منشورات جامعة دمشق
كلية العلوم

البنى الجبرية (٣)

الدكتور
عبد اللطيف هنانو
الأستاذ المساعد في قسم الرياضيات

١٤٤٣ - ١٤٤٤هـ
٢٠٢١ - ٢٠٢٢ م

جامعة دمشق

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

البنى الجبرية (3)

السنة الثالثة

العلوم الرياضية

الفهرس

الموضوع | الصفحة

الفصل الأول

المودول – المودول الجزئي

1- 1- مقدمة 13
1- 2- المودول 19
1- 3- المودول الجزئي 22
1- 4- العمليات على المودولات الجزئية 23
تمرينات محلولة 29
تمرينات (1) 34

الفصل الثاني

التشاكلات – المتتاليات المودولية

2 – 1- التشاكلات المودولية 37
2 – 2- المخططات التبادلية 54
2 – 3- المتتاليات التامة 56
2 – 4- التشاكل المستخلص 62
تمرينات محلولة 69
تمرينات (2) 74

الموضوع	الصفحة

الفصل الثالث

المودول الخارج ومبرهنات التماثل

3 – 1– بناء مودول الخارج 79

3 – 2– مبرهنات التماثل 82

مبرهنة التماثل الأولى 82

مبرهنة التماثل الثانية 83

مبرهنة التماثل الثالثة 84

مبرهنة zassenhaus 84

تمرينات محلولة 86

تمرينات (3) 93

الفصل الرابع

الجداء – الجداء المرافق

4 – 1– الجداء الديكارتي 95

4 – 2– جداء المودولات الجزئية 96

4 – 3– الجداء المرافق 103

4 – 4– المجموع المباشر الداخلي 111

4 – 5– المتتاليات المنشطرة 118

تمرينات محلولة 128

تمرينات (4) 142

الموضوع	الصفحة

الفصل الخامس
سلاسل المودولات الجزئية

5 – 1– المودولات النوثرية 145
5 – 2– المودولات الآرتنية 149
5 – 3– أبراج جوردان–هولدر 150
تمرينات محلولة 156
تمرينات (5) 159

الفصل السادس
المودولات الحرة

6 – 1– المودولات الحرة على مجموعة 161
6 – 2– المودولات الحرة 168
تمرينات محلولة 177
تمرينات (6) 182

الموضوع	الصفحة

الفصل السابع

المودولات الإسقاطية – المودولات الأفقية

7 – 1– مقدمة 183

7 – 2– المودول الإسقاطي 183

7 – 3– المودول الأفقي 191

تمرينات محلولة 207

تمرينات (7) 217

الفصل الثامن

المودول الثنوي

8 – 1– بناء المودول الثنوي 219

8 – 2– المودول المضاعف الثنوية 222

8 – 3– منقول تشاكل مودولي 224

تمرينات محلولة 229

تمرينات (8) 233

الفصل التاسع

الجداء التنسوري و المودولات التآلفية

9 – 1– مقدمة 235

9 – 2– الجداء التنسوري 235

الموضوع	الصفحة

9 – 3– نتائج وملاحظات 240

9 – 4– ثنائي المودول 243

9 – 5– الجداء التنسوري للتشاكلات المودولية 246

9 – 6– المودول التآلفي 253

تمرينات محلولة 258

تمرينات (9) 263

المصطلحات العلمية 265

المراجع العلمية 259

Damascus University

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

المقدمـــة

تعتبر نظرية المودولات أحد أهم فروع الجبـــر الخطـــي ، يعتبـــر المـــودول module تعميماً للفضاء الشعاعي vector space .

إن لنظرية المودولات دوراً مهماً في تطوير الكثير مـــن المجـــالات المتقدمـــة للرياضـــيات كنظريـــة الفئـــات category theory و التبولوجيـــا الجبريـــة algebraic topology و الجبر الهومولوجي homological algebra .

إن الخوض في دراسة نظرية المودولات يتطلب معرفة عميقة فـــي المواضـــيع الأساسية في نظرية المجموعات ونظرية الزمر بالإضافة إلى نظرية الحلقات .

عرضت مادة هذا الكتاب بأسلوب علمي يناسب طلاب السنة الثالثة في العلـــوم الرياضية تاركاً فرصة للطلاب المهتمين للاستنتاج وللمحاكمة المنطقية لتكـــون انطلاقة نحو البحث العلمي .

تضمن هذا الكتاب مفردات منهاج البنى الجبرية (3) لطلاب الـــسنة الثالثـــة – العلوم الرياضية – وجاءت في تسعة فصول .

يعرض الفصل الأول التعريفات الأساسية للمودول وللمودول الجزئي .

يعالج الفصل الثاني التشاكلات المودوليـــة والمتتاليـــات التامـــة والمخططـــات التبادلية.

يدرس الفصل الثالث مودول خارج القسمة ومبرهنات التماثل اعتمـــاداً علـــى المخططات التبادلية .

أما الفصل الرابع فيتناول الجداء و الجداء المرافق للمودولات لينتهي بالمتتاليات المنشطرة .

يدرس الفصل الخامس سلاسل المودولات الجزئيـــة ، المـــودولات النوثريـــة ، المودولات الآرتنية ، برج جوردان – هولدر .

خُصص الفصل السادس لدراسة المودولات الحرة و المودولات المنتهية التوليد.

يعالج الفصل السابع المودولات الإسقاطية و المودولات الأفقية كمـــا ويـــدرس المودولات على بعض الحلقات الخاصة .

يناقش الفصل الثامن المودول الثنوي والأشكال الخطية والقاعدة الثنويَة .

ينفرد الفصل التاسع لدراسة الجداء التنسوري و المودولات التآلفية وربطها مـــع المودولات الإسقاطية و المودولات الأفقية .

وبهدف تعميق المعرفة العلمية لدى الطالب أتبعت كل فصل من فصول الكتـــاب بمجموعة من التمرينات المحلولة ذات مستويات مختلفة ، ضـــمَنت مجموعـــة التمرينات غير المحلولة تمرينات بحثيَة لتضع الطلاب علـــى طريـــق البحـــث العلمي .

أخيراً :

أرجو أن أكون قد وفقت في صياغة مادة هذا الكتاب بأسلوب علمـــي صـــحيح يمكِن الطالب فهم موضوعاته بشكل جيد لتكون له عوناً في فهم القضايا العلمية التي ترتبط بموضوعات هذا الكتاب .

دمشق 25 / 5 / 2008

المؤلف

الدكتور عبد اللطيف هنانو

الفصل الأول

المودول – المودول الجزئي

Module – Submodule

1 – 1 مقدمة

قبل الشروع في دراسة المودولات لا بد من تذكرة نستعرض فيها المفاهيم الأساسية في نظرية الحلقات .

* من المعلوم أن الحلقة هي مجموعة غير خالية R مزودة بقانوني تشكيل داخليين $(\cdot)$,$(+)$ بحيث يكون :

1- البنية $(R,+)$ زمرة تبديلية .

2 – القانون $(\cdot)$ توزيعي على القانون $(+)$ أي :

$$\forall a,b,c \in R \quad : \quad a.(b+c) = a.b + a.c$$
$$(b+c).a = b.a + c.a$$

3- القانون $(\cdot)$ تجميعي أي :

$$\forall a,b,c \in R: \quad a.(b.c) = (a.b).c$$

4- يوجد في R عنصر محايد بالنسبة إلى القانون $(\cdot)$.

يسمى المحايد في الزمرة $(R,+)$ صفر الحلقة R و يرمز له بالرمز o_R أو o (إن لم يؤد هذا الترميز إلى أي التباس) ، نرمز نظير العنصر $x \in R$ بالنسبة إلى قانون $(+)$ بالرمز $-x$ ، ويسمى المحايد في R بالنسبة إلى القانون $(\cdot)$ واحد الحلقة R و يرمز له بالرمز 1_R أو 1 (إن لم يؤد هذا الترميز إلى أي التباس) ، إذا كان قانون الضرب $(\cdot)$ المعرف في الحلقة R تبديلياً فيقال إن الحلقة R حلقة تبديلية .

و تجدر الإشارة إلى أن الشرطين (1) و (2) أساسيان في تعريف الحلقة ، أما الشرطان (3) و (4) فيمكن الاستغناء عنهما ، فهناك حلقات غير واحدية ، مثل حلقة الأعداد الصحيحة الزوجية بالنسبة إلى قانوني جمع الأعداد و ضربها المألوفين ، وحلقات غير تجميعية مثل حلقة لي حيث إن حلقة لي هي مجموعة غير خالية L مزودة بقانوني تشكيل داخليين $(\cdot)$,$(+)$ وتحقق الشروط :

1- البنية $(L,+)$ زمرة تبديلية .

2- القانون $(\cdot)$ توزيعي على القانون $(+)$.

3- أياً كان $a \in L$ فإن $a.a = o_L$.

4- أياً كان $a,b,c \in L$ فإن

$$a.(b.c) + b.(c.a) + c.(a.b) = o_L$$

ونذكر أنه إذا كان $1_R = o_R$ في حلقة R فإن $R = \{o_R\}$ و تسمى R عندئذٍ حلقة صفرية ويرمز لها O.

في هذا الكتاب كلمة " حلقة " تعني حلقة غير صفرية تحقق الشروط الأربعة المذكورة في تعريف الحلقة .

* إذا كانت R حلقة وكان $a,b,c \in R$ فإن :

1) $a.o = o$

2) $a.(-b) = (-a).b = -(a.b)$

3) $(-a)(-b) = a.b$

4) $a.(b-c) = a.b - a.c$

5) $a.(-1) = (-1).a = -a$

6) $(-1)(-1) = 1$

* **إذا كانت** R حلقة فإننا نرمز مجموعة العناصر القلوبة في R بالنسبة إلى قانون $(\cdot)$ بالرمز $U(R)$ أي :

$$U(R) = \{x \in R \quad ; \quad x^{-1} \in R\}$$

وتكون البنية $(U(R),\cdot)$ زمرة .

* إذا كانت R حلقة وكانت A مجموعة جزئية غير خالية من R فإن:

$$A \text{ حلقة جزئية من } R \Leftrightarrow \begin{cases} 1) & \forall a,b \in A: \quad a-b \in A \\ 2) & \forall a,b \in A: \quad a.b \in A \end{cases}$$

* إذا كانت R حلقة و $0 \neq a \in R$.

يقال عن العنصر a إنه قاسم للصفر (Zero divisor) من اليمين في R إذا وجد $o \neq b \in R$ بحيث يكون $b.a = o$.

يقال عن العنصر a إنه قاسم للصفر من اليسار في R إذا وجد $o \neq c \in R$ بحيث يكون $a.c = o$.

يقال عن العنصر a إنه قاسم للصفر في R إذا كان قاسماً للصفر من اليمين ومن اليسار في R بآن واحد .

* إذا كانت R حلقة وكانت I مجموعة جزئية غير خالية من R فإنه :

يقال عن المجموعة I إنها مثالي يساري في الحلقة R إذا تحقق الشرطان :

1- أياً كان $a,b \in I$ فإن $a-b \in I$

2- أياً كان $a \in I$ و $r \in R$ فإن $r.a \in I$

يقال عن المجموعة I إنها مثالي يميني في الحلقة R إذا تحقق الشرطان :

1- أياً كان $a,b \in I$ فإن $a-b \in I$

2- أياً كان $a \in I$ و $r \in R$ فإن $a.r \in I$

يقال عن المجموعة I إنها مثالي في الحلقة R إذا كانت I مثالياً يسارياً و يمينياً بآن واحد

ملاحظة (1)

إذا كانت R حلقة تبديلية فإن كل مثالي يساري أو يميني في R يكون مثالياً في R .

ملاحظة (2)

كل مثالي يساري (أو يميني) في حلقة R هو حلقة جزئية في R .

* إذا كانت R حلقة و I مثالياً يسارياً (يمينياً) في R فإن القضيتين التاليتين صحيحتان .

1- إذا كان $1 \in I$ فإن $I = R$.

2- إذا وجد في I عنصر قلوب في R فإن $I = R$.

* إذا كانت R حلقة وكان I مثالياً في R وأخذنا المجموعة :

$$R/I = \{x + I \quad ; \quad x \in R\}$$

وعرفنا على المجموعة R/I قانوني تشكيل داخليين كما يلي :

$$(x + I) + (y + I) = (x + y) + I$$
$$(x + I).(y + I) = (x.y) + I$$

وذلك أياً كان $x, y \in R$.

فنجد أن $(R/I, +, \cdot)$ حلقة ، صفرها هو العنصر $o + I = I$ و واحدها هو العنصر $1 + I$ تسمى الحلقة R/I حلقة خارج قسمة الحلقة R على المثالي I (أو حلقة الخارج) Factor – Ring وتكون الحلقة R/I تبديلية إذا كانت الحلقة R تبديلية .

* إذا كانت R' و R حلقتين فإن التشاكل الحلقي Ring – homomorphism هو كل تطبيق $f : R \to R'$ يحقق الشرطين :

1) $f(a + b) = f(a) + f(b)$

2) $f(a.b) = f(a).f(b)$

وذلك أياً كان $a, b \in R$.

* إذا كان I مثالياً في حلقة R فإن التطبيق :

$$\pi : R \to R/I$$
$$\pi(x) = x + I \qquad (\forall x \in R)$$

هو تشاكل حلقي غامر وان $\ker\pi = I$. يسمى هذا التشاكل العمر القابوبي في R .

* إذا كانت R حلقة فيها $1 \neq o$ وكانت L مجموعة المثاليات اليسارية في R والتي كل منها لا يساوي R ، فإننا نقول عن المثالي A من L إنه مثالي أعظمي في R إذا كان A عنصراً أعظمياً في L بالنسبة إلى علاقة الاحتواء في L . ونقول عن المثالي B من L إنه مثالي أصغري في R إذا كان B عنصراً أصغرياً في L بالنسبة إلى علاقة الاحتواء في L .

* تعتبر المبرهنتان التاليتان من أهم القضايا حول المثاليات الأعظمية و الأصغرية .

المبرهنة (1) : إذا كانت R حلقة وكان $A \neq R$ مثالياً يسارياً في R فإن القضايا التالية تكون متكافئة :

1- المثالي A أعظمي في R .

2- أياً كان المثالي اليساري D الذي من أجله $A \subseteq D \subset R$ فإن $A = D$.

3- لا يوجد في الحلقة R مثالي يساري C بحيث يكون $A \subset C \subset R$

4- أياً كان المثالي اليساري E في R والذي من أجله $A \subset E$ فإن $E = R$

المبرهنة (2) : إذا كانت R حلقة وكان $B \neq O$ مثالياً يسارياً في R فإن القضايا التالية تكون متكافئة :

1- المثالي B أصغري في R .

2- أياً كان المثالي اليساري D الذي من أجله $O \neq D \subseteq B$ فإن $D = B$.

3- لا يوجد في الحلقة R مثالي يساري C بحيث يكون $O \neq C \subset B$.

4- أياً كان المثالي اليساري E في R والذي من أجله $E \subset B$ فإن $E = O$

ملاحظة

تبقى المبرهنتان السابقتان صحيحتين من أجل المثاليات اليمينية .

* إذا كانت R حلقه ، فإن تقاطع جميع المثاليات اليساريه الاعظميه في R هو مثالي يساري يسمى أساس جاكبسون للحلقة R (Jacobson radical) ويرمز له بـــالرمز $J(R)$.

وإذا كانت R حلقة فإن القضايا التالية تكون صحيحة

1- $J(R)$ مثالي في R .

2- أياً كان $x \in J(R)$ فإن $1-x \in U(R)$

3- $[\forall y \in R: \quad (1-yx) \in U(R) \quad] \Leftrightarrow x \in J(R)$

4- $J(R)$ هو تقاطع جميع المثاليات اليمينية الأعظمية في R .

أخيراً سنستعرض سريعاً بعض الحلقات التبديلية وخواصها .

حلقة المثاليات الرئيسية Principal Ideal Ring

لتكن R حلقة تبديلية وليكن I مثالياً في R . يقال عن I إنه مثالي رئيس فـــي R إذا وجد $a \in R$ بحيث $I = a.R$. ويقال عن الحلقة التبديلية R إنها حلقـــة المثاليات الرئيسية إذا كان كل مثالي فيها هو مثالي رئيس .

الحلقة الإقليدية Euclidean Ring

لتكن R حلقة تبديلية . يقال عن الحلقة R إنها حلقة إقليدية إذا تحققت الـــشروط التالية :

1- الحلقة R منطقة تكاملية .

2- يوجد تطبيق $\varphi : R - \{o\} \longrightarrow N$ بحيث يكون

* إذا كان a/b فإن $\varphi(a) \le \varphi(b)$

* من أجل أي عنصرين $a,b \in R$ بحيث $b \neq o$ يوجد $q,r \in R$ بحيث يكون

$$a = q.b + r$$

ويكون $r = o$ أو $\varphi(r) < \varphi(b)$.

الحلقة ذات التحليل الوحيد Unique Factorization Domain

لتكن D منطقة تكاملية .

يقال عن العنصرين $a,b \in D$ إنهما متشاركان (associates) إذا وجد عنصر $u \in U(D)$ بحيث $a = u.b$.

يقال عن العنصر $x \in D$ إنه عنصر أولـي (Prime element) إذا تحقـق الشرطان :

1- $x \notin U(D)$.

2- أياً كان العنصران $a,b \in D$ وكان $x/a.b$ فإما x/a أو x/b .

يقال عن العنصر $o \neq x \in D$ إنـه بـسيط Simple element إذا تحقـق الشرطان :

1- $x \notin U(D)$.

2- أياً كان العنصران $a,b \in D$ حيث $x = a.b$ فإن $a \in U(D)$ أو $b \in U(D)$.

في كل منطقة تكاملية كل عنصر أولي هو عنصر بسيط .

يقال عن المنطقة التكاملية R إنها حلقة تحليل وحيد إذا كان كل عنصر مـن R مغاير للصفر وغير قابل للقلب يكتب على شكل جداء منته لعناصر بسيطة وهذه الكتابة وحيدة لأجل العناصر المتشاركة .

1-2- المودول (Module)

تعريف (1)

لتكن R حلقة و لتكن M مجموعة غير خالية مزودة بقـانوني تـشكيل ، الأول $(+)$ داخلي و الثاني $(\cdot)$ خارجي يساري ، مجموعة مؤثراته الحلقة R .

نقول عن M إنه مودول يساوي (Left module) إذا تحققت الشروط الآتية :

1- البنية $(M,+)$ زمرة تبديلية .

2- أياً كان $x,y \in M$ و أياً كان $\alpha,\beta \in R$ فإن :

1. $1_R.x = x$
2. $(\alpha+\beta).x = \alpha.x + \beta.x$
3. $\alpha.(x+y) = \alpha.x + \alpha.y$
4. $\alpha.(\beta.x) = (\alpha.\beta).x$

تعريف (2)

لتكن R حلقة و لتكن M مجموعة غير خالية مزودة بقانوني تشكيل ، الأول $(+)$ داخلي و الثاني $(\cdot)$ خارجي يميني ، مجموعة مؤثراته الحلقة R .

نقول عن M إنه مودول يميني (Right module) إذا تحققت الشروط الآتية :

1- البنية $(M,+)$ زمرة تبديلية .

2- أياً كان $x,y \in M$ و أياً كان $\alpha,\beta \in R$ فإن :

1. $x.1_R = x$
2. $x.(\alpha+\beta) = x.\alpha + x.\beta$
3. $(x+y).\alpha = x.\alpha + y.\alpha$
4. $(x.\beta).\alpha = x.(\alpha.\beta)$

يسمى العنصر المحايد في الزمرة $(M,+)$ صفر المودول M و نرمز له بالرمز o_M أو o إن لم يؤد هذا الاختصار إلى أي التباس .

إن دراسة المودولات اليسارية على حلقة R يشابه تماماً دراسة المودولات اليمينية على الحلقة R لذلك سندرس المودولات اليسارية على حلقة R، و عندما نكتب M مودولاً على حلقة R يعني أن M هو مودول يساري على الحلقة R، و إذا أردنا التعامل مع المودولات اليمنية على حلقة R سنذكر ذلك بشكل صريح

أمثلة :

1- كل زمرة جمعية تبديلية هي مودول على حلقة الأعداد الصحيحة Z.

في الحقيقة إذا كانت $(M,+)$ زمرة جمعية تبديلية محايدها o ، و إذا كان $x \in M$ و $m \in Z$ فإن المضاعف mx هو عنصر من M معرف بالشكل :

$$mx = \begin{cases} x + x + ... + x & if \quad m > 0 \\ o & if \quad m = 0 \\ (-x) + (-x) + ... + (-x) & if \quad m < 0 \end{cases}$$

فنجد أن المضاعف في M ما هو إلاّ قانون تشكيل خارجي في M ، مجموعة مؤثراته Z و يحقق شروط المودول .

2- لتكن R حلقة ما و ليكن n عدداً صحيحاً موجباً . و لنعرف في المجموعة R^n قانوني تشكيل الأول $(+)$ داخلي :

$$(x_1, x_2, ..., x_n) + (y_1, y_2, ..., y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$$

الثاني $(\cdot)$ خارجي ، مجموعة مؤثراته الحلقة R :

$$\alpha . (x_1, x_2, ..., x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n)$$

وذلك أياً كانت $(x_1, x_2, ..., x_n), (y_1, y_2, ..., y_n) \in R^n, \quad \alpha \in R$

فنجد إن $(R^n, +, \cdot)$ مودول على الحلقة R .

حالة خاصة : عندما $n = 1$ نجد أن الحلقة R هي مودول على نفسها .

3- ليكن R حلقة ما ، N مجموعة الأعداد الطبيعية و لتكن R^N مجموعة كل التطبيقات $f : N \to R$ و لنعرف في المجموعة R^N قانوني تشكيل :

الأول $(+)$ داخلي :

$$\forall f, g \in R^N \quad : \quad (f + g)(n) = f(n) + g(n)$$

الثاني $(\cdot)$ خارجي ، مجموعة مؤثراته الحلقة R :

$$\forall \alpha \in R, \quad \forall f \in R^N, \quad (\alpha . f)(n) = \alpha . f(n)$$

فنجد أن $(R^n, +, \cdot)$ مودول على الحلقة R .

1-3- المودول الجزئي (Sub module)

تعريف

ليكن M مودولاً على حلقة R ، و ليكن $\Phi \neq N \subseteq M$ نقول عن N إنها مودول جزئي من M إذا تحقق الشرطان :

1. $\forall x, y \in N \quad : \quad x - y \in N$
2. $\forall \alpha \in R, \forall x \in N \quad : \quad \alpha . x \in N$

لاحظ أن الشرط الأول يعني أن $(N,+)$ زمرة جزئية من الزمرة $(M,+)$ ، أما الشرط الثاني فيعني أن المجموعة N مغلقة بالنسبة إلى القانون $(\cdot)$. و يمكن دمج هذين الشرطين في الشرط :

$$\forall \alpha, \beta \in R, \quad \forall x, y \in N: \quad \alpha x + \beta y \in N$$

أمثلة :

1- إذا كان M مودولاً على حلقة R فإن كلا من M , $\{o\}$ مودول جزئي من M . ويسمى $\{o\}$ المودول الصفري ونرمز له بالرمز O .

2- بما أن كل زمرة جمعية تبديلية M هي مودول على حلقة الأعداد الصحيحة Z فإن كل زمرة جزئية من الزمرة M هي مودول جزئي من المودول M .

3- كل مثالي(يساري ، يميني) في حلقة R هو مودول جزئي (يساري ، يميني) في المودول R .

مبرهنة (1-1)

إذا كان M مودولاً على حلقة R فإن القضايا التالية تكون صحيحة :

(1) $\alpha . o_M = o_M$

(2) $o_R . x = o_M \qquad (\forall x \in M)$

(3) $(-\alpha).x = \alpha.(-x) = -(\alpha . x) \quad (\forall \alpha \in R, \quad x \in M)$

الإثبات :

(1) . إن

$$\alpha.o_M = \alpha.(o_M + o_M) = \alpha.o_M + \alpha\, o_M$$

وحسب قانون الاختصار في الزمرة $(M,+)$ نجد أن $\alpha\, o_M = o_M$

(2) . إن

$$o_R.x = (o_R + o_R).x = o_R.x + o_R.x$$

وحسب قانون الاختصار في الزمرة $(M,+)$ نجد أن $o_R.x = o_M$.

(3) . إن

$$o_M = o_R.x = (\alpha - \alpha).x = [\alpha + (-\alpha)].x$$

أي $\alpha.x + (-\alpha).x = o$ ومنه

$$-(\alpha.x) = (-\alpha).x \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (I)$$

كما أن

$$o_M = \alpha.o_M = \alpha.(x - x) = \alpha.[x + (-x)]$$

أي أن $\alpha x + \alpha.(-x) = o_M$ ومنه

$$-(\alpha.x) = \alpha.(-x) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (II)$$

من العلاقتين (I) و (II) نجد أن :

$$(-\alpha)x = \alpha.(-x) = -(\alpha.x)$$

1-4- العمليات على المودولات الجزئية

مبرهنة (1-2)

إذا كانت $\{M_i\}_{i\in I}$ أسرة مودولات جزئية من مودول M على حلقة R فإن $\bigcap_{i\in I} M_i$ مودول جزئي من المودول M .

الإثبات :

من جهة أولى ، إن

$$o_M \in M_i \quad (\forall i \in I)$$
$$M_i \subseteq M$$

ومنه

$$o_M \in \prod_{i \in I} M_i \quad ; \quad \prod_{i \in I} M_i \subseteq M$$

أي $\Phi \neq \prod_{i \in I} M_i \subseteq M$.

ومن جهة ثانية ، أياً كان $x, y \in \prod_{i \in I} M_i$ و أياً كان $\alpha, \beta \in R$ فإن

$$x, y \in M_i \qquad \forall i \in I$$

وبالتالي

$$\alpha x + \beta y \in M_i \qquad \forall i \in I$$

ومن ثم

$$\alpha x + \beta y \in \prod_{i \in I} M_i$$

إذن $\prod_{i \in I} M_i$ مودول جزئي من M.

تعريف (1)

ليكن M مودولاً على حلقة R ولتكن S مجموعة ما من M ، إن تقاطع جميع المودولات الجزئية من M والتي كل منها يحوي S هو مودول جزئي من M يحوي S ، يسمى المودول الجزئي من M المولد بالمجموعة S sub module of M generated يرمز له بالرمز $\langle S \rangle$.

أي أن $\langle S \rangle$ هو أصغر مودول جزئي من M يحوي S .

– إذا كانت المجموعة S منتهية فإننا نقول عن المودول $\langle S \rangle$ إنه منتهي التوليد .

– إذا كانت المجموعة S غير منتهية فإننا نقول عن المـودول $\langle S\rangle$ إنـه غيـر منتهي التوليد .

تعريف (2)

ليكن M مودولاً على حلقة R ولتكن S مجموعة جزئية غير خاليـة من M نقـول عن العنصر $x \in M$ إنه تركيب خطـي لعناصـر S (Liner combination of elements of S) إذا وجـد $x_1, x_2, ..., x_n \in S$, $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in R$ بحيـث $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$. ونرمـز مجموعة كل التراكيب الخطية لعناصر S بالرمز $LC(S)$.

مبرهنة (1–3)

إذا كان M مودولاً على حلقة R وكانت S مجموعة ما من M فإن

$$\langle S\rangle = \begin{cases} O & if \quad S = \Phi \\ LC(S) & if \quad S \neq \Phi \end{cases}$$

الإثبات

إذا كان $S = \Phi$ فإن أصغر مودول جزئي من M يحوي Φ هو المودول O ، لنفـرض الآن أن $S \neq \Phi$ ، عندئـذٍ أيـاً كـان $x \in \langle s\rangle$ فـإن $x = 1_R . x \in LC(S)$. أي أن $\langle S\rangle \subseteq LC(S)$.

وبما أن $\langle S\rangle$ هو أصغر مودول جزئي من M يحـوي S فـإن $LC(S) \subseteq \langle S\rangle$ ومنه $\langle S\rangle \subseteq LC(S)$.

تعريف (3)

ليكن M مودولاً على حلقة R و لتكن $\{M_i\}_{i=1,2,...,n}$ أسرة منتهية مـن المودولات الجزئية من M . نعرف المجموع $\sum_{i=1}^{n} M_i$ بأنه المجموعة :

$$\sum_{i=1}^{n} M_i = \left\{ x \in M : \quad x = \sum_{i=1}^{n} m_i \quad ; \quad m_i \in M_i \left(\forall i = 1,2,...,n\right) \right\}$$

مبرهنة (1- 4)

إذا كانت $\{M_i\}_{i=1,2,...,n}$ أسرة منتهية من المودولات الجزئية من مودول M على حلقة R فإن $\sum_{i=1}^{n} M_i$ مودول جزئي من المودول M.

الإثبات

من جهة أولى إن

$$o_M \in \sum_{i=1}^{n} M_i \quad \wedge \quad \sum_{i=1}^{n} M_i \subseteq M$$

ومن ثم $\Phi \neq \sum_{i=1}^{n} M_i \subseteq M$.

ومن جهة ثانية : أياً كان $x, y \in \sum_{i=1}^{n} M_i$ و أياً كان $\alpha, \beta \in R$ فإن

$$x = \sum_{i=1}^{n} m_i \quad ; \quad m_i \in M_i$$

$$y = \sum_{i=1}^{n} m_i' \quad ; \quad m_i' \in M_i$$

ومن ثم

$$\alpha.x + \beta.y = \alpha.\sum_{i=1}^{n} m_i + \beta.\sum_{i=1}^{n} m_i'$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (\alpha.m_i + \beta.m_i') \in \sum_{i=1}^{n} M_i$$

أي $\alpha.x + \beta.y \in \sum_{i=1}^{n} M_i$.

إذن $\sum_{i=1}^{n} M_i$ مودول جزئي من المودول M .

مبرهنة (1-5)

إذا كانت A, B, C ثلاثة مودولات جزئية من مودولٍ M على حلقة R وكان $C \subseteq A$ فإن :

$$A \cap (B+C) = (A \cap B) + C$$

الإثبات :

$$x \in A \text{I } (B+C) \Rightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in B+C \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \in A \\ x = b+c \quad ; \quad b \in B, \quad c \in C \end{cases}$$

وبما أن $C \subseteq A$ فإن $c \in A$ وبالتالي يكون :

$$x \in A \quad \wedge \quad x = b+c \quad ; \quad b \in B \quad ; \quad c \in A$$

ومنه $b = x - c \in A \quad \wedge \quad x \in A$ ، ومن ثم $b \in A \text{I } B$

إذن $x = b+c \quad \in \quad (A \text{I } B) + C$

أي

$$A \text{I } (B+C) \subseteq (A \text{I } B) + C \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

ومن جهة أخرى . بما أن $C \subseteq A$ فإن $A + C = A$ ومن ثم

$$(A \text{I } B) + C \subseteq A + C$$

$$(A \text{I } B) + C \subseteq B + C$$

ومنه $(A \text{I } B) + C \subseteq (A+C) \text{I } (B+C)$

وبما أن $A + C = A$ نحصل على :

$$(A \text{I } B) + C \subseteq A \text{I } (B+C) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (II)$$

من العلاقتين (I) و (II) نجد أن

$$A \text{I } (B+C) = (A \text{I } B) + C$$

تعريف (4)

ليكن M مودولاً على حلقة R ولتكن $\{M_i\}_{i \in I}$ أسرة غير منتهية من المودولات الجزئية من M . نعرف المجموع $\sum_{i \in I} M_i$ بأنه المجموعة :

$$\sum_{i\in I} M_i = \left\{ x \in M \quad : \quad x = \sum_{i\in I} m_i \quad ; \quad m_i \in M_i \right\}$$

حيث جميع العناصر m_i أصفار ما عدا عدد منتهي منها ويكون $\sum_{i\in I} M_i$ أصغر مودول جزئي من M يحوي جميع المودولات الجزئية $M_i (i \in I)$.

تمرينات محلولة

التمرين الأول :

لتكن M زمرة جمعية تبديلية و لتكن $(End(M),+,\cdot)$ حلقة التشاكلات الزمرية على M لنعرف على M قانون تشكيل خارجي $(\cdot)$ مجموعة مؤثراته الحلقة $\mathrm{End}(M)$ كما يلي :

$$(\cdot): \quad End(M)\times M \to M$$
$$(f,m)\ \alpha\ \ f\,m = f(m)$$

المطلوب :

I- إثبات أن M مودول على الحلقة $End(M)$.

II- بفرض R حلقة ما و $\mu: R \to End(M)$ تشاكل حلقي بحيث $\mu(1_R) = I_M$

أثبت أن M مودول بالنسبة إلى القانون التشكيل الخارجي :

$$(\cdot): \quad R\times M \to M$$
$$(\lambda,m)\ \alpha\ \ \lambda.m = [\mu(\lambda)](m)$$

الحل :

I- إن $(M,+)$ زمرة تبديلية فرضاً

أياً كان $x,y \in M$ و أياً كان $f,g \in End(M)$ فإن :

1. $I_M.x = I_M(x) = x$
2. $(f+g).x = (f+g)(x) = f(x)+g(x)$

3. $f.(x+y) = f(x+y) = f(x)+f(y)$
$= f.x + f.y$

4. $f.(g.x) = f.(g(x)) = f(g(x))$
$= (f \circ g)(x)$
$= (f.g)(x)$
$= (f.g).x$

مما سبق نجد أن M مودول على الحلقة $End(M)$.

II- إن $(M,+)$ زمرة تبديلية فرضاً .

أياً كان $x,y \in M$ و أياً كان $\alpha,\beta \in R$ فإن :

1. $1_R \cdot x = [\mu(1_R)](x) = I_M(x) = x$

2. $(\alpha+\beta)\cdot x = [\mu(\alpha+\beta)](x)$
$= [\mu(\alpha)+\mu(\beta)](x)$
$= [\mu(\alpha)](x)+[\mu(\beta)](x)$
$= \alpha\cdot x+\beta\cdot x$

3. $\alpha\cdot(x+y) = [\mu(\alpha)](x+y)$
$= [\mu(\alpha)](x)+[\mu(\alpha)](y)$
$= \alpha\cdot x + \beta\cdot y$

4. $\alpha\cdot(\beta\cdot x) = \alpha\cdot([\mu(\beta)](x))$
$= [\mu(\alpha)]([\mu(\beta)](x))$
$= [\mu(\alpha).\mu(\beta)](x)$
$= [\mu(\alpha\cdot\beta)](x)$
$= (\alpha\cdot\beta)\cdot x$

وهذا ما يثبت أن M مودول الحلقة R .

التمرين الثاني :

ليكن M مودولاً على حلقة R . نقول عن المودول M إنه بسيط (Simple) إذا كان M لا يحوي سوى المودولين الجزئين M و O .

وبعبارة مكافئة يكون المودول M بسيطاً إذا تحقق الشرط :

أياً كان N مودولاً جزئياً من المودول M فإن $N = O$ أو $N = M$.

برهن تكافؤ القضيتين :

I- المودول M بسيط .

II- أياً كان $o_M \neq x \in M$ فإن $M = R_x = \{\alpha.x \ ; \ \alpha \in R\}$

الحل :

(I $\Rightarrow$ II) : أياً كان $o_M \neq x \in M$ فإن $\langle x \rangle = R_n \neq O$ مودولاً جزئياً من المودول M وبما أن M بسيط فإن $R_x = M$

(II $\Rightarrow$ I) : ليكن $N \neq O$ مودولاً جزئياً من M عندئذٍ $N \subseteq M$ ، ومن ثم أياً كان $o_M \neq x \in N$ فإن $\langle x \rangle \subseteq N$ ، لكن حسب (II) يكون $\langle x \rangle = M$ وبالتالي $M \subseteq N$ ومنه يكون $M = N$ أي أن المودول M بسيط .

التمرين الثالث :

ليكن M مودولاً على حلقة R . ولتكن X مجموعة جزئية غير خالية من M وليكن A مثالياً في R .

(1) – أثبت أن المجموعة AX مودول جزئي من المودول M .

(2) – أثبت أن المجموعة RX مودول جزئي من المودول M ، مولد بالمجموعة X .

الحل :

(1) – بما أن A مثالي في الحلقة R فإن AX زمرة جزئية من الزمرة

$(M,+)$ ، كما أنه أياً كان $\sum_{i=1}^{n} a_i.x_i. \in AX$ و أياً كان $\alpha \in R$ فإن

$$\alpha.\sum_{i=1}^{n} a_i.x_i = \sum_{i=1}^{n} (\alpha a_i)x_i \in AX \qquad (\text{لأن } A \text{ مثالي في } R)$$

إذن AX مودول جزئي من M .

(2) – بما أن الحلقة R هي مثالي في R فحسب الطلب (1) يكون RX مودولاً جزئياً من M .وبما أن :

$$\forall x \in X: \quad x = 1_R.x \in RX$$

فإن $X \subseteq RX$.

إذا كان N مودولاً جزئياً من M ، يحوي X فإن

$$\forall x \in X, \quad \alpha \in R \quad : \quad \alpha x \in N$$

ومنه أياً كان $\sum_{i=1}^{n} a_i.x_i \in RX$ فإن $\sum_{i=1}^{n} a_i.x_i \in N$ ومنه $RX \subseteq N$

أي أن RX هو أصغر مودول جزئي من M يحوي X وهذا يعني أن $RX = \langle X \rangle$.

التمرين الرابع :

ليكن M مودول منتهي التوليد على حلقة تبديلية R . ولنفرض أن I مثالياً في R بحيث $I \subseteq Rad\, R$.

أثبت أنه إذا كان $I.M = M$ فإن $M = O$.

الحل :

بما أن المودول M منتهي التوليد فإنه توجد مجموعة جزئية مثل $S = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ من M بحيث $M = \langle s \rangle$ و S عنصر أصغري في أسرة المجموعات التي تولد كل منها المودول M .

وعندئذٍ $x_n \in I\,M$ وبالتالي يوجد $a_1, a_2, ..., a_n \in I$ بحيث :

$$x_n = \sum_{i=1}^{n} a_i . x_i$$

ومنه

$$(1_R - a_n)x_n = a_1 x_1 + ... + a_{n-1} . x_{n-1}$$

وبما أن $a_n \in Rad\, R$ فإن العنصر $(1_R - a_n)$ قلوب في الحلقة R ومنه

$$x_n \in \langle S_1 \rangle \subseteq M \quad ; \quad S_1 = \{x_1, x_2, ..., x_{n-1}\}$$

وبالتالي $M = \langle S_1 \rangle$ وهذا يناقض اختيار المجموعة S .

إذن $M = O$.

تمرينات (1)

التمرين الأول :

لتكن G زمرة تبديلية منتهية وليكن $Card\,G = m$.

1- أثبت أنه أياً كان $n,t \in Z$ بحيث $n = t(\mathrm{mod}\, m)$ فإن $ng = tg$ وذلك أياً كان $g \in G$.

2- أثبت أن G هي مودول على الحلقة $Z/_{mZ}$ بالنسبة إلى قانون التشكيل الخارجي $(\cdot)$:

$$(\cdot) \quad : \quad Z/_{mZ} \times G \to G$$
$$\left(n/_{mZ}\,,\, g\right) \alpha \; ng$$

التمرين الثاني :

لتكن $\{M_i\}_{i=1,2,...n}$ أسرة منتهية من المودولات على حلقة R . نعرف على المجموعة :

$$\prod_{i=1}^{n} M_i = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \quad ; \quad x_i \in M_i \quad i = 1,2,...., n\}$$

قانوني تشكيل :

الأول $(+)$ داخلي :

$$(x_1, x_2, ..., x_n) + (y_1, y_2, ..., y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$$

الثاني $(\cdot)$ خارجي ، مجموعة مؤثراته الحلقة R :

$$\alpha . (x_1, x_2, ..., x_n) = (\alpha\, x_1, \alpha\, x_2, ..., \alpha\, x_n)$$

أثبت أن $\prod_{i=1}^{n} M_i$ مودول على الحلقة R .

لاحظ أنه إذا كان M مودولاً على حلقة R وكان n عدداً صحيحاً موجباً فـإن M^n مودول على R .

التمرين الثالث :

ليكن M مودولاً على حلقة R ولتكن S مجموعة جزئية غير خالية من M .

نعرف عادم S $(Annihilator\, S)$ في R بأنه المجموعة :

$$Ann_R(S)=\{\lambda \in R \;\; ; \;\; (\forall x \in S) \;\; : \;\; \lambda x = o\}$$

أثبت أن $Ann_R(S)$ مثالي (يساري) في الحلقة R ويكون مثالياً ثنائي الجانب عندما تكون S مودولاً جزئياً من M .

التمرين الرابع :

ليكن M مودولاً على حلقة R وليكن $r,s \in R$. أثبت صحة الاقتضاء :

$$[\; r-s \in Ann_R(M) \;] \Rightarrow [\; (\forall x \in M) \;:\; r.x = s.x \;]$$

واستنتج أنه يمكن اعتبار M مودولاً على الحلقة $R/Ann_R(M)$ ثم بيّن أن عادم M في الحلقة $R/Ann_R(M)$ يساوي الصفر .

التمرين الخامس :

لتكن R حلقة تبديلية وليكن M مودولاً على R . من أجل كل عنصر $r \in R$ نأخذ المجموعتين :

$$rM = \{rm \;\; ; \;\; m \in M\}$$
$$M_r = \{m \in M ; \;\; rm = o\}$$

1- أثبت أن كلاً من M_r , rM مودول جزئي من المودول M .

2- إذا كان $R=Z$ حلقة الأعداد الصحيحة و $M = Z/nZ$ ، وإذا فرضنا أن $n=rs$ و s,r أوليان فيما بينهما (أوليان نسبياً) . فأثبت أن $rM = M_s$.

التمرين السادس :

لتكن A,B,C ثلاثة مودولات جزئية من مودول M على حلقة R بحيث

$A \subseteq B \quad , \quad A+C=B+C \quad , \quad A \cap C = B \cap C$

برهن أن $A=B$.

Damascus University

الفصل الثاني

التشاكلات – المتتاليات التامة

Morphisms - Exact sequences

2-1 التشاكلات المودولية

تعريف (1)

ليكن M,N مودلين على حلقة R ، نسمي كل تطبيق $f:M\longrightarrow N$ يحقق الشرطان :

(1). $\forall x,y\in M:\quad f(x+y)=f(x)+f(y)$

(2). $\forall x\in M,\forall \alpha\in R:\quad f(\alpha.x)=\alpha.f(x)$

تشاكلاً مودولياً (على R) .

لاحظ أن التشاكل المودولي هو تشاكل زمري ويحقق الشرط (2) .(حيث أن كل مودول هو زمرة جمعية).

تعريف (2)

ليكن $f:M\longrightarrow N$ تشاكلاً مودولياً وليكن X مودولاً جزئياً من M و Y مودولاً جزئياً من N . نعرف الصورة المباشرة للمودول X وفق التشاكل f بأنها المجموعة :

$$\vec{f}(X)=\{f(x);\quad x\in X\}$$

ونسمي $\vec{f}(M)$ صورة التشاكل f ونرمز لها بالرمز $\mathrm{Im}\,f$ أي :

$$\mathrm{Im}\,f=\vec{f}(M)$$

ونعرف الصورة العكسية للمودول Y وفق التشاكل f بأنها المجموعة :

$$\overleftarrow{f}(Y)=\{\, x\in M:\quad f(x)\in Y\}$$

تعريف (3)

ليكن $f:M\longrightarrow N$ تشاكلاً مودولياً . نعرف نـواة f (kernel f) بأنهـا المجموعة :

$$\ker f=\{x\in M\quad :\quad f(x)=o_N\}=\overleftarrow{f}\{o_N\}$$

تعريف (4)

نقول عن التشاكل المودولي $f:M\longrightarrow N$ إنه تماثل مـودولي إذا كـان f غامر ومتبايناً ، إذا وجد تماثل مودولي بين مودولين M,N فإننا نقـول عـن المودولين إنهما متماثلان ونكتب $M\cong N$.

وبعبارة مكافئة :

$$M\cong N \quad\Leftrightarrow\quad [\ \text{يوجد تماثل}\ f:M\longrightarrow N\ ]$$

ملاحظة :

بما أن كل تشاكل مودولي $f:M\longrightarrow N$ هو تشاكل زمري فـإن القـضايا التالية صحيحة :

1. $f(o_M)=o_N$
2. $f(-x)=-f(x)\qquad(\forall x\in M)$
3. f متباين $\quad\Leftrightarrow\quad \ker f=O$

أمثلة :

1- لتكن M,N زمرتين جمعيتـين تبـديليتين عندئـذٍ كـل تـشاكل زمـري $f:M\longrightarrow N$ هو تشاكل مودولي . وذلك لأن :

$$(\forall x,y\in M)\ :\quad f(x+y)=f(x)+f(y)$$
$$(\forall\alpha\in Z\ ,\ \forall x\in M\ )\ :\ f(\alpha x)=\alpha f(x)$$

2- ليكن M مودولاً على حلقة R وليكن n عدداً صحيحاً موجباً عندئذٍ كل تطبيق :

$$f : M^n \longrightarrow M$$
$$(x_1, x_2, ..., x_n) \ \alpha \ x_i$$

هو تشاكل مودولي غامر . يسمى الإسقاط i للمودول M^n على المودول M .

3- ليكن M مودولاً على حلقة تبديلية R . وليكن $a \in R$ عنصراً ثابتاً في R .

إن التطبيق

$$f_a : M \ \rightarrow M$$
$$x \ \alpha \ a.x \quad (\forall x \in M)$$

هو تشاكل مودولي .

4- نرمز مجموعة التشاكل المودولية التي منطلق كل منها المودول M ومستقرها المودول N بالرمز $Hom_R(M,N)$. وإذا كان $f, g \in Hom_R(M,N)$ فإن :

$$f + g \in Hom_R(M,N)$$

حيث أن $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

وفي الحالة التي تكون فيها R حلقة تبديلية فإن

$$(\forall \alpha \in R) \ \ \alpha f \in Hom_R(M,N)$$

حيث إن $(\alpha f)(x) = \alpha . f(x)$

مبرهنة (2-1)

إذا كان $f : M \longrightarrow N$ تشاكلاً مودولياً وكان X مودولاً جزئياً من M ، وكان Y مودولاً جزئياً من N فإن :

(1). $\vec{f}(X)$ مودول جزئي من N .

(2). $\overset{\smile}{f}(Y)$ مودول جزئي من M .

الإثبات

(1) . إن $o_M \in X \subseteq M$ وبالتالي $f(o_M) \in \vec{f}(X) \subseteq N$ أي

$$\Phi \neq \vec{f}(X) \subseteq N$$

كما أنه أياً كان $y_1, y_2 \in \vec{f}(X)$ و أياً كان $\alpha, \beta \in R$ فإنه يوجد $x_1, x_2 \in X$ بحيث $y_2 = f(x_2)$; $y_1 = f(x_1)$ ، ومن ثم يكون

$$\begin{aligned} \alpha y_1 + \beta y_2 &= \alpha f(x_1) + \beta f(x_2) \\ &= f(\alpha x_1 + \beta x_2) \end{aligned}$$

وبما أن $\alpha x_1 + \beta x_2 \in X$ فإن $\alpha y_1 + \beta y_2 \in \vec{f}(X)$

إذن $\vec{f}(X)$ مودول جزئي من N .

(2) . إن $o_N \in Y \subseteq N$ وبالتالي $f(o_M) \in Y \subseteq N$ ومن ثم :

$$\text{أي } o_M \in \overset{\smile}{f}(Y) \subseteq M$$

$$\Phi \neq \overset{\smile}{f}(Y) \subseteq M$$

كما أنه أياً كان $x_1, x_2 \in \overset{\smile}{f}(Y)$ و أياً كان $\alpha, \beta \in R$ فإن $f(x_2) \in Y$, $f(x_1)$ وبالتالي $\alpha f(x_1) + \beta f(x_2) \in Y$ ومن ثم $f(\alpha x_1 + \beta x_2) \in Y$ ومنه $\alpha x_1 + \beta x_2 \in \overset{\smile}{f}(Y)$.

إذن $\overset{\smile}{f}(Y)$ مودول جزئي من المودول M .

نتيجة

إذا كان $f : M \longrightarrow N$ تشاكلاً مودولياً فإن :

1- $\vec{f}(M) = \operatorname{Im} f$ مودول جزئي من N .

2- $\overset{\smile}{f}(O_M) = \ker f$ مودول جزئي من M .

مبرهنة (2-2)

إذا كان $f : M \longrightarrow N$ تشاكلاً مودولياً وكان A مودولاً جزئياً من M وكان B مودولاً جزئياً من N فإن :

(I). $\vec{f}\left(\overleftarrow{f}(A)\right)= A+\ker f$

(II). $\overleftarrow{f}\left(\vec{f}(B)\right)= B \cap \operatorname{Im} f$

الإثبات

(I) – من جهة أولى ، أياً كان $x \in \vec{f}\left(\overleftarrow{f}(A)\right)$ فإن $f(x)\in \vec{f}(A)$ وبالتالي يوجد $a \in A$ بحيث $f(x)=f(a)$ ومنه $f(x-a)=o$ ومن ثم $x-a \in \ker f$ ومنه $x \in A+\ker f$ أي

$$\vec{f}\left(\overleftarrow{f}(A)\right)\subseteq A+\ker f \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

ومن جهة ثانية ، أياً كان $x \in A+\ker f$ فإنه يوجد $a \in A, \quad b \in \ker f$ بحيث $x=a+b$ وبالتالي $f(x)=f(a)+o$ ومن ثم $f(x)\in \vec{f}(A)$ أي $x \in \vec{f}\left(\overleftarrow{f}(A)\right)$ ومنه

$$A+\ker f \subseteq \vec{f}\left(\overleftarrow{f}(A)\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

من العلاقتين (1) و (2) نجد أن :

$$\vec{f}\left(\overleftarrow{f}(A)\right)= A+\ker f$$

(II) . من الواضح أن

$$\overleftarrow{f}\left(\vec{f}(B)\right)\subseteq B \cap \operatorname{Im} f \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)'$$

كما أن

$$\begin{aligned} y \in B \cap \operatorname{Im} f &\Rightarrow y \in B \quad \wedge \quad y \in \operatorname{Im} f \\ &\Rightarrow y \in B \quad \wedge \quad \exists x \in M : y = f(x) \\ &\Rightarrow f(x) \in B \quad ; \quad x \in M \\ &\Rightarrow x \in \overleftarrow{f}(B) \\ &\Rightarrow f(x) \in \vec{f}\left(\overleftarrow{f}(B)\right) \end{aligned}$$

أي :

$$B \cap \operatorname{Im} f \subseteq \vec{f}\left(\overleftarrow{f}(B)\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)'$$

من العلاقتين (1)′ و (2)′ نجد أن

$$\vec{f}\left(\overleftarrow{f}(B)\right) = B \cap \operatorname{Im} f$$

نتيجة

إذا كان $f : M \longrightarrow N$ تشاكلاً مودولياً وكان A مودولاً جزئياً من M ، B مودولاً جزئياً من N فإن :

$$\ker f \subseteq A \quad \Leftrightarrow \quad \overleftarrow{f}\left(\vec{f}(A)\right) = A$$

$$B \subseteq \operatorname{Im} f \quad \Leftrightarrow \quad \vec{f}\left(\overleftarrow{f}(B)\right) = B$$

البرهان ينتج مباشرة من المبرهنة السابقة .

مبرهنة (2-3)

إذا كان $f : M \longrightarrow N$ ، $g : N \longrightarrow P$ تشاكلين مودوليين فإن

1- التركيب $g \circ f$ تشاكل مودولي .

2- إذا كان كل من التشاكلين f, g غامراً فإن التشاكل $g \circ f$ غامر .

3- إذا كان كل من التشاكلين f, g متبايناً فإن التشاكل $g \circ f$ متباين .

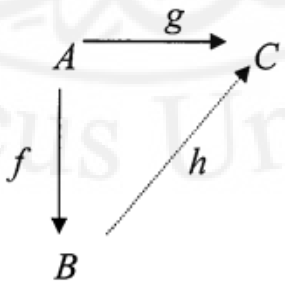
4- إذا كان التشاكل $g \circ f$ غامراً فإن التشاكل g غامر .

5- إذا كان التشاكل $g \circ f$ متبايناً فإن التشاكل f متباين .

الإثبات :يترك تمريناً للقارئ

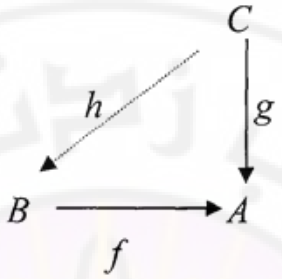
لنتأمل المسألتين الآتيتين :

المسألة الأولى : إذا كان $f : A \longrightarrow B$ ، $g : A \longrightarrow C$ تشاكلين مودوليين .



فهل يوجد تشاكل مودولي $h:B\longrightarrow C$ بحيث $h\circ f=g$ ؟ وهل التشاكل h ، في حال وجوده ، وحيد ؟.

المسألة الثانية : إذا كان $f:B\longrightarrow A$ ، $g:C\longrightarrow A$ تشاكلين مودولين .



فهل يوجد تشاكل مودولي $h:C\longrightarrow B$ بحيث $f\circ h=g$ ؟وهل التشاكل h ، في حال وجوده ، وحيد ؟ .

للإجابة على هاتين المسألتين نورد المبرهنتين التاليتين .

مبرهنة (2-4)

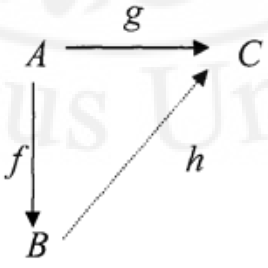
إذا كانت A,B,C ثلاث مجموعات غير خالية وكان $f:A\longrightarrow B$ و $g:A\longrightarrow C$ تطبيقين فإن القضيتين التاليتين متكافئتان :

(1) . يوجد تطبيق $h:B\longrightarrow C$ بحيث $h\circ f=g$.

(2) . إذا كان $x,y\in A$ بحيث $f(x)=f(y)$ فإن $g(x)=g(y)$.

الإثبات

(2) $\Rightarrow$ (1) : لنفرض وجود تطبيق $h:B\longrightarrow C$ بحيث $h\circ f=g$.



ليكن $x,y \in A$ بحيث $f(x)=f(y)$ ولنبرهن على أن $g(x)=g(y)$. إن

$$g(x)=hof(x)=h(f(x))=h(f(y))=g(y)$$

(1) $\Rightarrow$ (2) : لنأخذ المجموعة :

$$G=\{\,(f(x),\,g(x)) \quad , \quad \forall x \in A\}$$

فنجد أن $G \neq \Phi$ كما أن ، أياً كان $y=f(x) \in \operatorname{Im} f$ فـإن $z=g(x) \in C$ وأن العنصر z وحيد لأنه إذا كان $(y,z) \in G$ و $(y,z') \in G$ عنصرين مختلفين من G فإن :

$$\exists x,x' \in A: \quad y=f(x)=f(x') \quad ; \quad z=g(x), \quad z'=g(x')$$

وحسب الفرض (2) يجب أن يكون $z'=z$.

وبالتالي العلاقة :

$$t : \operatorname{Im} f \longrightarrow C$$

المعرفة كما يلي :

$$t(f(x))=g(x) \qquad (\forall x \in A)$$

تطبيق .

لنأخذ الآن التطبيق $h : B \longrightarrow C$ المعرف كما يلي :

$$h(y)=\begin{cases} t(y) & if \quad y \in \operatorname{Im} f \\ c_o \in C & if \quad y \notin \operatorname{Im} f \end{cases}$$

(لاحظ أن h هوممدود t إلى B) .

كما أن من أجل أي عنصر $x \in A$ يكون

$$(hof)(x)=h(f(x))=t(f(x))=g(x)$$

أي أن $h\,o\,f=g$.

مبرهنة (2-5)

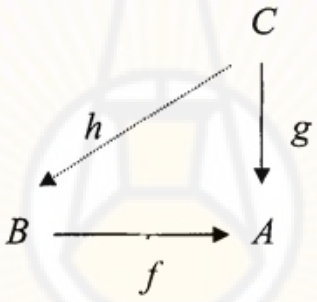
إذا كانت A,B,C ثلاث مجموعات غير خالية وكان $f:B\longrightarrow A$ و $g:C\longrightarrow A$ تطبيقين ، فإن القضيتين التاليتين متكافئتان :

"(1): يوجد تطبيق $h:C\longrightarrow B$ بحيث $f\circ h=g$

"(2): $\operatorname{Im} g\subseteq \operatorname{Im} f$.

الإثبات

"(2) $\Rightarrow$ "(1) : لنفرض وجود تطبيق $h:C\longrightarrow B$ بحيث $f\circ h=g$ ولنبرهن على أن $\operatorname{Im} g\subseteq \operatorname{Im} f$.



أياً كان $x\in A$ فإن :

$$g(x)=(f\circ h)(x)=f(h(x))\in \operatorname{Im} f$$

وهذا يعني أن $\operatorname{Im} g\subseteq \operatorname{Im} f$.

"(1) $\Rightarrow$ "(2) : إذا كانت القضية (2) محققة فإن من أجل كل عنصر $x\in C$ يوجد $y\in B$ بحيث $g(x)=f(y)$

إذا رمزنا أحد العناصر $y\in B$ التي من أجلها $g(x)=f(y)$ بالرمز y_x فإننا نحصل على التطبيق :

$$h:C\to B$$
$$x\ \alpha\ y_x \qquad (\forall x\in C)$$

ويكون :

$$(\forall x \in C): \quad (f \circ h)(x) = f(h(x)) = f(y_x) = g(x)$$

نتيجة (1)

إذا كانت A, B مجموعتين غير خاليتين وكان $f : A \longrightarrow B$ تطبيقاً مـا فـإن القضايا التالية تكون متكافئة:

(a). التطبيق f متباين .

(b). يوجد تطبيق $g : B \longrightarrow A$ بحيث $g \circ f = I_A$.

(c). التطبيق f قابل للاختصار من اليسار أي :

أياً كانت C مجموعة غير خالية وكان $h, k : C \longrightarrow A$ تطبيقين فإن :

$$f \circ h = f \circ k \quad \Rightarrow \quad h = k$$

البرهان

$(a) \Leftrightarrow (b)$ ينتج مباشرة من المبرهنة (4-2) وذلك عندما $C = A$ و $g = I_A$

$(b) \Rightarrow (c)$ إذا كان $h, k : C \longrightarrow A$ تطبيقين بحيث $f \circ h = f \circ k$ فإن

$$g \circ (f \circ h) = g \circ (f \circ k)$$
$$\Rightarrow \quad (g \circ f) \circ h = (g \circ f) \circ k$$
$$\Rightarrow \quad h = k$$

$(c) \Rightarrow (a)$ لنفرض جدلاً أن التطبيق f ليس متبايناً ، عندئذٍ يوجـد $x, y \in A$ بحيث

$$x \neq y \quad \Rightarrow \quad f(x) = f(y)$$

لتكن C مجموعة غير خالية ولنأخذ التطبيقين :

$$h : C \longrightarrow A$$
$$h(c) = x \qquad (\forall c \in C)$$
$$k : C \longrightarrow A$$
$$k(c) = y \qquad (\forall c \in C)$$

من الواضح أن $h \neq k$ وأن

$$(\forall c \in C): \quad f(h(c)) = f(x) = f(y) = f(k(c))$$

أي أن $f \circ h = f \circ k$ وحسب القضية (c) يكون $h = k$ وهذا يتناقض مع اختيارنا للتطبيقين h,k .إذن الفرض الجدلي خاطئ وبالتالي التطبيق f متباين

نتيجة (2)

إذا كانت A,B مجموعتين غير خاليتين وكان $f : A \longrightarrow B$ تطبيقاً ما ، فإن القضايا التالية تكون متكافئة :

(a'): التطبيق f غامر

(b'): يوجد تطبيق $g : B \longrightarrow A$ بحيث $f \circ g = I_B$

(c'): التطبيق f قابل للاختصار من اليمين أي :

أياً كانت C مجموعة غير خالية وكان $h,k : B \longrightarrow C$ تطبيقين فإن

$$h \circ f = k \circ f \quad \Rightarrow \quad h = k$$

البرهان

$(a') \Leftrightarrow (b')$ ينتج مباشرة من المبرهنة (2-5)

$(b') \Rightarrow (c')$ إذا كان $h \circ f = k \circ f$ فإن :

$$\begin{aligned} & (h \circ f) \circ g = (k \circ f) \circ g \\ \Rightarrow \quad & h \circ (f \circ g) = k \circ (f \circ g) \\ \Rightarrow \quad & h \circ I_B = k \circ I_B \\ \Rightarrow \quad & h = k \end{aligned}$$

$(c') \Rightarrow (a')$ إذا كانت B مجموعة وحيدة العنصر فإن f غامر و يكون قد تم المطلوب .

لنفرض الآن أنه يوجد في B عنصران على الأقل α,β وليكن $h,k : B \longrightarrow B$ التطبيقين المعرفين كما يلي :

$$h(x)=\begin{cases} x & if \quad x\in \operatorname{Im} f \\ \alpha & otherwise \end{cases}$$

$$k(x)=\begin{cases} x & if \quad x\in \operatorname{Im} f \\ \beta & otherwise \end{cases}$$

وعندئذٍ يكون

$$(\forall a\in A): \quad h(f(a))=f(a)=k(f(a))$$

أي أن $h\circ f=k\circ f$. وحسب الفرض (c') يكون $h=k$.

إذا كان $\operatorname{Im} f\neq B$ (التطبيق f ليس غامراً) فإنه يوجد $b\in B$ و $b\notin \operatorname{Im} f$ بحيث يكون $k(x)=\beta$ و $h(x)=\alpha$ وبالتالي $h\neq k$ وهذا تناقض .

إذاً $\operatorname{Im} f=B$ وهذا يعني أن f غامر .

تساؤل : هل المبرهنتان (2-4) و (2-5) صحيحتان من أجل التشاكلات المودولية ؟

بعبارة أخرى ، إذا استبدلنا عبارة " **مجموعة غير خالية** " بكلمة " **مودول** " وكلمة "**تطبيق** " بكلمة "**تشاكل** " في المبرهنتين المذكورتين ، فهل تبقى المبرهنتان صحيحتين ؟

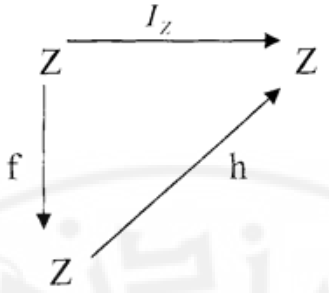
إن المثالين التاليين يبينان عدم صحة المبرهنتين من أجل التشاكلات المودولية .

المثال الأول

نعلم أن كل زمرة جمعية تبديلية هي مودول على حلقة الأعداد الصحيحة Z وبالتالي Z هي مودول على Z ولنأخذ التشاكلين :

$$f: Z\longrightarrow Z$$
$$f(z)=2z \qquad (\forall z\in Z)$$

$$I_Z: Z\longrightarrow Z \qquad (\text{المطابق في } Z)$$



فحسب المبرهنة (2-4) يوجد تطبيق $h: Z \longrightarrow Z$ بحيث يكون $h \circ f = I_Z$.
لكن التطبيق h لا يمكن أن يكون تشاكلاً مودولياً ، لأنه إذا كان h تشاكلاً مودولياً فإن :

$$\begin{aligned} (\forall z \in Z) \quad : \quad & (h \circ f)(z) = I_Z(z) \\ \Rightarrow \quad & h(f(z)) = z \\ \Rightarrow \quad & h(2z) = z \\ \Rightarrow \quad & 2h(z) = z \end{aligned}$$

وفي حالة خاصة يجب أن يكون $2h(1) = 1$ وهذا مستحيل لأن المعادلة $2x = 1$ مستحيلة في Z .

المثال الثاني

ليكن p عدداً أولياً ولنأخذ المجموعة :

$$Q_P = \left\{ x = {}^{k}\!/_{p^n} \;\; ; \; k \in Z \; , \; n \in N \right\} \subseteq Q$$

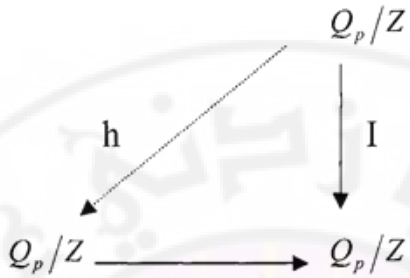
فنجد بسهولة أن Q_P زمرة جزئية من الزمرة $(Q,+)$ كما أن Z زمرة جزئية من الزمرة الجزئية Q_P. ولنأخذ التشاكلين :

$$f : {}^{Q_P}\!/_{Z} \longrightarrow {}^{Q_P}\!/_{Z}$$

$$f(x) = px \qquad \left(\forall x \in {}^{Q_P}\!/_{Z} \right)$$

$$I : {}^{Q_P}\!/_{Z} \longrightarrow {}^{Q_P}\!/_{Z}$$

حيث أن الزمرة Q_P/Z هي مودول على Z .



أياً كان $n \in N$ و $k \in Z$ فإن $kP^{-n}/Z = P\left(kP^{-n-1}/Z\right)$ وبالتالي

$$\operatorname{Im} f = Q_P/Z = \operatorname{Im} I$$

فالقضية "(2) من المبرهنة (2-5) محققة وبالتالي حسب المبرهنة المذكورة يوجد تطبيق $h: Q_P/Z \longrightarrow Q_P/Z$ بحيث يكون $f \circ h = I$.

إن التطبيق h لا يمكن أن يكون تشاكلاً مودولياً ، لأنه إذا كان h تشكلاً مودولياً فإن :

$$P^{-1}/Z = f\left(h\left(P^{-1}/Z\right)\right) = P\left(h\left(P^{-1}/Z\right)\right) = h\left(P\left(P^{-1}/Z\right)\right)$$
$$= h\left(O/Z\right) = O/Z$$

وهذا مستحيل .

مبرهنة (2-6)

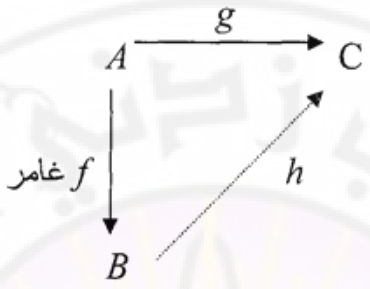
إذا كان $h: A \longrightarrow B$, $g: A \longrightarrow C$ تشاكلين مودوليين وكان التشاكل f غامراً فإن القضيتين التاليتين متكافئتان :

(1) . يوجد تشاكل مودولي وحيد $h: B \longrightarrow C$ بحيث $h \circ f = g$.

(2) . $\ker f \subseteq \ker g$.

وأكثر من ذلك ، يكون :

$$\ker f = \ker g \quad \Leftrightarrow \quad [\text{ التشاكل } h \text{ متباين }]$$



الإثبات

(2) $\Rightarrow$ (1) : أياً كان $x \in \ker f$ فإن $f(x) = o_B$ بما أن القضية (1) صحيحة يكون :

$$g(x) = h(f(x)) = h(o_B) = o_C$$

أي $x \in \ker g$ إذن $\ker f \subseteq \ker g$.

(1) $\Rightarrow$ (2) لنفرض أن $\ker f \subseteq \ker g$ وعندئذٍ أياً كان $x, y \in A$ بحيث $f(x) = f(y)$ فإن $f(x) - f(y) = o_B$ ومنه $f(x - y) = o_B$ وبالتالي $x - y \in \ker f$ وحسب الفرض ينتج $x - y \in \ker g$ أي $g(x - y) = o_B$ ومنه $g(x) = g(y)$ وحسب المبرهنة (2-4) يوجد تطبيق $h : B \longrightarrow C$ بحيث $h \circ f = g$.

لنبرهن الآن أن h تشاكل مودولي .

أياً كان $b_1, b_2 \in B$ و أياً كان $\alpha, \beta \in R$ فإن

$$\exists a_1, a_2 \in A: \quad b_1 = f(a_1) \quad \wedge \quad b_2 = f(a_2)$$

(لاحظ أن f غامر) .

ويكون :

$$\begin{aligned} h(\alpha b_1 + \beta b_2) &= h(\alpha f(a_1) + \beta f(a_2)) \\ &= h(f(\alpha a_1 + \beta a_2)) \\ &= g(\alpha a_1 + \beta a_2) \\ &= \alpha g(a_1) + \beta g(a_2) \\ &= \alpha . h(f(a_1)) + \beta . h(f(a_2)) \\ &= \alpha . h(b_1) + \beta . h(b_2) \end{aligned}$$

أي أن h تشاكل مودولي .

لنبرهن أخيراً أن h وحيد . لذلك نفرض وجود تشاكلين $h,k : B \longrightarrow C$ بحيث $k o f = g \quad \wedge \quad h o f = g$. أي $h o f = k o f$. بما أن التشاكل f غامر فهو قابل للاختصار من اليمين وبالتالي $h = k$. أي أن التشاكل h وحيد

لنفرض الآن أن التشاكل h متباين ولنبرهن على أن $\ker f = \ker g$.

لدينا $\ker f \subseteq \ker g$. كما أنه أياً كان $x \in \ker g$ فإن $g(x) = o$ وبالتالي $h(f(x)) = o$ ، بما أن التشاكل h متباين فإن $f(x) = o$ أي $x \in \ker f$ ومنه $\ker g \subseteq \ker f$. إذن $\ker f = \ker g$.

لنفرض أخيراً أن $\ker f = \ker g$ ولنبرهن على أن التشاكل h متباين .

أياً كان $b \in \ker h$ فإن $h(b) = o$ وبما أن التشاكل f غامر فإنه من أجل العنصر b يوجد $a \in A$ بحيث $b = f(a)$ وبالتالي يكون $h(f(a)) = o$ أي $g(a) = o$ ومنه $a \in \ker g = \ker f$ وبالتالي $f(a) = o$ أي $b = o$ وهذا ما يثبت أن التشاكل h متباين .

مبرهنة (2-7)

إذا كان $f : B \longrightarrow A$ و $g : C \longrightarrow A$ تشاكلين مودوليين وكان التشاكل f متبايناً فإن القضيتين التاليتين متكافئتان :

(1) . يوجد تشاكل مودولي وحيد $h:C\longrightarrow B$ بحيث $f\circ h=g$

(2) . $\operatorname{Im} g\subseteq \operatorname{Im} f$.

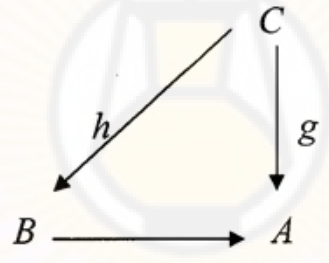
وأكثر من ذلك

$$\operatorname{Im} g\subseteq \operatorname{Im} f \quad \Leftrightarrow \quad \text{التشاكل } h \text{ غامر}$$

الإثبات

(2) $\Rightarrow$ (1) : ينتج مباشرة من المبرهنة (5-2) .

(1) $\Rightarrow$ (2) : بما أن القضية (2) محققة فحسب المبرهنة (5-2) يوجد تطبيق $h:C\longrightarrow B$ بحيث $f\circ h=g$.



f متباين

لنبرهن على أن التطبيق h تشاكل مودولي :

أياً كان $x,y\in C$ أياً كان $\alpha,\beta\in R$ فإن :

$$\begin{aligned} f\left(h\left(\alpha x+\beta y\right)\right) &= g\left(\alpha x+\beta y\right)\\ &= \alpha.g\left(x\right)+\beta.g\left(y\right)\\ &= \alpha.f\left(h\left(x\right)\right)+\beta.f\left(h\left(y\right)\right)\\ &= f\left(\alpha\, h\left(x\right)+\beta\, h\left(y\right)\right)\end{aligned}$$

وبما أن التشاكل f متباين فإن

$$h(\alpha x+\beta y)=\alpha h(x)+\beta h(y)$$

أي أن h تشاكل مودولي .

لنبرهن أخيراً أن التشاكل h وحيد ، لذلك نفرض وجود تشاكلين $h,k:C\longrightarrow B$ بحيث $f\circ h=f\circ k=g$. بما أن التشاكل f متباين فن f قابل للاختصار من اليسار وبالتالي $h=k$.

لنفرض الآن أن التشاكل h غامر ولنبرهن على أن $\operatorname{Im} f=\operatorname{Im} g$.

أياً كان $f(b)\in \operatorname{Im} f$ فإنه من أجل العنصر b يوجد $c\in C$ بحيث $b=h(c)$ (لأن h غامر) وبالتالي يكون

$$f(b)=f(h(c))=g(c)\in \operatorname{Im} g$$

أي أن $\operatorname{Im} f\subseteq \operatorname{Im} g$ ولدينا $\operatorname{Im} g\subseteq \operatorname{Im} f$ وبالتالي $\operatorname{Im} f=\operatorname{Im} g$.

لنفرض أخيراً أن $\operatorname{Im} f=\operatorname{Im} g$ ولنبرهن على أن التشاكل h غامر .

بما أن $\operatorname{Im} f=\operatorname{Im} g$ فإن من أجل أي عنصر $b\in B$ يوجد $c\in C$ بحيث $f(b)=g(c)$ وبالتالي

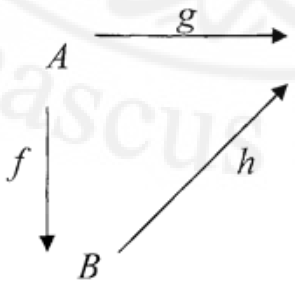
$$f(b)=g(c)=f(h(c))$$

وبما أن التشاكل f متباين فإن $b=h(c)$ وهذا ما يثبت أن التشاكل h غامر .

2 – 2– المخططات التبادلية

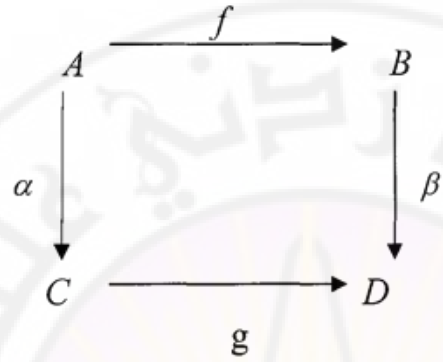
تعريف

نقول عن مخطط التطبيقات :



إنه تبادلي إذا كان $h \circ f = g$

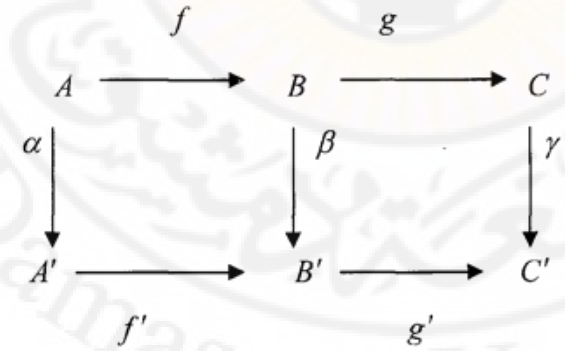
ونقول عن مخطط التطبيقات :



إنه تبادلي إذا كان $g \circ \alpha = \beta \circ f$

وبشكل عام نقول عن مخطط التطبيقات إنه تبادلي إذا كانت جميع تراكيب التطبيقات من مجموعة المنطلق إلى مجموعة المستقر متساوية

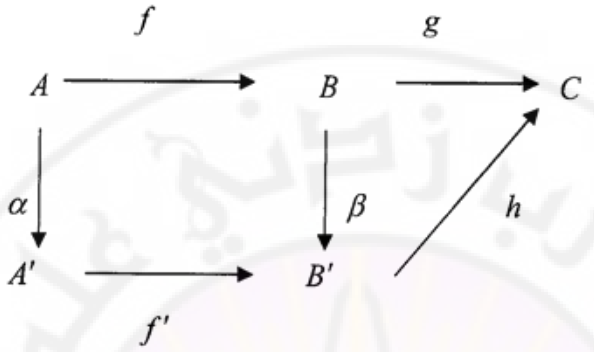
فمثلاً المخطط :



تبادلي إذا تحقق :

$$f' \circ \alpha = \beta \circ f \quad \wedge \quad g' \circ \beta = \gamma \circ g$$

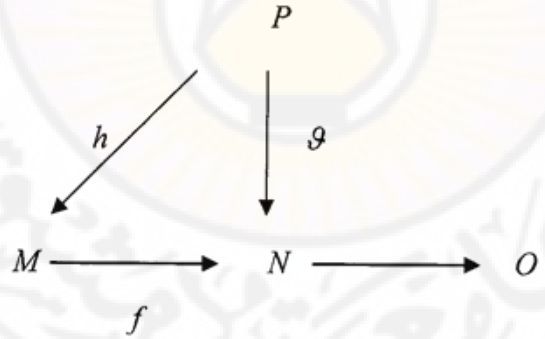
ويكون المخطط :



تبادلياً إذا تحقق

$$f' o\alpha = \beta o f \quad \wedge \quad h o\beta = g$$

ويكون المخطط :



تبادلي إذا تحقق $f oh = \vartheta$.

2 – 3 المتتاليات التامة exact sequences

تعريف

لتكن $\{f_i : M_i \longrightarrow M_{i+1}\}_{i\in I}$ أسرة تشاكلات مودولية . نقول عن متتالية التشاكلات المودولية

$$\longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \longrightarrow$$

إنها متتالية تامة (*exact sequences*) إذا تحقق

$$\operatorname{Im} f_{i-1} = \ker f_i$$

وذلك أياً كان الدليل i .

نلاحظ مباشرة أن في المتتالية التامة يكون $f_i \circ f_{i-1} = 0$ من أجل كل دليل i ، ولكن العكس غير صحيح . أي إذا كان $f_i \circ f_{i-1} = 0$ فليس من الضروري أن تكون المتتالية

$$\longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \longrightarrow$$

تامة .

مبرهنة (2-8)

إذا كان $f : M \longrightarrow N$ تشاكلاً مودولياً وكان $J : O \longrightarrow M$ التباين القانوني $O \longrightarrow N$ التشاكل الصفري فإن :

(1) – التشاكل f متباين $\Leftrightarrow$ المتتالية $O \longrightarrow M \xrightarrow{f} N$ تامة

(2) – التشاكل f غامر $\Leftrightarrow$ المتتالية $M \xrightarrow{f} N \longrightarrow O$ تامة

(3) – التشاكل f تقابل $\Leftrightarrow$ المتتالية $O \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \longrightarrow O$ تامة .

الإثبات :

(1) – المتتالية $O \longrightarrow M \xrightarrow{f} N$ تامة $\Leftrightarrow \ker f = O \Leftrightarrow$ f متباين

(2) – المتتالية $M \xrightarrow{f} N \longrightarrow O$ تامة $\Leftrightarrow \operatorname{Im} f = N \Leftrightarrow$ f غامر

(3) – ينتج مباشرة من (1) و (2) .

مثال

لتكن A, B زمرتين جمعيتين تبديليتين (مودولين على الحلقة Z) ولـيكن $f : A \longrightarrow B$ تشاكلاً زمرياً عندئذٍ المتتالية :

$$O \longrightarrow \ker f \xrightarrow{J} A \xrightarrow{\pi} A/\ker f \xrightarrow{o} O$$

حيث J التباين القانوني ، π الغمر القانوني .

هي متتالية تامة .

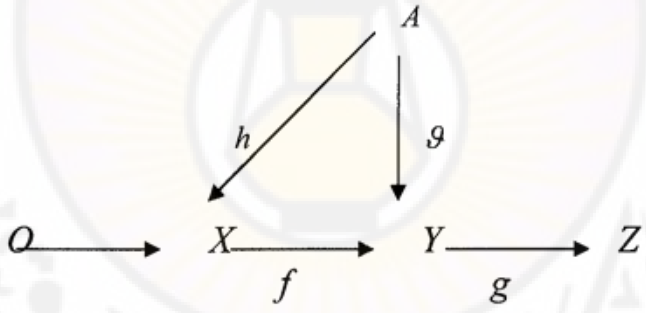
كما أن المتتالية

$$O \longrightarrow \operatorname{Im} f \longrightarrow B \longrightarrow B/\operatorname{Im} f \longrightarrow O$$

هي متتالية تامة .

مبرهنة (2-9)

إذا كان



مخططاً من التشاكلات المودولية ، السطر فيه متتالية تامة ، وكـــان $g \circ \vartheta = 0$ فإنه يوجد تشاكل مودولي وحيد $h : A \longrightarrow X$ يجعل المخطط تبادلياً .

الإثبات :

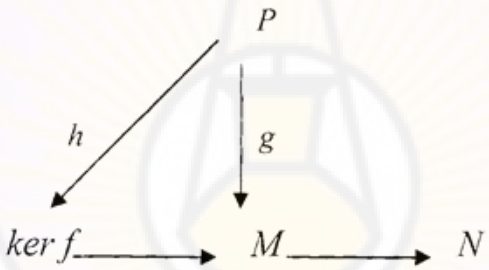
بما أن سطر المخطط متتالية تامة فإن التشاكل f متباين و $\operatorname{Im} f = \ker g$ وبما أن $g \circ \vartheta = 0$ فإن $\operatorname{Im} \vartheta \subseteq \ker g$ وبالتالي $\operatorname{Im} \vartheta \subseteq \operatorname{Im} f$.أصـــبح لـــدينا f تشاكل متباين و $\operatorname{Im} \vartheta \subseteq \operatorname{Im} f$ فحسب المبرهنة (2-7) يوجد تشاكل مـــودولي وحيد $h : A \longrightarrow X$ بحيث $f \circ h = \vartheta$ أي أن التشاكل h يجعل المخطط تبادلياً

نتيجة

إذا كان $f : M \longrightarrow N$ تشاكلاً مودولياً وكان $J : \ker f \longrightarrow M$ التباين القانوني عندئذٍ القضايا التالية تكون صحيحة :

1 - $f \circ J = 0$

2- إذا كان $g : P \longrightarrow M$ تشاكلاً مودولياً بحيث $f \circ g = 0$ فإنه يوجد تشاكل مودولي وحيد $h : P \longrightarrow \ker f$ بحيث يكون المخطط

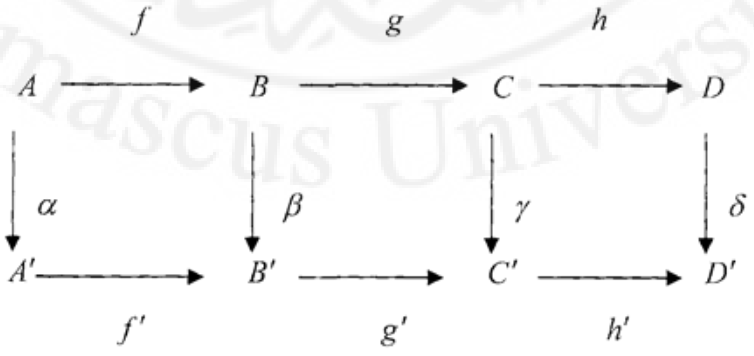


تبادلياً

البرهان ينتج مباشرة من المبرهنة (2-9)

مبرهنة (2-10)

إذا كان مخطط التشاكلات المودولية :



تبادلياً وكان كلُ من سطريه متتالية تامة فإن :

1- إذا كان التشاكلان α,γ غامرين وكان التشاكل δ متبايناً فإن التشاكل β غامرٌ

2- إذا كان التشاكلان β,δ متباينين وكان التشاكل α غامراً فإن التشاكل γ متباين

الإثبات :

1- أياً كان $b'\in B'$ وبما أن التشاكل γ غامر فإنه يوجد $c\in C$ بحيث

$$g'(b')=\gamma(c).....(I)$$

ومنه $h'(\gamma(c))=h'(g'(b'))$. لكن $h'o\gamma=\delta oh$ وبالتالي يكون

$$h'(\gamma(c))=\delta(h(c))$$

وبما أن السطر السفلي متتالية تامة فإن $h'og'=0$ وبالتالي $\delta(h(c))=0$ ومنه $h(c)\in\ker\delta$ وبما أن التشاكل δ متباين فإن $h(c)=0$ أي $c\in\ker h$ وبما أن السطر العلوي متتالية تامة فإن $\ker h=\operatorname{Im} g$ ومنه $c\in\operatorname{Im} g$ و بالتالي يوجد $b\in B$ بحيث $c=g(b)$. نعوض في العلاقة (1) نجد $g'(b')=\gamma(g(b))$ لكن $\gamma og=g'o\beta$ وبالتالي $g'(b')=g'(\beta(b))$ ومنه $g'(b'-\beta(b))=0$ أي أن $b'-\beta(b)\in\ker g'$ ، وبما أن السطر السفلي متتالية تامة فإن $\ker g'=\operatorname{Im} f'$ ، وبالتالي ينتج أن $b'-\beta(b)\in\operatorname{Im} f'$ وبالتالي يوجد $a'\in A'$ بحيث $b'-\beta(b)=f'(a')$ وبما أن التشاكل α غامر فيوجد $a\in A$ بحيث $\alpha(a)=a'$ وبالتالي ينتج أن $b'-\beta(b)=f'(\alpha(a))=\beta(f(a))$ ومنه $b'=\beta(f(a)+b)$ أي $b'\in\operatorname{Im}\beta$ وهذا يعني أن التشاكل β غامر .

2- أياً كان $c\in\ker\gamma$ فإن $\gamma(c)=o$ وبالتالي $h'(\gamma(c))=h'(o)=o$ وبما أن المخطط تبادلي فإن $h'o\gamma=\delta oh$ وبالتالي ينتج أن $\delta(h(c))=o$ ومنه

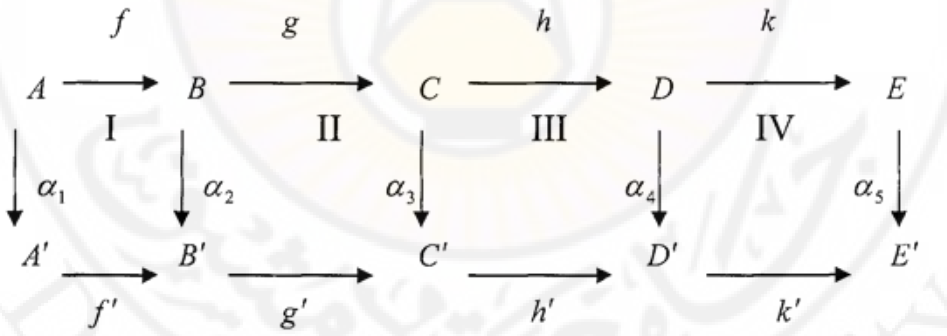
$h(c)\in \ker\delta$ وبما أن التشاكل δ متباين فإن $h(c)=o$ ومنه $c\in \ker h$ لكن $\ker h=\operatorname{Im} g$ وبالتالي $c\in \operatorname{Im} g$ أي يوجد $b\in B$ بحيث

$$c=g(b).....(I)'$$

وبالتالي $\gamma(g(b))=o$ لكن $\gamma og=g'o\beta$ وبالتالي ينتج أن $g'(\beta(b))=o$ ومنه $\beta(b)\in \ker g'$ وبالتالي $\beta(b)\in \operatorname{Im} f'$ أي يوجد $a'\in A'$ بحيث $\beta(b)=f'(a')$ وبما أن التشاكل α غامر فإن يوجد $a\in A$ بحيث $a'=\alpha(a)$ وبالتالي يكون $\beta(b)=f'(\alpha(a))$ لكن $f'o\alpha=\beta of$ وبالتالي يكون $\beta(b)=\beta(f(a))$ وبما أن التشاكل β متباين فإن $b=f(a)$ نبدل في $(I)'$ فنحصل على أن $c=g(f(a))$ وبما أن السطر العلوي متتالية تامة فإن $gof=o$ وبالتالي $c=o$ وهذا ما يثبت أن التشاكل γ متباين .

مبرهنة (2-11)

إذا كان مخطط التشاكلات المودولية :



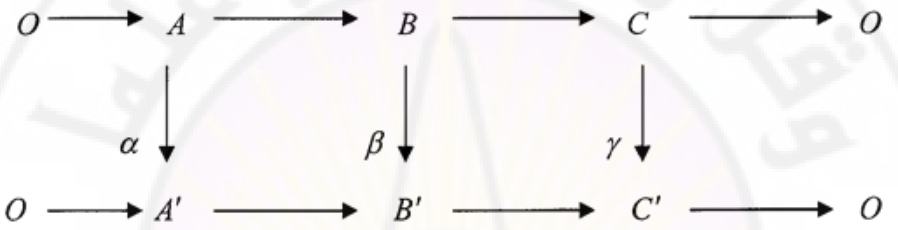
تبادلياً وكان كل سطر فيه متتالية تامة وكانت $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4,\alpha_5$ تماثلات مودولية فإن α_3 تماثل مودولي .

الإثبات :

بتطبيق المبرهنة (2−10) على المخطط المؤلف من المربعات I,II,III نجد أن التشاكل α_3 غامر. وبتطبيق المبرهنة نفسها على المخطط المؤلف من المربعات II,III,IV نجد أن التشاكل α_3 متباين ، إذن α_3 تماثل مودولي .

نتيجة

إذا كان مخطط التشاكلات المودولية :



تبادلياً وسطراه متتاليتان تامتان وكان α,γ تماثلين مودوليين فإن β تماثل مودولي .

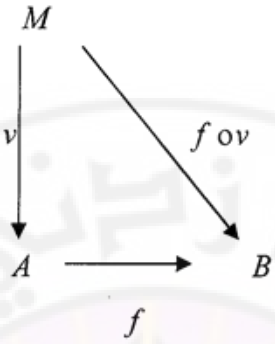
البرهان

إذا أخذنا $A = A' = E = E' = 0$ في المبرهنة (2−11) ينتج المطلوب .

2 −4 التشاكل المستخلص induced morphism

تعريف :

ليكن A,B مودولين على حلقة R وليكن $f \in Hom_R(A,B)$ وليكن M مودولاً على الحلقة R . ولنتأمل المخطط :

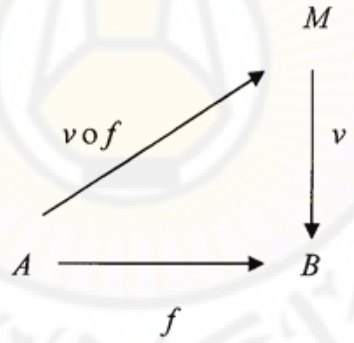


فنجد أن التشاكل f يعرف تشاكلاً :

$$f_* : Hom(M, A) \longrightarrow Hom(M, B)$$

$$f_*(v) = f \circ v$$

ولنلاحظ المخطط :



فنجد أن التشاكل f يعرف تشاكلاً :

$$f^* : Hom(B, M) \longrightarrow Hom(A, M)$$

$$f^*(v) = v \circ f$$

يسمى كل من التشاكلين f_*, f^* التشاكل المستخلص من f (induced by f)

لاحظ أن كلاً من f_*, f^* هو تشاكل زمري وأن كلاً منهما هو تشاكل مـــودولي على Z.

مبرهنة (2-12)

ليكن A,B,C ثلاثة مودولات على حلقة R ولتكن $f,h \in Hom(A,B)$, $g,k \in Hom(B,C)$ فإن

(1) $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$

(2) $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$

(3) $(f+h)_* = f_* + h_*$

(4) $(g+k)^* = g^* + k^*$

الإثبات:

(1) لدينا :

$$(g \circ f)_* = Hom(M,A) \longrightarrow Hom(M,C)$$
$$g_* \circ f_* : Hom(M,A) \longrightarrow Hom(M,C)$$

كما أنه أياً كان $v \in Hom(M,A)$ فإن :

$$\begin{aligned}(g \circ f)_*(v) &= (g \circ f) \circ v \\ &= g \circ (f \circ v) \\ &= g_*(f \circ v) \\ &= g_*(f_*)(v) \\ &= (g_* \circ f_*)(v)\end{aligned}$$

إذن $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$

(2) : لدينا

$$(g \circ f)^* : Hom(C,M) \longrightarrow Hom(A,M)$$
$$f^* \circ g^* : Hom(C,M) \longrightarrow Hom(A,M)$$

كما أنه أياً كان $v \in Hom(M,A)$ فإن :

$$\begin{aligned}(g \circ f)^*(v) &= v \circ (g \circ f) \\ &= (v \circ g) \circ f \\ &= f^*(v \circ g) \\ &= f^*(g^*(v)) \\ &= (f^* \circ g^*)(v)\end{aligned}$$

إذن $(g \circ f)^{\bullet} = f^{\bullet} \circ g^{\bullet}$

(3) : لدينا :

$$(f+h)_{\bullet} : Hom(M,A) \longrightarrow Hom(M,B)$$
$$f_{\bullet} + h_{\bullet} : Hom(M,A) \longrightarrow Hom(M,B)$$

و أياً كان $v \in Hom(M,A)$ فإن :

$$\begin{aligned}(f+h)_{\bullet}(v) &= (f+h) \circ v \\ &= f \circ v + h \circ v \\ &= f_{\bullet}(v) + h_{\bullet}(v) \\ &= (f_{\bullet} + h_{\bullet})(v)\end{aligned}$$

إذن $(f+h)_{\bullet} = f_{\bullet} + h_{\bullet}$.

(4) يبرهن بشكل مشابه للقضايا السابقة .

مبرهنة (2-13) :

إذا كانت

$$(I) \qquad O \longrightarrow A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} A'' \longrightarrow O$$

متتالية تامة من التشاكلات المودولية على حلقة R . وليكن M مودولاً على الحلقة R عندئذ المتتاليتان :

$$(a) \qquad O \longrightarrow Hom(M,A') \xrightarrow{f_{\bullet}} Hom(M,A) \xrightarrow{g_{\bullet}} Hom(M,A'')$$
$$(b) \qquad O \longrightarrow Hom(A'',M) \xrightarrow{g^{\bullet}} Hom(A,M) \xrightarrow{f^{\bullet}} Hom(A',M)$$

تامتان .

الإثبات :

لإثبات أن المتتالية (a) تامة يكفي أن نثبت أن :

(أ) التشاكل $f_{\bullet}$ متباين .

(ب) $\operatorname{Im} f_{\bullet} = \ker g_{\bullet}$.

أياً كان $v \in \ker f_*$ فإن $f_*(v) = o$ وبالتالي $f \circ v = o$ وبما أن المتتالية (I) تامة فإن التشاكل f متباين وبالتالي f قابل للاختصار من اليسار وبالتالي $v = o$. إذن التشاكل f_* متباين .

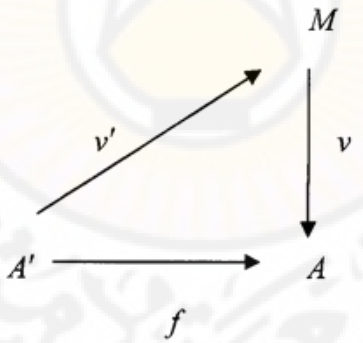
أياً كان $v \in \operatorname{Im} f_*$ فإنه يوجد $v' \in Hom(M, A')$ بحيث $v = f_*(v')$ ومن ثم $v = f \circ v'$ وبالتالي يكون

$$g_*(v) = g_*(f_*(v')) = g \circ (f \circ v') = (g \circ f) \circ v'$$

لكن $gof = 0$ (كون المتتالية (I) تامة) وبالتالي $g_*(v) = 0$ ومنه $v \in \ker g_*$ وبالتالي

$$\operatorname{Im} f_* \subseteq \ker g_* \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

من جهة أخرى أياً كان $v \in \ker g_*$ فإن $g_*(v) = 0$ وبالتالي $g \circ f = 0$ وهذا يعني أن $\operatorname{Im} v \subseteq \operatorname{Im} f$ وبما أن التشاكل f متباين فحسب المبرهنة (2-7)



فإنه يوجد تشاكل مودولي وحيد $v' : M \longrightarrow A'$ من أجله $f \circ v' = v$ وبالتالي $f_*(v') = v$ وهذا يثبت أن $v \in \operatorname{Im} f_*$ وبالتالي :

$$\ker g_* \subseteq \operatorname{Im} f_* \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

من (1) و(2) نجد أن $\operatorname{Im} f_* = \ker g_*$. وبذلك نكون قد أثبتنا أن المتتالية (a) تامة .

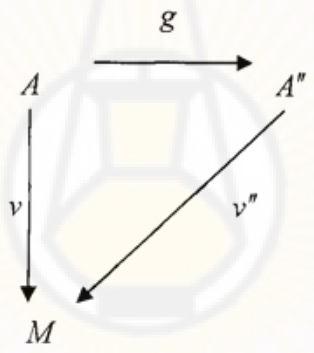
لإثبات أن المتتالية (b) تامة يكفي أن نثبت أن :

"(أ) – التشاكل g^* متباين .

"(ب)– $\operatorname{Im} g^* = \ker f^*$.

لنفرض أن $g^*(v_1'') = g^*(v_2'')$ وذلك أياً كان $v_1'', v_2'' \in Hom(A'', M)$ فعندئذٍ يكون $v_1'' \circ g = v_2'' \circ g$ وبما أن g غامر فهو قابل للاختصار من اليمين وبالتالي $v_1'' = v_2''$ إذن g^* متباين .

أياً كان $v \in \ker f^*$ فإن $f^*(v) = 0$ وبالتالي $v \circ f = 0$ وهذا يعني أن $\operatorname{Im} f \subseteq \ker v$ وبما إن المتتالية (I) تامة فإن $\ker g = \operatorname{Im} f$ ومن ثم $\ker g \subseteq \ker v$ وبما أن التشاكل g غامر فحسب المبرهنة (2–6)



فإنه يوجد تشاكل مودولي وحيد $v'' : A'' \longrightarrow M$ من أجله $v'' \circ g = v$ وبالتالي $v = g^*(v'')$ وهذا يثبت أن $v \in \operatorname{Im} g^*$ وعليه يكون

$$\ker f^* \subseteq \operatorname{Im} g^* \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)'$$

ومن جهة ثانية أياً كان $v \in \operatorname{Im} g^*$ فإنه يوجد $v'' \in Hom(A'', M)$ بحيث $v = g^*(v'')$ ومن ثم $f^*(v) = f^*(g^*(v''))$ ومنه $v \circ f = v'' \circ (g \circ f)$

وبما أن المتتالية (I) تامة فإن $g \circ f = 0$ وبالتالي ينتج أن $f^*(v) = 0$ ومنه $v \in \ker f^*$ وبالتالي

$$\operatorname{Im} g^* \subseteq \ker f^* \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)'$$

من $(1)'$ و $(2)'$ نجد أن $\operatorname{Im} g^* = \ker f^*$. وبذلك تكـــون قـــد أثبتنـــا أن المتتالية (b) تامة .

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

تمرينات محلولة

التمرين الأول

ليكن $f : M \longrightarrow N$ تشاكلاً مودولياً غير صفري .أثبت صحة الاقتضائين التاليين :

1- [التشاكل f متباين] $\Rightarrow$ [المودول M بسيط].

2- [التشاكل f غامر] $\Rightarrow$ [المودول N بسيط].

الحل :

1- إن $\ker f$ مودول جزئي من المودول M وبما أن المودول M بسيط فإن

$$\ker f = M \qquad \text{أو} \qquad \ker f = O$$

لكن التشاكل f ليس صفرياً وبالتالي $\ker f \neq M$. إذن $\ker f = O$ وهذا ما يثبت أن التشاكل f متباين .

2 – إن $\operatorname{Im} f$ مودول جزئي من المودول N وبما أن المودول N بسيط فإن

$$\operatorname{Im} f = N \qquad \text{أو} \qquad \operatorname{Im} f = O$$

لكن التشاكل f ليس صفرياً وبالتالي $\operatorname{Im} f \neq O$.إذن $\operatorname{Im} f = N$ وهذا ما يثبت أن التشاكل f غامر .

التمرين الثاني

ليكن $f : M \longrightarrow N$ تشاكلاً مودولياً وليكن A مودولاً جزئياً من B, وليكن B مودولاً جزئياً من N . أثبت أن :

$$f^{\rightarrow}(A \cap f^{\leftarrow}(B)) = f^{\rightarrow}(A) \cap B$$

الحل :

$$z \in \overset{\cup}{f}(A \cap \overset{\cup}{f}(B)) \Leftrightarrow z = f(x) \quad ; \quad x \in A \cap \overset{\cup}{f}(B)$$
$$\Leftrightarrow z = f(x) \quad ; \quad x \in A \wedge x \in \overset{\cup}{f}(B)$$
$$\Leftrightarrow z = f(x) \quad ; \quad f(x) \in \overset{\rho}{f}(A) \wedge f(x) \in B$$
$$\Leftrightarrow z \in \overset{\rho}{f}(A) \wedge z \in B$$
$$\Leftrightarrow z \in \overset{\rho}{f}(A) \cap B$$

التمرين الثالث

ليكن

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \\ \downarrow{\scriptstyle \alpha} & & \downarrow{\scriptstyle \beta} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma} \\ A' & \xrightarrow[f']{} & B' & \xrightarrow[g']{} & C' \end{array}$$

مخططاً تبادلياً من التشاكلات المودولية ،سطريه متتاليتين تامتين .

المطلوب :

1- إذا كانت التشاكلات α, γ, f' متباينة ، فأثبت أن التشاكل β متباين .

2- إذا كانت التشاكلات α, γ, g غامرة ، فأثبت أن التشاكل β غامر .

الحل

1- أياً كان $b \in \ker \beta$ فإن

$$\beta(b) = o \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

وبالتالي $g'(\beta(b)) = o$ وبما أن المخطط تبادلي ينتج أن $\gamma(g(b)) = o$

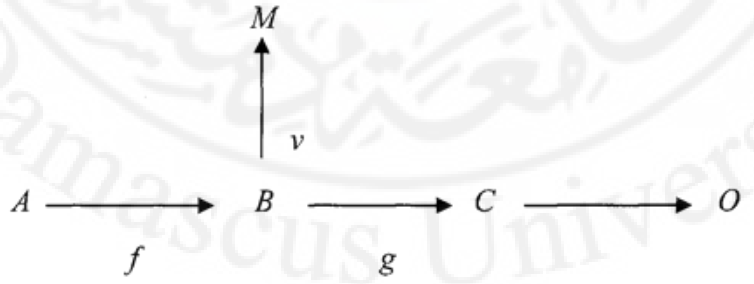
لكن التشاكل χ متباين وبالتالي $g(b) = o$ ومنه $b \in \ker g$ وبما أن السطر العلوي متتالية تامة ينتج أن $b \in \operatorname{Im} f$ وبالتالي يوجد $a \in A$ بحيث $f(a) = b$

نبدل في العلاقة (1) فنحصل على أن $\beta(f(a))=o$ وبما أن المخطط تبادلي ، ينتج أن $f'(\alpha(a))=o$ وبما أن التشاكل f' متباين فإن $\alpha(a)=o$ كما أن التشاكل α متباين وبالتالي $a=o$ ومنه $b=f(o)=o$ وهذا ما يثبت أن التشاكل β متباين .

2- أياً كان $b'\in B'$ ، بما أن التشاكل γ غامر فإنه يوجد $c\in C$ بحيث يكون $\gamma(c)=g'(b')$ وبما أن التشاكل g غامر فإنه من أجل العنصر c يوجد $b\in B$ بحيث $g(b)=c$ ، وبالتالي يكون $g'(b')=\gamma(g(c))$ لكن $\gamma og=g'o\beta$ وبالتالي ينتج أن $g'(b')=g'(\beta(b))$ ومنه $b'-\beta(b)\in \ker g'$ ، وبما أن السطر السفلي متتالية تامة فإن $\ker g'=\operatorname{Im} f'$ وبالتالي يكون $b'-\beta(b)\in \operatorname{Im} f'$ ومنه يوجد $a'\in A'$ بحيث $b'-\beta(b)=f'(a')$ ، وبما أن التشاكل α غامر فإنه من أجل العنصر a' يوجد $a\in A$ بحيث $\alpha(a)=a'$ وبالتالي يكون $b'-\beta(b)=f'(\alpha(a))$ وبما أن المخطط تبادلي فإن $f'o\alpha=\beta of$ ومنه $b'-\beta(b)=\beta(f(a))$ وبالتالي $b'=\beta(f(a)+\beta(b))$ وهذا يثبت أن التشاكل β غامر .

التمرين الرابع

ليكن



مخططاً من التشاكلات المودولية ، سطره متتالية تامة وفيه $vof=o$.

أثبت أنه يوجد تشاكل مودولي وحيد $h: C \longrightarrow M$ يجعل المخطط تبادلياً .

الحل

حسب المبرهنة (2-6) نجد أنه لإثبات المطلوب يكفي أن نثبت أن التشاكل g غامر وأن $\ker g \subseteq \ker v$.

إن التشاكل g غامر لأن السطر متتالية تامة .

بما أن السطر متتالية تامة فإن $\operatorname{Im} f = \ker g$ وبالتالي أياً كان $b \in \ker g$ فإن $b \in \operatorname{Im} f$ وبالتالي يوجد $a \in A$ بحيث $f(a) = b$. بما أن $v \circ f = o$ فإن $v(f(a)) = o$ ومن ثم $f(a) \in \ker v$ أي أن $b \in \ker v$ أي أن $\ker g \subseteq \ker v$.

وبذلك يتم المطلوب .

التمرين الخامس

ليكن M مودولاً على حلقة R وليكن n عدداً صحيحاً موجباً ، ولتكن

$$f_i : M \longrightarrow M \qquad (i = 1,2,.....,n)$$

تشاكلات مودولية بحيث :

$$\sum_{i=1}^{n} f_i = I_M$$

$$f_i \circ f_j = o \qquad i \neq j$$

المطلوب :

1- أثبت أن $f_j^2 = f_j$ لأجل كل $j \in \{1,2,....,n\}$

2- نفرض $M_i = f_i(M)$ أثبت أن التطبيق

$$f : M \longrightarrow \prod_{i=1}^{n} M_i$$

المعرفة بالعلاقة :

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x),...., f_n(x))$$

تماثل مودولي .

الحل

1- أياً كان $j \in \{1,2,....,n\}$ فإن

$$f_j = f_j \circ I_M = f_j \circ \sum_{i=1}^{n} f_i = f_j \circ f_j = f_j^2$$

2- إن التطبيق f تشاكل مودولي لأن :

أياً كان $x, y \in M$ و أياً كان $\alpha, \beta \in R$ فإن :

$$\begin{aligned} f(\alpha x + \beta y) &= (f_1(\alpha x + \beta y), \quad f_2(\alpha x + \beta y), \quad ..., f_n(\alpha x + \beta y)) \\ &= (\alpha f_1(x) + \beta f_1(y), \quad \alpha f_2(x) + \beta f_2(y), \quad ...., \alpha f_n(x) + \beta . f_n(y)) \\ &= \alpha . (f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x)) + \beta (f_1(y), f_2(y), ..., f_n(y)) \\ &= \alpha . f(x) + \beta . f(y) \end{aligned}$$

كما أن التشاكل f متباين لأن :

أياً كان $x \in \ker f$ فإن

$$x = I_M(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) \quad \wedge \quad f(x) = o$$

منه $x = o$.

كما أن التشاكل f غامر لأن :

أياً كان $(y_1, y_2, ..., y_n) \in \prod_{i=1}^{n} M_i$ فإنه لأجل كل $i \in \{1,2,...,n\}$ يوجد $z_i \in M$ بحيث $f_i(z_i) = y_i$ وبالتالي يوجد $x = y_1 + y_2 + ... + y_n \in M$ بحيث يكون :

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x)) = (y_1, y_2, ..., y_n)$$

لأن عندما $i \neq j$ يكون $f_j(y_i) = o$ وبالتالي لأجل كل $j \in \{1,2,....,n\}$ يكون $f_j(x) = f_j^2(z_j) = y_j$.

إذن التطبيق f هو تشاكل مودولي غامر ومتباين فهو تماثل مودولي .

تمرينات (2)

التمرين الأول :

لتكن R حلقة تبديلية وليكن $f: R\times R \longrightarrow R$ تطبيقاً .

أثبت أن f تشاكل مودولي عندما وفقط عندما يوجد $\alpha,\beta \in R$ بحيث

$$(\forall x,y \in R) \qquad f(x,y)=\alpha.x+\beta.y$$

التمرين الثاني

ليكن $f: A \longrightarrow B$ و $f': A' \longrightarrow B'$ تشاكلين مودوليين ولنعرف التطبيق

$$f\times f': A\times A' \longrightarrow B\times B'$$
$$(f\times f')(a,a')=(f(a),f(a')) \qquad (\forall (a,a')\in A\times A')$$

1- أثبت أن $f\times f'$ تشاكل مودولي .

2- برهن أنه إذا كانت المتتاليتان :

$$O \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow O$$

$$O \longrightarrow A' \xrightarrow{f'} B' \xrightarrow{g'} C' \longrightarrow O$$

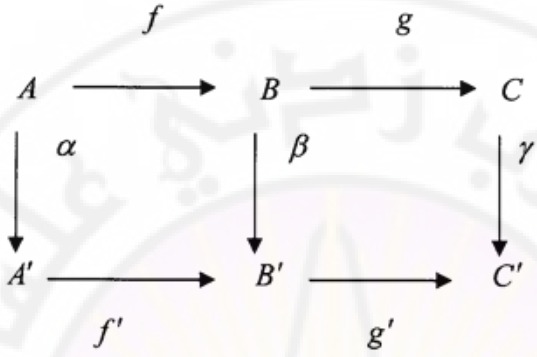
تامتين فإن المتتالية :

$$O \longrightarrow A\times A' \xrightarrow{f\times f'} B\times B' \xrightarrow{g\times g'} C\times C' \longrightarrow O$$

تكون تامة .

التمرين الثالث

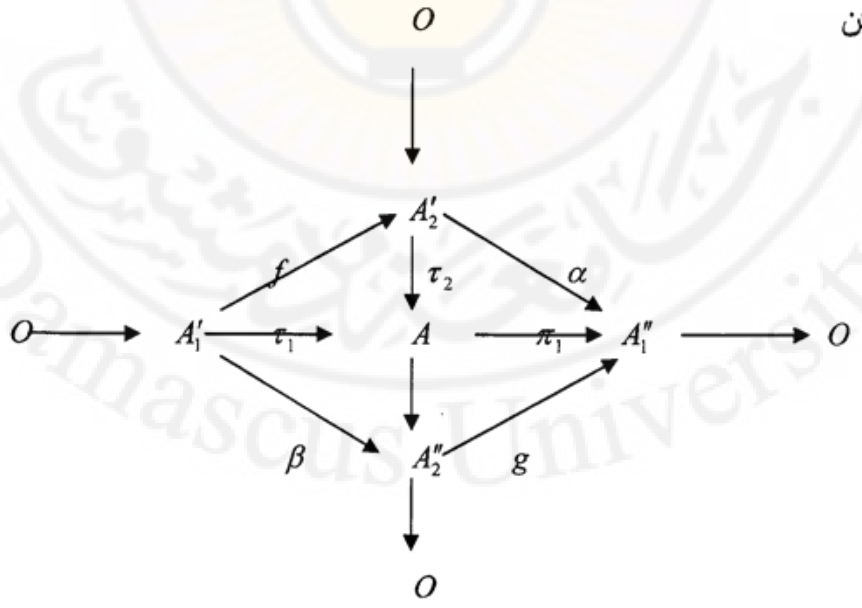
ليكن



مخططاً تبادلياً من التشاكلات المودولية وفيه α, β, γ تماثلات مودولية أثبت أنه يكون السطر العلوي متتالية تامة ، عندما يكون السطر السفلي متتالية تامة .

التمرين الرابع

ليكن



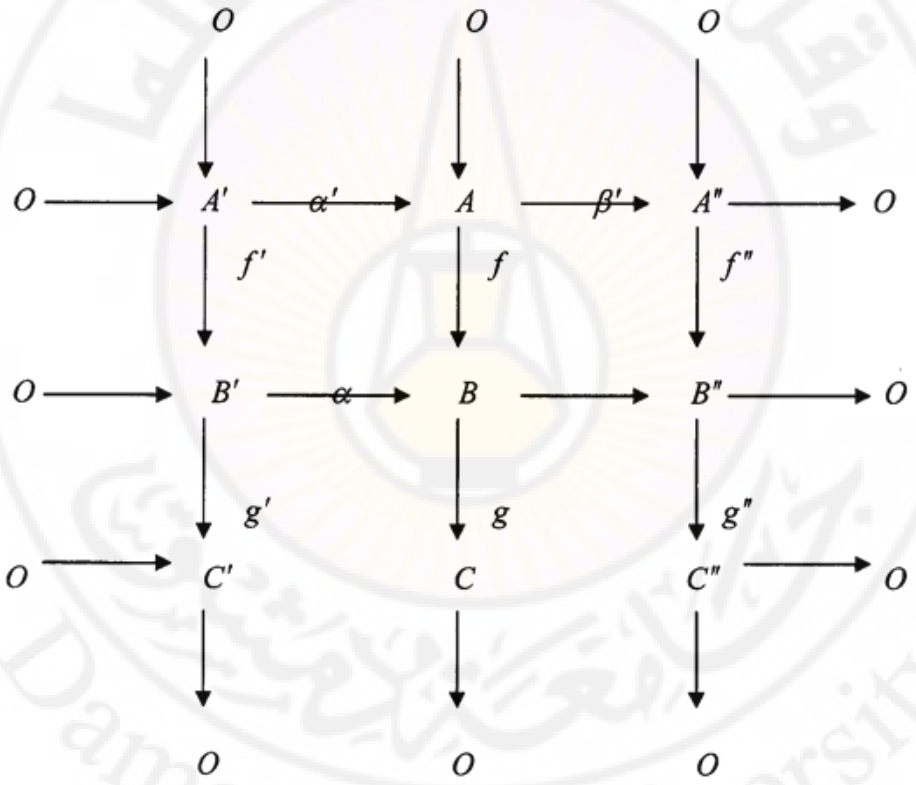
مخططاً تبادلياً من التشاكلات المودولية سطره وعموده متتاليتان تامتان والمطلوب :

1- أثبت أن α, β تشاكلان صفريان .

2- أثبت أن f, g تماثلان .

التمرين الخامس

ليكن



مخططاً تبادلياً من التشاكلات المودولية أعمدته الثلاثة متتاليات تامة وسطراه العلويان متتاليتان تامتان .

برهن أن يوجد تشاكلين وحدين :

$$\alpha'' : C' \longrightarrow C \quad , \quad \beta'' : C \longrightarrow C''$$

من أجلها يصبح السطر السفلي متتالية تامة ويجعل المخطط الناتج تبادلياً .

(إرشاد :لاحظ أن $g o\alpha o f' = 0$ وأيضاً $\ker g' = \operatorname{Im} f' \subseteq \ker(g o\alpha)$

ثم اعتمد على المبرهنة (6-2) لإثبات وجود α'' وكذلك β'') .

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الفصل الثالث

مودول الخارج ومبرهنات التماثل

Quotient module & isomorphism theorems

3-1- بناء مودول الخارج

ليكن M مودولاً على حلقة R وليكن N مودولاً جزئياً من M .

نعرف على M العلاقة الثنائية ~ كما يلي :

$$(\forall x, y \in M) \qquad x \sim y \Leftrightarrow x - y \in N$$

فنجد بسهولة أن العلاقة الثنائية ~ هي علاقة تكافؤ (انعكاسية ،متناظرة ، متعدية) . تكتب علاقة التكافؤ السابقة بالشكل :

$$x \equiv y (\mathrm{mod}\, N)$$

إن صف تكافؤ عنصر $x \in M$ هو المجموعة $x+N$. نرمز مجموعة صفوف التكافؤ في M بالرمز M/N أي :

$$M/N = \{x+N \quad ; \quad x \in M\}$$

ولنعرف على المجموعة M/N قانوني تشكيل . الأول $(+)$ داخلي :

$$(x+N)+(y+N)=(x+y)+N$$

الثاني $(\cdot)$ خارجي مجموعة مؤثراته الحلقة R :

$$\alpha.(x+N)=(\alpha.x)+N$$

وذلك أياً كان $\alpha \in R \quad , \quad x+N, \quad y+N \in M/N$

فنجد أن :

I- $\left(M/N,+\right)$ زمرة تبديلية .

II- أياً كان $y+N\in M/N$, $x+N$ و أياً كان $\alpha,\beta\in R$ فإن :

1- $1_R.(x+N)=(1_R.x)+N=x+N$

2- $(\alpha+\beta).(x+N)=(\alpha+\beta).x+N=(\alpha.x+\beta.x)+N$
$=(\alpha.x+N)+(\beta.x+N)$

3- $\alpha.[(x+N)+(y+N)]=\alpha.[(x+y)+N]$
$=\alpha.(x+y)+N$
$=(\alpha.x+\alpha.y)+N$
$=(\alpha.x+N)+(\alpha.y+N)$

4- $\alpha.[\beta.(x+N)]=\alpha.(\beta.x+N)$
$=\alpha.(\beta.x)+N$
$=(\alpha.\beta).x+N$
$=(\alpha.\beta)(x+N)$

وبالتالي $\left(M/N,+,\cdot\right)$ مودول على الحلقة R ، يسمى مودول الخارج للمودول M على N .

وإذا أخذنا العلاقة :

$$\pi : M \longrightarrow M/N$$

المعرفة كما يلي :

$$(\forall x\in M) \qquad \pi(x)=x+N$$

فنجد أن π تشاكل مودولي غامر وأن $\ker\pi=N$

مبرهنة (3-1)

إذا كان N مودولاً جزئياً من مودولٍ M على حلقة R . فإنه يوجد تقابل يحافظ على الاحتواء بين X مجموعة المودولات الجزئية من M/N وبين Y مجموعة المودولات الجزئية A من M بحيث $N\subseteq A\subseteq M$.

الإثبات

ليكن A مودولاً جزئياً من المودول M بحيث $N \subseteq A \subseteq M$ ولنأخذ المجموعة

$$A/N = \{a+N \quad ; \quad a \in A\}$$

فنجد أن $\Phi \neq A/N \subseteq M/N$ (لاحظ أن $N \in A/N$)

كما أن أياً كان $a+N\ ,\ b+N \in A/N$ و أياً كان $\alpha,\beta \in R$ فإن :

$$\alpha.(a+N)+\beta.(b+N)=(\alpha.a+N)+(\beta.b+N)$$
$$=(\alpha.a+\beta.b)+N \quad \in \quad A/N$$

لأن $\alpha.a+\beta.b \in A$ (A مودول جزئي من M)

إذن A/N مودول جزئي من المودول M/N

لنأخذ الآن التطبيق :

$$f : X \longrightarrow Y$$
$$f(A) = A/N \qquad (\forall A \in X)$$

فنجد أن التطبيق f متباين لأنه إذا كان A,B مودولين جزئيين من المودول M بحيث $N \subseteq A \subseteq M$, $N \subseteq B \subseteq M$ وكان $f(A)=f(B)$ فإن $A/N = B/N$ وبالتالي يوجد $a \in A,\quad b \in B$ بحيث $a+N=b+N$ ومنه $a-b \in N$ وبالتالي يوجد $n \in N$ بحيث $a-b=n$ ، وبما أن $n \in N \subseteq B$ فإن $a \in B$ وبالتالي $A \subseteq B$. كما أن من العلاقة $a-b=n$ يكون $b=a-n$ وبما أن $n \in N \subseteq A$ فإن $b \in A$ وبالتالي $B \subseteq A$. إذن $A=B$. وبالتالي التطبيق f متباين .

لنثبت الآن أن التطبيق f غامر . أياً كان $P \in M/N$ فإن المجموعة :

$$U=\{x \in M: \qquad x+N=P\}$$

مودول جزئي من المودول M وذلك لأن :

من جهة أولى ، $\Phi \neq U \subseteq M$

ومن جهة ثانية ، أياً كان $x,y\in U$ و أياً كان $\alpha,\beta\in R$ فإن :

$$\alpha.(x+N)+\beta.(y+N)=(\alpha.x+\beta.y)+N\in P$$

ومنه $\alpha.x+\beta.y\in U$.

كما أنه أياً كان $n\in N$ فإن $n+N=o+N\in P$ ، أي أن $n\in U$ وهذا يعني أن $f(U)=P$ فالتطبيق f غامر .

نتيجة :

كل مودول جزئي من مودول الخارج M/N هو من الشكل A/N بحيث $N\subseteq A\subseteq M$.

3- 2 – مبرهنات التماثل isomorphism theorems

مبرهنة (3-2) مبرهنة التماثل الأولى :

إذا كان $f:M\longrightarrow N$ تشاكلاً مودولياً فإن $M/\ker f \cong \operatorname{Im} f$

الإثبات :

لنأخذ العلاقة :

$$\varphi: M/\ker f \longrightarrow \operatorname{Im} f$$

المعرفة كما يلي :

$$\varphi(x+\ker f)=f(x)\qquad (\forall x\in M)$$

بما أن كل مودول هو زمرة جمعية تبديلية فالعلاقة φ المعرفة أعلاه تماثلاً زمرياً ، ولإتمام الإثبات يكفي أن نثبت أن φ يحقق الشرط الثاني من شرطي التشاكل المودولي .

أياً كان $x+\ker f\in M/\ker f$ و أياً كان $\alpha\in R$ فإن

$$\varphi[\alpha\ (x+\ker f)]=\varphi(\alpha.x+\ker f)=f(\alpha x)=\alpha f(x)=\alpha\varphi(x+\ker f)$$

إذن φ تماثل مودولي وبالتالي $M/\ker f \cong \operatorname{Im} f$.

نتائج وملاحظات :

1- إذا كان $f: M \longrightarrow N$ تشاكلاً مودولياً غامراً فإن $N \cong {}^{M}\!/_{\ker f}$.

2- إذا كان $f: M \longrightarrow N$ تشاكلاً مودولياً وأخذنا الغمر القانوني :

$$\pi: M \longrightarrow {}^{M}\!/_{\ker f}$$

فنجد أن $\varphi o\pi = f$ وأن التماثل φ هو الوحيد الذي يحقق $\varphi o\pi = f$ وذلك لأنه إذا كان $\varphi: {}^{M}\!/_{\ker f} \longrightarrow \operatorname{Im} f$ تماثلاً آخر يحقق $\varphi o\pi = f$ فإن $\varphi o\pi = \varphi o\pi$ ، وبما أن π غامر فهو قابل للاختصار من اليمين وبالتالي $\varphi = \varphi$.

مبرهنة (3-3) مبرهنة التماثل الثانية

إذا كان P, N مودولين جزئيين من مودول M على حلقة R بحيث $P \subseteq N$ فإن

$${}^{M}\!/_{N} \cong {}^{\left({}^{M}\!/_{P}\right)}\!/_{\left({}^{N}\!/_{P}\right)}$$

الإثبات :

لنأخذ العلاقة :

$$\varphi: {}^{M}\!/_{P} \longrightarrow {}^{M}\!/_{N}$$

المعرفة كما يلي :

$$\left(\forall x+P \in {}^{M}\!/_{P}\right) \qquad \varphi(x+P) = x+N$$

فنجد أن العلاقة φ تشاكل زمري غامر نواته ${}^{N}\!/_{P}$.

كما أنه أياً كان $x+P \in {}^{M}\!/_{P}$ و أياً كان $\alpha \in R$ فإن :

$$\begin{aligned}\varphi[\alpha.(x+P)] &= \varphi(\alpha.x+P)\\ &= \alpha.x+N\\ &= \alpha.(x+N)\\ &= \alpha.\varphi(x+P)\end{aligned}$$

وبالتالي φ تشاكل مودولي غامر نواته N/P وبتطبيق مبرهنة التماثل الأولـــى (2-3) نجد أن :

$$\frac{(M/P)}{(N/P)} \cong M/N$$

مبرهنة (3-4) مبرهنة التماثل الثالثة

إذا كان P,N مودولين جزئيين من مودول M على حلقة R فإن :

$$(P+N)/P \cong N/(P \cap N)$$

الإثبات

لنأخذ الغمر القانوني :

$$\pi : P+N \longrightarrow (P+N)/P$$

والتباين القانوني :

$$J : N \longrightarrow P+N$$

فنجد التطبيق :

$$\pi \circ J : N \longrightarrow (P+N)/P$$

تشاكل مودولي غامر نواته $P \cap N$ وبتطبيق مبرهنة التماثل الأولى (2-3) ينتج أن :

$$N/(P \cap N) \cong (P+N)/P$$

مبرهنة Zassenhaus (3-5)

إذا كان N,P,N',P' مودولات جزئية من مودول M على حلقة R بحيث $N \subseteq P$, $N' \subseteq P$ فإن :

$$\frac{N+(P\,\mathrm{I}\,P')}{N+(P\,\mathrm{I}\,P')} \cong \frac{P\,\mathrm{I}\,P'}{(N\,\mathrm{I}\,P')+(N'\,\mathrm{I}\,P)} \cong \frac{N'+(P\,\mathrm{I}\,P')}{N'+(N\,\mathrm{I}\,P')}$$

الإثبات :

بما أن $P\,\mathrm{I}\,N' \subseteq P\,\mathrm{I}\,P'$ يكون لدينا :

$$(P\,\mathrm{I}\,P')+N+(P\,\mathrm{I}\,N')=(P\,\mathrm{I}\,P')+N$$

وبتطبيق المبرهنة (1-5) نجد أن :

$$(P\,\mathrm{I}\,P')\mathrm{I}\,[N+(P\,\mathrm{I}\,N')]=(P\,\mathrm{I}\,P'\,\mathrm{I}\,N)+P\,\mathrm{I}\,N'$$
$$=(P'\,\mathrm{I}\,N)+(P\,\mathrm{I}\,N')$$

فبتطبيق مبرهنة التماثل الثالثة (3-4) على المودولين الجزئيين $N+(P\,\mathrm{I}\,N')$, $P\,\mathrm{I}\,P'$ ينتج أن

$$\frac{P\,\mathrm{I}\,P'}{(N\,\mathrm{I}\,P')+(N'\,\mathrm{I}\,P)} \cong \frac{N+(P\,\mathrm{I}\,P')}{N+(P\,\mathrm{I}\,N')}$$

وبطريقة مشابهة يبرهن على أن :

$$\frac{P\,\mathrm{I}\,P'}{(N\,\mathrm{I}\,P')+(N'\,\mathrm{I}\,P)} \cong \frac{N'+(P\,\mathrm{I}\,P')}{N'+(N\,\mathrm{I}\,P')}$$

Damascus University

تمرينات محلولة

التمرين الأول

ليكن A مودولاً جزئياً من مودول M على حلقة R . أثبت أنه يوجد تشاكل مودولي غامر نواته A .

الحل

لنأخذ العلاقة :

$$f : M \longrightarrow M/A$$

$$f(x) = x + A$$

فنجد أن العلاقة f تطبيق لأنه إذا كان $x = y$ (حيث $x, y \in M$ فإن $x + A = y + A$ وبالتالي $f(x) = f(y)$. كما أن التطبيق f غامر لأنه أياً كان $x + A \in M/A$ فإنه يوجد $x \in M$ من أجله يكون $f(x) = x + A$. كما أن f تشاكل مودولي وذلك لأن :

1 – $$\begin{aligned} f(x+y) &= (x+y)+A \\ &= (x+A)+(y+A) \\ &= f(x)+f(y) \end{aligned}$$

2 – $$\begin{aligned} f(\alpha.x) &= \alpha.x + A \\ &= \alpha.(x+A) \\ &= \alpha.f(x) \end{aligned}$$

وأخيراً أياً كان $x \in \ker f$ فإن

$$f(x) = A \quad \Rightarrow \quad x + A = A \quad \Rightarrow \quad x \in A$$

أي $\ker f \subseteq A$.

وبالعكس إذا كان $x \in A$ فإن $x + A = A$ أي $f(x) = A$.

ومنه $x \in \ker f$ أي $A \subseteq \ker f$. إذن $\ker f = A$.

التمرين الثاني :

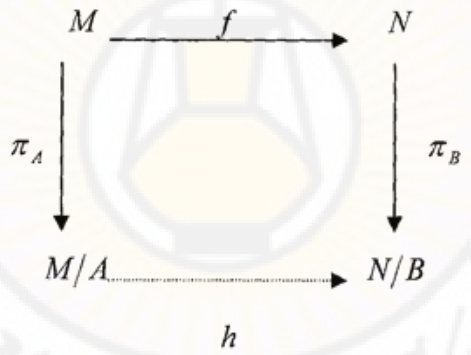
ليكن $f : M \longrightarrow N$ تشاكلاً مودولياً ، وليكن A, B مودولين جزئيين من المودولين M, N على الترتيب .

المطلوب

أولاً : أثبت أن القضيتين التاليتين متكافئتان:

I- $\overset{\vee}{f}(A) \subseteq B$

II- يوجد تشاكل مودولي وحيد $h : M/A \longrightarrow N/B$ بحيث يجعل المخطط



تبادلياً

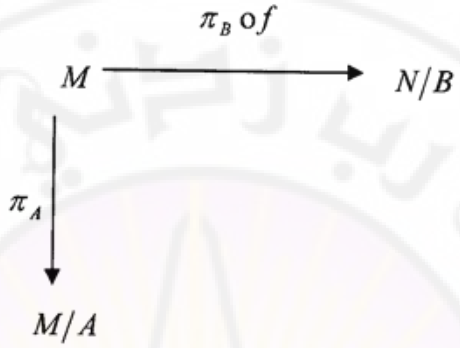
ثانياً : في حالة وجود التشاكل h أثبت أن

(a) . h متباين $\Leftrightarrow$ $A = \overset{\smile}{f}(B)$

(b) . h غامر $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Im} f + B = N$

الحل

أولاً : لنتأمل المخطط



فنجد أن القضية (II) تكافئ القضية $\ker \pi_A \subseteq \ker(\pi_B \circ f)$ (وذلك حسب المبرهنة (2-6)) ، كما أن :

$$(\forall x \in M) \qquad x \in \ker \pi_A \;\Leftrightarrow\; x + A = o + A \;\Leftrightarrow\; x \in A$$

وبشكل مشابه نجد أن

$$x \in \ker(\pi_B \circ f) \;\Leftrightarrow\; f(x) + B = o + B \;\Leftrightarrow\; f(x) \in B$$

وبالتالي القضية (II) تكافئ القضية $\overset{\nu}{f}(A) \subseteq B$.

ثانياً :

(a) . إن

$$\ker h = \{x + A \;\; ; \;\; f(x) \in B\}$$
$$= \left\{x + A \;\; ; \;\; x \in \overset{\sigma}{f}(B)\right\} = \overset{\sigma}{f}(B)\Big/_{A}$$

وبذلك يكون لدينا :

$$\ker h = o + B \quad \Leftrightarrow \quad h \text{ متباين}$$

وبعبارة مكافئة :

$$\breve{f}(B) = A \qquad \Leftrightarrow \qquad h \text{ متباين}$$

(b) . إن :

$$\operatorname{Im} h = \{f(x) + B \quad ; \quad x \in M\}$$

وبالتالي :

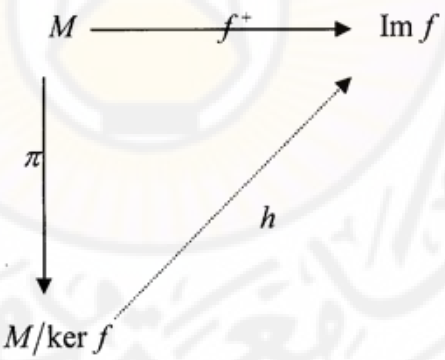
$$[(\forall n \in N)(\exists x \in M): \quad n + B = f(x) + B] \quad \Leftrightarrow \quad h \text{ غامر}$$

$$[(\forall n \in N)(\exists x \in M): \quad n - f(x) \in B] \quad \Leftrightarrow$$

$$[\operatorname{Im} f + B = N] \quad \Leftrightarrow$$

<u>التمرين الثالث</u>

إذا كان $f : M \longrightarrow N$ تشاكلاً مودولياً ، فأثبت وجود تماثل وحيد $h : M/\ker f \longrightarrow \operatorname{Im} f$ بحيث يجعل المخطط :



تبادلياً .

حيث

$$f^{+} : M \longrightarrow \operatorname{Im} f$$
$$f^{+}(x) = f(x)$$

الحل:

حسب مبرهنة التماثل الأولى إن التطبيق

$$h : {}^{M}\!/_{\ker f} \longrightarrow \quad \operatorname{Im} f$$

$$h(x+\ker f) = f(x)$$

تماثل مودولي .

$${}^{M}\!/_{\ker f} \cong \quad \operatorname{Im} f$$

زد على ذلك إن h يجعل المخطط السابق تبادلياً لأنه أياً كان $x \in M$ فإن :

$$\begin{aligned}(h o\pi)(x) &= h(\pi(x)) \\ &= h(x+\ker f) \\ &= f(x)\end{aligned}$$

أي أن $h o\pi = f$.

لنبرهن أخيراً أن التماثل h هو الوحيد الذي يجعل المخطط تبادلياً .

لنفرض أنه يوجد تماثل آخر $k : {}^{M}\!/_{\ker} \longrightarrow \operatorname{Im} f$ بحيث $k o\pi = f$ وبالتالي يكون $h o\pi = k o\pi$ ، وبما أن التشاكل π غامر فهو قابل للاختصار من اليمين وبالتالي ينتج $h = k$.

التمرين الرابع

ليكن A, B مودولين جزئيين من مودول M على حلقة R . أثبت أن :

$${}^{(A+B)}\!/_{B} \cong {}^{A}\!/_{A \mathrm{I}\ B}$$

الحل:

لنأخذ العلاقة :

$$f : A \longrightarrow {}^{(A+B)}\!/_{B}$$

المعرفة كما يلي :

$$f(x)=x+B \quad ; \quad (\forall x\in A)$$

فنجد أن f تطبيق لأن :

$$(\forall x,y\in A):\quad x=y \Rightarrow x+B=y+B \Rightarrow f(x)=f(y)$$

كما أن التطبيق f تشاكل مودولي لأن :

1) $$\begin{aligned} f(x+y) &= (x+y)+B \\ &= (x+B)+(y+B) \\ &= f(x)+f(y) \end{aligned}$$

2) $$\begin{aligned} f(\alpha.x) &= (\alpha.x)+B \\ &= \alpha.(x+B) \\ &= \alpha.f(x) \end{aligned}$$

وذلك أياً كان $x,y\in A$ و أياً كان $\alpha\in R$.

كما أن التشاكل f غامر لأنه أياً كان $z\in {}^{(A+B)}\!/_{B}$ فإن

$z=t+B$; $t=a+b$ أي أن

$$z=(a+b)+B=(a+B)+(b+B) \quad ; \quad a\in A, b\in B$$

$$=a+B \quad ; \quad a\in A$$

أي أنه أياً كان $z\in {}^{(A+B)}\!/_{B}$ يوجد $a\in A$ بحيث $f(a)=a+B=z$

وهذا يثبت أن f غامر .

لنثبت الآن أن $\ker f = A \cap B$. أياً كان $x\in \ker f$ فإن :

$$f(x)=B \Rightarrow \quad x+B=B \Rightarrow \quad x\in B$$

ومنه $\ker f\subseteq B$ ، لكن $\ker f\subseteq A$ ، وبالتالي ينتج $\ker f\subseteq A\cap B$.

من جهة أخرى ، أياً كان $u\in A\cap B$ فإن $u\in A$ و $u\in B$ ويكون

$$f(u)=u+B=B \Rightarrow \quad u\in \ker f$$

ومنه $A\cap B\subseteq \ker f$. إذن $\ker f = A\cap B$.

وبتطبيق مبرهنة التماثل الأولى ينتج

$$(A+B)/B \quad \cong \quad A/A \mathrm{I}\ B$$

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

تمرينات (3)

التمرين الأول :

لتكن R حلقة تبديلية ولنأخذ التطبيق :

$$f : R^3 \longrightarrow R^2$$
$$f(x,y,z) = (x,y) \qquad (\ \forall (x,y,z) \in R^3\ )$$

المطلوب :

1 – أثبت أن f تشاكل مودولي غامر .

2 – بفرض أن :

$$D = \{\ (0,0,z) \quad ; \quad z \in R\ \} \subseteq R^3$$

أثبت أن D مودول جزئي من المودول R^3 وأن $R^3/D \cong R^2$.

التمرين الثاني :

ليكن $f : M \longrightarrow N$ تشاكلاً مودولياً . نرمز مرافق نواة التشاكل f بالرمز $co\ker f$ ونعرفها بأنها المودول $N/\mathrm{Im}\, f$ ، ولنأخذ الغمر القانوني :

$$\pi : N \longrightarrow co\ker f$$

والتباين القانوني :

$$J : \ker f \longrightarrow M$$

المطلوب إثبات صحة القضيتين الآتيتين :

1 – إذا كان التشاكل f متبايناً فإن $N \cong \ker \pi$.

2 – إذا كان التشاكل f غامراً فإن $N \cong co\ker J$.

التمرين الثالث :

ليكن A,B مودولين جزئيين من مودول M على حلقة R . ولتكن :

$$O \longrightarrow {}^{M}\!/_{(A\cap B)} \longrightarrow ({}^{M}\!/_{A}) \times ({}^{M}\!/_{B}) \longrightarrow {}^{M}\!/_{(A+B)} \longrightarrow O$$

متتالية تامة . برهن على أن :

$${}^{(A+B)}\!/_{(A\cap B)} \cong \left({}^{(A+B)}\!/_{A}\right) \times \left({}^{(A+B)}\!/_{B}\right) \cong \left({}^{B}\!/_{(A\cap B)}\right) \times \left({}^{A}\!/_{(A\cap B)}\right)$$

التمرين **الرابع** :

لتكن $R_n[x]$ مودول الحدوديات ذات الدرجة أقل أو تساوي n على حلقة تبديلية R . اثبت أن

$$R_{n-1}[x] \cong {}^{R_n[x]}\!/_{R}$$

التمرين الخامس :

لتكن R حلقة تبديلية وليكن I , J مثاليين في الحلقة R . أثبت وجود المتتالية التامة :

$$O \longrightarrow I \cap J \longrightarrow R \longrightarrow ({}^{R}\!/_{I}) \times ({}^{R}\!/_{J}) \longrightarrow {}^{R}\!/_{(I+J)} \longrightarrow O$$

Damascus University

الفصل الرابع

الجداء – الجداء المرافق

Product and co product

4-1 – الجداء الديكارتي

لتكن $(M_i)_{i\in I}$ أسرة مودولات على حلقة R ولتكن $\prod_{i\in I} M_i$ الجداء الديكارتي لهذه الأسرة :

$$\prod_{i\in I} M_i = \{\, (m_i)_{i\in I} \quad ; \quad m_i \in M_i \,\}$$

ولنزود المجموعة $\prod_{i\in I} M_i$ بقانوني تشكيل :

الأول داخلي $(+)$:

$$(m_i)_{i\in I} + (m'_i)_{i\in I} = (m_i + m'_i)_{i\in I}$$

والثاني خارجي $(\cdot)$ مجموعة مؤثراته الحلقة R :

$$\lambda (m_i)_{i\in I} = (\lambda\, m_i)_{i\in I}$$

حيث إن

$$(m_i)_{i\in I}, (m'_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} M_i \quad ; \quad \lambda \in R$$

فنجد بسهولة أن $\prod_{i\in I} M_i$ مودول على الحلقة R ، ويسمى مودول الجداء الديكارتي للأسرة $(M_i)_{i\in I}$.

من أجل $j \in I$ نأخذ العلاقة :

$$\mathrm{Pr}_j \; : \quad \prod_{i\in I} M_i \longrightarrow M_j$$

المعرفة كما يلي :

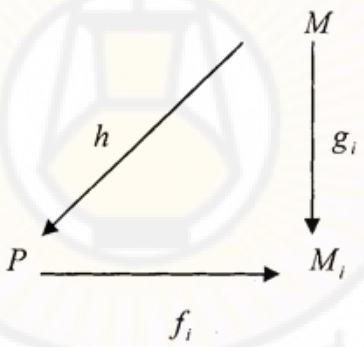
$$\Pr_j(m_i)_{i\in I} = m_j$$

فنجد أن العلاقة $\Pr_j$ تشاكل مودولي غامر يسمى الإسقاط القانوني j .

4-2 – جداء المودولات

تعريف :

ليكن $(M_i)_{i\in I}$ أسرة مودولات على حلقة R . نعرف جداء (product) الأسرة $(M_i)_{i\in I}$ بأنه الثنائية $(P,\ (f_i)_{i\in I})$ حيث P مودول على الحلقة R و $(f_i : P \longrightarrow M_i)_{i\in I}$ أسرة من التشاكلات المودولية بحيث من أجل كل مودول M على الحلقة R وكل أسرة تشاكلات $(g_i : M \longrightarrow M_i)_{i\in I}$ يوجد تشاكل مودولي وحيد $h : M \longrightarrow P$ يجعل المخطط :



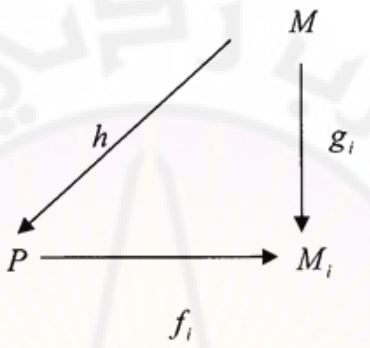
تبادلياً .

مبرهنة (4-1):

إذا كانت $(M_i)_{i\in I}$ أسرة مودولات على الحلقة R وكان $(P,\ (f_i)_{i\in I})$ جداء لأسرة $(M_i)_{i\in I}$ فإن التشاكل f_i غامر $(\forall i \in I)$.

الإثبات :

بما أن $(P,\ (f_i)_{i\in I})$ جداء للأسرة $(M_i)_{i\in I}$ فإن من أجل أي مودول M على الحلقة R وأية أسرة تشاكلات $(g_i : M \longrightarrow M_i)_{i\in I}$ يوجد تشاكل مودولي وحيد $h : M \longrightarrow P$ يجعل المخطط :



تبادلياً

من أجل كل $i \in I$ لنأخذ $M = M_i$ و

$$\begin{cases} g_i = I_{M_i} \\ g_j = 0 \quad ; \quad i \neq j \end{cases}$$

فيكون $f_i \circ h = I_{M_i}$ وهذا ما يثبت أن التشاكل f_i غامر .

مبرهنة (4-2):

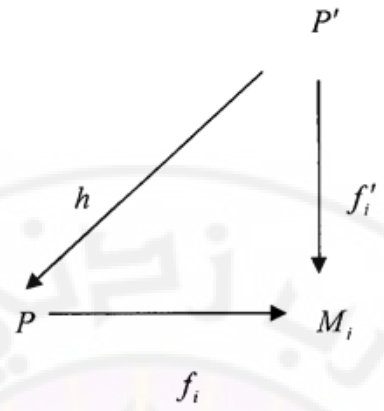
إذا كان $(P,\ (f_i)_{i\in I})$ جداء لأسرة المودولات $(M_i)_{i\in I}$ على R فإن القضيتين التاليتين متكافئتان :

I- $(P',\ (f'_i)_{i\in I})$ جداء للأسرة $(M_i)_{i\in I}$.

II- يوجد تماثل مودولي $h : P' \longrightarrow P$ بحيث $(\forall i \in I)$: $f_i \circ h = f'_i$

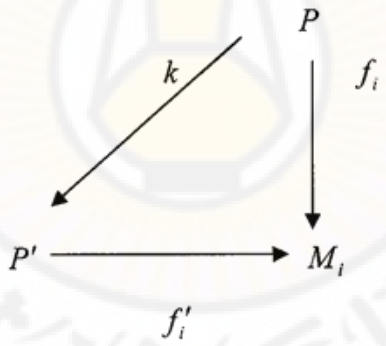
الإثبات

(I $\Rightarrow$ II) بما أن $(P,\ (f_i)_{i\in I})$ جداء للأسرة $(M_i)_{i\in I}$ فإنه من أجل المودول P' ومن أجل الأسرة $(M_i)_{i\in I}$ يوجد تشاكل مودولي وحيد $h : P' \longrightarrow P$ يجعل المخطط :



تبادلياً

وبما أن $(P',\ (f_i')_{i\in I})$ جداء للأسرة $(M_i)_{i\in I}$ فإنه من أجل المودول P ومن أجل الأسرة $(f_i)_{i\in I}$ يوجد تشاكل مودولي وحيد $h: P \longrightarrow P'$ يجعل المخطط



تبادلياً

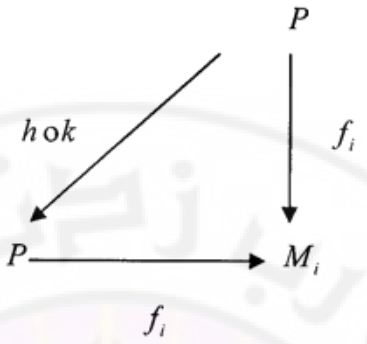
وبالتالي من أجل كل $i \in I$ يكون

$$f_i \circ h = f_i' \quad \wedge \quad f_i' \circ k = f_i$$

ومنه $(f_i \circ h)\circ k = f_i$ أي

$$(\forall i \in I) \qquad f_i \circ (h \circ k) = f_i$$

وبالتالي من أجل كل $i \in I$ يكون المخطط :

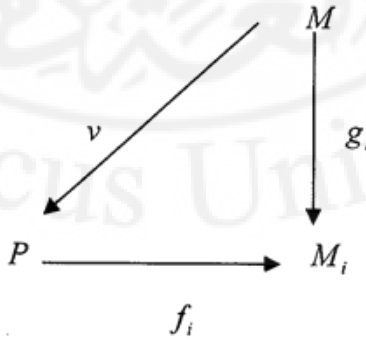


تبادلياً . بما أن $I_P \circ f = f_i$ وبما أن التشاكل hok هو الوحيد الـذي يجعـل المخطط السابق تبادلياً فإن $hok = I_P$ وبشكل مـشابه نثبـت أن $hok = I_P$ وينتج من ذلك أن h تماثل مودولي وأن $h^{-1} = k$.

إذن يوجد تماثل مودولي $h : P' \longrightarrow P$ بحيث

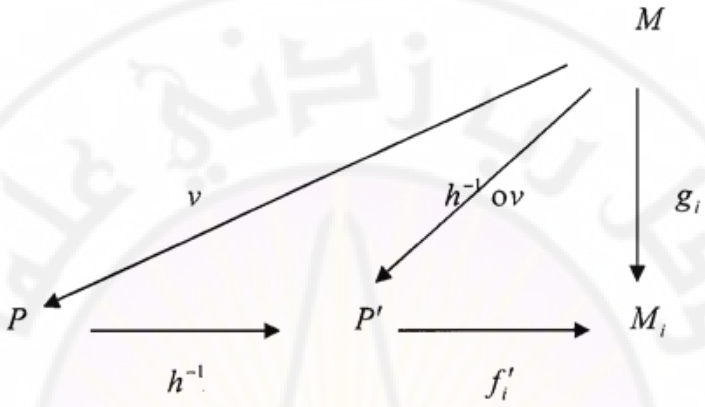
$$(\forall i \in I) \qquad f_i \circ h = f_i'$$

(II $\Rightarrow$ I) بما أن من أجل كل $i \in I$ يكون $f_i \circ h = f_i'$ وبما أن h تماثل ينتج أن $f_i = f_i' \circ h^{-1}$ وبما أن $(P,\ (f_i)_{i\in I})$ جداء للأسرة $(M_i)_{i\in I}$ فإن مـن أجل أي مودول M على الحلقة R وأية أسرة تشاكلات $(g_i : M \longrightarrow M_i)_{i\in I}$ يوجد تشاكل مودولي وحيد $v : M \longrightarrow P$ يجعل المخطط :

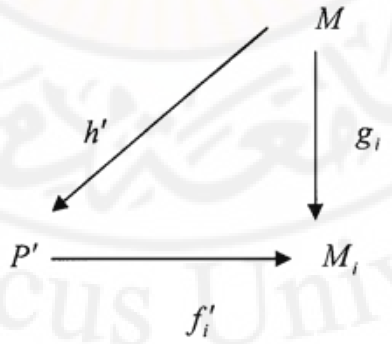


تبادلياً .

لنتأمل المخطط :



وحسب ما سبق نجد أن من أجل أي مودول M وأية أسرة تشاكلات $\left(g_i : M \longrightarrow M_i\right)_{i\in I}$ يوجد تشاكل مودولي وحيد $h^1 = h^{-1}\,\mathrm{o}\,v : M \longrightarrow P'$ يجعل المخطط :



تبادلياً .

أي :

$$f_i' o h' = f' o\left(h^{-1} o v\right) = f_i o v = g_i$$

وهذا ما يثبت أن $(P',\ (f_i')_{i\in I})$ جداء لأسرة المودولات $(M_i)_{i\in I}$.

مبرهنة (4-3)

إذا كانت $(M_i)_{i\in I}$ أسرة مودولات على حلقة R فإن $\left(\prod_{i\in I} M_i, (\mathrm{Pr}_i)_{i\in I}\right)$ جداء للأسرة $(M_i)_{i\in I}$

الإثبات

ليكن M مودولاً على حلقة R ولتكن $(g_i : M \longrightarrow M_i)_{i\in I}$ أسرة تشاكلات مودولية .ولنأخذ التطبيق :

$$h : M \longrightarrow \prod_{i\in I} M_i$$

المعرفة كما يلي :

$$h(m) = (g_i(m))_{i\in I}$$

فنجد أن h تشاكل مودولي لأن :

أياً كان $m, m' \in M$ و $\alpha \in R$ فإن :

$$\begin{aligned} h(m+m') &= (g_i(m+m'))_{i\in I} \\ &= (g_i(m))_{i\in I} + (g_i(m'))_{i\in I} \\ &= h(m) + h(m') \end{aligned}$$

وأن

$$\begin{aligned} h(\alpha m) &= (g_i(\alpha m))_{i\in I} \\ &= \alpha (g_i(m))_{i\in I} \\ &= \alpha . h(m) \end{aligned}$$

كما أن من أجل كل $i \in I$ يكون :

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

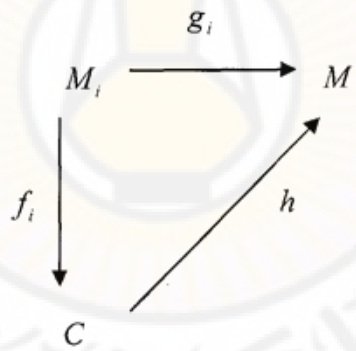
$\left(\prod_{i\in I} M_{\sigma(i)}\ ,\ (\mathrm{Pr}_{\sigma(i)})_{i\in I}\right)$ جداء للأسرة $(M_i)_{i\in I}$ وحسب المبرهنة (4-2) ينتج أن

$$\prod_{i\in I} M_i \quad \cong \quad \prod_{i\in I} M_{\sigma(i)}$$

4-3- الجداء المرافق (Co product)

تعريف

لتكن $(M_i)_{i\in I}$ أسرة مودولات على حلقة R . نعرف الجداء المرافق للأسرة $(M_i)_{i\in I}$ بأنه الثنائية $(C,(f_i)_{i\in I})$ حيث C مودول على الحلقة R و $(f_i : M_i \longrightarrow c)_{i\in I}$ أسرة تشاكلات مودولية بحيث من أجل أي مودول M على R وكل أسرة تشاكلات $(g_i : M_i \longrightarrow M)_{i\in I}$ يوجد تشاكل مودولي وحيد $h : C \longrightarrow M$ يجعل المخطط :



تبادلياً .

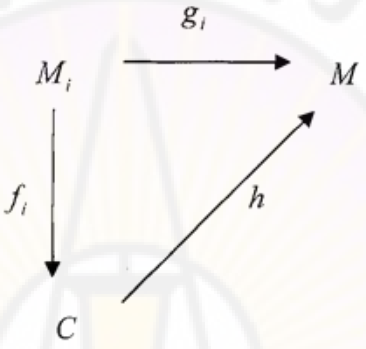
مبرهنة (4-4)

إذا كانت $(M_i)_{i\in I}$ أسرة مودولات على حلقة R ، وكان $(C,(f_i)_{i\in I})$ جداء مرافقاً للأسرة $(M_i)_{i\in I}$ فإن التشاكل f_i متباين $(\forall i \in I)$.

الإثبات :

بما أن $(C,(f_i)_{i\in I})$ جداء مرافق للأسرة $(M_i)_{i\in I}$ فإنه من أجل أي مودول M على R ومن أجل أية أسرة تشاكلات $(g_i : M_i \longrightarrow M)_{i\in I}$ يوجد تشاكل مودولي وحيد $h : C \longrightarrow M$

يجعل المخطط



تبادلياً

من أجل كل $i \in I$ لنأخذ $M = M_I$ و

$$\begin{cases} g_i = I_{M_i} \\ g_j = 0 \quad ; \quad i \neq j \end{cases}$$

فيكون $hof_i = I_{M_i}$ وهذا ما يثبت أن f_i متباين $(\forall i \in I)$

مبرهنة (4-5)

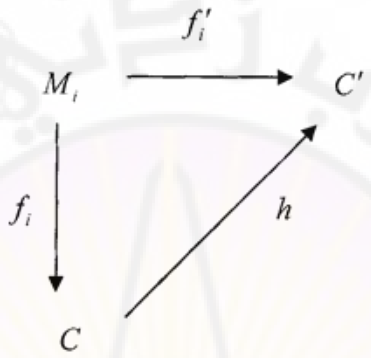
إذا كان $(C,(f_i)_{i\in I})$ جداء مرافقاً لأسرة المودولات $(M_i)_{i\in I}$ فإن القضيتين التاليتين متكافئتان :

I- $(C',(f_i')_{i\in I})$ جداء مرافق للأسرة $(M_i)_{i\in I}$.

II- يوجد تماثل مودولي $h : C \longrightarrow C'$ بحيث $hof_i = f_i'$ $(\forall i \in I)$

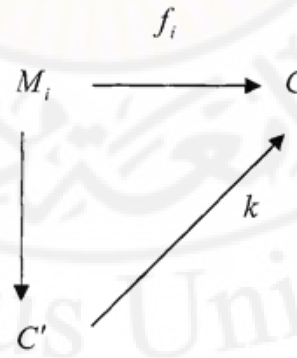
الإثبات :

(I $\Rightarrow$ II) : بما أن $(C,(f_i)_{i\in I})$ جداء مرافق للأسرة $(M_i)_{i\in I}$ فإن من أجل المودول C' و الأسرة $(f'_i)_{i\in I}$ يوجد تشاكل مودولي وحيد $h:C\longrightarrow C'$ يجعل المخطط :



تبادلياً .

وبما أن $(C',(f'_i)_{i\in I})$ جداء مرافق للأسرة $(M_i)_{i\in I}$ فإنه من أجل المودول C وأسرة التشاكلات $(f_i)_{i\in I}$ يوجد تشاكل مودولي وحيد $k:C'\longrightarrow C$ يجعل المخطط



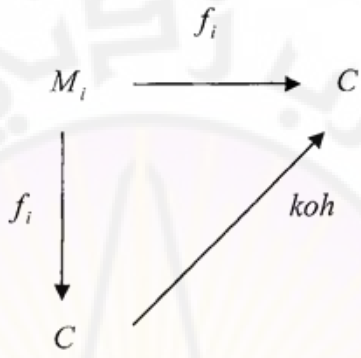
تبادلياً .

وبالتالي من أجل كل $i\in I$ يكون :

$$h o f_i = f_i' \quad \wedge \quad k o f_i' = f_i$$

ومنه $k o(h o f_i) = f_i$. أي $(k o h) o f_i = f_i$

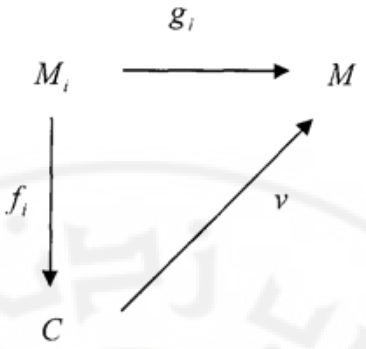
وبالتالي من أجل كل $i \in I$ يكون المخطط :



تبادلياً . وبما أن $I_c o f_i = f_i$ وبما أن التشاكل $k o h$ هو الوحيد الذي يجعل المخطط السابق تبادلياً فإن $k o h = I_c$ وبشكل مشابه نثبت أن $h o k = I_c$ ينتج من ذلك أن h تماثل مودولي .

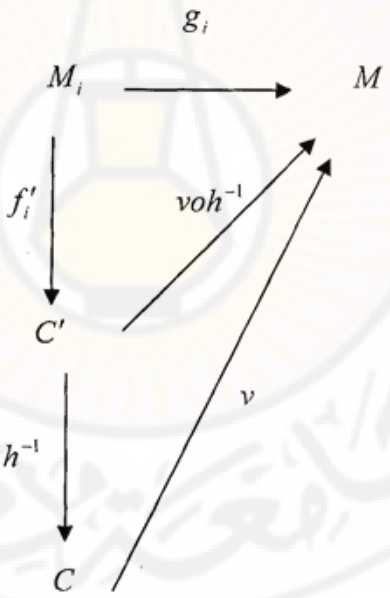
إذن يوجد تماثل مودولي $h : C \longrightarrow C'$ بحيث $h o f_i = f_i' \qquad (\forall i \in I)$

(I $\Rightarrow$ II) : بما أن من أجل كل $i \in I$ يكون $h o f_i = f_i'$ وبما أن h تماثل فإن $f_i = h^{-1} o f_i'$ ، وبما أن $(C,(f_i)_{i\in I})$ جداء مرافق للأسرة $(M_i)_{i\in I}$ فإن من أجل أي مودول M على الحلقة R وأية أسرة تشاكلات $(g_i : M_i \longrightarrow M)_{i\in I}$ يوجد تشاكل مودولي وحيد $v : M \longrightarrow P$ يجعل المخطط



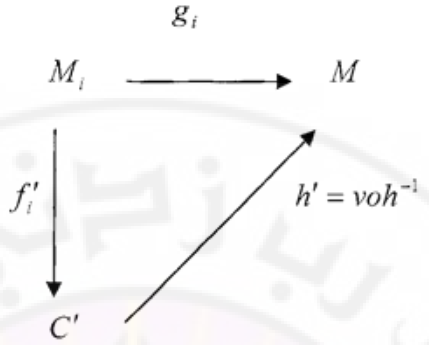
تبادلياً .

لنتأمل المخطط :



فنجد أن من أجل أي مودول M وأية أسرة $\left(g_i : M_i \longrightarrow M\right)_{i\in I}$ يوجد تشاكل مودولي وحيد $h' = v\,o\,h^{-1} \quad : \quad C' \longrightarrow M$

ويجعل المخطط :



تبادلياً . لأن :

$$h' \circ f_i' = (v o h^{-1}) \circ f_i' = v o (h^{-1} \circ f_i') = v \circ f_i = g_i$$

وهذا ما يثبت أن $(C', (f_i')_{i \in I})$ جداء مرافق للأسرة $(M_i)_{i \in I}$.

لتكن $(M_i)_{i \in I}$ أسرة مودولات على الحلقة R ولتكن S مجموعة جزئية من الجداء الديكارتي $\prod_{i \in I} M_i$ المؤلفة من العناصر $(m_i)_{i \in I}$ بحيث $m_i = 0$ من أجل جميع $i \in I$ باستثناء عدد منته . عندئذ بسهولة نجد أن S مودول جزئي من المودول $\prod_{i \in I} M_i$ يسمى المجموع المباشر الخارجي (external direct sum) للأسرة $(M_i)_{i \in I}$ نرمز له بالرمز $\oplus_{i \in I} M_i$.

وإذا أخذنا العلاقة :

$$in_j : M_J \longrightarrow \bigoplus_{i \in I} M_i$$

المعرفة كما يلي :

$$in_j(x) = (m_i)_{i \in I}$$

بحيث :

$$m_i = o \quad if \quad i \neq j$$
$$m_j = x \quad if \quad i = j$$

فنجد بسهولة أن in_j تشاكل مودولي متباين يسمى التباين القانوني في لـــ M_j في $\bigoplus_{i\in I} M_i$

مبرهنة (4-6) :

إذا كانت $(M_i)_{i\in I}$ أسرة مودولات على حلقة R فإن $\left(\bigoplus_{i\in I} M_i, (in_j)_{i\in I}\right)$ جـــداء مرافق للأسرة $(M_i)_{i\in I}$.

الإثبات :

ليكن M مودولاً على الحلقة R . ولتكن $(g_i : M_I \longrightarrow M)$ أسرة تشاكلات مودولية ولنأخذ التطبيق :

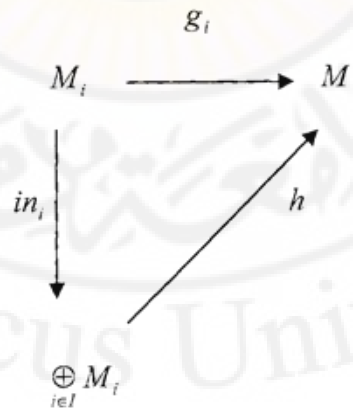
$$h : \bigoplus_{i\in I} M_i \longrightarrow M$$

المعرف كما يلي :

$$h\left((m_i)_{i\in I}\right) = \sum_{i\in I} g_i(m_i)$$

فنجد أن h تشاكل مودولي ، كما أن من أجل كل $x \in M_i$ يكون :

$$(hoin_i)(x) = h(in_i(x)) = g_i(x)$$



كما أن التشاكل h وحيد لأنه إذا كان

$$k : \bigoplus_{i\in I} M_i \longrightarrow M$$

تشاكلاً مودولياً بحيث :

$$(\forall i \in I) \qquad k\,o\,in_i = g_i$$

فإن من أجل كل $(m_i)_{i\in I} \in \bigoplus_{i\in I} M_i$ يكون :

$$\begin{aligned} k\left((m_i)_{i\in I}\right) &= k\left(\sum_{i\in I} in_i(m_i)\right) \\ &= \sum_{i\in I}\left(k\,o\,in_i(m_i)\right) \\ &= \sum_{i\in I} g_i(m_i) \\ &= h\left((m_i)_{i\in I}\right) \end{aligned}$$

ومنه $k = h$ إذن $\left(\bigoplus_{i\in I} M_i,\ (in_i)_{i\in I}\right)$ جداء مرافق للأسرة $(M_i)_{i\in I}$.

نتيجة :

إذا كانت $(M_i)_{i\in I}$ أسرة مودولات على حلقة R ، وكان $\alpha : I \longrightarrow I$ تقابلاً فإن :

$$\bigoplus_{i\in I} M_i \cong \bigoplus_{i\in I} M_{\alpha(i)}$$

البرهان :

حسب المبرهنة (4-6) يكون كل من $\left(\bigoplus_{i\in I} M_i,\ (in_i)_{i\in I}\right)$ و $\left(\bigoplus_{i\in I} M_{\sigma(i)},\ (in_{\alpha(i)})_{i\in I}\right)$ جداء مرافق للأسرة $(M_i)_{i\in I}$ وحسب المبرهنة (4-5) ينتج أن :

$$\bigoplus_{i\in I} M_i \cong \bigoplus_{i\in I} M_{\alpha(i)}$$

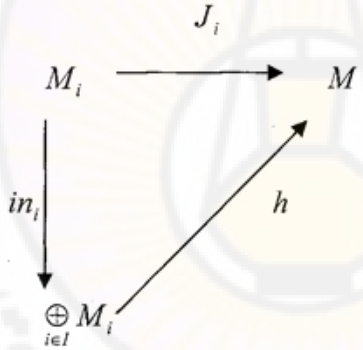
4-4 – المجموع المباشر الداخلي (internal direct sum)

تعريف :

لتكن $(M_i)_{i\in I}$ أسرة مودولات جزئية من مودول M على حلقة R . نقول إن M هو المجموع المباشر الداخلي للأسرة $(M_i)_{i\in I}$ إذا كان التطبيق $h:\oplus_{i\in I} M_i \longrightarrow M$ تماثلاً .

ملاحظة :

إذا كانت $(M_i)_{i\in I}$ أسرة مودولات جزئية من مودول M على حلقة R وكانت $(J_I : M_i \longrightarrow M)_{i\in I}$ أسرة التباينات القانونية فإن حسب المبرهنة (4-6) ينتج أنه يوجد تشاكل وحيد $h:\oplus_{i\in I} M_i \longrightarrow M$ يجعل المخطط :



تبادلياً . ويكون

$$h((m_i)_{i\in I}) = (\sum_{i\in I} J_i(m_i) = \sum_{i\in I} m_i$$

أي أن المودول $\mathrm{Im}\,h$ هي المودول الجزئي $\sum_{i\in I} M_i$ من المودول M المولد بالمجموعة $\bigcup_{i\in I} M_i$ وبذلك تكون المتتالية :

$$\oplus_{i\in I} M_i \xrightarrow{h} M \xrightarrow{\pi} M/\sum_{i\in I} M_i \longrightarrow 0$$

تامة . (حيث π الغمر القانوني)

مبرهنة (4-7) :

إذا كانت $(M_i)_{i\in I}$ أسرة مودولات جزئية من مودول M على حلقة R فإن M يكون مجموعاً مباشراً داخلياً للأسرة $(M_i)_{i\in I}$ عندما وفقط ، عندما يكتب كل $m\in M$ على الشكل الوحيد $m=\sum_{i\in I} m_i$ بحيث $m_i\in M_i$ وأن $m_i=o$ من أجل جميع قيم i ما عدا عدد منته .

الإثبات :

يكون التطبيق $h:\bigoplus_{i\in I} M_i \longrightarrow N$ غامراً إذا وفقط ، إذا كان

$$\operatorname{Im} h = M = \sum_{i\in I} M_i$$

وهذا يكافئ أن كل عنصر $m\in M$ يكتب على الشكل $m=\sum_{i\in I} m_i$ بحيث $m_i\in M_i$ وأن $m_i=o$ من أجل جميع قيم i ما عدا عدد منته . ويكون التطبيق h متبايناً إذا وفقط ، إذا كان $m=\sum_{i\in I} m_i$ وحيداً وذلك لأن

$$\sum_{i\in I} m_i = h((m_i)_{i\in I})$$

مبرهنة (4-8) :

إذا كانت $(M_i)_{i\in I}$ أسرة مودولات جزئية من مودول M على حلقة R فإن القضايا التالية متكافئة :

I- $\sum_{i\in I} M_i$ مجموع مباشر داخلي للأسرة $(M_i)_{i\in I}$.

II- إذا كان $\sum_{i\in I} m_i = o$ بحيث $m_i\in M_i$ فإن $m_i=o$ $(\forall i\in I)$.

III- أياً كان $i\in I$ فإن $M_i \cap \sum_{j\neq i} M_i = O$.

الإثبات :

(I $\Rightarrow$ II) : إن $\sum m_i = o = \sum o$ وبما أن المجموع مباشر فحسب المبرهنة (4-7) ينتج أن $m_i = o$ وذلك أياً كان $i \in I$.

(II $\Rightarrow$ III) : أياً كان $x \in M_i \cap \sum_{i \neq j} M_j$ فإن

$$x \in M_i \quad \wedge \quad x \in \sum_{I \neq J} M_J$$

وبالتالي $x = m_i = \sum_{i \neq j} m_j$ أي $m_i + \sum_{i \neq j}(-m_i) = o$ وحسب الفرض ينتج أن $m_i = o$ أي $x = o$.

(III $\Rightarrow$ I) لنفرض أن :

$$\sum_{i \in I} m_i = \sum_{i \in I} m_i' \quad ; \quad \forall i \in I; \quad m_i; m_i' \in M_i$$

وعندئذٍ يكون :

$$\forall i \in I \quad ; \quad m_i - m_i' = \sum_{i \neq j}(m_j - m_j')$$

وبما أن

$$\sum_{i \neq j}(m_j - m_j') \in \sum_{i \neq j} M_J \quad and \quad m_i - m_i' \in M_i$$

فإن

$$\forall i \in I \quad ; \quad m_i - m_i' \in M_i \cap \sum_{i \neq j} M_j$$

وحسب الفرض ينتج أن $m_i - m_i' = o$ ومنه $\forall i \in I \quad ; \quad m_i = m_i'$ فالمجموع $\sum_{i \in I} M_i$ مباشراً .

تعريف :

ليكن A, B مودولين جزئيين من مودول M على حلقة R نقول عن المودولين A, B إنهما متكاملان إذا كان $M \cong A \oplus B$ ونسمي كلاً من المودولين الجزئيين A, B حداً مكملاً مباشراً في M .

مبرهنة (4-9) :

إذا كانت $(M_i)_{i\in I}$ أسرة مودولات على حلقة R وكان N مودولاً على الحلقة R فإن :

$$Hom_R(N, \prod_{i\in I} M_i) \cong \prod_{i\in I} Hom_R(N, M_i)$$

الإثبات :

نأخذ العلاقة :

$$\theta : Hom_R(N, \prod_{i\in I} M_i) \longrightarrow \prod_{i\in I} Hom_R(N, M_i)$$

المعرفة كما يلي :

$$\theta(f) = (pr_i \circ f)_{i\in I} \quad ; \quad \forall f \in Hom_R(N, \prod_{i\in I} M_i)$$

حيث pr_i تشاكل الإسقاط القانوني . فنجد أن θ تطبيق لأن :

أياً كان $f, g \in Hom_R(N, \prod_{i\in I} M_i)$ بحيث $f = g$ فإن

$$pr_i \circ f = pr_i \circ f \qquad \forall i \in I$$

ومنه

$$(pr_i \circ f)_{i\in I} = (pr_i \circ g)_{i\in I}$$

أي أن $\theta(f) = \theta(g)$.

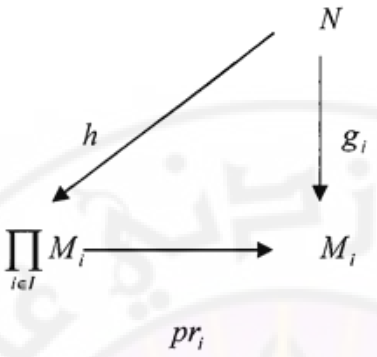
كما أن التطبيق θ تشاكل زمري لأن :

أياً كان $f, g \in Hom_R(N, \prod_{i\in I} M_i)$ فإن :

$$\theta(f+g) = (pr_i \circ (f+g))_{i\in I} = (pr_i \circ f)_{i\in I} + (pr_i \circ g)_{i\in I}$$
$$= \theta(f) + \theta(g)$$

كما أن التطبيق θ غامر لأن :

أياً كان $(g_i)_{i\in I} \in \prod Hom_R(N, M_i)$ يوجد تشاكل مودولي وحيد $h : N \longrightarrow \prod_{i\in I} M_i$ يجعل المخطط



تبادلياً . أي

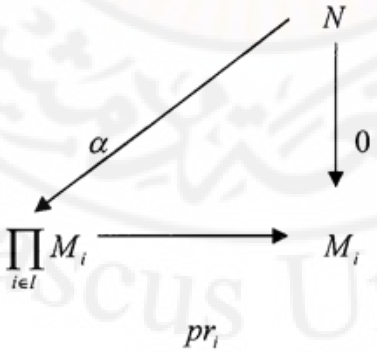
$$pr_i \circ f = g_i \qquad \forall i \in I$$

وبالتالي يكون

$$\theta(h) = (pr_i \circ h)_{i\in I} = (g_i)_{i\in I}$$

كما أن التطبيق θ متباين لأن :

أياً كان $\alpha \in \ker\theta$ فإن $\theta(\alpha) = 0$ أي $(pr_i \circ \alpha)_{i\in I} = 0$ لكن التشاكل α هو التشاكل الوحيد الذي يجعل المخطط :



تبادلياً (لأن $(\prod_{i\in I} M_i, (pr_i)_{i\in I})$ جداء للأسرة $(M_i)_{i\in I}$) ومنه $\alpha = 0$ مما تقدم نجد أن التطبيق θ تماثل زمري وبذلك يتم المطلوب .

مبرهنة (10-4)

إذا كانت $(M_i)_{i\in I}$ أسرة مودولات على حلقة R وكان N مودولاً على الحلقة R فإن :

$$Hom_R(\oplus_{i\in I} M_i\ , N) \cong \prod_{i\in I} Hom_R(M_i\ , N)$$

الإثبات

لنأخذ العلاقة :

$$\theta : Hom_r(\oplus_{i\in I} M_i\ , N) \longrightarrow \prod_{i\in I} Hom_R(M_i\ , N)$$

المعرفة كما يلي :

$$\theta(f) = (f\ o\ in_i)_{i\in I} \qquad \forall f \in Hom_R(\oplus_{i\in I} M_i\ , N)$$

(حيث in_i تشاكل التباين القانوني).

فنجد أن θ تطبيق لأن :

أياً كان $f, g \in Hom_R(\oplus_{i\in I} M_i, N)$ بحيث $f = g$ فإن

$$f\ o\ in_i = g\ o\ in_i \qquad \forall i \in I$$

ومنه

$$(f\ o\ in_i)_{i\in I} = (g\ o\ in_i)_{i\in I}$$

أي أن $\theta(f) = \theta(g)$.

كما أن التطبيق θ تشاكل زمري لأن :

أياً كان $f, g \in Hom_R(\oplus_{i\in I} M_i\ , N)$ فإن

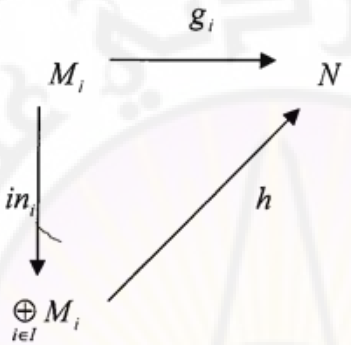
$$\begin{aligned}\theta(f+g) &= ((f+g)\ o\ in_i)_{i\in I} = (f\ o\ in_i)_{i\in I} + (g\ o\ in_i)_{i\in I} \\ &= \theta(f) + \theta(g)\end{aligned}$$

كما أن التطبيق θ غامر لأن :

أيـــاً كـــان $(g_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} Hom(M_i, N)$ يوجـــد تـــشاكل مـــودولي وحيـــد

$$h : \bigoplus_{i\in I} M_i \longrightarrow N$$

يجعل المخطط :



تبادلياً ، أي أن :

$$h \circ in_i = g_i \qquad \forall i \in I$$

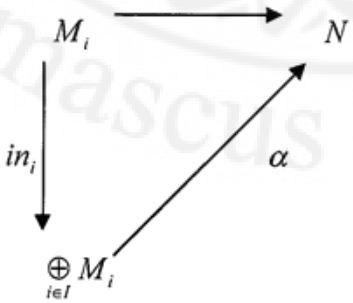
وبالتالي يكون :

$$\theta(h) = (h \circ in_i)_{i\in I} = (g_i)_{i\in I}$$

كما أن التطبيق θ متباين لأن :

أياً كان $\alpha \in \ker\theta$ فإن $\theta(\alpha) = 0$ أي $(\alpha \circ in_i)_{i\in I} = 0$

لكن التشاكل α هو التشاكل الوحيد الذي يجعل المخطط :



تبادلياً (لأن $(\oplus_{i\in I} M_i\ ,\ (in_i)_{i\in I})$ جداء للأسرة $(M_i)_{i\in I}$) ومنه $\alpha = 0$

مما تقدم نجد أن التطبيق θ تماثل زمري وبذلك يتم المطلوب .

4-5 – المتتاليات المنشطرة Split Sequences

تعريف (1)

لتكن

$$O \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

متتالية تامة من التشاكلات المودولية . نقول عن المتتالية (1) إنها منشطرة split إذا وجد تشاكل مودولي $\rho : N \longrightarrow M$ من أجله يكون $\rho o f = I_M$. يسمى التشاكل ρ التشاكل المنشطر Splitting morphism .

تعريف (2)

لتكن

$$N \xrightarrow{g} P \longrightarrow O \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

متتالية تامة من التشاكلات المودولية . نقول عن المتتالية (2) إنها منشطرة إذا وجد تشاكل مودولي $\pi : P \longrightarrow N$ من أجله يكون $g o \pi = I_P$. يسمى التشاكل π التشاكل المنشطر.

تعريف (3)

لتكن

$$O \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} p \longrightarrow o \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

متتالية تامة من التشاكلات المودولية . نقول عن المتتالية (3) إنها منشطرة من اليسار splits on the left إذا كانت المتتالية $O \longrightarrow M \xrightarrow{f} N$ منشطرة . نقول عن المتتالية (3) إنها منشطرة من اليمين splits on the right إذا كانت المتتالية $N \xrightarrow{g} P \longrightarrow O$ منشطرة .

ملاحظة مهمة :

بما أن المتتالية (1) تامة فإن التشاكل f متباين وبالتالي يوجد (دوماً) **تطبيق** $\rho : N \longrightarrow M$ من أجله يكون $\rho o f = I_M$.

بما أن المتتالية (2) تامة فإن التشاكل g غامر وبالتالي يوجد (دوماً) **تطبيق** $\pi : P \longrightarrow N$ من أجله يكون $g o \pi = I_P$

مبرهنة (4-11)

إذا كانت

$$O \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} p \longrightarrow o \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

متتالية تامة من التشاكلات المودولية فإن القضيتين التاليتين متكافئتان :

I – المتتالية (3) منشطرة من اليسار .

II – $\operatorname{Im} f$ حد مكمل مباشر في المودول N .

الإثبات :

(I $\Rightarrow$ II) : لنفرض أن المتتالية (3) منشطرة من اليسار ولـيكن $\rho : N \longrightarrow M$ التشاكل المنشطر أي $\rho o f = I_M$ ولنبرهن على أن $N = \operatorname{Im} f \oplus \ker \rho$.

من جهة أولى . أياً كان $n \in N$ فإن :

$$\rho(n - (f o \rho)(n)) = \rho(n) - \rho(n) = o_M$$

ومنه $n - (f o \rho)(n) \in \ker \rho$ وبما أن $(f o \rho)(n) \in \operatorname{Im} f$ فإن $n \in \operatorname{Im} f + \ker \rho$ أي

$$N = \ker g + \operatorname{Im} \pi$$

ومن جهة ثانية . أياً كان $x \in \operatorname{Im} f \cap \ker \rho$ فإن :

$$\begin{cases} x \in \operatorname{Im} f \Rightarrow \exists m \in M \quad ; \quad x = f(m) \\ x \in \ker \rho \Rightarrow \rho(x) = o \end{cases}$$

وبالتالي $\rho(f(m)) = o$ وبما أن $\rho \circ f = I_M$ ينتج أن $m = o$ وبالتالي $x = o$. أي أن

$$\operatorname{Im} f \cap \ker \rho = O$$

إذن $N = \operatorname{Im} f \oplus \ker \rho$.

(I $\Rightarrow$ II) : لنفرض أن $\operatorname{Im} f$ حد مكمل مباشر في المودول N عندئذٍ يوجد مودول جزئي B من N بحيث $N = \operatorname{Im} f \oplus B$ وبالتالي أياً $n \in N$ فإن n يكتب بشكل وحيد

$$n = x + b \quad ; \quad x \in \operatorname{Im} f \quad , \quad b \in B$$

وبما أن التشاكل f متباين (كون المتتالية (3) تامة) فإنه يوجد عنصر وحيد $m \in M$ بحيث $f(m) = x$ وبالتالي يمكن كتابة العنصر m بالشكل $f^{-1}(x)$ وبالتالي يمكننا تعريف التشاكل

$$\rho : N \longrightarrow M$$
$$\rho(n) = \rho(x + b) = f^{-1}(x)$$

الذي من أجله يكون :

$$(\forall m \in M) \quad : \quad (\rho \circ f)(m) = \rho(f(m)) = f^{-1}(f(m)) = m$$

أي $\rho \circ f = I_M$ وهذا يعني أن ρ تشاكل منشطر من اليسار فالمتتالية (3) منشطرة من اليسار .

مبرهنة (4-12)

إذا كانت

$$O \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} p \longrightarrow O \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

متتالية تامة من التشاكلات المودولية فإن القضيتين التاليتين متكافئتان :

(I) – المتتالية (3) منشطرة من اليمين .

(II) – $\ker g$ حد مكمل مباشر في المودول N .

الإثبات :

(I $\Rightarrow$ II) : لنفرض أن المتتالية (3) منشطرة من اليمين وليكن $\pi : P \longrightarrow N$ التشاكل المنشطر أي $g \circ \pi = I_M$ ولنبرهن على أن $N = \ker g \oplus \operatorname{Im} \pi$.

من جهة أولى : أياً كان $n \in N$ فإن :

$$g(n - (\pi o \rho)(n)) = g(n) - g(n) = o$$

ومنه $n - (\pi o \rho)(n) \in \ker g$ وبما أن $(\pi o \rho)(n) \in \operatorname{Im} \pi$ فإن $n \in \ker g + \operatorname{Im} \pi$ أي

$$N = \ker g + \operatorname{Im} \pi$$

ومنه جهة ثانية : أياً كان $x \in \ker g \cap \operatorname{Im} \pi$ فإن :

$$\begin{cases} x \in \ker g \Rightarrow g(x) = o \\ x \in \operatorname{Im} \pi \Rightarrow \exists p \in P: \quad x = \pi(p) \end{cases}$$

وبالتالي $g(\pi(p)) = o$ وبما أن $g \circ \pi = I_P$ ينتج أن $p = o$ وبالتالي $x = o$ أي أن

$$\ker g \cap \operatorname{Im} \pi = O$$

إذن $N = \ker g \oplus \operatorname{Im} \pi$.

(I $\Rightarrow$ II) لنفرض أن $\ker g$ حد مكمل مباشر في المودول N عندئذٍ يوجد مودول جزئي A من N بحيث $N = \ker g \oplus A$ وبالتالي أياً كان $n \in N$ فإن n يكتب بشكل وحيد :

$$n = x + a \quad ; \quad x \in \ker g \qquad and \qquad a \in A$$

لنأخذ g_A مقصور التشاكل المودولي g على A . بما أن $g(n)=g(a)$ وبما أن التشاكل g غامر فإن التشاكل g_A غامر . كما أن g_A متباين لأنه إذا كان $a\in\ker g_A$ فإن $g_A(a)=o$ وبالتالي $g(a)=o$ ومنه $a\in\ker g$ وبالتالي يكون $a\in\ker g \cap A$ وبما أن N مجموع مباشر للمودولين A , $\ker g$ فإن $a=o$.

إذاً $g_A : A\longrightarrow P$ تماثل مودولي وبالتالي $g_A \circ g_A^{-1}=I_P$

وبالتالي يوجد تشاكل مودولي :

$$\pi : P\longrightarrow N$$
$$\pi(p)=g_A^{-1}(p)$$

من أجله يكون $g\circ\pi=I_P$ وهذا يعني أن π تشاكل منشطر من اليمين فالمتتالية (3) منشطرة من اليمين .

نتائج وملاحظات :

إذا كانت المتتالية التامة :

$$O\longrightarrow M\xrightarrow{f} N\xrightarrow{g} P\longrightarrow O$$

منشطرة من اليسار ومن اليمين وكان ρ التشاكل المنشطر من اليسار ، π التشاكل المنشطر من اليمين فحسب المبرهنتين السابقتين يكون

$$\operatorname{Im} f\oplus\ker\rho=N=\ker g\oplus\operatorname{Im}\pi$$

وبما أن كلاً من π, f تشاكل متباين فإن :

$$\operatorname{Im} f\cong M \quad and \quad \operatorname{Im}\pi\cong P$$

وبالتالي يكون

$$N\cong\ker g\oplus P=\operatorname{Im} f\oplus P\cong M\oplus P$$

وبالتالي تكون المتتالية التامة :

$$O\longrightarrow M\xrightarrow{J} M\oplus P\xrightarrow{\nu} P\longrightarrow O$$

منشطرة عندما يكون

$$M \longrightarrow M \oplus P$$
$$m \; \alpha \quad (m, o)$$

التباين القانوني ، وعندما يكون

$$v : M \oplus P \longrightarrow P$$
$$(m, p) \quad \alpha \quad p$$

الإسقاط القانوني .

تعريف

ليكن M_1, M_2 مودولين جزئيين من مودول M وليكن $M = M_1 \oplus M_2$ عندئذ $m \in M$ يكتب بالشكل الوحيد

$$m = m_1 + m_2 \quad ; \quad m_i \in M_i \quad ; \quad i = 1,2$$

نسمي كل تطبيق

$$P : M \longrightarrow M$$
$$P_1(m) = m_1$$

إسقاط على M_1 موازٍ لـ M_2 (Projection on M_1 Parallel to M_2)

تعريف

ليكن M مودولاً على حلقة R . نقول عن التشاكل $f : M \longrightarrow M$ إنه جامد (idempotent) إذا كان $f \circ f = f$.

مبرهنة (4-13)

إذا كان $M = M_1 \oplus M_2$ وكان $f : M \longrightarrow M$ إسقاط على M_1 موازٍ للمودول M_2 فإن القضايا التالية تكون صحيحة :

(1) $M_1 = \operatorname{Im} f = \{x \in M ; \quad f(x) = x\}$

(2) $M_2 = \ker f$

(3) f *is idempotent*

الإثبات

(1) : بما أن f إسقاط على M_1 موازٍ للمودول M_2 فإن $M_1 = \operatorname{Im} f$. كما أن

$$\{x \in M \quad ; \quad f(x) = x\} \subseteq M_1 = \operatorname{Im} f$$

كما أنه أياً كان $m_1 \in M_1$ فإن m_1 يكتب بالشكل الوحيد $m_1 = m_1 + o$ وبالتالي $f(m_1) = m_1$ ومنه $m_1 \in \{x \in M \quad ; \quad f(x) = x\}$ أي

$$M_1 \subseteq \{x \in M \quad ; \quad f(x) = x\}$$

إذن القضية (1) صحيحة .

(2) – أياً كان $m \in M$ فإن m يكتب بالشكل الوحيد

$$m = m_1 + m_2 \quad ; \quad m_i \in M_i \qquad i = 1,2$$

وبما أن $f(m) = m_1$ فإن

$$[\, f(m) = o \,] \Leftrightarrow [\, m_1 = o \,] \Leftrightarrow [\, m = m_2 \in M_2 \,]$$

وبالتالي $M_2 = \ker f$.

(3) – أياً كان $m \in M$ فإن $f(m) \in M_1$ (حسب (1)) وبالتالي $f(f(m)) = f(m)$ وهذا يعني أن $f \circ f = f$ أي f جامد .

مبرهنة (4-14)

إذا كان $f : M \longrightarrow M$ تشاكلاً مودولياً . فإن القضيتين التاليتين متكافئتان :

I – f إسقاط .

II – f جامد .

الإثبات :

(I $\Rightarrow$ II) : ينتج مباشرة من المبرهنة السابقة .

(II $\Rightarrow$ I) : لنفرض أن التشاكل f جامد لإثبات المطلوب يكفي أن نثبت أن $M = \operatorname{Im} f \oplus \ker f$.

من جهة أولى : أياً كان $m \in M$ فإن

$$m = f(m) + m - f(m) = f(m) + [m - f(m)]$$

إن $f(m) \in \operatorname{Im} f$ كما أن $m - f(m) \in \ker f$ لأن

$$f(m - f(m)) = f(m) - f(f(m)) = f(m) - f(m) = o$$

أي أن $M = \operatorname{Im} f + \ker f$.

ومن جهة ثانية أياً كان $m \in \operatorname{Im} f \cap \ker f$ فإن

$$\begin{cases} m \in \operatorname{Im} f \Rightarrow \exists\, x \in M \quad : \quad m = f(x) \\ m \in \ker f \Rightarrow f(m) = o \end{cases}$$

وبالتالي $f(f(x)) = o$ ، وبما أن f جامد فإن $f(x) = o$ وبالتالي $m = o$ أي $\operatorname{Im} f \cap \ker f = O$.

إذن $M = \operatorname{Im} f \oplus \ker f$.

مبرهنة (4-15)

إذا كانت $(M_i)_{i=1,2,.....,n}$ أسرة مودولات جزئية من مودول M فإن $M = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ عندما وفقط ،عندما توجد تشاكلات مودولية $(P_i : M \longrightarrow M_i)_{i=1,2,....,n}$ بحيث يكون :

$$(1) \qquad P_1 + P_2 + ... + P_n = I_M$$

$$(2) \qquad P_i \circ P_j = 0 \qquad (\forall i \neq j)$$

الإثبات :

لنفرض أن $M = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ عندئذٍ أياً كان $x \in M$ فإن

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i \quad ; \quad x_i \in M_i \quad i = 1,2,.....,n$$

ويكون :

$$P_i(x) = x_i \qquad \forall i = 1,2,.....,n$$

وعندئذٍ يكون :

$$(P_1 + P_2 + ... + P_n)(x) = (\sum_{i=1}^{n} P_i)(x)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} P_i(x)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} x_i$$
$$= x$$

وبالتالي $P_1 + P_2 + ... + P_n = I_M$.

لنبرهن الآن على صحة القضية (2) . بما أن $M = \overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} M_i$ فإن من أجل كل $i \in \{1,2,.....,n\}$ يكون $M = M_i \oplus (\sum_{i \neq j} M_j)$ وليكن P_i إسقاطاً للمودول M_i موازٍ للمودول $\sum_{i \neq j} M_j$ وبالتالي أياً كان $x \in M$ و أياً كان $i \neq j$ فإن

$$(P_i \, o P_j)(x) = P_i(P_j(x)) \in P_i(\operatorname{Im} P_j) = P_i(M_j)$$
$$\subseteq P_i(\sum_{i \neq j} M_j)$$
$$= P_i(\ker P_i) .$$
$$= o$$

وبالتالي $P_i \, o P_j = 0$ وذلك $i \neq j$.

لنفرض الآن $P_1, P_2, ..., P_n$ تحقق القضيتين (1) و (2) . عندئذٍ أياً كان $i \in \{1,2,.....,n\}$ فإن :

$$P_i = P_i \, o I_M = P_i \, o(\sum_{j=1}^{n} P_j) = \sum_{i=1}^{n} (P_i \, o P_j) = P_i \, o P_i$$

وهذا يعني أن P_i جامد وبالتالي P_i إسقاط . ولنثبت أن M مجموع مباشر لأسرة مودولات جزئية منه .

أياً كان $x \in M$ فإن

$$x = I_M(x) = (\sum_{i=1}^{n} P_i)(x) = \sum_{i=1}^{n} P_i(x) \in \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Im} P_i$$

ومنه $M = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Im} P_i$.

ومن ناحية أخرى أياً كان $x \in \operatorname{Im} P_i \cap \sum_{i \neq j} \operatorname{Im} P_j$ فإن

$$\begin{cases} x \in \operatorname{Im} P_i \Rightarrow x = P_i(x) \\ x \in \sum_{i \neq j} \operatorname{Im} P_j \Rightarrow x = \sum_{i \neq j} x_j \end{cases}$$

حيث $P_j(x_j) = x_j$ من أجل كل $i \neq j$ وبالتالي

$$x = P_i(x) = P_i(\sum_{i \neq j} x_j) = P_i(\sum_{i \neq j} P_j(x_j))$$
$$= \sum_{i \neq j} (P_i \circ P_j)(x_j) = o$$

أي $\operatorname{Im} P_i \cap \sum_{i \neq j} \operatorname{Im} P_j = O$.

إذن $M = \bigoplus_{i=1}^{n} \operatorname{Im} P_i$.

تمرينات محلولة

التمرين الأول :

ليكن M_1, M_2 مودولين متكاملين في مودولٍ M على حلقة R .

أثبت أن :

$$M_2 \cong M/M_1$$

الحل :

بما أن $M = M_1 \oplus M_2$ فإن كل عنصر $m \in M$ يكتب بالشكل الوحيد :

$$m = m_1 + m_2 \quad ; \quad m_1 \in M_1, \quad m_2 \in M_2$$

لنأخذ الإسقاط القانوني :

$$\Pr_2 : M \longrightarrow M_2$$
$$\Pr_2(m = m_1 + m_2) = m_2$$

من الواضح أن $\Pr_2$ تشاكل غامر نواته $\ker \Pr_2 = M_1$ وحسب مبرهنة التماثل الأولى يكون :

$$M/M_1 \cong M_2$$

التمرين الثاني :

ليكن $(M_i)_{i\in I}$ أسرة مودولات على حلقة R . ولـيكن $\{I_k | k \in A\}$ تجزئة للمجموعة I

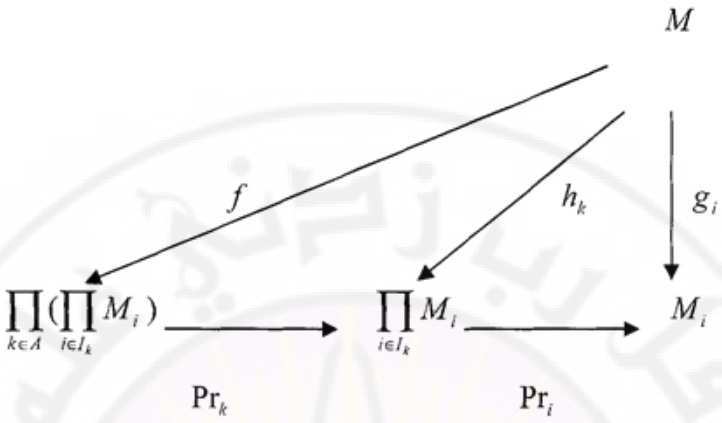
برهن أنه يوجد تماثل وحيد بحيث يكون :

$$\prod_{i\in I} M_i \cong \prod_{k\in A}\left(\prod_{i\in I_k} M_i\right)$$

الحل :

ليكن M مودولاً ما على الحلقة R . من أجل كل مودول M_i (حيث $i \in I_k, \quad k \in A$)

نجد أنه من أجل كل مخطط :



يوجد تشاكل مودولي وحيد $h_k : M \longrightarrow \prod_{i\in I_k} M_i$ يجعل المخطط تبادلياً أي :

$$\Pr_i . o\, h_k = g_i \qquad \forall i \in I_k$$

كما يوجد تشاكل مودولي وحيد $f : M \longrightarrow \prod_{k\in A}\left(\prod_{i\in I_k} M_i\right)$ يجعل المخطط تبادلياً . أي :

$$\Pr_k o f = h_k \qquad \forall k \in A$$

وبالتالي يكون

$$\Pr_i o \Pr_k = g_i \qquad \forall i \in I_k ; \quad \forall k \in A \ldots\ldots\ldots\ldots(*)$$

وهذا يبين أن $\left(\prod_{k\in A}\left(\prod_{i\in I_k} M_i\right), \quad (\Pr_i o \Pr_k)_{i\in I_k} ; \quad k \in A\right)$ جداء مباشر للأسرة $(M_i)_{i\in I}$ ، وحسب المبرهنة (4-2) يكون

$$\prod_{i\in I} M_i \cong \prod_{k\in A}\left(\prod_{i\in I_k} M_i\right)$$

ولنبرهن أن هذا التماثل وحيد .

لنفرض الآن :

$$f' : M \longrightarrow \prod_{k\in A}\left(\prod_{i\in I_k} M_i\right)$$

تشاكل آخر يحقق العلاقة (*) عندئذٍ من أجل أي $x \in M$ يكون :

$$f(x) = (x_k)_{k\in A}$$
$$x_k = (m_i)_{i\in I_k} \qquad \forall k \in A$$

كما أن :

$$f'(x) = (x'_k)_{k\in A}$$
$$x'_k = (m'_i)_{i\in I_k} \qquad \forall k \in A$$

وعندئذٍ يكون :

$$g_i(x) = (\mathrm{Pr}_i \, o \, \mathrm{Pr}_k)(f(x)) = \mathrm{Pr}_i(x_k) = m_i$$
$$g_i(x) = (\mathrm{Pr}_i \, o \, \mathrm{Pr}_k)(f'(x)) = \mathrm{Pr}_i(x'_k) = m'_i$$

وبالتالي : $f(x) = f'(x)$ أي : $f = f'$

إذن التماثل $\prod_{i\in I} M_i \cong \prod_{k\in A}\left(\prod_{i\in I_k} M_i\right)$ وحـــــيد .

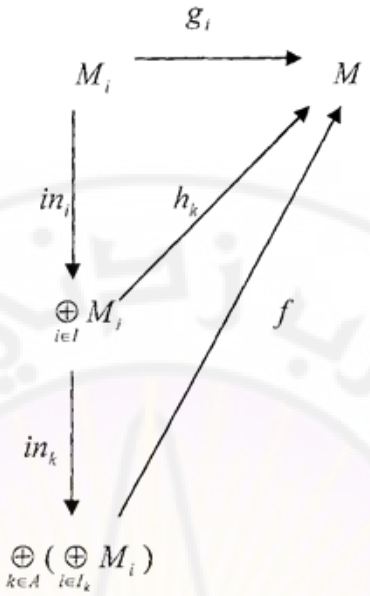
<u>التمرين الثالث</u> :

لتكن $(M_i)_{i\in I}$ أسرة مودولات على حلقة R ولـــتكن $\{I_k \; ; \quad k \in A\}$ تجزئـــة للمجموعة I . برهن أنه يوجد تماثل وحيد بحيث يكون :

$$\bigoplus_{i\in I} M_i \quad \cong \quad \bigoplus_{k\in A}\left(\bigoplus_{i\in I_k} M_i\right)$$

الحل :

ليكن M مودولاً ما على الحلقة R . من أجل كل مودول جزئي M_i (حيث $k \in A \; ; \quad i \in I_k$) نجد أن من أجل كل مخطط :



يوجد تشاكل مودولي وحيد $h_k : \bigoplus_{i\in I} M_i \longrightarrow M$ يجعل المخطط تبادلياً أي :

$$h_k \circ in_i = g_i \qquad \forall i \in I_k$$

كما ويوجد تشاكل مودولي وحيد $f : \bigoplus_{k\in A}\left(\bigoplus_{i\in I_k} M_i\right) \longrightarrow M$ يجعل المخطط تبادلياً أي :

$$f \circ in_k = h_k \qquad \forall k \in A$$

وبالتالي يكون :

$$f \circ in_k \circ in_i = g_i \qquad \forall i \in I_k \quad , \quad \forall k \in A \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (*)$$

وهذا يبين أن $\left(\bigoplus_{k\in A}\left(\bigoplus_{i\in I_k} M_i\right), \quad (in_k \circ in_i), \quad i \in k, \quad k \in A\right)$ جداء مرافق للأسرة $(M_i)_{i\in I}$ وبالتالي حسب المبرهنة (4-5) يوجد التماثل $\bigoplus_{i\in I} M_i \cong \bigoplus_{k\in A}\left(\bigoplus_{i\in I_k} M_i\right)$.

ولنبرهن على أن هذا التماثل وحيد .

لنفرض أن :

$$f' \ : \ \bigoplus_{k\in A}\left(\bigoplus_{i\in I_k} M_i\right)\longrightarrow M$$

تشاكل آخر يحقق العلاقة (*) وليكن :

$$pr_j^{\oplus} : \bigoplus_{i\in I} M_i \longrightarrow M_j$$

مقصور الإسقاط القانوني $pr_j : \prod_{i\in I} M_i \longrightarrow M_j$ على المودول $\bigoplus_{i\in I} M_i$

عندئذ التطبيق $\sum_{j\in I}\left(in_j \circ pr_j^{\oplus}\right)$ هو المطابق في $\bigoplus_{j\in I} M_j$ ويكون :

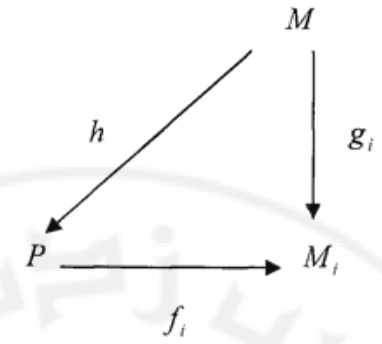
$$\begin{aligned} f' &= \sum_{k\in A}\ \sum_{i\in I_k}\left(f' \circ in_i \circ in_i \circ pr_i^{\oplus} \circ pr_k^{\oplus}\right) \\ &= \sum_{k\in A}\ \sum_{i\in J_k}\left(g_i \circ pr_i^{\oplus} \circ pr_k^{\oplus}\right) \\ &= \sum_{k\in A}\ \sum_{i\in I}\left(f \circ in_k \circ in_i \circ pr_i^{\oplus} \circ pr_k^{\oplus}\right) \\ &= f \end{aligned}$$

إذن التماثل $\bigoplus_{k\in A}\left(\bigoplus_{i\in I_k} M_i\right) \cong \bigoplus_{i\in I} M_i$ وحيد .

(لاحظ أن $Card I = Card(I_k \times A)$) .

التمرين الرابع :

ليكن P مودولاً على الحلقة R ولتكن $(M_i)_{i\in I}$ أسرة مودولات على الحلقة R . أثبت أن $P \cong \prod_{i\in I} M_i$ عندما وفقط ، عندما توجد أسرة من التشاكلات المودولية $(f_i : P \longrightarrow M_i)_{i\in I}$ بحيث يكون من أجل كل مودول M على الحلقة R وكل أسرة من التشاكلات $(g_i : M \longrightarrow M_i)_{i\in I}$ يوجد تشاكل وحيد $h : M \longrightarrow P$ يجعل المخطط :

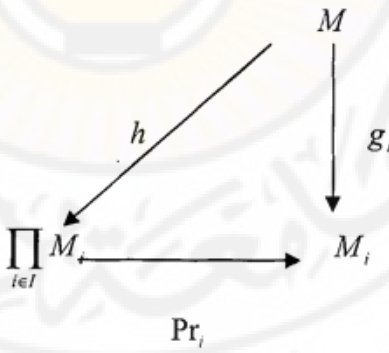


تبادليـــــاً .

الحل :

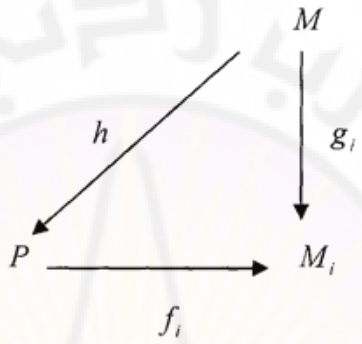
أولاً : لنفرض أن $P \cong \prod_{i \in I} M_i$. عندئذٍ توجد أســرة التــشاكلات الإســقاطات القانونية $(pr_i)_{i \in I}$ بحيث من أجل أي مودول M على الحلقة R وكل أسرة من التشاكلات $(g_i : M \longrightarrow M_i)_{i \in I}$

يوجد تشاكل وحيد : $h : M \longrightarrow P$ يجعل المخطط :



تبادليـــــاً . (لأن ($\prod_{i \in I} M_i$, $(pr_i)_{i \in I}$) جداء للأسرة $(M_i)_{i \in I}$) .

ثانياً : لتكن $(f_i : P \longrightarrow M_i)_{i\in I}$ أسرة تشاكلات مودولية بحيث يكون من أجل كل مودول M على الحلقة R وكل أسرة من التشاكلات $(g_i : M \longrightarrow M_i)_{i\in I}$ يوجد تشاكل وحيد $h : M \longrightarrow P$ يجعل المخطط :

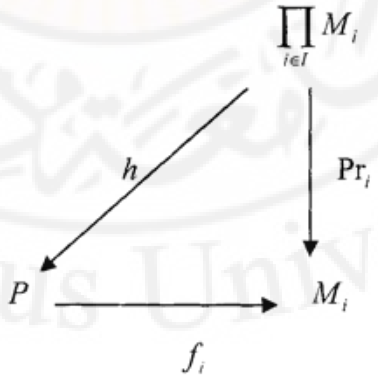


تبادلياً . أي :

$$f_i \circ h = g_i \quad ; \quad \forall i \in I$$

ولنبرهن على أن $P \cong \prod_{i\in I} M_i$.

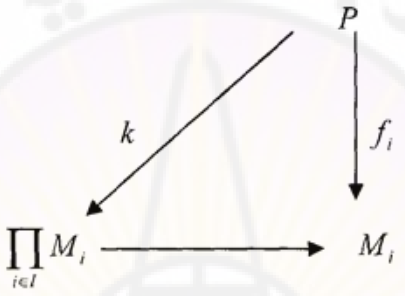
إذا أخذنا $M = \prod_{i\in I} M_i$ و $g_i = pr_i$ نحصل على المخطط التبادلي :



ومنه :

$$f_i \circ h = pr_i \quad ; \quad \forall i \in I$$

ومن ناحية أخرى وبما أن $\left(\prod_{i\in I} M_i \ , \ (pr_i)_{i\in I} \right)$ جداء للأسـرة $(M_i)_{i\in I}$ فإنه من أجل المودول P يوجد تشاكل مـودولي وحيـد $k : P \longrightarrow \prod_{i\in I} M_i$ يجعل المخطط :



تبادليـــــاً . أي :

$$pr_i \circ k = f_i \quad ; \quad \forall i \in I$$

وبالتالي :

$$pr_i \circ k \circ h = pr_i \quad ; \quad \forall i \in I$$
$$f_i \circ h \circ k = f_i \quad ; \quad \forall i \in I$$

ومنه :

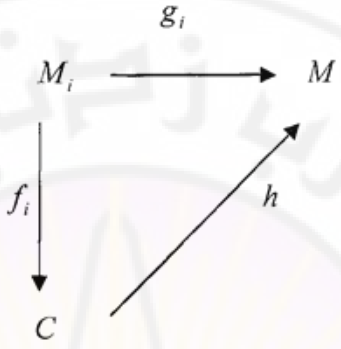
$$k \circ h = I_{\prod_{i\in I} M_i} \quad and \quad h \circ k = I_P$$

وهذا يثبت أن h تماثل مودولي . أي أن $P \cong \prod_{i\in I} M_i$.

<u>التمرين الخامس</u> :

ليكن C مودولاً على حلقة R ، وليكن $(M_i)_{i\in I}$ أسرة مودولات على الحلقة R أثبت أن $C = \oplus_{i\in I} M$ عندما وفقط ،عندما توجد أسرة من التشاكلات المودولية

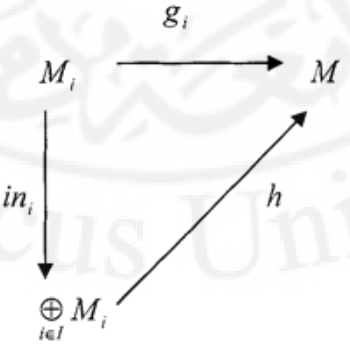
$\left(f_i : M_i \longrightarrow C\right)_{i\in I}$ بحيث يكون من أجل كل مودول M على الحلقة R وكل أسرة من التشاكلات $\left(g_i : M_i \longrightarrow M\right)_{i\in I}$ يوجد تشاكل وحيد $h : C \longrightarrow M$ يجعل المخطط :



تبادلياً .

الحل :

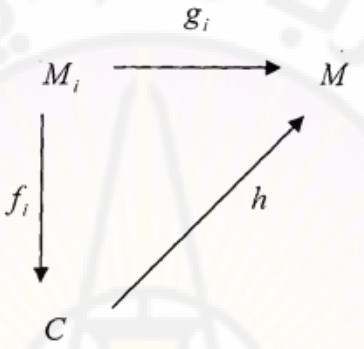
أولاً : لنفرض أن $C \cong \bigoplus_{i\in I} M$. عندئذٍ توجد أسرة تشاكلات التباينات القانونية $(in_i)_{i\in I}$ بحيث من أجل أي مودول M على الحلقة R وكل أسرة من التشاكلات $\left(g_i : M_i \longrightarrow M\right)_{i\in I}$ يوجد تشاكل وحيد $h : C \longrightarrow M$ يجعل المخطط :



تبادليـــــــاً .

(لأن $(in_i)_{i\in I}$ ، $\bigoplus_{i\in I} M_i$) جداء مرافق للأسرة $(M_i)_{i\in I}$) .

ثانياً : لتكن $(f_i : C \longrightarrow M_i)_{i\in I}$ أسرة تشاكلات مودولية بحيث يكون من أجل كل مودول M على الحلقة R وكل أسرة من التشاكلات $(g_i : M_i \longrightarrow M)_{i\in I}$ يوجد تشاكل وحيد $h : C \longrightarrow M$ يجعل المخطط :

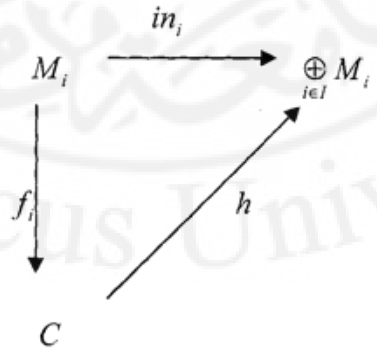


تبادلياً . أي

$$h \circ f_i = g_i \qquad \forall i \in I$$

ولنبرهن على أن $C \cong \bigoplus_{i\in I} M_i$.

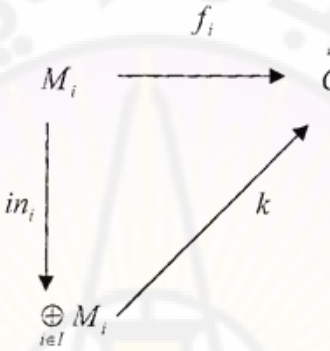
إذا أخذنا $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$ و $g_i = in_i$ فنحصل على المخطط التبادلي :



ومنه

$$h \circ f_i = in_i \qquad \forall i \in I$$

ومن جهة أخرى ، وبما أن $(\bigoplus_{i\in I} M_i \ , (in_i)_{i\in I})$ جداء مرافق للأسرة $(M_i)_{i\in I}$ فإنه من أجل المودول C يوجد تشاكل مودولي وحيد $k: \bigoplus_{i\in I} M_i \to C$ يجعل المخطط



تبادلياً . أي

$$k \circ in_i = f_i \qquad ; \qquad \forall i \in I$$

وبالتالي :

$$k \circ h \circ f_i = f_i \qquad ; \qquad \forall i \in I$$
$$h \circ k \circ in_i = in_i \qquad ; \qquad \forall i \in I$$

ومنه :

$$k \circ h = I_C \qquad and \qquad h \circ k = I_{\bigoplus_{i\in I} M_i}$$

وهذا ما يثبت أن h تماثل مودولي أي أن $C \cong \bigoplus_{i\in I} M$

التمرين السادس :

ليكن M مودولاً على حلقة R ،ولتكن $(M_j)_{j\in I}$ أسرة مودولات على الحلقة R ولتكن $(J_i, M_i \longrightarrow M)_{i\in I}$ أسرة تشاكلات . أثبت أن $(M, (J_i)_{i\in I})$ جداء

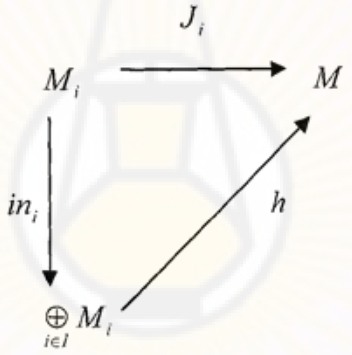
مرافق للأسرة $(M_i)_{i\in I}$ عندما وفقط ، عندما توجد أسرة تشاكلات ($\pi_i : M \longrightarrow M_i$) بحيث :

(1) . $\pi_k \, o J_i = \begin{cases} I_M & if \quad k = i \ ; \\ 0 & if \quad k \neq i \ . \end{cases}$

(2) . أياً كان $m \in M$ فإن $\pi_i(m) = o$ من أجل جميع i دون عدد منته منها وإن $\sum_{i\in I} (J_i \, o\pi_i)(m) = m$

الحل

أولاً : لنفرض أن $(M,(J_i)_{i\in I})$ جداء مرافق للأسرة $(M_i)_{i\in I}$ عندئذٍ حسب المبرهنتين (4-6) و (4-5) يوجد تشاكل $h : \bigoplus_{i\in I} M_i \longrightarrow M$ يجعل المخطط



تبادلياً .

من أجل كل $i \in I$ لنأخذ التطبيق :

$$\pi_i : M \longrightarrow M_i$$
$$\pi_i = \Pr_i^{\oplus} \, o h^{-1}$$

حيث $\Pr_i^{\oplus} : \bigoplus_{i\in I} M_i \longrightarrow M_i$ مقصور الإسقاط القانوني $\Pr_i : \prod_{i\in I} M_i \longrightarrow M_i$ على المودول $\bigoplus_{i\in I} M_i$. عندئذٍ من أجل كل $i,k \in I$ يكون :

$$\pi_k \circ J_i = \mathrm{Pr}_k^{\oplus} \circ h \circ J_i = \mathrm{Pr}_k^{\oplus} \circ in_i = \begin{cases} I_M & if \quad k = i \\ 0 & if \quad k \neq i \end{cases}$$

كما أن من أجل كل $m \in M$ يكـــون $\pi_i(m) = \mathrm{Pr}_i^{\oplus}\left(h^{-1}(m)\right)$ وأن $\pi_i(m) = o$ من أجل جميع i باستثناء عدد منته منها . ويكون :

$$\sum_{i \in I}(J_i \circ \pi_i)(m) = \sum_{i \in I}\left(h \circ in_i \circ \mathrm{Pr}_i^{\oplus} \circ h^{-1}\right)(m)$$

$$= h \circ \left(\sum_{i \in I}\left(in_i \circ \mathrm{Pr}_i^{\oplus} \circ h^{-1}\right) \right)(m)$$

$$= m$$

وذلك بملاحظة أن $\sum_{i \in I}\left(in_i \circ \mathrm{Pr}_i^{\oplus}\right)$ هو المطابق على $\oplus_{i \in I} M_i$.

ثانياً:

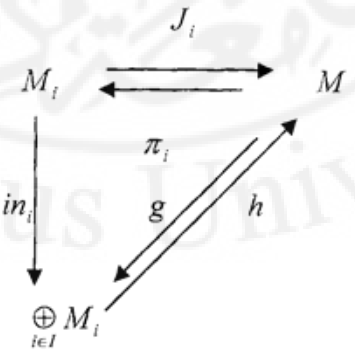
لنفرض الآن أن القضيتين (1) و (2) محققتان . عندئذ حسب (2) تكون القضية

$$g(m) = \sum_{i \in I}(in_i \circ \pi_i)(m)$$

محققة من أجل أي تشاكل $g : M \longrightarrow \oplus_{i \in I} M_i$ ، و حسب المبرهنـــة (6-4) يوجد تشاكل مودولي $h : \oplus_{i \in I} M \longrightarrow M$ من أجله يكون :

$$h \circ in_i = J_i \qquad ; \qquad \forall i \in I$$

لنتأمل المخطط :



فنجد أن من أجل كل $m \in M$ يكون :

$$h(g(m)) = \sum (h \circ in_i \circ \pi_i)(m)$$

$$= \sum_{i \in I} (j_i \circ \pi_i)(m)$$

$$= m$$

أي أن $h \circ g = I_M$.

كما أنه أياً كان $x \in \oplus M_i$ يكون $\sum_{i \in I} (in_i \circ pr_i^{\oplus})(x) = x$ وبالتالي :

$$g(h(x)) = \sum_{i \in I} (in_i \circ \pi_i)(h(x))$$

$$= \sum_{i \in I} \sum_{k \in I} (in_i \circ \pi_i \circ h \circ in_k \circ pr_k^{\oplus})(x)$$

$$= \sum_{i \in I} (in_i \circ pr_i^{\oplus})(x)$$

$$= x$$

وهذا ما يبين أن $g \circ h$ هو التطبيق المطابق في $\oplus M_i$. وبالتالي $g \circ h$ تماثل وتطبيق المبرهنة (4-5) نجد أن $(M, (J_i)_{i \in I})$ جداء مرافق للأسرة $(M_i)_{i \in I}$.

تمرينات (4)

التمرين الأول :

لتكن $(M_i)_{i=1,\dots,n}$ أسرة منتهية من المودولات الجزئية من مودول M على حلقة R ، وليكن $M=\bigoplus_{i\in I}^{n} M_i$ و ليكن N_k مودولاً جزئياً من M_k $k=1,2,\dots,n$ وليكن $N=\sum_{i=1}^{n} N_i$

أثبت أن :

(1). $$N=\bigoplus_{i=1}^{n} N_i$$

(2). $$M/N \cong \bigoplus_{i=1}^{n} (M_i/N_i)$$

التمرين الثاني :

ليكن M مودولاً على حلقة R ، ولتكن $(M_i)_{i\in I}$ أسرة مودولات على الحلقة R ولتكن $(\pi_i : M \longrightarrow M_i)_{i\in I}$ أسرة تشاكلات مودولية .

أثبت أن $(M,(\pi_i)_{i\in I})$ جداء للأسرة $(M_i)_{i\in I}$ عندما وفقط ، عندما توجد أسرة تشاكلات $(J_i : M_i \longrightarrow M)_{i\in I}$ بحيث :

(1) .

$$\pi_k \, o J_i = \begin{cases} I_M & if \quad k=i \\ 0 & if \quad k\neq i \end{cases}$$

(2) . أياً كان $(x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} M_i$ يوجد عنصر وحيد $x\in M$ بحيث :

$$\pi_i(x)=x_i \qquad \forall i\in I$$

التمرين الثالث :

ليكن $(N_i)_{i\in I}$, $(M_i)_{i\in I}$ أسرتين من المودولات على الحلقة R وليكن

$$f_i : M \longrightarrow N_i \qquad (\forall i \in I)$$

تشاكلاً مودولياً . ولنعرف المجموع المباشر للأسرة $(f_i)_{i\in I}$ بأنها التشاكل

$$h : \bigoplus_{i\in I} M_i \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} N_i$$

المعرفة كما يلي :

$$h(m_i)_{i\in I} = (f_i(m_i))_{i\in I}$$

برهن أن :

$$(1).... \qquad \ker h = \bigoplus_{i\in I} \ker f_i$$

$$(2).... \qquad \operatorname{Im} h = \bigoplus_{i\in I} \operatorname{Im} f_i$$

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الفصل الخامس

سلاسل المودولات الجزئية

Chain of Sub modules

5-1- المودولات النوثرية Noetherin Modules

تعريف (1)

ليكن M مودولاً على حلقة R . نقول عن المودول M إنه يحقق شرط السلاسل المتزايدة للمودولات الجزئية من M ascending chain condition ونعبر عن ذلك اختصاراً أن المودول M يحقق ACC إذا كان من أجل كل سلسلة متزايدة من المودولات الجزئية من M

$$M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq .....$$

يوجد عدد طبيعي n من أجله يكون :

$$(\forall k \geq n) \quad : \quad M_k = M_n$$

ويسمى المودول الذي يحقق $A.CC$ مودولاً نوثرياً Noetherin Module

تعريف (2)

ليكن M مودولاً على حلقة R . نقول عن المودول M إنه يحقق الشرط الأعظمي Maximum condition إذا وجد في كل أسرة غير خالية من المودولات الجزئية من M عنصرٌ أعظمي بالنسبة لعلاقة الاحتواء .

مبرهنة (5-1)

إذا كان M مودولاً على حلقة R فإن القضيتين التاليتين متكافئتان :

I – المودول M يحقق ACC .

II- المودول M يحقق الشرط الأعظمي .

الإثبات

(I $\Rightarrow$ II) : لتكن Γ أسرة غير خالية من المودولات الجزئية من المودول M وليكن $M_o \in \Gamma$. إذا كان M_o عنصراً أعظمياً في Γ يكون قد تم المطلوب ، إذا لم يكن M_o عنصراً أعظمياً فيوجد $M_1 \in \Gamma$ بحيث يكون $M_o \subset M_1$ ، إذا كان M_1 عنصراً أعظمياً في Γ يكون قد تم المطلوب ، وإذا لم يكن M_1 عنصراً أعظمياً في Γ فيوجد $M_2 \in \Gamma$ بحيث $M_o \subset M_1 \subset M_2$. وهكذا ،سنحصل على السلسلة المتزايدة

$$M_o \subset M_1 \subset M_2 \subset .....$$

من المودولات الجزئية من المودول M ، وبما أن M يحقق ACC فإنه يوجد عدد طبيعي n من أجله يكون :

$$(\forall k \geq n) \quad : \quad M_k = M_n$$

وهذا يعني أن المودول الجزئي M_n عنصرٌ أعظمي في Γ . إذن المودول M يحقق الشرط الأعظمي .

(II$\Rightarrow$I) : لنفرض أن المودول M يحقق الشرط الأعظمي ، ولنفرض جدلاً إن المودول M لا يحقق ACC . عندئذٍ توجد سلسلة متزايدة غير منتهية من المودولات الجزئية من M :

$$M_o \subset M_1 \subset M_2 \subset .....$$

وبالتالي توجد أسرة غير خالية من المودولات الجزئية $\Gamma = (M_i)_{i=0,1,.....}$ من المودول M لا يوجد فيها عنصرٌ أعظمي ، وهذا يناقض أن المودول M يحقق الشرط الأعظمي .

مبرهنة (5-2)

إذا كان M مودولاً على حلقة R يحقق ACC فإن كل مودول جزئي N من M يحقق ACC .

الإثبات :

لتكن

$$N_O \subseteq N_1 \subseteq N_2 \subseteq .....$$

سلسلة متزايدة من المودولات الجزئية من المودول N وبالتالي فهي سلسلة متزايدة من المودولات الجزئية من المودول M ، وبما أن المودول M يحقق ACC فإنه يوجد عدد طبيعي n من أجله يكون

$$(\forall k \geq n) \quad : \quad N_k = N_n$$

وهذا ما يثبت أن المودول N يحقق ACC .

نتيجة :

إذا كان N مودولاً جزئياً من مودولٍ M على حلقة R وكان M يحقق ACC فإن مودول القسمة M/N يحقق ACC .

البرهان :

ينتج مباشرة من المبرهنة (5-2) وذلك لوجود تقابل بين مجموعة المودولات الجزئية A من M ومجموعة المودولات الجزئية من المودول M/N وهذا التقابل يحافظ على الاحتواء $N \subseteq A \subseteq M$.

مبرهنة (5-3)

إذا كان N مودولاً جزئياً من مودولٍ M على حلقة R وكان كل من المودولين N ، M/N يحقق ACC فإن المودول M يحقق ACC .

الإثبات :

ليكن

$$M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq .....$$

سلسلة متزايدة من المودولات الجزئية من المودول M . عندئذٍ السلسلة

$$M_0 \cap N \subseteq M_1 \cap N \subseteq M_2 \cap N \subseteq .....$$

سلسلة متزايدة من المودولات الجزئية من المودول N وبما أن المـــودول N يحقق ACC فيوجد عدد طبيعي n من أجله يكون :

$$(\forall k \geq n) \quad : \quad M_k \cap N = M_n \cap N$$

لنأخذ الآن الغمر القانوني :

$$\pi : M \to M/N$$
$$\pi(x) = x + N$$

فنجد أن صورة كل مودول جزئي M_i $(i = 0,1,2,....)$ وفق π هي مـــودول جزئي من M/N وبالتالي السلسلة :

$$\pi(M_0) \subseteq \pi(M_1) \subseteq \pi(M_2) \subseteq .....$$

سلسلة متزايدة من المودولات الجزئية من المودول M/N وبمـــا أن المـــودول M/N يحقق ACC فيوجد عدد طبيعي m من أجله يكون :

$$(\forall k \geq m) \quad : \quad \pi(M_k) = \pi(M_m)$$

بفرض $p = \max(n,m)$ يكون لدينا :

$$(\forall k \geq n) \quad : \begin{cases} M_k \subseteq M_p \\ M_k \cap N = M_p \cap N \\ \pi(M_k) = \pi(M_p) \end{cases}$$

ليكن t عدداً طبيعياً بحيث $p \leq t$ ولنبرهن على أن $M_t = M_p$ وبذلك نكون قد أثبتنا أن المودول M يحقق ACC .

من جهة أولى ، واضح أن $M_p \subseteq M_t$

من جهة ثانية ، بما أن $\pi(M_t) = \pi(M_p)$ فإنه أياً كان $y \in M_t$ فإنه يوجد $x \in M_p$ بحيث $\pi(y) = \pi(x)$ أي أن $y + N = x + N$ ومنه $y - x \in N$ وبما أن $x \in M_p$ و $y \in M_t$ ولكون $M_p \subseteq M_t$ فإن $y - x \in M_t$

أصبح لدينا $y - x \in M_t \cap N$ وبالتالي $y - x \in M_p \cap N$ ومنه $z = y - x \in M_p$ أي $y = z + x \in M_p$ وبالتالي $M_t \subseteq M_p$.

إذن $M_t = M_p$

5-2- المودولات الآرتينية Artinian modules

تعريف (1)

ليكن M مودولاً على حلقة R نقول عن المودول M إنه يحقق شرط السلاسل المتناقصة للمودولات الجزئية من M descending chain condition ونعبر عن ذلك اختصاراً أن المودول M يحقق DCC إذا كان من أجل كل سلسلة متناقصة من المودولات الجزئية من M :

$$M_0 \supseteq M_1 \supseteq M_2 \supseteq .....$$

يوجد عدد طبيعي n من أجله يكون :

$$(\forall k \geq n): \quad M_k = M_n$$

ويسمى المودول الذي يحقق DCC مودولاً آرتينياً (Artinian module) .

تعريف (2)

ليكن M مودولاً على حلقة R نقول عن المودول M إنه يحقق الشرط الأصغري Minimum condition إذا وجد في كل أسرة غير خالية من المودولات الجزئية من M عنصرٌ أصغري بالنسبة لعلاقة الاحتواء .

مبرهنة (5-4)

إذا كان M مودولاً على حلقة R فإن القضيتين التاليتين متكافئتان :

I- المودول M يحقق DCC

II- المودول M يحقق الشرط الأصغري .

الإثبات

يتم الإثبات بشكل مشابه لإثبات المبرهنة (5-1) .

نتيجة :

إذا كان N مودولاً جزئياً من مودولٍ M على حلقة R وكان M يحقق DCC فإن مودول القسمة M/N يحقق DCC

مبرهنة (5-5)

إذا كان N مودولاً جزئياً من مودول M على حلقة R وكان كل من المودولين N و M/N يحقق DCC فإن المودول M يحقق DCC.

الإثبات :

يتم بشكل مشابه لإثبات المبرهنة (5-3) .

5-3- أبراج جوردان - هولدر JORDAN-HOLDER TOWERS

تعريف (1)

ليكن M مودولاً على حلقة R نقول عن المودول M إنه بسيط (simple) إذا كان M لا يحوي سوى مودولين جزئيين هما O , M.

تعريف (2)

ليكن M مودولاً على حلقة R. نسمي كل سلسلة متناقصة من المودولات الجزئية من المودول M ذات الشكل :

$$M = M_0 \supset M_1 \supset \ldots\ldots\ldots \supset M_r = O$$ (O المودول الأصغري)

برجاً (Tower) من المودولات الجزئية M.

تعريف (3)

ليكن

$$T_1 : M = M_0 \supset M_1 \supset ..... \supset M_r = O$$
$$T_2 : M = N_0 \supset N_1 \supset ..... \supset N_t = O$$

برجين من المودولات الجزئية من مودول M على حلقة R. نقول إن البرج T_2 تغطية (refinement) للبرج T_1 إذا كان من أجل $j = 1,2,.....,r$ يوجد $i \in \{1,2,.....,t\}$ بحيث يكون $N_i \cong M_j$ ونقول إن البرجين T_2 و T_1 متكافئان ونكتب $T_1 \cong T_2$ إذا تحقق الشرطان :

1- $r = t$

2- إذا وجد تقابل υ في المجموعة $\{1,2,.....,r\}$ بحيث

$$N_I / N_{I+1} \cong M_{\upsilon(I)} / M_{\upsilon(I)+1}$$

مبرهنة (5-6)

إذا كان M مودولاً على حلقة R وكان

$$T_1 : M = M_0 \supset M_1 \supset ..... \supset M_r = O$$
$$T_2 : M = N_0 \supset N_1 \supset ..... \supset N_t = O$$

برجين من المودولات الجزئية من M فإنه يوجد تغطية S_1 للبرج T_1 و تغطية S_2 للبرج T_2 بحيث يكون $S_1 \cong S_2$.

الإثبات

لنفرض أن $t \le r$ وهذا لا يفقد عمومية المسألة . ولنعرف من أجل كل $i = 1,2,.....,r$ و $j = 1,2,.....,t$ المودولات الجزئية

$$M_{i,j} = M_i + (M_{i-1} \cap N_j)$$
$$N_{j,i} = N_j + (N_{j-1} \cap M_i)$$

فنجد أن

$$M_{i,k} = M_{i,t} \quad ; \quad k = t+1,\ldots\ldots,r$$

وتكون السلسلتان :

$$S_1 : \ldots M_{i-1} = M_{i,0} \supseteq M_{i,1} \supseteq \ldots\ldots \supseteq M_{i,t} = \ldots = M_{i,r} = M_I = M_{i+1,0} = \ldots\ldots$$
$$S_2 : \ldots N_{j-1} = N_{j,0} \supseteq N_{j,1} \supseteq \ldots\ldots \supseteq N_{j,r} = N_j = N_{j+i,0} = \ldots\ldots$$

تغطيتان للبرجين T_1, T_2 على الترتيب .ولنبرهن على أن $S_1 \cong S_2$. بما أن

$$M_{i,j-1} \supseteq M_{i,j} \quad , \quad N_{j,i-1} \supseteq N_{j,i}$$

فحسب مبرهنات التماثل يكون

$$M_{i,j-1} / M_{i,j} \quad \cong \quad N_{j,i-1} / N_{j,i}$$

ويكون :

$$M_{i,j-1} = M_{i,j} \quad \Leftrightarrow \quad N_{j,i-1} = N_{j,i}$$

وبحذف المودولات الجزئية المتساوية في السلسلتين S_1, S_2 سنجد أن $S_1 \cong S_2$.

تعريف

ليكن

$$T : M = M_0 \supset M_1 \supset \ldots\ldots\ldots \supset M_r = O$$

برجاً من المودولات الجزئية من مودول M على حلقة R . نقول عن البرج T إنه برج جوردان – هولدر (Jordan-Holder tower) إذا كانت المودولات $M_i / M_{i+1} \quad (i = 1,2,\ldots\ldots r-1)$ بسيطة . ونسمي العدد الطبيعي r ارتفاع البرج .

مبرهنة (5-7)

إذا كان M مودولاً على حلقة R وكان :

$$T_1 : M = M_0 \supset M_1 \supset ..... \supset M_r = O$$

$$T_2 : N = N_0 \supset N_1 \supset ..... \supset N_t = O$$

برجي جوردان – هولدر من المودولات الجزئية من M فإن $T_1 \cong T_2$.

الإثبات

حسب المبرهنة (5-5) يعين كل من البرجين T_1, T_2 تغطيتين S_1, S_2 على الترتيب – متكافئين أي $S_1 \cong S_2$ ، وبما أن T_1, T_2 برجي جوردان – هولدر فإن هاتين التغطيتين هما T_1, T_2 على الترتيب .

نتيجة

لجميع أبراج جوردان – هولدر المودول M الارتفاع نفسه لذلك يسمى ارتفاع البرج ارتفاعاً للمودول M ونرمز له $h(M)$.

مبرهنة (5-8)

إذا كان M مودولاً على حلقة R و يمتلك برج جوردان – هولدر فإن المودول M يحقق ACC و DCC .

الإثبات

ليكن

$$T : M = M_0 \supset M_1 \supset ..... \supset M_r = O$$

برج جوردان – هولدر من المودولات الجزئية من المودول M ولنبرهن على أن المودول M يحقق $A.C.C$ و $D.C.C$ بالاستقراء الرياضي على ارتفاع البرج r . إذا كان $r = 0$ فإن

$$T : M = O$$

وعندئذٍ M يحقق $A.C.C$ و DCC .

لنفرض أن إذا امتلك المودول M برج جوردان – هولدر ذي ارتفاع $r-1$ فإن M يحقق $A.C.C$ و DCC .

ليكن

$$T: M = M_0 \supset M_1 \supset ..... \supset M_r = O$$

برج جوردان – هولدر ذي ارتفاع r من المودولات الجزئية من M . عندئذٍ

$$T': M/M_{r-1} = M_0/M_{r-1} \supset M_1/M_{r-1} \supset ..... \supset M_{r-1}/M_{r-1} = 0$$

برج من المودولات الجزئية البسيطة من المودول M/M_{r-1} $(i = 0,1,2.....,r-1)$ ، وحسب مبرهنات التماثل ينتج أن

$$(M_i/M_{r-1}) \big/ (M_{i+1}/M_{r-1}) \cong M_i/M_{i+1}$$

وبالتالي مودولات القسمة

$$(M_i/M_{r-1}) \big/ (M_{i+1}/M_{r-1}) \qquad i = 0,1,2,.....r-1$$

بسيطة . أي أن T' برج جوردان – هولدر في المودول M/M_{r-1} ذي ارتفاع $r-1$ وحسب الفرض الاستقرائي يكون المودول M/M_{r-1} محققاً $A.CC$ و DCC ، ولكن

$$M_{r-1} = M_{r-1}/0 = M_{r-1}/M_r$$

وبالتالي المودول M_{r-1} يمتلك برج جوردان – هولدر ذي ارتفاع r $(r' > r)$ وبالتالي المودول M_{r-1} يحقق أيضاً $A.CC$ و DCC . إذن كل من المودولين M_{r-1} و M/M_{r-1} يحقق $A.CC$ و DCC .

مبرهنة (5–9)

إذا كان M مودولاً على حلقة R يحقق $A.C.C$ و $D.C.C$. فإن M يمتلك برج جوردان – هولدر .

الإثبات : يترك تمريناً للقارئ .

تعريف

ليكن M مودولاً على حلقة R . نقول عن M إنه منتهي الارتفاع إذا كان M يحقق $A.CC$ و DCC .

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

تمرينات محلولة

التمرين الأول

ليكن $M \neq O$ مودولاً على حلقة R . برهن أن القضيتين التاليتين متكافئتان

(1) – المودول M بسيط .

(2) – يوجد $o \neq x \in M$ بحيث $M = \langle x \rangle$.

الحل

(2) $\Rightarrow$ (1) : بما أن $M \neq O$ فإن يوجد $o \neq x \in M$ وعندئذٍ يكون

$$x = 1.x \in Rx \neq O$$

وبما أن Rx مودول جزئي من M وبما أن M بسيط فإن $Rx = M$ وهذا يعني أن

$$M = \langle x \rangle \quad ; \quad x \neq o$$

(1) $\Rightarrow$ (2) : ليكن $N \neq O$ مودولاً جزئياً من M وليكن $o \neq n \in N$ عندئذٍ يكون $M = \langle n \rangle \subseteq N$ وبالتالي $N = M$ وهذا يبين أن M بسيط .

التمرين الثاني :

ليكن $f : M \to N$ تشاكلاً مودولياً ليس صفرياً . أثبت أن

(1) – إذا كان المودول M بسيطاً فإن التشاكل f متباين .

(2) – إذا كان المودول N بسيطاً فإن التشاكل f غامر .

الحل

(1) – إن $\ker f = M$ مودول جزئي من المودول M وبما أن المودول M بسيط فإن $\ker f = 0$ أو $\ker f = M$ وبما أن التشاكل f ليس صفرياً فإن $\ker f \neq M$ وبالتالي $\ker f = 0$ إذن التشاكل f متباين .

(2) – إن $\mathrm{Im}\, f$ مودول جزئي من المـــودول N وبمـــا أن N بـــسيط فإمـــا $\mathrm{Im}\, f = O$ أو $\mathrm{Im}\, f = N$ وبما أن التشاكل f ليس صـــفرياً فـــإن $\mathrm{Im}\, f \neq O$ وبالتالي $\mathrm{Im}\, f = N$ إذن التشاكل f غامر .

التمرين الثالث :

ليكن M مودولاً على حلقة R . أثبت أن القضيتين التاليتين متكافئتان .

(1) – المودول M بسيط .

(2) – يوجد مثالي يساري أعظمي I في R بحيث يكون $M \cong R/I$.

الحل

(2) $\Rightarrow$ (1) : بمـــا أن المـــودول M بـــسيط فـــإن $M = Rx$ حيـــث $0 \neq x \in M$ ، لنأخذ العلاقة :

$$f : R \to Rx$$
$$f(r) = r.x \qquad (\forall r \in R)$$

فنجد أن f تطبيق لأن أياً كان $r_1, r_2 \in R$ بحيث $r_1 = r_2$ فإن $r_1.x = r_2 x$ أي $f(r_1) = f(r_2)$.

كما أن التطبيق f غامر لأن :

أياً كان $r.x \in Rx$ فإنه يوجد $r \in R$ بحيث $f(r) = r.x$

وأن f تشاكل مودولي لأن :

أياً كان $r_1, r_2 \in R$ و أياً كان $\alpha \in R$ فإن :

$$\begin{aligned} f(r_1 + r_2) &= (r_1 + r_2).x \\ &= r_1.x + r_2.x \\ &= f(r_1) + f(r_2) \end{aligned}$$

كما أن

$$\begin{aligned} f(\alpha.r_1) &= (\alpha.r_1).x \\ &= \alpha.(r_1.x) \\ &= \alpha.f(r_1) \end{aligned}$$

وحسب مبرهنات التماثل يكون :

$$R/\ker f \cong Rx$$

لنفرض أن $\ker f = I$ فيكون $M \cong R/I$ وأن I مثالي يساري في R ولنثبت أن I أعظمي في R.

ليكن A مثالياً يسارياً في R بحيث $I \subset A \subset R$ ، وعندئذٍ A/I مودول جزئي من المودول R/I. وبما أن $M \cong R/I$ فإنه يوجد تماثل $\varphi : R/I \to M$ وبالتالي $\varphi(A/I)$ هو مودول جزئي من المودول M وبما أن M بسيط ، فإما $\varphi(A/I) = O$ وعندئذٍ $A/I \subset \ker\varphi = I$ ومنه $A = I$. أو $\varphi(A/I) = M$ وبما أن φ غامر فإن $\varphi(R/I) = M$ أي $\varphi(R/I) = \varphi(A/I) = M$ وبالتالي أياً كان $r \in R$ فإنه يوجد $a \in A$ بحيث $\varphi(r+I) = \varphi(a+I)$ ومنه $r+I = a+I$ (لأن φ تماثل) وبالتالي $r-a \in I$ أي يوجد $\alpha \in I$ بحيث $r-a = \alpha$ ومنه $r = a+\alpha \in A+I$ وبما أن $I \subseteq A$ فإن $r \in B$ وبالتالي $R \subset A$ أي $A = R$. إذن المثالي اليساري I أعظمي في R.

(1) $\Rightarrow$ (2) : بما أن $M \cong R/I$ حيث I مثالي يساري أعظمي في R فإنه يوجد تماثل $\varphi : M \to R/I$. ليكن A مودولاً جزئياً من M عندئذٍ يكون $\varphi(A)$ مودولاً جزئياً من المودول R/I وبالتالي يوجد مثالي B في R يحوي I ، بحيث $\varphi(A) = B/I$ وبما أن I مثالي يساري أعظمي في R فنكون أمام الحالتين :

(1) – $B = I$ وبالتالي $B/I = I$ أي $\varphi(A) = I$ وبالتالي $A = O$.

(2) – $B = R$ وبالتالي $\varphi(A) = R/I$ وبما أن φ تماثل فإن $A = M$.

تمرينات (5)

التمرين الأول :

ليكن M مودولاً على حلقة R منتهي الارتفاع وليكن N مودولاً جزئياً من M . والمطلوب :

1- أثبت أنه يوجد برج جوردان – هولدر

$$M = M_0 \supset M_1 \supset \ldots\ldots \supset M_r = O$$

بحيث يكون $M_k = N$ (حيث $k \in \{0,1,2,\ldots.r\}$) .

2- أثبت أن

$$h(N) + h(M/N) = h(M)$$

3- استنتج أن

$$N = M \quad \Leftrightarrow \quad h(N) = h(M)$$

التمرين الثاني

ليكن $f : M \to N$ تشاكلاً مودولياً وليكن M منتهي الارتفاع . والمطلوب :

1- أثبت أن كلاً من المودولين $\operatorname{Im} f, \ker f$ منتهيا الارتفاع

2- أثبت أن

$$h(\ker f) + h(\operatorname{Im} f) = h(M)$$

التمرين الثالث

ليكن P عدداً أولياً ولنأخذ المجموعة :

$$Q_p = \{x \in Q; \quad x = k/p^n; \quad k \in z, n \in N\}$$

1- أثبت أن Q_p مودول جزئي على الحلقة Z

2- أثبت أن المودول Q_p/Z (على الحلقة Z) هو أرتني لكنه ليس نوثرياً .

التمرين الرابع

ليكن M مودولاً بسيطاً على الحلقة R . أثبت أن الحلقة $End_R(M)$ حقل غير تبديلي .

التمرين الخامس

ليكن M مودولاً يحقق ACC . أثبت أن كل مودول جزئي N من M يكون منتهي التوليد .

Damascus University

الفصل السادس

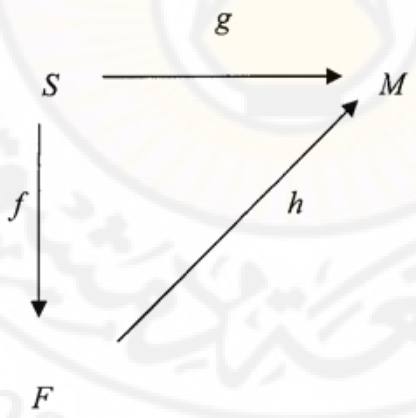
المودولات الحرة

Free modules

6-1- المودولات الحرة على مجموعة Free modules on set

تعريف

لتكن R حلقة ، S مجموعة غير خالية . نعرف المودول الحر على S بأنه الثنائية (F,f) حيث إن F مودول على الحلقة R و $f:S\to F$ تطبيق ، بحيث يكون من أجل أي مودول M على الحلقة R وأي تطبيق $g:S\to M$ يوجد تشاكل مودولي وحيد $h:F\to M$ يجعل المخطط :



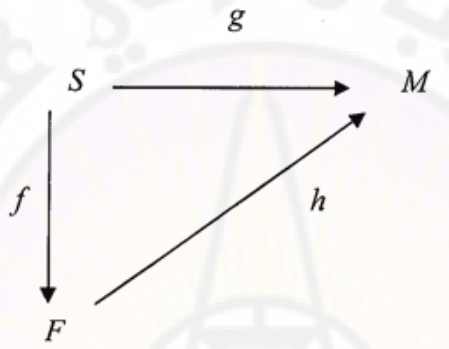
تبادلياً .

مبرهنة (6-1)

إذا كان (F,f) مودولاً حراً على مجموعة غير خالية S ، فإن التطبيق f متباين وأن $F=\langle \operatorname{Im} f\rangle$.

الإثبات

بما أن (F,f) مودول حر على S فإنه من أجل أي مودول M على الحلقة R وأي تطبيق $g:S\to M$ يوجد تشاكل مودولي وحيد $h:F\to M$ يجعل المخطط



تبادلياً .

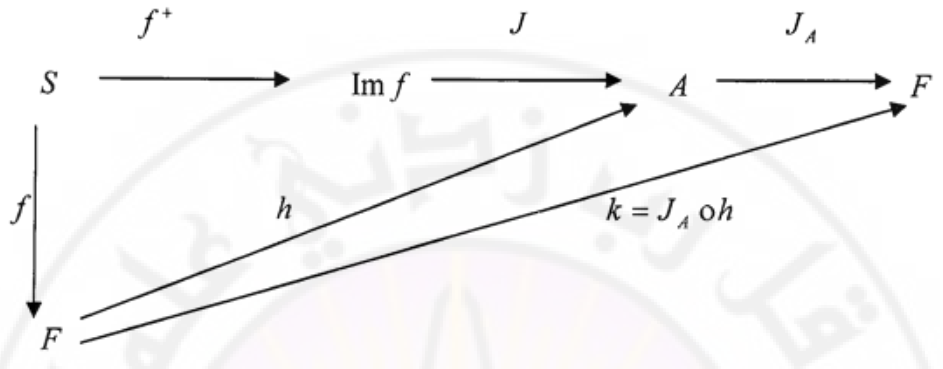
ليكن $x,y\in S$ بحيث $x\neq y$ عندئذٍ المخطط السابق يبقى تبادلياً من أجل التطبيق $g:S\to M$ الذي يحقق $g(x)\neq g(y)$ وبما أن المخطط تبادلي فإن $hof=g$ وبالتالي يكون :

$$h(f(x))=g(x)\neq g(y)=h(f(y))$$

وبما أن h تطبيق ينتج أن $g(x)\neq g(y)$. وهذا ما يثبت أن التطبيق f متباين .

لنثبت الآن أن $F=\langle \operatorname{Im} f\rangle$. لنفرض أن A المودول جزئي من F المولد بالمجموعة $\operatorname{Im} f$ ،ولنبرهن على أن $A=F$.

لنأخذ المخطط



حيث J التباين القانوني في $\mathrm{Im}\, f$ ، و J_A التباين القانوني في A ، f^+ هو التطبيق

$$f^+ : S \to \mathrm{Im}\, f$$

$$(\forall x \in S) \qquad f^+(x) := f(x)$$

بما أن F حر على S فإنه يوجد تشاكل مودولي وحيد $k : F \to A$ بحيث يكون $h \circ f = j \circ f$. وأن التطبيق $k : F \to F$ المعرف بالعلاقة $k = J_A \circ h$ هو تشاكل مودولي من أجله يكون $k \circ f = J_A \circ J \circ f^+$ وبما أن F حر على S فإنه يوجد تشاكل مودولي وحيد $v : F \to F$ يجعل المخطط السابق تبادلياً أي $v \circ f = J_A \circ J \circ f^+$ ، وبالتالي $v = I_F$ ، وينتج من ذلك أن $J_A \circ h = k = I_F$ وهذا يعني أن التشاكل J_A غامر وبما أنه تباين قانوني فهو التطبيق المطابق وبالتالي $A = F$.

مبرهنة (6-2)

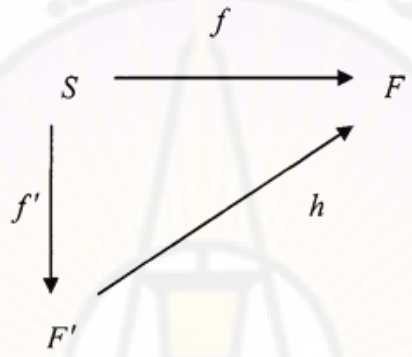
إذا كان (F, f) مودولاً حراً على مجموعة غير خالية S فإن القضيتين التاليتين متكافئتان :

I- (F', f') مودول حر على المجموعة S.

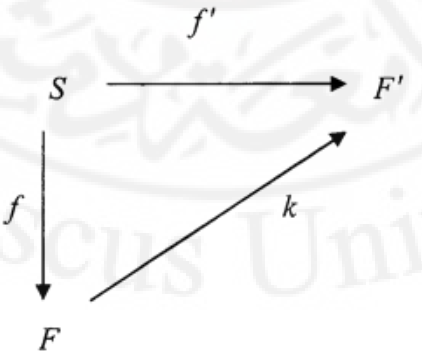
II- يوجد تماثل مودولي وحيد $h: F \to F'$ بحيث $h \circ f = f'$.

الإثبات

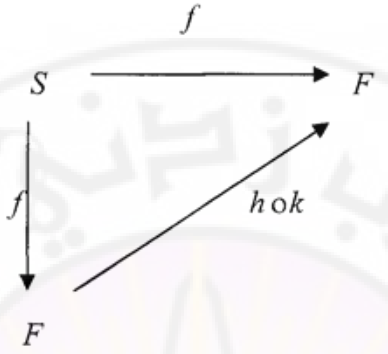
(I $\Rightarrow$ II) : لنفرض أن (F', f') مودول حر على المجموعة S . عندئذٍ من أجل المودول F ومن أجل التطبيق $f: S \to F$ يوجد تشاكل مودولي وحيد $h: F' \to F$ يجعل المخطط



تبادلياً . أي $h \circ f' = f$ ، وبما أن (F, f) مودول حر على المجموعة S فإنه من أجل المودول F' ومن أجل التطبيق $f': S \to F'$ ، يوجد تشاكل مودولي وحيد $k: F \to F'$ يجعل المخطط

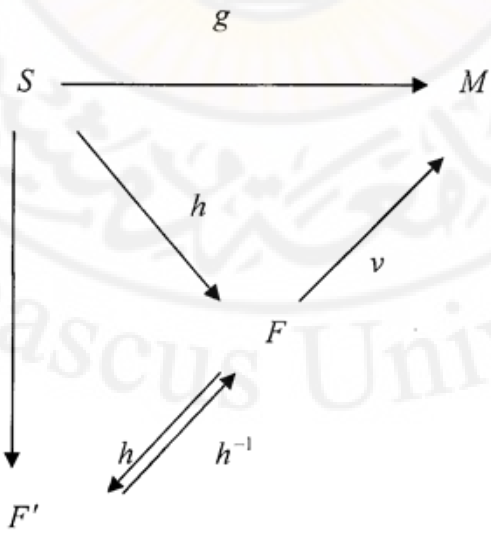


تبادليـــــاً . أي $h\circ f' = f$ ، وبالتـــــالي يكـــــون $h\circ(k\circ f) = f$ أي $(h\circ k)\circ f = f$ أي أن المخطط



تبادلي وبما أن (F,f) مودول حر على S فإن $h\circ k$ هو التشاكل وحيد الذي يحقق $(h\circ k)\circ f = f$ وبما أن $I_F \circ f = f$ ينتج أن $h\circ k = I_F$. وبشكل مشابه نجد أيضاً أن $k\circ h = I_{F'}$ وهذا يعني أن كلاً من التشاكلين k,h تماثل .

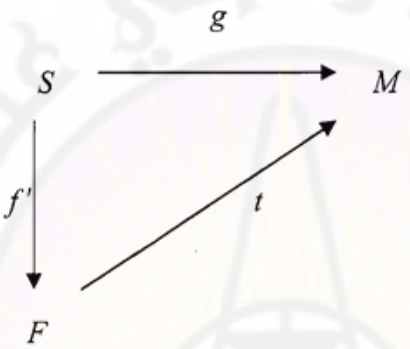
(I $\Rightarrow$ II) : لنفرض وجود تماثل مودولي وحيد $h: F \to F'$ بحيث يكون $hof = f'$ عندئـــذ $f = h^{-1}\circ f'$. لـــيكن M مـــودولاً علـــى R ولـــيكن $g: S \to M$ تطبيقاً ولنتأمل المخطط :



وبما (F,f) مودول حر على المجموعة S فإنه يوجد تشاكل مودولي وحيد $v:F\to M$ من أجله يكون $vof=g$. لكن $h^{-1}of'=f$ وبالتالي يكون $vo(h^{-1}of')=g$ أي $(voh^{-1})of'=g$. إذن يوجد تشاكل مودولي وحيد

$$t=voh^{-1}:F'\to M$$

يجعل المخطط



تبادلياً . إذن (F',f') مودول حر على المجموعة S .

مبرهنة (6-3)

أياً كانت S مجموعة غير خالية و أياً كانت الحلقة R فإن يوجد مودول حر على المجموعة S.

الإثبات

لنأخذ $F=R^S$ مجموعة كل التطبيقات $v:s\to R$ التي تحقق $v(s)=o$ من أجل جميع $s\in S$ ، باستثناء عدد منته منها . ولنعرف على F قانوني تشكيل :

$$(\forall s\in S) \quad : \quad (v+\mu)(s)=v(s)+\mu(s)$$

$$(\forall\lambda\in R),(\forall s\in S) \quad : \quad (\lambda v)(s)=\lambda v(s)$$

وذلك أياً كان $v,\mu\in F$.

فنجد أن F مودول على R . ولنأخذ التطبيق

$$f : S \to F$$
$$s \; \alpha \; f_s$$

حيث f_s هو التطبيق $f_s : S \to R$ المعرف كما يلي :

$$f_s(t) = \begin{cases} 1 & if \quad t = s \; ; \\ o & if \quad t \neq s. \end{cases}$$

ولنثبت أن (F, f) مودول حر على المجموعة S . ليكن M مودولاً ما على R وليكن $g : S \to M$ تطبيقاً ما . ولنأخذ التطبيق :

$$h(v) = \sum_{s \in S} v(s) g(s) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (*)$$

فنجد أن h تشاكل مودولي كما أن :

أياً كان $s \in S$ فإن :

$$h(f_s)t = \sum_{t \in S} f_s(t).g(t) = g(t) = g(s)$$

أي أن $hof_s = g$. ولإتمام المطلوب يكفي أن نثبت أن التشاكل h وحيد .

من جهة أولى . أياً كان $v \in F, \quad t \in S$ فإن :

$$v(t) = v(t).1_R = \sum_{s \in S} v(s).f_s(t) = (\sum_{s \in S} v(s) f_s)(t)$$

أي أن

$$\forall v \in F \quad : \quad v = \sum_{s \in S} v(s) f_s \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (**)$$

لنفرض الآن أن $h' : F \to M$ تشاكل مودولي آخر من أجله يكون $h' o f = g$ عندئذٍ وحسب العلاقتين (*) و (**) نجد أن

$$(\forall v \in F): \quad h'(v) = \sum_{s \in S} v(s) h'(f_s) = \sum_{s \in S} v(s) g(s) = h(v)$$

إذن التشاكل h وحيد .

6-2- المودول الحر Free module

تعريف (1)

ليكن M مودولاً على حلقة R. ونقول عن المودول M إنه حر إذا وجد مودول حر (F, f) على مجموعة غير خالية S بحيث $M \cong F$.

تعريف (2)

لتكن S مجموعة غير خالية من مودول M على حلقة R. نقول عن S إنها حرة على R (Free over R) إذا تحقق الشرط التالي :

من أجل أي عدد منته $x_1, x_2, ..., x_n$ من عناصر S يتحقق الاقتضاء :

$$\left[\sum_{i=1}^{n} \alpha_i . x_i = o\right] \Rightarrow [\ \alpha_i = o \quad ; \quad i = 1,2,.....,n\ ]$$

ونقول عن S إنها قاعدة (Basis) للمودول M على R إذا كانت S حرة و $M = \langle S \rangle$.

ملاحظة مهمة

نعلم أن أية مجموعة وحيدة العنصر $S = \{v\}$ (حيث $v \neq o$) من فضاء شعاعي على حقل F هي مجموعة حرة ، لكن هذا غير صحيح في المودول . فمثلاً الزمرة الجمعية $M = \langle a \rangle_n$ ذات المرتبة المنتهية n هي مودول على الحلقة Z و لنأخذ المجموعة $\{a\}$ فنجد أن $n.a = o$ $(n \neq 0)$ أي أن المجموعة $\{a\}$ ليست حرة .

كما أنه إذا كان V فضاء شعاعياً على حقل F و كان $0 \neq \lambda \in F$ وكان $v \in V$ فإن $\lambda v = o$ يقتضي أن $v = o$ لأن :

$$v = 1.v = (\lambda^{-1}.\lambda).v = \lambda^{-1}(\lambda.v) = \lambda^{-1}.o = o$$

لكن هذا غير صحيح في المودولات لأنه ليس بالضرورة أن يكون $\lambda^{-1} \in R$.

مبرهنة (6-4)

إذا كانت S مجموعة غير خالية من مودول M على حلقة R فإن القضيتين التاليتين متكافئتان :

I - S قاعدة للمودول M .

II- كل عنصر $x \in M$ يكتب كتركيب خطي وبشكل وحيد لعناصر S .

الإثبات

(I $\Rightarrow$ II) : بما أن S قاعدة للمودول M على R فإن $M = \langle S \rangle$ وبالتالي كل عنصر $x \in M$ يكتب كتركيب خطي لعناصر S . ولنفرض أن :

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i$$

حيث $x_1, x_2, ..., x_n$ عناصر من S . عندئذ يكون :

$$\sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \mu_i) x_i = 0$$

وبما أن المجموعة S حرة فإن $\lambda_i - \mu_i = 0$ من أجل جميع القيم $i = 1,2,....,n$ أي $\lambda_i = \mu_i$ وهذا ما يثبت القضية (II) .

(I $\Rightarrow$ II) : بما أن كل عنصر $x \in M$ يكتب كتركيب خطي لعناصر S فإن $M = \langle S \rangle$. ولنبرهن على أن S حرة . لتكن $x_1, x_2, ..., x_n$ عناصر من S ولنأخذ $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0$ وبما أن $\sum_{i=1}^{n} o x_i = 0$ وحسب الفرض العنصر O يكتب كتركيب خطي وبشكل وحيد لعناصر S وبالتالي

$$\alpha_i = 0 \qquad \forall i = 1,2,....., n$$

إذن S حرة .

أمثلة

1- لتكن R حلقة ، n عدداً صحيحاً موجباً . عندئذٍ المجموعة $S=\{e_1,e_2,.....,e_n\}$ حيث

$$e_1=(1,o,.....,o);\quad e_2=(o,1,o,.....,o);\quad .....,e_n=(o,o,.....,1)$$

قاعدة للمودول R^n .

2- لنأخذ المودول $M=\langle a\rangle_n$ على الحلقة Z فنجد المجموعة $\{a\}$ مولدة للمودول M لكن المجموعة $\{a\}$ ليست حرة وبالتالي المودول $M=\langle a\rangle_n$ لا يمتلك قاعدة .

3- لنأخذ المودول $M=\langle a\rangle_n$ على الحلقة Z فنجد أن المجموعة $\{a\}$ مولدة للمودول M وإنها حرة (لأن العنصر a ذو مرتبة غير منتهية) وبالتالي $\{a\}$ قاعدة للمودول $M=\langle a\rangle_n$.

مبرهنة (6-5)

إذا كانت R حلقة وكانت S مجموعة غير خالية فإن المودول $F=R^S$ يمتلك قاعدة هي $\mathrm{Im}\,f$.

الإثبات

حسب المبرهنة (6-1) ينتج أن $F=\langle \mathrm{Im}\,f\rangle$ ولنثبت أن المجموعة $\mathrm{Im}\,f$ حرة لتكن $f(x_1),f(x_2),.....,f(x_n)$ عناصر من $\mathrm{Im}\,f$ ولنفرض أن :

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f(x_i)=\sum_{i=1}^{n}\beta_i f(x_i)$$

ولنعرف التطبيقين $\nu,\mu: S\longrightarrow R$ كما يلي :

$$\nu(x)=\begin{cases} o & if \quad (\forall i)x\neq x_i\,; \\ \alpha_i & if \quad (\exists i)x=x_i\,. \end{cases}$$

$$\mu(x)=\begin{cases} o & if \quad (\forall i)x\neq x_i\,; \\ \beta_i & if \quad (\exists i)x=x_i\,. \end{cases}$$

واضح أن $v,\mu \in F$ وحسب العلاقة (**) في المبرهنة (6-3) يكون

$$v = \sum_{s\in S} v(s) f_s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i)$$

$$\mu = \sum_{s\in S} \mu(s) f_s = \sum_{i=1}^{n} \beta_i f(x_i)$$

وبالتالي $v = \mu$ ومن ثم

$$\alpha_i = \beta_i \qquad i = 1,2,.....,n$$

وهذا يبين أن $\mathrm{Im}\, f$ حرة .

نتيجة

إذا كان (M,φ) مودولاً حراً على مجموعة غير خالية S فإن $\mathrm{Im}\,\varphi$ قاعدة للمودول M .

تعريف

ليكن M مودولاً على حلقة R نقول عن المودول M إنه حر إذا وجدت قاعدة له .

أمثلة :

1- المودول R^n حر لأنه يمتلك قاعدة $S = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ حيث

$$e_1 = (1, o, ..., o); \quad e_2 = (o,1, ..., o); \quad .....; \quad e_n = (o, o, ..., 1)$$

تسمى هذه القاعدة بالقاعدة القانونية للمودول R^n

2- كل حلقة هي مودول حر على نفسها .

3- المودول $M = \langle a \rangle_\infty$ حر لأنه يمتلك القاعدة $\{a\}$.

4-المودول $M = \langle a \rangle_\infty$ ليس حراً لأنه لا يمتلك قاعدة .

مبرهنة (6-6)

إذا كان M مودولاً على حلقة R وكان M حراً قاعدته $(x_i)_{i=1,2,....,n}$ ، وكان N مودولاً على الحلقة R وكانت $(y_i)_{i=1,2,....,n}$ عناصر من N فإنه يوجد تشاكل مودولي وحيد $f : M \longrightarrow N$ من أجله يكون :

$$f(x_i) = y_i \qquad i = 1,2,....,n$$

الإثبات

بما أن $(a_i)_{i=1,2,....,n}$ قاعدة للمودول M فإنه كل عنصر $x \in M$ يكتب كتركيب خطي بالشكل الوحيد .

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \qquad \alpha_i \in R$$

وبالتالي العلاقة

$$f : M \longrightarrow N$$
$$f(x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i$$

هي تطبيق و أن هذا التطبيق يحقق العلاقة

$$f(x_i) = y_i \qquad i = 1,2,....,n$$

كما أن التطبيق f تشاكل مودولي لأنه أياً كان $x, y \in M$; $\alpha, \beta \in R$ فإن $y = \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i$, $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$ ويكون :

$$f(\alpha x + \beta y) = f(\alpha . \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i + \beta . \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i)$$

$$= f(\sum_{i=1}^{n}(\alpha.\alpha_i + \beta.\beta_i)x_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(\alpha.\alpha_i + \beta.\beta_i)y_i$$

$$= \alpha.\sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_i + \beta.\sum_{i=1}^{n}\beta_i y_i$$

$$= \alpha.h(x) + \beta.h(y)$$

لنفرض أن $k : M \longrightarrow N$ تشاكل مودولي آخر من أجله

$$k(a_i) = b_i \qquad i = 1,2,.....,n$$

عندئذٍ أياً كان $x \in M$ فإن :

$$k(x = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i) = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i k(a_i) = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i b_i = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i f(a_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i a_i) = h(x)$$

أي أن التشاكل h وحيد .

نتيجة

إذا كان $f, g : M \longrightarrow N$ تشاكلين مودولين وكان M حراً قاعدته $(a_i)_{i=1,.....,n}$ فإن

$$[f = g] \quad \Leftrightarrow \quad [f(a_i) = g(a_i) \qquad (\forall i = 1,2,.....,n)]$$

مبرهنة (6-7)

إذا كان M مودولاً على حلقة R وكان M حراً قاعدته B ، فإن B هي المجموعة الجزئية الأصغرية المولدة للمودول M وهي المجموعة الجزئية الأعظمية الحرة في M .

الإثبات

لنفرض أن B ليست مجموعة مولدة أصغرية للمودول M عندئذٍ توجد مجموعة جزئية A مولدة للمودول M بحيث $A \subset B$ ويكون من أجل كل عنصر $x \in B - A$ ، وباعتبار $B - \{x\}$ مولدة لـ M فإن :

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$$

حيث $x_1, x_2, ..., x_n$ عناصر مختلفة من $B - \{x\}$ و $\alpha_i \in R$ ومنه :

$$1_R . x + \sum_{i=1}^{n} (-\alpha_i) x_i = o$$

وهذا يعني أن المجموعة B ليست حرة وهذا يخالف الفرض . إذن B هي المجموعة الأصغرية المولدة للمودول M .

لنفرض أن $y \in M - B$ وبما أن المجموعة B قاعدة للمودول M فإنه توجد عناصر مختلفة

$x_1, x_2, ..., x_n$ من B و $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in R$ بحيث يكون

$$y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$$

ومنه :

$$1_R . y + \sum_{i=1}^{n} (-\alpha_i) x_i = o$$

وهذا يعني أن المجموعة $B \cup \{y\}$ ليست حرة .

إذن B هي المجموعة الجزئية الأعظمية الحرة في M .

قضية مهمة جداً :

حسب التعريف (1) في البند 6 –2 وحسب المبرهنة (6–3) نجد أنه إذا كانت R حلقة فإنه يمكننا بناء مودول M على R بحيث يكون حراً وعدد عناصر

قاعدته عدد مثبت n . من أجل ذلك نأخذ مجموعة S عدد عناصرها يساوي n ولتكن مثلاً $S=\{v_1,v_2,.....,v_n\}$ ونأخذ المجموعة

$$\wp=\left\{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i \qquad \alpha_i\in R\right\}$$

ولنعتبر في $\wp$ أن :

$$\left[\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i=\sum_{i=1}^{n}\beta_i v_i\right]\Leftrightarrow[\alpha_i=\beta_i \qquad \forall i=1,2,.....,n]$$

ولنعرف على $\wp$ قانوني تشكيل :

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i.v_i+\sum_{i=1}^{n}\beta_i v_i=\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i+\beta_i)v_i$$

$$\alpha.\sum_{i=1}^{n}\alpha_i.v_i=\sum_{i=1}^{n}\alpha.\alpha_i.v_i$$

وذلك أياً كان $\sum_{i=1}^{n}\beta_i.v_i$, $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i,v_i$ من $\wp$ و α من R فنجد بسهولة أن $\wp$ مودولٌ حرٌ قاعدته S . نسمي $\wp$ المودول الحر المبتذل الذي قاعدته S .

مبرهنة (6-8)

كل مودول منتهي التوليد على حلقة R يماثل مودول الخارج لمودولٍ حر ذو قاعدة منتهية .

الإثبات

ليكن M مودولاً منتهي التوليد على حلقة R وليكن

$$M=\langle s\rangle \quad ; \quad s=\{u_1,u_2,.....,u_n\}$$

وليكن $\wp$ المودول الحر المبتذل المبني في القضية السابقة والذي يمتلك قاعدة عدد عناصرها يساوي n ولنفرض أن هذه القاعدة هي $B=\{v_1,v_2,.....,v_n\}$

لنأخذ العلاقة :

$$f : \wp \longrightarrow M$$

المعرفة كما يلي :

$$f(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i \qquad \alpha_i \in R$$

فنجد بسهولة أن العلاقة المعرفة أعلاه هي تشاكل مودولي وحسب مبرهنات التماثل يكون :

$$M \cong \wp / \ker f$$

وبذلك يتم المطلوب.

تمرينات محلولة

التمرين الأول

ليكن M مودولاً على حلقة تبديلية R . أثبت تكافؤ القضيتين الآتيتين

I – المودول M منتهي التوليد .

II– يوجد تشاكل غامر $f:R^n \longrightarrow M$ (حيث n عدد صحيح موجب)

الحل :

(I $\Rightarrow$ II) لنفرض أن المودول M مولد بالمجموعة $S=\{v_1,v_2,.....,v_n\}$ ولنأخذ العلاقة :

$$f:R^n \longrightarrow M$$

المعرفة كما يلي :

$$f(\alpha_1,\alpha_2,.....,\alpha_n)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i$$

فنجد أن العلاقة f تطبيق لأنه

يأ كان $(\beta_1,\beta_2,.....,\beta_n)$ و $(\alpha_1,\alpha_2,.....,\alpha_n)$ من R^n بحيث $(\alpha_1,\alpha_2,.....,\alpha_n)=(\beta_1,\beta_2,.....,\beta_n)$ فإن $\alpha_i=\beta_i(\forall i=1,2,.....,n)$

وبالتالي $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i=\sum_{i=1}^{n}\beta_i v_i$ أي أن

$$f(\alpha_1,\alpha_2,.....,\alpha_n)=f(\beta_1,\beta_2,.....,\beta_n)$$

كما أن التطبيق f تشاكل مودولي لأنه

أياً كان $(\beta_1,\beta_2,.....,\beta_n)$ ، $(\alpha_1,\alpha_2,.....,\alpha_n)$ من R^n و أياً كان $\lambda\in R$ فإن :

$$f((\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)+(\beta_1,\beta_2,...+\beta_n)=f(\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,...,\alpha_n+\beta_n)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i+\beta_i)v_i$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i.v_i+\sum_{i=1}^{n}\beta_{.i}v_i$$
$$=f(\alpha_1,\alpha_2,.....,\alpha_n)+f(\beta_1,\beta_2,.....,\beta_n)$$

وأن

$$f(\lambda(\alpha_1,\alpha_2,.....,\alpha_n))=f(\lambda\alpha_1,\lambda\alpha_2,.....,\lambda\alpha_n)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\lambda\alpha_i v_i$$
$$=\lambda\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i$$
$$=\lambda f(\alpha_1,\alpha_2,.....,\alpha_n)$$

كما أن التشاكل f غامر لأنه : أياً كان $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i.v_i$ من M فإن $(\alpha_1,\alpha_2,.....,\alpha_n)\in R$ ويكون $f(\alpha_1,\alpha_2,.....,\alpha_n)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i.v_i$. إذن f تشاكل مودولي غامر .

(I $\Rightarrow$ II) : لنفرض أن $f:R^n\longrightarrow M$ تشاكل مودولي غامر . وبما أن المودول R^n حر يقبل $\{e_1,e_2,.....,e_n\}$ قاعدة له فإنه أياً كان $m\in M$ يوجد $x\in R^n$ (لأن f غامر) بحيث $m=f(x)$ وبما أن $\{e_1,e_2,.....,e_n\}$ قاعدة للمودول R^n فإن

$$x=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i \quad ; \quad \alpha_i\in R$$

وبالتالي $m=f(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i)$ وبما أن f تشاكل مودولي ينتج أن $m=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f(e_i)$ وهذا ما يثبت أن المجموعة $\{f(e_1),f(e_2),.....,f(e_n)\}$

مولدة للمودول M . أي أن المودول M منتهي التوليد .

التمرين الثاني

ليكن M,N مودولين على حلقة R وليكن N حراً قاعدته $\{y_1,y_2,.....,y_n\}$ وليكن $f:M\longrightarrow N$ تشاكلاً مودولياً غامراً . أثبت أنه يوجد مودول جزئي حر M_1 من M بحيث $M\cong M_1\oplus\ker f$

الحل

بما أن التشاكل f غامر فإنه من أجل $\{y_1,y_2,.....,y_n\}$ توجد $\{x_1,x_2,.....,x_n\}$ من M بحيث

$$f(x_i)=y_i \qquad i=1,2,.....,n$$

إن المجموعة $\{x_1,x_2,.....,x_n\}$ حرة لأنه إذا كان $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i=o$ (حيث $\alpha_i=R$) فإن $f(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i)=o$ وبما أن f تشاكل مودولي ينتج أن $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f(x_i)=o$ وبالتالي $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_i=o$ وبما أن $\{y_1,y_2,.....,y_n\}$ حرة فإن

$$\alpha_i=o \qquad \forall i=1,2,....,n$$

وبالتالي المودول $M_1=\langle x_1,x_2,.....,x_n\rangle$ مودولاً جزئياً حراً من M . ولنثبت أن $M=M_1\oplus\ker f$ ، لذلك يكفي أن نثبت القضيتين

(1) $\quad M=M_1+\ker f$

(2) $\quad M_1\ \mathrm{I}\ \ker f=O$

من أجل (1) أياً كان $x\in M$ فإن $f(x)\in N$ وبالتالي

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}\beta_i y_i \quad ; \quad \beta_i\in R$$

ومنـــــــه $f(x)-\sum_{i=1}^{n}\beta_i y_i = o$ وبمـــــا أن f غـــــامر ينـــــتج أن

$f(x)-\sum_{i=1}^{n}\beta_i f(x_i)=o$ أي $f(x-\sum_{i=1}^{n}\beta_i x_i)=0$ ومنه $x-\sum_{i=1}^{n}\beta_i x_i \in \ker f$

وبملاحظة أن

$$x \in M \quad , \quad \sum_{i=1}^{n}\beta_i x_i \in M_1$$

ينتج أن $M = M_1 + \ker f$.

من أجل (2) : أياً كان $a \in M_1 \text{ I } \ker f$ فإن

$$a \in M_1 \quad , \quad a \in \ker f$$

وبالتالي

$$a=\sum_{i=1}^{n}\gamma_i x_i \quad , \quad f(a)=o \qquad\qquad \gamma_i \in R$$

وبالتالي $f(\sum_{i=1}^{n}\gamma_i x_i)=o$ ، أي $\sum_{i=1}^{n}\gamma_i f(x_i)=o$ ومن ثم $\sum_{i=1}^{n}\gamma_i y_i = o$ وكون المجموعة $\{y_1, y_2, ..., y_n\}$ حـــرة فـــإن $(\forall i = 1,2,.....,n)\gamma_i = o$ وبالتـــالي $a = o$. إذن $M_1 \text{ I } \ker f = O$. وذلك يتم المطلوب .

<u>التمرين الثالث</u>

ليكن M مودولاً على حلقة R ولتكن $X=(x_i)_{i\in I}$ مجموعة جزئية غير خالية من M . أثبت صحة التكافؤ :

$$M=\oplus_{i\in I} Rx_i \quad \Leftrightarrow \quad \text{المودول } M \text{ حر قاعدته } X$$

الحل

لنفرض أن M مودول حر قاعدته $X=(x_i)_{i\in I}$ عندئذٍ $M=\langle X\rangle$ وبالتالي

$$\forall m \in M: \quad m=\sum_{i\in I}\alpha_i x_i$$

أي أن $M = \sum_{i\in I} Rx_i$ ، وبما أن $X = (x_i)_{i\in I}$ قاعدة للمودول M فهي حـرة أي أن صفر المودول M يكتب بالشكل الوحيد $o = o + o + \ldots\ldots + o$ وهذا ما يثبت أن المجموع $M = \sum_{i\in I} Rx_i$ هو مجموع مباشر وبالتالي $M = \oplus_{i\in I} Rx_i$.

لنفرض الآن أن $M = \oplus_{i\in I} Rx_i$ وبالتالي المجموعة $X = (x_i)_{i\in I}$ هـي مـن المودول M وأن

$$\forall m \in M: \quad m = \sum_{i\in I} \alpha_i x_i \quad ; \quad \alpha_i \in R$$

أي أن $M = \langle X \rangle$. كما أنه إذا كان $\sum_{i\in I} \alpha_i x_i = o$ فإن

$$(\forall i \in I) \qquad \alpha_i = o \qquad \left(\text{لأن } M = \oplus_{i\in I} Rx_i \right)$$

إذن المودول M حر قاعدته X .

تمرينات (6)

التمرين الأول :

لتكن B مجموعة غير خالية من مـــودول $M(R)$ ولـــيكن $J_B : B \longrightarrow M$ التباين القانوني . برهن أن القضيتين التاليتين متكافئتان :

I – B قاعدة للمودول M .

II – (M, J_B) مودول حر على B .

التمرين الثاني :

لتكن M, N مودولين حرين وليكن $f : M \longrightarrow N$ تشاكلاً مودولياً ، برهن أن القضيتين التاليتين متكافئتان :

I – التشاكل f تماثل .

II– إذا كانت $(a_i)_{i\in I}$ قاعدة للمودول M فإن $(f(a_i))_{i\in I}$ قاعدة للمودول N .

التمرين الثالث :

لتكن $(M_i)_{i=1,2,\ldots,n}$ أسرة مودولات جزئية حرة من مودول ولتكن B_i قاعـــدة للمودول $M_i \ (i = 1,2,\ldots,n)$ من مودولٍ $M(R)$ وليكن $M = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$.

برهن أن $\bigcup_{i=1}^{n} B_i$ قاعدة للمودول M .

التمرين الرابع :

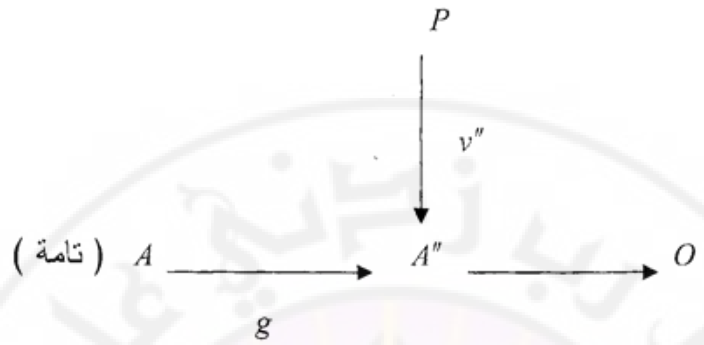
ليكن $f : M \longrightarrow M$ تشاكلاً مودولياً . المطلوب :

1– إذا كان التشاكل f متبايناً فأثبت أن f ليس قاسماً يسارياً للصفر في الحلقة $End_R(M)$.

2– إذا كان المودول M حراً و $f \in End_R(M)$ ليس قاسماً يسارياً للصفر في الحلقة $End_R(M)$ ، فأثبت أن التشاكل f يكون متبايناً .

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

وبالعكس . لنفرض أنه يوجد تشاكل مودولي $v:P\longrightarrow A$ يجعل المخطط :



تبادلياً أي أن $g\circ v=v''$ ومنه $g_*(v)=v''$ وبالتالي التشاكل

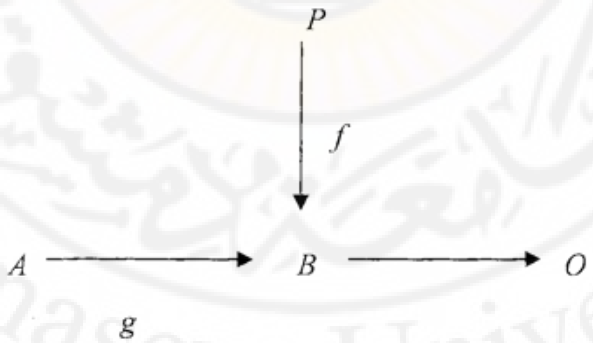
$g_*: Hom(P,A)\longrightarrow hOM(P,A'')$ غامر .

مبرهنة (7-2)

كل مودول حر يكون إسقاطياً

الإثبات

لنفرض أن M مودول حر قاعدته S ، ولنأخذ مخطط التشاكلات المودولية :

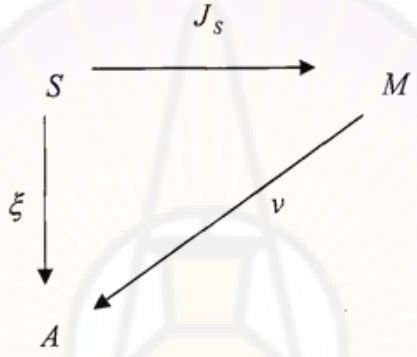


ولنبرهن على وجود تشاكل مودولي $v:M\longrightarrow A$ يجعل المخطط السابق تبادلياً . بما أن سطر المخطط هو متتالية تامة فإن التشاكل المودولي g غامر

وبالتالي من أجل كل $x \in S$ يوجد $a \in A$ بحيث يكون $f(x) = g(a)$ وبالتالي من أجل كل $x \in S$ نختار عنصر $a_x \in A$ بحيث $f(x) = g(a_x)$ وبذلك يمكننا من صياغة التطبيق :

$$\xi : S \longrightarrow A$$
$$\xi(x) = a_x \qquad (\forall x \in S)$$

وكون S قاعدة للمودول M فيمكن تمديد التطبيق ξ إلى تشاكل وحيد $v : M \longrightarrow A$ ويكون $v \circ J_S = \xi$ حيث $J_S : S \longrightarrow M$ وهو التباين القانوني



إذا كان $f_S : S \longrightarrow B$ مقصور التشاكل f على S فإن :

$$(x \in S) \qquad g \circ (v \circ J_S)(x) = g \circ \xi(x) = g(\xi(x))$$
$$= g(a_x) = f_s(x)$$
$$= (f \circ J_S)(x)$$

وبالتالي من أجل كل $x \in S$ يكون :

$$(g \circ v) \circ J_S)(x) = (f \circ J_S)(x)$$

منه

$$(g \circ v)(x) = f(x) \qquad (\forall x \in S)$$

أي أن $g \circ v = f$ وبذلك يتم الإثبات .

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

مبرهنة (7-3)

إذا كان P مودولاً على حلقة R فإن القضايا التالية تكون متكافئة :

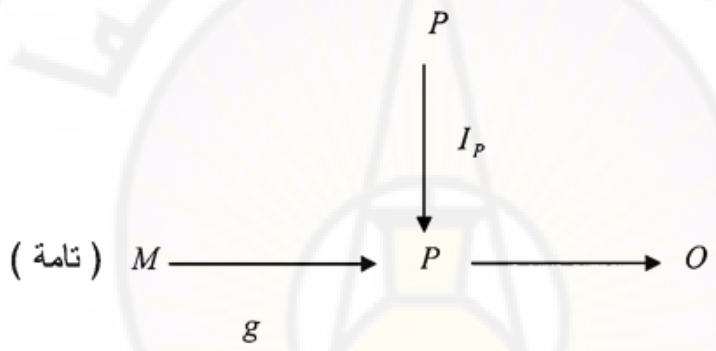
1 – المودول P إسقاطي .

2 – كل متتالية تامة $M \longrightarrow P \longrightarrow O$ تكون منشطرة .

3 – المودول P حد مكمل مباشر لمودول حر .

الإثبات

(2) $\Rightarrow$ (1) : بما أن المودول P إسقاطي فإنه ن أجل المخطط



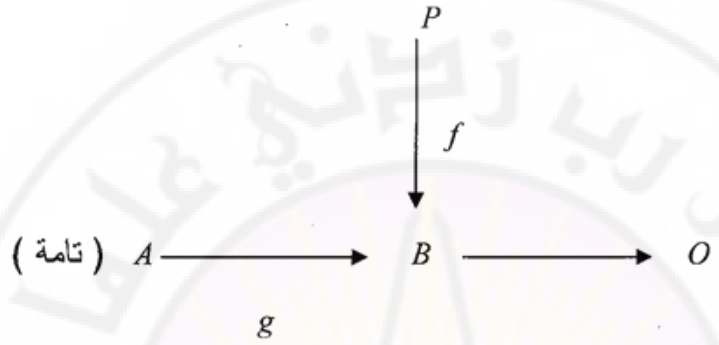
يوجد تشاكل مودولي $v : P \longrightarrow M$ يجعل المخطط السابق تبادلياً ، أي $g \circ v = I_P$ وهذا يعني أن المتتالية التامة $M \longrightarrow P \longrightarrow O$ منشطرة .

(3) $\Rightarrow$ (2) : ليكن F المودول الحر المبتذل الذي قاعدته P عندئذٍ المتتالية $O \longrightarrow P \xrightarrow{\pi} F$ تكون تامة حيث التشاكل π هو ممدود المطابق I_P وهو غامر ، وبالتالي المتتالية التامة :

$$O \longrightarrow \ker f \xrightarrow{J} F \xrightarrow{\pi} P \longrightarrow O$$

منشطرة من اليمين (J التباين القانوني) وبالتالي يكون $F \cong \ker \pi \oplus P$ وهذا يثبت أن المودول P حد مكمل مباشر في المودول الحر F .

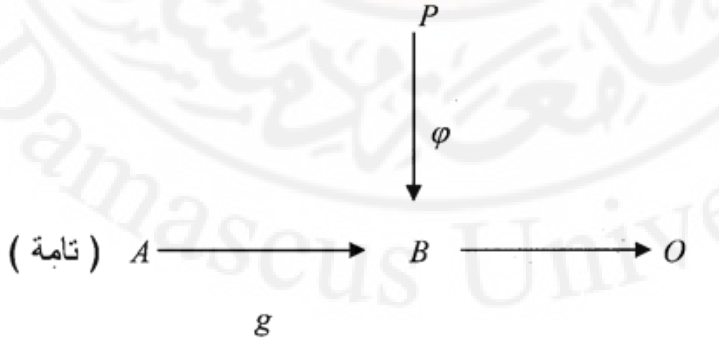
(1) $\Rightarrow$ (3) : لنفرض أن المودول P حد مكمل مباشر في مـــودول حـــر F ، عندئذٍ يوجد مودول جزئي N من المودول F بحيث يكون $F=P\oplus N$. لنأخذ المخطط :



ولنثبت وجود تشاكل مودولي $v:P\longrightarrow A$ من أجله يكون $g\,ov=f$. بما أن $F=P\oplus N$ فإنه من أجل كل $x\in F$ يوجد عنصران وحيدان $p\in P$, $n\in N$ بحيث يكون $x=p+n$. لنأخذ العلاقة :

$$\varphi : F\longrightarrow B$$
$$\varphi(x)=f(p) \qquad (\forall\, x\in F)$$

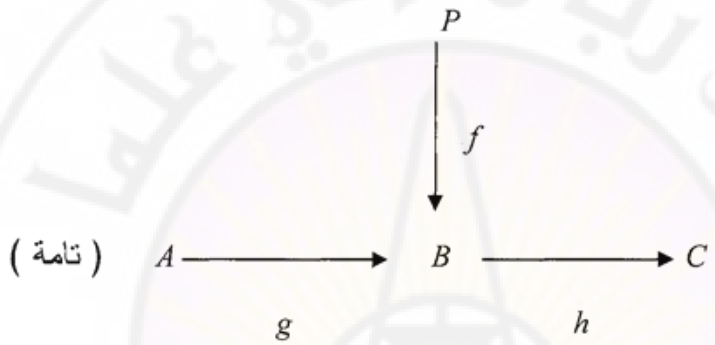
فنجد بسهولة أن φ تشاكل مودولي ، وبما أن المودول F حر فهـــو إســـقاطي وبالتالي من أجل مخطط التشاكلات المودولية :



يوجد تشاكل $\Psi : F \longrightarrow A$ يجعل المخطط السابق تبادلياً أي $g \circ \Psi = \varphi$، وبالتالي Ψ_P مقصور Ψ على P هو تشاكل مودولي يحقق $g \circ \Psi_P = \varphi_P$ وبملاحظة أن $\varphi_P = f$ نجد أن $g \circ \Psi_P = f$ وهذا يثبت أن المودول P إسقاطي

مبرهنة (7-4)

إذا كان P مودولاً إسقاطياً وكان



مخططاً من التشاكلات المودولية سطره متتالية تامة وفيه $h \circ f = o$ فإنه يوجد تشاكل مودولي $v : P \longrightarrow A$ من أجله يكون $g \circ v = f$.

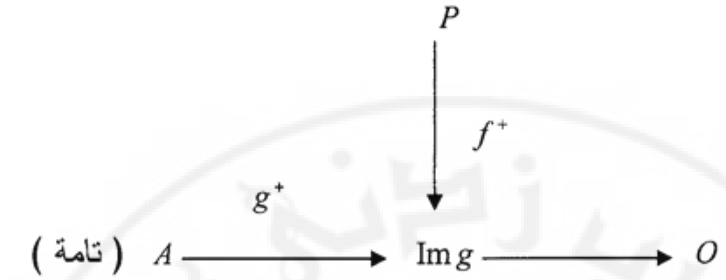
الإثبات :

بما أن $h \circ f = o$ فإنه من أجل كل $p \in P$ يكون $(h \circ f)(p) = o$ ومنه $h(f(p)) = o$ و منه $f(p) \in \ker h$ أي أن $\operatorname{Im} f \subseteq \ker h$ وبما أن سطر المخطط متتالية تامة فإن $\operatorname{Im} g = \ker h$ وبالتالي ينتج أن $\operatorname{Im} f \subseteq \operatorname{Im} g$ وهذا يمكننا من صياغة التشاكلين المودوليين :

$$g^+ : A \longrightarrow \operatorname{Im} g \qquad g^+(a) = g(a)$$

$$f^+ : P \longrightarrow \operatorname{Im} g \qquad f^+(p) = f(p)$$

وبما أن المودول P إسقاطي فإنه من أجل المخطط



يوجد تشاكل مودولي $v : P \longrightarrow A$ من أجله يكون $g^+ \circ v = f^+$ وبالتالي أياً كان $p \in P$ يكون :

$$(g \circ v)(p) = g(v(p)) = g^+(v(p)) = f^+(p) = f(p)$$

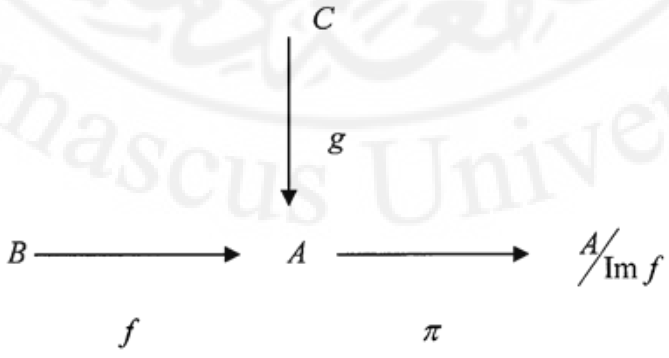
أي أن $g \circ v = f$ إذن المودول P إسقاطي .

مبرهنة (7-5)

إذا كان $g : C \longrightarrow A$, $f : B \longrightarrow A$ تشاكلين مودوليين بحيث $\operatorname{Im} g = \operatorname{Im} f$ فإنه يوجد تشاكل مودولي $h : C \longrightarrow B$ من أجله يكون $f \circ h = g$.

الإثبات :

لنأخذ المخطط



فنجد أن سطره متتالية تامة ، وأن $\ker\pi = \mathrm{Im}\, f$ وحسب الفـرض ينـتج أن $\mathrm{Im}\, g \subseteq \ker\pi$ وهذا يعني أن $\pi o g = o$ فحسب المبرهنة (7-4) يوجد تشاكل مودولي $h : C \longrightarrow B$ من أجله يكون $f o h = g$.

7- 3 – المودول الأفقي injective module

تعريف

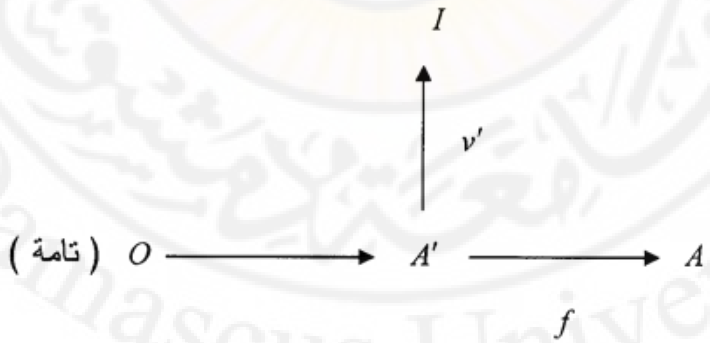
ليكن M مودولاً على حلقة R . نقول عن المودول M إنـه أفقـي إذا كان من أجل كل متتالية تامة من التشاكلات المودولية :

$$O \xrightarrow{f} A' \longrightarrow A$$

يكون التشاكل $f^* : Hom(A, M) \longrightarrow Hom(A', M)$ غامراً .

مبرهنة (7-6)

إذا كان I مودولاً على حلقة R فإن المودول I أفقي إذا وفقط ، إذا كان مـن أجل كل مخطط من التشاكلات المودولية :



يوجد تشاكل مودولي $v : A \longrightarrow I$ يجعل المخطط السابق تبادلياً .

الإثبات

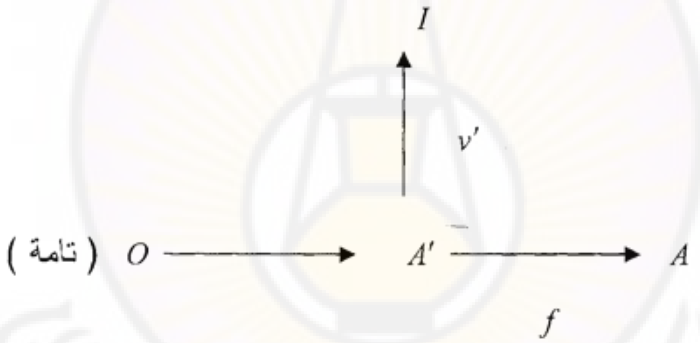
لنفرض أولاً أن المودول I أفقي عندئذٍ من أجل المتتالية التامة

$$O \xrightarrow{f} A' \longrightarrow A$$

يوجد تشاكل غامر :

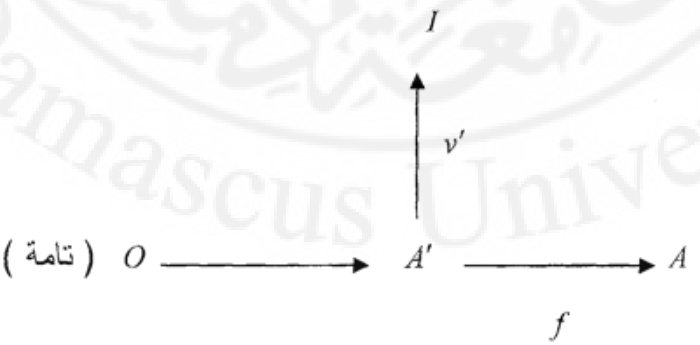
$$f^* : Hom(A,I) \longrightarrow Hom(A',I)$$
$$f^*(v) = v \circ f \qquad (\ \forall\, v \in Hom(A,I)\ )$$

وبما أن التشاكل f^* غامر فإنه أياً كان $v' \in Hom(A',I)$ يوجد $v \in Hom(A,I)$ بحيث يكون $f^*(v) = v'$ أي $v \circ f = v'$ وهذا يعني أن من أجل كل مخطط :



يوجد تشاكل مودولي $v : A \longrightarrow I$ يجعل المخطط السابق تبادلياً .

وبالعكس . لنفرض أنه يوجد تشاكل مودولي $v : A \longrightarrow I$ يجعل المخطط :



تبادلياً أي أن $v \circ f = v'$ ومنه $f^*(v) = v'$ وبالتالي التشاكل

$f^*: Hom(A, I) \longrightarrow hOM(A', I)$ غامر .

مبرهنة (7-7)

إذا كان I مودولاً على حلقة R فإن القضيتين التاليتين متكافئتان :

(1) – المودول I أفقي .

(2) – من أجل كل مثالي يساري L في الحلقة R ومن أجل كل تشاكل $f: L \longrightarrow I$ يوجد $a \in I$ بحيث يكون

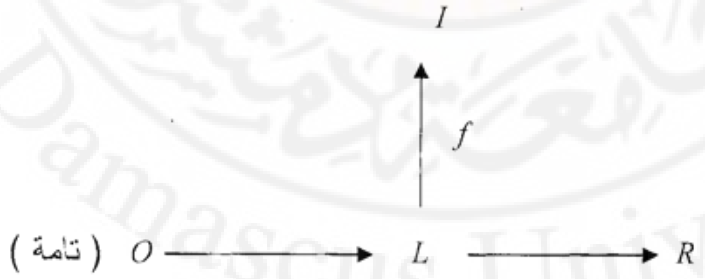
$$f(\lambda) = \lambda . a \qquad (\ \forall \lambda \in L\ )$$

الإثبات

(2) $\Rightarrow$ (1) : لنفرض أن المودول I أفقي . ليكن L مثالياً يسارياً في الحلقة R وليكن $f: L \longrightarrow I$ تشاكلاً . بما أن L مثالي في R فهو مودول جزئي من المودول R وبالتالي العلاقة :

$$J: L \longrightarrow R$$
$$J(x) = x \qquad (\ \forall x \in L\ )$$

تشاكل مودولي وهو التباين القانوني ، ولكون المودول I أفقياً فإنه من أجل مخطط التشاكلات المودولية :

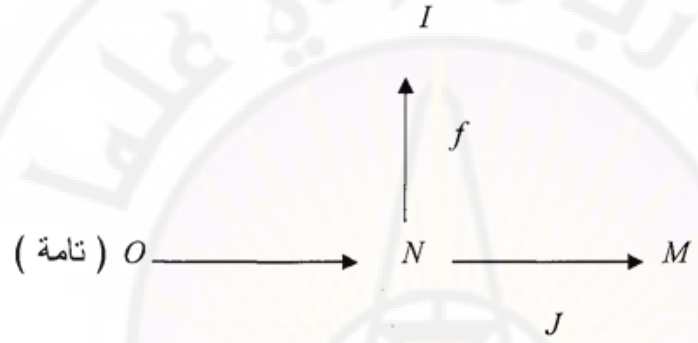


يوجد تشاكل مودولي $v : R \longrightarrow I$ من أجله يكون $v \circ J = f$ وبالتالي من أجل كل $\lambda \in L$ يكون :

$$f(\lambda) = (v \circ J)(\lambda) = v(J(\lambda)) = v(\lambda) = v(\lambda.1) = \lambda.v(1)$$

بفرض أن $v(1) = a \in I$ يكون $f(\lambda) = \lambda.a$.

$(1) \Rightarrow (2)$: لنأخذ مخطط التشاكلات المودولية :



حيث التشاكل J وهو التباين القانوني وهذا لا يفقد عمومية المسألة وذلك بملاحظة أنه إذا كان $g : A \longrightarrow M$ تشاكلاً مودولياً متبايناً فإن $A \cong \operatorname{Im} f$.

ولنثبت أنه يوجد تشاكل مودولي $v : M \longrightarrow I$ من أجله يكون $v \circ J = f$.

لتكن X مجموعة كل الثنائيات (f', M') حيث إن $N \subseteq M' \subseteq M$ و $f' : M' \longrightarrow I$ تشاكل مودول بحيث $f'_N = f$ (f'_N هو مقصور f' على N) . أي

$$X = \{ (f', M') \ : \ N \subseteq M' \subseteq M \ , \ f' : M' \longrightarrow I \ ; \ f'_N = f \ ) \}$$

واضح أن $(f, M) \in X$ وبالتالي $X \neq \Phi$. لنعرف في المجموعة X علاقة ثنائية $\leq$ كما يلي :

$$(f',M') \le (f'',M'') \quad \Leftrightarrow \quad [\ M' \subseteq M'' \quad and \quad f''_{M'} = f'\ ]$$

وذلك أياً كان $(f',M')\ ,\ (f'',M'') \in X$.

واضح أن العلاقة $\le$ انعكاسية .

كما أن العلاقة $\le$ تخالفية ، لأن :

أياً كان $(f',M')\ ,\ (f'',M'') \in X$ بحيث

$$(f',M') \le (f'',M'') \qquad and \qquad (f'',M'') \le (f',M')$$

فإن

$$\left\{ \begin{array}{c} M' \subseteq M'' \\ f''_{M'} = f' \end{array} \right\} \qquad and \qquad \left\{ \begin{array}{c} M'' \subseteq M' \\ f'_{M''} = f'' \end{array} \right\}$$

ومنه

$$M' = M'' \qquad and \qquad f' = f''$$

وبالتالي $(f',M') = (f'',M'')$.

كما أن العلاقة $\le$ متعدية ، لأن :

أياً كان $(f',M')\ ,\ (f'',M'')\ ,\ (f''',M''') \in X$ بحيث

$$(f',M') \le (f'',M'') \qquad and \qquad (f'',M'') \le (f''',M''')$$

فإن

$$\left\{ \begin{array}{c} M' \subseteq M'' \\ f''_{M'} = f' \end{array} \right\} \qquad and \qquad \left\{ \begin{array}{c} M'' \subseteq M''' \\ f'_{M''} = f''' \end{array} \right\}$$

ومنه

$$M' \subseteq M''' \qquad and \qquad f'''_{M'} = f'$$

وبالتالي $(f',M') \le (f'',M'')$.

إذن العلاقة الثنائية $\leq$ هي علاقة ترتيب في المجموعة X ، وحسب تمهيدية زورن يوجد في المجموعة X عنصر أعظمي وليكن (f_0, M_0) .

إن $M_0 = M$ لأنه إذا كان $M_0 \neq M$ فإنه يوجد $x \in M$ بحيث $x \notin M$ عندئذ المجموعة :

$$L = \{\ \alpha \in R\ :\ \alpha x \in M_0\ \}$$

هي مثالي يساري في الحلقة R .

لنأخذ العلاقة :

$$f' : L \longrightarrow I$$
$$f'(\lambda) = f_0(\lambda x) \qquad (\ \forall\ \lambda \in L\ )$$

فنجد أن f' تشاكل مودولي ، وحسب الفرض يوجد $a \in I$ بحيث يكون

$$f'(\lambda) = \lambda . a \qquad (\ \forall\ \lambda \in L\ )$$

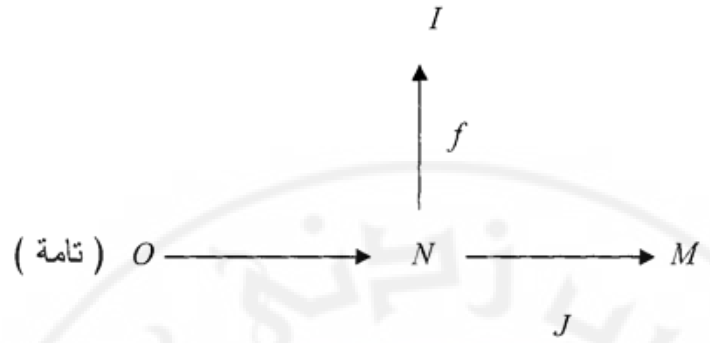
ولدينا $M_0 \subset R_x + M_0 \subseteq M$ ولنعرف العلاقة :

$$f'' :\ R_x + M_0 \longrightarrow I$$
$$f''(\lambda x + m) = \lambda . a + f_0(m) \qquad (\ \forall\ \lambda x + m \in R_x + M\ )$$

فنجد أن f'' تشاكل مودولي ، و أياً كان $m \in M_0$ فإن :

$$f''(m) = f''(ox + m) = o.a + f_0(m) = f_0(m)$$

أي أن $f''_M = f_0$. كما أن $(f'', R_x + M) \in X$ وبالتالي $(f_0, M_0) < (f'', R_x + M)$ وهذا يناقض أن (f_0, M_0) عنصر أعظمي في المجموعة X . إذن $M = M_0$ وبالتالي من أجل المخطط



يوجد تشاكل مودولي $f_0 : M \longrightarrow I$ من أجله يكون $f_0 \circ J = f$.

تعريف :

لتكن M زمرة جمعية تبديلية . نقول عن الزمرة M إنها قابلة للقسمة (قسومة) (divisible) إذا تحقق الشرط :

أياً كان m عدداً صحيحاً موجباً فإن $mM = M$.

من الواضح أن الشرط السابق يكافئ الشرط :

أياً كان m عدداً صحيحاً و أياً كان $x \in M$ فإنه يوجد $x' \in M$ بحيث يكون $x = mx'$.

مثال : الزمرة Q/Z قسومة لأنه أياً كان m عدداً صحيحاً موجباً يكون :

$$q/Z = m\,(q.m^{-1}/Z)$$

تحقق من ذلك .

نذكر هنا أن كل زمرة جمعية تبديلية هي مودول على الحلقة Z .

مبرهنة (7-8)

إذا كان M مودولاً على الحلقة Z فإن القضيتين التاليتين متكافئتان :

(1) – الزمرة $(M,+)$ قسومة .

(2) – المودول M أفقي .

الإثبات

(2) $\Rightarrow$ (1) : لنفرض أن الزمرة $(M,+)$ قسومة . ليكن L مثالياً يسارياً في الحلقة Z ، وليكن $f : L \longrightarrow M$ تشاكلاً مودولياً (على Z) . بما أن Z هي حلقة مثاليات رئيسية فإن $L = mM$ حيث m عدد صحيح غير سالب . عندئذٍ :

إذا كان $m \neq 0$ وكون M زمرة قسومة فإنه يوجد $a \in M$ بحيث يكون

$$f(m) = ma \quad .$$

إذا كان $m = o$ فإن $L = \{0\}$ وعندئذٍ يكون

$$f(m) = f(0) = o = m.0$$

ومنه أياً كان العدد الصحيح غير السالب m يوجد $a \in M$ بحيث يكون

$$f(m) = m.a$$

وبالتالي من أجل كل $x \in L$ ومن أجل $z \in Z$ يكون

$$f(x) = f(mz) = z\,f(m) = zma = xa$$

نأخذ t_a ممدود f إلى Z المعطى بالشكل :

$$t_a : Z \longrightarrow M$$

$$t_a(r) = ra \qquad (\forall r \in Z)$$

فنجد حسب المبرهنة (7-7) أن المودول M أفقي .

(1) $\Rightarrow$ (2) : لنفرض أن المودول M أفقي . ليكن $a \in M$ وليكن m عدداً

صحيحاً موجباً ولنأخذ العلاقة :

$$f : mZ \longrightarrow M$$
$$f(mz) = za$$

واضح أن f تشاكل مودولي على Z فحسب المبرهنة (7-7) يوجد $b \in M$ بحيث يكون $f(x) = xb$ وذلك من أجل كل $x \in mZ$ ، إذا أخذنا $z = 1$ سنحصل على أن :

$$a = f(m) = mb$$

وهذا يبين أن الزمرة M قسومة .

تعريف

ليكن M مودولاً على حلقة R . عندئذٍ المجموعة $Hom_Z(M, Q/Z)$ هي زمرة نسميها الزمرة المميزة للمودول M ونرمز لها M^+ .

لنعرف في الزمرة M^+ قانون تشكيل خارجي يميني مجموعة مؤثراته الحلقة R كما يلي :

$$M^+ \times R \longrightarrow M^+$$
$$(f, r) \alpha\ f.r$$

حيث التطبيق $f.r : M \longrightarrow Q/Z$ معرف كما يلي :

$$(\forall x \in M) \qquad (f.r)(x) = f(rx)$$

فنجد أن M^+ مودول يميني على الحلقة R ، نسميه المودول المميز للمودول M . من جديد يمكننا تعريف المودول المميز للمودول M^+ بأنه المودول اليساري M^{++} حيث يكون القانون الخارجي المعرف على M^+ يسارياً معرفاً كما يلي :

$$R \times M^{++} \longrightarrow M^{++}$$
$$(r, f^+) \alpha\ r.f^+$$

حيث التطبيق $r.f^+ : M^+ \longrightarrow {}^{Q}\!/_{Z}$ معرف كما يلي :

$$(r.f^+)(g) = f^+(gr) \qquad (\forall g \in M^{++})$$

لنأخذ التطبيق :

$$\tau_M : M \longrightarrow M^{++}$$
$$x \;\alpha\; \tau_M(x)$$

حيث التطبيق $\tau_M(x) : M^+ \longrightarrow {}^{Q}\!/_{Z}$ معرف كما يلي :

$$(\tau_M(x))(f) = f(x) \qquad (\forall f \in M^+)$$

فنجد بسهولة أن التطبيق τ_M تشاكل مودولي متباين (تحقق من ذلك) .

ملاحظة : في تعريف المودول المميز لمودول M المذكور أعلاه ، كان من الممكن أن نأخذ M مودولاً يمينياً على الحلقة R فيكون المودول المميز M^+ مودولاً يسارياً على الحلقة R .

مبرهنة (7-9)

إذا كان M مودولاً على حلقة R فإنه يوجد مودول أفقي I على الحلقة R و تشاكل مودولي متباين $f : M \longrightarrow I$.

الإثبات

بما أن كل مودول يماثل مودول القسمة لمودول حر فإنه من أجل M^+ المودول المميز للمودول M يوجد مودول يميني حر F بحيث تكون المتتالية

$$F \xrightarrow{\pi} M^+ \longrightarrow O$$

تامة وبالتالي تكون المتتالية

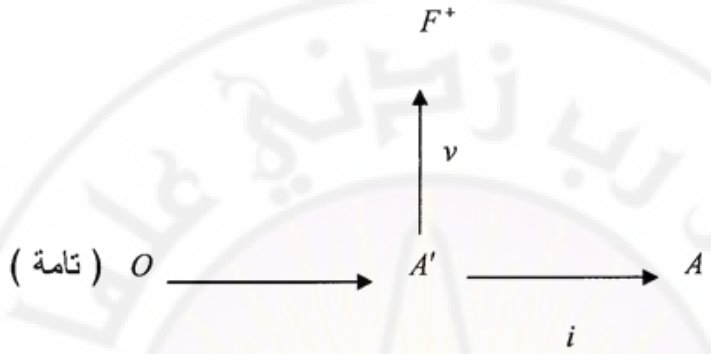
$$O \longrightarrow Hom_Z(M^+, {}^{Q}\!/_{Z}) \xrightarrow{\pi^*} Hom_Z(F, {}^{Q}\!/_{Z})$$

تامة أي أن المتتالية :

$$O \longrightarrow M^{++} \xrightarrow{\pi^*} F^+$$

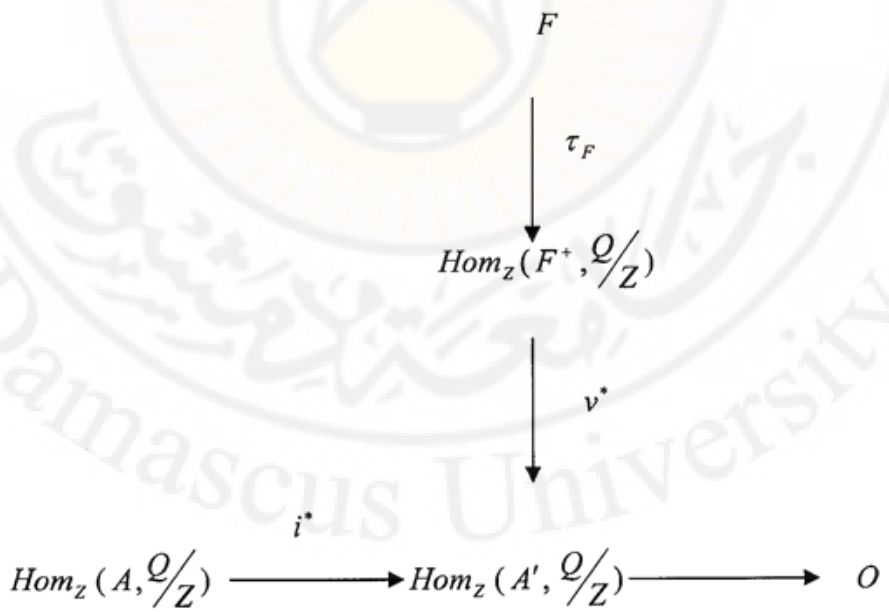
تامة . ولنثبت أن المودول F^+ هو أفقي وأن $\pi^* o\tau_M : M \longrightarrow F^+$ تشاكل متباين .

لنأخذ مخطط التشاكلات المودولية :

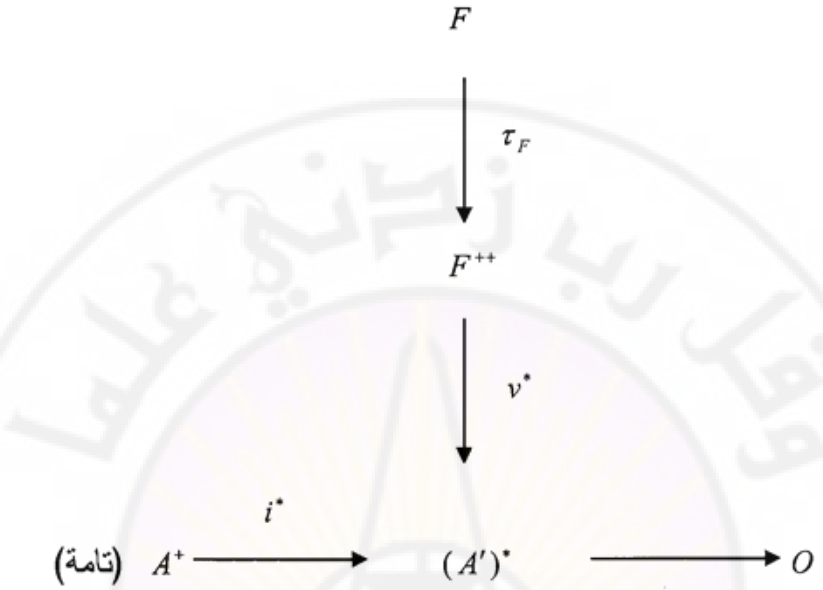


ولنبرهن على وجود تشاكل مودولي $h : A \longrightarrow F^+$ يجعل المخطط السابق تبادلياً .

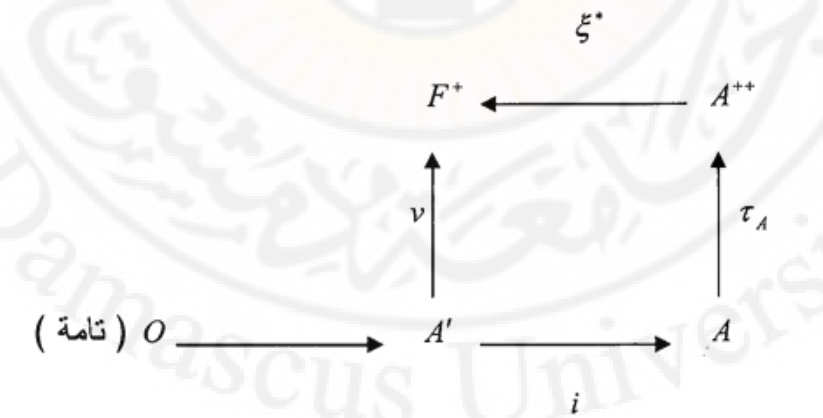
بما أن F مودول حر فهو إسقاطي وبالتالي من أجل المخطط



أي من أجل المخطط



يوجد تشاكل مودولي $\rho:F\longrightarrow A^{+}$ من أجله يكون $i^{*}\circ\rho=\nu^{*}\circ\tau_{F}$ ، وإذا كان $\rho^{*}:A^{++}\longrightarrow F^{+}$ التشاكل المستخلص من التشاكل ρ فإننا نحصل على مخطط التشاكلات :



ولنثبت أن $\nu = (\rho^* o \tau_M) o i$ ، أي لنثبت أن من أجل كل $x \in A'$ يكون :

$$((\rho^* o \tau_M) o i)(x) = \nu(x)$$

أن $\nu(x) \in F^+ = Hom_Z(F, Q/Z)$ و أياً كان $t \in F$ فإن :

$$\begin{aligned}
[(\rho^* o i_A o i)(x)](t) &= [(i_A o i)(x) o \rho](t) \\
&= [(\tau_A o i)(x)][\rho(t)] \\
&= [\rho(t)][i(x)] \\
&= [\rho(t) o i](x) \\
&= [(i^* o \rho)(t)](x) \\
&= [(\nu^* o \tau_F)(t)](x) \\
&= [\tau_F(t) o \nu](x) \\
&= [\tau_F(t)][\nu(x)] \\
&= [\nu(x)](t) \quad .
\end{aligned}$$

وهذا يثبت أن المودول F^+ أفقي وأن التشاكل $\pi^+ o \tau_M : M \longrightarrow F^+$ متباين وبذلك يتم المطلوب .

مبرهنة (7-10)

إذا كان I مودولاً على حلقة R فإن القضايا التالية تكون متكافئة :

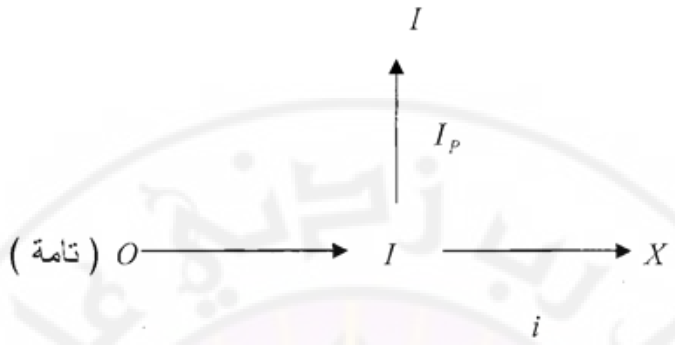
(1) – المودول I أفقي .

(2) – كل متتالية تامة $O \longrightarrow I \longrightarrow X$ تكون منشطرة .

(3) – إذا كان $\alpha : I \longrightarrow X$ تشاكل متباين فإن $\mathrm{Im}\alpha$ حد مكمل مباشر في المودول X .

الإثبات

(2) $\Rightarrow$ (1) لنفرض أن المودول I عندئذٍ من أجل المخطط



يوجد تشاكل مودولي $v:X\longrightarrow I$ يجعل المخطط السابق تبادلياً ، أي $v\circ i = I_P$ وهذا يعني أن المتتالية التامة $O\longrightarrow I\longrightarrow X$ منشطرة .

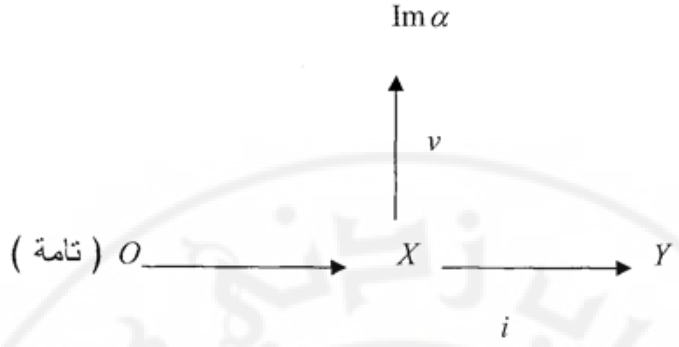
(3) $\Rightarrow$ (2) : لنفرض أن $\alpha:I\longrightarrow X$ تشاكل متباين عندئذٍ المتتالية التامة :

$$O\longrightarrow I\xrightarrow{\alpha} X\xrightarrow{\pi} X/_{\mathrm{Im}\,\alpha}\longrightarrow O$$

منشطرة (من اليمين واليسار) وبالتالي يكون المودول $\mathrm{Im}\,\alpha$ حد مكمل مباشر في المودول X .

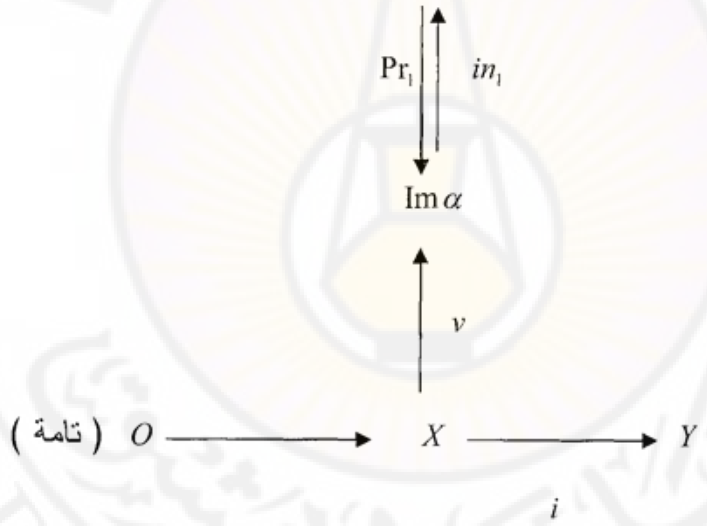
(1) $\Rightarrow$ (3) : لنفرض أن القضية (3) محققة عندئذٍ حسب المبرهنة (7-9) يوجد مودول أفقي M و تشاكل مودولي متباين $\alpha:I\longrightarrow M$ وحسب الفرض يكون $\mathrm{Im}\,\alpha$ حد مكمل مباشر في المودول M وبالتالي يوجد مودول جزئي N من المودول M بحيث يكون $M=\mathrm{Im}\,\alpha\oplus N$.

إن المودول $\mathrm{Im}\,\alpha$ أفقي لأنه من أجل أي مخطط من التشاكلات المودولية :



نستطيع تشكيل المخطط

$$M = \mathrm{Im}\,\alpha \oplus N$$



وبما أن المودول M أفقي فإنه يوجد تشاكل مودولي $f: Y \longrightarrow M$ من أجلـــه يكون $f \circ i = in_1 \circ v$ (حيث $in_1 : \mathrm{Im}\,\alpha \longrightarrow M$ التباين القـــانوني) ومنـــه $\mathrm{Pr}_1 \circ f : Y \longrightarrow \mathrm{Im}\,\alpha$ تشاكل مودولي من اجله يكون

$$\mathrm{Pr}_1 \circ f \circ i = \mathrm{Pr}_1 \circ in_1 \circ v = I_{\mathrm{Im}\,\alpha} \circ v = v$$

وهذا يثبت أن المودول $\mathrm{Im}\alpha$ أفقي وبما أن $\alpha: I \longrightarrow M$ تشاكل متباين فـــإن $\mathrm{Im}\alpha \cong I$ وبالتالي المودول I أفقي .

نختم هذا الفصل بسرد بعض التعريفات التي سنبني عليها بعض التمرينات

تعريف (1)

ليكن M مودولاً على حلقة R وليكن A مودولاً جزئياً مـــن المـــودول M .

نقول عن A إنه صغير في M إذا تحقق الشرط :

أياً كان B مودولاً جزئياً من المودول M بحيث $A+B=M$ فإن $B=M$.

تعريف (2)

ليكن M مودولاً على حلقة R وليكن N مودولاً جزئياً مـــن المـــودول M .

نقول عن N إنه كبير في M إذا تحقق الشرط :

أياً كان C مودولاً جزئياً من المودول M بحيث $N \cap C = O$ فإن $C = O$.

تعريف (3)

ليكن M مودولاً على حلقة R . نعرف أساس المودول M بأنه تقاطع جميع المودولات الجزئية الأعظمية في M ونرمز له $J(M)$. إذا لم توجد مودولات أعظمية في المودول M فنعتبر أن $J(M) = M$.

تمرينات محلولة

التمرين الأول :

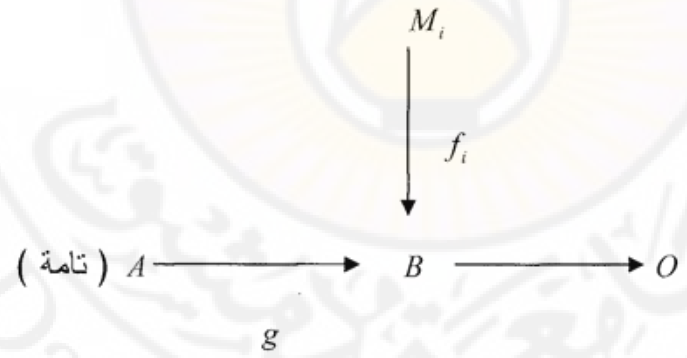
لتكن $(M_i)_{i=1,2,...,n}$ أسرة مودولات جزئية من مودول M على حلقة R وليكن $M=\bigoplus_{i=1}^{n} M_i$. برهن أن القضيتين التاليتين متكافئتان :

(1) – المودول M إسقاطي .

(2) – المودول M_i إسقاطي $(\forall\, i=1,2,...,n)$.

الحل

(2) $\Rightarrow$ (1) : لنفرض أن المودول $M=\bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ إسقاطي . لنأخذ مخطط التشاكلات المودولية :



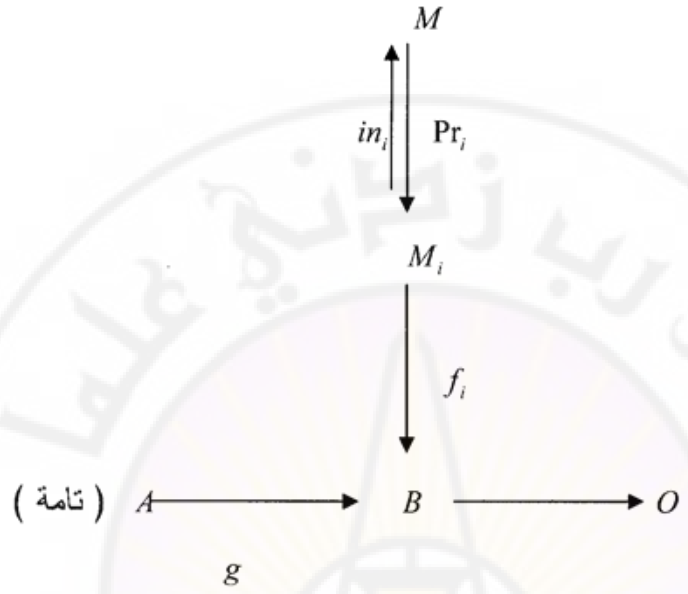
وذلك أياً كان $i=1,2,...,n$ ولنبرهن على وجود تشاكلات مودولية

$$v_i : M_i \longrightarrow A \qquad (i=1,2,...,n)$$

من أجلها يكون :

$$g \circ v_i = f_i \qquad (\forall\, i=1,2,...n)$$

لننظر في المخطط :



بما أن المودول M إسقاطي فيوجد تشاكل مودولي $v:M \longrightarrow A$ من أجله يكون :

$$(g \circ v) \circ in_i = (f_i \circ \Pr_i) \circ in_i \qquad \forall i = 1,2,...,n$$

وبملاحظة أن

$$\Pr_i \circ in_i = I_{M_i} \qquad \forall i = 1,2,...,n$$

نجد أن :

$$g \circ (v \circ in_i) = f_i \qquad \forall i = 1,2,...,n$$

وبالتالي يوجد تشاكل مودولي

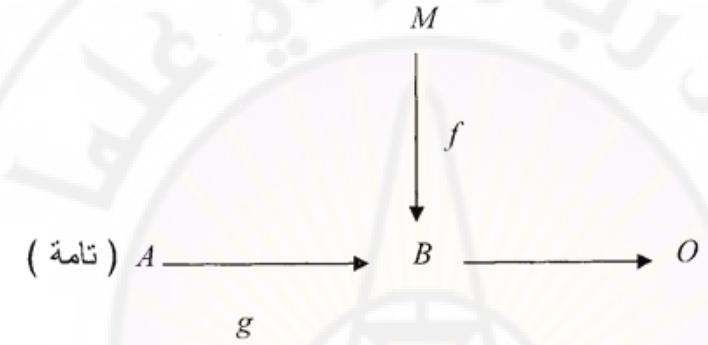
$$v_i = v \circ in_i : M_i \longrightarrow A \qquad i = 1,2,...,n$$

من أجله يكون

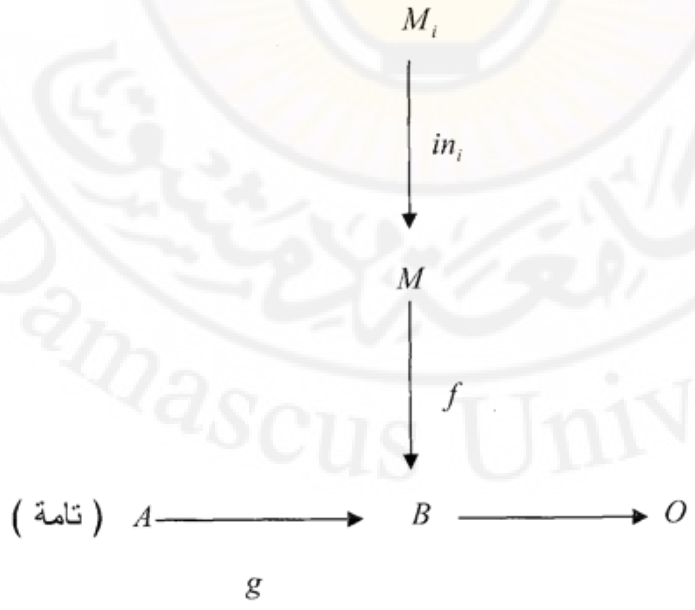
$$g \circ v_i = f_i \qquad \forall i = 1,2,...,n$$

وهذا يثبت أن المودول M_i إسقاطي ($\forall i = 1,2,...,n$) .

(1) $\Rightarrow$ (2) : لنفرض أن المودول ($i = 1,2,...,n$) M_i إسقاطي ، ولنأخذ مخطط التشاكلات المودولي :



ولنبرهن على وجود تشاكل مودولي $v: M \longrightarrow A$ من أجله يكون $g \circ v = f$ ، لنتأمل المخطط



وكون المودول M_i $(i=1,2,...,n)$ إسقاطي فيوجد تشاكل

$$v_i : M_i \longrightarrow A \qquad (i=1,2,...,n)$$

من أجله يكون

$$g \circ v_i = f_i \circ in_i \qquad (\forall i=1,2,...n)$$

لنعرف التطبيق :

$$v : M \longrightarrow A$$

$$v(\sum_{i=1}^{n} m_i) = \sum_{i=1}^{n} v_i(m_i)$$

فنجد أن v تشاكل مودولي كما أن $g \circ v = f$ لأنه أياً كان $m = \sum_{i=1}^{n} m_i \in M$ فإن

$$f(m) = f(\sum_{i=1}^{n} m_i) = \sum_{i=1}^{n} f(m_i) = \sum_{i=1}^{n} f(in_i(m_i))$$

$$= \sum_{i=1}^{n} g(v_i(m_i)) = g(\sum_{i=1}^{n} v_i(m_i)) = g(v(m))$$

$$= (g \circ v)(m) \ .$$

وهذا يثبت أن المودول M إسقاطي .

التمرين الثاني :

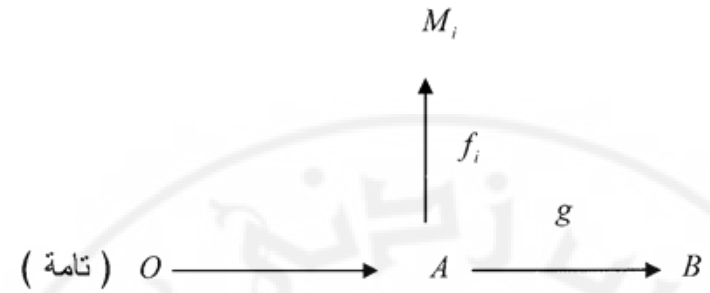
لتكن $(M_i)_{i=1,2,...,n}$ أسرة مودولات جزئية من مودول M على حلقة R وليكن $M = \oplus_{i=1}^{n} M_i$. برهن أن القضيتين التاليتين متكافئتان :

(1) – المودول M أفقي .

(2) – المودول M_i أفقي $(\forall i=1,2,...,n)$.

الحل

(2) $\Rightarrow$ (1) : لنفرض أن المودول $M = \oplus_{i=1}^{n} M_i$ أفقي . لنأخذ مخطط التشاكلات المودولية



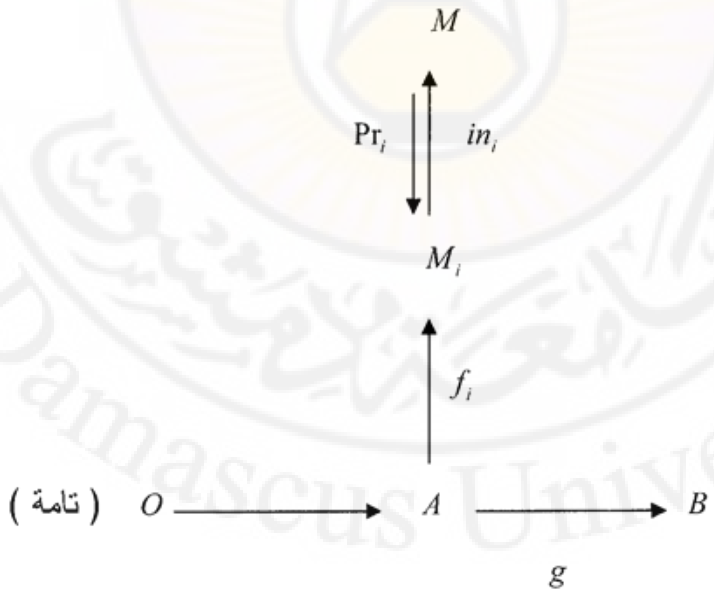
وذلك أياً كان $i=1,2,...,n$ ولنبرهن على وجود تشاكلات مودولية

$$v_i : B \longrightarrow M_i \qquad (i=1,2,...,n)$$

من أجلها يكون :

$$v_i \circ g = f_i \qquad (\forall i=1,2,...n)$$

لننظر في المخطط :



بما أن المودول M أفقي فيوجد تشاكل مودولي $v:B\longrightarrow M$ من أجله يكون :

$$v\,og = in_i\,of_i \qquad \forall i=1,2,...,n$$

وبالتالي يكون

$$\Pr_i o(v\,og) = \Pr_i o(in_i\ of_i) \qquad \forall\ i=1,2,...,n$$

ومنه نجد أن :

$$(\Pr_i ov)og = f_i \qquad \forall i=1,2,...,n$$

وبالتالي يوجد تشاكل مودولي

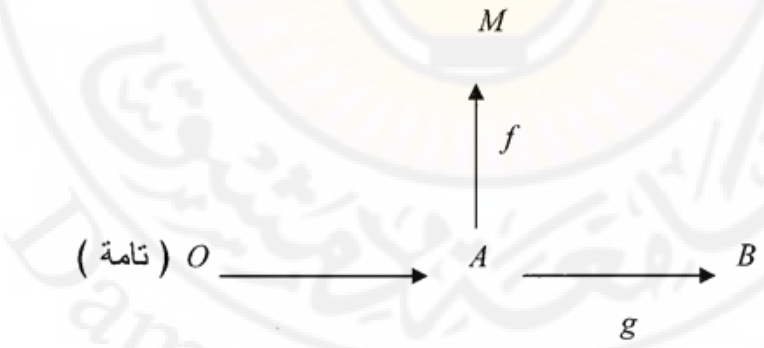
$$v_i = \Pr_i ov : B\longrightarrow M_i \qquad i=1,2,...,n$$

من أجله يكون

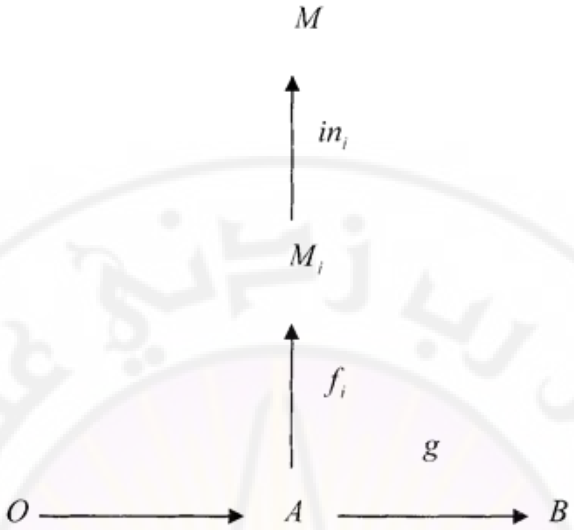
$$v_i\,og = f_i \qquad \forall i=1,2,...,n$$

وهذا يثبت أن المودول M_i أفقي ($\forall i=1,2,...,n$) .

(1) $\Rightarrow$ (2) : لنفرض أن المودول ($i=1,2,...,n$) M_i أفقي ، ولنأخذ مخطط التشاكلات المودولي :



ولنبرهن على وجود تشاكل مودولي $v:B\longrightarrow M$ من أجله يكون $vog = f$ ، لنتأمل المخطط



وكون المودول M_i $(i=1,2,...,n)$ أفقي فيوجد تشاكل

$$v_i : B \longrightarrow M_i \qquad (i=1,2,...,n)$$

من أجله يكون

$$v_i \circ g = f_i \qquad (\forall i=1,2,...n)$$

وبالتالي

$$in_i \circ (v_i \circ g) = in_i \circ f_i \qquad (\forall i=1,2,...,n)$$

ومنه يكون

$$(in_i \circ v_i) \circ g = f_i \qquad (\forall i=1,2,...,n)$$

وبالتالي يوجد تشاكل مودولي $v = in_i \circ v_i : B \longrightarrow M$ من أجله يكون $v \circ g = f$.

وهذا يثبت أن المودول M أفقي .

التمرين الثالث :

لتكن M زمرة قسومة . أثبت أن $Hom_Z(R,M)$ مودول أفقي على الحلقة R.

الحل

بما أن الزمرة M قسومة فهي مودول أفقي على الحلقة Z . لنعرف على المجموعة $Hom_Z(R,M)$ قانوني تشكيل :

الأول (+) داخلي معرف كما يلي :

$$(f+g)(r)=f(r)+g(r)$$

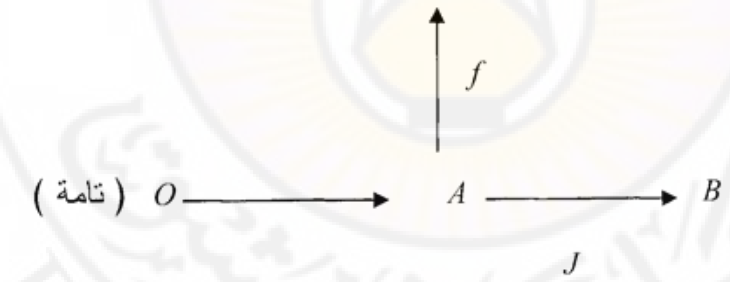
الثاني (.) خارجي (يساري) مجموعة مؤثراته هي الحلقة R كما يلي :

$$(rf)(a)=f(ar)$$

وذلك أياً كان $f,g\in Hom_Z(R,M)$ و أياً كان $r,a\in R$.

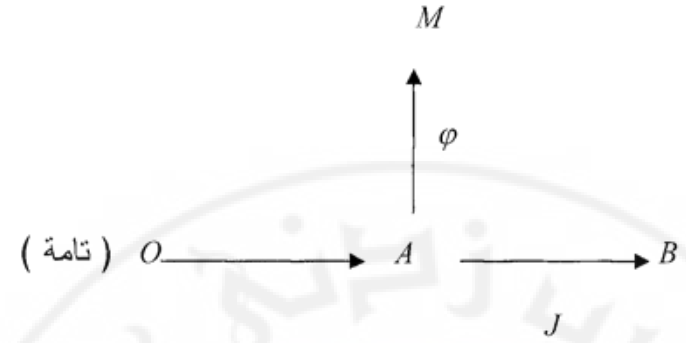
فنجد أن $Hom_Z(R,M)$ مودول على الحلقة R ، (تحقق من ذلك) ، لنبرهن أن المودول $Hom_Z(R,M)=M^*$ أفقي على الحلقة R . لنأخذ مخطط التشاكلات المودولية

$$M^*=Hom_z(R,M)$$



حيث J هو التباين القانوني ولنبرهن على وجود تشاكل مودولي $B\longrightarrow M^*$ يجعل المخطط السابق تبادلياً .

بما أن كلاً من $(A,+),(B,+)$ زمرة جمعية تبديلية فكل منها مودول على الحلقة Z وكون M مودول أفقي على Z فإننا نحصل على مخطط التشاكلات المودولية (على Z) :



وبما أن المـودول M أفقـي علـى Z يوجـد تـشاكل مـودولي علـى Z $v:B\longrightarrow M$ من أجله يكـون $v\circ J=\varphi$ وبالتـالي أيـاً كـان $a\in A$ فـإن $(v\circ J)(a)=\varphi(a)$ ومنه يكون $v(J(a))=\varphi(a)$ وكـون J هـو التبـاين القانوني تنتج أن $v(a)=\varphi(a)$ وهذا يعني أن التطبيق v هو ممدود التطبيق φ إلى B . لنأخذ العلاقة :

$$\psi:B\longrightarrow Hom_Z(R,M)$$
$$b\alpha\ \psi(b)$$

حيث التشاكل $\psi(b)$ معرف كما يلي :

$$(\ \forall r\in R\ ) \qquad \psi(b)(r)=v(r.b)$$

فنجد أن ψ هو تشاكل مودولي على الحلقة R (تحقق من ذلـك) و لنبـرهن على أن $\psi\circ J=\varphi$ أي لنبرهن أن :

$$(\ \forall a\in A\ ) \qquad (\psi\circ J)(a)=\varphi(a)$$

أياً كان $x\in R$ يكون :

$$\begin{aligned}[(\psi\circ J)(a)](x) &= (\psi(a))(x)\\ &= v(x.a)\\ &= \varphi(x.a)\\ &= \varphi(a)(x)\end{aligned}$$

ومنه

$$(\psi \circ J)(a) = \varphi(a) \qquad (\ \forall\, a \in A\ )$$

وهذا يثبت أن المودول $Hom_Z(R,M) = M^*$ أفقي على الحلقة R .

تمرينات (7)

التمرين الأول

ليكن M مودولاً على حلقة R وليكن A صغيراً في المودول M أثبت أن $A \subseteq J(M)$.

التمرين الثاني :

ليكن M مودولاً منتهي التوليد على حلقة R وليكن A مودولاً جزئياً من المودول M بحيث يكون $A \subseteq J(M)$. أثبت أن A صغير في المودول M .

التمرين الثالث :

ليكن P مودولاً إسقاطياً على حلقة R ولتكن $S = End_R(P)$ وليكن $J(S)$ أساس جاكبسون للحلقة S ، $J(P)$ أساس جاكبسون للمودول P ، ولنأخذ المجموعة :

$$H = \{ f \in S \ : \ P \text{ صغير في المودول } \operatorname{Im} f \}$$

المطلوب :

1 – أثبت أن H مثالي يميني في الحلقة S .

2 – أثبت أن $J(S) = H$.

3 – أثبت أن $J(S) \subseteq Hom_R(P, J(P))$.

4 – إذا كان $J(P)$ صغيراً في المودول P فأثبت أن $J(S) = Hom_R(P, J(P))$.

التمرين الرابع :

ليكن I مودولاً أفقياً على حلقة R ولتكن $S = End_R(I)$ وليكن $J(S)$ أساس جاكبسون للحلقة S ، $J(I)$ أساس جاكبسون للمودول I ، ولنأخذ المجموعة :

$$H = \{ f \in S \ : \ \ker f \text{ كبير في المودول } I \ \}$$

المطلوب :

1 – أثبت أن H مثالي يساري في الحلقة S .

2 – أثبت أن $J(S) = H$.

<u>التمرين الخامس</u> :

ليكن

$$\begin{array}{ccccccccc} O & \longrightarrow & K_1 & \longrightarrow & P_1 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & O \\ & & & & & & \downarrow I_B & & \\ O & \longrightarrow & K_2 & \longrightarrow & P_2 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & O \end{array}$$

مخططاً من التشاكلات المودولية ، كل سطر فيه متتالية تامة ، وأن P_1 مودول إسقاطي . أثبت وجود تشاكلين مـــودوليين $\beta : K_1 \longrightarrow K_2$ ، $\alpha : P_1 \longrightarrow P_2$ يجعلان المخطط السابق تبادلياً .

الفصل الثامن

المودول الثنوي

Dual module

8 – 1 – بناء المودول الثنوي

ليكن M , N مودولين على حلقة R . عندئذ $Hom_R(M,N)$ زمرة جمعية تبديلية ، إذا أخذنا $N = R$ نجد أن $Hom_R(M,R)$ زمرة جمعية تبديلية ولنعرف على المجموعة $Hom_R(M,R)$ قانون تشكيل خارجي يميني مجموعة مؤثراته الحلقة R كما يلي :

$$Hom_R(M,R)\times R \longrightarrow Hom_R(M,R)$$
$$(f,\lambda)\ \alpha\ f.\lambda \qquad (\forall\ f\in Hom_R(M,R)\ ,\ \lambda\in R\ )$$

حيث التشاكل $f.r$ معرف كما يلي :

$$(f.\lambda)(x)=f(x).\lambda \qquad (\ \forall\ x\in M\ )$$

و أياً كان $r\in R$ فإن :

$$(f.\lambda)(rx)=f(rx).\lambda=r.f(x)\lambda=r(f(\lambda))(x)$$

فنجد أن $Hom_R(M,R)$ مودول يميني على الحلقة R ، يسمى المودول الثنوي للمودول M (dual of module M) ونرمز له M^d وكل عنصر منه يسمى شكلاً خطياً (liner form) على المودول M . سنرمز عناصر المودول M بأحرف لاتينية صغيرة مثل $x,y,z,.....$ وسنرمز عناصر المودول الثنوي M^d بالأحرف x^d , y^d , z^d , ...

أياً كان $y^d\in M^d$ وكان $x\in M$ فإننا نرمز $y^d(x)$ بالرمز $<x,y^d>$ أي :

$$y^d : M \longrightarrow R$$
$$x \ \alpha \ y^d(x) = < x, y^d >$$

و أياً كان $x, y \in M$ وكان $x^d , y^d \in M^d$ فإن :

$$(1)- \quad < x+y, x^d > = x^d (x+y) = x^d (x) + x^d (y)$$
$$= < x, x^d > + < y, x^d > .$$

$$(2)- \quad < x, x^d + y^d > = (x^d + y^d)(x) = x^d (x) + y^d (x)$$
$$= < x, x^d > + < x, y^d > .$$

$$(3)- \quad < \lambda x, x^d > = x^d (\lambda x) = \lambda . x^d (x)$$
$$= \lambda . < x, x^d > .$$

$$(4)- \quad < x, x^d \lambda > = (x^d \lambda)(x) = x^d (x) \lambda$$
$$= < x, x^d > \lambda .$$

مبرهنة (8-1)

إذا كان M مودولاً حراً على حلقة R قاعدته $B = \{ e_1 , e_2 , ..., e_n \}$ فإنه توجد أشكال خطية $e_1^d , e_2^d , ..., e_n^d$ في المودول M^d بحيث يكون :

$$e_i^d (e_j) = \begin{cases} 0 & if \quad i \neq j \quad ; \\ 1 & if \quad i = j \quad . \end{cases}$$

وأن المجموعة $\{ e_1^d , e_2^d , ..., e_n^d \}$ قاعدة للمودول M^d .

الإثبات

أياً كان $x \in M$ فإن $x = \sum_{i=1}^{n} x_j e_j$ وبالتالي يمكننا تعريف الأشكال الخطية $e_1^d , e_2^d , ..., e_n^d$ كما يلي :

$$(\forall i = 1, 2, ..., n) \qquad e_i^d : M \longrightarrow R$$
$$e_i^d (x) = e_i^d \left(\sum_{i=1}^{n} x_j e_j \right) = \sum x_j e_i^d (e_j) = x_i$$

فنجد أن

$$e_i^d \in M^d \qquad ; \qquad i = 1, 2, ..., n$$

وأن :

$$e_i^d(e_j)=\begin{cases}0 & if \quad i\neq j \quad ;\\ 1 & if \quad i=j \quad .\end{cases}$$

كما أن المجموعة $\{ e_1^d , e_2^d , ..., e_n^d \}$ حرة في M^d لأن :

إذا كان $\sum_{i=1}^{n} e_i^d \lambda_i = 0$ فإنه من أجل $j=1,2,...,n$ يكون :

$$0=(\sum_{i=1}^{n} e_i^d \lambda_i)(e_j)=\sum_{i=1}^{n}(e_i^d \lambda_i)(e_j)=\sum_{i=1}^{n} e_i^d(e_j)\lambda_i=\lambda_j$$

كما المجموعة $\{ e_1^d , e_2^d , ..., e_n^d \}$ مولدة للمودول M^d لأن :

أياً كان $f\in M^d$ وكان $x=\sum_{I=1}^{n} x_i e_i \in M$ فإن :

$$f(x)=f(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i)=\sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i)=\sum_{i=1}^{n} e_i^d(x) f(e_i)=(\sum_{i=1}^{n} e_i^d f(e_i))(x)$$

أي أن

$$f=\sum_{i=1}^{n} e_i^d f(e_i)$$

وهذا يثبت أن المجموعة $\{ e_1^d , e_2^d , ..., e_n^d \}$ مولدة للمودول M^d .

إذن المجموعة $\{ e_1^d , e_2^d , ..., e_n^d \}$ قاعدة للمودول M^d .

تعريف :

إذا كانت $B=\{ e_1, e_2, ..., e_n \}$ قاعدة للمودول M فإن القاعدة $\{ e_1^d , e_2^d , ..., e_n^d \}$ في المودول M^d المعرفة في المبرهنة السابقة تسمى القاعدة الثنوية للقاعدة B ونرمز لها B^d .

نتيجة :

إذا كان M مودولاً حراً على حلقة R قاعدته $B=\{ e_1, e_2, ..., e_n \}$ وكانت $B^d=\{ e_1^d , e_2^d , ..., e_n^d \}$ القاعدة الثنوية للقاعدة B في المودول M^d فإن :

(1) – $(\forall x \in M)$ $x = \sum_{i=1}^{n} e_i^d(x)\ e_i$.

(2) – $(\forall f \in M^d)$ $f = \sum_{i=1}^{n} f(e_i)\ e_i^d$.

الإثبات :

(1) – أياً كان $x \in M$ فإن $x = \sum_{i=1}^{n} x_j\ e_j$ وبالتالي

$$e_i^d(x) = x_i \qquad \forall\ i = 1, 2, \ldots, n$$

ومنه

$$x = \sum_{i=1}^{n} e_i^d(x)\, e_i$$

(2) – واضح من المبرهنة (8–1) .

8 – 2 – المودول المضاعف النثوية

ليكن M مودولاً على حلقة R وليكن M^d المودول الثنوي للمودول M (M مودول يساري و M^d مودول يميني على الحلقة R) ،و لنعرف المودول الثنوي للمودول M^d .

من أجل كل عنصر $x \in M$ نعرف التطبيق :

$$x^{dd} : M^d \longrightarrow R$$
$$x^d \ \alpha \ \ x^{dd}(x^d) = \langle x, x^d \rangle$$

فنجد أن x^{dd} شكل خطي على المودول M^d وبالتالي $x^{dd} \in (M^d)^d$ وبذلك نحصل على المودول اليساري $(M^d)^d$ الذي هو المودول الثنوي للمودول اليميني M^d ، نسميه المودول المضاعف الثنوية للمودول M ونرمز له M^{dd} إذا أخذنا التطبيق :

$$dd_M : M \longrightarrow M^{dd}$$
$$x \ \alpha \ \ x^{dd}$$

نجد أن dd_M تشاكل مودول على R ، نسميه التشاكل القانوني من M إلى M^{dd} .

مبرهنة (8-2)

إذا كان M مودولاً على حلقة R حراً قاعدته $B=\{e_1,e_2,...,e_n\}$ فإن التشاكل القانوني $dd_M : M \longrightarrow M^{dd}$ يكون تماثلاً

الإثبات

لتكن $B=\{e_1,e_2,...,e_n\}$ القاعدة الثنوية للقاعدة $B^d=\{e_1^d, e_2^d, ..., e_n^d\}$ عندئذ أياً كان $x\in \ker dd_M$ فإن $dd_M(x)=o$ وبالتالي $x^{dd}=o$ ومنه أياً كان $y^d\in M^d$ فإن $x^{dd}(y^d)=o$ وبما أن $x\in M$ وأن B قاعدة للمودول M فإن $x=\sum_{i\in J} x_i e_i$ وبما أن B^d قاعدة للمودول M^d فإن $x^{dd}(y^d)=o$ يقتضي أن $x^{dd}(e_i^d)=o$ وبالتالي يكون :

$$o=x^{dd}(e_i^d) = <x,e_i^d>=e_i^d(x)=x_i \qquad (\forall\, i=1,2,...,n\ )$$

ومنه $x=o$ وهذا يثبت أن التشاكل dd_M متباين .

من جهة ثانية . أياً كان $x^{dd}\in M^{dd}$ فإنه يوجد $x\in M$ من أجله يكون $dd_M(x)=x^{dd}$ وهذا يثبت أن التشاكل dd_M غامر .

إذن التشاكل dd_M تماثل .

ملاحظة : إذا كان M مودولاً على حلقة R حراً قاعدته غير منتهية $B=\{e_i\ ;\ i\in I\}$ فإن التشاكل القانوني $dd_M : M \longrightarrow M^{dd}$ يكون متبايناً وليس من الضروري أن يكون غامراً .

نتيجة : إذا كان M مودولاً على حلقة R حراً قاعدته $B=\{e_1,e_2,...,e_n\}$ فإن التماثل $dd_M : M \longrightarrow M^{dd}$ ينقل القاعدة $B=\{e_1,e_2,...,e_n\}$ في المودول M إلى القاعدة $B^{dd}=\{e_i^{dd}, e_2^{dd}, ..., e_n^{dd}\}$ في المودول M^{dd} .

8 – 3 – منقول تشاكل مودولي

تعريف

ليكن $f:M\longrightarrow N$ تشاكلاً مودولياً . نعرف منقول التشاكل f (transpose of f) بأنه التشاكل :

$$N^d \longrightarrow M^d$$
$$y^d \;\alpha\; y^d \circ f$$

ونرمز له f^t .

نتائج وملاحظات :

إذا كان $f:M\longrightarrow N$ تشاكلاً مودولياً وكان f^t منقول f فإن :

– (1)

$$f^t : N^d = Hom_R(N,R) \longrightarrow M^d = Hom_R(M,R)$$
$$f^t(y^d) = y^d \circ f$$

ونذكر أن كلاً من N^d , M^d هو مودول يميني على الحلقة R .

(2) – أياً كان $y^d \in N^d$ و $\lambda \in R$ فإن :

$$f^t(y^d.\lambda) = f^t(y^d).\lambda$$

لأنه أياً كان $x \in M$ فإن :

$$\begin{aligned} f^t(y^d.\lambda)(x) &= (y^d\,\lambda \circ f)(x) \\ &= (y^d\,\lambda)(f(x)) \\ &= y^d(f(x))\lambda \\ &= [(y^d \circ f)(x)]\lambda \\ &= [(y^d \circ f)\lambda](x) \\ &= [f^t(y^d)\lambda](x) . \end{aligned}$$

(3) – أياً كان $y \in N$ و $x \in M$ فإن :

$$< f(x), y^d > = < x, f^t(y^d) >$$

لأن :

$$< f(x), y^d > = y^d(f(x)) = (y^d \circ f)(x) = (f^t(y^d))(x) = < x, f^t(y^d) >$$

مبرهنة (8-3)

إذا كان M , N مودولين على حلقة R فإن القضايا التالية تكون صحيحة :

(1) – $(I_M)^t = I_{M^d}$

(2) – إذا كان $f, g \in Hom_R(M,N)$ فإن $(f+g)^t = f^t + g^t$

(3) – إذا كان $g \in Hom_R(N,P)$, $f \in Hom_R(M,N)$ فإن $(g \circ f)^t = f^t \circ g^t$.

الإثبات

(1) – لدينا

$$I_M : M \longrightarrow M$$
$$x \; \alpha \; x$$

وبالتالي

$$(I_M)^t : M^d \longrightarrow M^d$$
$$x^d \; \alpha \; x^d \circ I_M = x^d$$

ومنه $(I_M)^t = I_{M^d}$.

(2) – واضح أن

$$(f+g)^t : N^d \longrightarrow M^d$$
$$f^t + g^t : N^d \longrightarrow M^d$$

كما أنه أياً كان $y^d \in N^d$ فإن :

$$
\begin{aligned}
(f+g)^t(y^d) &= y^d \,o(f+g) \\
&= (y^d \,of)+(y^d \,og) \\
&= f^t(y^d)+g^t(y^d) \\
&= (f^t+g^t)(y^d)
\end{aligned}
$$

إذن $(f+g)^t = f^t + g^t$.

(3) – من جهة أولى :

$$
\begin{aligned}
(g\,of)^t &: P^d \longrightarrow M^d \\
f^t \,og^t &: P^d \longrightarrow M^d
\end{aligned}
$$

ومن جهة ثانية ، أياً كان $y^d \in P^d$ فإن :

$$
\begin{aligned}
(g\,of)^t(y^d) &= y^d \,o(g\,of) \\
&= (y^d \,og)\,of \\
&= f^t(y^d \,og) \\
&= f^t(g^t(y^d)) \\
&= (f^t \,og^t)(y^d) .
\end{aligned}
$$

إذن $(g\,of)^t = f^t \,og^t$.

مبرهنة (8–4)

إذا كان $f: M \longrightarrow N$ تماثلاً مودولياً فإن f^t تماثل ويكون $(f^t)^{-1} = (f^{-1})^t$

الإثبات

(1) – لنفرض أن f تماثل عندئذٍ $f\,of^{-1} = f^{-1}\,of = I_M$ وحسب المبرهنة (8–3) ينتج

$$(f\,of^{-1})^t = (f^{-1}\,of)^t = (I_M)^t$$

وحسب المبرهنة (8–3) ينتج

$$(f^{-1})^t\,of^t = f^t\,o(f^{-1})^t = I_{M^d}$$

وهذا يعني أن f^t تماثل وأن $(f^t)^{-1} = (f^{-1})^t$.

تعريف

ليكن $f:M\longrightarrow N$ تشاكلاً مودولياً وليكن $f^t : N^d \longrightarrow M^d$ منقول f .

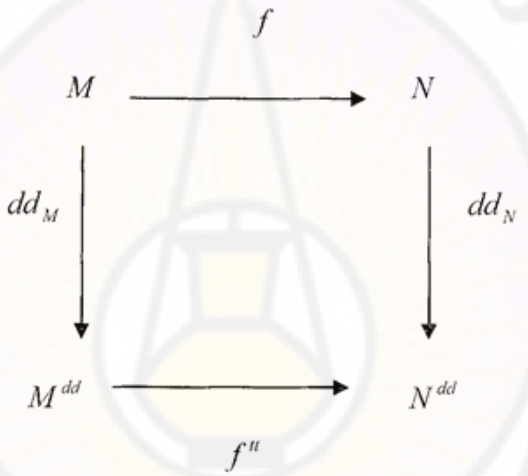
نرمز منقول f^t بالرمز f^{tt} ونعرفه بأنه التشاكل :

$$f^{tt} : M^{dd} \longrightarrow N^{dd}$$

$$v\,\alpha \;\; v\circ f^t$$

مبرهنة (8-5)

إذا كان $f:M\longrightarrow N$ تشاكلاً مودولياً فإن المخطط :



تبادلي .

الإثبات

أياً كان $x\in M$ فإن :

$$(dd_N \circ f)(x) = [f(x)]^{dd_N}$$

كما أن :

$$(f^{tt} \circ dd_M)(x) = f^{tt}(x^{dd_M})$$

وبالتالي أياً كان $y^d \in N^d$ فإن

$$[f(x)]^{dd_M}(y^d) = <f(x), y^d> = <x, f^t(y^d)> \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

وأن

$$[f^{tt}(x^{dd_M})](y^d) = (x^{dd_M} \circ f^t)(y^d) = <x, f^t(y^d)> \quad .....(2)$$

من $(1) and (2)$ نجد أن

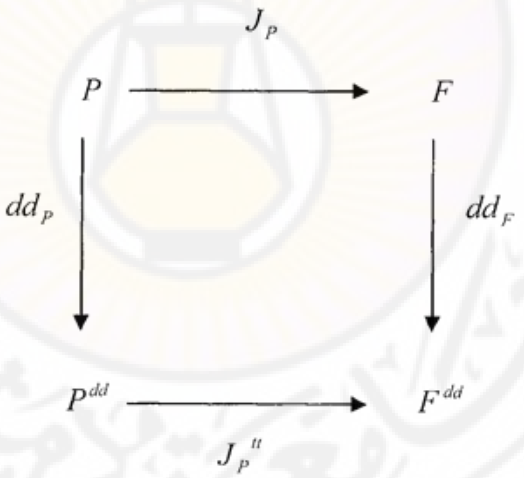
$$dd_N \circ f = f^{tt} \circ dd_M$$

مبرهنة (8-6)

إذا كان P مودولاً إسقاطياً فإن التشاكل dd_P متباين .

الإثبات

بما أن المودول P إسقاطي فهو حد مكمل مباشر في مودول حر F . ليكن $J_P : P \longrightarrow F$ التباين القانوني عندئذٍ حسب المبرهنة (8-5) ينتج أن المخطط :



تبادلياً . أي أن $dd_F \circ J_P = (J_P)^{tt} \circ dd_P$ ومنه يكون $dd_F = (J_P)^{tt} \circ dd_P$. وبما أن المودول F حر فحسب المبرهنة (8-2) ينتج أن التشاكل dd_F متباين وبالتالي التشاكل $(J_P)^{tt} \circ dd_P$ متباين ومنه التشاكل dd_P متباين .

تمرينات محلولة

التمرين الأول

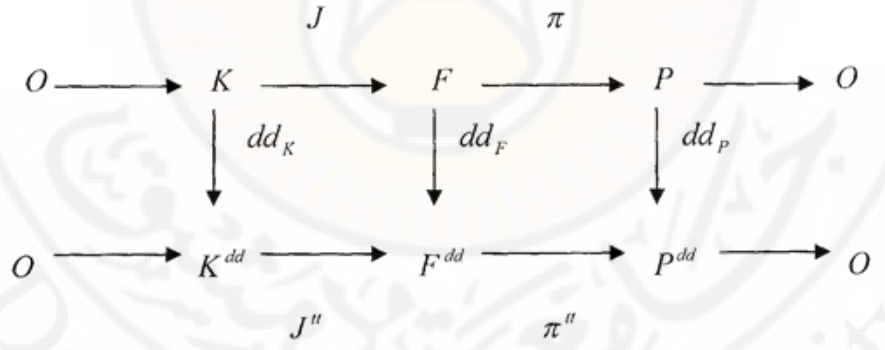
ليكن P مودولاً إسقاطياً منتهي التوليد . أثبت أن dd_P تماثل .

الحل

بما أن المودول P إسقاطي فحسب المبرهنة (8-6) يكون التشاكل dd_P متبايناً . وبما أن المودول P إسقاطي ومنتهي التوليد فإن P حد مكمل مباشر في مودول حر F قاعدته منتهية وبالتالي يوجد تشاكل غامر $\pi : F \longrightarrow P$ وبذلك تكون المتتالية التامة :

$$O \longrightarrow \ker\pi \xrightarrow{J} F \xrightarrow{\pi} P \longrightarrow O$$

منشطرة (حيث التشاكل J هو التباين القانوني) لنفرض أن $\ker\pi = K$ عندئذ حسب المبرهنة (8-5) نحصل على المخطط التبادلي :



وبما أن المودول F حر قاعدته منتهية فحسب المبرهنة (8-2) ينتج أن التشاكل dd_F تماثل وبما أن المخطط السابق تبادلي فإن $dd_P \circ \pi = \pi'' \circ dd_F$ وينتج من ذلك أن التشاكل $dd_P \circ \pi$ غامر وبما أن التشاكل π غامر ينتج أن التشاكل dd_P غامر .

إذن التشاكل dd_P متباين وغامر فهو تماثل .

التمرين الثاني :

ليكن E مودولاً جزئياً من مودول M على حلقة R . نرمز مُعْـدِم المـودول N (annihilator) بالرمز E^O ونعرفه بأنه المجموعة :

$$E^O = \{\ x^d \in M^d \ \ ;\ (\forall x \in M) \quad < x\ ,\ x^d > = o\ \}$$

المطلوب :

1 – أثبت أن E^O مودول جزئي من المودول M^d .

2 – إذا كان $f : M \longrightarrow N$ تشاكلاً مودولياً وكان A مودولاً جزئياً من المودول M فأثبت أن :

$$\left(\vec{f}(A)\right)^O = \overleftarrow{f^t}\,(A^O)$$

الحل

1 – واضح أن $E^O \subseteq M^d$ كما أن التشاكل الصفري

$$O^d : M \longrightarrow R$$

$$x\ \alpha\ \ O^d(x) = o$$

هو عنصر من المجموعة E^O وبالتالي $\phi \neq E^O \subseteq M^d$.

كما أنه أياً كان $x^d\ ,\ y^d \in E^O$ و أياً كان $\lambda \in R$ فإن :

$$< x, x^d > = o \quad and \quad < x, y^d > = o \qquad (\ \forall x \in M\ )$$

وبالتالي أياً كان $x \in M$ فإن :

$$< x\ ,\ x^d + y^d > = < x,\ x^d > + < x, y^d >$$

$$= \quad o \quad + \quad o$$

$$= \ o$$

ومنه $x^d + y^d \in E^O$.

كما أن

$$< x , x^d . \lambda > = < x , x^d > . \lambda = o.\lambda = o$$

مما تقدم نجد أن E^O مودول جزئي من المودول M^d .

2 – أياً كان $y^d \in \left(\vec{f}(A) \right)^O$ فإن

$$\forall x \in \vec{f}(A) \quad ; \quad < x , y^d > = o$$

وبما أن $x \in \vec{f}(A)$ فإنه يوجد $a \in A$ بحيث يكون $x = f(a)$ وبالتالي يكون

$$< f(a) , y^d > = o \quad ; \quad a \in A$$

وينتج من ذلك أن $< a , f^t(y^d) > = o$ وهذا يعني أن $y^d \in \left(\overleftarrow{f^t}(A^O) \right)$ أي

$$\left(\vec{f}(A) \right)^O \subseteq \overleftarrow{f^t}(A^O) \qquad .....(1)$$

من جهة أخرى ، أياً كان $y^d \in \left(\overleftarrow{f^t}(A^O) \right)$ عندئذٍ $f^t(y^d) \in A^O$ وبالتالي أياً كان $a \in A$ فإن $< a , f^t(y^d) > = o$ ومنه $< f(a) , y^d > = o$ ، وبما أن $f(a) \in \vec{f}(A)$ فإن $y^d \in \left(\vec{f}(A) \right)^O$ ومنه

$$\overleftarrow{f^t}(A^O) \subseteq \left(\vec{f}(A) \right)^O \qquad .....(2)$$

من (1) *and* (2) تنتج المساواة المنشودة .

<u>التمرين الثالث</u> :

ليكن $f : M \longrightarrow N$ تشاكلاً مودولياً . أثبت أن

$$(\operatorname{Im} f)^O = \ker f^t$$

الحل

أياً كان $y^d \in \ker f^t$ فإن :

$$
\begin{aligned}
y^d \in \ker f^t \quad &\Leftrightarrow \quad f^t(y^d) = o \\
&\Leftrightarrow \quad y^d \circ f = o \\
&\Leftrightarrow \quad [(\forall x \in M) \ : \ y^d(f(x)) = o] \\
&\Leftrightarrow \quad y^d \in (\operatorname{Im} f)^O \quad .
\end{aligned}
$$

Damascus University

تمرينات (8)

التمرين الأول :

ليكن M مودولاً على حلقة R ، وليكن $f: R \longrightarrow M$ تشاكلاً مودولياً . من أجل كل $\lambda \in R$ نعرف العلاقة :

$$\lambda f \ : \ R \longrightarrow M$$
$$r \ \alpha \ (\lambda f)(r) = f(r\lambda) \qquad (\ \forall \ r \in R\ )$$

المطلوب :

1 – أثبت أن $\lambda f \in Hom_R(R,M)$.

2 – أثبت أن $Hom_R(R,M)$ مودول على الحلقة R .

3 – أثبت أن التطبيق :

$$v : Hom_R(R,M) \longrightarrow M$$

المعرف كما يلي :

$$(\forall f \in Hom_R(R,M) \quad : \quad v(f) = f(1_R)$$

هو تماثل مودولي .

التمرين الثاني :

لتكن $(M_i)_{i=1,2,\ldots n}$ أسرة مودولات جزئية من مودول M على حلقة R أثبت أن

$$\left(\bigoplus_{i=1}^{n} M_i\right)^d \ \cong \ \bigoplus_{i=1}^{n} {M_i}^d$$

التمرين الثالث :

ليكن $f: R \longrightarrow M$ تشاكلاً مودولياً وليكن f' منقول f . أثبت أن

[f غامر] $\Leftrightarrow$ [f' متباين] .

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الفصل التاسع

الجداء التنسوري والمودولات التآلفية

Tensor products and flat modules

9 – 1 – مقدمة

سندرس في هذا الفصل الجداء التنسوري (Tensor products) للمودولات على حلقة R . قبل الشروع في هذه الدراسة يجب أن نتذكر أن كل زمرة جمعية تبديلية هي مودول على الحلقة Z ، وإذا كان M مودولاً يمينياً على حلقة R و N مودولاً يسارياً على الحلقة R فإن مجموعة الجداء الديكارتي $M \times N$ بالنسبة للقانون :

$$(m_1, n_1) + (m_2, n_2) = (m_1 + m_2 \ , \ n_1 + n_2)$$

وذلك أياً كان $(m_1, n_1), (m_2, n_2) \in M \times N$.

هي زمرة جمعية تبديلية وبالتالي هي مودول على حلقة الأعداد الصحيحة Z .

9 – 2 – الجداء التنسوري

تعريف :

ليكن M مودولاً يمينياً على حلقة R وليكن N مودولاً يسارياً على الحلقة R ، G زمرة جمعية تبديلية (G مودول على الحلقة Z) . نقول عن تطبيق $f : M \times N \longrightarrow G$ إنه متوازن (balanced) إذا تحققت الشروط الثلاثة الآتية :

1) $f(m_1+m_2\,,\,n\,) = f(m_1\,,n)+f(m_2\,,n)$

2) $f(m\,,\,n_1+n_2\,) = f(m,n_1\,)+\,f(m,n_2\,)$

3) $f(m\lambda,n) \quad = f(m,\lambda n)\,.$

وذلك أياً كان

$$m\,,\,m_1\,,\,m_2 \in M \quad ; \quad n,\,n_1\,,n_2 \in N \quad ; \quad \lambda \in R$$

مثال :

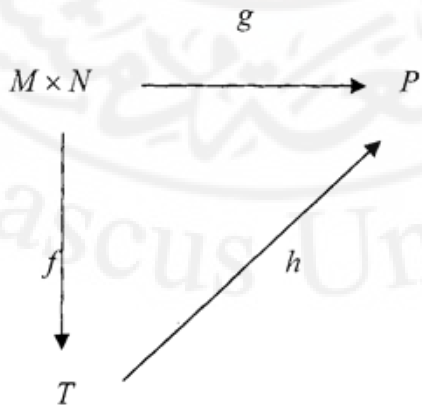
إذا كان M مودولاً يمينياً على حلقة R فإن المودول الثنوي M^d هو مـودول يساري على الحلقة R ويكون التطبيق

$$f : M^d \times M \longrightarrow R$$
$$f(m^d\,,\,n\,) = <n,\,m^d>$$

متوازن (تحقق من ذلك) .

مبرهنة (9 – 1)

إذا كان M مودولاً يمينياً على حلقة R وكان N مودولاً يسارياً على الحلقـة R فإنه توجد زمرة جمعية تبديلية T وتطبيـق متـوازن $f:M\times N\longrightarrow T$ بحيث يكون من أجل كل زمـرة جمعيـة تبديليـة P وكـل تطبيـق تـوازن $g:M\times N\longrightarrow P$ يوجد تـشاكل زمـري (تـشاكل مـودولي علـى Z) $h:T\longrightarrow P$ يجعل المخطط :



تبادلياً .

الإثبات :

ليكن F المودول الحر على المجموعة $M \times N$ ولنأخذ الزمرة الجمعية الجزئية H من الزمرة $(F,+)$ المولدة بالعناصر :

$$(m_1+m_2,n)-(m_1,n)-(m_2,n) \in F$$
$$(m,n_1+n_2)-(m,n_1)-(m,n_2) \in F$$
$$(mr,n)-(m,rn) \in F .$$

بما أن الزمرة $(F,+)$ تبديلية فإن الزمرة H ناظمية في الزمرة F . لنأخذ الزمرة $T = F/H$ فنجد أن الزمرة T تبديلية . لنأخذ الآن العلاقة :

$$f : M \times N \longrightarrow T$$

المعرفة كما يلي :

$$f(m,n) = (m,n)+H \qquad (\forall\ (m,n) \in M \times N)$$

ولنأخذ التشاكلين :

$i : M \times N \longrightarrow F$ التباين القانوني

$\pi : F \longrightarrow F/H$ الغمر القانوني

فنجد أن $f = \pi o i$.

كما أن التطبيق f متوازن لأنه أياً كان $r \in R$, $n, n_1, n_2 \in N$, $m, m_1, m_2 \in M$ فإن :

1 – بما أن $(m_1+m_2,n)-(m_1,n)-(m_2,n) \in H$ فإن :

$$f((m_1+m_2,n)-(m_1,n)-(m_2,n)) = H$$

وبالتالي يكون

$$f(m_1+m_2,n)-f(m_1,n)-f(m_2,n) = H$$

وبملاحظة أن H صفر الزمرة T ينتج

$$f(m_1+m_2,n)=f(m_1,n)+f(m_2,n)$$

2 – بما أن $(m,n_1+n_2)-(m,n_1)-(m,n_2)\in H$ فإن :

$$f((m,n_1+n_2)-(m,n_1)-(m,n_2))=H$$

وبالتالي يكون

$$f(m,n_1+n_2)-f(m,n_1)-f(m,n_2))=H$$

وبملاحظة أن H صفر الزمرة T ينتج

$$f(m,n_1+n_2)=f(m,n_1)+f(m,n_2))$$

3 – بما أن $(mr,n)-(m,rn)\in H$ فإن :

$$f((mr,n)-(m,rn))=H$$

وبالتالي يكون

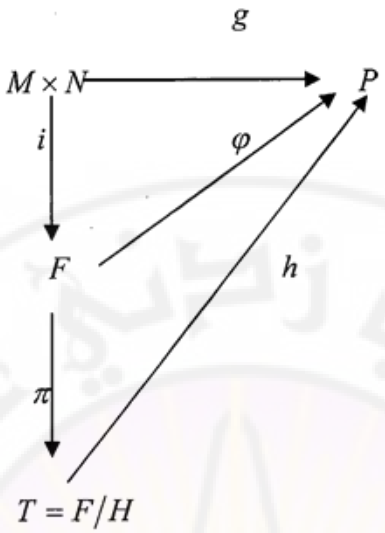
$$f(mr,n)-f(m,rn))=H$$

ومنه نجد أن :

$$f(mr,n)=f(m,rn))$$

إذن التطبيق f متوازن .

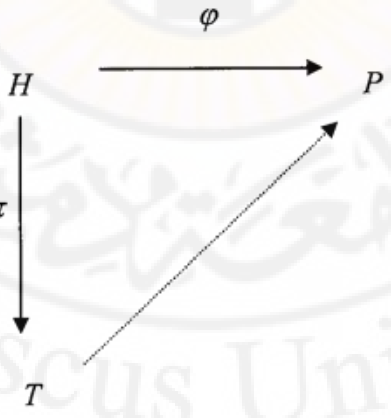
وبما أن F مودول حر على المجموعة $M\times N$ فإنه يوجد تشاكل مودولي وحيد يجعل المخطط :



تبادلياً أي أن $\varphi oi = g$.

لنثبت أخيراً وجود تشاكل مودولي وحيد $h:T \longrightarrow P$ من أجله يكون $hof = g$.

بما أن $\pi:F \longrightarrow T$ تشاكل مودولي غامر وبملاحظة المخطط



نجد أنه للإثبات وجود تشاكل مودولي وحيد $h:T \longrightarrow P$ من أجله يكون $h\circ\pi=\varphi$ يكفي أن نثبت أن $\ker\pi \subseteq \ker\varphi$ أي $H \subseteq \ker\varphi$ ولذلك يكفي أن نبرهن :

$$\varphi((m_1+m_2,n)-(m_1,n)-(m_2,n))=0$$

$$\varphi((m,n_1+n_2)-f(m,n_1)-f(m,n_2))=0$$

$$\varphi((mr,n)-(m,rn))=0$$

من أجل المساواة الأولى لدينا :

$$m_1+m_2,n)-(m_1,n)-(m_2,n))=\varphi(m_1+m_2,n)-\varphi(m_1,n)-\varphi(m_2,n)=0$$

وبالمثل نتحقق من المساويتين الباقيتين .

إذن يوجد تشاكل مودولي وحيد $h:T \longrightarrow P$ من أجله يكون $h\circ\pi=\varphi$ وبالتالي يكون $(h\circ\pi)oi=\varphi oi$ ومنه يكون $hof=g$.

تعريف :

ليكن M مودولاً يمينياً على حلقة R وليكن N مودولاً يسارياً على الحلقة R نعرف الجداء التنسوري للمودولين M,N بأنه الثنائية (T,f) المعرفة في المبرهنة السابقة .

9 – 3 – نتائج وملاحظات :

- سنرمز صورة العنصر (m,n) وفق التطبيق f بالرمز $m\otimes n$ أي أن :

$$f(m,n)=m\otimes n$$

- الزمرة الجمعية T مولدة بالعناصر $m\otimes n$ ($(m,n)\in M\times N$) وبالتالي كل عنصر من الزمرة T يكتب بالشكل $\sum_{i=1}^{t} m_i\otimes n_i$

- سنرمز الزمرة T بالرمز $M \otimes_R N$ أو بالرمز $M \otimes N$ إن لم يؤد هذا الاختصار لأي التباس .
- الزمرة $M \otimes N$ هي مودول على الحلقة Z وفيها يكون :

1) $(m_1 + m_2) \otimes n = m_1 \otimes n + m_2 \otimes n$

2) $m \otimes (n_1 + n_2) = m \otimes n_1 + m \otimes n_2$

3) $mr \otimes n = m \otimes rn$

مبرهنة (9 – 2)

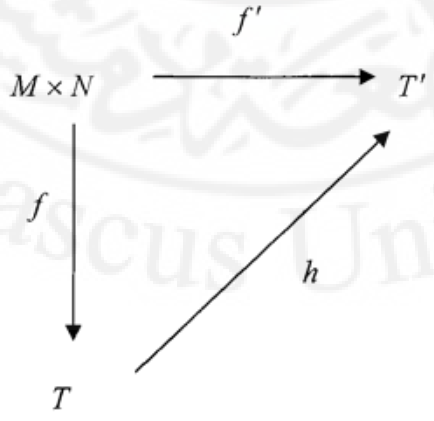
إذا كان M مودولاً يمينياً على حلقة R وكان N مودولاً يسارياً على الحلقة R وكان (T, f) جداء تنسورياً للمودولين M, N فإن القضيتين التاليتين متكافئتان :

(1) – (T', f') جداء تنسوري للمودولين M, N .

(2) – يوجد تماثل (زمري) $h: T \longrightarrow T'$ من أجله يكون $hof = f'$.

الإثبات :

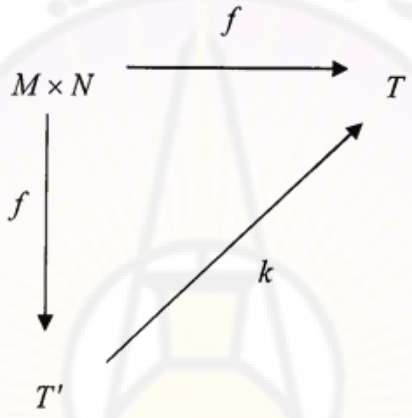
(2 $\Rightarrow$ 1) بما أن (T, f) جداء تنسوري للمودولين M, N فإنه من أجل التطبيق المتوازن $f': M \times N \longrightarrow T'$ يوجد تشاكل مودولي وحيد $h: T \longrightarrow T'$ من أجله يكون المخطط :



تبادلياً . أي

$$h \circ f = f' \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

وبما أن (T', f') جداء تنسوري للمودولين M, N فإنه من أجل التطبيق المتوازن $f : M \times N \longrightarrow T$ يوجد تشاكل مودولي وحيد $k : T' \longrightarrow T$ من أجله يكون المخطط :



تبادلياً . أي :

$$k \circ f' = f \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

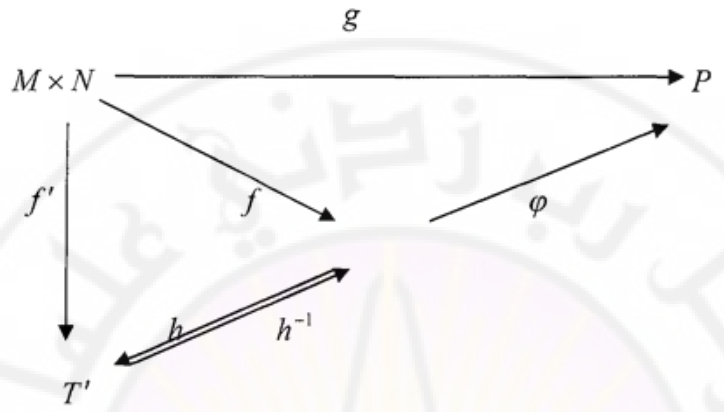
من العلاقتين (1) *and* (2) نجد أن :

$$h \circ k = I_{T'} \qquad \text{and} \qquad k \circ h = I_T$$

وهذا يعني أن التشاكل $h : T \longrightarrow T'$ تماثل من أجله يكون $h \circ f = f'$.

($1 \Rightarrow 2$) لنفرض وجود تماثل $h : T \longrightarrow T'$ من أجله يكون $h \circ f = f'$ بما أن (T, f) جداء تنسوري للمودولين M, N فإنه من أجل كل زمرة جمعية

تبديلية P ومن أجل كل تطبيق متوازن $g : M \times N \longrightarrow P$ يوجد تشاكل $\varphi : T \longrightarrow P$ من أجله يكون $\varphi \circ f = g$



وبما أن $f = h^{-1} \circ f'$ ينتج لدينا $\varphi \circ (h^{-1} \circ f') = g$ ومنه $(\varphi \circ h^{-1}) \circ f' = g$ وهذا يعني أنه يوجد تشاكل $v = \varphi \circ h^{-1}$ من أجله يكون $v \circ f' = g$. وهذا ما يثبت أن (T', f') جداء تنسوري للمودولين M, N .

نتيجة هامة :

إذا **كان** M مودولاً يمينياً على حلقة R وكان N مودولاً يسارياً على الحلقة R فإن $(M \otimes_R N \ , \ \otimes_R)$ جداء تنسوري للمودولين M, N .

9 – 4 – ثنائي المودول bimodule

تعريف :

لتكن $R \ , S$ حلقتين . نقول عن M إنه ثنائي المودول على (R,S) إذا كان M مودولاً يسارياً على الحلقة R و مودولاً يمينياً على الحلقة S (في الوقت نفسه) . ويكون :

$$(rm)\, s = r(ms)$$

وذلك أياً كان $m \in M \ , \ r \in R \ , \ s \in S$.

أمثلة :

1 – كل حلقة R هي ثنائي المودول على (R,R) .

2 – إذا كان M مودولاً يمينياً على حلقة R فإن M هو ثنائي المودول على (Z,R) .

3 – إذا كان M مودولاً يسارياً على حلقة تبديلية R فإن M هو ثنائي المودول على (R,R) . إذا تحقق

$$rm = mr \qquad (\forall m \in M \ , \ \forall r \in R)$$

مبرهنة (9 – 3)

إذا كان M ثنائي المودول على (R,S) وكان N مودولاً يسارياً على الحلقة S فإن $M \otimes_S N$ مودول يساري على الحلقة R بالنسبة إلى قانون التشكيل الخارجي :

$$r \cdot \sum_{i=1}^{t} (m_i \otimes_S n_i) = \sum_{i=1}^{t} (r m_i \otimes_S n_i)$$

الإثبات :

من أجل كل عنصر $r \in R$ نعرف التطبيق :

$$\varphi_r : M \times N \longrightarrow M \otimes_S N$$
$$\varphi_r (m,n) = rm \otimes_S n$$

فنجد أن التطبيق φ_r متوازن (تحقق من ذلك) ، وبالتالي يوجد تشاكل(زمري) وحيد $f_r : M \otimes_S N \longrightarrow M \otimes_S N$ بحيث

$$f_r (m \otimes_S n) = rm \otimes_S n \qquad (\forall m \in M) , (\forall n \in N)$$

وبما أن كل عنصر من الزمرة $M \otimes_S N$ يكتب بالشكل $\sum_{i=1}^{t} (m_i \otimes_S n_i)$ فإننا نستطيع أن نعرف قانون تشكيل خارجي يساري على $M \otimes_S N$ مجموعة مؤثراته الحلقة R كما يلي :

$$r.\sum_{i=1}^{t}(m_i \otimes_S n_i) = f_r(\sum_{i=1}^{t}(m_i \otimes_S n_i) = \sum_{i=1}^{t}(r m_i \otimes_S n_i)$$

وبهذا القانون تصبح الزمرة الجمعية التبديلية $M \otimes_S N$ مودولاً يسارياً على الحلقة R (تحقق من ذلك) .

مبرهنة (9 – 4)

إذا كان M مودولاً يسارياً على حلقة R فإنه يوجد تماثل مودولي وحيد $\varphi: R \otimes M \longrightarrow M$ من أجله يكون :

$$\varphi(r \otimes m) = r m \qquad (\forall r \in R), (\forall m \in M)$$

الإثبات :

من المبرهنة السابقة ينتج أن $R \otimes M$ مودول يساري على الحلقة R . لنأخذ التطبيق :

$$f : R \times M \longrightarrow M$$
$$f(r,m) = r m$$

فنجد أن التطبيق f متوازن (تحقق من ذلك) وبالتالي يوجد تشاكل زمري وحيد $\varphi: R \otimes M \longrightarrow M$ من أجله يكون $\varphi \circ \otimes = f$. لنجعل التشاكل الزمري φ تشاكلاً مودولياً .

نأخذ قانون التشكيل الخارجي اليساري المعرف في المبرهنة السابقة :

$$\varphi(s(r \otimes m)) = \varphi(sr \otimes m) = sr m = s\varphi(r \otimes m)$$

وذلك أياً كان $s, r \in R$, $m \in M$.

وبالتالي أياً كان $t \in R$ و أياً كان $n \in R \otimes M$ يكون :

$$\varphi(t n) = t\,\varphi(n)$$

ومنه التطبيق φ هو تشاكل مودولي . ولنبرهن على أن φ هو تماثل .

لنأخذ التطبيق :

$$\xi : M \longrightarrow R \otimes M$$
$$\xi(m) = 1 \otimes m$$

فنجد أن ξ تشاكل مودولي كما أنه :

أياً كان $m \in M$ فإن :

$$(\varphi o \xi)(m) = \xi(1 \otimes m) = m .$$

ومنه :

$$\varphi o \xi = I_M \qquad \text{.....(1)}$$

ومن جهة أخرى . أياً كان $r \in R$ و أياً كان $m \in M$ فإن :

$$(\xi o \varphi)(r \otimes m) = \xi(rm) = 1 \otimes rm = r \otimes m$$

ومنه :

$$\xi o \varphi = I_{R \otimes M} \qquad \text{.....(2)}$$

من (1) and (2) نجد أن التشاكل φ هو تقابل أي φ تماثل مودولي وبذلك يتم المطلوب .

مبرهنة (9 – 5)

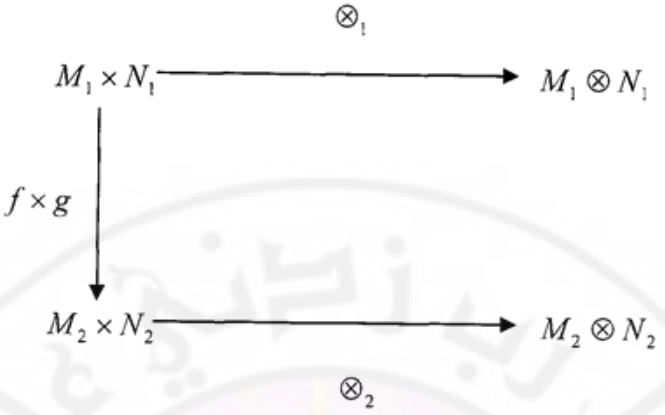
إذا كان M مودولاً يمينياً على حلقة R فإنه يوجد تماثل مودولي وحيد $\varphi: M \otimes R \longrightarrow M$ من أجله يكون :

$$\varphi(m \otimes r) = mr \qquad (\forall r \in R), (\forall m \in M)$$

الإثبات : يتم الإثبات بشكل مشابه للمبرهنة السابقة .

9 – 5 – الجداء التنسوري للتشاكلات المودولية

ليكن M_1, M_2 مودولين يمينيين ، N_1, N_2 مودوليين يساريين ، وليكن $g : N_1 \longrightarrow N_2$ ، $f : M_1 \longrightarrow M_2$ تشاكلين مودوليين ، لنتأمل المخطط



حيث التشاكل $f \times g$ معرف كما يلي :

$$(f \times g)\ (m_1, n_1) = (f(m_1)\ ,\ g(n_1))$$

فنجد بسهولة أن $\otimes_2 o(f \times g)$ تطبيق متوازن وبالتالي يوجد تشاكل وحيد (على Z) :

$$h : M_1 \otimes N_1 \longrightarrow M_2 \otimes N_2$$

يجعل المخطط السابق تبادلياً . يسمى التشاكل h الجداء التنسوري للتشاكلين f, g ونرمز له بالرمز $f \otimes g$. أي

$$f \otimes g\ :\ M_1 \otimes N_1 \longrightarrow M_2 \otimes N_2$$
$$(f \otimes g)\ (m_1 \otimes n_1) = f(m_1) \otimes g(n_1)$$

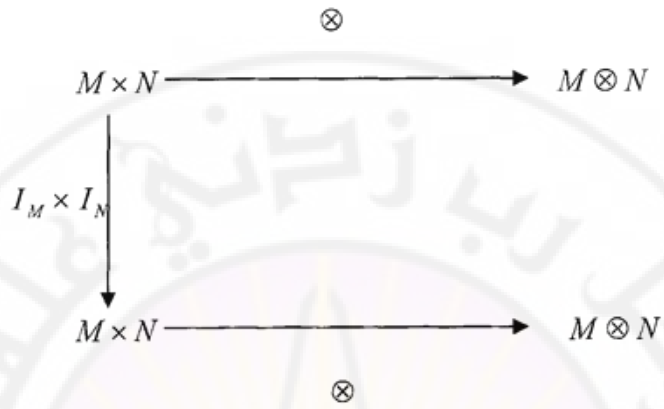
مبرهنة (9 – 6)

إذا M مودولاً يمينياً على حلقة R وكان N مودولاً يسارياً على الحلقة R فإن

$$I_M \otimes I_N = I_{M \otimes N}$$

الإثبات :

ينتج مباشرة من المخطط التبادلي :



مبرهنة (9 – 7)

إذا كانت M , M' , M'' مودولات يمينية على حلقة R ،

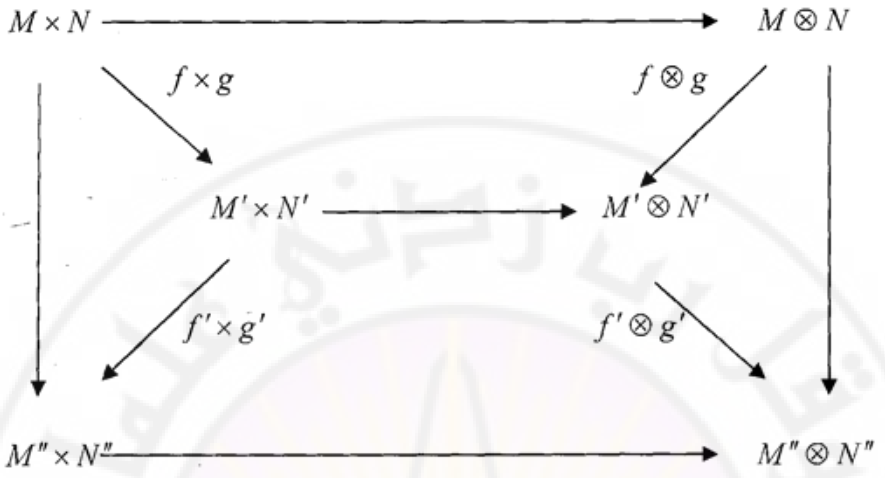
N , N' , N'' مودولات يسارية على الحلقة R ،

$f : M \longrightarrow M'$, $f' : M' \longrightarrow M''$, $g : N \longrightarrow N'$, $g' : N' \longrightarrow N''$

تشاكلات مودولية ، فإن

$$(f' \circ f) \otimes (g' \otimes g) = (f' \otimes g') \circ (f \otimes g)$$

الإثبات : ينتج الإثبات مباشرة من المخطط التبادلي :



تعريف :

ليكن A , B مودولين يساريين على حلقة R ، وليكن $f : A \longrightarrow B$ تشاكلاً مودولياً M مودولاً يمينياً على الحلقة R نرمز التشاكل (على Z) :

$$I_M \otimes f : M \otimes A \longrightarrow M \otimes B$$

بالرمز $f^{\otimes}$.

وبالمثل إذا كان A , B مودولين يمينيين على حلقة R ، وليكن $f : A \longrightarrow B$ تشاكلاً مودولياً ، M مودولاً يسارياً على الحلقة R نرمز التشاكل (على Z)

$$f \otimes I_M : A \otimes M \longrightarrow B \otimes M$$

بالرمز $f^{\otimes}$.

مبرهنة (9 – 8)

إذا كان M مودولاً يمينياً على حلقة R وكانت

$$A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} A'' \longrightarrow O \qquad \text{.....(1)}$$

متتالية تامة من التشاكلات المودولية اليسارية فإن متتالية التشاكلات (على Z)

$$M \otimes A' \xrightarrow{\otimes f} M \otimes A \xrightarrow{\otimes g} M \otimes A'' \longrightarrow O$$

تكون تامة .

الإثبات

لإثبات المطلوب يكفي أن نثبت أن

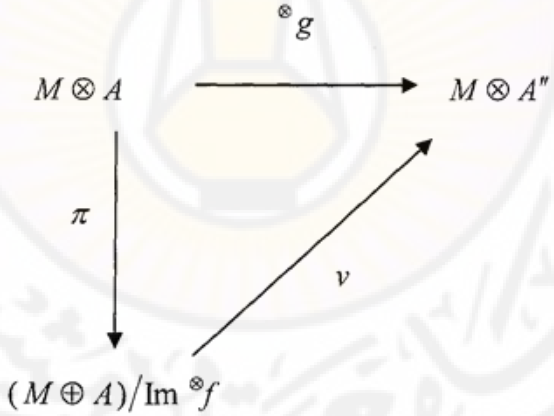
① $\text{Im}\ {}^{\otimes}f = \ker {}^{\otimes}g$

② ${}^{\otimes}g$ غامر

من أجل القضية ① لدينا :

$$\pi : M \otimes A \longrightarrow {(M \otimes A)}/{\text{Im}\ {}^{\otimes}f}$$

تشاكل الغمر القانوني في $M \otimes A$ وهو تشاكل غامر نواته ${}^{\otimes}f$ Im ومن المخطط :



نجد أنه يوجد تشاكل $M \otimes A'' \longrightarrow {(M \otimes A)}/{\text{Im}\ {}^{\otimes}f}$: v بحيث يكون $v \circ \pi = {}^{\otimes}g$. وبما أن

التشاكل ν متباين $\Leftrightarrow$ $\ker \pi = \ker {}^{\otimes}g$

لكن $\ker \pi = \operatorname{Im} {}^{\otimes}f$ وبالتالي لإثبات $\ker {}^{\otimes}g = \operatorname{Im} {}^{\otimes}f$ يكفي أن نثبت أن التشاكل ν متباين .

أياً كان $a,b \in A$ فإن :

$$\begin{aligned} g(a) = g(b) \quad &\Rightarrow \quad a-b \in \ker g = \operatorname{Im} f \\ &\Rightarrow \quad (\exists a' \in A') \ : \ a-b = f(a') \\ &\Rightarrow \quad (\forall m \in M) \ : (m \otimes a)-(m \otimes b) = m \otimes f(a') \in \operatorname{Im} {}^{\otimes}f \end{aligned}$$

وبما أن التشاكل g غامر فإنه يوجد تطبيق :

$$\alpha \ : \ M \times A'' \longrightarrow {(M \otimes A)}\Big/{\operatorname{Im} {}^{\otimes}f}$$

معرف كما يلي :

$$\alpha \ (\ m \ , \ a'' \ ) = (\ m \otimes a \ ) + \operatorname{Im} {}^{\otimes}f$$

بحيث

$$g(a) = a'' \qquad (\ \forall \ a \in A \ )$$

واضح أن التطبيق α متوازن وبالتالي يوجد تشاكل وحيد (على Z) :

$$\xi : M \otimes A'' \longrightarrow {(M \otimes A)}\Big/{\operatorname{Im} {}^{\otimes}f}$$

بحيث يكون $\alpha = \xi \, o \otimes$ وبالتالي أياً كان $m \in M \ , \ a \in A$ فإن :

$$\begin{aligned} (\xi \, o \nu) \, [\, (m \otimes n) + \operatorname{Im} {}^{\otimes}f \,] &= \xi \, [\, {}^{\otimes}g (m \otimes a)] \\ &= \xi \, [\, m \otimes g(a) \,] \\ &= (\xi \, o \nu) \, (m, g(a)) \\ &= \alpha \ (\ m \ , g(a)) \\ &= \ (\ m \otimes a) \ + \operatorname{Im} {}^{\otimes}f \end{aligned}$$

وهذا يعني أن $\xi o v$ هو المطابق في $(M\otimes A)/\operatorname{Im}{}^{\otimes}f$ وينتج من ذلك أن التشاكل v متباين .

من أجل القضية ② لدينا المتتالية (1) تامة ينتج من ذلك أن التشاكل g غامر وبالتالي من أجل كل عنصر $a''\in A''$ يوجد $a\in A$ بحيث يكون $g(a)=a''$ وعندئذٍ من أجل كل عنصر $m\in M$ يكون :

$$m\otimes a''=m\otimes g(a)={}^{\otimes}g(m\otimes a)\subseteq \operatorname{Im}{}^{\otimes}g$$

ومنه التشاكل ${}^{\otimes}g$ غامر . وبذلك يتم المطلوب .

مبرهنة (9 – 9)

إذا كان M مودولاً يسارياً على حلقة R وكانت

$$A'\xrightarrow{f}A\xrightarrow{g}A''\longrightarrow O \qquad .....(1)$$

متتالية تامة من التشاكلات المودولية اليمينية فإن متتالية التشاكلات (على Z)

$$A'\otimes M\xrightarrow{f^{*}}A\otimes M\xrightarrow{g^{*}}A''\otimes M\longrightarrow O$$

تكون تامة .

الإثبات : يتم الإثبات بشكل مشابه في المبرهنة السابقة .

مبرهنة (9 – 10)

إذا كان M مودولاً يمينياً على حلقة R وكانت

$$O\longrightarrow A'\xrightarrow{f}A\xrightarrow{g}A''\longrightarrow O \qquad .....(1)$$

متتالية تامة منشطرة من التشاكلات المودولية اليسارية فإن متتالية التشاكلات (على Z)

$$O\longrightarrow M\otimes A'\xrightarrow{{}^{*}f}M\otimes A\xrightarrow{{}^{*}g}M\otimes A''\longrightarrow O \qquad .....(2)$$

تكون منشطرة .

الإثبات :

لنثبت أولاً أن المتتالية (2) منشطرة من اليسار .

بما أن المتتالية (1) منشطرة فهي منشطرة من اليسار وبالتالي يوجد تشاكل منشطر $\rho : A \longrightarrow A'$ بحيث يكون $\rho o f = I_{A'}$.

لنأخذ العلاقة :

$$\alpha : M \times A \longrightarrow M \otimes A'$$

المعرفة كما يلي :

$$\alpha(m,a) = m \otimes \rho(a) \qquad (\forall (m,a) \in M \times A)$$

فنجد أن العلاقة α المعرفة أعلاه هي تطبيق متوازن وبالتالي يوجد تشاكل وحيد (على Z) $\varphi : M \otimes A \longrightarrow M \otimes A'$ بحيث يكون

$$\varphi(m \otimes a) = m \otimes \rho(a)$$

وذلك أياً كان $a \in A$, $m \in M$.

وبالتالي $a' \in A'$, $m \in M$ يكون :

$$\begin{aligned} (\varphi o^{\otimes} f)(m \otimes a') &= \varphi(m \otimes f(a')) \\ &= m \otimes \rho(f(a')) \\ &= m \otimes a' \end{aligned}$$

ومنه $\varphi \, o^{\otimes} f = I_{M \otimes A'}$ وهذا يثبت أن المتتالية منشطرة من اليسار . وبالمثل نثبت أنها منشطرة من اليمين .

9 – 6 – المودول التآلفي Flat module

تعريف (1)

ليكن M مودولاً يمينياً على حلقة R . نقول عن المودول M إنه تآلفي (flat) إذا تحقق الشرط التالي :

من أجل كل تشاكل مودولي متباين $f:A\longrightarrow A'$ يكون التشاكل $^{\otimes}f : M\otimes A\longrightarrow M\otimes A'$ متبايناً .

(كل من A , A' مودول يساري على الحلقة R)

تعريف (2)

ليكن M مودولاً يسارياً على حلقة R . نقول عن المودول M إنه تآلفي إذا تحقق الشرط التالي :

من أجل كل تشاكل مودولي متباين $f:A\longrightarrow A'$ يكون التشاكل $f^{\otimes} : A\otimes M\longrightarrow A'\otimes M$ متبايناً .

(كل من A , A' مودول يميني على الحلقة R) .

مبرهنة (9 – 11)

كل حلقة R هي مودول تآلفي .

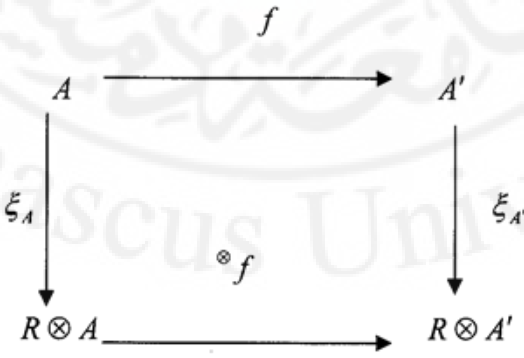
الإثبات :

إن الحلقة R هي مودول يميني على R . ليكن $f:A\longrightarrow A'$ تشاكلاً مودولياً عندئذٍ من أجل المودولين A , A' وحسب المبرهنة (9 – 4) يوجد تماثلان

$$\xi_{A'} : A'\longrightarrow R\otimes A' \qquad \xi_{A'}(a') = 1\otimes a'$$

$$\xi_A : A\longrightarrow R\otimes A \qquad \xi_A(a) = 1\otimes a$$

وبالتالي نحصل على المخطط التبادلي :



ومنه يكون $\xi_{A'} o f = f^{\otimes} o \xi_A$ وبما أن ξ_A تماثل فإن ξ_A^{-1} موجود ، ينتج من ذلك أن $f = \xi_{A'} o f^{\otimes} o \xi_A^{-1}$ وبما أن التشاكل f متباين وأن كلاً $\xi_{A'}$ ، ξ_A تماثل فإن التشاكل $f^{\otimes}$ متباين . إذن المودول R تآلفي .

مبرهنة (9 – 12)

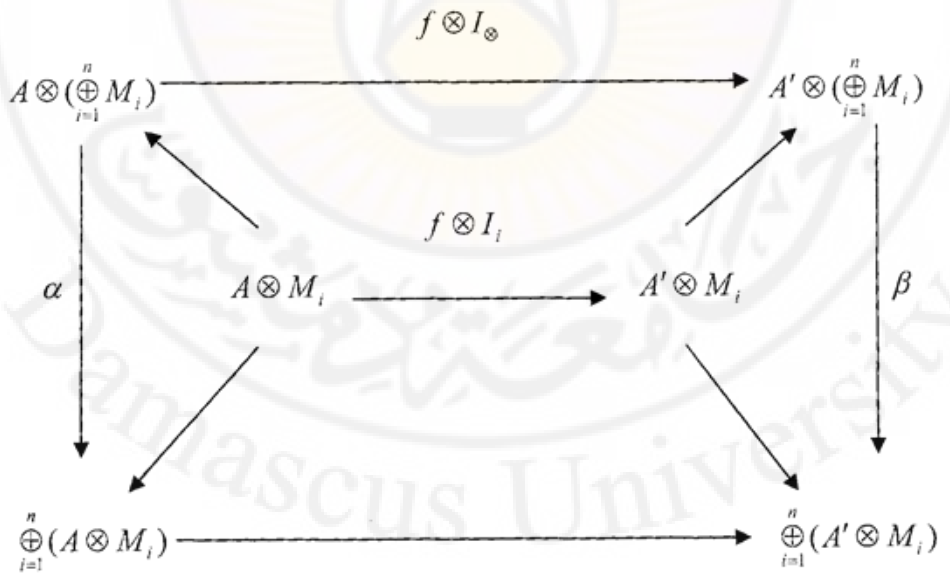
إذا كانت $(M_i)_{i=1,2,...n}$ أسرة مودولات يسارية على حلقة R فإن القضيتين التاليتين متكافئتان :

(1) – المودول $\bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ تآلفي .

(2) – المودول M_i $(i = 1,2,...,n)$ تآلفي .

الإثبات :

ليكن A, A' مودولين يمينيين على الحلقة R وليكن $f : A \longrightarrow A'$ تشاكلاً مودولياً متبايناً . ولنتأمل المخطط :



حيث :

$I_{\oplus}$ هو المطابق في المودول $\bigoplus_{i=1}^{n} M_i$

I_i هو المطابق في المودول M_i .

لدينا في هذا المخطط ما يلي :

- كل التشاكلات الأفقية والعمودية هي متباينة .
- α هو التماثل الوحيد الذي يجعل المخطط الثلاثي الأيسر تبادلياً وهذا التماثل معرف كما يلي :

$$\alpha\,(a\otimes m_i)_{i=1,2,\dots n}\,) = a\otimes (m_i)_{\,i=1,2,\dots,n}$$

- β هو التماثل الوحيد الذي يجعل المخطط الثلاثي الأيمن تبادلياً وهذا التماثل معرف كما يلي :

$$\beta\,(a'\otimes m_i)_{i=1,2,\dots n}\,) = a'\otimes (m_i)_{\,i=1,2,\dots,n}$$

- ν هو التشاكل الوحيد الذي يجعل المخطط الذي هو على شكل شبه منحرف تبادلياً وهذا التشاكل معرف كما يلي :

$$\nu\,(a\otimes m_i)_{i=1,2,\dots n}\,) = (a\otimes m_i)_{\,i=1,2,\dots,n}$$

- ν هو التشاكل الذي يجعل المخطط الكلي تبادلياً .

وبما أن كلاً من α , β تماثل فإن :

التشاكل $f\otimes I_{\oplus}$ متباين $\Leftrightarrow$ التشاكل ν متباين

لكن

[التشاكل $f\otimes I_{\oplus}$ متباين] $\Leftrightarrow$ [التشاكل $f\otimes I_i$ $(\forall i=1,2,\dots n)$ متباين]

وهذا يعني أن :

[المودول $\bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ تآلفي] $\Leftrightarrow$ [المودول M_i $(i=1,2,\dots,n)$ تآلفي]

مبرهنة (9 – 13)

كل مودول إسقاطي يكون تآلفياً .

الإثبات :

لنفرض أن P مودول إسقاطي على حلقة R ، عندئذٍ P حد مكمل مباشر في مودول حر F . لتكن $S=(a_i)_{i\in I}$ قاعدة المودول F وعندئذٍ يكون $F=\bigoplus_{i\in I} Ra_i$ وحسب المبرهنتين (9 – 11) و (9 – 12) يكون المودول الحر F تآلفياً وحسب المبرهنة (9 – 12) يكون المودول P تآلفياً .

تمرينات محلولة

التمرين الأول :

لتكن

$$M' \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} M'' \longrightarrow O \qquad \text{.....(1)}$$

متتالية تامة من المودولات اليمينية على حلقة R .

$$N' \xrightarrow{\gamma} N \xrightarrow{\delta} N'' \longrightarrow O \qquad \text{.....(2)}$$

متتالية تامة من المودولات اليسارية على الحلة R .

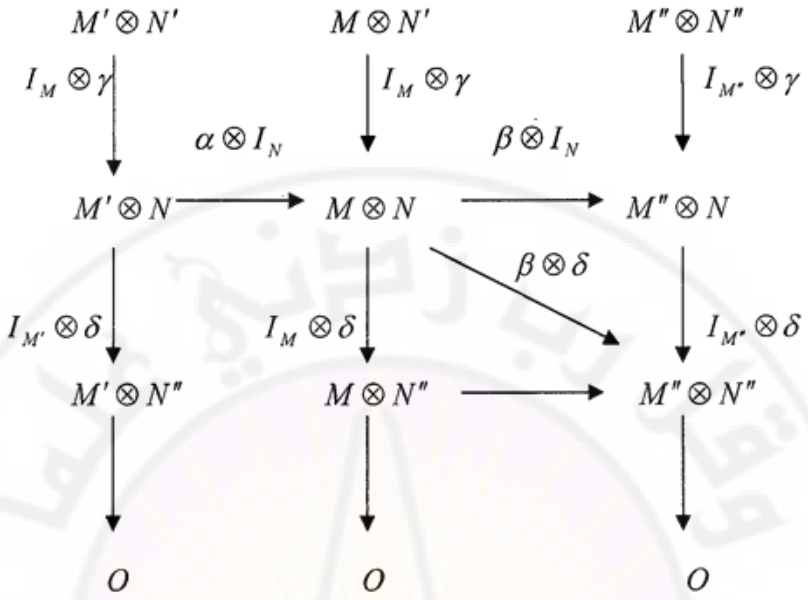
أثبت أن المتتالية

$$O \longrightarrow \mathrm{Im}(I_N \otimes \gamma) + \mathrm{Im}(\alpha \otimes I_N) \xrightarrow{J} M \otimes N \xrightarrow{\beta\otimes\delta} M'' \otimes N'' \longrightarrow O$$

تامة حيث J هو الاحتواء القانوني .

(لاحظ أن المتتالية الأخيرة هي متتالية لتشاكلات مودولية على الحلقة Z) .

الحل : لنتأمل المخطط



وبتطبيق المبرهنتين (9 – 8) و (9 – 9) نجد أن كل سطر وكل عامود من المخطط السابق هو متتالية تامة . وبتطبيق المبرهنة (9 – 7) يكون المخطط تبادلياً وينتج من ذلك أن التشاكل $\beta\otimes\delta$ غامر .

من المخطط نستنتج أن :

$$(\beta\otimes\delta)\,o\,(I_M\otimes\gamma)=0$$

وأن :

$$(\beta\otimes\delta)\,o\,(\alpha\otimes I_N)=0$$

ومنه يكون

$$\mathrm{Im}\,(I_M\otimes\gamma)+\mathrm{Im}\,(\alpha\otimes I_N)\subseteq\ker\,(\beta\otimes\delta) \qquad .....(1)$$

من ناحية أخرى . أياً كان $z\in\ker\,(\beta\otimes\delta)$ فإن

$$(I_M\otimes\delta)\,(z)\in\ker\,(\beta\otimes I_{N'})\;=\;\mathrm{Im}(\alpha\otimes I_{N'})$$

وبالتالي يوجد $x \in M' \otimes N''$ بحيث يكون

$$(I_M \otimes \delta)(z) = (\alpha \otimes I_{N''})(x)$$

وبما أن $I_M \otimes \delta$ غامر فإنه يوجد $y \in M' \otimes N$ بحيث يكون

$$(I_M \otimes \delta)(z) = (\alpha \otimes I_{N''})(I_{M'} \otimes \delta)(y)$$

لنفرض أن

$$z' = z - (\alpha \otimes I_N)(y)$$

عندئذٍ يكون

$$z' \in \ker(I_M \otimes \delta) = \mathrm{Im}\,(I_M \otimes \gamma)$$

وبالتالي

$$z = z' + (\alpha \otimes I_N)(y) \in \mathrm{Im}\,(I_M \otimes \gamma) + \mathrm{Im}(\alpha \otimes I_N)$$

ومنه

$$\ker(\beta \otimes \delta) \subseteq \mathrm{Im}\,(I_M \otimes \gamma) + \mathrm{Im}\,(\alpha \otimes I_N) \qquad .....(2)$$

من (1) *and* (2) نجد المطلوب .

التمرين الثاني :

إذا كانت $(M_i)_{i \in I}$ أسرة مودولات يسارية على حلقة R وكان M مودولاً يمينياً على الحلقة R . أثبت أن $((I_M \, o in_i)_{i \in I}\ ,\ M \otimes \bigoplus_{i=1}^{n} M_i)$ جداء مرافق (co product) للأسرة $(M \otimes M_i)_{i \in I}$.

الحل :

لنأخذ الغمر القانوني

$$pr_j^{\oplus} : \bigoplus_{i \in I} M_i \longrightarrow M_j$$

والتباين القانوني

$$in_j : M_j \longrightarrow \bigoplus_{i \in I} M_i$$

عندئذٍ من أجل كل $j \in I$ يمكننا تعريف التشاكلات (على Z) :

$$\alpha_j = I_M \otimes pr_j^{\oplus} \; : \; M \otimes \bigoplus_{i \in I} M_i \longrightarrow M \otimes M_j$$

$$\beta_j = I_M \otimes in_j \; : \; M \otimes M_j \longrightarrow M \otimes \bigoplus_{i \in I} M_i$$

وحسب المبرهنة (9 – 7) يكون

$$\alpha_k \, o \beta_j = \begin{cases} I_{M \otimes M_j} & if \quad k = j; \\ 0 & if \quad k \neq j. \end{cases}$$

وعندئذٍ أياً كان $m \in M \quad , \quad (m_i)_{i \in I} \in \bigoplus_{i \in I} M_i$ يكون

$$\alpha_j \, (m \otimes (m_i)_{i \in I}) = m \otimes pr_j^{\oplus} \, ((m_i)_{i \in I})$$

بما أن $pr_j^{\oplus} \, (m_i)_{i \in I}) = 0$ من أجل جميع $j \in I$ باستثناء عدد منته فإن

$\alpha_j \, (m \otimes (m_i)_{i \in I}) = 0$ من أجل جميع $j \in I$ باستثناء عدد منته . بالإضافية إلى ذلك

$$\sum_{j \in J} (\beta_j \, o \alpha_j) \, (m \otimes (m_i)_{i \in I}) = m \otimes \sum_{j \in I} (in_j \, o pr_j^{\oplus})((m_i)_{i \in I})$$

$$= m \otimes (m_i)_{i \in I}$$

وبتطبيق المبرهنة (4 – 6) (راجع التمرين السادس من التمرينات المحلولة في الفصل الرابع) نجد أن $((I_M \, o in_i)_{i \in I} \; , \; M \otimes \bigoplus_{i=1}^{n} M_i)$ جداء مرافق للأسرة $(M \otimes M_i)_{i \in I}$.

التمرين الثالث :

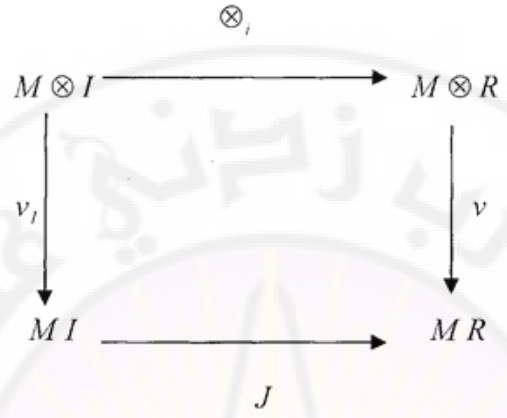
ليكن M مودولاً يمينياً على حلقة R . أثبت أن القضيتين التاليتين متكافئتان :

(1) – المودول M تآلفي .

(2) – من أجل كل مثالي يساري I من الحلقة R يكون التطبيق $v_I : M \otimes I \longrightarrow MI$ تماثلاً (على Z) .

الحل :

من أجل كل I مثالي يساري من الحلقة R يمكننا تكوين المخطط التالي :



حيث v هو التماثل حسب المبرهنة (9 –6) ، وأن J هو الاحتواء القانوني .

المخطط السابق تبادلي (تحقق من ذلك) وبالتالي يكون

$$\otimes_I = v^{-1} \circ J \circ v_I$$

وبما أن v_I غامر $v^{-1} \circ J$ متباين نجد أن

$$\ker v_I = \ker \otimes_I \quad \Leftrightarrow \quad v_I \text{ تماثل}$$

وبالتالي

$$\otimes_I \text{ متباين} \quad \Leftrightarrow \quad v_I \text{ تماثل}$$

لكن

$$\otimes_I \text{ متباين} \quad \Leftrightarrow \quad \text{المودول } M \text{ تآلفي}$$

إذن :

$$v_I \text{ تماثل} \quad \Leftrightarrow \quad \text{المودول } M \text{ تآلفي}$$

وذلك يتم المطلوب .

تمرينات (9)

التمرين الأول :

ليكن M مودولاً يسارياً على حلقة R ، وليكن I مثالياً يمينياً من الحلقة R . أثبت وجود تشاكل (على Z) :

$$f : M \otimes R \longrightarrow M/I\,M$$

بحيث يكون :

$$f(m \otimes r/I) = rm/I\,M$$

التمرين الثاني :

ليكن M مودولاً يمينياً على حلقة R . أثبت أن القضيتين التاليتين متكافئتان :

(1) – المودول M تآلفي .

(2) – من أجل كل مثالي يساري I من الحلقة R تكون المتتالية

$$O \longrightarrow M \otimes I \xrightarrow{\otimes_i} M \otimes R$$

تامة . حيث $i: I \to R$ التباين القانوني .

التمرين الثالث :

لتكن

$$O \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow O$$

متتالية تامة من المودولات اليمينية على حلقة R . أثبت أنه إذا كان كل من المودولين M' , M'' تآلفيين فإن المودول M تآلفي .

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

المصطلحات العلمية

abelian group	زمرة تبديلية
algebra	جبر
annihilating sub module	عادم المودول الجزئي
annihilator	معدم
artinian	آرتني
balanced	متوازن
basis	قاعدة
bidual	ثنائي الثنوية
bilinear	ثنائي الخطية
bimodule	ثنائي المودول
canonical	القانوني
canonical basis	القاعدة القانونية
canonical injection	التباين القانوني
canonical projection	الإسقاط القانوني
chain conditions	شرط انقطاع السلسلة
character module	المودول المميز
commutative	تبادلي
commutative diagram	مخطط تبادلي
conjugate	مترافق
conjugate isomorphism	تماثل مترافق

co product	جداء مرافق
dual module	المودول الثنوي
endomorphism	تشاكل داخلي
epimorphism	تشاكل غامر
exact sequence	متتالية تامة
external direct sum	مجموع مباشر خارجي
external law	قانون خارجي
finite height	منتهي الارتفاع
flat	تآلفي
free	حر
group	زمرة
homomorphism	تشاكل
ideal	مثالي
image	صورة
injective	متباين
inner product	جداء داخلي
internal direct sum	مجموع مباشر داخلي
isomorphism	تماثل
Jordan – Holder tower	برج جوردان- هولدر
kernel	نواة
linear	خطي
linear combination	تركيب خطي
linear equation	معادلة خطية

modular law	قانون مقاسي
monomorphism	تشاكل متباين
morphism	تشاكل
multilinear	متعدد الخطية
noetherian	نوثري
product	جداء
projection	إسقاط
projective	إسقاطي
quotient module	مودول القسمة
right module	مودول يميني
ring	حلقة
simple	بسيط
sub module	مودول جزئي
tensor product	جداء موتري (تنسوري)

Damascus University

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

المراجع العلمية

BLYTH T.S . module theory ; oxford 1977 .

COHN P . M . algebra volume II . LONDON 1974 .

CURTIS ; RENER . representation theory of finite groups and associative algebra . NEW YORK 2002 .

WILLIAM F .; JOEHARRIS , representation theory a first Course , Springer 1991 .

DROBOTENKO V. S , modules over rings , 1973 .

LAMBEK E . rings and modules , 1971 .

Damascus University

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

لجنة التقويم العلمي

الأستاذ الدكتور عبد الواحد أبو حمدة

الأستاذ المساعد الدكتور يوسف الوادي

الأستاذ المساعد الدكتور إيلي قدسي

حقوق الطباعة والترجمة والنشر محفوظة لمديرية الكتب والمطبوعات