5

الفصل الخامس

تنمية مفهوم العدد والحس العددي

- المعايير المتعلقة بالأعداد والعمليات
- الأعداد والعد
- العمليات على الأعداد الطبيعية
- تطوير المهارات العددية الأساسية
- استراتيجيات التفكير في العمليات الحسابية البسيطة
- الحس العددي
- التقدير
- الحساب الذهني
- الأنشطة وأسئلة التقويم
- مراجع الفصل

Damascus University

الأهداف التربوية

بعد دراسة هذا الفصل، يتوقع من الطالب أن:

1- يناقش المعايير المتعلقة بالأعداد والعمليات.

2- يتعرف معاني العدد.

3- يوظف معاني العدد في التدريس.

4- يناقش كفايات العد لدى الأطفال.

5- يستخدم مفهوم المجموعة في تدريس المفاهيم العددية.

6- يستخدم المحسوسات في تعليم الأطفال العمليات على الأعداد الطبيعية.

7- يساعد تلاميذه على استخدام استراتيجيات التفكير المختلفة في العمليات الحسابية البسيطة.

8- يدرك أهمية تنمية الحس العددي لدى تلاميذه.

9- يشجع تلاميذه على استخدام التقدير في العمليات الحسابية.

10- ينمي مهارات الحساب الذهني لديه ولدى تلاميذه.

الفصل الخامس
تنمية مفهوم العدد والحس

المعايير المتعلقة بالأعداد والعمليات[1]

ما قبل الروضة – الثاني

يفهم الأعداد، وطرق تمثيلها والعلاقات فيما بينها، والأنظمة العددية.	– يعد، يفهم ويدرك معنى "كم" في مجموعات الأشياء. – ينمي إحساساً بالأعداد التامة ويمثلها ويستخدمها بطرق مرنة بما في ذلك الربط بين الأعداد وتركيبها وتجزئتها. – أن يربط الكلمات العددية والأرقام بالكميات التي تمثلها باستخدام نماذج حسية وتمثيلات مختلفة.
يفهم معاني العمليات وكيف ترتبط ببعضها البعض.	– يفهم المعاني المختلفة للجمع والطرح على الأعداد التامة والعلاقة بين هاتين العمليتين. – يفهم تأثير إضافة وطرح الأعداد التامة. – يفهم المواقف التي تتطلب ضرباً أو قسمة، مثل التجمعات المتساوية للأشياء والشراكة العادلة.
يحسب بطلاقة ويعمل تقديرات معقولة.	– ينمي ويستخدم استراتيجيات للحسابات على الأعداد التامة، مع التركيز على الجمع والطرح. – يستخدم طرقا متنوعة وأدوات للحساب، بما في ذلك، الحسابات الذهنية، التقدير، الورقة والقلم، والآلات الحاسبة.

(1) Reprinted with permission from [Principles and Standards for School Mathematics], copyright [2000] by the National Council of Teachers of Mathematics. All right reserved.

الثالث - الخامس

يفهم الأعداد، وطرق تمثيلها والعلاقات فيما بينها، والأنظمة العددية.	- يعرف التمثيلات المتكافئة لنفس العدد ويكونها بتجزئة وتركيب الأعداد. - يصنف أنواع الأعداد تبعاً لخصائص مثل طبيعة عواملها.
يفهم معاني العمليات وكيف ترتبط ببعضها البعض.	- يفهم المعاني المختلفة للضرب والقسمة. - يفهم تأثير ضرب وقسمة الأعداد التامة. - يحدد ويستخدم العلاقات بين العلميات، كمعرفة أن القسمة هي عكس الضرب, لحل المشكلات.
يحسب بطلاقة ويعمل تقديرات معقولة.	- ينمي طلاقة بالتراكيب العددية الأساسية للضرب والقسمة ويستخدم هذه التراكيب ليحسب ذهنيا المسائل مثل 50×50. - ينمي طلاقة في إضافة وطرح وضرب وقسمة الأعداد التامة. - يطور ويستخدم استراتيجيات ليقدر نتائج الحسابات على الأعداد التامة ويحكم على معقولية النتائج. - يختار طرقا وأدوات ملائمة للحساب على الأعداد التامة، من ضمنها التقدير، الآلات الحاسبة، والورقة والقلم، بناء على سياق وطبيعة الحسابات، ويستخدم الطريقة أو الأداة المختارة.

الأعداد والعد

تعتبر الأعداد والأرقام من الأدوات الرئيسية للرياضيات والحياة اليومية, فقد طور الإنسان مفهوم العدد قبل أن يبدأ التأريخ, كما أن مفهوم العدد هو من أقدم التجريديات وأهمها (Gundlach, 1989). فعن طريق الأعداد يتم التعبير عن مقادير الأشياء المحيطة بنا والتي نتفاعل معها يوميا بما في ذلك البيئة والمال والطعام وكل مظاهر الحياة الأخرى.

وفي العادة فإن الأطفال يتعلمون مفهوم العدد ومهارات العد قبل أن يتعلموا تمثيل هذه الأعداد كتابياً (Ginsburg, 1989).

معاني العدد

قبل أن نبحث في كيفية تقديم مفهوم العدد للأطفال بطريقة مشوقة وذات معنى لابد أن نتعرف على المعاني المختلفة للأعداد وهي: المعنى الكمي (Cardinal meaning)، معنى القياس (Measurement meaning)، المعنى الترتيبي (Ordinal meaning)، والمعنى الأسمى (Nominal meaning).

المعنى الكمي

تستخدم الأعداد للتعبير عن الكميات، أي للإجابة عن السؤال (كم ؟). ومثال ذلك أن نقول خمس تفاحات، أربع سيارات، ثلاثة أطفال. إذن فالعدد في هذه الحالة يصف مجموعة من الأشياء.

معنى القياس

تستخدم الأعداد لقياس خواص معينة مثل الطول، المساحة، الحجم، والوزن....الخ. فنقول مثلاً إن طول عمر 180سم، ونقول إن مساحة هذه القطعة من الأرض هي 200م2 وهكذا. لاحظ أن الكميات المستخدمة هنا جميعها كميات متصلة أي لا يمكن تحديدها إلا بالقياس، أما الكميات التي استخدمت في (المعنى الكمي للعدد) فهي كميات منفصلة ويتم تحديدها عن طريق العد.

المعني الترتيبي

تستخدم الأعداد لتحديد مواقع الأشياء نسبة إلى بعضها البعض، أي لترتيبها. فنقول مثلاً الأول، الثاني، الثالث، الرابع، .... الخ. كذلك فانه في بعض القاعات الدراسية تعطى المقاعد أرقاما متسلسلة لبعض الغايات فنقول المقعد رقم (1)، المقعد رقم (22)، المقعد رقم (3)، وهكذا. فهذا أيضاً مثال آخر على المعنى الترتيبي للعدد.

المعنى الإسمي

تستخدم الأعداد لإعطاء الأشياء أسماء مختلفة لتمييزها عن بعضها البعض. فعلى سبيل المثال يمكن أن يقسم المعلم طلبة الصف إلي مجموعات عمل مختلفة ويطلق على هذه المجموعات أسماء مثل المجموعة رقم (1) المجموعة رقم (2)، وهكذا.

كيف يستخدم المعلم هذه المعاني في التدريس؟

يجب أن يعمل المعلم على تشجيع الحدس لدى التلاميذ، ومن ثم الفهم الواضح

الصريح لاستخدامات العدد وذلك بتعريض الأطفال لكافة معاني العدد من خلال الأمثلة الحياتية. ويمكن أن يتم ذلك من خلال إشراك الطلبة في نشاطات تستلزم:

1- عدّ ما تحويه مجموعة معينه من عناصر (سلة من الكرات، صندوق الطباشير، علبة الألوان، الخ).

2- إجراء قياسات معينه (قياس طول الكتاب وعرضه، توزين مجموعة من الدفاتر،..الخ).

3- تحديد المواقع النسبية لأشياء مختلفة.

4- تسمية أشياء معينة بأرقام (تسمية اللوحات الجدارية في غرفة الصف مثلاً).

وبعد أن يشعر المعلم أن الأطفال قد ألفوا استخدامات الأعداد، علية أن يشجعهم على التمييز بوضوح بين معانيها المختلفة. وفي الوقت المناسب يجب تعريض الأطفال إلى حالات غامضة بعض الشي من استخدامات الأعداد.

كفايات العد لدى الأطفال

يعتبر العد أداة الأطفال الأولية لبناء مفهوم العدد وأساساً لرياضياتهم غير الشكلية (informal mathematics). وبالتالي فانه من المهم جداً العناية بمهارات العد في مرحلة مبكرة من عمر الطفل. وسوف نتناول هنا العد الشفهي، عد الكائنات، ومقارنة الكميات, وجميعها كفايات ضرورية.

العد الشفهي

يأتي معظم الأطفال إلى المدرسة ولديهم خلفية عن العد بيد أن هذه الخلفية تتفاوت من طفل إلى آخر. فبينما يحفظ بعض الأطفال الأعداد دون إدراك لمعناها، نجد أن بعضهم الآخر مدركاً لهذا المعنى. ولذلك فإنه عند تعليم الأطفال مفهوم العدد، يجب أن يستفاد من خلفيتهم دون الإضرار بأولئك الذين يأتون إلى المدرسة بخلفية ضعيفة عن العد.

وتجدر الإشارة إلى أنه لا يمكن اعتبار أن عملية العد هي عملية استظهار بالكامل, فبالإضافة إلى الحفظ, فإن الطفل يحتاج إلى ملاحظة الأنماط المتضمنة في عملية العد. فعلى سبيل المثال, فإن العد إلى مائة يتطلب:

1- حفظ الأعداد من 1- 9.

2- ملاحظة أن العدد 9 هو مؤشر على نهاية سلسلة عددية, والحاجة إلى بداية سلسلة عددية جديدة. فالعدد 9 يؤشر على نهاية السلسلة من 1-9 والعدد 19 يؤشر على

نهاية السلسلة 11-19، وهكذا.

3- تعلم العقود التي تبدأ بها السلاسل العددية. فالعدد عشرة يتبع العدد 9 والعدد عشرون يتبع العدد 19, والعدد ثلاثون يتبع العدد 29, وهكذا. وهذه العملية تتطلب حفظ الحدين عشرة وعشرون وإدراك أن الأعداد ثلاثون, أربعون, خمسون, ستون, سبعون, ثمانون, تسعون ما هي الأعداد من ثلاثة إلى تسعة حذفت منها التاء المربوطة و أضيف إليها الحرفان " و ن " ماعدا في (ثمانون) فقد حذفت الياء والتاء المربوطة.

4- إدراك أن سلاسل الأعداد ما بعد العدد عشرين ما هي إلا الأعداد من 1-9 ربطت مع العقود بالحرف (و). فالسلسلة من 21 – 29 تقرأ كالتالي: واحد وعشرون، إثنان وعشرون، ثلاثة وعشرون، أربعة وعشرون، خمسة وعشرون، ستة وعشرون، سبعة وعشرون، ثمانية وعشرون، تسعة وعشرون، وهكذا في السلاسل اللاحقة.

5- حفظ العددين أحد عشر واثنا عشر وإدراك أن الأعداد من 13- 19 هي عبارة عن الأعداد من3-9 أضيف إليها الكلمة (عشر) مثل ثلاثة عشر، أربعة عشر، خمسة عشر وهكذا. وحتى في العددين أحد عشر وإثنا عشر فإن الكلمتين أحد واثنا ليستا بعيدتين كثيراً عن الكلمتين واحد واثنان.

6- حفظ العدد مائة.

غالباً, يدخل الأطفال الروضة ولديهم القدرة على تحديد العدد التالي دون اللجوء إلى العد من البداية فهم يستطيعون مثلاً معرفة أن العدد ستة يلي العدد خمسة دون اللجوء إلى العد (واحد، اثنان، ثلاثة، أربعة، خمسة، ستة). وبعد أن يكونوا قد مهروا بعملية العد للأمام يصبح باستطاعتهم تحديد العدد السابق لعدد معين. فمثلاً يستطيعون معرفة أن العدد خمسة يسبق العدد ستة. وعند هذه المرحلة يكون الأطفال قد استعدوا للعد العكسي. وبالتدريج فإن الأطفال يتعلمون عملية العد بالقفز وفي العادة فانهم أولاً يتعلمون كيف يعدونها ثنائيا (اثنان، أربعة، ستة،...) وبالخمسات (خمسة، عشرة، خمسة عشر...) وبالعشرات (عشرة، عشرون، ثلاثون...).

ما دور المعلم في هذا الخصوص؟

على المعلم أن يساعد الأطفال على التمكن من العد للأمام (Forward) أولا, ومن ثم يبني على هذا الأساس ليساعدهم على التمكن من تحديد "العدد التالي" ومن ثم العد العكسي

والعد بالقفز.

على الرغم من أن معظم أطفال الروضة يستطيعون العد لغاية عشرة فإن بعضهم قد لا يكون قادرا على ذلك. وفي هذه الحالة يجب أن يبذل المعلم جهداً كبيراً لمساعدة هؤلاء الأطفال على حفظ هذه الأعداد لكي ينصب تركيزه بعد ذلك على الأعداد 11-20 وما بعدها. يستطيع المعلم أن يستخدم بعض الألعاب ليساعد الأطفال على التمكن من العد فعلى سبيل المثال لعبة "الاختباء والبحث" يمكن أن تكون وسيلة ممتعة للتدريب على العد.

وفي هذه اللعبة يتم اختيار طفل ليلعب دور الباحث عن بقية الأطفال. يغمض الطفل الباحث عينيه بينما يعد إلى حد معين. في هذه الإثناء يقوم الأطفال الآخرين بالاختباء في أماكن مختلفة. بعد أن يكمل الطفل الباحث العد، يفتح عينية ويبدأ بالبحث عن الآخرين. والجزء المفيد في هذه اللعبة هو عملية العد، حيث يتدرب عليه الأطفال وهم يستمتعون باللعب ودون الإحساس بأنهم يقومون بواجب. ومن ميزات هذه اللعبة أن المعلم يستطيع أن يوظفها لخدمة مستويات كثيرة من الأطفال. فإذا كان الطفل غير متمكن من العد لغاية العدد 10 يطلب منه أن يعد من 1 –10 عندما يلعب دور الباحث. أما إذا كان متمكنا من الأعداد العشرة الأولى فيمكن أن يطلب منه أن يبدأ من 11 ويكمل إلى حد معين. كذلك يمكن أن يطلب من طفل آخر أن يعد 2 – 20 عن طريق القفز الثنائي أو من 5 – 100 عن طريق القفز الخماسي وهكذا حسب تقدير المعلم لحاجات الأطفال المختلفة.

كذلك فإن على المعلم أن يحاول باستمرار تطوير قدرات الأطفال على العد من خلال مناقشة وممارسة أنماط العد في سياقات ذات معنى. فمهارات مثل تحديد "العدد التالي" أو "العدد السابق" أو العد بالقفز أو العد العكسي يمكن أن تمارس من خلال أنشطة ممتعة للأطفال.

عد الكائنات

المقصود بعد الكائنات هو العملية التي يقوم بها الطفل بتعيين أسماء عددية لكائنات محددة, كالأقلام أو الألعاب أو الكرات أو غيرها. وهناك 3 كفايات لعد الكائنات, وهي السرد (التعداد)، مبدأ الكم (cardinality principle) وتكوين المجموعات.

السرد (التعداد) Enumeration

لكي يتمكن الطفل من تعداد مجموعة من الأشياء بشكل صحيح، يجب عليه أن(Gelman & Gallistel, 1978):

1- يكون قادراً على العد بما لا يقل عن مجموع الأشياء التي سيعدها.

2- يعطي كل واحد من الأشياء المعدودة عدداً واحدا فقط. وهنا يفيد استخدام المجموعات لتدعيم هذه الكفاية وذلك من خلال ربط كل عنصر في المجموعة برقم مكتوب، سواء على خط الأعداد أو بأي طريقة أخرى.

3- يكون متابعا للأشياء التي تم عدها والأشياء التي لم يتم عدها. وهنا أيضا تستخدم المجموعات في إكساب الأطفال هذه المهارة.

مبدأ الكم Cardinality Principle

هذا المبدأ يعني أنه أثناء عملية العد, فإن العدد الذي يسمى به آخر عنصر معدود في المجموعة يمثل مجموع عناصر المجموعة. ويمكن القول أن كافة الأطفال تقريباً يتعلمون هذا المبدأ قبل دخول المدرسة من خلال خبرتهم بالعد في حياتهم اليومية (Fuson, 1988).

تكوين المجموعات Set Production

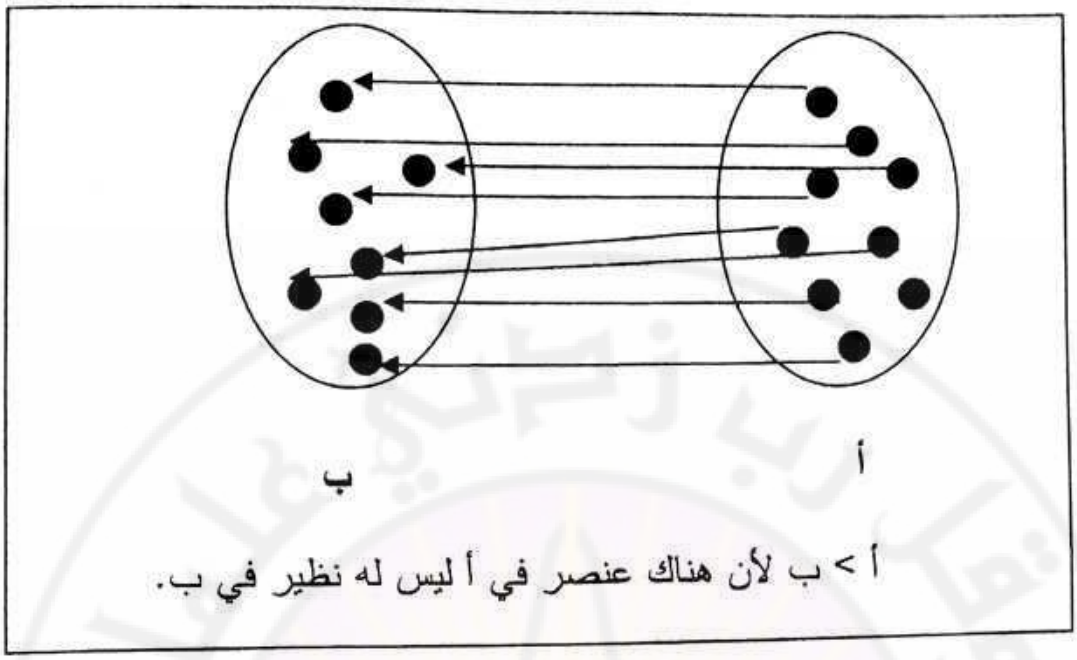
على عكس كفاية السرد, فإن المطلوب هنا أن يقوم الطفل بتكوين مجموعة بحجم معين، كأن يطلب منه أن يأخذ ستة كرات (من سلة مليئة بالكرات) ويضعها جانباً. وهذه العملية طبعاً أصعب من تعداد مجموعة تحوي ستة كرات, وذلك لأن على الطفل أن يتذكر العدد المطلوب منه وأن يتوقف عندما يصل الحد المطلوب (Resnick & 1981).

هناك العديد من الأنشطة التي يمكن أن يستخدمها المعلم ليساعد الطلبة على تعلم مهارة تكوين المجموعات، فيمكن، أن يطلب من الطفل أن يضع خمسة أقلام على الطاولة، أو أن يسير عددا معينا من الخطوات، أو أن يقسم قطعاً من الحلوى على زملائه بقدر معين، وهكذا..

مقارنة الكميات: Comparing Quantities

على عكس عد الأشياء والذي يتضمن مجموعة واحدة، فإن مقارنة الكميات تتضمن مجموعتين أو أكثر. والقدرة على عد الأشياء تسبق عادة المقارنة بين الكميات بل أن الأخيرة تعتمد بشكل كبير على خبرة الأطفال بالأولى.

يستطيع الطفل أن يقارن بين مجموعتين لا تزيد عناصر كل منهما عن خمسة عبر النظر إليهما. أما إذا زاد عدد العناصر عن ذلك وخاصة إذا كانت العناصر مرتبة بشكل عشوائي, فإن المقارنة بين المجموعات بالنظر لن يكون سهلا. وبالتالي يجب استخدام طريقة التناظر الأحادي (one-to-one correspondence) كما مبين في الشكل (5-1).



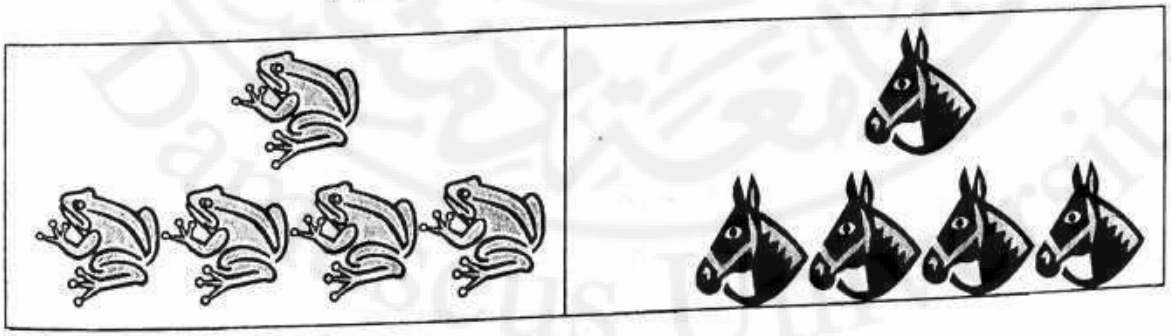
أ > ب لأن هناك عنصر في أ ليس له نظير في ب.

الشكل (5-1): طريقة التناظر الأحادي في المقارنة بين المجموعات

من خلال خبرة الأطفال بالعد ومقارنة المجموعات الصغيرة فانهم يكتشفون علاقتين مهمتين:

1- مبدأ "نفس الاسم العددي": Same number-name Principle

تكون مجموعتان متساويتين إذا كان لهما نفس الاسم العددي. فمثلا على الرغم من أن العناصر في المجموعة س تختلف بالشكل عن تلك التي في المجموعة ص (انظر الشكل 5-2)، فإنهما متساويتان لأن لهما نفس الاسم العددي (5).



الشكل (5-2)

2- مبدأ ترتيب الأعداد (Ordering-numbers Principle):

ينص هذا المبدأ على أنه كلما ظهرت كلمة العدد متأخرة في سلسلة الأعداد كلما مثل العدد مجموعة أكبر. فمثلاً العدد سبعة يمثل مجموعة أكبر من تلك التي يمثلها ستة لأن

العدد سبعة يلي العدد ستة. إن مبدأ ترتيب الأعداد يسمح للأطفال إجراء مقارنات ذهنية بين الأعداد المتباعدة، بمعنى تحديد أي العددين المقروءين أو المكتوبين أكبر. فعلى سبيل المثال يستطيع الطفل أن يقرر بأن تسعة أكبر من اثنين لأنها تأتي متأخرة كثيراً عن أثنين عند العد.

وعندما يصبح الأطفال قادرين على تحديد العدد التالي تلقائيا, يكون بإمكانهم أن يستخدموا هذا المبدأ لإجراء مقارنات العدد التالي ذهنيا (تحديد أي العددين الجارين المحكيين أو المكتوبين أكبر). على سبيل المثال يستطيع الطفل أن يقرر بأن تسعة أكبر من ثمانية لأن تسعة تأتي بعد ثمانية عند العد.

أمور يجب أن يراعيها المعلم:

أ- يجب أن تتم ممارسة العد من خلال أنشطة ممتعة وهادفة. وبالطبع فإن هناك عدداً لا يحصى من الأنشطة التي يمكن أن يمارسها الأطفال لممارسة عملية العد، مثل تعداد طلبة الصف، الكراسي، الأقلام.

ب- يجب التركيز على تعليم الأطفال استراتيجيات المتابعة عند العد. فمشكلة المتابعة هي من أهم المشاكل التي تواجه أطفال الروضة عند القيام بالعد. وبالتالي فعلى المعلم أن يساعدهم على إتباع طرق معينه في فصل العناصر المعدودة عن تلك اللامعدودة. فإذا كان العد يجري على عناصر مرسومة مرتبه فيجب أن يعدوا سطراً سطراً أو عموداً عموداً, وإن لم تكن مرتبة فيجب أن يؤشروا على العنصر المعدود حتى لا يعدوه مرة أخرى. أما إذا كان العد يجري على عناصر قابلة للحركة, فيمكنهم وضع العناصر المعدودة جانباً.

دور العد في تطور مفهوم العدد

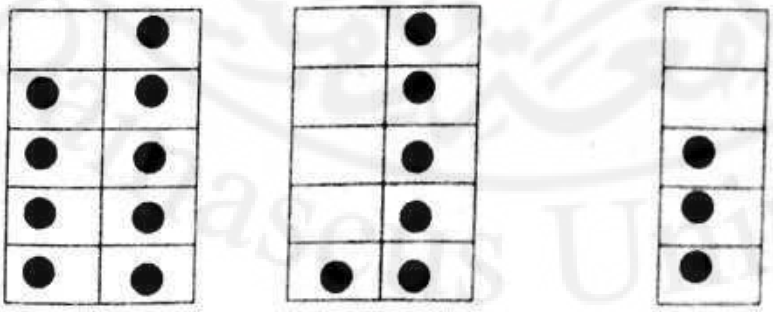
لقد أظهرت دراسات علم النفس التربوي أن العد وبخاصة العد على الأصابع يلعب دوراً كبيراً في تطور مفهوم العدد لدى الأطفال, وأن خبرات العد هي مفتاح لتطور فهم الأطفال للعدد والحساب (Fuson, 1988; and Gelman & Gallistel, 1978). فالأطفال يبنون فهمهم للعدد والحساب تدريجياً من خبراتهم والتي تتضمن العد بشكل كبير. وبناء على هذه النتائج, فإنه يجب مراعاة النقاط التالية عند تدريس الأطفال:

أ- يجب أن يكون العد و خاصة العد على لأصابع عنصرا هاماً في الرياضيات المدرسية منذ البداية.

ب- يجب أن يتم التركيز في المرحلة المبكرة على إدراك الأنماط العددية: يستطيع كثير من الأطفال عند دخولهم الروضة استخدام أصابعهم لتمثيل الأعداد إلى حد خمسة. فعلى سبيل المثال يستطيع الطفل وبشكل سريع وتلقائي أن يظهر ثلاثة أصابع أو أربعة أو خمسة لتمثيل هذه الأعداد. واستخدام الطفل لأصابع يديه لتمثيل الأعداد 1-10 تزوده بنماذج حسية (Concrete) لهذه الأعداد ومقاديرها النسبية. هذه النماذج تساعد الأطفال على إيجاد مجموع عددين أو الفرق بين عددين أو حاصل ضرب عددين بشكل أسهل. ولذلك يجب تشجيع الأطفال على استخدام الأصابع وإدراك الأنماط العددية عن طريقها. كذلك فانه من المفيد تشجيع الأطفال على التفكير في الأعداد على أنها مجموعات من الخمسات والعشرات. ويمكن أن يتم ذلك عن طريق استخدام الإطارات الخماسية والعشرية كما في الشكل (5-3). (Flexer, 1986, Van de walle & Watkins, 1993)

ج- يجب تشجيع الأطفال في البداية على استخدام طرقهم المفضلة في المقارنة بين الكميات وهي العد.

عندما يطلب من طفل مقارنة كميتين فإنه يستخدم إحدى طريقتين للقيام بهذا العمل. فهو إما أن يحاول ربط كل عنصر من المجموعة الأولى بعنصر من المجموعة الثانية ليعرف أي المجموعتين سيتبقى فيها عناصر ليس لها نظائر في المجموعة الأخرى (طريقة التناظر الأحادي)، وإما إن يقوم بعد عناصر المجموعتين ليعرف أيهما أكبر.



إطار خماسي
3 هو عدد أقل من 5 باثنين

إطار عشري
6 هي 5 مضافا لها 1

إطار عشري
9 هي عدد أقل من 10 بواحد

الشكل (5-3): الإطارات الخماسية والعشرية

العمليات على الأعداد الطبيعية Operations on natural numbers

الجمع والطرح

للأطفال طرقهم الخاصة في الجمع والطرح ومن هذه الطرق استخدام الأصابع والمواد المحسوسة. وسوف نتناول في هذا الفصل كيف يمكن للمعلم أن يبني على ما يعرفه الأطفال سابقا. إنه لمن الضروري جدا أن يكون المعلم ملما بمعاني الجمع والطرح وبالمواقف المختلفة التي تستخدم فيها هاتان العمليتان.

مواقف الجمع والطرح

وتعني هنا المواقف التي تتضمن جمع وطرح مجموعات من الأشياء (كميات منفصلة) ونحن إذ نبدأ من هنا لننطلق من حقيقة أن الأطفال يستطيعون استخدام معرفتهم بالأعداد والعد في التعامل مع مثل هذه المواقف.

أولا: الجمـــع

يمكن أن يمثل التعبير أ + ب نوعين مختلفين من المواقف:

1- **مواقف الإضافة:** تبدأ هذه المواقف بوجود عدد من العناصر مثل (أ). ثم يتبع ذلك فعل إجرائي هو إضافة عدد آخر من العناصر مثل (ب). على سبيل المثال، طفل لديه 4 دراهم ثم كافأته أمه على قيامه بعمل جيد بإعطائه 3 دراهم. وبالتالي فإن مجموع ما لديه هو 4 + 3.

2- **مواقف الضم:** هذه المواقف لا تتضمن القيام بفعل الإضافة الإجرائية. بل هي تمثل اتحاد الأجزاء لتشكيل الكل. فعلى سبيل المثال، طفل يضع 4 دراهم في جيبه اليمنى (جزء) و3 دراهم في جيبه اليسرى (جزء) وبالتالي فإن مجموع ما لديه (الكل) يساوي 4 + 3.

ثانيا: الطرح

يمكن أن يمثل التعبير ب - أ ثلاثة أنواع مختلفة من المواقف:

1- **مواقف الانتزاع:** وهي المواقف التي تبدأ بعدد معين من العناصر مثل (ب) ثم يتم انتزاع عدد من هذه العناصر مثل (أ) فيكون الناتج ب - أ. على سبيل المثال، طفل لديه 7 دراهم، أخذ منه أخوه 3 دراهم، فتبقى له 7 - 3.

2- **مواقف المساواة:** وهي المواقف التي تتطلب إضافة عدد من العناصر لمجموعة ما

لجعلها مساوية لمجموعة أكبر. على سبيل المثال، لدى أحمد 7 دراهم، ولدى خالد 3 دراهم. كم يحتاج خالد من الدراهم ليصبح ما لديه مساويا ما لدى أحمد ؟ والجواب هو 7 – 3 = 4.

3- مواقف المقارنة: وهي قريبة من مواقف المساواة، إلا أن السؤال هنا يكون عن مقدار الفرق. فمثلا لدى أحمد 7 دراهم، ولدى خالد 3 دراهم. كم درهماً يزيد ما لدى أحمد عن ما لدى خالد ؟ والجواب هو 7 – 3 = 4

المسائل الكلامية على الجمع والطرح:

هناك خمسة أنواع من المسائل الكلامية متسقة مع المعاني (المواقف) الخمسة لعمليتي الجمع والطرح المذكورة آنفا. في كل نوع من هذه الأنواع يمكن أن يكون المجهول هو المجموع أو الفرق { أ + ب = ؟ أو أ – ب = ؟ }، أو المضاف / المطروح { أ + ؟ = جـ ، أو أ – ؟ = جـ }. أو المضاف إليه/المطروح منه { ؟ + ب = جـ أو ؟ – ب = جـ }.

من الضروري أن يأخذ المعلم بعين الاعتبار الجاهزية للأطفال عند طرح الأسئلة عليهم. فالأسئلة المفضلة عادة هي تلك التي تتحدى قدرات الطفل دون أن تصيبه بالإحباط. وفي إطار الجمع و الطرح فالمسائل التي يكون فيها المجهول هو الناتج تعتبر سهله نسبيا. مسائل المساواة والمقارنة قد تكون نمذجتها أصعب من مسائل الضم. ولأن الأطفال يستخدمون طرقا بدائية لحل المسائل فإنه قد يكون من الصعب عليهم مواجهة مسائل فيها المضاف إليه / المطروح منه أو المضاف / المطروح مجهول.

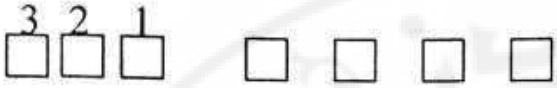
الجمع والطرح باستخدام المحسوسات:

يأتي الأطفال إلى المدرسة وقد كونوا المفاهيم الأساسية للجمع والطرح. فقبل تلقي تعليم رسمي حول الحساب فأنهم يستطيعون فهم مسائل الجمع والطرح البسيطة ونمذجة معانيها أيضا. فعلى سبيل المثال فإن الطفل يستطيع أن يحل مسألة مثل 5 + 3 من خلال عد خمسة مكعبات ووضعها جانبا ثم إضافة ثلاثة مكعبات إليها وأخيراً عد المجموعة كاملة.

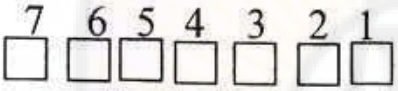
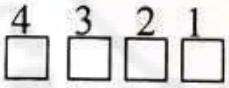
إستراتيجيات الأطفال:

يستطيع الأطفال تطبيق بعض الاستراتيجيات لحل مسائل الجمع و الطرح حسيا حتى بدون تلقي تدريب خاص على ذلك. نذكر هنا أربعة من هذه الاستراتيجيات:

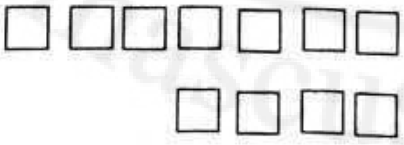
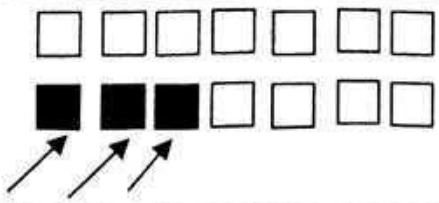
أ – عد الكل حسيا:

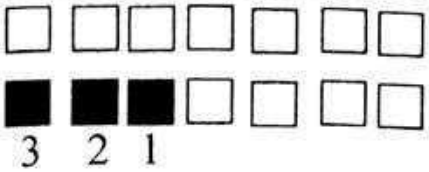
مثال (1): 4 + 3	
1) يقوم الطفل بعد 4 مكعبات لتمثيل العدد 4	
2) يقوم الطفل بعد 3 مكعبات لتمثيل العدد 3	
3) يقوم الطفل بعد جميع المكعبات لتحديد الناتج	

ب- الانتزاع الحسي:

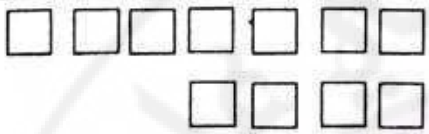
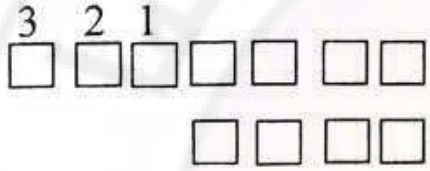
مثال (2): 7 – 3	
1) يقوم الطفل بعد 7 مكعبات لتمثل العدد 7	
2) يقوم الطفل بعد 3 من هذه المكعبات وانتزاعها	
3) يقوم الطفل بعد المتبقي من المكعبات لتحديد الناتج	

ج- المساواة حسيا:

مثال (3): 7 – 4	
يقوم الطفل بعمل صفين متوازيين من المكعبات لتمثيل العددين 7، 4	
يقوم الطفل بإضافة مكعبات للصف السفلي ليساويه بالصف العلوي (يتبع في الصفحة التالية)	

يقوم الطفل بعد المكعبات التي أضيفت إلى الصف السفلي لتحديد الناتج	

د- **الربط الحسي:**

مثال (4): 7 – 4	
يقوم الطفل بعمل صفين متوازيين من المكعبات لتمثيل العددين 7، 4	
يقوم الطفل بعد المكعبات الزائدة في الصف العلوي لتحديد الناتج	

وبعد أن يكون الأطفال قد اكتسبوا خبرة كافية في استخدام هذه الاستراتيجيات، فإنه تصبح لديهم القدرة على استخدامات استراتيجيات أخرى متقدمة، حيث ينتقلون من المرحلة الحسية إلى مرحلة التجريد. وهنا نذكر أربعة استراتيجيات يستخدمها الأطفال في حل مسائل الجمع و الطرح:

أ- عدّ الكل المجرد:

مثال (5): 2 + 3

يعدّ الطفل 1، 2

ثم يكمل: 3 أكبر بواحد، 4 أكبر باثنين، 5 أكبر بثلاثة. الناتج هو 5 .

ب- العد إبتداءً من الأكبر:

مثال (6): 2 + 3

يبدأ الطفل بالعدد 3 (الأكبر)

ثم يكمل: 4 أكبر بواحد، 5 أكبر بإثنين. الناتج هو 5.

ج- العد التنازلي في الطرح:

مثال (7): 6 – 3

يبدأ الطفل بالعدد 6

ثم يكمل: 5 أقل بواحد، 4 أقل باثنين، 3 أقل بثلاث – الناتج 3.

د- العد التصاعدي:

مثال (8): 6 – 3

يبدأ الطفل بالعدد 3

ثم يكمل: 4 (يعني واحد)، 5 (اثنين)، 6 (ثلاثة). الناتج هو 3.

إرشادات للمعلم:

1- استخدم المسائل الكلامية كمدخل للعمليات الحسابية على الأعداد الطبيعية.

2- استخدم المواقف اليومية لتقديم ومناقشة الجمع والطرح.

3- استخدم كافة المعاني التي تتضمنها عمليتا الجمع والطرح.

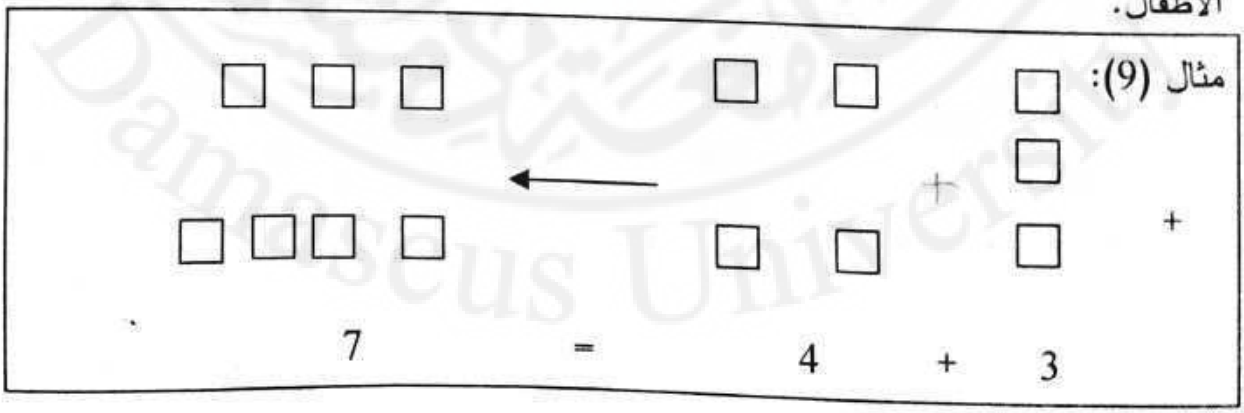
4- شجع الأطفال على استخدام استراتيجياتهم الخاصة في حل المسائل ودعهم يطلعون بعضهم بعضاً على الاستراتيجيات المختلفة.

الجمع والطرح باستخدام الرموز:

ليس كافيا أن يعتمد الأطفال على استراتيجياتهم البدائية لحل مسائل الجمع والطرح. فالمطلوب هو فهم وإتقان هاتين العمليتين باستخدام الرموز. ولكن بالطبع فانه لا يمكن نقل الأطفال مباشرة من تلك الإستراتيجيات إلى الحساب الرمزي لأن ذلك سيؤدى إلى فجوة كبيرة تعيق تعلم الأطفال للحساب الرمزي والطريقة السليمة للانتقال يجب أن تعمل على ربط الرموز والتعابير والمعادلات المستخدمة في الحساب الرمزي بالمعرفة غير الرسمية لدى الأطفال ويتم ذلك من خلال:

أ- تقديم التمثيل الرمزي كطريقة مختصرة للتعبير عن النماذج والأفكار التي يفهمها الأطفال.

مثال (9):



ويتم هذا من خلال جعل الأطفال يحلون مسائل كلامية بطرقهم الخاصة ثم الطلب إليهم أن يسجلوا هذه الحلول. وإنه لمن المناسب السماح للأطفال أن يستخدموا طرقهم

الخاصة بالتسجيل وإن كانت تختلف عن هذه الطريقة الرسمية.

ب- استخدام نفس هذا الأسلوب مع مسائل أخرى حيث المجهول هو المضاف إليه/المطروح منه أو المضاف/ المطروح.

ج- استخدام الرموز في الجمع والطرح.

الضرب:

تحمل عملية الضرب خمسة معان هي "المجموعات المتكافئة"، "المعدل"، "المقارنة"، "المزاوجة "، و "المساحة". سنتناول كل من هذه المعاني على حدة.

1- المجموعات المتكافئة Equivalent Sets

يتضمن هذا المعنى ضم عدد من المجموعات المتكافئة.

مثال (10): ثلاث سلال من التفاح تحوي كل منها خمس تفاحات. تمثل هذه العملية بالتعبير 3 × 5. وهذا النوع من الضرب هو ضرب غير متماثل فالثلاثة تمثل عدد السلال بينما تمثل الخمسة عدد التفاح في كل سلة.

2- المعـدّل Rate

يتضمن هذا المعنى إيجاد الناتج من خلال معرفة عدد الأشياء والمعدل المؤثر فيها.

مثال (11): سيارة تسير بسرعة 80 كيلو مترا في الساعة. ما المسافة التي تقطعها في 3 ساعات؟

هذا النوع من الضرب غير متماثل أيضا.

3- المقـارنة Comparison

يتضمن هذا المعنى تحديد حجم مجموعة بمعرفة حجم مجموعة أخرى ومعرفة عدد المرات التي تفوق فيها المجموعة المجهولة تلك المعلومة.

مثال (12): لدى علي 3 دراهم. لدى خليفة 5 أضعاف ما لدى علي. كم درهما لدى خليفة؟

هذا النوع من الضرب غير متماثل أيضا.

4- المزاوجة Matching

يتضمن هذا المعنى إيجاد كافة الطرق للمزاوجة بين عناصر مجموعة معينة

وعناصر مجموعة أخرى.

مثال (13): لدى راشد 3 بناطيل و4 قمصان. فكم طقما مختلفا (بنطلون وقميص) يمكن لراشد أن يكون منها.

هذا النوع من الضرب متماثل لأن العوامل هنا تلعب نفس الدور.

5- المساحة Area

هذا المعنى يتضمن إيجاد مساحة مستطيل بمعرفة طوله وعرضه.

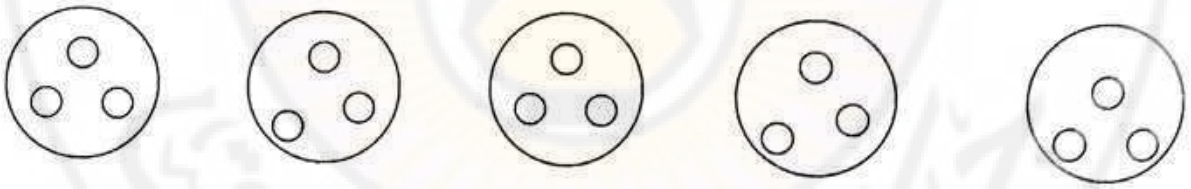
مثال (14): ما مساحة قطعة أرض مستطيلة طولها 20 متراً وعرضها 5 أمتار ؟

هذا النوع من الضرب متماثل أيضا.

استراتيجيات الأطفال لحل مسائل الضرب:

كما في الجمع والطرح فإن للأطفال طرقهم الخاصة في نمذجة وحل مسائل الضرب. فطفل في الأول الابتدائي مثلاً يمكن أن يحل مسألة مثل 5 × 3 كالتالي:

1- يقوم بتكوين خمس مجموعات تحتوي كل منها على ثلاثة عناصر كما في الشكل (5-4) أدناه.



الشكل (5-4)

2- يقوم بعد كافة العناصر لتحديد الإجابة.

مع الزمن، يطور الأطفال طرقا أكثر فاعلية مثل:

أ- تكرار عد مجموعة واحدة. لحل المسألة (5 × 3)، قد يستخدم الطفل أصابع يد واحدة ويعدّ 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7، 8، 9، 10، 11، 12، 13، 14، 15 (يعد أصابع يده 3 مرات دون البدء من جديد في كل مرة.

ب- العدّ بالقفز 3، 6، 9، 12، 15.

ج- استخدام نواتج جمع أو ضرب معروفة: ففي حل مسألة مثل 3 × 5، إذا كان الطفل يعرف أن 2 × 5 = 10، فإنه يمكن أن يستخدم هذه المعلومة لحل المسألة كالتالي:

2 × 5 = 10، أضف خمسة ← الناتج 15.

إرشادات في تعليم الضرب:

1- ابدأ من المعرفة السابقة للطفل: ويتم هذا من خلال تقديم الضرب كعملية جمع متكرر Repeated Addition. في هذه المرحلة فإن الطفل بالطبع يستطيع تمثيل الجمع المتكرر بالرموز. في مرحلة أخرى قدم الضرب الرمزي كطريقة مختصرة للجمع المتكرر. (انظر الجدول أدناه)

المسألة (1): يأكل صائم 7 حبات تمر يوميا عند الإفطار في رمضان. فما مجموع ما يأكله من التمر في 4 أيام ؟	
المرحلة الأولى	7 + 7 + 7 + 7 = 28 هنا شجع الطفل على استخدام التعبير "4 سبعات".
المرحلة الثانية	تختصر هذه العملية إلى: 7 × 4 = 28

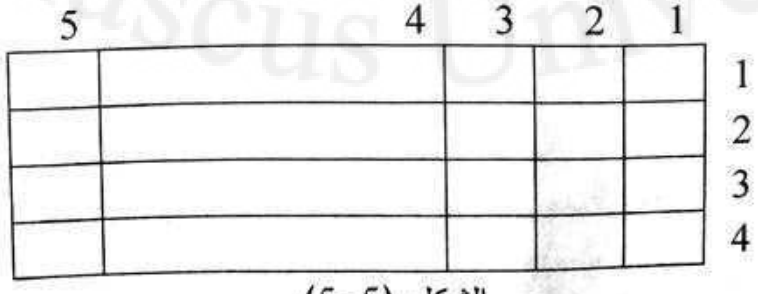
2- شجع الأطفال على ربط الضرب الرمزي بكافة معاني الضرب من خلال استخدام أمثلة حياتيه متنوعة: لا يكفي أن يربط الأطفال مفهوم الضرب بالجمع المتكرر، فهم يحتاجون إلى فهم المعاني الأخرى لعملية الضرب. فمثلاً تفسير الطفل لتعبير مثل 3 × 4 على أنه " ثلاث مجموعات تحوي كل منها 4 عناصر" هو أوسع من تفسيره له كجمع متكرر، وهكذا في المعاني الأخرى للضرب.

3- شجع الأطفال ابتكار طرق لحل مسائل الضرب ومشاركتها مع زملائهم وتحسينها. وعندما يستخدم الأطفال طرقا مطولة، شجعهم على التفكير بمختصرات لتلك الطرق.

4- ساعد الأطفال على اكتشاف الخاصيتين الإبدالية والتجميعية لعملية الضرب. النشاط التالي يوضح إحدى الطرق التي يمكن اتباعها لمساعدة الأطفال على الاكتشاف.

الخاصية الإبدالية: Commutativity

باستخدام ورق مربعات، دع الأطفال يرسمون مستطيلاً قياس 4 × 5 كما في الشكل (5-5)، ويحسبون مساحته .

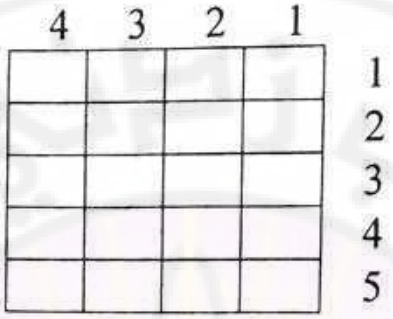


الشكل (5-5)

وعلى اعتبار أن مساحة المستطيل هي عدد الصفوف × عدد الأعمدة

فإن مساحته = 4 × 5 = 20

الآن دعهم يرسمون مستطيلا بنفس القياسات ولكن بشكل طولي والمساحة في هذه الحالة هي 5 × 4 = 20 كما في الشكل (5-6).



الشكل (5-6)

بإعادة النشاط مرات ومرات سيكتشف الأطفال عن طريق الاستقراء أن تبديل مواقع العوامل في الضرب لا يؤثر على النتيجة وبالتالي يكتشفون الخاصية الإبدالية لعملية الضرب.

الخاصية التجميعية: Associativity

باستخدام مكعبات بلاستيكية أو خشبية، دع الأطفال يبنون متوازيات مستطيلات بأبعاد مختلفة ولكن باستخدام نفس العدد من المكعبات.

مثال (15): 3 × 4 × 5، 4 × 3 × 5، 4 × 5 × 3، 5 × 3 × 4 وهكذا.

وعلى اعتبار أن الطفل سيحدد حجم متوازي المستطيلات من خلال ضرب الطول × العرض × الارتفاع، فإنه سيلاحظ مع تكرار العملية عدّة مرات الخاصية التجميعية لعملية الضرب (استدلال استقرائي).

القسمة:

تتضمن عملية القسمة ثلاثة معان هي، التوزيع، والقياس والعامل المفقود. سنتناول كل من هذه المعاني على حدة.

1- التوزيع: Distribution

يتضمن هذا المعنى تكوين عدد معين من المجموعات، ويكون المطلوب في هذه الحالة هو حجم كل مجموعة.

مثال (16): أريد توزيع 15 قلماً على 3 طلاب. فما نصيب كل طالب؟

2- القياس: Measurement

يتضمن هذا المعنى تكوين مجموعات بحجم معين. ويكون المطلوب في هذه الحالة هو عدد المجموعات.

مثال (17): أريد توزيع 15 قلماً على مجموعة من الأطفال بحيث يعطى كل طفل 3 أقلام. فكم طفلا سيستفيد من هذه العملية؟

3- المساحة: Area

كما في الضرب إلا أن المعطيات هنا هي المساحة وطول أحد ضلعي المستطيل. وبالتالي يكون المجهول هو طول الضلع الآخر.

مثال (18): مستطيل طوله 5سم ومساحته 20 سم2، فما عرضه ؟

4- المزاوجة: Matching

كما في الضرب إلا أن المعطيات هنا هي عدد المزاوجات ومقدار أحد العاملين. وبالتالي يكون المجهول هو العامل الآخر.

مثال (19): لدى راشد 4 بناطيل وعدد من القمصان. فإذا كان بإمكان راشد أن يختار ما بين 20 طقما (بنطلون وقميص) فما عدد القمصان التي لديه؟

استراتيجيات حل مسائل القسمة لدى الأطفال:

كما في العمليات الأخرى فإن بإمكان الأطفال أن يستخدموا طرقهم الخاصة لحل مسائل القسمة الكلامية. ففي المواقف التي تتضمن معنى التوزيع يمكن أن يستخدم الأطفال طريقتين حسيتين هما التوزيع العادل والتجربة والخطأ.

1- التوزيع العادل:

المسألة (2): يراد توزيع 12 قطعة حلوى على 3 أطفال. ما نصيب كل طفل؟

- الخطوة الأولى: يعدّ الطفل 12 مكعبا ويصفها جانباً (باستخدام قطع دينيز).

□ □ □ □ □ □

□ □ □ □ □ □

- الخطوة الثانية: يكون 3 أكوام من المكعبات مبتدئاً بوضع مكعب واحد في كل كوم.
- الخطوة الثالثة: يستمر بزيادة مكعب واحد إلى كل كوم حتى تنتهي المكعبات الأثني عشر.

- الخطوة الرابعة: يقوم بعد المكعبات الموجودة في كوم واحد لتحديد الناتج.

2- التجربة والخطأ:

المسألة(3): اعتبر المسألة السابقة.

أ- يقوم الطفل بتخمين الإجابة ولنقل أنه اعتبر أن 12 ÷ 3 = 5

ب- يكوّن 3 أكوام من خلال عدّ 5 مكعبات ووضعها في كوم، ثم 5 أخرى ووضعها في كوم ثاني، ويضع الباقي في الكوم الثالث.

ج- يكتشف الطفل أن إجابته غير صحيحه كون الأكوام لا تحتوي على نفس العدد من المكعبات.

د- إما أن يعدّل الطفل حجم الأكوام من خلال نقل مكعبات من كوم إلى آخر حتى تتساوى أحجامها، أو يبدأ مرة أخرى من الخطوة (1) بتخمين إجابة أخرى.

كذلك فإن الأطفال يستخدمون طريقتين مختلفتين لحل المسائل التي تتضمن معنى القياس هما تكوين المجموعات والطرح المتكرر.

1- تكوين المجموعات:

المسألة (4): يراد توزيع 15 دفتراً على مجموعة من الطلاب بحيث يأخذ كل طالب 3 دفاتر. فكم طالباً يستفيد من عملية التوزيع ؟

الخطوة الأولى: يقوم الطفل بعدّ 15 مكعباً ووضعها جانباً.

الخطوة الثانية: يأخذ الطفل 3 مكعبات ويكوّن مجموعة.

الخطوة الثالثة: يكرر الطفل الخطوة الثانية حتى تنتهي المكعبات الخمسة عشر

الخطوة الرابعة: يقوم الطفل بعدّ المجموعات التي كوّنها لتحديد الناتج.

2- الطرح المتكرر:

المسألة (5): نفس المسألة السابقة

1- يطرح 3 من 15 ← الناتج 12

2- يطرح 3 من الناتج في الخطوة (1)

3- يكرر نفس العملية حتى يصبح الناتج صفراً

4- يقوم بعد عمليات الطرح: 5

15 - 3 = 12

12 - 3 = 9

9 - 3 = 6

6 - 3 = 3

3 - 3 = صفر

إرشادات في تعليم القسمة:

كما هو الحال بالنسبة لبقية العمليات الحسابية فإن تعليم القسمة يجب أن يبنى على ما يعرفه الطفل وأن يقود الطفل تدريجيا من المرحلة الحسية إلى المرحلة الرمزية أو المجردة. الإرشادات التالية تفيد المعلم في تعليم القسمة:

1- يجب أن يعطى الطفل فرصاً كثيرة لممارسة القسمة من خلال المسائل الكلامية قبل أن تقدم له القسمة الرمزية. ومثل هذه الفرص يمكن أن تبدأ في مرحلة الروضة.

2- يجب تعريض الطفل لمسائل تتضمن كافة معاني القسمة وعدم الاكتفاء بمعنى التوزيع الشائع. إن الخبرة المبكرة مع مسائل القياس مثلا قد تسهل على الطفل فهم القسمة في الكسور مستقبلاً.

3- يجب تشجيع الأطفال على ابتكار ومناقشة ومشاركة طرقهم الخاصة في حل مسائل القسمة.

4- كما في العمليات الحسابية الأخرى، يجب تقديم استخدام الرموز كمختصرات لطرق الأطفال الطويلة قبل الانتقال الكامل إلى المرحلة الرمزية.

5- ساعد الأطفال على الربط بوضوح بين القسمة الرمزية والقسمة الحسية واطلب منهم تحويل مسائل القسمة من شكل لآخر (من حسي إلى رمزي والعكس).

6- شجعهم على تحديد فيما إذا كان ممكنا القسمة على صفر أو قسمة صفر على عدد معين من خلال استخدام طرقهم الحسية.

7- ساعدهم على فهم العلاقة بين القسمة والضرب. (ضع أنشطة خاصة على كل من الجمع، والضرب، والقسمة).

تطوير المهارات العددية الأساسية

المقصود بالمهارات العددية الأساسية هو قدرة الطفل على الإجابة بدقة وبسرعة على مسائل الجمع والضرب على الأعداد المكونة رموزها من منزلة عددية واحدة أو مسائل الطرح والقسمة المرتبطة بها. ومثال ذلك الإجابة على مسائل مثل (7 + 5، 12 – 7، 12 – 5) أو (6 × 5، 30 ÷ 6، 30 ÷ 5). وإتقان مثل هذه التراكيب يعتبر هدفاً أساسياً في المرحلة الابتدائية كما أنه متطلب أساسي للمضي قدماً في تعلم الرياضيات.

يرى أصحاب النظرة التقليدية لتعليم الرياضيات أن تعلم الحقائق الأساسية للجمع والضرب يجب أن يتم عن طريق الحفظ بالصم. فهم ينظرون إلى التراكيب العددية المختلفة كمجموعة من الحقائق المعزولة. ويعتبرون أن حفظ هذه الحقائق على كثرتها هو مهمة عقلية بسيطة. لكن الواقع يقول غير ذلك فهناك الكثير من الأطفال الذين لا يستطيعون حفظ هذه الحقائق صماً لا بل إن إجبارهم على حفظها يؤدي إلى كرههم للرياضيات وتكوين مواقف سلبية تجاهها، وحرمانهم من اكتشاف العلاقات والأنماط الرياضية.

والواقع أن إتقان هذه التراكيب الأساسية يتضمن الفهم والتفكير وملاحظة الأنماط والعلاقات فعلى سبيل المثال الإجابة على مسألة مثل: 1278 + 1 هو أمر سهل جداً، لكن هل يا ترى كنا قد تدربنا على هذه المسألة من قبل لنجيب عليها؟. بالطبع لا. فبالإجابة عليها إنما نحن نستخدم قاعدة كنا قد تعلمناها مبكراً وهي أن إضافة العدد واحد لأي عدد يعطي "العدد التالي " في السلسلة العددية. كذلك عند إجابتنا على مسألة مثل 558 + صفر، إنما تستخدم معرفتنا بالقاعدة القائلة أن إضافة صفر لأي عدد لا تؤثر في ذلك العدد. إذن فأداء العمليات الحسابية لا يمكن اعتباره عملية صم بالكامل.

الحفظ ذو المعنى

على عكس الحفظ بالصم فهناك "الحفظ ذو المعنى" والذي هو عملية تدريجية تبني على ما يملكه الطفل من فهم وتفكير. وبالطبع فان الفهم يستغرق وقتا لكي ينمو. واستخدام القواعد والعلاقات يحتاج إلى ممارسة.

مراحل تطور الحفظ ذي المعنى

تمر عملية الحفظ ذي المعنى في ثلاث مـــراحل هي: مرحة العد، مرحلة الاستدلال (Reasoning) ومرحلة الإتقان.

1- مرحلة العد

كما ذكرنا سابقاً فإن الأطفال يبدأون باستخدام العد لحل المسائل الحسابية ويطورون تدريجياً طرقاً أكثر فاعلية للقيام بذلك.

2- مرحلة الاستدلال

وفي هذه المرحلة يبدأ الأطفال باستخدام العلاقات والأنماط التي يكتشفونها ليستدلوا على حلول للمسائل. فعلى سبيل المثال فالطفل الذي يعرف المضاعفات الجمعية مثل 5 + 5 = 10 قد يستخدمها لحل مسألة مثل 5 + 6 بأن يقول: حسنا 5 + 5 = 10 ولكن

6 تزيد عن 5 بواحد، إذن فالجواب يجب أن يكون أكبر من 10 بواحد أو 11، وهكذا.

3- مرحلة الإتقان

في هذه المرحلة يحل الأطفال المسائل عن طريق عمليات الاستدلال التلقائي والاسترجاع التلقائي للحقائق.

ميزات أسلوب الحفظ ذي المعنى:

يعتبر هذا الأسلوب أسلوبا عمليا ويتميز بما يلي:

1- أكثر فاعلية من أسلوب الحفظ بالصم ويلائم الأطفال على اختلاف قدراتهم: يضمن هذا الأسلوب تعلما أسرع للحقائق الحسابية ويعطي الأطفال قدرة على تطبيق العلاقات والأنماط التي يتعلمونها في مواقف جديدة بما في ذلك الحسابات التي تتضمن أعداداً تتكون رموزها من عدة منازل.

2- يركز هذا الأسلوب على استراتيجيات التفكير كما يتضمن استدلالات استقرائية واستنباطية.

3- يساعد الأطفال على تكوين اتجاهات إيجابية نحو الرياضيات.

إرشادات للمعلم

1- اختلق حاجة لتعلم التراكيب العددية الأساسية: في كافة مراحل تطور الحفظ ذي المعنى فإن ممارسة التراكيب العددية الأساسية يجب أن تتم بوجود هدف محدد وبطريقة هادفة. وحل المسائل الكلامية يعتبر مصدراً مهماً للممارسة الهادفة من أجل تشجيع العدّ الفعال واستراتيجيات الاستدلال ومن أجل تعزيز إتقان التراكيب. كذلك فإن ممارسة الألعاب الممتعة يمكن أن تكون مصدراً جيداً آخر (انظر لعبة الفرق ولعبة "فكر مع الأعداد" أدناه.

2- هيئ فرصاً للأطفال لابتكار طرق عدّ لإيجاد ناتج جمع أو طرح أو ضرب أو قسمة: إن مرحلة العدّ تعطي الأساس المفاهيمي للمراحل اللاحقة وتمثل فرصة للأطفال لاكتشاف العلاقات والأنماط. وبالتالي فانه يجب تشجيع الأطفال على استخدام الطرق التي تتضمن عدّ أشياء مثل أصابع اليد.

3- شجع الأطفال على ابتكار ومشاركة استراتيجيات تفكير: يجب أن يتم التركيز خلال مرحلة الاستدلال على تشجيع الأطفال على البحث عن الأنماط والعلاقات ومناقشتها. من المهم جداً أن نشجع الأطفال على استخدام ما يعرفوه من التركيبات للاستدلال

على تركيبات أخرى جديدة.

4- عندما يكتشف الأطفال العلاقات والأنماط ويستخدمونها لتطوير استراتيجيات تفكير، تصبح عملية الممارسة ضرورية جداً لجعل عمليات الاستدلال هذه تلقائية، وللوصول بالأطفال إلى مرحلة الإتقان.

لعبة الفرق

أهداف هذه اللعبة:

1- تقديم أو مراجعة معنى "الفرق" لعملية الطرح

2- ممارسة حسابات الفرق (بطرق غير رسمية)

3- إتقان تراكيب الطرح الأساسية.

المواد:

10 بطاقات تحمل الأرقام من صفر إلى تسعة (كل بطاقة تحمل رقماً واحداً).

عدد اللاعبين: اثنان

طريقة اللعب:

يلتقط كل طفل بطاقة. يتم طرح الرقم الأصغر من الرقم الأكبر ويكون الناتج نقاطاً لصاحب الرقم الأكبر. فمثلاً إذا التقط اللاعب الأول بطاقة تحمل الرقم 8 والتقط اللاعب الثاني بطاقة تحمل الرقم 2، يكون الفائز هو اللاعب الأول وبست نقاط.

إذا كان الأطفال مبتدئين فإنهم يستخدمون استراتيجية "الربط الحسي" المشروحة سابقاً. أما إذا كانوا متقدمين فيمكن أن يستخدموا استراتيجية العد التنازلي أو ربما العد التصاعدي.

لعبة "فكر مع الأعداد"

أهداف اللعبة:

1- ممارسة العمليات الأربعة (الجمع و الطرح و الضرب و القسمة)

2- تقوية الحس العددي

المواد:

1- عشرون بطاقة تحمل الأرقام من 1 – 20

2- أوراق للكتابة عليها و إجراء الحسابات

عدد اللاعبين: اثنان أو أربعة (فريقان)

طريقة اللعب:

1- يختار اللاعب الأول 5 بطاقات ويختار اللاعب الثاني بطاقة واحدة.

2- على اللاعب الأول أن يجري 4 عمليات حسابية على الأعداد الخمسة التي حصل عليها بحيث يكون الناتج مساويا للعدد السادس الذي حصل عليه اللاعب الثاني.

إذا استطاع اللاعب الأول أن يفعل ذلك فانه يحصل على نقطة. إذا لم يستطع، تتحول المهمة إلى اللاعب الثاني فإذا استطاع أن يفعلها فانه يحصل على نقطة.

أمثلة:

الأعداد الخمسة الأولى	العدد السادس	الحل
5، 7، 9، 12، 14	6	$6 = 5 - 7 - 9 \times (12 - 14)$
3، 4، 6، 8، 11	9	$9 = 4 \div 6 \times (8 - 3 + 11)$

استراتيجيات التفكير في العمليات الحسابية البسيطة

إن من واجب المعلم أن يساعد التلاميذ على تطوير استراتيجياتهم في إجراء العمليات الحسابية من خلال استخدام القواعد البسيطة التي يتعلمونها. إن استخدام مثل هذه القواعد ينمي قدرة التلاميذ على التفكير المرن في حل المسائل والوصول إلى مستوى إتقان الحسابات. نعرض فيما يلي بعض القواعد التي تفيد في هذا المجال.

أولاً: في الجمع والطرح

1- **قاعدة الصفر** (إضافة صفر إلى عدد أو طرح صفر من عدد لا يغير ذلك العدد): عادة يكتشف الأطفال هذه القاعدة بأنفسهم.

2- **قاعدة "العدد التالي" و "العدد السابق"** (قاعدة العدد 1):

إن إضافة العدد 1 إلى أي عدد تنتج "العدد التالي" في السلسلة العددية (5+1 = العدد الذي يلي 5 في العد وهو 6). كذلك فإن طرح 1 من أي عدد ينتج " العدد السابق " في السلسلة العددية (6-1= العدد الذي يسبق 6 في العد وهو 5).

عادة فان الأطفال يدخلون الصف الأول الابتدائي ولديهم معرفة بالعدد التالي والعدد السابق لأعداد حتى 18 تقريباً. لذلك فانهم بمجرد أن يربطوا بين هذه المعرفة السابقة وعملية إضافة أو طرح العدد 1 فإن بإمكانهم أن يتعلموا هذه العمليات بسرعة، ولذلك فان التركيبات (ن+1) و (ن – 1) هي أول ما يتم إتقانه.

3- **قاعدة القفز عن العدد التالي أو العدد السابق (قاعدة العدد 2):**

إن إضافة العدد 2 لأي عدد تنتج العدد بعد التالي في السلسلة العددية. إذن فبمجرد أن يدرك الطفل مثلاً أن 5 + 1 هو العدد التالي للعدد 5 أي 6، يصبح بإمكانه أن يستدل على أن 5 + 2 هو العدد التالي للعدد 6 أي 7.

وبطريقة مشابهة تماماً فإن إدراك الطفل لحقيقة أن 5 – 1 هو العدد السابق للعدد 5 أي 4 يمكنه من الاستدلال على أن 5-2 هو العدد السابق للعدد 4 أي 3.

4- **الخاصية الإبدالية لعملية الجمع: أ + ب = ب + أ**

سرعان ما يكتشف الأطفال هذه الخاصية نتيجة خبرتهم مع العد.

5- **العوامل المكررة (أ + أ):**

مجموع الأضعاف 3 + 3 و 4 + 4 هي أعداد زوجية. ومجموع كل زوج من هذه الأضعاف يزيد عما قبله باثنين. إذن فهذه المجاميع توازي العد بالقفز الثنائي (2، 4، 6، 8،....) والذي يتعلمه الأطفال مبكراً. إذا أضيف العدد الزوجي أو الفردي إلى نفسه يعطي عدداً زوجياً وكذلك فإن 6 + 6 تزيد عن 5 + 5 باثنين لأن كل 6 تزيد عن 5 بواحد. هذا النمط، بالإضافة إلى حقيقة أن جمع الأضعاف له أهمية سيكولوجية خاصة قد يساعد في تفسير تعلم الأطفال السريع نسبيا لهذه التراكيب.

6- أشباه الأضعاف (الأضعاف + 1):

أن شبه الضعف 4 + 5 يمكن أن ينظر إليه كالضعف 5 + 5 ناقص 1 أو 4 + 4 زائد 1. بمجرد أن يحفظ الأطفال قاعدة الأضعاف فإنهم يستطيعون الاستدلال على هذه القاعدة. فالطفل الذي يعرف أن 8 + 8 = 16 سيستدل على أن 8 + 9 = 17 كون 8 + 9 هي 8 + 8 زائد 1. لاحظ أن الطفل يستخدم هنا استدلالا استنباطياً.

7- تحويل العوامل المتباعدة بوحدتين إلى عوامل مكررة:

والمقصود هنا وجود عاملين مثل أ، ب حيث ب = أ + 2. ومثال ذلك 4 + 6، 5 + 7، 2 + 4، وهكذا. لاحظ أن مجموع مثل هذين العاملين هو ضعف عامل يقل عن العامل الأكبر بواحد. فمثلا 3 + 5 = 4 + 4، 5+7 = 6+6، 2+4 = 3+3 وهكذا.

8- قاعدة العدد 10:

عندما يكون أحد عوامل الجمع أو الطرح قريباً من العدد 10 فان ذلك يسهل مهمة الطفل. فمثلا في حل مسألة مثل 9 + 5 يمكن أن يفكر الطفل في (10 + 5) ناقص 1 كون 9 أقل من 10 بواحد. كذلك في حل مسألة مثل 18 – 9 يمكن أن يفكر الطفل في (18 – 10) زائد 1 كون 9 أقل من 10 بواحد. كذلك فإن (8 + 5) يمكن تحويلها إلى 8 + (2 + 3) = 10 + 3 = 13. لاحظ أن هذا يتطلب من الطفل معرفة الأعداد التي تكوّن العدد 10 وكذلك القدرة على تحديد حاصل جمع العدد 10 مع عدد آخر.

9- قاعدة طرح العدد من نفسه:

وتنص هذه القاعدة على أن طرح أي عدد من نفسه يعطي صفراً. وغالباً فإن الأطفال يتعلمون هذه القاعدة مبكراً.

10- طرح الأعداد المتجاورة:

العددان المتجاوران هما عددان يزيد أحدهما عن الآخر بواحد. وطرح العد الأصغر من العدد الأكبر يعطي 1 (مثلا 6 – 5 = 1).

11- علاقة الجمع بالطرح: يمكن التفكير بأي مسألة طرح كعملية معاكسة لمسألة جمع معينة. فمثلا لحل مسألة مثل (9–4) يمكن أن يتساءل الطفل: ماذا أضيف للعدد 4 ليصبح 9؟ لاحظ أنه لتطبيق مثل هذه الاستراتيجية فإن على الطفل أن يكون قد أتقن الجمع و أدرك العلاقة بين الجمع والطرح. وبالتالي فإن على المعلم أن يشجع تحقق هذين المتطلبين.

ثانيا: في الضرب والقسمة

1- قاعدة العدد 1:

ضرب أي عدد في 1 أو قسمته على 1 يعطي نفس العدد. سرعان ما يتعلم الأطفال هذه القاعدة بأنفسهم، خاصة إذا فهموا معنى " المجموعات المتكافئة" في الضرب ومعنى "التوزيع" في القسمة. فإذا كان لدينا مجموعة واحدة مكونة من 5 عناصر فمجموع العناصر هو 5، (5 × 1 وكذلك فانه إذا كان لدينا 5 عناصر وأردنا أن نكون منها مجموعة واحدة فسيكون حجم تلك المجموعة هو 5، (5 ÷ 1).

2- قاعدة العدد 2 (قاعدة الضعف):

ترتبط هذه القاعدة بقاعـــدة العوامل المتكررة في الجمع. فمسألة مثل 2 × 7 تكافئ 7 + 7. باكتشاف هذا الارتباط وبالاعتماد على قدرتهم في حل مسائل العوامل المتكررة يستطيع الأطفال أن يتقنوا حل مسائل 2 × ن بسهولة. وغالبا ما يكتشف الأطفال هذا الارتباط بأنفسهم مما يفسر حقيقة أن مسائل 2 × ن هي من أبسط ما يواجهه الأطفال في عملية الضرب. كذلك الأمر مع مسائل ن ÷ 2، فهي مرتبطة مع جمع العوامل المتكررة حيث أن الأطفال يتغلبون على مسألة مثل 12 ÷ 2 من خلال التفكير بعدد إذا أضيف لنفسه يكون الناتج 12 ← وهو 6.

3- قاعدة الصفر:

إذا ضرب أي عدد في صفر فانه يعطي صفراً (صفر × ن = ن × صفر = صفر) وكذلك إذا قسم الصفر على عدد فانه يعطي صفراً (صفر ÷ ن = صفر) يكتشف الأطفال هذه الأنماط بأنفسهم من خلال تطبيق ما يعرفونه عن معنى "المجموعات المتكافئة" في الضرب ومعنى "التوزيع" في القسمة. فأي عدد من المجموعات الخالية لن يكون مجموع عناصرها إلاّ صفراً. وكذلك فإن تجزئة مجموعة خاليه إلى أي عدد من المجموعات لا يعطي إلا صفراً.

4- الخاصية الإبدالية في الضرب (أ × ب = ب × أ):

وتقضي هذه الخاصية بأن ترتيب العوامل في عملية الضرب لا يؤثر على الناتج.

5- مضاعفات الضعف: إن تعلم قاعدة الضعف (2× ن أو ن × 2) يسهل حساب المضاعفات الأخرى. حيث يمكن التفكير بناتج 4 × ن أو ن × 4 كضعف ناتج 2 × ن أو ن × 2 فمثلا 4 × 5 هي ضعف 2 × 5 أي 10 + 10 = 20. هذا الاستـــدلال نفسه يمكن أن يطبق على 6 × ن و 8 × ن.

6- التنصيف والمضاعفة إذا كان أحد العوامل زوجياً:

إذا كان أحد عوامل الضرب زوجيا فيمكن تنصيفه وإجراء عملية الضرب ومن ثم مضاعفة الناتج. فمثلا في المسألة 6 × 7 يمكن أن يفعل التلميذ الآتي:

3 × 7 = 21، 2 × 21 أو 21 + 21 يساوي 42.

7- قاعدة العدد 5:

إذا كان أحد عوامل الضرب هو العدد 5 فيمكن استبدال 5 بعشرة (كون الضرب في عشرة سهلاً) ثم تنصيف الناتج. ففي مسألة مثل 5 × 6 يمكن أن يقوم الطفل بالتالي:

10 × 6 = 60، 60 ÷ 2 = 30.

8- مجاورات التراكيب المعروفة:

يمكن الاستدلال على أي تركيب مجهول من خلال تركيب مجاور معلوم. فمثلاً إذا كان الطفل لا يعرف ناتج 7 × 4، لكنه يعرف ناتج 6 × 4 فبإمكانه أن يحدد ناتج 6 × 4 أي 24 ويضيف إليه 4 ليصبح 28.

9- جوار العوامل المكررة:

إن ناتج ن (ن + 2) = (ن + 1) (ن + 1) -1. فمثلا 5 × 7 = (6 × 6) - 1، 6 × 8 = (7 × 7) -1، 7 × 9 = (8 × 8) - 1 .

10- قاعدة العدد 9:

إذا كان أحد العوامل هو العدد 9 فيمكن استخدام طريقتين لإيجاد الناتج:

أ- استبدل العدد 9 بالعدد عشرة وحدد الناتج ثم اطرح منه العدد الآخر.

مثال (19): 9 × 6 = 10 × 6 - 6 = 60 - 6 = 54 .

ب- خانة الآحاد في الناتج هي 10 - ن وخانة العشرات هي ن - 1.

مثال (20): 9 × 6

العدد في خانة الآحاد هو 10 - 6 = 4 والعدد في خانة العشرات هي 6-1 = 5 الناتج هو 54.

لكن الطريقة (أ) هي المفضلة.

11- علاقة القسمة بالضرب:

يمكن التفكير بأي مسألة قسمة كعملية معاكسة لمسألة ضرب معينة. فمثلا لحل مسألة مثل 48 ÷ 6 يمكن أن يسأل الطفل نفسه: بماذا أضرب العدد 6 ليعطيني 48؟

ولكي يتمكن الطفل من استخدام هذا الاستدلال، يتطلب منه أن يكون متقنا لحقائق الضرب الأساسية ومدركا للعلاقة بين القسمة والضرب.

12- قاعدة العدد 10:

يتعلم الأطفال هذه القاعدة بسهولة من خلال ربطها بعملية العد بالقفز فهم معتادون على أن يعدوا 10، 20، 30،..... الخ.

الحس العددي

يعرف الحس العددي على أنه الشعور الحسي بالعدد الذي يوجه عملية اتخاذ القرار بذكاء ومرونة حول الاستخدامات العددية (Howden, 1989; Sowder, 1992). ويعتبر هذا الحس العددي ضرورياً للحياة اليومية وذلك للحكم على معقولية التقديرات أو الحسابات (NCTM , 1989). كذلك فإن الحس العددي يمنح الشخص المرونة في الانتقال من تمثيل عددي إلى آخر.

وكما يتضح من خلال المعايير التي حددها NCTM (2000) في مجال الأعداد والعمليات عليها فإن الحس العددي يتضمن:

أ- فهم الأعداد وطرق تمثيلها والعلاقات فيما بينها والأنظمة العددية.

ب- فهم معاني العمليات وارتباط كل منها بالأخرى.

ج- المهارة في الحساب وإجراء تقديرات معقولة.

وبالطبع فإن هذه المعايير لا يمكن تحقيقها عن طريق التدريس التقليدي، أي عن طرق الحفظ الاستظهاري والتركيز المبالغ به على سرعة الحساب. وعلى العكس فإن تنمية الحس العددي تتطلب تعلماً عن طريق الاكتشاف والبحث عن الأنماط والعلاقات العددية. إذن فعلى المعلم أن يخلق بيئة صفية ملائمة لتنمية الحس العددي لدى التلاميذ. ولابد لهذه البيئة أن تتصف بما يلي:

1- الطابع الاستكشافي:

يجب أن تكون البيئة الصفية ذات طبيعة استكشافية يستخدم فيها التلاميذ استراتيجياتهم غير الشكلية (Informal) لحل المسائل. فالاستخدام المرن للأعداد يتطلب اكتشافاً للقواعد والعلاقات وليس حفظاً لها. ولا يتأتى هذا الاكتشاف إلا من خلال تأمل التلاميذ بالأعداد والعمليات والتلاعب بالأعداد ومعالجتها (manipulating numbers).

2- الحوار الديمقراطي:

يجب أن تتميز البيئة الصفية بالحوار الديمقراطي سواء بين التلاميذ أنفسهم أو بين التلاميذ والمعلم. وهذا يتضمن إعطاء التلاميذ الحرية في التعبير عن آرائهم وطرح الافتراضات والدفاع عنها. كما يتطلب خلق ثقافة صفية تحترم الرأي الآخر دون اشتراط صحته،وعدم الاستهزاء بأي مقترح مهما قل شأنه.

3- الأنشطة الهادفة:

تتميز البيئة الصفية الغنية بالأنشطة الممتعة والهادفة. وتتضمن هذه الأنشطة استخدام المسائل والأدوات والوسائل المتاحة لتشجيع استكشافات التلاميذ حول الأعداد والعمليات والعلاقات بينها. وتعتبر الألعاب الرياضية من الأنشطة التي تقوي فهم التلاميذ للأعداد والحس العددي.

التقدير (Estimation)

التقدير هو إجابة غير دقيقة 100% وقد تكون على شكل:

أ-تقدير عددي: تقدير عدد عناصر مجموعة معينة.

ب- تقدير قياسي: تقدير طول أو وزن شيء معين... الخ.

ج- تقدير حسابي: تقدير ناتج عملية حسابية.

وتقليديا، فقد كان يتم تدريس التقريب كمتطلب سابق للتقدير وقد كان التركيز على كيفية القيام بالتقدير دون اعتبار لأهمية التقدير. ولم يكن التلاميذ يروا أي علاقة للتقدير بالحياة اليومية وبالتالي فقد كان يعتبر عبثيا بالنسبة لهم. وعلى سبيل المثال فقد كان يدرس التقريب كالتالي:

27 تقرب إلى 30 لأن 7 أكبر من 5

23 تقرب إلى 20 لأن 3 أقل من 5

يعتبر الكثير من المعلمين أن تدريس التقدير أمراً ثانوياً والواقع أن التقدير موضوع مهم جداً في الرياضيات ويتضمن تدريسه الإيجابيات التالية:

أ- ينمي المرونة في التفكير لدى التلاميذ.

ب- يساعد في كثير من الأمور الحياتية.

ج- يحرر التلاميذ من عقدة " الإجابة الصحيحة" ويحسن من اتجاههم نحو الرياضيات.

هذا ويجب أن يتم تدريس التقدير بشكل هادف بعيداً عن "الميكانيكية" التي كان يتم تدريس التقدير بها تقليدياً. وفي هذا المجال فإن على المعلم أن:

أ- يوضح للتلاميذ أهمية التقدير واستخداماته المختلفة في الحياة

ب- يكون نموذجا لتلاميذه في استخدام التقدير.

ج- يزود التلاميذ بمسائل واقعية تحتاج إلى تقدير، وتكون ملائمة لخبرات التلاميذ السابقة.

د- يوضح للتلاميذ أن دقة التقدير تعتمد على الموقف ويحددها من يقوم بالتقدير.

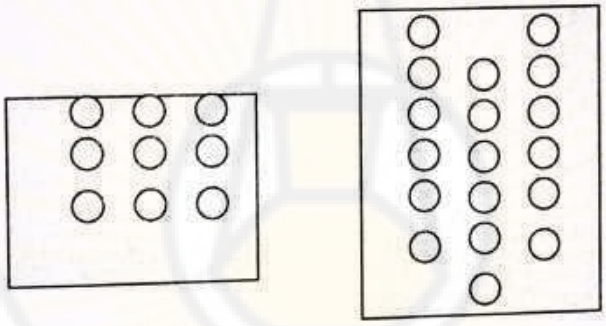
ه- يستخدم لغة تشجع على الإجابات التقريبية.

نشاط (1):

أ) قدّر ارتفاع الكوخ المجاور

ب) قدّر عدد الكرات في الوعاء

الذي يبين الشكل أدناه مسقطيه السفلي والجانبي



المسقط الجانبي المسقط السفلي

ج) قدّر نواتج العمليات التالية:

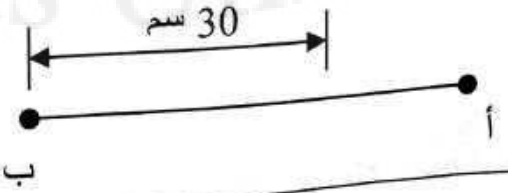
197 + 201 = ؟

48 + 50 = ؟

61 ÷ 3 = ؟

53 − 12 = ؟

د) قدّر طول القطعة المستقيمة أ ب.



الحساب الذهني

الحساب الذهني هو إجراء الحسابات دون استخدام القلم والورقة أو الآلة الحاسبة، أي إجراء الحسابات في العقل. ونجد أن بعض الأشخاص لديهم قدرة كبيرة على إجراء الحسابات ذهنيا بينما البعض الآخر لا يستطيع إجراء حتى الحسابات البسيطة ذهنياً. وقد وجد هوب وشيريل (Hope & Sherill,1987) أن هناك فروقاً بين أولئك المهرة في الحساب الذهني وغير المهرة فيه، وهي:

1- يعمل المهرة على حل المسائل الحسابية من اليسار إلى اليمين بينما يعمل غير المهرة من اليمين إلى اليسار كما في الخوارزميات.

2- يتجنب المهرة استخدام الاستراتيجيات التي تحتاج إلى ترحيل بينما يفعل غير المهرة عكس ذلك.

3- يستخدم المهرة استراتيجيات مختلفة وبمرونة مع المسائل المختلفة بينما يصر غير المهرة على تطبيق استراتيجية " من اليمين إلى اليسار ".

وقبل تعليم التلاميذ خوارزميات الحسابات على الأعداد متعددة المنازل فإنهم يستخدمون طرقهم الخاصة لحل المسائل التي تتضمن أعداداً متعددة المنازل. وربما يكون أول ما يفكر به التلاميذ هو استخدام الطرق المستخدمة في العمليات على الأعداد ذات المنزلة الواحدة. فعلى سبيل المثال، لحل المسألة (20 + 10) فقد يلجأ التلاميذ إلى العد: 20، 21، 22، 0000، 30 لإيجاد الناتج. ولكن مع الزمن، وخاصة عندما يتعرض التلاميذ إلى مواقف يتعذر فيها استخدام العد، فإنهم يبتكرون طرقاً خاصة للحساب الذهني. وقد أظهرت الدراسات أن هذه الطرق غالباً ما تقوم على العمل من اليسار إلى اليمين. تأمل الأمثلة التالية:

مثال على الجمع:

مثال (21):

$$\begin{array}{r} 18 \\ +\ 14 \\ \hline \end{array}$$

$20 = 10 + 10$

$12 = 8 + 4$

$30 = 10 + 20$

$32 = 2 + 30$

مثال على الضرب:

مثال (22):

15
× 3
---

30 = 10 × 3
15 = 5 × 3
45 = 15 + 30

مثال على الطرح:

مثال (23):

52
− 18
---

40 = 10 − 50
6 = 8 − 2 تحت الصفر
34 = 6 − 40

مثال على القسمة:

مثال (24):

20 | 205

20 + 20 + 20 + 000 حتى يصبح الناتج قريبا جداً من 205.
أو 10 × 20 = 200 والباقي 5.

وبالطبع فإن نمو القدرة على إجراء الحسابات الذهنية يعتمد على مدى فهم التلاميذ للأعداد ومدى امتلاكهم للحس العددي.

نشاط (2):

كيف يمكن أن يساعد فهم العد في تنمية القدرة على إجراء الحسابات الذهنية ؟

ما علاقة فهم القيمة المكانية للعدد بتنمية القدرة على إجراء الحسابات الذهنية ؟

تدريس الحساب الذهني

يتجنب الكثير من التلاميذ استخدام الحساب الذهني بسبب الصعوبات التي يواجهونها في ذلك الاستخدام والعائدة أساساً إلى أسباب تدريسية منها:

- التركيز على الخوارزميات الرسمية. وهذا التركيز على الخوارزميات يؤدي إلى

تردد التلاميذ في استخدام استراتيجياتهم غير الشكلية. فمن جهة فإن الخوارزميات تعمل باتجاه معاكس للاستراتيجيات غير الشكلية (من اليمين إلى اليسار). ومن جهة ثانية فإن الخوارزميات تشجع التلاميذ على التعامل مع منازل العدد كأجزاء منفصلة. وأخيراً فإنه إذا تم تعلم الخوارزميات عن طريق الحفظ فإن تطبيقها يصبح عملية آلية، تعدم الحس العددي.

- عدم الاهتمام بتنمية الحس العددي لدى التلاميذ.

وعلى النقيض من ذلك، فإن التدريس الجيد يجب أن يشجع التلاميذ على استكشاف استراتيجيات الحساب الذهني وتنمية هذه المهارة الهامة.

فيما يلي بعض الإرشادات التي تفيد في هذا المجال:

1- تشجيع التفكير التأملي لدى التلاميذ عن طريق إتاحة الفرصة لهم باستخدام الاستراتيجيات غير الشكلية قبل تدريس الخوارزميات. وهذا يزود التلاميذ بالمرونة المطلوبة لإجراء الحسابات الذهنية. ويستلزم هذا الأمر تشجيع العمل من اليسار إلى اليمين في إجراء الحسابات.

2- تشجيع التلاميذ على ابتكار استراتيجيات متنوعة ومختصرة تسهل عملية الحساب الذهني. وهذا يستدعي من المعلم أن يوضح للتلاميذ أنه ليس هناك طريقة واحدة لإجراء الحساب الذهني بل أن بإمكان كل تلميذ أن يبتكر طريقته الخاصة. كذلك فإنه من المفيد جداً أن يعرض التلاميذ ابتكاراتهم لزملائهم ويناقشون مزايا وعيوب كل ابتكار.

3- مساعدة التلاميذ على رؤية العلاقات والأنماط التي تسهل عملية الحساب الذهني. ومن أبسط الأمثلة على ذلك هو جمـــع عدد من (1 إلى 9) مع العدد 10:

واحد + عشرة = أحد عشر

خمسة + عشرة = خمسة عشر

تسعة + عشرة = تسعة عشر

4- خلق حاجة لاستخدام الحساب الذهني: ويتم ذلك من خلال الأنشطة الممتعة والألعاب التي تتطلب عمليات على الأعداد متعددة المنازل.

نشاط (3): صمم نشاطاً رياضياً ممتعاً (لعبة مثلاً) تستثير اهتمام التلاميذ وتشجعهم على استخدام الحساب الذهني.

الأنشطة وأسئلة التقويم

1- اذكر معاني الأعداد وبين استخدام كل منها.

2- وضح المقصود بالمصطلحات التالية:

أ- العد الشفهي .

ب- عد الكائنات.

ج- مبدأ الكم.

د- تكوين المجموعات.

ه- مقارنة الكميات.

و- مبدأ نفس الاسم العددي.

ز- مبدأ ترتيب الأعداد.

3- وضح دور العد في تطور مفهوم العدد. واقترح أنشطة تساعد في تطوير مفهوم العدد لدى الأطفال.

4- أعط مثالا على كل من مواقف الجمع التالية:

أ- الإضافة

ب- الضم

5- أعط مثالا على كل من مواقف الطرح التالية:

أ- الانتزاع

ب- المساواة

ج- المقارنة

6- كون خمس مسائل كلامية على الجمع والطرح متسقة مع معاني العمليتين.

7- أذكر 4 استراتيجيات حسية وأخرى مجردة يستخدمها الأطفال لحل مسائل الجمع والطرح وأعط مثالاً توضيحياً لكل منها.

8- اذكر خمسة معان لعملية الضرب وأعط مثالاً لكل منها

9- ما الأمور التي يجب أن يراعيها المعلم عند تعليم الضرب ؟

10- اقترح نشاطا لتقديم الخاصية الإبدالية لعملية الضرب وآخر لتقديم الخاصية التجميعية.

11- اذكر معاني القسمة وأعط مثالاً على كل منها.

12- هناك استراتيجيات يستخدمها الأطفال لحل مسائل القسمة التي تحمل معنى التوزيع وأخرى لحل تلك التي تحمل معنى القياس. ما تلك الاستراتيجيات؟ وضح استخدام هذه الاستراتيجيات بالأمثلة.

13- ما ميزات الحفظ ذي المعنى ؟ وما مراحل تطوره ؟

14- بين القاعدة التي يمكن استخدامها عند إجراء الحسابات التالية:

أ- 5 + 1

ب- 5 + 2

ج- 5 + 2 إذا علم أن 2 + 5 = 7

د- 5 + 5

ه- 4 + 6

و- 18 – 9

ز- 4 – 4

ح- 7 – 6

ط- 8 × 1

ي- 2 × 5

ك- 8 × صفر

ل- س- 6 × 8

م- ش - 9 × 5

15- ما الحس العددي؟ وما مواصفات البيئة الصفية الداعمة لتنمية الحس العددي لدى التلاميذ ؟

16- ما أهمية التقدير ؟ وكيف يجب أن يتم تدريسه؟

17- قدر ناتج 208 + 41

18- لماذا يستصعب التلاميذ إجراء الحسابات ذهنيا؟ وكيف يمكن مساعدتهم على تنمية مهارة الحساب الذهني ؟

مراجع الفصل

Ashlock, R.B. (1998). *Error patterns in computation* (7th ed.). Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall.

Ball, D.L. (1990). The mathematical understandings that prospective teachers bring to teacher education. *The Elementary School Journal, 90,* 449-446.

Baratta-Lorton, M. (1976) *Mathematics their way.* Menlo Park, CA: Addison-Wesley.

Baroody, A. J. (1987). *Children's mathematical thinking: A developmental framework for preschool, primary, and special education teachers.* New York: Teachers College Press.

Baroody, A. J. (1989). *A guide to teaching mathematics in the primary grades*. Boston: Allyn and Bacon.

Baroody, A. J. (1994). An evaluation of evidence supporting fact-retrieval models. *Learning and Individual Differences, 6*, 1-36.

Baroody, A. J. (1995). The role of the number-after rule in the invention of computational short cuts. *Cognition and Instruction, 13*, 189-219.

Brainerd, C. J. (1973). The origins of number concepts. *Scientific America*, March, 101-109.

Cathcart, W. G., Pothier, Y. M., Vance, J. H., & Bezuk, N. S. (2001). *Learning Mathematics in Elementary and Middle Schools* (2nd ed.). Ohio: Merrill Prentice Hall.

Flexer, R. J. (1986). The power of five: The step before the power of ten. *Arithmetic Teacher*, 34 (3), 5-9.

Fuson, K. C. (1988). *Children's counting and concepts of number.* New York: Springer-Verlag.

Fuson, K. C. (1992a). Research on learning and teaching addition and subtraction of whole numbers. In G. Leinhardt. R. T. Putnam. & R. A. Hattrup (Eds.), *The analysis of arithmetic for mathematics teachings* (pp. 53-187). Hilsdale, NJ: Erlbaum.

Fuson, K. C. (1992b). Research on whole number addition and subtraction. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics*

teaching and learning (pp. 243-275). New York: Macmillan.

Gelman, R., & Gallistel, C. (1978). *Young children's understanding of number*. Cambridge: Harvard University Press.

Ginsburg, H. P. (1989). Children's arithmetic (2nd ed.). Austin, TX: Pro-Ed.

Gundlach, B. H. (1989). The history of numbers and numerals. In *Historical topics for the mathematics classroom* (pp. 18-36). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Hope, J. A. (1986). Mental calculation: Anachronism or basic skill: In H. L. Schoen, & M. J. Zweng (Eds.), *Estimation and mental computation* (1986 Yearbook, pp. 45-54). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Howden, H. (1989). Teaching number sense. *Arithmetic Teacher*, 36 (6), 6-11.

Kouba, V. L., & Franklin, K. (1993). Multiplication and division: Senses making and meaning. In R.J. Jensen (Ed.), *Research ideas for the classroom: Early childhood mathematics* (pp. 103-126). New York: Macmillan.

National Council of Teacher of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School mathematics*. Reston, VA: Author.Piaget, J. (1965). The child's conception of number. New York: Norton.

Van de Walle, J. A. (2001). *Elementary and Middle School Mathematics: Teaching developmentally* (4th ed.). New York: Longman.

Van de Walle, J. A., & Watkins, K. B (1993). Early development of number sense. In R. J. Jensen (Ed.), *Research ideas for the classroom: Early childhood mathematics* (pp. 127-150). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

6

الفصل السادس

العمليات الحسابية على الأعداد متعددة المنازل

- المعايير المتعلقة بالأعداد والعمليات
- مفهوم التجميع
- مفهوم القيمة المنزلية
- تعليم الجمع والطرح
- تعليم الضرب
- تعليم القسمة
- الأعداد الصحيحة
- الأنشطة وأسئلة التقويم
- مراجع الفصل

الأهداف التربوية

بعد دراسة هذا الفصل، يتوقع من الطالب أن:

1- يناقش المعايير المتعلقة بالأعداد والعمليات.

2- يتعرف معاني العدد.

3- يوظف معاني العدد في التدريس.

4- يناقش كفايات العد لدى الأطفال.

5- يستخدم مفهوم المجموعة في تدريس المفاهيم العددية.

6- يستخدم المحسوسات في تعليم الأطفال العمليات على الأعداد الطبيعية.

7- يساعد تلاميذه على استخدام استراتيجيات التفكير المختلفة في العمليات الحسابية البسيطة.

8- يدرك أهمية تنمية الحس العددي لدى تلاميذه.

9- يشجع تلاميذه على استخدام التقدير في العمليات الحسابية.

10- ينمي مهارات الحساب الذهني لديه ولدى تلاميذه.

الفصل السادس
العمليات الحسابية
على الأعداد متعددة المنازل

المعايير المتعلقة بالأعداد والعمليات[1]

ما قبل الروضة – الثاني

يفهم الأعداد، وطرق تمثيلها والعلاقات فيما بينها، والأنظمة العددية.	– يستخدم نماذج متعددة لينمي فهما أوليا للقيمة المكانية ونظام العد العشري. – ينمي فهما للقيمة والموقع النسبيين للأعداد التامة، والأعداد الترتيبية والكمية وترابطاتها.
يفهم معاني العمليات وكيف ترتبط ببعضها البعض.	– يفهم المواقف التي تتطلب ضرباً أو قسمة، مثل التجمعات المتساوية كالأشياء والشراكة العادلة.
يحسب بطلاقة ويعمل تقديرات معقولة.	– ينمي ويستخدم استراتيجيات للحسابات على الأعداد التامة، مع التركيز على الجمع والطرح. – يستخدم طرقا متنوعة وأدوات للحساب، بما في ذلك الحسابات الذهنية، التقدير، الورقة والقلم، والآلات الحاسبة.

الثالث – الخامس

يفهم الأعداد، وطرق	– يفهم بناء القيمة المكانية لنظام العد العشري ويمثل ويقارن

(1) Reprinted with permission from [Principles and Standards for School Mathematics], copyright [2000] by the National Council of Teachers of Mathematics. All right reserved.

تمثيلها والعلاقات فيما بينها، والأنظمة العددية.	الأعداد التامة والعشرية. - يستكشف الأعداد التي تقل عن صفر وذلك عن طريق خط الأعداد ومن خلال التطبيقات المألوفة. - يصنف أنواع الأعداد تبعاً لخصائص مثل طبيعة عواملها.
يفهم معاني العمليات وكيف ترتبط ببعضها البعض.	- يفهم ويستخدم خصائص العمليات مثل توزيع الضرب على الجمع.
يحسب بطلاقة ويعمل تقديرات معقولة.	- يختار طرقا وأدوات ملائمة للحساب على الأعداد التامة، من ضمنها التقدير، الآلات الحاسبة، والورقة والقلم بناء على سياق وطبيعة الحسابات، ويستخدم الطريقة أو الأداة المختارة.

السادس - الثامن

يفهم الأعداد، وطرق تمثيلها والعلاقات فيما بينها، والأنظمة العددية.	- ينمي فهما للأعداد الكبيرة ويدرك ويستخدم الرموز الأسية والعلمية ورموز الآلات الحاسبة. - يستخدم العوامل والمضاعفات والتحليل إلى العوامل الأولية، والأعداد الأولية والنسبية لحل المشكلات. - ينمي معنى للأعداد الصحيحة ويمثل ويقارن الكميات باستخدامها.
يفهم معاني العمليات وكيف ترتبط ببعضها البعض.	- يفهم معنى وتأثير العمليات الحسابية على الكسور والأعداد العشرية والأعداد الصحيحة. - يستخدم الخواص التجميعية والابدالية للجمع والضرب وتوزيع الضرب على الجمع ليبسط الحسابات على الأعداد الصحيحة والكسور والأعداد العشرية. - يفهم ويستخدم العلاقة العكسية بين الجمع والطرح، الضرب والقسمة، التربيع وإيجاد الجذر التربيعي، لتبسيط الحسابات وحل المشكلات.

مفهوم التجميع Grouping

إن فهم الأطفال للأعداد مبني على العد وبالتالي فهم لا يفكرون في الأعداد من حيث أن بعضها مجمع (Grouped) وبعضها الآخر مفرد (Single). فهم مثلا ينظرون إلى 35 على أنها 35 وحدة وليس على أنها 3 مجموعات من 10 وخمس وحدات. ولكي ينجح الأطفال في فهم نظام الترقيم العشري والعمليات الحسابية على الأعداد متعددة المنازل، فلا بد وأن يكتشفوا أهمية تجميع الكميات في وحدات أكبر وأكبر. أي لا بد للأطفال أن ينمون فهماً جديداً للأعداد مبنيا على أساس مفهوم التجميع.

مفهوم القيمة المنزلية Place-Value

تعتبر القيمة المنزلية من أهم المفاهيم التي يحتاج طلبة المرحلة الابتدائية إلى فهمها وإتقانها، وتنبع أهمية هذا المفهوم من الحاجة إليه في فهم خوارزميات الجمع والطرح والضرب والقسمة، وكذلك في دراسة الكسور العشرية والنسبة المئوية. إن أي ضعف في فهم القيمة المنزلية سيؤدي حتما إلى ضعف في فهم عمليات مثل الترحيل في الجمع والاستلاف في الطرح.

في البداية فإن الأطفال لا يدركون أن الموقع الذي يكتب فيه الرقم يؤثر على قيمته. فهم مثلاً ينظرون إلى العدد 15 إما على أنه عددان كل منهما مكون من منزله واحدة، 5 و 1 أو على أنه كل متكامل (خمسة عشر). وبالطبع فان الأطفال بحاجة إلى أن يتعلموا أن كل خانة هي أكبر من الخانة التي على يمينها بعشرة أضعاف.

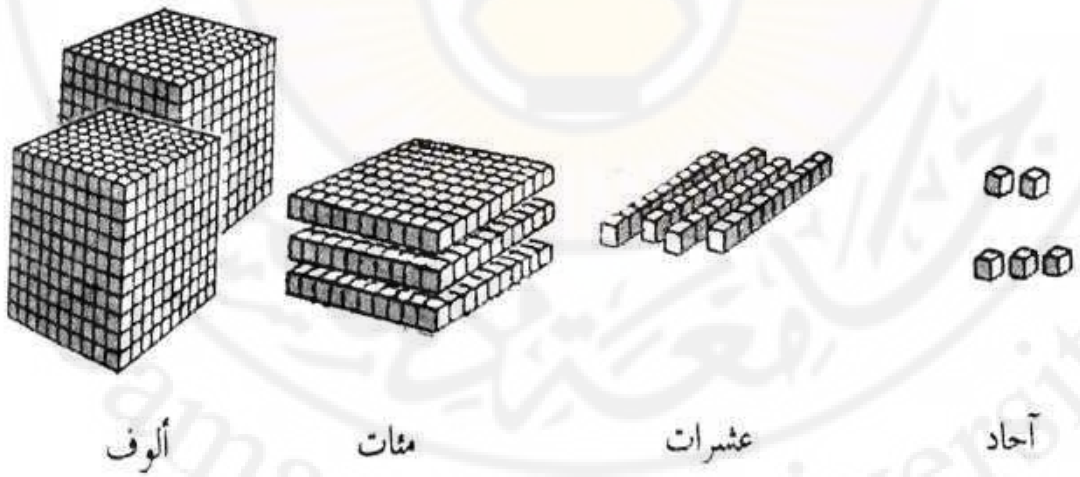
إرشادات في تعليم مفاهيم التجميع والقيمة المنزلية

(1) يجب تقديم مفاهيم التجميع والقيمة المنزلية من خلال ممارسات هادفة:
ويمكن أن يتم ذلك مثلاً من خلال تحديد وتسمية عدد كبير من الأشياء. في مثل هذه النشاط يشعر الأطفال بالحاجة إلى إيجاد طرق لتسهيل هذه المهمة مما يؤدي إلى نقاشات وابتكارات مختلفة. إن أي نشاط يتطلب عداً طويلاً سيؤدي إلى مثل هذه النتائج.

(2) الخبرة المبكرة مع النماذج المادية والصورية تساعد الأطفال على تكوين فهم عميق لمفهوم التجميع ومفهوم القيمة المنزلية:
إن تعلم هذين المفهومين يجب أن يبنى تدريجياً على المعرفة السابقة للأطفال. إن

توسيع نوعية نماذج الترقيم التي يتعامل معها الأطفال تساعد الأطفال على بناء فهم أكثر عمومية (أكثر تجريداً) لمفهومي التجميع والقيمة المنزلية. ورغم الفائدة الكبيرة لهذه النماذج إلا أن بعض الأطفال قد يحفظون الطرق المادية. ولذلك لابد من التنوع في استخدام المواد وتشجيع الأطفال على ابتكار استراتيجيات للتجميع وطرق لكتابة الأرقام متعددة المنازل. كذلك يمكن أن يذهب التدريس إلى أبعد من ذلك من خلال الطلب إلى الأطفال أن يقترحوا أنظمة ترقيم أخرى غير النظام العشري مما سينتج نقاشا غنيا حول مفهوم القيمة المنزلية ومفهوم التجميع كذلك فإنه يمكن أن يشكل أداة لتقويم فهم الطلبة لهذه المفاهيم.

(3) مساعدة الأطفال على ممارسة قراءة الأرقام متعددة المنازل وعلى تحديد قواعد لقراءتها: على سبيل المثال اطلب منهم تحديد قيمة كل خانة في عدد مكون من 3 منازل مثل 245 حيث 5 تمثل 5 وحدات، 4 تمثل 4 عشرات و 2 تمثل مائتين (انظر الشكل 6-1). لاحظ كذلك أن العدد 254 يقرأ مائتان وأربعة وخمسون أي أن خانة المئات قرئت أولاً، ثم خانة الآحاد ثم العشرات. كذلك وضح لهم أن الصفر لا يقرأ. فمثلا العدد 103 يقرأ مائة وثلاثة.



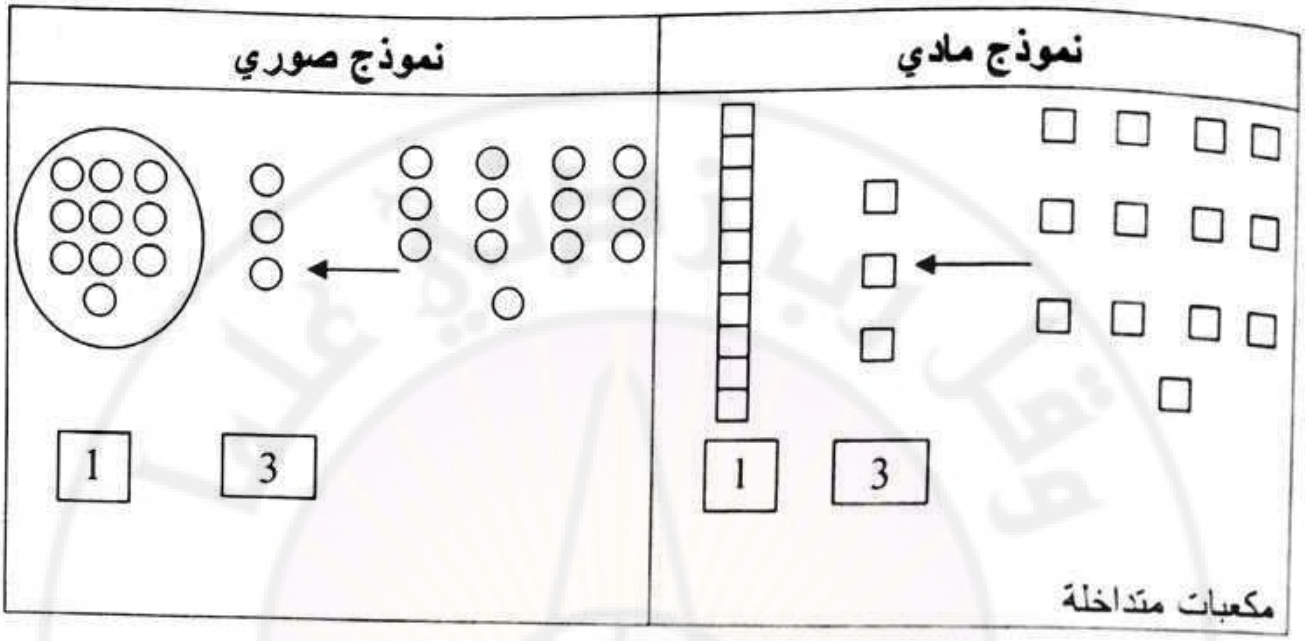
الشكل (6-1)

الانتقال التدريجي في تعليم مفهومي التجميع والقيمة المنزلية

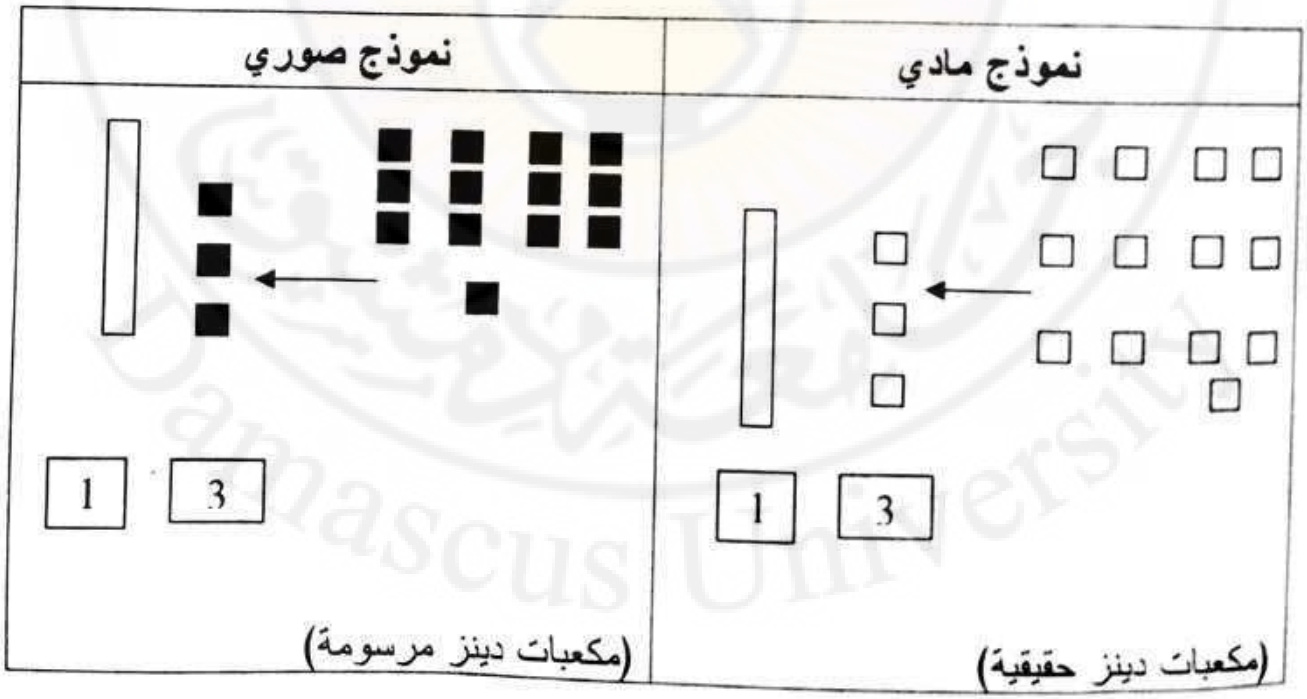
إن التدرج في تعليم مفهومي التجميع والقيمة المنزلية يتطلب استخدام نماذج متدرجة في التجريد. نعرض هنا أربعة نماذج تتدرج في تجريدها. الهدف من عرض هذه النماذج هو مساعدة المعلم على تكوين فهم واضح وصريح للفروق بين هذه النماذج

ولتمكينه من اختيار المناسب لطلابه في المراحل المختلفة.

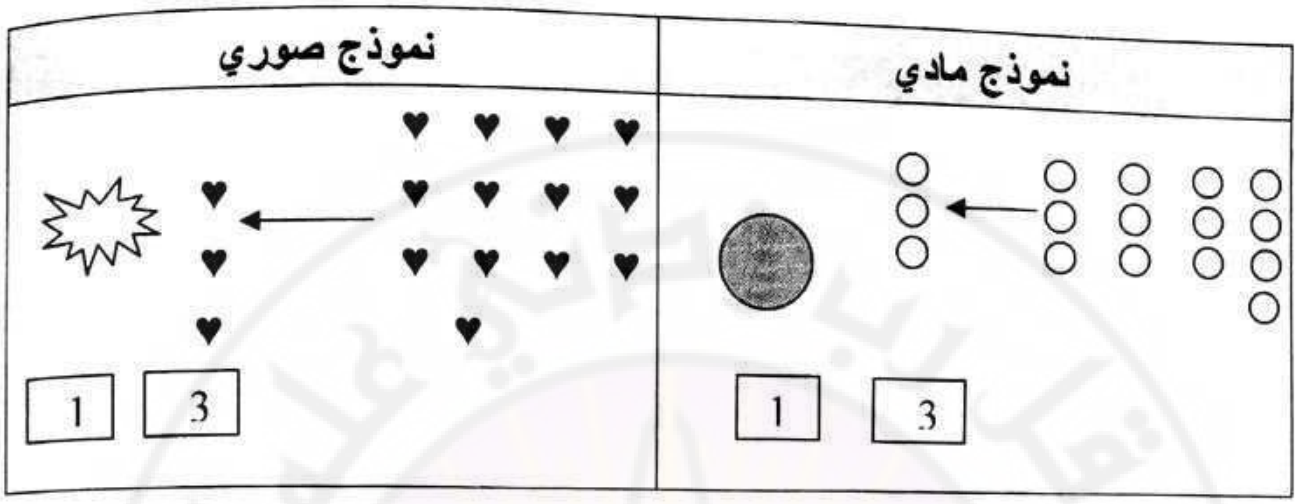
النموذج الأول: نموذج تناسبي يتطلب ضماً فعلياً (مادياً) لعشرة وحدات لتكوين عشرة.



النموذج الثاني: نموذج تناسبي يتضمن تبديل 10 وحدات بعشرة مكونة سابقاً.



النموذج الثالث: نموذج غير تناسبي يتضمن تبديل عشرة وحدات بعشرة لا يساوي حجمها عشر وحدات لكنها تختلف بالشكل عن الوحدات.



النموذج الرابع: نموذج غير تناسبي يتضمن تبديل عشر وحدات بوحدة واحدة تمثل العشرة من خلال موقعها.

تعليم الجمع والطرح

طالما أن الأطفال يتعاملون مع أعداد صغيرة فإن اعتمادهم على العدّ لإجراء عمليات الجمع والطرح يظل مقنعا. أما عندما يبدأون بالتعامل مع أعداد كبيرة فان عملية العد تصبح مضيعة للوقت ويصبحوا بحاجة إلى أن يتعلموا طرقا أكثر فاعليه لإجراء هذه العمليات.

في الطرق التقليدية لتدريس الرياضيات فإن المعلمين يبدأون بتعليم الأطفال خوارزميات الجمع والطرح قبل إعطائهم الفرصة لتكوين فهم معقول لمفهوم القيمة المنزلية. ولذلك فان نسبة كبيرة من الأطفال يعانون من صعوبات في فهم الترحيل والاستلاف. أما إذا أعطى الأطفال الفرصة فإن بمكانهم أن يبتكروا طرقا مادية لحل المسائل على الأعداد متعددة المنازل وأن يعبروا عن ذلك بالكتابة. فعلى سبيل المثال فإن الأطفال الذين يتعلمون بطريقة ذات معنى كيف يجمعون ويطرحون بدون ترحيل أو استلاف يمكنهم أن يطوروا بأنفسهم طرقا لمسائل الجمع والطرح التي تحتاج إلى ترحيل أو استلاف. انظر الطريقتين التاليتين المبتكرتين من قبل طفلين.

الطريقة الأولى	45 37+ 12 70 82	• اجمع من اليمين إلى اليسار • دوّن المجاميع الجزئية • اجمع المجاميع الجزئية
الطريقة الثانية	45 37+ 7 82	• اجمع العشرات وسجل 7 • اجمع الآحاد تحصل على 12، ضع 2 في خانة الآحاد وعدل خانة العشرات لتصبح 8 بدلا من 7

إن تعليم جمع وطرح الأعداد متعددة المنازل يجب أن يمر في المراحل التالية:

أولاً: المرحلة المفاهيمية:

يجب أن يعطى الأطفال – وفي مرحلة مبكرة جداً – فرصاً لحل مسائل جمع وطرح الأعداد متعدد ة المنازل باستخدام المواد المحسوسة والصور. حيث يساعدهم هذا على بناء أساس مفاهيمي لابتكار وفهم الخوارزميات المكتوبة فيما بعد.

(1) استخدم نماذج إعادة تسمية (ترحيل) مادية وصورية ووفر للأطفال فرصاً لحل مسائل جمع وطرح على أعداد متعددة المنازل وشجعهم على ابتكار طرق لحل هذه المسائل. اعتبر اللعبة التالية على سبيل المثال:

اسم اللعبة: الفرق بين حجري النرد

عدد اللاعبين: اثنان أو فريقان

المواد: أحجار نرد بعشرة أوجه مرقمة من صفر إلى 9.

طريقة اللعب:

يرمي كل لاعب حجرين ليحصل على رقمين ويرتبهما ليكوّن أكبر رقم ممكن من خانتين. اللاعب الذي يكون رقماً أكبر يفوز بالجولة (لاحظ أن هذه اللعبة تتضمن تطبيق مفهوم القيمة المنزلية والمعرفة بترتيب الأعداد). يكافأ الفائز بعدد من النقاط مساو للفرق بين رقمه ورقم اللاعب الخصم. لاحظ أن اللعبة توفر فرصة مراجعة معنى "الفرق " في الطرح وكذلك فإنها تبرز مشكلة طرح عددين متعددي المنازل، مما يقود الصف إلى مناقشة لتحديد الفرق بين العددين. وهنا يأتي دور المعلم في تشجيع الأطفال على استخدام معلوماتهم السابقة لتحديد استراتيجية لحل المشكلة. يمكن أن يقترح المعلم على الأطفال أن يفكروا بالمكعبات المتداخلة مثلا أو مكعبات دينز. وبعدها يمكن للمعلم أن يشجع الأطفال على كتابة خوارزمية كمختصر للطريقة المادية التي استخدموها.

يمكن أن تستمر اللعبة حتى يحقق أحد اللاعبين أو أحد الفريقين 100 نقطة مثلاً.

(2) إن تعليم جمع وطرح الأعداد متعددة المنازل يجب أن يقدم بالتزامن مع تعليم الأساس العشري والقيمة المنزلية.

يمكن أن تستخدم نفس النماذج التي ذكرت سابقا لتعليم الأساس 10 والقيمة المنزلية لنمذجة خوارزميات إعادة التسمية (الترحيل) للجمع والطرح. ان مثل هذه النماذج تساعد الأطفال على رؤية أن الوحدات المتشابهة فقط يمكن جمعها، فالعشرات تجمع مع العشرات فقط والمئات مع المئات وهكذا. و مجرد أن يألف الأطفال نماذج التبديل التصاعدي (الترحيل) يمكن أن يستخدموا فهمهم لها لابتكار نماذج للتبديل التنازلي (الاستلاف) لحل مسائل الطرح بالاستلاف.

ثانياً: مرحلة الربط:

تمثل هذه المرحلة انتقالاً من المرحلة المفاهيمية إلى المرحلة الرمزية. الجمع والطرح الرمزيان يمكن أن يتم تعلمهما بعد أن يكون الأطفال قد بنوا فهماً للأساس عشرة والقيمة المنزلية وبعد أن يكونوا قادرين على إجراء الجمع والطرح الحسي (باستخدام المحسوسات) بكفاءة.

(1) شجع الأطفال على استخدام معرفتهم بالنماذج المادية والصورية لابتكار ومشاركة وتنقيح خوارزمياتهم المكتوبة لجمع وطرح الأعداد متعددة المنازل:

شجع الأطفال على أن يفكروا بتمثيل كل خطوة في النماذج المادية والصورية عن طريق الرموز. من خلال الجمع بواسطة مكعبات دينز قد يستنتج الأطفال بأنفسهم أن الآحاد يجب أن تضاف إلى الآحاد والعشرات إلى العشرات وهكذا. كذلك فانهم قد يستنتجوا أن أي مجموع أكبر من 9 يتطلب تبديل عشرة بواحد.

(2) ساعد الأطفال على إعادة اكتشاف الخوارزميات الرسمية ليروا الربط بين كل خطوة في هذه الخوارزميات المكتوبة وكل خطوة في النماذج المادية والصورية: عندما يشجع المعلم الأطفال على ترجمة النماذج المادية والصورية إلى طرق مكتوبة فان بعضهم سيكتشف خوارزمية الترحيل الرسمية. وهناك طريقة أخرى لتقديم الخوارزمية الرسمية وتتمثل في عرضها للأطفال مع طرق صحيحة وأخرى خاطئة لتحليلها وتقييمها, كما يلي:

* تقديم الخوارزمية الرسمية من خلال عرضها مع خوارزميات خاطئة:(الثاني الابتدائي)

أربعة أطفال هم خالد، عمر، أحمد، وعلي. طلب منهم إيجاد ناتج جمع العددين 115, 28 وكانت حلولهم كما يلي:

خالد	عمر	أحمد	علي
115	115	115	115
+ 28	+ 28	+ 28	+ 28
133	143	1313	395

أي الإجابات صحيحة؟ استخدم طريقتك الخاصة لإيجاد الناتج. اشرح كيف توصل الطفل إلى الإجابة الصحيحة. اشرح لماذا توصل الأطفال الثلاثة الآخرون إلى إجابات خاطئة.

(3) شجع الأطفال على مقارنة نتائج الخوارزميات المكتوبة مع نتائج النماذج المادية والصورية:

تكتسب هذه المقارنة أهمية خاصة عندما يتعلم الأطفال طريقة رسمية لأول مرة أو عندما يرتكبون خطأ بمقارنة نتائج مع تلك الناتجة عن طريقة موثوق بها، يستطيع الأطفال بأنفسهم أن يحكموا على ما إذا كانوا استخدموا الطريقة بشكل صحيح. كذلك فان الصراع الإدراكي(Cognitive conflict) الذي يسببه عدم التطابق بين الإجابات يدفع الأطفال إلى محاولة إيجاد الخطأ وتصحيح الطريقة المكتوبة بأنفسهم. تأمل النشاط التالي.

نشاط (1): خلق صراع إدراكي لتشجيع التصحيح الذاتي

لنستخدم الخطأ المبين في عملية جمع 48 + 7 كمثال على الطرق الممكن استخدامها لتشجيع تصحيح الأخطاء ذاتياً.

$$\begin{array}{r} 48 \\ 7+ \\ \hline 415 \end{array}$$

الطريقة (1): العـد

اطلب من الطفل أن يستخدم طريقة العد مبتدئا بالعدد 48، (48، 49، 50، 51، 52، 53، 54، 55)، أو أن يستخدم نموذجا مادياً أو صورياً.

الطريقة (2): التقدير

اسأل الطفل: إذا كان لديك 48 درهماً وأعطاك أبوك 7 دراهم. فكم يصبح معك تقريباً ؟ هل يصبح لديك 415 ؟ فكر في ذلك.

الطريقة (3): المقارنة مع مسألة أخرى يستطيع الطفل حلها بنفس الخوارزمية.

$$\begin{array}{r} 48 \\ 7+ \\ \hline \mathbf{415} \end{array} \qquad \left\{ \begin{array}{r} 50 \\ 7+ \\ \hline \mathbf{57} \end{array} \right. \quad \text{هذه المسألة لا تحتاج إلى ترحيل}$$

ومن خلال معرفة الطفل لحقيقة أن 50 أكبر من 48 فإنه سيدرك أن (48 + 7) يجب أن تكون أقل من (50 + 7).

الطريقة (4): استخدام الآلة الحاسبة

اطلب من الطفل أن يستخدم الآلة الحاسبة لتحديد الإجابة. ولأن الآلة الحاسبة مصدر موثوق بالنسبة للطفل فإنه سيدرك خطأه عندما يجد أنها أعطته إجابة مختلفة تماماً.

ثالثاً: المرحلة الرمزية:

في هذه المرحلة، يجب أن يعتمد الأطفال كليا على استخدام الرموز في إجراء عمليات الجمع والطرح على الأعداد متعددة المنازل وأن لا يشعروا بالحاجة أبدا لاستخدام مساعدات مادية أو صورية.

تعليم الضـــرب

كما هو الحال في عمليتي الجمع والطرح فإن تعليم عملية الضرب يجب أن تمر في ثلاث مراحل هي المرحلة المفاهيمية ومرحلة الربط والمرحلة الرمزية.

أولاً: المرحلة المفاهيمية

في هذه المرحلة يجب أن يمارس الأطفال حل مسائل الضرب عن طريق المواد المحسوسة والرسومات والاستدلال. وتعتبر مكعبات دينز من أكثر الوسائل فاعلية في مساعدة الأطفال على ابتكار طرقهم الخاصة في حل المسائل باستخدام معنى المجموعات المتكافئة ومعنى المساحة. تأمل الأنشطة التالية:

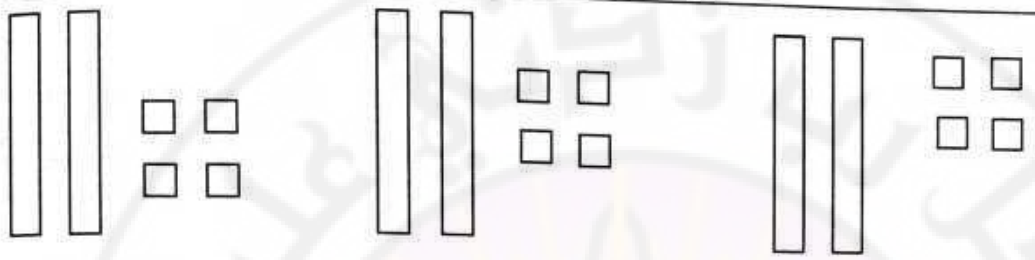
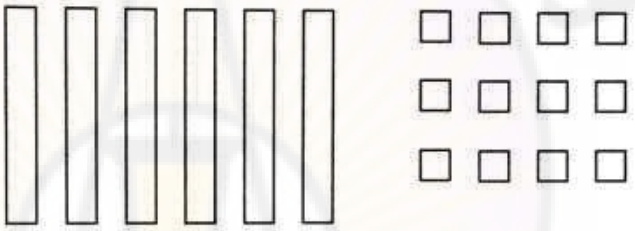
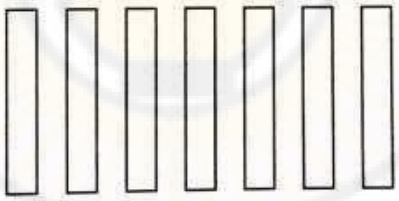
1) استخدام معنى "المجموعات المتكافئة"

نشاط (2):

مسألة: اشترت ليلى 3 علب ألوان تحتوى كل علبة على 24 قلم ألوان. فكم قلم ألوان لدى ليلى ؟

(أ) أوجد حلاً للمسألة باستخدام أي طريقة ترغب فيها.

(ب) كيف يمكن أن تستخدم مكعبات دينز لحل المسألة ؟

1	 تكوين 3 مجموعات تحتوي كل منها على 24.
2	 ضم الآحاد في مجموعة واحدة, والعشرات في مجموعة واحدة.
3	 استبدال 10 آحاد بقطعة طويلة واحدة (عشرة).

2) استخدام معنى المساحة:

جـرّب:

أ- كيف يمكن أن تستخدم مكعبات دينز لنمذجة معنى المساحة في المسألة 24×13 ؟

ب- قارن نموذج المساحة بطريقة حواصل الضرب الجزئية المبينة جانباً.

ج- ما أوجه التشابه بين عناصر نموذج المساحة وطريقة المجاميع الجزئية؟.

$$\begin{array}{r} 24 \\ \times\ 13 \\ \hline 12 \\ 60 \\ 40 \\ \mathbf{200} \\ \hline 312 \end{array}$$

ثانياً: مرحلة الربط

وهنا يجب أن يتم العمل في 3 محاور:

1- مساعدة التلاميذ على إدراك أن مسائل الضرب الرمزية يمكن ربطها بمعنى المجموعات المتكافئة أو المساحة.

نشاط (3):

حل المسائل التالية باستخدام معنى المجموعات المتكافئة أو معنى المساحة:

26	105	276	65
× 3	× 4	× 2	× 37

2- تشجيع التلاميذ على استخدام الطرق غير الشكلية كطريقة حواصل الضرب الجزئية.

طريقة حواصل الضرب الجزئية:

تأمل الطريقة التالية التي يستخدمها بعض الأطفال لحل المسألة 46 × 25 ثم استخدمها لحل المسألة 72 × 38.

46 × 25 **30** 200 120 800 1150	(1) 5 مجموعات من 6 تساوي 30 (2) 5 مجموعات من 40 تساوي 200 (3) 20 مجموعة من 6 تساوي 120 (4) 20 مجموعة من 40 تساوي 800

3- اكتشاف المختصرات:

استخدم الآلة الحاسبة لحل المسائل التالية:

7	32	145	7825	9567823
× 100	× 100	× 100	× 100	× 100

هل تلاحظ أي طرق مختصرة للضرب في 100 ؟

هل يمكن أن تجد طريقة مختصرة للضرب في 10 ؟

هل يمكن أن تجد طريقة مختصرة للضرب في 1000 ؟

هل يمكن أن تجد طريقة مختصرة للضرب في 200، 300، 400، 500 ؟

ثالثاً: المرحلة الرمزية (تعليم الخوارزمية الشكلية)

عادة، تدرس الخوارزمية الشكلية بالطريقة التالية:

مثال (1): 325 × 132

325 132× **650** 975 325 42900	(1) أبدأ بضرب خانة الآحاد في العدد السفلي (2) بكل من خانات العدد العلوي وضع الناتج في السطر الأول تحت الخط مباشرة. (2) انتقل إلى خانة العشرات (3) وكرر الخطوة (1) وضع الناتج في السطر الثاني تاركا خانة الآحاد فارغة. (3) انتقل إلى خانة المئات (1) وكرر ما فعلته في الخطوتين (1 ، 2) وضع الناتج في السطر الثالث تاركا خانتي الآحاد والعشرات فارغتين. (4) اجمع الأعداد في السطور الثلاثة.

لاحظ أن مثل هذا الأسلوب في تعليم الخوارزمية لا يعطي الطالب فرصة لفهم آلياتها. فهي بالنسبة له مجرد آلية صماء يطبقها دون فهم. ولهذا نجد أن كثيراً من الطلبة ينسون عملية ترك خانات فارغة عند ترتيب حواصل الضرب الجزئية تحت بعضها البعض. انظر المثال التالي:

مثال (2):

325
132 ×
650
975
325
1950

يحاول بعض المعلمين أن يتلافوا هذه المشكلة بأن يطلبوا من طلبتهم أن يضعوا أصفاراً في الأماكن الفارغة ولكن هذا لا يحل مشكلة كثير من الأطفال. بل أن بعضهم يتساءل: ألا يغير وضع الأصفار إلى اليمين من قيمة الأعداد ؟ والبعض الآخر من المعلمين يرتب الأرقام في أعمدة منفصلة ليتلافى المشكلة كما في المثال التالي:

		3	2	5	
		1	3	2	×
		6	5	0	
	9	7	5		
3	2	**5**			
4	2	9	0	0	

إلاّ أن هذه الطريقة أيضا لا تحل اللغز ولا تجيب على تساؤلات الأطفال: لماذا إزاحة الأرقام إلى اليسار ؟ كيف تجيب على تساؤلات الأطفال ؟

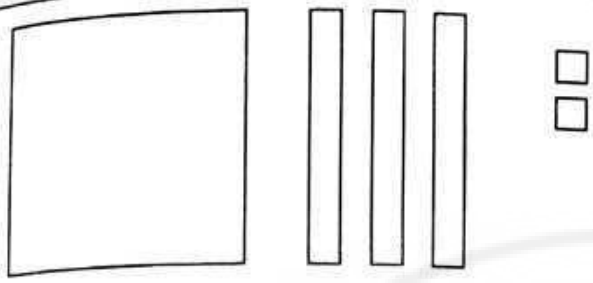
الواقع أن الخبرة في استخدام قطع دينيز في إجراء عمليات الضرب تسهل كثيرا مهمة التلاميذ في تنفيذ الخوارزمية العمودية للجمع. ويعود ذلك إلى أن هذه الخوارزمية هي ترجمة مباشرة لخطوات إجراء عملية الضرب عن طريق قطع دينيز. المثال التالي يبين الترابط الوثيق بين الطريقتين.

مثال (3):

أوجد ناتج 325×132 باستخدام الخوارزمية العمودية وقطع دينيز, مبينا الترابط بين الطريقتين.

أحد الحلول الممكنة:

نرسم جدولا مكونا من عمودين ونجري الخوارزمية في أحدهما ونوضح ما يقابل كل خطوة باستخدام قطع دينيز في العمود الآخر.

الخوارزمية	مكعبات دينز
325 132 × ———	 باستخدام معنى المجموعات المتكافئة, فان 325 × 132 تعني وجود 325 مجموعة تحوي كل منها 132 عنصراً. الرسم أعلاه يمثل مجموعة واحدة.
325 **132** × 650	عدد قطع الوحدة = 325 2 × 650
325 **132** × 650 9750	عدد العشرات = 325 3 × 975 لكن 975 عشرة = 9750 وحدة.
325 **132** × 650 9750 32500	عدد المئات = 325 1 × 325 لكن 325 مائة = 32500 وحدة.
325 **132** × **650** 9750 32500 42900	إجمع كافة الوحدات 650 9750 32500 **42900**

تعليم القسمة

تمر عملية تعليم القسمة بنفس مراحل تعليم العمليات الأخرى: المرحلة المفاهيمية، مرحلة الربط والمرحلة الرمزية.

أولاً: المرحلة المفاهيمية

وفي هذه المرحلة يتم تشجيع التلاميذ على استخدام معاني التوزيع والقياس والمساحة لحل مسائل القسمة عن طريق المواد المحسوسة.

1) استخدام معنى التوزيع

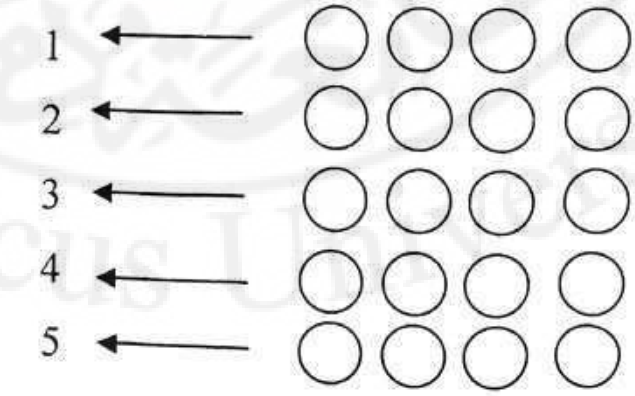
مسألة (1): يشترك 5 تلاميذ بعشرين كرة. فما نصيب كل تلميذ من هذه الكرات ؟

لحل هذه المسألة، يقوم التلاميذ بعد 20 كرة ووضعها جانباً ومن ثم توزيعها إلى 5 مجموعات وذلك بتعيين كرة واحدة لكل مجموعة بالترتيب حتى الانتهاء من الكرات العشرين.

2) استخدام معنى القياس

مسألة (2): يراد توزيع 20 كرة على عدد من التلاميذ بحيث يحصل كل واحد منهم على 4 كرات. فكم تلميذ سيحصل على كرات ؟

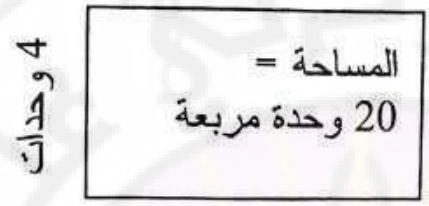
ولحل هذه المسألة يقوم التلاميذ بتجزئة المجموعة الكلية من الكرات إلى مجموعات جزئية يحتوي كل منها على 4 كرات، ثم يقومون بعد هذه المجموعات.



إذن الناتج = 5

3) استخدام معنى المساحة

كما هو الحال في عملية الضرب، فإنه بالإمكان استخدام نماذج المساحة لحل مسائل القسمة. فالمسألة (20 ÷ 4) مثلاً يمكن نمذجتها عن طريق منطقة مستطيلة مساحتها 20 وحدة مربعة وطولها 4 وحدات. ويكون المطلوب في هذه الحالة إيجاد عرض هذه المنطقة المستطيلة.

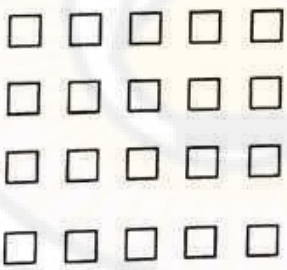


كم طول هذا الضلع ؟

وبالطبع، فإن بإمكان التلاميذ استخدام قطع دينز لحل مثل هذه المسألة.

أ- احضر 20 مكعبا صغيراً

ب- رتب هذه المكعبات على شكل منطقة مستطيلة طولها 4 وحدات



ج- قم بعد المكعبات المكونة للضلع الآخر للمستطيل.

إضافة إلى ذلك, فإنه يمكن استخدام خط الأعداد للقيام بنفس المهمة. *حاول القيام بذلك.*

ثانياً: مرحلة الربط

وفي هذه المرحلة يجب تشجيع التلاميذ على التعبير عن نماذجهم وطرقهم الخاصة بالرموز وبالعكس. فنموذج المساحة المذكور أعلاه مثلاً يمكن التعبير عنه بكتابة:

$20 \div 4 = 5$

كذلك فإن هذا التعبير يمكن أن يترجم إلى نموذج مساحة. إضافة إلى ذلك، فيجب أن

يتم مساعدة التلاميذ في هذه المرحلة على ابتكار طرق كتابية لحل مسائل القسمة، وقد يساعدهم هذا على اكتشاف خوارزمية القسمة المطولة.

ثالثاً: المرحلة الرمزية (تعليم خوارزمية القسمة الطويلة)

وأخيراً لابد من تقديم الخوارزمية الشكلية للقسمة للتلاميذ كطريقة أكثر فاعلية لإجراء عمليات القسمة. ويمكن البدء بالخوارزمية الطرحية (Subtractive Algorithm) والموضحة بالمثال التالي:

مثال (4): أوجد ناتج قسمة 126 على 3

3	126	
	90	30
	36	
	30	10
	06	
	6	2
	0	

أ- نختار عدداً إذا ضرب في 3 يكون الناتج أقل أو يساوي 126ولنختار العدد 30.

ب- نضرب 30 في 3 فيكون الناتج 90.

ج- نطرح 90 من 126 فيكون الناتج 36.

د- نختار عدداً إذا ضرب في 3، يكون الناتج أقل من أو يساوي 36 وليكن العدد 10.

هـ- نكمل العملية كالسابق حتى يكون الناتج صفراً أو عدداً أقل من 3 (الباقي).

و- اجمع النواتج فتكون الإجابة 42.

وأخيراً يتم تقديم الخوارزمية التوزيعية (Distributive Algorithm) ولتسهيل تعلمها، فإنه يجب ربط كل خطوة فيها بما يقابلها في حالة استخدام قطع دينز لإجراء القسمة.

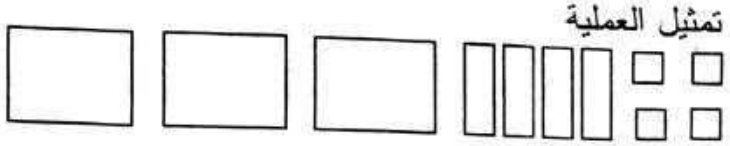
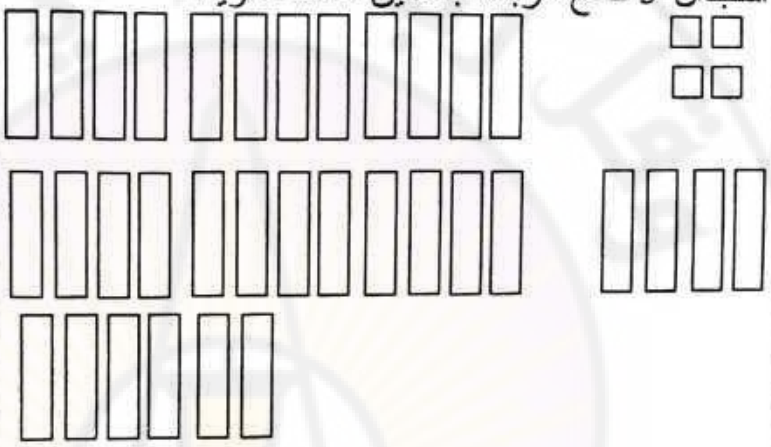
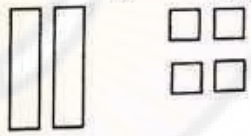
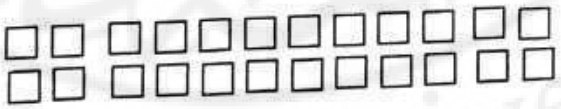
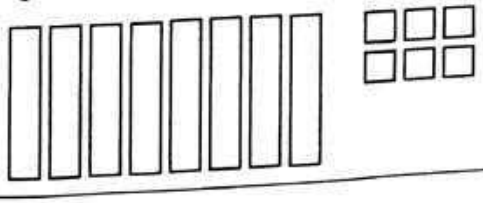
نشاط (4):

أوجد ناتج قسمة 344 على 4 مستخدماً:

1- قطع دينز

2- الخوارزمية التوزيعية

مبينا التماثل بين الخطوات في الطريقتين.

القسمة باستخدام قطع دينز	الخوارزمية التوزيعية
تمثيل العملية  مطلوب توزيعها إلى 4 مجموعات	؟ 4 ⟌ 344
لا يمكن قسمة 3 قطع مربعة على 4	؟ 4 ⟌ 344
استبدال 3 قطع مربعة بثلاثين قطعة طويلة 	؟ 4 ⟌ 344
توزيع 34 قطعة طويلة على 4 تحصل كل مجموعة على 8 قطع ويتبقى قطعتان. 	8 4 ⟌ 344 32 02
لا يمكن توزيع قطعتين طوليتين على 4 مجموعات	↓
استبدال القطعتين الطوليتين بعشرين وحدة (مكعبات صغيرة). 	8 4 ⟌ 344 32 024
توزيع 24 قطعة على 4 مجموعات. تحصل كل مجموعة على 6 قطع بدون باق. فيكون الناتج الكلي: 	86 4 ⟌ 344 32 024 24 00

الأعداد الصحيحة

عادة ما يتم تأخير تدريس الأعداد الصحيحة إلى الصف السادس أو السابع، والواقع أن التلاميذ لا يواجهون مشكلة كبيرة في إجراء العمليات الحسابية على الأعداد الصحيحة حيث أن قواعد تلك العمليات ليست صعبة إذا ما قورنت بالعمليات على الكسور العادية والعشرية على سبيل المثال. إلا أن المشكلة تكمن في توضيح لماذا و كيف تعمل هذه القواعد. وهنا يأتي دور المعلم في مساعدة تلاميذه في فهم معاني العمليات المختلفة على الأعداد الصحيحة ووضعها في سياق حياتي مفهوم.

تقديم الأعداد الصحيحة

عند تقديم الأعداد الصحيحة، يجب أن يستخدم المعلم مواقف تتطلب أعداداً تعبر عن قيم واتجاهات (Magnitude and direction) ومن ذلك على سبيل المثال درجات الحرارة حيث يمكن أن تكون فوق الصفر أو تحت الصفر. كذلك فالميزانيات هي مثال آخر، حيث يمكن اعتبار الدين قيمة سالبة يمكن أن يستخدم مفهوما الربح والخسارة أيضاً لنفس الغرض. كما يعتبر خط الأعداد وسيلة لتقديم مفهوم العدد السالب، حيث أن مد خط الأعداد إلى يسار الصفر يقود إلى التفكير بأعداد أقل من الصفر. ويكتسب خط الأعداد أهمية خاصة في توضيح ترتيب الأعداد الصحيحة (Ordering) حيث أن أي عدد على خط الأعداد هو أكبر من ذلك الواقع إلى يساره.

كذلك، فإنه يمكن تقديم مفهوم العد السالب من خلال بعض الألعاب الممتعة. انظر على سبيل المثال اللعبة التالية.

لعبة "حيوان أم نبات"

- بطاقات عليها أرقام من 1 ــ 5 مع صورة على كل بطاقة.
- إذا حصل اللاعب على رقم مع صورة حيوان يضاف له نقاط بمقدار الرقم.
- إذا حصل اللاعب على رقم مع صورة نبات، يخسر نقاط بمقدار ذلك الرقم.

لاحظ أن هذه اللعبة تخلق حاجة إلى إيجاد طريقة لتمثيل الأرقام التي تأتي مع صور النباتات وهنا يكون تقديم الأعداد السالبة ملائماً.

جمع الأعداد الصحيحة

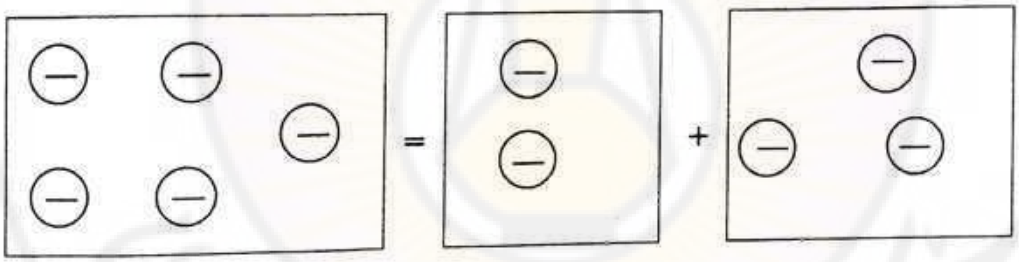
هناك نموذجان مشهوران يستخدمان في جمع الأعداد الصحيحة وهما نموذج الشحنات الكهربائية (Grady, 1978) وخط الأعداد. ولكن قبل استخدام أي من النموذجين مع التلاميذ يجب أن يعطوا الفرصة لاستخدام استراتيجياتهم الخاصة في حل مسائل الجمع على الأعداد الصحيحة.

نموذج الشحنات الكهربائية

عند استخدام نموذج الشحنات الكهربائية يمكن استخدام المواد المحسوسة أو الصور. بالنسبة للمواد المحسوسة يمكن استخدام دوائر بلاستيكية بلونين مختلفين حيث يمكن للأحمر مثلا أن يمثل الشحنة الموجبة والأخضر يمثل الشحنة السالبة. أما عند استخدام الصور (الرسومات) فيمكن التعبير عن الشحنة الموجبة بدائرة صغير وبداخلها إشارة (+) وعن الشحنة السالبة دائرة صغيرة وبداخلها إشارة (−). تأمل الأمثلة التالية:

(1) جمع عددين سالبين

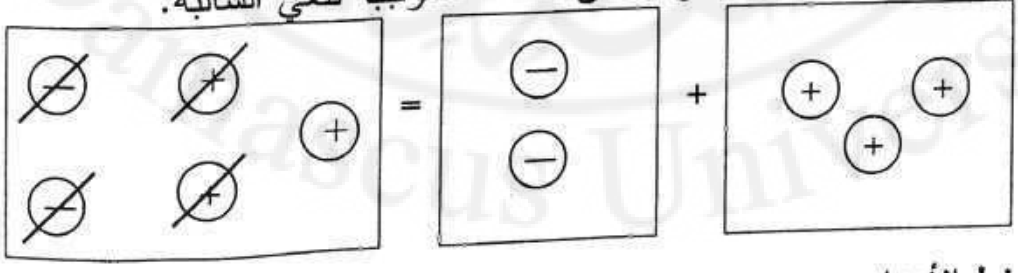
$-3 + -2 = ?$



(2) جمع عدد موجب مع عدد سالب

$3 + -2 = ?$

في هذه الحالة, لا بد من مراعاة أن الشحنة الموجبة تلغي السالبة.



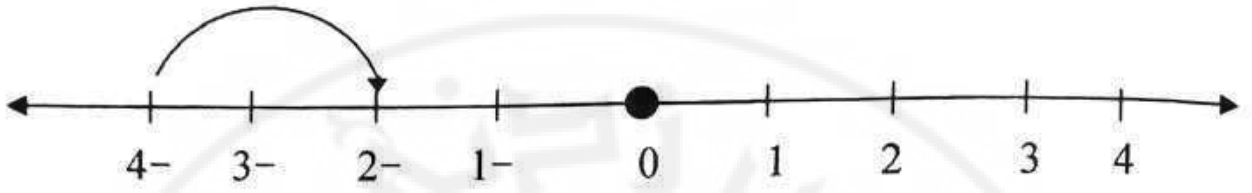
نموذج خط الأعداد

عند استخدام خط الأعداد لإجراء عملية الجمع على الأعداد الصحيحة فإنه يتم البدء في العدد الأول في عملية الجمع ومن ثم الحركة بعدد من الوحدات مساوياً لقيمة العدد

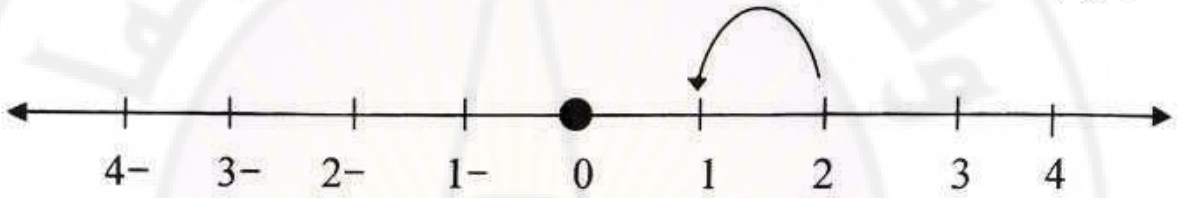
الثاني. أما بالنسبة لاتجاه الحركة فيتحدد بإشارة العدد الثاني. فإذا كان العدد الثاني موجبا تكون الحركة باتجاه اليمين، أما إذا كان سالبا فتكون الحركة باتجاه اليسار.

الأمثلة التالية توضح ذلك:

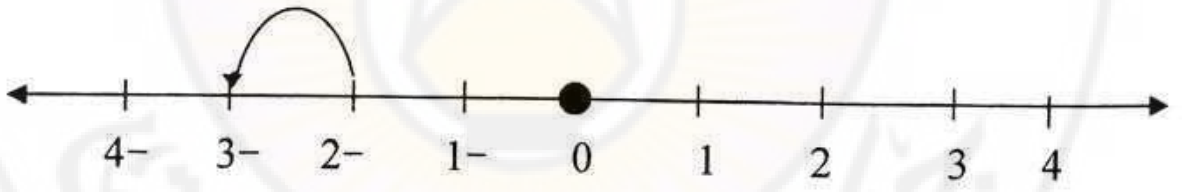
مثال (5): $-4 + 2 = ?$



مثال (6): $2 + -1 = ?$



مثال (7): $-2 + -1$



تجدر الإشارة إلى أنه بعد قدر كاف من الممارسة، فإن التلاميذ وبتوجيه من المعلم يستطيعون اكتشاف القواعد التي تحكم عملية الجمع على الأعداد الصحيحة سواء موجبة أو سالبة. ولذلك فإنه على المعلم أن لا يتسرع ويعطي تلك القواعد جاهزة للتلاميذ.

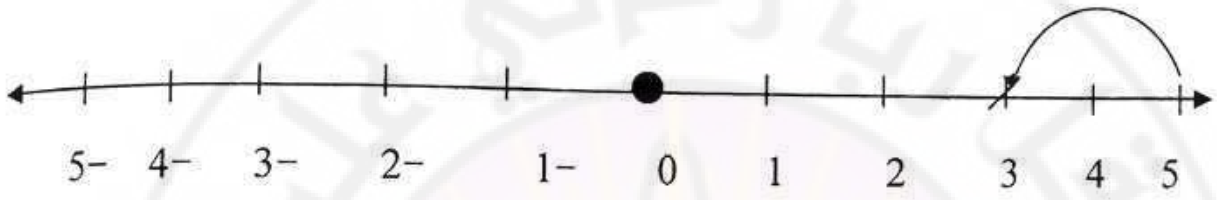
طرح الأعداد الصحيحة

كما هو الحال في حالة الجمع، فإنه يمكن استخدام نموذجي الشحنات الكهربائية وخط الأعداد لمساعدة التلاميذ على اكتشاف قواعد الطرح على الأعداد الصحيحة. إضافة إلى ذلك فإنه يمكن استخدام نموذج الأنماط العددية. وستتطرق فيما يلي لهذه النماذج الثلاثة.

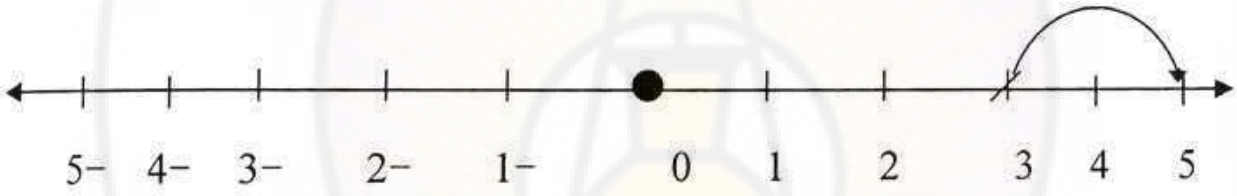
خط الأعداد

إن استخدام خط الأعداد في الطرح مشابه لاستخدامه في الجمع سوى أن قواعد الحركة تكون معكوسة هنا. أولاً يتم البدء من المطروح منه ومن ثم الحركة باتجاه اليمين إذا كان العدد المطروح سالباً وباتجاه اليسار إذا كان المطروح موجبا. الأمثلة التالية توضح ذلك.

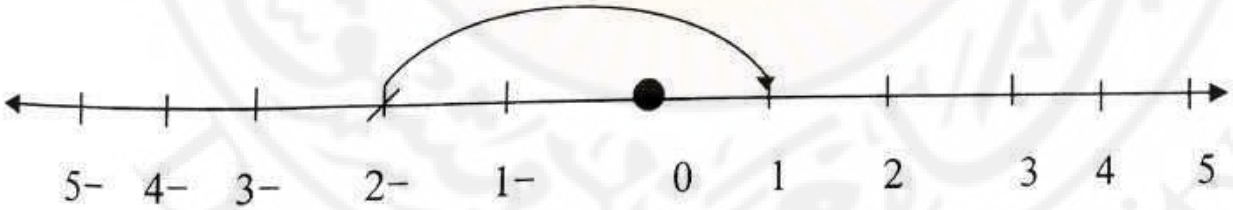
مثال (8): $5 - 2 = ؟$



مثال (9): $3 - -2 = ؟$



مثال (10) $-2 - -3 = ؟$



نموذج الأنماط العددية:

ويقوم هذا النموذج على تشجيع التلاميذ على التفكير بالأنماط العددية ومن ثم اشتقاق قواعد الطرح. تأمل الأمثلة التالية:

أ	ب
4 – 3 = 1	4 – 2 = 2
4 – 4 = صفر	4 – 1 = 3
4 – 5 = ☐	4 – صفر = 4
4 – 6 = ☐	4 – -1 = ☐
4 – 7 = ☐	4 – -2 = ☐

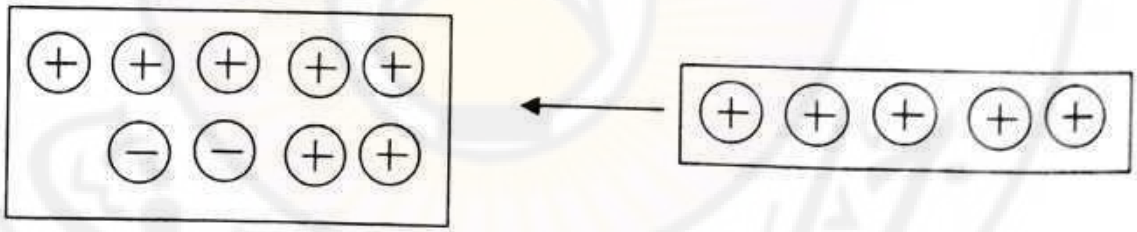
نموذج الشحنات الكهربائية:

يتوافق عمل نموذج الشحنات الكهربائية في طرح الأعداد الصحيحة مع "معنى الانتزاع" الذي تم تناوله سابقا.

مثال (11): 5 – -2 = ؟

كيف يمكن انتزاع شحنتين سالبتين من 5 شحنات موجبة؟

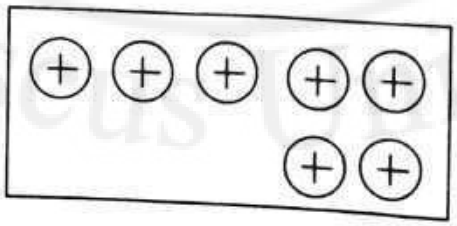
كما أسلفنا, فإن الشحنات المختلفة يلغي بعضها ويمكن الاستفادة من هذا في حل هذه المشكلة. تأمل الشكلين التاليين. الشكل (أ) يمثل 5 شحنات موجبة والشكل (ب) أيضا يمثل 5 شحنات موجبة حيث أن الشحنات الأخرى يلغي بعضها بعضا.



الشكل (أ)

الشكل (ب)

إذن, أصبح الأمر سهلاً. انتزع الآن شحنتين سالبتين من الشكل (ب), ينتج 7 شحنات موجبة.



شجع الأطفال من خلال الأمثلة على اكتشاف أن:

أ – – ب = أ + ب

أ + – ب = أ – ب

ضرب الأعداد الصحيحة

رغم أن قواعد الضرب على الأعداد الصحيحة سهلة الحفظ (سالب × سالب = موجب, موجب × موجب = موجب، سالب × موجب = سالب)، إلا أنه يجب أن يكوّن التلاميذ أساساً مفاهيميا لهذه القواعد. سنتعرف هنا إلى ثلاث حالات مختلفة من الضرب هي: موجب × سالب، سالب × موجب، سالب × سالب.

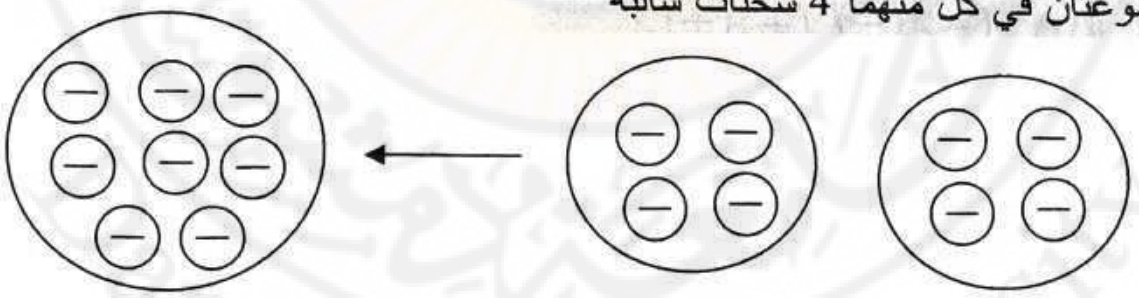
موجب × سالب: تعتبر هذه من أسهل الحالات حيث يمكن استخدام معنى " المجموعات المتكافئة " بشكل مباشر، حيث لا يوجد مشكلة هنا بالنظر إلى عملية الضرب على أنها جمع متكرر. فمثلا:

مثال (12): 4 × –2 يمكن النظر إليها على أنها 4 مجموعات من (–2) ويكون حلها كالتالي:

4 × –2 = –2 + –2 + –2 + –2

مثال (13): 2 × –4 = ؟

مجموعتان في كل منهما 4 شحنات سالبة



سالب × موجب: من الواضح أنه من غير المقنع هنا أن نستخدم معنى المجموعات المتكافئة. فكيف يمكن أن نقول أن –2 × 4 هي بمثابة –2 مجموعة من (4) ؟ ولكن هذا لا يعني أنه ليس بالإمكان تسهيل فهم مثل هذه العملية. فالتلاميذ في مثل هذه المرحلة يفهمون الخاصية الإبدالية لعملية الضرب، وبالتالي فإنهم وببساطه يفهمون أن –2 × 4 = 4 ×–2.

سالب × سالب: وفي هذه الحالة يستخدم نموذج الأنماط العددية. تأمل المثالين التاليين.

أ	ب
$2 \times 4 = 8$	$4- \times 2 = 8-$
$1 \times 4 = 4$	$4- \times 1 = 4-$
صفر $\times$ 4 = صفر	$4- \times$ صفر = صفر
$\square = 4 \times 1-$	$4- \times 1- = \square$
$\square = 4 \times 2-$	$4- \times 2- = \square$

القسمة على الأعداد الصحيحة

في الواقع فإنه بعد التمكن من قواعد ضرب الأعداد الصحيحة، فإن التلاميذ لا يواجهون أي مشكلة في تعلم قواعد القسمة وهي:

موجب ÷ موجب = موجب

سالب ÷ سالب = موجب

سالب ÷ موجب = سالب

موجب ÷ سالب = سالب

الأنشطة وأسئلة التقويم

1- وضح استخدام النماذج المادية والصورية في تعليم مفهومي التجميع والقيمة المنزلية بالتدريج.

2- ما العلاقة بين تعليم جمع وطرح الأعداد متعددة المنازل وتعليم الأساس العشري والقيمة المنزلية ؟ وضح ذلك.

3- صمم نشاطا ملائماً لكل من مراحل تعليم الجمع والطرح التالية:

أ- المرحلة المفاهيمية

ب- مرحلة الربط

4- ما العيب في تعليم الخوارزمية العمودية للضرب دون المرور بالمرحلة المفاهيمية ومرحلة الربط ؟ وضح كيف يمكن أن تدرس الضرب بشكل متسلسل.

5- وضح الترابط بين خطوات الخورازمية العمودية للضرب واستخدام مكعبات دينز للقيام بنفس العمل. استخدم (115 × 32) كمثال.

6- صمم نشاطاً ملائماً لتعليم القسمة في كل من المراحل التالية:

أ- المرحلة المفاهيمية

ب- مرحلة الربط

7- وضح الترابط بين خطوات الخوارزمية التوزيعية للقسم واستخدام مكعبات دينز للقيام بنفس العمل. استخدم (278 ÷ 4) كمثال.

8- استخدم نموذج الشحنات الكهربائية لحل المسائل التالية:

أ- $6 + (-5)$

ب- $3 \times (-4)$

9- اقترح نشاطين مختلفين لتقديم مفهوم العدد السالب.

10- اجمع العددين -5، 2 باستخدام خط الأعداد.

11- كيف يمكن استخدام نموذج الأنماط العددية في اكتشاف قواعد الطرح على الأعداد الصحيحة ؟ وضح بأمثلة.

مراجع الفصل

Battista, M. T. (1983). A complete model for operations on integers. *Arithmetic Teacher, 30*(9), 26-31.

Cathcart, W. G., Pothier, Y. M., Vance, J. H., & Bezuk, N. S. (2001). *Learning Mathematics in Elementary and Middle Schools* (2nd ed.). Ohio: Merrill Prentice Hall.

Fuson, K. C., & Burghardt, B. H. (1993). Group case studies of second graders inventing multidigit addition procedures for base-ten blocks and written marks. In J. R. Becker & B. J. Pence (Eds.), *Proceedings of the Fifteenth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 240-245). San Jose, Ca: The Center for Mathematics and Computer Science Education.

Ginsburg, H. P., Klein, A., & Starkey, P. (1998). The development of children's mathematical thinking: Connecting research with practice. In I.E. Siegel & K. A Renninger (Eds.), *Handbook of Child Psychology: Vol. 4. Children Psychology in Practice* (5th Ed., pp 401-476). New York: Wiley.

Grady, M. B. (1978). A manipulative aid for adding and subtracting integers. *Arithmetic Teacher* 26(3), 40.

Greer, B. (1992). Multiplication and dvision. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 276-295). New York: Macmillan.

Hiebert, J., & Wearne, D. (1992). Links between teaching and learning place value with understanding in first grade. *Journal for Research in Mathematics Education, 23*, 98-122.

National Council of Teacher of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School mathematics*. Reston, VA: Author.

Van de Walle, J. A. (2001). *Elementary and Middle School Mathematics: Teaching developmentally* (4th ed.). New York: Longman.

7

الفصل السابع
تنمية مفهوم الكسر العادي

- المعايير المتعلقة بالكسور
- الأعداد النسبية
- تعليم الأعداد النسبية
- صعوبات تعلم الكسور العادية
- تعليم الكسور العادية
- العمليات على الكسور العادية
- الأنشطة وأسئلة التقويم
- مراجع الفصل

الأهداف التربوية

بعد دراسة هذا الفصل، يتوقع من الطالب أن:

1- يناقش المعايير المتعلقة بالكسور.

2- يتعرف الأعداد النسبية وخواصها.

3- يناقش صعوبات تعلم التلاميذ للكسور العادية.

4- يصف طرقاً متعددة لتعميق فهم التلاميذ لمفهوم الكسر.

5- يصمم أنشطة تساعد التلاميذ على فهم تكافؤ الكسور ومقارنتها وترتيبها وتبسيطها.

6- يستخدم استراتيجيات متنوعة لتعليم العمليات الحسابية على الكسور العادية.

7- يصمم أنشطة تربط الكسور بالحياة اليومية للتلاميذ.

8- يستخدم ويبتكر وسائل فعّالة في تعليم الكسور والعمليات عليها.

الفصل السابع
تنمية مفهوم الكسر

المعايير المتعلقة بالكسور[1]

ما قبل الروضة – الثاني

يفهم الأعداد، وطرق تمثيلها والعلاقات فيما بينها، والأنظمة العددية.	– يفهم ويمثل الكسور المألوفة الاستخدام مثل: $\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{2}$.

الثالث – الخامس

يفهم الأعداد، وطرق تمثيلها والعلاقات فيما بينها، والأنظمة العددية.	– ينمي فهما للكسور كأجزاء من وحدات كاملة، كأجزاء في تجمعات، كمواقع على خط الأعداد، وكقسمة للأعداد التامة. – يستخدم نماذج، وتقسيمات، وأشكال مكافئة ليحدد مقادير الكسور. – يدرك ويكون أشكالا مكافئة للمألوف من الكسور العادية والكسور العشرية والنسب المئوية.
يحسب بطلاقة ويعمل تقديرات معقولة.	– يطور ويستخدم النماذج الصورية، والأشكال المكافئة ليضيف ويطرح المألوف من الكسور والأعداد العشرية.

(1) Reprinted with permission from [Principles and Standards for School Mathematics], copyright [2000] by the National Council of Teachers of Mathematics. All right reserved.

السادس – الثامن

يفهم الأعداد، وطرق تمثيلها والعلاقات فيما بينها، والأنظمة العددية.	– يقارن ويرتب الكسور والأعداد العشرية والنسب المئوية بكفاءة ويجد مواقعها التقريبية على خط الأعداد.
يفهم معاني العمليات وكيف ترتبط ببعضها البعض.	– يفهم معنى وتأثير العمليات الحسابية على الكسور والأعداد العشرية والأعداد الصحيحة. – يستخدم الخواص التجميعية والابدالية للجمع والضرب وتوزيع الضرب على الجمع ليبسط الحسابات على الأعداد الصحيحة والكسور والأعداد العشرية.
يحسب بطلاقة ويعمل تقديرات معقولة.	– يختار طرقا وأدوات ملائمة للحساب مع الكسور والأعداد العشرية، من ضمنها، الحسابات الذهنية، التقدير، الآلات الحاسبة أو الحواسيب، والورقة والقلم، اعتمادا على الموقف و يطبق الطرق المختارة. – يطور ويحلل خوارزميات للحسابات على الكسور، والأعداد العشرية والأعداد الصحيحة وينمي طلاقة في استخدامها.

الأعداد النسبية Rational Numbers

العدد النسبي هو كل عدد يمكن كتابته على الصورة $\frac{أ}{ب}$ حيث أ , ب عددان صحيحان, وحيث ب لا تساوي صفراً. وهناك أربعة معان للعدد النسبي هي:

1- **جزء من كل** (Part of a Whole): عدد من الأجزاء (البسط) من كل مقسم إلى أجزاء متساوية (المقام).

2- **النسبة** (Ratio): وصف لعلاقة بين كميتين, وقد تكون أو لا تكون علاقة جزء من كل. مثال: نسبة المعلمين إلى الطلبة في إحدى المدارس هي 3: 100.

3- **القسمة العادلة** (Fair Sharing): تقسيم عدد من الأشياء (البسط) على عدد من المجموعات (المقام).

4- **العامل** (Factor): كما في الاقترانات, مثل ($\frac{3}{4}$) س = ص.

وتعتبر مفاهيم الأعداد النسبية صعبة بالنسبة للأطفال لأسباب نفسية (سيكولوجية) وأسباب تدريسية. ومرجع الأسباب السيكولوجية هو أن الأعداد النسبية تختلف عن الأعداد التامة المعروفة لدى الأطفال. ويعد تقديم الكسور العادية لهم أول تجربة مع أعداد غير مبنية على العدّ. ثم إن حل مسائل على الكسور العادية يتطلب توزيعاً (تقسيماً) عادلاً وليس عداً. كذلك فإن الأعداد النسبية تتضمن علاقات ضربية وليس جمعية كما في الأعداد التامة. على سبيل المثال يتم تحديد الكسور المتكافئة عن طريق ضرب البسط والمقام بنفس العدد ($\frac{2}{5} \times \frac{3}{3} = \frac{6}{15}$) وليس عن طريق إضافة نفس العدد إلى البسط والمقام ($\frac{2}{5}$ لا يساوي $\frac{3+2}{3+5}$). الجدول التالي يبين الفروقات بين الكسور العادية والأعداد التامة.

الجدول 7-1: مقارنة بين الكسور العادية والأعداد التامة

وجه المقارنة	الأعداد التامة	الكسور العادية
الكميات المستعملة	منفصلة	منفصلة ومتصلة
الوحدات	شيء مفرد أو مجموعة أشياء مفردة	أجزاء من أشياء
آلية التعلم الأساسية	العـــــدّ	التجزئة العادلة
التمثيل الرمزي	يتكون الرقم من خانة أو أكثر	أرقام مركبة: رقمان يتكون كل منهما من خانة أو أكثر
المفهوم	عدد صحيح	علاقة بين أعداد صحيحة
نوع العلاقة	جمعيـــة	ضربية
فرادة التمثيل الرمزي للكميات	كل رقم يمثل عدد تام واحد.	عدد لا نهائي من الكسور المتكافئة تمثل عددا نسبيا واحدا.
القيمة	مطلقة	نسبية
عدد الأعداد في فترة	عدد ثابت: بين 3 و 6 يوجد 4 و 5.	يوجد عدد لا نهائي من الأعداد بين أي كسرين.
العدد التالي	يحدد من خلال السلسلة العددية.	لا يوجد كسر تالي.
ترتيب الأعداد	تزداد قيمة الأعداد المتتالية.	بتثبيت المقام: تزداد القيمة كلما زاد البسط. بتثبيت البسط: تقل القيمة كلما زاد المقام.

إذن فحتى تحت ظروف التدريس المثالية, يكون فهم الأعداد النسبية صعباً ويحتاج إلى وقت طويل. ويتم التعلم بالتدريج ومن خلال الخبرة المكثفة مع مواقف تتضمن كسورا عادية.

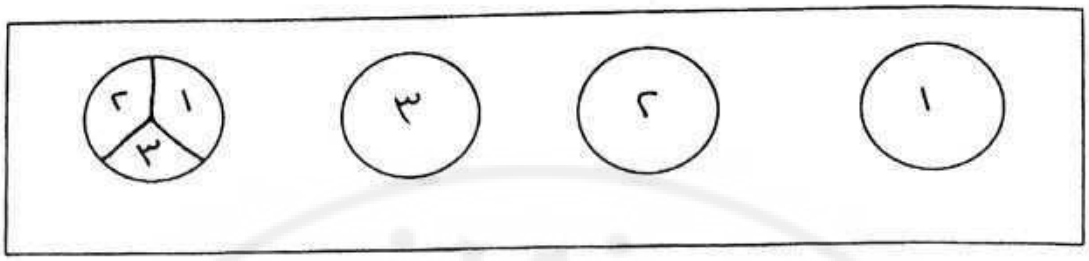
أما بالنسبة للأسباب التدريسية فهي تعود إلى أن تدريس الأعداد النسبية في العادة ينتقل بسرعة نحو العمل بالرموز المجردة, وبالتالي لا يوفر فرصة كافية لتعميق الأساس المفاهيمي الضروري لفهم الكسور (فكرة التجزئة العادلة والعلاقات الضربية). كذلك فإن التدريس عادة لا يوفر فرصاً للتلاميذ للتعرف على المعاني المختلفة للكسور.

تعليم الأعداد النسبية

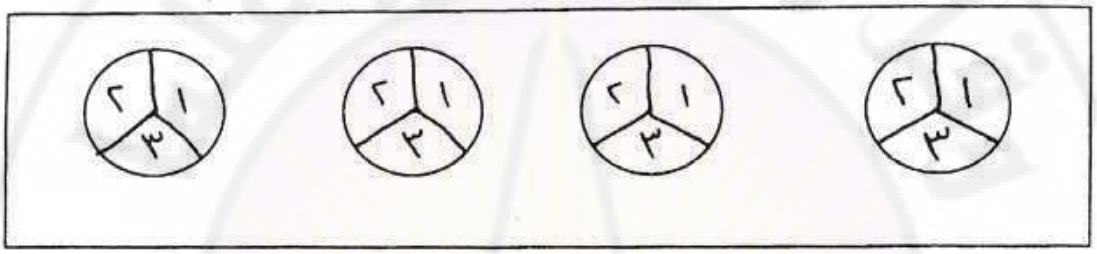
فيما يلي بعض الإرشادات الممكن اتباعها عند تعليم الأعداد النسبية:

- قدّم مفهوم العدد النسبي مادياً وبطريقة غير رسمية من خلال مسائل المشاركة العادلة أو القسمة العادلة: تقليدياً, كان التدريس يقدم مفهوم الكسور العادية من خلال معنى "جزء من كل", ولكن كون الأطفال لديهم خبرة بموضوع المشاركة العادلة فإنه من المنطقي أن نبدأ التقديم من خلال هذا المعنى. يمكن تقديم الأعداد النسبية للأطفال من خلال خلق مواقف تتطلب اشتراك مجموعة من الأشخاص بشيء معين وليكن قطعة من الكيك على سبيل المثال. يستطيع المعلم اختلاق مواقف عديدة جداً من هذا النوع.
- شجع الأطفال على تقدير نواتج مواقف المشاركة العادلة: على سبيل المثال, في موقف يتطلب قسمة 4 على 5 , اطلب من الأطفال أن يقدروا فيما إذا كان نصيب كل شخص سيكون أكبر من واحد أم أقل من واحد, أكبر من نصف أم أقل من نصف, وهكذا.
- فيما بعد شجع الأطفال على استخدام أشياء أو رسومات لحل مسائل على المشاركة العادلة: لا تستهن بقدرة الأطفال على حل مثل هذه المسائل. الشكل أدناه يمثل ثلاث طرق مختلفة لحل مسألة تتضمن توزيع 4 قطع من البيتزا على 3 أطفال.

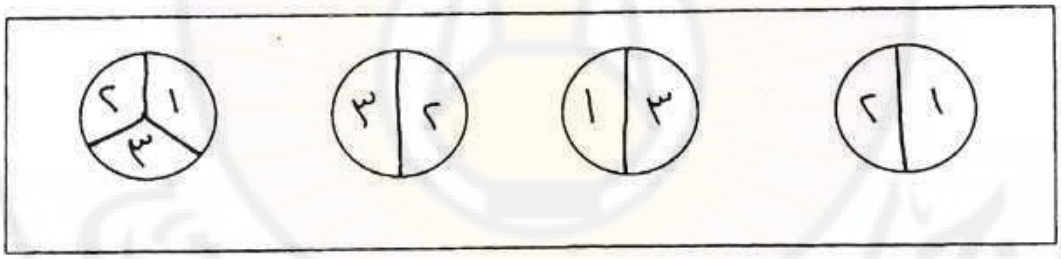
الطريقة الأولى:



الطريقة الثانية:



الطريقة الثالثة:



- ساعد الطلبة على رؤية أن الأعداد النسبية تحمل معان متعددة وليس فقط معنى جزء من كل. وساعدهم على إدراك أن هذه المعاني مرتبطة ببعضها: يمكنك عمل ذلك من خلال تزويد الطلبة بفرص شخصية ذات معنى لاكتشاف الحاجة إلى معنى جزء من كل, ومعنى القسمة العادلة, ومعنى النسبة ومعنى العامل.

استراتيجيات الأطفال غير الرسمية للمشاركة العادلة

للأطفال استراتيجياتهم الخاصة في حل المسائل التي تتضمن مشاركة عادلة. فمع الكميات المنفصلة, يقوم الأطفال بتوزيع المقسوم على المجموعات المطلوبة قطعة قطعة حتى تنتهي الكمية المتوفرة ثم يعدون عناصر كل مجموعة لتحديد الحل. وهذه الطريقة تسمى التوزيع.

أما مع الكميات المتصلة, فيستخدم الأطفال طريقة التقسيم إلى أجزاء. فعند الحاجة إلى قسمة خيط إلى جزئين على سبيل المثال فإن الطفل يعمد إلى تعيين نقطة المنتصف في الخيط ويثنيه عند تلك النقطة ويقصه, ثم يحاول مطابقة الجزئين للتأكد من انهما متساويان.

لاحظ أن قسمة الكميات المتصلة أصعب من قسمة الكميات المنفصلة وذلك للأسباب التالية:

1- قسمة الكميات المتصلة تتطلب تخطيطاً مسبقاً.

2- في الكميات المنفصلة, تستخدم نفس الطريقة بغض النظر عن عدد الأجزاء المطلوب الحصول عليها, بينما في الكميات المتصلة فإن الطريقة تختلف حسب عدد الأجزاء المطلوبة, فتجزئة خيط إلى جزئين تختلف عن تجزئته إلى ثلاثة أو أربعة أو خمسة. كذلك فإن الطريقة في حالة الكميات المتصلة تختلف باختلاف الشكل المطلوب تجزئته, فتجزئة خيط تختلف عن تجزئة مستطيل أو دائرة.

صعوبات تعلم الكسور العادية

يكون فهم التلاميذ للكسور العادية ضيقاً وغير كامل وذلك لمجموعة من الأسباب منها:

1- يستخدم المعلمون عادة المناطق الدائرية والمستطيلة فقط لتوضيح معاني الكسور, ولذلك نجد أن لدى الأطفال صعوبة في ربط مفهوم الكسر في مواقف أخرى مثل المثلث, و خط الأعداد والكميات المنفصلة.

2- كثير من الأطفال لا يفهمون أن تحديد جزء من كل يتطلب تجزئة "الكل" إلى أجزاء متساوية.

3- بعض الأطفال لا يدركون أن الكسور العادية تتضمن جزءً من كل, وبدلاً من ذلك فهم يقارنون الجزء ببقية الأجزاء وليس بالكل الذي ينتمي إليه الجزء.

4- لا يملك كثير من الأطفال حساً جيداً بحجم الكسر. فهم لا يعرفون أن الكسور غير كسر الوحدة يمكن أن تبنى من كسور الوحدة. على سبيل المثال فهم لا يدركون أن $\frac{3}{5}$ هي ($\frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5}$). كذلك فإن لديهم صعوبة في الاستدلال النوعي حول الكسور, حيث أنهم لا يستطيعون توقع ما سيحدث لقيمة الكسر إذا زاد المقام على

سبيل المثال.

5- لا يفهم كثير من الأطفال تكافؤ الكسور. فقد يستطيعون ربط الكسر بنموذج مادي أمامهم, لكنهم لا يستطيعون عمل الربط غير المباشر. على سبيل المثال, إذا نظروا إلى دائرة مقسمة إلى ثمانية أجزاء, ظلل اثنان منها, فإن بإمكانهم معرفة أن الجزء المظلل يمثل $\frac{2}{8}$ من مساحة الدائرة , لكنهم لا يدركون أنه يمثل $\frac{1}{4}$ من مساحتها. كذلك ولعدم إدراك كثير من الأطفال أن الكسور تتضمن علاقات ضربية, فإنهم يعتبرون مثلاً أن $\frac{أ}{ب}$ تكافئ $\frac{أ + ج}{ب + ج}$.

6- تشير الأبحاث إلى أن مهارات التقدير لدى الأطفال في مجال الكسور ضعيفة.

7- لا يفهم أطفال في كثير من الأحيان أن الكسر يمثل علاقة وليس عدداً من الأشياء. فهم يعتقدون مثلاً أن نصف شيء هو دائماً أكبر من ثلث شيء آخر, والوقع أنه لا يمكن المقارنة في مثل هذه الحالة إلا إذا عرف الكل في كلا الحالتين.

8- يصعب على كثير من الأطفال مقارنة الكسور العادية. فقد يعتقد بعضهم أن $\frac{1}{4}$ أكبر من $\frac{1}{3}$ لأن $4 > 3$.

9- لا يدرك كثير من الأطفال أهمية تعريف الكل أو الوحدة بوضوح عند حل مسائل على الكسور العادية.

تعليم الكسور العادية

إذا استطعنا أن نبني على معارف وخبرات الأطفال السابقة، فإنه يمكن البدء بتعليم الكسور- بطريقة غير رسمية - منذ الصفوف الأساسية الأولى. إنه لمن المفيد جداً أن نعطي الأطفال فرصاً للتعرف على الكسور - مادياً - قبل تدريس الموضوع رسمياً. وكما هو الحال في أي موضوع آخر, فإنه يستحسن أن يخطو التدريس تدريجياً من التمثيلات المادية إلى التمثيلات غير الرسمية إلى التجريد النسبي إلى التمثيلات الرسمية. فيما يلي خطة من سبع مراحل لتدريس الموضوع.

المرحلة الأولى: خبرات ما قبل الكسور

هذه الخبرات والتي لا تتضمن بوضوح مصطلحات كسرية, يمكن أن تزود الأطفال بأساس قوي لفهم مفهوم الكسر. يمكن أن يبدأ هذا في مرحلة الروضة. في هذه المرحلة,

يجب على المعلم أن يدع الأطفال يتشاركون بمجموعات من الأشياء (كميات منفصلة). ثم يتحرك بعد ذلك إلى مهمات أعقد كالمشاركة في كميات متصلة. لاحظ أنه في الحالتين يمكن استخدام أمور حياتية مثل المشاركة في عدد من الأوراق, تقاسم أقلام, تقاسم ورقة واحدة, وهكذا.

المرحلة الثانية: التعبير عن النماذج المادية بالكلمات

بعد أن يقوم الأطفال بنشاط مثل اقتسام خمسة أقلام من قبل خمسة أطفال, دع الأطفال يحددون حصصهم بقول: قلم واحد من خمسة أقلام, واحد من خمسة, خمس, أو حصة طفلين بقول: قلمان من خمسة أقلام, اثنان من خمسة, خمسان.

المرحلة الثالثة: خلق نماذج للتعبير عن الكلمات

وهي عكس المرحلة الثانية. على سبيل المثال دع الأطفال يعملون نماذج للتعبير عن خمس، ربع، ثلث، .... الخ.

المرحلة الرابعة: تمثيل النماذج والكلمات رمزيا

بعد أن تشعر أن الأطفال بدءوا يستخدمون التعابير الكلامية بسهولة, قدم رموزا مكتوبة مثل $\frac{1}{2}$، $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{3}$. اربط هذه الرموز بمعنى القسمة العادلة ومعنى جزء من كل. فمثلاً في معنى جزء من كل: $\frac{2}{3}$ تعني جزئين أخذت من 3 أجزاء متساوية. أما في معنى القسمة العادلة: $\frac{2}{3}$ تعني شيئيين قسما بالتساوي بين 3 أطفال.

المرحلة الخامسة: التمثيل الكلامي والنمذجة المادية للرموز

ابدأ بكسر مثل $\frac{1}{5}$ واطلب من الأطفال أن يتعرفوا عليه كلاميا ثم ينمذجوه إما من خلال معنى القسمة العادلة أو من خلال معنى جزء من كل.

المرحلة السادسة: التخيل الذهني للنماذج المادية

شجع الأطفال أن يتخيلوا نماذج مادية ذهنيا ويستخدموا هذه التخيلات لحل المسائل.

المرحلة السابعة: استخدام الرموز كأعداد مجردة

شجع الأطفال على حل مسائل الكسور بدون نماذج مادية أو صور ذهنية.

إرشادات للمعلم

1- استخدم أمثلة متنوعة عند تقديم مفهوم الكسر العادي بما في ذلك الكميات المنفصلة.
2- ساعد الأطفال على أن يفهموا بوضوح أن الكسور تصف نوع خاص من مواقف التجزئة. هذا النوع كل الأجزاء فيه متساوية.
3- ساعد الأطفال على إدراك أن الكسور العادية يمكن أن تمثل علاقة بين الجزء والكل الذي ينتمي إليه ذلك الجزء.
4- اعمل على تعميق حس الأطفال بمقدار الكسر عن طريق تشجيعهم على بناء نماذج لكسور أخرى من كسور الوحدة.
5- استخدم مسائل الاستدلال النوعي في التدريس والتقويم.
6- استخدم كلا من معاني القسمة العادلة وجزء من كل لتساعد الأطفال على فهم تكافؤ الكسور.
7- بعد أن تشعر أن الطلبة فهموا تكافؤ الكسور, ساعدهم على أن يدركوا بوضوح أن تحديد الكسور المتكافئة يتضمن ضربا أو قسمة وليس جمعاً أو طرحا.
8- اجعل تقدير الكسور جزءً لا يتجزأ من عملية تدريس الكسور.
9- ساعد الأطفال على فهم أن الكسور لا تقارن إلا إذا كان الكل في جميع الحالات معروفاً.
10- المواد المحسوسة تمثل نماذج مفيدة للمقارنة بين الكسور.
11- شجع الأطفال على استخدام استراتيجياتهم الخاصة في حل المسائل.
12- تمثل الألعاب وسيلة جيدة للتسلية وممارسة ترتيب الكسور (مقارنتها).
13- شجع الأطفال على اكتشاف طرق فعالة لمقارنة الكسور.
14- شجع الأطفال على تعريف "الكل" بوضوح عند حل مسائل على الكسور.

تمثيل الكسور العادية

هناك العديد من الطرق التي يمكن استخدامها لتمثيل الكسر العادي, منها:

1- نماذج المساحة:

تعتبر نماذج المساحة من أكثر الطرق شيوعا في تمثيل الكسور العادية, ويتم ذلك عن طريق تقسيم المساحة إلى مساحات جزئية متساوية. ويراعى هنا استخدام الأشكال الهندسية المختلفة كالدائرة والمربع والمستطيل والمثلث, وعدم التركيز على شكل معين وذلك لإكساب التلاميذ خبرة أشمل بتمثيل الكسور.

2- نماذج الطول:

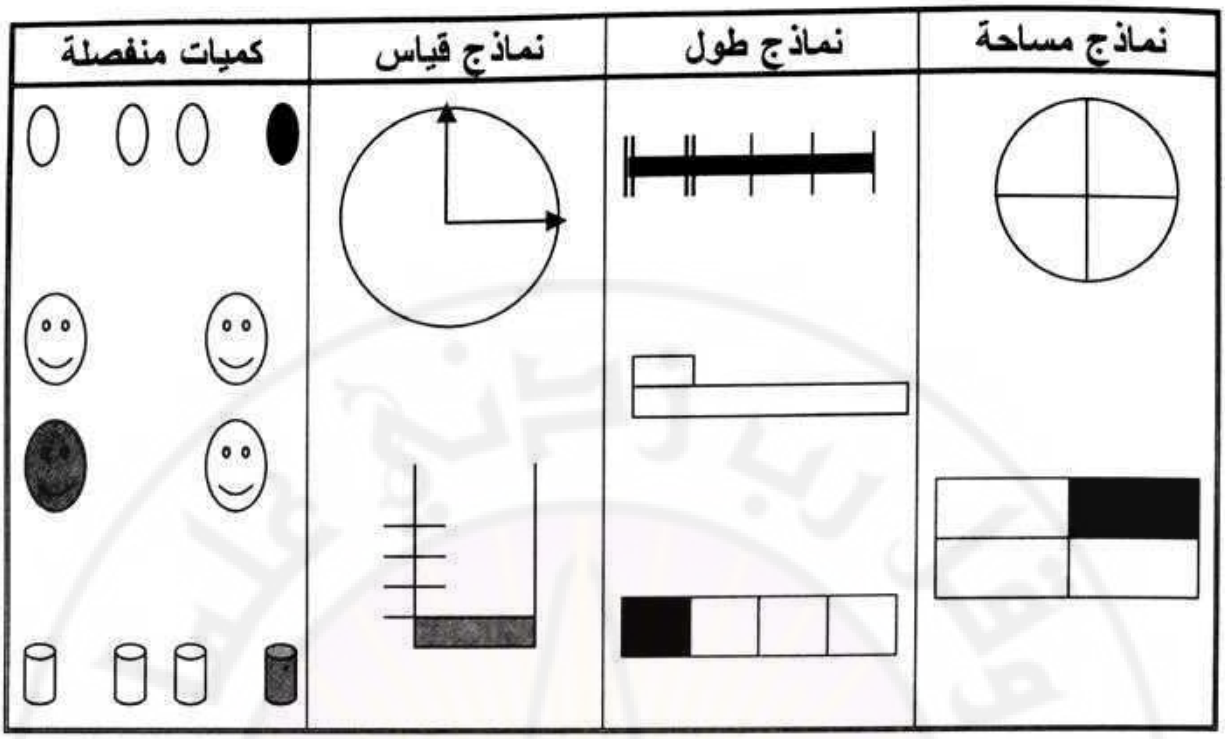
على غرار نماذج المساحة, يتم هنا تقسيم الطول إلى أطوال جزئية متساوية. ويعتبر خط الأعداد مثالا على نماذج الطول. وهناك أمثلة أخرى عديدة, يبين الشكل (7-1) بعضا منها.

3- نماذج القياس:

وتستخدم هنا أدوات قياس مثل القوارير المخبرية المدرجة, والساعات, وغيرها. ويمكن للتلاميذ أن يستخدموا هذه الأدوات كجزء من نشاط معملي.

4- الكميات المنفصلة:

إضافة إلى استخدام الكميات المتصلة والمتمثلة بالنماذج الثلاثة الأولى, فإنه يجب استخدام الكميات المنفصلة في تمثيل الكسور العادية. ويتم ذلك من خلال تحديد مجموعة جزئية من مجموعة تضم عددا من العناصر. ومثال ذلك: قلم واحد من مجموعة تحتوي على أربعة أقلام, تفاحتان من مجموعة تحتوي على ثمانية تفاحات, وهكذا. الشكل (7-1) يبين الطرق المختلفة لتمثيل الكسور العادية, حيث استخدم الكسر $\frac{1}{4}$ كمثال.

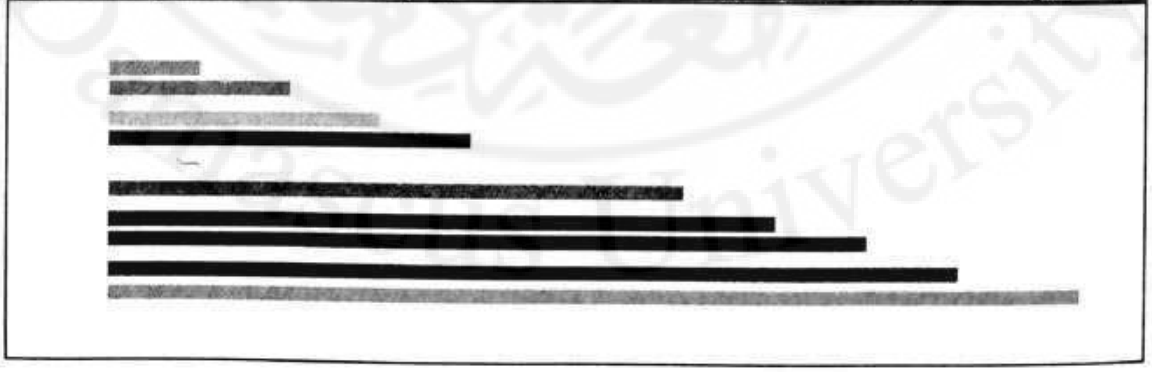


الشكل (7–1): تمثيل الكسر "ربع" بطرق مختلفة.

استخدام قضبان كويزينير لتنمية مفهوم الكسر العادي

قضبان كويزينيرهي عبارة عن قطع خشبية ملونة ومستطيلة المقطع كما في الشكل (7–2). وتكون عادة بالألوان والأطوال التالية:

اللون	الطول	اللون	الطول	اللون	الطول
أبيض	1 سم	أصفر	5 سم	ازرق	9 سم
أحمر	2 سم	أخضر غامق	6 سم	برتقالي	10 سم
أخضر فاتح	3 سم	أسود	7 سم		
بنفسجي	4 سم	بني	8 سم		



الشكل (7–2): قضبان كويزينير

يمكن أن يصمم المعلم الكثير من النشاطات باستخدام قضبان كويزينير لاستخدامها مع التلاميذ. الأنشطة التالية تعتبر أمثلة على ذلك:

أنشطة باستخدام قضبان كويزينير

نشاط (1)

إذا كانت القطعة البنية تمثل وحدة كاملة , هل تمثل القطعة البنفسجية نصفا؟ لماذا؟

إذا كانت البرتقالية وحدة كاملة, هل تمثل الخضراء الغامقة نصفا؟ لماذا؟

نشاط (2):

إذا كانت الخضراء الغامقة وحدة كاملة, ما الكسر الذي تمثله القطعة الحمراء؟

إذا كانت الخضراء الغامقة وحدة كاملة, ماذا تمثل القطعة البنية؟

نشاط (3):

إذا كانت الزرقاء وحدة كاملة, ما القطعة التي تمثل ثلثين؟

إذا مثلت القطعتان البرتقالية والحمراء معا وحدة كاملة, ما القطع التي تمثل النصف؟

نشاط (4):

إذا مثلت القطعة الخضراء الفاتحة $\frac{1}{3}$, ما القطعة التي تمثل وحدة كاملة؟

إذا مثلت القطعة الحمراء $\frac{1}{4}$, ما القطعة التي تمثل وحدة كاملة؟

نشاط (5):

إذا مثلت القطعة الحمراء $\frac{1}{4}$, ما القطعة التي تمثل $\frac{3}{4}$ ؟

إذا مثلت القطعة الحمراء $\frac{1}{5}$, ما القطعة التي تمثل $\frac{1}{2}$ ؟

إذا مثلت القطعة الخضراء الفاتحة $\frac{1}{4}$, ما القطعة التي تمثل $\frac{1}{2}$ ؟

إذا مثلت القطعة البنفسجية $\frac{2}{3}$, ما القطعة التي تمثل $\frac{1}{2}$ ؟

إذا مثلت القطعة البنفسجية $\frac{2}{3}$, ما القطعة التي تمثل $\frac{7}{6}$ ؟

إذا مثلت القطعة الخضراء الفاتحة $\frac{1}{2}$, ما القطعة التي تمثل $\frac{9}{6}$ ؟

نشاط (6):

ما القطعة أو القطع التي تستطيع اعتبارها وحدة كاملة وتحدد ثلثها وسدسها؟

ما القطعة أو القطع التي تستطيع اعتبارها وحدة كاملة وتحدد نصفها وثلثها ؟

نشاط (7):

اعتبر أن القطعة الخضراء الغامقة هي وحدة كاملة.

ما الكسر الذي تمثله القطعة البيضاء.

ما الكسر الذي تمثله قطعتان بيضاء.

ما الكسر الذي تمثله ثلاث قطع بيضاء.

ما الكسر الذي تمثله أربع قطع بيضاء.

ما الكسر الذي تمثله خمس قطع بيضاء.

ما الكسر الذي تمثله ست قطع بيضاء.

ما الكسر الذي تمثله سبع قطع بيضاء.

ما الكسر الذي تمثله تسع قطع بيضاء.

نشاط (8):

أ- إذا مثلت الخضراء الغامقة وحدة كاملة, ما الكسر الذي تمثله قطعتان بيضاء؟ ما الاسم الآخر الذي يمكن أن يعطي للقطعتين البيضاء؟

ملاحظة: ما القطعة التي يساوي طولها ضعف طول القطعة البيضاء وما الكسر الذي تمثله من القطعة الخضراء الغامقة؟

ب- ما الاسم الآخر الذي يمكن أن يعطى لست قطع بيضاء؟

ج- ما الاسم الآخر الذي يمكن أن يعطى لتسع قطع بيضاء؟

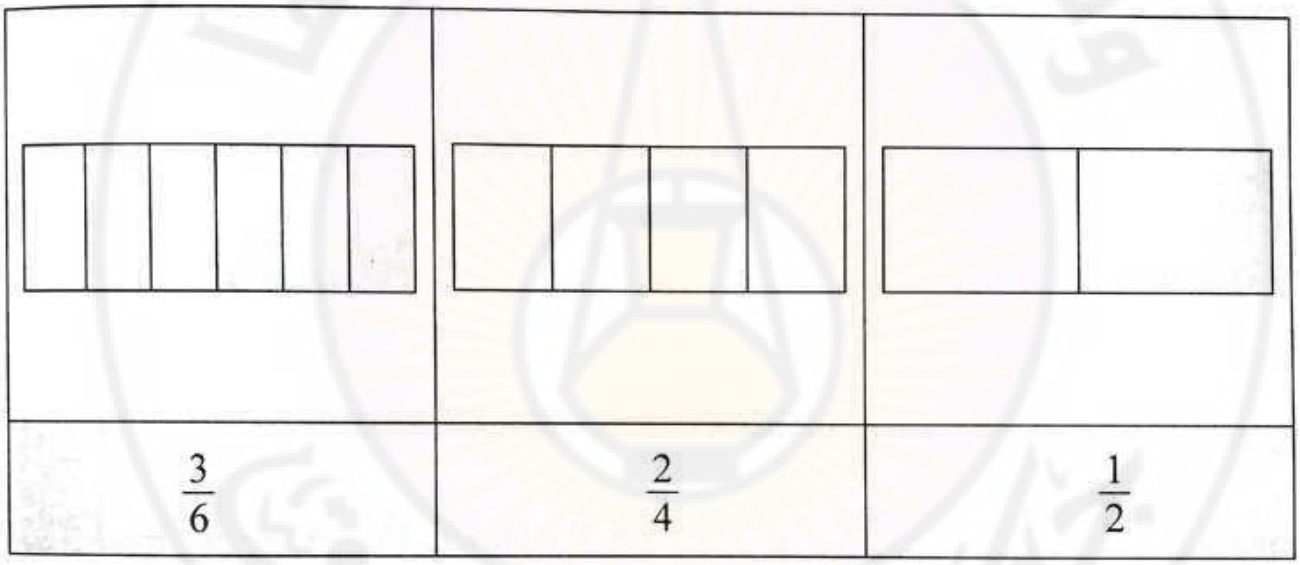
تكافؤ الكسور

يمكن توضيح تكافؤ الكسور بعدة طرق منها: نماذج المساحة, رقائق الكسور, دوائر الكسور, وخط الأعداد.

1- نماذج المساحة

وهي طريقة شائعة جداً ومفيدة في توضيح تكافؤ الكسور. وتقوم هذه الطريقة على تمثيل كسر ما عن طريق نموذج مساحة, وتمثيل كسر آخر أو عدة كسور بنماذج مماثلة وإظهار تساوي المساحات الممثلة لهذه الكسور. الشكل (7-3) يبين تكافؤ الكسور

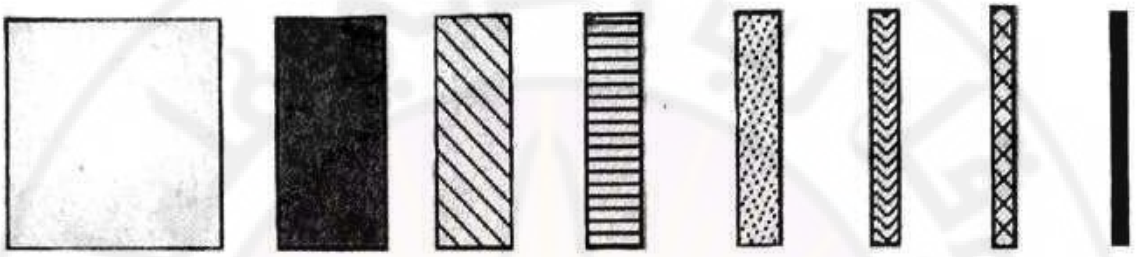
$\frac{1}{2}$ ، $\frac{2}{4}$ ، $\frac{3}{6}$.



الشكل (7-3) استخدام نماذج المساحة في توضيح تكافؤ الكسور

2- رقائق الكسور

وهي رقائق شفافة وملونة بقياسات مختلفة وهي تصنع عادة من البلاستيك المرن. وربما تكون هذه الرقائق أكثر فاعلية من نماذج المساحة, لأنها تمثل مواد محسوسة يمكن أن يقلبها التلميذ ويتلاعب بها لاستكشاف العلاقات المختلفة بين الكسور. ومن الجدير بالذكر أن استخدام هذه الرقائق لا يقتصر على توضيح تكافؤ الكسور, بل يتعدى ذلك إلى استخدامات مختلفة في مجال العمليات على الكسور. الشكل (7-4) يبين رقائق الكسور.



الشكل (7-4): رقائق الكسور

حاول أن تقوم بالنشاط التالي بنفسك, لكي تتعرف على الطرق التي يمكن أن تستخدم فيها هذه الرقائق مع تلاميذك:

نشاط (9):

(1) أ- كم ربع (احمر) تحتاج لتغطية نصف؟

ب- كم ثمن تحتاج لتغطية نصف؟

ج- كم $\frac{1}{16}$ تحتاج لتغطية $\frac{1}{3}$ ؟

(2) أ - كم ثمن تحتاج لتغطية ربع؟

ب- كم $\frac{1}{16}$ تحتاج لتغطية ربع؟

ج- كم $\frac{1}{8}$ تحتاج لتغطية $\frac{3}{4}$ (3 رقائق حمراء)؟

د- كم $\frac{1}{16}$ تحتاج لتغطية $\frac{3}{4}$ (3 رقائق حمراء)؟

(3) أ- كم $\frac{1}{16}$ تحتاج لتغطية $\frac{1}{8}$ ؟

ب- كم $\frac{1}{16}$ تحتاج لتغطية $\frac{5}{8}$ ؟

(4) أ- كم $\frac{1}{16}$ تحتاج لتغطية $\frac{1}{3}$ ؟

ب- كم $\frac{1}{12}$ تحتاج لتغطية $\frac{1}{3}$ ؟

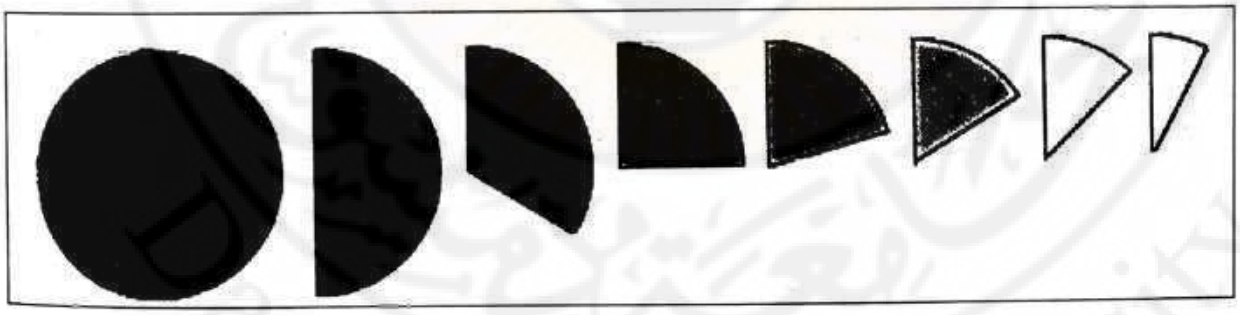
ج- كم $\frac{1}{12}$ تحتاج لتغطية $\frac{1}{6}$ ؟

(5) أ- كم $\frac{1}{6}$ تحتاج لتغطية $\frac{2}{3}$ ؟

ب- كم $\frac{1}{12}$ تحتاج لتغطية $\frac{5}{6}$ ؟

3- دوائر الكسور:

وهي شبيهة برقائق الكسور ولها استخدامات مشابهة, سوى أنها تأخذ أشكالا دائرية. انظر الشكل (7-5).



الشكل (7-5): دوائر الكسور

4- خط الأعداد:

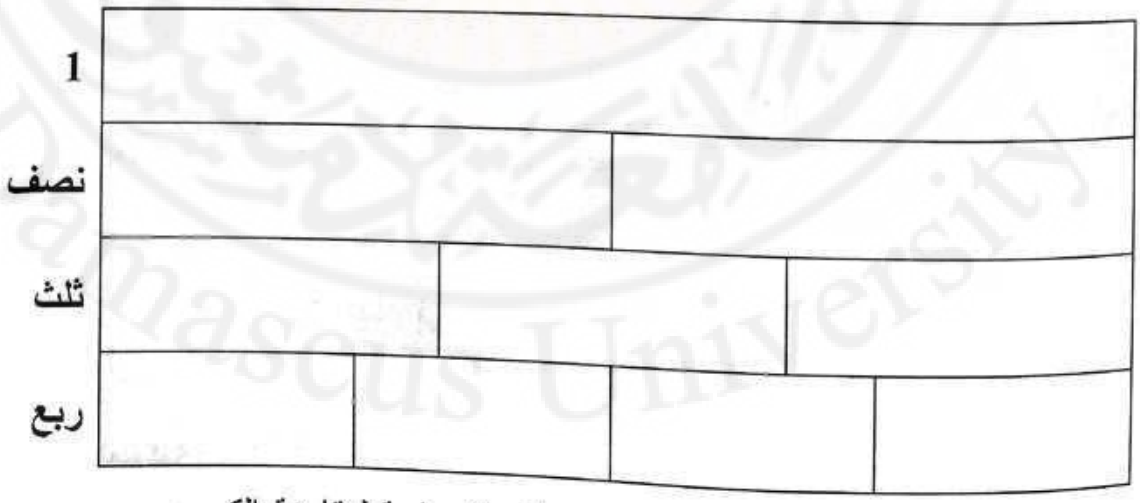
كذلك يمكن استخدام خط الأعداد في توضيح تكافؤ الكسور وذلك برسم خط أعداد خاص بكل من الكسور المراد تبيان تكافؤها, كما في الشكل (7-6).

نصـف = ربعـان = ثـلاثة أسداس

الشكل (7-6): استخدام خط الأعداد في توضيح تكافؤ الكسور

مقارنة الكسور

تعتبر مقارنة الكسور من المهارات الصعبة بالنسبة لتلاميذ المرحلة الابتدائية, وكثيراً ما يعتبر بعض التلاميذ أن قيمة الكسر تزداد بازدياد قيمة المقام. وهناك العديد من الطرق التي يمكن استخدامها لتسهيل عملية المقارنة وتعميق فهم التلاميذ لها. والواقع أن كافة الطرق المستخدمة لتوضيح تكافؤ الكسور يمكن استخدامها في المقارنة بين الكسور. والشكل (7-7) يبين طريقة استخدام نماذج المساحة في المقارنة بين عدد من الكسور.



الشكل (7-7): استخدام نماذج المساحة لمقارنة الكسور

والآن حاول القيام بالنشاط التالي.

نشاط (10):

أ) وضح تكافؤ الكسور: $\frac{1}{5}$ ، $\frac{2}{10}$ ، $\frac{3}{15}$ باستخدام كل من الطرق التالية:

1- نماذج المساحة
2- رقائق الكسور
3- دوائر الكسور
4- خط الأعداد

ب) قارن بين الكسور: نصف, ربع, خمس, ثمن باستخدام نفس الطرق المذكورة في أ أعلاه.

ج) اقترح أية طرق أخرى تراها مناسبة للقيام بالمهمتين في (أ) و (ب) أعلاه.

د) أي الطرق تميل إلى استخدامها مع تلاميذ المرحلة الابتدائية ؟ برر موقفك.

العمليات على الكسور العادية

بشكل عام, يجب أن يبدأ التلاميذ بإجراء العمليات على الكسور من خلال سياقات ذات معنى مرتبطة بواقع حياتهم. كما يجب أن يمارسوا هذه العمليات باستخدام المحسوسات كالمعالجات اليدوية وشبه المحسوسات كالنماذج الصورية, وهذا ما نركز عليه في هذا الجزء من الفصل.

الجمع

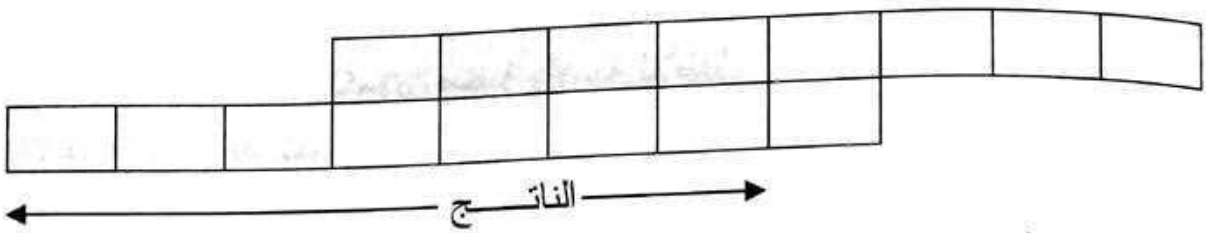
يمكن ربط الجمع بمواقف الإضافة والضم حيث يكون الكل مجهولا.

مثال (1):

إذا أنجز عبدالله $\frac{3}{8}$ من عمله في الساعة الأولى وأنجز $\frac{4}{8}$ منه في الساعة الثانية, فكم يكون قد أنجز من عمله خلال الساعتين؟

أحد الحلول الممكنة:

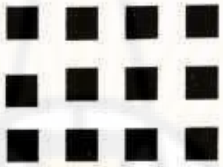
يمكن نمذجة هذه المسألة كما في الشكل أدناه. وبالتالي لن يكون هناك صعوبة لدى التلميذ في تحديد الناتج.



لاحظ أن هذا النموذج يمكن عمله بالعديد من المواد كالورق أو الخشب أو البلاستيك, ويمكن أن يتم رسمه على السبورة أو الورق.

مثال (2): لدى أسامة علبة من الحلوى تحتوي على 12 قطعة. إذا استهلك ربع القطع في اليوم الأول وربعي القطع في اليوم الثاني, فكم يكون قد استهلك من علبة الحلوى في اليومين؟

أحد الحلول الممكنة: يمكن نمذجة هذه المسألة كما في الشكل أدناه.



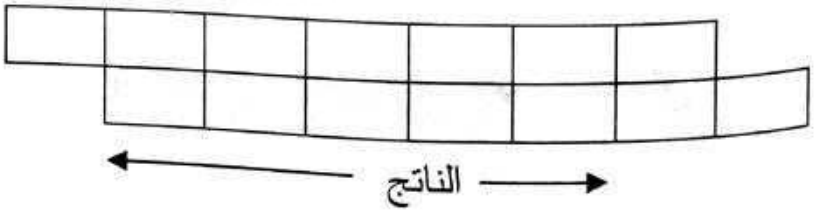
ربع في اليوم الأول يعني 3 قطع. ربعان في اليوم الثاني تعني 6 قطع. إذن المجموع هو 9 قطع. بالنظر إلى الشكل, فإن 9 قطع تعني 3 أرباع.

الطرح

يمكن ربط الطرح بمواقف الانتزاع حيث يكون الناتج مجهولا, كذلك يمكن استخدام مواقف المقارنة والمساواة حيث الفرق مجهول ولكن يفضل تأجيل هذه المواقف إلى مرحلة متأخرة. وكما هو الحال في الجمع, فإنه يمكن توظيف النماذج في حل مسائل الطرح.

مثال: $\frac{6}{7} - \frac{1}{7} = ?$

أحد الحلول الممكنة: يمكن نمذجة هذه المسألة كما في الشكل أدناه.



الضرب

تعتبر عملية ضرب الكسور صعبة بالنسبة للأطفال لأن قواعدها تخالف ما تعلموه عن الأعداد التامة. فقد تعود الأطفال انه عند ضرب عدد تام في آخر , يكون الناتج أكبر من كلا العددين المضروبين أو مساويا لأكبرهما (عند الضرب في واحد). أما في الكسور فعند ضرب عدد في كسر اقل من 1 فإن الناتج يكون اقل من ذلك العدد. وعلى الرغم من أن فهم عملية الضرب كعملية جمع متكرر يمكن أن يفيد في فهم مسألة مثل $6 \times \frac{1}{3}$ على أنها:

$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 2$, إلا أنه من الصعب أن تفيد في مسالة مثل $\frac{1}{6} \times \frac{1}{3}$. لكن هذا لا يعني أنه لا حل لمثل هذه المشكلة. إن فهم الأطفال للمعاني المختلفة لعملية الضرب يسهل كثيرا فهم عملية الضرب في الكسور. والواقع انه يجب أن تبدأ عملية تدريس ضرب الكسور باستخدام هذه المعاني.

نتناول فيما يلي كلا من هذه المعاني على حدة:

المجموعات المتكافئة

يمكن تفسير كافة العمليات الضربية على الكسور عن طريق المجموعات المتكافئة. فعلى سبيل المثال, كما يتم تفسير 3×6 على أنها 3 مجموعات بستة عناصر لكل منها, يمكن تفسير $6 \times \frac{1}{3}$ على أنها ست مجموعات بثلث عنصر لكل منها. كذلك يمكن تفسير $\frac{1}{6} \times \frac{1}{3}$ على أنها $\frac{1}{6}$ مجموعة مكونة من $\frac{1}{3}$ عنصر.

المساحة

يمكن استخدام المساحة أيضاً لتفسير ضرب الكسور. على سبيل المثال يمكن اعتبار $\frac{1}{3} \times 6$ على أنها مساحة مستطيل طوله $\frac{1}{3}$ وحدة وعرضه 6 وحدات.

المعدّل

كذلك مواقف المعدّل يمكن أن تتضمن كسوراً. فالتعبير $\frac{1}{6} \times \frac{1}{3}$ يمكن تمثيله بالموقف التالي: سيارة تسير بسرعة $\frac{1}{3}$ كم/دقيقة, فما المسافة التي تقطعها في $\frac{1}{6}$ من الدقيقة؟

القسمة

عند قسمة عدد طبيعي على عدد طبيعي آخر, فإن الناتج يكون أقل من المقسوم. لكن عند قسمة عدد طبيعي على كسر, فإن الناتج يكون أكبر من المقسوم. هذه الحقيقة تجعل عملية القسمة على كسر صعبة بالنسبة للتلاميذ. ولحسن الحظ فإن هناك 3 معانٍ للقسمة يمكن استخدامها في تسهيل فهم قسمة الكسور وهي:

التوزيع

وهي عملية توزيع عدد معلوم من الأشياء على عدد معلوم من المجموعات, وبالتالي فالمجهول هو حجم المجموعة.

القياس

وهي عملية تقسيم عدد معلوم من الأشياء إلى مجموعات ذات حجم معلوم, وبالتالي فالمجهول هو عدد المجموعات الناتجة.

العامل المفقود

وهو عكس الضرب المتماثل والذي يضم المساحة والمزاوجة. ففي حالة المساحة تكون المساحة وأحد الأضلاع معلومين, ويكون الضلع الآخر مجهولاً. أما في حالة المزاوجة فيكون عدد المزاوجات وأحد عاملي الضرب معلومين ويكون العامل الآخر مجهولاً.

من المفيد عند تعليم قسمة الكسور أن نستخدم كلاً من القياس والمساحة. الأمثلة التالية تتضمن معنى القياس والذي يمكن التعبير عنه بالمعادلة:

كمية معينة ÷ حجم معين = عدد المجموعات

مثال (3):

طفل لديه 5 مساطر يريد أن يعمل منها أنصاف مساطر, فكم نصفا يمكن ان يحصل عليه الطفل؟

$$5 \div \frac{1}{2} = 10$$

مثال (4):

جواهري لديه $\frac{1}{4}$ كغم من الذهب يريد أن يصنع منها قطعا بواقع $\frac{1}{16}$ كغم لكل قطعة.

فكم قطعة يصنع؟

$$\frac{1}{4} \div \frac{1}{16} = 4$$

لاحظ أن المقسوم في المثالين السابقين كان أكبر من القاسم. فهل يمكن أن تستخدم نفس المعنى "معنى القياس" في توضيح مسائل يكون فيها المقسوم اصغر من القاسم؟

مثال (5):

في مثال الجواهري أعلاه, كم قطعة يمكن أن يصنع الجواهري إذا أراد أن تزن القطعة الواحدة $\frac{1}{3}$ كغم؟

$$\frac{1}{4} \div \frac{1}{3} = \frac{3}{4}$$ قطعة.

وكذلك معنى المساحة، فهو من المعاني المفيدة في تعليم قسمة الكسور. اكتشف ذلك بنفسك.

ما نموذج المساحة الذي يمكن استخدامه للتعبير عن $\frac{1}{2} \div \frac{1}{4}$ ؟

يجب أن يفهم الأطفال بعمق هذين التفسيرين المهمين لقسمة الكسور (القياس والمساحة). كما يجب أن يفهموا الفرق بين هذين التفسيرين من جهة والتفسير المعتاد لدى الأطفال وهو تفسير التوزيع من جهة أخرى.

تدريس العمليات على الكسور

قبل الانتقال إلى المرحلة الرمزية في إجراء العمليات على الكسور, لا بد للأطفال أن يكونوا أساسا مفاهيميا صلبا لهذه العمليات. كذلك لا بد من تقوية حس الأطفال بهذه العمليات ويتم هذا من خلال الأنشطة التي تركز على الاستدلال النوعي والتقدير.

وحتى يتم بناء الأساس المفاهيمي الصلب لا بد أن يمر التدريس بمرحلتين تسبقان المرحلة الرمزية وهما المرحلة المفاهيمية ومرحلة الربط.

المرحلة المفاهيمية

تعتبر هذه المرحلة مهمة جدا في تعلم التلاميذ للعمليات على الكسور وهي الأساس لاكتسابهم المهارات المبنية على الفهم. وعلى المعلم في هذه المرحلة أن يركز على:

أ- تزويد التلاميذ بفرص كثيرة لاستخدام طرقهم الخاصة بحل مسائل على الكسور.

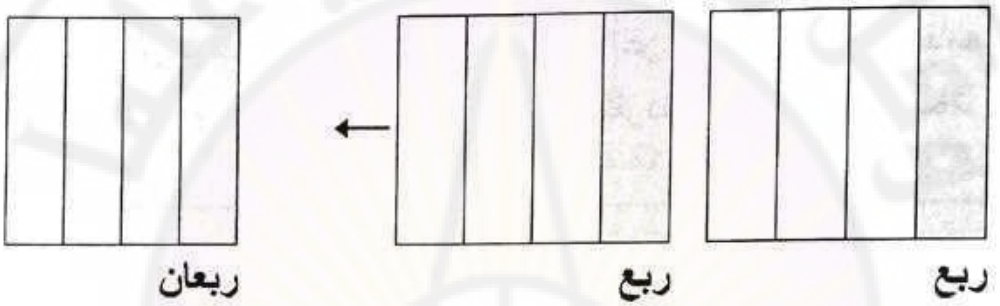
ب- استخدام مسائل واقعية والتركيز على الاستدلال النوعي.

جمع وطرح الكسور:

نعرض فيما يلي بعض الأنشطة التي تلائم المرحلة المفاهيمية في جمع وطرح الكسور.

أنشطة تلائم المرحلة المفاهيمية

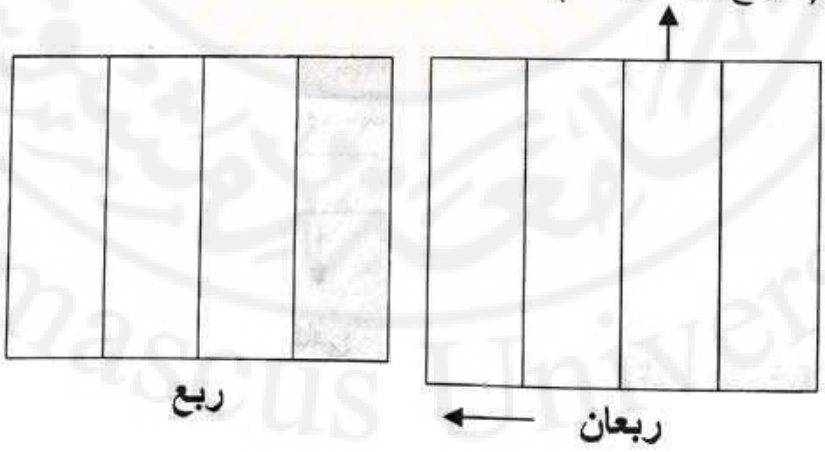
جمع الكسور ذات المقامات المتشابهة



الشكل (7-8): جمع الكسور المتشابهة

طرح الكسور ذات المقامات المتشابهة

(انتزع ربعا واحدا)



الشكل (7-9): طرح الكسور المتشابهة

لاحظ أن هذه الأنشطة يمكن أن تتم باستخدام رقائق الكسور أو النماذج الصورية.

نشاط (11): مثل العملية: $\frac{3}{6} + \frac{4}{6}$ بنفس الطريقة السابقة.

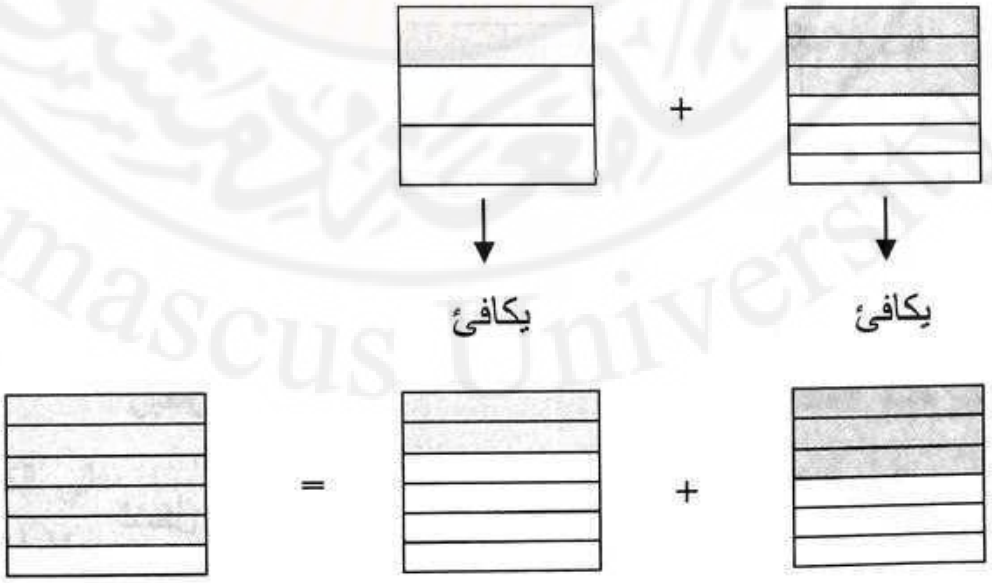
جمع وطرح الكسور ذات المقامات المختلفة

هل تقبل التحدّي؟

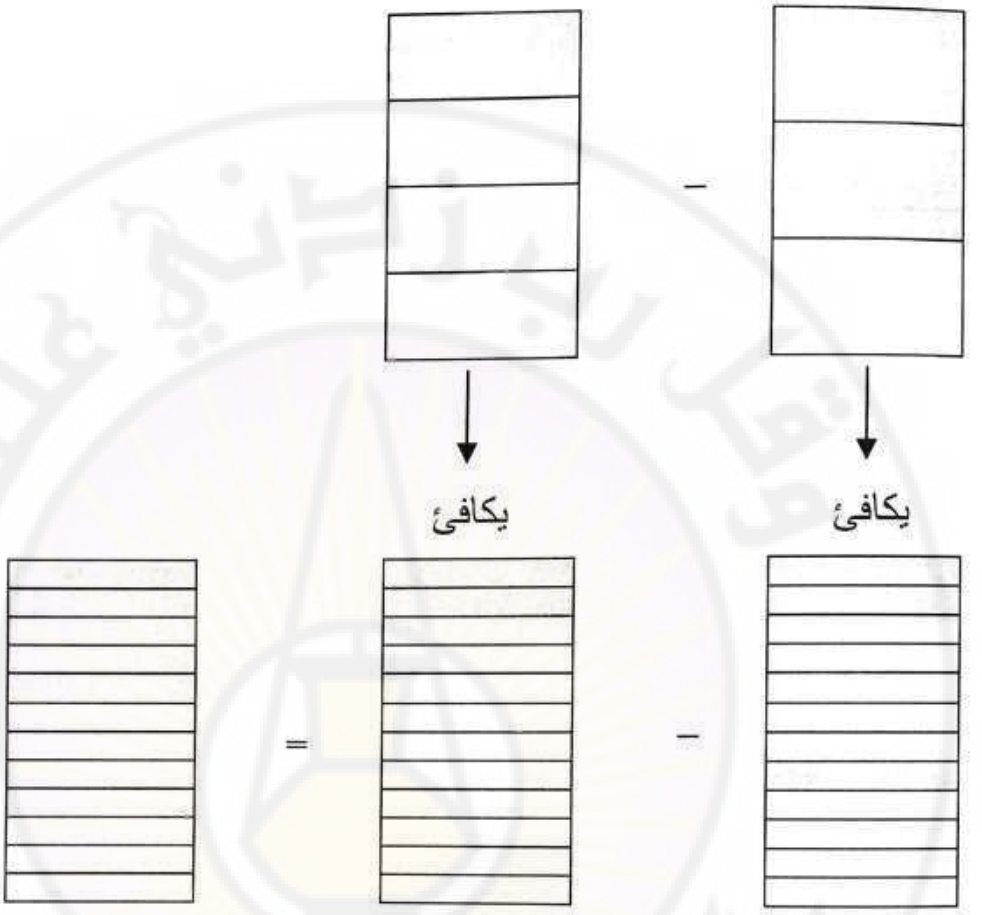
كيف يمكن أن توجه تفكير التلاميذ إلى البحث عن طريقة لتوحيد المقامات باستخدام رقائق الكسور أو النماذج الصورية؟ اعمل بمفردك, ثم ناقش مع مجموعتك ما تم التوصل إليه.

على عكس ما قد يتبادر إلى الأذهان فإن تعلم جمع وطرح الكسور ذات المقامات المختلفة عن طريق توحيد المقامات ليس بالأمر الصعب إذا كوّن التلاميذ فهما حقيقيا لمفهوم تكافؤ الكسور. حيث أن كل ما في الأمر هو إيجاد كسور مكافئة للكسور الأصلية لها نفس المقام. ويفضل أن يبدأ المعلم بكسور يكون أحد مقاماتها هو المضاعف المشترك الأصغر. الشكل (7-10) يوضح هذه العملية باستخدام رقائق الكسور أو النماذج الصورية.

(أ) إجراء العملية $\frac{3}{6} + \frac{1}{3}$:



(ب) إجراء العملية $\frac{2}{3} - \frac{1}{4}$:



الشكل (7-10)

ضرب الكسور:

سنناقش هنا الحالات التالية في ضرب الكسور ونقترح أن يتم التدريس بنفس التدرج:

- ضرب عدد في كسر
- ضرب كسر في عدد
- ضرب كسر في كسر
- ضرب الأعداد الكسرية

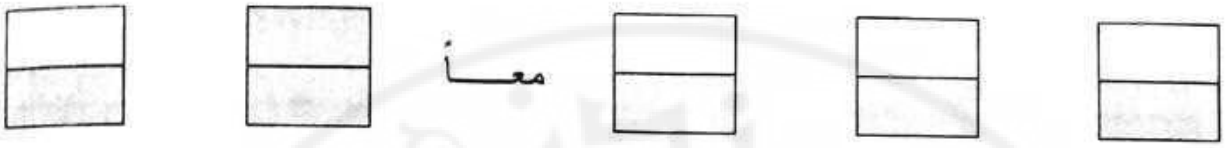
ضرب عدد في كسر

مسألة (1):

إذا كان لدى كل من غازي ونشأت وعلي نصف دينار, فما مجموع ما لدى الثلاثة

من الدنانير؟

يمكن تفسير هذا الموقف على أنه 3 مجموعات حجم كل منها يساوي نصف, ويمكن نمذجته كما في الشكل التالي:



إذن فالناتج هو 3 أنصاف($\frac{3}{2}$) أو $1\frac{1}{2}$.

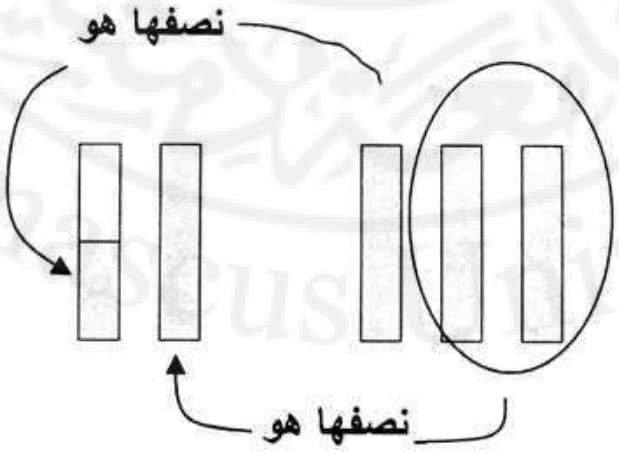
مع تكرار مسائل من هذا النوع, يكتشف التلاميذ بالاستقراء أن:

$$\text{أ} \times \frac{\text{ب}}{\text{ج}} = \frac{\text{أ} \times \text{ب}}{\text{ج}}$$

ضرب كسر في عدد

مسألة (2): قرر سامي أن يأخذ نصف قطع الحلوى الثلاثة التي أحضرتها أمه ويبقي نصفها لأخيه. فكم يأخذ من هذه القطع؟

يمكن تفسير هذا الموقف على أنه نصف مجموعة تحتوي على 3 عناصر. ويمكن تمثيله كما في الشكل التالي:



مع تكرار مسائل من هذا النوع, يكتشف التلاميذ بالاستقراء أن:

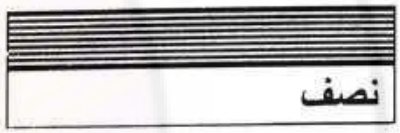
$$\frac{أ}{ب} \times ج = \frac{أ \times ج}{ب}$$

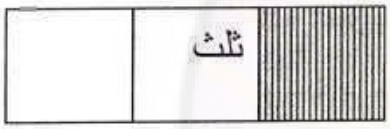
ضرب كسر في كسر

وهنا يستخدم معنى المجموعات المتكافئة كما سبق ذكره. ومن المفيد أن يتم نمذجة عملية الضرب باستخدام رقائق الكسور أو النماذج الصورية. وهناك طريقة معروفة باسم "المساحات المتعاكسة" تستخدم لهذا الغرض نوضحها في المثال التالي:

مثال (6): $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = ؟$

ارسم مستطيلين متطابقين وظلل نصف أحدهما وثلث الآخر باتجاهين متعاكسين كما في الشكل أدناه.





الآن, طبق المستطيل الأول على الثاني كما في الشكل أدناه, فيكون الناتج هو المنطقة المشتركة المظللة باتجاهين.

سؤال: ما علاقة هذه الطريقة بمعنى المجموعات المتكافئة؟

إن الخبرة التي يكتسبها التلاميذ باستخدام هذه الطريقة تؤهلهم إلى اكتشاف الخوارزمية (بعد المرور بمرحلة الربط) وهي:

$$\frac{أ}{ب} \times \frac{ج}{د} = \frac{أ \times ج}{ب \times د}$$

ضرب الأعداد الكسرية

مسألة (3): ما مساحة مستطيل بعداه $4\frac{1}{3}$ و $6\frac{2}{5}$ ؟

يمكن أن يستفاد هنا من خاصية توزيع الضرب على الجمع.

$$(\frac{2}{5} + 6) \times (\frac{1}{3} + 4) = 6\frac{2}{5} \times 4\frac{1}{3}$$

$$(\frac{2}{5} \times \frac{1}{3}) + (6 \times \frac{1}{3}) + (\frac{2}{5} \times 4) + (6 \times 4) =$$

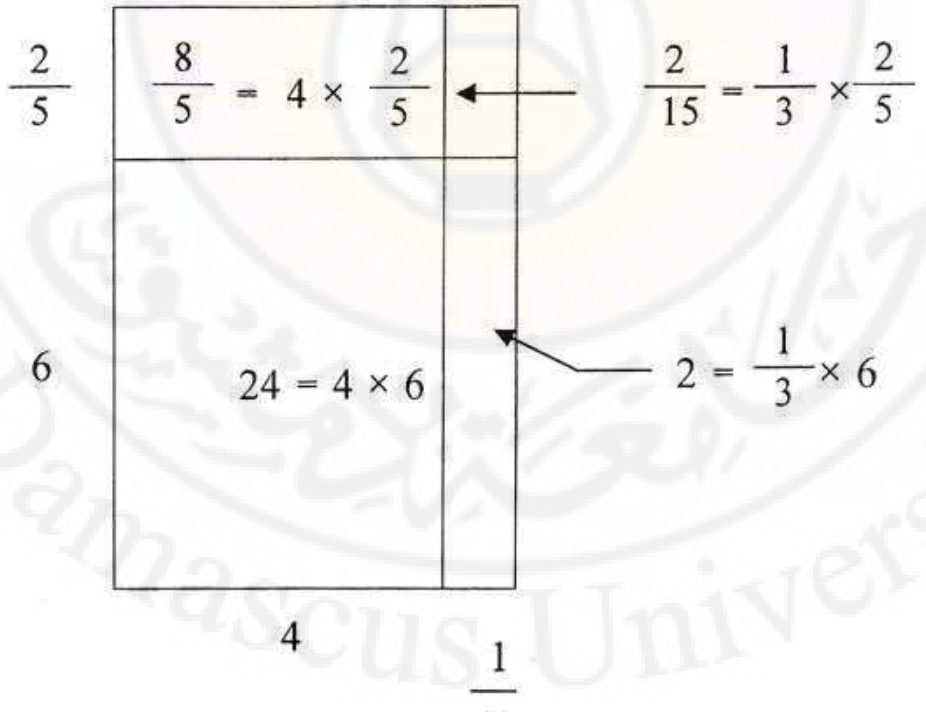
$$\frac{2}{15} + \frac{6}{3} + \frac{8}{5} + 24 =$$

$$\frac{2 + 24}{15} + 2 + 24 =$$

$$27\frac{11}{15} = \frac{26}{15} + 26 =$$

ولكن كيف يتم تقديم هذه الطريقة في المرحلة المفاهيمية؟

ارسم مستطيلا بعداه $4\frac{1}{3}$ و $6\frac{2}{5}$ وقسمه كما في الشكل التالي.



بجمع المساحات الجزئية فإن المساحة تساوي $27\frac{11}{15}$

قسمة الكسور:

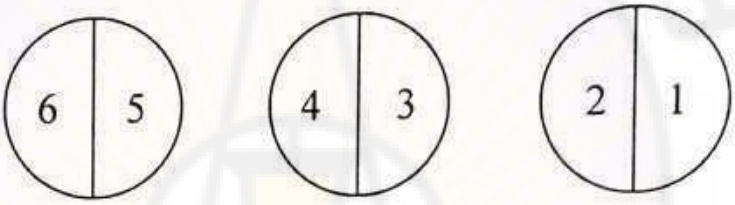
نتناول هنا الحالات التالية في قسمة الكسور ونقترح أ، يتم التدريس بنفس التدرج:

- قسمة عدد على كسر
- قسمة كسر على عدد
- قسمة كسر على كسر

قسمة عدد على كسر

مسألة (4): يراد توزيع 3 قطع من البيتزا على مجموعة من الأطفال بحيث تكون حصة كل منهم نصف بيتزا. فكم طفلا يمكن أن يحصل على حصة من البيتزا؟

أحد الحلول الممكنة:

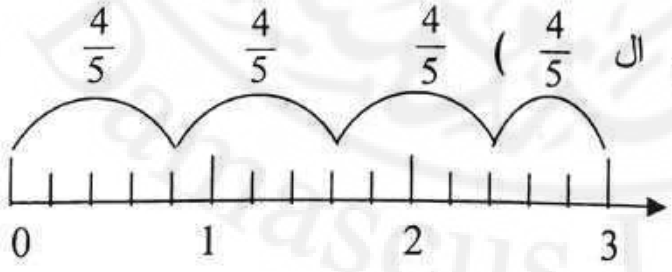


إذن $3 \div \frac{1}{2} = 6$

قسمة كسر على عدد

مسألة (5): سلك طوله 3 متر. يراد تقسيمه إلى قطع طول كل منها أربعة أخماس المتر. كم قطعة يمكن الحصول عليها؟

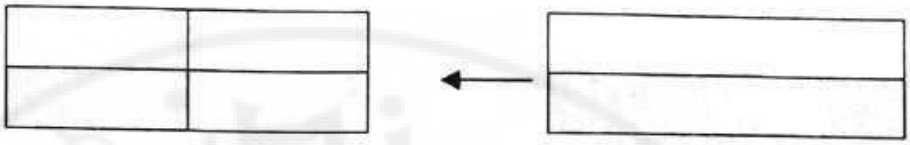
أحد الحلول الممكنة:



إذن الجواب هو: $3\frac{3}{4}$ أو $\frac{15}{4}$

مسألة (6): لدى راشد $\frac{1}{2}$ قطعة من الحلوى ويريد أن يتشارك بها مع علي بالتساوي. فما نصيب كل منهما؟

أحد الحلول الممكنة:



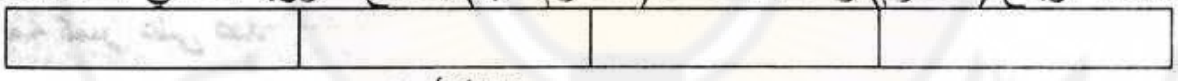
كل ما لدى راشد حصة راشد حصة علي

إذن: $\frac{1}{2} \div 2 = \frac{1}{4}$

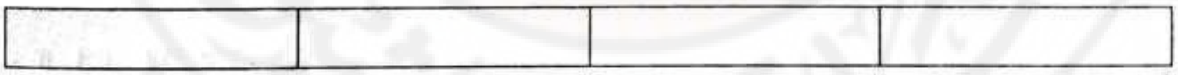
قسمة كسر على كسر

وهنا أيضاً تلعب رقائق الكسور والنماذج الصورية دوراً كبيراً في بناء أساس مفاهيمي لعملية القسمة على الكسور. تذكر أن معنى "القياس" في القسمة يساوي بين تعبير مثل (ما ناتج قسمة ثلاثة أرباع على نصف؟) وتعبير مثل (كم نصفاً في ثلاثة أرباع؟). بهذا الفهم لعملية القسمة, يمكن حل هذه المسألة كما يلي:

مثل ثلاثة أرباع (المقسوم) وكذلك النصف (المقسوم عليه) بنماذج صورية كما في الشكل أدناه.



ثلاثة أرباع

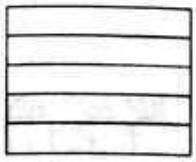


نصف

من خلال الشكل, كم نصفاً في ثلاثة أرباع؟ واضح أن الإجابة هي واحد ونصف.

مسألة (7): ما ناتج $\frac{2}{5} \div \frac{1}{5}$ ؟

أحد الحلول الممكنة: مثّل $\frac{2}{5}$ كما في الشكل أدناه.



كم $\frac{1}{5}$ في $\frac{2}{5}$ ؟ من خلال الرسم, الجواب: 2.

مسألة (8): ما ناتج $\frac{3}{4} \div \frac{1}{8}$ ؟

أحد الحلول الممكنة: مثّل الكسرين كما في الشكل أدناه.

$\frac{1}{8}$ $\frac{3}{4}$

والآن جزئ الشكلين إلى نفس العدد من الأجزاء.

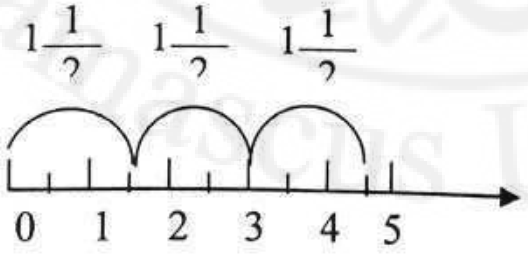
($\frac{6}{8}$ تكافئ $\frac{3}{4}$)

$\frac{1}{8}$ $\frac{6}{8}$

كم $\frac{1}{8}$ في $\frac{6}{8}$ ؟ الجواب: 6

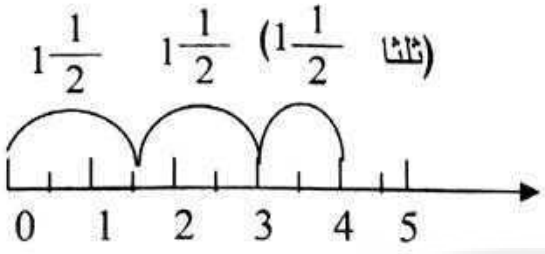
قسمة الأعداد الكسرية

مسألة (9): كم $1\frac{1}{2}$ في $4\frac{1}{2}$ ؟



باستخدام خط الأعداد نجد أن الجواب هو 3

مسألة (10) : كم $1\frac{1}{2}$ في 4 ؟



باستخدام خط الأعداد نجد أن الجواب هو $2\frac{2}{3}$ أو $\frac{8}{3}$

كيف يمكن حل المسألتين السابقتين باستخدام رقائق الكسور ؟

مرحلة الربط

تمثل هذه المرحلة جسرا بين المرحلة المفاهيمية والمرحلة الرمزية. وفيها يجب أن يركز المعلم على الأمور التالية:

أ- تشجيع التلاميذ على تمثيل المسائل وحلولها بالرموز.

ب- عرض تعابير رمزية والطلب من التلاميذ تكوين مسائل كلامية أو مواقف تمثل التعابير الرمزية.

ج- مساعدة التلاميذ على فهم العلاقات بين العمليات , على سبيل المثال فهم أن عملية القسمة هي عكس عملية الضرب.

د- مساعدة التلاميذ على فهم أن التعبير الرمزي يمكن أن يمثل عددا كبيرا من المواقف المختلفة.

ه- للتأكد من فهم التلاميذ, يجب تشجيعهم على استخدام مواد (العاب) غير تلك التي اعتادوا عليها, لحل المسائل.

و- استخدام كسور لا تزيد مقاماتها عن 12.

المرحلة الرمزية واستخدام الخوارزميات

بعد أن يكون التلاميذ قد كونوا أساساً مفاهيمياً صلباً في العمليات على الكسور من خلال العمل برقائق الكسور والنماذج الصورية, وبعد أن يكونوا قد ربطوا بين استراتيجياتهم الخاصة والرموز, فإنهم يصبحوا جاهزين للمرحلة الرمزية. وفي هذه المرحلة, يجب أن ينصب اهتمام المعلم على ما يلي:

أ- مساعدة التلاميذ على اكتشاف الخوارزميات الرسمية أو خوارزميات خاصة بهم

للعمليات على الكسور. ويتم تشجيع التلاميذ على ذلك من خلال دعوتهم إلى إيجاد طرق مختصرة للحل بدلا من طرقهم الطويلة والتي تأخذ وقتا طويلا.

ب- التركيز على فهم الخوارزمية , فلا يجوز تعليم التلاميذ على تطبيق الخوارزميات بشكل آلي دون فهم كل خطوة فيها. وهذا يفيد أولا في إفهام التلاميذ أن الرياضيات ليست موضوعا سحريا وثانيا إذا فهم التلاميذ الخوارزميات فسيكونون أقدر على تطبيقها بفاعلية.

جمع الكسور المتشابهة:

بشكل عام, لا يواجه التلاميذ مشكلة في جمع الكسور المتشابهة, حيث أن مهمتهم في هذه المرحلة تقتصر على ترميز ما تم ممارسته بالمواد المحسوسة وشبه المحسوسة. وهم سرعان ما يكتشفون أن الكسور العادية تجمع كما يلي:

$$\frac{أ}{ب} + \frac{ج}{ب} = \frac{أ + ج}{ب}$$

كذلك, وبتوجيه من المعلم, يتوصل التلاميذ إلى خواص عملية الجمع وهي:

1- خاصية الانغلاق.
2- الخاصية الابدالية.
3- الخاصية التجميعية.
4- وجود عنصر محايد وهو الصفر.

جمع الكسور ذات المقامات المختلفة:

بعد أن يكون التلاميذ قد مارسوا توحيد المقامات بشكل حسي أو شبه حسي, يصبح من الضروري أن يطوروا هذه المهارة رمزياً. ويمكن استخدام صفوف التكافؤ في هذا الصدد.

مثال (7) : $\frac{1}{3} + \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}$ ، $\frac{2}{4}$، $\frac{3}{6}$ ، $\frac{4}{8}$ ، .....

$$\frac{1}{3} \ ، \ \frac{2}{6} \ ، \ \frac{3}{9} \ ، \ .....$$

خذ الكسرين اللذين لهما نفس المقام:

$$\frac{5}{6} = \frac{2}{6} + \frac{3}{6}$$

بعد ذلك يجب تعلم توحيد المقامات عن طريق إيجاد المضاعف المشترك الأصغر. المثال التالي يوضح خوارزمية إيجاد المضاعف المشترك الأصغر للأعداد 10, 8, 15, 5:

5	15	8	10
3	3	8	2
2	1	8	2
4	1	4	1
	1	1	1

م.م.أ = 5× 3× 2× 4= 120

نشاط (12):

باستخدام نفس الخوارزمية, أوجد المضاعف المشترك الأصغر للأعداد 20, 14, 9, 6.

في حال أن الخوارزمية السابقة بدت صعبة للتلاميذ, فإنه بالإمكان توجيههم إلى اكتشاف الطريقة التالية والتي نوضحها من خلال إيجاد المضاعف المشترك الأصغر للأعداد 4, 6, 9:

العدد	2 ×	3 ×	4 ×	5 ×	6 ×	7 ×	8 ×	9 ×	10 ×
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
6	12	**18**	24	30	36	42	48	54	60
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90

لاحظ أن العدد الأول الذي تكرر في جميع سطور الجدول هو العدد 36.

نشاط (13):

استخدم الجداول الإلكترونية (مايكروسوفت إكسل مثلاً) لإيجاد المضاعف المشترك الأصغر للأعداد 11, 17, 25, 38.

طرح الكسور

وهنا يتم اتباع نفس الخطوات المستخدمة في تعليم جمع الكسور حيث أن العمليتين متشابهتان جداً.

ضرب الكسور

إن قاعدة ضرب الكسور سهلة بالنسبة للتلاميذ حيث أنها تتضمن ببساطة ضرب البسوط ببعضها وضرب المقامات ببعضها. وكما ذكرنا سابقاً, فإن نموذج المساحات المتعاكسة يهيئ الأرضية المفاهيمية لتعلم هذه القاعدة. يتبقى أن يمهر التلاميذ في استخدام القاعدة واكتشاف خواص الضرب وهي:

1- خاصية الانغلاق.
2- خاصية التبديل.
3- خاصية التجميع.
4- العنصر المحايد هو 1.
5- النظير الضربي للعدد هو مقلوبه.
6- خاصية توزيع الضرب على الجمع.

قسمة الكسور العادية

كما هو في العمليات الأخرى, فإنه يتم الاستفادة من المرحلتين المفاهيمية والربط في اكتشاف التلاميذ لقواعد القسمة. وهناك قاعدتان مشهورتان في قسمة الكسور وهما قاعدة المقام المشترك وقاعدة قلب المقسوم عليه ثم الضرب.

قاعدة المقام المشترك (توحيد المقامات)

وهذه القاعدة تقوم على إيجاد مقام مشترك للكسرين, ومن ثم قسمة بسط الكسر المقسوم على بسط الكسر المقسوم عليه.

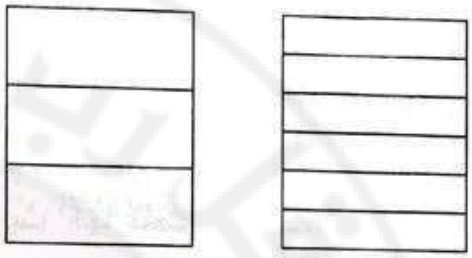
مثال (8): بأخذ $\frac{3}{4} \div \frac{2}{5}$ كمثال, فإن المقام المشترك يكون 20 , فيكون ناتج القسمة

هو $\frac{15}{20} \div \frac{8}{20} = 15 \div 8$.

ولتوضيح هذه القاعدة بالرسم, دعنا نأخذ المثال التالي:

مثال (9): ما ناتج $\frac{4}{6} \div \frac{1}{3}$ (كم ثلثا في أربعة أسداس؟)

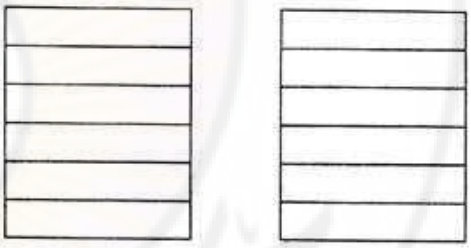
أولا: مثل الكسرين بالرسم.



$\frac{4}{6}$ $\frac{1}{3}$

والسؤال هو كم ثلثا في أربعة أسداس؟

ثانياً: جزئ الشكلين إلى نفس العدد من الأقسام (في هذه الحالة 6).



$\frac{1}{3}$ $\frac{2}{6}$

(تكافئ)

$\frac{4}{6}$ $\frac{2}{6}$

أعد صياغة السؤال ليصبح: كم سدسين في أربعة أسداس؟

ثالثاً: قسم الأربعة أسداس إلى مجموعات كل منها مكون من سدسين. نجد من خلال الرسم أن الناتج هو 2. ما الذي قمنا به للحصول على هذا الناتج؟

الجواب: قسمنا 4 على 2. أي قسمنا بسط المقسوم على بسط المقسوم عليه.

بالطبع, فإنه من غير المتوقع أن يتوصل التلاميذ إلى هذا الاستنتاج من خلال مثال

واحد. فقد يحتاجون إلى عدة أمثلة ليتوصلوا إليه بالاستقراء.

قاعدة قلب المقسوم عليه ثم الضرب

وهذه القاعدة تقوم على قلب الكسر المقسوم عليه ثم إجراء عملية الضرب.

مثال (10):

$$\frac{3}{4} \div \frac{2}{5} = \frac{5}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{15}{2}$$

تقليديا فإن المعلم يقدم هذه القاعدة جاهزة للتلاميذ الذين بدورهم يحفظونها استظهاريا. والواقع أن هذه القاعدة يجب أن تكون واضحة للتلاميذ, أي أنه يجب أن يعرفوا كيف تم الوصول إليها. نقدم هنا 3 طرق مختلفة يمكن استخدامها للوصول إلى هذه القاعدة.

الطريقة (1):

استخدام قاعدة المقام المشترك في حل مجموعة من الأسئلة ومن ثم البحث عن طريقة مختصرة. فمثلا يمكن أن يطلب المعلم من التلاميذ العمل في المسائل التالية:

$$\frac{1}{3} \div \frac{1}{4} = \frac{4}{3}$$

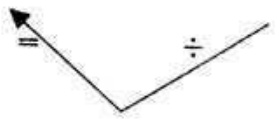
$$\frac{1}{5} \div \frac{2}{3} = \frac{3}{10}$$

$$\frac{2}{7} \div \frac{3}{4} = \frac{8}{21}$$

$$\frac{4}{6} \div \frac{3}{5} = \frac{20}{18}$$

وبتشجيع التلاميذ على التأمل في هذه الأسئلة وحلولها , قد يتوصل بعضهم إلى الملاحظة التالية:

$$\frac{\text{أ}}{\text{ب}} \quad \frac{\text{ج}}{\text{د}} \quad \frac{\text{أ} \times \text{د}}{\text{ب} \times \text{ج}} \quad \frac{\text{أ}}{\text{ب}} \quad \frac{\text{د}}{\text{ج}}$$



Damascus University

الطريقة (2):

استخدام قاعدة الضرب في 1. وتبدأ هذه الطريقة بأن ينوه المعلم إلى أن تعبيرات مثل أ ÷ ب يمكن كتابتها على الشكل $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$. ومن ثم يطلب من التلاميذ استخدام هذه القاعدة في كتابة تعابير مثل:

$$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \div \frac{1}{2}$$

والآن يمكن استخدام قاعدة الضرب في 1 كما يلي:

$$\frac{\frac{3}{1} \times \frac{1}{2}}{\frac{3}{1} \times \frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{3}{1} \times \frac{1}{2} =$$

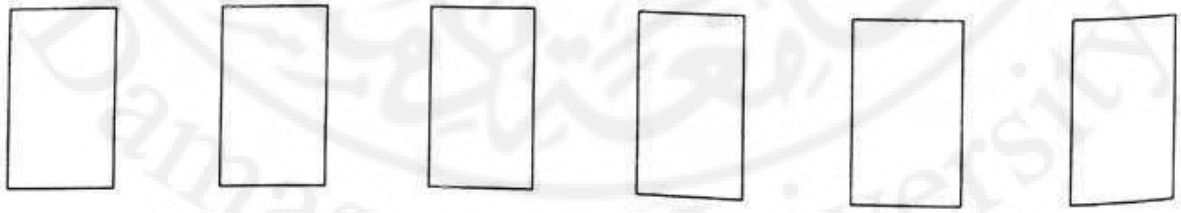
الطريقة (3): تمثيل الكسور بالرسم

نوضح هذه الطريقة بالمثالين التاليين:

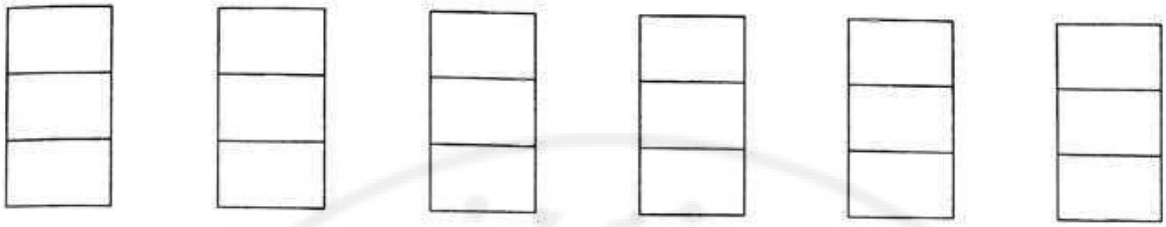
مثال (11): $6 \div \frac{2}{3} = ?$ أي كم $\frac{2}{3}$ في 6 ؟

أحد الحلول الممكنة:

1- مثل 6 برسم 6 مستطيلات كما في الشكل التالي:



2- قسم هذه المستطيلات إلى أثلاث (لأن المقسوم عليه أثلاث), كما في الشكل التالي:



كم ثلثا لديك؟ الجواب: 18 أي 6 × 3.

باستخدام معنى القياس للقسمة, ما حجم المجموعة المطلوبة بالأثلاث؟ الجواب: اثنان.

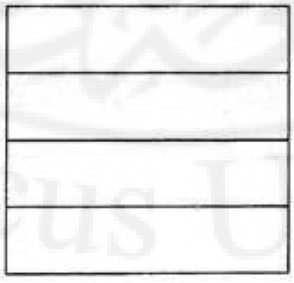
3- اقسم 18 على 2 فيكون الناتج 9

في مثل هذا المثال تكون الطريقة واضحة تماما, وبالتالي فإنه ينصح باستخدام مثل هذه الأمثلة في بادئ الأمر, أي الأمثلة التي يكون فيها المقسوم عددا تاما.

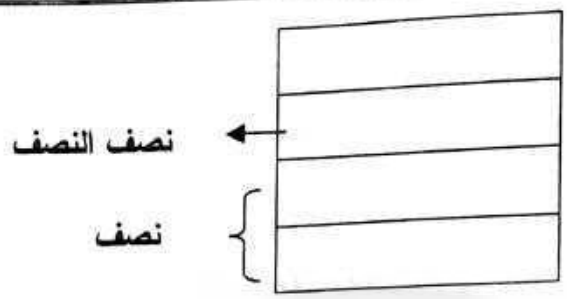
مثال (12): $\frac{3}{4} \div \frac{1}{2} =$ ؟ أي كم نصف في ثلاثة أرباع؟

أحد الحلول الممكنة:

1- مثل $\frac{3}{4}$ بالرسم كما في الشكل التالي:



2- قسم الثلاثة أرباع إلى أنصاف كما في الشكل التالي:



كم نصفا لديك؟ الجواب: واحد ونصف، أي $\frac{3}{4} \times 2$.

باستخدام معنى القياس للقسمة, ما حجم المجموعة المطلوبة (بالأنصاف)؟

الجواب: واحد (أي نصف واحد).

3- اقسم $1\frac{1}{2}$ على 1 فيكون الناتج $1\frac{1}{2}$.

الأنشطة وأسئلة التقويم

1- هناك 4 معان للعدد النسبي. اذكرها وأعط مثالاً على كل منها.

2- قارن بين الأعداد التامة والكسور العادية من حيث:
   أ- الوحدات
   ب- التمثيل الرمزي
   ج- القيمة
   د- العدد التالي
   ه- ترتيب الأعداد

3- ما أهم الأسباب التي تساهم في صعوبة فهم التلاميذ للكسور العادية؟

4- يقترح هذا الفصل خطة سباعية لتعليم الكسور العادية. وضح مراحل هذه الخطة.

5- وضح أربع طرق مختلفة لتمثيل الكسر العادي.

6- صمم نموذجاً ماديا وآخر صورياً لتوضيح تكافؤ الكسور.

7- كيف يمكن تفسير $\frac{1}{4} \times \frac{1}{2}$ باستخدام المعاني التالية:
   أ- المجموعات المتكافئة
   ب- المساحة
   ج- المعدل

8 - كيف يمكن تفسير $4 \div \frac{1}{3}$ باستخدام المعنيين التاليين:
   أ- القياس
   ب- المساحة

9- صمم نشاطا يلائم المرحلة المفاهيمية في كل من الحالات التالية:
   أ- جمع الكسور المتشابهة
   ب- طرح الكسور المتشابهة
   ج- ضرب الكسور
   د- قسمة الكسور

10- استخدم مايكروسوفت إكسل لإيجاد المضاعف المشترك الأصغر للأعداد 9، 15، 24، 36.

11- وضح استخدام نماذج المساحة في اكتشاف خوارزمية ضرب الكسور العادية.

Damascus University

مراجع الفصل

Behr, M. J., Lesh, R., Post, T., & Lesh, R. (1992). Rational number, ratio, and proportion. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 296-333). New York: Macmillan.

Behr, M. J., &Post, T. R. (1988). Teaching rational number and decimal concepts. In T. R. Post (Ed.), *Teaching mathematics in grades k-8*. Boston: Allyn and Bacon.

Cathcart, W. G., Pothier, Y. M., Vance, J. H., & Bezuk, N. S. (2001). *Learning Mathematics in Elementary and Middle Schools* (2nd ed.). Ohio: Merrill Prentice Hall.

Mack, N. K. (1990). Learning fractions with understanding : Building on informal knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education, 21*, 16-31.

National Council of Teacher of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School mathematics*. Reston, VA: Author.

Ohanian, S. (1992). *Garbage Pizza, Patchwork, and math magic: Stories about teachers who love to teach and children who love to learn.* New York: W. H. Freeman & Company.

Ott, J. M. (1990). A united approach to multiplying fractions. *Arithmetic Teacher, 37*(7), 47-49.

Sophian, C., & McCorgray, P. (1994). Part-whole knowledge and early arithmetic problem-solving. *Cognition and Instruction*, 12, 3-33.

Steffe, L. P., Olive, J., Battista, M. T., & Clements, D. H. (1991). The problem of fractions in the elementary school. *Arithmetic Teacher*, 38(9), 22-24.

Streenfland, L. (1993). Fractions: A realistic approach. In T.P. Carpenter, E. Fennema, & T. A. Romberg (Eds.), *Rational numbers: An integration of research* (pp. 289-325). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Van de Walle, J. A. (2001). *Elementary and Middle School Mathematics: Teaching developmentally* (4th ed.). New York: Longman.

8

الفصل الثامن

تعليم الكسور العشرية

- المعايير المتعلقة بالكسور العشرية
- أنواع الكسور العشرية
- صعوبات تعلم الكسور
- تقديم مفهوم الكسر العشري
- تكافؤ الكسور العشرية
- تحويل الكسر العشري إلى كسر عادي
- تحويل الكسر العادي إلى كسر عشري
- الأنشطة وأسئلة التقويم
- مراجع الفصل

الأهداف التربوية

بعد دراسة هذا الفصل، يتوقع من الطالب أن:

1- يناقش المعايير المتعلقة بالكسور العشرية.

2- يتعرف أنواع الكسور العشرية.

3- يستخدم طرقاً مختلفة لتقديم مفهوم الكسر.

4- يناقش صعوبات تعلم الكسور العشرية

5- يصمم أنشطة توضح تكافؤ الكسور العشرية.

6- يختار ويستخدم طرقاً مختلفة في تعليم تحويل الكسر العشري إلى كسر عادي والعكس.

7- يصمم مسائل كلامية على الكسور العشرية.

Damascus University

الفصل الثامن
تعليم الكسور العشرية

المعايير المتعلقة بالكسور العشرية[1]

الثالث – الخامس

يفهم الأعداد، وطرق تمثيلها والعلاقات فيما بينها، والأنظمة العددية.	– يدرك ويكون أشكالا مكافئة للمألوف من الكسور العادية والكسور العشرية والنسب المئوية.
يحسب بطلاقة ويعمل تقديرات معقولة.	– يطور ويستخدم النماذج التصويرية، بنشماركي، والأشكال المكافئة ليضيف ويطرح المألوف من الكسور والأعداد العشرية.

السادس – الثامن

يفهم الأعداد، وطرق تمثيلها والعلاقات فيما بينها، والأنظمة العددية.	– يتعامل بمرونة مع الكسور والأعداد العشرية والنسب المئوية، لحل المشكلات. – يقارن ويرتب الكسور والأعداد العشرية والنسب المئوية بكفاءة ويجد مواقعها التقريبية على خط الأعداد.
يفهم معاني العمليات وكيف ترتبط ببعضها البعض.	– يفهم معنى وتأثير العلميات الحسابية على الكسور والأعداد العشرية والأعداد الصحيحة. – يستخدم الخواص التجميعية والابدالية للجمع والضرب

(1) Reprinted with permission from [Principles and Standards for School Mathematics], copyright [2000] by the National Council of Teachers of Mathematics. All right reserved.

	وتوزيع الضرب على الجمع ليبسط الحسابات على الأعداد الصحيحة والكسور والأعداد العشرية.
يحسب بطلاقة ويعمل تقديرات معقولة.	- يختار طرقا وأدوات ملائمة للحساب مع الكسور والأعداد العشرية من ضمن الحسابات الذهنية، التقدير، الآلات الحاسبة أو الحواسيب، الورقة والقلم، اعتمادا على الموقف و يطبق الطرق المختارة - يطور ويحلل خوارزميات للحسابات على الكسور، والأعداد العشرية والأعداد الصحيحة وينمي طلاقة في استخدامها.

إن التعامل بالكسور العشرية يعتبر طريقة أسهل وأكثر ملاءمة من التعامل بالكسور العادية. فمقارنة الكسور العشرية على سبيل المثال اسهل بكثير من مقارنة الكسور العادية. كذلك فان العمليات الحسابية على الكسور العشرية هي الأخرى أسهل من تلك على الكسور العادية.

أنواع الكسور العشرية

كما هو معلوم فالأعداد النسبية هي تلك التي تكتب على الصورة $\frac{أ}{ب}$ حيث أ, ب عددان صحيحان و ب لا تساوي صفراً. وبالتالي فالناتج إما أن يكون كسراً عشرياً منتهياً أو كسرا عشريا دورياً. أما الأعداد غير النسبية (Irrational Numbers) فيمكن التعبير عنها جميعها بكسور عشرية لا منتهية وغير متكررة.

والكسور العشرية المنتهية هي تلك التي تقسم بسوطها على مقاماتها دون باق مثل: $\frac{1}{5}$ =0.2 والكسور العشرية الدورية هي التي ينتج عن قسمة بسوطها على مقاماتها باق. وفي هذه الحالة فان الباقي يشكل دورة متكررة غير منتهية مثل $\frac{1}{3}$ = 0.3 والباقي 1 = 0.33 والباقي 1 = 0.333 والباقي 1 وهكذا. أما الكسور العشرية غير المتكررة اللامنتهية فهي التي لا تنتج نمطاً متكرراً مثل الجذر التربيعي للعدد 2 والذي يمكن تمثيله بالكسر العشري (1.414213562000).

صعوبات تعلم الكسور العشرية

غالباً ما يواجه التلاميذ صعوبات في تعلم الكسور العشرية, ويعود السبب في ذلك إلى الطبيعة التقليدية لتدريس هذا الموضوع. ومن الصعوبات الشائعة في تعلم الكسور العشرية عدم إدراك الترابط بينها وبين الكسور العادية, وعدم التمكن من مفهوم القيمة المكانية لخانات الكسر العشري, والخلط بين الطريقة المتبعة لمقارنة الأعداد الطبيعية مع تلك للكسور العشرية (على سبيل المثال عدم إدراك أن 0.2 = 0.20).

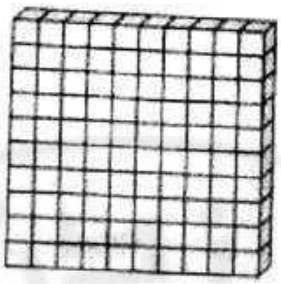
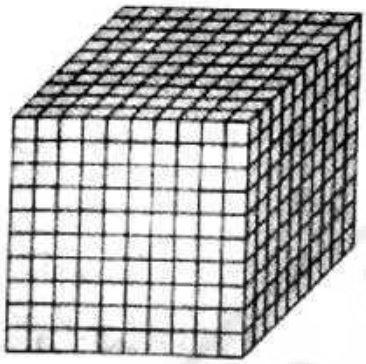
في العادة يبدأ تدريس الكسور العشرية في الصف الخامس الابتدائي, والواقع أن هذا الموضوع يمكن أن يقدم للتلاميذ قبل ذلك. فالأطفال يحتاجون إلى وقت طويل لتكوين أساس مفاهيمي قوي للكسور العشرية. كذلك فان شيوع استخدام الكسور العشرية وتعرض الأطفال لها في كثير من المواقف الحياتية يدعونا إلى تعريفهم بها مبكراً.

تقديم مفهوم الكسر العشري

يمكن تقديم مفهوم الكسر العشري للأطفال بعدة طرق منها مكعبات دينيز, القطع النقدية, خط الأعداد, نماذج المساحة, ونماذج الطول. فيما يلي نناقش كلاً من هذه الطرق على حدة.

مكعبات دينيز:

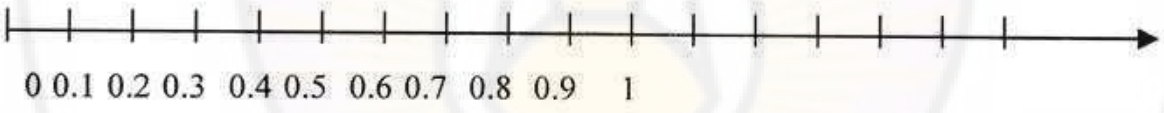
في العادة فان المكعب الكبير يمثل الألف والقطعة المسطحة تمثل المائة والقطعة الطويلة تمثل العشرة والمكعب الصغير يمثل الواحد. لو مثلت القطعة الطولية الواحد, ماذا يمكن اعتبار المكعب الصغير في هذه الحالة؟ لو مثلت القطعة المربعة الواحد, ماذا يمكن اعتبار كل من القطعة الطويلة والمكعب الصغير في هذه الحالة؟ لو مثل المكعب الكبير الواحد, ماذا يمكن اعتبار كل من القطعة المسطحة والقطعة الطويلة والمكعب الصغير في هذه الحالة؟ الإجابة على السؤال الأخير مبينة في الشكل(8-1) حيث يمثل المكعب الكبير 1 وتمثيل القطعة المستقيمة 0.1 وتمثل القطعة الطويلة 0.01 ويمثل المكعب الصغير 0.001.

أجزاء من الألف	أجزاء من المائة	أجزاء من العشرة	آحاد
			
1	1	1	1

الشكل (8-1): تمثيل العدد 1.111.

خط الأعداد

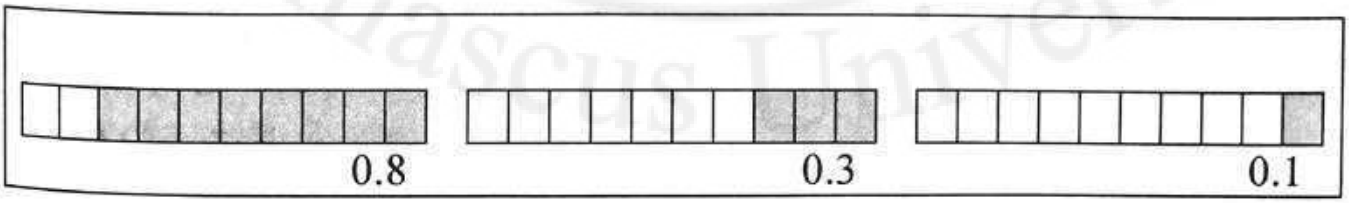
يمثل خط الأعداد وسيلة جيدة لتقديم مفهوم الكسر العشري. ويتم تقديم المفهوم عن طريق تقسيم خط الأعداد إلى أعشار كما مبين في الشكل أدناه.



الشكل (8-2)

نماذج المساحة:

تمثل نماذج المساحة طريقة أخرى لتقديم مفهوم الكسر العشري. وتقوم هذه الطريقة على رسم مستطيل يمثل الوحدة وتقسيمه إلى عشرة أجزاء أو مائة جزء أو أي عدد آخر من قوى العدد 10. الشكل أدناه يبين مثالاً على استخدام هذه النماذج.



الشكل (8-3): استخدام نماذج المساحة لتوضيح مفهوم الكسر العشري.

وحدات الطول المترية

نظراً لاستخدام وحدات الطول المترية بشكل شبه يومي, قد يبدأ الأطفال بالتعرف عليها في سن مبكرة. إذن فإنه من المناسب أن يستفيد المعلم منها في تقديم مفهوم الكسر العشري لتلاميذه. لاحظ أن:

1 كيلو متر= 1000 متر

1 متر = 0.001 كيلو متر

1 متر = 10 دسم

1 دسم = 0.1 متر

1 متر = 100 سم

1 سم = 0.01 متر

1 متر = 1000ملم

1 ملم = 0.001 متر

القطع النقدية

ربما تكون النقود من أكثر الأشياء التي نتعامل بها يومياً وبالتالي فهي مألوفة لدى الأطفال ويمكن توظيفها في تقديم مفهوم الكسر العشري لهم. لاحظ أن:

1 دينار = 10 دراهم = 100 قرش = 1000 فلس

1 درهم = 0.1 دينار

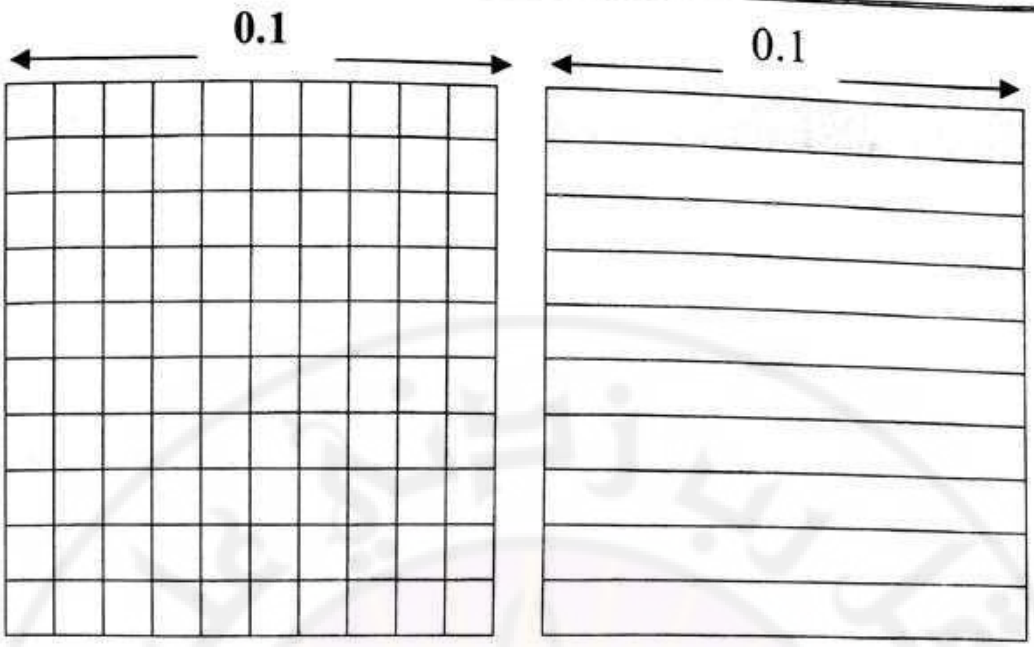
1 قرش = 0.01 دينار

1 فلس = 0.001 دينار

تكافؤ الكسور العشرية

إذا بدأ المعلم تدريس الكسور العشرية بالكسور التي مقاماتها قوى العدد 10 فلن يكون هناك صعوبة لدى الأطفال في إيجاد تكافؤات الكسور العشرية. فالطفل يكون قد تعلم سابقاً (عند دراسة الكسور العادية) أن $\frac{1}{10} = \frac{10}{100} = \frac{100}{1000}$.

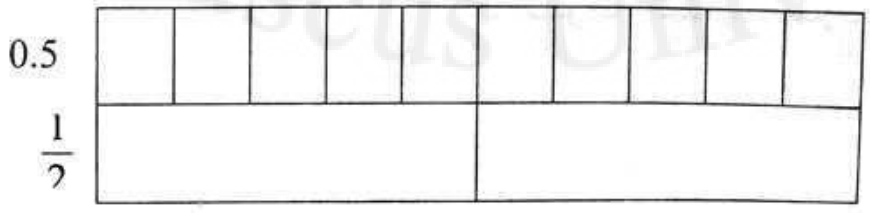
على سبيل المثال, فإنه من السهل أن يتعلم أن 0.1 = 0.10 = 0.100. لاحظ أن متابعة هذا النمط يقود الطفل إلى اكتشاف أن عدد الأصفار إلى اليمين لا يغير من قيمة الكسر العشري. الشكل (8-4) يوضح تكافؤ الكسرين العشريين 0.1 و 0.10.



الشكل (8-4)

تحويل الكسر العشري إلى كسر عادي

تعتبر عملية تحويل الكسر العشري إلى كسر عادي سهلة بالمقارنة مع عملية تحويل الكسر العادي إلى كسر عشري. حيث أن المطلوب هو فقط جعل الرقم يمين الفاصلة بسطا للكسر العادي أما بالنسبة للمقام فهو أحد قوى العدد 10 ويتم تحديد عدد الأصفار إلى يمين الواحد من خلال عدد الخانات إلى يمين الفاصلة في الكسر العشري. والواقع انه إذا قرأ التلميذ الكسر العشري بصورة صحيحة, سيقود ذلك تلقائيا إلى تحديد شكل الكسر العادي المكافئ. فمثلاً إذا قرأ التلميذ 0.5 بقوله خمسة بالعشرة فمن السهل أن يدرك أنها تكافئ $\frac{5}{10}$ والتي تقرأ خمسة على عشرة وتلعب النماذج الصورية دوراً هاماً في توضيح التكافؤ بين الكسر العشري والكسر العادي. الشكل (8-5) يوضح تساوي الكسر العشري 0.5 والكسر العادي $\frac{1}{2}$.



الشكل (8-5)

تحويل الكسر العادي إلى كسر عشري

هناك طريقتان لتحويل الكسر العادي إلى كسر عشري:

1- تحويل مقام الكسر العادي إلى 10 أو أي من قواها.

مثال (1): حول الكسر $\frac{2}{5}$ إلى كسر عشري.

$$\frac{2}{5} \times \frac{2}{2} = \frac{4}{10}$$

$$\frac{4}{10} = 0.4$$

مثال (2): حول الكسر $\frac{1}{4}$ إلى كسر عشري.

لاحظ أن العدد 4 ليس عاملاً للعدد 10 لكنه عامل للعدد 100.

$$\frac{1}{4} \times \frac{25}{25} = \frac{25}{100}$$

$$\frac{25}{100} = 0.25$$

2- قسمة البسط على المقام:

وتستخدم هذه الطريقة في حالة أن مقام الكسر المراد تحويله إلى كسر عشري لا يمكن تحويله إلى العدد 10 أو أحد قواه بضربه في عدد صحيح.

مثال (3) : حول الكسر $\frac{2}{3}$ إلى كسر عشري.

العدد 3 لا يعتبر عاملا لأي من قوى العدد 10 ولذلك نلجأ إلى عملية القسمة الطويلة.

$$
\begin{array}{r|l}
3 & 0{,}6666 \\
\hline
 & 20 \\
 & 18 \\
\hline
 & 20 \\
 & 18 \\
\hline
 & 20 \\
 & 18 \\
\hline
 & 2
\end{array}
$$

العمليات على الكسور العشرية

الجمع والطرح

يستحسن أن يبدأ الأطفال بحل مسائل على جمع الكسور العشرية وطرحها ذات طبيعة نوعية. بعدها يمكن أن يستخدم الأطفال موادا محسوسة لإجراء هذه العمليات باستخدام طرقهم الخاصة. بعد ذلك يجب على المعلم أن يشجع الأطفال على اكتشاف خوارزميات الجمع والطرح بناءً على معلوماتهم السابقة. وسواء استطاع الأطفال اكتشاف الخوارزميات بأنفسهم أو أن المعلم قام بتقديمها لهم فانه لا بد للمعلم أن يعطي الأطفال فرصا لرؤية التطابق بين خطوات الخوارزمية وطرقهم غير الرسمية في الحل. ويمكن تحقيق ذلك باستخدام نماذج المساحة أو خط الأعداد أو مكعبات دينز.

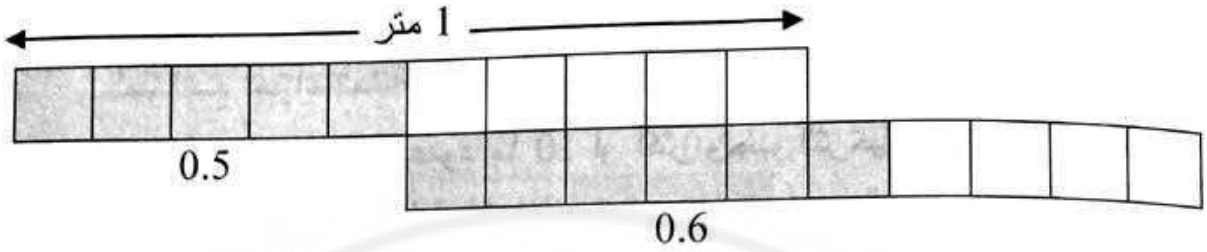
نماذج المساحة:

مثال (4):

طول سلك 0.5 من المتر. إذا وصل مع سلك آخر طوله 0.6من المتر, فكم يصبح طول السلكين معا؟

أحد الحلول الممكنة:

باستخدام النموذج أدناه يستطيع التلاميذ بسهولة أن يروا أن الناتج هو 1.1. أليس كذلك؟



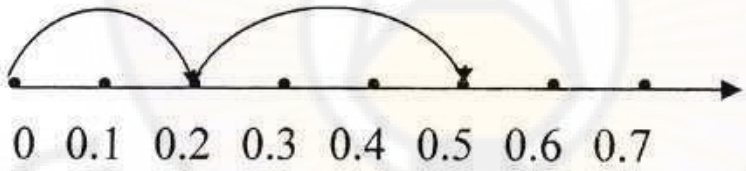
نشاط (1):

حل المثال السابق باستخدام مكعبات دينز.

خط الأعداد:

مثال (5): إذا كان هواة كرة السلة يمثلون 0.2من طلبة الصف وهواة كرة القدم يمثلون 0.3من طلبة الصف, فكم يمثل هواة الرياضتين من الصف؟

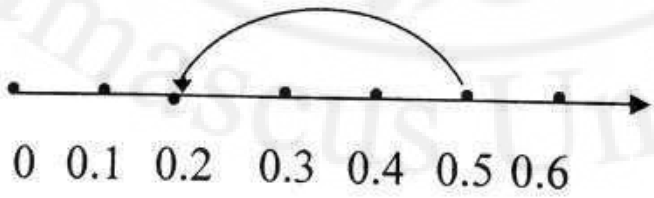
أحد الحلول الممكنة:



الناتج هو 0.5 .

مثال (6): سلك طوله 0.5 من المتر. قص منه 0.3 من المتر , فكم يتبقى منه؟

أحد الحلول الممكنة:



ومن الضروري التأكيد على أنه يجب على المعلم أن يوجه طلبته من خلال الأسئلة والمناقشة إلى اكتشاف الأفكار التالية:

1- أن عملية جمع الكسور العشرية قريبة جدا من عملية جمع الأعداد الطبيعية, وانه من المهم جدا أن تجمع الآحاد مع الآحاد , والأعشار مع الأعشار, وأجزاء المائة مع أجزاء المائة وهكذا.

2- إذا كان المجموع في عمود ما 10 أو اكثر وجب الترحيل كما في جمع الأعداد الطبيعية. كذلك تتم عملية الاستلاف تماما كما تتم في حالة الأعداد الطبيعية.

3- أن عملية الحمل تتم من أي عمود إلى العمود الذي يليه إلى اليسار وليس فقط من آحاد إلى عشرات أو من عشرات إلى مئات وهكذا. كما يجب التذكير بأن قيمة كل خانة هي 10 أضعاف قيمة الخانة المجاورة إلى اليمين.

4- كافة خصائص الجمع والطرح في الأعداد الطبيعية تكون صحيحة في حالة الكسور العشرية (مثل الخاصية الإبدالية والخاصية التجميعية لعملية الجمع).

الضرب:

يستحسن أن يبدأ تدريس ضرب الكسور العشرية باستخدام معنى المجموعات المتكافئة للضرب. على سبيل المثال فإنه من السهل على التلميذ أن يفسر التعبير 10×0.25 على أنه 10 مجموعات مقدار كل منها 0.25 ويمكن حل هذه المسالة بعدة طرق منها على سبيل المثال خط الأعداد, الجمع المتكرر و تحويل الكسر العشري إلى كسر عادي.

نشاط (2) : حل المسألة أعلاه بالطرق الثلاثة المذكورة.

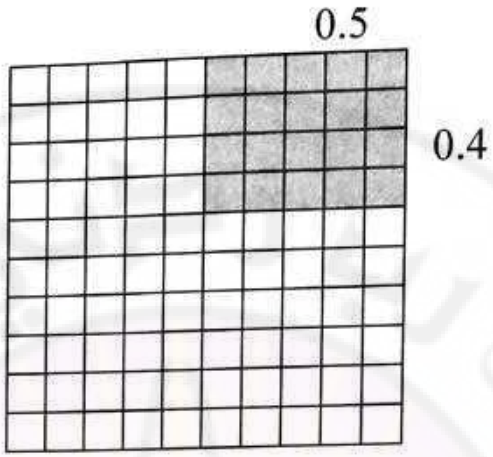
وعند ضرب عدد تام في عدد عشري, فإنه يفضل عادة أن تكون الأمثلة المستخدمة في البداية تتضمن قوى العدد عشرة وذلك لمساعدة التلاميذ على رؤية أن الفاصلة العشرية تتحرك منزلة واحدة إلى اليمين عند الضرب في عشرة ومنزلتين عند الضرب في مائة وهكذا.

كذلك فان معنى المساحة يمكن أن يستخدم في ضرب الكسور العشرية فالتعبير 0.4×0.5 يمكن أن يمثل مساحة منطقة مستطيلة طولها 0.5 وحدة وعرضها 0.4 وحدة. تأمل المثال التالي.

مثال (7): منطقة مستطيلة طولها 0.4 وحدة وعرضها 0.5 وحدة. ما مساحتها؟

لحل هذه المسألة, يمكن تمثيل المنطقة المستطيلة كما في الشكل أدناه وذلك بتظليل

منطقة مستطيلة داخل مربع الوحدة بحيث يكون طولها 0.4 وعرضها 0.5. ولإيجاد المساحة, فما علينا سوى عدّ المربعات الصغيرة المظللة والتي يمثل كل منها 0.01 وحدة مربعة.

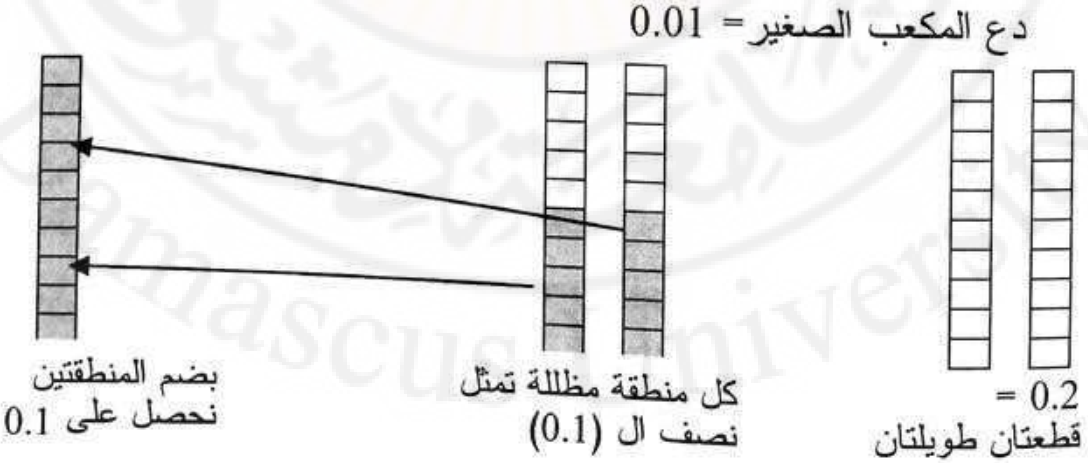


عدد المربعات الصغيرة المظللة = 20. إذن فالمساحة = 0.20 وحدة مربعة.

وكما هو الحال في العمليات الحسابية الأخرى فلا بد للأطفال أن يمارسوا ضرب الكسور العشرية عن طريق المواد المحسوسة لتكوين أساس مفاهيمي صلب قبل تعليمهم الخوارزميات الرسمية للضرب.

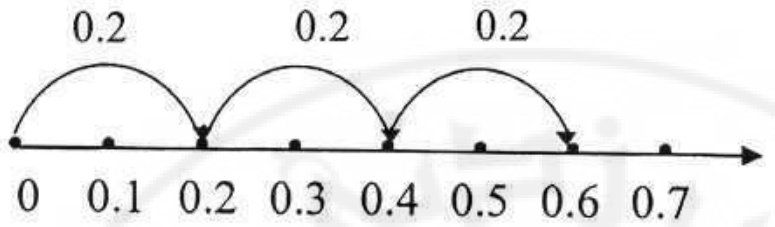
مثال (8): $0.5 \times 0.2 = ?$

أحد الحلول الممكنة: دع القطعة الطويلة = 0.1



مثال (9): استخدم خط الأعداد في إيجاد ناتج 3×0.2.

أحد الحلول الممكنة:



لاحظ أننا نستخدم الجمع المتكرر هنا لإيجاد ناتج الضرب. وفي المرحلة التي يكون التلميذ فيها قادرا على إجراء جمع الكسور العشرية رمزيا, فإنه لا يحتاج إلى استخدام خط الأعداد.

اكتشاف قاعدة وضع الفاصلة العشرية

يعتبر وضع الفاصلة العشرية في مكانها الصحيح من الصعوبات التي تواجه التلاميذ عند إجراء العمليات الحسابية على الكسور العشرية. وغالبا ما يكون السبب في ذلك هو الحفظ الآلي لقاعدة وضع الفاصلة العشرية. ويمكن للمعلم أن يشرك التلاميذ في عملية اكتشاف القاعدة من خلال الأمثلة والملاحظة ويفضل أن يكون ذلك باستخدام المواد المحسوسة أو الرسومات وباستخدام معنى المجموعات المتكافئة للضرب.

القسمة:

يجب تشجيع التلاميذ في البداية على تقدير الإجابة نوعيا بمعنى أن يجدوا ما إذا كان الناتج سيكون أكبر من المقسوم أم اقل منه. بعد ذلك يمكن الطلب من التلاميذ أن يقدروا الإجابة بالأرقام, وهنا يمكن أن يستخدم التلاميذ مهارات التقريب التي تعلموها عند دراسة الأعداد الطبيعية. وقبل الانتقال إلى المرحلة الخوارزمية لا بد للتلاميذ أن يمارسوا قسمة الكسور العشرية من خلال المواد المحسوسة والرسومات.

وعموماً فإنه يفضل اتباع التدرج التالي في تعليم القسمة:

- قسمة عدد تام على كسر عشري.
- قسمة كسر عشري على كسر عشري.
- قسمة كسر عشري على عدد تام.

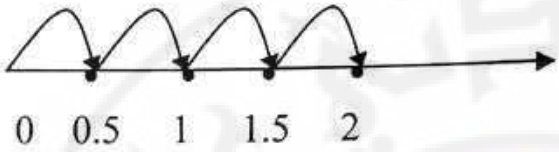
- قسمة عدد تام على عدد تام آخر أكبر منه.

0) قسمة عدد تام على كسر عشري

مثال (10) $2 \div 0.5 = ?$

بعض الحلول الممكنة:

أ) باستخدام خط الأعداد: كم 0.5 في 2؟



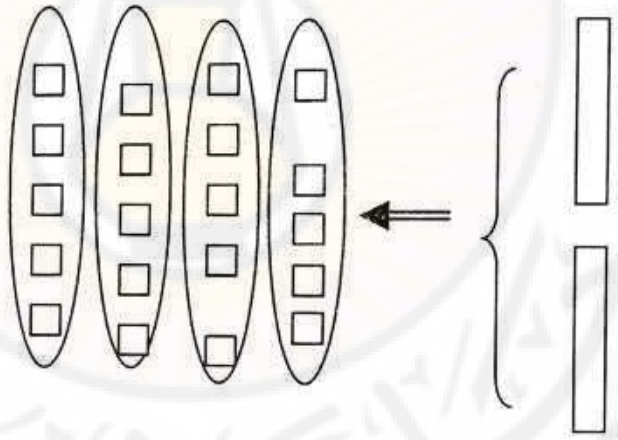
الناتج = 4

سؤال: أي من معاني القسمة استخدم هنا ؟

ب) قطع دينيز "معنى القياس": كم 0.5 في 2؟

على اعتبار أن القطعة الطويلة تمثل 1 فإن المكعب الصغير يمثل 0.1

كم 0.5 في هذه المجموعة؟



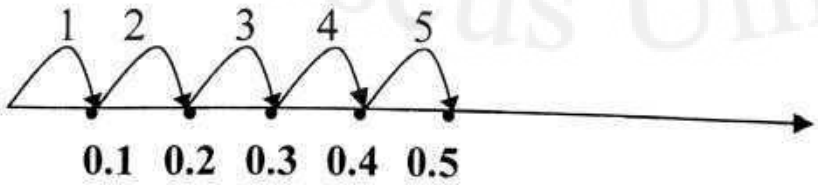
الجواب = 4

قسمة كسر عشري على كسر عشري

مثال (11): $0.5 \div 0.1 = ?$

أ) باستخدام خط الأعداد:

كم 0.1 في 0.5 ؟

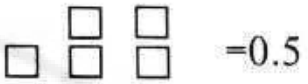


الجواب = 5 .

ب) باستخدام قطع دينيز " معنى القياس ".

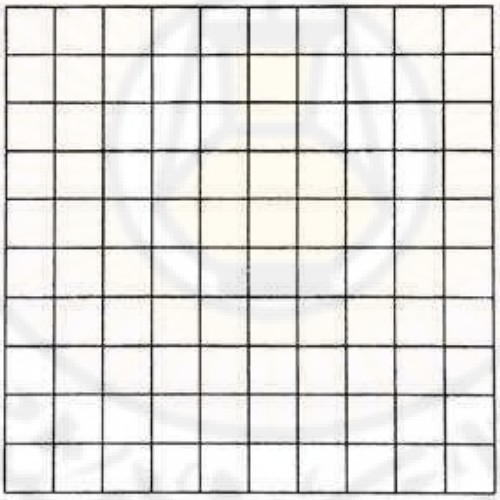
كم 0.1 في 0.5 ؟

دع القطعة الطويلة = 1 ⟸ المكعب الصغير = 0.1



وللإجابة على السؤال أعلاه (كم 0.1 في 0.5 ؟), نقوم بعد المكعبات الصغيرة والتي يمثل كل منها 0.1. إذن فالناتج هو 5.

كذلك يمكن تمثيل عملية قسمة الكسور العشرية من خلال نماذج المساحة. اعتبر أن طول ضلع المربع أدناه هو وحدة طول واحدة, أي أن مساحته هي وحدة مربعة. لاحظ أيضاً أن هذا المربع يحتوي على 100 مربع صغير بطول ضلع 0.1 وحدة ومساحة 0.01 وحدة مربعة.



كيف يمكن استخدام هذا النموذج لحل مسائل القسمة على الكسور؟

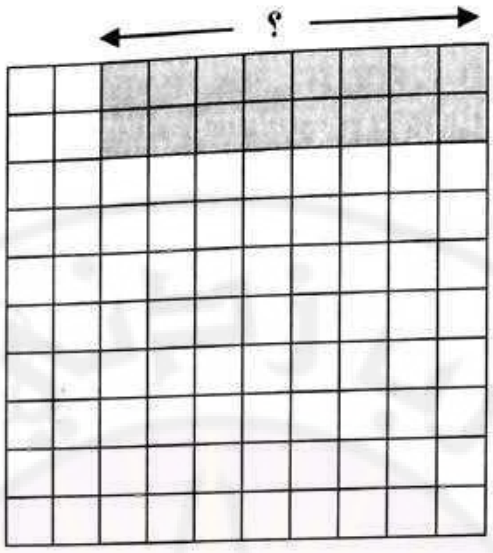
مثال (12):

مستطيل مساحته 0.16 وحدة مربعة وعرضه 0.2 وحدة. ما طول هذا المستطيل؟

أحد الحلول الممكنة:

بما أن المساحة تساوي 0.16 وحدة مربعة, إذن فإننا نحتاج إلى رسم مستطيل داخل مربع الوحدة مكون من 16 مربع صغير. لكننا نعلم أيضاً أن عرض هذا المستطيل هو

0.2 وحدة وهذا يجعل مهمتنا أكثر وضوحاً. إذن نرسم المستطيل كما في الشكل التالي:



يتبقى أن نجيب على السؤال الأساسي وهو: ما طول هذا المستطيل؟ وكما تلاحظ, فإن الإجابة سهلة حيث نحتاج فقط إلى عد المربعات الصغيرة على طول المستطيل وهي 8. وحيث أن طول كل منها هو 0.1 فإن طول المستطيل يكون 0.8.

نشاط (3) : حل المسألتين التاليتين بعد تحويلهما إلى مسألتين كلاميتين.

1) $0.12 \div 0.2$

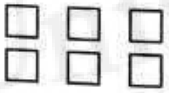
2) $1.2 \div 0.2$

قسمة كسر عشري على عدد تام

مثال (13): $0.6 \div 2 = ؟$

أحد الحلول الممكنة:

- دع القطعة الطويلة = 1 ⟸ المكعب الصغير = 0.1



قسّم هذه المجموعة إلى مجموعتين. ما نصيب كل مجموعة ؟

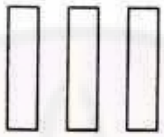
الجواب: 3 مكعبات صغيرة. أي 0.3.

قسمة عدد تام على عدد تام آخر أكبر منه

مثال (14): 3 ÷ 6 = ؟

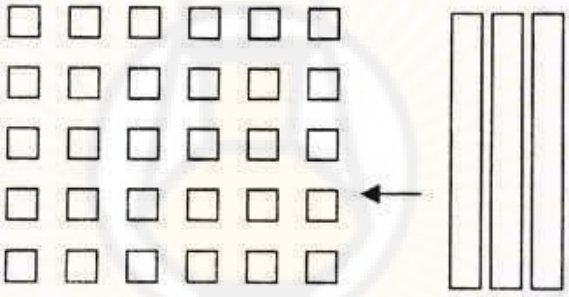
يمكن حل هذه المسألة باستخدام خوارزمية القسمة الطويلة. ولكن لابد من أساس مفاهيمي أولاً. لنستخدم قطع دينيز:

دع القطعة الطويلة = 1 , إذن المكعب الصغير يساوي 0.1.



3 = 3 قطع طويلة

وزع هذه القطع على 6 مجموعات. من الصعب عمل ذلك. إذن استبدل كل قطعة طولية بعشرة مكعبات صغيرة.



هل يمكن توزيع هذه القطع على 6 مجموعات ؟

نعم والإجابة هي 5 مكعبات صغيرة. أي 0.5.

مثال (15): 5 ÷ 6 = ؟

باستخدام قطع دينيز:

دع المكعب الكبير = 1 ⟸ 5 = 5 مكعبات كبيرة.

لكن 5 لا تقسم على 6. إذن استبدل المكعبات الكبيرة بقطع مسطحة واحصل على 50 منها. وزعها على 6 فتحصل كل مجموعة على 8 ويتبقى قطعتان مسطحتان. استبدلهما ب (20) قطعة طويلة, ووزعها على 6 فتحصل كل مجموعة على 3 ويتبقى قطعتان. استبدلهما بعشرين مكعباً صغيراً ووزعها على 6. فتحصل كل مجموعة على 3

ويتبقى مكعبان صغيران. توقف الآن. الناتج هو 8 قطع مسطحة + 3 قطع طويلة + 3 مكعبات صغيرة ويتبقى مكعبان صغيران.

الناتج هو 0.8 + 0.03 + 0.003 والباقي مكعبان صغيران.

الناتج = 0.833

لو قسمت كل مكعب صغير إلى 10 قطع وأعدت العملية. ماذا يحدث ؟

سؤال: متى نتوقف عن تقسيم القطع المتبقية إلى قطع أصغر وأصغر ؟

جواب: يعتمد هذا على مدى الدقة المطلوبة في الناتج.

ما الذي يمهد له مثل هذا النشاط؟

الأنشطة وأسئلة التقويم

1- وضح كيفية استخدام كل من الطرق التالية في تقديم مفهوم الكسر العشري.

أ- مكعبات دينز

ب- القطع النقدية

ج- خط الأعداد

د- نماذج المساحة

ه- نماذج الطول

و- وحدات الطول المترية

2- وضح استخدام نماذج المساحة في إيجاد ناتج 0.2 + 0.3 .

3- وضح استخدام مكعبات دينز في إيجاد ناتج 0.5 × 0.2 .

4- صمم نشاطا تقود فيه التلاميذ إلى اكتشاف قاعدة وضع الفاصلة العشرية عند ضرب كسرين عشريين.

5- وضح استخدام نماذج المساحة لإيجاد ناتج 0.15 ÷ 0.3

6- أوجد ناتج 3 ÷ 0.5 باستخدام الطرق التالية:

أ-خط الأعداد

ب-قطع دينز

7- أوجد ناتج 0.6 ÷ 0.2 باستخدام:

أ-خط الأعداد

ب-قطع دينز

مراجع الفصل

Cathcart, W. G., Pothier, Y. M., Vance, J. H., & Bezuk, N. S. (2001). *Learning Mathematics in Elementary and Middle Schools* (2nd ed.). Ohio: Merrill Prentice Hall.

National Council of Teacher of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School mathematics*. Reston, VA: Author.

Ohanian, S. (1992). *Garbage Pizza, Patchwork, and math magic: Stories about teachers who love to teach and children who love to learn.* New York: W. H. Freeman & Company.

Ott, J. M. (1990). A united approach to multiplying fractions. *Arithmetic Teacher, 37*(7), 47-49.

Owens, D. T., & Super, D. B. (1993). Teaching and learning decimal fractions. In D. T. Owens (Ed.), *Research issues for the classroom: Middle grades mathematics* (pp. 137-158). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Van de Walle, J. A. (2001). *Elementary and Middle School Mathematics: Teaching developmentally* (4th ed.). New York: Longman.

Wearne, D. Hiebert, J., & Taber, S. (1991). Fourth graders' gradual construction of decimal fractions during instruction using different physical representations. *Elementary School Journal, 91*(4), 321-341.

Damascus University

9

الفصل التاسع

تنمية مفاهيم النسبة والتناسب والنسبة المئوية

- المعايير المتعلقة بالنسبة والتناسب والنسبة المئوية
- النسبة
- التناسب
- النسبة المئوية
- الأنشطة وأسئلة التقويم
- مراجع الفصل

Damascus University

الأهداف التربوية

بعد دراسة هذا الفصل، يتوقع من الطالب أن:

1- يناقش المعايير المتعلقة بالنسبة والتناسب والنسبة المئوية.

2- يقارن بين النسبة والكسر العادي الذي يمثل جزء من كل.

3- يقدم أمثلة على العلاقات المختلفة التي تمثلها النسبة.

4- يفرق بين التناسب الطردي والتناسب العكسي.

5- يقدم مفاهيم النسبة والتناسب والنسبة المئوية بشكل ذي معنى.

6- يصمم أنشطة خاصة بكل من النسبة والتناسب والنسبة المئوية.

7- يصمم مسائل حياتية على النسبة والتناسب والنسبة المئوية.

Damascus University

الفصل التاسع
تنمية مفاهيم النسبة والتناسب والنسبة المئوية

المعايير المتعلقة بالنسبة والتناسب والنسبة المئوية[1]

الثالث - الخامس

يفهم الأعداد، وطرق تمثيلها والعلاقات فيما بينها، والأنظمة العددية.	- يدرك ويكون أشكالا مكافئة للمألوف من الكسور العادية والكسور العشرية والنسب المئوية.

السادس - الثامن

يفهم الأعداد، وطرق تمثيلها والعلاقات فيما بينها، والأنظمة العددية.	- يتعامل بمرونة مع الكسور والأعداد العشرية والنسب المئوية، لحل المشكلات. - يقارن ويرتب الكسور والأعداد العشرية والنسب المئوية بكفاءة ويجد مواقعها التقريبية على خط الأعداد. - ينمي معنى للنسب المئوية التي تزيد عن 100 وتلك التي تقل عن 1 . - يفهم ويستخدم النسب والتناسب في تمثيل العلاقات الكمية.
يحسب بطلاقة ويعمل تقديرات معقولة.	- يطور ويحلل ويشرح طرقا لحل مشكلات تتضمن تناسبات، مثل التقييس Scaling وإيجاد نسب مكافئة.

ربما تعتبر مفاهيم النسبة والتناسب والنسبة المئوية من أصعب المفاهيم التي يتعلمها

(1) Reprinted with permission from [Principles and Standards for School Mathematics], copyright [2000] by the National Council of Teachers of Mathematics. All right reserved.

تلاميذ المرحلة الابتدائية. وقد يكون السبب في ذلك هو اعتماد هذه المفاهيم على فهم التلاميذ للكسور العادية والكسور العشرية. ومن المعلوم أن التلاميذ يواجهون صعوبات كبيرة في تعلم الكسور لأسباب تمت مناقشتها في الفصلين السابقين. ولذلك فإن التدريس الناجح للنسبة والتناسب والنسبة المئوية يجب أن يسبقه تدريس ناجح للكسور.

سنحاول في هذا الفصل أن نوضح المفاهيم الأساسية في هذه المواضيع ونبين صعوبات تعلمها ونقترح طرقاً ملائمة لتدريسها.

النسبة

النسبة هي مقارنة بين كميتين تربطهما علاقة ضربية. إذن فهي وسيلة لمقارنة الكميات. وموضوع المقارنة ليس جديداً بالنسبة للتلاميذ، حيث أنهم اعتادوا على إجراء مقارنات بين الكميات في صفوف مبكرة عن طريق إيجاد الفرق بين الكميتين. فمثلاً إذا كان لدى أحمد 5 دراهم ولدى علي 3 دراهم فإننا نقارن بين ما لديهما بقولنا أن ما لدى أحمد يزيد عما لدى على بدرهمين. أي أن العلاقة بين الكميتين هي علاقة جمعية (2+3=5). والجديد في المقارنة عن طريق النسبة هو أن العلاقة بين الكميتين المقارنتين علاقة ضربية. ففي المثال السابق فإننا نقارن بين الكميتين بقولنا أن نسبة ما لدى أحمد إلى ما لدى على هي 5 : 3 أو $\frac{5}{3}$. لاحظ أن $5 = \frac{5}{3} \times 3$.

تأمل:

1- ثلاثة لاعبين، راشد، أحمد وسعيد يحاولون التسديد إلى المرمى في تمرين لكرة القدم. سدد راشد 5 ضربات إلى المرمي محققاً هدفين وسدد أحمد 4 ضربات محققاً هدفاً واحد وسدد سعيد اثنا عشر ضربة محققاً أربعة أهداف. أي اللاعبين أقدر على تحقيق الأهداف ؟.

2- في محل تجاري, سعر عبوة تزن 2200 غرام من صنف معين من الأرز هو 10 دراهم. وسعر عبوة تزن 1 كغم من صنف آخر من الأرز هو 5 دراهم. أي الصنفين من الأرز أقل سعراً؟

لابد أنك لاحظت أن هناك طريقتان مختلفتان للمقارنة. فالمثال الأول يتطلب التعبير عن النسب المتضمنة ككسور عادية، ثم توحيد المقامات ومن ثم مقارنة الكسور. بينما المثال الثاني فهو يتطلب توحيد الوحدات في النسبتين المتضمنتين ومن ثم المقارنة بينهما.

مقارنة النسبة مع الكسور العادية التي تمثل معنى جزء من كل

هناك بعض الاختلافات بين النسب والكسر العادي الذي يمثل معنى جزء من كل:

1- اختلاف العلاقات: الكسر العادي الذي يمثل معنى جزء من كل يمثل علاقة جزء إلى كل فقط. بينما تمثل النسبة إضافة إلى هذه العلاقة علاقات أخرى مثل: علاقة كل إلى جزء، علاقة جزء إلى جزء، وعلاقة بين كميتين مختلفتين (معدلات). وفي حالة المعدل فإنه عندما يكون الحد الثاني للنسبة يساوي 1، تسمى النسبة معدل الوحدة. ومن أمثلتها سيارة تسير بسرعة 80 كيلومتراً في الساعة. الجدول (9-1) يبين أمثلة على العلاقات المختلفة التي يمكن أن تمثلها النسبة.

الجدول (9-1)

م	نوع العلاقة	مثال
1	جزء إلى كل	صف يتكون من 30 طالبا، فيه خمسة طلبه ينتمون إلى فرق رياضية في المدرسة. نسبة هؤلاء إلى مجموعة طلبة الصف هي $\frac{5}{30}$.
2	كل إلى جزء	في المثال أعلاه نسبة طلبة الصف إلى الرياضيين في نفس الصف هي $\frac{30}{5}$
3	جزء إلى جزء	صندوق يحتوي على 3 كرات حمراء، 5 كرات خضراء و6 كرات زرقاء. نسبة الكرات الحمراء إلى الكرات الخضراء هي 3:5
4	علاقة بين كميتين مختلفتين (معدلات)	3 أقلام ثمنها خمسة دراهم. نسبة الأقلام إلى الدراهم 5:3

2- يمكن أن يعبر عن النسبة بعدة طرق غير شكل الكسر فمثلاً واحد إلى اثنين يمكن أن تكتب على شكل: 2:1، (1 , 2)، 1 ⟵ 2، 1 إلى 2 بالإضافة إلى $\frac{1}{2}$.

3- يمكن أن يكون أحد حدي النسبة صفراً. فمثلاً يمكن أن يكون لدينا النسبة 3: صفر بينما لا يمكن وجود مثل هذا المثال في حالة الكسور العادية.

أعط مثالا على النسبة 3:صفر .

4- يمكن أن يكون أحد حدي النسبة عدداً غير نسبي مثل $\frac{1}{\sqrt{2}}$ بينما لا يمكن وجود مثل هذا المثال في الكسور العادية.

ماذا تستنتج من خلال هذه الفروقات بين النسبة الكسر العادي ؟

استنتاج:
كل الكسور العادية يمكن اعتبارها نسبا، لكن ليس كل النسب يمكن اعتبارها كسورا عادية

5- مقارنة النسب: تعلمنا عند مقارنة الكسور العادية أنه لابد من أن يشترك الكسران بنفس الكل حتى نتمكن من مقارنتهما. فعلى سبيل المثال فإننا لا نستطيع مقارنة $\frac{1}{3}$ مع $\frac{1}{4}$ إلا إذا كان لهما نفس الكل. وهذا ليس صحيحا في حالة مقارنة النسب. فإذا قلنا بأن طالبة واحدة من كل 10 طالبات رياضيات اشتركن في المعرض العلمي للكلية $\frac{1}{10}$ وأن طالبة واحدة من كل 20 طالبة رياض أطفال اشتركت في نفس المعرض $\frac{1}{20}$ فإن بالإمكان القول أن النسبة $\frac{1}{10}$ هي أكبر من النسبة $\frac{1}{20}$ بصرف النظر عن عدد الطالبات في كل من تخصصي الرياضيات ورياض الأطفال.

6- ضم النسب: اعتبر المثال التالي: فريق كرة قدم فاز في 3 مباريات من أصل 5 في بطولة معينه أي بنسبة 5:3. وفاز في مباراتين من أصل 4 في بطولة أخرى، أي بنسبة 4:2. ما هي نسبة المباريات التي فاز بها الفريق إلى مجموع المباريات التي لعبها في البطولتين ؟

سؤال: هل تعتبر العملية $\frac{3}{5} + \frac{2}{4} = \frac{5}{9}$ صحيحة في حالة الكسور العادية ؟

تدريس النسبة:

نناقش هنا كيفية تدريس النسبة وربط التدريس الرمزي لها بالخبرات السابقة لدى التلاميذ. وتحديداً فإننا سنتعرض للمرحلتين اللتين يسبقان المرحلة الرمزية وهما المرحلة المفاهيمية ومرحلة الربط.

المرحلة المفاهيمية:

في هذه المرحلة المبكرة من تدريس النسبة، لابد من مراعاة النقاط التالية:

(1) يجب تقديم مفهوم النسبة بالتدريج من خلال مناقشة المواقف المختلفة. فيمكن مثلاً مناقشة التلاميذ، بمواقف مضاعفات الأعداد (لدي ضعف ما لدى راشد من دراهم). وهناك أمثلة واقعية أخرى كثيرة جداً يمكن الاستفادة منها. اعتبر الأمثلة التالية.

- المال: الدينار يساوي 10 دراهم.
- القياس: 1متر = 100 سم.
- السرعة: 70 كيلومتراً في الساعة.
- الطبخ: ملعقة ملح لكل لتر من الماء.

(2) يجب أن تقدم النسبة بشكل هادف كأداة لحل مسائل المقارنة التي تتطلب إيجاد أساس مشترك لمقارنة كميتين أو أكثر.

مرحلة الربط

وهنا يجب التركيز على الأمور التالية:

(1) يجب استخدام أمثلة ولا أمثلة على النسبة لمساعدة التلاميذ على تكوين فكرة واضحة عن النسبة.

(2) يجب مساعدة التلاميذ على توضيح الفرق بين النسبة والكسر العادي.

(3) يجب مساعدة التلاميذ على تحديد كل حد من حدود النسبة بوضوح.

التناسب

للتناسب تطبيقات واسعة جدا في الحياة اليومية فهو يستخدم في مجال السرعة، التسارع، التركيز، القدرة، الكفاءة، المركبات الكيميائية، معدلات التغير، التسعيرات، والكثير الكثير من المواقف الأخرى. كذلك فان التناسب يعتبر أساساً لكثير من الرياضيات التي سيواجهها التلاميذ في دراساتهم اللاحقة.

ويعرف التناسب على أنه تكافؤ نسبتين. وبالتالي فهو علاقة بين علاقتين, وهذه العلاقة ضربية.

نشاط (1) بناءً على هذا التعريف، بين أي العلاقات التالية تمثل تناسبا.

(1) الجدول التالي يبين العلاقة بين وحدتي الطول, المتر والديسمتر.

الطول بالمتر	1	2	3	4	5
الطول بالديسمتر	10	20	30	40	50

(2) الجدول التالي يبين العلاقة بين عمر أحمد وعمر والده بالسنوات.

عمر أحمد	1	2	3	4	5
عمر والده	30	31	32	33	34

(3) الجدول التالي يبين العلاقة بين الدفاتر المدرسية وسعرها بالدراهم.

عدد الدفاتر	1	2	3	4	5	6	7	8
السعر بالدراهم	3	6	9	12	15	18	21	24

(4) سعر الدخول إلى حديقة للأطفال هو 20 درهما للشخص الواحد و15 درهما لكل شخص إضافي. الجدول التالي يبين العلاقة بين عدد أفراد المجموعة الزائرة للحديقة وسعر الدخول للمجموعة.

عدد أفراد المجموعة	1	2	3	4	5	6	7	8
سعر الدخول بالدراهم	20	35	50	65	80	95	110	125

(5) أكمل الجدول التالي:

طول المربع بالسم	1	2	3	4	5	6	7	8
طول قطر المربع بالسم								

هل هناك علاقة ثابتة بين طول ضلع المربع وطول قطرة ؟

التناسب الطردي والتناسب العكسي

يمكن التعبير عن التناسب الطردي بالمعادلة الجبرية:

$\frac{ص}{س}$ = أ أو ص = أ س، حيث أ ثابت التناسب.

أما التناسب العكسي فيعبر عنه بالمعادلة.

ص س = أ أو ص = $\frac{أ}{س}$، أ = ثابت التناسب.

نشاط (2):

بين أي العلاقات التالية تمثل تناسبا وحدد نوع التناسب.

(1) الجدول التالي يبين العلاقة بين طول ضلع المربع ومساحته.

طول المربع (سم)	1	2	3	4	5	6
مساحة المربع (سم^2)	1	4	9	16	25	36

(2) الجدول التالي يبين العلاقة بين طول قطعة قماش وسعرها.

طول القطعة بالمتر	1	2	3	4	5	**6**
السعر بالدراهم	50	100	150	200	250	300

(3) الجدول التالي يبين العلاقة بين سرعة سيارة والزمن اللازم لقطع مسافة مقدارها 1000 كيلومتر.

سرعة السيارة (كم في ساعة)	50	100	125
السرعة اللازمة القطع 1000كم	20	10	8

(4) الجدول التالي يبين العلاقة بين ص و س.

ص	1	2	3	4	5	6	7
س	3	5	7	9	11	13	15

صعوبات الاستدلال التناسبي

كثيرا ما يواجه التلاميذ صعوبات في استخدام الاستدلال التناسبي في حل المسائل. ويعود ذلك إلى عدة أسباب منها:

أ- الميل إلى استخدام الإستدلال الجمعي:

اعتبر المسألة التالية: يمكن شراء 6 دفاتر بأربعة دراهم. فكم دفتراً يمكن شراؤه بثمانية دراهم؟

في حل مثل هذه المسألة يميل كثير من الأطفال إلى التفكير بهذه المسألة كالآتي:

$6 - 4 = 2$

إذن: عدد الدفاتر – عدد الدراهم = 2

عدد الدفاتر – 8 = 2

إذن يمكن شراء 10 دفاتر بثمانية دراهم.

ب- العلاقة الضربية على الأعداد غير الصحيحة:

تأمل الأمثلة الثلاثة التالية:

أ	ب	ج
3 أقلام سعرها 4 دراهم 6 أقلام سعرها ؟ $\frac{3}{4} = \frac{6}{؟}$	3 أقلام سعرها 6 دراهم 4 أقلام سعرها ؟ $\frac{3}{6} = \frac{4}{؟}$	3 أقلام سعرها 7 دراهم 4 أقلام سعرها ؟ $\frac{3}{7} = \frac{4}{؟}$
عامل التغير = $\frac{6}{3} = 2$ (عدد صحيح) معدل الوحدة = $\frac{4}{3}$ (عدد غير صحيح)	عامل التغير = $\frac{4}{3}$ (عدد غير صحيح) معدل الوحدة = $\frac{6}{3} = 2$ (عدد صحيح)	عامل التغير = $\frac{4}{3}$ (عدد غير صحيح) معدل الوحدة = $\frac{7}{3}$ (عدد غير صحيح)

من المعلوم أن التلاميذ يميلون إلى التعامل مع الأعداد الصحيحة ولذلك ففي المثال أ يلجأ التلميذ إلى حل المسألة عن طريق ضرب العدد 4 في 2. (؟ = 4 × 2 = 8). وفي المثال ب يلجأ التلميذ إلى ضرب العدد 4 في 2 لإيجاد قيمة ؟ أيضا. أما في المثال ج فكل من عامل التغير ومعدل الوحدة عدد غير صحيح وهنا يقع الطالب في حيرة وقد يلجأ إلى استخدام الجمع بدلا من الضرب (؟ = 7 + 1 = 8 لأن 4 = 3 + 1).

ج- صعوبات مع خوارزمية الضرب التبادلي:

في العادة فإن المعلم التقليدي يلقن تلاميذه خوارزمية الضرب التبادلي لحل مسائل التناسب الطردي والتي تتضمن كتابة النسبتين على شكل كسرين عاديين ومن ثم ضرب الطرفين والوسطين ومساواتهما, وأخيراً الحل بالنسبة للمجهول. مثل هذه الطريقة في التعليم قد تساعد الطالب على أن يحل مسائلا من نوع المسألة (1) أدناه.

المسألة (1):

إذا كانت نسبة الكرات الحمراء إلى تلك الخضراء في سله هي 3:2. فكم كرة خضراء في السلة إذا كان فيها 10 كرات حمراء؟

الحل: $\frac{2}{3} = \frac{10}{؟}$

$10 \times 3 = ؟ \times 2$

$؟ = \frac{30}{2} = 15$

وفي الواقع فإن قدرة التلميذ على حل هذا النوع من المسائل لا يعتبر دليلا كافياً على

فهم التناسب. بل أن التعلم الآلي لخوارزمية الضرب التبادلي قد يؤدي إلى ارتكاب أخطاء عند تحوير المسألة بشكل معين. اعتبر المسألة (2) أدناه:

المسألة (2):

إذا كانت نسبة الكرات الحمراء إلى تلك الخضراء في سلة هي 3:2 فما عدد الكرات الخضراء إذا كانت السلة تحتوي على 25 كرة؟

لحل مثل هذه المسألة فإن الطالب الذي تعوّد على أن يستخدم خوارزمية الضرب التبادلي بشكل آلي، سيلجأ إلى الطريقة التالية في الحل:

$$\frac{2}{3} = \frac{25}{؟}$$

$$؟ = 3 \times \frac{25}{2} = \frac{75}{2} = 37.5$$

وقد يتجاهل مثل هذا الطالب حقيقة أن عدد الكرات الخضراء (الناتج) اكبر من العدد الكلي للكرات في السلة. وكذلك فإنه يمكن أن يتجاهل وجود "نصف" في الناتج.

د- طريقة كتابة العلاقة التناسبية:

يمكن أن تكتب العلاقة التناسبية بأكثر من طريقة تبعاً لطبيعة السؤال، وهذا قد يشكل إرباكا للتلميذ إن لم يفهم التناسب بشكل جيد. إن التناسب في المسالة (2) أعلاه مثلا يمكن أن يكتب بالطريقتين (أ) و (ب) أدناه ولكن ليس بالطريقة (ج):

الطريقة (أ):

$$\frac{\text{3 خضراء}}{\text{5 كرات}} = \frac{\text{س خضراء}}{\text{25 كرة}}$$

الطريقة (ب):

$$\frac{\text{3 خضراء}}{\text{س خضراء}} = \frac{\text{5 كرات}}{\text{25 كرة}}$$

الطريقة (ج):

$$\frac{\text{3 خضراء}}{\text{5 كرات}} = \frac{\text{25 كرة}}{\text{س خضراء}}$$

تدريس التناسب

عادة ما يبدأ تدريس التناسب في الصف السادس الابتدائي (انظر منهاج دولة الإمارات العربية المتحدة على سبيل المثال). ولكي نهيئ التلاميذ لذلك, يجب أن نبدأ تعليمهم التناسب بطريقة غير رسمية قبل السادس الابتدائي. إنه لمن الضروري جدا أن لا يستخدم التلاميذ خوارزمية الضرب التبادلي قبل أن يفهموها او بالأحرى يكتشفوها بأنفسهم. ولذلك فإنه من الأفضل أن يبدأ تدريس التناسب من خلال تعريض الأطفال للمواقف المختلفة التي تتضمن علاقات تناسبية, وتشجيعهم على تقدير بعض النتائج واقتراح طرق غير رسمية لحل مسائل التناسب.

أولاً: المرحلة المفاهيمية

على المعلمين أن يختاروا في هذه المرحلة أنشطة ومسائل لتشجيع الاستراتيجيات غير الرسمية لدى الأطفال لحل مسائل التناسب. كما يجب إعطاء التلاميذ فرصا كثيرة لإجراء مقارنات بين الكميات (جزء إلى كل, كل إلى جزء, جزء إلى جزء) لتشجيع الاستدلال التناسبي. وبشكل عام, يجب على المعلم أن يراعي ما يلي:

1- تشجيع الاستدلال النوعي حول المواقف التناسبية لدى التلاميذ في مختلف الأعمار. إن مثل هذا الاستدلال النوعي يؤدي إلى تحسين الاستدلال الكمي لدى التلاميذ. وبالتالي يجب استغلال كافة الفرص التي تظهر أثناء سير التدريس لتشجيع الاستدلال النوعي.

2- تقديم وممارسة الاستدلال التناسبي في سياق مناسب. أي أن الأمثلة والمواقف المستخدمة يجب أن تكون مألوفة لدى التلاميذ.

3- التنويع في المسائل عند ممارسة الاستدلال التناسبي. وهذا يتضمن تنويع المواقف التناسبية بحيث تشمل نوعي التناسب, الطردي والعكسي. كذلك يجب مراعاة اختيار الأعداد المستخدمة في مسائل التناسب. ففي المراحل المبكرة من تعلم التناسب يفترض أن نختار مسائلاً تتضمن أعداداً صحيحة سواء بالنسبة إلى عامل التغير أو معدل الوحدة. أما في مرحلة متقدمة فيجب تقديم مسائل تتضمن أعداداً غير صحيحة.

4- تشجيع التلاميذ على استخدام طرقهم الخاصة في حل مسائل التناسب. إن استخدام التلاميذ لطرقهم الخاصة دون الشعور بأنهم ملزمون باتباع خوارزمية محددة يقودهم إلى اكتشاف أن علاقة التناسب هي علاقة ضربية وليست جمعية, ويمهد إلى تقديم الخوارزمية.

ثانياً: مرحلة الربط

وتتضمن هذه المرحلة التعبير عما يفهمه التلاميذ بالرموز. وفي هذه المرحلة, يجب مراعاة ما يلي:

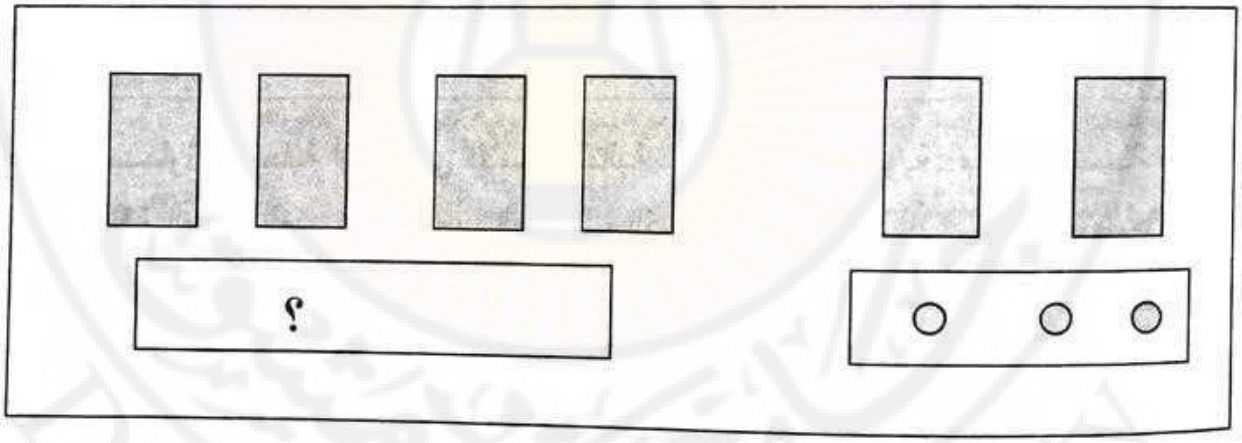
1- تشجيع التلاميذ على تلخيص المواقف بالرموز وذلك للتمهيد الى تقديم الطريقة المعروفة لكتابة التناسب كطريقة مختصرة لما يقومون به.

2- تشجيع التلاميذ على تمثيل المواقف بالرسم.

مثال (1):

ثمن دفترين 3 دراهم. ما ثمن 4 دفاتر؟

أحد الحلول الممكنة: تتم نمذجة المسألة كما في الشكل أدناه.



لاحظ أن رسم مخطط كهذا يجعل المسألة أكثر وضوحاً في ذهن الطالب, خاصة عندما يكون نص السؤال طويلاً. الميزة الأخرى لهذا المخطط هي أن التلميذ سيدرك بسهولة أن (؟) تمثل عدداً أكبر من 3 (استدلال نوعي).

ثالثاً: المرحلة الرمزية

بعد أن يكون التلاميذ قد كونوا أساساً مفاهيمياً قويا للتناسب، وبعد أن يكونوا قد مارسوا حل مسائل التناسب بطرقهم الخاصة وربما اكتشفوا بعض الطرق الرسمية للحل, يجب أن يتم التركيز على ما يلي:

1- تشجيع التلاميذ على إدراك التكافؤ بين الطرق المختلفة للتعبير عن التناسب. فمثلاً, يجب تشجيعهم على إدراك أن التعبير:

$$\frac{س_1}{ص_1} = \frac{س_2}{ص_2} \quad \text{يكافىء التعبير} \quad \frac{س_1}{س_2} = \frac{ص_1}{ص_2}$$

وأنه لا ضير في استخدام أي منهما.

2- تشجيع التلاميذ على كتابة الوحدات مع الأرقام عند التعبير عن التناسب للتسهيل عليهم في اكتشاف الأخطاء عند حدوثها. ففي المسألة (2) أعلاه, لو كتب التلميذ الوحدات, لربما أدرك خطأه.

$$\frac{\text{2 حمراء}}{\text{3 خضراء}} = \frac{\text{25 كرات}}{\text{؟ خضراء}}$$

لاحظ أن عدم التجانس في الوحدات قد يوحي للتلميذ أن هناك خطأ ما في كتابة التناسب.

النسبة المئوية

سنحاول الإجابة أولاً على الأسئلة التالية حول النسبة المئوية: ما هي النسبة المئوية؟ ما علاقة النسبة المئوية بالكسور العادية, والكسور العشرية والنسب؟ هل تتضمن النسبة المئوية تطوير مفاهيم جديدة؟ ما فوائد استخدام النسبة المئوية؟ هل يمكن أن تكون النسبة المئوية خادعة؟

تعتبر النسبة المئوية تطبيقاً لمفاهيم رياضية وبالتالي فهي لا تتضمن تطوير مفاهيم جديدة. والسبب في تدريس النسبة المئوية في المرحلة الابتدائية هو أن لها استخدامات واسعة في الحياة. والنسبة المئوية ببساطة هي رمز آخر يستخدم لتمثيل الكسور العادية والكسور العشرية والنسب. وبشكل أكثر تحديداً فالنسبة المئوية هي اسم آخر لأجزاء المائة. فعلى سبيل المثال, فإن $\frac{25}{100}$ أو 0.25 يمكن التعبير عنها بالقول 25 بالمائة وكتابتها على شكل 25%.

استخدامات النسبة المئوية

تعتبر النسبة المئوية من أكثر أشكال النسبة استخداماً في الحياة اليومية. ذلك لأن

النسبة المئوية هي طريقة ملائمة لمقارنة البيانات على أساس العدد 100. لاحظ الفرق مثلاً بين مقارنة ($\frac{7}{10}$ و $\frac{17}{25}$) من جهة ومقارنة 70% مع 68% من جهة أخرى. لا شك أن المقارنة الثانية أسهل بكثير, وشبيهة بمقارنة عددين طبيعيين.

مسائل النسبة المئوية

هناك ثلاثة أنواع لمسائل النسبة المئوية:

1- مسائل تكون فيها الجزء مجهولاً، مثل: 15% من 8 = ؟

2- مسائل تكون فيها النسبة المئوية مجهولة، مثل: 5 تمثل أي نسبة من 20 ؟

3- مسائل يكون فيها الكل مجهولاً، مثل: 5 تمثل 20% من ماذا؟

صعوبات تعلم النسبة المئوية

هناك خمس صعوبات شائعة لدى الأطفال وهي:

أ- التحويل الخاطئ من كسر عشري إلى نسبة مئوية وبالعكس.

ب- عدم إدراك أن النسبة المئوية مبنية على أساس العدد 100.

ج- استغراب المسائل التي تكون فيها النسبة المئوية مجهولة.

د- استغراب المسائل التي تتضمن نسبة مئوية أكبر من 100%.

هـ- استغراب المسائل التي تتضمن نسبة مئوية من نسبة مئوية.

تدريس النسبة المئوية

كما هو الحال بالنسبة للنسبة والتناسب, فإن تدريس النسبة المئوية يجب أن يمهد له في الصفوف الدنيا. مثل هذا التدريس المبكر يشكل أساساً لمرحلة الربط لتقديم رموز النسبة المئوية في الصف الخامس الابتدائي أو السادس الابتدائي كما في منهاج دولة الإمارات العربية المتحدة.

تشجيع الربط

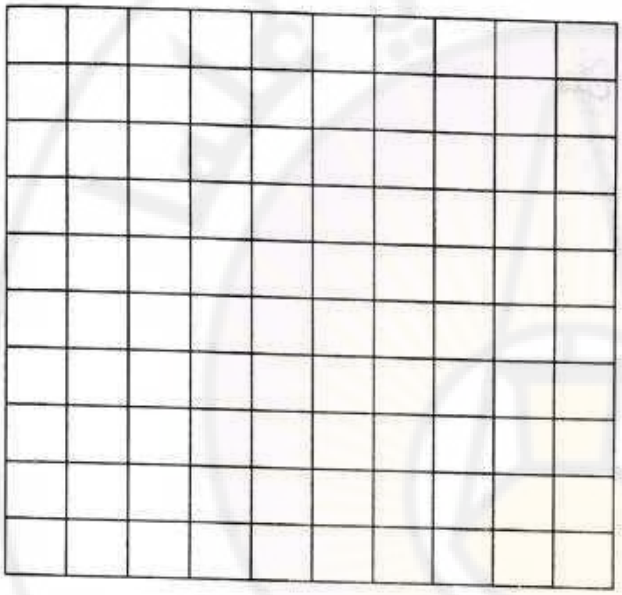
يجب مساعدة التلاميذ في كافة مراحل التدريس على فهم استخدامات النسبة المئوية في الحياة اليومية. ويتم ذلك من خلال:

أولاً: تقديم مسائل النسبة المئوية من خلال تطبيقات حياتية مألوفة لدى التلاميذ.

ثانياً: تشجيع التلاميذ على إيجاد أمثلة أو تأليف قصص تتضمن نسباً مئوية.

وهنا يجب التأكد من أن التلاميذ يفهمون الكسور العشرية بشكل جيد قبل تقديم مفهوم

النسبة المئوية. ويترتب على المعلم أن يساعد التلاميذ على إدراك أن النسبة المئوية هي مجرد اسم آخر لأجزاء المائة. فمثلاً ($\frac{15}{100} = 0.15$) يمكن أن تسمى 15 بالمائة وتكتب على شكل 15%. كذلك يجب مساعدة التلاميذ على إدراك أن كسراً عشرياً مثل 0.4 يمكن تحويله إلى نسبة مئوية عن طريق إيجاد ما يكافئه ($0.4 = \frac{4}{10} = \frac{40}{100}$=40%). إذن وباختصار يجب على المعلم أن يبين للتلاميذ أن النسبة المئوية هي مجرد اسم جديد لمفهوم يعرفونه سابقاً. هذا ومن المفيد استخدام الشبكة المئوية (10×10) المبينة في الشكل أدناه لتوضيح مفهوم النسبة المئوية وعلاقتها بالكسور العادية والكسور العشرية.



الجزء المظلل = $\frac{3}{100}$

= 0.03 = 3%

تنمية الحس العددي بالنسبة المئوية

يجب مساعدة التلاميذ على تنمية الحس العددي بالنسبة المئوية, وذلك من خلال:

أولاً: التركيز على أن النسبة المئوية تتضمن استخدام المائة كأساس للمقارنة.

ثانياً: تحدي التلاميذ من خلال الاستدلال النوعي. على سبيل المثال, اسأل التلاميذ عن معنى أن يبذل الإنسان 120% من جهده في عمل ما. اسألهم عن معنى "خصم 150% من السعر الأصلي". مثل هذه الأسئلة تخلق فهماً واعياً للنسبة المئوية واستخداماتها الصحيحة, فلا معنى مثلا لبذل 120% من الجهد أو خصم 150% من السعر الأصلي.

ثالثاً: تشجيع التلاميذ على تقدير إجابات لمسائل النسبة المئوية قبل محاولة إيجاد نتائج دقيقة.

رابعاً: عند تحويل النسبة المئوية إلى كسور عادية أو عشرية وبالعكس، يفضل البدء بالتحويلات التي تتضمن العدد 100.

خامساً: تشجيع الحفظ ذي المعنى لا الاستظهاري لتحويلات الكسور المألوفة. فمثلا يجب أن يحفظ التلميذ أن 50 % = 0.5 = $\frac{1}{2}$ ، 25% = 0.25 = $\frac{1}{4}$. وفي مرحلة متقدمة يجب أن يدرك التلميذ أن $\frac{1}{3}$ = 33 % وأن 66% = $\frac{2}{3}$ وهكذا.

سادساً: تشجيع التلاميذ على فهم النسب المئوية الصغيرة بين صفر و 1%. يجب على المعلم أن يتحدى التلاميذ في تمثيل نسب مئوية مثل $\frac{1}{2}$ % باستخدام الشبكة المئوية على سبيل المثال. في حالة مواجهة صعوبة في هذه الأمور يمكن الطلب إليهم أن يمثلوا 1 % ومن ثم التفكير في $\frac{1}{2}$%. بعد ذلك يجب تحديهم في تحويل هذه النسبة المئوية إلى كسر عادي وكسر عشري.

سابعاً: تشجيع فهم النسب المئوية التي تزيد عن 100%. وهنا يمكن تحدي الأطفال في تمثيل 150% أو 200% على سبيل المثال، باستخدام الشبكة المئوية وعند مواجهة صعوبة يجب تشجيعهم على تمثيل 100% أولا, ثم التفكير في 150 % أو 200%.

ثامناً: تنويع مسائل النسبة المئوية بحيث يصبح التلميذ متمكناً من تعريف الكل والمجهول. استخدم كافة أنواع المسائل المذكورة سابقاً. كذلك استخدم مسائلاً تتضمن نسباً مئوية تزيد عن 100%, ومسائلاً تتضمن نسباً مئوية من نسب مئوية.

تاسعاً: تشجيع التلاميذ على استخدام طرقهم الخاصة في حل المسائل واكتشاف الطرق الرسمية.

الأنشطة وأسئلة التقويم

1- فرّق بين النسبة والكسر العادي من حيث:

أ- العلاقات

ب- طرق التعبير

ج- الحدين

2- ما أهم ما يجب التركيز عليه في المرحلة المفاهيمية لتدريس النسبة ؟

3- املأ الفراغات في الجدول التالي بحيث تكون العلاقة بين س و ص تناسباً

س				
ص				

4- أعط مثالاً على التناسب الطردي وآخر على التناسب العكسي.

5- ما أهم صعوبات الاستدلال التناسبي ؟

6- اذكر أربع نقاط على المعلم مراعاتها في المرحلة المفاهيمية لتدريس التناسب، مبينا أهمية هذه النقاط.

7- لماذا ينصح بتشجيع التلاميذ على نمذجة مسائل التناسب في مرحلة الربط ؟

8- ما أهم الصعوبات الشائعة في تعلم النسبة المئوية ؟

9- اذكر خمس طرق يمكن من خلالها مساعدة التلاميذ على تنمية الحس العددي بالنسبة المئوية موضحاً ذلك بالأمثلة.

10- أجب عن الأسئلة التالية:

أ- 20% من 7 = ؟

ب- 4 تمثل أي نسبة من 80 ؟

ج- 3 تمثل 1% من ماذا ؟

مراجع الفصل

Cathcart, W. G., Pothier, Y. M., Vance, J. H., & Bezuk, N. S. (2001). *Learning Mathematics in Elementary and Middle Schools* (2nd ed.). Ohio: Merrill Prentice Hall.

Hoffer, A. R. (1988b). Ratios and proportional thinking. In T. R. Post (Ed.),*Teaching mathematics in grades K-8: Research-based methods* (pp. 285-313). Boston: Allyn &Bacon.

Lamon, S. J. (1993). Ratio and proportion: Children's cognitive and metacognitive processes. In T. P. Carpenter, E. Fennema, & T. A. Roberg (Eds.), *Rational numbers: An integration of research* (pp. 131-156). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

National Council of Teacher of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School mathematics*. Reston, VA: Author.

Van de Walle, J. A. (2001). *Elementary and Middle School Mathematics: Teaching developmentally* (4th ed.). New York: Longman.

Yiu, T. (1992). *A study of children's understanding of fraction size and its relationship to proportional reasoning*. Unpublished doctoral dissertation, University of Illinois, Urbana-Champaign.

10

الفصل العاشر

تنمية مفاهيم القياس

- المعايير المتعلقة بالقياس
- فهم القياس
- الوحدات المعيارية واللامعيارية
- النظام المتري
- تدريس القياس
- الأنشطة وأسئلة التقويم
- مراجع الفصل

الأهداف التربوية

بعد دراسة هذا الفصل، يتوقع من الطالب أن:

1- يناقش المعايير المتعلقة بالقياس.

2- يتعرف معنى القياس ووحداته والنظام المتري.

3- يصمم أنشطة لتعليم قياس الخواص المختلفة.

4- يساعد التلاميذ على اكتشاف معادلات القياس.

5- ينمي مهارات التلاميذ في استخدام أدوات القياس.

Damascus University

الفصل العاشر
تنمية مفاهيم القياس

المعايير المتعلقة بالقياس[1]

ما قبل الروضة – الثاني

يفهم خصائص الكائن القابلة للقياس، ووحدات وأنظمة وعمليات القياس.	• يدرك خصائص الطول، الحجم، الكتلة، المساحة والزمن. • يقارن بين الكائنات ويرتبها متبعا لهذه الخصائص. • يفهم كيف يقيس باستخدام الوحدات المعيارية وغير المعيارية. • يختار الوحدة والأداة للخاصية المراد قياسها.
يطبق أساليب وأدوات ومعادلات ملائمة ليحدد القياسات.	• يقيس بنسخ متعددة من وحدات متساوية المقاس مثل ماسكات الورق Clips، متراصات على شكل سلسلة. • يستخدم التكرار لوحدة واحدة ليقيس شيئاً أكبر من الوحدة، على سبيل المثال قياس طول غرفة بعصا مترية مفردة (طولها =1متر). • يستخدم أدوات في القياس. • يكّون مراجع مألوفة للقياسات ليجري مقارنات وتقديرات.

من الثالث – الخامس

يفهم خصائص الكائن القابلة	• يفهم خصائص الطول، المساحة، الكتلة، الحجم ومقياس الزاوية ويختار الوحدات الملائمة لقياس كل خاصية.

(1) Reprinted with permission from [Principles and Standards for School Mathematics], copyright [2000] by the National Council of Teachers of Mathematics. All right reserved.

للقياس، ووحدات القياس وأنظمته وعملياته.	• يفهم الحاجة إلى القياس بالوحدات المعيارية ويألف الوحدات المعيارية في النظام المعتاد والنظام المتري. • يجري تحويلات بسيطة، كالتحويل من سنتيمترات إلى مترات، في نظام قياس معين. • يفهم أن القياسات هي تقريبات ويفهم كيف تؤثر الفروقات في الوحدات على الدقة. • يستكشف ما يحصل لقياسات شكل ببعدين، كمحيطه ومساحته، عندما يتغير الشكل بطريقة ما.
يطبق أساليب وأدوات ومعادلات ملائمة ليحدد القياسات.	• ينمي إستراتيجيات لتقدير محيطات الأشكال غير المنتظمة ومساحاتها وأحجامها. • يختار ويطبق وحدات وأدوات ملائمة لقياس الطول، المساحة، الحجم، الكتلة، الزمن، درجة الحرارة، وقياس الزوايا. • يختار ويستخدم (benchmarks) ليقدر القياسات. • يطور ويفهم ويستخدم معادلات لإيجاد مساحات مستطيلات، مثلثات ومتوازيات أضلاع. • يطور استراتيجيات لتحديد المساحات السطحية وأحجام المجسمات ذات المقاطع المستطيلة.

من السادس – الثامن

يفهم خصائص الكائن القابلة للقياس، ووحدات القياس وأنظمته وعملياته.	• يفهم نظامي القياس المتري والمعتاد. • يفهم العلاقات بين الوحدات ويحول من وحدة إلى أخرى في نفس النظام. • يفهم ويختار ويستخدم وحدات بقياس ونوع مناسبين لقياس الزوايا، المحيط، المساحة السطحية والحجم.
يطبق أساليب وأدوات ومعادلات ملائمة	• يستخدم معايير (benchmarks) مألوفة ليختار طرقا ملائمة لتقدير القياسات. • يختار ويطبق استراتيجيات وأدوات ليجد بدقة الطول والحجم

ليحدد القياسات.	وقياسات الزوايا بدرجات معقولة من الدقة. • يطور ويستخدم معادلات ليحدد محيط دائرة، مساحة مثلث، متوازي أضلاع، شبه منحرف ودائرة، ويطور استراتيجيات ليجد مساحات أشكال أكثر تعقيداً. • يطور استراتيجيات ليحدد المساحة السطحية والحجم لأشكال منشورية مختارة، أهرام، وأسطوانات. • يحل مسائلا تتضمن عواملاً مقياسية (Scale factors) باستخدام النسبة والتناسب. • يحل مسائلاً بسيطة تتضمن معدلات وقياسات مشتقة لخصائص مثل السرعة والكثافة.

أهمية القياس

يعتبر القياس من المواضيع الهامة في المرحلة الابتدائية إلى جانب الأعداد والهندسة. وكما هو الحال بالنسبة للأعداد والهندسة، فالقياس هو أحد المواضيع الرياضية الشائعة الاستعمال في الحياة اليومية. فنحن نتحدث بشكل دائم عن الأطوال والمساحات والحجوم والزمن ودرجات الحرارة. واستخدام مفاهيم القياس في المدرسة لا يقتصر على منهاج الرياضيات بل يتعدى ذلك إلى معظم مناهج المواد الأخرى كالعلوم والجغرافيا واللغة العربية وغيرها.

وتعلم القياس كأحد مواضيع منهاج الرياضيات، لا يمكن عزله عن غيره من المفاهيم الرياضية والواقع أن هناك ترابط قوي بين القياس ومواضيع رياضية متعددة:

1- مسائل القياس توفر فرصاً للتلاميذ لممارسة الاستقصاء الرياضي بطريقة هادفة.
2- يتضمن القياس استخدام العد وتكوين المجموعات.
3- يمكن استخدام مفاهيم القياس للتمهيد لتعليم الكسور العادية والعشرية.
4- يدخل القياس في تعلم الهندسة حيث يحتاج التلميذ إلى إجراء قياسات عديدة كالطول والعرض والمساحة والمحيط والحجم والزوايا.

فهم القياس

يتضمن القياس نوعين من الكميات، النوع الأول هو الكميات المنفصلة (القابلة للعد) كالأشخاص والأشجار والكتب والسيارات. والنوع الثاني هو الكميات المتصلة كالطول والزمن والكتلة ودرجة الحرارة. وهي كميات غير قابلة للعد.

وفهم القياس هو مسألة تدريجية تتطور مع الخبرات التي يمر بها التلاميذ. فنجد أن الأطفال وفي سن مبكرة قد طوروا مفهوما (غير ناضج) حول القياس، وأنهم يقارنون الأشياء المختلفة من حيث الطول والكتلة وغيرها. وبالتدريج فإن مفهوم القياس يتطور لديهم من الحكم على المظهر (appearance) إلى أن يصبح أكثر اكتمالاً وترابطاً ومنطقية (Piaget and Inhelder, 1967). فعلى سبيل المثال فإن الأطفال لا يدركون خاصية ثبات الحجم ويعتقدون أن كمية السائل تتغير بتغير الإناء الموضوع فيه. فإذا كان الماء موضوعاً في إناء ما وصب في إناء آخر أطول واقل إتساعاً، فإن الأطفال يعتقدون أن كمية الماء قد زادت. ذلك لأنهم يركزون على بعد واحد (الارتفاع في هذه الحالة) غير معتبرين أن البعد الآخر (الاتساع) قد قل.

ومن خلال الخبرة والتأمل، يكون الأطفال مفهوماً لوحدة القياس، تمكنهم من إجراء مقارنات أكثر دقة آخذين بالاعتبار عدد الوحدات التي تكون كمية معينه وليس مظهرها كما في المثال السابق. وفي العادة فإن الأطفال يكونون مفهوم وحدة الطول أولاً ثم المساحة وأخيراً الحجم (Piaget, Inhelder, & Szeminska, 1960).

يركز التدريس التقليدي على تعليم التلاميذ كيف يستخدمون أدوات القياس وكيف يحفظون التحويلات من وحدة إلى أخرى. وهذا لا يساعد التلاميذ على اكتساب مفاهيم القياس ووحداته. وعلى العكس فإنه يؤدي إلى استخدام آلي للقياس وأدواته.

الوحدات المعيارية واللامعيارية

الوحدات المعيارية (Standard Units) هي الوحدات المتعارف عليها عالمياً والتي تحمل نفس المعنى عند الجميع. ومن أمثلتها:

أ- المتر لقياس الطول

ب- الكيلو غرام لقياس الكتلة

ج- اللتر لقياس السعة

د- الدقيقة لقياس الزمن

هـ- الدرجة المئوية لقياس درجة الحرارة.

أما الوحدات اللامعيارية فهي تلك التي كانت مستخدمة قديماً ولم تكن دقيقة ولم يكن هناك اتفاق حولها. ومن أمثلتها: الشبر، الخطوة، الإصبع، الحفنة، القبضة، الحزمة.

النظام المتري

يتميز النظام المتري بسهولة التحويل بين الوحدات، ذلك لأنه مبني على أساس النظام العشري. فيما يلي توضيح لهذه الوحدات:

وحدات الطول:

1 ميليمتر (ملم) = 0.001 متر (م)
1 سنتيمتر (سم) = 0.01 م
1 ديسمتر (دسم) = 0.1 م
1 ديكامتر (د م) = 10 م
1 هيكتومتر (هم) = 100 م
1 كيلو متر (كم) = 1000 م

وحدات الكتلة:

1 ميلغرام (ملغم) = 0.001 غرام (غم)
1 غم = 0.001 كيلو غرام (كلغم)
1 كلغم = 0.001 طن

وحدات السعة:

10 مللتر = 1 سنتلتر (سل)
10 سل = 1 ديسلتر (دل)
10 دل = 1 لتر = 1000 مللتر

وحدات الحجم:

1000 ملمتر مكعب (ملم^3) = 1 سنتيمتر مكعب (سم^3)
1000 سم^3 = 1 دسم^3
1000 دسم^3 = 1 م^3

كما تلاحظ فإنه من السهل التحويل بين هذه الوحدات. خاصة إذا ما قورن ذلك بالتحويل في النظام الإنجليزي للوحدات حيث:

1 ياردة = 3 أقدام
1 قدم = 12 بوصة
1 ميل = 1760 ياردة

ويفضل أن يعطى التلاميذ الفرصة لإجراء القياسات بالوحدات اللامعيارية كالشبر والخطوة ومن ثم يتم تقديم الوحدات المعيارية، بعد خلق حاجة ماسة لاستخدامها. ويتم ذلك من خلال أنشطة خاصة بكل قياس. وهذا ما سنناقشه لاحقاً في هذا الفصل.

تدريس القياس

سنناقش في هذا البند كيفية تدريس قياس الخواص التالية واشتقاق معادلات لبعض منها: الطول، الكتلة، السعة، الزمن ،المساحة، المحيط.

وقبل البدء في ذلك نود أن نعرض بعض الإرشادات العامة حول تدريس القياس بشكل عام.

1) يبدأ تعليم القياس بالقياسات التقريبية وليس الفعلية.
2) يتم تعليم القياس بالإجراء الفعلي للقياس لا بالقراءة عنه.
3) يبدأ تدريس قياس أي خاصية بإجراء مقارنات بين الأشياء (أطول، أقصر، اثقل، أخف،...).
4) قياس الكميات المتصلة هو عملية تقريبية مهما بلغت دقة أداة القياس.
5) هناك نوعان من القياس:

أ- القياس المباشر: وهو الذي تستخدم فيه أداة القياس كقياس طول الغرفة بالشريط المتري أو قياس درجة حرارة الماء باستخدام ميزان الحرارة.

ب- القياس غير المباشر: وهو الذي يتضمن قياساً عن طريق إجراء حسابات معينة (استخدام معادلات القياس) كإيجاد مساحة منطقة مستطيلة بضرب طولها في عرضها.

6) يجب التركيز على التحويل بين وحدات النظام الواحد وليس عبر الأنظمة في المرحلة الابتدائية.
7) الوصول إلى درجة الدقة في القياس تأتي بالتدريج. ويجب تشجيع التلاميذ للوصول إلى تلك المرحلة من خلال خلق الحاجة إلى ذلك.
8) لابد للتمكن من القياس أن يُسبق بفهم لمعنى القياس.

مراحل تدريس القياس

لقد حدد ويلسون ورولاند (1993) خمس مراحل لتدريس قياس كل خاصية. تمثل المراحل الثلاثة الأولى مجتمعة (المرحلة المفاهيمية)، بينما تمثل المرحلتين الرابعة والخامسة " مرحلة الربط " وفيما يلي ملخص لهذه المراحل:

المرحلة الأولى: تحديد الخصائص

قبل كل شيء، يحتاج التلاميذ إلى التمييز بين الخصائص وتعريفها بوضوح. كما يحتاجون إلى تحديد الخصائص القابلة للقياس في الأشياء المختلفة. وأفضل طريقة لمساعدة التلاميذ على تحقيق ذلك يكون في سياق حل المشكلات.

المرحلة الثانية: المقارنات المباشرة

والمقصود بالمقارنات المباشرة هو مقارنة شيئين دون استخدام أدوات أو وحدات قياس. ومثال ذلك مقارنة أطوال التلاميذ، مقارنة أوزان كتب، مقارنة سعات أواني مختلفة. ويكون الهدف من هذه المرحلة هو تعزيز مصطلحات القياس لدى التلاميذ (طول، أطول، أقصر ؛ كتلة، أخف، أثقل،... الخ)، على اعتبار أن التلاميذ يملكون مثل هذه المهارة قبل دخول المدرسة.

المرحلة الثالثة: المقارنة باستخدام الوحدات اللامعيارية

في هذه المرحلة، يجب مساعدة التلاميذ على الانتقال من طور "المقارنة بالحكم على المظهر" إلى المقارنة باستخدام وحدات القياس. ويتم هذا من خلال مسائل تتضمن مقارنات بين أشياء بحيث لا يمكن الحكم فيها على المظهر. مثل هذه المسائل تخلق حاجة لدى التلاميذ إلى فهم وحدات القياس.

وفي هذه المرحلة يبدأ التلاميذ بفهم الخطوات الضرورية لإجراء القياس والمتمثلة في:

أ- تحديد الخاصية المراد قياسها.

ب- اختيار وحدة قياس ملائمة.

ج- إجراء القياس: تحديد مقدار الخاصية المقاسة بالوحدات المستخدمة.

د- ذكر عدد الوحدات واسمها.

المرحلة الرابعة: الانتقال من الوحدات اللامعيارية إلى الوحدات المعيارية

كما ذكر سابقاً فإن تدريس القياس يبدأ من خلال وحدات لا معيارية ثم ينتقل إلى الوحدات المعيارية. إن المراحل الثلاثة السابقة تتضمن العمل في الوحدات اللامعيارية،

مما يؤدي إلى أن يدرك التلاميذ أن اختيار وحدات القياس هي مسألة عشوائية.

ومن الجدير بالذكر أنه يجب التركيز على التقدير بشكل كبير في المراحل الثانية والثالثة والرابعة. وفي هذا الصدد فإنه ينصح بمساعدة التلاميذ على تكوين مرجعيات لبعض المقاسات كما يلي:

الأطوال:

1 متر	- ارتفاع شباك الغرفة - البعد بين الحافة السفلي للسبورة وأرضية الغرفة
2 متر	- طول لاعب كرة السلة - ارتفاع باب الغرفة
1 سم	- سمك كتاب الرياضيات (إذا كان ذلك صحيحا)
10 سم	- عرض علبة الأدوات الهندسية
1 ملم	- سمك قطعة نقود
1 كيلو متر	- المسافة بين مكانين مألوفين في مدينة أو قرية التلميذ
10 كيلو متر	- المسافة بين مكانين مألوفين في مدينة أو قرية التلميذ
100 كيلو متر	- المسافة بين مدينتين مألوفتين للتلميذ

السعة

5 مليلتر	ملعقة دواء
1 لتر	سعة إناء ماء (خاص بالثلاجة)

الكتلة

1 غم	كتلة حبة فاصولياء (ناشفة)
1 كغم	كتلة 6 حبات طماطم
100 كغم	كتلة شخص بدين نوعاً ما

الزمن

1 ثانية	الوقت اللازم لتقول "واحد" ببطء
1 دقيقة	الوقت اللازم للعد حتى 60
1 ساعة	وقت حصة ما قبل الاستراحة والاستراحة (في المدرسة)

درجات الحرارة المئوية

صفر م°	درجة حرارة الثلج
25 م°	درجة حرارة الغرفة
100 م°	درجة حرارة ماء يغلي

المرحلة الخامسة: تطوير معادلات القياس.

وتخص هذه المرحلة الخواص التي يحتاج قياسها على معادلات خاصة كالمحيط والمساحة. وسنأتي على هذا الموضوع لاحقاً في هذا الفصل.

القياس الخطي:

يقصد بالقياس الخطي القياس في بعد واحد. ومن أمثلة ذلك قياس الطول. ويتبع في تدريس الطول الخطوات التالية:

أ- مرحلة المقارنات المباشرة

1) مقارنة أطوال مواد محسوسة كالأقلام والكتب والدفاتر وما شابه.
2) تصنيف الأشياء تبعا لأطوالها تصاعديا أو تنازليا.

وفي هذه المرحلة يتم تشجيع التلاميذ على استخدام مصطلحات مثل أطول وأقصر. وهنا يجب لفت أنظار التلاميذ إلى أن مقارنة طولي شيئين تتطلب تثبيت نهاية أحد الشيئين على نهاية الشيء الآخر.

ب- مرحلة المقارنة باستخدام الوحدات اللامعيارية

ويتم في هذه المرحلة إجراء قياسات باستخدام وحدات غير معيارية. وهناك العديد من الأنشطة التي يمكن أن يصممها المعلم في هذا المجال. دع مجموعات من التلاميذ على سبيل المثال يقيسون أبعاد غرفة الصف بأي وحدات يشاؤون. سيستخدم بعض التلاميذ الخطوة ويستخدم بعضهم الكتب وربما يستخدم بعضهم خيط أو ما شابه. بعد ذلك ناقش مع التلاميذ النتائج التي توصلوا إليها.

يعتبر مثل هذا النشاط فرصة عظيمة لخلق حاجة حقيقية لاستخدام الوحدات المعيارية، وبالتالي يمكن تقديمها للتلاميذ.

ج- مرحلة الوحدات المعيارية

1) إجراء قياسات لأشياء قصيرة نسبياً (أقل من 1 متر) باستخدام السنتيمتر كوحدة للطول.
2) إجراء قياسات لأشياء طويلة وذلك لخلق حاجة لاستخدام وحدات أكبر من السنتيمتر وبالتالي تقديم المتر كوحدة لقياس الطول.
3) الدقة في القياس ومهارة استخدام المسطرة.

قياس الكتلة:

يمر قياس الكتلة بنفس المراحل التي ذكرت سابقاً.

أ- مرحلة المقارنات المباشرة: ويتم ذلك من خلال إجراء مقارنات بين أوزان أشياء مختلفة دون استخدام الوحدات. ويكتفى بتقدير أي الأشياء أخف أو اثقل. ويفضل في البداية أن يقارن التلاميذ بين أوزان أشياء يتناسب كتلتها مع حجمها.

ب- مرحلة المقارنة باستخدام الوحدات اللامعيارية: ويمكن في هذه المرحلة استخدام الميزان ذي الكفتين وتوزين الأشياء باستخدام وحدات غير معيارية وذلك بوضع الشيء المراد قياس كتلته في كفة ووضع شيء آخر في الكفة الثانية (قطعة خشبية أو معدنية أو غير ذلك).

ج- مرحلة الوحدات المعيارية: وفي هذه المرحلة يتم تقديم وحدات الكتلة: غرام، كيلو غرام، طن،.. الخ. من المفيد أن يطلب من التلاميذ تكوين أوزان باستخدام مواد مختلفة كتكوين 1 كيلو غرام من الرمل، 2 كيلو غرام من الحجارة، 1 كيلو غرام القطن، وهكذا.

قياس السعة:

أ- مرحلة المقارنات المباشرة: يتم في هذه المرحلة مقارنة سعات أواني مختلفة بمجرد النظر إليها. وذلك باستخدام كلمات مثل أكثر، أقل، يساوي.

ب- مرحلة الوحدات اللامعيارية: في هذه المرحلة يمكن استخدام وحدات مثل الكأس أو الكوب أو غير ذلك من الوحدات غير المعيارية.

ج- مرحلة الوحدات المعيارية: ويتم فيها تقديم وحدات السعة: السنتيمتر المكعب واللتر والمليمتر،.. الخ.

ويتم في هذه المرحلة أيضاً تعليم مبدأ المحافظة على السعة من خلال أنشطة

يقوم فيها التلاميذ بتفريغ كمية من الماء في أوعية مختلفة الشكل وإعادتها في كل مرة إلى إناء مرجعي.

قياس الزمن:

أ- مرحلة المقارنات المباشرة:

إن نسبية الزمن تشكل عائقاً أمام النضوج المبكر لهذا المفهوم لدى التلاميذ. وعلى الرغم من أن موضوع الزمن ليس غريبا على التلاميذ، إلا أنه من الصعب عليهم إجراء مقارنات بين زمنين متقاربين. فزمن وقوف التلميذ لمدة 10 دقائق بانتظار باص المدرسة يبدو أ طول بكثير من 10 دقائق يقضيها في اللعب مع زملائه. وبالتالي فإن على المعلم أن يستغل كل الفرص الممكنة لإجراء مقارنات بين أزمان أحداث مختلفة. الأمر الذي سوف يخلق حاجة أكيدة لقياس الزمن.

ب- مرحلة الوحدات اللامعيارية:

إضافة إلى هذه المقارنات، فإنه يجب تعويد التلاميذ على استخدام مصطلحات مثل صباحاً، مساءاً، في أمثلة حياتية. فالتلميذ يأتي إلى المدرسة في الصباح ويغادرها عند الظهر ويتناول عشاءه في المساء.

ج- مرحلة الوحدات المعيارية:

وفي هذه المرحلة يتم تقديم الساعة وتعليم التلاميذ قراءتها. وكذلك يتم في هذه المرحلة تقديم وحدات الزمن المختلفة.

الدقيقة = 60 ثانية
الساعة = 60 دقيقة
اليوم = 24 ساعة
الأسبوع = 7 أيام
الشهر = 30 يوماً
السنة = 12 شهراً = 365 يوماً
القرن = 100 سنة.

معادلات القياس:

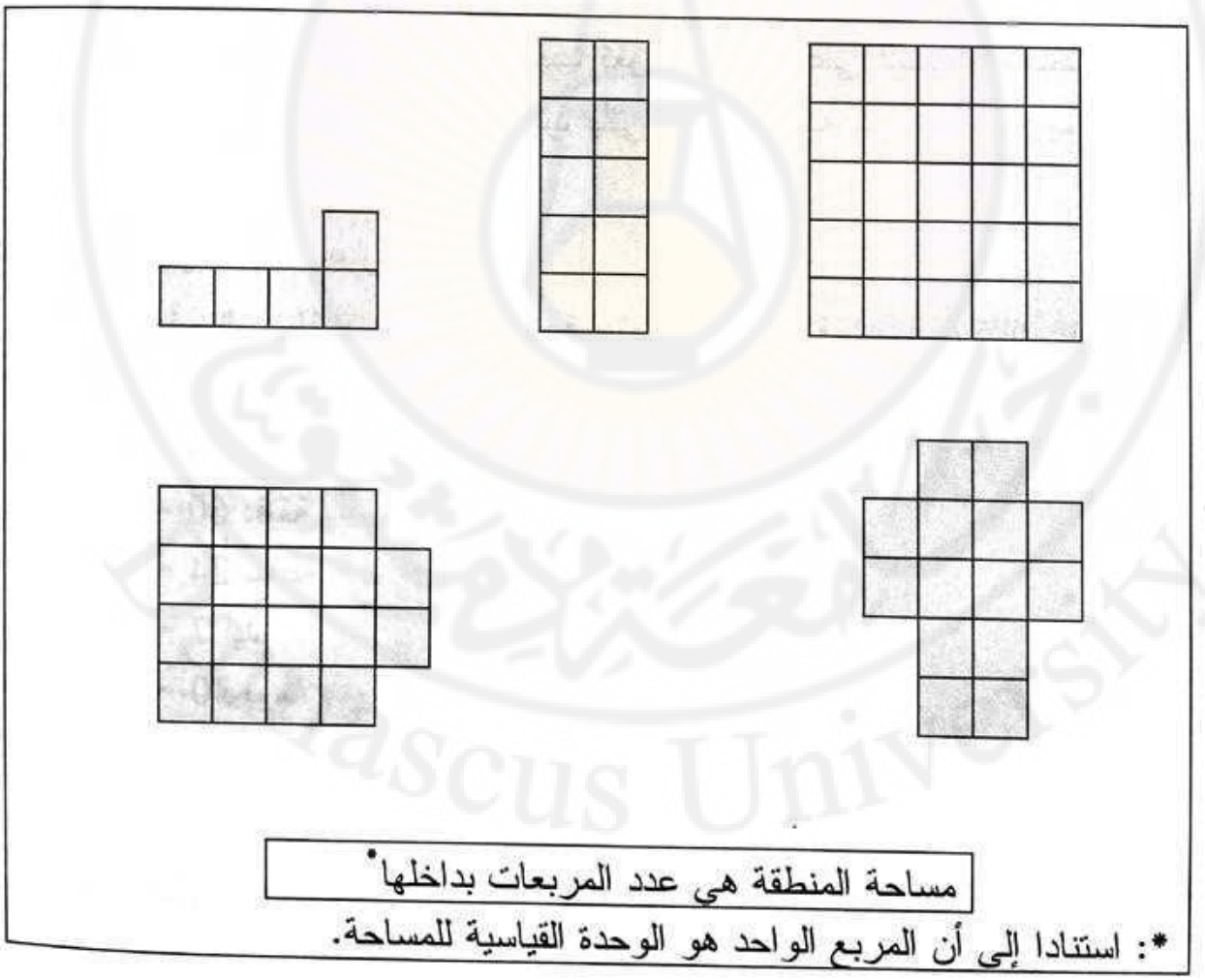
كثير ما يواجه التلاميذ صعوبة في تذكر معادلات القياس (معادلة المحيط، معادلة المساحة، ... الخ). ويعود السبب في ذلك إلى أن التدريس التقليدي لمعادلات القياس يركز على حفظ هذه المعادلات وتطبيقها آلياً دون إعطاء التلاميذ الفرصة لاكتشاف هذه

المعادلات بأنفسهم.

سوف نناقش هنا كيفية مساعدة التلاميذ على اكتشاف بعض معادلات القياس المهمة من خلال أنشطة يقدمها المعلم لهذا الغرض.

المساحة:

أولا: تقديم مفهوم المساحة قبل البدء بتدريس معادلات المساحة. لابد من تعريف التلاميذ بمفهوم المساحة أولاً. وتعتبر أوراق المربعات وسيلة مناسبة لهذا الغرض. ويمكن للمعلم أن يقدم مفهوم المساحة عن طريق رسم بعض الأشكال الهندسية على ورق المربعات ويطلب من التلاميذ عد الوحدات المربعة التي تغطي هذه الأشكال، ومن ثم تتم تسمية مجموع هذه الوحدات بمساحة الشكل الهندسي (انظر الشكل 10-1). ولتقويم اكتساب التلاميذ لمفهوم المساحة يمكن استخدام أنشطة تقويمية كذلك المبين في الشكل (10-2).

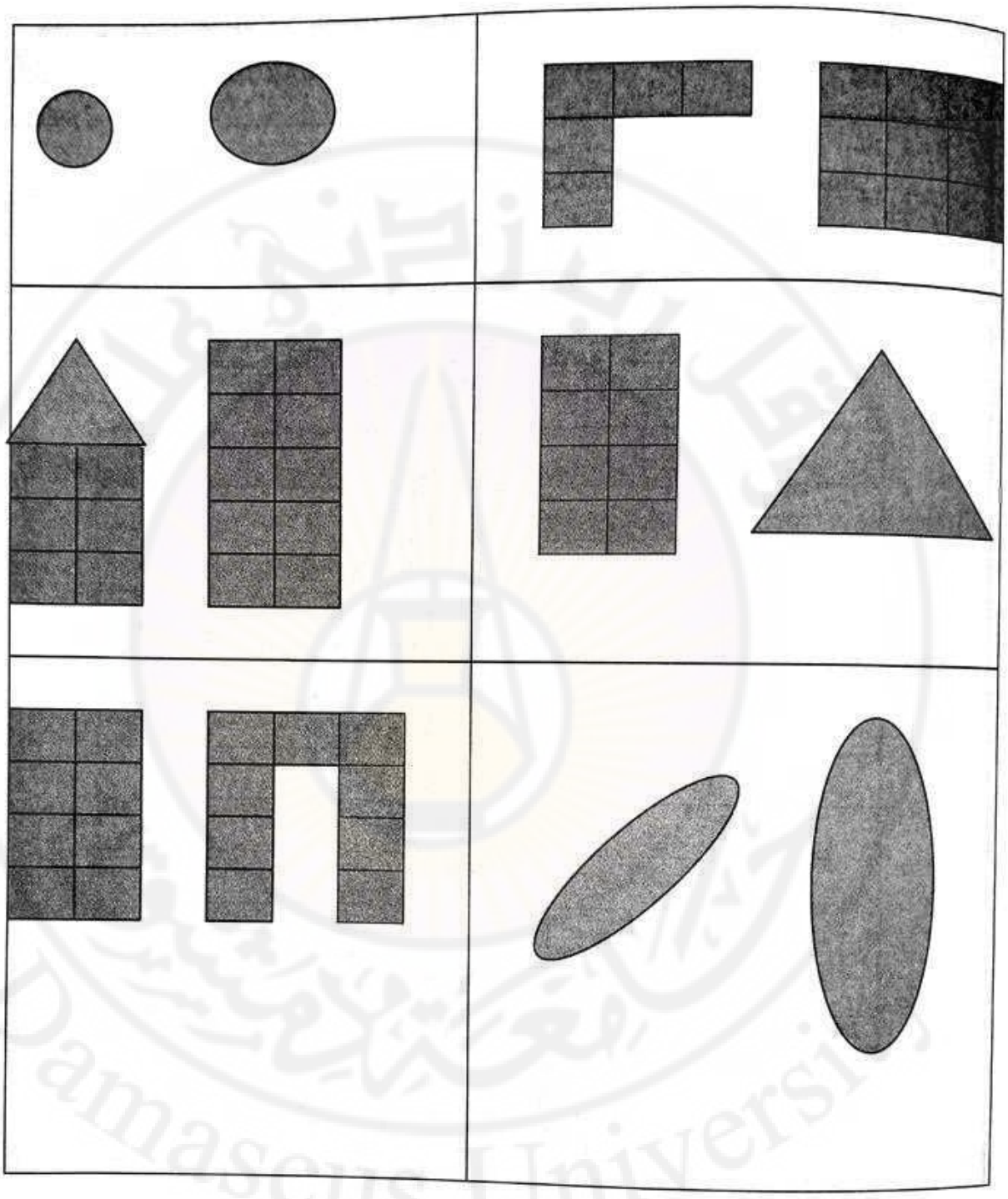


مساحة المنطقة هي عدد المربعات بداخلها*

*: استنادا إلى أن المربع الواحد هو الوحدة القياسية للمساحة.

الشكل (10-1): تقديم مفهوم المساحة

فيما يلي أزواج من الأشكال الهندسية. حدد الشكل ذا المساحة الأكبر في كل زوج؟



الشكل (10-2): تقويم فهم التلاميذ لمفهوم المساحة

مساحة المنطقة المستطيلة والمنطقة المربعة:

بعد أن يكون التلميذ قد اكتسب مفهوم المساحة، فإنه من السهل أن نقوده إلى اكتشاف المعادلتين الخاصتين بمساحة المنطقة المستطيلة والمنطقة المربعة. أنظر النشاط التالي.

نشاط (1): يهدف هذا النشاط إلى مساعدة التلاميذ على اكتشاف معادلتي مساحة المنطقة المستطيلة ومساحة المنطقة المربعة.

باستخدام ورق المربعات، ارسم المستطيلات ذات الأبعاد التالية، ثم سجل مساحاتها في العمود المخصص لذلك في الجدول (عن طريق عد المربعات المكونة للشكل).

الطول	العرض	المساحة
1	1	
1	2	
1	3	
1	4	
2	1	
2	2	
2	3	
2	4	
3	1	
3	2	
3	3	
3	4	

سؤال: ماذا تستنتج ؟

مساحة المنطقة المستطيلة =

مساحة المنطقة المربعـــة =

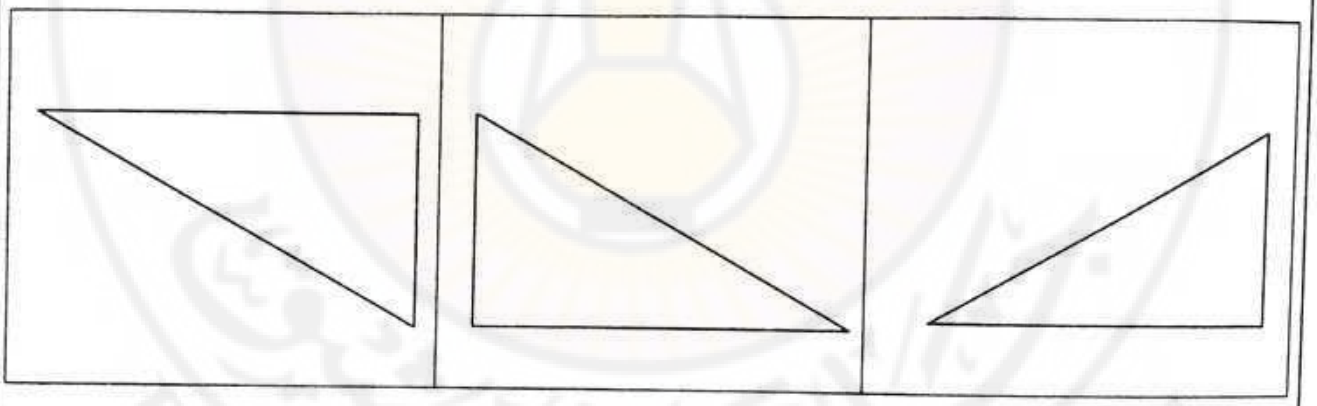
مساحة المنطقة المثلثة:

لاكتشاف مساحة المنطقة المثلثة، يحتاج التلميذ إلى استخدام الاستدلال القياسي بحيث يطبق ما يعرفه عن مساحة المنطقة المستطيلة. النشاط (2) هو محاولة لاستدراج التلميذ إلى اكتشاف معادلة مساحة المنطقة المثلثة. ويجب التنبيه هنا إلى أن التلميذ يجب أن يأخذ الفرصة الكافية للتفكير بطريقة يصل فيها إلى المعادلة دون تدخل المعلم. وإذا فشلت محاولات التلميذ في إيجاد هذه المعادلة ولم يهتد إلى مقارنة المثلث بالمستطيل، فيمكن أن يتدخل المعلم هنا ويلفت انتباه التلميذ إلى أنه يمكن الاستفادة من العلاقة بين المثلث والمستطيل.

نشاط (2):

اكتشاف معادلة مساحة المنطقة المثلثة

حدد مساحات المناطق المثلثة التالية:



- ما الطرق المختلفة التي قد يلجأ إليها التلميذ لحل هذه المسألة ؟
- هل تعتقد أن استخدام وسيلة أخرى غير ورق المربعات قد يسهل مهمة التلميذ ؟ ما هي ؟
- لو كنت معلم هذا التلميذ، متى تتدخل ؟ وكيف ؟
- ماذا لو لم يكن المثلث قائم الزاوية كما في الشكل ؟

مساحة المنطقة متوازية الأضلاع:

بعد أن يكون التلميذ قد اكتشف معادلتي مساحة المنطقة المستطيلة والمنطقة المثلثة، يكون مهيئاً لاكتشاف مساحة المنطقة متوازية الأضلاع حيث يستطيع تقسيم متوازي الأضلاع إلى مثلثين ومستطيل، كما هو مبين في النشاط التالي:

نشاط (3)

اكتشاف معادلة مساحة المنطقة متوازية الأضلاع.

استخرج معادلة لحساب مساحة المنطقة المبينة أدناه.

- هل من الصعب على التلميذ الوصول إلى المعادلة المطلوبة ؟
- إذا كانت الإجابة نعم، ما الدور الذي يمكن أن يلعبه المعلم لمساعدة التلميذ على الوصول إلى المعادلة المطلوبة ؟

محيط الدائرة:

بعد تعريف التلميذ بقطر الدائرة، يصبح من السهل توجيهه لاكتشاف معادلة المحيط من خلال نشاط بسيط يقوم به (انظر النشاط التالي). ويعتبر هذا النشاط أيضا فرصة للتلميذ لإدراك مفهوم النسبة التقريبية، المفهوم الذي يبدو غريبا بالنسبة لكثير من التلاميذ حيث يتم تحفيظ قيمة هذه النسبة التقريبية لهم في أغلب الأحيان دون معرفة بمعناها.

نشاط (4):

اكتشاف معادلة محيط الدائرة.

يحضر المعلم مجموعة من الأسطوانات الدائرية بأقطار مختلفة ويطلب من التلاميذ قياس محيطاتها وأقطار قواعدها الدائرية وتسجيل النتائج في الجدول أدناه لقياس المحيط يمكن استخدام شريط مدرج مرن. أما لقياس القطر فيمكن استخدام مسطرة وأخذ عدة قراءات وتسجيل الأعلى حيث أن القطر هو أطول وتر يمكن رسمه في الدائرة. وللحصول على نتائج أدق بالنسبة للقطر فيمكن رسم قاعدة الاسطوانة الدائرية داخل مربع ومن ثم قياس طول ضلع المربع.

القطر	المحيط	المحيط ÷ القطر
1		
2		
3		
4		
5		
6		

ماذا تستنتج ؟

محيط الدائرة =

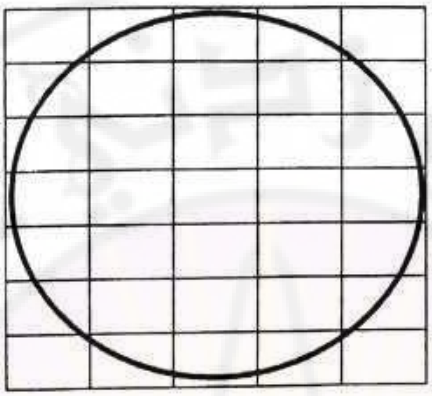
مساحة الدائرة:

قد يبدو أنه من الصعب على التلاميذ اكتشاف معادلة مساحة المنطقة الدائرية والواقع ليس كذلك. إن اختيار الأنشطة الملائمة تجعل التلاميذ يهتدون وبسهولة إلى أن مساحة المنطقة الدائرية تساوي حاصل ضرب النسبة التقريبية في مربع نصف القطر. وقبل ذلك يمكن توفير نشاط للتلاميذ بحيث يقدرون المساحة بشكل تقريبي من خلال رسم دائرة داخل مربع ومحاولة تقدير المساحة الواقعة خارج الدائرة وداخل المربع.النشاطان التاليان يوضحان ذلك.

نشاط (5):

تقدير مساحة المنطقة الدائرية

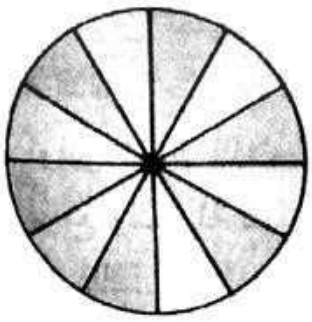
قدر مساحة المنطقة الدائرية في الشكل.

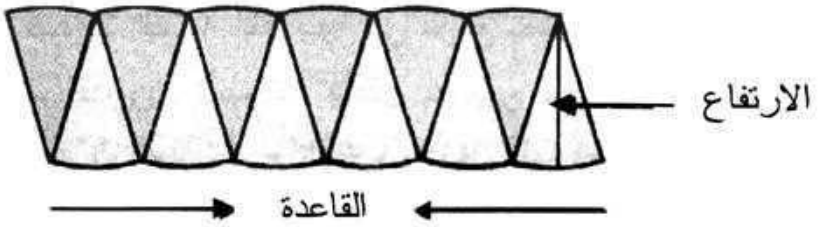


كيف يمكن أن يقوم التلاميذ بهذه المهمة ؟

نشاط (6): اكتشاف مساحة المنطقة الدائرية.

- كيف يمكن إيجاد معادلة لحساب مساحة المنطقة الدائرية ؟
- ماذا لو جزأنا الدائرة إلى عدة أجزاء متساوية كما في الشكل أدناه؟
- لو جزئت الدائرة إلى عدد كبير جدا من الأجزاء، ماذا يكون الشكل الناتج ؟ مستطيل.
- ما طول هذا المستطيل ؟ وما عرضه ؟
- ما مساحته ؟
- إذا مساحة المنطقة الدائرية =.....





الأنشطة وأسئلة التقويم

1- فرّق بين الوحدات المعيارية والوحدات اللامعيارية وأعط 3 أمثلة على كل منها.

2- وضح الخطوات التي يجب أن يمر بها تدريس ما يلي:

أ- قياس الكتلة

ب- قياس السعة

ج- قياس الزمن

د- قياس المساحة

3- صمم نشاطاً تقود من خلاله التلاميذ إلى اكتشاف معادلة مساحة المنطقة المثلثة.

4- كيف يمكن أن تساعد تلاميذك على اكتشاف معادلة محيط الدائرة ؟

5- صمم نشاطاً يساعد التلاميذ على اكتشاف معادلة مساحة المنطقة الدائرية.

6- مربع طول ضلعه 1 سم. ما مساحته بالمتر المربع ؟

7- ما الذي يميز النظام المتري عن غيره من أنظمة القياس الأخرى.

مراجع الفصل

Bright, G. W., & Hoeffner, K. (1993). Measurement, probability, statistics, and graphing. In D. T. Owens (Ed.), *Research ideas for the classroom: Middle grades mathematics* (pp. 78-98). Reston, VA: National Council of Teachers on Mathematics.

Cathcart, W. G. (2001). *Learning Mathematics in Elementary and Middle Schools* (2nd ed.). Ohio: Merrill Prentice Hall.

Kamii, C., & Clark, F.B. (1997). Measurement of length: The need for a better approach to teaching. *School Science and Mathematics, 97*, 116-121.

National Council of Teacher of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School mathematics*. Reston, VA: Author.

Piaget, J., Inhelder, B., & Szeminska, A. (1960). *The child's conception of geometry*. (E. A. Lurnzer, Trans.). New York: Basic Books.

Piaget, J., & Inhelder, B. (1967). *The child's conception of space* (F. J. Langdon & J. L. Lunzer, Trans.). New York: Norton.

Van de Walle, J. A. (2001). *Elementary and Middle School Mathematics: Teaching developmentally* (4th ed.). New York: Longman.

Wilson, P. S., & Rowland, R. E. (1993). Teaching Measurement. In R. J. Jensen (Ed.), *Research ideas for the classroom: Early childhood mathematics* (pp. 171-194). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.