العمليات الحسابية

العمليات الحسابية

السنة الثانية

قسم معلم صف

منشورات جامعة دمشق
كلية التربية

العمليات الحسابية وطرائق تدريسها

الدكتور
خالد الخنيفس
أستاذ في قسم الرياضيات
كلية العلوم

الدكتور
جمال مللي
أستاذ مساعد في قسم الرياضيات
كلية العلوم

الدكنور
هاشم إبراهيم
أستاذ مساعد في قسم المناهج
وطرائق التدريس في كلية التربية

الدكتور
الياس أبو يونس
مدرس في قسم المناهج وطرائق
التدريس في كلية التربية

جامعة دمشق

1431 – 1432 هـ
2011 – 2012 م


وقل رب زدني علما
Damascus University

فهرس المحتويات

فهرس المحتويات	**5**
المقدمة	**11**
الفصل الأول	**13**
تاريخ الأعداد	**13**
1- مقدمة	13
2- نبذة عن الأعداد	13
3- مبدأ الوضعية أو النظام الموضعي	15
4- الأعداد عند المصريين	18
5- الأعداد عند الإغريق و الرومان	20
6- الأعداد في الصين	21
7- العد في حضارة المايا	23
8- الأرقام الهندية العربية	24
الفصل الثاني	**27**
تاريخ أنظمة العد	**27**
1- مقدمة	27
2- نظم العدد عبر التاريخ	27
4- نظرية الأعداد اليونانية	51
5- نظرية الأعداد الهندوسية	58
6- نظام العد عند العرب	59
الفصل الثالث	**67**
أنظمة العد	**67**
1- النظام العشري Decimal System	67
2- النظام الثنائي Binary System	67
3- النظام الثماني Octal System	74

4- النظام الست عشر 82
5- تمثيل الأعداد السالبة 92
6- تمثيل الأعداد بوساطة النقطة العائمة 106
الفصل الرابع 109
النسبة والتناسب 109
1- مقدمة 109
2- خاصة أساسية 110
3- الرابع المتناسب 110
5-خواص التناسب 111
تمرينات ومسائل 118
الفصل الخامس 119
تمثيل الأعداد ومجموعات الأعداد 119
1- مجموعة الأعداد الحقيقية 119
2- أعداد حقيقية مميزة 119
3- العلاقة بين المجموعات العددية المختلفة 120
4- حقل الأعداد الحقيقية 122
5- الأعداد الطبيعية والصحيحة 122
(Natural and Integer Numbers) 122
6- قابلية القسمة 124
7- الأعداد الأولية 125
8- تحليل عدد إلى عوامله الأولية 126
9- القوى والجذور التربيعية 131
10-العمليات على الكسور (النسب) 137
11-الأعداد الكسرية 138
12-الكسور العشرية والأعداد العشرية 140
تمارين ومسائل 141

المتطابقات وتحليل ثلاثي الحدود **143**
المتطابقات وحل المعادلات من الدرجة الأولى ومن الدرجة الثانية **143**
1- المعادلة والمطابقة 143
2- المتطابقات الشهيرة التربيعية 144
3- المتطابقات التكعيبية 148
4- حل المعادلة ذات المتحول (المجهول) الواحد 151
5- تطبيقات على المعادلات من الدرجة الثانية بمتحول واحد في حل المسائل 160
الفصل السابع **163**
قواسم عدد **163**
1- مقدمة 163
3- القاسم المشترك الأكبر لعددين أو أكثر 166
4- القواسم المشتركة 166
5- القاسم المشترك الأعظم 167
6- إيجاد القاسم المشترك الأكبر لعددين أو أكثر: 171
7- خوارزمية إقليدس (Euclidean Algorithm) 173
8- العددان الأوليان فيما بينهما 176
9- القاسم المشترك الأعظم لمجموعة أعداد صحيحة 177
10-المضاعف المشترك الأصغر 179
11-المضاعفات المشتركة لعددين أو أكثر 180
الفصل الثامن **185**
الربح البسيط (الفائدة البسيطة) **185**
1- مقدمة 185
2- الربح المركب (الفائدة المركبة) 189
3- المتوسط الحسابي 191
تمارين ومسائل **192**
الفصل التاسع **193**

كيف نُعلّم الرياضيات **193**
1- أهمية الرياضيات 193
2- تعريف الرياضيات 194
3- طبيعة موضوعات الرياضيات 195
4- أهداف تعليم الرياضيات 196
5- كيفية تعليم الرياضيات 200
6- أساليب التقويم 221
الفصل العاشر **227**
استراتيجية الألعاب التعليمية في الرياضيات **227**
1- مقدمة 227
2- الأهداف الوجدانية والمعرفية من استخدام الألعاب التعليمية 228
3- دور المعلم عند استخدام الألعاب التعليمية 229
4- مراحل إعداد اللعبة التعليمية 230
5- دور التلميذ عند استخدام الألعاب التعليمية 232
6- تصنيفات الألعاب التعليمية في الرياضيات 232
7- فوائد الألعاب التعليمية 232
8- سلبيات الألعاب التعليمية 233
9- تقويم الألعاب التعليمية 233
10-الكفايات التعليمية التي تؤهل المعلم لتوظيف الألعاب التعليمية في المواقف الصفية 234
11-ألغاز في الرياضيات 234
الفصل الحادي عشر **239**
تدريس الأعداد **239**
1- مقدمة 239
2- فهم المفاهيم المنطقية الرياضية 239
3- الكفايات التعليمية 240
4- العمليات على الأعداد 249

5- الأعداد العادية (الكسور) 260
6- العمليات على الكسور 268
7- الأعداد الكسرية. 274
المراجع العلمية **287**
المصطلحات العلمية **291**

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

وقل رب زدني علما
Damascus University

المقدمة

إنّ ما كتبناه بالأمس وإن كان معاصراً وحديثاً سيصبح في عالم الغد قديماً وعتيقاً حتى مع بقاء الموضوع والحقل نفسه طازجاً مثل انبلاج الفجر بنور الحلم الإنساني الزاخر بشآبيب الأمل والمعرفة.

لقد راعى هذا الكتاب قدر الإمكان الاتجاهات الحديثة في تعليم وتعلم الرياضيات، وخاصة تنمية الفكر التحليلي والتركيبي لدى الطلبة واعتماد الترابط المنطقي للمفاهيم الرياضية مع مراعاة التبسيط والتدرج قدر الإمكان في عرض الأفكار وتحقيق فهم أعمق لها.

وقد عالج الكتاب موضوعات متنوعة بأسلوب تربوي هادف، كما زود بأمثلة محلولة لتوضيح طرائق تدريس الرياضيات، ولقد استفادنا من كتاب العمليات الحسابية وطرائق تدريسها لمؤلفيه د. الياس أبو يونس و د. نذير عيسى، وهنا أتقدم لهما بالشكر على الجهد المبذول في توضيح طرائق تدريس العمليات الحسابية.

نقدم هذا الجهد العلمي المتواضع للطلبة الدارسين تخصص معلم صف عسى الله أن ينفعهم به ويجدوا في ثناياه بعض ما تصبو إليه نفوسهم الشابة والمتألقة دائما بأنفاس الوطن.

إنّ هذا الكتاب محاولة جادة لوضع القارئ أمام ما يحتاج إليه حقّاً. نسأل الله التوفيق والرضا، ونهدي هذا الكتاب إلى كل من يرغب باللحاق بالركب العلمي العالمي، أملين أن يكون مرجعاً مفيداً لكل المهتمين.

﴿أَوَ مَن كَانَ مَيْتاً فَأَحْيَيْنَاهُ وَجَعَلْنَا لَهُ نُوراً يَمْشِي بِهِ فِي النَّاسِ كَمَن مَّثَلُهُ فِي الظُّلُمَاتِ لَيْسَ بِخَارِجٍ مِّنْهَا كَذَلِكَ زُيِّنَ لِلْكَافِرِينَ مَا كَانُواْ يَعْمَلُونَ﴾ " الأنعام 122"

والله ولي التوفيق

دمشق في 2010/2/12

المؤلفون

وقل رب زدني علما
Damascus University

الفصل الأول

تاريخ الأعداد

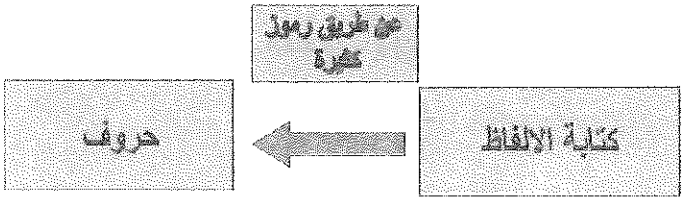
1- مقدمة

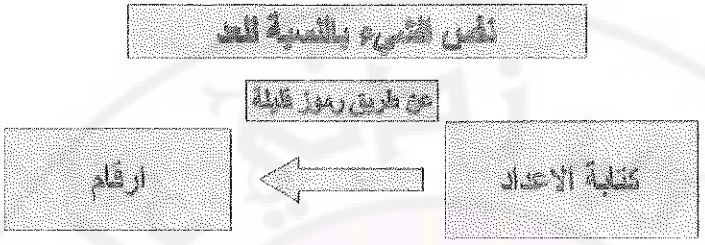
1، 2، 3،.... كيف وصلنا إلى هذا ؟ ليس سهلاً!؟ و للإجابة عن هذا السؤال، وجب علينا السفر عبر بلاد الرافدين (بلاد السومريين والبابليين) (العراق حالياً) ، ثم إلى إفريقيا الشمالية مروراً في بلاد مصر و بعدها الهند، لنختم ببلاد الإغريق.

2- نبذة عن الأعداد

كان الإنسان مجبراً على العدّ منذ زمن غابر، لأنّه كان ملزماً بجرد المدخرات الغذائية الضرورية لاستمرارية حياته، وبتوزيع الطرائد المصطادة خلال رحلات الصيد الجماعية... وقد كانت الكلمات المستعملة للدلالة على عدد الأشياء مختلفة في غالب الأحيان حسب طبيعة الأشياء المعدودة (قفازان، زوجان). لكن سرعان ما ارتبطت دلالة الأعداد بما هو مجرد عندما صرف النظر عن طبيعة الأشياء.

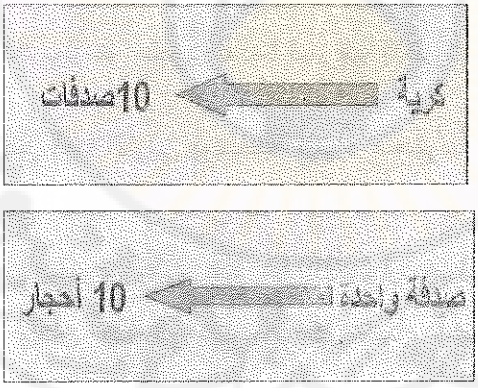
وقد تم القيام بعمليات العد الأولى بوساطة أشياء محسوسة (ملموسة) كالأحجار مثلاً، حيث كان الراعي المقيم في مكان ما يأخذ الأغنام للرعي. وكان كل مالك يحتفظ في منزله بكيس يحتوي على عددٍ من الأحجار مساويةٍ لعدد الأغنام التي ائتمن الراعي عليها. وكان هذا الراعي يعد كل مساء أغنامه ليتأكد من كونها مطابقة للأحجار، أو للعُقد التي كان قد قام بظفرها على حبل رفيع، ولكن لا تخلو هذه الممارسة من عيوب يتعلق الأمر بأشياء مهمة، لذلك ظهرت منذ أقدم العصور، بعد التطور الذي عرفته الأنشطة التجارية، طريقة **مركزة** لكتابة الأعداد .





توجد عدة أنظمة للعد لكن هذه الأنظمة ارتبطت ارتباطاً وطيداً بالمحساب الذي يتكون من سلسلة من القضبان توجد فوقها أشياء معينة: كالأحجار والأصداف والكريات، ولكل شيء له دلالة.

مثلاً:



فنحن إذا أردنا كتابة اللاموضعي: من هذا النظام نجمع 5 كريات و 6 صدفات و 4 أحجار بكيفية لا يكتسي فها الترتيب أية أهمية، وينعت هذا النظام **بالنظام**

التجميعي: **Additionnel** لأنه يعتمد على الجمع، مع الأخذ بعين الاعتبار بقيمة كل شيء.

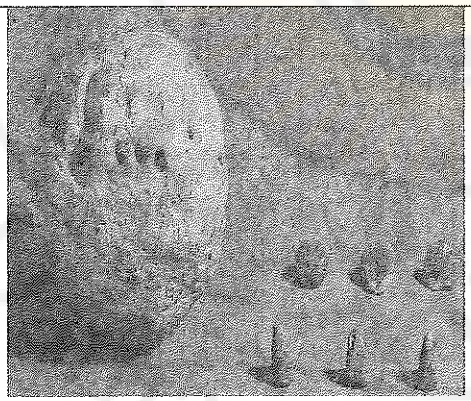
3- مبدأ الوضعية أو النظام الموضعي

هذا النظام هو الذي أحدث قفزةً نوعيةً في تاريخ الأعداد. والفكرة العبقرية فيه هي أنّ قيمة الرمز الذي يدل على العدد تتغير بدلالة الموضع الذي يحتله في كتابة العدد.

فمثلا في العدد 553، الخمسة التي على اليسار تشغل موضع المئات وتمثل 10 أضعاف الخمسة التي في الوسط التي تحتل موضع العشرات رغم أنهما نفس الرمزين أو العددين .

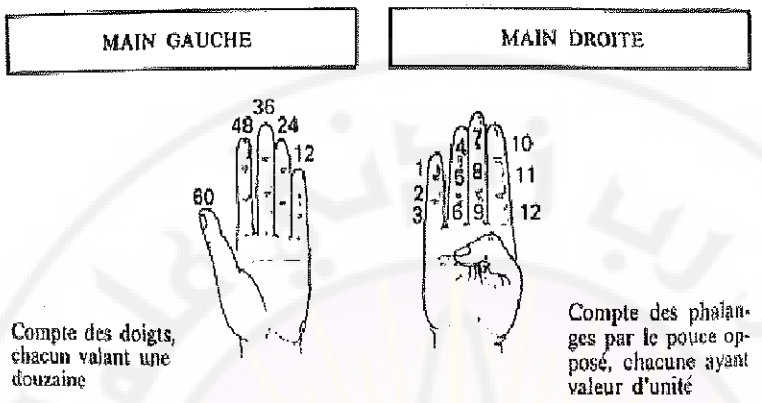
وقد اعتمدت بعض الحضارات مبدءاً مختلطاً سمته **الترقيم الهجين**، يجمع في الوقت نفسه بين الجمع والضرب بالإضافة إلى مبدأ الموضع. ولفهم العدد 932 يمكن كتابته على النحو التالي: 9100310219.

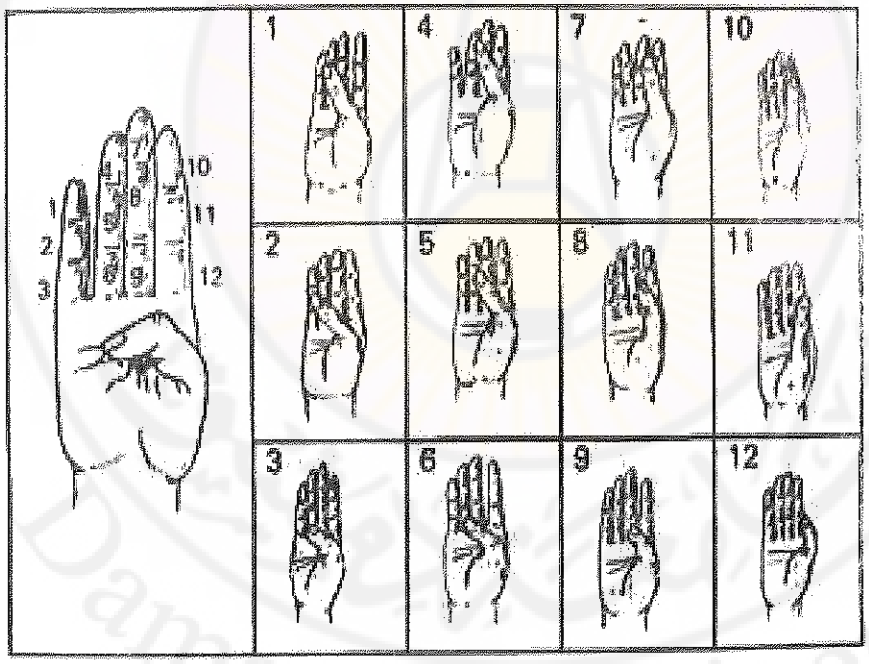
في ما قبل 3500 سنة من ميلاد السيد المسيح و على أرض بلاد الرافدين، كانت مجتمعات Sumer و Élam تستخدم حجيرات في قلات للتحقق من الحسابات التجارية :



-Petit cône = 1
-Petite bille = 10
-Grand cône = 60
-Grand cône percé = 600
-Grosse bille = 3600
-Grosse bille percée = 3600

هذه الأحجار تشكل أسبقَ أنظمة العد، وهذا النظام يخضع للنظام التجميعي وهو نظام ستيني (الأساس 60) و أصل النظام الستيني يوجد في أيدينا:





وقد تبنى علم الفلك هذا النظام (الستيني) الذي نجده أيضا في وحدات الزمان: 1h=60min=3600s و قياسات الزوايا (دورة كاملة =360°).

فمثلا 75 في النظام العشري تكتب على شكل 1,15 في النظام الستيني. وفي الحقيقة 75min=1h15min.

وتطورت القلة لتصبح صبورة تنقش عليها تقارير المبيعات: كمية المحاصيل وعدد الحيوانات...

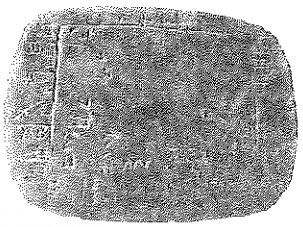


هذه الكتابة تطورت إلى شكلٍ بسيطٍ تسمى: **الكتابة المسمارية** التي نجدها عند البابليين في 2500 سنة قبل ميلاد السيد المسيح.

في ما يناهز الألفية الثانية قبل ميلاد المسيح تطورت الكتابة المسمارية أيضا لكي تسمح بكتابة الأعداد. وهنا ظهر أول ترقيم يعتمد مبدأ الموضع وبالفعل هذه الكتابة تبنت أيضا المبدأ التجميعي والموضعي في الوقت نفسه.







Tablette de terre cuite portant des nombres en écriture cunéiforme	*Autre tablette babylonienne montrant une table de multiplication*	*Calcul d'aire de terrain (Umma - Région sumérienne)*

ولا يوجد في رموز الأعداد البابلية سوى رمزين:

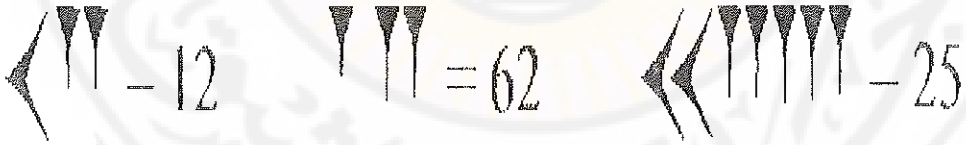
1. مسمار عمودي

2. هذا الرمز < chevron

الحروف الأولى تكتب بتكرير المسمار العمودي (المبدأ التجميعي)، العدد 10 يقدم على الشكل التالي < chevron ولكتابة الأعداد من 11 إلى 59 تكرير الرموز كثيراً أساسي

(المبدأ التجميعي)

العدد 60 يكتب من جديد على شكل مسمار (المبدأ الموضعي)

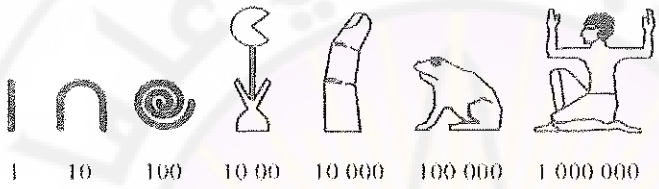


4- الأعداد عند المصريين

إنّ أقدم وثيقة مكتوبة عن الرياضيات عند المصريين القدماء هي إحدى ورقتي البردي (بردي رايند أو أحمس) المكتوبة سنة 1950 قبل الميلاد والموجودة في المتحف البريطاني (خضر، 1974، 47). وقد كان كتّاب المصريين القدماء يكتبون

الوثيقة على ورق البردي (على شكل الهيروغليفية المصرية) حيث يستعملون نظاماً رقمياً يعتمد على المبدأ التجميعي، كما أنهم كانوا يعرفون الكتابة العشرية الشيء الذي أمكنهم القدرة على العد حتى الملايين، كل علامة تأخذ رمزا يمكن أن يأخذ أحد القوى 6 لعشرة.

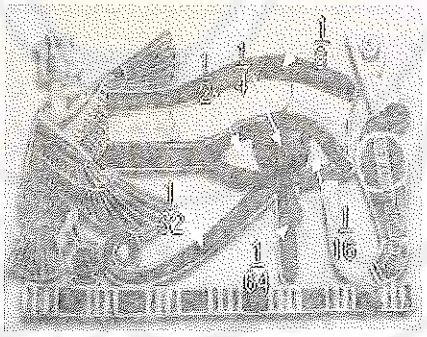
فمثلا لكتابة العدد 968 423 2لنحاول فهم ذلك انطلاقاً من هذه الوثيقة :







Mur d'une construction de Thoutmosis III à Karnak



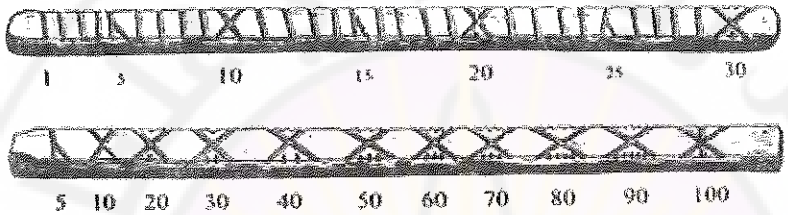
L'oeil d'Horus

5- الأعداد عند الإغريق و الرومان

اكتشف الإغريق والرومان مجموعة من أنظمة العد الهجائية قليلة التبني بالنسبة للعد

1. النظام الروماني يتكون من رموز: v.x.c.d.l.m

تكتب هذه الرموز جنباً إلى جنب حسب المبدأ التجميعي كما تخضع هذه الرموز إلى قاعدة 5 و 10 .



Entailles de bergers trouvées en Dalmatie,

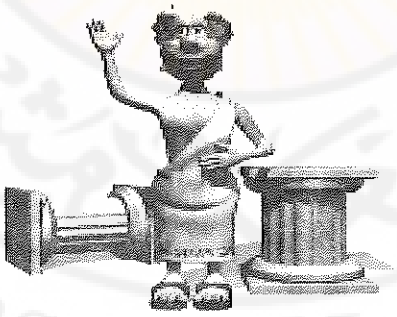
مثال:

يكتب العدد 1789 على الشكل التالي:

MDCCLXXXIX

=M(1000)+D(500)+CC(100+100)+L(50)+XXX(30)+IX(10-1)

إذن إن كان العدد كبيراً فلنتخيل عدد العمليات المنجزة.



2. أما الكتابة الإغريقية فلم تكن أكثر ملائمة لأن الأعداد كانت ترتبط أساساً بالهندسية فلم تكتسب قانوناً أو مبدءاً مستقلاً يطورها من تلقاء نفسها .



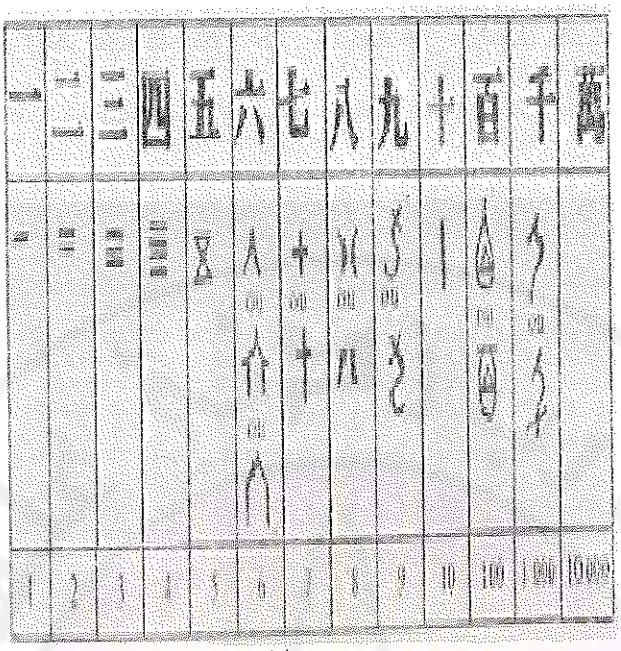
6- الأعداد في الصين

أول نظام للعد ظهر في الصين هو النظام العشري، ويستخدم ثلاثة عشر رمزاً أساسياً.

1- 9 وحدات

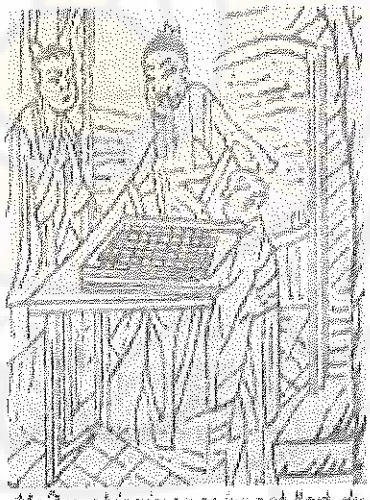
2- 4 قوى للعدد 10

هذه الرموز تطورت عبر التاريخ حيث نجدها مرسومةً على العظام والحراشف في عصر الين(ما بين ق11و ق14قبل الميلاد)



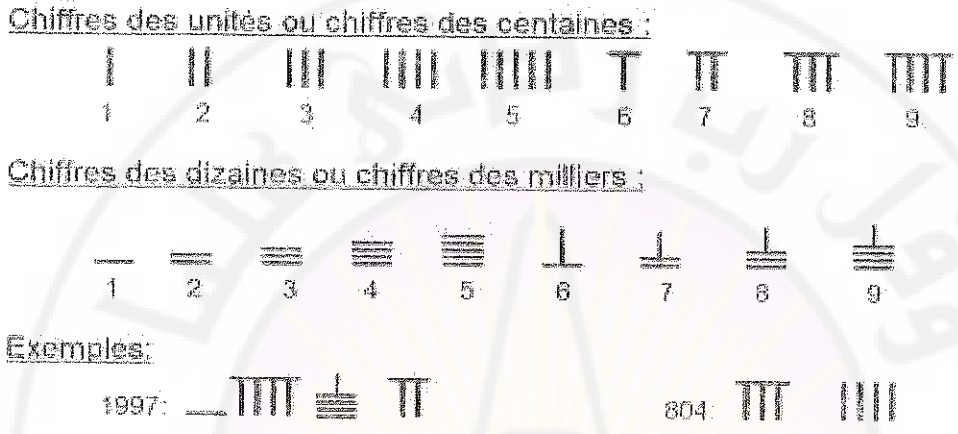
Comparaison entre les symboles actuels (1ère ligne) et les symboles archaïques (2ème ligne)

Pour effectuer les opérations arithmétiques, les chinois placent ces bâtonnets d'ivoire ou de bambou, appelés "*chou*", dans une table en forme d'échiquier.



Maître chinois enseignant l'art du calcul

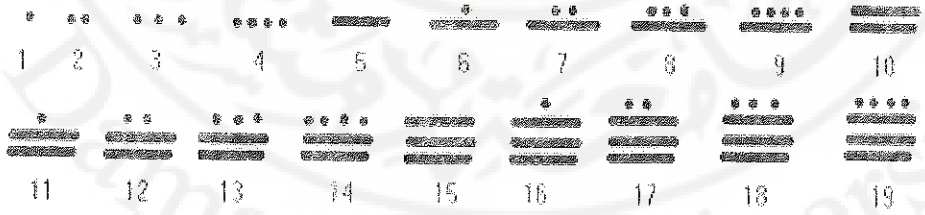
في القرن الثاني قبل الميلاد ظهر في الصين نوع آخر من الترقيم يسمى (الترقيم العالم) هذا النظام يتبع المبدأ التجميعي ذا الأساس 10 ،وقد جاءت هذه الرموز انطلاقاً من تلك القصيبات التي توضع بالتناوب؛ إما صفوفاً من الأشرطة العمودية أو تكون أفقية لتفادي الخلط

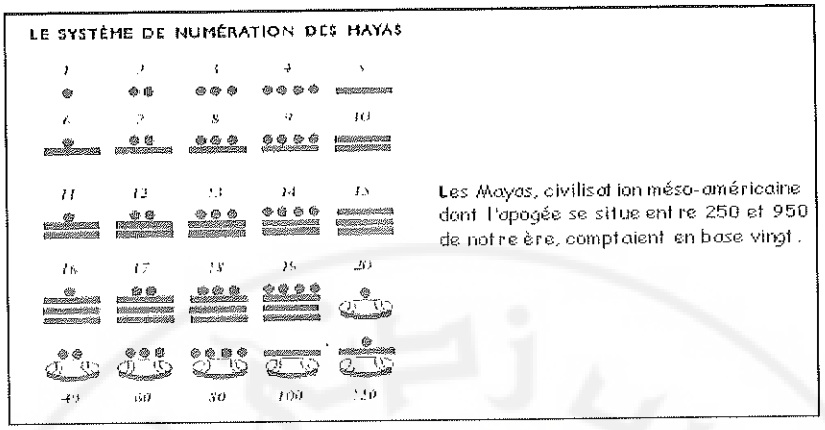


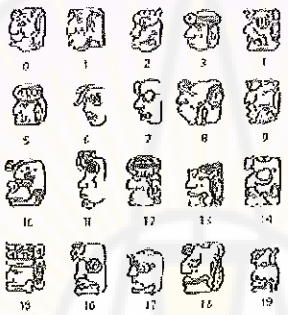
7- العد في حضارة المايا

اشتهرت حضارة المايا بدراسة النجوم وعلم الفلك كما اكتشفوا اليومية .

ظهر نظام العد لديهم في عام 5 بعد الميلاد و يتبنى المبدأ الموضعي ذا الأساس 20 تتمثل الرموز المستعملة فيه في أشرطة أفقية و نقط.







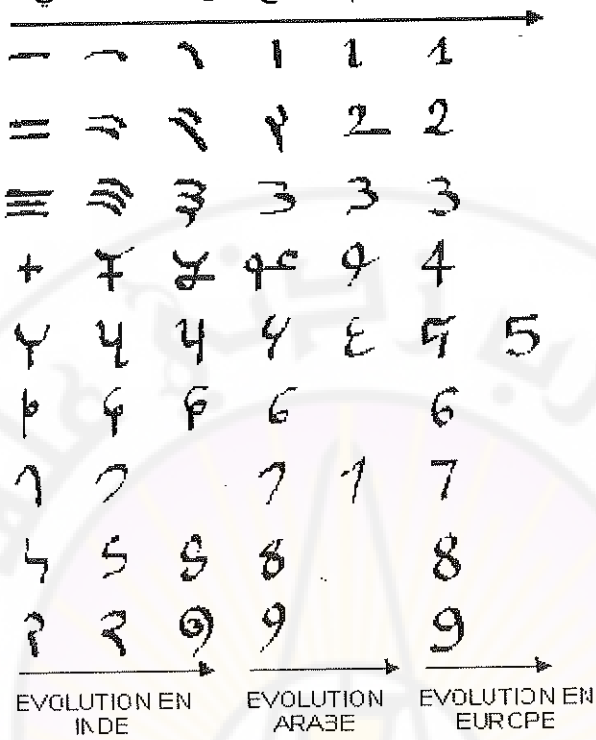
8- الأرقام الهندية العربية

وهي الأعداد من1إلى 9، و نحن – في الحقيقة – أخذناها عن الهند بطريقة غير مباشرة، فبعد أقل من قرن بعد وفاة الرسول الكريم في 634هـ امتدت الدولة الإسلامية من الهند شرقا إلى إسبانيا غرباً.

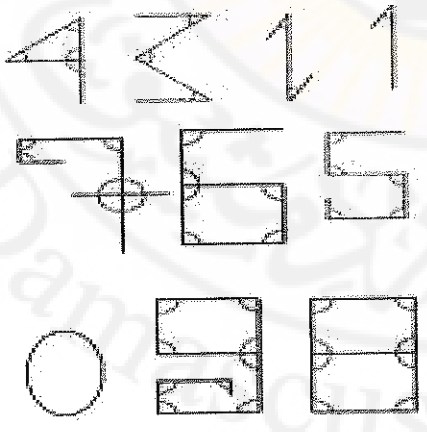
و حيث كانت بغداد قطباً غنياً بالعلوم، وفي ذلك العصر كان العرب لا يمتلكون نظاماً عددياً متميزاً. فما كان للعرب سوى أن يأخذوا الأرقام الهندية، فطوروها فأصبح يطلق عليها **الأرقام الهندية العربية.**

و أول من أدخل الأرقام الهندية إلى العرب هو العبقري العربي **محمد بن موسى الخوارزمي.**

ثم أخذها الغرب عنا فطورها بدورهم لتصبح على الشكل الحالي.



إلا أنّ الرياضيات كان ينقصها عدد يخلّصها من التعقيد، إلى حدود سنة 967م حينَ ظهر عدد، يسمى الصفر ويعني لاشيء و العدم والفراغ على يد العالم العربي **محمد بن موسى الخوارزمي**





ومن أهم وأخطر ما أدخله العرب إلى علم الرياضيات هو الرقم **صفر**.


وقل رب زدني علما
Damascus University

الفصل الثاني
تاريخ أنظمة العد

1- مقدمة

لم يستطع الإنسان القديم أن يعد الأشياء التي تحيط به، فإذا أراد أن يقدر عدد قطيعه من الأغنام، كان يقتصر على فتح ذراعيه قليلاً أو كثيراً للدلالة على صغر القطيع أو كبره. ثم اخترع طريقة العد بالحصى. فإذا أراد معرفة كمية الأغنام أو الأشجار لديه، عمد إلى وضع حصاة مقابل كل رأس غنم أو مقابل كل شجرة. هذا ما سمي العد بالحصى. ثم استخدم أصابع اليد للتعبير عن الأعداد. وبمرور الزمن أدرك الإنسان أن استخدام الأصابع للعد غير كافٍ، إلى أن اخترع الرموز للتعبير عن العدد وعلى النظام العددي.

2- نظم العدد عبر التاريخ

بدأت حضارة المدن بالظهور قبل نحو 4000 سنة، حيث شعر الإنسان بالحاجة إلى تسجيل المقادير وتحديدها، فوضع رموزاً، تمثل أعداداً مكتوبة، استعملها الناس للمقايضة، واستعملتها الدولة من أجل الوثائق.

أ- نظام العد في حضارة بلاد النيل (الحضارة الفرعونية):

ابتكر الكهنة والنساخ في مصر القديمة ، قبل نحو أربع آلاف سنة (1950 ق.م)، نظام الأرقام الخاص بالكتابة الهيروغليفية التي تستخدم الصور. وقد اتبع المصريون القدماء نظام العد العشري، واتخذوا لكل مرتبة من المراتب رمزاً مستقلاً. وكانت هذه الأعداد تُكتب من اليمين إلى اليسار. أما الإشارات الدالة على الأرقام المستعلمة فهي كما يلي:

كان يُرمز بالعصا أو ورقة البردي للدلالة على الواحد، وبالقنطرة أو شريط من ورقة بردي مثنية للدلالة على العشرة. وللمئة بجزء من حبل ملفوف، وبزهرة اللوتس للدلالة على الألف، وبإصبع ممدود أو بثعبان للدلالة على عشرة آلاف، وبصغير الضفدع للدلالة على مئة ألف، وللمليون برجل يرفع ذراعيه.

I	II	III	IIII	IIIII	∩	∩∩	ρ	♥
1	2	3	4	5	10	20	100	1000

لا تتغير قيمة العدد لو بدلنا ترتيب الرموز فيه. إن هذه الطريقة في تمثيل الأعداد واضحة، ولكنها تصبح غير سهلة عند كتابة أعداد ضخمة، لأنها تحتاج إلى عدد كبير من الرموز. فمثلاً كتابة العدد 234 يكون على الشكل التالي:

IIII ∩∩∩ ρ ρ. أما كتابة الكسر، فكان المصري يكتب عدداً واحداً عليه نقطة، فمثلاً 7^0 يعني $\frac{1}{7}$ وكان الهدف من استعمال الكسور، توزيع حصص الطعام والشراب. افتقر نظام العد عند المصريين إلى وجود إشارة ترمز للصفر. ومع ذلك تمكن المصريون من إجراء معظم الحسابات المعقدة التي استخدموها في تخطيط المدن وإقامة الأهرامات.

- **العمليات الحسابية عند المصريين:**

a- عملية الجمع: وتتم بوساطة جمع عناصر كل منزله

مثال:

اجمع العددين 25+32

الحل: II ∩∩∩ , ∩∩ IIIII

فيكون الناتج :

∩∩∩ II
∩∩ IIIII

∩∩∩∩∩ IIIIIII

b-عملية الطرح: وتتم بوساطة طرح عناصر كل منزله

مثال:

اطرح 31 من 43

∩∩∩∩ III
∩∩∩ I

∩ II

مثال:

اطرح 121 من 220

ρ ρ ∩∩
ρ ∩∩ I

∩∩∩∩∩∩∩∩ IIIIIIII

c- عملية الضرب:

إن استخدام قدماء المصريين لتكرار الرموز في المنازل منعهم من ابتكار طريقة محددة لإجراء عملية الضرب، لذلك فقد لجأوا إلى حساب الضرب زمنياً ومن ثم وضع الجواب أو باستخدام طريقة المضاعفة والتنصيف المتتالية والتي لا تزال تستعمل حالياً في روسيا.

قواعد الضرب بطريقة المضاعفة والتنصيف:

A- نضع خطاً بجوار كل عدد فردي ينتج عن عملية التنصيف.

B- عند تنصيف العدد الفردي نأخذ العدد الصحيح الأقل منه مباشرة.

C- فيكون حاصل الضرب هو مجموع أعداد التضعيف التي يقابلها خطوط في التنصيف والمثال التالي يوضح هذه العملية.

مثال:

أوجد حاصل ضرب العددين: 7 , 44

الحل: نضعف الصغير وننصف الكبير

تنصيف	تضعيف
44	7
22	14
/ 11	28
/ 5	56
2	112
/ 1	224

فيكون:

$$7*44 = 28 + 56 + 224 = 308$$

مثال: أوجد حاصل ضرب 25 , 14 باستخدام طريقة المضاعفة والتنصيف

المضاعفة	تنصيف
14	/ 25
28	12
56	6
112	/ 3
224	/ 1

فنجد: $14*25 = 14 + 112 + 224 = 350$

D- عملية القسمة: وهي عملية معاكسة لعملية الضرب.

نأخذ المقسوم عليه ونضاعفه عدداً من المرات مع كتابة عدد أمثاله في كل مرة ثم نحاول أن نكتب المقسوم على شكل حاصل جمع لعدد من هذه المضاعفات فيكون حاصل القسمة مجموع الأمثال المقابلة لهذه المضاعفات

مثال: أوجد ناتج العملية $77 \div 7$ باستخدام طريقة قدماء المصريين

7	1
14	2
28	4
56	8

نلاحظ أن $77 = 56 + 14 + 7$

$8 \quad 2 \quad 1$

$\Rightarrow 77 \div 7 = 8 + 2 + 1 = 11$

مثال :

أوجد ناتج العملية 3 ÷ 123 باستخدام طريقة قدماء المصريين

3	1
6	2
12	4
24	8
48	16
96	32

نلاحظ أن:

123=96+24+3

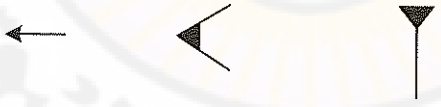
32 8 1

123÷3=32+8+1=41

ب-نظام العد في حضارة بلاد الرافدين (السومريين والبابليين)

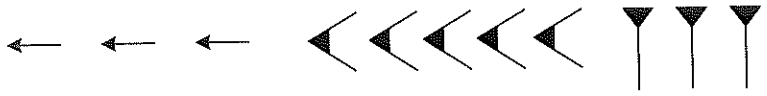
I. نظام العد عند السومريين

استعمل السومريون نظاماً للمنازل لتسجيل الأعداد. أي أن منزلة أو موضع كل رقم في العدد يدل على قيمته. ويسمى هذا النظام بالنظام الستيني، حيث كان الأساس لأرقامه هو الـ 60، وكان هناك رقمان فيه، هما 1 و 10 ويرمز لها بالشكل التالي:



فكان يُرمز للواحد بالرمز ▼ وللعشرة بالرمز ◀ وللستين بالرمز ←

فمثلاً العدد 233، يُكتب بطرية السومريين أو البابليين على الشكل التالي:



233 = 180 + 50 + 3

أما الكسور فإن الفاصلة المنقوطة ; تفصل بين القسم الصحيح والقسم الكسري من العدد. فمثلا 45;3 يعني $3+\frac{45}{60}$

لم يخصص نظام العد السومري رمزاً للصفر. لكن البابليين فيما بعد اهتدوا إلى فكرة المرتبة الخالية، فوضعوا الرمز



للدلالة على الصفر. لكن هناك ميزة رئيسية لنظام العد الستيني، مقارنة بنظام العد العشري فعوامل الأساس 60 هي : 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 ، 10 ، 12 ، 15 ، 20 ، 30 بينما عوامل الأساس 10 هي: 1 ، 2 ، 5 فقط. وهذا يعني أن الكسور يعبر عنها بنظام العد الستيني بدقة كبيرة. فمثلاً العدد 3,487 يُكتب بنظام العد العشري كما يلي:

$$3+\frac{4}{10}+\frac{8}{100}+\frac{7}{1000}=3.487$$

أما في النظام الستيني فيكتب العدد 3، 48، 50، مثلاً كما يلي:

$$3+\frac{48}{60}+\frac{50}{60\times 60}=3+\frac{48}{60}+\frac{5}{36}=3\frac{293}{360}$$

حيث تُقرأ الكسور في النظام الستيني من اليسار إلى اليمين.

II. نظام العد عند البابليين

يعتبر نظام العد عند البابليين خليطاً من النظامين العشري والستيني فقد استخدموا الرموز التالية:

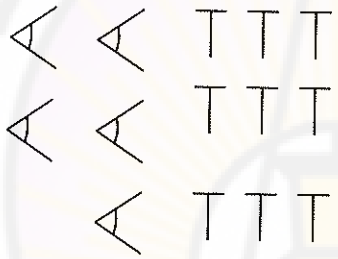
1 10 100 1000



ولم يستخدموا الفاصلة بين الأرقام بل كانوا يتركون فراغات تدل على ذلك

مثال:

اكتب العدد 59 في النظام البابلي



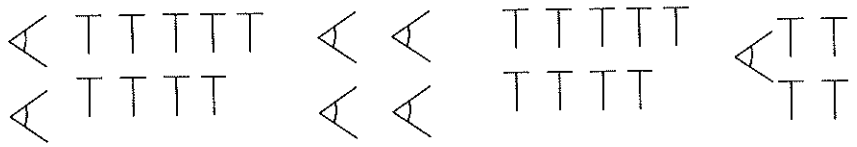
وقد استخدم البابليون نظام الترقيم الستيني (درجة، دقيقة، ثانية، ثالثة...الخ) لذلك لم يكتبوا عدداً في هذا النظام أكبر من 59 لذلك وباستخدام نظام المنازل اختلفت قيمة الرقم الواحد باختلاف موقعه.

مثال:

اكتب العدد التالي 14 9 41 29 في النظام البابلي الستيني

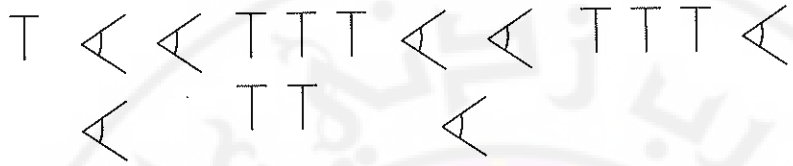
الحل:

يمثل العدد 29 درجة + 41 دقيقة + 9 ثواني + 14 ثالثة أي يكتب بالشكل الآتي:



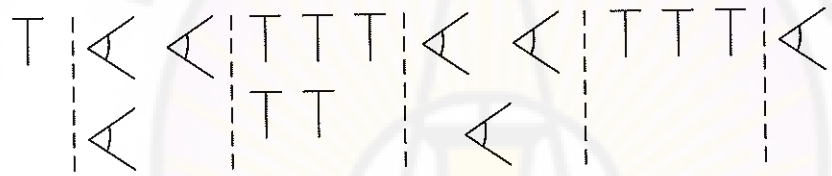
مثال:

ما العدد الذي يمثل الرمز التالي (من اليمين إلى اليسار) في النظام الستيني:



الحل:

نقوم بتقسيم المنازل أولاً:



فنجد العدد = 10 + 33.601 + 35.602 + 1.603 .

مثال:

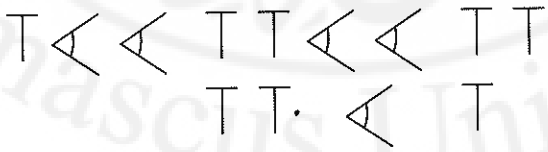
ماذا يمثل العدد T T في النظام البابلي الستيني

الحل:

يمثل $1\frac{1}{60}$ أو 61

مثال:

ماذا يمثل العدد



الحل:

$$1 + \frac{24}{60} + \frac{33}{60^2}$$ أي $1\ 24\ 33$

2

- **الحساب عند البابليين**

يُمكن تصنيف المؤلفات الرياضية البابلية إلى صنفين:

الصنف الأول:

يشمل الجداول أو الإثباتات الرياضية كجداول الضرب وجداول معكوس الأعداد ورفع الأعداد إلى القوى المختلفة، وجذور الأعداد.

الصنف الثاني:

يشمل قضايا ومسائل رياضية. وقد وضعت الجداول لتعليم الرياضيات للتلاميذ ولاستعمالها لاستخراج نتائج العمليات الحسابية.

وقد وفرت هذه الجداول للبابليين الكثير من الوقت والجهد ومكنتهم من إجراء عمليات الضرب والقسمة في الأعداد الكبيرة. فإن الحضارة المصرية مع تقدمها لم تضبط عملية الضرب، ولم تهتدِ إلى وضع جداول الضرب بل كانت عملية الضرب تُجرى بصورة غير مباشرة بخلاف الحال في حضارة العراق القديم حيثُ وضِعت جداول مُطولة لعملية الضرب. إن جداول مقلوبات الأعداد مهمة، وكانت موجودة بكثرة بين الألواح البابلية.

ويظهر أنّ عملية القسمة كانت صعبة الإتقان في جميع البلدان عند بدء نُشوء الرياضيات بل إنّ الذين كانوا يقدرون على إجراء القسمة الطويلة في أوروبا في القرون الوسطى كانوا نادرين جداً. أما البابليون فقد استعملوا جداول المقلوبات للقسمة، ولذلك حولوا عملية القسمة إلى عملية ضرب. فمثلاً لإيجاد قيمة الكسر 8/3

كان يُكتب كحاصل ضرب3.(8/1). ويُمكن معرفة قيمة 1/8 باستخراجه من الجداول.

لقد ألقت الاكتشافات الرياضية عن السومريين والبابليين الضوء على التاريخ الإغريقي القديم. فإن المعلومات عن الرياضيات الإغريقية قبل إقليدس كانت مُحاطة بشيء من الغموض. وكان من العسير فهم سر هذا التقدم السريع في المراحل الأولى التي يُمثلها طاليس (600 ق.م) والفيثاغورثيون أولئك القوم الذين نظروا إلى الأعداد نظرة تقديس وهي إلى السحر أقرب منها إلى العلم والمنطق. والنظام البديع الذي تم الوصول إليه في زمن إقليدس (300 ق.م) نقول أن هذا التقدم السريع خلال ثلاثة قرون وفي تلك الأزمان التي كانت خالية من الأدوات الرياضية تقريباً كان سراً كشفت عنه الآثار البابلية – وبينت أن اتصالا جرى بين علماء الإغريق والبابليين وقد اقتبس علماء الإغريق حقائق وطرائق رياضية من الكنوز البابلية.

ولقد أدرك البابليّون معنى الأُس الموجب، صحيحاً كان أو كسراً إدراكاً واضحاً فإن من جداولهم جدولاً على هذا الشكل:

16 للقوة2=1/4

16 للقوة4=1/2

16 للقوة8=3/4

17 للقوة16=1

16للقوة32=1 1/4

16 للقوة64=1 1/2

وجدول آخر مثله للأساس 2 بالشكل التالي:

2	1
4	2
8	3
16	4
32	5
64	6

ومن أسئلة البابليين ، كان السؤال الآتي: إلى أي قوة ترفع عدداً معيناً حتى يُنتُجَ عدد آخر معينُ؟ وهم أول من بداء بفكرة اللوغاريتمات .

والجدول السابق ما هو إلا جدول لوغاريتمات فيه لوغاريتمات أعداد العمود الأيمن للأساس 2 هي الأعداد المقابلة في العمود الأيسر. وكانوا يجدون الجذر التربيعي من جدول المربعات. فإذا أرادوا أن يجدوا جذر عدد معين ليس مربعاً كاملاً استعملوا التقريب وطريقتهم استُعمِلت من قبل الإغريق وهي بالشكل التالي:

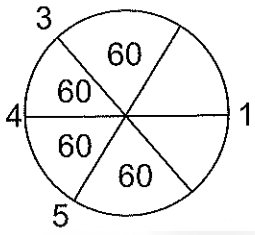
وقد وجد في لوح يعود إلى عام 1600 ق.م من مجموعة بيل تقريب حاذق إلى جذر العدد أثنين(2) وهو1.414213 وفي إحدى لوحات لوفر حوالي 300 ق.م حقق نيكيباور مسألتين وردتا في اللوحة إحداهما تُشير إلى مجموع المتوالية الهندسية.

$$1+2+2^2+2^3+\ldots\ldots+2^9=2^9+2^9-1$$

والمسألة الأخرى تُشير إلى مجموع مربعات الأعداد الطبيعية إلى عشرة.
البابليون من خلال جداولهم تمكنوا من حل معادلات أُسية.

- **من إسهامات البابليين في الحساب**

1- **قسموا محيط الدائرة إلى 360 قسماً متساوياً** بوساطة ثلاثة أقطار تقسم الدائرة إلى 6 أقسام متساوية ثم يقسم كل جزء إلى 60 قسماً متساوياً



2- عرفوا العلاقات:

- $(A \mp B)^2 = A^2 \mp 2AB + B^2$
- $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$

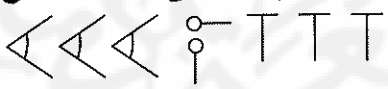
3-حلوا العديد من المسائل في الربح المركب وبعض المعادلات التكعيبية والمعادلات التي تحتوي على مجهولين كما حلوا المعادلات باستخدام الجداول:

x^1	x^2	x^3	x^4	x^5
1	1	1	1	1
2	4	8	16	32
3	9	27	81	243
4	16	64	256	1024

مثال: من الجدول نجد كل : $x^2 + x^3 + x^4 = 28$

فإن $x = 2$

4-استخدموا الرمز  للإشارة إلى عملية الطرح

فمثلاً: يقصد بـــ  بـــ $30 - 3 = 27$

5-لإجراء عملية الضرب قام البابليون بتحويل نظام العد العشري إلى النظام الستيني ومن ثم استخدموا جداول خاصة للضرب من واحد بواحد وإلى

ستين بـــــ ستين ثم يحولون الناتج إلى النظام العشري ونظراً لصعوبة هذه العملية فقد اقتصرت هذه العمليات على الرياضيين فقط.

مثال: لضرب العددين 143 و 251

A- حول البابليون العددين إلى النظام الستيني فوجدوا:

4,11 + 2,23

B- ثم استخدموا جداول الضرب الخاصة.

C- حولوا الناتج إلى النظام العشري.

6-**حول البابليون عملية القسمة إلى عملية الضرب** ثم قاموا بحسابها فمثلاً لإيجاد حاصل القسمة $\frac{A}{B}$ كتبوا النسبة بالشكل:

$$\frac{A}{B} = A.\frac{1}{B}$$

ثم قاموا باستخراج القيمة $\frac{1}{B}$ من الجداول باعتباره كسر ستينّياً ثم حسبوا الناتج.

وقد عرف البابليون الكسور المنتهية مثل النصف (30) والربع (15) والسدس (10) كما عرفوا معنى الأساس والجذور وقاموا بحساب تقريبي لـــــ $\sqrt{2}$

(فقد وجد على لوح يعلاد إلى 1600 قبل الميلاد بأنه يساوي تقريباً

1,414213 (10 51 24 1) (أثبتها)

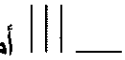
ت- نظام العد في حضارة النهر الأصفر (الصينيين القدماء)

ابتكر الصينيون، قبل الميلاد بنحو أربعمئة عام، نظاماً عددياً عشرياً، ووجد لديهم خمسة أنماط من الأرقام المكتوبة، استُعمل كل منها لغرض مختلف. وأهم نوعين كانا الأرقام العَصَويّة (المشتقة من العصا) والأرقام الأساسية. ونبين هذه الأرقام كما يلي:

الرقم الأساسي	الرقم العصوي	الاسم الصيني	الرقم بالعربية
		لينك	0
		أي	1
		إره	2
		سان	3
		سزو	4
		وو	5
		ليو	6
		شاي	7
		با	8
		شيو	9
		شي	10

أما الأعداد التي هي أكبر من **عشرة** (**شي**) فتُشكل بدمج العشرة بالرقم الآخر.

مثال:

ثلاثة عشر هي (**شي – سان**) أي  **أما ثلاثين** فهي (**سان – شي**) أي

ويرمز **للعشرين** بـ  **وللأربعين** بـ **وللخمسين** بـ **وللستين** بـ **وللسبعين** بالرمز .

وكانت **المئة** تُسمى **باي**، **والألف** تسمى **شيين والعشرة آلاف تسمى وان والمئة ألف تسمى باي شيين .....**

وكان يُعبر عن العدد الكبير باستخدام طريقة التكرار. فمثلاً، العدد 33 يرمز له بالرمز

بينما العدد 330 يُكتب بالرمز في حين يُرمز للعدد 333 بالشكل

نلاحظ مما سبق فكرة القيمة المكانية للرقم، فالرمز قد يدل على الـ 3 أو الـ 300 والرمز قد يدل على 30 أو 3000.

- **القيمة التقريبية للعدد π:**

تساوي النسبة بين محيط الدائرة وقطرها، ولقد أخذ الصينيون الرمز π عن المصريين القدماء وتساوي هذه القيمة $\frac{22}{7}$ تقريباً.

ث- نظام العد في بلاد الإغريق (اليونانيين القدماء)

كان عند اليونانيين نظامان عدديان مختلفان. سمي الأول بنظام الأعداد الأتيكية Attic. واستُخدم هذا النظام من القرن الخامس حتى القرن الأول قبل الميلاد.

وكان أساسه هو 10 أي هو نظام عد عشري. وكانت رموزه كما يلي:

Γ_R	Γ_Δ	M	x	H	Δ	I
50	15	10000	1000	100	10	1

Γ_M	Γ_x
5000	500

أما النظام العددي الثاني، فسمي بنظام الأعداد **الأيوني Ionic** الذي حل محل النظام السابق في القرن الأول قبل الميلاد. واستعمل فيه الإغريق أبجديتهم حيث جعلوا لكل حرف دلالة عددية كما في الشكل التالي:

ألفا	**فيتا (بيتا)**	**غاما**	**ذلتا (دلتا)**	**ابسيلون**	**مهجور**	**زيتا**
α	β	γ	δ	ε	S	ζ
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**

ايتّا	**ثيتّا**	**يوتّا**	**كابّا**	**لمبدا**	**مي**
η	Θ	ι	K	λ	μ
8	**9**	**10**	**20**	**30**	**40**

سيغما	رو(rho)	مهجور	بي(pi)	و	كسي(xi)	في
σ	ρ	ϑ	π	o	ξ	ν
200	100	90	80	70	60	50

مهجور	أوميغا	بسي(psi)	خي	في(phi)	ايبسلون	تاف
λ	ω	ψ	X	Φ	U	τ
900	800	700	600	500	400	300

على الرغم من سهولة فهم نظام العد هذا، إلا أنه واجه صعوبات في الاستعمالات اليومية وذلك بسبب احتوائه على العديد من الإشارات ووجود عدد كبير من العلاقات بين أحرفه السبعة والعشرين (أربعة وعشرين حرفاً من الأبجدية اليونانية بالإضافة إلى ثلاثة أحرف مهجورة أسند إلى كل منها قيمة محددة).

ج- نظام العد عند الرومان القدماء

بقيت الأعداد اليونانية تُستعمل في أوروبا إلى القرن العاشر الميلادي حيث حلت محلها الأعداد الرومانية. وقد استخدم الرومان نظام العد العشري. واعتمدوا في كتابة أعدادهم على استعمال الرموز التالية:

I	II	III	I V	V	V I	VII	V III
1	2	3	4	5	6	7	8

L	XL	XXX	XX	X	IX
50	40	30	20	10	9

M	C	XC	LXXX	LXX	LX
1000	100	90	80	70	60

فالعدد 263 مثلاً يُكتب بالرموز على الشكل التالي:

CC LX III

200 60 3

وكان إذا وُضع العدد الأصغر إلى يمين العدد الأكبر، فهذا يعني جمع العددين، فمثلاً عندما نكتب العدد L X فقيمته تساوي 10 + 50 = 60

أما إذا وضعنا العدد الأكبر إلى يمين العدد الأصغر فإننا نطرح العددين فمثلاً

X L قيمته تساوي 50 – 10 = 40 .

ح- نظام العد عند المايا

استخدم المايانيون الذين سكنوا أمريكا الوسطى نظام الأعداد العشريني في الحساب. أي النظام الذي أساس أعداده هو 20 وليس 10 كما في النظام العشري. حيث تتزايد في هذا النظام قيم المنازل بقوى العشرين:

$20^0,20^1,20^2.20^3,....$ ، أي أن قيم المنازل الأربعة الأولى

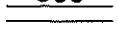
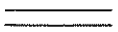
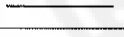
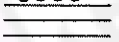
1,20,400,8000,.....

بينما في النظام العشري هي: $10^0,10^1,10^2.10^3,....$

والتي تساوي ما يلي: 1,10,100,100

أما رموز هذه الأعداد المايانية ومسمياتها فهي كما يلي:

الرمز	الاسم	العدد
•	هيو	1
••	كا	2
•••	أوكس	3
••••	كان	4
———	هو	5
—•—	أواك	6
—••	أويوك	7
—•••	أواكساك	8
—••••	بولون	9
═══	لاهون	10
═•═	تولوك	11
═••	اكا	12

13	أوكس لاهون	
14	كان لاهون	
15	هو لاهون	
16	أواك لاهون	
17	أويوك لاهون	
18	أواكساك لاهون	
19	بولون لاهون	
20	هن كال	

وكانت الأعداد المايانية تكتب رأسياً، ومن الأسفل بالفئات الدنيا ثم تتزايد هذه الفئات عند التحرك نحو الأعلى. وتتزايد قيم المنازل بالعشرينات وليس بالعشرات. فالعدد التالي:

•• هم من الأسفل إلى الأعلى $20^0 \times 3 + 20^1 \times 14 + 20^2 \times 2$



$3 \times 1 + 20 \times 14 + 400 \times 2$

$3 + 280 + 8 = 1083$

•••

إن أول دليل على تاريخ نظام الأعداد المايانى، يعود إلى القرن الرابع. يعتبر العدد 13 مقدساً، فهو يمثل المجموع الكلي للآلهة، كما أن العالم والسماء عند المايانيين يتألف من 13 طبقة.

خ- نظام العد في حضارة بلاد الهند

استخدم الهنود منذ القرن السادس عشر قبل الميلاد، نظاماً عشرياً بسيطاً للعد. حيث كانت الحضارات الإنسان تتخبط في كتابة الأعداد، كان الهندي يدون أعداده ويجري حساباته، ويستعمل في كل هذا عشرة رموز.

استخدم الهنود في البدء رموزاً عددية خاصة، كالحروف الهجائية، أو صور أصابع اليد أو القدم. ثم استخدم نظامَ منازلٍ تتوقف فيه قيمة الرقم على موضعه في خانة الآحاد أو العشرات أو المئات أو .... ثم استخدموا رمز الصفر للدلالة على أن الموضع الذي يشغله لا يضيف شيئاً للعدد. وفيما يلي الرموز التي استخدمها الهنود:

أرقام هندية آرامية قديمة:

1	2	3	4	5	6	8	9	10

أرقام هندية من القرن الثاني بعد الميلاد:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

أرقام هندية من اللغة السنسكريتية والتي عدّل شكلها فيما بعد **الخوارزمي** وأصبحت تُعرف بالسلسلة الهندية العربية للأعداد وهي:

3 γ ع

وهذبها الخوارزمي بالشكل التالي:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

وهذبها أيضاً بشكل آخر، وسميت بالسلسة الغبارية أو السلسلة العربية لتغدو كما يلي:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

وسميت بالغبارية لأن أهل الهند كانوا يبسطون غباراً على لوح من خشب ويرسمون عليه الأرقام في العمليات الحسابية.

د- نظام العد عند العرب:

استخدم العرب في البداية نظام العد الستيني الذي أخذوه عن أسلافهم السومريين والبابليين. ثم اقتبسوا عن اليونان طريقتهم في كتابة الأعداد فوضعوا لكل حرف من الحروف الأبجدية العربية رقماً معيّناً، وبأساس عشري، كما يلي:

أ	ب	ج	د	هـ	و	ز	ح	ط	ي
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

ك	ل	م	ن	س	ع	ف	ص	ق	ر
20	30	40	50	60	70	80	90	100	200

ش	ت	ث	خ	ذ	ض	ظ	غ		
300	400	500	600	700	800	900	1000		

بغ	كغ	قغ	ضغ
2000	20000	100000	800000

يلاحظ أن الأحرف التسعة الأولى استُعملت للدلالة على الآحاد. كما أن الأحرف التسعة التي تليها دلت على العشرات. بينما الأحرف التسعة الأخيرة جُعلت للدلالة على المئات. في حين دل الحرف الثامن والعشرون على الألف.

مثال (1): إن القيمة العددية لكلمة "رجل" هي:

ر + ج + ل

233 = 30 + 3 + 200

وقد تخلى العرب عن كتابة الأعداد باستخدام الحروف الأبجدية، عندما اكتشفوا الطاقات الكبيرة للنظام العشري، حيث يمكن استخدام عشرة رموز بدلاً من ستين رمزاً لتبسيط وتسريع الحسابات. أن قوى العشرة (حيث جاءت التسمية العشرية) تدل على قيمة الموضع في العدد، فمثلاً العدد 444 هو:

$$444 = 400 + 40 + 4 = 100\times4 + 10\times4 + 1\times4 =$$
$$4\times10^2 + 4\times10^1 4\times10^0$$

استبدل العرب نظام الأرقام الأبجدية، بنظام الأعداد العشرية الذي اقتبسه الخوارزمي من نظام الأعداد الهنديه:

0 9 8 7 6 5 4 3 2 1

وتسمى هذه السلسلة، **بالسلسلة الهندية**، وتُستخدم في بلاد المشرق العربي.

أما **السلسلة الهندية العربية أو الغبارية**، تُستخدم في بلاد المغرب العربي ودخلت إلى أوروبا عن طريق الأندلس، وأخذت الشكل التالي:

0 9 8 7 6 5 4 3 2 1

أما الكسور العادية، ويُقصد بها الأعداد المكسورة، كما قال عنها **الخوارزمي**، ورأى أنه يمكن تقسيم الواحد المفرد إلى قطع بوساطة كل رقم من أرقام النظام العشري، للوصول إلى كسور تحمل أسماء خاصة كما يلي:

$\frac{1}{2}$ =نصف ، $\frac{1}{3}$ = ثلث ، $\frac{1}{4}$ = ربع

$\frac{1}{5}$ = خمس ، $\frac{1}{6}$ = سدس ، $\frac{1}{7}$ = سبع

$\frac{1}{8}$ = ثمن ، $\frac{1}{9}$ = تسع ، $\frac{1}{10}$ = عشر

تأثرت أفكار العرب من جهة الأعداد بالحضارة الهندية واليونانية. لكن إسهاماتهم كانت في:

1- نشرهم النظام العشري للعد، وإيجادهم طريقة القيمة المكانية لعدد. فالرقم 9 في العدد 999 له قيمة مختلفة عندما يكون آحاداً فقيمته تساوي 9 ، وعندما يقع في منزلة العشرات فقيمته تساوي 90، بينما قيمته تساوي 900 عندما يكون موضعه في منزلة المئات.

3- أخضعوا الكسور والأعداد الصحيحة والأعداد الأخرى إلى القواعد العامة ذاتها.

4- نظرية الأعداد اليونانية

أ- الأعداد الزوجية و الأعداد الفردية

قسم اليونان الأعداد إلى فردية وزوجية. والعدد الزوجي هو أي عدد يمكن تقسيمه إلى جزأين متساويين، بينما العدد الفردي لا يمكن تقسيمه إلى قسمين متساويين. وصنفوا الأعداد إلى أعداد زوجية – فردية، زوجية – زوجية، فردية – زوجية، ثم فردية – فردية.

الأعداد الزوجية – الفردية: هي أعداد يمكن تقسيمها على 2 مرة واحدة، تنتج أعداد فردية.

فردية: 3,1 ، 5 ، 7 ، 9 ، 11 ، ....

زوجية – فردية: 6,2 ، 10 ، 14 ، 18 ، ....

الأعداد الزوجية – الزوجية: هي أعداد يمكن تقسيمها مرتين على الأقل إلى أن نصل إلى الواحد.

زوجية: 4 ، 6 ، 8 ، 10 ، 12 ، ....

زوجية – زوجية: 4 ، 8 ، 16 ، 32 ، 64 ، ....

الأعداد الفردية – الزوجية: هي أعداد يمكن تقسيمها على 2 مرتين متتاليتين.

فردية – زوجية: 12 ، 20 ، 28 ، 36 ، 44 ، ....

الأعداد الفردية – الفردية: هي أعداد ناتجة عن حاصل ضرب عددين فرديين.

فردية – فردية: 9 ، 15 ، 21 ، 25، 27 ، 33 ، ....

ونتج عن هذا التصنيف وجود أعداد سميت أولية (لا يمكن تقسيمها إلا على نفسها وعلى الواحد فقط). كالأعداد 2 ، 3 ، 5 ، 7 ، 11 ، 13 ، ....

(بينما العدد 8 مثلاً ليس أولياً لأنه يقبل القسمة على نفسه وعلى العدد 1 وعلى 2، وعلى 4).

وهي عوامل أولية لأعداد أخرى. فمثلاً 2 ، 3 هي عوامل أولية للعدد 6 لأن $6=3\times2$

2 ، 2 ، 11 هي عوامل أولية للعدد 44 لأن $44=11\times2\times2$ وهكذا

ب-خواص الأعداد الفردية والزوجية:

أظهر اليونانيون قوانين ممتعةً للأعداد الطبيعية، نذكر بعضاً منها:

1- مجموع الأعداد الفردية المتتالية تساوي دوماً مربع عددها. أي

$2^2 = 4 = 3+1$

$3^2 = 9 = 5+3+1$

$4^2 = 16 = 7+5+3+1$

وبصورة عامة: $n^2 = (2n-1)+...+5+3+1$ *(حيث n عدد طبيعي)*

2- مجموع الأعداد الزوجية المتتالية تساوي دوماً حاصل ضرب عدد هذه الأعداد بالعدد التالي له.

مثال: $3 \times 2 = 6 = 4 + 2$

$4 \times 3 = 12 = 6 + 4 + 2$

$5 \times 4 = 20 = 8 + 6 + 4 + 2$

وبصورة عامة $2n+...+8+6+4+2 = n(n+1)$

حيث nعدد طبيعي، $n+1$ العدد التالي له.

3- سمى اليونانيون مجاميع الأعداد الطبيعية من الواحد إلى n بأعداد المثلث، لأن هذه المجاميع يمكن تمثيلها بنقاط تشكل مثلثاً متساوي الأضلاع كما يلي:

=1	$(1+1)\ 1 \times 1/2$	*
$= 3 = 2 + 1$	$(1+2)\ 2 \times 1/2$	* *
$6 = 3 + 2 + 1$	$(1+3)\ 3 \times 1/2$	* * *
$1 + 2 + 3 + 4 = 10 = (1+4)\ 4 \times 1/2$		* * * *

وبصورة عامة يكون:

$$n(n+1)\times\frac{1}{2}=n+....+3+2+1$$

ويمكن أن نلاحظ وجود علاقة بين مربعات الأعداد وأعداد المثلث. فمجموع عددين متتاليين من أعداد المثلث يساوي مربع عدد طبيعي.

مثال:

$2^2 = 4 = 3+1$

$3^2 = 9 = 6+3$

$4^2 = 16 = 10+6$

ت- الأعداد الأولية

قسم اليونانيون الأعداد الطبيعية إلى أعداد أولية وأعداد غير أولية. وقد أوجد العالم الجغرافي والفلكي والرياضي اليوناني **إيراتوستين Eratosthenes** (196 – 276 قبل الميلاد) طريقة للحصول على الأعداد الأولية. وتتلخص بما يلي:

1- كتب الأعداد الطبيعية في شبكة على الشكل التالي:

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
7	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
13	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**
19	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**

2- ثم كتب الأعداد الطبيعية كلها دون الواحد (العدد واحد، لا يعتبر عدداً أولياً ولا يعتبر عدداً غير أولي، فليس له أي قواسم غير الواحد نفسه)

2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,.....

3- شطب من هذه الأعداد مضاعفات العدد 2 فيكون:

3,5,7, ,9, 11,13,15,17,19,21,23,25,27,29,.....

4- ثم شطب من الأعداد السابقة مضاعفات العدد 3 فنجد:

5,7,11,13,17,19,23,25,29,.....

5- ثم شطب من الأعداد السابقة مضاعفات العدد 5 فنجد:

7,11,13,19,29,.....

وهكذا نحصل على الأعداد الأولية التي هي بدايات كل سطر مما سبق. أي هي

2,3,5,7,11,13,.....

إن **إيراتوستين** ابتكر طريقة لإيجاد الأعداد الأولية، علماً أنه لا يوجد قانون عام لإيجادها كلها. و بين **إقليدس** أنه توجد مجموعة لا نهائية من الأعداد الأولية.

عرف اليونانيون أعداداً غير الأعداد الطبيعية كالعدد $\sqrt{2}$ غير أنهم فهموه كطول قطر المربع الذي طول ضلعه يساوي واحدة الأطوال، ولم يعتبره عدداً كباقي الأعداد. وقد سمي هذا العدد بالعدد غير العادي في بداية القرن الثامن عشر الميلادي.

ث- أعداد فيثاغورث:

Pythagoras أو *ΠΥΘΑΓΟΡΑΣ*

نقول عن الأعداد x,y,z إنها أعداد فيثاغورث، إذا حققت العلاقة:

$z^2 = x^2 + y^2$ ، مثال ذلك الأعداد 3 ، 4 ، 5 هي أعداد

فيثاغورث لأن $5^2 = 4^2 + 3^2$ أي $25 = 16 + 9$.

وإذا كانت هذه الأعداد أولية فيما بينها، سميت أعداد فيثاغورث الأولية.

والعددان الأوليان فيما بينهما هما عددان القاسم المشترك الأكبر لهما هو الواحد.

مثال ذلك العددان 9 ، 4 ، والأعداد 3 ، 4 ، 5 هي أعداد أولية فيما بينها لأن القاسم المشترك الأكبر لهم هو الواحد. كذلك الأعداد 8 ، 15 ، 17. ويلاحظ أن أعداد فيثاغورث الأولية، فيها اثنان فرديان والثالث زوجي والعدد الأكبر فيها عدد فردي.

ج- الأعداد التامة والأعداد المتحابة:

إن العددين 3،2 هما عاملان للعدد 6، والعددين 1 ، 6 هما عاملان للعدد 6 أيضاً. وهذه الأعداد 1 ، 2 ، 3، 6 هي قواسم للعدد 6. فإذا تجاهلنا العدد نفسه (6) نلاحظ أن مجموع قواسم العدد التي تصغره تماماً تساوي العدد نفسه. أي 1 + 2 + 3= 6. سمى الفيثاغورثيون العدد 6 عدداً كاملاً أو تاماً. كذلك العدد 28 لأن قواسمه دون العدد نفسه هي: 1 ، 2 ، 4 ، 7 ، 14 ، حيث 1 + 2 +4 + 7 + 14 = 28. وقد وجد الفيثاغورثيون الأعداد الأربعة الأولى الكاملة وهي: 6 ، 28 ، 496 ، 8128 . (هناك رياضي من القرن الخامس عشر أعطى العدد الكامل الخامس وهو 33550336). والعدد الكامل السادس هو 8589809056، والعدد الكامل السابع هو 137438691328 وآخر عدد كامل تمَّ اكتشافه في العام 1992.

إذاً: **العدد الكامل (التام)** هو العدد الذي يكون مجموع قواسمه (عدا العدد نفسه) تساوي العدد نفسه. والمعروف من هذه الأعداد حتى الآن 36 عدداً، ولكنه من غير المعروف إذا كان عددها منتهياً أو غير منته. ويلاحظ أن آحاد هذه الأعداد إما 6 أو 8.

أما العدد غير الكامل فهو ذلك العدد الذي يكون مجموع قواسمه (عدا العدد نفسه) أكبر أو أصغر منه.

فإذا كان العدد الأصلي أصغر من مجموع قواسمه (عوامله) قيل إنه عدد ضعيف.

مثال: العدد 12 الذي عوامله هي: 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 6 ، ومجموعها يساوي 16. أما إذا كان العدد أكبر من مجموع قواسمه (عوامله) قيل إنه عدد قوي

مثال العدد 8 الذي عوامله هي: 1 ، 2 ، 4 ، ومجموعها 7.

العددان المتحابان:

يقال عن عددين إنهما متحابان إذا كان أحدهما ضعيفاً (ناقصاً) والآخر قوياً (زائداً) وإذا جمعت أجزاء العدد القوي كانت مساويةً للعدد الضعيف، وإذا جمعت أجزاء العدد الضعيف كانت مساويةً للعدد القوي.

- **مثال:**

العددان 220 الضعيف، 284 القوي

أجزاء العدد الضعيف (الناقص) 220 هي:

نصفه $220/2=110$

ربعه $220/4=55$

خمسه $220/5=44$

نصف خمسه $220/10=22$

ربع خمسه $220/20=11$

مقام ربع خمسه = 20

مقام نصف خمسه = 10

مقام خمسه = 5

مقام ربعه = 4

مقام نصفه = 2

جزؤه = 1

مجموع أجزاء 220

1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 20 + 11 + 22 + 44 + 55 + 110 =284

أجزاء العدد القوي (الزائد) 284 هي:

نصفه 284/2=142

ربعه 284/4=71

مقام ربعه = 4

مقام نصفه = 2

جزؤه = 1

مجموع أجزاء 284

1 + 2 + 4 + 71 + 142 =220

5- نظرية الأعداد الهندوسية

صنفت نظرية جاينا الأعداد ثلاثة أصناف هي: أعداد قابلة للعد، وأعداد غير قابلة للعد وأعداد لا نهائية. تبدأ الأعداد القابلة للعد من العدد اثنين وتتقدم بواحدات أكبر عدد ممكن ويمكن تصور هذا العدد الكبير على أنه العدد الكلي لبذور الخردل البيضاء الضرورية لتغطية أرض بكاملها وملء المحيطات والوديان. وإذا

ما وصلنا إلى ذلك بالعد يمكن أن نتابع في مراحل لنصل إلى اللانهاية. نتابع في المرحلة الأولى لنصل إلى مربع أكبر عدد قابل للعد، ثم نأخذ القوة من المرتبة الرابعة لهذا العدد، ثم المرتبة الثامنة، وهكذا... ولا يوجد عدد واحد فقط غير قابل للعد، بل يوجد أعداد كثيرة منها. وعندما نصل إلى اللانهاية فإننا نحتاج إلى إعادة الخطوات مرة أخرى.

يعتقد الجاينيون بوجود خمسة أنواع من اللانهاية. هناك لا نهاية موجبة وهي لا نهاية باتجاه واحد، ولا نهاية سالبة، ويمكن الوصول إليها في الاتجاه المقابل بدءاً من (-1) ناقص واحد. وهناك لا نهاية بدلالة المساحة، ولا نهاية بدلالة الحجم، ولا نهاية بدلالة الزمن.

أما بهراما فقد قدم القواعد الدقيقة لضرب الأعداد الموجبة والسالبة، وللضرب بصفر وللقسمة على صفر. قبل الصفر على أنه عدد بحد ذاته، ليس فقط لأنه ملائم كي يشير إلى المنزلة الخالية في الأعداد. وبالتالي فإن الهنود هم أول من اعترفوا بالصفر باعتباره عدداً فعلياً. في الوقت الذي لم يعترف به الرياضيون في أوربا إلا في القرن التاسع عشر.

6- نظام العد عند العرب

وصل العرب إلى درجة كبيرة في تطور الأعداد وبدؤوا يتوسعون أكثر فأكثر في دراسة الأعداد إلى أن وصلوا إلى دراسة خواص الأعداد. وممن اهتم بدراسة خواص الأعداد و الرياضيات عامة الفيلسوف العربي الكندي (ت 252 هـ - 866 م) و قال بأن الفلسفة لا تفهم إلا بالرياضيات، و الرياضيات تكون بالبراهين لا بالإقناع الشخصي ولا بالظن. والأعداد متناهية في نفسها، فكل عدد مهما كان كبيراً منتهٍ، ولكن سلسلة الأعداد غير متناهية، لأن بإمكاننا أن نزيد كل عدد بلا نهاية. أما المعدودات فهي متناهية لأنها الأجسام.

و يأتي في الدرجة الثانية من حيث الاهتمام بخواص الأعداد، جماعة أخوان الصفا وخلان الوفا الذين بنوا تفلسفهم على الأعداد تقيداً بالفيثاغورس (نسبة إلى فيثارغوس) ولكن خالفوهم في " الواحد" الذي جعله الفيثاغورس مبدأ الأعداد، أما أخوان الصفا فقال بأن الأعداد قسمان : عدد وهو الواحد، ومعدودات وهي جميع الأعداد، وكل عدد ما عدا الواحد و الاثنين ينشأ بزيادة واحد على العدد الذي يتقدمه، فالأربعة مثلاً ثلاثة يضاف إليها واحد، و الثلاثة اثنان يضاف إليها واحد، أما العدد اثنان فقد رأوا أنه الواحد مكرراً مرتين، فالاثنان إذن أول الأعداد. وكل عدد سواء كان صحيحا أم كسراً هو وحدة قائمة بذاتها، وقالوا بأن الواحد وحدة حقيقية أما ما عدا الواحد فهو وحدة مجازية و " الواحد أصل العدد ومنشؤه ، و أوله ، و أوله وآخره (.....) والواحد لا جزء له ولا مثل في العدد ، (.....) و الواحد محيط بالعدد كله وبعده " و " العدد كله آحاده و عشراته ومئاته و ألوفه، أو ما زاد بالغاً ما بلغ ، فأصلها كلها من الواحد إلى الأربعة، وهي هذه 4321 ، وذلك أن سائر الأعداد كلها من هذه تتركب ومنها تنشأ ، وهي أصل فيها كلها ، بيان ذلك أنه إذا أضيفت ثلاثة إلى أربعة كانت سبعة، و إن أضيفت واحد و اثنان و ثلاثة إلى أربعة كانت عشرة".

وقد وقع أخوان الصفا هنا في مغالطة مفادها أنه مادام الأمر في هذه الأرقام مرتبطا بإضافة أرقام أخرى، فما مسوّغ الوقوف عند رقمه بعينه؟.

ولكن على الرغم من وجود أخطاء في نظريات أخوان الصفا بالنسبة لخواص الأعداد و مغالطات إلا أننا جئنا على بيانها شاهداً على اهتمام المسلمين و العرب ومنهم أخوان الصفا بخواص الأعداد، ونحن لسنا هنا بصدد مناقشة ارائهم وفلسفتهم.

وزاد العرب بحثهم في خواص الأعداد وتقسيمها أيضا إلى ثلاثة اقسام:

أ- عدد تام.

ب-عدد زائد.

ت-عدد ناقص.

أ) العدد التام:

و هو كل عدد إذا جُمِعَتْ أجزاؤه كانت جملته ذلك العدد بالآخر، ومثال ذلك 28,6، فكل من هذين العددين إذا جمعت عوامله كان الحاصل مساوياً العدد نفسه، فأجزاء العدد 6 هي 3,2,1 ومجموعها يساوي 6، و أجزاء العدد 28 هي 14,7,4,2,1 و مجموعها يساوي 28. وكذلك العددان 496، و8128 كاملان كما ورد سابقاً.

ب) العدد الناقص:

وهو العدد الذي مجموع قواسمه أكبر منه، ومثال ذلك العدد 10 فأجزاؤه (5,2,1) ومجموعها أقل من 10

ج) العدد الزائد:

وهو كل عدد إذا جمعت أجزاؤه كانت أكثر منه، مثال ذلك العدد 12 فإن أجزاءه (6,4,3,2,1) ومجموعها (16) وهو أكثر من (12) . كما اهتم العرب و المسلمون بتطوير الأعداد المتحابة. ويقال للعددين إنهما متحابان إذا كان مجموع إحداهما يساوي مجموع عوامل الآخر ، ومجموع أجزاء الثاني يساوي الأول.

مثال:

العددان 284,220 وهما أول عددين متحابين لأن أجزاء العدد 220 ، وهي 110,55,44,22,20,10,5,4,2,1 - مجموعها (284) ، وهي 142,71,4,2,1

جملتها (220) وممن نبغ من علماء المسلمين في استخراج الأعداد المتحابة العالم ثابت بن قُرَّة الذي أوجد طريقة سهلة لاستخراج هذه الأعداد.

- **النظام الستيني عند العرب**

ينحدر هذا النظام من قدماء البابليين، وقد وصل إلى العالم العربي عبر أقنية سريانية، ويسمى هذا النظام في المصادر العربية، عدا طريق المنجمين، حساب الزيج، أو حساب الدرج والدقائق، وهذه الأسماء تشير إلى أن استعماله كان قاصراً على المنجمين والفلكين، و الكتب العربية التي تستخدم هذا النظام قليلة، ولعل أقدمها هو "كتاب في الحساب النجومي" لأبي العنبس بن إسحاق الصيمري (ت 888 م) ، وكتاب " الحقائق في معرفة حساب الدرج والدقائق" **لبدر الدين محمد بن محمد المعروف بسبط الماردينى** (1495 م) ،وهذا الحساب الستيني رغم ملاءمته إلا في الحسابات الفلكية خلال العصور الوسطى، أضحى اليوم خارج التداول عامة إلا فيما يخص أجزاء الساعة أو درجات الزوايا.

استعمل العرب نظام العشرة التكراري في الترقيم كما فعل الفينيقيون و المصريون والرومان و اليونان، وكانوا يرمزون إلى الآحاد بخطوط رأسية، وإلى الخمسة بحرف الخاء، والعشرة بالعين، والمئة بالجيم، والألف بحرف الألف.

وبعد الفتح الإسلامي و انتشار الإسلام شاعت لدى المسلمين الأرقام على **حساب الجمل** على غرار الأبجدية التي كانت شائعة آنذاك لدى الآراميين والبابليين والفينيقيين واليونانيين والرومان وغيرهم من الشعوب و الأمم. والمقصود بحساب الجمل هو الترتيب النبطي للحروف الأبجدية العربية: أبجد، هوز ، حطي، كلمن ، سعفص، قرشت ، ثخذ، ضظغ.

وعند كتابة الأعداد بهذه الطريقة (حساب الجمل) يركب أي عدد بإضافة الحروف بعضها إلى بعض على سبيل الجمع.

وكانوا يرمزون للأعداد التي تزيد على الألف بضم الحروف بعضها إلى بعض في نظام تجميعي ضربي على النحو التالي:

بغ= 3000,2000 = بغ ، دغ = طغ = 9000 ، كغ = 20000

قغ= 100000

فإذا كتب كلمةً (كويت) مثلاً كانت قيمة الكلمة : ك + و + ي + ت ثم

436 = 20+6+10+400

وقد استعمل العرب طريقة حساب الجمل في الترقيم على نطاق واسع كحساب الطالع وفي التاريخ العشري للأحداث و المواليد وغيرها عن طريق جمع القيم المطلقة كما بينا حتى وقت متأخر ومثال ذلك تاريخ تجديد مسجد عمرو بن العاص في مصر على طريقة حساب الجمل في الأبيات التي كتبت على حوائط المسجد و هي

انظر المسجد عمرو بعد ما درست... *... رسومه صار يحكي الكوكب الزاهي

نعم العزيز الذي له جدده..... *..... أمير اللوا مراد الأمير الناهي

له ثواب جزيل غير منقطع ..... *..... على الدوام بأنظار و أشباه

لاح القبول عليه حين أرخه..... *..... هذا البنا على مراد الله.

وتاريخ تجديد المسجد في الأبيات يبدأ بعد كلمة (أرخه) وفقا لقاعدة حساب الجمل يكون التاريخ كما يلي:

هذا = هـ + ذ + أ ثم 1 +700+5 = 706

البنا = أ + ل +ب + ن +أ ثم 1+30+2+50+1 = 84

على = ع + ل +ي ثم 70+30+10 = 110

مراد = م +ر + ا + د ثم 40+200+1+4 = 245

الله = أ +ل +ل+هـ ثم 1+30+30+5 = 66

ويجمع الناتج على النحو التالي : 66+245+110+84+706 = 1211 وهو التاريخ الفعلي لتجديد المسجد على يد **الأمير بك** عام 1211 م كما أرخ بعضهم استعمال التدخين من قوله تعالى " **يوم تأتي السماء بدخان**" تأتي = ت + أ + ت + ي ثم 10 + 400 + 1+ 400 = 811 السماء = أ + ل + س + م + ا +ء ثم 1+1+40+60+30+1 = 133 بدخان = ب + د + خ + أ + ن ثم50 +1+600 +4+2 = 657 ثم 657+133+ 811 =1601 م.

ولقد سهلت طريقة استعمال الحروف على غرار حساب الجمل كتابة الأرقام التي هي دون الستين في النظام الستيني، فصارت تكتب بحرفين أو حرف واحد بعد أن كانت تكتب بالطريقة التكرارية الطويلة، فالرقم 48 فمثلاً ما كان يكتب بالنظم البابلي:

111 << صار يكتب بحساب الجمل (مح)

>>111

11

وطريقة حساب الجمل في نظرنا تعتبر تطوراً جيداً بالنسبة لنظام الترقيم، استطاع العرب الاستفادة منه أكثر ممن أخذ عنهم هذا النظام من اليونانيين والرومان الذين نقلوا هذا النظام عن الفينيقيين أصحاب الأبجدية السامية. أما عن بداية استعمال هذا النظام في المؤلفات الرياضية فيذكر **رشدي راشد** بأن العمل ، حول نظام الجمل يعود **لأبي الوفاء البوزجاني** في القرن العاشر الميلادي، وبعده بقليل نجد **الكرخي** في **الكافي في الحساب** (1016 م) ومع استخدام النظام الهندي تضاءل استعمال هذا النظام في الترقيم.

- **النظام الهندي ومميزاته:**

يعد النظام الهندي في الترقيم المصدر الأساسي للأرقام العربية الحديثة المشرقية. فبعد اختراع الهنود للنظام العشري للترقيم برزت فيه مميزات جعلت العرب يقتبسونه ويستعملونه بدلاً من حساب الجمل. و مميزات الأرقام الهندية هي:

1. اقتصارها على تسعة أشكال فقط – عدا الصفر – للدلالة – على التسعة الأولى وعلى أي عدد فوق ذلك ، مهما يكن كبيراً.
2. بساطة أشكال هذه الأرقام ووضوحها وضوحاً لا يشوبه لبس.
3. استخدام الأرقام السلطانية للنظام العشري محددة المنازل بحيث يكون للرقم الواحد قيمتان، قيمة في نفسه، وقيمة بالنسبة للمنزلة التي يقع فيها منزله، فالرقم 7 هو سبعة في منزلة الآحاد ، وسبعون في منزلة العشرات، وسبعمئة في منزلة المئات وهكذا ، وبما أنه عشري فهو متفق مع نظام العد الطبيعي، و صور الأرقام في الترقيم الهندي كما وردت في الكتب المشرقية كما يلي:

يقول ابن النديم في أثناء حديثه عن قلم السند: " كان هؤلاء القوم مختلفي اللغات، مختلفي المذاهب ولهم أقلام عدة. قال لي بعض من يجول بلادهم: إن لهم نحو مائتي قلم؛ والذي رأيت صنماً صفراً في دار السلطان ، قيل إنه صور البدّ؛ وهو شخص على كرسي قد عقد بإحدى يديه ثلثين. وعلى الكرسي كتابة هذا مثالها، وذكر هذا الرجل المقدم ذكره أنهم في الأكثر يكتبون بالتسعة الأحرف على هذا المثال، و ابتداؤه أ- ب – ج – د – ه – و – ز – ح – ط فإذا بلغ إلى ط، عاد إلى الحرف الأول ونقطة تحته.

مثال:

فيكون ي – كث – ل – م – ن – س – ع – ف – ص ؛ يزاد عشرة فإذا بلغ إلى صاد يكتب على هذا المثال وينقط تحت كل حرف نقطتين هكذا:

وتفسيرها كما ورد في الكتب المشرقية عامة ومنها **ابن النديم**، هكذا "1 للواحد 2 أو 3 أو م للاثنين ، للثلاثة عو للأربعة، وقد تطورت الكتابة فاتخذت الأشكال، عم ، 4 للأربعة كذلك ك أو للخمسة ، 1 أو 6 للستة ، 7 أو > للسبعة ، 6 أو 8 للثمانية و 9 للتسعة".

الفصل الثالث

أنظمة العد

1- النظام العشري Decimal System

يعتبر النظام العشري أكثر أنظمة العد استعمالاً من قبل الإنسان، وقد سمي بالعشري لأنه يتكون من عشرة أرقام هي (9 ..0) و التي بدورها تشكل أساس نظام العد العشري.

وبشكل عام يمكن القول إن أساس أي نظام عد Base يساوي عدد الأرقام المستعملة لتمثيل الأعداد فيه، وهو يساوي كذلك أكبر رقم في النظام مضافاً إليه واحد.

تمثل الأعداد في النظام العشري بوساطة قوى الأساس 10 وهذه تسمى بدورها أوزان خانات العدد.

مثال:

العدد العشري N=7129.45 :

حيث يمكن كتابته على النحو التالي :

$$10^1 + 9 \times 10^0$$

2- النظام الثنائي Binary System

إن الأساس المستعمل في النظام الثنائي هو العدد 2 ويتكون هذا النظام من رقمين فقط هما 0 و 1 ويسمى كل منهما رقماً ثنائياً. Binary Digit ولتمثيل كل من الرقمين 0 و 1 فإنّه لا يلزم إلا خانة واحدة، ولهذا السبب أصبح من الشائع إطلاق اسم بت Bitعلى الخانة التي يحتلها الرقم داخل العدد الثنائي.

أ- التحويل من النظام الثنائي إلى النظام العشري :

لتحويل أي عدد ثنائي إلى مكافئه العشري فإنه يجب علينا استعمال قانون التمثيل الموضعي للأعداد. و ينطبق هذا القانون عندما يكون الرقم الثنائي صحيحاً أو كسراً مع مراعاة أن أساس نظام العد هنا هو 2.

$$N= a_nR^n+ a_{n-1}R^{n-1}+....+ a_0R^0+ a_{-1}R^{-1}+....+ a_{-m}R^{-m}$$

مثال:

حول العدد الثنائي التالي إلى مكافئه العشري

$$(11001.011)_2 \longrightarrow (?)_{10}$$

4	3	2	1	0	-1	-2	-3
1	1	0	0	1	0	1	1

$$N = 1x2^4 + 1x2^3 + 0x2^2 + 0x2^1 + 1x2^0 + 0x2^{-1} + 1x2^{-2} + 1x2^{-3}$$

$$N = 1x16 + 1x8 + 1x1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 25.625$$

$$(11001.011)_2 = (25.625)_{10}$$

ب- تحويل الأعداد من النظام العشري إلى الثنائي :

أولاً: تحويل الأعداد العشرية الصحيحة الموجبة:

لتحويل أي عدد صحيح موجب من النظام العشري إلى الثنائي نستعمل طريقة الباقي Remainder Methodالموضحة كالآتي:

1) نقسم العدد العشري على الأساس 2

2) نحسب باقي القسمة الذي يكون إما 1 أو 0

3) نقسم ناتج القسمة السابق على الأساس 2 كما في خطوة (1)

4) نحسب باقي القسمة كما في خطوة (2)

5) نستمر في عملية القسمة وتحديد الباقي حتى يصبح خارج القسمة الصحيح صفراً.

6) العدد الثنائي المطلوب يتكون من أرقام الباقي، مقروءة من الباقي الأخير إلى الأول لاحظ أن الباقي الأول يمثل LSB بينما يمثل الباقي الأخير MSB

مثال:

لتحويل الرقم 12 من النظام العشري إلى الثنائي نتبع الآتي:

	ناتج القسمة	الباقي	
1)	12 ÷2 =6	0	الخانة الأدنى منزلة LSB
2)	6÷2 =3	0	
3)	3÷2 =1	1	
4)	1÷2 =0	1	الخانة الأعلى منزلة MSB
		إنهاء القسمة	

فيكون الناتج (من أسفل إلى أعلى ومن اليسار إلى اليمين):

$$(12)_{10} = (1100)_2$$

ثانياً: تحويل الكسر العشري إلى ثنائي:

لتحويل الكسر العشري إلى مكافئة الثنائي نضرب الكسر في الأساس 2 عدداً معيناً من المرات حتى نحصل على ناتج ضرب يساوي صفراً أو حتى نحصل على الدقة المطلوبة.

مثال:

لتحويل الكسر العشري [illegible] إلى مكافئه الثنائي:

	0 .	75	
		2	x
MSD	1	50	
		2	x
LSD	1	00	

$$(0.75)_{10} = (0.11)_2$$

فيكون الناتج (من أعلى إلى أسفل ومن اليسار إلى اليمين) : **(0.11)**

مثال:

لتحويل الكسر العشري 0.126 إلى مكافئة الثنائي بدقة تصل إلى أربعة أرقام ثنائية:

	0 .	126	
		2	x
MSD	0	252	
		2	x
	0	504	
		2	x
	1	008	
		2	x
LSD	0	016	

$$(1.126)_{10} = (0.0010)_2$$

فيكون الناتج (من أعلى إلى أسفل ومن اليسار إلى اليمين) :**(0.0010)**

ثالثاً: تحويل العدد العشري الكسرى:

يتم تحويل كل جزء على حدة، ثم تضم النتائج بعضها مع بعض لتعطي النتيجة المطلوبة.

مثال:

حوّل العدد العشري **10.15** إلى مكافئه الثنائي.

الحل:

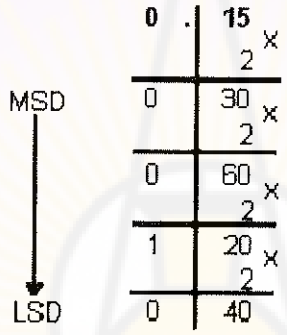
1) نحول الجزء الصحيح إلى مكافئه الثنائي:

	ناتج القسمة	الباقي	
1)	10 ÷2 =5	0	الخانة الأدنى منزلة LSD
2)	5÷2 =2	1	
3)	2÷2 =1	0	
4)	1÷2 =0	1	الخانة الأعلى منزلة MSD
		إنهاء القسمة	

يكون الناتج (من أعلى إلى أسفل ومن اليسار إلى اليمين) :

$$(10)_{10} \longrightarrow (1010)_2$$

2) نحول الجزء الكسري كما يلي:



$$(0.15)_{10} = (0.001)_2$$

الناتج الكلي: $(10.15)_{10} = (1010.001)_2$

ت- إجراء العمليات الحسابية على الأعداد الثنائية الموجبة:

يمكن إجراء العمليات الحسابية من جمع و طرح و ضرب وقسمة كما هو الحال في النظام العشري مع مراعاة أن أساس النظام المستعمل هنا هو 2.

أولاً: عملية الجمع :

لو أخذنا عددين ثنائيين A,B وكان كل منهما يتكون من خانة واحدة فقط Bit ، وبما أن كل خانة يمكن أن تكون أما 0 أو 1 فإنه يوجد للعددين معاً أربع احتمالات كالآتي:

A	B	المجموع A+B =S	الفيض Carry
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

أما إذا كانت الأعداد الثنائية مكونة من أكثر من خانة واحدة فإن عملية الجمع تنفذ بنفس طريقة الجمع في النظام العشري مع مراعاة أن أساس النظام العد المستعمل هو 2.

مثال:

جمع العددين الثنائيين $(101)_2 + (011)_2 = (?)_2$

المحمول 111

العدد الأول 101

\+

العدد الثاني 011

1000

الناتج: $(101)_2 + (011)_2 = (1000)_2$

مثال:

جمع العددين الثنائيين $(101101)_2 + (1011)_2 = (?)_2$

1 1

101101

\+

001011

111000

الناتج: $(101101)_2 + (1011)_2 = (111000)_2$

ثانياً: عملية الطرح

(إذا كان المطروح أقل من المطروح منه):لو أخذنا عددين ثنائيين A,B وكان كل منهما يتكون من خانة واحدة فقط، فإنه توجد الاحتمالات التالية لعملية الطرح تكون كالآتي:

A	B	الفرق D=A-B	المستقرض Borrow
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	0
1	1	0	0

مثال:

اطرح العددين الثنائيين $(110)_2 - (010)_2 = (?)_2$

$$\begin{array}{r} 110 \\ -\ 010 \\ \hline 100 \end{array}$$

الناتج: $(110)_2 - (010)_2 = (100)_2$

مثال:

اطرح العددين الثنائيين $(1010)_2 - (111)_2 = (?)_2$

$$\begin{array}{r} 1010 \\ -\ 0111 \\ \hline 0011 \end{array}$$

الناتج: $(1010)_2 - (111)_2 = (011)_2$

Damascus University

ثالثاً: عملية الضرب:

مثال:

ما هو ناتج ضرب العددين الثنائيين $(101)_2 \times (10)_2 = (?)_2$

$$\begin{array}{r} 101 \\ \times\ 10 \\ \hline 000 \\ 101 \\ \hline 1010 \end{array}$$

الناتج: $(101)_2 \times (10)_2 = (1010)_2$

رابعاً: عملية القسمة:

مثال:

ما هو ناتج قسمة $(1001)_2$ على $(11)_2$

$$\begin{array}{r|l} & 11 \\ \hline 11 & 1001 \\ & 11 \\ \hline & 11 \\ & 11 \\ \hline & 00 \end{array}$$

الناتج : $(1001)_2 \div (11)_2 = (11)_2$

3- النظام الثماني Octal System

إن أساس النظام الثماني كما هو معروف هو العدد 8.وتتكون رموز هذا النظام من الأرقام (0,1,2,..... 7).

أ- التحويل من النظام الثماني إلى العشري:

للتحويل من النظام الثماني إلى النظام العشري يستعمل قانون التمثيل الموضعي للأعداد مع مراعاة أن أساس نظام العد هنا هو 8 .

مثال:

حول العدد الثماني (206.75) إلى مكافئه العشري ؟



$$N = 2x8^{2} + 0x8^{1} + 6x8^{0} + 7x8^{-1} + 5x8^{-2}$$

$$N = 2x64 + 6x1 + 7x\frac{1}{8} + 5x\frac{1}{64}$$

$$N = 128 + 6 + \frac{7}{8} + \frac{5}{64}$$

$$N = 134 + 0.875 + 0.078125$$

$$N = 134.953125$$

الناتج: $(206.75)_8 = (134.95312)_{10}$

ب- تحويل من النظام العشري إلى الثماني:

- **تحويل الأعداد الصحيحة الموجبة:**

لتحويل أي عدد صحيح موجب من النظام العشري إلى الثماني نستعمل طريقة الباقي المشروحة في النظام الثنائي مع مراعاة أن الأساس الجديد هو 8.

مثال:

حول العدد العشري 122 إلى مكافئه الثماني؟

Damascus University

	ناتج القسمة	الباقي	
(1	122÷8= 15	2	الخانة الأدنى منزلة LSD
(2	15÷8= 1	7	
(3	1÷8= 0	1	الخانة الأعلى منزلة MSD
		إنهاء القسمة	

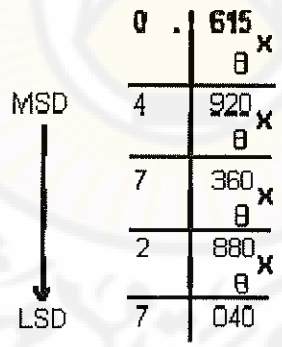
فيكون الناتج (من أسفل إلى أعلى ومن اليسار إلى اليمين) $(122)_{10} = (172)_8$

- **تحويل الكسر العشري إلى مكافئه الثماني:**

لتحويل الكسر العشري إلى مكافئه الثماني فإننا نضرب الكسر في الأساس 8 عدداً معيناً من المرات حتى نحصل على ناتج ضرب يساوي صفراً أو حتى نحصل على الدقة المطلوبة.

مثال :

حول الكسر العشري 0.615إلى مكافئه الثماني المكون من 4 خانات فقط.



فيكون الناتج (من أسفل إلى أعلى ومن اليسار إلى اليمين) :

$(0.615)_{10} = (0.4727)_8$

- **تحويل العدد العشري الكسري:**

في هذه الحالة نحول كل جزء على انفراد، ثم نضم الناتج بعضه مع بعض للحصول على الجواب المطلوب.

مثال:

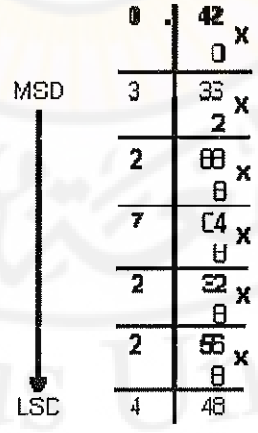
حول العدد العشري 982.42 إلى مكافئه الثماني؟

	ناتج القسمة	الباقي	
1)	982÷8= 122	6	الخانة الأدنى منزلة LSD
2)	122÷8= 15	2	
3)	15÷8= 1	7	
4)	1÷8= 0	1	الخانة الأعلى منزلةMSD
		إنهاء القسمة	

فيكون الناتج (**من أسفل إلى أعلى ومن اليسار إلى اليمين**) : $(982)_{10} = (1726)_8$

مثال :

حول $(0.42)_{10}$ إلى مكافئه الثماني



فيكون الناتج **(من أسفل إلى أعلى ومن اليسار إلى اليمين)** :

$$(0.42)_{10} = (0.327224)_8$$

ت- التحويل من النظام الثماني إلى الثنائي:

لتحويل أي عدد ثماني إلى مكافئه الثنائي نستبدل كل رقم من أرقام العدد الثماني بمكافئه الثنائي المكون من ثلاث خانات و بذلك ينتج لدينا العدد الثنائي المكافئ للعدد الثماني المطلوب تحويله.

مثال :

حوّل العدد الثماني $(772.5)_8$ إلى مكافئه الثنائي.

7	7	2	.	5
↓	↓	↓		↓
111	111	010	.	101

الناتج $(772.5)_8 = (111111010.101)_2$

ث- التحويل من النظام الثنائي إلى الثماني:

لتحويل الأعداد الثنائية الصحيحة إلى ثمانية نتبع الخطوات التالية:

1) نقسم العدد الثنائي إلى مجموعات كل منها مكون من ثلاث خانات، و يجب أن نبدأ التقسيم من الرقم الأقل أهمية (LSD) .

2) إذا كانت المجموعة الأخيرة غير مكتملة فإننا نضيف في نهايتها الرقم صفر حتى تصبح مكونة من ثلاث خانات ثنائية.

3) نضم الأرقام الثمانية معاً للحصول على العدد المطلوب.

4) في حالة الكسور الثنائية نبدأ بالتقسيم إلى مجموعات من الخانة القريبة على الفاصلة.

مثال:

حول العدد الثنائي التالي إلى مكافئه الثماني؟ $(1011011010.1011)_2 = (?)_8$

الحل:

001 011 011 010 . 101 100

1 3 3 2 . 5 4

$$(1011011010.1011)_2 = (1332.54)_8$$

ج- جمع وطرح الأعداد الثمانية:

أولاً: جمع الأعداد الثمانية:

نتبع عند جمع الأعداد الثمانية نفس الطريقة في حالة الأعداد العشرية مع مراعاة أن أساس نظام العد هو العدد 8 .

مثال :

اجمع العددين الثمانيين $(176.7)_8 + (52.2)_8 = (?)_8$

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 111} \\ 176.7 \\ + \\ 052.2 \\ \hline 251.1 \end{array}$$

الناتج : $(176.7)_8 + (52.2)_8 = (251.1)_8$

جدول الجمع في النظام الثماني

+	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7	10
2	2	3	4	5	6	7	10	11
3	3	4	5	6	7	10	11	12
4	4	5	6	7	10	11	12	13
5	5	6	7	10	11	12	13	14
6	6	7	10	11	12	13	14	15
7	14	10	11	12	13	14	15	16

ثانياً :طرح الأعداد الثمانية:

مثال:

اطرح العددين الثمانيين $(260)_8 - (123)_8 = (?)_8$

$$\begin{array}{r} 260 \\ -\ 123 \\ \hline 135 \end{array}$$

الناتج : $(260)_8 - (123)_8 = (135)_8$

مثال:

اطرح العددين الثمانيين $(2005)_8 - (756)_8 = (?)_8$

$$\begin{array}{r} 2005 \\ -\ 756 \\ \hline 1027 \end{array}$$

الناتج : $(2005)_8 - (756)_8 = (1027)_8$

ثالثاً: ضرب وقسمة الأعداد الثمانية:

يمكن تلخيص حقائق الضرب **في الجدول بضرب الأعداد الثمانية**

مثال:

أوجد حاصل الضرب:

$(726)_8 \times (3)_8 = (?)_8$

```
   1 2
   7 2 6
 X
       3
 -------
 2 6 0 2
```

الناتج : $(726)_8 \times (3)_8 = (2602)_8$

جدول الضرب في النظام الثماني

*	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7
2	2	4	6	10	12	14	16
3	3	6	11	14	17	22	25
4	4	10	14	20	24	30	34
5	5	12	17	24	31	36	43
6	6	14	22	30	36	44	52
7	7	16	25	34	43	52	61

مثال:

أوجد ناتج عملية القسمة التالية:

$(2602)_8 \div (3)_8 = (?)_8$

```
     0 7 2 6
   ----------
 3 | 2 6 0 2
   - 2 5
   -------
       0 1 0
     -   6
     -------
         2 2
     -   2 2
     -------
           0 0
```

الناتج : $(2602)_8 \div (3)_8 = (726)_8$

ويمكن إجراء عملية الضرب أو القسمة بتحويل الأعداد المراد ضربها أو قسمتها إلى مكافئها الثنائي أو العشري، وأجراء العملية المطلوبة، ومن ثم تحويل الناتج إلى مكافئه الثماني

4- النظام الست عشر

إنّ أساس هذا النظام هو العدد 16 و الجدول التالي يبين رموز(أرقام) هذا النظام و الأعداد العشرية التي تكافئها.

النظام الست عشر	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
النظام العشري	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

أ- التحويل من النظام السداسي عشر إلى العشري:

للتحويل من النظام الست عشر إلى العشري نستعمل قانون التمثيل الموضعي للأعداد مع مراعاة أن أساس هذا النظام هو 16.

مثال:

حول العدد $(2AF3)_{16}$ إلى مكافئه العشري

$$N = 3x16^0 + Fx16^1 + Ax16^2 + 2x16^3$$
$$N = 3x16^0 + 15x16^1 + 10x16^2 + 2x16^3$$
$$N = 3 + 240 + 2560 + 4096$$
$$N = 6899$$

الناتج $(2AF3)_{16} = (6899)_{10}$

مثال:

حول العدد $(0.3A)_{16}$ إلى مكافئه العشري

$$N = 3x16^{-1} + Ax16^{-2}$$

$$N = 3x\frac{1}{16} + 10x\frac{1}{256}$$

$$N = 0.1875 + 0.0390625$$

$$N = 0.2265625$$

الناتج: $(0.3A)_{10} = (0.2265625)_{10}$

ب- التحويل من النظام العشري إلى الست عشر:

لتحويل الأعداد الصحيحة الموجبة من النظام العشري إلى الست عشر نستعمل طريقة الباقي و ذلك بالقسمة على الأساس16.

مثال:

حول العدد $(72)_{10}$ إلى مكافئه الست عشر .

	الباقي	ناتج القسمة	
MSD	8	72÷16=4	(1
LSD	4	4÷16=0	(2
	إنهاء القسمة		

الناتج : $(72)_{10} = (48)_{16}$

مثال:

حول العدد $(1256)_{10}$ إلى مكافئه الست عشر .

	الباقي	ناتج القسمة	
MSD	8	1256÷16=78	(1
	14	78 ÷16=4	(2
LSD	4	4÷16=0	(3
	إنهاء القسمة		

الناتج : $(1256)_{10}=(4E8)_{16}$

لتحويل الأعداد العشرية الكسرية :نضرب الكسر في الأساس 16 ، ثم نضرب الناتج في الأساس 16 ، و هكذا حتى نحصل على الدقة اللازمة.

مثال:

حول العدد العشري $(0.12)_{10}$ إلى مكافئه الست عشر، على أن يكون الجواب مكوناً من 4 أرقام؟

	0 .	12	x
		16	
MSD	1	92	x
		16	
	14	72	x
		16	
	11	52	x
		16	
LSD	8	32	

الناتج : $(0.12)_{10}=(0.1EB8)_{16}$

ت- التحويل من النظام الست عشر إلى الثنائي:

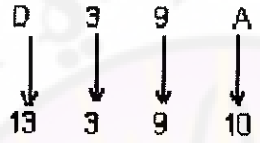
لتحويل أي عدد من النظام الست عشر إلى مكافئه الثنائي نتبع الآتي:

مثال :

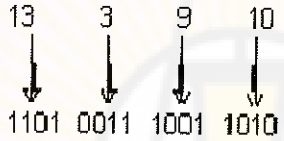
حول العدد الست عشر $(D39A)_{16}$ إلى مكافئه الثنائي .

الحل :

1) نستبدل الخانات المكتوبة بدلالة الحروف إن وجدت في العدد بالأعداد العشرية المكافئة لها.



2) نستبدل كل عدد عشري بمكافئه الثنائي المكون من أربع خانات.



3) نضم الأرقام الثنائية بعضها مع بعض لنحصل على العدد المطلوب:

$$(D39A)_{16} = (1101001110011010)_2$$

ث- التحويل من النظام الثنائي إلى الست عشر:

لتحويل أي عدد صحيح من النظام الثنائي إلى الست عشر نتبع الآتي:

1) نقسم العدد الثنائي إلى مجموعات كل منها يتكون من 4خانات مع مراعاة أن يبدأ التقسيم من الرقم الأقل أهمية.(LSD)

مثال:

العدد الثنائي التالي 1010011011011111001101 يصبح تقسيمه إلى مجموعات كالآتي 1 0100 1101 1011 1100 1101 :

2) إذا كانت المجموعة الأخيرة غير مكتملة فإننا نضيف في نهايتها الصفر حتى تصبح مكونة من أربع خانات:

0001 0100 1101 1011 1100 1101

3) نحول كل مجموعة ثنائية إلى مكافئها في النظام العشري:

0001	0100	1101	1011	1100	1101
1	4	13	11	12	13

4) نستبدل كل رقم عشري(من الخطوة السابقة) أكبر من9 بدلالة حروف النظام الست عشر:

1	4	13	11	12	13
1	4	D	B	C	D

5) نضم الأرقام الناتجة بعضها مع بعض لنحصل على الجواب المطلوب في النظام الست عشر: 14DBCD

6) إذا كان العدد الثنائي كسراً نبدأ بالتقسيم إلى مجموعات من الخانة القريبة على الفاصلة، ثم نتبع باقي الخطوات المشروحة سابقاً.

ج- التحويل من النظام الست عشر إلى الثماني:

لتحويل أي عدد من النظام الست عشر إلى النظام الثماني: نقوم أولاً بتحويله إلى النظام الثنائي كما مر معنا سابقاً، و ذلك باستبدال كل رقم من أرقام العدد الست عشر إلى مكافئه الثنائي المكون من أربع خانات، و بعد ضم الأرقام الثنائية بعضها

إلى بعض نقوم مرة أخرى بتقسيمها إلى مجموعات من ثلاث خانات و نستبدل كل مجموعة برقم ثماني، و بذلك نكون قد حصلنا على العدد الثماني المطلوب.

مثال :

حول العدد الست عشر $(B51.DF2)_{16}$ إلى مكافئه الثماني .

الحل:

1) نقوم بتحويل العدد الست عشر إلى مكافئه الثنائي

B	5	1	.	D	F	2
11	5	1		13	15	2
1011	0101	0001	,	1101	1111	0010

2) نعيد تقسيم العدد الثنائي إلى مجموعات كل منها يتكون من ثلاث خانات ثنائية ثم نكتب العدد الثماني المكافئ لكل مجموعة :

101	101	010	001	.	110	111	110	010
5	5	2	1		6	7	6	2

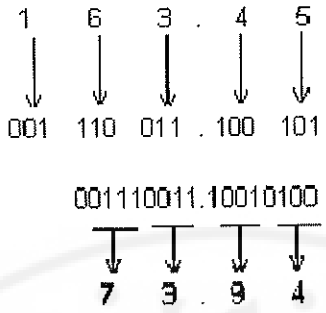
الناتج : $(B51.DF2)_{16} = (5521.6762)_8$

ح- التحويل من النظام الثماني إلى الست عشر:

لتحويل أي عدد ثماني إلى النظام الست عشر: نقوم أولاً بتحويله من الثماني إلى الثنائي، ثم نقسم العدد الثنائي الناتج إلى مجموعات كل منها يتكون من أربع خانات، و نقوم باستبدال كل مجموعة منها بما يكافئها في النظام الست عشر.

مثال :

حول العدد الثماني $(163.45)_8$ إلى مكافئه الست عشر.



الناتج : $(169.45)_9 = (73.94)_{10}$

خ- جمع و طرح الأعداد في النظام الست عشر:

عند جمع وطرح الأعداد في النظام الست عشر نتبع الأسلوب نفسه المستعمل في النظام العشري مع مراعاة أن أساس هذا النظام هو 16.

مثال:

اجمع العددين التاليين . $(6AD)_{16} + (253)_{16} = (?)_{16}$

الحل:

$$\begin{array}{r} 6AD \\ + \quad 253 \\ \hline 900 \end{array}$$

الناتج: $(6AD)_{10} + (253)_{10} = (900)_{10}$

مثال:

اجمع العددين التاليين . $(F6F)_{16} + (ABA)_{16} = (?)_{16}$

الحل:

$$\begin{array}{r} F6F \\ + \quad ABE \\ \hline 1A2D \end{array}$$

88

الناتج: $(F6F)_{16} + (ABA)_{16} = (1A2D)_{16}$

جدول الجمع في نظام الست عشر

*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
2	2	4	6	8	A	C	E	10	12	14	16	18	1A	1C	1E
3	3	6	9	B	F	12	15	18	1B	1E	21	24	27	2A	2D
4	4	8	B	10	14	18	1C	20	24	28	2C	30	34	38	3C
5	5	A	F	14	19	1E	23	28	2D	32	37	3C	41	46	4B
6	6	C	12	18	1E	24	2A	30	36	3C	42	48	4E	54	5A
7	7	E	15	1C	23	2A	31	38	3F	46	4D	54	5B	62	69
8	8	10	18	20	28	30	38	40	48	50	58	60	68	70	78
9	9	12	1B	24	2D	36	3F	48	51	5A	63	6C	75	7E	87
A	A	14	1E	28	32	3C	46	50	5A	64	6E	78	82	8C	96
B	B	16	21	2C	37	42	4D	58	63	6E	79	84	8F	9A	A5
C	C	18	24	30	3C	48	54	60	6C	78	84	90	9C	A8	B4
D	D	1A	27	34	41	4E	5B	68	75	82	8F	9C	A9	B6	C3
E	E	1C	2A	38	46	54	62	70	7E	8C	9A	A8	B6	C4	6E
F	F	1E	2D	3C	4B	5A	69	78	87	96	A5	B4	C3	6E	E1

مثال:

اطرح العددين التاليين . $(AED)_{16} - (826)_{16} = (?)_{16}$

الحل:

$$\begin{array}{r} AED \\ - \quad 826 \\ \hline 2C7 \end{array}$$

الناتج: $(AED)_{16} - (826)_{16} = (2C7)_{16}$

مثال:

اطرح العددين التاليين . $(88E)_{16} - (70F)_{16} = (?)_{16}$

الحل:

$$\begin{array}{r} 8BE \\ - \quad 7DF \\ \hline 0DF \end{array}$$

الناتج: $(88E)_{16} - (7DF)_{16} = (DF)_{16}$

د- ضرب وقسمة الأعداد في النظام الست عشر :

يمكن تلخيص حقائق الضرب في الجدول بضرب الأعداد في النظام الست عشر

مثال:

أوجد حاصل الضرب .

الحل:

$$(A14)_{16} \times (5)_{16} = (?)_{16}$$

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1} \\ A14 \\ \times \quad 5 \\ \hline 3264 \end{array}$$

الناتج : $(A14)_{16} \times (5)_{16} = (3264)_{16}$

Damascus University

جدول الضرب في نظام الست عشر

*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
2	2	4	6	8	A	C	E	10	12	14	16	18	1A	1C	1E
3	3	6	9	B	F	12	15	18	1B	1E	21	24	27	2A	2D
4	4	8	B	10	14	18	1C	20	24	28	2C	30	34	38	3C
5	5	A	F	14	19	1E	23	28	2D	32	37	3C	41	46	4B
6	6	C	12	18	1E	24	2A	30	36	3C	42	48	4E	54	5A
7	7	E	15	1C	23	2A	31	38	3F	46	4D	54	5B	62	69
8	8	10	18	20	28	30	38	40	48	50	58	60	68	70	78
9	9	12	1B	24	2D	36	3F	48	51	5A	63	6C	75	7E	87
A	A	14	1E	28	32	3C	46	50	5A	64	6E	78	82	8C	96
B	B	16	21	2C	37	42	4D	58	63	6E	79	84	8F	9A	A5
C	C	18	24	30	3C	48	54	60	6C	78	84	90	9C	A8	B4
D	D	1A	27	34	41	4E	5B	68	75	82	8F	9C	A9	B6	C3
E	E	1C	2A	38	46	54	62	70	7E	8C	9A	A8	B6	C4	6E
F	F	1E	2D	3C	4B	5A	69	78	87	96	A5	B4	C3	6E	E1

مثال:

أوجد ناتج عملية القسمة التالية:

$(3264)_{16} \div (5)_{16} = (?)_{16}$

```
   0A14
 5|3264
  -32
   006
   - 5
     14
   - 14
     00
```

الناتج : $(3264)_{16} \div (5)_{16} = (A14)_{16}$

ملاحظة :

يمكن إجراء عملية الضرب أو القسمة بتحويل الأعداد المراد ضربها أو قسمتها إلى مكافئها الثنائي أو العشري وإجراء العملية المطلوبة، ومن ثم تحويل الناتج إلى مكافئه الست عشر.

5-تمثيل الأعداد السالبة

في العمليات الرياضية العادية يسمى العدد سالباً إذا سبقته إشارة الناقص(−)، و يسمى موجباً إذا سبقته إشارة الزائد(+) أما في الحاسوب فتستعمل ثلاث طرق لتمثيل الأعداد السالبة وهي :

1) بوساطة الإشارة و المقدار Representation Signed-Magnitude
2) التمثيل بوساطة العدد المكمل للأساس
Representation Radixed-Complement.
3) التمثيل بوساطة العدد المكمل للأساس المصغر
Representation Diminished Radix Complement

أولاً :التمثيل بوساطة الإشارة و المقدار:

لتمثيل الأعداد الثنائية داخل الحاسوب اصطلح على استعمال الرقم "0"ليدل على الإشارة الموجبة و الرقم "1"ليدل على الإشارة السالبة. و يتكون العدد الممثل بهذه الطريقة من جزئين هما: الإشارة و المقدار.

مثال :

مثل العددين **+24 , -24** في كل من النظامين العشري و الثنائي بوساطة طريقة التمثيل بالإشارة و المقدار.

الحل:

في النظام العشري		في النظام الثنائي	
المقدار	الاشارة	المقدار	الاشازة
24	+	11000	0
24	-	11000	1

و عند التعامل مع الأعداد الثنائية الممثلة بالإشارة و المقدار توضع عادة فاصلة بين خانة الإشارة و المقدار ويمكن كذلك وضع خط صغير تحت خانة الإشارة، أو يمكن استعمال الفاصلة و الخط الصغير معاً.

ثانياً: التمثيل بوساطة المكمل للأساس

Radixes-Complement Representation

نفترض وجود العدد N ممثلاً بنظام عد أساسه R، ونفترض كذلك أن هذا العدد يتكون من n خانة صحيحة و m خانة كسرية، و سنرمز لمكمل العدد N بـ $\bar{N}$ حيث يمكن حساب $\bar{N}$ حسب العلاقة التالية (1) ..... $\bar{N} = R^n - N$

ويسمى العدد $\bar{N}$ في النظام العشري "بالمكمل لعشرة"(10's Complement)

و في النظام الثنائي "بالمكمل لاثنين.(2's Complement)"

مثال:

جد المكمل لعشرة للعدد 320.52:

الحل :

$$\bar{N} = R^n - N$$
$$= 10^3 - 320.52$$
$$= 1000 - 320.52$$
$$\bar{N} = 679.48$$

مثال:

جد المكمل لاثنين للعدد الثنائي **101.1**:

الحل:

$$\bar{N} = 2^{3} - 101.1$$
$$= 1000 - 101.1$$
$$= 10.1$$

ثالثاً: التمثيل بوساطة المكمل "للأساس الأصغر

Diminished Radix Complement Representation

يسمى أساس نظام العد مصغراً إذا كان ينقص بمقدار واحد عن الأساس الأصلي. فمثلاً الأساس المصغر للنظام الثنائي هو 1 و كذلك الأساس المصغر للنظام العشري هو9. و يرمز للمكمل للأساس المصغر بالرمز $\bar{\bar{N}}$ بحسب العلاقة التالية:

$$\bar{\bar{N}} = R^{n} - N - R^{-m} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

حيث إن:

R:أساس نظام العد.

N:العدد المطلوب إيجاد مكمله للأساس المصغر.

n:عدد خانات الجزء الصحيح.

m:عدد خانات الجزء الكسري.

يسمى المكمل للأساس المصغر في النظام العشري "بالمكمل لتسعة" 9's Complement) ويسمى في النظام الثنائي "بالمكمل لواحد"(1's Complement).

مثال:

أوجد المكمل لتسعة للعدد320.52:

الحل:

$$\overline{\overline{N}} = 10^{3} - 320.52 - 10^{-2}$$
$$\overline{\overline{N}} = 1000 - 320.52 - 0.01$$
$$\overline{\overline{N}} = 679.47$$

مثال:

أوجد المكمل لواحد للعدد الثنائي 101.1:

الحل:

$$\overline{\overline{N}} = 2^{3} - 101.1 - 2^{-2}$$
$$\overline{\overline{N}} = 1000 - 101.1 - 0.1$$
$$\overline{\overline{N}} = 10.0$$

المكمل لواحد 1's Complement:

بالإضافة إلى الطريقة المشروحة فيما سبق فإنه من الأسهل اتباع القاعدة التالية للحصول على المكمل لواحد لأي عدد ثنائي سالب:(للحصول على المكمل لواحد لأي عدد ثنائي إنه يلزم أن نعكس خانات ذلك العدد بحيث نستبدل الواحد بالصفر والصفر بالواحد).

مثال

أوجد المكمل لواحد للعدد الثنائي$_{10}$ 100.10:

الحل :

نعكس خانات العدد باستبدال الصفر بالواحد و الواحد بالصفر

الجواب هو 011.01

المكمل لاثنين 2's Complement:

كذلك لإيجاد المكمل لاثنين لأي عدد ثنائي سالب يمكن اتباع القاعدة التالية:

[المكمل لاثنين=المكمل لواحد+1]

أي أننا نقوم أولاً باستخراج المكمل لواحد، ثم نضيف إليه العدد 1.

مثال

أوجد المكمل لاثنين للعدد 100.1C:

الحل :

المكمل لواحد هو011.01

$$\begin{array}{r} 011.01 \\ + \quad\quad 1 \\ \hline 011.10 \end{array}$$

المكمل لاثنين هو 011.1C

يمكن التأكد من الجواب لو طبقنا العلاقة الرياضية (1) المشروحة فيما سبق.

أ- جمع وطرح الأعداد الثنائية باستعمال المكمل لواحد

Binary Addition and Subtraction using 1's complement

عند جمع وطرح الأعداد الثنائية باستخدام المكمل لواحد نقوم في البداية بتحويل العدد السالب إلى صيغة المكمل لواحد، ثم نجمع المكمل لواحد مع العدد الآخر الموجب و بذلك نكون قد حولنا عملية الطرح إلى جمع حسب القاعدة X+ (-Y). و من الملاحظ هنا أن خانة الإشارة تشترك في عملية الجمع و قيمتها النهائية تقرر إشارة العدد الناتج، فإذا كانت خانة الإشارة للناتج صفراً فإن الناتج يكون موجباً وممثلاً بطريقة الإشارة و المقدار. أما إذا كانت خانة الإشارة واحداً فإن الناتج يكون

سالباً وممثلاً بوساطة المكمل لواحد. و لإيجاد القيمة الحقيقية للناتج يمكن تحويله مرة أخرى إلى المكمل لواحد.

لو افترضنا أن العددين المطلوب جمعهما أو طرحهما هما X,Y فإنه يمكن الحصول على الحالات التالية لاحتمالات الجمع والطرح وهذه الحالات هي:

الحالة الأولى: إذا كان X موجبة، و Y موجبة:

في هذه الحالة لا توجد عملية طرح، بل نقوم بجمع العددين معاً كما هو الحال في الأعداد الموجبة الممثلة بالإشارة و المقدار. و يجب أن نلاحظ أنه قد تظهر حالة الفيض(Overflow) عند الجمع؛ و لهذا السبب يجب إضافة خانة الصفر إلى يسار كل عدد لاستيعاب حالة الفيض.(الخانة المضافة يجب أن تكون في نهاية المقدار على يمين خانة الإشارة).

مثال:

اجمع العددين X= +12 Y= +9 :

الحل :

+12	0.01100
+ 9	0.01001
+21	0.10101

الحالة الثانية: إذا كانت Xموجبة، Y سالبة:

إذا كانت |Y|>|X|

مثال:

اجمع العددين X= +12, Y= -9

الحل:

X= +1100 Y= -1001

المكمل لواحد للعدد**1001-** هو1.0110 الآن نجمع العددين معاً:

+12	0.1100	
-9	1.0110	
+3	0.0010	محمل مدور 1
	0.0011	

نلاحظ أنه أثناء الجمع حدث محمل (Carry) في خانة الإشارة، و يسمى هذا المحمل بالمحمل المدور(End Around Carry) حيث تلزم إعادة جمعه مع الخانة الأولى في النتيجة. الجواب الناتج إشارته موجبة ويكون ممثلاً بالإشارة و المقدار أي أنه يساوي هنا **(+3)**.

مثال:

اجمع العددين: Y= -12, X=+9 :

الحل : Y= -1100 X=+1001

المكمل لواحد للعدد 1100-هو 10011

+9	0.1001
-12	1.0011
-3	1.1011

نلاحظ أن الإشارة الناتجة سالبة و في هذه الحالة تكون النتيجة ممثلة بوساطة المكمل لواحد. ولإيجاد النتيجة الصحيحة نقوم بتحويل النتيجة إلى المكمل لواحد مرة أخرى. أي أن الجواب يساوي(-3).

الحالة الثالثة: إذا كانتXسالبة، و Yموجبة.

إذا كانت |Y|<|X|

مثال:

X=-12 -1100

Y=+9 +1001

نحول العدد السالب إلى المكمل لواحد ثم نجمع العددين.

المكمل لواحد للعدد 12-هو10011

- 12	**1.0011**
+ 9	0.1001
- 3	**1.1100**

إشارة النتيجة هنا سالبة و النتيجة ممثلة بوساطة المكمل لواحد. و لذلك نحولها مرة أخرى إلى المكمل لواحد. الجواب هو(0011-)و يساوي**(-3)**.

مثال:

X=-9	-1001
Y=+12	+1100

المكمل للعدد هو1.0110

- 9	1.0110
+12	0.1100
	1 0.0010
+ 3	← 1
	0.0011

النتيجة موجبة و ممثلة بطريقة الإشارة و المقدار، أي أن الجواب هنا و يساوي .

الحالة الرابعة: إذا كانتXسالبة، و Yسالبة.

في هذه الحالة نحول كلاً منهما إلى المكمل لواحد ثم نجمعهما.

مثال:

X=-9	-1001
Y=-12	-1100

في هذه الحالة و بسبب كون إشارتي العددين متشابهتين فإنه أثناء الجمع تنتج حالة

فيض، و من أجل استيعاب النتيجة و قبل أن نقوم بتحويل العددين إلى صيغة المكمل لواحد نضيف إلى يسار كل عدد خانة الصفر فيصبح كل منهما كما يلي:

-0 1001 -9

-0 1100 -12

المكمل لواحد للعدد **-01001** هو 1.10110

المكمل لواحد للعدد **-01100** هو 1.10011

و الآن نقوم بالجمع:

1.10110	**- 9**
1.10011	**- 12**
[1] 1.01001	- 21
1 ←——	
1.01010	

إشارة النتيجة سالبة و يلزم تحويل النتيجة إلى المكمل لواحد فيكون الجواب (10101-) أي(21-).

نلاحظ من خلال الحالات التي تكلمنا عنها و من خلال الأمثلة المحلولة أن المكمل لواحد لا يحقق المعادلة الرياضية 0=(-n)+(+n). فعلى سبيل المثال لو كانت Y=-5, X=+5.

فإنه عند جمعهما باستعمال المكمل لواحد ينتج:

0.101	**+ 5**
1.010	- 5
1.111	**0**

يلاحظ هنا أن جمع عددين متساويين في المقدار و مختلفين في الإشارة لا يعطي مباشرة الصفر بل يلزم تحويل النتيجة إلى المكمل لواحد، و يلاحظ كذلك أن إشارة الجواب سالبة أي(0-).

ب- جمع و طرح الأعداد الثنائية باستعمال المكمل لاثنين

Binary Addition and Subtraction Using 2's Complement

من مساوئ استخدام المكمل لواحد أنه عادةً إذا ظهر محمل مدور (End Around Carry) فإنه يجب جمعه مع الخانة الأولى للنتيجة، و هذه الخطوة تعتبر خطوة زائدة من شأنها أن تجعل عملية الطرح أو الجمع بطيئة. و للتخلص من المحمل المدور هذا تستعمل في الحاسوب طريقة تمثيل الأعداد السالبة بوساطة المكمل لاثنين. و لجمع و طرح الأعداد بوساطة المكمل لاثنين نتبع الأسلوب التالي:

نقوم بتمثيل العدد السالب بوساطة المكمل لاثنين ثم نجمعه مع العدد الآخر و إذا حدث محمل في خانة الإشارة فإنه يهمل و لا تلزم إضافته إلى النتيجة. و لتوضيح فكرة استعمال المكمل لاثنين نورد الحالات التالية للعددين الثنائيينY, X:

الحالة الأولى: إذا كانت X موجبة، و Yسالبة.

نقوم في هذه الحالة بجمع الأعداد مباشرة و لا يلزم التحويل إلى المكمل لاثنين، و هذه الحالة تشبه الحالة الأولى التي ذكرناها في موضوع جمع و طرح الأعداد الثنائية باستعمال المكمل لواحد.

الحالة الثانية: إذا كانتX موجبة، و Yسالبة.

إذا كانت |Y|<|X|

في هذه الحالة نحول العدد السالب إلى المكمل لاثنين ثم نجمعه مع العدد الموجب، و إذا نتج محمل في خانة الإشارة نهمله.

مثال:

X=+12 +1100

Y=-9 -1001

المكمل لاثنين للعدد 9-هو -----

+12	0.1100
- 9	1.0111
+ 3	>< 0.0011

النتيجة موجبة و هي (+0011)و تساوي (+3)

مثال:

X=+9 +1001

Y=-12 1100

المكمل لاثنين للعدد 12-هو 10100

+ 9	0.1001
- 12	1.0100
- 3	1.1101

إشارة النتيجة سالبة و هي بدلالة المكمل لاثنين، و للحصول على النتيجة الصحيحة يجب تحويلها مرة أخرى إلى المكمل لاثنين. أي أن النتيجة الصحيحة هي (-0011)أي (-3).

الحالة الثالثة: إذا كانت X سالبة، و Y موجبة

و هذه الحالة تشبه الحالة السابقة.

الحالة الرابعة: إذا كانتX سالبة، Y سالبة

في هذه الحالة نحول كلاً من العددين إلى المكمل لاثنين ثم نجمعهما.

مثال:

X=-9 -1001

Y=-12 -1100

نضيف خانة خامسة قيمتها الصفر إلى كل من العددين، و ذلك لاستيعاب حالة الفيض.

-9= -01001

-12= -01100

ثم نحول كل عدد إلى المكمل لاثنين:

المكمل لاثنين للعدد 9- هو 1.10111

المكمل لاثنين للعدد 12- هو 1.10100

- 9	1.10111
-12	1.10100
-21	1.01011

إشارة النتيجة سالبة و لذلك نحول النتيجة إلى المكمل لاثنين.

أي أن النتيجة الصحيحة هي (10101-)و تساوي **(21-)**.

ت- طرق ضرب الأعداد الثنائية

Methods of Binary Multiplication

يمكن إجراء عملية الضرب في النظام الثنائي على الأعداد الممثلة بالإشارة والمقدار، و كذلك الأعداد الممثلة بوساطة المكمل لواحد أو المكمل لاثنين. و لكن تعتبر طريقة الضرب باستخدام الأعداد الممثلة بالإشارة و المقدار الطريقة المثلى في حالتي الضرب والقسمة، و ذلك لأن الإشارة السالبة يمكن التعامل معها بسهولة، حيث إن ضرب أي عددين مختلفين في الإشارة يعطي نتيجة سالبة الإشارة و كذلك قسمة عددين متشابهين في الإشارة تعطي أيضاً نتيجة موجبة الإشارة. وطرق الضرب المستعملة في الحاسوب كثيرة و تختلف فيما بينها من حيث سرعة تنفيذها داخل الحاسوب. و للتبسيط سنقوم هنا بشرح الطريقة المعروفة " بطريقة الضرب بوساطة الجمع المتتالي و الإزاحة".

الضرب بوساطة الجمع المتتالي و الإزاحة

Multiplication by Successive Addition & Shifting

سنستعرض في البداية الطريقة العادية المتبعة لتنفيذ عملية الضرب باستعمال القلم و الورقة من خلال المثال التالي:

مثال:

اضرب العددين الثنائيين: Y=1001, X=1011

الحل:

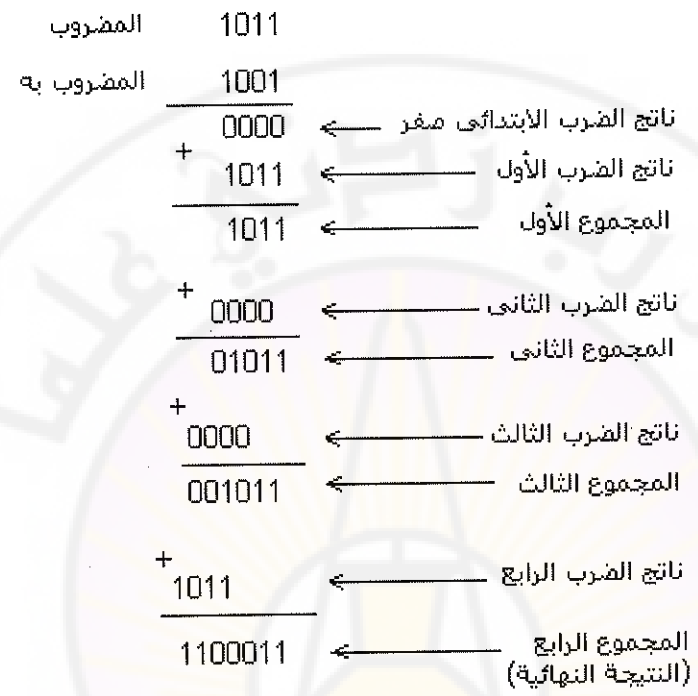
```
      1011
   x
      1001
  ------
      1011   <-- ناتج الضرب الأول
     0000    <-- ناتج الضرب الثانى ( إزاحة لليسار خانة واحدة )
    0000     <-- ناتج الضرب الثالث (إزاحة لليسار خانتين )
   1011      <-- ناتج الضرب الأخير ( إزاحة لليسار ثلاث خانات )
  ---------
  1100011    النتيجة النهائية
```

إنّ طريقة (خوارزمية) عملية الضرب المستعملة في هذا المثال هي أنّنا ضربنا الخانة الأولى من المضروب به في المضروب، ثم جمعنا إلى الناتج حاصل ضرب الخانة الثانية من المضروب به في المضروب و هكذا.

و يمكن توضيح طريقة الضرب هذه من خلال المثال التالي:

```
المضروب (Multiplicand)      1011
المضروب به (Multiplier)      1001
                            ------
                    1011    <-- ناتج الضرب الأول
                +   0000    <-- ناتج الضرب الثانى
                            ------
                   01011    <-- مجموع الضرب الأول و الثانى
                +  0000     <-- ناتج الضرب الثالث
                            ------
                  001011    <-- مجموع ناتج الضرب الثالث
                            مع المجموع السابق
                +
                    1011    <-- ناتج الضرب الرابع
                            ------
                 1100011    <-- مجموع ناتج الضرب الرابع
                            مع المجموع السابق
                            (المجموع النهائى)
```

أما داخل الحاسوب فتستعمل الطريقة المعدلة التالية، و هي أن نعتبر أن ناتج الضرب الابتدائي يساوي صفراً ثم نجمع إليه حاصل الضرب الأول و هكذا:



و كما نلاحظ، لا تختلف هذه الطريقة عن سابقتها سوى في إضافة ناتج ضرب ابتدائي يساوي صفراً، و تتضح من مثال هذه الطريقة فكرة الجمع المتتالي لناتج الضرب مع المجموع السابق.

ث- طرق قسمة الأعداد الثنائية Binary Division:

بينما تعتبر عملية الضرب سلسلة من عمليات الجمع المتتالي و الإزاحة، فإن عملية القسمة تعتبر سلسلة من عمليات الطرح المتتالي و الإزاحة. و طرق تنفيذ عملية القسمة داخل الحاسوب متنوعة وكثيرة أيضاً، و سنتكلم هنا على أبسط هذه الطرق، و هي طريقة القسمة باستعمال الطرح المتتالي، وهي

طريقة شبيهة بطريقة القسمة باستعمال الورقة والقلم، و تطبق عادةً على الأعداد الممثلة بالإشارة و المقدار، و في حالة كون إشارتي المقسوم و المقسوم عليه مختلفتين تكون إشارة الناتج سالبة.

و المثال التالي يوضح هذه الطريقة:

مثال :

اقسم العدد 10110 على **111** .

الحل :

```
      00011.001001
   ---------------
111| 10110
     111
   -----
      1000
       111
   -------
      001000
       111
   -------
      001000
       111
   -------
         001
```

الناتج: 11.001001

6-تمثيل الأعداد بوساطة النقطة العائمة

Representation of Numbers by Floating Point

إنّ أي عدد عشري صحيح مثل 125يمكن كتابته على النحو التالي:

$$125 = .125 \times 10^{3} = 1.25 \times 10^{2} = 12.5 \times 10^{1}$$

و إذا رمزنا للأساس10 بالرمز E فإن العدد السابق يصبح كما يلي:

$$125 = .125E3 = 1.25E2 = 12.5E1$$

أما إذا كان العدد كسرياً مثل**.00127**، فيمكن كتابته على النحو التالي:

$$.00127 = 12.7 \times 10^{-4} = 1.27 \times 10^{-3} = .0127 \times 10^{-1}$$

و إذا استبدلنا الأساس10 بالرمز E فإن تمثيل العدد يصبح كالآتي:

.00127=12.7E-4=1.27E-3=.127E-2=.0127E-1

يلاحظ مما سبق أن موقع النقطة داخل العدد عائم (غير ثابت) و يعتمد على الأس المرفوع له أساس نظام العد؛ و يمكن اعتبار أي عدد ممثل بوساطة النقطة العائمة منسجماً مع الشكل العام التالي:

$$\pm M \times E^{\pm P}$$

M الجزء الكسري من العدد (Mantissa or Fraction).

E أساس نظام العد.

P الأس (القوة) (Exponent or Characteristic).

يشترط في العدد الممثل بوساطة النقطة العائمة ألاّ يكتب على شكل عدد صحيح وألاّ يكون أول رقم فيه على يمين النقطة صفراً.

و يسمى هذا الشكل الموصوف بهذه الشروط بالشكل المعياري للعدد الممثل بالنقطة العائمة. و مثال ذلك العدد الثنائي110.110 يمثل بالشكل المعياري بوساطة النقطة العائمة كما يلي:

$$.110110 \times 2^{3}$$

و عادة يكتب الشكل العام للعدد الممثل بالنقطة العائمة ضمن الكلمة(Word) داخل الحاسوب، و يخصص لكل جزء من أجزاء الكلمة عدد معين من الخانات بما في ذلك الجزء الخاص بالإشارة، و ذلك بحسب طول الكلمة المستعملة في الحاسوب.

إشارة العدد Sign	الجزء الكسري Mantissa	إشارة الأس Exponent Sign	الأس Exponent

إنّ الشكل العام لهذه الكلمة يمكن أن يختلف من حاسوب إلى آخر و خاصة فيما يتعلق بترتيب أجزاء الكلمة.


وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الفصل الرابع
النسبة والتناسب

1-مقدمة

تعريف: التناسب هو مساواة بين نسبتين.

إذا كانت e,d,c,b عبارات جبرية حيث $(e.c \neq 0)$

فالعلاقة: $\frac{d}{e}=\frac{b}{c}$ تسمى تناسباً. ويكتب أيضاً بالشكل: $e:d=c:b$

من جدول التناسب الآتي:

x	4	-8	12	16
y	2	-4	6	8

نجد:

$$2=\frac{16}{8}=\frac{12}{6}=\frac{-8}{-4}=\frac{4}{2} \qquad (1)$$

ونلاحظ أن:

$$2=\frac{24}{12}=\frac{16+12+(-8)+4}{8+6+(-4)+2} \qquad (2)$$

من (1) و (2) نجد أن:

$$2=\frac{16+12+(-8)+4}{8+6+(-4)+2}=\frac{16}{8}=\frac{12}{6}=\frac{-8}{-4}=\frac{4}{2}$$

2-خاصة أساسية

إذا كان: $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = ... = \frac{x_n}{y_n} = m$

حيث إن $y_1, y_2, ..., y_n$ كل منها غير معدوم

فإن: $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = ... = \frac{x_n}{y_n} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{y_1 + y_2 + ... + y_n} = m$

حيث إن $y_1, y_2, ..., y_n \neq 0$

3-الرابع المتناسب

مثال:

أوجد قيمة x في: $\frac{3}{5} = \frac{6}{x}$.

الحل:

$$x = \frac{5 \times 6}{3} = 10$$

إن العدد 10 هو الرابع المتناسب للأعداد 3 , 5 , 6

4-الوسط المتناسب:

مثال:

أوجد قيمة x في $\frac{x}{4} = \frac{9}{x}$

الحل:

$x^2 = 4 \times 9 = 36$ ومنه: $x = 6$ أو $x = -6$

يسمى x الوسط المتناسب للعددين 4 , 9

إذا كان: $\frac{c}{x}=\frac{x}{b}$ يسمى x الوسط المتناسب للعددين c,b ويكون: $x^2=cb$

وبالتالي $x=\sqrt{cb}$ أو $x=-\sqrt{cb}$ بشرط $c.b>0$

مثال:

1) أوجد الرابع المتناسب للأعداد 2,4,-3 على الترتيب.

2) أوجد الوسط المتناسب للعددين: 18,8.

5-خواص التناسب

1) في كل تناسب إذا بدلنا الطرفين نحصل على تناسب جديد، أي أنه إذا كان:

$\frac{d}{e}=\frac{b}{c}$ تناسباً فإن $\frac{d}{b}=\frac{e}{c}$ تناسب جديد.

البرهان:

إذا كان: $\frac{d}{e}=\frac{b}{c}$ فإن $be=cd$ نقسم الطرفين على bc :حيث:

$$b\neq 0 \text{ و } c\neq 0$$

فنجد أن: $\frac{dc}{cb}=\frac{eb}{cb}$ ومنه $\frac{d}{b}=\frac{e}{c}$

مثال:

في التناسب $\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$ نجد: $\frac{9}{3}=\frac{12}{4}$

مثال:

أكمل: $\frac{14}{18}=\frac{7}{9}$ نجد أن: $\frac{18}{9}=$ ——

2) في كل تناسب إذا بدلنا الوسطين نحصل على تناسب جديد، أي أنه إذا كان: $\frac{d}{e}=\frac{b}{c}$ تناسب فإن: $\frac{c}{e}=\frac{b}{d}$ تناسب جديد.

البرهان:

$\frac{d}{e}=\frac{b}{c}$ فإن: $dc=eb$ نقسم الطرفين على $ed\neq 0$ فنحصل على $\frac{dc}{ed}=\frac{eb}{ec}$ وبالتالي: $\frac{c}{e}=\frac{b}{d}$.

مثال:

في التناسب: $\frac{6}{5}=\frac{18}{15}$ فإن: $\frac{5}{15}=\frac{6}{18}$.

3) في كل تناسب إذا بدلنا بين البسط والمقام في كل نسبة منه نحصل على تناسب جديد.

أي أنه إذا كان: $\frac{d}{e}=\frac{b}{c}$ تناسب فإن: $\frac{e}{d}=\frac{c}{b}$ تناسب جديد.

البرهان:

$\frac{d}{e}=\frac{b}{c}$ فإن: $\frac{\frac{1}{d}}{\frac{1}{e}}=\frac{\frac{1}{b}}{\frac{1}{c}}$ وبالتالي: $\frac{e}{d}=\frac{c}{b}$.

مثال:

في التناسب: $\frac{7}{4}=\frac{21}{12}$ يكون: $\frac{4}{7}=\frac{12}{21}$.

4) في كل تناسب إذا ثبتنا المقامين وأضفنا كل مقام إلى البسط الموافق له نحصل على تناسب جديد.

أي أنه إذا كان: $\frac{d}{e}=\frac{b}{c}$ تناسباً فإن: $\frac{e+d}{e}=\frac{c+b}{c}$ تناسب جديد.

البرهان:

في التناسب: $\frac{d}{e}=\frac{b}{c}$ نجد أن: $1+\frac{d}{e}=1+\frac{b}{c}$ ومنه: $\frac{e+d}{e}=\frac{c+b}{c}$

مثال:

أوجد عددين مجموعهما 60 ونسبة الأكبر إلى الأصغر $\frac{8}{7}$.

الحل:

نفرض أن العدد الأكبر x والعدد الأصغر y.

فيكون: $x+y=60$

وبحسب الخاصة (4) نجد أن: $\frac{8}{7}=\frac{x}{y}$ $\frac{7+8}{7}=\frac{y+x}{y}$

$\frac{y+x}{y}=\frac{15}{7}$ ومنه $\frac{15}{7}=\frac{60}{y}$ ومنه: $28=\frac{7\times 60}{15}$ ولكن $x=60-28=32$

فالعددان هما 32,28.

مثال:

1) أوجد عددين حقيقيين مجموعهما 300 ونسبة الأكبر إلى الأصغر $\frac{7}{5}$.

2) أوجد عددين حقيقيين مجموعهما (−4) ونسبتهما $\frac{-3}{2}$.

5) في أي تناسب إذا ثبتنا المقامين وطرحنا كل مقام من البسط الموافق له نحصل على تناسب جديد.

أي أنه إذا كان: $\frac{d}{e}=\frac{b}{c}$ تناسباً فإن: $\frac{d-e}{e}=\frac{b-c}{c}$ تناسب جديد.

البرهان:

$\frac{d}{e}=\frac{b}{c}$ فإن: $1-\frac{d}{e}=1-\frac{b}{c}$ ومنه: $\frac{d-e}{e}=\frac{b-c}{c}$

مثال:

أوجد عددين موجبين فرقهما 144 ونسبتهما $\frac{35}{17}$.

الحل:

نفرض أن العدد الكبير (x) والعدد الصغير (y) فيكون: $x-y=144$.

$\frac{x}{y}=\frac{35}{17}$ وبالتالي: $\frac{35-17}{17}=\frac{x-y}{y}$

$\frac{144}{y}=\frac{18}{17}$ ومنه $y=\frac{17\times144}{18}$ ومنه: $y=136$. فتكون: $x=144+y$

وبالتالي: $x=144+136$ ومنه: $x=280$ ، فالعددان هما 136,280.

مثال:

أوجد عددين موجبين فرقهما 15 ونسبتهما $\frac{7}{4}$

6) في أي تناسب إذا ثبتنا البسطين وأضفنا كل بسط إلى المقام الموافق له نحصل على تناسب جديد.

أي أنه إذا كان: $\frac{d}{e}=\frac{b}{c}$ تناسب فإن: $\frac{d}{e+d}=\frac{b}{b+cc}$ تناسب جديد.

البرهان:

$\frac{d}{e}=\frac{b}{c}$ فإن: $\frac{e}{d}=\frac{c}{b}$ بحسب الخاصة (3)

ومنه: $\frac{e+d}{e}=\frac{c+b}{b}$ بحسب الخاصة (4)

ومنه: $\frac{d}{e+d}=\frac{b}{b+c}$ بحسب الخاصة (3)

مثال:

نسبة الدقيق الأبيض إلى الدقيق الأسمر في خلطة دقيق هي $\frac{4}{3}$ كم تكون كمية كل من الدقيق الأبيض والدقيق الأسمر في 945 kg من هذا الخليط.

الحل:

نفرض أن كمية الدقيق الأبيض x وكمية الدقيق الأسمر y .

$$\frac{4}{3}=\frac{x}{y}$$

$$\frac{4}{3+4}=\frac{x}{y+x}$$

$\frac{4}{7}=\frac{x}{y+x}$ لكن $x+y=945$.

ومنه: $\frac{4}{7}=\frac{x}{945}$ $x=\frac{4\times 945}{7}=135\times 4=540\,kg$.

ومنه: $\frac{4}{3}=\frac{540}{y}$ $y=\frac{3\times 540}{4}=405\ kg$.

أو (طريقة ثانية لحساب y)

$$y=945-x=945-540=405\ kg$$

مثال:

في إحدى شعب الصف التاسع الأساسي نسبة عدد البنات إلى عدد البنين تساوي $\frac{5}{7}$، فإذا علمت أن عدد طلاب هذه الشعبة 36 فكم عدد البنات وكم عدد البنين؟

7) في أي تناسب إذا ثبتنا البسطين وطرحنا كل بسط من المقام الموافق له نتج تناسب جديد.

أي أنه إذا كان: $\frac{d}{c}=\frac{a}{b}$ فإن: $\frac{d}{c-d}=\frac{a}{b-a}$ تناسب جديد.

البرهان:

$\frac{d}{c}=\frac{a}{b}$ فإن: $\frac{c}{d}=\frac{b}{a}$ بحسب الخاصة (3)

ومنه: $\frac{c-d}{d}=\frac{b-a}{a}$ بحسب الخاصة (5)

وبالتالي: $\frac{d}{c-d}=\frac{a}{b-a}$ بحسب الخاصة (3)

مثال:

أوجد عددين فرقهما 9 ونسبتهما $\frac{2}{5}$

الحل:

نفرض أن الأول x ونفرض الثاني y فيكون $\frac{2}{5}=\frac{x}{y}$

لكن: $y-x=9$ $\frac{2}{5-2}=\frac{x}{y-x}$

ومنه: $\frac{x}{9}=\frac{2}{3}$ ومنه $x=9\times\frac{2}{3}=6$ $y=6+9=15$

مثال:

الفرق بين عمر أنس وعمر سامر 6 سنوات فإذا علمت أن نسبة عمريهما تساوي $\frac{22}{25}$ فأوجد عمر كل منهما.

مثال:

ليكن التناسب $\frac{x}{y}=\frac{a}{b}$ برهن أن $\frac{a}{b}=\frac{5x-3a}{5y-3b}$

الحل:

$$\frac{x}{y}=\frac{a}{b}=\frac{5x}{5y}=\frac{-3a}{-3b}=\frac{5x-3a}{5y-3b}$$

Damascus University

تمرينات ومسائل

1. أوجد الرابع المتناسب في كل من الحالتين:

   أ- 17 ، 3 ، 34

   ب- 8 ، 7 ، $24\sqrt{2}$

2. أوجد الوسيط المتناسب في كل من الحالتين:

   أ- 16، 75

   ب- $-\frac{1}{4}$ ، $-\frac{81}{49}$

3. إذا كان: $\frac{x}{y}=\frac{a}{b}$ فأثبت أن: $\frac{3x+2a}{3y+2b}=\frac{4x-7a}{4y-7b}$

4. أوجد ثلاثة أعداد مجموعها 49 وتتناسب طرداً مع الأعداد 5 ، 4 ، 2-

5. ما العدد الذي يجب إضافته إلى كل من حدي النسبة $\frac{58}{47}$ لتحصل على نسبة تساوي $\frac{5}{4}$.

6. وزّع رجل مبلغ 51200 ل.س بين أولاده على أن تتناسب حصصهم طرداً مع أعمارهم، وهي على التتالي (12 ، 14 ، 17 ، 21) سنة فكم حصة كل منهم.

7. أسهم ثلاثة أخوة في شراء آلة حاسبة مما وفروه من مصروفهم، فدفعوا مبالغ تتناسب مع السنة الدراسية التي ينتسب إليها كل منهم فإذا كانت قيمة الآلة الحاسبة 800 ل.س وكانوا في السنوات الدراسية (الرابع ، الخامس ، السابع) فكم دفع كل منهم.

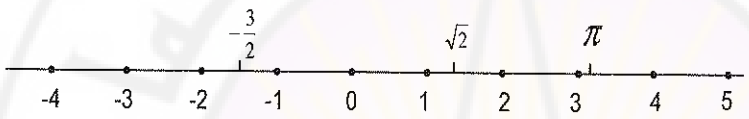
الفصل الخامس

تمثيل الأعداد ومجموعات الأعداد

1-مجموعة الأعداد الحقيقية

نسمي مجموعة الأعداد التي نستخدمها مجموعة الأعداد الحقيقية ونرمز إليها بالرمز $\Re$.

تُمثل مجموعة الأعداد الحقيقية بمستقيم مُدرّج. فكل عدد حقيقي يمثل بنقطة من هذا المستقيم، وكل نقطة من هذا المستقيم تمثل عدداً حقيقياً.



2-أعداد حقيقية مميزة

الأعداد الطبيعة:

$0,1,2,3,4,\ldots$. نرمز إلى مجموعة الأعداد الطبيعية بالرمز N.

الأعداد الصحيحة:

$\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots$. نرمز إلى مجموعة الأعداد الصحيحة بالرمز Z.

الكسور العشرية:

هي الأعداد التي يمكن أن تكتب بالشكل $\frac{a}{10^n}$ مع a عدد صحيح و n عدد طبيعي. مثل $\frac{1}{10}$ و $\frac{-102}{1000}$ وكذلك $\frac{7}{25}$ لأن $\frac{7}{25}=\frac{28}{100}$. في الحقيقة، إن الكسور العشرية هي الأعداد الحقيقية التي تكتب بعدد منته من الأرقام بعد

الفاصلة العشرية. مثل $3,68 = \frac{368}{100}$ و -2. نرمز إلى مجموعة الكسور العشرية بالرمز D.

الأعداد العادية:

هي نواتج قسمة عددين صحيحين، أي الأعداد من الشكل $\frac{a}{b}$ مع a عدد صحيح و b عدد صحيح غير معدوم. مثل: $\frac{5}{7}$ و $\frac{333}{106}$ و -11 لأن $-11 = \frac{-11}{1}$. نرمز إلى مجموعة الأعداد العادية بالرمز Q.

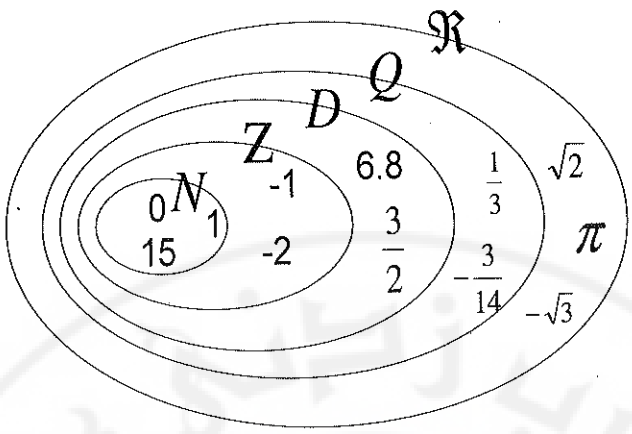
الأعداد غير العادية:

هي الأعداد الحقيقية التي لا تنتمي إلى أي من المجموعات السابقة. يمكننا أن نبرهن أنه إذا لم يكن العدد الطبيعي n مربعاً كاملاً كان العدد $\sqrt{n}$ عدداً غير عادي . فمثلاً: الأعداد $\sqrt{2}$ و $\sqrt{3}$ و $\sqrt{5}$ هي أعداد غير عادية. العدد π هو أيضاً عدد غير عادي.

3- العلاقة بين المجموعات العددية المختلفة

- كل عدد عادي هو عدد حقيقي. نقول إن المجموعة Q محتواه في المجموعة $\Re$، ونرمز إلى ذلك بالرمز $Q \subset \Re$.
- كل كسر عشري هو عدد عادي. لأنه يكتب بالشكل $\frac{a}{10^n}$ مع a عدد صحيح و n عدد طبيعي. نكتب إذاً $Z \subset D$.
- كل عدد صحيح هو كسر عشري. نكتب إذا $Z \subset D$.
- كل عدد طبيعي هو عدد صحيح. نكتب إذاً $N \subset Z$.

إذاً لدينا: $N \subset Z \subset D \subset Q \subset \Re$



مثال :

كيف نقرر إلى أي مجموعة عددية ينتمي عدد معطى؟

دل على المجموعة التي تنتمي إليها كل من الأعداد الآتية: $\pi, \frac{32}{4}, \frac{5}{3}, \frac{-3}{2}, -5$.

الحل:

بما أنّ"خارج قسمة عددين صحيحين غير معدومين $\frac{a}{b}$ هو عدد عادي تعريفاً. بقسمة a على b يمكننا تقرير إذا كان ينتمي إلى N أو إلى Z أو إلى D".

نلاحظ أولاً أن جميع هذه الأعداد حقيقية.

- العدد -5 عدد صحيح سالب. إذن $-5 \in Z$. ولأن $Z \subset D \subset Q$ فإنه ينتمي أيضاً إلى D و Q.
- العدد $-\frac{3}{2}$ ينتمي إلى Q. ولأن $-\frac{3}{2} = -1,5$ فإنه ينتمي أيضاً إلى D.
- العدد $\frac{5}{3}$ ينتمي إلى Q. ولأن كتابته العشرية $\frac{5}{3} = 1,66666\ldots$ غير منتهية فإنه لا ينتمي إلى D.

- العدد $\frac{32}{4}$ يساوي 8. فهو ينتمي إلى N ومن ثم إلى Z و D و Q.
- العدد π عدد غير عادي فهو لا ينتمي إلى أي من المجموعات N أو Z أو D أو Q.

4-حقل الأعداد الحقيقية

إنّ دراسة التوابع (الدوال) تشكل الركن الأساسي لمعظم فروع العلوم الأساسية ولما كانت هذه التوابع تعرّف على مجموعات جزئية أو موسعة منها فإن من الضروري أن نبدأ بدراسة مفهوم الأعداد الحقيقية التي سنرمز لها R وهي تمثل أساس الفضاء الحقيقي على محور، وقد يبدو للوهلة الأولى أن نظرية الأعداد الحقيقية بحد ذاتها غاية في البساطة، إلّا أن الأمر ليس كذلك، حتى إنه يمكننا القول إن العدد الحقيقي كما هو حال الزمن في الفيزياء يعرفه الجميع لكن لا يفهمه إلا القليل، وفي الحقيقة فإن مفهوم العدد هو أحد المفاهيم الرياضية المجردة ودراسته بكل تفصيلاته تحتاج إلى جَلَد وصدرٍ رَحْب، ولما كان كتابنا هذا يتطرق لدراسة موضوعات صلتها مرتبطة بالنهايات والاستمرار والاشتقاق لذا سوف نكتفي بدراسة ما يلزمنا من الأعداد لفهم تلك الموضوعات بادئين بالأعداد الصحيحة والطبيعية.

5-الأعداد الطبيعية والصحيحة

(Natural and Integer Numbers)

1- تعريف الأعداد الطبيعية والصحيحة:

نرمز لمجموعة الأعداد الطبيعية $\{1,2,3,4,...\}$ بالرمز N ولمجموعة الأعداد الصحيحة بالرمز Z وندعو عناصر مجموعة الأعداد الطبيعية بالأعداد الصحيحة الموجبة والخاصة الأساسية في الأعداد الطبيعية هي أن لكل عدد

طبيعي n عدداً طبيعياً آخر يليه $n+1$ فالعدد 2 يليه 3 والعدد 73 يليه 74 وربما لن نختلف على وضوح الخواص التي سنوردها أو على الأقل وضوح الخواص الأربع الأولى منها.

2- نظرية الأعداد في مجموعة الأعداد الطبيعية:

مسلمات (موضوعات) بيانو:

مسلمات لدراسة الأعداد الطبيعية . وهذه المسلمات وضعها عالم الرياضيات والمنطق الإيطالي **بيانو Peano** (1858 – 1932) في العام 1891. وتنص على:

الموضوعة الأولى: الواحد، عدد طبيعي.

$1 \in N : N_1$

الموضوعة الثانية: بعد كل عدد طبيعي يوجد عدد طبيعي تالٍ له.

N_2 : إذا كان $n \in N$ فإن $n+1 \in N$

الموضوعة الثالثة: الواحد أصغر الأعداد الطبيعية . أو الواحد ليس له سابق في مجموعة الأعداد الطبيعية. أو الواحد ليس تالياً لأي عدد طبيعي.

N_3 : إن العدد 1 لا يلي أي عنصر من N

الموضوعة الرابعة: إذا كان لدينا تاليان متساويان، فالعددان متساويان.

N_4 : إذا كان $m,n \in N$ والعدد الذي يلي m يساوي العدد يلي n فإن $m=n$

الموضوعة الخامسة: وتسمى مبدأ الاستقراء الرياضي وفق ما يلي:

إذا كانت مجموعة من الأعداد S تحوي العدد 1 ثم إذا وجد فيها عددn فإنها تضم العدد التالي له $n+1$ أي:

N_S : أي مجموعة جزئية S من N تحوي الواحد وتحقق أنه من $n \in S$ فإن $n+1 \in S$ لابد أن تكون هي N نفسها

الموضوعة N_S قد تبدو غير واضحة كما هي واضحة بقية الموضوعات N_1, N_2, N_3, N_4 لذا سوف نحاول شرحها.

لنفرض أنّ S مجموعة جزئية من المجموعة N كما هي موصوفة في N_S عندها $1 \in S$ و $n+1 \in S$ عندما $n \in S$ إذن $2 = 1+1 \in S$ وكذلك $3 = 2+1 \in S$ و ... وهكذا نستمر على هذا المنوال حتى نبين أن S تحوي كل عناصر N و بالتالي $S = N$ ، وهنالك أسلوب آخر لتوضيح N_S.

6-قابلية القسمة

تعريف:

ليكن a و b عددين طبيعيين غير معدومين.

نقول عن a إنه يقبل القسمة على b، إذا كان ناتج قسمة a على b عدداً طبيعياً. أي إذا كان $a = bc$ و c عدد طبيعي. ونقول في هذه الحالة إن العدد b قاسم للعدد a.

مثال:

العدد 18 يقبل القسمة على 3. لأننا عندما نقسم 18على 3يكون خارج القسمة عدد طبيعي هو العدد 6. ونقول عندئذ إنّ العدد 3 قاسم للعدد 18.

ملاحظة:

لكل عدد طبيعي a أكبر تماماً من 1 قاسمان على الأقل هما 1 و a. لأن $\frac{a}{1} = 1$ و $\frac{a}{a} = 1$.

قابلية قسمة على الأعداد 2,3,4,5,6,9,10

- يقبل العدد القسمة على 2 إذا كان آحاده عدداً زوجياً.
- يقبل العدد القسمة على 3 إذا كان مجموع أرقامه من مضاعفات العدد 3.
- يقبل العدد القسمة على4 إذا كانت آحاده و عشراته من مضاعفات العدد 4 .
- يقبل العدد القسمة على 5 إذا كان آحاده إحدى العددين 0 أو 5.
- يقبل العدد القسمة على 6 إذا كان يقبل القسمة على 2 و 3 معاً.
- يقبل العدد القسمة على 9 إذا كان مجموع أرقامه من مضاعفات العدد 9.
- يقبل العدد القسمة على 10 إذا كان آحاده صفراً .

7-الأعداد الأولية

تعريف:

العدد الأولي هو عدد طبيعي أكبر تماماً من الواحد ولا يقبل قواسم له إلا نفسه والعدد 1.

مثال:

- العدد 7 عدد أولي، في حين ليس العدد 143 أولياً لأنه يقبل القسمة على 1 و 11 و 13 و 143.
- الأعداد الأولية بين 1 و 100 هي:

2	3	5	7	11	13	17	19	23
29	31	37	41	43	47	53	59	61
67	71	73	79	83	89	97		

8-تحليل عدد إلى عوامله الأولية

مثال:

العدد 15 ليس عدداً أولياً، لأن $15=3\times5$. أما العددان 3 و 5 فهما أوليان. فالعدد هو جداء ضرب أعداد أولية.

وبوجه عام لدينا المبرهنة الآتية التي نقبلها دون برهان.

مبرهنة:

كل عدد طبيعي أكبر أو يساوي 2 هو إما عدد أولي أو يساوي جداء ضرب أعداد أولية.

فعندما نكتب عدداً حاصل ضرب أعداد أولية نقول إننا قد حللناه إلى عوامله الأولية.

ملاحظات:

1. يمكن أن نبرهن أن التحليل إلى عوامل أولية وحيد.
2. عند التحليل إلى عوامل أولية يمكن أن يظهر العدد الأولي نفسه أكثر من مرّة، فمثلاً

$$50=2\times5\times5=2\times5^2$$

ملاحظة:

- نحلل عدداً إلى عوامله الأولية وفق ما يلي:

نقسم هذا العدد على الأعداد الأولية المتتالية: $2,3,5,7,\ldots$

مثال:

تحليل العدد 45 إلى عوامله الأولية:

- لا يقبل العدد 45 القسمة على 2.
- ولكنه يقبل القسمة على 3 لأن $45=3\times15$. إذن يكفي أن نحلل العدد 15 إلى عوامله الأولية. ولكن $15=3\times5$ إذن $45=3^2\times5$.

مثال:

حلل العددين $A=24\times14$ و $B=56\times67$ إلى عواملها الأولية.

لتحليل عدد $a\times b$ إلى عوامله الأولية نحلل العددين a و b إلى عواملهما الأولية كلاً على حده، ثم نحسب جداء ضرب هذين التحليلين.

الحل:

1. حالة $A=24\times14$. نبدأ بتحليل كل من العددين 24 و 14.

- تحليل العدد 24: لما كان $24=2\times12$، وكان $12=2\times6$ وأخيراً $6=2\times3$ استنتجنا أن:

$$24=2\times2\times2\times3=2^3\times3$$

24	2
12	2
6	2
3	3
1	

14	2
7	7
1	

- تحليل العدد 14: لدينا وضوحاً $14=2\times7$

وهكذا نجد:

$$A=24\times14=(2^3\times3)\times(2\times7)=2^3\times2\times3\times7=2^4\times3\times7$$

2. حالة $B=56\times67$. نتبع الأسلوب السابق فنرى أن $56=2\times28$، ولكن $28=2\times14$ و $14=2\times7$ إذن:

$$56=2\times2\times2\times7=2^3\times7$$

56	2
28	2
14	2
7	7
1	

أما العدد 67 فهو عدد أولي إذن

$$B=56\times67=2^3\times7\times67$$

وهو المطلوب.

مثال:

كيف نستفيد من تحليل إلى عوامل أولية في اختصار الكسور؟

اختصر الكسر $C=\frac{56\times 67}{24\times 14}$

الحل:

لاحظ أن $C=\frac{A}{B}$ ، A ، B هما العددان اللذان جرى تحليلهما إلى عوامل أولية في المثال السابق، فإذا استفدنا من هذين التحليلين أمكننا أن نكتب:

$$C=\frac{2^3\times 7\times 67}{2^4\times 3\times 7}=\frac{2^3\times \mathbf{7}\times 67}{2^4\times 3\times \mathbf{7}}=\frac{67}{2\times 3}=\frac{67}{6}$$

$\downarrow$

2

- **يفيد التحليل إلى عوامل أولية في :**
  - حل بعض المعادلات
  - تبسيط بعض الصيغ.
  - دراسة إشارة صيغة ما.
- **يفيد النشر**

عند نشر صيغة ما، ومن ثم اختصارها، نحصل في بعض الحالات على صيغ أبسط. فمثلاً بنشر واختصار المقدار $A=(x-1)^2+3x-x^2$ نجد:

$$A=x^2-2x+1+3x-x^2=x+1$$

- **كيف نختار بين النشر والتحليل إلى عوامل؟**

تذكر أن التحليل إلى عوامل أصعب من النشر. فإذا طلب منك إثبات أنّ المقدار $B=4x^3-3x+1$ يساوي $A=(x+1)(2x-1)^2$، فمن الأفضل أن ننشر A على أن نحاول تحليل B.

مثال: كيف نحلل عبارة إلى جداء عوامل؟

حلل العبارة:

$$A=(x+1)(2x+3)-(x+1)(-x+2)+5(x+1)^2$$

إلى جداء عوامل بسيطة.

"عند تحليل عبارة مكونة من مجموع حدود يمكن البدء بالبحث عن عامل مشترك بينها جميعاً".

الحل:

إن A هو مجموع ثلاث حدود هي $(x+1)(2x+3)$ و $(x+1)(-x+2)$ و $5(x+1)^2$ وهي جميعاً تضم الحد $(x+1)$ حداً مشتركاً. فيمكننا الاستفادة من المبرهنة : " أياً كانت الأعداد a,b,c كان a(b+c)=ab+ac " لنكتب:

$$\begin{aligned}A&=(x+1)((2x+3)-(-x+2)+5(x+1)\\&=(x+1)(2x+3+x-2+5x+5)\end{aligned}$$

وأخيراً $A=(x+1)(8x+6)$.

تمرين : كيف نختزل العبارة ؟

اختزل العبارة التالية بعد أن تحلل البسط $A=\dfrac{(x+1)^2-(2x+3)^2}{3x+4}$ مع $x\neq-\dfrac{4}{3}$.

الحل:

لاحظ أولاً أنه إذا كان $x \neq -\frac{4}{3}$ كان $3x+4 \neq 0$ فالعبارة A معرفة. إن بسط الكسر A هو فرق مربعين، إذن يمكننا الاستفادة من المتطابقة $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$، مع $a=x+1$ و $b=2x+3$ لنجد أن بسط A يكتب بالشكل:

$$\begin{aligned}(x+1)^2-(2x+3)^2 &= ((x+1)-(2x+3))((x+1)+(2x+3)) \\ &= (x+1-2x-3)(x+1+2x+3) \\ &= (-x-2)(3x+4)\end{aligned}$$

وعليه: $A=\frac{(-x-2)(3x+4)}{3x+4}=-x-2$ مع $x \neq -\frac{4}{3}$.

9- القوى والجذور التربيعية

أ- حساب القوى

تعريف:

ليكن n عدداً طبيعياً غير معدوم، وليكن a عدداً حقيقياً. عندئذ نعرف:

$$a^n=\underbrace{a\times a\times\ldots\times a}_{n \text{ حدا}} \quad \text{و} \quad a^{-n}=\frac{1}{a^n} \quad \text{في حال } a \neq 0$$

اصطلاح:

نصطلح في حالة $a \neq 0$ أن $a^0=1$

مثال:

$10^5=100000$، و $10^{-3}=0.001$، وفي حال $a \neq 0$ لدينا $a^{-1}=\frac{1}{a}$ ونسميه مقلوب a.

مبرهنة :

أياً كان العددان غير المعدومين a و b، وأياً كان العددان n و m كان:

1) $a^m \times a^n = a^{n+m}$.

2) $(a^m)^n = a^{mn}$.

3) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.

4) $a^n \times b^n = (ab)^n$

5) $(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$

مثال:

1) $\frac{(7,1)^{-5}}{(7,1)^{-3}} = (7,1)^{-5+3} = (7,1)^{-2}$.

2) $(4\times10^{-3})^3 = 4^3 \times (10^{-3})^3 = 64\times10^{-9}$.

ب-كيف نتوثق من علاقات القوى، عند الشك؟

يكفي أن نستخدم تعريف a^n. فمثلاً، في حالة n و m عددين طبيعيين موجبين تماماً، لدينا:

$$a^n \times a^m = \frac{a\times a\times\ldots\times a}{n \text{ حدا}} \times \frac{a\times a\times\ldots\times a}{m \text{ حدا}} = \frac{a\times a\times\ldots\times a}{n+m \text{ حدا}} = a^{n+m}$$

مثال:

كيف نستفيد من خواص القوى؟

إذا علمت أن $b^3 = 5.832$ و $b^5 = 18.89568$، فاحسب b^2 و b^6 دون حساب b.

الحل:

يكفي أن نلاحظ أن $b^2 = \frac{b^5}{b^3} = 3.24$ و أن $b^6 = (b^3)^2 = 34.012224$.

ت-الجذور التربيعية

تعريف:

ليكن a عدداً حقيقياً موجباً، الجذر التربيعية للعدد a هو العدد الموجب الوحيد الذي مربعه يساوي a، ونرمز عادة إلى الجذر التربيعي للعدد a بالرمز $\sqrt{a}$.

مثال:

$$\sqrt{4} = 2 \ , \ \sqrt{36} = 6 \ , \ \sqrt{0} = 0$$

نتيجة:

ليس للعدد السالب جذر تربيعي فمثلاً في حالة عدد حقيقي x فليس لكتابة $\sqrt{x-1}$ معنى ما لم يكن $x-1 \geq 0$ أي $x \geq 1$.

مبرهنة :

إذا كان a و b عددين حقيقيين موجبين، كان:

- $\sqrt{a^2} = a$.
- $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ وفي حالة $b \neq 0$ يكون $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

مثال:

$$\sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{16}} = \frac{5}{4}$$

$$\sqrt{45} = \sqrt{9\times 5} = \sqrt{9}\cdot\sqrt{5} = 3\sqrt{5}$$

$$\sqrt{1225} = \sqrt{5^2\times 7^2} = \sqrt{5^2}\times\sqrt{7^2} = 5\times 7 = 35$$

$$\sqrt{(15)^2} = 15$$

مثال:

استفد من خواص القوى في حساب b^2, b^6 دون حساب b إذا علمت أن:

$$b^5 = 18.89568\ ,\ b^3 = 5.832$$

الحل:

نلاحظ أن: $$b^2 = \frac{b^5}{b^3}$$

$$b^2 = \frac{b^5}{b^3} = 3{,}24$$

وأنّ: $$b^6 = (b^3)^2 = 34{,}012224 .$$

مثال:

باستخدام الجذور التربيعية:

1. اكتب $\sqrt{75}$ بالشكل $n\sqrt{3}$ و n عدد طبيعي.
2. اكتب $7\sqrt{75} - 5\sqrt{25} + 4\sqrt{48}$ بالشكل $m\sqrt{3}$ و m عدد طبيعي.

الحل:

1. نستفيد من العلاقة $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}$. كي نحصل على $\sqrt{3}$ نكتب $75=25\times 3$، عندئذ:

$$\sqrt{75}=\sqrt{25\times 3}=\sqrt{25}\sqrt{3}=5\sqrt{3}$$

وهكذا نكون قد كتبنا $\sqrt{75}$ بالشكل $n\sqrt{3}$ مع $n=5$.

2. نلاحظ أن:

$$27=9\times 3$$

$$48=16\times 3$$

وعليه نجد:

$$\sqrt{27}=\sqrt{9\times 3}=\sqrt{9}\sqrt{3}=3\sqrt{3}$$
$$\sqrt{48}=\sqrt{16\times 3}=\sqrt{16}\sqrt{3}=4\sqrt{3}$$

إذن:

$$7\sqrt{75}-5\sqrt{27}+4\sqrt{48}=35\sqrt{3}-15\sqrt{3}+16\sqrt{3}$$
$$=(35-15+16)\sqrt{3}=36\sqrt{3}$$

وهكذا نكون قد كتبنا $7\sqrt{75}-5\sqrt{25}+4\sqrt{48}$ بالشكل $m\sqrt{3}$ مع $m=36$.

ث-الجذر التكعيبي

نعلم بأن $8=2^3$ عندئذٍ نقول إن 2 **هو الجذر التكعيبي** للعدد 8 ونرمز له بالرمز $\sqrt[3]{8}=2$ حيث $\sqrt[3]{\ }$ هو إشارة الجذر، **والعدد** 3 يدعى دليل الجذر، **والعدد** 8 يسمى المجذور، والعدد 2 ناتج الجذر.

مثال:

الجذر التكعيبي للعدد 64 هو 4 أي $\sqrt[3]{64}=4$ لأن مكعب العدد 4 هو 64.

قاعدة:

الجذر التكعيبي لعدد حقيقي a هو عدد b مكعبه a.

أي: $\sqrt[3]{a}=b \Leftrightarrow b^3=a$

ملاحظة:

يوجد للعدد السالب جذراً تكعيبياً.

مثال:

$\sqrt[3]{1}=1$

$\sqrt[3]{0}=0$

$\sqrt[3]{-1}=-1$

$\sqrt[3]{-125}=-5$

خواص الجذر التكعيبي:

1) $\left(\sqrt[3]{a}\right)^3=a$

2) $\sqrt[3]{a^3}=a$

3) $\sqrt[3]{a\times b}=\sqrt[3]{a}\times\sqrt[3]{b}$

4) $\sqrt[3]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}};b\neq 0$

5) $\left(\sqrt[3]{a}\right)^n=\sqrt[3]{a^n}$

مثال:

$$\left(\sqrt[3]{4}\right)^3 = 4$$

$$\left(\sqrt[3]{\sqrt{2}}\right)^3 = \sqrt{2}$$

$$\left(\sqrt[3]{-5}\right)^3 = -5$$

$$\sqrt[3]{2^3} = 2$$

$$\sqrt[3]{200} = \sqrt[3]{2^3 \times 5^2} = \sqrt[3]{2^3} \times \sqrt[3]{5^2} = 2 \times \sqrt[3]{25}$$

10- العمليات على الكسور (النسب)

1- عملية الجمع والطرح:

إذا كان الكسران متساويي المقام فالناتج هو كسر بسطه ناتج جمع (طرح) بسطيهما ومقامه المقام المشترك لهما. فإذا لم يكن المقامان متساويين نبدأ بتوحيد مقاميهما ونختار المضاعف المشترك الأصغر للمقامين مقاماً مشتركاً.

مثال:

$$\frac{5}{3} + \frac{4}{3} = \frac{9}{3}$$

مثال:

$$\frac{1}{4} + \frac{2}{3} = \frac{3}{12} + \frac{8}{12} = \frac{11}{12}$$

2- عملية الضرب:

لضرب عدد صحيح بكسره نقوم بضرب ذلك العدد الصحيح ببسط الكسر ونضع الناتج بسطاً لكسرٍ له المقام ذاته.

مثال:

$$5\times\frac{3}{4}=\frac{5\times3}{4}=\frac{15}{4}$$

مثال:

$$\frac{3}{6}\times\frac{2}{5}=\frac{6}{30}$$

3- عملية القسمة:

لقسمة كسر أو عدد صحيح على كسر (غير الصفر) نضرب المقسوم بمقلوب المقسوم عليه.

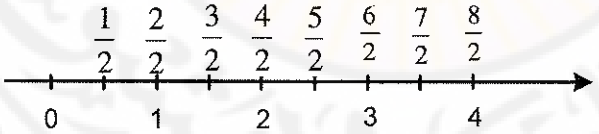
مثال1:

$$\frac{5}{4}\div\frac{3}{2}=\frac{5}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}$$

11- الأعداد الكسرية

1- تعريف العدد الكسري:

هو كسر أكبر من الواحد كتب على صورة عدد صحيح وإلى يمينه كسر أصغر من 1.



$$\frac{7}{2}=3\frac{1}{2}$$

لتحويل الكسر العادي الأكبر من الواحد إلى عدد كسري نقسم البسط على المقام فيكون ناتج القسمة هو العدد الصحيح وباقي القسمة هو بسط الكسر والمقسوم عليه هو مقام الكسر.

مثال:

اكتب الكسر $\frac{25}{7}$ على شكل عدد كسري.

الحل:

نقسم المقدار فنجد باقي القسمة هو 4 والمقسوم عليه هو 7 وناتج القسمة هي 3 فنضع:

$$\frac{25}{7}=3\frac{4}{7}$$

لتحويل العدد الكسري إلى كسر عادي نضرب العدد الصحيح بمقام الكسر ونجمع الناتج مع بسط الكسر ونضع مجموعهما بسطاً لكسر مقامه المقام ذاته.

مثال:

$$3\frac{4}{7}=\frac{(3\times7)+4}{4}=\frac{21+4}{7}=\frac{25}{7}$$

مثال:

$$4\frac{2}{3}=\frac{(4\times3)+2}{3}=\frac{12+2}{3}=\frac{14}{3}$$

2- قسمة الأعداد الكسرية:

لقسمة عدد كسري على عدد كسري نحول كلاً منهما إلى كسر عادي، ثم نحسب ناتج القسمة كقسمة كسر عادي على كسر عادي.

مثال:

$$2\frac{4}{3}\div1\frac{2}{5}=\frac{10}{3}\div\frac{7}{5}$$

$$=\frac{10}{3}\times\frac{5}{7}=\frac{50}{21}$$

12- الكسور العشرية والأعداد العشرية

إذا كان $\frac{a}{b}$ كسراً عادياً وكانت $b=10,100,1000$ فإننا نسميه كسراً عشرياً، فالكسر العشري هو كسر عادي مقامه 10 أو 100 أو 1000 أو ...

مثال:

الكسور التالية كسور عشرية:

$$\frac{5}{10},\frac{12}{100},\frac{10}{10},\frac{1000}{100},\frac{2578}{100}$$

ملاحظة:

يمكن تحويل بعض الكسور إلى كسور عشرية بأن نضرب حدي الكسر بعدد مناسب يجعل مقام الكسر 10 أو 100 أو 1000 أو ...

مثال:

لدينا الكسر $\frac{4}{5}$ ولو ضرب كُلُ من حدَّيه بـــ 2 لغدا الكسر العشري $\frac{8}{10}$.

مثال2:

نحول الكسر $\frac{3}{25}$ إلى كسر عشري بضرب كلٍ من حدَّيه بالعدد 4 فيغدو $\frac{12}{100}$.

الأعداد العشرية:

عند قياس طول الباب نجد أنه 1 م و 3 د سم أي $1\frac{3}{10}$ م.

تمارين ومسائل

1) أوجد الجذر التربيعي لكل من الأعداد التالية:

$10000 , 49\times25 , 6400 , 81$

2) اكتب مربعات الأعداد من 11 إلى 21، ثم أوجد الجذر التربيعي للأعداد الآتية:

$$196 , \frac{144}{196} , 225\times381 , (21)^2\times25$$

3) بسط الجذور التربيعية الآتية:

$$\sqrt{50} , \sqrt{8} , \sqrt{12}$$

4) بيّن الإجابة الصحيحة من بين الإجابات الثلاث المدونة فيما يلي:

أ- لتكن $x\neq0$ فإن حاصل قسمة $\frac{x}{8}$ على $\frac{x}{4}$ هو:

(1) 4 (2) $\frac{x^2}{32}$ (3) $\frac{1}{2}$

ب- حاصل ضرب $\frac{x}{5}$ بالعدد 4 هو:

(1) $4\frac{x}{5}$ (2) $\frac{x}{5}$ (3) $\frac{4x}{20}$

ت- إن $\frac{5}{\sqrt{2}}$ تساوي: (3) $\frac{5\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$ (2) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ (1) $\frac{10}{2}$

ث- إن $1-\frac{x}{5}$ يساوي:

(1) $\frac{x-5}{x}$ (2) $\frac{x-1}{5}$ (3) $\frac{x-5}{5}$


وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الفصل السادس

المتطابقات وتحليل ثلاثي الحدود

المتطابقات وحل المعادلات من الدرجة الأولى ومن الدرجة الثانية

1- المعادلة والمطابقة

إذا كانت لدينا مساواة تتضمن رموزاً جبريةً متغيرةً، وكانت المساواة مقرونةً بمجموعة التعويض A فإذا كانت المساواة التالية $2x-3=x+1$ تحوي الرمز x ونلاحظ أن هذه المساواة تتحقق فقط من أجل $x=4$ ونسميها " المعادلة ".

أما المساواة $(x-1)^2=x^2-2x+1$ فمن أجل $x=0,1,2,...$ أي من أجل $\forall x\in\Re$ فإن المساواة محققة وندعوها مطابقة.

مثال:

لدينا المساواة $x+3=3+x$ وذلك $\forall x\in\Re$ فهي مطابقة لأنها محققة من أجل أي قيمة لـــ x من $\Re$.

مثال:

$x^2+2x=x(x+2)$ أيضاً هي مطابقة.

مثال:

لدينا $x^2-1=0$ فهي تمثل معادلة وذلك لوجود قيم من $\Re$ لا تحققها مثل $x=5$.

مثال:

لدينا $x^2-9=0$ هي معادلة وذلك لوجود عنصر على الأقل وليكن $x=2$ لا تتحقق من أجله هذه المساواة.

2- المتطابقات الشهيرة التربيعية

تدعى المتطابقات التربيعية بالمتطابقات من الدرجة الثانية وتتمثل بـــ:

1) المطابقة الأولى

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad ; \forall a,b \in R$$

وتقرأ: مربع مجموع حدين يساوي مربع الحد الأول مضافاً إليه ضعفي جداء الحد الأول بالثاني مضافاً إليه مربع الحد الثاني.

ونبرهن عليها بالشكل:

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= (a+b)(a+b)\\ &= a^2 + ab + ba + b^2\\ &= a^2 + 2ab + b^2\end{aligned}$$

مثال:

$$\begin{aligned}(x+3)^2 &= x^2 + 2(x)(3) + 3^3\\ &= x^2 + 6x + 9\end{aligned}$$

مثال:

$$\begin{aligned}(2x+3)^2 &= (2x)^2 + 2(2x) + 3^2\\ &= 4x^2 + 12x + 9\end{aligned}$$

مثال:

$$\begin{aligned}(4+5c)^2 &= 4^2 + 2(4)(5c) + (5c)^2\\ &= 16 + 40c + 25c^2\end{aligned}$$

مثال:

$$\left(\frac{y}{2}+\sqrt{3}\right)^2=\frac{y^2}{4}+y\sqrt{3}+3$$

2) المطابقة الثانية:

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2\ ;\ \forall a,b\in R$$

ونقرأ: مربع فرق حدين يساوي مربع الحد الأول مطروحاً منه ضعفي جداء الحد الأول بالثاني مضافاً له مربع الحد الثاني.

مثال:

$$(2x-3)^2=(2x)^2-2(2x)(3)+3^2$$

$$=4x^2-12x+9$$

مثال:

$$\left(x^2-y^2\right)^2=x^4-2x^2y^2+y^4$$

مثال:

$$\left(\sqrt{5}-1\right)^2=\left(\sqrt{5}\right)^2-2\left(\sqrt{5}\right)(1)+1^2$$

$$=5-2\sqrt{5}+1=6-2\sqrt{5}$$

مثال:

$$\left(2x^2-5y\right)^2=\left(2x^2\right)^2-2\left(2x^2\right)(5y)+(5y)^2$$

$$=4x^4-20x^2y+25y^2$$

مثال:

$$\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2=\left(\sqrt{6}\right)^2-2\left(\sqrt{6}\right)\left(\sqrt{2}\right)+\left(\sqrt{2}\right)^2$$

$$=6-2\sqrt{12}+2=8-2\sqrt{12}$$

3) المطابقة الثالثة:

$$(a-b)(a+b)=a^2-b^2 \;\; ; \forall a,b\in R$$

وتقرأ: جداء مجموع حدين مضروباً بفرقهما يساوي مربع الأول مطروحاً منه مربع الثاني.

ونبرهن عليها بالشكل:

$$(a-b)(a+b)=a^2+ab-ba-b^2$$

$$=a^2-b^2$$

مثال:

$$(x+3v)(x-3v)=\left(x^2\right)-(3y)^2$$

$$=x^2-9y^2$$

مثال:

$$\left(\sqrt{3}+x\right)\left(\sqrt{3}-x\right)=\left(\sqrt{3}\right)^3-(x)^2=3-x^2$$

مثال:

$$\left(\sqrt{6}+1\right)\left(\sqrt{6}-1\right)=\left(\sqrt{6}\right)^3-(1)^2=6-1=5$$

مثال:

$$\left(\frac{x}{3}+y\right)\left(y-\frac{x}{3}\right)=\left(y+\frac{x}{3}\right)\left(y-\frac{x}{3}\right)$$

$$=y^2-\left(\frac{x}{3}\right)^2=y^2-\frac{x^2}{9}$$

مثال:

برهن صحة العلاقة:

$$(a+b)^2-2ab=a^2+b^2$$

البرهان:

$$(a+b)^2-2ab=a^2+2ab+b^2-2ab=a^2+b^2$$

وهو المطلوب.

مثال:

برهن صحة العلاقة التالية:

$$(a-b)^2+2ab=a^2+b^2$$

البرهان:

$$(a-b)^2+2ab=a^2-2ab+b^2+2ab=a^2+b^2$$

وهو المطلوب.

مثال:

أوجد ناتج ما يلي:

$(3x+2)^2+(3x-2)^2$ (1

$(3-x^2)+(3+x^2)$ (2

3- المتطابقات التكعيبية

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \qquad (1)$$

وتقرأ: مكعب مجموع حدين = مكعب الأول + ثلاثة أضعاف مربع الحد الأول في الثاني + ثلاثة أضعاف الحد الأول في مربع الثاني + مكعب الثاني

مثال:

احسب المقدار $(2x+3)^3$.

$$(2x+3)^3=(2x)^2+3(2x)^2(3)+3x(3)^2+(3)^2$$

$$=8x^3+36x^2+54x+27$$

مثال:

احسب المقدار $\left(\sqrt{2}+x\right)^3$.

$$\left(\sqrt{2}+x\right)^3=\left(\sqrt{2}\right)^3+3\left(\sqrt{2}\right)^2(x)+3\left(\sqrt{2}\right)(x)+x^3$$

$$=2\sqrt{2}+6x+3\sqrt{2}x+x^3$$

$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3 \qquad (2)$$

وتقرأ: مكعب فرق حدين = مكعب الأول – ثلاثة أضعاف مربع الحد الأول في الثاني + ثلاثة أضعاف الحد الأول في مربع الحد الثاني –مكعب الثاني

مثال:

أوجد المقدار $(2-3x)^3$

$$(2-3x)^3 = (2)^3 - 3(2)^2(3x) + 3(2)(3x)^2 - (3x)^3$$

$$= 8 - 36x + 18x^2 - 27x^3$$

مثال:

أوجد ناتج ما يلي:

$$(2a-3b)^3 + (a+2b)^3$$

$$(2a-3b)^3 + (a+2b)^3 = (2a)^3 - 3(2a)^2(3b) + 3(2a)(3b)^2 -$$

$$(3b)^3 + a^3 + 3(a)^2(2b) + 3(a)(2b)^2 + (2b)^3$$

$$= 8a^3 - 36a^2b + 54ab^2 - 27b^3 + a^3 + 6a^2b + 12ab^2 + 8b^3$$

$$= 9a^3 - 30a^2b + 66ab - 19b^3$$

مثال:

أوجد ناتج ما يلي: $\left(\sqrt{x}-1\right)^3$

$$\left(\sqrt{x}-1\right)^3 = \left(\sqrt{x}\right)^3 - 3\left(\sqrt{x}\right)^2(1) + 3\left(\sqrt{x}\right)(1)^2 - (1)^3$$

$$= x\sqrt{x} - 3x + 3\sqrt{x} - 1$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right) \qquad (3)$$

وتقرأ: مجموع مكعبي حدين = (مجموع الحدين) × (مربع الأول – الحد الأول × الثاني + مربع الثاني)

مثال:

حلل المقدار التالي: $x^3 + (2y)^3$

$$x^3 + (2y)^3 = (x + 2y)(x^2 - 2xy + 4y^2)$$

مثال:

حلل المقدار التالي: $(2x)^3 + (\sqrt{3})^3$

$$(2x)^3 + (\sqrt{3})^3 = (2x + \sqrt{3})(4x^2 - 2xy + 4y^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2) \qquad (4)$$

ونقرأ: فرق مكعبي حدين = (فرق الحدين)×(مربع الحد الأول + الحد الأول × الثاني + مربع الثاني)

مثال:

حلل المقدار التالي $(5c)^3 - y^3$

$$(5c)^3 - y^3 = (5c - y)(25c^2 + 5cy + y^2)$$

مثال:

حلل المقدار التالي $(x-1)^3 - (2y)^3$

$$(x-1)^3 - (2y)^3 = (x - 1 - 2y)\left[(x-1)^2 + 2y(x-1) + 4y^2\right]$$

$$= (x - 1 - 2y)(x^2 - 2x + 1 + 2yx - 2y + 4y^2)$$

مثال:

حلل المقدار التالي: $(x+1)^3 - 1$

$$(x+1)^3 - 1 = (x + 1 - 1)\left[(x+1)^2 + (x+1) + 1^2\right]$$

$$= (x)\left[(x^2 + 2x + 1) + x + 2\right]$$

$$= (x)(x^2 + 3x + 3)$$

$$= x^3 + 3x^2 + 3x$$

4- حل المعادلة ذات المتحول (المجهول) الواحد

تعريف:

نقول إن المعادلة ذات المجهول الواحد (x) من الدرجة الأولى بالنسبة لـــ x إذا آلت بعد اختزالها إلى الشكل:

$$ax+b=0 \;\; ; a\in R^* \; , b\in R$$

مثال:

المعادلة $x-7=0$ والمعادلة $2x+1=7(x-3)+2$

معادلات من الدرجة الأولى بالنسبة للمتحول x.

إن للمعادلة ذات المجهول الواحد من الدرجة الأولى حلاً وحيداً على أن ينتمي إلى مجموعة التعويض المفروضة.

أولاً: حل المعادلة من الدرجة الأولى:

أ- حل المعادلة $ax+b=0$

لحل المعادلة $ax+b=0$ نتبع الطريقة التالية:

$$ax+b=0$$

$$ax=-b \;\; \Rightarrow x=-\frac{b}{a}$$

مثال:

حل المعادلة $5x+7=0$

$$5x=-7 \;\; \Rightarrow x=-\frac{7}{5}$$

مثال:

حل المعادلة $5x=0$

$$5x=0 \Rightarrow x=-\frac{0}{5}=0$$

مثال:

حل المعادلة $x^2-5(x+1)=x^2+5x$

$$x^2-5x-5-x^2-5x=0$$

$$-10x-5=0$$

$$x=\frac{-5}{-10}=\frac{1}{2}$$

مثال:

عين c ليكون $x=-2$ هو جذر للمعادلة $3x+c=0$

نعوض $x=-2$ في المعادلة فنجد:

$$3(-2)+c=0$$

$$-6+c=0 \Rightarrow c=6$$

وهي ثيمة c ليكون $x=-2$ هو جذر للمعادلة.

ب-حل المعادلة من الشكل $x^2=c$ **حيث** $c>0$

مثال:

حل المعادلة $x^2=9$

$$x^2-9=0$$

$$(x-3)(x+3)=0$$

إما $x=3$ أو $x=-3$.

مثال:

حل المعادلة $x^2=13$

$$x^2=13 \Rightarrow x=\pm\sqrt{13}$$

مثال:

إن المعادلة $x^2=0$ جذر وحيد هو $x=0$ يسمى جذراً مضاعفاً.

مثال:

إن المعادلة $x^2=-1$ مستحيلة الحل في R ولكن لها حل في حقل الأعداد العقدية.

مثال:

حل المعادلة $25x^2=81$

$$25x^2=81 \Rightarrow x^2=\frac{81}{25} \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{81}{25}}$$

$$\Rightarrow x=\pm\frac{9}{5}$$

ثانياً: المعادلة من الدرجة الثانية ذات المجهول الواحد:

هي كل معادلة من الشكل: $ax^2+bx+c=0 \ (a\neq 0)$

Damascus University

تعريف:

نقول إنّ المعادلة ذات المجهول الواحد x هي من الدرجة الثانية بالنسبة إلى x إذا آلت بعد الاختزال إلى الشكل:

$$ax^2+bx+c=0 \ \left(a\in R^* \ , \ b,c\in R\right)$$

حل المعادلة من الدرجة الثانية

المعادلة من الدرجة الانية لها الشكل الآتي: $ax^2+bx+c=0$

أ) التحليل المباشر

لحل المعادلة $x^2+x+6=0$ نحول الطرف الأيمن إلى جداء قوسين:

$$(x+3)(x-2)=0$$

$$x+3=0 \Rightarrow x=-3$$

$$x-2=0 \Rightarrow x=2$$

وهما حل المعادلة.

مثال:

حل المعادلة $x^2=-3x+10$

$$x^2+3x-10=0$$

$$(x+5)(x-2)=0$$

$$x+5=0 \Rightarrow x=-5$$

$$x-2=0 \Rightarrow x=2$$

ب)التحليل بإخراج العامل المشترك:

مثال:

لحل المعادلة $x^2=-3x$

$$x^2=-3x$$

$$x^2+3x=0$$

$$x(x+3)=0$$

$$x=0, x+3=0 \Rightarrow x=-3$$

ملاحظة:

لا يصح قسمة طرفي المعادلة $x^2=-3x$ على x لأن شرط القسمة $x\neq 0$ غير محقق حيث $x\in R$.

مثال2:

حل المعادلة التالية:

$$2x^2-2x-4=0$$

$$2(x^2-x-2)=0$$

$$2(x-2)(x+1)=0$$

$$x-2=0 \Rightarrow x=2$$

$$x+1=0 \Rightarrow x=-1$$

جـ)التحليل باستخدام المطابقات:

مثال:

لحل المعادلة $x^2-4x+4=0$ نلاحظ أن الطرف الأيمن هو مربع كامل فالمعادلة تكتب بالشكل:

$$x^2-4x+4=0 \Leftrightarrow (x-2)(x-2)=0$$

$$(x-2)=0 \Rightarrow x=2$$

$$(x-2)=0 \Rightarrow x=2$$

لهذه المعادلة جذران متساويان كل منهما يساوي 2 فنسمي العدد (2) جذراً مضاعفاً للمعادلة، ونقول بأن للمعادلة جذراً مضاعفاً $x=2$.

مثال:

لحل المعادلة $4x^2-9=0$ نكتب:

$$4x^2-9=0$$

$$(2x)^2-3^2=0$$

$$(2x-3)(2x+3)=0$$

$$2x-3=0 \Rightarrow x=\frac{3}{2}$$

$$2x+3=0 \Rightarrow x=-\frac{3}{2}$$

مثال:

حل المعادلة $(2x+1)^2-49=0$

$$(2x+1)^2-49=0$$

$$(2x+1)^2-7^2=0$$

$$(2x+1-7)(2x+1+7)=0$$

$$(2x-6)(2x+8)=0$$

$$2x-6=0 \Rightarrow x=3$$

$$2x+8=0 \Rightarrow x=-4$$

د) بالإتمام إلى مربع كامل:

لحل المعادلة $x^2-4x-45=0$ نتمم الحدين اللذين يحويان المجهول x إلى مربع كامل بأن نضيف ونطرح مربع نصف أمثال x أي:

$$x^2-4x-45=0$$

$$x^2-4x+4-4-45=0$$

$$(x-2)^2-49=0$$

$$(x-2)^2-7^2=0$$

$$(x-2-7)(x-2+7)=0$$

$$(x-9)(x+5)=0$$

إما:

$$x-9=0 \Rightarrow x=9$$

أو:

$$x+5=0 \Rightarrow x=-5$$

ه) باستخدام المميز:

للبحث عن حل المعادلة:

$$ax^2+bx+c=0\ ;(a\neq 0)$$

نحسب المقدار $\Delta=b^2-4ac$ الذي ندعوه مميز المعادلة إذ إن إشارته تميز ثلاث حالات:

1) إذا كان $\Delta<0$ تكون المعادلة مستحيلة.

2) إذا كان $\Delta=0$ يكون للمعادلة جذر مضاعف $x=-\frac{b}{2a}$

3) إذا كان $\Delta>0$ فللمعادلة جذران يعطيان بالعلاقتين:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\ ,\ x_2\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

ويدعيان بدستور حل المعادلة.

مثال:

حل المعادلة: $x^2+8x+15=0$

بمقارنة المعادلة مع المعادلة $ax^2+bx+c=0$ نلاحظ أن:

$$c=15,b=8,a=1$$

فنحسب المميز:

$$\Delta=b^2-4ac=(8)^2-4(1)(15)$$

$$\Delta=64-60=4$$

$$\Delta>0$$

للمعادلة جذران:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8+2}{2} = -3$$

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8-2}{2} = -5$$

إذاً $x_2 = -5, x_1 = -3$ هما حلا المعادلة $x^2 + 8x + 15 = 0$.

مثال:

حل المعادلة $9x^2 - 6x + 1 = 0$

$$a = 9, b = -6, c = 1$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4(9)(1)$$

$$= 36 - 36 = 0$$

فللمعادلة جذر مضاعف هو:

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2(9)} = \frac{1}{3}$$

مثال:

حل المعادلة $9x^2 - x + 1 = 0$.

$$a = 9, b = 1, c = 1$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4(9)(1)$$

$$= 1 - 36 = -45 < 0$$

فالمعادلة مستحيلة الحل في R.

5-تطبيقات على المعادلات من الدرجة الثانية بمتحول واحد في حل المسائل

مثال:

أوجد عددين الفرق بينهما (6) ومجموع مربعيهما (306) ثم تأكد من صحة الحل.

الحل: نرمز إلى العدد الصغير x فيكون العدد الكبير:

العدد الكبير = العدد الصغير + الفرق

العدد الكبير = $x+6$

أما مربع العدد الصغير: x^2

ومربع العدد الكبير: $(x+6)^2$

وبحسب نص المسألة:

مربع العدد الصغير + مربع العدد الكبير =306

تصبح المعادلة:

$$x^2+(x+6)^2=306$$

$$x^2+x^2+12x+36=306$$

$$2x^2+12x-270=0$$

$$x^2+6x-135=0$$

لنحل المعادلة:

$$\Delta=b^2-4ac=(6)^2-4(1)(-135)$$

$$= 36 + 540 = 576$$

$$\sqrt{\Delta} = 24$$

$$x_1 = \frac{-6+24}{2} = 9 \ , x_2 = \frac{-6-24}{2} = -15$$

الاحتمال الأول:

العدد الصغير هو 9 والعدد الكبير هو $15 = 6 + 9$

أما الاحتمال الثاني:

العدد الصغير (15-) فالعدد الكبير هو $(-9 = 6 + 15-)$

للتأكد من صحة الحل: نحسب مجموع مربعي هذين العددين فنجد:

$$(9)^2 + (15)^2 = 81 + 225 = 306$$

والفرق:

$$15 - 9 = 6$$

وبالتالي العددان 15,9 هما صحيحان.

ونتأكد بنفس الطريقة من العددين 15- , 9- فنجد:

$$(-9)^2 + (-15)^2 = 81 + 225 = 306$$

$$(-9) - (-15) = -9 + +15 = 6$$

وبالتالي العددان 15- , 9- صحيحان أيضاً.

Damascus University

مثال:

عدد طبيعي مؤلف من رقمين، رقمه في منزلة العشرات يزيد (3) على رقمه منزلة الآحاد. فإذا علمت أن العدد يزيد (23) على مجموع مربعي رقميه فأوجد هذا العدد.

الحل:

نفرض رقم الآحاد x فيكون رقم العشرات $(x+3)$ وقيمته المنزلية $10(x+3)$ العدد هو:

$$x+10(x+3)=11x+30$$

أما مربع رقم الآحاد x^2 ومربع رقم العشرات $(x+3)^2$ فيكون مجموع مربعي رقمي العدد:

$$x^2+(x+3)^2=2x^2+6x+9$$

وبحسب نص المسألة: العدد = مجموع مربعي رقميه + 23 فنكتب:

$$11x+30=2x^2+6x+9+23$$

وبعد الاختزال تصبح: $2x^2-5x+2=0$

وبحل المعادلة نجد: $x_1=2\ ,x_2=\frac{1}{2}$

حيث $x_2=\frac{1}{2}$ مرفوض لأن رقم الآحاد لا يكون كسراً.

أما $x_1=2$ فمقبول وهو رقم الآحاد. إذاً رقم العشرات: $2+3=5$

والعدد المطلوب هو (52)

أما التحقق من ذلك: $52=(2)^2+(5)^2+23$

الفصل السابع

قواسم عدد

1-مقدمة

نعلم بأن العدد 18 يقبل القسمة على {1,2,3,6,9,18} وباقي القسمة صفر ونسمي هذه الأعداد السابقة بقواسم العدد 18.

وعليه فإن مجموعة قواسم العدد 36 هي {1,2,3,4,6,9,12,18,36}

ومجموعة قواسم العدد 50 هي {1,2,5,10,25,50}

وعليه نلاحظ بأن:

أصغر قواسم العدد هو 1 وأكبر قواسم العدد هو العدد ذاته.

2- قواسم عدد طبيعي

تعريف:

قاسم عدد مفروض هو عدد إذا قسم عليه العدد المفروض كان باقي القسمة مساوياً الصفر.

فلو كان العدد المفروض 10

نقول عن العدد 2 إنه قاسم للعدد 10 لأن 10 ÷ 2 = 5

نقول عن العدد 5 إنه قاسم للعدد 10 لأن 10 ÷ 5 = 2

نقول عن العدد 10 إنه قاسم للعدد 10 لأن 10 ÷ 10 = 1

فقواسم العدد 10 هي: 1 ، 2 ، 5 ، 10

أما العدد 3 فليس قاسماً للعدد 7 لأن 7 ÷ 3 = 2 والباقي 1

تشكيل مجموعة قواسم عدد طبيعي نتبع ما يلي:

لتشكيل مجموعة قواسم عدد طبيعي نتبع ما يلي:

1- نحلل هذا العدد الطبيعي إلى عوامله الأولية.

2- نكتب ناتج التحليل على شكل جداء قوى. $ب^{ق} \times د^{ك} \times ن^{ط}$ حين العوامل الأولية هي أساسات هذه القوى. أما الأسس فهي مقدار تكرار العامل الأولي.

3- نشكل الجداءات التالية (k+1) * (m+1) * (n+1) يكون ناتجها هو عدد القواسم. حيث k، m ، n. هي أسس القوى السابقة.

أما الحصول على القواسم، تشكل جدولاً نوضح كيفية الحصول عليه في المثال التالي:

أوجد قواسم العدد 360

1- نحلل العدد على عوامله الأولية كما يلي:

باقي القسمة		
0	360	2
0	180	2
0	90	2
0	45	3
0	15	3
0	5	5
	1	

2- نكتب ناتج التحليل على شكل جداء قوى كما يلي:

$$360 = 5^1 \times 3^2 \times 2^3 = 5 \times 9 \times 8$$

3- نحسب عدد القواسم باستخدام الجداءات التالية:

$$(3+1)(2+1)(1+1) = 4 \times 3 \times 2 =$$

24 قاسماً

4- نشكل الجدول التالي: نلاحظ أن العوامل الأولية للعدد هي:

2 مكرراً ثلاث مرات

3 مكرراً مرتين

5 مكرراً مرة واحدة

$8 = 2^3$	$4 = 2^2$	$2 = 2^1$	$1 = 2^0$
	$9 = 3^2$	$3 = 3^1$	$1 = 3^0$
		$5 = 5^1$	$1 = 5^0$

نضرب كل عدد من السطر الأول على التتالي بكل عدد من السطر الثاني، ثم نضرب نواتج الضرب السابقة على التتالي بكل عدد من السطر الثالث، فنجد قواسم العدد 360

ضرب عناصر السطر الأول بعناصر السطر الثاني هي : 1 ، 3 ، 9 ، 2 ، 6 ، 18 ، 4 ، 12 ، 36 ، 8 ، 24 ، 72.

ضرب النواتج السابقة بعناصر السطر الثالث هي : 1 ، 5 ، 3 ، 15 ، 9 ، 45 ، 2 ، 10 ، 6 ، 30 ، 18 ، 90 ، 4 ، 20 ، 12 ، 60 ، 36 ، 180 ، 8 ، 40 ، 24 ، 120 ، 72 ، 360.

إن عدد القواسم السابقة هو 24 قاسماً.

3- القاسم المشترك الأكبر لعددين أو أكثر

نعلم بأن:

قواسم العدد 16 هي : $\{1,2,4,8,16\}$

قواسم العدد 24 هي : $\{1,2,3,4,6,8,12,24\}$

قواسم العدد 56 هي : $\{1,2,4,8,14,28,56\}$

فنلاحظ أن للأعداد 16,24,56 قواسمَ مشتركةً هي $\{1,2,4,8\}$ فأكبرها هو 8 فندعوه القاسم المشترك الأكبر.

وعليه القاسم المشترك الأكبر للأعداد 16,24,56 هو 8.

4- القواسم المشتركة

تعريف:

نقول عن العدد الصحيح $d_1 \neq 0$ قاسماً مشتركاً للعددين الصحيحين a,b غير الصفرين معاً إذا تحقق ما يلي:

$$d_1 | a \quad \wedge \quad d_1 | b$$

مثال: $3|30$, $3|12$

ملاحظات:

- يلاحظ أنه إذا كان d_1 قاسماً مشتركاً لـ b,a فإن $(-d_1)$ يكون قاسماً مشتركاً لهما أيضاً.
- نعلم من خواص قابلية القسمة أن $|d_1|\le|a|$, $|d_1|\le|b|$ فإذا كان $a\cdot b\neq 0$ فإن $|d_1|$ لا يتجاوز العدد الأصغر بين العددين b و a.
- إن مجموعة القواسم المشتركة الموجبة لعددين صحيحين غير صفريين b,a هي تقاطع مجموعة القواسم الموجبة للعدد a مع مجموعة القواسم الموجبة للعدد a مع القواسم الموجبة للعدد b فهي مجموعة منتهية.

5- القاسم المشترك الأعظم

تعريف:

نقول إن d هو القاسم المشترك الأعظم للعددين الصحيحين b,a غير المعدومين معاً، ونكتب $d=(a,b)$ أو $d=g\cdot c\cdot d(a,b)$ إذا تحقق ما يلي:

1) $d>0$

2) $d|b \quad\wedge\quad d|a$

3) إذا كان العدد الصحيح $c>0$ و $c|a \quad\wedge\quad c|b$ فإن $c\le d$

على سبيل المثال: $(21,15)=3$, $(0,6)=6$, $(15,28)=1$, $(-3,-9)=3$

نتيجة:

إنّ القاسم المشترك الأعظم لعددين b,a غير معدومين معاً دوماً موجود وهو وحيد.

الإثبات:

ذكرنا أنّ مجموعة القواسم المشتركة لعددين a,b غير معدومين هي مجموعة منتهية، وعناصرها لا تتجاوز العدد الأصغر بين العددين $|a|,|b|$ فهي مجموعة محدودة من الأعلى فلها بالتالي عنصر أكبر هو القاسم المشترك الأعظم للعددين a,b. وهذا القاسم وحيد إذ لو افترضنا جدلاً أن d_1 و d_2 كل منهما قاسم مشترك أعظم فحسب الشرط (3) يمكن أن نكتب:

$$d_1 \le d_2 \wedge d_2 \le d_1 \Rightarrow d_1 = d_2$$

وهو المطلوب

ملاحظة:

إنّ مجموعة القواسم المشتركة للعددين المعدومين $a=0,b=0$ هي مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة، فهي مجموعة غير منتهية، وليس لها عنصر أكبر ولا يوجد قاسم مشترك أعظم لهما.

مبرهنة:

إذا كان a,b عددين صحيحين غير معدومين فإن القاسم المشترك الأعظم لهما $d=(a,b)$ هو تركيب خطي للعددين a,b

أي يوجد دوماً عددان صحيحان x_0,y_0 بحيث:

$$d=(a,b)=x_0a+y_0b$$

الإثبات:

لنعرف مجموعة التراكيب الخطية لـ a,b كما يلي:

$$S=\{n=ax+by\ ;\ x,y\in Z\}$$

إن المجموعة S غير خالية فهي تحوي:

$$x=\mp 1 \quad , y=0 \quad \text{عندما} \quad n=\pm a$$

$$x=0 \quad , y=\pm 1 \quad \text{عندما} \quad n=\pm b$$

أي أنها تحوي أعداداً موجبة وأعداداً سالبة.

لنعرف المجموعة الجزئية S_1 كما يلي: $S_1=\{n>0\ ,\ n\in S\}$

إن المجموعة S_1 غير خالية وضوحاً، وبحسب مبدأ الترتيب الحسن لها عنصر أصغر نسميه n_0 ونكتب $n_0=x_0a+y_0b$ وبحسب المبرهنة الأساسية في الحساب يمكن أن نكتب:

$$n=n_0\,q+r \ : \ 0\le r<n_0 \qquad (1)$$

أي $ax+by=(ax_0+by_0)q+r\Rightarrow r=a(x-x_0q)+b(y-y_0q)$

ولما كان $r\ge 0$ وهو تركيب خطي لـ b,a فإن $r\in S$.

فإذا كان $r=0$ فإن n_0 يقسم n.

وإذا كان $r>0$ فإن $r\in S_1$ ولكن n_0 هو العنصر الأصغر في S_1 ولدينا من (1) $r<n_0$ وهذا تناقض، إذاً لا بد أن تكون $r=0$ و $n_0|n$ أي أن n_0 تقسم جميع عناصر S وبما أن كلاً من $a\ ,\ b$ ومنه:

$$n_0\le d=(a,b)$$

ومن جهة أخرى فإن العلاقة $n_0=x_0\,a+y_0b$ تدل على أن كل قاسم لـ b,a يجب أن يقسم n_0 أي أن d يقسم n_0 وبالتالي $d\le n_0$.

مما يثبت أن $b=n_0$ أي $d=x_0a+y_0b$

ملاحظة:

يلاحظ مما سبق أن القاسم المشترك الأعظم لعددين غير معدومين هو العنصر الأصغر في مجموعة التراكيب الخطية الموجبة للعددين a , b.

ملاحظة:

إنّ تمثيل القاسم المشترك الأعظم لعددين كتركيب خطي ليس وحيداً.

فعلى سبيل المثال إن:

$$d=(15,24)=3$$

و:
$$3=15(-3)+24(2)$$

أو:
$$3=15(-27)+24(17)$$

أو:
$$3=15(5)+24(-3) \quad \ldots\ldots$$

نتيجة:

إذا كان $d=(a,b)$ وكان c قاسماً مشتركاً لـ b,a فإن: $c|d$

الإثبات:

بحسب المبرهنة السابقة نكتب $d=x_0a+y_0b$

فإذا كان $c|a \quad \wedge \quad c|b$ فإن $c|d$

بعض خواص القاسم المشترك الأعظم:

1. $(-a,-b)=(a,-b)=(-a,b)=(a,b)=(|a|,|b|)$ وضوحاً
2. $(a,1)=(1,a)=1 \quad \Rightarrow \quad (0,a)=|a|$ وضوحاً
3. $(a,m)=1 \wedge (b,m)=1 \Rightarrow (ab,m)=1$

4. إذا كان $(k,b)=1$ و $k|ab$ فإن $k|a$

5. إذا كان $(a,b)=1$ و $a|n$ و $b|n$ فإن $a.b|n$

6. إذا كان m عدداً صحيحاً موجباً، وكان $(a,b)=d$ فإن

$$D=(ma,mb)=md$$

تمهيدية:

إذا كان $0\le r<a$, $b=qa+r$ فإن $(a,b)=(a,r)$

الإثبات:

ليكن $(a,b)=d$ أي $d|a$ و $d|b$ ومنه $d|b-qa$ أي $d|r$ فهو قاسم مشترك لـ r,a.

ليكن c قاسماً للعددين r,a من الواضح أن $c|qa+r$ أي $c|b$ بما أن $c|a$ فإن $c|d$ بالتالي $c\le d$ أي $d=(a,r)$.

6- إيجاد القاسم المشترك الأكبر لعددين أو أكثر:

1. نقوم بتحليل كل عدد إلى عوامله الأولية ونكتبه على شكل جداء قوى.

2. يكون القاسم المشترك الأكبر هو جداء قوى العوامل المشتركة وبأصغر أس.

مثال:

أوجد القاسم المشترك الأكبر للعددين 180 , 168.

الحل:

نحلل العددين بالشكل التالي:

180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	

168	2
84	2
42	2
21	3
7	7
1	

نكتب العددين على شكل قوى:

$$180 = 2\times 2\times 3\times 3\times 5$$

$$168 = 2\times 2\times 2\times 3\times 7$$

إن القاسم المشترك الأكبر هو:

$$2\times 2\times 3 = 2^2\times 3$$

مثال:

أوجد القاسم المشترك الأكبر للأعداد $645, 4851, 1575$.

الحل: نحلل الأعداد بالشكل:

1575	3	4851	3	945	3
525	3	1617	3	315	3
175	5	539	7	105	3
35	5	77	7	35	5
7	7	11	11	7	7
1		1		1	

نكتب الأعداد على شكل قوى فنجد:

$$1575 = 3^2 \times 5^2 \times 7$$

$$4851 = 3^2 \times 7^2 \times 11$$

$$945 = 3^3 \times 5 \times 7$$

إذاً القاسم المشترك الأكبر للأعداد هو:

$$3^2 \times 7 = 63$$

7- خوارزمية إقليدس (Euclidean Algorithm)

هي وسيلة لإيجاد القاسم المشترك الأعظم لعددين صحيحين.

نعلـــم أن $(a,b) = (|a|,|b|)$ لذا لنفرض أن $b \geq a \succ 0$ ونشرح الخوارزمية كما يلي:

نجري عملية القسم المتتالية: $b = q_1 a + r_1 \quad , \quad 0 \leq r_1 < a$ فإذا كانت $r_1 = 0$ فإن $(a,b) = (a,0) = a$ وإذا كان $r_1 \neq 0$ نتابع القسمة:

$$a = q_2 r_1 + r_2 \quad , \quad 0 \leq r_2 < r_1$$

فإذا كانت $r_2 = 0$ فإن $(a,b) = (a,r_1) = (r_1,0) = r_1$ وإذا كان $r_2 \neq 0$ نكتب:

$$r_1 = q_3 r_2 + r_3$$

.....

ونتابع حتى نحصل على باقٍ صفري ونكتب:

$$r_{t-1} = q_{t+1} r_t + 0$$

عندئذ يكون:

$$(a,b) = (a,r_1) = (r_1,r_2) = \ldots\ldots = (r_t,r_{t+1}) = (r_t,0) = r_t$$

حيث: $b > r_1 > r_2 > \ldots\ldots > r_t > 0$

أي للبحث عن القاسم المشترك الأعظم لعددين موجبين نطبق خوارزمية القسمة بشكلٍ متتالٍ حتى نحصل على باق صفري ويكون الباقي الأخير قبل الباقي الصفري هو القاسم المشترك الأعظم الذي نبحث عنه.

مثال:

لنبحث عن القاسم المشترك الأعظم للعددين $(12378,3054)$.

$$12378 = 4 \cdot (3054) + 162$$

$$3054 = 18 \cdot (162) + 138$$

$$162 = 1 \cdot (138) + 24$$

$$138 = 5 \cdot (24) + 18$$

$$24 = 1 \cdot (18) + 6$$

$$18 = 3 \cdot (6) + 0$$

أي: $g\ c\ d\ (12378,3054) = 6$

ملاحظة:

يلاحظ من خوارزمية إقليدس أن البواقي المتتالية يمكن أن تكتب كتركيب خطي للعددين a,b حيث نجد:

$$r_1 = a - q_1 b$$

$$r_2 = b - r_1 q_2 = -q_2 a + (1 + q_1 q_2) b$$

وبالتالي يمكن استخدام هذه الخوارزمية لتعيين أمثال التركيب الخطي للقاسم المشترك الأعظم لعددين و ذلك بأن نبدأ من الخطوة الأخيرة في الخوارزمية ونوضح ذلك في المثال السابق فنكتب:

$$\begin{aligned}
6 &= 24 - 18 \\
&= 24 - (138 - (5)\cdot(24)) \\
&= (6)\cdot(24) - 138 = 6\cdot(162 - 138) - 138 \\
&= (6)\cdot(162) - (7)\cdot(138) = (6)\cdot(162) - 7\cdot(3054 - (18)\cdot(162)) \\
&= (132)\cdot(162) - (7)\cdot(3054) \\
&= 132(12378 - (4)\cdot(3054)) - (7)\cdot(3054) \\
&= 132(12378) + (-535)(3054)
\end{aligned}$$

ومنه:

$$6 = g\,c\,d\,(12378,3054) = x\cdot 12378 + y\cdot 3054 \;\; ; \;\; x = 132, y = -535$$

ملاحظة:

يمكن الاستفادة من خواص القاسم المشترك الأعظم بتبسيط خطوات خوارزمية إقليدس، وعلى سبيل المثال يمكن أن نكتب:

$$g\,c\,d(12,30) = 3\times g\,c\,d(4,10) = (3)\times(2)\times g\,c\,d(2,5) = 6$$

8- العددان الأوليان فيما بينهما

تعريف:

إذا كان القاسم المشترك الأعظم لعددين صحيحين a,b يساوي الواحد فإننا نسمي العددين عددين أوليين نسبياً (relatively prime)

مثال:

1) إنّ مجموعة قواسم العدد 6 هي $\{1,2,3,6\}$

مجموعة قواسم العدد 35 هي $\{1,5,7,35\}$

وعليه فالقاسم المشترك للعددين 6 , 35 هو الواحد فنقول إن العددين 35,6 أوليّان فيما بينهما.

2) وإذا أخذنا قواسم العدد 28 فنجدها $\{1,2,4,7,14,28\}$.

ومجموعة قواسم العدد 65 هي $\{1,5,13,65\}$

فالقاسم المشترك الأكبر هو الواحد أيضاً نقول إن العددين 28 , 65 أوليّان فيما بينهما.

مبرهنة:

يكون العددان a,b غير المعدومين أوليين نسبياً فيما بينهما إذا وفقط إذا وجد عددان صحيحان x,y بحيث يكون:

$$ax+by=1$$

الإثبات:

إذا كان $(a,b)=1$ فحسب المبرهنة نجد أن:

$$1 = ax + by \qquad x, y \in Z$$

ومن ناحية أخرى إذا كان $ax+by=1$ حيث $x, y \in Z$ وكان $(a,b)=d$ فإنّ $d|a \ \wedge \ d|b$ وبالتالي $d|ax+by$ أي $d|1$ ومنه $d=1$.

نتيجة:

إذا كان $(a,b)=d$ وكان $b=b_0 d \quad \wedge \quad a=a_0 d$ فإن $(a_0,b_0)=1$

الإثبات:

بما أن $(a,b)=d$ فيمكن كتابة العلاقة $ax+by=d$ وبتقسيم طرفي العلاقة على d نجد: $\frac{a}{d}x+\frac{b}{d}y=1$

وحسب المبرهنة يكون $\left(\frac{a}{d},\frac{b}{d}\right)=1$ أي $(a_0,b_0)=1$.

9- القاسم المشترك الأعظم لمجموعة أعداد صحيحة

تعريف:

لتكن $a_i \ , i=1,2,3,\ldots,n$ أعداداً صحيحة ليست جميعها أصفاراً.

نقول إن d هو القاسم المشترك الأعظم لها ونكتب:

$$d = gcd(a_1,\ldots,a_n) = (a_1,a_2,\ldots,a_n)$$

إذا وفقط إذا كان:

1) $d>0$.

2) $d|a_i \quad 1\le i\le n$.

3) إذا كان $c|a_i \quad 1\le i\le n$ و $c>0$ فإن $c\le d$.

مبرهنة:

إذا كان:

$$d=(a_1,a_2,\ldots,a_{n-1},a_n)$$

و

$$d_1=(a_1,a_2,\ldots,a_{n-2},(a_{n-1},a_n))$$

فإن: $d=d_1$

الإثبات:

من الفرض نلاحظ أن $d|a_i$ $i=1,2,\ldots,n$ أي $d|(a_{n-1},a_n)$.

ومنه $d|d_1$ من جهة أخرى $d_1|a_i$ $i=1,2,\ldots,n-2$ و $d_1|(a_{n-1},a_n)$ أي $d_1|a_n$ و $d_1|a_{n-1}$ و منه $d|a_i$ $i=1,2,\ldots,n$ و منه $d_1|d$ بالتالي نجد $d=d_1$.

مثال:

لإيجاد $gcd(256,112,72)$ نكتب:

$$(256,112,72)=(256,(112,72))=(256,8)=8$$

تعريف:

إذا كان القاسم المشترك الأعظم للأعداد غير الصفرية معاً $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ يساوي الواحد نقول إن الأعداد a_i أولية نسبياً فيما بينها.

تعريف:

إذا كان $(a_i,a_j)=1$ $\forall i,j=<1,n>$ فإننا نقول إن الأعداد a_i $i=1,2,\ldots,n$ أولية نسبياً مثنى مثنى.

نتيجة:

إذا كانت الأعداد غير الصفرية معاً a_i $i=1,2,\ldots,n$ أولية نسبياً مثنى مثنى. فإنها أولية نسبياً والعكس غير صحيح.

مثال:

إن الأعداد 6,14,21 أولية نسبياً لأن: $(6,14,21)=1$ ولكنها ليست أولية نسبياً مثنى مثنى لأن:

$$(14,21)=7,\ (6,21)=3,\ (6,14)=2$$

مثال:

إن الأعداد 6,25,77 أولية نسبياً مثنى حيث هي أولية نسبياً لأن:

$$(6,25,77)=(6,\ (25,77))=(6,1)=1$$

10- المضاعف المشترك الأصغر

مضاعفات عدد:

إنّ مضاعفات العدد 6 هي: $\ldots,24,18,12,6,0$

أي هي نواتج ضرب 6 بالأعداد $\ldots,4,3,2,1,0$

وعليه يكون العدد مضاعفاً لعدد مفروض إذا كان العدد يقبل القسمة على هذا العدد المفروض مثلاً:

348 مضاعف للعدد 6 لأن $348\div 6=58$ وباقي القسمة صفر ولكن 161 ليس مضاعفاً للعدد 6 لأن $161\div 6=26$ وباقي القسمة 5 أي لأن 161 لا يقبل القسمة على 6 بدون باقٍ.

تعريف:

لتكن a_i حيث $i=1,\ldots,n$ أعداداً صحيحة غير صفرية نقول إن m مضاعف لهذه الأعداد إذا كان $a_i|m \quad , \quad \forall i=1,\ldots,n$ ونقول إن L هو المضاعف المشترك الأصغر لها ونكتب:

$$lcm(a_1,\ldots,a_n)=l$$

إذا وفقط إذا كان:

1) $L>0$.

2) $a_i|L \quad , \quad \forall i=1,2,\ldots,n$.

3) إذا كان $m>0$ و $a_i|m \quad , \quad i=1,2,\ldots,n$ فإن $L\le m$ في الحقيقة إذا كانت S مجموعة الأعداد الموجبة التي هي مضاعفات لكل من الأعداد غير الصفرية $a_i \quad , \quad i=1,\ldots,n$ فإن هذه المجموعة غير خالية، وبحسب مبدأ الترتيب الحسن فيها عنصر أصغر ويكون هذا العنصر المضاعف المشترك الأصغر للأعداد a_i.

مثال:

$$lcm(9,8)=72 \quad , \quad lcm(6,15)=30$$

11- المضاعفات المشتركة لعددين أو أكثر

إن مضاعفات العدد 12 هي: $\ldots,84,\underline{72},60,48,\underline{36},24,12,\underline{0}$

ومضاعفات العدد 18 هي $\ldots,90,\underline{72},54,\underline{36},18,\underline{0}$

ونلاحظ مجموعة المضاعفات المشتركة للعددين 18,12 هي:

$$\{0,36,72,108,144,180,\ldots\}$$

لنأخذ الآن مضاعفات العدد 15 فهي $\underline{0},15,30,45,\underline{60},75,90,105,\underline{120},\ldots$

ومضاعفات العدد 30 هي $\underline{0},30,\underline{60},90,\underline{120},\ldots$

ومضاعفات العدد 20 هي $\underline{0},20,40,\underline{60},80,100,\underline{120},\ldots$

إذاً مجموعة المضاعفات المشتركة للأعداد 30,20,15 هي:

$$\{0,60,120,180,240,\ldots\}$$

إيجاد المضاعف المشترك الأصغر لعددين أو أكثر بالتحليل إلى العوامل الأولية:

1. نحلل كلاً من هذه الأعداد إلى عوامله الأولية.
2. يكون المضاعف المشترك الأصغر لهذه الأعداد هو جداء قوى العوامل المشتركة والعوامل غير المشتركة بأكبر أس ظهر عند تحليلها.

مثال:

أوجد المضاعف المشترك الأصغر للعددين 18,12.

الحل:

نحلل العددين فنجد:

$$18 = 2^2 \times 3$$
$$12 = 2 \times 3^2$$

لنأخذ العوامل المشتركة وغير المشتركة بأكبر أس فنجد العددين $3^2, 2^2$

إذاً جداؤهما يكون المضاعف المشترك الأصغر وهو $3^2 \times 2^2 = 9 \times 4 = 36$

فهو العدد 36 وقد وجدنا سابقاً أن العدد 36 هو مضاعف مشترك أصغر.

مثال:

أوجد المضاعف المشترك الأصغر للأعداد 15,20,30.

نلاحظ أن:

$$15 = 3 \times 5$$

$$30 = 2 \times 5 \times 3$$

$$20 = 2^2 \times 5$$

لنأخذ الأعداد المشتركة وغير المشتركة بأكبر أس فنجد:

$$2^2 \times 3 \times 5 = 60$$

إذاً العدد 60 هو المضاعف.

وقد رأينا في التمرن السابق أن العدد 60 هو مضاعف مشترك أصغر.

مثال:

أوجد المضاعف المشترك الأصغر للعددين 120,80.

أولاً: عن طريق كتابة مضاعفات كلٍّ من العددين.

ثانياً: بتحليل كل منهما إلى عوامله الأولية.

الحل:

أولاً:

مضاعفات العدد 80 هي: $\underline{0},80,160,\underline{240},320,\underline{480},\ldots$

و مضاعفات العدد 120 هي: $\underline{0},120,\underline{240},360,\underline{480},\ldots$

إذاً المضاعف المشترك الأصغر هو 240.

ثانياً: لنقوم بتحليل كلٍ من العددين فنجد:

$$80 = 2^4 \times 5$$

$$120 = 2^3 \times 5 \times 3$$

لنأخذ الأعداد المشتركة وغير المشتركة بأكبر أس فنجد: $2^4 \times 5 \times 3 = 240$

Damascus University

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الفصل الثامن

الربح البسيط (الفائدة البسيطة)

1-مقدمة

يقترض بعض الناس مبالغ من المصارف ليقوموا بأعمال تجارية أو صناعية أو زراعية ويأخذ المصرف منهم ربحاً سنوياً بسيطاً بنسبة معينة (9% مثلاً). تسمى هذه النسبة: السعر.

فإذا اقترض شخص 1000 ل.س لمدة سنة فإن عليه أن يعيدها بعد سنة مضافاً إليها الربح (الفائدة) وقدره:

$$\frac{9}{100}\times 10000 = 900 \text{ ل.س} \quad \text{(الربح = المبلغ × السعر)}$$

أي أن يدفع $10000+900=10900$ ل.س.

أما إذا اقترض الشخص 10000 ل.س لمدة 3 سنوات فإن الربح عن 3 سنوات هو: $3\times\frac{9}{100}\times 10000 = 2700$ ل.س.

(الربح = المبلغ × السعر × عدد السنوات)

وعلى العكس يمكن أن يودع الشخص في المصرف مبلغاً من المال بربح بسيط سعره (7%) مثلاً فيقدم له المصرف في نهاية 5 سنوات ربحاً قدره:

$$5\times\frac{7}{100}\times 10000 = 3500 \text{ ل.س}$$

فيأخذ ذلك الشخص : $10000+3500=13500$ ل.س.

نسمي ناتج جمع المبلغ + الربح : الجملة أو البالغ.

ونسمي المبلغ أحياناً : رأسمال القرض أو رأس المال.

رصيد الشخص في يومٍ ما هو جملة رأس المال + الربح حتى ذلك اليوم.

مثال:

أودع رجل 8700 ل.س في مصرف يعطي فائدة سنوية سعرها 8 % احسب ربح الرجل بعد سنتين و 4 أشهر وجملة ما يقبضه.

الحل:

مدة الإيداع = $2\frac{4}{12}$ سنة = $2\frac{1}{3}$ = $\frac{7}{3}$ سنة.

الربح = المبلغ × السعر × الزمن

$$= 8700 \times \frac{8}{100} \times \frac{7}{3} = 1624 \text{ ل.س}$$

جملة ما يقبضه الرجل في نهاية ذلك الزمن

$$8700 + 1624 = 10324 \text{ ل.س}$$

مثال:

اقترض رجل مبلغ 12000 ل.س من مصرف بربح بسيط سعره 9 %.

احسب جملة ما يدفعه للمصرف بعد 3 سنوات و 75 يوماً.

الحل:

الربح السنوي = $12000 \times \frac{9}{100} = 1080$ ل.س

الربح عن 75 يوماً = $1080 \times \frac{75}{365}$ (تعد السنة 360 يوماً)

= 225 ل.س

الربح = $(1080 \times 3) + 225 = 3465$ ل.س

جملة ما يدفعه الرجل = 12000 + 3465 = 15465 ل.س.

مثال:

اقترض فلاح من المصرف الزراعي مبلغ 10000 ل.س بالربح البسيط وبعد 4 سنوات طالبه المصرف بجملة قدرها 11400 ل.س

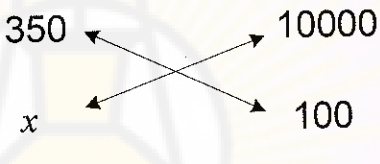
ما سعر الفائدة (الربح) الذي يأخذه ذلك المصرف؟

الحل:

الربح عن السنوات الأربع = 11400 - 10000 = 1400 ل.س

الربح السنوي = 1400 ÷ 4= 350 ل.س

المبلغ الربح السنوي



$$3.5 = \frac{100 \times 350}{10000} = x$$

إذاً سعر الفائدة (سعر الربح البسيط) 3.5 %.

مثال:

أودع شخص مبلغ 25000 ل.س في مصرف يدفع فائدة بسيطة سعرها السنوي 9 % وبعد مدة وجد أن رصيده في المصرف 34375 ل.س

احسب الزمن الذي مضى على إيداع المبلغ في ذلك المصرف.

الحل:

الربح = 34375 – 25000 = 9375 ل.س

الربح في كل سنة = $\frac{9}{100} \times 25000 = 2250$ ل.س

عدد السنوات = $\frac{9375}{2250} = \frac{375}{90} =$ (اختصرنا على 25)

نختصر على 5 ثم على 3 فنجد : عدد السنوات = $\frac{75}{18} = \frac{25}{6} = 4\frac{1}{6}$

لكن $\frac{1}{6}$ السنة = $\frac{1}{6} \times 12$ شهراً = 2 شهراً

فالمدة 4 سنوات وشهران.

مثال:

وضع مبلغ في مصرف يعطي ربحاً بسيطاً سعره: 8 % فصارت جملته بعد 3 سنوات 52452 ل.س. احسب المبلغ.

الحل:

كل 100 ل.س تربح في 3 سنوات : $3 \times 8 = 24$ ل.س

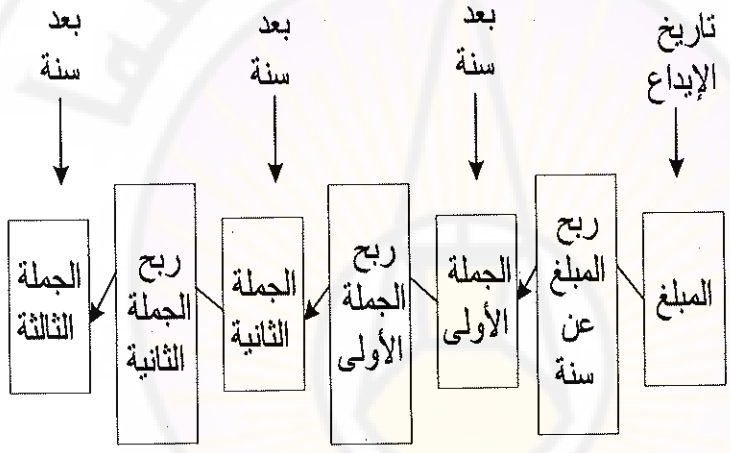
جملة 100 ل.س ليرة هي 124 ليرة.

المبلغ	الربح السنوي
124	100
52452	x

$$x = \frac{100 \times 52452}{124} = 42300$$ ل.س

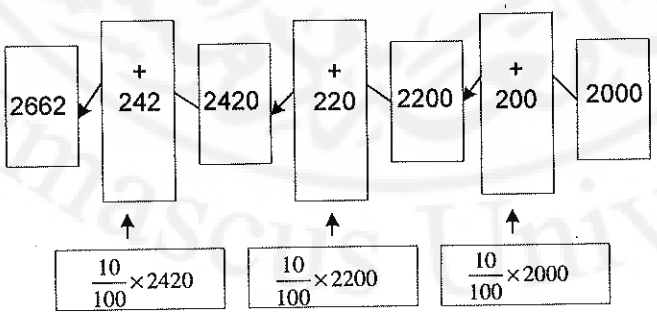
2- الربح المركب (الفائدة المركبة)

رأينا أن الربح البسيط يحسب عن السنة الثانية والثالثة و ..... من سنوات الإيداع بمثل ما يحسب عن السنة الأولى (فهو عن كل سنة يساوي المبلغ × السعر). لكنّ هناك نوعٌ ثانٍ من الربح يدعى الربح المركب وفيه يضاف ربح السنة الأولى إلى رأس المال فتكون جملتهما رأس مال للسنة الثانية. ثم يضاف الربح عن السنة الثانية إلى الجملة السابقة فتتكون جملة جديدة تعد رأس مال للسنة الثالثة وهكذا.



مثال:

إذا كان المبلغ 2000 ل.س وسعر الربح المركب 10%



مثال:

أ- أودع فراس 25000 ل.س مصرفاً يدفع ربحاً مركباً سعره 8 % أوجد جملة مبلغه في نهاية سنتين.

ب- وأودعت ريم 25000 ل.س في مصرف يدفع ربحاً بسيطاً سعره 8 % أوجد جملة مبلغها في نهاية سنتين.

ت- وازن الجملتين

الحل:

ربح فراس عن السنة الأولى $25000 \times \frac{8}{100} = 2000$ ل.س

جملة مبلغ فراس في نهاية السنة الأولى

$25000 + 2000 = 27000$ ل.س

ربح فراس عن السنة الثانية $27000 \times \frac{8}{100} = 2160$ ل.س

جملة مبلغ فراس في نهاية السنة الأولى

$27000 + 2160 = 29160$ ل.س

ربح ريم عن سنتين $= 2 \times \frac{8}{100} \times 25000 = 4000$ ل.س

جملة مبلغ ريم في نهاية سنتين

$25000 + 4000 = 29000$ ل.س

جملة مبلغ فراس أكبر من مبلغ ريم بمقدار 160 ل.س.

3- المتوسط الحسابي

- يبين الجدول الآتي أعمار أفراد أسرة:

الاسم	محمد	إسعاف	علي	عمر	لينة
العمر (بالسنوات)	76	72	39	37	36

إن مجموع أعمارهم= 76+72+39+37+36=260

الوسط الحسابي لأعمارهم= 260 ÷ 5 =52 سنة.

- يبين الجدول الآتي أعمار الأطفال في إحدى رياض الأطفال:

عدد الأطفال	عمر كل منهم	مجموع أعمارهم
25	3	$75 = 3 \times 25$
28	4	$112 = 4 \times 28$
المجموع $\frac{25}{78}$	5	$\frac{125}{312} = 5 \times 25$

متوسط أعمار التلاميذ= 312 ÷ 78 = 4 سنين.

الوسط الحسابي لعدة مقادير من طبيعة واحدة هو (مجموع تلك المقادير)÷ عددها

ملاحظة:

1) يسمى الوسط الحسابي أيضاً المتوسط الحسابي، فنقول مثلاً: متوسط أعمار التلاميذ، ونقصد الوسط الحسابي لها.

2) مجموع المقادير= عدد المقادير × الوسط الحسابي

تمارين ومسائل

1) اقترض رجل مبلغ 80000 ل.س من مصرف يأخذ ربحاً مركباً سعره السنوي 9 % كم يجب أن يدفع الرجل في نهاية سنتين ؟

2) أودعت ضَحوك مبلغ 120000 ل.س مصرفاً يدفع ربحاً مركباً سعره السنوي 8 % كم يكون رصيدها بعد سنتين ؟

3) مع علي مبلغ 40000 ل.س يريد إيداعه مصرفاً لمدة سنتين، وقد وجد مصرفاً يدفع ربحاً مركباً سعره السنوي 8 %. ومصرفاً آخر يدفع ربحاً بسيطاً سعره السنوي 8.5 %. فأيهما يحقق له فائدة أكبر؟ وما الفرق ؟

4) اقترض فقير من مُرابٍ مبلغ 6000 ل.س فإذا كان المرابي يأخذ ربحاً مركباً سعره السنوي 18 % فكم يجب أن يدفع ذلك الفقير في نهاية سنتين ؟ وما الزيادة التي اضطر لدفعها ؟

5) اشترى مهندس حاسوباً حديثاً قيمته 50000 ل.س دفع من قيمته 14000 ل.س على أن يدفع الباقي بعد سنتين وعلى أن يدفع للبائع ربحاً مركباً سعره السنوي 15 % فكم يجب أن يدفع في نهاية السنتين؟ وكم سيكون قد دفع في المرتين معاً ؟

الفصل التاسع
كيف نُعلّم الرياضيات

1- أهمية الرياضيات

تكمن أهمية الرياضيات من الناحية النظرية في أنّها النتاج الأرقى للتفكير البشري، وأهم وسائل تقدمه ورقيه في الوقت نفسه. لذا ارتبط التقدم في التفكير بتطورها، فالعقل يبحث ويفكر ويكتشف المعلومات الرياضية ويطوعها لأغراضه تارة، ويخضع في نظرته للأشياء والموضوعات من حوله في هذا العالم لقوانينها وعلاقاتها وصيغها تارة أخرى.

ومن خلال التفاعل بين عقل الإنسان والفكر الرياضي مهّد السبيل للثورات العلمية والتقنية المتلاحقة. والذي جعل الرياضيات تؤثر في التفكير البشري بصورة عميقة وشاملة هو صدق الحقائق الرياضية، وعدم تأثرها برأي فرد أو سلطة. فالعلاقات الرياضية ونظرياتها وقوانينها تؤدي نفس الغرض وتخدم نفس المعنى في أية دولة، فلا تفقد قوتها ولا فعاليتها في أي مكان كان، ولا تحت تأثير سلطة ما، لذلك تركت بصماتها القوية في تطور التفكير.

وتتجلى أهمية الرياضيات بالإضافة إلى دورها في النهضة العلمية الحاصلة الآن في عالمنا، في دورها الميداني، حيث تشابكت وتداخلت مع العلوم الفيزيائية والكيميائية والعلوم الإجتماعية والإنسانية وإدارة الأعمال والسياسة. وتُستخدم الرياضيات في عمليات تحليل وتقويم الرأي العام والعلاقات الدولية ومناهج البحث العلمي على اختلافها وفي جميع الميادين والحقول.

كذلك امتدت تطبيقاتها إلى تصميم الحواسب الإلكترونية ووسائل الاتصال ونظريات التعلم. فالرياضيات كما يراها المربون والمهتمون بتدريسها وسيلة هامة لتنظيم الأفكار وفهم البيئة المحيطة والسيطرة عليها.

وتحتل الرياضيات مكانة هامة في مختلف جوانب حياتنا، وفي كل موقف من المواقف التي نواجهها يومياً، فهي ذات طبيعة وظيفية، لأن المهندس والطيار يحتاج أن يتعلم المثلثات مثلاً، والصيدلي أو الطبيب يحتاج أن يتعلم بعض حقائقها، سواء أكان جبراً أم هندسة أم إحصاء.

وفي ضوء هذه الأهمية التي تكتسبها الرياضيات على الصعيد النظري والعملي في الحياة بصورة عامة، وفي التعليم بصورة خاصة، تبدو الحاجة ماسة إلى إدخال المزيد من المعلومات الرياضية في المنهج الدراسي من أجل تنمية عقول الناشئة، ومن أجل إعداد المتخصصين.

ونظراً لكثرة الفروع الرياضية وتعددها لا بد من التفكير في صياغة موضوعاتها على شكل هرم من القاعدة إلى الرأس ليساعد ذلك على ترتيب معلوماتها في مستويات متدرجة تقابل مستويات النمو وتدرجاته، وتستجيب من حيث ترتيبها لمستويات التعليم وصفوفه في كل مرحلة.

وهكذا يمكن القول إن الكثير مما وصل إليه عالمنا من تقدم لم يكن ليتحقق لولا الرياضيات.

2-تعريف الرياضيات

الرياضيات مجال من مجالات النشاط البشري، فهي منهج ووسائل تدرس الطبيعة والمجتمع، كما أنها لغة تستخدم رموزاً وتعابيرَ شائعة تقريباً؛ لتسهيل عملية التواصل الفكري بين الأفراد. وقد عرف الرياضيون الرياضيات تعريفاتٍ كثيرة نذكر منها:

يعرف **جلبرت Gilbert** الرياضيات " الرياضيات لعبة نلعب بها وفق قواعد بسيطة مستخدمين لذلك رموزاً ومصطلحات ليس لها بحد ذاتها أية أهمية خاصة ".

وعرف **برتراندرسل Rusell** الرياضيات أنها " المادة التي يصعب دوماً أن نعرف الشيء الذي يدور الحديث حوله ويصعب معرفة ما إذا كان ما نقوله صحيحاً أو غير صحيح ".

لقد تطورت الرياضيات عبر العصور وتراكمت المعلومات الرياضية في المجالات المختلفة، ونظراً لأن الرياضيات المعاصرة أخذت منحى جديداً في التطور عن الرياضيات في العهود السابقة، فقد أدى ذلك إلى الحاجة للتمييز بين نوعين من الرياضيات، الرياضيات التقليدية والرياضيات المعاصرة، لذا كان لا بد من تناول كل منهما بالتعريف.

أما **الرياضيات التقليدية** فيعرفها **سيدهو** أنها " ذلك العلم الذي يتخذ الكم والفراغ مجالاً لبحثه، ويتعامل مع الحقائق والعلامات الكمية والمسائل المتعلقة بالأشكال المستوية " .

وعرفها **سوير Sawyer** أنها " تصنيف جميع الأنماط ودراستها. ويعرف النمط أنه هو الشيء الوحيد الثابت نسبياً في عالم متغير " .

أما **الرياضيات المعاصرة** فيقول عنها **روينتري Rowntree** في كتابه قاموس التربية : " الرياضيات المعاصرة، يحمل هذا الاسم شعاراً لحركة في التربية، حاول أتباعها منذ أوائل الستينيات، تعديل المناهج الرياضية بما فيها طرق تدريسها على أساس إعطاء أهمية أكبر للتأكيد على فهم أفضل للمفاهيم والبنى الرياضية، ولاهتماماً أقل للحسابات أو تذكر النظريات والقوانين، وتتضمن محتويات هذه المناهج المجموعات والمصفوفات والمتجهات والإحصاء ".

3-طبيعة موضوعات الرياضيات

إن معرفة معلم الرياضيات لطبيعة الموضوعات الرياضية والتمكن منها شرط أساسي للقيام بمهمته الرئيسة في مساعدة التلاميذ على تفهم طبيعة تلك

الموضوعات واستيعابها، وإثارة نشاطهم لمعرفة طرائق استخدامها في المواقف التي تواجههم في تعلمهم لمادة الرياضيات.

تتصف موضوعات الرياضيات بأنّ قضاياها ذات **طبيعة استدلالية متكاملة** وتماسك منطقي صارم، وتتطلب خصائص وقدرات معينة للتعامل مع مفاهيمها ومهاراتها وتعميماتها. ومن أهم الخصائص الضرورية لذلك الدقة الكبيرة في التفكير المنطقي والمحاكمة، والتعليل والمنطق، وتركيز الجهد والنشاط.

إنّ التسلسل والتنظيم الهرمي لمفاهيم الرياضيات، تستدعي من الدارس أن يقوم بالموازنة والتحليل والتركيب واستخدام معلومات سابقة والقيام بممارسات منطقية لمعالجة قضايا الرياضيات ذات الطبيعة **التجريدية** المتكاملة، والتسلسل الطويل الذي يكوّن منهجها، حيث إنّ هذا التسلسل من النوع نفسه و الأسلوب نفسه.

كما أنّ الرياضيات ذات **طبيعة تركيبية** تبدأ من البسيط إلى المركب، وذات **طبيعة تراكمية** أيضاً تعتمد فيها الموضوعات التالية (الجديدة) على الموضوعات السابقة.

كما أنّ موضوعاتها تحتاج إلى قدرة لإدراك الأبعاد والمساحات والحجوم والأشكال والتنظيم الدقيق بين مفاهيمها.

4-أهداف تعليم الرياضيات

عندما يريد الإنسان القيام بعمل ما فهو يبغي من وراء ذلك الوصول إلى أهداف رسمها ويريد تحقيقها. وإذا كانت الأهداف ضرورية لتجنب العشوائية في عمله، فإن وضع الأهداف ضروري لتلك النشاطات العامة كالتعليم مثلاً، إذ إن تحديد الأهداف خطوة أساسية لبناء المنهاج التربوي وتطوير طرائق التدريس وتعيين التقانات. كما أنه لازم لعملية التقويم السليم، وبالتالي، فإن معرفة الأهداف

تساعد على تخطيط العملية التربوية. فهي المعيار الأساسي في اختيار المواد التعليمية، وبناء الاختبارات التقويمية.

ونعرف الأهداف أنها مقاصد يُعبَّر عنها بعبارات تصف تغيرات مقترحة نريد إحداثها في المتعلم، ونستخدم لتحقيقها وسائل متعددة.

تشكل الرياضيات جانباً مهماً من المناهج المدرسية خلال مراحلها المختلفة، وتتبع هذه الأهمية مما تقدمه للمتعلم، من معارف ومهارات واتجاهات وخبرات متنوعة وطرائق في التفكير.

أ- الأهداف العامة لتعليم الرياضيات:

إن أهداف تدريس الرياضيات متنوعة وعديدة جداً، نذكر منها ما يلي:

a. **تزويد التلاميذ بما يلزم من معلومات رياضية، لمواجهة ظروف الحياة المتغيرة.** فعصرنا عصر المقاييس والإحصاءات والرسوم البيانية والأشكال الهندسية، والجداول ودرجات الحرارة والمعاملات التجارية والوثائق... وكل هذه الأمور تلزمها معرفة ليست قليلة في الرياضيات.

b. **مساعدة التلاميذ على اكتساب قدر كافٍ من الحقائق الرياضية.** وتعريفهم باللغة الرياضية (رموز مصطلحات،...) وتنمية قدرتهم على فهم وتحليل العلاقات الكمية والعلاقات في الفراغ؛ لفهم البيئة التي يعيش فيها التلاميذ، وإعطائهم قدراً كافياً من المعرفة لمتابعة دراستهم في الرياضيات، وتطبيق هذه المعرفة في مواقف أخرى.

c. **فهم البيئة المنطقية للمعرفة الرياضية، ومساعدة التلاميذ على تنمية تفكيرهم المنطقي، والتعرف إلى بنى جبرية وهندسية مختلفة.**

d. **تمكين التلاميذ من التعرف إلى مجالات التطبيق العملي للرياضيات، وتنمية قدراتهم على التمييز بين البيانات ذات العلاقة بالمسألة من** غيرها، وتعويد التلاميذ على تمثيل البيانات المعطاة بأشكال ملائمة لتساعده على فهم المسائل وحلها.

e. **تنمية الاتجاهات الايجابية نحو الرياضيات. وتنمية التذوق الجمالي لها، ومتعة العمل بها.** ومساعدة التلاميذ على التعرف إليها بوصفها موضوعاً حياً متطوراً على الدوام، يتم بناؤه وتطويره من خلال تراكم الأعمال والخبرات الإنسانية.

f. **تطوير طرائق مناسبة لتعلم الرياضيات، وإيصال المعرفة الرياضية للآخرين.** وتشجيع التعلم الذاتي للتلميذ، والمحافظة على استمراريته، وحثه على المشاركة في كتابة أفكاره الرياضية بلغة دقيقة سليمة، وطرح الأسئلة الهادفة.

g. **اكتساب التلاميذ الثقة بالنفس، والمبادرة في العمل، والمثابرة والصبر والتأني، وإثارة الفضول العلمي لديهم.**

ب- الأهداف الخاصة لتدريس الرياضيات (في التعليم الأساسي):

لا يقتصر تحديد الأهداف، على تحديد أهداف عامة للرياضيات فحسب، بل لابدّ أيضاً من تحديد أهداف لكل فرع من فروعها. وسنذكر فيما يلي هذه الأهداف:

a. أن يمارس التلميذ الفكر الرياضي والمحاكمة المنطقية.

b. أن يكتسب التلميذ المهارات الحسابية والهندسية والجبرية.

c. أن يتمكن من توظيف الرياضيات في معالجة المواقف الحياتية وفهم المشكلات وتحليلها واستخلاص النتائج منها.

d. أن يستخدم لغة الرياضيات كالأسلوب الاستنتاجي والاستقرائي والجمعي.

e. أن يستخدم لغة المجموعات وبعض العمليات المرتبطة بها وخواص تلك العمليات ليطوعها في القضايا الهندسية والبنى الجبرية.

f. أن يتعرف الفضاء الذي يعيش فيه ويدرك العلاقة بين المستوي والفراغ.

g. أن يميز الوحدات الأساسية لقياس الزمن، الطول، المساحة، الحجم، الوزن....

h. أن يستطيع الإلمام بكيفية جمع البيانات الإحصائية وترتيبها وتمثيلها.

i. أن يستنتج حقائق رياضية جديدة بالاعتماد على خبراته.

j. أن يشارك في إجراء الممارسات المنطقية.

k. تنمية التفكير الهندسي، وإيجاد الألفة بين التلاميذ وبين المكان والعلاقات المكانية.

l. أن يكتسب التلميذ المعلومات المناسبة للبحث في الأشكال الهندسية وخواصها وفق مراحل متدرجة تبدأ من الرسم والقياس.

m. أن يستخدم الحاسوب كلما أتيح له ذلك.

n. أن يتعلم التلميذ عدة أساليب في معالجة المسائل كالطريقة التركيبية والتحليلية.

o. أن يتعلم التلميذ استخدام التفكير الإبداعي من خلال دراسة الرياضيات.

5-كيفية تعليم الرياضيات

تتباين طرائق التدريس تبعاً لتباين الأهداف المرسومة لتدريس الرياضيات، واستجابة لاختلاف المستويات العقلية للتلاميذ وفروقهم الفردية.

وجاءت الطرائق الحديثة لتركز في المقام الأول على الفهم، وعلى أن يستكشف التلميذ بنفسه الحلول للمسائل. ثم برز أسلوب جديد في التدريس هو أسلوب حل المشكلات الذي يعتبر المسألة الرياضية مشكلة ينبغي معرفة معطياتها ومتطلباتها والخطرات اللازمة لحلها.

كذلك ظهر أسلوب آخر يقوم على أساس استخدام عمليتي التشخيص والعلاج في التدريس.

لكن بغض النظر عن الطريقة أو الأسلوب المتبع في تدريس الرياضيات، فإن الطرائق الحديثة جميعها تطالب المعلم بعدد من المهام ذات الصلة بالتخطيط لتدريس وتنظيم المادة وتقديمها، إلى جانب ملاحظة تلاميذه وتتبع ما يقومون به. وأول هذه النشاطات أن يحدد الأهداف التي يريد الوصول إليها بالنسبة للوحدات التعليمية للمقرر الدراسي. ثم صوغ الأهداف التعليمية المراد الوصول إليها بعبارات سلوكية إجرائية، لأن ذلك يفيد في تخطيط عملية التعلم، وفي توجيه جهود التلاميذ وتقويم أدائهم، ويزود المعلم بمؤشرات لاختيار طريقة التدريس المناسبة، ويعطيه فرصة ليقوّم نفسه وعمله.

لقد أجريت بحوث عدة للدراسة حول أثر الاستراتيجيات في تدريس المفاهيم والتعميمات والمهارات والمسائل الرياضية، الهدف منها وضع هذه الاستراتيجيات تحت تصرف المعلّم لتطبيقها في غرفة الصف، بغية الاستفادة منها في توجيه مسار عمله وخط سيره في حصة الدرس. وسنقدم استراتيجيات التدريس هذه فيما يلي:

أ- تعليم المفاهيم الرياضية

ليست الرياضيات مجرد مجموعة من العمليات والمهارات يقوم بها التلميذ، بل هي بناء محكم من المفاهيم والقواعد والتعميمات، إلى جانب أنساق من المهارات والعمليات الحركية والعقلية المقابلة لها. ولا بد من التوقف عند أحجار هذا البناء الرياضي المحكم المؤلف من الحقائق والمفاهيم والتعميمات والنظريات، والخوارزميات والمهارات الرياضية، والمسائل الرياضية، للتعرف إليها وإلى خواصها وخاصة **المفهوم**، لأن بقية أحجار البناء تعتمد عليه من أجل فهمها واكتسابها.

I. تعريف المفهوم:

يستخدم المعلمون كلمة مفهوم بشكل غير واضح وغير محدد، فهم يستخدمون هذا المصطلح باعتباره شيئاً من المعرفة، يريدون أن يعلموه.

لا يوجد اتفاق بين الناس على طبيعة المفهوم، فكل منهم يميل إلى التركيز على خصائص معينة له، يعطيها الأولوية دون سواها عند غيره. لذلك اختلف الباحثون في تعريفه. فمنهم من عرفه على أساس خصائصه' ومنهم من عرفه على أساس المسلمات.

المفهوم بحسب خصائصه : **فكرة مجردة تشير إلى فئة من العناصر (الأفكار أو الأشياء) لها صفات أساسية مشتركة تميزها من غيرها من العناصر وتعطي هذه الصفات لمصطلح خاص بالرياضيات معناه الرياضي مفهوماً أولياً.**

مثال:

المثلث هو مضلع ذو ثلاثة أضلاع وثلاث زوايا. فكل شكل هندسي في المستوي يتميز بالصفات الثلاثة التالية: مضلع، له ثلاثة أضلاع، وثلاث زوايا، يسمى مثلثاً.

المفهوم على أساس المسلمات: **صياغة نظرية لا تحدد فيها خصائص المصطلح (المفهوم) تحديداً مباشراً.**

مثال:

المستقيم، النقطة، المستوي..... (مفاهيم غير معرفة)

ويتكون المفهوم من أربعة مكونات هي : خصائصه، قواعد الربط بين هذه الخصائص، موقعه بين المفاهيم الأخرى، أمثلته.

الخصائص: بموجبها تصنف الأشياء في فئات، وتطلق الأسماء عليها. فالمضلع مثلاً هو خط منكسر مغلق يقع في المستوي. فكل:

1"- خط. 2"- منكسر. 3"- مغلق. 4"- يقع في المستوي.

يُسمى مضلعاً. أي أن كل الأشياء التي لها الخصائص الأربع السابقة تُصنف ضمن مفهوم المضلع.

قواعد الربط بين الخصائص: فعندما نقول إن 5 أكبر من 4 وأصغر من 6 ، فنحن نتحدث عن أن **أكبر**، الذي يربط بين الـ 5 والـ 4 يمثل مفهوم علاقة.

موقع المفهوم بين المفاهيم الأخرى: فعندما نتحدث عن مفهوم الشكل الرباعي، فإنه يقع ضمن مفهوم المضلع الذي يضم مجموعة من المفاهيم، كالمثلث، الخماسي،..... والرباعي أيضاً يتعلق بمجموعة أخرى من المفاهيم، كالمستطيل، المعين،.....

II. استراتيجيات تعليم المفاهيم:

تُعد مهمة المعلم في تعليم المفهوم جزءاً هاماً في عملية التعليم داخل غرفة الصف، ويمكن لعملية التعليم هذه أن تتم بطرائق مختلفة. ونظراً لأهمية الطرائق أو الاستراتيجياتٍ في تعليم المفاهيم، فقد قام الباحثون بإجراء تجاربهم وأبحاثهم حول الاستراتيجية الأكثر فاعلية، وقد رأى بعض الباحثين أن استراتيجياتٍ معينةً تناسب التلاميذ ذوي التحصيل المنخفض، وهناك استراتيجيات أخرى تناسب التلاميذ ذوي التحصيل المرتفع. ويمكن أن نقدم الاستراتيجيات التالية:

1- **الاستراتيجية الأولى:** تقديم الأمثلة أولاً على المفهوم ثم تقديم التعريف أو استخلاصه (وهي تقوم على الاستقراء).

2- **الاستراتيجية الثانية:** تقديم تعريف المفهوم ثم تقديم الأمثلة عليه (وهي تقوم على الاستنتاج).

3- **الاستراتيجية الثالثة:** تقديم الأمثلة ثم تقديم التعريف ثم تقديم أمثلة أخرى (وهي تقوم على الاستقراء ثم الاستنتاج).

وتُعد الاستراتيجية الأولى التي تقوم على الاستقراء الأكثر فائدة عند استخدامها من قبل معلمي الحلقة الأولى من التعليم الأساسي لأنها تناسب المستويات العقلية للتلاميذ في هذه الحلقة. والاستراتيجية الثانية التي تقوم على الاستنتاج هي الأكثر فائدة واستخداماً من قبل معلمي الحلقة الثانية من التعليم الأساسي والمرحلة الثانوية، لأن المستويات العقلية لطلبتهم تكون قد تطورت بما يتناسب معها. ويعتبرها بعضهم أكثر دقة وتحديداً للمفهوم، إلا أن التلاميذ الطلبة يواجهون صعوبة في الفهم عند استعمالها، وخاصةً التلاميذ ذوي التحصيل المنخفض، والذين يعانون من ضعف في امتلاك المفاهيم، ولا يستطيعون اكتشاف العلاقات بسهولة، إذ يكونون

بطيئي التعلم، مما يقودهم إلى حفظ المفهوم دون فهمه، وهذا يؤدي إلى عدم استطاعتهم توظيفه في المواقف التي تواجههم، وفي المسائل التي تُطرح عليهم.

والذين يستخدمون هذه الاستراتيجيات في التعليم يجب عليهم مراعاة القواعد التالية عند تعليمهم للمفاهيم الرياضية:

1"- تحديد نوع المفهوم من حيث كونه مفهوماً أولياً أو مفهوماً غير معرف.

2"- تحديد الصفات التي تميز المفهوم من سواه من المفاهيم.

3"- كتابة هذه الصفات بلغة سهلة يفهمها التلميذ.

4"- إعطاء أمثلة إيجابية عن المفهوم.

5"- إعطاء أمثلة غير إيجابية (سلبية) عن المفهوم (تُسمى أيضاً لا أمثلة).

6"- ربط المفهوم بخبرات التلاميذ.

7"- تدريب التلاميذ على توظيف المفهوم في مواقف تعليمية جديدة أو أمثلة من بيئتهم.

ونقدم **مثالاً** على ذلك: تعليم مفهوم العدد الزوجي:

بحسب الاستراتيجية الأولى، **تقديم التعريف ثم الأمثلة:**

1"- نقدم للتلميذ تعريف العدد الزوجي:

هو عدد يقبل القسمة على 2 والباقي هو صفر. أو هو عدد رقم آحاده هو أحد الأعداد التالية:

0,2,4,6,8

2"- تقديم مثال إيجابي: العدد 34 هو عدد زوجي، لأن 17=2 ÷ 34 والباقي هو صفر. أو لأن رقم آحاده 4. كذلك العدد 16

3"- تقديم مثال غير إيجابي

العدد 27 ليس زوجياً لأن 13= 2 ÷ 27 والباقي واحد وليس صفراً.

يُسمى العدد غير الزوجي عدداً فردياً، والعدد الفردي رقم آحاده هو أحد الأعداد التالية:

1,3,5,7, 9

4"- توظيف التعريف من قبل التلاميذ:

أيّ من الأعداد التالية زوجي؟ وأي منها غير زوجي (فردي)؟

32 ، 45 ، 50 ، 18 ، 81

أما تعليم مفهوم العدد الزوجي باستخدام الاستراتيجية الثانية، **تقديم الأمثلة ثم تقديم التعريف** فيكون كما يلي:

1"- تقديم الأمثلة الإيجابية:

العدد 20 هو عدد زوجي، لأن10= 2 ÷ 20 أو لأن آحاده 0

العدد 32 هو عدد زوجي، لأن16= 2 ÷ 32 أو لأن آحاده 2

2"- تقديم الأمثلة السلبية :

العدد 23 ليس زوجياً، لأن11= 2 ÷ 23 والباقي واحد وليس صفراً . أو لأن رقم آحاده 3. ثم تقديم مثال غير إيجابي آخر

العدد 45 ليس زوجياً لأن22= 2÷ 45 والباقي واحد وليس صفراً . أو لأن رقم آحاده 5.

3"- تقديم التعريف، بذكر الشروط اللازمة والكافية ليكون العدد زوجياً

هو عدد يقبل القسمة على 2 والباقي صفر. (أو لأن رقم آحاده 0 أو 2 أو 4 أو 6 أو 8).

ثُم يكتب التعريف بشكل صحيح على السبورة ثم على الدفاتر بعد مناقشة التلاميذ باستخدام الأمثلة السابقة.

4"- يوظف التعريف بحل أمثلة من أجل التقويم:

مثال:

ضع خطاً تحت العدد الزوجي فيما يلي:

50 ، 7 ، 300 ، 4 ، 225

مثال :

عدد زوجي مؤلف من رقمين، مجموع رقميه 11. ما العدد ؟

مثال :

عدد فردي مؤلف من رقمين، مجموع رقميه 7. ما العدد ؟

أمثلة:

1"- هات ثلاثة مفاهيم رياضية، واذكر الخصائص المميزة لكل منها.

2"- اختر وحدة درسية من كتاب الرياضيات للصف الثالث، وحدد فيها المفاهيم الرياضية.

3"- كيف تعلم مفهوم قابلية القسمة على 5 ؟ اذكر الخطوات اللازمة.

ب- تعليم التعميمات (المبادئ) الرياضية:

I. تعريف التعميم.

التعميم بحسب ما يرى " **جانييه** " **Gagne** هو : "علاقة بين مفهومين أو أكثر". ويندرج ضمن عنوان التعميمات الرياضية القواعد والقوانين، والمبرهنات (النظريات)، والمسلمات.

مثال:

قانون: توزيع الضرب على الجمع

نظرية: في متوازي الأضلاع: كل ضلعين متقابلتين متساويتا الطول.

مسلمة (موضوعة)**:** من نقطتين مختلفتين يمكن رسم مستقيم وحيد.

فالتعميمات الرياضية هي تعابير رياضية يمكن إثبات صحتها، أو اكتشافها، أو القبول بصحتها باعتبارها مسلمات.

II. استراتيجيات تعليم التعميمات (المبادئ):

يستخدم المعلمون عادة طريقتين شائعتين في تدريس التعميمات، هما:

الطريقة الأولى: **طريقة الشرح والتفسير (العرض):** وفيها تتبع الخطوات التالية:

أ- يقدم المعلم للتلاميذ شرحاً يوضح فيه الهدف من التعميم وأهميته لإنشاء دوافع نحو تعلمه عندهم.

ب- يقدم المعلم نص التعميم أو يساعد التلاميذ على اكتشاف صياغته على شكل كلام أو رموز.

ت- يقوم المعلم بتفسير الألفاظ والمعاني والتعابير الواردة في نص التعميم.

ث- يقدم المعلم الإثبات على صحة التعميم.

ج- يوظف المعلم التعميم في حل أمثلة مباشرة عليه.

مثال:

قانون توزيع الضرب على الجمع

أ- يثير المعلم التلاميذ بعمليات ضرب ذهنية تعلموها سابقاً لتحفيزهم على المشاركة، وإنشاء دوافع لديهم نحو تعلم القانون (الخاصة):

من يعطيني ناتج ما يلي: ..= 3 ×، ..=2 × 10 ، ..=2 × 13

سوف ندرس قانوناً بسيطاً يمكن استخدامه لإيجاد ناتج الضرب بسرعة.

ب- يكلف المعلم أحد التلاميذ بإيجاد عملية الضرب السابقة على الشكل التالي:

$$(10 + 3) \times 2 = (10 \times 2) + (3 \times 2) =$$

$$20 + 6 = 26$$

$$13 \times 2 = 26 \text{ أو}$$

لقد ضربنا العدد 2 بالآحاد، ثم ضربناه بالعشرات، ثم جمعنا الناتجين.

ت- يُدعى القانون السابق قانون توزيع الضرب على الجمع.

يفسر المعلم معنى **توزيع** الضرب، حيث عملية الضرب في الطرف الأيمن من المساواة السابقة كانت لمرة واحدة، بينما في الطرف الأيسر من المساواة تم إجراء عمليتي ضرب:

2 × 3 ثم 2 × 10 حيث تم توزيع عملية الضرب على مقدارين، بينما في الطرف الأيمن تمت عملية ضرب على مقدار واحد.

ث- يبين المعلم صحة القانون من خلال مثال يكون فيه ناتج عملية الضرب يساوي نفس المقدار بين طرفي المساواة:

$$(7 \times 5) + (2 \times 5) = (7 + 2) \times 5$$

$$35 + 10 = 9 \times 5$$

$$45 = 45$$

ج- يكلف المعلم التلاميذ بحل الأمثلة التالية ويراقب أعمالهم في دفاترهم، ثم يناقش الحل على السبورة.

أكمل الفراغات التالية ثم أوجد الناتج:

1") $(3 \times 9) + (8 \times 9) = (3 + 8) \times 9$

$\ldots\ldots = 27 + \ldots\ldots =$

2") $(7 + 15) \times 8 = \ldots\ldots \times 8 + \ldots\ldots \times 8 = \ldots\ldots$

$\ldots\ldots = \ldots\ldots + \ldots\ldots$

3") $64 \times 5 = (4 + \ldots\ldots) \times 5 \ldots\ldots$

4") $235 \times 9 = (5 + 30 + 200) \times 9$

$= \ldots\ldots$

الطريقة الثانية: **طريقة الاكتشاف الموجه (استقرائية):**

1"- يقدم المعلم عدداً من الأمثلة، أو يطرح عدداً من الأسئلة التي تؤدي إلى صوغ التعميم بلغة التلميذ.

2"- صوغ التعميم.

3"- توظيف التعميم في حل أمثلة.

أمثلة

1"- اختر وحدة درسية من كتاب الرياضيات للصف الرابع، ثم بين التعميمات الرياضية الواردة فيها.

2"- ما هو الأسلوب المناسب لتدريس قانون رياضي من الصف الرابع ؟ وضح ذلك بمثال تختاره.

3"- العدد العادي. هل هو مفهوم رياضي أو تعميم رياضي ؟

ت- تعليم المهارات الرياضية:

I. تعريف المهارة:

يُقصد بالمهارة **إنجاز العمل بسرعة ودقة وإتقان وأمان.** وغالباً ما يرتبط تعليم المهارة بمجموعة الخطوات الدقيقة المنطقية المترابطة الواضحة والمتسلسلة والتي تقود إلى الحل.

ولتعليم المهارات دور كبير في تعليم الرياضيات، فإذا لم يحسن التلميذ مهارته في أداء الأعمال التي تواجهه فسيعيق ذلك تعلمه للرياضيات. واكتساب المهارات الرياضية لا زال ضرورياً بالرغم من التقدم في علوم الحاسوب والآلات الحاسبة. كما أن إتقان المهارات يسمح للتلميذ بتوجيه تفكيره وجهده بشكل أفضل في المواقف التي يواجهها.

ومن المهارات الأساسية الضرورية لكل تلميذ:

- مهارات الأرقام والأعداد، كتحويل الكسر العادي إلى كسر عشري.
- مهارات العمليات الحسابية، كالعمليات الأساسية على الكسور.

- مهارات تتعلق بتشكيل عبارة رياضية من مسألة لفظية.
- مهارات حساب المساحات والأشكال.
- مهارات القياس، كقياس الأطوال والحجوم والزوايا والأوزان.

II. تعليم المهارة:

إن المهارات الرياضية تحتوي على جانبين، جانب حركي وآخر إدراكي، ويكون للجانب الإدراكي فيها المقدار الأكبر. ولتعليم المهارة ينبغي على المعلم تقديم التوجيهات والإرشادات حول طبيعة الأداء الجيد للمهارة.

فيقدم نصائحه حول ما سيفعله التلميذ وكيف يقوم به؟ وما هي سلسلة الخطوات اللازمة لذلك؟ ومراجعة المعلومات السابقة لاكتساب المهارة الحالية، ثم تقديم عرض توضيحي لنموذج الأداء الماهر القائم على السرعة والدقة.

ويتبع المعلمون عادة طريقتين لتعليم المهارات، هما:

طريقة الأجزاء:

تُجزأ فيها المهارة إلى أجزاء متكاملة فيما بينها، ويُدرس التلاميذ الأجزاء التي تتكون منها المهارة، كل جزء وحده أولاً حتى يتكامل التدريب على كل المهارة.

مثال: إيجاد المضاعف المشترك الأصغر للعددين 24 ، 60

المرحلة الأولى: تحليل كل عدد إلى عوامله الأولية:

يتم تذكر معنى العدد الأولي (هو عدد يقبل القسمة على نفسه وعلى الواحد فقط)

60	2
30	2
15	3
5	5
1	

24	2
12	2
6	2
3	3
1	

المرحلة الثانية: كتابة ناتج التحليل على شكل جداءات

$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$ أو $2^3 \times 3 = 24$

$60 = 5 \times 3 \times 2 \times 2$ أو $2^2 \times 5 \times 3 = 60$

المرحلة الثالثة: المضاعف المشترك الأصغر للعددين 60 ، 24 هو جداء العوامل الأولية المشتركة وغير المشتركة وبأكبر عدد من المرات وردت، (بأكبر أس).

$60 = 5 \times 3 \times 2 \times 2$ أو $2^2 \times 5 \times 3 = 60$

$24 = 3 \times 2 \times 2 \times 2$ أو $2^3 \times 3 = 24$

المضاعف المشترك الأصغر لهما ويُرمز له بـــ م.م.أ هو

$120 = 5 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2$

أو $120 \quad 2^3 \times 3 \times 5 = 120$

مثال:

أوجد م.م.أ للعددين $2 \times 2 \times 7 \times 5 \times 5$ ، $11 \times 5 \times 5$

أوجد م.م.أ للعددين $2^2 \times 3 \times 7$ ، $2^2 \times 3^3$

تدريب على كل المهارة : أوجد م.م.أ للأعداد 15 ، 30 ، 150

مثال :

ضرب عدد مكون من رقم واحد في عدد مكون من رقمين:

أولاً: دون حمل:

(3 × 2 آحاد) + (3 × 3 عشرات)= 3 × (32)

= (3 × 3) + (2 × 3) = 9 عشرات + 6 آحاد = 96

ثانياً : مع الحمل : 6×85

مئات	عشرات	آحاد
	3	
	8	5
		6 ×
5	1	0

مئات	عشرات	آحاد
	3	
	8	5
		6 ×
		0

مئات	عشرات	آحاد
	8	5
		6 ×
		30

$3+(8\times6)$

طريقة الكل :

يعرض المعلم مثالاً توضيحياً على كامل المهارة بوصفها وحدة متكاملة. أي يدرب طلابه على تعلم مكونات المهارة باستخدام تسلسل مناسب يكون التركيز فيه على تعلم كامل المهارة بوصفها وحدة متكاملة.

مثال:

ضرب عدد مكون من رقم واحد في عدد مكون من رقمين:

أولاً: دون حمل:

$$\begin{array}{r} 32 \\ 3 \times \\ \hline 96 \end{array}$$

ثانياً: مع الحمل

$$\begin{array}{r} \boxed{3} \\ 85 \\ 6 \times \\ \hline 510 \end{array}$$

أمثلة:

1"- بين كيف تعلّم ضرب كسر عشري في كسر عشري آخر؟

2"- بين كيف تعلّم مهارة قسمة عدد مؤلف من ثلاثة أرقام على عدد مؤلف من رقم واحد؟ بطريق الأجزاء، ثم بطريق الكل.

ث- طرائق تعليم حل المسائل.

يُعد حل المسألة من أهم الموضوعات التي شغلت المهتمين بتعليم الرياضيات منذ القديم حتى الآن، لأن حل المسألة (المشكلة) أكثر أشكال السلوك الإنساني تعقيداً وأهمية، لما فيها من صعوبة في استخدام المبادئ والقواعد والتنسيق فيما بينها للوصول إلى المطلوب.

من الملاحظ أن قدرة التلاميذ على حل المسألة قديماً وحديثاً ما زالت دون المستوى المطلوب، والقدرة على حل المسألة لا زال مقصوراً على بعض التلاميذ.

تعريف المسألة:

المسألة هي موقف جديد يتضمن مجموعة من الصعوبات التي تواجه المتعلم وتحول بينه وبين الوصول إلى الهدف، ويحتاج منه القيام بممارسات منطقية مستخدماً معلومات سابقة للوصول إلى حل صعوبات هذا الموقف. وعندما يكون الموقف غير جديد فهو في هذه الحالة تمرين.

I. استراتيجيات حل المسألة:

معرفتنا عن طرائق تعليم المسائل بالشكل الأمثل لا زالت قليلة بسبب قلة معرفتنا عن طبيعة العمليات العقلية، وكيف يعمل العقل.

مراحل حل المسألة التالية:

المرحلة الأولى: فهم المسألة:

وتتضمن هذه المرحلة الخطوات التالية:

1"- يعرض المعلم نص المسألة.

2"- يقرأ التلميذ المسألة ليفهم معاني الكلمات الواردة ويستوعبها.

3"- يوجه المعلم أسئلة للتلاميذ للتحقق من مدى فهمهم واستيعابهم للنص.

مثال:

أ-ما معنى كلمة (كذا) ؟

ب-ما المعطيات (الفرضيات)؟ وكيف تحصل عليها ؟

جـ-ما المطلوب إيجاده؟ وكيف تميزه من خلال النص ؟

4"- يجيب بعض التلاميذ عن الأسئلة السابقة.

5"- يقوّم المعلم أجوبة التلاميذ الشفهية بإعطائهم الإجابة الصحيحة فوراً بطريقة شفهية.

المرحلة الثانية: العرض والتفسير:

وتتضمن هذه المرحلة الخطوات:

1"- يستخدم المعلم أسلوب سبر المعلومات وطرح أسئلة إيحائية تتعلق بالنص، ويجري المناقشة المنطقية لتحفيز التلاميذ على المشاركة.

2"- يطلب المعلم من التلاميذ كتابة معطيات كل مسألة والمطلوب منها على ورقة تدريب تعطى لكل تلميذ. ويقوّم النتائج بإعطاء الإجابة الصحيحة، وتصحيح الإجابة الخاطئة عندما ينتهي أغلب التلاميذ من إجاباتهم.

3"- يقوّم المعلم النتائج النهائية لهذه المرحلة كتابياً باستخدام ورقة تقويم تُسمى ورقة عمل.

المرحلة الثالثة: إعداد خطة (خوارزمية) الحل:

وتتضمن هذه المرحلة الخطوات التالية:

1"- تحليل محتوى المطلوب: يطرح المعلم أسئلة توضيحية لمناقشة الهدف المراد الوصول إليه، مثل:

أ- ما معنى المطلوب ؟

ب-ما الواجب توفره لتحقيق المطلوب أو الوصول إليه ؟

تعطى لكل تلميذ ورقة ليحلل محتوى المطلوب، ليتدرب على التحليل بالاستفادة من السؤالين السابقين. ثم يقوّم المعلم النتائج على السبورة بإعطاء الإجابة الصحيحة عندما ينتهي أغلب التلاميذ من إجاباتهم.

2"- تحليل المعطيات: يطرح المعلم أسئلة لتيسير جمع معلومات إضافية من المعطيات، والتي توصل تدريجياً لكشف الحل، مثل:

أ- ماذا يعني لك (كذا) ؟

ب- ب- ماذا يفيد كون (كذا) ؟

جـ- ما المعلومة الموجودة في المعطيات السابقة التي يمكن أن تسهم في الوصول إلى المطلوب ؟

د-كيف تستخلص معلومة إضافية من المعطيات ؟

3"- يُعطى التلميذ المجيب فرصة للتفكير والتأمل، لربط الأفكار قبل التعبير عن الحل.

4"- عندما يعجز التلميذ عن الوصول إلى فكرة الحل يُعطي المعلم تلميحات، لتوضيح المفردات والمفاهيم غير الواضحة عن طريق توليد أسئلة تساعد على إظهار لأفكار جديدة تسهم في الوصول إلى حل المسألة.

المرحلة الرابعة: ربط الأفكار للوصول إلى فكرة الحل وتنفيذها:

وتتضمن الأعمال التالية:

1"- يلخص المعلم الأفكار الأساسية، وكيفية الربط فيما بينها.

2"- يطلب المعلم من تلميذ أو أكثر تنفيذ الحل شفوياً.

3"- تُعطى الفرصة ليصوغ كل تلميذ كتابياً خطة الحل بأسلوبه الخاص على دفتره.

4"- يطلب المعلم من تلميذ أو أكثر قراءة ما كتبه، لمناقشة وتصحيح الأخطاء إن وقعت أثناء عملية صوغ الحل.

5"- يسجل المعلم حل المسألة على السبورة ليكون بمنزلة تغذية راجعة صحيحة يستخدمها كل تلميذ.

المرحلة الخامسة: تقويم الحل ومراجعته:

ويتم في هذه المرحلة تقويم الحل ومراجعة النتائج التي تم التوصل إليها من حيث صحتها وموضوعيتها، وإمكانية التوصل إليها بطرائق أخرى.

مثال:

إذا كان الفرق بين عمري سامي وابنة عمه الأصغر منه سلمى 12 سنة، فإذا علمت أن مجموع عمريهما 28 سنة فأوجد عمر كل منهما.

المرحلة الأولى: (فهم المسألة):

1"- يعرض المعلم نص المسألة.

2"- يقرأ التلميذ المسألة أكثر من مرة، ليفهم معاني الكلمات الواردة فيها.

3"- يوجه المعلم أسئلة للتلاميذ للتحقق من مدى فهمهم واستيعابهم للنص.

أ- ما معنى كلمة (الفرق) ؟ ما معنى، **الفرق بين عمريهما** ؟ **مجموع عمريهما** ؟ أين فعل الأمر في نص المسألة ؟

ب-ما المعطيات (المعلومات) ؟ اذكرها، باعتبار أنها تأتي قبل فعل الأمر " **أوجد** " .

جـ- ما المطلوب إيجاده ؟ اذكره، باعتبار أنه يأتي بعد فعل الأمر **أوجد**، كم مطلوب لدينا هنا؟

المرحلة الثانية: العرض والتفسير:

1"- يطرح المعلم أسئلة إيحائية تتعلق بالنص، ويجري المناقشة المنطقية لتحفيز التلاميذ على المشاركة.

2"- يطلب المعلم من التلاميذ كتابة معطيات المسألة والمطلوب منها على ورقة تدريب تعطى لكل منهم.

المعطيات:

عمر سامي – عمر سلمى = ... ، عمر سامي + عمر سلمى = ...

المطلوب: عمر .....

عمر .....

3"- يقوم النتائج بإعطاء الإجابة الصحيحة.

المرحلة الثالثة: إعداد خطة (خوارزمية) الحل:

1"- تحليل محتوى المطلوب: يطرح المعلم أسئلة توضيحية لمناقشة الهدف المراد الوصول إليه.

- ما الواجب معرفته للوصول إلى عمر سامي ؟

2"- تحليل المعطيات: يطرح المعلم أسئلة لتسير جمع معلومات إضافية من المعطيات، والتي توصل تدريجياً إلى كشف خطة الحل.

أ-ماذا يعني لك: عمر سامي – عمر سلمى = 12 ؟

ب-ماذا يفيد كون: عمر سامي + عمر سلمى = 28 ؟

جـ-هل يمكن أن نكتب عمر سامي = عمر سلمى + 12 ؟

تُطرح الأسئلة السابقة على التلاميذ.

3"- يُعطى التلميذ المجيب فرصة للتفكير والتأمل، لربط الأفكار قبل التعبير عن الحل.

4"- عندما يعجز التلميذ عن الوصول إلى فكرة الحل يُعطي المعلم تلميحات، لتوضيح المفردات والمفاهيم غير الواضحة عن طريق توليد أسئلة تساعد على إظهار أفكار جديدة تسهم في الوصول إلى حل المسألة.

هل يمكن أن نكتب عمر سلمى + 12 + عمر سلمى = 28 ؟

المرحلة الرابعة: ربط الأفكار للوصول إلى فكرة الحل وتنفيذها:

1"- يلخص المعلم الأفكار الأساسية، وكيفية الربط فيما بينها.

ضعفا عمر سلمى + 12

يساوي 28

ضعفا عمر سلمى

يساوي 12-28

يساوي 16

إذا كان ضعفا عمر سلمى يساوي 16 أوجد عمر سلمى، ثم أوجد عمر سامي.

2"- يطلب المعلم من تلميذ أو أكثر تنفيذ الحل شفوياً.

3"- تُعطى الفرصة ليصوغ كل تلميذ كتابياً خطة الحل بأسلوبه الخاص على دفتره.

4"- يطلب المعلم من تلميذ أو أكثر قراءة ما كتبه، لمناقشة وتصحيح الأخطاء، إن وقعت أثناء عملية صوغ الحل.

5"- يسجل المعلم حل المسألة على السبورة ليكون بمنزلة تغذية راجعة صحيحة يستخدمها كل تلميذ.

المرحلة الخامسة: تقويم الحل ومراجعته:

يجري مراجعة الحل والتأكد من صحته بالتعويض، وموضوعيته، ودراسة إمكانية التوصل إليه بطريقة أخرى.

تدريب: استخدم المراحل السابقة في حل المسألة التالية:

اشترى تاجر 8 أكياس أرز، سعر الكيس 285 ليرة. أحسب ثمن شراء الأكياس. وإذا باع التاجر كل كيس بمبلغ 330 ليرة ، فاحسب ثمن مبيع هذه الأكياس.

6- أساليب التقويم

إن عملية التقويم ضرورية من أجل تطوير المنهاج المدرسي. كما أنها إحدى مهام المعلم الرئيسية لتحديد قدرة الطالب على التعلم، ومعرفة مقدار ما يمتلكه هذا التلميذ من معلومات للمادة الدرسية، وتوفير تغذية راجعة مستمرة للمعلم والتلميذ، وتشخيص الصعوبات الدراسية، للمعلم والتلميذ كذلك.

للتقويم أهداف عديدة نذكر منها:

أ- تحديد ما اكتسبه التلميذ من معلومات بوصفها كونها لازمة للتعلم الجديد (التعلم القبلي).

ب- تشخيص صعوبات تعلم التلاميذ (التقويم التشخيصي).

ت- الحكم على عملية تعلم التلاميذ أثناء الدرس، وجعلها أكثر فاعلية (التقويم البنائي أو التكويني أو المرحلي).

ث- الحكم على عملية تعلم التلاميذ بعد انتهاء عملية التعلم والتعليم لحصة دراسية أو مرحلة دراسية، لإصدار حطم تقويمي على تحصيل التلاميذ، ولقياس نواتج التعلم (التقويم النهائي أو الختامي).

ما زالت اختبارات التحصيل الدراسية التي تعتمد على الورقة والقلم الأسلوب الرئيسي المستخدم من أجل رصد درجات التلاميذ وتقويم التحصيل الدراسي لديهم.

وسنبين فيما يلي الأشكال المختلفة والأكثر انتشاراً لهذه الاختبارات التحصيلية، والتي تضم اختبارات الأسئلة الموضوعية، وهي أسئلة قصيرة الإجابة، واختبارات الأسئلة المقالية، والتي تتطلب من التلميذ إجابات طويلة.

I. **اختبارات الأسئلة الموضوعية** وهي كالتالي:

a. **أسئلة الصواب أو الخطأ** : تتكون من مجموعة من العبارات، بينها ما هو صحيح، وبينها ما هو خاطئ، ويُطلب من التلميذ أن يميز بين العبارة الصحيحة والعبارة الخاطئة.

مثال:

إن ناتج 17032 =17.32 × 10 **صح خطأ**

المربع هو مستطيل بعداه متساويان **صح خطأ**

b. **أسئلة الاختيار من متعدد:** يتكون السؤال في هذا النوع من الأسئلة من عبارة هي نص السؤال، يليه عدد من الإجابات لهذا السؤال، تسمى الخيارات أو البدائل، وتضم هذه الخيارات إجابة واحدة صحيحة.

مثال:

1"- إن ناتج .... $= \frac{5}{2} + \frac{3}{4}$

أ) $\frac{8}{6}$ ب) $\frac{8}{8}$ جـ) $\frac{13}{4}$ د) $\frac{8}{9}$

2"- إن قيمة الحرف x فيما يلي: $3^3 \times 3^4 \times 3^x \times 3^2 = 3^9$ هي:

أ) 1 ب) 17 جـ) 0 د) 15

c. **أسئلة التكميل:**

وهي أسئلة في كل منها نقص أو فراغ على التلميذ أن يملأه بكلمة أو أكثر. يُستخدم هذا النوع من الأسئلة لقياس نواتج التعلم البسيطة، كمعرفة المصطلحات والقوانين، والقدرة على إجراء العمليات الحسابية.

مثال:

-حاصل جمع عدد فردي مع عدد زوجي هو .....

-إن مساحة مربع طول ضلعه 5 سم هي .....

d. **أسئلة المطابقة:** يتألف هذا النوع من الأسئلة من قائمتين، الأولى للأسئلة والثانية للإجابات. ويُطلب من التلميذ أن يختار لكل سؤال من القائمة الأولى ما يناسبه من القائمة الثانية. ويُستخدم هذا النوع من الأسئلة في قياس الحقائق والمعلومات العامة التي تعتمد على التذكر بشكل عام.

مثال:

اختر من القائمة **ب** الجواب المناسب للسؤال الموجود في القائمة أ

القائمة أ	القائمة ب
1"- شبه المنحرف هو شكل رباعي	أ- يساوي طول الضلع × طول الضلع
2"- المضلع المنتظم هو مضلع	ب- جداء الضلعين القائمتين ÷ 2
3"- مساحة المثلث القائم تساوي	جـ- توازت فيه ضلعان متقابلتان
4"- مساحة المربع	د- تساوي طول ضلعه × 4
5"- محيط المربع	هـ- أضلاعه متساوية وزواياه

II. اختبارات أسئلة المقال أو الأسئلة الحرة:

وهي من أقدم أنواع الاختبارات الكتابية شيوعاً من حيث استخدامها في قياس التحصيل. تعطي التلميذ حرية الإجابة، فيُطلب منه حل المسألة مثلاً، أو برهان صحة نظرية (مبرهنة).

وتُستخدم لقياس جميع المستويات، وخاصة مستويات التفكير العليا، كالتحليل والتركيب والتقويم لبلوم.

مثال:

مع فادي 15 ليرة سورية، أعطى مازناً ثلاث ليرات سورية، ثم أعطى سهيلاً $\frac{1}{3}$ الباقي فكم ليرةً أخذ سهيل ؟ كم ليرةً بقي مع فادي ؟

وهناك أساليب أخرى للتقويم لا تعتمد على الورقة والقلم، وتُستخدم في مجال المهارات واسترجاع المعلومات ذات الطبيعة النظرية، والقدرة على الشرح

والتحليل. وهي أقل موثوقية من الاختبارات الكتابية، وتستخدم في الصفوف الدنيا أكثر من الصفوف العليا. ومن هذه الأساليب:

1"- الاختبار الشفهي المستخدم لقياس القدرة على التعبير اللفظي لدى التلميذ.

2"- الملاحظة، وتُستخدم لرصد صفة أو ظاهرة يراد الكشف عن جوانب غامضة فيها. تفيد ملاحظة المعلم لتلاميذه في غرفة الصف في معرفة سير عملية التعلم والتعليم، ومدى تقدمهم الدراسي، وما يواجهونه من صعوبات في صفوفهم الدراسية.


وقل رب زدني علما
Damascus University

الفصل العاشر

استراتيجية الألعاب التعليمية في الرياضيات

1-مقدمة

تعريف الالعاب التعليمية:

الألعاب التعليمية عبارة عن نماذج مبسطة تعبر عن الواقع وتعتمد على نشاط المتعلم الحر أو الموجه وتدور حول مشكلة واقعية أو مفترضة تشمل مفاهيماً محددة.

تتوقف أهمية اللعبة على التخطيط الذي يضعه المعلم لاستخدامها، وتحديد الخبرات المتجسدة في اللعبة، ومن اللازم تحديد الأهداف المعرفية والوجدانية ويسبق اللعبة تقويم قبلي للتأكد من استعداد التلاميذ لتعلمها وفهم محتواها.

إن الألعاب التعليمية نشاط هادف يتضمن أفعالاً معينة يقوم بها المعلم والتلميذ من خلال إتباع قواعد معينة. تعتبر الألعاب التعليمية وسائل تعليمية مساعدة لتعلم الحقائق والمهارات والمفاهيم والمبادئ المحددة. إن الألعاب التعليمية الرياضياتية تعتبر وسائل مهمة لتعلم المفاهيم والتعميمات المحددة من خلال العديد من الأهداف المعرفية المتنوعة من فهم و تذكر و تطبيق . و هي أحد مجالات الأنشطة الإثرائية التي تُحفز التلاميذ على دراسة الرياضيات بشكل مناسب، سواء كانوا أفراداً أو جماعات صغيرة أو على مستوى الفصل الدراسي بكامله، نظراً لأنها تتحدى قدراتهم، وتجعلهم يفكرون في المشكلات الرياضية من خلال بيئة تعليمية مرنة، يستمتع بها التلاميذ مقارنة بالبيئة الصفية المعتادة. وتُعرف اللعبة الرياضية، بأنها وسيلة لعمل ممتع، له أهداف رياضية معرفية معينة قابلة للقياس، وأهداف رياضية وجدانية، يمكن مشاهدتها، أن الألعاب الرياضية تُصنَّف وفق الهدف من استخدامها في تدريس منهج الرياضيات، إلى: - ألعاب لتعلم لغة الرياضيات - ألعاب

لاستخدام الرموز الرياضية – ألعاب لتعزيز المفاهيم الرياضية – ألعاب لحل الألغاز الرياضية – ألعاب المربعات السحرية – ألعاب لممارسة المهارات الرياضية – ألعاب لإثارة المناقشات الرياضية – ألعاب لابتكار الاستراتيجيات الرياضية ومن المجالات الأساسية للأنشطة الإثرائية في الرياضيات، الألغاز الرياضية، وقد انتشر استخدامها بين القائمين على تدريس الرياضيات ويرجع سبب اهتمام التلاميذ بالألغاز الرياضية، إلى أنها تجعلهم نشطين، ملاحظين للمشكلات، واعين لأبعادها، عاملين فكرهم حولها، ومشاركين في التوصل إلى حلول إبداعية لها. وبناء على ذلك يمكن تضمين مناهج الرياضيات في جميع المراحل التعليمية، بعض الألغاز الرياضية والمنطقية، التي تُنمى القدرة على التقدير الحسابي السريع لدى التلاميذ.

2-الأهداف الوجدانية والمعرفية من استخدام الألعاب التعليمية

يحصل التلاميذ من خلال الألعاب التعليمية على المتعة والإشباع وتحقق الأهداف الوجدانية ، ولكن الأهداف المعرفية تبقى محدودة أو غامضة. وتتحقق الأهداف الوجدانية بوساطة الألعاب التعليمية وفق ما يلي:

أ-اتخاذ المبادرة والتنافس البريء.

ب- العمل الجماعي واحترام آراء الآخرين.

ت- التحلي بالروح الرياضياتية.

ث- تنمية المهارات الحسابية.

ج- تمكين التلاميذ من تطبيق الرياضيات لحل مشكلات في مجالات غير الرياضيات.

و تتحقق الأهداف المعرفية حسب خبرات تعلم الرياضيات وفق ما يلي:

أ-تعلم خبرات مباشرة، مثل ألعاب الكمبيوتر.

ب- تعلم خبرات غير مباشرة، مثل حل المشكلات وانتقال أثر التعلم وتنمية القدرات العقلية.

ومن المهارات التي تسهم الألعاب التعليمية في تعلمها: مهارات حل المشكلات، انتقال أثر التعلم وتنمية القدرات العقلية العامة وتعلم كيفية التعلم، كما أن الألعاب التعليمية المبنية على الكمبيوتر والمحاكاة تساعد على تحسين قدرات التلاميذ لتعلم الخبرات الرياضياتية المباشرة.

3-دور المعلم عند استخدام الألعاب التعليمية

على الرغم من الفوائد التي تحققها الألعاب التعليمية الرياضياتية في الرياضيات إلا انه يمكن أ، ينتج عن استخدامها بعض السلوكيات السلبية مثل الاهتمام باللعبة وعدم الانتباه للهدف التعليمي أو الغش والخداع الإزعاج والصراع. ولتجنب هذه السلبيات عند استخدام الالعاب التعليمية يجب أن تراعي النقاط التالية:

أ- يجب أن تتوافق اللعبة مع القيم الاجتماعية والدينية.

ب- ألا يتحول استخدام الألعاب التعليمية إلى نشاط ترفيهي لان ذلك يرافقه عدم انضباط صفي.

ت- لا تحول اللعبة إلي فوز أو خسارة فقط لان البحث عن الفوز بأي وسيلة سلوك يقضي على روح التنافس الايجابي الشريف.

يحتاج استخدام الألعاب التعليمية في تدريس المناهج إلى إلمام كامل بالمبادئ التعليمية التي تستند إليها وهذا يتوقف على المعلم إلى حد كبير باعتباره المحرك الفعال للعملية التعليمية على الرغم من كل المستحْدثات التعليمية. إن نجاح أية لعبة تعليمية داخل الصف الدراسي يتوقف على الإعداد الكامل لها من جانب المعلم.

4-مراحل إعداد اللعبة التعليمية

I. مرحلة تحديد الأهداف:

أ-تحديد الأهداف التعليمية التي نسعى لتحقيقها وصياغتها كأهداف سلوكية.

ب- تحديد المعلومات والمهارات والاتجاهات المراد إكسابها للتلاميذ.

ت- تحديد أنماط السلوك التي يمارسها التلاميذ كدليل على تحقيق الأهداف.

ث- أن يكون المعلم على دراية كاملة بتلاميذه من حيث مناهجهم وميولهم وخبراتهم وقدراتهم وامكاناتهم.

II. مرحلة اختيار اللعبة وتصميمها:

أ-أن يكون هذا الاختيار متضمناً أهداف وجدانية معرفية.

ب- أستخدم اللعبة في توقيتها وموقعها المناسب.

ت- عدم اختار ألعاباً تحكمها قواعد معقدة يصعب فهمها.

III. مرحلة تهيئة الموقف:

أ-تحديد المعلومات المسبقة التي يحتاجها المشتركون في اللعبة.

ب- تهيئة الإمكانيات المادية بما يناسب كل لعبة.

ت- إعادة تنظيم الصف الدراسي وتحديد الأدوار المناسبة لكل مجموعة.

ث- توجيه التلاميذ غير المشتركين إلى أنشطة أخرى حتى لا يشعروا بالإهمال.

ج- المحافظة على الانضباط داخل الصف بدرجات متوازنة لا تمنع حرية التلاميذ ولا تسبب إزعاجاً للآخرين.

IV. مرحلة إلقاء التعليمات:

أ-إلقاء تعليمات اللعبة ببساطة وتسلسل بحيث يفهمها التلاميذ ويستطيعون تنفيذها.

ب- تجنب إعطاء أوامر قد تشيع جواً من الرهبة والخوف.

V. مرحلة اللعب:

أ- يجب أن ينسى المعلم أنه يمثل السلطة داخل الصف حتى يتيح جواً من الحرية.

ب-على المعلم أن يراقب اللعب ويتأكد من إيجابية جميع التلاميذ.

ت-وعلى المعلم أن يتحرك بين المجموعات ويستمع وينصت جيداً ولا يتدخل إلا عند الوقوع في خطأ أو عدم فهم اللعبة.

VI. مرحلة التقويم:

أ- **المستوى الأول:** وهو المستوى المرحلي ويكون أثناء إجراء اللعبة وفيه يقوم المعلم بجمع البيانات وتسجيل الملاحظات وتزويد التلاميذ بالتعليمات والتوجيهات لتعديل مسار اللعب.

ب- **المستوى الثاني:** وهو المستوى النهائي ويكون بعد إنهاء اللعبة وفيه يقوم المعلم بالتوصل إلى قرار شامل حول مدى نجاح التلاميذ في استخدام اللعبة ومدى الاستفادة منها.

5-دور التلميذ عند استخدام الألعاب التعليمية

إن إجراء أية لعبة يعتبر قمة التعاون والمنافسة ولكي نحافظ على القواعد التي تنظم اللعبة يجب أن يؤديها كل تلميذ بموافقته وإرادته.

أ- يجب أن يلتزم كل تلميذ بالدور المحدد له ولا يتدخل في أدوار زملائه.

ب- يجب أن يتكيف التلميذ مع أفراد مجموعته التي اختير ضمنها.

ت- يجب أن يؤدي التلميذ دوره على أكمل وجه حتى يضمن نتائج إيجابية لمجموعته.

6-تصنيفات الألعاب التعليمية في الرياضيات

نتيجة لظهور أنواع عديدة من الألعاب التعليمية سواء كانت بهدف ترفيهي أو هدف تعليمي، كانت الحاجة لوجود تصنيف يشمل هذه الألعاب التعليمية وتقسيمها إلى مجموعات يشترك كل منها في صفة مميزة قد ترجع إلى الهدف من هذه الألعاب التعليمية أو طريقة استخدامها أو طريقة تنظيم التلاميذ المشاركين فيها. وحسب طبيعة مادة الرياضيات وما تحتويه من مفاهيم ومهارات ومبادئ وحل مشكلات رياضية، تصنف الألعاب التعليمية الرياضياتية إلى:

أ-ألعاب لحل ألغاز أو مغالطات رياضية.

ب- ألعاب للبحث عن أنماط وقواعد.

ت- ألعاب للتدريب على المهارات.

ث- ألعاب اكتشافية.

7-فوائد الألعاب التعليمية

يمكن تحديد فوائد الألعاب التعليمية في ثلاث مستويات وفق ما يلي:

المستوى العقلي المعرفي: بتهيئة عقل التلميذ وتزويده بالمهارات الجديدة.

المستوى الاجتماعي النفسي: يوفر للتلميذ المتعة والاستقرار والاتزان الانفعالي.

المستوى الجسدي الحركي: يعطي فرصة لتدريب العضلات ونموها.

8-سلبيات الألعاب التعليمية

الاهتمام للعبة وعدم الانتباه للهدف التعليمي ، أو ظهور سلوكيات سلبية مثل الغش والخداع والإزعاج والصراع. وهنا يكمن دور المعلم في توجيه التلاميذ وتجنب وقوع هذه السلبيات.

9-تقويم الألعاب التعليمية

أ- هل كانت قواعد اللعبة واضحة؟

ب- هل احتاج تعلم القواعد وقتا طويلاً؟

ت- هل كانت القواعد معقدة و طويلة بدرجة أبطأت من تقدم اللعبة؟

ث- هل بدت اللعبة للتلاميذ و كأنها غبية جدا أو صعبة جدا؟

ج- هل صممت اللعبة بحيث تسمح بمشاركة كل التلاميذ؟

ح- هل انشغل كل تلميذ بتقدم السير في اللعبة؟

خ- هل استمتع التلاميذ باللعبة؟

د-هل تسببت اللعبة في مشكلات الاندماج داخل الفصل؟

ذ-هل الاندماج المفرط في اللعبة أعاق تحقيق أهداف التعليم؟

ر- هل كانت خبرات التعلم المتجسدة في الوحدة واضحة أثناء اللعب؟

ز- هل استجاب التلاميذ للأهداف المعرفية المتعلقة بالرياضيات في اللعبة؟

س- هل كان أداء التلاميذ في التقويم البعدي جيد فيما يتعلق بالرياضيات؟

10- الكفايات التعليمية التي تؤهل المعلم لتوظيف الألعاب التعليمية في المواقف الصفية

أ- اختيار اللعبة التعليمية المناسبة للموقف التعليمي.

ب- تصميم لعبة تربوية بطريقة فاعلة.

ت- تطوير لعبة متوافرة.

ث- توظيف الألعاب التعليمية بفاعلية في المواقف الصفية.

ج- تقويم اللعبة التعليمية من جميع النواحي.

11- ألغاز في الرياضيات

لتوضيح مفهوم الالغاز في تعليم الرياضيات، نعرض بعض الالغاز وفق ما يلي:

1) ثلاث أكوام من البيض غير متساوية ، مجموع البيض فيها جميعاً 48 بيضة . إذا وضعنا من الكومة الأولى في الكومة الثانية عدداً من البيض مساوياً لما هو موجود في هذه الكومة الثانية ، ثم أخذنا من الثانية ووضعنا في الثالثة عدداً من البيض مساوياً لما هو موجود في هذه الكومة الثالثة ، وأخيراً أخذنا من الكومة الثالثة ووضعنا في الكومة الأولى عدداً من البيض يساوي العدد الموجود فيها إذا فعلنا هذا كله فإن عدد البيض في كل الأكوام

الثلاث سيكون متساوياً ، فكم بيضه كانت في كل من الأكوام الثلاث في البداية ؟

2) أسرة مكونه من زوجين ، لهما ثلاثة أولاد متزوجين ، للأول طفل ، وللثاني طفلان ، وللثالث ثلاثة أطفال . فكم عدد أفراد هذه الأسرة ؟

3) كانت امرأة في طريقها إلى السوق لتبيع بيضها فصدمها طفل وتكسر :فسألها كم كان في السلة حتى ادفع ؟ فقالت: إذا صففتها اثنين اثنين يزيد عندي واحدة ولو صففناها ثلاث ثلاث يزيد واحد، ولو صففنا أربع أربع يزيد واحد ولو صففنا خمسة خمسة يزيد واحد، ولوصففناها ستة ستة يزيد واحدة ولو صففنا سبعه سبعه لا يزيد شيء. كم كان عدد البيض ؟

4) ما هو العدد الذي له عشر و تسع و ثمن و سبع و سدس و خمس و ربع وثلث ونصف ؟

5) قطاره طوله كيلو متر واحد ، يجب أن يجتاز نفقاً يبلغ طوله كيلو متراً واحداً أيضاً ، ما هو الزمن الذي يحتاجه القطار ليجتاز هذا النفق ، علماً بأن سرعته هي 15 كيلومتراً في الساعة ؟

6) رجلان معهما إناء فيه ثمانية أرطال زيتاً ، وليس معهما إلا إناءان ، أحدهما يسع ثلاثة أرطال ، والأخر يسع خمسة ، وأرادا قسمة الزيت بينهما نصفين ، أي يأخذ كل منهما أربعة أرطال ، فكيف يفعلان ؟

7) اشترى رجل ثلاثين لعبة ملونة بثلاثين ليرة سورية ، فإذا كان ثمن كل واحدة من اللون الأحمر ربع ليرة سورية ، وثمن كل واحدة من اللون الأخضر ليرتان سوريتان ، وثمن كل واحدة من اللون الأصفر نصف ليرة سورية ، وثمن كل واحدة من اللون الأزرق ليرة سورية. فما عدد كل نوع من الأنواع الأربعة ؟

8) عشرون طائراً بيعت بعشرين ليرة سورية ً ، ا ذا كان ثمن الحمامة (2/1) نصف ليرة سورية، وثمن الدجاجة ليرة سورية واحد ، وثمن البطة ليرتان سوريتان ، فكم عدد الحمام و الدجاج و البط؟

9) عشرون لعبة ملونة ، بيعت جميعاً بعشرين ليرة سورية. اذا كان ثمن الواحدة من اللون الأحمر (1/4) ربع ريال ، وثمن الواحدة من اللون الأزرق نصف ليرة سورية ، وثمن الواحدة من اللون الأخضر أربع ليرات سورية . فما عدد اللعب الحمراء ، واللعب الخضراء ، واللعب الزرقاء ؟

10) مائة طائر بيعت جميعاً بـــ 100 ليرة سورية . اذا كان ثمن الصقر خمس ليرات سورية ، وثمن الحمامة ليرة سورية ، وثمن كل عشرين غراباً ليرة سورية. فما عدد كل نوع من الأنواع الثلاثة ؟

حلول الألغاز:

1) الأكوام الثلاثة هي : 22 ، 14 ، 12.

2) عدد أفراد الأسرة : 14فرداً.

3) عدد البيض = 301.

4) العدد هو 2520.

5) الزمن الذي يحتاجه القطار ليجتاز هذا النفق هو 8 دقائق

6)

	يسع 3	يسع 5	يسع 8
الخطوة الأولى	5	3	ــــــــ
الخطوة الثانية	5	ــــــــ	3
الخطوة الثالثة	2	3	3
الخطوة الرابعة	2	1	5

الخطوة الخامسة	7	1	_____
الخطوة السادسة	7	_____	1
الخطوة السابعة	4	3	1
الحطوة الأخيرة	4	_____	4

7) عدد اللعب الحمراء = 6 . عدد اللعب الخضراء = 10 .

عدد اللعب الصفراء = 11 . عدد اللعب الزرقاء = 3 .

8) عدد الحمام = 12 حل آخر : 2 حل آخر : 4

عدد الدجاج = 2 8 14

عدد البـــط = 6 4 2

9) عدد اللعب الحمراء = 2

عدد اللعب الزرقاء = 15

عدد اللعب الخضراء = 3

10) عدد الصقور = 19 . عدد الحمام = 1 . عدد الغربان = 80.


وقل رب زدني علما
Damascus University

الفصل الحادي عشر

تدريس الأعداد

1-مقدمة

يرى بياجيه أنه لكي يدرك الطفل مفهوم **العدد** ينبغي أن يكون قد تطور تفكيره من مرحلة ما قبل العمليات إلى مرحلة العمليات الملموسة (أو مرحلة الذكاء الملموس) . (حيث يرى **بياجيه** أن **النمو العقلي** للأطفال يتقدم خلال أربع مراحل متتالية، هي: المرحلة الحسية-الحركية، ومرحلة ما قبل العمليات، ومرحلة العمليات الملموسة، ومرحلة العمليات المجردة).

2-فهم المفاهيم المنطقية الرياضية

عملية **فهم** المفاهيم المنطقية الرياضية تمر عند الأطفال بثلاث مراحل هي:

1"- مرحلة ماقبل الفهم المنطقي:

وهي تقابل تقريباً مرحلة ما قبل العمليات. وتمتد هذه المرحلة من بلوغ الطفل حوالي عامين إلى حوالي السابعة من العمر. وهناك بعض الأطفال الأذكياء الذين يتركون هذه المرحلة إلى المرحلة التالية في الخامسة من العمر، وبعضهم الآخر يتركها في سن التاسعة أو العاشرة من العمر.

وتوصف هذه المرحلة بأنها مرحلة التصور أو الرموز. فالطفل يتصور الأشياء، فهو عندما يلعب بألعابه يقوم بدور الأم وهي تعد الطعام مثلاً، فيتصور أدوات اللعب لديه وكأنها الأدوات التي تستخدمها الأم لإعداد الطعام، فيمثل هو هذا الدور.

2"- مرحلة الفهم الجزئي.

وهي تقابل تقريباً المرحلة الواقعة بين مرحلة ما قبل العمليات ومرحلة العمليات الملموسة. وتمتد هذه المرحلة من حوالي سن السابعة إلى حوالي الحادية عشرة من العمر. فتلاميذ الحلقة الأولى من التعليم الأساسي يكون تفكيرهم مرتبطاً بمواصفات هذه المرحلة، حيث يستخدمون عمليات منطقية في حل مسائل تتضمن أشياء وحوادث ملموسة. وعمليات هذه المرحلة تتضمن التسلسل (الترتيب) والتصنيف والقدرة على العكس، وتكوّن مفهوم العدد والاحتفاظ به من خلال المجموعات خاصة.

3"- مرحلة الفهم الكامل.

وهي تقابل مرحلة العمليات الملموسة ومرحلة العمليات المجردة. وفي مرحلة العمليات المجردة أو الذكاء المجرد يستطيع الطفل التعامل مع الرموز والمفاهيم داخل القضايا الرياضية المجردة دون التقيد بالأشياء المحسوسة مادياً.

وينتقل إلى عالم التصورات الذهنية والمبادئ والنظريات، فيدرك الرموز الجبرية والهندسية القائمة على هذه التصورات الذهنية. فيستطيع التلميذ في هذه المرحلة تحليل المسألة التالية بالرموز دون الكلمات:

إذا كان $y < x$ و $z > x$

إذاً : $y < x < z$

تبين لنا مما سبق كيفية تطور الفهم عند التلميذ وطرائق تعليمه.

3- الكفايات التعليمية

الكفايات التعليمية أو ما يجب أن يمتلكه التلميذ كي يتعلم الأعداد وخواصها فيجب أن يتعلم :

- الاحتفاظ بالعدد.
- تعلم العد.
- تسلسل الأعداد.
- موازنة الأعداد.

ومن ثم تعلم العمليات الحسابية.

أ- الاحتفاظ بالعدد:

يتعلم التلميذ عدد عناصر المجموع من خلال عدها ، وذلك بإجراء المقابلة بين أسماء الأعداد وعناصر مجموعة الأشياء المراد عدها. ولكن التلميذ في سن الخامسة أو السادسة، لا يعرف معنى العدد لأن الصورة المكانية التي تشغله عناصر المجموعة هو مفهوم العدد عند التلاميذ في هذه السن. فعندما يرى التلميذ مجموعتين من أشياء معروضتين ما يلي:

مجموعة(1):



مجموعة(2):



الشكل (1)

فإنه يرى أن المجموعتين لهما عدد العناصر نفسه، ولكن إذا زادت المسافة بين عناصر إحدى المجموعتين على النحو التالي:

مجموعة(1):

مجموعة(2):



الشكل (2)

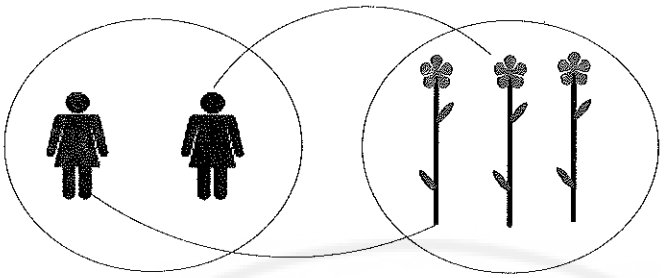
فيرى أن عدد عناصر المجموعة الثانية أكثر من عدد عناصر المجموعة الأولى. وهذا يدل على أن تلاميذ الخامسة أو السادسة من العمر لم يصلوا بعد إلى مرحلة الفهم الكامل لمفهوم الاحتفاظ بالعدد أو اكتساب العدد، أي إلى المرحلة التي يدرك فيها التلاميذ أن عدد عناصر المجموعة يبقى كما هو مهما حدث من تغيير في تنظيم وترتيب العناصر.

ب- تعلم العد:

a. إن التقابل الأحادي (التناظر الأحادي) أمر مهم في تحديد عناصر المجموعة. فعرض مجموعتين من الأشياء على التلاميذ والطلب منه إجراء مقارنة بينهما بوضع عنصر من إحدى المجموعتين بجانب عنصر من المجموعة الأخرى، لمعرفة إذا كانت إحدى المجموعتين تضم عناصر أكثر من الأخرى. مثل هذا العمل مناسب للتلاميذ بين الخامسة والسابعة من العمر.

b. بعد هذه المرحلة يأتي استخدام الورقة والقلم التي تحمل صوراً لمجموعات، ويطلب من التلاميذ:

1) رسم خطوط تصل بين كل زوجين من العناصر يكون العنصر الأول من المجموعة الأولى، بينما العنصر الثاني ينتمي للمجموعة الثانية. كما في الشكل التالي:

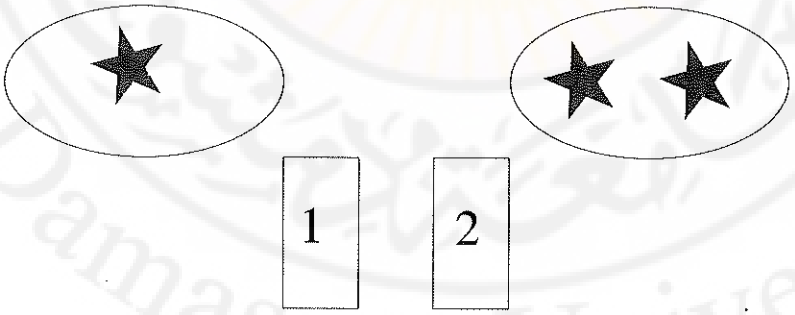


الشكل (3)

إن مثل هذا الإجراء يعني تحركاً نحو التجريد (التصور الذهني)، لأن الصور ما هي إلا تمثيل للأشياء ذات الأبعاد الثلاثية، في مستو ذي بعدين.

2) بعد مقابلة عناصر في مجموعة مع عناصر في مجموعة أخرى يتعلم التلاميذ مقابلة أسماء الأعداد أو رموز الأعداد مع الأشياء، فيشيرون إلى شيء ويقولون: واحد، ثم يشيرون إلى شيء آخر ويقولون، اثنان، وتعني عنصرين أو شيئين، وهكذا مع بقية الأعداد. ما في الشكل التالي:

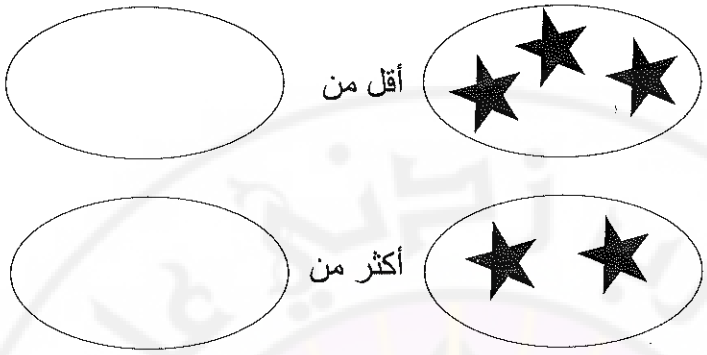
صِلْ كل مجموعة بالعدد المناسب:



الشكل (4)

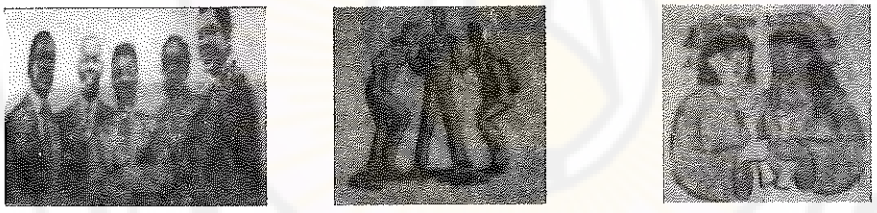
3) ثم يطلب المعلم من التلاميذ حل المثال التالي:

ارسمُ عناصر داخل الخط الأسود



c. بعد ذلك تأتي مرحلة العرض على التلاميذ لعدة صور لمجموعات من الأشياء تختلف في عدد عناصرها، ونطلب منهم عد عناصر كل مجموعة وكتابة رمز عدد العناصر تحت كل مجموعة.

ضع العدد المناسب تحت كل صورة فيما يلي:



....

الشكل رقم (5)

وعندما يستطيع التلاميذ جعل أسماء الأعداد، واحد، اثنين، ثلاثة،.....

في تناظر (تقابل) أحادي مع العناصر (الأشياء) في كل مجموعة ويحددون أن عدد عناصر مجموعة الرجال السود (أصحاب الصور النصية)، خمسة،وعدد

عناصر مجموعة خريجي الجامعة، اثنان، وعدد عناصر مجموعة الرجال الواقفين ثلاثة، فإنه يمكن القول إنهم قد تعلموا العد بشكل أولي. إلا أنهم لم يدركوا مفهوم العدد بعد في هذه السن، بين الخامسة والسادسة، لأنه لو وضعنا مجموعة أخرى تتكون من ثلاثة أشياء، تشغل حيزاً أكبر من الحيز الذي يشغله الرجال الثلاثة الواقفين في الصورة السابقة، لاعتقد الأطفال أنه توجد عناصر أكثر في المجموعة الجديدة. وهذا يعود إلى عدم وصول التلاميذ في هذه السن إلى مرحلة إدراك مفهوم الاحتفاظ (الاكتساب) بعدد عناصر المجموعة، ومفهوم التكافؤ بين المجموعات في حالة إعادة تنظيم و عناصرها ترتيبها.

النتيجة: يرى بياجيه أنه لكي يدرك التلميذ مفهوم العدد ينبغي أن يكون قد تطور تفكيره من المستوى المحسوس إلى المستوى المنطقي والعقلي، أي مستوى العمليات. وأن سن السابعة هو السن الذي يدرك عنده الأطفال أن عدد عناصر المجموعة لا يتغير عند أي تبديل في ترتيب هذه العناصر وتنظيمها.

وعلى هذا، وبموجب نتائج بحوث بياجيه، فإن السن المناسب لدراسة الأعداد هي سن السابعة من العمر.

ت- تسلسل الأعداد:

إن التسلسل يدرس قضيتي التصنيف والمقارنة بين عناصر مجموعتين تحتوي كل منهما على عناصر متسلسلة أو متدرجة في الشكل والكمية.وهذا يستدعي من جانب الطفل القدرة على استعمال العدد واختيار العناصر المماثلة وتحديد موقع كل عنصر بالنسبة لبقية العناصر.

يستخدم العدد لتعيين موقع عنصر بين مجموعة عناصر، فعندما نقول العنصر السابع مثلاً، فالسابع عدد يدل على موقع أو ترتيب هذا العنصر بالنسبة لبقية العناصر في المجموعة. وهنا يكون التعامل مع العدد بمعناه التسلسلي أو الترتيبي.

وهذا يستدعي من جانب التلميذ:

1) القدرة على استعمال العدد واختيار العناصر المتماثلة.

2) تحديد موقع كل عنصر بالنسبة لبقية العناصر.

مفهوم التسلسل عند بياجيه:

توصل بياجيه في بحوثه إلى وجود ثلاث مراحل يمر فيها الطفل لتكوين مفهوم التسلسل عنده، على النحو التالي:

أ- المرحلة الأولى لنمو مفهوم التسلسل (سن الرابعة أو سن الخامسة)

ب- المرحلة الثانية لنمو مفهوم التسلسل (بين سن الخامسة وسن السابعة).

ت- المرحلة الثالثة (اعتباراً من سن السابعة أو الثامنة) أن أداء الأطفال يكون وفق المستويات التالية:

المستوى الأول: (الأطفال في سن يمتد بين الرابعة والخامسة والنصف): لا يستطيع الطفل في هذه المرحلة العمرية الترتيب وفق معيار الحجم. لا يستطيع الترتيب في سلسلة بحسب معيار الحجم عن طريق الإدراك الحسي.

المستوى الثاني: (الأطفال في سن يمتد بين السادسة والنصف والسابعة والنصف): يمكن للطفل في هذه المرحلة القيام الترتيب باستخدام معيار الحجم، وإجراء التقابل المناسبة له، لكن يتم ذلك عن طريق المحاولة والخطأ. أي عندما يرتكب الخطأ يقوم بتصحيحه.

المستوى الثالث: (الأطفال في سن يمتد بين السادسة والنصف والسابعة والنصف): يمكن للطفل في هذه المرحلة يرتب وفق سلسلتين بحسب الحجم، دون اللجوء إلى أسلوب المحاولة والخطأ. ويستخدم في هذه المرحلة مفهوم العد الترتيبي، أن مفهوم التسلسل ومفهوم التناظر يتم تدريجياً ومرحلياً عند الأطفال.

ويرى بياجيه مما سبق أن أنسب عمر للطفل لدراسة الأعداد هو سن السابعة.

يُعتبر مثال السيارات والرجال وأمثلة مشابهة له أسلوباً في تعليم التلاميذ مفهوم العد الترتيبي، يفوق في تأثيره التمرينات المستخدمة في الصفوف الأولى الابتدائية، كجعل التلاميذ يذكرون أو يكتبون أسماء الأعداد الترتيبية المقابلة لعربات القطار.

النتيجة: تجدر الإشارة إلى أن نجاح التلميذ في إجراء عمليات التسلسل أو الترتيب يقوم على الخطوات التالية:

أ- القدرة على الترتيب في اتجاهين متعاكسين (متضادين)، مثلاً من الأطول إلى الأقصر، و من الأقصر إلى الأطول. ومن الأكبر حجماً إلى الأصغر حجماً، ومن الأصغر حجماً إلى الأكبر حجماً.

ب- خاصة التعدي. فإذا كان $A > B$ و كان $B > C$ فإن $A > C$ وهذا يعني التنسيق بين سلسلة من العلاقات.

ت- العلاقات الزوجية لأي عنصر معلوم عند تحديد موضعه، فمثلاً يكون العنصر أكبر حجماً من العنصر السابق له وأصغر حجماً من العنصر التالي له.

يمكن للمعلم استخدام هذه الفعاليات اختباراتِ تشخيصٍ لمعرفة مدى فهم التلميذ لمفهوم العدد. كما تجدر الإشارة إلى ضرورة إتاحة المعلم الفرص للأطفال للتفاعل

مع هذه الفعاليات وأمثالها، لأن ذلك أنسب السبل لتعلم المفاهيم في المرحلة الابتدائية للدراسة. ويعود ذلك إلى حاجة التلاميذ إلى خبرات أكثر عن طريق تفاعلهم مع الأشياء المادية للتهيؤ لتجريد مفهوم العدد والعمليات عليه.

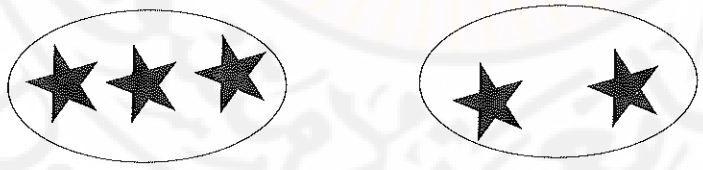
ث- الموازنة بين الأعداد:

إن استخدام مواد محسوسة بدلاً من الأشكال لتوضيح مفهوم مقارنة الأعداد أو موازنتها، يعد من أهم الطرق لمساعدة التلميذ على استيعاب المفاهيم الرياضية. فالمواد المحسوسة يمكن لمسها ورؤيتها، ومن ثم تتحول المفاهيم عبر اللمس والحس إلى مادة سهلة الاستيعاب.

عند مقارنة الأعداد، يعطي المعلم أحد التلاميذ أربعة مكعبات ويعطي تلميذاً آخر ستة مكعبات، ثم يسأل المعلم: أي التلميذين لديه مكعبات أكثر؟

وبعد هذا العمل يأتي استخدام الورقة والقلم التي تحمل صوراً لمجموعات (مرحلة شبه حسية). إن مثل هذا الإجراء يعني تحركاً نحو التصور الذهني (التجريد).

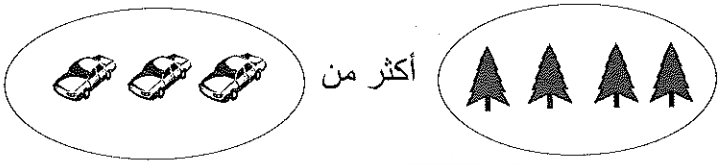
مثال: ضع إشارة × تحت الخط الذي فيه أشياء أكثر.



....

الشكل (6)

مثال:



4 أكبر من 3

4 > 3

الشكل (7)

مثال:

اكتب الأعداد وأضع إشارة > أو < في الفراغ....



....

الشكل (8)

أمثلة:

كيف تعلم الموازنة بين العددين 19,14 ثم بين العددين 12,16؟

هل تحتاج إلى المرحلة الحسية؟

4- العمليات على الأعداد

أ- جمع الأعداد وطرحها:

إنّ طريقة التعليم التقليدية في اكتساب مهارة الجمع أو الطرح تركز على استراتيجية الأجزاء. حيث تجزأ فيها مهارة الجمع أو الطرح إلى أجزاء متكاملة

فيما بينها، ويدرس التلاميذ الأجزاء التي تتكون منها المهارة، لجزء وحده أولاً حتى يتكامل التدريب على كل المهارة. فالتعليم يتم بالانتقال من الجزء إلى الكل.

الجمع:

مثال:

اكتساب الجمع بالطريقة التقليدية.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1} \\ 45 \\ 28 \\ \hline 73 \end{array} \; +$$

تتم عملية تعلم مهارة الجمع من قبل المعلم بالشكل التالي:

نضيف 5 إلى 8 فيكون الجمع مساوياً 13، نأخذ 3 ونضع 1 في الأعلى، ثم نجمع 4 إلى 1 فيكون الجواب 5، ثم نجمع 5 إلى 2 فيصبح الجواب 7.

من المناسب أن يتعلم التلاميذ استراتيجية أخرى في عملية الجمع ليكتسبوا طرائق مختلفة في التفكير و كيفية جمع مكونات الأعداد. ففي المثال السابق يمكن أن تتم عملية الجمع بالشكل التالي :

نفرق العددين 28,45 إلى مكونات يسهل التعامل معها، كما يلي:

5+40+8+20 ثم نبدأ بجمع 5 إلى 8 والجواب 13 حيث أخذنا 2 من 5 فحصلنا على 10 ويبقى 3 ثم نجمع 40 و 20 فيكون المجموع 60 لأن جمع 4 إلى 2 هو 6 ثم نجمع 10 إلى 60 مع الباقي 3 فيكون الناتج 73.

ملاحظة:

من المناسب تنمية مهارة الجمع الذهني لدى التلاميذ، كما في الأمثلة التالية:

$26+30=$ ، $206+300=$

$800+200=$ ، $8000+2000=$ ، $308+502=$

الطرح:

مثال:

اكتساب مهارة الطرح بالطريقة التقليدية:

$$\begin{array}{r} 17 \\ 37 \\ -\ 8 \\ \hline 29 \end{array}$$

لأننا لا نستطيع طرح 8 من 7، نستلف 1 من 3 (العشرات) فنحصل على العدد 17.

ولكن حاصل جمع 9 و 8 يساوي 17. عندما استلفنا 1من 3 يبقى 2 في منزلة العشرات، وبالتالي يكون ناتج الطرح 29.

من المناسب أن يتعلم التلاميذ استراتيجية أخرى في عملية الطرح ليكتسبوا طرائق مختلفة في التفكير. فيمكن استخدام استراتيجية طرح العشرات أولاً. أو استراتيجية إعادة التجميع واستخدامها في الطرح.

ففي المثال السابق نعيد التجميع ونستخدم هذه الأعداد في عملية الطرح:

$$\begin{array}{r} 37 \\ -\ 8 \\ \hline 29 \end{array}$$

لو كان لدينا $7-37$ كان الناتج 30.ولكن لدينا $8-37$، إذا علينا أن نستبعد 1من 30 فيكون الناتج 29.

ويمكن أن نستخدم طريقة طرح العشرات أولاً في عملية الطـــرح، كـــما في المثال التالي:

$$\begin{array}{r} 37 \\ -\ 20 \\ \hline 17 \end{array}$$

إن ناتج طرح 20من 37يساوي 17، لأننا إذا طرحنا 20 من 30 كان الناتج يساوي 10، ثم لدينا 7 متبقية فنضيفها إلى 10 فيكون الناتج 17.

أمثلة:

1) كيف تعلم $34+28$ بطريقة إعادة التجميع (التفريق).
2) كيف تعلم $9-58$ بطريقة إعادة التجميع.
3) كيف تعلم $40-58$ بطريقة طرح العشرات أولاً.

ب- ضرب الأعداد وقسمتها:

الضرب:

الضرب هو عملية جمع عددٍ ما إلى نفسه، عدداً من المرات. فتعلم مهارة الضرب يتم عن طريق تعلم قَبْلي لمهارة الجمع.

فالتعلم القبلي لاكتساب مهارة الضرب يبدأ من مهارة جمع الأعداد المتساوية: $2+2+2+2=8$ أربع اثنينات.

على المتعلم أن:

1) يلجأ إلى ترميز عملية الجمع السابقة بعملية ضرب:



$2 + 2 + 2 + 2 = 8$

أربع اثنينات
يكتب بعد الحوار

أربع مجموعات, كل مجموعة ذات عنصرين

$2 \times 4 = 8$



2) ينتقل إلى حل أمثلة:

$3\times2=\ldots+\ldots=6$ واستنتاج أن $3\times2=6$ ومن ثم الانتقال إلى تعليم جدول الضرب بالعدد 2، وهكذا مع بقية الأعداد، حتى نستطيع استخدام الطريقة المختصرة في عملية الضرب، فيما بعد.

فبدلاً من كتابة $6+6+6+6=24$ نكتب $6\times4=24$.

3) ثم ينتقل إلى ضرب عدد مكون من رقم واحد في عدد مكون من رقمين.

4) ثم ضرب عدد مكون من رقم واحد في عدد مكون من ثلاثة أرقام (دون حمل أو مع حمل). ثم ضرب عدد مؤلف من رقمين بعدد آخر مؤلف من رقمين. وهكذا...

مثال:

$$\begin{array}{r} 42 \\ \times\ 26 \\ \hline 252 \leftarrow 6\times42 \\ +\ 840 \leftarrow 20\times42 \\ \hline 1092 \end{array}$$

ومن المناسب كتابة خطوات العمل على السبورة، ثم في دفتر التلميذ.

والجدير بالذكر أنه في كثير من الأحيان يكون إجراء عملية الضرب كما تعلمها الطريقة التقليدية صعباً وطويلاً. ولكن هذه العملية تصبح أمراً يسيراً عند إجراء بعض التعديل عليها. لأجل ذلك، من المناسب أن يتعلم التلاميذ استراتيجية أخرى في عملية الضرب غير تقليدية، ليكتسبوا طرائق مختلفة في التفكير في إجراء عمليات الضرب:

قاعدة:

ضرب عدد بنفسه مرتين: $59\times59=(59)^2$

باستخدام القاعدة التالية: (للمعلم):

$$x^2=x^2-y^2+y^2=(x+y)(x-y)+y^2$$

مثال :

$$59\times59=(59+1)(59-1)+1^2$$
$$60\times58+1=3480+1=3481$$

مثال :

$$83\times83=80\times86+3^2=6880+9=6889.$$

مثال:

$$996\times996=1000\times992+4^2=992000+16=992016.$$

قاعدة:

ضرب عدد بنفسه مرتين ورقم آحاده 5.

نضرب رقم العشرات في العدد الذي يليه، ونضع أمامه مربع رقم الآحاد.

مثال:

65×65 نكتب $6\times7=-42$ ونضع أمامه $25=5^2$.

$$65\times65=4225$$

مثال:

95×95 نكتب $9\times10=90$ ونضع أمامه 25.

$$95\times95=9025$$

مثال:

115×115 نضرب رقمي العشرات والمئات بالعدد الذي يليه. فرقمي العشرات والمئات هو العدد 11، والعدد الذي يليه هو 12 فنكتب $11\times12=132$ ونضع أمامه 25.

$$115\times115=13225$$

قاعدة:

ضرب العدد 11 في عدد مؤلف من رقمين مجموعهما أصغر من عشرة.

نجمع الرقمين ونضع الناتج في الوسط.

مثال:

$$11\times36=6(6+3)3=396$$

قاعدة:

ضرب العدد 11 في عدد مؤلف من رقمين مجموعهما أكبر من تسعة. أو مؤلف من عدة أرقام.

نجمع الرقمين وللحصول على الناتج: نكتب رقم الآحاد، ثم نجمع رقم الآحاد مع رقم العشرات فيكون هو الرقم الثاني في الناتج، ثم نجمع رقم العشرات مع رقم المئات فيكون هو الرقم الثالث في الناتج، وهكذا...

مثال:

رقم الآحاد 3

$11\times2763=30393$ ثم $3+6=9$ ثم $6+7=13$ فنأخذ 3 ونترك الواحد ليجمع مع اللاحق $7+2+1=10$ فنأخذ. ونترك الواحد ليجمع مع الرقم الأخير $1+2=3$.

إذاً: $11\times2763=30393$

مثال:

$11\times46=6$ حيث 6هو رقم الآحاد، ثم نجمع رقم الآحاد مع رقم العشرات $6+4=10$، نأخذ. ونترك الواحد ليجمع مع الرقم الأخير $4+1=5$.

إذاً: $11\times46=506$.

أمثلة:

1) أوجد ناتج 43×43 بطريقة الضرب السريع.

2) أوجد ناتج 215×215 بطريقة الضرب السريع.

3) أوجد ناتج 642×11 بطريقة الضرب السريع.

القسمة:

إن القسمة هي عملية عكسية للضرب فالتعبير $20\div4=?$ يعني، ما العدد الذي إذا ضرب في 4 كان الناتج 20؟

مثال:

$15 \div 3 = ...$ لأن $3 \times .... = 15$.

فعندما نعرض أمثلة كالسابق، فنحن نقود التلميذ إلى ربط القسمة بعملية الضرب.

أن القسمة تجزئة عددٍ ما إلى مجموعات متساوية فإن $8 \div 4$ تعني تجزئة 8 إلى 4 مجموعات جزئية متساوية.

وأيضاً يمكن أن نرى القسمة بأنها طرح أعداد متساوية من عدد.

حيث إن التعبير $20 \div 4$ يعني ما يلي: كم عملية طرح يمكن أن أجري حتى يكون الباقي صفراً؟

مثال:

$20 - 4 = 16$ ثم $16 - 4 = 12$ ثم $12 - 4 = 8$ ثم $8 - 4 = 4$ ثم $4 - 4 = 0$.

وجدنا خمس عمليات طرح. إذاً $20 \div 4 = 5$

وعند تدريس عملية القسمة ينبغي أن يتعلم التلميذ هذه المهارة بدءاً من المرحلي الحسية، وانتهاء بمرحلة العمليات المجردة. ويعود ذلك إلى حاجة التلاميذ إلى خبرات أكثر عن طريق تفاعلهم مع الأشياء المادية للتهيؤ للتصور الذهني لمفهوم عملية القسمة. فيأتي المعلم بستة أقلام مثلاً ويقسمها على تلميذين بالتساوي فيأخذ كل تلميذ ثلاثة أقلام. فيلاحظ أن ستة أقلام قسمت على اثنين فنتج.....

ثم يأتي استخدام الورقة والقلم التي تحمل صوراً لمجموعات مجزئة (مرحلة شبه حسية). إن مثل هذا الإجراء يعني تحركاً نحو التجريد، لأن الصور ما هي إلا تمثيل للأشياء ذات الأبعاد الثلاثة في مستو ذي بعدين.

مثال:

خطوة (1):

1) يطلب المعلم من 15 تلميذاً أن يجلسوا على 5 مقاعد بالتساوي، فيجد التلاميذ أنه جلس على كل مقعد 3 تلاميذ.

2) إذا وزعنا 15 على 5 ينتج 3.

3) نستطيع أن نكتب 15 على 5 هو 3 أو $15 \div 5 = 3$.

خطوة (2):

يطرح المعلم أمثلة أخرى مماثلة، ليقوم التلاميذ بترميز عملية القسمة من خلالها، ثم يقوم المعلم بالتعاون مع التلاميذ بربط عملية القسمة بعملية بعملية الضرب.

$16 \div 2 = ...$ لأن $2 \times ..... = 16$

$21 \div ..... = 3$ لأن $3 \times ..... = 21$

خطوة (3):

ينتقل المعلم إلى تدريس مهارة القسمة على عدد مكون من منزلة واحدة، دون باقٍ. ثم مع وجود باقٍ. ثم القسمة على عدد مكون من منزلتين بالطريقة التقليدية، وهكذا....

مسائل كلامية في القسمة: (توظيف تعريف القسمة في مفاهيمها الثلاثة) متى نقرر إجراء عملية القسمة؟ عندما يكون المطلوب تجزئة كمية إلى عدد من المجموعات المتساوية. (لأن القسمة هي تجزئة عدد ما إلى مجموعات متساوية).

مثال:

يراد تجزئة المبلغ 42 ليرة إلى ثلاث مبالغ متساوية. كم يكون كل جزء؟

$42 \div 3 = 14$.

مثال:

عندما لا نعلم الكمية المراد تقسيمها بالتساوي علينا إيجادها إذا كان ناتج القسمة معلوم. كما في المثال التالي:

قسم مبلغ من المال بالتساوي إلى ستة رجال، فكان نصيب كل واحد منهم 225 ليرة. كم كان هذا المبلغ من المال؟

$\ldots\ldots \div 6 = 225$.

$225 \times 6 = 1350$.

مثال :

لدى سمير 24 ليرة، يشتري في كل يوم حلوى بثمن 6 ليرات. كم يوم ستدوم نقوده؟

بعد اليوم الأول سيكون لديه $24 - 6 = 18$.

بعد اليوم الثاني سيكون لديه $18 - 6 = 12$.

بعد اليوم الثالث سيكون لديه $12 - 6 = 6$.

بعد اليوم الرابع سيكون لديه $6 - 6 = 0$.

إذاً ستدوم نقوده أربعة أيام. إلا أن هذه الطريقة طويلة رغم سهولتها فيمكن حلها بطريقة القسمة مباشرةً: $24 \div 6 = 4$.

5- الأعداد العادية (الكسور)

الكسر هو جزء أو أكثر من وحدة متساوية الأجزاء، كما أنه يدل على عنصر أو أكثر من مجموعة متساوية العناصر، أي هو جزء من مجموعة. فإذا أخذنا قلمين من مجموعة الأقلام، فعندئذ نمثلها بـ $\frac{2}{5}$ من مجموعة الأقلام. فالكسر يدل على نسبة بين مقدارين، كل من المقدارين لا يساوي الصفر.

إن الكسور هي عناصر من مجموعة الأعداد العادية y حيث:

$$y = \left\{ b : \frac{b}{d} \in Z \ , \ d \in Z^* \right\}.$$

تستخدم الكسور للتعبير عن علاقة بين مجموعتين من العناصر، ولتمثيل نسبة ما.

وتنقسم الكسور إلى:

1) أعداد كسرية (كسور غير عادية) يكون بسطها أكبر من مقامها.

مثال:

$$\frac{7}{2} \text{ أو } 3\frac{1}{2}.$$

2) كسور عادية يكون بسطها أصغر من مقامها.

مثال:

$$\frac{8}{9}$$

3) كسور عشرية تكتب على شكل عدد صحيح وأعشار توضع بينهما فاصلة. وعادة يبدأ التعليم بالكسور العادية، أي الكسور التي بسطها أصغر من مقامها. ويمر تعليم الكسور العادية بالخطوات التالية:

- فهم الكسور.
- قراءة الكسور وكتابتها.
- موازنة الكسور.

أ- فهم الكسور:

في بدء تدريس الكسور ينبغي إعطاء فكرة تدريجية عن الكسور، تقوم على استخدام الأشياء الحسية. كأن يعرف التلميذ النصف، الربع، الثلث، الخمس..قبل أن يعرف رموزها التالية:

$$\frac{1}{2} = \text{النصف}، \quad \frac{1}{3} = \text{ثلث}، \quad \frac{1}{4} = \text{ربع}...$$

إن توفير الفرص للتلميذ للقيام بفعاليات تمكنه من تقسيم الأشياء إلى أجزاء متساوية، تساعده على فهم معنى العدد العادي، مثل النصف الثلث، السدس،...

وعن طريق ممارسة عمليات تقسم الأشياء إلى أجزاء متساوية، يدرك التلميذ الجوانب التالية في فهم الأعداد العادية:

1) يمكن فصل الأشياء عن بعضها، كما يمكن تجميعها لتكوين الشئ الأصلي المكون لها. وهذا يساعد التلميذ على إدراك ما يسمى "الاحتفاظ بالكل".

2) يمكن اعتبار كل جزء من الأجزاء التي ينقسم إليها الشيء الصحيح إلى شيء صحيح بحد ذاته، ويكون قابلاً للتقسيم أيضاً.

3) يشير العدد العادي إلى عدد معين من الأجزاء المتساوية. فمثلاً الربع هو اعتبار جزء واحد من أربعة أجزاء متساوية.

والآن نتناول دراسة تكوين مفهوم بعض الأعداد العادية عن التلاميذ قبل سن الثانية عشرة، أي قبل مرحلة العمليات المجردة.

ب-فهم السدس:

نوضح العدد العادي (الكسر)، كأن نعرض مستطيل مقسم إلى ثلاثة أقسام متساوية، ثم نذكر أن كل قسم يمثل ثلث المستطيل الأصلي.



الشكل (9)

إن مثل هذا الأسلوب في التعليم يعتمد على الترديد اللفظي الذي لا يمكن اعتباره دليلاً على الفهم.

أن مستويات أداء الأطفال هي كالآتي:

المستوى الأول: (الأطفال من سن الثانية إلى الرابعة والنصف):

يجد الأطفال صعوبة في القيام بعملية التقسيم إلى نصفين. فلا يعتقد الطفل أن هناك علاقة بين الأجزاء والكل' وأن الجزء محتوى في الكل.

المستوى الثاني: (الأطفال من سن السادسة إلى السابعة):

يستطيع الأطفال تقسيم الدائرة إلى ثلاثة أقسام متساوية . وذلك على أساس من الفهم، وليس عن طريق المحاولة والخطأ، أي الوقوع بالخطأ ثم تصحيحه. وفي هذه المرحلة العمرية يدركون أن الأجزاء مع بعضها البعض تكون دائرة مساوية للدائرة الأصلية.

ت- قراءة الكسور وكتابتها:

بعد أن تعرف التلميذ على معنى الكسر، وميز بين الربع والنصف والثلاثة أرباع،.... يكون الوقت المناسب (حوالي سن الثامنة من العمر).

قد جاء التعبير عن الكسور بالألفاظ وبالرموز باستخدام أمثلة حسية.

فعندما نريد من التلميذ أن يعرف النصف نحضر له تفاحة مثلاً، ونقوم بتنصيفها ونجعله يردد كلمة "نصف" ثم نكتب الرمز الدال عليه وهو $\frac{1}{2}$.

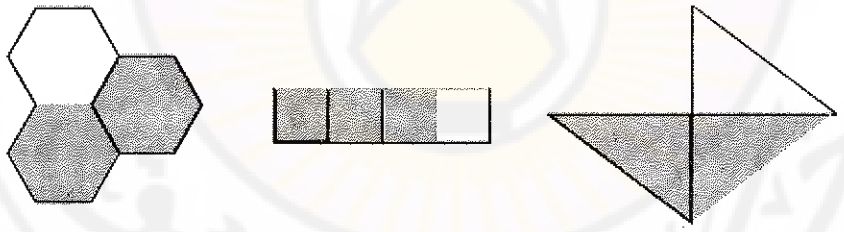
وفي مرحلة تالية نجعله يقوم بمثل هذه الفعالية الآتية:

ما عدد الأجزاء الملونة في كل شكل مما يلي؟

ما عدد الأجزاء جميعها في كل شكل مما يلي؟

اقرأ ثم اكتب ما يمثله الشكل الملون فيما يأتي.

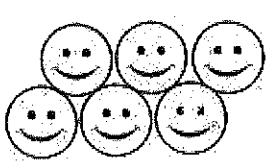
اقرأ ثم اكتب ما يمثله الشكل الملون فيما يأتي.

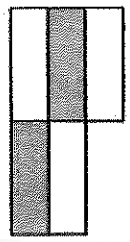


الشكل (10)

ثم يعطي التلميذ أمثلة داعمة كالآتي:

اكتب قيمة الجزء الملون في كل شكل مما يأتي:





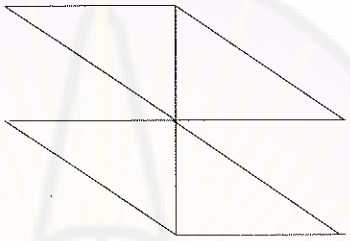
....

الشكل (11)

ظلل ما يعبر عن الكسر المدون تحت كل شكل فيما يلي:



$\frac{1}{2}$

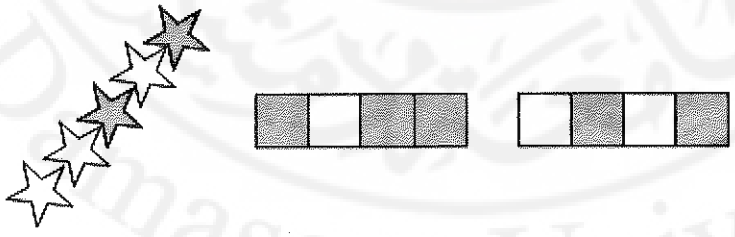


$\frac{1}{4}$

الشكل (12)

ثم ننتقل إلى المستوى التالي وهو الكسور التي ليست بسوطها واحداً، مثل ثلاثة ارباع $\frac{3}{4}$،...

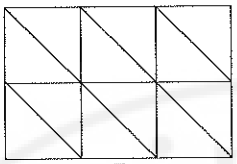
اقرأ ثم اكتب ما يمثله القسم الملون في كل شكل مما يلي:



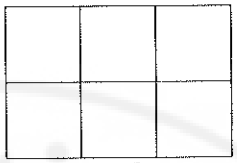
الشكل (13)

تدريب:

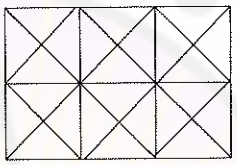
ظلل ما يعبر عن الكسر المدون تحت كل شكل فيما يلي:



$\frac{7}{12}$



$\frac{5}{6}$



$\frac{15}{24}$

الشكل (14)

ث- موازنة الكسور ذوات المقامات المتساوية:

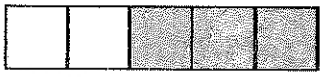
عند المقارنة بين الكسور، وعند تدريس رموز الكسور العادية ينبغي أن يعرف التلميذ أن هذه الرموز ما هي إلا طريقة لتسجيل تلك المفاهيم.

بعد نهاية دراسة التلميذ لموضوع الكسور نتوقع أن يكون قادراً على:

- أن يوضح مفهوم الكسر.
- أن يحدد قيمة الجزء المظلل في شكل ما.
- أن يظلل ما يعبر عن كسر ما.
- أن يقارن بين كسرين تساوى مقاماهما.
- أن يقارن بين كسرين تساوى بسطاهما.

لتعليم الموازنة بين كسرين تساوى مقاماهما، نبدأ من المرحلة شبه الحسية (باستخدام الصور)، ثم الانتقال إلى المرحلة الرمزية. كما في المثال التالي:

$\frac{3}{5}$ يمثل 3 عدد الأجزاء الملونة من أصل خمسة أجزاء



$\frac{2}{5}$ يمثل 2 عدد الأجزاء الملونة من أصل خمسة أجزاء



أيهما أكبر؟ 3 أجزاء من أصل خمسة أجزاء، أم جزاءان من أصل خمسة؟

أيهما أكبر $\frac{2}{5}$ أم $\frac{3}{5}$؟

نتيجة: إذا تساوى مقاما كسرين، فالكسر الذي بسطهُ أكبر هو الكسر الأكبر.

يعرض المعلم أمثلة ويحاور التلاميذ لحلها.

ضع الرمز (> أو <) في الفراغ التالي:

$$\frac{28}{50} \ldots \frac{39}{50} \quad \frac{5}{6} \ldots \frac{4}{6} \quad \frac{2}{7} \ldots \frac{1}{7}$$

لتعليم الموازنة بين كسرين تساوى بسطهما، نبدأ أيضاً من المرحلة شبه الحسية (باستخدام الصور)، ثم ننتقل إلى المرحلة الرمزية. كما في المثال التالي:

الجزء الملون يمثل $\frac{4}{5}$



الجزء الملون يمثل $\frac{4}{9}$



أيهما أكبر؟ الجزء الملون في الشكل الأعلى أم الجزء الملون في الشكل الأسفل؟ ثم أيهما أكبر $\frac{4}{9}$ أم $\frac{4}{5}$؟

نتيجة: إذا تساوى بسطا كسرين فالكسر الذي مقامه أصغر هو الكسر الأكبر.

يعرض المعلم أمثلة ويحاور التلاميذ لحلها.

ضع الرمز المناسب في الفراغ التالي:

$$\frac{15}{20}\ldots\frac{15}{30}\left|\frac{14}{19}\right.\ldots\frac{14}{25}\left|\frac{1}{9}\right.\ldots\frac{1}{7}$$

ج- موازنة الكسور ذوات المقامات غير المتساوية.

تحتاج الموازنة في هذه الحالة إلى توحيد المقامات. وتوحيد المقامات في الصف الرابع يقتصر على حالة واحدة، يكون فيها مقام أحد الكسور مضاعفاً لكل من مقامات الكسور الأخرى.

ويتم توحيد المقامات باستخدام فكرة الكسر المكافئ. فللموازنة بين الكسرين $\frac{5}{6},\frac{7}{18}$ نحاور التلاميذ في إيجاد كسر يكافئ الكسر $\frac{5}{6}$.

ويكون مقامه 18 ثم موازنة الكسرين الناتجين:

مثال:

وازن بين الكسرين: $\frac{5}{6},\frac{7}{18}$

المقام الأكبر هو 18.

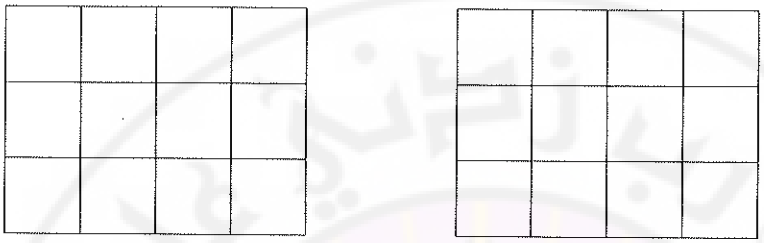
ما العدد الذي نضربه بحدي $\frac{5}{6}$ ليصبح المقام 18.

$$\frac{5}{6}=\frac{5\times3}{6\times3}=\frac{15}{18}$$

الموازنة: $\frac{15}{18}>\frac{7}{18}$ ومنه $\frac{7}{18}<\frac{5}{6}$

مثال:

ظلل $\frac{1}{3}$ المستطيل بلون و $\frac{1}{4}$ المستطيل بلون آخر، ثم أوضح أن $\frac{1}{3}$ أكبر من $\frac{1}{4}$.



ثم تعطى أمثلة داعمة للتلاميذ كالموازنة بين كسرين لا يكون مقام أحدهما مضاعفاً لمقام آخر. كما في المثال التالي:

وازن بين الكسرين $\frac{1}{2},\frac{3}{5}$.

للموازنة نستبدل كسرين مكافئين لهما، ومقامهما متساويان، هما:

$\frac{5}{10},\frac{6}{10}$ فنجد $\frac{5}{10}<\frac{6}{10}$ أي $\frac{1}{2},\frac{3}{5}$.

فسبقت عملية الموازنة عملية توحيد مقامي الكسرين.

6- العمليات على الكسور

أ- جمع كسور مقاماتها متساوية.

لإكساب التلميذ المهارة على إجراء عملية جمع كسرين أو أكثر مقاماتها متساوية. ومن المناسب للوصول إلى هذا الهدف:

البدء من المرحلة الحسية، ثم الانتقال إلى المرحلة شبه الحسية فمرحلة الرموز.

مثال:

يصنع المعلم مستطيلاً من الورق المقوىّ مجزّأً إلى ستة قطع متساوية.

حوار المعلم مع التلميذ:

ما عدد القطع التي تؤلف المستطيل؟

ما الكسر الذي يدل على قطعة واحدة من مجموعة القطع؟

كم قطعة تقابل الكسر $\frac{1}{6}$؟ كم قطعة تقابل الكسر $\frac{3}{6}$؟

أخذت سعاد $\frac{1}{6}$ وأخذت سلمى $\frac{3}{6}$ ما مجموع ما أخذت الاثنتان؟

$$\frac{1}{6}+\frac{3}{6}=\frac{4}{6}$$

ثم يسجل المعلم القاعدة على السبورة. ويزود التلاميذ بأمثلة داعمة متدرجة في الصعوبة:

$$\frac{2}{17}+\frac{1}{17}+\frac{3}{17}= \quad \Big| \quad \frac{2}{9}+\frac{5}{9}=$$

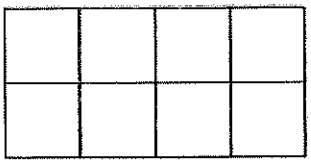
ب- طرح كسور مقاماتها متساوية.

للوصول إلى هذا الهدف ينبغي تعليم التلميذ هذه المهارة بدءاً من المرحلة الحسية، ثم الانتقال إلى المرحلة شبه الحسية، فمرحلة الرموز.

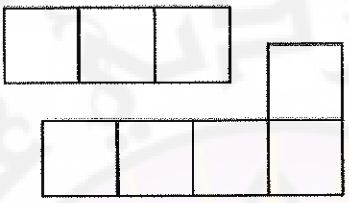
يصنع المعلم مستطيلاً من الورق المقوّى مجزّأً إلى ثمانية قطع متساوية.

حوار المعلم مع التلميذ:

من كم قطعة يتألف المستطيل التالي؟



أخذ زياد ثلاث قطع. فكم قطعة بقي؟



هل يصح أن نقول: أخذ زياد $\frac{3}{8}$ فبقي $\frac{5}{8}$؟

أي $\frac{8}{8}$ نقص $\frac{3}{8}$ فبقي $\frac{5}{8}$ أي $\frac{8}{8}-\frac{3}{8}=\frac{5}{8}$

ثم يسجل المعلم القاعدة على السبورة. ويزود بأمثلة داعمة متدرجة في الصعوبة:

$$\frac{5}{9}-\frac{2}{9}= \quad \left| \quad \frac{3}{17}-\frac{2}{17}\right.$$

ت-جمع كسور مقاماتها غير متساوية:

للوصول إلى هذا الهدف ينبغي تعليم التلميذ هذه المهارة بدءاً من المرحلة الحسية، ثم الانتقال إلى المرحلة شبه الحسية فمرحلة الرموز. جمع كسرين أحد مقاميهما مضاعف للآخر:

يصنع المعلم شريطين طبوقين من الورق المقوى، أحدهما مجزّأ إلى ثماني قطع متساوية، والآخر إلى أربع قطع متساوية.



$\frac{3}{8}$ + $\frac{2}{4}$

يرسم على الشريط الأيمن خطوطاً تجعل كل ربع جزأين طبوقين كما يلي:



$\frac{3}{8}$ + $\frac{4}{8}$

حوار المعلم مع التلميذ:

إن كل جزء جديد من الشريط الأيمن يساوي.....

إن الكسر $\frac{2}{4}$ يكافئ.....(أو نوحد المقامين) $\frac{2\times2}{2\times4}$

إذاً: $\frac{2}{4}+\frac{3}{8}=\frac{4}{8}+\frac{3}{8}=\frac{7}{8}$

يجعل المعلم شريطين متجاورين ويعد التلميذ الأثمان الملونة فيجد أنها تساوي $\frac{7}{8}$:



$\frac{7}{8}$

يعطي المعلم أمثلة داعمة:

اجمع ما يلي: $\frac{3}{10}+\frac{2}{5}$ | $\frac{4}{30}+\frac{3}{10}+\frac{1}{5}$

أما جمع كسور في الحالة العامة (مقاماتها مختلفة) فهي تحتاج إلى توحيد المقامات باستخدام المضاعف المشترك الأصغر، ثم جمعها. ونبدأ من الأمثلة السهلة ثم الأمثلة الصعبة. كما يلي:

مثال:

$$\frac{2}{3}+\frac{5}{4}$$

نوجد م.م.أ للمقامين 3,4 وهو 12 لأن $4=2\times2$ ، $3=3$

فيكون م.م.أ يساوي $12=3\times2\times2$

نضرب حدَّي الكسر الأول بالعدد 3 لأن $12\div4=3$

نضرب حدَّي الكسر الثاني بالعدد 4 لأن $12\div3=4$

$$\frac{2}{3}_{(4)}+\frac{5}{4}_{(3)}=\frac{8}{12}+\frac{15}{12}=\frac{23}{12}$$

مثال:

يستخدم المعلم الحوار مع التلاميذ للوصول إلى الهدف. وهو من مستوى الصف الخامس

يطلب إيجاد ناتج: $\frac{2}{9}+\frac{3}{8}+\frac{1}{12}$

إن م.م.أ للأعداد 12, 8 , 9 هو 72 وهو المقام المشترك

لأن: $12=2\times2\times3$ ، $12=2\times2\times2$ ، $9=3\times3$

إذاً م.م.أ يساوي $72=2\times2\times2\times3\times3$

نضرب حدي الكسر الأول بالعدد 6 لأن $72\div12=6$

نضرب حدي الكسر الثاني بالعدد 9 لأن $72 \div 8 = 9$

نضرب حدي الكسر الثاني بالعدد 8 لأن.....

$$\underset{(8)}{\frac{2}{9}} + \underset{(9)}{\frac{3}{8}} + \underset{(6)}{\frac{1}{12}} = \frac{16}{72} + \frac{27}{72} + \frac{6}{72} = \frac{49}{72}$$

ث-طرح كسور مقاماتها غير متساوية.

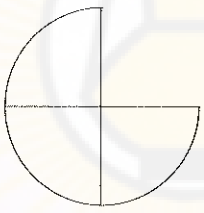
ينبغي تعليم التلميذ هذه المهارة بدءاً من المرحلة الحسية، ثم الانتقال إلى المرحلة شبه الحسية فمرحلة الرموز.

طرح كسرين أحد مقاميهما مضاعف للآخر:

مثال:

يعرض المعلم $\frac{3}{4}$ نموذج قرص دائري. أخذنا منه جزءاً هو $\frac{1}{2}$ القرص .

فكم يبقى من القرص؟



بقي من القرص $\frac{3}{4} - \frac{1}{2}$. ثم يطلب توحيد المقامات كما يلي:

$$\frac{3}{4} - \frac{1\times2}{2\times2} = \frac{3}{4} - \frac{2}{4} = \frac{1}{4}$$

يوضح المعلم ذلك على نموذج القرص، فيأخذ $\frac{2}{4}$ ويبقى $\frac{1}{4}$ ثم يعطي المعلم أمثلة داعمة لعمليتي الجمع والطرح معاً

تدريب: أوجد ناتج: $\frac{3}{15}+\frac{1}{10}-\frac{2}{15}$

7-الأعداد الكسرية.

العدد الكسري: هو كسر أكبر من الواحد كُتِب على شكل عدد صحيح وإلى يمينه كسر أصغر من الواحد. أو هو كسر يكون بسطه أكبر من مقامه.

مثال:

العدد $\frac{7}{3}$ هو كسر أكبر من الواحد، ويسمى كسراً غير عادي، وهو كسر يكون بسطه أكبر من مقامه.

ويكتب بالشكل التالي: $\frac{7}{3}=\frac{6}{3}+\frac{1}{3}=2+\frac{1}{3}$

واتفق على كتابته بشكل أبسط كما يلي $2\frac{1}{3}$ بعد حذف إشارة + و يسمى عدداً كسرياً.

مثال:

$\frac{2}{3}$ ليس عدداً كسرياً لأنه كسر أصغر من الواحد. أو بسطه أصغر من مقامه.

ملاحظة:

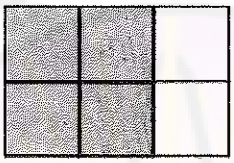
الكسر الذي يساوي الواحد يسمى كسراً غير عادي ، كالكسر $\frac{6}{6}$ ويتم تحويل الكسر غير العادي إلى عدد كسري بتقسيم البسط على المقام وباقي القسمة يكتب على شكل كسر. ففي مثالنا السابق $7\div 3=2$ والباقي 1 فيكون $\frac{7}{3}=2\frac{1}{3}$

أمثلة:

1. هات ثلاثة أمثلة لأعداد كسرية.
2. أي من الكسور التالية كسر عادي؟ وأي منها كسر غير عادي؟

$$\frac{2}{7}, \frac{3}{3}, \frac{5}{4}$$

3. أي عدد كسري من الأعداد أدناه يمثل الأجزاء المظللة في الشكل التالي:



$$\frac{3}{4} \quad , \quad 3\frac{2}{6} \quad , \quad 3\frac{2}{3} \quad , \quad 3\frac{2}{4}$$

تحليل الكسور (تحويل الكسور إلى أعداد كسرية):

يُشرح للتلميذ الخطوات المتسلسلة والمترابطة شفهياً على السبورة، ليتمكن من اكتساب هذه المهارة. كما في المثال التالي:

خطوة(1): ففي الكسر $\frac{17}{6}$ نقسم البسط على المقام فنحصل على ناتج قسمة وباقي قسمة.

$17 \div 6 = 2$ والباقي 5 (ناتج القسمة 2 والباقي 5).

خطوة(2): نكتب ناتج القسمة ممثلاً للجزء الصحيح من العدد الكسري

$$\frac{17}{6} = 2\frac{\cdots}{6}$$

خطوة(3): نجعل باقي القسمة بسطاً لكسر مقامه، المقام الأصلي. $\frac{17}{6} = 2\frac{5}{6}$

مثال:

1. حلل كلاً من الكسور التالية:

$$\frac{139}{11} \quad , \quad \frac{18}{7} \quad , \quad \frac{6}{5}$$

2. مستطيل بعداه $3\frac{2}{7}$, $3\frac{4}{7}$ أيهما طوله.

تركيب الكسور (تحويل الأعداد الكسرية إلى كسور غير عادية):

يُشرح للتلميذ الخطوات المتسلسلة والمترابطة شفهياً على السبورة، ليتمكن من اكتساب هذه المهارة.

مثال:

$$2\frac{3}{4}$$

خطوة(1): ففي الكسر $2\frac{3}{4}$ نضرب الجزء الصحيح للعدد الكسري في مقام الكسر منه. أي نضرب 2 في 4 لتحصل على 8.

خطوة(2): نجمع حاصل الضرب إلى البسط $8+3=11$.

خطوة(3): نعيد كتابة العدد الكسري على شكل مجموع مقسوماً على المقام: $\frac{11}{4}$

وباختصار: $2\frac{3}{4}=\frac{3+(4\times2)}{4}=\frac{11}{4}$

مثال:

أ- أكمل ما يلي لتركيب الكسور (الأعداد الكسرية) التالية:

$$6\frac{3}{7}=\frac{\dots}{7} \quad \Big| \quad 3\frac{1}{5}=\frac{16}{\dots}$$

ب- أعد كتابة العدد الكسري $3\frac{5}{6}$ على شكل كسر غير عادي.

ت- المسافة بين بلدين 630 كم، أراد السائق أن يتوقف للاستراحة بعد أن يقطع ربع هذه المسافة. كم كيلومتراً يقطع حتى يتوقف.

أ- موازنة الأعداد الكسرية.

نبدأ من السهل إلى الصعب. ومن البسيط إلى المركب. كما يلي:

وازن العددين 3 , 7.

وازن العددين $\frac{3}{5}$, $\frac{7}{5}$.

وازن العددين $\frac{3}{5}$, $\frac{7}{10}$.

وازن العددين $\frac{5}{2}$, $2\frac{1}{2}$.

وازن العددين $4\frac{1}{3}$, $5\frac{1}{4}$.

يحاور المعلم التلاميذ ليصلوا إلى أن: $5\frac{1}{4}$ أكبر من $4\frac{1}{3}$.

نتيجة: للموازنة بين عددين كسريين نوازن بين عدديهما، فالذي عدده الصحيح أكبر هو العدد الكسري الأكبر.

مثال:

تُعطى أمثلة متدرجة في صعوبتها ليحلها التلاميذ في دفاترهم، ثم يناقش المعلم الحل على السبورة.

1. إن $5\frac{1}{2} > 4\frac{3}{4}$ لأن ... > ....

2. وازن العددين $4\frac{4}{7}$, $5\frac{2}{5}$.

3. وازن العددين $216\frac{2}{5}$, $103\frac{10}{13}$.

4. رتب تصاعدياً الأعداد التالية:

$$4\frac{9}{10} \ , \ 6\frac{4}{5} \ , \ 3\frac{3}{4} \ , \ 5\frac{1}{2}$$

نتيجة: عند الموازنة بين عددين كسريين تساوى عدداهما الصحيحان، فإننا نوازن بين الكسرين.

تعطى أمثلة متدرجة في الصعوبة لاستنتاج القاعدة السابقة.

وازن العددين $\frac{5}{8}$, $\frac{4}{8}$.

وازن العددين $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$.

وازن العددين $7\frac{5}{8}$, $7\frac{4}{8}$.

وازن العددين $6\frac{1}{2}$, $6\frac{3}{4}$.

مثال:

1. إن $5\frac{3}{4} > 5\frac{1}{4}$ لأن ... > ....

2. رتب تنازلياً الأعداد التالية:

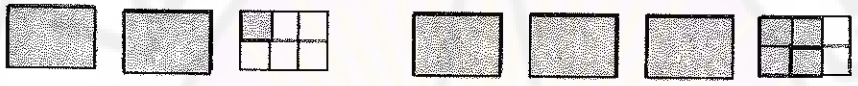
$$5\frac{1}{2} \ , \ 7\frac{2}{3} \ , \ 5\frac{3}{4} \ , \ 7\frac{1}{3}$$

3. مستطيل بعداه $2\frac{4}{5}$, $2\frac{1}{3}$ أي البعدين أطول؟

ب-جمع الأعداد الكسرية:

I. جمع أعداد كسرية مقاماتها متساوية:

يبدأ المعلم بطريقة شبه حسية لتعليم هذه المهارة، وذلك بعرضه على التلاميذ مستطيلاً مجزءاً إلى ستة أسداس، ويناقش مع التلاميذ تلوين جزء منه ليبقى $\frac{2}{6}$ بلا تلوين، ثم يثبت على السبورة 3 مستطيلات ملونة و $\frac{4}{6}$ ملونة من مستطيل آخر ، ويكتب تحتها $3\frac{4}{6}$ ثم يلوّن $\frac{1}{6}$ من مستطيل بلون آخر مع مستطيلين ويكتب تحتها $2\frac{1}{6}$.



$2\frac{1}{6}$ + $3\frac{4}{6}$

ثم يسأل المعلم عن مجموع هذين العددين، وبعد الحوار يجد التلاميذ أنه قد تكوّن هذا المجموع من : $2+3=5$ مستطيلاً صحيحاً

ثم $\frac{1}{6}+\frac{4}{6}=\frac{5}{6}$ المستطيل

فالمجموع $2\frac{1}{6}+3\frac{4}{6}=5\frac{5}{6}$

تسجل قاعدة الجمع بالتعاون مع التلاميذ:

قاعدة: لجمع عددين كسريين نجمع الكسرين، ثم نجمع العددين الصحيحين.

مثال:

يطلب المعلم من التلاميذ حل الأمثلة الآتية: (متدرجة في صعوبتها)

1. أوجد ناتج الجمع التالي ثم اختصر هذا الناتج إن أمكن:

$$4\frac{1}{14}+6\frac{3}{14}=$$

2. أوجد ناتج ما يلي واكتبه بأبسط شكل ممكن:

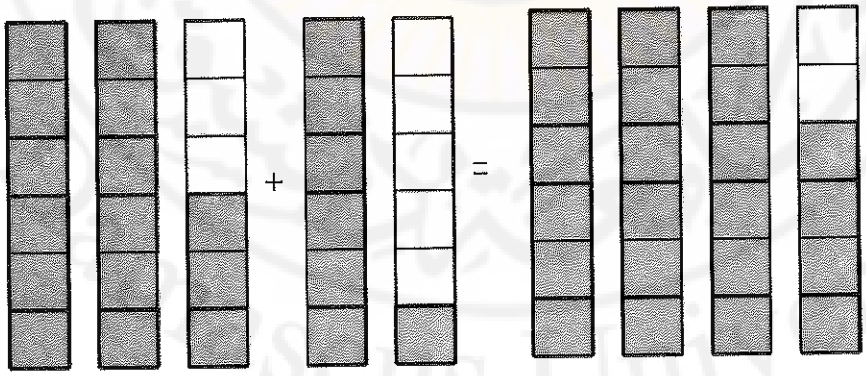
$$6\frac{7}{16}+4\frac{5}{16}+7\frac{3}{16}$$

3. مثلث أطوال أضلاعه هي : $4\frac{2}{7}$, $5\frac{4}{7}$, $8\frac{1}{7}$

فاحسب طول محيطه.

II. جمع أعداد كسرية مقاماتها مضاعف مشترك للمقامات الأخرى:

من المناسب أيضاً أن يبدأ المعلم بطريقة شبه حسية لتعليم هذه المهارة، وذلك بعرضه على التلاميذ مستطيلاً مجزءاً إلى ستة أسداس، ويناقش مع التلاميذ تلوين جزء منه ليبقى $\frac{5}{6}$ بلا تلوين، ثم يثبت على السبورة مستطيلاً واحداً ملوناً و $\frac{1}{6}$ ملون من مستطيل آخر، ويكتب تحتها $1\frac{1}{6}$ ثم يلون $\frac{1}{2}$ مستطيل بلون آخر مع مستطيلين ويكتب تحتها $2\frac{1}{2}$ كما يلي:



$2\frac{1}{2}$ + $1\frac{1}{6}$ = $3\frac{4}{6}$

ثم يُحسب الناتج السابق بطريقة مجردة كما يلي:

نجمع العددين الصحيحين $1+2=3$

نوحد مقامي الكسرين ثم نجمع الكسرين $\frac{1}{6}+\frac{1}{2}=\frac{1}{6}+\frac{3}{6}=\frac{4}{6}$

الناتج $1\frac{1}{6}+2\frac{1}{2}=3\frac{4}{6}$

من المناسب كتابة طريقة الحل على السبورة، ثم على دفاتر التلاميذ.

مثال:

أوجد ناتج ما يلي: $6\frac{1}{3}+4\frac{5}{6}+14\frac{1}{12}$

الخطوة الأولى: وحدّ مقامات الكسور (المقام المشترك 12)

$$6\frac{1}{3}+4\frac{5}{6}+14\frac{1}{12}$$

$$6\frac{4}{12}+4\frac{10}{12}+14\frac{1}{12}$$

الخطوة الثانية: نجمع البسوط

$$6\frac{4}{12}+4\frac{10}{12}+14\frac{1}{12}=\frac{\dots}{12}$$

الخطوة الثالثة: نجمع الأعداد الصحيحة

$$6\frac{4}{12}+4\frac{10}{12}+14\frac{1}{12}=\dots\dots\frac{15}{12}$$

مثال:

يطلب المعلم من التلاميذ حل الأمثلة الآتية: (متدرجة في صعوبتها)

اجمع واكتب الناتج بأبسط شكل:

$$4\frac{7}{8}+17\frac{1}{4}$$

$$12\frac{3}{7}+9\frac{7}{56}$$

$$9\frac{4}{20}+3\frac{10}{40}+5\frac{1}{80}=$$

جمع الأعداد الكسرية بعد تركيبها: أسلوب ثان لجمع الأعداد الكسرية يتم عرضه على التلاميذ من خلال الأمثلة، مع كتابة خطوات الحل.

مثال:

أوجد ناتج جمع $2\frac{3}{5}+1\frac{4}{5}$.

خطوة(1): نركب الكسرين $\frac{13}{5}+\frac{9}{5}$.

خطوة(2): نركب الكسرين $\frac{22}{5}$.

خطوة(3): نحلل الكسر الناتج $4\frac{2}{5}$.

مثال:

أوجد ناتج جمع $2\frac{3}{5}+4\frac{2}{10}$.

خطوة(1): نوحد المقامين $2\frac{6}{10}+4\frac{2}{10}$

خطوة(2): نركب الكسرين $\frac{26}{10}+\frac{42}{10}$

خطوة(3): نجمع البسوط $\frac{68}{10}$

خطوة(4): نحلل الكسر الناتج $6\frac{8}{10}$

مثال:

يطلب المعلم من التلاميذ حل المثالين التاليين في دفاترهم.

$$6\frac{1}{4}+3\frac{5}{8}$$

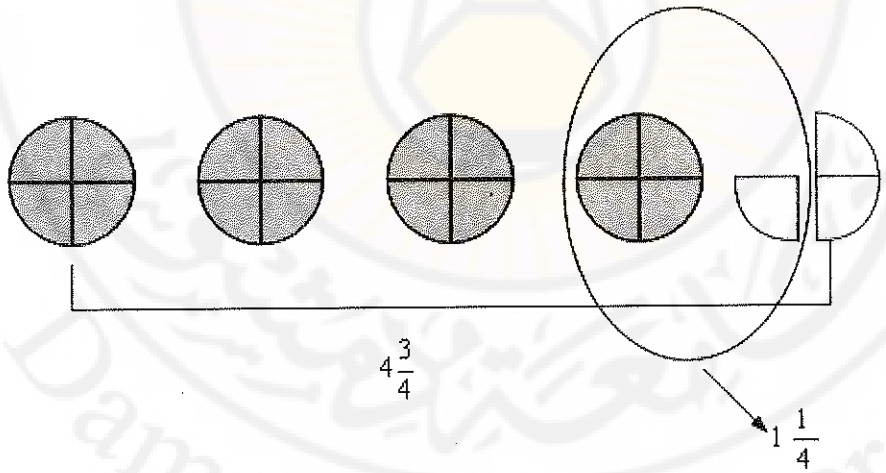
$$3\frac{2}{15}+2\frac{1}{3}+4\frac{3}{5}$$

ت- طرح الأعداد الكسرية.

I. طرح عدد كسري من عدد كسري (المقامان متساويان):

أ- طرح المطروح أصغر من كسر المطروح منه:

يبدأ المعلم تعليم هذه المهارة بطريقة شبه حسية، ثم ينتقل إلى الطريقة الرمزية وذلك بعرضه على التلاميذ الشكل التالي:



$$4\frac{3}{4}-1\frac{1}{4}=3\frac{2}{4}=3\frac{1}{2}$$

يسجل المعلم خطوات الحل على السبورة، ثم يسجل التلاميذ ذلك في دفاترهم:

خطوة(1): نطرح البسوط من بعضها $3-1=2$

خطوة(2): نطرح العدد الصحيح من العدد الصحيح الآخر $4-1=3$

خطوة(3): نختصر الكسر الناتج إن أمكن $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

ملاحظة: يستحضر المعلم مع التلميذ معنى الاختصار وطريقته.

يتعاون المعلم مع التلاميذ في حل مثال، ثم يترك التلاميذ لمتابعة العمل وحدهم في دفاترهم، والتشاور في الحل فيما بينهم على شكل زمر (تعلم زمري).

اطرح $4\frac{5}{8}-12\frac{7}{8}$

مثال:

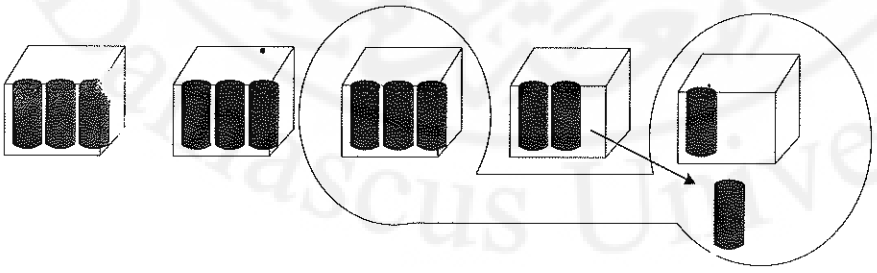
أكمل الفراغات التالية:

$$3\frac{4}{6}-1\frac{2}{6}=2\frac{\cdots}{6}=2\frac{\cdots}{\cdots}$$

ب- كسر المطروح أكبر من كسر المطروح منه:

مثال:

$$1\frac{2}{3}-4\frac{1}{3}$$



عندنا $4\frac{1}{3}$ صناديقاً من علب الدهان، أخذنا منها $1\frac{2}{3}$ صندوق فكم صندوق يبقى؟

لكن $\frac{1}{3}$ صندوق لا يكفي لأخذ $\frac{2}{3}$صندوق، لذلك نفتح صندوقاً آخر ونأخذ منه علبة واحدة أو $\frac{3}{3}$ فيكون الباقي $2\frac{2}{3}$صندوق وبالرموز يكون:

خطوة(1): نستلف 1 من العدد الصحيح للمطروح منه، ثم نحوله إلى كسر $\frac{3}{3}$ ونجمعه إلى الكسر $\frac{1}{3}$ فيصبح $\frac{4}{3}$ أي $4\frac{1}{3}=3+\frac{3}{3}+\frac{1}{3}=3\frac{4}{3}$

خطوة(2): نتابع العمل كما في خطوات الفقرة السابقة، فنجد:

$$2\frac{2}{3}=1\frac{2}{3}-3\frac{4}{3}=1\frac{2}{3}-4\frac{1}{3}$$

يتعاون المعلم مع التلاميذ في حل مثال، ثم يترك التلاميذ لمتابعة العمل وحدهم في دفاترهم، والتشاور في الحل فيما بينهم على شكل زمر

أوجد ناتج طرح $4\frac{5}{8}-12\frac{3}{8}$

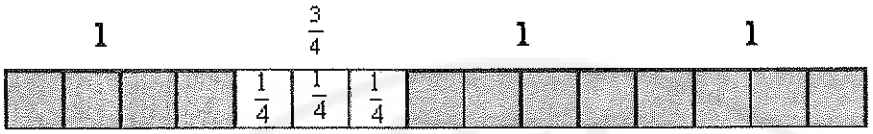
II. طرح عدد كسري من عدد كسري(المقامان مختلفان):

يبدأ المعلم تعليم هذه المهارة بطريقة شبه حسية، ثم ينتقل إلى الطريقة الرمزية وذلك بعرضه على التلاميذ الشكل التالي:

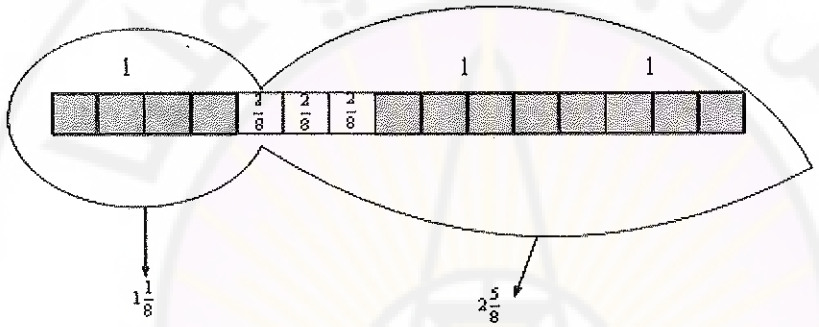
متطلب أساسي(نشاط تمهيدي): $\frac{1}{4}=\frac{2}{8}$

$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

شريط ورقي يمثل طولاً قدره $3\frac{3}{4}$، مجزأ، برسم خطوط عليه، إلى 1، 1، ثلاثة أرباع، 1 كما في الشكل التالي:



لدينا شريط طوله $3\frac{3}{4}$ قطعنا منه قطعة طولها $1\frac{1}{8}$. ما طول القطعة الباقية؟



$$3\frac{6}{8}-1\frac{1}{8}=2\frac{5}{8}$$

وبالرموز: أوجد ناتج طرح $3\frac{3}{4}-1\frac{1}{8}$

خطوة(1): نوحد مقامي الكسرين: $3\frac{3}{4}-1\frac{1}{8}=3\frac{6}{8}-1\frac{1}{8}$

خطوة (2): نطرح العدد الصحيح من العدد الصحيح $3-1=2$

نطرح الكسر من الكسر $\frac{1}{8}-\frac{6}{8}=\frac{5}{8}$

فيكون ناتج الطرح: $2\frac{5}{8}$

مثال: أوجد ناتج طرح ما يلي: $9\frac{2}{3}-5\frac{5}{12}$

المراجع العلمية

1- أبو زينة ، فريد كامل ،(1994) ، مناهج الرياضيات المدرسية و تدريسها ، مكتبة الفلاح للنشر و التوزيع ، الكويت .

2- أبو العباس ، أحمد و العطروني ، محمد علي (1983) ، تدريس الرياضيات المعاصرة بالمرحلة الابتدائية ، طبعة ثانية ، دار القلم ، الكويت.

3- أبو يونس ، الياس ، (2000)، فاعلية برنامج حاسوبي متعدد الوسائط لتدريس الهندسة في الصف الثاني الإعدادي دراسة تجريبية في محافظة القنيطرة ، رسالة دكتوراه غير منشورة ، كلية التربية ، جامعة دمشق.

4- بحبوح ، محي الدين ،(1999)، الأرقام فن ومتعة و إبداع ، مؤسسة غبور للطباعة ، دمشق .

5- جابر ، عبد الحميد جابر ، (1982) ، علم النفس التربوي، دار النهضة العربية ، القاهرة .

6- خربوطلي ، صلاح الدين ، (1981) ، طرائق تدريس العلوم الرياضية ، مطبعة الروضة، جامعة دمشق ، كلية التربية .

7- خضر، نظلة حسن أحمد، أصول تدريس الرياضيات (1974)، عالم الكتب: القاهرة.

8- خليفة ، عبد السميع خليفة ، (1985) ، تدريس الرياضيات في التعليم الأساسي ، مكتبة الأنجلو المصرية ، القاهرة .

9- الساكت ، بهية عبد الله ، (1982) ، مقارنة فاعلية ثلاث استراتيجيات في تعليم مفاهيم رياضي،عمان ، لطلبة المرحلة الإعدادية ،رسالة ماجستير غير منشورة ، الجامعة الأردنية .

10- شبورير ، زلاتكا ، (1987) ، الرياضيات في حياتنا ، ترجمة فاطمة المما مجلة عالم المعرفة العدد 114 حزيران ، المجلس الوطني للثقافة و الفنون و الآداب ، الكويت.

11- عطفة ، جمال الدين ، وآخرون ن(1999) ، الرياضيات ، السنة الأولى دور المعلمين، المؤسسة العامة للمطبوعات و الكتب المدرسية وزارة التربية ، دمشق .

12- غوردو ، آن ، (2003) ، نماذج التعليم و طرائق التفكير ، ترجمة شفيق ياسين ، مجلة التعريب ، العدد السادس و العشرون ، كانون الأول المركز العربي للتعريب و الترجمة و التأليف و النشر ، دمشق .

13- العيسى ، نذير ، (1991) ، صعوبات تعلم الهندسة في الصف الثالث الإعدادي و علاج بعض منها، رسالة ماجستير غير منشورة ،كلية التربية ،جامعة دمشق .

14- العيسى ، نذير ، (2000) ، فاعلية برنامج تدريسي في خوارزميات البرهان في الهندسة المستوية دراسة تجريبية في الصف الثاني الإعدادي، رسالة دكتوراه غير منشورة ، كلية التربية ، جامعة دمشق .

15- فئة من المؤلفين ،(2003) ، الرياضيات ، الأول الابتدائي، المؤسسة العامة للمطبوعات و الكتب المدرسية ، وزارة التربية ، دمشق .

16- فئة من المؤلفين ، (2002) ، الرياضيات ، الثاني الابتدائي ، المؤسسة العامة للمطبوعات و الكتب المدرسية ، وزارة التربية ، دمشق .

17- فئة من المؤلفين ، (2002) ، الرياضيات ، الثالث الابتدائي ، المؤسسة العامة للمطبوعات و الكتب المدرسية ،وزارة التربية ،دمشق .

18- فئة من المؤلفين ، (2002) ، الرياضيات ، الرابع الابتدائي ، المؤسسة العامة للمطبوعات و الكتب المدرسية ، وزارة التربية ،دمشق .

19- فئة من المختصين ، (2003) ، الرياضيات ، السنة الثانية دور المعلمين، المؤسسة العامة للمطبوعات و الكتب المدرسية ، وزارة التربية ،دمشق .
20- فئة من المؤلفين ، (2001) ، دليل المعلم للرياضيات ،للصف الثالث الإبتدائي، المؤسسة العامة للمطبوعات و الكتب المدرسية ، وزارة التربية، دمشق
21- فئة من المؤلفين ، (2001) ، دليل المعلم للرياضيات ،للصف الرابع الابتدائي، المؤسسة العامة للمطبوعات و الكتب المدرسية ،وزارة التربية ، دمشق .
22- الفقير ، أحمد ، وآخرون ، (1995) ، الحساب النظري ، المؤسسة العامة للمطبوعات و الكتب المدرسية ، وزارة التربية ، دمشق .
23- ماكليش ، جون ، (1999) العدد، ترجمة خضر الأحمد وموفق دعبول ، مجلة عالم المعرفة العدد 251 ، تشرين الثاني ، المجلس الوطني للثقافة والفنون و الآداب ، الكويت .
24- مخائيل امطانيوس ، (1999) ، القياس و التقويم في التربية الحديثة ، كلية التربية ، جامعة دمشق.
25- ياسين ، عبد الكريم ، (1984) ، فضاء المعرفة ، منهجية خوارزمية لتطوير تعليم وتعلم الرياضيات ، ط1، مؤسسة الكويت للتقدم العلمي الكويت .
26- يعقوب ، غسان ، (1982) تتطور الطفل عند بياجه ، دار الكتاب اللبناني ، بيروت .
27- إلياس أبو يونس ، نذير العيسى ،(2005) ، الرياضيات في العمليات الحسابية ، جامعة دمشق .
28- عفانة، عزو، (1996)، أسلوب الألعاب في تعليم وتعلم الرياضيات، غزة، الجامعة الإسلامية، كلية التربية، مطبعة المقداد.

29- أبو ريا، محمد وحمدي، نرجس، (2001)، أثر استخدام إستراتيجية التعلم باللعب المنفذة من خلال الحاسوب في اكتساب طلبة الصف السادس الأساسي لمهارات العمليات الحسابية الأربعة.دراسات، العلوم التربوية، المجلد28، العدد1

30- -الحيلة محمد محمود، (1999)، التصميم التعليمي (نظرية وممارسة)، ط2. دار الميسرة للنشر والتوزيع، عمان.

31- -الحيلة محمد محمود، (2004)، تكنولوجيا التعليم بين النظرية والتطبيق، ط4. دار المسيرة للنشر والتوزيع والطباعة، الاردن.

32- -فريدرك ــ بل ، طرق تدريس الرياضيات ، مترجم ، ترجمة : محمد المفتي و ممدوح سليمان و وليم عبيد ، الدار العربية للنشر والتوزيع 1994م.

المصطلحات العلمية

Addition	جمع
Algebra	جبر
Algorithm	خوارزمية
Average	متوسط
Binary	ثنائي
Calculation	حساب
Cubature	تكعيب
Decimal	عشري
Decomposition	تحليل
Digit	رقم
divisibillty	قابلية القسمة
division	قسمة
Divisor	قاسم

Equation	معادلة
Fraction	كسر
Identity	مطابقة
Integer	عدد صحيح
Mathematic	رياضيات
Multiple root	جذر مضاعف
Multiplication	ضرب
Negative	سالب
Number	عدد
Numerator	بسط
Octal System	نظام ثماني
Operation	عملية
Primary	أولي
Prime number	عدد أولي
Product	جداء

Quotient	حاصل قسمة
Ratio	نسبة
Real number	عدد حقيقي
Reduction	اختزال
Remainder	باق
Root	جذر
Simple root	جذر بسيط
Square root	جذر تربيعي
Square-quadrature	تربيع
Subtraction	طرح
Sum	مجموع
Symbol	رمز
System	نظام
Vulgar fraction	كسر عادي

Damascus University


وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

التدقيق العلمي

أ.د. خالد الخنيفس أ. م. د. جمال حمندوش د. جبران جبران

التدقيق اللغوي

أيمن الشوا

حقوق الطبع والترجمة والنشر محفوظة لمديرية الكتب والمطبوعات الجامعية


وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University