٩). خطوط التيار حول جناح طائرة [6]

إذا رسمنا مجموعة من خطوط التيار بحيث تمر من جميع النقاط الواقعة على محيط مساحة صغيرة لمقطع عرضي في جريان ما، كما في الشكل (الشكل ٣-١٠)، فإنه يتشكل لدينا في هذه الحالة **أنبوب تيار *Stream Tube***. ويبقى السائل الموجود داخل أنبوب التيار دائما ضمن الأنبوب وكأنه محصور ضمن أنبوب وهمي.

لاستنتاج معادلة خط التيار، نفترض وجود جزيئة في الفراغ تقع على خط تيار ما، وسرعتها عند اللحظة t هي $\vec{V}$. فخلال زمن صغير جداً مقداره dt تتحرك الجزيئة مسافة صغيرة مقدارها $\vec{ds}$ ويكون لدينا:

$$\overrightarrow{ds} = \overrightarrow{V} \cdot dt \qquad (٣-٣)$$

بإسقاط المعادلة على المحاور الإحداثية الثلاثة، نجد أن:

$$dx = u \cdot dt$$
$$dy = v \cdot dt \qquad (٤-٣)$$
$$dz = w \cdot dt$$

حيث: u, v, w تمثل مركبات متجه السرعة باتجاه المحاور الإحداثية.

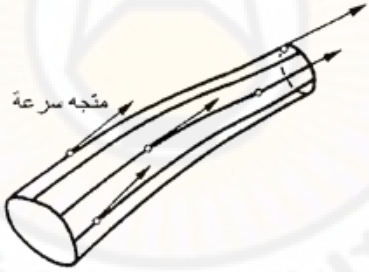
مما سبق يمكن أن كتابة:

$$dt = \frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}$$

وبالتالي فإن:

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} \qquad (٥-٣)$$

و تدعى المعادلة السابقة معادلة خط التيار.



الشكل (٣-١٠). أنبوب تيار [7]

٣-١٠. الجريان أحادي و ثنائي وثلاثي البعد

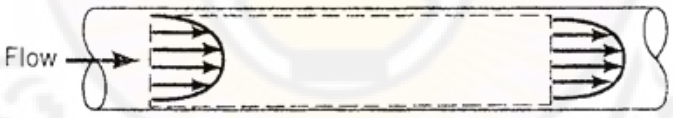
One, Two and Three Dimensional Flow

على الرغم من أنه في الحالة العامة تكون جميع الجريانات ثلاثية البعد، لأن سرعة الجريان والضغط تتغير بالنسبة لثلاثة محاور مرجعية في الفراغ، إلا أن التغيرات الرئيسة في بعض حالات الجريان تحدث في اتجاهين فقط أو حتى في اتجاه واحد. حيث يمكن في مثل هذه الحالات إهمال التغيرات التابعة للمحاور الأخرى دون ارتكاب

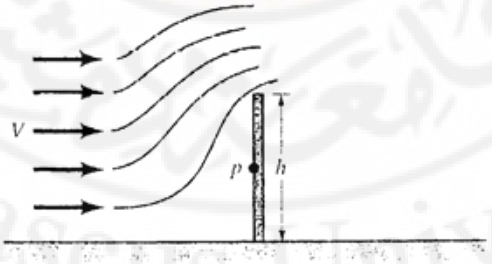
أخطاء تذكر مما يسهل في عملية التحليل والمعالجة.

يوصف الجريان بأنه **أحادي البعد** ***One Dimensional Flow***، إذا كانت خواص الجريان (السرعة، الضغط، ..) تتغير في لحظة ما بالنسبة لاتجاه الجريان فقط وليس عبر مقطعه العرضي. ويمكن اعتبار الجريانات في الأنابيب جريانات أحادية البعد (الشكل ٣-١١). مع ملاحظة أن السرعة في الجريانات اللزجة تتغير من الصفر إلى قيمة عظمى عند محور الأنبوب، لذلك لابد من إجراء بعض التصحيح للتعويض عن هذه الفرضية.

أما في **الجريانات ثنائية البعد** ***Tow Dimensional Flow***، فإن مميزات الجريان تتغير تبعا للاتجاه الطولي للجريان ولاتجاه آخر متعامد معه، وتكون خطوط التيار في هذه الحالة على شكل منحنيات واقعة في مستوٍ، وتكون مطابقة لجميع المنحنيات الواقعة في أي مستو مواز لهذا المستوي. فعلى سبيل المثال، يمكن التعامل مع الجريان فوق هدار ذي مقطع ثابت وعرض لا متناه كالمبين في الشكل (٣-١٢) كجريان ثنائي البعد. وباعتبار أن الهدار الحقيقي ذو عرض محدود، لذلك لا بد من إدخال بعض معاملات التصحيح لوضع الجريان بالقرب من الجدران الواقعة عند طرفيه في الحسبان.



الشكل (٣-١١). جريان أحادي البعد-جريان في أنبوب [6]



الشكل (٣-١٢). جريان ثنائي البعد-جريان فوق هدار [6]

٣-١١. السرعة والتسارع Velocity and Acceleration

في حالة الجريان ثلاثي البعد، تكون قيم سرعة جزيئات السائل في كل نقطة منه

مختلفة بالمقدار والاتجاه. كما يمكن للسرعة عند أية نقطة معينة من السائل أن تتغير من لحظة لأخرى.

يعطى متجه السرعة $\vec{V}$ في الحالة العامة بالعلاقة المتجهية التالية:

$$\vec{V} = u \cdot \vec{i} + v \cdot \vec{j} + w \cdot \vec{k} \qquad (٦-٣)$$

حيث: $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ تمثل متجهات الواحدة في الاتجاهات الثلاثة. أما قيمة السرعة أو شدتها فتعطى بالعلاقة:

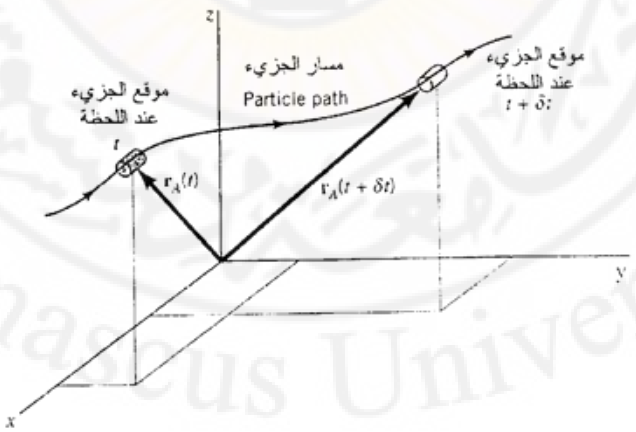
$$|V| = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} \qquad (٧-٣)$$

لنأخذ جزيئاً من سائل يتحرك على خط تيار، كما هو في الشكل (٣-١٣). فعند لحظة معينة t يكون موقع الجزيء عند الإحداثيات x, y, z، وتكون سرعته هي:

$$\vec{V}_t = \vec{V}(x, y, z, t) \qquad (٨-٣)$$

أما عند اللحظة $t + dt$ فإن الجزيء يأخذ موقعاً جديداً عند الإحداثيات $x + dx, y + dy, z + dz$ ، وتكون سرعته:

$$\vec{V}_{t+dt} = \vec{V}(x + dx, y + dy, z + dz, t + dt) \qquad (٩-٣)$$



الشكل (٣-١٣). حركة جزيء على خط تيار [6]

ويكون التغير في السرعة الذي يحدث للجزيء عند انتقاله من الوضع القديم للوضع

الجديد مساوياً:

$$d\vec{V} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} \cdot dz + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \cdot dt \qquad (٣-١٠)$$

أما التسارع الكلي لنفس الجزيء فيحسب من العلاقة:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \qquad (٣-١١)$$

مع ملاحظة أن:

$$\frac{dx}{dt} = u$$
$$\frac{dy}{dt} = v$$
$$\frac{dz}{dt} = w$$

ولذلك يمكن كتابة المعادلة (٣-١١) كما يلي:

$$\vec{a} = u \cdot \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \qquad (٣-١٢)$$

وتعرف الحدود الثلاثة الأولى في المعادلة السابقة كما هو معروف في علم الفيزياء بالتسارع الانتقالي، وهي تعبر عن تغير سرعة الجزيء نتيجة لتغيير موضعه. بينما يعرف الحد $\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$ بالتسارع المحلي أو الموضعي الناشئ عن عدم استقرار الجريان. وفي الحالة التي يكون فيها الجريان مستقراً، أي أن $\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = 0$، فإن المعادلة (٣-١٢) تأخذ الشكل التالي:

$$\vec{a} = u \cdot \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} \qquad (٣-١٣)$$

تعطى التسارعات وفق المحاور الإحداثية الثلاثة بالمعادلات التالية:

$$a_x = u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t}$$
$$a_y = u \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial t} \qquad (٣-١٤)$$

$$a_z = u\cdot\frac{\partial w}{\partial x} + v\cdot\frac{\partial w}{\partial y} + w\cdot\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t}$$

ويمكن كتابة التسارع الانتقالي بالشكل المتجهي كما يلي:

$$u\cdot\frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v\cdot\frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w\cdot\frac{\partial \vec{V}}{\partial z} = \left(\vec{V}\cdot\nabla\right)\cdot\vec{V} \qquad (١٥-٣)$$

وبالتالي فإن المعادلة (٣-١٥) تكتب بالصيغة:

$$\vec{a} = \left(\vec{V}\cdot\nabla\right)\cdot\vec{V} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \qquad (١٦-٣)$$

وفي حالة الجريان الثنائي البعد حيث $\vec{V} = \vec{V}(x,y,t)$، تأخذ المعادلة (٣-١٢) الشكل التالي:

$$\vec{a} = u\cdot\frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v\cdot\frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \qquad (١٧-٣)$$

أما في حالة الجريان الأحادي البعد الواقع على خط تيار حيث $\vec{V} = \vec{V}(s,t)$، يمكن التعبير عن تسارع الجزيء بالمعادلة:

$$\vec{a} = V\cdot\frac{\partial \vec{V}}{\partial s} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \qquad (١٨-٣)$$

إن الحد الأول من المعادلة السابقة ينعدم عندما يكون الجريان منتظماً. بينما ينعدم الحد الثاني عندما يكون الجريان مستقراً.

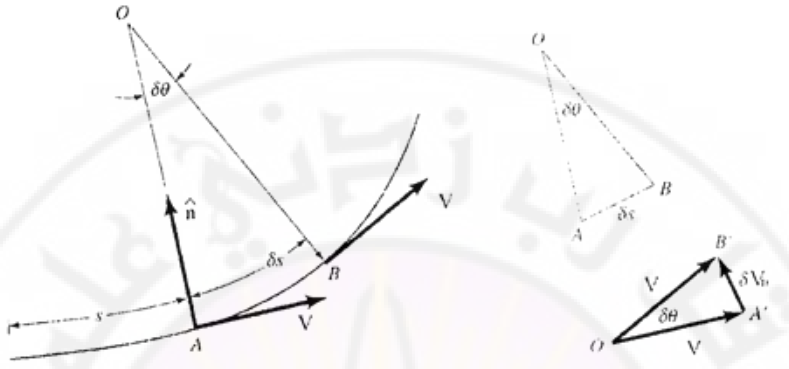
وعندما يتحرك جزيء السائل وفق مسار معين، فإن اتجاه متجه السرعة يتغير، وينشأ بالتالي تسارع في الاتجاه العمودي على الحركة سواء تغيرت قيمة متجه السرعة أم لم تتغير. ويوضح الشكل (٣-١٤) جزيئاً يتحرك من A إلى B وفق مسار منحن طوله δs وله زاوية $\delta\theta$ عند مركز الانحناء، حيث يعطى التغير في السرعة في الاتجاه العمودي على الحركة من مخطط السرعة بالمعادلة التالية:

$$\delta V_n = V\cdot\delta\theta = V\cdot\frac{\delta s}{R} \qquad (١٩-٣)$$

وبتقسيم طرفي المعادلة السابقة على الزمن الذي يحصل التغير في السرعة خلاله δt، نحصل على التسارع في الاتجاه العمودي على الحركة، وذلك عندما تنتهي δt للصفر

كما يلي:

$$a_n = \frac{dV_n}{dt} = \frac{V}{R} \cdot \frac{ds}{dt}$$



الشكل (٣-١٤).

وبما أن:

$$\frac{ds}{dt} = V$$

فإن:

$$a_n = \frac{V^2}{R} \qquad (٢٠-٣)$$

و يمثل هذا حد التسارع الانتقالي. وفي حال وجود مركبة لمتجه السرعة باتجاه مركز الانحناء الحظي، يكون هناك تسارع محلي أيضا، بحيث يعطى التسارع الكلي في ذلك الاتجاه بالمعادلة التالية:

$$a_n = \frac{V^2}{R} + \frac{\partial V_n}{\partial t} \qquad (٢١-٣)$$

٣-١٢. الغزارة والسرعة الوسطية للجريان

Discharge and the Average Velocity of Flow

تعرف **غزارة الجريان أو التصريف** ***Discharge*** عند مقطع معين، بأنها كمية السائل الكلية الجارية في واحدة الزمن عبر هذا مقطع. ويمكن للغزارة أن تقاس بدلالة الكتلة وتدعى في هذه الحالة بالغزارة الكتلية وواحدها kg/s، أو بدلالة الحجم حيث

تدعى في هذه الحالة بالغزارة الحجمية وواحدتها m^3/s.

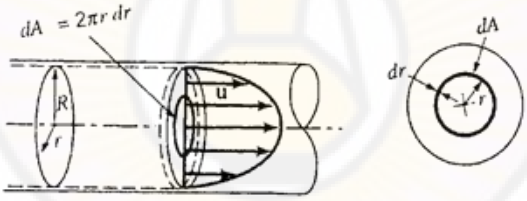
في حالة الجريان غير اللزج حيث لا يوجد احتكاك، تكون سرعة الجريان u ثابتة في جميع نقاط المقطع، وتكون الغزارة مساوية:

$$Q = A \cdot u \qquad (٢٢-٣)$$

حيث: A - مساحة مقطع الجريان بالاتجاه العمودي عليه.

أما في حالة الجريان اللزج حيث تنعدم سرعة جزيئات السائل في الطبقات الملامسة للجدران الصلبة، فتكون قيم السرعة غير ثابتة وتختلف من طبقة لأخرى. ففي حال الجريان في أنبوب، كما في الشكل (٣-١٥)، وإذا افترضنا أن u تمثل سرعة الجريان على بعد r من مركز الأنبوب، فإن التصريف المار عبر مقطع الأنبوب عندها يحسب بالمعادلة:

$$Q = \int_A u \cdot dA = 2 \cdot \pi \cdot \int_0^R u \cdot r \cdot dr \qquad (٢٣-٣)$$



الشكل (٣-١٥) منحني توزع السرعة في أنبوب [6]

وفي حال معرفة العلاقة التي تربط u مع r، فمن الممكن إجراء التكامل السابق وحساب الغزارة بشكل دقيق. غير أنه في العديد من المسائل يمكن إهمال التغير في السرعة عبر المقطع، حيث يفرض أن السرعة ثابتة وتساوي السرعة الوسطية للجريان V، والتي تعرف بأنها الغزارة الحجمية للجريان مقسمة على مساحة المقطع العمودي على الجريان، أي أن:

$$V = \frac{Q}{A} \qquad (٢٤-٣)$$

ومنه:

$$V = \frac{1}{A} \cdot \int_A u \cdot dA \qquad (٢٥-٣)$$

٣-١٣. استمرارية الجريان Continuity of Flow

يعتمد مبدأ **انحفاظ الكتلة** ***Conservation of Mass*** على أن المادة لا تنعدم ولا يمكن أن تخلق من العدم، باستثناء ما يحدث في التفاعلات النووية. ويمكن تطبيق هـذا المبدأ على جريان السوائل. فإذا اعتبرنا جزءاً ثابتاً من حقل جريان يشكل حجم تحكم، كما في الشكل (٣-١٦)، يكون لدينا:

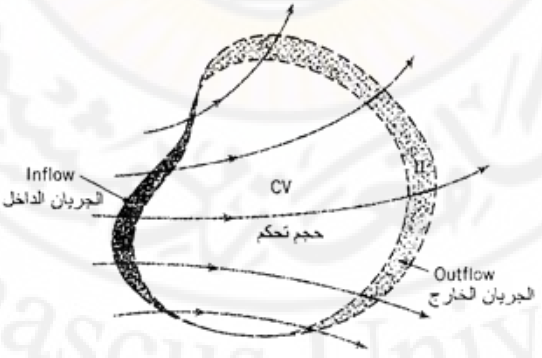
$$m_1 = m_2 + m_3 \qquad (٢٦-٣)$$

حيث أن:

- m_1 : كتلة السائل الداخلة إلى حجم التحكم في واحدة الزمن.
- m_2 : كتلة السائل الخارجة من حجم التحكم في واحدة الزمن.
- m_3 : معدل تغير كتلة السائل ضمن حجم التحكم في واحدة الزمن.

في حالة الجريان المستقر تبقى كتلة السائل الموجودة في حجم التحكم ثابتة مع الزمن، وتصبح العلاقة السابقة كما يلي:

$$m_1 = m_2 \qquad (٢٧-٣)$$



الشكل (٣-١٦). انحفاظ الكتلة [6]

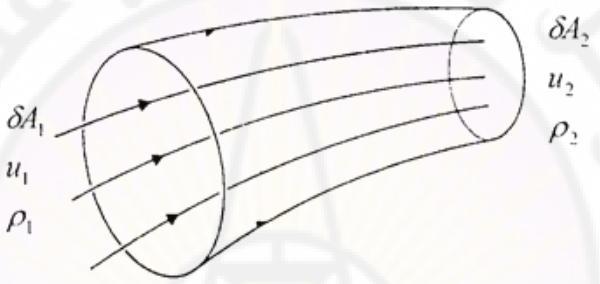
بتطبيق هذا المبدأ على الجريان المستقر الانضغاطي في أنبوب تيار، كما هـو في الشكل (٣-١٧)، واعتبار أن مساحة مقطعه صغيرة بقدر كاف بحيث يمكن اعتبـار

سرعة الجريان ثابتة عند أي مقطع، يمكن كتابة العلاقة:

$$\rho_1 \cdot \delta A_1 \cdot u_1 = \rho_2 \cdot \delta A_2 \cdot u_2 = Const \qquad (٢٨-٣)$$

ومن أجل جريان حقيقي خلال أنبوب تتغير سرعة جريان السائل عبر مقطع الجريان، وباستخدام السرعة الوسطية للجريان V، يمكن كتابة معادلة الاستمرار في حالة الجريان المستقر الانضغاطي على الشكل:

$$\rho_1 \cdot A_1 \cdot V_1 = \rho_2 \cdot A_2 \cdot V_2 = m \qquad (٢٩-٣)$$



الشكل (٣-١٧). استمرارية الجريان في أنبوب تيار

وفي حالة جريان مستقر غير قابل للانضغاط حيث: $\rho_1 = \rho_2$، يمكن كتابة المعادلة السابقة على الشكل التالي:

$$A_1 \cdot V_1 = A_2 \cdot V_2 = Q \qquad (٣٠-٣)$$

يعد مبدأ انحفاظ الكتلة وبالتالي معادلة الاستمرار من أهم معادلات ميكانيك السوائل، والتي يمكن بمساعدتها حساب سرعة الجريان عند مقاطع مختلفة من السائل.

يمكن تطبيق معادلة الاستمرار أيضا لحساب العلاقة بين جريان السائل الداخل والخارج من عقدة تفرع عدد من الأنابيب. وبالرجوع إلى الشكل (٣-١٨) يمكن كتابة:

الجريان الكلي الداخل العقدة = الجريان الكلي الخارج من العقدة

أو:

$$\rho_1 \cdot Q_1 = \rho_2 \cdot Q_2 + \rho_3 \cdot Q_3 \qquad (٣١-٣)$$

ومن أجل جريان غير قابل للانضغاط، حيث:

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho$$

يكون:

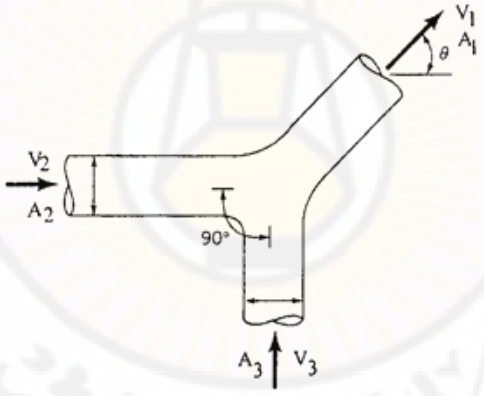
$$Q_1 = Q_2 + Q_3$$

أو:

$$V_1 \cdot A_1 = V_2 \cdot A_2 + V_3 \cdot A_3 \qquad (٣٢-٣)$$

وإذا افترضنا بشكل عام أن الجريان نحو العقدة هو الاتجاه الموجب للجريان، والجريان الخارج من العقدة هو الاتجاه السالب، فإن المجموع الجبري للغزارات عند العقدة يكون مساويا للصفر، أي أن:

$$\Sigma \pm Q_i = 0 \qquad (٣٣-٣)$$



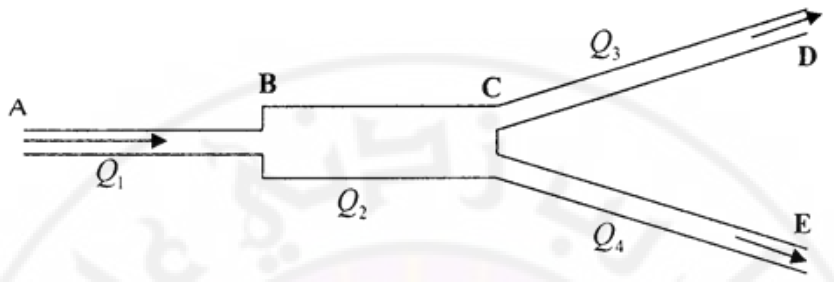
الشكل (٣-١٨). تطبيق معادلة الاستمرار

مثال ٣-١

يجري الماء ضمن الأنبوب AB (الشكل٣-١٩) الذي يبلغ قطره $d_1 = 50mm$، وهو موصول على التسلسل مع الأنبوب BC ذي القطر $d_2 = 75mm$ والسرعة الوسطية للجريان خلاله $V_2 = 2m/s$. ويتفرع الأنبوب BC عند النقطة C إلى فرعين، الفرع CD قطره d_3 والسرعة الوسطية للجريان فيه $V_3 = 1.5m/s$، والفرع CE قطره $d_4 = 30mm$ والغزارة المارة فيه تساوي نصف

الغزارة المارة في الفرع CD. والمطلوب حساب قيم كل من:

$$Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, d_3, V_1$$



الشكل (٣-١٩).

الحل:

بما أن الأنبوبين AB, BC موصولان على التسلسل، فهذا يعني أن:

$$Q_1 = Q_2 = V_1 \cdot A_1 = V_2 \cdot A_2$$

أي أن:

$$Q_1 = Q_2 = 2 \cdot \pi \cdot \frac{(0.075)^2}{4} = 8.836 \times 10^{-3} m^3/s$$

وكذلك فإن:

$$V_1 = \frac{Q_1}{A_1} = \frac{8.836 \cdot 10^{-3}}{\frac{\pi \cdot (0.05)^2}{4}} = 4.5 m/s$$

وبتطبيق معادلة الاستمرار عند النقطة C، نجد أن:

$$Q_2 = Q_3 + Q_4$$

لكن:

$$Q_4 = \frac{Q_3}{2}$$

ومنه:

$$Q_2 = 1.5 \cdot Q_3 = 8.836 \cdot 10^{-3}$$

و:

$$Q_3 = \frac{Q_2}{1.5} = 5.891 \cdot 10^{-3} m^3 / s$$

ويكون:

$$Q_4 = \frac{5.891 \cdot 10^{-3}}{2} = 2.945 \times 10^{-3} m^3 / s$$

لحساب d_3 نكتب:

$$Q_3 = V_3 \cdot A_3 = V_3 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot d_3^2$$

ومنه:

$$d_3 = 0.071m = 71mm$$

٣-١٤. معادلة الاستمرار التفاضلية Differential Continuity Equation

تتميز **معادلة الاستمرار** ***Continuity Equation*** بشكلها التفاضلي بالنسبة للإحداثيات العامة الثلاثية x, y, z عن الصورة أحادية البعد، والتي تم استخراجها في الفقرة السابقة، في أنها عامة ودقيقة للجريان ثلاثي أو ثنائي البعد، وكذلك لكل من الجريان المستقر وغير المستقر.

يوضح الشكل (٣-٢٠) حجم تحكم من سائل على شكل متوازي مستطيلات أبعاده $\delta x, \delta y, \delta z$. وبفرض أن إحداثيات مركز المتوازي هي x, y, z، وأن مركبات السرعة في الاتجاهات الثلاثة والكتلة النوعية في مركز هذا الحجم هي u, v, w, ρ على الترتيب. فإن سرعة الجريان والكتلة النوعية على الأوجه الستة لحجم التحكم تعطى بالعلاقات:

$$u_{x+\delta x/2} = u + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\delta x}{2} \qquad (٣٤-٣)$$

$$u_{x-\delta x/2} = u - \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\delta x}{2} \qquad (٣٥-٣)$$

$$\rho_{x+\delta x/2} = \rho + \frac{\partial \rho}{\partial x} \cdot \frac{\delta x}{2} \qquad (٣٦-٣)$$

$$\rho_{x-\delta x/2} = \rho - \frac{\partial \rho}{\partial x} \cdot \frac{\delta x}{2} \qquad (٣٧-٣)$$

$$v_{y+\delta y/2} = v + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{\delta y}{2} \qquad (٣٨-٣)$$

$$v_{y-\delta y/2} = v - \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{\delta y}{2} \qquad (٣٩-٣)$$

$$\rho_{y+\delta y/2} = \rho + \frac{\partial \rho}{\partial y} \cdot \frac{\delta y}{2} \qquad (٤٠-٣)$$

$$\rho_{y-\delta y/2} = \rho - \frac{\partial \rho}{\partial y} \cdot \frac{\delta y}{2} \qquad (٤١-٣)$$

$$w_{z+\delta z/2} = w + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{\delta z}{2} \qquad (٤٢-٣)$$

$$w_{z-\delta z/2} = w - \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{\delta z}{2} \qquad (٤٣-٣)$$

$$\rho_{z+\delta z/2} = \rho + \frac{\partial \rho}{\partial z} \cdot \frac{\delta z}{2} \qquad (٤٤-٣)$$

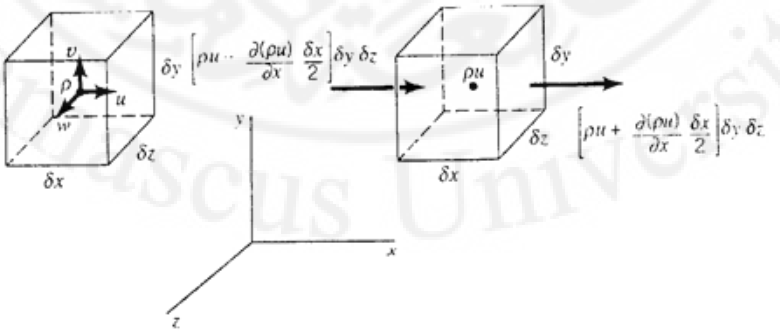
$$\rho_{z-\delta z/2} = \rho - \frac{\partial \rho}{\partial z} \cdot \frac{\delta z}{2} \qquad (٤٥-٣)$$

إن معدل جريان الكتلة إلى حجم التحكم من كل وجه يساوي:

$$\rho \cdot \vec{V} \cdot d\vec{A} \qquad (٤٦-٣)$$

وبناء عليه يكون معدل جريان الكتلة من خلال الجانب الأيمن مساوياً:

$$\left(u + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\delta x}{2}\right) \cdot \left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial x} \cdot \frac{\delta x}{2}\right) \cdot \delta y \cdot \delta z \qquad (٤٧-٣)$$



الشكل (٣-٢٠). عنصر تفاضلي لاستنتاج معادلة الاستمرار [6]

ومن الجانب الأيسر مساوياً:

$$\left(u-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\delta x}{2}\right)\cdot\left(\rho-\frac{\partial \rho}{\partial x}\cdot\frac{\delta x}{2}\right)\cdot\delta y\cdot\delta z \qquad (٣-٤٨)$$

ويكون المعدل الصافي لجريان الكتلة إلى حجم التحكم في الاتجاه x هو:

$$\left(u\cdot\frac{\partial \rho}{\partial x}+\rho\frac{\partial u}{\partial x}\right)\cdot\delta x\cdot\delta y\cdot\delta z \qquad (٣-٤٩)$$

أو بشكل آخر:

$$\frac{\partial(u\cdot\rho)}{\partial x}\cdot\delta x\cdot\delta y\cdot\delta z \qquad (٣-٥٠)$$

وبشكل مماثل يكون المعدل الصافي لجريان الكتلة إلى حجم التحكم في الاتجاهين y,z كما يلي:

$$\frac{\partial(v\cdot\rho)}{\partial y}\cdot\delta x\cdot\delta y\cdot\delta z \qquad (٣-٥١)$$

$$\frac{\partial(w\cdot\rho)}{\partial z}\cdot\delta x\cdot\delta y\cdot\delta z \qquad (٣-٥٢)$$

وعليه يكون المعدل الصافي لجريان الكتلة إلى حجم التحكم في الاتجاهات الثلاثة مساوياً:

$$\left(\frac{\partial(u\cdot\rho)}{\partial x}+\frac{\partial(v\cdot\rho)}{\partial y}+\frac{\partial(w\cdot\rho)}{\partial z}\right)\cdot\delta x\cdot\delta y\cdot\delta z \qquad (٣-٥٣)$$

إن مبدأ انحفاظ الكتلة ينص على:

المعدل الصافي لجريان كتلة السائل الى حجم التحكم + معدل تغير كتلة السائل في هذا الحجم في واحدة الزمن=0

وبالتالي يكون لدينا:

$$\left(\frac{\partial(u\cdot\rho)}{\partial x}+\frac{\partial(v\cdot\rho)}{\partial y}+\frac{\partial(w\cdot\rho)}{\partial z}\right)\cdot\delta x\cdot\delta y\cdot\delta z+\frac{\partial \rho}{\partial t}\cdot\delta x\cdot\delta y\cdot\delta z=0 \qquad (٣-٥٤)$$

وأخيراً، نجد أن:

$$\left(\frac{\partial(u\cdot\rho)}{\partial x}+\frac{\partial(v\cdot\rho)}{\partial y}+\frac{\partial(w\cdot\rho)}{\partial z}\right)+\frac{\partial \rho}{\partial t}=0 \qquad (٣-٥٥)$$

تمثل المعادلة السابقة معادلة الاستمرار بشكلها العام، وهي تصلح لجميع أنواع

الجريانات مستقرة أم غير مستقرة، ولزجة أم غير لزجة، وانـضغاطية أم غـير قابلـة للانضغاط.

مع ملاحظة أن:

$$\nabla = \vec{i}\cdot\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\cdot\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\cdot\frac{\partial}{\partial z}$$

لذلك يمكن كتابة:

$$\frac{\partial(u\cdot\rho)}{\partial x} + \frac{\partial(v\cdot\rho)}{\partial y} + \frac{\partial(w\cdot\rho)}{\partial z} = \nabla\cdot\left(\rho\cdot\vec{V}\right) \qquad (٣-٥٦)$$

وبالتالي يمكن التعبير عن المعادلة (٣-٥٥) بالشكل المتجهي بالصيغة:

$$\nabla\cdot\left(\rho\cdot\vec{V}\right) + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \qquad (٣-٥٧)$$

وعندما يكون الجريان غير قابـل للانـضغاط يكـون $\rho = Const, \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$ ، وتأخذ معادلة الاستمرار الشكل التالي:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \qquad (٣-٥٨)$$

الذي يعبر عنه متجهياً بالعلاقة:

$$\nabla\cdot\vec{V} = 0 \qquad (٣-٥٩)$$

وهي تمثل معادلة الاستمرار للجريان غير الانضغاطي مستقراً كـان أم لا. وفي حـال الجريان ثنائي البعد تأخذ المعادلة السابقة الشكل التالي:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \qquad (٣-٦٠)$$

مثال ٣-٢

في حال جريان ثنائي البعد غير قابل للانضغاط، هل تحقق الجريانـات التاليـة معادلة الاستمرار:

١. $v = 3\cdot x, u = -2\cdot y$.

٢. $v = 3\cdot x\cdot y, u = 0$.

٣. $u = 2 \cdot x$ ، $v = -2 \cdot y$.

الحل:

في حالة الجريان ثنائي البعد غير قابل للإنضغاط تأخذ معادلة الاستمرار الصيغة:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

١. $\frac{\partial(-2 \cdot y)}{\partial x} + \frac{\partial(3 \cdot x)}{\partial y} = 0 + 0 = 0$ فالجريان يحقق معادلة الاستمرار.

٢. $\frac{\partial(0)}{\partial x} + \frac{\partial(3 \cdot x \cdot y)}{\partial y} = 0 + 3 \cdot x \neq 0$ فالجريان لا يحقق معادلة الاستمرار.

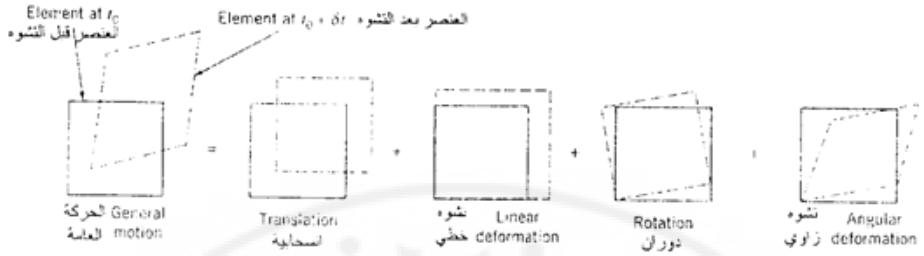
٣. $\frac{\partial(2 \cdot x)}{\partial x} + \frac{\partial(-2 \cdot y)}{\partial y} = 2 - 2 = 0$ فالجريان يحقق معادلة الاستمرار.

٣-١٥. الجريان الدوراني والجريان غير الدوراني

Rotational and Irrotational Flow

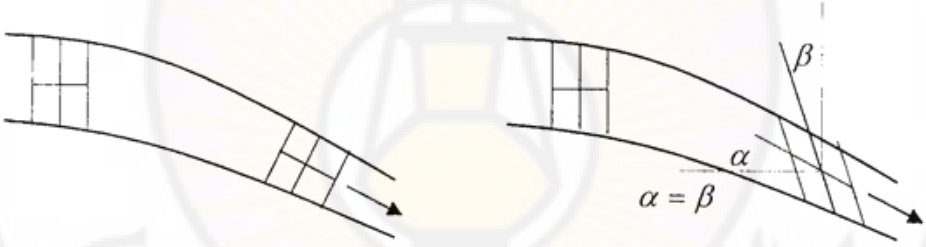
لو درسنا في الحالة العامة حركة عنصر من سائل ما بين اللحظة t_0 واللحظة $t_0 + \delta t$، فإننا نجد أن هذه الحركة تتكون من تراكم عدة حركات. الأولى هي **حركة انسحابية** ***Translation***، حيث ينتقل العنصر من موقع إلى آخر دون أن يغير من سرعته، ودون أن يتعرض إلى أي دوران. و الثانية هي **التشوه الخطي** ***Linear Deformation***، حيث يحصل تغير في سرعة الجريء عند انقاله من وضع لآخر دون تعرضه إلى حركة دورانية. والثالثة هي **دوران الجزيء** ***Rotation*** في نفس الاتجاه بزاوية حول المحور العمودي على مستوي الورقة. وأخيراً **التشوه الزاوي** ***Angular Deformation*** حيث يتعرض الجزيء إلى تشوه، كما في الشكل (٣-٢١).

يمكن أن يكون الجريان، في الحالة العامة دورانياً أو غير دوراني. ويعرف **الجريان الدوراني** ***Rotational Flow*** ، بأنه الجريان الذي يعاني فيه السائل حركة دورانية صافية من لحظة لأخرى بالنسبة لإطار مرجعي معين. أما الجريان غير الدوراني فهو عكس ذلك.



الشكل (٣-٢١). حركة جزيء من سائل في الحالة العامة [6]

ويمكن في **الجريان غير الدوراني** ***Irrotational Flow*** أن يتشوه جزء صغير من السائل (الشكل ٣-٢٢-أ)، حيث تدور محاور هذا الجزء بالتساوي، وطالما كان المتوسط الجبري للدوران معدوماً فإن الحركة هي لادورانية. ويبين الشكل (٣-٢٢-ب) مثالاً لجريان دوراني، حيث يوجد دوران صاف لعنصر السائل على الرغم من أن تشوهه في الشكل (٣-٢٢-ب) أقل منه في الشكل (٣-٢٢-أ).

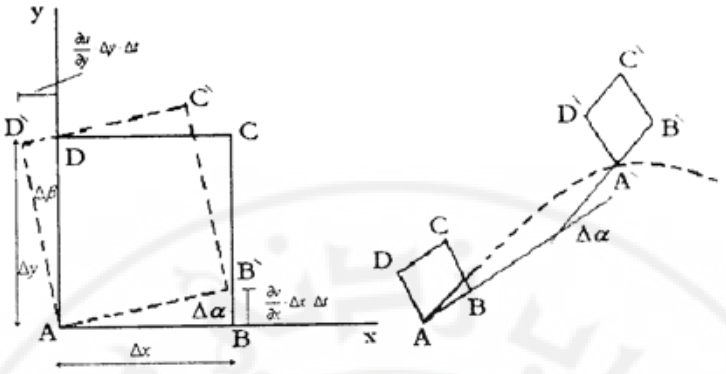


الشكل (٣-٢٢-أ). الشكل (٣-٢٢-ب)

لاستنتاج المعادلات والشروط الرياضية للجريان الدوراني وغير الدوراني نأخذ جزيئاً صغيراً من السائل يتحرك كما هو مبين في الشكل (٣-٢٣). فخلال فترة زمنية قصيرة Δt يتحرك هذا الجزيء من وضع لآخر، وأثناء حركته يعاني من التشوه. ويمكن التعبير عن الزاوية $\Delta\alpha$ بين $AB, A'B'$ كما يلي:

$$\Delta\alpha = \frac{BB'}{\Delta x} = \frac{\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)\cdot\Delta x\right]\cdot\Delta t}{\Delta x} = \frac{\partial v}{\partial x}\cdot\Delta t \qquad (٦١-٣)$$

ويكون معدل دوران حافة العنصر التي كانت في الأصل على استقامة AB :



الشكل (٣-٢٣). استنتاج معدلات الجريان الدوراني وغير الدوراني

$$\omega_{\alpha} = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \frac{\partial v}{\partial x} \qquad (٦٢-٣)$$

وبشكل مشابه، لدينا:

$$\Delta\beta = \frac{CC'}{\Delta y} = \frac{\left[-\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\cdot\Delta y\right]\cdot\Delta t}{\Delta y} = \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\Delta t \qquad (٦٣-٣)$$

حيث أن معدل دوران حافة العنصر التي كانت في الأصل على استقامة AC هو:

$$\omega_{\beta} = \frac{\Delta\beta}{\Lambda t} = -\frac{\partial u}{\partial y} \qquad (٦٤-٣)$$

إن معدل دوران عنصر حول المحور z هو متوسط $\omega_{\alpha}, \omega_{\beta}$، أي أن:

$$\omega_{z} = \frac{\omega_{\alpha} + \omega_{\beta}}{2} \qquad (٦٥-٣)$$

ومنه:

$$\omega_{z} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \qquad (٦٦-٣)$$

وكما ذكرنا سابقا، فإنه ليكون الجريان غير دوراني يجب أن يكون معدل الدوران مساوياً الصفر. وفي حالة الجريان ثنائي البعد في المستوي (x,y) يكون الجريان غير دوراني إذا كان:

$$\omega_z = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 \qquad (٦٧-٣)$$

أو:

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \qquad (٦٨-٣)$$

وبشكل مماثل يكون الجريان غير دوراني في حالة الجريان ثلاثي البعد عندما:

$$\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$$

أي عندما يكون:

$$\omega_x = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right) = 0 \qquad (٦٩-٣)$$

و:

$$\omega_y = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) = 0 \qquad (٧٠-٣)$$

و:

$$\omega_z = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 \qquad (٧١-٣)$$

أو:

$$\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \qquad (٧٢-٣)$$

و:

$$\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \qquad (٧٣-٣)$$

و:

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \qquad (٧٤-٣)$$

ويمكن التعبير عن دوران السائل بشكل متمنهي بالعلاقة:

$$\vec{\omega} = \omega_x \cdot \vec{i} + \omega_y \cdot \vec{j} + \omega_z \cdot \vec{k} \qquad (٧٥-٣)$$

أو بالعلاقة:

$$\vec{\omega}=\frac{1}{2}\cdot\left[\left(\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial y}\right)\cdot\vec{i}+\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)\cdot\vec{j}+\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\cdot\vec{k}\right] \quad (٣-٧٦)$$

وكما نعلم من علمي الفيزياء والرياضيات فإن:

$$\left(\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial y}\right)\cdot\vec{i}+\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)\cdot\vec{j}+\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\cdot\vec{k}=rot\left(\vec{V}\right) \quad (٣-٧٧)$$

حيث: $rot\left(\vec{V}\right)$ - دوار متجه السرعة، لذلك يمكن كتابة المعادلة (٣-٧٦) بالشكل:

$$\vec{\omega}=\frac{1}{2}\cdot rot\left(\vec{V}\right) \quad (٣-٧٨)$$

مثال ٣-٣

بين فيما إذا كانت الجريانات التالية دورانية أم غيردورانية:

١. $v=3\cdot x, u=-2\cdot y$.

٢. $v=3\cdot x\cdot y, u=0$.

٣. $v=-2\cdot y, u=2\cdot x$.

٤. $v=\frac{y}{x^2+y^2}, u=\frac{x}{x^2+y^2}\cdot=0$

الحل:

يكون الجريان غير دوراني إذا كان: $\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=0$، ومنه:

١- $\frac{\partial(3\cdot x)}{\partial x}-\frac{\partial(-2\cdot y)}{\partial y}=3+2=5\neq 0$ فالجريان دوراني.

٢- $\frac{\partial(3\cdot x\cdot y)}{\partial x}-\frac{\partial(0)}{\partial y}=3\cdot y-0\neq 0$ فالجريان دوراني.

٣- $\frac{\partial(-2\cdot y)}{\partial x}-\frac{\partial(2\cdot x)}{\partial y}=0-0=0$ فالجريان غير دوراني.

٤- $\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{-2\cdot y\cdot x}{\left(x^2+y^2\right)^2}, \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-2\cdot y\cdot x}{\left(x^2+y^2\right)^2}\Rightarrow\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=0$ فالجريان غير دوراني.

٣-١٦. الجولان والتدوم Circulation and Vorticity

لنأخذ جزيئاً من سائل يتحرك على مسار معين مغلق، حيث السرعة اللحظية $\vec{V}$ معلومة في كل نقطة، كما في الشكل (٣-٢٤). ولنأخذ عند كل نقطة من هذا المسار الجداء السلمي بين متجه السرعة $\vec{V}$ وبين العنصر الخطي $d\vec{s}$ كما يلي:

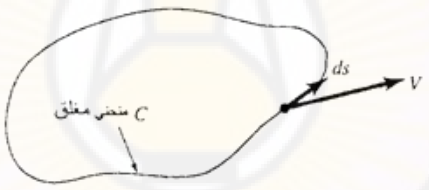
$$d\Gamma = \vec{V} \cdot d\vec{s} \qquad (٧٩-٣)$$

ندعو $d\Gamma$ جولان متجه السرعة $\vec{V}$ على القوس العنصري $d\vec{s}$. فإذا أجرينا التكامل المنحنى على كامل المسار المغلق رياضياً فإننا نحصل على:

$$\Gamma = \oint_c \vec{V} \cdot d\vec{s} \qquad (٨٠-٣)$$

حيث يدعى Γ **الجولان** ***Circulation*** على طول المنحنى المغلق. ويمكن التعبير أيضاً عن المعادلة السابقة كما يلي:

$$\Gamma = \oint_c u \cdot dx + v \cdot dy + w \cdot dz \qquad (٨١-٣)$$



الشكل (٣-٢٤). الجولان حول مسار مغلق في حقل جريان ثنائي البعد [6]

غالباً ما يتضمن حساب المعادلة (٣-٨١) حول أي منحنٍ مغلق القيام بتكامل معقد. لذلك يتم حساب هذا التكامل في معظم الأحيان بالطرق العددية.

وبفرض أن جزيئات السائل تتحرك على منحن دائري مغلق نصف قطره R بسرعة زاوية ثابتة مقدارها ω_0، فإن الجولان على طول هذا المسار الدائري يكون مساوياً:

$$\Gamma = \oint_c R \cdot \omega_0 \cdot R \cdot d\varphi = 2 \cdot \pi \cdot \omega_0 \cdot R^2 \qquad (٨٢-٣)$$

وبأخذ المسار المغلق المحدد المبين في الشكل (٣-٢٥). من الشكل يظهر أن **قيمة**

الجولان هي:

$$\Delta\Gamma = u\cdot\Delta x + \left(v + \frac{\partial v}{\partial x}\cdot\Delta x\right)\cdot\Delta y - \left(u + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y\right)\cdot\Delta x - v\cdot\Delta y \qquad (٨٣-٣)$$

أو:

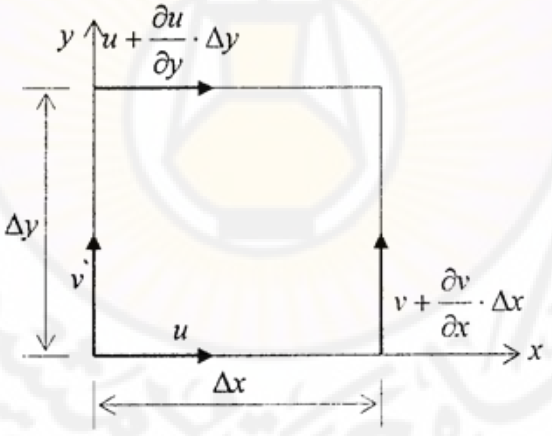
$$\Delta\Gamma = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\cdot\Delta x\cdot\Delta y \qquad (٨٤-٣)$$

أو:

$$\Delta\Gamma = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\cdot\Delta A \qquad (٨٥-٣)$$

ومنه:

$$\frac{\Delta\Gamma}{\Delta A} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \qquad (٨٦-٣)$$



الشكل (٣-٢٥). مركبات السرعة حول عنصر مستوٍ من سائل

ندعو الجولان في واحدة المساحة **بالتدوم** ***Vorticity***، ونرمز له بالرمز ζ، أي أن:

$$\zeta_z = \frac{\Delta\Gamma}{\Delta A} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 2\cdot\omega_z \qquad (٨٧-٣)$$

أما في الحالة العامة لجريان ثلاثي البعد، فمتجه التدوم هو:

$$\vec{\zeta} = 2\cdot\vec{\omega} = 2\cdot\left(\omega_x\cdot\vec{i} + \omega_y\cdot\vec{j} + \omega_z\cdot\vec{k}\right) \qquad (٨٨-٣)$$

٣-١٧. الجريان الكموني Potential Flow

يمكن معرفة أشياء كثيرة عن جريان ما عن طريق دراسة سلوك خطوط التيار فيه. فالقوانين التي تتحكم بهذا السلوك، تم بحثها من قبل مدرسة الرياضيين النظريين (الهيدروديناميكيين) في القرن الثامن عشر. وبغية الحصول على نماذج رياضية واضحة للجريان طرح هؤلاء الرياضيون مفهوم السائل المثالي كما تم شرحه مسبقاً. فالسائل المثالي هو سائل وهمي يفترض عدم لزوجة وانضغاطية للسائل. وعندما يكون جريان السائل المثالي غير دوراني، فإننا ندعو هذا الجريان **جرياناً كمونياً** ***Potential Flow*** .

وعلى الرغم من أن الجريان الكموني يعتمد على مفهوم سائل مثالي وهمي، إلا أنه يعطي نتائج جيدة ومعبرة عن الواقع في بعض الحالات. وأكثر الحالات التي تستخدم فيها نظرية الجريان الكموني بنجاح جريان الماء عبر أجسام السدود الترابية وتحت أساساتها، وكذلك الجريان تحت البوابات.

٣-١٧-١. تابع التيار Stream Function

يعد **تابع التيار** ***Stream Function*** ψ المعتمد على مبدأ الاستمرار تعبيراً رياضياً لوصف حقل الجريان. ويوضح الشكل (٣-٢٦) خطي تيار متجاورين في حقل جريان ثنائي البعد. وبفرض أن $\psi(x,y)=0$ يمثل خط التيار الأقرب إلى مبدأ الإحداثيات و $\psi+d\psi$ يمثل خط التيار الثاني. وحيث أنه لا يوجد جريان عمودي على خط التيار، فإن $d\psi$ يمثل الجريان بين خطي تيار. ويمكن من الشكل كتابة:

$$d\psi=-v\cdot dx+u\cdot dy \qquad (٣-٨٩)$$

كذلك يمكن التعبير عن المشتق الكلي لتابع التيار وفق المعادلة:

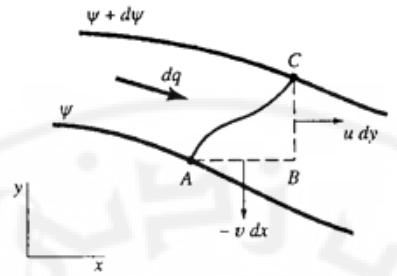
$$d\psi=\frac{\partial\psi}{\partial x}\cdot dx+\frac{\partial\psi}{\partial y}\cdot dy \qquad (٣-٩٠)$$

وبمقارنة المعادلتين السابقتين، يمكن بسهولة ملاحظة أن:

$$u=\frac{\partial\psi}{\partial y} \qquad (٣-٩١)$$

و:

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \qquad (٩٢-٣)$$



الشكل (٣-٢٦). استنتاج تابع التيار [6]

مما سبق نجد أنه إذا أمكن التعبير عن ψ بدلالة x, y، فإنه يمكننا إيجاد مركبات السرعة عند أية نقطة في حقل جريان ثنائي البعد. وبالعكس فإذا أمكن التعبير عن مركبات السرعة u, v بدلالة x, y، فإنه يمكن إيجاد تابع التيار بإجراء التكامل. وهنا تجدر الإشارة أن استنتاج تابع التيار يعتمد على مبدأ الاستمرار، لذلك من الضروري أن تتحقق معادلة الاستمرار حتى يمكن وجود تابع الجريان.

كما نعلم سابقاً تعطى معادلة الاستمرار في حالة جريان ثنائي البعد غير قابل للانضغاط بالعلاقة:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

وبالتعبير عن u, v بدلالة ψ يمكن كتابة المعادلة السابقة كما يلي:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \cdot \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \cdot \partial x} = 0 \qquad (٩٣-٣)$$

وكما ذكرنا سابقاً من خلال تعريف الجريان الكموني على أنه جريان غيردوراني، لذلك يكون:

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \qquad (٩٤-٣)$$

وبالتعبير عن u, v بدلالة ψ في المعادلة السابقة، نحصل على:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \qquad (٩٥-٣)$$

تدعى هذه المعادلة **معادلة لابلاس التفاضلية Laplace's Equation**. ومن هنا نستنتج أن تابع التيار يجب أن يحقق معادلة لابلاس التفاضلية في الجريان الكموني.

إن المعادلة (٣-٩٥) تكتب أيضا بالصيغة:

$$\nabla^2\psi = 0 \qquad (٣-٩٦)$$

أو:

$$\Delta\psi = 0 \qquad (٣-٩٧)$$

٣-١٧-٢. تابع كمون السرعة Velocity Potential

يعرف تابع **كمون السرعة** *Velocity Potential* $\phi(x,y)$ في جريان ثنائي البعد في الإحداثيات الديكارتية كما يلي:

$$u = \frac{\partial\phi}{\partial x} \qquad (٣-٩٨)$$

و:

$$v = \frac{\partial\phi}{\partial y} \qquad (٣-٩٩)$$

وبمقارنة هاتين المعادلتين مع المعادلتين (٣-٩١، ٣-٩٢)، نجد أن:

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y} \qquad (٣-١٠٠)$$

و:

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \qquad (٣-١٠١)$$

تحمل المساواتان السابقتان اسم شروط (كوشي - ريمان) نسبة للعالمين كوشي وريمان ***Couchy (1789-1857), Reimann (1826-1866)***. ولو عوضنا المعادلتين (٣-٩٨، ٣-٩٩) في معادلة الاستمرار، نحصل على:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0 \qquad (٣-١٠٢)$$

أو:

$$\nabla^2\phi = 0 \qquad (١٠٣-٣)$$

أو

$$\Delta\phi = 0 \qquad (١٠٤-٣)$$

أي أن تابع كمون السرعة يحقق معادلة **لابلاس التفاضلية** ***Laplace's Equation***.

وإذا عوضنا u,v بدلالة ϕ في معادلة التدوم نحصل على:

$$\zeta = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)$$

ومنه:

$$\zeta = \frac{\partial^2\phi}{\partial x \cdot \partial y} - \frac{\partial^2\phi}{\partial y \cdot \partial x} \qquad (١٠٥-٣)$$

وحيث أن الجريان غير دوراني فإن $\zeta = 0$، أي:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x \cdot \partial y} - \frac{\partial^2\phi}{\partial y \cdot \partial x} = 0 \qquad (١٠٦-٣)$$

وبذلك نلاحظ أنه إذا وجد تابع كمون السرعة يلزم أن يكون الجريان غير دوراني. وبالعكس إذا كان الجريان دورانيا، فإن تابع الكمون لا يكون له وجود.

ويمكن في الإحداثيات القطبية حيث مركبات السرعة هي السرعة المحيطية v_θ والسرعة القطرية v_r، التعبير عن هذه المركبات بدلالة تابع كمون السرعة وتابع التيار وكل من r,θ كما يلي:

$$v_r = \frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial\theta} \qquad (١٠٧-٣)$$

و:

$$v_\theta = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\phi}{\partial\theta} = -\frac{\partial\psi}{\partial r} \qquad (١٠٨-٣)$$

مثال ٣-٤

هل يمكن أن تكون التوابع التالية توابع كمون سرعة لجريان كموني:

$$\phi_1 = x + 2\cdot y, \phi_2 = 4\cdot x^2 - 3\cdot y^2$$

الحل:

لتمثيل هذه التوابع توابع كمون سرعة يجب أن تحقق معادلة لابلاس التفاضلية:

التابع الأول:

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial x} = 1, \frac{\partial \phi_1}{\partial y} = 2$$

$$\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} = 0, \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial y^2} = 0$$

إذاً التابع الأول يمثل تابع كمون سرعة لجريان كموني.

التابع الثاني:

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial x} = 8 \cdot x, \frac{\partial \phi_2}{\partial y} = -6 \cdot y$$

$$\frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x^2} = 8, \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial y^2} = -6$$

$$8 - 6 = 2 \neq 0$$

إذاً التابع الثاني لايمثل تابع كمون سرعة لجريان كموني.

٣-١٧-٣. العلاقة بين خطوط التيار وخطوط تساوي الكمون

Relation between Streamline and Equipotenial Line

وجدنا سابقاً أن:

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot dy$$

أي أن:

$$d\psi = -v \cdot dx + u \cdot dy \qquad (١٠٩-٣)$$

ووجدنا أيضاً أن:

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} \cdot dy$$

أي أن:

$$d\phi = u \cdot dx + v \cdot dy \qquad (١١٠-٣)$$

بالنسبة لخط تيار معين يكون $\psi(x,y) = Const$ على طول خط التيار، أي أن $d\psi = 0$، وهذا يعني أن:

$$d\psi = -v \cdot dx + u \cdot dy = 0$$

ومنه:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u} \qquad (١١١-٣)$$

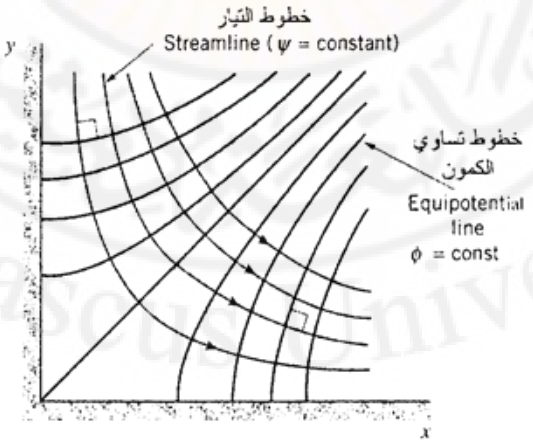
وبشكل مشابه، بالنسبة لخط كمون فإن $\phi(x,y) = Const$ على طول الخط، أي أن $d\phi = 0$. وهذا يعني أن:

$$d\phi = u \cdot dx + v \cdot dy = 0$$

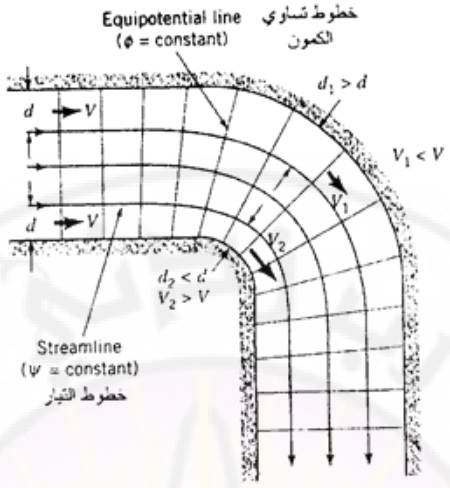
ومنه:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{u}{v} \qquad (١١٢-٣)$$

ويدل ذلك هندسيا على أن خطوط التيار وخطوط الكمون تكون متعامدة فيما بينها، لأن جداء ميل المماسات يساوي 1-. وتكوّن خطوط الكمون $\phi(x,y) = C_1$ وخطوط التيار $\psi(x,y) = C_2$ شبكة من الخطوط المتعامدة تدعى **شبكة الجريان**، ***Flow Net***. ويبين الشكلان (٣-٢٧، ٣-٢٨) نموذجين مختلفين لشبكات الجريان.



الشكل (٣-٢٧). خطوط التيار وخطوط تساوي الكمون لجريان عبر زاوية قائمة [6]



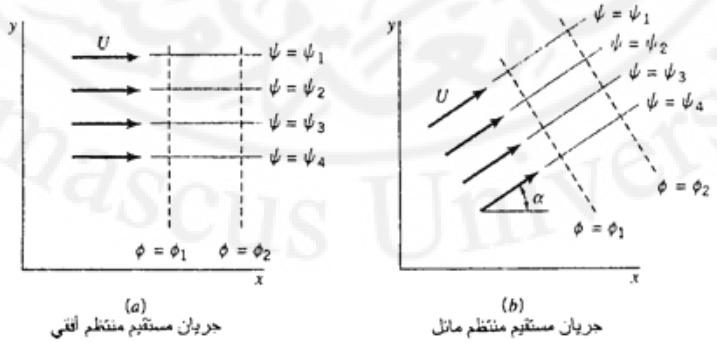
الشكل (٣-٢٨). خطوط التيار وخطوط تساوي الكمون في حالة جريان عند كوع [6]

٣-١٧-٤. أمثلة عن بعض الجريانات النموذجية

٣-١٧-٤-١ الجريان المستقيم المنتظم Uniform Flow

إن أبسط أنواع الجريانات هي تلك التي تكون فيها خطوط التيار مستقيمة ومتوازية ومتساوية البعد عن بعضها، كما في الشكل (٣-٢٩). ففي حالة جريان موجب منتظم مواز للمحور x (الشكل ٣-٢٩-a) يكون $u = U, v = 0$، وعليه يمكن كتابة:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = U \qquad (١١٣-٣)$$



الشكل (٣-٢٩). خطوط التيار وخطوط تساوي الكمون في حالة جريان مستقيم منتظم [6]

وبالمكاملة نجد أن:

$$\phi = U \cdot x + C_1 \qquad (١١٤-٣)$$

حيث ثابت التكامل $C_1 = 0$، وعليه يكون:

$$\phi = U \cdot x \qquad (١١٥-٣)$$

وكذلك من تابع التيار يمكن كتابة:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = U$$

ومنه:

$$\psi = U \cdot y \qquad (١١٦-٣)$$

أما في حالة الجريان المنتظم الـذي لايـوازي المحـور x كمـا في الـشكل (٣-٢٩-b)، وبفرض أن السرعة هي U، وباتباع الأسلوب السابق نفسه، يكـون لدينا:

$$\phi = U \cdot (x \cdot \cos\alpha + y \cdot \sin\alpha) \qquad (١١٧-٣)$$

و:

$$\phi = U \cdot (x \cdot \cos\alpha + y \cdot \sin\alpha) \qquad (١١٨-٣)$$

٣-١٧-٤-٢ جريان النبع والبالوعة Source and Sink

بفرض لدينا سائل يتدفق من نبع ***Source*** بشكل قطري كمـا هـو مـبين في الشكل (٣-٣٠). وبفرض أن معدل التدفق من النبع في واحدة الطول هو m، و v_r هي السرعة بالاتجاه القطري. بالتالي يمكن كتابة:

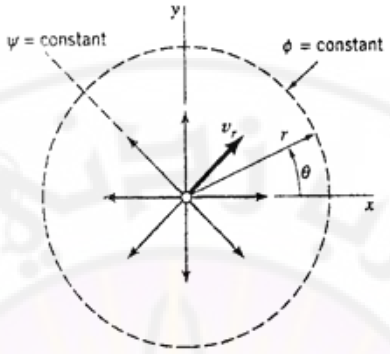
$$m = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot v_r \qquad (١١٩-٣)$$

أو:

$$v_r = \frac{m}{2 \cdot \pi \cdot r} \qquad (١٢٠-٣)$$

ولكن:

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = v_r = \frac{m}{2 \cdot \pi \cdot r} \qquad (١٢١-٣)$$



الشكل (٣-٣٠). خطوط التيار وخطوط تساوي الكمون في حالة جريان من نبع [6]

وبالمكاملة نجد:

$$\phi = \frac{m}{2 \cdot \pi} \cdot \ln r \qquad (١٢٢-٣)$$

وباعتبار أن: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$، يمكن التعبير عن المعادلة السابقة كما يلي:

$$\phi = \frac{m}{2 \cdot \pi} \cdot \ln \sqrt{x^2 + y^2} \qquad (١٢٣-٣)$$

أو:

$$\phi = \frac{m}{4 \cdot \pi} \cdot \ln\left(x^2 + y^2\right) \qquad (١٢٤-٣)$$

في حالة النبع حيث الجريان يتجه نحو الخارج نعتبر قيمة m موجبة. أما في حالة **البالوعة *Sink*** حيث الجريان باتجاه الداخل فنعتبر أن قيمة m سالبة.

ولاستنتاج معادلة خطوط التيار، نكتب:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{m}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{x}{x^2 + y^2} \qquad (١٢٥-٣)$$

وبالمكاملة نجد:

$$\psi = \frac{m}{2 \cdot \pi} \cdot \int \frac{x}{x^2 + y^2} \cdot dy + F(x)$$

$$\psi = \frac{m}{2\cdot\pi}\cdot\int\frac{d\left(\frac{y}{x}\right)}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot dy + F(x)$$

ومنه:

$$\psi = \frac{m}{2\cdot\pi}\cdot\arctan\frac{y}{x} + F(x) \qquad (١٢٦-٣)$$

ولتحديد قيمة $F(x)$ ، نشتق بالنسبة للمتغير x ، فنجد:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{m}{2\cdot\pi}\cdot\frac{-\frac{y}{x^2}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} + F'(x)$$

ولكن:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = -\frac{\partial\phi}{\partial y} = -\frac{m}{2\cdot\pi}\cdot\frac{y}{x^2+y^2}$$

وبمقارنة المعادلتين السابقتين، نجد أن:

$$F'(x) = 0 \Rightarrow F(x) = C$$

وأخيراً تكون معادلة خطوط التيار:

$$\psi = \frac{m}{2\cdot\pi}\cdot\arctan\frac{y}{x} + C$$

وبأخذ $C = 0$ تأخذ المعادلة السابقة الشكل التالي:

$$\psi = \frac{m}{2\cdot\pi}\cdot\arctan\frac{y}{x} \qquad (١٢٧-٣)$$

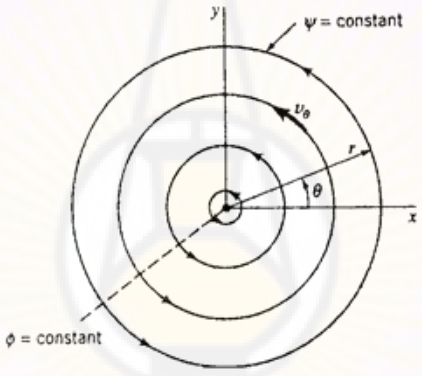
نلاحظ مما سبق أن $\frac{y}{x}$ يمثل ميل متجه السرعة بالاتجاه القطري v_r في نقطة احداثياتها x, y ، وأما $\arctan\frac{y}{x}$ فيمثل زاوية متجه السرعة θ . لذلك يمكن التعبير عن المعادلة السابقة بالصيغة:

$$\psi = \frac{m}{2\cdot\pi}\theta \qquad (١٢٨-٣)$$

أي أن معادلة خطوط التيار تمثل جملة من المستقيمات المارة من مبـــدأ الإحـــداثيات، مشابهة لتلك الخطوط المبينة في الشكل (٣-٣٠). أما خطوط الكمون فهي عبارة عن جملة من الدوائر ذات المركز الثابت.

٣-١٧-٤-٣ الدوامة Vortex

لاحظنا أن الجريان يكون في حالة النبع قطرياً، أي تنعدم مركبـــات الـــسرعة المحيطية v_θ، بينما تكون مركبات السرعة القطرية v_r غير معدومـــة. أمـــا في حالـــة **الدوامة** ***Vortex*** فيكون الوضع عكس هذا تماماً، حيث تكون الحركة محيطية، وبالتالي تنعدم المركبات القطرية للسرعة ولا تنعدم قيم المركبات المحيطية، كمـــا في الـــشكل (٣-٣١).



الشكل (٣-٣١). خطوط التيار وخطوط تساوي الكمون في حالة الدوامة [6]

بناء على ما سبق، يمكن التعبير عن تابع كمون السرعة وتابع التيار بالعلاقتين:

$$\phi = K \cdot \theta \qquad (١٢٩-٣)$$

و:

$$\psi = -K \cdot \ln r \qquad (١٣٠-٣)$$

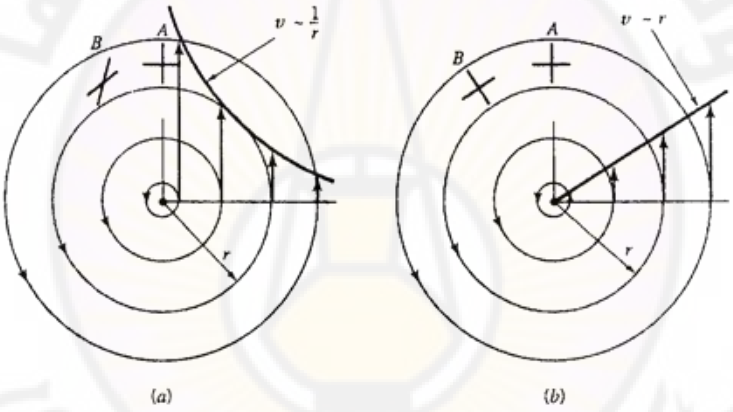
حيث: K - ثابت. وتكون قيمتا مركبتي السرعة مساويتين:

$$v_r = 0$$

و:

$$v_\theta = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{K}{r} \qquad (١٣١-٣)$$

تدل العلاقتان السابقان، على أن خطوط التيار هي عبارة عن دوائر مغلقة، أما خطوط تساوي كمون السرعة فهي عبارة عن مستقيمات قطرية تمر من مركز الدوامة. كما تدل العلاقتان أيضاً، على أن قيمة السرعة المحيطية تكون لانهائية عند المركز وتتناقص كلما ابتعدنا عنه، وهذه الحالة تدعى **بالدوامة الحرة** ***Free Vortex*** (الشكل٣-٣٢-a). أما عندما يتم تحريك السائل وكأنه كتلة صلبة بسرعة زاوية محددة ω، فإن قيمة المركبة المحيطية تساوي $v_\theta = \omega \cdot r$، و تدعى هذه الحالة **بالدوامة القسرية** ***Forced Vortex*** ،كما في الشكل (٣-٣٢-b).



الشكل (٣-٣٢). خطوط التيار وخطوط تساوي الكمون ومخطط توزع السرعة المحيطية [6]
a- الدوامة الحرة ، b –الدوامة القسرية

لتحديد قيمة الثابت K في حالة الدوامة الحرة ننطلق من مفهوم الجولان، حيث لدينا:

$$\Gamma = \oint_L \vec{V}\cdot d\vec{s}$$

وبالتالي:

$$\Gamma = \oint_L v_\theta \cdot ds = \oint_L v_\theta \cdot r \cdot d\theta$$

أو:

$$\Gamma = \int_0^{2\cdot\pi} \frac{K}{r} \cdot r \cdot d\theta = 2 \cdot \pi \cdot K \qquad (١٣٢-٣)$$

ومنه:

$$K = \frac{\Gamma}{2 \cdot \pi} \qquad (١٣٣-٣)$$

وبالتالي يكون تابع التيار وتابع كمون السرعة في حالة الدوامة الحرة كما يلي:

$$\phi = \frac{\Gamma}{2 \cdot \pi} \cdot \theta \qquad (١٣٤-٣)$$

و:

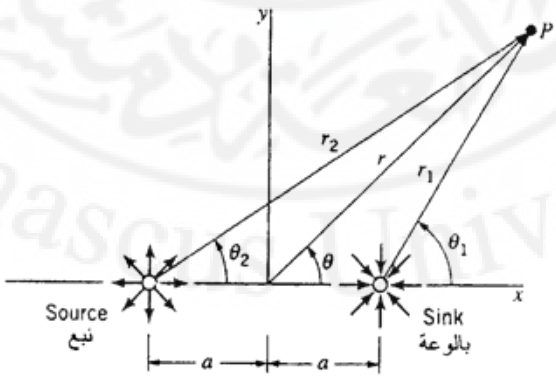
$$\psi = -\frac{\Gamma}{2 \cdot \pi} \cdot \ln r \qquad (١٣٥-٣)$$

٣-١٧-٥. جمع الجريانات

٣-١٧-٥-١ جريان نبع مع بالوعة Flow of Source and Sink

يمكن تجميع حقول الجريان والحصول على حقول أخرى ذات أهمية. وإحدى هذه الحالات هي جريان نبع وبالوعة متساويا الشدة، ويبعدان عن بعضهما مسافة تساوي $2 \cdot a$، كما في الشكل (٣-٣٣). حيث يمكن كتابة تابع الجريان الإجمالي الناتج كما يلي:

$$\psi = -\frac{m}{2 \cdot \pi}(\theta_1 - \theta_2) \qquad (١٣٦-٣)$$



الشكل (٣-٣٣). جمع الجريانات في حالة نبع مع بالوعة [6]

و يمكن التعبير عن المعادلة السابقة بالصيغة:

$$\tan\left(-\frac{2\cdot\pi\cdot\psi}{m}\right)=\tan(\theta_1-\theta_2)=\frac{\tan\theta_1-\tan\theta_2}{1+\tan\theta_1\cdot\tan\theta_2} \qquad (١٣٧-٣)$$

ولكن نلاحظ من الشكل (٣-٣٣) أن:

$$\tan\theta_1=\frac{r\cdot\sin\theta}{r\cdot\cos\theta-a} \qquad (١٣٨-٣)$$

و:

$$\tan\theta_2=\frac{r\cdot\sin\theta}{r\cdot\cos\theta+a} \qquad (١٣٩-٣)$$

وبالتعويض في المعادلة (٣-١٣٧)، نجد أن:

$$\tan\left(-\frac{2\cdot\pi\cdot\psi}{m}\right)=\frac{2\cdot a\cdot r\cdot\sin\theta}{r^2-a^2}$$

ومنه:

$$\psi=-\frac{m}{2\cdot\pi}\cdot\tan^{-1}\left(\frac{2\cdot a\cdot r\cdot\sin\theta}{r^2-a^2}\right) \qquad (١٤٠-٣)$$

ومن أجل قيم صغيرة لـــ a تأخذ المعادلة السابقة الشكل التالي:

$$\psi=-\frac{m}{2\cdot\pi}\cdot\left(\frac{2\cdot a\cdot r\cdot\sin\theta}{r^2-a^2}\right)=-\frac{m\cdot a\cdot r\cdot\sin\theta}{\pi\cdot\left(r^2-a^2\right)} \qquad (١٤١-٣)$$

الذي يسمح برسم خطوط التيار عن طريق تعيين قيم ψ عند مختلف النقاط من حقل الجريان. وتعد خطوط التيار ذات القيم الثابتة لـــ ψ خطوط حقل الجريان.

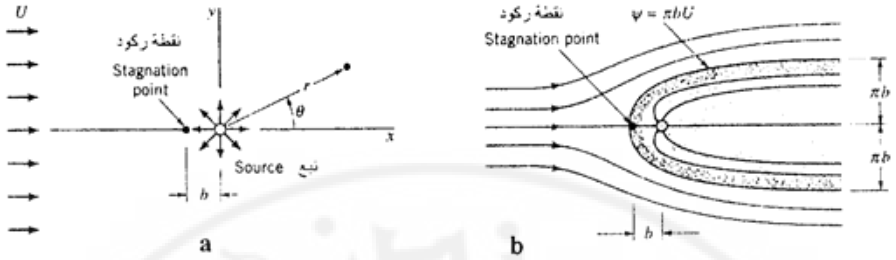
٣-١٧-٥-٢ نبع ضمن جريان منتظم Source in a Uniform Stream

لنأخذ حالة نبع بشدة تدفق تساوي m ضمن جريان منتظم سرعته U، كما في الشكل (٣-٣٤-a). حيث يمكن كتابة:

$$\psi=\psi_{uniformflow}+\psi_{source} \qquad (١٤٢-٣)$$

أي أن:

$$\psi=U\cdot r\cdot\sin\theta+\frac{m}{2\cdot\pi}\cdot\theta \qquad (١٤٣-٣)$$



الشكل (٣-٣٤). خطوط التيار في حالة نبع ضمن جريان منتظم [6]

وبشكل مماثل نستطيع أن نكتب تابع كمون السرعة كما يلي:

$$\phi = U \cdot r \cdot \cos\theta + \frac{m}{2 \cdot \pi} \cdot \ln r \qquad (١٤٤-٣)$$

من المؤكد أن هناك بعض النقاط الواقعة على الجزء السالب للمحور x تتعرض لحركة نحو اليسار بسبب النبع ونحو اليمين بسبب الجريان المنتظم، وينتج عن ذلك وجود نقطة تنعدم فيها السرعة تدعى **نقطة الركود *Stagnation Point***.

من أجل جريان من نبع فقط يكون لدينا كما وجدنا سابقاً:

$$v_r = \frac{m}{2 \cdot \pi \cdot r}$$

و تقع نقطة الركود على مسافة من النبع مقدارها $x = -b$ ، حيث يكون لدينا:

$$U = \frac{m}{2 \cdot \pi \cdot b} \qquad (١٤٥-٣)$$

ومنه:

$$b = \frac{m}{2 \cdot \pi \cdot U} \qquad (١٤٦-٣)$$

ويمكن الحصول على تابع الجريان عند نقطة الركود بتعويض $r = b, \theta = \pi$ في المعادلة (٣-١٤٣)، فنجد أن:

$$\psi_{stagnation} = \frac{m}{2}$$

ومن المعادلة (٣-١٤٥)، نجد بسهولة أن:

$$\psi_{stagnation} = \frac{m}{2} = \pi \cdot b \cdot U$$

وبالتعويض في معادلة تابع التيار، يكون لدينا:

$$\psi = U \cdot r \cdot \sin\theta + \frac{m}{2 \cdot \pi} \cdot \theta$$

أي أن:

$$\pi \cdot b \cdot U = U \cdot r \cdot \sin\theta + b \cdot U \cdot \theta$$

ومنه:

$$r = \frac{b \cdot (\pi - \theta)}{\sin\theta} \qquad (٣-١٤٧)$$

حيث أن قيمة $0 \le \theta \le 2 \cdot \pi$.

إن المعادلة السابقة تمكننا من رسم خط التيار الذي يمر من نقطة الركود كما في الشكل (٣-٣٤-b)، الذي يوضح أيضاً باقي خطوط التيار الناتجة في حالة جريان مستقيم مع نبع.

لو تم استبدال خط التيار السابق المار من نقطة الركود بحدود صلبة، فإننا نحصل عندها على نفس حالة الجريان المبينة في الشكل (٣-٣٤-b). وهي تمثل خطوط التيار حول نصف جسم موضوع في جريان منتظم.

٣-١٧-٥-٣ نبع وبالوعة ضمن جريان منتظم

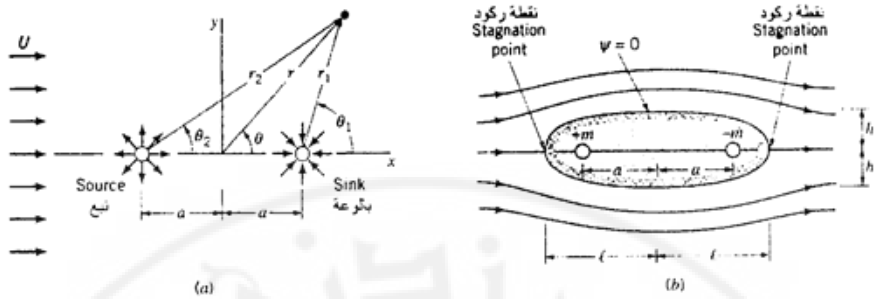
Source and Sink in a Uniform Stream

إذا أخذنا حالة نبع وبالوعة بشدة تدفق تساوي m ضمن جريان منتظم بسرعة U، كما في الشكل (٣-٣٥-a)، فإنه يمكن بشكل مشابه للحالة السابقة كتابة تابع التيار كما يلي:

$$\psi = U \cdot r \cdot \sin\theta - \frac{m}{2 \cdot \pi}(\theta_1 - \theta_2) \qquad (٣-١٤٨)$$

وكذلك تابع كمون السرعة:

$$\phi = U \cdot r \cdot \cos\theta - \frac{m}{2 \cdot \pi} \cdot (\ln r_2 - \ln r_1) \qquad (٣-١٤٩)$$



الشكل (٣-٣٥). خطوط التيار في حالة نبع وبالوعة ضمن جريان منتظم [6]

وكما هو الحال عند وجود جريان نبع وبالوعة فإنه، يمكن التعبير عن تابع التيار بالعلاقة:

$$\psi = U \cdot r \cdot \sin\theta - \frac{m}{2 \cdot \pi} \tan^{-1}\left(\frac{2 \cdot a \cdot r \cdot \sin\theta}{r^2 - a^2}\right)$$

أو:

$$\psi = U \cdot y - \frac{m}{2 \cdot \pi} \tan^{-1}\left(\frac{2 \cdot ay}{x^2 + y^2 - a^2}\right) \qquad (٣-١٥٠)$$

لو عوضنا في المعادلة السابقة $\psi = const$، وقمنا برسم خطوط التيار من أجل كل قيمة لـ ψ، فإننا نحصل على الشكل (٣-٣٥ b). حيث تمثل خطوط التيار حول جسم صلب بيضوي الشكل موضوع ضمن جريان منتظم. ويمكن البرهان على أن خط التيار المجاور للجسم يمثل الخط الصفري $\psi = 0$. كما توجد نقطتا ركود واحدة أمام الجسم والثانية خلفه.

مسائل محلولة حول الفصل الثالث

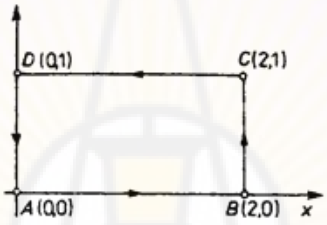
المسألة الأولى

تعطى مركبتا متجه السرعة لجريان سائل مثالي بالعلاقتين:

$$u = 4 \cdot x^2 \cdot y - 2 \cdot y$$

$$v = -4 \cdot x \cdot y^2 + 2 \cdot x$$

احسب قيمة جولان متجه السرعة حول محيط مستطيل رؤوسه $ABCD$، كما في الشكل.



الحل

من الشكل لدينا:

$$\Gamma = \Gamma_{AB} + \Gamma_{BC} + \Gamma_{CD} + \Gamma_{DA}$$

ومن أجل:

$$u = 4 \cdot x^2 \cdot y - 2 \cdot y$$

$$v = -4 \cdot x \cdot y^2 + 2 \cdot x$$

يكون لدينا:

$$\Gamma_{AB} = \int_0^2 u(x,0) \cdot dx = 0$$

و:

$$\Gamma_{BC} = \int_0^1 v(2,y) \cdot dy = \int_0^1 \left(-8 \cdot y^2 + y\right) \cdot dy = -\frac{8}{3} + 4 = \frac{4}{3}$$

و:

$$\Gamma_{CD} = \int_{2}^{0} u(x,1)\cdot dx = \int_{2}^{0} \left(4\cdot x^2 - 2\right)\cdot dx = -\frac{32}{3} + 4 = -\frac{20}{3}$$

و:

$$\Gamma_{DA} = \int_{1}^{0} v(0,y)\cdot dy = 0$$

وأخيراً نحصل على:

$$\Gamma = 0 + \frac{4}{3} - \frac{20}{3} + 0 = -\frac{16}{3}$$

المسألة الثانية

أوجد معادلة خطوط التيار لجريان مستقر مستو علماً بأن مركبتي متجه السرعة تعطيان بالعلاقتين:

$$u = b\cdot y$$

$$v = -b\cdot x$$

حيث: b - ثابت.

الحل

تعطى معادلة خط التيار لجريان مستو بالصيغة:

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}$$

أو:

$$-v\cdot dx + u\cdot dy$$

وبالتعويض، نجد أن:

$$b\cdot x\cdot dx + b\cdot y\cdot dy = 0$$

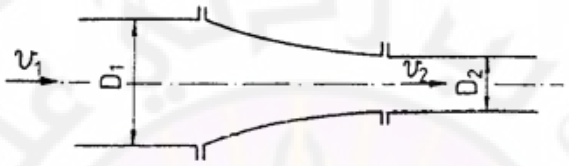
وبالمكاملة نحصل على المعادلة:

$$x^2 + y^2 = const$$

التي تمثل جملة من الدوائر ترسم حسب قيمة الثابت.

المسألة الثالثة

احسب قيمتي سرعة تدفق الهواء V_1, V_2 في الوصلة المبينة في الشكل. علماً بأن: $D_1 = 250mm, D_1 = 80mm$، كما أن الغزارة الكتلية $m = 0.07kg/s$، والكتلة النوعية للهواء $\rho = 1.20kg/m^3$.



الحل

من معادلة الاستمرار لدينا:

$$m = \rho \cdot A_1 \cdot V_1 = \rho \cdot A_2 \cdot V_2$$

أي أن:

$$V_1 = \frac{m}{\rho \cdot A_1} = \frac{4 \cdot 0.07}{1.20 \cdot \pi \cdot 0.25^2} = 1.19m/s$$

و:

$$V_2 = \frac{m}{\rho \cdot A_2} = \frac{4 \cdot 0.07}{1.20 \cdot \pi \cdot 0.08^2} = 11.61m/s$$

المسألة الرابعة

يعطى تابع التيار لأحد الجريانات بالعلاقة:

$$\psi = 4 \cdot x - 2 \cdot y$$

أثبت أن هذا الجريان هو جريان كموني، ثم استنتج تابع كمون السرعة.

الحل

ليكون الجريان كمونياً يجب أن يحقق معادلة لابلاس التفاضلية. إذاً:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = 4, \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0$$

و:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = -2, \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0$$

بالتالي:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 + 0 = 0$$

ومنه نستنتج أن تابع التيار يحقق معادلة لابلاس التفاضلية، أي أن الجريان الذي يمثلـــه هذا التابع هو جريان كموني.

ولاستنتاج تابع كمون السرعة لدينا:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = -2$$

وبالمكاملة نجد:

$$\phi = -2 \cdot x + F(y)$$

وبالاشتقاق بالنسبة للمتغير y، نجد أن:

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = F'(y) = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -4$$

ومنه:

$$F(y) = -4 \cdot y + C$$

بالتالي يكون تابع الكمون هو:

$$\phi = -2 \cdot x + -4 \cdot y + C$$

المسألة الخامسة

يعطى تابع التيار لأحد الجريانات بالعلاقة:

$$\psi = \frac{3}{2} \cdot a \cdot x^2 \cdot y^2 - \frac{a}{4} \cdot \left(x^4 + y^4\right) + C$$

حيث a, C ثابتان عدديان. والمطلوب:

- احسب قيمة السرعة عند النقطة $A(0,1)$.

- احسب التصريف المار من خلال طبقة عرضها b، والمحدد بين خطي التيـــار المارين من النقطتين $K(0,0), K_1(1,1)$.

الحل:

الطلب الأول:

لدينا:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 3 \cdot a \cdot x^2 \cdot y - a \cdot y^3$$

و:

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -3 \cdot a \cdot x \cdot y^2 + a \cdot x^3$$

ومنه تكون قيمة السرعة مساوية:

$$V = \sqrt{u^2 + v^2}$$

$$V = a \cdot \left(x^2 + y^2\right)^{\frac{3}{2}}$$

بالتعويض نجد:

$$V(0,1) = a$$

الطلب الثاني:

يحسب التصريف المار بين خطي تيار خلال واحدة العرض من العلاقة:

$$\frac{Q}{b} = \psi(1,1) - \psi(0,0)$$

بالتعويض نجد:

$$\frac{Q}{b} = \frac{3}{2} \cdot a - \frac{a}{2} - 0 = a$$

مسائل غير محلولة حول الفصل الثالث

المسألة الأولى

يعطى متجه السرعة في جريان مستقر غير قابل للانضغاط بالعلاقة:

$$\vec{V} = \left(3 \cdot y \cdot z^2\right) \cdot \vec{i} + \left(x \cdot z\right) \cdot \vec{j} + y \cdot \vec{k}$$

والمطلوب استنتاج مركبات التسارع.

المسألة الثانية

في جريان مستو مستقر غير قابل للانضغاط يعطى قيمة متجه السرعة بالتابع المتجهي:

$$\vec{V} = \left(x^2 \cdot y\right) \cdot \vec{i} + \left(x \cdot y^2\right) \cdot \vec{j}$$

المطلوب: استنتاج متجه التدوم.

المسألة الثالثة

تعطى مركبة السرعة باتجاه المحور y في جريان مستو غير قابل للانضغاط بالعلاقة:

$$v = x^2 + 2 \cdot x \cdot y$$

أثبت أن علاقة مركبة السرعة باتجاه المحور x هي: $u = -x^2 + F(y)$.

المسألة الرابعة

يعطى تابع كمون السرعة لجريان ما بالعلاقة:

$$\phi = 4 \cdot x \cdot y$$

استنتج تابع التيار ψ.

المسألة الخامسة

تعطى مركبتا السرعة لجريان مستو من أجل سائل مثالي بالعلاقتين:

$$u = \frac{y^2 - x^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$$

$$v = -\frac{2 \cdot x \cdot y}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$$

والمطلوب:

- تحقق أن الجريان كموني.
- استنتج تابع التيار ψ، وتابع كمون السرعة ϕ.

المسألة السادسة

يعطى تابع التيار لأحد الجريانات المثالية بالعلاقة:

$$\psi = \frac{3}{2} \cdot x^2 \cdot y^2 - \frac{1}{4} \cdot \left(x^4 + y^4\right) + C$$

والمطلوب:

- أثبت أن هذا الجريان هو جريان كموني.
- استنتج تابع كمون السرعة ϕ.
- احسب الغزارة المارة في واحدة العرض بين خط التيار المار بالنقطة $A(2,1)$ وخط التيار المار بالنقطة $B(1,1)$.
- احسب قيم مركبات السرعة عند النقطة A.

المسألة السابعة

تعطى مركبتا السرعة لأحد الجريانات المستوية لسائل مثالي بالعلاقتين:

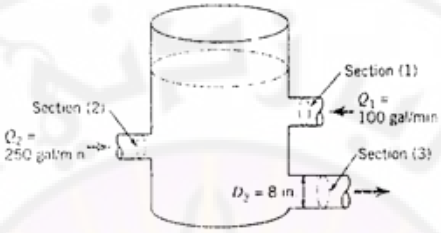
$$u = a \cdot y \cdot x^2$$

$$v = a \cdot x \cdot y^2 + x^3$$

أوجد قيمة الثابت a ليكون الجريان كمونياً، ثم استنتج تابعي الجريان ψ وكمون السرعة ϕ.

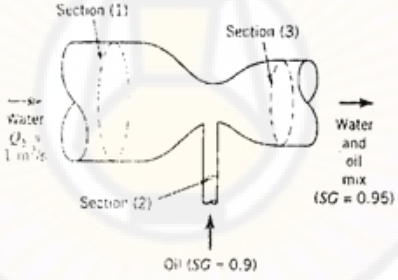
المسألة الثامنة

يدخل الماء إلى الخزان، كما في الشكل، عبر أنبوبين 1,2 بتصريف $Q_1 = 100 gal/\min, Q_2 = 250 gal/\min$. ويخرج من فتحة 3 قطرها $D_3 = 8in$. ماهي السرعة الوسطية للجريان من الفتحة 3، بحيث يبقى منسوب الماء ثابت في الخزان.



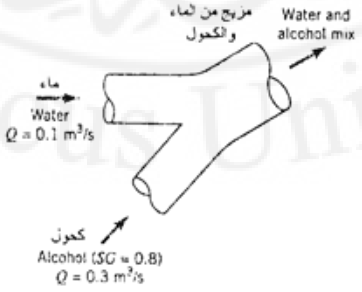
المسألة التاسعة

يتم خلط الماء والزيت عبر الوصلة النفاثة المبينة في الشكل. وفق المعطيات المبينة أحسب الكثافة النسبية للخليط الناتج.



المسألة العاشرة

عند خلط الكحول والماء عبر الوصلة، المبينة في الشكل، وفق التصاريف المعطاة، سينتج مزيج مركب. احسب الكثافة النسبية له.



وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الفصل الرابع

الجريان المثالي
IDEAL FLOW

٤-١. تمهيد Preface

وجدنا سابقاً أن السائل المثالي هو سائل افتراضي لا وجود له عملياً، إذ أنه سائل دون لزوجة ودون قابلية للانضغاط. ويطلق على جريان السوائل المثالية اسم **الجريان المثالي** ***Ideal Flow***. ولا يعتبر حل معادلة الجريانات المثالية في الحالة العامة سهلاً، وهو ما سيلاحظ في الفقرات القادمة. ولكنه في كل الأحوال أسهل بكثير من حل المعادلة التفاضلية المتعلقة بجريان السوائل الحقيقية.

٤-٢. المعادلات التفاضلية للجريان المثالي - معادلات أويلر

Differential Equations of Ideal Flow- Euler's Equations

لنأخذ عنصراً من سائل مثالي يجري على شكل متوازي مستطيلات، كما هو مبين في الشكل (٤-١)، أبعاده $(\delta x, \delta y, \delta z)$ وكتلته δm. ولنفرض إهمال قوى اللزوجة وبالتالي قوى القص. إن هذا العنصر سوف يتعرض أثناء حركته إلى قوة الوزن الذاتي، وقوى الضغط p المؤثرة على أوجهه.

حسب قانون نيوتن الثاني لدينا:

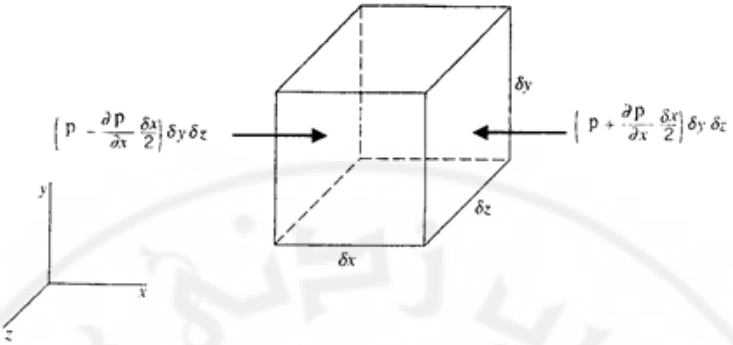
$$\delta\vec{F} = \delta m \cdot \vec{a} \qquad (٤-١)$$

وبكتابة هذه المعادلة وفق المحاور الإحداثية الثلاثة، نجد أن:

$$\delta F_x = \delta m \cdot a_x \qquad (٤-٢)$$

$$\delta F_y = \delta m \cdot a_y \qquad (٤-٣)$$

$$\delta F_z = \delta m \cdot a_z \qquad (٤-٤)$$



الشكل (٤-١). استنتاج معادلات أويلر

ولكن محصلة القوى باتجاه المحور x تعطى كما يلي:

$$\delta F_x = -\left(p + \frac{\partial p}{\partial x}\cdot\frac{\delta x}{2}\right)\cdot\delta y\cdot\delta z + \left(p - \frac{\partial p}{\partial x}\cdot\frac{\delta x}{2}\right)\cdot\delta y\cdot\delta z \qquad (٤-٥)$$
$$+\rho\cdot X\cdot\delta x\cdot\delta y\cdot\delta z$$

أو:

$$\delta F_x = -\frac{\partial p}{\partial x}\cdot\delta x\cdot\delta y\cdot\delta z + \rho\cdot X\cdot\delta x\cdot\delta y\cdot\delta z \qquad (٤-٦)$$

ومنه:

$$\delta F_x = \left(-\frac{\partial p}{\partial x} + \rho\cdot X\right)\cdot\delta x\cdot\delta y\cdot\delta z \qquad (٤-٧)$$

أما محصلة القوى باتجاه المحور y فهي:

$$\delta F_y = -\left(p + \frac{\partial p}{\partial y}\cdot\frac{\delta y}{2}\right)\cdot\delta x\cdot\delta z + \left(p - \frac{\partial p}{\partial y}\cdot\frac{\delta y}{2}\right)\cdot\delta x\cdot\delta z \qquad (٤-٨)$$
$$+\rho\cdot Y\cdot\delta x\cdot\delta y\cdot\delta z$$

أو:

$$\delta F_y = -\frac{\partial p}{\partial y}\cdot\delta x\cdot\delta y\cdot\delta z + \rho\cdot Y\cdot\delta x\cdot\delta y\cdot\delta z \qquad (٤-٩)$$

ومنه:

$$\delta F_y = \left(-\frac{\partial p}{\partial y} + \rho\cdot Y\right)\cdot\delta x\cdot\delta y\cdot\delta z \qquad (٤-١٠)$$

وأخيراً تعطى محصلة القوى باتجاه المحور z كما يلي:

$$\delta F_z = -\left(p + \frac{\partial p}{\partial z}\cdot\frac{\delta z}{2}\right)\cdot\delta x\cdot\delta y + \left(p - \frac{\partial p}{\partial z}\cdot\frac{\delta z}{2}\right)\cdot\delta x\cdot\delta y \qquad (١١-٤)$$
$$+\rho\cdot Z\cdot\delta x\cdot\delta y\cdot\delta z$$

أو:

$$\delta F_z = -\frac{\partial p}{\partial z}\cdot\delta x\cdot\delta y\cdot\delta z + \rho\cdot Z\cdot\delta x\cdot\delta y\cdot\delta z \qquad (١٢-٤)$$

ومنه:

$$\delta F_z = \left(-\frac{\partial p}{\partial z} + \rho\cdot Z\right)\cdot\delta x\cdot\delta y\cdot\delta z \qquad (١٣-٤)$$

أما مركبات التسارع الكلي فتعطى كما وجدنا سابقاً بالمعادلات:

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + v\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + w\cdot\frac{\partial u}{\partial z} \qquad (١٤-٤)$$

$$a_y = \frac{\partial v}{\partial t} + u\cdot\frac{\partial v}{\partial x} + v\cdot\frac{\partial v}{\partial y} + w\cdot\frac{\partial v}{\partial z} \qquad (١٥-٤)$$

$$a_z = \frac{\partial w}{\partial t} + u\cdot\frac{\partial w}{\partial x} + v\cdot\frac{\partial w}{\partial y} + w\cdot\frac{\partial w}{\partial z} \qquad (١٦-٤)$$

وبتطبيق قانون نيوتن الثاني باتجاه المحور x نجد أن:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + v\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + w\cdot\frac{\partial u}{\partial z}\right)\cdot\rho\cdot\delta x\cdot\delta y\cdot\delta z = \qquad (١٧-٤)$$
$$\left(-\frac{\partial p}{\partial x} + \rho\cdot X\right)\cdot\delta x\cdot\delta y\cdot\delta z$$

ومنه، نجد أن:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + v\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + w\cdot\frac{\partial u}{\partial z} = X - \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x} \qquad (١٨-٤)$$

وبطريقة مشابهة نجد بعد تطبيق قانون نيوتن الثاني وفق المحورين y,z أن:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\cdot\frac{\partial v}{\partial x} + v\cdot\frac{\partial v}{\partial y} + w\cdot\frac{\partial v}{\partial z} = Y - \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial y} \qquad (١٩-٤)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+u\cdot\frac{\partial w}{\partial x}+v\cdot\frac{\partial w}{\partial y}+w\cdot\frac{\partial w}{\partial z}=Z-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial z} \qquad (٢٠-٤)$$

تدعى المعادلات (٤-١٨، ٤-١٩، ٤-٢٠) معادلات الجريانات المثالية غير المستقرة، أو **معادلات أويلر** ***Euler's Equations*** نسبة للعالم السويسري ليونارد أويلر. في هذه المعادلات تمثل (X,Y,Z) مركبات **قوة الثقالة بواحدة الكتلة** (مركبات تسارع الجاذبية الأرضي) ***Gravity Force per Unit Mass***، حيث يمكن اشتقاقها من كمون U :

$$X=\frac{\partial U}{\partial x} \qquad (٢١-٤)$$

$$Y=\frac{\partial U}{\partial y} \qquad (٢٢-٤)$$

$$Z=\frac{\partial U}{\partial z} \qquad (٢٣-٤)$$

عندما يكون الجريان مستقراً، حيث يكون $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial w}{\partial z}=0$، عندها يمكن كتابة معادلات أويلر كما يلي:

$$u\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+v\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+w\cdot\frac{\partial u}{\partial z}=X-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x} \qquad (٢٤-٤)$$

$$u\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+v\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+w\cdot\frac{\partial v}{\partial z}=Y-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial y} \qquad (٢٥-٤)$$

$$u\cdot\frac{\partial w}{\partial x}+v\cdot\frac{\partial w}{\partial y}+w\cdot\frac{\partial w}{\partial z}=Z-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial z} \qquad (٢٦-٤)$$

ويمكن تمثيل المعادلات السابقة متجهياً بالصيغة:

$$\frac{d\vec{V}}{dt}=\vec{F}-\frac{1}{\rho}\cdot grad(p) \qquad (٢٧-٤)$$

وعندما يكون الجريان ثنائي البعد وغير مستقر، فإن معادلات أويلر تصبح على النحو التالي:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+v\cdot\frac{\partial u}{\partial y}=X-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x} \qquad (٢٨-٤)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+v\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=Y-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial y} \qquad (٢٩-٤)$$

أما عندما يكون الجريان مستقراً فإن:

$$u\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+v\cdot\frac{\partial u}{\partial y}=X-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x} \qquad (٣٠-٤)$$

$$u\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+v\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=Y-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial y} \qquad (٣١-٤)$$

في حالة الجريان وحيد البعد غير المستقر تأخذ معادلة أويلر الشكل التالي:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\cdot\frac{\partial u}{\partial x}=X-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x} \qquad (٣٢-٤)$$

ويكون للجريان المستقر وحيد البعد الصيغة البسيطة التالية:

$$u\cdot\frac{\partial u}{\partial x}=X-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x} \qquad (٣٣-٤)$$

مما سبق نلاحظ أنه لوصف الجريان وتحديد عناصره كافة، يكفي معرفة قيمة مركبات السرعة (u,v,w) وقيمة الضغط p عند أية نقطة في حقل الجريان. وبناء عليه يكون لدينا في حالة الجريان الثلاثي البعد أربعة مجاهيل. وكما نعلم فإن معادلات أويلر هي ثلاث معادلات بأربعة مجاهيل، لذا فهي غير كافية لتعيين عناصر الجريان. لذلك نحاول الاستفادة من معادلة الاستمرار ليصبح لدينا أربع معادلات بأربعة مجاهيل. وبناء عليه يمكن إيجاد عناصر الجريان المثالي المستقر الثلاثي البعد بحل المعادلات التالية:

$$u\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+v\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+w\cdot\frac{\partial u}{\partial z}=X-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x} \qquad (٣٤-٤)$$

$$u\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+v\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+w\cdot\frac{\partial v}{\partial z}=Y-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial y} \qquad (٣٥-٤)$$

$$u\cdot\frac{\partial w}{\partial x}+v\cdot\frac{\partial w}{\partial y}+w\cdot\frac{\partial w}{\partial z}=Z-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial z} \qquad (٣٦-٤)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \qquad (٣٧-٤)$$

ومن المفيد أحياناً عند حل بعض المسائل استخدام معادلات أويلر في

الإحداثيات الأسطوانية ***Cylindrical coordinate***، وذلك وفق الصيغ التالية:

$$\frac{\partial V_r}{\partial t}+V_r\cdot\frac{\partial V_r}{\partial r}+\frac{V_\theta}{r}\cdot\frac{\partial V_r}{\partial \theta}+V_z\cdot\frac{\partial V_r}{\partial z}-\frac{V_\theta^2}{r}=g_r-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial r} \qquad (٣٨-٤)$$

$$\frac{\partial V_\theta}{\partial t}+V_r\cdot\frac{\partial V_\theta}{\partial r}+\frac{V_\theta}{r}\cdot\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta}+V_z\cdot\frac{\partial V_\theta}{\partial z}+\frac{V_r\cdot V_\theta}{r}=g_\theta-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial \theta} \qquad (٣٩-٤)$$

$$\frac{\partial V_z}{\partial t}+V_r\cdot\frac{\partial V_z}{\partial r}+\frac{V_\theta}{r}\cdot\frac{\partial V_z}{\partial \theta}+V_z\cdot\frac{\partial V_z}{\partial z}=g_z-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial z} \qquad (٤٠-٤)$$

$$\frac{\partial V_r}{\partial r}+\frac{\partial V_\theta}{r\cdot\partial \theta}+\frac{\partial V_z}{\partial z}+\frac{V_r}{r}=0 \qquad (٤١-٤)$$

إن معادلات أويلر رغم أنها أبسط بكثير من معادلات الجريانات الحقيقيـــة، إلا أن حلها صعب تحليلياً، فيما عدا بعض الحالات الخاصة البسيطة. ويمكن حل معادلات أويلر فقط باستخدام برامج حاسوبية تعد خصيصاً لهذا الغرض.

٤-٣. الجريان المثالي المستقر أحادي البعد على خط تيار

Ideal Steady Flow along a Streamline

٤-٣-١. معادلة الطاقة للجريان المثالي المستقر على خط تيار-معادلة برنوللي

Energy Equation along a Streamline for Ideal Steady Flow – Bernoulli Equation

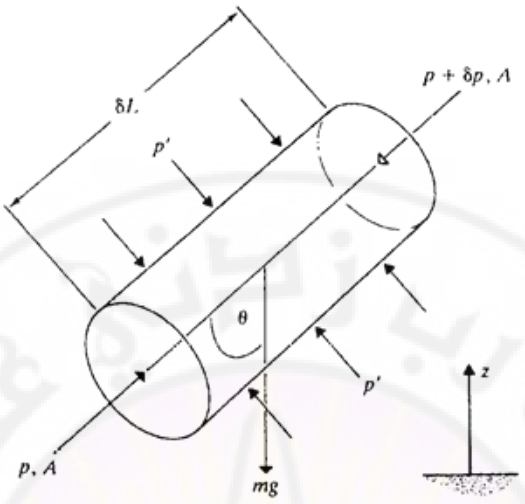
إذا اعتبرنا جرياناً مستقراً مثالياً لسائل على خط تيار، كما هو مبين في الشكل (٤-٢)، تكون القوى المؤثرة على جسم أسطواني من السائل عبارة عن قوى الضغط على الوجهين وقوة الوزن الذاتي. وبتطبيق قانون نيوتن الثاني للحركة في اتجـــاه خـــط التيار نحصل على:

$$\Sigma F=m\cdot a \qquad (٤٢-٤)$$

أو:

$$p\cdot A-(p+\delta p)\cdot A-\rho\cdot A\cdot\delta L\cdot g\cdot\cos\theta=\rho\cdot A\cdot\delta L\cdot\left(\frac{dV}{dt}\right) \qquad (٤٣-٤)$$

وبعد اختصار المعادلة السابقة مع ملاحظة أن: $\delta L\cdot\cos\theta=\delta z$ ، يمكن كتابة:



الشكل (٤-٢). القوى المؤثرة على عنصر أسطواني على خط تيار لجريان مثالي [3]

$$-\delta p \cdot A - \rho \cdot A \cdot \delta z \cdot g = \rho \cdot A \cdot \delta L \cdot \left(\frac{dV}{dt}\right) \qquad (٤٤-٤)$$

وبتقسيم أطرف المعادلة على $\rho \cdot A \cdot \delta L$ ، وتطبيق قاعدة النهايات على العنصر، نجد أن:

$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{dp}{dL} + \frac{dV}{dt} + g \cdot \frac{dz}{dL} = 0 \qquad (٤٥-٤)$$

ولكن كما نعلم سابقاً فإنه من أجل الجريان المستقر، لدينا:

$$\frac{dV}{dt} = V \cdot \frac{dV}{dL} \qquad (٤٦-٤)$$

وبالتالي تصبح المعادلة (٤-٤٥) كما يلي:

$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{dp}{dL} + V \cdot \frac{dV}{dL} + g \cdot \frac{dz}{dL} = 0 \qquad (٤٧-٤)$$

أو:

$$\frac{1}{\rho} \cdot dp + V \cdot dV + g \cdot dz = 0 \qquad (٤٨-٤)$$

وكما وجدنا سابقاً، تمثل هذه المعادلة التفاضلية معادلة أويلر للجريانات المثالية المستقرة وحيدة البعد. فإذا كاملناها نحصل على:

$$\frac{1}{\rho}\cdot p+\frac{V^2}{2}+g\cdot z=Const=E \qquad (٤٩-٤)$$

وبتقسيم طرفي المعادلة على g نجد أن:

$$\frac{p}{\gamma}+\frac{V^2}{2\cdot g}+z=Const=E \qquad (٥٠-٤)$$

تدعى هذه المعادلة معادلة الطاقة للجريان أو **معادلة برنـــوللي** ***Bernoulli Equation*** نسبة للعالم السويسري دانييل برنوللي التي قدمها عام ١٧٣٨.

ورغم أن معادلة دانييل برنوللي هي أبسط شكل على الإطلاق من معـــادلات حركة السوائل، لأنها تمثل معادلة الجريان المثالي المستقر وحيد البعد، ومع ذلك لهـــذه المعادلة أهمية كبيرة بسبب تنوع تطبيقاتها الكثيرة والمتعددة كما ســـنجد في الفقـــرات اللاحقة.

٤-٣-٢. الطاقة الميكانيكية للسائل – المفهوم الفيزيائي لمعادلة برنوللي

The Mechanical Energy of Fluid – The Physical Concept of Bernoulli Equation

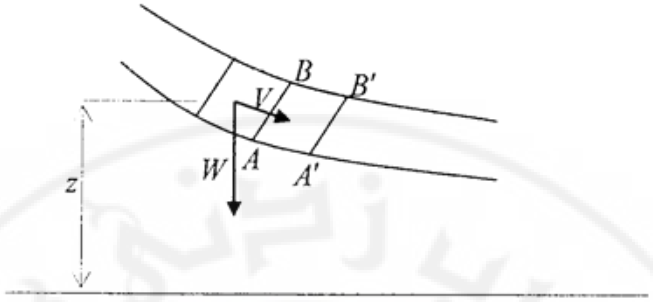
يمتلك عنصر السائل المبين في الشكل (٤-٣)، طاقة كامنة بسبب وجوده على ارتفاع مقداره z عن مستوي مقارنة ما، وكذلك طاقة حركيـــة بـــسبب جريانـــه بسرعة V في ذلك.

فبالنسبة لعنصر وزنه $W=m\cdot g$ يكون لدينا:

- الطاقة الكامنة للعنصر = $W\cdot z$.
- الطاقة الكامنة في واحدة الوزن = z.
- الطاقة الحركية للعنصر = $\frac{1}{2}\cdot m\cdot V^2$.
- الطاقة الحركية في واحدة الوزن = $\frac{V^2}{2\cdot g}$.

يستطيع السائل الجاري القيام بعمل بسبب الضغط، لأن الضغط يولد قوة عنـــد أي مقطع، ومع جريان السائل والانتقال إلى مقطع جديد يتم بذل عمل. فـــإذا كـــان الضغط المطبق عند المقطع AB هو p ومساحة المقطع تساوي A، فإن:

القوة المؤثرة على المقطع = $p \cdot A$



الشكل (٤-٣). المعنى الفيزيائي لمعادلة الطاقة

وبعد جريان وزن مقداره $W = m \cdot g$ من السائل على طول خط تيار، ينتقل المقطع من AB إلى $A'B'$ ويكون لدينا:

$$\frac{W}{\gamma} = \text{الحجم المار من } AB$$

و:

$$\frac{W}{\gamma \cdot A} = \text{المسافة } AA'$$

و:

$$\frac{W}{\gamma \cdot A} \times p \cdot A = AA' \text{ العمل المبذول = القوة × المسافة}$$

ومنه يكون:

$$\frac{p}{\gamma} = \text{العمل المبذول في واحدة الوزن}$$

يعرف الحد $\frac{p}{\gamma}$ بطاقة الضغط. وهنا يجدر الانتباه إلى أن طاقة الضغط تشير إلى طاقة السائل عندما يجري تحت ضغط كجزء من جريان مستمر، ويجب ألا يخلط بينها وبين الطاقة المختزنة في السائل والناتجة عن مرونته عندما يتم انضغاطه.

من الصعب في بعض الأحيان استيعاب مفهوم طاقة الضغط. ففي ميكانيك الجسم الصلب، تتغير سرعة الجسم الحر دون أية إعاقة، ويمكن للطاقة الكامنة للجسم

أن تتحول بحرية إلى طاقة حركية مع انخفاض منسوب الجسم. بينما تعتمد سرعة جريان سائل جار يتدفق بغزارة حجميه ثابتة على مساحة مقطع الجريان. فإذا كان السائل الجاري يتحرك على سبيل المثال في أنبوب منتظم المقطع وكان غير قابل للانضغاط، فإن سرعته لا تتغير، لذا فإن تحول الطاقة الكامنة إلى طاقة حركية لا يمكن أن يتم مع انخفاض السائل، وتظهر الطاقة الزائدة على شكل زيادة في الضغط. ونتيجة لذلك فمن الممكن النظر في طاقة الضغط على أنها طاقة كامنة مؤقتة.

مما سبق، يمكن ملاحظة أن الحدود الثلاثة الأولى من معادلة برنوللي هي:

- طاقة الضغط في واحدة الوزن $\frac{p}{\gamma}$.
- الطاقة الحركية في واحدة الوزن $\frac{V^2}{2 \cdot g}$.
- الطاقة الكامنة في واحدة الوزن z.

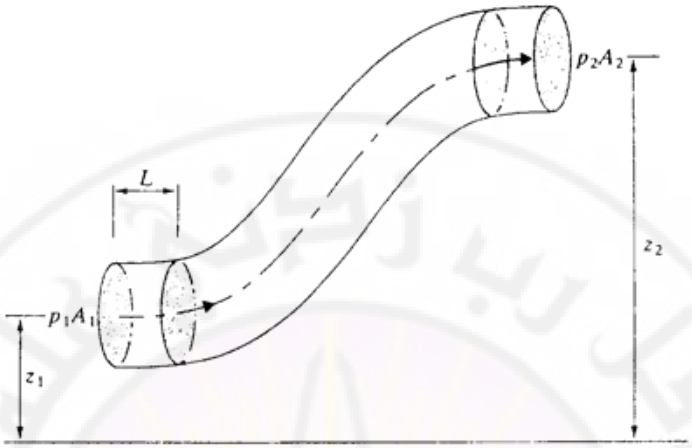
أما الحد الثابت E فهو الطاقة الكلية في واحدة الوزن أو **الضاغط الكلي** ***Total Head***. وبناء عليه فإن معادلة برنوللي تنص، على أنه من أجل جريان مستقر مثالي على خط تيار تبقى الطاقة الكلية لواحدة الوزن من السائل ثابتة من نقطة لأخرى، على الرغم من أن توزع قيم حدود الطاقة الثلاثة يمكن أن يتغير.

ويلاحظ أن لجميع حدود المعادلة السابقة واحدة الطول أو الضاغط. وغالباً ما يشار إليها **بضاغط الضغط** $\left(\frac{p}{\gamma}\right)$ ***Pressure Head***، **والضاغط الحركي** $\left(\frac{V^2}{2 \cdot g}\right)$ ***Velocity Head***، والضاغط **الكامن أو ضاغط المنسوب** (z) ***Elevation Head***.

ومن المهم جداً الإشارة إلى أن لمعادلة برنوللي أهمية كبيرة جداً في حساب عناصر الجريان في كثير من الحالات. فمثلاً عند تطبيق معادلة برنوللي بين أي نقطتين 1,2 واقعتين على خط تيار، كما هو مبين في الشكل (٤-٤)، نجد أن:

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2 \cdot g} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2 \cdot g} + z_2 \qquad (٤-٥١)$$

ويمكن حساب أية قيمة من المتغيرات الستة السابقة إذا علمت قيم باقي المتغيرات.



الشكل (٤-٤). تطبيق معادلة برنوللي بين نقطتين من خط تيار [3]

٤-٣-٣. معامل تصحيح الطاقة الحركية

Velocity Energy Coefficient

عند استخراج معادلة برنوللي من أجل أنبوب تيار، تم افتراض توزع منتظم للسرعة عند أي مقطع. رغم أن سرعة السائل الحقيقي الجاري ضمن أنبوب أو فوق سطح صلب، تكون معدومة عند الجدران الصلبة، وتزداد مع زيادة المسافة عن السطح. وبالتالي فإن الطاقة الحركية تتغير عبر المقطع من طبقة لأخرى. فإذا اعتبرنا أن مقطع الجريان يتألف من سلسلة شرائح صغيرة مساحة كل منها dA، وأن السرعة العمودية على كل شريحة هي u، يمكن إيجاد الطاقة الحركية الكلية المارة خلال كامل مقطع الجريان، عن طريق تحديد الطاقة الحركية المارة عبر شريحة ما في واحدة الوزن، ثم إجراء التكامل على كامل مساحة المقطع:

الكتلة المارة خلال الشريحة في واحدة الزمن = $\rho \cdot dA \cdot u$

الطاقة الحركية في واحدة الزمن خلال الشريحة = $\frac{1}{2} \cdot (\rho \cdot dA \cdot u) \cdot u^2$

الطاقة الحركية الكلية المارة في واحدة الزمن = $\int_A \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot u^3 \cdot dA$

الوزن الكلي المار في واحدة الزمن = $\int_A \rho \cdot g \cdot u \cdot dA$

عند وضع توزع السرعة عبر مقطع الجريان بالحسبان، تكون الطاقة الكلية الحقيقية في واحدة الوزن مساوية:

$$\frac{1}{2 \cdot g} \cdot \frac{\int_A \rho \cdot u^3 \cdot dA}{\int_A \rho \cdot u \cdot dA} \qquad (٤-٥٢)$$

وهي لا تعادل بالضبط $\frac{V^2}{2 \cdot g}$، حيث V هي السرعة الوسطية للجريان، وتساوي:

$$V = \frac{1}{A} \cdot \int_A u \cdot dA \qquad (٤-٥٣)$$

وبالتالي تكون الطاقة الحركية الحقيقية في واحدة الوزن من السائل هي $\frac{\alpha \cdot V^2}{2 \cdot g}$.

حيث: α - معامل تصحيح الطاقة الحركية، وتعتمد قيمته على شكل المقطع وتوزع السرعة فيه، ويحسب من العلاقة التالية:

$$\alpha = \frac{1}{A} \cdot \int_A \left(\frac{u}{V}\right)^3 \cdot dA \qquad (٤-٥٤)$$

يدعى المعامل α أيضا معامل عدم انتظام السرعة أو معامل كريوليس.

ومن أجل جريان مضطرب في أنبوب دائري المقطع وباعتماد توزع السرعة عبر مقطع الأنبوب $u = u_{max} \cdot \left(\frac{y}{R}\right)^{1/7}$ وفق قانون براندتل يكون $\alpha = 1.058$.

وبشكل عام تتراوح قيمة α من أجل الجريان ضمن الأنابيب في المجال $\alpha = (1 - 1.1)$. وغالباً ما يؤخذ $\alpha = 1$.

٤-٣-٤. خط الطاقة وخط التدرج الهيدروليكي

The Energy Line and the Hydraulic Grade Line

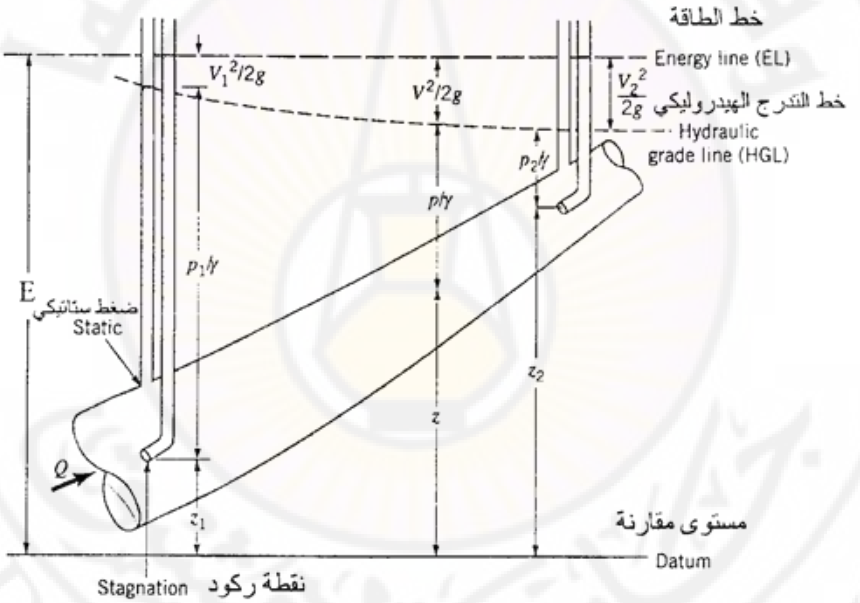
كما ذكر سابقاً، يشير الحد $\frac{p}{\gamma}$ في معادلة برنوللي إلى طاقة الضغط في واحدة الوزن من السائل مقاساً كارتفاع. ويشير الحد $\frac{V^2}{2 \cdot g}$ إلى الارتفاع المقابل للطاقة

الحركية في واحدة الوزن. ويشير الحد z إلى المنسوب أو الإرتفاع فوق منسوب المقارنة المعتبر. فإذا وضعنا عند مقطعي النقطتين 1,2 الواقعتين على خط التيار المدروس أنبوبين بيزومتريين، كما هو مبين في الشكل (٤-٥)، فسوف يرتفع السائل إلى المنسوبين:

$$h_1 = \frac{p_1}{\gamma}$$

و:

$$h_2 = \frac{p_2}{\gamma}$$

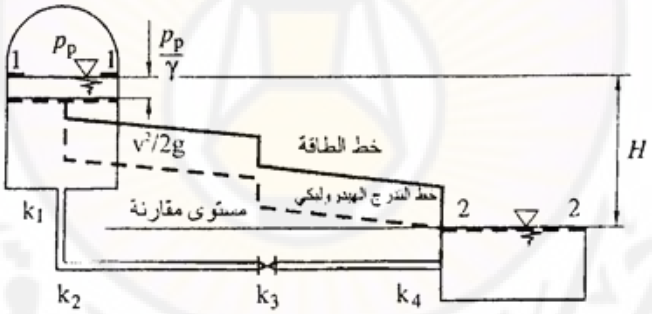


الشكل (٤-٥). خط الطاقة الكلي وخط التدرج الهيدروليكي في حالة سائل مثالي

فإذا رسمنا من أجل كل نقطة من نقاط خط التيار ثلاث مسافات شاقولية تبتدئ من مستوى المقارنة، وتمثل كل منها أحد حدود معادلة، برنوللي كما هو مبين في الشكل السابق، لحصلنا على مقدار الطاقة الكلية في كل نقطة. حيث يسمى المستقيم الواصل بين هذه النقاط **خط الطاقة** ***Energy Line*** ويشار له بـ *EL*. ويكون أفقياً في حالة السائل المثالي.

يسمى الحد $\left(\frac{p}{\gamma}+z\right)$ في معادلة برنوللي **الضاغط البيزومتري** ***Piezometric Head***، لأنه يمثل المنسوب الذي يرتفع إليه السائل في أنبوب بيزومتري فيما لو وضع عند مقطع ما من مقاطع الجريان. فلو وضعنا مجموعة من الأنابيب البيزومترية في عدة نقاط تقع على خط تيار واحد، ووصلنا بين قمم الارتفاعات البيزومترية عند هذه النقاط، فإن الخط الناتج يسمى **خط التدرج المائي أو خط التدرج الهيدروليكي** ***Hydraulic Grade Line*** **أو خط الضاغط البيزومتري**.

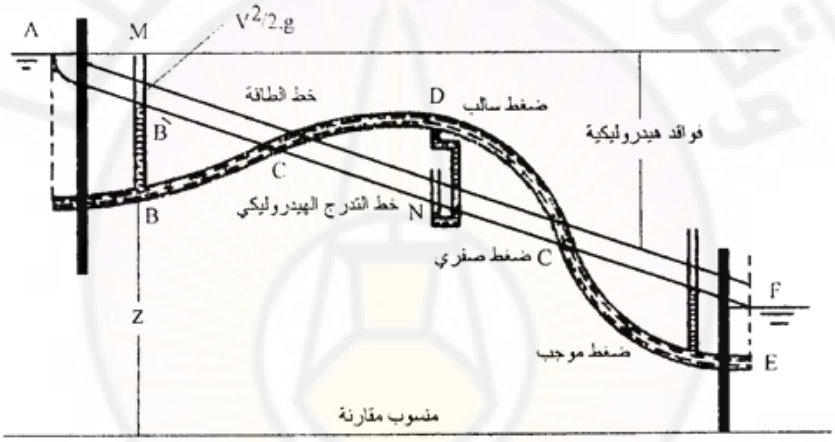
في حالة سائل حقيقي، لا تبقى الطاقة الكلية لواحدة الوزن من السائل ثابتة بل تتناقص تدريجياً، بسبب الفواقد الناتجة عن الاحتكاك، وعن الاضطرابات التي تحدث للجريان عند حدوث تغيرات في المقطع أو الاتجاه. وبالتالي لا يكون خط الطاقة خطاً مستقيماً أفقياً، بل يميل باتجاه الجريان. ويبين الشكل (٤-٦) خط الطاقة وخط التدرج الهيدروليكي لجريان سائل حقيقي في أنبوب.



الشكل (٤-٦). خط الطاقة وخط التدرج الهيدروليكي في حالة سائل حقيقي [5]

إن مفهومي خط الطاقة وخط التدرج الهيدروليكي يفيدان في حل مسائل الجريان للسوائل غير القابلة للانضغاط. فإذا تم وضع أنبوب بيزومتري عند النقطة B في الشكل (٤-٧)، فإن السائل يرتفع بالمقدار BB' الذي يساوي ضاغط الضغط المؤثر عند تلك النقطة. وإذا كان مخرج الأنبوب عند النقطة E مغلقاً بحيث لا يكون هناك جريان، فإن ارتفاع عمود السائل حينئذ يكون BM. لكن يحدث انخفاض من M إلى B' عند وجود جريان وذلك لسببين: الأول هو تحول جزء من طاقة السائل إلى طاقة حركية، والثاني هو النقصان في الطاقة الذي حدث بسبب فواقد الاحتكاك

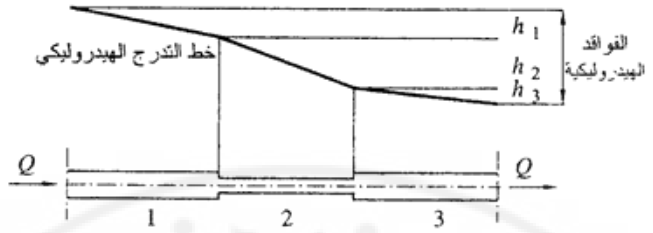
بين النقطتين A, B . ويبين خط الميل الهيدروليكي قيمة الضغط على طول الأنبوب، حيث أنه عند أية نقطة يكون حاصل قسمة المسافة الشاقولية من الأنبوب على خط الميل الهدروليكي هي ضاغط الضغط عند تلك النقطة (بفرض أن الشكل مرسوم بمقياس رسم). وعند النقطة C تساوي هذه المسافة الصفر، ولذلك فهي تبين أن الضغط المطلق داخل الأنبوب عند تلك النقطة هو نفسه الضغط الجوي. أما عند النقطة D فنلاحظ أن الأنبوب أعلى من خط التدرج الهيدروليكي، وهذا يدل على وجود ضغط سالب عند تلك النقطة.



الشكل (٤-٧). رسم خط الطاقة الكلي وخط التدرج الهيدروليكي لأنبوب بين خزانين في حالة سائل حقيقي

يكون خط التدرج الهيدروليكي خطاً مستقيماً إذا كان الأنبوب مستقيماً وذا قطر منتظم. وإذا كانت هناك فواقد طاقة موضعية غير تلك الناتجة عن الاحتكاك، فإنه يمكن أن يكون هناك انخفاضات حادة في خط التدرج الهيدرولكي (الشكل ٤-٦).

إذا كان الضاغط الحركي ثابتاً، كما هو مبين في الشكل (٤-٦)، فإن الانخفاض في خط التدرج الهيدروليكي بين أي نقطتين يساوي قيمة الفاقد بين هاتين النقطتين. وميل خط التدرج الهيدروليكي في هذه الحالة هو معدل الضياع. ويلاحظ في الشكل (٤-٨) أن ميل خط التدرج الهيدروليكي في الأنبوب ذو القطر الأكبر أقل منه في الأنبوب الصغير، لأن معدل الفواقد أقل. وسنرى فيما بعد أن هذه الفواقد تتناسب طرداً مع السرعة وعكساً مع القطر.



الشكل (٤-٨). خط التدرج الهيدروليكي في أنابيب متغيرة القطر [5]

٤-٤ .تطبيقات معادلة برنوللي Applications of Bernoulli Equation

٤-٤-١ . تمهيد Preface

رغم بساطة معادلة برنوللي، لأنها لا تأخذ قوى الاحتكاك بعين الاعتبار لإهمال لزوجة السائل عند استخراجها، إلا أنها تعتبر من أهم المعادلات في جريان السوائل. ولها تطبيقات عديدة جداً. ولكن المشكلة الوحيدة في استخدامها هو عدم أخذ قوى الاحتكاك للسائل بعين الاعتبار، الأمر الذي سيؤدي إلى اختلاف الدراسة النظرية عن الواقع. ولكن كما سنجد في الفقرات القادمة، سوف ندخل تأثير قوى الاحتكاك بشكل ما عن طريق إدخال معامل تصحيح تلعب التجربة دوراً رئيساً في تحديد قيمته.

يمكن عملياً مصادفة تطبيقات عديدة ومتنوعة لمعادلة برنوللي، وسنورد في الفقرات اللاحقة بعض هذه التطبيقات لما لها من أهمية كبيرة في الحياة العملية.

٤-٤-٢ . أنبوب بيتو Pitot Tube

يعتبر أنبوب بيتو أحد الوسائل البسيطة لقياس السرعة الموضعية u في سائل جار. وتنسب تسميته إلى المهندس الفرنسي **هنري بيتو** ***Pitot*** الذي استخدم أنبوباً زجاجياً منحنياً لقياس السرعة في نهر السين عام ١٧٣٠.

يوضع أنبوب بيتو الذي هو عبارة عن أنبوب بشكل حرف L في مواجهة السائل الجاري، كما هو مبين في الشكل (٤-٩).

إذا كانت سرعة التيار عند النقطة A هي u، فإن جزءاً من السائل الذي يتحرك من النقطة A إلى فوهة الأنبوب، سوف يفقد حركته بحيث تكون سرعته عند النقطة B مساوية للصفر. فإذا طبقت معادلة برنوللي ما بين النقطتين A,B سيكون

لدينا:

$$\frac{u^2}{2\cdot g}+\frac{p}{\gamma}=\frac{u_0^2}{2\cdot g}+\frac{p_0}{\gamma}$$

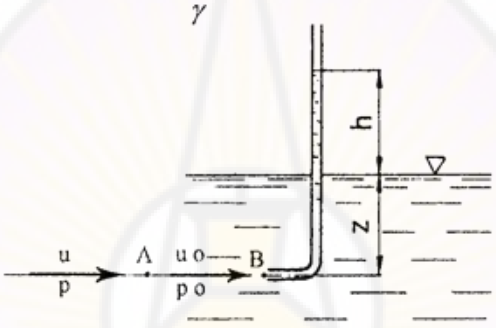
وبما أن:

$$u_0=0$$

و:

$$\frac{p}{\gamma}=z$$

$$\frac{p_0}{\gamma}=h+z$$



الشكل (٤-٩). أنبوب بيتو [7]

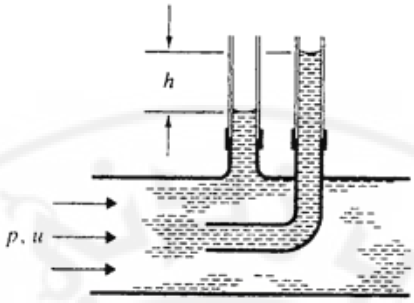
وبالتعويض في المعادلة السابقة، نجد أن:

$$u=\sqrt{2\cdot g\cdot h} \qquad (٤-٥٥)$$

ومنه نلاحظ أنه عند استخدام أنبوب بيتو في قناة مكشوفة كالمبين في الشكل السابق، يمكن قياس السرعة مباشرة بمعرفة قيمة ارتفاع السائل في الأنبوب. أما عند استخدام أنبوب بيتو لقياس سرعة الجريان في أنبوب مغلق مضغوط، كالمبين في الشكل (٤-١٠)، فإن ارتفاع السائل في الأنبوب يمثل مجموع الضغط والطاقة الحركية. ولتحديد الطاقة الحركية فقط لا بد من قياس الضغط. ويتم ذلك عن طريق وضع بيزومتر في جدار الأنبوب بجانب أنبوب بيتو.

إن الفرق بين ارتفاعي السائل h في كل من أنبوب بيتو و الأنبوب البيزومتري يمثل الطاقة الحركية في الأنبوب، وعليه يكون:

$$u = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$$



الشكل (٤-١٠). استحدام أنبوب بيتو لقياس سرعة جريان سائل في أنبوب [3]

مثال ٤-١

وضع أنبوب بيتو على ارتفاع معين في مجرى نهر، فارتفع فيه منسوب الماء بمقدار $10cm$. احسب سرعة الجريان عند هذا الارتفاع.

الحل:

تحسب قيمة السرعة باستخدام أنبوب بيتو من العلاقة:

$$u = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$$

وبالتعويض، نحصل على:

$$u = \sqrt{2 \cdot 9.81 \cdot 0.1} = 1.4 m/s$$

٤-٤-٣. أنبوب براندتل Prandtl Tube

عندما تكون الضغوط في الأنابيب المراد قياس السرعة فيها كبيرة، فإن مستويات السائل في أنبوب بيتو ترتفع إلى مناسيب عالية، لا يمكن قياس ارتفاعها بمساعدة أنبوب بيتو. وقد فكر العالم الألماني **براندتل** ***Prandtl*** باستخدام أنبوب واحد يعطي مباشرة الفرق بين الضغط الكلي (ضغط + طاقة حركية) والضغط. ويتألف أنبوب براندتل من فتحة في رأس الأنبوب توجه باتجاه الجريان المراد قياس سرعته وتتصل مع فرع مانومتر، و مجموعة ثقوب موزعة على المحيط الخارجي للأنبوب موصولة مع الفرع الثاني للمانومتر، كما هو مبين في الشكل (٤-١١).

الفتحة الموجودة في رأس الأنبوب تقيس الضغط والطاقة الحركية، أما الثقوب الموزعة على المحيط فتقيس الضغط فقط. ونتيجة لهذا الوضع يكون الضغط الآتي من الفتحة أكبر من الضغط الآتي من الثقوب الجانبية وسوف ينحرف سائل المانومتر .

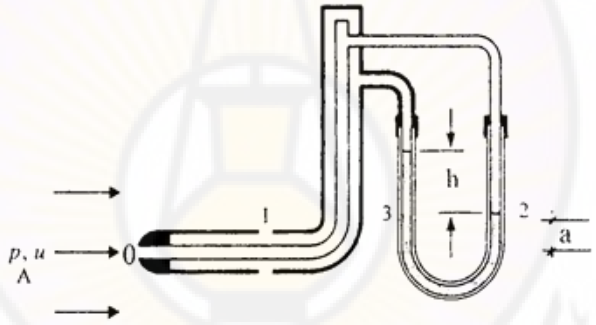
يتم حساب سرعة الجريان في أنبوب براندتل كما يلي:

بتطبيق معادلة برنوللي بين النقطتين $(A,0)$، يكون:

$$\frac{u^2}{2\cdot g}+\frac{p}{\gamma}=\frac{u_0^2}{2\cdot g}+\frac{p_0}{\gamma}$$

ومنه:

$$\frac{p_0}{\gamma}=\frac{u^2}{2\cdot g}+\frac{p}{\gamma}$$



الشكل (٤-١١). أنبوب براندتل [3]

وبتطبيق معادلة برنوللي بين النقطتين $(A,1)$ نجد أن:

$$\frac{u^2}{2\cdot g}+\frac{p}{\gamma}=\frac{u_1^2}{2\cdot g}+\frac{p_1}{\gamma}$$

وباعتبار أن $u=u_1$، يكون لدينا:

$$\frac{p}{\gamma}=\frac{p_1}{\gamma}$$

وبالتبديل في المعادلات السابقة، نجد أن:

$$\frac{p_0}{\gamma}=\frac{u^2}{2\cdot g}+\frac{p_1}{\gamma}$$

وبالتالي يكون:

$$\frac{u^2}{2 \cdot g} = \frac{p_0 - p_1}{\gamma}$$

ولكن الضغط في النقطة 2 من المانومتر هو:

$$p_2 = p_0 - a \cdot \gamma$$

كما أن الضغط في النقطة 3 من المانومتر يساوي:

$$p_3 = p_1 - (a + h) \cdot \gamma + h \cdot \gamma_g$$

و باعتبار $p_2 = p_3$ ، يكون لدينا:

$$p_0 - a \cdot \gamma = p_1 - (a + h) \cdot \gamma + h \cdot \gamma_g$$

ومنه:

$$p_0 - p_1 = (\gamma_g - \gamma) \cdot h$$

وبالتعويض نجد أن:

$$u = \sqrt{2 \cdot g \cdot h \cdot \left(\frac{\rho_g}{\rho} - 1 \right)} \qquad (٥٦-٤)$$

حيث أن:

- γ : الكتلة النوعية للسائل الجاري.
- ρ_g : الكتلة النوعية للسائل في المانومتر.
- h : مقدار انحراف السائل في المانومتر.

وتختلف عادة سرعة الجريان المقاسة باستخدام أنبوب براندتل عن السرعة الفعلية لعوامل كثيرة. لذلك يتم تعديل السرعة المحسوبة من المعادلة (٤-٥٦) بإدخال معامل الجهاز، الذي يحدد تجريبياً من قبل الشركة الصانعة للجهاز. وبناء عليه تحسب السرعة الفعلية من العلاقة:

$$u = C \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h \cdot \left(\frac{\rho_g}{\rho} - 1 \right)} \qquad (٥٧-٤)$$

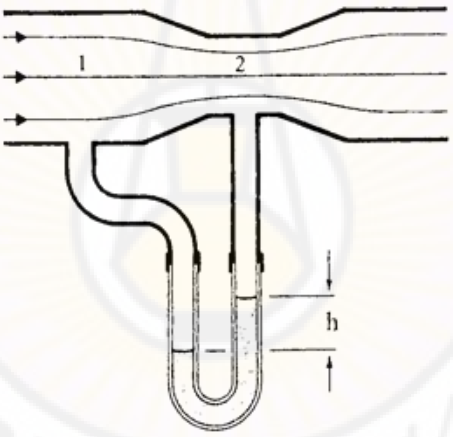
باعتبار أن السائل الجاري وسائل المانومتر معروفين، لذلك يمكن كتابة المعادلة السابقة كما يلي:

$$u = K \cdot \sqrt{h} \qquad (٤-٥٨)$$

حيث: K – ثابت.

٤-٤-٤. جهاز فنتوري Venturi Meter

يتألف جهاز فنتوري من أنبوب يتغير مقطعه تدريجياً مع اتجاه الجريان إلى أن يصل إلى قيمة صغرى، ثم يتوسع بالتدريج حتى يأخذ من جديد قيمته الأولى، كما في (الشكل ٤-١٢). وتنسب تسميه هذا الجهاز البسيط إلى الإيطالي **فنتوري** ***Venturi*** الذي قدمه عام ١٧٩١.



الشكل (٤-١٢). جهاز فنتوري [3]

ويستعمل جهاز فنتوري لقياس غزارة الجريان المارة في أنبوب ما. ويصادف كثيراً في محطات ضخ مياه الري والشرب، وكذلك في شبكات الأنابيب. إذ يوضع في طريق الجريان بشكل تمر منه كامل الغزارة المراد قياسها في هذا الأنبوب. حيث يؤدي مرور السائل في الأنبوب المتضيق إلى تسارعه في اتجاه الجريان، مما يؤدي إلى حصول هبوط في الضغط حسب معادلة الطاقة. وحيث أنه توجد علاقة بين معدل الجريان وبين هبوط الضغط، يمكن تحديد مقدار الغزارة المارة في الأنبوب.

بتطبيق معادلة برنوللي بين المقطعين 1,2 الموضحين على الشكل (٤-١٢)،

وبعد إهمال الفواقد الهيدروليكية الحاصلة بينهما، يمكن كتابة:

$$\frac{p_1}{\rho \cdot g} + \frac{V_1^2}{2 \cdot g} = \frac{p_2}{\rho \cdot g} + \frac{V_2^2}{2 \cdot g}$$

أو:

$$V_2^2 - V_1^2 = 2 \cdot g \cdot \left(\frac{p_1}{\rho \cdot g} - \frac{p_2}{\rho \cdot g} \right)$$

وبالطريقة نفسها التي وجدناها في الفقرة السابقة، يكون لدينا:

$$\frac{p_1}{\rho \cdot g} - \frac{p_2}{\rho \cdot g} = h \cdot \left(\frac{\rho_g}{\rho} - 1 \right)$$

وبالتعويض، نجد أن:

$$V_2^2 - V_1^2 = 2 \cdot g \cdot h \cdot \left(\frac{\rho_g}{\rho} - 1 \right)$$

ومن معادلة الاستمرار لدينا:

$$Q = V_1 \cdot A_1 = V_2 \cdot A_2$$

ومنه:

$$V_1^2 \left[\left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 - 1 \right] = 2 \cdot g \cdot h \cdot \left(\frac{\rho_g}{\rho} - 1 \right)$$

أو:

$$V_1 = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 - 1}} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h \cdot \left(\frac{\rho_g}{\rho} - 1 \right)} \qquad (٤-٥٩)$$

وبالتالي تكون الغزارة المارة مساوية:

$$Q_{theoretical} = V_1 \cdot A_1 = \frac{A_1}{\sqrt{\left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 - 1}} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h \cdot \left(\frac{\rho_g}{\rho} - 1 \right)} \qquad (٤-٦٠)$$

أو يمكن كتابة هذه العلاقة الغزارة بالصيغة العملية التالية:

$$Q_{theoretical} = \frac{\pi \cdot D_1^2}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{D_1}{D_2}\right)^4 - 1}} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h \cdot \left(\frac{\rho_g}{\rho} - 1\right)} \qquad (٦١-٤)$$

وبسبب إهمال فواقد الطاقة التي تحصل بين المقطعين المدروسين ستكون الغزارة الفعلية المارة أقل من الغزارة النظرية المحسوبة من العلاقة (٤-٦١)، لذلك يجب ضرب العلاقة السابقة بمعامل تصريف الجهاز، والذي هو حكماً أقل من الواحد، وعليه تصبح علاقة التصريف الفعلي كما يلي:

$$Q_{actual} = C_d \cdot \frac{\pi \cdot D_1^2}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{D_1}{D_2}\right)^4 - 1}} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h \cdot \left(\frac{\rho_g}{\rho} - 1\right)} \qquad (٦٢-٤)$$

حيث: C_d - ثابت التصريف، وتحدد قيمته تجريبياً في الشركة المصنعة للأنبوب. وحسب المواصفة البريطانية ***British Standard 1042*** الجزء الأول لعام ١٩٨١، فإن القيم العملية المعتمدة لمعامل التصريف في جهاز فنتوري تقع في المجال $(C_d = 0.99 \div 0.97)$.

إن قيم حدود الطرف الأيمن في العلاقة (٤-٦٢) يمكن معرفتها مسبقاً، فيما عدا قيمة الإرتفاع h. وبناء عليه يمكن وضع هذه العلاقة بالصيغة العملية التالية:

$$Q_{actual} = K \cdot \sqrt{h} \qquad (٦٣-٤)$$

يعتبر أنبوب فنتوري وسيلة دقيقة وعملية لقياس غزارة الجريان في الأنابيب. ولكن عيبه الرئيس هو أنه يولد مقاومة هيدروليكية محلية في خط الأنبوب، ويحدث فاقداً ولا سيما في الجزء المتباعد منه.

وتؤخذ القيم العملية للنسبة $\left(\frac{D_1}{D_2}\right)$ عادة في المجال $(1.5-4)$، والنسبة الأكثر استخداماً هي: $\frac{D_1}{D_2} = 2$. مع الإشارة أن النسبة الكبيرة تعطي دقة أكبر في القياس، لكن يصاحبها هبوط كبير في الضغط بسبب زيادة السرعة والفاقد. ويمكن أن يؤدي

ذلك إلى حدوث ظاهرة التكهف (انخفاض الضغط إلى قيم سالبة يمكن عندها للماء أن يتبخر) التي تضر بالأنابيب فتسبب نخرها وتآكلها.

وأخيراً يمكن الإشارة إلى أن استخدام جهاز فنتوري لقياس التصريف بدأ يتضاءل بسبب ظهور أجهزة قياس الغزارة المتطورة، مثل الأجهزة التي تعمل بمبدأ الأمواج فوق الصوتية. حيث أن هذه الأجهزة لا تسبب أي اختناق في الجريان، لأنها تثبت خارج الأنبوب وتعطي نتائج دقيقة، ويمكن وصلها بالحاسوب لرصد وتسجيل النتائج أوتوماتيكياً، وهذا ما يسهل مراقبة تصريف الجريان في الأنابيب بشكل مستمر. كما يمكن استخدام نفس الجهاز من أجل أقطار أنابيب مختلفة، مما يجعل استخدامها سهلاً وعملياً.

مثال ٤-٢

لقياس غزارة جريان الماء في أنبوب من الفونت المرن قطره $400mm$، تم استخدام جهاز فنتوري بقطر $200mm$. فإذا كان انحراف الزئبق في المانومتر $h = 15cm$، احسب الغزارة المارة في الأنبوب. علماً أن معامل التصريف $C_d = 0.98$.

الحل:

يعطى التصريف في جهاز فنتوري بالعلاقة:

$$Q_{actual} = C_d \cdot \frac{\pi \cdot D_1^2}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{D_1}{D_2}\right)^4 - 1}} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h \cdot \left(\frac{\rho_g}{\rho} - 1\right)}$$

وبالتعويض بالقيم العددية المعطاة، نجد أن:

$$Q_{actual} = 0.98 \cdot \frac{\pi \cdot 0.4^2}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{(2)^4 - 1}} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot 0.15 \cdot \left(\frac{13600}{1000} - 1\right)}$$

ومنه:

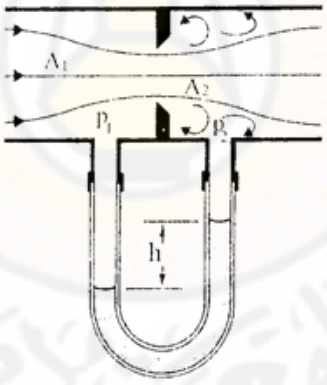
$$Q_{actual} = 0.194 m^3 / s$$

٤-٤-٥. فتحات الأنابيب Orifice Meter

يعتمد مبدأ عمل فنتوري المشروح في الفقرة السابقة على تغير مقطع الأنبوب المتضيق، بحيث يكون مقطع الجريان عند العنق أصغر منه عند مدخل الأنبوب المتضيق. يمكن الحصول على نتيجة مشابهة بتركيب صفيحة تحتوي على فتحة قطرها أصغر من القطر الداخلي للأنبوب، كما هو مبين في الشكل (٤-١٣).

إن الفوهة تحدث تضيقاً في الجريان كما هو موضح، ويكون مقطع الجريان بعد الفتحة مباشرة مساوياً تقريباً مساحة الفتحة.

تعد هذه الطريقة أبسط وأقل كلفة من أنبوب فنتوري وتؤدي الغرض نفسه، إلا أن ذلك يكون على حساب فاقد الاحتكاك. ويمكن حساب التصريف النظري من نفس العلاقة (٤-٦٢)، غير أن التصريف الفعلي يكون أقل من ذلك بكثير، لأن فاقد الاحتكاك هنا يكون كبيراً. حيث تبلغ قيمة المعامل $C_v = 0.65$) من أجل فتحة بحواف حادة.



الشكل (٤-١٣). فتحات الأنابيب لقياس تصاريف الأنابيب [3]

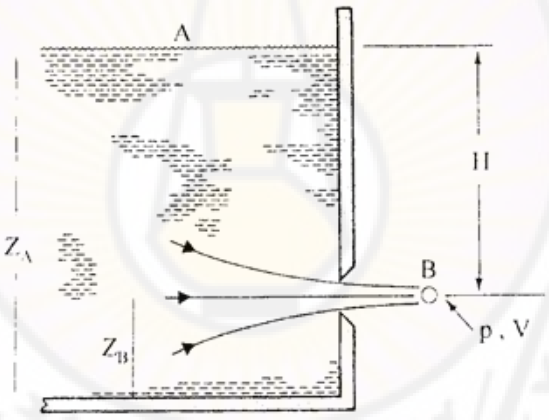
٤-٤-٦. التصريف عبر فتحة صغيرة

Discharge through a Small Orifice

الفتحة الصغيرة عبارة عن ثقب (دائري المقطع غالباً) يوجد في جانب أو قعر خزان، بحيث يخرج السائل منه على شكل تيار إلى الهواء الخارجي عادة. ويعتمد المعدل الحجمي للتصريف الخارج من فتحة ما، على ضاغط السائل الكائن فوق

منسوب الفتحة، لذا من الممكن استخدامه كوسيلة لقياس التصريف. ويطلق تعبير الفتحة الصغيرة على فتحة ذات قطر أو بعد شاقولي صغير بالمقارنة مع الضاغط المسبب للجريان من الفتحة، بحيث يمكن الفرض أن هذا الضاغط لا يتغير بشكل ملحوظ من نقطة إلى أخرى في مستوى الفتحة. ويمكن اعتبار الفتحة صغيرة، إذا كانت النسبة بين ارتفاعها أو قطرها d (إن كانت دائرية) وبعد مركزها عن سطح الماء H هي: $d/H < 0.1$.

يبين الشكل (٤-١٤) فتحة صغيرة في جانب خزان واسع يحتوي على سائل يتعرض سطحه السائب للضغط الجوي. فعند النقطة A على السطح الحر يكون الضغط مساويا للضغط الجوي. وفي حال كون الخزان واسع يمكن اعتبار سرعة الماء على سطحه بالاتجاه الشاقولي مهملة.



الشكل (٤-١٤). التصريف من فتحة صغيرة [3]

وتكون ظروف الجريان في منطقة الفتحة غير واضحة تماماً، ويكون الضغط عند نقطة ما B من التيار الخارج وبعد الفتحة مباشرة مساوياً للضغط الجوي. وباعتبار مستوي المقارنة يمر من قعر الخزان، وبتطبيق معادلة برنوللي بين النقطتين A, B مع افتراض عدم وجود فواقد في الطاقة، يمكن كتابة:

$$\frac{p_A}{\gamma} + \frac{V_A^2}{2 \cdot g} + Z_A = \frac{p_B}{\gamma} + \frac{V_B^2}{2 \cdot g} + Z_B$$

وباعتبار أن:

$$P_A = P_B = o$$

و:

$$V_A = 0, V_B = V$$

و:

$$Z_A - Z_B = H$$

وبعد التعويض، نحصل على:

$$V = \sqrt{2 \cdot g \cdot H} \qquad (٦٤-٤)$$

تدعى العلاقة السابقة بعلاقة توريشللي، نسبة للإيطالي **توريـــشللي** ***Torricelli*** الـــتي قدمها عام ١٦٤٣، بناء على دراســـات تجريبية أجراها.

في حال كـــون مساحة مقطع الفتحة A، فإن الغزارة النظرية الخارجـــة مـــن الفتحة تحسب بالعلاقة:

$$Q_{theoretical} = A \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot H} \qquad (٦٥-٤)$$

في الواقع يكون التصريف الفعلي، أقل بشكل ملحوظ من التصريف النظـــري المعطى بالعلاقة (٤-٦٥) لسببين هما:

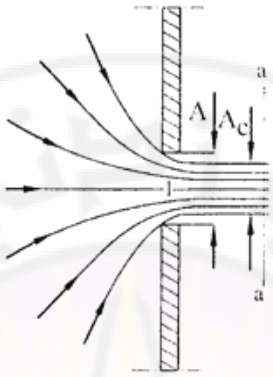
١- أن سرعة التيار الخارج من الفتحة أقل من تلك المعطاة بالعلاقة (٤-٦٤)، بسبب وجود فواقد إحتكاك بين A, B. لذلك تعطى السرعة الفعلية بالعلاقة التالية:

$$V_{actual} = C_V \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot H} \qquad (٦٦-٤)$$

حيث يعرف الثابت C_V **بمعامل السرعة** ***Velocity Coefficient***، والذي يجري تحديده تجريباً، ويساوي عادة $C_V = 0.97$.

٢- كما هو موضح في الشكل (٤-١٥)، تكون مسارات جزيئات السائل متقاربـــة عند الفتحة، وتكون مساحة مقطع التيار الخارج عند المقطع $a-a$ أقل من مـــساحة مقطع الفتحة عند 1. ويكون لجزيئات السائل في مستوي الفتحة مركبة باتجاه المركز، كما أن الضغط هو أعلى من الضغط الجوي. أما عند المقطع $a-a$ تحديداً الواقع على

مسافة صغيرة خارج الفتحة فإن مسارات الجزيئات تصبح متوازية فيما بينها، ويمكن اعتبار الضغط مساوياً الضغط الجوي.



الشكل (٤-١٥). تقلص المقطع عند الخروج من فتحة صغيرة

يدعى المقطع $a-a$ **بالمقطع المتقلص** ***Contracted Section*** أو المقطع المضغوط. وبالتالي فإن المقطع الفعلي للتيار يعطى بالعلاقة التالية:

$$A_c = C_c \cdot A \qquad (٤-٦٧)$$

حيث: A - مساحة مقطع الفتحة. ويعرف C_c **بمعامل التقلص** ***Contraction Coefficient***، و يمكن تحديده تجريبياً، وهو يعتمد على شكل الفتحة. ويأخذ من أجل فتحة حادة الحواف القيمة $C_c = 0.61$. وبشكل عام تتراوح قيم معامل التصريف للفتحات الصغيرة بين $(0.5-1)$، وذلك حسب نوع حواف الفتحة.

بناء على ما تقدم يمكن القول أن:

الغزارة الفعلية = المساحة الفعلية عند B × السرعة الفعلية عند B

ومنه:

$$Q_{actual} = C_c \cdot A \cdot C_v \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot H} \qquad (٤-٦٨)$$

أو:

$$Q_{actual} = C_c \cdot C_v \cdot A \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot H} \qquad (٤-٦٩)$$

أو:

$$Q_{actual} = C_d \cdot A \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot H} \qquad (٧٠-٤)$$

حيث أن: C_d – **معامل التصريف** ***Discharge Coefficient*** للفتحة ويساوي:

$$C_d = C_c \cdot C_v \qquad (٧١-٤)$$

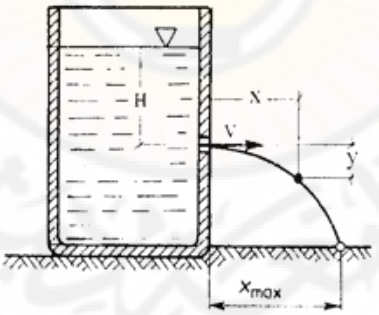
لتحديد قيمة معامل التصريف تجريبياً، يلزم فقط قياس حجم السائل الخارج من الفتحة خلال مدة زمنية معينة Q_{actual}، ومقارنته بالتصريف النظري $Q_{theoretical}$ المعطى بالعلاقة (٤-٦٥)، فنجد أن:

$$C_d = \frac{Q_{actual}}{Q_{theoretical}} \qquad (٧٢-٤)$$

وبشكل مشابه، إذا أمكن قياس المقطع الفعلي للتيار (المقطع المتقلص) A_c باستخدام بياكوليس مثلاً، يمكن تحديد معامل التقلص C_c بالعلاقة:

$$C_c = \frac{A_c}{A} \qquad (٧٣-٤)$$

كذلك، يمكن حساب أمثال السرعة C_v في حال كون الفتحة ليست في قعر الخزان، عن طريق تحديد إحداثيي نقطة في مسار السائل المتحرك كما موضح في الشكل (٤-١٦). فبعد زمن مقداره t يصبح إحداثيا نقطة من المسار كما يلي:



الشكل (٤-١٦). تحديد معامل السرعة C_v تجريبياً [2]

$$x = V \cdot t \qquad (٧٤-٤)$$

$$y = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \qquad (٧٥-٤)$$

ومنه بحذف الزمن من العلاقتين السابقتين، يمكن تحديد السرعة الفعلية:

$$V = \sqrt{\frac{g \cdot x^2}{2 \cdot y}} \qquad (٧٦-٤)$$

وبالتالي يعطى معامل السرعة بالعلاقة:

$$C_V = \frac{V}{\sqrt{2 \cdot g \cdot H}} = \sqrt{\frac{x^2}{4 \cdot y \cdot H}} \qquad (٧٧-٤)$$

أي أنه بعد قياس الأطوال (x, y, H)، يمكن حساب قيمة المعامل C_V.

مثال ٤-٣

يخرج تيار سائل من فتحة واقعة على ارتفاع $y = 0.5m$ في جدار شاقولي لخزان كبير ومفتوح من الأعلى. ليسقط على بعد أفقي $x = 1.5m$ من الجدار. فإذا علمت أن مساحة الفتحة تساوي $650mm^2$، وأن غزارة السائل الخارج من الفتحة تساوي $0.117m^3/\min$ عندما يكون ارتفاع سطح الماء في الخزان مساوياً $H = 1.2m$ فوق محور الفتحة. احسب قيم معاملات السرعة والتقلص والتصريف.

الحل:

لدينا:

$$C_V = \sqrt{\frac{x^2}{4 \cdot y \cdot H}}$$

ومنه:

$$C_V = \sqrt{\frac{1.5^2}{4 \cdot 0.5 \cdot 1.2}} = 0.968$$

ولدينا:

$$C_d = \frac{Q_{actual}}{A \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot H}}$$

أي أن:

$$C_d = \frac{0.117/60}{650 \times 10^{-6} \cdot \sqrt{2 \cdot 9.81 \cdot 1.2}} = 0.618$$

ومنه:

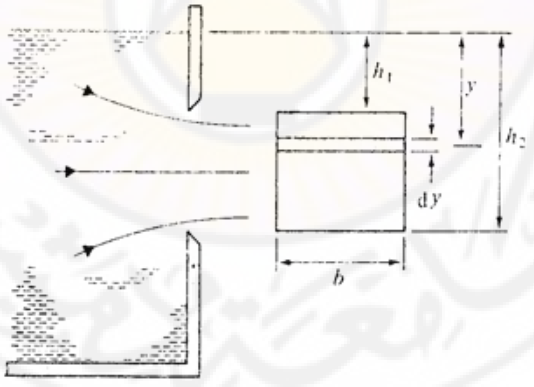
$$C_c = \frac{C_d}{C_v} = \frac{0.618}{0.968} = 0.639$$

٤-٤-٧. التصريف عبر فتحة كبيرة

Discharge through a Large Orifice

إذا كان الإرتفاع الشاقولي لفتحة ما كبيراً، بحيث يكون الفرق مابين قيمة الضاغط عند قمة وأسفل الفتحة ملحوظاً، فإن التصريف المحسوب من علاقة الفتحات الصغيرة باستخدام الضاغط عند مركز الفتحة لن يكون التصريف الحقيقي، بسبب تغير قيمة سرعة الجريان مابين أسفل الفتحة وقمتها. وندعو الفتحات التي يكون ارتفاعها كبيراً مقارنة بالضاغط المتشكل بالفتحات الكبيرة. ويمكن عد الفتحة كبيرة، إذا كانت النسبة بين ارتفاعها وبعد مركز ثقلها عن سطح السائل أكبر أو تساوي القيمة 0.1 .

لحساب غزارة الجريان المارة عبر فتحة كبيرة مستطيلة المقطع عرضها b، كالمبينة في الشكل (٤-١٧). تؤخذ شرائح متتالية عرضها يساوي عرض الفتحة، وسماكتها تساوي dy، ثم يحسب التصريف عبرها، وبإجراء التكامل يتم الحصول على التصريف الكلي لكامل الفتحة.



الشكل (٤-١٧). التصريف من فتحة كبيرة مستطيلة [3]

باعتبار شريحة طولها b وسماكتها dy وتخضع لضاغط ساكن y . نجد أن الغزارة المارة عبر هذه الشريحة تعطى بالعلاقة:

$$dQ = b \cdot dy \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot y} \qquad (٤-٧٨)$$

وتكون الغزارة النظرية المارة عبر كامل الفتحة مساوية:

$$Q_{theoretical} = b \cdot \sqrt{2 \cdot g} \cdot \int_{y=h_1}^{y=h_2} \sqrt{y} \cdot dy \qquad (٧٩-٤)$$

وبالمكاملة، نجد أن:

$$Q_{theoretical} = b \cdot \sqrt{2 \cdot g} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot y^{3/2} \right)_{h_1}^{h_2} \qquad (٨٠-٤)$$

وأخيراً نحصل على:

$$Q_{theoretical} = \frac{2}{3} \cdot b \cdot \sqrt{2 \cdot g} \cdot \left(h_2^{3/2} - h_1^{3/2} \right) \qquad (٨١-٤)$$

ولتقدير قيمة التصريف الفعلي المار عبر الفتحة يجب ضرب المعادلة السابقة بمعامل تصريف الفتحة C_d، أي أن:

$$Q_{actual} = C_d \cdot \frac{2}{3} \cdot b \cdot \sqrt{2 \cdot g} \cdot \left(h_2^{3/2} - h_1^{3/2} \right) \qquad (٨٢-٤)$$

مثال ٤-٤

احسب التصريف النظري المار من الفتحة المستطيلة المبينة في الشكل السابق. إذا كان عمق الماء فوق الطرف العلوي للفتحة $h_1 = 0.4m$، وارتفاعها $1.5m$، وعرضها $h = 0.7m$. ثم حدد مقدار الخطأ النسبي الحاصل فيما لو تم اعتبار الفتحة صغيرة.

الحل:

يعطى التصريف النظري من أجل الفتحات الكبيرة بالعلاقة:

$$Q_{theoretical} = \frac{2}{3} \cdot b \cdot \sqrt{2 \cdot g} \cdot \left(h_2^{3/2} - h_1^{3/2} \right)$$

وبالتعويض بالقيم العددية المفترضة ينتج:

$$Q_{theoretical} = \frac{2}{3} \cdot 0.7 \cdot \sqrt{2 \cdot 9.81} \cdot \left(1.9^{3/2} - 0.4^{3/2} \right) = 4.891 m^3/s$$

وفي حال اعتبار الفتحة صغيرة، فإن التصريف يعطى بالعلاقة:

$$Q = A \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$$

وبالتعويض بالقيم العددية الواردة في نص المسألة. نجد أن:

$$Q = 0.7 \cdot 1.5 \cdot \sqrt{2 \cdot 9.81 \cdot 1.15} = 4.988 m^3/s$$

وهي أكبر من الغزارة المحسوبة باستخدام علاقة الفتحات الكبيرة. ويكون الخطأ النسبي مساوياً:

$$\frac{4.988 - 4.891}{4.891} = 1.98\%$$

٤-٤-٨. الجريان غير المستقر من الفتحات (زمن تفريغ الخزانات)

Unsteady Flow from Orifice

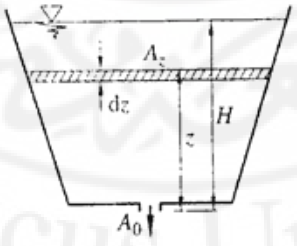
لقد افترضنا حتى الآن أن الجريان من الفتحات يتم من أجل منسوب ثابت للسائل في الخزان. إلا أن إحدى التطبيقات العملية الهامة هي تحديد الزمن اللازم لتخفيض منسوب سطح السائل في الخزان بمقدار معين. وهي الحالة التي لا يمكن فيها تطبيق معادلة برنوللي لأن الضاغط هنا وبالتالي سرعة خروج السائل من الفتحة يكونا متغيران مع الزمن، أي أن الجريان غير مستقر.

لنأخذ الخزان المبين في الشكل (٤-١٨). فنجد أن حجم السائل الخارج من الفتحة خلال فترة زمنية قصيرة dt هو:

$$d\forall = Q \cdot dt \qquad (٨٣-٤)$$

كما أن مقدار انخفاض حجم السائل في الخزان خلال نفس الفترة الزمنية يساوي:

$$d\forall = -A_z \cdot dz \qquad (٨٤-٤)$$



الشكل (٤-١٨). استخراج علاقة زمن تفريغ خزان [5]

حيث: A_z – مساحة السائل الموافق للارتفاع z فوق الفتحة.

وبمساواة العلاقتين السابقتين، نجد أن:

$$Q \cdot dt = -A_z \cdot dz \qquad (٨٥-٤)$$

ومنه:

$$dt = -\frac{A_z}{Q} \cdot dz \qquad (٨٦-٤)$$

ويمكن حساب الزمن اللازم لتخفيض منسوب السائل من المنسوب $(z = z_1)$ عند اللحظة $t_1 = 0$ إلى المنسوب $(z = z_2)$ في اللحظة t_2، عن طريق مكاملة العلاقة السابقة:

$$t = \int_0^t dt = -\int_{z_1}^{z_2} \frac{A_z \cdot dz}{Q} \qquad (٨٧-٤)$$

لكن الغزارة الخارجة عبر فتحة عند ارتفاع ما z لسطح السائل فوق الفتحة بالعلاقة:

$$Q = C_d \cdot A_0 \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot z} \qquad (٨٨-٤)$$

وبتعويض هذه العلاقة في العلاقة (٤-٨٧)، نحصل على الصيغة التي يمكن بوساطتها تقدير الزمن اللازم لتفريغ خزان، وذلك كما يلي:

$$t = -\frac{1}{C_d \cdot A_0 \cdot \sqrt{2 \cdot g}} \cdot \int_{z_1}^{z_2} A_z \cdot z^{-1/2} \cdot dz$$

أو:

$$t = \frac{1}{C_d \cdot A_0 \cdot \sqrt{2 \cdot g}} \cdot \int_{z_2}^{z_1} A_z \cdot z^{-1/2} \cdot dz \qquad (٨٩-٤)$$

وعندما يكون مقطع الخزان ثابتاً، تصبح علاقة تفريغ الخزان:

$$t = \frac{A_z}{C_d \cdot A_0 \cdot \sqrt{2 \cdot g}} \cdot \int_{z_2}^{z_1} z^{-1/2} \cdot dz$$

وبالمكاملة، نجد أن:

$$t = \frac{2 \cdot A_z}{C_d \cdot A_0 \cdot \sqrt{2 \cdot g}} \cdot \left(\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2}\right) \qquad (٩٠-٤)$$

يمكن أيضاً استخدام معادلة برنوللي لحساب زمن تفريغ خزان لخزان آخر. فليكن لدينا الخزانين المبينين في الشكل (٤-١٩)، حيث أن فرق المنسوب بين سطحي

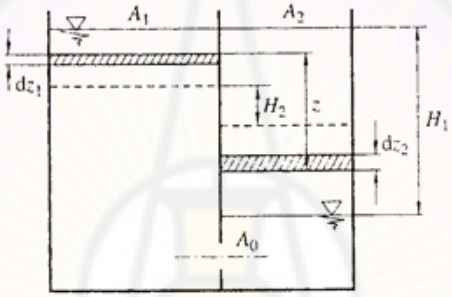
الماء فيهما قبل التفريغ هو H_1 ، والمطلوب حساب الزمن اللازم ليصبح فرق المنسوب هو H_2 .

نلاحظ هنا أنه عندما يهبط منسوب الخزان الأيسر بمقدار dz_1 ، يرتفع الأيمن بالمقدار dz_2 ، ويكون عندها:

$$A_1 \cdot dz_1 = A_2 \cdot dz_2 \qquad (٩١-٤)$$

ومنه:

$$dz_2 = \frac{A_1}{A_2} \cdot dz_1 \qquad (٩٢-٤)$$



الشكل (٤-١٩). استخراج علاقة زمن تفريغ خزان لخزان آخر [5]

كذلك يمكن كتابة:

$$Q \cdot dt = -A_1 \cdot dz_1 \qquad (٩٣-٤)$$

أو:

$$dt = -\frac{A_1}{Q} \cdot dz_1 \qquad (٩٤-٤)$$

وبما أن:

$$Q = C_d \cdot A_0 \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot z}$$

فإن:

$$dt = -\frac{A_1}{C_d \cdot A_0 \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot z}} \cdot dz_1 \qquad (٩٥-٤)$$

أو:

$$dt = -\frac{A_1}{C_d \cdot A_0 \cdot \sqrt{2 \cdot g}} \cdot \frac{dz_1}{\sqrt{z}} \qquad (٩٦-٤)$$

ولكن:

$$dz = dz_1 + dz_2 \qquad (٩٧-٤)$$

أو:

$$dz = \left(1 + \frac{A_1}{A_2}\right) \cdot dz_1 \qquad (٩٨-٤)$$

وبالتعويض، نجد أن:

$$dt = -\frac{A_1 \cdot A_2}{C_d \cdot A_0 \cdot \sqrt{2 \cdot g} \cdot (A_1 + A_2)} \cdot z^{-1/2} \cdot dz \qquad (٩٩-٤)$$

وبالمكاملة نستنتج، أن الزمن اللازم t لخفض فرق المنسوب من H_1 إلى H_2 هو:

$$t = \frac{2 \cdot A_1 \cdot A_2}{C_d \cdot A_0 \cdot \sqrt{2 \cdot g} \cdot (A_1 + A_2)} \cdot \left(\sqrt{H_1} - \sqrt{H_2}\right) \qquad (١٠٠-٤)$$

مثال ٤-٥

خزان أسطواني قطره $D = 0.5m$، وارتفاعه $H = 1m$. مملوء بالكامل بالماء، ويتعرض سطحه إلى الضغط الجوي. وهو يحتوي في قعره على فتحة دائرية قطرها $d = 2cm$. احسب الزمن اللازم لخفض ارتفاع الماء في الخزان إلى $0.5m$. بافتراض أن ثابت التصريف للفتحة $C_d = 0.6$.

الحل:

عندما يكون الخزان ثابت المقطع، يعطى زمن تفريغ الخزان بالعلاقة:

$$t = \frac{2 \cdot A_2}{C_d \cdot A_0 \cdot \sqrt{2 \cdot g}} \cdot \left(\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2}\right)$$

حيث أن:

$$A_2 = \frac{\pi \cdot D^2}{4} = \frac{\pi \cdot 0.5^2}{4} = 0.1963m^2$$

و:

$$A_0 = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 0.02^2}{4} = 0.000314 m^2$$

وأخيراً بعد التعويض بالقيم العددية، نجد أن الزمن اللازم لتفريغ منسوب الماء في الخزان يساوي:

$$t = \frac{2 \cdot 0.1963}{0.6 \cdot 0.000314 \cdot \sqrt{2 \cdot 9.81}} \cdot \left(\sqrt{1} - \sqrt{0.5}\right) = 137.8 \sec$$

٤-٤-٩. الهدارات The Weirs

الهدار ***Weir*** هو عبارة عن فتحة كبيرة ليس لها حرف علوي، ويجري الماء من فوقها بتأثير الضاغط المتشكل أمامها. والهدارات منشآت مائية هامة، تستعمل لأغراض متعددة، منها قياس غزارة الجريان المارة في الأقنية، وصرف المياه الزائدة عند تجاوزها حداً معيناً. وهي تستخدم كثيراً في مشاريع شبكات الري والصرف والسدود ومحطات الضخ، وفي مختلف المشاريع المائية الأخرى. ولها أشكال عديدة، وسنتعرض في هذه الفقرة لنوعين فقط من الهدارات رقيقة الحافة، كمثالين على تطبيق معادلة برنوللي. أما دراسة الهدارات بشكل مفصل فيتناولها مقرر الهيدروليك (٢).

٤-٤-٩-١. الهدار المستطيل رقيق الحافة Sharp-Crested Rectangular Weir

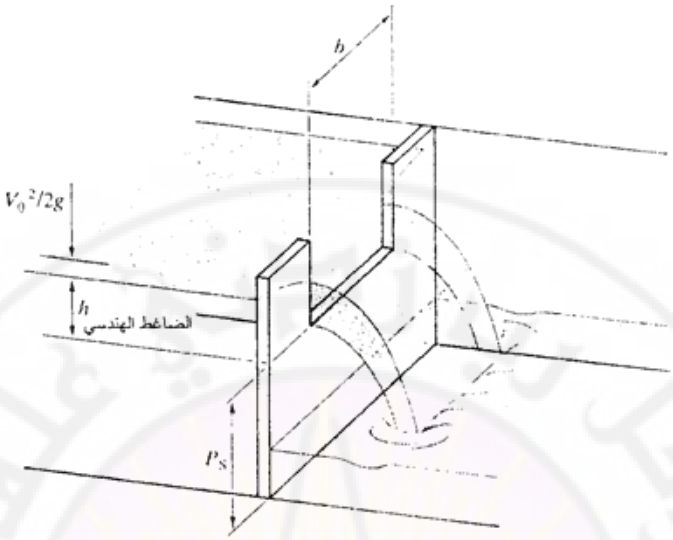
يتكون هذا الهدار من فتحة مستطيلة المقطع، كما مبين في الشكل (٤-٢٠). ويسمى رقيق الحافة لأن سماكة جداره صغيرة مقارنة بالضاغط فوق حافته.

ومن أجل تحديد تصريف الهدار، تطبق معادلة برنوللي بين نقطتين إحداهما على سطح الماء في المقطع الذي يبدأ عنده منسوب الماء بالهبوط، والأخرى فوق عتبة الهدار على عمق z، كما هو في الشكل (٤-٢١)، فنجد أن:

$$z + \frac{\alpha \cdot V_0^2}{2 \cdot g} = \frac{V^2}{2 \cdot g} \qquad (٤-١٠١)$$

ومنه:

$$V = \sqrt{2 \cdot g \cdot (z + \frac{\alpha \cdot V_0^2}{2g})} \qquad (٤-١٠٢)$$



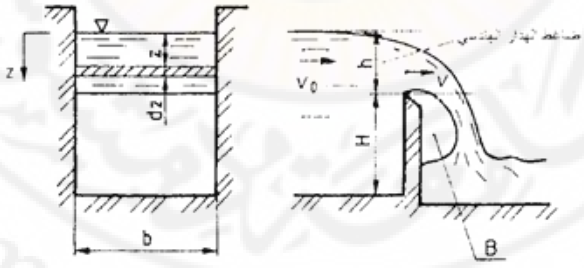
الشكل (٤-٢٠). منظر عام لهدار مستطيل رقيق الحافة [3]

لكن التصريف الجزئي المار من الشريحة يساوي:

$$dQ = dA \cdot V$$

أو:

$$dQ = b \cdot dz \cdot \sqrt{2 \cdot g(z + \frac{\alpha \cdot V_0^2}{2 \cdot g})} \qquad (٤-١٠٣)$$



الشكل (٤-٢١). استنتاج علاقة الهدار المستطيل رقيق الحافة [7]

وبافتراض أن :

$$z_0 = z + \frac{\alpha \cdot V_0^2}{2g} \Rightarrow dz_0 = dz$$

يكون لدينا:

$$dQ = b \cdot \sqrt{2g \cdot z_0} \cdot dz_0 \qquad (١٠٤-٤)$$

لكن عند السطح الحر يكون:

$$z_0 = \frac{\alpha \cdot V_0^{\,2}}{2 \cdot g} \qquad (١٠٥-٤)$$

وعند حرف عتبة الهدار يكون:

$$z_0 = h + \frac{\alpha \cdot V_0^{\,2}}{2 \cdot g} \qquad (١٠٦-٤)$$

وبعد التعويض والمكامله، نجد أن:

$$Q_{th} = b \cdot \sqrt{2g} \cdot \int_{\frac{\alpha \cdot V_0^2}{2 \cdot g}}^{h+\frac{\alpha \cdot V_0^2}{2 \cdot g}} z_0^{1/2} \cdot dz_0$$

أو:

$$Q_{th} = b \cdot \sqrt{2g} \cdot \frac{2}{3} \cdot \left[z_0^{3/2} \right]_{\frac{\alpha \cdot V_0^2}{2 \cdot g}}^{h+\frac{\alpha \cdot V_0^2}{2 \cdot g}}$$

أي أن:

$$Q_{th} = \frac{2}{3} \cdot b \cdot \sqrt{2g} \cdot \left[(h + \frac{\alpha \cdot V_0^{\,2}}{2 \cdot g})^{3/2} - (\frac{\alpha \cdot V_0^{\,2}}{2 \cdot g})^{3/2} \right] \qquad (١٠٧-٤)$$

و أخيراً يكون:

$$Q_{th} = \frac{2}{3} \cdot b \cdot \sqrt{2g} \cdot h^{3/2} \cdot \left[\left(1 + \frac{\alpha \cdot V_0^{\,2}}{2 \cdot g \cdot h} \right)^{3/2} - \left(\frac{\alpha \cdot V_0^{\,2}}{2 \cdot g \cdot h} \right)^{3/2} \right] \qquad (١٠٨-٤)$$

إن الغزارة التي حصلنا عليها هي غزارة نظرية ولكن الغزارة الحقيقية المارة تكون أقل من ذلك، ونحصل عليها بضرب الغزارة النظرية بمعامل التصريف C_d. وعليه تعطى الغزارة الفعلية من أجل الهدارات المستطيلة رقيقة الحافة بالعلاقة:

$$Q=\frac{2}{3}\cdot C_d\cdot b\cdot\sqrt{2g}\cdot h^{3/2}\cdot\left[\left(1+\frac{\alpha\cdot V_0^{\,2}}{2\cdot g\cdot h}\right)^{3/2}-\left(\frac{\alpha\cdot V_0^{\,2}}{2\cdot g\cdot h}\right)^{3/2}\right] \qquad (١٠٩-٤)$$

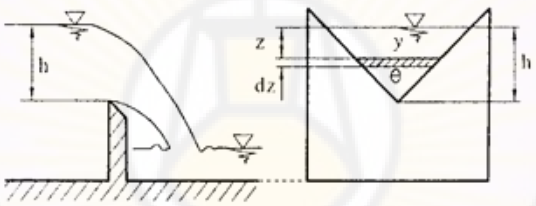
وعندما تهمل سرعة الاقتراب V_0 تأخذ المعادلة السابقة الصيغة التالية:

$$Q=\frac{2}{3}\cdot C_d\cdot b\cdot\sqrt{2g}\cdot h^{3/2} \qquad (١١٠-٤)$$

يدعى الارتفاع h بالضاغط الهندسي للهدار. وهو ارتفاع منسوب الماء قبل مسافة كافية من الهدار فوق حافته، وتقدر هذه المسافة تجريبياً بحوالي $h\cdot(5-3)$.

٤-٤-٩-٢. الهدار المثلثي رقيق الحافة Sharp-Crested Vee Weir

يستخدم **الهدار المثلثي** *Vee Weir* عادة لقياس التصاريف الصغيرة في الأقنية، وهو عبارة عن فتحة مثلثية الشكل منفذة في جدار. ولاستنتاج علاقة غزارة هذا الهدار، وبالاعتماد على الشكل (٤-٢٢) لدينا:



الشكل (٤-٢٢). استنتاج علاقة الهدار المثلثي رقيق الحافة [5]

$$dQ=2\cdot(h-z)\cdot\tan(\frac{\theta}{2})\cdot dz\cdot\sqrt{2\cdot g\cdot z} \qquad (١١١-٤)$$

حيث: θ - زاوية رأس الهدار.

وبالمكاملة يكون:

$$Q_{th}=2\cdot\sqrt{2g}\cdot\tan(\frac{\theta}{2})\cdot\int_0^h(h-z)\cdot z^{1/2}\cdot dz$$

أو:

$$Q_{th}=2\cdot\sqrt{2g}\cdot\tan(\frac{\theta}{2})\cdot\left[\frac{2}{3}h\cdot z^{3/2}-\frac{2}{5}\cdot z^{5/2}\right]_0^h$$

ومنه، تكون الغزارة المطلوبة:

$$Q_{th} = \frac{8}{15} \cdot \sqrt{2g} \cdot \tan(\frac{\theta}{2}) \cdot h^{5/2} \qquad (١١٢-٤)$$

أما الغزارة الحقيقية أو الفعلية فتساوي:

$$Q = \frac{8}{15} \cdot C_d \cdot \sqrt{2g} \cdot \tan(\frac{\theta}{2}) \cdot h^{5/2} \qquad (١١٣-٤)$$

إن أكثر الهدارات المثلثية استخداماً في الحياة العملية، هي الهدارات قائمة الزاوية أي: $\theta = 90$. ومن أجل هذه الزاوية تكون $C_d = 0.6$، وبالتالي تعطى الغزارة الفعلية فوق الهدار بالصيغة:

$$Q = 1.417 \times h^{5/2} \qquad (١١٤-٤)$$

مثال ٤-٦

هدار مثلثي قائم الزاوية. الضاغط الهندسي فوق حافته $h = 0.5m$. احسب الغزارة المارة فوقه.

الحل:

لدينا:

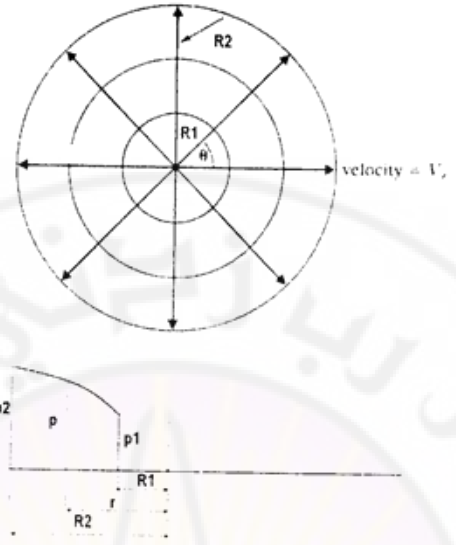
$$Q = 1.417 \times h^{5/2}$$

وبالتعويض بالقيم العددية حسب نص المسألة، نجد أن:

$$Q - 1.417 \times 0.5^{5/2} = 0.250 m^3/s$$

٤-٤-١٠. الجريان الشعاعي Radial Flow

عندما يجري السائل بشكل شعاعي نحو الداخل أو الخارج من مركز ما وضمن مستويين متوازيين كما في الشكل (٤ ٢٣)، تكون خطوط التيار في هذه الحالة عبارة عن خطوط مستقيمة نصف قطرية، وتكون أنابيب التيار عبارة عن قطاعات دائرية. تزداد تبعاً لذلك مساحة مقطع الجريان مع زيادة نصف القطر مما يجعل السرعة تتناقص. بما أن نموذج الجريان متناظر، فإن الطاقة الكلية لواحدة الوزن من السائل تكون واحدة من أجل جميع خطوط التيار، وكذلك من أجل جميع النقاط الواقعة على كل خط تيار (بفرض عدم وجود فواقد في الطاقة).



الشكل (٤-٢٣). الجريان الشعاعي

فإذا كانت V_r هي السرعة القطرية و p هو الضغط عند أي نصف قطر، فإن معادلة الطاقة تكون على الشكل:

$$\frac{p}{\gamma}+\frac{V^2}{2\cdot g}=Const=E \qquad (١١٥-٤)$$

ولكن لدينا من معادلة الاستمرار:

$$Q=2\cdot\pi\cdot r\cdot b\cdot V_r \qquad (١١٦-٤)$$

ومنه:

$$V_r=\frac{Q}{2\cdot\pi\cdot r\cdot b} \qquad (١١٧-٤)$$

وبالتعويض في المعادلة (٤-١١٥)، نجد أن:

$$\frac{p}{\gamma}+\frac{Q^2}{8\cdot\pi^2\cdot r^2\cdot b^2\cdot g}=E \qquad (١١٨-٤)$$

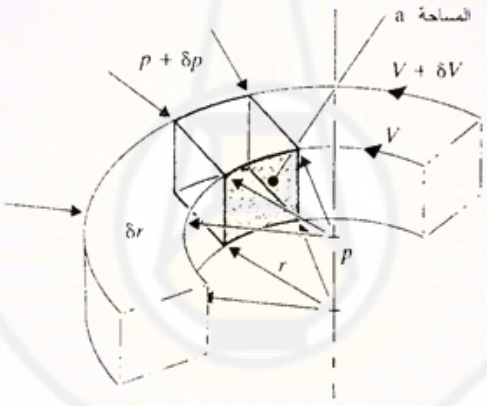
ومنه:

$$p=\gamma\left(E-\frac{Q^2}{8\cdot\pi^2\cdot b^2\cdot g}\cdot\frac{1}{r^2}\right) \qquad (١١٩-٤)$$

فإذا رسمنا منحني الضغط بدلالة نصف القطر ، فإن المنحني الناتج عبارة عن قطع مكافئ، ويشار إليه عادة **بمنحني بارلو** ***Barlow Curve***.

٤-٤-١١. الجريان في مسار منحنٍ Flow in a Curved Path

عندما يجري سائل في مسار منحنٍ، فإن سرعته تتغير وفق أي خط تيار، بسبب حدوث تغير في اتجاه متجه السرعة، بغض النظر عن حدوث تغير في مقداره أم لا. فلو أخذ أنبوب التيار المبين في الشكل (٤-٢٤)، سنجد أن جريان السائل حول المنحني يحدث تغير في اتجاه سرعته، أي أنه سيتسارع باتجاه مركز انحناء أنبوب التيار. واستناداً إلى قانون نيوتن الثاني، فإن محصلة القوى المؤثرة على أي عنصر من أنبوب التيار في الاتجاه القطري تساوي جداء كتلة العنصر في تسارعه في ذلك الاتجاه.



الشكل (٤-٢٤). الجريان في مسار منحني [3]

بفرض أن (V, p) تمثل الضغط وسرعة جريان التيار الموافق لنصف القطر r، وأن $(V + \delta V, p + \delta p)$ تمثل الضغط وسرعة جريان التيار الموافق لنصف القطر $(r + \delta r)$. فبناء على ذلك يمكن كتابة:

كتلة السائل الموجود ضمن حجم التحكم $= \rho \cdot a \cdot dr$

التسارع في الاتجاه القطري في مركز الحجم $= \dfrac{\left(V + \dfrac{\delta V}{2}\right)^2}{\left(r + \dfrac{\delta r}{2}\right)}$

محصلة قوى الضغط على حجم التحكم في الاتجاه القطري = $\delta p \cdot a$

وبتطبيق قانون نيوتن الثاني في الاتجاه القطري، نجد أن:

$$\delta p \cdot a = \rho \cdot a \cdot \delta r \cdot \frac{\left(V + \frac{\delta V}{2}\right)^2}{\left(r + \frac{\delta r}{2}\right)} \qquad (١٢٠-٤)$$

وباعتبار أن $\delta V << V, \delta r << r$ ، فإنه يمكن كتابة المعادلة السابقة على الشكل:

$$\delta p = \rho \cdot \delta r \cdot \frac{V^2}{r} \qquad (١٢١-٤)$$

وبما أن الوجه الخارجي والداخلي لحجم التحكم يقعان على خطي تيار متحـــاورين، وأن السرعة والضغط مختلفان على هذين الخطين، فإن الفرق في الطاقة مابين الخطـــين يساوي:

$$\delta E = \frac{(V + \delta V)^2 - V^2}{2 \cdot g} + \frac{(p + \delta p) - p}{\gamma} \qquad (١٢٢-٤)$$

أو:

$$\delta E = \frac{2 \cdot V \delta V}{2 \cdot g} + \frac{\delta p}{\rho \cdot g} \qquad (١٢٣-٤)$$

وبالتقسيم على δr ، نجد أن:

$$\frac{\delta E}{\delta r} = \frac{V}{g} \cdot \frac{\delta V}{\delta r} + \frac{\delta p}{\rho \cdot g \cdot \delta r} \qquad (١٢٤-٤)$$

وبالتعويض عن δp بقيمتها من المعادلة (٤-١٢١) في المعادلة السابقة، نحصل على:

$$\frac{\delta E}{\delta r} = \frac{V}{g} \cdot \frac{\delta V}{\delta r} + \frac{V^2}{g \cdot r} = \frac{V}{g} \cdot \left(\frac{\delta V}{\delta r} + \frac{V}{r}\right) \qquad (١٢٥-٤)$$

وعندما يكون $\delta r \to 0$ ، تصبح المعادلة السابقة كما يلي:

$$\frac{dE}{dr} = \frac{V}{g} \cdot \left(\frac{dV}{dr} + \frac{V}{r}\right) \qquad (١٢٦-٤)$$

حيث تمثل هذه المعادلة، المعادلة العامة للحركة الدوامية المستوية. ويطلق على الحـــد

$\left(\frac{dV}{dr}+\frac{V}{r}\right)$ مصطلح دوامية السائل *Vorticity*.

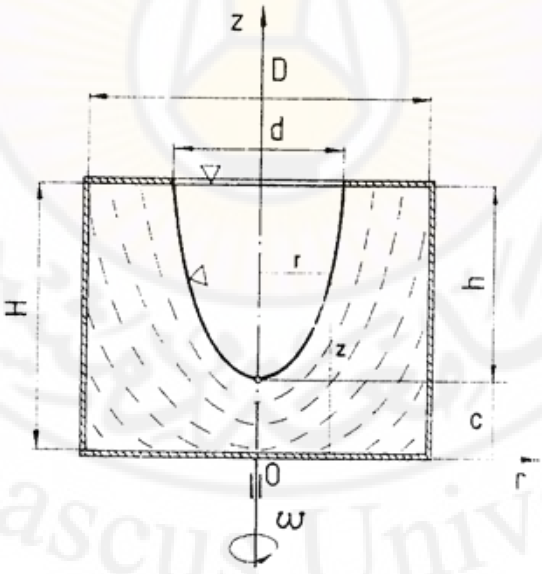
٤-١٢-٤. الحركة الدوامية Vortex Motion

تشكل خطوط التيار في الحركة الدوامية، مجموعة من الدوائر المركزية، ويترافق ذلك تغير في الطاقة الكلية لواحدة الوزن. وسنعرض فيما يلي لحالين عمليتين هامتين للحركة الدوامية هما: الدوامة القسرية، والدوامة الحرة.

٤-١٢-٤-١. الدوامة القسرية Forced Vortex

الدوامة القسرية ***Forced Vortex***، هي حركة دوامية تحصل بفعل خارجي ميكانيكي (غالبا محرك).

لنأخذ وعاءً يحتوي على سائل ويدور بسرعة زاوية ثابتة، أي أن السائل في الوعاء يتعرض لحركة قسرية (الشكل ٤-٢٥). وهو يدور كجسم صلب بسرعة زاوية ثابتة ω تساوي السرعة الزاوية للوعاء، وبناء عليه يكون لدينا:



الشكل (٤-٢٥). الدوامة القسرية [7]

$$\frac{V}{r}=\omega \qquad (١٢٧-٤)$$

و:

$$\frac{dV}{dr} = \omega \qquad (١٢٨-٤)$$

وبتعويض هاتين العلاقتين في المعادلة (٤-١٢٦)، نجد أن:

$$\frac{dE}{dr} = \frac{\omega \cdot r}{g} \cdot (\omega + \omega) = \frac{2 \cdot \omega^2 \cdot r}{g} \qquad (١٢٩-٤)$$

وبالتكامل يكون:

$$E = \frac{\omega^2 \cdot r^2}{g} + C \qquad (١٣٠-٤)$$

حيث: C – ثابت التكامل. ومن أجل أي نقطة ما من السائل، لدينا:

$$E = \frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2 \cdot g} + z = \frac{p}{\gamma} + \frac{\omega^2 \cdot r^2}{2 \cdot g} + z \qquad (١٣١-٤)$$

وبالتعويض في المعادلة (٤-١٣٠)، نحصل على:

$$\frac{p}{\gamma} + z = \frac{\omega^2 \cdot r^2}{2 \cdot g} + C \qquad (١٣٢-٤)$$

وعند أي مستوٍ، حيث $z = Const$ ، تأخذ المعادلة السابقة الشكل التالي:

$$\frac{p}{\gamma} = \frac{\omega^2 \cdot r^2}{2 \cdot g} + Const \qquad (١٣٣-٤)$$

أي أنه من أجل قيمة ثابتة للسرعة الزاوية، تكون قيمة الضغط عند أي مستوٍ متناسبة مع مربع نصف القطر.

إذا كان للسائل الدائر سطحاً حراً، فإن الضغط عند هذا السطح يكون مساوياً للضغط الجوي، أي أنه يساوي الصفر. وبتعويض $\frac{p}{\gamma} = 0$ في المعادلة (٤-١٣٢)، نحصل على معادلة منحني سطح السائل:

$$z = \frac{\omega^2 \cdot r^2}{2 \cdot g} + C \qquad (١٣٤-٤)$$

أي أن السطح الحر للسائل هو عبارة عن قطع مكافئ دوراني.

٤-٤-١٢-٢. الدوامة الحرة Free Vortex

الدوامة الحرة ***Free Vortex*** هي حركة دوامية طبيعية تحصل دون فعل خارجي. وهي تشاهد بشكلٍ واضح أثناء تفريغ السوائل عبر الفتحات والبالاليع، وذلك عندما يكون ارتفاع الماء فوق الفتحة صغيراً نسبياً. وتكون خطوط التيار في الدوامة الحرة على شكل دوائر مركزية، وتتغير السرعة مع القطر بحيث لا يكون هناك تغير في الطاقة الكلية لواحدة الوزن مع نصف القطر، أي أن: $\frac{dE}{dr} = 0$. وبالتعويض في المعادلة (٤-١٢٦)، نجد أن:

$$\frac{V}{g} \cdot \left(\frac{dV}{dr} + \frac{V}{r} \right) = 0 \qquad (١٣٥-٤)$$

أو:

$$\frac{dV}{dr} + \frac{V}{r} = 0 \qquad (١٣٦-٤)$$

ومنه:

$$\frac{dV}{V} + \frac{dr}{r} = 0 \qquad (١٣٧-٤)$$

وبالتكامل ينتج لدينا:

$$\ln V + \ln r = Const \qquad (١٣٨-٤)$$

أو:

$$V \cdot r = C \qquad (١٣٩-٤)$$

حيث: C - ثابت يعرف بشدة الدوامة.

إن السرعة عند أي نصف قطر تكون مساوية:

$$V = \frac{C}{r} \qquad (١٤٠-٤)$$

وبما أنه عند أية نقطة من السائل لدينا:

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2 \cdot g} = E$$

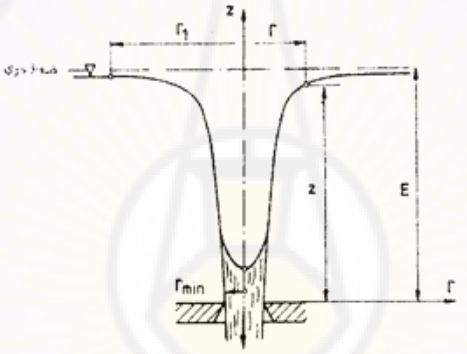
فإنه بعد التعويض بالسرعة V من المعادلة (٤-١٤٠) في المعادلة السابقة، نحصل على:

$$z+\frac{p}{\gamma}+\frac{C^2}{2\cdot g\cdot r^2}=E \qquad (١٤١-٤)$$

وإذا كان للسائل سطحاً حراً، عندها يكون: $\frac{p}{\gamma}=0$، وبالتالي تأخذ معادلة السطح الحر للدوامة الحرة الصيغة التالية:

$$z=E-\frac{C^2}{2\cdot g\cdot r^2} \qquad (١٤٢-٤)$$

وهي معادلة قطع زائد يقارب محور الدوران والمستوي الأفقي المار من $(z=E)$، كما في الشكل (٤-٢٦).



الشكل (٤-٢٦). الدوامة الحرة [7]

ومن أجل أي مستوٍ أفقي، تكون z ثابتة، والتغير في الضغط يعطى في المعادلة:

$$\frac{p}{\gamma}=(E-z)-\frac{C^2}{2\cdot g\cdot r^2} \qquad (١٤٣-٤)$$

نلاحظ من المعادلة السابقة أنه في حالة الدوامة الحرة، يتناقص الضغط وتزداد السرعة المحيطية عندما نتحرك باتجاه المركز.

مثال ٤-٧

تقع النقطة A على السطح الحر لدوامة حرة، وتبعد عن مركزها بمقدار $r_1=200mm$ وعن مستوى المقارنة $z_A=125mm$. فإذا كان بعد السطح الحر للسائل عن مستوى المقارنة هو $180mm$. احسب ارتفاع النقطة B عن مستوى

المقارنة، إذا كانت واقعة على سطح الدوامة وتبعد عن المركز $r_B = 100mm$.

الحل:

بالنسبة للنقطة A ، لدينا:

$$E - z_A = \frac{C^2}{2 \cdot g \cdot r_A^2}$$

ومنه:

$$\frac{C^2}{2 \cdot g} = r_A^2 \cdot (E - z_A)$$

إن E تمثل الضاغط فوق مستوى المقارنة على مسافة لانهائية من محور الدوامة حيث يكون تأثيرها مهملاً، ومنه:

$$E = 180mm = 0.18m$$

كذلك لدينا:

$$r_A = 0.2m, z_A = 0.125$$

وبالتعويض، نحصل على:

$$\frac{C^2}{2 \cdot g} - 0.2^2 \cdot (0.18 - 0.125) = 2.2 \times 10^{-3} m^3$$

أما بالنسبة للنقطة B ، فلدينا:

$$E - z_B = \frac{C^2}{2 \cdot g \cdot r_B^2}$$

ومنه:

$$z_B = E - \frac{C^2}{2 \cdot g \cdot r_B^2}$$

وبالتعويض بالقيم العددية، نجد أن:

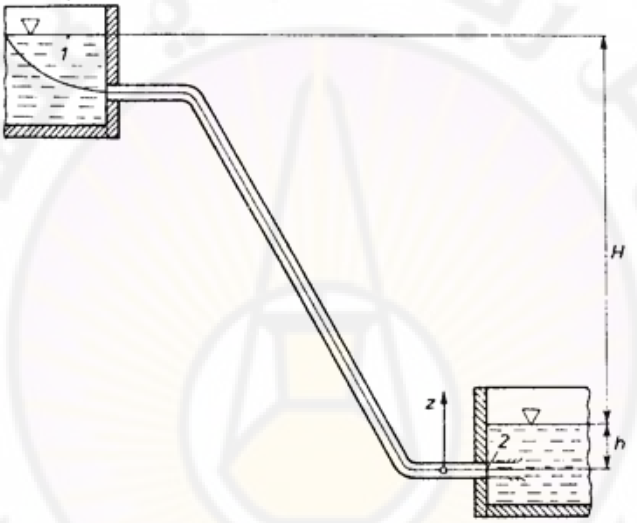
$$z_B = 0.18 - \frac{2.2 \times 10^{-3}}{0.1^2} = -0.04m$$

أي أن النقطة B تقع أسفل مستوى المقارنة بمسافة تساوي $40mm$.

مسائل محلوله حول الفصل الرابع

المسألة الأولى

خزانان كبيران مفتوحان من الأعلى. فرق المنسوب بينهما H ، ويصل بينهما أنبوب كما هو مبين في الشكل. احسب سرعة الجريان في هذا الأنبوب.



الحل:

باختيار مستوى مقارنة يمر من النقطة 2 (نقطة الدخول إلى الخزان السفلي)، وبتطبيق معادلة برنوللي بين النقطتين 1,2، يمكن كتابة:

$$\frac{p_1}{\gamma}+\frac{V_1^2}{2\cdot g}+z_1=\frac{p_2}{\gamma}+\frac{V_2^2}{2\cdot g}+z_2$$

وباعتبار أن سطح الخزان العلوي واسع ويتعرض للضغط الجوي، لذلك يكون لدينا:

$$\frac{p_1}{\gamma}=0, V_1=0$$

ولدينا أيضاً:

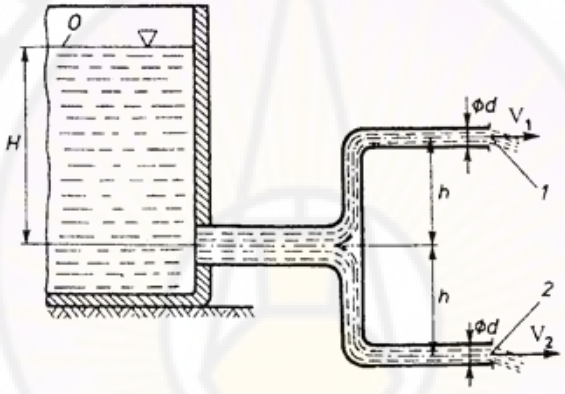
$$z_1=H+h, z_2=0, \frac{p_2}{\gamma}=h$$

وبالتعويض في معادلة برنوللي الواردة أعلاه، نجد أن:

$$V_2 = \sqrt{2 \cdot g \cdot H}$$

المسألة الثانية

يخرج الماء من خزان مفتوح عبر أنبوبين قطر كل منهما d، والمسافة الشاقولية بينهما $2 \cdot h = 2.4m$، كما هو في الشكل. احسب قيمة ارتفاع الماء في الخزان H، بحيث تكون الغزارة الخارجة من الأنبوب السفلي مساوية ضعف الغزارة الخارجة من الأنبوب العلوي. مع إهمال الفواقد.



الحل:

بتطبيق معادلة برنوللي بين النقطة 0 وكل من النقطتين 1,2 على التوالي، واعتبار أن الخزان كبير ويتعرض للضغط الجوي، نجد أن:

$$V_1 = \sqrt{2 \cdot g \cdot (H - h)}$$

و:

$$V_2 = \sqrt{2 \cdot g \cdot (H + h)}$$

إن التصريف الخارج من كل أنبوب يساوي:

$$Q_1 = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot (H - h)}$$

و:

$$Q_2 = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot (H + h)}$$

ومن شرط المسألة لدينا:

$$Q_2 = 2 \cdot Q_1$$

وبالتعويض في الشرط السابق، نجد أن:

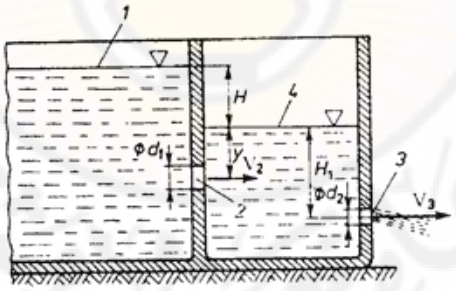
$$\frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot (H + h)} = 2 \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot (H - h)}$$

وأخيراً يكون:

$$H = \frac{5}{3} \cdot h = 2m$$

المسألة الثالثة

خزانان متجاوران مكشوفان، يحتويان على فتحتين دائريتين قطر كل منهما d_1, d_2. فإذا كان الخزان الأيسر واسع جداً ومنسوب الماء فيه ثابت، والأيمن صغير. احسب النسبة d_1 / d_2، بحيث يبقى منسوب الماء في الخزان الأيمن ثابتاً. علماً أن $H = 1m, H_1 = 1.5m$.



الحل:

بتطبيق معادلة برنوللي بين النقطتين 1,4 ثم بين النقطتين 4,3 على التوالي، نجد أن:

$$V_2 = \sqrt{2 \cdot g \cdot H}$$

$$V_3 = \sqrt{2 \cdot g \cdot H_1}$$

وحتى يبقى منسوب الماء في الخزان الأيمن ثابتاً، يجب أن تكون الغزارة الآتية إليه مساوية الغزارة الخارجة منه، أي أن:

$$Q_3 = Q_2$$

أو:

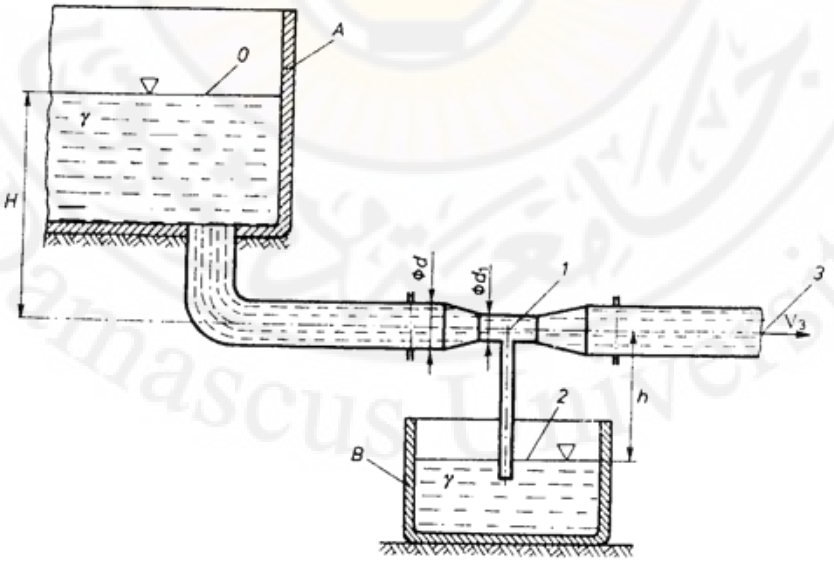
$$\frac{\pi \cdot d_2^2}{4} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot H_1} = \frac{\pi \cdot d_1^2}{4} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot H}$$

ومنه نجد، بعد التعويض بالقيم العددية أن:

$$\frac{d_1}{d_2} = \left(\frac{H_1}{H}\right)^{0.25} = 1.11$$

المسألة الرابعة

احسب القيمة الدنيا للإرتفاع H الموضحة على الشكل، بحيث يستطيع الماء الموجود في الخزان B الصعود عبر الأنبوب الشاقولي السفلي، والدخول إلى الأنبوب الأفقي عند النقطة 1. علماً أن الخزانين مكشوفان، وأن الأبعاد هي $d = 300mm, d_1 = 200mm, h = 4m$، وأن الماء عند النقطة 3 يخرج إلى الفضاء الخارجي، وأن جميع الضياعات الهيدروليكية مهملة.



الحل:

بتطبيق معادلة برنوللي بين النقطتين 0,3 ثم بين النقطتين 0,1، يكون لدينا:

$$V_3 = \sqrt{2 \cdot g \cdot H}$$

و:

$$\frac{V_1^2}{2 \cdot g} = H - \frac{p_1}{\gamma}$$

ومن معادلة الاستمرار، ينتج أن:

$$V_1 \cdot \frac{\pi \cdot d_1^2}{4} = V_3 \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4}$$

أو:

$$V_1 \cdot d_1^2 = V_3 \cdot d^2$$

ومنه:

$$V_1 = V_3 \cdot \frac{d^2}{d_1^2}$$

وبالتعويض في العلاقات السابقة، نجد أن:

$$V_1 = \sqrt{2 \cdot g \cdot H} \cdot \frac{d^2}{d_1^2}$$

أو:

$$\frac{2 \cdot g \cdot H \cdot \frac{d^4}{d_1^4}}{2 \cdot g} - H - \frac{p_1}{\gamma}$$

وبالتالي نحصل على:

$$H \cdot \frac{d^4}{d_1^4} = H - \frac{p_1}{\gamma}$$

ولكي يستطيع الماء الصعود والدخول إلى الأنبوب الأفقي عند النقطة 1، يجب أن يكون:

$$\frac{p_1}{\gamma} = -h$$

وبالتعويض، نجد أن:

$$H \cdot \frac{d^4}{d_1^4} = H + h$$

أو:

$$H \cdot \frac{d^4}{d_1^4} - H = h$$

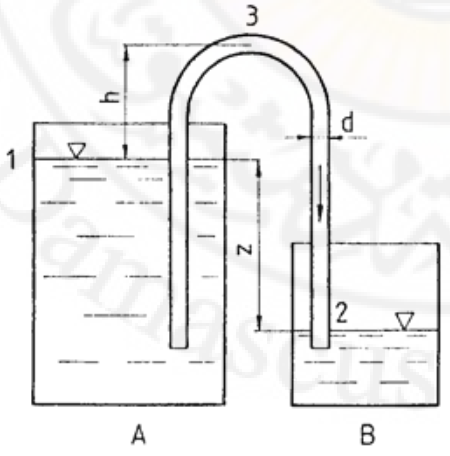
وأخيراً:

$$H_{min} = \frac{h}{\left(\frac{d}{d_1}\right)^4 - 1}$$

وبالتعويض بالمعطيات العددية، نستنتج أن:

$$H_{min} = \frac{4}{(1.5)^4 - 1} \approx 1m$$

المسألة الخامسة



خزانان مكشوفان A, B ، يصل بينهما سيفون، كما في الشكل. احسب قطر السيفون بحيث تكون الغزارة المتدفقة من الخزان A إلى الخزان B مساوية $Q = 27.8 \times 10^{-3} m^3/s$. ثم احسب قيمة الضغط النسبي السائد في أعلى السيفون عند النقطة 3. باعتبار أن: $z = h = 3m$ ، وأن الضياعات الهيدروليكية مهملة.

الحل:

بتطبيق معادلة برنوللي بين النقطتين 1,2، نجد أن سرعة الجريان في السيفون تساوي:

$$V = \sqrt{2 \cdot g \cdot z} = \sqrt{2 \cdot 9.81 \cdot 3} = 7.67 m/s$$

ولكن:

$$Q = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot V$$

ومنه:

$$d = \sqrt{\frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot V}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 27.8 \times 10^{-3}}{\pi \cdot 7.67}} = 0.068m = 68mm$$

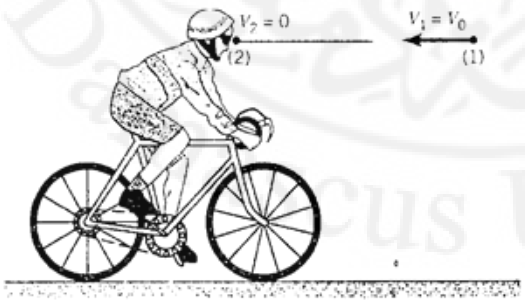
ولحساب الضغط عند أعلى السيفون، نطبق برنوللي بين النقطتين 1,3، فنجد أن:

$$\frac{p_3}{\gamma} = -\left(\frac{V^2}{2 \cdot g} + h\right)$$

وبالتعويض بالقيم العددية، نحصل على:

$$\frac{p_3}{\gamma} = -\left(\frac{7.67^2}{2 \cdot g} + 3\right) = -6m \Rightarrow p_3 = -9.81 \cdot 1000 \cdot 6 = -58.86kPa$$

المسألة السادسة



تسير دراجة عادية بسرعة منتظمة مقدارها $V_0 = 10m/s$، كما في الشكل. احسب الفرق بين ضغط المحيط الخارجي، والضغط المطبق على وجه سائق دراجة. بافتراض أن الكتلة النوعية للهواء $\rho_{air} = 1.25kg/m^3$.

الحل:

بتطبيق معادلة برنوللي بين النقطتين 1,2 المبينتين على الشكل السابق، والواقعتين على نفس المنسوب، بحيث تكون النقطة الأولى 1 بعيدة عن السائق، والنقطة الثانية 2 واقعة على وجه السائق مباشرة، نجد أن:

$$\frac{p_1}{\gamma}+\frac{V_1^2}{2\cdot g}=\frac{p_2}{\gamma}+\frac{V_2^2}{2\cdot g}$$

إن النقطة 2 يمكن اعتبارها نقطة ركود، وبالتالي فإن $V_2=0$، كما أن سرعة الدراجة $V_0=V_1$. وبالتالي يكون لدينا:

$$\frac{p_1}{\gamma}+\frac{V_0^2}{2\cdot g}=\frac{p_2}{\gamma}$$

أو:

$$\frac{p_2}{\gamma}-\frac{p_1}{\gamma}=\frac{V_0^2}{2\cdot g}$$

ومنه:

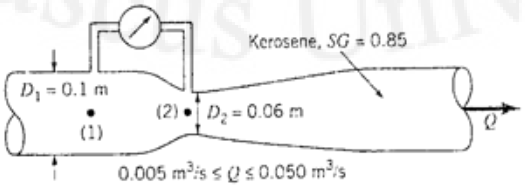
$$\Delta p=\rho\frac{V_0^2}{2}$$

بالتعويض بالقيم العددية المعطاة، نجد أن:

$$\Delta p=1.25\cdot\frac{10^2}{2}=62.5Pa$$

المسألة السابعة

لقياس تدفق الكيروسين في أنبوب، استخدم جهاز فنتوري المبين في الشكل، ولقياس فرق الضغط استخدم مقياس بوردون. فإذا كان مجال التدفق المتوقع في الأنبوب هو $0.005m^3/s\le Q\le 0.050m^3/s$. احسب مجال تغير الضغط، ليتم اختيار مقياس بوردون المناسب. علماً أن الكثافة النسبية للكيروسين $SG=0.85$.



الحل:

بتطبيق معادلة برنوللي بين النقطتين 1,2، نجد أن:

$$\frac{p_1}{\gamma}+\frac{V_1^{\,2}}{2\cdot g}=\frac{p_2}{\gamma}+\frac{V_2^{\,2}}{2\cdot g}$$

ولدينا من معادلة الاستمرار:

$$Q=A_1\cdot V_1=A_2\cdot V_2$$

وبالحل المشترك، ينتج أن:

$$p_1-p_2=\frac{\rho}{2\cdot A_2^2}\cdot\left(1-\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\right)\cdot Q^2$$

وبناءً عليه، يكون فرق الضغط عند التصريف $Q=0.005m^3/s$ مساوياً:

$$p_1-p_2=1.16kPa$$

أما عند التصريف $Q=0.05m^3/s$، فيكون فرق الضغط مساوياً:

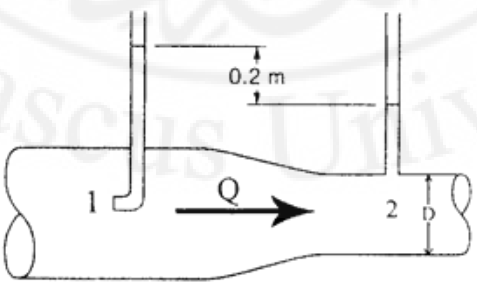
$$p_1-p_2=116kPa$$

أي أن مقياس بوردون يجب أن يكون قادراً على قياس الضغط في المجال:

$$1.16kPa\le\Delta p\le 116kPa.$$

المسألة الثامنة

بناء على قراءات البيزومتر وأنبوب بيتو، أحسب تصريف الماء المار في الوصلة المتضيقة المبينة في الشكل. علماً أن $D=100mm$.



الحل:

بتطبيق معادلة برنوللي بين النقطتين 1.2، نجد أن:

$$\frac{p_1}{\gamma}+\frac{V_1^2}{2\cdot g}=\frac{p_2}{\gamma}+\frac{V_2^2}{2\cdot g}$$

لكن ارتفاع الماء في أنبوب بينو يمثل مجموع الضاغط الحركي والضغط عند النقطة 1، أي أن:

$$h_1=\frac{p_1}{\gamma}+\frac{V_1^2}{2\cdot g}$$

أما ارتفاع الماء في البيزومتر فيمثل الضغط عند النقطة 2، أي أن:

$$h_2=\frac{p_2}{\gamma}$$

وبالحل المشترك، ينتج لدينا:

$$h_1-h_2=0.2=\frac{V_2^2}{2\cdot g}$$

ومنه:

$$V_2=\sqrt{2\cdot 9.81\cdot 0.2}=1.98m/s$$

وبناء عليه، يكون التصريف المار في الوصلة مساوياً:

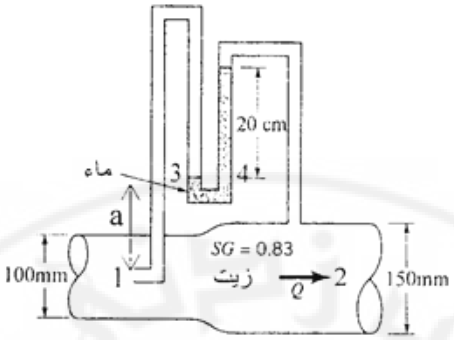
$$Q=\frac{\pi\cdot D^2}{4}\cdot V_2$$

وبالتعويض نجد أن:

$$Q=\frac{\pi\cdot 0.1^2}{4}=15.54\times 10^{-3}m^3/s=15.54\ell/s$$

المسألة التاسعة:

احسب التصريف المار في الوصلة المبينة في الشكل. علماً أن السائل الجاري هو زيت كثافته النسبية $SG=0.85$. وأن السائل المستخدم في المانومتر هو الماء، كما يشير المانومتر إلى انحراف مقداره $h=20cm$.



الحل:

عند النقطة 1 يكون الضاغط الكلي المؤثر على فرع المانومتر مساوياً:

$$\frac{V_1^2}{2\cdot g}+\frac{p_1}{\gamma_{oil}}$$

والضغط الكلي مساوياً:

$$p_1+\frac{1}{2}\cdot\rho_{oil}\cdot V_1^2$$

أما عند النقطة 2، فالضغط المؤثر على فرع المانومتر هو p_2 فقط.

فإذا طبقت معادلات توازن السائل في المانومتر، يمكن كتابة العلاقة:

$$p_3=p_1+\frac{1}{2}\cdot\rho_{oil}\cdot V_1^2-a\cdot\gamma_{oil}$$

والعلاقة:

$$p_4=p_2-\gamma_{oil}\cdot(a+h)+\gamma_{H2O}\cdot h$$

وبما أن الضغط في النقطتين 3,4 له نفس القيمة، لأنهما تقعان في مستوٍ أفقي واحد من سائل ساكن، لذلك يكون لدينا:

$$p_3=p_4$$

بالتعويض، نجد أن:

$$p_1+\frac{1}{2}\cdot\rho_{oil}\cdot V_1^2-a\cdot\gamma_{oil}=p_2-\gamma_{oil}\cdot(a+h)+\gamma_{H2O}\cdot h$$

أو:

$$p_2 - p_1 = +\frac{1}{2}\cdot\rho_{oil}\cdot V_1^2 - a\cdot\gamma_{oil} + \gamma_{oil}\cdot(a+h) - \gamma_{H2O}\cdot h$$

ومنه:

$$p_2 - p_1 - \frac{1}{2}\cdot\rho_{oil}\cdot V_1^2 = h\cdot(\gamma_{oil} - \gamma_{H2O})$$

وبتطبيق معادلة برنوللي بين النقطتين 1,2، نجد أن:

$$\frac{p_1}{\gamma_{oil}} + \frac{V_1^2}{2\cdot g} = \frac{p_2}{\gamma_{oil}} + \frac{V_2^2}{2\cdot g}$$

أو:

$$\frac{p_2}{\gamma_{oil}} - \frac{p_1}{\gamma_{oil}} = \frac{V_1^2}{2\cdot g} - \frac{V_2^2}{2\cdot g}$$

ومنه، يكون لدينا:

$$p_2 - p_1 = \frac{1}{2}\cdot\rho_{oil}\cdot V_1^2 - \frac{1}{2}\cdot\rho_{oil}\cdot V_2^2$$

أو:

$$p_2 - p_1 - \frac{1}{2}\cdot\rho_{oil}\cdot V_1^2 = -\frac{1}{2}\cdot\rho_{oil}\cdot V_2^2$$

ومنه، نستطيع أن نكتب أن:

$$-\frac{1}{2}\cdot\rho_{oil}\cdot V_2^2 = h\cdot(\gamma_{oil} - \gamma_{H2O})$$

وبعد الإصلاح، نحصل على:

$$V_2 = \sqrt{2\cdot h\cdot g\cdot\left(\frac{\rho_{H2O}}{\rho_{oil}} - 1\right)}$$

وبالتعويض، نجد أن:

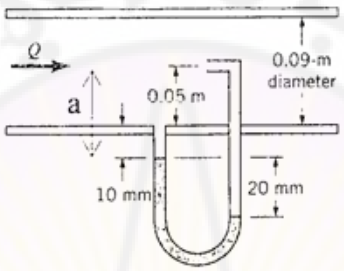
$$V_2 = \sqrt{2\cdot 0.2\cdot g\cdot\left(\frac{1}{0.83} - 1\right)} = 0.90 m/s$$

وأخيراً، يكون التصريف المار عبر الوصلة مساوياً:

$$Q = \frac{\pi \cdot 0.15^2}{4} \cdot 0.9 = 0.0159 m^3 / s$$

المسألة العاشرة

احسب التصريف المار في الأنبوب المبين في الشكل، بناء على قراءات المانومتر. علماً أن السائل المتدفق في الأنبوب هو الماء، وأن الكتلة النوعية لسائل المانومتر هي $\rho_m = 1700 kg / m^3$.



الحل:

بفرض أن السرعة والضغط داخل الأنبوب هما V, p. فتكون قيم الضغوط في المانومتر مساوية:

$$p_1 = p + a \cdot \gamma_{H2O} + h \cdot \gamma_m$$

و:

$$p_2 = p + \frac{1}{2} \cdot \rho_{H2O} \cdot V^2 + (a+h) \cdot \gamma_{H2O}$$

وباعتبار $p_1 = p_2$ ، لذلك يكون لدينا:

$$p + \frac{1}{2} \cdot \rho_{H2O} \cdot V^2 + (a+h) \cdot \gamma_{H2O} = p + a \cdot \gamma_{H2O} + h \cdot \gamma_m$$

ومنه:

$$\frac{1}{2} \cdot \rho_{H2O} \cdot V^2 = h \cdot \gamma_m - h \cdot \gamma_{H2O}$$

وبالتعويض نجد أن:

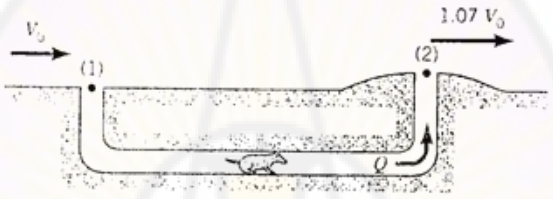
$$V_2 = \sqrt{2 \cdot h \cdot g \cdot \left(\frac{\rho_m}{\rho_{H2O}} - 1 \right)} = \sqrt{2 \cdot 0.2 \cdot g \cdot \left(\frac{1700}{1000} - 1 \right)} = 1.66 m / s$$

أما التصريف المار فيساوي:

$$Q = 1.66 \times \left(\pi \cdot 0.09^2 / 4\right) = 10.56\ell / s$$

المسألة الحادية عشرة

إن الحيوانات لا تعي معادلة برنوللي، لكنها تطبقها. فبعض الحيوانات تقوم بحفر جحر لها بين النقطتين 1،2، كما مبين في الشكل. وتختار أن تكون نهاية الجحر أعلى من بدايته بمقدار h، بحيث يؤمن لها الهواء النقي بشكل مستمر. كيف يمكن تفسير ذلك؟ افترض أن سرعة الهواء عند المخرج أعلى من السرعة عند المدخل بمقدار 7%، وأن الكتلة النوعية للهواء $\rho_{air} = 1.25kg/m^3$.



الحل:

من المعروف أن سرعة الرياح تزداد بزيادة الإرتفاع. فبفرض أنه عند النقطة 1 (المدخل) كانت السرعة V_0، فعند النقطة 2 (المخرج) سترتفع قيمة السرعة إلى $1.07 \cdot V_0$، لأن النقطة 2 أعلى من النقطة 1 بمقدار h.

بتطبيق معادلة برنوللي بين النقطتين 1،2، نجد أن:

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2 \cdot g} = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2 \cdot g} + h$$

وبفرض أن $V_0 = V_1$، يكون لدينا:

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_0^2}{2 \cdot g} = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{(1.07 \cdot V_0)^2}{2 \cdot g} + h$$

أو:

$$\frac{p_1 - p_2}{\gamma} = \frac{V_0^2}{2 \cdot g} \cdot \left(1.07^2 - 1\right) + h$$

ومنه:

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \left(\frac{1.07^2 - 1}{2}\right) \cdot \rho_{air} \cdot V_0^2 + \rho_{air} \cdot g \cdot h$$

وبالتالي فإن:

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \left(\frac{1.07^2 - 1}{2}\right) \cdot 1.25 \cdot V_0^2 + 1.25 \cdot 9.81 \cdot h$$

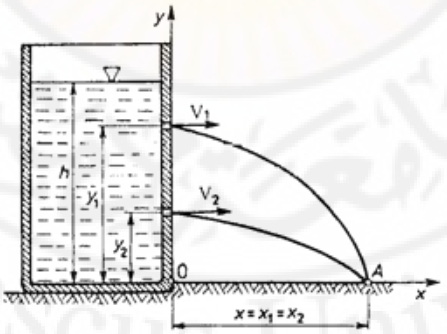
وأخيراً، يكون لدينا:

$$\Delta p = p_1 - p_2 = 90.6 \times 10^{-3} \cdot V_0^2 + 12.26 \cdot h$$

نلاحظ أنه نتيجة لتشكل فرق في الضغط بين مدخل المحرر ومخرجه، سوف يتدفق الهواء النقي فيه بشكل مستمر.

المسألة الثانية عشرة

يحتوي خزان مكشوف من الأعلى على الماء بعمق h. وقد نفذت في أحد جدرانه الشاقولية فتحتان صغيرتان على ارتفاع y_1, y_2 من قاع الخزان، كما في الشكل. أوجد العلاقة بين y_1, y_2 بحيث يصدم تيارا الماء الخارجان من الفتحتين نفس النقطة A. بافتراض أن معامل السرعة ثابت للفتحتين، وأن منسوب سطح الماء ثابت في الخزان.



الحل:

لدينا من معادلة برنوللي:

$$V_1 = C_v \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot (h - y_1)}$$

و:

$$V_2 = C_{v2} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot (h - y_2)}$$

ومن معادلات الحركة يمكن للفتحة الأولى، كتابة العلاقتين:

$$x_1 = V_1 \cdot t_1$$

و:

$$y_1 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_1^2$$

وبحذف الزمن من العلاقتين السابقتين، نجد أن:

$$x_1^2 = \frac{2 \cdot y_1 \cdot V_1^2}{g}$$

أما بالنسبة للفتحة الثانية، فيكون:

$$x_2 = V_2 \cdot t_2$$

و:

$$y_2 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_2^2$$

ومنه:

$$x_2^2 = \frac{2 \cdot y_2 \cdot V_2^2}{g}$$

ولكي يصدم تيارا الماء نفس النقطة A، يجب أن يكون $x_2 = x_1$، أي أن:

$$\frac{2 \cdot y_1 \cdot V_1^2}{g} = \frac{2 \cdot y_2 \cdot V_2^2}{g}$$

ومنه:

$$y_1 \cdot V_1^2 = y_2 \cdot V_2^2$$

أو:

$$y_1 \cdot 2 \cdot g \cdot (h - y_1) = y_2 \cdot 2 \cdot g \cdot (h - y_2)$$

وأخيراً، يكون:

$$y_1 \cdot (h - y_1) = y_2 \cdot (h - y_2)$$

وبحل المعادلة السابقة نجد الحلين التاليين:

$$y_1 = y_2$$

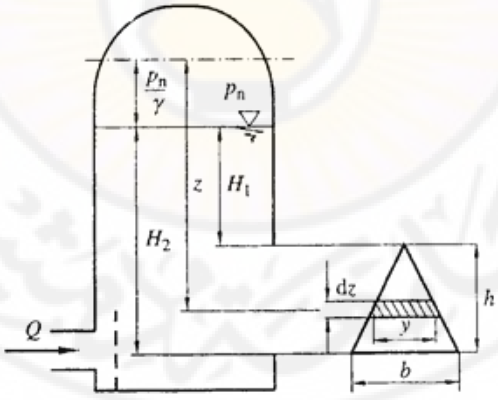
أو

$$y_1 + y_2 = h$$

إن الحل الأول يعني أن تكون الفتحتان في نفس الموقع وهذا مخالف للفرض، لذلك فإن الحل الثاني هو المقبول.

المسألة الثالثة عشرة

ما هي الغزارة التي يجب أن يزود بها الخزان المبين في الشكل، ليبقى منسوب الماء فيه ثابتاً. علماً بأن الخزان يحتوي على فتحة مثلثية، ويتعرض عند سطحه إلى ضغط مقداره $\frac{p_n}{\gamma} = 1m$. وأن: $H_1 = 4m, H_2 = 5m, b = 1m$، وأن ثابت تصريف الفتحة $C_d = 0.65$.



الحل:

بفرض أن:

$$a_1 = H_1 + \frac{p_n}{\gamma} = 5m$$

$$a_2 = H_2 + \frac{p_n}{\gamma} = 6m$$

نتأكد من نوع الفتحة:

$$\frac{h}{a_1 + \frac{2}{3}\cdot h} = \frac{1}{5 + \frac{2}{3}} = 0.18 > 0.1$$

إذاً فالفتحة كبيرة. ويعطى التصريف عبرها بالعلاقة:

$$Q = C_d \cdot \sqrt{2 \cdot g} \int_{a_1}^{a_2} y \cdot z^{1/2} \cdot dz$$

ومن تشابه المثلثات لدينا:

$$y = \frac{b}{H_2 - H_1} \cdot (z - a_1)$$

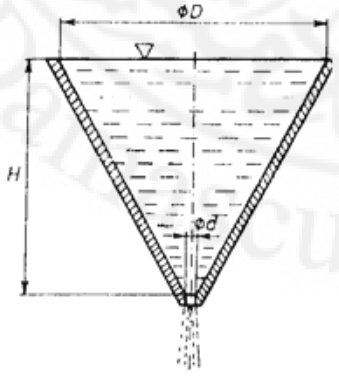
وبالتعويض، نجد أن:

$$Q = C_d \cdot \sqrt{2 \cdot g} \cdot \frac{b}{H_2 - H_1} \cdot \int_{a_1}^{a_2} (z - a_1) \cdot z^{1/2} \cdot dz$$

ومنه:

$$Q = 0.65 \cdot \sqrt{2 \cdot g} \cdot \frac{1}{5-4} \cdot \int_{5}^{6} (z-5) \cdot z^{1/2} \cdot dz = 3.45 m^3/s$$

المسألة الرابعة عشرة



احسب الزمن اللازم لتفريغ الخزان المخروطي المبين في الشكل تفريغاً كلياً. علماً أنه يحتوي في أسفله على فتحة دائرية قطرها d، وأن ارتفاعه الكلي H، وأن قطر قاعدته D. بافتراض أن معامل تصريف الفتحة C_d.

الحل:

يحسب الزمن اللازم لتفريغ الخزان من العلاقة:

$$t = \frac{1}{C_d \cdot A_0 \cdot \sqrt{2 \cdot g}} \cdot \int_{z_2}^{z_1} A_z \cdot z^{-1/2} \cdot dz$$

حيث:

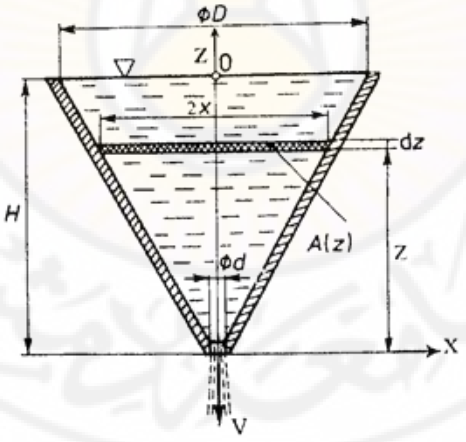
$$A_z = \pi \cdot x^2$$

ولكن من تشابه المثلثات على الشكل، لدينا:

$$x = \frac{D}{2 \cdot H} \cdot z$$

بالتالي فإن:

$$A_z = \pi \left(\frac{D}{2 \cdot H} \right)^2 \cdot z^2$$



وبالتعويض في علاقة زمن التفريغ، نحصل على:

$$t = \frac{\pi \cdot \left(\frac{D}{2 \cdot H} \right)^2}{C_d \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot \sqrt{2 \cdot g}} \cdot \int_0^H z^{3/2} \cdot dz$$

ومنه:

$$t = \frac{2 \cdot D^2}{5 \cdot C_d \cdot d^2} \cdot \sqrt{\frac{H}{2 \cdot g}}$$

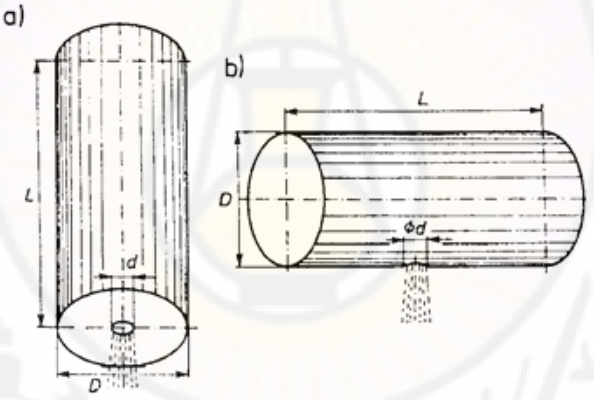
المسألة الخامسة عشرة

يطلب حساب الزمن الكلي اللازم لتفريغ خزان أسطواني، يبلغ قطره D، وارتفاعه H، ويحتوي على فتحة دائرية قطرها d. وذلك في حالتين:

a. الخزان موضوع بشكل شاقولي.

b. الخزان موضوع بشكل أفقي.

تطبيق: قارن بين الزمنين اللازمين لتفرغ الخزانين، وافترض في الحسابات المعطيات التالية: $H = 2m, D = 1m, d = 4cm, C_d = 0.6$.



الحل:

الحالة **a**:

لدينا:

$$t = \frac{1}{C_d \cdot A_0 \cdot \sqrt{2 \cdot g}} \cdot \int_{z_2}^{z_1} A_z \cdot z^{-1/2} \cdot dz$$

حيث:

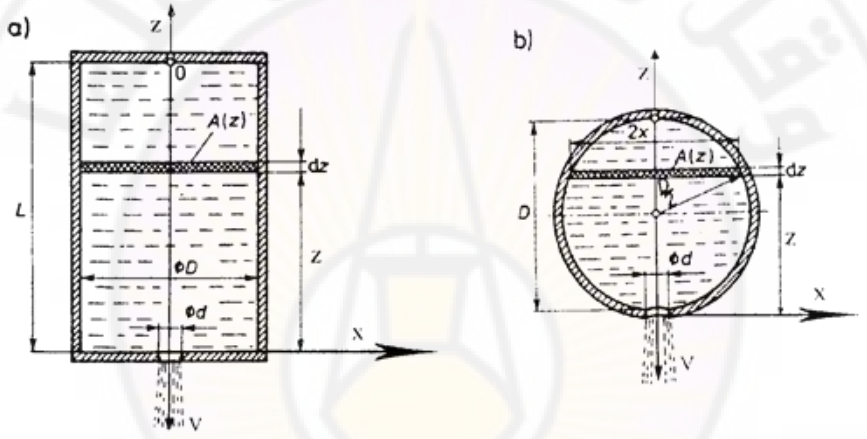
$$A_z = \frac{\pi \cdot D^2}{4}$$

ومنه:

$$t_1 = \frac{\frac{\pi \cdot D^2}{4}}{C_d \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot \sqrt{2 \cdot g}} \cdot \int_0^t z^{-1/2} \cdot dz$$

وبالتالي، نجد أن:

$$t_1 = \frac{2 \cdot D^2}{C_d \cdot d^2 \cdot \sqrt{2 \cdot g}} \cdot \sqrt{L}$$



الحالة b:

في هذه الحالة، لدينا:

$$A_z = 2 \cdot x \cdot L$$

ولكن:

$$\left(\frac{D}{2}\right)^2 = x^2 + \left(z - \frac{D}{2}\right)^2$$

ومنه:

$$x = \sqrt{z \cdot (D - z)}$$

وبالتعويض، نجد أن:

$$A_z = 2 \cdot L \cdot \sqrt{z \cdot (D - z)}$$

وبالتالي يكون الزمن اللازم لتفريغ الخزان مساوياً:

$$t_2 = \frac{2 \cdot L}{C_d \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot \sqrt{2 \cdot g}} \cdot \int_0^L (D - z)^{-1/2} \cdot dz$$

وبالمكاملة، نجد أن:

$$t_2 = \frac{16 \cdot L \cdot D \cdot \sqrt{D}}{3 \cdot \pi \cdot C_d \cdot d^2 \cdot \sqrt{2 \cdot g}}$$

تطبيق:

عندما يكون الخزان شاقولياً، يكون الزمن اللازم للتفريغ الكلي مساوياً:

$$t_1 = \frac{2 \cdot 1^2}{0.6 \cdot 0.04^2} \cdot \sqrt{\frac{2}{2 \cdot g}} = 665\,\text{sec} = 11.1\,\text{min}$$

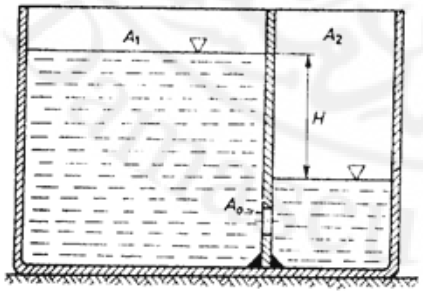
وعندما يكون الخزان أفقياً يكون زمن التفريغ مساوياً:

$$t_2 = \frac{16 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{1}}{3 \cdot \pi \cdot 0.6 \cdot 0.04^2 \cdot \sqrt{2 \cdot g}} = 799\,\text{sec} = 13.31\,\text{min}$$

نلاحظ أن زمن التفريغ في حال وضع الخزان شاقولياً أقصر منه في حال وضع الخزان أفقياً.

المسألة السادسة عشرة

تم تقسيم خزان إلى خزانين بواسطة جدار داخلي. ونفذت في هذا الجدار فتحة دائرية قطرها $d = 3cm$، كما في الشكل. والمطلوب حساب: ١- الزمن اللازم لكي يصبح سطح السائل في الخزانين على مستوٍ واحد، ٢- الزمن اللازم لرفع سطح الماء في الخزان الأيمن بمقدار $2m$ عما هو عليه. علماً أن:



$$H = 4m, A_1 = 2m^2, A_2 = 1m^2, C_d = 0.8.$$

الحل:

يحسب زمن تخفيض فرق المنسوب من H_1 إلى H_2 بين خزانين من العلاقة:

$$t = \frac{A_1 \cdot A_2}{C_d \cdot A_0 \cdot \sqrt{2 \cdot g} \cdot (A_1 + A_2)} \cdot \left(\sqrt{H_1} - \sqrt{H_2}\right)$$

في الحالة الأولى، لدينا: $H_1 = 4m, H_2 = 0$. وبالتعويض، نجد أن:

$$t = \frac{2 \cdot 1}{0.8 \cdot \frac{\pi \cdot 0.03^2}{4} \cdot \sqrt{2 \cdot g} \cdot (2+1)} \cdot \left(\sqrt{4} - \sqrt{0}\right) = 532.6 \sec$$

أما في الحالة الثانية، فعند رفع منسوب الخزان الأيمن $2m$ ينخفض منسوب الخزان الأيسر بمقدار $1m$، وبالتالي يكون لدينا: $H_1 = 4m, H_2 = 4 - 2 - 1 = 1m$. وبالتعويض، نجد أن:

$$t = \frac{2 \cdot 1}{0.8 \cdot \frac{\pi \cdot 0.03^2}{4} \cdot \sqrt{2 \cdot g} \cdot (2+1)} \cdot \left(\sqrt{4} - \sqrt{1}\right) = 266.3 \sec$$

المسألة السابعة عشرة

وعاء أسطواني الشكل، مغلق من الأعلى . قطر قاعدته $D = 0.2m$ ، وارتفاعه $H = 0.5m$. المطلوب حساب سرعة دوران الوعاء بحيث ينكشف قاعه، وذلك في حالتين:

- عمق الماء في الوعاء قبل التدوير $h = 0.2m$.
- عمق الماء في الوعاء قبل التدوير $h = 0.4m$.

علماً أن الضغط المطبق على سطح الماء في الوعاء هو الضغط الجوي.

الحل:

كما وجدنا سابقاً، فإن معادلة منحني سطح الماء المتشكل نتيجة دوران الوعاء تعطى بالصيغة:

$$z = \frac{\omega^2 \cdot r^2}{2 \cdot g} + C$$

لكي ينكشف قاع الوعاء، يجب أن يكون رأس القطع المكافئ الدوراني مماساً لهذا القاع، وعليه يجب أن يكون $C = 0$. وبالتالي تصبح معادلة منحني سطح الماء من الشكل:

$$z = \frac{\omega^2 \cdot r^2}{2 \cdot g}$$

ولحساب ارتفاع الدوامة المتشكلة h_1 بعد الدوران، نفترض أن هذا الإرتفاع لم يتجاوز ارتفاع الوعاء H ثم نتحقق من ذلك، وعليه نكتب:

$$\frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot h_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot h_1 + \frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot h$$

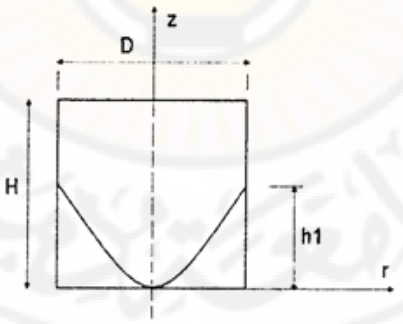
ومنه، نجد أن:

$$h_1 = 2 \cdot h$$

في الحالة الأولى:

$$h_1 = 2 \cdot 0.2 = 0.4m < 0.5m$$

وهذا يعني أن ارتفاع الدوامة لم يصل إلى أعلى الوعاء. وبناءً عليه نستطيع كتابة من أجل $z = h_1 \Rightarrow r = \frac{D}{2}$:



$$h_1 = \frac{\omega^2 \cdot D^2}{8 \cdot g}$$

أو:

$$2 \cdot h = \frac{\omega^2 \cdot D^2}{8 \cdot g}$$

ومنه:

$$\omega = \frac{4}{D} \cdot \sqrt{g \cdot h}$$

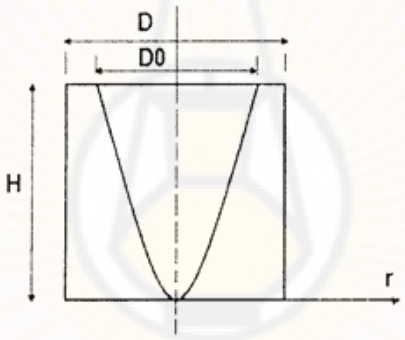
وبالتعويض، نجد أن:

$$\omega = \frac{4}{0.2} \cdot \sqrt{g \cdot 0.2} = 28 rad / \sec$$

في الحالة الثانية:

$$h_1 = 2 \cdot 0.4 = 0.8m > 0.5m$$

وهذا يعني أن ارتفاع الدوامة يكون أعلى من ارتفاع الوعاء. ولكن بسبب وجود الغطاء، لا يمكن للماء أن ينسكب خارجاً، لذلك سيكون ارتفاع الدوامة مساوياً لارتفاع الوعاء. وبناء عليه يمكن كتابة:



$$\frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot H = \frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot h + \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi \cdot D_0^2}{4} \cdot H$$

ومنه، نجد أن:

$$D_0 = D \cdot \sqrt{2 \cdot \left(1 - \frac{h}{H}\right)}$$

بالتعويض في معادلة سطح الدوامة، نجد:

$$H = \frac{\omega^2}{2 \cdot g} \cdot \frac{2 \cdot D^2 \cdot \left(1 - \frac{h}{H}\right)}{4}$$

ومنه:

$$\omega = \frac{2 \cdot H}{D} \cdot \sqrt{\frac{g}{H-h}}$$

وبالتعويض بالمعطيات الرقمية، يكون:

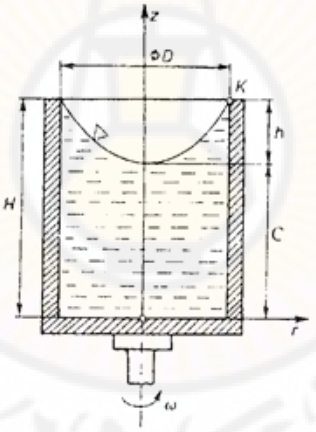
$$\omega = \frac{2 \cdot 0.5}{0.2} \cdot \sqrt{\frac{g}{0.5-0.4}} = 49.52 rad/\sec$$

المسألة الثامنة عشرة

وعاء أسطواني قطره D، وارتفاعه H، مملوء بشكل كامل بالماء. إذا دار بسرعة زاوية ω، احسب حجم الماء الذي يمكن أن ينسكب من الوعاء.

الحل:

عند دوران الوعاء بسرعة زاوية ω تتشكل دوامة قسرية، وسيكون منحني سطح الماء كما هو مبين في الشكل. وستنسكب كمية من الماء خارج الوعاء.



إن معادلة سطح الماء هي:

$$z = \frac{\omega^2 \cdot r^2}{2 \cdot g} + C$$

أو:

$$z - C = \frac{\omega^2 \cdot r^2}{2 \cdot g}$$

وعندما $r = \frac{D}{2}$ يكون $z = H$ و $H - C = h$. وبالتعويض، نجد أن:

$$h = \frac{\omega^2 \cdot D^2}{8 \cdot g}$$

ويكون حجم الماء المنسكب خارجاً مساوياً:

$$\forall = \frac{1}{2} \cdot \frac{\omega^2 \cdot D^2}{8 \cdot g} \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4}$$

ومنه:

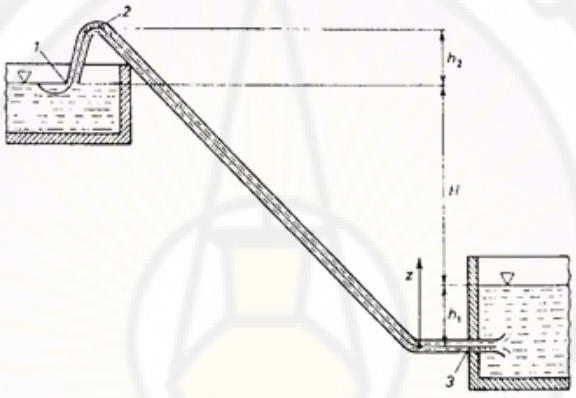
$$\forall = \frac{\pi \cdot \omega^2 \cdot D^4}{64 \cdot g}$$

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

مسائل غير محلوله حول الفصل الرابع

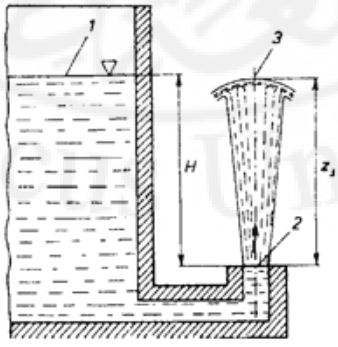
المسألة الأولى

احسب الغزارة المارة في الأنبوب الواصل بين الخزانين الموضحين على الشكل. بفرض أن فرق المنسوب بين الخزانين $H = 4m$ ، وأن قطر الأنبوب الواصل بينهما $d = 100mm$. ثم احسب قيمة الضغط النسبي والمطلق عند النقطة 2، إذا كان $h_2 = 2m$.



المسألة الثانية

يخرج الماء من خزان كبير عبر الفتحة 2 إلى الجو الخارجي، كما في الشكل. حسب بعد إهمال فواقد الإحتكاك، سرعة خروج الماء من هذه الفتحة. ثم حدد إلى أي ارتفاع z_3 يمكن للتيار المائي الخارج أن يصل. علماً أن $H = 3m$.

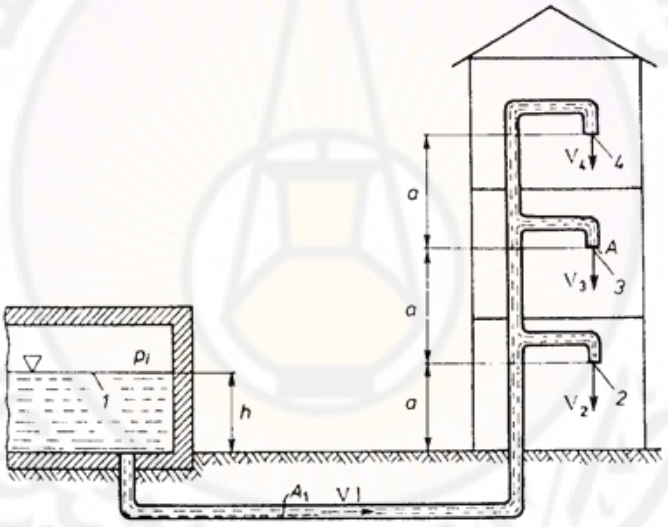


المسألة الثالثة

يتم تزويد بناء سكني مؤلف من ثلاثة طوابق بالماء من خزان يتعرض سطحه لضغط مقداره $p_1 = 80kPa$ ، كما في الشكل. فإذا علمت أن الارتفاع الطابقي $a = 3m$ ، وأن عمق الماء في الخزان $h = 2m$. المطلوب حساب:

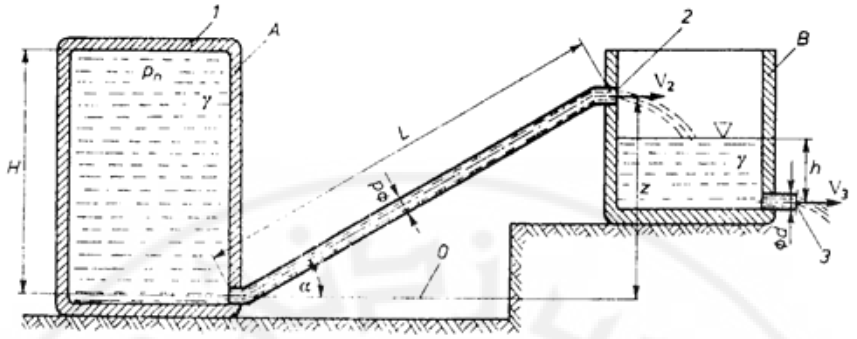
- سرعة خروج الماء من الفتحات الموجودة في الطوابق الثلاثة.
- سرعة الجريان في أنبوب التغذية الرئيس، علماً أن قطره يعادل ثلاثة أضعاف قطر الفتحة الواحدة.

افترض أن السائل مثالي.



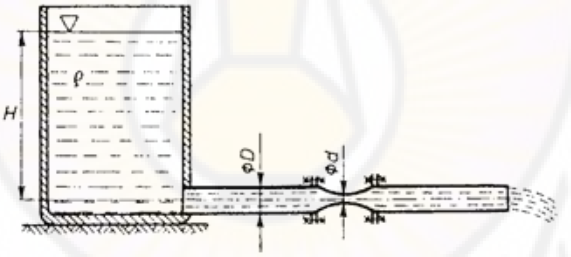
المسألة الرابعة

يبين الشكل خزانين كبيرين A, B . فإذا كان الضغط السائد في الخزان A يساوي $p_m = 0.07MPa$ ، وعمق الماء فيه $H = 5m$. أما الخزان B فهو مكشوف، وعمق الماء فيه $h = 2m$ ، ويوجد في أسفله فتحة قطرها d . ويصل بين هذين الخزانين أنبوب قطره d ، وطوله $L = 20m$ ، ويميل على الأفق بزاوية α . المطلوب بعد افتراض أن السائل مثالي حساب زاوية ميل الأنبوب α ، بحيث تكون الغزارة الخارجة من الخزان B ثابتة.



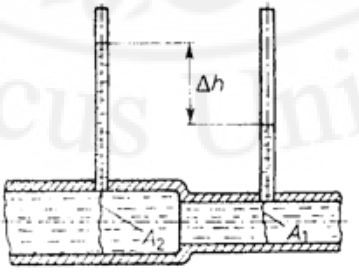
المسألة الخامسة

يتفرع أنبوب قطره D، من خزان يحتوي على الماء ويتعرض سطحه للضغط الجوي، كما في الشكل. فإذا وضع في منتصف الأنبوب وصلة متضيقة قطرها d. وكان ارتفاع الماء في الخزان هو H. احسب النسبة $\frac{d}{D}$ بدلالة H، بحيث لا يتشكل ضغط سالب في الوصلة. مع إهمال الفواقد الهيدروليكية جميعها.



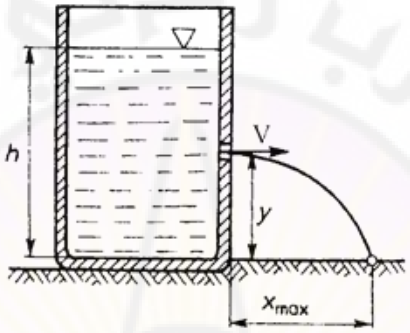
المسألة السادسة

احسب بعد إهمال الفواقد الهيدروليكية، غزارة الماء المارة في الوصلة الأفقية المبينة في الشكل، علماً أن: $\Delta h = 20cm, A_2 = 20cm^2, A_1 = 10cm^2$.



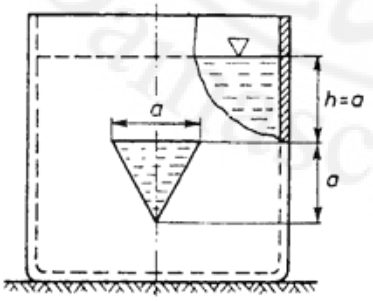
المسألة السابعة

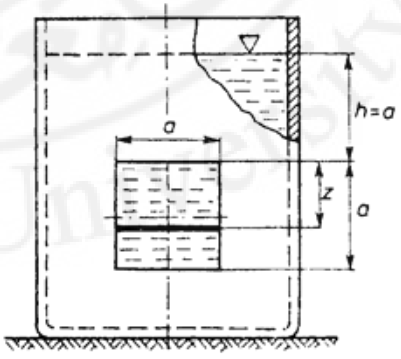
نفذت في الجدار الشاقولي للخزان المبين في الشكل فتحة صغيرة. فإذا علمت أن عمق الماء في هذا الخزان هو h. احسب على أي ارتفاع y من قاع الخزان يجب أن تنفذ هذه الفتحة، بحيث يخرج التيار منها إلى أطول مسافة ممكنة. علماً أن منسوب الماء في الخزان ثابت.



المسألة الثامنة

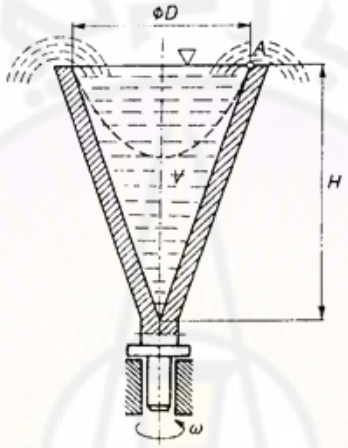
نفذت في أحد الجدران الشاقولية للخزان المبين في الشكل فتحة. فكانت أولاً على شكل مثلث عرض قاعدته يساوي ارتفاعه ويساوي $a = 1m$، ثم نفذت على شكل مربع طول ضلعه $a = 1m$. فإذا علمت أن بعد الحافة العلوية للفتحة عن سطح الماء في الحالتين هو $h = a = 1m$. احسب الغزارة التي يمكن للفتحة أن تمررها في كل حالة. بعد إفتراض أن منسوب الماء في الخزان ثابت، وأن معامل التصريف للفتحة المثلثية $C_d = 0.63$، وللفتحة المربعة $C_d = 0.60$.





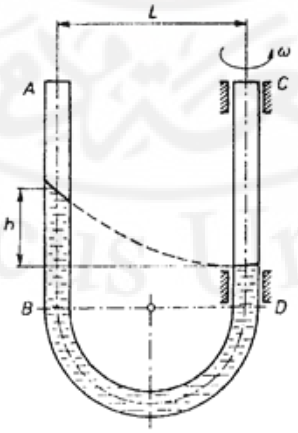
المسألة التاسعة

تم تعريض وعاء على شكل مخروط دوراني، قطر قاعدته D وارتفاعه H، ومملوء بالكامل بالماء، ومكشوف من الأعلى، إلى حركة دورانية، كما في الشكل. احسب السرعة الزاوية ω التي يجب أن يدور بها الوعاء، وكمية المياه التي تنسكب منه، بحيث يكون سطح الماء بعد التدوير مماساً للسطح الجانبي للمخروط عند النقطة A.



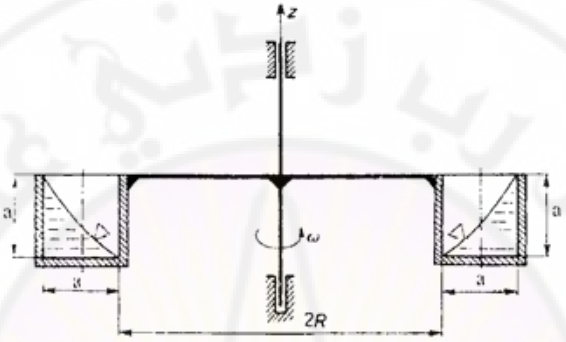
المسألة العاشرة

تم تدوير أنبوب على شكل حرف U يحتوي على سائل، حول المحور CD، كما في الشكل. والمطلوب، عند أي سرعة زاوية ω يصبح الفرق بين منسوبي السائل في فرعي المانومتر مساوياً h؟ علماً أن المسافة بين فرعي المانومتر هي L.



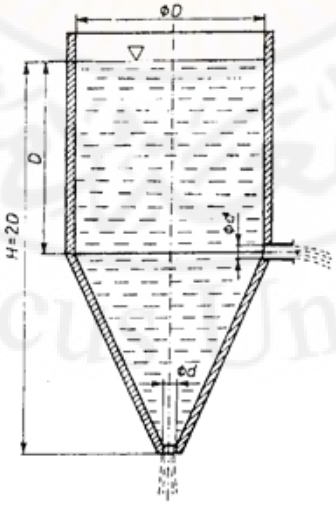
المسألة الحادية عشرة

يتصل وعاءان مقطعها على شكل مربع $a \times a$، بوساطة ذراع صلب طوله $2 \cdot R$، قابل للدوران حول المحور z. احسب السرعة الزاوية التي يجب أن يدور بها المحور، بحيث ينكشف قاع الوعاء من الناحية الداخلية كما هو مبين في الشكل.



المسألة الثانية عشرة

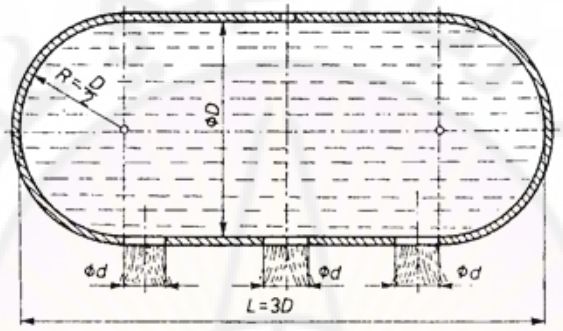
يتألف خزان من جزئين، كما في الشكل. الجزء العلوي أسطواني ارتفاعه يساوي قطره D. والجزء السفلي على شكل مخروط ارتفاعه D أيضاً. وهو يحتوي على فتحتين متماثلتين قطر كل منها d، الأولى في جانب الخزان عند منتصف إرتفاعه، والثانية في أسفله. احسب الزمن الكلي لتفريغ الخزان، بافتراض أن ثابت التصريف هو نفسه للفتحتين.



المسألة الثالثة عشرة

احسب الزمن الكلي اللازم لتفريغ الخزان المبين في الشكل، والمؤلف من أسطوانة في المنتصف ونصفي كرة من الجوانب. علماً أنه يحتوي في أسفله على ثلاث فتحات دائرية متماثلة قطر كل منها d. بافتراض أن:

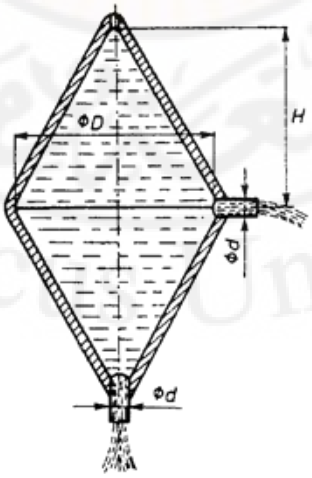
$$D = 1m, d = 2cm, C_d = 0.60 .$$



المسألة الرابعة عشرة

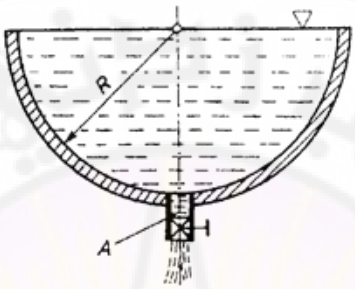
يبين الشكل خزاناً يتكون من مخروطين دورانيين متماثلين ومتعاكسين. وهو مزود بفتحتين دائريتين متماثلتين قطر كل منهما d. احسب الزمن الكلي اللازم لتفريغ الخزان تفريغاً كلياً إذا علمت أن:

$$H = 1m, D = 0.5m, d = 4cm, C_d = 0.65 .$$



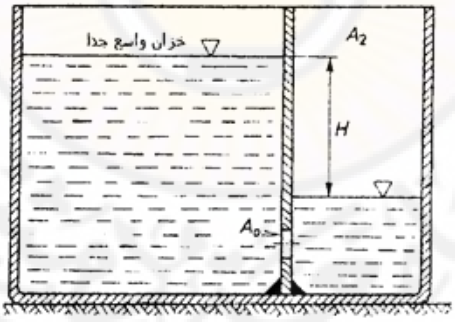
المسألة الخامسة عشرة

الخزان المبين في الشكل على شكل نصف كرة نصف قطرها $R = 0.1m$. ويحتوي في أسفله على فتحة مساحتها $A = 4mm^2$، ومعامل تصريفها $C_d = 0.60$. احسب الزمن اللازم لخفض ارتفاع الماء فيه نصف العمق.



المسألة السادسة عشرة

احسب الزمن اللازم، لخفض فرق المنسوب بين سطحي السائل في الخزانين المبينين في الشكل، من $H = 4m$ إلى $H = 2m$. علماً أن الخزان الأيسر واسع جداً ومنسوبه ثابت، وأن مساحة الخزان الأيمن $A_2 = 10m^2$، ومساحة الفتحة بين الخزانين $A_0 = 20cm^2$، ومعامل تصريفها $C_d = 0.80$.

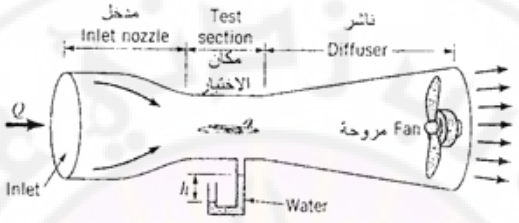


المسألة السابعة عشرة

أعد حل المسألة الثانية عشرة. بفرض أن الجزء العلوي من الخزان على شكل مكعب طول ضلعه $a = 2m$، وأن الجزء السفلي عبارة عن هرم ارتفاعه أيضاً $2m$، وأن الفتحتين بجانب وأسفل الخزان دائريتان بقطرين متماثلين يساوي كل منهما $d = 100mm$، وأن ثابت تصريفهما $C_d = 0.65$.

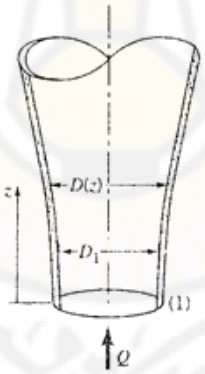
المسألة الثامنة عشرة

احسب قيمة إنحراف الماء h في مانومتر، يركب على نفق هوائي لاختبار الطائرات، كما في الشكل. علماً أن سرعة جريان الهواء عند المقطع الضيق تساوي $50m/s$.



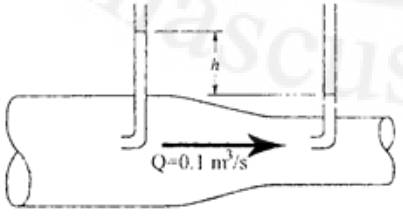
المسألة التاسعة عشرة

يتدفق الماء عبر الناشر (أنبوب متوسع) المبين في الشكل بغزارة ثابتة تساوي Q. أوجد بعد إهمال اللزوجة، العلاقة $D(z)$ بحيث يبقى الضغط في جميع مقاطع الناشر ثابتاً، أي أن يكون: $p(z) = p_1$. علماً أن قطر الأنبوب عند بداية الناشر هو D_1.



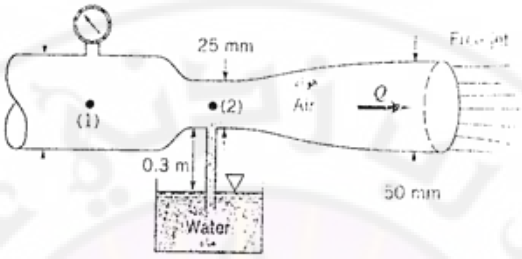
المسألة العشرون

احسب في الوصلة المبينة على الشكل، فرق المنسوب h، عندما تمر الغزارة $Q = 0.1m^3/s$. علماً أن السائل المتدفق هو الماء. مع إهمال جميع الفواقد الهيدروليكية الممكنة.



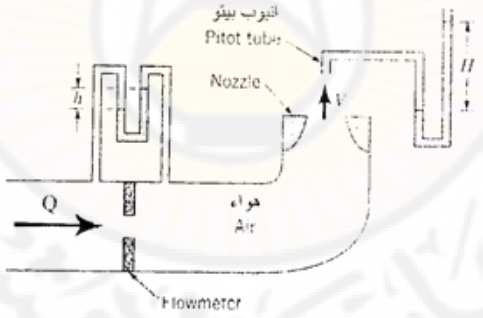
المسألة الواحدة والعشرون

احسب تصريف الهواء الذي يجب أن يمرر في الوصلة المبينة في الشكل، لكي يستطيع الماء الموجود في الوعاء، الصعود والدخول إلى الأنبوب عند النقطة 2.



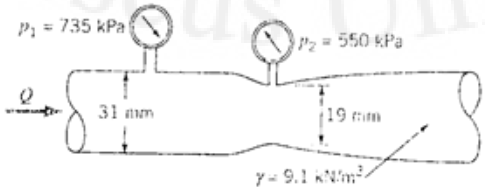
المسألة الثانية والعشرون

لقياس تصريف الهواء، استخدمت الفتحة المبينة في الشكل مع مانومتر يحتوي على الماء. ولقياس سرعة خروج الهواء استخدم أنبوب بيتو مع مانومتر يحتوي على الماء أيضاً. فإذا كان التصريف المار يعطى بالعلاقة $Q = K\sqrt{h}$. احسب قيمة الثابت K إذا علمت أن: $h = 12cm, H = 7cm$، وأن قطر فتحة الخروج يساوي $3cm$.



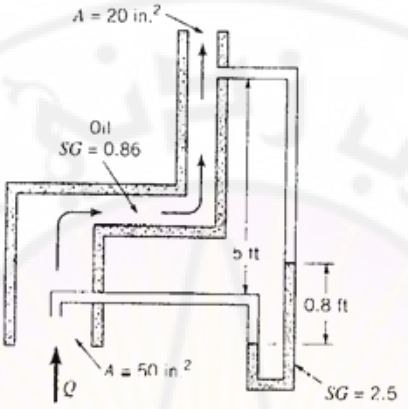
المسألة الثالثة والعشرون

بناء على قراءات مقاييس بوردون. احسب التصريف في الوصلة المبينة في الشكل.



المسألة الرابعة والعشرون

يتدفق الزيت عبر الوصلة الموضحة في الشكل. احسب بناء على القراءات والأبعاد المبينة، قيمة التصريف المار.



وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الفصل الخامس

الجريان الحقيقي
REAL FLOW

٥-١ . مقدمة Introduction

وجدنا سابقاً أنه في حالة الجريان المثالي تهمل لزوجة السائل، الأمر الذي يؤدي تلقائياً إلى إهمال قوى القص التي تنشأ بين جزيئات السائل، وهذا يعني إهمال الاحتكاك، وبالتالي فواقد الطاقة الناتجة عن حركة السائل. وقد كان الهدف من هذا تسهيل حل معادلات الجريان، وهو افتراض يمكن أن يكون مقبولاً في حل بعض المسائل فقط، ولكنه يؤدي في أغلب الحالات إلى الابتعاد بشكل كبير عن الواقع الفعلي الذي تؤكده الدراسات التجريبية.

تنشأ **إجهادات القص** ***Shear stresses*** بين جزيئات السائل الحقيقي نتيجة لاختلاف سرعة الجريان بين الطبقات المتجاورة، كما يعبر عنها قانون نيوتن:

$$\tau = \mu \cdot \frac{\partial u}{\partial y}$$

ولو درسنا حركة العنصر 1234 المبين في الشكل (٥-١)، حيث السرعة عند الوجه السفلي u، وعند الوجه العلوي $u + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot dy$، لوجدنا أن قوة القص المؤثرة عند الوجه السفلي 1,2 على واحدة العرض من العنصر تساوي:

$$T_{12} = -\mu \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \cdot dx \qquad (٥-١)$$

أما قوة القص المؤثرة عند الوجه العلوي 3,4 على واحدة العرض من العنصر فتساوي:

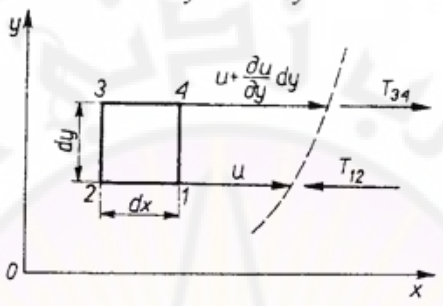
$$T_{34} = +\mu \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left(u + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot dy\right) \cdot dx \qquad (٥-٢)$$

وتكون قوة القص الكلية المؤثرة في العنصر مساوية:

$$T = T_{12} + T_{34} = \mu \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \cdot dx \cdot dy \qquad (٣-٥)$$

أما قوة القص المؤثرة في واحدة الحجم فتساوي:

$$\frac{T}{dx \cdot dy} = \mu \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad (٤-٥)$$



الشكل (٥-١). قوى القص المؤثرة في عنصر باتجاه المحور الأفقي

وحسب طبيعة حركة الجزيئات في الجريان الحقيقي نميز بين الجريان الصفحي والجريان المضطرب. وسنناقش في الفقرات القادمة كلاً من هذين الجريانين بشيء من الإيجاز.

٥-٢. الجريان الصفحي Laminar Flow

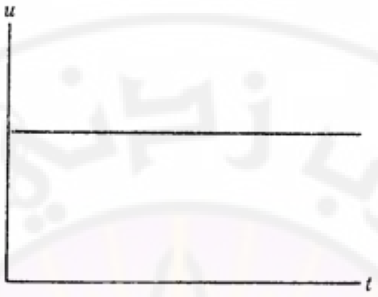
٥-٢-١. وصف الجريان الصفحي Description of Laminar Flow

في **الجريان الصفحي** ***Laminar Flow*** تتحرك جزيئات السائل ضمن صفائح دون حصول أي اختلاط أو انتقال بين هذه الجزيئات من طبقة إلى أخرى. كما يطلق على الجريان الصفحي اسم **الجريان اللزج** ***Viscous Flow*** لأن القوى المهيمنة على حركة السائل هي قوى اللزوجة.

لو حددنا قيم السرعة والضغط في نقطة معينة من جريان صفحي مستقر، لوجدنا أن السرعة تكون ثابتة بالقيمة والاتجاه مع الزمن، دون حصول أي تذبذب كما في الشكل (٥-٢). وهو ما يختلف عما سنراه لاحقاً في حالة الجريان المضطرب.

تعتبر دراسة الجريان الصفحي من أبسط حالات الجريان الحقيقي، لعدم تذبذب مركبات السرع والضغط، وما ينجم عن ذلك من نشوء قوى إضافية كبيرة ناتجة عن

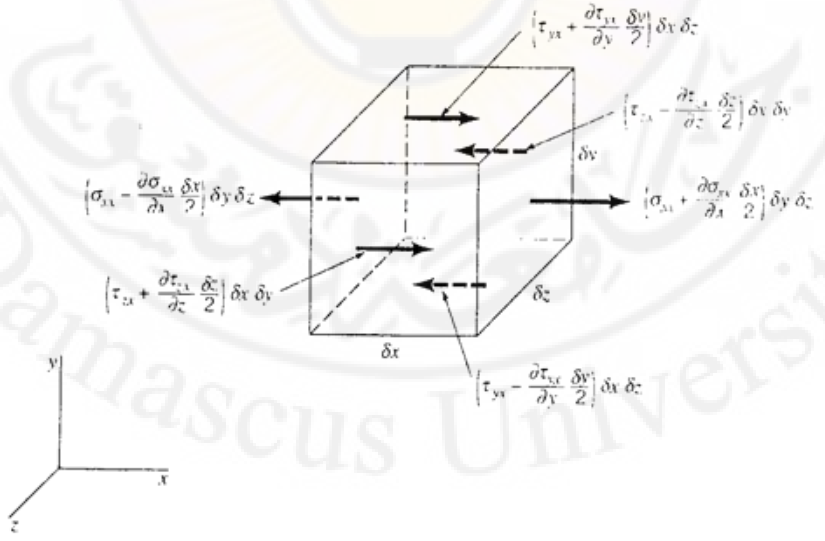
هذا التذبذب. ورغم أن معظم حالات جريان السوائل غير صفحية، وخاصة في تطبيقات الهندسة المدنية، إلا أن أهميته البالغة تكمن في دراسة الطبقة الحدية التي ستدرس في فصل لاحق.



الشكل (٥-٢). طبيعة الجريان الصفحي

٥-٢-٢. المعادلات التفاضلية للجريان الصفحي- (معادلات نافييه-ستوكس)
Differential Equations of Laminar Flow - (Navier-Stokes) Equations

لنأخذ عنصراً من سائل حقيقي جارٍ على شكل متوازي مستطيلات، كما في الشكل (٥-٣). أبعاد هذا العنصر هي $\delta x, \delta y, \delta z$، فنجد أن القوة التي يتعرض لها العنصر أثناء حركته حسب قانون نيوتن الثاني هي:



الشكل (٥-٣). استنتاج معادلات نافييه-ستوكس [6]

$$\delta\vec{F} = \delta m \cdot \vec{a} \qquad (٥-٥)$$

وبكتابة هذه المعادلة وفق المحاور الإحداثية الثلاث، يكون لدينا:

$$\delta F_x = \delta m \cdot a_x \qquad (٦-٥)$$

$$\delta F_y = \delta m \cdot a_y \qquad (٧-٥)$$

$$\delta F_z = \delta m \cdot a_z \qquad (٨-٥)$$

ولكن محصلة مركبات القوة باتجاه المحور x تساوي:

$$\delta F_x = \left(\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \cdot \frac{\delta x}{2}\right) \cdot \delta y \cdot \delta z - \left(\sigma_{xx} - \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \cdot \frac{\delta x}{2}\right) \cdot \delta y \cdot \delta z$$
$$+ \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \cdot \frac{\delta y}{2}\right) \cdot \delta x \cdot \delta z - \left(\tau_{yx} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \cdot \frac{\delta y}{2}\right) \cdot \delta x \cdot \delta z$$
$$+ \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \cdot \frac{\delta z}{2}\right) \cdot \delta x \cdot \delta y - \left(\tau_{zx} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \cdot \frac{\delta z}{2}\right) \cdot \delta x \cdot \delta y$$
$$+ \rho \cdot X \cdot \delta x \cdot \delta y \cdot \delta z$$

ومنه:

$$\delta F_x = \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right) \cdot \delta x \cdot \delta y \cdot \delta z + \rho \cdot X \cdot \delta x \cdot \delta y \cdot \delta z$$

أو:

$$\delta F_x = \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho \cdot X\right) \cdot \delta x \cdot \delta y \cdot \delta z \qquad (٩-٥)$$

و بالأسلوب نفسه نجد أن المحصلة باتجاه المحورين z, y على التسلسل هي:

$$\delta F_y = \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \rho \cdot Y\right) \cdot \delta x \cdot \delta y \cdot \delta z \qquad (١٠-٥)$$

و:

$$\delta F_z = \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \rho \cdot Z\right) \cdot \delta x \cdot \delta y \cdot \delta z \qquad (١١-٥)$$

حيث:

- $\tau_{xy}, \tau_{yx}, \tau_{xz}, \tau_{zx}, \tau_{yz}, \tau_{zy}$: الإجهادات المماسية أو **إجهادات القص** ***Shear Stresses*** المؤثرة على أوجه العنصر المدروس.
- $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$: **الإجهادات الناظمية** ***Normal Stresses*** المؤثرة على أوجه العنصر المدروس.
- X, Y, Z : مركبات قوة الثقالة بواحدة الكتلة (مركبات تسارع الجاذبية الأرضي باتجاه المحاور الثلاثة).

وكما وجدنا سابقاً تعطى مركبات التسارع الكلي وفق المحاور الثلاثة بالمعادلات:

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$a_y = \frac{\partial v}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial v}{\partial z}$$

$$a_z = \frac{\partial w}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial w}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial w}{\partial z}$$

وبتطبيق قانون نيوتن الثاني باتجاه المحور x نجد أن:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \right) \cdot \rho \cdot \delta x \cdot \delta y \cdot \delta z =$$

$$\left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho \cdot X \right) \cdot \delta x \cdot \delta y \cdot \delta z$$

ومنه:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial u}{\partial z} = X + \frac{1}{\rho} \cdot \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) \quad (١٢-٥)$$

وبتطبيق القانون نفسه وفق المحورين y, z، نحصل على:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial v}{\partial z} = Y + \frac{1}{\rho} \cdot \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) \quad (١٣-٥)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial w}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial w}{\partial z} = Z - \frac{1}{\rho} \cdot \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right) \quad (١٤-٥)$$

ولكن لدينا في السوائل النيوتونية القابلة للانضغاط (نقبل ذلك دون برهان):

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \qquad (١٥-٥)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \qquad (١٦-٥)$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = \mu \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \qquad (١٧-٥)$$

$$\sigma_{xx} = -p - \frac{2}{3} \cdot \mu \cdot \nabla \cdot \vec{V} + 2 \cdot \mu \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \qquad (١٨-٥)$$

$$\sigma_{yy} = -p - \frac{2}{3} \cdot \mu \cdot \nabla \cdot \vec{V} + 2 \cdot \mu \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \qquad (١٩-٥)$$

$$\sigma_{zz} = -p - \frac{2}{3} \cdot \mu \cdot \nabla \cdot \vec{V} + 2 \cdot \mu \cdot \frac{\partial w}{\partial z} \qquad (٢٠-٥)$$

وبتعويض قيم الإجهادات نجد أن:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial u}{\partial z} = X - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \cdot \left(2 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \cdot \nabla \cdot \vec{V} \right) \right]$$
$$+ \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] \qquad (٢١-٥)$$

و:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial v}{\partial z} = Y - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \cdot \left(2 \cdot \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \cdot \nabla \cdot \vec{V} \right) \right]$$
$$+ \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] \qquad (٢٢-٥)$$

و:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial w}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial w}{\partial z} = Z - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \cdot \left(2 \cdot \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3} \cdot \nabla \cdot \vec{V} \right) \right]$$
$$+ \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] \qquad (٢٣-٥)$$

تدعى هذه المعادلات معادلات الجريانات الصفحية في الحالة غير المستقرة أو **معادلات نافييه–ستوكس** ***Navier-Stokes Equations***.

تأخذ المعادلات السابقة الصيغ التالية عندما يكون الجريان غير انضغاطي:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+v\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+w\cdot\frac{\partial u}{\partial z}=X-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}+\upsilon\cdot\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \quad (٢٤-٥)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+v\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+w\cdot\frac{\partial v}{\partial z}=Y-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial y}+\upsilon\cdot\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) \quad (٢٥-٥)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+u\cdot\frac{\partial w}{\partial x}+v\cdot\frac{\partial w}{\partial y}+w\cdot\frac{\partial w}{\partial z}=Z-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial z}+\upsilon\cdot\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) \quad (٢٦-٥)$$

وعندما يكون الجريان مستقراً، أي عندما يكون $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{\partial w}{\partial t}=0$ يمكن كتابة معادلات نافييه-ستوكس على الشكل:

$$u\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+v\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+w\cdot\frac{\partial u}{\partial z}=X-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}+\upsilon\cdot\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \quad (٢٧-٥)$$

$$u\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+v\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+w\cdot\frac{\partial v}{\partial z}=Y-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial y}+\upsilon\cdot\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) \quad (٢٨-٥)$$

$$u\cdot\frac{\partial w}{\partial x}+v\cdot\frac{\partial w}{\partial y}+w\cdot\frac{\partial w}{\partial z}=Z-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial z}+\upsilon\cdot\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) \quad (٢٩-٥)$$

وفي حالة الجريان المستوي (x,y) وغير المستقر تأخذ معادلات نافييه-ستوكس الشكل التالي:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+v\cdot\frac{\partial u}{\partial y}=X-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}+\upsilon\cdot\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \quad (٣٠-٥)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+v\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=Y-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial y}+\upsilon\cdot\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \quad (٣١-٥)$$

أما إذا كان الجريان المستوي مستقراً، فإن معادلات نافييه-ستوكس تصبح:

$$u\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+v\cdot\frac{\partial u}{\partial y}=X-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}+\upsilon\cdot\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \quad (٣٢-٥)$$

$$u\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+v\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=Y-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial y}+\upsilon\cdot\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \quad (٣٣-٥)$$

وعندما يكون الجريان أحادي البعد وغير مستقر، فإن معادلات نافييه-ستوكس

تأخذ الصيغة التالية:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\cdot\frac{\partial u}{\partial x}=X-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}+\upsilon\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (٣٤-٥)$$

أما عندما يكون الجريان وحيد البعد مستقراً، فإنها تأخذ الشكل:

$$u\cdot\frac{\partial u}{\partial x}=X-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}+\upsilon\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (٣٥-٥)$$

وأخيراً يمكن كتابة معادلات نافييه –ستوكس بالشكل المتجهي التالي:

$$\frac{d\vec{V}}{dt}=\vec{F}-\frac{1}{\rho}\cdot grad(p)+\nu\cdot\nabla^2\vec{V} \qquad (٣٦-٥)$$

لدراسة الجريان الصفحي وتحديد عناصره كافة، أي مركبات السرعة (u,v,w) والضغط عند أية نقطة، يجب البحث عن حل معادلات نافييه–ستوكس، التي هي ثلاث معادلات تفاضلية بأربعة مجاهيل. ولذلك يمكن الاستفادة من معادلة الاستمرار، فيصبح لدينا أربع معادلات بأربعة مجاهيل. وبناء عليه يمكن إيجاد عناصر الجريان الصفحي المستقر الثلاثي البعد بحل المعادلات التالية:

$$u\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+v\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+w\cdot\frac{\partial u}{\partial z}=X-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}+\upsilon\cdot\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

$$u\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+v\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+w\cdot\frac{\partial v}{\partial z}=Y-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial y}+\upsilon\cdot\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)$$

$$u\cdot\frac{\partial w}{\partial x}+v\cdot\frac{\partial w}{\partial y}+w\cdot\frac{\partial w}{\partial z}=Z-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial z}+\upsilon\cdot\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$$

ويمكن في **الإحداثيات الأسطوانية** ***Cylindrical Coordinate*** كتابة معادلات نافييه–ستوكس في الشكل التالي:

$$\frac{\partial V_r}{\partial t}+V_r\cdot\frac{\partial V_r}{\partial r}+\frac{V_\theta}{r}\cdot\frac{\partial V_r}{\partial\theta}+V_z\cdot\frac{\partial V_r}{\partial z}-\frac{V_\theta^2}{r}= \qquad (٣٧-٥)$$

$$g_r-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial r}+\upsilon\cdot\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\cdot\frac{\partial V_r}{\partial r}\right)-\frac{V_r}{r^2}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 V_r}{\partial\theta^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial V_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2}\right)$$

$$\frac{\partial V_\theta}{\partial t}+V_r\cdot\frac{\partial V_\theta}{\partial r}+\frac{V_\theta}{r}\cdot\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta}+V_z\cdot\frac{\partial V_\theta}{\partial z}+\frac{V_r\cdot V_\theta}{r}= \tag{٣٨-٥}$$

$$g_\theta-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial p}{\partial \theta}+\upsilon\cdot\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\cdot\frac{\partial V_\theta}{\partial r}\right)-\frac{V_\theta}{r^2}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial \theta^2}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial V_r}{\partial \theta}+\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial z^2}\right)$$

$$\frac{\partial V_z}{\partial t}+V_r\cdot\frac{\partial V_z}{\partial r}+\frac{V_\theta}{r}\cdot\frac{\partial V_z}{\partial \theta}+V_z\cdot\frac{\partial V_z}{\partial z}= \tag{٣٩-٥}$$

$$g_z-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial z}+\upsilon\cdot\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\cdot\frac{\partial V_z}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 V_z}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2}\right)$$

$$\frac{\partial V_r}{\partial r}+\frac{\partial V_\theta}{r\cdot\partial \theta}+\frac{\partial V_z}{\partial z}+\frac{V_r}{r}=0 \tag{٤٠-٥}$$

حيث: g_r, g_θ, g_z – مركبات قوة الثقالة بواحدة الكتلة باتجاه المحاور القطبية الثلاثة.

إن حل معادلات نافييه–ستوكس بشكل تحليلي مباشر مستحيل في معظم الحالات، باستثناء بعض الحالات الخاصة المبسطة جداً، التي يمكن فيها حل هذه المعادلات بشكل مباشر كما سنجد في الفقرة القادمة. ولكن مع تطور الحواسيب أصبح بالإمكان حل معادلات نافييه–ستوكس ولمختلف الحالات بطرق متعددة أشهرها طريقة **العناصر المحدودة** ***Finite Element Method*** وطريقة **الفروق المحدودة** ***Finite Difference Method***. غير أن كتابة برامج حاسوبية لحل هذه المعادلات بالطرق السابقة صعب جداً، ورغم ذلك فإن هناك العديد من البرامج التي تسوقها بعض المؤسسات العلمية والجامعات العالمية لحل مثل هذه الأنواع من المعادلات.

٥–٢–٣. حل معادلات نافييه–ستوكس في بعض الحالات الخاصة

Solution of Navier-Stokes Equations for Certain Cases

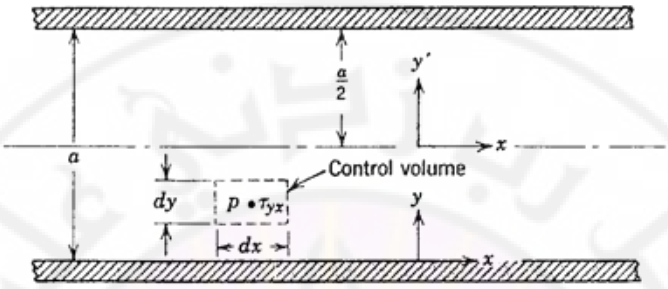
ذكر سابقاً أنه يمكن في بعض الحالات الخاصة حل معادلات نافييه–ستوكس بشكل مباشر، وسندرس هنا حل هذه المعادلات من أجل جريان الصفحي في بعض الحالات البسيطة، كالجريان بين صفيحتين متوازيتين أو أسطوانتين متداخلتين.

٥–٢–٣–١. الجريان الصفحي المتطور بين صفيحتين أفقيتين متوازيتين ثابتتين

Fully Developed Laminar Flow between Parallel Stationary Plates

إحدى الحالات البسيطة في حل معادلات نافييه–ستوكس، هي دراسة **الجريان**

الصفحي المتطور ***Fully Developed Laminar Flow*** (لاتتغير خواصه مع تقدم الجريان) لسائل بين صفيحتين متوازيتين أفقيتين المسافة بينهما a، حيث يتم الجريان باتجاه المحور x، كما هو مبين في الشكل (٥-٤).



الشكل (٥-٤). دراسة الجريان الصفحي المتطور بين صفيحتين متوازيتين أفقيتين ثابتتين [4]

الافتراضات:

- الجريان مستقر، ومتطور.
- يتم الجريان بشكل موازٍ للصفيحتين.
- الجريان أفقي.
- تدرس المسألة خلال العرض b.

المطلوب:

استنتاج العلاقات اللازمة لتحديد كلٍ من:

- توزع السرعة بين الصفيحتين.
- توزع إجهاد القص بين الصفيحتين.
- غزارة الجريان المارة مابين الصفيحتين.
- السرعة الوسطية والعظمى.
- هبوط الضغط بين مقطعين المسافة بينهما L من الصفيحتين المدروستين.

الحل:

نكتب معادلات نافييه-ستوكس في حالة الجريان المستقر ثنائي البعد:

$$u\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+v\cdot\frac{\partial u}{\partial y}=X-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}+\upsilon\cdot\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

$$u\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+v\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=Y-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial y}+\upsilon\cdot\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$$

واعتماداً على الافتراضات السابقة، يمكن القول:

- $\frac{\partial u}{\partial x}=0$ لأن منحني توزع السرعة لايتغير وفق محور الجريان (جريان متطور)، وإنما يتغير بالإتجاه العمودي عليه فقط.
- $v=0$ لأنه لا توجد مركبة سرعة باتجاه المحور y العمودي على محور الجريان (الجريان موازي للصفيحتين).
- $X=0$ لأن الجريان أفقي.

أي أن معادلات نافييه-ستوكس تبسط لتأخذ الشكل التالي:

$$0=-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}+\upsilon\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

ومنه:

$$\frac{\partial p}{\partial x}=\mu\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad (٤١-٥)$$

حيث يمثل الحد $\frac{\partial p}{\partial x}$ **تدرج الضغط** ***Pressure Gradient*** باتجاه الجريان وهو ثابت. وهو يمثل فواقد الطاقة في واحدة الطول، التي تحصل بسبب لزوجة السائل، والتي كانت تهمل في حالة الجريان المثالي. إن المعادلة السابقة يمكن كتابتها بالشكل:

$$\frac{d^2 u}{dy^2}=\frac{1}{\mu}\cdot\frac{\partial p}{\partial x} \qquad (٤٢-٥)$$

وبالمكاملة مرتين، نجد أن:

$$\frac{du}{dy}=\frac{1}{\mu}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}\cdot y+C_1 \qquad (٤٣-٥)$$

و:

$$u = \frac{1}{2\cdot\mu}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}\cdot y^2 + \frac{C_1}{\mu}\cdot y + C_2 \qquad (٤٤-٥)$$

ولتعيين قيمتي الثابتين C_1, C_2، لدينا من الشروط المحيطية:

$$u = 0\big|_{y=0} \Rightarrow C_2 = 0$$

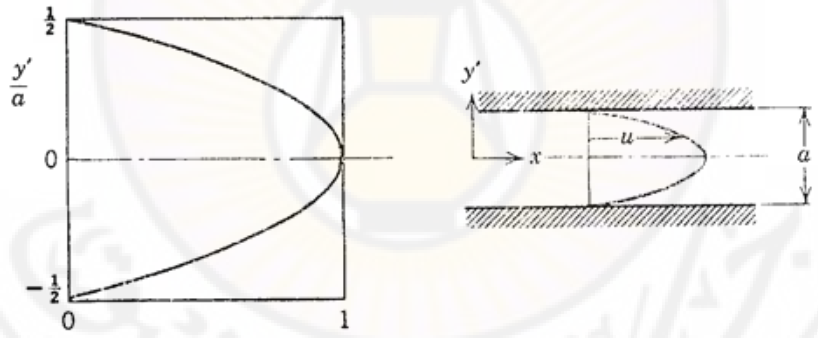
و:

$$u = 0\big|_{y=a} \Rightarrow C_1 = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}\cdot a$$

وبالتعويض، نحصل على:

$$u = \frac{a^2}{2\cdot\mu}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}\cdot\left[\left(\frac{y}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{a}\right)\right] \qquad (٤٥-٥)$$

يتضح من المعادلة السابقة أن منحني توزع السرعة بين صفيحتين متوازيتين هو عبارة عن قطع مكافئ متناظر، كما في الشكل (٥-٥).



الشكل (٥-٥). منحني توزع السرعة بين صفيحتين أفقيتين متوازيتين ثابتتين لجريان صفحي متطور [4]

ولإيجاد إجهادات القص بين جزيئات السائل، نكتب:

$$\tau_{yx} = \mu\cdot\frac{du}{dy}$$

ومنه:

$$\tau_{yx} = a\cdot\frac{\partial p}{\partial x}\cdot\left(\frac{y}{a} - \frac{1}{2}\right) \qquad (٤٦-٥)$$

ولحساب غزارة الجريان المارة بين الصفيحتين خلال العرض b، لدينا:

$$Q = b \cdot \int_0^a u \cdot dy$$

أو:

$$Q = \frac{b}{2 \cdot \mu} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \int_0^a \left(u^2 - a \cdot y\right) \cdot dy \qquad (٤٧-٥)$$

ومنه:

$$Q = -\frac{b}{12 \cdot \mu} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \cdot a^3 \qquad (٤٨-٥)$$

أما السرعة الوسطية للجريان فتساوي:

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{a \cdot b} = -\frac{1}{12 \cdot \mu} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \cdot a^2 \qquad (٤٩-٥)$$

ولتحديد قيمة ومكان السرعة العظمى، لدينا:

$$\frac{du}{dy} = \frac{a^2}{2 \cdot \mu} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \left(\frac{2 \cdot y}{a^2} - \frac{1}{a}\right) = 0$$

ومنه:

$$y = \frac{a}{2}$$

وأخيراً، نستنتج أن:

$$u_{\max} = -\frac{1}{8 \cdot \mu} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \cdot a^2 = \frac{3}{2} \cdot V \qquad (٥٠-٥)$$

ولتحديد قيمة هبوط الضغط Δp باتجاه محور الجريان بين مقطعين المسافة بينهما L، لدينا:

$$\Delta p = -\frac{\partial p}{\partial x} \cdot L$$

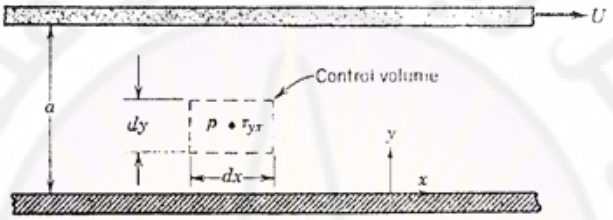
وبالتالي فإن:

$$\Delta p = \frac{12 \cdot \mu \cdot L}{b \cdot a^3} \cdot Q \qquad (٥١-٥)$$

٥-٢-٣-٢. الجريان الصفحي المتطور بين صفيحتين أفقيتين متوازيتين الأولى ثابتة والثانية تتحرك بسرعة ثابتة

Fully Developed Laminar Flow between Tow Parallel Plates the Upper Plate Moving with Constant Speed

يدرس في هذه الحالة أيضاً الجريان الصفحي المتطور لسائل بين صفيحتين متوازيتين أفقيتين المسافة بينهما a. لكن الصفيحة السفلى ثابتة والصفيحة العليا تتحرك بسرعة ثابتة مقدارها U، كما هو مبين في الشكل (٥-٦ فوكس٣١٢).



الشكل (٥-٦). دراسة الجريان الصفحي بين صفيحتين متوازيتين حيث السفلى ثابتة والعليا متحركة [4]

الافتراضات:

- الجريان مستقر، ومتطور.
- يتم الجريان بشكل موازي للصفيحتين.
- الجريان أفقي.
- سرعة الصفيحة السفلى تساوي الصفر.
- سرعة الصفيحة العليا تساوي U.
- ندرس المسألة خلال العرض b.

المطلوب:

استنتاج العلاقات اللازمة لتحديد كل من:

- توزع السرعة بين الصفيحتين.
- توزع إجهاد القص بين الصفيحتين.
- غزارة الجريان المارة مابين الصفيحتين.
- السرعة الوسطية والعظمى.

الحل:

وجدنا من الحالة السابقة أن توزع السرعة يعطى بالعلاقة:

$$u = \frac{1}{2 \cdot \mu} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \cdot y^2 + \frac{C_1}{\mu} \cdot y + C_2$$

ولتعيين قيمتي الثابتين C_1, C_2 لدينا من الشروط المحيطية:

$$u = 0\big|_{y=0} \Rightarrow C_2 = 0$$

و:

$$u = U\big|_{y=a} \Rightarrow C_1 = \frac{U \cdot \mu}{a} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \cdot a$$

وبالتعويض، نحصل على:

$$u = \frac{U \cdot y}{a} + \frac{a^2}{2 \cdot \mu} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \left[\left(\frac{y}{a} \right)^2 - \left(\frac{y}{a} \right) \right] \qquad (٥٢-٥)$$

يتضح من المعادلة السابقة أن منحني توزع السرعة بين صفيحتين متوازيتين هو عبارة عن قطع مكافئ غير متناظر، كما في (الشكل ٥-٧).

ولإيجاد إجهادات القص بين جزيئات السائل، نكتب:

$$\tau_{yx} = \mu \cdot \frac{du}{dy}$$

ومنه:

$$\tau_{yx} = \mu \cdot \frac{U}{a} + a \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \left(\frac{y}{a} - \frac{1}{2} \right) \qquad (٥٣-٥)$$

ولحساب غزارة الجريان المارة بين الصفيحتين في واحدة العرض، لدينا:

$$Q = b \cdot \int_0^a u \cdot dy$$

أو:

$$Q = b \cdot \int_0^a \left[\frac{U \cdot y}{a} + \frac{1}{2 \cdot \mu} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \left(u^2 - a \cdot y \right) \right] \cdot dy \qquad (٥٤-٥)$$

وبالمكاملة، نجد أن:

$$Q = b \cdot \left(\frac{U \cdot a}{2} - \frac{1}{12 \cdot \mu} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \cdot a^3 \right) \qquad (٥٥-٥)$$

أما السرعة الوسطية للجريان:

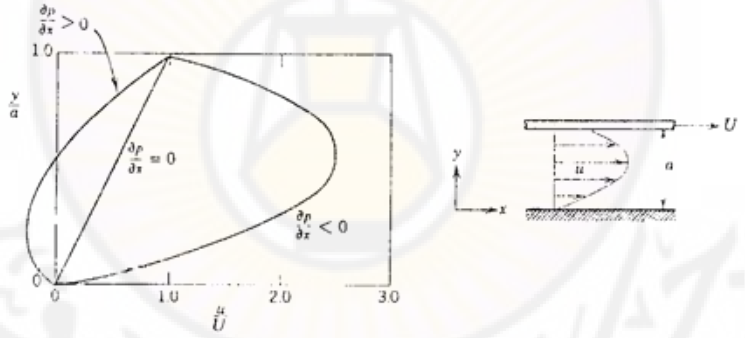
$$\overline{V} = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{a \cdot b} = \frac{U}{2} - \frac{1}{12 \cdot \mu} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \cdot a^2 \qquad (٥٦-٥)$$

ولتحديد مكان السرعة العظمى، لدينا:

$$\frac{du}{dy} = \frac{U}{a} + \frac{a^2}{2 \cdot \mu} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \left(\frac{2 \cdot y}{a^2} - \frac{1}{a} \right) = 0$$

ومنه:

$$y = \frac{a}{2} - \frac{U / a}{(1/\mu) \cdot (\partial p / \partial x)} \qquad (٥٧-٥)$$



الشكل (٥-٧). منحني توزع السرعة لجريان صفحي متطور يتم بين صفيحتين أفقيتين، متوازيتين السفلية ثابتة والعليا متحركة [4]

٥-٢-٣-٣. الجريان الصفحي المتطور على سطح مستوٍ يميل على الأفق بزاوية α

Fully Developed Laminar Flow a Long Inclined Plate

لندرس حالة الجريان الصفحي المتطور لطبقة من سائل بسماكة H على سطح مائل بزاوية α، كما في الشكل (٥-٨).

الافتراضات:

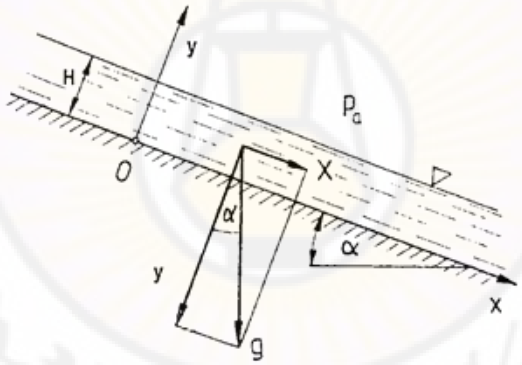
- الجريان مستقر، ومتطور.

- الجريان يوازي السطح المستوي المائل.
- الضغط على السطح يساوي الضغط الجوي.
- تدرج الضغط باتجاه محور الجريان يساوي الصفر.
- تدرس المسألة خلال العرض b.

المطلوب:

استنتاج العلاقات اللازمة لتحديد كل من:

- توزع السرعة في طبقة السائل فوق السطح المائل.
- السرعة العظمى.
- توزع الضغط ضمن طبقة السائل فوق السطح المائل.
- غزارة الجريان المارة فوق السطح المائل.



الشكل (٥-٨). دراسة الجريان الصفحي لسائل على سطح مستوٍ مائل [8]

الحل:

نكتب معادلات نافييه-ستوكس في حالة الجريان المستقر ثنائي البعد:

$$u\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+v\cdot\frac{\partial u}{\partial y}=X-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}+\upsilon\cdot\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

$$u\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+v\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=Y-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial y}+\upsilon\cdot\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$$

واعتماداً على الإفتراضات السابقة، يمكن القول:

- إن $v = 0$ لأنه لا توجد مركبات سرعة باتجاه المحور y العمودي على محور الجريان.
- إن $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ باعتبار أن منحني توزع السرعة لايتغير وفق محور الجريان (جريان متطور)، وإنما يتغير بالاتجاه العمودي فقط، لذلك.
- تدرج الضغط باتجاه المحورين: $\frac{\partial p}{\partial y} = f(y), \frac{\partial p}{\partial x} = 0$.
- $X = g \cdot \sin\alpha, Y = -g \cdot \cos\alpha$.

وبالتالي تأخذ معادلات نافييه-ستوكس الشكل المبسط التالي:

$$\frac{d^2u}{dy^2} = -\frac{g}{\nu} \cdot \sin\alpha \qquad (٥٨-٥)$$

و:

$$\frac{dp}{dy} = -\rho \cdot g \cdot \cos\alpha \qquad (٥٩-٥)$$

وبمكاملة المعادلة (٥-٥٨) مرتين، نجد أن:

$$\frac{du}{dy} = -\frac{g}{\nu} \cdot \sin\alpha \cdot y + C_1 \qquad (٦٠-٥)$$

و:

$$u = -\frac{g}{2 \cdot \nu} \cdot \sin\alpha \cdot y^2 + C_1 \cdot y + C_2 \qquad (٦١-٥)$$

ولتعيين قيمتي الثابتين C_1, C_2 لدينا من الشروط المحيطية:

$$u = 0\big|_{y=0} \Rightarrow C_2 = 0$$

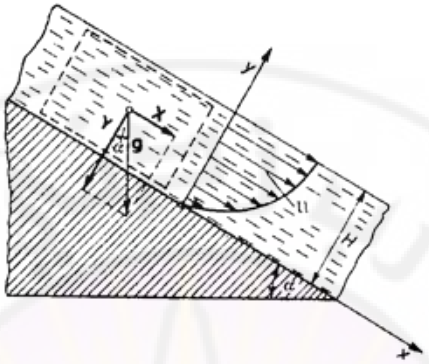
و:

$$\frac{du}{dy} = 0\Big|_{y=H} \Rightarrow C_1 = \frac{g \cdot \sin\alpha}{\nu} \cdot H$$

وبالتعويض نحصل على:

$$u = \frac{g \cdot \sin\alpha}{2 \cdot \nu} \cdot \left(2 \cdot H \cdot y - y^2\right) \qquad (٦٢-٥)$$

وهي معادلة قطع مكافئ. ويبين الشكل (٥- ٩) منحني توزع السرعة، حيث يلاحظ أن السرعة العظمى تكون عند سطح السائل.



الشكل (٥-٩). منحني توزع السرعة لجريان صفحي متطور على سطح مستوٍ مائل [2]

ولإيجاد قيمة السرعة العظمى، نعوض في العلاقة السابقة $y = H$ فيكون لدينا:

$$u_{\max} = \frac{g \cdot \sin\alpha \cdot H^2}{2 \cdot \nu} \qquad (٥-٦٣)$$

ولإيجاد توزع الضغط، نكامل المعادلة (٥-٥٩)، فنجد أن:

$$p = -\rho \cdot g \cdot \cos\alpha \cdot y + C_3 \qquad (٥-٦٤)$$

ولتحديد ثابت التكامل C_3 لدينا:

$$p = 0\big|_{y=H} \Rightarrow C_3 = \rho \cdot g \cdot H \cdot \cos\alpha$$

وبالتالي فإن:

$$p = \rho \cdot g \cdot \cos\alpha \cdot (H - y) \qquad (٥-٦٥)$$

وبالنسبة لغزارة الجريان لدينا:

$$Q = \int_0^H b \cdot u \cdot dy$$

أو:

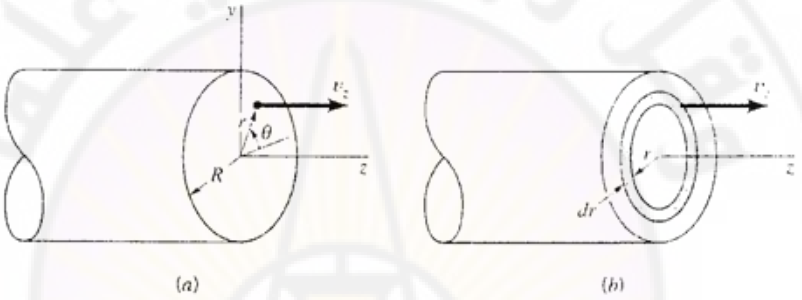
$$Q = \frac{b \cdot g \cdot \sin\alpha}{2 \cdot \nu} \cdot \int_0^H \left(2 \cdot H \cdot y - y^2\right) \cdot dy \qquad (٥-٦٦)$$

وبالمكاملة نحصل على:

$$Q = \frac{b \cdot g \cdot H^3 \cdot \sin\alpha}{3 \cdot \nu} \qquad (٦٧-٥)$$

٥-٢-٣-٤. الجريان الصفحي في أنبوب Laminar Flow in a pipe

من أكثر التطبيقات العملية أهمية دراسة الجريان الصفحي في أنبوب قطره D، كما في الشكل (٥-١٠). حيث يمكن الاستفادة من معادلات نافييه – ستوكس في تحديد شكل منحني توزع السرعة، وفي حساب هبوط الضغط بين مقطعين.



الشكل (٥-١٠). دراسة الجريان الصفحي في أنبوب [6]

الافتراضات:

- الجريان مستقر، ومتطور.
- تدرج الضغط ثابت على طول الأنبوب.

المطلوب:

استنتاج العلاقات اللازمة لتحديد كل من:

- توزع السرعة داخل الأنبوب.
- غزارة الجريان المارة في الأنبوب.
- هبوط الضغط بين مقطعين من الأنبوب.
- سرعة الجريان الوسطية.
- سرعة الجريان العظمى.

الحل:

بكتابة معادلات نافييه – ستوكس في الإحداثيات الأسطوانية نجد أن:

$$\frac{\partial V_r}{\partial t}+V_r\cdot\frac{\partial V_r}{\partial r}+\frac{V_\theta}{r}\cdot\frac{\partial V_r}{\partial \theta}+V_z\cdot\frac{\partial V_r}{\partial z}-\frac{V_\theta^2}{r}=$$

$$g_r-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial r}+\upsilon\cdot\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\cdot\frac{\partial V_r}{\partial r}\right)-\frac{V_r}{r^2}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 V_r}{\partial\theta^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial V_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2}\right)$$

$$\frac{\partial V_\theta}{\partial t}+V_r\cdot\frac{\partial V_\theta}{\partial r}+\frac{V_\theta}{r}\cdot\frac{\partial V_\theta}{\partial\theta}+V_z\cdot\frac{\partial V_\theta}{\partial z}+\frac{V_r\cdot V_\theta}{r}=$$

$$g_\theta-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial p}{\partial\theta}+\upsilon\cdot\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\cdot\frac{\partial V_\theta}{\partial r}\right)-\frac{V_\theta}{r^2}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial\theta^2}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial V_r}{\partial\theta}+\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial z^2}\right)$$

$$\frac{\partial V_z}{\partial t}+V_r\cdot\frac{\partial V_z}{\partial r}+\frac{V_\theta}{r}\cdot\frac{\partial V_z}{\partial\theta}+V_z\cdot\frac{\partial V_z}{\partial z}=$$

$$g_z-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial z}+\upsilon\cdot\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\cdot\frac{\partial V_z}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 V_z}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial z^2}\right)$$

وبناء على الافتراضات السابقة يمكن كتابة:

$$-\ .\frac{\partial V_z}{\partial t}=0$$

$$-\ .V_r=V_\theta=0, V_z=u$$

$$-\ .\frac{\partial V_z}{\partial z}=0$$

$$-\ .g_z=0$$

وبالتالي تبسط معادلات نافييه–ستوكس إلى المعادلة التفاضلية التالية:

$$\nu\cdot\frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dr}\left(r\cdot\frac{du}{dr}\right)=\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial z}\qquad(٦٨-٥)$$

ونحل هذه المعادلة التفاضلية نحصل على العلاقة:

$$u=\frac{1}{4\cdot\mu}\cdot\frac{dp}{dz}\cdot r^2+\frac{C_1}{\mu}\cdot\ln r+C_2\qquad(٦٩-٥)$$

ولإيجاد قيمتي الثابتين C_1, C_2 في مركز الأنبوب لدينا $r=0$ وبالتالي $\ln 0=-\infty$، ولكن سرعة الجريان في المركز محددة، وبناء على ذلك يكون $C_1=0$. أما بالنسبة

للثابت C_2، فلدينا من الشرط:

$$u = 0\Big|_{r=R}$$

ومنه يكون:

$$C_2 = -\frac{1}{4 \cdot \mu} \cdot \frac{dp}{dz} \cdot R^2$$

وبالتعويض نجد أن علاقة توزع السرعة في الأنبوب تعطى بالصيغة:

$$u = \frac{1}{4 \cdot \mu} \cdot \frac{dp}{dz} \cdot \left(r^2 - R^2\right) \qquad (٧٠-٥)$$

وهي تمثل معادلة قطع مكافئ متناظر.

ولحساب غزارة الجريان المارة في الأنبوب، لدينا:

$$Q = 2 \cdot \pi \cdot \int_0^R u \cdot r \cdot dr$$

وبالتعويض نجد أن:

$$Q = 2 \cdot \pi \cdot \int_0^R \frac{1}{4 \cdot \mu} \cdot \frac{dp}{dz} \cdot \left(r^2 - R^2\right) \cdot r \cdot dr$$

أو:

$$Q = \frac{\pi}{2 \cdot \mu} \cdot \frac{dp}{dz} \cdot \int_0^R \left(r^2 - R^2\right) \cdot r \cdot dr \qquad (٧١-٥)$$

وبالمكاملة نحصل على:

$$Q = -\frac{\pi \cdot R^4}{8 \cdot \mu} \cdot \frac{dp}{dz} \qquad (٧٢-٥)$$

إن هبوط الضغط Δp بين مقطعين في الأنبوب المسافة بينهما L هو:

$$\frac{\Delta p}{L} = -\frac{dp}{dz}$$

وبالتعويض في علاقة الغزارة، نجد أن:

$$Q = \frac{\pi \cdot R^4}{8 \cdot \mu} \cdot \frac{\Delta p}{L} \qquad (٧٣-٥)$$

ومنه:

$$\Delta p = \frac{8 \cdot \mu \cdot L}{\pi \cdot R^4} \cdot Q \qquad (٧٤-٥)$$

أما سرعة الجريان الوسطية فتكون:

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{R^2 \cdot \Delta p}{8 \cdot \mu \cdot L} \qquad (٧٥-٥)$$

وبالنسبة لسرعة الجريان العظمى فإنها تحصل عند محور الأنبوب، وبناء عليه يكون:

$$u_{\max} = -\frac{R^2}{4 \cdot \mu} \cdot \frac{dp}{dz}$$

أو:

$$u_{\max} = \frac{R^2}{4 \cdot \mu} \cdot \frac{\Delta p}{L} \qquad (٧٦-٥)$$

ولكن:

$$\frac{\Delta p}{L} = \frac{8 \cdot \mu \cdot V}{R^2}$$

وبالتعويض نستنتج أن:

$$u_{\max} = 2 \cdot V \qquad (٧٧-٥)$$

٥-٢-٣-٥. الجريان بين أسطوانتين متداخلتين تدوران بسرعتين زاويتين مختلفتين

Laminar Flow between Tow Cylinders Moving with Different Speed

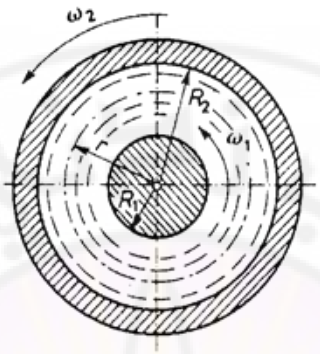
لندرس في هذه الحالة الجريان الصفحي لسائل محصور بين أسطوانتين متداخلتين الداخلية منها تدور بسرعة زاوية ω_1، والخارجية تدور بسرعة زاوية ω_2. حيث أن القطر الخارجي للأسطوانة الداخلية هو R_1، والقطر الداخلي للأسطوانة الخارجية هو R_2، كما في الشكل (٥-١١).

الافتراضات:

- الجريان مستقر.
- الأسطوانتان تدوران بالاتجاه نفسه.

المطلوب:

- استنتاج علاقة توزع السرعة في الحيز المحصور بين الأسطوانتين المتداخلتين.



الشكل (٥-١١). دراسة الجريان الصفحي بين أسطوانتين متداخلتين [2]

الحل:

نكتب أولاً معادلات نافييه-ستوكس في الإحداثيات الأسطوانية:

$$\frac{\partial V_r}{\partial t}+V_r\cdot\frac{\partial V_r}{\partial r}+\frac{V_\theta}{r}\cdot\frac{\partial V_r}{\partial \theta}+V_z\cdot\frac{\partial V_r}{\partial z}-\frac{V_\theta^2}{r}=$$

$$g_r-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial r}+\upsilon\cdot\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\cdot\frac{\partial V_r}{\partial r}\right)-\frac{V_r}{r^2}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 V_r}{\partial \theta^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta}+\frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2}\right)$$

$$\frac{\partial V_\theta}{\partial t}+V_r\cdot\frac{\partial V_\theta}{\partial r}+\frac{V_\theta}{r}\cdot\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta}+V_z\cdot\frac{\partial V_\theta}{\partial z}+\frac{V_r\cdot V_\theta}{r}=$$

$$g_\theta-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial p}{\partial \theta}+\upsilon\cdot\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\cdot\frac{\partial V_\theta}{\partial r}\right)-\frac{V_\theta}{r^2}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial \theta^2}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial V_r}{\partial \theta}+\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial z^2}\right)$$

$$\frac{\partial V_z}{\partial t}+V_r\cdot\frac{\partial V_z}{\partial r}+\frac{V_\theta}{r}\cdot\frac{\partial V_z}{\partial \theta}+V_z\cdot\frac{\partial V_z}{\partial z}=$$

$$g_z-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial z}+\upsilon\cdot\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\cdot\frac{\partial V_z}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 V_z}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial z^2}\right)$$

وفي الحالة المدروسة لدينا:

$$V_r=V_z=0, V_\theta=V(r)=V$$

$$\frac{\partial p}{\partial z}=\frac{\partial p}{\partial \theta}=0,\frac{\partial p}{\partial r}=p(r)=p$$

فتأخذ معادلات نافييه-ستوكس الشكل التالي:

$$\frac{d^2V}{dr^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{dV}{dr}-\frac{V}{r^2}=0 \qquad (٧٨-٥)$$

$$\frac{dp}{dr}=\rho\cdot\frac{V^2}{r} \qquad (٧٩-٥)$$

ولإيجاد توزع السرعة نحل المعادلة التفاضلية (٧٨-٥) فنجد أن:

$$V=C_1\cdot r+\frac{C_2}{r} \qquad (٨٠-٥)$$

وتحدد قيمتا الثابتين C_1,C_2 من الشروط الحدية، حيث لدينا:

$$V=\omega_1\cdot R_1\big|_{r=R_1}$$

$$V=\omega_2\cdot R_1\big|_{r=R_2}$$

ومنه نجد:

$$\omega_1\cdot R_1=C_1\cdot R_1+\frac{C_2}{R_1} \qquad (٨١-٥)$$

$$\omega_2\cdot R_2=C_1\cdot R_2+\frac{C_2}{R_2} \qquad (٨٢-٥)$$

وبحل المعادلتين السابقتين، نحصل على :

$$C_1=\frac{\omega_2\cdot R_2^2-\omega_1\cdot R_1^2}{R_2^2-R_1^2}$$

و:

$$C_2=\frac{(\omega_1-\omega_2)\cdot R_2^2\cdot R_1^2}{R_2^2-R_1^2}$$

نجد أخيراً بالتعويض أن علاقة توزع السرعة بين الأسطوانتين تأخذ الصيغة:

$$V=\frac{1}{R_2^2-R_1^2}\cdot\left[\left(\omega_2\cdot R_2^2-\omega_1\cdot R_1^2\right)\cdot r+\frac{1}{r}\cdot(\omega_1-\omega_2)\cdot R_2^2\cdot R_1^2\right] \qquad (٨٣-٥)$$

٥-٣. الجريان المضطرب Turbulent Flow

٥-٣-١. وصف الجريان المضطرب - تأرجح السرعة

Description of Turbulent Flow – Fluctuation Velocity

ذكرنا سابقاً أنه في حالة الجريان الصفحي تتحرك جزيئات السائل على شكل طبقات أوصفائح متوازية دون حصول أي انتقال لجزيئات السائل من طبقة لأخرى. كما ذكرنا أيضاً أنه لو راقبنا تغير السرعة والضغط باتجاه أحد المحاور الإحداثية بدلالة الزمن في حالة الجريان المستقر لوجدنا أن هذه السرعة تكون ثابتة دون أي تغير أو ذبذبة فيها، لا في قيمتها، ولا اتجاهها. إن هذه الحالة تسهل إلى حد ما التعامل مع الجريان لأن قيم عناصره تكون ثابتة.

إلا أن الوضع يختلف تماماً في الجريان المضطرب عما هو عليه في الجريان الصفحي. ففي الجريان المضطرب تحصل حركة عشوائية لجزيئات السائل، حيث تنتقل بين الطبقات المتجاورة بشكل غير منظم. ولو راقبنا الجريان المضطرب المستقر في نقطة ما منه، لوجدنا أن عناصر الجريان من سرعة وضغط وكتلة نوعية تتغير مع الزمن. ولقد أثبتت الدراسات الحديثة وخاصة بعد استخدام الليزر في قياس السرعة، أن هذا التغير يكون كبيراً جداً أحياناً حتى لو كان الجريان مستقراً، ويلاحظ أن قيم السرعة تتذبذب أو تتأرجح زيادة ونقصاناً حول قيمة وسطية، وأن هذه الذبذبة تحدث بشكل عشوائي، كما هو مبين في الشكل (٥-١٢). وينتج عن هذه الذبذبة تشكل قوى قص كبيرة، تضاف إلى قوى القص الناتجة عن لزوجة السائل.

وباعتبار أن قيم مركبات السرعة والضغط لا تكون ثابتة في الجريان المضطرب، وإنما تتأرجح زيادة ونقصاناً حول قيمة معينة، وأن قيمة مركبات السرعة عند نقطة ما متغيرة مع الزمن (حتى لو كان الجريان مستقراً)، لذلك سنجزئها إلى سرعة وسطية وسرعة متأرجحة متغيرة مع الزمن، أي:

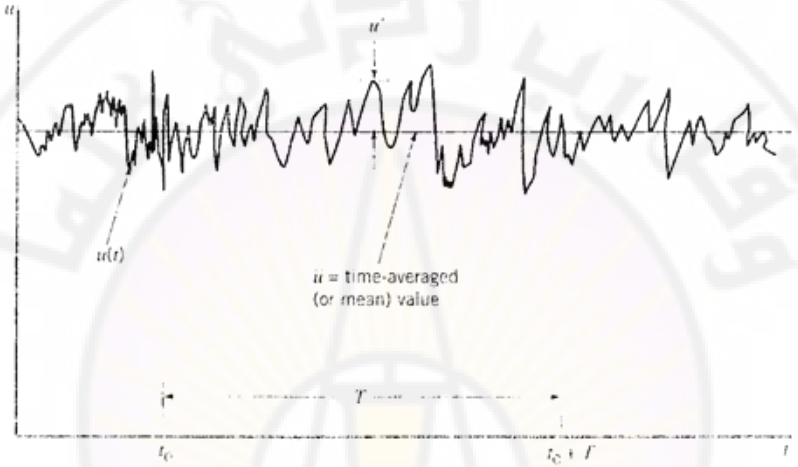
$$u = \overline{u} + u' \qquad (٨٤-٥)$$

$$v = \overline{v} + v' \qquad (٨٥-٥)$$

$$w = \overline{w} + w' \qquad (٨٦-٥)$$

حيث أن:

- u, v, w: مركبات السرعة عند نقطة معينة، وهي متغيرة مع الزمن.
- $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$: القيم الوسطية لمركبات السرعة، وهي ثابتة في الجريان المستقر.
- u', v', w': التأرجحات في مركبات السرعة، وهي متغيرة مع الزمن.



الشكل (٥-١٢). تأرجح سرعة الجريان في الجريان المضطرب [6]

تحسب قيمة السرعة الوسطية للمركبات الثلاث عند نقطة معينة خلال فاصل زمني معين مقداره t من العلاقات:

$$\bar{u} = \frac{1}{t} \cdot \int_0^t u \cdot dt \qquad (٥-٨٧)$$

$$\bar{v} = \frac{1}{t} \cdot \int_0^t v \cdot dt \qquad (٥-٨٨)$$

$$\bar{w} = \frac{1}{t} \cdot \int_0^t w \cdot dt \qquad (٥-٨٩)$$

وبما أن التأرجحات تكون تارة موجبة وتارة أخرى سالبة، لذلك فإن متوسطها يكون معدوماً، أي:

$$\overline{u'} = \overline{v'} = \overline{w'} = 0 \qquad (٥-٩٠)$$

حتى في حالة الجريان أحادي البعد باتجاه محور معين وليكن x مثلاً، كما هو مبين في الشكل (٥-١٣)، توجد تأرجحات في السرعة باتجاه جميع المحاور ، ولكن بعد أخذ القيم الوسطية تكون السرعة موجودة باتجاه المحور x فقط، أي نستطيع أن نكتب:

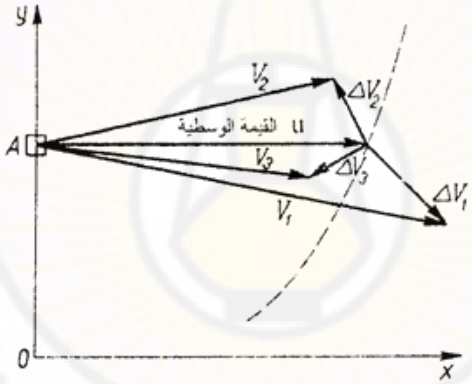
$$u = \overline{u} + u'$$

$$v = v'$$

$$w = w'$$

$$\overline{u} \neq 0$$

$$\overline{v} = \overline{w} = 0$$



الشكل (٥-١٣). تغير السرعة في الجريان المضطرب

كلما ازدادت قيم التأرجحات ازدادت درجة الاضطراب للجريان، ولكن من أجل تقييم درجة الاضطراب لا يمكن الاعتماد على متوسط تأرجحات السرعة، لأنها معدومة، ويستخدم كمعيار عوضاً عنها متوسطات مربع تأرجحات السرعة كما يلي:

$$\overline{|V'|} = \sqrt{\frac{\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}}{3}} \qquad (٥-٩١)$$

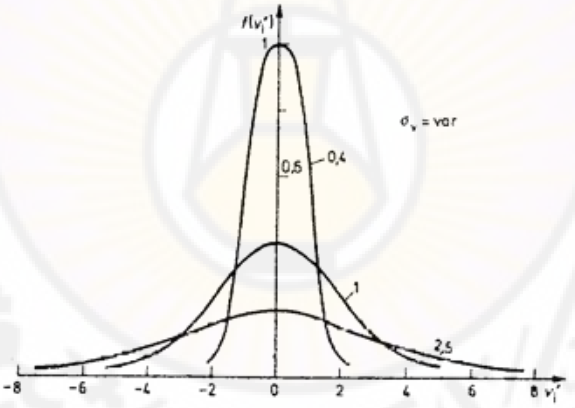
وللحصول على معيار درجة أو **شدة الاضطراب** ***Intensity of Turbulence T*** تنسب الكمية السابقة لقيمة متوسط السرعة، أي:

$$T = \frac{\overline{|V'|}}{V} \qquad (٩٢-٥)$$

إن قيمة درجة الاضطراب تختلف بشكل واسع، حيث تتراوح ما بين $T = 0.02$ في الجريان عالي الاضطراب و $T = 0.002$ في الجريان قليل الاضطراب.

كما ذكرنا، يغلب على طبيعة حركة جزيئات السائل في الجريان المضطرب، الصفة العشوائية، وتكون قيم التأرجحات وبالتالي القيم اللحظية لمركبات السرعة ذات صفة عشوائية أيضاً. ولو درسنا التوزع الاحتمالي لقيم تأرجحات السرعة لوجدنا أنها تحقق التوزع الاحتمالي الطبيعي أو منحني غاوس الاحتمالي، كما هو في الشكل (٥-١٤). حيث أن احتمال تشكل قيم تأرجحات السرعة وفق محور معين يساوي:

$$f(u_i') = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sigma u'} \cdot e^{\left\{ -\frac{(u_i')^2}{2 \cdot (\sigma u')^2} \right\}} \qquad (٩٣-٥)$$

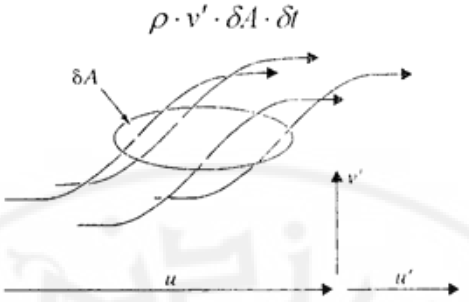


الشكل (٥-١٤). تغير تأرجح السرعة وفق منحني غاوس الإحتمالي

٥-٣-٢. إجهادات القص في الجريان المضطرب

Turbulent Shear Stresses

لنأخذ حالة الجريان المضطرب باتجاه المحور الأفقي x في الإحداثيات المستوية، كما هو موضح في الشكل (٥-١٥). فنتيجة لتأرجحات السرعة v' بالاتجاه الشاقولي y وخلال الفترة الزمنية δt، سوف تنتقل كتلة من السائل خلال المساحة δA بالاتجاه الشاقولي تساوي:



الشكل (٥-١٥). مفهوم الإجهادات الإضافية في الجريان المضطرب [3]

ويكون التغير في كمية الحركة δM باتجاه المحور الأفقي حيث السرعة هي $u+u'$ مساوياً:

$$\delta M = \rho \cdot v' \cdot \delta A \cdot \delta t \cdot \left(\overline{u} + u'\right) \qquad (٥-٩٤)$$

ويكون معدل تغير كمية الحركة خلال الزمن δt مساوياً:

$$\frac{\delta M}{\delta t} = \rho \cdot v' \cdot \delta A \cdot \left(\overline{u} + u'\right) \qquad (٥-٩٥)$$

ولو أخذنا معدل تغير كمية الحركة كقيمة وسطية يكون لدينا:

$$average\frac{\delta M}{\delta t} = \rho \cdot v' \cdot \delta A \cdot \left(\overline{u} + u'\right) = \rho \cdot \overline{v'} \cdot \delta A \cdot \overline{u} + \rho \cdot \overline{u' \cdot v'} \cdot \delta A$$

ولكن نحن نعلم أن: $\overline{v'} = 0$ ، وعليه تصبح المعادلة السابقة كما يلي:

$$average\frac{\delta M}{\delta t} = \rho \cdot \overline{u' \cdot v'} \cdot \delta A \qquad (٥-٩٦)$$

وكما نعلم فإن معدل تغير كمية الحركة بالاتجاه الأفقي هو القوة الأفقية المؤثرة على السطح δA، أي أن:

$$\delta F = \rho \cdot \overline{u' \cdot v'} \cdot \delta A \qquad (٥-٩٧)$$

إن هذه القوة سوف تولد إجهاداً قاصاً على السطح δA، يساوي:

$$\tau_{xy} = \frac{\delta F}{\delta A} = \rho \cdot \overline{u' \cdot v'} \qquad (٥-٩٨)$$

مما سبق نجد أنه نتيجة التأرجحات في السرعة، سوف تتولد إجهادات قاصة إضافية فضلاً عن إجهادات القص الناتجة عن لزوجة السائل وتدرج السرعة كما هو

الحال في حالة الجريان الصفحي. وهذه الإجهادات تتعلق بقيمة تأرجحات السرعة. فكلما كانت التأرجحات أكبر كلما كانت هذه الإجهادات أكبر. وفي الحالة العامة أي في حالة الجريان المضطرب ثلاثي البعد ينتج لدينا مجموعة إجهادات قاصة كما سنرى في الفقرات القادمة.

٥-٣-٣. المعادلات التفاضلية العامة للجريان المضطرب-معادلات (نافييه-ستوكس-رينولدز) – إجهادات رينولدز.

Differential Equations of Turbulent Flow-(Reynolds-Navier-Stokes) Equations – Reynolds Stresses

تعتبر المعادلات التفاضلية العامة للجريان المضطرب من أعقد المعادلات في ميكانيك السوائل، وربما كانت كما يقال في المراجع إحدى أعقد المعادلات في مختلف العلوم الهندسية والفيزيائية.

إن نقطة الانطلاق الوحيدة في استنتاج هذه المعادلات هي معادلات نافييه-ستوكس في حالة الجريان الصفحي التي استنتجناها سابقاً، مع استبدال مركبات السرعة والضغط بـ:

$$u = \overline{u} + u'$$

$$v = \overline{v} + v'$$

$$w = \overline{w} + w'$$

ولاختصار الرموز والأدلة سنعبر عن القيم الوسطية لمركبات السرعة بالرموز:

$$U = \overline{u} \Rightarrow u = U + u'$$

$$V = \overline{v} \Rightarrow v = V + v'$$

$$W = w' \Rightarrow w = W + w'$$

إن معادلات نافييه-ستوكس تكتب في حالة الجريان الثلاثي البعد غير المستقر وغير القابل للانضغاط كما يلي:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial u}{\partial z} = X - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \upsilon \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+v\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+w\cdot\frac{\partial v}{\partial z}=Y-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial y}+\upsilon\cdot\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+u\cdot\frac{\partial w}{\partial x}+v\cdot\frac{\partial w}{\partial y}+w\cdot\frac{\partial w}{\partial z}=Z-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial z}+\upsilon\cdot\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)$$

وبالتبديل عن مركبات السرعة والضغط المذكورة، مع اعتماد الأسس الرياضية التالية:

$$\overline{u'}=\overline{v'}=\overline{w'}=0 \qquad (٩٩-٥)$$

$$\overline{u'\cdot v'}=\overline{v'\cdot u'} \qquad (١٠٠-٥)$$

$$\overline{u'\cdot w'}=\overline{w'\cdot u'} \qquad (١٠١-٥)$$

$$\overline{v'\cdot w'}=\overline{w'\cdot v'} \qquad (١٠٢-٥)$$

$$\overline{\overline{u}\cdot v'}=0 \qquad (١٠٣-٥)$$

$$\overline{\overline{u}\cdot w'}=0 \qquad (١٠٤-٥)$$

$$\overline{\overline{v}\cdot w'}=0 \qquad (١٠٥-٥)$$

$$\overline{\overline{u}}=\overline{u},\overline{\overline{v}}=\overline{v},\overline{\overline{w}}=\overline{w} \qquad (١٠٦-٥)$$

$$\overline{u^2}=\overline{u}^2+\overline{u'^2} \qquad (١٠٧-٥)$$

$$\overline{v^2}=\overline{v}^2+\overline{v'^2} \qquad (١٠٨-٥)$$

$$\overline{w^2}=\overline{w}^2+\overline{w'^2} \qquad (١٠٩-٥)$$

$$\frac{\partial\overline{u'}}{\partial t}=\frac{\partial\overline{v'}}{\partial t}=\frac{\partial\overline{w'}}{\partial t}=0 \qquad (١١٠-٥)$$

$$\frac{\partial\overline{u'}}{\partial x}=\frac{\partial\overline{u'}}{\partial y}=\frac{\partial\overline{u'}}{\partial z}=0 \qquad (١١١-٥)$$

$$\frac{\partial\overline{v'}}{\partial x}=\frac{\partial\overline{v'}}{\partial y}=\frac{\partial\overline{v'}}{\partial z}=0 \qquad (١١٢-٥)$$

$$\frac{\partial\overline{w'}}{\partial x}=\frac{\partial\overline{w'}}{\partial y}=\frac{\partial\overline{w'}}{\partial z}=0 \qquad (١١٣-٥)$$

نحصل على المعادلات التالية:

$$\rho\cdot\left(\frac{\partial U}{\partial t}+U\cdot\frac{\partial U}{\partial x}+V\cdot\frac{\partial U}{\partial y}+W\cdot\frac{\partial U}{\partial z}\right)=\rho\cdot X-\frac{\partial P}{\partial x}$$
$$+\mu\cdot\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right)-\left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}\right) \qquad (١١٤-٥)$$

$$\rho\cdot\left(\frac{\partial V}{\partial t}+U\cdot\frac{\partial V}{\partial x}+V\cdot\frac{\partial V}{\partial y}+W\cdot\frac{\partial V}{\partial z}\right)=\rho\cdot Y-\frac{\partial P}{\partial y}$$
$$+\mu\cdot\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right)-\left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}\right) \qquad (١١٥-٥)$$

$$\rho\cdot\left(\frac{\partial W}{\partial t}+U\cdot\frac{\partial W}{\partial x}+V\cdot\frac{\partial W}{\partial y}+W\cdot\frac{\partial W}{\partial z}\right)=\rho\cdot Z-\frac{\partial P}{\partial z}$$
$$+\mu\cdot\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 W}{\partial z^2}\right)-\left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}\right) \qquad (١١٦-٥)$$

تدعى المعادلات السابقة **بمعادلات نافييه-ستوكس-رينولدز** ***Reynolds-Navier-Stokes Equations***. وفيها:

$$\tau_{xx}=\rho\cdot\overline{u'^2} \qquad (١١٧-٥)$$

$$\tau_{xy}=\rho\cdot\overline{u'\cdot v'} \qquad (١١٨-٥)$$

$$\tau_{xz}=\rho\cdot\overline{u'\cdot w'} \qquad (١١٩-٥)$$

$$\tau_{yx}=\rho\cdot\overline{v'\cdot u'} \qquad (١٢٠-٥)$$

$$\tau_{yy}=\rho\cdot\overline{v'^2} \qquad (١٢١-٥)$$

$$\tau_{yz}=\rho\cdot\overline{v'\cdot w'} \qquad (١٢٢-٥)$$

$$\tau_{zx}=\rho\cdot\overline{w'\cdot u'} \qquad (١٢٣-٥)$$

$$\tau_{zy}=\rho\cdot\overline{w'\cdot v'} \qquad (١٢٤-٥)$$

$$\tau_{zz}=\rho\cdot\overline{w'^2} \qquad (١٢٥-٥)$$

إن الحدود: $\tau_{xx},\tau_{xy},\tau_{xz},\tau_{yx},\tau_{yy},\tau_{yz},\tau_{zx},\tau_{zy},\tau_{zz}$ تدعى إجهادات الاضطراب أو إجهادات رينولدز ***Reynolds Stresses***.

٥-٣-٤ . نماذج الإضطراب Turbulent Models

كما نعلم تتحدد حالة الجريان الصفحي بمعرفة مركبات السرعة الثلاث والضغط في كل نقطة. ورغم صعوبة حل معادلات نافييه - ستوكس بل استحالته بشكل مباشر في معظم الحالات دون استخدام الحاسوب، إلا أنه من الناحية الرياضية المسألة قابلة للحل، لأن معادلات نافييه-ستوكس إضافة لمعادلة الاستمرار تشكل أربع معادلات بأربعة مجاهيل هي المركبات الثلاث للسرعة والضغط.

إلا أن المسألة تصبح أكثر تعقيداً في حالة الجريان المضطرب، لأن المعادلات أضافت تسعة مجاهيل جديدة. وباعتبار أن: $\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{xz} = \tau_{zx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}$ ، يصبح عدد المجاهيل الإضافية ستة بدلاً من تسعة. وبالتالي يكون عدد المجاهيل الكلي في معادلات نافييه-ستوكس-رينولدز عشرة مجاهيل، تمثل المركبات الوسطية الثلاث للسرعة والضغط وستة إجهادات قص. تعطينا معادلة الإستمرار معادلة إضافية فيصبح لدينا أربع معادلات بعشرة مجاهيل. أي أن المعادلات غير قابلة للحل رياضياً وتحتاج إلى ست معادلات إضافية.

وهنا تكمن المشكلة الكبيرة والصعبة في إضافة معادلات تمكننا من جعل المعادلات التفاضلية للجريان المضطرب قابلة للحل. وهذا ما دفع العلماء إلى وضع نماذج رياضية تعتمد على الفهم الفيزيائي والرياضي لطبيعة الاضطراب وحالته العشوائية. ولقد بقيت هذه النماذج حبراً على ورق، حتى انتشار الحواسيب السريعة ذات الذاكرات الضخمة. حيث بدأت تنتشر وتتطور منذ مطلع الثمانينات من القرن العشرين الأبحاث حول حل معادلات نافييه ستوكس-رينولدز، مترافقة مع تطوير نماذج الاضطراب، بما يتناسب مع السعات الهائلة لذاكرات الحواسيب الجديدة وخاصة بعد عام ١٩٩٠. وساعد في ذلك انتشار الأجهزة المتطورة في قياس تأرجحات السرعة تجريبياً، وخاصة أجهزة الليزر الدقيقة.

وسوف نعرض فيما يلي بعض نماذج الاضطراب التي يمكن استخدامها في حل معادلات نافييه- ستوكس-رينولدز. وهذه النماذج هي: نموذج برانتل- نموذج كارمن – نموذج تايلور- نموذج بوسينيسك.

٥-٣-٤-١. نموذج براندتل Prandtl Model

يستخدم نموذج براندتل في الجريان المضطرب وحيد البعد في المستوي. حيث أن إجهاد القص كما وجدنا سابقاً يساوي:

$$\tau_{xy} = \rho \cdot \overline{u' \cdot v'}$$

لنأخذ نقطة معينة من السائل سرعة الجريان فيها u، وسرعة الجريان في طبقتين مجاورتين على مسافة δy من هذه النقطة هي $u+\delta u$ من الأعلى و $u-\delta u$ من الأسفل. لقد اعتبر براندتل أن حركة دوامية تشبه الدولاب تحصل بين الطبقتين المتجاورتين، كما هو مبين في الشكل (٥-١٦). وافترض أن مساحة مقطع الحلقة المتدومة هي δA، و أنه في أي جريان مضطرب يجب أن تتناسب $\overline{|u'|}$ مع $\overline{|v'|}$ بالقيمة نفسها، وبالتالي يمكن اعتبار السرعة ضمن هذه الحلقة المتدومة هي $\overline{|u'|} = \overline{|v'|}$. وحدد أيضاً الإرتفاع δy بحيث يكون التغير في السرعة نحو الأعلى و الأسفل: $\delta u = \overline{|u'|}$. وعليه يمكن أن نكتب:

$$\delta U = \overline{|u'|} = \delta y \cdot \frac{dU}{dy} = \ell \cdot \frac{dU}{dy} \qquad (١٢٦-٥)$$

ويطلق على الرمز ℓ **طول المزج** ***Mixing Length***، وهو نصف قيمة ارتفاع الحلقة المتدومة بحيث يكون التغير بالسرعة δu مساوياً $\overline{|u'|}$. ويعطى إجهاد القص بالعلاقة:

$$\tau_{xy} = \rho \cdot \overline{u' \cdot v'} = \rho \cdot \overline{|u'|} \cdot \overline{|v'|} = \rho \cdot \overline{|u'|}^2 \qquad (١٢٧-٥)$$

أو:

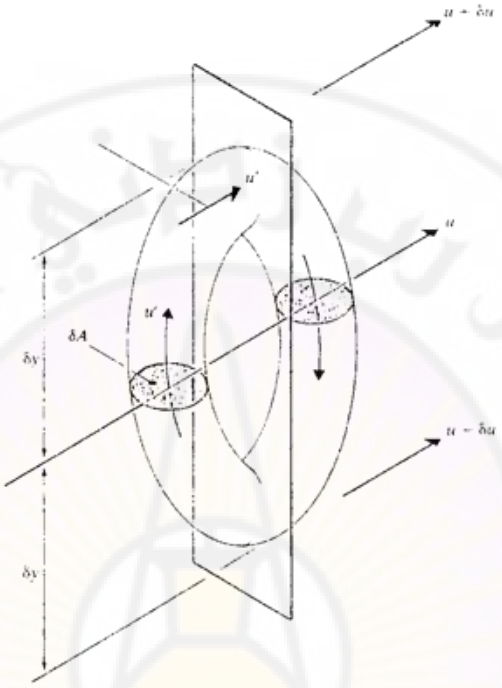
$$\tau_{xy} = \rho \cdot \ell^2 \cdot \left(\frac{dU}{dy}\right)^2 \qquad (١٢٨-٥)$$

كذلك يمكن كتابة المعادلة السابقة بشكل مشابه لإجهاد القص في حالة الجريان الصفحي كما يلي:

$$\tau_{xy} = \mu_T \cdot \frac{dU}{dy} \qquad (١٢٩-٥)$$

حيث تدعى μ_T **لزوجة الاضطراب** ***Turbulence Viscosity***، وهي تساوي:

$$\mu_T = \rho \cdot \ell^2 \cdot \frac{dU}{dy} \qquad (١٣٠-٥)$$



الشكل (٥-١٦). مفهوم طول المزج – نموذج براندتل [3]

نلاحظ مما سبق أنه لا يمكن الاستفادة من نموذج براندتل في حل الجريان المضطرب وحيد البعد دون تحديد طول المزج ℓ. حيث يتم افتراض أن طول المزج هو نسبة من الارتفاع y، وبالتالي يسهل ربطه بالمعادلات، وعليه يمكن كتابته كما يلي:

$$\ell = K \cdot y \qquad (١٣١\ ٥)$$

حيث: K – ثابت يحدد تجريبياً.

ويمكن الاعتماد على نموذج براندتل في إيجاد شكل توزع السرعة في الجريان المضطرب. بكتابة علاقة إجهاد القص في الجريان المضطرب، يكون لدينا:

$$\tau_{yy} = \rho \cdot \ell^2 \cdot \left(\frac{dU}{dy}\right)^2 \qquad (١٣٢-٥)$$

أو:

$$\tau_{xy} = \rho \cdot (K \cdot y)^2 \cdot \left(\frac{dU}{dy}\right)^2 \qquad (١٣٣-٥)$$

ويمكن كتابة العلاقة السابقة كما يلي:

$$\frac{\tau_{xy}}{\rho} = (K \cdot y)^2 \cdot \left(\frac{dU}{dy}\right)^2 \qquad (١٣٤-٥)$$

وبفرض أن قيمة السرعة بالقرب من الجدار تتغير بشكل خطي، عندها يكون إجهاد القص له قيمة ثابتة، وتساوي إجهاد القص عند الجدار نفسه τ_w. وبناء على ذلك يمكن أن نعتبر أن $\tau_{xy} = \tau_w$، ولذلك يمكن كتابة العلاقة السابقة على الشكل:

$$\frac{\tau_w}{\rho} = (K \cdot y)^2 \cdot \left(\frac{dU}{dy}\right)^2 \qquad (١٣٥-٥)$$

تدعى النسبة $\sqrt{\frac{\tau}{\rho}}$ **بسرعة الاحتكاك** u_* ***Friction Velocity***، أي أن:

$$u_* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \qquad (١٣٦-٥)$$

مما سبق يمكن كتابة:

$$u_* = K \cdot y \cdot \frac{dU}{dy} \qquad (١٣٧-٥)$$

وبشكل آخر:

$$dU = \frac{u_*}{K} \cdot \frac{dy}{y} \qquad (١٣٨-٥)$$

وبالمكاملة، نجد أن:

$$U = \frac{u_*}{K} \cdot \ln y + C \qquad (١٣٩-٥)$$

حيث أن الثابت C يتعلق بخشونة السطح المحيط بالجريان. ولقد أثبتت التجارب أن قيمة هذا $K = 0.4$ هي قيمة منطقية، ويمكن اعتمادها في العلاقة السابقة.

٥-٣-٤-٢. نموذج كارمن Karman Model

يستخدم **نموذج كامن** ***Karman*** أيضاً في حالة الجريان وحيد البعد في الجريان

المضطرب كما هو الحال في نموذج براندتل. حيث لدينا كما وجدنا سابقاً:

$$\tau_{xy} = \mu_T \cdot \frac{dU}{dy}$$

ولقد اقترح انجري كارمن علاقة أخرى لحساب لزوجة الاضطراب. حيث اعتبر أن لزوجة الاضطراب هي تابع للمشتقين الأول والثاني للسرعة، وكذلك للكتلة النوعية، وعبر عنها كما يلي:

$$\mu_T = C^2 \cdot \rho^a \cdot \left(\frac{dU}{dy}\right)^b \cdot \left(\frac{d^2U}{dy^2}\right)^c \qquad (١٤٠-٥)$$

حيث أن C هو ثابت يتم تحديده تجريبياً. أما الثوابت a,b,c فقد قام كارمن بتحديدها بالاعتماد على نظرية التحليل البعدي. وبناء عليه أصبحت العلاقة السابقة كما يلي:

$$\mu_T = C^2 \cdot \rho \cdot \left(\frac{dU}{dy}\right)^3 \cdot \left(\frac{d^2U}{dy^2}\right)^{-2} \qquad (١٤١-٥)$$

٥-٣-٤-٣. نموذج تايلور Taylor Model

قام الفرنسي **تايلور** ***Taylor*** بافتراض أن لزوجة الاضطراب تابع للسرعة وليس لمشتقها كما افترض براندتل وكارمن. واقترح العلاقة التالية لحساب لزوجة الاضطراب:

$$\mu_T = \rho \cdot l_T \cdot U \qquad (١٤٢-٥)$$

إذ أطلق على l_T اسم مقياس تايلور، واقترح لحسابه العلاقة التالية:

$$l_T = \frac{y}{B} \cdot \left[1 - e^{\left(-\frac{1}{B}\frac{U_y}{\nu}\right)}\right] \qquad (١٤٣-٥)$$

حيث: B – ثابت تجريبي.

٥-٣-٤-٤. نموذج بوسينيسك Boussinesq Model

قدم هذا النموذج الباحث الفرنسي **بوسينيسك** ***Boussinesq*** ، وهو يصلح للجريان المضطرب ثلاثي البعد في الحالة العامة. وقد افترض بوسينيسك ما يلي:

$$\tau_{xx} = \mu_T \cdot \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial x} \right) \qquad (١٤٤-٥)$$

$$\tau_{xy} = \mu_T \cdot \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \qquad (١٤٥-٥)$$

$$\tau_{xz} = \mu_T \cdot \left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \right) \qquad (١٤٦-٥)$$

$$\tau_{yx} = \mu_T \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \right) \qquad (١٤٧-٥)$$

$$\tau_{yy} = \mu_T \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) \qquad (١٤٨-٥)$$

$$\tau_{yz} = \mu_T \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right) \qquad (١٤٩-٥)$$

$$\tau_{zx} = \mu_T \cdot \left(\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z} \right) \qquad (١٥٠-٥)$$

$$\tau_{zy} = \mu_T \cdot \left(\frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z} \right) \qquad (١٥١-٥)$$

$$\tau_{zz} = \mu_T \cdot \left(\frac{\partial W}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) \qquad (١٥٢-٥)$$

أي أنه قام بإيجاد علاقة بين إجهادات الاضطراب وبين القيم الوسطية لمركبات السرعة، مما جعل الجريان ممكن الحل، على الأقل من وجهة نظر رياضية.

٥-٣-٤-٥. نماذج أخرى

هناك نماذج أخرى للجريان المضطرب يمكن مصادفتها في المراجع المختلفة، وسوف نقوم بتعدادها فقط دون شرح المبدأ الرياضي لها. من هذه النماذج:

- نموذج $k-\varepsilon$. الذي وضع في عام ١٩٧٢من قبل الباحثين الإنكليزيين: **Spalding & Launder**.
- نموذج **كولموكوروف Kolmogorow Model**.
- نموذج **دايسيلير Deisseler Model** وضع في عام ١٩٥٨ من قبل دايسيلير.

مسائل محلوله حول الفصل الخامس

المسألة الأولى

يتدفق زيت بمعدل $0.1\ell/s$ في واحدة العرض بين صفيحتين متوازيتين ثابتتين، المسافة بينهما $5cm$. فإذا علمت أن اللزوجة التحريكية للزيت $\mu = 0.018kg/m\cdot s$. يطلب حساب:

١. هبوط الضغط بين مقطعين من الجريان المسافة بينهما $75cm$.

٢. إجهادات القص عند جدران الصفيحة الداخلية، وعند منتصف الارتفاع بين الصفيحتين.

الحل:

الطلب الأول:

يحسب هبوط الضغط بين المقطعين من العلاقة:

$$\Delta p = \frac{12\cdot\mu\cdot L}{a^3}\cdot Q$$

بالتعويض بالقيم العددية المعطاة، نجد أن:

$$\Delta p = \frac{12\cdot 0.018\cdot 0.75}{0.05^3}\cdot 0.0001 = 0.1296Pa$$

الطلب الثاني:

يعطى إجهادات القص بالعلاقة:

$$\tau = a\cdot\frac{\partial p}{\partial x}\cdot\left(\frac{y}{a}-\frac{1}{2}\right)$$

حيث أن: $\frac{\partial p}{\partial x}$ هو تدرج الضغط، ويساوي:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\Delta p}{L} = -\frac{0.1296}{0.75} = -0.1728Pa/m$$

وبالتالي تصبح علاقة إجهاد القص، بعد تعويض القيم العددية فيها على الشكل:

$$\tau = a \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \left(\frac{y}{a} - \frac{1}{2} \right) = -0.05 \cdot 0.1728 \cdot \left(\frac{y}{0.05} - \frac{1}{2} \right)$$

أو:

$$\tau = -0.00864 \cdot \left(\frac{y}{0.05} - \frac{1}{2} \right)$$

أي أن قيمة إجهاد القص عند الجدار تساوي:

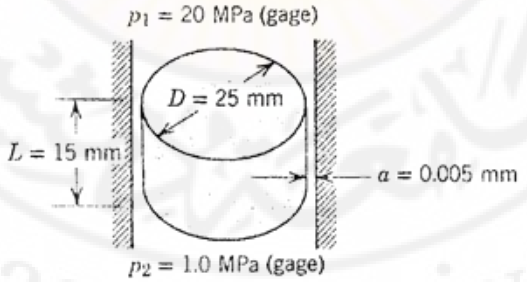
$$\tau\big|_{y=0} = -0.00864 \cdot \left(\frac{0}{0.05} - \frac{1}{2} \right) = 0.00432 Pa$$

وعند منتصف الارتفاع بين الصفيحتين:

$$\tau\big|_{y=0.025} = 0.00914 \cdot \left(\frac{0.025}{0.05} - \frac{1}{2} \right) = 0$$

المسألة الثانية

المنظومة الهيدروليكية المبينة في الشكل عبارة عن سكر أسطواني بفراغ مملوء بزيت يعادل $0.005mm$ بين الأسطوانة والطرف المحيط. فإذا علمت أن طول الأسطوانة $15mm$، وقطرها $25mm$ وأن الضغوط المطبقة قبل وبعد الأسطوانة هي $p_1 = 20MPa, p_2 = 1MPa$. احسب مقدار التسرب عبر السكر. علماً أن اللزوجة التحريكية للزيت $\mu = 0.018kg/m \cdot s$.



الحل:

يمكن اعتبار الجريان في هذه الحالة جريانًا بين صفيحتين المسافة بينهما $a = 0.005mm$، وخلال عرض مقداره $b = \pi \cdot D$. ويمكن استخدام علاقة هبوط

الضغط المستخرجة سابقاً:

$$\Delta p = \frac{12 \cdot \mu \cdot L}{b \cdot a^3} \cdot Q$$

أو:

$$Q = \frac{b \cdot a^3}{12 \cdot \mu \cdot L} \cdot \Delta p$$

وبالتالي فإن:

$$Q = \frac{\pi \cdot D \cdot a^3}{12 \cdot \mu \cdot L} \cdot \Delta p$$

وبالتعويض، نحصل على:

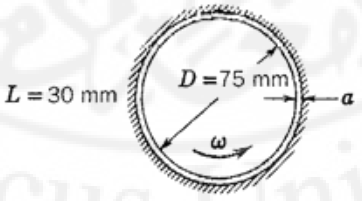
$$Q = \frac{\pi \cdot 0.025 \cdot 0.000005^3}{12 \cdot 0.018 \cdot 0.015} \cdot (20-1) \cdot 10^6 = 57.6 mm^3/s$$

المسألة الثالثة

حامل مقعدة العمود المستخدم في نظام حركة السيارات المبين في الشكل، عبارة عن محور قطره $75mm$، ويدور بعدد دورات $3600 rev/\min$. فإذا علمت أن طول المحور $L = 30mm$، وأن اللزوجة التحريكية للسائل بين المحور والمحيط $\mu = 9.6 \times 10^{-6} kg/m \cdot s$. فالمطلوب حساب:

١. العزم الناتج عن الاحتكاك.

٢. الاستطاعة الضائعة بسبب الاحتكاك.



الحل:

الطلب الأول:

بسبب صغر المسافة الفاصلة بين محور الأسطوانة والمحيط نعتبر الجريان وكأنه بين

صفيحتين الأولى تتحرك بسرعة والثانية ثابتة، المسافة بينهما $a = 30\times10^{-3}\,mm$، وخلال عرض مقداره $b == \pi\cdot D$. ونفترض أن تدرج الضغط يساوي الصفر. وبناء عليه نستخدم علاقة إجهادات القص المستخرجة سابقاً أثناء دراسة حل معادلات نافييه-ستوكس:

$$\tau_{yx} = \mu\cdot\frac{U}{a} + a\cdot\frac{\partial p}{\partial x}\cdot\left(\frac{y}{a}-\frac{1}{2}\right)$$

وحسب الفرض $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$ فإن العلاقة السابقة تكتب على الشكل:

$$\tau_{yx} - \mu\cdot\frac{U}{a}$$

أو:

$$\tau_{yx} = \mu\cdot\frac{\omega\cdot R}{a} = \mu\cdot\frac{\omega\cdot D}{2\cdot a}$$

وبالتعويض بالقيم العددية نجد أن:

$$\tau_{yx} = 9.6\times10^{-3}\cdot3600\cdot\frac{2\cdot\pi}{60}\cdot75\times10^{-3}\times\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{30\times10^{-3}} = 4.52kPa$$

ويكون عزم الاحتكاك:

$$T = F\cdot R = \tau_{yx}\cdot\pi\cdot D\cdot L\cdot R = \frac{\pi}{2}\cdot\tau_{yx}\cdot D^2\cdot L$$

ومنه:

$$T = \frac{\pi}{2}\cdot4.52\times10^{3}\cdot(0.075)^2\cdot0.03 = 1.2N\cdot m$$

الطلب الثاني:

تحسب الاستطاعة الضائعة بسبب الاحتكاك من العلاقة:

$$W = F\cdot U = F\cdot R\cdot\omega = T\cdot\omega$$

وبالتعويض، نجد أن:

$$W = 1.2\cdot3600\cdot\frac{2\cdot\pi}{60} = 0.452kW$$

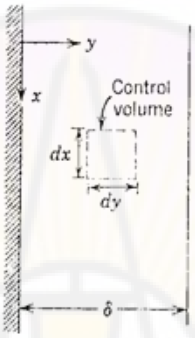
المسألة الرابعة

جريان صفحي يتدفق سائل بسماكة δ على جدار شاقولي، كما في الشكل. فمن أجل تدرج ضغط يساوي الصفر، استخرج العلاقات اللازمة لحساب:

١. توزع السرعة بجوار الجدار.

٢. الغزارة المارة في واحدة العرض والسرعة الوسطية للجريان.

٣. السرعة العظمى للجريان.



الحل:

الطلب الأول:

نكتب معادلات نافييه-ستوكس في حالة الجريان المستقر ثنائي البعد:

$$u\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+v\cdot\frac{\partial u}{\partial y}=X-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}+\upsilon\cdot\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

$$u\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+v\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=Y-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial y}+\upsilon\cdot\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$$

واعتمادا على الافتراضات السابقة، يمكن القول:

- $v=0$ لأنه لا توجد مركبات سرعة باتجاه المحور y العمودي على محور الجريان.
- $\frac{\partial u}{\partial x}=0$ باعتبار أن منحني توزع السرعة لايتغير وفق محور الجريان، وإنما يتغير بالإتجاه العمودي عليه فقط.

- تدرج الضغط باتجاه المحور x : $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$.
- لدينا: $X = g$.

وبالتالي تبسط معادلات نافييه-ستوكس إلى الشكل:

$$\frac{d^2u}{dy^2} = -\frac{\rho \cdot g}{\mu}$$

وبالتكامل مرتين، نجد أن:

$$u = -\frac{\rho \cdot g}{\mu} \cdot \frac{y^2}{2} + C_1 \cdot y + C_2$$

تحدد قيمتا الثابتين C_1, C_2 اعتماداً على الشروط الحدية:

$$u = 0\Big|_{y=0} \Rightarrow C_2 = 0$$

و:

$$\frac{du}{dy} = 0\Big|_{y=\delta} \Rightarrow C_1 = \frac{\rho \cdot g}{\mu} \cdot \delta$$

وبالتعويض يكون:

$$u = \frac{\rho \cdot g}{\mu} \cdot \delta^2 \cdot \left[\left(\frac{y}{\delta}\right) - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{y}{\delta}\right)^2\right]$$

الطلب الثاني:

إن التصريف في واحدة العرض هو:

$$\frac{Q}{b} = \int_0^{\delta} u \cdot dy$$

أو:

$$\frac{Q}{b} = \frac{\rho \cdot g}{\mu} \cdot \delta^2 \cdot \int_0^{\delta} \left[\left(\frac{y}{\delta}\right) - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{y}{\delta}\right)^2\right] \cdot dy$$

وبالمكاملة، نجد أن:

$$\frac{Q}{b} = \frac{\rho \cdot g}{3 \cdot \mu} \cdot \delta^3$$

أما السرعة الوسطية للجريان فتساوي:

$$V = \frac{Q/b}{\delta} = \frac{\rho \cdot g}{3 \cdot \mu} \cdot \delta^2$$

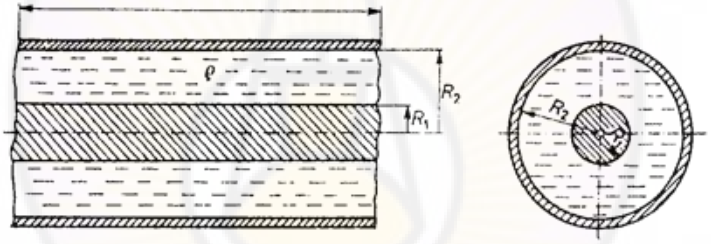
الطلب الثالث:

تكون السرعة عظمى عند: $y = \delta$، أي أن:

$$u_{\max} = \frac{\rho \cdot g}{2 \cdot \mu} \cdot \delta^2$$

المسألة الخامسة

استنتج علاقة توزع السرعة في حالة الجريان الصفحي لسائل يتدفق بين أنبوبين، كما في الشكل. حيث أن القطر الداخلي للأنبوب الخارجي R_2، والقطر الخارجي للأنبوب الداخلي R_1.



الحل:

نكتب معادلات نافييه-ستوكس وفق المحور z في الإحداثيات الأسطوانية، فنجد أن:

$$\frac{\partial V_z}{\partial t} + V_r \cdot \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \cdot \frac{\partial V_z}{\partial \theta} + V_z \cdot \frac{\partial V_z}{\partial z} =$$

$$g_z - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} + \upsilon \cdot \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 V_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right)$$

ولكن:

- $\frac{\partial V_z}{\partial t} = 0$.
- $V_r = V_\theta = 0, V_z = V$.

$$\frac{\partial V_z}{\partial z} = 0 \quad -$$

$$g_z = 0 \quad -$$

وبالتالي تبسط معادلات نافييه-ستوكس إلى المعادلة التفاضلية التالية:

$$\nu \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr}\left(r \cdot \frac{dV}{dr} \right) = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z}$$

ونحل هذه المعادلة التفاضلية نحصل على العلاقة:

$$V = \frac{1}{4 \cdot \mu} \cdot \frac{dp}{dz} \cdot r^2 + C_1 \cdot \ln r + C_2$$

تحدد قيمتا الثابتين C_1, C_2 اعتماداً على الشروط الحدية:

$$V = 0\big|_{r=R_1}$$

$$V = 0\big|_{r=R_2}$$

ومنه نجد:

$$\frac{1}{4 \cdot \mu} \cdot \frac{dp}{dz} \cdot R_1^2 + C_1 \cdot \ln R_1 + C_2 = 0$$

$$\frac{1}{4 \cdot \mu} \cdot \frac{dp}{dz} \cdot R_2^2 + C_1 \cdot \ln R_2 + C_2 = 0$$

ونحل المعادلتين السابقتين، نحصل على:

$$C_1 = -\frac{1}{4 \cdot \mu} \cdot \frac{dp}{dz} \cdot \left(\frac{R_2^2 - R_1^2}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \right)$$

و:

$$C_1 = -\frac{1}{4 \cdot \mu} \cdot \frac{dp}{dz} \cdot \left(R_1^2 - \frac{R_2^2 - R_1^2}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \cdot \ln R_1 \right)$$

وبالتعويض نجد علاقة توزع السرعة بين الأنبوبين كما يلي:

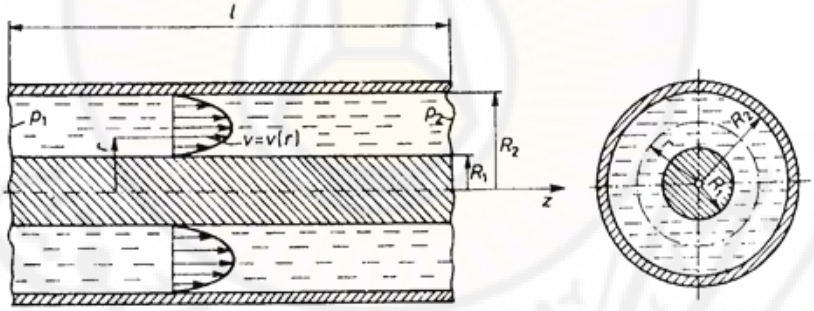
$$V = \frac{1}{4\cdot\mu}\cdot\frac{dp}{dz}\cdot r^2 - \left(\frac{1}{4\cdot\mu}\cdot\frac{dp}{dz}\cdot\frac{R_2^2 - R_1^2}{\ln\dfrac{R_2}{R_1}}\right)\cdot\ln r -$$

$$\frac{1}{4\cdot\mu}\cdot\frac{dp}{dz}\cdot\left(R_1^2 - \frac{R_2^2 - R_1^2}{\ln\dfrac{R_2}{R_1}}\cdot\ln R_1\right)$$

كما يمكن كتابة العلاقة السابقة بالشكل التالي:

$$V = -\frac{1}{4\cdot\mu}\cdot\frac{dp}{dz}\cdot\left[\left(R_1^2 - r^2\right) + \left(R_2^2 - R_1^2\right)\cdot\frac{\ln\dfrac{r}{R_1}}{\ln\dfrac{R_2}{R_1}}\right]$$

ويبين الشكل التالي مخطط توزع السرعة بين الأنبوبين.



مسائل غير محلوله حول الفصل الخامس

المسألة الأولى

يجري الماء بين صفيحتين أفقيتين متوازيتين. الصفيحة السفلى تتحرك نحو اليسار بسرعة $0.3m/s$، والصفيحة العليا ثابتة. والمسافة الفاصلة بين الصفيحتين $a=3mm$. ما هي قيمة تدرج الضغط بحيث يكون التدفق بين الصفيحتين مساوياً للصفر؟ علماً أن $\nu=10^{-6}m^2/s$.

المسألة الثانية

تتحرك طبقة رقيقة من الماء بسماكة $0.8mm$ فوق صفيحة مستوية تميل على الأفق بزاوية تساوي 30^0. فبفرض أن الجريان صفحي، وأنه متطور بالكامل، وأن تدرج الضغط باتجاه محور الجريان يساوي الصفر. المطلوب حساب:

١. إجهاد القص عند جدار الصفيحة.

٢. التصريف المار في واحدة العرض. باعتبار أن $\nu=1.2\times10^{-6}m^2/s$.

المسألة الثالثة

بفرض أن توزع السرعة بين صفيحتين متوازيتين ثابتتين، المسافة بينهما a يعطى بالعلاقة التالية:

$$u=c\cdot y\cdot(a-y)$$

حيث c هو ثابت. احسب النسبة $\frac{V}{u_{\max}}$.

المسألة الرابعة

بفرض أن توزع السرعة بين صفيحتين متوازيتين ثابتتين، المسافة بينهما a يعطى بالعلاقة:

$$u=u_{\max}\cdot\left(A\cdot y^2+B\cdot y+C\right)$$

حيث A,B,C هي ثوابت. والمطلوب حساب:

١. قيمة الثوابت A, B, C من الشروط الحدية.

٢. التصريف المار عبر الصفيحتين في واحدة العرض.

٣. النسبة $\frac{V}{u_{max}}$.

المسألة الخامسة

يتدفق زيت بين صفيحتين متوازيتين أفقيتين ثابتتين. فإذا علمت أن الجريان صفحي، وأن المسافة بين الصفيحتين $a = 3mm$، وأن تدرج يساوي الضغط $-1200 Pa/m$. حسب:

١. اجهاد القص بين السائل والسطح الداخلي للصفيحة السفلى.

٢. معدل الجريان في واحدة العرض. $\mu = 0.5 N \cdot s/m^2$.

المسألة السادسة

قناة مقطعها العرضي مستطيل، أبعادها $b \times h$. الجريان فيها صفحي مضغوط. وهبوط الضغط خلال مسافة L يساوي Δp. المطلوب:

١. استنتاج علاقة توزع السرعة.

٢. حساب السرعة الوسطية.

علماً أن الكتلة النوعية واللزوجة الحركية للسائل هما ρ, ν .

الفصل السادس

معادلة كمية الحركة
MOMENTUM EQUATION

٦-١. تمهيد Preface

يعرف علم الميكانيك كمية حركة جزيء أو جسم بأنها حاصل جداء كتلته m بسرعته V. أي أن:

$$\text{كمية الحركة} = m \cdot V \qquad (٦-١)$$

إن لكل جزيء من جزيئات السائل الجاري **كمية حركة** ***Momentum***، تتغير مع تغير سرعة جريان السائل، سواء بالمقدار أم بالاتجاه. وحسب **قانون نيوتن الثاني** ***Newton's Second Law*** لا بد من وجود قوة تحدث هذا التغير. وقد لوحظ أن هذه القوة تتناسب مع معدل تغير كمية الحركة، ويمكن خلقها عن طريق التماس مابين السائل الجاري وجدار صلب (ريش عنفة-جدران كوع في ناقل)، أو من قبل جزء آخر من السائل. وحسب **قانون نيوتن الثالث** ***Newton's Third Law***، فإن السائل يؤثر بقوة مساوية بالمقدار ومعاكسة بالاتجاه على الجدار الصلب أو جسم السائل الذي يحدث هذا التغير في قيمة السرعة.

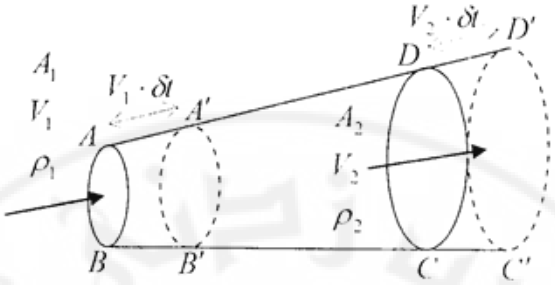
تدعى هذه القوى: **القوى الديناميكية** ***Dynamic Forces*** ، لأنها تنتج عن حركة السائل، وهي تضاف إلى القوى الساكنة الناتجة عن الضغط في السائل.

٦-٢. معادلة كمية الحركة للجريان أحادي البعد

Momentum Equation for One Dimensional Flow

لتحديد معدل تغير كمية حركة سائل جارٍ، نأخذ منه حجم تحكم على شكل جزء مستقيم من أنبوبة تيار $ABCD$ ، كما في الشكل (٦-١). ونفترض أن الجريان مستقر، أي أن جدران أنبوبة التيار لاتتغير مع الزمن، وتكون سرعة الجريان ثابتة في

أي مقطع من حقل الجريان.



الشكل (٦-١). حجم تحكم لاستنتاج معادلة كمية الحركة

وبافتراض أن سرعة الجريان عند المقطع AB هي V_1، والكتلة النوعية للسائل ρ_1، ومساحة مقطع الجريان A_1، وأن السرعة والكتلة النوعية والمساحة عند المقطع CD هي A_2, ρ_2, V_2 على التوالي. فبعد فترة زمنية قصيرة δt، ينتقل السائل الذي كان يشكل في الأصل الحجم $ABCD$ إلى $A'B'C'D'$، حيث أن:

$$AA' = V_1 \cdot \delta t$$

$$CC' = V_2 \cdot \delta t$$

ومادامت كتلة السائل ثابتة لأن الجريان مستقر، لذلك فإن كتلة السائل m الذي يشغل الحجم $CC'DD'$، يجب أن تساوي كتلة السائل الذي كان يشغل الحجم $AA'BB'$. أي أن:

$$m = \rho_2 \cdot A_2 \cdot V_2 \cdot \delta t = \rho_1 \cdot A_1 \cdot V_1 \cdot \delta t \qquad (٦-٢)$$

كما أن كمية حركة السائل $ABCD$ تتغير نتيجة انتقاله إلى $A'B'C'D'$.

إن كمية حركة السائل $CC'DD'$ تساوي:

$$m \cdot V_2 = \rho_2 \cdot A_2 \cdot V_2^2 \cdot \delta t \qquad (٦-٣)$$

أما كمية حركة السائل $AA'BB'$ فتساوي:

$$m \cdot V_1 = \rho_1 \cdot A_1 \cdot V_1^2 \cdot \delta t \qquad (٦-٤)$$

ويكون معدل تغير كمية الحركة خلال زمن مقداره δt مابين AB و CD مساوياً:

$$\frac{(m \cdot V_2 - m \cdot A_1)}{\delta t} = \rho_2 \cdot A_2 \cdot V_2^2 - \rho_1 \cdot A_1 \cdot V_1^2 \quad (٥-٦)$$

أو:

$$\frac{(m \cdot V_2 - m \cdot A_1)}{\delta t} = \rho_2 \cdot A_2 \cdot V_2 \cdot V_2 - \rho_1 \cdot A_1 \cdot V_1 \cdot V_1 \quad (٦-٦)$$

وبما أن الجريان مستقر، فإن كتلة السائل المارة عبر المقطع AB في واحدة الزمن تساوي كتلة السائل المارة عبر المقطع CD في واحدة الزمن، أي أن:

$$\rho_1 \cdot V_1 \cdot A_1 = \rho_2 \cdot V_2 \cdot A_2 = \rho \cdot Q \quad (٧-٦)$$

وبالتعويض في المعادلة (٦-٦)، نجد أن:

$$\frac{(m \cdot V_2 - m \cdot A_1)}{\delta t} = \rho \cdot Q \cdot (V_2 - V_1) \quad (٨-٦)$$

إن المعادلة السابقة تعبر عن الزيادة في كمية الحركة خلال واحدة الزمن في اتجاه الحركة، والتي يجب أن تحدث حسب قانون نيوتن الثاني تحت تأثير مجموعة قوى $\sum F$. وبناء عليه يمكن كتابة:

$$\sum F = \rho \cdot Q \cdot (V_2 - V_1) \quad (٩-٦)$$

حيث: $\sum F$ - محصلة القوى المؤثرة على عنصر السائل $ABCD$ في اتجاه الحركة. وحسب قانون نيوتن الثالث فإن السائل يؤثر بقوة تساويها بالقيمة وتعاكسها في الاتجاه.

٦-٣. معادلة كمية الحركة للجريانات ثنائية وثلاثية البعد

Momentum Equation for Tow and Three Dimensional Flows

تم في الفقرة السابقة استخراج المعادلة (٦-٩) من أجل جريان أحادي البعد في اتجاه مستقيم، وذلك بفرض أن سرعة الجريان الداخلة إلى حجم التحكم V_1 والخارجة منه V_2 لهما الاتجاه نفسه. ويبين الشكل (٦-٢) حالة جريان ثنائي البعد، يصنع فيه متجه السرعة $\overrightarrow{V_1}$ الزاوية α_1 مع المحور x، بينما يصنع متجه السرعة $\overrightarrow{V_2}$ فيه الزاوية α_2. وبما أن كلا من محصلة القوى وكمية الحركة هي مقادير متجهية، فإنه يمكن تحليل كل منها إلى مركبتين وفق المحورين x, y.

إن معادلة كمية الحركة في هذه الحالة هي:

$$\sum \vec{F} = \rho \cdot Q \cdot \left(\vec{V}_2 - \vec{V}_1\right) \qquad (٦-١٠)$$

وبكتابة هذه المعادلة وفق المحورين x, y، نجد أن:

$$\sum F_x = \rho \cdot Q \cdot \left(V_{2x} - V_{1x}\right) \qquad (٦-١١)$$

أو:

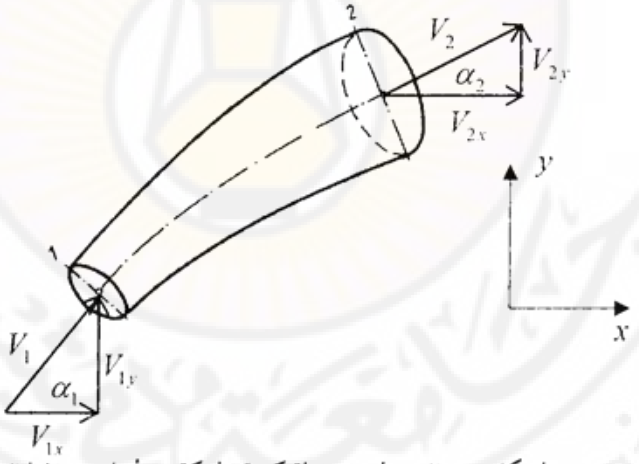
$$\sum F_x = \rho \cdot Q \cdot \left(V_2 \cdot \cos\alpha_2 - V_1 \cdot \cos\alpha_1\right) \qquad (٦-١٢)$$

و:

$$\sum F_y = \rho \cdot Q \cdot \left(V_{2y} - V_{1y}\right) \qquad (٦-١٣)$$

أو:

$$\sum F_y = \rho \cdot Q \cdot \left(V_2 \cdot \sin\alpha_2 - V_1 \cdot \sin\alpha_1\right) \qquad (٦-١٤)$$



الشكل (٦-٢). تطبيق معادلة كمية الحركة من أجل جريان ثنائي البعد

حيث:

- $\sum F_x, \sum F_y$: مجموع القوى المؤثرة باتجاه المحورين x, y.
- V_x, V_y: مركبتا متجه السرعة $\vec{V}$ باتجاه المحورين x, y.

تنص المعادلة (٦-١١)، على أن محصلة القوى المؤثرة في حجم التحكم في

الاتجاه x، تساوي معدل تغير كمية الحركة في الاتجاه نفسه. بينما تنص المعادلة (٦-١٣)، على أن محصلة القوى المؤثرة في العنصر في الاتجاه y تساوي معدل تغير كمية الحركة في الاتجاه نفسه. ويمكن جمع المركبتين $\sum F_x$ و $\sum F_y$ للحصول على المحصلة $\sum F$ بالصيغة:

$$\sum F = \sqrt{\sum F_x^2 + \sum F_y^2} \qquad (٦-١٥)$$

يمكن تطبيق نفس الطريقة في حالة الجريان ثلاثي البعد. ويعطى التغير في كمية الحركة في الاتجاه z بالمعادلة التالية:

$$\sum F_z = \rho \cdot Q \cdot (V_{2z} - V_{1z}) \qquad (٦-١٦)$$

مما سبق يمكن الوصول إلى النتيجة العامة التالية:

القوة الكلية المؤثرة على سائل ضمن حجم تحكم في اتجاه ما = معدل تغير كمية الحركة للسائل المار خلال حجم التحكم في الاتجاه نفسه

وعند تطبيق معادلة كمية الحركة نوجه المحاور الإحداثية، ثم تعطى القوى والسرعات التي جهتها من جهة المحور إشارة موجبة، والقوى والسرعات التي جهتها عكس اتجاه المحور إشارة سالبة.

٦-٤. تطبيقات معادلة كمية الحركة

Applications of the Momentum Equation

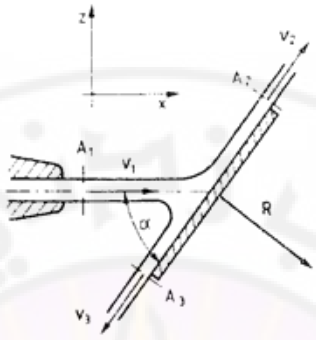
٦-٤-١. القوة الناتجة عن تيار يصطدم بصفيحة

Force Exerted on a Plate from a Striking Jet

عندما يصطدم تيار سائل بصفيحة ملساء ثابتة بزاوية مقدارها α، كما في الشكل (٦-٣)، فإنه لايرتد، بل يجري على الصفيحة في كافة الاتجاهات. وبالنسبة لأي اتجاه عمودي على سطح الصفيحة فإن سرعة السائل تنتهي إلى الصفر بعد الاصطدام، وتنعدم كمية الحركة في هذا الاتجاه.

عند الاصطدام لا بد من وجود قوة R تؤثر بين التيار والصفيحة، تساوي معدل تغير كمية الحركة في الاتجاه العمودي على الصفيحة، وتؤثر في الصفيحة في اتجاه

الحركة، وتنشأ عن هذه القوة قوة رد فعل الصفيحة على التيار، وتكون مساوية بالقيمة ومعاكسة لها في الاتجاه.



الشكل (٦-٣). القوة الناتجة عن تيار يصطدم بصفيحة [5]

تعتمد القوة المؤثرة في الاتجاه الموازي للصفيحة، على إجهاد القص ما بين السائل وسطح هذه الصفيحة. فمن أجل سائل مثالي على سبيل المثال، لا يكون هناك إجهاد قص، ولا يوجد بالتالي قوة موازية للصفيحة. ويجري السائل في هذه الحالة فوق الصفيحة، بحيث تبقى كمية الحركة الكلية له في واحدة الزمن دون تغيير.

مثال ٦-١

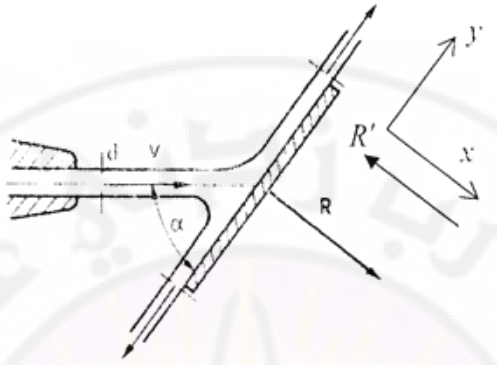
يخرج تيار مائي من فوهة ثابتة قطرها $d = 25mm$، ويصطدم بصفيحة ملساء صانعاً زاوية مقدارها $\alpha = 30^0$ مع الاتجاه العمودي على الصفيحة. فإذا كانت السرعة الوسطية للتيار $V = 5m/s$، وكان سطح الصفيحة أملساً (دون احتكاك). احسب القوة التي يؤثر بها التيار على الصفيحة، في حالتين:

- إذا كانت الصفيحة ثابتة.
- إذا كانت الصفيحة تتحرك في نفس اتجاه التيار، بسرعة تساوي $u = 2m/s$.

الحل:

نختار من أجل كلتا الحالتين حجم تحكم ثابت بالنسبة للصفيحة. وبما أننا نريد إيجاد القوة المؤثرة في الاتجاه العمودي على الصفيحة، فإننا نختار المحور x بشكل عمودي على سطح الصفيحة، فنجد أن القوى التي تؤثر في حجم التحكم هي رد فعل الصفيحة على التيار المائي R' فقط. أما قوى الضغط فهي معدومة لأن التيار معرض

بالكامل للضغط الجوي، كما يمكن إهمال قوى الوزن الذاتي لصغرها مقارنة بالقوة الأخرى.



الشكل (٦-٤).

الحالة الأولى:

بتطبيق معادلة كمية الحركة على حجم التحكم بالاتجاه العمودي x على الصفيحة، نجد أن:

$$\sum F_x = \rho \cdot Q \cdot (V_{2x} - V_{1x})$$

حيث:

- $V_{2x} = 0$: مركبة السرعة النهائية في الاتجاه x.
- $V_{1x} = V \cdot \cos\alpha$: مركبة السرعة البدائية في الاتجاه x.

وبالتعويض في المعادلة السابقة، نجد أن:

$$-R' = \rho \cdot V \cdot \pi \cdot \frac{d^2}{4} \cdot (0 - V \cdot \cos\alpha)$$

أو:

$$R' = \rho \cdot \pi \cdot \frac{d^2}{4} \cdot V^2 \cdot \cos\alpha$$

وبالتعويض بالمعطيات العددية الواردة في نص المسألة، نجد أن رد فعل الصفيحة يساوي:

$$R' = 1000 \cdot \pi \cdot \frac{0.025^2}{4} \cdot 5^2 \cdot \cos 30 = 10.63N$$

وتكون قيمة القوة R التي يؤثر بها التيار على الصفيحة مساوية قيمة R'، ومعاكسة لها بالاتجاه.

الحالة الثانية:

عندما تتحرك الصفيحة في اتجاه التيار نفسه، وبسرعة مقدارها u، فإن التيار يمتد باستمرار بطول مقداره u في واحد الزمن. وعندها يصبح لدينا:

- $V_{2x} = 0$: مركبة السرعة النهائية في الاتجاه x.
- $V_{1x} = (V-u)\cdot\cos\alpha$: مركبة السرعة البدائية في الاتجاه x.
- $Q = (V-u)\cdot\pi\cdot\frac{d^2}{4}$: التصريف الخارج من الفتحة.

وبالتعويض في معادلة كمية الحركة باتجاه المحور x، نجد:

$$-R' = \rho\cdot(V-u)\cdot\pi\cdot\frac{d^2}{4}\cdot(0-(V-u)\cdot\cos\alpha)$$

ومنه:

$$R' = \rho\cdot\pi\cdot\frac{d^2}{4}\cdot(V-u)^2\cdot\cos\alpha$$

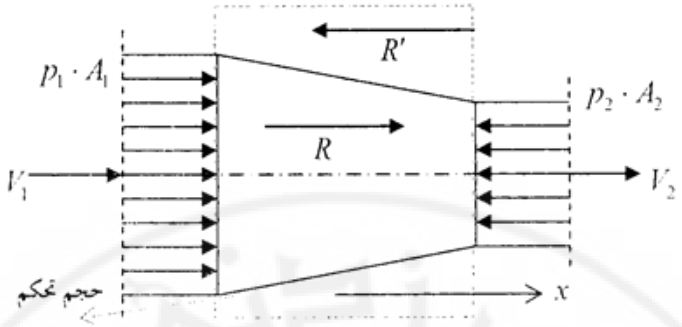
وبالتعويض بالمعطيات العددية، نجد أن:

$$R' = 1000\cdot\pi\cdot\frac{0.025^2}{4}\cdot(5-2)^2\cdot\cos 30 = 3.83N$$

وتكون قيمة القوة R التي يؤثر بها التيار على الصفيحة في هذه الحالة مساوية قيمة R' ومعاكسة لها بالاتجاه.

٦-٤-٢. القوة المؤثرة على الأنابيب Force Exerted on Pipes

إذا اعتبرنا حالة جريان ضمن أنبوب أفقي متضيق، يكون مخطط القوى المؤثرة على كتلة السائل داخل الأنبوب (باعتبار حجم التحكم منطبقاً على جدران الأنبوب)، كما في الشكل (٦-٥).



الشكل (٦-٥). دراسة القوة المؤثرة على أنبوب متضيق

وبتطبيق معادلة كمية الحركة على حجم التحكم باتجاه المحور x، نجد أن:

$$\sum F_x = \rho \cdot Q \cdot (V_{2x} - V_{1x})$$

أو:

$$p_1 \cdot A_1 - p_2 \cdot A_2 - R' = \rho \cdot Q \cdot (V_2 - V_1) \qquad (٦-١٧)$$

ومنه:

$$R' = p_1 \cdot A_1 - p_2 \cdot A_2 - \rho \cdot Q \cdot (V_2 - V_1) \qquad (٦-١٨)$$

حيث أن:

- V_2 , V_1: سرعة الجريان في المقطعين قبل التضيق وبعده.
- p_2 , p_1 : الضغط عند المقطعين قبل التضيق وبعده.
- $p_2 \cdot A_2 , p_1 \cdot A_1$: قوى الضغط المؤثرة قبل التضيق وبعده.
- R' : رد فعل الأنبوب على السائل.

وتكون قيمة القوة R التي يؤثر بها السائل على الأنبوب هي بالطبع مساوية R'، ومعاكسة لها بالاتجاه.

عندما يعاني السائل تغيراً في مقدار السرعه واتجاهها، كما في حالة وصلة الأنبوب (الكوع) الموضحة في الشكل (٦-٦)، تكون طريقة التحليل مشابهة للطريقة التي اتبعت في الحالة السابقة، إلا أنه من المناسب في هذه الحالة التعامل مع المركبات. فإذا كان الجريان يحدث في مستوٍ أفقي، بحيث يمكن إهمال الوزن الذاتي، فإن معادلة

كمية الحركة يمكن كتابتها وفق المحورين x, y. ففي اتجاه المحور x، لدينا:

$$-R'_x + p_1 \cdot A_1 - p_2 \cdot A_2 \cdot \cos\alpha = \rho \cdot Q \cdot (V_2 \cdot \cos\alpha - V_1) \quad (٦-١٩)$$

ومنه تكون مركبة رد فعل الكوع على السائل في الاتجاه x مساوية:

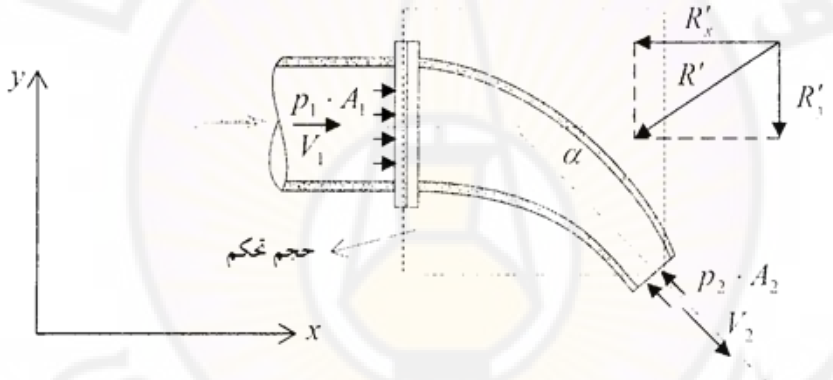
$$R'_x = p_1 \cdot A_1 - p_2 \cdot A_2 \cdot \cos\alpha - \rho \cdot Q \cdot (V_2 \cdot \cos\alpha - V_1) \quad (٦-٢٠)$$

أما باتجاه المحور y، فيكون لدينا:

$$-R'_y + p_2 \cdot A_2 \cdot \sin\alpha = \rho \cdot Q \cdot (-V_2 \cdot \sin\alpha - 0) \quad (٦-٢١)$$

ومنه نجد أن مركبة رد فعل الكوع على السائل باتجاه المحور y تساوي:

$$R'_y = p_2 \cdot A_2 \cdot \sin\alpha + \rho \cdot Q \cdot V_2 \cdot \sin\alpha \quad (٦-٢٢)$$



الشكل (٦-٦). دراسة القوة المؤثرة على أنبوب يغير اتجاهه

إذا كانت القيم المحسوبة من المعادلات السابقة موجبة، فإن الاتجاهات المفروضة للمركبات صحيحة. وتبين القيمة السالبة لأي واحدة منها أن اتجاه المركبة عكس الاتجاه المفروض. وللحصول على محصلة رد فعل الكوع على السائل، نطبق العلاقة:

$$R' = \sqrt{R'^2_x + R'^2_y}$$

أما قيمة القوة الكلية R التي يؤثر بها السائل على الكوع فهي تساوي قيمة R' المحسوبة وتعاكسها بالاتجاه.

جديرٌ بالذكر، أن القوة المؤثرة على الكوع تسعى لتحريكه. لذلك يجري عملياً تدعيم الأكواع عن طريق تثبيتها بكتل بيتونية ذات أوزان كافية، لتأمين المقاومة

اللازمة.

أخيراً يمكن التنويه إلى أنه فيما لو كان الجريان يتم عبر كوع شاقولي، فلا بد في هذه الحالة من اعتبار وزن السائل الكائن مابين بداية الكوع ونهايته، وهو عبارة عن قوة تتجه نحو الأسفل، تضاف إلى جملة القوى الأخرى المؤثرة في معادلة كمية الحركة.

مثال ٦-٢

يتدفق البترول عبر الكوع الأفقي المتضيق المبين في الشكل (٦-٦) بغزارة $Q = 0.45m^3/s$. فإذا كان القطر عند المدخل $d_1 = 500mm$، والقطر عند المخرج $d_2 = 250mm$، والجريان ينعطف بزاوية $\alpha = 45^0$. وقد أعطت قياسات الضغط عند مدخل الكوع ومخرجه القيمتين $p_1 = 40kPa, p_2 = 23kPa$. احسب القوة التي يؤثر بها السائل على الكوع. علماً أن الكتلة النوعية للبترول تساوي $\rho = 850kg/m^3$.

الحل:

لدينا:

$$A_1 = \pi \cdot \frac{d_1^2}{4} = \pi \cdot \frac{0.5^2}{4} = 0.1963m^2$$

و:

$$A_2 = \pi \cdot \frac{d_2^2}{4} = \pi \cdot \frac{0.25^2}{4} = 0.0491m^2$$

و:

$$V_1 = \frac{Q}{A_1} = \frac{0.45}{0.1963} = 2.292m/s$$

و:

$$V_1 = \frac{Q}{A_2} = \frac{0.45}{0.0491} = 9.165m/sm/s$$

وبالرجوع إلى المعادلة (٦-٢٠)، نجد أن المركبة الأفقية لرد فعل الكوع على السائل تساوي:

$$R'_x = p_1 \cdot A_1 - p_2 \cdot A_2 \cdot \cos\alpha - \rho \cdot Q \cdot (V_2 \cdot \cos\alpha - V_1)$$

وبالتعويض، نحصل على:

$$R'_x = 40\times10^3 \cdot 0.1963 - 23\times10^3 \cdot 0.049 \cdot \cos 45 - 850 \cdot 0.45 \cdot (9.165 \cdot \cos 45 - 2.292) = 5.451kN$$

أما المركبة الشاقولية لرد الفعل، فتساوي حسب المعادلة (٦-٢٢):

$$R'_y = p_2 \cdot A_2 \cdot \sin\alpha + \rho \cdot Q \cdot V_1 \cdot \sin\alpha$$

وبالتعويض في المعطيات العددية، نجد أن:

$$R'_y = 23\times10^3 \cdot 0.049 \cdot \sin 45 + 850 \cdot 0.45 \cdot 9.165 \cdot \sin 45 = 3.276kN$$

أما قيمة المحصلة فتساوي:

$$R' = \sqrt{R'^2_x + R'^2_y} = \sqrt{5.451^2 + 3.276^2} = 6.360kN$$

وتكون قيمة محصلة القوة التي يؤثر بها السائل على الكوع مساوية قيمة R'، ومعاكسة لها بالاتجاه. أما الزاوية التي تصنعها هذه المحصلة فتعطى بالعلاقة التالية:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{R'_y}{R'_x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{3.276}{5.451}\right) = 30.7^0$$

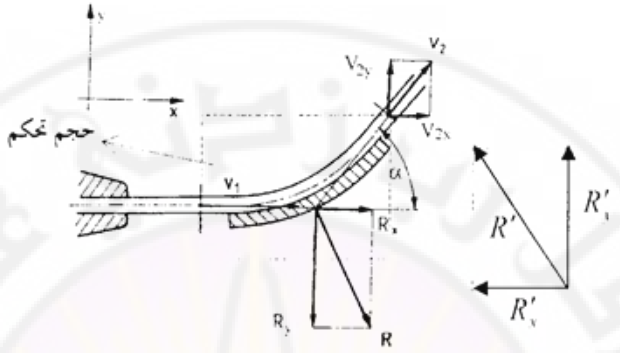
٦-٤-٣. القوة المؤثرة على ريشة Force Exerted on a Blade

٦-٤-٣-١. القوة المؤثرة على ريشة ثابتة Force Exerted on a Fixed Blade

بما أن كلاً من السرعة وكمية الحركة مقداران متجهيان، لذا فإن أي تغير في اتجاه جريان سائل يؤدي إلى تغير في كمية حركته، حتى لو بقي مقدار السرعة ثابتاً. فإذا أجبر السائل على تغيير اتجاه جريانه بوساطة ريشة منحنية ثابتة، كما في الشكل (٦-٧)، بحيث يدخل بشكل مماسي للريشة، ويخرج بشكل مماسي أيضاً دون اصطدام، فإنه تنشأ قوة مابين السائل وسطح الريشة، وهذه القوة تحدث تغيراً في كمية الحركة. ومن المناسب عادة حساب مركبتي هذه القوة في الاتجاهين الموازي والعمودي على اتجاه التيار الوارد، عن طريق تغير كمية الحركة في هذين الاتجاهين. ويمكن بعد ذلك حساب مقدار القوة التي تؤثر بها الريشة على السائل واتجاهها.

لو عدنا إلى الشكل (٦-٧)، وبفرض أن سرعة دخول السائل إلى الريشة هي V_1، وسرعة خروجه منها V_2. وبإهمال الوزن الذاتي للسائل الموجود في حجم

التحكم، فإنه يمكن بتطبيق معادلة كمية الحركة في اتجاه المحورين x,y. ويكون لدينا في الاتجاه x:



الشكل (٦-٧). دراسة القوى المؤثرة على ريشة ثابتة [7]

$$-R'_x = \rho \cdot Q \cdot (V_2 \cdot \cos\alpha - V_1) \qquad (٢٣-٦)$$

ومنه:

$$R'_x = \rho \cdot Q \cdot (V_1 - V_2 \cdot \cos\alpha) \qquad (٢٤-٦)$$

أما باتجاه المحور y، فتكون المعادلة على الشكل:

$$R'_y = \rho \cdot Q \cdot (V_2 \cdot \sin\alpha - 0) \qquad (٢٥-٦)$$

ومنه:

$$R'_y = \rho \cdot Q \cdot V_2 \cdot \sin\alpha \qquad (٢٦-٦)$$

وعندما تكون حزمة التيار المتدفقة على الشفرة واقعة في مستوٍ أفقي، وكانت الشفرة ملساء (أي أن فواقد الاحتكاك مهملة)، فإنه يمكن عندها وحسب معادلة برنوللي اعتبار أن: $V_1 = V_2 = V'$. وباعتماد هذا الافتراض تصبح للمعادلتين السابقتين الصيغتين التاليتين:

$$R'_x = \rho \cdot Q \cdot V' \cdot (1 - \cos\alpha) \qquad (٢٧-٦)$$

و:

$$R'_y = \rho \cdot Q \cdot V' \cdot \sin\alpha \qquad (٢٨-٦)$$

مثال ٣

يخرج تيار مائي من فوهة بغزارة كتلية $0.8kg/s$، ثم ينعطف بزاوية مقدارها $\alpha = 60^0$ من اتجاهه الأصلي عن طريق ريشة منحنية ثابتة، كما موضح في الشكل (٦-٧). فإذا كان دخول التيار يتم بشكل مماسي وبسرعة وسطية مقدارها $V_1 = 30m/s$، ويخرج بسرعة وسطية $V_2 = 25m/s$، فاحسب مقدار واتجاه القوة المؤثرة على الريشة.

الحل:

لدينا مركبة رد فعل الريشة في الاتجاه x:

$$R'_x = \rho \cdot Q \cdot (V_1 - V_2 \cdot \cos\alpha)$$

وبالتعويض، نجد أن:

$$R'_x = 0.8 \cdot (30 - 25 \cdot \cos 60) = 14N$$

أما مركبة رد فعل الريشة باتجاه المحور y، فتساوي:

$$R'_y = \rho \cdot Q \cdot V_2 \cdot \sin\alpha$$

وبالتعويض، نحصل على:

$$R'_y = 0.8 \cdot 25 \cdot \sin 60 = 17.32N$$

وتكون محصلة رد فعل الشفرة:

$$R' = \sqrt{R'^2_x + R'^2_y} = \sqrt{14^2 + 17.32^2} = 22.27N$$

أما الزاوية التي تصنعها هذه المحصلة مع الأفق، فتساوي:

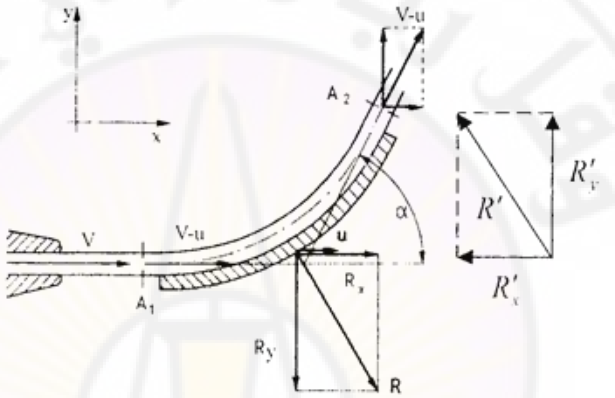
$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{R'_y}{R'_x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{17.32}{14}\right) = 51^0$$

أما قيمة القوة R التي يؤثر بها التيار على الشفرة فتساوي قيمة R'، وتعاكسها بالاتجاه.

٦-٤-٣-٢. القوة المؤثرة على ريشة متحركة

Force Exerted on a Moving Blade

لنأخذ حالة سائل يخرج من فتحة، ويدخل ثم يخرج دون اصطدام بشكل مماسي في مستوٍ أفقي لريشة متحركة سرعتها u، كما في الشكل (٦-٨). وبفرض أن سرعة خروج حزمة التيار من الفتحة تساوي V، وأن مساحة حزمة التيار هي A. فإننا نجد في هذه الحالة أن التيار سوف يدخل إلى الشفرة بسرعة نسبية تساوي $V-u$، ويخرج منها بالسرعة النسبية نفسها (حزمة التيار أفقية). ولحساب رد فعل الشفرة على التيار نطبق معادلة كمية الحركة باتجاه المحورين x,y، فيكون لدينا باتجاه المحور x:



الشكل (٦-٨). دراسة القوى المؤثرة على ريشة متحركة [7]

$$-R'_x = \rho \cdot Q \cdot (V_{2x} - V_{1x})$$

أو:

$$-R'_x = \rho \cdot (V-u) \cdot A \cdot [(V-u) \cdot \cos\alpha - (V-u)] \qquad (٢٩-٦)$$

ومنه:

$$R'_x = \rho \cdot A \cdot (V-u)^2 \cdot (1-\cos\alpha) \qquad (٣٠-٦)$$

أما معادلة كمية الحركة باتجاه المحور y، فتكون على الشكل:

$$R'_y = \rho \cdot Q \cdot (V_{2y} - 0)$$

أو:

$$R'_y = \rho \cdot A \cdot (V-u) \cdot (V-u) \cdot \sin\alpha \qquad (٣١-٦)$$

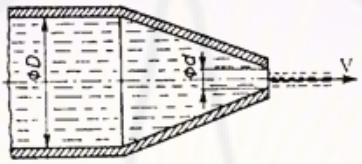
ومنه، نجد أن:

$$R'_y = \rho \cdot A \cdot (V-u)^2 \cdot \sin\alpha \qquad (٣٢-٦)$$

مسائل محلولة حول الفصل السادس

المسألة الأولى

يخرج تيار مائي من فوهة إطفاء حريق بسرعة $V = 15m/s$، كما في الشكل المبين أدناه. فإذا علمت أن قطر الأنبوب قبل الفوهة $D = 80mm$، وقطر الفوهة $d = 20mm$. احسب بعد إهمال تغير الضغط بين طرفي الوصلة، القوة التي يؤثر بها التيار على هذه الوصلة.



الحل:

بتطبيق معادلة كمية الحركة باتجاه محور الجريان، نجد أن:

$$\sum F = \rho \cdot Q \cdot (V_2 - V_1)$$

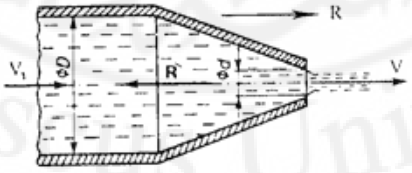
أو:

$$-R' = \rho \cdot Q \cdot (V - V_1)$$

ومنه:

$$R' = \rho \cdot Q \cdot (V - V_1)$$

حيث: R' – رد فعل الوصلة.



ولدينا:

$$V_1 = V \cdot \frac{d^2}{D^2} = 15 \cdot \frac{0.02^2}{0.08^2} = 0.938m/s$$

و:

$$Q = V \cdot \pi \cdot \frac{d^2}{4} = 0.00471 m^3 / s$$

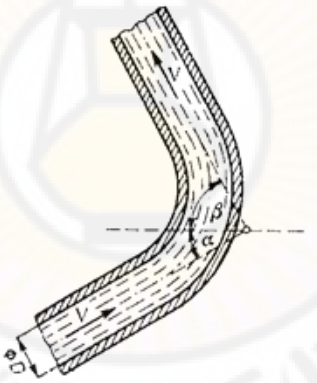
وبالتعويض، نجد أن:

$$R' = 1000 \cdot 0.00471 \cdot (15 - 0.938) = 66.23N$$

أما قيمة القوة R التي يؤثر بها التيار، فهي تساوي قيمة R'، وتعاكسها بالاتجاه.

المسألة الثانية

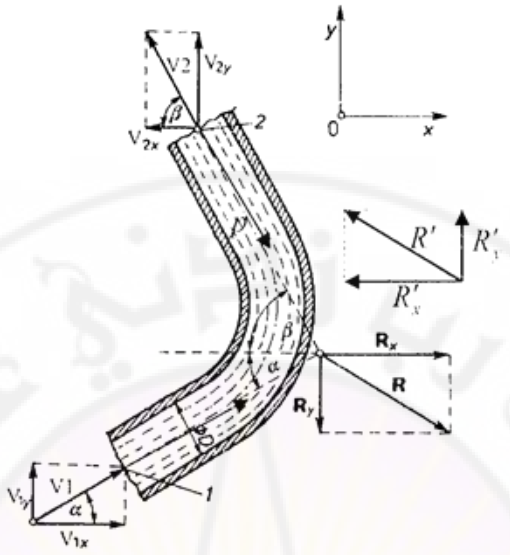
للكوع الأفقي المبين في الشكل الوارد أدناه، والذي يبلغ قطره $D = 80mm$. يطلب بعد إهمال الفواقد الهيدروليكية، أحسب القوة التي يؤثر بها التيار المائي الذي يجري فيه على هذا الكوع. إذا علمت أن التصريف المار فيه $Q = 0.010 m^3 / s$، وأن $\alpha = \frac{\pi}{6} . \beta = \frac{\pi}{3}$، وأن الضغط المطبق عند مدخل الكوع هو $p = 100kPa$.



الحل:

باعتبار أن الكوع أفقي، وقطره ثابت، والفواقد الهيدروليكية مهملة بين بدايته ونهايته، لذلك فإن الضغط المطبق عند بدايته في المقطع 1 يساوي الضغط المطبق عند نهايته في المقطع 2. من أجل حساب رد فعل الكوع على التيار، وبالتالي القوة التي يؤثر بها التيار على هذا الكوع، نقوم بتحليل هذه القوة إلى مركبتين وفق المحورين المتعامدين x, y.

بتطبيق معادلة كمية الحركة في الاتجاه x، نجد أن:



$$\sum F_x = \rho \cdot Q \cdot (V_{2x} - V_{1x})$$

أو:

$$-R'_x + p \cdot A \cdot \cos\alpha + p \cdot A \cdot \cos\beta = \rho \cdot Q \cdot (-V \cdot \cos\alpha - V \cdot \cos\beta)$$

ومنه، نجد أن:

$$R'_x = p \cdot A \cdot (\cos\alpha + \cos\beta) + \rho \cdot Q \cdot V \cdot (\cos\alpha + \cos\beta)$$

وأخيراً يمكن كتابة المعادلة بالصيغة التالية:

$$R'_x = (\cos\alpha + \cos\beta) \cdot (p \cdot A + \rho \cdot Q \cdot V)$$

إن سرعة الجريان في الأنبوب تساوي:

$$V = \frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot d^2} = \frac{4 \cdot 0.01}{\pi \cdot 0.08^2} = 1.99 m/s$$

وبالتالي تكون مركبة رد الفعل باتجاه المحور x:

$$R'_x = \left(\cos\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{3}\right) \cdot \left(100 \times 1000 \cdot \pi \cdot \frac{0.08^2}{4} + 1000 \cdot 0.01 \cdot 1.99\right) = 713.82N$$

ولحساب المركبة الشاقولية لرد الفعل، نكتب معادلة كمية الحركة باتجاه المحور y، فيكون لدينا:

$$\sum F_x = \rho \cdot Q \cdot \left(V_{2x} - V_{1x}\right)$$

أو:

$$R'_x + p \cdot A \cdot \sin\alpha - p \cdot A \cdot \sin\beta = \rho \cdot Q \cdot \left(V \cdot \sin\beta - V \cdot \sin\alpha\right)$$

ومنه، نجد أن:

$$R'_x = \rho \cdot Q \cdot V \cdot \left(\sin\beta - \sin\alpha\right) + p \cdot A \cdot \left(\sin\beta - \sin\alpha\right)$$

أو:

$$R'_x = \left(\rho \cdot Q \cdot V + p \cdot A\right) \cdot \left(\sin\beta - \sin\alpha\right)$$

وبالتعويض، نحصل على:

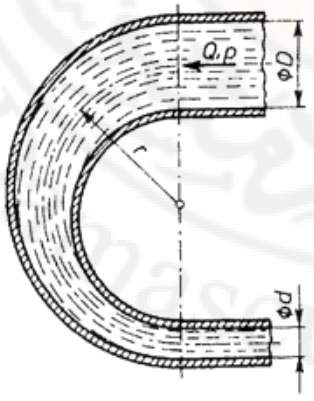
$$R'_x = \left(1000 \cdot 0.01 \cdot 1.99 + 1000 \cdot 100 \cdot \pi \cdot \frac{0.08^2}{4}\right) \cdot \left(\sin\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{6}\right) = 191.2N$$

وتكون محصلة قوة رد الفعل:

$$R' = \sqrt{R'^2_x + R'^2_y} = \sqrt{713.82^2 + 191.2^2} = 738.98N$$

أما قيمة القوة R التي يؤثر بها التيار المائي، فتساوي قيمة R'، وتعاكسها بالاتجاه.

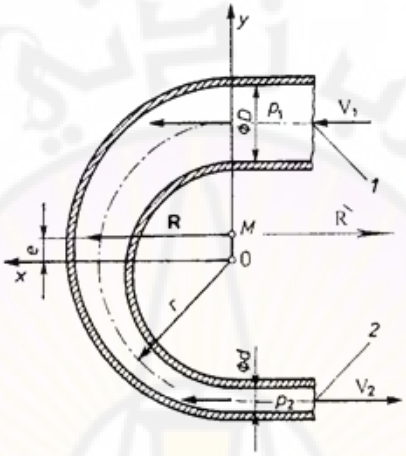
المسألة الثالثة



احسب قيمة ونقطة تطبيق القوة، التي يؤثر بها التيار المائي الجاري على الكوع الأفقي المتغير المقطع، المبين في الشكل الوارد جانباً. بفرض أن الغزارة المارة تبلغ $Q = 0.02m^3/s$، وأن قيمة الضغط المؤثر عند المدخل $p_1 = 6bar$، وأن قطر مدخل الكوع هو $D = 150mm$ وقطر مخرجه هو $d = 100mm$، وأن الفواقد الهيدروليكية بين مدخل الكوع ومخرجه تساوي $0.5 \cdot \frac{V_2^2}{2 \cdot g}$.

الحل:

بتطبيق معادلة كمية الحركة باتجاه المحور y، نجد أنه لا يوجد مركبة لرد الفعل باتجاه هذا المحور. أما رد الفعل R'، فهو باتجاه المحور x فقط. وبتطبيق معادلة كميـــة الحركة باتجاه هذا المحور، نجد أن:



$$\sum F_x = \rho \cdot Q \cdot (V_{2x} - V_{1x})$$

أو:

$$-R' + p_1 \cdot A_1 + p_2 \cdot A_2 = \rho \cdot Q \cdot (-V_2 - V_1)$$

ومنه، نجد أن:

$$R' = \rho \cdot Q \cdot (V_2 + V_1) + p_1 \cdot A_1 + p_2 \cdot A_2$$

ولدينا:

$$V_1 = \frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot D^2} = \frac{4 \cdot 0.02}{\pi \cdot 0.15^2} = 1.13 m/s$$

$$V_2 = \frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot d^2} = \frac{4 \cdot 0.02}{\pi \cdot 0.1^2} = 2.55 m/s$$

و:

$$\frac{p_1}{\gamma} = 60m \Rightarrow p_1 = 60 \cdot 1000 \cdot 9.81 = 588600 Pa$$

ولحساب الضغط عند مخرج الأنبوب، نطبق معادلة الطاقة بين مدخله ومخرجه، فنجد أن:

$$\frac{p_2}{\gamma}=\frac{p_1}{\gamma}+\frac{V_1^2}{2\cdot g}-\frac{V_2^2}{2\cdot g}-0.5\cdot\frac{V_2^2}{2\cdot g}$$

ومنه:

$$\frac{p_2}{\gamma}=60+\frac{1.13^2}{2\cdot g}-\frac{2.55^2}{2\cdot g}-0.5\cdot\frac{2.55^2}{2\cdot g}=59.57m\Rightarrow p_2=584361.4Pa$$

وبالتعويض، نجد أن قيمة رد الفعل تساوي:

$$R'=1000\cdot 0.02\cdot(2.55+1.13)+588600\cdot\pi\cdot\frac{0.15^2}{4}+$$

$$584361.4\cdot\pi\cdot\frac{0.1^2}{4}=15064.6N$$

وتكون قيمة القوة R، التي يؤثر بها التيار المائي على الكوع، تساوي قيمة R'، وتعاكسها بالاتجاه. ولحساب نقطة تطبيق هذة القوة نأخذ عزوم القوى المؤثرة حول النقطة 0، فنجد أن:

$$R\cdot e=p_1\cdot A_1\cdot r-p_2\cdot A_2\cdot r$$

ومنه:

$$e=\frac{r\cdot(p_1\cdot A_1-p_2\cdot A_2)}{R}$$

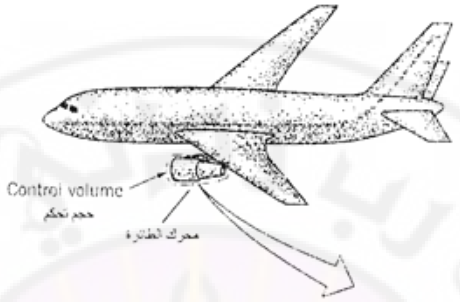
وبالتعويض، نحصل على:

$$e=\frac{0.3\cdot\left(588600\cdot\pi\cdot\frac{0.15^2}{4}-584364.4\cdot\pi\cdot\frac{0.1^2}{4}\right)}{15057.1}=0.12m$$

المسألة الرابعة

احسب القوة التي يولدها محرك طائرة نفاث يتصل مع جناح الطائرة، كما في الشكل الوضح أدناه. إذا علمت أن مساحة مدخل المحرك $A=1m^2$، وأن سرعة دخول الهواء للمحرك تبلغ $200m/s$، وأن سرعة خروجه منه $500m/s$، وأن

الضغط المتشكل عند مدخل المحرك يبلغ $22.5kPa-$، وأن الضغط عند مخرجه هو الضغط الجوي، وأن الكتلة النوعية للهواء في الظروف السائدة تبلغ $1.02kg/m^3$.



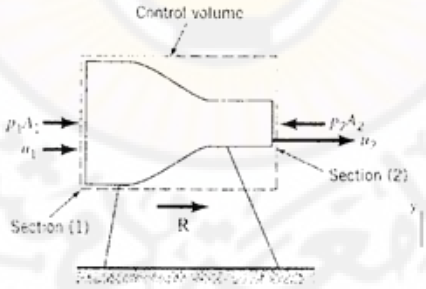
الحل:

كما هو معلوم، يدخل الهواء إلى المحرك النفاث بسرعة معينة، ويخرج بسرعة كبيرة جداً. فلو طبقنا معادلة كمية الحركة باتجاه الجريان كما في الشكل، لوجدنا أن:

$$\sum F_x = \rho \cdot Q \cdot (V_{2x} - V_{1x})$$

أو:

$$R + p_1 \cdot A_1 - p_2 \cdot A_2 = \rho \cdot Q \cdot (u_2 - u_1)$$



وباعتبار أن $p_2 = 0$، فإن القوة التي يولدها المحرك النفاث تساوي:

$$R = -p_1 \cdot A_1 + \rho \cdot Q \cdot (u_2 - u_1)$$

وبالتعويض، نجد أن:

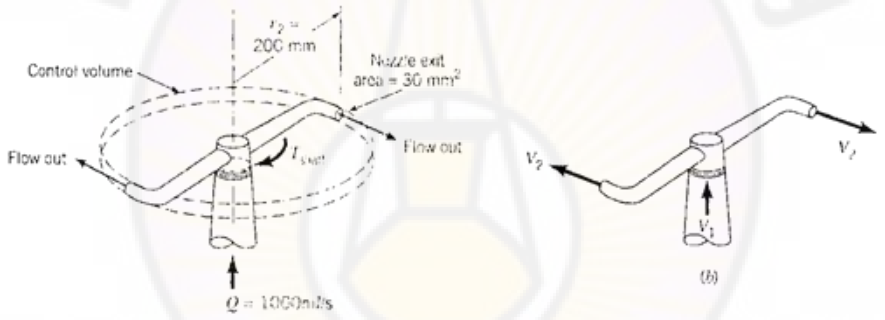
$$R = -(-22.5) \cdot 1000 \cdot 1 + 1.02 \cdot 200 \cdot 1 \cdot (500 - 200) = 83700N$$

المسألة الخامسة

يستخدم المرش المبين في الشكل الوارد أدناه، لري الحدائق والمزروعات. وهو قابل للدوران حول محور شاقولي. ويحتوي في نهايتيه على فتحتين يخرج منهما الماء بشكل متعاكس، بحيث تتشكل لدينا مزدوجة تؤدي إلى دوران المرش. فإذا كان تصريف المرش $Q = 1.0\ell/s$، ومساحة فوهة الخروج $A = 30mm^2$، ونصف قطر الدوران $200mm$. فالمطلوب:

١- إيجاد قيمة العزم المقاوم T_{shaft}، المتشكل عند محور الدوران، إذا دار المرش بسرعة تساوي $500rev/\min$.

٢- حساب قيمة العزم المقاوم، عندما يمنع المرش من الدوران.



الحل:

الطلب الأول:

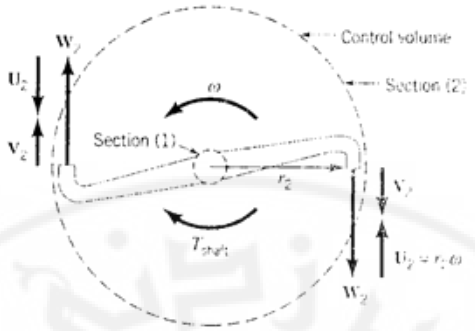
إن الغزارة الكلية الواردة إلى المرش تتوزع على الفتحتين، ويخرج تيار الماء من كل فتحة بسرعة تساوي W_2 وتدعى السرعة النسبية، وتعطى قيمتها بالصيغة:

$$W_2 = \frac{Q}{2 \cdot A} = \frac{\frac{1.0}{1000}}{2 \cdot 30 \cdot 10^{-6}} = 16.67m/s$$

أما السرعة المحيطية U_2 عند الفتحة نتيجة دوران المرش،فتساوي:

$$U_2 = r_2 \cdot \frac{n \cdot 2 \cdot \pi}{60}$$

ومنه:



$$U_2 = 0.2 \cdot \frac{500 \cdot 2 \cdot \pi}{60} = 10.46 m/s$$

إن اتجاه السرعة النسبية W_2 هو عكس اتجاه السرعة المحيطية U_2، لذلك فإن قيمة السرعة المطلقة V_2 عند الفتحة تساوي:

$$V_2 = W_2 - U_2 = 16.67 - 10.46 = 6.21 m/s$$

يتنج عن السرعة النسبية قوة تكون معاكسة لاتجاه السرعة المطلقة، وتساوي حسب معادلة كمية الحركة:

$$R = \rho \cdot \frac{Q}{2} \cdot V_2$$

وبالتعويض بالقيم العددية، نجد أن:

$$R = 1000 \cdot \frac{0.001}{2} \cdot 6.21 = 3.105 N$$

ويكون عزم المقاومة المتشكل مساوياً:

$$T_{shaft} = 2 \cdot r_2 \cdot R = 2 \cdot 0.2 \cdot 3.105 = 1.24 N \cdot m$$

الطلب الثاني:

عندما يمنع المرش من الدوران، تنعدم قيمة السرعة المحيطية، وتكون القوة المتولدة عند الفتحة مساوية:

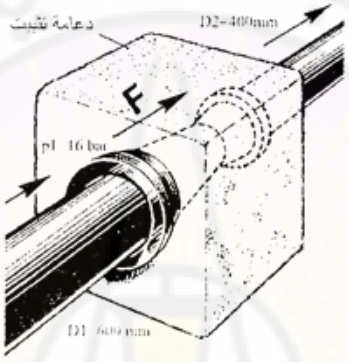
$$R = \rho \cdot \frac{Q}{2} \cdot V_2 = 1000 \cdot \frac{0.001}{2} \cdot 16.67 = 8.335 N$$

ويكون العزم المقاوم مساوياً:

$$T_{shaft} = 2 \cdot r_2 \cdot R = 2 \cdot 0.2 \cdot 8.335 = 3.34 N \cdot m$$

المسألة السادسة

تستخدم الوصلة المتضيقة المبينة في الشكل، لإنقاص قطر أنبوب نقل مياه شرب مصنوع من الفونت المرن من القطر $D_1 = 600mm$ إلى القطر $D_2 = 400mm$. ولمنع الوصلة من الحركة نتيجة القوة التي ستؤثر عليها، تم تثبيتها بدعامة بيتونية. بإهمال الفواقد الهيدروليكية في الوصلة، احسب القوة المؤثرة على الدعامة البيتونية. علماً أن الضغط عند بداية الوصلة $16bar$، وأن الغزارة المارة في الأنبوب $Q = 350\ell/s$.



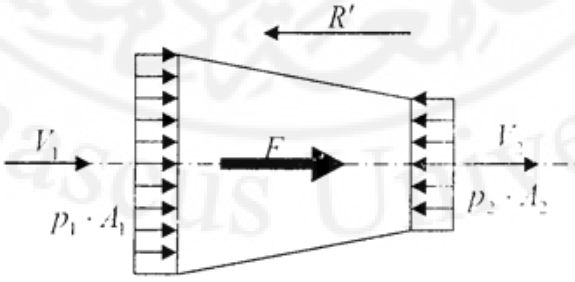
الحل:

بتطبيق معادلة كمية الحركة في اتجاه محور الجريان، نحصل على:

$$-R' + p_1 \cdot A_1 - p_2 \cdot A_2 = \rho \cdot Q \cdot (V_2 - V_1)$$

ومنه نجد أن قيمة رد فعل الوصلة على التيار تساوي:

$$R' = p_1 \cdot A_1 \quad p_2 \cdot A_2 - \rho \cdot Q \cdot (V_2 - V_1)$$



حيث:

$$V_1 = \frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot D_1^2} = \frac{4 \cdot 0.35}{\pi \cdot 0.6^2} = 1.24 m/s$$

و:

$$V_2 = \frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot D_2^2} = \frac{4 \cdot 0.35}{\pi \cdot 0.4^2} = 2.79 m/s$$

و:

$$\frac{p_1}{\gamma} = 160m \Rightarrow p_1 = 1569.6kPa$$

ولحساب قيمة الضغط عند نهاية الوصلة، نكتب معادلة برنوللي، فينتج أن:

$$\frac{p_2}{\gamma} - \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2 \cdot g} - \frac{V_2^2}{2 \cdot g}$$

ومنه:

$$\frac{p_2}{\gamma} = 160 + \frac{1.24^2}{2 \cdot g} - \frac{2.79^2}{2 \cdot g} = 159.68m \Rightarrow p_2 = 1566.46kPa$$

وبالتعويض، نجد أن قيمة قوة رد فعل الوصلة على التيار، تساوي:

$$R' = 1569.6 \times 10^3 \cdot \pi \cdot \frac{0.6^2}{4} - 1566.46 \times 10^3 \cdot \pi \cdot \frac{0.4^2}{4} - 1000 \cdot 0.35 \cdot (2.79 - 1.24)$$

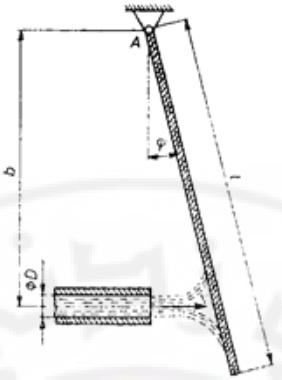
$$R' = 246.28kN$$

وتكون قيمة القوة F المؤثرة على الوصلة، مساوية R'، ومعاكسة لها بالاتجاه.

نلاحظ مما سبق، أن القوة الناتجة عند الوصلة كبيرة وتعادل قيمتها 24.6 طناً. وهي سوف تحرك الوصلة، ويمكن أن تخرجها من الاستثمار. لذلك يجري في مشاريع المياه تدعيم جميع الوصلات والأكواع المستخدمة لتحاشي مثل هذه الحوادث.

المسألة السابعة

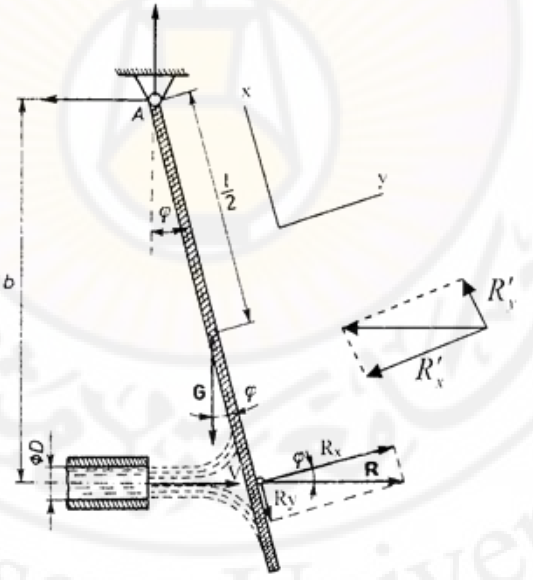
يخرج تيار سائل مثالي كتلته النوعية ρ من فوهة قطرها D، بغزارة تساوي Q. ليصطدم بصفيحة ملساء قابلة للدوران حول المفصل A، وزنها G وطولها l، كما في الشكل الوارد أدناه. احسب الزاوية φ التي تنحرف فيها الصفيحة عن الشاقول، بعد اصطدام التيار بها.



الحل:

بتطبيق معادلة كمية الحركة على حجم تحكم باتجاه المحور x العمودي على الصفيحة، وبإهمال وزن السائل، نجد أن:

$$-R'_x = \rho \cdot Q \cdot (V_{2x} - V_{1x})$$



حيث تمثل R'_x مركبة رد فعل الصفيحة على التيار في اتجاه المحور x، و V_{2x} سرعة التيار عند اصطدامه بالصفيحة وتساوي الصفر، و V_{1x} سرعة التيار قبل اصطدامه بالصفيحة مباشرة، وهي تساوي $V \cdot \cos\varphi$. وبالتالي تصبح معادلة كمية الحركة على الشكل التالي:

$$R'_x = \rho \cdot Q \cdot V \cdot \cos\varphi$$

وبالتعويض في العلاقة السابقة عن V بما تساويها من العلاقة:

$$V = \frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot D^2}$$

نجد أن:

$$R'_x = \frac{4 \cdot \rho \cdot Q^2}{\pi \cdot D^2} \cdot \cos\varphi$$

أما مركبة القوة باتجاه المحور x فهي تساوي R'_x، وتعاكسها بالاتجاه.

بأخذ العزوم حول المفصل A، وباعتبار أن G تمثل وزن الصفيحة، نحصل على:

$$R_x \cdot \frac{h}{\cos\varphi} - G \cdot \frac{l}{2} \cdot \sin\varphi = 0$$

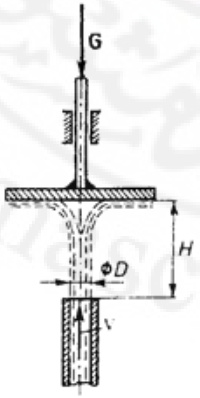
ومنه:

$$\frac{4 \cdot \rho \cdot Q^2}{\pi \cdot D^2} \cdot \cos\varphi \cdot \frac{h}{\cos\varphi} - G \cdot \frac{l}{2} \cdot \sin\varphi = 0$$

وأخيراً نستنتج أن:

$$\varphi = \arcsin \frac{8 \cdot \rho \cdot Q^2 \cdot h}{G \cdot \pi \cdot D^2 \cdot l}$$

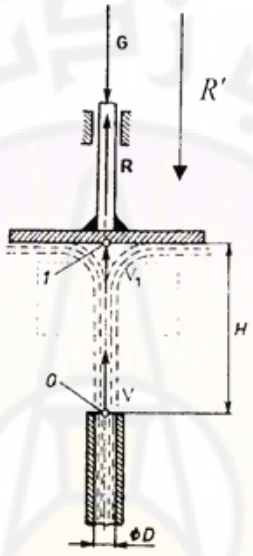
المسألة الثامنة



يخرج تيار سائل كتلته النوعية ρ، بشكل شاقولي من فتحة قطرها D بسرعة V، ليصطدم بصفيحة ملساء مستوية وزنها G، كما في الشكل الموضح جانباً. احسب إلى أي ارتفاع H من الفتحة يمكن للصفيحة أن تصل بعد اصطدام التيار بها، وذلك إذا كانت الفواقد الهيدروليكية مهملة.

الحل:

عندما يصطدم التيار بالصفيحة، فإنها ترتفع إلى الأعلى، نتيجة تأثير القوة الناتجة عن الاصطدام. وسوف تتوقف عند الارتفاع، الذي تصبح عنده هذه القوة مساوية لوزن الصفيحة G.



لإيجاد القوة التي يؤثر بها التيار على الصفيحة، نأخذ حجم التحكم المبين في الشكل السابق، ونطبق معادلة كمية الحركة بالاتجاه الشاقولي. فنجد أن:

$$-R' = \rho \cdot Q \cdot (V_2 - V_1)$$

حيث R' رد فعل الصفيحة على التيار، أما V_2 فهي السرعة عند اصطدام التيار بالصفيحة وتساوي الصفر، و V_1 سرعة التيار قبل اصطدامه بالصفيحة عندما تكون على ارتفاع H. ويمكن الحصول على قيمة V_1، بتطبيق معادلة برنوللي بين النقطتين 0,1، مع إهمال فواقد الطاقة، فنحصل على:

$$V_1 = \sqrt{V^2 - 2 \cdot g \cdot H}$$

وبالتعويض في معادلة كمية الحركة، نستنتج أن:

$$-R' = \rho \cdot Q \cdot \left(0 - \sqrt{V^2 - 2 \cdot g \cdot H}\right)$$

أو:

$$R' = \rho \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot V \cdot \sqrt{V^2 - 2 \cdot g \cdot H}$$

أما القوة R التي يؤثر بها التيار على الصفيحة، فهي تساوي R'، وتعاكسها بالاتجاه.

وعندما تتوقف الصفيحة عن الحركة نحو الأعلى يكون:

$$G = R$$

وبالتالي، يصبح لدينا:

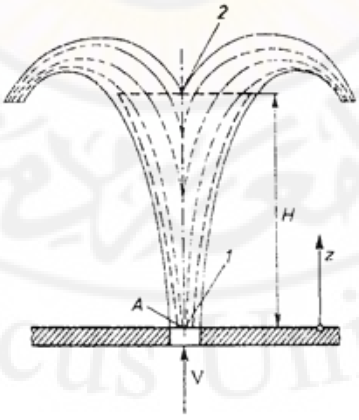
$$G = \rho \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot V \cdot \sqrt{V^2 - 2 \cdot g \cdot H}$$

ومنه، نجد أن:

$$H = \frac{1}{2 \cdot g} \cdot \left[V^2 - \left(\frac{4 \cdot G}{\pi \cdot D^2 \cdot \rho \cdot V} \right)^2 \right]$$

المسألة التاسعة

يخرج تيار مائي سرعته V نحو الأعلى من فتحة مساحتها A، كما في الشكل المعطى أدناه. احسب باستخدام معادلة كمية الحركة حجم السائل المحصور بين الفتحة والمقطع الواقع على ارتفاع H منها، وذلك إذا كانت الفواقد الهيدروليكية مهملة.



الحل:

بكتابة معادلة كمية الحركة باتجاه المحور الشاقولي، على حجم تحكم محصور

مابين الفتحة ومقطع على ارتفاع H منها، نجد أن:

$$-G = \rho \cdot Q \cdot (V_2 - V_1)$$

حيث: $V_1 = V$ - سرعة خروج التيار من الفتحة. أما V_2 فتمثل السرعة على ارتفاع H، ويمكن الحصول عليها بتطبيق معادلة برنوللي بين النقطتين 1,2، فنحصل على:

$$V_2 = \sqrt{V^2 - 2 \cdot g \cdot H}$$

وبالتعويض نجد أن:

$$G = \rho \cdot A \cdot V \cdot \left(V - \sqrt{V^2 - 2 \cdot g \cdot H}\right)$$

ويفرض أن حجم السائل المحصور بين الفتحة والارتفاع H هو $\forall$. ومن شرط التوازن، فإن هذه القوة، يجب أن تكون مساوية لوزن الماء المحصور في الحجم $\forall$، أي أن:

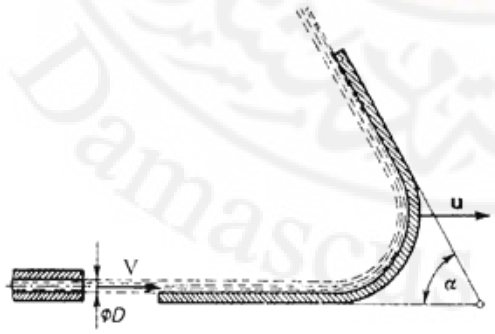
$$\rho \cdot g \cdot \forall = \rho \cdot A \cdot V \cdot \left(V - \sqrt{V^2 - 2 \cdot g \cdot H}\right)$$

ومنه:

$$\forall = \frac{A \cdot V}{g} \cdot \left(V - \sqrt{V^2 - 2 \cdot g \cdot H}\right)$$

المسألة العاشرة

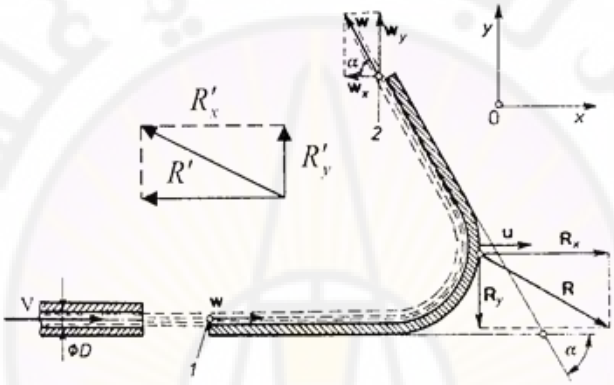
يخرج تيار مائي يقع في مستوٍ أفقي عبر فتحة قطرها $D = 25mm$ بسرعة تساوي $V = 10m/s$، ويدخل بشكل مماسي إلى ريشة منحنية تتحرك بسرعة $u = 2m/s$، كما في الشكل الموضح جانباً. فإذا علمت أن زاوية انحناء الريشة $\alpha = \frac{\pi}{3}$، احسب القوة التي يؤثر بها التيار المائي على الريشة.



الحل:

سنقوم بتحليل القوة التي يؤثر بها التيار المائي على الريشة إلى مـــركبتين، **الأولى** باتجاه المحور x والثانية باتجاه المحور y. وباعتبار أن التيار يقع في مـــستوٍ أفقـــي، وأن الفواقد مهملة، لذلك سنعتبر أن التيار المائي سوف يدخل ويخرج إلى الشفرة بالسرعة نفسها W. حيث ندعو هذه السرعة: السرعة النسبية وتساوي:

$$W = V - u$$



بتطبيق معادلة كمية الحركة في الاتجاه x، نجد أن:

$$-R'_x = \rho \cdot Q \cdot \left[-(V-u)\cdot\cos\alpha - (V-u)\right]$$

ومنه:

$$R'_x = \rho \cdot \frac{\pi}{4} \cdot D^2 \cdot (V-u) \cdot \left[(V-u)\cdot\cos\alpha + (V-u)\right]$$

أو:

$$R'_x = \rho \cdot \frac{\pi}{4} \cdot D^2 \cdot (V-u)^2 \cdot \left[\cos\alpha + 1\right]$$

وبتطبيق معادلة كمية الحركة باتجاه المحور y، يكون لدينا:

$$R'_y = \rho \cdot Q \cdot \left[(V-u)\cdot\sin\alpha - 0\right]$$

ومنه:

$$R'_y = \rho \cdot \frac{\pi}{4} \cdot D^2 \cdot (V-u)^2 \cdot \sin\alpha$$

وتكون محصلة القوة:

$$R' = \sqrt{R_x'^2 + R_y'^2}$$

ومنه:

$$R' = \rho \cdot \frac{\pi}{4} \cdot D^2 \cdot (V-u)^2 \cdot \sqrt{(1+\cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha}$$

أو:

$$R' = \rho \cdot \frac{\pi}{4} \cdot D^2 \cdot (V-u)^2 \cdot 2 \cdot \cos\frac{\alpha}{2}$$

وأخيراً، يمكن كتابة العلاقة السابقة بالصيغة التالية:

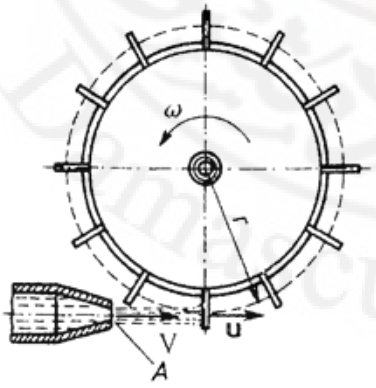
$$R' = \rho \cdot \frac{\pi}{2} \cdot D^2 \cdot (V-u)^2 \cdot \cos\frac{\alpha}{2}$$

وبالتعويض، نجد أن:

$$R' = 1000 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 0.025^2 \cdot (10-2)^2 \cdot \cos\frac{\pi}{6} = 54.4N$$

وتكون القوة R التي يؤثر بها التيار المائي على الريشة، مساوية R'، ومعاكسة لها بالاتجاه.

المسألة الحادية عشرة



يخرج تيار مائي بغزارة تساوي $Q = 0.01m^3/s$ من فوهة مساحتها $A = 500mm^2$، ليصطدم بدولاب مائي نصف قطره $r = 1m$، يحتوي على عدد كبير من الريش المستوية على محيطه، مما يؤدي إلى دورانه بسرعة زاوية $\omega = 5rad/s$، كما في الشكل المبين جانباً. احسب استطاعة الدولاب. ثم بين عند أي سرعة زاوية للدولاب، يمكن أن تكون استطاعة الدولاب أعظمية. مع ملاحظة أن الفواقد الهيدروليكية مهملة.

الحل:

يمكن اعتبار أن كل ريشة من ريش الدولاب، هي ريشة تتحرك بسرعة u تساوي:

$$u = \omega \cdot r$$

وكما وجدنا سابقاً، تعطى القوة المؤثرة على ريشة متحركة بالعلاقة:

$$R = \rho \cdot Q \cdot (V - u)$$

حيث: V - سرعة خروج التيار من الفتحة. وبسبب العدد الكبير لريش الدولاب، يمكن اعتبار أن غزارة التيار المائي المصطدم بالريشة تساوي:

$$Q = A \cdot V$$

مما سبق، نستنتج أن القوة المؤثرة على الريشة هي:

$$R = \rho \cdot Q \cdot \left(\frac{Q}{A} - \omega \cdot r \right)$$

ويكون عزم الدوران المطبق على الدولاب مساوياً:

$$M = R \cdot r = \rho \cdot Q \cdot \left(\frac{Q}{A} - \omega \cdot r \right) \cdot r$$

أما استطاعة الدولاب فتساوي:

$$P = M \cdot \omega = \rho \cdot Q \cdot \left(\frac{Q}{A} - \omega \cdot r \right) \cdot \omega \cdot r$$

و بالتعويض بالمعطيات العددية الواردة في نص المسألة، نجد أن:

$$P = 1000 \cdot 0.01 \cdot \left(\frac{0.01}{0.0005} - 5 \cdot 1 \right) \cdot 5 \cdot 1 = 750W$$

لحساب السرعة الزاوية الموافقة للاستطاعة العظمى، لدينا:

$$P = \rho \cdot Q \cdot \left(\frac{Q}{A} - \omega \cdot r \right) \cdot \omega \cdot r = \rho \cdot \frac{Q^2}{A} \cdot \omega \cdot r - \rho \cdot Q \cdot \omega^2 \cdot r^2$$

باشتقاق هذه المعادلة بالنسبة للمتحول ω، ومساواة الناتج بالصفر، ينتج لدينا:

$$\frac{\partial P}{\partial \omega} = \rho \cdot \frac{Q^2}{A} r - 2 \cdot \rho \cdot Q \cdot \omega \cdot r^2 = 0$$

ومنه:

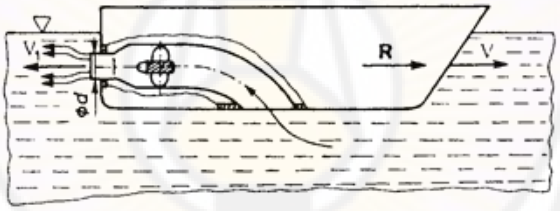
$$\omega = \frac{Q}{2 \cdot r \cdot A}$$

وبالتعويض، نجد أن:

$$\omega = \frac{0.01}{2 \cdot 1 \cdot 0.0005} = 10 rad/s$$

المسألة الثانية عشرة

تتحرك السفن والزوارق نتيجة لتأثير دواليب دفع ضخمة تكون موجودة في مؤخرتها. احسب قوة الجر التي يعطيها دولاب دفع زورق يتحرك بسرعة تساوي $V = 54 km/h$، كما في الشكل المبين أدناه. وذلك إذا علمت أن قطر المخرج $d = 0.5m$، وأن الغزارة التي يضخها الدولاب $Q = 4 m^3/s$.



الحل:

بتطبيق معادلة كمية الحركة باتجاه حركة الزورق، نجد أن:

$$R = \rho \cdot Q \cdot (V_1 - V)$$

حيث:

- V_1: سرعة خروج الماء من المخرج، وتساوي:

$$V_1 = \frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot d^2} = \frac{4 \cdot 4}{\pi \cdot 0.5^2} = 20.4 m/s$$

- V: سرعة الزورق، وتساوي:

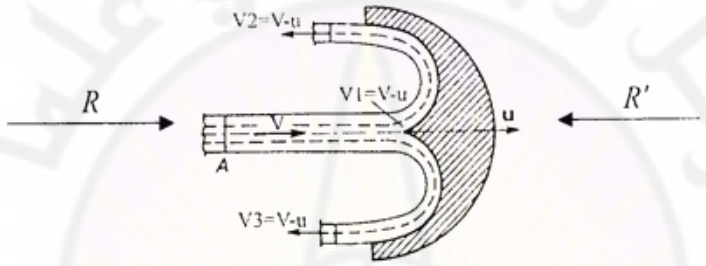
$$V = \frac{54000}{3600} = 15 m/s$$

وبالتعويض، نجد أن قوة الجر التي يولدها دولاب الدفع تساوي:

$$R = 1000 \cdot 4 \cdot (20.4 - 15) = 21.6kN$$

المسألة الثالثة عشرة

احسب القوة التي يؤثر بها تيار مائي، يخرج من نافث مساحة مقطعه A، بسرعة V، على ريشة عنفة بيلتون تتحرك بسرعة u، كما في الشكل المبين أدناه. بعد إهمال وزن السائل والفواقد الهيدروليكية.



الحل:

بتطبيق معادلة كمية الحركة باتجاه المحور الأفقي، نجد أن:

$$-R' = -\rho \cdot Q_3 \cdot V_3 - \rho \cdot Q_2 \cdot V_2 - \rho \cdot Q_1 \cdot V_1$$

أو:

$$R' = \rho \cdot Q_3 \cdot V_3 + \rho \cdot Q_2 \cdot V_2 + \rho \cdot Q_1 \cdot V_1$$

في العلاقة السابقة، لدينا:

$$V_3 = V_2 = V_1 = V - u$$

و:

$$Q_1 = A \cdot (V - u)$$

و:

$$Q_2 = Q_3 = \frac{Q_1}{2}$$

وبالتعويض، نحصل على:

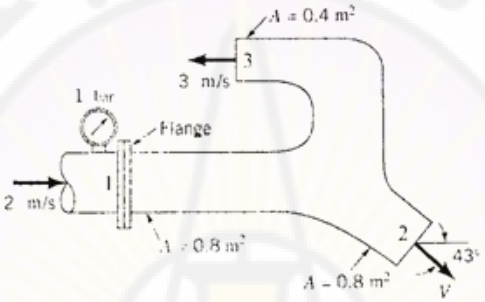
$$R' = \rho \cdot \frac{A}{2} \cdot (V-u)^2 + \rho \cdot \frac{A}{2} \cdot (V-u)^2 + \rho \cdot A \cdot (V-u)^2$$

ومنه:

$$R' = 2 \cdot \rho \cdot A \cdot (V-u)^2$$

المسألة الرابعة عشرة

بناء على المعطيات المبينة في الشكل الوارد أدناه. يطلب حساب القوة التي يؤثر بها الماء على الوصلة.



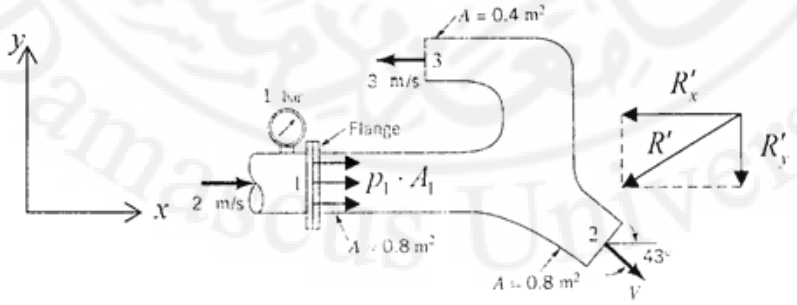
الحل:

بتطبيق معادلة كمية الحركة باتجاه المحور x، نجد أن:

$$-R'_x + p_1 \cdot A_1 = -\rho \cdot Q_3 \cdot V_3 + \rho \cdot Q_2 \cdot V_2 \cdot \cos 43 - \rho \cdot Q_1 \cdot V_1$$

ومنه:

$$R'_x = p_1 \cdot A_1 + \rho \cdot Q_3 \cdot V_3 - \rho \cdot Q_2 \cdot V_2 \cdot \cos 43 + \rho \cdot Q_1 \cdot V_1$$



وبتطبيق معادلة كمية الحركة باتجاه المحور y، نحصل على:

$$-R'_y = -\rho \cdot Q_2 \cdot V_2 \cdot \sin 43$$

ومنه:

$$R'_y = \rho \cdot Q_2 \cdot V_2 \cdot \sin 43$$

حيث:

$$Q_1 = V_1 \cdot A_1 = 2 \cdot 0.8 = 1.6 m^3/s$$

$$Q_3 = V_3 \cdot A_3 = 3 \cdot 0.4 = 1.2 m^3/s$$

$$Q_2 = 1.6 - 1.2 = 0.4 m^3/s$$

$$V_2 = \frac{4 \cdot 0.4}{\pi \cdot 0.8} = 0.64 m/s$$

$$\frac{p_1}{\gamma} = 10 \Rightarrow p_1 = 98100 Pa$$

وبالتعويض، نحصل على:

$$R'_x = 98100 \cdot 0.8 + 1000 \cdot 1.2 \cdot 3 - 1000 \cdot 0.4 \cdot 0.64 \cdot \cos 43 + 1000 \cdot 1.6 \cdot 2$$

$$R'_x = 85092.8 N$$

و:

$$R'_y = 1000 \cdot 0.4 \cdot 0.63 \cdot \sin 43 = 171.9 N$$

أما محصلة رد فعل الوصلة على التيار المائي، فتساوي:

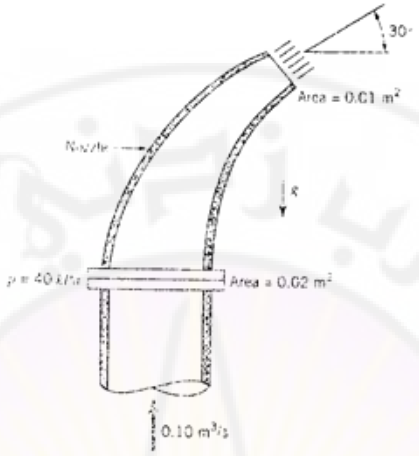
$$R' = \sqrt{R'^2_x + R'^2_y} = 85093 N$$

وتكون القوة التي يؤثر بها التيار المائي على الوصلة تساوي رد الفعل، وتعاكسه بالاتجاه.

المسألة الخامسة عشرة

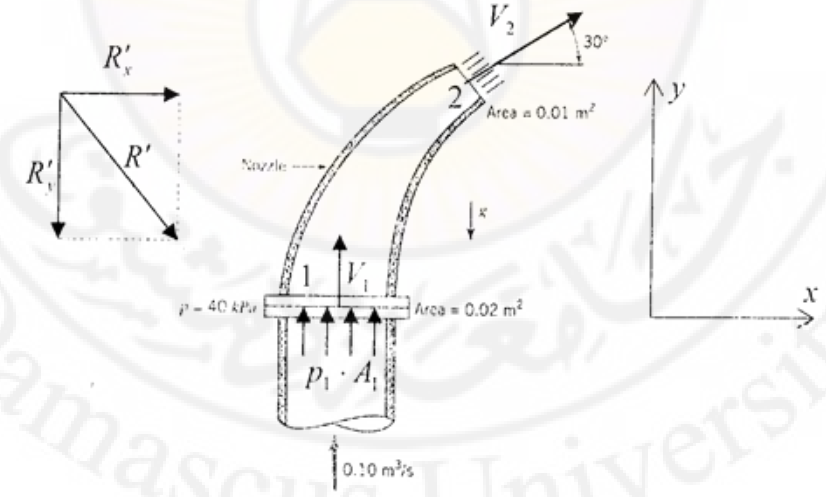
يطلب حساب محصلة القوة المؤثرة على الكوع الشاقولي المبين في الشكل، إذا كان يمرر تصريفاً مقداره $Q = 0.1 m^3/s$. علماً أن الجريان يدخل إليه عند المقطع 1 الذي تبلغ مساحته $A_1 = 0.02 m^2$ وقيمة الضغط عنده $p_1 = 40 kPa$، ويخرج عند

المقطع 2 الذي تبلغ مساحته $A_2 = 0.01m^2$ إلى الجو الخارجي، كما يبلغ حجم المار في الكوع $\forall = 0.012m^3$.



الحل:

بتطبيق معادلة كمية الحركة، على حجم التحكم المحصور بين المقطعين 1,2، باتجاه المحور x ، نجد أن:



$$R'_x = \rho \cdot Q \cdot (V_2 \cdot \cos 30 - 0)$$

ومنه:

$$R'_x = \rho \cdot Q \cdot V_2 \cdot \cos 30$$

كذلك بتطبيق معادلة كمية الحركة باتجاه المحور y ، نحصل على:

$$-R'_y + p_1 \cdot A_1 - \rho \cdot g \cdot \forall = \rho \cdot Q \cdot (V_2 \cdot \sin 30 - V_1)$$

ومنه:

$$R'_y = p_1 \cdot A_1 - \rho \cdot g \cdot \forall - \rho \cdot Q \cdot (V_2 \cdot \sin 30 - V_1)$$

لكن:

$$V_1 = \frac{Q}{A_1} = \frac{0.1}{0.02} = 5m/s$$

$$V_2 = \frac{Q}{A_2} = \frac{0.1}{0.01} = 10m/s$$

وبالتعويض، نجد أن:

$$R'_x = 1000 \cdot 0.1 \cdot 10 \cdot \cos 30 = 866.03N$$

و:

$$R'_y = 40 \cdot 1000 \cdot 0.02 - 1000 \cdot 9.81 \cdot 0.012 - 1000 \cdot 0.1 \cdot (10 \cdot \sin 30 - 5)$$

$$R'_y = 682.28N$$

وتكون المحصلة:

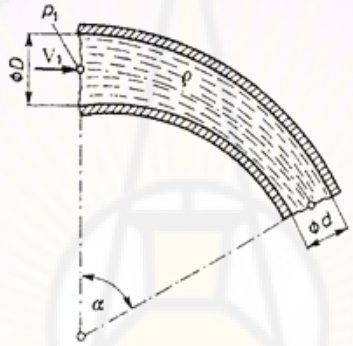
$$R' = \sqrt{R'^2_x + R'^2_y} = 1102.5N$$

وتكون قيمة القوة المؤثرة على الكوع، مساوية قيمة R' ، ومعاكسة لها بالاتجاه.

مسائل غير محلولة حول الفصل السادس

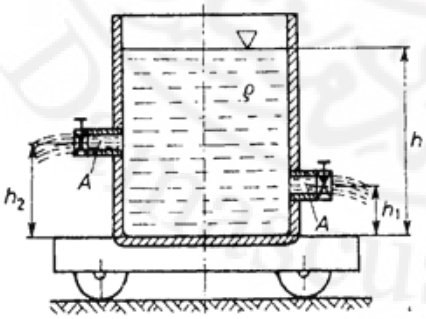
المسألة الأولى

بإهمال الفواقد الهيدروليكية. يطلب حساب القوة التي يؤثر بها المـــاء الجـــاري بغزارة $Q = 1800 m^3/h$، على الكوع المتغير المقطع المبين في الشكل. علماً أن الضغط عند بداية $p_1 = 200 kPa$، وأن القطر عند البداية يـــساوي $D = 600 mm$ وعنـــد النهاية يساوي $d = 400 mm$، وأن زاوية الكوع تبلغ $\alpha = \frac{\pi}{3}$.



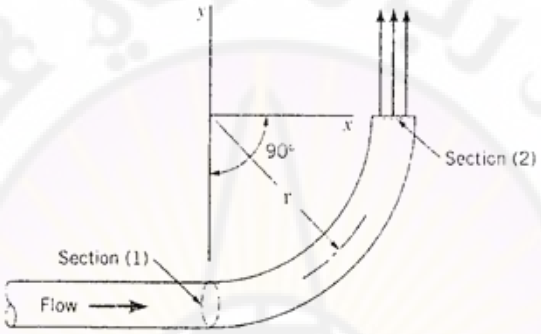
المسألة الثانية

يثبت خزان مياه، على عربـــة قابلـــة للحركة على سطح بدون أي احتكاك، كما في الشكل المبين جانباً. وهو يحتـــوي علـــى فتحتين، مساحة كـــل منـــها $A = 10 cm^2$. بحيث تبتعد الفتحة اليسرى منهما عن أرض الخزان بمقدار $h_2 = 0.5 m$، وتبتعد الـــيمنى بمقدار $h_1 = 0.25 m$. بفرض أن منسوب الماء في الخزان ثابت، وأن جميع فواقد الإحتكـــاك مهملة. احسب القوة الأفقية الواجب تطبيقها على العربة لمنعها من الحركة، وحدد اتجاهها.



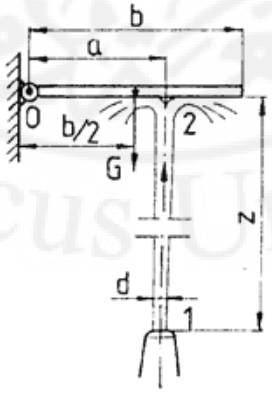
المسألة الثالثة

يدخل الماء إلى الكوع الشاقولي المبين في الشكل أدناه بغزارة $Q = 300\ell/s$، ثم يخرج منه إلى الجو الخارجي عند المقطع 2. احسب القوة التي يؤثر بها الماء الجاري على هذا الكوع. بفرض أن قطر الأنبوب $D = 400mm$، وأن نصف قطر تقوسه $r = 2m$، وأن الفواقد الهيدروليكية في الكوع تساوي $0.2 \cdot \frac{V^2}{2 \cdot g}$.



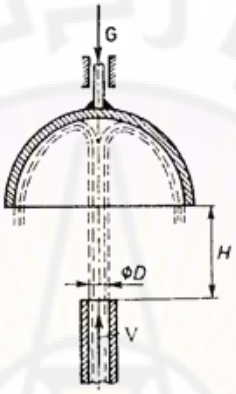
المسألة الرابعة

يخرج يتار مائي بشكل شاقولي من فتحة قطرها $d = 20mm$ بسرعة $V_1 = 15m/s$، ليصطدم بصفيحة ملساء قابلة للدوران حول المفصل O. احسب وزن الصفيحة G بحيث تبقى في وضع أفقي، كما في الشكل الموضح. بافتراض أن: $b = 500mm, a = 350mm, z = 2m$ (أهمل الفواقد الهيدروليكية ووزن الماء المحصور بين الصفيحة والفتحة).



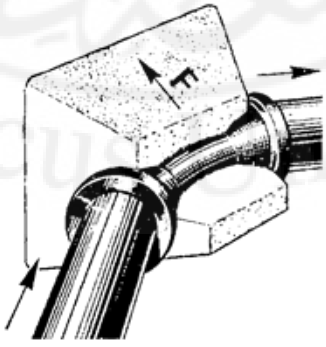
المسألة الخامسة

يخرج تيار سائل كتلته النوعية ρ بشكل شاقولي من فتحة قطرها D، بسرعة V، ليصطدم بصفيحة منحنية ملساء وزنها G، كما في الشكل الموضح أدناه. احسب إلى أي ارتفاع H من الفتحة، يمكن للصفيحة أن تصل بعد اصطدام تيار السائل بها. بعد إهمال الفواقد الهيدروليكية ووزن السائل.



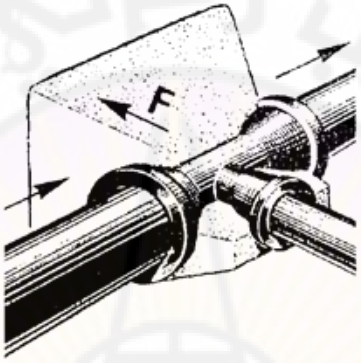
المسألة السادسة

تستخدم الدعامة البيتونية المبينة في الشكل لتثبيت أكواع الأنابيب عند المنعطفات الأفقية. بفرض أن قطر الكوع D، والضغط المطبق عند مدخله p، والغزارة المارة فيه Q. استنتج بدلالة زاوية الكوع α في المسقط، العلاقة اللازمة لحساب القوة التي يؤثر بها التيار المائي على الكوع. ثم احسب أبعاد القاعدة الجانبية للدعامة لمقاومة القوة المتولدة. وذلك إذا كان إجهاد التربة المسموح $\sigma = 1kg/cm^2$، و $p = 10bar, Q = 1m^3/s, D = 800mm, \alpha = 45^0$.



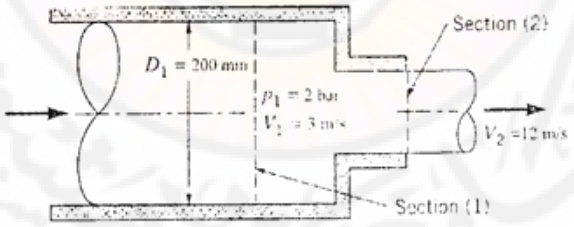
المسألة السابعة

تستخدم وصلة *Tee* المبينة في الشكل عند تفرع الأنابيب، فهل يوجد ضرورة لتثبيت الوصلة *Tee* بدعامة؟ وماهي قيمة الإجهاد المطبق من الدعامة على التربة. وذلك إذا كانت الأبعاد الجانبية للدعامة $2\times3m$، والضغط عند الوصلة $p=200kPa$، وقطر الأنبوب المتفرع عن الوصلة $d=300mm$.



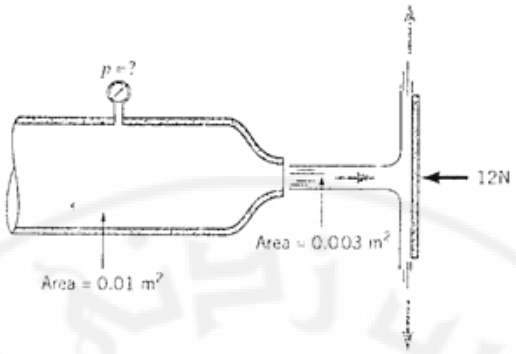
المسألة الثامنة

بناء على المعطيات المبينة في الشكل الوارد أدناه. يطلب حساب القوة التي يؤثر بها الماء الجاري على الوصلة المتضيقة فجائياً.



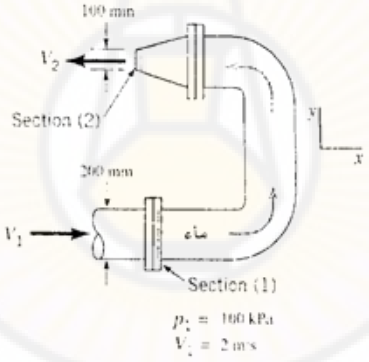
المسألة التاسعة

يخرج تيار هوائي من الوصلة المبينة في الشكل التالي، ليصطدم بصفيحة مستوية ملساء. فإذا كانت القوة اللازم تطبيقها لمنع الصفيحة من الحركة تبلغ $12N$. ما هي قيمة الضغط النسبي الذي يشير إليه مقياس الضغط المركب قبل الوصلة؟ علماً أن مساحة فتحة الخروج $0.003m^2$، ومساحة مقطع الأنبوب قبل الوصلة $0.01m^2$، وأن الكتلة النوعية للهواء $\rho=1.25kg/m^3$.



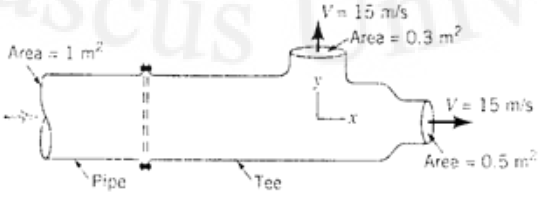
المسألة العاشرة

لتوصلة الأفقية المبينة في الشكل الوارد أدناه. يطلب وفق المعطيات المثبتة على الوصلة. حساب مقدار واتجاه القوة التي يؤثر بها الماء الجاري عليها. علماً أنه يخرج عند الفتحة 2 إلى الجو الخارجي.

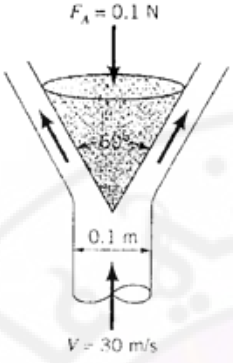


المسألة الحادية عشرة

بناء على المعطيات الواردة على الشكل المبين أدناه، وبإهمال فواقد الإحتكاك. يطلب حساب مقدار واتجاه القوة التي يؤثر بها الماء الجاري على وصلة *Tee*. علماً أن الماء يخرج من الفتحتين إلى الجو الخارجي بسرعة تساوي $15m/s$.



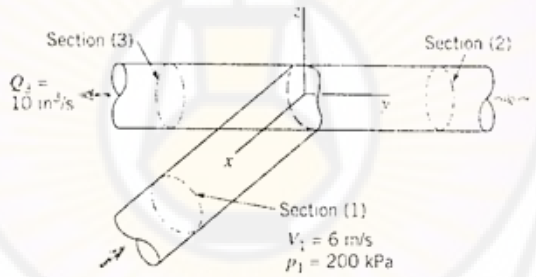
المسألة الثانية عشرة



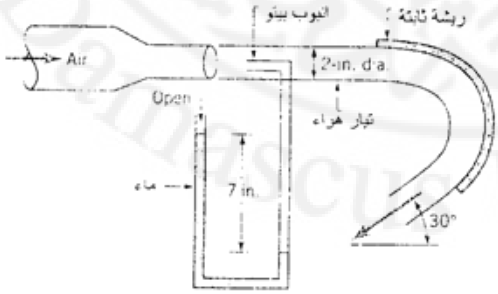
تصطدم حزمة تيار شاقولية، مساحة مقطعها $0.1m^2$، وسرعة جريانها $V = 30m/s$، بمخروط زاوية رأسه تساوي 60^0، كما في الشكل. فإذا علمت أن القوة اللازم تطبيقها عند قاعدة المخروط لمنعه من الحركة تبلغ $0.1N$. ما هو وزن المخروط؟

المسألة الثالثة عشرة

بناء على المعطيات المبينة على الشكل، وبإهمال فواقد الاحتكاك. يطلب حساب القوة التي يؤثر بها الماء الجاري على الوصلة. علماً أن أقطار جميع الأنابيب تبلغ $1m$.



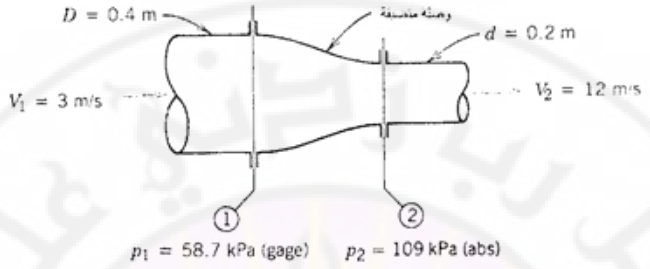
المسألة الرابعة عشرة



يخرج تيار هوائي من فتحة قطرها $2in$، ليصطدم بشكل مماسي بريشة منحنية ملساء، كما في الشكل. وقد وضع مانومتر مملوء بالماء بشكل مواجه لحزمة التيار فانحرف الماء فيه $7in$. احسب مقدار القوة التي يؤثر بها التيار على الريشة.

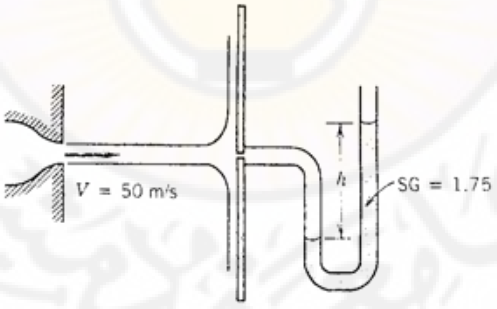
المسألة الخامسة عشرة

بناء على القراءات المبينة على الشكل المعطى أدناه. احسب قيمة واتجاه القوة التي يؤثر بها التيار المائي الجاري على الوصلة المتضيقة الأفقية.



المسألة السادسة عشرة

يخرج تيار هوائي أفقي سرعته $V = 50m/s$ من فتحة قطرها $10mm$. ليصطدم بقرص مستوٍ أملس ثابت قطره $200mm$، ويحتوي في منتصفه على ثقب صغير جداً موصول بمانومتر، كما مبين في الشكل الوارد أدناه. وقد وضع في المانومتر سائل كثافته النسبية $SG = 1.75$. احسب أولاً مقدار انحراف السائل في المانومتر. ثم أحسب القوة التي يؤثر بها التيار على القرص.

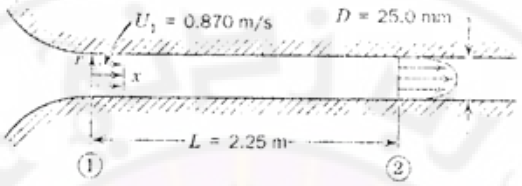


المسألة السابعة عشرة

يتدفق هواء إلى داخل أنبوب قطره $D = 25mm$، كما في الشكل الموضح أدناه. فإذا علمت أن توزع السرع عند مدخل الأنبوب منتظماً وقيمة السرعة تساوي $U_1 = 0.87m/s$. وبعد مسافة تبلغ $L = 2.25m$ تطور الجريان بشكل كامل، وأصبح منحني توزع السرع يتغير وفق العلاقة:

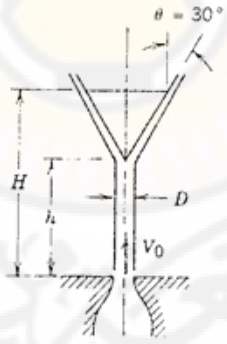
$$u(r) = U_c\left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right)$$

حيث: U_c – السرعة عند محور الأنبوب. فإذا كان هبوط الضغط بين المقطعين 1,2 يبلغ $1.92Pa$، احسب قوة الاحتكاك الكلية المتولدة بين المقطعين.



المسألة الثامنة عشرة

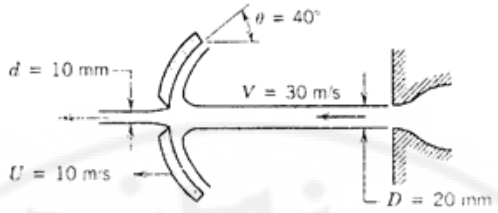
يخرج تيار مائي بشكل شاقولي من فتحة قطرها $D = 50mm$، بسرعة تساوي $V_0 = 10m/s$، ليصطدم على ارتفاع $h = 0.8m$ بمخروط، كما في الشكل اللاحق. أحسب القوة الواجب تطبيقها على سطح المخروط (متضمنة وزن المخروط)، بحيث يبقى المخروط على الإرتفاع h. بفرض أن $H = 1m$ (قدر وزن الماء في حجم التحكم).



المسألة التاسعة عشرة

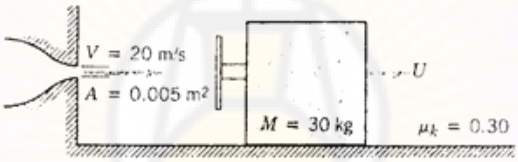
يخرج تيار مائي من فتحة قطرها $D = 20mm$، بسرعة تبلغ $V = 30m/s$، ليصطدم بقرص منحنٍ سطحه أملس، يتحرك بسرعة $U = 10m/s$، ويحتوي في وسطه على ثقب قطره $10mm$، كما في الشكل الوارد أدناه، حيث يخرج الماء من هذا الثقب

من دون أي إعاقة. احسب القوة التي يؤثر بها هذا التيار على القرص.



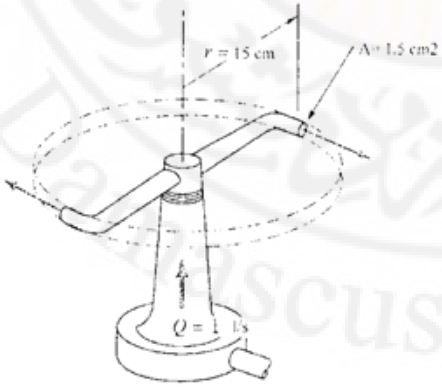
المسألة العشرون

يخرج تيار ماء من فتحة مساحتها $A = 0.005m^2$، بسرعة مقدارها $V = 20m/s$، ليصطدم بصفيحة مستوية ملساء، موصولة مع جسم كتلته $M = 30kg$ يستند على الأرض، كما في الشكل الموضح أدناه. احسب تسارع الجسم المتحرك عندما تبلغ سرعته $U = 10m/s$. بفرض أن معامل الاحتكاك بين سطح الجسم وسطح الأرض $\mu_k = 0.30$.



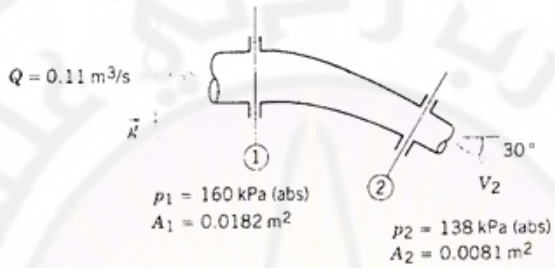
المسألة الإحدى والعشرون

يحتوي مرش ماء على فتحتين، كما في الشكل. فإذا كانت مساحة الفتحة الواحدة $A = 1.5cm^2$، وتصريف المرش $Q = 1l/s$، ونصف قطر دوران المرش $r = 15cm$. احسب أولاً عزم المقاومة المتشكل عند محور الدوران، عندما يدور المرش بسرعة تساوي $500rev/\min$. ثم قدر عدد دورات المرش عندما تكون الإعاقة عند محور الدوران معدومة.



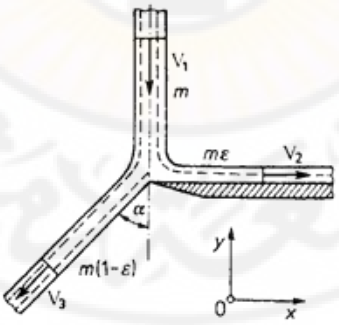
المسألة الثانية والعشرون

يتدفق الماء عبر الكوع الشاقولي المبين في الشكل المعطى أدناه. والمطلوب بناء على المعطيات الواردة عليه، حساب القوة الواجب تطبيقها على الكوع من الخارج ليتم تثبيته. بفرض أن حجم الكوع من الداخل $\forall = 0.006m^3$ ، وأن كتلة الكوع $m = 10kg$.



المسألة الثانية والعشرون

يخرج تيار سائل بسرعة $V_1 = V$ بغزارة وزنية m ، ليصطدم بطرف شفرة حادة وملساء. فيتزلق جزء من التيار $\varepsilon \cdot m$ على الشفرة، والجزء الآخر $m \cdot (1-\varepsilon)$ ينحرف عنها بزاوية α ، كما في الشكل اللاحق. احسب بدلالة $V_1 = V, m, \varepsilon$ قيمة الزاوية α . ثم احسب القوة التي يؤثر بها التيار على الشفرة.

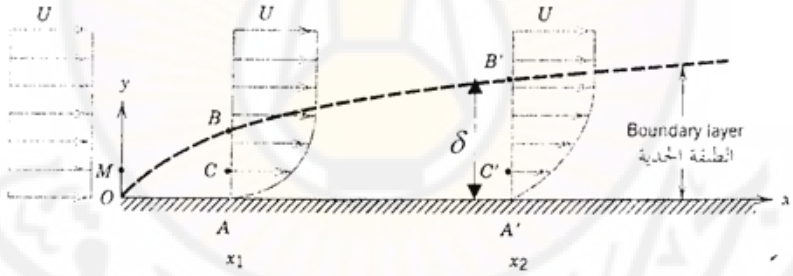


الفصل السابع

الطبقة الحدية
BOUNDARY LAYER

٧–١. مفهوم الطبقة الحدية The Boundary Layer Concept

لنأخذ سائلاً حقيقياً يجري بسرعة منتظمة قيمتها U، دون أن يتعرض لأية إعاقة. ولنضع صفيحة مستوية أفقية ثابتة ملساء توازي اتجاه الجريان، كما في الشكل (٧–١). فعندما يبدأ السائل الجريان على سطح الصفيحة، يحصل احتكاك مابين السطح الصلب للصفيحة وجزيئات السائل، لأن السائل حقيقي، مما يؤدي إلى انعدام سرعة جزيئات السائل الملامسة للصفيحة.



الشكل (٧–١). تطور (نمو) الطبقة الحدية فوق صفيحة مستوية ملساء [6]

ولو أخذنا مقطعاً في الصفيحة يقع على مسافة صغيرة x_1 من بدايتها باتجاه المحور x، ودرسنا تغير قيم السرع باتجاه المحور y، لوجدنا أن قيمة السرعة عند السطح الصلب تساوي الصفر، لكنها تزداد بشكل سريع لتصل خلال طبقة سماكتها δ إلى قيمة السرعة الأصلية للجريان U. حيث تدعى القيمة U **سرعة التيار الحر** ***Free Stream Velocity***. ولو أخذنا مقطعاً آخرَ باتجاه نفس المحور على مسافة x_2 أكبر من x_1، لوجدنا أن قيمة السماكة δ تزداد، وهكذا من مقطع لآخر باتجاه الجريان.

نلاحظ مما سبق أن قيمة السرعة في الطبقة المدروسة ذات السماكة δ تتغير كثيراً، أي أن **تدرج السرعة** ***Velocity Gradient*** فيها لايساوي الصفر $\frac{\partial u}{\partial y} \neq 0$. وتدعى الطبقة الملامسة للسطح الصلب، التي لا يكون فيها تدرج السرعة مساوياً للصفر **الطبقة الحدية** ***Boundary Layer***.

وباعتبار أن قوى القص الناتجة عن لزوجة السائل تتعلق بقيمة تدرج السرعة، كما في قانون نيوتن المعروف:

$$\tau = \mu \cdot \frac{\partial u}{\partial y}$$

وأن تدرج السرعة في الطبقة الحدية كبير جداً، لذلك فإن أهم ما يميز الجريان في الطبقة الحدية هو قوى اللزوجة الكبيرة التي تنشأ فيه، لدرجة شجع بعض المراجع على إهمال تأثير قوى اللزوجة خارج حدود الطبقة الحدية.

إن مفهوم الطبقة الحدية حديث نسبياً. وقد قدمه للمرة الأولى العالم الألماني الكبير **لودفيك براندتل** ***Ludwig Prandtl*** في عام ١٩٠٤. وبناء على هذا المفهوم حدثت ثورة كبيرة في مجال علم الهيدروديناميك، وجرى تطور علم الايروديناميك، الذي يعتبر الحجر الأساس في دراسة وتصميم الطائرات والصواريخ والسفن والغواصات والسيارات. وساهم في تطور نظرية الطبقة الحدية العالم المجري **فون كارمن** ***Von Karman***، الذي قام منفصلاً ومع براندتل في تقديم العديد من الدراسات والنظريات حول هذا الموضوع.

٧-٢. خصائص الجريان في الطبقة الحدية

Characteristics of Flow in the Boundary Layer

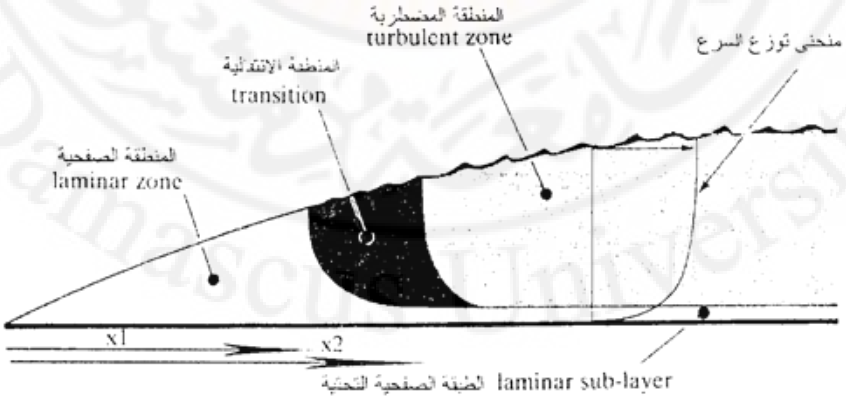
لو درسنا طبيعة الجريان في الطبقة الحدية، واعتبرنا أن بداية تشكلها عند بداية الدخول للصفيحة الملساء، فإننا نستطيع أن نميز فيها ثلاث مناطق كما في الشكل (٢-٧):

المنطقة الصفحية Laminar Zone: تمتد من بداية الدخول للصفيحة إلى المسافة x_1 المحددة من بدايتها. ويكون الجريان فيها صفحياً، أي لا يحصل تذبذب في قيم السرعة

والضغط مع الزمن. وتدعى الطبقة الحدية في هذه المنطقة: **الطبقة الحدية الصفحية** ***Laminar Boundary Layer***، التي غالباً ما يكون طولها قصيراً.

المنطقة المضطربة Turbulent Zone : تتشكل على مسافة x_2 من بداية الدخول للصفيحة. ويكون الجريان فيها مضطرباً، أي يحدث تذبذب في قيمة الضغط والسرعة مع الزمن. وتدعو الطبقة الحدية في هذه المنطقة: **الطبقة الحدية المضطربة** ***Turbulent Boundary Layer***. وإذا قمنا بدراسة دقيقة لطبيعة الجريان فيها، فإننا نجد أن هناك طبقة أخرى رقيقة جداً تقع أسفل الطبقة الحدية المضطربة تكون ملامسة للسطح الصلب، ويكون الجريان فيها صفحياً. وتدعى هذه الطبقة: **الطبقة الصفحية التحتية** ***Laminar Sub-Layer*** ، كما أن بعضهم يطلق عليها اسم الفيلم الصفحي، نظراً لسماكتها الضئيلة. ورغم أن هذه الطبقة (الفيلم الصفحي) رقيقة جداً، لكنها في غاية الأهمية، لأن قوى اللزوجة تكون فيها كبيرة جداً.

المنطقة الإنتقالية Transition Zone: تتشكل بين المنطقتين السابقتين. ويجمع الجريان فيها بين خواص الجريان الصفحي والجريان المضطرب. حيث يحصل تذبذب في السرعة والضغط أحياناً، ويكون الجريان عندها مضطرباً، ثم يختفي التذبذب أحياناً أخرى ليصبح الجريان صفحياً. وتدعو الطبقة الحدية في هذه المنطقة: **الطبقة الحدية الانتقالية** ***Transition Boundary Layer*** . والتي يكون طولها قصيراً جداً إذا ما قورن بطول الطبقة الحدية بالمضطربة، لذلك يمكن إهمالها في معظم الحالات.



الشكل (٧-٢). نشوء الطبقة الحدية فوق صفيحة مستوية ملساء [3]

يتم تحديد موقع كل من المنطقة الصفحية والمنطقة المضطربة، من أجل جريان غير قابل للانضغاط، على صفيحة مستوية ملساء (تدرج الضغط باتجاه الجريان يساوي الصفر)، حسب قيمة **عدد رينولدز** ***Reynolds Number***، الذي يعطى بالعلاقة:

$$\mathrm{Re}_x = \frac{U \cdot \rho \cdot x}{\mu} = \frac{U \cdot x}{\nu} \qquad (١-٧)$$

حيث:

- U: سرعة التيار الحر.
- x: بعد المقطع المدروس عن بداية الدخول للصفيحة.
- ν: اللزوجة الحركية للسائل.

وتعتبر بعض المراجع أنه عندما يكون عدد رينولدز $\mathrm{Re}_x < 3.2\times10^5$، فإن الطبقة الحدية تكون صفحية، وعندما يكون $\mathrm{Re}_x > 10^6$ فإن الطبقة الحدية تكون مضطربة، وعندما تكون قيمة عدد رينولدز واقعة مابين القيمتين السابقتين فإن الطبقة الحدية تكون انتقالية. إلا أن مراجع أخرى وهي الأكثر، تعتبر القيمة $\mathrm{Re}_c = 5\times10^5$ قيمة حدية للتمييز مابين المنطقة الصفحية والمنطقة المضطربة المتشكلة على صفيحة مستوية ملساء. ويمكن اعتماداً على الشرط السابق تحديد طول الطبقة الحدية الصفحية x_t، حيث لدينا:

$$\mathrm{Re}_c = \frac{U \cdot x_t}{\nu} = 5\times10^5 \qquad (٢-٧)$$

ومنه:

$$x_t = \frac{5\times10^5 \cdot \nu}{U} \qquad (٣-٧)$$

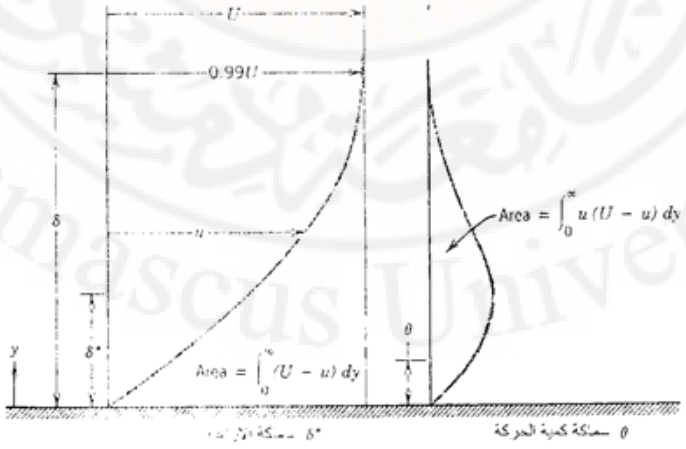
٧-٣. سماكة الطبقة الحدية Boundary Layer Thickness

بتحليل منحني توزع سرعة الجريان في الطبقة الحدية، يلاحظ أن قيمة السرعة تتغير من الصفر عند الجدار الصلب إلى قيمة U في اللانهاية، أي أن منحني توزع السرعة يكون مقارباً لخط عمودي على الصفيحة. ويعتبر نظرياً أن الطبقة الحدية تمتد من الجدار الصلب حيث يكون تدرج السرعة أعظمياً، إلى الارتفاع الذي يكون فيه

التدرج مساوياً الصفر أي أن سرعة الجريان تساوي سرعة التيار الحر U. وباعتبار أن منحني توزع السرعة ضمن الطبقة الحدية هو منحنٍ مقارب، لذلك فإن التدرج من الناحية النظرية لا يمكن أن ينعدم، وهذا يعني أن سماكة الطبقة الحدية تمتد إلى اللانهاية. ولكن من الناحية العملية، يصل التدرج في السرعة إلى قيمة منخفضة جداً تساوي الصفر تقريباً على ارتفاع معين من الجدار الصلب. لذلك يتفق الباحثون على تعريف **سماكة الطبقة الحدية** ***Boundary-Layer Thickness***، بأنها الارتفاع الممتد من الجدار الصلب إلى النقطة التي تصبح فيها قيمة السرعة مساوية $u = 0.99 \cdot U$. ويرمز لسماكة الطبقة الحدية بـ δ. وسماكة الطبقة الحدية غير ثابتة، وإنما تنمو وتزداد اعتباراً من نقطة الدخول إلى الصفيحة المستوية باتجاه الجريان.

بفرض أن منحني توزع السرعة في الطبقة الحدية كما هو مبين في الشكل (٧-٣). فضمن الطبقة الحدية وعند أي ارتفاع y، تكون السرعة u أقل من سرعة التيار الحر U. أما التصريف المار من خلال الطبقة الحدية ذات السماكة δ، فيكون أصغر من التصريف المار من الطبقة نفسها، فيما لو بقيت السرعة فيها منتظمة وتساوي U. وبناء عليه، يكون الفرق في التصريف خلال واحدة العرض من الصفيحة مساوياً:

$$q_1 = \int_0^{\delta} (U - u) \cdot dy \qquad (٤-٧)$$



الشكل (٧-٣). مفهوم سماكة الطبقة الحدية– سماكة الإزاحة– سماكة كمية الحركة [4]

لنأخذ في الطبقة الحدية سماكة مقدارها δ^*، ولنفرض أن السرعة تابتة خلال هذه السماكة وتساوي سرعة جريان التيار الحر، فيكون التصريف المار خلال هذه السماكة في واحدة العرض من الصفيحة:

$$q_2 = U \cdot \delta^* \qquad (٥-٧)$$

وإذا افترضنا أن: $q_1 = q_2$ ، يكون لدينا:

$$U \cdot \delta^* = \int_0^{\delta} (U - u) \cdot dy \qquad (٦-٧)$$

ومنه:

$$\delta^* = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{u}{U}\right) \cdot dy \qquad (٧-٧)$$

تدعى السماكة δ^* **سماكة الإزاحة** ***Displacement Thickness***.

وبالأسلوب السابق نفسه، يلاحظ أن كمية الحركة المارة خلال الطبقة الحدية ذات السماكة δ خلال واحدة العرض في واحدة الزمن، تكون أقل من كمية الحركة المارة من الطبقة نفسها فيما لو كانت السرعة فيها U. وهذا الفرق في كمية الحركة في واحدة الزمن خلال واحدة العرض من الصفيحة يساوي:

$$M_1 = \int_0^{\delta} \rho \cdot (U - u) \cdot u \cdot dy \qquad (٨-٧)$$

ولو أخذنا سماكة θ في الطبقة الحدية، وافترضنا أن قيمة السرعة ضمن هذه السماكة ثابتة وتساوي سرعة جريان التيار الحر U، فإن كمية الحركة المارة خلال هذه السماكة في واحدة الزمن خلال واحدة العرض من الصفيحة تعطى بالعلاقة:

$$M_2 = \rho \cdot U^2 \cdot \theta \qquad (٩-٧)$$

وإذا افترضنا أن: $M_1 = M_2$ ، يكون لدينا:

$$\rho \cdot U^2 \cdot \theta = \int_0^{\delta} \rho \cdot (U - u) \cdot u \cdot dy \qquad (١٠-٧)$$

ومنه:

$$\theta = \int_0^{\delta} \frac{u}{U} \cdot \left(1 - \frac{u}{U}\right) \cdot dy \qquad (١١-٧)$$

وتدعى السماكة θ **سماكة كمية الحركة** ***Momentum Thickness*** .

ويوجد مفهوم آخر في الطبقة الحدية هو **معامل الشكل** H ***Shape Factor*** ، الذي يعرف بأنه نسبة سماكة الإزاحة إلى سماكة كمية الحركة، أي أن:

$$H = \frac{\delta^*}{\theta} \qquad (١٢-٧)$$

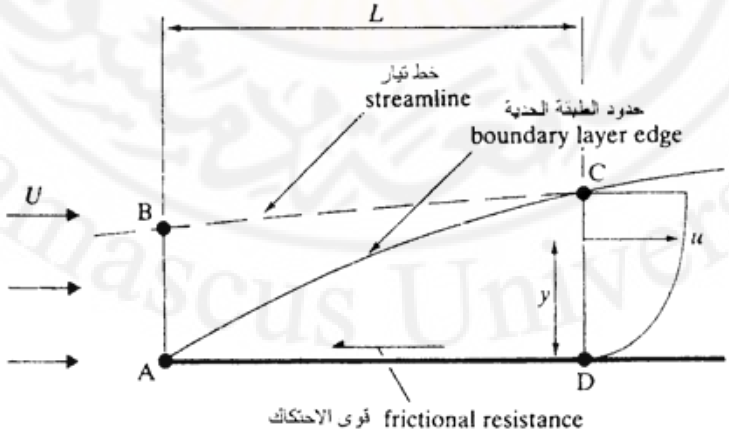
٧-٤. المعادلة التكاملية لكمية الحركة Momentum Integral Equation

لنأخذ حجم التحكم $ABCD$ المبين في الشكل (٧-٤)، الذي يتكون من مقطع طوله L يمر من الطبقة الحدية، ويحدد بخط التيار BC . وسندرس المسألة عبر واحدة العرض، فنجد أن التصريف المار عبر المقطع CD يساوي:

$$Q_{CD} = \int_0^{\delta} u \cdot dy \qquad (١٣-٧)$$

كما أن كمية الحركة في واحدة الزمن عبر المقطع CD تساوي:

$$M_{CD} = \int_0^{\delta} \rho \cdot u^2 \cdot dy \qquad (١٤-٧)$$



الشكل (٧-٤). استنتاج المعادلة التكاملية لكمية الحركة [3]

وباعتبار أن BC هو خط تيار، فإن التصريف المار من المقطع AB، يساوي التصريف المار من المقطع CD، أي أن:

$$Q_{AB} = Q_{CD} = \int_0^{\delta} u \cdot dy \qquad (١٥-٧)$$

ولكن السرعة في المقطع AB ثابتة وتساوي U، وبالتالي فإن كمية الحركة في واحدة الزمن عبر المقطع AB ستكون:

$$M_{AB} = \int_0^{\delta} \rho \cdot U \cdot u \cdot dy \qquad (١٦-٧)$$

وبالتالي سيكون التغير في كمية الحركة بين المقطعين AB,CD مساوياً:

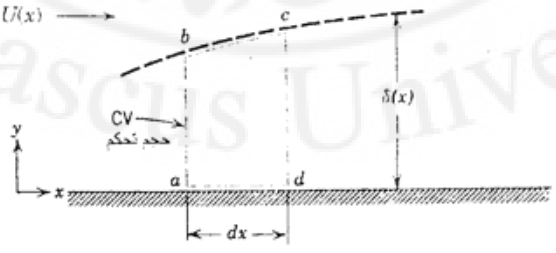
$$\Delta M = \int_0^{\delta} \rho \cdot u^2 \cdot dy - \int_0^{\delta} \rho \cdot U \cdot u \cdot dy \qquad (١٧-٧)$$

أو:

$$\Delta M = -\int_0^{\delta} \rho \cdot \left(U \cdot u - u^2\right) \cdot dy = -\rho \cdot U^2 \cdot \int_0^{\delta} \frac{u}{U} \cdot \left(1 - \frac{u}{U}\right) \cdot dy \qquad (١٨-٧)$$

ولدراسة القوى المؤثرة في واحدة العرض على حجم التحكم المدروس، نأخذ حجماً صغيراً منه $abcd$ بطول dx؛ كما في الشكل (٧-٥). فنجد أن القوى المؤثرة بشكل رئيس على هذا الحجم هي قوى الضغط المؤثرة على أوجه الحجم، وقوى الاحتكاك مابين السطح الصلب والسائل. وبفرض أن الضغط عند السطح ab هو p، أما الضغط عند السطح cd يساوي:

$$p_{x+dx} = p + \frac{\partial p}{\partial x} \cdot dx \qquad (١٩-٧)$$



الشكل (٧-٥). استنتاج المعادلة التكاملية لكمية الحركة [4]

أما الضغط الوسطي على السطح bc باتجاه المحور x فيساوي:

$$p+\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}\cdot dx \qquad (٢٠-٧)$$

وقوى الضغط المؤثر على الوجه ab هي:

$$F_{ab}=p\cdot\delta \qquad (٢١-٧)$$

أما قوى الضغط المؤثر على الوجه cd فهي:

$$F_{cd}=\left(p+\frac{\partial p}{\partial x}\cdot dx\right)\cdot(\delta+d\delta) \qquad (٢٢-٧)$$

وبالنسبة للمركبة الأفقية لقوة الضغط على الوجه bc فهي تساوي:

$$F_{bc}=\left(p+\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}\cdot dx\right)\cdot d\delta \qquad (٢٣-٧)$$

أما قوى الاحتكاك بين السائل والسطح الصلب فتعادل:

$$F_{ad}=\left(\tau_w+\frac{1}{2}\cdot d\tau_w\right)\cdot dx \qquad (٢٤-٧)$$

حيث: τ_w - **إجهاد القص عند الجدار** ***Wall Shear Stress***.

وبإهمال الحدود التفاضلية الصغيرة، تكون محصلة القوى باتجاه محور الجريان مساوية:

$$\sum F_{abcd}=\frac{\partial p}{\partial x}\cdot\delta\cdot dx-\tau_w\cdot dx \qquad (٢٥-٧)$$

أما محصلة القوة الكلية المؤثرة على حجم التحكم الأصلي $ABCD$ فتصبح:

$$\sum F_{ABCD}=\int_0^L\frac{\partial p}{\partial x}\cdot\delta\cdot dx-\int_0^L\tau_w\cdot dx \qquad (٢٦-٧)$$

وحسب مبدأ كمية الحركة الذي ينص على أن مجموع القوى المؤثرة على حجم تحكم يساوي التغير في كمية الحركة، يمكن كتابة:

$$-\int_0^L\frac{\partial p}{\partial x}\cdot\delta\cdot dx-\int_0^L\tau_w\cdot dx=-\rho\cdot U^2\cdot\int_0^\delta\frac{u}{U}\cdot\left(1-\frac{u}{U}\right)\cdot dy \qquad (٢٧-٧)$$

أو:

$$\int_0^L \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \delta \cdot dx + \int_0^L \tau_w \cdot dx = \rho \cdot U_z^2 \cdot \int_0^\delta \frac{u}{U} \cdot \left(1 - \frac{u}{U}\right) \cdot dy \qquad (٢٨-٧)$$

وتدعى هذه المعادلة: **المعادلة التكاملية لكمية الحركة** ***Momentum Integral Equation***.

في حالة الجريان فوق صفيحة مستوية ***Flow Over Flat Plate*** حيث تكون السرعة ثابتة، يكون الضغط حسب مبدأ برنوللي ثابتاً أيضاً، وبالتالي فإن:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

وبذلك تأخذ المعادلة التكاملية لكمية الحركة الشكل التالي:

$$\int_0^L \tau_w \cdot dx = \rho \cdot U^2 \cdot \int_0^\delta \frac{u}{U} \cdot \left(1 - \frac{u}{U}\right) \cdot dy \qquad (٢٩-٧)$$

ويمكن كتابة المعادلة السابقة بالشكل:

$$\int_0^L \tau_w \cdot dx = \rho \cdot U^2 \cdot \theta \qquad (٣٠-٧)$$

وبمفاضلة الطرفين في المعادلة التكاملية لكمية الحركة، نجد أن:

$$\tau_w = \frac{d}{dx}\left(\rho \cdot U^2 \cdot \theta\right) \qquad (٣١-٧)$$

أو:

$$\tau_w = \rho \cdot U^2 \frac{d}{dx} \int_0^\delta \frac{u}{U} \cdot \left(1 - \frac{u}{U}\right) \cdot dy \qquad (٣٢-٧)$$

٧-٥. استخدام المعادلة التكاملية لكمية الحركة

Use of the Momentum Integral Equation

تفيد المعادلة التكاملية لكمية الحركة في حساب قيم إجهاد القص المتولد بين السائل والسطح الصلب، وبالتالي في تحديد قوة الاحتكاك المتولدة، وإيجاد قيمة سماكة الطبقة الحدية. لكن حل هذه المعادلة التكاملية يتطلب معرفة شكل توزع سرعة الجريان على الصفيحة، وهذا ما يحدد غالباً بناء على التجارب والتحليلات النظرية. وسوف نقوم بحل المعادلة التكاملية لكمية الحركة من أجل الصفائح المستوية التي يكون

فيها **تدرج الضغط** ***Pressure Gradient*** باتجاه محور الجريان مساوياً الصفر.

إن المعادلة التكاملية لكمية الحركة في هذه الحالة تعطى بالصيغة:

$$\tau_w = \rho \cdot U^2 \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} \frac{u}{U} \cdot \left(1 - \frac{u}{U}\right) \cdot dy$$

أما توزع السرعة في الطبقة الحدية، فيحدد عادة بالعلاقة العامة التالية:

$$\frac{u}{U} = f\left(\frac{y}{\delta}\right) \qquad (٣٣-٧)$$

أو بالصيغة:

$$\frac{u}{U} = f(\eta) \qquad (٣٤-٧)$$

حيث:

$$\eta = \frac{y}{\delta} \Rightarrow y = \delta \cdot \eta \qquad (٣٥-٧)$$

وبالمفاضلة، نجد أن:

$$dy = \delta \cdot d\eta \qquad (٣٦-٧)$$

وباعتبار الشروط الحدية: $y = 0 \Rightarrow \eta = 0, y = \delta \Rightarrow \eta = 1$ ، فإن المعادلة التكاملية لكمية الحركة تصبح على الشكل التالي:

$$\tau_w = \rho \cdot U^2 \cdot \frac{d\delta}{dx} \int_0^1 \frac{u}{U} \cdot \left(1 - \frac{u}{U}\right) \cdot d\eta \qquad (٣٧-٧)$$

إن حل المعادلة التكاملية لكمية الحركة يتضمن عموماً القيام بالخطوات التالية:

١- افتراض شكل لعلاقة توزع السرعة في الطبقة الحدية. ويمكن هنا اعتماد العلاقة:

$$\frac{u}{U} = f\left(\frac{y}{\delta}\right) = f(\eta)$$

واعتبار **الشروط الحدية** ***Boundary Conditions*** التالية:

$$y = 0 \Rightarrow u = 0$$

$$y = \delta \Rightarrow u = U$$

$$y = \delta \Rightarrow \frac{du}{dy} = 0$$

٢- إيجاد إجهاد القص عند الجدار بدلالة سماكة الطبقة الحدية، بتطبيق قانون نيوتن:

$$\tau_w = \mu \cdot \frac{du}{dy}$$

٣- تعويض قيمة إجهاد القص عند الجدار في المعادلة التكاملية لكمية الحركة، ثم القيام بحلها.

وسوف نستخدم في الفقرتين التاليين، معادلة كمية الحركة لحساب الطبقة الحدية الصفحية والمضطربة.

الطبقة الحدية الصفحية

بناء على التجارب والدراسات، فإن أكثر العلاقات استخداماً للتعبير عن توزع السرعة في الطبقة الحدية الصفحية، هي العلاقة الجيبية التالية:

$$\frac{u}{U} = \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{y}{\delta}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot \eta\right) \qquad (٣٨-٧)$$

أما إجهاد القص عند الجدار، فيحسب كما أسلفنا بتطبيق علاقة نيوتن :

$$\tau_w = \mu \cdot \left.\frac{du}{dy}\right|_{y=0}$$

أو:

$$\tau_w = \mu \cdot \left.\frac{U \cdot d\left(\frac{u}{U}\right)}{\delta \cdot d\left(\frac{y}{\delta}\right)}\right|_{\frac{y}{\delta}=0}$$

أو:

$$\tau_w = \mu \cdot \left.\frac{U \cdot d\left(\frac{u}{U}\right)}{\delta \cdot d\eta}\right|_{\eta=0}$$

أو:

$$\tau_w = \frac{\mu \cdot U}{\delta} \cdot \frac{d}{d\eta}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot \eta\right)\right)\Big|_{\eta=0}$$

أو:

$$\tau_w = \frac{\mu \cdot U}{\delta} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \eta\right)\Big|_{\eta=0}$$

ومنه:

$$\tau_w = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\mu \cdot U}{\delta} \qquad (٣٩-٧)$$

وبتطبيق المعادلة التكاملية لكمية الحركة، نجد أن:

$$\tau_w = \rho \cdot U^2 \frac{d\delta}{dx} \int_0^1 \frac{u}{U} \cdot \left(1 - \frac{u}{U}\right) \cdot d\eta$$

وبالتعويض في المعادلة السابقة عن $\frac{u}{U}$ بقيمتها، نجد أن:

$$\tau_w = \rho \cdot U^2 \frac{d\delta}{dx} \int_0^1 \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot \eta\right) \cdot \left[1 - \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot \eta\right)\right] \cdot d\eta$$

أو:

$$\tau_w = \rho \cdot U^2 \cdot \frac{d\delta}{dx} \int_0^1 \left[\sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot \eta\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot \eta\right)\right] \cdot d\eta$$

وبالمكاملة بالنسبة إلى η، والتعويض بقيم حدود التكامل، نحصل على:

$$\tau_w = 0.137 \cdot \rho \cdot U^2 \cdot \frac{d\delta}{dx} \qquad (٤٠-٧)$$

وبالتعويض عن τ_w من العلاقة (٣٩-٧) في المعادلة السابقة، نجد أن:

$$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\mu \cdot U}{\delta} = 0.137 \cdot \rho \cdot U^2 \cdot \frac{d\delta}{dx}$$

وبالإصلاح، ينتج أن:

$$\delta \cdot d\delta = 11.5 \cdot \frac{\mu}{\rho \cdot U} \cdot dx$$

وبالمكاملة نستنتج أن:

$$\frac{\delta^2}{2} = \frac{11.5 \cdot \mu}{\rho \cdot U} \cdot x + C$$

حيث: C - ثابت التكامل، وتحدد قيمته من الشروط الحدية :

$x = 0, \delta = 0 \Rightarrow C = 0$. وبناء عليه فإن المعادلة السابقة تأخذ الصيغة التالية:

$$\frac{\delta^2}{2} = \frac{11.5 \cdot \mu}{\rho \cdot U} \cdot x$$

أو:

$$\delta = \sqrt{\frac{23 \cdot \mu \cdot x}{\rho \cdot U}}$$

أو:

$$\delta = 4.8 \cdot x \sqrt{\frac{\mu}{\rho \cdot U \cdot x}}$$

ومنه:

$$\delta = 4.8 \cdot \frac{x}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}} \qquad (٤١-٧)$$

حيث أن:

$$\mathrm{Re}_x = \frac{\rho \cdot U \cdot x}{\mu} = \frac{U \cdot x}{\nu}$$

إن العلاقة (٤١-٧) تمكننا من حساب سماكة الطبقة الحدية الصفحية، عند أي مقطع من صفيحة مستوية ملساء يبعد مسافة x عن بداية الدخول، بعد معرفة قيمة عدد رينولدز عند هذا المقطع. وتُظهر هذه العلاقة أن الطبقة الحدية الصفحية تنمو وتزداد سماكتها مع تقدم الجريان على الصفيحة.

ولحساب سماكة الإزاحة لدينا:

$$\delta^* = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{u}{U}\right) \cdot dy = \delta \cdot \int_0^1 \left(1 - \frac{u}{U}\right) \cdot d\eta$$

أو:

$$\delta^* = \delta \cdot \int_0^1 \left(1 - \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot \eta\right)\right) \cdot d\eta$$

ومنه:

$$\delta^* = \left(\frac{\pi - 2}{\pi}\right) \cdot \delta \qquad (٤٢-٧)$$

أما لحساب سماكة كمية الحركة، فنكتب:

$$\theta = \int_0^{\delta} \frac{u}{U} \cdot \left(1 - \frac{u}{U}\right) \cdot dy = \delta \cdot \int_0^1 \frac{u}{U} \cdot \left(1 - \frac{u}{U}\right) \cdot d\eta$$

أو:

$$\theta = \delta \cdot \int_0^1 \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot \eta\right) \cdot \left(1 - \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot \eta\right)\right) \cdot d\eta$$

ومنه:

$$\theta = \left(\frac{4 - \pi}{2 \cdot \pi}\right) \cdot \delta \qquad (٤٣-٧)$$

ولإيجاد قيمة إجهاد القص عند الجدار، نعوض قيمة δ المحسوبة وفق العلاقة (٤١-٧) في العلاقة (٣٩-٧)، فنجد أن:

$$\tau_w = \frac{\pi}{2} \frac{\mu \cdot U}{\delta} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\mu \cdot U \cdot \sqrt{\mathrm{Re}_x}}{4.8 \cdot x}$$

أو:

$$\tau_w = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\mu \cdot U^2 \cdot \sqrt{\frac{\rho \cdot U \cdot x}{\mu}}}{4.8 \cdot U \cdot x}$$

وأخيراً تكتب العلاقة السابقة كما يلي:

$$\tau_w = 0.327 \cdot \frac{\rho \cdot U^2}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}} \qquad (٤٤-٧)$$

تسمى النسبة بين إجهاد القص المؤثر عند الجدار والضغط الديناميكي الناتج عن الجريان **معامل الاحتكاك** ***Skin Friction Coefficient*** C_f. وهو يساوي:

$$C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\cdot\rho\cdot U^2} \qquad (٤٥-٧)$$

وبالتالي يمكن كتابة علاقة إجهاد القص عند الجدار على الشكل:

$$\tau_w = \frac{1}{2}\cdot C_f\cdot\rho\cdot U^2 \qquad (٤٦-٧)$$

وبتعويض قيمة τ_w من العلاقة (٤٤-٧) في العلاقة السابقة نجد أن معامل الاحتكاك يساوي:

$$C_f = \frac{0.654}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}} \qquad (٤٧-٧)$$

ومن المفيد التنويه هنا إلى أن العلاقات السابقة، استنتجت بافتراض أن منحني توزع السرعة في الطبقة الحدية الصفحية هو تابع جيبي، وهي علاقات قريبة جداً من العلاقات التي يعطيها الحل النظري الدقيق، الذي يعتمد على حل معادلات نافييه-ستوكس (خارج نطاق هذا المقرر) المقدم من قبل تلميذ براندتل الباحث الألماني بلاسيوس ***H.Blasius*** في عام ١٩٠٨. وقد توصل إلى العلاقات التالية:

$$\delta = 5\cdot\frac{x}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}} \qquad (٤٨-٧)$$

$$\delta^* = 0.344\cdot\delta \qquad (٤٩-٧)$$

$$\theta = 0.133\cdot\delta \qquad (٥٠-٧)$$

$$\tau_w = 0.332\cdot\frac{\rho\cdot U^2}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}} \qquad (٥١-٧)$$

$$C_f = \frac{0.664}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}} \qquad (٥٢-٧)$$

الطبقة الحدية المضطربة

لقد أثبتت الدراسات التي أجراها براندتل، أن الشكل العام لمنحني توزع السرعة في حالة الطبقة الحدية المضطربة على صفيحة مستوية ملساء هو من الشكل:

$$\frac{u}{U} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/n} = \eta^{1/n} \qquad (٥٣-٧)$$

حيث تتعلق قيمة n بشكل رئيس بعدد رينولدز، وهي تقع في المجـــال $6 < n < 11$. وتعتبر $n = 7$ القيمة الأكثر استخداماً. لذلك سنفرض أن منحني توزع السرعة هو من الشكل:

$$\frac{u}{U} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7} = \eta^{1/7} \qquad (٥٤-٧)$$

فلو طبقنا علاقة نيوتن لحساب إجهاد القص عند الجدار:

$$\tau_w = \mu \cdot \left.\frac{du}{dy}\right|_{y=0}$$

لوجدنا أن $\left.\frac{du}{dy}\right|_{y=0} = \infty$، وهذا ما يعني أن المتابعة في حل المسألة أمر مستحيل. لكـــن الدراسات التجريبية، أثبتت أن العلاقة التي تعطي إجهاد القص عند الجدار هي:

$$\tau_w = 0.029 \cdot \frac{\rho \cdot U^2}{(\mathrm{Re}_x)^{1/5}} \qquad (٥٥-٧)$$

وبتطبيق المعادلة التكاملية لكمية الحركة، نجد أن:

$$\tau_w = \rho \cdot U^2 \frac{d\delta}{dx} \int_0^1 \frac{u}{U} \cdot \left(1 - \frac{u}{U}\right) \cdot d\eta$$

أو:

$$\tau_w = \rho \cdot U^2 \frac{d\delta}{dx} \int_0^1 \eta^{1/7} \cdot \left(1 - \eta^{1/7}\right) \cdot d\eta$$

وبالمكاملة بالنسبة لـــ η، نحصل على:

$$0.029 \cdot \frac{\rho \cdot U^2}{(\mathrm{Re}_x)^{1/5}} = \frac{7}{72} \rho \cdot U^2 \frac{d\delta}{dx}$$

أو:

$$0.029 \cdot \frac{dx}{(\mathrm{Re}_x)^{1/5}} = \frac{7}{72} d\delta$$

ومنه:

$$\frac{0.029 \cdot x^{-1/5} \cdot dx}{\left(\frac{\rho \cdot U}{\mu}\right)^{1/5}} = \frac{7}{72} \cdot d\delta$$

وبالتكامل نجد أن:

$$\frac{5}{4} \cdot \frac{0.029 \cdot x^{4/5}}{\left(\frac{\rho \cdot U}{\mu}\right)^{1/5}} = \frac{7}{72} \cdot \delta$$

وبضرب البسط والمقام بالقيمة $x^{1/5}$، نحصل أن:

$$\frac{5}{4} \cdot \frac{0.029 \cdot x^{4/5} \cdot x^{1/5}}{\left(\frac{\rho \cdot U}{\mu}\right)^{1/5} \cdot x^{1/5}} = \frac{7}{72} \cdot \delta$$

وبإصلاح العلاقة السابقة، نجد أن:

$$\delta = \frac{0.37 \cdot x}{(\mathrm{Re}_x)^{1/5}} \qquad (٥٦-٧)$$

يمكن كتابة علاقة إجهاد القص عند الجدار كما وجدنا سابقاً وفق الآتي:

$$\tau_w = \frac{1}{2} \cdot C_f \cdot \rho \cdot U^2$$

وبمقارنة هذه العلاقة مع العلاقة (٧-٥٥)، نجد أن:

$$C_f = \frac{0.058}{(\mathrm{Re}_x)^{1/5}} \qquad (٥٧-٧)$$

ولحساب سماكة الإزاحة، نكتب:

$$\delta^* = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{u}{U}\right) \cdot dy = \delta \cdot \int_0^1 \left(1 - \frac{u}{U}\right) \cdot d\eta$$

أو:

$$\delta^* = \delta \cdot \int_0^1 \left(1 - \eta^{1/7}\right) \cdot d\eta$$

ومنه:

$$\delta^* = \frac{\delta}{8} \qquad (٥٨-٧)$$

ولحساب سماكة كمية الحركة، لدينا:

$$\theta = \int_0^{\delta} \frac{u}{U} \cdot \left(1 - \frac{u}{U}\right) \cdot dy = \delta \cdot \int_0^1 \frac{u}{U} \cdot \left(1 - \frac{u}{U}\right) \cdot d\eta$$

أو:

$$\theta = \delta \cdot \int_0^1 \eta^{1/7} \cdot \left(1 - \eta^{1/7}\right) \cdot d\eta$$

ومنه:

$$\theta = \frac{7}{72} \cdot \delta \qquad (٥٩-٧)$$

مثال ٧-١

يجري الماء بسرعة $1.0m/s$ فوق صفيحة مستوية ملساء طولها $1.0m$. والمطلوب حساب:

١. طول الطبقة الحدية الصفحية المتشكلة على الصفيحة.

٢. سماكة الطبقة الحدية الصفحية عند نهايتها.

٣. سماكة الإزاحة وسماكة كمية الحركة عند نهاية الطبقة الحدية الصفحية.

٤. إجهاد القص عند نهاية الطبقة الحدية الصفحية.

٥. سماكة الطبقة الحدية عند نهاية الصفيحة.

٦. سماكة الإزاحة وسماكة كمية الحركة عند نهاية الصفيحة.

٧. إجهاد القص عند نهاية الصفيحة.

افترض أن منحني توزع السرعة في الطبقة الحدية المضطربة وفق علاقة براندتل مرفوعة للأس $1/7$، وأن اللزوجة الحركية للماء $\nu = 1\times10^{-6} m^2/\sec$.

الحل:

الطلب الأول:

نحسب طول الطبقة الحدية الصفحية المتشكلة على الصفيحة من الشرط:

$$x_t = \frac{5\times10^5 \cdot \nu}{U}$$

ومنه:

$$x_t = \frac{5\times10^5 \cdot 10^{-6}}{1} = 0.5m$$

الطلب الثاني:

تعطى سماكة الطبقة الحدية الصفحية بالعلاقة:

$$\delta = 5 \cdot \frac{x}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}$$

وبالتعويض بالقيم العددية، نجد أن قيمة سماكة الطبقة الحدية الصفحية عند نهايتها تساوي:

$$\delta = 5 \cdot \frac{0.5}{\sqrt{5\times10^5}} = 0.0035m = 3.5mm$$

الطلب الثالث:

تعطى سماكة الإزاحة في الطبقة الحدية الصفحية بالعلاقة:

$$\delta^* = 0.344 \cdot \delta$$

وبالتعويض بالقيم العددية، تكون سماكة الإزاحة عند نهاية الطبقة الحدية الصفحية مساوية:

$$\delta^* = 0.344 \cdot 3.5 = 1.204mm$$

أما سماكة كمية الحركة عند نهاية الطبقة الحدية الصفحية فتساوي:

$$\theta = 0.133 \cdot \delta = 0.133 \cdot 3.5 = 0.47mm$$

الطلب الرابع:

إجهاد القص في الطبقة الحدية الصفحية يعطى بالعلاقة:

$$\tau_w = 0.332 \cdot \frac{\rho \cdot U^2}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}$$

وبالتعويض، نجد أن قيمة إجهاد القص عند نهاية الطبقة الحدية الصفحية تساوي:

$$\tau_w = 0.332 \cdot \frac{1000 \cdot 1}{\sqrt{5 \times 10^5}} = 0.47 Pa$$

الطلب الخامس:

تعطى سماكة الطبقة الحدية المضطربة بالعلاقة:

$$\delta = \frac{0.37 \cdot x}{(\mathrm{Re}_x)^{1/5}}$$

أما سماكة الطبقة الحدية المضطربة عند نهاية الصفيحة فتساوي:

$$\delta_{x=L} = \frac{0.37 \cdot L}{(\mathrm{Re}_L)^{1/5}}$$

إن قيمة عدد رينولدز عند نهاية الصفيحة تساوي:

$$\mathrm{Re}_{L=1} = \frac{1 \cdot 1}{10^{-6}} = 10^6$$

وبالتعويض بالقيم العددية، نجد أن:

$$\delta_{x=L=1} = \frac{0.37 \cdot 1}{(10^6)^{1/5}} = 0.023m = 23mm$$

الطلب السادس:

إن سماكة الإزاحة في نهاية الصفيحة تساوي:

$$\delta^* = \frac{\delta}{8} = \frac{23}{8} = 2.88mm$$

أما سماكة كمية الحركة في نهاية الصفيحة فتساوي:

$$\theta = \frac{7}{72} \cdot \delta = \frac{7}{72} \cdot 23 = 2.24$$

الطلب السابع:

تعطى علاقة إجهاد القص عند الجدار في الطبقة الحدية المضطربة بالصيغة:

$$\tau_w = 0.029 \cdot \frac{\rho \cdot U^2}{(\mathrm{Re}_x)^{1/5}}$$

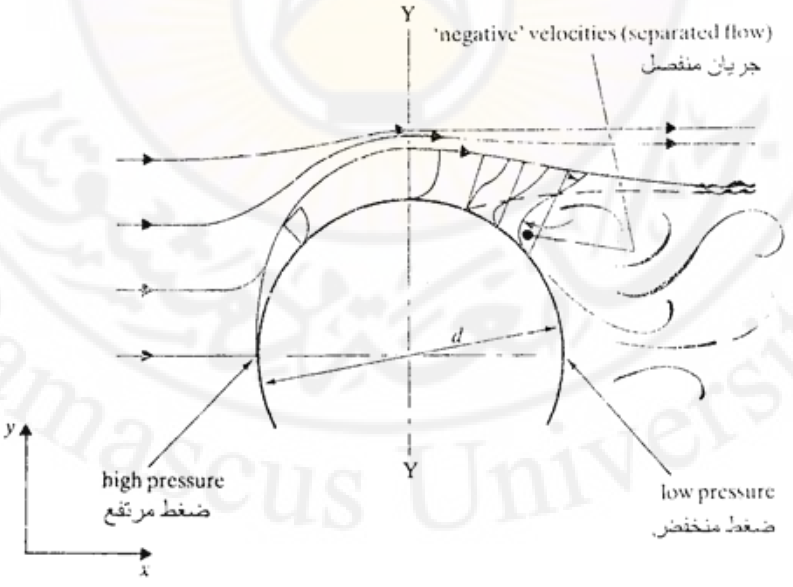
وعند نهاية الصفيحة، يكون إجهاد القص مساوياً:

$$\tau_{w,1} = 0.029 \cdot \frac{1000 \cdot 1^2}{(10^6)^{1/5}} = 1.83 Pa$$

٧-٦. انفصال الطبقة الحدية Boundary Layer Separation

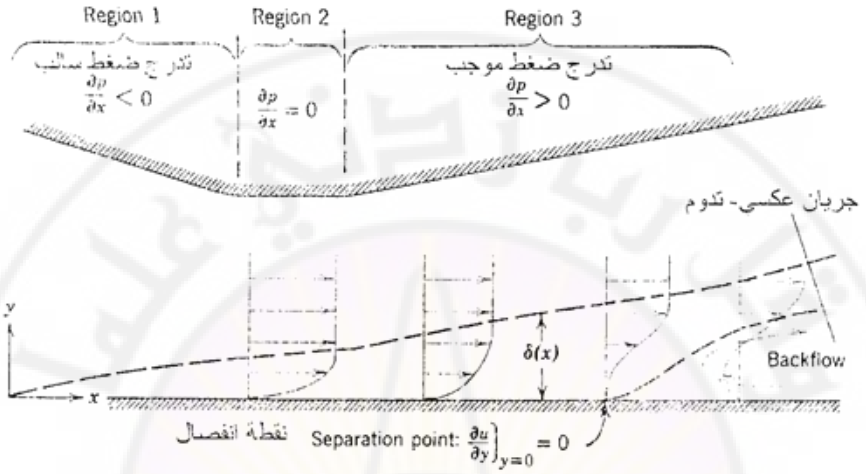
عند دراسة الطبقة الحدية المتشكلة أثناء الجريان على صفيحة مستوية افترضنا أن تدرج الضغط باتجاه الجريان $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$. وسنحاول الآن دراسة الجريان حول أسطوانة دائرية، كما هو مبين في الشكل (٧-٦).

من الشكل نلاحظ أنه من جهة الأسطوانة المقابلة للجريان يحصل انضغاط في الجريان. مما يؤدي إلى زيادة السرعة ونقصان الضغط، وبالتالي فإن تدرج الضغط لا يكون مساوياً الصفر، وإنما يحصل هبوط في الضغط، ويكون تدرج الضغط سالباً، أي أن $\frac{\partial p}{\partial x} < 0$. أما في الاتجاه المعاكس للجريان، أي خلف الأسطوانة، فيزداد الضغط ويكون تدرج الضغط موجباً، أي أن: $\frac{\partial p}{\partial x} > 0$.



الشكل (٧-٦). انفصال الجريان على سطح أسطوانة [3]

لو درسنا في الحالة العامة الطبقة الحدية المتشكلة أثناء الجريان على السطح المبين في الشكل (٧-٧)، فإننا حسب تدرج الضغط $\frac{\partial p}{\partial x}$ يمكن أن نميز ثلاث مناطق:



الشكل (٧-٧). انفصال الطبقة الحدية [4]

المنطقة الأولى: يتناقص فيها الضغط مع تقدم الجريان، ويكون تدرج الضغط في الطبقة الحدية سالباً، أي أن: $\frac{\partial p}{\partial x} < 0$. وهنا لا توجد أي مشكلة، لأن النقصان في الضغط يمكن تعويضه بزيادة السرعة. وقد أثبتت التجارب أن فواقد الطاقة في منطقة تدرج الضغط السلبي ليست كبيرة.

المنطقة الثانية: يشبه حالة الجريان على صفيحة مستوية، حيث يكون تدرج الضغط مساوياً الصفر، أي أن: $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$.

المنطقة الثالثة: يزداد الضغط مع تقدم الجريان، ويكون تدرج الضغط موجباً، أي أن: $\frac{\partial p}{\partial x} > 0$. لا يمكن الحصول على زيادة الضغط الذي يحدث في الطبقة الحدية إلا عن طريق إبطاء الجريان لتقليل سرعته، الأمر الذي يؤدي إلى ازدياد سماكة الطبقة الحدية، وانعدام سرعة الجريان ليس فقط على الجدار وإنما على مسافة معينة منه، مما يؤدي إلى تشكل مركبات سرعة معاكسة بين الجدار ونقطة انعدام السرعة، مسببة تيارات ودوامات ترافقها فواقد هائلة في الطاقة. وتدعى ظاهرة تشكل تيارات عكسية

انفصال الطبقة الحدية ***Boundary Layer Separation***. والواقع أنه ليس من الضروري حدوث الانفصال عندما يكون تدرج الضغط موجباً، ولكن الشرط اللازم لحدوث الانفصال هو وجود تدرج ضغط موجب. إن عملية الانفصال تبدأ من النقطة التي يصبح فيها تدرج السرعة عند الجدار مساوياً للصفر، أي عندما: $\frac{du}{dy}=0$. وتدعى النقطة التي يبدأ عندها الانفصال **بنقطة الانفصال** ***Separation Point***.

إن ظاهرة انفصال الطبقة الحدية تعتبر من أكبر المشاكل التي تواجه مصممي الطائرات، حيث أن انفصال الطبقة الحدية على جناح الطائرة يسبب خلخلة كبيرة في جسم الطائرة، وفواقد احتكاك هائلة تضاف لفواقد الاحتكاك المتشكلة أصلاً بين الهواء وجسم الطائرة. كما تصادف مشكلة انفصال الطبقة الحدية على ريش التوربينات والمحركات النفاثة والمضخات المحورية والمختلطة.

٧-٧. معادلات الطبقة الحدية Boundary Layer Equations

كما لاحظنا سابقاً، فإن سلوك الجريان في الطبقة الحدية يختلف مابين الطبقة الحدية الصفحية والطبقة الحدية المضطربة، حيث يخضع الجريان في الطبقة الحدية الصفحية والطبقة الصفحية التحتية لمعادلات الجريان الصفحي، أي معادلات (نافييه-ستوكس) ***Navier-Stokes Equations***. أما الجريان في الطبقة الحدية المضطربة فيخضع لمعادلات (نافييه-ستوكس-رينولدز) ***Navier-Stokes-Reynolds Equations***.

٧-٧-١. معادلات الطبقة الحدية الصفحية - معادلات براندتل

Laminar Boundary Layer Equations -Prandtl Equations

علمنا سابقاً أن المعادلات العامة للجريان المستوي اللزج غير القابل للانضغاط وغير المستقر، حسب (نافييه-ستوكس) هي:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+v\cdot\frac{\partial u}{\partial y}=X-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\cdot\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \qquad (٦٠-٧)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+v\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=Y-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\cdot\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \qquad (٦١-٧)$$

لقد قام براندتل بتبسيط معادلات (نافييه-ستوكس) بوضع بعض الافتراضات،

مستفيداً من خواص الطبقة الحدية. فاعتبر أن:

- قوى الجسم بوحدة الكتلة (قوى الثقالة) صغيرة جداً بالمقارنة مع قوى اللزوجة بحيث يمكن إهمالها، أي أن: $X = Y = 0$.
- تغير مركبات السرعة باتجاه سماكة الطبقة الحدية أكبر بكثير من تغيراتها باتجاه الجريان. وبناء على ذلك افترض أن: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0$.

وبناء عليه تصبح معادلات (نافييه-ستوكس) كما يلي:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad (٦٢-٧)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \qquad (٦٣-٧)$$

وتدعى هاتان المعادلتان: **معادلات براندتل** ***Prandtl Equations*** في الطبقة الحدية الصفحية لجريان مستوٍ غير مستقر.

وفي حالة الجريان المستقر تصبح معادلات براندتل للطبقة الحدية الصفحية، كما يلي:

$$u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad (٦٤-٧)$$

$$u \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \qquad (٦٥-٧)$$

وفي حالة الجريان على صفيحة ملساء ذات تدرج ضغط صفري، تبسط المعادلتان السابقتان إلى الشكل:

$$u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad (٦٦-٧)$$

٧-٧-٢. معادلات الطبقة الحدية المضطربة

Turbulent Boundary Layer Equations

استخرجنا في بحث الجريان المضطرب المعادلات العامة للجريان المستوي المضطرب غير القابل للانضغاط وغير المستقر، والتي أطلقنا عليها معادلات (نافييه-

ستوكس –رينولدز)، وهي:

$$\frac{\partial U}{\partial t}+U\cdot\frac{\partial U}{\partial x}+V\cdot\frac{\partial U}{\partial y}=X-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial P}{\partial x}+\nu\cdot\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)-\frac{\partial\overline{u'^2}}{\partial x}-\frac{\partial\overline{u'v'}}{\partial y} \quad (٦٧-٧)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t}+U\cdot\frac{\partial V}{\partial x}+V\cdot\frac{\partial V}{\partial y}=Y-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial P}{\partial y}+\nu\cdot\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)-\frac{\partial\overline{v'u'}}{\partial x}-\frac{\partial\overline{v'^2}}{\partial y} \quad (٦٨-٧)$$

وباعتماد أسلوب التحليل نفسه الذي اتبع في دراسة معادلات الطبقة الحدية الصفحية في إهمال تغيرات السرعة في اتجاه الجريان مقارنة مع تغيراتها باتجاه الطبقة الحدية، نجد أن:

$$\frac{\partial U}{\partial t}+U\cdot\frac{\partial U}{\partial x}+V\cdot\frac{\partial U}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial P}{\partial x}+\nu\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}-\frac{\partial\overline{u'v'}}{\partial y} \quad (٦٩-٧)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t}+U\cdot\frac{\partial V}{\partial x}+V\cdot\frac{\partial V}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial P}{\partial y}+\nu\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}-\frac{\partial\overline{v'^2}}{\partial y} \quad (٧٠-٧)$$

تدعى هاتان المعادلتان: المعادلات التفاضلية للجريان في الطبقة الحدية المضطربة.

في حالة الجريان المستقر تصبح المعادلتان السابقتان للطبقة الحدية المضطربة على الشكل:

$$U\cdot\frac{\partial U}{\partial x}+V\cdot\frac{\partial U}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial P}{\partial x}+\nu\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}-\frac{\partial\overline{u'v'}}{\partial y} \quad (٧١-٧)$$

$$U\cdot\frac{\partial V}{\partial x}+V\cdot\frac{\partial V}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial P}{\partial y}+\nu\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}-\frac{\partial\overline{v'^2}}{\partial y} \quad (٧٢-٧)$$

وعندما يكون الجريان على صفيحة ملساء ذات تدرج ضغط صفري، يمكن تبسيط المعادلتين السابقتين إلى الشكل:

$$U\cdot\frac{\partial U}{\partial x}+V\cdot\frac{\partial U}{\partial y}=\nu\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}-\frac{\partial\overline{u'v'}}{\partial y} \quad (٧٣-٧)$$

ويجب التنويه هنا إلى أن حل معادلات براندتل للطبقة الحدية الصفحية والطبقة الحدية المضطربة أصبح الآن ممكناً مع انتشار الحواسيب ذات السعات الكبيرة. وتستخدم حلول هذه المعادلات بشكل رئيس، في دراسة الجريان حول أجسام الطائرات والغواصات والسيارات والصواريخ وريش العنفات والمضخات.

٧-٨. الجريان حول الأجسام Flow Around Bodies

٧-٨-١. تمهيد Preface

عند جريان السائل حول جسم ما، تنشأ قوة تؤثر في هذا الجسم. ويمكن لهذه القوة أن تكون ناتجة عن:

- إما قوى القص نتيجة لاحتكاك السائل مع سطح الجسم.
- أو قوى الضغط المتولد أمام الجسم بسبب اصطدام التيار مع الجسم، وقوى الضغط المتولد خلفه نتيجة انفصال التيار وتشكل الدوامات.
- أو قوى القص و الضغط مجتمعةً.

وفي الحالة العامة وعندما يجري تيار حول جسم ما، فإن القوة المؤثرة على عنصر صغير من سطح الجسم تساوي :

$$d\vec{F} = d\vec{F}_{shear} + d\vec{F}_{pressure} \qquad (٧٤-٧)$$

وتكون القوة الكلية المؤثرة على الجسم مساوية:

$$\vec{F} = \int_{body-surface} d\vec{F}_{shear} + \int_{body-surface} d\vec{F}_{pressure} \qquad (٧٥-٧)$$

حيث أن قوى القص تعطى بالعلاقة:

$$d\vec{F}_{shear} = \vec{\tau}_w \cdot dA \qquad (٧٦-٧)$$

وقوى الضغط بالعلاقة:

$$d\vec{F}_{pressure} = p \cdot d\vec{A} \qquad (٧٧-٧)$$

إن القوة الكلية الناتجة يمكن تحليلها إلى مركبتين. المركبة الأولى باتجاه يوازي محور الجريان، وتدعى **قوة الإعاقة** ***Drag Force*** F_D. والمركبة الثانية بشكل عمودي على اتجاه حركة الجريان، وتدعى **قوة الرفع** ***Lift Force*** F_L.

٧-٨-٢. قوة الإعاقة Drag Force

تمثل قوة الإعاقة مركبة القوة الكلية المؤثرة على الجسم باتجاه حركة الجريان.

وهي تحسب من العلاقة:

$$F_D = C_D \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot U^2 \cdot A \qquad (٧٨-٧)$$

حيث أن:

- A : مساحة سطح الجسم.
- $\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot U^2$: الضغط الديناميكي الناتج عن الحركة.
- C_D : **معامل الإعاقة** ***Drag Coefficient***.

في الحالة العامة، تعتمد قيمة معامل الإعاقة لجريان قابل للانضغاط ويخضع لتأثير قوى اللزوجة والثقالة، على المتغيرات التالية:

- شكل الجسم.
- **عدد رينولدز** Re ***Reynolds Number***.
- **عدد فراود** Fr ***Froude Number***.
- **عدد ماخ** Ma ***Mach Number*** .
- الخشونة النسبية $\frac{\varepsilon}{l}$ لسطح الجسم.

أي أن العلاقة من الشكل:

$$C_D = f\left(shape, \mathrm{Re}, Fr, Ma, \frac{\varepsilon}{l}\right) \qquad (٧٩-٧)$$

إن معظم السوائل غير قابلة للانضغاط، وبالتالي لا تأثير لعدد ماخ، أما في الغازات فيؤثر عدد ماخ في معامل الإعاقة عندما يكون $Ma > 0.5$. أما بالنسبة لعدد فراود، فيبرز دوره فقط عندما يظهر تأثير قوى الثقالة في الحركة.

بناء على ماسبق يمكن القول إنه في حال دراسة جريان الهواء بسرعة غير كبيرة نسبياً، حول جسم معين ذو سطح أملس. حيث لا تأثير يذكر للخشونة، وقوى الثقالة، وانضغاطية الهواء. فإن معامل الإعاقة يكون تابعاً لعدد رينولدز فقط، أي أن:

$$C_D = f(\mathrm{Re}) \qquad (٧٩-٧)$$

وفي حالة جريان الهواء بسرعة كبيرة حول جسم معين، كما هو الحال في حركة الطائرات والصواريخ، حيث لا يمكن إهمال انضغاطية الهواء، فإن معامل الإعاقة يكون تابعاً لعدد رينولدز وعدد ماخ، أي أن:

$$C_D = f(\mathrm{Re}, Ma) \qquad (٧-٨٠)$$

وعندما تدرس قوة الإعاقة المؤثرة على حركة سفينة ذات شكل معين في البحر، حيث الماء غير قابل للانضغاط، ولا يمكننا إهمال قوى الثقالة، يكون معامل الإعاقة تابعاً لعدد رينولدز وعدد فراود معاً:

$$C_D = f(\mathrm{Re}, Fr) \qquad (٧-٨١)$$

باستثناء بعض الحالات الخاصة من الجريان، مثل الجريان على صفيحة مستوية ملساء، فإن تحديد معامل الإعاقة يعتمد على التجارب المخبرية. وسندرس في الفقرات القادمة تحديد قيم معامل الإعاقة لبعض حالات الجريان الخاصة.

٧-٨-٢-١. الجريان يوازي صفيحة مستوية ملساء

Flow over a Flat Plate Parallel to the Flow

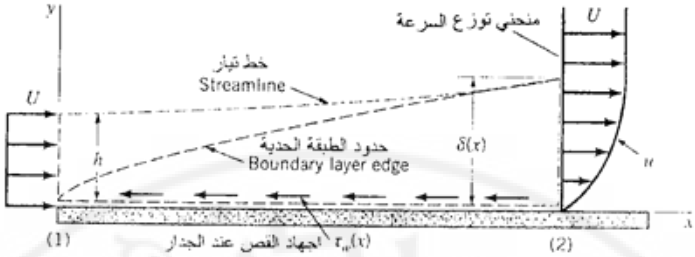
عند جريان السائل بشكل موازٍ لصفيحة مستوية ملساء، تتشكل كما وجدنا سابقاً إجهادات قاصة عند الجدار نتيجة احتكاك جزيئات السائل مع سطح الجدار، كما في الشكل (٧-٨). أي أن قوى الإعاقة الكلية في هذه الحالة تنتج فقط عن الاحتكاك بسبب قوى القص عند الجدار. وهنا لا بد من التمييز بين قوى القص المتشكلة في الطبقة الحدية الصفحية، وقوى القص المتشكلة في الطبقة الحدية المضطربة. وسوف نحدد معامل الإعاقة في الحالتين لصفيحة ذات عرض ثابت.

لتحديد معامل الإعاقة في الطبقة الحدية الصفحية، لدينا:

$$F_D = b \cdot \int_0^{L_x} \tau_w \cdot dx \qquad (٧-٨٢)$$

حيث أن:

- b : عرض الصفيحة، ويعتبر ثابتاً حسب شروط المسألة.
- L_x : طول الطبقة الحدية الصفحية.



الشكل (٧-٨). الجريان يوازي صفيحة مستوية ملساء [6]

وبالتعويض عن قيمة إجهاد القص عند الجدار في حالة الطبقة الحدية الصفحية، في العلاقة (٧-٨٢)، نجد أن:

$$F_D = b \cdot \int_0^{L_x} \frac{0.332 \cdot \rho \cdot U^2}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}} \cdot dx$$

أو:

$$F_D = b \cdot \int_0^{L_x} \frac{0.332 \cdot \rho \cdot U^2}{\sqrt{\frac{U \cdot \rho}{\mu}}} \cdot x^{-1/2} \cdot dx$$

وبالمكاملة، نحصل على العلاقة:

$$F_D = \frac{0.664 \cdot b \cdot \rho \cdot U^2 \cdot \sqrt{L_x}}{\sqrt{\frac{U \cdot \rho}{\mu}}} = \frac{0.664 \cdot b \cdot \rho \cdot U^2 \cdot L_x}{\sqrt{\frac{U \cdot \rho \cdot L_x}{\mu}}}$$

التي يمكن كتابتها على الشكل التالي:

$$F_D = \frac{0.664 \cdot \rho \cdot U^2 \cdot A}{\sqrt{\mathrm{Re}_{L_x}}} \qquad (٧-٨٣)$$

حيث:

- A : مساحة الجزء من الصفيحة المستوية الذي تمتد فيه الطبقة الحدية الصفحية.
- Re_{L_x} : عدد رينولدز عند نهاية الطبقة الحدية الصفحية.

ولكن، كما نعلم سابقاً، فإن قوة الضغط الديناميكي الناتجة عن حركة السائل هي:

$$F_D = C_D \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot U^2 \cdot A$$

وبمقارنة العلاقتين السابقتين، نجد أن معامل الإعاقة على صفيحة مستوية ملساء في حالة الطبقة الحدية الصفحية يساوي:

$$C_D = \frac{1.328}{\sqrt{\mathrm{Re}_{L_t}}} \qquad (٨٤-٧)$$

أما من أجل تحديد معامل الإعاقة على صفيحة مستوية ملساء في الطبقة الحدية المضطربة، ومع اعتبار أن توزع السرعة كما اقترح برانـدتل هـو مـن الـشكل: $\frac{u}{U} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7}$، يكون لدينا:

$$F_D = b \cdot \int_0^{L_t} \tau_w \cdot dx \qquad (٨٥-٧)$$

حيث أن: L_t – طول الطبقة الحدية مضطربة.

وبالتعويض عن قيمة إجهاد القص عند الجدار في حالة الطبقة الحديـة المـضطربة في العلاقة السابقة، نجد أن:

$$F_D = b \cdot \int_0^{L_t} \frac{0.029 \cdot \rho \cdot U^2}{(\mathrm{Re}_x)^{1/5}} \cdot dx$$

أو:

$$F_D = 0.029 \cdot b \cdot \rho \cdot U^2 \cdot \int_0^{L_t} \frac{x^{-1/5}}{\left(\frac{U \cdot \rho}{\mu}\right)^{1/5}} dx$$

وبالمكاملة، نحصل على:

$$F_D = 0.029 \cdot b \cdot \rho \cdot U^2 \cdot \frac{5}{4} \cdot \left[\frac{x^{4/5}}{\left(\frac{U \cdot \rho}{\mu}\right)^{1/5}} \cdot \frac{x^{1/5}}{x^{1/5}} \right]_0^{L_t}$$

وبالتعويض، يكون:

$$F_D = 0.029 \cdot b \cdot \rho \cdot U^2 \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{L_t}{\left(\frac{U \cdot \rho}{\mu}\right)^{1.5} \cdot L_t^{1.5}}$$

أو:

$$F_D = \frac{0.036 \cdot \rho \cdot U^2 \cdot A}{\left(\mathrm{Re}_{L_t}\right)^{1.5}} \qquad (٨٦-٧)$$

ومنه نجد أن معامل الإعاقة يعطى بالصيغة:

$$C_D = \frac{0.072}{\left(\mathrm{Re}_{L_t}\right)^{1.5}} \qquad (٨٧-٧)$$

تعطي العلاقة السابقة نتائج متطابقة إلى حد كبير مع النتائج العملية عندما يكون عدد رينولدز $\mathrm{Re}_{L_t} \le 10^7$. أما عندما يكون عدد رينولدز أكبر من ذلك، فيلاحظ بعض الاختلاف مابين نتائج التجارب والنتائج المحسوبة بالعلاقة السابقة، لذلك ينصح باستخدام العلاقة التجريبية التالية:

$$C_D = \frac{0.455}{\left(\log \mathrm{Re}_{L_t}\right)^{2.58}} \qquad (٨٨-٧)$$

لقد جرت عند دراسة معامل الإعاقة في الطبقة الحدية المضطربة اعتماد تقريب، هو المكاملة من الصفر (بداية الصفيحة) إلى L_t. والواقع إذا أردنا أن نكون دقيقين، يجب أن نكامل من بداية الطبقة الحدية المضطربة (نهاية حدود الطبقة الصفحية) إلى نهاية الصفيحة L، لأن الطبقة الحدية المضطربة لا يمكن أن تتشكل قبل تشكل الطبقة الحدية الصفحية. ويمكن استخدام القوانين السابقة والمحافظة عليها، مع تصحيح معامل الإعاقة. حيث وجد تجريبياً أن معامل الإعاقة بعد التصحيح في حالة $\mathrm{Re}_L \le 10^7$ يساوي:

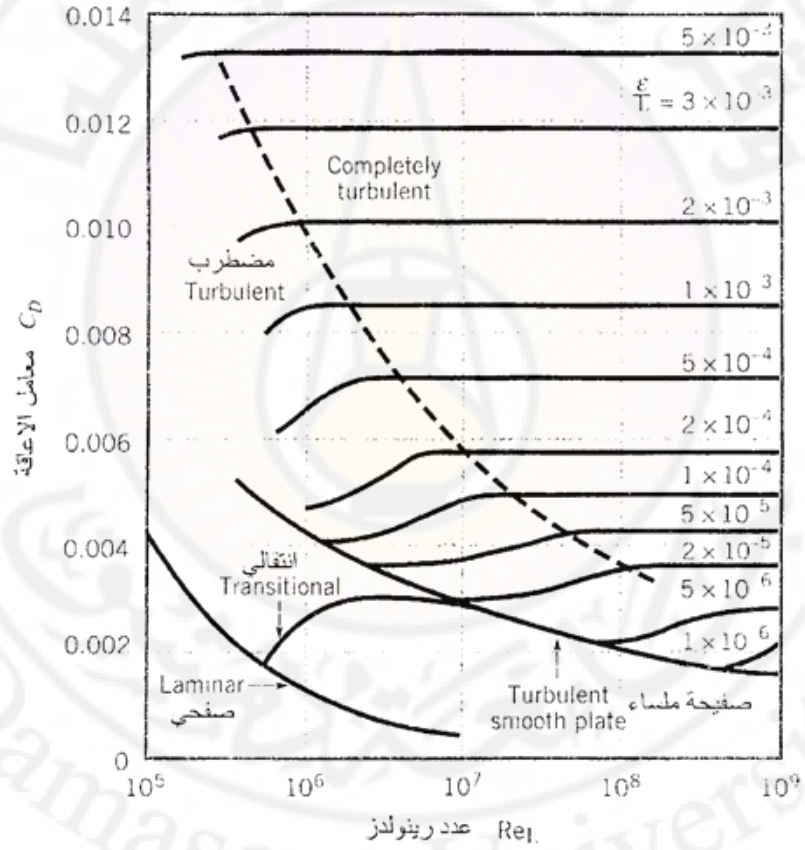
$$C_D = \frac{0.072}{\left(\mathrm{Re}_L\right)^{1.5}} - \frac{1740}{\mathrm{Re}_L} \qquad (٨٩-٧)$$

وعندما يكون عدد رينولدز $\mathrm{Re}_L > 10^7$، تستخدم العلاقة:

$$C_D = \frac{0.455}{(\log \mathrm{Re}_L)^{2.58}} - \frac{1740}{\mathrm{Re}_L} \qquad (٧-٩٠)$$

حيث: L – الطول الكامل للصفيحة.

كما ويمكن باعتماد المخطط المبين في الشكل (٧-٩)، تحديد معامل الإعاقة في حالة الجريان الموازي لصفيحة مستوية ملساء أو ذات خشونة معينة، تبعاً لعدد رينولدز Re_L والخشونة النسبية ε / L.



الشكل (٧-٩). تحديد معامل الإعاقة لصفائح مستوية تبعاً لعدد رينولدز والخشونة النسبية [6]

مثال ٧-٢

إذا علمت أن عرض الصفيحة في المثال ٧-١ يساوي $2m$. احسب:

١. قوة الإعاقة التي تنشأ في الطبقة الحدية الصفحية.

٢. قوة الإعاقة التي تنشأ على كامل الصفيحة.

الحل:

الطلب الأول:

قوة الإعاقة التي تتشكل في الطبقة الحدية على صفيحة مستوية عندما يكون الجريان موازياً لها، تنشأ من فعل قوى القص على الجدار. وعليه يمكن كتابة:

$$F_D = C_D \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot U^2 \cdot A$$

حيث معامل الإعاقة يساوي:

$$C_D = \frac{1.328}{\sqrt{\mathrm{Re}_L}} = \frac{1.328}{\sqrt{5\times10^5}} = 0.00188$$

أما المساحة فتساوي:

$$A = L_x \cdot b = 0.5 \cdot 2 = 1m^2$$

وبالتعويض بالقيم العددية، نجد أن:

$$F_D = 0.00188 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1000 \cdot 1^2 \cdot 1 = 0.94N$$

الطلب الثاني:

كما نعلم من المثال ٧ ـ ١ فإن قيمة عدد رينولدز عند نهاية الصفيحة $\mathrm{Re}_L = 10^6$. وعليه نستطيع أن نكتب:

$$C_D = \frac{0.072}{(\mathrm{Re}_L)^{1/5}} - \frac{1740}{\mathrm{Re}_L}$$

ومنه:

$$C_D = \frac{0.072}{(10^6)^{1/5}} - \frac{1740}{10^6} = 0.0028$$

وبناءً عليه، تكون قوة الإعاقة المؤثرة على كامل الصفيحة مساوية:

$$F_D = 0.0028 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1000 \cdot 1^2 \cdot 2 = 2.8N$$

٧-٨-٢-٢. الجريان بشكل عمودي على صفيحة مستوية

Flow over a Flat Plate Normal to the Flow

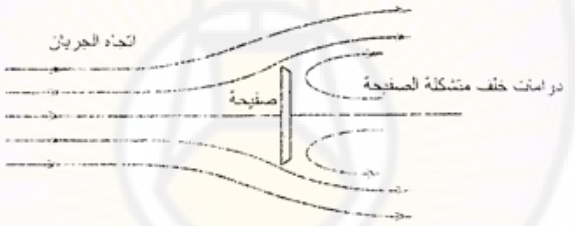
عند جريان السائل بشكل عمودي على صفيحة مستوية، كما في الشكل (٧-١٠)، تتشكل قوة الإعاقة بشكل رئيس نتيجة لقوى الضغط أمام الصفيحة، وانفصال التيار وتشكل دوامات خلفها. أما القوى الناتجة عن القص فهي صغيرة في هذه الحالة. وعليه يمكننا أن نكتب:

$$F_D = \int_A p \cdot dA \qquad (٩١-٧)$$

وبشكل مشابه للفقرة السابقة، يمكن حساب قوة الإعاقة من العلاقة:

$$F_D = C_D \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot U^2 \cdot A$$

حيث : C_D - معامل الإعاقة، وتحدد قيمته تجريبياً.



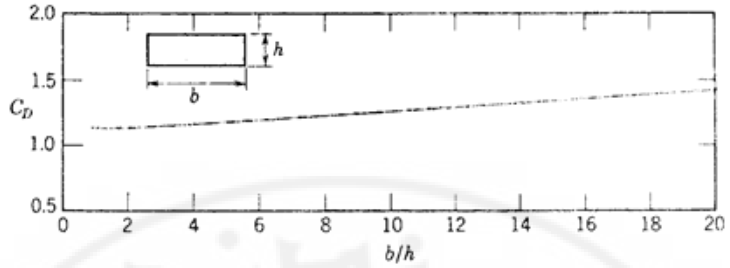
الشكل (٧-١٠). الجريان بشكل عمودي على صفيحة مستوية [4]

إن معامل الإعاقة لجريان عمودي على صفيحة، يتعلق بعدد رينولدز من جهة، وبالنسبة بين عرض الصفيحة إلى ارتفاعها من جهة أخرى. ويعطي المخطط المبين في الشكل (٧-١١) قيمة معامل الإعاقة لحالة جريان عمودي على صفيحة، حسب نسبة عرض الصفيحة إلى ارتفاعها $\left(\frac{b}{h}\right)$، من أجل عدد رينولدز $\mathrm{Re}_h \geq 1000$ منسوباً للارتفاع. ويحدد رينولدز في هذه الحالة من العلاقة:

$$\mathrm{Re}_h = \frac{U \cdot h}{\nu} \qquad (٩٢-٧)$$

أما مساحة الصفيحة فتساوي:

$$A = b \cdot h$$



الشكل (٧-١١). تحديد معامل الإعاقة لجريان عمودي على صفيحة مستوية [4]

مثال ٧-٣:

يصطدم تيار هوائي سرعة جريانه $30m/s$ بصفيحة رقيقة مستطيلة الشكل أبعادها $2\times 8m$. احسب قوة الإعاقة الكلية الناتج عن هذا الاصطدام. إذا كان $\rho_{air}=1.25kg/m^3$.

الحل:

لدينا قوة الإعاقة:

$$F_D = C_D \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot U^2 \cdot A$$

نحسب نسبة عرض الصفيحة إلى ارتفاعها:

$$\frac{b}{h} = \frac{8}{2} = 4$$

ومن الشكل (٧-١١) لدينا: $C_D = 1.2$. ومنه تكون قوة الإعاقة المؤثرة:

$$F_D = 1.2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1.25 \cdot 30^2 \cdot 2 \cdot 8 = 10800N$$

٧-٨-٢-٣. الجريان حول كرة ملساء Flow over a Smooth Sphere

يبين الشكل (٧-١٢) مخططاً لتحديد معامل الإعاقة للجريان حول كرة ملساء، بدلالة عدد رينولدز منسوباً لقطر الكرة. مع الملاحظة أن المساحة التي يجب أن تستخدم في علاقة حساب قوة الإعاقة تنسب لقطر الكرة أيضاً. أي أن:

$$\mathrm{Re} = \frac{U \cdot D}{\nu} \qquad (٧-٩٣)$$

و:

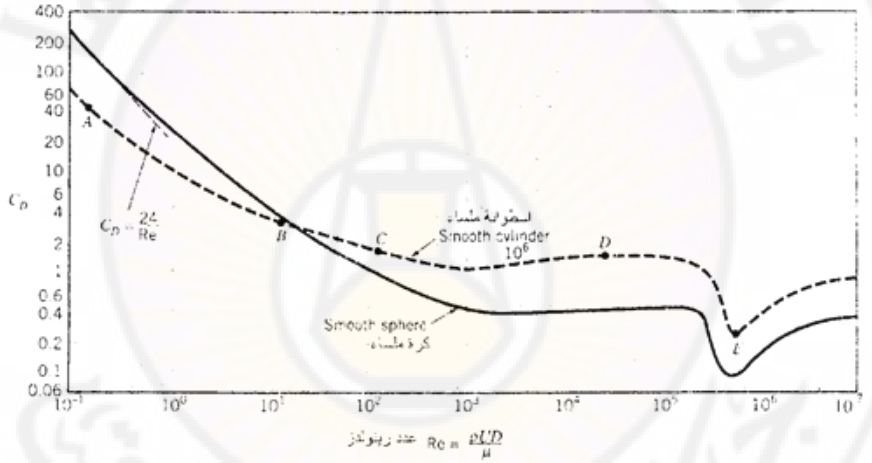
$$A = \frac{\pi \cdot D^2}{4}$$

٧-٨-٢-٤. الجريان حول أسطوانة ملساء Flow over a Smooth Cylinder

يحتوي الشكل (٧-١٢) أيضاً على مخطط، لتحديد معامل الإعاقة للجريان حول أسطوانة ملساء، تبعاً لعدد رينولدز منسوباً لقطر الأسطوانة. أما المساحة فهي مساحة مسقط الأسطوانة ذي الطول L . أي:

$$\mathrm{Re} = \frac{U \cdot D}{\nu}$$

$$A = L \cdot D$$



الشكل (٧-١٢). تحديد معامل الإعاقة لجريان حول صفيحة ملساء واسطوانة ملساء [6]

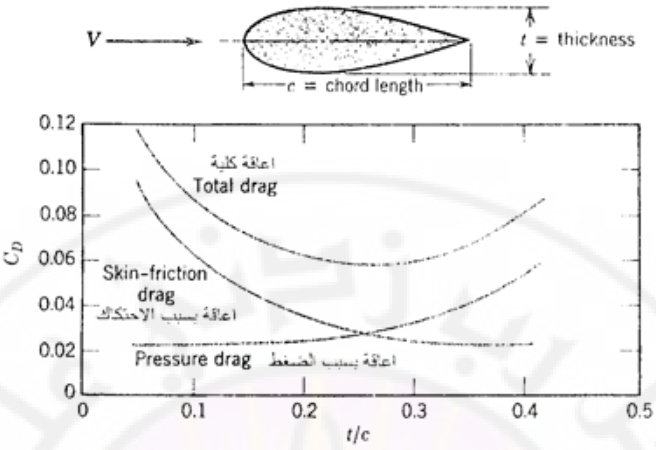
٧-٨-٢-٥. الجريان حول الجناح ذو الشكل الانسيابي المتناظر

Flow over a Streamlined Strut

يبين الشكل (٧-١٣) جناحاً ذا شكل انسيابي متناظر ومخططاً لحساب معامل الإعاقة، حسب النسبة $\frac{t}{c}$ ولعدد رينولدز $\mathrm{Re}_c = 4\times10^5$ منسوباً لعرض الجناح c . فإذا كان b فتحة الجناح، فإن:

$$\mathrm{Re}_c = \frac{U \cdot c}{\nu} \qquad (٧-٩٤)$$

$$A = c \cdot b \qquad (٧-٩٥)$$



الشكل (٧-١٣). تحديد معامل الإعاقة لجريان حول جناح طائرة [4]

٧-٨-٢-٦. الجريان حول سفينة Flow around Surface Ship

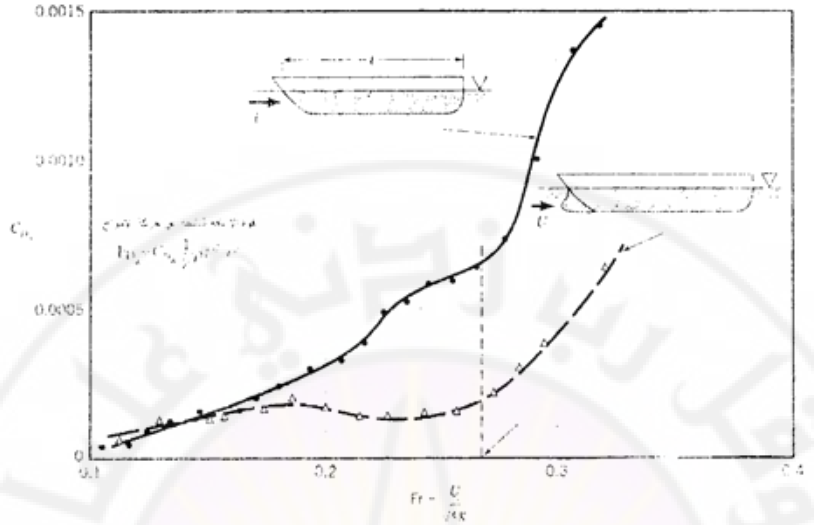
إن قوة الإعاقة التي تنشأ أثناء حركة السفينة، تنتج عن الاحتكاك بين جسم السفينة والماء وعن مقاومة السفينة للأمواج المائية. وبالتالي فإن معامل الإعاقة لا يتعلق فقط **بعدد رينولدز** ***Reynolds Number*** فقط وإنما **بعدد فراود** ***Froude Number*** أيضاً. أي أن:

$$C_D = f(\mathrm{Re}, Fr)$$

لحسن الحظ بينت الدراسات، أن قوة الإعاقة أثناء حركة السفن يمكن تجزئتها إلى قسمين مستقلين، القسم الأول: يتناول قوة الإعاقة الناتجة عن الاحتكاك، وعندها يكون معامل الإعاقة تابعاً عدد رينولدز. والقسم الثاني: يتناول قوة الإعاقة الناتجة عن تأثير الأمواج، وعندها يكون معامل الإعاقة تابعاً عدد فراود . وبعد جمع هاتين القوتين يتم الحصول على قوة الإعاقة الكلية لحركة السفينة. ويبين الشكل (٧-١٤) معامل الإعاقة الناتج عن مقاومة الأمواج لنموذجين من السفن بدلالة عدد فراود $Fr = \dfrac{U}{\sqrt{g \cdot \ell}}$. وتحسب قوة الإعاقة الناتجة عن مقاومة الأمواج من العلاقة:

$$F_{D_w} = \frac{1}{2} \cdot C_{D_w} \cdot \rho \cdot U^2 \cdot \ell^2 \qquad (٩٦-٧)$$

حيث: ℓ - طول السفينة.



الشكل (٧-١٤). تحديد معامل الإعاقة لجريان حول سفينة بدلالة عدد فراود [6]

٤-٨-٢-٧. الجريان حول أجسام مختلفة Flow Around Different Bodies

تبين الأشكال (٧-١٥) و (٧-١٦) و (٧-١٧) قيم معامل الإعاقة لجريان التيار حول بعض الأجسام. وبجانب كل منها المساحة الاعتبارية ومجال عدد رينولدز.

مثال ٧-٤

تتحرك غواصة في ماء البحر بسرعة $60km/s$. فإذا علمت أن معامل الإعاقة مع أخذ مساحة السطح الخارجي للغواصة بالكامل $C_D = 1.9$، وأن هذه المساحة هي $A = 600m^2$. احسب قوة الإعاقة المؤثرة على الغواصة. $\rho = 1025kg/m^3$.

الحل:

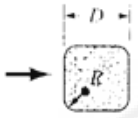
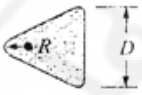
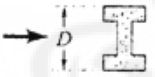
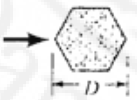
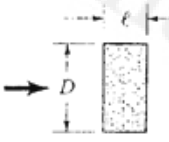
لدينا سرعة السفينة:

$$U = \frac{60 \cdot 1000}{3600} = 16.67m/s$$

وتكون قوة الإعاقة:

$$F_D = C_D \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot U^2 \cdot A$$

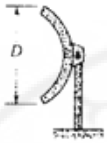
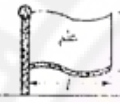
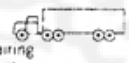
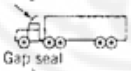
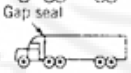
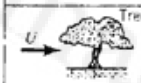
$$F_D = 1.9 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1025 \cdot 16.67^2 \cdot 600 = 162356.6KN$$

الشكل Shape	المساحة المرجعية Reference area A (b = length)	معامل الاعاقة Drag coefficient	عدد رينولدز $\mathrm{Re} = \rho UD/\mu$
 مربع مع حواف مدورة Square rod with rounded corners	$A = bD$	R/D | C_D 0 | 2.2 0.02 | 2.0 0.17 | 1.2 0.35 | 1.0	$\mathrm{Re} = 10^5$
 مثلث مع حواف مدورة Rounded equilateral triangle	$A = bD$	R/D | C_D (→ | ←) 0 | 1.4 | 2.1 0.02 | 1.2 | 2.0 0.08 | 1.3 | 1.9 0.25 | 1.1 | 1.3	$\mathrm{Re} = 10^5$
 قشرية نصف دائرية Semicircular shell	$A = bD$	→ 2.3 ← 1.1	$\mathrm{Re} = 2 \times 10^4$
 نصف دائرة Semicircular cylinder	$A = bD$	→ 2.15 ← 1.15	$\mathrm{Re} > 10^4$
 جائز T T-beam	$A = bD$	→ 1.80 ← 1.65	$\mathrm{Re} > 10^4$
 جائز I I-beam	$A = bD$	2.05	$\mathrm{Re} > 10^4$
 زاوية Angle	$A = bD$	→ 1.98 ← 1.82	$\mathrm{Re} > 10^4$
 مسدس Hexagon	$A = bD$	1.0	$\mathrm{Re} > 10^4$
 مستطيل Rectangle	$A = bD$	ℓ/D | C_D <0.1 | 1.9 0.5 | 2.5 0.65 | 2.9 1.0 | 2.2 2.0 | 1.6 3.0 | 1.3	$\mathrm{Re} = 10^5$

الشكل (٧–١٥). قيم معامل الإعاقة لبعض الأجسام [6]

الشكل Shape	المساحة المرجعية Reference area A	معامل الاعاقة Drag coefficient C_D	عدد رينولدز Reynolds number $Re = \rho UD/\mu$
نصف كرة Solid hemisphere	$A = \frac{\pi}{4}D^2$	→ 1.17 ← 0.42	$Re > 10^4$
نصف قشرية كروية Hollow hemisphere	$A = \frac{\pi}{4}D^2$	→ 1.42 ← 0.38	$Re > 10^4$
قرص رقيق Thin disk	$A = \frac{\pi}{4}D^2$	1.1	$Re > 10^4$
اسطوانة Circular rod parallel to flow	$A = \frac{\pi}{4}D^2$	ℓ/D | C_D 0.5 | 1.1 1.0 | 0.93 2.0 | 0.83 4.0 | 0.85	$Re > 10^5$
مخروط Cone	$A = \frac{\pi}{4}D^2$	θ, degrees | C_D 10 | 0.30 30 | 0.55 60 | 0.80 90 | 1.15	$Re > 10^4$
مكعب Cube	$A = D^2$	1.05	$Re > 10^4$
مكعب Cube	$A = D^2$	0.80	$Re > 10^4$
جسم محدب Streamlined body	$A = \frac{\pi}{4}D^2$	0.04	$Re > 10^5$

الشكل (٧-١٦). قيم معامل الإعاقة لبعض الأجسام [6]

Shape الشكل	المساحة المرجعية Reference area	Drag coefficient C_D معامل الإعاقة
 مظلة Parachute	Frontal area $A = \frac{\pi}{4}D^2$	1.4
 صحن لاقط Porous parabolic dish	المساحة الجبهية Frontal area $A = \frac{\pi}{4}D^2$	Porosity: 0 / 0.2 / 0.5 → 1.42 / 1.20 / 0.82 ← 0.95 / 0.90 / 0.80 Porosity = open area/total area
 شخص Average person	Standing Sitting Crouching	$C_DA = 9$ ft^2 $C_DA = 6$ ft^2 $C_DA = 2.5$ ft^2
 علم Fluttering flag	$A = lD$	l/D | C_D 1 | 0.07 2 | 0.12 5 | 0.15
 مبنى Empire State Building	المساحة الجبهية Frontal area	1.4
 قطار من ست عربات Six-car passenger train	المساحة الجبهية Frontal area	1.8
Bikes  Upright commuter	$A = 5.5$ ft^2	1.1
 Racing	$A = 3.9$ ft^2	0.88
 Drafting	$A = 3.9$ ft^2	0.50
 Streamlined	$A = 5.0$ ft^2	0.12
Tractor-trailor tucks  Standard	Frontal area	0.96
Fairing  With fairing	المساحة الجبهية Frontal area	0.76
Gap seal  With fairing and gap seal	Frontal area	0.70
 شجرة $U = 10$ m/s $U = 20$ m/s $U = 30$ m/s	المساحة الجبهية Frontal area	0.43 0.26 0.20
 دلفين Dolphin	المساحة المبللة Wetted area	0.0036 at $Re = 6 \times 10^6$ (flat plate has $C_{fy} = 0.0031$)
 طائر Large birds	المساحة الجبهية Frontal area	0.40

الشكل (٧-١٧). قيم معامل الإعاقة لبعض الأجسام [6]

٧-٨-٣. قوة الرفع Lift Force

تمثل قوة الرفع مركبة القوة الكلية المؤثرة على الجسم بالاتجاه العمودي على اتجاه حركة الجريان. وهي تحسب من العلاقة التالية:

$$F_L = C_L \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot U^2 \cdot A \qquad (٧-٩٧)$$

حيث:

- A : مساحة سطح الجسم، أو المساحة الاعتبارية بالنسبة للشكل المدروس.
- $\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot U^2$: الضغط الديناميكي الناتج عن الحركة.
- C_L : **معامل الرفع** ***Lift Coefficient***.

وتعتمد قيمة معامل الرفع، على شكل الجسم، وعدد رينولدز Re، وعدد فراود Fr، وعدد ماخ Ma، والخشونة النسبية للجسم. أي أن:

$$C_L = f\left(shape, \mathrm{Re}, Fr, Ma, \frac{\varepsilon}{\ell}\right) \qquad (٧-٩٨)$$

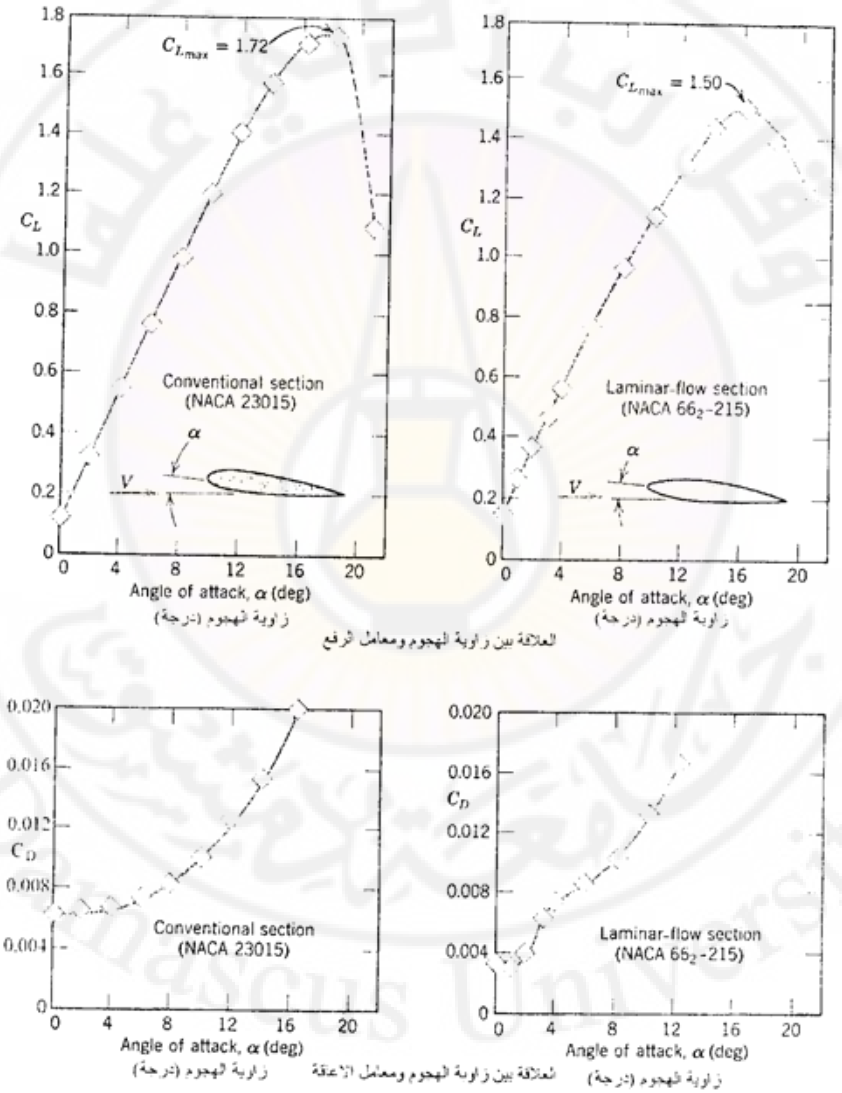
والجدير بالذكر أن أهمية عدد فراود تظهر عندما يوجد تأثير لقوى الثقالة، كما في حالة حركة السفن والقوارب. أما عدد ماخ فهو مهمل دوماً في حركة السوائل، وتأثيره في الغازات يقتصر عندما يكون $Ma > 0.8$. كما أن تأثير الخشونة النسبية وعدد رينولدز في دراسة قوة الرفع مهمل في أغلب الحالات. وبالتالي فإن معامل الرفع يتعلق بشكل رئيس بشكل الجسم.

بالنسبة للجناح ذو الشكل الانسيابي المتناظر، يعتمد معامل الرفع على **زاوية الهجوم** ***Angle of Attack*** α (هي الزاوية بين شعاع سرعة التيار الحر ومحور الجناح). ويبين الشكل (٧-١٨) مخططات لحساب معامل الرفع ومعامل الإعاقة لجناحين مختلفين حسب وكالة الفضاء الأمريكية ناسا ***NASA***.

إن جميع معاملات الإعاقة في المخططات السابقة للأجنحة، حددت على أساس جناح بفتحة لامتناهية الطول، علماً أن جميع الأجنحة عملياً لها فتحات محدودة الطول. وقد أثبتت التجارب أن نهايات الجناح تلعب دوراً في زيادة معامل الإعاقة،

لذلك لا بد من تصحيح معامل الإعاقة. ولقد تبين أن هذا التصحيح يتعلق بمعامل الرفع وبنسبة الهيئة للجناح ***Aspect Ratio ar***. وتعطى علاقة معامل الإعاقة مع أخذ تأثير الأجنحة كما يلي:

$$C_D = C_{D,\infty} + \frac{C_L^2}{\pi \cdot ar} \qquad (٧-٩٩)$$



الشكل (٧-١٨). قيم معاملات الإعاقة والرفع لجناح طائرة ذي شكل انسيابي متناظر حسب وكالة الفضاء الأمريكية NASA [4]

حيث أن:

- $C_{D,0}$: معامل الإعاقة من أجل جناح ذو فتحة كبيرة (طول كبير).
- ar: نسبة الهيئة للجناح، وتعطى بالعلاقة:

$$ar = \frac{b^2}{A_p} \qquad (٧-٩٩)$$

حيث:

- b: فتحة الجناح أو طوله.
- A_p: مساحة الجناح.

وعندما يكون الجناح مستطيلاً، فإن معامل الهيئة يساوي:

$$ar = \frac{b^2}{b \cdot c} = \frac{b}{c}$$

حيث: c – عرض الجناح.

يتأثر معامل الإعاقة بشكل كبير بزاوية الهجوم للجناح ، حيث يزداد بزيادة هذه الزاوية. وتعطي المراجع المتخصصة علاقة حساب معامل الإعاقة كما يلي:

$$C_D = C_{D,0} + \frac{C_L^2}{\pi \cdot ar} \qquad (٧-١٠٠)$$

حيث:

- $C_{D,0}$: معامل الإعاقة للجناح في حالة زاوية هجوم تساوي الصفر.
- C_L: معامل الرفع الموافق لزاوية هجوم ما.

مسائل محلوله حول الفصل السابع

المسألة الأولى

بفرض أن منحني توزع السرعة في الطبقة الحدية الصفحية على صفيحة مستوية ملساء، هو قطع من الدرجة الثانيـــة: $\frac{u}{U} = 2\cdot\left(\frac{y}{\delta}\right) - \left(\frac{y}{\delta}\right)^2 = 2\cdot\eta - \eta^2$. يطلـــب استنتاج العلاقات اللازمة لحساب كل من:

- سماكة الطبقة الحدية.
- سماكة الإزاحة، وسماكة كمية الحركة.
- إجهاد القص على الجدار، ومعامل الاحتكاك.
- قوة الاحتكاك الكلية بين السائل والجدار الطلب، ومعامل الإعاقة.

الحل:

الطلب الأول:

حسب نص المسألة لدينا علاقة توزع السرعة من الشكل:

$$\frac{u}{U} = 2\cdot\left(\frac{y}{\delta}\right) - \left(\frac{y}{\delta}\right)^2 = 2\cdot\eta - \eta^2$$

نحسب إجهاد القص عند الجدار بتطبيق علاقة نيوتن :

$$\tau_w = \mu\cdot\left.\frac{du}{dy}\right|_{y=0}$$

أو:

$$\tau_w = \mu\cdot\left.\frac{U\cdot d\left(\frac{u}{U}\right)}{\delta\cdot d\left(\frac{y}{\delta}\right)}\right|_{\frac{y}{\delta}=0}$$

أو:

$$\tau_w = \mu \cdot \left. \frac{U \cdot d\left(\frac{u}{U_\infty}\right)}{\delta \cdot d\eta} \right|_{\eta=0}$$

ومنه:

$$\tau_w = \frac{\mu \cdot U}{\delta} \cdot \left. \frac{d}{d\eta}\left(2 \cdot \eta - \eta^2\right) \right|_{\eta=0}$$

وأخيراً نجد أن:

$$\tau_w = \frac{\mu \cdot U}{\delta} \cdot \left. \left(2 - 2 \cdot \eta\right) \right|_{\eta=0} = 2 \cdot \frac{\mu \cdot U}{\delta}$$

وبتطبيق المعادلة التكاملية لكمية الحركة، نحصل على:

$$\tau_w = \rho \cdot U^2 \frac{d\delta}{dx} \int_0^1 \frac{u}{U} \cdot \left(1 - \frac{u}{U}\right) \cdot d\eta$$

وبالتعويض، يكون لدينا:

$$2 \cdot \frac{\mu \cdot U}{\delta} = \rho \cdot U^2 \frac{d\delta}{dx} \int_0^1 \left(2 \cdot \eta - \eta^2\right) \cdot \left[1 - \left(2 \cdot \eta - \eta^2\right)\right] \cdot d\eta$$

ومنه:

$$\frac{2 \cdot \mu}{\rho \cdot \delta \cdot U} = \frac{d\delta}{dx} \int_0^1 \left(2 \cdot \eta - 5 \cdot \eta^2 + 4 \cdot \eta^3 - \eta^4\right) \cdot d\eta$$

وبالمكاملة بالنسبة إلى η والتعويض بحدود التكامل، نجد أن:

$$\frac{2 \cdot \mu}{\rho \cdot \delta \cdot U} = \frac{2}{15} \cdot \frac{d\delta}{dx}$$

أو:

$$\delta \cdot d\delta = \frac{15 \cdot \mu}{\rho \cdot U} \cdot dx$$

نكامل العلاقة السابقة، فنجد أن:

$$\frac{\delta^2}{2}=\frac{15\cdot\mu}{\rho\cdot U}\cdot x+C$$

حيث: C - ثابت التكامل، ويحدد من الشروط الحدية:

$$x=0,\delta=0\Rightarrow C=0$$

وبالتالي فإن:

$$\frac{\delta^2}{2}=\frac{15\cdot\mu}{\rho\cdot U}\cdot x$$

أو:

$$\delta=\sqrt{\frac{30\cdot\mu\cdot x}{\rho\cdot U}}$$

ومنه:

$$\delta=5.48\cdot x\cdot\sqrt{\frac{\mu}{\rho\cdot U\cdot x}}$$

وأخيراً، نستنتج أن:

$$\delta=5.48\cdot\frac{x}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}$$

الطلب الثاني:

لحساب سماكة الإزاحة لدينا:

$$\delta^*=\int_0^{\delta}\left(1-\frac{u}{U}\right)\cdot dy=\delta\cdot\int_0^{1}\left(1-\frac{u}{U}\right)\cdot d\eta$$

وبالتعويض، نجد أن:

$$\delta^*=\delta\cdot\int_0^{1}\left(1-2\cdot\eta+\eta^2\right)\cdot d\eta$$

وبالمكاملة، نحصل على:

$$\delta^*=\frac{\delta}{3}\cdot$$

أما لحساب سماكة كمية الحركة، لدينا:

$$\theta = \int_0^{\delta} \frac{u}{U} \cdot \left(1 - \frac{u}{U}\right) \cdot dy = \delta \cdot \int_0^1 \frac{u}{U_\infty}\left(1 - \frac{u}{U}\right) \cdot d\eta$$

أو:

$$\theta = \delta \cdot \int_0^1 \left(2 \cdot \eta - \eta^2\right) \cdot \left(1 - 2 \cdot \eta + \eta^2\right) \cdot d\eta$$

وبالمكاملة، نجد أن:

$$\theta = \frac{2}{15} \cdot \delta$$

الطلب الثالث:

لإيجاد قيمة إجهاد القص عند الجدار، لدينا:

$$\tau_w = \frac{2 \cdot \mu \cdot U}{\delta} = \frac{2 \cdot \mu \cdot U \cdot \sqrt{\mathrm{Re}_x}}{5.48 \cdot x}$$

وبالتالي فإن:

$$\tau_w = \frac{2 \cdot \mu \cdot U^2 \cdot \sqrt{\dfrac{\rho \cdot U \cdot x}{\mu}}}{5.48 \cdot U \cdot x}$$

وأخيراً تكتب العلاقة السابقة كما يلي:

$$\tau_w = 0.365 \cdot \frac{\rho \cdot U^2}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}$$

إن معامل الاحتكاك C_f يساوي:

$$C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot U^2}$$

وبتعويض قيمة τ_w في العلاقة السابقة، نجد أن:

$$C_f = \frac{0.73}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}$$

الطلب الرابع:

تحسب قوة الإعاقة (قوة الاحتكاك في هذه الحالة) من العلاقة:

$$F_D = b \cdot \int_0^{L_x} \tau_w \cdot dx$$

وبالتعويض بقيمة إجهاد القص عند الجدار في حالة الطبقة الحدية الـصفحية في هـذه العلاقة، نجد أن:

$$F_D = b \cdot \int_0^{L_x} \frac{0.365 \cdot \rho \cdot U^2}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}} \cdot dx$$

أو:

$$F_D = b \cdot \int_0^{L_x} \frac{0.365 \cdot \rho \cdot U^2}{\sqrt{\frac{U \cdot \rho}{\mu}}} \cdot x^{-1/2} \cdot dx$$

وبالمكاملة، نحصل على:

$$F_D = \frac{0.73 \cdot \rho \cdot U^2 \cdot b \cdot \sqrt{L_x}}{\sqrt{\frac{U \cdot \rho}{\mu}}} = \frac{0.73 \cdot \rho \cdot U^2 \cdot b \cdot L_x}{\sqrt{\frac{U \cdot \rho \cdot L_x}{\mu}}}$$

ومنه تكتب العلاقة السابقة على الشكل التالي:

$$F_D = \frac{0.73 \cdot \rho \cdot U^2 \cdot A}{\sqrt{\mathrm{Re}_{L_x}}}$$

ولحساب معامل الإعاقة لدينا:

$$F_D = C_D \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot U^2 \cdot A$$

وبمقارنة العلاقتين السابقتين، نجد أن:

$$C_D = \frac{1.46}{\sqrt{\mathrm{Re}_{L_x}}}$$

المسألة الثانية

وضعت صفيحة مستوية ملساء أبعادها $(a = 2m, b = 0.4m)$، بشكل مـوازٍ لاتجاه جريان تيار من الماء سرعته $1m/s$. المطلوب حساب:

- سماكة الطبقة الحدية في نهاية الصفيحة.
- إجهاد القص عند جدار الصفيحة في نهايتها.

وذلك في حالتين:

١. الجريان باتجاه البعد $a = 2m$.

٢. الجريان باتجاه البعد $b = 0.4m$.

افرض في الحل أن: $\nu = 10^{-6} m^2/s$.

الحل:

الطلب الأول:

نحسب عدد رينولدز في نهاية الصفيحة في الحالتين. الأولى عندما يكون الجريان باتجاه البعد الصغير، والثانية عندما يكون الجريان باتجاه البعد الكبير. فيكون لدينا:

$$\mathrm{Re}_{x=0.4} = \frac{U \cdot 0.4}{\nu} = \frac{1 \cdot 0.4}{10^{-6}} = 4 \times 10^5 < 5 \cdot 10^5$$

و:

$$\mathrm{Re}_{x=2} = \frac{U \cdot 2}{\nu} = \frac{1 \cdot 2}{10^{-6}} = 2 \times 10^6 > 5 \cdot 10^5$$

نلاحظ أنه عندما يكون الجريان باتجاه البعد الصغير، فإن الطبقة الحدية المتشكلة في نهاية الصفيحة هي صفحية. وعندما يكون الجريان باتجاه البعد الكبير، فإن الطبقة الحدية المتشكلة في نهاية الصفيحة هي مضطربة. وعليه تكون سماكة الطبقة الحدية في الحالتين كما يلي:

باتجاه البعد الصغير:

$$\delta = 5 \cdot \frac{x}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}$$

وبالتعويض في القيم العددية، يكون:

$$\delta_{x=0.4} = 5 \cdot \frac{0.4}{\sqrt{4 \times 10^5}} = 0.00316m = 3.16mm$$

وباتجاه البعد الكبير:

$$\delta = \frac{0.37 \cdot x}{(\mathrm{Re}_x)^{1/5}}$$

وبالتعويض بالقيم العددية، نجد أن:

$$\delta_{x=2} = \frac{0.37 \cdot 2}{(2\times10^6)^{1/5}} = 0.0406m = 40.6mm$$

الطلب الثاني:

يحسب إجهاد القص في نهاية الصفيحة في حالة الجريان باتجاه البعد الصغير من العلاقة:

$$\tau_w = 0.332 \cdot \frac{\rho \cdot U^2}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}$$

وبالتعويض، نجد أن:

$$\tau_{w_{x=0.4}} = 0.332 \cdot \frac{1000 \cdot 1^2}{\sqrt{4\times10^5}} = 0.525N/m^2$$

أما إجهاد القص في نهاية الصفيحة في حالة الجريان باتجاه البعد الكبير، فيحسب من العلاقة التالية:

$$\tau_w = 0.029 \cdot \frac{\rho \cdot U^2}{(\mathrm{Re}_x)^{1/5}}$$

وبالتعويض، نجد أن:

$$\tau_{w_{x=2}} = 0.029 \cdot \frac{1000 \cdot 1}{(2\times10^6)^{1/5}} = 1.59N/m^2$$

المسألة الثالثة

طائرة تطير بسرعة $600km/h$، لها جناح مستطيل مقطعه ذو شكل انسيابي، أبعاده: $b = 10m, c = 3m$، وسماكته $t = 27cm$. احسب قوة الإعاقة التي يعاني منها الجناح أثناء طيران الطائرة.

افرض للهواء أن: $\nu = 1.5\times10^{-5} m^2/s, \rho = 1.25kg/m^3$.

الحل:

نحسب أولاً نسبة سماكة الجناح إلى عرضه:

$$\frac{t}{c} = \frac{0.27}{3} = 0.09$$

ومن الشكل (٧-١٣)، نجد أن: $C_D = 0.09$.

أما سرعة الطائرة فتساوي:

$$U = 600 \cdot 1000/3600 = 166.7 m/s$$

تحسب قوة الإعاقة من العلاقة:

$$F_D = C_D \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot U^2 \cdot A$$

وبالتعويض، نجد أن:

$$F_D = 0.09 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1.25 \cdot 166.7^2 \cdot 10 \cdot 3 = 46893.75N = 46.89KN$$

المسألة الرابعة

تبحر ناقلة نفط بسرعة 13 عقدة (ميل بحري في الساعة، أي $1852m$ في الساعة) في مياه درجة حرارتها $10°C$. فإذا كان طول السفينة $L = 360m$، وعرضها $B = 70m$، وغاطسها $D = 25m$. احسب القوة اللازمة للتغلب على قوى الإعاقة التي تنشأ بين سطح الناقلة ومياه البحر. افترض أثناء حل المسألة أن لمياه البحر عند درجة الحرارة المعطاة: $\nu = 1.4 \times 10^{-6} m^2/s, \rho = 1020 kg/m^3$.

الحل:

سيتم تجزئة قوة الإعاقة F_D التي تتعرض لها السفينة إلى قوتين. الأولى F_{D_f} تنتج عن احتكاك السطح المبلل للسفينة مع ماء البحر. والثانية F_{D_p} نتيجة لمقاومة الأمواج.

ولحساب قوة الإعاقة الناتجة عن الإحتكاك، يمكن افتراض أن السطح المبلل هو عبارة عن صفيحة مستوية ملساء طولها $L = 360m$، وعرضها $b = B + 2 \cdot D$. وبناء عليه، نقوم أولاً بحساب سرعة الناقلة:

$$U = 13 \cdot \frac{1852}{3600} = 6.69 m/s$$

ثم نحسب عدد رينولدز عند نهاية طول الناقلة:

$$\mathrm{Re}_{x=360} = \frac{6.69 \cdot 360}{1.4 \times 10^{-6}} = 1.72 \times 10^{9}$$

ثم نحسب معامل الإعاقة الناتج عن الاحتكاك باستخدام العلاقة:

$$C_{D_f} = \frac{0.455}{(\log \mathrm{Re}_L)^{2.58}} - \frac{1740}{\mathrm{Re}_L}$$

وبالتعويض بالقيم العددية، نجد أن:

$$C_{D_f} = \frac{0.455}{(\log 1.72 \cdot 10^{9})^{2.58}} - \frac{1740}{1.72 \cdot 10^{9}} = 0.00147$$

إن مساحة السطح المبلول الناقلة تساوي:

$$A = 360 \cdot (70 + 2 \cdot 25) = 43200 m^2$$

وبالتالي فإن قوة الإعاقة الناتجة عن الاحتكاك:

$$F_{D_f} = C_{D_f} \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot U^2 \cdot A$$

تعطي بعد التعويض بالقيم العددية الواردة في نص المسألة:

$$F_D = 0.00147 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1020 \cdot 6.69^2 \cdot 43200 = 1.45 MN$$

ولحساب قوة الإعاقة الناتجة عن مقاومة الأمواج نحسب أولاً عدد فراود:

$$Fr = \frac{U}{\sqrt{g \cdot L}}$$

ومنه:

$$Fr = \frac{6.69}{\sqrt{9.81 \cdot 360}} = 0.113$$

من الشكل (٧-١٤) نجد أن معامل الإعاقة الناتج عن مقاومة الأمواج يساوي $C_{D_w} = 0.0001$، وبناء عليه تكون قوة الإعاقة:

$$F_{D_w} = C_{D_w} \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot U^2 \cdot L^2$$

وبالتعويض، نجد أن:

$$F_{D_a} = 0.00010 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1020 \cdot 6.69^2 \cdot 360^2 = 0.296MN$$

وأخيراً تكون قوة الإعاقة الكلية للسفينة هي:

$$F_D = F_{D_f} + F_{D_a}$$

ومنه:

$$F_D = 1.45 + 0.296 = 1.746MN$$

المسألة الخامسة

مدخنة أسطوانية عالية ارتفاعها $L = 25m$، وقطرها $D = 1m$. احسب العزم المتشكل عند قاعدة المدخنة نتيجة هبوب هواء بسرعة $50km/h$. بعد افتـــرض أن: $\mu_{air} = 1.78 \times 10^{-5} kg/m.s$ ، $\rho_{air} = 1.23kg/m^3$، وأن توزع سرعة الهواء منـــتظم من أعلى المدخنة إلى أسفلها.

الحل:

نحسب عدد رينولدز بالنسبة لقطر المدخنة من العلاقة:

$$\mathrm{Re} = \frac{U \cdot \rho \cdot D}{\mu}$$

حيث سرعة الهواء، تساوي:

$$U = 50 \cdot \frac{1000}{3600} = 13.9m/s$$

ومنه:

$$\mathrm{Re} = \frac{13.9 \cdot 1.23 \cdot 1}{1.78 \times 10^{-5}} = 9.61 \times 10^5$$

سنفترض أن الجريان حول المدخنة هو جريان حول أسطوانة ملساء، وبالتالي نجد مـــن الشكل (٧-١٢) أن معامل الإعاقة يساوي $C_D = 0.35$.

وتكون قوة الإعاقة المؤثرة على الأسطوانة:

$$F_D = C_D \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot U^2 \cdot A$$

وبالتعويض، نجد أن:

$$F_D = 0.35 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1.23 \cdot 13.9^2 \cdot 25 \cdot 1 = 1.04KN$$

ويكون العزم عند أسفل المدخنة:

$$M_0 = F_D \cdot \frac{L}{2}$$

ومنه:

$$M_0 = 1.04 \cdot \frac{25}{2} = 13KN.m$$

المسألة السادسة

ناطحة سحاب ارتفاعها $280m$، ومسقطها الأفقي على شكل مربع $20 \times 20m$. قدر العزم الناتج عند أسفل البناء، نتيجة عاصفة هوائية سرعتها $100km/h$ عند نهاية ارتفاع الناطحة، و $70km/h$ عند قاعدتها. افترض أن $\rho_{air} = 1.24kg/m^3$.

الحل:

باعتبار أن توزع سرعة الهواء غير منتظم على كامل ارتفاع الناطحة، لذلك سنقسم الارتفاع إلى عدة أجزاء (أربعة مثلا)، وسنعتبر أن السرعة منتظمة على كل جزء. وسنقوم بحساب قوة الإعاقة المؤثرة عليه. ويمكن هنا اعتماد نموذج الموشور المربع في تقدير معامل الإعاقة.

من خلال الشكل (٧-١٥)، ومن أجل شكل مربع مع إعطاء الحواف بعض الانحناء، نجد أنه معامل الإعاقة $C_D = 2$.

- ***حساب قوة الإعاقة على الجزء الأول:***

لدينا:

$$U_1 = 70 \cdot \frac{1000}{3600} = 19.44m/s$$

$$F_{D1} = C_D \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot U_1^2 \cdot A_1$$

وبالتعويض، بالقيم العددية، يكون:

$$F_{D_1} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1.24 \cdot 19.44^2 \cdot (70 \cdot 20) = 656.1KN$$

– حساب قوة الإعاقة على الجزء الثاني:

لدينا:

$$U_2 = 80 \cdot \frac{1000}{3600} = 22.22m/s$$

$$F_{D_2} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1.24 \cdot 22.22^2 \cdot (70 \cdot 20) = 857.1KN$$

– حساب قوة الإعاقة على الجزءالثالث:

لدينا:

$$U_3 = 90 \cdot \frac{1000}{3600} = 25m/s$$

$$F_{D_3} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1.24 \cdot 25^2 \cdot (70 \cdot 20) = 1085KN$$

– حساب قوة الإعاقة على الجزء الرابع:

لدينا:

$$U_4 = 100 \cdot \frac{1000}{3600} = 27.78m/s$$

$$F_{D_4} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1.24 \cdot 27.78^2 \cdot (70 \cdot 20) = 1339.7KN$$

ويكون العزم الناتج عند قاعدة ناطحة السحاب مساوياً:

$$M_0 = 656.1 \cdot 35 + 857.1 \cdot 105 + 1085 \cdot 175 + 1339.7 \cdot 245 = 631060.5KN.m$$

المسألة السابعة

يصدم تيار هوائي يخرج من فتحة شاقولية كرة بلاستيكية كتلتها $m = 0.5kg$، وقطرها $D = 15cm$، فترتفع نحو الأعلى وتقف عند حد معين. احسب سرعة التيار الهوائي عند اصطدامه مع الكرة بحيث تبقى في وضع التوازن، بافتراض أن: $\rho_{air} = 1.25kg/m^3, \mu_{air} = 1.8 \times 10^{-5} kg/m.s$.

الحل:

لتبقى الكرة في حالة توازن، يجب أن يكون:

$$F_D = C_D \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot U^2 \cdot A = m \cdot g$$

أو:

$$C_D \cdot \frac{1}{2} \cdot 1.25 \cdot U^2 \cdot \frac{\pi \cdot 0.15^2}{4} = 0.5 \cdot 9.81$$

ومنه:

$$C_D \cdot U^2 = 444.33$$

وكما يبين الشكل (٧-١٢)، فإن معامل الإعاقة للكرة له علاقة بعدد رينولدز. ولا يمكن حساب عدد رينولدز لأن السرعة غير معروفة. لذلك سنقوم بحل المسألة بالتجريب وفق الجدول التالي:

$U(m/s)$	$\mathrm{Re} = \frac{U \cdot \rho \cdot D}{\mu}$	C_D	$C_D \cdot U^2$
30	$3.125*10^5$	0.17	153
50	$5.17*10^5$	0.09	225
60	$6.25*10^5$	0.12	432

ما نستنتجه هو أن سرعة التيار الهوائي يجب أن تكون بحدود $60m/s$.

المسألة الثامنة

طائرة ركاب كتلتها $100000kg$، احسب معامل الرفع للطائرة لتستطيع الإقلاع من على مدرج طوله $500m$، مع العلم أن تسارع الطائرة $a = 30m/s^2$، وأن مساحة الأجنحة $A_p = 310m^2$، وأن $\rho_{air} = 1.25kg/m^3$.

الحل:

نحسب سرعة الطائرة عند نهاية المدرج من العلاقة:

$$V^2 - V_0^2 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot (x - x_0)$$

وبالتعويض، نجد أن:

$$V^2 - 0 = \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot (500 - 0) \Rightarrow V = 86.8 m/s$$

ولكي تستطيع الطائرة الإقلاع عند نهاية المدرج، يجب أن يتحقق الشرط التالي:

$$F_L = C_L \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot U^2 \cdot A = m \cdot g$$

أو:

$$C_L \cdot \frac{1}{2} \cdot 1.25 \cdot 86.8^2 \cdot 310 = 100000 \cdot 9.81$$

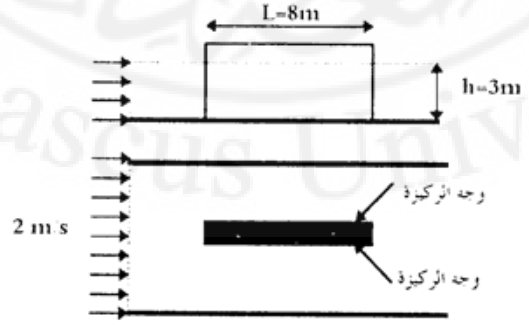
ومنه نجد أن:

$$C_L = 0.67$$

المسألة التاسعة

توضع ركيزة جسر بيتونية طولها $L = 8m$، كما في الشكل المبين أدناه، في مجرى نهر بشكل موازٍ لاتجاه الجريان (طول الركيزة يوازي محور الجريان). فإذا علمت أن ارتفاع الماء في النهر $h = 3m$، وأن سرعة الجريان الوسطية في النهر في مكان وجود الركيزة $2m/s$، وأن اللزوجة الحركية للماء $\nu = 1.2 \times 10^{-6} m^2/s$. احسب:

- سماكة الطبقة الحدية في نهاية الركيزة.
- إجهاد القص في نهاية الركيزة.
- القوة الناتجة عن احتكاك الماء بجدران الركيزة. بافتراض أن الخشونة المطلقة للبيتون $\varepsilon = 1.6mm$.



الحل:

الطلب الأول:

نحسب عدد رينولدز عند نهاية طول الركيزة، فنجد أن

$$\mathrm{Re}_{x=L} = \frac{U \cdot L}{\nu} = \frac{2 \cdot 8}{1.2 \times 10^{-6}} = 13333333 > 5 \cdot 10^5$$

ومنه فإن الطبقة الحدية في نهاية طول الركيزة مضطربة، وعليه يكون:

$$\delta = \frac{0.37 \cdot x}{(\mathrm{Re}_x)^{1/5}}$$

ومنه:

$$\delta = \frac{0.37 \cdot 8}{(13333333)^{1/5}} = 0.111m = 111mm$$

الطلب الثاني:

يحسب إجهاد القص في حالة الطبقة الحدية المضطربة من العلاقة:

$$\tau_w = 0.029 \cdot \frac{\rho \cdot U^2}{(\mathrm{Re}_x)^{1/5}}$$

وبالتعويض، نجد أن:

$$\tau_{w_{x=8}} = 0.029 \cdot \frac{1000 \cdot 2^2}{(13333333)^{1/5}} = 4.36N/m^2$$

الطلب الثالث:

إن قوة الاحتكاك الكلية على وجهي الركيزة تساوي:

$$F_D = 2 \cdot C_D \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot U^2 \cdot A$$

نحسب الخشونة النسبية لجدار الركيزة:

$$\frac{\varepsilon}{L} = \frac{1.6}{8000} = 2 \times 10^{-4}$$

ومن الشكل (٧-٩)، نجد أن معامل الإعاقة: $C_D = 0.0058$.

وبالتعويض، نحصل على:

$$F_D = 0.0058 \cdot 1000 \cdot 2^2 \cdot (8 \cdot 3) = 556.8N$$

المسألة العاشرة

غُرس مجس كروي يستخدم لقياس سرعة الجريان (عبارة عن أنبوب ذو قطر معين، يشبه أنبوب براندتل، ينتهي بكرة تحتوي خمسة رؤوس مثقبة موصولة مع أجهزة لقياس الضغط. عن طريق قياس الضغط في الرؤوس الخمسة، نستطيع تحديد مركبات السرعة الثلاث) في أنبوب بعد دولاب عنفة. فإذا علمت أن قطر الجزء الأنبوبي من المجس $d = 2cm$، وأن قطر الكرة في رأسه $D = 3cm$، و أن طول الجزء من الأنبوب الموضوع في الجريان $L = 20cm$، وأن سرعة الجريان الوسطية $6m/s$. احسب العزم المتشكل عند نقطة اختراق المجس لجدار الأنبوب، للتمكن من تصميم مسكة المجس. بافتراض أن $\nu = 1.15 \times 10^{-5} m^2/s$.

الحل:

إن القوة الكلية المؤثرة على المجس هي مجموع قوتين، الأولى: تؤثر على الأنبوب الأسطواني، والثانية: تؤثر على الكرة. أي أن:

$$F_D = F_{D_1} + F_{D_2}$$

لحساب القوة المؤثرة على الأنبوب، لدينا:

$$\mathrm{Re}_d = \frac{U \cdot d}{\nu} = \frac{6 \cdot 0.02}{1.15 \times 10^{-5}} = 1.04 \times 10^5$$

وباعتبار أن الأنبوب يمكن معاملته كأسطوانة ملساء، لذلك نجد من الشكل (٧-١٢) أن معامل الإعاقة $C_D = 1.7$، وبالتالي فإن قوة الإعاقة المؤثرة عليه تساوي:

$$F_{D_1} = 1.7 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1000 \cdot 6^2 \cdot 0.02 \cdot 0.2 = 122.4N$$

أما لحساب القوة المؤثرة على الكرة، فلدينا:

$$\mathrm{Re}_D = \frac{U \cdot D}{\nu} = \frac{6 \cdot 0.03}{1.15 \times 10^{-6}} = 1.57 \times 10^5$$

ومن الشكل (٧-١٢) أيضاً، نجد أن: $C_D = 0.5$. أي أن:

$$F_{D_2} = 0.5 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1000 \cdot 6^2 \cdot \pi \cdot \frac{0.03^2}{4} = 6.36N$$

أما العزم المؤثر عند اختراق الأنبوب للمجس فهو:

$$M = 122.4 \cdot 0.1 + 6.36 \cdot \left(0.2 + \frac{0.03}{2}\right) = 13.61N.m$$

المسألة الحادية عشرة

طائرة نقل ركاب نفاثة من طراز $Boeing\,727-200$ تطير بشكل منخفض في نفس الظروف السائدة عند سطح البحر. فإذا علمت أن:

$$m = 68000kg, A = 149m^2, ar = 6.5, C_{D,0} = 0.0182, \rho_{air} = 1.23kg/m^3$$

ويطلب ما يلي:

- ادرس تغير قوة الإعاقة على الطائرة، من أدنى سرعة يمكن للطائرة البقاء في الجو دون السقوط ***Stall Speed*** والتي تساوي $282km/h$، إلى سرعة الطائرة عند عدد ماخ $Ma = 0.6$. أهمل انضغاطية الهواء في المجال المدروس. واعتبر أن سرعة انتشار الصوت في الهواء $c = 1220km/h$.
- ما هي سرعة الطيران المثلى للطائرة عند سطح البحر.

الحل:

الطلب الأول:

تعطى قوة الإعاقة الإعاقة المؤثرة على الطائرة بالعلاقة:

$$F_D = C_D \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot U^2 \cdot A$$

أما معامل الإعاقة فيحسب من العلاقة التالية:

$$C_D = C_{D,0} + \frac{C_L^2}{\pi \cdot ar}$$

عند أي سرعة طيران قوة الرفع يجب أن تساوي وزن الطائرة. أي أن:

$$F_L = m \cdot g$$

أو:

$$F_L = C_L \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot U^2 \cdot A = m \cdot g$$

ومنه:

$$C_L = \frac{2 \cdot m \cdot g}{\rho \cdot U^2 \cdot A}$$

نقوم الآن بحساب قوة الإعاقة عند السرعة الدنيا لبقاء الطائرة في الجو، والتي تساوي $282 km/h$، كما يلي:

$$U = \frac{282 \cdot 1000}{3600} = 78.3 m/s$$

$$C_L = \frac{2 \cdot 68000 \cdot 9.81}{1.23 \cdot 78.3^2 \cdot 149} = 1.19$$

$$C_D = 0.0182 + \frac{1.19^2}{\pi \cdot 6.5} = 0.0871$$

ومنه:

$$F_D = 0.0871 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1.23 \cdot 78.3^2 \cdot 149 = 48.9 kN$$

لحساب قوة الإعاقة عندما عدد ماخ $M = 0.6$، يجب حساب سرعة الطائرة:

$$Ma = \frac{U}{c} \Rightarrow U = Ma \cdot c$$

$$U = 0.6 \cdot \frac{1220 \times 1000}{3600} = 203.3 m/s$$

$$C_L = \frac{2 \cdot 68000 \cdot 9.81}{1.23 \cdot 203.3^2 \cdot 149} = 0.176$$

$$C_D = 0.0182 + \frac{0.176^2}{\pi \cdot 6.5} - 0.0197$$

وبالتالي فإن:

$$F_D = 0.0197 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1.23 \cdot 203.3^2 \cdot 149 = 74.7 kN$$

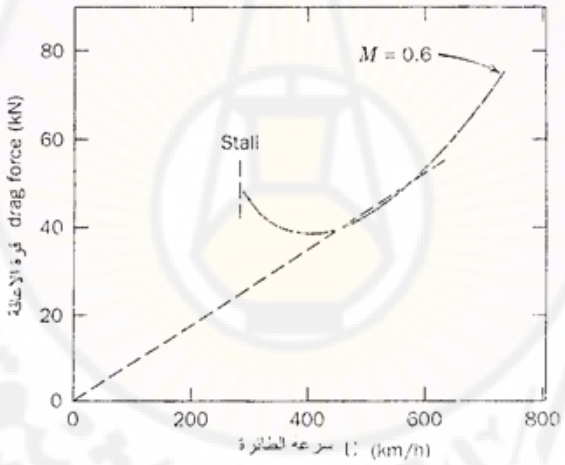
الطلب الثاني

السرعة المثلى للطائرة هي السرعة الموافقة لأقل قوة إعاقة. وعليه لتحديد هذه السرعة، نقوم بحساب قوة الإعاقة عند عدة سرعات، ثم نرسم منحني العلاقة بين

السرعة وقوة الإعاقة الموافقة. ولهذا الفرض نختار عدة قيم للسرعة مثل: $U = (282 - 400 - 500 - 600 - 732) km/h$، ثم نقوم باتباع الأسلوب السابق نفسه بتحديد قوة الإعاقة. ثم نرتب النتائج في الجدول التالي:

$U(km/h$	282	400	500	600	732
C_L	1.19	0.59	0.377	0.262	0.176
C_D	0.0871	0.0352	0.0252	0.0216	0.0197
$F_D(kN)$	48.9	39.9	44.5	54.9	74.7

ثم نرسم بناءً عليها منحني العلاقة مابين السرعة وقوة الإعاقة الموضح أدناه. فنلاحظ أن قيمة السرعة المثلى للطائرة مقابل أقل قوة إعاقة هي $U = 400 km/h$.



المسألة الثانية عشرة

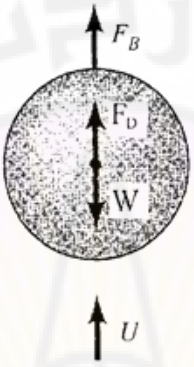
احسب سرعة سقوط حبة رمل في خزان مائي. علماً أن قطرها $D = 0.1mm$، وأن كثافتها النسبية $SG = 2.3$، وأن اللزوجة التحريكية للماء $\mu_{H2O} = 1.12 \times 10^{-3} N.s/m^2$.

الحل

باعتبار أن الكتلة النوعية لحبة الرمل أكبر من الكتلة النوعية للماء، لذلك سوف تهبط الحبة، وتستقر بعد فترة زمنية في قعر الخزان. وسوف تتعرض أثناء سقوطها

للقوى التالية:

- W : الوزن الذاتي.
- F_B : دافعة أرخميدس.
- F_D : قوة الإعاقة الناتجة عن تحرك الحبة بسرعة نحو الأسفل.



من مخطط القوى لدينا:

$$W = F_B + F_D$$

ولكن:

$$W = \gamma_{sand} \cdot \forall$$

أو:

$$W = SG \cdot \gamma_{H2O} \cdot \frac{\pi}{6} \cdot D^3$$

كذلك:

$$F_B = \gamma_{H2O} \cdot \frac{\pi}{6} \cdot D^3$$

لحساب قوة الإعاقة، لدينا:

$$F_D = C_D \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho_{H2O} \cdot U^2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot D^2$$

وباعتبار أن سرعة هبوط الحبة وقطرها صغيرين جداً، لذلك سيكون عدد رينولدز على الأغلب أقل من الواحد. وبناء عليه نجد من المخطط (٧-١٢) أنه من أجل عدد

رينولدز $\mathrm{Re} < 1$، يعطى معامل الإعاقة بالعلاقة:

$$C_d = \frac{24}{\mathrm{Re}}$$

حيث:

$$\mathrm{Re} = \frac{U \cdot \rho \cdot D}{\mu}$$

وبالتالي تكون قوة الإعاقة:

$$F_D = 3 \cdot \pi \cdot \mu_{H2O} \cdot U \cdot D$$

وبالتعويض بالمعادلة الأساسية للتوازن، نجد أن:

$$SG \cdot \gamma_{H2O} \cdot \frac{\pi}{6} \cdot D^3 = 3 \cdot \pi \cdot \mu_{H2O} \cdot U \cdot D + \gamma_{H2O} \cdot \frac{\pi}{6} \cdot D^3$$

ومنه:

$$U = \frac{\rho_{H2O} \cdot (SG - 1) \cdot g \cdot D^2}{18 \cdot \mu_{H2O}}$$

وبالتعويض بالمعطيات العددية، نجد أن:

$$U = \frac{1000 \cdot (2.3 - 1) \cdot 9.81 \cdot \left(0.1 \times 10^{-3}\right)^2}{18 \cdot 1.12 \times 10^{-3}} = 6.32 \times 10^{-3} m/s$$

نتحقق الآن من عدد رينولدز، فنجد:

$$\mathrm{Re} = \frac{6.32 \times 10^{-3} \cdot 1000 \cdot 0.1 \times 10^{-3}}{1.12 \times 10^{-3}} = 0.564 < 1$$

وبالتالي الافتراض صحيح.

مسائل غير محلوله حول الفصل السابع

المسألة الأولى

يطلب من أجل الطبقة الحدية الصفحية المتشكلة أثناء جريان مـــوازٍ لـــصفيحة مستوية ملساء بتدرج ضغط صفري، استنتاج العلاقات اللازمة لحساب كل من:

- سماكة الطبقة الحدية.
- سماكة الإزاحة وسماكة كمية الحركة.
- إجهاد القص على الجدار، ومعامل الاحتكاك.
- قوة الاحتكاك الكلية بين السائل والجدار الطلب، ومعامل الإعاقة.

وذلك من أجل الحالات التالية لمنحنيات توزع السرعة فيها:

- $f(\eta)=\eta$ ،
- $f(\eta)=\frac{3}{2}\cdot\eta-\frac{1}{2}\cdot\eta^3$ ،
- $f(\eta)=2\cdot\eta-2\cdot\eta^3+\eta^4$.

المسألة الثانية

إذا علمت أن منحني توزع السرعة في الطبقة الحدية المضطربة المتشكلة علـــى صفيحة مستوية ملساء ذات تدرج صفري هو: $f(\eta)=\eta^{1.6}$. يطلب استنتاج ما يلي:

- سماكة الطبقة الحدية.
- سماكة الإزاحة وسماكة كمية الحركة.
- معامل الاحتكاك.
- قوة الاحتكاك الكلية بين السائل والجدار الطلب، ومعامل الإعاقة.

المسألة الثالثة

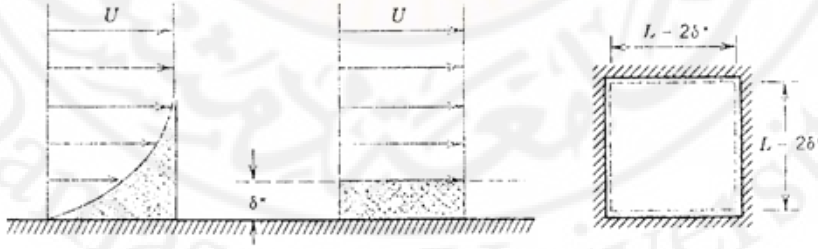
وضعت صفيحة رقيقة أبعادها $0.3\times1m$، في مجرى مائي بشكلٍ مـــوازٍ لمحـــور

المجرى. فإذا كانت سرعة الجريان تساوي $1.6m/s$، وكان البعد الكبير للصفيحة باتجاه الجريان، وكانت اللزوجة الحركية للماء $\nu = 1.2\times10^{-6}m^2/s$. ويطلب حساب:

- طول الطبقة الحدية الصفحية المتشكلة على الصفيحة.
- سماكة الطبقة الحدية، وسماكة الإزاحة، وسماكة كمية الحركة، وإجهاد القص عند نهاية الطبقة الحدية الصفحية.
- قوة الاحتكاك الكلية المتشكلة في الطبقة الحدية الصفحية.
- سماكة الطبقة الحدية، وسماكة الإزاحة، وسماكة كمية الحركة، وإجهاد القص عند نهاية الصفيحة.
- قوة الاحتكاك الكلية المؤثرة على الصفيحة.

المسألة الرابعة

من أجل نفق هوائي. مقطعه العرضي على شكل مربع، طول ضلعه $L = 305mm$. أُجريت قياسات ضمن الطبقة الحدية في مقطعين من طول النفق، فوجد في المقطع الأول أن سرعة التيار الحر $26m/s$ وسماكة الإزاحة $\delta_1^* = 1.5mm$، وفي المقطع الثاني $\delta_2^* = 2.1mm$. احسب النسبة المئوية لتغير الضغط الستاتيكي بين المقطعين بالنسبة للضغط الديناميكي عند المقطع الأول.



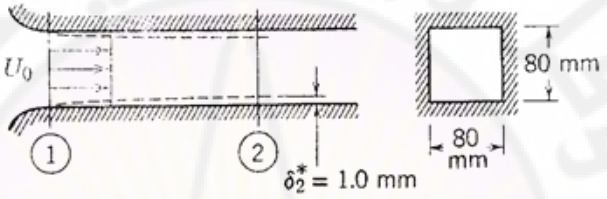
المسألة الخامسة

وضعت صفيحة رقيقة مستوية ملساء طولها L، بشكل موازٍ لاتجاه جريان سرعته U. فخضعت لقوة إعاقة (قوة احتكاك) مقدارها F_D. احسب الطول الجديد للصفيحة بحيث يتم تخفيض قوة الإعاقة على الصفيحة إلى ربع قيمتها الأولية. وذلك

بافتراض أن ظروف الجريان ثابتة في الحالتين.

المسألة السادسة

نفق هوائي، كما في الشكل. مقطعه العرضي على شكل مربع طول ضلعه $L = 80mm$. فإذا كانت سرعة التيار الحر عند مدخل النفق $30m/s$ ، وكانت سماكة الإزاحة من جميع الجهات $\delta^* = 1mm$ على بعد $0.3m$ من المدخل باتجاه الجريان. احسب النسبة المئوية لتغير الضغط الستاتيكي بين المدخل والمقطع المدروس.



المسألة السابعة

احسب سرعة سقوط قطرة مطر، علماً أن قطرها $D = 6\times10^{-8}m$. وذلك بافتراض أن قطرة الماء لا تتبخر أثناء السقوط.

المسألة الثامنة

سلك كهربائي قطره $D = 12mm$ ، وطوله $L = 40m$. يصل بين بنائين مرتفعين. احسب القوة الأفقية التي تؤثر على هذا الكابل نتيجة هبوب عاصفة هوائية سرعتها $U = 30m/s$.

المسألة التاسعة

أدخل أنبوب براندتل قطره $d = 6mm$ وطوله $L = 300mm$ ، بالكامل في نفق هوائي سرعة التيار فيه $25m/s$. احسب العزم المؤثر عند بداية اختراق الأنبوب لجدار النفق. علماً أن $\rho_{air} = 1.25kg/m^3$.

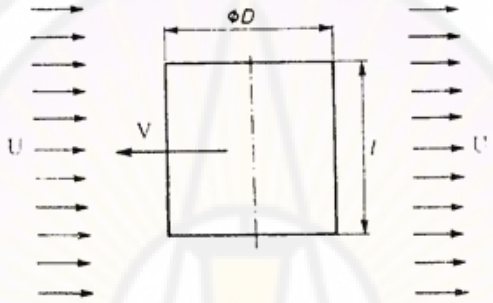
المسألة العاشرة

ناطحة سحاب أسطوانية الشكل ارتفاعها $h = 200m$ ، وقطر قاعدتها $d = 25m$. احسب العزم المتشكل عند قاعدتها، نتيجة هبوب عاصفة هوائية

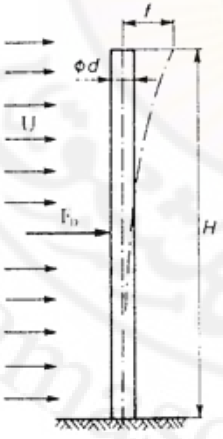
بسرعة $60km/s$ عند القاعدة و $80km/h$ عند أعلى الناطحة. علماً أن $\rho_{air} = 1.25kg/m^3$.

المسألة الحادية عشرة

يتحرك جسم أسطواني، ارتفاعه l وقطر قاعدته D، حيث $l = D = 0.2m$، ضمن الماء، كما في الشكل الموضح أدناه، بسرعة $V = 1m/s$ بشكل معاكس لحركة التيار المائي الذي تبلغ سرعته $U = 2m/s$. احسب الاستطاعة المطلوبة، ليستطيع هذا الجسم التحرك في الظروف السابقة.



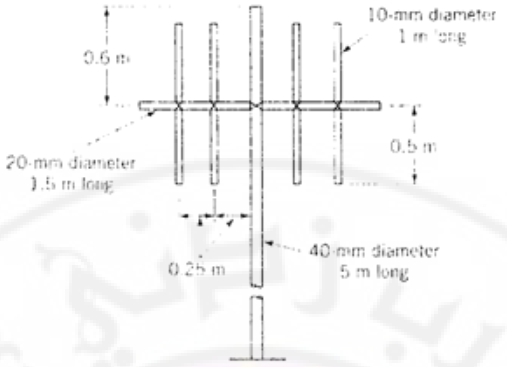
المسألة الثانية عشرة



وجه تيار هوائي إلى قضيب نحيل قطره d وارتفاعه H، موثوق من أسفله بوثاقه تامة، كما في الشكل. فأدى ذلك لحصول سهم في نهاية الطرف الحر من القضيب مقداره f. فإذا علمت أن معامل المرونة للقضيب E، وأن الكتلة النوعية للهواء ρ. احسب سرعة التيار الهوائي.

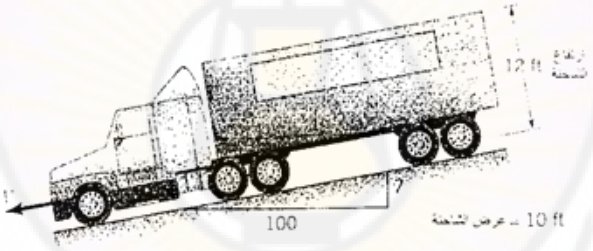
المسألة الثالثة عشرة

قدر القوة التي توثر على الهوائي المبين في الشكل المعطى أدناه، نتيجة هبوب عاصفة هوائية سرعتها $U = 100km/h$.



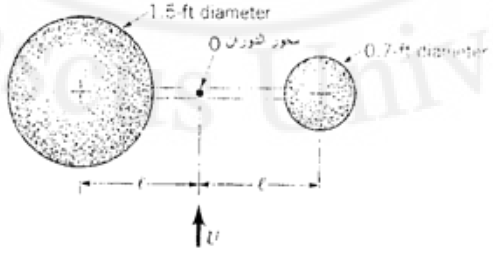
المسألة الرابعة عشرة

تتحرك الشاحنة المبينة في الشكل بسرعة ثابتة V، على منحدر ميله 7%، دون أن يستخدم السائق الفرامل. فإذا كان وزن الشاحنة 25 طن، وقوة مقاومة الاحتكاك بين العجلات والطريق 1.2% من وزن الشاحنة. احسب سرعة هذه الشاحنة.



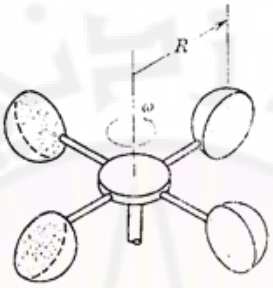
المسألة الخامسة عشرة

كرتان موصولتان مع بعضهما بوساطة ذراع صلب قابل للدوران حول محور أفقي O. فإذا تم توجيه تيار هوائي بسرعة $U = 15m/s$ بشكل شاقولي كما هو مبين في الشكل، فبأي اتجاه سيدور المحور؟ وماهي السرعة الزاوية للدوران؟.



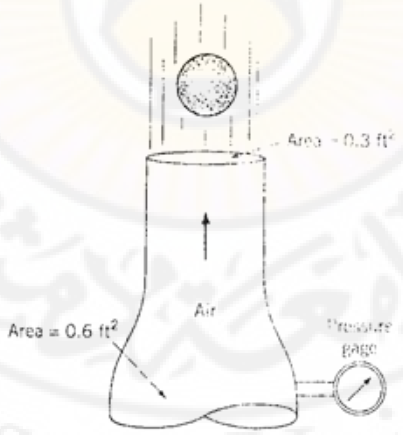
المسألة السادسة عشرة

يستخدم الجهاز المبين في الشكل الوارد أدناه لقياس سرعة الرياح. حيث يدور الجهاز بسرعة زاوية ω، عند هبوب رياح بسرعة V. أوجد العلاقة بين سرعة الهواء V والسرعة الزاوية ω للجهاز، وذلك بعد إهمال الاحتكاك عند محور الدوران.



المسألة السابعة عشرة

يوجه تيار هوائي من فتحة نفاثة في نهاية وصلة إلى كرة قطرها $2in$، كما هو مبين في الشكل. حدد القراءة التي يدل عليها مقياس الضغط، وذلك بعد إهمال الفواقد في الوصلة، وافتراض أن معامل الإعاقة للكرة $C_D = 0.5$.



الفصل الثامن

الجريان في الأنابيب وشبكات المياه
FLOW IN PIPES AND PIPENETWORKS

٨-١ . تمهيد Preface

الأنبوب ***Pipe*** هو ناقل يجري ضمنه السائل بحيث يملأ كامل مقطعه، أي أنه لايوجد للسائل الجاري في الأنبوب سطح حر، وبالتالي يمكن لضغط السائل أن يتغير من مقطع لآخر على طول هذا الأنبوب، كما يمكن أن يكون هذا الضغط أكبر أو أصغر من الضغط الجوي. أما **الشبكة** ***Network*** فهي مجموعة من الأنابيب المتلاقية مع بعضها في نقاط تدعى عقداً.

تصادف المسائل الهيدروليكية المعلقة بجريان السوائل في الأنابيب بشكل واسع في تطبيقات الهندسة المدنية، وخاصة شبكات مياه الشرب، وأنابيب نقل مياه الري، وأنابيب نقل النفط، وفي محطات الضخ، وفي استخدامات أخرى متعددة. ويعتمد حل هذه المسائل على تطبيق مبادئ تحريك السوائل الخاصة بالجريانات أحادية البعد، ولاسيما معادلة الطاقة (معادلة برنوللي) ومعادلة الاستمرار وعلاقات الاحتكاك.

٨-٢ . لمحة تاريخية The Historical Context

الجريان في الأنابيب له أهمية تطبيقية كبيرة جداً في مجال الهندسة. وهذا ما دفع الباحثين إلى الاهتمام بهذا الموضوع، واستنتاج المعادلات والعلاقات اللازمة للتصميم. وقد بدأ الباحثان ***Hagen & Poiseuille*** في عام ١٨٣٩ باستنتاج العلاقات التي تخص الجريان الصفحي في الأنابيب. ثم تتالت الأبحاث لدراسة جميع أنواع الجريانات في الأنابيب، ودراسة الفواقد الهيدروليكية وتحديد معاملات الاحتكاك. ويبين الجدول (٨-١) قائمة بأسماء الأبحاث في مجال تطور دراسة الجريان في الأنابيب، مع اسم الباحث، والعام الذي نشر فيه هذا البحث.

الجدول (٨-١). قائمة بأهم الأبحاث التي تمت في مجال الجريان في الأنابيب، مع اسم الباحث.

تاريخ البحث	اسم الباحث	البحث
١٨٣٩-١٨٤٩	هاجن- بواسيه *Hagen & Poiseuille*	وضع معادلة توزع السرع وحساب فواقد الاحتكاك في الأنابيب في حالة الجريان الصفحي.
١٨٥٠	دارسي-فايسباخ *Darcy & Weisbach*	وضع علاقة لحساب حساب فواقد الاحتكاك في الأنابيب في حالة الجريان المضطرب.
١٨٨٣	رينولدز *Reynolds*	وضع المعيار للتمييز بين الجريان الصفحي والجريان المضطرب في الأنابيب.
١٩١٣	بلاسيوس *Blasius*	وضع علاقة لحساب معامل الاحتكاك في الأنابيب الملساء هيدروليكياً لعدد رينولدز أقل من 10^5.
١٩١٤	ستانتون-بانيل *Stanton & Pannel*	دراسات تجريبية حول تحديد معامل الاحتكاك في الأنابيب الملساء هيدروليكياً.
١٩٣٠	نيكورادسي *Nikoradse*	دراسات تجريبية حول تحديد معامل الاحتكاك في جميع أنواع الأنابيب.
١٩٣٠	براندتل-فون كارمن *Prandtl & Von Karman*	وضعا علاقتين تجريبيتين لحساب معامل الاحتكاك في الأنابيب الخشنة والملساء هيدروليكياً.
١٩٣٧-١٩٣٩	كوربروك- وايت *Colebrook & White*	وضعا علاقة تجريبية عامة لحساب معامل الاحتكاك في جميع أنواع الأنابيب.
١٩٤٤	مودي *Mody*	وضع مخططات عملية لحساب معامل الاحتكاك في جميع أنواع الأنابيب.
١٩٥٨	ايكرز *Ackers*	وضع جداول ومخططات من أجل تصميم الأنابيب والأقنية.
١٩٧٥	بار *Barr*	وضع علاقة تمكننا بشكل مباشر من تحديد معامل الاحتكاك معتمداً على علاقة كولبروك-وايت.
١٩٧٦	سوامي *Swamee*	وضع علاقة سهلة لتحديد معامل الاحتكاك.
١٩٧٨	بوركا *Burka*	وضع علاقة لحساب معامل الاحتكاك في الأنابيب الملساء هيدروليكياً مهما يكن عدد رينولدز.

٨-٣. عدد رينولدز في الأنابيب Reynolds Number in Pipes

عرفنا بشكل مفصل في الفصول السابقة مفهوم وطبيعة حركة الجزيئات في الجريان الصفحي والمضطرب. ولايختلف هذا المفهوم على الإطلاق في الأنابيب. وما نريد في هذه الفقرة هو شرح المعايير التي تحدد نوع الجريان في الأنابيب.

وقد كان رينولدز، كما وجدنا سابقاً، أول من قام بدراسة هذه الموضوع عبر تجربته الشهيرة، التي حدد فيها نوعين للجريان ومرحلة انتقالية تحصل بينهما. ولقد وجد رينولدز بالتجربة، أن تحديد نوع الجريان في الأنابيب يعتمد على قيمة رقم لابعدي قام باستنتاجه وسمي لاحقاً عدد رينولدز، وهو يساوي:

$$\mathrm{Re} = \frac{V \cdot \rho \cdot D}{\mu} = \frac{V \cdot D}{\nu} \qquad (٨-١)$$

حيث أن:

- V: السرعة الوسطية للجريان (m/s).
- D: قطر الأنبوب (m).
- ν: اللزوجة الحركية للسائل (m^2/s).

ولقد وجد رينولدز أثناء تجربته أن الجريان يكون صفحياً عندما:

$$\mathrm{Re} < 2320$$

ويكون الجريان مضطرباً عندما:

$$\mathrm{Re} > 4000$$

وبين القيمتين السابقتين يكون الجريان في حالة انتقالية، حيث لايمكن تمييز نوع الجريان بشكل واضح.

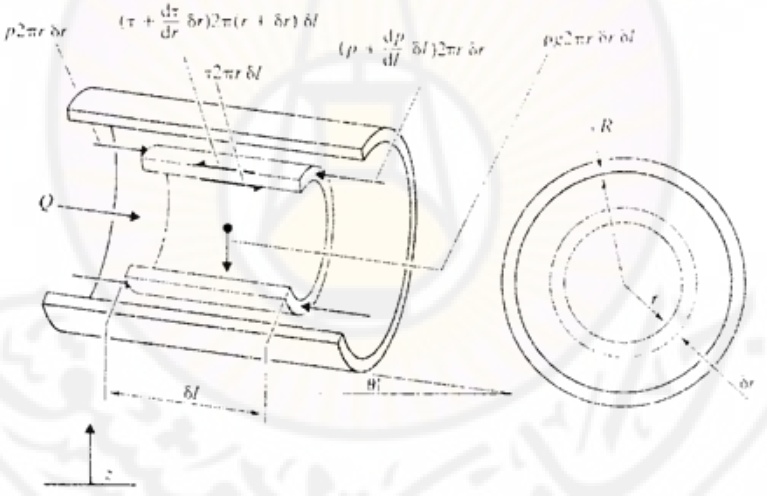
إن القيم الآنفة الذكر التي لاحظها رينولدز تعتمد على ظروف التجربة التي قام بها شخصياً، وهي القيم المعتمدة عالمياً للتمييز بين الجريان الصفحي والمضطرب في الأنابيب. وقد أجرى كثير من الباحثين تجارب حول الجريان في الأنابيب، وتبين أن الجريان يمكن أن يبقى صفحياً حتى القيمة $\mathrm{Re} = 50000$، وذلك عندما تكون ظروف الجريان مثلى عند مدخل الأنبوب.

٨-٤. معادلة كمية الحركة للجريان في الأنابيب

Momentum Equation of the Flow in Pipes

تفيدنا معادلة كمية الحركة للجريان ضمن الأنابيب في تحديد منحني توزع السرعة للجريان الصفحي والجريان المضطرب.

لنأخذ عنصراً حلقياً سماكته δr وطوله δl من أنبوب نصف قطره R، كما في الشكل (٨-١). فنجد أن القوى المؤثرة على هذه العنصر هي: قوى الضغط وقوى القص والوزن الذاتي. وحسب مبدأ كمية الحركة فإنه يجب أن يكون مجموعها مساوياً للتغير الذي يطرأ على كمية الحركة. وباعتبار أن حالة الجريان منتظم ومستقر، فإن سرعة الجريان واحدة قبل حجم التحكم وبعده، ولذلك سيكون معدل التغير في كمية الحركة مساوياً الصفر. وعليه يمكننا أن نكتب:



الشكل (٨-١). استنتاج معادلة كمية الحركة للجريان في الأنابيب [3]

$$p\cdot 2\cdot\pi\cdot r\cdot\delta r-\left(p+\frac{dp}{dl}\cdot\delta l\right)\cdot 2\cdot\pi\cdot r\cdot\delta r+\tau\cdot 2\cdot\pi\cdot r\cdot\delta l$$
$$-\left(\tau+\frac{d\tau}{dr}\cdot\delta r\right)2\cdot\pi\cdot(r+\delta r)\cdot\delta l+\rho\cdot g\cdot 2\cdot\pi\cdot r\cdot\delta r\cdot\delta l\cdot\sin\theta=0 \qquad (٢-٨)$$

وباعتبار أن $\sin\theta=-\frac{dz}{dl}$، وبإهمال الحدود التفاضلية الصغيرة، ثم بالتقسيم على $\delta l\cdot\delta r\cdot r\cdot 2\cdot\pi$، نحصل على:

$$-\frac{dp}{dl}-\frac{d\tau}{dr}-\frac{\tau}{r}-\rho\cdot g\cdot\frac{dz}{dl}=0 \qquad (٣-٨)$$

ويمكن كتابة المعادلة السابقة على الشكل التالي:

$$-\frac{dp^*}{dl}-\frac{d\tau}{dr}-\frac{\tau}{r}=0 \qquad (٤-٨)$$

حيث: $p^*=p+\rho\cdot g\cdot z$ يمثل الضغط البيزومتري. ويمكن هنا أن نلاحظ:

$$\frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dr}(\tau\cdot r)=\frac{1}{r}\cdot\left(r\cdot\frac{d\tau}{dr}+\tau\right)=\frac{d\tau}{dr}+\frac{\tau}{r} \qquad (٥-٨)$$

وبالتالي يمكن كتابة المعادلة (٨-٤) بالصيغة الآتية:

$$-\frac{dp^*}{dl}-\frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dr}(\tau\cdot r)=0 \qquad (٦-٨)$$

أو بالصيغة:

$$\frac{d}{dr}(\tau\cdot r)=-r\cdot\frac{dp^*}{dl} \qquad (٧-٨)$$

وبالمكاملة بالنسبة للمتغير r، نجد أن:

$$\tau\cdot r=-\frac{dp^*}{dl}\cdot\frac{r^2}{2}+const \qquad (٨-٨)$$

وبما أن الأنبوب متناظر، فإن القص ينعدم عند محوره. ومن هذا الشرط نستنتج أن: $const=0$، وبالتالي يمكن كتابة المعادلة السابقة كما يلي:

$$\tau\cdot r=-\frac{dp^*}{dl}\cdot\frac{r^2}{2} \qquad (٩-٨)$$

أو:

$$\tau=-\frac{dp^*}{dl}\cdot\frac{r}{2} \qquad (١٠-٨)$$

وتمثل هذه المعادلة، معادلة كمية الحركة للجريان المنتظم في الأنابيب. التي يمكن مبدئياً استخدامها في الجريان الصفحي والمضطرب، على الرغم من أن المسألة في الجريان الصفحي أبسط من الجريان المضطرب. وتفيدنا هذه المعادلة في إيجاد منحني توزع السرعة وإجهاد القص في الأنبوب، وهو ما يفيد في حساب فواقد الطاقة.

٨-٥. الجريان الصفحي في الأنابيب Laminar Flow in Pipes

٨-٥-١. معادلة هاجن-بواسوي Hagen-Poiseuille Equation

لاستنتاج معادلة هاجن- بواسوي ننطلق من معادلة كمية الحركة، حيث لدينا:

$$\tau = -\frac{dp^*}{dl}\cdot\frac{r}{2} \qquad (٨-١١)$$

ولكن إجهاد القص في حالة الجريان الصفحي يساوي:

$$\tau = \mu\cdot\frac{du}{dy} = -\mu\cdot\frac{du}{dr} \qquad (٨-١٢)$$

وبالتعويض في معادلة كمية الحركة، نجد أن:

$$-\mu\cdot\frac{du}{dr} = -\frac{dp^*}{dl}\cdot\frac{r}{2} \qquad (٨-١٣)$$

أو:

$$\frac{du}{dr} = \frac{1}{2\cdot\mu}\cdot\frac{dp^*}{dl}\cdot r \qquad (٨-١٤)$$

وبالمكاملة، نجد أن:

$$u = \frac{1}{4\cdot\mu}\cdot\frac{dp^*}{dl}\cdot r^2 + const \qquad (٨-١٥)$$

ويمكن تحديد قيمة الثابت من الشروط الحدية، حيث لدينا:

$$u = 0\big|_{r=R} \Rightarrow const = -\frac{1}{4\cdot\mu}\cdot\frac{dp^*}{dl}\cdot R^2$$

وبالتالي تصبح معادلة منحني توزع السرعة على الشكل التالي:

$$u = -\frac{1}{4\cdot\mu}\cdot\frac{dp^*}{dl}\cdot\left(R^2 - r^2\right) \qquad (٨-١٦)$$

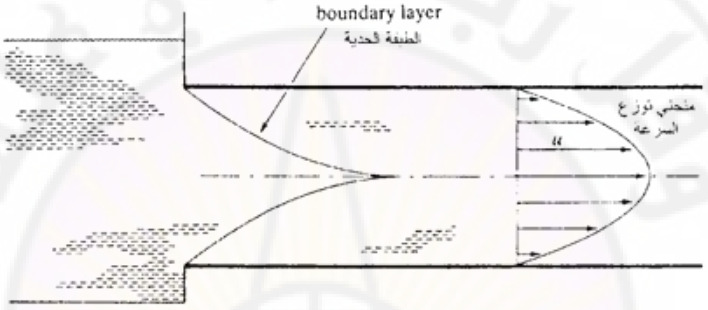
أو:

$$u = -\frac{R^2}{4\cdot\mu}\cdot\frac{dp^*}{dl}\cdot\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right) \qquad (٨-١٧)$$

التي تمثل علاقة منحني توزع السرعة ضمن الأنابيب في حالة الجريان الصفحي، وهـو

قطع مكافئ، كما يبينه الشكل (٨-٢). وتشير الإشارة السالبة في العلاقة السابقة، إلى أن تدرج الضغط يكون سالباً في اتجاه الجريان. كما تشير العلاقة السابقة، أن السرعة العظمى تكون عندما $r = 0$، أي في مركز الأنبوب، وقيمتها تساوي:

$$u_{max} = -\frac{R^2}{4 \cdot \mu} \cdot \frac{dp^*}{dl} \qquad (٨-١٨)$$



الشكل (٨-٢). منحني توزع السرعة ضمن أنبوب في حالة الجريان الصفحي [3]

يمكن حساب غزارة الجريان، بمكاملة الغزارة الجزئية δQ المارة عبر شريحة حلقية سماكتها δr، أي أن:

$$\delta Q = u \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \delta r \qquad (٨-١٩)$$

وبالمكاملة نجد:

$$Q = 2 \cdot \pi \cdot \int_0^R u \cdot r \cdot dr \qquad (٨-٢٠)$$

أو:

$$Q = 2 \cdot \pi \cdot \int_0^R -\frac{R^2}{4 \cdot \mu} \cdot \frac{dp^*}{dl} \cdot \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \cdot r \cdot dr \qquad (٨-٢١)$$

ومنه:

$$Q = -\frac{\pi}{8 \cdot \mu} \cdot \frac{dp^*}{dl} \cdot R^4 \qquad (٨-٢٢)$$

وأما السرعة الوسطية للجريان فتساوي:

$$V = \frac{Q}{A} = -\frac{\frac{\pi}{8 \cdot \mu} \cdot \frac{dp^*}{dl} \cdot R^4}{\pi \cdot R^2}$$

ومنه:

$$V = -\frac{1}{8 \cdot \mu} \cdot \frac{dp^*}{dl} \cdot R^2 \qquad (٢٣-٨)$$

إذا كتبنا العلاقة السابقة بدلالة انخفاض الضغط Δp على مسافة طولية مقدارها L، يكون لدينا:

$$V = \frac{1}{8 \cdot \mu} \cdot \frac{\Delta p}{L} \cdot R^2 \qquad (٢٤-٨)$$

أو:

$$V = \frac{1}{32 \cdot \mu} \cdot \frac{\Delta p \cdot D^2}{L} \qquad (٢٥-٨)$$

وبدلالة غزارة الجريان، يمكن كتابة أن:

$$Q = \frac{\pi \cdot \Delta p \cdot D^4}{128 \cdot \mu \cdot L} \qquad (٢٦-٨)$$

ومنه:

$$\Delta p = \frac{128 \cdot \mu \cdot L \cdot Q}{\pi \cdot D^4} \qquad (٢٧-٨)$$

تدعى المعادلة السابقة معادلة هاجن-بواسوي ***Hagen-Poiseuille***.

ومن المفيد الإشارة هنا، إلى أنه يمكن حساب هبوط الضغط من العلاقة:

$$\Delta p = \frac{32 \cdot \mu \cdot L \cdot V}{D^2} \qquad (٢٨-٨)$$

ولكن انخفاض الضاغط أو الفواقد في الضغط في واحدة الوزن والتي تدعى: **فواقد الاحتكاك** ***Frictional Head Losses*** تساوي:

$$h_f = \frac{\Delta p}{\rho \cdot g} \qquad (٢٩-٨)$$

ومنه:

$$h_f = \frac{32 \cdot \mu \cdot L \cdot V}{\rho \cdot g \cdot D^2} \qquad (٣٠-٨)$$

كما يمكن الحصول على معادلة توزع إجهادات القص، باستبدال قيمة $\frac{dp^*}{dl}$ من المعادلة (٨-٢٣) في المعادلة (٨-١١)، فنجد أن:

$$\tau = \frac{4 \cdot \mu \cdot V \cdot r}{R^2} \qquad (٣١-٨)$$

وتظهر هذه المعادلة أن إجهاد القص يساوي الصفر عند محور الأنبوب حيث $r = 0$.

وللحصول على إجهاد القص عند الجدار τ_w نضع في المعادلة $r = R$، فيكون لدينا:

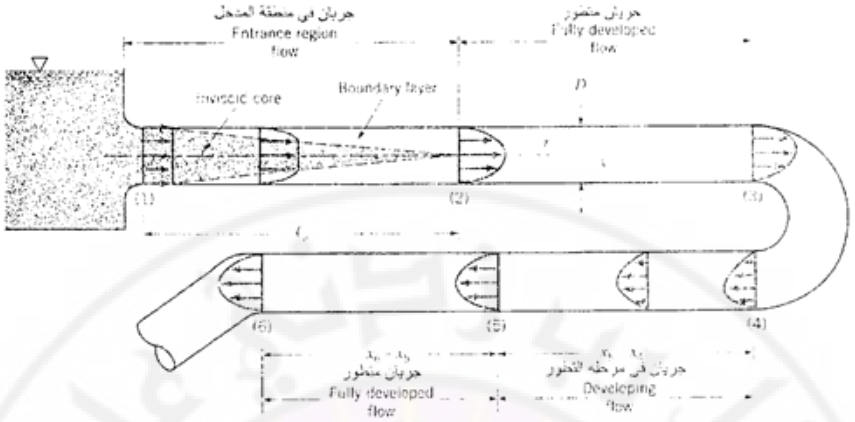
$$\tau_w = \frac{4 \cdot \mu \cdot V}{R} \qquad (٣٢-٨)$$

٨-٥-٢. الجريان الصفحي عند مدخل أنبوب

Laminar Flow on the Entrance of a Pipe

بافتراض أنبوب يتغذى من خزان، كما في الشكل (٨-٣). وبافتراض أن المدخل للأنبوب انسيابي لتفادي أي تشويش للجريان عند الدخول، فإن جميع جزيئات السائل سوف تبدأ بالجريان بالسرعة نفسها. وبعد مسافة من المدخل تصبح سرعة الجزيئات الملامسة للجدار مساوية الصفر، بينما على ارتفاع معين قريب جداً من الجدار تكون السرعة كبيرة، وخلال هذه الطبقة أو الغشاء الرقيق يكون تدرج السرعة كبيراً جداً. ومع تقدم الجريان على طول الأنبوب، فإن السرعة على مقربة من الجدار تبطُؤ بسبب احتكاك جزيئات السائل مع جدران الأنبوب. وحيث أن غزارة الجريان ثابتة للمقاطع التالية، لذلك لابد من زيادة السرعة في المركز، إلى أن يصل الشكل النهائي لتوزع السرعة على شكل قطع مكافئ، كما في الشكل (٨-٢).

ندعو المسافة من بداية الأنبوب إلى المقطع الذي يصبح فيه شكل توزع السرعة ثابتاً **طول المدخل** ***Entrance Length***. كما يطلق على منحني توزع السرعة بعد ثباته عند مقطع معين **بمنحني السرعة كامل التطور** ***Fully Developed Velocity Profile***. أما الجريان بعد المقطع الذي يثبت فيه شكل منحني توزع السرعة، فيطلق عليه: **الجريان المتكون أو المتطور** ***Fully Developed Flow***.



الشكل (٨-٣). تطور الجريان الصفحي في الأنبوب [6]

نظرياً إن طول المدخل يمتد إلى مسافة لانهائية، ولكن نعتبره ممتداً إلى مسافة تصبح عندها السرعة عند محور الأنبوب مساوية 99% من السرعة العظمى. ولقد أثبتت التجارب أن طول المدخل يمكن أن يعطى بالعلاقة:

$$\ell_e \approx 0.06 \cdot \mathrm{Re} \cdot D \qquad (٣٣-٨)$$

وعندما يكون عدد رينولدز $\mathrm{Re} = 2000$، يكون طول المدخل مساوياً حوالي 120 مرة من قطر الأنبوب.

يمكن في منطقة المدخل، ملاحظة أن الجريان يتكون من **نواة مركزية غير لزجة** ***Inviscid Core*** لايوجد بداخلها أي تأثيرات للاحتكاك، ومن طبقة حلقية تمتد من هذه النواة إلى جدار الأنبوب، يأخذ تدرج السرعة في هذه الطبقة الحلقية قيمة أكبر من الصفر. وتزداد سماكة هذه الطبقة كلما تحركنا باتجاه الجريان، إلا أنها تثبت عند الوصول إلى المقطع كامل التطور، وتدعى هذه الطبقة كما أسلفنا **بالطبقة الحدية** ***Boundary Layer***.

مثال ٨-١

يضخ الغليسيرين عبر أنبوب أفقي طوله $L = 65m$، وقطره $D = 0.01m$، بغزارة مقدارها $Q = 45\ell/\min$. احسب عدد رينولدز، وتأكد فيما إذا كان الجريان صفحياً أم مضطرباً. ثم احسب الفاقد في الضغط. وعين قيمة السرعة العظمى التي

يجب أن يجري بها الغليسيرين مع بقاء الجريان صفحياً. علماً بأن:

$$\rho = 1260 kg/m^3, \mu = 0.9 kg/m \cdot s$$

الحل:

يتم حساب السرعة الوسطية للجريان من العلاقة:

$$V = \frac{Q}{A}$$

ومنه:

$$V = \frac{4 \cdot 45 \times 10^{-3}/60}{\pi \cdot 0.01^2} = 9.55 m/s$$

ويحسب عدد رينولدز في الأنبوب من العلاقة:

$$\mathrm{Re} = \frac{V \cdot \rho \cdot D}{\mu}$$

وبالتعويض، نجد أن:

$$\mathrm{Re} = \frac{9.55 \cdot 1260 \cdot 0.01}{0.9} = 133.7$$

أي أن الجريان صفحي.

يحسب فاقد الضغط من العلاقة:

$$\Delta p = \frac{32 \cdot \mu \cdot L \cdot V}{D^2}$$

ومنه:

$$\Delta p = \frac{32 \cdot 0.9 \cdot 65 \cdot 9.55}{0.01^2} = 178.8 \times 10^{-6} Pa$$

إن أقصى سرعة لجريان السائل في الأنبوب، على أن يبقى الجريان صفحياً توافق عدد رينولدز $\mathrm{Re} = 2320$، أي:

$$2320 = \frac{V \cdot 1260 \cdot 0.01}{0.9} \Rightarrow$$

$$V = 164.7 m/s$$

٨-٦. الجريان المضطرب في الأنابيب Turbulent Flow in Pipes

يمكن في الجريان المضطرب، مبدئياً استخدام معادلة كمية الحركة. ولكن المشكلة أن معادلة نيوتن لإيجاد توزع الإجهادات التي استخدمت في حالة الجريان الصفحي لايمكن استخدامها في حالة الجريان المضطرب، كما لاحظنا سابقاً. وذلك لأن إجهاد القص في حالة الجريان المضطرب هو من الشكل:

$$\tau = \mu \cdot \frac{du}{dy} + \rho \cdot \overline{u'} \cdot \overline{v'} \qquad (٣٤-٨)$$

وهذه المعادلة لاتمكننا من إيجاد حل مباشر كحالة الجريان الصفحي. ولذلك لابد في حالة الجريان المضطرب من الاعتماد على الدراسات التجريبية لتحديد قيمة إجهاد القص عند جدار الأنبوب.

تكتب معادلة كمية الحركة، كما يلي:

$$\tau = -\frac{dp^*}{dl} \cdot \frac{r}{2} \qquad (٣٥-٨)$$

وعند الجدار يكون إجهاد القص:

$$\tau_w = -\frac{dp^*}{dl} \cdot \frac{R}{2} \qquad (٣٦-٨)$$

ولكن كما ذكرنا سابقاً فإن:

$$-\frac{dp^*}{dl} = \frac{h_f \cdot \rho \cdot g}{L} \qquad (٣٧-٨)$$

وبالتعويض في العلاقة (٨-٣٦)، نجد أن:

$$\tau_w = \frac{h_f \cdot \rho \cdot g}{L} \cdot \frac{R}{2} = \frac{h_f \cdot \rho \cdot g}{L} \cdot \frac{D}{4}$$

ولقد أثبتت التجارب أن إجهاد القص عند الجدار في الأنابيب في حالة الجريان المضطرب يعطى بالعلاقة:

$$\tau_w = \frac{\lambda \cdot \rho \cdot V^2}{8} \qquad (٣٨-٨)$$

وبمساواة العلاقتين السابقتين نجد أن:

$$h_f = \lambda \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{V^2}{2 \cdot g} \qquad (٣٩-٨)$$

وتدعى هذه العلاقة **بعلاقة دارسي– فايسباخ** ***Darcy- Weisbach Equation*** لحساب فواقد الاحتكاك في الأنابيب، كما سنرى ذلك فيما بعد بالتفصيل. حيث: λ – معامل تجريبي.

أما توزع السرعة في الجريان المضطرب، فتعطى كما بينا في الفصل الخامس بالعلاقة:

$$U = \frac{u_*}{K} \cdot \ln y + C \qquad (٤٠-٨)$$

حيث: $K = 0.4$ – ثابت. أما قيمة المتغير y فهي تساوي:

$$y = R - r$$

وبالتالي تكتب العلاقة السابقة كما يلي:

$$U = 2.5 \cdot u_* \cdot \ln(R - r) + C$$

يمكن تحديد الثابت C بملاحظة أن $U = U_{max}$ عندما $y = R$. وبالتالي تصبح العلاقة السابقة على الشكل:

$$U = U_{max} - 2.5 \cdot u_* \cdot \ln\left(\frac{R}{R - r}\right) \qquad (٤١-٨)$$

وتتفق هذه المعادلة بالكامل مع القياسات التجريبية لشكل توزع السرعة في الأنابيب. ولكن توجد منطقتان لاتنطبق عليهما العلاقة. المنطقة الأولى عند محور الأنبوب حيث يجب أن تكون $\frac{dU}{dy} = 0$، ولكن هذه العلاقة لوغاريتمية وليست صفرية الميل عند $r = 0$، وبالتالي فإن العلاقة تعطي شكلاً لتوزع السرعة مع نقطة حادة عند المحور، بينما في الحقيقة هي دائرية. وهذا الاختلاف يؤثر فقط على مساحة صغيرة جداً، ويشتمل على خطأ صغير جداً في حساب معدل التصريف. أما المنطقة الثانية فتقع بالقرب من الجدار، وهي في الحقيقة تبين أنه عندما $r = R$ فإن قيمة السرعة تكون لانهاية، وهذا غير مقبول لأن السرعة يجب أن تكون مساوية للصفر، ولكن هذا الاختلاف يقع داخل حدود الطبقة الحدية الصفحية التحتية، حيث لايفترض تطبيق

هذه العلاقة، عدا عن ذلك فإن الطبقة التحتية رقيقة جداً حيث لاتؤثر تأثيراً واضحاً على حساب التصريف.

يمكن حساب التصريف المار في الأنبوب كما يلي:

$$\delta Q = U \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \delta r \qquad (٤٢-٨)$$

أو:

$$Q = 2 \cdot \pi \cdot \int_0^R U \cdot r \cdot dr \qquad (٤٣-٨)$$

أما قيمة السرعة الوسطية فتساوي:

$$V = \frac{Q}{\pi \cdot R^2} \qquad (٤٤-٨)$$

وبالمكاملة، نجد أن:

$$V = U_{\max} - 3.75 \cdot u_* \qquad (٤٥-٨)$$

وباعتبار أن:

$$\tau_w = \frac{\lambda \cdot \rho \cdot V^2}{8} \Rightarrow \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} = u_* = \sqrt{\frac{\lambda \cdot V^2}{8}} \qquad (٤٦-٨)$$

لذلك يمكن كتابة العلاقة (٨-٤٥) على الشكل:

$$V = U_{\max} - 1.33 \cdot V \cdot \sqrt{\lambda} \qquad (٤٧-٨)$$

من العلاقة الأخيرة يمكن الحصول على النسبة بين السرعة العظمى والسرعة الوسطية، كما يلي:

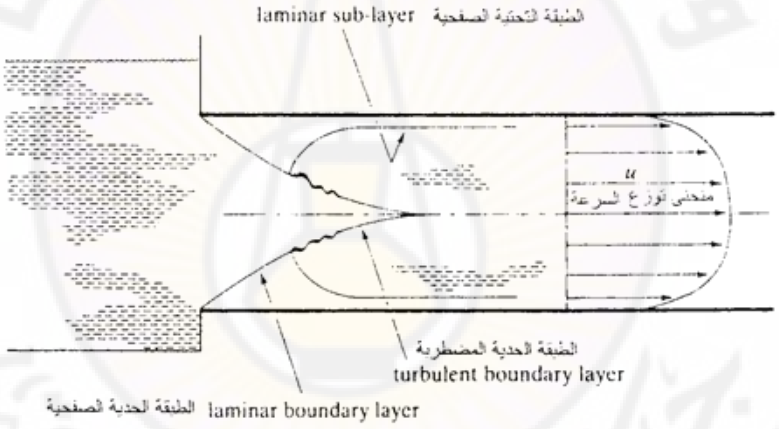
$$\frac{U_{\max}}{V} = 1 + 1.33 \cdot \sqrt{\lambda} \qquad (٤٨-٨)$$

وبتعويض قيمة $U_{\max}$ من العلاقة السابقة في العلاقة (٨-٤١)، مع ملاحظة أن $u_* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$، نحصل على:

$$U = V \cdot \left[\left(1 + 1.33 \cdot \sqrt{\lambda}\right) - 0.884 \cdot \sqrt{\lambda} \cdot \ln\left(\frac{R}{R-r}\right) \right] \qquad (٤٩-٨)$$

تمكن هذه العلاقة من رسم مخطط توزع السرعة للجريان المضطرب في الأنبوب، بعد معرفة قيمة السرعة الوسطية ومعامل الاحتكاك λ.

يختلف منحني توزع السرعة للأنابيب في الجريان المضطرب عن الجريان الصفحي، في أن معدل الزيادة في السرعة للجريان المضطرب يكون كبيراً جداً بالقرب من الجدران، ثم يتناقص هذا المعدل بالابتعاد عنها، وتصبح قيم السرعة متقاربة إلى حد كبير. وعندما يزداد عدد رينولدز في الأنبوب تصبح قيم السرعة أكثر انتظاماً على كامل المقطع، باستثناء المحيط المجاور للجدران حيث تزداد قيم السرعة بشكل كبير جداً. ويبين الشكل (٨-٤) منحنياً نموذجياً لتوزع السرعة في الأنابيب للجريان المضطرب.



الشكل (٨-٤). منحني توزع السرعة في الأنبوب في حالة الجريان المضطرب [3]

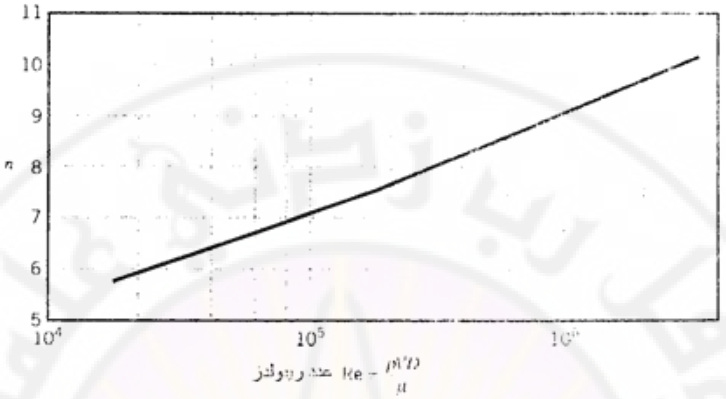
يمكن إيجاد توزع السرعة للجريان المضطرب في الأنابيب الملساء هيدروليكياً باستخدام علاقة براندتل:

$$\frac{U}{V_c} = \left(\frac{y}{R}\right)^{1/n} = \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{1/n} \qquad (٨-٥٠)$$

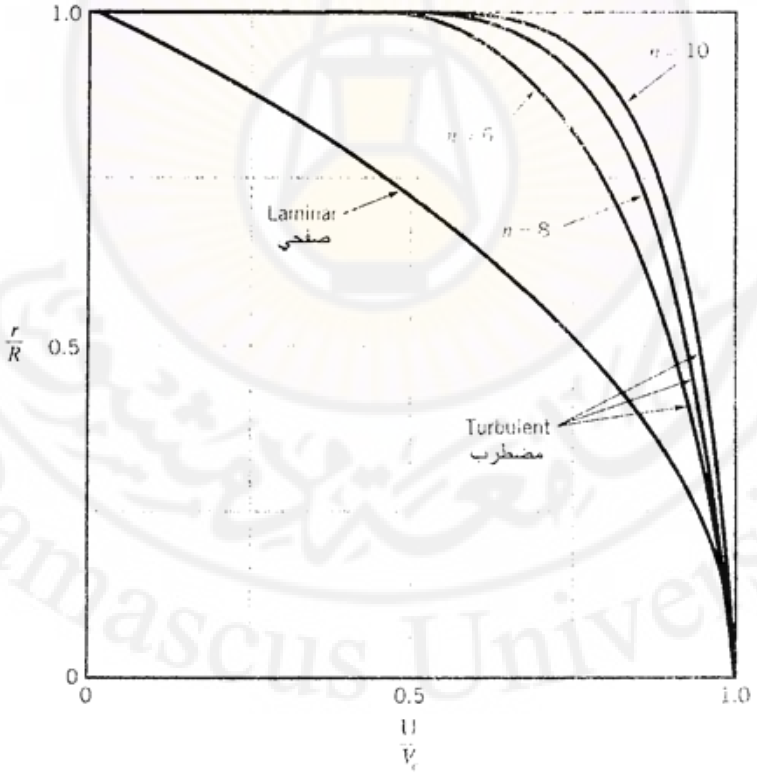
حيث أن:

- V_c: السرعة عند محور الأنبوب.
- n: معامل تجريبي يتعلق بقيمة عدد رينولدز ضمن الأنبوب.

ويبين الشكل (٨-٥) قيم المعامل التجريبي n تبعاً لعدد رينولدز في الأنبـــوب. كمـــا يبين الشكل (٨-٦) منحنيات توزع السرعة حسب قيم المعامل n.



الشكل (٨-٥). العلاقة بين عدد رينولدز وقيم المعامل n في الأنابيب الملساء هيدروليكياً [6]



الشكل (٨-٦). نماذج مختلفة لتوزع سرعة الجريان في الأنابيب [6]

٨-٧. الأنابيب الملساء والأنابيب الخشنة هيدروليكياً

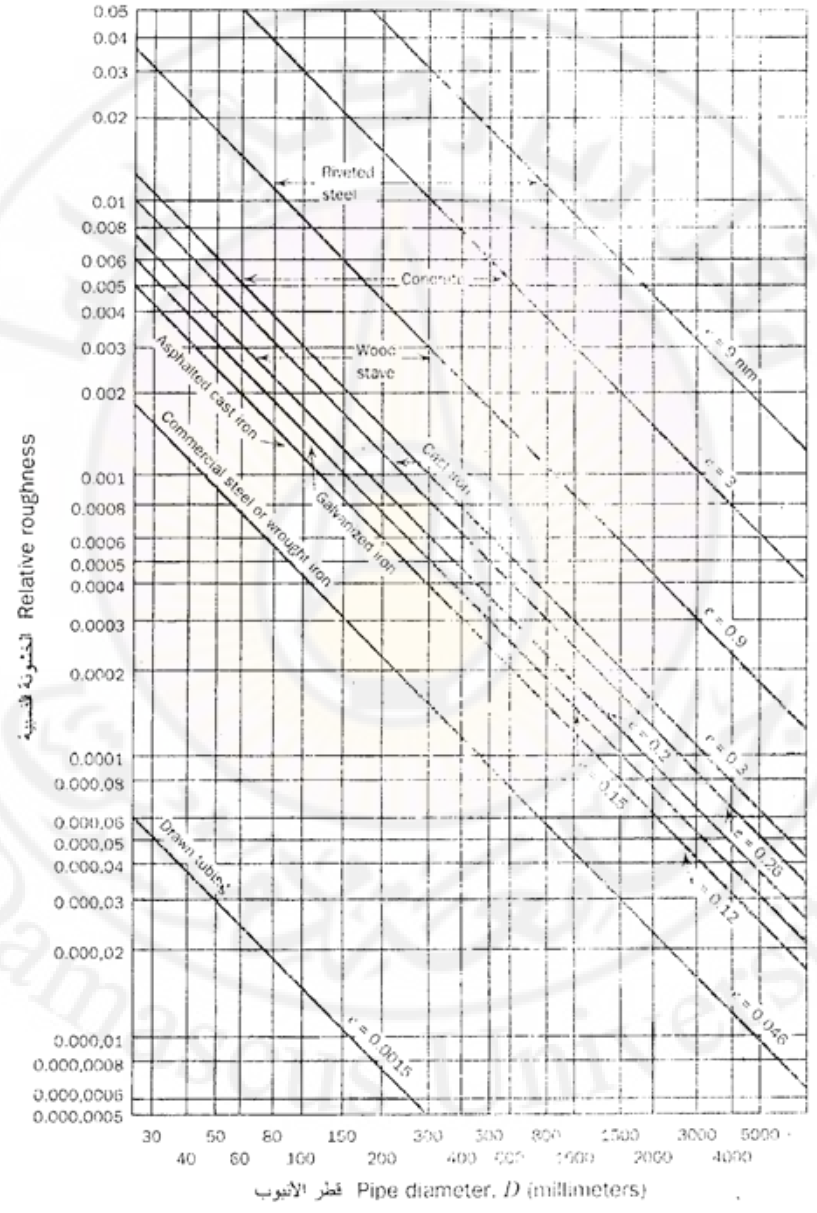
Smooth and Rough Pipes

من المعروف أن السطح الداخلي لأي أنبوب لايمكن أن يكون أملسَ، ولابد أن يحتوي على نتوءات تكون غالباً غير منتظمة. فلو أخذنا مقطعاً في جدار أنبوب، فإننا ندعو السماكة الوسطية للنتوءات الداخلية في الأنبوب الخشونة المطلقة للأنبوب أو اختصاراً **خشونة الأنبوب** ***Pipe Roughness***، ويرمز لها بالرمز ε. وبالنسبة للأنابيب الجديدة فإن خشونتها تتعلق بنوع المادة التي يصنع منها، فخشونة الأنبوب الزجاجي مثلاً أقل من خشونة الأنبوب الفولاذي. أما بالنسبة للأنابيب القديمة المستعملة فعدا عن نوع مادة الأنبوب، فإن الخشونة تتعلق أيضاً بفترة استخدام الأنبوب، وبنوع السائل الجاري وخاصة مواصفاته الفيزوكيميائية، وذلك بسبب تراكم المواد وتكلسها على جدران الأنبوب. وتقاس عادة خشونة الأنبوب بالميليمتر. ويبين الجدول (٨-٢) قيم الخشونة المطلقة لبعض أنواع الأنابيب الأكثر استخداماً.

الجدول (٨-٢). قيم الخشونة المطلقة لأهم أنواع الأنابيب حسب
The American Water Works Association (1981)

نوع مادة الأنبوب	الخشونة الوسطية [mm]	الخشونة التصميمية [mm]
فونت مبطن من الداخل	0.102	0.125
فونت غير مبطن من الداخل	0.226	0.25
حديد مغلفن	0.102	0.125
حديد مطاوع	0.050	0.050
فولاذ مبطن من الداخل	0.056	0.05
فولاذ جديد غير مبطن من الداخل	0.028	0.04
فولاذ قديم يكسوه الصدأ	1.25	1.25
أسبيستوس غير مبطن	0.028	0.04
بلاستيك (بولي ايتيلين+P.V.C)	0.03	0.04
بيتون مصبوب في المكان- أملس	0.50	0.60
بيتون مصبوب في المكان- خشن	1.50	2.00

وإذا نسبنا خشونة الأنبوب إلى قطره $\frac{\varepsilon}{D}$، فإننا ندعو هذه النسبة **الخشونة النسبية** ***Relative Roughness*** ويبين الشكل (٨-٧) قيم الخشونة النسبية لأنابيب مختلفة بدلالة القطر، ونوع مادة الصنع.

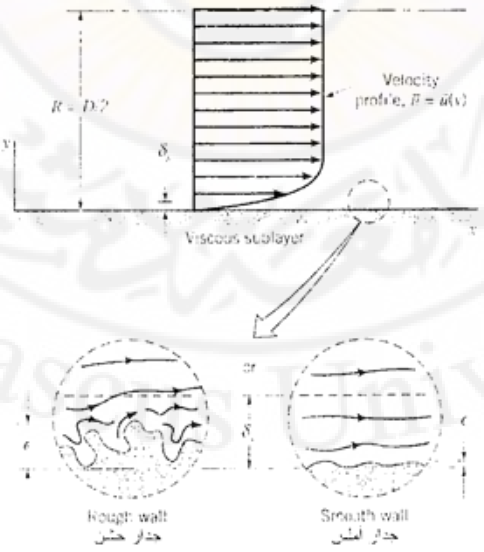


الشكل (٨-٧). قيم الخشونة النسبية لبعض أنواع الأنابيب، حسب قطر الأنبوب، ونوع مادة الأنبوب [3]

عندما لاتنفذ النتوءات الداخلية لسطح الأنبوب من خلال الطبقة الصفحية التحتية التي سماكتها δ_v، فإن السطح الداخلي للأنبوب يكون أملسَ هيدروليكياً من وجهة نظر ميكانيك السوائل. وإذا امتد تأثير النتوءات مخترقاً الطبقة الصفحية التحتية، فإن هذه الطبقة سوف تتكسر ولايصبح السطح بعد ذلك أملساً هيدروليكياً، كما هو مبين في الشكل (٨-٨). ويمكن القول إنه عندما:

- $\delta_v > 5 \cdot \varepsilon$: فإن الأنبوب يعتبر أملسَ هيدروليكياً، أو يسمى الأنبوب الأملس ***Smooth Pipe***.
- $\delta_v < 0.3 \cdot \varepsilon$: فإن الأنبوب يعتبر خشناً هيدروليكياً، أو يسمى الأنبوب الخشن ***Rough Pipe***.
- $0.3 \cdot \varepsilon < \delta_v < 5 \cdot \varepsilon$: فإن الأنبوب يتصرف بصورة انتقالية، أي أنه ليس أملسَ أو خشناً.

تقل سماكة الطبقة الصفحية التحتية في أنبوب ما مع زيادة عدد رينولدز. ويلاحظ أن الأنبوب نفسه يمكن أن يكون أملسَ هيدروليكياً مقابل قيم منخفضة لعدد رينولدز، وخشناً هيدروليكياً مقابل قيم مرتفعة لعدد رينولدز.



الشكل (٨-٨). مفهوم الأنبوب الأملس والخشن هيدروليكياً [6]

٨-٨. معادلة الطاقة في الأنابيب Energy Equation of the Flow in Pipes

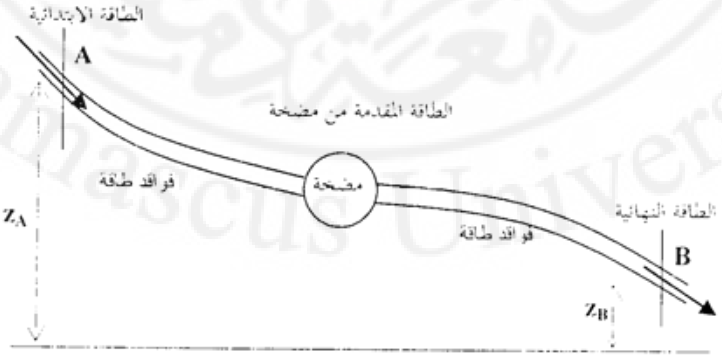
عند دراسة معادلة الطاقة للجريان المثالي، كنا نعتبر أن فواقد الطاقة معدومة بسبب انعدام لزوجة السائل. ولكن بسبب لزوجة السائل الموجودة فعلاً، تنشأ إجهادات قص بين السائل والجدار الصلب عندما يجري السائل بجوار حدود صلبة كجدران الأنابيب، مما يؤدي إلى إعاقة الجريان، ونشوء مقاومة احتكاكية تسبب فواقد في الطاقة الكلية للسائل. وحيث أننا نتعامل عادة مع جريان مستمر، فمن الأنسب التعبير عن هذه الفواقد على أنها فواقد في الطاقة لواحدة الوزن من السائل. ونميز هنا نوعين من الفواقد: فواقد طولية أوفواقد احتكاك، وفواقد محلية أو موضعية.

يتم تحليل الجريان في الأنابيب عادة بتطبيق معادلة الطاقة (معادلة برنوللي) بين مقطعين من الجريان. ففي الشكل (٨-٩) حيث يجري السائل من المقطع A إلى المقطع B يمكن كتابة:

الطاقة الكلية في واحدة الوزن عند المقطع B	=	الطاقة الكلية في واحدة الوزن عند المقطع A	−	فواقد الطاقة نتيجة الاحتكاك والفواقد + المحلية في واحدة الوزن	الطاقة المفقودة لواحدة الوزن ما بين المقطعين (A,B)

أي أن:

$$\frac{p_B}{\gamma}+\frac{V_B^2}{2\cdot g}+z_B=\frac{p_A}{\gamma}+\frac{V_A^2}{2\cdot g}+z_A-h_f-h_m+H_p \qquad (٨-٥١)$$



الشكل (٨-٩). تطبيق معادلة الطاقة مع أخذ الفواقد بالحسبان

حيث أن:

- $\frac{P_A}{\gamma}$ ، $\frac{P_B}{\gamma}$: طاقة الضغط لواحد الوزن من السائل في المقطعين A, B .
- $\frac{V_A^2}{2 \cdot g}$ ، $\frac{V_B^2}{2 \cdot g}$: الطاقة الحركية لواحدة الوزن من السائل عند المقطعين A, B .
- h_f : الفواقد في الطاقة لواحدة الوزن من السائل بسبب الاحتكاك أو الفواقد الطولية.
- h_m : الفواقد المحلية.
- H_p : الطاقة الإضافية المقدمة لواحدة الوزن من للسائل، وغالباً ما تؤخذ من مضخة.

٨-٩. حساب فواقد الطاقة Calculation of Head Losses

تتألف فواقد الطاقة الكلية في الأنابيب، من فواقد طولية تحصل نتيجة احتكاك السائل مع جدار الأنبوب ويطلق عليها فواقد الاحتكاك، ومن فواقد محلية أو موضعية تحدث نتيجة التضيقات أو التغيرات التي يعاني منها تيار السائل أثناء الجريان. وسوف ندرس فيما يلي الحساب التفصيلي لكل من هذه الفواقد.

٨-٩-١. فواقد الاحتكاك في الأنابيب-علاقة دارسي-فايسباخ

Friction Losses –Darcy-Weisbach Equation

تتشكل هذه الفواقد نتيجة لاحتكاك السائل بجدران الأنبوب. وتدعى: **فواقد الاحتكاك** ***Friction Losses*** أو **الفوقد الرئيسة** ***Major Losses*** أو **الفواقد الطولية** ***Liner Losses***. ولقد أثبتت التجارب، أن انخفاض الضغط Δp في الأنابيب نتيجة الاحتكاك بين مقطعين من الأنبوب، يتعلق بما يلي:

- L : المسافة بين مقطعين من الأنبوب (m).
- D : قطر الأنبوب (m).
- V : السرعة الوسطية للجريان في الأنبوب (m/s).

- ε : الخشونة المطلقة (m).
- μ : اللزوجة التحريكية للسائل $(kg/m\cdot s)$.
- ρ : الكتلة النوعية للسائل (kg/m^3).

ويمكن رياضياً التعبير عن ذلك بالعلاقة:

$$\Delta p = F(D, L, \varepsilon, V, \mu, \rho) \qquad (٥٢-٨)$$

وباستخدام نظرية **التحليل البعدي** ***Dimensional Analysis***، يمكن كتابة التابع السابق كما يلي:

$$\frac{\Delta p}{\rho \cdot V^2} = \frac{1}{2} \cdot f\left(\frac{L}{D}, \frac{\varepsilon}{D}, \frac{V \cdot \rho \cdot D}{\mu}\right) \qquad (٥٣-٨)$$

أو:

$$\frac{\Delta p}{\rho} = \frac{V^2}{2} \cdot f\left(\frac{L}{D}, \frac{\varepsilon}{D}, \mathrm{Re}\right) \qquad (٥٤-٨)$$

حيث: $\frac{\Delta p}{\rho}$ - فواقد الاحتكاك في واحدة الكتلة من السائل. وللحصول على فواقد الإحتكاك في واحدة الوزن نقسم على g، فنحصل على:

$$\frac{\Delta p}{\rho \cdot g} = \frac{V^2}{2 \cdot g} \cdot f\left(\frac{L}{D}, \frac{\varepsilon}{D}, \mathrm{Re}\right) \qquad (٥٥-٨)$$

ويرمز لفواقد الاحتكاك في واحدة الوزن بالرمز h_f، وبالتالي تكتب العلاقة السابقة على الشكل:

$$h_f = \frac{V^2}{2 \cdot g} \cdot f\left(\frac{L}{D}, \frac{\varepsilon}{D}, \mathrm{Re}\right) \qquad (٥٦-٨)$$

وهي تبين أن فواقد الاحتكاك تتبع لعدد رينولدز Re، وللخشونة النسبية $\frac{\varepsilon}{D}$، وللنسبة $\frac{L}{D}$. وقد بينت التجارب، أن فواقد الاحتكاك تتبع بشكل خطي للنسبة $\frac{L}{D}$. وبناء على ذلك يمكن كتابة العلاقة السابقة كما يلي:

$$h_f = \frac{L}{D} \cdot \frac{V^2}{2 \cdot g} \cdot \phi\left(\frac{\varepsilon}{D}, \mathrm{Re}\right) \qquad (٥٧-٨)$$

حيث يلاحظ أن التابع ϕ يتعلق بعدد رينولدز وبالخشونة النسبية، ويطلق عليه **معامل الاحتكاك** ***Friction Factor***، ويرمز له بالرمز λ. أي أن:

$$\lambda = \phi\left(\frac{\varepsilon}{D}, \mathrm{Re}\right) \qquad (٥٨-٨)$$

وبالتالي تصبح علاقة فواقد الاحتكاك كما يلي:

$$h_f = \lambda \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{V^2}{2 \cdot g} \qquad (٥٩-٨)$$

تدعى هذه العلاقة **علاقة دراسي-فايسباخ** ***Darcy-Weisbach Equation*** لحساب فواقد الاحتكاك في الأنابيب. وسنبحث في الفقرتين القادمتين، في تحديد معامل الاحتكاك ضمن الأنابيب في حالة الجريان الصفحي والجريان المضطرب.

٨-٩-١-١. معامل الاحتكاك للجريان الصفحي

Friction Factor of Laminar Flow

وجدنا أثناء دراستنا للجريان الصفحي في الأنابيب أن فواقد الاحتكاك حسب هاجن- بواسوي تعطى بالعلاقة:

$$h_f = \frac{32 \cdot \mu \cdot L \cdot V}{\rho \cdot g \cdot D^2}$$

ولدينا:

$$h_f = \lambda \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{V^2}{2 \cdot g}$$

وبمقارنة العلاقتين السابقتين، نستنتج أن:

$$\lambda = 64 \cdot \frac{\mu}{\rho \cdot V \cdot D} = \frac{64}{\mathrm{Re}} \qquad (٦٠-٨)$$

أي أن معامل الاحتكاك في الجريان الصفحي يتبع فقط لعدد رينولدز في الأنبوب، وليس له علاقة بخشونة الأنبوب.

٨-٩-١-٢. معامل الاحتكاك للجريان المضطرب

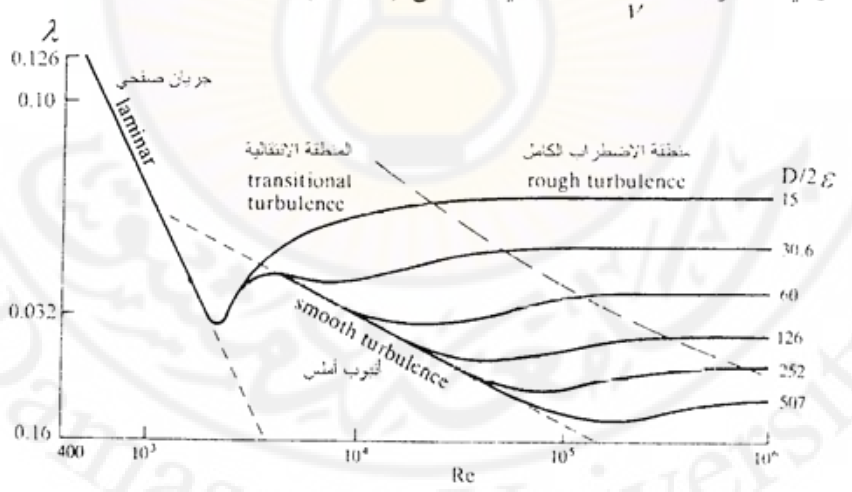
Friction Factor of Turbulent Flow

من العلاقة (٨-٥٨)، نلاحظ أن معامل الاحتكاك λ في الحالة العامة، يتعلق

بعدد رينولدز Re وبالخشونة النسبية $\frac{\varepsilon}{D}$. وفي لاتوجد واقعياً علاقات تحليلية تستنتج رياضياً لتحديد قيمة معامل الاحتكاك في الجريان المضطرب. وجميع العلاقات المستخدمة عملياً استنتجت اعتماداً على التجربة. ونذكر في الفقرات القادمة أهم الدراسات والعلاقات المستنتجة لتحديد معامل الاحتكاك عندما يكون الجريان مضطرباً.

نتائج تجارب نيكورادسي Nikoradse's Experimental Results

قام الباحث الألماني **نيكورادسي** ***Nikoradse*** في عام ١٩٣٠ بدراسات تجريبية لتحديد قيمة معامل الاحتكاك λ بدلالة عدد رينولدز Re، والخشونة التي عبر عنها بالنسبة $\frac{D}{2\cdot\varepsilon}$. واستخدم في تجاربه أنابيب ذات خشونات متنوعة، حصل عليها عن طريق لصق حبيبات من الرمل بأقطار مختلفة على السطوح الداخلية للأنابيب. وقام من أجل كل نسبة خشونة $\frac{D}{2\cdot\varepsilon}$ برسم منحني العلاقة بين معامل الاحتكاك λ وبين عدد رينولدز في الأنبوب $\frac{V\cdot D}{\nu}$، كما في الشكل (٨-١٠).



الشكل (٨-١٠). تجارب نيكورادسي [3]

ولقد ميز نيكورادسي بعد رسم المنحنيات خمس مناطق (الشكل ٨-١١):

- المناطق (1.2.3): لاحظ فيها أن معامل الاحتكاك يتعلق بعدد رينولدز فقط، وليس

هناك أي تأثير للخشونة، أي أن: $\lambda = \phi(\mathrm{Re})$. ويكون الأنبوب في هذه المناطق أملسَ هيدروليكياً. أما الجريان فيكون صفحياً في المنطقة (1)، وانتقالياً في المنطقة (2)، ومضطرباً في المنطقة (3).

- المنطقة 5 : الجريان هنا مضطرب، ومعامل الاحتكاك لا يتعلق بعدد رينولدز بل يتبع فقط خشونة الأنابيب. ويكون الأنبوب في هذه المنطقة خشناً هيدروليكياً.

- المنطقة 4: الجريان هنا مضطرب، ومعامل الاحتكاك تابع لعدد رينولدز وللخشونة.



الشكل (٨-١١). مناطق الجريان حسب نيكورادسي

علاقة بلاسيوس Blasius Equation

في عام ١٩١٣ وضع الألماني **بلاسيوس** ***Blasius*** علاقة رياضية لحساب معامل الاحتكاك للأنابيب الملساء هيدروليكياً، عندما لا يتجاوز عدد رينولدز القيمة $\mathrm{Re} \le 10^5$:

$$\lambda = \frac{0.316}{\mathrm{Re}^{0.25}} \qquad (٦١-٨)$$

علاقة بوركا Burka Equation

قام الباحث **بوركا** ***Burka*** بتوسيع مجال علاقة بلاسيوس، فوضع علاقته بحيث يمكن استخدامها للأنابيب الملساء هيدروليكياً مهما تكن قيمة عدد رينولدز من أجل الجريان في الأنبوب:

$$\lambda = \frac{0.21}{\mathrm{Re}^{0.21}} \qquad (٦٢-٨)$$

علاقات فون كارمن – براندتل Von Karman-Prandtl Equations

بالاعتماد على التجارب التي قام بها نيكورادسي، وعلى الدراسات التي قام بها كل من الألماني **براندتل** ***Prandtl*** والمجري فون **كارمن** ***Von Karman*** وخاصة في مجال الطبقة الحدية، فقد تمكن هذان الأخيران في عام ١٩٣٠ من وضع علاقتين تجريبيتين لتحديد قيمة معامل الاحتكاك، وذلك حسب السطح الداخلي للأنبوب. الأولى للأنابيب الملساء هيدروليكياً وهي الصيغة:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \cdot \log\left(\frac{\mathrm{Re} \cdot \sqrt{\lambda}}{2.51}\right) \qquad (٦٣-٨)$$

والثانية للأنابيب الخشنة هيدروليكياً وهي الصيغة:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \cdot \log\left(\frac{3.7 \cdot D}{\varepsilon}\right) \qquad (٦٤-٨)$$

علاقة كولبروك–وايت Kolebrook-White Equation

قام الباحثان الإنكليزيان **كولبروك ووايت** **Kolebrook-White** في عام ١٩٣٧ بعد دراسات عديدة قاما بها بتجميع علاقات فون كارمن–براندتل للأنابيب الملساء والخشنة هيدروليكياً ضمن علاقة واحدة يمكن استخدامها لجميع أنواع الأنابيب، وضمن أي مجال لعدد رينولدز وذلك عندما يكون الجريان مضطرباً:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \cdot \log\left(\frac{\varepsilon}{3.7 \cdot D} + \frac{2.51}{\mathrm{Re} \cdot \sqrt{\lambda}}\right) \qquad (٦٥-٨)$$

وأصبحت هذه العلاقة منذ نشرها الأكثر استخداماً لدى المهندسين. ولكن المشكلة الأساسية في هذه العلاقة هي أن حلها معقد نسبياً نظراً لوجود λ في كلا طرفي العلاقة.

مخطط مودي The Moody Diagram

تعد علاقة كولبروك–وايت من العلاقات الدقيقة، لكنها صعبة الحل بشكل مباشر لوجود معامل الاحتكاك λ في طرفي المعادلة كما أسلفنا. وهذا ما دفع الباحث الأمريكي **مودي** ***Moody*** في عام ١٩٤٠ إلى تسهيل ذلك عن طريق تمثيل تجارب

نيكورادسي ودراسات فون كارمن-براندتل وكولبروك-وايت على شكل مخطط سهل الاستخدام، يمكننا من حساب معامل الاحتكاك بعد معرفة الخشونة النسبية وعدد رينولدز في الأنبوب، كما هو مبين في (الشكل ٨-١٢). إضافة لذلك قدم مودي علاقة رياضية بسيطة وسهلة الاستخدام لحساب معامل الاحتكاك تعرف **بعلاقة مودي** ***Moody Equation***:

$$\lambda = 0.0055 \cdot \left[1 + \left(2000 \cdot \frac{\varepsilon}{D} + \frac{10^6}{\mathrm{Re}} \right)^{1/3} \right] \qquad (٦٦-٨)$$

التي تعطي نتائج دقيقة نسبياً بخطأ لايتجاوز 5% من أجل عدد رينولدز ضمن المجال $4\times10^3 < \mathrm{Re} < 10^7$، ومن أجل $\varepsilon / D \le 0.01$.

علاقة بار Barr Equation

في عام ١٩٧٥ قدم الباحث **بار** ***Barr*** شكلاً مبسطاً لعلاقة كولبروك-وايت، حيث استبدل الحد الذي لا يمكن من حل العلاقة بشكل مباشر، بحد آخر سهّل حلها كثيراً وبدقة كبيرة، حيث لا يتجاوز الخطأ المرتكب 1% من أجل $\mathrm{Re} > 10^5$:

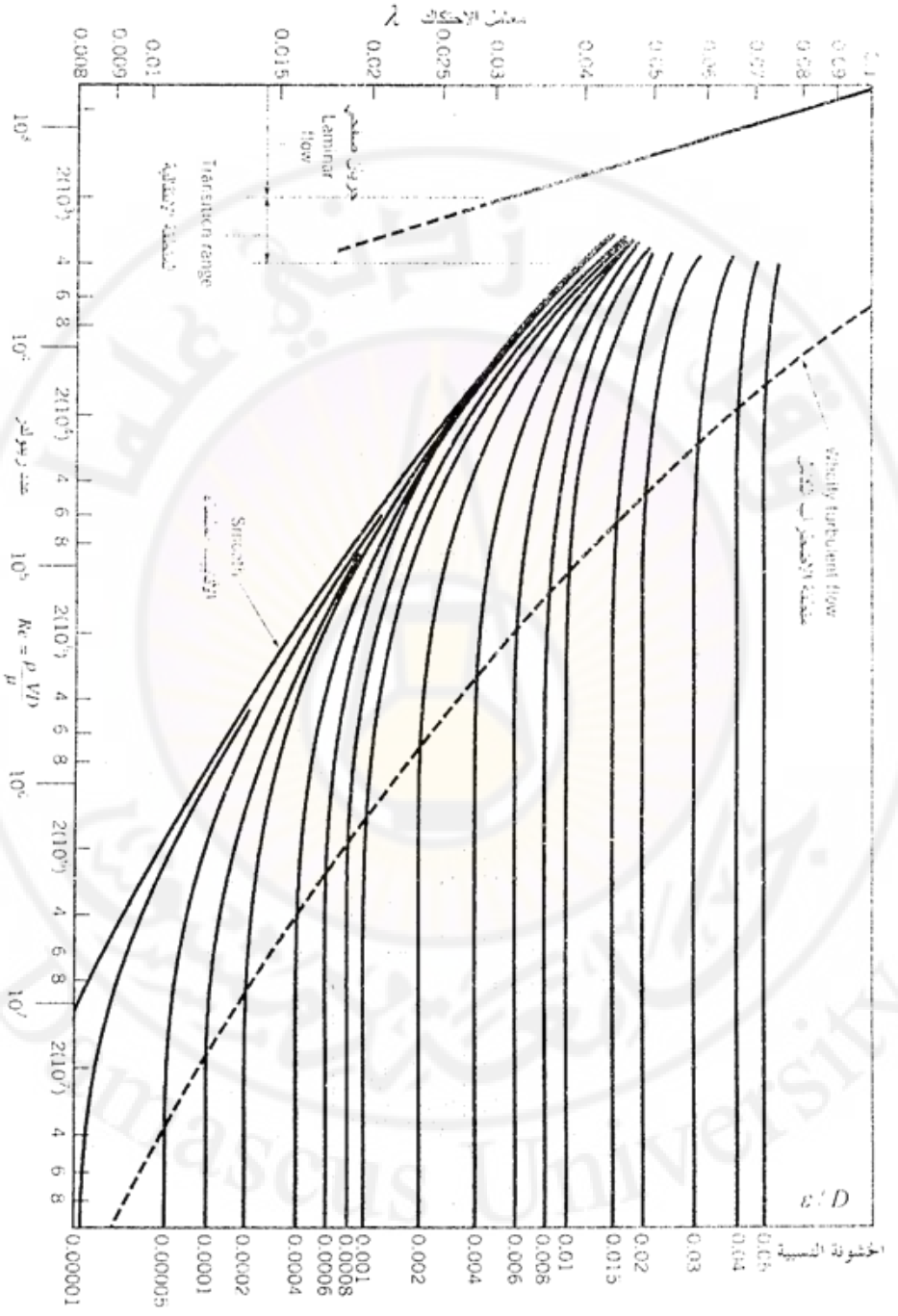
$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \cdot \log\left(\frac{\varepsilon}{3.7 \cdot D} + \frac{5.1286}{\mathrm{Re}^{0.89}} \right) \qquad (٦٧-٨)$$

علاقة سوامي Swamee Equation

في عام ١٩٧٦ قام الباحث **سوامي** ***Swamee*** في الولايات المتحدة الأمريكية بنشر بحث في مجلة ***Journal of the Hydraulics Division***، قدم فيه علاقة سهلة نسبياً لحساب معامل الاحتكاك بخطأ لايتجاوز 1%:

$$\lambda = \frac{0.25}{\left[\log\left(\frac{\varepsilon}{3.7 \cdot D} + \frac{5.74}{\mathrm{Re}^{0.9}} \right) \right]^2} \qquad (٦٨-٨)$$

ويجب الانتباه إلى أن الحد اللوغاريمي الموجود في المقام يعطي نتيجة سالبة، ولكن تزال هذه الإشارة بعملية التربيع.



الشكل (٨-١١). مخطط مودي لحساب معامل الاحتكاك في الأنابيب [6]

٨-٩-١-٣. علاقات تجريبية ومخططات لحساب فواقد الاحتكاك الأنابيب

Empirical Head Loss Equations

المشكلة الرئيسة في علاقة دارسي- فايسباخ لحساب فواقد الاحتكاك، هي تقدير معامل الاحتكاك، الذي كما لاحظنا يتعلق بالخشونة النسبية من جانب وبعدد رينولدز من جانب آخر.

فكر عدد من الباحثين بوضع علاقات تجريبية عملية وسهلة الاستخدام لحساب فواقد الاحتكاك في الأنابيب بشكل مباشر. كما نشرت أيضاً بعض مراكز الأبحاث الهيدروليكية والشركات المنتجة للأنابيب مخططات سهلة الاستخدام لحساب فواقد الاحتكاك في الأنابيب. وسنأتي على ذكر بعضها فيما يلي.

علاقة هازن-وليامز Hazen-Williams Equation

قام الباحثان **هازن** ***Hazen*** **ووليامز** ***Williams*** بوضع علاقة تجريبية، تمكن مباشرة من حساب فواقد الاحتكاك بين مقطعين من أنبوب يجري فيه الماء، بدلالة طول المسافة بين المقطعين، وقطر الأنبوب، وغزارة الجريان. وتستخدم هذه العلاقة بشكل واسع في الولايات المتحدة الأمريكية في حل شبكات الأنابيب. أما هذه العلاقة فهي:

$$h_f = 6.81 \cdot \frac{L}{D^{1.167}} \cdot \left(\frac{V}{C}\right)^{1.852} \qquad (٦٩-٨)$$

أو:

$$V = 0.355 \cdot D^{0.63} \cdot \left(\frac{h_f}{L}\right)^{0.54} \qquad (٧٠-٨)$$

وبدلالة الغزارة تأخذ العلاقة الشكل التالي:

$$h_f = 10.65 \cdot \frac{L}{D^{4.871}} \cdot \left(\frac{Q}{C}\right)^{1.852} \qquad (٧١-٨)$$

حيث أن:

- L : المسافة بين المقطعين (m).

- V : السرعة الوسطية للجريان (m/s).
- Q : غزارة الجريان المارة في الأنبوب (m^3/s).
- D : قطر الأنبوب (m).
- C : ثابت هازن- وليامز. وهو يتعلق بنوع الأنبوب، وقطره.

ويوضح الجدول (٨-٣) قيم ثابت هازن- وليامز لأنواع مختلفة من الأنابيب، وذلك حسب قطر الأنبوب.

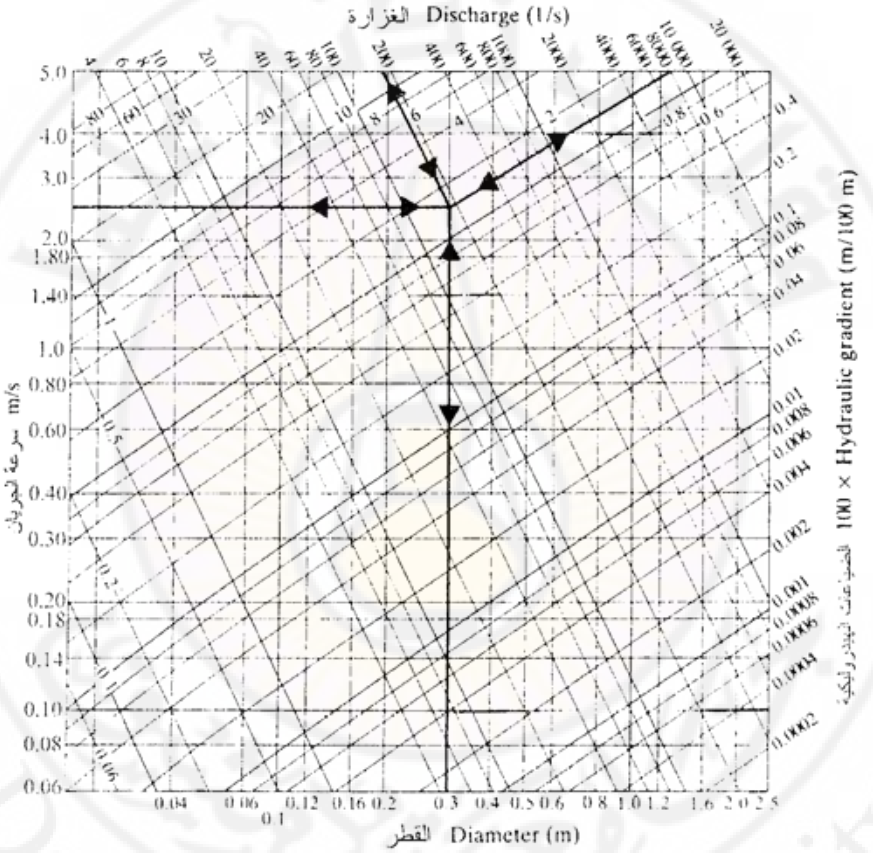
الجدول (٨-٣). قيم ثابت هازن وليامز لبعض انواع الأنابيب حسب
[9] The American Water Works Association (1981)

نوع الأنبوب	قطر الأنبوب cm					
	2.5	7.6	15.2	30.5	61	122
فونت غير مبطن أملس وجديد	-	121	125	130	132	134
فونت مبطن أملس وجديد	-	129	133	138	140	141
فونت مبطن- متوسط الاهتراء- عمر ٣٠	-	83	90	97	102	107
فونت مبطن- متوسط الاهتراء- عمر ٦٠	-	69	79	85	92	96
حديد مغلفن - أملس وجديد	120	129	133	-	-	-
حديد مطاوع - أملس وجديد	129	137	142	-	-	-
فولاذ مبطن أملس وجديد	129	137	142	145	148	148
فولاذ غير مبطن أملس وجديد	134	142	145	147	150	150
أسبستوس مبطن أملس ونظيف	-	147	149	150	152	-
أسبستوس غير مبطن أملس ونظيف	-	142	145	147	150	-
بلاستيك (بولي اينيلين-PVC)	140	147	149	150	152	153
بيتون مسبق الصنع- أملس ونظيف	-	-	-	147	150	150

مخططات Hydraulics Research Station

في عام ١٩٥٨ قدم الباحث ***Ackers*** من محطة الأبحاث الهيدروليكية في بريطانيا ***Hydraulics Research Station*** عدة مخططات سهلة الاستخدام في تصميم الأنابيب،

وكل مخطط يوافق خشونة معينة. حيث يمكن الحصول على فواقد الاحتكاك مباشرة، حسب قطر الأنبوب، وغزارة الجريان أو حسب السرعة الوسطية للجريان، دون الحاجة لحساب معامل الاحتكاك. ويبين الشكل(٨-١٣) إحدى هذه المخططات من أجل خشونة مطلقة $\varepsilon = 0.03mm$. علماً أنه يوجد لكل مخطط مستقل لكل خشونة.



الشكل (٨-١٣). حساب فواقد الاحتكاك للأنابيب ذات الخشونة $\varepsilon = 0.03mm$

حسب *Hydraulics Research Station* [3]

مثال ٢

أحسب فوقد الاحتكاك في أنبوب أفقي طوله $L = 750m$ ، وقطره $D = 40mm$ ، وخشونته المطلقة $\varepsilon = 0.08mm$. وذلك عندما يجري فيه الماء بغزارة تساوي:

١. $Q = 4\ell/\min$.

٢. $Q = 30\ell/\min$

علماً بأن اللزوجة الحركية للماء تساوي $\nu = 1.14\times10^{-6} m^2/s$.

الحل:

- ***عندما يجري الماء بغزارة*** $Q = 4\ell/\min$:

لدينا السرعة الوسطية في الأنبوب:

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{4\times10^{-3}/60}{\frac{\pi}{4}\cdot 0.04^2} = 0.053 m/s$$

ولتحديد نوع الجريان نحسب عدد رينولدز في الأنبوب، فنجد أن:

$$\mathrm{Re} = \frac{V\cdot D}{\nu} = \frac{0.053\cdot 0.04}{1.14\times10^{-6}} = 1859.6 < 2000$$

فالجريان في الأنبوب صفحي، ونحسب معامل الاحتكاك الطولي من العلاقة:

$$\lambda = \frac{64}{\mathrm{Re}} = 0.0344$$

ونحسب الفواقد الطولية بالصيغة:

$$h_f = \lambda\cdot\frac{L}{D}\cdot\frac{V^2}{2\cdot g}$$

وبالتعويض بالقيم العددية، نجد أن:

$$h_f = 0.0344\cdot\frac{750}{0.04}\cdot\frac{0.053^2}{2\cdot g} = 92.4\times10^{-3} m$$

- ***عندما يجري الماء بغزارة*** $Q = 30\ell/\min$:

لنحسب أولاً السرعة الوسطية في الأنبوب:

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{30\times10^{-3}/60}{\frac{\pi}{4}\cdot 0.04^2} = 0.397 m/s$$

ولتحديد نوع الجريان في هذا الحالة نحسب عدد رينولدز في الأنبوب:

$$\mathrm{Re} = \frac{V \cdot D}{\nu} = \frac{0.397 \cdot 0.04}{1.14 \times 10^{-6}} = 13947$$

فالجريان في الأنبوب مضطرب.

نحسب الآن الخشونة النسبية للأنبوب من العلاقة:

$$\frac{\varepsilon}{D} = \frac{0.08}{40} = 0.002$$

ومن مخطط مودي، نجد أن $\lambda = 0.032$ ، ومنه فالفواقد الطولية تساوي:

$$h_l = 0.032 \cdot \frac{750}{0.04} \cdot \frac{0.397^2}{2 \cdot g} = 4.819m$$

٨-٩-٢ الفواقد المحلية Local Losses

لا تقتصر الفواقد في الأنابيب على الفواقد الطولية أو فواقد الاحتكاك التي درسناها سابقاً. ولكن هناك نوع آخر من الفواقد تدعى كما أسلفنا **الفواقد المحلية أو الفواقد الموضعية** ***Local Losses***، تسببها أي تغيرات في شكل الأنبوب وأبعاده، وهي تؤدي إلى تشكل دوامات تستهلك قسماً من طاقة السائل. ولكن هذه الفواقد ضئيلة، إذا ما قورنت بفواقد الاحتكاك لذلك تدعى أحياناً **الفواقد الثانوية** ***Minor Losses***.

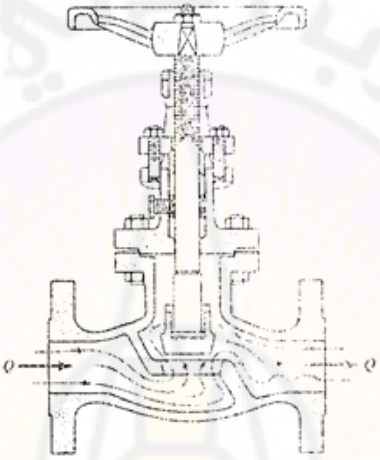
ويمكن حدوث الفواقد المحلية بأشكال عديدة منها:

- الفواقد الناتجة عن توسع الأنبوب بشكل فجائي أو تدريجي.
- الفواقد الناتجة عن تضيق الأنبوب بشكل فجائي أو تدريجي.
- الفواقد الناتجة عن الانحناءات (الأكواع والتيهات بأنواعها).

وتكون الحالة أكثر تعقيداً عند وجود أكثر من نوع من الفواقد المذكورة أعلاه. فمثلاً عند جريان السائل عبر سكر، كما في الشكل (٨-١٤)، ينعطف التيار ويغير منحاه، ويضيق المقطع ثم يتسع. ولقد دلت التجارب العملية، على أن الفواقد المحلية h_m تكون تابعة فقط للطاقة الحركية، وتساوي:

$$h_m = k \cdot \frac{V^2}{2 \cdot g} \qquad (٧٢-٨)$$

حيث: k – **معامل الفاقد المحلي** ***Local Loss Coefficient***. وهو يتعلق بنوع وشكل التغير الذي يسببه، فيما إذا كان ناتجاً عن تبدل اتجاه الجريان، أو مساحة مقطعه. ونادراً هي الحالات التي يتم تحديد هذا المعامل حسابياً، ويتم تحديده تجريبياً بناءً على جداول خاصة ومخططات تصدر عن مراكز الأبحاث والمعامل المنتجة للأنابيب والوصلات والتجهيزات الميكانيكية. وسنورد فيما يلي الحالات الحسابية لإيجاد k.



الشكل (٨–١٤). جريان الماء عبر سكر [6]

٨–٩–٢–١. التوسع المفاجئ في المقطع Sudden Expansion

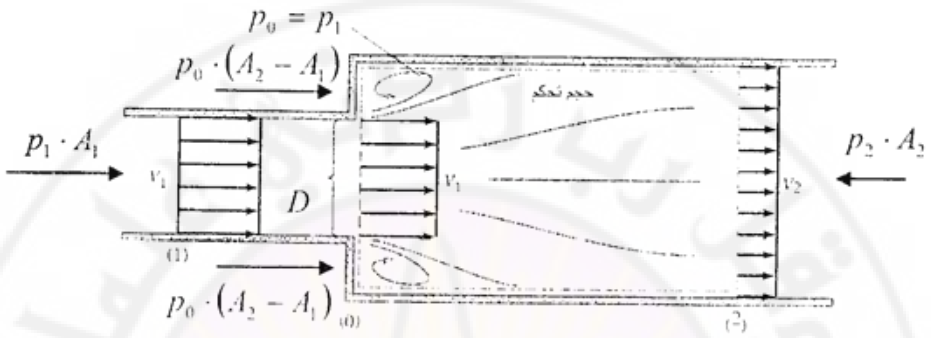
يمكن تحديد ثابت الفاقد المحلي في هذه الحالة بشكل تحليلي. فإذا كان لدينا أنبوب طويل يتوسع مقطعه فجأة، كما في الشكل (٨–١٥). فإن التيار ينفصل عن الجدران عند مقطع توسع الأنبوب، ويتوسع مقطع الجريان بشكل تدريجي حتى يلامس الجدران من جديد. ويتولد في الفراغ الحلقي المتشكل بين التيار والجدار دوامات تستهلك جزءاً من طاقة السائل.

لنفترض مقطعين من التيار، الأول (1) قبل التوسع مباشرة، والثاني (2) عند ملامسة التيار لجدران الأنبوب الكبير. وبتطبيق معادلة برنوللي بين هذين المقطعين، نجد أن:

$$\frac{p_2}{\gamma}+\frac{V_2^2}{2\cdot g}=\frac{p_1}{\gamma}+\frac{V_1^2}{2\cdot g}-h_m \qquad (٧٣-٨)$$

ومنه:

$$h_m = \left(\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2 \cdot g}\right) - \left(\frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2 \cdot g}\right) \qquad (٧٤-٨)$$



الشكل (٨-١٥). اسساج معامل الفواقد المحلية في حالة التوسع المفاجئ في مقطع الأنبوب

وبتطبيق معادلة كمية الحركة على كتلة السائل الموجودة بين المقطعين باتجاه محور الأنبوب، نحصل على:

$$\sum F = \rho \cdot Q \cdot (V_2 - V_1) \qquad (٧٥-٨)$$

ومنه:

$$p_1 \cdot A_1 + p_0 \cdot (A_2 - A_1) - p_2 \cdot A_2 = \rho \cdot Q \cdot (V_2 - V_1) \qquad (٧٦-٨)$$

وباعتبار أن:

$$Q = V_2 \cdot A_2 \qquad (٧٧-٨)$$

وبملاحظة أن $p_1 \approx p_0$ ، نجد أن:

$$(p_1 - p_2) \cdot A_2 = \rho \cdot V_2 \cdot A_2 \cdot (V_2 - V_1) \qquad (٧٨-٨)$$

بالإختصار ثم التقسيم على γ ، نستنتج أن:

$$\frac{p_1}{\gamma} - \frac{p_2}{\gamma} = \frac{V_2^2}{g} - \frac{V_1 \cdot V_2}{g} \qquad (٧٩-٨)$$

ويمكن كتابة هذه المعادلة على الشكل التالي:

$$\frac{p_1}{\gamma} - \frac{p_2}{\gamma} = \left(\frac{V_2^2}{2 \cdot g} - \frac{2 \cdot V_1 \cdot V_2}{2 \cdot g} + \frac{V_1^2}{2 \cdot g}\right) + \frac{V_2^2}{2 \cdot g} - \frac{V_1^2}{2 \cdot g} \qquad (٨٠-٨)$$

أو:

$$\left(\frac{p_1}{\gamma}+\frac{V_1^2}{2\cdot g}\right)-\left(\frac{p_2}{\gamma}+\frac{V_2^2}{2\cdot g}\right)=\frac{(V_1-V_2)^2}{2\cdot g} \qquad (٨١-٨)$$

وبالمقارنة بين المعادلتين (٨-٨١) و (٨-٧٤)، نجد أن:

$$h_m=\frac{(V_1-V_2)^2}{2\cdot g} \qquad (٨٢-٨)$$

ولكن لدينا من معادلة الاستمرار:

$$V_1\cdot A_1=V_2\cdot A_2 \qquad (٨٣-٨)$$

وبالتعويض في العلاقة (٨-٨٢)، نحصل على:

$$h_m=\left(1-\frac{A_1}{A_2}\right)^2\cdot\frac{V_1^2}{2\cdot g} \qquad (٨٤-٨)$$

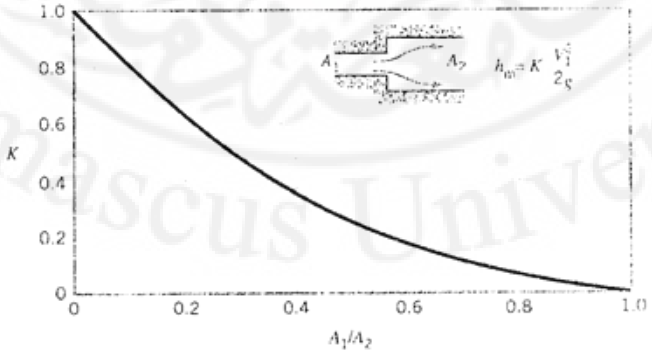
أو:

$$h_m=k\cdot\frac{V_1^2}{2\cdot g} \qquad (٨٥-٨)$$

حيث: k – **معامل الفواقد المحلية** ***Local Loss Coefficient***، ويساوي:

$$k=\left(1-\frac{A_1}{A_2}\right)^2 \qquad (٨٦-٨)$$

ويبين الشكل (٨-١٦) العلاقة التي تربط بين معامل الفواقد المحلية k والنسبة A_1/A_2 في حالة التوسع المفاجئ للأنابيب.



الشكل (٨-١٦). العلاقة بين معامل الفواقد المحلية k والنسبة A_1/A_2 عند التوسع المفاجئ في الأنبوب [6]

٨-٩-٢-٢. الجريان من أنبوب إلى خزان

Flow from a Pipe into a Reservoir

يمثل الجريان من أنبوب إلى خزان كبير حالة خاصة من التوسع الفجائي، وذلك مع اعتبار أنه في العلاقة (٨-٨٦) تكون النسبة $\frac{A_1}{A_2} \approx 0$. وعلى هذه الأساس يكون لدينا $k = 1$. ولا تختلف قيمة معامل الفواقد المحلية مهما كانت ظروف الدخول من الأنبوب إلى الخزان.

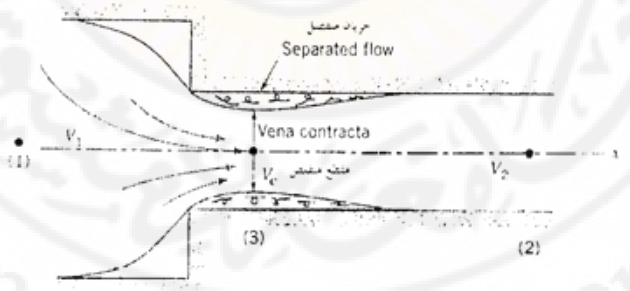
٨-٩-٢-٣. التضيق المفاجئ في المقطع Sudden Contraction

تبين تجريبياً أن تضيقاً في التيار يتشكل بالقرب من موضع التضيق المفاجئ للأنبوب، كما هو في الشكل (٨-١٧). و تحصل فواقد الطاقة بشكل رئيس بين المقطع الأصغري (3)، والمقطع (2) حيث يصبح الجريان منتظماً مرة أخرى. أي أن المسألة تكون مشابهة تماماً لحالة التوسع المفاجئ. وبناء على ذلك يمكن أن نكتب:

$$h_m = \frac{(V_c - V_2)^2}{2 \cdot g} \qquad (٨٧-٨)$$

أو:

$$h_m = \left(\frac{V_c}{V_2} - 1\right)^2 \cdot \frac{V_2^2}{2 \cdot g} \qquad (٨٨-٨)$$



الشكل (٨-١٧). استنتاج معامل الفواقد المحلية للتضيق المفاجئ في مقطع الأنبوب

بفرض أن A_c مساحة المقطع المتقلص، وأن C_c هو معامل التقلص ويساوي:

$$C_c = A_c / A_2 \qquad (٨٩-٨)$$

ومن معادلة الاستمرار نستطيع أن نكتب:

$$V_C \cdot A_C = V_2 \cdot A_2 \qquad (٩٠-٨)$$

أو:

$$V_C \cdot C_C \cdot A_2 = V_2 \cdot A_2 \qquad (٩١-٨)$$

ومنه:

$$\frac{V_C}{V_2} = \frac{1}{C_C} \qquad (٩٢-٨)$$

وبالتعويض في العلاقة (٨-٨٨)، نجد أن:

$$h_m = \left(\frac{1}{C_C} - 1\right)^2 \cdot \frac{V_2^2}{2 \cdot g} \qquad (٩٣-٨)$$

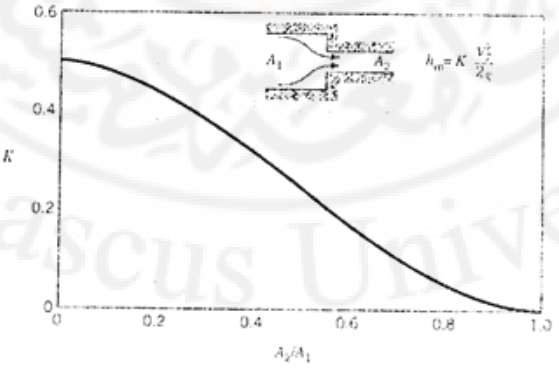
أو:

$$h_m = k \cdot \frac{V_2^2}{2 \cdot g}$$

حيث: k – معامل الفواقد المحلية، ويساوي:

$$k = \left(\frac{1}{C_C} - 1\right)^2 \qquad (٩٤-٨)$$

تتغير قيمة معامل التقلص حسب نسبة $\frac{A_2}{A_1}$، ويتم تحديد ذلك تجريبياً. ويبين الشكل (٨-١٨)، العلاقة بين نسبة التضيق ومعامل الفواقد المحلية في حالة التضيق المفاجئ للأنابيب.

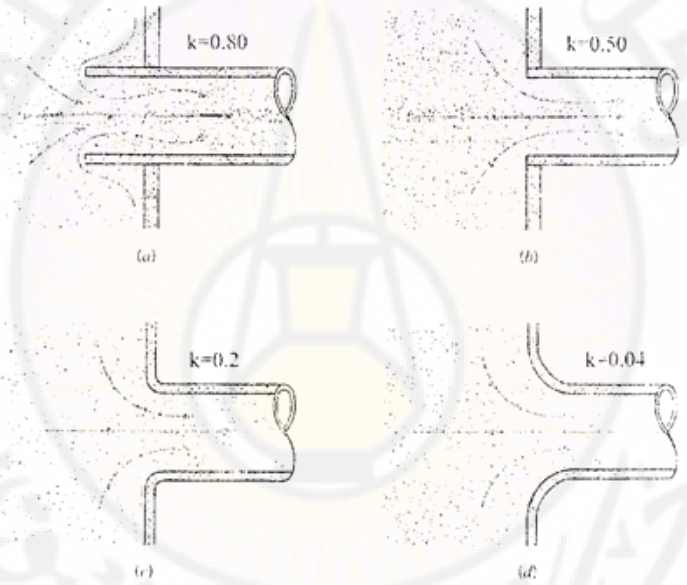


الشكل (٨-١٨). العلاقة بين معامل الفواقد المحلية والنسبة A_2 / A_1 – التضيق المفاجئ في الأنبوب [6]

٨-٩-٢-٤. الجريان من خزان إلى أنبوب

Flow from a Reservoir into a Pipe

تشبه هذه الحالة حالة التضيق في أنبوب، إلا أن المقطع A_1 يكون كبيراً جداً. وتعتمد قيمة معامل الفاقد المحلي على طبيعة اتصال الأنبوب مع الخزان، فيما إذا كان حاد الحواف، أم مدوراً. ويبين الشكل (٨-١٩) قيم معامل الفواقد المحلية لبعض الحالات ، حيث يلاحظ أن قيمة هذا المعامل تكون أكبر ما يمكن $k = 0.8$ في الحالة a، وأقل ما يمكن $k = 0.04$ في الحالة d.



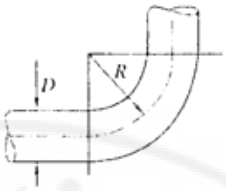
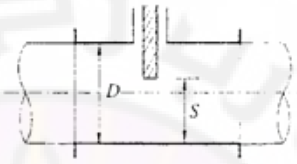
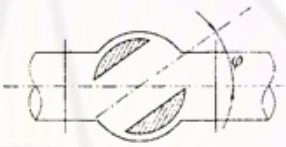
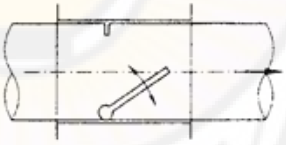
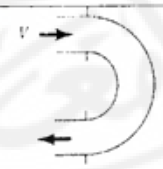
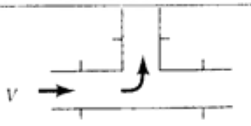
الشكل (٨-١٩). أشكال مختلفة لكيفية الدخول من خزان إلى أنبوب [6]

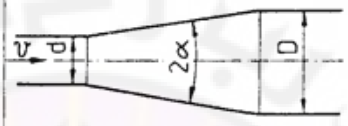
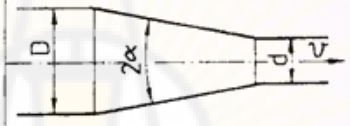
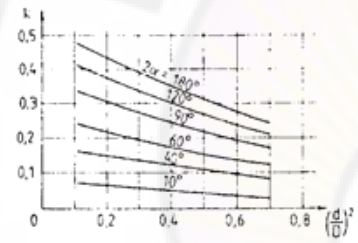
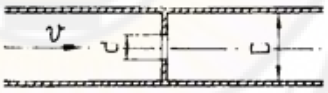
٨-٩-٢-٥. معامل الفواقد المحلية للملحقات الأنابيب

Loss Coefficient for Pipe Components

عند تصميم خطوط نقل المياه، والشبكات ومحطات الضخ، والمنشآت المائية الأخرى، تستخدم العديد من الوصلات والأكواع والسكور وأجهزة قياس التصاريف. وكلها تسبب فواقد محلية. لذلك على المهندس المصمم أن يرصد هذه التجهيزات بالكامل، ليتم حساب الفواقد المحلية لها. وبين الجدول (٨-٤) قيم معامل الفواقد المحلية لبعض أشكال الأكواع والوصلات والسكور.

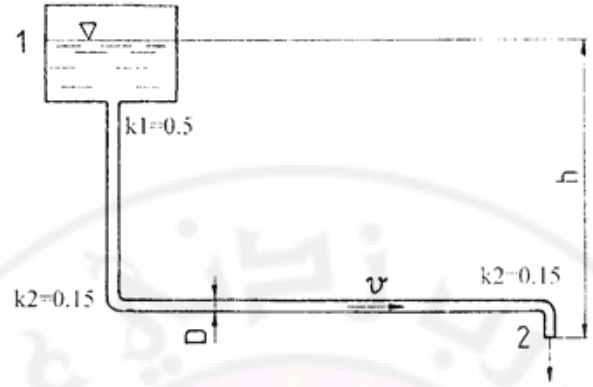
الجدول (٨-٤). معامل الفوافد المحلية لبعض أنواع الوصلات والسكور والأكواع [5,6,7]

كوع دائري قائم		$R/D=1, k=0.51$ $R/D=2, k=0.30$ $R/D=4, k=0.23$
سكر جارور		$S/D=1, k=0.15$ $S/D=0.75, k=0.26$ $S/D=0.5, k=2.1$ $S/D=0.25, k=17$
سكر كروي (دحلة)		$\varphi=0, k=0.05$ $\varphi=20^0, k=1.56$ $\varphi=45^0, k=31.2$
سكر موضعي		$D=25mm, k=6.5$ $D=50mm, k=4.5$ $D=100mm, k=4.1$
سكر عدم رجوع		$D=25mm, k=1.9$ $D=50mm, k=1.4$ $D=100mm, k=1.2$ $D=200mm, k=0.8$
كوع بزاوية 180^0		$k=0.2$
وصلة *Tee* مع جريان مستقيم		$k=0.2$
وصلة *Tee* مع جريان عمودي		$k=1.0$

كوع بزاوية α		كوع حاد قائم $k_{90} = 1.3$ كوع مدور قائم $k_{90} = 1.15$ $k_\alpha = k_{90} \cdot (1 - \cos\alpha)$
وصلة متوسعة تدريجياً (ناشر)		$k = a \cdot \left[1 - \left(d / D^2\right)\right]^2$ $2\alpha = 5^0, a = 0.13$ $2 \cdot \alpha = 10^0, a = 0.16$ $2 \cdot \alpha = 15^0, a = 0.27$ $2 \cdot \alpha = 20^0, a = 0.43$ $2 \cdot \alpha = 30^0, a = 0.81$
وصلة متضيقة تدريجياً(نقاصة).		
حاصرة جريان		$(d / D)^2 = 0.2, k = 47.5$ $(d / D)^2 = 0.4, k = 7.8$ $(d / D)^2 = 0.6, k = 1.80$ $(d / D)^2 = 0.8, k = 0.29$

مثال ١

يخرج الماء من خزان كبير يتعرض للضغط الجوي، إلى الفضاء الخارجي عبر أنبوب طوله الكلي $L = 200$ ، وقطره $D = 80mm$ ، كما مبين في الشكل (٨-٢٠). فإذا علمت أن فرق المنسوب بين سطح الماء في الخزان ونهاية الأنبوب $h = 8.0m$ ، وأن معامل الفواقد المحلية عند مخرج الخزان $k_1 = 0.5$ وعند الكوع $k_2 = 0.15$ ، وأن معامل الاحتكاك الطولي للأنبوب $\lambda = 0.02$. احسب التصريف الخارج من الأنبوب.



الشكل (٨-٢٠).

الحل:

بتطبيق معادلة برنوللي بين النقطتين 1،2 يكون لدينا:

$$\frac{V_2^2}{2\cdot g}+\frac{p_2}{\gamma}=\frac{V_1^2}{2\cdot g}+\frac{p_1}{\gamma}+h-h_f-h_m$$

وباعتبار أن $\frac{p_1}{\gamma}=\frac{p_2}{\gamma}=\frac{V_1^2}{2\cdot g}=0$ ، وبافتراض أن $V=V_2$ ، نحصل على:

$$\frac{V^2}{2\cdot g}=h-h_f-h_m$$

أو:

$$h=\frac{V^2}{2\cdot g}+h_f+h_m$$

ومع ملاحظة أن:

$$h_m=2\cdot k_2\cdot\frac{V^2}{2\cdot g}+k_1\cdot\frac{V^2}{2\cdot g}$$

و:

$$h_f=\lambda\cdot\frac{L}{D}\cdot\frac{V^2}{2\cdot g}$$

يكون لدينا:

$$h = \frac{V^2}{2 \cdot g} + \lambda \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{V^2}{2 \cdot g} + 2 \cdot k_2 \cdot \frac{V^2}{2 \cdot g} + k_1 \cdot \frac{V^2}{2 \cdot g}$$

أو:

$$h = \left(1 + \lambda \cdot \frac{L}{D} + 2 \cdot k_2 + k_1\right) \cdot \frac{V^2}{2 \cdot g}$$

ومنه:

$$V = \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot h}{\left(1 + \lambda \cdot \frac{L}{D} + 2 \cdot k_2 + k_1\right)}}$$

وبالتعويض نجد أن:

$$V = \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot 8}{\left(1 + 0.02 \cdot \frac{200}{0.08} + 2 \cdot 0.15 + 0.5\right)}} = 1.74 m/s$$

أما التصريف Q فيساوي:

$$Q = V \cdot A = 1.74 \cdot \frac{\pi \cdot 0.08^2}{4} = 8.75 \times 10^{-3} m^3/s$$

٨-١٠. وصل الأنابيب على التسلسل والتوازي

Series and Parallel Pipe System

من النادر في الحياة العملية أن يستخدم في المشاريع المائية أنبوب أو ناقل واحد ذو قطر معين. والحالة السائدة هي استخدام عدة أنابيب بأطوال وأقطار مختلفة، وعندها يتم وصل الأنابيب، إما على التوازي، أو على التسلسل.

٨-١٠-١. ثابت مقاومة الأنبوب Pipe Coefficient

وجدنا في الفصل السابق، أنه يمكن التعبير عن فاقد الضاغط h_l الناتج عن الاحتكاك بدلالة الضاغط الحركي، باستخدام علاقة دارسي- فايسباخ، بالصيغة:

$$h_l = \lambda \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{V^2}{2 \cdot g}$$

كما وجدنا أنه، يمكن التعبير عن الفواقد المحلية بدلالة الضاغط الحركي أيضاً بالعلاقة:

$$h_m = k \cdot \frac{V^2}{2 \cdot g}$$

فإذا أوجدنا قيمة السرعة الوسطية V بدلالة معادلة الاستمرار:

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{\frac{\pi \cdot D^2}{4}} = \frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot D^2}$$

وعوضنا بها في علاقة دراسي-فايسباخ، نجد أن:

$$h_f = \lambda \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{16 \cdot Q^2}{2 \cdot g \cdot \pi^2 \cdot D^4} \qquad (٩٥-٨)$$

أو:

$$h_f = \frac{8}{\pi^2 \cdot g} \lambda \cdot \frac{L}{D^5} \cdot Q^2 \qquad (٩٦-٨)$$

وفي حال استخدام الواحدات الدولية، تصبح العلاقة السابقة من الشكل:

$$h_f = 0.0826 \cdot \lambda \cdot \frac{L}{D^5} \cdot Q^2 \qquad (٩٧-٨)$$

كما يمكن كتابة علاقة الفواقد المحلية على الشكل التالي:

$$h_m = 0.0826 \cdot \frac{\sum k}{D^4} \cdot Q^2$$

وبشكل عام، يمكن التعبير من أجل الأنابيب وملحقاتها عن فاقد الضاغط الكلي h_t، الذي هو فاقد في الطاقة لواحدة الوزن من السائل نتيجة الاحتكاك والفواقد المحلية، على الشكل التالي:

$$h_t = K \cdot Q^2 \qquad (٩٨-٨)$$

حيث: K - ثابت مقامة الأنبوب، ويعطى من أجل الأنابيب بالعلاقة:

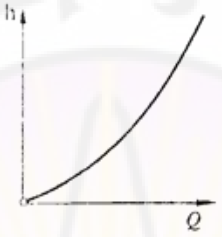
$$K = 0.0826 \cdot \left(\lambda \cdot \frac{L}{D^5} + \frac{\sum k}{D^4} \right) \qquad (٩٩-٨)$$

٨-١٠-٢. المنحني المميز للأنبوب Pipe Characteristic Curve

يعرف المنحني المميز للأنبوب، بأنه المنحني الذي يمثل ضياع الطاقة بدلالة غزارة الجريان. حيث يلاحظ من العلاقة:

$$h_l = K \cdot Q^2$$

أن المنحني المميز للأنبوب هو عبارة عن قطع مكافئ بوسيط K غير ثابت، حيث $K = f(\lambda)$، وبدورها تكون λ تابعة لعدد رينولدز وخشونة الأنبوب. لكننا نتعامل مع K في معظم المسائل، على أنه ثابت على الرغم من تأثره بقيمة عدد رينولدز. ويبين الشكل (٨-٢١) المنحني المميز للأنبوب.



الشكل (٨-٢١). المنحني المميز لأنبوب

٨-١٠-٣. الأنابيب المكافئة Equivalent Pipes

يسمى أنبوباً مكافئاً لأنبوب أو لمجموعة من أنابيب أو لمجموعة فواقد محلية، الأنبوب الذي تجري فيه الغزارة نفسها من السائل المدروس، وتضيع فيه الطاقة نفسها.

إن الأنبوب المكافئ لمجموعة فواقد محلية، هو الأنبوب الذي طوله L_e، وقطره D، وخشونته تساوي خشونة الأنبوب الذي تحصل فيه هذه الفواقد المحلية، والغزارة التي تجري فيه تساوي الغزارة المقابلة لهذه الفواقد، والفاقد بالاحتكاك فيه يساوي مجموع الفواقد المحلية. أي أن:

$$\lambda \cdot \frac{L_e}{D} \cdot \frac{V^2}{2 \cdot g} = \sum k \cdot \frac{V^2}{2 \cdot g}$$

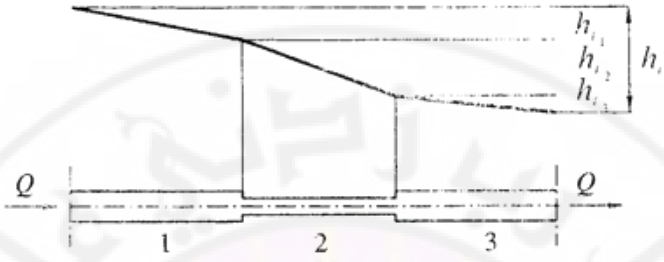
ومنه:

$$L_e = \sum k \cdot \frac{D}{\lambda} \qquad (٨-١٠٠)$$

٨-١٠-٤. الأنبوب المكافئ لمجموعة من الأنابيب الموصولة على التسلسل

إذا كان لدينا مجموعة من الأنابيب الموصولة على التسلسل، كما في الشكل (٨-٢٢). فإن الأنبوب المكافئ لهذه المجموعة من الأنابيب هو الأنبوب الذي يبلغ

طوله L_i وقطره D_i، وتجري فيه النزارة نفسها Q من السائل، ويكون فيه الفاقد h_i مساوياً مجموع الفواقد في الأنابيب، أي أن:



الشكل (٨-٢٢). وصل الأنابيب على التسلسل [5]

$$Q = Q_1 = Q_2 = Q_3 \qquad (١٠١-٨)$$

و:

$$h_f = h_{f_1} + h_{f_2} + h_{f_3} \qquad (١٠٢-٨)$$

إن المنحني المميز للأنبوب المكافئ يساوي مجموع المنحنيات المميزة للأنابيب الموصولة على التسلسل. فإذا كانت لدينا ثلاثة أنابيب موصولة على التسلسل منحنياتها المميزة هي 1 و 2 و 3، كما في الشكل (٨-٢٣)، فإن المنحني المميز للأنبوب المكافئ هو المنحني C، الذي يتم الحصول عليه بجمع تراتيب المنحنيات الثلاثة.

ويمكن حساب ثابت الأنبوب المكافئ، كما يلي:

$$h_f = h_{f_1} + h_{f_2} + h_{f_3}$$

وبالتالي:

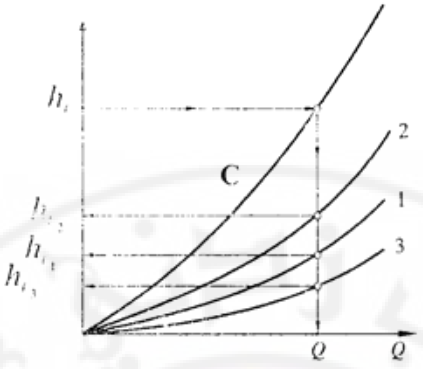
$$K_e \cdot Q^2 = K_1 \cdot Q_1^2 + K_2 \cdot Q_2^2 + K_3 \cdot Q_3^2 \qquad (١٠٣-٨)$$

أو:

$$K_e \cdot Q^2 = K_1 \cdot Q^2 + K_2 \cdot Q^2 + K_3 \cdot Q^2 \qquad (١٠٤-٨)$$

ومنه:

$$K_e = K_1 + K_2 + K_3 = \sum_{i=1}^{3} K_i \qquad (١٠٥-٨)$$



الشكل (٨-٢٣). المنحني المميز المكافئ لمجموعة أنابيب موصولة على التسلسل [5]

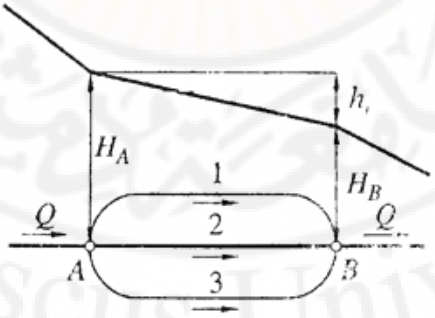
٨-١٠-٥. الأنبوب المكافئ لمجموعة من الأنابيب الموصولة على التفرع

لنأخذ مجموعة الأنابيب الموصولة على التفرع أو التوازي، كما في الشكل (٨-٢٤). فنجد أن الغزارة Q تتوزع في الأنابيب المتفرعة، بحيث يتحقق مبدأ انحفاظ الكتلة، أي أن:

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = \sum_{i=1}^{3} Q_i \qquad (٨-١٠٦)$$

وتتساوى الفواقد في جميع الأنابيب الموصولة على التفرع، لأن منسوب خط الطاقة في بداية كل أنبوب وفي نهايته يكون واحداً بالنسبة لجميع الأنابيب، أي أن:

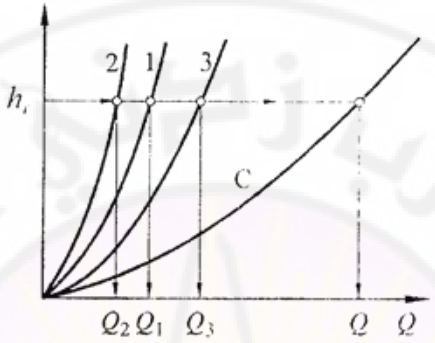
$$h_i = h_{i_1} = h_{i_2} = h_{i_3} \qquad (٨-١٠٧)$$



الشكل (٨-٢٤). وصل الأنابيب على التفرع أو التوازي [5]

إن الأنبوب المكافئ لمجموعة الأنابيب المبينة في الشكل (٨-٢٥)، هو الأنبوب الذي يبلغ طوله L_e وقطره D_e، وتمر فيه الغزارة Q، ويكون الفاقد المقابل للغزارة

Q هو h_i. والمنحني المميز المكافئ هو المنحني C، الذي يمكن الحصول عليه تخطيطياً بجمع فواصل المنحنيات 1 و 2 و 3 من أجل كل قيمة لـــ h_i والحصول على فاصلة المنحني C.



الشكل (٨-٢٥). المنحني المميز المكافئ لمجموعة أنابيب موصولة على التفرع [5]

يمكن حساب ثابت الأنبوب المكافئ K_e بكتابة الفاقد في كل أنبوب بدلالـــة الغزارة الجارية فيه، أي أن:

$$K_e \cdot Q^2 = K_1 \cdot Q_1^2 = K_2 \cdot Q_2^2 = K_3 \cdot Q_3^2 \qquad (١٠٨-٨)$$

وبالتعويض في المعادلة (٨-١٠٦)، نحصل على:

$$\sqrt{\frac{h_i}{K_e}} = \sqrt{\frac{h_{i1}}{K_1}} + \sqrt{\frac{h_{i2}}{K_2}} + \sqrt{\frac{h_{i3}}{K_3}} \qquad (١٠٩-٨)$$

أو:

$$\sqrt{\frac{h_i}{K_e}} = \sqrt{\frac{h_i}{K_1}} + \sqrt{\frac{h_i}{K_2}} + \sqrt{\frac{h_i}{K_3}} \qquad (١١٠-٨)$$

ومنه:

$$\sqrt{\frac{1}{K_e}} = \sqrt{\frac{1}{K_1}} + \sqrt{\frac{1}{K_2}} + \sqrt{\frac{1}{K_3}} \qquad (١١١-٨)$$

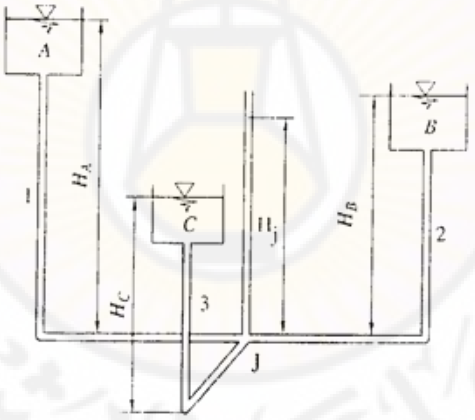
أو:

$$\sqrt{\frac{1}{K_e}} = \sum_{i=1}^{3} \sqrt{\frac{1}{K_i}} \qquad (١١٢-٨)$$

٨-١١. مسألة الخزانات الثلاثة The Three Reservoir Problem

لتكن لدينا ثلاثة خزانات A,B,C، تتصل مع بعضها عبر الأنابيب 1,2,3 المتلاقية عند النقطة J، كما في الشكل (٨-٢٦)، حيث تبلغ الفواقد في الأنابيب الثلاثة $h_{f_1}, h_{f_2}, h_{f_3}$. وبفرض أن مناسيب المياه في الخزانات الثلاثة تبقى ثابتة، وأن الطاقة الحركية مهملة. ولنفرض أيضاً أن طول وقطر وأمثال خشونة كل أنبوب هي كميات معلومة. والمطلوب حساب غزارة الجريان Q في الأنابيب الثلاثة.

تبين معادلتا الطاقة والاستمرار، أن الضاغط المائي H_J عند النقطة J متساوٍ لجميع الأنابيب، وأن التصريف الداخل إلى النقطة J يساوي التصريف الخارج منها. وبالرجوع إلى الشكل السابق، وبفرض أن منسوب الضاغط البيزومتري الأكبر هو للخزان A، والأصغر هو للخزان C. يتم حل مسألة الخزانات الثلاثة بطريقة التقريب المتتالي، ونتبع من أجل ذلك الخطوات التالية:



الشكل (٨-٢٦). مسألة الخزانات الثلاثة [5]

١- نقوم بحساب ثابت المقاومة لكل أنبوب، من العلاقة:

$$K_i = 0.0826 \cdot \left(\lambda_i \cdot \frac{L_i}{D_i^5} + \frac{\sum k_i}{D_i^4} \right) \qquad (١١٣-٨)$$

٢- نفترض قيمة ما لمنسوب الضاغط البيزومتري عند العقدة J، ولتكن H_J. بحيث تكون هذه القيمة أقل من منسوب الضاغط البيزومتري للخزان A، وأكبر من منسوب الضاغط البيزومتري للخزان C. أي أن:

$$H_C < H_J < H_A$$

٣- نحسب الغزارة المارة في كل أنبوب، من العلاقات التالية:

$$Q_1 = \sqrt{\frac{h_{f_1}}{K_1}} = \sqrt{\frac{H_A - H_J}{K_1}} \qquad (١١٤-٨)$$

$$Q_2 = \sqrt{\frac{h_{f_2}}{K_2}} = \sqrt{\frac{H_B - H_J}{K_2}} \qquad (١١٥-٨)$$

$$Q_3 = \sqrt{\frac{h_{f_3}}{K_3}} = \sqrt{\frac{H_J - H_C}{K_3}} \qquad (١١٦-٨)$$

٤- يجب أن يكون مجموع الغزارات الداخلة للعقدة J مساوياً مجموع الغزارات الخارجة منها. أي أن:

$$\sum Q_i = 0 \qquad (١١٧-٨)$$

عندما تكون قيمة الغزارة Q_1 الداخلة للعقدة J من الخزان A أكبر من مجموع الغزارتين $Q_2 + Q_3$ الخارجتين من العقدة J، أي: $\Delta Q = Q_1 - (Q_2 + Q_3) > 0$، نقوم بتصغير قيمة الغزارة Q_1، وذلك عن طريق زيادة قيمة الضاغط البيزومتري عند العقدة J. والعكس صحيح، أي عندما يكون $\Delta Q = Q_1 - (Q_2 + Q_3) < 0$، نقوم بتصغير قيمة الضاغط البيزومتري المفترضة عند العقدة J.

٥- تعاد الخطوات ٢،٣،٤ حتى يصبح المجموع $\sum Q_i = 0$.

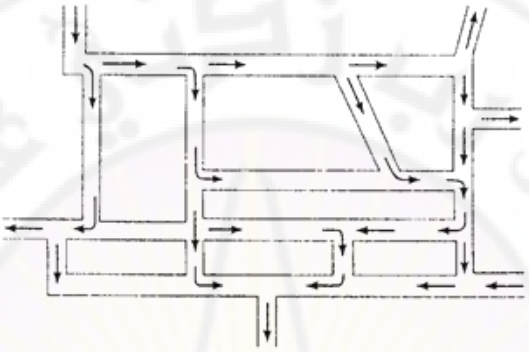
٨-١٢. شبكات الأنابيب Pipe Networks

٨-١٢-١. تمهيد Preface

تعرف شبكة الأنابيب بأنها مجموعة من الأنابيب المتلاقية في عدد كبير من النقاط تدعى عقداً. ويبين الشكل (٨-٢٧) مخططاً لشبكة مياه. وتتم تغذية الشبكة عادة بالمياه من خزانات مائية واقعة في نقاط مرتفعة من الشبكة، وتحسب منها الشبكة في نقاط معينة تسمى نقاط الاستهلاك.

وتتراوح أقطار الأنابيب الرئيسة في شبكات مياه الشرب في المدن من $100mm$ إلى أكثر من $1000mm$. وأكثر أنواع الأنابيب استخداماً هي أنابيب **الفونت المرن**

Ductile Iron لما لها من ديمومة كبيرة. كما انتشرت في الآونة الأخيرة الأنابيب البلاستيكية، ولاسيّما أنابيب **البولي ايتيلين** *Polyethylene* بسبب ديمومتها ونعومة جدرانها الداخلية وانخفاض سعرها. ويقاس مقدار نجاح تصميم الشبكة بمقدار ما تؤمنه من متطلبات الضغط والغزارة عند كل عقدة من عقدها.



الشكل (٨-٢٧). مخطط لشبكة مياه [6]

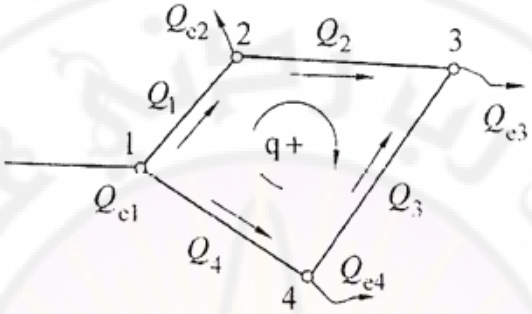
من المتعذر عملياً حل شبكات الأنابيب حلاً مباشراً تحليلياً على غرار الحالات المدروسة سابقاً للأنابيب الموصولة على التسلسل أو على التوازي، لأن تطبيق معادلة برنوللي ومعادلة الاستمرار على جميع عناصر الشبكة يعطي عدداً كبيراً من المعادلات التي يصعب حلها. والطريقة العملية البديلة المتبعة هي استخدام أسلوب التقريب المتتالي، الذي يعتمد على فرض قيم أولية للغزارات في الأنابيب أو للضواغط عند العقد، ثم تصحيح هذه القيم بشكل متتال، حتى يحقق مبدأ انحفاظ الكتلة عند جميع عقد الشبكة، ومبدأ انحفاظ الطاقة في مساراتها جميعاً.

لنفرض الشبكة البسيطة المبينة في الشكل (٨-٢٨)، والمكونة من أربعة أنابيب تشكل فيما بينها حلقة مغلقة. بحيث تتغذى الشبكة بالمياه عبر العقدة 1 بغزارة محددة مقدارها Q_{c1}، وتستجر المياه من الشبكة عند العقد 2،3،4 بكميات ثابتة وهي Q_{c2}, Q_{c3}, Q_{c4}. فيلاحظ من الشكل أنه لكي يتحقق مبدأ انحفاظ الكتلة عند جميع عقد الشبكة، يجب أن يكون مجموع الغزارات الداخلة إلى كل عقدة يساوي مجموع الغزارات الخارجة منها. فبالنسبة للعقدة 1 على سبيل المثال، تنص معادلة الاستمرار على أن:

$$Q_{e_1} = Q_1 + Q_4 \qquad (١١٨-٨)$$

وبالنسبة للعقدة 3:

$$Q_{e_3} = Q_3 + Q_2 \qquad (١١٩-٨)$$



الشكل (٨-٢٨). شبكة مؤلفة من حلقة واحدة بأربعة أنابيب

فإذا اصطلحنا إعطاء الغزارات الداخلة إلى العقدة الإشارة الموجبة والغزارات الخارجة منها الإشارة السالبة، فإنه يمكن التعبير عن معادلة الاستمرار بالعلاقة:

$$\sum \pm Q_i = 0 \qquad (١٢٠-٨)$$

أي أن المجموع الجبري للغزارات الداخلة إلى كل عقدة من عقد الشبكة يساوي الصفر.

بتطبيق معادلة برنوللي بين العقدتين 1,2 ثم بين العقدتين 2,3 على الترتيب، نحصل على المعادلتين التاليتين:

$$E_1 - E_2 = h_{l_1} = K_1 \cdot Q_1^2 \qquad (١٢١-٨)$$

و:

$$E_2 - E_3 = h_{l_2} = K_2 \cdot Q_2^2 \qquad (١٢٢-٨)$$

حيث أن:

- h_{l_1}, h_{l_2} : الفواقد الهيدروليكية في الأنبوبين.
- K_1, K_2 : ثابتا المقاومة للأنبوبين.

- $Q_1 . Q_2$: غزارة الجريان في الأنبوبين.

وبتطبيق معادلة برنوللي بين العقدتين 4,1 والعقدتين 3,4، نحصل على المعادلتين التاليتين:

$$E_1 - E_4 = h_{f_4} = K_4 \cdot Q_4^2 \qquad (١٢٣-٨)$$

و:

$$E_4 - E_3 = h_{f_3} = K_3 \cdot Q_3^2 \qquad (١٢٤-٨)$$

وبجمع المعادلتين (٨-١٢١) و (٨-١٢٢)، نحصل على المعادلة التالية:

$$E_1 - E_3 = h_{f_1} + h_{f_2} = K_1 \cdot Q_1^2 + K_2 \cdot Q_2^2 \qquad (١٢٥-٨)$$

كذلك بجمع المعادلتين (٨-١٢٣) و (٨-١٢٤)، نحصل على:

$$E_1 - E_3 = h_{f_4} + h_{f_3} = K_4 \cdot Q_4^2 + K_3 \cdot Q_3^2 \qquad (١٢٦-٨)$$

وبمقارنة المعادلتين (٨-١٢٥) و (٨-١٢٦)، يلاحظ أن مجموع الفواقد بين عقدتين من شبكة هو نفسه، بغض النظر عن الطريق الذي يسلكه السائل بين العقدتين.

بطرح المعادلة (٨-١٢٥) من المعادلة (٨-١٢٦)، نحصل على:

$$h_{f_1} + h_{f_2} - h_{f_3} - h_{f_4} = 0 \qquad (١٢٧-٨)$$

وبالتالي فإن:

$$K_1 \cdot Q_1^2 + K_2 \cdot Q_2^2 - K_3 \cdot Q_3^2 - K_4 \cdot Q_4^2 = 0 \qquad (١٢٨-٨)$$

أو:

$$\sum h_{f_i} = \sum \pm K_i \cdot Q_i^2 \qquad (١٢٩-٨)$$

أي أن المجموع الجبري للفواقد في الطاقة على مدار الحلقة يساوي الصفر. وهنا لابد من اختيار اتجاه موجب للغزارة، وقد اصطلح على إعطاء الإشارة الموجبة للأنابيب ذات الغزارة التي اتجاهها مع عقارب الساعة، والإشارة السالبة للأنابيب ذات الغزارة التي اتجاهها عكس عقارب الساعة.

٨-١٢-٢. حل شبكات الأنابيب بطريقة هاردي-كروس

Solving the Pipe Networks Using Hardy-Cross Method

وتدعى هذه الطريقة أيضاً طريقة التصحيح الإفرادي للمسارات. وقد اقترحت لأول مره من قبل الأمريكيين **هاردي** ***Hardy*** و **كروس** ***Cross*** في عام ١٩٣٦. وهي من أقدم الطرائق لحل وأكثرها استخداماً.

تتلخص هذه الطريقة بافتراض أولي لقيم الغزارات في أنابيب الشبكة، بحيث يتحقق مبدأ الاستمرار عند جميع العقد، ومن ثم تصحيح قيم هذه الغزارات بشكل متتالٍ، حتى تتحقق معادلة انحفاظ الطاقة في جميع الحلقات.

بالرجوع إلى الشبكة البسيطة المبينة في الشكل (٨-٢٨). وبافتراض أن Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 هي قيم أولية للغزارات في أنابيب الشبكة، تحقق مبدأ الاستمرار عند العقد. فإذا كان مقدار التصحيح الواجب إدخاله على الغزارة في الأنبوب 1 هو $+q$، فإن التصحيح الواجب إدخاله على الغزارة في الأنبوب 2 هو أيضاً $+q$ حتى لا نخل بمبدأ انحفاظ الكتلة عند العقدة 2. وكذلك فإن التصحيح الواجب إدخاله على الغزارة في الأنبوبين 3,4 هو $-q$. أي أن الغزارات في الأنابيب التي اتجاهها مع عقارب الساعة تحصل على تصحيح مقداره $+q$، بينما الغزارات في الأنابيب التي اتجاهها عكس عقارب الساعة تحصل على تصحيح مقداره $-q$.

وبتطبيق معادلة انحفاظ الطاقة على مدار الحلقة، نجد أن:

$$K_1 \cdot (Q_1+q)^2 + K_2 \cdot (Q_2+q)^2 - K_3 \cdot (Q_3-q)^2 - K_4 \cdot (Q_4-q)^2 = 0 \quad (٨-١٣٠)$$

بإهمال الحدود الصغيرة من مرتبة q^2، يمكن كتابة المعادلة السابقة على الشكل التالي:

$$K_1 \cdot Q_1^2 + K_2 \cdot Q_2^2 - K_3 \cdot Q_3^2 - K_4 \cdot Q_4^2 + q \cdot (2 \cdot K_1 \cdot Q_1 + 2 \cdot K_2 \cdot Q_2 + 2 \cdot K_3 \cdot Q_3 + 2 \cdot K_4 \cdot Q_4) = 0 \quad (٨-١٣١)$$

ومنه يعطى مقدار التصحيح الواجب إدخاله على قيم الغزارات في أنابيب الحلقة بالعلاقة التالية:

$$q = -\frac{K_1 \cdot Q_1^2 + K_2 \cdot Q_2^2 - K_3 \cdot Q_3^2 - K_4 \cdot Q_4^2}{2 \cdot K_1 \cdot Q_1 + 2 \cdot K_2 \cdot Q_2 + 2 \cdot K_3 \cdot Q_3 + 2 \cdot K_4 \cdot Q_4} \quad (٨-١٣٢)$$

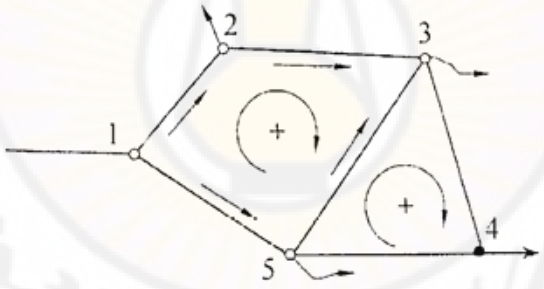
والتي يمكن كتابتها بشكل عام كما يلي:

$$q = -\frac{\sum K_i \cdot Q_i^2}{\sum 2 \cdot K_i \cdot Q_i} \qquad (١٣٣-٨)$$

مع ملاحظة أن المجموع الذي يوجد في البسط هو مجموع جبري، بينما المجموع الموجود في المقام هو مجموع مطلق.

بعد إجراء التعديل على قيم الغزارات المفروضة في أنابيب الشبكة نحصل على قيم جديدة للغزارات أقرب إلى القيم الصحيحة، مما يسمح بحساب تصحيح آخر من المعادلة السابقة، وهكذا حتى نصل إلى الغزارات النهائية ضمن حدود معقولة للدقة.

عندما تحتوي الشبكة على أكثر من حلقة، كما في الشكل (٨-٢٩). يمكن لبعض أنابيب الشبكة أن تكون مشتركة ما بين أكثر من حلقة. وتتعرض في هذه الحالة الغزارة المفروضة في الأنبوب المشترك للتصحيح من كل حلقة تشترك فيها وفقاً لاتجاه الغزارة الجارية في الأنبوب بالنسبة للحلقة.

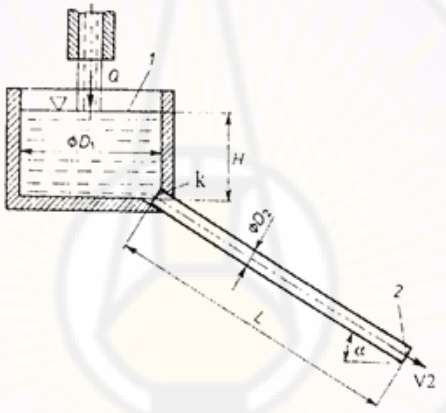


الشكل (٨-٢٩). شبكة مؤلفة من حلقتين

مسائل محلولة حول الفصل الثامن

المسألة الأولى

يخرج الماء من خزان أسطواني مكشوف إلى الفضاء الخارجي، عبر أنبوب طوله L وقطره D_2 ويميل على الأفق بزاوية مقدارها α، كما في الشكل. احسب الغزارة Q التي يجب أن يزود بها هذا الخزان، حتى يبقى عمق الماء H فيه ثابتاً. علماً أن معامل الاحتكاك الطولي في الأنبوب يساوي λ، ومعامل الفواقد المحلية عند مدخل الأنبوب من الخزان يساوي k.



الحل:

حتى يبقى عمق الماء في الخزان ثابتاً، يجب أن تكون الغزارة الواردة إليه مساوية للغزارة الخارجة منه. وبتطبيق معادلة برنوللي بين النقطتين 1,2، بعد افتراض مستوٍ أفقي للمقارنة يمر من النقطة 2، نجد أن:

$$\frac{V_2^2}{2\cdot g}+\frac{p_2}{\gamma}=\frac{V_1^2}{2\cdot g}+\frac{p_1}{\gamma}+H+L\cdot\sin\alpha-h_l-h_m$$

وباعتبار أن:

$$\frac{p_1}{\gamma}=\frac{p_2}{\gamma}=0, V_1=0$$

لذلك يمكن كتابة المعادلة السابقة على الشكل التالي:

$$\frac{V_2^2}{2\cdot g} = H + L\cdot\sin\alpha - \lambda\cdot\frac{L}{D_2}\cdot\frac{V_2^2}{2\cdot g} - k\cdot\frac{V_2^2}{2\cdot g}$$

أو:

$$\frac{V_2^2}{2\cdot g}\cdot\left(1+\lambda\cdot\frac{L}{D_2}+k\right) = H + L\cdot\sin\alpha$$

ومنه:

$$V_2 = \sqrt{\frac{2\cdot g\cdot\left(H+L\cdot\sin\alpha\right)}{\left(1+\lambda\cdot\frac{L}{D_2}+k\right)}}$$

أما غزارة الجريان فتساوي:

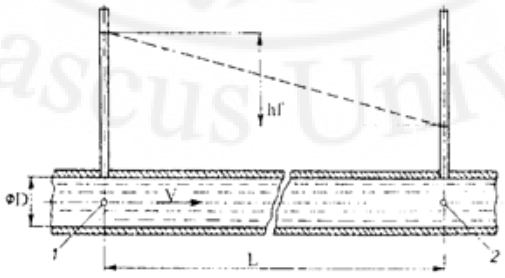
$$Q = V_2\cdot\pi\cdot\frac{D_2^2}{4}$$

ومنه، نحصل على:

$$Q = \pi\cdot\frac{D_2^2}{4}\cdot\sqrt{\frac{2\cdot g\cdot\left(H+L\cdot\sin\alpha\right)}{\left(1+\lambda\cdot\frac{L}{D_2}+k\right)}}$$

المسألة الثانية:

يتدفق الماء في أنبوب أفقي قطره $D=100mm$ ، وخشونته $\varepsilon=0.1mm$ ، كما مبين في الشكل، بغزارة مقدارها $Q=10\ell/s$. وقد وضع بين مقطعين منه بيزومتران، تبلغ المسافة بينهما $L=10m$. فإذا علمت أن فرق الضاغط البيزومتري المقاس بين المقطعين يبلغ $h_f=180mm$ ، وأن اللزوجة الحركية للماء $\nu=1.15\times10^{-6}m^2/s$. احسب معامل الاحتكاك الفعلي والنظري للأنبوب.



الحل:

إن فرق الضاغط البيزومتري بين المقطعين 1.2 يمثل فواقد الاحتكاك بين المقطعين. ومن علاقة دراسي-فايسباخ، نكتب:

$$h_f = \lambda \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{V^2}{2 \cdot g}$$

ومنه نجد أن معامل الاحتكاك الفعلي يساوي:

$$\lambda_e = \frac{2 \cdot g \cdot D \cdot h_f}{L \cdot V^2}$$

أو:

$$\lambda_e = \frac{h_f \cdot \pi^2 \cdot g \cdot D^5}{8 \cdot L \cdot Q^2}$$

وبالتعويض بالمعطيات العددية الواردة في نص المسألة، نجد أن:

$$\lambda_e = \frac{0.18 \cdot \pi^2 \cdot g \cdot 0.1^5}{8 \cdot 10 \cdot 0.01^2} = 0.0218$$

ولحساب معامل الاحتكاك النظري، يجب حساب قيمة عدد رينولدز في الأنبوب وقيمة الخشونة النسبية التي تبلغ:

$$\frac{\varepsilon}{D} = \frac{0.1}{100} = 0.001$$

أما قيمة عدد رينولدز فتبلغ:

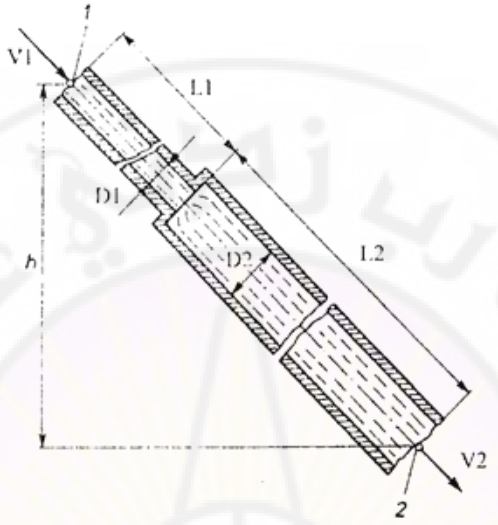
$$\mathrm{Re} = \frac{V \cdot D}{\nu} = \frac{\frac{4 \cdot 0.01}{\pi \cdot 0.1^2} \cdot 0.1}{1.15 \times 10^{-6}} = 110772$$

ومن مخططات مودي، نجد أن معامل الاحتكاك النظري يساوي $\lambda_t = 0.0225$.

المسألة الثالثة

يتدفق النفط في أنبوب يتألف من جزئين مختلفي الطول والمقطع، بمعدل $5.85 l/s$. فإذا كان طول الجزء الأول $L_1 = 5m$ وقطره $D_1 = 50mm$، وطول الجزء الثاني $L_2 = 10m$ وقطره $D_2 = 100mm$، وكان $h = 5m$. احسب فرق الضغط بين

بداية الأنبوب ونهايته. بافتراض أن اللزوجة الحركيـــة للـــنفط $\nu = 61\times10^{-6} m^2/s$، وكثافته $\rho = 930 kg/m_3$، وأن الأنبوب أملس هيدروليكياً.



الحل:

بتطبيق معادلة برنوللي بين المقطعين 1,2، بعد افتراض مستوٍ أفقي للمقارنة يمـــر من النقطة 2، نجد أن:

$$\frac{V_2^2}{2\cdot g}+\frac{p_2}{\gamma}=\frac{V_1^2}{2\cdot g}+\frac{p_1}{\gamma}+h+-h_f-h_m$$

ومنه يكون فرق الضغط بين المقطعين مساوياً:

$$\Delta p = p_2 - p_1 = \gamma\cdot\left[\frac{V_1^2-V_2^2}{2\cdot g}+h-h_f-h_m\right]$$

أما سرعتا الجريان الوسطيتان في جزئي الأنبوب، فتساويان:

$$V_1=\frac{4\cdot Q}{\pi\cdot D_1^2}=\frac{4\cdot 0.00585}{\pi\cdot 0.05^2}=2.98 m/s$$

و:

$$V_2=\frac{4\cdot Q}{\pi\cdot D_2^2}=\frac{4\cdot 0.00585}{\pi\cdot 0.10^2}=0.745 m/s$$

أما قيمتا عدد رينولدز في جزئي الأنبوب، فتساويان:

$$\mathrm{Re}_1 = \frac{V_1 \cdot D_1}{\nu} = \frac{2.98 \cdot 0.05}{61 \times 10^{-6}} = 2443$$

و:

$$\mathrm{Re}_2 = \frac{V_2 \cdot D_2}{\nu} = \frac{0.745 \cdot 0.10}{61 \times 10^{-6}} = 1221$$

في الجزء الثاني من الأنبوب حيث $\mathrm{Re}_2 < 2300$، يكون الجريان صفحياً، وعليه يحسب معامل الاحتكاك من العلاقة:

$$\lambda_2 = \frac{64}{\mathrm{Re}_2} = \frac{64}{1221} = 0.052$$

أما في الجزء الأول فيمكن عد الجريان مضطرباً، ويمكن حساب معامل الاحتكاك من علاقة بلاسيوس:

$$\lambda_1 = \frac{0.316}{\mathrm{Re}_1^{0.25}} = \frac{0.316}{2443^{0.25}} = 0.045$$

وبالنسبة للفواقد الناتجة عن الاحتكاك في الأنبوب، فتساوي:

$$h_f = \lambda_1 \cdot \frac{L_1}{D_1} \cdot \frac{V_1^2}{2 \cdot g} + \lambda_2 \cdot \frac{L_2}{D_2} \cdot \frac{V_2^2}{2 \cdot g}$$

ومنه:

$$h_f = 0.045 \cdot \frac{5}{0.05} \cdot \frac{2.98^2}{2 \cdot g} + 0.052 \cdot \frac{10}{0.1} \cdot \frac{0.745^2}{2 \cdot g} = 2.183m$$

أما الفواقد المحلية، فتساوي:

$$h_m = \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2 \cdot \frac{V_1^2}{2 \cdot g}$$

وبالتعويض بالقيم العددية، نجد أن:

$$h_m = \left(1 - \frac{0.05^2}{0.1^2}\right)^2 \cdot \frac{2.98^2}{2 \cdot g} = 0.255m$$

وأخيراً يبلغ فرق الضغط بين المقطعين:

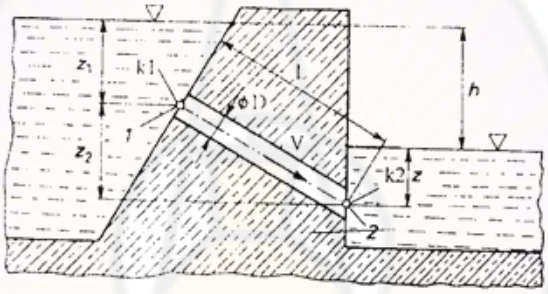
$$\Delta p = p_2 - p_1 = 930 \cdot 9.81 \cdot \left[\frac{2.98^2 - 0.745^2}{2 \cdot g} + 5 - 2.183 - 0.255 \right]$$

ومنه

$$\Delta p = 27245Pa = 27.245kPa$$

المسألة الرابعة

احسب التصريف الذي يمكن أن يمرره الأنبوب الواصل بين الخزانين المبينين في الشكل. إذا علمت أن طول الأنبوب $L = 1000m$ ، وقطره $D = 500mm$ ، وخشونته المطلقة $\varepsilon = 0.125mm$. كما أن فرق المنسوب بين الخزانين يساوي $h = 8m$ ، و $k_1 = 0.5, k_2 = 1.0, \nu = 1.15 \times 10^{-6} m^2/s$.



الحل:

بتطبيق معادلة برنوللي بين نقطتين تقعان على سطحي السائل في الخزانين، وباعتبار أن $\frac{p_1}{\gamma} = \frac{p_2}{\gamma} = 0, V_1 = V_2 = 0$ ، نجد أن:

$$h = h_f + h_m$$

أو:

$$h = \lambda \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{V^2}{2 \cdot g} + (k_1 + k_2) \cdot \frac{V^2}{2 \cdot g}$$

ومنه:

$$V = \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot h}{\left(\lambda \cdot \frac{L}{D} + k_1 + k_2 \right)}}$$

كما نلاحظ من المعادلة، لحساب سرعة الجريان في الأنبوب، لا بد من معرفة معامل الإحتكاك λ. ولكن λ يرتبط بعدد رينولدز، الذي يرتبط بدوره بالسرعة. لذلك نفترض في البداية قيمة لمعامل الاحتكاك ثم نتحقق من صحة الافتراض.

بفرض أن $\lambda = 0.02$، وباعتبار أن $k_1 = 0.5, k_2 = 1.0$، نجد بعد التعويض بالقيم العددية أن:

$$V = \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot 8}{\left(0.02 \cdot \frac{1000}{0.5} + 0.5 + 1\right)}} = 1.94 m/s$$

نحسب الآن قيمة عدد رينولدز، باعتبار أن $\nu = 1.15 \times 10^{-6} m^2/s$ حسب نص المسألة:

$$Re = \frac{V \cdot D}{\nu} = \frac{1.94 \cdot 0.5}{1.15 \times 10^{-6}} = 8.4 \times 10^5$$

ونوجد قيمة الخشونة النسبية:

$$\frac{\varepsilon}{D} = \frac{0.125}{500} = 0.00025$$

فنجد من مخطط مودي، أن: $\lambda = 0.015$. وهذه القيمة تقابل قيمة للسرعة تساوي:

$$V = \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot 8}{\left(0.015 \cdot \frac{1000}{0.5} + 0.5 + 1\right)}} = 2.23 m/s$$

فإذا حسبنا قيمة عدد رينولدز من جديد، نحصل على:

$$Re = \frac{V \cdot D}{\nu} = \frac{2.23 \cdot 0.5}{1.15 \times 10^{-6}} = 9.70 \times 10^5$$

وبالرجوع لمخططات مودي، نجد أن: $\lambda = 0.0155$. وتكون قيمة السرعة مساوية:

$$V = \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot 8}{\left(0.0155 \cdot \frac{1000}{0.5} + 0.5 + 1\right)}} = 2.20 m/s$$

وهي قريبة جداً من قيمة السرعة السابقة، لذلك نكتفي بهذا التقريب ونعتبر أن

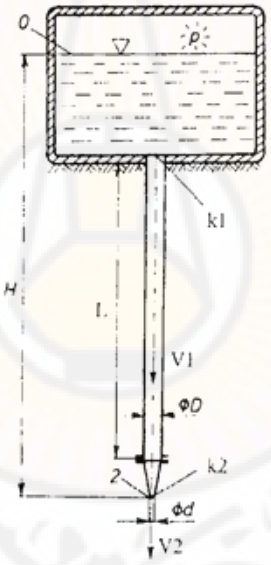
$V = 2.2m/s$.

وبناء عليه فإن التصريف المار في الأنبوب يساوي:

$$Q = V \cdot A = 2.2 \cdot \frac{\pi \cdot 0.5^2}{4} = 0.432m^3/s$$

المسألة الخامسة

يتفرع من خزان كبير يتعرض سطحه إلى ضغط مقداره $p = 100kPa$ ، أنبوب طوله $L = 10m$ وقطره $D = 40mm$. وينتهي الأنبوب بوصلة متضيقة تزود بفتحة قطرها $d = 20mm$ ، كما في الشكل. احسب الغزارة الخارجة من هذه الفتحة، علماً أن: $k_1 = 0.5, k_2 = 0.2$ ، $\lambda = 0.02$ ، وأن $H = 15m$. (اهمل طول الوصلة).



الحل:

بتطبيق معادلة برنوللي بين النقطتين 0,2 ، بعد اعتبار مستوٍ أفقي للمقارنة يمر من النقطة 2 ، نجد أن:

$$\frac{V_2^2}{2 \cdot g} + \frac{p_2}{\gamma} = \frac{V_0^2}{2 \cdot g} + \frac{p_0}{\gamma} + H - h_l - h_m$$

وباعتبار أن $p_1 = p, \frac{p_2}{\gamma} = 0, V_0 = 0$ ، لذلك يمكن كتابة المعادلة السابقة على

الشكل:

$$\frac{V_2^2}{2\cdot g}=\frac{p}{\gamma}+H-h_f-h_m$$

ومنه:

$$\frac{p}{\gamma}+H=\frac{V_2^2}{2\cdot g}+h_f+h_m$$

وبالتالي، يكون لدينا:

$$\frac{p}{\gamma}+H=\frac{V_2^2}{2\cdot g}+\lambda\cdot\frac{L}{D}\cdot\frac{V_1^2}{2\cdot g}+k_1\cdot\frac{V_1^2}{2\cdot g}+k_2\cdot\frac{V_2^2}{2\cdot g}$$

أو:

$$\frac{p}{\gamma}+H=+\frac{V_1^2}{2\cdot g}\cdot\left(\lambda\cdot\frac{L}{D}+k_1\right)+\frac{V_2^2}{2\cdot g}\cdot\left(1+k_2\right)$$

ومن معادلة الإستمرار لدينا:

$$V_1=V_2\cdot\frac{d^2}{D^2}$$

وبالتعويض في المعادلة السابقة، نجد أن:

$$V_2=\sqrt{\frac{2\cdot\left(p+\gamma\cdot H\right)}{\rho\cdot\left[1+k_2+\frac{d^4}{D^4}\cdot\left(\lambda\cdot\frac{L}{D}+k_1\right)\right]}}$$

ومنه، بعد التعويض بالمعطيات العددية الواردة في نص المسألة، نجد أن:

$$V_2=\sqrt{\frac{2\cdot\left(100\cdot1000+9810\cdot15\right)}{1000\cdot\left[1+0.2+\frac{0.02^4}{0.04^4}\cdot\left(0.02\cdot\frac{10}{0.04}+0.5\right)\right]}}=17.9m/s$$

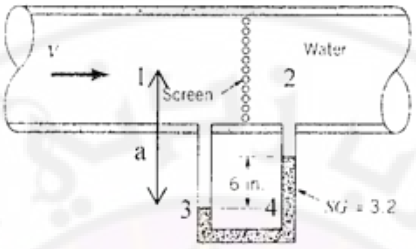
وتكون الغزارة الخارجة من الفتحة مساوية:

$$Q=17.9\cdot\pi\cdot0.02^2/4=5.62\times10^{-3}m^3/s$$

المسألة السادسة

تم تثبيت مصفاة مثقبة في مقطع أنبوب، يتدفق فيه الماء بسرعة جريان تساوي

$V = 1m/s$، كما في الشكل. ولقياس معامل الفواقد لهذه المصفاة، استخدم مانومتر يحتوي على سائل كثافته النسبية $SG = 3.2$. فإذا علمت أن انحراف سائل المانومتر يساوي $h = 6in$. احسب معامل الفواقد الهيدروليكية للمصفاة.



الحل:

بتطبيق معادلة برنوللي بين النقطتين 1,2 الواقعتين عند محور الأنبوب قبل وبعد المصفاة، نجد أن:

$$\frac{p_1}{\gamma_{H2O}} - \frac{p_2}{\gamma_{H2O}} = h_m$$

أو:

$$\frac{p_1}{\gamma_{H2O}} - \frac{p_2}{\gamma_{H2O}} = k \cdot \frac{V^2}{2 \cdot g}$$

ولكن قيمتي الضغط في فرعي المانومتر عند النقطتين 3,4 تساويان:

$$p_3 = p_1 + a \cdot \gamma_{H2O}$$

و:

$$p_4 = p_2 + (a - h) \cdot \gamma_{H2O} + h \cdot SG \cdot \gamma_{H2O}$$

ومن توازن السائل في فرعي المانومتر، نكتب:

$$p_3 = p_4$$

أو:

$$p_2 + (a - h) \cdot \gamma_{H2O} + h \cdot SG \cdot \gamma_{H2O} = p_1 + a \cdot \gamma_{H2O}$$

ومنه:

$$\frac{p_1}{\gamma_{H2O}} - \frac{p_2}{\gamma_{H2O}} = h \cdot (SG - 1)$$

مما سبق نستطيع أن نكتب:

$$k \cdot \frac{V^2}{2 \cdot g} = h \cdot (SG - 1)$$

أو:

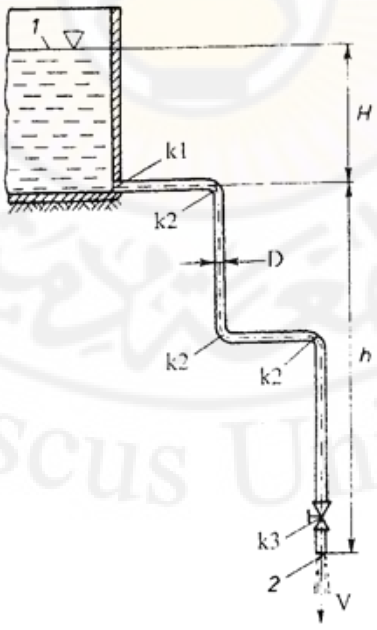
$$k = \frac{2 \cdot g \cdot h \cdot (SG - 1)}{V^2}$$

وبالتعويض بالقيم العددية المقترحة، نجد أن معامل الفواقد المحلية للمصفاة يساوي :

$$k = \frac{2 \cdot g \cdot 6 \cdot 2.54/100 \cdot (3.2 - 1)}{1^2} = 6.57$$

المسألة السابعة

يخرج الماء من خزان كبير مكشوف إلى الجو الخارجي عن طريق أنبوب مصنوع من البولي ايتيلين، طوله $L = 200m$ وقطره $D = 100mm$، كما في الشكل. ما هو عمق الماء H الواجب توافره في الخزان، ليكون التصريف الخارج منه مساوياً $Q = 40\ell/s$؟ مع العلم أن: $k_1 = 0.5, k_2 = 0.2, k_3 = 5, \nu = 10^{-6} m^2/s, h = 32m$.



الحل:

إن سرعة الجريان في الأنبوب، تساوي:

$$V = \frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot D^2} = \frac{4 \cdot 0.04}{\pi \cdot 0.1^2} = 5.1 m/s$$

ويكون عدد رينولدز مساوياً:

$$\mathrm{Re} = \frac{V \cdot D}{\nu} = \frac{5.1 \cdot 0.1}{10^{-6}} = 5.1 \times 10^5$$

وباعتبار أن الأنبوب مصنوع من البولي ايتيلين فيمكن عده أملس هيدروليكياً، وبالتالي يمكن حساب معامل الاحتكاك من علاقة بوركا، لأن عدد رينولدز $\mathrm{Re} > 10^5$:

$$\lambda = \frac{0.21}{\mathrm{Re}^{0.21}} = \frac{0.21}{\left(5.1 \times 10^5\right)^{0.21}} = 0.0133$$

وبتطبيق معادلة برنوللي بين النقطتين 1,2، بعد اعتبار مستوٍ أفقي للمقارنة يمر من النقطة، 2 نجد أن:

$$\frac{V^2}{2 \cdot g} = h + H - h_l - h_m$$

ومنه:

$$H = \frac{V^2}{2 \cdot g} + \lambda \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{V^2}{2 \cdot g} + \left(k_1 + 3 \cdot k_2 + k_3\right) \cdot \frac{V^2}{2 \cdot g} - h$$

أو:

$$H = \frac{V^2}{2 \cdot g}\left(1 + \lambda \cdot \frac{L}{D} + k_1 + 3 \cdot k_2 + k_3\right) - h$$

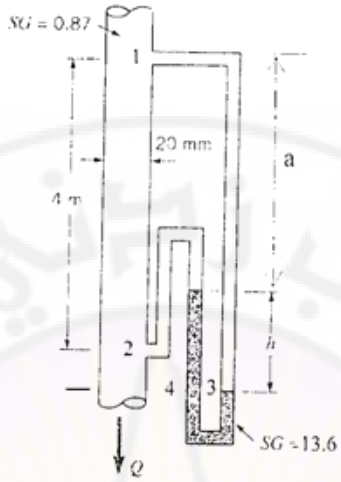
وبالتعويض بالقيم العددية المفترضة، نجد أن:

$$H = \frac{5.1^2}{2 \cdot g}\left(1 + 0.0133 \cdot \frac{200}{0.1} + 0.5 + 3 \cdot 0.2 + 5\right) - 32 = 12.68 m$$

المسألة الثامنة

يتدفق زيت كتلته النوعية $\rho_{oil} = 870 kg/m^3$، ولزوجته الحركية $\nu = 2.2 \times 10^{-4} m^2/s$، في أنبوب بتصريف مقداره $Q = 0.4 \ell/s$، كما في الشكل.

فإذا كان قطر الأنبوب $D = 20mm$. أحسب مقدار انحراف الزئبق في المانومتر.



الحل:

بتطبيق معادلة برنوللي بين النقطتين 1,2، بعد افتراض مستوٍ أفقي للمقارنة يمـــر من النقطة 2، نجد أن:

$$\frac{p_2}{\gamma_{oil}} = \frac{p_1}{\gamma_{oil}} + 4 - h_f$$

ومنه:

$$\frac{p_1}{\gamma_{oil}} - \frac{p_2}{\gamma_{oil}} = h_f - 4$$

ولكن قيمتي الضغط عند النقطتين 3,4 من المانومتر تساويان:

$$p_3 = p_1 + (h+a)\cdot\gamma_{oil}$$

و:

$$p_4 = p_2 - (4-a)\cdot\gamma_{oil} + \gamma_{Hg}\cdot h$$

ومن توازن السائل في فرعي المانومتر، نكتب:

$$p_3 = p_4$$

ومنه:

$$\frac{p_1}{\gamma_{oil}} - \frac{p_2}{\gamma_{oil}} = h \cdot \left(\frac{\gamma_{Hg}}{\gamma_{oil}} - 1 \right) - 4$$

مما سبق، نستطيع أن نكتب:

$$h_f = h \cdot \left(\frac{\gamma_{Hg}}{\gamma_{oil}} - 1 \right)$$

أو:

$$h = \frac{h_f}{\left(\frac{\gamma_{Hg}}{\gamma_{oil}} - 1 \right)}$$

نحسب سرعة الجريان في الأنبوب:

$$V = \frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot D^2} = \frac{4 \cdot 0.0004}{\pi \cdot 0.02^2} = 1.27 m/s$$

فيكون عدد رينولدز مساوياً:

$$\mathrm{Re} = \frac{V \cdot D}{\nu} = \frac{1.27 \cdot 0.02}{2.2 \times 10^{-4}} = 115.45$$

وباعتبار أن $\mathrm{Re} < 2320$ فإن الجريان صفحي، ومعامل الاحتكاك يساوي:

$$\lambda = \frac{64}{\mathrm{Re}} = \frac{64}{115.45} = 0.5544$$

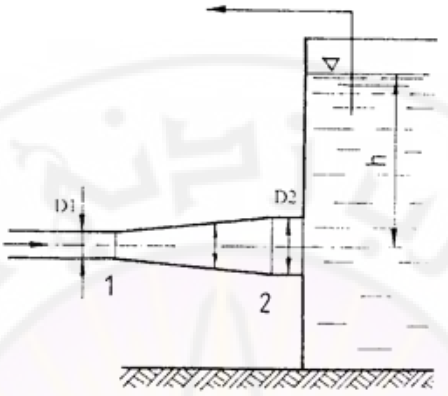
وبالتعويض بالقيم العددية الواردة في نص المسألة، نجد أن:

$$h = \frac{0.5544 \cdot \frac{4}{0.02} \cdot \frac{1.27^2}{2 \cdot g}}{\left(\frac{13.6}{0.87} - 1 \right)} = 0.623 m$$

المسألة التاسعة

يدخل الماء من أنبوب قطره $D_1 = 20mm$ إلى خزان كبير عبر الوصلة المتوسعة تدريجياً المبينة في الشكل. فإذا علمت أن غزارة الجريان في الأنبوب $Q = 1.5 \times 10^{-3} m^3/s$، وأن القطر في نهاية الوصلة $D_2 = 50mm$، وأن وزاوية توسع الوصلة تساوي 8^0. احسب الفرق في فواقد الطاقة بين الحالة المبينة على الشكل،

والحالة التي يدخل فيها الماء إلى الخزان عبر الأنبوب ذي القطر D_1 مباشرة دون استخدام وصلة.



الحل:

لدينا سرعة الجريان في الأنبوب ذي القطر D_1 تساوي:

$$V_1 = \frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot D_1^2} = \frac{4 \cdot 1.5 \times 10^{-3}}{\pi \cdot 0.02^2} = 4.78 m/s$$

وسرعة الجريان في نهاية الوصلة تساوي:

$$V_1 = \frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot D_2^2} = \frac{4 \cdot 1.5 \times 10^{-3}}{\pi \cdot 0.05^2} = 0.76 m/s$$

فواقد الطاقة في حالة أنبوب مع وصلة:

الفواقد في هذه الحالة h_{m1} تمثل فواقد محلية عند الوصلة نتيجة التوسع، وفواقد محلية عند الدخول إلى الخزان، أي:

$$h_{m1} = k \cdot \frac{V_1^2}{2 \cdot g} + \frac{V_2^2}{2 \cdot g}$$

حيث: k – معامل الفواقد المحلية للوصلة، وهو يعطى حسب الجدول (٨-٤) من أجل زاوية توسع تساوي 8^0 بالعلاقة:

$$k = 0.15 \cdot \left(1 - \left(D_1 / D_2\right)^2\right)^2$$

ومنه:

$$k = 0.15 \cdot \left(1 - \left(0.02/0.05\right)^2\right)^2 = 0.106$$

وعليه تكون فواقد الطاقة بوجود وصلة مساوية:

$$h_{m1} = 0.106 \cdot \frac{4.78^2}{2 \cdot g} + \frac{0.76^2}{2 \cdot g} = 0.153m$$

فواقد الطاقة في حالة أنبوب دون وصلة:

الفواقد في هذه الحالة h_{m2} تمثل فواقد محلية نتيجة الدخول فقط، أي أن:

$$h_{m2} = \frac{V_1^2}{2 \cdot g}$$

وبالتعويض، نجد أن:

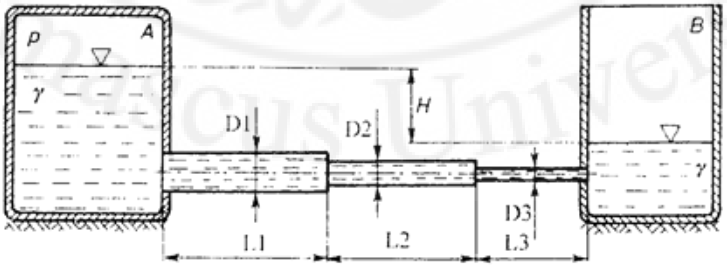
$$h_{m2} = \frac{4.78^2}{2 \cdot g} = 1.16m$$

ويكون الفرق في فواقد الطاقة مساوياً:

$$\Delta h_m = 1.16 - 0.153 \approx 1m$$

المسألة العاشرة

تصل مجموعة الأنابيب المبينة في الشكل بين خزانين، الخزان الأول A يتعرض إلى ضغط مقداره $p = 50kPa$، والخزان الثاني B يتعرض إلى الضغط الجوي. فإذا علمت أن فرق المنسوب بين الخزانين $H = 25m$، وأن أطوال الأنابيب: $L_1 = 500m, L_2 = 400m, L_3 = 300m$، وأن أقطارها: $D_1 = 400mm, D_2 = 300mm, D_3 = 250mm$، وأن معامل الإحتكاك لجميع الأنابيب $\lambda = 0.02$. احسب الغزارة المارة بين الخزانين. بإهمال جميع الفواقد المحلية.



الحل:

بتطبيق معادلة برنوللي بين سطحي الخزانين، بعد اعتبار مستوٍ أفقي للمقارنة يمر من السطح الحر للسائل في الخزان B، نجد أن:

$$h_f = H + \frac{P}{\gamma} = 25 + \frac{50 \cdot 1000}{9.81 \cdot 1000} = 30.1m$$

وباعتبار أن الأنابيب موصولة على التسلسل، لذلك نكتب:

$$h_f = (K_1 + K_2 + K_3) \cdot Q^2$$

حيث لدينا:

$$K_1 = 0.0826 \cdot \lambda \cdot \frac{L_1}{D_1^5} = 0.0826 \cdot 0.02 \cdot \frac{500}{0.4^5} = 80.66$$

$$K_2 = 0.0826 \cdot \lambda \cdot \frac{L_2}{D_2^5} = 0.0826 \cdot 0.02 \cdot \frac{400}{0.3^5} = 271.93$$

$$K_3 = 0.0826 \cdot \lambda \cdot \frac{L_3}{D_3^5} = 0.0826 \cdot 0.02 \cdot \frac{300}{0.25^5} = 507.48$$

وبالتالي فإن الغزارة المارة تساوي:

$$Q = \sqrt{\frac{h_f}{K_1 + K_2 + K_3}}$$

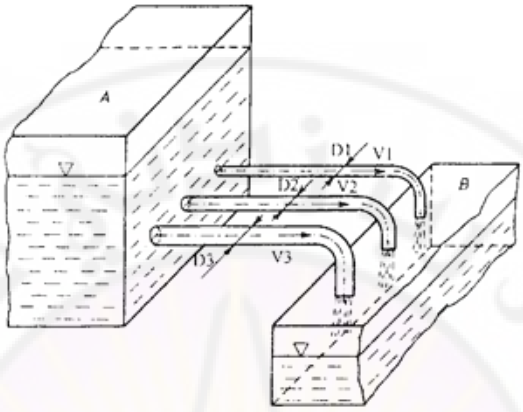
وبالتعويض بالقيم العددية، نحصل على:

$$Q = \sqrt{\frac{30.1}{80.66 + 271.39 + 507.48}} = 0.187m^3/s$$

المسألة الحادية عشرة

يخرج الماء من الخزان A إلى الخزان B، المبينين على الشكل المعطى، عبر ثلاثة أنابيب متساوية الطول $L_1 = L_2 = L_3$، وأقطارها: $D_1 = 30mm, D_2 = 50mm, D_3 = 70mm$، ومعاملات الاحتكاك لها $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$. فلو تم استبدال الأنابيب الثلاثة بأنبوب واحد قطره D، وطوله L يساوي طول كل من الأنابيب السابقة، ومعامل خشونة يماثل معاملات الخشونة للأنابيب الثلاثة.

احسب قطر هذا الأنبوب، بحيث يمر غزارة تساوي مجموع الغزارات التي تمررها الأنابيب الثلاثة مجتمعة، مع إهمال الفواقد المحلية.



الحل:

باعتبار أن الأنابيب الثلاثة موصولة على التفرع، لذلك يمكن استبدالها بأنبوب مكافئ قطره D، وطوله L. وبذلك نستطيع أن نكتب:

$$\sqrt{\frac{1}{K_e}} = \sqrt{\frac{1}{K_1}} + \sqrt{\frac{1}{K_2}} + \sqrt{\frac{1}{K_3}}$$

حيث أن:

$$K_i = 0.0826 \cdot \lambda_i \cdot \frac{L_i}{D_i^5}$$

باعتبار أن: $L_1 = L_2 = L_3 = L$، وأن: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$، وبعد التعويض والاختصار، نجد أن:

$$\sqrt{D^5} = \sqrt{D_1^5} + \sqrt{D_2^5} + \sqrt{D_3^5}$$

أو:

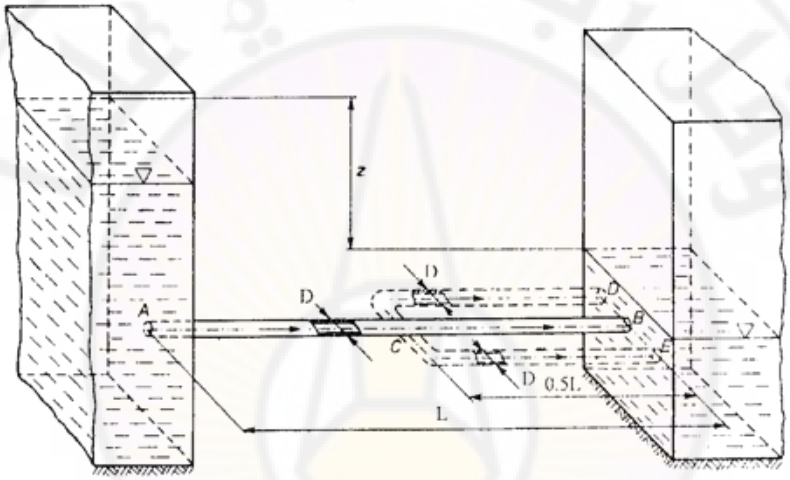
$$\sqrt{D^5} = \sqrt{30^5} + \sqrt{50^5} + \sqrt{70^5}$$

ومنه، نجد أن:

$$D = 83.44mm$$

المسألة الثانية عشرة

يصل أنبوب AB طوله L وقطره D بين خزانين مكشوفين فرق المنسوب بينهما z، كما في الشكل. فلو تم استبدال نصف الأنبوب AB بأنبوبين متساويين CD، CE، طول كل منها يساوي $0.5 \cdot L$، ولهما نفس قطر الأنبوب AB. فما هي النسبة المئوية لزيادة الغزارة؟ مع إهمال الفواقد المحلية، واعتبار أن معامل الإحتكاك لجميع الأنابيب هو λ.



الحل:

بتطبيق معادلة برنوللي بين سطحي الماء في الخزانين، بعد افتراض مستوٍ أفقي للمقارنة يمر من السطح الحر للسائل في الخزان الأيمن، نجد أن:

$$h_f = z$$

إذا رمزنا بـ Q_{old} للغزارة المارة في الأنبوب AB قبل الاستبدال، يكون لدينا:

$$h_f = K_{AB} \cdot Q_{old}^2$$

أو:

$$h_f = 0.0826 \cdot \lambda \cdot \frac{L}{D^5} \cdot Q_{old}^2$$

أما إذا رمزنا بـ Q_{new} للغزارة المارة في المنظومة بعد الاستبدال، يكون لدينا:

$$h_f = K_e \cdot Q_{new}^2$$

حيث أن:

$$K_e = K_{AC} + K_e'$$

و:

$$\sqrt{\frac{1}{K_e'}} = 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{K_{CD}}}$$

وبالتالي:

$$K_e = K_{AC} + \frac{K_{CD}}{4}$$

أو:

$$K_e = 0.0826 \cdot \lambda \cdot \frac{L/2}{D^5} + \frac{1}{4} \cdot 0.0826 \cdot \lambda \cdot \frac{L/2}{D^5}$$

ومنه نستطيع أن نكتب:

$$h_f = \frac{5}{8} \cdot 0.0826 \cdot \frac{L}{D^5} \cdot Q_{new}^2$$

مما سبق، يكون لدينا:

$$\frac{5}{8} \cdot 0.0826 \cdot \frac{L}{D^5} \cdot Q_{new}^2 = 0.0826 \cdot \frac{L}{D^5} \cdot Q_{old}^2$$

ومنه:

$$Q_{new} = \sqrt{\frac{8}{5}} \cdot Q_{old} = 1.265 \cdot Q_{old}$$

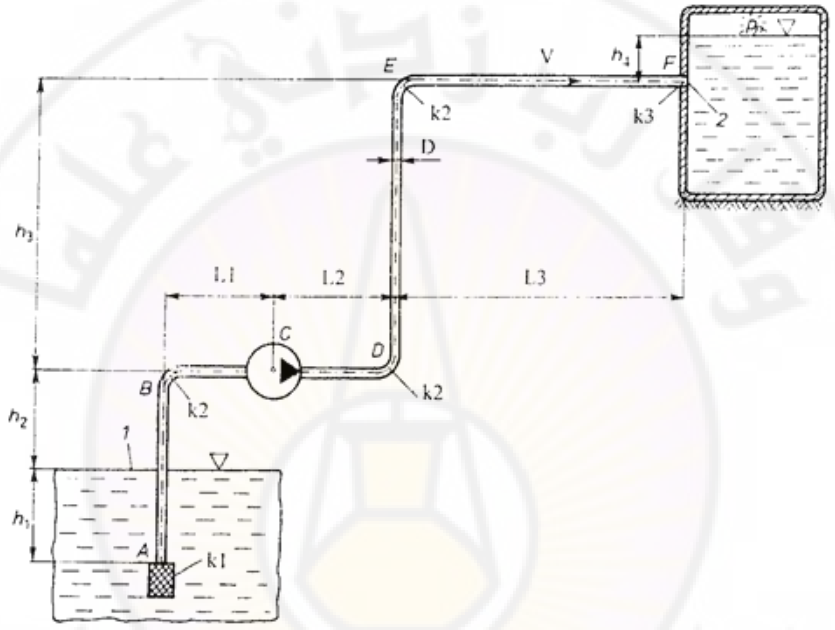
وتكون النسبة المئوية للزيادة تساوي:

$$\frac{Q_{new} - Q_{old}}{Q_{old}} = 26.5\%$$

المسألة الثالثة عشرة

احسب ضاغط المضخة اللازم لرفع الماء من الخزان السفلي إلى الخزان العلوي، المبينين في الشكل المعطى، عبر أنبوب من البولي ايتيلين قطره $D = 60mm$ ، بتصريف

مقداره $Q = 10\ell / s$. علماً أن الخزان العلوي يتعرض لـضغط يـساوي $0.1MPa$، والخزان السفلي يتعرض للضغط الجـوي. وذلـك بـافتراض المعطيـات التاليـة: $L_1 = L_2 = 4m, L_3 = 20m, h_1 = h_2 = 4m, h_3 = 12m, h_4 = 2m$. كمـا يمكـن افتراض أن: $k_1 = 5, k_2 = 0.3$، وأن اللزوجة الحركية $\nu = 10^{-6} m^2 / s$.



الحل:

بتطبيق معادلة الطاقة بين نقطتين تقعان على سطحي السائل في الخزانين، بعـد افتراض مستوٍ أفقي للمقارنة يمر من السطح الحر للسائل في الخزان السفلي، نجـد أن ضاغط المضخة يساوي:

$$H_p = h_1 + h_m + h_2 + h_3 + h_4 + \frac{p}{\gamma}$$

إن سرعة الجريان في الأنبوب تساوي:

$$V = \frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot D^2} = \frac{4 \cdot 0.01}{\pi \cdot 0.06^2} = 3.54m / s$$

أما عدد رينولدز في الأنبوب فيساوي:

$$\mathrm{Re} = \frac{V \cdot D}{\nu} = \frac{3.54 \cdot 0.06}{10^{-6}} = 212400$$

وباعتبار أن الأنبوب أملس هيدروليكياً، وأن عدد ريينولدز $\mathrm{Re} > 10^5$، فإنه يمكن حساب معامل الاحتكاك من علاقة بوركا:

$$\lambda = \frac{0.21}{\mathrm{Re}^{0.21}} = \frac{0.21}{212400^{0.21}} = 0.016$$

إن فواقد الاحتكاك في المنظومة تساوي:

$$h_f = \lambda \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{V^2}{2 \cdot g}$$

وبالتعويض، نجد أن:

$$h_f = 0.016 \cdot \left(\frac{4+4+4+4+12+20}{0.06} \right) \cdot \frac{3.54^2}{2 \cdot g} = 8.18m$$

أما الفواقد المحلية فتساوي:

$$h_m = \sum k \cdot \frac{V^2}{2 \cdot g}$$

أو:

$$h_m = (5 + 3 \cdot 0.3 + 1) \cdot \frac{3.54^2}{2 \cdot g} = 4.41m$$

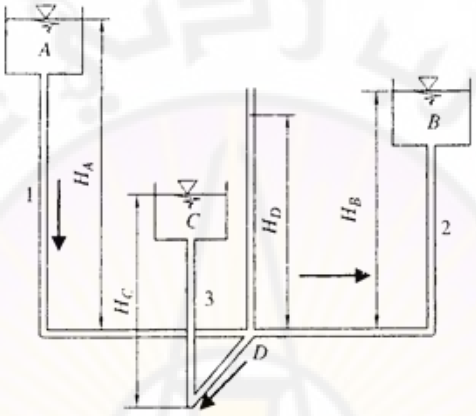
وبالتالي فضاغط المضخة يساوي:

$$H_p = 8.18 + 4.41 + 4 + 12 + 2 + \frac{0.1 \times 10^6}{9.81 \cdot 1000} = 40.78m$$

المسألة الرابعة عشرة

من أجل الخزانات الثلاثة المبينة في الشكل الوارد أدناه، لدينا: $H_A = 30m, H_B = 18m, H_C = 9m$. احسب قيمة الغزارة المارة في كل أنبوب من الأنابيب الثلاث، وقيمة منسوب الضاغط البيزومتري عند العقدة D. مع إهمال الفواقد المحلية، وبفرض أن مواصفات الأنابيب الواصلة بين الخزانات، كما هي مبينة في الجدول التالي:

الأنبوب	λ	$L(m)$	$D(mm)$
1	0.015	3000	1000
2	0.024	600	450
3	0.020	1000	600



الحل:

نقوم أولاً بحساب ثوابت الأنابيب الثلاثة من العلاقة:

$$K_i = 0.0826 \cdot \lambda_i \cdot \frac{L_i}{D_i^5}$$

وبالتعويض، نجد أن:

$$K_1 = 0.0826 \cdot 0.015 \cdot \frac{3000}{1^5} = 3.717$$

$$K_2 = 0.0826 \cdot 0.024 \cdot \frac{600}{0.45^5} = 64.458$$

$$K_3 = 0.0826 \cdot 0.020 \cdot \frac{1000}{0.6^5} = 21.245$$

ثم نفرض قيمة للضاغط البيزومتري عند العقدة D ، ولتكن:

$$H_D = 23m$$

بالنسبة للأنبوب 1:

$$H_A - H_D = K_1 \cdot Q_1^2$$

ومنه:

$$Q_1 = \sqrt{\frac{H_A - H_D}{K_1}} = \sqrt{\frac{30 - 23}{3.717}} = 1.3723 m^3/s$$

بالنسبة للأنبوب 2:

$$H_D - H_B = K_2 \cdot Q_2^2$$

ومنه:

$$Q_2 = \sqrt{\frac{H_D - H_B}{K_2}} = \sqrt{\frac{23 - 18}{64.458}} = 0.2785 m^3/s$$

بالنسبة للأنبوب 3:

$$H_D - H_C = K_3 \cdot Q_3^2$$

ومنه:

$$Q_3 = \sqrt{\frac{H_D - H_C}{K_3}} = \sqrt{\frac{23 - 9}{21.245}} = 0.8118 m^3/s$$

بحساب ΔQ، نجد أن:

$$\Delta Q = Q_1 - (Q_2 + Q_3) = 1.3723 - (0.2785 + 0.8118) = 0.282 m^3/s$$

نلاحظ أن الغزارة الواردة إلى العقدة D أكبر من الغزارة الخارجة منها، لذلك نقوم بزيادة الضاغط البيزومتري عند العقدة D، وليكن $H_D = 24.6m$.

بالنسبة للأنبوب 1:

$$Q_1 = \sqrt{\frac{H_A - H_D}{K_1}} = \sqrt{\frac{30 - 24.6}{3.717}} = 1.2053 m^3/s$$

بالنسبة للأنبوب 2:

$$Q_2 = \sqrt{\frac{H_D - H_B}{K_2}} = \sqrt{\frac{24.6 - 18}{64.458}} = 0.32 m^3/s$$

بالنسبة للأنبوب 3:

$$Q_3 = \sqrt{\frac{H_D - H_C}{K_3}} = \sqrt{\frac{24.6 - 9}{21.245}} = 0.8569 m^3/s$$

بحساب ΔQ، نجد أن:

$$\Delta Q = Q_1 - (Q_2 + Q_3) = 1.2053 - (0.32 + 0.8569) = 0.0284 m^3/s$$

نزيد قيمة الضاغط البيزومتري عند العقدة D، ونعيد الخطوات السابقة، فنجد أن: $H_D = 24.8m$، وتكون الغزارات في الأنابيب الثلاثة هي: $Q_1 = 1.183, Q_2 = 0.325 m^3/s, Q_3 = 0.862 m^3/s$. ومن أجلها يكون:

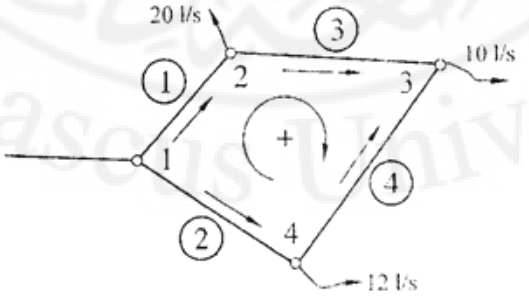
$$\Delta Q = Q_1 - (Q_2 + Q_3) = 1.183 - (0.325 + 0.862) = -0.004 m^3/s$$

وهي دقة كافية.

المسألة الخامسة عشرة

حل الشبكة المبينة في الشكل(غزارات في الأنابيب + ضواغط عند العقد)، علماً أن الغزارات المسحوبة من العقد مبينة على الشكل، وأن الضاغط البيزومتري عند العقدة 1 هو $H_1 = 70m$. علماً أن مواصفات الأنابيب جميعها معطاة في الجدول التالي، وأن دقة الحساب المطلوبة هي $\pm 0.1 l/s$.

رقم الأنبوب	$D(mm)$	$L(m)$	λ
1	200	200	0.02487
2	150	300	0.02695
3	80	400	0.03251
4	100	500	0.03035



الحل:

نقوم أولاً بحساب ثوابت الأنابيب من العلاقة:

$$K_i = 0.0826 \cdot \lambda_i \cdot \frac{L_i}{D_i^5}$$

وبالتعويض لكل أنبوب على حدة، نجد أن:

$$K_1 = 0.0826 \cdot 0.02487 \cdot \frac{200}{0.2^5} = 1284$$

$$K_2 = 0.0826 \cdot 0.02695 \cdot \frac{300}{0.15^5} = 8793$$

$$K_3 = 0.0826 \cdot 0.03251 \cdot \frac{400}{0.08^5} = 327760$$

$$K_4 = 0.0826 \cdot 0.03035 \cdot \frac{500}{0.10^5} = 125350$$

ثم نفترض غزارات أولية في الأنابيب، بحيث تحقق مبدأ انحفاظ الكتلة. وبناء عليه يمكن أن نختار القيم التالية: $Q_1 = 25\ell/s, Q_2 = 17\ell/s, Q_3 = 5\ell/s, Q_4 = 5\ell/s$. وننظم النتائج في الجدول التالي:

Nr	$Q_i(m^3/s)$	K_i	$K_i \cdot Q_i$	$K_i \cdot Q_i^2$
1	0.025	1284	32.1	+0.803
2	0.017	8793	149.5	-2.541
3	0.005	327760	1638.8	+8.194
4	0.005	125350	626.8	-3.133
$\sum$			2447.2	+3.323

ويكون مقدار التصحيح مساوياً:

$$q = -\frac{\sum_{i=1}^{4} K_i \cdot Q_i^2}{2 \cdot \sum_{i=1}^{4} K_i \cdot Q_i} = -\frac{3.323}{2 \cdot 2447.2} = -0.00068 m^3/s$$

نجد أن مقدار التصحيح $q > 0.0001 m^3/s$، ولذلك نجري تصحيحاً على الغـــزارات في الأنابيب، لتصبح على الشكل التالي:

$$Q_1 = 0.025 + (-0.00068) = 0.02432 m^3/s$$

$$Q_2 = 0.017 - (-0.00068) = 0.01768 m^3/s$$

$$Q_3 = 0.005 + (-0.00068) = 0.00432 m^3/s$$

$$Q_4 = 0.005 - (-0.00068) = 0.00568 m^3/s$$

وننظم النتائج مرة أخرى في الجدول التالي:

Nr	$Q_i(m^3/s)$	K_i	$K_i \cdot Q_i$	$K_i \cdot Q_i^2$
1	0.02432	1284	31.20	+0.759
2	0.01768	8793	155.46	-2.749
3	0.00432	327760	1415.92	+6.117
4	0.00568	125350	711.99	-4.044
Σ			2314.6	+0.083

ويكون مقدار التصحيح:

$$q = -\frac{\sum_{i=1}^{4} K_i \cdot Q_i^2}{2 \cdot \sum_{i=1}^{4} K_i \cdot Q_i} = -\frac{0.083}{2 \cdot 2314.6} = -0.00002 m^3/s$$

نجد أن مقدار التصحيح أقل من $q = 0.0001 m^3/s$، وهي ضمن الدقة المحددة في نص المسألة، وبالتالي لا داعي لتصحيح جديد. وتكون الغزارات النهائية هي:

$$Q_1 = 24.32 \ell/s, Q_2 = 17.68 \ell/s, Q_3 = 4.32 \ell/s, Q_4 = 5.68 \ell/s$$

أما منسوب الضاغط البيزومتري عند العقدة 2 فيساوي:

$$H_2 = H_1 - K_1 \cdot Q_1^2 = 70 - 1284 \cdot 0.02432^2 = 69.24m$$

ومنسوب الضاغط البيزومتري عند العقدة 3 يساوي:

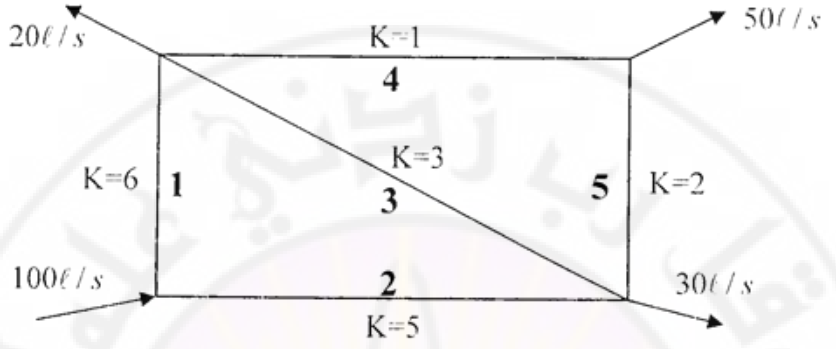
$$H_3 = H_2 - K_3 \cdot Q_3^2 = 69.24 - 327760 \cdot 0.00432^2 = 63.12m$$

ومنسوب الضاغط البيزومتري عند العقدة 4 يساوي:

$$H_4 = H_1 - K_2 \cdot Q_2^2 = 70 - 8793 \cdot 0.01768^2 = 67.25m$$

المسألة السادسة عشرة

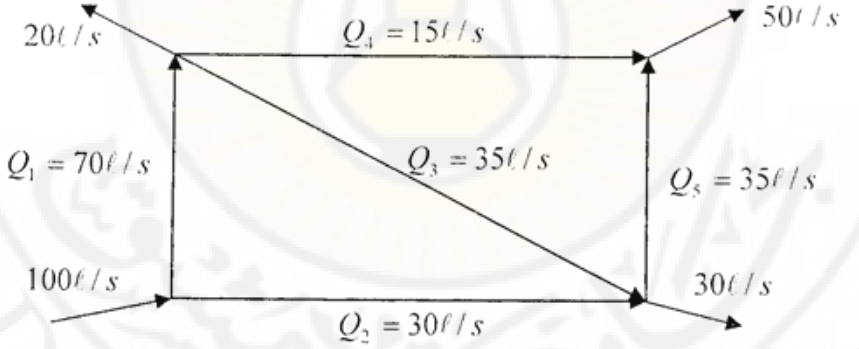
حل الشبكة المبينة في الشكل، بطريقة هادري-كروس.



الحل:

نفرض قيم الغزارات في الأنابيب بحيث تحقق معادلات الاستمرار عند العقد:

$$\sum Q_i = 0$$



التصحيح الأول:

الحلقة الأولى				
Nr	$Q_i(\ell/s)$	K_i	$K_i \cdot Q_i$	$K_i \cdot Q_i^2$
1	70.0	6	420	+29400
2	30.0	5	150	-4500
3	35.0	3	105	+3675
Σ			675	28575

$$q_1 = -\frac{\sum K_i \cdot Q_i^2}{2 \cdot \sum K_i \cdot Q_i} = -\frac{28575}{2 \cdot 675} = -21.17\ell/s$$

$$Q_1 = 70 + (-21.17) = 48.83\ell/s$$

$$Q_2 = 30 - (-21.17) = 51.17\ell/s$$

$$Q_3 = 35 + (-21.17) = 13.83\ell/s$$

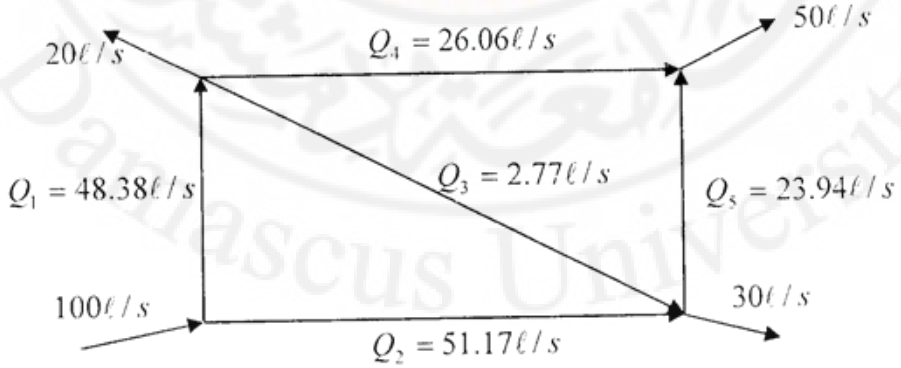
الحلقة الثانية				
Nr	$Q_i(\ell/s)$	K_i	$K_i \cdot Q_i$	$K_i \cdot Q_i^2$
4	15.0	1	15	+225
5	35.0	2	70	-2450
3	13.83	3	41.5	-574
$\sum$			126.5	-2799

$$q_2 = -\frac{\sum K_i \cdot Q_i^2}{2 \cdot \sum K_i \cdot Q_i} = -\frac{-2799}{2 \cdot 126.5} = +11.06\ell/s$$

$$Q_3 = 13.83 - (+11.06) = 2.77\ell/s$$

$$Q_4 = 15 + (+11.06) = 26.06\ell/s$$

$$Q_5 = 35 - (+11.06) = 23.94\ell/s$$



التصحيح الثاني:

الحلقة الأولى				
Nr	$Q_i(\ell/s)$	K_i	$K_i \cdot Q_i$	$K_i \cdot Q_i^2$
1	48.38	6	293	+14306
2	51.17	5	255.85	-13092
3	2.77	3	8.3	+23
$\sum$			557	1237

$$q_1 = -\frac{\sum K_i \cdot Q_i^2}{2 \cdot \sum K_i \cdot Q_i} = -\frac{1237}{2 \cdot 557} = -1.11\ell/s$$

$$Q_1 = 48.83 + (-1.11) = 47.72\ell/s$$

$$Q_2 = 51.17 - (-1.11) = 52.28\ell/s$$

$$Q_3 = 2.77 + (-1.11) = 1.66\ell/s$$

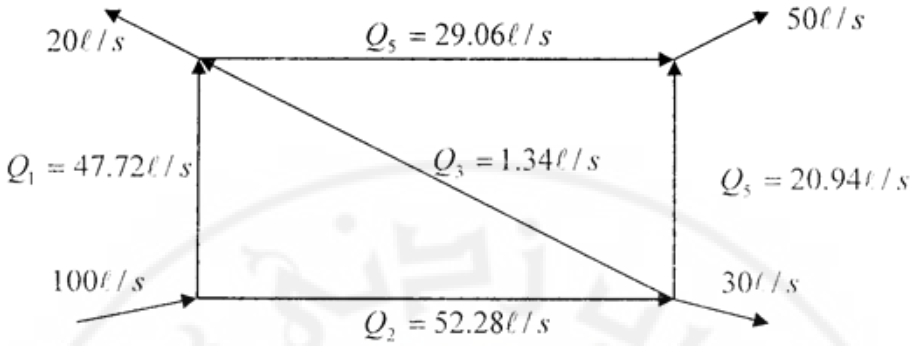
الحلقة الثانية				
Nr	$Q_i(\ell/s)$	K_i	$K_i \cdot Q_i$	$K_i \cdot Q_i^2$
4	26.06	1	26.06	+679
5	23.94	2	47.88	-1146
3	1.66	3	4.98	-8.3
$\sum$			78.92	-475.3

$$q_2 = -\frac{\sum K_i \cdot Q_i^2}{2 \cdot \sum K_i \cdot Q_i} = -\frac{-475.3}{2 \cdot 78.92} = +3.0\ell/s$$

$$Q_3 = 1.66 - (+3) = -1.3\ell/s$$

$$Q_4 = 26.06 + (+3) = 29.06\ell/s$$

$$Q_5 = 23.94 - (+3) = 20.94\ell/s$$



التصحيح الثالث:

الحلقة الأولى				
Nr	$Q_i(\ell/s)$	K_i	$K_i \cdot Q_i$	$K_i \cdot Q_i^2$
1	47.72	6	286.3	+13663
2	52.28	5	261.4	-13666
3	1.34	3	4	-5.4
$\sum$			551.7	-8.4

$$q_1 = -\frac{\sum K_i \cdot Q_i^2}{2 \cdot \sum K_i \cdot Q_i} = -\frac{-8.4}{2 \cdot 551.7} = +0.007\ell/s$$

$$Q_1 = 47.72 + (0.007) = 47.727\ell/s$$

$$Q_2 = 51.17 - (0.007) = 52.273\ell/s$$

$$Q_3 = 1.34 - (0.007) = 1.333\ell/s$$

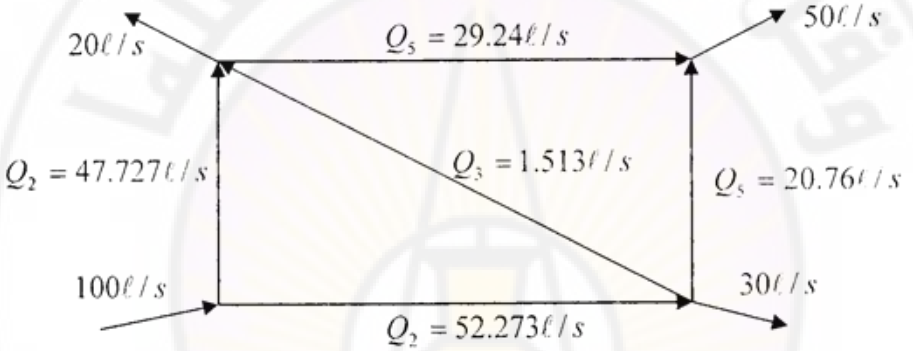
الحلقة الثانية				
Nr	$Q_i(\ell/s)$	K_i	$K_i \cdot Q_i$	$K_i \cdot Q_i^2$
4	29.06	1	29.06	+844.5
5	20.94	2	41.88	-877
3	1.333	3	4.0	5.33
$\sum$			74.94	-27.17

$$q_2 = -\frac{\sum K_i \cdot Q_i^2}{2 \cdot \sum K_i \cdot Q_i} = -\frac{-27.17}{2 \cdot 74.94} = +0.18\ell/s$$

$$Q_3 = 1.333 + (+0.18) = 1.513\ell/s$$

$$Q_4 = 29.06 + (+0.18) = 29.24\ell/s$$

$$Q_5 = 20.94 - (+0.18) = 20.76\ell/s$$



التصحيح الرابع:

الحلقة الأولى				
Nr	$Q_i(\ell/s)$	K_i	$K_i \cdot Q_i$	$K_i \cdot Q_i^2$
1	47.727	6	286.35	+13667.2
2	52.273	5	261.37	-13662.3
3	1.513	3	4.50	-6.87
Σ			552.22	-1.97

$$q_1 = -\frac{\sum K_i \cdot Q_i^2}{2 \cdot \sum K_i \cdot Q_i} = -\frac{-1.97}{2 \cdot 552.22} = +0.0018\ell/s$$

$$Q_1 = 47.72 + (0.0018) = 47.73\ell/s$$

$$Q_2 = 52.273 - (0.0018) = 52.27\ell/s$$

$$Q_3 = 1.513 - (0.0018) = 1.51\ell/s$$

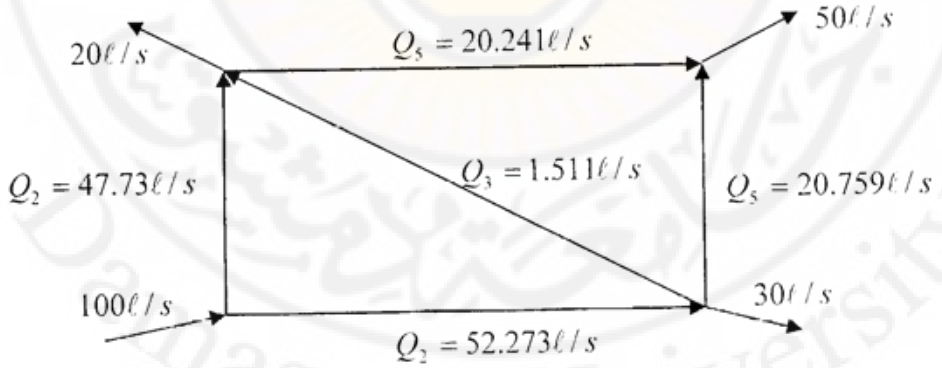
الحلقة الثانية				
Nr	$Q_i(\ell/s)$	K_i	$K_i \cdot Q_i$	$K_i \cdot Q_i^2$
4	29.24	1	29.40	+855
5	20.76	2	41.50	-862
3	1.51	3	4.50	6.80
$\sum$			75.23	-0.16

$$q_2 = -\frac{\sum K_i \cdot Q_i^2}{2 \cdot \sum K_i \cdot Q_i} = -\frac{-0.16}{2 \cdot 75.23} = +0.001\ell/s$$

$$Q_3 = 1.51 + (+0.001) = 1.511\ell/s$$

$$Q_4 = 29.24 + (+0.001) = 29.241\ell/s$$

$$Q_5 = 20.76 - (+0.001) = 20.759\ell/s$$



المسألة السابعة عشرة

صمم أنبوب نقل مياه من الفونت المرن، طوله $L = 10Km$ ، لإمرار تصريف مقداره $Q = 500\ell/s$ ، ويصل ما بين خزانين مكشوفين، فرق المنسوب بينهما $H = 50m$. وهو يحتوي على القطع التالية:

اسم القطعة	كوع 11.25^0	كوع 22.5^0	كوع 45^0	كوع 90^0	سكر جارور
العدد	10	8	7	3	6

الحل:

لو طبقنا معادلة برنوللي بين سطحي الماء في الخزانين، لوجدنا أن:

$$H = K \cdot Q^2$$

ومنه يكون ثابت الأنبوب المطلوب:

$$K = \frac{H}{Q^2} = \frac{50}{0.5^2} = 200$$

نوجد الآن معاملات الفواقد المحلية للأكواع بتطبيق العلاقة التجريبية التالية:

$$k_\alpha = k_{90} \cdot (1 - \cos\alpha)$$

حيث: k_{90} – معامل الفواقد المحلية لكوع بزاوية 90^0، وهو يساوي $k_{90} = 1.15$ لكوع حوافه ملساء من الداخل. وبناء عليه يكون لدينا:

$$k_{90} = 1.15 \cdot (1 - \cos 90) = 1.15$$

$$K_{45} = 1.15 \cdot (1 - \cos 45) = 0.34$$

$$k_{22.5} = 1.15 \cdot (1 - \cos 22.5) = 0.088$$

$$k_{11.25} = 1.15 \cdot (1 - \cos 11.25) = 0.022$$

أما معامل الفواقد المحلية لسكر جارور مفتوح بالكامل فيساوي $k_v = 0.15$.

ويبين الجدول التالي قيم معامل الفواقد المحلية في الخط:

اسم القطعة	معامل الفواقد k	عدد القطع n	$n \cdot k$
كوع 11.25^0	0.022	10	0.22
كوع 22.5^0	0.088	8	0.704
كوع 45^0	0.34	7	2.38
كوع 90^0	1.15	3	3.45
سكر جارور	0.15	6	0.90
مدخل الأنبوب	0.50	1	0.50
مخرج الأنبوب	1	1	1.00
المجموع			9.154

نفرض قيمة لمعامل الاحتكاك في الأنبوب، ولتكن $\lambda = 0.015$. ومن علاقة ثابت الأنبوب لدينا:

$$K = 0.0826 \cdot \lambda \cdot \frac{L + L_e}{D^5}$$

أو:

$$200 - 0.0826 \cdot 0.015 \cdot \frac{10000 + 9.154 \cdot \frac{D}{0.015}}{D^5}$$

ومنه:

$$200 \cdot D^5 - 0.756 \cdot D = 12.39$$

بحل المعادلة، نجد أن: $D \approx 0.57m$. ولكن لا يوجد لدى الشركات المنتجة لأنابيب الفونت المرن قطر $D = 570mm$. فلو اخترنا قطر $500mm$ فإن هذا القطر لن يمرر التصريف المطلوب. أما لو اخترنا $600mm$، فإنه سيمرر أكثر من التصريف المطلوب. لذلك نختار قطر $D = 600mm$، ويمكن التحكم بالغزارة المطلوبة تماماً بوضع سكر أو حاصرة جريان في نهاية الخط يقومان بتوليد فواقد محلية تؤدي إلى الحصول على الغزارة المطلوبة.

نحسب سرعة الجريان الفعلية المارة في الأنبوب:

$$V = \frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot D^2} = \frac{4 \cdot 0.5}{\pi \cdot 0.6^2} = 1.77 m/s$$

وقيمة هذه السرعة تقع ضمن الحدود المسموحة، لأن قيم السرعة المفضلة في الأنابيب تكون ضمن المجال $3m/s < V < 1m/s$. ومن الجداول الخاصة بخشونة الأنابيب، نجد أن الخشونة المطلقة التصميمية للفونت المرن تساوي $\varepsilon = 0.125mm$. وتكون الخشونة النسبية مساوية:

$$\frac{\varepsilon}{D} = \frac{0.125}{500} = 0.00025$$

قيمة عدد رينولدز في الأنبوب تساوي:

$$\mathrm{Re} = \frac{V \cdot D}{\nu} = \frac{1.77 \cdot 0.5}{1.1 \times 10^{-6}} = 8 \times 10^5$$

ومن مخططات مودي، نجد أن: $\lambda = 0.0158$. ويكون ثابت مقاومة الفعلي للأنبوب مساوياً:

$$K = 0.0826 \cdot 0.0158 \cdot \frac{10000 + 9.154 \cdot \frac{0.6}{0.0158}}{0.6^5} = 173.67$$

وتكون الغزارة الحقيقية التي يمررها الأنبوب مساوية:

$$Q = \sqrt{\frac{H}{K}} = \sqrt{\frac{50}{173.67}} = 0.537 m^3/s$$

وهي أكبر من الغزارة المطلوبة، ويمكن الحصول على الغزارة المطلوبة فعلاً بتركيب سكر أو حاصرة جريان في نهاية الخط.

المسألة السابعة عشرة

أنبوب من الفونت المرن طوله $L = 1000m$، وقطره $D = 500mm$، ويجري فيه الماء بغزارة $Q = 400\ell/s$. قدّر فواقد الاحتكاك باستخدام علاقة دارسي - فايسباخ ثم علاقة هازن-وليامز. احسب معامل الاحتكاك بتطبيق عدة علاقات تجريبية.

الحل:

باستخدام علاقة دارسي– فايسباخ:

لدينا سرعة الجريان:

$$V = \frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot D^2} = \frac{4 \cdot 0.4}{\pi \cdot 0.5^2} = 2.04 m/s$$

وتبلغ الخشونة المطلقة التصميمية للفونت المرن $k = 0.125mm$، وتكون الخشونة النسبية مساوية:

$$\frac{\varepsilon}{D} = \frac{0.125}{500} = 0.00025$$

كما تبلغ قيمة عدد رينولدز:

$$\mathrm{Re} = \frac{V \cdot D}{\nu} = \frac{2.04 \cdot 0.5}{1.15 \times 10^{-6}} = 8.87 \times 10^5$$

تعطى قيمة λ حسب كولبروك–وايت بالصيغة:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \cdot \log\left(\frac{\varepsilon}{3.7 \cdot D} + \frac{2.51}{\mathrm{Re} \cdot \sqrt{\lambda}} \right)$$

وبالتعويض، نجد أن:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \cdot \log\left(0.000068 + \frac{2.83 \times 10^{-6}}{\sqrt{\lambda}} \right) \Rightarrow \lambda = 0.0153$$

ولحساب λ من مخطط مودي لدينا:

$\mathrm{Re} = 8.87 \times 10^5$ و $\frac{\varepsilon}{D} = 0.0025$، ومنه: $\lambda - 0.0154$.

ولحساب λ من علاقة بار لدينا:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \cdot \log\left(\frac{\varepsilon}{3.7 \cdot D} + \frac{5.1286}{\mathrm{Re}^{0.89}} \right)$$

وبالتعويض، نجد أن:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \cdot \log\left(0.000068 + \frac{5.1286}{\left(8.87 \times 10^5\right)^{0.89}} \right) = 0.0154$$

ولحساب λ من علاقة سوامي لدينا:

$$\lambda = \frac{0.25}{\left[\log\left(\frac{\varepsilon}{3.7 \cdot D} + \frac{5.74}{\mathrm{Re}^{0.9}}\right)\right]^2}$$

وبالتعويض، نجد:

$$\lambda = \frac{0.25}{\left[\log\left(0.000068 + \frac{5.74}{\left(8.87 \times 10^5\right)^{0.9}}\right)\right]^2} = 0.0154$$

وتكون الفواقد:

$$h_f = 0.0154 \cdot \frac{1000}{0.5} \cdot \frac{2.04^2}{2 \cdot 9.81} = 6.53m$$

باستخدام علاقة هازن–وليامز:

تحسب فواقد الاحتكاك طريقة هازن–وليامز من العلاقة:

$$h_f = 6.81 \cdot \frac{L}{D^{1.167}} \cdot \left(\frac{V}{C}\right)^{1.852}$$

ومن الجدول (٨–٣)، نجد أن $C \approx 139$ لفونت أملس مبطن جديد، وبالتعويض نحصل على:

$$h_f = 6.81 \cdot \frac{1000}{0.5^{1.167}} \cdot \left(\frac{2.0}{139}\right)^{1.852} = 6.15m$$

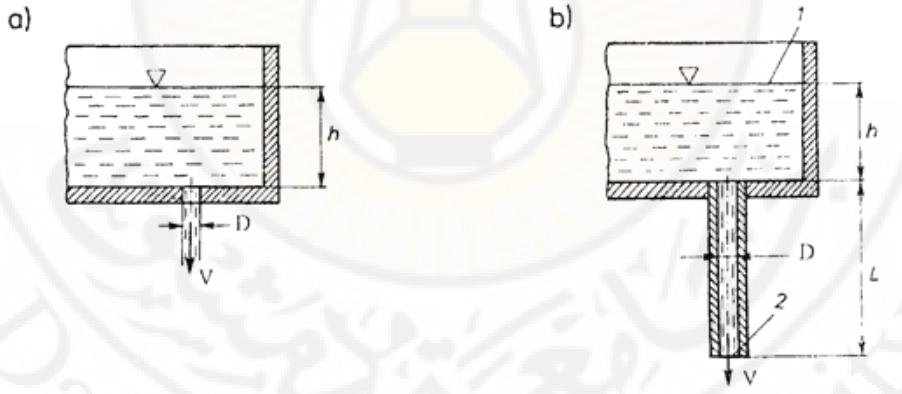
مسائل غير محلولة حول الفصل الثامن

المسألة الأولى

نفذت في قعر خزان عمق الماء فيه $h = 5m$ فتحة بقطر $D = 20mm$ ، كما في الشكل **a**. والمطلوب:

- احسب الغزارة الخارجة من الخزان.
- لو تم تنفيذ فتحة في قعر الخزان ووصلت بأنبوب طوله $L = 10m$ ، وقطره يساوي قطر الفتحة، كما في الشكل **b**. ماهو قطر هذا الأنبوب، بحيث تكون الغزارة الخارجة من الخزان في الحالة **b** مساوية للغزارة الخارجة من الخزان في الحالة **a**؟

علماً أن معامل الاحتكاك $\lambda = 0.02$ ، ومعامل الفواقد المحلية عند مخرج الفتحة $k = 0.5$ للحالتين.

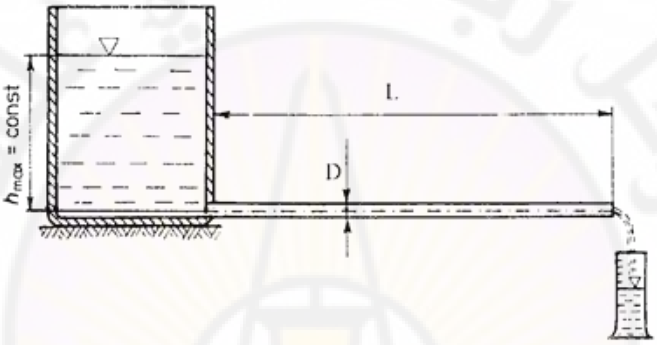


المسألة الثانية

يجري الماء في أنبوب أفقي طوله $L = 10m$ وقطره $D = 100mm$ ، بغزارة مقدارها $Q = 285m^3/h$. احسب قيمة هبوط الضغط بين بدايته ونهايته. إذا علمت أن خشونته المطلقة $\varepsilon = 0.1mm$ ، وأن اللزوجة الحركية للماء في درجة الحرارة السائدة هي $\nu = 1.2 \times 10^{-6} m^2/s$.

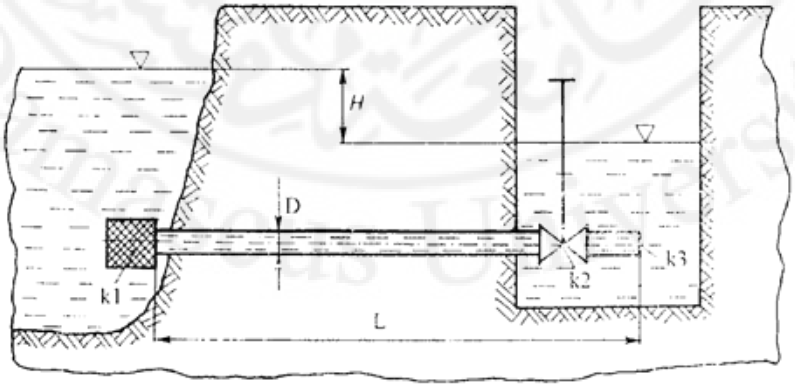
المسألة الثالثة

لتحديد قيمة اللزوجة الحركية للنفط، استخدم أنبوب زجاجي قطره $D = 10mm$ وطوله $L = 3m$ كما في الشكل. وعند ارتفاع $h = 0.4m$ في الخزان، كانت كمية النفط الخارجة من الأنبوب خلال دقيقة واحدة تساوي $2.52 \times 10^{-3} m^3$. احسب اللزوجة الحركية للنفط المستخدم.



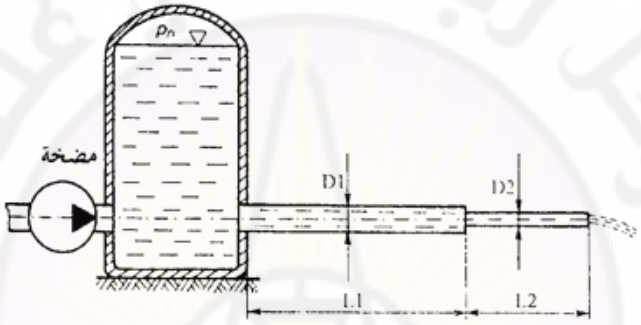
المسألة الرابعة

صمم أنبوب فولاذي بطول $L = 500m$ لسحب المياه من نهر إلى خزان، كما في الشكل. علماً أن الفرق بين منسوبي المياه في الخزان والنهر هو $H = 6m$، وأن معاملات الفواقد المحلية هي $k_1 = 7, k_2 = 0.5, k_3 = 1.0$، وأن السرعة التصميمية للجريان في الأنابيب هي: $1m/s > V > 3m/s$.



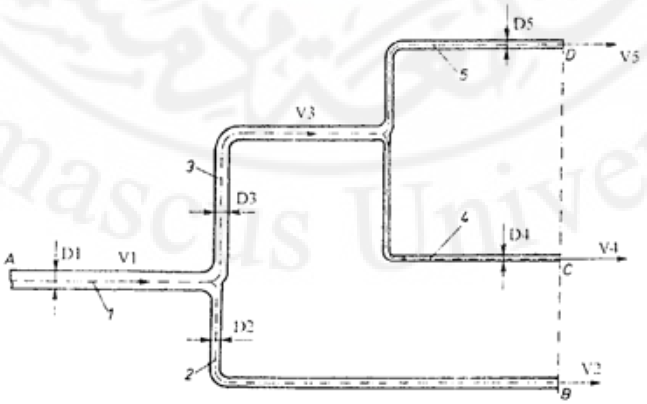
المسألة الخامسة

رُكّب على طرف مضخة هيدروفور (خزان ضغط)، يخرج منه الماء إلى الفضاء الخارجي عبر أنبوبين بطولين وقطرين مختلفين. احسب ضاغط المضخة، بحيث تكون الغزارة الخارجة من الخزان مساوية $Q = 40 \times 10^{-3} m^3/s$. علماً أن قطري الأنبوبين: $D_1 = 80mm, D_2 = 50mm$، وطولهما: $L_1 = 200m, L_2 = 100m$. افترض أن الأنبوبين أملسين هيدروليكياً.



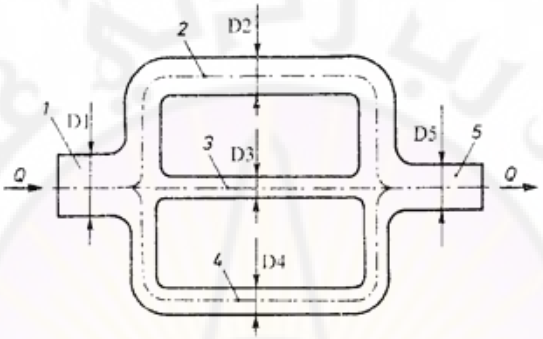
المسألة السادسة

تقع منظومة الأنابيب المبينة في الشكل في مستوٍ أفقي واحد. وهي تصل بين خزانين مكشوفين فرق المنسوب بينهما H. ضع المعادلات التي تمكن من حساب سرعة الجريان في كل أنبوب من هذه الأنابيب. بافتراض أن معامل الاحتكاك واحد لجميع الأنابيب، وأن الفواقد المحلية مهملة. وأن أطوال الأنابيب هي L_1, L_2, L_3, L_4, L_5، وأقطارها D_1, D_2, D_3, D_4, D_5.



المسألة السابعة

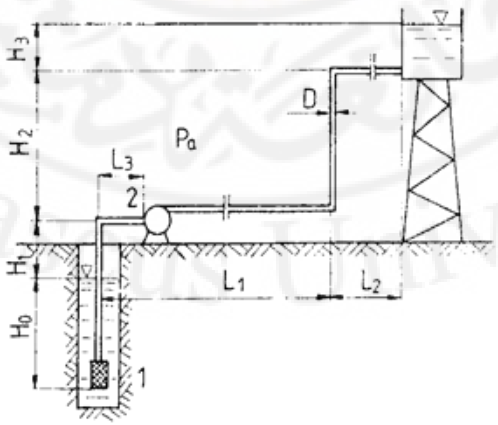
لمنظومة الأنابيب المبينة في الشكل، بفرض أن الغزارة المارة فيها هي Q. استنتج العلاقة اللازمة لحساب الغزارة المارة في الأنبوب 2. علماً أن أطوال الأنابيب: L_1, L_2, L_3, L_4, L_5، وأقطارها D_1, D_2, D_3, D_4, D_5، وأن معامل الاحتكاك للأنابيب جميعها هو λ. (أهمل الفواقد المحلية).



المسألة الثامنة

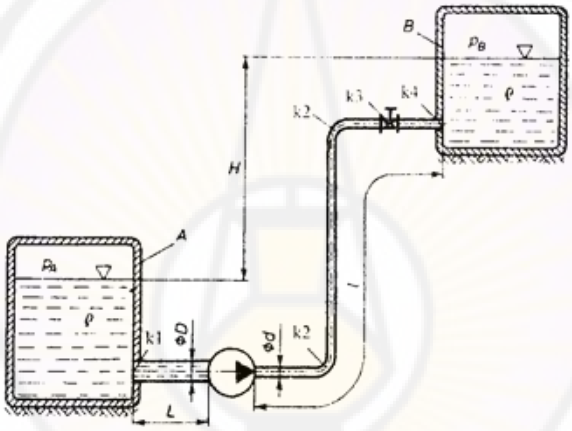
تقوم مضخة ضاغطها $H_p = 13m$ برفع الماء من بئر إلى خزان، كما في الشكل. احسب قطر الأنبوب اللازم لإمرار غزارة مقدارها $Q = 0.71 \times 10^3 m^3/s$، إذا كان مصنوعاً من مادة البولي ايتيلين. بافتراض أن معامل الفواقد المحلية للكوع الواحد هو $k_1 = 0.3$، ولمأخذ السحب $k_2 = 5$، وأن:

$H_0 = 3m, H_1 = 2m, H_2 = 8m, H_3 = 0.5m, L_1 = 27m, L_2 = 50m, L_3 = 1m$.



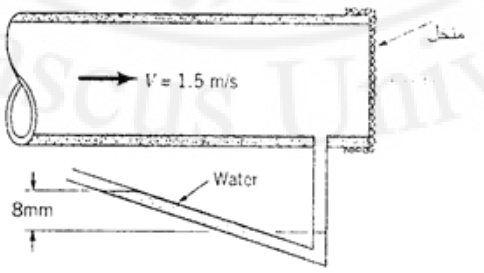
المسألة التاسعة

تقوم مضخة برفع الماء من خزان سفلي يتعرض لضغط قيمته $p_A = 0.05MPa$ ، إلى خزان علوي يتعرض لضغط $p_B = 0.15MPa$ ، بتصريف مقداره $Q = 14m^3/h$ ، كما في الشكل. فإذا علمت أن قطر أنبوب الامتصاص $D = 120mm$ وطوله $l = 3m$ ، وقطر أنبوب الدفع $d = 60mm$ وطوله $l = 12m$ ، وأن فرق المنسوب بين الخزانين $H = 8m$. احسب ضاغط المضخة المطلوب. بافتراض أن: $k_1 = 0.5, k_2 = 0.25, k_3 = 3, k_4 = 1, \varepsilon = 0.1mm$ ، وأن اللزوجة الحركية للماء $\nu = 1.15 \times 10^{-6} m^2/s$.



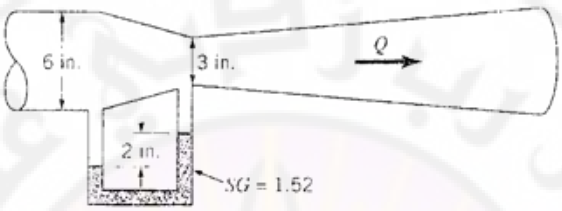
المسألة العشرة

في نهاية أنبوب يجري فيه الهواء بسرعة $V = 1.5m/s$ تم تثبيت منخل، كما في الشكل. وقد أشار الماء الموضوع في المانومتر إلى انحراف مقداره $8mm$. احسب معامل الفواقد للمنخل.



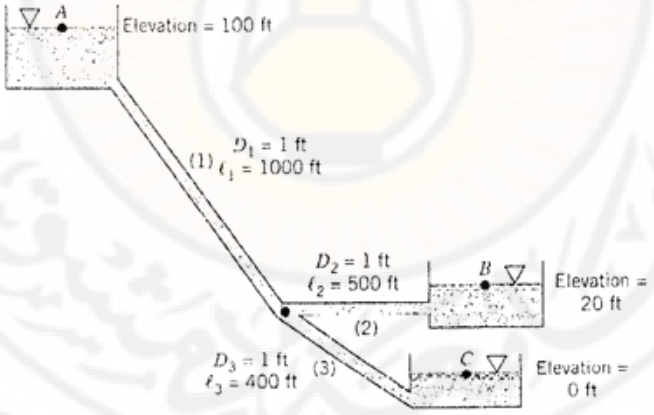
المسألة الحادية عشرة

بناء على قراءة السائل ذي الكثافة النسبية $SG = 1.52$ الموضوع في المانومتر. يطلب حساب غزارة الماء المتدفق في جهاز فنتوري المبين في الشكل. علماً زاوية التضيق للجهاز تساوي 20^0.



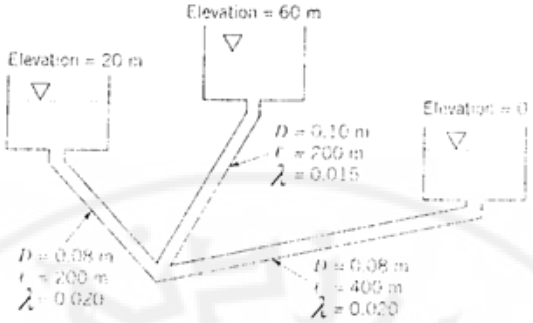
المسألة الثانية عشرة

بإهمال الفواقد المحلية، وبافتراض معامل الاحتكاك $\lambda = 0.03$ للأنابيب جميعها. يطلب حساب الغزارة المارة في كل من الأنابيب الثلاثة، الواصلة بين الخزانات المبينة في الشكل.



المسألة الثالثة عشرة

احسب الغزارات المارة في الأنابيب الواصلة بين الخزانات الثلاثة المبينة في الشكل. ثم احسب منسوب الضاغط البيزومتري عند عقدة تلاقي الأنابيب، مع إهمال الفواقد المحلية في جميع أجزاء المنظومة.

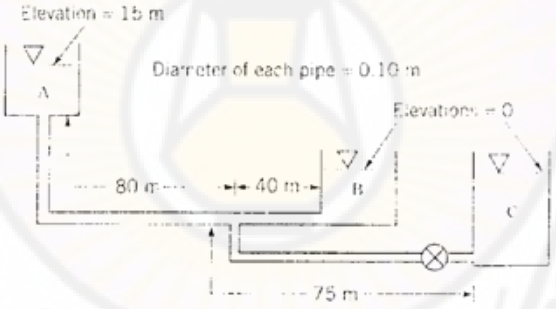


المسألة الرابعة عشرة

احسب الغزارة المارة في الأنابيب المبينة في الشكل، وذلك في حالتين:

- السكر المركب بجوار الخزان C مغلق.
- السكر المركب بجوار الخزان C مفتوح بالكامل.

علماً أن: $D = 100mm, \lambda = 0.02$ للأنابيب جميعها.



المسألة الخامسة عشرة

يراد إمداد مدينة عدد سكانها 100,000 نسمة بمياه الشرب، من نبع يرتفع منسوبه عن سطح البحر $950m$. صمم أنبوباً من الفونت المرن لنقل المياه من النبع إلى خزان المدينة، الذي يبلغ منسوب سطح الماء فيه $900m$. علماً أن طول الخط $L = 8000m$، وأن مجموع معاملات الفواقد المحلية على الأنبوب $\sum k = 22.5$، وأن حصة الفرد من مياه الشرب تبلغ يومياً 150ℓ. أنجز الحسابات مرة باستخدام علاقة دارسي، ومرة باستخدام علاقة هازن وليامز. وقدّر بشكل سليم جميع المعطيات الناقصة التي تراها لازمة للحل.

جدول التحويلات من الواحدات الإنكليزية إلى الواحدات الدولية

Physical Quantity	التحويل من	التحويل إلى	معامل الضرب	الكمية الفيزيائية
Acceleration	ft/s^2	m/s^2	3.048 E -1	التسارع
Area	ft^2	m^2	9.290 E -2	المساحة
Density	lbm/m^3 $slugs/m^3$	kg/m^3	1.602 E +1 5.154 E +2	الكتلة النوعية
Energy	ft.lb Btu	J	1.356 1.055 E +3	الطاقة
Force	lb	N	4.448	القوة
Length	ft mile in	m	3.048 E -1 1.609 E +3 2.540 E -2	الطول
Mass	lbm slug	kg	4.536 E -1 1.459 E +1	الكتلة
Power	ft.lb/s hp	W	1.356 7.457 E +2	الاستطاعة
Pressure	lb/ft^2(psf) lb/ft^2(psi)	N/m^2	4.788 E +1 6.895 E +3	الضغط
Specific weight	lb/ft^3	N/m^3	1.571 E +2	الوزن النوعي
Temperature	F	C	3.048 E -1	درجة الحرارة
Velocity	ft/s mi/h	m/s	3.048 E -1 4.470 E -1	السرعة
Viscosity (dynamic)	$lb.s/ft^2$	$N.s/m^2$	4.788 E +1	اللزوجة التحريكية
Viscosity (kenimatic)	ft^2/s	m^2/s	9.290 E -2	اللزوجة الحركية
Discharge	ft^3/s gal/min	m^3/s	2.832 E -2 6.309 E -5	الغزارة

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

معجم المصطلحات

انكليزي	عربي
Absolute Pressure	الضغط المطلق
Acceleration	التسارع
Angle of Attack	زاوية الهجوم
Angular Deformation	التشوه الزاوي
Archimedes Principle	دافعة أرخميدس
Aspect Ratio	نسبة الهيئة
Atmospheric Pressure	الضغط الجوي
Average Velocity	السرعة الوسطية
Barr Equation	علاقة بار
Basic	أساسي
Bernoulli Equation	معادلة برنوللي
blade	ريشة
Blasius Equation	علاقة بلاسيوس
Boundary Conditions	الشروط الحدية
Boundary Layer	الطبقة الحدية
Boundary Layer Equations	معادلات الطبقة الحدية
Boundary Layer Separation	انفصال الطبقة الحدية
Boundary Layer Thickness	سماكة الطبقة الحدية
Bourdon Gauge	مقياس بوردون
Boussinesq Model	نموذج بوسينيسك
British System	النظام البريطاني
Burka Equation	علاقة بوركا
Capillary	الخاصية الشعرية

Cavitation	التكهف
Center of Pressure	مركز الضغط
Circulation	الجولان
Classification of Flow	تصنيف الجريان
Colebrook-White Equation	علاقة كولبروك-وايت
Compressibility of Fluid	انضغاطية السائل
Compressible Flow	جريان انضغاطي
Conservation of Mass	انحفاظ الكتلة
Continuity Equation	معادلة الاستمرار
Continuity of Flow	استمرارية الجريان
Contracted Section	مقطع متقلص
Contraction Coefficient	معامل التقلص
Curved Submerged Cylindrical Surfaces	السطوح المغمورة المنحنية الأسطوانية
Cylindrical coordinate	الإحداثيات الأسطوانية
Darcy- Weisbach Equation	علاقة دارسي-فايسباخ
Deformation	التشوه
Density	الكتلة النوعية (الكثافة)
Differential Continuity Equation	معادلة الاستمرار التفاضلية
Dimensions	أبعاد
Dimensional Analysis	التحليل البعدي
Discharge	الغزارة أو التصريف
Discharge Coefficient	معامل التصريف
Displacement Thickness	سماكة الإزاحة
Distribution	توزع
Drag Coefficient	معامل الإعاقة
Drag Force	قوة الإعاقة
Ductile Iron	فونت مرن

Dynamic	التحريك
Dynamic Viscosity	اللزوجة التحريكية
Elevation Head	الضاغط الكامن
Energy Equation	معادلة الطاقة
Energy Line	خط الطاقة
Entrance Length	طول المدخل
Equation	معادلة
Equipotenial Line	خطوط تساوي الكمون
Euler's Equations	معادلات أويلر
External Flow	الجريان الخارجي
Field	حقل
Finite element Method	طريقة (نظرية) العناصر المحدودة
Fixed blade	ريشة ثابتة
Flotation	الطفو
Flow	الجريان
Flow About Bodies	الجريان حول الأجسام
Flow Net	شبكة الجريان
Flow Over Flat Plate	الجريان فوق صفيحة مستوية
Fluid	مائع
Fluid Mechanics	ميكانيك الموائع
Fluid Static	توازن السائل
Force	قوة
Forced Vortex	دوامة قسرية
Free Stream Velocity	سرعة التيار الحر
Free Vortex	دوامة حرة
Friction Factor	معامل الاحتكاك
Friction Losses	فواقد الاحتكاك
Froude Number	عدد فراود

Fully Developed Flow	الجريان المتطور أو الجريان المتكون
Fully Developed Laminar Flow	جريان صفحي متطور
Fully Developed Velocity Profile	منحني سرعة كامل التطور
Gauge Pressure	الضغط النسبي أو الضغط المقيس
Hagen-Poiseuille Equation	معادلة هاجن-بواسوي
Hazen-Williams Equation	علاقة هازن-وليامز
Head	الضاغط
Head Losses	فواقد الطاقة
Hydraulic Grade Line	خط التدرج الهيدروليكي
Hydraulics	الهيدروليك
Hydrostatic	الضغط الساكن أو الهيدروستاتيكي
Hydrostatic Distribution	توزع الضغط الساكن
Ideal Fluid	السائل المثالي
Inclined Plane Submerged Surface	السطوح المغمورة في مستوي مائل
Inclined Wall	جدار مائل
Inclined-Tube Manometer	المانومتر المائل
Incompressible Flow	جريان غير قابل للانضغاط
Intensity of Turbulence	شدة الاضطراب
Internal Flow	الجريان الداخلي
International System	النظام العالمي
Inviscid Core	نواة غير لزجة
Inviscid Flow	الجريان غير اللزج
Irrotational Flow	جريان غير دوراني
Karman Model	نموذج كارمن
Kinematic	الحركة
Kinematic Viscosity	اللزوجة الحركية
Laminar Boundary Layer	الطبقة الحدية الصفحية
Laminar Flow	الجريان الصفحي

Laminar Sub-Layer	الطبقة التحتية الصفحية
Laminar Zone	المنطقة الصفحية
Laplace's Equation	معادلة لابلاس التفاضلية
Length	الطول
Lift Coefficient	معامل الرفع
Linear Deformation	التشوه الخطي
Linear Losses	الفواقد الطولية
Liquid	سائل
Liquid Mechanics	ميكانيك السوائل
Local Loss Coefficient	معامل الفواقد المحلية
Local Losses	الفواقد المحلية
Mach Number	عدد ماخ
Major Losses	الفواقد الرئيسة
Mass	الكتلة
Matrix	مصفوفة
Mechanical Energy	الطاقة الميكانيكية
Minor Losses	الفواقد الثانوية
Mixing Length	طول المزج
Momentum	كمية الحركة
Momentum Equation	معادلة كمية الحركة
Momentum Integral Equation	المعادلة التكاملية لكمية الحركة
Momentum Thickness	سماكة كمية الحركة
Moody Equation	علاقة مودي
Moving blade	ريشة متحركة
Navier-Stokes Equations	معادلات نافييه – ستوكس
Network	شبكة
Newtonian Fluids	السوائل النيوتونية
Newton's Second Law	قانون نيوتن الثاني

Newton's Third Law	قانون نيوتن الثالث
Non-Newtonian Fluids	السوائل غير النيوتونية
Nonuniform Flow	الجريان غير المنتظم
Normal Stress	إجهاد ناظمي
One Dimensional Flow	جريان أحادي البعد
Orifice Plate	فتحة أنبوب
Pascal's Law	قانون باسكال
Path Line	خط المسار
Physical Quantities	الكميات الفيزيائية
Piezometer Tube	الأنبوب البيزومتري
Piezometric Head	الضاغط البيزومتري
Pipe	أنبوب
Pipe Characteristic Curve	المنحني المميز للأنبوب
Pipe Roughness	خشونة الأنبوب
Pitot Tube	أنبوب بيتو
Plate	صفيحة
Point	نقطة
Polyethylene	بولي ايتيلين
Potential Flow	الجريان الكموني
Prandtl Equations	معادلات براندتل
Prandtl Model	نموذج براندتل
Prandtl Tube	أنبوب براندتل
Pressure	ضغط
Pressure Gradient	تدرج الضغط
Pressure Head	ضاغط الضغط
Pressure Prism	موشور الضغط
Pressured Flow	الجريان المضغوط
Primary Quantities	الكميات الأساسية

Quantity	كمية
Quasisteady Flow	الجريان شبه المستقر
Radial Flow	الجريان الشعاعي
Real Flow	الجريان الحقيقي
Rectangular Wall	جدار مستطيل
Relative Density	الكثافة النسبية
Relative Roughness	الخشونة النسبية
Reservoir	خزان
Reynolds Number	عدد رينولدز
Reynolds Stresses	إجهادات رينولدز
Reynolds-Navier-Stokes Equations	معادلات نافييه-ستوكس-رينولدز
Rotation	دوران
Rotational Flow	جريان دوراني
Rough Pipe	أنبوب خشن هيدروليكياً
Secondary Quantities	الكميات الثانوية
Separation Point	نقطة الانفصال
Shape Factor	معامل الشكل
Shear stress	إجهاد القص
Sharp-Crested Rectangular Weir	هدار مستطيل رقيق الحافة
Sink	البالوعة
Skin Friction Coefficient	معامل الاحتكاك
Small Orifice	فتحة صغيرة
Smooth Cylinder	أسطوانة ملساء
Smooth Pipe	أنبوب أملس هيدروليكياً
Smooth Sphere	كرة ملساء
Solid Mechanics	ميكانيك الجسم الصلب
Source	نبع
Specific Weight	الوزن النوعي

Stability of Submerged Bodies	استقرار الأجسام المغمورة
Stagnation Point	نقطة الركود
Static	توازن
Steady Flow	الجريان المستقر
Stream Function	تابع التيار
Stream Line	خط التيار
Stream Tube	أنبوب تيار
Stress	إجهاد
Stresses Field	حقل الإجهادات
Stresses Matrix	مصفوفة الإجهادات
Submerged Horizontal Surface	السطوح الأفقية المغمورة
Submerged Surface	السطوح المغمورة
Sudden Contraction	تضيق مفاجئ
Sudden Expansion	توسع مفاجئ
Surface Tension	التوتر السطحي
Swamee Equation	علاقة سوامي
System	نظام
System of Dimensions	نظم الأبعاد
Systems of Units	نظم الواحدات
Taylor Model	نموذج تايلور
Temperature	الحرارة
The Basic Equations of Fluid Static's	المعادلات الأساسية لتوازن السوائل
The Moody Diagram	مخطط مودي
Time	الزمن
Total Head	الضاغط الكلي
Tow Dimensional Flow	جريان ثنائي البعد
Transition Boundary Layer	الطبقة الحدية الانتقالية
Transition Zone	المنطقة الانتقالية

Transitional	انتقالي
Translation	انسحابي
Tube Manometer	المانومتر البسيط
Turbulence Viscosity	لزوجة الاضطراب
Turbulent Boundary Layer	الطبقة الحدية المضطربة
Turbulent Boundary Layer Equations	معادلات الطبقة الحدية المضطربة
Turbulent Flow	الجريان المضطرب
Turbulent Models	نماذج الإضطراب
Turbulent Shear Stresses	إجهادات القص في الجريان المضطرب
Turbulent Zone	المنطقة المضطربة
Uniform Flow	الجريان المنتظم
Unit	واحدة
Unsteady Flow	الجريان غير المستقر
Vacuum	التفريغ أو التخلية
Vapor	تبخر
Vapor Pressure	ضغط التبخر
Vee Weir	هدار مثلثي
Velocity	السرعة
Velocity Coefficient	معامل السرعة
Velocity Energy Coefficient	معامل الطاقة الحركية
Velocity Fluctuation	تأرجح السرعة
Velocity Gradient	تدرج السرعة
Velocity Head	الاضاغط الحركي
Venturi Meter	جهاز فنتوري
Velocity Potential	تابع كمون السرعة
Vertical Wall	جدار شاقولي
Viscosity	اللزوجة
Viscous Flow	الجريان اللزج

Voltage	الجهد الكهربائي
Von Karman-Prandtl Equations	علاقات فون كارمن-براندتل
Vortex	الدوامة
Vortex Motion	حركة دوامية
Vorticity	التدوم
Wall Shear Stress	إجهاد القص عند الجدار
Water Hammer	المطرقة المائية
Weir	الهدار

Damascus University

المراجع المستخدمة

١. وائل معلا. الهيدروليك (١). منشورات جامعة دمشق.

2. Burka, E., Nalencz, T. Mechanika Plynow w Przykladach. PWN. Poland. 2002.

3. Chadwik, A., Morfett, J. Hydraulics in Civil and Environmental Engineering. E&FN SPON. 1994.

4. Fox, R., McDonald, A. Introduction to Fluid Mechanics. John Wiley & Sons, Inc. 1994.

5. Mitosek, M. Mechanika Plynow w Inzynierii I Ochronie Srodowiska. PWN. Poland. 2001.

6. Munson, B., Young, D., Okishi, T. Fundamentals of Fluid Mechanics. John Wiley & Sons, Inc. 1998.

7. Orzechowski, Z., Prywer, J., Zarzycki, R. Mechanika Plynow w Inzynierii Srodowiska. NT. Poland. 2001.

8. Orzechowski, Z., Prywer, J., Zarzycki, R. Zadania z Mechaniki Plynow w Inzynierii Srodowiska. NT. Poland. 2001.

9. Walski, T. Analysis of Water Distribution Systems. VNR. New York. 1984.

على وجه الغلاف صورة تمثل جريان ماء حول أسطوانة عند عدد رينولدز Re = 2000.

(Photograph Courtesy of ONERA France [6])

المقومون العلميون

الدكتـــــور
وائل معـــــــــــلا
الأستاذ في قسم الهندسة المائية

الدكتـــــور
محمد الشبلاق
الأستاذ في قسم الهندسة المائية

الدكتـــــور
يوسف مرعي
الأستاذ المساعد في قسم الهندسة المائية

المدقق اللغوي

د. أسامة اختيار

حقوق الطبع والترجمة والنشر محفوظة لمديرية الكتب والمطبوعات