منشورات جامعة دمشق
كلية الاقتصاد

الاقتصاد الرياضي

الدكتور
زياد زنبوعة
أستاذ مساعد في قسم الاقتصاد والتخطيط

الدكتور
ياسر الجندي
مدرس في قسم الإحصاء

العام الدراسي 1429 – 1430 هـ
2008– 2009 م

الاقتصاد الرياضي

تحكيم هذا الكتاب:

- الأستاذ الدكتور خلف مطر الجراد
- الأستاذ المساعد الدكتور رسلان خضور
- الأستاذ المساعد الدكتور عدنان غانم

المدقق اللغوي: الدكتور عبد الرحمن عبد الرحيم

حقوق الطبع والترجمة والنشر محفوظة

لمديرية

الكتب والمطبوعات الجامعية

Damascus University
Faculty of Economics

MATHEMATICAL ECONOMICS

Dr. Ziad ZANBOUA
Associate professor at Department of Economics and planning

Dr. Yasser AL-JUNDI
lecture at Department of Statistic

1430 – 1429
2009 – 2008

الاقتصاد الرياضي

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

منشورات جامعة دمشق

كلية الاقتصاد

الاقتصاد الرياضي

الدكتور
زياد زنبوعة
أستاذ مساعد في قسم الاقتصاد والتخطيط

الدكتور
ياسر الجندي
مدرس في قسم الإحصاء

العام الدراسي $\frac{1429-1430}{2008-2009}$ $\frac{\text{هـ}}{\text{م}}$

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

المحتويات

❖ **المقدمة..... 11**

❖ **الباب الأول: مدخل إلى الاقتصاد الرياضي..... 13**

❑ الفصل الأول: ماهية الاقتصاد الرياضي وأهميته..... 15

– المبحث الأول: الصياغة الوصفية والرياضية للمسائل الاقتصادية..... 16

– المبحث الثاني: الحدود على الاقتصاد الرياضي..... 20

❑ الفصل الثاني: النمذجة الاقتصادية – الرياضية 25

– المبحث الأول: مفهوم النمذجة والنموذج..... 26

– المبحث الثاني: أنواع النماذج الاقتصادية – الرياضية..... 29

– المبحث الثالث: مراحل النمذجة الاقتصادية–الرياضية..... 33

❖ القسم الثاني: التحليل الاقتصادي الرياضي الساكن المقارن..... 35

❖ القسم الأول: التحليل الاقتصادي – الرياضي السكوني..... 37

❖ الفصل الأول: تابع الإنتاج في المنشأة..... 39

❖ الفصل الثاني: تابع الكلفة في المنشأة..... 71

❖ الفصل الثالث: تابع الإنتاج والقيود على سلوك المنتجين... 87

– المبحث الأول: النهايات القصوى..... 88

– المبحث الثاني: خط التكاليف المتساوية..... 90

– المبحث الثالث: تعظيم الإنتاج من خلال تكلفة ثابتة..... 93

- المبحث الرابع: الحصول على حجم معين من الإنتاج بأقل تكلفة ممكنة..... 98
- المبحث الخامس : تعميم مسألة النهايات القصوى المقيدة..... 100
- المبحث السادس: تطبيقات حول الفصل الثالث..... 103
- ❑ الفصل الرابع: تابع الربح..... 115
- المبحث الأول: تعظيم الربح في حالة عدم وجود قيود على استخدام عناصر الإنتاج..... 116
- المبحث الثاني: تعظيم الربح في ظروف المنافسة الاحتكارية..... 121
- المبحث الثالث: تطبيقات حول الفصل الرابع..... 124
- ☒ القسم الثاني: التحليل الاقتصادي – الرياضي الديناميكي133
- ❑ الفصل الأول: تابع الإنتاج الديناميكي والتقدم التقني..... 135
- ❑ الفصل الثاني: تعظيم الربح في ظروف المدة الزمنية الطويلة..... 139
- ❑ الفصل الثالث: تعظيم الربح في حالة صنع عدة أنواع من المنتجات في المنشأة..... 141
- ❑ الفصل الرابع: تابع الإنتاج الديناميكي وتعظيم ربح المنشاة خلال عدة سنوات..... 145

- المبحث الأول: تطبيقات حول الفصل الرابع.... 152

❖ *الباب الثاني: الاستهلاك والادخار في اقتصاد مغلق... 161*

☒ الفصل الأول: تابع المنفعة وسلوك المستهلك..... 163

- المبحث الأول: المفاهيم العامة في نظرية المستهلك.... 164
- المبحث الثاني: تابع المنفعة وقيد دخل المستهلك..... 169
- المبحث الثالث: تطبيقات حول الفصل الأول..... 174

☒ الفصل الثاني: تابع المنفعة الديناميكي..... 181

- المبحث الأول: المفاهيم العامة في التحليل الديناميكي لسلوك المستهلك..... 183
- المبحث الثاني: ميزانية المستهلك وتعظيم المنفعة..... 184
- المبحث الثالث: تطبيقات حول الفصل الثاني..... 189

❖ *الباب الثالث: الاستهلاك والادخار في إطار اقتصاد مفتوح 195*

❑ الفصل الأول: التوازن الجزئي في سوق سلعة واحدة..... 202

- المبحث الأول: نموذج التوازن الجزئي..... 202
- المبحث الثاني: أثر ضرائب الإنتاج على التوازن الجزئي.210
- المبحث الثالث: حصيلة الضريبة ومعدل الضريبة الأمثل. 218
- المبحث الرابع: أثر إعانات الإنتاج على التوازن الجزئي. 220
- المبحث الخامس: *التحليل السكوني المقارن لنموذج* التوازن الجزئي..... 224

- المبحث السادس: تطبيقات حول الفصل الأول..... 227
- الفصل الثاني: التوازن في أسواق أكثر من سلعة. 261
- المبحث الأول: التوازن في سوقي سلعتين..... 261
- المبحث الثاني: التوازن في أسواق n سلعة..... 264
- المبحث الثالث: تأثير ضرائب الإنتاج على توازن سوقي سلعتين..... 267
- المبحث الرابع: تطبيقات حول الفصل الثاني..... 269
- الفصل الثالث: تعميم نموذج التوازن الاقتصادي. 273
- المبحث الأول: توابع الطلب والعرض على الإنتاج وعناصره..... 273
- المبحث الثاني: التوازن الإجمالي..... 280
- المبحث الثالث: تطبيقات حول الفصل الثالث..... 283
- الفصل الرابع: نموذج التوازن الكلي باستخدام جدول المدخلات والمخرجات..... 295
- المبحث الأول: جدول المدخلات والمخرجات..... 296
- المبحث الثاني: مصفوفة معاملات الإنتاج التقنية..... 302
- المبحث الثالث: مصفوفة المعاملات التقنية الترابطية... 308
- المبحث الرابع: استخدام أكثر من طريقة فنية في القطاع311

- المبحث الخامس: استخدامات جدول المدخلات والمخرجات..... 316
- المبحث السادس: تطبيقات حول الفصل الرابع..... 328
- الفصل الخامس: النماذج التوازنية الكلية..... 337
- المبحث الأول: التوازن الاقتصادي الكلي الكنزي..... 338
- المبحث الثاني: التوازن الاقتصادي النقدي–السلعي... 375
- المبحث الثالث: تطبيقات حول الفصل الخامس..... 386
- [illegible] 399
- الفصل الأول: البرمجة الخطية..... 401
- المبحث الأول: الطريقة البيانية..... 401
- المبحث الثاني: حل جملة معادلات خطية..... 421
- المبحث الثالث: مبادئ طريقة السمبلكلس..... 426
- المبحث الرابع: طريقة السمبلكس ذات المرحلتين 449
- المبحث الخامس: تحليل الحساسية..... 457
- المبحث السادس: تطبيقات حول الفصل الأول..... 463
- الفصل الثاني: طرق متقدمة لحل البرمجة الخطية.469
- المبحث الأول: طريقة السمبلكس المختصرة..... 469
- المبحث الثاني: طريقة مقلوب المصفوفة..... 476
- المبحث الثالث: طريقة النظرية الثنوية..... 502

– المبحث الرابع: طريقة قاعدة الحل النافذ الثنوي..... 528
– المبحث الخامس: كيفية إيجاد الحل الثنوي على أساس حل برنامج أولي..... 538
– المبحث السادس: تحليل الحساسية للبرامج الخطية..... 547
– المبحث السابع: برمجة الأعداد الصحيحة..... 564
– المبحث الثامن: برمجة الأهداف..... 570
– المبحث التاسع: تطبيقات حول الفصل الثاني..... 588
❖ الفصل الرابع: التوابع الأسية ونماذج النمو الاقتصادي. 595
❑ الفصل الأول: التطبيقات الاقتصادية للتوابع الأسية..... 597
❑ الفصل الثاني: نماذج النمو الاقتصادي..... 611
– المبحث الأول: نموذج هارود – دومار..... 613
– المبحث الثاني: نموذج ايتشيمور..... 630
– المبحث الثالث: النظرية التقليدية الحديثة للنمو..... 639
– المبحث الرابع: نموذج شينرى وبرونو..... 643
❖ قائمة المراجع العلمية والأجنبية..... 651
❖ الخاتمة..... 657

المقدمة

إن وضعَ كتابٍ –بشكل عام– يُعدُ مسؤوليةً كبيرةً من الناحية العلمية والتعليمية والتربوية. ووضع كتاب في الاقتصاد الرياضي – بشكل خاص– يتطلب معرفةً نظريةً وعمليةً في مجال كلا العلمين (الاقتصاد والرياضيات). وقد اتسع مجال الاقتصاد الرياضي ، بحيث أصبح يشمل جانباً كبيراً ومتزايداً من فروع علم الاقتصاد، وخاصة الجوانب التحليلية في المسائل الجزئية والكلية، المادية والمالية والنقدية والدولية والتخطيطية والديموغرافية. ولهذا فإن وضع كتاب بهذا الاتساع والتنوع يُعد –بالإضافة إلى تلك المسؤولية– عملاً لا يمكنه الإحاطة الشاملة بكل تفاصيل هذه المسائل الاقتصادية والرياضية من جهة أولى، عدا عن أن الاقتصاد الرياضي يُعد علماً حديث العهد نسبياً بالمقارنة مع علم الرياضيات وعلم الاقتصاد، وهو في تطور دائم نحو نمذجة المسائل الاقتصادية من جهة ثانية.

ولذلك فإننا إذ نضع هذا الكتاب نتمنى أن نكون قد قمنا بما يتناسب و قدر هذه المسؤولية، وأن نكون قد أسهمنا بالقليل في هذا المجال ، إن لم يكن في الإضافة ففي العرض الجديد للكثير من مسائل التحليل الاقتصادي الرياضي.

هذا وقد عملنا على أن نضع نصب أعيننا في مناقشة مو ضوعات الكتاب الجوهر والمغزى الاقتصادي للمسألة المدروسة، وأن نستخدم من الرياضيات ما يفيد ويلبي هذا الهدف دون المغالاة في استخدامها إلا بالقدر الضروري، لكي لا تتحول الرياضيات في كتابنا إلى هدف بحد ذاته، وإنما هي وسيلة لهدف اقتصادي.

وقد ارتأينا أن نقسم الكتاب إلى ستة أبواب:

الباب الأول خُصص كمدخل تمهيدي للتعرف على الاقتصاد الرياضي ومكانته بين العلوم الاقتصادية والرياضية.

الباب الثاني خُصص لتحليل نظريات الإنتاج والتكاليف والربح وذلك على قسمين في التحليل السكوني وفي التحليل الديناميكي.

الباب الثالث خُصص لدراسة وتحليل نظرية المستهلك وذلك في كل من التحليل السكوني و التحليل الديناميكي.

الباب الرابع خُصص لدراسة التوازنات الاقتصادية بمختلف نماذجها الجزئية والكلية والقطاعية.

الباب الخامس خُصص لدراسة البرمجة الخطية.

الباب السادس خُصص لدراسة التوابع الأسية ونماذج النمو الاقتصادي.

وقد تقاسم المؤلفان موضوعات الكتاب على النحو الآتي:

ألف الدكتور زياد زنبوعة: الباب الأول، الفصل الثالث والفصل الرابع من القسم الأول في الباب الثاني، القسم الثاني في الباب الثاني، الباب الثالث، الفصل الأول والثاني والثالث والرابع من الباب الرابع.

و ألف الدكتور ياسر الجندي ما يلي: الفصل الأول والثاني من القسم الأول في الباب الثاني، الفصل الخامس من الباب الرابع، الباب الخامس،الباب السادس.

وللأمانة العلمية نحب أن نلفت العناية إلى أن المؤلف اعتمد في وضعه للفصل الخامس من الباب الرابع –وبشكل كامل– على الكتاب الجامعي السابق في الاقتصاد الرياضي لمؤلفيه د. رسلان خضور ود. محمد سالم الصفدي، فلهم كل الشكر والاحترام.

ونلفت عناية الطالب الكريم إلى أننا لم نستخدم مطلقاً الأرقام الهندية، وإنما اعتمدنا الأرقام العربية الأصل. ووضعنا جميع الجداول والمخططات البيانية بالطريقة اللاتينية أي من اليسار إلى اليمين تماشياً مع المعادلات التي استخدمنا فيها الحروف والرموز اللاتينية واليونانية.

ونتمنى أن نكون قد بذلنا الجهد الكافي والمثمر الذي يتناسب مع صعوبة وأهمية البحث في هذا الموضوع والله ولي التوفيق.

خ لسف 4-4-2008 ك للمُقدم

الباب الأول

مدخل

إلى

الاقتصاد الرياضي

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الفصل الأول
ماهية الاقتصاد الرياضي وأهميته

يُعد الاقتصاد الرياضي علماً حديث العهد نسبياً بالمقارنة مع علم الرياضيات وعلم الاقتصاد، وهو في تطور دائم نحو نمذجة المسائل الاقتصادية. كما أنه لا يعد فرعاً متميزاً من فروع علم الاقتصاد كالاقتصاد الصناعي، أو الاقتصاد الزراعي، أو الاقتصاد المالي الخ...، وإنما هو عبارة عن أسلوب ومنهج رياضي في التحليل والتخطيط الاقتصادي.

إذاً نستطيع أن نعرِّف الاقتصاد الرياضي فنقول: إنه عبارة عن أسلوب ومنهج في التحليل والتخطيط الاقتصادي القائم على استخدام بعض جوانب النظرية الرياضية كأداة في تحليل وعرض بعض القضايا الاقتصادية، وخاصة تلك القضايا القابلة للقياس الكمي.

من تعريفنا هذا يتبين لنا أن الاقتصاد الرياضي هو عبارة عن الأسلوب الكمي الذي يعتمد على العلاقات الرياضية في تمثيل الظواهر والمشكلات الاقتصادية المختلفة على شكل نموذج رياضي يتم من خلاله التوصل إلى تحليل وحل هذه المشكلات.

ولكن يجب أن نركز في تعريفنا هذا على أنه يمثل تطبيق اً لبعض جوانب علم الرياضيات على بعض جوانب علم الاقتصاد، بمعنى أنه لا يمكن أن تستخدم كل النظرية الرياضية في معالجة المسائل الاقتصادية من جهة أولى، كما لا يمكن أن تشمل الرياضيات كل القضايا الاقتصادية من جهة ثانية. ويبقى هذا الجزء المشترك بين العلمين صغيراً نسبياً بالنسبة لحجميهما، ويسير هذا التمازج بين الرياضيات والاقتصاد في طريق النمو بشكل متسارع وموسع مع تنامي الاهتمام بتطبيق الرياضيات في علم الاقتصاد ، والاستخدام الواسع للمنجزات التقنية المعاصرة وانتشار الحاسوب من جهة أولى. ومن جهة أخرى فإن الاقتصاد

الرياضي يكتسب أهمية متعاظمة نظراً لأن الاقتصادي المعاصر لا غنى له عن استخدام المقاييس الكمية في التحليل والتخطيط الاقتصادي.

المبحث الأول

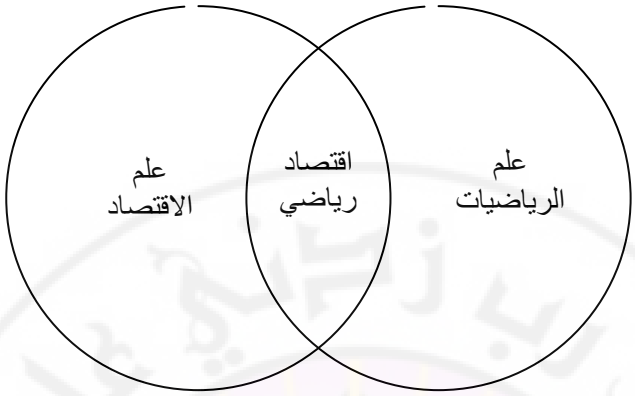
الصياغة الوصفية والرياضية للمسائل الاقتصادية

إذا مثَّلنا التمازج بين الرياضيات والاقتصاد بشكل دوائر ، فإن قسمي تقاطع الدائرتين يمثل الاقتصاد الرياضي كما في الشكل (1-1).

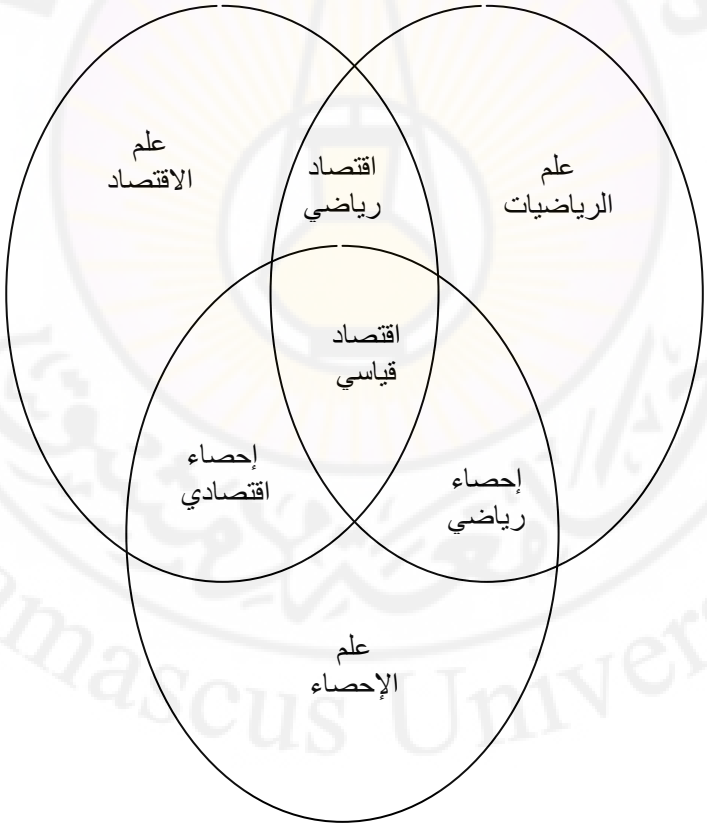
أما إذا أضفنا دائرة ثالثة كما في الشكل (1-2) تمثل علم الإحصاء ، فإن القسم المظلل الذي يمثل تقاطع الدوائر الثلاث يعبر عن الاقتصاد القياسي والذي يتميز من الاقتصاد الرياضي باستخدامه الأساليب الإحصائية التطبيقية.

إذاً الاقتصاد الرياضي من حيث المضمون هو عبارة عن صياغة رياضية جديدة لبعض جوانب النظرية الاقتصادية، بحيث يكسب بعض جوانبها ثوباً جديداً أكثر تحديداً وجزالة من الثوب الاقتصادي النظري (الأدبي) الفضفاض.

باختصار لبيان الفرق ما بين الصياغة الرياضية والصياغة الأدبية للقضايا الاقتصادية نسوق المثال الآتي:



الشكل (1–1)



الشكل (1–2)

من المعروف في علم الاقتصاد أن الطلب على سلعة معينة يتعلق بكثير من العوامل التي تحدد وتؤثر على كمية هذا الطلب واتجاه ه، مثل سعر السلعة المطلوبة وسعر غيرها من السلع المكملة و البديلة، والدخل، والأذواق وغيرها.

ومن المعلوم أيضاً أن العرض يتعلق أيضاً بكثير من العوامل التي تؤثر على كميته واتجاهه مثل أسعار المنتجات، وأسعار عناصر الإنتاج، وظروف السوق... الخ

ومعلوم أيضاً أن السعر الذي تتعادل عنده الكميات المطلوبة مع الكميات المعروضة في السوق يُدعى السعر التوازني.

ما قلناه أعلاه يمثل صياغة أدبية معروفة لإحدى المسائل الاقتصادية الشائعة. أما في الاقتصاد الرياضي فإن مضمون هذا الكلام نفسه يُصاغ ولكن بشكل مختلف وأكثر دقة واختصاراً على الشكل التالي:

إذا كان لدينا:

تابع الطلب: $D = f(X_1, X_2, \dots, X_n)$

تابع العرض: $S = g(X_1, X_2, \dots, X_n)$

حيث إن:

D تمثل الطلب.

S تمثل العرض.

X هي المتحولات المستقلة التي تعبر عن العوامل المؤثرة على الطلب والعرض.

أما شرط التوازن في السوق والذي يحدد سعر التوازن فيكون:

$D = S$

إن لكل من هذين الأسلوبين في الصياغة محاسنه ومساوئه:

إن الأسلوب الأدبي يتمتع بعدم المحدودية المستمدة من بعض الضبابية في بعض المفاهيم الاقتصادية ، والتي تخلق مجالاً واسعاً وغير محددٍ للتخيلات والافتراضات والتحليلات، فكما رأينا فإن العوامل التي تؤثر على الطلب كثيرة جداً، ويمكن الإطالة بلا نهاية في التقصي عنها وتحديدها ، نظراً لكون الكثير منها يتعلق بجوانب ذاتية ومعنوية متغيرة ومتبدلة باستمرار، على عكس الصياغة الرياضية فإن أمكن صياغة كل هذه المتحولات والتعبير عن ها، فإنه لا يمكن حساب كل منها ودراسة تأثيره على الآخربشكل كمي نظراً لافتقار كثيرٍ منها إلى وحدة أو معيار كمي للقياس كالأذواق مثلاً. ولذلك فإن هذا يعد عيباً في الصياغة الرياضية لمثل هذا الجانب من المسألة، ولكن هذا لا يغني عن استخدام الأساليب الرياضية في التحليل الاقتصادي، حيث إن هذه الأساليب تسمح بالتعبير بشكل أدق وأكثر تحديداً عن العلاقات المعقدة التي تربط الظواهر المدروسة وتضع منهجيه محددة لهذه العلاقات.

لذلك نقول إن الأساليب الرياضية تساعد على تبسيط الظواهر الاقتصادية وفهمها وليس تعقيدها أو إفراغها من مضمونها الاقتصادي ، والذي قد يحدث عند بعض المغالين في استخدام الرياضيات.

المبحث الثاني

المدود على الاقتصاد الرياضي

إن الأساليب الرياضية على الرغم من أنها –كما قلنا سابقاً– وسيلة ضرورية لا غنى عنها للباحث الاقتصادي تساعد على تبسيط المسائل الاقتصادية وفهم ها، إلا أن هناك بعض الحدود على استخدام الرياضيات في الاقتصاد، بمعنى أن الاقتصاد الرياضي لا يمكن أن يشمل القضايا الاقتصادية كلها، ذلك لأن استخدام النماذج الرياضية في التحليل الاقتصادي يعد حديث العهد نسبياً ، وإن هذا الاستخدام تعترضه صعوبات كثيرة ناتجة عن خصوصيات الطبيعة المختلفة لكل من الرياضيات والاقتصاد نذكر منها: [1]

1. **ؤ مك فيئصيئ ة** على مدار قرون عديدة خلت كانت تلبي اهتمامات وحاجات علوم الميكانيك والفيزياء وعلم الفلك ، ونادراً ما تعرض ت إلى الجوانب الاقتصادية في المجتمع، هذا بالإضافة إلى أنه كان هناك طلب قليل من جانب الاقتصاديين على الرياضيات.
2. **ةسع اطق صيئ لإفة شئ ب** وتشابكها مع مختلف جوانب الحياة في المجتمع:

إن الاقتصاد هو واحد من أعقد الأنظم ة المعروفة للإنسان، فالرياضي يتعامل مع موضوع مجرد أو فيزيائي محدد بدقة ، ويمكن التحكم به بشكل ميكانيكي فـ 1+1 = 2 لا محالة ولا يوجد حل ثانٍ، بينما الاقتصادي يتعامل مع موارد الطبيعة ومع مختلف الكائنات الحية وأعقدها الإنسان برغباته وميوله ونشاطاته وأفكاره. فإذا كان الطبيب يدرس ويعالج جسم الإنسان لأنه مجال عمله، فإن موضوع الاقتصادي هو جسم الوطن أو العالم بما فيه من كائنات حية وموارد وثروات الخ..، بالإضافة إلى جميع العلاقات بين هذه

(1) د. زياد زنبوعة: الطرق والنماذج الاقتصادية – الرياضية في تشكل الأسعار، ص 19 ، الطبعة الأولى دمشق 1996.

العناصر، ولذلك فإن معالجة أية قضية اقتصادية يكتنفها الكثير من التعقيد والتشابك مع المنظومة العامة للمجتمع المدروس. بينما نلاحظ أن المسائل الرياضية أكثر تحديداً وتخصصاً، ولذلك فإن دراسة الموضوع الاقتصادي أصعب بشوط كبير من دراسة أي موضوع رياضي أو فيزيائي أو كيميائي. ولذلك فإن استخدام الأساليب الرياضية في مثل هذه المنظومة المعقدة من العلاقات يعد عملاً ليس بالسهل ولا يتصف بالكمال نظراً لخصوصية الرياضيات وعمومية الاقتصاد.

3. لك لمصدعي بدكوتي ب:

إن الرياضيات علم موضوعي يقوم على علاقات كمية مجردة تصاغ بشكل قوانين ثابتة لا تتأثر بعامل الزمن أو البيئة إلا في حالة تغيير النظريات الرياضية. بينما نجد أن الاقتصاد هو علم موضوعي من جهة ، وذاتي من جهة أخرى فتطور النظام الاقتصادي لا يحدث تحت تأثير العوامل الموضوعية فقط، وإنما يتأثر بدرجة كبيرة بالعوامل الذاتية. فدراسة تطور الأسواق مثلاً لا يمكن قصرها على دراسة الجوانب الكمية الموضوعية لقوانين السوق؛ مثل قانون القيمة وقانون العرض والطلب، وإنما لا بد من إحاطة مثل هذه الدراسات بالجوانب الذاتية لأفراد المجتمع، فمثلاً عند وضع سعر سلعة ما لا يمكن الاكتفاء بالجانب الموضوعي للسعر أي تكلفة عناصر الإنتاج، وإنما لا بد من دراسة رغبات مستهلكي هذه السلعة وتفضيلاتهم المختلفة ، والتي لا يمكن أن تملك مقياساً كمياً محدداً، من هنا تنشأ صعوبة النمذجة الرياضية لمثل هذه المؤشرات و العلاقات.

4. لك حة لي ب دك ل شئخ ب:

إن علم الرياضيات هو علم يتصف بالحتمية أي إنه فيما لو كررنا نفس العملية الرياضية أو الفيزيائية ، فإننا سنحصل على نفس النتيجة. أما الاقتصاد فإنه علم في جانب كبير منه يقوم على عدم التحديد بدرجات متفاوتة ما بين عدم التحديد المطلق لبعض الظواهر التي يصعب أو يستحيل

التحكم أو التنبؤ بتغيراتها، وشبه التأكد لبعض الظواهر التي تملك آلية عمل مفسَّرة وظاهرة بشكل يمكن التحكم والتنبؤ بها بدرجة ثقة مرتفعة.

ما يخص عدم التحديد والذي يُفهم بشكل عام كغياب الدقة المطلقة ، فإنه يمكن التمييز ما بين " عدم التحديد الحقيقي" والذي ينطبع بطابع خواص العمليات الاقتصادية، وبين " عدم التحديد المعلوماتي" والذي يرتبط بقصور وعدم دقة المعلومات المستقاة عن العمليات الاقتصادية. فالمنتج مثلاً عند اتخاذه قرار التسعير يجب أن يأخذ بال حسبان كلاً من العوامل الداخلية التي يستطيع بدرجة كبيرة التحكم بها والتي ترتبط به، والعوامل الخارجية التي يتحكم بها بشكل أقل ويمكن التأثير عليها بدرجة أو بأخرى مثل المنافسة وحالة الأسواق.

5. خصائص العمليات الاقتصادية التي يجب أخذها بالحسبان عند النمذجة:

إن العمليات الاقتصادية تتصف بالديناميكية الدائمة. ومن أجل إدارة العمليات الاقتصادية لابد من الحصول بشكل مستمر على معلومات جديدة حول تغيرات الظاهرة المدروسة. إن الصفة المتبدلة للمعلومات تعقد عملية النمذجة الرياضية وتتطلب تعديل النماذج الاقتصادية –الرياضية التي حصلنا عليها سابقاً وتؤدي إلى تقادمها ، وتفرض ضرورة التحول إلى النماذج الديناميكية.

فما هي إذاً النمذجة الرياضية للمسائل الاقتصادية؟

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الفصل الثاني
النمذجة الاقتصادية – الرياضية

في الحقيقة إن استخدام الرياضيات في الاقتصاد ليس حديث العهد تماماً ولكن الحديث هو هذا الاستخدام الواسع لها في مجال الاقتصاد القياسي وظهور التقنيات الحاسوبية وتوسع الإمكانيات والمجالات أمام صياغة ووضع وحل الكثير من النماذج الرياضية المعقدة والمطولة. إذ إن الاقتصاد الرياضي ما هو إلا دراسة النماذج الرياضية للمسائل الاقتصادية.

و على الرغم من صعوبة النمذجة الرياضية للعمليات الاقتصادية (كما نوهنا إلى ذلك في المبحث السابق) فإنها تعد إحدى الأدوات الأساسية في التحليل الاقتصادي ويكمن دورها في النواحي الآتية:

1. إن النمذجة الاقتصادية الرياضية وسيلة ضرورية –وإن كانت غير كافية– لدراسة المشكلات الاقتصادية المختلفة وتحليلها.
2. إن الأساليب الرياضية تسمح بالتقصي بشكل أدق عن العلاقات المعقدة وكشف اتجاه المؤشرات الخاصة بالمشكلة المدروسة.
3. إن الأساليب الرياضية توفر إمكانية حل بعض المسائل التي –عملياً– لا يمكن حلها بطريقة أخرى.
4. إن الجهاز الرياضي يستعمل أساساً في حل المسائل الاقتصادية المعقدة التي تتطلب جمع وحفظ ومعالجة وإعطاء سيل من المعلومات في وقت قصير، ونظراً لأن حل مسائل واسعة كهذه يصاحبه حجم كبير من العمليات الإحصائية، فإنه لا بد من استخدام الحاسب في هذا المجال ، ولذلك فإن النمذجة الاقتصادية – الرياضية تعد أحد الشروط الموجبة لأتمتة الإدارة الاقتصادية.

المبحث الأول

مفهوم النمذجة والنموذج

يُقصد ***النمذجة*** الاقتصادية – الرياضية وضع نموذج رياضي لمسألة اقتصادية محددة يراد دراستها وتحليلها وتعميمها بغية تخطيط وإدارة النشاط الاقتصادي في المنشأة (في التحليل الجزئي) ، أو الاقتصاد الوطني (في التحليل الكلي).

من هذا التعريف يتبين لنا أن النمذجة يمكن أن تكون على المستوى الجزئي أو على المستوى الكلي، مثالاً على ذلك نماذج توازن العرض والطلب في سوق محددة، أو توازن العرض والطلب على مستوى الاقتصاد الوطني ككل، أو نموذج المدخلات والمخرجات القطاعية أو القومية.

بالإضافة إلى ذلك نستطيع القول: إن النمذجة الاقتصادية الرياضية هي نقل الموضوعات الاقتصادية المبحوثة من لغة الاقتصاد إلى لغة الرياضيات، وهذا النقل يرتبط بقواعد محددة، أما النقل المعاكس فإنه يتلخص في التفسير الاقتصادي لنتائج الحلول الرياضية.

النمذجة الحديثة: فإنه يخصص لدراسة آلية تشكل الظاهرة الاقتصادية ونتائجها، وبالتالي فهو عبارة عن مجموعة من المؤشرات الرئيسية، التي تكون مصاغة بشكل معادلات ومتحولات ترتبط فيما بينها بعلاقات كمية، وتمثل الظواهر المدروسة بشكل مختزل ومبسط يفيد في تحليلها ودراسة ظواهر مشابهة.

من هذا التعريف يتبين لنا:

1. إن النموذج موضوع دراستنا هو النموذج الرياضي بشكل أساسي.

2. إن المؤشرات التي يتضمنها النموذج تقتصر على المؤشرات الأساسية في الظاهرة المدروسة. وهذا بالطبع لن يقلل من قيمة الدراسات الاقتصادية الرياضية والنتائج التي يتم التوصل إليها، بل إنه قد يكون على عكس ذلك من خلال إهمال الجوانب الثانوية في المسألة وحصر تأثير المؤشرات الأساسية فقط.

3. إن مؤشرات الظاهرة يتم صياغتها بشكل متحولات رياضية قابلة للقياس الكمي.

4. إن العلاقات المدروسة بين المؤشرات الاقتصادية المختلفة (المتحولات الرياضية) هي علاقات كمية قابلة للقياس الكمي، كأن يتم التعبير عن العلاقة بين الإنتاج وعناصره بتابع يمثل هذه العلاقة أي:

$$Y = f(x_i) \qquad i = 1,2,3,\ldots,n$$

أي إننا بذلك نقر بصعوبة إدخال متحولات غير كمية في النماذج.

5. إن النموذج يوضع من أجل أن يختزل ويبسط الظواهر المدروسة.

6. يجب أن يصاغ النموذج بشكل واضح يُعبر عن كل جوانب المسألة المدروسة إن أمكن ذلك. وفي حال عدم إمكانية حصر جميع متغيرات هذه المسألة ، فإنه يمكن اللجوء إلى التجريد العلمي والتركيز فقط على المؤشرات الرئيسية. وهذا بالطبع لن يقلل من قيمة الدراسات الاقتصادية الرياضية والنتائج التي يتم التوصل إليها، بل إنه قد يكون على عكس ذلك، من خلال إهمال الجوانب الثانوية في المسألة وحصر تأثير المؤشرات الأساسية فقط.

وتختزل التفاصيل غير الضرورية و غير المهمة:

أ. **المتغيرات الداخلية:** وهي المتغيرات التي يتم تحديد قيمتها من داخل النموذج بعد حله رياضياً. وهذه المتغيرات يُفترض أنها يؤثر بعضها في الآخر، وتتأثر بالمتغيرات الخارجية ولكنها لا تؤثر عليها.

ب. **المتغيرات الخارجية:** وهي كميات معلومة أو محددة مسبقاً، أي تتحدد قيمتها بعوامل خارجة عن النموذج. أي تعد ثابتة عند مستوى محدد في أثناء عملية التحليل للعلاقات بين متغيرات النموذج. أي إنها لا تتأثر بالمتغيرات الداخلية، ولكن على الرغم من ثباتها إلا أنها تؤثر على المتغيرات الداخلية.

المبحث الثاني

أنواع النماذج الاقتصادية – الرياضية

إن النماذج الاقتصادية – الرياضية يمكن أن تُصاغ بأشكال متعددة وبمستويات مختلفة من التعقيد بالنسبة لنفس الظاهرة المراد دراستها. من هذه الأشكال نذكر:

1. نماذج التحليل الاقتصادي الكلي:

توضع من أجل دراسة وتفسير أسباب و آلية تشكل الظواهر الاقتصادية ونتائجها، وكذلك توضع من أجل تحليل نظرية ما ، بهدف إثبات صحتها أو عدم ملاءمتها للواقع أو تطويرها.

2. نماذج التحليل الاقتصادي الجزئي:

وهي النماذج التي توضع بهدف حل مسألة ، ما والتنبؤ بتطوراتها في المستقبل مع إعطاء توصيات بخصوصية معالجتها.

3. نماذج التحليل الاقتصادي الكلي (الجزئي):

وتكون المتحولات الخارجية في هذه النماذج معطاة بشكل مؤكد.

4. نماذج التحليل الاقتصادي الاحتمالي:

وتكون فيها المتحولات الخارجية خاضعة لتأثير كميات احتمالية.

5. نماذج التوازن:

وهي عبارة عن جملة معادلات تحل آنياً لتحقيق التوازن بين المؤشرين المدروسين، مثلاً توازن العرض والطلب.

إن نماذجَ كهذه يمكن أن تعطي حلاً وحيداً، ويمكن أن تعطي حلين أحدهما يجب أن يرفض ويقبل الآخر، وهذا يتحدد من خلال اللجوء إلى المنطق الاقتصادي لانتقاء الحل الصحيح والمقبول اقتصادياً.

6. نماذج البرمجة الكسرية:

وهي نظام معادلات ومتراجحات تفترض عدة حلول ممكنة تختلف فيما بينها، ولذلك نستخدم ما يُسمى بمعيار الأمثلية لاختيار الحل الأمثل من بين الحلول الممكنة.

7. نماذج البرمجة الجزئية:

هذه النماذج تعكس وظيفة وعمل منشأة أو فرد معين أو سوق محددة في الاقتصاد الوطني.

8. نماذج البرمجة الكلية:

وهي تعكس حركة اقتصاد البلد ككل، وتستخدم مؤشرات الاقتصاد الوطني الكلية.

9. نماذج البرمجة الخطية:

وهي النماذج التي تقتصر على دراسة العلاقة بين متحولين فقط، أي إن الارتباط بين المتحولين هو ارتباط بسيط.

10. نماذج البرمجة الانقسامية (التربيعية):

وهي النماذج التي تتضمن أكثر من مجرد متحول تابع ومتحول مستقل، أي إن الارتباط يكون بين عدد كبير من المتحولات (أكثر من متحولين) وهذا ما يُعرف بالارتباط المتعدد.

11. نماذج البرمجة غير الخطية:

وهي النماذج التي تقيس العلاقة بين المتغيرات من خلال استخدام توابع خطية أو من الدرجة الأولى مثل:

$$Y = f(t)$$

$$Y = a + b\,t$$

12. النماذج غير الخطية:

وهي النماذج التي تقيس العلاقة بين المتغيرات من خلال استخدام توابع (أو معادلات) مثل:

$Y = f(t)$

- توابع أسية من الشكل: $Y = a\,b^t$
- أو بقوة جبرية (معادلة صماء): $Y = a\,t^b$
- توابع لوغاريتمية:

اللوغاريتم العشري: $\log Y = X \log a$

اللوغاريتم الطبيعي (النبيري): $\ln Y = X \ln e$

- توابع من الدرجة الثانية: $Y = a + b\,t + c\,t^2$
- توابع من الدرجة الثالثة: $Y = a + b\,t + c\,t^2 + e\,t^3$
- توابع قطع زائد (تابع عكسي): $Y = a + b\frac{1}{t}$

حيث إن:

Y- المتحول التابع.

t – المتحول المستقل.

e,c,b,a - معاملات الانحدار وهي أعداد يمكن تقدير قيمتها.

13. النماذج الثابتة:

وهي النماذج التي تعكس الحالة الراهنة للظاهرة المدروسة، أو حالتها في لحظة معينة من الزمن.

14. النماذج الديناميكية:

وهي النماذج التي تصف تطور الظاهرة مع الزمن، ويمكن أن يكون النموذج الديناميكي متضمناً لمتحولات تتغير مع الزمن باستمرار (يُستخدم في النموذج الحساب التفاضلي والتكاملي)، أو لمتحولات تتغير بشكل متقطع (يُستخدم في النموذج معادلات الفروق).

إن تقسيم النماذج إلى هذه الأنواع لا يعني الفصل فيما بينها، وإنما يمكن أن يشتمل النموذج على عدد من الخصائص التي تجمع بين عدة أنواع منها، فالنموذج البسيط –على سبيل المثال – يمكن أن يكون خطياً أو غير خطي، أو سكونياً أو ديناميكياً...الخ.

المبحث الثالث

مراحل النمذجة الاقتصادية – الرياضية

إن وضع النموذج الاقتصادي – الرياضي تسبقه كما وتتبعه عدة مراحل والتي تشكل بمجموعها مراحل عملية النمذجة الاقتصادية الرياضية و تتألف بشكل أساسي من:

1. المرحلة الأولى: وضع وتحديد المسألة الاقتصادية:

في هذه المرحلة يتم التحديد الدقيق لجوهر المسألة والمشكلات التي يُراد حلها والهدف من الحل.

على سبيل المثال لتكن لدينا مشكلة محددة وهي دراسة الحصة النسبية المرتفعة للاستهلاك في الناتج المحلي. ففي هذه الحالة يكون جوهر المشكلة في الاستهلاك المرتفع (بالنسبة للدخل طبعاً وليس بشكل مطلق) والمطلوب إيجاد حل لهذه المشكلة بهدف العمل على تشجيع الادخار والاستثمار من أجل التزايد التراكمي في الدخل.

إن معرفة جوهر المشكلة يشكل نصف الطريق إلى الحل. كما أن الخطأ في تحديد هذه المشكلة سيؤدي إلى نتائج خاطئة أو على الأقل غير مناسبة لأن مقدماتها خاطئة.

2. المرحلة الثانية: تحضير المعلومات والبيانات الأولية:

في هذه المرحلة يتم الحصول على المعطيات الضرورية حول المسألة المدروسة، كأن نحصل في مثالنا أعلاه على بيانات عن تطور كل من الاستهلاك والناتج المحلي خلال مدة معينة من الزمن. وبما أنه لا فائدة من نموذج تطبيقي لا تتو افر له المعطيات اللازمة ، فإنه إذا كانت هناك مفاضلة بين عدة نماذج، فإنه من المفضل اختيار النموذج الذي تتوافر له المعطيات الضرورية.

3.ك لذ ك بك ك ت ب: بناء النموذج الرياضي:

في هذه المرحلة يتم تشكيل المسألة الاقتصادية الموضوعة والتعبير عنها بشكل علاقات رياضية محددة (توابع، معادلات، متراجحات، الخ..)، ففي مثالنا أعلاه يمكننا أن نعرض البيانات حول الاستهلاك والدخل بشكل سلسلة زمنية تمكننا من الوصول إلى معادلة انحدار تصف العلاقة بين المتغيرات المدروسة.

4.ك لذ ك بك ض ل ع ب: الحل الرقمي للمسألة:

في هذه المرحلة يتم إعداد طريقة الحل الرقمي للمسالة بشكل يدوي أو على الحاسب بحسب درجة تعقيد المسالة والسرعة المطلوبة، ومن ثم الحل المباشر لها.

5.ك لذ ك بك خ ل ز ب: التفسير الاقتصادي لنتائج الحل الرياضي للمسائل واستخداماتها:

في هذه المرحلة يتم تحويل نتائج الحل من لغة الرياضيات إلى لغة الاقتصاد، وهنا يظهر السؤال عن مدى صحة وكمال نتائج الحل، وعن حدود تطبيقهم الفعلي (إذ أن مجال فعل نتائج النمذجة الاقتصادية – الرياضية ليست بدون حدود).

ومن ثم بعد الحصول على النتائج، يمكن أن نستخدم هذه النتائج في مجال التنبؤ للمستقبل والتخطيط على أساس المعلومات المتنبأ بها في العمل على تغيير وليكن العادات الاستهلاكية، والحصة النسبية للاستهلاك في الدخل كما في مثالنا أعلاه.

الباب الثاني

الأساليب الرياضية
في
دراسة سلوك
المنتج والمنشأة

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

القسم الأول

التحليل
الاقتصادي – الرياضي
السكوني

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الفصل الأول

تابع الإنتاج في المنشأة

بفرض أنه لدينا منشأة تعمل على إنتاج منتج وحيد فإن مستوى الإنتاج يعود إلى عدة عوامل نذكر منها:

1 . رأس المال المستخدم K

2 . العمل L

3 . عامل التقانة على مر الزمن T

4 . الموارد الطبيعية وعوامل أخرى N

وبفرض أن Q مستوى الإنتاج يكون تابع الإنتاج من الشكل

$$Q(K,L,T,N)$$

وبدراستنا سوف نثبت عوامل التقانة والموارد الطبيعية، وبالآتي تصبح الصيغة العامة لها الشكل $Q(K,L)$

. أي سوف ندرس تابع الإنتاج بدلالة عاملين متغيرين فقط هما رأس المال ومستوى العمل، وقد لوحظ أنه في المدة القصيرة الأمد يمكن تغيير مستوى العمل فقط مع ثبات العمل، وقد تتغير هذه المدة حسب حجم المنشأة ولكن يمكن اعتبار أن المدة الوسطية لا تتجاوز العام وحيث إن إدخال رأس المال في هذه المدة لا يعني أنه قد بدأ يستثمر في العملية الإنتاجية فعندما نريد زيادة حجم المعدات وبناء هيكلية جديدة لا يتم الإنتاج في هذه الفعالية حتى إتمامها بشكل كامل وبالآتي تبقى الإنتاجية متعلقة بمستوى العمل ورأس المال السابق مما يعني ثبات رأس المال في هذه المدة.

سوف يتم تقسيم دراستنا على مرحلتين:

1. الإنتاج في المدة قصيرة الأمد
2. الإنتاج في المدة طويلة الأمد

1 . الإنتاج في المدة قصيرة الأمد

كما ذكرنا يبقى رأس المال ثابتاً في هذه المدة ويصبح تابع الإنتاج من الشكل

$$Q = g(L)$$

حيث Q : الكمية المنتجة

L : مستوى العمل

. الناتج المتوسط

إن الناتج المتوسط هو متوسط إنتاجية وحدة عمل واحدة عند مستوى معين من العمل وتعطى بالصيغة:

$$AP = \frac{g(L)}{L}$$

حيث AP : هي تابع الإنتاجية المتوسطة.

مثال: بفرض أنه لدينا تابع الإنتاج في المدة قصيرة الأمد

$$Q = 2L^3 18L^2$$

. أوجد تابع الإنتاجية المتوسط ومن عندنا $L = 4$

. نجد أن تابع الإنتاجية المتوسطة:

$$AP = \frac{-2L^3 18L^2}{L}$$

$$AP = -2L^2 + 18L$$

وعندما $L=4$ نعوض فنجد

$$API_L = -2(4)^2 + 18(4)$$
$$API_L = 40$$

. التفسير الاقتصادي: عندما يكون حجم العمل $L=4$ فإن متوسط إنتاجية وحدة عمل واحدة هو (40) وحدة من المنتج.

ونلاحظ أن الناتج الكلي يساوي الناتج المتوسط مضروباً بعدد وحدات العمل

$$Q = AP.L$$

. الناتج الحدي «الهامشي»

إن الناتج الحدي اقتصادياً هو إنتاجية آخر وحدة عمل مستخدمة في عملية الإنتاج. فمثلاً عندما يكون حجم العمل $L=3$ فإن كمية الإنتاج هي:

$$Q_1 = g(L=3)$$

وعندما نزيد حجم العمل وحدة واحدة لتصبح $(L=4)$ فإن حجم الإنتاج

$$Q_2 = g(L=4)$$

وبالآتي إنتاجية الوحدة الرابعة فقط هي

$$MP = \frac{Q_2 - Q_1}{4-3} = g(L=4) - g(L=3)$$

ولكن إذا كان تابع الإنتاج مستمراً وعندما يتغير مستوى العمل بمستوى صغير ΔL

عندئذ: $$Q_2 = g(3+\Delta L)$$

وبالآتي الفرق بين الإنتاجين:

$$MP = \frac{g(3+\Delta L) - g(3)}{\Delta L}$$

وكي تكون الإنتاجية لوحدة مقيسة تقسم على (ΔL)

وعندما تكون ΔL لا متناهية بالصغر نجد $\Delta L \to 0$

إذاً $$MP = \lim_{\Delta L \to 0} \frac{g(3+\Delta L) - g(3)}{\Delta L}$$

وهذا يوافق

$$MP = g'(L)$$

ونلاحظ أننا قسمنا على ΔL اعتبرنا واحدة العمل لا متناهية بالصغر ونقبل اقتصادياً أن واحدات العمل واحدات صحيحة وذلك للتفسير الاقتصادي على أساس أن التابع خطي في هذا المجال الصغير

إذاً تعطى عبارة الناتج الحدي:

$$MP = \frac{dg(L)}{dL} = g'(L)$$

أو بالصيغة:

$$MP = \frac{g(L_2) - g(L)}{L_2 - L_1}$$

مثال: بفرض أنه لدينا التابع

$$Q = g(L) = -2L^3 + 18L^2$$

1. أوجد مستوى الإنتاج عندما $L = 3$, $L = 4$

2 . أوجد الإنتاجية الحدية للوحدة الرابعة من العمل.

3 . أوجد الإنتاجية الحدية باستخدام مفهوم الاشتقاق للوحدة الرابعة، وقارن بين النتائج

$$g(L=3) = -2(3)^3 + 18(3)^2 = 108$$
$$g(L=4) = -2(4)^3 + 18(4)^2 = 160$$

2 . إن الإنتاجية للوحدة الرابعة هي

$$\frac{g(L=4)-g(L=3)}{4-3}=160-108$$

$$MP(L=4)=52$$

$$MP(L)=g'(L)=-6L^2+36L \qquad .3$$

عند التعويض بـ $L=3$ نجد

$$MP(L)=-6(3)^2+36(3)=54$$

نلاحظ أن الفرق بين القيمتين يمكن اقتصادياً إهماله.

أي يمكننا التفسير اقتصادياً كما يلي اعتماداً على الطلب الثالث:

عندما يزداد العمل وحدة واحدة من $L=3$ إلى $L=4$، فإن الإنتاج الكلي سوف يزداد بمقدار (54) وحدة منتجة.

وكلما كانت درجة معادلة الإنتاج قريبة من الدرجة الثانية، كلما كانت الجودة في الجواب أدق.

إذاً من الآن فصاعداً سوف نعتبر أن الإنتاجية الحدية الهامشية هي المشتق إذا كان تابع الإنتاج معروف الصيغة الرياضية وقريباً من الدرجة الثانية «ثالثة أو ثانية أو أولى»

. صيغة تابع الإنتاج في المدة قصيرة الأمد

سوف نعتبر أن تابع الإنتاج من الدرجة الثالثة في المدة قصيرة الأمد، وبالآتي له الشكل:

$$Q=aL^3+bL^2+cL+d$$

حيث $a.b.c.d$ ثوابت.

وسوف نوجد شروط هذه الثوابت كي تكون الصيغة السابقة تتطابق مع مستوى الإنتاج

. إن الإنتاجية دون العمل تكون معدومة، وهذا معروف اقتصادياً وبديهياً وبالآتي:

$$Q(L=0)=0$$

وبالتعويض نجد

$d=0$ وهو الشرط الأول.

لاحظنا أن تابع الإنتاج معدوم عند مستوى العمل $L=0$، وبالآتي وكون الناتج موجب، فإن النهاية الصغرى لتابع الإنتاج هي $L=0$، $Q=0$

وكون التابع تحليلي وقابل للاشتقاق ومشتقه مستمر إذاً:

(نهاية صغرى) $Q`=0$

$L=0$

إذاً

عندما: $MP=Q`=3aL^2+2bL+c$

وبالآتي عندما نعوض بـ $L=0$ نجد أنه يجب تحقق:

(شروط النهاية الصغرى) $Q`=0$

$Q``\rangle 0$

$0=3a(0)^2+2b(0)+c\Rightarrow$

$c=0$ وهو الشرط الثاني

$Q``=6aL+2b\rangle 0$

نعوض بـ $L=0\Leftarrow$

وهو الشرط الثالث $2b\rangle 0\Rightarrow b\rangle 0$

وبالآتي أصبح تابع الإنتاج من الشكل $Q=aL^3+bL^2$.

ومن التحليل الرياضي نجد أنه إذا كان لتابع من الدرجة الثالثة نهاية صغرى عندئذ يوجد نهاية عظمى، وتقع نقطة الانعطاف بين فاصلتي النهاية العظمى والصغرى.

وتحقق النهاية العظمى

$$Q^{\backslash} = 0$$
$$Q^{\backslash\backslash} \langle 0$$

وبالآتي:

$$MP = Q^{\backslash} = 3aL^2 + 2bL$$

وبوضع $Q^{\backslash} = 0$ نجد:

$3aL^3 + 2bL = 0$ $\Rightarrow$ وتوافق النهاية الصغرى $L = 0$

أو $L = \frac{-2b}{3a}$ توافق النهاية العظمى

وكون $b \langle 0$ والنهاية العظمى لها مستوى عمل موجب إذاً يجب أن يكون:

$a \langle 0$ وهو الشرط الرابع

$$Q^{\backslash\backslash} = 6aL + 2b \langle 0$$

محقق $6a(\frac{-26}{3a}) + 2b \langle 0$

إذاً الشكل العام يصبح:

$$Q = aL^3 + bL^2$$
$$b \rangle 0 \quad , \quad a \langle 0$$

. خواص في تابع الإنتاج

1. ينطلق تابع الإنتاج من مبدأ الإحداثيات $(L = 0)$

2 . إن الناتج الحدي هو

$$MP = 3aL^2 + 2bL$$

وتكون نقطة الانعطاف عندما $(MP)^{\backslash} = 0$ أي

$$MP^{\backslash} = 6aL + 2b$$

وبالآتي:

$$6aL + 2b = 0 \qquad \Rightarrow L = \frac{-b}{3a}$$

وهي فاصلة نقطة الانعطاف ويكون إشارة (MP) مخالفة لإشارة a وبالآتي يكون $0\langle(MP^{\backslash})$ إذاً فإن تابع الإنتاج متزايد بمعدل قبل وصوله لنقطة الانعطاف وبعد نقطة الانعطاف يكون تابع الإنتاج متزايداً بمعدل متناقص وصولاً إلى نقطة النهاية العظمى للناتج الكلي.

3 . إن النهاية العظمى للناتج الهامشي توافق $MP^{\backslash}=0$ أي $Q^{\backslash\backslash}=0$

وبالآتي عند نقطة الانعطاف على منحنى الناتج الكلي توافق القيمة لمستوى عمل $L=\frac{-b}{3a}\backslash$

4 . الناتج المتوسط: $AP=aL^2+bL$

وهي معادلة من الدرجة الثانية وكون $a\langle 0$ فإن له نهاية عظمى توافق:

$$AP^{\backslash}=0\Rightarrow 2aL+b=0\Rightarrow L=\frac{-b}{2a}$$

ونلاحظ أن فاصلة النهاية العظمى للناتج الهامشي $L=\frac{-b}{3a}$ تقع قبل النهاية العظمى للناتج المتوسط والموافق لـ $L=\frac{-b}{2a}$ حيث

$$\frac{-b}{2a}\rangle\frac{-b}{3a}\rangle 0$$

ونحن نعلم أنه $\frac{2}{3}\rangle\frac{1}{2}$ إذاً بضرب الطرفين بالعدد الموجب $\frac{-b}{a}$ نجد

$$\frac{-2b}{3a}\rangle\frac{-b}{2a}$$

وحيث $L=\frac{-2b}{3a}$ توافق النهاية العظمى للناتج الكلي و $\frac{-b}{2a}$ توافق النهاية العظمى للناتج المتوسط نجد $\frac{-2b}{3a}\rangle\frac{-b}{2a}\rangle\frac{-b}{3a}\rangle 0$

وبالآتي ترتيب النهايات هي:

1. النهاية العظمى للناتج الهامشي $L = \frac{-b}{3a}$ وهي الأصغر

2. النهاية العظمى للناتج المتوسط $L = \frac{-b}{2a}$

3. النهاية العظمى للناتج الكلي $L = \frac{-2b}{3a}$

5. سوف نثبت أن النهاية العظمى للناتج المتوسط تقع على منحني الناتج الهامشي

لدينا $AP = \frac{Q}{L}$

وكون النهاية العظمى وحيدة تحقق $AP' = 0$

إذاً بالاشتقاق والتعويض نجد:

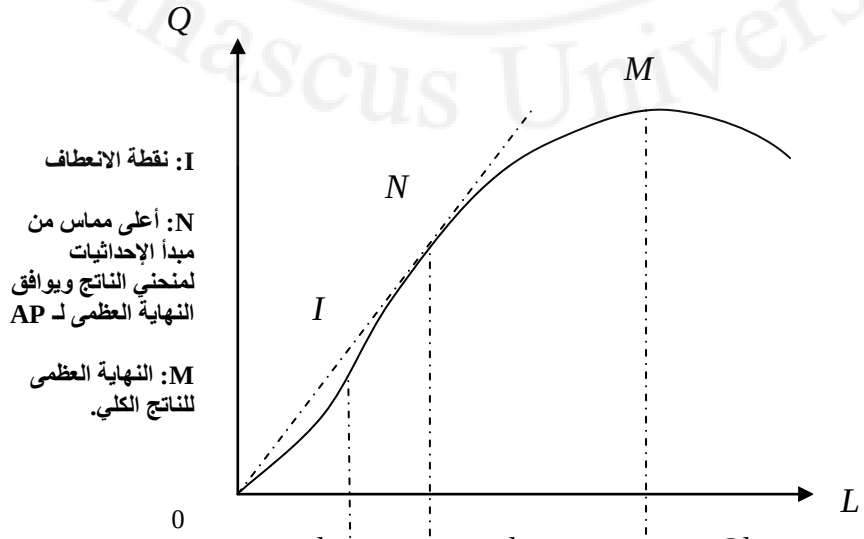
$$AP' = \frac{Q'.L - Q}{L^2} = 0$$

إذاً

$$Q'L - Q = 0 \qquad \Rightarrow Q' = \frac{Q}{L}$$

وبالآتي $MP = AP$ عند النهاية العظمى لـ AP

وبالآتي يمكن رسم التوابع الآتية كما يلي:



الشكل رقم (1-1)

6. نلاحظ أنه $MP \rangle AP$ في المنطقة الواقعة بين مبدأ الإحداثيات وصولاً للنهاية العظمى لـ AP ، وهذا يعني أن إضافة أي وحدة عمل سوف تعطي إنتاجية أكثر من متوسط إنتاجية وحده واحدة وبالآتي في هذه المنطقة من مصلحة المنشأة زيادة العمل لأن ربحها أكبر من متوسط الإنتاجية.

7 . أما بعد النهاية العظمى لـ AP نجد أن $AP \rangle MP$ وبالآتي كل وحدة عمل مضافة سوف تعطي إنتاجية أقل من المتوسط وبالآتي ليس من مصلحة المنشأة

إضافة وحدات عمل إضافية، وتدعى هذه المنطقة بالمنطقة الاقتصادية حيث هنا يجب زيادة رأس المال كي تتباعد النهايات.

مثال: لدينا تابع إنتاج قصير الأمد من الدرجة الثالثة له الشكل:

$$Q = aL^3 + bL^2$$

1. اذكر شروط التابع السابق كي يكون تابع إنتاج له معنى اقتصادي

2 . بفرض أن $L = 4$ فاصلة النهاية العظمى لـ MP

والمنطقة التي يكون فيها $MP \geq AP$ تقع في المجال $[0,6]$

أوجد تابع الإنتاج بالشكل العام

الحل: باختصار

$$a\langle 0$$

$$b\rangle 0$$

2. (1) $\quad L = 4 = \dfrac{-b}{3a}$

(2) $\quad L = 6 = \dfrac{-b}{2a}$ النهاية العظمى لـ AP

بالحل لـ (1) و (2) نجد $\quad b = 12 \quad Q = -1$

$$Q = -L^3 + 12L^2$$

2. الإنتاج في الأمد الطويل:

يأخذ التابع الشكل

$$Q = Q(K, L)$$

حيث:

K :رأس المال

L :مستوى العمل

Q :مستوى الانتاج

. النواتج المتوسطة

بشكل مشابه يُعرف الناتج الهامشي لرأس المال عند ثبات العمل

$$AP_K = \frac{Q(K,L)}{K}$$

ونفسره اقتصادياً بأنه متوسط إنتاجية وحدة رأس مال واحدة مع ثبات العمل والناتج الهامشي للعمل:

$$AP_L = \frac{Q(K,L)}{L}$$

وهي متوسط إنتاجية وحدة عمل واحدة مع ثبات رأس المال.

ويُعرف الناتج المتوسط الكلي لمزيج عناصر الإنتاج:

$$AP = \frac{Q(K,L)}{(Q+L)}$$

. النواتج الهامشية

نعرف الناتج الهامشي لرأس المال:

$$MP_K = \frac{\partial Q(K,L)}{\partial K}$$

ونعرفه اقتصادياً بأنه إنتاجية آخر وحدة رأس مال مع ثبات مستوى العمل.

ونعرف الناتج الهامشي للعمل

$$MP_L = \frac{\partial Q(K,L)}{\partial L}$$

وهو إنتاجية آخر وحدة عمل مستخدمة بفرض ثابت رأس المال.

. توابع الإنتاج المتجانسة

نقول عن تابع إنتاج $Q(K,L)$أنه متجانس من الدرجة (n) إذا حقق العلاقة:

$$Q(\lambda K, \lambda L) = \lambda^n Q(K, L)$$

حيث λ: عدد مرات مضاعفة عوامل الإنتاج.

n: درجة التجانس.

ونلاحظ أننا عندما نضاعف عناصر الإنتاج بمقدار (λ)، سوف يتضاعف الإنتاج بمقدار $\left(\lambda^n\right)$ ونميز الحالات الآتية:

1- عندما $n\rangle 1$ يتضاعف عناصر الإنتاج بمقدار (λ)، سوف يتضاعف الإنتاج بمقدار $\lambda\rangle\lambda^n$ وتسمى العوائد المتزايدة «ربح».

2- عندما $n=1$ يتضاعف عناصر الإنتاج بمقدار λ، سوف يتضاعف الإنتاج بنفس لمقدار λ وهي حالة العوائد الثابتة «التعادل».

3- عندما $n\langle 1$ يتضاعف الإنتاج بمقدار λ، سوف يتضاعف الإنتاج بمقدار $\lambda\langle\lambda^n$ وتسمى عوائد متناقصة «خسارة».

. علاقة أولر في التوابع المتجانسة

بفرض أنه لدينا تابع إنتاج متجانس من الدرجة (n) أثبت العالم الرياضي أولر صحة المطابقة الآتية:

$$K.MP_K + L.MP_L = n.Q$$

وتم تفسير ذلك اقتصادياً أنه لو تم دفع MP_K سعرٍ لوحدة رأس المال ودفع MP_L سعرٍ لوحدة العمل، فإنه سوف نكفي لتغطية $n.Q$ من الإنتاج.

نتيجة: نقسم طرفي علاقة أولر على Q فنجد:

$$\frac{K}{Q}.MP_K + \frac{L}{Q}MP_L = n$$

وحسب تعريف المرونة الجزئية نجد:

المرونة الجزئية بالنسبة لرأس المال: $E_K(Q) = \frac{K}{Q}.MP_K$

المرونة الجزئية بالنسبة للعمل: $E_L(Q)=\frac{L}{Q}.MP_L$

إذاً

$$E_K(Q)+E_L(Q)=n$$

أي إن المرونة الكلية تساوي مجموع المرونات الجزئية، وتساوي درجة التجانس

مبرهنة

إذا كان لدينا تابع إنتاج $Q(K,L)$ متجانس من الدرجة n، فإن MP_K متجانس من الدرجة $(n-1)$

الإثبات

لدينا تابع الإنتاج $Q(K,L)$

وكون التابع متجانساً من الدرجة (n) إذاً

$$Q(\lambda K,\lambda L)=\lambda^{n}Q(K,L)$$

نشتق طرفي المعادلة بالنسبة لـ (K) جزئياً فنجد

$$\frac{\partial Q(\lambda K,\lambda L)}{\partial K}=\lambda^{n}\frac{\partial Q(K,L)}{\partial K}$$

$$MP_K(\lambda K,\lambda L).\lambda=\lambda^{n}MP_K(K,L)$$

وبالاختصار نجد

$$MP_K(\lambda K,\lambda L)=\lambda^{n-1}.MP_K(K,L)$$

وهو المطلوب

ملاحظة: لاحظ أنه: $\frac{\partial(\lambda K)}{\partial K}=\lambda$

نتيجة: إذا كان $Q(K,L)$ متجانس من الدرجة (n) فإن $MP_L(K,L)$ متجانس من الدرجة $(n-1)$.

مسألة: ليكن لدينا تابع الإنتاج

$$Q = 5KL + 2L^2$$

1 . أثبت أن التابع متجانس وحدد درجة تجانسه.

2 . أوجد الناتج عند مستوى $L = 3$, $K = 5$

3 . أوجد الناتج عند مستوى $L = 3$, $K = 6$ وأوجد الفارق بين مستويي الإنتاج

4 . أوجد الناتج الهامشي لرأس المال عندما $L = 3$, $K = 5$

5 . أوجد المرونات الجزئية عند مستوى $L = 3$, $K = 5$

. الحل

$$Q(\lambda K, \lambda L) = 5(\lambda K)(\lambda L) + 2(\lambda L)^2$$

$$= \lambda^2 \left[5KL + 2L^2\right]$$

$$Q(\lambda K, \lambda L) = \lambda^2 Q(K, L)$$

وبالآتي متجانس من الدرجة الثانية $n = 2$

2. بالتعويض نجد أنه

$$Q(5,3) = 5(5)(3) + 2(3)^2 = 93$$

3 . بالتعويض نجد $Q(6,3) = 5(6)(3) + 2(3)^2 = 108$

وبالآتي نجد أنه

$$MP_K(5,3) = \frac{Q(6,3) - Q(5,3)}{6-3} = \frac{108-93}{1} = 15$$

4. $MP_K(K, L) = 5L$

بالتعويض بـ $L = 3$ $K = 5$ نجد

$$MP_K(5,3) = 5(3) = 15$$

وهي نفس النتيجة السابقة

$$E_K(Q) = MP_K . \frac{K}{Q}$$

.5

$$= 15 \frac{5}{93} = \frac{25}{31}$$

ومن علاقة أولر نجد

$$n = E_K Q + E_L Q \qquad \Rightarrow$$

$$2 = \frac{25}{31} + E_L Q \qquad \Rightarrow E_L Q = \frac{37}{31}$$

لنعيد صياغة المسألة بالشكل الآتي:

مسألة: لدينا تابع إنتاج $Q(K,L)$ غير معروف الصيغة ومتجانس من الدرجة الثانية وتوافرت المعلومات الآتية:

$$Q_1(K,L) = Q_1(5,3) = 93$$
$$Q_2(K,L) = Q_2(6,3) = 108$$

. المطلوب

1. أوجد الناتج الهامشي لرأس المال ثم للعمل عند المستوى

$$K = 5 \quad , \quad L = 3$$

2. أوجد المرونات الجزئية عند المستويين السابقين.

3. بفرض أننا نريد إنتاج 209.25 وحدة من المنتج، أوجد مستوى رأس المال والعمل.

. الحل:

1. $$MP_K(K,L) = \frac{Q(6,3) - Q(5,3)}{6-5} = \frac{108-93}{6-1}$$

وهو الناتج الهامشي لرأس المال $MP_K(5,3) = 15$

ونحن نعلم أن

$$K.MP_K + L.HP_L = n.Q$$

نعوض بـ $K=5 \qquad L=3 \qquad n=2 \qquad Q(5,3)=93$

$$5(15)+3.MP_L=2(93)$$

$$MP_L=37 \qquad \Rightarrow MP_L(5,3)=37$$

2 -

$$E_K Q=MP_K.\frac{K}{Q}=15\frac{(5)}{93}=\frac{25}{31}$$

$$E_L Q=MP_L.\frac{L}{Q}=37\frac{3}{93}=\frac{37}{31}$$

وهي نفس النتائج السابقة

3. نحن نعلم أنه

$$Q(\lambda K,\lambda L)=\lambda^2 Q(K,L)$$

$$Q(\lambda 5,\lambda 3)=\lambda^2 Q(5,3)$$

$$209.25=\lambda^2(93) \qquad \Rightarrow \lambda^2=2.25 \Rightarrow \lambda=1.5$$

إذاً

$$K=(1.5)(5)=7.5$$

$$L=(1.5)(3)=4.5$$

ولكن ماذا لو أننا نعرف الصيغة وعوضنا بـ $K=7.5 \qquad L=4.5$

لوجدنا

$$Q=5(7.5)(4.5)+2(4.5)^2=209.25$$

وهي نفس النتائج

. تابع الإنتاج المتساوي

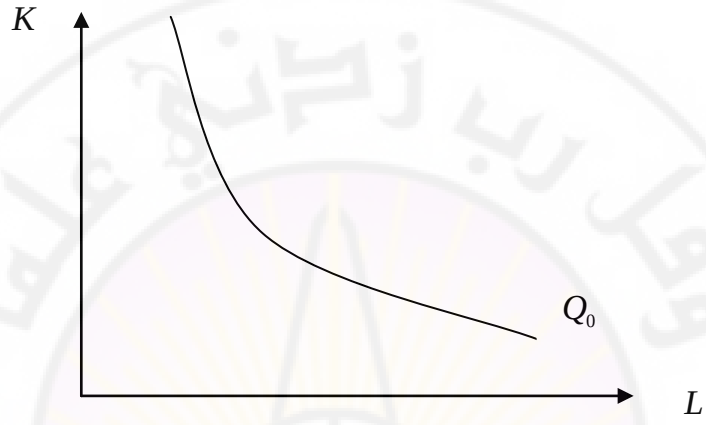
ليكن لدينا تابع إنتاج

$$Q(K,L)$$

وبفرض Q_0 مستوى إنتاج محدد عندئذ نضع

$$Q_O=Q(K,L)$$

وبالآتي يوجد عدة تراكيب من عناصر الإنتاج (K,L) تعطي نفس الناتج Q_O ويمكن رسم التابع بالشكل



الشكل رقم (1−2)

لنأخذ التفاضل الكلي للطرفين فنجد

$$dQ_O = \frac{\partial Q}{\partial K}.dK + \frac{\partial Q}{\partial L}dL$$

وبما أن $dQ = 0$ نجد

$$0 = MP_K.dK + MP_L.dL$$

ومنه نجد

$$\frac{dK}{dL} = -\frac{MP_L}{MP_K}$$

فإذا كان تغير $dL = -1$ أي انخفاض عنصر العمل وحدة واحدة، فإن dK يعبر عن مدى زيادة رأس المال وبالآتي يعبر عن إحلالية رأس المال محل العمل ونرمز له بـ $TMST_{L,K}$.

معدل إحلال رأس المال محل العمل:

$$TMST_{L,K} = \frac{MP_L}{MP_K}$$

وبأسلوب مماثل نجد معدل إحلال العمل محل رأس المال:

$$TMST_{L,K} = \frac{MP_K}{MP_L}$$

ونفسر اقتصادياً معدل الإحلال كما يلي:

هو ما نحتاج من احد عناصر الإنتاج لإحلاله محل وحدة واحدة من العنصر الآخر مع الإبقاء على نفس المستوى من الإنتاج.

. مرونة الإحلال

لو عدنا للمعدل الحدي للإحلال التقني، ولنفرض أننا زدنا عدد وحدات العمل المستخدمة أي خفضنا عدد وحدات رأس المال. ما هو تأثير ذلك على الناتج الهامشي للعمل وعلى الناتج الهامشي لرأس المال؟ لنبين هذا التأثير من خلال مرونة الإحلال.

. إن النسبة $\frac{K}{L}$ تقيس عدد وحدات رأس المال المستخدمة مقابل كل وحدة عمل.

فإذا كانت $\frac{K}{L} = 3$، فإن كل وحدة من وحدات رأس المال تقابل ثلاث وحدات عمل.

ليكن $\frac{K}{L} = k$ حيث تعبر هذه النسبة عن رأس المال الفردي أو المتوسط. إن مرونة الإحلال هي التغير النسبي لـ (k) مقسوماً على التغير النسبي للمعدل الحدي للإحلال التقني. فلو رمزنا للمعدل الأخير بـ (s) عوضاً عن $(TMST)$ فإن مرونة الإحلال σ تكون:

$$\sigma = \frac{\frac{dk}{k}}{\frac{ds}{s}} \Rightarrow \sigma = \frac{dk}{ds}.\frac{s}{k} \rangle 0$$

. إن المرونة السابقة هي موجبة دوماً لأن التغيرات النسبية لـ (k) هي من اتجاه التغيرات النسبية لـ (s). كما ويجب ملاحظة أنه لا يمكن حساب مرونة الإحلال إلا إذا عرفنا الشكل الرياضي للتابع الذي سنقوم بحسابه (متجانس من الدرجة الأولى، الثانية،... الخ)

وبفرض أنه لدينا الآن تابع إنتاج من الدرجة الأولى (خطي)، ما هي مرونة إحلال هذا التابع؟

بما أن التابع متجانس من الدرجة الأولى، فإن مشتقاته الجزئية متجانسة من الدرجة صفر ونواتجه الهامشية ثابتة.

$$Q = f(K,L)$$

بما أن التابع متجانس من الدرجة الأولى، فإنه إذا ضاعفنا عوامل الإنتاج بنسبة (λ)، فإن مستوى الإنتاج سوف يتضاعف بنفس النسبة فيكون:

$$f(\lambda K, \lambda L) = \lambda Q = \lambda f(K,L)$$

وما يصدق على زيادة عوامل الإنتاج بنسبة (λ) يصدق عل خفض هذه العوامل بنفس النسبة

$$f(\frac{K}{\lambda}, \frac{L}{\lambda}) = \frac{1}{\lambda} f(K,L) = \frac{Q}{\lambda}$$

لنفترض الآن أن $\lambda = L$ أي خفضنا عدد وحدات رأس المال والعمل المستخدمة بنسبة العمل المستخدم فيكون:

$$f(\frac{K}{L}, \frac{L}{L}) = \frac{Q}{L} \Rightarrow f(K,1) = x$$

حيث $x = \frac{Q}{L}$ يعبر عن الناتج المتوسط أو الفردي بالنسبة للعمل.

و $\frac{K}{L}$ هو رأس المال المتوسط أو الفردي.

نستطيع الآن أن نربط (x) بـ (k) عن طريق علاقة جديدة

$$x = \frac{Q}{L} \Rightarrow x = f(k)$$

أي إن مستوى الناتج المتوسط (الفردي) تابع لرأس المال المتوسط (الفردي) وبالتالي يكون $x = f(k)$ تابع إنتاج مختصر عن التابع الأول (Q).

بالاشتقاق ينتج الناتج الهامشي للناتج المتوسط (الفردي) $\frac{Q}{L}$ لرأس المال المتوسط (الفردي) $\frac{K}{L}$:

$$f_k^{\setminus} = \frac{dx}{dk}$$

$$f_k^{\setminus} = \frac{d\frac{Q}{L}}{d\frac{K}{L}} = \frac{\partial Q}{\partial K} = f_K$$

نستنتج أنه سواء حسبنا المشتق الجزئي لتابع الإنتاج بالنسبة لرأس المال أو حسبنا مشتق الناتج المتوسط بالنسبة لرأس المال المتوسط فإن النتيجة واحدة .. وبالتالي فإن:

الناتج الهامشي لرأس المال المتوسط =الناتج الهامشي الكلي لرأس المال.

وبنفس الأسلوب نستنتج أن الناتج الهامشي للعمل المتوسط =الناتج الهامشي الكلي للعمل.

أي:

$$f_l^{\setminus} = f_L$$

$$f_l^{\setminus} = \frac{dx}{dl} = \frac{d\left(\frac{Q}{L}\right)}{d\left(\frac{L}{L}\right)} = d\left(\frac{Q}{L}\right) = \frac{dQ}{dL} = f_L$$

الآن بما أن توابع الإنتاج المتجانسة تحقق علاقة أولر، وبما أن تابعنا متجانس من الدرجة الأولى فإن

$$Kf_K + Lf_L = f(K,L) = Q$$

بالتعويض $Kf_k^{\backprime} + Lf_l^{\backprime} = Q$

بتقسيم طرفي العلاقة على L نجد $\frac{K}{L} f_k^{\backprime} + f_l^{\backprime} = \frac{Q}{L} = x = f(k)$

وبالآتي فإن: $f_l^{\backprime} = f(k) - kf_k^{\backprime}$

وهو الناتج الهامشي للعمل محسوباً من تابع الإنتاج المختصر السابق. لو عدنا الآن للمعدل الحدي للإحلال التقني $TMST_{LK} = \frac{f_L^{\backprime}}{f_k^{\backprime}}$ أو $s = \frac{f_l^{\backprime}}{f_f^{\backprime}}$

يكون: $s = \frac{f(k) - kf_k^{\backprime}}{f_k^{\backprime}}$

لنشتق الآن (s) بالنسبة (k)

$$\frac{ds}{dk} = \frac{\left[f(k) - kf_k^{\backprime}\right] f_k^{\backprime} - f_k^{\backprime\backprime}\left[f(k) - kf_k^{\backprime}\right]}{(f_k^{\backprime})^2}$$

$$= \frac{\left[f^{\backprime}(k) - f_k^{\backprime} - kf_k^{\backprime\backprime}\right] f_k^{\backprime} - f_k^{\backprime\backprime} f(k) + kf_k^{\backprime} f_k^{\backprime\backprime}}{(f_k^{\backprime})^2}$$

مع ملاحظة أن $f^{\backprime}(k)$ هي نفسها $f_k^{\backprime}$ يكون:

$$= \frac{(f_k^{\backprime})^2 - (f_k^{\backprime})^2 - kf_k^{\backprime} f_k^{\backprime\backprime} - f(k) f_k^{\backprime\backprime} + kf_k^{\backprime} f_k^{\backprime\backprime}}{(f_k^{\backprime})^2} = \frac{-f(k) f_k^{\backprime\backprime}}{(f_k^{\backprime})^2}$$

$$\frac{ds}{df} = -\frac{f(k) f_k^{\backprime\backprime}}{(f_k^{\backprime})^2} \qquad \Rightarrow \frac{dk}{ds} = -\frac{(f_k^{\backprime})^2}{f(k) f_k^{\backprime\backprime}}$$

علاقة مرونة الإبدال كانت $\sigma = \frac{dk}{ds} . \frac{s}{k}$

وبالآتي: $\sigma = -\frac{(f_k^{\backprime})^2}{f(k) f_k^{\backprime\backprime}} . \frac{f(k) - k f_k^{\backprime}}{k f_k^{\backprime}}$

وبالاختصار $\sigma = -\frac{f_k^{\backprime}}{f(k) f_k^{\backprime\backprime}} . \frac{f(k) - k f_k^{\backprime}}{k}$

$$\Rightarrow \sigma = -\frac{f_k^{\backprime}(f(k) - k f_k^{\backprime})}{k f(k) f_k^{\backprime\backprime}} \rangle 0$$

إن هذه المرونة موجبة لأن:

1. $f_k^{\backprime}$ الناتج الهامشي لرأس المال وهو موجب على الرغم من كونه متناقصاً
2. $\left(f(k) - k f_k^{\backprime}\right)$ وهو الناتج الهامشي للعمل وهو موجب
3. k رأس المال الفردي أو المتوسط وهو موجب
4. $f(k)$ عدد وحدات الناتج المتوسط أو الفردي وهو (x) موجب
5. $f_k^{\backprime\backprime}$ المشتق الثاني للناتج المتوسط أو الفردي وهو سالب المشتق الأول للناتج الهامشي.

. وبما أن الكسر مسبوق بإشارة سالب وبالآتي فإن $0 \langle \sigma$.

<u>. تابع الإنتاج كوب . دوغلاس</u>

– من أشهر التوابع الاقتصادية المدروسة حيث تضافرت جهود كل من العالم الأمريكي دوغلاس وعالم الرياضيات كوب بمحاولة لتحديد بطريقة تجريبية أثر إنفاق رأس المال والعمل، وكان الهدف من تلك الدراسة التحليل الإحصائي بحيث تؤكد وجود قوانين كمية للإنتاجية الحدية وقد انطلقا من الأسس الآتية:

1. يعد الإنتاج تابعاً لعاملين هما رأس المال والعمل وعملية الإحلال ممكنة.
2. درجة كثافة استخدام العمل ورأس المال ثابتة.
3. العلاقة خطية بين عوامل الإنتاج.

أخذ تابع الإنتاج كوب دوغلاس الشكل الرياضي الآتي: $Q = A K^{\alpha} L^{\beta}$

حيث: A,α,β ثوابت موجبة $\alpha+\beta=1$ ويمثل A معامل التناسب بين رأس المال والعمل. كما أنه وجد إحصائياً أن α تنزع لأن تأخذ القيمة $\beta,\frac{1}{4}$ والقيمة $\frac{3}{4}$.

. K مستوى رأس المال المستخدم.

. L مستوى العمل المستخدم.

. يمكن أن ندرس تابع الإنتاج كوب دوغلاس في الأمد القصير، حيث K تكون ثابتة عندئذ يكون جداء $A\bar{K}^{\alpha}$ مقداراً موجباً ثابتاً، يمكن أن نرمز له بـ (C) مثلاً، فيكون تابع الإنتاج كوب ودوغلاس على المدى القصير من الشكل $Q=CL^{\beta}$. يبين هذا التابع تغير مستوى الإنتاج (Q) عندما يتغير مستوى العمل (L) مع بقاء رأس المال $\left(\bar{K}\right)$ ثابتاً.

باشتقاق (Q) ينتج الناتج الهامشي للعمل (MP_L)، ويبين مقدار التغير في (Q) عندما تتغير (L) بمقدار وحدة واحدة.

$$MP_L=\frac{dQ}{dL}=\beta CL^{\beta-1}\rangle 0$$

لأن L^{β} موجب وكلاً من β,C موجبان.

باشتقاق الناتج الهامشي للعمل نجد: $(MP_L)'=\frac{d(MP_L)}{dL}=\beta(\beta-1)CL^{\beta-2}\langle 0$

والمشتق الثاني لتابع الإنتاج سالب لأن $(\beta-1\langle 0)$ والباقي مقادير موجبة وهذا يدل على تناقص الناتج الهامشي.

. لحساب الناتج المتوسط للعمل (AP) نقسم مستوى الإنتاج على عدد وحدات العمل المستخدمة فيكون

$$AP=\frac{Q}{L}=C\frac{L^{\beta}}{L}=CL^{\beta-1}$$

لمعرفة هل هو متناقص أم متزايد نشتق تابع (AP) فيكون

$(AP)^{\backslash} = \frac{d(AP)}{dL} = C(\beta-1)L^{\beta-2} \langle 0$. إذاً تابع الناتج المتوسط متناقص.

هل يتقاطع التابعان AP, MP_L أم لا؟

حتى يكون هنالك تقاطع يجب أن يكون $MP_L = AP$

$$C\beta L^{\beta-1} = CL^{\beta-1} \Rightarrow \beta = 1$$

حتى يتقاطع التابعان يجب أن يكون $(\beta = 1)$، ولكن بما أن $(\alpha + \beta = 1)$ مما يؤدي إلى أن $(1 \neq \beta)$.

وبالآتي فإن التابعين لا يتقاطعان.

إن مرونة تابع الإنتاج السابق، هي حاصل قسمة التغيرات النسبية للإنتاج على التغيرات النسبية للعمل:

$$E_L Q = \frac{dQ}{dL} . \frac{L}{Q}$$

$$E_L Q = C\beta L^{\beta-1} . \frac{L}{CL^{\beta}} = \beta$$

يجب ملاحظة أنه لا يمكن حساب الناتج الهامشي لرأس المال ولا معدل الإحلال وذلك بسبب كون $\bar{K}$ ثابتاً.

. على المدى الطويل يأخذ تابع الإنتاج كوب دوغلاس شكله العام الذي سبق ذكره في بداية البحث وهو

$$Q = AK^{\alpha} L^{\beta}$$

نشتق التابع جزئياً بالنسبة لكل من العمل ورأس المال، فينتج الناتج الهامشي للعمل والناتج الهامشي لرأس المال كما يلي:

$$Q_L^{\backslash} = \frac{\partial Q}{\partial L} = MP = \beta AK^{\alpha} L^{\beta-1}$$

$$= \beta L^{-1} AK^{\alpha} L^{\beta}$$

وبالآتي فإن: $MP_L = \beta \frac{Q}{L} \rangle 0$

وبنفس الأسلوب نجد أن: $MP_K = \alpha \frac{Q}{K} \rangle 0$

إن كلاً من الناتج الهامشي للعمل ورأس العمل يفسران التغير في مستوى الإنتاج عندما يتغير أحد عوامل الإنتاج مع بقاء الآخر ثابت.

باشتقاق كلٍ من $(MP_L), (MP_K)$ جزئياً نجد

$$(MP_L)'_L = \frac{\partial (MP_L)}{\partial L} = \beta(\beta - 1) A K^{\alpha} L^{\beta - 2}$$

$$= \beta(\beta - 1) L^{-2} A K^{\alpha} L^{\beta}$$

$$(MP_L)'_L = \beta(\beta - 1) \frac{Q}{L^2} \langle 0$$

وبالمثل نجد: $(MP_K)'_K = \alpha(\alpha - 1) \frac{Q}{K^2} \langle 0$

أي إن تابعي الناتج الهامشي للعمل، والناتج الهامشي لرأس المال موجبان ولكنهما متناقصان

باشتقاق (MP_L) أو (MP_K) اشتقاقاً متصالباً نجد

$$(MP_L)'_K = (MP_K)'_L = \frac{\partial (MP_K)}{\partial L} = \frac{\partial (MP_L)}{\partial K} = \alpha . \beta \frac{Q}{K . L} \rangle 0$$

لدراسة المعدل الحدي لإحلال العمل محل رأس المال، أو رأس المال محل العمل نجد:

$$TMST_{KL} = \frac{MP_K}{MP_L} = \frac{\alpha \frac{Q}{K}}{\beta \frac{Q}{L}} = \frac{\alpha Q}{K} . \frac{L}{\beta Q}$$

$$TMST_{KL} = \frac{\alpha L}{\beta K}$$

$$TMST_{LK} = \frac{\beta K}{\alpha L}$$ وبالمثل نجد

إن مرونة الإنتاج بالنسبة لكل من رأس المال والعمل هي:

$$E_K Q = MP_K . \frac{K}{Q} = \alpha \frac{Q}{K} . \frac{K}{Q} = \alpha$$

وبالمثل نجد: $E_L Q = \beta$

إن تابع الإنتاج كوب . دوغلاس تابع متجانس من الدرجة الأولى لأن $(\alpha + \beta = 1)$ حيث:

$$Q = f(K, L) = AK^{\alpha} L^{\beta}$$

نثقل كل عامل من عاملي الإنتاج بمقدار λ ، ونطبق شرط التجانس $f(\lambda K, \lambda L) = \lambda^n Q$

$$f(\lambda K, \lambda L) = A(\lambda K)^{\alpha} (\lambda L)^{\beta}$$

فنجد:

$$= A\lambda^{\alpha} K^{\alpha} \lambda^{\beta} K^{\beta}$$

$$= \lambda^{\alpha+\beta} (AK^{\alpha} L^{\beta})$$

$$= \lambda^1 Q$$

إذاً $n = 1$ والتابع متجانس من الدرجة الأولى

نطبق علاقة أولر لدراسة توزع الناتج بين عوامل الإنتاج

$$KMP_K + LMP_L = Q$$

$$K\frac{\alpha Q}{K}+L\frac{\beta Q}{L}=Q$$
$$\alpha Q+\beta Q=Q$$
$$Q(\alpha+\beta)=Q$$

أي إن تابع كوب . دوغلاس يحقق علاقة أولر. أي أن ذلك يعني إذا كان المشروع يدفع ثمناً لاستخدام وحدة رأس المال ما قيمته الناتج الهامشي لرأس المال، ولاستخدام وحدة من العمل ما قيمته الناتج الهامشي للعمل فإن ما يدفعه المشروع = م ا يقبضه ثمناً للإنتاج وبالآتي. فإنه لا يحقق ربحاً أو خسارة. أما إذا كان $\alpha+\beta\rangle 1$فإن المشروع يحقق ربحاً.

أو $\alpha+\beta\langle 1$يحقق خسارة.

لدراسة مرونة الإحلال نقسم طرفي التابع على A فيكون:

$$\frac{Q}{A}=K^{\alpha}L^{\beta}$$

لنفرض أن $\frac{Q}{A}=Q_O$ فيكون $Q_O=K^{\alpha}L^{\beta}$

نقسم طرفي العلاقة السابقة على L مثلاً

$$\frac{Q_O}{L}=K^{\alpha}\frac{L^{\beta}}{L}=K^{\alpha}L^{\beta-1}$$

نعلم أن $\alpha+\beta=1$ وبالآتي $\beta-1=-\alpha$ وبالتعويض في العلاقة السابقة نجد

$$\frac{Q_O}{L}=K^{\alpha}L^{-\alpha}$$

$$\frac{Q_O}{L}=\frac{K^{\alpha}}{L^{\alpha}}$$ وبالآتي

$$\frac{Q_O}{L}=(\frac{K}{L})^{\alpha}$$ أو

بفرض أن $x=\frac{Q_O}{L}$ وهو الناتج المتوسط أو الفردي، ونعلم أن $\frac{K}{L}$ هو رأس المال المتوسط، حيث $\frac{K}{L}=k$ نجد: $x=f(k)=k^{\alpha}$

وهنا أوجدنا تابع إنتاج كوب . دوغلاس مختصراً بعد أن عوضنا الناتج الكلي بالناتج المتوسط، ورأس المال الكلي برأس المال المتوسط.

. الناتج الهامشي لرأس المال

$$f_f^{\backslash}=\frac{dx}{dk}=\alpha f^{\alpha-1}\rangle 0$$

$$f_k^{\backslash\backslash}=\frac{d\left(f_k^{\backslash}\right)}{dk}=\alpha(\alpha-1)k^{\alpha-2}\langle 0$$

الناتج الهامشي لرأس المال موجب، ولكنه متناقص بسبب كون مشتقه سالباً لوجود $(\alpha-1)\langle 0$.

أما بالنسبة للناتج الهامشي للعمل نعلم أن:

$$f_l^{\backslash}=f_k-kf_k^{\backslash}$$

وبالآتي:

$$f_l^{\backslash}=k^{\alpha}-k(\alpha k^{\alpha-1})$$

$$f_l^{\backslash}=k^{\alpha}-\alpha k^{\alpha}=k^{\alpha}(1-\alpha)\rangle 0$$

لأن كلاً من $k^{\alpha}\rangle 0, \qquad 1-\alpha\rangle$

$$TMST_{LK}=\frac{(1-\alpha)K^{\alpha}}{\alpha K^{\alpha-1}}=\frac{(1-\alpha)K^{\alpha-1}K}{\alpha K^{\alpha-1}}$$

$$TMST_{LK}=\frac{1-\alpha}{\alpha}K=\frac{\beta}{\alpha}K$$

وبالآتي فإن مرونة الإحلال

$$\sigma = \frac{-f_k^{\backprime}(f_k - kf_k^{\backprime})}{kf_k f_k^{\backprime\backprime}}$$

$$f_k^{\backprime\backprime} = \alpha(\alpha-1)k^{\alpha-2}$$

$$\sigma = \frac{-\alpha k^{\alpha-1}k^{\alpha}(1-\alpha)}{kk^{\alpha}\alpha(\alpha-1)k^{\alpha-2}}$$

وبالتالي فإن مرونة الإحلال تساوي $\sigma = \frac{k^{\alpha-1}}{kk^{\alpha-2}} = 1$

أي إن مرونة الإحلال في تابع الإنتاج كوب . دوغلاس =1

. تطوير تابع كوب . دوغلاس:

تم تطوير تابع كوب دوغلاس في اتجاهين

الاتجاه الأول : إلغاء الفرضية $\alpha + \beta = 1$ إذ من الممكن أن يكون

$$\alpha + \beta \langle 1$$

أو $\alpha + \beta \rangle 1$

وتصح جميع القوانين السابقة حتى ولو لم يكن مجموع المرونات الجزئية تساوي الواحد، ولكن فيما يتعلق بدرجة التجانس عندئذ إذا كانت $\alpha + \beta \rangle 1$ تكون عوائد عوامل الإنتاج متزايدة، أما إذا كانت $\alpha + \beta \langle 1$ عندها تكون عوائد عوامل الإنتاج متناقصة، أما الاتجاه الثاني يكمن بإدخال مفهوم التقدم التقني وهو ما سوف يدرس في قسم التحليل الديناميكي في هذا الكتاب.

. مثال محلول

في تابع إنتاج كوب دوغلاس كان معامل إحلال رأس المال محل العمل يساوي (2) وذلك عندما يبلغ عدد الوحدات المستخدمة من رأس المال أربعة أضعاف الوحدات المستخدمة من العمل. وقد بلغ مستوى الإنتاج (36) وحدة عند استخدام (27) وحدة رأس المال و(8) وحدات عمل.

أوجد: ً1. تابع الإنتاج بشكليه العام والمختصر

ً2. حساب الناتج الهامشي لكل من رأس المال والعمل من أجل

$$K = 27 \quad , \quad L = 8,$$

ً3. برهن أن تابع الإنتاج بشكله العام متجانس. حدد درجة تجانسه

ً4. بين أن تابع الإنتاج هذا يحقق علاقة أولر.

. الحل:

ً1. لدينا $\frac{K}{L} = 4$ و $\frac{MP_L}{MP_K} = 2$

$$\frac{\beta K}{\alpha L} = 2 \Rightarrow \frac{4(1-\alpha)L}{\alpha L} = 2$$

$$\frac{4-4\alpha}{\alpha} = 2 \Rightarrow 4-4\alpha = 2\alpha$$

$$6\alpha = 2 \Rightarrow \alpha = \frac{2}{3}$$

$$\beta = \frac{1}{3}$$

$$Q = AK^{\alpha}L^{\beta}$$

$$36 = A(27)^{\frac{2}{3}}(8)^{\frac{1}{3}}$$

$$36 = 18A \Rightarrow A = 2$$

الشكل العام للتابع $Q = 2K^{\frac{2}{3}}L^{\frac{1}{3}}$

$$\frac{Q}{A} = Q_O \Rightarrow Q_O = K^{\frac{2}{3}}L^{\frac{1}{3}}$$

تابع الإنتاج بشكله المختصر: $x = \frac{Q_O}{L} \Rightarrow x = K^{\frac{2}{3}}L^{\frac{-2}{3}} \Rightarrow x = \left(\frac{K}{L}\right)^{\frac{2}{3}}$

ً2.

$$Q = 2(27)^{\frac{2}{3}}(8)^{\frac{1}{3}} = 36$$

$$MP_K = \alpha \frac{Q}{K} = \frac{2}{3}.\frac{36}{27} = \frac{8}{9}$$

$$MP_L = \beta \frac{Q}{L} = \frac{1}{3}.\frac{36}{8} = \frac{3}{2}$$

3ً.

$$f(\lambda K, \lambda L) = 2(\lambda K)^{\frac{2}{3}}(\lambda L)^{\frac{1}{3}}$$

$$= 2\lambda^{\frac{2}{3}}K^{\frac{2}{3}}\lambda^{\frac{1}{3}}K^{\frac{1}{3}}$$

$$= \lambda^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}}2K^{\frac{2}{3}}L^{\frac{1}{3}} = \lambda^1$$

أي إن تابع الإنتاج متجانس من الدرجة الأولى

4ً.

$$K.MP_K + L.MP_L = Q$$

$$27(\frac{8}{9}) + 8(\frac{3}{2}) = 36$$

$$3(8) + 4(3) = 36$$

أي إنه يحقق علاقة أولر.

الفصل الثاني

تابع الكلفة في المنشأة

في التحليل الاقتصادي يحتل مفهوم الكلفة مكاناً مهماً لأن كلفة الإنتاج تعدّ بحق، العامل الرئيس الذي يكمن وراءه قدرة المنشأة على عرض إنتاجها في السوق، إذ إن عرض أي سلعة في السوق يحتاج إلى استخدام عوامل الإنتاج الأمر الذي يتطلب دفع سعر معين مقابل الحصول على عوامل الإنتاج هذه، أضف إلى ذلك أن كمية الإنتاج التي ترغب المنشأة بعرضها تتوقف على كلفة عوامل الإنتاج اللازمة لإنتاج هذه الكمية من جهة، وعلى الأسعار التي تحصل عليها المنشأة نتيجة لبيع إنتاجها من جهة أخرى.

اقتصادياً نستطيع القول بأن الكلفة هي المبالغ التي يجب أن يتلقاها أصحاب عوامل الإنتاج كي يستمروا في عرض خدماتهم أو مواردهم في السوق بغية استعمالها في عملية الإنتاج. إذاً التعريف الاقتصادي للكلفة هو استخدام عامل إنتاج ما لإنتاج سلعة معينة مقابل الامتناع عن استخدامه لإنتاج سلعة أخرى، أي أن الكلفة الحقيقية (أو ما يسمى بكلفة الفرصة البديلة) لإنتاج سلعة ما، هي عدد الوحدات من سلعة أخرى كان يمكن إنتاجها باستخدام نفس الكمية من عوامل الإنتاج المستخدمة لإنتاج وحدة واحدة من السلعة الأولى، وبالتالي إذا افترضنا أن جميع الموارد المتاحة مستخدمة في عملية الإنتاج (أي توصلنا إلى الاستخدام الكامل للموارد المتاحة) فإن إنتاج كمية أكبر من السلع الاستهلاكية لابد وأن يخفض من عملية إنتاج السلع الإنتاجية.

ومن الضروري بمكان أن نفرق بين المبالغ النقدية التي تدفعها المنشأة إلى أصحاب عوامل الإنتاج (كتكاليف نقدية)، والتكاليف غير النقدية والتي تتعلق بالموارد التي تملكها المنشأة.

باختصار عندما نتكلم عن الكلفة فهي تشمل جميع المبالغ الفعلية والمبالغ المقدرة الناجمة عن عملية إنتاج السلع والخدمات.

عند دراستنا لتكاليف الإنتاج في المنشأة يجب أن نفرق بين مدد التحليل، فالنظر إلى كلفة الإنتاج دون الأخذ في الحسبان عامل الزمن يؤدي إلى نتائج مغايرة تماماً لتلك التي نصل إليها فيما لو أخذنا عامل الزمن في الحسبان في عملية التحليل الاقتصادي. وعلى ذلك يمكن أن نقسم دراستنا للكلفة بحسب الزمن إلى قسمين:

1) على المدى الطويل

2) على المدى القصير

كما أن تابع الكلفة الكلية (لنستخدم الآن التعبير الرياضي) يمكن أن يقسم إلى قسمين أيضاً:

1. الكلفة الكلية المتغيرة، وهي التي ترتبط بمستوى الإنتاج وتتغير بتغيره.

2. الكلفة الكلية الثابتة، وهي التي لا ترتبط بمستوى الإنتاج، وإنما تكون مستقلة عنه.

على المدى الطويل يمكن تعديل عوامل الإنتاج كلها، وبذلك تكون كل التكاليف متغيرة رغم أن ذلك لا يعني أن تغير الكلفة يكون بنفس نسبة تغير مستوى الإنتاج، لأن المدى الطويل يسمح بإجراء تعديل في كل عوامل الإنتاج وذلك حسب طول مدة دورة رأس المال. بينما في الأمد القصير نبحث في كلفة الإنتاج، لأنه لم يطرأ أي تغير على كمية أو نوعية التجهيزات المستخدمة في الإنتاج، الأمر الذي يمكننا من اعتبار أن المدى القصير هو عملية رد فعال للإنتاج على المحرضات

الخارجية دون حدوث أي تغيير جوهري في بنية الإنتاج أو نوعية التجهيزات والآلات المستخدمة في العملية الإنتاجية وكمياتها.

كما هو بالنسبة لأي تابع اقتصادي فلتابع الكلفة مفهوم كلي ووسطي وهامشي.

فالكلفة الكلية على الأمد القصير هي :

الكلفة الكلية= الكلفة الكلية المتغير+ الكلفة الكلية الثابتة

أي : $TC = TVC + TFC$

أما الكلفة الكلية المتوسطة (ATC) فتنتج بقسمة طرفي تابع الكلفة الكلية على مستوى الإنتاج، وبالتالي الكلفة الكلية المتوسطة =الكلفة المتغيرة المتوسطة +الكلفة الثابتة المتوسطة.

أي $ATC = AVC + AFC$

نعلم أن تابع الإنتاج هو تابع متزايد (بفرض أنه تابع من الدرجة الثالثة) أي كلما ارتفع عدد الوحدات المستخدمة من عوامل الإنتاج في العملية الإنتاجية، كلما ارتفع مستوى الإنتاج. أما تابع الكلفة الكلية فهو تابع متزايد تماماً (بفرض أنه أيضاً تابع من الدرجة الثالثة) لا يمر بنهاية حدية، وكلما ارتفع مستوى الإنتاج ازداد مستوى الكلفة (من المعلوم أن تابع الكلفة تابع لمستوى الإنتاج)

أما تابع الكلفة الهامشية فهو تابع ينتج عن اشتقاق تابع الكلفة الكلية (TC) بالنسبة لمستوى الإنتاج، وهو تابع موجب يقع بتمامه في الربع الأول، ويمر بنهاية صغرى أي يتناقص حتى يصل إلى أدنى مستوى موجب، ثم يأخذ بالتزايد.

من الجدير بالذكر أن هنالك علاقات تقوم بين منحنيات توابع الكلفة السابقة الذكر (سوف نأتي على ذكرها فيما بعد).

لنفترض الآن بأن تابع الكلفة في الأمد القصير يأخذ الشكل الآتي:

$$C = C(x)$$

على اعتبار أن مستوى الكلفة C تابع لمستوى الإنتاج x لكننا نعلم أن $X = g(L)$ (بفرض أن مستوى الإنتاج تابع لمستوى العمل فقط على المدى القصير وأن السوق هو سوق منافسة كاملة.

L: عدد وحدات العمل المستخدمة، وبالتالي نستطيع أن نكتب تابع الكلفة $C = C[g(L)]$

العلاقة التابعية السابقة للكلفة نستطيع تمثيلها بعلاقة رياضية كما يأتي:

$$C = \bar{W} L + F$$

حيث $\bar{W}$: الأجر المتوسط لوحدة العمل

L: عدد وحدات العمل المستخدمة في الإنتاج

F: الكلفة الثابتة

إن مشتق تابع الكلفة الكلية بالنسبة للعمل هو:

$$\frac{dC}{dL} = \bar{W}$$

أما مشتق تابع الكلفة الكلية بالنسبة لمستوى الإنتاج هو:

$$\frac{dC}{dX} = \frac{dC}{dL} \cdot \frac{dL}{dX}$$

وبالتالي نستطيع أن نكتب العلاقة السابقة كالآتي:

$$MC = \bar{W} . \frac{1}{MP}$$

وكما هو واضح العلاقة السابقة تربط الكلفة الهامشية MC بالناتج الهامشي MP وفق علاقة عكسية أي: $\bar{W} = MC.MP$

وعلى اعتبار أن $\bar{W}$ ثابت، فإن أي تزايد في الناتج الهامشي سيقابله تناقص في الكلفة الهامشية والعكس بالعكس.

نستنتج مما سبق أن الكلفة الهامشية تتغير بصورة عكسية لتغير الناتج الهامشي، فإذا مر تابع الناتج الهامشي بنهاية عظمى، فإن تابع الكلفة الهامشية سيمر بنهاية صغرى.

وفي العلاقة بين الكلفة والإنتاج يمكن أن نتصور أشكالاً متعددة لتوابع الكلفة: خطية وغير خطية، وإذا عدنا إلى افتراضنا السابق المتعلق بالعلاقة الرياضية الممثلة لتابع الكلفة الكلية في الأمد القصير وقلنا بأن تابع الكلفة هو تابع من الدرجة الثالثة بالنسبة لمستوى الإنتاج، عندئذ يمكن أن نمثله بالعلاقة الآتية:

$$C(X) = \alpha X^3 + \beta X^2 + \delta X + \gamma$$

وحتى تكون هذه العلاقة ذات معنى اقتصادي في المنشأة (إذ أنه ليس كل تابع من الدرجة الثالثة يمكن أن يمثل تابع كلفة) يجب أن نضع بعض القيود على ثوابت المعادلة $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$. ذكرنا سابقاً أن الكلفة في الأمد القصير تقسم إلى قسمين ثابتة ومتغيرة وعلى ذلك فإنه حتى لو انعدم مستوى الإنتاج (أي توقف المنشأة عن الإنتاج) فإن هنالك كلفة ثابتة تتمثل في المبالغ التي تدفعها المنشأة بصرف النظر عن كمية الإنتاج وهي المصروفات العامة عادة (إنارة، تأمين، إيجار، حراس.....الخ) وهذه المصروفات إذاً تبقى ثابتة مهما كانت الكمية المنتجة (مستوى الإنتاج). وعلى ذلك لو افترضنا أن $X = 0$ (لا يوجد إنتاج) يكون:

$$C(0) = \alpha(0)^3 + \beta(0)^2 + \delta(0) + \gamma$$

وبالتالي $\gamma \rangle 0$ وهو القيد الأول.

بما أن تابع الكلفة الكلية من الدرجة الثالثة، وهو متزايد تماماً، فإن تابع الكلفة الهامشية سيكون من الدرجة الثانية، وهو موجب دوماً وذو نهاية حدية صغرى.

لأننا كنا قد بينا أن علاقة تابع الكلفة الهامشية بالناتج الهامشي هي علاقة عكسية وبما أن تابع الناتج الهامشي هو من الدرجة الثانية (على افتراض أن تابع النات ج

الكلي من الدرجة الثالثة) وذا نهاية حدية عظمى، فإن تابع الكلفة الهامشية هو من الدرجة الثانية وذا نهاية حدية صغرى أي إن مشتقه الثاني موجب أي:

$$MC = 3\alpha x^2 + 2\beta x + \delta$$

$$(MC)' = 6\alpha x + 2\beta$$

$$(MC)' = 0 \Rightarrow 6\alpha x + 2\beta = 0 \Rightarrow 6\alpha x = -2\beta \Rightarrow x = \frac{-\beta}{3\alpha}$$

وحتى يكون لتابع الكلفة الهامشية نهاية حدية صغرى فإن من الضروري أن يكون $(MC)'' \rangle 0$، ومما سبق نجد أن $(MC)'' = 6\alpha \rangle 0$ وبالتالي يجب أن $\alpha \rangle 0$ حتى تصح العلاقة السابقة وهو القيد الثاني.

الآن لو عوضنا مستوى الناتج الذي يجعل تابع الكلفة الهامشية في نهايته الصغرى بتابع الكلفة الهامشية يكون:

$$MC = 3\alpha\left(\frac{-\beta}{3\alpha}\right)^2 + 2\beta\left(\frac{-\beta}{3\alpha}\right) + \delta$$

$$MC = \frac{\beta^2}{3\alpha} - \frac{2\beta^2}{3\alpha} + \delta \Rightarrow MC = \frac{-\beta^2}{3\alpha} + \delta$$

$$\Rightarrow MC = \frac{3\alpha\delta - \beta^2}{3\alpha}$$

وبما أن الكلفة الهامشية الصغرى هي مقدار موجب يدفعه المشروع عند أدنى مستوى من مستويات الإنتاج لذلك يجب أن يكون: $3\alpha\delta - \beta^2 \rangle 0$

أو $3\alpha\delta \rangle \beta^2$ وهو القيد الثالث.

وذلك لأن $\alpha \rangle 0$ كما مر سابقاً و $\beta^2 \rangle 0$ لذلك بالضرورة يكون $\delta \rangle 0$ وهو القيد الرابع. والذي يمكن أن نستنتجه بطريقة أخرى.

بما أن MC تابع من الدرجة الثانية وموجب دوماً حتى عندما $X = 0$ فإنه

$$MC = 3\alpha(0) + 2\beta(0) + \delta \rangle 0 \Rightarrow \delta \rangle 0$$

سابقاً رأينا أن $X = \frac{-\beta}{3\alpha}$ وبما أن X هي كمية منتجة فإنها حتماً موجبة لذلك يجب أن يكون $\frac{-\beta}{3\alpha} \rangle 0$ ، وبما أن $\alpha \rangle 0$ فإن $\beta \langle 0$ حتماً وهو القيد الخامس وبهذا نكون قد حددنا القيود المفروضة على تابع من الدرجة الثالثة حتى يمثل تابع كلفة ذا معنى اقتصادي.

لندرس الآن بيانياً مختلف منحنيات الكلفة.

$(AFC),(AVC),(MC),(ATC),(TC)$

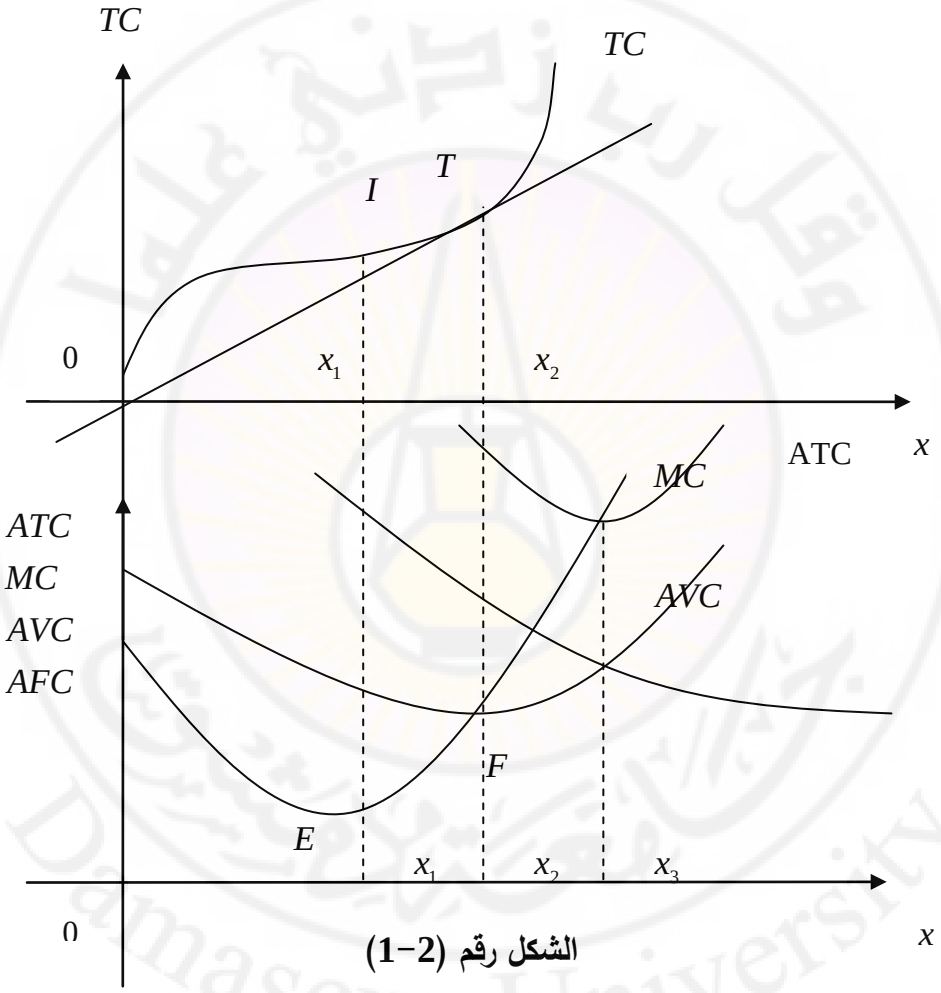
يمثل المحور القائم في الشكل البياني مختلف أنواع الكلفة، بينما المحور الأفقي يمثل الكمية المنتجة X ، نلاحظ بأن منحنى الكلفة الكلية (TC) هو منحنى متزايد يمر بنقطة انعطاف تقسمة إلى قسمين:

القسم الأول: يتزايد تابع (TC) بمعدل متناقص وذلك حتى مستوى الإنتاج (X)، حيث يمر بنقطة (I) من بعدها يدخل في القسم الثاني، حيث يتزايد بمعدل متزايد (وذلك بتأثير قانون المردود غير المتناسب) أي إنه من (0) وحتى مستوى الإنتاج (X_1)يكون من مصلحة المنشأة زيادة مستوى الإنتاج مادامت الكلفة الكلية تزداد بمعدل متناقص، والعكس هو الصحيح فيما لو تجاوز الإنتاج مستوى X_1 (على المحور X).

إن كلاً من المنحنيات $(AVC),(ATC),(MC)$ تأخذ شكل الحرف (U) على اعتبار أن كلاً منهم تابع من الدرجة الثانية يمر بنهاية صغرى كما أسلفنا سابقاً.

النقطة الدنيا (F)من تابع الكلفة الكلية الوسطية ATC ، تقابل النقطة (T) وهي نقطة التماس بين المستقيم (OT) المار من المركز والمنحنى (TC). إن ميل منحنى الكلفة الكلية (TC)يساوي إلى ميل المستقيم(OT)عند نقطة التماس T.

تقابل النقطة الدنيا (E) من منحنى الكلفة الهامشية (MC)النقطة (I) من منحنى الكلفة الكلية (TC) لأن تابع (MC)هو مشتق تابع (TC) وإن نقطة الانعطاف (I)في التابع (TC) تمثل النهاية الحدية الصغرى في المشتق (MC).



الشكل رقم (2-1)

لندرس الآن العلاقة بين الكلفة الكلية المتوسطة (ATC)، والكلفة الهامشية (MC):كما هو واضح في الشكل البياني يتقاطع التابعان $(ATC),(MC)$في النقطة التي يتساويان فيها، ومن الشكل البياني نجد أن نقطة التقاطع تكون في

النهاية الحدية الصغرى (F) للتابع (ATC)، ولنبرهن على تحقق المساواة في هذه النقطة :حتى يكون لتابع (ATC)نهاية حدية صغرى يجب تحقق الشرطين الأول والثاني الذي يحدد لنا مكان هذا التقاطع هل هو في القسم الصاعد للـ (MC) أم في القسم الهابط منه

$$ATC = \frac{TC}{X} = \frac{C(X)}{X}$$

$$(ATC)' = \frac{d(TC)}{dX} = \frac{C'(X)X - C(X)}{X^2}$$

$$(ATC)' = 0 \Rightarrow C'(X)X - C(X) = 0$$

$$C'(X)X = C(X) \Rightarrow C'(X) = \frac{C(X)}{X}$$

أي إن $MC = ATC$ (الكلفة المتوسطة الكلية=الكلفة الهامشية).

إن المساواة السابقة تدل على أنه عندما يمر تابع الكلفة المتوسطة الكلية بنهاية حدية يتقاطع مع تابع الكلفة الهامشية (في نقطة التعادل).

الشرط الثاني: $(ATC)'' \rangle 0$

$$(ATC)'' = \frac{\left[c'(x)x - c(x)\right]' x^2 - 2x\left[c'(x)x - c(x)\right]}{x^4} = \frac{\left[c''(x)x + c'(x) - c'(x)\right]x^2 - 2x^2c'(x) + 2xc(x)}{x^4}$$

$$= \frac{x^3c''(x) - 2x^2c'(x) + 2xc(x)}{x^4} = \frac{x^3c''(x) - 2xc(x) + 2xc(x)}{x^4} =$$

$$(ATC)'' = \frac{x^3c''(x)}{x^4} \Rightarrow (ATC)'' = \frac{c''(x)}{x} \rangle 0$$

بما أن مشتق تابع الكلفة الهامشية $MC = C'(X)$ موجب، فإن مشتقه الأول موجب أي $(MC)' = c''(x) \rangle 0$، وبما أن x مقدار موجب حتماً (كمية منتجة)، وبالتالي فإن $(ATC)'' \rangle 0$وبه يتحقق الشرط الثاني وتكون النهاية الحدية للـ (ATC) نهاية صغرى.

الآن هل التقاطع في الطرف الهابط أم الصاعد للـ (MC)?

الشرط من المرتبة الثانية حدد أن النهاية الحدية لـ (ATC) هي صغرى لأن $ATC\rangle 0$ ، وحدد أيضاً أن ميل تابع الـ (MC) هو موجب، أي إنه استبعد التقاطع في الطرف الهابط وبنفس الأسلوب يمكننا دراسة العلاقة بين الـ (AVC)والـ (MC)

من الشكل البياني نجد أيضاً أنه:

1. من المستوى X_0 حتى X_2 يكون تابع الكلفة الكلي ة الثابتة المتوسطة (AFC)متناقصاً، وتابع الكلفة المتغيرة المتوسطة (AVC) متناقصاً، ونتيجة لهذين التناقضين فإن (ATC)أيضاً متناقص.
2. بين المستويين X_3, X_2 نجد أن تابع الكلفة (AVC) متزايد، وأن (AFC)متناقص، ولكن فعالية تناقص الثاني أكبر من فعالية تناقص الأول وبذلك يكون (ATC) متناقصاً.
3. من بعد المستوى X_3 نجد أن تابع الـ (AFC) متناقص، وتابع الـ (AVC) متزايد إلا أن تزايد الـ (AVC) أكبر من تناقص (AFC) ويؤدي هذا التفاعل إلى تزايد الـ (ATC).

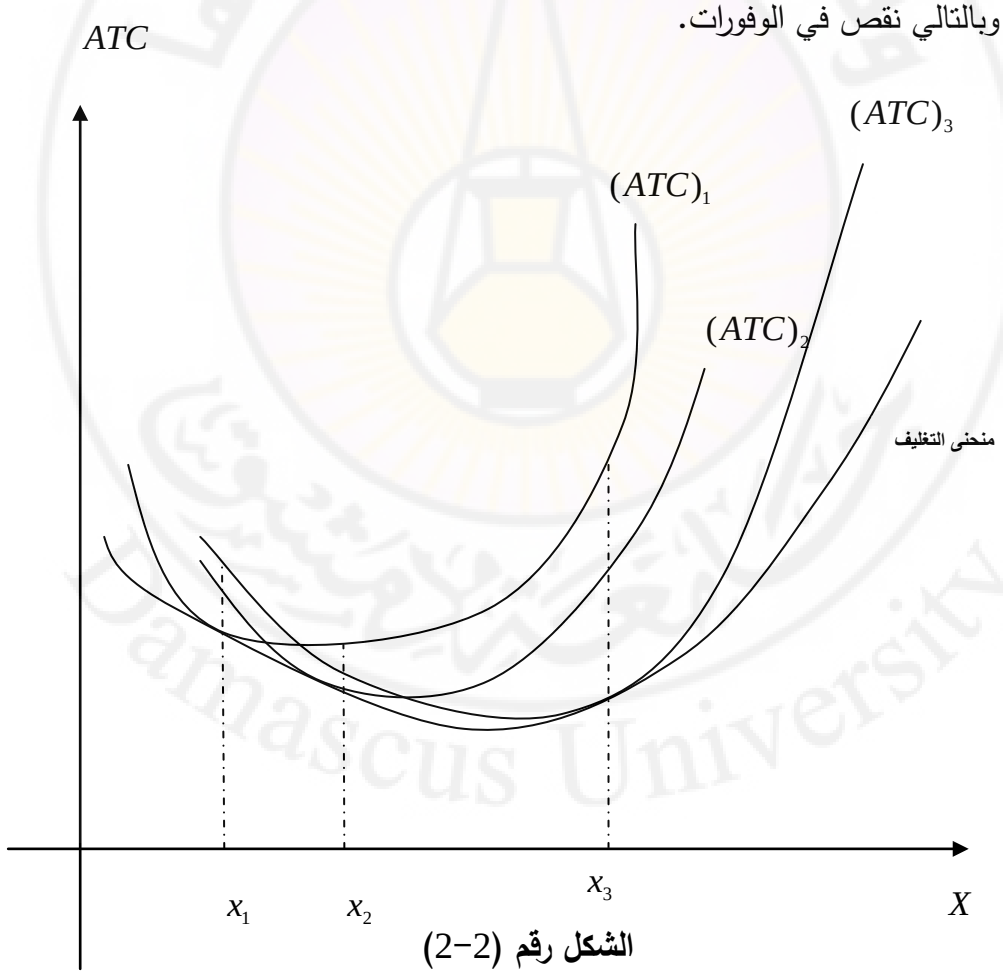
الآن إذا كانت منحنيات الكلفة في المدة قصيرة الأمد تدلنا على سلوك الكلفة الكلية بدلالة التحولات في الكمية المنتجة خلال مدة لا تستطيع فيها المنشأة تبديل تجهيزاتها وطريقة تنظيمها فإن منحنى الكلفة على المدى الطويل يدلنا على سلوك الكلفة الكلية بدلالة التحولات في حجم المنشأة، فعلى المدى الطويل لا يوجد تكاليف ثابتة، وإنما منحنيات للكلفة الوسطية تأخذ نفس الأشكال الظاهرة في المخطط البياني رقم (2-2).

إن منحنيات الكلفة الوسطية $(ATC)_1 . (ATC)_2 . (ATC)_3$ تمثل منحنيات كلفة لمدة قصيرة بالنسبة لأحجام مختلفة من المنشآت، وإن حجم المنشأة يزداد كلما

انتقلنا إلى يمين المخطط البياني فالمنحنى $(ATC)_3$ تابع لمنشأة حجمها أكبر من المنشأة التي منحناها $(ATC)_2$وهكذا.

وبإمكاننا أن نفترض هنا بأن نفس المنظم ينتقل بمنشآته من حجمها الصغير إلى حجم أكبر فأكبر، وذلك إما عن طريق توسيع منشآته الأصلية أو ضم أو دمج منشآت أخرى إليها.

يتبين لنا من النظر إلى الشكل البياني رقم (2−2) بأنه كلما انتقلنا في سلم الحجم من $(ATC)_1$إلى $(ATC)_2$ إلى $(ATC)_3$ فإننا نلاحظ زيادة في الكلفة الوسطية وبالتالي نقص في الوفورات.



الشكل رقم (2−2)

إن المنظم الذي يسيطر عل ثلاث منشآت تقابلها المنحنيات الثلاثة الأنفة الذكر عليه أن يأخذ في الحسبان المنحنى الذي يغلف ويضم هذه المنحنيات الثلاثة، وأن منحنى التغليف هذا يكون كما هو واضح من الشكل مماساً للمنحنيات الثلاثة، والتي تظهر بأن الانتقال من الحجم الأول الممثل للمنشأة الأولى إلى الحجم الثاني الممثل للمنشأة الثانية يحقق وفورات اقتصادية ناجمة عن سلم الحجم. وعلى العكس فإن الانتقال إلى الحجم الثالث الممثل للمنشأة الثالثة يحقق خسارة ناجمة عن سلم الحجم أيضاً.

اعتماداً على ما سبق لنفترض أن حجم الإنتاج كان على التوالي $X_1 \langle X_2 \langle X_3$ فعندما يكون الناتج X_1 تكون المنشأة الأولى مميزة على المنشأتين الأخريين، وذلك لأن الكلفة الوسطية فيها أخفض من الكلفة الوسطية في الأخريين. لذلك فالمنشأة الصغيرة هي عادة أكبر ربحاً بشكل نسبي من المنشآت الكبيرة بالنسبة لكميات صغيرة من الناتج.

أما إذا زاد حجم الناتج وأصبح X_2 فإننا نلاحظ بأن المنشأة الثانية تكون هي المميزة بالنسبة للأولى والثالثة. وفي الحالة الأخيرة عندما يكون حجم الإنتاج X_3 فإن المنشأة الثالثة تمثل عندئذ الإنتاجي ة الأعظمية بالنسبة للأولى والثانية لأن الكلفة الوسطية فيها تكون أخفض.

تسمح الطريقة السابقة في المقارنة للمنظم بالقيام بحسابات عقلانية واقتصادية صحيحة قبل أن يشتري أو يستأجر منشآت جديدة يضمها إلى القديمة، كما أن منحنى التغليف المماس لمنحنيات الكلفة الوسطية المختلفة للمدة القصيرة يقدم للمنظم مؤشراً لمختلف إمكانات الخيار المتعلقة بتكاليفه للمدة الطويلة.

. مثال محلول

ليكن لدينا تابع الكلفة على المدى القصير لإحدى المنشآت

$$C(X) = x^3 - 9x^2 + 30x + 25$$

المطلوب:

1. هل يحقق هذا التابع القيود المفروضة على معاملات تابع من الدرجة الثالثة حتى يمثل تابع كلفة ذا معنى اقتصادي.
2. أوجد مشتق تابع الكلفة المتغيرة الوسطية (AVC)، وبين أنه عندما يكون الـ (AVC) في نهايته الصغرى فإن $AVC = MC$
3. أوجد مشتق تابع الكلفة الكلية الوسطية (ATC)، وبين أنه عندما $X = 5$ فإن (ATC)يكون في نهايته الصغرى $ATC = MC$
4. قارن النهايات الصغرى لكل من التابعين (ATC)،(AVC)
5. برهن أن لتابع الكلفة الكلية (TC) نقطة انعطاف غير مستقرة عندما يكون (MC) في نهايته الصغرى.

. الحل

1) إن القيود الواجب فرضها على معاملات تابع من الدرجة الثالثة حتى يمثل تابع الكلفة هي:

$0 \rangle X$ نجد في المعادلة أن $0 \rangle 1 = \alpha$ محققة

$\beta < 0$ نجد في المعادلة أن $0 > -9 = \beta$ محققة

$0 \rangle \delta$ نجد أن في المعادلة $0 \rangle 30 = \delta$محققة

$0 \rangle \gamma$ نجد في المعادلة $0 \rangle 25 = \gamma$محققة

$0 \rangle 3\alpha\delta - \beta^2$ نجد في المعادلة $0 \rangle 3(1)(30) - (9)^2$محققة

إذاً القيود المفروضة على معاملات التابع محققة والتابع يمثل تابع كلفة.

2) إن تابع الكلفة المتغيرة الوسطية AVC هو

$$AVC = \frac{X^3 - 9X^2 + 30X}{X} = X^2 - 9X + 30$$

$$(AVC)' = 2X - 9$$

حتى يكون (AVC) في نهايته الصغرى يجب أن يحقق الشرطين

$$(AVC)' = 2X - 9 = 0 \qquad (1).....(AVC) = 0$$

مستوى الإنتاج الذي يحقق (AVC) نهاية حدية

$$2X = 9 \Rightarrow X = 4.5$$

$$(AVC)'' = 2 \rangle 0 \qquad (2).....(AVC)'' \rangle 0$$

إذاً عند مستوى إنتاج $X = 4.5$ يمر التابع (AVC) في نهايته الحدية الصغرى

$$MC = 3X^2 - 18X + 30$$

$$MC_{(4.5)} = 3(4.5)^2 - 18(4.5) + 30 = 9.75$$

$$(AVC)_{(4.5)} = (4.5)^2 - 9(4.5) + 30 = 9.75$$

أي إن التابعين متساويان عند النقطة التي يتقاطعان فيها، وتمتد عند مستوى $(X = 4.5)$

3)

$$ATC = \frac{TC}{X} = \frac{X^3 - 9X^2 + 30X + 25}{X}$$

$$(ATC)' = \frac{(3X^2 - 18X + 30)X - (X^3 - 9X^2 + 30X + 25)}{X^2} = \frac{3X^3 - 18X^2 + 30X - X^3 + 9X^2 - 30X - 25}{X^2}$$

$$(ATC)' = \frac{(2X^3 - 9X^2 - 25)}{X^2}$$

بالاختصار نجد:

$$(ATC)' = 0 \Rightarrow 2X^3 - 9X^2 - 25 = 0$$

حتى يكون (ATC) في نهايته الحدية عند مستوى $X=5$ يجب أن يكون

$(ATC)^{\backprime}=0$

نعوض فنجد : $(ATC)^{\backprime}=2(5)^3-9(5)^2-25=0$

أي إن الشرط الأول محقق.

وحتى تكون هذه النهاية الحدية صغرى يجب تحقق الشرط الثاني

$(ATC)^{\backprime\backprime}\rangle 0$

$$(ATC)^{\backprime\backprime}=\frac{(6X^2-18x)x-2x(2x^3-9x^2-25)}{x^4}=\frac{6x^3-18x^2-4x^4+18x^3+50x}{x^4}$$

بالاختصار نجد:

$$(ATC)^{\backprime\backprime}=\frac{-4x^4+24x^3-18x^2+50x}{x^4}$$

$$(ATC)^{\backprime\backprime}=\frac{-4x^3+24x^2-18x+50}{x^3}$$

من أجل $X=5$ نجد أن $(ATC)^{\backprime\backprime}=\frac{-4(5)^3+24(5)^2-18(5)+50}{(5)^3}$

محقق $(ATC)^{\backprime\backprime}=10.4\rangle 0$

أي إن تابع الكلفة الكلية المتوسطة (ATC) يمر بنهاية حدية صغرى عند مستوى إنتاج $X=5$

$$(ATC)_5=\frac{(5)^3-9(5)^2+30(5)+25}{5}=15$$

$$(MC)_5=3(5)^2-18(5)+30=15$$

أي إن التابعين يتقاطعان عند النهاية الحدية الصغرى لـ (ATC)

4ً) إن قيمة تابع الـ (AVC) عند نهايته الحدية الصغرى هي 9.75

وقيمة تابع الـ (ATC) عند نهايته الحدية الصغرى هي 15

أي إن $ATC \rangle AVC$

5) يمر الـ MC في نهاية حدية صغرى عندما يتحقق الشرطان:

$1)(MC)^{\setminus} = 0$

$(MC)^{\setminus} = 6x - 18 = 0 \Rightarrow x = 3$

$2)(MC)^{\setminus\setminus} \rangle 0$

$(MC)^{\setminus\setminus} = 6 \rangle 0$ محققة

أي إن تابع الـ MC يمر بنهاية حدية صغرى عند مستوى إنتاج $X = 3$

وحتى يمر تابع الكلفة الكلية (TC) بنقطة انعطاف غير مستقرة عند مستوى إنتاج $X = 3$ يجب أن تتحقق الشروط الثلاثة الآتية:

$1)MC_{(3)} \neq 0 \Rightarrow MC_{(3)} = 3(3)^2 - 18(3) + 30 = 57 \neq 0$ محقق

$2)(MC)^{\setminus}_3 = 0 \Rightarrow (MC)^{\setminus}_3 = 6(3) - 18 = 0$ محققة

$3)(MC)^{\setminus\setminus}_3 \neq 0 \Rightarrow (MC)^{\setminus\setminus}_3 = 6 \neq 0$ محققة

أي إن التابع (TC) لنقطة انعطاف غير مستقرة عند مستوى إنتاج $X = 3$ التي تجعل تابع الـ (MC) في نهايته الحدية الصغرى.

الفصل الثالث

تابع الإنتاج والقيود على سلوك المنتجين

بعد أن درسنا في الفصلين السابقين نظريتي الإنتاج والتكاليف، فإنه من المهم الآن دراسة التأثيرات المتبادلة فيما بين هاتين النظريتين من خلال الربط بين تابعيهما للوصول إلى الوضع التوازني الأمثل.

المبحث الأول

النهايات القصوى

المقصود بالنهايات القصوى هو بلوغ التابع قيمة ما تكون أكبر أو أصغر من أية قيمتين مجاورتين وقريبتين جداً منها من الجانبين.

ومن المعروف أنه عندما يبلغ تابع ما النقطة القصوى يكون مشتقه الأول مساوياً للصفر، وهو الشرط الأول واللازم لبلوغ تابع ما النهاية القصوى. وللحصول على تلك النقطة نشتق هذا التابع ونعدم المشتق.

ومن أجل تحديد ما إذا كانت هذه النهاية القصوى صغرى أم عظمى، فإنه يتطلب منا حساب المشتق الثاني، فإذا كانت قيمة هذا المشتق عند تلك النقطة سالبة، فإن هذه النهاية تكون عظمى، والعكس بالعكس أي إذا كانت قيمة المشتق الثاني موجبة فإن النهاية تكون صغرى.

تفيدنا دراسات النهايات اقتصادياً في تحديد القيم العظمى للإنتاج، والدخل، والأرباح الخ....والقيم الصغرى للتكاليف، والخسائر الخ...وغيرها من المؤشرات الاقتصادية.

طريقة لاغرانج لحساب النهايات القصوى المقيدة:

إن ما ذكر آنفاً عن النهايات القصوى الطليقة، أما النهايات المقيدة فإننا ندرسها في حالة ما، إذا أعطينا شرطاً ما مقيداً لبلوغ تابع ما من توابع الإنتاج أو التكاليف أو الربح الخ... لنهاية قصوى مرغوب ببلوغها، ولكن هذه الرغبة ليست متحققة ببساطة وإنما هناك شرط يجب أن يتحقق لكي نستطيع أن نصل إلى الهدف المرغوب في التعظيم أو التصغير.

من المعلوم أن المنتجين يسعون نحو اختيار ذلك التركيب من عناصر الإنتاج الذي يتوافق مع القيود المفروضة في عملية الإنتاج. إن هذه القيود تكون:

1) إما الحصول على أعظم إنتاج ممكن من خلال استخدام كمية محددة من عناصر الإنتاج [أي من خلال مستوى محدد وثابت من التكاليف معطى بشكل شرط (قيد) على عملية الإنتاج].

2) أو الحصول على حجم معين من الإنتاج من خلال العمل على تخفيض التكاليف إلى حدها الأدنى.

المبحث الثاني

خط التكاليف المتساوية

إن خط التكاليف المتساوية هو المحل الهندسي لمختلف التراكيب الممكنة من عناصر الإنتاج، والتي تحقق نفس المستوى المحدد من التكاليف الإجمالية.

فإذا فرضنا أن المستوى الكلي الثابت للتكاليف يحسب بالمعادلة: [1]

$$C = P_K K + P_L L \qquad (3-1)$$

حيث إن L,K هي عناصر الإنتاج رأس المال و العمل وأن P_K و P_L هي أسعار عناصر الإنتاج K و L.

من خلال العلاقة (3-1) نستطيع أن نحدد قيمة أحد عناصر الإنتاج بدلالة الآخر بافتراض أن التكاليف الكلية ثابتة عند مستوى محدد أي:

$$\overline{C} = P_K K + P_L L$$

$$P_K K = \overline{C} - P_L L$$

$$\Rightarrow K = \frac{\overline{C}}{P_K} - \frac{P_L}{P_K} L \qquad (3-2)$$

وهذه المعادلة (3-2) ندعوها معادلة خط التكاليف المتساوية.

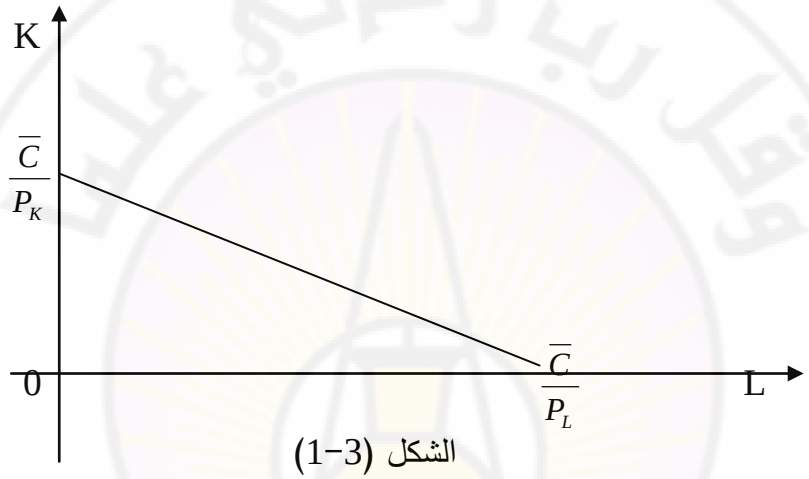
من أجل رسم خط التكاليف المتساوية نحدد النقطتين المتطرفتين على هذا الخط أي:

$$L = O \Rightarrow K = \frac{\overline{C}}{P_K}$$

$$K = O \Rightarrow \frac{\overline{C}}{P_K} = \frac{P_L}{P_K} L \Rightarrow L = \frac{\overline{C}}{P_L}$$

([1]) Dwivedi, D N: Principles of Economics, New Delhi 1995. p 226.

وبالتالي فإن باستثناء هذين التركيبين المتطرفين، واللذين يستخدمان إما العنصر K وإما العنصر L، فإن جميع التراكيب الأخرى الممكنة تقوم على مزج بنسب مختلفة بين هذين العنصرين، بحيث يتم استخدام كميات أكبر أو أقل من أحد العناصر مقابل كميات أقل أو أكبر من العنصر الآخر، بشرط أن يبقى المستوى الكلي للتكاليف ثابتاً، وهذا ما يوضحه الشكل (3-1):



الشكل (3-1)

ومن خلال معادلة التكاليف المتساوية (2-3) نستطيع أن نحسب ميل هذا الخط بالاشتقاق أي:

$$\frac{\partial K}{\partial L} = -\frac{P_L}{P_K}$$

أي إن ميل خط التكاليف المتساوية عبارة عن النسبة السالبة بين سعري عنصري الإنتاج L و K. وباعتبار أن أسعار عناصر الإنتاج ثابتة بغض النظر عن كميات هذه العناصر (بالافتراض) من جهة أولى، وباعتبار أن معادلة خط التكاليف المتساوية (2-3) هي معادلة خطية من جهة ثانية، فإننا نستنتج أن ميل خط التكاليف المتساوية يجب أن يكون ثابتاً عند جميع التراكيب المختلفة من التكاليف.

ضبط الكلفة في حالة زيادة عدد الأحجام:

كنا قد رأينا سابقاً (في الفصل الأول من القسم الأول من الباب الثاني) أن ميل منحني الإحلال يعادل:

$$\frac{\partial K}{\partial L} = -\frac{\delta_L}{\delta_K}$$

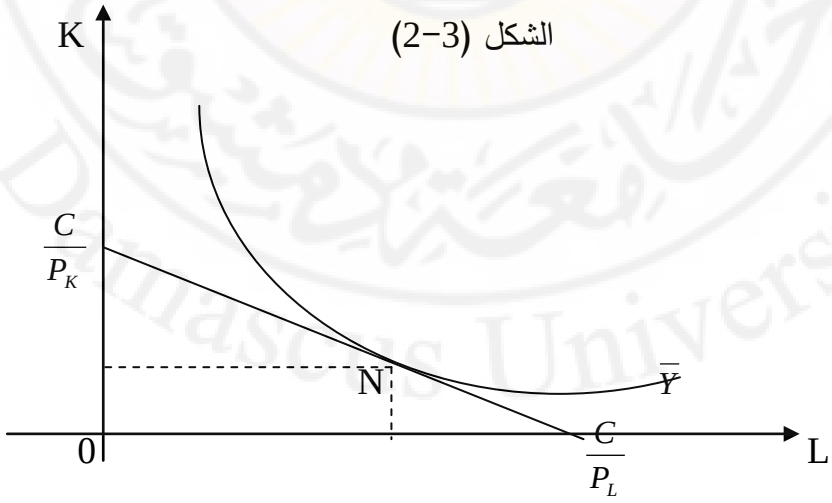
ومنه نستنتج أنه عند نقطة ما على منحني الناتج المتساوي يتم التعادل بين ميل منحني الإحلال وميل خط التكاليف المتساوية أي:

$$\frac{\partial K}{\partial L} = -\frac{\delta_L}{\delta_K} = -\frac{P_L}{P_K}$$

تجدر الملاحظة أن التركيب الأمثل من عناصر الإنتاج الذي يقع على خط التكاليف المتساوية، هو ذلك التركيب الذي يشكل نقطة مشتركة واحدة فقط بين هذا الخط ومنحني الناتج المتساوي، أي عندما يتلامس هذان المنحنيان في نقطة واحدة.

بكلام آخر إن التركيب الأمثل لعناصر الإنتاج يقع في نقطة تلامس منحني الناتج المتساوي مع خط التكاليف المتساوية كما يبدو في الشكل (3-2) عند النقطة N.

الشكل (3-2)



المبحث الثالث

تعظيم الإنتاج من خلال تكلفة ثابتة

إن تعظيم الإنتاج بقيد التكاليف الثابتة يعني أن هناك قيد اً معيناً على رغبة المنتج في بلوغ الإنتاج حده الأعظمي، وهو عدم تجاوز التكلفة لمستوى ثابت ومحدد مسبقاً من ناحية أولى، وعدم الهدر في استخدام الموارد (أي عدم بقاء موارد معطلة عن التشغيل) من جهة ثانية.

لنفرض أنه كان لدينا تابع الإنتاج الآتي:

$$Y = f(K, L) \qquad (3-1)$$

نفترض أن أسعار عناصر الإنتاج الداخلة في هذا التابع هي P_K و P_L، وبالتالي، فإن تابع التكاليف الذي نحصل عليه هو عبارة عن مجموع مضاريب كمية كل عنصر من عناصر الإنتاج بسعر هذا العنصر أي أن:

$$C = P_K K + P_L L \qquad (3-4)$$

ولجعل هذا التابع يأخذ مستوى ثابتاً نضع:

$$\overline{C} = P_K K + P_L L \qquad (3-5)$$

مع افتراضنا أن أسعار عناصر الإنتاج P_K و P_L ثابتة ولا علاقة للمنتج بتحديدها.

في هذه الحال فإن كل ما يستطيع المنتج القيام به هو تحديد التركيب الأمثل لعناصر الإنتاج، أي تحديد كمية كل من عناصر الإنتاج (K وL) الداخلة في معادلة التكاليف المحددة، وهذا يمكن القيام به بطريقة أولية عن طريق احتساب قيمة أحد عناصر الإنتاج في معادلة التكاليف بدلالة العنصر الآخر، ثم تعويض هذه القيمة في تابع الإنتاج، فنحصل على تابع إنتاج جديد مقيد بقيد معادلة التكاليف المحددة.

ولكن من الواضح أن هذه الطريقة الأولية يصعب استخدامها عندما يتجاوز عدد عناصر الإنتاج (المتغيرات في تابع الإنتاج) الاثنين. ولذلك نلجأ إلى طريقة أعم، وهي المعروفة بطريقة لاغرانج، التي تتلخص بالخطوات الآتية:

1) تحويل قيد المسألة (وهو قيمة التكاليف المحددة) إلى تابع ضمني وذلك بنقل جميع حدود هذا القيد إلى طرف واحد يساوي الصفر أي:

$$\overline{C} - P_K K - P_L L = 0$$

2) ضرب هذا التابع بمعامل يختلف عن الصفر ندعوه بمضاعف لاغرانج λ.

3) نضيف التابع الضمني المضروب بمضاعف لاغرانج إلى تابع الإنتاج الأصلي، فنحصل على تابع إنتاج جديد يكافئ التابع الأصلي ومقيد بقيد معادلة التكاليف أي:

$$Z = f(K,L) + \lambda(\overline{C} - P_K K - P_L L) \qquad (3-6)$$

و لكي يكون لتابع الإنتاج (3-3) نهاية عظمى مع تحقق الشرط (3-5) في نفس الوقت، فإنه يجب أن يكون لتابع الإنتاج الجديد (3-6) مشتقات جزئية من المرتبة الأولى والثانية، أي إن هناك نوعين من الشروط: شروط لازمة وشروط كافية:

<u>الشروط اللازمة:</u>

وتتحقق عند قيامنا بحساب المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى وإعدام هذه المشتقات، وحساب القيم التوازنية لتابع الإنتاج الجديد المقيد بقيد التكاليف أي:

$$\frac{\partial Z}{\partial K} = F`_K - P_K \lambda = 0 \qquad [1]$$

$$\frac{\partial Z}{\partial L} = F`_L - P_L\lambda = 0 \qquad [2]$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \lambda} = \overline{C} - P_K K - P_L L = 0 \qquad [3]$$

من المعادلتين[1] و[2] نستطيع أن نستخرج شرط توازن المنتج أي:

$$\lambda = \frac{F`_K}{P_K}$$

$$\lambda = \frac{F`_K}{P_L}$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{F`_K}{P_K} = \frac{F`_L}{P_L} \qquad (3-7)$$

والذي يعني أن توازن المنتج يتحقق عندما تتعادل الإنتاجيات الحدية لكل عناصر الإنتاج منسوبة إلى أسعارها من جهة أولى ومع مضاعف لاغرانج، الذي يقيس لنا أثر القيد المفروض على القيمة القصوى لتابع الإنتاج، أي ما يدعى بالإنتاجية الحدية لوحدة النقود المنفقة على عناصر الإنتاج، من جهة ثانية.

ويمكننا القول بصورة عامة إن القيمة المثلى لمضروب لاغرانج تمثل حجم التغير الذي يطرأ على القيمة القصوى لتابع الإنتاج عندما يتغير قيد التكاليف بمقدار وحدة نقدية واحدة.

الآن لتحديد حجم عناصر الإنتاج المطلوب لتحقيق توازن المنتج والحصول على أكبر إنتاج ممكن من خلال قيمة ثابتة للتكاليف، فإننا نحسب قيمة أحد العناصر K أو L بدلالة الآخر من خلال شرط التوازن، ومن ثم نعوض هذه القيمة في معادلة التكاليف المحددة فنحصل على الكميات التوازنية لكل من عناصر الإنتاج ولمضاعف لاغرانج، والتي تحقق شروط المسالة لجهة الشروط اللازمة (أو نقوم بحل جملة معادلات المشتقات الجزئية المعدومة آنياً باستخدام طريقة كرامر أو غيرها).

تتمة شرط سد نهر طك قتفي بـ:

للتأكد من تحقيق الشروط الكافية نقوم بالخطوات الآتية:

1.نحسب المشتقات الجزئية من المرتبة الثانية بالنسبة لعناصر الإنتاج أي:

$$Z_{11}^{``}=\frac{\partial^2 Z}{\partial K^2} \qquad Z_{12}^{``}=\frac{\partial^2 Z}{\partial K\partial L}$$

$$Z_{21}^{``}=\frac{\partial^2 Z}{\partial L\partial K} \qquad Z_{22}^{``}=\frac{\partial^2 Z}{\partial L^2}$$

2. كذلك نحسب المشتقات الجزئية من المرتبة الثانية بالنسبة لمضاعف لاغرانج أي:

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial \lambda\partial K}=-P_K \quad , \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial \lambda\partial L}=-P_L \quad , \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial \lambda^2}=0$$

3. نشكل من خلال حصولنا على هذه المشتقات الجزئية من المرتبة الثانية ما يسمى بمحدد (مُعيَّن) هيسِّيان HESSIAN على الشكل الآتي:

$$H_2=\begin{vmatrix} Z_{11}^{``} & Z_{12}^{``} & -P_K \\ Z_{21}^{``} & Z_{22}^{``} & -P_L \\ -P_K & -P_L & 0 \end{vmatrix}$$

فإذا كانت قيمة هذا المحدد موجبة أي كان $H_2 \succ 0$ فعندها تكون الشروط الكافية قد تحققت، ويكون تابع الإنتاج في نهايته العظمى عند القيم التوازنية التي حصلنا عليها من خلال الشروط اللازمة.

وإذا كان هناك محددات أخرى من مرتبات أعلى، فإن إشارات هذه المحددات يجب أن تتناوب ما بين السالب والموجب.

وهكذا بعد أن تتحقق الشروط اللازمة والكافية للتعظيم، نحسب حجم الإنتاج الأعظمي من خلال تعويض كميات عناصر الإنتاج التوازنية في تابع الإنتاج.

سعر التوازن لمعامل الإحلال التقني:

كنا سابقاً قد رأينا أن معامل الإحلال بين عناصر الإنتاج K و L يقاس بالعلاقة الآتية:

$$\Omega_{K,L} = -\frac{F_L^{`}}{F_K^{`}}$$

وبالتعويض في شرط توازن المنتج (7-3) فإن:

$$\frac{F_L^{`}}{F_K^{`}} = \frac{P_L}{P_K} \qquad \Rightarrow \Omega_{K,L} = -\frac{P_L}{P_K}$$

أي إن معامل الإحلال بين أي عنصرين من عناصر الإنتاج ثابت ويساوي بالقيمة المطلقة النسبة بين سعري هذين العنصرين.

إن ثبات قيمة معامل الإحلال هنا يفسر بشكلين: فمن جهة أولى هو عبارة عن النسبة بين سعري عنصري الإنتاج، وكنا قد افترضنا منذ البدء أن أسعار عناصر الإنتاج ثابتة بغض النظر عن الكميات المستخدمة من عناصر الإنتاج. ومن جهة ثانية فإن هذه القيمة لمعامل الإحلال قد توصلنا إليها من خلال شرط توازن المنتج الذي يعبر عن الوضع الإنتاجي الأمثل، وطبعاً فإن هذا الوضع الإنتاجي الأمثل هو وضع وحيد يتمثل بيانياً بتقاطع (تماس) منحني الإحلال مع خط التكاليف الثابتة في نقطة وحيدة، وبالتالي ففي هذه النقطة المثلى الوحيدة يوجد قيمة وحيدة لمعامل الإحلال ونسميها معامل الإحلال التقني التوازني.

المبحث الرابع

الحصول على حجم معين من الإنتاج بأقل تكلفة ممكنة

إن مسألتنا الحالية هي عكس الحالة السابقة إذ أنه لدينا الآن قيد معين على تخفيض التكلفة إلى حدها الأدنى بشرط ألا ينخفض (أو يزداد) الإنتاج عن حد مرغوب معين مسبقاً.

نفرض أنه لدينا تابع الإنتاج الآتي:

$$Y = f(K,L) \qquad (3-8)$$

مع فرض أنه هناك حجم ثابت من الإنتاج نرمز له بـ:

$$\overline{Y} = f(K,L) \qquad (3-9)$$

ولدينا تابع التكاليف الآتي:

$$C = P_K K + P_L L \qquad (3-10)$$

والمطلوب هو الوصول بتابع التكلفة هذا إلى حده الأدنى، أي تخفيض التكلفة إلى حدها الأدنى مع قيد الحفاظ على حجم معين $\overline{Y}$ من الإنتاج.

نقوم بخطوات مشابهة للحالة السابقة ونشكل تابع لاغرانج على الشكل الآتي:

$$Z = P_K K + P_L L + \lambda[\overline{Y} - F(K,L)] \qquad (3-11)$$

لكي يكون لتابع التكلفة (3-10) نهاية صغرى مع تحقق القيد (3-9) فإنه يجب أن يكون لتابع التكلفة الجديد الذي حصلنا عليه مشتقات جزئية من المرتبة الأولى والثانية. أي إنه كما في الحالة السابقة هناك شروط لازمة وشروط كافية:

آلية تحديد الشرط اللازم:

حساب المشتقات الجزئية وإعدامها:

$$\frac{\partial Z}{\partial K} = P_K - F_K^{`}\lambda = 0 \qquad [1]$$

$$\frac{\partial Z}{\partial L} = P_L - F_L^{`}\lambda = 0 \qquad [2]$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \lambda} = \overline{Y} - F(K,L) = 0 \qquad [4]$$

بحل المعادلات هذه آنياً نحصل على القيم التوازنية للمتغيرات K و L و λ.

تحديد الشرط الكافي:

نحسب المشتقات الجزئية من المرتبة الثانية ونضع محدد هيسِّيان كما هي الحال في الحالة السابقة مع فارق وحيد أساسي، وهو ضرورة كون قيمة هذا المحدد سالبة أي أن $H \prec 0$ أي أن:

$$H_2 = \begin{vmatrix} Z_{11}^{``} & Z_{12}^{``} & -F_K^{`} \\ Z_{21}^{``} & Z_{22}^{``} & -F_L^{`} \\ -F_K^{`} & -F_L^{`} & 0 \end{vmatrix} \prec 0$$

وكذلك فإنه يجب أن تكون قيم جميع المحددات (إذا وجدت محددات من المرتبة الثالثة والرابعة الخ...) الأخرى سالبة.

المبحث الخامس

تعميم مسألة النهايات القصوى المقيدة

إن تحليلنا السابق في التعظيم والتصغير اقتصر على بيان حالة مبسطة وهي افتراض أن معادلة الإنتاج قائمة على تابع لعنصرين فقط من عناصر الإنتاج من جهة أولى، وأن هناك قيداً واحداً فقط على تابع الإنتاج من جهة ثانية.

الآن يمكن أن نعمم هذا التحليل على تابع إنتاج يتضمن n عنصراً للإنتاج، مع وجود عدد m من القيود على هذا التابع وذلك على الشكل الآتي:

لدينا تابع الإنتاج الآتي:

$$Y = F(X_i) \qquad i = 1,2,....n$$

الذي نسعى إلى تعظيمه تحت قيود التكاليف الآتية:

$$C^1 = \sum_{i=1}^{n} P_i X_i$$

$$C^2 = \sum_{i=1}^{n} P_i X_i$$

$$\vdots$$

$$C^m = \sum_{i=1}^{n} P_i X_i$$

حيث إن $n \succ m$

نضيف هذه القيود بعد تحويلها إلى توابع ضمنية مضروبة بمضاريب لاغرانج إلى تابع الإنتاج فنحصل على تابع لاغرانج الآتي:

$$Z = F(X_i) + \lambda^1(C^1 - \sum_{i=1}^{n} P_i X_i) + \lambda^2(C^2 - \sum_{i=1}^{n} P_i\ X_i)$$
$$+ \cdots + \lambda^m(C^m - \sum_{i=1}^{n} P_i X_i)$$

أو بصيغة مختصرة:

$$Z = F(X_i) + \sum_{j=1}^{m} \lambda^j (C^j - \sum_{i=1}^{n} P_i X_i)$$

نقوم الآن بالاشتقاق الجزئي للتابع الجديد بالنسبة لعناصر الإنتاج وإعدام هذه المشتقات (الشروط اللازمة):

$$\frac{\partial Z}{\partial X_i} = F_i^{`} - P_i\lambda^1 - P_i\lambda^2 - \cdots - P_i\lambda^m = 0$$

$$\frac{\partial Z}{\partial X_i} = F_i^{`} - \sum_{j=1}^{m} \lambda^j P_i = 0$$

وبذلك يتشكل لدينا عدد من المشتقات الجزئية عددها n معادلة مكونة من n متغير.

وكذلك نشتق تابع لاغرانج بالنسبة لـ λ^j :

$$\frac{\partial Z}{\partial \lambda^j} = \sum_{j=1}^{m} (C^j - \sum_{i=1}^{n} P_i X_i)$$

حيث إن (j = 1,2,....,m). وبذلك يتشكل لدينا عدد من المشتقات الجزئية عددها m معادلة مكونة من n متغيراً.

بالنتيجة يتكون لدينا عدد من المعادلات عددها [n + m] معادلة تتضمن عدداً من المتحولات عددها أيضاً [n + m] متحولاً. ومن ثم نقوم بحل هذه الجملة من المعادلات آنياً بإحدى الطرق الآتية:

1. طريقة المعينات (المحددات) أو قاعدة كرامر.
2. طريقة مقلوب المصفوفة.
3. طريقة تجزئة المصفوفات.
4. طريقة المصفوفة الموسعة.

وبعد أن نحصل على قيم المجاهيل نكون قد حققنا الشروط اللازمة لبلوغ التابع المقيد نهاية قصوى.

ولمعرفة ما إذا كانت هذه النهاية القصوى صغرى أم عظمى، نتأكد من الشروط الكافية من خلال الاشتقاق الجزئي من الدرجة الثانية ووضع محددات هيسِّيان من المرتبات الثانية والثالثة و...و n. وبحسب الإشارات الجبرية لهذه المحددات نقرر النهاية العظمى أو الصغرى، ففي حالة التعظيم يجب أن تتناوب إشارات المحددات مابين الموجب والسالب اعتباراً من المحدد من المرتبة الثانية، وفي حالة التصغير يجب أن تكون إشارات جميع المحددات سالبة. ويكون المحدد النوني كالآتي:

$$H_n = \begin{vmatrix} Z''_{11} & Z''_{12} & \dots & \dots & Z''_{1n} & -P_1^1 & -P_1^2 & \dots & -P_1^m \\ Z''_{21} & Z''_{22} & \dots & \dots & Z''_{2n} & -P_2^1 & -P_1^2 & \dots & -P_2^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ Z''_{n1} & Z''_{n2} & \dots & \dots & Z''_{nn} & -P_n^1 & -P_n^2 & \dots & -P_n^m \\ -P_1^1 & -P_2^1 & \dots & \dots & -P_n^1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -P_1^2 & -P_1^2 & \dots & \dots & -P_n^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -P_1^m & -P_2^m & \dots & \dots & -P_n^m & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

المبحث الخامس

تطبيقات حول الفصل الثالث

تمرين رقم 1

لدينا تابع الإنتاج الآتي: $Y = 2KL$

وإذا فرضنا أن قيد التكاليف كان: $10 = 2K + L$

المطلوب:

1. تحديد التركيب الأمثل لعناصر الإنتاج الذي يحقق تعظيم الإنتاج.
2. تحديد مستوى الإنتاج الأعظمي الذي يحقق توازن المنتج.
3. وضّح بيانياً – باستخدام منحني الناتج المتساوي ومنحني التكاليف المتساوية – التركيب الأمثل لعناصر الإنتاج الذي تم تحديده رياضياً في الطلب الأول.

الحل:

1) نحوّل قيد التكاليف إلى معادلة تابع ضمني أي:

$$10 - 2K - L = 0$$

نضرب التابع الضمني بمضاعف لاغرانج ونضيفه إلى تابع الإنتاج فنحصل على تابع إنتاج جديد مقيد بقيد التكاليف أي:

$$Z = 2KL + \lambda(10 - 2K - L)$$

نحسب المشتقات الجزئية لتابع الإنتاج الجديد بالنسبة لعنصري الإنتاج K و L وبالنسبة لمضاعف لاغرانج، ونعدم هذه المشتقات:

شرط الدرجة الأولى:

$$\frac{\partial Z}{\partial K} = 2L - 2\lambda = 0 \qquad [1]$$

$$\frac{\partial Z}{\partial L} = 2K - \lambda = 0 \qquad [2]$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \lambda} = 10 - 2K - L = 0 \qquad [3]$$

بحل هذه الجملة من المعادلات آنياً نحصل على القيم التوازنية الآتية:

$$(K, L, \lambda) = (2.5, 5, 5)$$

ولكي نتأكد من أن القيم التوازنية التي حصلنا عليها تشكل التركيب الأمثل الذي يحقق تعظيم الإنتاج، نتأكد من **شرط الدرجة الثانية** وذلك بحساب المشتقات الجزئية من المرتبة الثانية:

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial K^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial K \partial L} = 2$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial L \partial K} = 2, \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial L^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial \lambda \partial K} = -2, \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial \lambda \partial L} = -1, \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial \lambda^2} = 0$$

نضع هذه القيم بشكل محدد هيسِّيان من المرتبة الثانية:

$$H_2 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 8$$

بما أن محدد هيسيان $H_2 > 0$ أكبر من الصفر عند القيم التوازنية $(K, L, \lambda) = (2.5,5,5)$ ، فإن الإنتاج يبلغ حده الأعظمي عند هذا التركيب الأمثل لعناصر الإنتاج.

2) $Y_{\max} = 2(2.5)(5) = 25$ وحدة سلعية

وهو حجم الإنتاج الأعظمي.

3) $Y = 2KL$

معادلة منحني الإحلال: $\Rightarrow K = \frac{Y}{2L}$

$$K = \frac{25}{2L}$$

بتعويض عدة قيم افتراضية لأحد المتحولات في معادلة منحني الإحلال نستطيع رسم منحني الإحلال (منحني الناتج المتساوي):

$$(L, K) = (5,2.5)$$

$$(L, K) = (10,1.25)$$

$$(L, K) = (2.5,5)$$

ومن خلال معادلة التكاليف نرسم منحني التكاليف المتساوية:

$$10 = 2K + L$$

$$K = \frac{C}{P_K} = \frac{10}{2} = 5$$

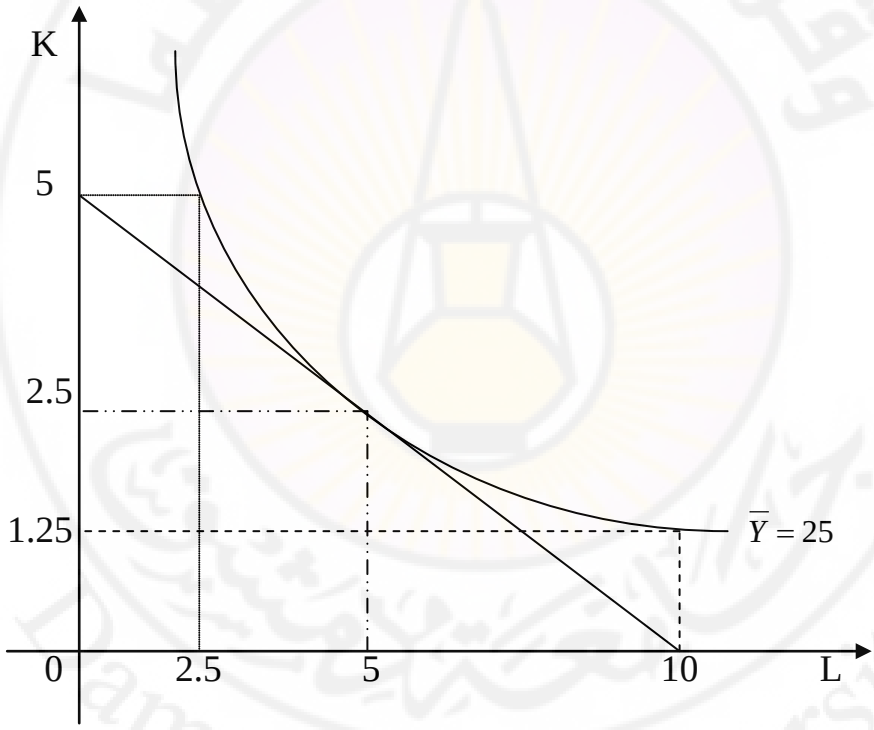
$$L = \frac{C}{P_L} = \frac{10}{1} = 10$$

وعلى ذلك فإن النقطتين $(K, L) = (5,10)$ تمثلان النقطتين المتطرفتين على خط التكاليف المتساوية ويكون ميل هذا الخط:

$$\frac{\partial K}{\partial L} = -\frac{P_L}{P_K} = -\frac{1}{2}$$

ويكون ميل منحني الناتج المتساوي عند نقطة التركيب الأمثل:

$$K` = \frac{-2(25)}{4L^2} = -\frac{12.5}{L^2} = -\frac{1}{2}$$



نلاحظ أن التركيب الأمثل من عناصر الإنتاج $(K, L) = (2.5,5)$ الذي يقع عند نقطة تلامس منحني الناتج المتساوي مع منحني التكاليف المتساوية هو نفسه التركيب الأمثل الذي حصلنا عليه رياضياً بطريقة لاغرانج.

تمرين في مقرر 2

لدينا تابع الإنتاج الآتي: $Y = XL + 2X$

وليكن لدينا القيد التالي المعبر عن مستوى محدد من التكاليف:

$$30 = 2X + L$$

المطلوب ا:

تحديد التركيب الأمثل من عناصر الإنتاج، والتأكد من أن الإنتاج يبلغ حده الأعظمي عند هذا التركيب، وحساب القيمة العظمى للإنتاج.

الحل:

نحوِّل معادلة التكاليف إلى معادلة تابع ضمني أي:

$$30 - 2X - L = 0$$

نشكل تابع لاغرانج:

$$Z = XL + 2X + \lambda(30 - 2X - L)$$

نحسب المشتقات الجزئية ونعدمها (الشروط اللازمة)

$$\frac{\partial Z}{\partial X} = L + 2 - 2\lambda = 0 \qquad [1]$$

$$\frac{\partial Z}{\partial L} = X - \lambda = 0 \qquad [2]$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \lambda} = 30 - 2X - L = 0 \qquad [3]$$

من [1] نجد:

$$L + 2 = 2\lambda$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{L+2}{2}$$

من [2] نجد:

$$X = \lambda$$

$$\Rightarrow X = \frac{L+2}{2}$$

نعوض قيمة X في قيد التكاليف:

$$30 = 2(\frac{L+2}{2}) + L$$

$$= \frac{4L+4}{2}$$

$$\Rightarrow 60 = 4L + 4$$

$$\Rightarrow 56 = 4L \Rightarrow L = 14$$

$$\Rightarrow X = \frac{14+2}{2} = 8$$

$$\Rightarrow \lambda = X = 8$$

نحسب المشتقات الجزئية من المرتبة الثانية (الشروط الكافية):

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial X^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial X \partial L} = 1$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial L \partial X} = 1, \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial L^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial \lambda \partial X} = -2, \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial \lambda \partial L} = -1, \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial \lambda^2} = 0$$

نشكل محدد هيسِّيان من المرتبة الثانية ونحسب قيمته:

$$H_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2 + 2 = 4 > 0$$

بما أن محدد هيسيان $H_2 > 0$ أكبر من الصفر فإن تابع الإنتاج يبلغ القيمة العظمى عند التركيب (8,14)= (X,L) وهذه القيمة العظمى تكون:

$Y_{\max} = 8(14) + 2(8) = 128$ وحدة سلعية

مثال في م نقل 3

أوجد القيم التوازنية للتابع الآتي، وبرهن أن التابع يبلغ نهاية عظمى عند هذه القيم، واحسب النهاية العظمى.

$$Z = X\ Y$$

على فرض أنه لدينا القيد الآتي:

$$X + Y = 12$$

الحل:

نحسب قيمة أحد المتحولات بدلالة الآخر من الشرط:

$$Y = 12 - X$$

نعوض Y في التابع Z فنحصل على:

$$Z = X\ (\ 12 - X\ )$$

طالما أننا استفدنا مفعول الشرط المفروض، فإننا نستطيع أن نوجد القيمة القصوى الطليقة لهذا التابع، ولذلك نحسب مشتق التابع Z بالنسبة لمتحوله X ونعدم هذا المشتق:

$$\frac{\partial Z}{\partial X} = 12 - 2X = 0$$
$$\Rightarrow X = 6$$

نحسب المشتق الثاني للتابع Z

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial X^2} = -2$$

بما أن المشتق الثاني سالب دوماً فالتابع Z يأخذ قيمة عظمى عند مستوى X = 6، وهذه القيمة العظمى تساوي:

$Z_{\max} = 6(12-6) = 36$ وحدة سلعية

أما قيمة Y الموافقة لهذه القيمة العظمى فتساوي

$$Y_{\max} = 12 - 6 = 6$$

ومنه فإن الشرط $12 = 6 + 6$ محقق.

مثال في مقلى 4

لدينا تابع التكلفة وقيد الإنتاج التاليين:

$$C = 4X^2 + 3XY + 6Y^2$$

$$56 = X + Y$$

المطلوب تخفيض التكلفة إلى حدها الأدنى.

الحل: نشكل تابع لاغرانج كما يلي:

$$Z = 4X^2 + 3XY + 6Y^2 + \lambda(56 - X - Y)$$

الشروط اللازمة:

$$\frac{\partial Z}{\partial X} = 8X + 3Y - \lambda = 0 \qquad [1]$$

$$\frac{\partial Z}{\partial Y} = 3X + 12Y - \lambda = 0 \qquad [2]$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \lambda} = 56 - X - Y = 0 \qquad [3]$$

نحسب قيمة λ من [1] و [2]:

$$8X + 3Y = \lambda \qquad [4]$$

$$3X + 12Y = \lambda \qquad [5]$$

نطرح [5] من [4]:

$$5X - 9Y = 0$$

$$5X = 9Y \Rightarrow X = 1.8Y$$

نعوض في قيد المسألة:

$$56 = 1.8Y + Y = 2.8Y$$

$$\Rightarrow Y = 20 \Rightarrow X = 36$$

$$\Rightarrow \lambda = 8(36) + 3(20) = 348$$

الشروط الكافية: نشكل محدد هيسيان من خلال مشتقات المرتبة الثانية:

$$H_2 = \begin{vmatrix} 8 & 3 & -1 \\ 3 & 12 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 3 + 3 - (8 + 12) = -14 < 0$$

بما أن محدد هيسيان $H_2 < 0$ فإن التابع C يبلغ نهايته الصغرى عند قيم (X , Y) = (36 , 20) وعند القيد $36 + 20 = 56$.

وتكون هذهالقيمة الدنيا للتكلفة:

$C_{\min} = 9744$ وحدة نقدية

تمرين رقم 5

لدينا التابع والقيد الآتيان:

$$Y = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2$$

$$1 = 2X_1 + X_2 - X_3$$

المطلوب إيجاد القيمة القصوى لهذا التابع وتحديد ما إذا كانت هذه القيمة نهاية عظمى أم صغرى؟

الحل: نشكل تابع لاغرانج كما يلي:

$$Z = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + \lambda(1 - 2X_1 - X_2 + X_3)$$

الشروط اللازمة:

$$\frac{\partial Z}{\partial X_1} = 2X_1 - 2\lambda = 0 \qquad [1]$$

$$\frac{\partial Z}{\partial X_2} = 2X_2 - \lambda = 0 \qquad [2]$$

$$\frac{\partial Z}{\partial X_3} = 2X_3 + \lambda = 0 \qquad [3]$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \lambda} = 1 - 2X_1 - X_2 + X_3 = 0 \qquad [4]$$

من [1] نجد أن:

$$2X_1 = 2\lambda$$

$$\Rightarrow \lambda = X_1$$

من [2] نجد أن:

$$2X_2 = \lambda$$

$$\Rightarrow 2X_2 = X_1$$

من [3] نجد أن:

$$\lambda = -2X_3 = 2X_2$$

$$\Rightarrow -X_3 = X_2$$

نعوض في قيد المسألة:

$$1 = 2(2X_2) + X_2 + X_2$$

$$= 4X_2 + 2X_2 = 6X_2 \Rightarrow X_2 = \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow X_1 = \frac{1}{3} \Rightarrow -X_3 = X_2 \Rightarrow X_3 = -\frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{1}{3}$$

هذه القيم لـ X_1 و X_2 و X_3 تحدد النهاية القصوى للتابع المقيد، ولكي نحدد ما إذا كانت هذه النهاية القصوى صغرى أم عظمى، نحسب المشتقات الجزئية من المرتبة الثانية ونضع محددات هيسيان من المرتبات الثانية والثالثة ونحسب قيمتها:

$$H_2 = \begin{vmatrix} Z''_{11} & Z''_{12} & -P_1 \\ Z''_{21} & Z''_{22} & -P_2 \\ -P_1 & -P_2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -10 \prec 0$$

$$H_3 = \begin{vmatrix} Z_{11}^{``} & Z_{12}^{``} & Z_{13}^{``} & P_1 \\ Z_{21}^{``} & Z_{22}^{``} & Z_{23}^{``} & P_2 \\ Z_{31}^{``} & Z_{32}^{``} & Z_{33}^{``} & P_3 \\ P_1 & P_2 & P_3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$H_3 = 2\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(-2-2) + 2(-8) = -8 - 16 = -24 < 0$$

بما أن قيم جميع المحددات H_2 و H_3 أصغر من الصفر فإن التابع عند القيم التوازنية المحسوبة يبلغ نهايته الصغرى وهذه النهاية تأخذ القيمة:

$$Y_{\min} = (\frac{1}{3})^2 + (\frac{1}{6})^2 + (\frac{1}{6})^2 = \frac{1}{6}$$

الفصل الرابع
تابع الربح

سيكون الهدف من دراسة تابع الربح تعظيم الربح دون وجود قيود على ذلك. وسننطلق بداية من عدة افتراضات هي:

1. سيادة ظروف المنافسة الكاملة.
2. ثبات الأسعار. وهذا الافتراض مكمل ومرتبط بالافتراض السابق.
3. تحليل المدة الزمنية القصيرة.
4. تصنع المنشأة نوعاً واحداً فقط من المنتجات.

ومن ثم سيتم التخلي عن هذه الافتراضات بالتدريج إلى أن نتخلى عنها بالكامل عندما ننتقل إلى التحليل الديناميكي في القسم الثاني.

المبحث الأول

تعظيم الربح

في حالة عدم وجود قيود على استخدام عناصر الإنتاج

إذا افترضنا أن منشأة ما يمكنها أن تستخدم أية كمية تريد من عناصر الإنتاج، فالمسألة تكمن إذاً في تحديد الوضع الإنتاجي الذي تستطيع المنشأة من خلاله الحصول على أكبر ربح ممكن.

من المعلوم أن الربح Π يمثل الفرق بين الدخل الكلي R، والتكلفة الكلية C أي أن:

$$\Pi = R - C$$

أي يتوجب علينا أن نحدد كلاً من توابع الدخل الكلي والكلفة الكلية والربح: (1)

أولاً: تحليل الدخل الكلي (الإيراد):

من المعروف أن الدخل الكلي للمنشأة يتعلق بحجم المنتجات أي:

$$R = r(Y)$$

وبما أننا ندرس حالة المنافسة الكاملة فسنعبر عن تابع الدخل الكلي بتابع خطي يمثل قيمة المنتجات الناجمة عن ضرب سعر وحدة المنتجات P بكمية المنتجات Y. وبما أن الأسعار ثابتة فإن التابع يكون من الشكل:

$$R = PY$$

من هذه العلاقة نستطيع أن نحسب الدخل الحدي والدخل الوسطي:

---

(1) لقد درسنا تابع الكلفة الكلية في الفصل الثاني. ولذلك سنستخدم التابع الذي توصلنا إليه هناك.

1. الإيراد الحدي AR:

$$AR = \frac{R}{Y} = \frac{PY}{Y} = P$$

2. الإيراد الحدي MR:

$$MR = \frac{\partial R}{\partial Y} = P$$

ومنه نستنتج أن:

$$AR = MR = P \qquad (4-1)$$

وهذا ما يوضحه الشكل رقم (4-1)

تنبيه: تلاحظ ما يلي:

رأينا سابقاً أن كلاً من تابعي الدخل والتكاليف هما تابعان لحجم المنتجات Y أي:

$$R = r(Y)$$

$$C = c(Y)$$

وبما أن تابع الربح يمثل الفرق بين هذين التابعين، فإننا نقول أن الربح أيضاً تابع لحجم المنتجات أي:

$$\Pi = f(Y)$$

$$\Pi = R - C$$

$$\Pi = r(Y) - c(Y) \qquad (4-2)$$

ولكي يكون لتابع الربح (2−4) نهاية قصوى، فإنه يجب أن يكون مشتقه الأول مساوياً للصفر أي:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial Y} = R` - C` = 0$$

$$= MR - MC = 0$$

$$\Rightarrow MR = MC \qquad (4-3)$$

أي أن الشرط الأول واللازم لبلوغ تابع الربح نهاية قصوى يفترض تعادل الدخل الحدي مع التكلفة الحدية.

فإذا قارنا العلاقة (3−4) مع العلاقة (1−4)، فإننا نستنتج أن الشرط اللازم لبلوغ تابع الربح نهاية قصوى يتحقق عند:

$$MR = MC = AR = P \qquad (4-4)$$

وبما أننا نسعى إلى تعظيم تابع الربح فإن الشرط الكافي لتعظيم تابع الربح يتحقق عندما يكون مشتقه الثاني أصغر من الصفر أي أن:

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial Y^2} = R`` - C`` < 0 \qquad (4-5)$$

$$\Rightarrow R`` < C``$$

أي إن الشرط الكافي لتعظيم الربح يتحقق عندما يكون معدل تغير تابع التكلفة الحدية أي C`` أكبر من معدل تغير تابع الإيراد الحدي R``. وبما أن تابع الإيراد الحدي ثابت، فإن مشتقه أي R`` يساوي الصفر. وعليه نعيد كتابة العلاقة (5−4):

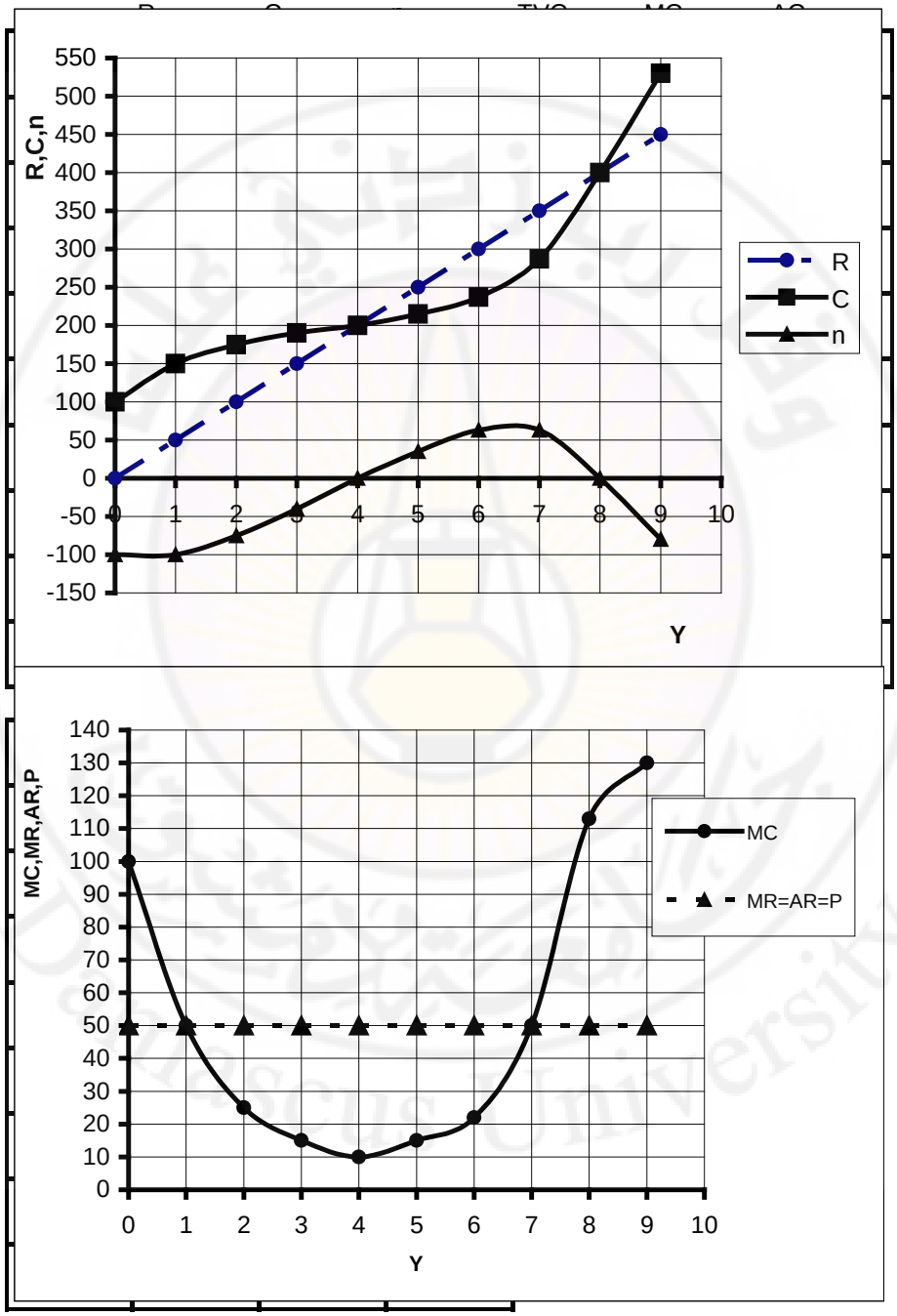
$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial Y^2} = 0 - C`` < 0$$

$$\Rightarrow C`` > 0$$

وهذه النتيجة الأخيرة تفيدنا أن الشرط الكافي لتعظيم الربح يتحقق عندما يكون تابع الكلفة الحدية متزايداً نظراً لأن مشتقه C`` أكبر من الصفر.

فإذا وضعنا في الحسبان كل هذه الشروط والقيود على كل من توابع الدخل والكلفة والربح مع هدف تعظيم الربح، فإننا نستطيع أن نضع الرسم البياني المعبر عن هذه التوابع كما في الشكل رقم (4-1).

الشكل (4-1)


R,C,n
550
500
450
400
350
300
250
200
150
100
50
0
-50
-100
-150
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
Y
R
C
n
MC,MR,AR,P
140
130
120
110
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
Y
MC
MR=AR=P

المبحث الثاني

تعظيم الربح في ظروف المنافسة الاحتكارية

إن تحليلنا في المبحث السابق لتعظيم الربح قام على أربعة افتراضات أساسية، سنتخلى الآن عن الفرضين الأول والثاني، ونبقي على الفرضين الثالث والرابع.

من المعروف أنه في ظروف المنافسة الاحتكارية فإن تغير حجم الإنتاج يؤثر على الأسعار، كما أن تغير الأسعار يؤثر على الدخل الكلي للمنتج. وبالتالي ففي ظروف المنافسة الاحتكارية لا يمكنن ا أن نعبر عن تابع الدخل الكلي بتابع خطي، وإنما سنعبر عنه بمعادلة من الدرجة الثانية من الشكل:

$$R = r(Y)$$

$$\mathrm{R} = aY - bY^2$$

وبالتالي فإن تابعي الدخل الوسطي والدخل الحدي في ظروف المنافسة الاحتكارية يأخذان الصيغة:

$$AR = \frac{R}{Y} = a - bY$$

$$MR = R` = a - 2bY$$

من أجل رسم هذين المنحنيين AR و MR نحسب مشتقيهما:

$$\frac{\partial(MR)}{\partial Y} = R`` = -2b$$

$$\frac{\partial(AR)}{\partial Y} = (\frac{R}{Y})` = -b$$

ومنه نستنتج أن ميل تابع الإيراد الحدي (R``) هو أكبر بمقدار الضعف –بالقيمة المطلقة– من ميل تابع الإيراد الوسطي $(\frac{R}{Y})`$. ولذلك فإن MR ينصف المسافة التي يحددها AR على محور الإحداثيات الأفقي، كما هو مبين في الشكل (4–2).

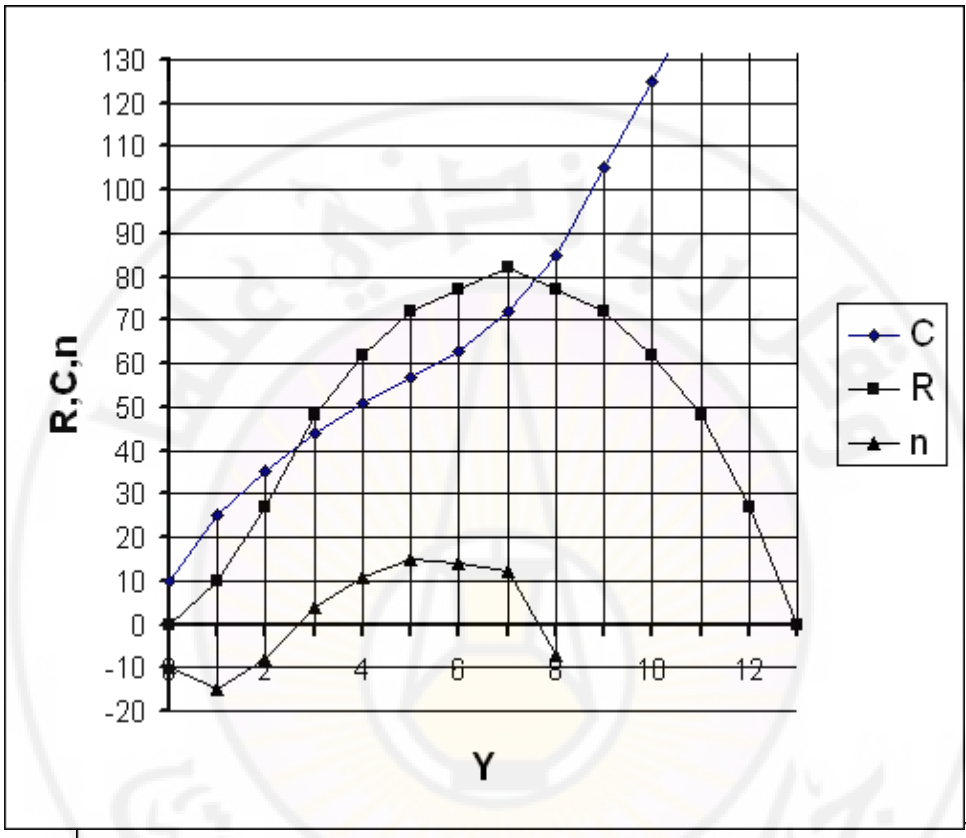
من أجل تعظيم الربح في حالة المنافسة الاحتكارية، فإننا نتبع نفس الخطوات السابقة في حالة المنافسة التامة والتي تتمثل في الشرطين اللازم والكافي:

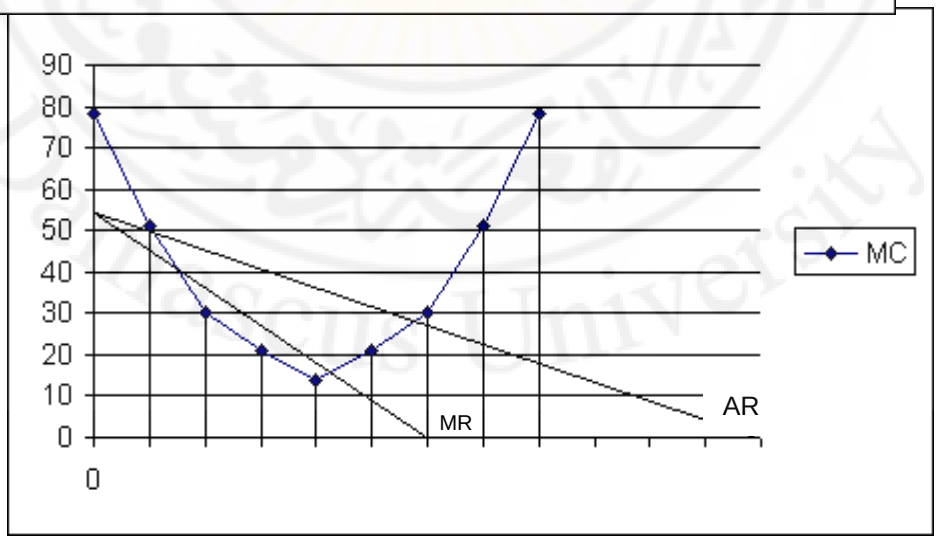
الشرط اللازم ينسحب أيضاً على حالة المنافسة الاحتكارية أي يفترض تعادل الإيراد الحدي مع التكلفة الحدية أي: $MR = MC$ ولكن لا يفترض تعادلهما مع الإيراد الوسطي ومع السعر.

أما في الشرط الكافي فإنه يفترض أيضاً أن يكون $R`` \prec C``$ مع فارق وحيد، وهو أنه بما أن R`` في حالة المنافسة الاحتكارية هو عبارة عن مقدار ثابت وسالب، فإنه ينتفي الشرط الواجب التحقق في ظل المنافسة التامة وهو $C`` \succ 0$.

أي إن الشرط الكافي في ظل المنافسة الاحتكارية يمكن أن يتحقق عند C`` > 0 أو C`` < 0 ويتحقق هذا الشرط عند R`` < C``.

الشكل (4-2)


130
120
110
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
-10
-20
R,C,n
0
2
4
6
8
10
12
Y
C
R
n


90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
0
MR
AR
MC

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

المجموعة الثالثة

تطبيقات حول الفصل الرابع

حالة لفي م نقل 1

بفرض أن المنشأة تعمل في سوق منافسة كاملة، وكان تابعا الإيراد الكلي والتكاليف الكلية كالآتي:

$$R = 18Y$$

$$C = 10 + 33Y - 9Y^2 + Y^3$$

المطلوب:

أ. أوجد مستوى الإنتاج الذي يحقق الربح الأعظمي.

ب. أوجد مستوى الربح الأعظمي والحد الأدنى من الربح.

ت. أوجد سعر الوحدة الواحدة من المنتج.

الحل:

إن دالة الربح هي:

$$\Pi = R - C$$

$$\Pi = 18Y - (10 + 33Y - 9Y^2 + Y^3)$$

$$\Pi = 18Y - 10 - 33Y + 9Y^2 - Y^3$$

$$\Pi = -Y^3 + 9Y^2 - 15Y - 10$$

الشروط اللازمة لتحقيق الربح الأعظمي هي:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial Y} = -3Y^2 + 18Y - 15 = 0$$

بحل المعادلة نحصل على القيمتين:

$$Y_1 = 1 \ , \ Y_2 = 5$$

الشروط الكافية تفترض أن يكون:

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial Y^2} = -6Y + 18 \prec 0$$

نعوض قيم $Y_1 = 1 \ , \ Y_2 = 5$ فنحصل على:

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial Y^2} = -6(1) + 18 = 12 \succ 0$$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial Y^2} = -6(5) + 18 = -12 \prec 0$$

إذاً نلاحظ أن مستوى الإنتاج الذي يحقق الربح الأعظمي هو $Y_2 = 5$، لأنه عند هذه القيمة يكون المشتق الثاني لتابع الربح سالباً. بينما نلاحظ أن مستوى الإنتاج الآخر $Y_1 = 1$، يقابل مستوى الربح الأدنى. وبتعويض هاتين القيمتين نحصل على:

$$\Pi_{max} = -(5)^3 + 9(5)^2 - 15(5) - 10 = 15 \quad \text{وحدة نقدية}$$

وهذا هو الربح الأعظمي.

$$\Pi_{min} = -(1)^3 + 9(1)^2 - 15(1) - 10 = -17 \quad \text{وحدة نقدية}$$

وهذا هو الربح الأدنى (أو أكبر خسارة ممكنة).

سعر الوحدة المنتجة:

$$R = PY$$

$$\Rightarrow P = \frac{R}{Y}$$

$$\Rightarrow P = \frac{18Y}{Y} = 18 \quad \text{وحدة نقدية}$$

محاضرة في مقرر 2

بفرض أن منشأة ما تنتج سلعتين في سوق منافسة كاملة، وكان تابع الإيراد الكلي:

$$R = P_1 Y_1 + P_2 Y_2$$

وكان تابع التكاليف الكلية

$$C = 2Y_1^2 + Y_1 Y_2 + 2Y_2^2$$

فإن التكلفة الحدية للسلعتين:

$$\frac{\partial C}{\partial Y_1} = 4Y_1 + Y_2$$

$$\frac{\partial C}{\partial Y_2} = Y_1 + 4Y_2$$

أي أن التكلفة لحدية للسلعة الأولى هي دالة ليس فقط في Y_1 ، ولكن أيضاً في Y_2 . وبالمثل فإن التكلفة الحدية للسلعة الثانية تعتمد جزئياً على حجم إنتاج السلعة الأولى كما والسلعة الثانية. وبذلك فإن السلعتين مرتبطتان فنياً من ناحية إنتاجهما.

محاضرة 1:

إيجاد:

1. دالة الربح.
2. قيم Y_1 و Y_2 اللتان معاً تحققان أقصى أرباح ممكنة عند $P_1 =$ 12 ، $P_2 = 18$.
3. مقدار الربح الأعظمي.

الحل:

إن دالة الربح هي:

$$\Pi = R - C$$

$$\Pi = P_1 Y_1 + P_2 Y_2 - 2Y_1^2 - Y_1 Y_2 - 2Y_2^2$$

الشروط اللازمة لتحقيق الربح الأعظمي هي:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial Y_1} = P_1 - 4Y_1 - Y_2 = 0 \qquad [1]$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial Y_2} = P_2 - Y_1 - 4Y_2 = 0 \qquad [2]$$

من [1] و [2] نحصل على المعادلتين:

$$4Y_1 + Y_2 = P_1$$

$$Y_1 + 4Y_2 = P_2$$

$$\Rightarrow 4Y_1 + Y_2 = 12 \Rightarrow Y_2 = 12 - 4Y_1$$

$$Y_1 + 4Y_2 = 18 \Rightarrow Y_1 = 18 - 4Y_2$$

$$\Rightarrow 4(18 - 4Y_2) + Y_2 = 12$$

$$72 - 16Y_2 + Y_2 = 12$$

$$60 = 15Y_2 \Rightarrow Y_2 = 4$$

$$Y_1 + 4(12 - 4Y_1) = 18$$

$$\Rightarrow Y_1 + 48 - 16Y_1 = 18$$

$$\Rightarrow 30 = 15Y_1 \Rightarrow Y_1 = 2$$

أي إن النقطة التي تحقق ذلك هي: $(Y_1, Y_2) = (2,4)$

نعوض هذه القيم في تابعي الإيراد الكلي والتكاليف الكلية فنحصل على:

$$R = 96,\ C = 48$$

$$\Pi = R - C = 48 \qquad \text{وحدة نقدية}$$

وهو الربح الأعظمي.

للتأكد من تحقق الشروط الكافية نحسب المشتقات من المرتبة الثانية ثم نحسب محدد هيسيان:

$$H_2 = \begin{vmatrix} -4 & -1 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = 15 > 0$$

وبالتالي فإن الشرط الكافي محقق في تعظيم الربح عند قيم $(Y_1, Y_2) = (2,4)$.

مثال توضيحي رقم 3

بفرض أن المنشأة تنتج نوعاً واحداً من السلع باستخدام عنصري إنتاج، حيث إن تابع الإنتاج في هذه المنشأة يأخذ الشكل:

$$Y = X_{11}^{\frac{1}{2}} X_{21}^{\frac{1}{3}}$$

فإذا علمنا أن أسعار عناصر الإنتاج والمنتج كانت :

$$P_{11} = 5 \, , \, P_{21} = 6 \, , \, P = 20$$

المطلوب /:

إيجاد الربح الأعظمي الذي يمكن أن تحققه هذه المنشأة عند التركيب الأمثل من عناصر الإنتاج.

الحل:

دالة الربح:

$$\Pi = R - C$$

$$= PY - (P_{11} X_{11} + P_{21} X_{21})$$

نحول تابع الإنتاج إلى تابع ضمني:

$$F(X_{11}^{\frac{1}{2}} X_{21}^{\frac{1}{3}} - Y) = 0$$

نشكل تابع لاكرانج:

$$Z = PY - [P_{11} X_{11} + P_{21} X_{21}] + \lambda F(X_{11}^{\frac{1}{2}} X_{21}^{\frac{1}{3}} - Y)$$

الشروط اللازمة لتعظيم الربح:

$$\frac{\partial Z}{\partial X_{11}} = -P_{11} + \lambda \frac{1}{2} X_{11}^{-\frac{1}{2}} X_{21}^{\frac{1}{3}} \qquad [1]$$

$$\frac{\partial Z}{\partial X_{21}} = -P_{21} + \lambda \frac{1}{3} X_{11}^{\frac{1}{2}} X_{21}^{-\frac{2}{3}} \qquad [2]$$

$$\frac{\partial Z}{\partial Y} = P - \lambda = 0 \qquad [3]$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \lambda} = F(X_{11}^{\frac{1}{2}} X_{21}^{\frac{1}{3}} - Y) = 0 \qquad [4]$$

واعتماداً على المعطيات ومن [3] نجد أن: $\lambda = 20$

ومن [1] نجد أن:

$$10 X_{11}^{-\frac{1}{2}} X_{21}^{\frac{1}{3}} = 5$$

$$X_{21}^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2 X_{11}^{-\frac{1}{2}}}$$

$$X_{21} = \frac{1}{8 X_{11}^{-1.5}}$$

$$\Rightarrow X_{21} = \frac{X_{11}^{1.5}}{8}$$

نعوض في [2]:

$$-6 + \frac{20}{3} [\frac{X_{11}^{1.5}}{8}]^{-\frac{2}{3}} X_{11}^{\frac{1}{2}} = 0$$

$$-6 + \frac{20}{3} [\frac{X_{11}^{-1}}{0.25}] X_{11}^{\frac{1}{2}} = 0$$

$$-6 + 26.667 X_{1}^{-\frac{1}{2}} = 0$$

$$\Rightarrow X_1^{-\frac{1}{2}} = 0.225 \Rightarrow X_1 = (0.225)^{-2}$$

$$\Rightarrow X_{11} = 19.753086$$

نعوض في [2]:

$$-6 + \frac{20}{3} X_{21}^{-\frac{2}{3}} 4.445 = 0$$

$$-6 + 29.62963 X_{21}^{-\frac{2}{3}} = 0$$

$$X_{21}^{-\frac{2}{3}} = 0.2025 \Rightarrow X_{21} = (0.2025)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\Rightarrow X_{21} = 10.973937$$

وبالتعويض في تابع الإنتاج نجد أن:

$Y = 9.8765431$ وحدة سلعية

وبالتعويض في تابع الربح نجد أن:

$\Pi_{\max} = 32.92181$ وحدة نقدية

وهو الربح الأعظمي.

نتحقق من الشروط الكافية:

$$H_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 Z}{\partial X_{11}^2} & \frac{\partial^2 Z}{\partial X_{11} \partial X_{21}} & F_{X_{11}}^{`} \\ \frac{\partial^2 Z}{\partial X_{21} \partial X_{11}} & \frac{\partial^2 Z}{\partial X_{21}^2} & F_{X_{21}}^{`} \\ F_{X_{11}}^{`} & F_{X_{21}}^{`} & 0 \end{vmatrix} > 0$$

وبإجراء الاشتقاقات نحصل على:

$$H_2 = \begin{vmatrix} -\frac{20}{4} X_{11}^{-1.5} X_{21}^{\frac{1}{3}} & \frac{10}{3} X_{11}^{-\frac{1}{2}} X_{21}^{-\frac{2}{3}} & \frac{1}{2} X_{11}^{-\frac{1}{2}} X_{21}^{\frac{1}{3}} \\ \frac{10}{3} X_{11}^{-\frac{1}{2}} X_{21}^{-\frac{2}{3}} & -\frac{40}{9} X_{11}^{\frac{1}{2}} X_{22}^{-1.667} & \frac{1}{3} X_{11}^{\frac{1}{2}} X_{21}^{-\frac{2}{3}} \\ \frac{1}{2} X_{11}^{-\frac{1}{2}} X_{21}^{\frac{1}{3}} & \frac{1}{3} X_{11}^{\frac{1}{2}} X_{21}^{-\frac{2}{3}} & 0 \end{vmatrix} =$$

وبالتعويض بقيم النقطة التي حصلنا عليها نجد أن:

$$H_2 = \begin{vmatrix} -0.126525 & 0.151875 & 0.25 \\ 0.151875 & -0.3644999 & 0.3 \\ 0.25 & 0.3 & 0 \end{vmatrix} = 0.056931 > 0$$

وبتشكيل وحساب H_3 نجد أن:

$$H_3 = \begin{vmatrix} -0.1265625 & 0.151875 & 0 & 0.25 \\ 0.151875 & -0.3644999 & 0 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0.25 & 0.3 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

وبأخذ العنصر (-1) من السطر الثالث والعمود الرابع نجد أن:

$$H_3 = 1 \begin{vmatrix} -0.1265625 & 0.151875 & 0 \\ 0.151875 & -0.3644999 & 0 \\ 0.25 & 0.3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$H_3 = 1[-0.046132 + 0.023066] = -0.023066 < 0$$

وبما أن $H_2 > 0$ و $H_3 < 0$ فإن الشروط الكافية متحققة والنقطة التي حصلنا عليها تقابل نهاية عظمى للربح.

الباب الثالث

الأساليب الرياضية
في
نظرية المستهلك

Damascus University

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الفصل الأول

تابع المنفعة وسلوك المستهلك

إن دراستنا في الباب السابق كانت تخص المنشأة أي جانب العرض وذلك باستخدام الأشكال المختلفة من تابع الإنتاج بنوعيه السكوني والديناميكي. الآن سننتقل إلى الجانب الآخر أي جانب الطلب وندرس سلوك المستهلكين باستخدام تابعي المنفعة السكوني والديناميكي.

ونظراً لأن عدداً من المفاهيم التي سنستخدمها في نظرية المستهلك يمكن تعريفها بنمط مشابه لتلك المفاهيم المقابلة لها في نظرية الإنتاج وقياسها بنفس الأدوات الرياضية، فإننا لا نرى دايا للتوسع في شروحها التقنية كما فعلنا في الباب الثاني، وإنما سنكتفي بالعرض المختصر لها.

المبحث الأول

المفاهيم العامة في نظرية المستهلك

أولاً: سلوك المستهلك في نظرية القيمة:

إن النمط الاستهلاكي لمستهلك ما، والذي يُعبَّر عنه بعلاقة بين الوحدات السلعية المستهلكة والمردود الذي يحصل عليه هذا المستهلك من جراء استهلاكه هذا هو ما ندعوه بتابع المنفعة.

وبذلك فإذا فرضنا أن التركيب الاستهلاكي لمستهلك ما يتشكل من سلعة واحدة فقط، فإن تابع منفعة هذا المستهلك يأخذ الصيغة:

$$U = u(X)$$

ونظراً لأن المستهلك يحتاج إلى عدد من السلع في حياته اليومية فإن تابع المنفعة بشكل عام يأخذ الصيغة:

$$U = u(X_i) \qquad (i = 1,2,\ldots,n) \qquad (1\text{-}1)$$

فإذا تم التعبير عن كل نوع من السلع الداخلة في السلة الاستهلاكية بمتحول X_i، حيث إن $(i = 1,2,\ldots,n)$ فإن المستهلك هنا تبقى لديه إمكانية تحديد الكميات المختلفة واللازمة من كل نوع من هذه السلع، وبالتالي بوضع أولويات محددة في انتقاء هذه التشكيلة وفي تحديد كمياتها، يصل المستهلك إلى تحديد التركيب الأمثل من هذه المجموعة السلعية التي تشكل تابع منفعته.

ونظراً لأن التحديد الكمي لمنفعة كل تركيب استهلاكي أمر غير ممكن، فإن المستهلك في تحديد خياراته يمكن أن يلجأ إلى ترتيب التركيبات الاستهلاكية بحيث يمكن أن يقول إن التركيب الاستهلاكي (أ) أفضل لديه من التركيب (ب)، أي إن منفعة (أ) تكون لديه أكبر من منفعة (ب)، وهذا كافٍ، إذ ليس من الضروري أن يقول إن منفعة التركيب (أ) هي أكبر من منفعة التركيب (ب) بعدد محدد من

المرات أو بمقدار معين، وإنما يكفي الترتيب التصاعدي أو التنازلي لهذه الأفضليات.

وكذلك الأمر فإذا كان هذان التركيبان سواء بالنسبة لهذا المستهلك، فإنه يكفي أن يقول إن منفعة التركيب (أ) تساوي منفعة التركيب (ب)، وليس من الضروري تحديد المقدار الكمي لمنفعة أي من التركيبين.

ولذلك فإن تابع المنفعة (1−1) يمكن أن يُعبَّر عنه بتوابع مختلفة وذلك عن طريق التغيير في الكميات المستهلكة، أي متحولات التابع مع وضع شكل محدد للعلاقة بين هذه المتحولات، ومن ثم بعد حل هذه الأشكال المختلفة من التركيبات فإننا نحصل على قيم مختلفة لهذه الأشكال، بمعنى نحصل على قيمة التابع U، وهذه القيمة ترمز إلى مستوى أو درجة المنفعة وليس إلى كميتها، وبذلك فإنها لن تملك مغزى إذا لم تقارن مع مستوى آخر، وبقيامنا بمثل هذه المقارنة يمكن أن نفضل أحد الأشكال الاستهلاكية على غيرها.

إن تابع المنفعة الترتيبي يتمتع بالقيود الآتية:[1]

1. هو تابع مستمر و متزايد بمعدل متناقص، ويقبل مشتقات من المرتبة الأولى والثانية.

2. إن تابع المنفعة ليس وحيداً بمعنى أنه طالما أن قياس المنفعة يتم تراتبياً، فإن أي تابع يسمح بتصنيف تفضيلات المستهلك وفق الترتيب نفسه، فإنه يعد تابع منفعة لهذا المستهلك. فإذا فرضنا على سبيل المثال بالنسبة لمستهلك معين أن التراكيب التالية أ و ب و ج و د من مجموعة سلع عكست على التوالي عبر تابع منفعة ترتيبي مؤشرات التفضيل التالية: 15، 12، 7، 6، فإن هذا لا يعني أكثر من أن التركيب (أ) مفضل بنظر هذا المستهلك عن (ب)، وكذلك (ب) على (ج) و(ج) على (د)، وعليه لو عُبِّر عن هذه التراكيب بتابع رياضي آخر عكس مؤشرات التفضيل التالية 58، 13، 8، 4 فإن مدلولها لجهة سلم المنفعة الكلية لا يختلف إطلاقاً عن مدلول الأرقام السابقة.

---

(1) د. موفق السيد حسن: التحليل الاقتصادي الجزئي.جامعة دمشق، 1982. ص61.

تنهيئ تك لمعبك خب ب:

نعبر عن المنفعة الحدية بالمشتق الأول لتابع المنفعة الكلية أي:

$$U` = \frac{\partial U}{\partial X_i}$$

وتعبر المنفعة الحدية لسلعة ما عن مقدار الزيادة في قيمة التابع U، أي المنفعة الكلية فيما إذا ازدادت كمية استهلاك تلك السلعة بمقدار وحدة إضافية.

ثانيا: لنهمب تئاظك لمعب:

إن مرونة تابع المنفعة – بشكل مشابه لمرونة تابع الإنتاج – هي نهاية التزايد النسبي للتابع U مقسوماً على التزايد النسبي للمتحول X أي:

$$E_{U/X_i} = \frac{\frac{\partial U}{U}}{\frac{\partial X_i}{X_i}} = \frac{\partial U}{\partial X_i}\frac{X_i}{U}$$

ثالثا: لمحيئ تك زهئ؟ هلعئ كئ لأحلاك لي مك زكظ:

لنفرض أن تابع المنفعة أخذ قيمة ما ثابتة تمثل عدداً كبيراً من التركيبات المختلفة الممكنة، والتي يشكل كل منها نفس القيمة الترتيبية من المنفعة. ولنفترض أن التركيب الاستهلاكي في تابع المنفعة يقتصر على سلعتين فقط لتبسيط التحليل من جهة ولإمكانية تعميم هذا التحليل على n سلعة من جهة ثانية أي:

$$\overline{U} = u\,(X, Y) \qquad (1-2)$$

مع افتراض أن هاتين السلعتين متبادلتان، أي أنه يمكن لإحداهما أن تحل جزئياً أو كلياً محل الأخرى.

نأخذ التفاضل الكلي لهذا التابع (2-1):

$$0 = \frac{\partial U}{\partial X}\Delta X + \frac{\partial U}{\partial Y}\Delta Y$$

$$\Rightarrow \frac{\partial U}{\partial X}\Delta X = -\frac{\partial U}{\partial Y}\Delta Y$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta Y}{\Delta X} = -\frac{\frac{\partial U}{\partial X}}{\frac{\partial U}{\partial Y}}$$

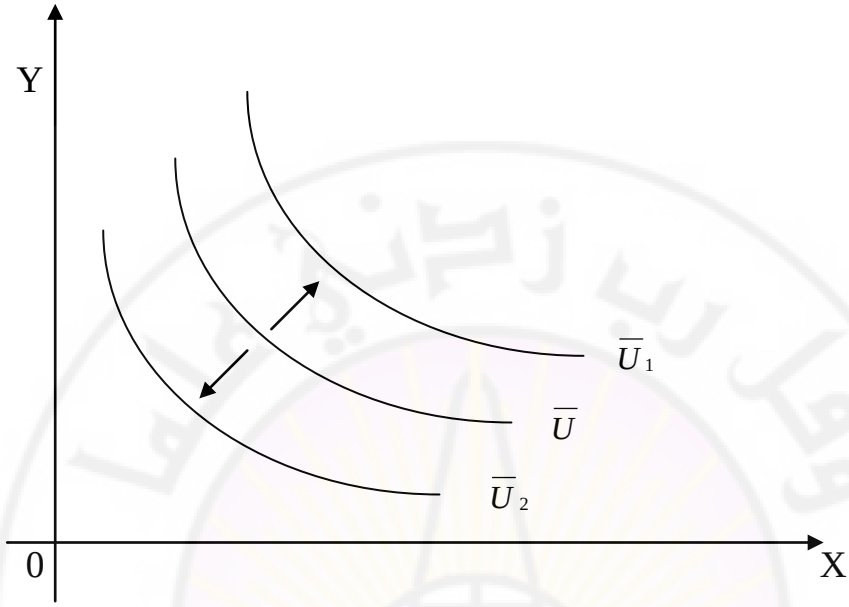
نسمي النسبة $\frac{\Delta Y}{\Delta X}$ بمعامل الإحلال بين السلعتين Y و X. وهذا المعامل – كما مر معنا في تابع الإنتاج – يحدد لنا المعدل الذي يمكن أن تحل به إحدى السلع محل الأخرى مع بقاء مستوى الإشباع لدى المستهلك – أي بقاء تابع منفعته – ثابتاً عند نفس المستوى السابق قبل القيام بعملية الإحلال بين هاتين السلعتين.

إذا حددنا قيمة أحد المتحولات في تابع المنفعة (1-2) بدلالة الآخر فإننا نحصل على العلاقة:

$$Y = f(X)$$

وبذلك نحصل على معادلة تسمى معادلة منحني الإحلال بين السلعتين Y و X. ويكون ميل المماس لهذا المنحني في أي نقطة من نقاطه معادلاً لمعامل الإحلال بين السلعتين Y و X في تلك النقطة.

وبالتالي؛ فإنه بانتقالنا على هذا المنحني نحصل على مختلف التراكيب الممكنة من السلعتين Y و X التي تعطي نفس الدرجة من الإشباع، بمعنى أننا نبقى على نفس منحني السواء (الإحلال) طالما أن قيمة $\overline{U}$ تبقى ثابتة. فإذا زادت هذه القيمة، فإننا ننتقل إلى منحنٍ آخر أعلى وإلى اليمين $\overline{U}_1$، أو بالعكس إذا انخفضت هذه القيمة أي ننتقل إلى منحنٍ أدنى وإلى اليسار $\overline{U}_2$ كما في الشكل (1-1):



الشكل (1-1)

المبحث الثاني

تابع المنفعة وقيد دخل المستهلك

تعظيم تابع المنفعة لازمة كق:

بعد أن حددنا منحنيات السواء والتي يمثل كل منها عدة تراكيب ممكنة ذات منفعة متساوية للمستهلك، فإنه يبقى على المستهلك اختيار منحني السواء الأعلى لإشباع أكبر قدر ممكن من حاجاته، ولكن هذا الاختيار ليس متوافراً ببساطة، ولكنه مشروط بقيد دخل المستهلك، أي مشروط بقيد ميزانية هذا المستهلك، أي إن المستهلك لا يأخ ذ بالحسبان فقط مجمل حاجاته وشدة كل منها والمعبر عنها بمختلف منحنيات السواء، بل يراعي أيضاً دخله المحدود وأسعار السلع. وتكون معادلة الدخل المنفق لهذا المستهلك هي:

$$R = P_X X + P_Y Y$$

وذلك بفرض أن دخل المستهلك R ينفق بمجمله على شراء السلعتين X و Y.

ولكي يصل هذا المستهلك إلى أقصى إشباع وبنفس الوقت يحدد التركيب الأمثل من السلع الداخلة في تابع منفعته (تعظيم المنفعة)، فإنه يجب تقييد تابع المنفعة بقيد الدخل والعمل على تعظيم تابع المنفعة، وهذا يتم بنفس الطريقة التي رأيناها في تعظيم المنتج لإنتاجه، أي يجب القيام بالخطوات الآتية:

أ. نحول قيد الدخل إلى تابع ضمني:

$$R - P_X X - P_Y Y = 0$$

ب. نضرب هذا التابع الضمني بمضاعف لاغرانج ونضيفه إلى تابع المنفعة، فنحصل على تابع منفعة جديد يكافئ الأصلي ويحقق قيد الدخل:

$$Z = U(X,Y) + \lambda(R - P_X X - P_Y Y)$$

ت. نشتق جزئياً بالنسبة للمتحولات X و Y و λ ونعدم المشتقات (الشروط اللازمة).

$$\frac{\partial Z}{\partial X} = U`_X - \lambda P_X = 0 \qquad [1]$$

$$\frac{\partial Z}{\partial Y} = U`_Y - \lambda P_Y = 0 \qquad [2]$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \lambda} = R - P_X X - P_Y Y = 0 \qquad [3]$$

من [1] نجد:

$$U`_X = \lambda P_X \qquad \Rightarrow \lambda = \frac{U`_X}{P_X}$$

ومن [2] نجد:

$$U`_Y = \lambda P_Y \qquad \Rightarrow \lambda = \frac{U`_Y}{P_Y}$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{U`_Y}{P_Y} = \frac{U`_X}{P_X}$$

أي إن شرط توازن المستهلك لجهة الشرط اللازم يتحقق عندما تتعادل المنفعة الحدية لكل سلعة من السلع منسوبة إلى أسعار هذه السلع من جهة أولى، ومع ضارب لاغرانج الذي يمثل المنفعة الحدية للنقود من جهة ثانية.

ث. نتحقق من الشرط الكافي وذلك بالاشتقاق الجزئي من المرتبة الثانية ونشكل معين هيسِّيان من المرتبة الثانية والمرتبات الأعلى، بحيث تتناوب الإشارات الجبرية لهذه المحددات ما بين الموجب والسالب و حتى المحدد من المرتبة n.

تلخيص 1:

لنفرض أن طلب المستهلك يتحدد بمستوى دخله وبأسعار السلع المطلوبة أي إن:

$$D_X = F(P_X, P_Y, R)$$

بافتراض أن هذا التابع متجانس من الدرجة صفر بمعنى أن زيادة كل من الدخل والأسعار بنفس المعدل لا يؤثر على كمية الطلب.

إن المستهلك يسعى إلى اختيار التركيب الاستهلاكي $U = u(X,Y)$ الذي يعظم منفعته من خلال قيد الدخل الذي يشكل ميزانيته أي:

$$R = P_X X + P_Y Y$$

بمعنى أن منفعة المستهلك تتعلق بحجم التركيب الاستهلاكي من السلع X و Y، وهذا التركيب بدوره يتعلق بحجم الدخل، فإذا ارتفع دخل المستهلك (مع فرض ثبات الأسعار) فإن طلبه على السلع X و Y سيزداد؛ وبالتالي فإن التركيب الاستهلاكي سيرتفع، وستزداد المنفعة الكلية لهذا المستهلك (بفرض عدم الإشباع).

وبما أن المنفعة تتعلق بالطلب على السلع X و Y، وأن هذا الطلب يتعلق بحجم الدخل (مع فرض ثبات الأسعار)، فإنه يمكننا أن نستنتج توابع الطلب على هاتين السلعتين من خلال معادلة الميزانية أي:

الطلب على Y :

$$Y = \frac{R}{P_Y} - \frac{P_X}{P_Y} X$$

الطلب على X :

$$X = \frac{R}{P_X} - \frac{P_Y}{P_X} Y$$

أي إن الطلب على كل سلعة هو تابع (مع فرض ثبات الأسعار) لمستوى دخل المستهلك بصورة طردية من جهة أولى، وللسلعة الأخرى بصورة عكسية من جهة ثانية. وهذا يعني أن هاتين السلعتين متبادلتان.

وبشكل معاكس إذا فرضنا أن الدخل ثابت، وأن الأسعار متغيرة فإننا نستنتج توابع الطلب من خلال شرط توازن المستهلك أي:

من المعادلتين [1] و [2] نجد أن:

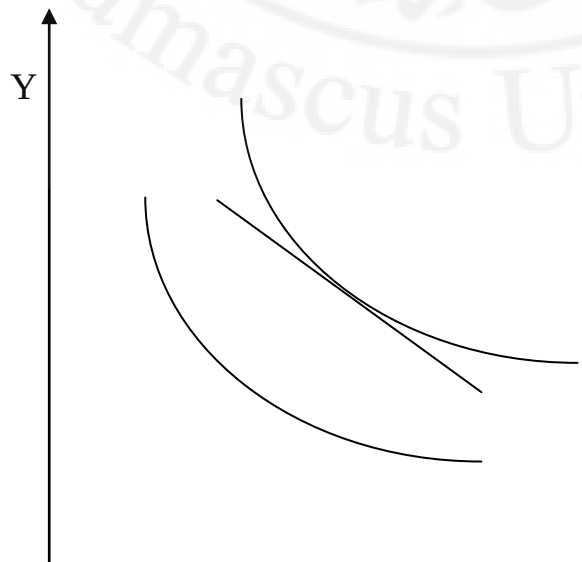
$$\frac{U_X^{`}}{U_Y^{`}} = \frac{P_X}{P_Y}$$

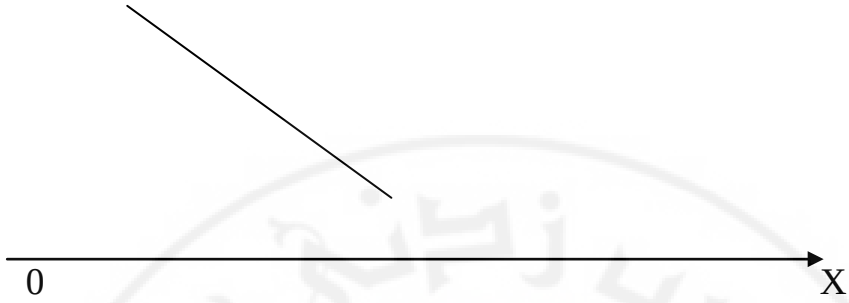
من خلال هذه الصيغة يمكننا أن نستنتج تابعي الطلب على السلعتين X و Y كتابعين لسعريهما.

وبشكل عام فإن منفعة المستهلك هي تابع لكمية الطلب على السلع الداخلة في تركيبه الاستهلاكي (بفرض عدم الإشباع)، ولذلك فسواء إذا ازداد الدخل أم انخفضت الأسعار فإن النتيجة ستكون زيادة منفعة هذا المستهلك؛ وبالتالي ارتفاع منحني السواء وارتفاع خط الميزانية، بحيث يجب أن يلامس خط الميزانية أعلى منحني سواء ممكن لهذا المستهلك كما في الشكل (1−2) والذي يبين:

1. إن كلَّ التراكيب التي تقع تحت مستقيم الميزانية تدخل في مجموعة التراكيب الممكنة، ولكنها لا تستنفذ كامل الدخل.

2. تشكل كلَّ التراكيب التي تقع فوق مستقيم الميزانية مجموعة التراكيب غير الممكنة، التي تتطلب عند نفس الأسعار دخلاً أعلى. فإذا تحقق هذا الارتفاع في الدخل، فإننا ننتقل إلى منحني سواء ومستقيم ميزانية أعلى يقعان إلى اليمين والأعلى من المنحني السابق.





الشكل (1−2)

المجموعة الثالثة

تطبيقات عامة حول الفصل الأول

تمرين رقم 1

ليكن لدينا تابع منفعة لمستهلك ما:

$$U = 2YX + X$$

ومعادلة ميزانيته:

$$402 = 4Y + 2X$$

المطلوب:

تحديد التركيب الأمثل الذي يحقق توازن هذا المستهلك ويعظم منفعته، وحساب المنفعة الحدية للنقود.

الحل:

نشكل تابع لاغرانج:

$$Z = 2YX + X + \lambda(402 - 4Y - 2X)$$

إن هذا التابع يكافئ الأصلي بالنسبة لمختلف التراكيب التي تحقق معادلة الميزانية.

نشتق التابع Z بالنسبة للمتحولات X و Y و λ ونعدم المشتقات:

$$Z_Y^{`} = 2X - 4\lambda = 0 \qquad [1]$$

$$Z_X^{`} = 2Y + 1 - 2\lambda = 0 \qquad [2]$$

$$Z_\lambda^{`} = 402 - 4Y - 2X = 0 \qquad [3]$$

من المعادلتين [1] و [2] نجد:

$$\frac{2X}{2Y+1}=2$$

$$\Rightarrow X=2Y+1$$

نعوض X بما يساويها في المعادلة [3] فنحصل على:

$$402-4Y-2(2Y+1)=0$$

$$402-4Y-4Y-2=0$$

$$400=8Y$$

$$\Rightarrow Y=50,\Rightarrow X=101 \qquad \text{وحدة سلعية}$$

المنفعة الحدية للنقود هي λ : من [1] نجد أن:

$$2X=4\lambda$$

$$\Rightarrow X=2\lambda\Rightarrow\lambda=\frac{X}{2}\Rightarrow\lambda=50.5$$

نتحقق من الشرط الكافي:

$$H_2=\begin{vmatrix}0 & 2 & -4\\ 2 & 0 & -2\\ -4 & -2 & 0\end{vmatrix}=32>0$$

بما أن $H_2\succ 0$ فإن التركيب السلعي $(Y,X)=(50,101)$ يحقق تعظيم منفعة هذا المستهلك، وبالتالي فإن هذا التركيب يحقق توازن المستهلك بالحصول على أقصى منفعة من خلال إمكاناته المادية المحددة بقيد الميزانية.

$$U_{\max}=10201 \qquad \text{وحدة منفعة}$$

تمرين في مفهوم نفقة 2

ليكن لدينا تابع منفعة لمستهلك ما:

$$U = Y^{1.5}X$$

مع العلم أن سعر الوحدة من السلعة Y هو 3 وحدات نقدية، و سعر الوحدة من السلعة X هو 4 وحدات نقدية، وأن الدخل الإجمالي لهذا المستهلك هو 100 وحدة نقدية.

المطلوب /:

1. تحديد التركيب الأمثل الذي يحقق توازن هذا المستهلك رياضياً وبيانياً.
2. وضع الصيغة الرياضية لتابعي الطلب على السلعتين X و Y بالنسبة لسعريهما.
3. حساب مرونة الطلب السعرية بفرض أن الأسعار أصبحت $(P_Y, P_X) = (6,8)$.

الحل:

(1

نضع معادلة ميزانية المستهلك:

$$100 = 3Y + 4X$$

نحول معادلة الميزانية إلى تابع ضمني:

$$100 - 3Y - 4X = 0$$

نضرب التابع الضمني بمضاعف لاغرانج ونضيفه إلى تابع المنفعة الأصلي فنحصل على تابع منفعة جديد يكافئ الأصلي ويحقق قيد الميزانية بنفس الوقت:

$$Z = Y^{1.5}X + \lambda(100 - 3Y - 4X)$$

الشرط اللازم لتعظيم منفعة المستهلك يتمثل في الاشتقاق الجزئي وإعدام هذه المشتقات:

$$Z_Y^{`} = 1.5Y^{0.5}X - 3\lambda = 0 \qquad [1]$$

$$Z_X^{`} = Y^{1.5} - 4\lambda = 0 \qquad [2]$$

$$Z_\lambda^{`} = 100 - 3Y - 4X = 0 \qquad [3]$$

من [1] و [2] نجد:

$$\frac{1.5X}{Y} = \frac{3}{4} \Rightarrow Y = 2X$$

بتعويض Y في معادلة الميزانية نحصل على:

$$100 = 10X \Rightarrow X = 10 \Rightarrow Y = 20 \qquad \text{وحدة سلعية}$$

وبالتالي فإن التركيب الأمثل من السلع الذي يحقق توازن المستهلك في تعظيم منفعته وإنفاق كامل دخله لجهة الشرط اللازم هو $(Y, X) = (20,10)$ وحدة سلعية.

نتأكد من تحقق الشرط الكافي وذلك بالاشتقاق الجزئي من المرتبة الثانية وتشكيل معين هيسيان:

$$H_2 = \begin{vmatrix} 0.75Y^{-0.5}X & 1.5Y^{0.5} & -3 \\ 1.5Y^{0.5} & 0 & -4 \\ -3 & -4 & 0 \end{vmatrix} = 134.16 > 0$$

بما أن H_2 أكبر من الصفر فإن التركيب السابق يقابل نهاية عظمى لتابع المنفعة، وتكون هذه المنفعة العظمى:

$$U_{\max} = 894.427 \qquad \text{وحدة منفعة}$$

ومن أجل تحديد التوازن بيانياً نضع معادلة منحني السواء:

$$X = \frac{U}{Y^{1.5}}$$

$Y = 10 \Rightarrow X = 28.284$

$Y = 30 \Rightarrow X = 5.443$

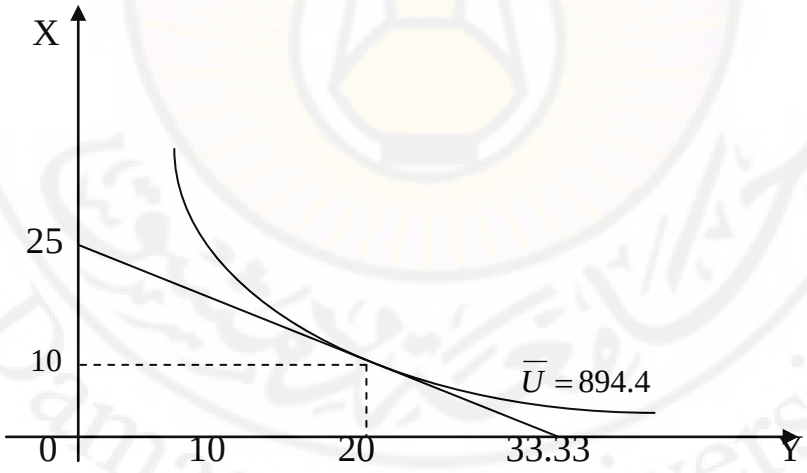
$100 = 3Y + 4X$

$4X = 100 - 3Y$

$X = 25 - \frac{3}{4}Y$

$Y = 0 \Rightarrow$ $\boxed{X = 25}$

$X = 0 \Rightarrow 25 = \frac{3}{4}Y \Rightarrow$ $\boxed{Y = 33.333}$



(2

من [1] و [2] نجد أن:

$$\frac{1.5Y^{0.5}X}{Y^{1.5}} = \frac{P_Y}{P_X}$$

$$\Rightarrow \frac{1.5X}{Y} = \frac{P_Y}{P_X}$$

تابع الطلب على السلعة X:

$$X = \frac{P_Y Y}{1.5P_X} \qquad [4]$$

تابع الطلب على السلعة Y:

$$Y = \frac{1.5XP_X}{P_Y} \qquad [5]$$

3) عندما $(P_Y, P_X) = (6,8)$ فإن:

$$100 = 6Y + 8X$$

$$Z = Y^{1.5}X + \lambda(100 - 6Y - 8X)$$

$$Z_Y^{`} = Y^{0.5}X - 6\lambda = 0 \qquad [1]$$

$$Z_X^{`} = Y^{1.5} - 8\lambda = 0 \qquad [2]$$

$$Z_\lambda^{`} = 100 - 6Y - 8X = 0 \qquad [3]$$

من [1] و [2] نجد:

$$\frac{1.5X}{Y} = \frac{6}{8} \Rightarrow Y = 2X$$

$$100 = 20X \Rightarrow X = 5 \Rightarrow Y = 10$$

نطبق قانون المرونة السعرية بالنسبة لكل من السلعتين:

$$E_{X/P_X} = \frac{\frac{\Delta X}{X}}{\frac{\Delta P_X}{P_X}} = \frac{\frac{5-10}{10}}{\frac{8-4}{4}} = \frac{-0.5}{1} = -0.5$$

$$E_{Y/P_Y} = \frac{\frac{\Delta Y}{Y}}{\frac{\Delta P_Y}{P_Y}} = \frac{\frac{10-20}{20}}{\frac{6-3}{3}} = \frac{-0.5}{1} = -0.5$$

نلاحظ أن المرونة سالبة، وهي تدل على العلاقة العكسية بين الكمية المطلوبة من السلعة وسعر تلك السلعة. وهي تعني أنه في حال ارتفع سعر السلعة بنسبة 1% فإن الكمية المطلوبة من تلك السلعة سوف تنخفض بنسبة 0.5%.

الفصل الثاني

تابع المنفعة الديناميكي

إن دراسة سلوك المستهلك في الفصل السابق كانت دراسة سكونية بمعنى أنها كانت تخص مدد زمنية محددة مع افتراض ثبات هذا السلوك خلال المدة نفسها، وبالتالي فإن تابع المنفعة السابق كان تابعاً سكونياً. في هذا الفصل سنبحث في التابع الديناميكي.

المبحث الأول

المفاهيم العامة في التحليل الديناميكي لسلوك المستهلك

أولاً: دالة المنفعة الديناميكية

نظراً لأن المنافع تختلف من مدة زمنية إلى أخرى، فإن عامل الزمن t يجب أن يدخل في تابع المنفعة لإظهار التأثير الزمني على المنافع أي:

$$U = F(X_1, X_2, ...X_n, t) \qquad (2-1)$$

غير أن إدخال الزمن في هذا التابع يثير الكثير من المشاكل التي يمكن تلخيصها بما يأتي:

1. إن الشخص يفضل عموماً الاستهلاك العاجل لأي نوع من السلع على الاستهلاك الآجل، بمعنى أنه يكون هناك منافع مختلفة لنفس السلعة بالنظر إلى المدة الزمنية التي تستهلك فيها، ولذلك فإنه تنشأ هنا مشكلة مقارنة هذه المنافع المختلفة لهذه السلعة في المدد الزمنية المختلفة.

2. إن الشخص يتغير سلوكه الاستهلاكي مع الزمن فما يعدّه اليوم كمالياً قد يصبح بعد مدة ضرورياً، وما يراه اليوم ضرورياً قد يصبح بعد مدة ذا أهمية ثانوية وذلك لتوفر بديل أنسب في الاستهلاك.

ولذلك فإن تابع المنفعة الديناميكي يمكن أن نعبر عنه بالشكل العام الآتي:

$$U = F(X_{11}, X_{21}, ..., X_{n1}; X_{12}, X_{22}, ..., X_{n2}; .....;$$

$$X_{1T}, X_{2T}, ..., X_{nT}) \qquad (2-2)$$

حيث إن X_{it} تشير إلى كمية السلع من النوع i المستهلكة في السنة t حيث أن $[(i = 1,2,...,n)(t = 1,2,....,T)]$.

ثانياً: معدل الإحلال:

بشكل مشابه لما مر معنا في نظرية المنتج، وبافتراض أن السلع الداخلة في تابع المنفعة يمكن أن يحل بعضها مع الآخر، فإن معامل الإحلال بين السلعة j في السنة t والسلعة k في السنة τ يأخذ الصيغة:

$$\frac{\Delta X_{jt}}{\mathrm{A}X_{K\tau}} = -\frac{\dfrac{\partial U}{\partial X_{K\tau}}}{\dfrac{\partial U}{\partial X_{jt}}}$$

وبشكل مشابه لما مر معنا سابقاً فإن هذا المعامل يحدد لنا المعدل الذي يمكن أن تحل به إحدى السلع محل الأخرى مع بقاء مستوى الإشباع ثابتاً.

بالمقارنة مع معامل الإحلال الذي مر معنا سابقاً فإن هذا المعامل يحدد لنا المعدل الذي يمكن أن تحل به إحدى السلع في إحدى السنوات محل سلعة أخرى في سنة مختلفة مع بقاء مستوى المنفعة على حاله؛ أي البقاء على نفس منحني السواء.

المحور الثاني

ميزانية المستهلك وتعظيم المنفعة

أولاً: تعريف ميزانية المستهلك رياضياً:

لنفرض أن المستهلك يتوقع أن يحصل على دخل معين R_t في السنة t. إن ما ينفقه المستهلك في السنة t على شراء السلع الاستهلاكية يساوي:

$$\sum_{i=1}^{n} P_{it} X_{it} \qquad (2-3)$$

حيث إن P_{it} تشير إلى السعر المتوقع لوحدة السلعة i في السنة t.

إن الفرق بين دخل المستهلك R_t وإنفاقه الاستهلاكي (2-3) يمثل ادخاره في السنة t الذي نرمز له بـ S_t. فإذا أخذنا سعر الفائدة في الحسبان فإن الادخار الإجمالي لهذا المستهلك خلال السنوات القادمة يحسب بالمعادلة:

$$S_t = R_t + S_{t-1}(1+i_{t-1}) - \sum_{i=1}^{n} P_{it} X_{it} \qquad (t = 1,2,...,T)$$

إذا فرضنا أنه في سنة الأساس لم يكن هناك أية مدخرات أي أن $S_0 = 0$ فيكون لدينا:

$$S_1 = R_1 - \sum_{i=1}^{n} P_{i1} X_{i1}$$

$$S_2 = R_2 + S_1(1+i_1) - \sum_{i=1}^{n} P_{i2} X_{i2}$$

أو بشكل آخر:

$$S_2 = (R_1 - \sum_{i=1}^{n} P_{i1} X_{i1})(1+i_1) + (R_2 - \sum_{i=1}^{n} P_{i2} X_{i2})$$

$$S_3 = (R_1 - \sum_{i=1}^{n} P_{i1} X_{i1})(1+i_1)(1+i_2) + (R_2 - \sum_{i=1}^{n} P_{i2} X_{i2})(1+i_2)$$

$$+(R_3-\sum_{i=1}^{n}P_{i3}X_{i3})$$

$$S_4=(R_1-\sum_{i=1}^{n}P_{i1}X_{i1})(1+i_1)(1+i_2)(1+i_3)+(R_2-\sum_{i=1}^{n}P_{i2}X_{i2})(1+i_2)$$

$$(1+i_3)+(R_3-\sum_{i=1}^{n}P_{i3}X_{i3})(1+i_3)+(R_4-\sum_{i=1}^{n}P_{i4}X_{i4})$$

إذاً نلاحظ أنه بهذا الشكل يتكون لدينا عدد من المتسلسلات فيما بين الحدود من الشكل $(1+i_t)$ فإذا ما وضعنا:

$$\eta_{\tau t}=(1+i_\tau)(1+i_{\tau+1})\ldots\ldots(1+i_{t-1})$$

فيكون:

$$S_t=\sum_{\tau=1}^{t}(R_\tau-\sum_{i=1}^{n}P_{i\tau}X_{i\tau})\eta_{\tau t}\qquad(t=1,2,\ldots,T)$$

لنفرض أن المستهلك يرغب ألا يكون دائناً أو مديناً في السنة الأخيرة T من المدة المدروسة، فإن هذا يعني أن S_t يجب أن يكون معدوماً:

$$S_T=\sum_{\tau=1}^{T}(R_\tau-\sum_{i=1}^{n}P_{i\tau}X_{i\tau})\eta_{\tau T}=0\qquad(2-4)$$

فإذا قسمنا الطرفين في هذه العلاقة على η_{1T} ولاحظنا أن:

$$\frac{\eta_{\tau T}}{\eta_{1T}}=\frac{(1+i_\tau)(1+i_{\tau+1})\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1+i_{T-1})}{(1+i_1)(1+i_2)\ldots.(1+i_\tau)\ldots..(1+i_{T-1})}=$$

$$=\frac{1}{(1+i_1)(1+i_2)\ldots.(1+i_{\tau-1})}=\frac{1}{\eta_{1\tau}}$$

فإننا نحصل على العلاقة:

$$\sum_{\tau=1}^{T}R_\tau\frac{1}{\eta_{1\tau}}=\sum_{\tau=1}^{T}\sum_{i=1}^{n}P_{i\tau}X_{i\tau}\frac{1}{\eta_{1\tau}}\qquad(2-5)$$

وكما نعلم، وبشكل مشابه لما اصطلحنا عليه في تابع الإنتاج الديناميكي فإن $\eta_{1\tau} = \eta^{\tau-1}$ أي:

$$\eta_{1\tau} = (1+i_1)(1+i_2).....(1+i_{\tau-1}) = \eta^{\tau-1} \qquad (2-6)$$

فإذا عوضنا (2-6) في (2-5) من جهة أولى، وأبدلنا τ بـ t فيكون:

$$\sum_{t=1}^{T} R_t \frac{1}{\eta^{t-1}} = \sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{n} P_{it} X_{it} \frac{1}{\eta^{t-1}}$$

$$\Rightarrow \sum_{t=1}^{T} R_t \eta^{1-t} = \sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{n} P_{it} X_{it} \eta^{1-t} \qquad (2-7)$$

نلاحظ أن $R_t\eta^{1-t}$ هي القيمة الحالية للدخل المتوقع R_t إذا فرضنا أنه سيتم الحصول على ذلك الدخل في بداية السنة t. بينما $P_{it}X_{it}\eta^{1-t}$ تمثل القيمة الحالية للمشتريات من السلع الاستهلاكية X_{it} إذا فرضنا أنه سيجري شراء تلك السلع في بداية السنة t أيضاً.

وهكذا نرى أن العلاقة (2-7) تشير إلى أن الشخص في سلوكه الاستهلاكي، خلال مدة زمنية طويلة نسبياً، يحاول أن يجعل القيمة الحالية لمشترياته من السلع الاستهلاكية خلال تلك المدة مساوية للقيمة الحالية لدخوله المتوقعة.

تتمة: تعظيم تابع المنفعة الذي يأخذ بعين الاعتبار خيار الادخار

يحاول المستهلك أن يحصل على أكبر منافع استهلاكية على مدار السنوات المحللة، بحيث لا يتعدى حدود ميزانيته، وذلك يتم عن طريق تعظيم تابع المنفعة الذي رأيناه في المبحث السابق (2-2) مع الشرط (2-7):

نشكل تابع لاغرانج:

$$Z = U + \lambda\sum_{t=1}^{T}(R_t - \sum_{i=1}^{n} P_{it}X_{it})\eta^{1-t}$$

الشروط اللازمة:

$$\frac{\partial Z}{\partial X_{it}} = U`_{X_{it}} - \lambda P_{it}\eta^{1-t} = 0 \qquad [1]\, i = 1,2,..,n;\ t = 1,2,..,T$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \lambda} = \sum_{t=1}^{T}(R_t - \sum_{i=1}^{n} P_{it}X_{it})\eta^{1-t} = 0 \qquad [2]$$

وبذلك نحصل على $(n*T)+1$ معادلة بـ $(n*T)+1$ مجهول. وبحل هذه الجملة من المعادلات نحصل على القيم التوازنية التي تحقق تعظيم منفعة المستهلك لجهة الشروط اللازمة أي:

من [1] نجد أن:

$$\lambda = \frac{U`_{X_{it}}}{P_{it}\eta^{1-t}}$$

ونعلم أن $\eta^0 = 1$ فإن:

$$\Rightarrow \lambda = \frac{U`_{11}}{P_{11}} = \frac{U`_{21}}{P_{21}} = ...\frac{U`_{n1}}{P_{n1}} =$$

$$= \frac{U`_{12}}{P_{12}\eta^{1-t}} = ..... = \frac{U`_{nT}}{P_{nT}\eta^{1-t}}$$

وهذا يعني أن توازن المستهلك يتحقق عندما تتعادل المنافع الحدية لكل السلع في كل السنوات منسوبة إلى القيم الحالية لأسعار هذه السلع في كل السنوات، وتتعادل مع ضارب لاغرانج الذي يمثل القيمة الحالية للمنفعة الحدية لوحدة النقود التي ينفقها هذا المستهلك على شراء التركيب الاستهلاكي الأمثل [1].

الآن إذا أعطينا X_{it} في المعادلة [1] قيمتين مختلفتين ينتج لدينا:

$$U`_{X_{k\tau}} = \lambda P_{k\tau}\eta^{1-\tau} \qquad (A)$$

---

(1) من الجدير بالذكر أن شرط التوازن ما كان ليختلف فيما لو وضعنا فرضين مخالفين للفرض المقدم أعلاه وهو S_t يجب أن يكون معدوماً . بمعنى يمكن افتراض أن S_t يمكن أن يكون موجباً أو سالباً.

$$U`_{X_{jt}} = \lambda P_{jt} \eta^{1-t} \qquad (B)$$

فإذا قسمنا (A) على (B):

$$\frac{U`_{X_{k\tau}}}{U`_{X_{jt}}} = \frac{P_{k\tau} \eta^{1-\tau}}{P_{jt} \eta^{1-t}}$$

ونحن نعلم أن:

$$\frac{\partial X_{jt}}{\partial X_{k\tau}} = -\frac{U`_{X_{k\tau}}}{U`_{X_{jt}}}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial X_{jt}}{\partial X_{k\tau}} = -\frac{P_{k\tau} \eta^{1-\tau}}{P_{jt} \eta^{1-t}}$$

وهذا يعني أن معامل الإحلال بين السلعتين j و k في السنتين t و τ يساوي إلى النسبة السالبة بين القيمة الحالية لسعر الوحدة الواحدة من السلعة k في السنة τ ، وبين القيمة الحالية لسعر الوحدة الواحدة من السلعة j في السنة t، وإن هذه النسبة السالبة تدل على الإحلال بين السلع أي إن هذه السلع تبادلية.

ملاحظة: تتحقق عندما تتناوب إشارات محددات هيسيان من الموجب إلى السالب بدءاً من المحدد من المرتبة الثانية وحتى المحدد من المرتبة $(n*T)$.

المسألة الثالثة

تطبيقات عامة حول الفصل الثاني

ليكن لدينا تابع المنفعة الديناميكي التالي لأحد المستهلكين:

$$U = X_{11}X_{21}X_{12}X_{22}$$

حيث X_{it} تشير إلى ما يستهلكه من السلعة i في السنة t حيث $(i,t=1,2)$.
وليكن دخل الشخص في السنة الأولي $R_1 = 800$ وفي السنة الثانية $R_2 = 220$ وسعر الفائدة (أو الخصم) $i = 0.10$. ولتكن الأسعار ثابتة في هاتين السنتين $P_1 = 5, P_2 = 25$.

المطلوب /:

1. حساب التركيب الاستهلاكي الذي يحقق توازن هذا المستهلك في تعظيم القيمة الحالية لمنفعته خلال سنتي الدراسة فيما إذا فرضنا أنه يرغب في أن يكون ادخاره معدوماً في نهاية السنة الثانية.

2. التأكد من أن القيم التوازنية تحقق فعلاً انعدام الادخار في نهاية السنة الثانية.

الحل:

$$S_2 = 800\eta^0 + 220\eta^{-1} - \{5X_{11}\eta^0 + 25X_{21}\eta^0 + 5X_{12}\eta^{-1} + 25X_{22}\eta^{-1}\}$$

وبما أن $\eta^0 = 1$ وأن $\eta^{-1} = (1.1)^{-1} = 0.9090$ فإن:

$$S_2 = 1000 - 5X_{11} - 25X_{21} - \frac{5}{1.1}X_{12} - \frac{25}{1.1}X_{22} = 0$$

نشكل تابع لاغرانج:

$$Z = X_{11}X_{21}X_{12}X_{22} + \lambda(1000 - 5X_{11} - 25X_{21} - \frac{5}{1.1}X_{12} - \frac{25}{1.1}X_{22})$$

الشروط اللازمة لتعظيم القيمة الحالية لمنفعة المستهلك:

$$\frac{\partial Z}{\partial X_{11}} = X_{21}X_{12}X_{22} - 5\lambda = 0 \qquad [1]$$

$$\frac{\partial Z}{\partial X_{21}} = X_{11}X_{12}X_{22} - 25\lambda = 0 \qquad [2]$$

$$\frac{\partial Z}{\partial X_{12}} = X_{11}X_{21}X_{22} - \frac{5}{1.1}\lambda = 0 \qquad [3]$$

$$\frac{\partial Z}{\partial X_{22}} = X_{11}X_{21}X_{12} - \frac{25}{1.1}\lambda = 0 \qquad [4]$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \lambda} = 1000 - 5X_{11} - 25X_{21} - \frac{5}{1.1}X_{12} - \frac{25}{1.1}X_{22} = 0 \qquad [5]$$

نقسم [1] على [3]:

$$X_{21}X_{12}X_{22} = 5\lambda$$

$$X_{11}X_{21}X_{22} = \frac{5}{1.1}\lambda$$

$$\Rightarrow \frac{X_{12}}{X_{11}} = 1.1$$

$$\Rightarrow X_{11} = \frac{X_{12}}{1.1} \qquad \{A\}$$

نقسم [2] على [3] فينتج:

$$\frac{X_{12}}{X_{21}} = \frac{25}{5/1.1} = 5.5 \Rightarrow X_{21} = \frac{X_{12}}{5.5}$$

$$\Rightarrow X_{12} = 5.5X_{21} \qquad \{B\}$$

وبقسمة [3] على [4] نحصل على:

$$\frac{X_{22}}{X_{12}} = 0.2$$

$$\Rightarrow X_{22} = 0.2X_{12} \qquad \{C\}$$

نعوض قيم X_{it} في [5]:

$$1000 - \frac{5}{1.1}X_{12} - \frac{25}{5.5}X_{12} - \frac{5}{1.1}X_{12} - \frac{25}{1.1}0.2X_{12} = 0$$

$$\Rightarrow 1000 = 18.181818X_{12}$$

$$\Rightarrow X_{12} = 55 \qquad \{D\}$$

نعوض {D} في {B}:

$$55 = 5.5X_{21}$$

$$\Rightarrow X_{21} = 10$$

نعوض {D} في {C}:

$$X_{22} = 11$$

نعوض {D} في {A}:

$$X_{11} = 50$$

من [1] نجد أن:

$$\lambda = \frac{X_{21} X_{12} X_{22}}{5} \Rightarrow \lambda = 1210$$

نتحقق من الشروط الكافية:

$$H_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 Z}{\partial X_{11}^2} & \frac{\partial^2 Z}{\partial X_{11} \partial X_{21}} & \frac{\partial^2 Z}{\partial X_{11} \partial \lambda} \\ \frac{\partial^2 Z}{\partial X_{21} \partial X_{11}} & \frac{\partial^2 Z}{\partial X_{21}^2} & \frac{\partial^2 Z}{\partial X_{21} \partial \lambda} \\ \frac{\partial^2 Z}{\partial \lambda \partial X_{11}} & \frac{\partial^2 Z}{\partial \lambda \partial X_{21}} & \frac{\partial^2 Z}{\partial \lambda^2} \end{vmatrix} > 0$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} 0 & X_{12} X_{22} & -5 \\ X_{12} X_{22} & 0 & -25 \\ -5 & -25 & 0 \end{vmatrix} = 151250 > 0$$

$$H_3 = \begin{vmatrix} 0 & 605 & 110 & -5 \\ 605 & 0 & 550 & -25 \\ 110 & 550 & 0 & -4.545 \\ -5 & -25 & -4.545 & 0 \end{vmatrix} < 0$$

$$H_4 > 0$$

والنقطة تقابل نهاية عظمى.

$$S_2 = 800 + 220(0.90909) - \{5(50) + 25(10) + 5(55)(0.9090) +$$

$$+ 25(11)(0.90909)\}$$

$$S_2 = 1000 - 1000 = 0$$

أو بطريقة أخرى:

$$S_2 = \{800 - (5(50) + 25(10)\}(1.1) + \{220 - (5(55) + 25(11)\} =$$

$$\Rightarrow S_2 = 330 - 330 = 0$$

أي إن الادخار في نهاية المدة المدروسة سوف يكون معدوماً وهو المطلوب.

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الباب الرابع

التوازن الاقتصادي

Damascus University

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

تمهيد:

في دراستنا السابقة في البابين الثاني والثالث رأينا أن المنتج يحقق توازنه عندما تتعادل الإنتاجيات الحدية لعناصر الإنتاج منسوبة إلى أسعار هذه العناصر. أما المستهلك فإن توازنه يتحقق عندما تتعادل المنافع الحدية لمختلف السلع منسوبة إلى أسعار هذه السلع.

وبذلك فإن التوازن هنا يُقصد به شعور الأشخاص سواء أكانو ا منتجين أم مستهلكين بعدم إمكانية بلوغهم حالة أفضل من الحالة التي هم فيها من خلال الظروف المفروضة عليهم.

أي إن دراستنا السابقة كانت عبارة عن دراسة حالات توازنية فردية تخص الاستهلاك أو الإنتاج.

أما في الباب الحالي فإن مهمتنا تكمن في دراسة وتحليل سلوك كل من المنتجين والمستهلكين كعارضين وطالبين في نفس الوقت، بشكل يؤدي إلى تحديد نظام الأسعار، وبالتالي تحديد الكميات التوازنية عند تلك الأسعار وهذا هو موضوع الفصلين الأول والثاني. أما الفصل الثالث فنخصصه لدراسة علاقات العرض والطلب ما بين مختلف قطاعات الاقتصاد الوطني من خلال جداول المدخلات والمخرجات.

أنواع التوازن:

مما تقدم أعلاه نستطيع أن نقول بأن التوازن يمكن أن يقسم إلى ثلاثة مستويات:

1) التوازن الجزئي للسوق:

وهو التوازن الذي يخص سلعة ما أو عنصر إنتاج محدد يكون محلاً لعرض وطلب في السوق.

2) التوازن الكلي للسوق:

وهو التوازن الذي يتحقق في الاقتصاد الوطني ويخص مجمل قيم الطلب والعرض على كل السلع وعناصر الإنتاج.

3) التوازنات القطاعية:

وهي عبارة عن التوازنات التي تتحقق ما بين القطاعات المنتجة والمستخدمة للسلع وعناصر الإنتاج.

وتجدر الإشارة إلى أن هذه الأنوا ع من التوازنات يمكن أن تكون ساكنة أو ديناميكية حسب إدخال عنصر الزمن في التحليل من عدمه.

وبما أن هذه المستويات من التوازن تميز ما بين مناهج التحليل الاقتصادي، فإننا سنبتدأ هذا الباب بمقارنة هذه المناهج على هذه المستويات.

لمدة ثلاثة أيام إضافية: (1)

إن مستويات التوازن المذكورة أعلاه تجعلنا نميز ما بين منهج التحليل الجزئي والتحليل الكلي وتحليل المدخلات – المخرجات.

إن منهج التحليل الجزئي يقوم أساساً بتحليل ظروف السوق لمنتج معين، وغالباً ما يكون منتج أحد القطاعات أو الصناعات الإنتاجية في جداول المدخلات والمخرجات، وذلك بافتراض بقاء العوامل والمتغيرات في أسواق المنتجات الأخرى ثابتة. أي إنه يتناول قطاعات أو صناعات *الاقتصاد* الوطني قطاعاً إثر الآخر، أو صناعة إثر الأخرى بافتراض بقاء المتغيرات والعوامل في القطاعات أو الصناعات الأخرى ثابتة. في حين أن منهج تحليل جداول المدخلات – المخرجات يتناول القطاعات أو الصناعات الإنتاجية المختلفة في الاقتصاد الوطني دفعة واحدة، مستهدفاً من ذلك تحديد طبيعة العلاقات الاقتصادية المتداخلة بين القطاعات أو الصناعات الإنتاجية، وقياس الآثار المباشرة وغير المباشرة، لتغير معين في قطاعات الطلب النهائي على مستويات الإنتاج في جميع القطاعات أو الصناعات

(1) د. جعفر حاجي: تحليل جداول المدخلات والمخرجات الصناعية، الكويت 1985.ص 144.

الإنتاجية في الاقتصاد الوطني دفعة واحدة، الأمر الذي أصبح معه نموذج المدخلات – المخرجات يطلق عليه في التحليل الاقتصادي بنموذج متعدد القطاعات أو الصناعات.

وباختصار شديد، نلاحظ أن منهج التحليل الجزئي، يركز على قطاع واحد فقط من قطاعات نموذج والراس للتوازن العام في الاقتصاد الوطني، وذلك من خلال تحديد العلاقة بين العرض والطلب، أي دالة العرض ودالة الطلب لمنتج قطاع أو صناعة معينة وفقاً لآلية السوق (السعر). بينما يأخذ منهج ليونتيف (Leontief) (نموذج المدخلات – المخرجات) في التحليل وبالدرجة الأولى كل منتجات القطاعات أو الصناعات الإنتاجية المختلفة دفعة واحدة. وإن التوازن الذي يهدف إليه منهج التحليل الجزئي يعتمد أساساً على التغيرات في السعر في السوق، بينما التوازن الذي يهدف إليه منهج ليونتيف يعتمد بالدرجة الأولى على تساوي العرض والطلب لمنتجات القطاعات أو الصناعات الإنتاجية من خلال التغيرات الأفقية.

أما بالنسبة لمقارنة طبيعة وآلية التحليل في النظرية الاقتصادية الكلية مع منهج تحليل جداول المدخلات – المخرجات، فنستشف بأن منهج تحليل جداول المدخلات – المخرجات يعدّ في الواقع جزءاً مكملاً لمنهج التحليل الكلي، حيث يقوم بتحليل ودراسة بعض الجوانب الاقتصادية المهمة التي لا يلائمها أي من النظامين (الجزئي والكلي)، حيث يستبعد منهج التحليل الكلي العمليات الاقتصادية المتداخلة لأغراض الاستخدام الوسيط بين الوحدات أو القطاعات الإنتاجية المختلفة في الاقتصاد الوطني، وذلك تجنباً للحسابات أو العمليات المزدوجة. بينما يستهدف منهج تحليل جداول المدخلات – المخرجات بالدرجة الأولى دراسة العمليات الاقتصادية المتداخلة بين القطاعات أو الصناعات الإنتاجية في الاقتصاد الوطني وتحليلها.

وتأسيساً على ذلك نستشف بأن منهج تحليل جداول المدخلات – المخرجات الذي يغطي جانباً مهماً من جوانب العملية الإنتاجية التي لا تشمل أهداف ووظائف منهج التحليل الكلي، يضيف بعداً مهماً للمخطط أو لواضع السياسة

الإنتاجية ويعطي مزيداً من المعالم (Parameter) والمعلومات عن العمليات الإنتاجية داخل الاقتصاد الوطني مما لا يوفره له التحليل الكلي أو الجزئي، وذلك يساعد على دقة وسلامة القرارات والخطط الإنتاجية للقطاعات أو الصناعات الإنتاجية التي يتكون منها الاقتصاد الوطني في المجتمع.

نستخلص من هذا العرض إن هناك اختلافاً كبيراً بين المناهج الثلاثة في التحليل الاقتصادي، وأن هذا الاختلاف وبالخصوص الجزء المتعلق بالتحليل الجزئي والكلي، لا يعكس اختلافاً لفظياً في الفكر الاقتصادي، بل يعكس اختلافات جوهرية حول طبيعة الظواهر والمشكلات الاقتصادية من ناحية أولى، واختلاف آلية تسيير وإدارة كل منهما من زاوية أخرى. بالإضافة إلى ذلك يوجد تباين واضح في نوعية أدوات التحليل المستخدمة، وطبيعة القرارات والسياسات والإجراءات الاقتصادية المنبثقة عن نتائج التحليل في هذين الحقلين من التحليل الاقتصادي.

وتجدر الإشارة في هذا الصدد، إلى وجود حقائق مهمة تبرز لنا عند إلقاء نظرة فاحصة ودقيقة للأفكار والمفاهيم والنظريات التي يحتويها كل من التحليل الكلي والجزئي في الاقتصاد، وهي أن هذه الاختلافات الظاهرة وإن كانت تعكس لنا وجهات نظر الباحثين والمفكرين الاقتصاديين في الفكر الاقتصادي، إلا أنها في حقيقة الأمر تعكس لنا اختلافاً في النظرة الفلسفية للحياة والكون بصفة عامة، وللظواهر الاجتماعية والاقتصادية بصفة خاصة.

ونستشف أيضاً من هذه المقارنات أنه على الرغم من وجود تباين في النظرة الفلسفية والاجتماعية والاقتصادية للمناهج الثلاثة في التحليل الاقتصادي، واختلاف أدوات وأساليب ونظريات كل منها، إلا أن تشابك العوامل والمتغيرات الاقتصادية، وصعوبة تشخيص الظواهر الاقتصادية، وتحديد المشاكل الاقتصادية، وصعوبة إيجاد الحلول الاقتصادية المتكاملة لها، كل ذلك يقتضي من المنطق العلمي والاقتصادي الحكيم، دراسة تلك الظواهر الاقتصادية المعقدة وتحليلها بمنظار أوسع وأشمل من منظار التحليل الجزئي أو التحليل الكلي أو تحليل جداول المدخلات – المخرجات كل على حدة. وبتعبير آخر فإنه لابد من الاعتماد على

أدوات ومفاهيم ونظريات التحليل الكلي والجزئي وجداول المدخلات – المخرجات إذا ما أراد الباحث أو المخطط الاقتصادي استيعاب المتغيرات الاقتصادية وتفهم طبيعةها وآلياتها، وتفسير الظواهر الاقتصادية من أجل إيجاد حلول وسياسات وإجراءات اقتصادية مناسبة ومتكاملة لعلاج المشكلات الاقتصادية المعاصرة أو المستقبلية في المجتمع.

ومن الأهمية بمكان توضيح الآتي: على الرغم من أن منهج التحليل الكلي والتحليل الجزئي وتحليل جداول المدخلات – المخرجات، ما هي إلا أدوات وأساليب تحليلية متباينة، إلا أنها متكاملة من وجهة نظر المنطق الاقتصادي، حيث يغطي كل منهج جانباً من جوانب العملية الإنتاجية والتخطيطية للاقتصاد الوطني. الأمر الذي يجعل استخدام أي من المناهج الثلاثة يتوقف بالدرجة الأولى على طبيعة الظواهر والمشاكل الاقتصادية في المجتمع من جهة أولى، وإمكانية توافر المعلومات الاقتصادية والبيانات الإحصائية وتفهم واستيعاب الباحثين الاقتصاديين للأبعاد الحقيقية ودور كل منها والفروق التي يقوم عليها من جهة ثانية. إن هذا الاستيعاب والتفهم لطبيعة الظواهر والمشاكل الاقتصادية وتوافر المعلومات الاقتصادية والإحصائية ودرجة استيعاب وتفهم آلية الأبعاد الحقيقية لكل من المناهج الثلاثة، هي التي تحدد لنا درجة التعويل على النتائج المستخلصة من المناهج الثلاثة في التحليل الاقتصادي للتخطيط والتنبؤ في المجتمع.

الفصل الأول

التوازن الجزئي في سوق سلعة واحدة

المبحث الأول

نموذج التوازن الجزئي

إن هذا النموذج يدرس علاقات الطلب والعرض على سلعة واحدة. ومن أجل تحديد التوازن الجزئي، فإننا يجب أن ندرس توابع العرض والطلب على هذه السلعة؛ مع افتراض وجود حالة المنافسة التامة في السوق باستخدام النماذج الخطية.

إن تابع الطلب يعبر عن مجموع الكميات المطلوبة لسلعة محددة من قبل جميع المستهلكين خلال مدة زمنية محددة في سوق معينة. فإذا قصرنا علاقة الطلب على سلعة محددة X بسعر هذه السلعة P_X فإن هذا التابع يأخذ الصيغة:

$$D_x = F(P_x)$$

وبما أن قانون الطلب ينص على علاقة عكسية بين الطلب والسعر فإن تابع الطلب يأخذ الصيغة:

$$D_x = a_0 - a_1 P$$

وهذه العلاقة تدل على أن الطلب على السلعة X هو تابع خطي يرتبط عكسياً مع السعر P، بحيث إن الطلب ينخفض بمقدار a_1 عندما يزداد السعر بمقدار وحدة نقدية واحدة والعكس بالعكس. أي إن المعامل a_1 يعبر عن ميل تابع الطلب السالب. أما الثابت a_0 فهو يعبر عن الكمية المحددة من السلعة المطلوبة والتي يطلبها المستهلك عندما يبلغ سعرها الصفر، وهذا طبعاً أمر فيه الكثير من التجريد والتبسيط، إذ إنه من المنطقي أن يطلب المستهلك كميات غير محددة نسبياً من السلعة التي ينعدم سعرها.

أما تابع العرض فيعبر عن مجموع الكميات المعروضة لسلعة معينة من قبل جميع المنتجين خلال مدة زمنية محددة في سوق معينة. فإذا قصرنا علاقة عرض سلعة محددة X بسعر هذه السلعة P_x ، فإن تابع العرض يأخذ الصيغة الآتية:

$$S_X = g(P_X)$$

وبما أن قانون العرض ينص على علاقة طردية بين العرض والسعر فإن التابع يأخذ الصيغة الآتية:

$$S_X = -b_0 + b_1 P$$

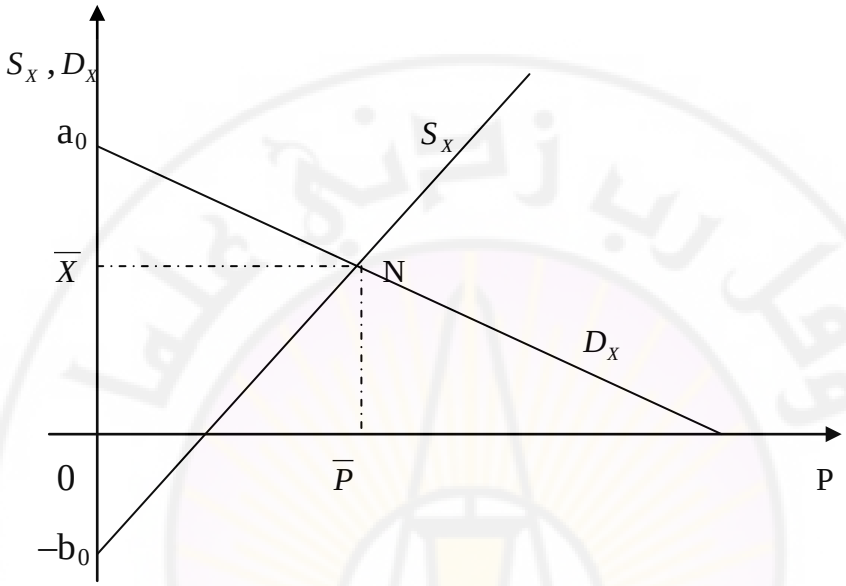
وهذه العلاقة تدل على أن الكمية المعروضة من السلعة X هي تابع خطي يرتبط طرداً مع سعر هذه السلعة P_X ، ويكون ميل هذا التابع موجباً ويعادل b_1، بمعنى أنه عندما يزداد السعر P_X وحدة نقدية واحدة فإن العرض سوف يزداد بمقدار b_1. أما الثابت $-b_0$ فهو يمثل مقدار العرض السالب أي المخزون السلعي الذي يلجأ إليه المنتج عندما يصبح السعر معدوماً، وهذا يعني أن المنتج لا يقوم بطرح سلعته في السوق ما لم يبلغ السعر حداً معيناً أكبر من الصفر.

إن توابع العرض والطلب تمثل سلوك المنتجين والمستهلكين. وذلك إذا توافق هذا السلوك للمنتجين والمستهلكين والذي يحدده سعر السلعة، بمعنى فيما لو تساوت الكميات المعروضة مع الكميات المطلوبة فإن الكميات المعروضة أو المطلوبة تدعى بكمية التوازن السلعي $\overline{X}$ ، وبذلك فإن السوق يبلغ حالة التوازن. أي أن شرط توازن السوق يعبر عنه بالصيغة:

$$D_X = S_X$$

أما السعر الذي يتحقق عنده التوازن بين العرض والطلب فيدعى بسعر التوازن $\overline{P}$ ، وبذلك فإن حل هذا النموذج يكون بتحديد القيمتين التوازنيتين $\overline{P}$ و $\overline{X}$.

آلية التوازن في السوق الكلي:



حيث إن النقطة N تمثل توازن العرض والطلب (تحديد السعر التوازني والكمية التوازنية)

تنصيب التوازن في السوق الكلي:

شرط التوازن: $D_X = S_X$

تابع الطلب: $D_x = a_0 - a_1 P$

تابع العرض: $S_X = -b_0 + b_1 P$

$$\Rightarrow a_0 - a_1 P = -b_0 + b_1 P$$

$$a_0 + b_0 = b_1 P + a_1 P$$

$$a_0 + b_0 = (b_1 + a_1) P$$

$$\Rightarrow \overline{P} = \frac{a_0 + b_0}{(a_1 + b_1)}$$ وهو السعر التوازني

نعوض $\overline{P}$ في تابع العرض أو الطلب:

1) في تابع الطلب:

$$a_0 - a_1 \frac{(a_0 + b_0)}{(a_1 + b_1)}$$

$$\frac{a_0(b_1 + a_1) - a_1(a_0 + b_0)}{(a_1 + b_1)}$$

$$\Rightarrow \overline{X} = \frac{a_0 b_1 - a_1 b_0}{(a_1 + b_1)}$$ وهي كمية التوازن

2) في تابع العرض:

$$\overline{X} = -b_0 + b_1 \frac{a_0 + b_0}{(a_1 + b_1)}$$

$$= \frac{-b_0(a_1 + b_1) + b_1(a_0 + b_0)}{(a_1 + b_1)}$$

$$= \frac{-b_0 a_1 + b_1 a_0}{(a_1 + b_1)}$$

$$\Rightarrow \overline{X} = \frac{a_0 b_1 - a_1 b_0}{(a_1 + b_1)}$$ وهي كمية التوازن نفسها

ثانياً: حل النموذج في حالة استخدام طريقة المصفوفات:

ويمكن اتباع طريقة المصفوفات في حل هذا النموذج وذلك كالآتي:

شرط التوازن: $D_X = S_X$

تابع الطلب: $D_x = a_0 - a_1 P$

تابع العرض: $S_X = -b_0 + b_1 P$

نعيد ترتيب معادلات النموذج و نصوغها بشكل جملة معادلات خطية:

$$D_X - S_X = 0$$

$$D_X - a_0 + a_1 P = 0$$

$$S_X + b_0 - b_1 P = 0$$

$$1D_X - 1S_X + 0P = 0$$

$$1D_X + 0S_X + a_1 P = a_0$$

$$0D_X + 1S_X - b_1 P = -b_0$$

نكتب هذه المعادلات بالشكل المصفوفي:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & -b_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_X \\ S_X \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ a_0 \\ -b_0 \end{bmatrix}$$

وبشكل مختصر:

$$[A][X] = [B]$$

وبما أن المجهول هنا هو قيم الشعاع X فنعيد كتابة المعادلة كما يلي:

$$X = A^{-1}B$$

ومن أجل إيجاد مقلوب المصفوفة A^{-1} نحسب محددة المصفوفة، والمصغرات، والمصفوفة المساعدة:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\tilde{A}`$$

وتكون محددة المصفوفة A:

$$|A| = -(a_1 + b_1)$$

وبما أن $|A| \neq 0$ فهناك حل وحيد:

نحسب مصفوفة المصغرات والعوامل المشاركة:

$$A`=\begin{bmatrix} \begin{vmatrix}0 & a_1\\ 1 & -b_1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & a_1\\ 0 & -b_1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix}-1 & 0\\ 1 & -b_1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & -b_1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix}-1 & 0\\ 0 & a_1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & a_1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -a_1 & \pm b_1 & 1 \\ \mp b_1 & -b_1 & \mp 1 \\ -a_1 & \mp a_1 & 1 \end{bmatrix}$$

ندور مصفوفة المصغرات فنحصل على المصفوفة المساعدة:

$$\tilde{A}`=\begin{bmatrix} -a_1 & b_1 & -a_1 \\ b_1 & -b_1 & -a_1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

نوجد مقلوب المصفوفة:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\tilde{A}`$$

$$A^{-1}=-\frac{1}{(a_1+b_1)}\begin{bmatrix} -a_1 & -b_1 & -a_1 \\ b_1 & -b_1 & -a_1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X=A^{-1}B$$

$$\begin{bmatrix} D_X \\ S_X \\ P \end{bmatrix}=-\frac{1}{(a_1+b_1)}\begin{bmatrix} -a_1 & -b_1 & -a_1 \\ b_1 & -b_1 & -a_1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ a_0 \\ -b_0 \end{bmatrix}$$

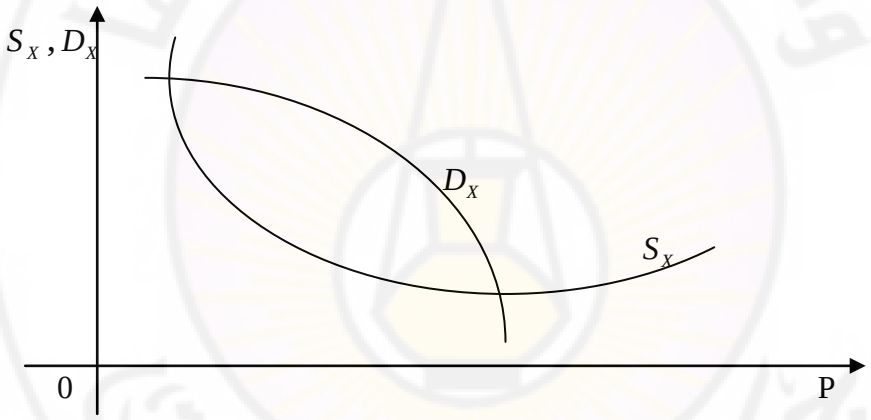
$$=-\frac{1}{(a_1+b_1)}\begin{bmatrix} -a_0b_1+a_1b_0 \\ -a_0b_1+a_1b_0 \\ -a_0-b_0 \end{bmatrix}$$

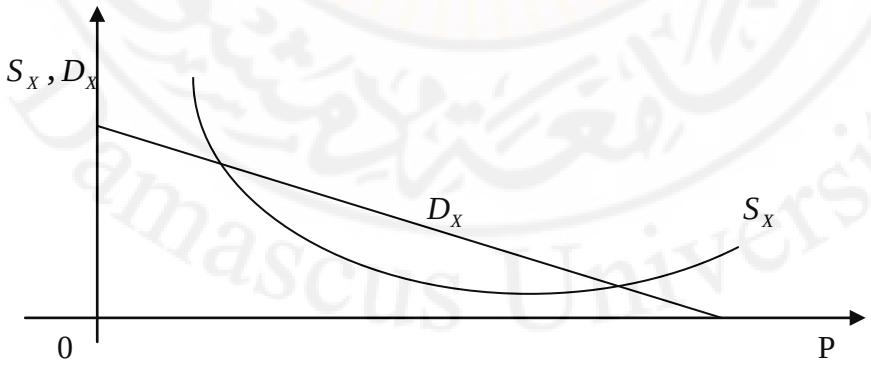
$$\begin{bmatrix} D_X \\ S_X \\ P \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{a_0b_1-a_1b_0}{a_1+b_1} \\ \frac{a_0b_1-a_1b_0}{a_1+b_1} \\ \frac{a_0+b_0}{a_1+b_1} \end{bmatrix}$$

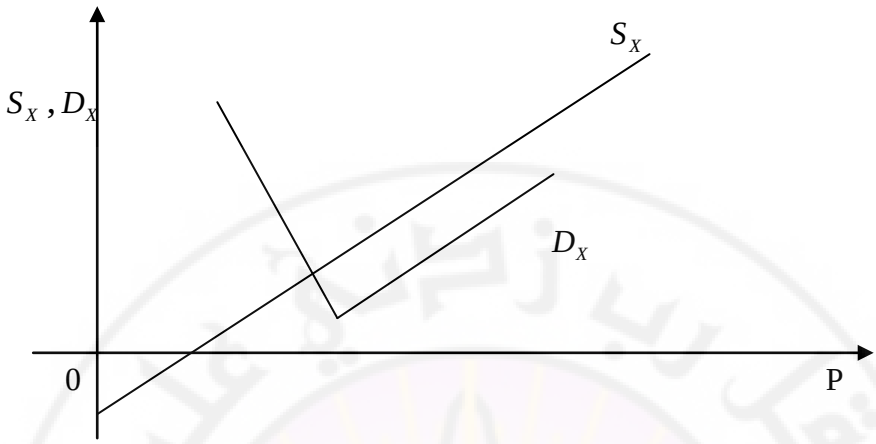
وكما نلاحظ فقد حصلنا على القيم التوازنية التي تمثل حل هذا النموذج وهي نفس النتيجة التي حصلنا عليها بالطريقة السابقة.

ملاحظة: ملاحظات هامة حول التوازن في النماذج غير الخطية:

في النماذج غير الخطية يمكن لنا أن نصادف الكثير من الحالات ، التي تتضمن عدة حلول ممكنة لعدة أوضاع توازنية لابد من اختيار أحدها، وكذلك ويمكن أن نصادف حالات تمثل استثناءات على قانوني العرض والطلب أي حالات خاصة بالتوازن. ولهذا سنكتفي بالعرض البياني لأهم هذه الحالات وهي الآتية:






S_X
S_X , D_X
D_X
0
P

المبحث الثاني

أثر ضرائب الإنتاج على التوازن الجزئي

إن ضريبة الإنتاج هي المبلغ الذي يدفعه المنتج للحكومة، إما في شكل مبلغ ثابت على كل وحدة سلعية مباعة وتسمى ضريبة نوعية (Specific excise taxes) ، أو في شكل نسبة مئوية من سعر السلعة وتسمى ضريبة قيمية (Advalorem excise taxes).

والسؤال الذي يطرح نفسه هو: هل يؤثر فرض مثل هذه الضريبة (النوعية أو القيمية) على سعر التوازن في السوق وكميته؟ وما هو اتجاه هذا الأثر؟ وهل يتحمل عبء الضريبة المنتج وحده، أم أنه سيعكسها على المستهلك؟

تحليل الضريبة:

إن فرض ضرائب الإنتاج سيؤدي إلى ارتفاع السعر التوازني وانخفاض الكمية التوازنية، أي إن المستهلك سيتحمل جزءاً من هذه الضريبة، وهذا الجزء يتوقف على مرونة كل من تابع الطلب وتابع العرض.

فكلما زادت مرونة تابع الطلب كلما انخفض ذلك الجزء من الضريبة الذي يستطيع المنتج عكسه على المستهلك، ذلك لأن ارتفاعاً طفيفاً في السعر في مثل هذه الحالة يؤدي إلى انخفاض كبير في الطلب مما يجبر المنتج على تحمل الجزء الأكبر من الضريبة والعكس صحيح.

وعلى العكس من ذلك فكلما ازدادت مرونة تابع العرض، كلما ازداد الجزء من الضريبة الذي يستطيع المنتج عكسه على المستهلك، لأن المنتج في مثل هذه الحالة يستطيع أن يتحكم بحرية كبيرة في حجم إنتاجه؛ وبالتالي فإنه يمكن أن يخفض إنتاجه في حال فرض ضرائب عليه مما سيؤدي أيضاً إلى رفع الأسعار. وهذا ما يمكن أن نعبر عنه بالصيغة الآتية:

$$\frac{\text{عبء الضريبة على المستهلك}}{\text{عبء الضريبة على المنتج}} = \frac{\text{مرونة العرض}}{\text{مرونة الطلب}}$$

وهذه الصيغة تبين كيفية توزع عبء الضريبة بين المنتج والمستهلك، فإذا كانت مرونة العرض أكبر من مرونة الطلب فإن النتيجة هي تحمل المستهلك للجزء الأكبر من الضريبة والعكس بالعكس، أما إذا كانت مرونة الطلب أكبر من مرونة العرض فإن المنتج هو من سيتحمل الجزء الأكبر من الضريبة، وإذا ما تساوت المرونات فإن عبء الضريبة سيوزع بالتساوي بين المنتج والمستهلك، وسنوضح ذلك من خلال أثر نوعي الضريبة على التوازن في السوق

1) غنص صوغ اي الأمتثيك مدعي ب:

يقصد بالضريبة النوعية فرض مبلغ ثابت على المنتجين مقابل بيع كل وحدة سلعية بغض النظر عن سعر بيع هذه السلعة.

من أجل تبيان أثر مثل هذه الضريبة على توازن السوق لنفرض أن الضريبة المفروضة على بيع كل وحدة سلعية هي بمقدار t وحدة نقدية، وبذلك فإن سعر السلعة – من حيث المبدأ – سينخفض بالنسبة للمنتج بمقدار الضريبة المدفوعة أي:

$$P^T = P - t$$

حيث أن $t > 0$

وبذلك فإن تابع العرض بعد فرض الضريبة يصبح:

$$S_X = -b_0 + b_1 P^T$$

وبما أن $P^T < P$ لأن $t > 0$ فإن العرض بعد فرض الضريبة سوف ينخفض عنه قبل فرض الضريبة.

أما تابع الطلب فيبقى ثابتاً بافتراض مبدئي أنه لا يتأثر بالضريبة.

وبذلك فإن نموذج التوازن الجزئي الجديد بعد فرض ضريبة الإنتاج النوعية يصبح:

$$D_x = a_0 - a_1 P$$

$$S_X = -b_0 + b_1 P^T$$

$$P^T = P - t$$

$$S_X = -b_0 + b_1 (P - t)$$

$$S_X = -b_0 + b_1 P - b_1 t$$

$$\Rightarrow S_X = -(b_0 + b_1 t) + b_1 P$$

وبذلك نلاحظ أن ميل تابع العرض لم يختلف بعد فرض الضريبة، وإنما الاختلاف يتمثل في قيمة المخزون السلعي الذي سوف يرتفع مع انخفاض كميات العرض بسبب فرض الضريبة.

يتحقق التوازن الجزئي عندما:

$$D_X = S_X$$

$$a_0 - a_1 P = -b_0 + b_1 P - b_1 t$$

$$a_0 + b_0 + b_1 t = P(a_1 + b_1)$$

$$\Rightarrow \overline{P} = \frac{a_0 + b_0}{a_1 + b_1} + \frac{b_1}{a_1 + b_1} t \qquad (1-1)$$

وهو سعر التوازن الجديد بعد فرض الضريبة النوعية. وبالتعويض في D_X نحصل على الكمية التوازنية:

$$\overline{X} = a_0 - a_1 \frac{a_0 + b_0 + b_1 t}{a_1 + b_1}$$

$$= \frac{a_0 (b_1 + a_1) - a_1 (a_0 + b_0 + b_1 t)}{a_1 + b_1}$$

$$= \frac{a_0 b_1 + a_0 a_1 - a_0 a_1 - a_1 b_0 - a_1 b_1 t}{a_1 + b_1}$$

$$\Rightarrow \overline{X} = \frac{a_0 b_1 - a_1 b_0}{a_1 + b_1} - \frac{a_1 b_1}{a_1 + b_1} t \qquad (1-2)$$

وهي كمية التوازن بعد فرض ضريبة الإنتاج النوعية

لمقارنة سعر التوازن وكميته قبل وبعد فرض الضريبة نعطي t القيمة صفر في العلاقتين (1-1) و (1-2)، فنحصل على سعر التوازن وكميته قبل فرض الضريبة، أي إن الفرق بين قيمتي التوازن قبل وبعد فرض الضريبة النوعية على الإنتاج يكمن في الحدين:

$\frac{b_1}{a_1 + b_1} t$ و $-\frac{a_1 b_1}{a_1 + b_1} t$ وبملاحظة هذين الحدين نستنتج ما يلي:

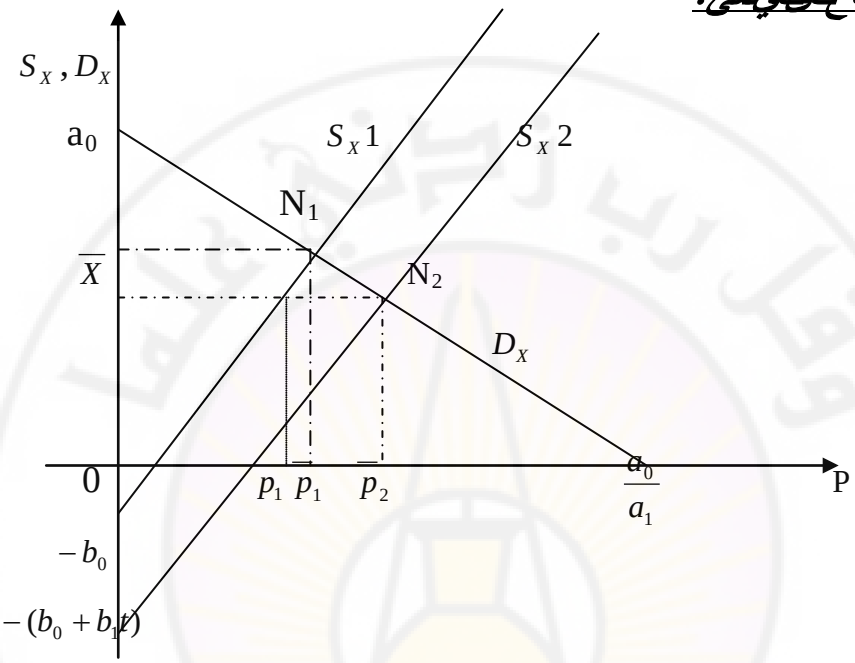
1) بما أن $\frac{b_1}{a_1 + b_1} \succ 0$ فإن هذا يعني أن فرض الضريبة النوعية سوف يؤدي إلى زيادة سعر التوازن، وتعادل هذه الزيادة نسبة محددة من الضريبة مقدارها $\frac{b_1}{a_1 + b_1}$.

2) بما أن $\frac{b_1}{a_1 + b_1} \prec 1$ فإن $\frac{b_1}{a_1 + b_1} t \prec t$ وبذلك فإن الزيادة في سعر التوازن الناجمة عن فرض ضريبة الإنتاج النوعية يجب أن تكون أقل من قيمة هذه الضريبة.

3) بما أن $-\frac{a_1 b_1}{a_1 + b_1} \prec 0$ فإن أثر الضريبة النوعية على الكمية التوازنية هو أثر سلبي، أي إن كمية التوازن بعد فرض هذه الضريبة ستنخفض بما يعادل النسبة $-\frac{a_1 b_1}{a_1 + b_1}$ مثل من

أمثال مبلغ الضريبة t.

ك ح ط ي ى:



الشكل (1−1)

نلاحظ أن ميل تابعي العرض قبل وبعد فرض الضريبة بقي دون تغير وهو b_1. أما الاختلاف بينهما فهو يكمن في نقطة تقاطعهما مع محور الكميات.
ونلاحظ من الشكل (1−1) أن سعر التوازن بعد فرض الضريبة $\overline{p_2}$ يقع أعلى من السعر قبل الضريبة، أما الكمية التوازنية بعد فرض الضريبة، فتقل عن كمية التوازن قبل فرض الضريبة. ونلاحظ من هذا الشكل أن عبء الضريبة يتمثل بالمسافة $p_1\overline{p_2}$ ، ويتمثل عبء المستهلك بالمسافة $\overline{p_1}\,\overline{p_2}$ ،أما عبء المنتج فيتمثل بالمسافة $\overline{p_1}\,p_1$.

2) غ ن ص ص ف ئ ا ي ل أ م ا ث ط ق ي ل ي ب:

يُقصد بالضريبة القيمية فرض ضريبة بشكل نسبة مئوية من سعر السلعة المباعة.

من أجل تبيان أثر هذه الضريبة على توازن السوق لنفرض أن هذه الضريبة تكون بنسبة r% من سعر السلعة، وبذلك فإن سعر السلعة بالنسبة للمنتج يصبح:

$$P^R = P - rP = P(1-r)$$

وبذلك فإن تابع العرض بعد فرض الضريبة القيمية يصبح:

$$S_X = -b_0 + b_1 P^R$$

$$= -b_0 + b_1 P(1-r)$$

$$S_X = -b_0 + b_1 P - b_1 \Pr$$

$$S_X = -b_0 + (b_1 - b_1 r)P$$

وبذلك نلاحظ أن ميل تابع العرض الجديد بعد فرض ضريبة الإنتاج القيمية، يختلف عنه قبل فرض الضريبة، ذلك من حيث إنه سوف يأخذ ميلاً أقل بمقدار $b_1 r$ وذلك باعتبار أن معدل الضريبة r يجب أن يتراوح بين الصفر والواحد الصحيح. وبذلك فإن ميل تابع العرض بعد فرض الضريبة القيمية سوف يعادل $(b_1 - b_1 r)$. أما نقطة تقاطعه مع محور الكميات فإنها تبقى كما هي عليه قبل فرض الضريبة. وسنصادف هنا حالة معاكسة لحالة الضريبة النوعية حيث رأينا سابقاً أنه مع فرض الضريبة النوعية فإن ميل تابع العرض لا يتغير، وإنما تتغير فقط نقطة التقاطع مع محور الكميات، وهذا معاكس تماماً لحالة الضرائب القيمية.

يتحقق التوازن الجزئي عندما:

$$D_X = S_X$$

$$a_0 - a_1 P = -b_0 + b_1 P - b_1 \Pr$$

$$a_0 + b_0 = b_1 P - b_1 \Pr + a_1 P$$

$$= P(a_1 + b_1 - b_1 r)$$

$$\Rightarrow \overline{P} = \frac{a_0 + b_0}{a_1 + b_1 - b_1 r} \qquad (1-3)$$

وهو سعر التوازن الجديد بعد فرض الضريبة القيمية. أما كمية التوازن فتحسب من خلال التعويض في تابع الطلب D_X فنجد أن:

$$\overline{X} = a_0 - a_1 \frac{a_0 + b_0}{a_1 + b_1 - b_1 r}$$

$$= \frac{a_0(a_1 + b_1 - b_1 r) - a_1(a_0 + b_0)}{a_1 + b_1 - b_1 r}$$

$$= \frac{a_0 a_1 + a_0 b_1 - a_0 b_1 r - a_1 a_0 - a_1 b_0}{a_1 + b_1 - b_1 r}$$

$$\Rightarrow \overline{X} = \frac{(a_0 b_1 - a_1 b_0) - a_0 b_1 r}{a_1 + b_1 - b_1 r}$$

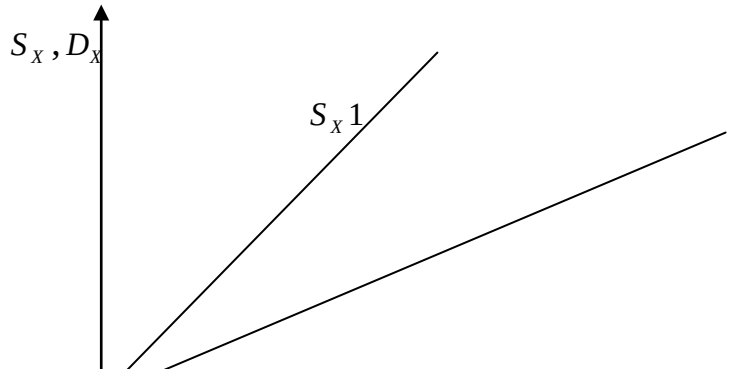
أو بشكل آخر:

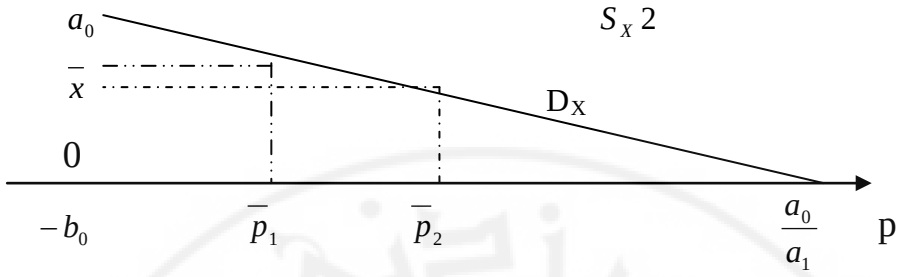
$$\overline{X} = \frac{(a_0 b_1 - a_1 b_0)}{a_1 + b_1(1-r)} - \frac{a_0 b_1 r}{a_1 + b_1(1-r)} \qquad (1-4)$$

وهي كمية التوازن بعد فرض ضريبة الإنتاج القيمية.

لمقارنة سعر التوازن وكميته قبل وبعد فرض ضريبة الإنتاج القيمية نعطي معدل الضرائب r القيمة صفر في العلاقتين (1-3) و (1-4) فنحصل على سعر التوازن وكميته قبل فرض الضريبة.

ونلاحظ أن فرض الضريبة القيمية (كما هي الحال في الضريبة النوعية) يؤدي إلى زيادة سعر التوازن وانخفاض كمية التوازن كما يوضح ذلك الشكل (1-2):





الشكل (1−2)

المبحث الثالث

حصيلة الضريبة ومعدل الضريبة الأمثل

إن معدَّل الضريبة الأمثل هو المعدل الذي يجعل حصيلة الضريبة أكبر ما يمكن. [1]

وكما نعلم فإن حصيلة الضريبة تتوقف على معدلها t من جهة أولى، وعلى الكمية المباعة من السلعة x من جهة ثانية. أي إن حصيلة الضريبة تحسب بالمعادلة:

$$T = tX \qquad (1-5)$$

وهذه الحصيلة تتزايد مع تزايد معدل الضريبة t كما ذكرنا آنفاً، ولكن إلى حد معين فقط، حيث تأخذ بعد ذلك في التناقص وذلك فيما إذا ارتفع معدل الضريبة إلى حد يؤدي إلى انكماش المبيعات إلى درجة لا يعوضها ارتفاع معدل الضريبة. لذلك نجد أن تحديد معدل الضريبة الذي يؤدي إلى أكبر حصيلة للضريبة من الموضوعات التي تهم واضعي السياسة المالية. وفيما يأتي سنبحث تعظيم هذه الحصيلة بالتطبيق على الضريبة النوعية كمثال في النموذج الخطي:

فإذا أخذنا السعر التوازني (1-1) والكمية التوازنية التوازنية (1-2) اللتين توصلنا إليهما سابقاً، وعوضنا كمية المبيعات المحققة عند السعر التوازني (الكمية التوازنية) في (5-1) فإننا نحصل على مقدار حصيلة الضريبة:

$$\overline{X} = \frac{a_0 b_1 - a_1 b_0 - a_1 b_1 t}{a_1 + b_1}, \overline{P} = \frac{a_0 + b_0 + b_1 t}{a_1 + b_1}$$

$$T = t\overline{X} = t\frac{a_0 b_1 - a_1 b_0 - a_1 b_1 t}{a_1 + b_1}$$

(1) د. هناء خير الدين: الاقتصاد الرياضي، القاهرة 1991، ص 81.

$$\Rightarrow T = \frac{(a_0 b_1 - a_1 b_0)t - a_1 b_1 t^2}{a_1 + b_1} \qquad (1-6)$$

وتعبر هذه المعادلة (1-6) عن حصيلة الضريبة T كتابع لمعدلها، ومن الواضح أنه تابع تربيعي، لأن الكمية التوازنية X هي أيضاً تابع لمعدل الضريبة t.

ومن أجل تحليل أثر t على T، نعمد إلى إيجاد قيمة t التي تجعل حصيلة الضريبة أعظميه، وذلك بالبحث عن النهاية العظمى للتابع $T = f(t)$:

الشرط اللازم للتعظيم:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{(a_0 b_1 - a_1 b_0) - 2a_1 b_1 t}{a_1 + b_1} = 0$$

$$\Rightarrow (a_0 b_1 - a_1 b_0) = 2a_1 b_1 t$$

$$\Rightarrow \bar{t} = \frac{a_0 b_1 - a_1 b_0}{2a_1 b_1}$$

الشرط الكافي للتعظيم:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = \frac{-2a_1 b_1}{a_1 + b_1} \prec 0$$

بما أن الشرط الكافي للتعظيم محقق فإن مقدار الضريبة التوازني (الأمثل) $\bar{t}$ هو الذي يجعل حصيلة الضريبة أعظميه.

المبحث الرابع

أثر إعانات الإنتاج على التوازن الجزئي

إن إعانة الإنتاج هي عبارة عن مبالغ معينة (وقد تكون بشكل عيني) تقدمها الدولة لبعض المنتجين لأسباب مختلفة، أي أن هذه الإعانات تعدّ كما لو أنها ضريبة سالبة على هؤلاء المنتجين. وبالتالي فإن أثرها النهائي على السعر والكمية التوازنية نستطيع أن نتوقع وقبل أن نقوم بالتحليل أنه سيكون معاكساً لأثر الضريبة بنوعيها.

من أجل تبيان أثر مثل هذه الإعانات على توازن السوق لنفرض أن الدولة تقدم إعانة على بيع كل وحدة سلعية بمقدارِ e وحدة نقدية، وبذلك فإن سعر السلعة –من حيث المبدأ– سيرتفع بالنسبة للمنتج بمقدار الإعانة المستلمة أي:

$$P^E = P + e$$

حيث إن $e > 0$

وبذلك فإن تابع العرض بعد تقديم الإعانة يصبح:

$$S_X = -b_0 + b_1 P^E$$

وبما أن $P^E \succ P$ لأن $e > 0$ فإن العرض بنتيجة تقديم الإعانات سوف يرتفع عنه قبل الإعانة.

أما تابع الطلب فيبقى ثابتاً لأن الإعانة تخص المنتجين.

وبذلك فإن نموذج التوازن الجزئي الجديد بعد إعانة الإنتاج يصبح:

$$D_x = a_0 - a_1 P$$

$$S_X = -b_0 + b_1 P^E$$

$$P^E = P + e$$

$$\Rightarrow S_X = -b_0 + b_1(P+e)$$

$$= -b_0 + b_1 P + b_1 e$$

$$\Rightarrow S_X = (b_1 e - b_0) + b_1 P$$

وبذلك نلاحظ أن ميل تابع العرض لم يختلف بعد الإعانة؛ وإنما الاختلاف يتمثل في قيمة المخزون السلعي الذي سوف ينخفض عما كان عليه مع ارتفاع كميات العرض بسبب الحصول على الإعانة.

يتحقق التوازن الجزئي عندما:

$$D_X = S_X$$

$$a_0 - a_1 P = -b_0 + b_1 P + b_1 e$$

$$a_0 + b_0 - b_1 e = P(b_1 + a_1)$$

$$\Rightarrow \overline{P} = \frac{a_0 + b_0}{b_1 + a_1} - \frac{b_1}{b_1 + a_1} e \qquad (1-7)$$

وهو سعر التوازن الجديد بعد تقديم إعانات الإنتاج.

أما كمية التوازن فهي:

$$\overline{X} = a_0 - a_1 \frac{a_0 + b_0 - b_1 e}{b_1 + a_1}$$

$$= \frac{a_0(b_1 + a_1) - a_1(a_0 + b_0 - b_1 e)}{b_1 + a_1}$$

$$= \frac{a_0 b_1 + a_0 a_1 - a_0 a_1 - a_1 b_0 + a_1 b_1 e}{b_1 + a_1}$$

$$\Rightarrow \overline{X} = \frac{a_0 b_1 - a_1 b_0}{b_1 + a_1} + \frac{a_1 b_1}{b_1 + a_1} e \qquad (1-8)$$

وهي كمية التوازن بعد تقديم إعانات الإنتاج.

لمقارنة سعر التوازن وكميته قبل و بعد تقديم إعانات الإنتاج نعطي e القيمة صفر في العلاقتين (7-1) و (8-1) فنحصل على سعر التوازن وكميته قبل الإعانة، أي إن الفرق بين قيمتي التوازن قبل وبعد تقديم إعانات الإنتاج يكمن في الحدين:

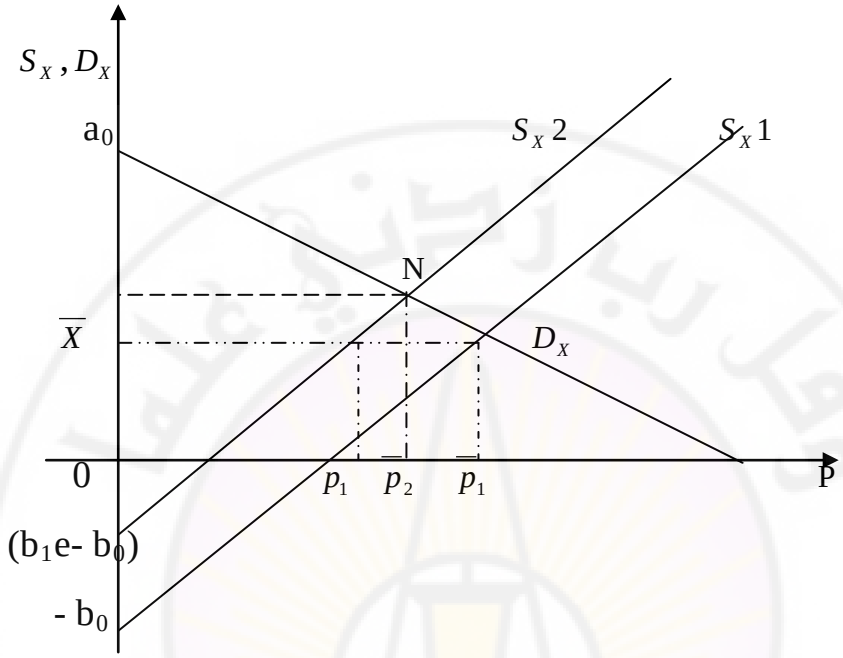
$-\frac{b_1}{b_1+a_1}e$ و $\frac{b_1a_1}{b_1+a_1}e$ وبملاحظة هذين الحدين نستنتج ما يلي:

1) بما أن $-\frac{b_1}{b_1+a_1} \prec 0$ فإن هذا يعني أن تقديم إعانات الإنتاج سيؤدي إلى انخفاض سعر التوازن، ويعادل هذا الانخفاض نسبة محددة من الإعانة مقدارها $\frac{b_1}{b_1+a_1}$.

2) بما أن $\frac{b_1}{b_1+a_1} < 1$ فإن $\frac{b_1}{b_1+a_1}e < e$ وبذلك فإن الانخفاض في سعر التوازن الناجم عن تقديم إعانات الإنتاج يجب أن يكون أقل من قيمة هذه الإعانة.

3) بما أن $\frac{b_1a_1}{b_1+a_1} \succ 0$ فإن أثر تقديم إعانات الإنتاج على الكمية التوازنية هو أثر إيجابي أي أن كمية التوازن بعد تقديم إعانات الإنتاج سيرتفع بما يعادل النسبة $\frac{b_1a_1}{b_1+a_1}$ مثل من أمثال مبلغ الإعانة e.

[illegible]:



الشكل (1−3)

نلاحظ أن ميل تابعي العرض قبل وبعد الإعانة بقي دون تغير وهو b_0 . أما الاختلاف بينهما فيكمن في نقطة تقاطعهما مع محور الكميات. ونلاحظ من الشكل (1−3) أن سعر التوازن بعد الإعانة يقع أدنى السعر قبل الإعانة، أما الكمية التوازنية بعد الإعانة فهي تزيد عن كمية التوازن قبل الإعانة.

وإذا أردنا أن نرى أثر هذه المعونة على المستهلك والمنتج كما فعلنا في الضريبة، فإننا نلاحظ من هذا الشكل أن مقدار الإعانة يتمثل بالمسافة $P_1\overline{P}_1$ ، ويتمثل نصيب المستهلك الذي ينعكس عله بالمسافة $\overline{P}_2\overline{P}_1$ ،أما نصيب المنتج فيتمثل بالمسافة $P_1\overline{P}_2$.

المبحث الخامس

التحليل السكوني المقارن لنموذج التوازن الجزئي

في دراستنا السابقة كنا نفترضً ثبات المعاملات، الآن نغير هذه المعاملات (الثوابت) ونستخدم التفاضل والاشتقاق الجزئي، وندرس تأثير تغير قيم هذه المعاملات على القيم التوازنية.

كان لدينا النموذج الآتي:

$$D_x = a_0 - a_1 P$$

$$S_X = -b_0 + b_1 P$$

$$D_X = S_X$$

$$\Rightarrow \overline{P} = \frac{a_0 + b_0}{(a_1 + b_1)}$$

$$\Rightarrow \overline{X} = \frac{a_0 b_1 - a_1 b_0}{(a_1 + b_1)}$$

نلاحظ أن السعر والكمية التوازنيين يتحددان بدلالة الثوابت a_0, a_1, b_0, b_1.

فإذا افترضنا الآن تغير هذه المعاملات فإن السعر والكمية التوازنيين سيتغيران.

سندرس أولاً تأثير تغير هذه المعاملات على السعر التوازني:

1. تأثير تغير a_0 على $\overline{P}$ من خلال المشتق الجزئي لـ $\overline{P}$ بالنسبة إلى a_0 بافتراض ثبات بقية المعاملات.

$$\frac{\partial \overline{P}}{\partial a_0} = \frac{1}{(b_1 + a_1)} \succ 0$$

وكما نلاحظ فإن هذا المشتق موجب، فالعلاقة بينهما طردية، أي إنه فيما إذا تغير a_0 بمقدار وحدة واحدة فإن $\overline{P}$ سيتغير بمقدار $\frac{1}{(b_1 + a_1)}$ وحدة وبنفس الاتجاه.

2. تأثير تغير a_1 على $\overline{P}$ من خلال المشتق الجزئي لـ $\overline{P}$ بالنسبة إلى a_1 بافتراض ثبات بقية المعاملات.

$$\frac{\partial \overline{P}}{\partial a_1} = -\frac{a_0 + b_0}{(a_1 + b_1)^2} \prec 0$$

وكما نلاحظ فإن هذا المشتق سالب، فالعلاقة بينهما عكسية، أي إنه فيما إذا ازداد a_1 بمقدار وحدة واحدة فإن $\overline{P}$ سينخفض بمقدار $\frac{a_0 + b_0}{(a_1 + b_1)^2}$ وحدة.

3. تأثير تغير b_0 على $\overline{P}$ من خلال المشتق الجزئي لـ $\overline{P}$ بالنسبة إلى b_0 بافتراض ثبات بقية المعاملات.

$$\frac{\partial \overline{P}}{\partial b_0} = \frac{1}{(b_1 + a_1)} \succ 0$$

وكما نلاحظ فإن هذا المشتق موجب، فالعلاقة بينهما طردية، أي إنه فيما إذا تغير b_0 بمقدار وحدة واحدة فإن $\overline{P}$ سيتغير بمقدار $\frac{1}{(b_1 + a_1)}$ وحدة وبنفس الاتجاه.

4. تأثير تغير b_1 على $\overline{P}$ من خلال المشتق الجزئي لـ $\overline{P}$ بالنسبة إلى b_1 بافتراض ثبات بقية المعاملات.

$$\frac{\partial \overline{P}}{\partial b_1} = -\frac{a_0 + b_0}{(a_1 + b_1)^2} \prec 0$$

وكما نلاحظ فإن هذا المشتق سالب، فالعلاقة بينهما عكسية، أي إنه فيما إذا ازداد b_1 بمقدار وحدة واحدة فإن $\overline{P}$ سينخفض بمقدار $\frac{a_0+b_0}{(a_1+b_1)^2}$ وحدة.

الآن ندرس تأثير نفس هذه المعاملات الأربعة على الكمية التوازنية.

1. تأثير تغير a_0 على $\overline{X}$ من خلال المشتق الجزئي لـ $\overline{X}$ بالنسبة إلى a_0 بافتراض ثبات بقية المعاملات.

$$\frac{\partial \overline{X}}{\partial a_0} = \frac{b_1}{(a_1+b_1)} \succ 0$$

وكما نلاحظ فإن هذا المشتق موجب، فالعلاقة بينهما طردية، أي إنه فيما إذا تغير a_0 بمقدار وحدة واحدة فإن $\overline{X}$ سيتغير بمقدار $\frac{b_1}{(a_1+b_1)}$ وحدة وبنفس الاتجاه.

2. تأثير تغير a_1 على $\overline{X}$ من خلال المشتق الجزئي لـ $\overline{X}$ بالنسبة إلى a_1 بافتراض ثبات بقية المعاملات.

$$\frac{\partial \overline{X}}{\partial a_1} = -\frac{b_1(b_0+a_0)}{(a_1+b_1)^2} \prec 0$$

وكما نلاحظ فإن هذا المشتق سالب، فالعلاقة بينهما عكسية، أي إنه فيما إذا ازداد a_1 بمقدار وحدة واحدة فإن $\overline{X}$ سينخفض بمقدار $\frac{b_1(b_0+a_0)}{(a_1+b_1)^2}$ وحدة.

3. تأثير تغير b_0 على $\overline{X}$ من خلال المشتق الجزئي لـ $\overline{X}$ بالنسبة إلى b_0 بافتراض ثبات بقية المعاملات.

$$\frac{\partial \overline{X}}{\partial b_0} = -\frac{a_1}{(a_1+b_1)} \prec 0$$

وكما نلاحظ فإن هذا المشتق سالب، فالعلاقة بينهما عكسية، أي إنه فيما إذا ازداد b_0 بمقدار وحدة واحدة فإن $\overline{X}$ سينخفض بمقدار $\frac{a_1}{(a_1+b_1)}$.

4. تأثير تغير b_1 على $\overline{X}$ من خلال المشتق الجزئي لـ $\overline{X}$ بالنسبة إلى b_1 بافتراض ثبات بقية المعاملات.

$$\frac{\partial \overline{X}}{\partial b_1} = \frac{a_1(a_0 + b_0)}{(a_1 + b_1)^2} \succ 0$$

وكما نلاحظ فإن هذا المشتق موجب، فالعلاقة بينهما طردية، أي إنه فيما إذا تغير b_1 بمقدار وحدة واحدة فإن $\overline{X}$ سيتغير بمقدار $\frac{a_1(a_0 + b_0)}{(a_1 + b_1)^2}$ وحدة وفي الاتجاه نفسه.

المحور السادس

تطبيقات حول الفصل الأول

حالة في م نقل 1

أوجد سعر التوازن وكمية التوازن وارسم تابعي العرض والطلب في النموذج التوازني الآتي:

$$D_X = 20 - 7P$$

$$S_X = -4 + 5P$$

الحل:

$$D_X = S_X$$

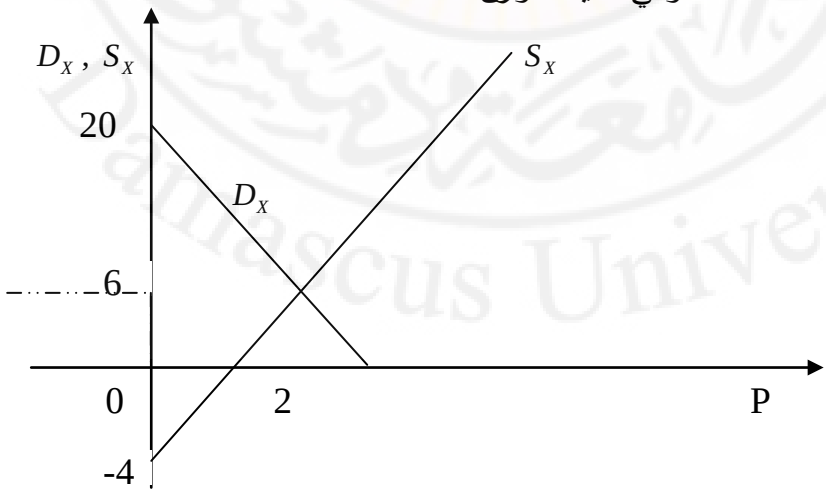
$$20 - 7\,P = -\,4 + 5P$$

$$24 = 12\,P$$

$$\Rightarrow \overline{P} = 2$$ وهو سعر التوازن

نعوض السعر التوازني في تابع الطلب:

$$\overline{X} = 20 - 14 = 6$$ وهي كمية التوازن



التمرين رقم 2

أوجد سعر التوازن وكمية التوازن وارسم تابعي العرض والطلب في النموذج التوازني الآتي:

$$D_X = 26 - 4P$$

$$S_X = -6 + 4P$$

الحل:

$$D_X = S_X$$

$$\Rightarrow \overline{P} = 4$$ وهو سعر التوازن

نعوض السعر التوازني في تابع الطلب:

$$\overline{X} = 26 - 16 = 10$$ وهي كمية التوازن

ويمكن إتباع طريقة المصفوفات في حل هذا التمرين وذلك كالآتي:

شرط التوازن: $D_X = S_X$

تابع الطلب: $D_X = 26 - 4P$

تابع العرض: $S_X = -6 + 4P$

نعيد ترتيب معادلات النموذج و نصوغها بشكل جملة معادلات خطية:

$$D_X - S_X = 0$$

$$D_X - 26 + 4P = 0$$

$$S_X + 6 - 4P = 0$$

$$1D_X - 1S_X + 0P = 0$$

$$1D_X + 0S_X + 4P = 26$$

$$0D_X + 1S_X - 4P = -6$$

نكتب هذه المعادلات بالشكل المصفوفي:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_X \\ S_X \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 26 \\ -6 \end{bmatrix}$$

وبشكل مختصر:

$$[A][X] = [B]$$

وبما أن المجهول هنا هو قيم الشعاع X فنعيد كتابة المعادلة كما يلي:

$$X = A^{-1}B$$

ومن أجل إيجاد مقلوب المصفوفة A^{-1} نحسب محددة المصفوفة، والمصغرات، والمصفوفة المساعدة:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\tilde{A}`$$

وتكون محددة المصفوفة A:

$$|A| = 1\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = -4 - 4 = -8$$

وبما أن $|A| \neq 0$ فهناك حل وحيد والمصفوفة غير شاذة:

نحسب مصفوفة المصغرات والعوامل المشاركة:

$$A` = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & \pm 4 & 1 \\ \mp 4 & -4 & \mp 1 \\ -4 & \mp 4 & 1 \end{bmatrix}$$

ندور مصفوفة المصغرات فنحصل على المصفوفة المساعدة:

$$\tilde{A}` = \begin{bmatrix} -4 & -4 & -4 \\ 4 & -4 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

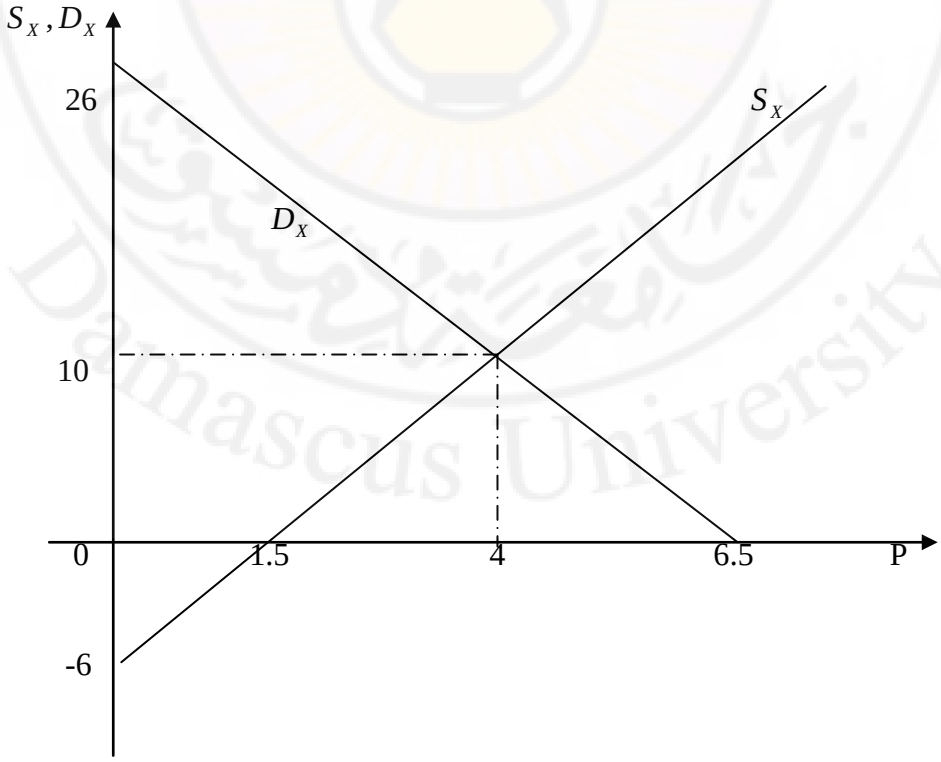
نوجد مقلوب المصفوفة:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\tilde{A}`$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{8}\begin{bmatrix} -4 & -4 & -4 \\ 4 & -4 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$
$$X = A^{-1}B$$

$$\begin{bmatrix} D_X \\ S_X \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} o.5 & o.5 & o.5 \\ -o.5 & o.5 & o.5 \\ -0.125 & 0.125 & -0.125 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 26 \\ -6 \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} D_X \\ S_X \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 4 \end{bmatrix}$$

وكما نلاحظ فقد حصلنا على القيم التوازنية التي تمثل حل هذا النموذج وهي نفس النتيجة التي حصلنا عليها بالطريقة السابقة.



تطبيق في مقرر 3

أوجد سعر وكمية التوازن رياضياً وبيانياً:

$$D_X = 7 - 3P^2$$

$$S_X = -2 + 6P$$

الحل:

$$D_X = S_X$$

$$7 - 3\,P^2 = -\,2 + 6P$$

$$3\,P^2 + 6P - 9 = 0$$

$$\Delta = B^2 - 4AC$$

$$= 36 - 4(3)(-9) = 144$$

$$\sqrt{\Delta} = 12$$

$$\overline{P} = \frac{-6 \mp 12}{6}$$

وبذلك نحصل على الحلين:

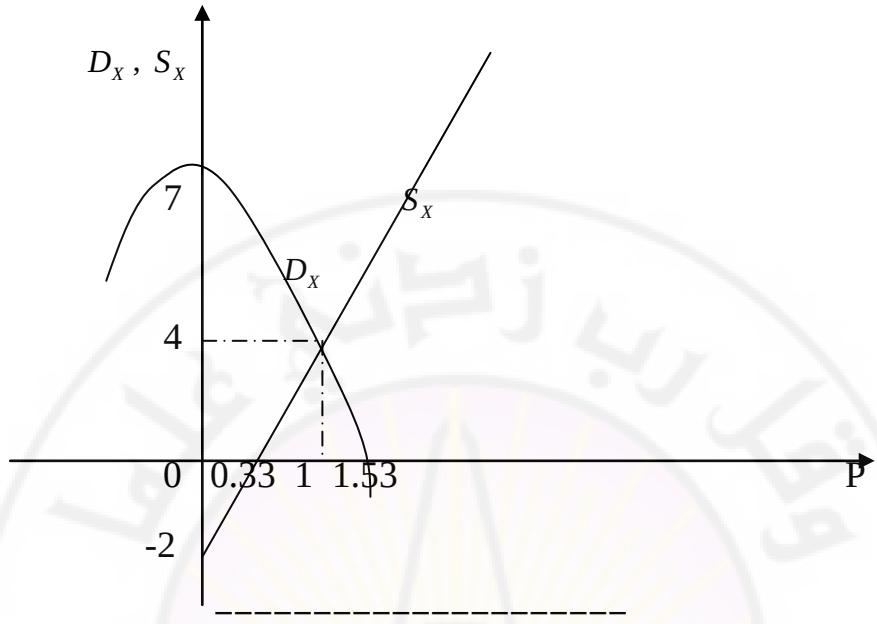
$$\Rightarrow \overline{P_1} = -3$$

$$\Rightarrow \overline{P_2} = 1$$

إن الحل الأول $\overline{P_1} = -3$ هو حل غير اقتصادي لأن السعر لا يمكن أن يكون سالباً ولذلك فهو مرفوض، ولذلك نعتمد على الحل الثاني ونعدّه السعر التوازني $\overline{P_2} = 1$.

ونعوض السعر التوازني في تابع الطلب فنجد أن:

$\overline{X} = 4$ وهي كمية التوازن



حالة في م نقل 4

لدينا تابعي العرض والطلب التاليين على إحدى السلع:

$$D_X = 8 - 2P$$

$$S_X = -2 + 3P$$

حالة مركبة 1:

1. احسب سعر وكمية التوازن رياضياً وبيانياً قبل وبعد فرض ضريبة نوعية مقدارها 2 وحدة نقدية على كل وحدة سلعية مباعة، مع تفسير التغيرات الحاصلة في سعر وكمية التوازن.

2. احسب مرونة الطلب السعرية عند سعر التوازن قبل فرض الضريبة وذلك بتطبيق جميع العلاقات الممكنة.

3. بيِّن – من خلال مقارنة مرونة الطلب مع مرونة العرض السعرية من جهة أولى، وعب ء الضريبة على المستهلك والمنتج من جهة ثانية – ما إذا كان المستهلك أم المنتج سيتحمل العبء الأكبر من ضريبة الإنتاج النوعية

الحل:

1) لإيجاد سعر التوازن نضع:

$$D_X = S_X$$

$$8 - 2P = -2 + 3P$$

$$10 = 5P$$

$$\Rightarrow \overline{P} = 2 \qquad \text{وحدة نقدية}$$

وهو سعر التوازن قبل فرض الضريبة

نعوض السعر التوازني في تابع الطلب:

$$\overline{X} = 8 - 4 = 4 \qquad \text{وحدة سلعية}$$

وهي كمية التوازن قبل فرض ضريبة الإنتاج النوعية.

أما بعد فرض ضريبة نوعية فيكون:

$$t = 2$$

$$S_X = -2 + 3(P - 2)$$

$$S_X = -2 - 6 + 3P$$

$$D_X = S_X$$

$$8 - 2P = -8 + 3P$$

$$16 = 5p \Rightarrow \overline{P} = 3.2 \qquad \text{وحدة نقدية}$$

وهو سعر التوازن الجديد بعد فرض الضريبة النوعية.

$\Rightarrow \overline{X} = 1.6$ وحدة سلعية

وهي كمية التوازن بعد فرض ضريبة الإنتاج النوعية.

نلاحظ أنه بعد فرض ضريبة الإنتاج النوعية فقد حصل أثران:

<u>أ. الإلغاء:</u> هو ارتفاع السعر التوازني من 2 إلى 3.2 وحدة نقدية، أي إن الزيادة في السعر التوازني تعادل $\frac{d}{d+b}(t)$ أي إن:

$\frac{3}{3+2}(2) = 0.6(2) = 1.2$ وحدة نقدية

وهذا يعني أن ما نسبته 0.6 من الضريبة يعكسها المنتج على المستهلك في شكل ارتفاع في سعر السلعة المباعة.

<u>ب. التقصي:</u> هو انخفاض الكمية التوازنية من 4 إلى 1.6 وحدات سلعية، وهذا الانخفاض يعادل $-\frac{bd}{d+b}(t)$

$-\frac{(2)(3)}{5}(2) \Rightarrow -1.2(2) = -2.4$ وحدة سلعية

أي إن انخفاض كمية التوازن يعادل ما نسبته 1.2 مثل من أمثال الضريبة.

2) أ. المرونة = المشتق * المتحول / التابع:

$$E_{D_X / P} = -2\frac{2}{4} = -1$$

ب. المرونة = القيمة الحدية للطلب (الطلب الحدي) / القيمة الوسطية للطلب:

$$E_{D_X/P} = \frac{-2}{\frac{8-2(2)}{2}} = -1$$

ج. المرونة = نسبة تغير التابع / نسبة تغير المتحول:

$$E_{D_X/P} = \frac{\Delta X / X}{\Delta P / P} = \frac{\frac{X_1 - X_2}{X_1}}{\frac{P_1 - P_2}{P_1}} = \frac{\frac{4-1.6}{4}}{\frac{2-3.2}{2}} = \frac{0.6}{-0.6} = -1$$

وهذا يعني أنه فيما إذا ارتفع سعر السلعة بنسبة 1% فإن الطلب على هذه السلعة سوف ينخفض بنسبة 1% أي إن مرونة الطلب متكافئة. وفي مثالنا نجد أن السعر ارتفع من 2 إلى 3.2 وحدة نقدية أي بنسبة $\frac{3.2-2}{2} = 0.6$ ، وكذلك نجد أن الطلب انخفض من 4 إلى 1.6 وحدة سلعية أي أنه أيضاً انخفض بنسبة مكافئة $\frac{1.6-4}{4} = -0.6$، ولذلك فإن مرونة الطلب السعرية تعادل 1-

3) مرونة العرض السعرية:

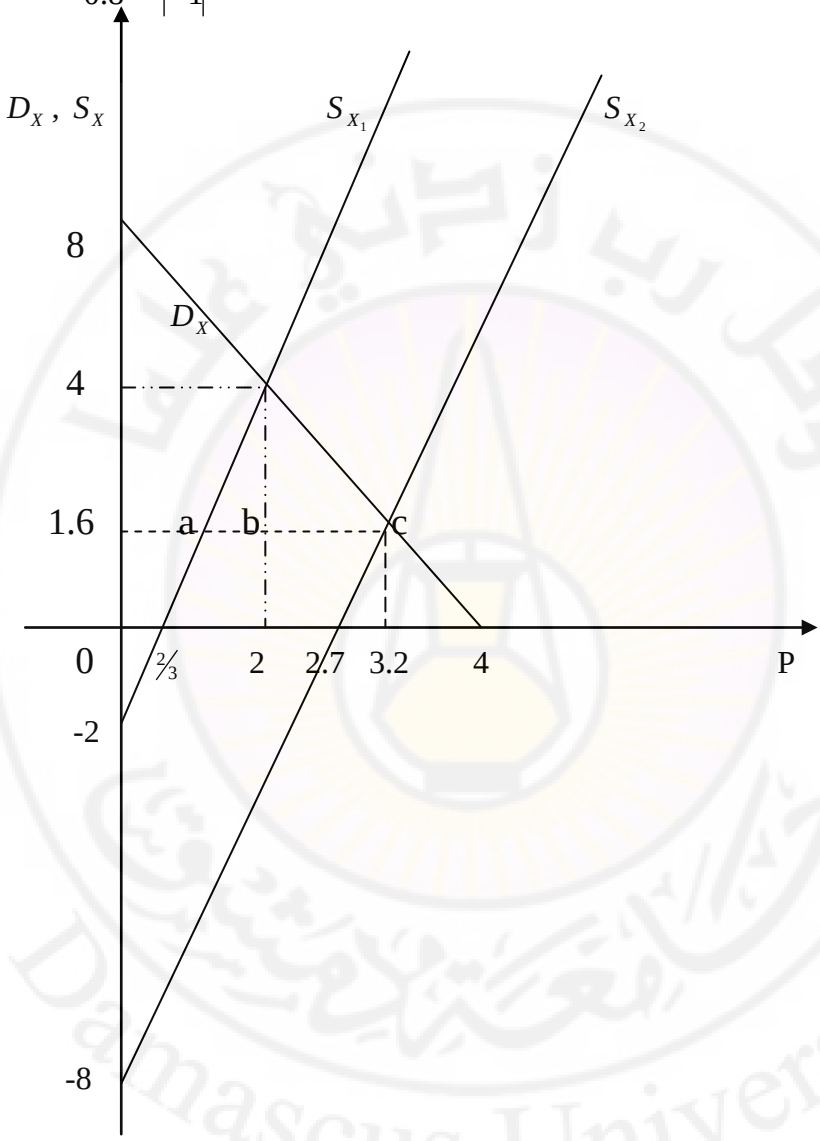
$$E_{S_X/P} = 3\frac{2}{4} = 1.5 \qquad [1]$$

$$E_{S_X/P} = \frac{3}{2} = 1.5 \qquad [2]$$

وبما أن مرونة العرض السعرية 1.5 هي أكبر من مرونة الطلب السعرية $|-1|$ ، فإن المستهلك يتحمل الجزء الأكبر من الضريبة، حيث إننا رأينا أن السعر ارتفع بمقدار 1.2 وحدة نقدية، وهذا هو الجزء الأكبر من الضريبة البالغة 2 وحدة نقدية.

أي إن العلاقة بين المرونات والأعباء الضريبية تكون:

$$\frac{1.2}{0.8}=\frac{1.5}{|-1|}=1.5$$ مرة



نلاحظ على الشكل أن العبء الذي يتحمله المنتج يتمثل بالمسافة ab وهو يعادل 0.8 وحدة نقدية، بينما العبء الذي يتحمله المستهلك يتمثل بالمسافة bc وهو يعادل 1.2 وحدة نقدية.

تمرين 5

إذا كان لدينا تابعي العرض والطلب كما في التمرين السابق وفرضنا أن الدولة فرضت ضريبة إنتاج قيمية بمعدل 33.3% من سعر السلعة المباعة.

المطلوب 1:

احسب السعر والكمية التوازنية رياضياً وبيانياً قبل وبعد فرض الضريبة.

الحل:

لدينا من التمرين السابق أن سعر وكمية التوازن هما:

$$(\overline{p}, \overline{X}) = (2,4)$$

$$P^R = P\,(1 - r)$$

$$S_X = -2 + 3\,P^R$$

$$S_X = -2 + 3\,P\,(1 - 0.333)$$

$$S_X = -2 + 2\,P$$

$$D_X = S_X$$

$$8 - 2\,P = -2 + 2\,P$$

$$10 = 4\,P$$

$$\Rightarrow \overline{P} = 2.5 \qquad \text{وحدة نقدية}$$

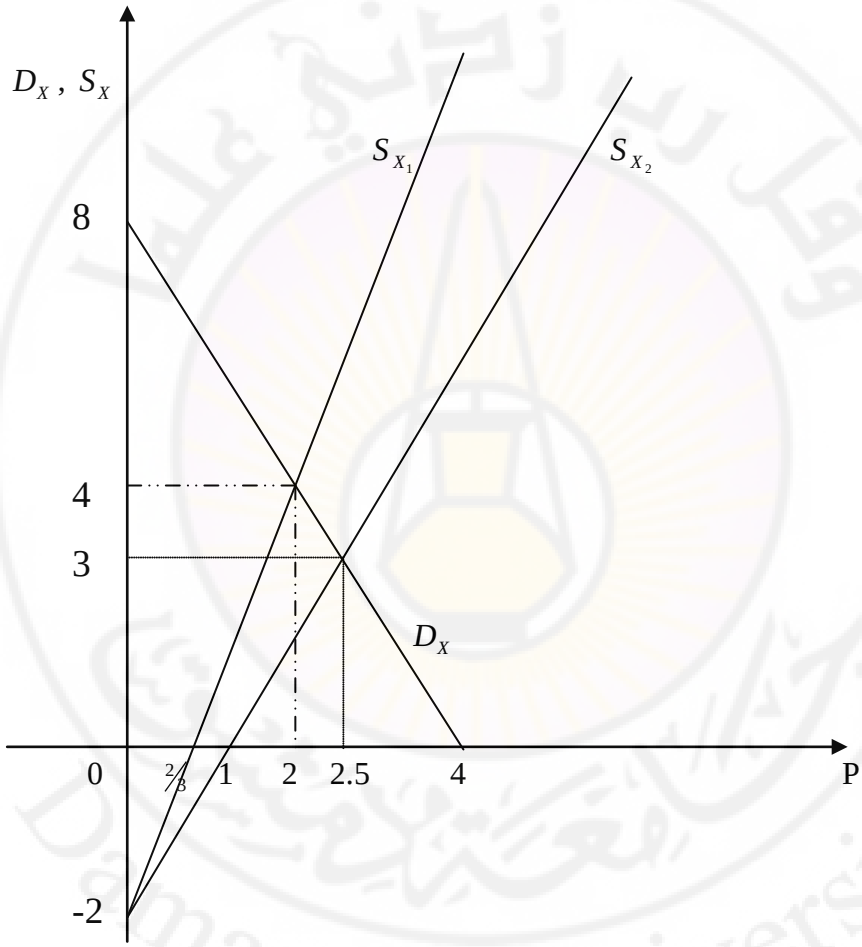
وهو سعر التوازن الجديد بعد فرض الضريبة.

نعوض السعر التوازني في تابع الطلب:

$$\overline{X} = 8 - 5 = 3 \qquad \text{وحدة سلعية}$$

وهي كمية التوازن بعد فرض ضريبة الإنتاج القيمية.

أي إن فرض ضريبة الإنتاج القيمية أدت إلى رفع سعر التوازن وإلى انخفاض كمية التوازن.



تطبيق في الفصل 6

لدينا النموذج التوازني التالي كما في التمرين رقم 2

$$D_X = 26 - 4P$$

$$S_X = -6 + 4P$$

حيث وجدنا أن القيم التوازنية هي:

$$\overline{P} = 4 \ , \ \overline{X} = 10$$

المطلوب 1:

1. أوجد سعر وكمية التوازن بعد فرض ضريبة نوعية مقدارها 3 ل.س على كل وحدة مباعة مع الشرح والتوضيح البياني.
2. أوجد سعر وكمية التوازن بعد فرض ضريبة قيميه مقدارها 20% من سعر كل وحدة مباعة مع الشرح والتوضيح البياني. ثم أعد الطلب بطريقة المصفوفات.
3. أعد الطلب الأول باستخدام طريقة المصفوفات.

الحل:

1) لإيجاد سعر التوازن نضع:

t = 3

$$S_X = -6 + 4(P - 3)$$

$$S_X = -18 + 4P$$

$$D_X = S_X$$

$$26 - 4\,P = -18 + 4\,P$$

$44 = 8\ p \Rightarrow \overline{P} = 5.5$ وحدة نقدية

وهو سعر التوازن الجديد بعد فرض الضريبة النوعية.

$\Rightarrow \overline{X} = -18 + 4(5.5) = 4$ وحد سلعية

وهي كمية التوازن بعد فرض ضريبة الإنتاج النوعية.

نلاحظ أنه بعد فرض ضريبة الإنتاج النوعية فقد حصل أثران:

<u>أولاً:</u> هو ارتفاع السعر التوازني من 4 إلى 5.5 وحدة نقدية، أي إن الزيادة في السعر التوازني تعادل $\frac{b_1}{b_1 + a_1}(t)$ أي إن:

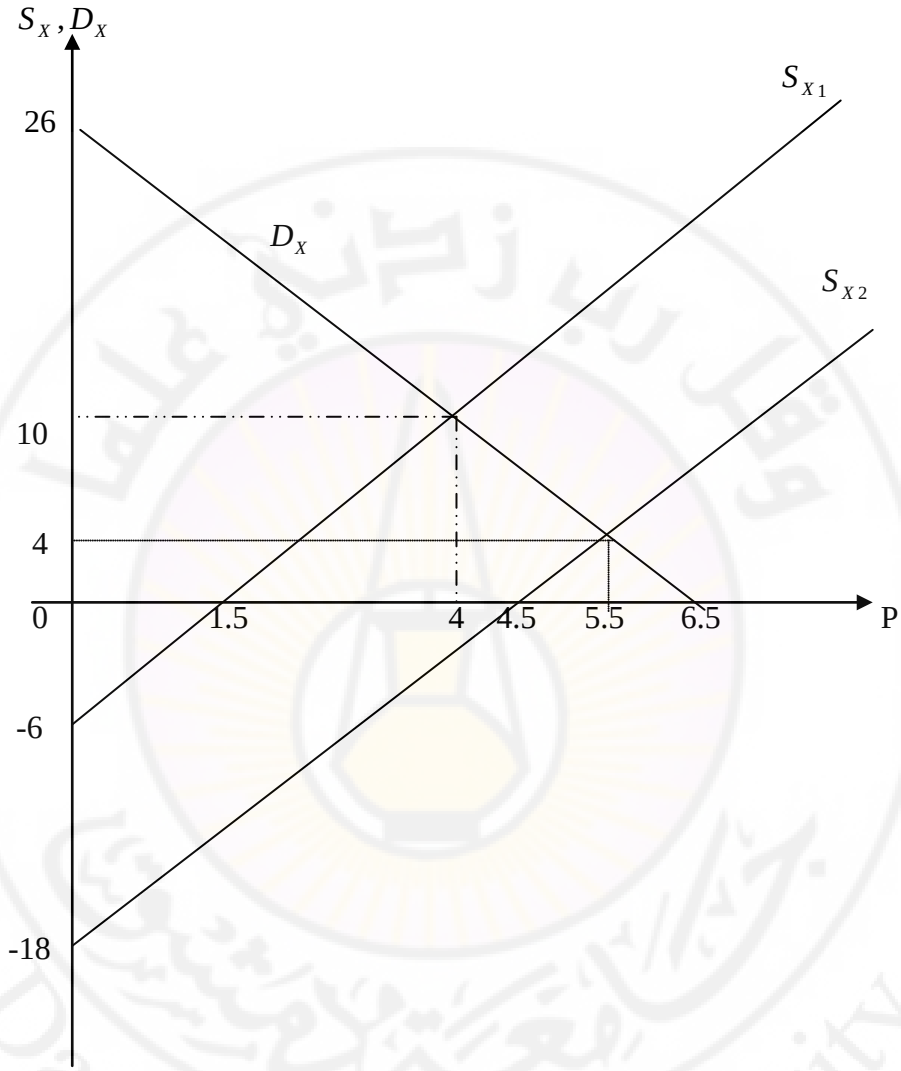
$\frac{4}{4+4}(3) = 0.5(3) = 1.5$ وحدة نقدية

وهذا يعني أن ما نسبته 0.5 من الضريبة يعكسها المنتج على المستهلك في شكل ارتفاع في سعر السلعة المباعة.

<u>ثانياً:</u> هو انخفاض الكمية التوازنية من 10 إلى 4 وحدات سلعية، وهذا الانخفاض يعادل $-\frac{a_1 b_1}{b_1 + a_1}(t)$

$-\frac{(4)(4)}{8}(3) \Rightarrow -2(3) = -6$ وحدة سلعية

أي إن انخفاض كمية التوازن يعادل مثلي مقدار الضريبة.



2) لإيجاد سعر التوازن نضع:

r = 0.2

$$S_X = -6 + 4P(1 - 0.2)$$

$$S_X = -6 + 3.2P$$

$$D_X = S_X$$

$26 - 4P = -6 + 3.2P$

$32 = 7.2p \Rightarrow \overline{P} = 4.45$ وحدة نقدية

وهو سعر التوازن الجديد بعد فرض الضريبة القيمية.

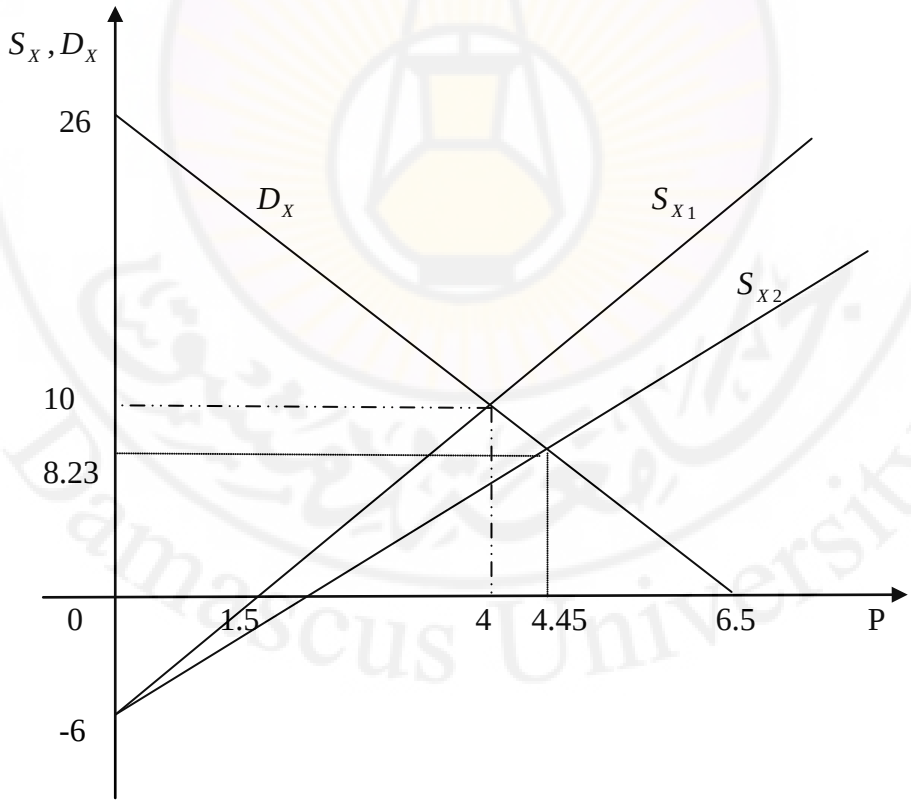
$\Rightarrow \overline{X} = -6 + 3.2(4.45) = 8.24$ وحد سلعية

وهي كمية التوازن بعد فرض ضريبة الإنتاج القيمية.

نلاحظ أنه بعد فرض ضريبة الإنتاج القيمية فقد حصل أثران:

أولاً: هو ارتفاع السعر التوازني من 4 إلى 4.45 وحدة نقدية،

ثانياً: هو انخفاض الكمية التوازنية من 10 إلى 8.23 وحدة سلعية.



إعادة الطلب 2 بطريقة المصفوفات:

$$1D_X - 1S_X + 0P = 0$$

$$1D_X + 0S_X + 4P = 26$$

$$0D_X + 1S_X - 3.2P = -6$$

نكتب هذه المعادلات بالشكل المصفوفي:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -3.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_X \\ S_X \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 26 \\ -6 \end{bmatrix}$$

وبشكل مختصر:

$$[A][X] = [B]$$

وبما أن المجهول هنا هو قيم الشعاع X فنعيد كتابة المعادلة كما يلي:

$$X = A^{-1}B$$

ومن أجل إيجاد مقلوب المصفوفة A^{-1} نحسب محددة المصفوفة، والمصغرات، والمصفوفة المساعدة:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\tilde{A}`$$

وتكون محددة المصفوفة A: $|A| = -7.2$

وبما أن $|A| \neq 0$ فهناك حل وحيد:

ندور المصفوفة A:

$$A' \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -3.2 \end{bmatrix}$$

نحسب مصفوفة المصغرات والعوامل المشاركة فنحصل على المصفوفة المساعدة:

$$\tilde{A}`=\begin{bmatrix} +\begin{vmatrix}0 & 1\\ 4 & -3.2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 0 & -3.2\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 0 & 4\end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix}1 & 0\\ 4 & -3.2\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & -3.2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 4\end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{vmatrix} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4 & -3.2 & -4\\ 3.2 & -3.2 & -4\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

نوجد مقلوب المصفوفة:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\tilde{A}`$$

$$A^{-1}=-\frac{1}{7.2}\begin{bmatrix}-4 & -3.2 & -4\\ 3.2 & -3.2 & -4\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

$$X=A^{-1}B$$

$$\begin{bmatrix}D_X\\ S_X\\ P\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}o.5556 & o.4445 & o.5556\\ -o.4445 & o.4445 & o.5556\\ -0.1389 & 0.1389 & -0.1389\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 26\\ -6\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}D_X\\ S_X\\ P\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8.2234\\ 8.2234\\ 4.4448\end{bmatrix}$$

وهي نفس النتيجة السابقة.

3) إعادة الطلب 1 بطريقة المصفوفات:

$$D_X - S_X = 0$$

$$D_X - 26 + 4P = 0$$

$$S_X + 18 - 4P = 0$$

$$1D_X - 1S_X + 0P = 0$$

$$1D_X + 0S_X + 4P = 26$$

$$0D_X + 1S_X - 4P = -18$$

نكتب هذه المعادلات بالشكل المصفوفي:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_X \\ S_X \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 26 \\ -18 \end{bmatrix}$$

وبشكل مختصر:

$$[A][X] = [B]$$

وبما أن المجهول هنا هو قيم الشعاع X فنعيد كتابة المعادلة كما يلي:

$$X = A^{-1}B$$

ومن أجل إيجاد مقلوب المصفوفة A^{-1} نحسب محددة المصفوفة، والمصغرات، والمصفوفة المساعدة:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\tilde{A}`$$

وتكون محددة المصفوفة A: $|A| = -8$

وبما أن $|A| \neq 0$ فهناك حل وحيد:

نحسب مصفوفة المصغرات والعوامل المشاركة:

$$A`=\begin{bmatrix} \begin{vmatrix}0 & 4\\ 1 & -4\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 4\\ 0 & -4\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix}-1 & 0\\ 1 & -4\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & -4\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix}-1 & 0\\ 0 & 4\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 4\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -4 & \pm 4 & 1 \\ \mp 4 & -4 & \mp 1 \\ -4 & \mp 4 & 1 \end{bmatrix}$$

ندور مصفوفة المصغرات فنحصل على المصفوفة المساعدة:

$$\tilde{A}`=\begin{bmatrix} -4 & -4 & -4 \\ 4 & -4 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

نوجد مقلوب المصفوفة:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\tilde{A}`$$

$$A^{-1}=-\frac{1}{8}\begin{bmatrix} -4 & -4 & -4 \\ 4 & -4 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X=A^{-1}B$$

$$\begin{bmatrix} D_X \\ S_X \\ P \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} o.5 & o.5 & o.5 \\ -o.5 & o.5 & o.5 \\ -0.125 & 0.125 & -0.125 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 26 \\ -18 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} D_X \\ S_X \\ P \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 5.5 \end{bmatrix}$$

3) وبترتيب مختلف:

$$1D_X - 1S_X + 0P = 0$$

$$1D_X + 0S_X + 4P = 26$$

$$0D_X + 1S_X - 4P = -18$$

نكتب هذه المعادلات بالشكل المصفوفي:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_X \\ S_X \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -18 \\ 26 \end{bmatrix}$$

وبشكل مختصر:

$$[A][X] = [B]$$

وبما أن المجهول هنا هو قيم الشعاع X فنعيد كتابة المعادلة كما يلي:

$$X = A^{-1}B$$

ومن أجل إيجاد مقلوب المصفوفة A^{-1} نحسب محددة المصفوفة، والمصغرات، والمصفوفة المساعدة:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\tilde{A}`$$

وتكون محددة المصفوفة A: $|A| = 8$

وبما أن $|A| \neq 0$ فهناك حل وحيد:

ندور المصفوفة A:

$$A` \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 4 \end{bmatrix}$$

نحسب مصفوفة المصغرات والعوامل المشاركة فنحصل على المصفوفة المساعدة:

$$\tilde{A}`=\begin{bmatrix} +\begin{vmatrix}1 & 0\\ -4 & 4\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 0 & 4\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 0 & -4\end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix}0 & 1\\ -4 & 4\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 4\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & -4\end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{vmatrix} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 4 & 4\\ -4 & 4 & 4\\ -1 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

نوجد مقلوب المصفوفة:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\tilde{A}`$$

$$A^{-1}=\frac{1}{8}\begin{bmatrix}4 & 4 & 4\\ -4 & 4 & 4\\ -1 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

$$X=A^{-1}B$$

$$\begin{bmatrix}D_X\\ S_X\\ P\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}o.5 & o.5 & o.5\\ -o.5 & o.5 & o.5\\ -0.125 & -0.125 & 0.125\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ -18\\ 26\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}D_X\\ S_X\\ P\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\ 4\\ 5.5\end{bmatrix}$$

وهي نفس النتيجة السابقة.

مثال لفرض نقل 7 (1)

لدينا تابعي العرض والطلب التاليين على إحدى السلع:

$$D_X = 18 - 2P$$

$$S_X = -2 + 2P$$

فإذا قررت الحكومة جبي ضريبة مقدارها t على كل وحدة من الناتج المباع.

المطلوب:

1. ما هي القيمة التي تأخذها t لكي يكون الدخل الذي تحققه الحكومة من جراء فرض الضريبة على السلعة أعظمياً.
2. احسب سعر وكمية التوازن قبل وبعد فرض الضريبة، ثم اكتب تابع العرض بعد فرض الضريبة.

الحل:

1) $D_X = S_X$

$$18 - 2P = -2 + 2(P - t)$$

$$\Rightarrow \overline{P} = \frac{20 + 2t}{4}$$

وهو سعر التوازن بعد فرض الضريبة

نعوض السعر التوازني في تابع الطلب:

$$\overline{X} = 18 - 2\frac{20 + 2t}{4} = 8 - t$$ وحد سلعية

وهي كمية التوازن بعد فرض ضريبة الإنتاج.

وبتبديل $\overline{X}$ في تابع الضريبة:

$$T = t\overline{X} = 8t - t^2$$

---

(1) د. ممدوح الخطيب الكسواني: الاقتصاد الرياضي، مرجع سبق ذكره، ص 139.

$T` = 8 - 2t = 0$

$\Rightarrow \bar{t} = 4$

$T`` = -2 \prec 0$

إذاً إن $t = 4$ هي مقدار الضريبة الذي يعظم حصيلتها والتي تبلغ:

$T = 16$

2) لإيجاد السعر قبل فرض الضريبة:

$D_X = S_X$

18 –2 P = - 2 + 2 P

$\Rightarrow \overline{P} = 5$

وهو سعر التوازن قبل الضريبة.

$\Rightarrow \overline{X} = 8$

وهي كمية التوازن قبل الضريبة.

أما بعد فرض الضريبة فنجد أن:

$$\overline{P} = \frac{20 + 2\bar{t}}{4} = \frac{20 + 2(4)}{4} = 7$$

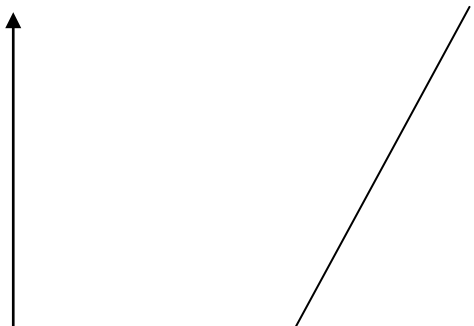
وهو سعر التوازن بعد الضريبة.

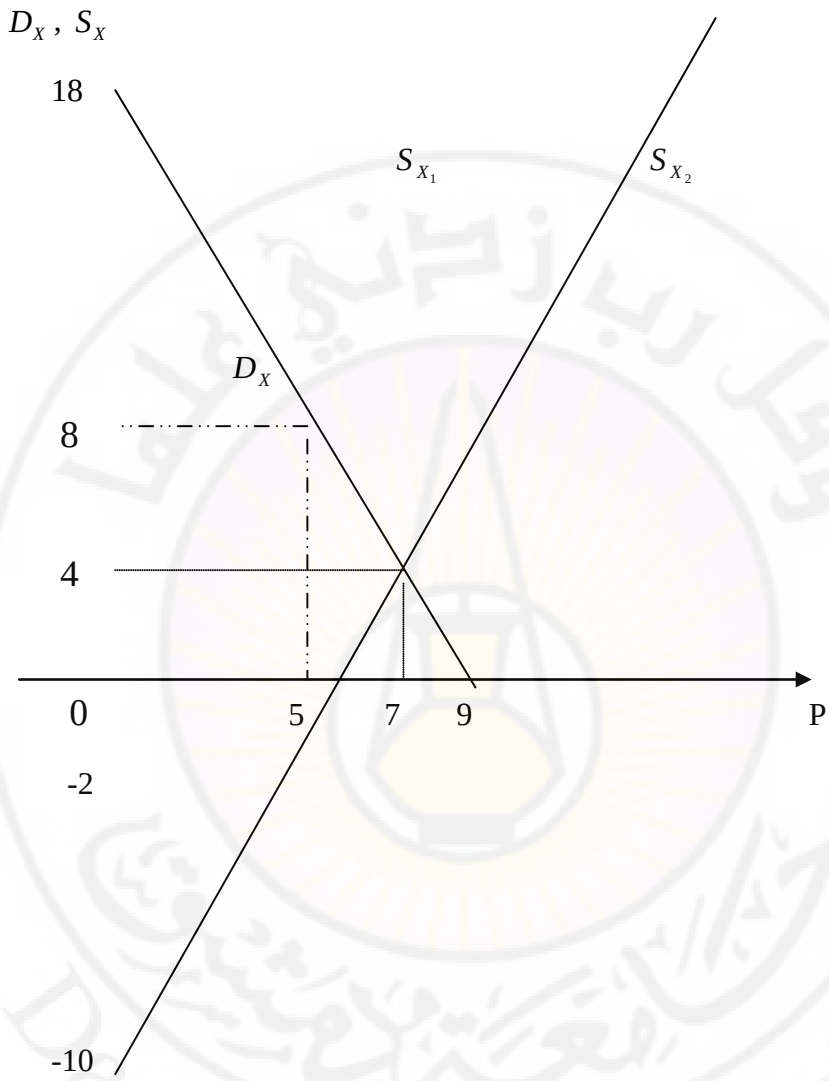
$\Rightarrow \overline{X} = 4$

وهي كمية التوازن بعد الضريبة.

أما تابع العرض بعد الضريبة فهو:

$$X_S = -2 + 2P - 2\bar{t} = -2 + 2P - 8 = -10 + 2P = 4$$





الحالة الثانية: نقص 8 [1]

[1] . الاقتصاد الرياضي: خضور + الصفدي، جامعة دمشق 1996، ص 374.

لنفرض أن منشأة تعمل في ظروف احتكارية، وأن تابعي التكلفة والسعر هما:

$$C = 2Y^2 + 4Y + 4$$

$$P = 40 - 4Y$$

المطلوب:

1. أوجد مستوى الإنتاج الذي يعظم الدخل، والدخل الأعظمي.
2. أحسب التكلفة الكلية والوسطية عند مستوى الإنتاج المحسوب
3. أوجد حصيلة الضريبة النوعية العظمى على الإنتاج.
4. احسب حجم الربح الأعظمي للمنشأة بعد فرض الضريبة
5. أوجد سعر الوحدة الواحدة عند مستوى الإنتاج الذي يعظم الربح.

الحل:

1) إن دالة الدخل هي:

$$R = PY$$

$$= 40Y - 4Y^2$$

$$R` = -8Y + 40 = 0$$

$$\Rightarrow Y = 5$$

$$R`` = -8 \prec 0$$

$$R = 40(5) - 4(5)^2 = 100$$

2) التكلفة الكلية والتكلفة الوسطية:

$$C = 2(5)^2 + 4(5) + 4 = 74$$

$$\frac{C}{Y} = \frac{74}{5} = 14.8$$

3) تابع التكلفة بعد الضريبة: $C = 2Y^2 + 4Y + 4 + tY$

$$\Pi = R - C$$

$$\Pi = 40Y - 4Y^2 - (2Y^2 + 4Y + 4 + tY)$$

$$\Pi = -6Y^2 + (36 - t)Y - 4$$

الشرط الأول لتحقيق الربح الأعظمي هو:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial Y} = -12Y + (36 - t) = 0$$

$$Y = \frac{36 - t}{12}$$

$$T = tY = \frac{36t - t^2}{12}$$

لتعظيم حصيلة الضريبة نقوم بـ:

الشرط الأول:

$$T` = \frac{36 - 2t}{12} = 0$$

$$\Rightarrow t = 18$$

الشرط الثاني:

$$T`` = \frac{-2}{12} \prec 0$$

ويكون مستوى الإنتاج:

$$Y = \frac{36 - (18)}{12} = 1.5$$

وتكون الحصيلة الأعظمية للضريبة:

$$T = 18(1.5) = 27$$

4) الربح الأعظم:

$$\Pi_{\max} = -6(1.5)^2 + (36 - 18)1.5 - 4 = 9.5$$

5) سعر الوحدة:

$$p = 40 - 4(1.5) = 34$$

تمرين رقم 9

لدينا تابعي العرض والطلب كما في التمرين رقم 4:

$$D_X = 8 - 2P$$

$$S_X = -2 + 3P$$

المطلوب /:

1. احسب سعر وكمية التوازن رياضياً وبيانياً بعد تقديم إعانة إنتاج مقدارها 2 وحدة نقدية على كل وحدة سلعية مباعة، مع تفسير التغيرات الحاصلة في سعر وكمية التوازن.
2. احسب مرونة الطلب السعرية عند سعر التوازن قبل الإعانة بمختلف الطرق.
3. بيِّن – من خلال مقارنة مرونة الطلب مع مرونة العرض السعرية من جهة أولى، و نصيب المستهلك والمنتج من الإعانة من جهة ثانية – ما إذا كان المستهلك أم المنتج هو المستفيد الأكبر من هذه الإعانة.

الحل:

1) توصلنا سابقاً بحل التمرين إلى أن سعر وكمية التوازن قبل الإعانة تعادل $(\overline{P}, \overline{X}) = (2,4)$. أما بعد تقديم الإعانة فيكون:

e = 2

$$S_X = -2 + 3(P + 2)$$

$$S_X = -2 + 6 + 3P$$

$$D_X = S_X$$

$$8 - 2\,P = 4 + 3\,P$$

$$4 = 5\,p \Rightarrow \overline{P} = 0.8 \qquad \text{وحدة نقدية}$$

وهو سعر التوازن الجديد بعد تقديم إعانة الإنتاج.

$$\Rightarrow \overline{X} = 6.4 \qquad \text{وحد سلعية}$$

وهي كمية التوازن بعد تقديم إعانة الإنتاج.

نلاحظ أنه بعد تقديم إعانة الإنتاج فقد حصل أثران:

أ- الأثر: هو انخفاض السعر التوازني من 2 إلى 0.8 وحدة نقدية، أي إن الانخفاض في السعر التوازني يعادل $-\frac{b_1}{b_1 + a_1}(e)$ أي أن:

$$-\frac{3}{3+2}(2) = -0.6(2) = -1.2 \qquad \text{وحدة نقدية}$$

وهذا يعني أن ما نسبته 0.6 من الإعانة يستفيد منها المستهلك في شكل انخفاض في سعر السلعة المباعة.

ب- الأثر: هو ارتفاع الكمية التوازنية من 4 إلى 6.4 وحدات سلعية، وهذا الارتفاع يعادل $\frac{b_1 a_1}{b_1 + a_1}(e)$ أي:

$$\frac{(2)(3)}{5}(2) \Rightarrow 1.2(2) = 2.4 \qquad \text{وحدة سلعية}$$

أي أن ارتفاع كمية التوازن يعادل ما نسبته 1.2 مثل من أمثال الإعانة.

2) أ. المرونة = المشتق * المتحول / التابع:

$$E_{D_X/P} = -2\frac{2}{4} = -1$$

ب. المرونة = القيمة الحدية للطلب (الطلب الحدي) / القيمة الوسطية للطلب:

$$E_{D_X/P} = \frac{-2}{\frac{8-2(2)}{2}} = -1$$

ج. المرونة = نسبة تغير التابع / نسبة تغير المتحول:

$$E_{D_X/P} = \frac{\Delta X / X}{\Delta P / P} = \frac{\frac{X_1 - X_2}{X_1}}{\frac{P_1 - P_2}{P_1}} = \frac{\frac{4-6.4}{4}}{\frac{2-0.8}{2}} = \frac{-0.6}{0.6} = -1$$

وهذا يعني أنه فيما إذا انخفض سعر السلعة بنسبة 1% فإن الطلب على هذه السلعة سوف يرتفع بنسبة 1% أي إن مرونة الطلب متكافئة. وفي مثالنا نجد أن السعر انخفض من 2 إلى 0.8 وحدة نقدية أي بنسبة 0.6 ، وكذلك نجد أن الطلب ارتفع من 4 إلى 6.4 وحدة سلعية أي أنه ارتفع أيضاً بنسبة مكافئة 0.6، ولذلك فإن مرونة الطلب السعرية تعادل 1-

3) مرونة العرض السعرية:

$$E_{S_X/P} = 3\frac{2}{4} = 1.5 \qquad [1]$$

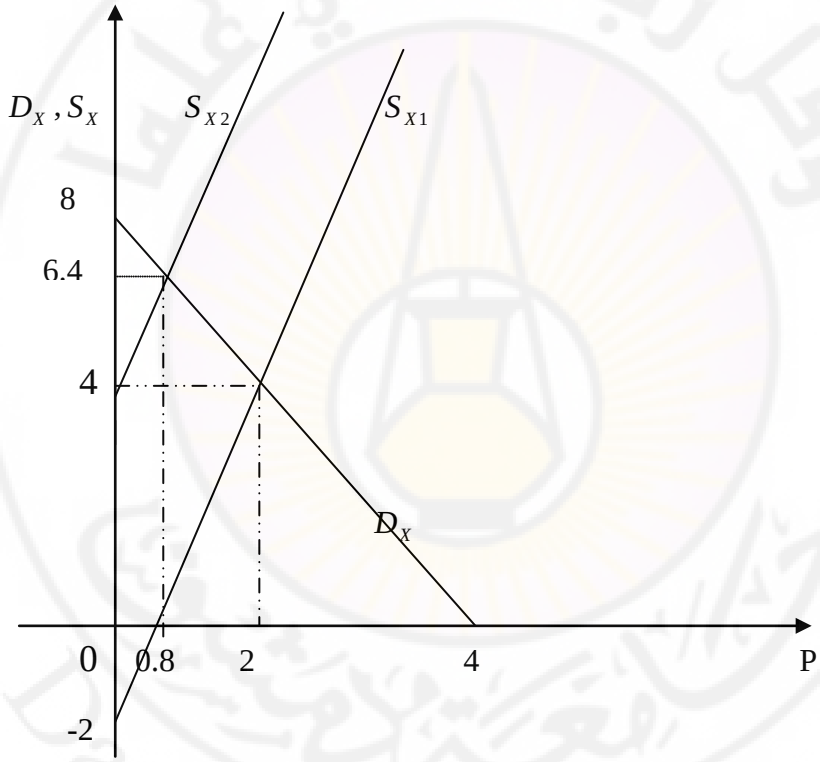
$$E_{S_X/P} = \frac{3}{2} = 1.5 \qquad [2]$$

وبما أن مرونة العرض السعرية 1.5 هي أكبر من مرونة الطلب السعرية $|-1|$ ، فإن المستهلك يستفيد من الجزء الأكبر من الإعانة، حيث إننا رأينا أن

السعر انخفض بمقدار 1.2 وحدة نقدية وهذا هو الجزء الأكبر من الإعانة البالغة 2 وحدة نقدية.

أي إن العلاقة بين المرونات وتوزيع الإعانة تكون:

$$\frac{1.2}{0.8}=\frac{1.5}{|-1|}=1.5$$ مرة



نلاحظ على الشكل أن محصلة ما يستفيده المنتج من الإعانة يتمثل بالمسافة 0.8 - 0 أي ما يعادل 0.8 وحدة نقدية. بينما ما يستفيده المستهلك يتمثل بالمسافة 2 - 0.8 أي ما يعادل 1.2 وحدة نقدية.

مثال لفي م نقل 10

لدينا النموذج التوازني التالي كما في التمرين رقم 2

$$D_X = 26 - 4P$$

$$S_X = -6 + 4P$$

حيث وجدنا أن القيم التوازنية هي:

$$\overline{P} = 4 \ , \ \overline{X} = 10$$

وبفرض أنه تغيرت قيمة الثابتين a_0 و a_1 لتصبحا: $a_0 = 13, a_1 = 2$

فما هو تأثير هذا التغير على السعر والكمية التوازنيين؟

الحل:

$$D_X = 13 - 2P$$

$$S_X = -6 + 4P$$

$$13 - 2P = -6 + 4P$$

$$13 + 6 = 4P + 2P$$

$$19 = 6P$$

$$\Rightarrow \overline{P} = 3.167$$ وهو سعر التوازن

نعوض السعر التوازني في تابع الطلب:

$$\overline{X} = 13 - 2(3.167) = 6.66$$ **هدى قلي بك تقوم**

أو بطريقة أخرى:

$$\overline{P} = \frac{a_0 + b_0}{(a_1 + b_1)} = \frac{13 + 6}{4 + 2} = \frac{19}{6} = 3.167$$

$$\overline{X} = \frac{a_0 b_1 - a_1 b_0}{(a_1 + b_1)} = \frac{13(4) - 2(6)}{4 + 2} = \frac{52 - 12}{6} = 6.66$$

وإذا فرضنا أن: $b_0 = -3$ و $a_1 = 2$ فيكون:

$$\overline{P} = \frac{a_0 + b_0}{(a_1 + b_1)} = \frac{26 + 3}{4 + 2} = 4.83$$

$$\overline{X} = \frac{a_0 b_1 - a_1 b_0}{(a_1 + b_1)} = \frac{26(2) - 4(3)}{4 + 2} = 6.66$$

الفصل الثاني

نماذج التوازن

في أسواق أكثر من سلعة واحدة

في الفصل السابق درسنا التوازن الجزئي على مستوى سلعة واحدة. الآن سندرس التوازن على مستوى سلعتين مترابطتين، ومن ثم نعمم المسألة على توازن أسواق n سلعة.

المبحث الأول

التوازن في سوقي سلعتين

في هذا النموذج نضع تابعي الطلب والعرض في السوق الأولى، وكذلك تابعي الطلب والعرض في السوق الثانية كالآتي:

السوق الأولى:

$$D_{X1} = a_0 + a_1P_1 + a_2P_2$$
$$S_{X1} = b_0 + b_1P_1 + b_2P_2$$
$$D_{X1} = S_{X1}$$

السوق الثانية:

$$D_{X2} = \propto_0 + \propto_1 P_1 + \propto_2 P_2$$
$$S_{X2} = \beta_0 + \beta_1P_1 + \beta_2P_2$$
$$D_{X2} = S_{X2}$$

من السوق الأولى والثانية نستنتج:

$$a_0 + a_1P_1 + a_2P_2 = b_0 + b_1P_1 + b_2P_2$$
$$\propto_0 + \propto_1 P_1 + \propto_2 P_2 = \beta_0 + \beta_1P_1 + \beta_2P_2$$
$$D_{X1} - S_{X1} = 0$$
$$D_{X2} - S_{X2} = 0$$
$$(a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)P_1 + (a_2 - b_2)P_2 = 0$$
$$(\propto_0 - \beta_0) + (\propto_1 - \beta_1)P_1 + (\propto_2 - \beta_2)P_2 = 0$$

حصلنا على معادلتين بمجهولين P_1 و P_2. بالحل المشترك لهاتين المعادلتين نحصل على الأسعار التوازنية، وبتعويضها في معادلة العرض أو الطلب نحصل على الكميات التوازنية.

وباستخدام طريقة المصفوفات يمكن أن نحصل على نفس النتيجة:

نكتب أولاً شرطي التوازن، ثم نضع تابعي الطلب؛ ومن ثم تابعي العرض فيكون لدينا ست معادلات كالآتي:

$$D_{X1} = S_{X1}$$
$$D_{X2} = S_{X2}$$

$$D_{X1} = a_0 + a_1 P_1 + a_2 P_2$$
$$D_{X2} = \propto_0 + \propto_1 P_1 + \propto_2 P_2$$
$$S_{X1} = b_0 + b_1 P_1 + b_2 P_2$$
$$S_{X2} = \beta_0 + \beta_1 P_1 + \beta_2 P_2$$

نصلح هذه المعادلات كالآتي:

$$1D_{X1} + 0D_{X2} - 1S_{X1} + 0S_{X2} + 0P_1 + 0P_2 = 0$$
$$0D_{X1} + 1D_{X2} + 0S_{X1} - 1S_{X2} + 0P_1 + 0P_2 = 0$$
$$1D_{X1} + 0D_{X2} + 0S_{X1} + 0S_{X2} - a_1 P_1 - a_2 P_2 = a_0$$
$$0D_{X1} + 1D_{X2} + 0S_{X1} + 0S_{X2} - \propto_1 P_1 - \propto_2 P_2 = \propto_0$$
$$0D_{X1} + 0D_{X2} + 1S_{X1} + 0S_{X2} - b_1 P_1 - b_2 P_2 = b_0$$
$$0D_{X1} + 0D_{X2} + 0S_{X1} + 1S_{X2} - \beta_1 P_1 - \beta_2 P_2 = \beta_0$$

نكتب هذه المعادلات بالشكل المصفوفي:

$$\begin{bmatrix} 1.00000 & 0.0000 & -1.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 & -1.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -a_1 & -a_2 \\ 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -\propto_1 & -\propto_2 \\ 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 & -b_1 & -b_2 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 & -\beta_1 & -\beta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{X1} \\ D_{X2} \\ S_{X1} \\ S_{X2} \\ P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a_0 \\ \propto_0 \\ b_0 \\ \beta_0 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B$$

نحسب مقلوب المصفوفة A^{-1} ، ثم نحصل على قيم الشعاع X، التي تمثل الأسعار التوازنية والكميات التوازنية.

المبحث الثاني

التوازن في أسواق n سلعة

وبشكل مشابه وأعم من الحالة المدروسة في المبحث السابق نضع شروط التوازن لـ n سوق:

$$D_{X1} = S_{X1}$$

$$\vdots$$

$$D_{Xn} = S_{Xn}$$

ونضع توابع الطلب لـ n سوق:

$$D_{X1} = a_0 + a_1P_1 + a_2P_2 + \ldots\ldots\ldots + a_nP_n$$

$$\vdots$$

$$D_{Xn} = \propto_0 + \propto_1 P_1 + \propto_2 P_2 + \ldots\ldots + \propto_n P_n$$

وكذلك بالنسبة لتوابع العرض لـ n سوق:

$$S_{X1} = b_0 + b_1P_1 + b_2P_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + b_nP_n$$

$$\vdots$$

$$S_{Xn} = \beta_0 + \beta_1P_1 + \beta_2P_2 + \ldots\ldots\ldots + \beta_nP_n$$

نساوي بين توابع الطلب وتوابع العرض لكل السلع:

$$D_{X1} - S_{X1} = 0$$

$$\vdots$$

$$D_{Xn} - S_{Xn} = 0$$

$$a_0 + a_1P_1 + a_2P_2 + \ldots\ldots\ldots + a_nP_n = b_0 + b_1P_1 + b_2P_2 + \ldots\ldots\ldots + b_nP_n$$

$$\vdots$$

$$\propto_0 + \propto_1 P_1 + \propto_2 P_2 + \ldots\ldots + \propto_n P_n = \beta_0 + \beta_1P_1 + \beta_2P_2 + \ldots\ldots + \beta_nP_n$$

بإصلاح هذه الجملة من المعادلات نحصل على:

$$(a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)P_1 + (a_2 - b_2)P_2 + ... + (a_n - b_n)P_n = 0$$

$$\vdots \quad \cdots \quad \vdots$$

$$(\propto_0 - \beta_0) + (\propto_1 - \beta_1)P_1 + (\propto_2 - \beta_2)P_2 + ... + (\propto_n - \beta_n)P_n = 0$$

وبذلك نحصل على n معادلة بـ n مجهول، بالحل المشترك لهذه الجملة من المعادلات نحصل على الأسعار التوازنية وبتعويضها في معادلات العرض أو الطلب نحصل على الكميات التوازنية.

وباستخدام طريقة المصفوفات يمكن أن نحصل على نفس النتيجة:

نكتب بالشكل المصفوفي:

$$1D_{X1} + ... + 0D_{Xn} - 1S_{X1} + ... + 0S_{Xn} + 0P_1 + ... + 0P_n = 0$$

$$\vdots \quad \cdots \quad \vdots$$

$$0D_{X1} + ... + 1D_{Xn} + 0S_{X1} + ... - 1S_{Xn} + 0P_1 + ... + 0P_n = 0$$

$$1D_{X1} + ... + 0D_{Xn} + 0S_{X1} + ... + 0S_{Xn} - a_1P_1 + ... - a_nP_n = a_0$$

$$\vdots \quad \cdots \quad \vdots$$

$$0D_{X1} + ... + 1D_{Xn} + 0S_{X1} + ... + 0S_{Xn} - \propto_1 P_1 + ... - \propto_n P_n = \propto_0$$

$$0D_{X1} + ... + 0D_{Xn} + 1S_{X1} + ... + 0S_{Xn} - b_1P_1 + ... - b_nP_n = b_0$$

$$\vdots \quad \cdots \quad \vdots$$

$$0D_{X1} + ... + 0D_{Xn} + 0S_{X1} + ... + 1S_{Xn} - \beta_1P_1 + ... - \beta_nP_n = \beta_0$$

$$AX = B$$

$$A=\begin{bmatrix} 1.00000 & \cdots & 0.0000 & -1.0000 & \cdots & 0.0000 & 0.0000 & \cdots & 0.0000 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0.0000 & \cdots & 1.0000 & 0.0000 & \cdots & -1.0000 & 0.0000 & \cdots & 0.0000 \\ 1.0000 & \cdots & 0.0000 & 0.0000 & \cdots & 0.0000 & -a_1 & \cdots & -a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0.0000 & \cdots & 1.0000 & 0.0000 & \cdots & 0.0000 & -\propto_1 & \cdots & -\propto_n \\ 0.0000 & \cdots & 0.0000 & 1.0000 & \cdots & 0.0000 & -b_1 & \cdots & -b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0.0000 & \cdots & 0.0000 & 0.0000 & \cdots & 1.0000 & -\beta_1 & \cdots & -\beta_n \end{bmatrix}$$

$$X=\begin{bmatrix} D_{X1} \\ \vdots \\ D_{Xn} \\ S_{X1} \\ \vdots \\ S_{Xn} \\ P_1 \\ \vdots \\ P_n \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_0 \\ \vdots \\ \propto_0 \\ b_0 \\ \vdots \\ \beta_0 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B$$

نحسب مقلوب المصفوفة A^{-1} باستخدام أحد البرامج الحاسوبية، ثم نحصل على قيم الشعاع X، التي تمثل الأسعار التوازنية والكميات التوازنية.

المسألة الثالثة

تأثير ضرائب الإنتاج على توازن سوقي سلعتين

1. تأخذ صيغ دوال الطلب الشكل الآتي:

تتغير توابع العرض فقط لتصبح:

$$S_{X1} = b_0 + b_1(P_1^{T1}) + b_2(P_2^{T2})$$
$$S_{X2} = \beta_0 + \beta_1(P_1^{T1}) + \beta_2(P_2^{T2})$$

تبقى توابع الطلب على ما هي عليه قبل الضريبة:

$$D_{X1} = a_0 + a_1P_1 + a_2P_2$$
$$D_{X2} = \propto_0 + \propto_1 P_1 + \propto_2 P_2$$

شرطي التوازن:

$$D_{X1} = S_{X1}$$
$$D_{X2} = S_{X2}$$
$$D_{X1} - S_{X1} = 0$$
$$D_{X2} - S_{X2} = 0$$

وبما أن $(P^T = P - t)$ فإن:

$$S_{X1} = b_0 + b_1(P_1 - t_1) + b_2(P_2 - t_2)$$
$$S_{X2} = \beta_0 + \beta_1(P_1 - t_1) + \beta_2(P_2 - t_2)$$

نعوض في شرطي التوازن:

$$D_{X1} - S_{X1} = a_0 + a_1P_1 + a_2P_2 - [b_0 + b_1(P_1 - t_1) + b_2(P_2 - t_2)] = 0$$
$$D_{X2} - S_{X2} = \propto_0 + \propto_1 P_1 + \propto_2 P_2 - [\beta_0 + \beta_1(P_1 - t_1) + \beta_2(P_2 - t_2)] = 0$$

وبإصلاح المعادلتين:

$$(a_0 - b_0) + [a_1P_1 - b_1(P_1 - t_1)] + (a_2P_2 - b_2(P_2 - t_2)] = 0$$
$$(\propto_0 - \beta_0) + [\propto_1 P_1 - \beta_1(P_1 - t_1)] + [\propto_2 P_2 - \beta_2(P_2 - t_2)] = 0$$

معادلتين بمجهولين P_1, P_2 بالحل المشترك نحصل على الأسعار التوازنية، وبتعويضها في معادلات العرض أو الطلب نحصل على الكميات التوازنية بعد فرض الضريبة النوعية.

2. تأتي صيغة الأمثلة التالية:

تبقى توابع الطلب على حالها كما في الحالة السابقة وتتغير توابع العرض:

$$P^R = P(1-r)$$
$$D_{X1} = a_0 + a_1P_1 + a_2P_2$$
$$D_{X2} = \propto_0 + \propto_1 P_1 + \propto_2 P_2$$
$$S_{X1} = b_0 + b_1P_1(1-r_1) + b_2P_2(1-r_2)$$
$$S_{X2} = \beta_0 + \beta_1P_1(1-r_1) + \beta_2P_2(1-r_2)$$

وبتطبيق شرطي التوازن:

$$D_{X1} - S_{X1} = 0$$
$$D_{X2} - S_{X2} = 0$$
$$a_0 + a_1P_1 + a_2P_2 - [b_0 + b_1P_1(1-r_1) + b_2P_2(1-r_2)] = 0$$
$$\propto_0 + \propto_1 P_1 + \propto_2 P_2 - [\beta_0 + \beta_1P_1(1-r_1) + \beta_2P_2(1-r_2)] = 0$$

وبإصلاح هاتين المعادلتين نحصل على:

$$(a_0 - b_0) + [a_1P_1 - b_1P_1(1-r_1)] + [(a_2P_2 - b_2P_2(1-r_2)] = 0$$
$$(\propto_0 - \beta_2) + [\propto_1 P_1 - \beta_1P_1(1-r_1)] + [\propto_2 P_2 - \beta_2P_2(1-r_2)] = 0$$

معادلتين بمجهولين P_1, P_2 ،بالحل المشترك نحصل على الأسعار التوازنية، وبتعويضها في معادلات العرض أو الطلب نحصل على الكميات التوازنية بعد فرض الضريبة القيمية.

المبحث الرابع

تطبيقات حول الفصل الثاني

حالة لفي م نقل 1

أوجد أسعار وكميات التوازن في النموذج التوازني الآتي:

$$D_{X1} = 18 - 3P_1 + P_2$$

$$D_{X2} = 12 + P_1 - 2P_2$$

$$S_{X1} = -2 + 4P_1$$

$$S_{X2} = -2 + 3P_2$$

$$D_{X1} = S_{X1}$$

$$D_{X2} = S_{X2}$$

$$\Rightarrow \overline{P_2} = 3.47$$

$$\Rightarrow \overline{P_1} = 3.353$$ وهما سعري التوازن

نعوض السعر التوازني في تابعي العرض:

$$\overline{X_1} = 11.41$$

$$\overline{X_2} = 8.41$$

وهما كميتا التوازن.

وباستخدام طريقة المصفوفات:

$$1D_{X1} + 0D_{X2} - 1S_{X1} + 0S_{X2} + 0P_1 + 0P_2 = 0$$

$$0D_{X1} + 1D_{X2} + 0S_{X1} - 1S_{X2} + 0P_1 + 0P_2 = 0$$

$$1D_{X1}+0D_{X2}+0S_{X1}+0S_{X2}+3P_1-1P_2=18$$

$$0D_{X1}+1D_{X2}+0S_{X1}+0S_{X2}-1P_1+2P_2=12$$

$$0D_{X1}+0D_{X2}-1S_{X1}+0S_{X2}-4P_1+0P_2=-2$$

$$0D_{X1}+0D_{X2}+0S_{X1}+1S_{X2}+0P_1-3P_2=-2$$

$$\begin{bmatrix} 1.00000 & 0.0000 & -1.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 & -1.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 3.0000 & -1.0000 \\ 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -1.0000 & 2.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 & -4.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 & -3.0000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{X1} \\ D_{X2} \\ S_{X1} \\ S_{X2} \\ P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 18 \\ 12 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

نحسب المحددة وتساوي $|A|=34$.

أما مقلوب المصفوفة فتساوي:

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} 0.4118 & -0.1176 & 0.5882 & 0.1176 & 0.4118 & -0.1176 \\ -0.0882 & 0.3824 & 0.0882 & 0.6176 & -0.0882 & 0.3824 \\ -0.5882 & -0.1176 & 0.5882 & 0.1176 & 0.4118 & -0.1176 \\ -0.0882 & -0.6176 & 0.0882 & 0.6176 & -0.0882 & 0.3824 \\ -0.1471 & -0.0294 & 0.1471 & 0.0294 & -0.1471 & -0.0294 \\ -0.0294 & -0.2059 & 0.0294 & 0.2059 & -0.0294 & -0.2059 \end{bmatrix}$$

$$X=A^{-1}B$$

$$\begin{bmatrix} D_{X1} \\ D_{X2} \\ S_{X1} \\ S_{X2} \\ P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4118 & -0.1176 & 0.5882 & 0.1176 & 0.4118 & -0.1176 \\ -0.0882 & 0.3824 & 0.0882 & 0.6176 & -0.0882 & 0.3824 \\ -0.5882 & -0.1176 & 0.5882 & 0.1176 & 0.4118 & -0.1176 \\ -0.0882 & -0.6176 & 0.0882 & 0.6176 & -0.0882 & 0.3824 \\ -0.1471 & -0.0294 & 0.1471 & 0.0294 & -0.1471 & -0.0294 \\ -0.0294 & -0.2059 & 0.0294 & 0.2059 & -0.0294 & -0.2059 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 18 \\ 12 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} D_{X1} \\ D_{X2} \\ S_{X1} \\ S_{X2} \\ P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11.4104 \\ 8.4104 \\ 11.4104 \\ 8.4104 \\ 3.3536 \\ 3.4706 \end{bmatrix}$$

طبقة لفي م نقل 2

لدينا النموذج الوارد في التمرين السابق، وبفرض أن الحكومة فرضت ضريبة نوعية مقدارها 3 وحدات نقدية على السلعة الأولى، و 2 وحدة نقدية على السلعة الثانية. والمطلوب: أوجد أسعار وكميات التوازن بعد الضريبة.

الحل:

يصبح تابعي العرض بعد الضريبة:

$$\begin{aligned} S_{X1} &= -2 + 4(P_1 - t_1) \\ &= -2 + 4(P_1 - 3) \\ &= -2 + 4P_1 - 12 \\ &= -14 + 4P_1 \\ S_{X2} &= -2 + 3(P_2 - t_2) \\ &= -2 + 3(P_2 - 2) \\ &= -8 + 3P_2 \end{aligned}$$

نعوض في شرطي التوازن:

$$18-3P_1+P_2=-14+4P_1$$

$$12+P_1-2P_2=-8+3P_2$$

وبإصلاح المعادلتين:

$$7P_1-P_2=32 \qquad (1)$$

$$-P_1+5P_2=20 \qquad (2)$$

نضرب المعادلة (2) بـ 7 ونضيفها إلى المعادلة (1):

$$7P_1-P_2=32$$
$$-7P_1+35P_2=140$$

وبجمع المعادلتين:

$$0+34P_2=172$$
$$\Rightarrow \overline{P_2}=5.06$$
$$\Rightarrow \overline{P_1}=5.295$$

نعوض في تابعي العرض فنحصل على الكميات التوازنية:

$$\overline{X_1}=-14+4\overline{P_1}=-14+4(5.295)=7.18$$
$$\overline{X}_2=-8+3\overline{P_2}=-8+3(5.06)=7.18$$

الفصل الثالث
تعميم نموذج التوازن الاقتصادي

المبحث الأول
توابع الطلب والعرض على الإنتاج وعناصره

رأينا في الفصل الأول كيف يتم التوازن الجزئي للسوق أي توازن سوق سلعة معينة. وكان النموذج الذي استعرضناه –على عكس العادة– هو عبارة عن الحالة العامة أو عبارة عن الهيكل الخارجي لموضوع توازن الأسواق دون أن نخوض في تفصيلات هذا النموذج.

أما الآن فإنه لابد من أن نبحث في تفصيلات النموذج الجزئي؛ ومن ثم الانطلاق من خلال مجاميع الكميات الجزئية إلى بناء نموذج التوازن الإجمالي.

إن المنتجين لكي يكون نشاطهم الإنتاجي مفيداً؛ فإنه يجب أن يكون هناك طلب على منتجاتهم، أي إن إنتاجهم (عرضهم) يجب أن يقابله استهلاك (طلب).

ومن جهة ثانية إن المستهلكين الذين يطلبون السلع – وبفرض أنهم لا يتلقون أي دخل دون عمل – ملزمون بعرض شيء ما للبيع من أجل الحصول على دخل للاستهلاك، وهنا سنفترض أنهم يعرضون عناصر الإنتاج (العمل بشكل خاص) أي إن المستهلكين يكونون طالبين وعارضين في نفس الوقت.

ومن جهة أخرى إن المنتجين يكتسبون أيضاً صفة مستهلكين عندما يطلبون سلعاً لاستهلاكهم الشخصي أو للقيام بالإنتاج، أي إنهم يطلبون سلع اً وعناصرَ إنتاجٍ، وأنهم يكونون عارضين وطالبين أيضاً في نفس الوقت.

انطلاقاً من هذا فإننا سنستخدم الرموز الآتية في نموذج توازن الأسواق:

بالنسبة للمنتجين:

1. كمية المنتجات (العرض) $\tilde{Y}_{ik}$
2. كمية الطلب على عناصر الإنتاج X_{Eik}

بالنسبة للمستهلكين:

1. عرض عناصر الإنتاج $\tilde{X}_{Ej}$
2. كمية الطلب على السلع Y_{ij}

حيث إن:

i أحد القطاعات الإنتاجية $i = 1,2,....,N$

i أحد المنتجات

$\tilde{P}_i$ سعر المنتوج i

K إحدى المنشآت $K = 1,2,..., q_i$

E أحد عناصر الإنتاج $E = 1,2,....,n$

P_E سعر عنصر الإنتاج E

j أحد المستهلكين $j = 1,2,....,m$

وسنفترض أيضاً:

1. سيادة ظروف المنافسة الكاملة وهذا يستتبع كون السلع المنتجة في كل قطاع هي متجانسة.
2. إن أي عرض للسلع سيقابله طلبُ كافٍ.
3. عدم وجود منتجات مشتركة فيما بين القطاعات.
4. إن المنشآت تهدف إلى تعظيم الربح أو تخفيض التكاليف.

5. إن المستهلكين يتمتعون بالرشد، أي إن كل مستهلك يختار التركيب الاستهلاكي الذي يحقق له أقصى منفعة ممكنة من خلال دخله المحدود.

وتجدر الإشارة إلى أن هذه الافتراضات سيتم الإشارة إلي كل منها في حينه في أثناء البحث، ومع ذلك آثرنا عرضها الآن من أجل أن يكون هناك صورة مسبقة عن كمية الحدود والافتراضات على الموضوع المبحوث.

أولاً: تتابع عرض الأمثلة على نصرف المنتجة غير المتجانسة ومنتجي كل منها:

لنفرض أن قطاعاً إنتاجياً i ما يتكون من q_i من المنشآت الإنتاجية. ولنفترض أنه يتم فيها صنع نوع معين من المنتجات المتجانسة نشير إليها بالرمز i. ولتكن K إحدى هذه المنشآت الإنتاجية، فيكون تابع الإنتاج في هذه المنشاة:

$$\overline{Y}_{ik} = F_{ik}(X_{1ik}, X_{2ik}, ..., X_{nik}) \qquad (3-1)$$

حيث إن:

X_{Eik} – كمية طلب المنتجين في المنشأة K على عنصر الإنتاج E حيث إن $(E = 1,2,....., n)$

وإن $\overline{Y}_{ik}$ – حجم إنتاج المنشاة K في القطاع i حيث إن $(i = 1,2,...N)$

ولنفرض أن المنتجات i تباع كلها بسعر واحد $\widetilde{P}_i$ بغض النظر عن المنشأة المصنعة. وبفرض أن هذه المنشاة تسعى لتعظيم الربح.

لنشكل تابع الربح Π_{ik}:

$$\Pi_{ik} = \overline{P}_i F_{ik}(X_{1ik}, X_{2ik}, ..., X_{nik}) - \sum_{E=1}^{n} P_E X_{Eik} \qquad (3-2)$$

حيث P_E تشير إلى سعر الواحد من عنصر الإنتاج E.

لكي تعظم المنشأة K ربحها يجب القيام بالاشتقاق الجزئي لتابع الربح (3-2) وإعدام المشتقات:

$$\frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial X_{Eik}} = \overline{P}_i F_{X\,Eik}^{`} - P_E = 0 \qquad E = 1,2,..,n$$

$$\Rightarrow F_{X\,Eik}^{`} = \frac{P_E}{P_i} \qquad (3-3)$$

وتشير هذه العلاقة (3-3) إلى أن المنتجين في المنشأة K يظهرون طلباً على عنصر الإنتاج E ما دامت نسبة سعر ذلك العنصر إلى سعر وحدة المنتجات أقل أو تساوي الإنتاجية الحدية لذلك العنصر في المنشأة.

إن العلاقات (3-3) تمثل جملة n معادلة بـ n مجهول هي X_{Eik} ، بحل هذه الجملة من المعادلات نحصل على علاقات من الشكل:

$$X_{Eik} = g_{Eik}(P_1, P_2, ..., P_n, \overline{P}_i,) \qquad (3-4)$$

نسمي هذا التابع بتابع الطلب على عنصر الإنتاج E في المنشأة K من القطاع i.

إن مجموع الطلبات على عنصر الإنتاج E في كل منشآت القطاع i تمثل الطلب الإجمالي على ذلك العنصر في القطاع i أي:

$$X_{Ei} = \sum_{k=1}^{q_i} X_{Eik} = \sum_{k=1}^{q_i} g_{Eik}(P_1, P_2, ..., P_n, \overline{P}_i)$$

أو

$$X_{Ei} = g_{Ei}(P_1, P_2, ..., P_n, \overline{P}_i) \qquad (3-5)$$

إذا عوضنا X_{Eik} في العلاقة (3-1) بقيمتها من العلاقة (3-4) نحصل على العلاقة:

$$\overline{Y}_{ik} = \overline{G}_{ik}(P_1, P_2, ..., P_n, \overline{P}_i) \qquad (3-6)$$

وتمثل هذه العلاقة تابع العرض لدى المنشأة K من القطاع i، وهي تعبر عن أن كمية عرض المنتجات i في المنشأة K هي تابع لأسعار عناصر الإنتاج وسعر وحدة المنتجات i.

ويكون العرض الإجمالي للمنتجات i هو:

$$\tilde{Y}_i = \sum_{K=1}^{q_i} \tilde{Y}_{ik} = \sum_{K=1}^{q_i} \tilde{G}_{ik}(P_1, P_2, ..., P_n; \tilde{P}_i)$$

أو:

$$\tilde{Y}_i = \tilde{G}_i(P_1, P_2, ..., P_n; \tilde{P}_i) \qquad (3-7)$$

لنفرض الآن أن هناك N نوعاً من المنتجات في البلاد و N قطاعاً إنتاجياً (i =1,2,...,N) في هذه الحالة يكون عرض المنتجات في كل قطاع تابعاً لأسعار عناصر الإنتاج ولسعر الوحدة من منتجات ذلك القطاع كما في العلاقة (3-7)، ويكون الطلب على كل عنصر إنتاج في كل قطاع تابعاً أيضاً لأسعار عناصر الإنتاج جميعها بالإضافة إلى سعر الوحدة من منتجات ذلك القطاع كما في العلاقة (3-5).

تابع: تابع سلوك المستهلك / سلوك المستهلك عندما يكون الدخل محدداً و لزوم الحق لجميع:

لنفرض أن هناك m مستهلكاً ولكل منهم تابع منفعة خاص به. ونرمز بـ j لأحد المستهلكين (j = 1,2,...,m) فيكون تابع منفعة المستهلك j:

$$U_j = f_j(Y_{1j}, Y_{2j}, ..., Y_{Nj}) \qquad (3-8)$$

حيث رمزنا بـ Y_{ij} لكمية ما يستهلكه الشخص j من السلعة i ، أي لكمية الطلب الذي يظهره هذا المستهلك.

ليكن الشرط الذي يقيد تصرف المستهلك وهو محدودية دخله R_j المخصص للإنفاق:

$$R_j = \sum_{i=1}^{N} \tilde{P}_i Y_{ij} \qquad (3-9)$$

وسنعدّ هذه المعادلة (3-9) معادلة حساب الدخل المنفق.

إن المستهلك يحاول تعظيم تابع منفعته (3-8) من خلال تحقق الشرط (3-9)، ولهذا نشكل تابع لاغرانج ونشتق جزئياً ونعدم المشتقات:

$$Z = U_j + \lambda(R_j - \sum_{i=1}^{N} \tilde{P}_i Y_{ij})$$

$$\frac{\partial Z}{\partial Y_{ij}} = U_{Y_{ij}}^{`} - \lambda \tilde{P}_i = 0 \qquad (3-10)\ \text{I = 1,2,..,n}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \lambda} = R_j - \sum_{i=1}^{N} \tilde{P}_i Y_{ij} = 0$$

وهكذا يتكون لدينا N +1 معادلة بـ N+1 مجهول، وبحل هذه الجملة من المعادلات نحصل على علاقات من الشكل:

$$Y_{ij} = g_{ij}(\tilde{P}_1, \tilde{P}_2, ..., \tilde{P}_N; R_j) \qquad (3-11)$$

نسمي هذا التابع بتابع طلب المستهلك j على السلعة i.

لنفرض الآن أن المستهلك يبيع بعض عناصر الإنتاج وليكن العمل مقابل حصوله على الدخل الذي سيخصصه لشراء السلع الاستهلاكية. لنرمز بـ $\tilde{X}_{Ej}$ لكمية ما يعرضه ذلك الشخص j من عنصر الإنتاج E، وعند ذلك يكون:

$$R_j = \sum_{E=1}^{n} P_E \tilde{X}_{Ej} \qquad (3-12)$$

وسنعدّ هذه المعادلة (3-12) معادلة حساب الدخل المكتسب الذي يمكن أن يُنفق بالكامل أو يُدخر جزء منه.

وسنعدّ أن مقدار ما يعرضه الشخص j من عنصر الإنتاج E ثابت أي إن $\tilde{X}_{Ej}$ هو مقدار ثابت.

إذا بدلنا R_j في العلاقة (3-11) بقيمتها من العلاقة (3-12) نجد:

$$Y_{ij} = G_{ij}(\tilde{P}_1, \tilde{P}_2, ..., \tilde{P}_N ; \sum_{E=1}^{n} P_E \tilde{X}_{Ej})$$

وإذا جمعنا الطلب الذي يظهره المستهلكون جميعاً على السلعة i ، وتذكرنا أن $\tilde{X}_{Ej}$ ثابت من أجل جميع قيم j و E ، فإننا نجد أن إجمالي الطلب Y_i يكون:

$$Y_i = \sum_{j=1}^{m} Y_{ij} = G_i(\tilde{P}_1, \tilde{P}_2, ..., \tilde{P}_N ; P_1, P_2, ..., P_n) \qquad (3-13)$$

المبحث الثاني

التوازن الإجمالي

آلية تحقق التوازن في سوق السلعة (أو الخدمة):

إن سلعة ما H قد تستعمل كعنصر من عناصر الإنتاج، أو قد تستعمل في الاستهلاك اللاإنتاجي أو في المجالين معاً. ولكي يتحقق التوازن في سوق هذه السلعة يجب أن تتساوى قيمة الطلب مع قيمة العرض (أو كميتهما).

فإذا رمزنا بـ $\tilde{P}_H$ لسعر السلعة وبـ Y_H للطلب على السلعة بهدف الاستهلاك اللاإنتاجي و بـ X_{Hi} للطلب عليها كعنصر إنتاج في القطاع i، فإنه يكون:

$$\tilde{P}_H \tilde{Y}_H = \tilde{P}_H (Y_H + \sum_{i=1}^{N} X_{Hi}) \qquad (3-14)$$

فإذا كانت السلعة H تستعمل للاستهلاك اللاإنتاجي فقط فإن X_{Hi} يكون مساوياً للصفر من أجل جميع قيم i (i = 1,2,...,N).

وإذا كانت السلعة H تستعمل فقط كعنصر من عناصر الإنتاج فإن Y_H تساوي الصفر.

باستخدام العلاقات (3-5) و (3-7) و (3-13)، نعيد كتابة المعادلة (3-14) على الشكل الآتي:

$$\tilde{P}_H \tilde{G}_H (P_1, P_2, ..., P_n; \tilde{P}_H) = \tilde{P}_H \{G_H (\tilde{P}_1, \tilde{P}_2, ..., \tilde{P}_N; P_1, P_2, ..., P_n) +$$

$$\sum_{i=1}^{N} g_{Hi} (P_1, P_2, ..., P_n, \tilde{P}_H)\} \qquad (3-15)$$

بحل هذه المعادلة التوازنية نحصل على السعر التوازني $\tilde{P}_H$ لتلك السلعة أي السعر الذي يتوازن وفقه سوق تلك السلعة. ومن ثم انطلاقاً من هذا السعر التوازني نستطيع تحديد الكمية التوازنية للعرض والطلب.

تحديد التوازن في سوق عنصر الإنتاج E:

رأينا أعلاه أن بعض السلع الاستهلاكية يمكن أن تستخدم كعنصر إنتاج، وبالتالي فإن التوازن في سوق مثل هذه السلعة (استهلاكية وإنتاجية) ينطبق عليه تحليل الفقرة السابقة. أما الآن فإننا سنبحث في توازن سوق أحد عناصر الإنتاج E الذي لا يمكن استخدامه كسلعة نهائية. إن شرط التوازن في سوق ذلك العنصر يقتضي – كما هي الحال في الفقرة السابقة – أن تكون قيمتا (أو كميتا) العرض والطلب متساويتين.

$$P_E \sum_{j=1}^{m} \tilde{X}_{Ej} = P_E \sum_{i=1}^{N} X_{Ei} \qquad (3-16)$$

نعوض قيمة X_{Ei} في العلاقة (3-16) بقيمتها من العلاقة (3-5) فنجد:

$$P_E \sum_{j=1}^{m} \tilde{X}_{Ej} = P_E g_E(P_1, P_2, ..., P_n; \tilde{P}_1, \tilde{P}_2, ..., \tilde{P}_N) \qquad (3-17)$$

وإذا تذكرنا أن $\tilde{X}_{Ej}$ ثابت من أجل جميع قيم j فإننا ندرك أن العلاقة (3-17) تمثل معادلة بعدد من المجاهيل يساوي إلى عدد السلع N بالإضافة إلى عدد عناصر الإنتاج n أي N + n مجهول.

بحل هذه المعادلة نتوصل إلى تحديد السعر التوازني لعنصر الإنتاج، ومن ثم تحديد الكمية (أو القيمة) التوازنية.

ثانياً: توازن الأجل الطويل:

حتى يتحقق التوازن الإجمالي أي في جميع أسواق السلع وعناصر الإنتاج، يجب أن يتم تعيين أسعار جميع عناصر الإنتاج P_E حيث (E = 1,2,...,n)، وأسعار جميع السلع $\tilde{P}_i$ (i = 1,2,...,N) بحيث تتحقق العلاقة (3-15) من أجل قيم جميع السلع H (H = 1,2,..,N) من جهة أولى، و بحيث تتحقق العلاقة (3-17) من أجل جميع قيم عناصر الإنتاج E التي لا يمكن استخدامها كسلع نهائية من جهة ثانية.

ومن ثم نقوم بوضع مساواة قيميه بين عرض كل السلع وعناصر الإنتاج والطلب عليها وذلك عن طريق ضرب كل كمية من كل سلعة أو عنصر إنتاج بسعر هذه السلعة أو ذلك العنصر، وبالتالي نتوصل إلى قيمة (وليس كمية) نقدية للتوازن الكلي بين العرض والطلب في الاقتصاد الوطني.

فإذا كانت الأسعار التوازنية للسلع وعناصر الإنتاج تحقق أيضاً الشروط الكافية لوجود نهايات عظمى لتوابع الربح والمنفعة، فإنها تكون هي الأسعار التوازنية المطلوبة.

المبحث الثالث

تطبيقات حول الفصل الثالث

لنفرض أن الاقتصاد الوطني يتشكل من قطاعين إنتاجيين بتابعي الإنتاج التاليين:

$$\tilde{Y}_1 = X_{11}X_{21}$$

$$\tilde{Y}_2 = \frac{1}{2}X_{12}X_{22}^2$$

وبفرض أنه يتم في القطاعين إنتاج منتجين باستخدام عنصري إنتاج فقط.

والمطلوب: تحديد التوازن الجزئي والكلي من خلال:

1. وضع تابعي الطلب على عناصر الإنتاج في كل قطاع كتابعين لأسعار عناصر الإنتاج P_2, P_1 والمنتجات $\tilde{P}_2, \tilde{P}_1$.

2. وضع تابعي عرض المنتجات في القطاعين كدالة في أسعار عناصر الإنتاج والمنتجات.

3. بفرض أن تابع المنفعة للمستهلكين يأخذ الشكل $U = Y_1Y_2$ حيث إن Y_i تمثل كمية طلب المستهلكين على المنتجات. وأن كميات ما يبيعه المستهلكون من عناصر الإنتاج إلى المنتجين هي: $\tilde{X}_1 = 8, \tilde{X}_2 = 4$ ، وبفرض أن المستهلكين يدخرون 0.6 من الدخل المكتسب. ضع تابعي طلب المستهلكين كدالة في أسعار عناصر الإنتاج التي يبيعونها إلى المنتجين وفي أسعار المنتجات التي يشترونها منهم.

4. ركِّب التوابع التي حصلت عليها في البنود السابقة بشكل يعبر عن التوازن الجزئي بين الكميات المطلوبة والمعروضة من المنتجات ومن عناصر الإنتاج.

5. احسب أسعار التوازن لعناصر الإنتاج والمنتجات بفرض أن سعر عنصر الإنتاج الأول $P_1 = 3$ وحدة نقدية.

6. احسب كميات التوازن الجزئية: $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, Y_1, Y_2, \tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2$ وذلك من خلال معادلات الطلب 4 أعلاه.

7. احسب التوازنات الجزئية في أسواق المنتجات وعناصر الإنتاج.

8. احسب الربح المتشكل في كل من القطاعين.

9. احسب التوازن الكلي في جميع أسواق المنتجات وعناصر الإنتاج (توازن الاقتصاد القومي).

10. مع الافتراض بتحقيق الشروط الكافية للقيم العظمى.

الحل:

1) أ. نشكل تابع الربح في القطاع الإنتاجي الأول:

$$\Pi_1 = \tilde{P}_1\tilde{Y}_1 - (P_1X_{11} + P_2X_{21})$$

$$\Pi_1 = \tilde{P}_1X_{11}X_{21} - P_1X_{11} - P_2X_{21}$$

نحسب المشتقات الجزئية لتابع الربح ونعدمها (الشروط اللازمة لتعظيم الربح):

$$\frac{\partial\Pi_1}{\partial X_{11}} = \tilde{P}_1X_{21} - P_1 = 0 \qquad [1]$$

$$\frac{\partial\Pi_2}{\partial X_{21}} = \tilde{P}_1X_{11} - P_2 = 0 \qquad [2]$$

من [1] نجد أن:

$$X_{21} = \frac{P_1}{\tilde{P}_1}$$

وهذا يمثل تابع الطلب على عنصر الإنتاج الثاني في القطاع الأول.

من [2] نجد :

$$X_{11} = \frac{P_2}{\tilde{P}_1}$$

وهذا يمثل تابع الطلب على عنصر الإنتاج الأول في القطاع الإنتاجي الأول.

ب. نشكل تابع الربح في القطاع الإنتاجي الثاني:

$$\Pi_2 = \tilde{P}_2 \tilde{Y}_2 - (P_1 X_{12} + P_2 X_{22})$$

$$\Pi_2 = \tilde{P}_2 \frac{1}{2} X_{12} X_{22}^2 - P_1 X_{12} - P_2 X_{22}$$

نشتق تابع الربح جزئياً ونعدم المشتقات:

$$\frac{\partial \Pi_2}{\partial X_{12}} = \tilde{P}_2 \frac{1}{2} X_{22}^2 - P_1 = 0 \qquad [3]$$

$$\frac{\partial \Pi_2}{\partial X_{22}} = 2\tilde{P}_2 \frac{1}{2} X_{12} X_{22} - P_2 = 0 \qquad [4]$$

من [3] نجد أن:

$$X_{22}^2 = \frac{2P_1}{\tilde{P}_2}$$

$$\Rightarrow X_{22} = \sqrt{\frac{2P_1}{\tilde{P}_2}}$$

وهذا يمثل تابع الطلب على عنصر الإنتاج الثاني في القطاع الإنتاجي الثاني.

نعوض قيمة X_{22} في [4] فنجد أن:

$$2\tilde{P}_2 \frac{1}{2} X_{12} \sqrt{\frac{2P_1}{\tilde{P}_2}} - P_2 = 0$$

$$\tilde{P}_2 X_{12} \frac{P_1^{1/2} 1.42}{\tilde{P}_2^{1/2}} - P_2 = 0$$

$$\Rightarrow \tilde{P}_2^{1/2} X_{12} P_1^{1/2} 1.42 - P_2 = 0$$

$$\Rightarrow X_{12} = \frac{P_2}{\tilde{P}_2^{1/2} P_1^{1/2} 1.42}$$

أو بشكل آخر:

$$X_{12} = \frac{P_2}{\tilde{P}_2 \sqrt{\frac{2P_1}{\tilde{P}_2}}}$$

وهذا يمثل تابع الطلب على عنصر الإنتاج الأول في القطاع الإنتاجي الثاني.

2) أ. إن تابع العرض الأول هو:

$$\tilde{Y}_1 = (\frac{P_2}{\tilde{P}_1})(\frac{P_1}{\tilde{P}_1})$$

$$\Rightarrow \tilde{Y}_1 = \frac{P_2 P_1}{\tilde{P}_1^2}$$

وهو تابع عرض المنتجات في القطاع الإنتاجي الأول.

ب. أما تابع العرض الثاني هو:

$$\tilde{Y}_2 = \frac{1}{2} \frac{P_2}{\tilde{P}_2 \sqrt{\frac{2P_1}{\tilde{P}_2}}} \frac{2P_1}{\tilde{P}_2}$$

أو:

$$\tilde{Y}_2 = \frac{1}{2} \frac{P_2}{\tilde{P}_2^{1/2} P_1^{1/2} 1.42} (\frac{2P_1}{\tilde{P}_2})$$

$$\Rightarrow \tilde{Y}_2 = \frac{\frac{1}{2} P_2 \frac{2P_1}{\tilde{P}_2}}{\tilde{P}_2^{1/2} P_1^{1/2} 1.42}$$

$$\Rightarrow \tilde{Y}_2 = \frac{P_2 P_1}{\tilde{P}_2^{1.5} P_1^{1/2} 1.42}$$

وهو تابع عرض المنتجات في القطاع الإنتاجي الثاني.

3) نضع معادلة ميزانية المستهلك:

$$\tilde{P}_1 Y_1 + \tilde{P}_2 Y_2 = 0.4(8p_1 + 4p_2)$$

$$= 3.2p_1 + 1.6p_2$$

نشكل تابع لاكرانج ونشتقه جزئياً:

$$Z = Y_1 Y_2 + \lambda(3.2p_1 + 1.6p_2 - \tilde{P}_1 Y_1 - \tilde{P}_2 Y_2)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial Y_1} = Y_2 - \tilde{P}_1 \lambda = 0 \qquad \{1\}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial Y_2} = Y_1 - \tilde{P}_2 \lambda = 0 \qquad \{2\}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \lambda} = 3.2p_1 + 1.6p_2 - \tilde{P}_1 Y_1 - \tilde{P}_2 Y_2 = 0 \qquad \{3\}$$

بقسمة {1} على بعد التعديل{2}:

$$\frac{Y_2 = \tilde{P}_1 \lambda}{Y_1 = \tilde{P}_2 \lambda} \Rightarrow \frac{Y_2}{Y_1} = \frac{\tilde{P}_1}{\tilde{P}_2}$$

$$\Rightarrow Y_2 = Y_1 \frac{\tilde{P}_1}{\tilde{P}_2} \qquad \{4\}$$

نعوض {4} في {3}:

$$3.2p_1 + 1.6p_2 - \tilde{P}_1 Y_1 - \tilde{P}_2 Y_1 \frac{\tilde{P}_1}{\tilde{P}_2} = 0$$

$$3.2p_1 + 1.6p_2 = \tilde{P}_1 Y_1 + \frac{\tilde{P}_2 Y_1 \tilde{P}_1}{\tilde{P}_2}$$

$$= \tilde{P}_1 Y_1 + \tilde{P}_1 Y_1$$

$$= 2\tilde{P}_1 Y_1$$

$$\Rightarrow Y_1 = \frac{3.2p_1 + 1.6p_2}{2\tilde{P}_1} \qquad \{5\}$$

وهي دالة طلب المستهلكين في القطاع الأول.

نعوض {5} في {4}:

$$Y_2 = \frac{3.2P_1 + 1.6P_2}{2\tilde{P}_1} \frac{\tilde{P}_1}{\tilde{P}_2}$$

$$Y_2 = \frac{3.2P_1\tilde{P}_1 + 1.6P_2\tilde{P}_1}{2\tilde{P}_1\tilde{P}_2}$$

$$\Rightarrow Y_2 = \frac{3.2P_1 + 1.6P_2}{2\tilde{P}_2}$$

وهي دالة طلب المستهلكين في القطاع الثاني.

4) شروط التوازن الجزئي:

أ. توازن الطلب والعرض على عنصر الإنتاج الأول:

$$\tilde{X}_1 = X_{11} + X_{12}$$

$$= 8 = \frac{P_2}{\tilde{P}_1} + \frac{P_2}{\tilde{P}_2^{1/2} P_1^{1/2} 1.42}$$

ب. توازن الطلب والعرض على عنصر الإنتاج الثاني:

$$\tilde{X}_2 = X_{21} + X_{22}$$

$$= 4 = \frac{P_1}{\tilde{P}_1} + \frac{1.42P_1^{1/2}}{\tilde{P}_2^{1/2}}$$

ت. توازن الطلب والعرض على المنتوج الأول:

$$Y_1 = \tilde{Y}_1$$

$$\Rightarrow \frac{3.2P_1 + 1.6P_2}{2\tilde{P}_1} = \frac{P_2 P_1}{\tilde{P}_1^2}$$

ث. توازن الطلب والعرض على المنتوج الثاني:

$$Y_2 = \tilde{Y}_2$$

$$\Rightarrow \frac{3.2P_1 + 1.6P_2}{2\tilde{P}_2} = \frac{P_2 P_1}{\tilde{P}_2^{1.5} P_1^{1/2} 1.42}$$

5) أسعار التوازن:

بقسمة (ت) على (ث):

$$\frac{2\tilde{P}_2(3.2P_1 + 1.6P_2)}{2\tilde{P}_1(3.2P_1 + 1.6P_2)} = \frac{\tilde{P}_2^{1.5} P_1^{1.5} P_2 1.42}{P_2 P_1 \tilde{P}_1^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1} = \frac{\tilde{P}_2^{1.5} P_1^{1/2} 1.42}{\tilde{P}_1}$$

$$\Rightarrow \tilde{P}_1 = 1.42 P_1^{1/2} \tilde{P}_2^{1/2} \qquad (ج)$$

نعوض (ج) في (أ):

$$\frac{P_2}{1.42P_1^{1/2}\tilde{P}_2^{1/2}}+\frac{P_2}{\tilde{P}_2^{1/2}P_1^{1/2}1.42}=8$$

$$\Rightarrow \frac{2P_2}{1.42P_1^{1/2}\tilde{P}_2^{1/2}}=8 \Rightarrow 2P_2=11.32P_1^{1/2}\tilde{P}_2^{1/2}$$

$$\Rightarrow P_2=5.657P_1^{1/2}\tilde{P}_2^{1/2} \qquad (د)$$

$$\Rightarrow P_1^{1/2}=\frac{P_2}{5.657\tilde{P}_2^{1/2}} \qquad (ح)$$

نعوض (ج) في (ب):

$$\frac{P_1}{1.42P_1^{1/2}\tilde{P}_2^{1/2}}+\frac{1.42P_1^{1/2}}{\tilde{P}_2^{1/2}}=4$$

$$\Rightarrow \frac{P_1+2P_1}{1.42P_1^{1/2}\tilde{P}_2^{1/2}}=4$$

$$\Rightarrow 3P_1=5.657P_1^{1/2}\tilde{P}_2^{1/2}$$

$$\Rightarrow P_1=1.885P_1^{1/2}\tilde{P}_2^{1/2} \qquad (خ)$$

$$\Rightarrow P_1^{1/2}=\frac{P_1}{1.885\tilde{P}_2^{1/2}} \qquad (د)$$

أو:

$$\Rightarrow P_1^{1/2}=1.885\tilde{P}_2^{1/2} \qquad (ذ)$$

من (ح) و (ذ):

$$1.885\tilde{P}_2^{1/2}=\frac{P_2}{5.657\tilde{P}_2^{1/2}}$$

$$\Rightarrow P_2 = 10.66\tilde{P}_2 \qquad (ر)$$

نعوض (ذ) في (ج):

$$\tilde{P}_1 = 1.42(1.885\tilde{P}_2^{1/2})\tilde{P}_2^{1/2}$$

$$\Rightarrow \tilde{P}_1 = 2.66\tilde{P}_2 \qquad (ز)$$

من (ح) و (د):

$$\frac{P_2}{5.657\tilde{P}_2^{1/2}} = \frac{P_1}{1.88\tilde{P}_2^{1/2}}$$

$$P_2(1.88\tilde{P}_2^{1/2}) = P_1(5.657\tilde{P}_2^{1/2})$$

$$\Rightarrow P_2 = 3P_1$$

وبما أن $P_1 = 3$ فيكون:

$P_2 = 9$ وحدة نقدية

ومن (ر) نجد أن:

$$\tilde{P}_2 = \frac{P_2}{10.66} = 0.8437$$ وحدة نقدية

ومن (ز) نجد أن:

$$\tilde{P}_1 = 2.25$$ وحدة نقدية

وهذه تمثل أسعار التوازن لمنتجات وعناصر الإنتاج في القطاعين.

6) نعوض في توابع العرض والطلب:

$$X_{21} = \frac{P_1}{\tilde{P}_1} = \frac{3}{2.25} = 1.33$$ وحدة سلعية

وهو الطلب على عنصر الإنتاج الثاني في القطاع الأول.

$$X_{11} = \frac{P_2}{\tilde{P}_1} = \frac{9}{2.25} = 4$$ وحدة سلعية

وهو الطلب على عنصر الإنتاج الأول في القطاع الأول.

$$X_{22}^{2} = \frac{2P_1}{\tilde{P}_2} = \frac{6}{0.8437} = 7.11$$

$$\Rightarrow X_{22} = 2.666 \quad \text{وحدة سلعية}$$

وهو الطلب على عنصر الإنتاج الثاني في القطاع الثاني.

$$X_{12} = \frac{P_2}{\tilde{P}_2^{1/2} P_1^{1/2} 1.42} = \frac{9}{0.918(1.73)1.42} = 4 \quad \text{وحدة سلعية}$$

وهو الطلب على عنصر الإنتاج الأول في القطاع الثاني.

$$\tilde{Y}_1 = \frac{P_2 P_1}{\tilde{P}_1^{2}} = \frac{27}{5.06} = 5.33 \quad \text{وحدة سلعية}$$

وهو عرض السلع في القطاع الأول.

$$\tilde{Y}_2 = \frac{P_2 P_1}{\tilde{P}_2^{1.5} P_1^{1/2} 1.42} = \frac{27}{0.77(1.73)1.42} = 14.22 \quad \text{وحدة سلعية}$$

وهو عرض السلع في القطاع الثاني.

$$Y_1 = \frac{3.2P_1 + 1.6P_2}{2\tilde{P}_1} = \frac{6.9 + 14.4}{2(2.25)} =$$

$$= \frac{24}{4.5} = 5.33 \quad \text{وحدة سلعية}$$

وهو الطلب على سلع القطاع الأول.

$$Y_2 = \frac{3.2 + 1.6P_2}{2\tilde{P}_2} = \frac{24}{1.6874} = 14.22 \quad \text{وحدة سلعية}$$

وهو الطلب على سلع القطاع الثاني.

أو بطريقة أخرى:

$$\tilde{X}_1 = X_{11} + X_{12} = 8$$

$$= 4 + 4 = 8 \quad \text{وحدة سلعية}$$

وهو العرض الإجمالي لعنصر الإنتاج الأول.

العرض الإجمالي = الطلب الإجمالي لعنصر الإنتاج الثاني.

$$\tilde{X}_2 = X_{21} + X_{22} = 4 \quad \text{وحدة سلعية}$$

$$= 1.33 + 2.66 = 4 \quad \text{وحدة سلعية}$$

عرض السلع في القطاع الأول:

$$\tilde{Y}_1 = X_{11} X_{21}$$

$$= (4)(1.32) = 5.33 \quad \text{وحدة سلعية}$$

عرض السلع في القطاع الثاني:

$$\tilde{Y}_2 = \frac{1}{2} X_{12} X_{22}^2$$

$$= \frac{1}{2}(4)(7.11) = 14.22 \quad \text{وحدة سلعية}$$

7) أ. التوازن الجزئي في أسواق المنتجات:

1. التوازن في القطاع الأول:

$$\tilde{Y}_1 = Y_1 = 5.33 \quad \text{وحدة سلعية}$$

2. التوازن في القطاع الثاني:

$$\tilde{Y}_2 = Y_2 = 14.22 \quad \text{وحدة سلعية}$$

ب. التوازن الجزئي في أسواق عناصر الإنتاج:

1. التوازن في سوق عنصر الإنتاج الأول:

$$\tilde{X}_1 = X_{11} + X_{12} = 8$$

$$= 4 + 4 = 8 \quad \text{وحدة سلعية}$$

2. التوازن في سوق عنصر الإنتاج الثاني:

$$\tilde{X}_2 = X_{21} + X_{22} = 4$$

$$= 1.33 + 2.66 = 4 \quad \text{وحدة سلعية}$$

8) نعوض في توابع الربح للقطاعين:

$$\Pi_1 = \tilde{P}_1 X_{11} X_{21} - P_1 X_{11} - P_2 X_{21}$$

$$= 2.25(4)(1.33) - 3(4) - 9(1.33) = -12 \quad \text{وحدة نقدية}$$

وهي خسارة القطاع الأول.

$$\Pi_2 = \tilde{P}_2 \frac{1}{2} X_{12} X_{22}^2 - P_1 X_{12} - P_2 X_{22}$$

$$= \frac{0.843}{2} = (4)(7.11) - 3(4) - 9(2.66) = -24 \quad \text{وحدة نقدية}$$

وهي خسارة القطاع الثاني.

9) التوازن الكلي يتحقق عندما تتعادل قيمة الطلب الكلي مع قيمة العرض الكلي في جميع أسواق المنتجات وعناصر الإنتاج:

$$\tilde{Y}_1 \tilde{P}_1 + \tilde{Y}_2 \tilde{P}_2 + \tilde{X}_1 P_1 + \tilde{X}_2 P_2 =$$

$$= Y_1 \tilde{P}_1 + Y_2 \tilde{P}_2 + (X_{11} + X_{12}) P_1 + (X_{21} + X_{22}) P_2$$

$$\Rightarrow 5.33(2.25) + 14.22(0.8437) + 8(3) + 4(9) = 84 \quad \text{وحدة نقدية}$$

الفصل الرابع

نموذج التوازن الكلي
باستخدام جدول المدخلات والمخرجات

إن دراسة العلاقات التشابكية بين قطاعات الاقتصاد الوطني ليست حديثة العهد، فقد وضع كيناي عام 1708 ما يسم ى بالجدول الاقتصادي الذي عرض فيه علاقات التبادل بين القطاعات الاقتصادية المنتجة وغير المنتجة. وكذلك فإن كارل ماركس في الجزء الثاني من كتابه رأس المال 1872 قسَّم الاقتصاد الوطني إلى قطاعين قطاع منتج لسلع الاستهلاك وقطاع منتج لسلع الاستثمار. ثم جاء والراس (L. Walrss) بنموذجه عن التوازن العام 1877، وقد رأينا في الفصل السابق أن هذا النموذج يمثل مجموعة معادلات تعبر عن الطلب والعرض على مختلف السلع وعناصر الإنتاج، وأن توازن العرض والطلب الإجماليين يحدد نظام الأسعار والكميات التوازنية التي تحقق التوازن الاقتصادي الكلي.

ولكن جميع هذه النماذج بقيت دون تطبيق عملي محسوس إلى أن قام الاقتصادي ليونتيف 1931 بوضع نموذج عُرف باسمه أو بتحليل المدخلات والمخرجات، وقد استفاد ليونتيف في نموذجه من النموذج الفالراسي للتوازن الكلي وذلك بعد تبسيطه، بالإضافة إلى التخلص من افتراض فالراس حول ثبات حجم عرض عناصر الإنتاج.

المبحث الأول

جدول المدخلات والمخرجات

إن ميزان التشابك القطاعي (جدول المدخلات والمخرجات) يمثل أداة مهمة تستخدم لتحليل علاقات الترابط بين مختلف قطاعات الاقتصاد الوطني وتخطيطها. أي إن هذا الميزان يبين تدفقات السلع بين مختلف القطاعات الاقتصادية خلال مدة زمنية محددة.

لقد صاغ ليونتيف نموذج المدخلات والمخرجات بالاعتماد على الافتراضات الآتية:

1. إن عدد السلع يساوي عدد القطاعات، بمعنى أن كل قطاع ينتج نوع اً واحداً فقط من السلع.
2. إن نسب ما يحتاجه كل قطاع من منتجات بقية القطاعات من أجل إنتاج وحدة واحدة من منتجاته تبقى ثابتة بغض النظر عن حجم إنتاجه، وهذه النسب تُعرف بمعاملات الإنتاج التقنية. إن افتراض ثبات هذه المعاملات (أي ثبات نسب مزج عناصر الإنتاج) يُعد حالة خاصة من حالات عوائد عناصر الإنتاج، ويتضمن أن يكون تابعَ الإنتاج متجانساً من الدرجة الأولى.
3. إن الأسعار تبقى ثابتة. وهذا الافتراض مكمل للافتراض السابق، إذ أن تغير أسعار المدخلات لابد أن يؤدي إلى تغير معاملات الإنتاج التقنية.
4. يتشكل الاقتصاد الوطني من n قطاعاً استهلاكياً، وما يماثله ا من القطاعات الإنتاجية، بحيث إن كل قطاع من هذه القطاعات يمثل جانبي العرض والطلب.

فإذا نظرنا إلى القطاع باعتباره يمثل جانب العرض، فإننا نرى أن هذا القطاع يقوم بتصريف إنتاجه عن طريق بيعه كمادة أولية تستخدم في بقية القطاعات وفي القطاع نفسه من جهة أولى، وعن طريق بيعه لمنتجاته كسلعة للطلب النهائي (الاستهلاكي والاستثماري الخاص والعام والتغير في المخزون والقطاع الخارجي [الصادرات]) من جهة أخرى. أي إن عرض هذا القطاع يمثل جزءاً من طلب بقية القطاعات (بما فيها القطاع الخارجي) على الاستهلاك الوسيط والاستهلاك النهائي. وهذا ما يمثل إجمالي مخرجات هذا القطاع.

أما إذا نظرنا إلى القطاع باعتباره يمثل جانب الطلب، فإننا نرى أن هذا القطاع يستخدم جزءاً من منتجاته ومن منتجات بقية القطاعات باعتبارها مواد أولية، والقيمة المضافة التي تعبر عن أجور العمال الذين يستخدمهم هذا القطاع بالإضافة إلى الربح والريع والفائدة. ويضاف إلى ذلك الواردات. أي إن طلب هذا القطاع يمثل جزءاً من عرض بقية القطاعات بالإضافة إلى عرض خدمات عناصر الإنتاج والقطاع الخارجي. وهذا بمجمله يمثل إجمالي مدخلات هذا القطاع.

وبذلك فإن جدول المدخلات والمخرجات يأخذ الشكل:

القطاعات المنتجة	القطاعات المستهلكة (الاستهلاك الوسيط)	الطلب النهائي	إجمالي الإنتاج (إجمالي المخرجات)
	$X_1 \quad X_2 \ldots\ldots \ldots \quad X_n$		
X_1 X_2 . . X_n	$X_{11} \quad X_{12} \ldots\ldots\ldots X_{1n}$ $X_{21} \quad X_{22} \ldots\ldots\ldots X_{2n}$ . . $X_{n1} \quad X_{n2} \ldots\ldots\ldots X_{nn}$	Y_1 Y_2 . . y_n	X_1 X_2 . . X_n
القيمة المضافة	$V_1 \quad V_2 \ldots\ldots\ldots V_n$	$\sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{j=1}^{n} v_j$	
إجمالي المدخلات	$X_1 \quad X_2 \ldots\ldots\ldots X_n$		$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{j=1}^{n} x_j$

حيث إن:

$(i,j = 1,2 \ldots\ldots\ldots n)$

X_i – الإنتاج الإجمالي للقطاع i.

X_{ij} – هو الجزء من الإنتاج الإجمالي للقطاع i المباع إلى القطاع j.

Y_i – الطلب النهائي على منتجات القطاع i.

V_j – القيمة المضافة في القطاعj.

وبذلك فإن المخرجات الإجمالية للقطاع i يُعبر عنها بالمعادلة:

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} X_{ij} + Y_i \qquad (4-1)$$

أما المدخلات الإجمالية للقطاع j فيُعبَّر عنها بالمعادلة:

$$X_j = \sum_{i=1}^{n} X_{ij} + V_j \qquad (4-2)$$

ونلاحظ أنه قد خصص لكل قطاع عمود وسطر بحيث يوضح السطر الذي تمثله المعادلة (4-1) الكيفية التي يتوزع بها إنتاج هذا القطاع. أما العمود والذي تمثله المعادلة (4-2) فيمثل المستلزمات اللازمة لإنتاج هذا القطاع.

نلاحظ من الجدول أن إجمالي القيمة المضافة يساوي إجمالي الطلب النهائي أي:

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = \sum_{j=1}^{n} V_j$$

وهذا هو ما يمثل إجمالي الناتج المحلي أو القومي.

ويمكن إثبات أن مجموع القيم المضافة يساوي مجموع الطلب النهائي من خلال افتراض حالة اقتصاد ذي قطاعين فقط كالآتي:

بتطبيق المعادلتين (4-1) و(4-2) نحصل بالنسبة للقطاع الأول على:

$$X_1 = X_{11} + X_{12} + Y_1 \qquad (4-3)$$

$$X_1 = X_{11} + X_{21} + V_1 \qquad (4-4)$$

أما بالنسبة للقطاع الثاني فنحصل على:

$$X_2 = X_{21} + X_{22} + Y_2 \qquad (4-5)$$

$$X_2 = X_{12} + X_{22} + V_2 \qquad (4-6)$$

من (4-3) و (4-4) نحصل على:

$$X_{11} + X_{21} + V_1 = X_{11} + X_{12} + Y_1 \qquad (4-7)$$

ومن المعادلتين (4-5) و (4-6) نحصل على:

$$X_{12} + X_{22} + V_2 = X_{21} + X_{22} + Y_2 \qquad (4-8)$$

وباختصار (4-7) نحصل على:

$$X_{21} - X_{12} = Y_1 - V_1 \qquad (4-9)$$

وباختصار المعادلة (4-8) نحصل على:

$$X_{12} - X_{21} = Y_2 - V_2 \qquad (4-10)$$

وبجمع المعادلتين (4-9) و (4-10) نحصل على:

$$Y_1 - V_1 + Y_2 - V_2 = X_{21} - X_{12} + X_{12} - X_{21}$$

$$Y_1 - V_1 + Y_2 - V_2 = 0$$

$$\Rightarrow Y_1 + Y_2 = V_1 + V_2$$

وهذا يعني أن:

$$\sum_{i=1}^{2} Y_i = \sum_{j=1}^{2} V_j$$

ويمكن تعميم هذا لنحصل على:

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = \sum_{j=1}^{n} V_j$$

فإذا فرضنا للتبسيط أن الاقتصاد القومي يتشكل من ثلاثة قطاعات فقط وهي الزراعة والصناعة والخدمات، فإن جدول المدخلات والمخرجات يأخذ الصورة الآتية:

القطاعات المنتجة	القطاعات المستهلكة (الاستهلاك الوسيط)			الطلب النهائي	إجمالي الإنتاج (إجمالي المخرجات)
	الخدمات	الصناعة	الزراعة		
الزراعة	100	200	120	180	600
الصناعة	150	80	180	390	800
الخدمات	150	120	60	670	1000
القيمة المضافة	600	400	240	1240	
إجمالي المدخلات	1000	800	600		2400

إن هذا الجدول يتألف من أربعة أقسام وهي:

ربع الاستخدام الوسيط: هو عبارة عن مصفوفة الاستخدام الوسيط للسلع وهي من المرتبة (n,n). وهذا الربع يمثل علاقات التبادل فيما بين القطاعات المنتجة فقط (بما فيها قطاع الخدمات).

ربع الطلب النهائي: هو شعاع الطلب النهائي وهو من المرتبة (n,1). وهو يُقسم إلى استهلاك نهائي خاص وعام، واستثمار خاص وعام، والتغير في المخزون، بالإضافة إلى صافي التعامل مع العالم الخارجي.

ربع القيمة المضافة: هو عبارة عن شعاع القيمة المضافة وهو من المرتبة (1,n). وهو يقسم إلى أجور العمل والربح والفائدة والريع.

ربع التوازن: وهو يمثل التوازن بين إجمالي القيمة المضافة وإجمالي الطلب النهائي من جهة أولى، وبين العرض الكلي والطلب الكلي في الاقتصاد الوطني بمجمله من جهة ثانية.

المبحث الثاني

مصفوفة معاملات الإنتاج التقنية

من أجل التعرف على تقنية الإنتاج السائدة في الاقتصاد، أي مدى ما يحتاجه إنتاج وحدة واحدة من سلع قطاع معين إلى مدخلات من القطاعات الأخرى، فإنه يلزمنا تحويل جدول المدخلات والمخرجات إلى شكل معاملات وذلك عن طريق حساب نسبة كل مدخل من المدخلات إلى حجم المخرجات في كل قطاع من قطاعات الاقتصاد الوطني، فينتج لدينا ما يُعرف بمصفوفة معاملات الإنتاج التقنية.

فإذا نظرنا إلى جدول المدخلات والمخرجات السابق، فإننا نلاحظ أن العمود الأول يوضح أنه من أجل إنتاج ما قيمته 600 وحدة نقدية فقد أسهمت مختلف القطاعات في ذلك على الشكل الآتي:

ساهم قطاع الزراعة X_1 بنسبة من هذه القيمة تساوي $\frac{X_{11}}{X_1}=\frac{120}{600}=0.2$

وساهم قطاع الصناعة X_2 بنسبة قدرها $\frac{X_{21}}{X_1}=\frac{180}{600}=0.3$

ساهم قطاع الخدمات X_3 بنسبة قدرها $\frac{X_{31}}{X_1}=\frac{60}{600}=0.1$

أما نسبة القيمة المضافة إلى إجمالي قيمة إنتاج هذا القطاع فتحسب بالمعادلة:

$$V_1=1-\frac{\sum_{i=1}^{3}X_{i1}}{X_1}$$

$$=1-\frac{360}{600}=\frac{240}{600}=0.4$$

ونلاحظ أن مجموع هذه النسب في كل عمود يجب أن تساوي الواحد الصحيح إذا كان يشمل سطر القيمة المضافة.

وبذلك فإن:

$\frac{X_{11}}{X_1}$ تمثل نسبة ما يستخدمه قطاع الزراعة من إنتاجه كنسبة لجملة هذا الإنتاج.

$\frac{X_{21}}{X_1}$ تمثل نسبة ما اشتراه قطاع الزراعة X_1 من قطاع الصناعة X_2 كنسبة في إجمالي إنتاج قطاع الزراعة.

$\frac{X_{31}}{X_1}$ تمثل نسبة ما اشتراه قطاع الزراعة X_1 من منتجات قطاع الخدمات كنسبة في إجمالي إنتاج قطاع الزراعة.

وبصفة عامة فإن:

$\frac{X_{i1}}{X_1}$ تمثل نسبة ما اشتراه القطاع X_1 من منتجات القطاع X_i كنسبة من إجمالي إنتاج القطاع X_1 .

أي إن:

$\frac{X_{ij}}{X_j}$ تمثل نسبة ما باعه القطاع X_i إلى القطاع X_j كنسبة من إنتاج القطاع X_j .

وبذلك فإن:

$$a_{ij} = \frac{X_{ij}}{X_j}$$

$$\Rightarrow X_{ij} = a_{ij} * X_j \qquad (4-11)$$

حيث تسمى النسبة a_{ij} بمعامل الإنتا ج التقني. وبذلك فإننا يمكن أن نضع مصفوفة المعاملات الفنية:

القطاعات المنتجة	القطاعات المستخدمة
	X_1 X_2 ..... X_n
X_1	a_{11} a_{12} ..... $a_{1n.}$
X_2	a_{21} a_{22} ..... a_{2n}
.	.
.	.
X_n	a_{n1} a_{n2} .... $a_{nn.}$
القيمة المضافة	$(1-\sum_{i=1}^{n} a_{i1})$ $(1-\sum_{i=1}^{n} a_{i2})$ ..... $(1-\sum_{i=1}^{n} a_{in})$
المجموع	1 1.....1

وفي مثالنا حول القطاعات الثلاثة فإن مصفوفة المعاملات تأخذ الشكل الآتي:

القطاعات المنتجة	القطاعات المستخدمة		
	X_1	X_2	X_3
X_1 الزراعة	0.2	0.25	0.1
X_2 الصناعة	0.3	0.1	0.15
X_3 الخدمات	0.1	0.15	0.15
القيمة المضافة	0.4	0.5	0.6
المجموع	1	1	1

فيما إذا عوضنا (4-11) في (4-1) فإن:

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j + Y_i \qquad (4-12)$$

$$\Rightarrow Y_i = X_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j$$

وبشكل مشابه نستطيع أن نستنتج أن:

$$X_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} X_j + V_j$$

$$\Rightarrow V_j = [1 - \sum_{i=1}^{n} a_{ij}] X_j$$

$$\Rightarrow X_j = \frac{V_j}{[1 - \sum_{i=1}^{n} a_{ij}]}$$

حيث إن $0 \le a_{ij} < 1$.

من (12-4) فإن الإنتاج في كل قطاعات الاقتصاد الوطني يكون:

$$X_1 = a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + ... + a_{1n}X_n + Y_1$$

$$X_2 = a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + ... + a_{2n}X_n + Y_2$$

$$\vdots .....$$

$$X_n = a_{n1}X_1 + a_{n2}X_2 + ... + a_{nn}X_n + Y_n$$

وبإعادة الترتيب تصبح هذه المعادلات:

$$Y_1 = (1 - a_{11})X_1 - a_{12}X_2 - ..... - a_{1n}X_n$$

$$Y_2 = -a_{21}X_1 + (1 - a_{22})X_2 - ..... - a_{2n}X_n$$

$$\vdots .....$$

$$Y_n = -a_{n1}X_1 - a_{n2}X_2 - ..... + (1 - a_{nn})X_n$$

وباستخدام المصفوفات فإننا نعبر عن نظام المعادلات كالآتي:

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-a_{11}) & -a_{12} & ... & -a_{1n} \\ -a_{21} & (1-a_{22}) & ... & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & ... & (1-a_{nn}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}$$

وباستخدام المصفوفة الأحادية من المرتبة (n,n) يمكن إعادة كتابة نظام المعادلات:

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.....0 \\ 0 & 1.....0 \\ \vdots & \vdots.....\vdots \\ 0 & 0.....1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}.....a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}.....a_{2n} \\ \vdots & \vdots.....\vdots \\ a_{n1} & a_{n2}.....a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}$$

ويمكن اختصار هذه العلاقات كالآتي:

$$Y_{(n,1)} = (I - A)_{(n,n)} X_{(n,1)}$$

حيث إن:

Y تمثل شعاع الطلب النهائي.

X هو شعاع إجمالي الإنتاج.

A مصفوفة معاملات الإنتاج التقنية وتُعرف أيضاً بمصفوفة معاملات النفقات المباشرة.

I المصفوفة الأحادية من المرتبة (n,n).

وباعتبار أن المسألة هنا هي تحديد حجم الإنتاج الكلي في مختلف القطاعات فإن المعادلة تكتب:

$$X_{(n,1)} = (I - A)^{-1}_{(n,n)} Y_{(n,1)}$$

أو:

$$X_{(n,1)} = B_{(n,n)} Y_{(n,1)}$$

حيث إن: B هي مصفوفة معاملات النفقات الكلية.

وهذه العلاقة الأخيرة تساعدنا – في حال معرفة حجم الطلب النهائي – في حساب قيمة الإنتاج الكلي في مختلف قطاعات الاقتصاد الوطني.

المبحث الثالث

مصفوفة المعاملات التقنية الترابطية

إذا فرضنا أن مصفوفة معاملات الإنتاج التقنية كانت من الشكل الآتي:

$$A = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.1 \\ 0.3 & 0.2 & 0.2 \\ 0 & 0.1 & 0.3 \end{bmatrix}$$

فنلاحظ أن القيمة الموجبة لكل خانة من خانات هذه المصفوفة تمثل وجود علاقة تبادل بين قطاعين من قطاعات الاقتصاد الوطني، وأن انعدام مثل هذه العلاقة يُعبَّر عنه بالرقم صفر.

والسؤال هنا هل تمثل هذه المصفوفة حالة وجود أم انعدام العلاقات الترابطية بين مختلف قطاعات هذا الاقتصاد؟

من أجل أن نعرف ما إذا كانت هذه المصفوفة ترابطية أم غير ترابطية، فإنه يجب علينا أن نتعرف على اتجاه ونوع العلاقات بين القطاعات.

فإذا كانت هذه المصفوفة ترابطية فلا يمكن تقسيم القطاعات الإنتاجية فيها إلى مجموعتين تجري عمليات الإنتاج في إحداهما دون استخدام منتجات أي من قطاعات المجموعة الثانية كسلع وسيطة. بكلام آخر إذا كانت هذه المصفوفة ترابطية فإن كل قطاعين يكون لهما علاقات متبادلة مع بعضهما بعضاً بكلا الاتجاهين؛ أي إن منتجات كل منهما تستخدم في عملية الإنتاج لدى الآخر إما بشكل مباشر أو بشكل غير مباشر.

ففي هذه المصفوفة نرى أن القطاع الأول يستعمل في الإنتاج سلعاً وسيطة من إنتاجه ومن إنتاج القطاع الثاني، ولا يستعمل سلعاً وسيطة من إنتاج القطاع الثالث، بينما القطاع الثالث يستعمل سلعاً وسيطة من إنتاج كل القطاعات بما فيها

القطاع الأول، لذا نقول إن هناك علاقة متبادلة بين القطاعين الأول والثالث مباشرة ولكن باتجاه واحد فقط من القطاع الأول إلى الثالث، وليس هناك علاقة متبادلة مباشرة بالاتجاه الآخر (أي من القطاع الثالث إلى الأول)، وبما أن القطاع الأول يستعمل سلعاً وسيطة من إنتاج القطاع الثاني وهذا الأخير يحتاج إلى سلع وسيطة من إنتاج القطاع الثالث، فإن هذا يعني أن القطاع الأول يحتاج بشكل غير مباشر إلى منتجات القطاع الثالث، أي إنه يوجد بينهما ارتباط غير مباشر عن طريق القطاع الثاني

ك‌ا‌ت‌و‌ف‌ل‌ي م‌ط‌ق‌ن‌ئ‌ة ه‌ل‌ص‌ئ‌ع ي‌ئ‌أ‌م‌ت‌ث:

باعتبار أنه يوجد علاقات ترابطية بين مختلف القطاعات فإن زيادة معينة في الطلب النهائي على سلع أحد القطاعات (وبافتراض أن الطلب يحرض الإنتاج والعرض) ستؤدي ليس فقط إلى زيادة إنتاج هذا القطاع وإنما أيضاً إلى زيادة إنتاج بقية القطاعات المزودة لهذا القطاع، وبالتالي فإن المضاعف هنا يقصد به أن زيادة أولية في الطلب النهائي ستؤدي إلى زيادات متتالية في إنتاج كل القطاعات المترابطة، وليس فقط في إنتاج القطاع الذي زاد الطلب النهائي على منتجاته. وبالتالي نقول إن المضاعف هو عبارة عن قيمة إجمالي الزيادات الحاصلة في إنتاج كل القطاعات الناجمة عن زيادة أولية في الطلب النهائي بمقدار وحدة نقدية واحدة.

ويمكننا حساب قيمة هذا المضاعف بعدة طرق منها:

1) نعوض شعاع الطلب النهائي الجديد بعد زيادة هذا الطلب في أحد القطاعات في المعادلة:

$$X = B * Y$$

فنحصل على قيم الإنتاج الجديدة لكل القطاعات، وبالتفاضل بين مجموع هذه القيم والقيم السابقة قبل زيادة الطلب نحصل على قيمة المضاعف. وهذه الطريقة هي الأشمل والأعم ولكنها الأطول.

2) إن مضاعف كل قطاع من قطاعات الاقتصاد الوطني يحسب بالمعادلة الآتية:

$$K_j = \sum_{i=1}^{n} b_{ij}$$

حيث إن:

K_j هو مضاعف القطاع j (القطاع الذي حصلت زيادة في الطلب النهائي على منتجاته).

b_{ij} هي عبارة عن معاملات النفقات الكلية.

3) (حالة خاصة) في حال كون مضاعفات القطاعات المختلفة متساوية في القيمة فإن المضاعف يمكن حسابه بالمعادلة

$$K_j = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{\sum_{i=1}^{n} Y_i}$$

المبحث الرابع

استخدام أكثر من طريقة فنية في القطاع [1]

في دراستنا أعلاه كان النموذج يستند أساساً إلى فرضية رئيسة وهي أن كل صناعة أو قطاع يقوم بإنتاج منتج واحد، مما يعني استخدام أسلوب فني واحد (أي ثبات الفن الإنتاجي) في إنتاج منتجاته. [2]

ولكن حين نلقي نظرة فاحصة واقعية على الظاهرة أو الواقع الإنتاجي والاقتصادي في المجتمع، نجد أن الأمر يختلف بعض الشيء عن تلك الفرضية فهناك بعض القطاعات الإنتاجية في الاقتصاد الوطني تستطيع القيام بالعملية الإنتاجية مستخدمة عدة أنواع وأشكال من الطرق الفنية للإنتاج. وبناء على ذلك، قام فون– نيومان بدراسة هذه الظاهرة، معتبراً إمكانية استخدام فرض تعدد الطرق الفنية للإنتاج، والذي أطلق عليه فرض فون نيومان [3] حيث تعترض إمكانية تعميم تلك الفرضية أي تعدد البدائل التكنولوجية للمشروع وذلك بافتراض أن الاقتصاد القومي ينقسم إلى عدد من القطاعات وكل قطاع يختص بإنتاج سلعة معينة وأن هناك ثمة طرق فنية تكنولوجية لإنتاج هذه السلعة داخل القطاع أو الصناعة، ويتم اختيار أفضل طريقة ممكنة من الطرق المتعددة.

فعلى سبيل المثال: يستطيع قطاع صناعة السيارات في الاقتصاد الوطني أن ينتج منتجاته (السيارات) مستخدماً عدة طرق فنية للإنتاج:

1. استخدام رأس المال والعمالة بشكل متساو تقريباً.
2. استخدام رأس المال أي التركيز على الآلات والمعدات الأوتوماتيكية.

---

(1) د. ، جعفر حاجي: تحليل جداول المدخلات والمخرجات الصناعية، مرجع سابق.ص 304.

(2) David Anderson. Dennis J. Sweeney, and Thomas A. Williams: Linear Programming for Decision Making. 1974, pp. 55.

(3) Von Neumann, J.: A Model of General Economic Equilibrium. Review of Economic Studies (1959 – 1964).

3. التركيز على العمل اليدوي، أي استخدام العمالة بشكل مكثف.

وهناك عدة بدائل لاستخدام الطاقة منها ما يلي:

1) استخدام الطاقة الذرية.
2) استخدام الطاقة الكهربائية.
3) استخدام مواد أولية متباينة.
4) استخدام الفحم.

فهذه المسائل كلها تؤثر في المعاملات الفنية للإنتاج، فاختيار أي منها له آثار وأبعاد متعددة على القطاعات الإنتاجية الأخرى بما فيها القطاع نفسه.

وسنتطرق الآن إلى النموذج المبسط المبني على فرضية إمكانية تعدد الطرق الفنية للإنتاج للمنتج الواحد داخل القطاع أو الصناعة في الاقتصاد الوطني.

بافتراض أن القطاع j (j = 1, 2, ...,n) أمامه عدة خيارات لاختيار الفن الإنتاجي يرمز له بالرمز i من الأساليب الفنية للإنتاج. ويمكننا التعبير عن إجمالي أنواع الأساليب الفنية للإنتاج في القطاعات أو الصناعات الاقتصادية بالشكل الآتي:

$$M\sum_{j=1}^{n} S_j \qquad (4-13)$$

وبافتراض أن إحدى الطرق أو الأساليب الفنية هي K أي إن (K = 1, 2,..,m) وبترقيم الطرق والأساليب الفنية ترقيماً تسلسلياً، ابتداء من القطاع الأول ($K = 1, 2,..,S_i$)، ثم الانتقال إلى القطاع الثاني وتحديد الأسلوب الفني المتبع فيه، فإن هذه الأساليب تأخذ الأرقام الآتية:

$$K = S_i + I, S_i + 2,...., S_i + m$$

وبافتراض أن A` تشير إلى مصفوفة المعاملات الفنية للإنتاج في هذا النموذج وهي من المرتبة nm نحصل على ميزان الإنتاج وتوزيع المنتجات في القطاع i على النحو الآتي:

$$X_K - \sum_{K=1}^{m} a_{ik} X_K = Y_i \qquad (4-14)$$

حيث إن:

(i = 1,2,…,n)

X_K – تشير إلى حجم الإنتاج وفقاً للأسلوب الفني K.

Y_i – تشير إلى حجم الطلب النهائي على المنتجات (i).

$M_{(i)}$ – تدل على مجموعة أعداد الأساليب الفنية للإنتاج في القطاع i:

$$\mu_{(i)} = [K_i - \sum_{i=1}^{1} S_i \geq K \succ \sum_{i=1}]S_i \qquad (4-15)$$

ونستنتج من المعادلات والعلاقات الواردة في المعادلة (4-14) بأن إنتاج السلع (i) بكل الأساليب الفنية للإنتاج في القطاع (i) يتم توزيعه إما لسد حاجة الاستخدام الوسيط للسلع (i) لدى القطاعات الإنتاجية بكل أساليبها الفنية للإنتاج، أو لسد حاجة الطلب النهائي على المنتجات (i).

وبافتراض أن الشعاع (X) للإنتاج بالأساليب الفنية المختلفة والذي يعدّ من مرتبة (m1) ومركباته أو عناصره الأولى هي $(X_1, X_2, ..., X_{S1})$ والتي عددها S_1 تشير إلى حجوم الإنتاج في القطاع الأول وفقاً للأساليب الفنية المتنوعة. ويمكن تحديد عناصرها أو مركباتها على النحو الآتي:

$$(X_{S1} + 1, X_{S1} + 2, ..., X_{S1} + S_2)$$

والتي عددها S_2 وتشير إلى حجوم الإنتاج بالأساليب الفنية في القطاع الثاني وهكذا.

وبافتراض أن الشعاع (X) هو الطلب النهائي المكون من المرتبة (n1).

ولتكن E هي المصفوفة التالية (ذات المرتبة nm).

$$E = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 & ..... & s_n & \\ 1...1 & 0...0 & ..... & 0...0 & 1 \\ 0...0 & 1...1 & ..... & 0...0 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0...0 & 0...0 & ..... & 1...1 & n \end{bmatrix}$$

فبالاستعانة بالرموز السابق ذكرها، نعيد صياغة العلاقة (14−4) من أجل جميع قيم i على النحو الآتي:

$$(E - A) X = Y \qquad (4\text{-}16)$$

وتشمل هذه المعادلة الشعاعية على n معادلة عددية و m عدداً من المجاهيل، وبما أن $m > n$ في الحالة العامة، فإن هذا النموذج لا ينتج حلاً وحيداً. بينما تحدد قيم مكونات الشعاع Y من خارج النموذج، غير أن هناك قيوداً تفرض على مكونات Y، الأمر الذي لا نستطيع زيادة حجم Y إلا إلى مستوى معين تبعاً لحجم القيود والشروط المفروضة على النشاط الإنتاجي، والتي استخلصت بقيود العمالة ورأس المال ومصادر الثروات الخ. ونظراً لوجود عدة طرق وأساليب فنية للإنتاج في كل قطاع من أجل إنتاج منتجاته، لذا يستلزم الأمر اختيار وتوزيع الوظائف الإنتاجية على الأساليب الفنية المتعددة داخل كل قطاع من أجل التوصل إلى أكبر حجم من الإنتاج في القطاع، أو بأقل تكلفة إنتاجية ممكنة في القطاع الإنتاجي في الاقتصاد الوطني.

وتأسيساً على ذلك يستلزم الأمر إضافة شروط أخرى وإدراجها في العلاقة أو المعادلة (4-16) وتتمثل هذه الشروط في وصف القدرة الإنتاجية القصوى لكل أسلوب فني.

وبافتراض معرفة قيم المعاملات الفنية في الأساليب والطرق الفنية الإنتاجية المختلفة، نستطيع تحديد قيم المعاملات الفنية في كل قطاع في نموذجنا المبسط، وذلك بربط المعاملات الفنية a_{ij} في النموذج المبسط مع المعاملات a_{ik} في المعادلة (4-16) وذلك على النحو الآتي:

$$a_{ij} = \sum_{KEM(j)} KA_{ik} \qquad (4\text{-}17)$$

حيث إن:

$$(I, j = 1,2,\ldots,n)$$

و:

βK – تشير إلى النسبة بين حجم الإنتاج من النوع j بالأسلوب الفني K والحجم الإجمالي في القطاع (j) بكل الأساليب الفنية المستخدمة فيه أي:

$$\sum_{KEM(j)} \beta K = 1, \quad 1 \geq \beta K \geq 0$$

وبتشكيل المصفوفة القطرية β من المعاملات (βK):

$$\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0\ldots0 & & \\ 0 & 2\ldots0 & & \\ 0 & 0\ldots1 & \ldots. & 0 \\ 0 & 0\ldots0 & \ldots. & M \end{bmatrix}$$

وتأسيساً على ذلك يمكننا إعادة صياغة المعادلة (4-17) من أجل جميع قيم i و j على النحو الآتي:

$$A = A`\beta E^*$$

حيث إن: *E تشير إلى مبدول (منقول أو مدور) المصفوفة (E) (Transposed Matrix).

المبحث الخامس

استخدامات جدول المدخلات والمخرجات[1]

إن طبيعة جدول المدخلات والمخرجات توضح مدى ما يتمتع به من مقومات تجعله من أكثر النماذج والأساليب التحليلية الكمية انتشاراُ واستخداماُ في التحليل والتخطيط والتنبؤ، إلى درجة أصبحت معها استخداماته غير محدودة في شتى مجالات الحياة الاقتصادية. [2]

وتاريخياً نلاحظ أن بناء جدول المدخلات – المخرجات كان يستهدف أساساُ تبيان التشابك والعلائق الاقتصادية المتبادلة بين الأنشطة الإنتاجية في الاقتصاد الوطني، بغية بيان مواطن الاختناقات التي تعيق استمرارية العملية الإنتاجية وفقاُ للخطة المرسومة لها. وبعد التطورات التي طرأت على جدول المدخلات – المخرجات فإنه صار يستخدم كأداة ونموذج لتحقيق التوازن العام في الاقتصاد الوطني.

ومع التطورات المتنامية المستمرة لجداول المدخلات – المخرجات، فقد تجاوزت وظيفتها التقليدية كأداة تصورية للنشاط الإنتاجي واستكشاف التشابكات والعلاقات الاقتصادية المتبادلة بين مختلف الأنشطة الإنتاجية في الاقتصاد الوطني، إلى أداة مهمة وأساسية في التحليل والتخطيط والتنبؤ في شتى المجالات الاقتصادية من الاستثمار والتجارة الخارجية والاستهلاك والإنتاج والأسعار والدخل والعمالة والبيئة والرفاهية...الخ، وذلك في جميع مستويات النشاط الإنتاجي سواء على مستوى الوحدة أو على مستوى المنشأة الصغيرة أو الإقليم أو الدولة، أو على المستوى العالمي.

---

(1) د. جعفر حاجي: تحليل جداول المدخلات والمخرجات الصناعية، مرجع سابق.ص 361.

(2) Richard Stone: Input - output And National accounts, Published by the Organization for Economic Co-operation And Development, 1961, pp. 169 190.

وقبل أن نستعرض بشكل موجز أهم استخدامات أو تطبيقات جداول المدخلات – المخرجات العملية، نرى من الأهمية بمكان أن نبين ملحوظة مهمة مرتبطة باستخدامات هذه الجداول، وهي أن التطبيقات العملية لهذه الج داول عادة ما تتوقف على كمية ونوعية البيانات والمعلومات الإحصائية والاقتصادية المتوافرة، وعلى كيفية تجميعها وتصنيفها، وعلى طبيعة العقبات والمشاكل التي تعيق عملية تصميم وبناء هذه الجداول و العلاجات المناسبة لها، بالإضافة إلى ذلك هي تتوقف أيضاً على طبيعة هيكل الاقتصاد الوطني وإطاره التنظيمي العام والسياسات والإجراءات الاقتصادية المستخدمة في إدارة الاقتصاد، وإلى الهدف من بناء مثل هذه الجداول في المجتمع.

ويمكننا تصنيف أهم تطبيقات جداول المدخلات – المخرجات إلى صنفين رئيسيين: أحدهما متعلق بأغراض التخطيط والتحليل والتنبؤ، والآخر مرتبط بعملية تطوير نظام إحصائي متكامل يعكس ماهية وطبيعة النشاط الاقتصادي في المجتمع.

أولاً: طرق إنجاز الجداول المختلفة والمتنوعة حسب الأغراض المختلفة أو المتعددة:

1. التحليل الهيكلي:

النظرة المتفحصة لمكونات جدول المدخلات – المخرجات، تؤكد لنا حقيقة مهمة مفادها بأن جدول المدخلات – المخرجات يعد مرآة تعكس لنا بكل وضوح التشابك والعلائق الاقتصادية المتبادلة والمتداخلة بين الأنشطة الإنتاجية في الاقتصاد الوطني. فمصفوفة المعاملات الفنية للإنتاج المباشرة والكلية تلقي الضوء على طبيعة وماهية التشابك والعلائق المتبادلة وأهميتها النسبية بين القطاعات أو الصناعات المختلفة في الاقتصاد الوطني، مما يكون عاملاً رئيساً ومهماً في عملية تحديد القطاعات والصناعات الرائدة والمسيطرة على النشاط الاقتصادي في المجتمع. [1]

(1) لمزيد من التفصيل راجع:

ولقد بينا في المباحث السابقة كيفية قياس التشابك والعلائق المتبادلة بين الصناعات أو القطاعات الاقتصادية ودرجات التشابك وأنواعها وأشكالها وأهميتها الاقتصادية في المجتمع.

2. تحليل هيكل الإنتاج ومقارنته:

من التطبيقات الواسعة ل جداول المدخلات – المخرجات في الاقتصاد الوطني: التحليل والمقارنة الهيكلية بين القطاعات الإنتاجية المختلفة في الاقتصاد، والتغيرات التي تطرأ عليها خلال المدد الزمنية المتباينة في الدراسة.

فإذا توافرت جداول المدخلات – المخرجات لسنوات مختلفة، فإننا نستطيع إجراء مقارنات هيكلية للنشاط الإنتاجي، وتبيان التغيرات الهيكلية ومعدلات النمو التي طرأت خلال المدة الزمنية المدروسة. فالتغيرات التي تطرأ على المعاملات الفنية للإنتاج خلال المدة الزمنية، تعكس في الواقع التغيرات الهيكلية للنشاط الإنتاجي، ومعدلات النمو، وقياس الإنتاجية في الاقتصاد الوطني.

ولقد قام ليونتيف [1] و آخرون من المختصين في م جالات ج داول المدخلات – المخرجات، بدراسات وأبحاث عديدة تتعلق بالتحليل والدراسة الهيكلية المقارنة للأنشطة الإنتاجية في الاقتصا د، حتى احتلت تلك الدراسات والأبحاث مساحة واسعة من أدبيات جداول المدخلات – المخرجات.

وبعد انتشار جداول المدخلات – المخرجات وبلورة الإطار الموحد لبنائها في الدول المتقدمة والنامية، قام المهتمون في هذا المجال بإجراء دراسات وأبحاث

- Siegfrid Schultz: Quantitative Criteria For the Determination of Pectoral Priorites. A proposed empirical identification to Key sectors. Research Institute of Asian Economics, Seoul, Korea.

W.W. Rostaw: The Take-off into Self Sustained. Economic Journal, Vol. Lxv1(1956), PP.43.

(1) نشر البروفوسور ليونتيف دراسة مفصلة عن هيكل الاقتصاد الأمريكي في 1941.
لمزيد من التفصيل راجع:

Leontief, Wassily. W.: The Structure of American Economy1919-1939. 2nd edition, Oxford University Press, New York 1951.

هيكلية مقارنة بين الدول المختلفة في شتى مجالات استخدامات جداول المدخلات –المخرجات [1]

وتفيد مثل هذه الدراسات في إلقاء الضوء على ماهية تركيبة الهيكل الإنتاجي بين الدول المتقدمة، أو مقارنتها مع الدول النامية، وذلك لمعرفة مدى تطور وتقدم اقتصاديات الدول المختلفة من حيث مدى متانة الاقتصاد الوطني وقوته وتقدمه ونموه الاقتصادي. [2]

3. رسم سياسات الإنتاج والاستهلاك والتصدير والاستيراد والضرائب والإعانات الحكومية:

أ. رسم سياسات الإنتاج وخططه:

بواسطة نموذج المدخلات–المخرجات يستطيع المخطط الاقتصادي أن يعطي صورة نهائية للخطة الإنتاجية الواجب اتباعها في المجتمع. ونظراً لطبيعة العملية الإنتاجية في الاقتصاد الوطني من حيث الاتساق والتنسيق بين خطط الإنتاج القطاعية، بحيث يضمن كل قطاع اقتصادي توافر متطلباته واحتياجاته الإنتاجية (Input Requirements) الوسيطة (Intermediate Inputs) والأولية (Primary Inputs) من زاوية، وضمان وجود طلب كاف على مخرجاته سواء للاستخدامات الوسيطة أو الطلب النهائي من زاوية أخرى، ودون تحقيق مثل هذا التنسيق بين مدخلات كل قطاع ومخرجاته، أو بين الاحتياجات الوسيطة والأولية والطلبات الوسيطة والنهائية لجميع القطاعات أو الصناعات الإنتاجية في الاقتصاد الوطني، يصبح من الصعب تنفيذ خطط الإنتاج القطاعية والوطنية دون

(1) Anthony Bottomley & Michael Lioyd: A six sector World Models. University of Bradford Publication 1979.

- Anthony Bottomley, John Dunworth, Colin Carpenter, Donald Nudds, Michael Lioyd, Martin Curtis and others: A Variable sector World Input-output Model. Seventh International Conference on Input-output Techniques (Innsbruck, Austria, 9-13 April 1979).
- C. Van Ravenzwaij: International Comparison of Technology Matrices.

(2) Seventh International Conference on Input-output Techniques (Innsbruck, Austria, 9-13 April 1979).

ظهور اختناقات في انسياب مستلزمات الإنتاج بين الصناعات أو القطاعات الإنتاجية المختلفة في الاقتصاد الوطني وذلك من حيث العجز أو الفائض.

و جدول المدخلات – المخرجات هو الأداة أو النموذج المناسب للقضاء على الاختناقات التي تظهر في أثناء تنفيذ الخطط الإنتاجية في الاقتصاد الوطني. فعلى ضوء التقديرات المعطاة لحجم الطلب النهائي لكل قطاع من القطاعات الإنتاجية في الاقتصاد الوطني يمكننا تحديد أهداف الإنتاج التوازنية والمتسقة للقطاعات الإنتاجية المختلفة باستخدام مقلوب مصفوفة المعاملات الفنية المباشرة للإنتاج.

ب. سياسات الاستثمار:

بعد إتمام عملية تحديد حجم الطلب الوسيط والنهائي لكل قطاع أو صناعة في الاقتصاد الوطني، يتم تحديد حجم الاستثمارات وأنواعها اللازم توافرها من أجل تنفيذ الخطة الإنتاجية، وتحقيق الأهداف والغايات المنشودة منها.

فبعد تحديد حجم الإنتاج الكلي اللازم لإشباع الطلب النهائي بواسطة مقلوب مصفوفة المعاملات الفنية للإنتاج، ومقارنة أحجام الإنتاج القطاعية مع الطاقات الإنتاجية المتاحة لها، يمكننا تحديد مقدار الزيادة المطلوبة أو تحديد الطاقة الإنتاجية المطلوبة لتلبية حجم الإنتاج المطلوب.

وباستخدام المعاملات القطاعية المتعلقة برأس المال يمكننا تحديد السياسات والقرارات الاستثمارية اللازمة للوصول بالطاقات الإنتاجية إلى المستوى الذي يضمن تحقيق الأهداف الإنتاجية. إذاً لكي نحدد حجم الاستثمارات القطاعية اللازم لتحقيق الأهداف الإنتاجية، يستلزم توافر حجم الطلب النهائي لكل قطاع من القطاعات الاقتصادية، ومصفوفة معاملات الاستخدام الكلية لرأس المال، ومقلوب مصفوفة المعاملات الفنية للإنتاج.[1]

(1) لمزيد من التفصيل راجع:
W. F. Gossling: Capital Coefficients And Dynamic Input-output Models. Input-output Publishing Company, October 1974.

ج. سياسات التصدير والاستيراد:

تكمن أهمية استخدام جدول المدخلات – المخرجات في رسم سياسات التصدير والاستيراد في الدول المتقدمة بشكل عام والدول النامية بشكل خاص في تلك القوة والمقومات التي يتسم بها هذا الجدول في ربط برامج وخطط التصدير والاستيراد ببرامج وخطط الإنتاج والاستثمار والاستهلاك والعمالة والدخل...الخ. فالاتساق والتنسيق الشامل والتام لا يتم إلا من خلال ربط هذه المتغيرات في نسق منسجم ومتسق.

وفي حقيقة الأمر إن المجالات التي تستخدم فيها جداول المدخلات – المخرجات في رسم سياسات وبرامج التصدير والاستيراد، تعتمد بشكل إجمالي على الكيفية التي يتم بها تجميع البيانات والمعلومات المتعلقة بهما وتصنيفها وكيفية معالجتهما في جدول المدخلات – المخرجات. وهناك عدة أساليب وطرق إحصائية تستخدم في معالجة الواردات والصادرات في الجدول. وفي الأغلب تتخذ الصادرات شكل عمود في قطاع الطلب النهائي، أي تعد جزءاً من مكونات الطلب النهائي التي تحدد مكوناتها وأحجامها من خارج نموذج جدول المدخلات – المخرجات، بينما تتخذ الواردات شكل صف في مصفوفة المستلزمات الأولية. ويتم أيضاً التمييز بين الأنواع المختلفة من الواردات فتصنف الواردات إلى واردات متنافسة والتي لها مثيل في الاقتصاد الوطني، وواردات غير متنافسة والتي ليس لها مثيل في الاقتصاد الوطني.

ويتم عادة ربط خطط الاستيراد بشكل متسق ومنسجم مع خطط وبرامج الإنتاج والاستثمار....الخ، وذلك باستخدام المعاملات الفنية للواردات أو معامل الواردات الذي يعكس لنا مدى الاحتياجات المباشرة من الواردات اللازمة لإنتاج وحدة واحدة من منتجات القطاعات أو الصناعات الإنتاجية المختلفة في الاقتصاد الوطني.

وباستخدام مقلوب مصفوفة المعاملات الفنية للإنتاج ومعاملات الواردات وحجم الطلب النهائي يمكننا تحديد الاحتياجات الكلية المباشرة وغير المباشرة من

الواردات اللازمة لانسياب وحدة واحدة من منتجات كل قطاع أو صناعة في الاقتصاد الوطني إلى الطلب النهائي.

وباستخدام جداول المدخلات – المخرجات نستطيع أن نحدد بشكل واضح ودقيق مدى كفاءة تطبيق السياسات الاقتصادية المتعلقة بالواردات والصادرات، فمثلاً نستطيع أن ندرس مدى الاستفادة ومدى كفاءة سياسة إحلال الواردات بإنتاج محلي، أو مدى كفاءة السياسة الضريبية على الواردات وآثارها على النشاط الاقتصادي في المجتمع. [1]

د. سياسات الأسعار والتكاليف:

باستخدام جداول المدخلات – المخرجات وما تقدمه لنا من بيانات مهمة متعلقة بالأسعار والتكاليف، يمكننا دراسة اتجاهات الأسعار والتكاليف، [2] وقياس المستوى العام للمعيشة، [3] ومعدلات التضخم، [4] واتجاهاته، بشكل تحدد لنا الدراسة إسهامات كل قطاع من القطاعات الاقتصادية في تلك الظواهر الاقتصادية.

---

(1) لمزيد من التفصيل راجع:

- Elkan, Walter: An Introduction to Development Economics. Middlesex, Penguin Books Ltd.,1973, pp. 78-79.
- Bruton, H. J.: The Import-Substitution Strategy of Economic Development: A Survey. The Pakistan Development Review, Vol. 10, 1970.

(2) Jafar Abbass Haje: The Application of Input-output Technique In Price. Cost Analysis Fir the Kuwaite Economy 1976, Arab Planning Institute, October 1981.

(3) Input-output Tables And Analysis In Methods Series F, No. 14, Rev. 1, United Nations, New York, 1973, pp. 103-122.

(4) H. D. Vinod: Price Inflation In An Input-output Structure. Seventh International Conference on Input-output Techniques, Innsbruck, Austria, 9-13 April, 1979.

وبإمكاننا دراسة أثر أسعار الطاقة مثل الفحم والنفط [1] وغيرها على الاقتصاد الوطني وذلك باستخدام جدول المدخلات–المخرجات.

وباستخدام مقلوب مصفوفة المعاملات الفنية للإنتاج ومعاملات كل من مكونات القيمة المضافة من الضرائب غير المباشرة، و الإهتلاكات، والأجور والرواتب، وفائض القيمة، يمكننا دراسة الأسعار والتكاليف ومستويات المعيشة في الاقتصاد الوطني.

هـ. سياسات الضرائب والإعانات:

باستخدام البيانات الإحصائية والاقتصادية التي توفرها جداول المدخلات – المخرجات يمكننا بناء نماذج عديدة تدرس مدى كفاءة وتأثير السياسات الضريبية المختلفة، ومدى كفاءة سياسة الإعانات والدعم من قبل الدولة للقطاعات الإنتاجية في الاقتصاد الوطني.

يبين لنا جدول المدخلات–المخرجات الكميات المختلفة من عناصر الإنتاج الأولية مثل العمل ورأس المال والأرض، وصافي الضرائب غير المباشرة (الضرائب غير المباشرة ناقص الإعانات) (في حالة استخدام سعر السوق في تقويم معاملات الجدول).

وبواسطة معاملات الاستخدام يمكننا معرفة إسهام كل من الضرائب غير المباشرة والإعانات في إنتاج وحدة واحدة من منتجات كل قطاع أو صناعة من القطاعات أو الصناعات الإنتاجية في الاقتصاد الوطني . وكذلك يمكن معرفة وتحديد الاحتياجات غير المباشرة لكل عنصر من عناصر الإنتاج الأولية واللازمة لانسياب قدر معين إلى قطاعات الطلب النهائي من منتجات أحد أو كل القطاعات في الاقتصاد الوطني . وبالتالي يمكن دراسة الآثار المباشر ة وغير

(1) Margaret Buckler: Forecasts For Policy Analysis with Inform Oil Price Deregulation in the United States. Seventh International Conference.

المباشرة للسياسات الضريبية ولسياسات الإعانات المستخدمة في القطاعات الإنتاجية في الاقتصاد الوطني.[1]

و. سياسات العمالة:

باستخدام البيانات والإحصاءات المتعلقة بعنصر العمل في جدول المدخلات –المخرجات، نستطيع الحصول على المعاملات الفنية للعمل: معامل استخدام العمل التي تعكس لنا إسهام عنصر العمل في إنتاج وحدة واحدة من منتجات القطاعات أو الصناعات المختلفة في الاقتصاد الوطني. وبالتالي نستطيع ربط خطط وبرامج الإنتاج بخطط وبرامج العمل من حيث الكم والنوع.[2] فجدول المدخلات-المخرجات يمكننا من تقدير الحجم الكلي للعمالة اللازمة لانسياب وحدة واحدة من منتجات القطاعات المختلفة إلى الطلب النهائي. فباستخدام مقلوب مصفوفة المعاملات الفنية للإنتاج، والمعاملات الفنية للعمل، نستطيع أن نحدد حجم العمل الكلي اللازم في القطاعات أو الصناعات المختلفة في الاقتصاد الوطني. وبمقارنة هذا الحجم الكمي والنوعي من العمالة اللازمة مع الإمكانيات وقوة العمل المتوافرة، نستطيع أن نعرف الاستثمارات والجهود والإمكانات اللازم توافرها من أجل توفير ذلك الحجم من العمالة المطلوب لتنفيذ خطط الإنتاج والأهداف الاقتصادية دون إيجاد اختناقات في الإنتاج والخطة بشكل عام.

ز. سياسات الدخل:

باستخدام معاملات الدخل التي تعكس إسهام كل قطاع من القطاعات الإنتاجية في الاقتصاد الوطني في الدخول المتولدة من إنتاج وحدة واحدة من منتجات القطاعات أو الصناعات المختلفة في الاقتصاد الوطني، نستطيع تبيان أثر السياسات الدخلية في الاقتصاد.

---

(1) لمزيد من التفصيل في تطبيقات جداول المدخلات-المخرجات في هذا المجال راجع:

- R. Bonkels: Towards An Efficient Sectoral Subsidizing Policy for Belgian Industry. Ph.D. Sissertation, Sint-Aloysius University,1974.

(2) Jafar Abbass Haje: Forcasting Manpower Requirements For the Kuwaite Economy. Arab Planning Institute Publication,1980.

وبواسطة كمية ونوعية البيانات والمعلومات الاقتصادية التي تعطينا إياها جد اول المدخلات -المخرجات والمتعلقة بعملية خلق الدخول وتصريفها في الاستهلاك والادخار، نستطيع بناء نماذج اقتصادية مختلفة تمكننا من دراسة أثر التغيرات التي تطرأ على الدخول وتحليلها، ومعرفة مدى كفاءة السياسات الدخلية التي تستخدمها الدولة في الاقتصاد الوطني.[1]

ح. التنبؤ الاقتصادي:

إن من أهم العناصر الرئيسة التي أسهمت في انتشار تطبيق جد اول المدخلات-المخرجات، يرجع إلى كفاءة استخدام الجداول في التنبؤات الاقتصادية لمختلف الفعاليات أو المتغيرات الاقتصادية في المجتمع.

وفي حقيقة الأمر يعد جدول المدخلات-المخرجات بطبيعته التركيبية أسلوباً تنبئياً في الاقتصاد.

والوظيفة التنبئية للجداول هي التي جعلت استخداماتها تنتشر بشكل واسع في مختلف الأنظمة الاقتصادية الرأسمالية والاشتراكية، المتقدمة والنامية، وفي جميع مجالات النشاط الاقتصادي، سواء الاستثماري أم الاستهلاكي أو الواردات والصادرات أو العمالة وغيرها من الفعاليات الاقتصادية أو المتغيرات الاقتصادية في الاقتصاد.

ويعد جدول المدخلات -المخرجات من أهم الأدوات التخطيطية الواسعة الانتشار والتطبيق في الاقتصاد.

ويمكن تصور الوظيفة التخطيطية والتنبئية لجداول المدخلات-المخرجات في إطار مبسط ومحدود على النحو الآتي:

1. يتم تحديد وتقدير حجم الطلب النهائي في الجدول من خارج النموذج.

---

(1) لمزيد من الإستقصاء راجع:

- T. T. Jones: Sectoral Income And Multiplier Effect Scotland 1963, Department of Economics, University of Dundee, Dunee U. K. Juvra 1975.

2. نحصل على مقلوب مصفوفة المعاملات الفنية للإنتاج.

3. عند ضرب مقلوب مصفوفة المعاملات الفنية للإنتاج في شعاع الطلب النهائي نحصل على حجم الإنتاج اللازم لتلبية احتياجات الطلب النهائي. كما رأينا ذلك في المباحث السابقة.

4. نرسم سياسات وبرامج وخططاً استثمارية واستهلاكية وخطط العمالة والمتغيرات الأخرى المرتبطة بالعملية الإنتاجية واللازمة لتوفير الحجم المطلوب من الإنتاج الإجمالي في الاقتصاد.

وخلاصة القول، يمكننا باستخدام جداول المدخلات-المخرجات القيام بتنبؤات مختلفة للاستثمار والاستهلاك والصادرات والواردات والدخل والإنتاج والعمالة والأسعار والتكاليف وغيرها من المتغيرات الاقتصادية في المجتمع.

وتجدر الإشارة هنا بأن هناك عدة طرق و أساليب رياضية تستخدم لغرض التنبؤ الاقتصادي لجدول المدخلات-المخرجات، فمنها البرمجة الخطية وأسلوب المربعات الصغرى والبرمجة غير الخطية [1]...الخ.

تنبؤ بالإنتاج في حالة وجود أكثر من سنة واحدة في الفترة المخططة:

إن الوظيفة الوصفية التصورية للتشابك الاقتصادي أو العلائق المتبادلة بين الأنشطة الإنتاجية أو القطاعات الاقتصادية في الاقتصاد الوطني التي تقوم بها جد اول المدخلات -المخرجات ، تتطلب قدراً كافياً من المعلومات والبيانات الإحصائية والاقتصادية التفصيلية والإجمالية لشتى أنواع النشاطات الاقتصادية. وهذا الأمر يتطلب ضرورة توافر جهاز إحصائي متكامل ومتفهم فهماً جيداً للطبيعة التركيبية لجداول المدخلات–المخرجات، والمشاكل المتعلقة بها، وكيفية استخدامها في الحياة الاقتصادية.

(1) Refat Al-Kamizy: Econometric Methods of updating Input-output Tables. Ph.D. Thesis, University of Bradford, 1981.

فجداول المدخلات–المخرجات هي بذاتها تكشف لنا مدى متانة الإطار أو التنظيم المحاسبي والإحصائي وتماسكه في عملية إعداد وجمع وتصنيف البيانات الإحصائية من جهة، ومدى دقتها ومصداقيتها في التحليل والتخطيط والتنبؤ من جهة ثانية.

ويمكننا استخلاص أهم الخواص والسمات الرئيسة التي تميز الإطار أو الجدول الإحصائي للمدخلات–المخرجات على النحو الآتي: [1]

1. عادة يرتبط جدول المدخلات–المخرجات بالاقتصاد الوطني، ولكن ذلك لا يمنع من بناء جداول تخدم الإطار الإقليمي وتبرز العلا قات بين الأقاليم داخل الوطن الواحد. وذلك بغية القيام بتخطيط إقليمي وقومي.
2. إنه يحتوي على بيان تفصيلي للمعاملات (Transactions) التي تتم بين القطاعات أو الصناعات الإنتاجية. وهذا يعني أن الاهتمام ليس منصباً فقط على المعاملات الإجمالية الكلية في الاقتصاد كالاستهلاك والاستثمار والإنتاج والواردات والصادرات والدخول وغ يرها من المتغيرات الإجمالية، بل تنصب الجهود في تبيان العلائق بين المتغيرات الجزئية والقطاعية بين جميع الأنشطة الإنتاجية داخل البلاد.

وخلاصة القول، إنه على الرغم من أن الهدف الرئيس ل جدول المدخلات-المخرجات هو تبيان العلاقات الاقتصادية – أي المعاملات الإنتاجية بين الأنشطة والقطاعات الاقتصادية – إلا أن الجداول تظهر عادة في شكل إطار متكامل وشامل يتناول شتى المعاملات والعلاقات الاقتصادية بين جميع الأنشطة والقطاعات الاقتصادية في الاقتصاد الوطني.

(1) د. محمد محمود الامام: محاضرات في تحليل المدخلات-المخرجات. معهد التخطيط القومي، القاهرة، مذكرة رقم (174/z)، 1962، ص4-5.

المبحث السادس

تطبيقات حول الفصل الرابع

مثال رقم 1

إذا فرضنا أن مصفوفة معاملات النفقات المباشرة في اقتصاد معين كانت كالآتي:

$$A_{(3,3)} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.4 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.4 \end{bmatrix}$$

فإذا فرضنا أنه يُخطط في هذا الاقتصاد لتحقيق طلب نهائي مقداره

$$Y_{(3,3)} = \begin{bmatrix} 700 \\ 2100 \\ 1400 \end{bmatrix}$$

المطلوب ا:

1.احسب حجم الإنتاج الإجمالي وحجم القيمة المضافة في كل قطاع من قطاعات هذا الاقتصاد.

الحل:

1) نحسب المصفوفة (I-A):

$$(I-A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.4 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.4 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 & -0.1 & -0.1 \\ -0.1 & 0.6 & -0.1 \\ -0.1 & -0.1 & 0.6 \end{bmatrix}$$

2) نحسب محددة المصفوفة (I-A) عن طريق نشرها:

$$|I-A| = 0.196$$

3) مصفوفة المصغرات والعوامل المشاركة:

$$(I-A)` = \begin{bmatrix} + \begin{vmatrix} 0.6 & -0.1 \\ -0.1 & 0.6 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -0.1 & -0.1 \\ -0.1 & 0.6 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -0.1 & 0.6 \\ -0.1 & -0.1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} -0.1 & -0.1 \\ -0.1 & 0.6 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0.6 & -0.1 \\ -0.1 & 0.6 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0.6 & -0.1 \\ -0.1 & -0.1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} -0.1 & -0.1 \\ 0.6 & -0.1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0.6 & -0.1 \\ -0.1 & -0.1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0.6 & -0.1 \\ -0.1 & 0.6 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.35 & 0.07 & 0.07 \\ 0.07 & 0.35 & 0.07 \\ 0.07 & 0.07 & 0.35 \end{bmatrix}$$

4) نحسب المصفوفة المساعدة بتدوير مصفوفة العوامل المشاركة:

$$\overline{(I-A)`} = \begin{bmatrix} 0.35 & 0.07 & 0.07 \\ 0.07 & 0.35 & 0.07 \\ 0.07 & 0.07 & 0.35 \end{bmatrix}$$

5) نحسب مصفوفة المعاملات الكلية:

$$B = \frac{1}{|I-A|}(\overline{I-A})`$$

$$B = \frac{1}{0.196}\begin{bmatrix} 0.35 & 0.07 & 0.07 \\ 0.07 & 0.35 & 0.07 \\ 0.07 & 0.07 & 0.35 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.7857 & 0.357 & 0.357 \\ 0.3571 & 1.785 & 0.357 \\ 0.3571 & 0.357 & 1.785 \end{bmatrix}$$

بتطبيق المعادلة: X = B Y

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.785 & 0.357 & 0.357 \\ 0.357 & 1.785 & 0.357 \\ 0.357 & 0.357 & 1.785 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 700 \\ 2100 \\ 1400 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2500 \\ 4500 \\ 3500 \end{bmatrix}$$

أي إن تحقيق الطلب النهائي المفترض يتم إذا ما أنتج القطاع الأول ما قيمته 2500 وحدة نقدية، و أنتج القطاع الثاني ما قيمته 4500 وحدة نقدية، و أنتج القطاع الثالث ما قيمته 3500 وحدة نقدية،

لحساب القيمة المضافة:

$$V_J = \left[1 - \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\right] X_j$$

$$V_1 = [1 - 0.6]2500 = 1000 \quad \text{وحدة نقدية}$$

$$V_2 = (0.4)4500 = 1800 \quad \text{وحدة نقدية}$$

$$V_3 = (0.4)3500 = 1400 \quad \text{وحدة نقدية}$$

$$\Rightarrow V_{(1,3)} = [1000 \quad 1800 \quad 1400]$$

حالة لفي م نقل 2

إذا فرضنا في التمرين السابق أنه يُخطط لزيادة الطلب النهائي على منتجات القطاع الأول بمقدار وحدة نقدية واحدة. بيِّن أثر هذه الزيادة على حجم إنتاج كل قطاع من القطاعات الثلاثة، وأثرها على زيادة الإنتاج الإجمالي لكل القطاعات(أي أحسب مضاعف القطاع الأول).

الحل:

$$X = BY$$

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.7857 & 0.3571 & 0.3571 \\ 0.3571 & 1.7857 & 0.3571 \\ 0.3571 & 0.3571 & 1.7857 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 701 \\ 2100 \\ 1400 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow X_1 = 2501.7857$ وحدة نقدية

$\Rightarrow X_2 = 4500.35714$ وحدة نقدية

$\Rightarrow X_3 = 3500.35714$ وحدة نقدية

أي إن زيادة الطلب النهائي على منتجات القطاع الأول بوحدة نقدية واحدة أدت إلى زيادة إنتاج هذا القطاع بمقدار 1.7857 وحدة نقدية، وكذلك أدت إلى زيادة إنتاج بقية القطاعات ففي القطاع الثاني زاد الإنتاج بمقدار 0.35714 وحدة نقدية، وكذلك في القطاع الثالث زاد الإنتاج بمقدار 0.35714 وحدة نقدية. وبالتالي فإن أثر هذه الزيادة على إنتاج كل القطاعات هو:

$K = 1.7857 + 0.35714 + 0.35714 = 2.5$ وحدة نقدية

وهذا يمثل قيمة مضاعف الإنتاج في القطاع الأول، ويعني أنه فيما لو زاد الطلب النهائي في القطاع الأول بمقدار وحدة نقدية واحدة فإن الإنتاج الإجمالي لجميع القطاعات سوف يزداد بمقدار 2.5 وحدة نقدية.

ويمكننا حساب قيمة هذا المضاعف بطريقة أخرى مباشرة من خلال المعادلة:

$$K_j = \sum_{i=1}^{n} b_{ij}$$

$$K_1 = 1.7857 + 0.3571 + 0.3571 = 2.5$$

وهذا يمثل مجموع عناصر العمود الأول في مصفوفة المعاملات الكلية B. وبما أن هذه المصفوفة تبين لنا أن المضاعفات في كل القطاعات متساوية فإنه يمكننا أن نستخدم الصيغة الآتية:

$$K_j = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{\sum_{i=1}^{n} Y_i}$$

$$K_1 = \frac{10500}{4200} = 2.5 \quad \text{وحدة نقدية}$$

وفي هذه الحالة الأخيرة نلاحظ أن المضاعف هو عبارة عن قيمة ما يج ب إنتاجه من أجل تلبية طلب محدد مسبقاً.

حالة لفي م نقل 3

إذا فرضنا أن هناك ثلاثة قطاعات إنتاجية فقط في الاقتصاد الوطني، وأن كل قطاع من هذه القطاعات يستخدم الأساليب الفنية الإنتاجية على النحو الآتي:

حالة نظام الأول: يستخدم طريقتين أو أسلوبين في الإنتاج نرمز لهما (1,2).

حالة نظام الثاني: يستخدم ثلاثة أساليب فنية في الإنتاج نرمز لها (3,4,5).

حالة نظام الثالث: يستخدم أسلوباً فنياً واحداً في إنتاج منتجاته و نرمز له بالرمز 6.

تأسيساً على ذلك نحصل على المصفوفة `A على الشكل التالي:

$$A`=\begin{bmatrix} 0.2 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 & 0.3 & 0.2 & 0.2 & 0.1 \\ 0 & 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.2 & 0.3 \end{bmatrix}$$

وبافتراض أن الأسلوبين الفنيين للإنتاج في القطاع الأول يستعملان بنسبة 1 إلى 2، وأن الأساليب الفنية الثلاثة في القطاع الثاني تستخدم بنسب متساوية، وبناء على هذين الافتراضين نحصل على مصفوفة المِعاملات الفنية A الموافقة في النموذج البسيط.

وتأسيساً على الافتراضين السابقين نستنتج أن $\frac{1}{3}$ منتجات القطاع الأول يتم إنتاجه وفقاً للأسلوب الفني الأول، وان $\frac{2}{3}$ منتجات ذلك القطاع يتم إنتاجهما تبعاً للطريقة الثانية، بينما منتجات القطاع الثاني يتم إنتاجها وفقاً للأساليب الفنية الثالثة وذلك بإنتاج $\frac{1}{3}$ حجم منتجاته تبعاً للأسلوب الفني الأول، و $\frac{1}{3}$ الثاني وفقاً للأسلوب الفني الثاني و $\frac{1}{3}$ الأخير وفقاً للأسلوب الفني الثالث، أما منتجات القطاع الثالث فيتم إنتاجه وفقاً للأسلوب الفني الوحيد.

وبالتالي يكون شكل مصفوفات β على النحو الآتي:

$$\beta = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

وتكون المصفوفة E كما يلي:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

أما المصفوفة *E فتكون على النحو التالي:

$$E^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

وتصبح *E على النحو التالي:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

وتكون مصفوفة المعاملات الفنية:

$$A = A`E^* = \begin{bmatrix} 0.133 & 0.133 & 0.2 \\ 0.100 & 0.233 & 0.1 \\ 0.067 & 0.0167 & 0.3 \end{bmatrix}$$

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الفصل الخامس[1]

النماذج الاقتصادية التوازنية الكلية

درسنا في الفصل الأول النماذج التوازنية الجزئية على مستوى السوق. أما في هذا الفصل فسوف ننتقل إلى دراسة النماذج الاقتصادية التوازنية على المستوى الكلي، فندرس توازن الطلب الكلي مع العرض الكلي. ثم ننتقل إلى النماذج الأكثر تعقيداً. حيث نبدأ بنماذج التوازن الاقتصادي الكلي الكنزية، ثم التوازن الاقتصادي الكلي بوجود علاقات مع الخارج، ثم التوازن الاقتصادي النقدي السلعي.

[1] . الاقتصاد الرياضي: خضور + الصفدي، جامعة دمشق 1996، ص 161.

المبحث الأول

التوازن الاقتصادي الكلي الكنزي

يعد الاقتصادي البريطاني كنز باني نظرية التوازن الاقتصادي الكلي، والتي تعنى بدراسة العلاقات المتبادلة والتوازنات بين المتغيرات الاقتصادية الإجمالية كالدخل القومي والادخار والاستهلاك والاستثمار.

وينظر هنا إلى التوازن الاقتصادي من منظور الدخل، أي:

$$Y = C + I$$

حيث Y تمثل الدخل الوطني، C تمثل الإنفاق على الاستهلاك، وتمثل I الإنفاق على الاستثمار.

فالدخل الوطني يساوي إذاً مجموع الإنفاق على الاستهلاك زائداً مجموع الإنفاق على الاستثمار.

ولتوضيح ذلك ندرس أولاً نموذجاً مبسطاً لتوازن الدخل الوطني، مفترضين:

. عدم وجود قطاع حكومي

. عدم وجود تبادل مع العالم الخارجي

. أن الأسعار ثابتة.

وقبل أن نقوم بتحديد مستوى الدخل القومي التوازني، سنقوم بدراسة مكونات تابع الدخل ($Y = C + I$) أي نقوم بدراسة تابع الاستهلاك ثم تابع الاستثمار، ثم ننتقل لدراسة التوازن الاقتصادي الكلي، أي التوازن بين مجموع الإنفاق على الاستهلاك وعلى الاستثمار، والذي يمثل الطلب الكلي، وبين الدخل الوطني (الناتج القومي من السلع والخدمات) والذي يمثل العرض الكلي.

فمجموع الطلب الكلي يحدد المستوى التوازني للدخل، فإذا تغير الطلب الكلي فإن المستوى التوازني للدخل سوف يتغير أيضاً، وبناءً على ذلك فإن الطلب الكلي يؤدي دوراً رئيسياً في النموذج التوازني الكنزي للدخل القومي.

. تابع الاستهلاك

يمثل الإنفاق على الاستهلاك الجزء الأكبر من الإنفاق الوطني على السلع والخدمات المنتجة، وهناك عوامل كثيرة مختلفة تؤثر في الاستهلاك، مثل الدخل، عدد السكان، تركيب السكان، عادات المستهلكين وأذواقهم، توزع الدخل، المستوى العام للأسعار، سعر الفائدة ....الخ. يمكننا أن نعبر عن ذلك بالعلاقة:

$$C = F(Y, X_1, X_2, ...X_n)$$

حيث:

C: الاستهلاك

Y: الدخل

$(X_1, ...X_n)$: العوامل الأخرى المختلفة التي تؤثر في الاستهلاك.

وعلى الرغم من أن هناك عوامل مختلفة تؤثر في الاستهلاك، فإن الدخل يبقى أهمها على الإطلاق، لذلك سنركز على العلاقة بين الدخل والاستهلاك ونتجاهل العوامل الأخرى.

يعد كنز أول من أشار بشكل واضح إلى أن الإنفاق الاستهلاكي يعتمد بصورة أساسية على مستوى الدخل، وأن الاستهلاك يتغير طرداً مع الدخل، إلا أن نسبة الزيادة في الاستهلاك تقل عن نسبة الزيادة في الدخل.

يعبر عن العلاقة القائمة بين الدخل Y والاستهلاك C بمعادلة سلوكية تسمى تابع الاستهلاك وتأخذ الشكل الخطي الآتي:

$$C = F_{(Y)} = a + by$$

حيث:

$a\rangle 0 \qquad 1\rangle b\rangle 0$

تمثل C الاستهلاك و Y الدخل القومي، وتمثل a مستوى الاستهلاك الضروري، ويطلق عليه الاستهلاك التلقائي المستقل عن الدخل، أي مستوى الاستهلاك عندما يكون الدخل مساوياً الصفر.

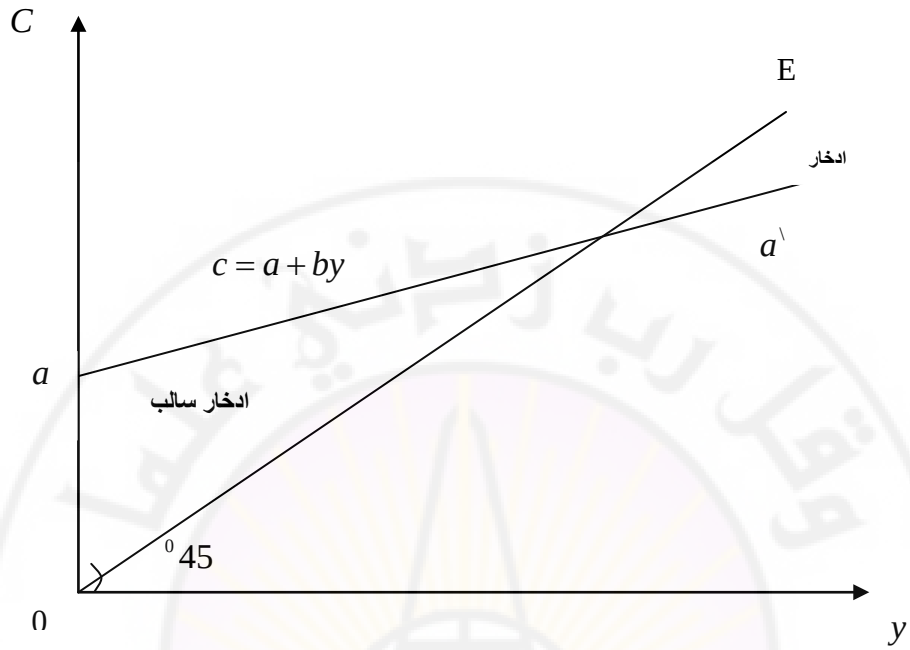
وتكون قيمة a موجبة $a\rangle 0$ وتمثل b الميل الحدي للاستهلاك فإذا كانت ΔY تشير إلى التغير في الدخل، و ΔC تشير إلى التغير في الاستهلاك المرتبط بالدخل، فإن b هي الميل الحدي للاستهلاك وتساوي:

$$M_{PC} = \frac{\Delta Y}{\Delta C}$$

وهو يمثل الزيادة في الاستهلاك الناجمة عن زيادة في الدخل مقدارها وحدة واحدة، وتكون قيمته بين الصفر والواحد الصحيح $0\langle b\langle 1$

يمكن التعبير بيانياً عن تابع الاستهلاك كما هو موضح في الشكل (5-1) حيث يقاس الدخل الوطني على المحور الأفقي، والإنفاق على الاستهلاك على المحور العمودي.

يبين الخط الذي يبدأ من نقطة الأصل، ويصنع زاوية 45° درجة مع كل من المحورين – أي أن ميله يساوي الواحد الصحيح – الشكل الذي يمكن أن يأخذه تابع الاستهلاك بافتراض أن المجتمع ينفق كل ما يحصل عليه من دخل على الاستهلاك، وبالتالي يتساوي الدخل مع الإنفاق عند كل نقطة من نقاطه.



(5−1): تابع الاستهلاك

يعبر المستقيم a' a عن تابع الاستهلاك وهو ذو ميل أقل من الواحد الصحيح، ونلاحظ أن الميل المتوسط للاستهلاك (C/Y) يمكن أن يكون أكبر من الواحد الصحيح، وذلك بعكس الميل الحدي للاستهلاك $(b = \Delta C/\Delta Y \rangle 0)$ الذي يتراوح دائماً بين الصفر والواحد الصحيح $(1 \rangle \Delta C/\Delta Y \rangle 0)$

نلاحظ من الشكل (5−1) أن تابع الاستهلاك يقطع المحور العمودي بالقيمة الموجبة $a \rangle 0$ وهذا يعني أن مستوى الاستهلاك يساوي a عندما يكون الدخل معدوماً، وهذا المستوى من الاستهلاك مستقل عن الدخل، أي أن القطاع العائلي سيقترض أو سيعتمد على مدخراته لتلبية حاجاته الاستهلاكية الضرورية.

. تابع الاستثمار

رأينا أن تابع الدخل يأخذ الشكل الآتي $Y = C + I$ أي إن الدخل الوطني يساوي مجموع الاستهلاك والاستثمار.

يتوقف الاستثمار على متغيرات كثيرة من بينها سعر الفائدة، العائد المتوقع، الدخل، .....، الخ. إلا أننا سنفترض هنا أن الاستثمار I متغير خارجي، أي إن قيمة الاستثمار I تتحدد خارج النموذج. وبالتالي يكون الاستثمار ثابتاً ونشير إليه بالرمز I_0، فإن تابع الاستثمار يأخذ الصيغة الآتية:

$$I = I_0 \qquad ; \qquad (I_0 \rangle 0)$$

حيث تمثل I الاستثمار الحقيقي، وتمثل I_0 مستوى موجباً معيناً من الاستثمار.

يمثل الشكل (5–2) الشكل البياني لتابع الاستثمار.



الشكل (5–2) تابع الاستثمار

. النموذج التوازني للدخل القومي

إن المستوى التوازني للدخل القومي يحدده العرض الكلي الذي يمثل ناتج الأمة من السلع والخدمات والطلب الكلي الذي يمثل طلب الأمة على هذه السلع والخدمات، ولكي يكون الدخل عند مستوى التوازن لا بد أن يتعادل الناتج القومي من السلع والخدمات مع الطلب على هذه السلع والخدمات.

ولا بد من الإشارة هنا إلى أن ما يقصد بالدخل هو الدخل القومي المتاح. فالدخل القومي يمثل مجموع دخول عوامل الإنتاج خلال مدة محددة من الزمن. أما الدخل المتاح فهو الدخل القومي مضافاً إليه التحويلات الحكومية ومطروحاً منه الضرائب المباشرة والأرباح غير الموزعة. إن العامل المباشر في التأثير في الاستهلاك وفي الادخار، هو الدخل القومي المتاح وليس الدخل القومي. فزيادة الإنتاج التي تترتب عليها زيادة الدخل لن تؤدي إلى زيادة الاستهلاك فيما لو حصلت الحكومة على هذه الزيادة في صورة ضرائب أو لو قررت المؤسسات الإنتاجية احتجاز الأرباح. فالدخل المقصود في هذه الدراسة هو الدخل القومي المتاح.

يتحقق التوازن في الاقتصاد بالمساواة التالية $Y = C + I$ ويعني ذلك أن الدخل القومي Y يساوي مجموع نفقات الاستهلاك والاستثمار $(C + I)$ وذلك باستبعاد القطاع الحكومي وقطاع التجارة الخارجية مبدئياً. فشرط التوازن المرتبط بمستوى معين من الدخل يقتضي أن يكون الناتج الكلي Y (الممثل للعرض) يساوي الإنفاق الكلي $(C + I)$ الممثل للطلب.

نفترض هنا في النموذج أن الإنفاق القومي على الاستثمار ثابت. ويعامل الاستثمار I كمتغير خارجي يتحدد خارج النموذج ولا علاقة له بالدخل، لذلك نعده من المعطيات ويعامل كثابت، ولأنه ثابت فلا يعني أنه لا يتغير مع الزمن وإنما يعني ذلك أن تغيره لا يتوقف على الدخل بل على عوامل أخرى.

يمكننا الآن صياغة نماذج الدخل القومي بالمعادلات الآتية:

$$Y = C + I \qquad (1)$$
$$C = f_{(Y)} = a + bY \qquad (2) a\rangle 0, \qquad 1\rangle b\rangle 0$$
$$I = I_0 \qquad (3) I_0\rangle 0$$

حيث C و Y متغيرات تابعة، و I متغير مستقل.

لإيجاد القيم التوازنية للدخل Y والاستهلاك C, والتي نرمز لها بالرمز $\bar{Y}$ و $\bar{C}$نقوم بحل جملة المعادلات النموذج . نعوض المعادلتين (2) و (3) في المعادلة (1) فيكون

$$Y = a + bY + I_0$$
$$Y - bY = a + I_0$$
$$Y(1-b) = a + I_0 \rightarrow$$
$$\bar{Y} = \frac{a + I_0}{1-b}$$

للحصول على المستوى التوازني للاستهلاك نعوض الدخل التوازني $\bar{Y}$ في تابع الاستهلاك فيكون:

$$\bar{C} = a + b\bar{Y}$$
$$= a + b\frac{a + I_0}{1-b}$$

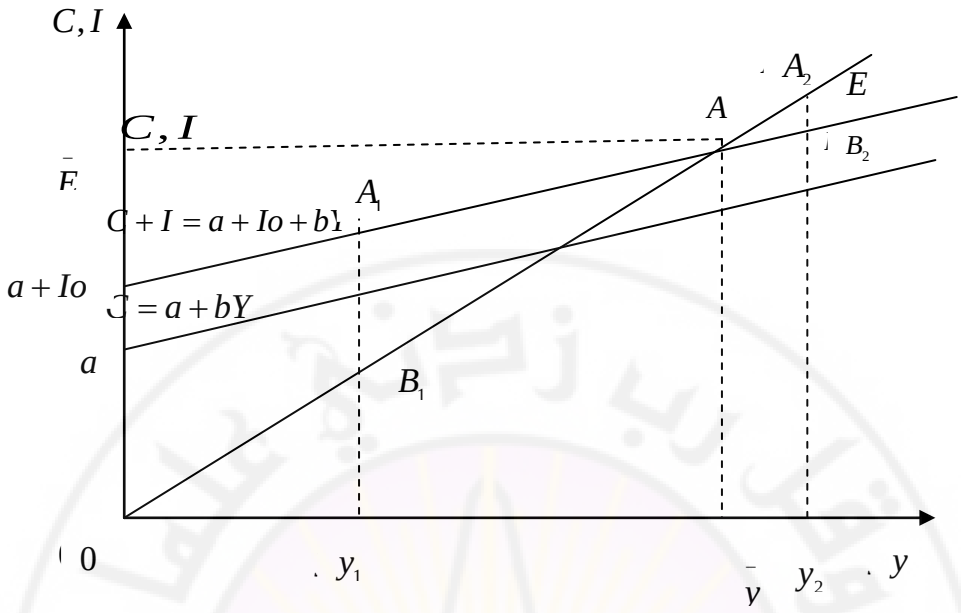
$$\bar{C} = \frac{a(1-b) + b(a + I_0)}{1-b}$$

واضح أن القيم التوازنية للدخل $\bar{Y}$ والاستهلاك $\bar{C}$ مفسرة بدلالة الثوابت a, b, I_0 ، وبالتالي عندما تكون هذه المقادير معلومة فإنه يمكن تحديد القيم التوازنية لـ $\bar{Y}$ و $\bar{C}$.

يمكن بيانياً حل النموذج التوازني للدخل القومي كما هو موضح في الشكل (5-3) يمثل العرض الكلي أو الدخل بيانياً بالخط 45^0OE الذي يكون ميله مساوياً الواحد الصحيح، والممثل لنقاط الإنفاق الكلي مع الدخل.

والخط المنصف بزاوية 45^0 ليس منحنى حقيقياً للعرض الكلي، فهو يشير إلى أنه يمكن إنتاج أي مقدار من الصفر إلى لا نهاية، وهذا غير ممكن لأن الإنتاج محدد بوساطة الموارد والتكنولوجيا.

نلاحظ من الشكل (5-3) أن تابع الإنفاق الكلي $(C+I=a+I_0+bY)$ يتقاطع مع خط الدخل (الخط 45^0) في النقطة A التي تسمى تقاطع كنز والتي تحدد المستوى التوازني للدخل القومي.



الشكل (5–3) المستوى التوازني للدخل القومي

نلاحظ من الشكل أيضاً أن المستقيم الممثل لتابع الإنفاق الكلي (أو الطلب الإجمالي)

$$C + I = a + I_0 + bY$$

ما هو إلا انتقال تابع الاستهلاك الموضح بالشكل (5–3) بمقدار الاستثمارات. فتابع الاستهلاك يمثل الطلب على السلع الاستهلاكية والخدمات، ويمثل تابع الاستثمار الطلب على الاستثمار والتابعان معاً يمثلان الطلب الكلي.

عند العودة إلى الشكل (5–3) نلاحظ أنه عند مستوى الدخل (OY_2) يكون حجم الإنفاق القومي (الطلب الكلي) على الاستهلاك والاستثمار (Y_2B_2) أقل من قيمة الدخل (Y_2A_2) بالمقدار (A_2B_2) ويترتب على ذلك، أي على انخفاض قيمة الإنفاق القومي بالنسبة لقيمة الدخل، توقع انخفاض أرباح قطاع الأعمال، وبالتالي سيكون هناك اتجاه لتقليل حجم الإنتاج، ويأخذ هذا الحجم بالانكماش حتى يصل

إلى المستوى $\left(O\bar{Y}\right)$ الذي تتساوى عنده قيمة الدخل القومي مع الإنفاق القومي.

ويرجع انخفاض الدخل القومي إلى وجود فجوة انكماشية تعود إلى نقص الاستثمار عن الادخار بالمقدار (A_2B_2). وعلى العكس، عند مستوى الدخل (OY_1) نجد أن الإنفاق الكلي (Y_1A_1) يزيد على الدخل القومي (Y_1B_1) بالمقدار (B_1A_1) ، وتشجيع زيادة الإنفاق هذه قطاع الأعمال على التوسع في الإنتاج في ميل مستوى الدخل القومي للارتفاع، ويستمر في ذلك حتى يصل إلى المستوى $O\bar{Y}$. ويرجع ارتفاع الدخل القومي إلى وجود قوة توسيعية تنتج عن زيادة الاستثمار على الادخار، وهي القوة الدافعة التي تدفع الدخل القومي للزيادة.

ولا بد من الإشارة هنا إلى أن الاستثمار والادخار شيئان مختلفان عند كنز (بعكس الكلاسيك الذين يرون أن الاستثمار يساوي الادخار). فليس من الضرورة أن تتساوى المبالغ التي يرغب الأفراد في ادخارها مع تلك التي يرغب المستثمرون في استثمارها، فالمدخر هو ليس بالضرورة المستثمر، إضافة إلى أن دوافع الادخار هي غير دوافع الاستثمار، والادخار يعتمد على مستوى الدخل في حين يعد الاستثمار مستقلاً في نموذجنا.

<u>النموذج التوازني للدخل القومي بوجود قطاع حكومي</u>

في الفقرة السابقة كنا قد درسنا نموذجاً لتوازن الدخل القومي بشكل مبسط. والآن ننتقل إلى نموذج لتوازن الدخل القومي يكون أقرب إلى الواقع وذلك بإدخال القطاع الحكومي إلى النموذج، أي إدخال الإنفاق الحكومي والضرائب.

نفترض أن الإنفاق الحكومي G متغير خارجي يتحدد من قبل الأجهزة التشريعية والتنفيذية، هذا يعني أن الإنفاق الحكومي Gيعد ثابتاً ومستقلاً عن الدخل Y.

يبين الشكل (5–4) الإنفاق الحكومي، حيث يقاس الإنفاق الحكومي على المحور العمودي والدخل على المحور الأفقي. ويكون تابع الإنفاق الحكومي موازياً لمحور



الدخل (الأفقي) عند مستوى معين G_0 ، ويكون تابع الإنفاق الحكومي من الشكل $G = G_0$.

الشكل (5-4) الإنفاق الحكومي

ويقصد بإدخال القطاع الحكومي إلى النموذج، إدخال الإنفاق الحكومي Gوالضرائب T وتدخل الضرائب T في النموذج عن طريق تابع الاستهلاك $C_{(Y)}$ ، إذ إن هناك جزءاً كبيراً من الدخل القومي يتجه إلى الحكومة على شكل ضرائب، ولذلك فإن الاستهلاك يعتمد على الدخل بعد اقتطاع الضرائب، أي على الدخل الممكن التصرف فيه. ويتم الحصول على الدخل الممكن التصرف فيه بإنقاص الضرائب T من الدخل Y .

ويأخذ بالتالي تابع الاستهلاك الشكل الآتي:

$$C = f_{(Y)} = a + b(Y - T)$$

إن الضرائب تعتمد بشكل أساسي على الدخل. والضرائب ليست مستقلة عن الدخل بل تزيد مع زيادة الدخل، ويأخذ تابع الضريبة الشكل الآتي:

$$T = T_0 + tY \qquad (1 \rangle t \rangle 0)$$

حيث:

T_0 :الضريبة المستقلة عن الدخل، التي تدخل كمتغير خارجي.

t: معدل الضريبة على الدخل.

وتابع الضريبة هذا يعني أنه كلما زاد الدخل Y فإن الضريبة T تزداد.

سنفترض هنا في النموذج أنه لا وجود للضرائب المستقلة عن الدخل ؟؟؟ وأن تابع الضريبة يأخذ الشكل الآتي:

$$T = tY$$

يتحدد المستوى التوازني للدخل هنا كما في النموذج السابق بالعرض الكلي والطلب الكلي. وشرط التوازن هو تعادل العرض الكلي الممثل بالدخل Y والطلب الكلي، الذي يساوي مجموع الاستهلاك زائداً الاستثمار زائداً الإنفاق الحكومي $(C+I+G)$.

يمكن الآن صياغة النموذج التوازني للدخل القومي بوجود قطاع حكومي بالمعادلات الآتية:

$$Y = C + I + G \qquad (1)$$

$$C = a + b(Y - T) \qquad (2) \qquad (a\rangle 0, \quad 1\rangle b\rangle 0)$$

$$T = t.Y \qquad (3) \qquad (1\rangle t\rangle 0)$$

$$I = I_0 \qquad (4) \qquad (I_0\rangle 0)$$

$$G = G_0 \qquad (5) \qquad (G_0\rangle 0)$$

حيث:

Y: الدخل القومي الممثل للعرض الكلي.

G_0: مستوى معين من الإنفاق الحكومي.

T: مستوى الضريبة.

t: معدل الضريبة.

I_0: مستوى معين من الاستثمار.

لدينا في النموذج (Y,C,T) متغيرات داخلية تابعة، و (I,G) متغيرات خارجية مستقلة. وبحل النموذج نحصل على القيم التوازنية للدخل القومي $\bar{Y}$ والاستهلاك $\bar{C}$ والضريبة $\bar{T}$.

نعوض في المعادلة الأولى التي تمثل شرط التوازن فيكون:

$$\begin{aligned} Y &= C + I + G \\ &= a + b(Y - T) + I_0 + G_0 \\ Y &= a + b(Y - tY) + I_0 + G_0 \\ &= a + bY - btY + I_0 + G_0 \\ Y - bY + btY &= a + I_0 + G_0 \\ Y(1 - b + bt) &= a + I_0 + G_0 \\ \bar{Y} &= \frac{a + I_0 + G_0}{1 - b + bt} \end{aligned}$$

وهذا يمثل مستوى الدخل التوازني.

نبدل $\bar{Y}$ بقيمتها في المعادلة (3) فنحصل على مستوى الضرائب $\bar{T}$:

$$\begin{aligned} \bar{T} &= t.\bar{y} \\ &= \frac{t(a + I_0 + G_0)}{1 - b + bt} \end{aligned}$$

للحصول على مستوى الاستهلاك التوازني $\bar{C}$ نعوض في تابع الاستهلاك عن $\bar{Y}$و $\bar{T}$ بقيمتها فيكون:

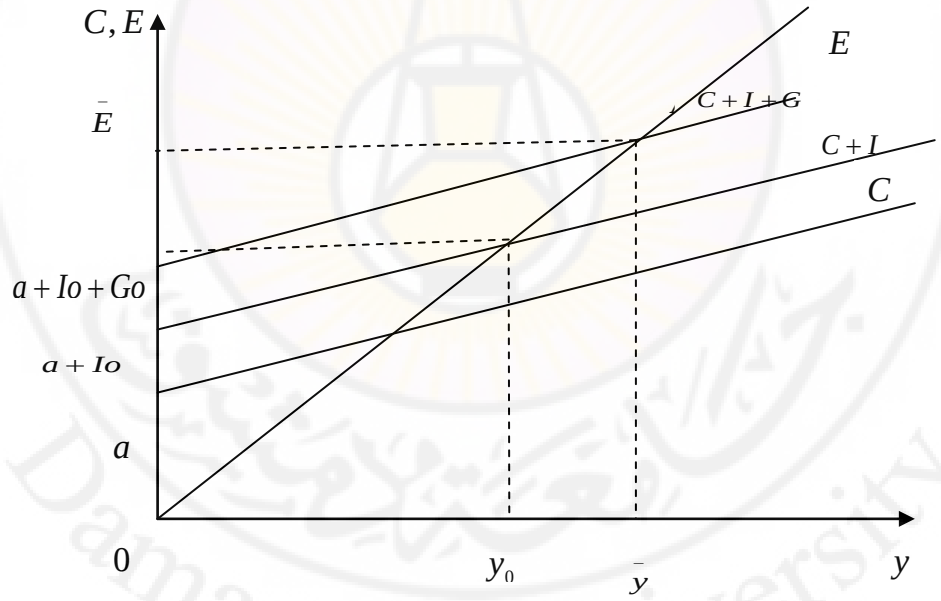
$$\begin{aligned} \bar{C} &= a + b\left(\bar{Y} - \bar{T}\right) \\ &= a + b\left(\bar{Y} - t\bar{Y}\right) \\ &= a + b(1 - t)\bar{Y} \end{aligned}$$

$$= a + b(1-t)\frac{a + I_0 + G_0}{1-b+bt}$$

$$= \frac{a(1-b+bt) + b(1-t)(a + I_0 + G_0)}{1-b+bt}$$

$$\bar{C} = \frac{a - b(1-t)(I_0 - G_0)}{1-b+bt}$$

ولأن $a,b,t\rangle 0$ وكذلك $I_0,G_0\rangle 0$ فإن القيم التوازنية $\bar{T},\bar{C},\bar{Y}$ هي قيم موجبة. بيانياً يمكننا إيضاح الحل كما هو في الشكل (5-5).



الشكل (5-5) المستوى التوازني للدخل بعد إدخال الإنفاق الحكومي

يتحدد المستوى التوازني للدخل هنا بتقاطع خط العرض الكلي (خط 45^0) الذي يتساوى عند كل نقطة من نقاط الدخل الكلي مع الإنفاق الكلي، مع خط الطلب الكلي $(C+I+G)$ ويكون المستوى التوازني للدخل هو Y وعند مستويات الدخل التي تزيد على $\bar{Y}$ يكون العرض الكلي أكبر من الطلب الكلي، وبالتالي يكون الإنتاج أكبر من الطلب الكلي، وهذا يؤدي إلى زيادة المخزون السلعي، ومع زيادة المخزون السلعي فإن الإنتاج يميل للانخفاض. أما عندما يكون مستوى الدخل أقل من $\bar{Y}$ فإن الطلب الكلي يزيد على الإنتاج، وهذا يعني إنقاص المخزون السلعي، مما يؤدي إلى زيادة الإنتاج إلى أن يتساوى العرض الكلي مع الطلب الكلي عند مستوى الدخل $\bar{Y}$ الذي يمثل المستوى التوازني للدخل.

<u>حل النموذج التوازني للدخل باستخدام المصفوفات العددية:</u>

سنقوم هنا بحل النموذج وإيجاد القيم التوازنية للدخل $\bar{Y}$ والاستهلاك $\bar{C}$ والضريبة $\bar{T}$ باستخدام جبر المصفوفات، الذي يعد أحد الأساليب العلمية في حل النماذج الاقتصادية الأكثر تعقيداً.

حيث يمكن تمثيل النموذج التوازني للدخل القومي بالمعادلات الآتية:

$$Y = C + I + G \qquad (1)$$

$$C = a + b(Y - T) \qquad (2) \qquad (a\rangle 0, \quad 1\rangle b\rangle 0)$$

$$T = tY \qquad (3) \qquad (1\rangle t\rangle 0)$$

$$I = I_0 \qquad (4) \qquad (I_0\rangle 0)$$

$$G = G_0 \qquad (5) \qquad (G_0\rangle 0)$$

نقوم بتعويض قيم I و G في المعادلتين (4) و (5) في المعادلة التوازنية رقم (1) فيمكن بالتالي كتابة النموذج بالشكل:

$$Y = C + I_0 + G_0$$
$$C = a + b(Y - T)$$
$$T = t.Y$$

نكتب هذه المعادلات بالشكل التالي وذلك لكي نتمكن من صياغتها على شكل مصفوفات عددية:

$$1.Y - 1.C + 0.T = I_0 + G_0$$
$$-b.Y + 1.C + b.T = a$$
$$-t.Y + 0.C + 1.T = 0$$

نقوم بكتابة هذه المعادلات بالشكل المصفوفي الآتي:

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -b & 1 & b \\ -t & 0 & 1 \end{bmatrix}} \underset{X}{\begin{bmatrix} Y \\ C \\ T \end{bmatrix}} = \underset{B}{\begin{bmatrix} I_0 + G_0 \\ a \\ o \end{bmatrix}}$$

ويمكن كتابتها على شكل أشعة خطية على النحو الآتي:

$$[A].[X] = [B]$$

نرمز لمصفوفة المعاملات بالرمز A ولمصفوفة المتغيرات بالرمز X ولمصفوفة الثوابت بالرمز B فيكون:

$$[A].[X] = [B]$$

ويمكن استخدام طريقة جاردن – غوص أو طريقة المصغرات أو أي طريقة أخرى لإيجاد قيمة متغيرات الشعاع X ، ومن خلال العلاقة الآتية:

$$A^{-1}.A.X = A^{-1}.B$$
$$X = A^{-1}.B$$

وباستخدام طريقة كرامر يمكن الحصول على قيمة المتغيرات المؤلفة للشعاع $\bar{X}$ وهي:

$$\bar{Y} = \frac{|A_1|}{|A|}$$

$$\bar{C} = \frac{|A_2|}{|A|}$$

$$\bar{T} = \frac{|A_3|}{|A|}$$

ولا بد من التأكد أن: $|A| \neq 0$:

$$|A| = 1.\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - (-1)\begin{bmatrix} -b & b \\ -t & 0 \end{bmatrix} + 0.\begin{bmatrix} -b & 1 \\ -t & 0 \end{bmatrix}$$

$$\neq 01 - b + bt$$

إذاً $|A| \neq 0$، ولأن: $1 \rangle b \rangle 0$, $1 \rangle t \rangle 0$فبالتالي هناك حل وحيد للنموذج.

نوجد الآن قيم:

$$[A_1], [A_2], [A_3]$$

$$[A_1] = \begin{bmatrix} I_0 + G_0 & -1 & 0 \\ a & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_0 + G_0 + a$$

$$[A_2] = \begin{bmatrix} 1 & I_0 + G_0 & 0 \\ -b & a & b \\ -t & 0 & 1 \end{bmatrix} = a + b(1-t)(I_0 + G_0)$$

$$[A_3]=\begin{bmatrix}1 & -1 & I_0+G_0\\ -b & 1 & a\\ -t & 0 & 0\end{bmatrix}=t(a+I_0+G_0)$$

وتكون القيم التوازنية:

$$\bar{Y}=\frac{[A_1]}{[A]}=\frac{a+I_0+G_0}{1-b+bt}$$

$$\bar{C}=\frac{[A_2]}{[A]}=\frac{a+b(1-t)(I_0+G_0)}{1-b+bt}$$

$$\bar{T}=\frac{[A_3]}{[A]}=\frac{t(a+I_0+G_0)}{1-b+bt}$$

واضح أن القيم التوازنية $\bar{T},\bar{C},\bar{Y}$ هذه هي القيم نفسها التي حصلنا عليها بطريقة التبديل السابقة.

<u>النموذج التوازني للدخل بفرض الاستثمار تابعٍ للدخل</u>

لقد افترضنا في الدراسة السابقة لتوازن الدخل القومي أن الاستثمار متغير خارجي. أما الآن فسوف نفترض أن الاستثمار متغير داخلي، وبالتحديد نفترض أن الاستثمار يتبع للدخل. ونفترض للتبسيط أن تابع الاستثمار الجديد يأخذ الشكل:

$$I=I_0+FY \qquad (1\rangle F\rangle 0)$$

حيث:

F: تمثل ميل تابع الاستثمار

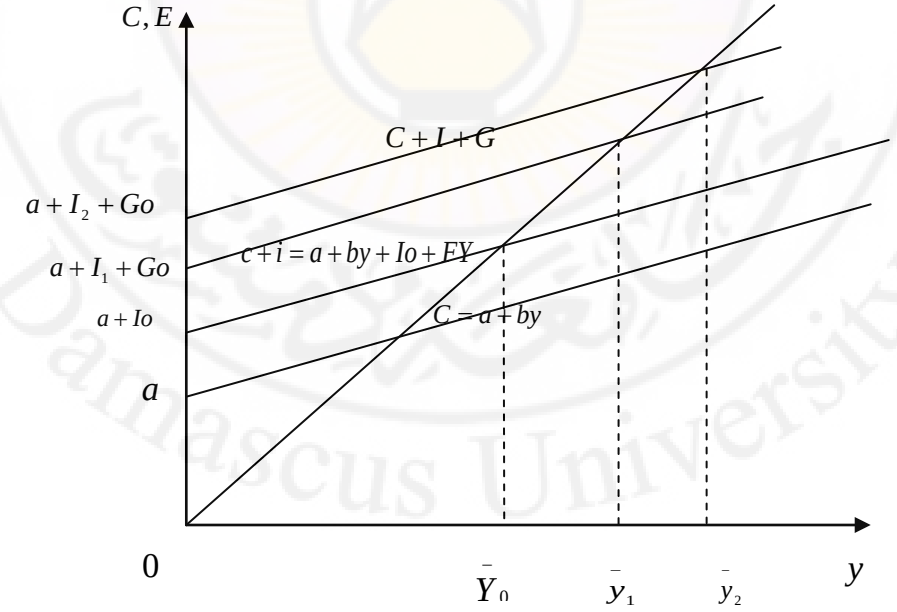
I_0: الاستثمار المستقل.

Y: الدخل القومي.

يشير هذا التابع إلى أن الاستثمار تابع خطي للدخل، وإن الاستثمار يزيد عندما يزيد الدخل ولكن بمقدار أقل من الزيادة في الدخل، و F التي تمثل الميل الحدي للاستثمار هي مقدار التغير في الاستثمار ΔI الناتج عن التغير في الدخل ΔY.

قد يتغير الاستثمار شأنه شأن الاستهلاك ايجابياً مع مستوى الدخل. ففي المدة القصيرة تعني الزيادة استخداماً أكبر للطاقة الإنتاجية القومية. ولأن الاستثمار موجه بالأساس لزيادة الطاقة الإنتاجية أو المحافظة عليها، فمن المرجح أن يحدث المزيد من الاستثمار عندما يتزايد استخدام الطاقة الإنتاجية؛ وبالتالي قد يزيد الاستثمار عندما يزيد الدخل. ويمكن أن تؤدي العلاقة الموجبة بين الأرباح والدخل إلى علاقة موجبة بين الاستثمار والدخل، لأن المنشآت تفضل تمويل استثماراتها من الأرباح.

يمكن دمج دالة الاستثمار الجديدة بسهولة في النموذج كما هو موضح في الشكل (5-6).



الشكل (5-6) إضافة تابع الاستثمار بعده تابعاً للدخل

يوضح تابع الاستثمار الافتراض القائل: إن الاستثمار يتغير إيجابياً مع الدخل. ويشتق تابع الاستهلاك والاستثمار $(C+I)$ كما في السابق إلا أنه لا يوازي تابع الاستهلاك كما هو في النموذج السابق الشكل (**5-6**) عندما كنا نفترض أن الاستثمار متغير خارجي ومستقل عن الدخل. وشرط التوازن هو نفسه كما في النموذج السابق، أي يتحدد المستوى التوازني للدخل بتقاطع الخط ذي الميل 45^0 الذي يمثل العرض الكلي مع المستقيم $C+I+G$ ، الذي يمثل الطلب الكلي. وإذا زاد تابع الاستثمار من I_1 إلى I_2 فإن تابع الطلب الكلي $(C+I+G)$ ينتقل إلى أعلى ليشير إلى الزيادة في المستوى التوازني للدخل من Y_1 إلى Y_2 ، وهكذا فإن تأثير الزيادة في الاستثمار هنا يشبه تأثير الزيادة في الاستثمار في النموذج السابق.

<u>التحليل السكوني للنموذج التوازني الكنزي للدخل:</u>

بينا أن حل النموذج التوازني للدخل القومي يتلخص بإيجاد القيم التوازنية للدخل $\bar{Y}$ والاستهلاك $\bar{C}$ والضريبة $\bar{T}$ وقد حصلنا على القيم الآتية:

$$\bar{Y}=\frac{a+I_0+G_0}{1-b+bt}$$

$$\bar{C}=\frac{a+b(1-t)(I_0+G_0)}{1-b+bt} \qquad \begin{matrix} a\rangle 0 & ,1\rangle b\rangle 0 \\ 1\rangle t\rangle 0 & \\ I_0\rangle 0 & ,G_0\rangle 0 \end{matrix}$$

$$\bar{T}=\frac{t(a+I_0+G_0)}{1-b+bt}$$

واضح أن هذه القيم التوازنية محددة بدلالة المعاملات (a,b,t) والمتغيرات المستقلة (I_0,G_0)، وبالتالي فإن أي تغير في أحد هذه المتغيرات المستقلة أو المعاملات سيكون له تأثير في القيم التوازنية $\bar{Y}$ ، $\bar{C}$ ، $\bar{T}$.

لمعرفة تأثير أحد المعاملات أو أحد المتغيرات المستقلة في القيم التوازنية نلجأ إلى المشتقات الجزئية فنوجد المشتقات الجزئية للقيم التوازنية بالنسبة للمتغير المستقل أو المعامل الذي نرغب في معرفة أثر التغير الذي يحصل فيه في القيم التوازنية $\bar{Y}$ ، $\bar{C}$ ، $\bar{T}$.

سنقوم هنا بدراسة أثر التغير الحاصل في الاستثمارات I_0 ، وأثر التغير في الإنفاق الحكومي G_0 ، وأثر التغير في معدل الضريبة t على المستوى التوازني للدخل. ويمكننا تحديد مقدار التغيرات الحاصلة في $\bar{Y}$ من خلال المشتقات الجزئية للمستوى التوازني للدخل $\bar{Y}$ بالنسبة للاستثمار I_0 وبالنسبة للإنفاق الحكومي G_0 وبالنسبة للضريبة t فيكون لدينا:

$$\begin{aligned}\text{Im} &= \frac{\partial \bar{Y}}{\partial I_0} \\ &= \frac{1(1-b+bt)-0(a+I_0+G_0)}{(1-b+bt)^2} \\ &= \frac{1}{1-b+bt} \rangle 0\end{aligned}$$

وهذا يسمى مضاعف الاستثمار **(Investment multiplier)**

$$\begin{aligned}Gm &= \frac{\partial \bar{Y}}{\partial G_0} \\ &= \frac{1(1-b+bt)-0(a+I_0+G_0)}{(1-b+bt)^2} \\ &= \frac{1}{1-b+bt} \rangle 0\end{aligned}$$

وهذا يسمى مضاعف الإنفاق الحكومي.

$$tm = \frac{\partial \bar{Y}}{\partial t}$$

$$= \frac{\partial \bar{Y}}{\partial t} = \frac{-b(a + I_0 + G_0)}{(1 - b + bt)^2}$$

$$= \frac{-b\bar{Y}}{1 - b + bt} \langle 0$$

وهذا يسمى مضاعف الضريبة على الدخل.

ونظراً لأهمية مضاعف الاستثمار ومضاعف الإنفاق الحكومي والضريبة في الحياة الاقتصادية فإننا سنقوم بدراستها بشيء من الإيجاز في الفقرات الآتية.

مضاعف الاستثمار:

رأينا في الفقرة السابقة بأنه يمكننا الحصول على مضاعف الاستثمار من خلال المشتق الأول للمستوى التوازني للدخل $\bar{Y}$ بالنسبة للاستثمار، والذي يأخذ الشكل الآتي:

$$\frac{\partial \bar{Y}}{\partial I_0} = \frac{1}{1 - b + bt} \rangle 0$$

تحتل نظرية المضاعف مكانة مهمة في نظرية الدخل القومي حسب التحليل الكنزي. تربط فكرة مضاعف الاستثمار (Im) التي وضعها كنز، لدى تطبيقها على الدخل القومي، بين نمو الدخل القومي ΔY ، ونمو الاستثمارات ΔI أي اثر الزيادة في الاستثمارات على الدخل القومي.

$$\mathrm{Im} = \frac{\Delta Y}{\Delta I} = \frac{1}{1 - b + bt}$$

فمضاعف الاستثمار (Im) هو ذلك المعامل العددي الذي يبين مدى الزيادة الكلية في الدخل القومي ΔY ، والناجمة عن حدوث زيادة في الاستثمار ΔI ويكون حجم الزيادة في الدخل مساو:

$$\Delta Y = \frac{1}{1-b+bt}.\Delta I$$
$$= \frac{1}{1-b(1-t)}.\Delta I$$

من الواضح أن قيمة مضاعف الاستثمار تتوقف على الميل الحدي للاستهلاك $(b = \Delta C / \Delta Y)$ ؛ أي على النسبة التي يتوزع بها الدخل بين الاستهلاك والادخار. وهو يتناسب بشكل طردي مع الميل الحدي للاستهلاك b وبشكل عكسي مع معدل الضريبة t. فإذا كان الميل الحدي للاستهلاك مرتفعاً، فإن زيادة الدخل المترتبة على حدوث زيادة معينة في الاستثمار سوف يوجه الجزء الأكبر منها للاستهلاك، وتنتج عن ذلك زيادة كبيرة في الدخول، والعكس صحيح، أي إن قيمة المضاعف تتزايد إذا نقص الميل الحدي للادخار. وتناقص الميل الحدي للاستهلاك سيؤدي إلى إنقاص قيمة المضاعف؛ وبالتالي الحد من عملية التضاعف والحد من زيادة الدخل القومي. ولأن $(1-b+bt)$ تقع بين الصفر والواحد الصحيح فإن المضاعف يكون أكبر من الواحد $1\langle \mathrm{Im}$.

وتبين دراسة مضاعف الاستثمار بأن التغير في الاستثمار سوف يؤدي إلى تغير في الدخل أكبر من الزيادة التي حدثت في الاستثمار. فإذا فرضنا أن الميل الحدي للاستهلاك b يساوي 0.80 وأن معدل الضريبة يساوي 0.20، فإن مضاعف الاستثمار يساوي:

$$\mathrm{Im} = \frac{1}{1-0.80+(0.80)(0.20)} = \frac{1}{0.36} = 2.77$$

فإذا زاد الاستثمار بمقدار 100 مليون فإن الزيادة في الدخل تكون:

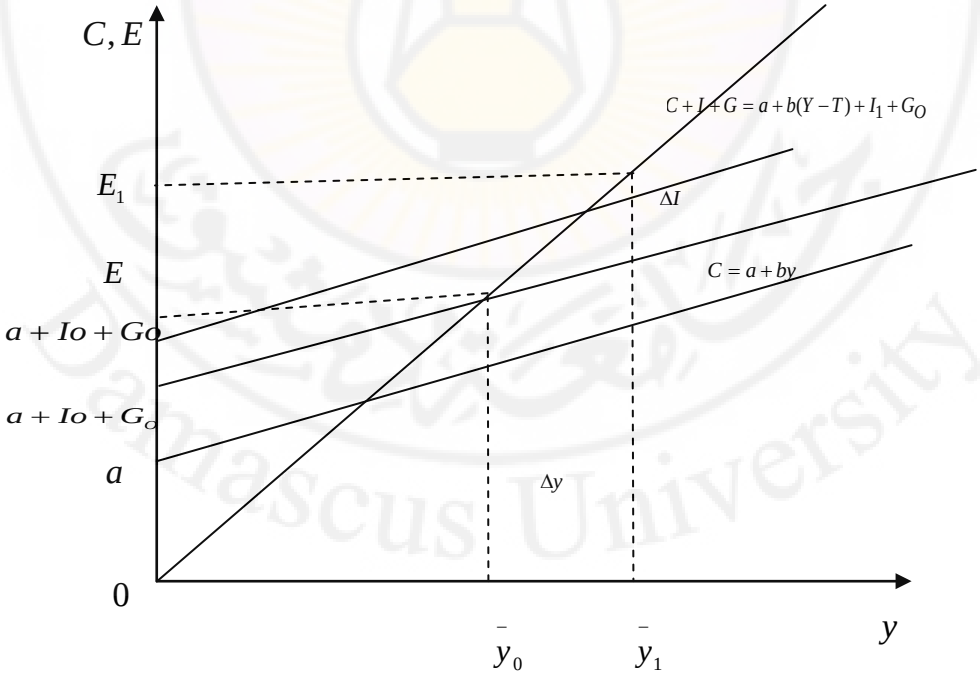
$$\Delta Y = \mathrm{Im}.\Delta I = 2.77.(100) = 277$$

أي إن الزيادة في الدخل تكون أكبر من الزيادة الأولية في الاستثمار $(\Delta Y \rangle \Delta I)$ فمضاعف الاستثمار هو بمثابة عدد المرات التي يتضاعف بها الدخل القومي

نتيجة حدوث زيادة مبدئية في الإنفاق الاستثماري. فإذا كان مضاعف الاستثمار (Im) يساوي 4، مثلاً، فهذا يعني أن حدوث زيادة أولية في الاستثمار بمقدار معين ΔI سوف يترتب عليه في النهاية حدوث زيادة نهائية في الدخل ΔY تقدر بأربعة أمثال تلك الزيادة الأولية في الاستثمار ΔI.

ويمكن تلخيص مضمون عملية التضاعف بأن المبلغ الأولي المستثمر يتحول إلى مداخيل أولية، ثم يتحول جزء من هذه المداخيل عند إنفاقه إلى مداخيل ثانوية وهكذا دواليك. وقد اشترط كنز لحدوث عملية التضاعف وجود يد عاملة حرة ووجود طاقات إنتاجية معطلة.

إذاً مع التغير في الاستثمار سوف يحدث تغير في الدخل. فعندما يزداد الاستثمار من المستوى I_0 إلى المستوى I_1 كما هو موضح في الشكل (5-7) فسوف يرتفع المستوى التوازني للدخل من $\bar{Y}_0$ إلى المستوى الجديد $\bar{Y}_1$.



الشكل (5-7) تأثير الاستثمار في المستوى التوازني للدخل

فالمستوى التوازني للدخل القومي يساوي $\bar{Y}_0$ عندما يكون مستوى الاستثمار I_0 :

$$\bar{Y}_0 = \frac{a + I_0 + G_0}{1 - b + bt}$$

وعندما زاد الاستثمار إلى I_1 أصبح المستوى التوازني للدخل $\bar{Y}_1$:

$$\bar{Y}_1 = \frac{a + I_1 + G_0}{1 - b + bt}$$

ويكون مقدار التغير في حجم الدخل ΔY مساوياً:

$$\Delta Y = \frac{1}{1 - b + bt}.\Delta I$$

$$\Delta Y = \mathrm{Im}.\Delta I$$

ولا بد هنا من الإشارة إلى مفهوم المسرع الذي يعد مكملاً لفكرة المضاعف، فإذا كان المضاعف يفسر الأثر النهائي للاستثمارات على الدخل القومي، فإن المسرع يفسر العلاقة العكسية بين الدخل القومي والاستثمارات، أي أثر التغير في الدخل القومي على الاستثمارات، فالمسرع يبين كم مرة يجب أن تتضاعف الاستثمارات نتيجة لنمو الدخل القومي بمعدلات محددة. فحجم الاستثمارات وفق نظرية المسرع يتحدد بشكل أساسي من خلال معدل نمو الدخل القومي، فتباطؤ معدلات نمو الدخل القومي سيؤدي إلى انخفاض معدلات نمو الاستثمارات.

مضاعف الإنفاق الحكومي ومضاعف الضريبة:

حصلنا على مضاعف الإنفاق الحكومي في الفقرة السابقة من خلال اشتقاق المستوى التوازني للدخل:

$$\bar{Y} = \frac{a + I_0 + G_0}{1 - b + bt}$$

بالنسبة للإنفاق الحكومي G_0 ويساوي:

$$Gm = \frac{\partial \bar{Y}}{\partial G_0} = \frac{1}{1 - b + bt} \rangle 0$$

يبين مضاعف الإنفاق الحكومي مقدار التغير في المستوى التوازني للدخل عندما يتغير الإنفاق الحكومي بمقدار ΔG . إن زيادة الإنفاق الحكومي تؤدي إلى زيادة الدخل، وبالتالي مع ارتفاع مستوى الإنفاق الحكومي، مثلاً، من المستوى G_0 إلى المستوى G_1 سيؤدي إلى ارتفاع المستوى التوازني للدخل من المستوى $\bar{Y}_0$ إلى المستوى الجديد $\bar{Y}_1$.

نلاحظ أن مضاعف الإنفاق الحكومي يتحدد بالميل الحدي للاستهلاك وهو يماثل مضاعف الاستثمار، ذلك أن مضاعف الاستثمار (Im) يساوي أيضاً:

$$\frac{1}{1-b+bt}$$

رأينا أيضاً بأن مضاعف الضريبة يساوي:

$$tm = \frac{\partial \bar{Y}}{\partial t} = \frac{-b(a+I_0+G_0)}{(1-b+bt)^2}$$

$$= \frac{-b\bar{Y}}{1-b+bt}$$

وهو يبين مقدار التغير الحاصل في المستوى التوازني للدخل عندما يتغير معدل الضريبة t أي تأثير التغير في معدل الضريبة t على المستوى التوازني للدخل. نلاحظ أن مضاعف الضريبة سالب، وهذا يعني أنه مع التغير في الضريبة فإن ذلك يؤدي إلى تغير في الدخل ولكن باتجاه معاكس، أي إنه مع زيادة معدل الضريبة من المستوى t_0 إلى المستوى t_1 فإن ذلك سوف يؤدي إلى نقصان في المستوى التوازني للدخل من المستوى $\bar{Y}_1$ إلى المستوى $\bar{Y}_0$، وبالعكس فعندما ينخفض معدل الضريبة t فإن المستوى التوازني للدخل يرتفع.

<u>التوازن الاقتصادي الكلي مع الخارج:</u>

إن النماذج المدروسة سابقاً لم تتناول العلاقات الاقتصادية مع العالم الخارجي، وفي هذا البحث سوف ندرس نموذجاً توازنياً كلياً يتناول تأثير التغيرات الحاصلة في اقتصاد دولة من الدول في اقتصاديات الدول الأخرى. فالعلاقات الاقتصادية مع الخارج (التجارة الخارجية تحديداً) تعد محدداً مهماً للتوازن الاقتصادي، ولوضع المبادلات الخارجية (عجزاً، فيضاً، توازناً) تأثير في مستوى التوازن الاقتصاد الكلي، فالعجز في المبادلات مع العالم الخارجي يضعف النشاط الاقتصادي في الداخل، ويؤثر في المستوى التوازني للدخل القومي، وكل فائض في المبادلات مع الخارج يزيد من النشاط الاقتصادي في الداخل، ويؤثر أيضاً في المستوى التوازني للدخل القومي. فزيادة الصادرات سيكون لها انعكاسات على الاقتصاد ككل وليس فقط في قطاع الصادرات.

<u>توازن الدخل القومي والمبادلات الخارجية:</u>

إن إدخال العلاقات التجارية الخارجية يعد لدائرة المبادلات حيث يطرأ تعديل على معادلة توازن الدخل القومي فتصبح بالشكل الآتي:

$$Y = C + I + G + X - M$$

$$Y + M = C + I + G + X$$

إن شرط التوازن في مستوى الدخل يقتضي المساواة بين العرض الكلي الذي يساوي مجمل الدخل القومي Y والواردات M والطلب الكلي الذي يساوي مجموع الاستهلاك C والاستثمار I والإنفاق الحكومي G والصادرات X. وعند حدوث فائض في الصادرات بالنسبة للواردات $(X - M)$ يكون الدخل الناشئ عن الصادرات X أكبر من الدخل المدفوع على الواردات M فإن الأثر الصافي $(X - M)$ يشكل زيادة في الإنتاج ويؤدي إلى رفع المستوى التوازني للدخل القومي Y والعكس صحيح.

بعد إدخال العلاقات الخارجية يصبح النموذج التوازني بالشكل الآتي:

$$Y = C + I + G + X - M \qquad (1)$$

<u>شرط التوازن:</u>

والمعادلات السلوكية:

$C = a + b(Y - T)$	$(a \rangle 0, \quad 1 \rangle b \rangle 0)$	(2)
$I = I_0$	$I_0 \rangle 0$	(3)
$G = G_0$	$G_0 \rangle 0$	(4)
$T = t.Y$	$1 \rangle t \rangle 0$	(5)
$X = X_0$	$X_0 \rangle 0$	(6)
$M = M_0 + mY$	$M_0 \rangle 0 \quad ,1 \rangle m \rangle 0$	(7)

حيث:

Y: الدخل القومي.

C: الاستهلاك.

I: الاستثمارات.

G: الإنفاق الحكومي.

X: الصادرات.

M: الواردات.

I_0: مستوى محدد من الاستثمار.

G_0: مستوى محدد من الإنفاق الحكومي.

X_0: مستوى معين من الصادرات.

M_0: الواردات التلقائية المستقلة عن الدخل.

b: الميل الحدي للاستهلاك.

m: الميل الحدي للاستيراد.

t: معدل الضريبة.

نفترض في النموذج أن الصادرات X متغير خارجي. وان الواردات ترتبط إيجابياً بالدخل Y، أي إذا زاد الدخل زادت الواردات $M = M_0 + mY$ حيث m تمثل الميل الحدي للواردات (التغير في الواردات بالنسبة للتغير في الدخل) و M_0 الواردات التلقائية المستقلة عن الدخل، ولدينا أيضاً في النموذج I و G متغيرات خارجية و $T.M.C.Y$ متغيرات داخلية تابعة.

<u>نموذج توازن الدخل القومي مع الخارج:</u>

سنقوم هنا ببناء نموذج مبسط لثلاث دول بوجود علاقات مع العالم الخارجي، والتوازن هنا هو توازن السوق السلعية، أي سنتجاهل وجود السوق النقدية، ونفترض أن الأسعار ثابتة في هذه الدول وأن سعر الصرف ثابت أيضاً.

نعبر عن شروط التوازن في مستوى الدخل لكل من الاقتصاديات الثلاثة موضوع الدراسة بالمعادلات التوازنية الآتية:

$$Y_1 = C_1 + I_1 + G_1 + X_1 - M_1 \qquad (1)$$

$$Y_2 = C_2 + I_2 + G_2 + X_2 - M_2 \qquad (2)$$

$$Y_3 = C_3 + I_3 + G_3 + X_3 - M_3 \qquad (3)$$

تمثل المعادلة رقم (1) شرط التوازن في اقتصاد الدولة الأولى، حيث يتمثل شرط التوازن بالمساواة بين العرض الكلي Y_1 وبين الطلب الكلي (الإنفاق الكلي) $(C_1 + I_1 + G_1 + X_1 - M_1)$، ويتكون الطلب الكلي من مجموع الطلب الداخلي $(C_1 + I_1 + G_1)$ ومن صافي الطلب الخارجي $(X_1 - M_1)$ ، وتمثل المعادلة رقم (2) شرط التوازن في اقتصاد الدولة الثانية. والمعادلة رقم (3) شرط التوازن في الدولة الثالثة.

يتعلق مستوى الاستهلاك في كل دولة بالدخل القومي فيها، ويأخذ تابع الاستهلاك الشكل ($C = a + b(Y - T)$ ، وللتبسيط نفترض هنا أن كل دولة تستهلك نسبة

معينة موجبة من دخلها، ونتجاهل هنا وجود الاستهلاك التلقائي (a) فيتحدد مستوى الاستهلاك في كل دولة على النحو الآتي:

$$C_1 = b_1(Y_1 - T_1) = b_1(Y_1 - t_1Y_1) = b_1(1-t_1)Y_1$$
$$C_2 = b_2(Y_2 - T_2) = b_2(Y_2 - t_2Y_2) = b_2(1-t_2)Y_2$$
$$C_3 = b_3(Y_3 - T_3) = b_3(Y_3 - t_3Y_3) = b_3(1-t_3)Y_3$$

حيث:

$$1\rangle b_1, b_2, b_3 \rangle 0$$
$$1\rangle t_1, t_2, t_3 \rangle 0$$

تمثل b الميل الحدي للاستهلاك، و t معدل الضريبة.

تدل توابع الاستهلاك على أن زيادة الدخل القومي Y في كل بلد من البلدان الثلاثة ستؤدي إلى زيادة الاستهلاك C.

يعبر تابع الاستيراد عن العلاقة بين مستوى الدخل القومي والطلب على الواردات، ويأخذ الشكل $M = M_0 + mY$ حيث تشير M_0 إلى الواردات التلقائي، أي الواردات التي تستوردها الدولة حتى ولو كان مستوى الدخل صفراً.

سنتجاهل هنا الواردات التلقائية M_0 ، ونفترض أن الواردات في كل دولة تتناسب مع مستوى دخلها، أي تمثل نسبة من الدخل $M = mY$

نعبر عن التناسب بين واردات كل دولة ومستوى دخلها بالعلاقات الآتية:

$$M_1 = m_1Y_1$$
$$M_2 = m_2Y_2 \qquad 1\rangle m_1, m_2, m_3 \rangle 0$$
$$M_3 = m_3Y_3$$

حيث تمثل m الميل الحدي للاستيراد.

تبين هذه التوابع أنه مع زيادة الدخل القومي Y بالنسبة لكل دولة سوف يؤدي إلى زيادة مستوردات ذلك البلد.

إن واردات كل دولة تتكون من مجموع وارداتها من الدول الأخرى، وبما يتناسب مع دخل هذه الدولة، أي نسبة معينة من دخلها. فالدولة الأولى تستورد حسب مستوى دخلها من الدولتين الثانية والثالثة. والدولة الثانية تستورد حسب مستوى دخلها من الدولتين الأولى والثانية. والدولة الثالثة تستورد حسب مستوى دخلها من الدولتين الأولى والثانية. نعبر عن ذلك بالعلاقات الآتية:

$$M_1 = m_{12}Y_1 + m_{13}Y_1$$
$$M_2 = m_{21}Y_2 + m_{23}Y_2$$
$$M_3 = m_{31}Y_3 + m_{32}Y_3$$

حيث:

$m_{13}Y_1, m_{12}Y_1$ واردات الدولة الأولى من الثانية والثالثة على التوالي.

$m_{23}Y_2, m_{21}Y_2$ واردات الدولة الثانية من الأولى والثالثة على التوالي.

$m_{32}Y_3, m_{31}Y_3$ واردات الدولة الثالثة من الأولى و الثانية على التوالي.

يتحدد الاستيراد بمستوى الدخل القومي للبلد المستورد، ويتحدد التصدير بمستوى الدخل القومي للبلد المصدر له. افترضنا الصادرات متغيراً خارجياً $(X = X_0)$. تعتمد جزئياً صادرات بلد من البلدان على الدخل القومي لبقية الدول. فصادرات الدولة الأولى X_1 تشكل مجموع مستوردات الدولتين الثانية والثالثة من الدولة الأولى. وصادرات الدولة الثانية X_2 تشكل مجموع مستوردات الدولتين الأولى والثالثة والثانية. وصادرات الدولة الثالثة X_3 تشكل مجموع مستوردات الدولتين الأولى والثانية من الثالثة. يمكننا بالتالي أن نعبر عن صادرات كل دولة على الشكل الآتي:

$$X_1 = m_{21}Y_2 + m_{31}Y_3$$
$$X_2 = m_{21}Y_1 + m_{32}Y_3$$
$$X_3 = m_{31}Y_1 + m_{23}Y_2$$

نعوض معادلات الاستهلاك والواردات والصادرات في شرط التوازن للدول الثلاث فنحصل على المعادلات التوازنية الآتية:

$$Y_1 = b_1(1-t_1)Y_1 + I_1 + G_1 + M_{21}Y_2 + M_{31}Y_3 - (M_{12}Y_1 + M_{13}Y_1)$$

$$Y_2 = b_2(1-t_2)Y_2 + I_2 + G_2 + M_{12}Y_1 + M_{32}Y_3 - (M_{21}Y_2 + M_{23}Y_2)$$

$$Y_3 = b_3(1-t_3)Y_3 + I_3 + G_3 + M_{13}Y_1 + M_{23}Y_2 - (M_{31}Y_3 + M_{32}Y_3)$$

نكتب هذه المعادلات بالشكل الآتي:

$$Y_1 = ((1-t_1)b_1 - M_{12} - M_{13})Y_1 + M_{21}Y_2 + M_{31}Y_3 + (I_1 + G_1)$$

$$Y_2 = M_{12}Y_1 + ((1-t_2)b_2 - M_{21} - M_{23})Y_2 + M_{32}Y_3 + (I_2 + G_2)$$

$$Y_3 = M_{13}Y_1 + M_{23}Y_2 + ((1-t_3)b_3 - M_{31} - M_{32})Y_3 + (I_3 + G_3)$$

يمكننا كتابة جملة المعادلات هذه بالشكل المصفوفي الآتي:

$$\underset{Y}{\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix}} = \underset{B}{\begin{bmatrix} ((1-t_1)b_1 - m_{12} - m_{13}) & m_{21} & m_{31} \\ m_{12} & ((1-t_2)b_2 - m_{21} - m_{23}) & m_{32} \\ m_{13} & m_{23} & ((1-t_3)b_3 - m_{31} - m_{32}) \end{bmatrix}} \cdot \underset{Y}{\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix}} + \underset{G}{\begin{bmatrix} I_1 + G_1 \\ I_2 + G_2 \\ I_3 + G_3 \end{bmatrix}}$$

$$[Y] = [B][Y] + [G]$$

بما أن I و G هي متغيرات خارجية ثابتة تعطى من خارج النموذج، فإننا نفترض أن مجموع $(I+G)$ عنصر واحد.

إذا رمزنا لمصفوفة المتغيرات التابعة بالرمز Y ولمصفوفة الأمثال بالرمز B ولمصفوفة المتغيرات المستقلة التي تحوي الاستثمارات والإنفاق الحكومي بالرمز G نستطيع أن نكتب:

$$Y = B.Y + G$$

واستناداً إلى خواص المصفوفات، حيث تكون المصفوفة الواحدية I أحادية في الضرب، يكون:

$$I.Y = BY + G$$
$$(1-B)Y = G$$

نضرب الطرفين بمقلوب المصفوفة $(I-B)$:

أي بـ $(I-B)^{-1}$ فيكون:

$$(I-B)(I-B)^{-1}Y = (I-B)^{-1}G$$
$$\bar{Y} = (I-B)^{-1}G$$

بحل جملة المعادلات المصفوفية هذه، بإيجاد قيمة مقلوب المصفوفة $(I-B)^{-1}$، فإننا نحصل على القيم التوازنية للدخل القومي للدول الثلاث $\bar{Y}_1, \bar{Y}_2, \bar{Y}_3$. وبتعويض القيم التوازنية للدخل القومي في المعادلات التوازنية وفي تابعي الاستهلاك والضريبة نحصل على القيم التوازنية للواردات $\bar{M}$ وللاستهلاك $\bar{C}$ وللضريبة $\bar{T}$ للدول الثلاث.

<u>التوازن الاقتصادي مع الخارج لعدد n من الدول:</u>

يمكننا أن نوسع النموذج السابق المدروس في الفقرة السابقة، بحيث يشمل عدد n من الدول، وبالتالي سوف يكون لدينا عدد n من المعادلات التوازنية التي تمثل شروط التوازن في الدولة رقم (1) وحتى الدولة رقم n.

$$Y_1 = C_1 + I_1 + G_1 + X_1 - M_1$$
$$Y_2 = C_2 + I_2 + G_2 + X_2 - M_2$$
$$\vdots$$
$$\vdots$$
$$Y_n = C_n + I_n + G_n + X_n - M_n$$

وإذا قمنا بالخطوات نفسها المتبعة في الفقرة السابقة فإننا نحصل على جملة المعادلات المصفوفية الآتية:

وباختصار يكون:

$$[Y]=[B].[Y]+[G]$$

$$\bar{Y}=(I-B)^{-1}G$$

وبحل جملة المعادلات هذه نحصل على القيم التوازنية للدخل القومي للدول من (1) حتى (n):

$$\bar{Y}_1,\bar{Y}_2,.....,\bar{Y}_n$$

مضاعف الصادرات ومضاعف الواردات:

درسنا أعلاه النموذج التوازني للدخل القومي، إلا أننا تجاهلنا آنذاك وجود علاقات اقتصادية مع الخارج، سنقوم هنا ببناء نموذج لتوازن الدخل القومي لبلد من البلدان بوجود علاقات مع الخارج، أي سوف نقوم بإدخال كل من الصادرات والواردات إلى النموذج، ومن ثم نقوم بحساب مضاعف الصادرات ومضاعف الواردات ودراستهما.

$$\underset{Y}{\begin{bmatrix}Y_1\\Y_2\\\vdots\\\vdots\\Y_n\end{bmatrix}}=\underset{B}{\begin{bmatrix}((1-t_1)b_1-m_{12}-m_{1n}) & m_{21} & \cdots & \cdots & m_{n1}\\ m_{12} & ((1-t_2)b_2-m_{21}-m_{n2}) & \cdots & \cdots & m_{n2}\\ \vdots & & & & \\ \vdots & & & & \\ m_{1n} & m_{2n} & & & ((1-t_n)b_n-m_{n1}-m_{nn})\end{bmatrix}}\underset{Y}{\begin{bmatrix}Y_1\\Y_2\\\vdots\\\vdots\\Y_n\end{bmatrix}}+\underset{G}{\begin{bmatrix}I_1+G_1\\I_2+G_2\\\vdots\\\vdots\\I_n+G_n\end{bmatrix}}$$

بإدخال العلاقات الاقتصادية الخارجية (الصادرات والواردات) يصبح النموذج التوازني للدخل القومي لبلد من البلدان على الشكل الآتي:

(1)		$Y = C + I + G + X - M$
(2)	$(a\rangle 0, \quad 1\rangle b\rangle 0)$	$C = a + b(Y - T)$
(3)	$(1\rangle t\rangle 0)$	$T = t.Y$
(4)	$1\rangle m\rangle 0$	$M = mY$
(5)	$X_0\rangle 0$	$X = X_0$
(6)	$(I_0\rangle 0)$	$I = I_0$
(7)	$(G_0\rangle 0)$	$G = G_0$

للحصول على المستوى التوازني للدخل القومي في هذا النموذج نقوم بتعويض المعادلات من (2) وحتى (7) في المعادلة الأولى، فيكون:

$$Y = a + b(Y - tY) + I_0 + G_0 + X_0 - mY$$
$$Y = bY - btY - mY + a + I_0 + G_0 + X_0$$
$$Y(1 - b + bt + m) = a + I_0 + G_0 + X_0$$

وتكون قيمة Y التوازنية هي:

$$\bar{Y} = \frac{a + I_0 + G_0 + X_0}{1 - b + bt + m}$$

لمعرفة مقدار التغير الحاصل في المستوى التوازني للدخل $\bar{Y}$ عندما تتغير الصادرات X ، نقوم باشتقاق المستوى التوازني للدخل $\bar{Y}$ بالنسبة للصادرات X_0 فيكون لدينا:

$$\frac{\partial \bar{Y}}{\partial X_0} = \frac{1(1 - bt + m) - 0(a + I_0 + G_0 + X_0)}{(1 - b + bt + m)^2}$$
$$= \frac{1}{1 - b + bt + m} \rangle 0$$

وهذا يسمى مضاعف الصادرات **(Export Multiplier)** ونرمز له بالرمز (X_m):

$$X_m = \frac{\Delta \bar{Y}}{\Delta X} \qquad \rightarrow \Delta \bar{Y} = \Delta X.(X_m)$$

واضح أن مضاعف الصادرات يتأثر بالميل الحدي للاستهلاك b وبمعدل الضريبة t وبالميل الحدي للواردات m.

نفترض أن b يساوي 0.75 وان t تساوي 0.20 وان m تساوي 0.10 فيكون مضاعف الصادرات:

$$X_m = \frac{1}{1-0.75+0.75(0.20)+0.10}$$

$$= \frac{1}{0.50} = 2$$

وهذا يعني أنه في حال زيادة الصادرات بمقدار معين فإن المستوى التوازني للدخل سوف يزداد بمقدار الضعف. فزيادة الصادرات بمقدار 40 مليون ليرة سورية، مثلاً، سيؤدي في النهاية إلى زيادة في الدخل في الدخل مقدارها 80 مليون ليرة سورية.

فالتغير في الصادرات يؤدي إلى تغير في المستوى التوازني للدخل. وحالما زادت الصادرات سيزداد الدخل، وبالتالي سيزداد الاستهلاك. وتولد الزيادة في الصادرات –شأنها شأن الزيادة في الاستثمار والإنفاق الحكومي – من خلال آلية عمل المضاعف، زيادة في الدخل أكبر من الزيادة الأولية في الصادرات.

وإذا زادت الواردات M فسيكون لزيادتها أيضاً تأثير في المستوى التوازني للدخل $\bar{Y}$. يمكننا أن نحصل على مقدار التغير الحاصل في المستوى التوازني للدخل $\bar{Y}$ عندما تتغير الواردات من خلال اشتقاق المستوى التوازني للدخل بالنسبة لـ m فيكون:

$$\bar{Y} = \frac{a + I_0 + G_0 + X_0}{1 - b + bt + m}$$

$$\frac{\partial \bar{Y}}{\partial m} = \frac{0(1 - b + bt + m) - 1(a + I_0 + G_0 + X_0)}{(1 - b + bt + m)^2}$$

$$= -\frac{1}{1 - b + bt + m}.\bar{Y} \langle 0$$

وهذا ما يسمى مضاعف الواردات **(Import Multiplier)** ونرمز له بالرمز (M_m):

$$M_m = \frac{\Delta \bar{Y}}{\Delta M} \qquad \rightarrow \Delta \bar{Y} = \Delta M.(M_m)$$

يلاحظ أن مضاعف الواردات مسبوق بإشارة سالبة $(-)$، وهذا يعني أن الزيادة في الواردات تؤدي في النهاية إلى انخفاض في المستوى التوازني للدخل.

المبحث الثاني

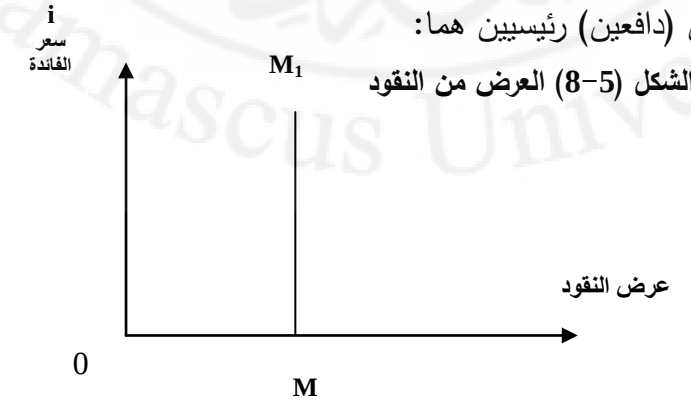
التوازن الاقتصادي النقدي – السلعي

درسنا في النماذج الاقتصادية الكلية كيفية التوصل إلى توازن السوق السلعية، متجاهلين أن الطلب على السلع والعرض يتأثران بالطلب والعرض من النقود. فالطلب على النقود والعرض من النقود يؤثر في التوازن الاقتصادي الكلي، وتحديداً في المستوى التوازني للدخل القومي.

في هذا المبحث سنقوم بدراسة السوق النقدية، ومن ثم ندرس التوازن الاقتصادي الكلي في السوق السلعية والسوق النقدية معاً. حيث نشكل نموذجاً يدعى بنموذج التوازن السلعي – النقدي وذلك وفق التحليل الكنزي أو ما يسمى النموذج الخطي الكنزي للنقد.

العرض والطلب على النقود:

يتحدد العرض الاسمي من النقود من قبل السلطات النقدية، أي من قبل البنك المركزي. وتمثل النقود المعروضة مجموع النقود الورقية والنقود المعدنية في التداول إضافة إلى الودائع المصرفية. فالعرض الاسمي للنقود إذاً، والذي نرمز له بالرمز M_s ،يعد متغيراً خارجياً. ويكتب تابع العرض الاسمي للنقود بالشكل $M_s = M_o$ حيث M_o تمثل كمية محددة من النقود. ويأخذ تابع عرض النقود الشكل البياني الآتي (5–8)، أما الطلب على النقود فإنه يتأثر، حسب التحليل الكنزي، بعاملين (دافعين) رئيسيين هما:



الشكل (5–8) العرض من النقود

1 . الطلب على النقود بدافع المعاملات والاحتياط:

إن الطلب على النقود بغرض المعاملات يعتمد أساساً على القيمة الاسمية للدخل، الذي يعبر عن مجموع السلع والخدمات E مضروبة بقيمتها المقابلة P . وحينما يزيد حجم الدخل (أو ترتفع الأسعار)، فإنه يصبح هناك طلب أكبر على النقود بدافع المعاملات. ويتوقف الطلب على النقود بدافع الاحتياط على الدخل أيضاً.

2 . الطلب على النقود بدافع المضاربة:

يعد الطلب على النقود بدافع المضاربة، طلباً على النقود للاحتفاظ بها بصورة عاطلة. ويتوقف ذلك أساساً على أسعار الفائدة(i) .

ويمكن صياغة تابع الطلب على النقود بالشكل الآتي:

$$M_d = \sigma + \lambda_Y - \mu i$$

$$\sigma \rangle 0, 1 \rangle \lambda \rangle 0, \mu \langle 0$$

حيث:

M_d :تمثل الطلب على النقود.

σ :ثابت يمثل الطلب المستقل على النقود.

i :سعر الفائدة.

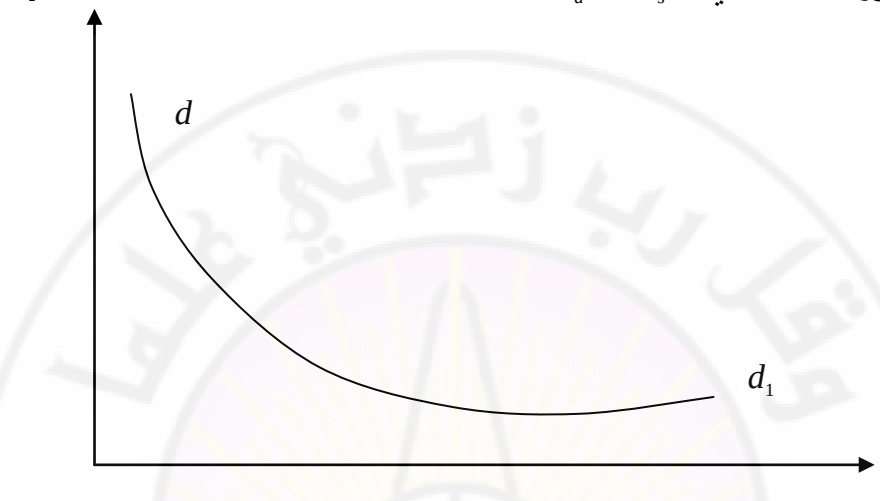
λ :ميل تابع الطلب على النقود بالنسبة للدخل.

μ :ميل تابع الطلب على النقود بالنسبة لسعر الفائدة.

نلاحظ بأن الطلب على النقود يتناسب بشكل طردي مع الدخل Y ، وبشكل عكسي مع سعر الفائدة i ، فمع ارتفاع الدخل القومي يزداد الطلب على النقود، نظراً للحاجة للنقد السائل، في حين يؤدي ارتفاع سعر الفائدة إلى انخفاض الطلب على النقود لأنه يكون هناك اتجاه لتوظيف الأموال السائلة.

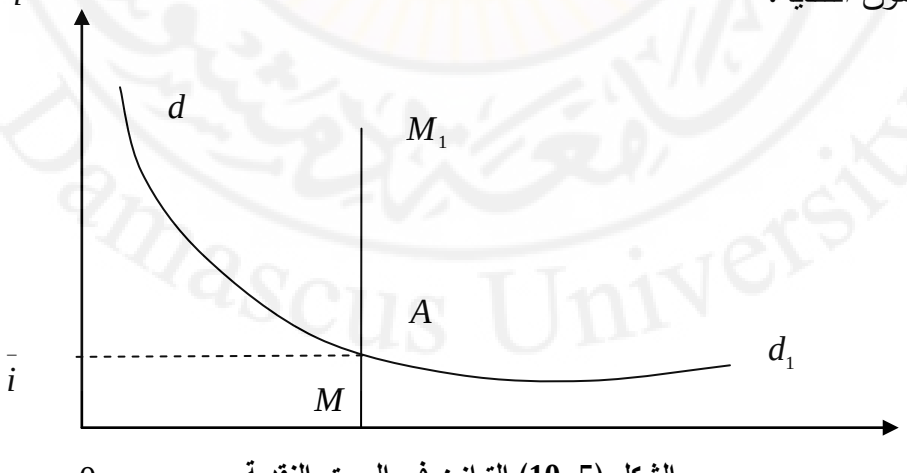
يأخذ تابع الطلب على النقود الشكل البياني التالي (5-9):

يحصل التوازن في السوق النقدية يتعادل الكميات المطلوبة من النقود مع الكميات المعروضة منه، أي: $M_d = M_s$



الشكل (5–9) الطلب على النقود

ويتحدد سعر الفائدة (حسب رأي كنز) عند المستوى الذي يتقاطع فيه تابع العرض للنقود M_s مع تابع الطلب M_d ويبين الشكل (5–10) للحل البياني للتوازن في السوق النقدية.



الشكل (5–10) التوازن في السوق النقدية

يعبر المستقيم MM_1 عن الكمية المعروضة من النقود، والذي يأخذ شكل خط عمودي مواز للمحور العمودي، مما يفيد باستقلال عرض النقود عن سعر الفائدة. ويعبر المنحى dd_1 عن الطلب الكلي على النقود. وبتقاطع مستقيم عرض النقود MM_1 مع منحى الطلب على النقود، عند النقطة A ، ويتحدد سعر الفائدة $\left(\bar{i}\right)$ حيث يتساوى الطلب على النقود مع العرض منه.

<u>نموذج للتوازن الاقتصادي في السوق السلعية – النقدية:</u>

مما تقدم يمكن بناء نموذج مبسط للتوازن في السوق السلعية – النقدية، مفترضين في البداية عدم وجود قطاع حكومي، وبالتالي عدم وجود ضرائب ونفترض أيضاً عدم وجود علاقات مع الخارج، وأن الأسعار ثابتة.

ويتلخص النموذج التوازني في السوق السلعية – النقدية بمجموعة المعادلات الست التالية، والتي تمثل المعادلات السلوكية في كلا السوقين، إضافة إلى شرطي التوازن في السوق السلعية والسوق النقدية.

$$Y = C + I \qquad (1)$$

$$C = a + bY \qquad (a\rangle 0,\quad 1\rangle b\rangle 0) \qquad (2)$$

$$I = I_0 - \delta_i \qquad (I_0\rangle 0,\quad \delta\langle 0) \qquad (3)$$

$$M_d = M_S \qquad (4)$$

$$M_d = \sigma + \lambda Y - \mu_i \qquad (5)$$

$$M_s = M_o \qquad (6)$$

حيث:

Y: الدخل القومي.

C: الاستهلاك.

I: الاستثمار.

a :الاستهلاك الضروري.

I_0 :الاستثمار المستقل عن سعر الفائدة.

δ :معامل تابع الاستثمار بالنسبة لسعر الفائدة.

σ :الطلب المستقل على النقود.

λ :معامل تابع الطلب على النقود بالنسبة للدخل.

μ :معامل تابع الطلب على النقود بالنسبة لسعر الفائدة.

i :سعر الفائدة.

M_d :الطلب على النقد.

M_s :العرض من النقد.

M_o :مقدار ثابت من النقد تتحدد قيمته بسياسة الإصدار.

تمثل المعادلات 1،2،3 السوق السلعية. تشير المعادلة الأولى إلى شرط التوازن في السوق السلعية. وتدل المعادلة الثانية إلى تابع الاستهلاك. وتدل المعادلة الثالثة إلى تابع الاستثمار، حيث يتحدد الإنفاق على الاستثمار بشكل أساسي (عند كنز) بسعر الفائدة i (إضافة إلى الكفاية الحدية لرأس المال).

واضح من المعادلة الثالثة بأن هناك علاقة عكسية بين الاستثمار I وبين سعر الفائدة i. وتمثل الفائدة عند كنز ثمناً للتخلي عن السيولة (وليس مقابل التضحية بالاستهلاك الحاضر في سبيل الاستهلاك المستقبلي، حسب الكلاسيك)، وهذا الثمن يتحدد مثل أي سعر آخر في السوق عند المستوى الذي يتساوى عنده عرض النقود مع الطلب عليها. وتدل I_o على الاستثمارات المستقلة، فعند أي مستوى لسعر الفائدة سيكون هناك مستوى محدد للاستثمارات I_o، والذي يمكن معرفته من خلال الكفاية الحدية للاستثمارات.

تمثل المعادلات 4،5،6 السوق النقدية. فتشير المعادلة الرابعة إلى شرط التوازن في السوق النقدية. وتمثل المعادلة الخامسة معادلة سلوكية تبين بأن الطلب على

النقود M_d يتبع بشكل طردي للدخل القومي Y ، وبشكل عكسي لسعر الفائدة iوتدل المعادلة السادسة على أن عرض النقود متغير مستقل خارجي تتحدد قيمته M_o〈0بالسياسة النقدية التي يحددها المصرف المركزي.

إن حل النموذج وحساب القيم التوازنية للدخل القومي Y ولسعر الفائدة i يشترط تحقق شرطي التوازن في المعادلتين الأولى والرابعة، أي التوازن السلعي – النقدي. نقوم بتبديل المعادلتين 2 و 3 في المعادلة الأولى، ثم نبدل المعادلتين 5 و 6 في المعادلة الرابعة، فنحصل على المعادلتين التاليتين:

$$Y = a + bY + I_o - \delta_i \qquad (7)$$

$$\sigma + \lambda Y - \mu i = M_0 \qquad (8)$$

وبالإصلاح نحصل على المعادلتين 9 و 10:

$$(1-b)Y + \delta i = a + I_o \qquad (9)$$

$$\lambda Y - \mu i = M_o - \sigma \qquad (10)$$

لدينا هنا معادلتان فيهما Y و i متغيرات تابعة (داخلية) و M_0 متغير خارجي مستقل، و a, b, σ, I_o معاملات ثابتة، نكتب جملة المعادلات هذه بشكل مصفوفات كالآتي:

$$\begin{bmatrix} (1-b) & +\delta \\ \lambda & -\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & +I_0 \\ M_0 & -\sigma \end{bmatrix}$$

$$[A] \qquad [X] \qquad [B]$$

ويمكن حل هذا النموذج إما بطريقة كرامر أو بطريقة مقلوب المصفوفة أو أي طريقة أخرى في جبر المصفوفات:

$$[A].[X] = [B]$$

$$A^{-1}.A.X = A^{-1}.B \rightarrow X = A^{-1}.B$$

فنحصل على القيم التوازنية للدخل القومي $\bar{Y}$ ولسعر الفائدة $\bar{i}$ نعوض هذه القيم التوازنية في المعادلتين 2 و 3 فنحصل على القيم التوازنية للاستهلاك $\bar{C}$

والاستثمار $\bar{I}$، ونعوض في الخامسة فنحصل على القيمة التوازنية لـ M_d تحقق القيم التي نحصل عليها التوازن السلعي – النقدي.

يمكن الحصول على القيم التوازنية لـ $\bar{Y}$ و $\bar{i}$ بالطريقة التالية أيضاً:

نكتب المعادلة (1) وكذلك المعادلة (4) بدلالة Y و i فنحصل على المعادلتين:

$$i = \frac{+(1-b)Y}{\delta} - \frac{a+I_0}{\delta} \qquad (11)$$

$$i = \frac{M_0 - \sigma}{\mu} - \frac{\lambda Y}{\mu} \qquad (12)$$

وبالمساواة بين المعادلتين (11) و (12) يمكن أن نحصل على قيمة $\bar{Y}$ التوازنية.

نعوض في المعادلة (11) أو في المعادلة (12) فنحصل على قيمة $\bar{i}$ التوازنية.

<u>نموذج للتوازن السلعي– النقدي بوجود قطاع حكومي:</u>

درسنا في الفقرة السابقة نموذجاً للتوازن في السوق السلعية النقدية مفترضين عدم وجود قطاع حكومي، وبالتالي عدم وجود نفقات حكومية وعدم وجود ضرائب.

سنقوم هنا بتوسيع النموذج وندخل القطاع الحكومي إليه، فيكون لدينا النموذج الآتي:

$$Y = C + I + G \qquad (1)$$

$$C = a + bY(Y - T) \qquad (2) \qquad (a\rangle 0, \quad 1\rangle b\rangle 0)$$

$$T = t.Y \qquad (3) \qquad 1\rangle t\rangle 0$$

$$I = I_0 - \delta_i \qquad (4) \qquad I_0\rangle 0, \quad \delta\langle 0$$

$$G = G_0 \qquad (5) \qquad G_0\rangle 0$$

$$M_d = M_S \qquad (6)$$

$$M_d = \sigma + \lambda Y - \mu i \qquad (7) \qquad \sigma, \lambda\rangle 0, \mu\langle 0$$

$$M_s = M_o \qquad (8) \qquad M_0\rangle 0$$

تمثل المعادلات 1، 2، 3، 4، 5، السوق السلعية. تشير المعادلة (3) إلى أن الضريبة T تابعة للدخل Y، وتشير المعادلة (5) إلى أن الإنفاق الحكومي متغير خارجي مستقل $G_0\rangle 0$ تتحدد قيمته من خارج النموذج. وتمثل المعادلات 6، 7، 8 السوق النقدية.

لحل النموذج السابق نعوض في شرطي التوازن، أي في المعادلتين الأولى والسادسة. نبدل المعادلات 2، 4، 5 في المعادلة الأولى، ونبدل المعادلتين 7، 8 في المعادلة السادسة فنحصل على المعادلتين 9، 10 بدلالة Y و i.

$$Y = a + b(Y - t.Y) + I_0 - \delta i + G_0$$
$$Y = a + bY - btY + I_0 - \delta i + G_0$$
$$(1 - b + bt)Y + \delta i = a + I_0 + G_0 \qquad (9)$$
$$\sigma + \lambda Y - \mu i = M_0$$
$$\lambda Y - \mu i = M_0 - \sigma \qquad (10)$$

نكتب المعادلتين 9 و 10 بالشكل المصفوفي الآتي:

$$\begin{bmatrix} (1-b+bt) & \delta \\ \lambda & -\mu \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} y \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + I_0 + G_0 \\ M_0 - \sigma \end{bmatrix}$$
$$[A] \qquad [X] \qquad [B]$$

$$[A][X] = [B]$$
$$A^{-1}.A.X = A^{-1}.B \rightarrow X = A^{-1}.B$$

بحل جملة المعادلات السابقة، والتي تحقق شرطي التوازن في السوق السلعية – النقدية، نحصل على القيم التوازنية لـ $\bar{Y}$ و $\bar{i}$.

وبالتعويض في معادلات النموذج نحصل على القيم التوازنية لـ:

$$\bar{Ms}, \bar{Md}, \bar{T}, \bar{I}, \bar{C}$$

يمكن للحكومة أن تؤثر في النشاط الاقتصادي، وبالتالي في التوازن الكلي في سوق السلع والخدمات والسوق النقدية من خلال ثلاث أدوات أساسية هي: الضرائب T، الإنفاق الحكومي G، وعرض النقود Ms. فمع زيادة الإنفاق الحكومي، على سبيل المثال، يزداد سعر الفائدة، وذلك لأن الزيادة في الدخل تؤدي إلى الزيادة في الطلب على النقود لأغراض المعاملات، وذلك في حال بقاء عرض النقود على حاله.

<u>نموذج للتوازن السلعي – النقدي بوجود علاقات مع الخارج:</u>

ويمكن توسيع النموذج السابق بإدخال العلاقات الاقتصادية مع الخارج في النموذج، فتأخذ معادلات النموذج الشكل الآتي:

$$Y = C + I + G + X - M \qquad (1)$$

$$C = a + b(Y - T) \qquad (2) \qquad (a\rangle 0, \quad 1\rangle b\rangle 0)$$

$$I = I_0 - \delta_i \qquad (3) \qquad I_0\rangle 0, \quad \delta\langle 0$$

$$T = t.Y \qquad (4) \qquad 1\rangle t\rangle 0$$

$$M = m.Y \qquad (5) \qquad 1\rangle m\rangle 0$$

$$G = G_0 \qquad (6) \qquad G_0\rangle 0$$

$$X = X_0 \qquad (7) \qquad X_0\rangle 0$$

$$Md = Ms \qquad (8)$$

$$Md = \sigma + \lambda Y - \mu i \qquad (9) \qquad \sigma, \lambda\rangle 0, \quad \mu\langle 0$$

$$Ms = M_0 \qquad (10) \qquad M_0\rangle 0$$

يتكون النموذج هنا من عشر معادلات. تمثل المعادلات من 1 وحتى 7 السوق السلعية، وتمثل المعادلات 8، 9، 10 السوق النقدية. نفترض هنا أن الواردات تتبع للدخل القومي(معادلة 5)، وأن الصادرات متغير مستقل يتحدد خارج النموذج

(معادلة 7). تمثل المعادلة (1) شرط التوازن في السوق السلعية، وتمثل المعادلة (8) شرط التوازن في السوق النقدية.

لحل النموذج نعوض المعادلات 2، 3، 5، 6 ،7 في المعادلة الأولى. ونعوض المعادلات 9 و 10 في المعادلة 8، فنحصل:

$$Y = C + I + G + X - M$$
$$Y = a + b(Y - tY) + I_0 - \delta i + G_0 + X_0 - mY$$
$$Y = bY - btY - mY - \delta i + a + I_0 + G_0 + X_0$$
$$(1 - b + bt + m)Y + \delta i = a + I_0 + G_0 + X_0 \qquad (11)$$

واضح من المعادلة (11) أن (a, I_0, G_0, X_0) هي متغيرات مستقلة تتحدد من خارج النموذج وتعامل كعنصر واحد كونها جميعاً من الثوابت.

نعوض في المعادلة (8) فيكون:

$$\sigma + \lambda Y - \mu i = Mo$$
$$\lambda Y - \mu i = Mo - \sigma \qquad (12)$$

ينتج لدينا معادلتان (11) و (12) بمتغيرين Y و i.

بحل جملة هاتين المعادلتين نحصل على القيم التوازنية للدخل $\bar{Y}$ ولسعر الفائدة $\bar{I}$.

المبحث الثالث

تطبيقات حول الفصل الخامس

التمرين الأول

لدينا النموذج التوازني للدخل القومي لإحدى الدول:

$$Y = C + I + G \qquad (1)$$
$$C = 60 + 0.7(Y - T) \qquad (2)$$
$$T = 0.3Y \qquad (3)$$
$$I = I_0 = 30 \qquad (4)$$
$$G = G_0 = 20 \qquad (5)$$

1 . أوجد القيم التوازنية للدخل $\bar{Y}$ وللاستهلاك $\bar{C}$ وللضريبة $\bar{T}$.

2 . نفرض أن معدل الضريبة أصبح $t = 0.20$ ، احسب القيم التوازنية الجديدة وقارنها مع القيم التوازنية عندما كان معدل الضريبة $t = 30\%$

3 . احسب القيم التوازنية $\bar{Y}$ ، $\bar{C}$ ، $\bar{T}$ بفرض أن معدل الضريبة قد أصبح 40% وقارن ذلك مع (1) و (2).

4 . بفرض أن الدخل القومي المتوقع هو 240 مليار وحدة نقدية، فما هو معدل الضريبة t الذي يحقق توازن الدخل القومي المتوقع.

5 . بين كيف يمكن للحكومة أن تؤثر في القيم التوازنية من خلال معدل الضريبة.

الحل

1 . نعوض في المعادلة التوازنية رقم (1):

$$Y = 60 + 0.7(Y - T) + 30 + 20$$
$$Y = 60 + 0.7(Y - 0.3Y) + 30 + 20$$
$$Y = 110 + 0.7(0.7Y)$$
$$Y = 110 + 0.49Y$$
$$0.51Y = 110 \rightarrow \bar{Y} = \frac{110}{0.51} = 215$$

وهو مستوى الدخل القومي التوازني.

نعوض في المعادلة (3) فنحصل على $\bar{T}$:

$$\bar{T} = 0.3(215) = 64.5$$

ونعوض في المعادلة (2) فنحصل على المستوى التوازني للاستهلاك $\bar{C}$:

$$\bar{C} = 60 + 0.7(215 - 64.5) = 165.35$$

2 . عندما تصبح $t = 0.20$ يكون:

$$T = 0.20Y$$
$$Y = 60 + 0.7(Y - 0.20Y) + 30 + 20$$
$$Y = 110 + 0.7(0.80Y)$$
$$Y = 110 + 0.56Y$$
$$0.44Y = 110 \rightarrow \bar{Y} = \frac{110}{0.44} = 250$$
$$\bar{T} = 0.20(250) = 50$$
$$\bar{C} = 60 + 0.7(250 - 50) = 20$$

نلاحظ أنه مع انخفاض معدل الضريبة أن الدخل التوازني قد ارتفع من 215 إلى 250، وانخفض حجم الضريبة من 64.5 إلى 50، في حين ارتفع حجم الاستهلاك من 165.35 إلى 200.

. 3

$$Y = 60 + 0.7(Y - T) + 30 + 20$$
$$= 60 + 0.7(Y - 0.40Y) + 50$$
$$Y = 110 + 0.42Y$$
$$0.58Y = 110 \rightarrow \bar{Y} = \frac{110}{0.58} = 189.65$$
$$\bar{T} = 0.40(189.65) = 75.86$$
$$\bar{C} = 60 + 0.7(189.65 - 75.86) = 139.65$$

نلاحظ أن الدخل التوازني Y قد انخفض إلى 189.65 وهذا المستوى اخفض من الحالتين السابقتين، في حين ارتفع حجم الضريبة $\bar{T}$ إلى 75.86، أما مستوى الاستهلاك فقد انخفض إلى 139.65.

. 4

$$Y = 60 + 0.7(Y - T) + 30 + 20$$
$$240 = 60 + 0.7(240 - T) + 50$$
$$240 = 110 + 168 - 0.7T$$
$$0.7T = 38 \rightarrow T = \frac{38}{0.7} = 54.29$$
$$T = t.Y$$
$$54.29 = t.(240) \rightarrow t = 22.6\%$$

التمرين الثاني

لدينا المعطيات التالية المتعلقة باقتصاد إحدى الدول. يبلغ حجم الاستهلاك الضروري 60 ملياراً والميل الحدي للاستهلاك 0.80 ومعدل الضريبة 30%. والمطلوب كتابة النموذج التوازني للدخل القومي وإيجاد القيم التوازنية للدخل القومي $\bar{Y}$ وللاستهلاك C وللضريبة $\bar{T}$. علماً أن حجم الاستثمار هو 30 ملياراً وحجم الإنفاق الحكومي هو 20 ملياراً.

الحل

نكتب معادلات النموذج بالشكل:

$$Y = C + I + G$$
$$C = 60 + 0.80(Y - T)$$
$$T = 0.30Y$$
$$I = I_0 = 30$$
$$G = Go = 20$$

نوجد القيم التوازنية بطريقة التعويض:

$$Y = 60 + 0.80(Y - 0.3Y) + 30 + 20$$
$$Y = 110 + 0.80(0.7Y)$$
$$Y = 110 + 0.56Y \rightarrow 0.44 = 110$$
$$\bar{Y} = \frac{110}{0.44} = 250$$
$$\bar{Y} = 0.30(250) = 75$$
$$\bar{C} = 60 + 0.8(250 - 75) = 60 + 0.8(175)$$
$$= 60 + 140 = 220$$

التمرين الثالث

أعطيت المعلومات التالية المتعلقة باقتصاد إحدى الدول: يقدر الميل الحدي للاستهلاك الخاص من الدخل بـ 0.80 ويبلغ مضاعف الاستثمار 2.5، تنفق الحكومة ضعف الاستهلاك الخاص المستقل، وتقدر الاستثمارات بربع الدخل القومي. والمطلوب تحديد المستويات التوازنية للدخل القومي، للاستثمارات، للاستهلاك الخاص، وللإنفاق العام، إذا علمت أن الفرق بين الإيراد والإنفاق الحكومي يبلغ 600 مليون وحدة نقدية.

الحل

نكتب معادلات النموذج:

$$Y = C + I + G$$
$$C = a + 0.8(Y - T)$$
$$T = t.Y$$
$$I = Io = \frac{1}{4}Y$$
$$G = Go = 2a$$

رأينا أن مضاعف الاستثمار يساوي:

$$\frac{\partial Y}{\partial Io} = \frac{1}{1 - b + bt}$$
$$= \frac{1}{1 - b(1 - t)}$$
$$2.5 = \frac{1}{1 - 0.8(1 - t)}$$
$$2.5 - 2(1 - t) = 1$$
$$0.5 = 2t \qquad \rightarrow \qquad t = 0.25$$

لدينا:

$$T = 0.25Y \quad , \quad Go = 2a \quad , \quad I = 0.25Y$$

نعوض في معادلة الدخل القومي التوازنية:

$$Y = a + 0.80(Y - 0.25Y) + 0.25Y + 2a$$
$$Y = a + 0.6Y + 0.25Y + 2a$$
$$Y = 3a + 0.85Y$$
$$0.15Y = 3a$$
$$a = \frac{0.15}{3}Y = 0.05Y$$

لدينا أيضاً:

$$T - Go = 600$$
$$0.25Y - 2a = 600$$
$$0.25Y - 2(0.05Y) = 600$$
$$0.25Y - 0.1Y = 600$$
$$0.15Y = 600$$

ويكون مستوى الدخل القومي التوازني

$$\bar{Y} = 4000$$

حجم الضريبة $\bar{T} = 0.25Y = 1000$

حجم الاستهلاك المستقل

$$a = 0.05Y = 0.05(4000) = 200$$

مستوى الاستهلاك

$$\bar{C} = 200 + 0.8(3000) = 2600$$

حجم الاستثمارات

$$\bar{Io} = 0.25Y = 1000$$

مستوى الإنفاق الحكومي $Go = 2a = 400$

التمرين الرابع

لدينا في الجدول التالي معلومات تتعلق باقتصاد ثلاث دول:

	الدولة (1)	الدولة (2)	الدولة (3)
الاستثمارات (I)	2000	1500	1880
الإنفاق الحكومي (G)	1500	1600	1900
الميل الحدي للاستهلاك (b)	0.80	0.75	0.65
الميل الحدي للاستيراد (m)	0.40	0.30	0.35

فإذا علمت أن قيمة محددة المصفوفة $(1-B)$ يساوي 0.060 وأن المصفوفة المساعدة $\left(1-\tilde{B}\right)$ تساوي:

$$\begin{bmatrix} 0.15 & 0.04 & 0.03 \\ 0.05 & 0.11 & 0.03 \\ 0.02 & 0.02 & 0.07 \end{bmatrix}$$

والمطلوب:

1 . حساب مستوى الدخل القومي التوازني $\bar{Y}$ للدول الثلاث.

2 . حساب مستوى الاستهلاك $\bar{C}$ للدول الثلاث.

3 . حساب حجم الصادرات $\bar{X}$ لكل دولة من الدول الثلاث.

. الحل

$$\bar{Y} = (I-B)^{-1}.G$$

$$(I-B)^{-1} = \frac{1}{|I-B|}.\left(I-\tilde{B}\right)$$

$$\bar{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{0.060} \begin{bmatrix} 0.15 & 0.04 & 0.03 \\ 0.05 & 0.11 & 0.03 \\ 0.02 & 0.02 & 0.07 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2000+1500 \\ 1500+1600 \\ 1800+1900 \end{bmatrix}$$

$$\bar{Y} = \begin{bmatrix} \bar{Y}_1 \\ \bar{Y}_2 \\ \bar{Y}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{0.060} \begin{bmatrix} 760 \\ 627 \\ 391 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12666.67 \\ 10450 \\ 6516.67 \end{bmatrix}$$

2 . مستويات الاستهلاك التوازنية في الدول الثلاث:

$$\bar{C}_1 = 0.80(\bar{Y}_1) = 0.80(12666.67) = 10133.34$$

$$\bar{C}_2 = 0.75(\bar{Y}_2) = 0.75(10450) = 7837.5$$

$$\bar{C}_3 = 0.65(\bar{Y}_3) = 0.65(6516.67) = 4235.84$$

3 . لدينا

$$Y = C + I + G + X - M$$

نحسب أولاً قيمة الواردات M بالنسبة لكل دولة:

$$M_1 = m_1(\bar{Y}_1) = 0.40(12666.67) = 5066.67$$

$$M_2 = m_2(\bar{Y}_2) = 0.30(10450) = 3135$$

$$M_3 = m_3(\bar{Y}_3) = 0.35(6516.67) = 2280.83$$

وتكون حجوم الصادرات X لكل دولة من الدول الثلاث:

$$Y_1 = C_1 + I_1 + G_1 + X_1 - M_1$$
$$12666.67 = 10133.34 + 2000 + 1500 + X_1 - 5066.67$$
$$X_1 = 4100$$
$$Y_2 = C_2 + I_2 + G_2 + X_2 - M_2$$
$$10450 = 787.5 + 1500 + 1600 + X_2 - 3125$$
$$X_2 = 2647.5$$
$$Y_3 == C_3 + I_3 + G_3 + X_3 - M_3$$
$$6516.67 = 4235.84 + 1800 + 1900 + X_3 - 2280.83$$
$$X_3 = 861.66$$

التمرين الخامس

لدينا المعادلات الست التالية الممثلة للسوقين السلعية والنقدية حسب النموذج الكنزي:

$$Y = C + I$$
$$C = 200 + 0.7Y$$
$$I = 180 - 1000i$$
$$Md = Ms$$
$$Md = 800 + 1.4Y - 2000i$$
$$Mo = 2000$$

والمطلوب: إيجاد القيم التوازنية للدخل $\bar{Y}$ ولسعر الفائدة $\bar{i}$ وللاستهلاك $\bar{C}$ والاستثمار $\bar{I}$ وحجم الطلب على النقود Md.

الحل:

نعوض في شرط التوازن في السوق السلعية:

$$Y = 200 + 0.7Y + 180 - 1000i$$

$$0.3Y - 380 = -1000i$$

$$i = \frac{380}{1000} - \frac{0.3}{1000}Y$$

$$i = 0.38 - 0.0003Y \qquad (1)$$

نعوض في شرط التوازن في السوق النقدية:

$$2000 = 800 + 1.4Y - 2000i$$

$$1200 - 1.4Y = -2000i$$

$$i = \frac{1200}{2000} - \frac{1.4}{2000}Y$$

$$i = -0.6 + 0.0007Y \qquad (2)$$

من المعادلتين (1) و (2) يكون:

$$0.38 - 0.0003Y = -0.6 + 0.0007Y$$

$$0.98 = 0.001Y \qquad \rightarrow \qquad \bar{Y} = \frac{0.98}{0.001} = 980$$

وهو مستوى الدخل القومي التوازني.

$$i = 0.38 - 0.0003(980) = 0.086$$

إذاً يكون سعر الفائدة 8.6%.

$$\bar{C} = 200 + 0.7(\bar{Y}) = 200 + 0.7(980) = 886$$

وهذا يمثل مستوى الاستهلاك التوازني. وتساوي الاستثمارات:

$$\bar{I} = 180 - 1000(i) = 180 - 1000(0.086) = 94$$

ويكون حجم الطلب التوازني على النقود $\bar{M}\,d$.

$$Md = 800 + 1.4(980) - 2000(0.086)$$

$$= 2000$$

التمرين السادس

لدينا المعلومات التالية على اقتصاد إحدى الدول: الميل الحدي للاستهلاك من الدخل هو 75% $(b=0.75)$ ، وتبلغ الضرائب على الدخل 20% $(t=0.20)$، ويبلغ ميل تابع الاستثمار بالنسبة لسعر الفائدة 4− $(\delta=-4)$، وميل تابع الطلب على النقود بالنسبة للدخل هو 0.25 $(\lambda=0.25)$، وميل تابع الطلب على النقود بالنسبة لسعر الفائدة هو 10− $(\mu=-10)$، وبفرض أن باقي المتغيرات الخارجية هي كالآتي:

$$Mo=220, \quad \sigma=20, \quad Io=165, \quad Go=155, \quad a=70$$

والمطلوب: حساب القيم التوازنية للدخل ولسعر الفائدة $\left(\bar{i},\bar{Y}\right)$ وأيضاً للاستهلاك C والاستثمار I وحجم الطلب على النقود $\bar{M}\,d$.

الحل:

نكتب معادلات النموذج في السوقين السلعية والنقدية كالآتي:

$$Y=C+I+G \quad (1)$$
$$C=70+075(Y-T) \quad (2)$$
$$T=0.20.Y \quad (3)$$
$$I=165-4i \quad (4)$$
$$G=155 \quad (5)$$
$$Md=Ms \quad (6)$$
$$Md=20+0.25Y-10i \quad (7)$$
$$Ms=220 \quad (8)$$

نعوض المعادلات 2 ، 4 ، 5 في المعادلة 1:

$$Y = 70 + 0.75(Y - 0.20Y) + 165 - 4i + 155$$
$$Y = 390 + 0.75(0.8Y) - 4i$$
$$Y = 0.6Y - 4i + 390$$
$$0.4Y + 4i = 390$$

ونعوض المعادلتين 7 و 8 في المعادلة 6:

$$220 = 20 + 0.25Y - 10i$$
$$0.25Y - 10i = 200 \qquad (10)$$

نحل جملة المعادلتين 9 و 10:

$$1.Y + 10i = 975$$
$$\frac{0.25Y - 10i = 200}{1.25Y \quad = 1175} \quad \rightarrow$$
$$\bar{Y} = \frac{1175}{1.25} = 940$$
$$0.25(940) - 10i = 200$$
$$235 - 10i = 200 \quad \rightarrow \quad i = 3.5\%$$
$$\bar{T} = tY = 0.20(940) = 188$$
$$\bar{C} = 70 + 0.75(940 - 188) = 634$$
$$\bar{I} = 165 - 4(i) = 151$$
$$\bar{M}\,d = 20 + 0.25(940) - 10(3.5) = 220$$

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

طرائق الخزل

طرائق الذاكرة بطيئة

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الفصل الأول

البرمجة الخطية

المبحث الأول
الطريقة البيانية

أولاً: مقدمة:

كثيراً ما تعترض الشركات أو الهيئات تحديد الاستخدام الأمثل للموارد بأقل تكلفة أو أكبر ربح، وكذلك تحديد أنواع السلع التي يقتنيها المستهلك وكمياتها للحصول على أكبر منفعة له ضمن حدود إمكانية دخله.

وتعتبر البرمجة الخطية نوعاً معيناً من مسائل البرمجة ويجب أن تحقق البرمجة الخطية الخواص التالية:

1 –متحولات القرار غير سالبة

2 –يمكن كتابة تابع الهدف (تعظيم او تخفيض) على شكل خطي بدلالة متحولات القرار.

3 –إمكانية التعبير عن محددات البرنامج (كالموارد مثلاً) بدلالة خطية وتكمن هذه المحددات (القيود) على شكل متراجحات أو مساواة

وكي نبين بشكل عملي البرنامج الخطي لنفترض أن x_1, x_2 متحولات قرار وكان لدينا البرنامج الخطي:

تابع هدف تعظيم

$$MaxZ = 30x_1 + 25x_2$$

قيود البرنامج

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \le 12 \\ 2x_1 + 6x_2 \le 10 \\ 1 \le x_1 \le 3 \end{cases}$$

قيود عدم السلبية لمتحولات

$$\begin{cases} x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

وحيث يمكن تحليل القيد الثالث $1 \le x_1 \le 3$ إلى قيدين من الشكل

$$x_1 \ge 1$$

إذاً في البرنامج السابق لدينا تابع هدف تعظيم (Max) الخطي ومتحولي قرار $(x_1.x_2)$ وستة قيود خطية بدلالة متحولات القرار

ثانياً: صياغة برنامج خطي:

يمكن اختصار خطوات كتابة البرنامج على الخطوات الثلاثة:

1. تحديد متحولات القرار من حيث عددها ونوعها وترميزها
2. تحديد تابع الهدف بدلالة متحولات القرار
3. تحديد القيود الواجب مراعاتها في نص المسألة. وهنا يفضل أن تفرغ البيانات بشكل جدول للتبسيط.

مسألة الخلطة العلفية:

بفرض أن لدينا مزرعة لتربية المواشي ولدينا ثلاثة أنواع من الأعلاف A,B,C وبحيث تحوي الخلطة العلفية نوعين من المواد الضرورية للمواشي وهي الفيتامين والبروتين وكان الجدول التالي يبين الكمية لكل من العلف

1 كغ علف	بروتين/mg	فيتامين/Mg	ماء/mg
A	2	4	100
B	3	1	150
C	4	5	120

فإذا علمت أن الكمية المتاحة من البروتين 1000mg و1200mg من الفيتامين وكلفة كل (mg) من البروتين (5) ل.س وكل (mg) من الفيتامين (4) ل.س وكلفة باقي المواد (في 1كغ من العلف) تقدر ب(2) ل.س ويجب الحصول على 600 من البروتين و 640 من الفيتامين كحد أدنى والمطلوب تحدد الكمية المثلى من أنواع الأعلاف كي تكون التكاليف في حدودها الدنيا.

الحل:

يجب أن تحدد متحولات القرار وهنا قد نختار البروتين والفيتامين كمتحولات قرار، لكن لا نستطيع تحديد كمية الأغذية وكذلك إن كميات البروتين والفيتامين محددة مسبقاً

وبالتالي فإن متحولات القرار هي

X1: كمية العلف (الغذاء) A

X2: كمية العلف B

X3: كمية العلف C

تحديد تابع الهدف: من الواضح أننا نريد أقل تكلفة وبالتالي لنحسب تكلفة كل 1كغ من الغذاء:

الغذاء A: (2)(5) + (4)(4) + 2=28

تكلفة البروتين + تكلفة الفيتامين + مصاريف أخرى

الغذاء B: (3)(5) + (1)(4) + 2=21

الغذاء C: (4)(5) + (5)(4) + 2=42

وبالتالي أصبح تابع الهدف

$$MinZ = 28x_1 + 21x_2 + 42x_3$$

أما قيد البروتين فيكون $2x_1 + 3x_2 4x_3 \le 1000$

للكمية المتاحة

أن الكمية المطلوبة $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \geq 600$

الفيتامين المقدم $4x_1 + x_2 + 5x_3 \leq 1200$

الحد الأدنى $4x_1 + x_2 + 5x_3 \geq 640$

وبالتالي أصبح البرنامج الخطي

$$MinZ = 28x_1 + 21x_2 + 42x_3$$
$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 1000$$
$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \geq 600$$
$$4x_1 + x_2 + 5x_3 \leq 1200$$
$$4x_1 + x_2 + 5x_3 \geq 640$$
$$x_1, x_2 x_3 \geq 0$$

أما المياه فلم يحدد لها كمية وبالتالي لا نكتب لها قيداً.

مسألة مراقبة الجودة:

لدى مؤسسة لاختبار الجودة مركزان لمراقبة الجودة، مركز ممتاز لمراقبة الجودة ، ومركزعادي لمراقبة الجودة، ويوجد (8) مراقبي جودة في المركز الممتاز و(12) مراقب جودة في المركز العادي، ويستطيع المراقب في المركز الممتاز مراقبة (30) قطعة بالساعة، أما المراقب من المركز العادي فيستطيع مراقبة (20) قطعة بالساعة، علماً أن دقة المراقب (98%) و(94%) على الترتيب لكلا المركزين، فإذا علمت أنه يجب مراقبة (1800) قطعة يومياً خلال (8) ساعات عمل، وأن أجر المراقب في المركز الممتاز (5) وحدة نقدية بالساعة والعادي (4) وحدات نقدية، وفي كل مرة يخطئ المراقب فيها تتحمل الشركة (2) وحدة نقدية غرامة، والمطلوب تحديد عدد المراقبين في كل مركز، كي تكون تكلفة المؤسسة أقل ما يمكن.

الحل: لدينا متحولات القرار عدد المراقبين من كل مركز:

X1: عدد المراقبين من المركز الممتاز.

X2: عدد المراقبين من المركز العادي.

عندئذ: $x_1 \le 8$

$x_2 \le 12$

بما أن عدد القطع الواجب تفتيشها على الأقل 1800 إذاً

$$8(30)x_1 + 8(20)x_2 \ge 1800$$

$$240x_1 + 160x_2 \ge 1800$$

كلفة مراقبة الجودة للمركز الممتاز باليوم: $8[5 + 30(0.02)(2)] = 49.6$

كلفة مراقبة الجودة للمركز العادي باليوم: $8[4 + 20(0.06)(2)] = 51.2$

وبالتالي يصبح البرنامج الخطي:

$$MinZ = 49.6x_1 + 51.2x_2$$

$$MinZ = 49.6x_1 + 51.2x_2$$

$$24x_1 + 16x_2 \ge 180$$

$$x_1 \le 8$$

$$x_2 \le 12$$

$$x_1 \ge 0 \quad . \quad x_2 \ge 0$$

مسألة الخلطة

لدى معمل ثلاثة خلطات ممكنة، وتستعمل نوعين من المواد الكيماوية A,B، فإذا علمت أن كل خلطة تعطي نوعين من المنتجات (S_1, S_2)فالخلطة الأولى تعطي من المنتجات على التوالي (2.3)، أما الخلطة الثانية فتعطي (1.4) والخلطة الثالثة (4.2) وكانت عمليات الخلط تحتاج إلى مايلي:

	B(كغ)	A(كغ)
الخلطة الأولى	2	4
الخلطة الثانية	4	5
الخلطة الثالثة	6	3

وأن الكمية المتاحة من (a) هي (360) كغ، ومن (b) (300) كغ، وتباع الوحدة من (S1) بسعر (50) وحدة نقدية، ومن (S_2) ب(45)، وكلفة (S_1) (10) وحدات نقدية، و(S_1) (12) وحدة نقدية.

والمطلوب: تحديد عدد مرات الخلط من كل نوع، كي تحقق أكبر ربح ممكن.

الحل:

متحولات القرار:

x_1: عدد الخلطات الاولى

x_2: عدد الخلطات الثانية

x_3: عدد الخلطات الثالثة

قيد المادة الكيميائية A $4x_1 + 5x_2 + 3x_3 \leq 360$

قيد المادة الكيميائية B $2x_1 + 4x_2 + 6x_3 \leq 300$

ربح (S_1) للوحدة $50-10=40$

ربح (S_2) للوحدة $45-12=33$

الخلطة	S_2	S_1
الأولى	3	2
الثانية	4	1
الثالثة	2	4

الربح التي تعطيه الخلطة الأولى $[2(40)+3(33)]x_1 = 179x_1$

الربح التي تعطيه الثانية $[1(40)+4(33)]x_2 = 172x_2$

الربح التي تعطيه الثالثة $[4(40)+2(33)]x_3 = 226x_3$

إذاً تابع الربح $MaxZ = 179x_1 + 172x_2 + 226x_3$

إذاً أصبح البرنامج

$$MaxZ = 179x_1 + 172x_2 + 226x_3$$
$$4x_1 + 5x_2 + 3x_3 \le 360$$
$$2x_1 + 4x_2 + 6x_3 \le 300$$
$$x_1 \ge 0. \qquad x_2 \ge 0. \qquad x_3 \ge 0$$

مسألة التدريب المهني:

تقوم شركة تصنيع آليات ببرنامج تدريب مهني للميكانيكيين، حيث يستخدم الميكانيكيون المدربون كمدرسين في برنامج التدريب بنسبة مدرس لكل عشرة متدربين، ويستمر برنامج التدريب شهراً واحداً، وقد وجد من التجارب السابقة أن من كل عشرة متدربين يتمكن سبعة فقط من إنهاء البرنامج بنجاح (ويخرج المتدرب غير الناجح من البرنامج)، كما أنه يستفاد من الميكانيكيين المتدربين في أعمال الخراطة، وتقدر حاجة الشركة لهم في الأشهر الثلاثة القادمة على النحو التالي:

كانون ثاني 100

شباط 150

آذار 200

إضافة إلى ذلك تحتاج الشركة إلى 250 ميكانيكياً مدرباً في شهر نيسان، وبفرض أن عدد الميكانيكين المدربين في بداية العام 130، وتعطى تكاليف الأجور الشهرية:

كلفة كل متدرب 400

كلفة كل ميكانيكي مدرب 700

(خراطة أو تدريس)

كلفة كل ميكانيكي مدرب وليس له عمل 500

وبفرض أنه يمنع تسريح الميكانيكيين المتدربين وتدريبهم بكلفة صغرى.

الحل:

نلاحظ أننا نريد معرفة عدد كل من المدربين في كل شهر ولكل نوع

X_1: عد الميكانيكيين المدربين الذين يقومون بالتدريس خلال كانون الثاني

X_2: عدد الميكانيكيين المدربين الذين لا عمل لهم خلال شهر كانون الثاني

X_3: عدد الميكانيكيين المدربين الذين يقومون بالتدريس خلال شهر شباط

X_4: عدد الميكانيكيين المدربين الذين لا عمل لهم خلال شهر شباط

X_5: عدد الميكانيكيين المدربين الذين يقومون بالتدريس خلال شهر آذار

X_6: عدد الميكانيكيين المدربين الذين لا عمل لهم خلال شهر آذار

نلاحظ أنه من أجل كل شهر نجد

عدد العاملين في الخراطة + عدد المدرسين+ عدد العاطلين عن العمل= عدد الميكانيكيين في بداية كل شهر

من أجل شهر كانون الثاني $100 + x_1 + x_2 = 130$

ومن أجل شهر شباط نجد أن عدد المتدربين $10x_1$ ، والذين ينهون البرنامج بنجاح هو $7x_1$ ، وبالتالي عدد الموجودين في بداية شباط $130 + 7x_1$(طالما لا نسرح أي عامل)

$$150 + x_4 + x_3 = 130 + 7x_1$$

وشهر آذار

$$200 + x_6 + x_5 = 130 + 7x_1 + 7x_3$$

وخلال شهر نيسان

$$130 + 7x_1 + 7x_3 + 7x_5 = 250$$

وتابع الهدف

$$MinZ = 400(10x_1 + 10x_3 + 10x_5) + 700(x_1 + x_3 + x_5)$$
$$500(x_2 + x_4 + x_6)$$

وبالتالي يصبح البرنامج الخطي

$$MinZ = 4700x_1 + 500x_2 + 4700x_3 + 500x_4 + 4700x_5 + 500x_6$$

$$x_1 + x_2 = 30$$
$$7x_1 - x_3 - x_4 = 20$$
$$7x_1 + 7x_3 - x_5 - x_6 = 70$$
$$7x_1 + 7x_3 + 7x_5 = 120$$
$$x_1. \quad x_2. \quad x_3, \quad x_4, \quad x_5, \quad x_6 \geq 0$$

ثالثاً: الحل البياني:

نستخدم الحل البياني في مسائل البرمجة الخطية ذات المتحولين فقط وذلك لإمكانية رسم محورين فقط على المستوي.

وعلى الرغم من بساطة هذه المسائل، إلا أنها توضح بعض المفاهيم الخاصة بالبرمجة الخطية، التي يمكن تعميمها إلى المسائل ذات العدد الكبير من المتحولات وسوف نورد مثال البرنامج الخطي وكيفية حله بيانياً.

مثال:

ليكن لدينا البرنامج الخطي

$$MinZ = 20x_1 + 18x_2$$
$$5x_1 + 3x_2 \geq 45$$
$$x_1 \leq 8$$
$$x_2 \leq 10$$
$$x_1 \quad , \quad x_2 \quad \geq 0$$

أوجد الحل الأمثل بيانياً.

الحل:

نرسم القيد الأول بجعله مساواه $5x_1 + 3x_2 = 45$

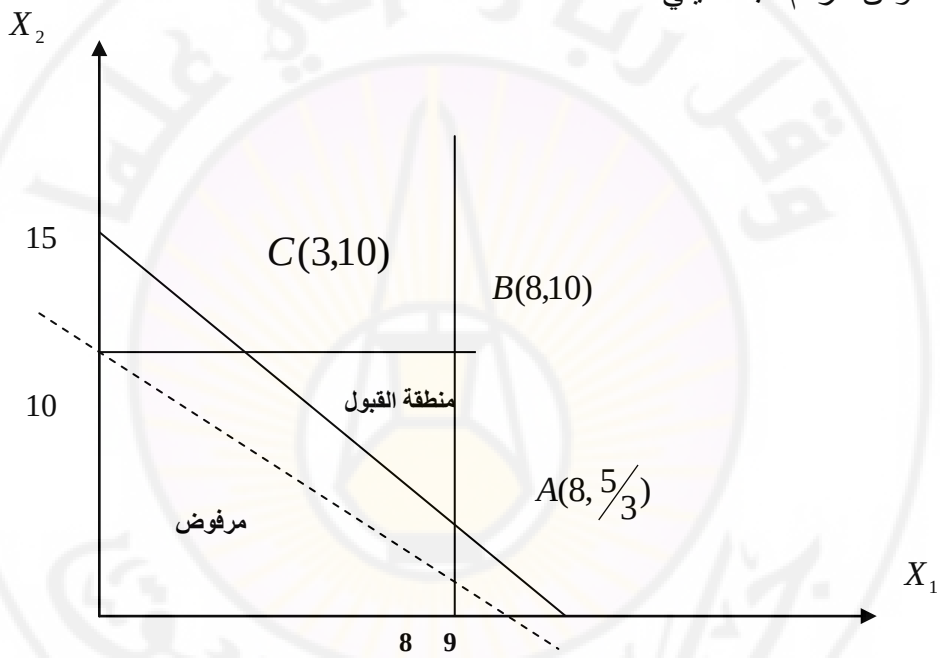
وهذا عبارة عن مستقيم يمكن رسمه خلال نقطتين، حيث نفرض $x_1 = 0$ فنجد $x_2 = 15$

وبفرض $x_2 = 0$ نجد $x_1 = 9$

وتكون منطقة القبول أعلى هذا المستقيم.

ونلاحظ هنا أننا نرسم في الربع الأول من المحاور الإحداثية، وذلك حسب قيود عدم السلبية.

ومن الرسم نجد مايلي:



الشكل (1-1)

ثم نرسم تابع الهدف وذلك يوضع قيمة ما فمثلاً نضع القيمة 180.

$$180 = 20x_1 + 18x_2$$

$$x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 10$$

$$x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 9$$

وبالتالي نرسمه وننقل تابع الهدف إلى نقطة الأصل بشكل موازٍ، ونمرر مستقيم الهدف بشكل موازٍ، وباتجاه منطقة القبول عندئذ يكون الحل الأمثل (شريطة أمثال تابع الهدف موجب)

في تابع *Min* : أول نقطة يدخل فيها مستقيم الهدف منطقة القبول

في تابع *Max* : آخر نقطة يخرج منها مستقيم الهدف

وفي مسألتنا تخفيض التكلفة نجد أول نقطة هي $A(8, 5/3)$

حيث حسبنا الإحداثيات بالحل المشترك للمعادلتين

$$5x_1 + 3x_2 = 45$$

$$x_1 = 8$$

بالحل نجد

$$x_1 = 8$$

$$x_2 = 5/3$$

إذاً نعوض بتابع الهدف فنجد

$$Min \geq= 20(80) + 18(5/3) = 190$$

إذاً الحل الأمثل $x_1 = 8$

$$x_2 = 5/3$$

$$MinZ = 190$$

الحل الأمثل الوحيد: في المسألة السابقة وجدنا أن الحل هو $x_2 = 5/3$ $x_1 = 8.$ هو حل وحيد، ولا يوجد حل آخر في منطقة الحلول غيره؟

الحلول المثلى البديلة

قد يوجد حل نافذ أو أكثر في بعض المسائل، بحيث يكون تابع الهدف لدى القيمة المثلى

وفي هذه الحالة فإن جميع هذه الحلول تدعى حلول مثلى، وفي هذه الحالة نقول أن المسألة لها حلول مثلى متعددة ، وكمثال على ذلك سوف ندرس البرنامج الخطي التالي

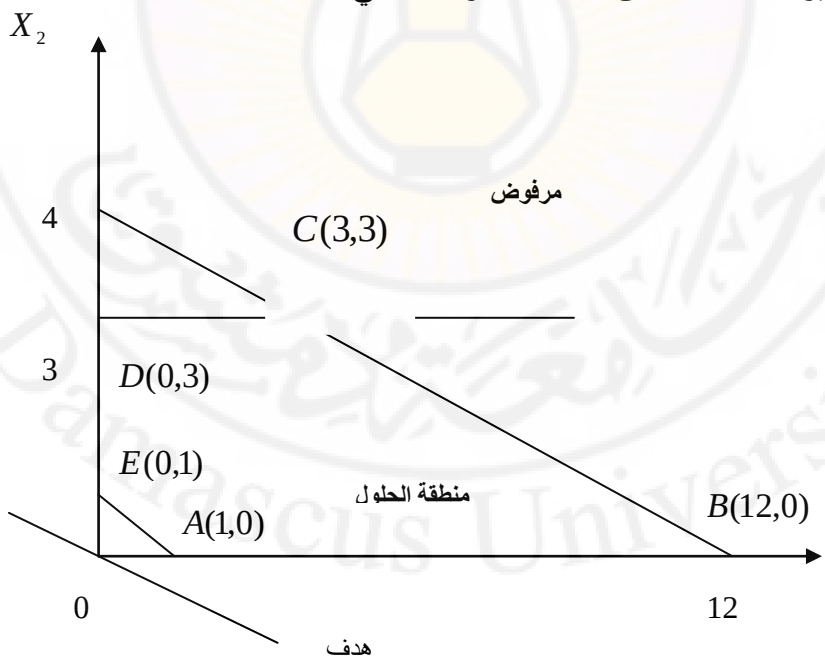
مثال: ليكن لدينا البرنامج الخطي

$$Max \geq= 2x_1 + 6x_2$$
$$x_1 + x_2 \geq 1$$
$$x_1 + 3x_2 \leq 12$$
$$x_2 \leq 3$$
$$x_1, \qquad x_2 \geq 0$$

أوجد الحل الأمثل

الحل:

برسم القيود الثلاثة نجد أن منطقة الحلول كما في الشكل



الشكل (1−2)

نلاحظ أنه يستمر برنامج الهدف، وبشكل موازٍ، نجد أنه سوف يخرج من منطقة الحلول وينطبق على القطعة المستقيمة CB ؛ وبالتالي فإن أي نقطة من هذه القطعة المستقيمة تصلح أن تكون حلاً أمثل وبشكل خاص

$B(12.0) \Rightarrow MinZ = 2(12) + 6(0) = 24$

$C(3.3) \Rightarrow MinZ = 2(3) + 6(3) = 24$

ونستنتج هنا خاصة مهمة جداً وهي: إذاً وجد حل أمثل لمسألة برمجة خطية، فإن إحدى زوايا منطقة الحلول على الأقل تصلح أن تكون حل أمثلاً.

وسوف نرى فيما بعد أنه اعتماداً على هذه الخاصة سوف نكّون طريقة سمبلكس لحل مسائل البرمجة الخطية.

الحل غير المحدود:

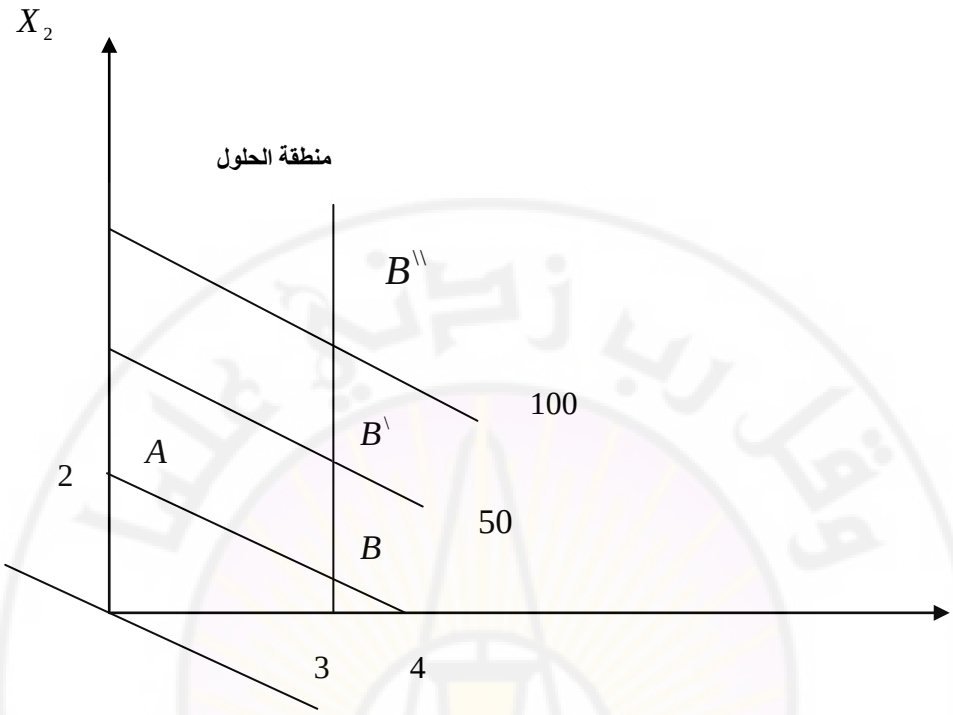
إن بعض المسائل لا تملك حلاً أمثل محدوداً، وبمعنى آخر توجد لها حلول مقبولة ولكن لا يوجد حل أمثل وكمثال عليه مايلي:

مثال:

ليكن لدينا البرنامج الخطي

$$Max \leq= 2x_1 + 5x_2$$
$$x_1 + 2x_2 \geq 4$$
$$x_1 \leq 3$$
$$x_1, \qquad x_2 \geq 0$$

نلاحظ أنه عند رسم منطقة الحلول نجد أنه مهما ابتعد تابع الهدف عن مبدأ الإحداثيات يوجد حل أفضل.



الشكل (1-3)

ملاحظة: إذا لم نجد للمسألة أي حل مقبول، نقول عندئذ إن المسألة مستحيلة الحل، وهنا لا نجد منطقة حلول مقبولة وجميع الربع الأول الإحداثي غير مقبول.

رابعاً: الشكل القياسي للبرنامج الخطي

إن الشكل القياسي لمسألة البرمجة الخطية لدالة هدف تعظيم أو تصغير كمايلي:

$$(Max)(Min)Z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_2x_n = b_2$$

$$am_1x_1 + am_2x_2 + ... + am_nx_n = bm$$

$$x_J \geq 0 \qquad J = 1.2.....n$$

$$bi \geq 0 \qquad i = 1.2.....m$$

وبفرض

$$c = (c_1, c_2, ...c_n)$$

$$b=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \qquad x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} \\ \vdots & \\ a_{n1} & \cdots \quad a_{nn} \end{bmatrix}$$

نستطيع كتابة البرنامج الخطي بشكل مصفوفي

$$(Max)(Min)Z = cx$$
$$Ax = b$$
$$x \geq 0$$
$$b \geq 0$$

ونرى الخواص الرئيسية للشكل القياسي للبرنامج الخطي هي:

1 . التعبير عن القيود وبشكل مساواة.

2 . جميع المتحولات غير سالبة.

3 . الحد الثابت في الطرف الأيمن غير سالب.

وكمثال عليها نجد:

<u>مثال:</u>

$$Max \geq = 7x_1 + 3x_2 + 4x_3$$
$$9x_1 + 2x_2 = 10$$
$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 8$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

نجد أن

$$A_{(2.3)}=\begin{bmatrix} 9 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \qquad X_{(3.1)}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad b_{(2.1)}=\begin{bmatrix} 10 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$c_{(1.3)}=\begin{bmatrix} 7 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

الشكل القانوني لتابع التعظيم (Max)

إن الشكل القانوني لتابع Max هو

$$MaxZ = cx$$
$$Ax \le b$$
$$x \ge 0$$

نجد الخواص الآتية:

1. القيود هي متراجحات بحيث أصغر أو تساوي الحد الثابت.
2. ليس من الضروري أن جميع الحدود الثابتة (الطرف الأيمن) غير سالبة.
3. المتحولات غير سالبة.

وبالتالي يختلف عن الشكل القياسي بأن له متراجحات أصغر أو تساوي الشكل القانوني لتابع التصغير Min

$$MinZ = cx$$
$$Ax \ge b$$
$$x \ge 0$$

وبالتالي يختلف عن الشكل القياسي بأن المتراجحات جميعها من الشكل أكبر أو تساوي الطرف الثابت.

<u>الشكل المختلط للبرامج الخطية</u>

إن الشكل المختلط للبرنامج الخطي تعظيم أو تصغير كمايلي:

$$(Max)(Min)Z = cx$$
$$A_1 x_1 \ge b_1$$
$$A_2 x_2 \le b_2$$
$$A_3 x_3 = b_3$$
$$x_1 \ge 0 \qquad x_2 \ge 0 \qquad x_3 \ge 0$$

وبالتالي يحوي البرنامج المختلط قيود مساواة وأكبر أو تساوي وأصغر أو تساوي شكلين على الأقل.

أنواع متحولات القرار:

جميع البرامج الخطية كانت لدينا متحولات القرار غير سالبة، لكن قد يوجد متحولات ليست كذلك عندئذ نرد هذه المتحولات إلى متحولات غير سالبة وحسب الحالة.

1. متحول القرار غير الموجب

بفرض لدينا $x_1 \le 0$ عندئذ نفرض متحولاً جديداً $x_1^{`} = -x_1$

وبحيث $x_1^{`} \ge 0$ ونعوض بالمتراجحات

2. متحول القرار غير محدود الإشارة: بفرض أن لدينا x_1 غير مقيد عندئذ نضع

$$x_1 = x_1^{\backprime} - x_2^{\backprime}$$

بحيث $x_1^{\backprime} \ge 0 \qquad x_2^{\backprime} \ge 0$

ونعوض بالمتراجحات.

وكمثال نجد

$$MaxZ = 4x_1 + 3x_2 + 7x_3$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 \le 20$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \le 15$$

$$x_1 \ge 0, \qquad x_2 \le 0, \qquad x_3$$

غير مقيد

أوجد البرنامج الخطي الذي تكون فيه متحولات القرار غير سالبة.

الحل:

$$x_2^{\backprime} = -x_2$$

$$x_3 = x_3^{\backprime} - x_3^{\backprime\backprime}$$

نعوض

$$MaxZ = 4x_1 - 3x_2^{`} + 7(x_3^{`} - x_3^{``})$$
$$2x_1 - x_2^{`} - (x_3^{`} - x_3^{``}) \le 20$$
$$x_1 - 2x_2^{`} + (x_3^{`} - x_3^{``}) \le 15$$
$$x_1 \ge 0 \qquad x_2^{`} \ge 0 \qquad x_3^{`} \ge 0 \qquad x_3^{``} \ge 0$$

الطرف الأيمن:

إذا كان الطرف الأيمن سالباً، عندئذ نضرب القيد ب(1) ونجعله موجباً.

مثال: ليكن لدينا البرنامج التالي:

$$MinZ = x_1 - 9x_2 + 3x_3$$
$$5x_1 + x_2 + x_3 \ge -4$$
$$2x_1 - 3x_2 + 7x_3 \ge 11$$
$$x_1 \ge 0 \qquad x_2 \ge 0 \qquad x_3 \le 0$$

أوجد البرنامج الخطي بحيث متحولات القرار والطرف الأيمن غير سالب

الحل:

$$x_3^{`} = -x_3$$

ثم نضرب القيد الأول بـ(1−) ونغير جهة المتراجحة فيصبح البرنامج

$$Min \ge= x_1 - 9x_2 + 3x_3$$
$$-5x_1 - x_2 + x_3^{`} \le 4$$
$$2x_1 + 3x_2 - 7x_3^{`} \ge 11$$
$$x_1 \ge 0 \qquad x_2 \ge 0 \qquad x_3^{`} \le 0$$

اختزال البرنامج الخطي إلى الشكل القياسي

1. نعالج القيود من الشكل $Ax \le b$

وذلك بإضافة متحول راكد Slackness ولتوضيح ذلك بفرض أن X_1 متحول يدل على عدد القطع المطلوبة والحد الأقصى الموجود هو 30 وكان القيد

$$x_1 \le 30$$

عندئذ نضيف متحولاً راكداً (S) يدل على العدد غير المستخدم الراكد في المخزون

$$x_1 + S = 30$$

2. نعالج القيود من الشكل $Ax \geq b$

وذلك بإضافة متحول فائض Surplus ولتوضيح ذلك

بفرض أنه نحتاج كحد أدنى على (20) وحدة من مادة ما وكان القيد

$$3x_1 + 2x_2 \geq 20$$

عندئذ نضيف متحولاً فائضاً (S) بحيث يصبح القيد

$$3x_1 + 2x_2 - S \geq 20$$

ويدل (S) على عدد الوحدات الفائضة عن الكمية لدينا والبالغة (20).

مثال: ليكن لدينا البرنامج الخطي

$$MinZ = 3x_1 + 4x_2$$

$$4x_1 - x_2 \geq 10$$

$$2x_1 + x_2 \leq 8$$

$$x_1 - x_2 = -3$$

$x_1 \geq 0$ x_2 غير مقيد

اكتب البرنامج السابق بالشكل القياسي

الحل:

$$x_2 = x_2^{`} - x_2^{``}$$

$$MinZ = 3x_1 + 4x_2^{`} - 4x_2^{``}$$

$S_1 = 10 \Rightarrow 4x_1 - x_2^{`} + x_2^{`} - S_1 = 10$ أضفنا للقيد متحول فائض surplus

$S_2 = 8 \Rightarrow 2x_1 + x_2^{`} - x_2^{`} + S_2 = 8$ أضفنا للقيد متحول راكد slockness

$= 3 \Rightarrow -x_1 + x_2^{`} - x_2^{`} = 3$ نضرب بـ (-1)

$$x_1^{`} \geq 0 \qquad x_2^{`} \geq 0 \qquad x_2^{``} \geq 0$$

لنعود الآن إلى التعاريف الأساسية المستخدمة بالشكل القياسي.

بفرض أنه لدينا تابع الهدف تعظيم والبرنامج التالي بالشكل القياسي

$$Max(Z) = cx$$

$$Ax = b$$

$$x \geq 0$$

$$b \geq 0$$

عندئذ:

1. نقول عن الشعاع X أنه حل للبرنامج إذا حقق $Ax = b$

2 . إن منطقة الحلول S هي التي تحقق

$$S\{X / Ax = b, x \geq 0\}$$

وإذا كانت $\phi = S$ (فارغة) نقول إن البرنامج ليس له حل (مستحيل الحل)

3. نقول عن الحل x^0 أنه حل أمثل إذا حقق

$$cx^0 \geq cx \qquad \forall x \in S$$

4. نقول عن الحل x^0 أنه وحيد إذا لم نجد حل آخر $x^{`0}$ يحقق

$$cx^0 = cx^{`0}$$

المبحث الثاني

حل جملة معادلات خطية

لتكن لدينا جملة معادلات خطية مؤلفة من ثلاثة مجاهيل ومعادلتين

$$2x_1 - x_2 + 4x_3 = 5 \qquad (A)$$

$$-x_1 + 2x_2 - x_3 = 7 \qquad (B)$$

إن لهذه الجملة وحسب مبرهنات بالجبر عدد غير منته من الحلول، تدعى مجموع الحلول الممكنة لهاتين المعادلتين بمجموعة الحلول

ونهتم هنا بحلول خاصة وبإجراء عملية التحويلات الأولية وذلك وفق مايلي

1. نجعل أحد المتحولات أمثاله واحد في أحد المعادلات فقط، وأمثاله في باقي المعادلات أصغار ويدعى حينئذ بمتحول أساسي

2. إن الحل الخاص لجملة المعدلات هو المتحولات الأساسية

3 . تدعى عملية الحصول على المتحولات الأساسية بعملية المتحور Pivot operation

وكمثال على ذلك لنجعل x_1, x_2 متحولين أساسيين

نضرب المعادلة B ب (2) ونجمعها إلى المعادلة A فنجد

$$+2x_2 + 2x_3 = 19$$

$$-x_1 + 2x_2 - x_3 = 7$$

نضرب المعادلة الثانية ب (-1)

$$3x_2 + 2x_4 = 19$$

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = -7$$

نضرب المعادلة الأولى بـ $\left(2/3\right)$ونجمعها إلى المعادلة الثانية فنجد

$$3x_2 + 2x_4 = 19$$

$$x_1 + 7/3\, x_3 = 17/3$$

نقسم المعادلة الأدنى على (3)

$$x_2 + 2/3\, x_4 = 19/3$$

$$x_1 + 0 + 7/3\, x_3 = 1\,7/3$$

وبالتالي يكون الحل الممكن للمتحولين الأساسيين

$x_2 = 19/3$ متحول أساسي

$x_1 = 17/3$ متحول أساسي

$x_4 = 0$ متحول غير أساسي

وبالتالي أحد الحلول للمعادلتين (A) و(B) هو الحل السابق

نلاحظ أنه في مثالنا يوجد معادلتان وثلاثة مجاهيل وعدد الحلول الأساسية هي $C_3^2 = 3$

وبافتراض أنه لدينا ثلاث معادلات بـ (7) مجاهيل، فإن عدد الحلول الأساسية هو $C_7^3 = 35$

وبشكل عام إذا كان لدينا m قيد مستقل n متحول، بحيث $(n \geq m)$ فإن عدد الحلول الأساسية

$$C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!.m!}$$

لكن ماذا لو كان عدد القيود أكبر من عدد المجاهيل؟

حسب مبرهنات في الجبر فإن هذه المعادلات غير مستقلة، أو لا تملك حلاً مشتركاً، ولن ندخل بتفاصيل مبرهنات الجبر تلك وسوف نكتفي بذكر أمثلة.

مثال:

$$2x_1 + 3x_2 = 13 \qquad (A)$$

$$X_1 - X_2 = 4 \qquad (B)$$

$$5X_1 + 5X_2 = 30 \qquad (C)$$

ونضرب المعادلة B بـ (2−) ونجمع إلى A

$$0x_1 + 5x_2 = 5$$
$$x_1 - x_2 = 4$$
$$5x_1 + 5x_2 = 30$$

نضرب المعادلة الثانية بـ (5−) ونجمع مع الثالثة فنحصل

$$0x_1 + 5x_2 = 5$$
$$x_1 - x_2 = 4$$
$$0x_1 + 10x_2 = 10$$

نقسم المعادلة الأولى على (5) ثم نجمع مع المعادلة الثانية فنجد

$$0x_1 + x_2 = 1$$
$$x_1 + 0x_2 = 5$$
$$0x_1 + 10x_2 = 10$$

نضرب الأولى بـ (10−) ونجمع إلى الثالثة

$$0x_1 + x_2 = 1$$
$$x_1 - 0x_2 = 5$$
$$0x_1 + 0x_2 = 0$$

وبالتالي أصبحت المعادلات

$$x_2 = 1$$
$$x_1 = 5$$
$$0 = 0$$

وهي جملة مناسبة والحل الأساسي

$$x_2 = 1$$
$$x_1 = 5$$

ويحقق المعدلات الثلاثة A,B,C

تدعى جملة المعدلات الثلاثة بجملة غير مستقلة (مرتبطة خطياً).

مثال: ليكن لدينا جملة المعدلات

$$x_1 + 2x_2 = 5$$
$$3x_1 + 7x_2 = 10$$
$$x_1 + 3x_2 = 6$$

نضرب بـ (3−) المعادلة الأولى ونجمع مع الثانية ثم نضرب ب(1−) الأولى ونجمع مع الثالثة

$$x_1 + 2x_2 = 5$$
$$0x_1 + x_2 = -5$$
$$0x_1 - x_2 = -4$$

نجمع الثانية إلى الثالثة ثم نضرب الثالثة ب(2) ونجمع إلى الأولى وأخيراً نضرب الثالثة ب(1−) فنجد

$$x_1 + 0x_2 = -3$$
$$0x_1 + 0x_2 = -9$$
$$0x_1 + x_2 = 4$$

وبالتالي حصلنا

$$x_1 = -3$$
$$0 = -9$$
$$x_2 = 4$$

وهي جملة مستحيلة حسب المعادلة الثانية 9−=0 ؛ وبالتالي فإن جملة المعادلات الثلاثة A,B,C مستقلة خطياً ولكن عدد المعادلات أكبر من عدد القيود

والخلاصة:

1. عدد المعدلات (m) وعدد المتحولات (n)، فإذا كان $n \geq m$ فإن عدد الحلول الأساسية C_n^m

2. إذا كان $m \geq n$ عندئذ تكون جملة المعادلات إما مرتبطة خطياً ويوجد لها حلول أو مستقلة خطياً ولا يوجد لها حلول.

أي إذا كانت عدد المعادلات المستقلة $(m`)$ $n \geq m;$ فإنه يوجد حلول لهذه الجملة أو $n \leq m`$ فإنه لا يوجد حلول مناسبة والجملة مستحيلة الحل.

<u>علاقة حل جملة المعادلات بالبرامج الخطية:</u>

وجدنا بالحل البياني وحسب الخاصة المهمة، إذا كان يملك البرنامج الخطي حلاً أمثل أو أكثر، فإنه يجب أن تحقق إحدى الزوايا الحل الأمثل، وإحدى الزوايا على الأقل.

أي بعبارة أخرى إذا كان الحل الأمثل وحيداً، فإنه يحقق إحدى الزوايا فقط أما إذا كان لدينا حلول بديلة، فإنه توجد زاوية واحدة على الأقل تحقق الحل الأمثل.

إن عملية التحور التي ذكرناها تفتش عن المتحولات الأساسية؛ وبالتالي هي الزوايا في منطقة الحلول.

إذاً تساعدنا عملية التمحور بحساب الحلول عن الزوايا، ثم نحسب تابع الهدف ونختار المناسب، ولكن هنا يعترضنا عدة أمور تجعل الأمر صعباً وهي:

1. قد تكون الزوايا كثيرة (عدد الحلول للمتحولات الأساسية C_n^m وبالتالي تستغرق وقتاً وجهداص كبيرين.
2. قد تكون منطقة الحلول مفتوحة؛ وبالتالي الزوايا هنا لا تشكل حلولاً مثلى كما مر معنا سابقاً، لذلك لا بد من وجود معيار يساعدنا على معرفة إمكانية وجود حل أمثل بديل أو أننا توصلنا إلى الحل الأمثل.

لذلك تم تطوير ما يسمى الطريقة المفردة أو السمبلكس Simplex Methad

المبحث الثالث

مبادئ طريقة السمبلكلس

طور هذه الطريقة العالم G.B.Dantzig وهي عبارة عن رد البرنامج الخطي إلى الشكل القياسي والحصول على حل أولي مقبول ثم إجراء عدة عمليات وهي:

1. تحسين الحل الأولي إذا أمكن، بإيجاد حل أساسي مقبول آخر يعطي قيمة أفضل من سابقها.

2. الاستمرار بالتحسين حتى تعذر وجود حل أفضل، عندئذ يتم التوقف وبالتالي نكون حصلنا على حل أمثل.

ملاحظة: إذا كان البرنامج الخطي غير محدود (تعذر وجود حل أمثل) عندئذ يكون البرنامج ذا طبيعة معينة، ويوجد معيار في طريقة السمبلكس لمعرفة هذا النوع من البرامج.

وسنبدأ بتوضيح الطريقة المفردة بالمثال التالي:

ليكن لدينا البرنامج

$$MaxZ = 25x_1 + 10x_2 + 15x_3 - 5x_4 5x_5$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 40$$

$$3x_1 + 4x_2 + x_3 + x_5 = 35$$

$$x_i \geq 0 \qquad 0 = 1.2.3.4.5$$

أوجد الحل الأمثل

الحل: إن المسألة السابقة بالشكل القياسي لأن جميع الثوابت غير سالبة وكذلك المتحولات وجميع القيود مساواة

نلاحظ أن x_4 يمثل متحولاً أساسياً لأن أمثاله في المعادلة الأولى واحد وغير موجود بالمعادلة الثانية، وكذلك x_5 في المعادلة الثانية؛ وبالتالي الحل الأساسي الأولي هو

$$x_1 = 0 \qquad x_2 = 0 \qquad x_3 = 0 \qquad x_4 = 40 \qquad x_5 = 35$$

وتابع الهدف $Z = 25(0) + 10(0) + 15(0) - 5(40) + 35(5) = -25$

تحسين الحل الأولي

بعد معرفة الحل الأساسي الأولي المقبول

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0 \qquad x_4 = 40 \qquad x_5 = 35$$

وتابع الهدف

$$Z = -25$$

لتحسين الحل يفترض دخول متحول جديد، وجعله متحولاً أساسياً مكان متحول أساسي، وبحيث تتضمن تحسين قيمة تابع الهدف. ولإجراء ذلك سوف نستبدل قيمة أحد المتحولات غير الأساسية بالقيمة واحد، وليكن x_1 ونوجد قيمة تابع الهدف الجديد فإذا ازداد تابع الهدف، فإننا عندئذ نستبدل أحد المتحولات الأساسية (x_5 أو x_4) ونضع x_1 بدلاً منه وذلك وفقاً لمايلي:

بما أن x_4, x_5 متحولات أساسية ونريد اختيار (x_1) كمتحول جديد إذاً تصبح المعادلات

$$x_1 + x_4 = 40$$

$$3x_1 + x_5 = 35$$

وعندما $x_1 = 1$ نجد أن $x_4 = 39$, $x_5 = 32$

وبالتالي أصبح الحل الجديد

$$x_1 = 1 \qquad x_2 = x_3 = 0 \qquad x_4 = 39 \qquad x_5 = 32$$

وأصبح تابع الهدف الجديد

$$Z = 25(1) + 10(0) + 15(0) - 5(39) + 5(32) = -10$$

وبالتالي أصبح التحسين الصافي بدخول x_1 هو (الربح النسبي)

$$-10 - (-25) = +15$$

والحل تم تحسينه

لكي يتم تحسين الحل بطريقة عملية نجد

$$Z_{Now} - Z_{old} = [25 - 5(39) + 5(32) -][- 5(40) + 5(35)]$$
$$= 25 - [- 5(40 - 39) + 5(35 - 32)]$$
$$= 25 - [- 5(1) + 5(3)] = 15$$

ولكن القيمة (1) هي أمثال x_1 في المعادلة الأولى

والقيمة (3) هي أمثال x_1 في المعادلة الثانية

25 أمثال تابع الهدف لـ x_1

وبالتالي المقدار $[(3)5 + (1)5 -]$ على مدى انخفاض قيمة تابع الهدف

بعد زيادة x_1 بالقيمة (1) لأن تابع الهدف Max

إذاً كل زيادة بقيمة (1) سوف يزيد تابع الهدف بقيمة (15)، فمن الواجب دخول (x_1) إلى قاعدة الحل الأساسية، ولكن بشرط أن تكون جميع المتحولات الأساسية موجبة.

إذاً في القيد الأول يمكن زيادة المتحول x_1 بالقيمة

$$\frac{\text{الثابت}}{\text{أمثال } x_1} = \frac{40}{1}$$

وبالتالي يصبح x_4 عندئذ معدوماً، وإذا أخذ x_1 قيمة أكبر من 40 يصبح x_4 سالب وكذلك نجد في القيد الثاني $\frac{35}{3}$ وبالتالي يجب أن نختار الأصغر منهما كي نضمن المتحولات الأساسية غير سالبة أي نختار

$Min\left[\frac{40}{1},\frac{35}{3}\right]=\frac{35}{3}$ غير سالب

وبالتالي سوف تزيد x_1 بمقدار $\frac{35}{3}$

وبالتالي ندخل x_1 إلى قاعدة الحل الأساسية في القيد الثاني وخروج x_5

وتصبح القيود الجديدة بعد إجراء عملية التحويل (التمحور)

$$\frac{2}{3}x_2+5/3\,x_3+x_4-1/3\,x_5=85/3$$

$$x_1+\frac{4}{3}x_2+\frac{1}{3}x_3+\frac{1}{3}x_5=\frac{35}{5}$$

أما تابع الهدف فتصبح قيمته

$$z=25\left(\frac{35}{3}\right)+10(0)+15(0)-5\left(85/3\right)+5(0)=150$$

والمتحولات الأساسية الجديدة

$$x_1=\frac{35}{3}\qquad x_2=x_3=x_5=0\qquad x_4=85/3$$

وتتابع هذه العملية فيكون شرط الحل الأمثل أن يكون الربح النسبي سالباً أو معدوماً في برنامج Max

وسوف نصيغ المسألة على شكل جدول كمايلي:

	CJ	25	10	15	5−	5	
C_B	قاعدة الحل	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	الثوابت
5−	x_4	1	2	2	1	0	40
15	x_5	3	4	1	0	0	35

ويكون الربح $(-5,5)(\frac{40}{35})=-25$

ونحسب الربح النسبي ذلك بجداء الشعاع C_{13} بالعمود المقابل للمتحول X_J وطرح الناتج من أمثال الهدف C_J

وفق مايلي:

$$\bar{C}_1 = 25 - (-5 \quad 5)(\frac{1}{3}) = 15$$

$$\bar{C}_2 = 10 - (-5 \quad 5)(\frac{2}{4}) = 0$$

$$\bar{C}_3 = 15 - (-5 \quad 5)(\frac{2}{1}) = 20$$

إذاً نلاحظ أنه من المناسب دخول $\bar{C}_1$ أو $\bar{C}_3$ لأن لهما أمثالاً موجبة، وطبعاً هنا للزيادة الحاصلة الواحدية فقط الأنسب هو x_3 ، ولكن لنحسب مقدار الزيادة وفق مايلي

دخول x_1 يمكن زيادة x_1 وفق $Min\left[\frac{35}{3}, \frac{40}{1}\right] = \frac{35}{3}$

ويكون الربح النسبي $\left(\frac{35}{3}\right)(15) = 175$

دخول x_3

$$Min\left[\frac{40}{2}, \frac{35}{1}\right] = 20$$

ويكون الربح النسبي $(20)(20) = 400$

إذاً بما أنه x_3 سوف يوجد ربح نسبي أكبر ندخل x_3

وبالتالي يصبح الجدول كالتالي:

	CJ	25	10	15	5−	5			
CB	قاعدة الحل	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	الثوابت(b)	b/x_1	b/x_3
−5	x_4	1	2	**2**	1	0	40	$40/1$	$40/2$
5	x_5	3	4	1	0	1	35	$35/3$	$35/1$
	$\bar{C}$	15	0	20	0	0	Z=-25		
	ΔZ	$(15)(35/3)$	0	$(20)(40/2)$	0	0			

وبالتالي سوف يخرج x_4 ويدخل x_3 إلى القاعدة إذاً سوف تكون المتحولات الأساسية

$x_3 = 20$

$x_5 = ?$

وسوف نعطي طريقة عملية لإجراء عملية التمحور وهي

1. ندعو سطر x_4 بسطر الارتكاز
2. ندعو تقاطع عمود x_3 بالعمود المرشد
3. ندعو تقاطع سطر الارتكاز مع العمود المرشد بعنصر التمحور (الدوران)
4. نقسم سطر الارتكاز على عنصر الدوران فنحصل على السطر الجديد
5. العمود المرشد نكمله بأصفار
6. باقي العناصر نحسبها على أساس

العنصر الجديد = (عنصر الدوران × العنصر المعني − جداء العنصر المقابل من السطر والعمود المرشد)

عنصر الدوران

الجدول الجديد

	CJ	25	10	15	5−	5		
CB	قاعدة الحل	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	الثوابت(b)	b/x_1
15	x_3	$1/2$	1	1	$1/2$	0	20	$20 \div 1/2 = 40$
5	x_5	$5/2$	3	0	$-1/2$	1	15	$15 \div 5/2 = 6$
	$\bar{C}$	5+	20−	0	10−	0	Z=375	
	ΔZ	(5)(6)	-	0	-	0		

نلاحظ لا يوجد ربح نسبي للوحدة الواحدة غير x_1 ومقدار الربح النسبي 30 أي سوف يزداد الربح ليصبح 375+30=405 وهنا سطر x_5 هو سطر الارتكاز وعمود x_1 هو العمود المرشد وعنصر الدوران هو $5/2$

وسوف يدخل x_1 إلى قاعدة الحل الأساسية بدلاً من x_5

الجدول الجديد

	CJ	25	10	15	5−	5	
CB	قاعدة الحل	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	الثوابت(b)
15	x_3	0	$2/5$	1	$3/5$	$-1/5$	17
25	x_1	1	$6/5$	0	$-1/5$	$2/5$	6
	$\bar{C}$	0	26−	0	9−	2−	Z=405
	ΔZ	-	-	-	-	-	

نلاحظ أنه في سطر ΔZ لا داعي لحساب القيم الصفرية أو السالبة في سطر $\bar{C}$ لأنه ليس لها معنى لتخفيض تابع Max

وهنا نتوقف عن الحل لأنه لا يوجد ربح نسبي موجب (في Max) وبالتالي الحل أمثل ويكون الحل الأمثل

$x_3 = 17$ $\quad x_2 = x_4 = x_5 0$

$x_1 = 6$

$MaxZ = 405$

مثال: ليكن لدينا البرنامج

$$MaxZ = 3x_1 + 2x_1$$

$$-x_1 + 2x_2 + x_3 = 4$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_4 = 14$$

$$x_1 - x_2 + x_5 = 3$$

$$x_i \geq 0 \qquad i = 1..,.,.,5$$

وبالتالي نجد الجدول

	CJ	3	2	0	0	0			
CB	قاعدة الحل	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	(b)	b/x_1	b/x_1
0	x_3	−1	2	1	0	0	4	$4/-1$	$4/2$
0	x_4	3	2	0	1	0	14	$14/3$	$14/2$
	$\bar{C}$	+3	+2	0	0	0	Z=-0		
	ΔZ	9	4	–	–	–			

الجدول الثاني

	CJ	3	2	0	0	0		
CB	قاعدة الحل	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	(b)	b
0	x_3	0	1	1	0	1	7	$7/1$
0	x_4	0	5	0	1	3−	5	$5/5$
3	x_1	1	1−	0	0	1	3	$3/-1$
	$\bar{C}$	0	5+	0	0	3−	Z=9	
	ΔZ	–	5(1)	–	–	–		

سوف ندخل x_2 بدلاً من x_4 وعنصر الدوران 5

		3	2	0	0	0	
CB	قاعدة الحل	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	(b)
0	x_3	0	0	1	$-1/5$	$8/5$	6
2	x_2	0	1	0	$1/5$	$-3/5$	1
3	x_1	1	0	0	$1/5$	$2/5$	4
	$\bar{C}$	0	0	0	1−	0	Z=14
	ΔZ	–	-	–	–		

والحل الأمثل لعدم وجود قيم موجبة في السطر $\bar{C}$

وبالتالي الحل

$$x_3 = 6$$

$$x_2 = 1$$

$$x_1 = 4$$

$$x_4 = x_5 = 0$$

$$MaxZ = 14$$

<u>الحلول المثلى البديلة:</u>

نلاحظ في الجدول الأخير أن x_5 متحول غير أساسي وربحه النسبي صفر وبالتالي من الممكن جعله متحولاً أساسياً دون تغيير في قيمه الحل الأمثل ويشكل حلاً بديلاً، وسوف يدخل بدلاً من x_3 حسب النسبة الصغرى غير السالبة

وسوف يكون الجدول

CB	قاعدة الحل	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	(b)
0	x_5	0	0	$5/8$	$-1/8$	1	$15/4$
2	x_2	0	1	$3/8$	$1/8$	0	$13/4$
3	x_1	1	0	$-1/4$	$1/4$	0	$5/2$
	$\bar{C}$	0	0	0	1−	0	Z=14
	ΔZ	−	-	−	−	−	

وبالتالي الحل الجديد هو

$$x_1 = \frac{5}{2}$$
$$x_2 = 13/4$$
$$x_5 = 15/4$$
$$x_3 = x_4 = 0$$

في الواقع يوجد عدد غير منته من الحلول نحصل عليها من العلاقة التالية

بفرض الحل الأول هو

x_1 x_2 x_3 x_4 x_5

(4 1 6 0 0)

$\bar{}$

الحل الثاني هو $(5/2 \quad 13/4 \quad 0 \quad 0 \quad 15/4)$

$(1.5 \quad -9/4 \quad 60 \quad 0 \quad -15/4)$

إن أي شعاع $\vec{V}$ يحقق

$$\vec{V} = (4 \quad 1 \quad 6 \quad 0 \quad 0) + \lambda\left(1.5 \quad -9/4 \quad 6 \quad 0 \quad -15/4\right)$$

حيث $0 \le \lambda \le 1$ يحقق حلاً أمثل.

على سبيل المثال $\lambda = 1/2$ نحصل على الشعاع

$$\vec{V} = (4.75, \quad -0.125, \quad 9, \quad 0, \quad 15/8)$$

وبحساب تابع الهدف لهذا الشعاع نجد

$$Z = (4.75)(3) + 2(-0.125) + 0(9) + 0 + 0(15/8) = 14$$

وبالتالي هو حل أمثل بديلاً.

<u>الحل الوحيد الأمثل:</u>

يكون الحل أمثلاً ووحيداً إذا كان دخول أي متحول إلى القاعدة سيؤدي إلى تناقص فوري بقيمه الهدف؛ وبالتالي تكون قيم $\bar{C}$ لجميع المتحولات غير الأساسية سالبة كما مر معنا في المثال قبل السابق.

حالة تعذر وجود حل:

بفرض أنه لدينا البرنامج الخطي

$$MaxZ = 10x_1 + 7x_2 + x_3 - x_4$$
$$-x_1 + 5x_2 + x_3 = 10$$
$$-2x_1 + x_2 + x_4 = 8$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$$

نلاحظ أن الحل الأولي هو

$$x_3 = 10$$
$$x_4 = 8$$
$$x_1 = x_2 = 0$$
$$Z = 2$$

ونلاحظ أنه عند تشكيل الجدول

	CJ	10	2	1	1−		
CB	قاعدة الحل	x_1	x_2	x_3	x_4	ثوابت (b)	b/x_1
1	x_3	1−	5	1	0	10	$10/-1=-10$
1−	x_4	2−	1	0	1	8	$8/-2=-4$
	$\bar{C}$	9	2−	0	0	Z=2	

نلاحظ أن المتحول (x_1) مهيأ لدخول القاعدة وعند زيادة واحدية لـ x_1 نجد أن الربح النسبي سوف يزداد بمقدار (9)، ولنفسر ذلك وفق المعادلات:

$$-x_1 + x_3 = 10$$
$$-2x_1 + x_4 = 8$$

وبفرض أن $x_1 = 1$ أصبح عندئذ يصبح

$$x_1 = 1 \qquad x_3 = 11 \qquad x_4 = 10$$
$$Z = 10(1) + 2(0) + 11 - 10 = 11$$

أي بزيادة صافية «الربح النسبي» $Z_n - Z_0 = 11 - 2 = 9$

إذاً نريد حساب مقدار زيادة x_1

إن القيد الأول يجب مراعاته أن $x_3 \geq 0$ وبالتالي نرى كلما ازداد (x_1) ازداد x_3 وبالتالي القيد الأول يدل على انه من الممكن زيادة x_1 بشكل لانهائي

وكذلك الأمر بالنسبة للقيد الثاني حيث يجب مراعاة $x_4 \geq 0$ ، ولكن كلما ازداد x1 ازداد x_4 وبشكل كبير وبالتالي يمكن زيادة x_1 بشكل لانهائي

إذاً لا يوجد حل محدود وبالتالي تعذر الحل.

إذاً إذا كان لدينا العمود المرشد جميع قيمه سالبه نقول: إنه تعذر الحل.

استحالة وجود حل للبرنامج الخطي

نستطيع القول إنه يكون البرنامج مستحيل الحل إذا لم نستطع إيجاد حل نافذ مقبول لهذا البرنامج واحد على الأقل.

ولكن عملية التفتيش عن الحلول واكتشاف أن جميعها غير مقبول عملية طويلة ومضنية؛ وبالتالي وجدت طرق بإضافة متحولات مصطنعة أو فائضة أو إضافية وبحيث يكون الحل مستحيلاً في إحدى الحالات التالية:

1. الوصول إلى الحل الأمثل وأحد المتحولات المصطنعة موجودة في قاعدة الحل الأمثل.

2. أحد عناصر الثوابت مثلاً سالب وجميع أمثال متحولات المعادلة موجبة وهذا يناقض شرط عدم السلبية.

مسألة التصغير:

ليكن لدينا البرنامج

$$MinZ = 7x_1 + x_2 - x_3 + 10x_4$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 12$$
$$2x_1 + x_2 + x_4 = 9$$
$$xi \geq 0 \qquad i = 1,2,3...4$$

الحل:

بملاحظة أنه

$$MinZ = 7x_1 + x_2 - x_3 + 10x_4 = Max(Z) = -7x_1 - x_2 + x_3 - 10x_4$$

إذاً يصبح البرنامج

$$Max(Z) = -7x_1 - x_2 + x_3 - 10x_4$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 12$$
$$2x_1 + x_2 + x_4 = 9$$
$$x_i \geq 0 \qquad i = 1,2,.....,4$$

إن قاعدة الحل الآلية هي

$$x_3 = 12$$

$$x_4 = 9$$

وهو حل مقبول (نافذ) $x_1 = x_2 = 0$

وبالتالي يصبح لدينا الجدول التالي للبرنامج الخطي

	CJ	7−	1−	1	−10			
CB	قاعدة الحل	x_1	x_2	x_3	x_4	ثوابت(b)	b/x_1	b/x_1
1	x_3	1	2	1	0	12	$12/1$	$12/2$
10−	x_4	**2**	1	0	1	9	$9/2$	$9/1$
	$\bar{C}$	12	7	0	0	Z= -78		
	ΔZ	54	42	0	0			

ويدخل إلى قاعدة الحل الأساسية x_1 بدلاً من x_4 وعنصر الدوران (2)

فيكون الجدول التالي

	CJ	7−	1−	1	10−		
CB	قاعدة الحل	x_1	x_2	x_3	x_4	b	b/x_2
−1	x_3	0	$3/2$	1	$1-/2$	$15/2$	+5
−7	x_1	1	$1/2$	0	$1/2$	$9/2$	9
	$\bar{C}$	0	1	0	−6	Z= -24	
	ΔZ	0	5	−	−		

ويدخل x_2 إلى قاعدة الحل الأساسية بدلاً من x_3 وعنصر الدوران $3/2$

		7−	1−	1	10−	
CB	قاعدة الحل	x_1	x_2	x_3	x_4	B
−1	x_2	0	1	$2/3$	$-1/3$	5
−7	x_1	1	0	$-1/3$	$4/3$	2
	$\bar{C}$	0	0	$2-/3$	−1	Z=-19

والحل أمثل: إذاً الحل الأمثل هو

$$x_2 = 5$$
$$x_1 = 2$$
$$x_4 = x_3 = 0$$
$$Max(-z) = -19 \Rightarrow MinZ = +19$$

والحل وحيد

<u>بعض المشاكل الحسابية في طريقة السمبلكس</u>

1. تساوي القيم في ΔZ التي يمكن اختيارها عندئذ نختار أياً منها بشكل أي منها.
2. في النسبة الأصغرية $\left(b/_{xi}\right)$ هنا نختار أياً منها ولكن تفضل النسبة التي تكون أمام البسط الكبير وكمثال:

$$\frac{4}{5}$$
$$\frac{8}{10} \Rightarrow$$ نختار هذه النسبة

3. في حال وجود عدد في أحد النسب، عندئذ نكون أمام خيار أنه يمكن زيادة المتحول بشكل لانهائي وبالتالي سوف نهمل هذا الخيار لأننا نختار النسبة غير السالبة الأصغر.

4. بفرض أنه لدينا النسبة عدد عندئذ نميز الحالات التالية:

صفر

أ. صفر = صفر ويوجد نسب موجبة نختار النسبة الموجبة ونهمل هذه النسبة

عدد سالب

ب . صفر = صفر عندئذ يجب اختيار هذه النسبة ولو وجدنا نسباً موجبة كي

عدد موجب

نحافظ على شرط عدم السلبية للمتحولات $(b \geq 0)$

وكمثال على أ سوف ندرس البرنامج التالي:

$$MinZ = 20x_1 + 2x_2 - x_3 + 15x_4$$

$$x_1 - x_2 + x_3 = 0$$

$$2x_1 + x_2 + x_4 = 10$$

$$xi \geq 0 \qquad i = 1,.....,4$$

. الحل:

$$x_3 = 0$$

الحل الأولي $x_4 = 10$

$$x_1 = x_2 = 0$$

ويكون لدينا الجدول التالي لدالة الهدف

$$Min(Z) = Max(-2) = -20x_1 = 2x_2 + x_3 - 15x_4$$

	CJ	20−	2−	1	− 15			

CB	قاعدة الحل	x_1	x_2	x_3	x_4	(b)	b/x_1	b/x_1
1	x_3	1	−1	1	0	0	$0/1$	$0/-1$
15−	x_4	2	1	0	1	10	$10/2$	$10/1$
	$\bar{C}$	9	14	0	0	Z=-150		
	ΔZ	0	140	0	0			

نلاحظ أن لو اخترنا من النسب $\left[5=\frac{10}{2}, \quad 0=\frac{0}{1}\right]$ النسبة (5) في عمود b/x_1 لكان عنصر الدوران(2)

وبالتالي لحساب عمود b نجد في السطر الأول $\frac{(0)(2)-10(1)}{2}=-5$

وبالتالي حصلنا على حل غير مقبول لـ x_3

إذاً أكبر تغير في تابع الهدف هو 140؛ وبالتالي سوف يدخل x_2 إلى قاعدة الحل ويخرج x_4

	CJ	20−	2−	1	15−	
CB	قاعدة الحل	x_1	x_2	x_3	x_4	(b)
1	x_3	3	0	1	1	10
2−	x_2	2	1	0	1	10
	$\bar{C}$	−19	0	0	−14	−Z=-10

والحل أمثل وبالتالي نجد

$$x_3 = 10$$
$$x_2 = 10$$
$$x_1 = x_4 = 0$$
$$MinZ = 10$$

كيفية إيجاد قاعدة حل مقبول «نافذ»:

عند استخدام طريقة السمبلكس يجب البدء بحل أولي مقبول (نافذ)، ثم متابعة الحل وفي جميع المسائل السابقة كان الحل الأولي موجوداً مباشرة، ولكن السؤال كيف نوجد هذا الحل الأولي المقبول؟

توجد طريقتان لإيجاد الحل الأولي المقبول وذلك وفق:

1. طريقة التجريب والخطأ حيث يتم التجريب على المتحولات واختزال المتحولات إلى متحولات أساسية، فإذا لم تنجح نبحث عن متحولات أساسية أخرى وهكذا حتى يتم الحصول على قاعدة متحولات أساسية مقبولة.

ولكن عيب هذه الطريقة يكمن في عدد مرات التجريب، مما يتطلب جهداً ووقتاً كبيرين لذلك يمكن إتباع الطريقة الأخرى وتدعى المتحولات المصطنعة.

2. استخدام المتحولات المصطنعة Aritificial

وتهدف هذه الطريقة إلى إضافة متحولات راكدة وفائضة وصناعية، بحيث تسمح بوجود حل أولي بالنسبة لهذه المتحولات

ويتم ذلك بتحويل جميع القيود إلى الشكل القياسي كما مر معنا وعند إضافة متحول فائض (S-) تكون أمثاله سالبة ولا يقبل أن يكون حلاً مقبولاً عندئذ نضيف متحولاً صناعياً ونرمز له بـ (R).

وكذلك الأمر يضاف إلى المعادلات متحول صناعي (R) كي نوجد قاعدة متحولات أساسية إذاً يضاف المتحول الصناعي إلى القيود من الشكل

$$(\sum aiJXJ) \geq bi \Rightarrow (\sum aiJXJ) - S_i + R_i$$
$$(\sum oiJXJ) = bi \Rightarrow (\sum aiJXJ) + R_i = b_i$$

ومن الملاحظ أننا أضفنا المتحول الفائض (S-) كي نحصل على شكل قياسي، وأضفنا (R) كي نحصل فقط على متحول أساسي لبدء البرنامج، إذاً هو متحول غير موجود إصطنعناه كي نبدأ بطريقة البرمجة الخطية فقط، وبالتالي يجب أن يخرج من قاعدة الحل المثلى.

وإذا وجدنا متحولاً صناعياً غير معدوم القيمة في الحل الأمثل يكون البرنامج مستحيل الحل.

<u>مثال:</u>

$$\begin{aligned} MinZ &= -3x_1 + x_2 + x_3 \\ & x_1 - 2x_2 + x_3 \le 11 \\ & -4x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 3 \\ & 2x_1 - x_3 = 1 \\ & x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

أوجد الحل الأمثل بطريقة السمبلكس:

الحل: سوف نرد البرنامج إلى الشكل القياسي مع إضافة المتحولات المصطنعة اللازمة للقيدين الثاني والثالث

$$\begin{aligned} MinZ &= -3x_1 + x_2 + x_3 \\ & x_1 - 2x_2 + x_3 + S_1 = 11 \\ & -4x_1 + x_2 + 2x_3 - S_2 + R_1 = 3 \\ & -2x_1 + x_3 + R_2 = 1 \\ & x_1, x_2, x_3, S_1, S_2, R_1, R_2 \ge 0 \end{aligned}$$

نلاحظ أن قاعدة الحل الأساسية هي

$$S_1 = 11 \qquad R_1 = 3 \qquad R_2 = 1 \qquad x_1 = x_2 = x_3 = 0$$

بما أننا أضفنا R_1 R_2 إلى القيود وكي نستطيع استبدالها بالمتحولات الأصلية والراكدة والفائضة، يجب إسناد كلفة مرتفعة إلى المتحولات المصطنعة كي نستطيع

الاستغناء عنها، وهذه الكلفة نرمز لها ب (M)وتعبر عن عدد كبير جداً وبشكل كاف.

وسوف نشرح لماذا يجب أن تكون قيمة المتحولات المصطنعة صفر.

بفرض أن $R_1 = 3$ هو الحل الأمثل يعني أن القيد الثاني يجب أن تكون جميع متحولاته أصفار وبالتالي

$$x_1 = x_2 = x_3 = S_2 = 0$$

وبالتالي بالعودة إلى القيد الأساسي

بالتعويض: $-4x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 3 \qquad \Rightarrow 0 \geq 3$ وهذا مخالف

وبشكل مشابه نجد أنه من الممكن أن تأخذ المتحولات الراكدة قيماً موجبة دون أن يتأثر القيد.

أما المتحولات الفائضة $(-S)$ فلا يمكن أن تكون أحد المتحولات الأساسية إلا إذا وجدنا متحولاً آخر في نفس القيد موجباً ويحقق القيد.

سوف نعطي هنا طريقة أخرى لحل برنامج Min وهي أن نختار في سطر ΔZ القيم السالبة والأصغر، لأنها هي التي تخفض التكلفة (ولتبسيط الأمر نعدّ M لها القيمة مليون) وتبقى القاعدة الأصغرية على حالها، وذلك لضمان شرط عدم السلبية وبالتالي يصبح البرنامج الخطي على الشكل:

$$MinZ = -3x_1 + x_2 + x_3 + OS_1 - OS_2 + MR_1 + MR_2$$

$$x_1 - 2x_2 + x_3 + S_1 = 11$$

$$-4x_1 + x_2 + 2x_3 - S_2 + R_1 = 3$$

$$-2x_1 + x_3 + R_2 = 1$$

$$x_i \geq 0 \qquad S_i \geq 0 \qquad R_i \geq 0$$

	CJ	3−	1	1	0	0	M	M			
CB	قاعدة الحل	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	R_1	R_2	(b)	b/x_2	b/x_3
O	S_1	1	−2	1	0	0	0	0	11	$11/-2$	$11/1$
M	R_1	4−	1	2	0	1−	1	0	3	$3/1$	$3/2$
M	R_2	2−	0	1+	0	0	0	1	1	$1/0$	$1/1$
	$\bar{C}$	$-3+6M$	$1-M$	$1-3M$	0	M	0	0	$Z=4M$		
	ΔZ	-	$3-3M$	$1-3M$	-	-	-	-			

التخفيض الأصغر

ويصبح الجدول الثاني بعد أن يدخل x_3 إلى قاعدة الحل وخروج R_2 من القاعدة

	CJ	3−	1	1	0	0	M	M			
CB	قاعدة الحل	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	R_1	R_2	(b)	b/x_1	b/x_2
O	S_1	3	−2	0	1	0	0	1−	10	$10/3$	$10/-2$
M	R_1	0	**1**	0	0	1−	1	2−	1	$1/0$	$1/1$
1	x_3	2−	0	1	0	0	0	1	1	$1/-2$	$1/0$
	$\bar{C}$	1−	$1-M$	0	0	M	0	$-1+3M$	$Z=1+M$		
	ΔZ	$-10/3$	$1-M$	−	−	−	−	−			

والجدول الثالث بعد دخول x_2 إلى قاعدة الحل وخروج R_1

	CJ	3−	1	1	0	0	M	M		
CB	قاعدة الحل	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	R_1	R_2	(b)	b/x_1
O	S_1	**3**	0	0	1	2−	2	5−	12	$12/3$
1	x_2	0	1	0	0	1−	1	2−	1	$1/0$
+1	x_3	2−	0	1	0	0	0	1	1	$1/-2$
	$\bar{C}$	1−	0	0	0	1	$M-1$	$M+1$		
	ΔZ	4−	−	−	−	−	−	−		

وسوف يدخل x_1 إلى القاعدة بدلاً من S_1

	CJ	3−	1	1	0	0	M	M	
CB	قاعدة الحل	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	R_1	R_2	(b)
-3	x_1	1	0	0	$1/3$	$-2/3$	$2/3$	$-5/3$	4
1	x_2	0	1	0	0	1−	1	2−	1
1	x_3	**2−**	0	1	$2/3$	$-4/3$	$4/3$	$-7/3$	9
	$\bar{C}$	0	0	0	$1/3$	$1/3$	$M-1/3$	$M-2/3$	$Z=-2$

والحل أمثل ووحيد وهو

$x_1 = 4$

$x_2 = 1$

$x_3 = 9$

$S_1 = S_2 = R_1 = R_2 = 0$

$MinZ = -2$

الخلاصة:

1. تضاف المتحولات المصطنعة إلى المتراجحات (≤ أكبر أو تساوي) أو (=المساواة) عدداً موجباً ليتصرف وكأنه متحول أساسي.

2. في تابع Min يضاف المتحولات الراكدة والفائضة بأمثال صفرية، أما الصناعية فبأمثال موجبة وكبيرة، وذلك لضمان خروج المتحول المصطنع بشكل سريع: $MinZ = \sum ci + j + os_1 + os_2 + ...MR_1 + M...$

3. في تابع Max تضاف المتحولات الراكدة والفائضة بأمثال صفرية أما المصطنعة بأمثال $(-M)$

$$MaxZ = \sum cs + s + os_1 + o... - ....MR_1 - M...$$

المبحث الرابع
طريقة السمبلكس ذات المرحلتين

بفرض أنه لدينا برنامج خطي ما $(Max \quad Min)$ ، وكان لدينا متحولات مصطنعة عندئذ نشكل تابع هدف مؤلف من مجموع المتحولات المصطنعة فقط، ونحاول أن نقلل تابع الهدف الجديد وفق قيود البرنامج الأصلي، فإذا حصلنا على تابع هدف قيمته صفر، نكون وصلنا إلى حل أولي مقبول ثم نتابع الحل وبدون المتحولات المصطنعة.

. مثال: ليكن لدينا البرنامج الخطي

$$MaxZ = 15x_1 + 9x_2 + x_3$$
$$2x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 12$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 9$$
$$x_1, x_2 \geq 0 \qquad x_3$$ **غير مقيد**

أوجد حل البرنامج الخطي

. الحل:

1. نرد البرنامج إلى الشكل القياسي وذلك بوضع $x_3 = x_3^{`} - x_3^{``}$ وبإضافة المتحولات الراكدة والفائضة، ثم نرد البرنامج إلى شكل يحوي قاعدة أساسية بإضافة متحولين صناعيين ويصبح البرنامج على الشكل

$$MaxZ = 15x_1 + 9x_2 + x_3^{`} - x_3^{``} - os_1 - MR_1 - MR_2$$
$$2x_1 + 3x_2 + x_3^{`} - x_3^{``} - S_1 + R_1 = 12$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3^{`} - x_3^{``} + R_2 = 9$$
$$x_i \geq 0 \qquad S_1 \geq 0 \qquad R_1, R_2 \geq 0$$

بما أن البرنامج يحوي متحولات مصطنعة تشكل تابع هدف جديد، يكون من مجموع المتحولات المصطنعة وذلك كمايلي:

$$MinZ = R_1 + R_2$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3^{`} - x_3^{``} - S_1 + R_1 = 12$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3^{`} - x_3^{``} + R_2 = 9$$

$$x_i \geq 0, S_1 \geq 0 \qquad R_i \geq 0$$

$$R_1 = 12$$

$$R_2 = 9$$

$$x_1 = x_2 = x_3^{`} = x_3^{``} = S_1 = 0$$

والحل الأول الأساسي

ويكون الجدول:

	CJ	0	0	0	0	0	1	1				
CB	قاعدة الحل	x_1	x_2	$x_3^{`}$	$x_3^{``}$	S_1	R_1	R_2	(b)	b/x_1	b/x_2	b/x_3
1	R_1	2	**3**	1	1−	1−	1	0	12	$12/2$	$12/3$	$12/1$
1	R_2	1	2	1	1−	0	0	1	9	$9/1$	$9/2$	$9/1$
	$\bar{C}$	3−	5−	2−	2	1	0	0	$Z = 21$			
	ΔZ	−18	- 20	- 18	−	−	−	−	−			

Damascus University

الجدول الثاني

	CJ	0	0	0	0	0	1	1			
CB	قاعدة الحل	x_1	x_2	$x_3^{`}$	$x_3^{``}$	S_1	R_1	R_2	(b)	$b/x_3^{/}$	b/x_{S_1}
0	x_2	$2/3$	1	$1/3$	$-1/3$	$-1/3$	$1/3$	0	4	12	12−
1	R_2	$-1/3$	0	$1/3$	$-1/3$	$2/3$	$-2/3$	1	1	3	$3/2$
	$\bar{C}$	$1/3$	0	$-1/3$	$1/3$	$-2/3$	$5/3$	0	$Z=1$		
	ΔZ	−	−	1−	−	1−	−	−			

Damascus University

اخترنا x_3^1 بشكل كيفي

	CJ	0	0	0	0	0	1	1	
CB	قاعدة الحل	x_1	x_2	$x_3^{`}$	$x_3^{``}$	S_1	R_1	R_2	(b)
0	x_2	1	1	0	0	1−	1	1−	3
0	$x_3^{`}$	−1	0	1	1−	2	− 2	3	3
	$\bar{C}$	0	0	0	0	0	1	1	$Z=0$

وبالتالي أصبح تابع الهدف $Z=0$ إذاً يوجد حل مقبول وهو

$$x_2 = 3$$

$$x_3^{`} = 3$$ **وباقي المتحولات أصفار**

وبالتالي نعود إلى البرنامج الأصلي وبدون المتحولات المصطنعة مع حذف المتحولات المصطنعة

	CJ	15	9	1	1−	0			
CB	قاعدة الحل	x_1	x_2	$x_3^{`}$	$x_3^{``}$	S_1	(b)	b/x_1	b/x_{S_1}
9	x_2	1	1	0	0	1−	3	$3/1$	$3/-1$
1	$x_3^{`}$	1−	0	1	1−	2	3	$3/-1$	$3/2$
	$\bar{C}$	7	0	0	0	7	$Z=30$		
	ΔZ	21	−	−	−	$21/2$			

	CJ	15	9	1	1−	0		
CB	قاعدة الحل	x_1	x_2	$x_3^{`}$	$x_3^{``}$	S_1	(b)	b/x_{S_1}
15	x_2	1	1	0	0	1−	3	$3/-1$
1	$x_3^{`}$	0	1	1	1−	1	6	14
	$\bar{C}$	0	−7	0	0	14	$Z=51$	
	ΔZ	−	−	−	−	84		

	CJ	15	9	1	1−	0		
CB	قاعدة الحل	x_1	x_2	$x_3^{`}$	$x_3^{``}$	S_1	(b)	$b/x_3^{``}$
15	x_1	1	2	1	1−	0	9	9−
0	S_1	0	1	1	1−	1	6	6−
	$\bar{C}$	0	−12	−14	14	0	$Z=135$	

وهنا نجد جميع النسب سالبة إذاً هنا تعذر الحل، وبالتالي يمكن زيادة $x_3^{``}$ بقدر مانريد وسوف يزداد بشكل لانهائي قيمة التابع Z.

مثال:

$$MinZ = -3x_1 + x_2 + x_3$$
$$x_1 - 2x_2 + x_3 \le 11$$
$$-4x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 3$$
$$x_i \ge 0$$

الحل: نرد التابع إلى الشكل القياسي ثم نضيف المتحولات المصطنعة إلى القيد الثاني والثالث كي نحصل على قاعدة حل أولي

$$MinZ = -3x_1 + x_2 + x_3 + OS_1 - OS_2 + MR_1 - MR_2$$
$$x_1 - 2x_2 + x_3 + S_1 = 11$$
$$-4x_1 + x_2 + 2x_3 - S_2 + R_1 = 3$$
$$-2x_1 + x_3 + R_2 = 1$$
$$x_i \ge 0 \qquad S_i \ge 0 \qquad R_i \ge 0$$

المرحلة الأولى: نشكل تابع هدف بالنسبة للمتحولات الصناعية وباقي القيود على حلها

$$MinZ = R_1 + R_2$$
$$x_1 - 2x_2 + x_3 + S_1 = 11$$
$$-4x_1 + x_2 + 2x_3 - S_2 + R_1 = 3$$
$$-2x_1 + x_3 + R_2 = 1$$

وقاعدة الحل الأولية

$$S_1 = 11 \qquad R_1 = 3 \qquad R_2 = 1$$

وباقي المتحولات معدومة

	CJ	0	0	0	0	0	1	1			
CB	متحولات القاعدة	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	R_1	R_2	B	b/x_2	b/x_3
0	S_1	1	2–	1	1	0	0	0	11	$3/1$	$11/1$
1	R_1	4–	1	2	0	1–	1	0	3	$3/1$	$3/2$
1	R_2	2–	0	**1**	0	0	0	1	1	$1/0$	$1/1$
	$\bar{C}$	6	1–	3–	0	1	0	0	$Z=4$		
	ΔZ	–	3–	3–	–	–	–	–			

ومتحول القاعدة الجديد x_3 بدلاً من R_2

	CJ	0	0	0	0	0	1	1		
CB	متحولات القاعدة	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	R_1	R_2	B	b/x_2
0	S_1	3	2–	0	1	0	0	1–	10	–
1	R_1	0	**1**	0	0	1–	1	2–	1	1
0	x_3	2–	0	1	0	0	0	1	1	α
	$\bar{C}$	0	1–	0	0	1	0	3	$w=1$	
	ΔZ	–	1–	–	–	–	–	–		

	CJ	0	0	0	0	0	1	1	
CB	قاعدة الحل	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	R_1	R_2	b
0	S_1	3	0	0	1	2–	2	5–	12
0	x_2	0	1	0	0	1–	1	2–	1
0	x_3	2–	0	1	0	0	0	1	1
	$\bar{C}$	0	0	0	0	0	1	1	$w=0$

أصبح لدينا حل أمثل البرنامج المرحلة الأولى وقيمة الهدف معدومة إذاً لدينا حل نافذ وهو

$$S_1 = 12$$
$$x_2 = 1$$
$$x_3 = 1$$

وباقي المتحولات معدومة

نحسب $\bar{C}$ الجديد ويصبح الجدول بعد حذف المتحولات المصطنعة

	CJ	3−	1	1	0	0		
CB	متحولات القاعدة	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	B	b/x_1
0	S_1	**3**	0	0	1	2−	12	$12/3 = 4$
1	x_2	0	1	0	0	1−	1	$1/0$
1	x_3	2−	0	1	0	0	1	$1/-2$
	$\bar{C}$	1−	0	0	0	1	$Z = 2$	
	$\Delta Z =$	4−	−	−	−	−	−	

	CJ	3−	1	1	0	0	
CB	متحولات القاعدة	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	b
3−	x_1	1	0	0	$1/3$	$-2/3$	4
1	x_2	0	1	0	0	1−	1
1	x_3	0	0	1	$2/3$	$-4/3$	9
	$\bar{C}$	0	0	0	$1/3$	$1/3$	$Z = -2$

والحل أمثل وبالتالي الحل الأمثل والوحيد هو

$x_1 = 4$

$x_2 = 1$

$x_3 = 9$ **وباقي المتحولات معدومة**

$MinZ = -2$

المبحث الخامس
تحليل الحساسية

في جميع البرامج الخطية السابقة اعتمدنا على القيود كمعطيات ثابتة لا يمكن أن تتغير ومعروفة بدقة، وتم على أساسها حل البرامج. في الواقع إن الموارد وأمثال تابع الهدف يمكن أن تتغير حسب الظروف المدروسة للمسألة؛ وبالتالي نشأت فكرة تحليل الحساسية لدراسة كيف يمكن أن يتغير التابع والمتحولات المثلى حين تتغير هذه القيم. وكمثال على ذلك سوف ندرس البرنامج الآتي:

بفرض أنه لدينا ثلاث سلع 1,2,3 وكمياتها x_1, x_2, x_3 وكان البرنامج الآتي:

$$MaxZ = 30x_1 + 18x_2 + 12x_3$$

يد عاملة $x_2 + x_3 \le 300$

المواد الأولية $+ 4x_2 + 5x_3 \le 1800$

الساعات الأسبوعية $+ 2x_2 + 6x_3 \le 900$

$$x_i \ge 0$$

والمطلوب:

1. أوجد الحل الأمثل للبرنامج والكميات الواجب إنتاجها.
2. بفرض أننا أضفنا عاملاً إضافياً كيف يتأثر البرنامج؟
3. بفرض أن أضفنا (1كغ) من المواد أولية فكيف يتأثر البرنامج الخطي؟

الحل: لنحل البرنامج الخطي كما تعلمنا بعد رده الى الشكل القياسي (لا داعي للمتحولات الصناعية هنا)

$$MaxZ = 30x_1 + 18x_2 + 12x_3 + OS_1 + OS_2 + OS_3$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + S_1 = 300$$

$$10x_1 + 4x_2 + 5x_3 + S_2 = 1800$$

$$2x_1 + 2x_2 + 6x_3 + S_3 = 900$$

	CJ	30	18	12	0	0	0				
CB	قاعدة الحل	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	B	b/x_1	b/x_2	b/x_3
0	S_1	1	**1**	1	1	0	0	300	300	300	300
0	S_2	10	4	5	0	1	0	1800	180	450	360
0	S_3	2	2	6	0	0	1	900	450	450	150
	$\bar{C}$	30	18	12	0	0	0	$Z = 0$			
	ΔZ	5400	5400	1800	–	–	–	–			

	CJ	30	18	12	0	0	0		
CB	قاعدة الحل	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	B	b/x_1
18	x_2	1	1	1	1	0	0	300	300
0	S_2	6	0	1	4–	1	0	600	100
0	S_3	0	0	4	2–	0	1	300	α
	$\bar{C}$	12	0	6–	18–	0	0	$Z = 5400$	
	ΔZ	1200	–	–	–	–	–	–	

	CJ	30	18	12	0	0	0	
CB	قاعدة الحل	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	b
18	x_2	1	1	$5/6$	$10/6$	$-1/6$	0	200+
30	x_1	1	0	$1/6$	$-4/6$	$1/6$	0	100
0	S_3	0	0	4	2−	0	1	300
	$\bar{C}$	0	0	8−	10−	2−	0	$Z = 6600$

والحل أمثل ووحيد $x_1 = 100 \quad x_2 = +200 \quad x_3 = 0$

$MaxZ = 24600 \quad S_i = 0$

2. إضافة عامل واحد

لننظر إلى القيد الأول عند رده إلى الشكل القياسي أضفنا له متحولاً راكداً (S_1)، وفي الجدول الأخير نجد في سطر $\bar{C}$ وأمام عمود S_1 نجد القيمة (− 10)، وبالتالي عندما تزداد (S_1) بقيمة واحدة أي عامل واحد وبالتالي سوف ينخفض تابع الهدف بالقيمة (10)، ولكن ماذا يعني زيادة (S_1) بالقيمة واحدة؟

يعني أنه عندما يكون العامل (راكداً) ليس له عمل وبالتالي يصبح عدد العمال الفعالين (299) عاملاً سوف ينخفض تابع الهدف بالقيمة (10) وبالتالي يصبح الربح الأعظمي 6590

وبنفس الأسلوب نناقش إذا ازداد عدد العمال ليصبح 301 ماذا ينتج؟

سوف يزداد تابع الهدف بقيمة (10) ليصبح (6610)

وبالتالي (S_1) تدل عندما يكون لدينا عامل خامل (أو مسرح من العمل) وبالتالي ينخفض عدد العمال ليصبح (299) عاملاً سوف ينخفض تابع الهدف بمقدار (10) ليصبح 6590 .

وكذلك عندما (S_1 =1 −) سوف ننتقل إلى الطرف الأيمن ليصبح عدد العمال (301) فإن سوف يزداد الربح (بشكل مشابه) ليصبح (6610)

وبالتالي يمكننا القول أن المنشأة سوف تدفع كحد أقصى لعامل إضافي الأجر (10) وحدات نقدية، وإذا كان هناك عامل أجره (6) وحدات نقدية فسوف تحقق الشركة وفراً قدره

10-6=4

وبالتالي سوف يكون ربح الشركة الصافي في العامل إضافي (6604)

إذاً يدل (S_1) من السطر $\bar{C}$ على الحد الأعلى لأجر العامل الممكن دفعه.

لنأخذ عمود S_1 وقاعدة الحل الأمثل

	CJ	0
CB	قاعدة الحل	S_1
18	x_2	$10/6$
30	x_1	$-4/6$
	$\bar{C}$	10−

ندعو $(10/6)$ الأهمية النسبية للعامل بالنسبة للمنتج x_2

فمثلاً $O-(18)(10/6)=-30$

وبالتالي عندما يزداد S_1 بمقدار وحدة واحدة؛ أي ينخفض عدد العمال بمقدار واحد سوف تخسر الشركة بمقدار (30)؛ وبالتالي فإن الشركة مستعدة لدفع (30) وحدة نقدية لكل عامل إضافي من أجل إنتاج المنتج (x_2)

. ندعو $(-4/6)$ الأهمية النسبية العامل بالنسبة للمنتج x_1 لأنه

$O-30(-4/6)=20$

أي عندما يزداد (S_1) بمقدار وحدة واحدة أي انخفاض عدد العمال، فإن الشركة سوف تربح (20) أي أن العمال بالنسبة للمنتج (x_1) يسبب عرقلة إنتاج ويؤدي إلى خسارة بمقدار (20)، أي أن المنتج x_1 يُحمّل عبء (20) وحدة نقدية لكل عامل مع أنه لا يحتاج إلى عمال الإنتاجية ولكن لضرورة إنتاج (x_1) أصبح الصافي

$$-30+20=-10$$

أي إن انخفاض العمال بالمعمل ككل يسبب خسارة بمقدار (10) وحدات نقدية فمن مصلحة الشركة البقاء على حال توازن.

الخلاصة:

S_1 (الراكد): يدل على عدد العمال الراكدة غير النشطة في المعمل و $\bar{C}$ أمامها يدل على الأجر الأعلى الممكن دفعه لزيادة عامل إضافي

3 . بالمثل نناقش المواد الأولية

. ماذا عن المنتج x_3 : نلاحظ أن ليس من مصلحة الشركة إنتاج المنتج x_3 ونجد أن من السطر $\bar{C}$ أن قيمته هي (− 8) أي كلما أنتجنا وحدة من (x_3) سوف تخسر (8) وحدات نقدية، وكلما انخفض إنتاج x_3 بمقدار (8) سوف تربح المنشأة بمقدار (8). إذاً نقول (8) هي تكلفة الفرصة البديلة للمنتج x_3 وبالتالي كي يكون إنتاج x_3 مجدياً يجب زيادة ربح هذا المنتج بمقدار (8) وحدات نقدية على الأقل ليصبح ربحه 12+8=20 على الأقل.

كي نفكر بإنتاج هذا المنتج.

الخلاصة:

1 – من السطر $\bar{C}$ وأمام المتحولات الأصلية $x_1, x_2, \ldots$

نقول هي تكلفة الفرصة البديلة أو مقدار القيمة الصغرى الواجب إضافتها كي تستطيع إنتاج المنتج بالطبع إذا لم يكن من المتحولات الأساسية

2 – من السطر $\bar{C}$ وأمام المتحولات الراكدة يدل السطر (الأجر) الأعلى الواجب دفعه لكل وحدة إضافية.

3 . بالطبع يوجد حدود لزيادة عدد العمال (أو المواد الأولية مثلاً) كي يبقى الحل أمثل بالنسبة للمتحولات x_1, x_2 وإلا تغيرت قاعدة المتحولات وهذه الدراسة خارج نطاق هذا الكتاب.

المبحث السادس

تطبيقات غير محلولة

1. أوجد حل البرنامج الخطي

$$MinZ = 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$
$$-2x_1 + 2x_2 + x_3 = 4$$
$$3x_1 + x_2 + x_4 = 6$$
$$x_i \geq 0 \qquad i = 1,.,.,.4$$

ثم أوجد حلاً أمثل بديلاً إن وجد.

2 . أوجد حل البرنامج الخطي

$$MaxZ = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4$$
$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 \leq 20$$
$$2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 20$$
$$x_i \geq 0 \qquad i = 1,.,.,.4$$

وهل الحل الأمثل وحيد؟ علل ذلك.

3 . استخدم الطريقة ذات المرحلتين في حل البرنامج

$$MinZ = 6x_1 + 3x_2 + 4x_3$$
$$x_1 \geq 30$$
$$x_2 \leq 50$$
$$x_3 \geq 20$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 120$$
$$x_i \geq 0 \qquad i = 1,.,.3$$

وهل الحل وحيد ؟ علل.

4. استخدم الطريقة ذات المرحلتين لحل البرنامج

$$MaxZ = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_3 \le 30$$
$$3x_1 + 6x_2 + x_3 - 2x_4 \le 0$$
$$x_2 \ge 4$$
$$x_i \ge 0 \qquad i = 1,.,.,.4$$

5. بفرض أنه لدينا البرنامج الخطي

$$MinZ = 2x_1 - x_2 + 2x_3$$
$$-x_1 + x_2 + x_3 = 4$$
$$-x_1 + x_2 - x_3 \le 6 \qquad x_3 \text{ غير مقيدة الإشارة}$$
$$x_i \ge 0 \qquad x_2 \ge 0$$

أ. حول المسألة إلى برنامج خطي قياسي ذي متحولين غير سالبة ثم شكل البرنامج الذي يحوي قاعدة حل

ب . حول البرنامج السابق إلى مسألة Max

جـ . حل البرنامج باستخدام طريقة المتحولات المصطنعة (M) الكبيرة

6. استخدم طريقة السمبلكس للتحقق من أن البرنامج لا يقبل حلاً أمثل.

$$MaxZ = x_1 + 2x_2$$
$$-2x_1 + x_2 + x_3 \le 2$$
$$-x_1 + x_2 - x_3 \le 1$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

ثم أنشئ بدلاً من الجدول النهائي حلاً مقبولاً، بحيث أن قيمة تابع الهدف أكبر من 3000

7. استخدم الطريقة ذات المرحلتين لإيجاد حل مقبول للمتراجحات

$$-3x_1 + x_2 + x_3 \le 10$$
$$-6x_1 + 4x_2 - 9x_3 \ge 1$$
$$2x_1 - 4x_3 = 2$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

8. استخدم الطريقة ذات المرحلة الواحدة (M) للبرهان أن البرنامج ليس حلاً مقبولاً.

$$MinZ = 2x_1 + 4x_2$$
$$2x_1 - 3x_2 \ge 2$$
$$-x_1 + x_2 \ge 3$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

9. ترغب شركة مصنعه تعيين جداول الإنتاج المثلى لثلاثة أنواع من المنتجات A, B, C باستخدام الآلات الثلاثة M_1, M_2, M_3 ، بحيث تزداد أرباحها الكلية إلى الحد الأعظمي. وبفرض أن المنتج A يصنع على آلات ثلاث، أما المنتج B فعلى الآلتين M_1, M_3 في حين المنتج C على الآلات M_1, M_2 ويقدر الربح الواحدي للمنتجات 5,2,4 وحدات نقدية وكان الجدول التالي:

	A	B	C	**الوقت المتاح للآلة**
M_1	1	2	1	430
M_2	3	0	2	460
M_3	1	4	0	450

المطلوب:

1. اكتب البرنامج الخطي الذي يعبر عن المسألة.
2. أوجد الحل الأمثل وكميات الإنتاج من كل منتج والربح الأعظمي.

3. بفرض أنه كل ساعة إضافية على الآلة الأولى تكلفتها (2) وحدة نقديةان، هل تنصح بزيادة عمل الآلة برر ذلك؟

4. بفرض أن تكلفة ساعة إضافية على الآلة الثانية وحدة نقدية واحد، هل تنصح بزيادة عمل الآلة ساعة واحدة؟

5. ما هي تكلفة الفرص البديلة لإنتاج المنتج A وإذا تم رفع ربح المنتج الأول ليصبح (6) هل تنصح المنشأة بإنتاجه؟

6. ما هي الأهمية النسبية للآلة الثانية بالنسبة للمنتج (C) وما هو الأجر الأعلى الممكن دفعه لساعة واحدة على هذه الآلة؟

10. بفرض أنه لدى مشفى نظام غذائي وتريد معرفة الكلفة الأصغرية، بحيث يجب أن يحتوي الغذاء على (21) وحدة من الفيتامين A و(12) وحدة من الفيتامين B *complex*.

وذلك باستخدام خمسة أنواع من الوجبات وفق مايلي:

الوجبة	**5**	**4**	**3**	**2**	**1**
محتوى الوجبة من A	2	1	1	0	1
محتوى الوجبة من B *complex*	1	1	2	1	0
الكلفة الواحدية	12	11	31	20	20

علماً أن عدد الوجبات من الوجبة الخامسة يجب أنه لا تزيد عن عشرة وجبات كي لا تؤثر على صحة المريض.

المطلوب:

1. اكتب البرنامج الخطي الذي يحدد عدد مرات تكرار كل وجبة وبالكلفة الأصغرية.

2. ما هو العائد على المشفى في حال تم تخفيض كمية الفيتامين A وذلك بواقع وحدة واحدة الرابعة.

3. كي يتم تقديم الوجبة الأولى ما هو الحد الأعلى لسعر هذه الوجبة الممكن أن تدفعه المشفى.

11 . تعمل شركة $A\ \&\ C$ في تجارة الألبسة فتشتري كمية من الخيوط وتبيعها نقداً، وتملك الشركة مخزناً يتسع إلى (5000) طن من الخيوط، بفرض أنه في بداية العام (1كانون الثاني) كان المخزون الابتدائي (1000) طن، وكان ميزانية الشركة النقدي لهذه السلعة مقدرة ب 20000 وحدة نقدية، وتقدر أسعار مبيع الخيط لكل طن في الربع القادم من العام.

	سعر الشراء	**سعر المبيع**
كانون الثاني	2.85	3.1
شباط	3.05	3.25
آذار	2.9	2.95

وتسلم الشركة في نفس الشهر الذي تشتري فيه، ويمكن أن لا تباع كميات حتى الشهر التالي، وتجري عمليات البيع والشراء وفق الدفع نقداً عند التسليم، وترغب الشركة أنه يكون مخزونها النهائي (2000) طن في نهاية آذار.

والمطلوب:

سياسة البيع والشراء التي من شأنها أن تجعل العائد الصافي الكلي لمدة الأشهر الثلاثة أعظمياً، وذلك وفق صياغة المسألة على شكل برنامج خطي.

الفصل الثاني

طرق متقدمة لحل البرمجة الخطية

عرضنا في الفصل السابق طريقتين لحل البرامج الخطية:

1. **الحل البياني**
2. **طريقة السمبلكس**

وسوف نتطرق إلى طرق جديدة لحل البرامج الخطية.

المبحث الأول

طريقة السمبلكس المختصرة

تعتمد هذه الطريقة على حذف أعمدة المتحولات الأساسية لأنها تشكل مصفوفة أحادية وسوف نشرح ذلك وفق مثال:

ليكن لدينا البرنامج الخطي

$$MaxZ = 500x_1 + 400x_2$$
$$4x_1 + 2x_2 \le 600$$
$$2x_1 + 6x_2 \le 480$$
$$x_1 \ge 100$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

أوجد حل البرنامج الخطي باستخدام السمبلكس المختصرة.

الحل: نرد البرنامج إلى الكل القياسي وبحيث متحولات قاعدة أساسية وفق مايلي:

$$MaxZ = 500x_1 + 400x_2 + OS_1 + OS_2 - OS_3 + MR_1$$
$$4x_1 + 2x_2 + S_1 = 600$$
$$2x_1 + 6x_2 + S_2 = 480$$
$$x_1 - S_3 + R_1 = 100$$

وبالتالي فإن جدول السمبلكس العادي هو

	CJ	500	400	0	0	0	$-M$	
CB	قاعدة الحل	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	R_1	b
0	S_1	4	2−	1	0	0	0	600
0	S_2	2	6	0	1	0	0	480
$-M$	R_1	1	0	0	0	1−	1	100

بملاحظة أن قاعدة الحل هي R_1, S_2, S_1 وبالتالي فإنها تشكل مصفوفة أحادية وبالتالي يمكن ملاحظة هذه الخاصة في جميع جداول السمبلكس، فإن قاعدة الحل دوماً لها مصفوفة واحدية

$$\begin{array}{c} \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} S_1 & S_2 & R_1 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

وبحذفها نجد الجدول المختصر:

	CJ	400	500	0			
CB	قاعدة الحل	x_1	x_2	S_3	B	b/x_1	b/x_2
0	S_1	4	2	0	600	150	300
0	S_2	2	6	0	480	240	80
$-M$	R_1	**1**	0	1−	100	100	/
	$\bar{C}$	$400+M$	500	$-M$	$Z=-100M$		
	ΔZ	$4000+100M$	4000	−			

إذاً سوف يخرج R_1 من القاعدة ويدخل x_1 وبالتالي يصبح x_1 من المصفوفة الأحادية المحذوفة و R_1 عموده سوف نحتاج إليه، ولكن كيف نحصل عليه:

1. نبادل بين x_1, R_1 مع أمثال الهدف.
2. نقلب عنصر الدوران.
3. تقسم السطر المرشد على عنصر الدوران.
4. نغير إشارة عنصر الدوران ونقسم العمود المرشد على العنصر الجديد.
5. أما باقي العناصر فتحسب كما سبق.

وإليك الطريقة:

	CJ	$-M$	400	0			
CB	قاعدة الحل	R_1	x_2	S_3	B	b/x_2	b/x_3
0	S_1	−4	2	4	200	100	150
0	S_2	−2	**6**	2	280	$280/-6$	140
100	x_1	1	0	1−	100	/	/
	$\bar{C}$	$-M-100$	400	100+	$Z=10000$		
	ΔZ	−	$56000/3$	5000			

وبالتالي نستبدل S_2 بالمتحول الجديد x_2 ويصبح الجدول

	CJ	$-M$	0	0		
CB	قاعدة الحل	R_1	S_2	S_3	b	b/x_3
0	S_1	$-10/3$	$-1/3$	$10/3$	$320/3$	32
400	x_2	$-1/3$	$1/6$	$1/3$	$140/3$	140
500	x_1	1	0	1-	100	/
	$\bar{C}$	$-1100/3 - M$	$-200/3$	$1100/3$	$Z = 57500/3$	
	ΔZ	-	-	$35200/3$		

ويدخل S_3 إلى القاعدة ويخرج S_1 إذاً

	CJ	$-M$	0	0		
CB	قاعدة الحل	R_1	S_2	S_3	b	b/x_3
0	S_3	1-	$-1/10$	$3/10$	32	32
400	x_2	0	$1/5$	$-1/10$	36	140
500	x_1	0	$-1/10$	$+3/10$	132	/
	$\bar{C}$	$-M$	30-	110-	$Z = 80400$	

ملاحظة: كان بإمكاننا حذف عمود R_1 لأن هذا المتحول لن يعود الى القاعدة طالما وجدنا حلاً مقبولاً.

مثال: ليكن لدينا البرنامج

$$MinZ = 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 10x_4$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 \geq 9$$
$$3x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 12$$
$$2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 \geq 10$$
$$x_i \geq 0 \qquad i = 1,.,.,.,4$$

أوجد الحل الأمثل

الحل برد البرنامج السابق إلى الشكل القياسي ثم إدخال المتحولات الصناعية نجد

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 - S_1 + R_1 = 9$$
$$3x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + R_2 = 12$$
$$2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 - S_2 + R_3 = 10$$
$$MinZ = \qquad 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 10x_4 - OS_1 - OS_2 + MR_1 + MR_2 + MR_3$$

وبالتالي قاعدة الحل

$$R_1 = 9$$
$$R_2 = 12$$
$$R_3 = 10$$

إذاً يصبح الجدول الأول:

	CJ	2	1−	3	10	0	0					
CB	قاعدة الحل	x_1	x_2	x_3	x_4	S_1	S_2	B	b/x_1	b/x_2	b/x_3	b/x_4
M	R_1	1	2	1	4	1−	0	9	9	$9/2$	9	$9/4$
M	R_2	**3**	1	3	1	0	1−	12	4	12	4	12
M	R_3	2	1	3	1	0	0	10	5	10	$10/3$	10
	$\bar{C}$	$2-6M$	$-1-4M$	$3-7M$	$10-6M$	M	M	$Z=31M$				
	ΔZ	$8-24M$	$-9/2-8M$	$10-70/3\,M$	$22.5-13.5M$	−	−					

وبالتالي يدخل x_1 ويخرج R_2 وهنا لاداعي لعمود R_2 إذاً:

	CJ	1−	3	10	0	0					
CB	قاعدة الحل	x_2	x_3	x_4	S_1	S_2	b	b/x_2	b/x_3	b/x_4	b/S_2
M	R_1	$5/3$	0	$11/3$	1−	$1/3$	5	3	/	$15/11$	15
2	x_2	$1/3$	1	$1/3$	0	$-1/3$	4	12	4	12	/
M	R_3	$1/3$	1	$1/3$	0	$2/3$	2	6	2	6	3
	$\bar{C}$	$-5/3-2M$	$1-M$	$28/3-4M$	M	$2/3-M$	$Z=8+7M$				
	ΔZ	$-5-6M$	$2-2M$	$40/11-60/11M$	−	−					

ويخرج R_1 من القاعدة ويدخل x_2 وكذلك الأمر لا داعي للكتابة عمود R_1 فنحذفه

	CJ	3	10	0	0				
CB	قاعدة الحل	x_3	x_4	S_1	S_2	b	b/x_3	b/x_1	b/S_2
1−	x_2	0	$11/5$	$-3/5$	$1/5$	3	/	/	15
2	x_1	1	$-2/5$	$1/5$	$-2/5$	3	3	15	/
M	R_3	1	$-2/5$	$1/5$	$3/5$	1	1	5	$5/3$
	$\bar{C}$	$1-M$	$63/5+2/5M$	$-1-1/5M$	$3/5-3/5M$	$Z=3+M$			
	ΔZ	$1-M$	−	$-5-M$	$1-M$				

Damascus University

وبالتالي سوف يدخل S_1 بدلاً من R_3 ونحذف عمود R_3

	CJ	3	10	0	
CB	قاعدة الحل	x_3	x_4	S_2	b
1−	x_2	3	1	2	6
2	x_1	0	0	1−	2
0	S_1	5	2−	3	5
	$\bar{C}$	6	11	4	$Z=-2$

والحل أمثل ووحيد.

إذاً يكون الحل الأمثل هو

$x_1 = 2$

$x_2 = 6$

$S_1 = 5$

$x_3 = x_4 = S_1 = R_i = 0$

$MinZ = -2$

المبحث الثاني

طريقة مقلوب المصفوفة

تعتمد هذه الطريقة على المصفوفات وإيجاد مقلوب المصفوفة، فنحن نعلم أنه إذا كان لدينا جملة معادلات من الشكل

$$\sum oijxj = bi \qquad i = 1,.....m \qquad J = 1,....n$$

عندئذ يكون لدينا n متحول و m قيد حيث $m \le n$ مستقل.

نستطيع كتابة المعادلات الخطية بشكل مصفوفي على الشكل

$$Ax = b$$

$$A_{(m,n)} = \begin{bmatrix} a_{11}.....a \\ a_{m1}.....a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$x_{(m,x_1)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad b_{(m,x_1)} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

ويكون حل المعادلة 1 على الشكل

$$x = A^{-1}b$$

بشرط $m = n$

ولكن إذا كان $m \le n$ عندئذ يوجد مصفوفة جزئية من A ، بحيث يكون بعدها من الشكل (mxm) ولتكن المصفوفة $B_{(mxm)}$ وتشكل المتحولات الأساسية.

وبحيث نفرض أن المتحولات الأساسية $X_{(mxm)}$ عندئذ

$$X_{(mxm)} = B^{-1}_{(mxm)}.b$$

أي مقلوب هذه المصفوفة بشعاع الثوابت، أما باقي المتحولات فقيمها صفرية وسوف نوضح طريقة الحل وكيفية اختيار المصفوفة B.

<u>خطوات الحل :</u>

1. نرد البرنامج الخطي إلى الشكل القياسي، ثم نضع متحول نافذ الراكدة أو الفائضة أو الصناعية إن لزم الأمر) وتكون B هي مصفوفة المتحولات النافذة (القاعدة الأساسية) دوماً.

2. نحسب $\bar{C}$ من العلاقة التالية:

$$\bar{C}_i = C_i - \pi P_J$$

حيث P_J شعاع أمثال المتحول XJ في القيود

π :هو الجداء $CB.B^{-1}$

CJ : أمثال المتحول XJ في تابع الهدف

C_B : أمثال متحولات قاعدة الحل وفق تابع الهدف (C_B جزء من CJ)

3. نختار من $\bar{C}\,J$ المناسب ثم نحسب الشعاع $\bar{b}$ من العلاقة

$$\bar{b} = B^{-1}b_1$$

حيث $b_1 \geq 0$ شعاع الثوابت $\bar{b} \geq 0$ شعاع الثوابت الجديد.

4. نحسب النسبة الأصغرية ونختار المناسب حيث يمكن حساب عمود $\bar{p}_J$ من العلاقة

$$\bar{P}_S = B^{-1}.P_J$$

وسوف نحل مثالاً على الطريقة المختصرة.

مثال: ليكن لدينا البرنامج

$$MaxZ = 25x_1 + 10x_1 + 15x_3$$
$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 40$$
$$3x_1 + 4x_2 + x_3 \le 35$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

أوجد الحل الأمثل للبرنامج الخطي باستخدام مقلوب مصفوفة المختصرة.

الحل:

نرد هذا البرنامج إلى الشكل القياسي فيكون لدينا

$$MaxZ = 25x_1 + 10x_2 + 15x_3 + OS_1 + OS_2$$
$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + S_1 = 40$$
$$3x_1 + 4x_2 + x_3 + S_2 = 35$$
$$x_i \ge 0 \qquad i = 1,2,3$$

عندئذ نجد

$$P_1\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix} \qquad P_2 = \begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix} \qquad P_3 = \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} \qquad P_{S1} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \qquad P_{S2} = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix}40\\35\end{bmatrix}$$

فنجد أن الحل الأولي النافذ $S_2 = 25$ $S_1 = 40$ وبالتالي يكون الجدول الأول

CB	قاعدة الحل	B^{-1}	b^-	p_1
0	S_1	$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}40\\35\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$
0	S_2			

لنحسب السطر $\bar{C}$:

$$\pi = C_B.B^{-1}$$
$$\pi = (0,0)\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} = (0,0)$$

$$\bar{C}_1 = C_1 - \pi P_1 = 25 - (0,0)\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix} = 25$$

لدينا

$$\bar{C}_2 = C_2 - \pi P_2 = 10 - (0,0)\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix} = 10$$

$$\bar{C}_3 = C_3 - \pi P_3 = 15 - (0,0)\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} = 15$$

وبفرض اخترنا $\bar{C}$ إذاً سوف يدخل x_1 إلى القاعدة، وبالتالي لنحسب النسبة الأصغرية

$$\begin{bmatrix}40\\35\end{bmatrix} \div \begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}40/1\\35/3\end{bmatrix} \Rightarrow 35/3$$

إذاً سوف يخرج S_2 من القاعدة ويدخل x_1 بدلاً منه

إذاً نريد جعل الشعاع $\begin{matrix}S_1\\S_2\end{matrix} P_1 = \begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$ له الشكل $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

وبالتالي نجد أننا يجب أن نقسم السطر الثاني على (3) ثم نضرب الناتج بـ (1−) ونجمع إلى السطر الأول. نطبق نفس العمليات على المصفوفة B^{-1}

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1/3\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}1 & -1/3\\0 & 1/3\end{bmatrix} = B^{-1}$$

وكطريقة عملية نجد

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} \int \begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$$

ونطبق على المصفوفة العلاقة

العنصر الجديد = عنصر الدوران × المعني − جداء المقابلين

عنصر الدوران

أما سطر عنصر الدوران فنقسمه على عنصر الدوران.

أما عناصر السطر الأول فنحسبه من العلاقة

$$\frac{(0)(3)-(1)(1)}{3}=-1/3$$

$$\frac{(1)(3)-(0)(1)}{3}=1$$

ويصبح شعاع الثوابت الجديد

$$\bar{b}=B^{-1}.b=\begin{bmatrix}1 & -1/3\\ 0 & 1/3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}40\\ 35\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}85/3\\ 35/3\end{bmatrix}$$

وأصبح الجدول الجديد

CB	قاعدة الحل	B^{-1}	b^-	p_3
0	S_1	$\begin{bmatrix}1 & -1/3\\ 0 & 1/3\end{bmatrix}$	$85/3$	$5/3$
25	x_1		$35/3$	$1/3$

نحسب من جديد سطر $\bar{C}$

$$\pi=CBB^{-1}=(0,25)\begin{bmatrix}1 & -1/3\\ 0 & 1/3\end{bmatrix}=(0,25/3)$$

$$\bar{C}_2 = C_2 - \pi P_2 = 10 - (0, 25/3)\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix} = -70/3$$

$$\bar{C}_3 = C_3 - \pi P_3 = 15 - (0, 25/3)\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} = 20/3$$

$$\bar{C}_{S2} = C_{S1} - \pi P_{S1} = 0 - (0, 25/3)\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = -25/3$$

وبالتالي نجد أن $\bar{C}_3$ موجب، وبالتالي سوف يدخل x_3 إلى القاعدة ويخرج متحول ذو النسبة الأصغرية.

لنحسب عمود $\bar{p}_3$ كي نحسب النسبة الأصغرية

$$\bar{p}_3 = B^{-1} \qquad P_3 = \begin{bmatrix}1 & -1/3\\0 & 1/3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5/3\\1/3\end{bmatrix}$$

والنسبة

$$\begin{bmatrix}5/3\\1/3\end{bmatrix} \div \begin{bmatrix}85/3\\35/3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}17\\35\end{bmatrix} \Rightarrow 17 \quad \begin{matrix}S_1\\x_1\end{matrix}$$

وبالتالي سوف يخرج S_1 إلى القاعدة إذاً عنصر الدوران $\left(5/3\right)$

سوف نحسب B^{-1} الجديدة

$$\begin{bmatrix}1 & -1/3\\0 & 1/3\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}5/3\\1/3\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}3/5 & -1/5\\-1/5 & 2/5\end{bmatrix}$$

$$\bar{b} = B^{-1}.b \Rightarrow \bar{b} = \begin{bmatrix}3/5 & -1/5\\-1/5 & 2/5\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}40\\35\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}17\\6\end{bmatrix}$$

وأصبح الجدول الجديد

CB	قاعدة الحل	B^{-1}	b^-
15	x_3	$\begin{bmatrix} 3/5 & -1/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{bmatrix}$	17
25	x_1		6

نحسب π ثم $\bar{C}_J$

$$\pi = CB.B^{-1} = (15,25)\begin{bmatrix} 3/5 & -1/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{bmatrix} = (4,7)$$

$$\bar{C}_2 = C_2 - \pi P_2 = 10 - (4,7)\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = -26$$

$$\bar{C}_{S1} = C_{S1} - \pi P_1 = 0 - (4,7)\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = -4$$

$$\bar{C}_{S2} = C_{S2} - \pi P_{S2} = 0 - (4,7)\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -7$$

وبالتالي الحل أمثل إذاً

$x_3 = 17$

$x_2 = 6$

$x_1 = S_1 = S_2 = 0$

وتابع الهدف نحسبه من العلاقة

$$Z = CB\bar{b} = (15,25)\begin{bmatrix} 17 \\ 6 \end{bmatrix} = 405$$

إذاً يمكن تلخيص خطوات الحل وفق مايلي

1. في البداية تعطى $B^{-1} = I$

2. نحسب π من العلاقة $\bar{C}_J = CJ - \pi.P_J$

حيث P_J أشعة كل متحول x_J من البرنامج الأصلي

3. نحسب الشعاع $\bar{b}$ من العلاقة

$$\bar{b} = B^{-1}.b$$

حيث b شعاع الثوابت الأصلي

4. نحسب عمود المتحول x_J المختار لحساب النسب $\frac{\bar{b}}{p_s}$ ونختار النسبة الأصغرية من العلاقة

$$\bar{p}_J = B^{-1}.P_S$$

حيث P_S B C_S معروف من البرنامج الأصلي

<u>مثال:</u> ليكن لدينا البرنامج

$$MinZ = 2x_1 + 12x_2 + x_3$$
$$5x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 15$$
$$2x_1 + x_2 + 3x_2 \geq 17$$
$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 7$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

أوجد حل البرنامج باستخدام طريقة المصفوفات المختصرة

الحل: نحول البرنامج إلى الشكل القياسي ثم لتحوي حلاً نافذاً.

$$MinZ = 2x_1 + 12x_2 + x_3 - OS_1 - OS_2 + OS_3 + MR_1 + MR_2$$
$$5x_1 + x_2 + 2x_3 - S_1 + R_1 = 15$$
$$2x_1 + x_2 + 3x_2 - S_2 + R_2 = 17$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + S_3 = 7$$

ويكون

$$P_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, P_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, P_{S1} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$P_{S2} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, P_{S3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, P_{R1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, P_{R2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 15 \\ 17 \\ 7 \end{bmatrix}$$

والحل الأولي كما في الجدول

CB	قاعدة الحل	B^{-1}	b^-	p_1
M	R_1	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 15 \\ 17 \\ 7 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$
M	R_2			
0	S_3			

$$\pi = CB.B^{-1} = (M, M, 0)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (M, M, 0)$$

$$\bar{C}_1 = C_1 - \pi P_1 = 2 - (M, M, 0)\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 - 7M$$

$$\bar{C}_2 = C_2 - \pi P_2 = 12 - (M, M, 0)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 12 - 2M$$

$$\bar{C}_3 = C_3 - \pi P_3 = 1 - (M, M, 0)\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 - 5M$$

$$\bar{C}_{S1} = C_{S1} - \pi P_{S1} = 0 - (M, M, 0)\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = M$$

$$\bar{C}_{S2} = C_{S1} - \pi P_{S2} = 0 - (M, M, 0)\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = M$$

وبالتالي سوف يدخل x_1 إلى القاعدة لنحسب النسبة الأصغرية

$$Min\left[{}^{15}\!/_{5}, {}^{17}\!/_{2}, {}^{7}\!/_{1}\right] = 3$$

وبالتالي نجد 5 هو عنصر الدوران الجديد ويخرج R_1 من القاعدة

الجدول الثاني: نحسب B^{-1} الجديدة

R_1

R_2

S_3

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \int \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/5 & 0 & 0 \\ -2/5 & 1 & 0 \\ -1/5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{b} = B^{-1}.b = \begin{bmatrix} 1/5 & 0 & 0 \\ -2/5 & 1 & 0 \\ -1/5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15 \\ 17 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 11 \\ 4 \end{bmatrix}$$

وبالتالي الجدول الجديد

CB	قاعدة الحل	B^{-1}	b^-	p_3
2	x_1	$\begin{bmatrix} 1/5 & 0 & 0 \\ -2/5 & 1 & 0 \\ -1/5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5/2 \\ 11/5 \\ 3/5 \end{bmatrix}$
M	R_2			
0	S_3			

$$\bar{\pi}_2 = CB.B^{-1} = (2, M, 0)\begin{bmatrix} 1/5 & 0 & 0 \\ -2/5 & 1 & 0 \\ -1/5 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (2/5 - 2/5, M, 0)$$

$$\bar{C}_2 = 12 - (2/5 - 2/5, M, M, 0)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 58/5 - 3/5\, M$$

$$\bar{C}_3 = 1 - (2/5 - 2/5\, M, M, 0)\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = 1/5 - 11/5\, M$$

$$\bar{C}_{S1} = 0 - (2/5 - 2/5\, M, M, 0)\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 2/5 - 2/5\, M$$

$$\bar{C}_{S2} = 0 - (2/5 - 2/5\, M, M, 0)\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = M$$

وبالتالي سوف يدخل x_3 لنحسب $\bar{p}_3$

$$\bar{p}_3 = B^{-1}.P_3 = \begin{bmatrix} 1/5 & 0 & 0 \\ -2/5 & 1 & 0 \\ -1/5 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/5 \\ 11/5 \\ 3/5 \end{bmatrix}$$

نحسب النسبة الأصغرية

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 11 \\ 4 \end{bmatrix} \div \begin{bmatrix} 2/5 \\ 11/5 \\ 3/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15/2 \\ 5 \\ 20/3 \end{bmatrix} \begin{matrix} x_1 \\ R_2 \\ S_3 \end{matrix}$$

وبالتالي سوف يخرج R_2 من القاعدة ويدخل x_3 عنصر الدوران $\left(11/5\right)$

الجدول الثالث: نحسب B^{-1}

$$\begin{bmatrix} 1/5 & 0 & 0 \\ -2/5 & 1 & 0 \\ -1/5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/5 \\ 11/5 \\ 3/5 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 3/11 & -2/11 & 0 \\ -2/11 & 5/11 & 0 \\ -1/11 & -3/11 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{b} = \begin{bmatrix} 3/11 & -2/11 & 0 \\ -2/11 & 5/11 & 0 \\ -1/11 & -3/11 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15 \\ 17 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

وبالتالي الجدول الجديد

CB	قاعدة الحل	B^{-1}			b^-
2	x_1	$3/11$	$-2/11$	0	1
1	x_3	$-2/11$	$5/11$	0	5
0	S_3	$-1/11$	$-3/11$	1	1

نحسب π

$$\pi = CB.B^{-1} = (2,1,0)\begin{bmatrix} 3/11 & -2/11 & 0 \\ -2/11 & 5/11 & 0 \\ -1/11 & -3/11 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\pi = (4/11, 1/11, 0)$$

$$\bar{C}_2 = 12 - (4/11, 1/11, 0)\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = 11$$

$$\bar{C}_{S1} = 0 - (4/11, 1/11, 0)\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 4/11$$

$$\bar{C}_{S2} = 0 - (4/11, 1/11, 0)\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = +1/11$$

ولا داعي لحساب $\bar{C}_{R1}$ $\bar{C}_{R2}$

والحل أمثل إذاً

$$x_1 = 1$$
$$x_3 = 5$$
$$S_3 = 1$$
$$x_2 = S_2 = S_1 = R_1 = R_2 = 0$$

$$MinZ = CB.\bar{b} = (2,1,0)\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} = 7$$

ملاحظة: لاحقاً سنعرف البرنامج الثنوي ونثبت أن (π) هو الحل الأمثل للبرنامج الثنوي.

مثال: ليكن لدينا البرنامج

$$MaxZ = 20x_1 + 18x_2 + 12x_3 + x_4 + x_5$$
$$6x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 \le 12$$
$$3x_1 + 3x_2 + 2x_2 + x_4 + 2x_5 \le 8$$
$$2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 \le 7$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_5 \le 3$$
$$x_i \ge 0 \qquad i = 1,.,....5$$

أوجد حل البرنامج باستخدام مقلوب المصفوفة.

الحل: نرد المسألة إلى الشكل القياسي

$$MaxZ = 20x_1 + 18x_2 + 12x_3 + x_4 + x_5 + OS_1 + OS_2 + OS_3 + OS_4$$
$$6x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 + S_1 = 12$$
$$3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 + S_2 = 8$$
$$2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 + S_3 = 7$$
$$x_i + x_2 + x_3 + x_4 - x_5 + S_4 = 3$$

الجدول الأول

CB	قاعدة الحل	B^{-1}	b	P_1
0	S_1	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	12	6
0	S_3		8	3
0	S_3		7	2
0	S_4		3	1

$$\pi = CB.B^{-1} = (0,0,0,0)$$

$$\bar{C}_1 = C_1 - \pi P_1 = 20$$

$$\bar{C}_2 = C_2 - \pi P_2 = 18$$

$$\bar{C}_3 = C_3 - \pi P_3 = 12$$

$$\bar{C}_4 = C_4 - \pi P_4 = 1$$

$$\bar{C}_5 = C_5 - \pi P_5 = 1$$

وعنصر الدوران 6 وبالتالي يخرج S_1 ويدخل x_1 إلى القاعدة.

الجدول الثاني

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \int \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/6 & 0 & 0 & 0 \\ -3/6 & 1 & 0 & 0 \\ -2/6 & 0 & 1 & 0 \\ -1/6 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{b} = B^{-1}.b = \begin{bmatrix} 1/6 & 0 & 0 & 0 \\ -3/6 & 1 & 0 & 0 \\ -2/6 & 0 & 1 & 0 \\ -1/6 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 \\ 8 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\pi = CB.B^{-1} = (20,0,0,0) \begin{bmatrix} 1/6 & 0 & 0 & 0 \\ -3/6 & 1 & 0 & 0 \\ -2/6 & 0 & 1 & 0 \\ -1/6 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (20/6,0,0,0)$$

$$\bar{C}_2 = 18 - (20/6, 0, 0, 0)\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 34/3$$

$$\bar{C}_3 = 12 - (20/6, 0, 0, 0)\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = -4/3$$

$$\bar{C}_4 = 1 - (20/6, 0, 0, 0)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = -14/6$$

$$\bar{C}_5 = 1 - (20/6, 0, 0, 0)\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = -1$$

وبالتالي x_2 سوف يدخل نحسب $\bar{p}_2$

$$\bar{p}_2 = B^{-1}.p_2 = \begin{bmatrix} 1/6 & 0 & 0 & 0 \\ -3/6 & 1 & 0 & 0 \\ -2/6 & 0 & 1 & 0 \\ -1/6 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 2 \\ 4/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}$$

وأصبح الجدول الجديد

CB	قاعدة الحل	B^{-1}	$\bar{b}$	P_2
20	x_1	$\begin{bmatrix} 1/6 & 0 & 0 & 0 \\ -3/6 & 1 & 0 & 0 \\ -4/6 & 0 & 1 & 0 \\ -1/6 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1/3 \\ 2 \\ 3/4 \\ 2/3 \end{bmatrix}$
0	S_2			
0	S_3			
0	S_4			

وبالتالي يخرج S_2 ويدخل x_2 حسب النسبة الأصغرية.

الجدول الثالث

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/4 & -1/6 & 0 & 0 \\ -1/4 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -4/6 & 1 & 0 \\ 0 & -2/6 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{b} = B^{-1}.b = \begin{bmatrix} 5/3 \\ 1 \\ 5/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$$

$$\pi = CB.B^{-1} = (20,18,0,0).B^{-1} = (1/2, 17/3, 0, 0)$$

$$\bar{C}_3 = 12 - (1/2, 17/3, 0, 0)\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = -4/3$$

$$\bar{C}_4 = 1 - (1/2, 17/3, 0, 0)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = -31/6$$

$$\bar{C}_5 = 1 - (1/2, 17/3, 0, 0)\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = -31/3$$

$$\bar{C}_{S1} = 0 - (1/2, 17/3, 0, 0)\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = -1/2$$

إذاً الحل الأمثل هو في الجدول الثالث

CB	قاعدة الحل	B^{-1}				$\bar{b}$
20	x_1	$1/4$	$-1/6$	0	0	$5/3$
18	x_2	$-1/4$	$1/2$	0	0	1
0	S_3	0	$-4/6$	1	0	$5/3$
	S_4	0	$-2/6$	0	1	$1/3$

$$MaxZ = (20,18,0,0)\begin{bmatrix} 5/3 \\ 1 \\ 5/3 \\ 1/3 \end{bmatrix} = 154/3$$

والحل الأمثل هو

$$x_1 = 5/3, \qquad S_3 = 5/3$$
$$x_2 = 1, \qquad S_4 = 1/3$$
$$x_3 = x_4 = x_5 = S_1 = S_2 = 0$$
$$MaxZ = 154/3$$

<u>مثال:</u> ليكن لدينا البرنامج

$$MinZ = x_1 + 10x_2 + 2x_3$$
$$4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 7$$
$$2x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 5$$
$$x_1 \leq 1$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

أوجد الحل الأمثل باستخدام مقلوب المصفوفة المختصرة.

$$p_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad p_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad p_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

نرد المعادلة إلى الشكل القياسي ثم باستخدام المتحولات الصناعية ليصبح لدينا قاعدة حل نافذة.

$$MinZ = x_1 + 10x_2 + 2x_3 - OS_1 - OS_2 + OS_3 + MR_1 + MR_3$$

$$4x_1 + 2x_2 + 3x_3 - S_1 + R_1 = 7$$

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 - S_2 + R_2 = 5$$

$$x_1 + S_3 = 1$$

$$R_1 = 7 \qquad R_2 = 5 \qquad S_3 = 1$$

والحل الأولي النافذ

$$CB(M, M, 0)$$

$$\pi = CB.B^{-1} = (M, M, 0).B^{-1} = (1/2, 17/3, 0, 0)$$

$$\bar{C}_1 = 1 - (M, M, 0)\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 - 6M$$

$$\bar{C}_2 = 10 - (M, M, 0)\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 10 - 3M$$

$$\bar{C}_3 = 1 - (M, M, 0)\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} = 1 - 6M$$

$$\bar{C}_{S1} = M$$

$$\bar{C}_{S2} = M$$

CB	قاعدة الحل	B^{-1}	$\bar{b}$	$\bar{p}_1$	$\bar{p}_3$
M M 0	R_1 R_2 S_3	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\Delta Z = (1)[1-6M] = 1-6M$$
$$\Delta Z = 5/3\,(1-6M) = 5/3 - 10M$$

إذاً سوف يدخل x_3 ويخرج R_2

الجدول الثاني

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \int \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{b} = B^{-1}.b \Rightarrow \bar{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5/3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

لنحسب $\bar{C}_S$

$$\pi_1 = CB.B^{-1} = (M,2,0)\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (M_1 - M + 2/3, 0)$$

$$\bar{C}_1 = 1 - (M_1 - M + 2/3, 0)\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = -1/3 - 2M$$

$$\bar{C}_2 = 10 - (M_1 - M + 2/3, 0)\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 28/3 - M$$

$$\bar{C}_{S1} = 0 - (M_1 - M + 2/3, 0)\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = M$$

$$\bar{C}_{S2} = 0 - (M_1 - M + 2/3, 0)\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = -M + 2/3$$

وبالتالي سوف نختار x_1 ليدخل القاعدة نحسب $\bar{p}_1$

$$\bar{p}_1 = B^{-1}.P_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2/3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

وأصبح الجدول الجديد

CB	قاعدة الحل	B^{-1}	$\bar{b}$	$\bar{p}_1$
M	R_1	$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 5/3 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 2/3 \\ 1 \end{bmatrix}$
2	x_3			
0	S_3			

تساوي النسب $\frac{2}{2} = 1$ $\quad\quad$ $\frac{1}{1} = 1$ سوف نختار عنصر الدوران (2) وليخرج R_1 من القاعدة ويدخل x_1

وبالتالي الجدول الثالث

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \int \begin{bmatrix} 2 \\ 2/3 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{b} = B^{-1}.b = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\pi = CB.B^{-1} = (1,2,0) \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} = (-1/6, 5/6, 0)$$

$$\bar{C}_2 = 10 - (-1/6, 5/6, 0) \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 9.5$$

$$\bar{C}_{S1} = 0 - (-1/6, 5/6, 0) \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = -1/6$$

$$\bar{C}_{S2} = 0 - (-1/6, 5/6, 0) \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = 5/6$$

لنحسب $\bar{P}_{S1}$

$$\bar{P}_{S1} = B^{-1}.P_{S1}$$

$$\bar{P}_1 = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -2/3 \\ -1/2 \end{bmatrix}$$

وأصبح الجدول

CB	قاعدة الحل	B^{-1}	$\bar{b}$	$\bar{p}_{S_1}$
1	x_1	$\begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1/2 \\ -2/3 \\ -1/2 \end{bmatrix}$
2	x_3			
0	S_3			

الجدول الجديد: سوف يخرج S_3 ويدخل S_1

ملاحظة: من الممكن اختيار S_1 بدلاً من (x_1) ولكن سوف يظهر جدول إضافي في هذه الحالة.

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1/3 & 0 & -4/3 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{b} = B^{-1}.b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ +1/3 & 0 & -4/3 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\pi = (1,2,0)\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/3 & 0 & -4/3 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} = (2/3, 0, \frac{-5}{3})$$

$$\bar{C}_2 = 10 - (2/3, 0, -5/3)\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 26/3$$

$$\bar{C}_{S2} = 0 - (2/3, 0, -5/3)\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$ يوجد حل بديل

$$\bar{C}_{S3} = 0 - (2/3, 0, -5/3)\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 5/3$$

والحل أمثل إذاً

CB	قاعدة الحل	B^{-1}	$\bar{b}$
1	x_1	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1/3 & 0 & -4/3 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
2	x_3		
0	S_3		

$x_1 = 1 \quad x_3 = 1 \quad S_1 = 0 \quad Minz = 3$

$x_2 = S_3 = S_2 = R_1 = R_3 = 0$

المبحث الثالث

طريقة النظرية الثنوية

البرنامج الثنوي

بفرض أنه لدينا البرنامج الخطي لمسألة التعظيم بالشكل القانوني

$$MaxZ = CX$$
$$AX \le b$$
$$X \ge 0$$

حيث C شعاع أمثال الهدف

A مصفوفة المعاملات

b شعاع الثوابت (لاحظ أننا لم نشترط أن يكون الشعاع b غير سالب)

X شعاع متحول القرار

نعرف المسألة الثنوية للمسألة السابقة كمايلي:

$$MinZ = Y.b$$
$$Y.A \ge C$$
$$Y \ge 0$$

حيث Y شعاع متحولات القرار للمسألة الثنوية وتكون عدد متحولات القرار مساويه لعدد القيود

نلاحظ أنه

1. مسألة التعظيم Max لها مسألة ثنوية هي مسألة التصغير Min والعكس صحيح.
2. ثوابت المسألة الأولية Max هي أمثال هدف المسألة الثنوية Min والعكس صحيح.
3. عدد متحولات المسألة الثنوية= عدد قيود المسألة الأولية والعكس صحيح.

وكتطبيق نجد المثال التالي:

مثال: ليكن لدينا البرنامج الخطي

$$\begin{aligned} MaxZ &= 21x_1 + 13x_2 - 2x_3 \\ & 5x_1 + 7x_2 + x_3 \le 18 \\ & 6x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 15 \\ & x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

اكتب المسألة الثنوية للبرنامج الأولي السابق.

الحل: بما أن المسألة الأولية القانونية وعدد القيود (2) وعدد شروط عدم السلبية إذاً البرنامج الثنوي له متحولي قرار هي y_1, y_2

ويكون

$$\begin{aligned} MinZ &= 18y_1 + 15y_2 \\ & 5y_1 + 6y_2 \ge 21 \\ & 7y_1 + 2y_2 \ge 13 \\ & y_1 + 2y_2 \ge -2 \\ & y_1, y_2 \ge 0 \end{aligned}$$

أمثال x_1 :

أمثال x_2 :

أمثال x_3 :

مثال: ليكن لدينا البرنامج الخطي

$$\begin{aligned} MinZ &= 5x_1 + 9x_2 + 10x_3 + x_4 \\ & 2x_1 + x_2 \ge 19 \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 \ge 22 \\ & -x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 \ge 35 \\ & x_i \ge 0 \end{aligned}$$

اكتب البرنامج الثنوي للمسألة الأولية السابقة.

الحل: بما أن المسألة الأولية بالشكل القانوني وعدد القيود (3) نستطيع القول إن المسألة الثنوية تحوي ثلاثة مجاهيل متحولات قرار هي y_1, y_2, y_3

$$MaxZ = 19y_1 + 22y_2 + 35y_3$$

$$2y_1 + y_2 - y_3 \le 5 \quad : \text{أمثال } x_1$$

$$y_1 + 2y_2 + y_3 \le 9 \quad : \text{أمثال } x_2$$

$$y_2 + y_3 \le 10 \quad : \text{أمثال } x_3$$

$$4y_3 \le 1 \quad : \text{أمثال } x_4$$

$$y_1, y_2, y_3 \ge 0$$

كيفية كتابة البرنامج الثنوي بشكل عام

إن المسألة الأولية بشكل عام ليست على الشكل القانوني، لذلك لابد من طريقة لكتابة البرنامج الثنوي ولكتابة البرنامج الثنوي نعتمد مايلي: بعد أن تكون جميع المتحولات غير سالبة:

1. تحويل المسألة إلى الشكل بمساواة بإضافة متحولات راكدة وفائضة فقط وقيود عدم السلبية.
2. أمثال تابع الهدف في المسألة الأولية تكون ثوابت المسألة الثنوية.
3. ثوابت المسألة الأولية أمثال هدف المسألة الثنوية.
4. نكتب متراجحات البرنامج الثنوي بالشكل القانوني.

حيث متراجحات *Max* هي من نوع أصغر أو يساوي ومتراجحات *Min* من نوع أكبر أو يساوي وإليك المثال التالي:

مثال: ليكن لدينا البرنامج

$$MaxZ = 12x_1 + 11x_2 + 10x_3$$
$$2x_1 + x_2 - x_3 \le 15$$
$$3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 18$$
$$x_1 + x_2 + x_3 \ge 20$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

اكتب البرنامج الثنوي للمسألة الأولية السابقة

الحل: بما أن قيود عدم السلبية متوافرة نكتب البرنامج السابق بشكل مساواة

$$MaxZ = 12x_1 + 11x_2 + 10x_3$$
$$2x_1 + x_2 - x_3 + S_1 = 15$$
$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 18$$
$$x_1 + x_2 + x_3 - S_2 = 20$$
$$x_1, x_2, x_3, s_1, s_2 \ge 0$$

إن المسألة الثنوية هي Min، ولديها ثلاث متحولات قرار هي y_1, y_2, y_3 ونكتب

$$MinZ = 15y_1 + 18y_2 + 20y_3$$

أمثال x_1 : $2y_1 + 3y_2 + y_3 \ge 12$

أمثال x_2 : $y_1 + 2y_2 + y_3 \ge 11$

أمثال x_3 : $-y_1 + y_2 + y_3 \ge 10$

أمثال S_1 : $y_1 \ge 0$

أمثال S_2 : $-y_3 \ge 0$

ونلاحظ أن y_3 لم تظهر له إشارة إذاً فهو مقيد بالإشارة، وبالتالي أصبح البرنامج الخطي الثنوي له الشكل

$$MinZ = 15y_1 + 18y_2 + 20y_3$$
$$2y_1 + 3y_2 + y_3 \geq 12$$
$$y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 11$$
$$-y_1 + y_2 + y_3 \geq 10$$
$$y_1 \geq 0 \qquad y_2 \qquad \text{غيرمقيد} \qquad {}'_3 \leq 0$$

مثال: ليكن لدينا البرنامج

$$MaxZ = 6x_1 + 2x_2 + x_3$$
$$4x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10$$
$$2x_1 + 3x_2 _ x_3 \leq 12$$
$$5x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 8$$
$$x_1 \geq 0 \qquad x_2 \leq 0 \qquad x_3 \qquad \text{غير مقيد}$$

اكتب البرنامج الثنوي للمسألة الأولية السابقة.

الحل: إن البرنامج السابق لا يحقق شروط عدم السلبية لذلك نضع

$$x_2 = -x_2^{\backslash}$$
$$x_3 = x_3^{\backslash} - x_3^{\backslash\backslash}$$

وبالتالي يصبح البرنامج له الشكل

$$MaxZ = 6x_1 - 2x_2^{\backslash} + x_3^{\backslash} - x_3^{\backslash\backslash}$$
$$4x_1 - 2x_2^{\backslash} + x_3^{\backslash} + x_3^{\backslash\backslash} \leq 10$$
$$2x_1 - 3x_2^{\backslash} _ x_3^{\backslash} + x_3^{\backslash\backslash} \leq 12$$
$$5x_1 + x_2^{\backslash} + 2x_3^{\backslash} - 2x_3^{\backslash\backslash} \geq 8$$
$$x_1, x_2^{\backslash}, x_3^{\backslash}, x_3^{\backslash\backslash} \geq 0$$

الآن تحول البرنامج إلى الشكل القياسي.

$$MaxZ = 6x_1 - 2x_2^{\backprime} + x_3^{\backprime} - x_3^{\backprime\backprime}$$
$$4x_1 - 2x_2^{\backprime} + x_3^{\backprime} + x_3^{\backprime\backprime} + S_1 = 10$$
$$2x_1 - 3x_2^{\backprime} _ x_3^{\backprime} + x_3^{\backprime\backprime} + S_2 = 12$$
$$5x_1 + x_2^{\backprime} + 2x_3^{\backprime} - 2x_3^{\backprime\backprime} - S_3 = 8$$
$$x_1, x_2^{\backprime}, x_3^{\backprime}, x_3^{\backprime\backprime}, S_1, S_2, S_3 \geq 0$$

إن لبرنامج المسألة الثنوية ثلاثة متحولات قرار هي y_1, y_2, y_3

وبالتالي نكتب البرنامج الثنوي كمايلي:

$$MinZ = 10y_1 + 12y_2 + 8y_3$$
$$4y_1 + 2y_2 + 5y_3 \geq 6$$
$$-2y_1 - 3y_2 + y_3^{\backprime} \geq -2$$
$$y_1 - y_2 + 2y_3 \geq +1$$
$$-y_1 + y_2 - 2y_3 \geq -1$$
$$y_1 \geq 0$$
$$y_2 \geq 0$$
$$-y_3 \geq 0$$

أمثال x_1

أمثال $x_2^{\backprime}$

أمثال $x_3^{\backprime}$

أمثال $x^{\backprime\backprime}$

أمثال ٢

أمثال ٢

أمثال S_3

بملاحظة القيدين للأمثال $x_3^{\backprime}, x_3^{\backprime\backprime}$ نجد بضرب قيد $x_3^{\backprime\backprime}$ أن $y_1 - y_2 - 2y_3 \leq 1$

إذاً نستطيع كتابة القيدين على الشكل $y_1 - y_2 + 2y_3 = 1$

أما قيد أمثال $x_1^{\backprime}$ فنضرب بالإشارة (-1) فنجد $2y_1 + 3y_2 - y_3 \leq 2$

إذاً البرنامج الثنوي كمايلي

$$MinZ = 10y_1 + 12y_2 + 8y_3$$
$$4y_1 + 2y_2 + 5y_3 \geq 6$$
$$2y_1 - 3y_2 - y_3^{\backprime} \geq 2$$
$$y_1 - y_2 + 2y_3 = +1$$
$$y_1 \geq 0 \qquad y_2 \geq 0 \qquad y_3 \leq 0$$

مثال: ليكن لدينا البرنامج الخطي

$$MinZ = 20x_1 + 16x_2$$
$$3x_1 + 4x_2 \geq 15$$
$$2x_1 - 3x_2 \leq 17$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 13$$
$$2x_1 - x_2 = 3$$
$$x_1 \leq 0 \qquad x_2 \geq 0$$

اكتب البرنامج الثنوي

الحل: نلاحظ أن $x_1 \leq 0$ إذاً لا يحق شرط عدم السلبية وبالتالي نضع

$$x_1 = -x_1^{\backslash}$$

وبالتالي يصبح البرنامج الأولي على الشكل بعد إضافة البرنامج الأولي على الشكل (بعد إضافة متحولات راكدة وفائضة)

$$MinZ = 20x_1^{\backslash} + 16x_2$$
$$-3x_1^{\backslash} + 4x_2 - S_1 = 15$$
$$-2x_1^{\backslash} + 3x_2 + S_2 = 17$$
$$-x_1^{\backslash} + 2x_2 + S_3 = 13$$
$$-2x_1^{\backslash} - x_2 = 3$$
$$x_1^{\backslash}, x_2, S_1, S_2, S_3 \geq 0$$

وبالتالي نجد البرنامج الثنوي « حيث له أربع متحولات قرار y_1, y_2, y_3, y_4 »

$$MaxZ = 15y_1 + 17y_2 + 13y_3 + 3y_4$$

$-3y_1 - 2y_2 - y_3 - 2y_4 \leq -20$	أمثال $x_1^{\backslash}$
$4y_1 + 3y_2 + 2y_3 - y_4 \leq 16$	أمثال x_2
$y_1 \geq 0 \quad \Leftarrow -y_1 \leq 0$	أمثال S_1
$y_2 \leq 0$	أمثال S_2
$y_3 \leq 0$	أمثال S_3

ولم تظهر إشارة y_4 إذاً فهو غير مقيد.

نضرب القيد الأول بـ (-1) ونغير جهة المتراجحة؛ وبالتالي يصبح البرنامج الثنوي

$$MaxZ = 15y_1 + 17y_2 + 13y_3 + 3y_4$$

$$3y_1 + 2y_2 + y_3 + 2y_4 \geq 20$$

$$4y_1 + 3y_2 + 2y_3 - y_4 \leq 16$$

$$y_1 \geq 0$$

$$y_2 \leq 0$$

$$y_3 \leq 0$$

$$y_4 \quad \text{غير مقيد}$$

<u>ملاحظة:</u> بفرض البرنامج السابق هي المسألة الأولية، اكتب البرنامج الثنوي لها واستنتج أن ثنوي البرنامج الثنوي هو البرنامج الأولي.

ويمكن تلخيص ما سلف في الجدول التالي:

المسألة الأولية Max (ثنوية)		المسألة الثنوية Min (الأولية)
1. القيد قانوني $\sum oijxj \leq bi$	$\Leftrightarrow$	المتحول الثنوي $yi \geq 0$
2. القيد له الشكل $\sum oijxj = bi$	$\Leftrightarrow$	المتحول الثنوي yi غير مقيد بالإشارة
3. القيد له الشكل $\sum oijxj \geq bi$	$\Leftrightarrow$	المتحول الثنوي $yi \leq 0$
4. المتحول $XJ \geq 0$ يحقق شرط عدم السلبية	$\Leftrightarrow$	مقيد له الشكل القانوني $\sum oijYI \geq CJ$
5- المتحول $XJ \leq 0$	$\Leftrightarrow$	قيد له الشكل $\sum oijyi \leq CJ$
6. المتحول XS غير مقيد بالإشارة	$\Leftrightarrow$	قيد له الشكل $\sum oijyi = CJ$

ويمكن عكس الآية.

وكمثال: اكتب البرنامج الثنوي للبرنامج الأولي

$$MinZ = 9x_1 + 6x_2 + 3x_3$$
$$2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 11$$
$$5x_1 - x_2 + 3x_3 \le 12$$
$$6x_1 + 7x_2 + x_3 \ge 25$$
$$x_1 \ge 0 \qquad x_2 \quad \text{غير مقيد}$$

الحل: البرنامج الثنوي مباشرة بعد الاطلاع على الجدول

$$MaxZ = 11y_1 + 5y_2 + 6y_3 \le 9$$

أمثال x_2 بما أن x_2 غير مقيد فإن قيده مساواة.

$$4y_1 - y_2 + 7y_3 = 6$$

أمثال x_3 بما أن $x_3 \le 0$ لا يحقق شرط عدم السلبية فقيده عكس القانوني (لـ Max)

$$3y_1 + 3y_2 + y_3 \ge 3$$

<u>شروط المتحولات الثنوية</u>

1. نلاحظ أن القيد الأول في البرنامج الأولي مساواه إذاً y_1 غير مقيد
2. نلاحظ ن القيد الثاني غير قانوني في البرنامج الأولي إذاً $y_2 \le 0$
3. نلاحظ أن القيد الثالث قانوني إذاً $y_3 \ge 0$

وبالتالي أصبح البرنامج الثنوي

$$MaxZ = 11y_1 + 12y_2 + 25y_3$$
$$2y_1 + 5y_2 + 6y_3 \le 9$$
$$4y_1 - y_2 + 7y_3 = 6$$
$$3y_1 + 3y_3 + y_3 \ge 3$$
$$\text{غير مقيد} \qquad y_2 \le 0 \qquad y_3 \ge 0$$

مثال: ليكن لدينا البرنامج الخطي

$$MaxZ = 40x_1 + 35x_2$$
$$2x_1 + 3x_2 \le 10$$
$$2x_1 + 3x_2 = 8$$
$$6x_1 + 7x_2 \le 22$$
$$x_1 \ge 0 \qquad x_2 \ge 0$$

أكتب البرنامج الثنوي للمسألة الأولية السابقة

الحل:

$$MinZ = 10y_1 + 8y_2 + 22y_3$$
$$2y_1 + 2y_2 + 693y_3 \ge 40$$
$$3y_1 + 3y_3 + 7y_3 \ge 35$$
$$y_1 \ge 0 \qquad y_2 \quad \text{غير مقيد} \quad 0$$

ملاحظة: إن البرنامج الثنوي له أسماء أخرى في بعض المراجع نذكر منها:

البرنامج المرافق.

البرنامج المقابل.

البرنامج الظل.

مبرهنات مهمة في البرامج الأولية والثنوية

ليكن لدينا البرنامج الأولي لمسألة التعظيم

$$MaxZ = CX$$
$$AX \le b$$
$$x \ge 0$$

والبرنامج الثنوي

$$MinZ = Yb$$
$$YA \geq C$$
$$Y \geq 0$$

مبرهنة الثنوية الضعيفة:

بفرض أن X^0 حل نافذ للبرنامج الأولي وكان Y^0 حل نافذ للمسألة الثنوية أعلاه عندئذ

$$Y^0 b \geq CX^0$$

أي أن قيمة الهدف لتابع Max أصغر أو تساوي قيمة الهدف لتابع Min مهما يكن الحل النافذ لمسألة التعظيم والتصغير

البرهان:

لدينا من أجل الحل النافذ X^0 العلاقة التالية محقق

$$AX^0 \leq b$$

نضرب بـ Y^0 فنجد

$$Y^0 AX^0 \leq Y^0 b \qquad (1)$$

ولدينا العلاقة التالية من أجل البرنامج الثنوي والحل النافذ Y^0

$$Y^0 A \geq C$$

نضرب المتراجحة بـ X^0 فنجد

$$Y^0 AX^0 \geq CX^0 \qquad (2)$$

من (1) و(2) نجد

$$Y^0 b \geq Y^0 AX^0 \geq CX^0$$

إذاً $Y^0 b \geq CX^0$ وهو المطلوب

<u>نتائج مهمة:</u>

1. إذا كان لدينا مسألة تعظيم ولها حل نافذ، فإن قيمة تابع الهدف لمسألة التعظيم بالنسبة للحل النافذ يكون حداً أدنى للحل الأمثل لمسألة التصغير (Min) الثنوية.

2. إذا كان لدينا مسألة تصغير (Min) ولها حل نافذ، فإن قيمة الهدف لمسألة التصغير بالنسبة لهذا الحل النافذ يكون حداً أعلى للحل الأمثل في مسألة التعظيم الثنوية.

3. إذا وجد حل غير محدود لمسألة التعظيم، فإنه ليس لمسألة التصغير أي حل نافذ للمسألة الثنوية والعكس صحيح.

4. إذا كان لكل من المسألة الأولية والمسألة الثنوية حلول نافذة، فإنه يوجد حل أمثل لكل مسألة لتوضيح ذلك:

مثال: ليكن لدينا البرنامج

$$\begin{aligned} MaxZ &= 20x_1 + 12x_2 + x_3 \\ & 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \le 15 \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 \le 8 \\ & x_i \ge 0 \end{aligned}$$

وبفرض أنه لهذه المسألة الحل النافذ $x_3 = 3 \qquad x_2 = 0 \qquad x_1 = 5$

عندئذ قيمة تابع الهدف

$Z = 101$ وبالتالي فإن الحل الأمثل (إن وجد) للمسألة الثنوية يكون أكبر من القيمة (101).

مبرهنة: معيار الأمثلة

بفرض أنه لدينا X^0 حل لمسألة التعظيم و Y^0 حل نافذ لمسألة التصغير بحيث إن التوابع المستهدفة متساوية، عندئذ فإن هذه الحلول هي حلول مثلى.

الاثبات: نحن نعلم أنه أي حل نافذ X لمسألة التعظيم يحقق

$$CX \le Y^0 b$$

وكون $Y^0 b = CX^0$ نجد

$$CX \le CX^0$$

وبالتالي مهما يكن الحل النافذ (X)، فإن قيمة هدفه أقل من قيمة CX^0 وبالتالي X^0 حل أمثل.

وبشكل مشابه نبرهن أن Y^0 حل أمثل.

مبرهنة: مبرهنة الثنوية الرئيسية:

إذا كانت كل من المسألتين الأولية والثنوية حلولاً نافذة، فإن لكلا المسألتين حلولاً مثلى متساوية في قيمة التوابع المستهدفة، أي إن $MaxZ = MinW$

البرهان:

إذا كانت لكل مسألة الأولية والثانوية حلولاً نافذة بحسب مبرهنة الثنوية الضعيفة ونتائجها، نجد أن لكل برنامج حلاً أمثل، إلا أن الجزء الصعب من البرهان إثبات تساوي التوابع المستهدفة عند الحلول المثلى، لذلك سوف نحذفه ونكتفي بتطبيق نتائجه.

مبرهنة: مبرهنة الفضفضة المتممة

ليكن لدينا البرنامج الأولي

$$MaxZ = CX$$
$$AX \le b$$
$$x \ge 0$$

والبرنامج الثنوي

$$MinW = Yb$$
$$YA \ge C$$
$$Y \ge 0$$

وبفرض Y^0, X^0 حلين نافذين « مقبولين» للبرنامجين الأولي والثنوي عندئذ فإنه يكون Y^0, X^0 حلين أمثلين للبرنامج الأولي والثنوي على الترتيب إذا وفقط إذا تحقق

$$\left(Y^0A-C\right)X^0+Y^0\left(b-AX^0\right)=0$$

الإثبات: بفرض أننا أضفنا متحولات راكده وفائضة إلى البرنامج الأولي، ولنرمز له بالشعاع S^0 وبفرض أننا أضفنا متحولات راكدة وفائضة إلى البرنامج الثنوي ولنرمز لها بالشعاع V^0 عندئذ نجد

$$AX^0+S^0=b$$

$$Y^0A-V^0=C$$

بضرب المعادلة الأولى Y^0 من اليسار وضرب الثانية بـ X^0 من اليمين نجد

$$Y^0AX^0+Y^0S^0=Y^0b \qquad (1)$$

$$Y^0AX^0-Y^0X^0=CX^0 \qquad (2)$$

بالطرح نجد

$$Y^0S^0+V^0X^0=Y^0b-CX^0$$

وبالتالي سوف يصبح الشرط اللازم والكافي هو $Y^0S^0+V^0X^0=0$

1. وكون المسألة صحيحة والحلول مثلى نجد $CX^0=Y^0b$

لدينا العلاقة الأصلية

$$\left(Y^0A-C\right)X^0+Y^0\left(b-AX^0\right)\Rightarrow$$

$$=Y^0AX^0-CX^0+Y^0b-Y^0AX^0$$

إذاً

$$YAX^0-Y^0AX^0=0$$

ومحققة

2. إذا تحقق الشرط سوف نبرهن أن $Y^0.X^0$ حلول مثلى.

لدينا $Y^0S^0+V^0X^0=Y^0b-CX^0$

وكون الطرف الأيمن معدوماً إذاً:

$$Y^0 b = CX^0$$

وبالتالي حل أمثل إذاً نجد من المعادلتين

$$Y^0 AX^0 + Y^0 S^0 = Y^0 b$$
$$Y^0 AX^0 - V^0 X^0 = CX^0$$

$$Y^0 S^0 = Y^0 b - Y^0 AX^0 \Rightarrow Y^0 S^0 = Y^0 (b - AX^0)$$
$$V^0 X^0 = Y^0 AX^0 - CX^0 \Rightarrow V^0 X^0 = \left(Y^0 A - C\right)X^0$$

وبالجمع نجد

$$Y^0 \left(b - AX^0\right) + \left(Y^0 A - C\right)X^0 = Y^0 S^0 + V^0 X^0$$

وكون

$$Y^0 S^0 + V^0 X^0 = 0$$

إذاً العلاقة محققة.

<u>نتيجة مهمة:</u>

الشرط اللازم والكافي كي يكون $Y^0 . X^0$ حلولاً مثلى للبرنامج الأولي والثنوي على الترتيب هو $V^0 X^0 + Y^0 S^0 = 0$

وكون جميع المتحولات غير سالبة إذاً يؤل الشرط إلى الشكل

$$V^0 X^0 = 0$$
$$Y^0 S^0 = 0$$

ملاحظة: تطبق المبرهنات(1. 2. 3. 4) على جميع البرامج الخطية ذات القيود المختلطة أيضاً، ويمكن البرهان على ذلك برد المتحولات إلى شروط عدم السلبية والمتراجحات الى متراجحات قانونية.

<u>الطريقة الثنوية لإيجاد حل البرنامج الخطي:</u>

تستخدم الطريقة الثنوية لحل البرامج وذلك بإيجاد الحل الأمثل للبرنامج الثنوي ثم استنتاج الحل الأمثل للبرنامج الأولي وكمثال عليها سوف نذكر:

ليكن لدينا البرنامج

$$MaxZ = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4$$
$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 \le 20$$
$$2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 \le 20$$
$$x_i \ge 0$$

أوجد حل البرنامج باستخدام الطريقة الثنوية.

الحل: نكتب البرنامج الثنوي

$$MinZ = 20y_1 + 20y_2$$
$$y_1 + 2y_2 \ge 1$$
$$2y_1 + y_2 \ge 2$$
$$2y_1 + y_2 \ge 3$$
$$3y_1 + 2y_2 \ge 4$$
$$y_1, y_2 \ge 0$$

نلاحظ أن البرنامج الثنوي خطي بمتحولين نحله وفق الطريقة البيانية ونجد الحلول له:

$$y_1 = 1.2$$
$$2y_1 = 0.2$$
$$MinW = 28$$

نكتب البرنامج الثنوي بدلالة متحولات الفائضة

$$y_1 + 2y_2 - v_1 = 1$$
$$2y_1 + y_2 - v_2 = 2$$
$$2y_1 + 3y_2 - v_3 = 3$$
$$3y_1 + 2y_2 - v_4 = 4$$

ونعوض القيم $y_1 = 1.2$ $y_2 = 0.2$ فنجد

$$v_1 = 0.6 \qquad v_2 = 0.6 \qquad v_3 = 0 \qquad v_4 = 0$$

البرنامج الأولي نكتبه على الشكل

$$(1) \qquad x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 + S_1 = 20$$
$$(2) \qquad 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 + S_2 = 20$$

وحيث شرط الفضفضة

$$x_1 \quad v_1 = 0 \qquad S_1 \quad y_1 = 0$$
$$x_2 \quad v_2 = 0 \qquad S_2 \quad y_2 = 0$$
$$x_3 \quad v_3 = 0$$
$$x_4 \quad v_4 = 0$$

نلاحظ

$$v_1 = 0.6 \Rightarrow \qquad x_1.v_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$
$$v_2 = 0.6 \Rightarrow \qquad x_2.v_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 0$$

$$y_1 = 1.2 \Rightarrow S_1.y_1 = 0 \Rightarrow S_1 = 0$$
$$y_2 = 0.2 \Rightarrow S_2.y_2 = 0 \Rightarrow S_2 = 0$$

ولكن لا نستطيع أن نعلم شيئاً عن x_3, x_4 لنعوض بالقيود للبرنامج الأولي (1) . (2)

$$2x_3 + 4x_4 = 20$$
$$3x_3 + 2x_4 = 20$$

وبحل جملة المعادلتين نجد

$$x_3 = 5 \qquad x_4 = 2.5$$

إذاً حل البرنامج الأولي $x_4 = 2.5 \qquad x_3 = 5 \qquad x_1 = x_2 = 0$

وعند التعويض نجد $MaxZ = 28$

نتيجة: إذا كان لدينا البرنامج

$$MaxZ = CX$$
$$AX = b$$
$$x \geq 0$$

فكان البرنامج الثنوي

$$MinW = yb$$
$$yA \geq C$$
$$y \geq 0$$

فإن شرط الفضفضة يصبح

$$(YA - C)X = 0$$
$$(b - AX)Y = 0 \qquad \Leftarrow b - AX = 0 \text{ لأن}$$

<u>مثال:</u> ليكن لدينا البرنامج

$$MaxZ = x_1 + 4x_2 + 3x_3$$
$$2x_1 + 3x_2 - 5x_3 \leq 2$$
$$3x_1 - x_2 + 6x_3 \geq 1$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 4$$

$x_1 \geq 0 \qquad x_2 \leq 0 \qquad x_3$ غير مقيد

وبفرض أن الحل الأمثل هو $x_3 = 4 \qquad x_1 = x_2 = 0$

أي $X^0 = (0,0,4)$ حل أمثل.

<u>المطلوب:</u>

1. اكتب البرنامج الثنوي.
2. استنتج الحل الأمثل للبرنامج الثنوي.

الحل: 1. إن البرنامج الثنوي هو

$$MinZ = 2y_1 + 1y_2 + 4y_3$$
$$2y_1 + 3y_2 + y_3 \geq 1$$
$$3y_1 - y_2 + y_3 \leq 4$$
$$-5y_1 + 6y_2 + y_3 = 3$$

$y_1 \geq 0$ $y_2 \leq 0$ y_3 غير مقيد

2. نلاحظ شروط الفضفضة

$$y_1.S_1 = 0 \qquad x_1.v_1 = 0$$
$$y_2.S_2 = 0 \qquad x_2.v_2 = 0$$

أما القيود الثلاثة فهي محققة تلقائياً.

لنوجد S_1, S_2 بالتعويض بالبرنامج الأولي

$$2x_1 + 3x_2 - 5x_3 - S_1 = 2$$

نعوض $x_3 = 4$ $x_1 = x_2 = 0$

$$-5(4) + S_1 = 2 \Rightarrow S_1 = +22$$

وبشكل مشابه للقيد الثاني نجد $S_2 = 23$

إذاً وبما أن $y_1.S_1 = 0$ فإنه $y_1 = 0$

$y_2S_2 = 0$ فإنه $y_2 = 0$

وبالتالي نعوض بالقيد الثالث في البرنامج الثنوي

$$-5y_1 + 6y_2 + y_3 = 3 \Rightarrow$$
$$y_3 = 3$$

والحل الأمثل للبرنامج الثنوي

$$y_1 = y_2 = 0 \qquad y_3 = 3$$

وقيمه دالة الهدف

$$MaxZ = MinW = 12$$

مثال: ليكن لدينا البرنامج

$$MinZ = x_1 + 4x_2 + 3x_4$$
$$x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 \geq 3$$
$$-2x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 \geq 2$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 12$$
$$x_i \geq 0$$

والحل الأمثل هو

$$x_1 = 7 \qquad x_3 = 4 \qquad x_2 = x_4 = 0$$

أوجد الحل الأمثل للمسألة الثنوية

الحل: البرنامج الثنوي

$$MaxZ = 3y_1 + 2y_2 + 11y_3$$
$$y_1 - 2y_2 + y_3 \leq 1$$
$$2y_1 - y_2 + y_3 \leq 4$$
$$-y_1 + 4y_2 + y_3 \leq 0$$
$$y_1 + y_2 + y_3 \leq 3$$
$$y_1, y_2 \geq 0 \qquad y_3 \leq 0$$

وشروط الفضفضة هي

$$y_1.S_1 = 0 \qquad x_1.v_1 = 0$$
$$y_2S_2 = 0 \qquad x_2.v_2 = 0$$
$$y_3.S_3 = 0 \qquad x_3.v_3 = 0$$
$$x_3.v_3 = 0$$

لنوجد S_1 من البرنامج الأولي

$$S_1 = 0$$
$$S_2 = 0$$

لا نستفيد شيئاً من شروط الفضفضة $y_1.S_1 = 0$ $y_2S_2 = 0$

$$S_3 = 1 \Rightarrow y_3 = 0$$

لنوجد v_1 v_2 v_3 v_4

$$x_1 = 7 \Rightarrow v_1 = 0$$
$$x_3 = 4 \Rightarrow v_3 = 0$$
$$y_1 - 2y_2 + y_3 = 1$$
$$2y_1 - y_2 + y_3 + v_2 = 4$$
$$-y_1 + 4y_2 + y_3 = 0$$
$$y_1 + y_2 + y_3 + v_4 = 3$$

ولدينا أربع معادلات بخمسة مجاهيل.

وبتعويض $y_3 = 0$ نجد أربع معادلات بأربعة مجاهيل يطلب من الطالب حلها

$$y_1 = 2 \qquad y_2 = 1/2 \qquad MinZ = MaxZ = 7$$

مثال: ليكن لدينا البرنامج

$$MinZ = 3x_1 + x_2 + x_3$$
$$x_1 - 2x_2 + x_3 \le 11$$
$$-4x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 3$$
$$-2x_1 + x_3 = 1$$
$$x_1, x_3 \ge 0 \qquad x_2$$ غير مقيد

وجد الحل الأمثل $x_3 = 6$ $x_2 = 1$ $x_1 = 4$

اكتب البرنامج المقابل «الثنوي» واستنتج حل البرنامج الثنوي الحل:

$$MaxZ = 11y_1 + 3y_2 + y_3$$
$$y_1 - 4y_2 - 2y_3 \le -3$$
$$-2y_1 + y_2 = 1$$
$$y_1 + 2y_2 + y_3 \le 1$$
$$y_1 \le 0 \qquad y_2 \ge 0 \qquad y_3$$ غير مقيد

وشروط الفضفضة هي

$$y_1.S_1 = 0$$
$$y_2.S_2 = 0 \qquad x_1.v_1 = 0$$
$$x_3.v_3 = 0$$

ومن البرنامج الأولي نجد

$$S_1 = 0$$
$$S_2 = 0$$
$$v_1 = 0$$
$$v_2 = 0$$

ومن الثنوي نجد

وبالتالي أصبح لدينا المعادلات

$$y_1 - 4y_2 - 2y_3 = -3$$
$$-2y_1 + y_2 = 1$$
$$y_1 + 2y_2 + y_3 = 1$$

بالحل نجد

$$y_1 = -1/3$$
$$y_2 = 1/3$$
$$y_3 = 2/3$$

وتابع الهدف بالتعويض نجد $MaxZ = MinZ = -2$

المبحث الرابع

طريقة قاعدة الحل النافذ الثنوي

لنفرض أنه لدينا البرنامج الخطي بالشكل القياسي:

$$MinZ = CX$$
$$AX = b$$
$$x \geq 0$$

نستخدم هذه الطريقة عندما يكون سطر $\bar{c}$ غير سالب.

وبفرض أنه يوجد في الثوابت b سالب عندئذ نعتمد على النسبة التالية:

$$Max\left(\frac{\bar{C}\,J}{\alpha ij}\right)$$

ونحدد من هذه النسبة عنصر الدوران $\alpha ij\langle 0$ ، وبالتالي المتحول الخارج من قاعدة الحل والمتحول الداخل إلى قاعدة الحل.

حيث إن هذه النسبة إذا كان سطر $\bar{C}$ غير سالب فهو حل نافذ ثنوي يبقى نافذاً ثنوياً، ويتحسن الحل الثنوي وبالتالي إذا كان للمسألة حل أمثل فسوف نصل إليه، وكون الحل الأمثل الثنوي يساوي الحل الأمثل للمسألة الأولية إذاً نكون وصلنا إلى الحل الأمثل للمسألة الأولية.

وسوف يتم شرح هذه الطريقة بمثال ليتسنى فهم هذه الطريقة.

ملاحظة: قبل البدء بشرح هذه الطريقة نستخدم عادة لإيجاد حل نافذ متحولات صناعية (R)، ولكن في طريقة الحل الثنوي لا داعي للمتحولات الصناعية كما سوف نرى وهذا ما يميز هذه الطريقة.

مثال: ليكن لدينا البرنامج

$$MinZ = x_1 + 4x_2 + 3x_4$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \geq 3$$
$$-2x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 \geq 2$$
$$x_i \geq 0$$

أوجد الحل الأمثل باستخدام الحل النافذ الثنوي.

الحل: نحول المسألة إلى الشكل القياسي فتصبح لدينا

$$MinZ = x_1 + 4x_2 + 3x_3 + OS_1 + OS_2$$
$$x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - S_1 = 3$$
$$-2x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 - S_2 = 2$$

نضرب ب(-1) نحصل على S_1, S_2 متحولين أساسيين ضمن القاعدة فيصبح البرنامج

$$MinZ = x_1 + 4x_2 + 3x_4 + OS_1 + OS_2$$
$$-x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + S_1 = -3$$
$$+2x_1 + x_2 - 4x_3 - x_4 + S_2 = -2$$

وبالتالي نجد الجدول الأول

	CJ	1	4	0	3	0	0	
CB	قاعدة الحل	x_1	x_2	x_3	x_4	S_1	S_2	b
0	S_1	1−	2−	1	1−	1	0	3−
0	S_2	2	1	4−	1−	0	1	−2
	$\bar{C}$	1	4	0	3	0	0	Z = 0

نلاحظ أن الحل الأولي بالنسبة للمسألة الأولية غير مقبول لأنه سالب نلاحظ أن سطر $\bar{C}$ لا يحوي نسباً سالبة؛ وبالتالي هو حل نافذ ثنوي حيث $y_1 = y_2 = 0$ نشكل النسب حسب القيمة الأكثر سلبية (-3) ومن سطره

متحولات غير اساسية	CJ	$ais(\leq 0)$	النسبة $\left(\frac{\bar{C}J}{ais}\right)$
x_1	1	-1	-1
x_2	4	-2	-2
x_4	3	-1	-3

$$\Rightarrow Max\frac{\bar{C}J}{ais} = -1$$

وبالتالي يخرج S_1 من القاعدة ويدخل x_1 ويصبح الجدول الثاني

	CJ	1	4	0	3	0	0	
CB	قاعدة الحل	x_1	x_2	x_3	x_4	S_1	S_2	b
1	x_1	1	2	-1	1	-1	0	3
0	S_2	0	-3	-2	-3	2	1	-8
	$\bar{C}$	0	2	1	2	1	0	$Z=3$

بقي حل المسألة الأولية غير مقبول لأنه $S_2 = -8$ سالب ولكن الثنوي حله مقبول ويجب أن نحسن الحل على سطر S_2

$$Max\left[-\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}\right] = -\frac{1}{2}$$

وبالتالي عنصر الدوران هو 2−

ويخرج من القاعدة S_2 ويدخل x_3 بدلاً منه وبالتالي يصبح الجدول

	CJ	1	4	0	3	0	0	
CB	قاعدة الحل	x_1	x_2	x_3	x_4	S_1	S_2	b
1	x_1	1	$7/2$	0	$5/2$	2−	$-1/2$	7
0	X_2	0	$3/2$	1	$3/2$	1−	$-1/2$	4
	$\bar{C}$	0	$1/2$	0	$1/2$	2	$1/2$	$Z = 7$

وبالتالي حل المسألة الأولية مقبول والثانوية مقبول فهو الحل الأمثل بعد أن قدمنا مثالاً نستطيع الآن شرح طريقة الحل الثنوي وفق مايلي:

الحل الثنوي في مسألة التصغير:

ليكن لدينا البرنامج

$$MinZ = CX$$
$$AX \geq b$$
$$x \geq 0$$

1. نشكل متحولات أساسية بإضافة المتحولات الراكدة أو الإضافية فقط، وبحيث تكون أمثالها واحدية وموجبة (1+) ويمكن ذلك بضرب ب1− إذا تطلب الأمر.

2. يجب أن تكون سطر $\bar{C}$ غير سالب؛ وبالتالي فهو يضمن أن الحل نافذ بالنسبة للمسألة الثنوية، وإذا كانت جميع قيم عمود b موجبة عندئذ يكون الحل نافذاً للمسألة الأصلية أيضاً، إذاً يكون الحل أمثل.

3. إذا وجدنا قيماً سالبة في عمود b نختار أكثرها سلبية، ثم نشكل النسبة التالية على سطره

$$Max_{aij\langle 0}\left(\frac{\bar{C}J}{aij}\right)$$

ونعدّه عنصراً محورياً، ونجري التحويلات عليه كما تعلمنا، فنضمن بذلك بقاء الحل الثنوي نافذ، وذلك وفق مايلي:

$\bar{C}J = C_B - \bar{C}_S$ (قديمة) $\times\left(\frac{ais}{aj}\right)$ الجديدة

وتبقى هذه القيمة موجبة أو معدومة لأنه

حالة 1: $aij \geq 0$, $\bar{C}J/aij \geq 0$ وبما أن $ais, \bar{C}S \geq 0$

عنصر التحرر فإن $arj\langle 0$, $C/arj \leq 0$ وبالتالي فإن العلاقة غير سالبة.

حالة 2: بفرض arj سالبة عندئذ

$$\frac{\bar{C}S}{arj}$$

فإن $\bar{C}J = arj\left[\frac{\bar{c}j}{ars} - \frac{\bar{c}s}{ars}\right]$ الجديد

وبالتالي $\bar{c}s$ موجب.

<u>الحل الثنوي في مسألة التعظيم:</u>

تتشابه هذه الطريقة حيث سطر $\bar{c}$ جميع عناصره غير موجبة عندئذ يكون حل نافذ للمسألة الثنوية وبفرض $b\langle 0$ الأكثر سلبية نختار عنصر التمحور

$$Min\left(\frac{\bar{c}\,j}{arj}\right)$$

$$arj\langle 0$$

مثال: ليكن البرنامج

$$MinZ = 2x_1 + x_2 + 20x_3$$
$$3x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 16$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 \geq 9$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

أوجد حل البرنامج وفق الطريقة الثنوية.

الحل: بعد تعديل القيود وضرب بـ (-1) يصبح لدينا متحولات أساسية أمثالها موجبة نجد (ودون إدخال متحولات صناعية)

$$MinZ = 2x_1 + x_2 + 20x_3 + OS_1 + OS_2$$
$$-3x_1 + 2x_2 - x_3 + S_1 = 16$$
$$-2x_1 - x_2 - x_3 + S_2 = -9$$

وبالتالي يكون حل المسألة الأولية

	CJ	2	1	20	0	0	
CB	قاعدة الحل	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	b
0	S_1	-3	-2	-1	1	0	-16
0	S_2	-2	-1	-1	0	1	-9
	$\bar{C}$	2	1	20	0	0	
	$Max\frac{\bar{c}\,j}{arj\langle 0}$	$-2/3$	$-1/2$	-20	0	0	

	CJ	2	1	20	0	0	
CB	قاعدة الحل	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	b
1	x_2	$3/2$	1	$1/2$	$-1/2$	0	8
0	S_2	$-1/2$	0	$-1/2$	$-1/2$	1	1−
	$\bar{C}$	$1/2$	0	$39/2$	$1/2$	0	
	$Max\frac{\bar{c}\,j}{arj\langle 0}$	1−	0	39−	1−	−	

	CJ	2	1	20	0	0	
CB	قاعدة الحل	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	b
1	x_2	0	1	1−	2−	3+	5
2	x_1	1	0	1	1	2−	2
	$\bar{C}$	0	0	19	0	1+	$Z=9$

الحل أمثل لأنه نافذ من المسألة الأصلية والمسألة الأولية.

وبالتالي يكون حل المسألة الأولية

$x_2 = 5$

$x_1 = 2$ $\qquad MinZ = 9$

$x_3 = 0$

وحل المسألة الثانوية

$y_1 = 0$

$y_2 = 1$ $\qquad MaxW = 9$

$$y_2 = -CB.\bar{P}_{S2} = -(1,2)\begin{bmatrix}3\\-2\end{bmatrix} = 1$$

حيث:

$$y_1 = -CB.\bar{P}_{S1} = (1,2)\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix} = 0$$

مثال: ليكن لدينا البرنامج

$$MaxZ = 2x_1 + 3x_2 + x_3$$
$$5x_1 + 2x_2 + x_3 \le 9$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 59$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 \ge 1$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

استخدم حل البرنامج وفق الطريقة الثنوية.

الحل:

$$MaxZ = 2x_1 + 3x_2 + x_3 - MR_1$$
$$5x_1 + 2x_2 + x_3 + S_1 = 9$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 + R_1 = 5$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 - S_2 = 6$$

نضرب القيد الأخير ب(-1) فنجد أنه يصبح $-2x_1 - x_2 - x_3 + S_2 = -6$

نضع البرنامج

	CJ	2	3	1	0	0	$-M$		
CB	قاعدة الحل	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	R_1	b	b/x_2
0	S_1	5	2	1	1	0	0	9	$9/2$
$-M$	R_1	1	2	1	0	0	1	5	$5/2$
0	S_2	2-	1-	1-	0	1	0	6-	/
	$\bar{C}$	$2+M$	$3+2M$	$1+M$	0	0	0		

نلاحظ أن الحل غير نافذ ثنوياً وبالتالي نحل بالبداية على طريقة البرنامج الأولي

	CJ	2	3	1	0	0	$-M$		
CB	قاعدة الحل	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	R_1	B	b/x_2
0	S_1	4	0	0	1	0	1-	4	1
3	x_2	$1/2$	1	$1/2$	0	0	$1/2$	$5/2$	/
0	S_2	$-3/2$	0	$-1/2$	0	1	$1/2$	$-7/2$	/
	$\bar{C}$	$1/2$	0	$-1/2$	0	0	$-M-3/2$		

نلاحظ أنه الحل نافذ ثنوياً

	CJ	2	3	1	0	0	$-M$	
CB	قاعدة الحل	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	R_1	b
2	x_1	1	0	0	$1/4$	0	$-1/4$	1
3	x_2	0	1	$1/2$	$-1/8$	0	$5/8$	2
0	S_2	0	0	$-1/2$	$3/8$	1	$1/8$	2-
	$\bar{C}$	0	0	$-1/2$	$-1/8$	0	$-M-11/8$	
	$Min\frac{\bar{c}}{ars\langle 0}$	-	-	1	-	-	-	

نلاحظ أن الحل الثنوي مقبول إذاً نتبع الحل الثنوي الآن

	CJ	2	3	1	0	0	$-M$	
CB	قاعدة الحل	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	R_1	b
2	x_1	1	0	0	$1/4$	0	$-1/4$	1
3	x_2	0	1	0	$1/4$	1	$3/4$	0
1	x_3	0	0	1	$-3/4$	2−	$-1/4$	4
	$\bar{C}$	0	0	0	$-1/2$	1−	$-M-3/2$	$Z=6$

والحل أمثل، وحل المسألة الأولية

$$x_1 = 1$$
$$x_2 = 0$$
$$x_3 = 4 \qquad MaxZ = 6$$

حل المسألة الثانوية

$$y_1 = CB.\bar{P}_{S1} = (2,3,1)\begin{bmatrix} 1/4 \\ 1/4 \\ -3/4 \end{bmatrix} = 1/2$$

$$-y_3 = CB.\bar{P}_{S2} = (2,3,1)\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = 1 \Rightarrow y_3 = -1$$

$$y_3 = CB\,\bar{P}_R = (2,3,1)\begin{bmatrix} -1/4 \\ 3/4 \\ -1/4 \end{bmatrix} = 3/2 \qquad Minz = 6$$

المبحث الخامس

كيفية إيجاد الحل الثنوي من حل برنامج أولي

ليكن لدينا البرنامج

$$MaxZ = CX$$

$$AX \le b \quad \text{وكان}$$

$$X \ge 0$$

عندئذ نجد البرنامج المقابل

$$MinW = Yb$$

$$Y.A \ge C$$

$$Y \ge 0$$

نحن نعلم أنه إذا كان للمسألة الأولية حل أمثل فإنه يوجد للبرنامج الثنوي حل أمثل؛ وبالتالي نجد بفرض Y^0, X^0 حلاً لمسألة الأولية والثانوية على الترتيب:

$$CX^0 = Y^0 b \qquad (1)$$

وكون X^0 حل أمثل فإنه $X^0 = \bar{b}$ حسب طريقة المصفوفات.

وبالتالي وكون $\bar{b} = B^{-1}.b$ إذاً نعوض في (1)

$$C_B.B^{-1}.b = Y^0.b$$

وكون $b \ge 0$ إذاً نجد

$$C_B.B^{-1} = Y^0 \Rightarrow \pi = C_B B^{-1}$$

وهي العلاقة التي تعطي الحل الثنوي.

ملاحظة:

نلاحظ أنه عندما نبدأ بخوارزمية السمبلكس، فإننا نبدأ بقاعدة حل أساسية أمثالها واحد، وعلى أن يكون الطرف الأيمن موجباً كي يكون الحل نافذاً للبرنامج، ولكن

في المثال السابق كان من المفروض إضافة متحول صناعي في القيد الثالث، ولكننا لم ندخله وضربنا المتراجحة ب(-1) وحصلنا على قاعدة واحدية، ولكن الحل غير نافذ كون الطرف الأيمن أصبح سالباً (-6) وبالتالي سوف يكون الحل للمسألة الثنوية:

$$C_B.B^{-1} = Y^0$$

ولكن هذا القيد تكون إشارته مخالفة للناتج.

إذاً الخلاصة: إذا ضربنا ب(-1) وحصلنا على حل غير نافذ (طرف أيمن سالب) يكون الحل الثنوي في هذا القيد مخالف بالاشارة.

أما في الطريقة الموسعة (عند إدخال R عند الضرورة) فإن $\pi = C_B.B^{-1}$ هو حل البرنامج الثنوي.

مثال:

$$MaxZ = 10x_1 + 12x_2 - 9x_3$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 \le 8$$
$$x_1 + x_2 + x_3 \ge 3$$
$$3x_1 + x_2 + 2x_3 = 7$$
$$x_1, x_2 \ge 0 \qquad x_3 \le 0$$

أوجد الحل الأمثل للبرنامج السابق، ثم استنتج الحل الثنوي.

الحل: نضع $x_3^{\setminus} = -x_3$ فيصبح البرنامج بعد وضعه بالشكل القياسي

$$MaxZ = 10x_1 + 12x_2 + 9x_3^{\setminus}$$
$$2x_1 + x_2 - x_3^{\setminus} + S_1 = 8$$
$$x_1 + x_2 + x_3^{\setminus} - S_2 = 3$$
$$3x_1 + x_2 - 2x_3^{\setminus} = 7$$
$$x_1, x_2, x_3^{\setminus} \ge 0$$

ولكن في القيد الثاني لا يوجد حل قاعدي (أمثال S_2 سالبة) لذا تضرب ب(1−) فنحصل

$$MaxZ = 10x_1 + 12x_2 + 9x_3^{\setminus}$$
$$2x_1 + x_2 - x_3^{\setminus} + S_1 = 8$$
$$-x_1 - x_2 + x_3^{\setminus} + S_2 = -3$$
$$3x_1 + x_2 - 2x_3 + R_1 = 7$$

حيث R_1 إلى القيد الثالث كي نحصل على حل قاعدي.

لاحظ أن ثابت القيد الثاني سالب، وبالتالي لا يشكل حلاً نافذاً مقبولاً.

سوف نتبع الطريقة المختصرة لحل البرنامج

	CJ	10	12	9	
CB	قاعدة الحل	x_1	x_2	x_3	b
0	S_1	2	1	1−	16−
0	S_2	1−	1−	1	9−
$-M$	R_1	3	1	2−	7
	$\bar{C}$	$10+3M$	$12+M$	$9-M$	

	CJ	$-M$	12	9	
CB	قاعدة الحل	R_1	x_2	$x_3^{\setminus}$	b
0	S_1	$-2/3$	$1/3$	$1/3$	$10/3$
0	S_2	$1/3$	$-2/3$	$1/3$	$-2/3$
10	x_1	$1/3$	$1/3$	$-2/3$	$7/3$
	$\bar{C}$	$-10/3-M$	$26/3$	$47/3$	

	CJ	$-M$	12	0	
CB	قاعدة الحل	R_1	x_2	S_1	b
9	$x_3^{\backslash}$	2−	1	3	10
0	S_2	1	1−	1−	4−
10	x_1	1−	1	2	9
	$\bar{C}$	$-M+28$	7−	47−	
	$Min\frac{\bar{C}J}{ais}$ $AIJ\langle 0$	−	7	47	

والحل نافذ ثنوياً إذاً نتبع الآن الحل الثنوي

	CJ	$-M$	0	0	
CB	قاعدة الحل	R_1	S_2	S_1	b
9	$x_3^{\backslash}$	1−	1+	2	6
12	S_2	1−	1−	1	4
10	x_1	0	1+	1	5
	$\bar{C}$	$-M+21$	7−	40−	$Z=152$

والحل أمثل.

إذاً الحل هو

$$(x_3=-6)x_3^{\backslash}=6 \qquad x_2=4 \qquad x_1=5$$

وباقي المتحولات أصفار وقيمة الهدف $MaxZ=152$

البرنامج المقابل الثنوي

$$MaxZ = 8y_1 + 3y_2 + 7y_3$$
$$2y_1 + y_2 + 3y_3 \geq 10$$
$$y_1 + y_2 + y_3 \geq 12$$
$$y_1 + y_2 + 2y_3 \leq -9$$
$$y_1 \geq 0 \qquad y_2 \leq 0 \qquad y_3 \quad \text{غير مقيدة}$$

لنوجد الحل الثنوي: نحن نعلم $Y^0 = C.B^{-1}$

$$y_1 = CB.\bar{P}_{S1} = (9,12,10)\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix} = 40$$

لنحسب y_2 كون أننا ضربنا المعادلة (-1) كي نشكل قاعدة إذاً

$$y_2 = -CB.\bar{P}_{S2}$$

$$y_2 = -(9 \quad 12 \quad 1)\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix} = -7$$

$$y_3 = CB\,\bar{P}_{R1} = (9,12,10)\begin{bmatrix}-1\\-1\\0\end{bmatrix} = -21$$

$$Minw = 152$$

مثال: ليكن لدينا البرنامج الخطي

$$MinZ = 6x_1 + 5x_2 + 5x_3$$
$$2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \geq 37$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 23$$
$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 15$$
$$x_1, x_2 \geq 0 \qquad x_3 \quad \text{غير مقيدة}$$

أوجد حل البرنامج ثم استنتج الحل الثنوي.

الحل: لدينا x_3 غير مقيد إذاً نضع $x_3 = x_3^{\setminus} - x_3^{\setminus\setminus}$

حيث $x_3^{\setminus}, x_3^{\setminus\setminus} \geq 0$

ونحول الشكل السابق إلى الشكل القياسي

$$MinZ = 6x_1 + 5x_2 + 5x_3^{\setminus} - 5x_3^{\setminus\setminus}$$
$$2x_1 + 4x_2 + 3x_3^{\setminus} - 3x_3^{\setminus\setminus} - S_1 = 37$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3^{\setminus} - 3x_3^{\setminus\setminus} + S_2 = 23$$
$$x_1 + x_2 + 2x_3^{\setminus} - 2x_3^{\setminus\setminus} = 15$$
$$x_1, x_2, x_3^{\setminus}, x_3^{\setminus\setminus}, S_1, S_2 \geq 0$$

ولكن لا يحوي هذا الشكل حلاً قاعدياً، لذلك سوف نضرب القيد الأول بـ(-1)

ونضيف إلى القيد الثالث متحولاص صناعياً R فيصبح البرنامج:

$$MinZ = 6x_1 + 5x_2 + 5x_3^{\setminus} - 5x_3^{\setminus\setminus}$$
$$-2x_1 - 4x_2 - 3x_3^{\setminus} + 3x_3^{\setminus\setminus} + S_1 = -37$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3^{\setminus} - 3x_3^{\setminus\setminus} + S_2 = 23$$
$$x_1 + x_2 + 2x_3^{\setminus} - 2x_3^{\setminus\setminus} + R = 15$$
$$x_1, x_2, x_3^{\setminus}, x_3^{\setminus\setminus}, S_1, S_2, R \geq 0$$

وسوف نعتمد الطريقة المختصرة

	CJ	6	5	5	5−	
CB	قاعدة الحل	x_1	x_2	$x_3^{\setminus}$	$x_3^{\setminus\setminus}$	b
0	S_1	2−	4−	3−	3	37−
0	S_2	1	2	3	3−	23
$+M$	R	1	1	2	2−	15
	$\bar{C}$	$6-M$	$5-M$	$5-2M$	$-5+2M$	

	CJ	6	5	$+M$	5−	
CB	قاعدة الحل	x_1	x_2	R	$x_3^{\prime\prime}$	b
0	S_1	$-1/2$	$-5/2$	$-1/2$	0	$-29/2$
0	S_2	$-1/2$	$1/2$	$-1/2$	0	$1/2$
5	$x_3^{\prime}$	$1/2$	$1/2$	$-1/2$	1−	$15/2$
	$\bar{C}$	$7/2$	$5/2$	$-5/2+M$	0	

والحل الثنوي نافذ وبالتالي نتبع طريقة الحل الثنوي

	$Max\left(\frac{\bar{c}\,s}{aij}\right)$ $aij\langle 0$	7−	1−	−	−	

	CJ	6	5	M	5−	
CB	قاعدة الحل	x_1	S_1	R	$x_3^{\prime\prime}$	b
5	x_1	$1/5$	$-2/5$	$-3/5$	0	$29/5$
0	S_2	$-3/5$	$1/5$	$-6/5$	0	$-12/5$
5	$x_3^{\prime}$	$5/2$	$1/5$	$4/5$	1−	$23/5$
	$\bar{C}$	3	1	$M-1$	0	

والحل نافذ ثنوياً، ولكن غير نافذ أولياً بسبب القيمة السالبة في عمود B .

	$Max\left(\frac{c\,s}{aij}\right)$ $aij\langle 0$	$5-$	$-$	$-\frac{5}{6}M+\frac{5}{6}$	$-$	

	CJ	6	5	M	$5-$	
CB	قاعدة الحل	S_2	S_1	R	$x_3^{\backslash\backslash}$	b
5	x_2	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$1-$	0	5
6	x_1	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{1}{3}$	2	0	4
5	$x_3^{\backslash}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$1-$	3
	$\bar{C}$	5	2	$M-7$	0	$MinZ=64$

فنلاحظ أن الحل الثنوي بقي نافذاً وكذلك الحل الأولي إذاً الحل أمثل، ويكون حل البرنامج الأولي

$$x_2=5$$
$$x_1=4$$
$$x_3^{\backslash}=3 \qquad x_3^{\backslash\backslash}=0 \qquad S_1=S_2=R=0$$
$$x_3=x_3^{\backslash}-x_3^{\backslash\backslash}=3-0=3$$
$$MinZ=64$$

لنكتب البرنامج الثنوي

$$MaxZ=37y_1+23y_2+15y_3$$
$$2y_1+y_2+y_3\le 6$$
$$4y_1+2y_2+y_3\le 5$$
$$3y_1+3y_2+2y_3=5$$
$$y_1\ge 0 \qquad y_2\le 0 \qquad y_3$$

غير مقيدة

لنوجد البرنامج الثنوي

$$y_1 = -CB.\bar{P}_{S1} = -(5,6,5)\begin{bmatrix} -1/3 \\ -1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix} = 2$$

$$y_2 = CB.\bar{P}_{S2} = (5,6,5)\begin{bmatrix} 1/3 \\ -5/3 \\ 2/3 \end{bmatrix} = -5$$

$$y_3 = CB.\bar{P}_R = (5,6,5)\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = 7$$

$$MaxZ = 64$$

المبحث السادس

تحليل الحساسية للبرامج الخطية

إن حل البرنامج الخطي المذكور سابقاً يعتمد على محددات معامل الهدف ومحددات القيود ومعاملات متحولات القرار في القيود، وبالتالي يكون لدينا المتغيرات التالية:

1. متغيرات أمثال الهدف CJ.
2. متغيرات في ثوابت القيود اليمنى.
3. التغيرات في مصفوفة معاملات القيود.

ولتبسيط الأمر لنفرض أنه لدينا البرنامج الخطي:

$$MaxZ = 2x_1 + 3x_2 + x_3$$

قيد اليد العاملة $\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 \le 1$

قيد المواد الأولية $\frac{1}{3}x_1 + \frac{4}{3}x_2 + \frac{7}{3}x_3 \le 3$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

حيث تمثل x_1, x_2, x_3 عدد وحدات المنتجات A, B, C على الترتيب.

وبالحل نحصل على الجدول النهائي بعد إضافة متحولات راكدة للقيدين

	CJ	2	3	1	0	0	
CB	قاعدة الحل	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	b
2	x_2	1	0	1−	4	1−	1
3	x_1	0	1	2	1−	1	4
	$\bar{C}$	0	0	3−	5−	1−	$Z = 8$
	$MaxZ = 8$		$x_3 = 0$	$x_2 = 4$	$x_1 = 1$		حيث

ولندرس التغيرات كل على حده:

1) تغيرات أمثال تابع الهدف:

نلاحظ أن المنتج C لم يظهر ضمن الخليط الإنتاجي؛ وبالتالي سوف لا ننتج هذا المنتج لأنه غير مجدي ولكن السؤال الذي نطرحه متى يكون إنتاج المنتج (C) مجدياً.

إن الجواب على هذا الأمر يتطلب أن يكون x_3 أحد متحولات القرار الأساسية؛ وبالتالي يجب أن يكون $\bar{C}_3 \rangle 0$، إذاً لنفرض أن C_3 ربح المنتج C عندئذ:

$$\bar{C}_3 = C_3 - (2,3)\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = C_3 - 4$$

وكي يكون أحد متحولات القرار يجب

$$C_3 - 4 \rangle 0$$

$$C_3 \rangle 4$$

وبعبارة أخرى كي يكون المنتج مجدياً اقتصادياً يجب أن يكون ربحه أكبر من (4) وحدات نقدية لكل واحده منتجة، وخلافه فإن الحل الأمثل يبقى على حاله، وبالتالي $C_3 \le 4$ يبقى إنتاج (B, A) مجدياً ودون (C)

لنلاحظ أن المنتجات أمثال الهدف للمنتجات وبفرض C_1 أمثال X_1 و C_2 أمثال X_2 و C_3 أمثال، وعندئذ يبقى الحل نفسه (الخليط نفسه) إذا تحقق

$$\bar{C}_1 \le 0$$

$$\bar{C}_2 \le 0$$

$$\bar{C}_3 \le 0$$

$$\bar{C}_{S1} \le 0$$

$$\bar{C}_{S2} \le 0$$

عندئذ لنغير في ربح المنتج C_1فقط مع $C_2 = 3$ فنجد

$$\bar{C}_2 = 3 - (C_1,3)\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = 0$$

$$\bar{C}_3 = 1 - (C_1,3)\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix} = C_1 - 5 \le 5$$

$$\Rightarrow C_1 \le 5 \qquad (1)$$

$$\bar{C}_{S1} = 0 - (C_1,3)\begin{bmatrix}4\\-1\end{bmatrix} = -4C_1 + 3 \le 0$$

$$\Rightarrow C_1 \ge 3/4 \qquad (2)$$

$$\bar{C}S_2 = 0 - (C_1,3)\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix} = C_1 - 3 \le 0$$

$$\Rightarrow C_1 \le 3 \qquad (3)$$

من 1و2و3 نجد أنه

$$\frac{3}{4} \le C_1 \le 3$$

أي إنه مع ثبات المعاملات فإن الحل الأمثل يبقى كما هو إذا تغير أمثال X_1 في تابع الهدف ضمن الحدود المذكورة فيه بنفس الأسلوب لنفرض أنه ربح المنتج B تغير فما هو المجال كي يبقى محافظاً على نفس الخليط السابق؟ نلاحظ أننا يجب أن نحقق مايلي:

$$\bar{C}_1 \le 0 \qquad \bar{C}_3 \le 0 \qquad \bar{C}_{S1} \le 0 \qquad \bar{C}_{S2} \le 0$$

وبالتالي

$$\bar{C}_1 = 2 - (2, c_2)\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = 0$$

$$\bar{C}_3 = 1 - (2, c_2)\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix} = 3 - c_2 \le 0 \Rightarrow c_2 \ge 3/2$$

$$\bar{C}_{S1} = 0 - (2, c_2)\begin{bmatrix}4\\-1\end{bmatrix} = c_2 - 8 \le 0 \Rightarrow c_2 \le 8$$

$$\bar{C}_{S2} = 0 - (2, c_2)\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix} = 2 - c_2 \le 0 \Rightarrow c_2 \ge 2$$

ويبقى الخليط نفسه إذا تحقق

$$C_2 \in [2,8]$$

نلاحظ أنه عند دراستنا لتغيرات الأمثال نثبت جميع المعاملات ونغير في معامل واحد فقط، ولكن إذا أردنا تغيير جميع المعاملات ماذا يحدث؟

تدعى مثل هذه الدراسة بالبرمجة الوسيطية.

البرمجة الخطية الوسيطية لأمثال الهدف

بفرض أن $\overset{*}{C}$ شعاع تغير الكلفة للمنتجات، وبفرض أن λ متحول وسيطي حقيقي عندئذ يصبح تابع الهدف

$$MaxZ = (c + \lambda \overset{*}{c})x$$

وبالتالي

$$MaxZ = CX + \lambda \overset{*}{c}\, x$$

ونحسب سطر $\bar{C}\, J$ من العلاقة للمتحول J

$$\bar{C}\, \pi(2) = (CJ + \lambda \overset{*}{C}\, J) - (CB + \lambda \overset{*}{C}\, B)\bar{P}\, J$$

وبالفك نجد:

$$\bar{C}_J(\lambda) = (CJ - CB\bar{P}_J) + \lambda(\overset{*}{C}J - \overset{*}{C}B\bar{P}_J)$$

$$\bar{C}_S(\lambda) = \bar{C}J + \lambda\bar{C}_J$$

وكمثال عليها بفرض أننا لدينا المثال السابق وكان شعاع الكلفة

$$\overset{*}{C}(1,-1,1)$$

حيث $C_1 = 1$ كلفة المنتج A

$C_2 = -1$ كلفة المنتج B

$C_3 = 1$ كلفة المنتج C

وبالتالي يصبح تابع الهدف

$$MaxZ = (2+\lambda)x_1 + (3-\lambda)x_2 + (1+\lambda)x_3$$

$$\tfrac{1}{3}x_1 + \tfrac{1}{3}x_2 + \tfrac{1}{3}x_3 + S_1 = 1$$

$$\tfrac{1}{3}x_1 + \tfrac{4}{3}x_2 + \tfrac{7}{3}x_3 + S_2 = 3$$

$$x_1, x_2, x_3, S_1, S_2 \geq 0$$

وبحل الجدول وحسب البرنامج الأصلي نجد إلى الجدول التالي

		$\overset{*}{C}J$	1	1−	1	0	0	
		CJ	2	3	1	0	0	
$\overset{*}{C}B$	CB	قاعدة الحل	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	b
1	2	x_2	1	0	1−	4	1−	1
1−	3	x_1	0	1	2	1−	1	2
		$\bar{C}$	0	0	3−	5−	1−	$Z = 8$
		$\bar{C}$	0	0	4	5−	2	$\overset{*}{Z} = -1$

ونحسب السطر $\overset{*}{C}$ بنفس الطريقة وذلك حسب $\overset{*}{C}J$ فمثلاً:

$$\bar{C}_3 = 1 - (2,3)\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = -3$$

$$\bar{C}_3^* = 1 - (1,-1)\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = 4$$

ويبقى الحل الأساسي أمثل إذا تحقق $\bar{C}_J(\lambda) = \bar{C}_3 + -CB\bar{P}_J) + \lambda(\overset{*}{C}J - \overset{*}{C}B\bar{P}_J)$

$\bar{C}_S(\lambda) = \bar{C}J + \lambda\bar{C}_J$

$\bar{C}_3 = -3 + 4\lambda \le 0 \Rightarrow \lambda \le 4/3$

$\bar{C}_{S1}(\lambda) = -5 - 5\lambda \le 0 \Rightarrow \lambda \ge -1$

$\bar{C}_{S2}(\lambda) = -1 + 2\lambda \le 0 \Rightarrow \lambda \le 1/2$

وقيمة تابع الهدف

$$Z(\lambda) = Z + \lambda \overset{*}{Z}$$
$$Z(\lambda) = 8 - \lambda$$

نلاحظ أنه يبقى المزيج حلاً أمثل إذا كان $1/2 \ge \lambda \ge -1$

فإذا تجاوزت قيمة (λ) القيمة $\left(\frac{1}{2}\right)$ عندئذ $\lambda \rangle 1/2$

نجد أن S_2, x_3 موجبة ولندخل إلى القاعدة S_2 فنجد الجدول الجديد

		$\overset{*}{C}J$	1	1−	1	0	0	
		CJ	2	3	1	0	0	
$\overset{*}{C}B$	CB	قاعدة الحل	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	b
1	2	x_1	1	1	1	3	0	3
0	0	S_2	0	1	2	1−	1	2
		$\bar{C}$	0	1	1−	6−	0	$Z = 6$
		$\bar{C}^*$	0	2−	0	3−	0	$\overset{*}{Z} = 3$

$$\bar{C}_2(\lambda) = 1 - 2\lambda \le 0 \Rightarrow \lambda \ge 1/2$$

$$\bar{C}_3(\lambda) = -1 \le 0$$

$$CS_1(\lambda) = -6 - 3\lambda \le 0 \Rightarrow \lambda \ge -2$$

وطالما $\lambda \ge 1/2$ يبقى الخليط نفسه أي

$$x_1 = 3$$

$$x_2 = 0$$

$$x_3 = 0$$

$$Max(Z) = 6 + 3\lambda$$

2) تغير الطرف الأيمن (b)

بفرض أنه لدينا البرنامج السابق وغيرنا الطرف الأيمن وبفرض $b_1 = 1$ أصبحت متغيرة بينما $b_2 = 3$ ثابتة، وبالتالي أصبح الشعاع

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

وبالتالي نحن نعلم الحل الأمثل وكانت

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

عندئذ

$$\bar{b} = B^{-1}.b$$

$$\bar{b} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4b_1 & -3 \\ -b_1 & 3 \end{bmatrix}$$

ويجب أن يكون الشعاع $\bar{b}$ غير سالب أي

$$4b_1 - 3 \ge 0 \Rightarrow b_1 \ge \frac{3}{4}$$

$$-b_1 + 3 \ge 0 \Rightarrow b_1 \le 3$$

وبالتالي من أجل جميع قيم $b_1 \in \left[\frac{3}{4}, 3\right]$ يكون الحل الأمثل هو

$$x_1 = 4b_1 - 3$$
$$x_2 = -b + 3$$
$$x_3 = 0$$

والربح الأعظمي هو

$$Max(Z) = 5b_1 + 3$$

وبنفس الأسلوب ندرس b_2

$$\bar{b} = B^{-1}.b$$
$$= \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 - b_2 \\ -1 + b_2 \end{bmatrix}$$

وكي يكون الحل نافذاً أو أساسياً يجب أن يحقق جميع مركبات $\bar{b}$ غير سالبة

$$4 - b_2 \geq 0 \Rightarrow b_2 \leq 4$$
$$-1 + b_2 \geq 0 \Rightarrow b_2 \geq 1$$

وبالتالي من أجل

$$b_2 \in [1,4]$$

يبقى الحل

$$x_1 = 4 - b_2$$
$$x_2 = -1 + b_2$$
$$x_3 = 0$$

وقيمة الهدف

$$Max(Z) = 2(4 - b_2) + 3(-1 + b_2)$$
$$Max(Z) = b_2 + 5$$

البرمجة الخطية الوسيطية للطرف الأيمن:

إن الطرف الأيمن للقيود تمثل الحدود المفروضة على البرنامج مثل الموارد (الدخل) أو كميات الانتاج «الخرج»، ونلاحظ أن هذه الموارد ليس من الضروري أن تكون مستقلة، فمثلاً إنقاص عدد الآلات يؤدي إلى إنقاص عدد ساعات العمل الاجمالية؛ وبالتالي من الممكن زيادة عدد العمال التي تعوض نسبياً نقص الآلات. وبالطبع الموارد قد تكون مستقلة أو غير مستقلة.

وفي مثل هذه المسائل نأخذ بالحسبان التغيرات المتزامنة في ثوابت الطرف الأيمن عندما تكون التغيرات تابعة لوسيط وحيد (x)

وسوف نعرف مايلي:

b :شعاع الطرف الأيمن المعلوم

$\overset{*}{b}$:شعاع التغيرات المتزامنة

α :وسيط

عندئذ نجد أن الحلول تعطى بالعلاقة

$$XB = B^{-1}(b + \alpha \overset{*}{b}) = B^{-1}.b + \alpha B^{-1} \overset{*}{b}$$

$$XB = \bar{b} + \alpha \overset{-*}{b}$$

حيث XB متحولات القاعدة

وبالتالي يكون الحل أمثل طالما b

$$\bar{b} + \alpha \overset{-*}{b} \geq 0$$

فمثلاً في البرنامج المدرس السابق

$$MaxZ = 2x_1 + 3x_2 + x_3$$

$\frac{1}{3} x_1 + \frac{1}{3} x_2 + \frac{1}{3} x_3 + S_1 = 1 + \alpha$ قيد عدد العمال

$\frac{1}{3} x_1 + \frac{4}{3} x_2 + \frac{7}{3} x_3 + S_2 = 3 - \alpha$ قيد كمية المواد الأولية

وبفرض أننا اعتمدنا $\overset{*}{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

أي عندما يزداد عدد العمال عاملاً واحداً سوف تنخفض المواد الأولية بمقدار وحدة واحدة، وعند حل البرنامج نجد أن الجدول النهائي هو

	CJ	2	3	1	0	0		
CB	قاعدة الحل	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	b	$\overset{*}{b}$
2	x_1	1	0	-1	4	$1-$	1	5
3	x_2	0	1	2	$1-$	1	2	$2-$
	$\bar{C}$	0	0	$3-$	$5-$	$1-$	$Z=8$	$\overset{*}{Z}=4$

حيث نحسب

$$\bar{b} = B^{-1}.b = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\bar{b}^{*} = B^{-1}.b^{*} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

وبالتالي نجد أن قيم المتحولات هي

$$x_1 = \bar{b}_1 + \alpha\,\bar{b}_1^{*} = 1 + 5\alpha$$

$$x_2 = \bar{b}_2 + \alpha\,\bar{b}_2^{*} = 2 - 2\alpha$$

وكي يكون المتحولات تمثل حلاً أمثل يجب أن $\bar{C}_J \le 0$ وهو محقق، ولكن يجب أن يحقق أيضاً أن الحل نافذ «مقبول» أي إن الطرف الأيمن غير سالب أي

$$x_1 = 1 + 5\alpha \ge 0 \Rightarrow \qquad \alpha \ge -1/5$$

$$x_2 = 2 - 2\alpha \ge 0 \Rightarrow \qquad \alpha \le 1$$

وبالتالي يجب أن يحقق الطرف الأيمن

$$-1/5 \le \alpha \le 1$$

وبفرض $\alpha \rangle 1$ عندئذ تصبح قيمة x_2 سالبة، وبالتالي سوف نطبق طريقة البرمجة الثنوية، وهنا نجد أن في سطر x_2 لا يوجد سوى القيمة (1−) سالبة وبالتالي سوف يدخل S_1 بدلاً من x_2 ويصبح الجدول التالي

	CJ	2	3	1	0	0		
CB	قاعدة الحل	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	b	b^*
2	x_1	1	4	7	0	3	9	3−
0	S_1	0	−1	2−	1	1−	2−	2+
	$\bar{C}$	0	5−	13−	0	6−	$Z=18$	$Z^*=-6$

$$\alpha \rangle 1$$

حيث تعطى الحلول من $x_1 = 9 - 3\alpha \ge 0 \Rightarrow \alpha \le 3$

$$S_1 = -2 + 2\alpha \ge 0 \Rightarrow \alpha \ge +1$$

وبالتالي المسألة غير نافذة عندما $\alpha \rangle 3$ لأن x_1 يصبح سالباً، ولا توجد معاملات سالبة في السطر الأول.

إذاً من أجل $1 \le \alpha \le 3$ نجد الحلول

$$x_1 = 9 - 3\alpha$$

$$x_2 = -2 + 2\alpha$$

$$Z(\alpha) = 18 - 6\alpha$$

ومن أجل $\alpha \langle -1/5$ نجد أن x_1 أصبح سالباً؛ وبالتالي وباستخدام الطريقة الثنوية نجد أن S_2 سوف يدخل ويصبح الجدول

	CJ	2	3	1	0	0		

CB	قاعدة الحل	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	b	$\overset{*}{b}$
0	S_2	1−	0	1	4−	1	1−	5−
3	x_2	1	1	1	3	0	3	3
	$\bar{C}$	1−	0	2	9−	0	$Z=9$	$\overset{*}{Z}=9$

وبالتالي عندما $\alpha\langle -1/5$ نجد

$$S_2 = -1-5\alpha \geq 0 \Rightarrow \qquad \alpha \leq -1/5$$

$$x_2 = 3+3\alpha \geq 0 \Rightarrow \qquad \alpha \geq -1$$

وعندما $\alpha\langle -1$ نجد أن الحل غير نافذ لأن x_2 تصبح سالبة ولا يوجد معاملات سالبة في سطر x_2

وبشكل عام $\alpha \leq 3 \qquad \geq 1-$ يوجد حل أمثل وخلافه لا يوجد والمسألة غير نافذة.

3) التغيرات في مصفوفة القيود

إن مصفوفة القيود تتغير وفق مايلي:

1. إضافة متحولات جديدة أو فعاليات جديدة.
2. تغير متطلبات الفعاليات الحالية من الموارد.
3. إضافة قيود جديدة.

حالة إضافة فعالية جديدة

بفرض أنه تم تطوير منتج جديد D يحتاج إلى وحدة واحدة من اليد العاملة، ووحدة واحدة من المواد الأولية، وأن للمنتج سوق تصريف يعطي ربحاً مقداره (3) وحدات نقدية لكل وحدة وترغب الشركة في معرفة الجدوى الاقتصادية لتصنيع المنتج.

نلاحظ أن البرنامج أصبح

$$MaxZ = 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4$$

$$\tfrac{1}{3}x_1 + \tfrac{1}{3}x_2 + \tfrac{1}{3}x_3 + x_4 + S_1 = 1$$

$$\tfrac{1}{3}x_1 + \tfrac{4}{3}x_2 + \tfrac{2}{3}x_3 + x_4 + S_2 = 3$$

نلاحظ أنه أضيف عمود جديد هو

$$P_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

وبالتالي نحسب الربح النسبي من العلاقة

$$\bar{C}_4 = C_4 - \pi . p_4$$

$$\pi = C_B . B^{-1} = (2,3)\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = (5,1)$$

$$\bar{C} = 3 - (5,1)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -3$$

وبالتالي يشير إلى أن إنتاج المنتج D لن يحسن القيمة الحالية للربح الأعظمي.

ولندرس متى يكون المنتج مجدياً وبفرض أن نسبة استخدام اليد العاملة تكافئ نسبة استخدام المواد الأولية،

أي بفرض $p_u = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \end{pmatrix}$

$$\bar{c}_u = 3 - (5,1)\begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \end{pmatrix} = -3 - 6\lambda \geq 0$$

$$3 \geq 6\lambda \Rightarrow \lambda \leq \tfrac{1}{2}$$

وبالتالي يكون الإنتاج مجدياً إذا كان ربح الوحدة (3) وحدات.

وعندما يكون $p_u = \begin{pmatrix} 1 \\ +1 \end{pmatrix}$ سوف ندرس ربح المنتج D

$$\bar{C}_u = c_u - (5,1)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = c_u - 6 \geq 0$$

$$C_u \geq 6$$

$$\bar{p}_u = B^{-1}.P_u$$

وبالتالي يصبح $= \begin{pmatrix}4 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$

	CJ	2	3	1	c_u	0	0	
CB	قاعدة الحل	x_1	x_2	x_3	x_4	S_1	S_2	b
2	x_1	1	0	1−	3	4	1−	1
3	x_2	0	1	2	0	1−	1	4
	$\bar{C}$	0	0	3−	$c_u - 6$	5−	1−	$Z = 8$

وعندما يكون $C_u \rangle 6$ نجد أن x_1 سوف يخرج من القاعدة ويدخل x_4 بدلاً منه

وبالتالي تصبح

$$B^{-1} = \begin{pmatrix}4/3 & -1/3\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\bar{b} = \begin{pmatrix}4/3 & -1/3\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/3\\2\end{pmatrix}$$

وبالتالي

$$x_4 = 1/3$$
$$x_2 = 2$$

$$Z = (C_u, 3)\begin{pmatrix} 1/3 \\ 2 \end{pmatrix} = 1/3\, c_u + 6$$

ويتحسن الحل الأمثل طالما $c_u \rangle 6$

<u>حالة التغير في متطلبات الفعاليات الحالية من الموارد:</u>

عندما نتطلب تغييراً في العوامل الفنية للمنتجات سوف تتغير مصفوفة المعاملات الفنية؛ وبالتالي سوف تتغير مصفوفة الحل B ؛ وبالتالي يفضل حل البرنامج من جديد لأن التغير قد يحمل جميع العوامل الفنية وبالتالي من الصعب دراسة هذه المجالات ضمن هذا الكتاب.

<u>حالة إضافة قيود جديدة:</u>

بفرض أنه تم إضافة قيد جديد وهو قيد الخدمات الإدارية للمنتجات من حيث التسويق ومراقبة الجودة، وهو أن المنتجات A, B, C تحتاج إلى 1و2و1ساعة من الخدمات الإدارية على الترتيب وأن عدد الساعات المتاحة هو 10،

عندئذ نجد أن القيد الإضافي أصبح

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \le 10$$

عند حل هذا البرنامج بإضافة القيد الجديد يمكننا التحقق أن المنتج C يبقى غير مجدٍ بفرض أن القيد أصبح

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \le 4$$

عندئذ نضيف إلى المصفوفة B^{-1} القديمة سطراً جديداً وعموداً جديداً هو

$$\text{قديمة}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} B^{-1} = S_1 \\ S_2 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} B^{-1} = S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{matrix}$$

نلاحظ أن الجدول

	CJ	2	3	1	0	0	0	
CB	قاعدة الحل	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	b
2	x_1	1	0	1−	4	1−	0	1
3	x_2	0	1	2	1−	1	0	2
0	S_3	1	2	1	0	0	1	4
	$\bar{C}$	0	0	3−	5−	1−	0	

ونلاحظ أن هذا الجدول لا يحوي متحولات أساسية لأن عمود x_1 يجب أن يكون

$\bar{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ وبالتالي معاملات x_2, x_1 في السطر الثالث موجبة ويجب أن تكون

سالبة إذاً سوف نضرب بالسطر الأول ب(1−) ونجمع إلى السطر الثالث ثم نضرب (2−) بالسطر الثاني ونجمع إلى السطر الثالث فيصبح

	CJ	2	3	1	0	0	0	
CB	قاعدة الحل	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	b
2	x_1	1	0	1−	4	1−	0	1
3	x_2	0	1	2	1−	1	0	2
0	S_3	0	0	2	2−	1−	1	1−
	$\bar{C}$	0	0	3−	5−	1−	0	

والحل نافذ ثنوياً ولكن غير نافذ بالنسبة للبرنامج الأولي إذاً نتبع طريقة الحل الثنوي ويصبح الجدول

	CJ	2	3	1	0	0	0	
CB	قاعدة الحل	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	b
2	x_1	1	0	1	6	0	1−	2
3	x_2	0	1	0	3−	0	1	1
0	S_3	0	0	2	2	1	1−	1
	$\bar{C}$	0	0	1−	3−	0	1−	$Z = 7$

وبالتالي الخليط الأمثل وحدتان من المنتج A ووحدة واحدة من المنتج B ويبقى المنتج C غير مجدٍ وانخفض الربح من(8) ليصبح (7)، وبالتالي إضافة قيد جديد لا يحسن الربح هنا.

المبحث السابع
برمجة الأعداد الصحيحة

سوف نخصص في هذه العجالة قسماً ولو كان صغيراً لبرمجة الأعداد الصحيحة، حيث إن البرمجة الصحيحة تعتمد على إيجاد الحل الأمثل بحيث تكون أعداداً صحيحة، تدعى مثل هذه البرمجة بالبرمجة ذات الأعداد الصحيحة، وسوف ندرس منها فقط البرمجة الخطية الصحيحة، وسبب هذه الدراسة أن كثيراً من المسائل تتطلب حلاً صحيحاً فمثلاً نريد عدداً من الأبراج، فإنه يجب أن يكون عدد الأبراج صحيحاً، فمثلاً كان عدد الأبراج بالحل الأمثل (6.4) عندئذ من الممكن القول إن (6) أبراج (6.4)أو (7) أبراج، وقد تؤدي هذه العملية إلى نجاح تام ولكن قد يؤدي التقريب إلى فشل ذريع مع وجود متحولات أخرى صحيحة، وقد يكون بناء البرج مكلف جداً فمثلاً أبراج المنشآت الصناعية قد تكلف حوالي 2 مليون دولار.
وكتطبيق على مسألة البرمجة الخطية الصحيحة نذكر الأمثلة التالية:

مثال: تحفظ شركة لمصرف رأسمالها خلال الفترات T القادمة ويوجد N مشروع يتنافس على رأس مال محدود (B_1) المتوافر للاستثمار في الفترة (i)، وعند اختيار كل مشروع يصبح المشروع بحاجة إلى استثمار معين في كل فترة من الفترات، ويرمز بـ aij للاستثمار بدلالة تدفق السيولة الموافقة للمشروع في كل فترة محسوماً منها قيمة التضخم، وندعو (N, PV) صافي القيمة الحالية، ولنفرض VJ يرمز إلى صافي القيمة الحالية للمشروع J ، عندئذ تكمن المسألة في اختيار المشاريع الملائمة للاستثمار التي تجعل (NPV) أعظمية.

صياغة المسألة: تعطي متحولاً لكل مشروع ويأخذ هذا المتحول قيمتان:

$XJ = 1$ إذاً اختير المشروع

$XJ = 0$ إذا لم يختار المشروع

$$Maxv = \sum VJXJ$$

$$\sum aijxJ \le B \qquad i = 1,2,...T$$

$$J = 1,2,....N \qquad 0 \le XJ \le 1$$

XJ متحول ثنائي

مسألة النفقة الثابتة:

لدينا N منتج حيث يحتاج المنتج J إلى كلفة تحضير ثابتة K_J مستقلة عن الكمية، ويحتاج إلى كلفة متغيرة CJ لكل وحدة منتجة تتناسب مع الكمية المنتجة، ونفرض أن كل وحدة من المنتج J تحتاج إلى aij وحدة من المورد i حيث يوجد (M) مورد، وبفرض أن المنتج (J) له فرصة مبيعات وقدرها αJ يباع بسعر (PJ) لكل وحدة، وأنه يتوافر فقط bi وحدة من كل مورد (i) حيث $(i = 1,2,...M)$. حدد المسألة بحيث يكون الربح الأعظمي.

صياغة المسألة:

إن الكلفة الكلية لكل منتج هي عبارة عن:

كلفة كلية= كلفة ثابتة + كلفة متغيرة حسب كمية المنتج

وهي عبارة عن توابع غير خطية، وبمساعدة متحولات ثنائية (0.1) نحصل على تابع خطي، ولنعرف مايلي

$$S_J \begin{cases} 1 & J \\ 0 & J \end{cases}$$

إذا تم قرار إنتاج المنتج

إذا لم تتخذ قرار بإنتاج المنتج

ولنفرض $XJ \ge 0$ ترمز إلى كمية المنتج (J) فتصبح التكلفة

$$K_J S_J + C_{JX_J}$$

حيث $S_J = 1$ إذا كان $X_J \rangle 0$

$S_2 = 0$ إذا كان $X_J = 0$

ويصبح تابع الهدف $MaxZ = \sum P_J . X_J - (K_J S_J + C_J X_J)$

والقيود

$$\sum_{J=1}^{J=N} aiJXJ \le bJ \qquad i = 1,....M$$

$$J = 1,...N \qquad XJ \le djSJ$$

$$S_J = 0 \qquad S_J = 1, \qquad X_J \ge 0$$

ملاحظة: إذا كان X متحولاً ثنائياً $X = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$

عندئذ $X^n = X$

<u>حل مسائل البرمجة الخطية ذات الأعداد الصحيحة</u>

توجد مسائل برمجة خطية ذات الأعداد الصحيحة لها طرق خاصة، نذكر من المسائل الشهيرة ذات الإعداد الصحيحة:

1. مسألة النقل.
2. مسألة الإسناد «التخصيص».

ولها طرق خاصة لن نتطرق إلى حلها، إنما سوف نتطرق إلى الحالة العامة، وإحدى الخوارزميات المتبعة هي خوارزمية ذات الفرع الواحد.

<u>خوارزمية الفرع الواحد في البرمجة الخطية للأعداد الصحيحة</u>

ليكن لدينا البرنامج

$$MaxZ = 3x_1 + 2x_2$$

$$x_1 \le 2$$

$$x_2 \le 2$$

$$x_1 + x_2 \le 3.5$$

$x_1, x_2 \ge 0$ ومتحولات صحيحة

<u>الحل:</u>

الخطوة الأولى: نحل هذا البرنامج حلاً عادياً، فإن حصلنا على قيم صحيحة يكون الحل الأمثل وانتهى البرنامج، وهنا الحل الأمثل لهذا البرنامج هو

$$x_2 = 1.5$$
$$x_1 = 2$$

وقيمة الهدف $MaxZ = 9$

ولكن نلاحظ أن الحل غير صحيح بسبب $x_2 = 1.5$ ولكن الحد الأعظمي للهدف هو $MaxZ = 9$ ، وبالتالي أي حل صحيح سوف يكون تابع الهدف $Z \le 9$

الخطوة الثانية: هي اختيار قيم صحيحة أخرى للمتحول x_2 والتي تكون أكبر أو أصغر من (1.5) لنرمز للبرنامج $LP-1$ الذي يضاف اليه قيد جديد وهو $x_2 \le 1$

أما البرنامج $LP-2$ الذي يضاف إليه قيد جديد وهو $x_2 \ge 2$

وبالتالي نحصل على برنامجين هما:

$LP-1$	$LP-2$
$MaxZ = 3x_1 + 2x_2$	$MaxZ = 3x_1 + 2x_2$
$x_1 \le 2$	$x_1 \le 2$
$x_2 \le 2$	$x_2 \le 2$
$x_1 + 3x_2 \le 3.5$	$x_1 + x_2 \le 3.5$
$x_2 \ge 1$	$x_2 \ge 2$
$x_1, x_2 \ge 0$	$x_1, x_2 \ge 0$

إن حل البرنامج $LP-1$ يعطي الحلول $x_1 = 2$

$x_2 = 1$ $Z_1 = 8$

وبالتالي نجد أنه $Z = 8$ تعطي حداً أدنى للقيمة العظمى للحل الصحيح وبالتالي سوف يكون الحل الأمثل واقعاً بين $8 \le Z \le 9$

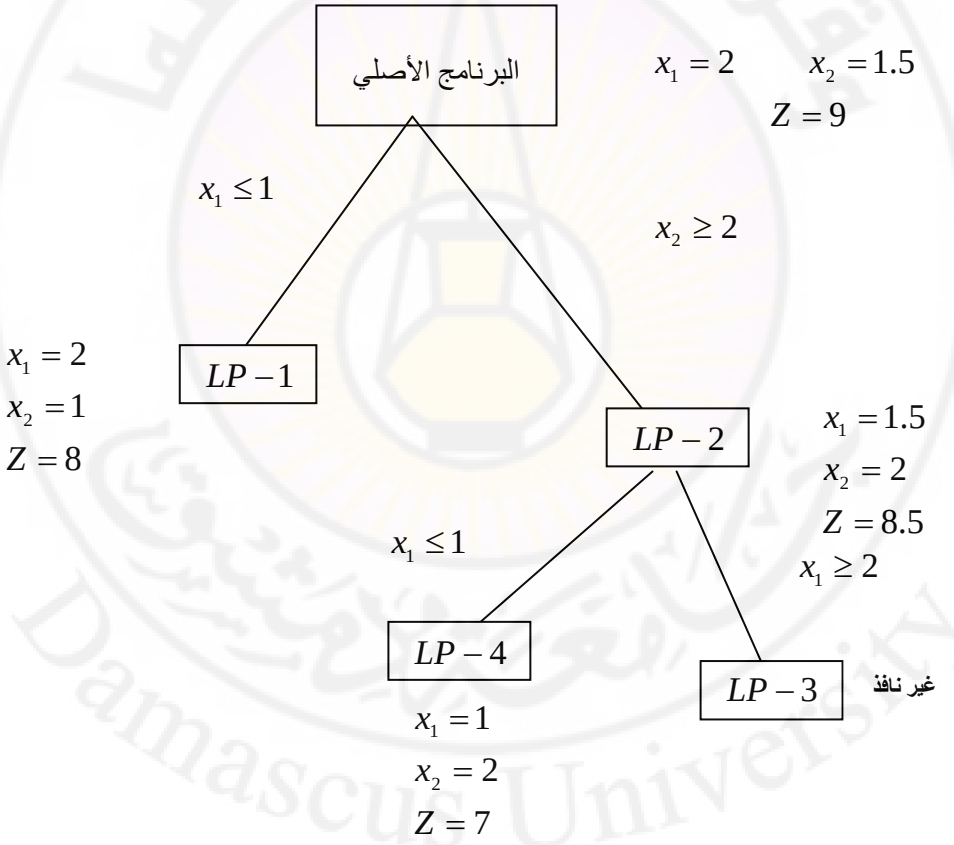
والحل الأمثل لـ $LP-2$ هو

$$x_1 = 1.5$$
$$x_2 = 2$$
$$Z = 8.5$$

وهو حل غير مقبول لأن x_1 كسرية، وبالتالي سوف نضيف على $LP-2$ قيداً جديداً وهو $x_1 \geq 2$ او $x_1 \leq 1$

وبالتالي نجد برنامجين جديدين $LP-3$, $LP-4$

ويمكن رسم شبكة البرامج



وبالتالي أفضل حل هو حل البرنامج $LP-1+b$ والحل الأمثل

$$x_1 = 2$$
$$x_2 = 1$$
$$MaxZ = 8$$

وهو المطلوب.



المبحث الثامن

برمجة الأهداف

هنا نبدأ ببرمجة من نوع آخر وهي عبارة عن برمجة خطية ولكن ليس لها هدف واحد بل لها عدة أهداف ذات مستويات متعددة، ولتقريب ذلك نحن نعلم أننا في بعض الأمثلة تم إيجاد أقل تكلفة وزيادة درجة الوثوقية إلى الحد الأعظمي وذلك بجعل استخدام المواد الأولية بحدٍ أصغري.

إذاً لدينا عدة أهداف يجب تحقيقها في هذه البرمجة وغالباً ما تكون هذه الأهداف متنافسة بحيث إن تحقيق هدف بشكل مطلق سوف يلغي أو يخفض إمكانية تحقيق الأهداف الأخرى

هنا يجب تحديد أحد الأهداف كمعيار أساسي، بينما باقي المعايير فتعد ثانوية ومن ثم يحدد المعيار الأساسي كمقياس لأداء الأمثلة بينما تعطى المعايير الأخرى قيماً أصغرية أو أعظمية مقبولة، وتعالج كقيود مسألة ولكن تعد قيود أهداف إذاً في هذه المسألة تخصص مستويات إنجاز لجميع الأهداف وتخصص أفضلية نسبية لإنجاز هذه المستويات

إذاً في برمجة الأهداف يوجد أمران اثنان وهما:

1. تابع الهدف لتحقيق الأمثل
2. قيود الأهداف

وسوف نناقش الأمرين

1) <u>قيود الأهداف:</u>

تختلف قيود الأهداف عن القيود العادية فمثلاً إن القيد $x_1 + x_2 = 5$ هو قيد يجب أن يحقق مجموع المتحولين مساو للعدد(5)

بينما قيد الهدف $x_1 + x_2 = 5$ ليس إجبارياً بل من الممكن أن يكون $x_1 + x_2 \langle 5$ أو $x_1 + x_2 \langle 3$ ولكن يقترب قدر الإمكان من العدد (5) وبالتالي نضيف اليه متحولات هدف هي d^+, d^- كمايلي

$$x_1 + x_2 + d^- - d^+ = 5$$

حيث $d^+, d^- \geq 0$

فإذا كان d^- له قيمة موجبة عندئذ $x_1 + x_2 \langle 5$ وإذا $d^+ \rangle 0$ عندئذ $x_1 + x_2 \langle 5$

ودوماً نضع تابع الهدف وفق متحولات الأهداف

2) <u>تابع الأهداف:</u>

إن تابع الهدف في برمجة الأهداف هو عبارة عن متحولات أهداف يسند إليها أوزان (wi) لكل متحول هدف وحسب الأهمية والمطلوب.

فمثلاً لدينا القيد الهدف $x_1 + x_2 + d^- - d^+ = 5$

ونريد تحقيق $x_1 + x_2 \langle 5$ عندئذ نضيف وزناً موجباً إلى متحول الهدف d_1^- بينما نعطي وزناً مساوياً الصفر إلى d_1^+

ويمكن التعبير بشكل عام عن تابع الهدف بالصيغة

$$MinZ = \sum_{i=1}^{m} \left(w_i^+ i d_i^+ + w_i^- d_i^- \right)$$

أما القيود فتأخذ الشكل

$$\sum_{J=1}^{n} aijxj + d_i^- - d_i^+ = bi \qquad i = 1,2,....m$$

$$(J),(i) \text{ لجميع قيم } xj, d_i^-, d_i^+ \geq 0$$

فعندما يمكن تعيين الأوزان النسبية $\left(w_i^-, w_i^+ \right)$ من قبل الإدارة تختزل المسألة إلى برنامج خطي مبسط.

وكمثال سوف ندرس مايلي:

مسألة:

تنتج شركة نوعين من المنتجات A,B وتحتاج كل وحدة من A إلى (2) ساعة عمل وكل وحدة من B إلى ثلاث ساعات عمل، وتحتاج كل وحدة من A إلى (4) وحدات من المواد الأولية ولـ B (3) وحدات، فإذا علمت أن الشركة خصصت من مخزونها (150) وحدة أولية وكذلك خصصت عدداً من ساعات العمل يقدر ب 100 ساعة عمل، وأن تكلفة الانتاج الوحدة من A يقدر ب (6) ومن 13 ب (7) وحدات وعلى أن لا تتجاوز الكلفة الكلية عن (320) وحدة، وأعطيت مستويات الأهداف وفق مايلي:

1. الزيادة أو النقصان في ساعات العمل بنفس المقدار.
2. الزيادة أو النقصان في ساعات العمل له ضعفا أهمية ساعات العمل.
3. التكلفة لها نفس أهمية ساعات العمل.

المطلوب: 1. اكتب البرنامج الخطي.

2. أوجد الحل الأمثل للبرنامج الخطي.

الحل:

1. متحولات القرار لعملية الانتاج

x_1 :كمية المنتج A

x_2 :كمية المنتج B

قيد هدف ساعات العمل $2x_1 + 3x_2 + d_1^- - d_1^+ = 100$

قيد هدف المواد الأولية $2x_1 + 3x_2 + d_2^- - d_2^+ = 150$

قيد هدف التكلفة $6x_1 + 7x_2 + d_3^- - d_3^+ = 320$

الآن تابع الهدف.

نلاحظ أن أولويات التكلفة لها نفس أولويات ساعات العمل وبالتالي تعطي وزناً مقدراً وقدره (1) مثلاً.

أما المواد الأولية فلها ضعفي الوزن (2).

وبالتالي يصبح تابع الهدف:

$$MinZ = (d_1^+ + d_1^+) + d_3^+ + 2d_2^- + 2d_2^+$$

حيث لم نضع d_3^- لأننا نريد تصغير التكلفة، وبالتالي يهمنا تصغير القيمة التي تجعل

$$6x_1 + 7x_2 \le 320$$

$$6x_1 + 7x_2 + d_3^- - d_3^+ = 320$$

فإذا كان d^+ لها قيمة فإن التكلفة سوف تصبح

$$6x_1 + 7x_2 + d_3^- = 320 + d_3^+$$

وتزداد عن320 وبالتالي نريد جعل d_3^+ أصغرية

إذاً أصبح لدينا البرنامج

$$MinZ = d_1^- + d_2^- + d_3^+ + 2d_2^- + 2d_2^-$$

$$2x_1 + 3x_2 + d_1^- - d_1^+ = 100$$

$$4x_1 + 3x_2 + d_2^- - d_2^+ = 150$$

$$6x_1 + 7x_2 + d_3^- - d_3^+ = 320$$

$$x_1, x_2, d_i^-, d_i^+ \ge 0$$

	CJ	0	0	1	1	2	2	1	0	
CB	قاعدة الحل	x_1	x_2	d_1^+	d_1^-	d_2^+	d_2^-	d_3^+	d_3^-	b
1	d_1^-	2	3	1-	1	0	0	0	0	100
2	d_2^-	4	3	0	0	1-	1	0	0	150
0	d_3^-	6	7	0	0	0	0	1-	1	320
	$\bar{C}$	10-	9-	2	0	4	0	1	0	$Z = 720$

	CJ	0	0	1	1	2	2	1	0	
CB	قاعدة الحل	x_1	x_2	d_1^+	d_1^-	d_2^+	d_2^-	d_3^+	d_3^-	b
1	d_1^-	0	$3/2$	1-	1	$1/2$	$-1/2$	0	0	25
0	x_1	1	$3/4$	0	0	$-1/4$	$1/4$	0	0	$75/2$
0	d_3^-	0	$5/2$	0	0	$3/2$	$-3/2$	1-	1	95
	$\bar{C}$	0	$-3/2$	2	0	$3/2$	$5/2$	0	0	$Z=25$

	CJ	0	0	1	1	2	2	1	0	
CB	قاعدة الحل	x_1	x_2	d_1^+	d_1^-	d_2^+	d_2^-	d_3^+	d_3^-	b
0	x_2	0	1	$-3/2$	$2/3$	$1/3$	$-1/3$	0	0	$50/3$
0	x_1	1	0	$1/2$	$-1/2$	$-1/2$	$1/2$	0	0	25
0	d_3^-	0	0	$5/3$	$-5/3$	$2/3$	$-2/3$	1-	1	$160/3$
		0	0	1	1	2	2	1	0	$Z=0$

والحل أمثل

$$x_2 = 50/3$$

إذاً نجد

$$x_1 = 25 \qquad d_3^+ = 0$$

$$d_3^- = 160/3$$

وبالتالي تصبح التكلفة

$$6x_1 + 7x_2 + 160/3 = 320$$

$$6x_1 + 7x_2 = 320 - 160/3$$

التكلفة $= 266\frac{2}{3}$

3) برمجة الأهداف بطريقة الشفعة

في كثير من الحالات يكون من الصعب تعيين الأوزان النسبية، وبالتالي نستخدم التسلسل الترتيبي أو أولويات الشفعة Preemptive Priorities ويأخذ تابع الهدف عندئذ الشكل:

$$MinZ = \sum_k P_K (wik^+ d_i^+ + wik^- d_i^-)$$

حيث p_k تمثل الأفضلية، وبفرض $p_k \gg p_{k+1}$ أي p_k أكبر بكثير من p_{k+1} ، وحيث wik^+, wik^- هي الأوزان المسنده إلى متحولات الانحراف ذات الدليل (i) عند الأفضلية (k). وفي هذه الطريقة لا تؤخذ الأفضلية الأدنى بالحسبان إلا بعد الحصول على الأفضليات الأعلى.

وتعتمد خوارزمية هذه الطريقة حل المسألة بالتجزئة وفق مايلي:

1. نحل أصغر مسألة فرعية ذات الأفضلية العليا (p_1) والحدود الموافقة لها حتى نحصل على الحل الأمثل فإذا كان الحل الأمثل وحيداً يتوقف الحل.
2. في حال وجود حلول بديلة نضيف الأفضلية التالية، مع الحدود الموافقة لها، وتحويل البرنامج إلى برنامج ذو حل قاعدي، ونتابع الحل فإذا كان الحل أمثل نتوقف، وإذا وجدنا حلولاً بديلة نتابع حسب الأفضلية التالية، حتى حصولنا على حل أمثل وحيد أو وجود حل أمثل حسب الأفضلية الأخيرة.

وكمثال عليها سوف ندرس المثال التالي:

مسألة: تمتلك شركة آلتين لتصنيع منتج ما وتقدر طاقة الآلة الأولى بوحدتي إنتاج في الساعة أما الآلة الثانية بثلاث وحدات إنتاج، وتدرس الشركة طلباً لإنتاج (80) وحدة ودائماً يجب تشغيل آلة واحدة لضرورة الطاقة، ويتوافر للشركة (40) ساعة تصنيع عادية و(10) ساعات عمل إضافية، وتبلغ تكلفة تشغيل الآلة الأولى (4)

وحدات نقدية بالساعة، والثانية (5) وحدات نقدية بالساعة وكانت أهداف الشركة حسب ترتيب الأهمية كمايلي:

1. انجاز الطلب المتمثل ب80 وحدة.
2. تعيين زمن العمل الاضافي للآلة.
3. استخدم وقت الآلة النظامي ب 40 ساعة.
4. جعل تكلفة الانتاج أصغرية.

المطلوب:

1. أوجد صياغة المسألة حسب أولويات الشفعة.
2. أوجد حل البرنامج وحدد كميات المنتج وساعات العمل النظامية والإضافية والتكلفة الدنيا حسب ترتيب الأولويات.

الحل:

1 بفرض

x_1 :عدد ساعات تشغيل الآلة الأولى

x_2 :عدد ساعات تسغيل الآلة الثانية

قيد هدف الطلب

$$2x_1 + 3x_2 + d_1^- - d_1^+ = 80$$

قيد هدف العمل النظامي

$$x_1 + x_2 + d_2^- - d_2^+ = 40$$

قيد هدف العمل الإضافي: نحن نعلم أن ساعات العمل النظامي + الإضافي كاملة 50 وبالتالي

$$x_1 + x_2 + d_3^- - d_3^+ = 50$$

قيد هدف التكلفة: لم يتم تحديد المستوى التكلفة؛ وبالتالي سوف نعدّ مستوى التكلفة صفراً، ويصبح تابع التكلفة:

$$4x_1 + 5x_2 + d_4^- - d_4^+ = 0$$

وهنا نريد جعل d_4^+ أصغرياً لأنه كلما كبر تكبر التكلفة

أما تابع الهدف

$$MinZ = p_1(d_1^- + d_1^+) + p_2 d_3^+ + p_3(d_2^- + d_2^+) + p_4 d_4^+$$

إذاً أصبح البرنامج

$$MinZ = p_1(d_1^- + d_1^+) + p_2 d_3^+ + p_3(d_2^- + d_2^+) + p_4 d_4^+$$

$$2x_1 + 3x_2 + d_1^- - d_1^+ = 80$$

$$x_1 + x_2 + d_2^- - d_2^+ = 40$$

$$x_1 + x_2 + d_3^- - d_3^+ = 50$$

$$4x_1 + 5x_2 + d_4^- - d_4^+ = 0$$

$$x_1, x_2, d_i^-, d_i^+ \geq 0$$

2. نحل برنامج الشفعة الآولى p_1 وفق مايلي

$$MinZ = d_1^- + d_2^+$$

$$2x_1 + 3x_2 + d_1^- - d_1^+ = 80$$

$$x_1, x_2, d_1^-, d_1^+ \geq 0$$

نلاحظ أن d_1^- متحول أساسي

	CJ	0	0	1	1	
CB	قاعدة الحل	x_1	x_2	d_1^-	d_2^+	b
1	d_1^-	2	3	1	1−	80
	$\bar{C}$	2−	3−	0	2	$Z = 80$

	CJ	0	0	1	1	
CB	قاعدة الحل	x_1	x_2	d_1^-	d_2^+	b
0	x_2	$2/3$	1	$1/3$	$-1/3$	$80/3$
	$\bar{C}$	0	0	1	1	$Z=0$

والحل أمثل هنا، ولكن يوجد حل بديل وهو (x_1) إذاً نتابع على الشفعة الثانية

ملاحظة1: لو كان الحل أمثل ووحيداً لتوقفنا ولا نكمل إلى الشفعة الثانية.

الشفعة الثانية: p_2

نلاحظ أنه لدينا البرنامج للشفعة الثانية كمايلي:

$$MinZ = d_3^+$$

$$x_1 + x_2 + d_3^- - d_3^+ = 50$$

وكون x_2 حل قاعدي في البرنامج الأول يجب حذف x_2 من القيد الحالي

	CJ	0	0	0	1	
CB	قاعدة الحل	x_1	x_2	d_3^-	d_3^+	b
0	x_2	$2/3$	1	0	0	$80/3$
0	d_3^-	1	1	1	1−	50

هنا نضرب السطر الأول ب(1−) ونجمع إلى السطر الثاني كي نحصل على حل قاعدي بالنسبة لـ d_3^-, x_2

	CJ	0	0	0	1	
CB	قاعدة الحل	x_1	x_2	d_3^-	d_3^+	b
0	x_2	$2/3$	1	0	0	$80/3$
0	d_3^-	$1/3$	0	1	1−	$70/3$
	$\bar{C}$	0	0	0	1	$Z=0$

والحل أمثل هنا ولكنه ليس وحيداً وبالتالي نتابع على الشفعة الثالثة.

الشفعة الثالثة p_3 :

$$MinZ = d_2^- + d_2^+$$

$$x_1 + x_2 + d_2^- - d_2^+ = 40$$

وأصبح البرنامج

	CJ	0	0	0	1	1	
CB	قاعدة الحل	x_1	x_2	d_3^-	d_2^-	d_2^+	b
0	x_2	$2/3$	1	0	0	0	$80/3$
0	d_3^-	$1/3$	0	1	0	0	$70/3$
1	d_2^-	1	1	0	1	1−	40

نلاحظ أن الحل غير قاعدي، وكي يكون x_2 قاعدياً نضرب السطر الأول بـ (1−) ونجمع إلى الثالث.

	CJ	0	0	0	1	1	
CB	قاعدة الحل	x_1	x_2	d_3^-	d_2^-	d_2^+	b
0	x_2	$2/3$	1	0	0	0	$80/3$
0	d_3^-	$1/3$	0	1	0	0	$70/3$
1	d_2^-	$1/3$	0	0	1	1−	$40/3$
	$\bar{C}$	$-1/3$	0	0	0	2	$Z = 40/3$

	CJ	0	0	0	1	1	
CB	قاعدة الحل	x_1	x_2	d_3^-	d_2^-	d_2^+	b
0	x_2	1	$3/2$	0	0	0	40
0	d_3^-	0	$-1/2$	1	0	0	10
1	d_2^-	0	$-1/2$	0	1	1−	0
	$\bar{C}$	0	$1/2$	0	0	2	$Z = 0$

والحل أمثل ووحيد لذلك نتوقف ولاداعي لحل الشفعة الرابعة.

إذاً الحل الأمثل

$$x_1 = 40$$

$$x_2 = 0$$

$$d_3^- = 10$$

$$d_2^- = 0$$

وباقي المتحولات أصفار

$x_1 = 40$ عدد ساعات عمل الآلة الأولى

$x_2 = 0$ عدد ساعات عمل الآلة الثانية

قيد هدف الطلب

$$2x_1 + 3x_2 + d_1^- - d_1^+ = 80$$
$$2(40) + 0 + 0 + 0 = 80$$

وتنتج (80) وحدة بالضبط

العمل النظامي

$$x_1 + x_2 + d_2^- - d_2^+ = 40$$
$$40 = 40$$

العمل الاضافي

$$x_1 + x_2 + d_3^- + d_3^+ = 50$$
$$40 + 0 + 10 - d_3^+ = 50$$

$d_3^+ = 0$ العمل الإضافي معدوم

التكلفة

$$4x_1 + 5x_2 + d_4^- - d_4^+ = 0$$

$$d_4^- = 0$$

$$d_4^+ = 4x_1 + 5x_2$$

وهي التكلفة الدنيا

$$d_4^+ = 160$$

والتي لم تنجز.

<u>تطبيقات برمجة الأهداف</u>

تطبق برمجة الأهداف في عدد كبير من مسائل التخطيط نذكر منها:

. تخطيط اليد العاملة.

. الموارد المائية.

. اختيار التشكيل الوزاري.

. تخطيط الإنتاج وجدولته.

. ضبط الجودة.

. النقل.

. المحاسبة.

. إدارة الغابات.

. جدولة عمل الممرضين.

مسألة:

خصص مستهلك مبلغ (330) وحدة نقدية على الأكثر وذلك لشراء سلعتين (A,B)تبلغ سعر الواحدة من A (5)، وسعر الواحدة من B (4) وحدات نقدية على التوالي، فإذا علمت أن منفعة الوحدة من Aبـ (20) وحدة منفعة (utilion) ومن B بـ (18)، وأن المستهلك يرغب بأن يحصل على وحدات من B أكثر منAوقد حددت مستويات الأهداف حسب الشفعة الأفضل وفق مايلي:

1. مستوى الدخل 330.

2. المنفعة العظمى.

3. أن يحصل على وحدات منB أكثر منA .

والمطلوب:

1. صياغة البرنامج الخطي للأهداف.

2. حل البرنامج الخطي وإيجاد القيم اللازمة لكل هدف.

الحل:

1. نفرض

x_1 :كمية السلعة A

x_2: كمية السلعة B

قيد هدف الدخل $5x_1 + 4x_2 + d_1^- - d_1^+ = 330$

قيد هدف المنفعة: منفعة الوحدة من A

A: 20

B: 18

إذاً $20x_1 + 18x_2 + d_2^- - d_2^+ = 0$

حدد مستوى المنفعة بالصفر كمستوى أدنى

قيد هدف الأفضلية «الرغبة» $x_2 - x_1 + d_3^- - d_3^+ = 0$

وبالتالي الهدف يكون

$$MinZ = p_1(d_1^- + d_1^+) + p_2 d_2^- + p_3 d_3^-$$

وبالتالي أصبح البرنامج

$$MinZ = p_1(d_1^- + d_1^+) + p_2 d_2^- + p_3 d_3^-$$
$$5x_1 + 4x_2 + d_1^- - d_2^+ = 330$$
$$20x_1 + 18x_2 + d_2^- - d_2^+ = 0$$
$$x_2 - x_1 + d_3^- - d_3^+ = 0$$
$$x_1, d_i^-, d_i^+ \geq 0 \qquad J = 1.2 \qquad I = 1,2,3$$

2 . الشفعة الأولى

$$MinZ = d_1^- + d_1^+$$
$$5x_1 + 4x_2 + d_2^- - d_1^+ = 330$$

	CJ	0	0	1	1	
CB	قاعدة الحل	x_1	x_2	d_1^-	d_1^+	b
1	x_1	5	4	1	1−	330
	$\bar{C}$	5−	4−	0	2	$Z = 330$

	CJ	0	0	1	1	
CB	قاعدة الحل	x_1	x_2	d_1^-	d_1^+	b
0	x_1	1	$4/5$	$1/5$	$-1/5$	330
	$\bar{C}$	0	0	1	1	$Z = 0$

والحل أمثل ولكن ليس وحيداً إذاً نتابع على الشفعة الثانية.

الشفعة الثانية

$$MinZ = p_2 d_2^-$$

$$20x_1 + 18x_2 + d_2^- - d_{12}^+ = 0$$

إذاً أصبح

	CJ	0	0	1	0	
CB	قاعدة الحل	x_1	x_2	d_1^-	d_1^+	b
0	x_1	1	$4/5$	0	0	66
1	d_2^-	20	18	1	1−	$Z = 0$

ولكن x_1 ليس من القاعدة إذاً نضرب السطر الأول بـ (20−) ونجمع إلى السطر الثاني كي يصبح عمود x_1 من الشكل $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

	CJ	0	0	1	1	
CB	قاعدة الحل	x_1	x_2	d_2^-	d_2^+	b
0	x_1	1	$4/5$	0	0	66
1	d_2^-	0	2+	1	1−	1320−
	$\bar{C}$	0	2	0	1	

الحل نافذ ثنوياً ولكن غير نافذ للبرنامج الأولي

$$Max\frac{\bar{c}\,j}{aij} \qquad - \qquad -1$$

$$aij\langle 0$$

	CJ	0	0	1	0	
C13	قاعدة الحل	x_1	x_2	d_2^-	d_2^+	b
0	x_1	1	$4/5$	0	0	66
0	d_2^+	0	2−	1−	1	1320
	$\bar{C}$	0	0	0	0	Z = 0

والحل أمثل ولكن ليس وحيداً إذاً نتابع على الشفعة الثالثة.

الشفعة الثالثة:

$$MinZ = p_3 d_3^-$$

$$-x_1 + x_2 + d_3^- - d_3^+ = 0$$

فيصبح البرنامج:

	CJ	0	0	0	1	0	
C13	قاعدة الحل	x_1	x_2	d_2^+	d_3^-	d_3^+	b
0	x_1	1	$4/5$	0	0	0	66
0	d_2^+	0	-2	1	0	0	1320
1	d_3^-	-1	1	0	1	-1	0

نجمع السطر الأول مع السطر الثالث كي يصبح الحل قاعدياً.

	CJ	0	0	0	1	0	
C13	قاعدة الحل	x_1	x_2	d_2^+	d_3^-	d_3^+	b
0	x_1	1	$4/5$	0	0	0	66
0	d_2^+	0	-2	1	0	0	1320
1	d_3^-	0	$9/5$	0	1	-1	66
	$\bar{c}$	0	$-9/5$	0	0	1	$Z = 66$

	CJ	0	0	0	1	0	
C13	قاعدة الحل	x_1	x_2	d_2^+	d_3^-	d_3^+	b
0	x_1	1	0	0	$-4/9$	$4/9$	$110/3$
0	d_2^+	0	0	1	$-10/9$	$10/9$	$1/3$ 1320
1	x_2	0	1	0	$5/9$	$-5/9$	$110/3$
	$\bar{c}$	0	0	0	1	0	Z = 0

وبالتالي الحل أمثل

$$x_1 = 110/3$$

$$x_2 = 110/3$$

$$d_2^+ = 1393\ 1/3$$ المنفعة

المبحث التاسع

تطبيقات حول الفصل الثاني

مثال1: ليكن لدينا البرنامج

$$MinZ = 40x_1 + 36x_2$$
$$x_1 \le 8$$
$$x_2 \le 10$$
$$5x_1 + 3x_2 \ge 45$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

1. حل البرنامج باستخدام طريقة المصفوفات
2. ما هو مجال تكلفة x_2 كي يبقى الحل السابق دون تغيير
3. بفرض $(-1,1)$أدرس البرنامج وسيطياً.

. مثال2: بفرض أنه لدينا البرنامج الخطي:

$$MaxZ = 3x_1 + 2x_2$$

وكانت المعطيات

$$p_{x1} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad p_{x2} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad p_{s1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad p_{s2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad p_{s3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 4 \\ 14 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad xi, si \ge 0$$

وبفرض أنه في إحدى مراحل الحل كانت المعطيات:

$$XB = (S_1, S_2, X_1) \qquad , B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

والمطلوب:

1. احسب الحل الأساسي النافذ الحالي
2. هل الحل الحالي أمثل، وأي المتحولات يجب إضافتها لقاعدة الحل
3. اختر المتحول الخارج من قاعدة الحل وصف قاعدة الاختيار
4. أكمل المسألة للحصول على الحل الأمثل إن أمكن

. مثال3: ليكن لدينا البرنامج الخطي

$$MinZ = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4$$
$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 \geq 30$$
$$2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 \geq 20$$
$$xi \geq 0$$

1. اكتب البرنامج الثنوي
2. أوجد حل البرنامج الثنوي باستخدام الطريقة المعدلة
3. استنتج حل البرنامج الأساسي حسب مبرهنة الفضفضة

. مثال4: ليكن لدينا البرنامج

$$MinZ = 20x_1 + 18x_2$$
$$x_1 \leq 8$$
$$x_2 \leq 12$$
$$5x_1 + 3x_2 \geq 65$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

1. اكتب البرنامج الثنوي

2. حل البرنامج الثنوي باستخدام الطريقة المصفوفية المعدلة
3. استنتج حل البرنامج الأولي باستخدام شروط الفضفضة

. مثال5: ليكن لدينا البرنامج

$$\begin{aligned} MinZ &= 3x_1 + 2x_2 \\ -x_1 + 2x_2 &\le 8 \\ 3x_1 + 2x_2 &\le 28 \\ x_1 - x_2 &\le 6 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

1. اكتب البرنامج الثنوي
2. برهن باستخدام النظرية الثنوية وجود حل أمثل لكلا المسألتين الأولية والثنوية
3. احسب الحد الأعلى والحد الأدنى للقيم المثلى باستخدام مبرهنة الثنوية الضعيفة

. مثال6: برهن باستخدام النظرية الثنوية أن البرنامج الخطي نافذ، ولكن ليس لحل أمثل

$$\begin{aligned} MinZ &= x_1 - x_2 + x_3 \\ x_1 - x_3 &\ge 4 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &\ge 3 \\ x_1, x_2, x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

. مثال7: ليكن لدينا البرنامج

$$MaxZ = x_1 + 2x_2 + x_3$$
$$x_1 + x_2 - x_3 \le 2$$
$$x_1 - x_2 + x_3 = 1$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 \ge 2$$
$$x_1 \ge 0 \qquad x_2 \ge 0 \qquad \text{غير مقيد بالإشارة}$$

1. اكتب البرنامج الثنوي
2. برهن باستخدام النظرية الثنوية أن القيمة الأعظمية لـ (Z) لا يمكن أن تتجاوز (1)
3. أوجد الحل الأمثل للبرنامج الأولي
4. استنتج حل البرنامج الثنوي باستخدام الفضفضة

. مثال8: ليكن لدينا البرنامج

$$MinZ = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4$$
$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 \ge 30$$
$$2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 \ge 20$$
$$xi \ge 0$$

1. حل البرنامج السابق باستخدام الطريقة الثنوية
2. استنتج حل البرنامج الثنوي.

. مثال9: ينتج معمل ثلاثة أنواع من المنتجات ويحتاج كل منتج إلى ثلاثة موارد: خدمات ويد عاملة وإدارة، وكان الجدول التالي الذي يوضح احتياجات كل وحدة من المنتج من الموارد الثلاثة.

المنتج	خدمات	يد عاملة	إدارة	ربح الوحدة
1	1	10	2	10
2	1	4	2	6
3	1	5	6	4

ويتوافر (100) ساعة للخدمات و600 ساعة من اليد العاملة و(300) ساعة إدارة

والمطلوب:

1. اكتب البرنامج السابق
2. أوجد الحل الأمثل
3. باستخدام تحليل الحساسية أجب عمايلي:

أ . ما هو مجال ربح المنتج الأول بحيث يبقى الحل الحالي أمثل

ب . يعتقد أن تقدير الساعات المتوافرة من الخدمات الفنية قد تكون خاطئة والتقدير الصحيح $(100+10\lambda)$حيث(λ) وسيط مجهول

أوجد مجال تغير (λ) الذي يحافظ على أمثلية المنتجات

جـ حدد أسعار الظل لجميع الموارد

هـ تقديم قسم التصنيع باقتراح إنتاج منتج جديد يحتاج إلى (1) ساعة خدمات و(4) ساعات من اليد العاملة و(3) ساعات إدارة، ويتوقع قسم البيع والتسويق أنه يمكن مبيع المنتج بربح قدره (8) للوحدة ما هو القرار الذي يجب أن تتخذه الإدارة.

. مثال10: ليكن لدينا البرنامج الخطي لانتاج ثلاثة منتجات

$$MaxZ = 3x_1 + x_2 + 5x_2$$

يد عاملة $\quad 6x_1 + 3x_2 + 5x_3 \le 45$

مواد $\quad 3x_1 + 4x_4 + 5x_3 \le 30$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

والمطلوب:

1. أوجد الحل الأمثل لكل من المنتجات وهل إنتاج المنتج الثاني مجدٍ

2. أوجد مجال تغير ربح المنتج A كي يكون الحل الأمثل دون تغيير

3. بفرض أننا يمكن أن نحصل على (15) إضافية من المواد بكلفة قدرها (10) وحدات نقدية، هل القيام بذلك مربح؟

4. أوجد الحل الأمثل عندما تزداد كمية المواد لتصبح (60)

5. بفرض أنه لدينا الإشراف الجديد $x_1 + x_2 + 3x_3 \le 20$ قد أضيف للمسألة فكيف يؤثر هذا القيد على الحلول المثلى؟

. مثال11: حل البرنامج الصحيح المختلط الآتي باستخدام خوارزمية الفرع والحد:

$$MinZ = 10x_1 + 9x_2$$
$$x_1 \le 8$$
$$x_2 \le 10$$
$$5x_1 + 3x_2 \ge 45$$
$$x_1 \ge 0 \qquad x_2 \ge 0$$

متحول صحيح x_2

. مثال12: حل برنامج الأهداف باستخدام خوارزمية الشفعة

$$MinZ = p_1 d_1^- + p_3(6d_3^+ + 5d_4^-) + p_4(6d_4^- + 5d_3^-)$$
$$5x_1 + 6x_2 + d_1^- - d_1^+ = 120$$
$$x_2 + d_2^- - d_2^+ = 11$$
$$x_1 + d_3^- - d_3^+ = 8$$
$$10x_2 + d_4^- - d_4^+ = 80$$
$$xi, d_i^-, d_i^+ \ge 0$$

. مثال13: ليكن لدينا البرنامج الخطي

$$MaxZ = x_1 - x_2 + x_3 - x_4$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8$$
$$0 \le x_1 \le 8$$
$$-4 \le x_2 \le 4$$
$$-2 \le x_3 \le 4$$
$$0 \le \quad x_4 \le 10$$

1. اكتب البرنامج الثنوي
2. برهن أن الحل

$$x_1 = 8$$
$$x_2 = -4$$
$$x_3 = 3$$
$$x_4 = 0$$

هو حل أمثل باستخدام مبرهنة الفضفضة المتممة.

. مثال14: ليكن لدينا البرنامج

$$MaxZ = 5x_1 + 8x_2 + 5x_2$$
$$x_1 + x_2 \le 6$$
$$5x_1 + 9x_2 \le 45$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

1. حل البرنامج السابق وأوجد الحل الأمثل
2. باقتراح أن x_1, x_2 متحولات صحيحة، دور الحلول كي تحصل على حلول صحيحة وأوجد قيمة الحل
3. حل البرنامج السابق بافتراض أن x_1, x_2 متحولات صحيحة باستخدام خوارزمية الفرع والحد، وأوجد الحل الأمثل وقارن مع الطلب الثاني.

الباب السادس

التوابع الأسية

و

نماذج النمو الاقتصادي

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الفصل الأول

التطبيقات الاقتصادية للتوابع الأسية

تعريف التابع الأسي:

بفرض أن X متحول نعرف التابع الآسي بالعلاقة

$$y = f(Ab^{*})$$

حيث b عدد ثابت

x المتحول

y التابع المتعلق بالمتحول x

A ثابت

وبفرض أنه لدينا التابع

$$y = Ab^{x}$$

فإن مشتقه

$$y` = Ab^{x}.\ln b$$

حيث $\ln b$ اللوغاريتم الطبيعي للثابت b

فإذا كان التابع له الشكل

$$y = Ae^{f(x)}$$

فإن مشتقه

$$y` = f^{\backslash}(x).Ae^{f(x)}$$

حيث fx دالة لـ x

بعض التطبيقات على التوابع الآسية

يوجد العديد من المجالات التي يمكن استخدام التوابع الآسية فيها وسوف ندرس هنا معادل النمو والفائدة والاستثمارات

1. معدل النمو القومي

بفرض لدينا الناتج القومي في العام (t) يعطى بالعلاقة

$$y(t) = y_0 \quad e^{rt}$$

حيث

y_0 :الناتج القومي في شق الأساس

r :معدل نمو الناتج القومي

t :العام t بالنسبة للأساس (0)

عندئذ نجد

$$\frac{dy_{(t)}}{dt} = r \quad y_0 \quad e^{rt}$$

$$\frac{dy_{(t)}}{dt} = r \quad y(t)$$

أي إن تغير الناتج القومي في العام (t) هو الناتج في نفس العام مضروباً بعامل نمو الناتج القومي وكمثال:

بفرض $y(t) = 20 \quad e^{0.02t}$

حيث $y_0 = 20$ الناتج القومي عام 1970

المطلوب:

1- احسب تغير الناتج في العام 1975

الحل: نحسب الناتج في عام 1975 $(t = 5)$

$$y = 20 \quad e^{(0.02)(5)} = 22.1034$$

وبالتالي تغير الناتج في عام 1975

$$\frac{dy}{dt} = r \qquad y_{(t)}$$
$$= (0.02)(22.103)$$
$$= 0.442$$

2. معدل الفائدة السنوي

نحن نعلم أنه لو تم استثمار الوحدة النقدية بمعدل سنوي (i) ولمدة عام كامل لكل الناتج

$$k = (1+i)$$

وبفرض أنه لدينا مبلغ (k)نريد استثمار (n) عام وبمعدل فائدة سنوي (i) كان الناتج

جملة مبلغ k لمدة n عام $k_n = k(1+i)^n$

بمعدل سنوي (i) مركب

ولنفرض أن المبلغ (k) تدفع له الفائدة (m) مرة بالعام، وكان المعدل السنوي (i) عندئذ جملة المبلغ خلال العام تعطى

$$k = k(1+\frac{i}{m})^m$$

وتعطى الجملة خلال (n) عام

$$k_n = k(1+\frac{i}{m})^{n.m}$$

فمثلاً بفرض أن معدل الفائدة السنوي $i = 8\%$ وتدفع الفائدة مرتين بالعام فما هي جملة مبلغ قدره (5000) بعد ثلاثة أعوام

تعطى الجملة بالعلاقة

$$k_3 = k(1+\frac{i}{m})^{3.m}$$

وكون

$$i = 0.08 \qquad m = 2$$

$$k_3 = 5000(1+\frac{0.08}{2})^{3.2}$$

$$= 5000(1.04)^6$$

$$= 6326.59$$

وإذا كانت تدفع ثلاث مرات بالعام تصبح

$$k_3 = 5000(1+\frac{0.08}{3})^{3.3}$$

$$= 6336.29$$

وإذا كانت تدفع أربع مرات بالعام تصبح:

$$k_3 = 5000(1+\frac{0.08}{4})^{4.3}$$

$$= 6341.20$$

ولكن ماذا لو كانت تدفع بشكل مستمر

نلاحظ أن المقدار $\left(1+\frac{i}{m}\right)^m$

سوف تزداد m إلى عدد كبير جداً يبرهن أن

$$Lim \qquad \left(1+\frac{i}{m}\right)^m = e^i$$

$$m \to \alpha$$

وبالتالي تصبح الجملة

$$k_n = k \qquad e^{t.i}$$

فمثلاً المبلغ السابق (5000) ومعدل سنوي $i = 0.08$ وتدفع الفائدة بشكل مستمر احسب جملة المبلغ بعد ثلاث سنوات.

نجد أنه

$$k_3 = 5000 \qquad e^{3(0.08)} = 6356.24$$

وبالتالي المعدل السنوي المكافئ $\overset{\backprime}{i} = e^{i} - 1$

إذا كانت الفائدة تدفع بشكل مستمر.

مثال:

إذا كان لدينا معدل السنوي $i = 0.05$ وتدفع الفائدة بشكل مستمر.

احسب معدل الفائدة السنوي المكافئ.

الحل:

$$i^{\backprime} = e^{0.05} - 1$$

$$i^{\backprime} = 0.05127 \text{ أو } 5.127\%$$

الاستثمار والقيمة الحالية لتيار الدخل المستقبلي

يقوم المستثمرون بتوظيف أموالهم في المصانع أو المشاريع الإنتاجية الأخرى اعتقاداً منهم بأن ذلك سوف يؤدي إلى ربح، وبالطبع سوف يكون هناك عائد في كل عام.

وبالتالي إذا وضع شخص مبلغ (100) بمعدل 5% سنوياً فبعد مرور عام سوف يحصل على مبلغ وقدره (105)؛ وبالتالي فإن المستثمر لن يقبل بمبلغ أقل من (105) في العام القادم.

إذاً بفرض أننا استثمرنا مبلغ k ويعطى إيرادات

S_1: المبلغ في العام الأول

S_2: المبلغ في العام الثاني

$\overset{i}{S}_n$: المبلغ في العام n

k: كلفة المشروع

عندئذ القيمة الحالية للمبالغ السابقة نرمز لها (pv) القيمة الحالية

$$pv = \frac{S_1}{(1+i)} + \frac{S_2}{(1+i)^2} + \ldots\ldots + \frac{S_n}{(1+i)^n}$$

فإذا $pv \langle k$ نرفض المشروع

$pv = k$ حسب العائد الاجتماعي

$pv \rangle k$ نقبل المشروع

أو يمكن أن نأخذ صافي القيمة الحالية Npv والتي تساوي القيمة الحالية مطروحاً منها كلفة المشروع في بدء الزمن

$$Npv = pv - k$$

مثال:

مشروع تجاري تبلغ كلفته عند بدء المشروع (2000) و N ، وعمر المشروع ثلاث سنوات، فإذا علمت أنه في العام الثاني يحتاج إلى استثمار أولي وكانت التدفقات النقدية :

العام	0	1	2	3
التدفق النقدي	2000−	1200	500−	2100

وأن سعر الفائدة (الفرصة البديلة) بالسوق 6% هل تؤيد هذا المشروع برر رياضياً؟

الحل:

$k = 2000$ كلفة المشروع وهو التدفق في بدء الزمن وبالسالب

وبالتالي نجد أن صافي القيمة الحالية Npv

$$Npv = -2000 + \frac{1200}{1+6\%} - \frac{500}{(1+6\%)^2} + \frac{2400}{(1+6\%)^3}$$

$$Npv = 702.16$$

وبما أن $Npv \rangle 0$ إذاً نؤيد هذا المشروع.

مثال:

نريد شراء آلات تبلغ قيمتها (80000) وحدة نقدية وعمر الآلات الإنتاجي ثلاث سنوات وبفرض أنه في العام الأول تنتج (5000) وحدة وفي العام الثاني (3000) وحدة والثالث (2500) وحدة، وتباع الوحدة في العام الأول بـ 12 وحدة نقدية وفي العامين الثاني والثالث بـ (10) وتبلغ تكلفة الوحدة (2) وحدة نقدية، فإذا علمت أنه بلغت مصاريف الصيانة في العام الثاني (2000) والمصاريف النثرية في كل عام (500) وتباع الآلة في نهاية المدة كنفاية بـ (15%) من ثمن شرائها وأن سعر الفائدة بالسوق (5%) وأن الدولة تقطع (2%) من صافي الدخل السنوي ضرائب والمطلوب:

1 – احسب تيار الدخل المصاحب لكل عام.

2 – احسب صافي القيمة الحالية وهل تؤيد شراء الآلات؟

الحل:

لنحسب في كل عام صافي التدفق النقدي

في العام الأول

مبيع	60000	=	(5000)(12)
تكلفة	(10000)	=	(5000)(2)
مصاريف نثرية	(500)		
	صافي الدخل	=	49500

صافي الدخل بعد اقتطاع الضريبة هو 98%

$$(49500)(0.98) = 48510$$

إذاً $S_1 = 48510$

في العام الثاني

مبيع	30000	=	(3000)(10)
تكلفة	(6000)	=	(3000)(2)
مصاريف نثرية	(500)		
صيانة	(2000)		
	صافي الدخل	=	21500

صافي الدخل بعد اقتطاع الضريبة في العام الثاني

$$S_2 = (21500)(0.98) = 21070$$

<u>في العام الثالث</u>

مبيع	25000	=	(2500)(10)
تكلفة	(5000)	=	(2500)(2)
مصاريف نثرية	(500)		
	صافي الدخل	=	19500

صافي الدخل بعد الضريبة

$$(19500)(0.98) = 19110$$

نفاية الآلة في العام الثالث5%

$$(80000)(0.15) = 12000$$

وبالتالي $S_3 = 19110 + 12000 = 31110$

$$Npv = -80000 + \frac{48510}{1.05} + \frac{21070}{(1.05)^2} + \frac{31110}{(1.05)^3} \quad -2$$

$$Npv = 12185.1$$

إذاً $Npv \rangle 0$ وننصح بشراء الآلات

معدل العائد الداخلي للمشروع (الكفاية الحدية)

بفرض أن سعر الفائدة بالسوق (i) وأن معدل عائد المشروع r عندئذ نجد أنه

$r\rangle i$ ننصح بالمشروع لأنه معدله أعلى من معدل السوق

$r=i$ هنا حسب حالة المشروع

$r\langle i$ لا ننصح بالمشروع ونستثمر بالسوق (المصرف)

ولحساب معدل عائد المشروع (الكفاية الحدية) r نتبع القانون

$$k=\frac{S_1}{1+r}+\frac{S_2}{(1+r)^2}+.....+\frac{S_N}{(1+r)^n}$$

حيث:

k :كلفة المشروع

S_1 :تيار الدخل المصاحب للعام الأول

S_n :تيار الدخل المصاحب للعام n

r معدل عائد المشروع الداخلي (الكفاية الحدية)

وهنا نفرض أن $\frac{1}{(1+r)^n}=x^n$ أو $(1+r)^n=x^n$

ونحل المعادلة ولكن نجد صعوبة في حل المعادلات من الدرجة الثالثة فأكثر ولذلك عند هذا المستوى نتبع طريقة التقريب ونحسب المعدل حسب العلاقة الخطية بين المعدلين.

مثال:

بفرض أنه لدينا مشروع كانت إيراداته كما يلي:

العام	0	1	2
الإيراد	3000−	2000	1500

المطلوب:

1 – احسب معدل عائد المشروع الداخلي

2 – هل تؤيد المشروع إذا كان سعر فائدة السوق 6%

الحل:

$$k = 3000$$
$$S_1 = 2000$$
$$S_2 = 1500$$
$$K = \frac{S_1}{1+r} + \frac{S_2}{(1+r)^2}$$
$$3000 = \frac{2000}{1+r} + \frac{1500}{(1+r)^2}$$

وبفرض $1+r = x$ نجد

$$30 = \frac{20}{x} + \frac{15}{x^2}$$

نضرب طرفي المعادلة بـ x^2 فنجد

$$30x^2 = 20x + 15$$
$$30x^2 - 20x - 15 = 0$$

وبالحل نجد

$$x_1 = 1.115 \Rightarrow 1+r = 1.115 \Rightarrow r = 11.5\%$$
$$x_2 = -0.448 \text{ مرفوضاً}$$

ملاحظة:

يجب التأكد قبل إجراء الحسابات أن مجموع العوائد $\geq$ التكلفة فإذا كانت مجموع العوائد أقل من التكلفة، لا داعي لحساب الكفاية الحدية لأن المشروع مرفوض، وقد تعطي الحسابات السابقة نتائج خاطئة، وكمثال عليها سوف نذكر مثالاً:

بفرض أنه لدينا مشروع كلفته 10000 وحدة نقدية وعمره الإنتاجي عامان، يعطي بالعام الأول مردوداً قدره (25500)، ونحتاج إلى استثمار أولي في العام الثاني قدره 20750 ويعطي مردوداً بالعام الثاني وقدره 5000.

المطلوب: احسب الكفاية الحدية.

الحل:

نلاحظ

$$k = 10000$$
$$S_1 = 25500$$
$$S_2 = 5000 - 20750 = -15750$$

نلاحظ أن مجموع العوائد 25000

التكلفة 25750=15750 +10000

التكلفة 〉مجموع العوائد؛ وبالتالي بشكل منطقي لا نؤيد المشروع ولكن لنحسب الكفاية الحدية

$$10000 = \frac{25500}{1+r} - \frac{15750}{(1+r)^2}$$

وبفرض $x = 1+r$ نجد وضرب الطرفين بـ x^2 نجد

$$10000x^2 = 25500x - 15750$$
$$10000x^2 - 2550x + 1575 = 0$$

نجد أن

$$x_1 = 1.5 \Rightarrow r = 50\%$$
$$x_2 = 1.05 \Rightarrow r = 5\%$$

فإذا كان سعر الفائدة في السوق $i = 4\%$ ، نجد حسب الحسابات أننا نقبل المشروع بينما كان المشروع مرفوضاً في الأساس.

ولن نخوض بالتفسير الرياضي لهذه العملية، إنما نكتفي بالملاحظة السابقة.

تقييم عدة مشروعات:

الحالة الأولى

المشروعات التي لها نفس الكلفة عندئذ نقبل المشروعات التي لها Npv موجبة فقط، ونرتب هذه المشروعات حسب الأكبر.

مثال:

لدينا أربعة مشروعات A, B, C, d ، وكلفة كل منها 2500 وكانت الإيرادات:

	الإيرادات	
	عام أول	عام ثاني
A	1500	1200
B	1100	2000
C	500	200
d	1000	2100

فإذا علمت أن سعر الفائدة بالسوق 7% أي المشروعات تقبل، ورتب هذه المشروعات

مرفوض $Npv_{(A)} = -2500 + \frac{1500}{107} + \frac{1200}{(1.07)^2} = -50$

مقبول $Npv_{(B)} = -2500 + \frac{1100}{(1.07)} + \frac{2000}{(1.07)^2} = 274.9$

المشروع C مرفوض لأن مجموع الفوائد = 700 أقل من الاستثمار

مقبول $Npv_{(d)} = -2500 + \frac{1000}{1.07} + \frac{2100}{(1.07)^2} = 268.8$

إذاً نقبل المشاريع d, B ونرفض C, A والمشروع B هو الأفضل، ثم d

الحالة الثانية

المشروعات ذات التكاليف المختلفة

هنا يوجد عدة اعتبارات نذكر منها

1 – ربح الوحدة النقدية الواحدة وتساوي $\frac{Npv}{k}$

2 – الكتلة الرأسمالية الواجب تشغيلها والتي يمكن أن توفرها الشركة للاستثمار

3 – مدة المشروع التي يجب أن تتوافق مع تخطيط الشركة.

وسوف نذكر ربح الوحدة النقدية فقط

بفرض أنه لدينا مشروعان A,B وكانت التكاليف والعائدات كما يلي:

الإيراد

	عام 0	**عام 1**	**عام 2**
A	2000−	1500	1200
B	3000−	2000	2100

وبفرض سعر الفائدة بالسوق 5% أي المشروعات أفضل حسب ربح الوحدة النقدية.

الحل:

مقبول $Npv_{(A)} = -2000 + \frac{1500}{1.05} + \frac{1200}{(1.05)^2} = 517$

وربح الوحدة الواحدة $\frac{517}{2000} = 0.2585$

مقبول $Npv_{(B)} = -3000 + \frac{2000}{1.05} + \frac{2100}{(1.05)^2} = 809.5$

ربح الوحدة النقدية الواحدة $\frac{809.5}{3000} = 0.2698$

وبالتالي فإن المشروع B هو الأفضل.

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الفصل الثاني

نماذج النمو الاقتصادي

يعرف النمو الاقتصادي بأنه الزيادة المستمرة ولفترة طويلة الأجل نسبياً في الناتج؛ وبالتالي في نصيب الفرد من الدخل القومي. وترى نظريات النمو التقليدية أن معدل النمو الاقتصادي يعتمد بشكل كبير على الاستثمار، وعلى ذلك فإن تخفيض الاستهلاك الجاري وتوجيه الوفر الناجم عن الاستهلاك إلى الاستثمار، سيؤدي إلى ارتفاع معدل النمو وزيادة الطاقة الإنتاجية للمجتمع، وسيؤدي الاستثمار الجديد إلى زيادة التكوين الرأسمالي الذي هو أحد عوامل النمو الأساسية، وهذا ما تراه النظريات التقليدية الحديثة بالإضافة إلى أنها ترى أن تزايد حجم القوة العاملة تشكل عاملاً آخر من عوامل النمو.

سندرس في هذا الفصل وبشكل مبسط بعض نماذج النمو الاقتصادي التي تعتمد على التراكم الرأسمالي في غياب التقدم التقني (نعتبره حيادياً على الرغم من أهميته وذلك من أجل التبسيط)، وللتبسيط أيضاً، نفترض وجود سلعة واحدة متجانسة تستخدم في الوقت ذاته لأغراض الاستثمار والاستهلاك كما في نموذج هارود– دومار مثلاً. حيث يسمح هذا التبسيط بصياغة تابع إنتاج يقاس فيه رأس المال والناتج بوحدات عينية من طبيعة السلعة – أما شمول نماذج النمو الاقتصادي وتفصيلها، فيقتضي إدخال العديد من التغيرات والمعاملات سواء تم اعتبار الاقتصاد وحدة متكاملة أم قسم إلى قطاعات وفق معايير معينة.

كما ذكرنا سنتعرض لبعض نماذج النمو الاقتصادي بشكل مبسط ومختصر، وذلك من خلال دراسة النماذج الآتية:

1. نموذج هارود دومار.
2. نموذج اتيشيمورا.
3. نموذج الكلاسيكيين المجددين.
4. نموذج سثيزي وبرونو.

المبحث الأول

نموذج هارود – دومار

عند بداية الاهتمام بنظرية النمو قام كل من هارود – دومار بنشر مقالين مستقلين يعدان أساساً فيما سمي بنموذج هارود – دومار. ويتصف هذا النموذج أنه من أكثر نماذج النمو الاقتصادي بساطة وشيوعاً وجموداً في آن واحد. ومن خصائصه بأنه يفترض عدم وجود مجال للإحلال بين عناصر الإنتاج المختلفة، فيفترض جمود معامل رأس المال للعمل والناتج. ويترتب على هذا الافتراض عدم استقرار مجرى نمو الدخل التوازني، أي إنه إذا انحرف الدخل القومي عن مجراه التوازني فإنه لن يعود تلقائياً إلى نفس المجرى. ويفرق نموذج هارود – دومار بين ما يسمى بمعدل النمو الطبيعي وهو معدل نمو الدخل الذي يضمن استخدام الموارد المتاحة استخداماً كاملاً، ويساوي معدل نمو القوة العاملة، ومعدل النمو المرغوب فيه الذي يتوقف على معدل الادخار القومي ومعامل رأس المال للناتج، ويضمن معدل النمو المرغوب فيه استثمار جميع المدخرات، أي إنه يتميز بتعادل الاستثمار المقدر مع المدخرات المقدرة.

ولا يتساوى المعدل إلا بالمصادفة، فإذا كان الثاني أكبر من الأول واجه الاقتصاد القومي تضخماً مستمراً، أما إذا كان الأول أكبر من الثاني عانى الاقتصاد القومي من كساد مزمن. إلا أن الاقتصادي سولو قد بين أن إسقاط افتراض عدم الإحلال بين عناصر الإنتاج يقضي على هذه الخاصية، ويضمن عودة الدخل القومي إلى النمو بمعدل يساوي المعدل الطبيعي إذا انحرف عنه في مدة من المدد.

باختصار يفترض نموذج هارود – دومار تزايد القوة العاملة بمعدل ثابت يستوعبه الطلب في سوق السلعة بصورة كاملة، وبذلك يرافق الاستخدام الكامل للعمل

الاستخدام الكامل لرأس المال، تتلخص إذاً المشكلة التي يطرحها النموذج هي تحقق النمو الاقتصادي (زيادة الدخل) بمعدل ثابت بشكل يتناسب مع الاستخدام الكامل لرأس المال والقوة العاملة في وقت واحد.

من الضروري أن نذكر قبل البدء بعرض النموذج وحله، بأن معدل نمو الدخل المرغوب فيه يعتمد على تفاعل قوتين: المضاعف الذي هو مقلوب الميل الحدي للادخار، والمعجل الذي يبين العلاقة بين الاستثمار وتغير الدخل القومي، حيث إن زيادة الناتج بمعدل معين تحتاج لزيادة رأس المال (الاستثمار)، ويحدد مقدار هذه الزيادة في رأس المال (كمية الاستثمار) العامل الحدي لرأس المال للناتج الذي هو النسبة بين زيادة رأس المال وزيادة الدخل.

. يتضمن نموذج هارود – دومار المتغيرات الآتية:

Y: صافي الناتج القومي (الدخل القومي).

g: معدل نمو الناتج القومي الصافي.

C: الاستهلاك القومي.

S: الادخار القومي.

I: الاستثمار الصافي.

K: رأس المال القومي.

n: معدل النمو السكاني أو معدل نمو القوة العاملة.

إن جميع المتغيرات السابقة عدا (n, g) مقاسة بوحدات عينية أو بأسعار ثابتة كما ويتضمن النموذج المعاملات الآتية:

v: معامل رأس المال للناتج ونستخدم هنا المعامل الحدي الذي يعبر عن النسبة بين الاستثمار الصافي وزيادة الناتج القومي الصافي كما ذكرنا سابقاً.

c: الميل الحدي للاستهلاك.

s: الميل الحدي للادخار ويساوي $(1-c)$ كما يسمى معدل الادخار القومي.

u:معامل تناسب القوة العاملة إلى الناتج القومي.

t:تشير إلى الزمن الذي نفترضه بأنه مستمر. ويعبر عن معدل تغير المتغيرات المختلفة مع الزمن بمعاملها التفاضلي الأول بالنسبة للزمن.

يمكن عرض النموذج وفق صيغتين نفترض في الأولى وجود تابع للناتج يتصف بعائدية ثابتة، فإذا كانت $\frac{1}{v}$ مقلوب معامل رأس المال الناتج، فيكون تابع الناتج $Y=\frac{K}{v}$.

ولدينا العلاقة $t=uy$ التي تصف ظروف العمل في أثناء القيام بالعملية الإنتاجية، أي مستوى الطلب على العمل في السوق السلعية.

الصيغة الثانية تبرز الأثر المتداخل للمضاعف والمعجل (المسرع)، وتعتمد هذه الصيغة على الاستثمار I الذي يعرف على أنه معدل تغير رأس المال بالنسبة للزمن t، نكتب العلاقة $I=\frac{dk}{dt}$

وبفرض أن معدل تغير الدخل القومي (الناتج) يتناسب مع الاستثمار الصافي. وباستخدام (v) التي تربط بين تغيرات الناتج (الدخل القومي) وتغيرات رأس المال (تدعى vبمعامل التناسب بينهما)، يمكن التعبير عما سبق بعلاقة المعجل (المسرع) كما يلي:

$$I=v\frac{dy}{dt}$$

ومما سبق نستطيع أن نكتب:

$$\frac{dk}{dt}=I=v\frac{dy}{dt}$$

من الواضح أن هذا النموذج يهتم بالطابع المزدوج للاستثمارات. فمن جهة نجد أن الاستثمارات هي مكون من مكونات الطلب الكلي، وزيادة الاستثمار ستؤدي إلى

زيادة الطلب الكلي ليس فقط بشكل مباشر، وإنما أيضاً عن طريق أثر الزيادة في الاستثمار على الدخل وهو ما يتحدد بقيمة المضاعف.

إن شرط التوازن في السوق السلعية يمثل بالمساواة التالية:

$$Y = C + I$$

وبما أن الادخار القومي S يعرف على أنه الفرق بين الدخل والاستهلاك، أي أنه الجزء غير المستهلك من الدخل القومي.

أي إن $S = Y - C$ ، وبالتالي فإن شرط التوازن السابق يمكن التعبير عنه كما يلي:

$S = I$ وبفرض أن تابع الاستهلاك هو تابع خطي يمر بمركز الإحداثيات، أي إنه يمثل نسبة ثابتة موجبة من الدخل نكتب: $C = cY$

مما سبق نستطيع أن نكتب تابع الادخار كما يلي: $S = (1-C)Y = sY$

وبتعويض الاستثمار والادخار في شرط التوازن نكتب:

$$sy = v.\frac{dy}{dt} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{s}{v}y$$

وتدل هذه العلاقة على أن معدل النمو في صافي الناتج القومي ومعدل النمو هذا يتناسب مع حجم الناتج القومي. ولو رمزنا لمعامل التناسب $\frac{s}{v}$ بـ g

أي: $g = \frac{s}{v}$ نكتب:

$$\frac{dy}{dt} = g.y \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dy}{y} = g.dt$$

وهي معادلة تفاضلية متجانسة من الدرجة الأولى. وباستخدام خواص التابع الآسي في نماذج النمو يمكننا أن نكتب:

$$Y_t = Y_0 e^{gt}$$

حيث Y_t الناتج القومي في المدة t و y_0 الناتج القومي في مدة الأساس $t=0$ و g معدل التناسب (معدل نمو الدخل). وبالعودة إلى المعادلة التفاضلية السابقة نستطيع أن نكتب:

$$y_0 \leq y \langle y_t$$

حيث $0 \leq t$

وبمكاملة طرفي المعادلة التفاضلية يكون:

$$\int_{y0}^{yt} \frac{dy}{y} = g \int_0^t dt$$

$$\log[y]_{y0}^{yt} = g[t]_0^t = gt$$

$$\log y_t - \log_{y_0} = g.t \qquad \text{وبالتالي}$$

$$\log \frac{y_1}{y_0} = g.t \Rightarrow \frac{Y_t}{Y_0} = e^{g.t}$$

$$\Rightarrow y_t = y_0 e^{(s/v)t}$$

أي إن النتيجة الأخيرة تشير إلى أن الدخل القومي ينمو بمعدل ثابت:

$$g = \frac{s}{v} \to 0$$

إن التوازن في سوق العمل يتحقق عندما يتساوى مستوى عرض القوة العاملة مع مستوى الطلب عليها. ويتم ذلك عندما نصل إلى الاستخدام الكامل للقوة العاملة. إن القوة العاملة تزداد بمقدار ثابت هو (n) وفقاً لتطبيقات التابع الآسي وكما مر معنا سابقاً فنجد أن:

$$L = L_0 e^{nt}$$

وكما رأينا سابقاً أن مستوى الطلب على العمل في السوق السلعية متمثلة في العلاقة التالية وباستخدام المعامل $u : L = u.y$ ، إذاً نستطيع أن نكتب العلاقة كالآتي:

$$L = uy_0 e^{gt}$$

مما سبق يتساوى العرض مع الطلب في سوق العمل إذا تحققت المساواة:

$$L_0 e^{nt} = L_0 e^{gt}$$

وذلك إذا كان: $L_0 = uy_0$

مما سبق نجد أن التوازن في سوق العمل يتحقق إذا تحقق الشرط:

$$g = n = \frac{s}{v}$$

أي إذا تساوى معدل النمو المرغوب فيه (g) مع معدل النمو الطبيعي (n)

وبتوافر هذا الشرط نستطيع أن نستنتج انطلاقاً من العلاقة $y = y_0 e^{gt}$ ما يلي:

$$I = I_0 e^{gt}$$

$$L = L_0 e^{gt}$$

وترتبط القيم البدائية مع بعضها كما يلي:

$$L_0 = u_0 y_0$$

$$I_0 = sy_0$$

ونستطيع أيضاً أن نستنتج معدل نمو الاستهلاك:

$$C = cY \qquad \Rightarrow \qquad C = cy_0 e^{gt}$$

وبفرض أن الاستهلاك في المدة $t = 0$ (فترة الأساس) نكتب:

$$C = c_0 y_0 \qquad \Rightarrow \qquad C = c_0 e^{gt}$$

أي إن الاستهلاك القومي ينمو بمعدل نمو الناتج القومي نفسه.

إذا افترضنا الآن أن معدل نمو السكان السنوي هو (n)، وأن تعداد السكان في مدة الأساس $t = 0$ هو N_0 وفي المدة t هو N ، نستطيع أن نكتب العلاقة التي تعكس نمو السكان: $N = N_0 e^{nt}$

وإذا رمزنا إلى نصيب الفرد من الدخل القومي في اللحظة t بالرمز y فإن:

$$y = \frac{Y}{N} = \frac{Y_0 e^{gt}}{N_0 e^{nt}} = \frac{Y_0}{N_0} e^{(g-n)t}$$

حيث Y_0 هو دخل الفرد في مدة الأساس $t = 0$ أي: $y_0 = \frac{Y_0}{N_0}$ ، وبالتالي فإن معدل نمو نصيب الفرد القومي هو عبارة عن الفرق بين معدل نمو صافي الناتج القومي و (n) معدل نمو السكان.

الآن وبالعودة للعلاقة: $Y_t = Y_0 e^{gt}$

نستطيع التمييز بين الحالات الثلاث لمساواة الناتج وذلك تبعاً لقيمة g كما يلي:

1 . $g = \frac{s}{v} \langle 0$ أي إن معدل النمو سالب عندها Y_t تميل إلى الصفر بنفس إشارة Y_0 ، وتشير هذه الحالة إلى أن المجتمع يستهلك رأس المال بالتدريج وينجم عن ذلك تناقص طاقته الإنتاجية حتى تتلاشى. والسبب في هذا هو كون $1 - c \langle 0$ أي إن $c \langle 1$ أي أن الميل الاستهلاكي أكبر من الواحد؛ وبالتالي فإن $s \langle 0$ أي إن الميل الادخاري سالب.

2 . $g = \frac{s}{v} = 0$ وبالتالي فإن المقدار $e^{gt} = 1$ مما يؤدي إلى المساواة التالية $Y_t = Y_0$ أي إن مستوى الدخل القومي ثابت عند حالته الابتدائية، وتشير هذه الحالة إلى أن المجتمع يستهلك كل ما ينتج؛ وبالتالي تبقى طاقته الإنتاجية ثابتة، وبتعبير آخر تنجم هذه الحالة عن تساوي الميل الحدي للاستهلاك إلى الواحد والميل الحدي للادخار إلى الصفر، وهو ما يعبر عنه بالركود الاقتصادي.

3 . $g = \frac{s}{v} \rangle 0$ أي إن معدل النمو موجب وبالتالي فإن المقدار $e^{gt} \rangle 1$ ، وبذلك يزداد الدخل القومي (Y_t) بمعدل ثابت يساوي إلى g بافتراض أن $Y_0 \rangle 0$ وهي الحالة الشائعة، أما إذا كان $Y_0 \langle 0$ فإن الدخل القومي يتناقص بانتظام بمعدل g وهذا متعذر عملياً.

نموذج هارود – دومار في صورة معادلات فروق:

لنعرف في هذه الحالة معدل نمو صافي الناتج القومي بالعلاقة:

$$Y_{t+1} = (1+g_t)Y_t$$

ولنعرف الاستثمار الصافي بأنه الزيادة الصافية في الموجودات الرأسمالية (رأس المال) نكتب:

$$I_t = K_{t+1} - K_t$$

وكما في السابق نفترض أن نمو الاستثمار يتأثر بزيادة صافي الناتج القومي ومعامل التناسب هو معامل رأس المال للناتج v أي:

$$I_t = v(Y_{t+1} - Y_t)$$

المعادلة التوازنية الآن تتمثل بالعلاقة:

$$Y_t = C_t + I_t$$

والتي تدل على أن شرط التوازن يتطلب بأن يكون صافي الناتج القومي مساوياً لكل من الاستهلاك والاستثمار، وإلا تراكم المخزون أو نقص بشكل غير مرغوب فيه.

وبما أن الادخار يعرف على أنه الجزء غير المستهلك من صافي الناتج القومي. وبالتالي:

$$S_t = Y_t - C_t$$

وبالتالي يصبح شرط التوازن: $S_t = I_t$

بما أن تابع الاستهلاك يحدد بالعلاقة:

$$Y_t = cC_t$$

فيكون تابع الادخار محدد كما يلي:

$$S_t = (1-c)Y_t = sY_t$$

وبحل المعادلات السابقة نحصل على Y_{t+1} بدلالة Y_t فنجد:

$$\Delta Y_t = v(Y_{t+1} - Y_t)$$

وبالتالي نجد أن:

$$Y_{t+1} = (1+g_t)Y_t$$

وهذه العلاقة هي معادلة فروق من الدرجة الأولى حيث معدل النمو:

$$g_t = \frac{s}{v}$$

هو ثابت لأن الطرف $\frac{s}{v}$ مستقل عن علاقة الزمن t وبمتابعة الحل نحصل على المعادلة الأساس:

$$Y_t = (1+\frac{s}{v})^t Y_0$$

فلو فرضنا أن قيمة الناتج في مدة الأساس (في البدء) عندما $t=0$ هو $Y_0 = B$ إذاً قيمة الناتج في السنة الأولى يكون:

$$Y_1 = (1+\frac{s}{v})Y_0 = (1+\frac{s}{v})B$$

وفي السنة الثانية:

$$Y_2 = \left(1+\frac{s}{v}\right)Y_1 = \left(1+\frac{s}{v}\right)\left(1+\frac{s}{v}\right)B = (1+\frac{s}{v})^2 B$$

وبالتالي يمكننا تحديد مستوى الناتج في أي مدة (t) فيكون:

$$Y_t = \left(1+\frac{s}{v}\right)^{t-1}\left(1+\frac{s}{v}\right)Y_0$$

وبالتالي: $Y_t = (1+\frac{s}{v})^t Y_0$

ومنه: $Y_t = (1+g)^t Y_0$

ومن العلاقة هذه نستطيع التمييز بين الحالات السبعة لمسارات الناتج الزمني وذلك حسب قيمة g كما يلي:

1 . $-1 \langle \frac{s}{v} = 1+g$ في هذه الحالة يخضع Y_t إلى تغيرات دورية متزايدة لأن القيمة المطلقة للمقدار $(1+g)^t$ تزداد بزيادة t ، فإذا كانت t زوجية تكون إشارة Y_t نفس إشارة Y_0 ، وإذا كانت t فردية فإن إشارة Y_t عكس إشارة Y_0 .

2 . $1+g=-1$ يخضع هنا Y_t إلى تغيرات دورية ثابتة. وعندما تكون t زوجية يكون $Y_t = Y_0$ وعندما تكون t فردية فإن $Y_t = -Y_0$.

3 . $-1 \langle 1+g \langle 0$ يخضع هنا Y_t إلى تغيرات دورية متناقصة لأن القيمة المطلقة للمقدار $(1+g)^t$ تتناقص بتزايد t ، وعندما تكون t زوجية فإن Y_t له نفس إشارة Y_0 ، وعندما تكون t فردية يكون لـ Y_t إشارة عكس إشارة Y_0 .

4 . $1+g=0$ هنا يكون $Y_t = 0$.

5 . $0 \langle 1+g \langle 1$ يتناهى Y_t إلى الصفر ويكون له نفس إشارة Y_0 .

6 . $1+g=1$ هنا واضح أن $Y_t = Y_0$ وتفسرها الحالة بأنها حالة كساد.

7 . $1+g \rangle 1$ ينمو هنا Y_t إذا كان $Y_0 \rangle 0$ ويتناقص باستمرار إذا كان $Y_0 \langle 0$ ولكن لا معنى لوجود $Y_0 \langle 0$.

السؤال الآن ما هي الحالات التي تأخذها $1+g$ في الواقع العملي؟

كما ذكرنا آنفاً لا معنى لأن تكون $Y_0 \langle 0$ ، كما أن معامل رأس المال للإنتاج موجب، وبذلك يكون الميل الحدي للادخار معتمداً على الميل الحدي للاستهلاك الذي يأخذ قيمة قريبة من الواحد في أغلب الأحيان. وبذلك يمكن تمييز الحالات الآتية:

1 . إذا كان $c \langle 1$ نجد أن $s = 1-c$ أي إن:

$1+\frac{s}{v} \langle 1$ أي إن صافي الناتج القومي ينمو بمعدل $g = \frac{s}{v}$

2 . إذا كان $c=1$ فتكون $s \langle 0$ وهنا يمكن أن نصف حالة الاقتصاد بحالة الركود والثبات.

3 . إذا كان $c\rangle 1$ تكون $s=1$ ولكن بدرجة قريبة من الصفر؛ وبالتالي فإن $1=\frac{s}{v}+1$ وبذلك يواجه الاقتصاد تدهوراً مستمراً.

الآن نستطيع أن نلخص الفرق بين نموذج هارود – دومار بشكل معادلات تفاضلية وبين النموذج بشكل معادلات فروق بما يلي:

1 . يدخل الزمن t كعنصر مستمر في حالة $I=v\frac{dY}{dt}$ وتؤخذ قرارات الاستثمار بشكل مستمر وآني. أما في حالة $I_t=v(Y_{t+1}-Y_t)$ تدخل t هنا كمتحول متقطع وتحتاج قرارات الاستثمار إلى تخطيط مسبق، وهذه الحالة هي أكثر عملية من الحالة السابقة من وجهة نظر اقتصادية.

2 . بواسطة الحل المتتابع لمعادلات الفروق يمكن حل نماذج أكثر تعقيداً، بينما يمكن حل المعادلات التفاضلية بهذا الأسلوب.

3 . معادلات الفروق تسمح بحالات مختلفة للمسار الزمني للناتج لا تتيحها المعادلات التفاضلية.

<u>وجه لنموذج هارود . دومار عدة انتقادات أهمها:</u>

1. النموذج مبسط لدرجة كبيرة يجعله يفقد الكثير من أهميته العلمية.
2. لا يسمح النموذج بإحلال عناصر الإنتاج بعضها محل الآخر.
3. إضافة إلى أنه يعالج مسألة الاستثمارات ببساطة زائدة، فإنه يتجاهل عوامل مهمة ومؤثرة في النمو كالتقدم التقني المتمثل في تحسين طرائق الإنتاج وأساليبه وأدواته والتوسع في تشغيل الطاقة الإنتاجية.
4. أثناء تطبيقه في الولايات المتحدة وجد أن هناك فارق بين معدل النمو المرغوب فيه ومعدل النمو الفعلي، مما أدى إلى فقدانه الكثير من أهميته أيضاً. ففي نموذج هارود . دومار يبقى تحقق المساواة $g=\frac{s}{v}=n$ غير أكيد بسبب دقة الفرضيات؛

أي بسبب ثبات المعاملات الثلاثة، ونستطيع توضيح ذلك بإعطاء هذه المعاملات قيماً معقولة، فإذا قبلنا أن الاقتصاديات الحديثة تدخر بين 10% و20% من إنتاجها، أي $0.1 \le s \ge 0.2$ وكان المعامل $v = \frac{K}{Y}$ مساوياً إلى $2 \le v \le 4$ ، فإذا كان $s = 0.1$ و $v = 4$ فإن معدل النمو المرغوب فيه يساوي $g = \frac{s}{v} = 0.025$ ولكي يتحقق الشرط $n = \frac{s}{v}$ فيجب أن تزداد القوة العاملة بمعدل n مساو إلى 2.5% سنوياً، ويشكل هذا المعدل رقماً مقبولاً في البلدان ذات النمو السكاني السريع، ولكن في البلدان المتطورة والناضجة سكانياً يشكل معدلاً مرتفعاً أما إذا كان $s = 0.2$ و $v = 2$ فإن g =10% ولا يمكن أبداً أن يكون تزايد السكان بمثل هذا المعدل المرتفع.

لإخراج النموذج من هذه الحالة والتناقضات لا بد من جعل فرضياته أكثر مرونة، وذلك عن طريق تركنا لفرضية ثبات بعض المعاملات وتغير بعضها تبعاً للظروف، الأمر الذي يؤدي إلى نماذج اقتصادية أكثر تطوراً.

نموذج اقتصادي كلي من نوع هارود- دومار*:

أولاً) التغيرات الداخلية:

Y_t: مجمل الناتج القومي بسعر السوق في السنة t.

C_t: إجمالي المصاريف الاستهلاكية النهائية في السنة t.

J_t: إجمالي النفقات الاستثمارية في السنة t.

D_t: اهتلاك رأس المال في السنة t.

I_t: صافي الاستثمار الكلي في السنة t.

* - انظر: د. محمد فريز منافيخي، مقدمة في الاقتصاد الرياضي، منشورات جامعة الملك سعود، 1985.

ثانياً) المعلمات:

αمعدل الاهتلاك للناتج القومي $\alpha = \frac{D_t}{Y_t}$

β_t :الميل المتوسط للاستهلاك في السنة t. $\beta_t = \frac{C_t}{Y_t}$

p_t :المعدل الحدي للإنتاج بالنسبة لرأس المال ويصبح المعدل الحدي لرأس المال بالنسبة للإنتاج أي:

$$Icor = \frac{1}{p_t}$$

ثالثاً) معادلات النموذج الهيكلية:

1. المعادلات التعريفية: $Y_t = C_t + J_t$

$$J_t = I_t + D_t$$

2. المعادلات الفنية: $I_t = \frac{Y_t - Y_{t-1}}{p_t}$

$$D_t = \alpha Y_t$$

3. تابع الاستهلاك : $C_t = \beta_t Y_t$

يمكن التعبير عن المعادلات السابقة بشكل مصفوفي كمايلي:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ \frac{-1}{p_t} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta_t & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} y_t \\ J_t \\ I_t \\ D_t \\ C_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{-1}{p_t} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^{y_{t-1}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ \frac{-1}{p_t} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta_t & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_t \\ J_t \\ I_t \\ D_t \\ C_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{-1}{p_t} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^{y_{t-1}} \rightarrow$$

وبقلب المصفوفة السابقة وإتمام الحل نجد:

$$\frac{p_{t.}}{p(1-\alpha-\beta_t)-1}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \alpha-1 & 1B_t & 1-B_t & 1-B_t & \alpha+1 \\ \frac{1}{p_t} & \frac{1}{p_t} & (1-\alpha-B_t) & \frac{1}{p_t} & \frac{1}{t} \\ \alpha & \alpha & \alpha & -\beta_t & \alpha \\ \beta_t & \beta_t & \beta_t & \beta_t & -\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{-y_{t-1}}{p_t} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_t \\ J_t \\ I_t \\ D_t \\ C_t \end{bmatrix}$$

وبالتالي:

$$Y_t = \frac{Y_{t-1}}{1-p_t(1-\alpha-\beta_t)}$$

$$\frac{Y_t}{Y_{t-1}} = \frac{1}{1-p_t(1-\alpha-\beta_t)}$$

$$J_t = (1-\beta_t)Y_{t-1}/1-p_t(1-\alpha-\beta_t)$$

$$I_t = (1-\alpha-\beta_t)Y_{t-1}/1-p_t(1-\alpha-\beta_t)$$

$$D_t = \alpha Y_{t-1}/1-p_t(1-\alpha-\beta_t)$$

$$C_t = \beta_t Y_{t-1}/p_t(1-\alpha-\beta_t)$$

ويصبح معدل النمو (r) يساوي:

$$r_t = \frac{Y_t - Y_{t-1}}{Y_{t-1}} = \frac{Y_t}{Y_{t-1}} - 1 = \frac{1}{1-p_t(1-\alpha-\beta_t)} - 1$$

$$r_t = \frac{p_t(1-\alpha-\beta_t)}{1-p_t(1-\alpha-\beta_t)}$$

وبتتالي الحسابات نستطيع تحديد جميع متغيرات النموذج ويصبح المعدل المرغوب للنمو:

$$G_W = \frac{1-\beta_t}{Icor-(1-p_t)} = \frac{S}{C-S}$$

وحل النموذج على ضوء معدل النمو (r) هو:

$$C_t = B_t(1+r_t)Y_{t-1}$$
$$Y_t = (1+r_t)Y_{t-1}$$
$$J_t = (1-B_t)(1+r_t)Y_{t-1}$$
$$I_t = (1-\alpha-\beta)(1+V_t)Y_{t-1}$$
$$D_t = (1+r_t)Y_{t-1}$$

تمارين

1) إذا كان معدل الادخار القومي 15%، وكان معامل رأس المال للدخل= 3 ومعدل نمو السكان 2.8% نصيب الفرد من الدخل القومي.

2) إذا كان الدخل القومي في سنة الأساس t =0 يساوي 1000 مليون وحدة نقدية، وكان معدل الادخار القومي 20% ومعامل رأس المال للناتج 2.5 ومعدل نمو السكان 3%، أوجد:

أ . الدخل القومي في السنة $t=5$ وكذلك الاستهلاك في السنة ذاتها.

ب . المدة اللازمة لرفع نصيب الفرد من الدخل القومي بمقدار 10% عن سنة الأساس.

3) إذا كانت مدة الخطة 10 سنوات مقسمة إلى مدتين متساويتين، وكان الدخل القومي في سنة الأساس 1800 مليون وحدة نقدية، ومعامل رأس المال للناتج 2.5 في المدة الأولى و 3.125 في المدة الثانية. والمطلوب:

أ . إيجاد معدلات الادخار القومي في كل من المدتين المذكورتين حتى يزداد الدخل القومي بمقدار 50% عن سنة الأساس في المدة الأولى و 50% في نهاية المدة الثانية عن المستوى المحقق في نهاية المدة الأولى.

ب . إيجاد معدلات نمو نصيب الفرد من الدخل القومي في كل مدة، علماً بأن معدل نمو السكان 2.8% في المدة الأولى و3% سنوياً في المدة الثانية.

4) إذا كانت مدة خطة التنمية 10 سنوات مقسمة إلى مدتين متساويتين، وكان معامل رأس المال للناتج 2.5% في المدة الأولى و2.75% في المدة الثانية. المطلوب:

أوجد معدلات الادخار القومي في المدتين حتى يزداد الدخل القومي بمقدار 40% عن سنة الأساس في المدة الأولى و 60% في نهاية المدة الثانية عن المستوى المحقق في نهاية المدة الأولى.

5) إذا كانت مدة خطة التنمية 10 سنوات مقسمة إلى مدتين متساويتين، وكان معامل رأس المال للناتج 2.5 في المدة الأولى و2.5 في المدة الثانية.

المطلوب:

أوجد معدلات الادخار القومي في المدتين المذكورتين حتى يزداد نصيب الفرد عن الدخل القومي بمقدار 20% عن سنة الأساس في نهاية المدة الأولى و 25% في نهاية الفترة الثانية عن المستوى المحقق في نهاية المدة الأولى، علماً أن معدل المستوى المتوقع لنمو السكان في المدة الأولى 2% وفي المدة الثانية 1.8%.

المبحث الثاني

نموذج ايتشيمور*

قدم ايتشيمورا نموذجين للنمو الاقتصادي الأول عام، والثاني قطاعي، وسنقوم هنا بعرض النموذجين كمايلي:

. النموذج العام:

هذا النموذج يشبه نموذج هارود . دومار إلا أنه أكثر وضوحاً وأدق تفصيلاً بالنسبة للمتغيرات الاقتصادية التي يبنى عليها. فإذا أعطينا متغيرات النموذج الرموز التالية:

C_P: الاستهلاك الخاص.

I_P: الاستثمار الخاص.

C_g: الاستهلاك العام.

I_g: الاستثمار العام.

E: الصادرات.

M: الواردات.

Y: الدخل القومي بسعر السوق.

$\hat{Y}$: الدخل القومي بسعر كلفة عوامل الإنتاج.

T_i: صافي الضرائب غير المباشرة (الضرائب غير المباشرة . الإعلانات الإنتاجية).

T_d: صافي الضرائب المباشرة (الضرائب المباشرة . النفقات التحويلية).

Y_P: الدخل التصرفي للقطاع الخاص.

Y_g: الدخل التصرفي للقطاع العام.

---

* ـ انظر-الدكتور ممدوح الخطيب الكسواني: الاقتصاد الرياضي – منشورات جامعة دمشق 1981.

B :صافي التعامل مع العالم الخارجي(صافي القروض الخارجية).

إن العلاقات الأساسية للنموذج هي:

$$\overset{\backslash}{Y} = C_P + I_P + C_g + I_g + E - M$$

$$\overset{\backslash}{Y} = Y + T_i = Y_P + T_d + T_i = Y_P + Y_g$$

$$B = M - E$$

وليكن لدينا المعاملات الآتية:

$Y = \frac{I_g}{C_g + I_g}$ نصيب الاستثمارات الحكومية من النفقات الحكومية

$S = \frac{Y_P - C_P}{Y_P}$ الميل المتوسط لادخار القطاع الخاص

$t_d = \frac{T_d}{Y}$ معدل الضرائب المباشرة

$t_i = \frac{T_i}{Y}$ معدل الضرائب غير المباشرة

$u = \frac{M}{Y}$ الميل المتوسط للواردات

$\lambda = \frac{C_g + I_g}{Y_g}$ معدل تغطية النفقات الحكومية.

$S^{\backslash} = \frac{Y_g - C_g}{Y_g}$ الميل المتوسط لادخار القطاع العام

$\frac{1}{\sigma} = \frac{I_{pt} - I_{gt}}{Y_{t+1} - Y_t}$ المعامل الحدي لرأس المال

من المعاملات السابقة نستنتج العلاقتين التاليتين:

$$S^{\backslash} = 1 - (1 - \gamma)\lambda$$

$$t = t_i + t_d$$

فإذا كان(g) هو معدل نمو الاقتصاد القومي، فبالإمكان تحديد هذا المعدل وفق إحدى علاقات النمو الأساسية الآتية:

$$g = \sigma S(1-t_d) + \sigma[1-(1-\gamma)](t_d + t_i) + \sigma(u - \frac{E}{Y})$$

$$g = \sigma S(1-t_d) + \sigma S^{\backprime}.t + \sigma(u - \frac{E}{Y})$$

$$g = \sigma S + \sigma\left[(S^{\backprime} - S)t_d + S^{\backprime}t_i\right] + \sigma(u - \frac{E}{Y})$$

تحلل العلاقة الأولى والثانية الميل الادخاري الكلي إلى ثلاثة عناصر حسب مصدر الادخار:

القطاع الخاص والقطاع العام والعالم الخارجي، بينما تبين العلاقة الثالثة أن تحويل القوة الشرائية من القطاع الخاص إلى القطاع العام عن طريق الضرائب المباشرة لا يرفع معدل النمو؛ إلا إذا كان الميل الادخاري للقطاع العام يزيد عن الميل الادخاري للقطاع الخاص، وبذلك فإن معدل النمو يساوي في حال غياب المعونات الخارجية إلى:

$$\sigma S(1-t_\alpha) + \sigma = t$$

بأخذنا للعلاقات الثلاث السابقة في الحسبان وإذا اعتبرنا أن p هو عدد السكان الكلي وأن α الدخل الفردي وأن N هو عدد السكان العاملين و φ الإنتاجية المتوسطة للعمل.

فإذا كان:

$$Y = \alpha P$$

$$Y = \varphi N$$

فإننا نستطيع اختيار معدل النمو باتباع أحد الأسلوبين التاليين:

1. بمقارنة عدد السكان في المستقبل (في السنة T) وهي P_T والمستوى المرغوب فيه للدخل الفردي α_T بالقيمة الحالية لعدد السكان P_0 وللدخل الفردي α_0 ؛ وبالتالي نستطيع استنتاج معدل النمو المتوسط وفق العلاقة التالية:

$$\alpha_0 P_0 (1+g)^T = \alpha_T P_T$$

ويمكن تقدير معدلات النمو السنوية بصورة دقيقة عندما نستطيع التنبؤ بإنتاجية النمو الاقتصادي من سنة إلى أخرى.

2. عندما نتنبأ بعدد السكان الكلي P_T وبعدد السكان العاملين N_T ، فإن التنبؤ بإنتاجية العمل φ_T يسمح بترجمة أهداف الاستخدام بأهداف الدخل، ونستطيع التنبؤ بإنتاجية العمل بواسطة أحد توابع النمو التالية:

$$\varphi = \bar{\beta}.Y^{\beta}$$

$$\varphi = \beta` Y + \bar{\beta}`$$

وعند تقديرنا لـ φ نتمكن من تقدير الدخل، أي:

$$Y_T = \varphi_T N_T$$

$$Y_T = \bar{\beta} Y_T^{\beta} N_T$$

أو

$$Y_T = \varphi_T N_T$$

$$Y_T = \left(\beta` Y + \bar{\beta}` \right) N_T$$

وبعد إصلاح العلاقات الأخيرة وتحويلها بشكل لوغاريتمي نتمكن من تقدير الدخل:

$$Log Y_T = \frac{1}{1-\beta} (\log \bar{\beta} + \log N_T)$$

أو

$$Y_T = \frac{\bar{\beta}`}{1-\bar{\beta}` \; N_T}$$

وبعد إيجاد N_T نتمكن من تقدير معدل النمو g وفق الطريقة المذكورة، بالإضافة إلى ذلك فمن اللازم اعتبار القيود الواجب فرضها على معاملات النموذج لتحديد معدل نمو الدخل، فهل يمكن مثلاً إيجاد مجموعة مثلى من المتغيرات عند الأخذ بالحسبان لقيم المعاملات المحتملة؟ إن الأسلوب الواجب اتباعه للتوصل إلى حل مناسب للمشكلة المطروحة يمكن عرضه على النحو التالي:

لنفرض أنه لدينا تابع للادخار من الشكل:

$$S = s^{\backslash\backslash} Y_P + \bar{S}$$

وبتبديل Y_P بقيمتها $\qquad S = s^{\backslash\backslash}(1-t_d)Y + \bar{S}$

وبالقسمة على Y نجد: $\qquad \frac{S}{Y} = s^{\backslash\backslash}(1-t_d) + \frac{\bar{S}}{Y}$

تدل العلاقة الأخيرة أن هناك طريقتين لتعديل معدل الادخار $\frac{S}{Y}$ وذلك أملاً بتعديل الضغط الضريبي t_d وأما بتعديل مصدر الادخار (الخاص والعام)، ونستطيع التعبير عن الطريقة الثانية بكتابة الادخار الحقيقي بدلالة المعامل θ:

$$S = s\left[s^{\backslash\backslash}(1-t_d) + \frac{\bar{S}}{Y} \right]$$

فإذا كانت $\theta\rangle 1$ فهذا يتطلب أن تكون السياسات المتخذة معتمدة على تخفيض الاستهلاك، ولكن كما هو معلوم هناك حدود لهذه السياسة، أما إذا كان لدينا θ_s التغير الأعظمي فيكون:

$$S \le \theta S\left[s^{\backslash\backslash}(1-t_d) + \frac{\bar{S}}{Y} \right]$$

فإذا لم يكن هناك أية رغبة لتحديد معدل الادخار بصورة مباشرة فيكتفى بحساب الادخار المحتمل، وذلك بتبديل Y بقيمتها المحتملة Y_T وفي هذه الحالة لا نعدّ S كمتغير، وإنما كمعامل معلوم وغير خاضع للمراقبة بواسطة السياسة الاقتصادية.

هذا ونستطيع تطبيق الأسلوب السابق على المتغيرات جميعاً، فالمتغير V مثلاً لا تزيد قيمته عن الواحد فيمكن في هذه الحالة صياغة القيد بشكل قيمة عظمى مثلاً:

$$V \leq 1.2$$

فإذا اعتبرنا B كعجز خارجي أعظمي بعد الأخذ في الحسبان إمكانية الاقتراض المتاحة والإعانات والاحتياطات، فيمكن أن نكتب: $M \leq E + B$

فإذا تحددت E و B فهذا يضع حداً للواردات ويبرر سياسة تقنينية للاستيراد الخارجي (إذا كانت Y_T والميل المتوسط للاستيراد معلومان)، ويكون الأسلوب المتبع هو ذاته الذي وضعناه بالنسبة للادخار.

ليكن لدينا تابع من الشكل $M = u'Y + \bar{u}$

وبالتعويض في المتراجحة السابقة يكون $\theta_m (u'Y + \bar{u}) \leq E + B$

حيث تدل θ_m على درجة الواردات، فإذا تبين أن ذلك مستحيل باعتبار تطور المتغيرات المتحقق فيجب تعديل أهداف التنمية بحد ذاتها.

وبعد مناقشة مختلف الاعتبارات حول القيود المفروضة على تغير المعاملات نستطيع اكتشاف المجموعة المثلى للمعاملات التي تمكن من الوصول إلى أهداف التنمية، فإذا لم نتمكن من التوصل إلى أي من هذه الأهداف فيمكن زيادة معدل النمو الاقتصادي، وبالعكس إذا تم تجاوز القيود المفروضة فمن اللازم تخفيض معدل النمو. وبين هذين الوضعين المتطرفين هناك مجال واسع لاختيار معدل النمو المناسب.

2. النموذج القطاعي:

يتطلب وضع الخطة التفصيلية توافر الإحصائيات التفصيلية التي يمكن تركيبها في قطاعين اقتصاديين أو أكثر ومن الممكن تقسيم الاقتصاد إلى قطاع منتج للسلع الاستثمارية وقطاع منتج للسلع الاستهلاكية، كما يمكن عدّ الاقتصاد مؤلفاً من قطاع زراعي وآخر صناعي. وسنقوم باستعراض الحالات السابقة كما يلي:

أ . النموذج القطاعي للسلع الاستثمارية والسلع الاستهلاكية:

ليكن لدينا اقتصاد مغلق حيث تجمع فيه النشاطات الاقتصادية بشكل لا يتطلب أي تبادل بين الصناعات، ولنرمز بـ X_i : إنتاج القطاع i.

b_i:معامل رأس المال للقطاع i.

فيكون: إنتاج السلع الاستهلاكية: $X_1 = (1-s)(X_1 + X_2)$

إنتاج السلع الاستثمارية: $X_2 = b_1 \Delta X_1 + b_2 \Delta X_2$

و $Y = X_1 + X_2$

وهكذا نلاحظ أن معدل نمو القطاع الثاني يساوي:

$$\frac{\Delta X_2}{X_2} = \frac{s}{b_1(1-s) + sb_2}$$

فإذا لم يرتبط s بالدخل، فسيكون معدل النمو ذاته في كل من القطاعين. أما معامل رأس المال الكلي فهو الوسط الحسابي المرجح بالميل الادخاري والاستهلاكي للمعاملين القطاعيين، أي:

$$b = (1-s)b_1 + b_2$$

وتبين هذه العلاقة العوامل التي تؤثر على معدل النمو الكلي. فإذا كانت s نتيجة لقرار سياسة اقتصادية معينة، فيجب توزيع السلع الاستثمارية حسب النسبة المحددة بالمعاملين القطاعيين b_1, b_2.

ب . النموذج القطاعي لقطاع الزراعة والقطاع الصناعي:

يعد هذا التمييز مهماً من الناحية العملية، ويجب أن نلاحظ هنا حصة القطاع العائلي في كل من القطاعين الإنتاجيين في اقتصاد لا وجود للإنتاج الوسيط فيه، فإذا رمزنا بـ c_{ij} للميل الاستهلاكي للقطاع j من سلع القطاع i فيكون:

$$X_1 = c_{11}X_1 + c_{12}X_2$$
$$X_2 = c_{12}X_1 + c_{22}X_2 + b_1\Delta X_1 + b_2\Delta X_2$$

وتكون الميول الادخارية في كل من القطاعين:

$$s_1 = 1 - c_{11} - c_{21}$$
$$s_2 = 1 - c_{12} - c_{22}$$

وبالمساواة التقليدية بين الاستثمار I والادخار S يكون:

$$s_1X_1 + s_2X_2 = b_1\Delta X_1 + b_2\Delta X_2$$

ويكون معدل نمو القطاع الصناعي: $\frac{\Delta X_2}{X_2} = \frac{(1-c_{11})s_1 + c_{12}s_2}{(1-c_{11})b_1 + c_{12}b_1}$

يتحدد معدل نمو القطاع الصناعي بالعلاقة السابقة، ونفترض هنا أن الإنتاج الزراعي يتزايد بصورة تسمح بزيادة الإنتاج الصناعي، فإذا لم يتحقق ذلك فعلى معدل الإنتاج الصناعي أن ينخفض، أو على المستوردات أن تؤمن حاجات نمو القطاع الصناعي.

فإذا أخذنا في الحسبان التجارة الدولية، وافترضنا أن كلا القطاعين يستوردان ويصدران فيكون:

$$X_1 + M_1 = c_{11}X_1 + c_{12}X_2 + E_1$$
$$X_1 + M_2 = c_{11}X_1 + c_{22}X_2 + b_1\Delta X_1 + b_2\Delta X_2 + E_2$$
$$M_1 + M_2 \le E_1 + E_2 + B$$

فإذا وضعنا الخطة إسقاطات للقيم التالية: $X_1(t), B(t), E_2(t), E_1(t)$

فيعطى معدل النمو للإنتاج الصناعي بالأسلوب نفسه الذي رأيناه قبل إدخال التجارة الخارجية.

المبحث الثالث

النظرية التقليدية الحديثة للنمو

تخلى الاقتصادي سولو في تطوير النظرية التقليدية عن الافتراض المتعلق بثبات نسب مزج عناصر الإنتاج، وافترض إمكانية الإحلال بين عناصر الإنتاج، الأمر الذي كان غير متاح في نموذج هارود دومار.

تفترض النظرية الحديثة الآتي:*

1. عند مستوى العمالة الكاملة فإن الاستثمار يساوي الادخار.
2. يشكل الادخار نسبة ثابتة من الناتج فيكون:

$$0\langle s\langle 1 \qquad S = sY$$

تشترك النظرية التقليدية مع نموذج هارود دومار بتابع الادخار S.

3 . قوة العمل والسكان ينموان بمعدل ثابت وليكن n وهو مستقل عن الأجر الحقيقي والمتغيرات الاقتصادية الأخرى.

تابع الإنتاج المستخدم في النظرية التقليدية يسمح بالإحلال بين عناصر الإنتاج وليكن تابع الإنتاج المستخدم هو من الشكل (شكل خاص من نموذج كوب . دوغلاس) كمايلي:

$$0\langle\alpha\langle 1 \qquad Y = Ae^{rt}K^{\alpha}W^{1-\alpha}$$

حيث نرمز بـ

Y:مستوى الإنتاج

K:مستوى رأس المال المستخدم (أحد عناصر الإنتاج)

W:مستوى القوة العاملة المستخدم (أحد عناصر الإنتاج)

---

* - انظر: د. محمد سالم الصفدي،د. رسلان خضور: الاقتصاد الرياضي-منشورات جامعة دمشق 1996، ص 460.

A :ثابت التناسب ويكون $A\rangle 0$

e^{rt} :حيث e العدد الطبيعي (النبري $e=2.718$) و r معدل النمو التقني بفرض أن التكنولوجيا (تنمو بمعدل ثابت) و t الزمن. إذاً تمثل e^{rt} بالمجمل تأثير التقدم التقني.

α :مرونة الإنتاج الجزئية لرأس المال

$1-\alpha$:مرونة الإنتاج الجزئية للعمل

فإذا كانت q تمثل معدل النمو في الإنتاج

h تمثل معدل النمو في رأس المال

n تمثل معدل النمو في العمل

نستطيع أن نشتق معدل النمو في الناتج من تابع الإنتاج السابق فنكتب:

$$q = r + \alpha h + (1-\alpha)n$$

من العلاقة السابقة نجد بوضوح أن معدل النمو في الناتج q يرتبط طرداً بمعدل التقدم التقني r وبمعدلات النمو في عاملي الإنتاج (العمل ورأس المال). فإذا كانت متغيرات النموذج ثابتة أو تنمو بمعدل ثابت فإن الاقتصاد يكون في حالة توازن، وطبقاً لنظرية النمو فإن الاقتصاد يكون في حالته المثلى، ولكي يكون كذلك يجب أن تنمو المتغيرات التالية: الناتج، الاستثمارات، قوة العمل بمعدلات أسية ثابتة.

نعلم أن صافي الاستثمار I يساوي إلى التغير في رصيد رأس المال ΔK ، وكما أشرنا سابقاً بأن الاستثمار هو نسبة ثابتة من الناتج Y، وبفرض أن قوة العمل تنمو بمعدل أسي ثابت n يكون:

$$I = \Delta K = S = sY$$

وبالتقسيم على K

$$\frac{\Delta K}{K} = s\frac{Y}{K}$$

ولو رمزنا بـ $h = s\frac{Y}{K}$

ولأن s ثابتة فإن النسبة $\frac{Y}{K}$ يجب أن تكون ثابتة بالنسبة لرصيد رأس المال الذي ينمو بمعدل ثابت h. وبالتالي فإن الناتج Y يجب أن ينمو بمعدل ثابت طالما أن رصيد رأس المال في وضعه الأمثل.

وبما أن معدل النمو في الناتج q يساوي معدل النمو في رصيد رأس المال h في وضعه الأمثل. نعوض هذه المعادلات بـ g التي تمثل معدل نمو الحالة الأمثل.

نكتب المعادلة: $q = r + \alpha h + (1-\alpha)n$

بالشكل: $g = r + \alpha g + (1-\alpha)n$

وبالتعويض والقسمة مع $1-\alpha$ نجد $g = \frac{r}{1-\alpha} + n$

حيث تمثل (g) معدلات نمو الناتج ورأس المال، وتشير r إلى معدل النمو التقني كما أسلفنا و n إلى معدل نمو قوة العمل.

تشير النتيجة السابقة أن معدل النمو التوازني يعتمد على معدل النمو التقني وقوة العمل.فإذا تزايد أحد المعدلين، فإن معدل نمو الحالة الأمثل يتزايد، وتشير النتيجة أيضاً إلى أنه من الممكن أن يزيد نصيب الفرد من الدخل في حالة غياب التقدم التقني، وذلك في حال كون معدل النمو التقني يساوي الصفر؛ أي إن التقدم التقني ثابت لا يتغير وفي هذه الحالة يكون معدل نمو الحالة الأمثل يساوي معدل نمو قوة العمل n.

لقد توصلت النظرية التقليدية الحديثة في النمو إلى استنتاج مفاده أن الدور الحاسم في رفع معدلات النمو يرجع إلى التقدم التقني أو ارتفاع فعالية عوامل الإنتاج الذي يرتبط بعملية التقدم التقني، وبارتفاع مستوى تأهيل العاملين وبتحسين تنظيم العمليات الإنتاجية وإدارتها.

في النظرية التقليدية الحديثة، الزيادة في معدلات نمو قوة العمل والتقدم التقني تؤدي الى زيادة معدل نمو الحالة الأمثل، وإن معدل النمو التوازني (معدل نمو الحالة الأمثل) مستقل عن معدل الادخار.

وقد انتقدت هذه النظرية كونها تفترض العمالة كاملة، ونتيجة لذلك فإن الاستثمار يتعادل دائماً مع الادخار.

وأخذ على هذه النظرية بأنها لا تحتوي على تابع استثمار صريح، وأنها تتجاهل التوقعات. كما انتقد أيضاً تابع الإنتاج الإجمالي الذي تأخذ به النظرية التقليدية الحديثة بسبب مشكلات التجميع والصعوبة في دمج التقدم التقني فيها.

المبحث الرابع
نموذج شينرى وبرونو*

1. النموذج

1. إن حل هذا البرنامج يمكننا من الحصول على مجموعة كبيرة من بدائل النمو لسنة الهدف، يخضع كل منها لافتراضات مختلفة فيما يتعلق بمتغيرات السياسة الاقتصادية مما يعطي عملية التخطيط مرونة كافية لعملية اتخاذ القرارات بطرح البدائل المختلفة، وهذا النموذج:

1 . من النوع الساكن المقارن، حيث لا يأخذ المجرى الزمني للمتغيرات الاقتصادية في الحسبان.

2 . تقاس قيمة المتغيرات بأسعار سنة الأساس أي بأسعار ثابتة.

3 . التقسيم القطاعي للنشاطات الإنتاجية بحدود البيانات الإحصائية المتوافرة.

–وقد قسم الاقتصاد إلى ثلاثة قطاعات رئيسية: القطاع الزراعي، القطاع الصناعي وقطاعات الخدمات.

ويقدم النموذج فكرة منطقة السماح كطريقة البرمجة الخطية، حيث كل نقطة في هذه المنطقة تعدّ حلاً أمثلاً للمشكلة بطريقة الحدود الدنيا والقصوى لوسائل السياسة الاقتصادية، وهذه الوسائل هي:

أ . صافي الاقتراض من العالم الخارجي بحديه الأدنى والأعلى.

ب . الميل للادخار في القطاع العائلي وبحديه الأدنى والأعلى.

ج . سياسة التجارة وتأثيرها على قطاع الصادرات الصناعية بحديها الأدنى والأعلى.

د . معدل الزيادة في إنتاجية العمل بحديه الأدنى والأعلى وبه يمكن الاستفادة من النموذج، بالإضافة إلى ربط الحالة الاقتصادية بتغيراتها كلها بنموذج واحد وبيان

* - انظر: د. محمد فريز منفيخي: مقدمة في الاقتصاد الرياضي-منشورات جامعة الملك سعود، 1985.

الوضع الاقتصادي في سنوات قادمة بعد حلها آنياً، متيحاً بدائل مختلفة يمكن الاختيار بينها مما يقرره واضعو السياسة الاقتصادية ومتخذو القرار لمختلف وسائل السياسة الاقتصادية بالفوائد التالية:

1. تمييز نقاط الاختناق في الموارد المحلية (الادخار) وقطاع القطع الأجنبي.
2. يمكننا من الاختيار بين البرامج البديلة التي تعطي قيم محددة لأدوات السياسة الاقتصادية.
3. يمكن من الاختيار الأمثل بين السياسات الاقتصادية.

2 . معادلات ومتغيرات النموذج

أ . المعادلات التعريفية

$$Y = Y_i + Y_a + Y_S \quad ...(1)$$

Y: مجمل الناتج المحلي

Y_a: مجمل الناتج المحلي في القطاع الزراعي

Y_i: مجمل الناتج المحلي في القطاع الصناعي

Y_s: مجمل الناتج المحلي في قطاع الخدمات

$$Y = Y_h + Y_g \quad ...(2)$$

Y_h: مجمل الناتج المحلي للقطاع العائلي

Y_g: مجمل الناتج المحلي لقطاع الحكومة

$$Y_h + G_p = C_{ha} + S_h + C_n \quad ...(3)$$

G_P: المدفوعات الحكومية للقطاع العائلي مثل الأجور والرواتب ومدفوعات الفوائد والإعانات الحكومية

C_n: استهلاك القطاع العائلي من السلع والخدمات من منتجات القطاع الصناعي والخدمات

C_{ha}: استهلاك القطاع العائلي من منتجات القطاع الزراعي

S_h: الادخارات العائلية المحلية

$$C_a = O_a^{\setminus} + M_a \quad ...(4)$$

C_a: مجمل الاستهلاك من القطاع الزراعي

$O_a^{\setminus}$: السلع الزراعية المنتجة للاستهلاك النهائي

M_a: الواردات من السلع الزراعية للاستهلاك النهائي

$$C_a = C_{ha} + C_{ga} \quad ...(5)$$

C_{ha}: استهلاك القطاع العائلي من القطاع الزراعي

C_{ga}: استهلاك الحكومة من القطاع الزراعي

$$Y_g = G_P + G_e + S_g \quad ...(6)$$

G_e: المشتريات الحكومية من السلع والخدمات

S_g: ادخار الحكومة

$$G_e = C_{ga} + C_g \quad ...(7)$$

C_g: استهلاك الحكومة من السلع والخدمات

$$C_{is} = C_h + C_g \quad ...(8)$$

C_{is}: الاستهلاك من الصناعة والخدمات

$$C_{is} = C_i + C_s + I_d \quad ...(9)$$

I_d: الاستثمار من السلع والخدمات المنتجة محلياً

C_i: مجمل الاستهلاك من الصناعة

C_s: مجمل الاستهلاك من الخدمات

$$C_i = O_a^{\setminus} + M_m \quad ...(10)$$

$O_i^{\setminus}$: البضائع الصناعية المنتجة للطلب النهائي

M_m: الواردات من البضائع المصنعة للاستهلاك النهائي

$$I_i + I_a + I_S - I_d = M_K \quad ...(11)$$

I_i: الاستثمار الصناعي

I_a: الاستثمار الزراعي

I_s:الاستثمار في الخدمات

M_K: الواردات من السلع الرأسمالية

$$O_i = M_i + I^{\backprime}_{ai} + Y_i \quad ...(12)$$

O_i:مجمل الإنتاج في القطاع الصناعي

M_i: الواردات من المنتجات الأولية والوسيطية للصناعة

$I^{\backprime}_{ai}$: المدخلات الزراعية في الصناعة

$$O_i = O^{\backprime}_a + E_i + I^{\grave{}}_{ia} \quad ...(13)$$

$I^{\backprime}_{ia}$: المدخلات الصناعية في الزراعة

E_i:الصادرات من السلع الصناعية

$$O_a = I^{\grave{}}_{ia} + Y_a \quad ...(14)$$

O_a:مجمل إنتاج القطاع الزراعي

$$O_a = O^{\backprime}_a + E_a + I^{\grave{}}_{ia} \quad ...(15)$$

E_a: الصادرات من القطاع الزراعي

$$Y_S = C_S + E_S - M_S \quad ...(16)$$

E_S: الصادرات من الخدمات

M_S: الواردات من الخدمات

ب . المعادلات التوازنية

$$I_i + I_a + I_s = S_h + S_g + S_P \quad ...(17)$$

S_p:صافي الاقتراض من العالم الخارجي

$$M_1 + M_m + M_s + M_k = E_i + E_a + E_S + S_P \quad ...(18)$$

جـ المعادلات الفنية والسلوكية

إذا رمزنا إلى سنة الأساس بالرمز (C)وبغير ذلك إلى سنة المقارنة

وبالرمز (b_i) إلى المعاملات الحدية للإنتاج . رأس المال بالرمز (p) حيث:

$$p = I_t /(I_1 + I_2 + I_3 + ... + I_{t-1})$$

هي نسبة توزيع الاستثمارات وبين السنوات المختلفة الذي يعتمد على نمو الاستثمارات وطول الفترة .

إن الاستثمارات في قطاع الإنتاج في سنة المقارنة هي:

$$Y_i = Y_i^0 + b_i(K_i - K_i^o) \quad \ldots(1)$$

$$I_i = P_i\ (K_i - K_i^o) \quad \ldots(2)$$

ومن (1) نجد $(Y_i - Y_i^0) = b_i(K_i - K_i^o)$

ومن(2) نجد $\frac{I_i}{P_i} = (K_i - K_i^o)$

وبالتبديل نجد $Y_i - Y_i^0 = b_i \frac{I_i}{P_i}$

وهكذا

$$I_i = \frac{P_i}{b_i}(Y_i - Y_i^o) \quad \ldots(19)$$

$$I_s = \frac{P_s}{b_s}(Y_s - Y_s^o) \quad \ldots(20)$$

$$I_a = \frac{P_a}{b_a}(Y_a - Y_a^o) \quad \ldots(21)$$

$$Y_h = (1-t)Y \quad \ldots(22)$$

t : معدل الضرائب الإجمالية

$$S_h = \alpha(Y_h + G_p) \quad \ldots(23)$$

α :الميل الحد للادخار بافتراض مساواته بالميل المتوسط للادخار

د. العلاقات التشابكية في الصناعة

$I`_{ai} = \beta_{IA} O_i \quad \ldots(24)$ معامل المدخلات: β_{ia}

$I`_{ai} = \beta_{ia} O_a \quad \ldots(25)$ معامل المدخلات: β_{ia}

هـ الاحتياجات من الواردات

$$M_m = \mu_m Y \quad \ldots(26)$$

$$M_s = \mu_s Y \quad \ldots(27)$$

$$M_i = \mu_i O_i \quad \ldots(28)$$

$$M_i = \mu_i (I_i + I_a + I_s) \quad \ldots(29)$$

$$Y_i = \psi_s Y \quad \ldots(30)$$

$$Y_S = \psi_S Y \quad \ldots(31)$$

و. المتغيرات الخارجية

$$M_a = \overline{M}_a \quad \ldots(32)$$

$$E_a = \overline{E}_a \quad \ldots(33)$$

$$E_s = \overline{E}_s \quad \ldots(34)$$

$$C_g = \overline{C}_g \quad \ldots(35)$$

$$C_{ga} = \overline{C}_{ga} \quad \ldots(36)$$

$$G_P = \overline{G}_P \quad \ldots(37)$$

ز . بدائل النمو

1. إنتاجية العمل

ستؤخذ الزيادة السنوية في المعمل كحد يقرر بواسطة المؤسسات ويمكن كتابة الطلب على القوة العاملة في قطاع الأعمال بالشكل التالي:

$$L_i = \lambda_i^o (1-l_i)^T Y_i \quad ...(38)$$

$$L_a = \lambda_a^o (1-L_a)^T Y_a \quad ...(39)$$

$$L_S = \lambda_S^o (1-L_i)^T Y_S \quad ...(40)$$

حيث وسطي مدخلات القوة العاملة لوحدة منتجة واحدة في سنة الأساس λ^O

معدل زيادة متوسط إنتاجية العمل=1

المدى الزمني للنموذج = t

ويمكن أيضاً التعبير عن هدف الاستخدام الكامل كمايلي:

$$L(1-u) = L_i + L_a + L_s \quad ...(41)$$

حيث:

عرض القوة العاملة = L

معدل البطالة المتطابق مع الاستخدام الكامل = U

وحيث إننا عبرنا عن القيم $(1_a),(1_i),(1_S)$ كحدين أعلى وأدنى وأن قيمة الناتج الفعلي تعتمد على هذه القيم أيضاً عندما يكون العمل هو الثابت المؤثر في النمو، لنجد أن الناتج يأخذ القيمتين:

$$Y^* \le Y \le Y^{**}$$

تتغير عندما تكون $1=1^{**}$ أو $1=1^*$

2. معدل الادخار بحديه الأدنى والأعلى $a^* \langle a \langle a^{**}$

3. الصادرات الصناعية أيضاً $E_i^* \langle E_i \langle E_i^{**}$

4. وصافي الاقتراض من العالم الخارجي $S_f^* \langle S_f \langle S_f^{**}$

حـ . حل النموذج

بعد التبديل والاختصار نحصل على:

$$(42)...Y = \frac{A + E_i - \alpha G_P}{\alpha(1-t) + D}$$

حيث:

$$A = \overline{C_{ga}} + \overline{C_g} + \overline{G_P} - V + H$$

$$D = F + t - u$$

$$H = \overline{E_a} + \overline{E_S} - \overline{M_a} + \mu_k u$$

$$F = \frac{M_i \psi_i}{1 - \mu_i - B_{ai}} + \mu_m + \mu_s + \mu_k u$$

$$U = \frac{P_i \psi_i}{b_i} + \frac{P_a \psi_a}{b_a} + \frac{p_s \psi_s}{b_s}$$

$$v = \frac{P_i Y_i^o}{b_i} + \frac{P_a Y_a^o}{b_a} + \frac{P_s Y_s^o}{b_s}$$

$$(43)...S_f = FY - H + E_i$$

المصطلحات والتعابير العلمية

عربي- إنكليزي

إجمالي	Gross
الأجور	Wages
أسلوب فني واحد	Similar technical Coefficient
إعانات	Subsides
أمثل	Optimal
أمثل	Optimum
إنتاجية	Productivity
الإنتاجية الحدية	Marginal Productivity
الإنتاجية الوسطية	Average Productivity
استثمار	Investment
الاستهلاك	Consumption
اقتصاد جزئي	Microeconomics
اقتصاد الرفاهية	Welfare Economy
اقتصاد رياضي	Mathematical Economy
اقتصاد قياسي	Econometrics
اقتصاد كلي	Macroeconomics
برمجة خطية	Linear Programming

Production function	تابع الإنتاج
Profit function	تابع الربح
Demand function	تابع الطلب
Supply function	تابع العرض
Utility function	تابع المنفعة
Dynamic function	تابع ديناميكي
Static function	تابع سكوني
Linear function	تابع خطي
Non linear function	تابع غير خطي
Implicit function	تابع ضمني
Kobb _ Douglas Function	تابع كوب – دوغلاس
Homogeneous function	تابع متجانس
Objective Function	تابع الهدف
Analysis	تحليل
Planning	تخطيط
Irreducible	ترابطي
Out put (production) Maximization	تعظيم الإنتاج
Profit Maximization	تعظيم الربح
Differential	تفاضل
Partial Differential	تفاضل جزئي
Total Differential	تفاضل كلي

Neutral Technical Progress	تقدم تقني حيادي
Cost Minimization	تصغير التكلفة
Cost	تكلفة
Fixed Cost	تكلفة ثابتة
Total Cost	تكلفة كلية
Variable Cost	تكلفة متغيرة
Equilibrium	التوازن
Partial Equilibrium	التوازن الجزئي
Constant	ثابت
Fixed Technical Coefficient	ثبات الفن الإنتاجي
Duality of Linear Programming	ثنائية في البرمجة الخطية
output –Input Table	جدول المدخلات – المخرجات
Government	حكومي
Private	الخاص
Income	الدخل
Indifference Surface	سطح السوية
Price	السعر
Wholesale Price	سعر الجملة
Interest Rate	سعر الفائدة
Good	سلعة
Market	سوق

Tax Policy	السياسة الضريبية
Vector	شعاع (متجه)
Export	صادرات
Indirect Tax	ضريبة غير مباشرة
Advalorem excise taxes	ضريبة قيمية
Specific excise taxes	ضريبة نوعية
Simplex Method	الطريقة المفردة أو السمبلكس
Final Demand	الطلب النهائي
Interdependent Relations	علاقات متبادلة
Production Process	عملية الإنتاج
Labour	العمل
Column	عمود
Factors of Production	عناصر الإنتاج
Factor	عنصر
Elements of Labor	عنصر العمل
Economic Efficiency	الكفاءة الاقتصادية
Law of Demand	قانون الطلب
Law of Supply	قانون العرض
Sector	قطاع
Constraint	قيد
Current Value	قيمة حالية

Value Added	قيمة مضافة
Slackness	متحول راكد
Surplus	متحول فائض
Determinate	المحدد
Inventory	مخزون
Short Run	المدى القصير
Elasticity	المرونة
Derivative	مشتق
Partial Derivative	مشتق جزئي
Total Derivative	مشتق كلي
Irreducible Matrix	مصفوفة ترابطية
Diagonal Matrix	مصفوفة قطرية
technical Coefficients Matrix	مصفوفة المعاملات الفنية للإنتاج
Unit (Identity) Matrix	مصفوفة واحدية
Multiplier	مضروب (مضاعف)
Investment multiplier	مضاعف الاستثمار
Export Multiplier	مضاعف الصادرات
Import Multiplier	مضاعف الواردات
Equation	معادلة
Simultaneous Equation	معادلة آنية

Equilibrium Equation	معادلة توازن
Substitution Rate	معامل الإحلال
Technical Coefficients	المعاملات التقنية
Marginal Rate of Substitution	المعدل الحدي للإبدال
Parameter	معلم
Inverse Matrix	مقلوب مصفوفة
Competition	منافسة
Curve	منحني
Substitution Curve	منحني الإحلال
Indifference Curve	منحني السواء
Marginal Utility	المنفعة الحدية
Balance	ميزان
Consumer‘s Budget	ميزانية المستهلك
Euler Theorem	نظرية أولر
Static Model	النموذج السكوني
Dynamic Model	النموذج الديناميكي
Import	واردات

المراجع

أولاً: باللغة العربية

1. د. إبراهيم، نعمة الله : الطرق الأساسية في الاقتصاد الرياضي، في جزأين، دار المريخ للنشر، الرياض.
2. د. الأسدي، شحادة: مسائل في المعادلات التفاضلية، دار الفجر حلب ??19.
3. د. الأشقر، أحمد: الاقتصاد الرياضي، جامعة حلب 1978.
4. د. أيوب، أنطون: التحليل الاقتصادي، جامعة حلب 1998.
5. د. بقجه جي، صباح الدين و د. معلا، وائل وآخرون: بحوث العمليات، المركز العربي للتعريب والترجمة بدمشق 1988.
6. د. البلخي، زيد تميم: مقدمة في بحوث العمليات، جامعة الملك سعود، كلية العلوم، الرياض، ط1 1998.
7. د. الجراد، خلف مطر: الرياضيات الاقتصادية والإدارية، جامعة دمشق 1982.
8. جلفاند، ن: الدوال ومنحنياتها، دار مير موسكو 1972.
9. د. حاجي، جعفر: تحليل جداول المدخلات والمخرجات الصناعية، الكويت 1985.
10. د. خير الدين، هناء: الاقتصاد الرياضي، القاهرة 1991.
11. د. زنبوعة، زياد: الاقتصاد الرياضي، جامعة تشرين 2003.

12. د. زنبوعة، زياد: الطرق والنماذج الاقتصادية – الرياضية في تشكل الأسعار، دمشق 1996.

13. د. زنبوعة، زياد: مضاعف *لاكرانج واستخدامه في التحليل* /لاقتصادي–الرياضي الديناميكي . المؤتمر العلمي الأول لجامعة أربد الأهلية 16–17 نيسان 2001.

14. د. السيد حسن، موفق: التحليل الاقتصادي الجزئي، جامعة دمشق 1982.

15. د. الصفدي، محمد سالم؛ د. خضور، رسلان: الاقتصاد الرياضي، جامعة دمشق 1996.

16. عطفة، مصطفى: مسائل وتمارين في التحليل الرياضي، دار مير موسكو 1990.

17. د. العاقل، محمد عادل: التحليل الاقتصادي، جامعة حلب 1970.

18. د.عزيز شريف، عصام: تحليل المدخلات والمخرجات، دار المطبوعات الجامعية، الجزائر 1983.

19. د.عزيز شريف، عصام: مقدمة في القياس الاقتصادي، دار الطليعة، بيروت، 1983.

20. د. العلي، إبراهيم: بحوث العمليات، جامعة تشرين 1990.

21. د. الفاضل، عبد الرزاق، ود. الجندي، ياسر، وآخرون: الرياضيات الاقتصادية والإدارية، جامعة دمشق 2004.

22. د. فهمي هيكل، عبد العزيز: أساليب التحليل الاقتصادي، جامعة بيروت العربية 1986.

23. د. القرماني، أحمد صادق: أسس الرياضيات الحسابية، (في جزأين)، دار مير موسكو 1990.

24. د. القرماني، أحمد صادق: الاستقراء الرياضي، (الجزء الثاني) دار مير موسكو 1980.

25. د. القرماني، أحمد صادق: الهندسة التحليلية، دار مير موسكو 1975.

26. د. الكسواني، ممدوح الخطيب: الاقتصاد الرياضي، جامعة دمشق 1986.

27. د. الليثي، محمد علي: أصول الاقتصاد الرياضي، الإسكندرية 1997.

28. د. متولي، مختار محمد: الأساليب الرياضية للاقتصاديين، جامعة الملك سعود، الرياض 1993.

29. د. متولي، مختار محمد: النظرية الاقتصادية: مدخل رياضي، جامعة الملك سعود، الرياض 1993.

ثانياً: المراجع باللغة الأجنبية:

1. Alfred W. Stonier, & Douglas C. Hague: A textbook of Economic Theory, Long man, London 1975.
2. Cale D., The Theory of Linear Economic Models, McGraw, N.Y., 1960.
3. Dantzig, Linear Programming and Extention, princeton University, press Princeton N.J. 1963.
4. Dwivedi, D N: Macroeconomics: Theory and Policy, New Delhi 2001.
5. Dwivedi, D N: Principles of Economics, New Delhi 1995.
6. Glaister S., Mathematical Methods for Economists, Blackwell, Oxford, 1984.
7. G. S.: Mathematics and Statistics for Economics. New Delhi. Vikas 1993.
8. Hadley G., Linear Programming, Addison-Wesley Reading Mass, 1962.
9. Lee S. M., Goal Programming for Decision Analysis Aurebok Philodelphia, Pa, 1972.
10. Murty K. G., Linear and Combinatorial Programming, Wiley, N.Y., 1976.

ثالثاً: المراجع باللغة الروسية:

1. Гольштейн. Е.Г., Математичкая Экономика и экстремальные задачи. Москва, Наука, 1984.
2. Гольштейн Е.Г., Математичкий аппарат экономчесого моделирования. Москва, Наука, 1983.
3. Лопатников Л. И., Популярный Экономико-Математичкий сдоворь. Москва, 1990.
4. Лопатников Л. И., Экономико-Математичкий сдоворь. Москва, Наука, 1993.
5. Максимилиан, С. В., Математичкое моделирование и экономичесие процессы. Кишинёв, 1987.
6. Тарасевич В. М., Экономико-Математичкие методы и модели в ценообразовании. Ленинград 1991. (2 части).