



العناصر المنتهية



السنة الرابعة

القسم هندسة التصميم الميكانيكي



الجامعة السورية
الهندسة الميكانيكية

وقل رب زدني علما

الهندسة الميكانيكية

الدكتور المهندس
محمد بسام أبو حرب
مدرس في قسم
هندسة التصميم الميكانيكي

الدكتور المهندس
معاذ الحمصي
مدرس في قسم
هندسة التصميم الميكانيكي

الدكتور المهندس
محمد فتحي غنمه
مدرس في قسم
هندسة التصميم الميكانيكي

١٤٣٧-١٤٣٨ هـ
٢٠١٦-٢٠١٥ م

جامعة دمشق

الفهرس

١٣	مقدمة
١٧	الفصل الأول : مدخل إلى طريقة العناصر المنتهية
١٩	١-١ مقدمة
١٩	٢-١ تصنيف المسائل الميكانيكية
٢٠	٣-١ مفهوم طريقة العناصر المنتهية
٢٢	٤-١ مراحل إنتاج أنظمة هندسية متطورة
٢٢	٥-١ خطة عمل التحليل بواسطة العناصر المنتهية
٢٣	١-٥-١ ماقبل المعالجة
٢٣	٢-٥-١ الحل
٢٣	٣-٥-١ التحليل
٢٤	٦-١ ما هي المسائل الممكن حلها بالاعتماد على طريقة العناصر المنتهية ؟
٢٤	٧-١ مزايا طريقة العناصر المنتهية
٢٥	٨-١ توصيف العناصر المنتهية
٢٦	٩-١ من هو المستخدم النموذجي لطريقة العناصر المنتهية؟
٢٦	١٠-١ أمثلة على التحليل بواسطة العناصر المنتهية؟
٣١	الفصل الثاني : مقدمة عن ميكانيك الأجسام الصلبة والإنشاءات
٣٣	١-٢ مقدمة
٣٥	٢-٢ معادلات الجسم الصلب ثلاثي الأبعاد 3D
٣٥	١-٢-٢ الإجهادات و التشوهات
٣٧	٢-٢-٢ معادلات السلوكية
٣٨	٣-٢-٢ معادلات التوازن الديناميكي
٤٠	٤-٢-٢ الشروط الحدية
٤١	٣-٢ معادلات الأجسام ثنائية البعد

٤١	١-٣-٢ الإجهادات و الانفعالات
٤٣	٢-٣-٢ معادلات السلوكية
٤٤	٣-٣-٢ معادلات التوازن الديناميكي
٤٥	٤-٢ المعادلات في حالة القضبان
٤٦	١-٤-٢ الإجهادات و الانفعالات
٤٦	٢-٤-٢ معادلات السلوكية
٤٦	٣-٤-٢ معادلات التوازن الديناميكي
٤٧	٥-٢ المعادلات في حالة الجوائز
٤٧	١-٥-٢ الإجهادات و الانفعالات
٤٨	٢-٥-٢ معادلات السلوكية
٤٨	٣-٥-٢ العزوم و قوى القص
٥٠	٤-٥-٢ معادلات التوازن الستاتيكي
٥٠	٦-٢ المعادلات في حالة الصفائح
٥١	١-٦-٢ الإجهادات و الانفعالات
٥٢	٢-٦-٢ معادلات السلوكية
٥٣	٣-٦-٢ العزوم و قوى القص
٥٤	٤-٦-٢ معادلات التوازن الديناميكي
٥٥	٥-٦-٢ نظرية ريسنر-مندلين للصفائح
٥٦	٧-٢ ملاحظات
٥٧	الفصل الثالث : أساسيات طريقة العناصر المنتهية
٥٩	١-٣ مقدمة
٥٩	٢-٣ الصيغة القوية و الصيغة الضعيفة
٦٠	٣-٣ مبدأ هاملتون
٦١	٤-٣ إجرائية طريقة العناصر المنتهية
٦١	١-٤-٣ تقطيع المجال Meshing
٦٢	٢-٤-٣ استكمال الانتقالات Displacements interpolation
٦٣	٣-٤-٣ إجرائية بناء توابع الشكل
٦٧	٤-٤-٣ خواص توابع الشكل

٧٠	٣-٤-٥ صياغة معادلات العناصر المنتهية في مستوى الإحداثيات الموضعي
٧٤	٣-٤-٦ تحويل الإحداثيات
٧٥	٣-٤-٧ تجميع معادلة العناصر المنتهية الكلية
٧٥	٣-٤-٨ تطبيق الشروط الحدية للانتقالات
٧٦	٣-٤-٩ حل المعادلة الكلية للعناصر المنتهية
٧٦	٣-٥ التحليل الستاتيكي
٧٦	٣-٦ تحليل الاهتزازات الحرة (تحليل القيم الذاتية)
٧٨	٣-٧ ملخص إجرائية العناصر المنتهية
٧٨	٣-٨ أسئلة للمراجعة
٨١	الفصل الرابع : طريقة العناصر المنتهية في القضبان
٨٣	٤-١ مقدمة
٨٣	٤-٢ معادلات طريقة العناصر المنتهية
٨٣	٤-٢-١ بناء توابيع الشكل
٨٧	٤-٢-٢ مصفوفة الانفعال
٨٧	٤-٢-٣ مصفوفات العنصر في نظام الإحداثيات الموضعية
٨٨	٤-٢-٤ مصفوفات العنصر في نظام الإحداثيات الكلي
٩٢	٤-٢-٥ الشروط الحدية
٩٣	٤-٢-٦ استنتاج الإجهادات و الانفعالات
٩٣	٤-٣ أمثلة توضيحية
٩٣	٤-٣-١ المثال ١-٤ : قضيب منتظم خاضع لقوة محورية
٩٧	٤-٣-٢ مثال ٢-٤ : هيكل شبكي مثلث الشكل خاضع لقوة شاقولية
١٠٦	٤-٤ العناصر أحادية البعد في الاهتزازات الحرة
١٠٧	٤-٥ العناصر أحادية البعد من مرتبات أعلى
١٠٩	٤-٦ أمثلة تطبيقية
١٠٩	٤-٦-١ مثال ٣-٤ : إنشاء ذو عنصري قضيب
١١١	٤-٦-٢ مثال ٤-٤ : هيكل شبكي مستو ثنائي العناصر
١١٣	٤-٦-٣ مثال ٥-٤ : هيكل شبكي مستو ثلاثي العناصر
١١٧	٤-٦-٤ مثال ٦-٤ : إنشاء هندسي وحيد العنصر

- ١٢١ ٥-٦-٤ مثال ٧-٤ : إيجاد التواتر الذاتي لقضيب أحادي العنصر
- ١٢٢ ٦-٦-٤ مثال ٨-٤ : إيجاد التواتر الذاتي لقضيب ثنائي العنصر
- ١٢٤ ٦-٤ أسئلة للمراجعة
- ١٢٧ **الفصل الخامس : طريقة العناصر المنتهية في الجوائز**
- ١٢٩ ١-٥ مقدمة
- ١٢٩ ٢-٥ معادلات طريقة العناصر المنتهية
- ١٢٩ ١-٢-٥ بناء توابع الشكل
- ١٣٢ ٢-٢-٥ مصفوفة الانفعال
- ١٣٣ ٣-٢-٥ مصفوفات العنصر
- ١٣٤ ٣-٥ ملاحظات
- ١٣٥ ٤-٥ أمثلة تطبيقية
- ١٣٥ ٤-٥-١ المثال ١-٥ : جائر نائي منتظم خاضع لقوة شاقولية
- ١٣٨ ٤-٥-٢ المثال ٢-٥ : جائر ثنائي العنصر خاضع لقوة شاقولية
- ١٤٢ ٤-٥-٣ المثال ٣-٥ : جائر خاضع لقوة موزعة بانتظام
- ١٤٥ ٤-٥-٤ المثال ٤-٥ : جائر خاضع لقوة موزعة بانتظام
- ١٤٧ ٤-٥-٥ المثال ٥-٥ : جائر مثبت من طرف ومستند على مساند بسيطة ومحمل بقوة موزعة
- ١٤٩ ٤-٥-٦ المثال ٦-٥ : جائر بسيط بعنصر واحد مستند على نابض
- ١٥٣ ٤-٥-٧ المثال ٧-٥ : جائر بسيط ذو عنصرين مستند على نابض
- ١٥٧ ٥-٥ أسئلة للمراجعة
- ١٥٩ **الفصل السادس : طريقة العناصر المنتهية في الجمالونات**
- ١٦١ ١-٦ مقدمة
- ١٦١ ٢-٦ معادلات طريقة العناصر المنتهية للجمالونات المستوية
- ١٦٣ ١-٢-٦ المعادلات في نظام الإحداثيات الموضعي
- ١٦٥ ٢-٦-٦ المعادلات في نظام الإحداثيات الكلي
- ١٦٧ ٣-٦ معادلات طريقة العناصر المنتهية للجمالونات الفراغية
- ١٧٤ ٤-٦ ملاحظات
- ١٧٥ ٥-٦ مثال تطبيقي

١٧٧	٦-٦ أسئلة للمراجعة
١٧٩	الفصل السابع : طريقة العناصر المنتهية للأجسام الصلبة ثنائية البعد
١٨١	١-٧ مقدمة
١٨٣	٢-٧ العناصر المثلثية الخطية
١٨٤	١-٢-٧ استيفاء حقل المتحولات
١٨٥	٢-٢-٧ بناء توابع الشكل
١٩٠	٣-٢-٧ إحداثيات المساحة
١٩١	٤-٢-٧ مصفوفة الانفعال
١٩٣	٥-٢-٧ مصفوفات العنصر
١٩٥	٣-٧ العناصر الخطية الرباعية
١٩٥	١-٣-٧ بناء توابع الشكل
١٩٨	٢-٣-٧ مصفوفة الانفعالات
١٩٨	٣-٣-٧ مصفوفات العنصر
١٩٩	٤-٣-٧ تكامل غوص
٢٠٢	٤-٧ العناصر الرباعية الخطية
٢٠٢	١-٤-٧ تحويل الإحداثيات
٢٠٥	٢-٤-٧ مصفوفة الانفعالات
٢٠٦	٣-٤-٧ مصفوفات العنصر
٢٠٧	٤-٤-٧ ملاحظات
٢٠٧	٥-٧ عناصر ذات مرتبة أعلى
٢٠٧	١-٥-٧ الصياغة العامة لتوابع الشكل
٢٠٩	٢-٥-٧ العناصر المثلثة التربيعية
٢١٠	٣-٥-٧ العناصر المثلثة التكعيبية
٢١٣	الفصل الثامن : تقنيات النمذجة بطريقة العناصر المنتهية
٢١٥	١-٨ مقدمة
٢١٦	٢-٨ زمن وحدة المعالجة المركزية CPU
٢١٧	٣-٨ نمذجة الشكل الهندسي
٢١٩	٤-٨ بناء شبكة العناصر المنتهية

٢١٩	٨-٤-١ كثافة الشبكة
٢٢٠	٨-٤-٢ تشوه العناصر
٢٢٣	٨-٥ تناغم الشبكة
٢٢٣	٨-٥-١ العناصر المختلفة الدرجات
٢٢٥	٨-٥-٢ العناصر ذات التوضع الخاطئ
٢٢٥	٨-٦ استخدام التناظر
٢٢٧	٨-٦-١ تناظر المرأة أو التناظر المستوي
٢٣٢	٨-٦-٢ التناظر المحوري
٢٣٣	٨-٦-٣ التناظر التكرار الدوراني
٢٣٣	٨-٦-٤ تناظر التكرار الخطي
٢٣٤	٨-٧ نمذجة مسافات الانزياح offsets
٢٣٥	٨-٧-١ عناصر شديدة الصلابة
٢٣٥	٨-٧-٢ العناصر الجاسئة
٢٣٦	٨-٧-٣ استخدام معادلات MPC
٢٣٦	٨-٨ نمذجة المساند
٢٣٩	٨-٩ نمذجة الوصلات
٢٤٠	٨-١٠ تقنية النموذج الجزئي Sub-modeling
٢٤٣	الفصل التاسع : البرمجيات التي تستخدم طريقة العناصر المنتهية
٢٤٥	٩-١ مقدمة
٢٤٥	٩-٢ معايير اختيار برامج التحليل باستخدام طريقة العناصر المنتهية
٢٥٠	٩-٣ أكثر البرامج استخداماً
٢٥٣	الفصل العاشر : مدخل إلى النمذجة باستخدام برنامج ABAQUS
٢٥٥	١٠-١ مقدمة
٢٥٨	١٠-٢ الحزم البرمجية الأساسية والاختيارية ضمن Abaqus
٢٥٩	١٠-٣ بدء العمل على Abaqus
٢٦٤	١٠-٤ نظام الواحدات في Abaqus
٢٦٤	١٠-٥ نظام الإحداثيات ودرجات الحرية في Abaqus
٢٦٥	١٠-٦ المثال الأول تحليل هيكل جمالوني

٢٨٨	٧-١٠ المثال الثاني تحليل هيكل جمالوني
٢٩٤	٨-١٠ المثال الثالث تحليل جائر
٣٠٥	الفصل الحادي عشر : مدخل إلى النمذجة باستخدام برنامج ANSYS
٣٠٧	١-١١ مقدمة
٣١١	٢-١١ الواجهات الأساسية في القائمة الرئيسية Main Menu
٣١٧	٣-١١ الواجهات الأساسية في قائمة Utility Menu>file
٣٢٤	٤-١١ الواجهات الأساسية في القائمة Utility Menu>List
٣٢٤	٥-١١ الواجهات الأساسية في القائمة Utility Menu>Plot
٣٢٤	٦-١١ الواجهات الأساسية في القائمة Utility Menu>PlotCtrls
٣٢٦	١-٦-١١ واجهة Utility Menu>PlotCtrls>Pan Zoom Rotate
٣٢٦	٢-٦-١١ واجهة Utility Menu>PlotCtrls>Numbring
٣٢٦	٣-٦-١١ واجهة Utility Menu>PlotCtrls>Symbols
٣٢٨	٧-١١ الواجهات الأساسية في القائمة الرئيسية Utility Menu>Workplane
٣٢٨	٨-١١ العناصر المنتهية المتاحة في برنامج ANSYS
٣٢٨	٩-١١ الحزم البرمجية الأساسية والاختيارية ضمن ANSYS
٣٣٠	١٠-١١ نظام الواحدات في ANSYS
٣٣٠	١١-١١ نظام الإحداثيات ودرجات الحرية في ANSYS
٣٣١	١٢-١١ بدء العمل على ANSYS
٣٣١	١٣-١١ مثال ١ جائر مثبت من طرف ويخضع لقوة مركزة نحو الأسفل من الطرف الحر
٣٤٢	١٤-١١ مثال ٢ جائر ثلاثي البعد مثبت من طرف ويخضع لقوة مركزة من الطرف الحر
٣٥٠	١٥-١١ مثال ٣ هيكل شبكي مكون من ثلاثة قضبان
٣٦١	١٦-١١ مثال ٤ صفيحة مثقوبة رقيقة تتعرض لقوى شد من الطرفين
٣٧٣	١٧-١١ مثال ٥ فرن صناعي مكون من ثلاث طبقات عازلة
٣٨٦	١٨-١١ مثال ٦ جائر ذو مقطع دائري مثبت من الطرفين يخضع لدرجة حرارة
٣٩٥	المراجع

مقدمة

يمكن وصف العديد من الظواهر الفيزيائية باستخدام المعادلات التفاضلية الجزئية، إلا أن حل هذه المعادلات باستخدام الطرائق التحليلية التقليدية يكاد يكون من المستحيل - بشكل عام - في حالة الأشكال المعقدة، من هنا تأتي طريقة العناصر المنتهية Finite Element Method (FEM) كطريقة عددية في الحل تسمح بحل هذه المعادلات التفاضلية الجزئية بشكل تقريبي، وتعرف طريقة العناصر المنتهية من المنظور الهندسي بأنها طريقة لحل المسائل الهندسية مثل تحليل الإجهاد، نقل الحرارة، وتدفق السوائل والتحليل الكهرومغناطيسي عن طريق المحاكاة الحاسوبية. استخدم الملايين من المهندسين والعلماء في جميع أنحاء العالم FEM للتنبؤ بسلوك الأنظمة الإنشائية والميكانيكية والحرارية والكهربائية والكيميائية وحتى الطبية إلى غير ذلك، وذلك سواء في مرحلة التصميم أم تقييم الأداء، ولعل ما يمكن أن يدل على الانتشار الواسع لهذه الطريقة، حجم إنفاق الولايات المتحدة الأمريكية وحدها ما يقارب مليار دولار سنوياً على كل من برامج FEM وأزمة الحساب على الحاسب. إحدى الدراسات المرجعية التي تعود لعام ١٩٩١، أعطت قائمة بما يقارب ٤٠٠ كتاب حول العناصر المنتهية باللغة الإنجليزية وغيرها من اللغات، كما أن تجربة بسيطة بالبحث عن مصطلح "finite element" على محرك البحث على شبكة الإنترنت Google أظهرت ما يزيد عن ٢٥ مليون صفحة من النتائج في عام ٢٠١٤، مقابل ما يزيد عن ١٤ مليون صفحة من النتائج في عام ٢٠٠٦.

يشهد العالم اليوم تطوراً متسارعاً في شتى المجالات، حيث أصبحت الحاجة ملحة لتطوير تقنيات متقدمة للتصنيع والقياس والاختبار، وكذلك الحصول على مواد فائقة تتناسب مع الصناعات الدقيقة والصناعات الحيوية وصناعات الطيران والفضاء، كما أن الإنشاءات المعدنية والبيتونية أصبحت أكثر تعقيداً، كل ما سبق جعل استخدام الأدوات التقليدية في التصميم أكثر تعقيداً وأقل جدوى، وهنا تأتي طريقة التحليل باستخدام العناصر المنتهية لتقدم أداة أكثر مرونة وكفاءة

في التغلب على تعقيدات التصميم والتركيبات الحالية من جهة وإعطاء حلول أكثر ملائمة للمتطلبات المتزايدة لشتى المجالات العلمية والتقنية.

وضع هذا الكتاب لتقدم عرض شامل لطريقة العناصر المنتهية وبما يتوافق مع تغطية مفردات مقرر العناصر المنتهية لطلاب السنة الرابعة في قسم هندسة التصميم الميكانيكي في كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية في جامعة دمشق وهو يتألف من أحد عشر فصلاً، أولها يعرض مدخلاً إلى طريقة العناصر المنتهية من حيث المزايا ومجالات التطبيق وأسلوب النمذجة إضافة إلى توصيف كل من العنصر المنتهي النموذج ومختلف المفاهيم المرتبطة بهما، كما عرض الفصل الثاني عرضاً سريعاً لميكانيك الأجسام الصلبة والإنشاءات وذلك لتذكرة القارئ بالمفاهيم الأساسية للميكانيك والتي سيكون بحاجة لخلال الفصول التالية.

في الفصل الثالث تم عرض أساسيات التحليل بطريقة العناصر المنتهية وكيف يتم صياغة معادلات العناصر المنتهية بالإحداثيات الموضعية أو الكلية وصولاً للحل المطلوب، وذلك تمهيداً لشرح خصوصية استخدام الطريقة في كل من القضبان، الجوائز، الجمالونات، والأجسام الصلبة ثنائية البعد في الفصول الرابع والخامس والسادس والسابع على الترتيب.

ونظراً لانتشار استخدام طريقة العناصر المنتهية في مختلف التطبيقات العلمية والتي تتطلب حلولاً تقنية ذات دقة مرتفعة نسبياً، مما يتطلب بناء نماذج عناصر منتهية مرتفعة الجودة، وجب تقديم شرح كافٍ لأدوات النمذجة والتي تساعد في الحصول على النموذج المطلوب بأقل جهد ووقت وكلفة، وهو ما تم عرضه بالفصل الثامن، أما الفصل التاسع فهو يقدم لاستخدام البرمجيات للنمذجة والمحاكات باستخدام طريقة العناصر المنتهية، ومن ثم عبر الفصلين العاشر والحادي عشر تم عرض البرنامجين الأكثر شهرة واستخداماً وهما ABAQUS و ANSYS وذلك عبر شرح مفصل لمجموعة من الأمثلة التطبيقية بخطوات تفصيلية تسمح للقارئ بفهم القوائم الأساسية لذين البرنامجين وتسلسل العمل لإعداد النماذج المختلفة من ثم حسابها واستخلاص نتائجها، إلا أنه يتوجب التنويه إلى أن الدخول في مختلف التفاصيل والأدوات المتوفرة في هذين البرنامجين يتطلب كتباً ومجلدات متعددة، الأمر الذي لا يمكن تحقيقه عبر حدود هذا الكتاب، إلا أن ماتم

عرضه يمكن أن يكون قاعدة كافية للانطلاق منها لفهم الأدوات الأساسية التي يقدمها هذان البرنامجان ومن ثم سهولة التعامل مع الأدوات الأخرى التي لم يتم التطرق لها. في النهاية لابد من التذكير بأن السنوات الأخيرة قد شهدت تطورات هائلة في شتى العلوم وقد كانت طريقة العناصر المنتهية إحدى الأدوات الأساسية التي ساهمت فيها، كما نالت الطريقة نفسها نصيبها من تلك التطورات، وباتت الطريقة تتضمن تقنيات كثيرة ومتعددة ومتشعبة، لم يتم التطرق لها جميعاً لعدم إمكانية التوسع بها ضمن حدود هذا الكتاب، وتم الاكتفاء بالتركيز على الحد اللازم لطلاب قسم هندسة التصميم الميكانيكي، لفهم هذه الطريقة واستخدامها في أعمالهم العلمية اللاحقة، ويقع على عاتقهم تطوير معرفتهم عندما تستدعي الضرورة . نأمل أن نكون قد قدمنا إلى كل من طلابنا والعاملين في هذا المجال ومكتبتنا العلمية ما هو مفيد وأن يحقق هذا الكتاب الفائدة العلمية والعملية المرجوة.

الدكتور المهندس
محمد بسام أبو حرب

الدكتور المهندس
معاذ الحمصي

الدكتور المهندس
محمد فتحي غنمه

الفصل الأول

مدخل إلى طريقة العناصر المنتهية



مدخل إلى طريقة العناصر المنتهية

١-١ مقدمة:

إن الكثير من المسائل التي نواجهها في التصميم لا يمكن حلها عملياً بالطرائق التحليلية، شأن المسائل المطبقة على مواد ذات خواص معقدة أو أجسام أو تراكيب هندسية معقدة. لذا فإننا نلجأ إلى الطرائق الرقمية والتي تعطي بدورها مقاربة مقبولة للحل. وكوحدة من هذه الطرائق الكثيرة والتي تطورت على حد سواء قبل ظهور الحاسب أو بعده، تعتبر طريقة العناصر المنتهية من الطرائق ذات الكفاءة والأداء العاليين؛ وهي تناسب الكثير من المسائل المعقدة والصعبة مثل: دراسة التركيبات غير المتجانسة، المسائل ذات سلوك الإجهاد-انفعال غير الخطي والمسائل ذات الشروط الحدية المعقدة.

وتطبق هذه الطريقة على مجال واسع من التركيبات والمسائل الهندسية حيث بدأت بالظهور عام ١٩٥٠ بنتيجة أبحاث Clough و Argyris وآخرين، وطبقت للمرة الأولى على مسائل الإجهاد المستوي وامتدت بعد ذلك لتشمل مسائل أخرى مثل تحليل الانفعالات والإجهادات والتوزيع الحراري والسلوك الديناميكي للعناصر والهياكل الآلية وانتشار الصوت والحقل المغناطيسي إلى غير ذلك من مسائل الجسم الصلب، حتى أصبحت هذه الطريقة في أيامنا هذه واحدة من أهم طرائق الحساب والنمذجة الرقمية.

٢-١ تصنيف المسائل الميكانيكية:

يمكن تقسيم حقل الميكانيك إلى ثلاثة مجالات رئيسية:

١. الميكانيك النظري: يتعامل الميكانيك النظري مع المبادئ والقوانين الأساسية للميكانيك وذلك بهدف إيجاد الصيغ العلمية الحقيقية.

٢. الميكانيك التطبيقي: يحول الميكانيك التطبيقي المعرفة النظرية إلى تطبيقات علمية وهندسية.

٣. الميكانيك الحسائي أو البرمجي: يحل الميكانيك الحسائي مسائل محددة بواسطة المحاكاة عبر طرائق رقمية باستخدام الكمبيوتر.

وتصنف عموماً مسائل الميكانيك البرمجي أو الحسائي إلى:

١. المسائل النانوميكانيكية والميكروميكانيكية: تعالج المسائل النانوميكانيكية الظواهر على المستوى الذري أو الجزيئي للمواد، وتعنى هذه المسائل بدراسة العلاقة المتبادلة بين الجزيئات فيزيائياً وكيميائياً، والمسائل الميكروميكانيكية تنظر في المستوى البلوري أو الحبيبي للقضايا الميكانيكية، وتعنى هذه المسائل بتطوير تصميم وتصنيع المواد أو الأدوات الميكروية.

٢. مسائل الأوساط الميكانيكية المستمرة: هذا النوع من المسائل يعني بالمسائل الميكانيكية في مستواها الماكروي أي على اعتبار أن المواد متجانسة في المستوى الماكروي، ويمكن لهذه المسائل أن تعالج قضايا الجسم الصلب أو الموائع أو الأجسام متعددة الأطوار.

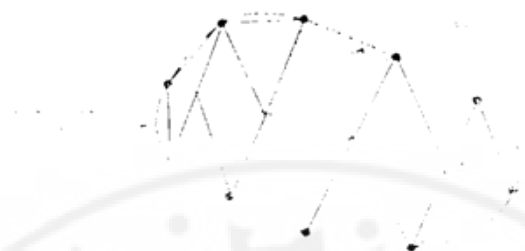
٣. مسائل الأنظمة: ينطوي تحت إطار هذا النوع، مسائل الأجسام الميكانيكية سواء كانت طبيعية أم افتراضية والتي تؤدي وظائف معتبرة ومن أمثلتها: الطائرة والأبنية والجسور والمحركات والسيارات والرقاقات الإلكترونية والروبوتات والأنظمة البيولوجية كالأشجار والأنظمة البيئية والكونية والفضائية.

وتكون مسائل الجسم الصلب إما ستاتيكية أو ديناميكية حيث تأخذ المسائل الديناميكية التأثير الزمني بعين الاعتبار في حين تكون المسائل الستاتيكية غير مرتبطة بالزمن أو أن قوى العطالة الداخلية مهمة في حال اعتمادها على الزمن. وتكون المسائل الستاتيكية إما خطية أو لخطية، حيث إن المسائل الخطية هي المسائل التي يكون فيها العلاقة التناسبية بين السبب والتأثير هي علاقة خطية أو طردية في حين تكون جميع المسائل الأخرى هي مسائل لخطية.

١-٣ مفهوم طريقة العناصر المنتهية:

تقوم طريقة العناصر المنتهية على أساس تمثيل الجسم المدروس أو التركيبية الآلية المدروسة إلى تجمع من الأقسام الصغيرة والتي تدعى عناصر منتهية كما هو مبين بالشكل ١-١، ويستخدم تعبير منته للدلالة أن للعناصر ذات أبعاد ملموسة لا يمكن أن تنهاى في الصغر، تتصل هذه العناصر فيما بينها بواسطة ما يسمى العقد، ويشكل اجتماع مجمل العناصر الممثلة للجسم المدروس ما نسميه نموذج العناصر المنتهية.

إن من أهم ما يجب التركيز عليه وفهمه جيداً لدى وضع أي نموذج للعناصر المنتهية بهدف حل مسألة ما، أن هذه الطريقة تعطي مقاربة للمسألة المدروسة وهي تزداد تمثيلاً لهذه المسألة بقدر ما يتم تمثيل الشكل الهندسي المدروس بكافة تفاصيله دون تبسيط وبقدر ما يتم تمثيل كافة الظروف المحيطة من شروط حدية وأحمال... إلخ وكذلك الأمر بالنسبة لتمثيل المواد أو المعادن المصنّع منها الأجزاء العاملة في المسألة المدروسة والتمثيل الأدق لسلوكها تحت تأثير مختلف الظروف المحيطة وشروط العمل؛ وعليه فإن الحل الناتج هو حل تقريبي يزداد قرباً من الحل الصحيح كلما كان نموذج العناصر المنتهية أكثر قرباً للواقع وكلما ازدادت الدقة في اختيار النوع الأنسب من العناصر المنتهية وطريقة وشكل توزيعها لتغطية الجسم المدروس أو التركيبية المدروسة بالإضافة إلى إمكانيات برنامج الحساب والحاسب المستخدم.



الشكل ١-١ مجموعة الأقسام الصغيرة الممثلة للجسم المدروس

يبين الشكل ١-٢ الحل التقريبي بواسطة العناصر المنتهية لحالة أحادية البعد، حيث تم كما هو في الشكل تمثيل علاقة مستمرة لمتحول ما باستخدام قطع من علاقات خطية لكل مجال جزئي، يمثل هذا المجال عنصراً منتهياً محددًا بعقدتين، وبذلك يتم تحديد المتحول في كل مجال جزئي عند العقد لوضع معادلة توصف هذا المتحول ضمن هذا المجال الجزئي، ويتم فيما بعد ربط العناصر المنتهية "المجالات الجزئية المنتهية" الأمر الذي يقود أخيراً إلى وضع تتابع معادلات خطية تصف المجال الإجمالي والتي تحل بسهولة نسبياً لإعطاء المتحول المطلوب.

في مجال منتهية
بمجال منتهية

عقدتين

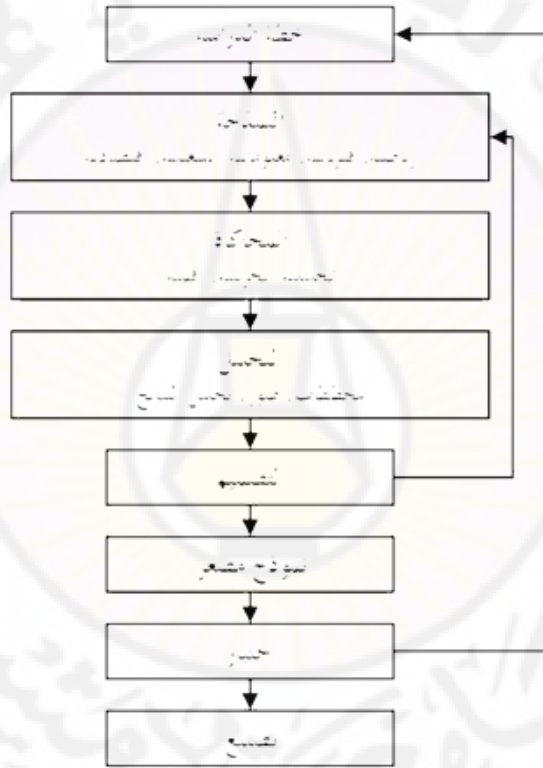
الشكل ١-٢ حل مسألة أحادية البعد باستخدام العناصر المنتهية

وعموماً يمكن القول بأن طريقة العناصر المنتهية تكون مجدية بشكل كبير عند حل المسائل والتي تتطلب فيها معرفة التوزيع الفراغي لمتحول أو أكثر مثل:

١. الانفعالات والإجهادات (ميكانيك الأجسام الصلبة)
٢. السلوك الديناميكي للعناصر والهياكل الميكانيكية
٣. التوزيع الحراري
٤. التدفق المغناطيسي
٥. انتشار الصوت إلى غير ذلك من المتحولات

١-٤ مراحل إنتاج أنظمة هندسية متطورة:

إن من أهم المراحل المساعدة على الحصول على نظم هندسية متطورة " أجزاء أو عناصر آلية، تركيبات أو هياكل هندسية ... إلخ" هما مرحلتا النمذجة والمحاكاة الرقمية، فكما هو مبين بالشكل ٣-١، تؤدي هاتان المرحلتان دوراً هاماً في خطة التصميم والتصنيع بدءاً من الفكرة الهندسية الأولية وانتهاءً بعمليات التصنيع والإنتاج، وطريقة العناصر المنتهية من أهم الطرائق وأكثرها فاعلية في تنفيذ الكثير من عمليات النمذجة والمحاكاة هذه.



الشكل ٣-١ مراحل إنتاج أنظمة هندسية متطورة.

١-٥ خطة عمل التحليل بواسطة العناصر المنتهية:

تتطابق الكثير من خطوات تنفيذ دراسة أو تحليل بواسطة العناصر المنتهية سواء بهدف حل مسألة فيزيائية أم إنشائية أم انتقال حرارة أم إلى ما هنالك من مسائل هندسية، هذه الخطوات يتم بحسبها تطبيقاً بمعظم البرامج أو الحزم البرمجية المختصة بالنمذجة الرقمية أو حساب الهياكل والتي سنأتي على ذكر بعضها لاحقاً. يمكن ترتيب هذه الخطوات وفق ثلاث مراحل أساسية وهي:

١. ما قبل المعالجة

٢. الحل

٣. التحليل

وفيما يلي سنوضح مفهوم كلٍّ من هذه المراحل التي سيتم توضيحها بشيء من التفصيل في الأبحاث القادمة.

١-٥-١ ما قبل المعالجة:

تعرف مرحلة ما قبل المعالجة عموماً بمرحلة وضع النموذج وتتضمن:

١. تحديد المجال الشكلي "الشكل الهندسي" للمسألة المدروسة.

٢. تحديد نوع العناصر المراد استخدامها.

٣. تحديد خواص معدن أو مادة العناصر.

٤. تحديد خواص هندسة شكل العناصر.

٥. تحديد شكل ارتباط العناصر "التوزيع الشبكي للعناصر".

٦. تحديد الشروط الحدية.

٧. تحديد الأحمال.

تعتبر مرحلة ما قبل المعالجة "وضع النموذج" من المراحل الحرجة والحامة في النمذجة الرقمية باستخدام العناصر المنتهية حيث إن دقة الحل تعتمد على مستوى وجودة النموذج الموضوع ومدى تمثيله للمسألة المدروسة.

١-٥-٢ الحل:

يقوم برنامج العناصر المنتهية ضمن طور الحل بجمع المعادلات الجبرية على شكل مصفوفة ومن ثم يحسب المتحولات الأولية، حيث تستخدم القيم المحسوبة فيما بعد لحساب المتحولات الإضافية أو المشتقة مثل قوى ردود الأفعال إجهادات العناصر وانتشار الحرارة.

بما أن نموذج العناصر المنتهية يمثل بمئات الآلاف من المعادلات، فإن تقنيات حل خاصة تستخدم بهدف تقليل حجم المعطيات وزمن الحساب اللازمين للوصول إلى النتائج المطلوبة. لمسائل التوازن والمسائل الخطية على سبيل المثال يستخدم بشكل شائع معالج حل جبهوي موجي يعتمد على تبسيط غوص للمصفوفات.

١-٥-٣ التحليل:

يقصد بطور التحليل، تحليل نتائج الحل وتقييمها؛ وتستخدم برامج التحليل وسائل متقدمة ومتنوعة بهدف إخراج النتائج المطلوبة من الحل بواسطة العناصر المنتهية، وإظهارها ورسمها بالإضافة لإمكانية طباعتها. وكأمثلة على العمليات الممكن تنفيذها في هذه المرحلة يمكن أن نذكر:

١. إخراج إجهادات العناصر والإجهاد الكلي

٢. اختبار التوازن
 ٣. حساب عوامل الأمان
 ٤. رسم شكل الهيكل المشوه أو المنفعل
 ٥. الإظهار الحركي للسلوك الديناميكي للنموذج
 ٦. رسم مخططات لونية تعكس تغيرات بارامترات الدراسة
- وحيث إنه يمكن معالجة بيانات الحل بطرائق مختلفة، إلا أن الهدف الأكثر أهمية هو تطبيق حكم هندسي في تحديد أي من نتائج الحل هي منطقية فيزيائياً.

١-٦ ما هي المسائل الممكن حلها بالاعتماد على طريقة العناصر المنتهية؟

المسائل نفسها التي يستطيع المهندس المتمكن حلها تحليلياً إلا أنها يمكن أن تكون أكثر تعقيداً أو طولاً كون النموذج ذي العناصر المنتهية يحتوي على عدد كبير من العناصر المختلفة، ويكون من المجدي استخدام هذه الطريقة في المسائل التي يصعب على القدرات البشرية حلها أو أن حلها قد يتطلب جهداً كبيراً أو زمناً طويلاً والدخول في علاقات تحليلية معقدة مما يزيد من إمكانية ونسبة أخطاء الحساب.

١-٧ مزايا طريقة العناصر المنتهية:

- بالمقارنة بالطرائق الرقمية الأخرى فإن لطريقة العناصر المنتهية المزايا التالية:
١. قابلة للتطبيق على جميع مسائل الحقول كـ: ميكانيك الجسم الصلب، انتقال الحرارة، الحقول المغناطيسية، تدفق السوائل إلخ.
 ٢. لا تفرض أية تحفظات على الشكل الهندسي للعنصر المدروس.
 ٣. كما أنها لا تفرض أية تحفظات على الشروط الحدية أو الأحمال المطبقة
 ٤. تمكنا من دراسة سلوك مواد مختلفة للنموذج نفسه (متجانسة - معادن أو غير متجانسة - مواد مركبة).
 ٥. تمكنا من الجمع بين عناصر مختلفة السلوك ضمن النموذج نفسه.
 ٦. تعطي نموذجاً مشاهماً إلى حد بعيد للهيكل الأصلي.
 ٧. الحل التقريبي الناتج قابل للتحسين وذلك عن طريق زيادة نعومة العناصر في النموذج ككل أو في جزء منه حيث القيمة المدروسة أكثر أهمية.

٨. غالبية برامج النمذجة بطريقة العناصر المنتهية المسوقة حالياً هي برامج ذات كفاءة عالية وسهولة التداول ومتوافقة مع أسس التصميم بمساعدة الحاسب.

٩. يمكن العمل على هذه البرامج على جميع أنظمة الحواسيب بما فيها الحواسيب الشخصية.

٨-١ توصيف العناصر المنتهية:

هناك العديد من العناصر المنتهية التي تستخدم بحسب الشكل الهندسي للجسم المدروس أو طبيعة التطبيق أو ظروف العمل أو التحميل وكذلك بحسب دقة الحل المطلوبة، وعليه يمكن توصيف كل عنصر منتهٍ من خلال أربعة مؤشرات:

١- **فضاء العنصر:** وهو الحيز الفراغي الذي يشغله العنصر كأن نقول عنصر أحادي البعد أو عنصر مستوي (ثنائي البعد) أو عنصر حجمي (ثلاثي البعد)، كما هو مبين بالشكل ١-٤



الشكل ١-٤ تصنيف العناصر المنتهية بحسب الفضاء.

٢- **شكل العنصر:** وهو الشكل الهندسي للعنصر حيث يمكن في الحالة العامة أن يكون العنصر المستوي مثلاً ثلاثي الأضلاع أو رباعي ويكون العنصر الحجمي هرمياً رباعي الوجوه أو متوازي مستطيلات.

٣- **درجة العنصر:** وهي الدرجة التي تم بناء العنصر عليها كأن ندعو العنصر من الدرجة الأولى (خطي) أو من الدرجة الثانية (تربيعي) ... إلخ.

٤- **عائلة العنصر:** وهو المصطلح الذي يعبر عن الخواص المسندة للعنصر بما يتناسب مع المسألة المدروسة.

١-٩ من هو المستخدم النموذجي لطريقة العناصر المنتهية؟:

يسأل المستخدم النموذجي ما هو نوع العناصر الواجب استخدامه؟ وما هو عددها؟ وأين ينبغي لشبكة العناصر أن تكون ناعمة وأين ينبغي أن تكون خشنة؟ هل يمكن تبسيط النموذج وما هي هذه الإمكانيات؟ إلى أي حد يجب تمثيل التفاصيل الفيزيائية؟ هل السلوك الأكثر أهمية هو ستاتيكي أم ديناميكي، خطي أم لاخطي أم ماذا؟ ماهي الدقة التي يجب أن يكون عليها الحل وكيف يمكن اختباره؟

بالرغم من أن المستخدم غير حاذق لأن يلم إماماً كافياً بالتفاصيل الرياضية لطريقة العناصر المنتهية لكي يستطيع الإجابة على كل هذه الأسئلة، إلا أن المستخدم الكفء هو الذي يلم إماماً كافياً بسلوك العنصر كي يستطيع اختيار ما يناسب من نوع العناصر وعددها وشكلها من جهة وكي يتصدي للمداخلات الخاطئة أو غير الواقعية أو غير المنطقية والكثيرة الاحتمال. كما ينبغي على المستخدم أن يدرك أن طريقة العناصر المنتهية هي تطبيق للنظريات الرياضية على السلوك الفيزيائي، وبناء على ذلك، فإن الفرضيات والحدود النظرية يجب أن لا تتخطى ما يطلب من البرنامج فعله. كما أنه من الضروري على المستخدم الكفء أن يملك إدراكاً فيزيائياً كافياً للمسألة المدروسة كي يستطيع اقتفاء أخطاء وتحليل النتائج ومحاكمتها لمعرفة صحتها من خطأها.

١-١٠ أمثلة على التحليل بواسطة العناصر المنتهية؟:

سنورد فيما يلي بشكل مختصر بعض الأمثلة على مسائل يمكن تحليلها عبر طريقة العناصر المنتهية.

الشكل ١-٥ يوضح منطقة مستطيلة ذات فتحة مركزية، حيث تم بناء الشبكة بواسطة عناصر منتهية مستوية أو ثنائية البعد "مع افتراض أن لها سماكة منتظمة وفق الاتجاه"، من الملاحظ أن شبكة العناصر غير منتظمة: شكل العنصر "مثلث أو رباعي" وقياسها متغير. حيث نلاحظ أنه بجوار الانقطاعات الهندسية للفتحة تكون العناصر أصغر نسبياً. إن هذا التمثيل ليس فقط لأجل الدقة الهندسية بجوار الانقطاعات وإنما لأجل دقة الحل أيضاً.

الشكل ١-٥ شبكة العناصر المنتهية لمنطقة مستطيلة الشكل تحتوي على فجوة مركزية

العناصر المنتهية

إن الشكل الهندسي الموضح في الشكل ١-٥ يمكن أن يمثل نموذجاً لمسائل فيزيائية مختلفة، فمثلاً لدراسة وتحليل مسألة إجهادات مستوية، يمكن أن يمثل النموذج صفيحة معدنية رقيقة ذات ثقب مركزي وتخضع لحمولات عند نهايتها، في هذه الحالة، يمكن أن يستخدم حل العناصر المنتهية لدراسة تركيز الإجهادات بجوار الثقب، يمكن أيضاً أن يكون هذا التمثيل مناسباً لتدفق مائع حول أسطوانة أو انتقال الحرارة في زعنفة مبرودة إلى أنبوب بهدف تبديد هذه الحرارة. وهنا لا يخفى التباين الملحوظ في المعادلات المعبرة عن السلوك الفيزيائي لكل من هذه الحالات.

يبين الشكل ١-٦ نموذج العناصر المنتهية لأنبوب رقيق الجدار يستخدم لانتقال الحرارة في تطبيقات السفن الفضائية، لأنبوب الأبعاد المبينة بالشكل ومصنوع من خلطات النحاس والتيتانيوم، نظراً للجدران الرقيقة لهذا الأنبوب فإن النموذج المصغر الممكن استخدامه لدراسة سلوك هذا الأنبوب ضعيف جداً وبالإضافة لصعوبة التعامل معه. لذا فإن دراسته بطريقة العناصر المنتهية يعد حلاً مناسباً لتحليل سلوكه، فالهدف من التحليل بطريقة العناصر المنتهية هو اختبار الانحناء والقتل التشكيلين عليه وتحديد حمل الانعطاف المسموح به، إن شبكة العناصر المنتهية المستخدمة لنمذجة شريحة من الأنبوب بطول ٢٥,٠ بوصة، والمبينة بالشكل ١-٦، تتكون من ١٩٢٠ عنصراً صلباً ثلاثي الأبعاد يملك كل منها ثماني عقد وثلاث درجات حرية لكل عقدة.



الشكل ١-٦ نموذج العناصر المنتهية لأنبوب رقيق الجدار مستخدم في مبادل حراري

بين الشكل ١-٧-٧ جملوناً كان يستخدم في وقت من الأوقات كتركيب نموذجي في إنشاء المخططات الفضائية، حيث صمم كي يطوى على شكل أكورديون لسهولة نقله وعند نشره يمتد ليأخذ الأبعاد ١,٤ × ١,٤ × ٢,٨ مترًا وعند وصل نهايات عدة نماذج يمكن لنا أن نحصل على أي طول مطلوب.



الشكل ٧-١ جمالون نموذجي استخدم في المحطات الفضائية

العناصر المنتهية

يتم دراسة هذا التركيب وفق طريقة العناصر المنتهية لتحديد خصائص الاهتزازات بحسب تغير عدد العناصر وبالتالي طول الهيكل الكلي. بما أن الوصلات بين أجزاء الهيكل المختلفة هي عبارة عن مفاصل وتدية أو كروية فإن العنصر البسيط شد-ضغط هو الذي طبق في النموذج، وبالتالي يتكون نموذج العناصر المنتهية للتركيب الواحد من ٣٣ عنصراً. ويبين الشكل ٧-١ شكل الاهتزاز الخامس تركيبات من الجمالونات. إن مثال الجمالون هذا يصف تركيبة كبيرة إلى حد ما، وقد تمت نمذجتها باستخدام عدد قليل من العناصر الكبيرة نسبياً.

وكمثال أخير يبين الشكل ٨-١ نموذج العناصر المنتهية لذراع تثبيت رافعة ذي النموذج المصغر المبين بالشكل ٨-١، بهدف دراسة توزيع الإجهادات وفقاً لبحال محدد من الأحمال وذلك بغية اختيار الأبعاد والمادة الأنسب لهذا الذراع.

الشكل ٨-١ نموذج مصغر ونموذج العناصر المنتهية لذراع تثبيت رافعة.

الفصل الثاني

مقدمة عن ميكانيك الأجسام الصلبة والإنشاءات

جامعة دمشق
Damascus University

مقدمة عن ميكانيك الأجسام الصلبة والإنشاءات

٢-١ مقدمة:

توجد المبادئ والنظريات التقليدية لميكانيك الأجسام الصلبة والإنشاءات في العديد من الكتب. سنحاول في هذا الفصل تقديم هذه المبادئ الأساسية والنظريات التقليدية بطريقة مختصرة وسهلة الفهم.

تتولد الإجهادات في الأجسام الصلبة والإنشاءات عندما تخضع لحمولات أو قوى. تكون هذه الإجهادات عموماً غير منتظمة وتؤدي لانفعالات يمكن مشاهدتها كشوهات أو انتقالات. يعالج ميكانيك الجسم الصلب وميكانيك الإنشاءات العلاقات بين الإجهادات والانفعالات، بين الانتقالات والقوى وبين الإجهادات (أو الانفعالات) والقوى من أجل شروط حدية معطاة للأجسام الصلبة والإنشاءات. تعد هذه العلاقات هامة جداً لدى نمذجة ومحاكاة وتصميم النظم الإنشائية الهندسية.

يمكن للقوى أن تكون سكونية (ستاتيكية) أو حركية (ديناميكية). تتعلق القوى الستاتيكية بميكانيك الأجسام الصلبة والإنشاءات الخاضعة لحمولات ستاتيكية مثل حمولة وزن الأرضية في الأبنية. تعاني الأجسام الصلبة والإنشاءات من الاهتزاز تحت تأثير القوى الديناميكية المتغيرة مع الزمن مثل القوى المتولدة لدى مرور آلية على الأرض. في هذه الحالة، ستكون كل من الإجهادات والانفعالات والانتقالات تابعة للزمن. بالتالي لا بد من تطبيق نظريات ومبادئ الديناميك. بما أنه يمكن معالجة الحمولات السكونية كحالة خاصة من الحمولات الديناميكية فيمكن استنباط معادلات الحالة السكونية عموماً بإهمال الحدود الديناميكية في معادلات الحالة الديناميكية. سنعتمد في هذا الكتاب هذا التوجه في استنباط معادلة الديناميك أولاً ومن ثم الحصول على معادلات الحالة السكونية مباشرة من المعادلة الديناميكية.

بالنظر إلى خواص المادة يمكن للأجسام أن تكون مرنة، أي أن تشوه الجسم يزول تماماً بمجرد إزالة الحمولة. هناك أجساماً أخرى تعد لدنة بمعنى أن تشوه الجسم لا يزول بالكامل عند إزالة الحمولة. تعالج المرونة الأجسام الصلبة والإنشاءات من مواد مرنة، كما تعالج اللدونة الأجسام الصلبة والإنشاءات من المواد اللدنة. سنركز في هذا الكتاب على المواد المرنة، إضافة إلى معالجة المسائل تحت فرضية التشوهات الصغيرة حيث ترتبط هذه التشوهات بالإجهادات بعلاقة خطية. بالتالي ستكون معظم المسائل التي سنعالجها خطية مرنة.

يمكن للمواد أن تكون غير متماثلة المناحي Anisotropic، أي أن خواص المادة تتغير تبعاً للاتجاه. تختلف، في المواد غير متماثلة المناحي، التشوهات الناتجة عن تطبيق قوة وفق اتجاه معين عن التشوهات الناتجة عن نفس القوة المطبقة وفق اتجاه مختلف. تعد المواد المركبة مواداً غير متماثلة المناحي. يجب استخدام عدة ثوابت لتعريف

مقدمة عن ميكانيك الأجسام الصلبة والإنشاءات

خواص المادة غير متماثلة المناحي. على أي حال فإن العديد من المواد تعد متماثلة المناحي حيث لا تتعلق خواص المادة بالاتجاه. تعد المواد متماثلة المناحي كحالة خاصة من المواد غير متماثلة المناحي. هناك ثابتان مستقلان فقط لتوصيف المواد متماثلة المناحي، الثابتان الأكثر شيوعاً هما معامل يونغ ومعامل بواسون ، في الأعم الأغلب سنعتمد في هذه الكتاب مواداً (متجانسة) متماثلة المناحي إلا أن معظم العلاقات يمكن تطبيقها على المواد (غير متجانسة) غير متماثلة المناحي.



الشكل ٢-١ العناصر الإنشائية الأربعة شائعة الاستخدام
تستخدم خواصها الإنشائية لاستنباط المعادلات المختصرة

تمثل الشروط الحدية اعتباراً آخر في الميكانيك. تكون الشروط الحدية انتقالات أو قوى مفروضة للأجسام الصلبة والإنشاءات. بالنسبة لمسائل انتقال الحرارة تمثل الشروط الحدية بالحرارة أو النقل الحراري. تعد معالجة الشروط الحدية أمراً هاماً ستتم تغطيته بالتفصيل في الفقرات القادمة.

تتكون الإنشاءات من عناصر إنشائية هي عبارة عن أجسام صلبة. وهناك بشكل عام أربعة عناصر شائعة الاستخدام هي القضبان والجوائز والصفائح والقشريات. كما هو مبين بالشكل ١-٢.

عملياً، يمكن لإنشاء أن يتكون من أنماط مختلفة من هذه العناصر الإنشائية بما فيها كتل صلبة. نظرياً، يمكن تطبيق مبادئ وطرائق ميكانيك الأجسام الصلبة لحل المسائل الميكانيكية لكل العناصر الإنشائية ولكن تبقى هذه الطريقة غير فعالة. لذلك طوّرت نظريات وصياغات تأخذ بالحسبان الخواص الهندسية. ستتم في هذا الفصل مناقشة الصياغات الخاصة بالقضبان والجوائز والأجسام ثنائية البعد والصفائح. عملياً، تستخدم عناصر الصفائح مع الأجسام ثنائية البعد لنمذجة القشريات. بالتالي ستتم نمذجة القشريات عبر المزج بين عناصر الصفائح والعناصر ثنائية البعد.

٢-٢ معادلات الجسم الصلب ثلاثي الأبعاد

١-٢-٢ الإجهادات والتشوهات

نعتبر جسماً صلباً مرناً مستمراً ثلاثي الأبعاد ذا حجم V وسطح S كما في الشكل ٢-٢.

الشكل ٢-٢: جسم خاضع لقوى حجمية وقوى سطحية

يقسم سطح هذا الجسم إلى نمطين من السطوح. تطبق على الأول قوى خارجية ونسميه S_1 أما الثاني فيخضع لانتقالات مفروضة ونسميه S_2 . يمكن تحميل الجسم أيضاً بقوى حجمية f وقوى سطحية t وفق توزيع معين على كامل الجسم.

تظهر في أية نقطة من الجسم مركبات الإجهادات على سطوح مكعب حتمي متناه في الصغير يحيط بهذه النقطة كما في الشكل ٢-٣.

الشكل ٢-٣: المركبات الستة المستقلة للإجهادات في نقطة من الجسم الصلب ممثلة على سطوح مكعب حتمي متناه في الصغير

نعرف على كل سطح مركبة الإجهاد الناظمي ومركبي إجهاد القص. نعتمد في كتابة هذه المركبات على القاعدة التالية: يمثل الحرف الدليل الأول السطح الذي يؤثر عليه الإجهاد أما الحرف الدليل الثاني فيمثل اتجاه هذا الإجهاد. تؤخذ اتجاهات الإجهادات الواردة في الشكل كاتجاهات موجبة. باعتبار عزوم القوى حول المحاور المركزية للمكعب في حالة التوازن نستنتج بسهولة أن:

(١-٢)

بالتالي هناك ستة مركبات للإجهادات في أية نقطة من الجسم الصلب. تسمى هذه الإجهادات تنسور الإجهادات وعادة ما تكتب على شكل شعاع:

(٢-٢)

توافق مركبات الإجهاد الستة، ستة مركبات للانفعالات في أية نقطة من الجسم ويمكن بشكل مماثل كتابتها كشعاع:

(٣-٢)

يعبر الانفعال عن تغير الانتقال في واحدة الطول وبالتالي يمكن الحصول على مركبات الانفعال من مشتقات الانتقالات كما يلي:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad ; \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad ; \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (٤-٢)$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad ; \quad \varepsilon_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad ; \quad \varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

حيث u و v و w هي مركبات الانتقال في الاتجاهات x و y و z بالترتيب. يمكن كتابة علاقات الانتقال-الانفعال الست السابقة على شكل مصفوفات:

$$\{\varepsilon\} = [L]\{U\} \quad (٥-٢)$$

حيث $\{U\}$ هو شعاع الانتقالات المعرف بالشكل التالي:

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad (٦-٢)$$

أما $[L]$ فهي مصفوفة المشتقات الجزئية المستنتجة من العلاقة (٤-٢):

$$[L] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \quad (٧-٢)$$

٢-٢-٢ معادلات السلوكية

تعطي معادلة السلوكية العلاقة بين الإجهاد والانفعال لمادة الجسم الصلب. يمكن كتابة قانون هوك Hook المعمم للمواد غير متماثلة المناحي وفق العلاقة المصفوفاتية:

$$\{\sigma\} = [c]\{\varepsilon\} \quad (٨-٢)$$

حيث $[c]$ هي مصفوفة ثوابت المادة التي يمكن الحصول عليها تجريبياً. يمكن كتابة قانون السلوكية بشكل تفصيلي كالتالي:

$$[c] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ & & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ & & & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ & Sym. & & & c_{55} & c_{56} \\ & & & & & c_{66} \end{bmatrix} \quad (٩-٢)$$

نلاحظ أنه بما أن $c_{ij} = c_{ji}$ يوجد ٢١ ثابتاً مستقلاً للمادة وذلك في حالة المواد غير متمثلة المناحي. إلا أنه وبالنسبة للمواد متمثلة المناحي يمكن اختصار المصفوفة $[c]$ إلى:

$$[c] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & & c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{c_{11}-c_{12}}{2} & 0 & 0 \\ & Sym. & & & \frac{c_{11}-c_{12}}{2} & 0 \\ & & & & & \frac{c_{11}-c_{12}}{2} \end{bmatrix} \quad (١٠-٢)$$

حيث:

$$c_{11} = \frac{E(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)} \quad ; \quad c_{12} = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} \quad ; \quad \frac{c_{11}-c_{12}}{2} = G \quad (١١-٢)$$

في هذه المعادلات E هو معامل يونغ، ν هو معامل بواسون أما G فهو معامل القص للمادة. يوجد ثابتان مستقلان فقط بين هذه المعاملات الثلاثة حيث تربط بين الثوابت الثلاثة العلاقة:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (١٢-٢)$$

أي أنه ولأي مادة متمثلة المناحي تكفي معرفة اثنين من هذه الثوابت الثلاثة ويتم الحصول على الثالث باستخدام العلاقة السابقة.

٣-٢-٢ معادلات التوازن الديناميكي

لصيغة معادلات التوازن الديناميكي نعتبر كتلة متناهية في الصغر من الجسم الصلب كما في الشكل ٢-٤. كما هو الحال في صياغة كافة معادلات التوازن نحتاج إلى موازنة القوى في كافة الاتجاهات. لاحظ، بما أننا في الحالة العامة لمنظومة ديناميكية فيجب أن نأخذ بالحسبان قوى العطالة في المكعب. تعطي موازنة كافة القوى في الاتجاه x :

الشكل ٢-٤ : الإجهادات على مكعب متناه في الصغر.

يتم استنباط معادلات التوازن الديناميكي من حالة الإجهادات العامة هذه

حيث يمثل الحد في الطرف الأيمن من المعادلة قوى العطالة ويمثل الحد القوى الحجمية الخارجية المطبقة على مركز المكعب. لاحظ أن:

(١٤-٢)

بالتالي تغدو المعادلة (١٣-٢) إحدى معادلات التوازن وتكتب كما يلي:

..

(١٥-٢)

بشكل مماثل يعطي توازن القوى في الاتجاهين و معادلتين التوازن الباقيتين:

..

(١٦-٢)

..

(١٧-٢)

يمكن أن تكتب معادلات التوازن (١٥-٢) إلى (١٧-٢) بشكل مختصر كمصفوفات:

..

(١٨-٢)

حيث هو شعاع القوى الحجمية الخارجية في الاتجاهات و و :

$$\{f_b\} = \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{Bmatrix} \quad (٢-١٩)$$

باستخدام المعادلتين (٢-٥) و (٢-٨) يمكن كتابة المعادلة (٢-١٨) باستخدام الانتقالات كما يلي:

$$[L]^T [c][L]\{U\} + \{f\}_b = \rho\{\ddot{U}\} \quad (٢-٢٠)$$

تمثل هذه المعادلة الصيغة العامة لمعادلة التوازن الديناميكي بالشكل المصفوفي. عندما تكون الحمولات المطبقة على الجسم ستاتيكية نغدو في الحالة الستاتيكية للجسم. بالتالي يمكن استنباط معادلة التوازن الستاتيكي ببساطة بإهمال الحد الديناميكي في المعادلة (٢-٢٠) المتمثل بقوى العطالة:

$$[L]^T [c][L]\{U\} + \{f\}_b = \{0\} \quad (٢-٢١)$$

٢-٢-٤ الشروط الحدية

هناك نمطان من الشروط الحدية: شروط الانتقال (أساسية) وشروط القوى (طبيعية). يمكن لشروط الانتقال الحدية أن تكتب ببساطة كما يلي:

$$u = \bar{u} \quad ; \quad v = \bar{v} \quad ; \quad w = \bar{w} \quad (٢-٢٢)$$

حيث $\bar{u}$ و $\bar{v}$ و $\bar{w}$ تمثل قيمة الانتقال المفروض لكل مركبة. في معظم حالات المحاكاة تستخدم الانتقالات لتوصيف المساند أو القيود على الجسم الصلب، بالتالي فإن قيمة الانتقال المفروض غالباً ما تكون الصفر. في هذه الحالة تدعى الشروط الحدية بالمتجانسة، في الحالة المغايرة ستكون الشروط الحدية غير متجانسة. غالباً ما تكتب الشروط الحدية على القوى كالتالي:

$$[n]\{\sigma\} = \{\bar{t}\} \quad (٢-٢٣)$$

و ذلك على الحدود التي تطبق عليها القوة، حيث $[n]$ معطاة وفق:

$$[n] = \begin{bmatrix} n_x & 0 & 0 & 0 & n_z & n_y \\ 0 & n_y & 0 & n_z & 0 & n_x \\ 0 & 0 & n_z & n_y & n_x & 0 \end{bmatrix}$$

في هذه العلاقة n_i ($i = x, y, z$) هي تجميعات التوجيه للنظام الخارجي على الحدود. يمثل الحد $\{\bar{t}\}$ قيمة مركبات القوى المفروضة. يمكن لشروط القوى الحدية أن يكون أيضاً متجانساً أو غير متجانس. عندما يكون الشرط متجانساً فهذا يعني أن الحد يمثل سطحاً حراً.

من الطبيعي أن نساءل عن سبب تسمية شروط الانتقال الحدية بالأساسية وشروط القوى الحدية بالطبيعية. ترجع كلمتا "أساسية" و "طبيعية" إلى استخدام ما يدعى بصياغة الشكل الضعيف (مثل طريقة الرواسب

المثقلة) لاستنباط معادلات النظام. في إجرائية هذه الصياغة يجب تحقيق شرط الانتقال قبل البدء بالصياغة وإلا لن تنجح الإجرائية. لهذا السبب فإن شرط الانتقال أساسي. ما دام شرط الانتقال الأساسي محققاً فإن الإجرائية ستقود إلى معادلات التوازن وشروط القوى الحدية. هذا يعني أن شروط القوى الحدية تستنبط بشكل "طبيعي" في هذه الإجرائية مما يفسر سبب تسميته بشرط حادي طبيعي. ما دامت التسمية "أساسي" و"طبيعي" لا توصف المعنى الفيزيائي للمسألة فإنها تسمية رياضية تستخدم في مسائل أخرى غير ميكانيكية.

تطبق المعادلات المستنبطة على الأجسام ثلاثية الأبعاد 3D. تهدف معظم مسائل التحليل لحل معادلات التوازن والحصول على الحل المتمثل بالحقل المتغير أي الانتقالات في هذه الحالة.

نظرياً، يمكن تطبيق هذه المعادلات على كافة أنماط الإنشاءات مثل القضبان والجوائز والصفائح والقشريات، لأنها تمثل فيزيائياً أجساماً ثلاثية الأبعاد في الطبيعة. إلا أن معالجة كافة العناصر الإنشائية كأجسام ثلاثية الأبعاد يجعل الحسابات مكلفة جداً وفي بعض الأوقات مستحيلة عملياً. بالتالي طوّرت نظريات تأخذ بالحسبان الخصائص الهندسية لمختلف العناصر الإنشائية. يمكن عن طريق تطبيق هذه النظريات بالشكل المناسب خفض الجهد اللازم للتحليل والحساب. سنبين فيما يلي وصفاً مختصراً لهذه النظريات.

٢-٣ معادلات الأجسام ثنائية البعد

٢-٣-١ الإجهادات والانفعالات

يمكن تبسيط المسائل ثلاثية الأبعاد بشكل كبير عند معالجتها كأجسام ثنائية الأبعاد 2D. من أجل النمذجة كأجسام ثنائية الأبعاد نحاول إزالة إحدى الإحداثيات (عادة الإحداثية z) وبالتالي نفرض أن كافة المتحولات مستقلة عن المحور z وكافة الحملات الخارجية مستقلة عن الإحداثية z ومطبقة حصراً في المستوى $x-y$. أي أننا نبقى مع منظومة بإحداثيتين فقط هما x و y . بداية نميز بين غمطين من الأجسام ثنائية البعد. أولاهما الأجسام الخاضعة لإجهادات مستوية والأخرى خاضعة لانفعالات مستوية.

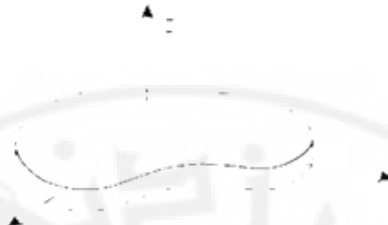
حالة الإجهادات المستوية

تكون الأجسام في حالة الإجهادات المستوية ذات سماكة صغيرة جداً وفق الاتجاه z مقارنة بالأبعاد وفق الاتجاهين x و y . تكون القوى الخارجية مطبقة في المستوى $x-y$. فقط وتكون الإجهادات وفق الاتجاه z (σ_{xx} و σ_{yy} و σ_{xy}) معدومة كلها كما هو مبين في الشكل ٢-٥.

الانفعالات المستوية:

الأجسام في حالة الانفعالات المستوية هي تلك التي تكون سماكتها في الاتجاه z كبيرة جداً مقارنة مع الأبعاد وفق الاتجاهين x و y . تكون القوى الخارجية مطبقة بانتظام على طول المحور z وتكون الحركة في الاتجاه z

مقيّدة في أية نقطة. تكون بالتالي الانفعالات وفق الاتجاه (و و) كلها معدومة كما هو مبين في الشكل ٢-٦.



الشكل ٢-٥: حالة الإجهادات المستوية. سماكة الجسم الصلب في الاتجاه () أصغر بكثير من الأبعاد في الاتجاهين و . كل القوى مطبقة المستوي وبالتالى الانتقالات تابعة للإحداثيات و فقط .

الشكل ٢-٦: حالة الانفعالات المستوية. سماكة الجسم في الاتجاه () أكبر بكثير من الأبعاد في الاتجاهين و . لا يغير المقطع العرضي والقوى الخارجية كثيراً وفق الاتجاه . يمكن اعتبار المقطع العرضي كتمثيل للجسم وبالتالى تكون الانتقالات تابعة للإحداثيات و فقط

لاحظ أنه في مسائل الإجهادات المستوية يكون الانفعالات و معدومين أما الانفعال فغير معدوم. هذا يمكن استنتاجه بسهولة من العلاقة (٢-٩) بعد تطبيق حالة الإجهادات المستوية. بشكل مماثل فإنه في

مسائل الانفعالات المستوية يكون الإجهادان σ_{xx} و σ_{yy} معدومين أما الإجهاد σ_{xy} فغير معدوم. هذا أيضاً يمكن استنتاجه بسهولة من العلاقة (٢-٩) بعد تطبيق حالة الانفعالات المستوية. يمكن الحصول على مجموعة معادلات الجسم ثنائي البعد 2D مباشرة بحذف الحدود المتعلقة بالاتجاه z في مجموعة معادلات الجسم ثلاثي الأبعاد 3D. تصبح مركبات الإجهادات:

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (٢٤-٢)$$

توجد ثلاث مركبات انفعال موافقة في كل نقطة من الجسم ثنائي البعد وتكتب أيضاً على شكل شعاع:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \quad (٢٥-٢)$$

و تصبح علاقات الانتقال-الانفعال كالتالي:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} ; \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} ; \quad \varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (٢٦-٢)$$

حيث u و v هما مركبتا الانتقال في الاتجاهين x و y بالترتيب. يمكن لعلاقة الانتقال-الانفعال أن تكتب أيضاً على شكل مصفوفات:

$$\{\varepsilon\} = [L]\{U\} \quad (٢٧-٢)$$

حيث $\{U\}$ شعاع الانتقالات من الشكل:

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad (٢٨-٢)$$

و يمكن استنتاج مصفوفة الاشتقاق $[L]$ من العلاقة (٢٦-٢) كالتالي:

$$[L] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (٢٩-٢)$$

٢-٣-٢ معادلات السلوكية

باستخدام $\{\sigma\}$ و $\{\varepsilon\}$ في العلاقات (٢٤-٢) و (٢٥-٢) يمكن صياغة معادلات السلوكية كالتالي:

$$\{\sigma\} = [c]\{\varepsilon\} \quad (٣٠-٢)$$

حيث $[c]$ هي مصفوفة ثوابت المادة التي يتوجب الحصول عليها تجريبياً. من أجل المواد متماثلة المناحي في حالة الإجهادات المستوية لدينا:

$$[c]_{Plane\ Stress} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (٣١-٢)$$

يتم استنتاج المصفوفة $[c]$ أعلاه في حالة الإجهادات المستوية بفرض الشروط $\sigma_{zz} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$ في قانون هوك المعمم للمواد متماثلة المناحي. من أجل مسائل الانفعالات المستوية يمكن أن نفرض $\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0$ أو أن نستبدل E و ν في العلاقة (٣١-٢) بالحددين $\frac{E}{1-\nu^2}$ و $\frac{\nu}{1-\nu^2}$ على الترتيب. بالتالي:

$$[c]_{Plane\ Strain} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \quad (٣٢-٢)$$

٣-٣-٢ معادلات التوازن الديناميكي

نحصل ببساطة على معادلات التوازن الديناميكي للجسم ثنائي البعد 2D عن طريق إزالة الحدود المتعلقة بالإحداثية z في معادلات الجسم ثلاثي الأبعاد في المعادلات (١٥-٢) إلى (١٧-٢):

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + f_x = \rho \ddot{u} \quad (٣٣-٢)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + f_y = \rho \ddot{v} \quad (٣٤-٢)$$

يمكن كتابة معادلات التوازن هذه بشكل مختصر كمصفوفات:

$$[L]^T \{\sigma\} + \{f\}_b = \rho \{\ddot{U}\} \quad (٣٥-٢)$$

حيث $\{f_b\}$ هو شعاع القوى الخارجية:

(٣٦-٢)

تُحسَل في المسائل الستاتيكية حد العطالة الديناميكي فتغدو معادلات التوازن:

(٣٧-٢)

المعادلات (٣٥-٢) إلى (٣٧-٢) أسهل في الحل وأقل كلفة في الحساب مقارنة بمعادلات الجسم ثلاثي الأبعاد.

٢-٤ المعادلات في حالة القضبان

يبين الشكل ٧-٢ إنشاءً من القضبان، حيث يتكون كل عنصر في الإنشاءات المكوّنة من قضبان من أجسام صلبة فيها أحد الأبعاد كبير جداً مقارنة مع البعدين الآخرين كما هو موضّح في الشكل ٨-٢.



الشكل ٧-٢: إنشاء مُغطّي مؤلف من قضبان

الشكل ٨-٢: قضيب ذو مقطع عرضي أصغر بكثير من البعد في الاتجاه القوي المطبقة وفق الاتجاه وبالتالي الانتقال المحوري تابع للإحداثية فقط

تطبق القوى وفق الاتجاه x . فقط، بالتالي عنصر القضيبي هو بالواقع جسم صلب أحادي البعد 1D. أي أنه يمكن الحصول على معادلاته بحذف الإجهادات المتعلقة بالاتجاه y أي σ_{xy} و σ_{yx} من حالة الجسم ثنائي الأبعاد 2D.

٢-٤-١ الإجهادات والانفعالات

بحذف حدود الإجهادات المتعلقة بالاتجاه y فإن الإجهاد الوحيد المتبقي في عنصر القضيبي هو σ_{xx} والذي غالباً ما نكتبه σ_x . الانفعال الموافق هو ϵ_{xx} ونبسطة غالباً وفق ϵ_x . تغدو علاقة الانتقال-الانفعال ببساطة:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (٣٨-٢)$$

٢-٤-٢ معادلات السلوكية

يصبح لقانون هوك في لأجسام الأحادية البعد شكلاً بسيطاً بحذف الإحداثية y وبالتالي يُحذف معامل بواسون:

$$\sigma_x = E \epsilon_x \quad (٣٩-٢)$$

و هذا يمثل في الواقع قانون هوك الأساسي في الأجسام أحادية البعد. يمكن الحصول على معامل يونغ E عن طريق اختبار شد بسيط.

٢-٤-٣ معادلات التوازن الديناميكي

بحذف الحدود المتعلقة بالبعد y في العلاقة (٣٣-٢) تغدو معادلة التوازن الديناميكي للجسم أحادي البعد 1D كالتالي:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + f_x = \rho \ddot{u} \quad (٤٠-٢)$$

بتعويض المعادلتين (٣٨-٢) و (٣٩-٢) في المعادلة (٤٠-٢) نحصل على المعادلة الأساسية للقضبان المتجانسة أحادية البعد (الثابت E مستقل عن الإحداثية x) كالتالي:

$$E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f_x = \rho \ddot{u} \quad (٤١-٢)$$

كما يمكن الحصول على معادلة التوازن الستاتيكي عن طريق حذف حد العطالة في المعادلة (٤٠-٢):

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + f_x = 0 \quad (٤٢-٢)$$

أما معادلة التوازن الستاتيكي بدلالة الانتقال للقضبان المرنة المتجانسة فنحصل عليها من حذف حد العطالة من المعادلة (٤١-٢):

حيث القوى الخارجية المطبقة وفق الاتجاه المحوري للقضيب.

٢-٥ المعادلات في حالة الجوائز

تتمتع الجوائز هندسياً بنفس خصائص أبعاد القضبان كما في الشكل ٢-٩. الفارق هو أن القوى المطبقة على الجوائز عرضية أي أن اتجاه القوى عمودي على محور الجائزة. بالتالي يخضع الجائزة للانحناء حيث ينتج تدلٍ وفق الاتجاه يكون تابعاً للإحداثية .

الشكل ٢-٩: جائزة بإسناد بسيط. أبعاد المقطع العرضي أصغر بكثير من البعد في الاتجاه المحوري القوى الخارجية مطبقة في الاتجاه العرضي وبالتالي يكون تدلي الجائزة تابعاً للإحداثية فقط

٢-٥-١ الإجهادات والانفعالات

في المقطع العرضي للجائزة إجهاد ناظمي وإجهاد قص . هناك العديد من النظريات لتحليل تدلي الجائزة. يمكن عموماً تقسيم هذه النظريات إلى صنفين أساسيين: نظرية للجوائز الرقيقة وأخرى للجوائز السميكة. سنركز هنا على نظرية الجوائز الرقيقة التي عادة ما تسمى نظرية جائزة أولر-برنولي . تفترض نظرية أولر-برنولي أن مستوي المقطع العرضي الناظمي على المحور المركزي غير المشوّه يبقى مستوياً بعد الانحناء وناظماً على المحور بعد التشوّه كما هو موضح في الشكل ٢-١٠. مستوي المقطع العرضي الناظمي على المحور المركزي غير المشوّه يبقى مستوياً وناظماً على المحور المشوّه بعد الانحناء. لدينا بالتالي . في ظل هذه الفرضية يمكننا بداية الحصول على:

التي تعني ببساطة أن إجهاد القص مهملاً فرضاً. ثانياً، يمكن صياغة الانتقال المحوري عند مسافة من المحور المركزي وفق:

حيث هي الدوران في المستوي . يمكن الحصول على هذا الدوران من تدلي المحور المركزي للجائز وفق الاتجاه

التدلي
المركزي

الشكل ٢-١٠: فرضية أولر-برنولي للجوائز الرقيقة.

(٤٦-٢)

يمكن كتابة العلاقة بين الانفعال الناظمي والتدلي وفق:

(٤٧-٢)

حيث هو معامل الاشتقاق المعطى بالعلاقة:

(٤٨-٢)

٢-٥-٢ معادلات السلوكية

بشكل مماثل لمعادلة القضبان يكون قانون هوك الأساسي المطبق على الجوائز:

(٤٩-٢)

٢-٥-٣ العزوم وقوى القص

بما أن حمولة الجائز مطبقة وفق الاتجاه العرضي فستكون هناك عزوم وقوى قص موافقة مطبقة على المقطع العرضي للجائز. من جهة أخرى، يمكن الحصول على انثناء الجائز عند تطبيق عزوم صافية بدلاً من الحمولة العرضية. يبين الشكل ٢-١١ جزءاً صغيراً من الجائز بطول .

يُخضع هذا الجزء من الجائز لقوى خارجية ولعزم وقوة قص وقوى عطالة " حيث كثافة المادة و مساحة المقطع العرضي. ينتج العزم على المقطع العرضي عند من توزع الإجهاد الناظمي كما هو موضح في الشكل ٢-١٢.

الشكل ٢-١١: جزء معزول من الجائز بطول

يتم الحصول على العزوم وقوى القص عن طريق مكاملة الإجهادات على المقطع العرضي للجائز

الشكل ٢-١٢: الإجهاد الناطمي الذي يؤكد العزم

يمكن حساب الإجهاد الناطمي بتعويض العلاقة (٢-٤٧) في العلاقة (٢-٤٩):

$$(٢-٥٠)$$

من الواضح أنه في العلاقة السابقة يتغير الإجهاد الناطمي خطياً في الاتجاه العمودي على المقطع العرضي للجائز. يمكن حساب العزوم الناتجة عن هذا الإجهاد الناطمي في المقطع العرضي بالتكامل التالي على سطح المقطع العرضي:

$$(٢-٥١)$$

حيث هو العزم الثاني للسطح أو عزم العطالة للمقطع العرضي باعتبار المحور ويمكن حسابه تبعاً للشكل الهندسي للمقطع العرضي باستخدام العلاقة التالية:

$$(٢-٥٢)$$

لنحقق الآن توازن القوى على الجزء الصغير من الجائز وفق الاتجاه :

$$dQ + (F_z(x) - \rho A \ddot{w}) dx = 0 \quad (٥٣-٢)$$

أي:

$$\frac{dQ}{dx} = -F_z(x) + \rho A \ddot{w} \quad (٥٤-٢)$$

يجب أن نحقق توازن العزوم على هذا الجزء من الجائز في أية نقطة من السطح الأيمن أيضاً:

$$dM - Q dx + \frac{1}{2} (F_z - \rho A \ddot{w}) (dx)^2 = 0 \quad (٥٥-٢)$$

بإهمال الحد الصغير الحاوي على $(dx)^2$ يكون لدينا:

$$\frac{dM}{dx} = Q \quad (٥٦-٢)$$

أخيراً، نعوض العلاقة (٥٦-٢) في العلاقة (٥٥-٢) فنحصل على:

$$Q = -EI \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \quad (٥٧-٢)$$

تعطي المعادلات (٥٦-٢) و (٥٧-٢) العلاقة بين العزوم وقوى القص في جائز باعتبار تدليّ جائز أولر-برنولي.

٤-٥-٢ معادلات التوازن الستاتيكي

يمكن بتعويض العلاقة (٥٤-٢) في العلاقة (٥٧-٢) الحصول ببساطة على معادلة التوازن الديناميكي للجائز:

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A \ddot{w} = F_z \quad (٥٨-٢)$$

أما التوازن الستاتيكي فنحصل عليه بشكل مشابه بإسقاط الحد الديناميكي في المعادلة (٥٨-٢):

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = F_z \quad (٥٩-٢)$$

٦-٢ المعادلات في حالة الصفائح

يمكن أحياناً اعتبار جناح الطائرة كصفحة تخضع لحمولات عرضية على شكل محركات أو عناصر أخرى كما في الشكل ١٣-٢.

تمتلك الصفحة خواص هندسية شبيهة بالأجسام ثنائية البعد كما هو موضح في الشكل ١٤-٢. يكمن الفارق في أن الحمولات المطبقة على الصفحة عمودية على سطح الصفحة.

يمكن اعتبار الصفحة كجسم ثنائي البعد بشكل مماثل للجائز. بالتالي تعاني الصفحة من انحناء ينتج عنه تدليّ w في الاتجاه z تابع للإحداثيتين x و y .

الشكل ٢-١٣: جناح طائرة يمكن تمثيله كصفحة إنشائية

الشكل ٢-١٤: صفحة معرضة لحمولة عرضية تؤدي لتشوه الخناء

٢-٦-١ الإجهادات والانفعالات

نفترض أن الإجهاد معدوم في الصفحة. كما هو الحال في الجوائز، هناك العديد من النظريات لتحليل تدلي الصفائح. يمكن عموماً تقسيم هذه النظريات إلى مجموعتين: الأولى نظرية الصفائح الرقيقة والثانية نظرية الصفائح السميكة. سنعالج هنا نظرية الصفائح الرقيقة التي غالباً ما تسمى نظرية الصفائح التقليدية أو نظرية كيرشوف للصفائح كما سنعالج نظرية تشوه القص من الدرجة الأولى للصفائح السميكة والمعروفة بنظرية ريسنر-مנדلين للصفائح ().

على أي حال فإن عناصر الصفائح الصافية غير موجودة عادة في برمجيات العناصر المنتهية التجارية من حيث أن معظم المستخدمين سيستخدمون بعناصر القشريات العامة والتي سنناقشها لاحقاً. عدا عن ذلك فإن نظرية الصفائح التقليدية غير عملية للعديد من الحالات حيث إن تشوه القص لا يمكن إهماله في معظم الإنشاءات. بالتالي سنعالج معادلات عناصر الصفائح فقط بالاعتماد على نظرية ريسنر-مנדلين. إلا أنه ولإتمام التقديم لميكانيك الأجسام الصلبة والإنشاءات سنعرّف باختصار بالنظرية التقليدية للصفائح.

تفترض النظرية التقليدية للصفائح أن كل ناظم على المستوى الأوسط (الحيادي) للصفحة غير المشوهة يبقى مستقيماً وناظماً على المستوى الأوسط خلال التشوه أو الانحناء. ينتج عن هذه الفرضية:

$$\varepsilon_{xz} = 0 \quad ; \quad \varepsilon_{yz} = 0 \quad (٦٠-٢)$$

ثانياً، يمكن صياغة الانتقالات الموازية للمستوي الأوسط غير المشوه، أي u و v ، عند المسافة z من المحور المركزي كالتالي:

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x} \quad (٦١-٢)$$

$$v = -z \frac{\partial w}{\partial y} \quad (٦٢-٢)$$

حيث w هو التبدلي للمستوي الأوسط للصفحة وفق الاتجاه z . يمكن أن تعطى العلاقات بين مركبات الانفعال والتبدلي وفق:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (٦٣-٢)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (٦٤-٢)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (٦٥-٢)$$

و تكتب كمصفوفات:

$$\{\varepsilon\} = -z \{L\} w \quad (٦٦-٢)$$

حيث $\{\varepsilon\}$ هو شعاع الانفعالات في المستوى المعرف بالعلاقة (٦٥-٢) و $\{L\}$ هو معامل الاشتقاق المعرف بالشعاع:

$$\{L\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (٦٧-٢)$$

٢-٦-٢ معادلات السلوكية

ينطبق قانون هوك على الصفائح أيضاً

$$\{\sigma\} = [c] \{\varepsilon\} \quad (٦٨-٢)$$

حيث لها نفس الشكل للأجسام ثنائية البعد المعرف بالعلاقة (٢-٣١) في حالة الإجهادات المستوية من حيث إننا نفترض معدوم.

٢-٦-٣ العزوم وقوى القص

يبين الشكل ٢-١٥ جزءاً صغيراً أبعاده من صفيحة سماكتها . يخضع هذا الجزء لقوى خارجية ولقوى عطالة " حيث هي كثافة مادة الصفيحة، كما يبين الشكل ٢-١٦ العزوم و وقوى القص و و .

الشكل ٢-١٥: الإجهادات على جزء معزول من صفيحة.
مكاملة هذه الإجهادات تعطي العزوم وقوى القص الموافقة.

الشكل ٢-١٦: قوى القص والعزوم على جزء معزول من صفيحة أبعاده

يتم استنباط مجموعة معادلات التوازن بالاعتماد على حالة القوى والعزوم المبينة. تنتج العزوم وقوى القص من توزع الإجهادين الناطمين و وإجهاد القص المبينة في الشكل ٢-١٥. يمكن استنتاج هذه الإجهادات بتعويض المعادلة (٢-٦٦) في المعادلة (٢-٦٨):

$$\{\sigma\} = -z[c]\{L\}w \quad (٦٩-٢)$$

يمكن أن نلاحظ في المعادلة السابقة أن الإجهادات الناعلمية تتغير خطياً وفق الاتجاه العمودي في المقطع العرضي للصفحة. يمكن حساب العزوم في المقطع العرضي بطريقة مشابهة للجوائز بالتكامل التالي:

$$\{M_p\} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_A \{\sigma\} z dA = -[c] \int_A (z^2 dA) \{L\} w = -\frac{h^3}{12} [c] \{L\} w \quad (٧٠-٢)$$

لنعمل بداية توازن الجزء الصغير من الصفحة في الاتجاه z مع ملاحظة أن:

$$dQ_y = \frac{\partial Q_y}{\partial x} dx \text{ و } dQ_x = \frac{\partial Q_x}{\partial y} dy$$

$$\left(\frac{\partial Q_x}{\partial x} dx \right) dy + \left(\frac{\partial Q_y}{\partial y} dy \right) dx + (f_z - \rho h \ddot{w}) dx dy = 0 \quad (٧١-٢)$$

أو

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + f_z = \rho h \ddot{w} \quad (٧٢-٢)$$

نعتبر بعد ذلك توازن العزوم على الجزء الصغير من الصفحة حول المحور x وبإهمال الحدود الصغيرة من المرتبة الثانية فنحصل على علاقة قوى القص Q_x :

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \quad (٧٣-٢)$$

أخيراً نعتبر توازن العزوم حول المحور y للجزء الصغير من الصفحة وبإهمال الحدود الصغيرة من المرتبة الثانية فنجد:

$$Q_y = \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} \quad (٧٤-٢)$$

حيث لدينا $M_{yx} = M_{xy}$.

٤-٦-٢ معادلات التوازن الديناميكي

للحصول على معادلة التوازن الديناميكي للصفائح نعوض أولاً المعادلة (٧٠-٢) في المعادلتين (٧٣-٢) و (٧٤-٢) وبعد ذلك نعوض Q_x و Q_y في المعادلة (٧٢-٢) فنجد:

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + \rho h \ddot{w} = f_z \quad (٧٥-٢)$$

حيث $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ ثابت صلابة الانحناء للصفحة. يمكن هنا أيضاً الحصول على معادلة التوازن

الستاتيكي بإسقاط الحد الديناميكي من المعادلة (٧٥-٢):

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = f_z \quad (٧٦-٢)$$

٥-٦-٢ نظرية ريسنر-مנדلين للصفائح

تطبق نظرية ريسنر-مנדلين على الصفائح السميكة حيث نأخذ بالحسبان تأثيرات تشوه القص والعزم الدوراني. لا تحتاج هذه النظرية لأن يكون المقطع العرضي عمودياً على المحور المركزي بعد التشوه كما هو موضح في الشكل ١٧-٢، وبالتالي فإن $\varepsilon_{xz} \neq 0$ و $\varepsilon_{yz} \neq 0$.

يمكن صياغة الانتقالات u و v الموازية للسطح الأوسط غير المشوه عند المسافة z من المحور المركزي وفق:

$$u = z\theta_y \quad (٧٧-٢)$$

$$v = -z\theta_x \quad (٧٨-٢)$$

حيث θ_x و θ_y هما بالترتيب الدوران حول المحورين x و y للخطوط العمودية على المستوي الأوسط قبل التشوه. يعطى الانفعال في المستوي المعروف بالعلاقة (٢٥-٢) كالتالي:

$$\{\varepsilon\} = -z[L]\{\theta\} \quad (٧٩-٢)$$

حيث

$$[L] = \begin{bmatrix} -\frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ -\frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (٨٠-٢)$$

$$\{\theta\} = \begin{Bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} \quad (٨١-٢)$$

باستخدام العلاقة (٤-٢) يمكن استنتاج الانفعالات القص العرضي ε_{xz} و ε_{yz} وفق:

$$\{\gamma\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \theta_y + \frac{\partial w}{\partial x} \\ -\theta_x + \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (٨٢-٢)$$

مستخرج من

الشكل ٢-١٧: تشوه القص في صفيحة ريسنر-مندلين

تتم معالجة دورانات المقطع العرضي بمحولات مستقلة

لاحظ أنه إذا أهملنا انفعالات القص العرضي فستقودنا العلاقة السابقة إلى:

$$(٢-٨٣)$$

$$(٢-٨٤)$$

و تصبح العلاقة (٢-٧٩) كالعلاقة (٢-٦٦) في النظرية التقليدية للصفائح. يتعلق وسطي إجهاد القص العرضي بانفعال القص العرضي وفق:

$$(٢-٨٥)$$

حيث هو معامل القص و ثابت يؤخذ عادة أو .

يمكن أيضاً الحصول على معادلات التوازن لصفيحة ريسنر-مندلين بطريقة مشابهة للصفائح الرقيقة. كما بالإمكان الحصول على العزوم وقوى القص ولكن باعتبار إجهاد القص العرضي وعطالة الدوران. نكتفي هنا بتصوّر ريسنر-مندلين دون تفصيل معادلات التوازن إلا أننا سنستنبط لاحقاً بالتفصيل معادلات العناصر المنتهية باستخدام مبادئ الطاقة.

٢-٧ ملاحظات

بعد أن وضّحنا كيفية الحصول على معادلات التوازن لأنماط هندسية مختلفة من الإنشاءات يمكن أن نلاحظ أن كل معادلات التوازن ليست إلا حالات خاصة من معادلة التوازن العامة للأجسام ثلاثية البعد . يقود استخدام الفرضيات والنظريات المناسبة إلى تخفيض الأبعاد وبالتالي تبسيط المسألة. يمكن لهذه التبسيطات خفض حجم نموذج العناصر المنتهية بشكل محسوس.

الفصل الثالث

أساسيات طريقة العناصر المنتهية



الفصل الثالث

أساسيات طريقة العناصر المنتهية

٣-١ مقدمة:

لحل مسائل الميكانيك المعرفة بمجموعة معادلات تفاضلية بطريقة العناصر المنتهية نقوم أولاً بتقطيع الجسم المدروس إلى مجموعة من العناصر الصغيرة. نعرف بعد ذلك على كل من هذه العناصر هيئة الانتقالات بصيغة بسيطة للحصول على معادلات العنصر. نقوم بعد ذلك بتجميع معادلات العناصر للحصول على معادلة العناصر المنتهية لكامل الجسم المدروس. أخيراً نقوم بحل هذه المعادلة بسهولة بالنسبة للانتقالات. السؤال المطروح هنا هو كيف يمكن تحديد صيغة الانتقالات على العنصر ببساطة؟ كيف يمكن التأكد من تحقق المعادلات التفاضلية الأساسية بهذه الانتقالات؟ كيف يمكن الوصول من الانتقالات المفروضة على العناصر إلى الانتقالات الكلية للمجال المدروس؟ لا بد من استخدام مبدأ للحصول على أفضل حل (ليس الحل المضبوط) يحقق المعادلات التفاضلية الأساسية.

٣-٢ الصيغة القوية والصيغة الضعيفة:

تسمى الصيغة التي وجدناها سابقاً $\rho\{\ddot{U}\} + \{f\}_b = [L]^T [c][L]\{U\}$ بالصيغة القوية للمعادلات الحاكمة للجسم الصلب وهي تحتاج لاستمرارية الانتقالات وذلك لضمان إمكانية مفاضلتها في المعادلات السابقة. إن الحصول على حل دقيق صعب جداً في المسائل الهندسية التطبيقية. تستخدم طريقة الفروقات المنتهية للحصول على حلول تقريبية باستخدام الصيغة القوية، وهي تعطي حلولاً مقبولة في حالات بسيطة عندما يكون الشكل الهندسي للجسم والشروط الحدية بسيطة.

بالمقابل نستخدم الصيغة الضعيفة التي تعتمد على إحدى الطريقتين التاليتين:

مبادئ الطاقة: وهي صيغة تناسب مسائل الميكانيك وحساب الإنشاءات

طريقة الرواسب المثقلة: وهي أداة رياضية تناسب حل جميع أنواع المعادلات التفاضلية الجزئية.

تمثل الصيغة الضعيفة صيغة تكاملية وبالتالي تفترض شروطاً أضعف على استمرارية حقل الانتقالات، وتعطي هذه الصيغة حلاً أكثر دقة لمجموعة معادلات الجسم المقطع. تعد طريقة العناصر المنتهية تطبيقاً نموذجياً للصيغة الضعيفة حيث يقود تطبيقها إلى مجموعة من المعادلات الجزئية التي يسهل التعامل معها خصوصاً عندما يكون شكل الجسم الهندسي معقداً أو الشروط الحدية المفروضة غير بسيطة.

ستقدم فيما يلي لمبدأ هاملتون الذي يعتمد على مبادئ الطاقة لصياغة معادلات العناصر المنتهية في مسائل ميكانيك الجسم الصلب والإنشاءات. نختار مبدأ هاملتون لبساطته وفعاليته للمسائل الديناميكية التي يمكن منها استنباط الصياغة في حالة المسائل الستاتيكية عن طريق إسقاط الحدود المتعلقة بالزمن.

٣-٣ مبدأ هاملتون

ينص المبدأ على ما يلي "من كافة حقول الانتقالات المقبولة يجعل الحل الأدق تابع لاغرانج للطاقة أصغرياً" حيث يجب أن يحقق حقل الانتقالات المقبول الشروط التالية:
معادلات التوافقية لضمان استمرارية حقل الانتقالات
الشروط الحدية في الانتقالات
الشروط المفروضة عند زمن البداية t_1 وزمن النهاية t_2
رياضياً يكتب مبدأ هاملتون وفق:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - \Pi + W_f) dt = 0 \quad (١-٣)$$

حيث T هي الطاقة الحركية و Π هي الطاقة الكامنة، أما W_f فهو عمل القوى الخارجية. تعطى الطاقة الحركية بالتكامل:

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho \{\dot{U}\}^T \{\dot{U}\} dV \quad (٢-٣)$$

حيث V هو كامل حجم الجسم المدروس و $\{\dot{U}\}$ هو حقل الانتقالات المقبول. يمكن كتابة طاقة الانفعال للجسم المرن كالتالي:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \{\epsilon\}^T \{\sigma\} dV = \frac{1}{2} \int_V \{\epsilon\}^T [c] \{\sigma\} dV \quad (٣-٣)$$

حيث $\{\epsilon\}$ هو الانفعال الناتج عن حقل الانتقالات المقبول. بالنسبة لعمل القوى الخارجية المتعلق بحقل الانتقالات المقبولة فيكون:

$$W_f = \int_V \{U\}^T \{f_b\} dV + \int_{S_f} \{U\}^T \{f_s\} dS \quad (٤-٣)$$

حيث dS_f هو جزء من سطح الجسم الصلب حيث تطبق القوى السطحية.

تكمن قوة مبدأ هاملتون بإمكانية اختيار أي حقل انتقالات ما دام يحقق الشروط الثلاثة، وهذا الحقل يضمن أدق حل ممكن وإن كان لا يحقق عادة الصيغة القوية ما عدا المسائل البسيطة أو تلك التي نعرف حلها التحليلي. عادة لا نبحث في المسائل الهندسية التطبيقية عن الحل الدقيق ونكتفي بحل تقريبي أدق ما يمكن،

العناصر المنتهية

ويشكل مبدأ هاملتون (أو مبادئ الطاقة الشبيهة) الأساس لصياغة معادلات العناصر المنتهية. من جهة أخرى يتعامل مبدأ هاملتون مع كميات طاقة سلمية غير شعاعية مما يبسط كثيراً عملية الصياغة وخصوصاً عند استخدام الطرق الرقمية. أخيراً ينتج مبدأ هاملتون مجموعة معادلات جبرية خطية يمكن حلها بالطرق والإجراءات الرياضية المعروفة.

٣-٤ إجرائية طريقة العناصر المنتهية

٣-٤-١ تقطيع المجال

نقوم بتقسيم المجال المدروس إلى عنصر، وتسمى هذه العملية بالتقطيع وتتم في مرحلة ما قبل المعالجة. كما في الشكل التالي:

الشكل ٣-١ : نظامي الإحداثيات الكلي والموضعي

تولّد البرمجية بطريقة مناسبة أرقاماً لا تتكرر للعناصر والعقد في الجسم الصلب. يتشكل العنصر بتوصيل عقده بطريقة معرفة لإيجاد اتصال كل عنصر. تشكل كافة العناصر كامل الجسم دون وجود فجوة أو تراكب بين العناصر ويمكن استخدام أنماط مختلفة من العناصر بأرقام مختلفة للعقد شريطة تأمين التوافقية في وصل العقد دون فجوات أو تراكب على الحدود بين العناصر. تعتمد دقة التقطيع على دقة الحل المطلوبة وإمكانات الحاسوب المتوفرة، حيث يعطي التقطيع الدقيق حلاً أدق ولكنه يزيد من التكلفة المتعلقة بزم من الحساب. يكون التقطيع عادة غير منتظم حيث نختاره دقيقاً في المناطق التي يكون تدرّج الانتقالات فيها كبيراً أو حيث تكون الدقة المطلوبة أعلى. أخيراً فإن الهدف من التقطيع هو تبسيط عملية اختيار صيغة حقل الانتقالات.

٣-٤-٢ استكمال الانتقالات Displacements interpolation

تعتمد صياغة طريقة العناصر المنتهية على نظام إحداثيات. نعرف نظام الإحداثيات الموضعي المتعلق بعنصر مقارنة مع نظام الإحداثيات الكلي المعروف على كامل الجسم كما في الشكل السابق. بالنسبة لنظام الإحداثيات الموضعي المعروف على العنصر، يمكن الآن اعتبار الانتقال في العنصر كتقريب (استكمال) عن طريق كثيرات حدود للانتقالات في العقد وفق:

$$U^h(x, y, z) = \sum_{i=1}^{n_d} [N_i(x, y, z)] \{d_i\} = [N(x, y, z)] \{d_e\} \quad (٣-٥)$$

حيث يرمز الحرف h إلى الحساب التقريبي، n_d هو عدد العقد المشكلة للعنصر و $\{d_i\}$ هو انتقالات العقدة i وتشكل المجهول الذي نريد حسابه ويمكن كتابتها بالصيغة العامة التالية:

$$\{d_i\} = \begin{cases} d_1 \rightarrow \text{مركبة الانتقال ١} \\ d_2 \rightarrow \text{مركبة الانتقال ٢} \\ \vdots \\ d_{n_f} \rightarrow \text{مركبة الانتقال } n_f \end{cases} \quad (٣-٦)$$

حيث n_f هو عدد درجات الطلاقة للعقدة. بالنسبة للجسم الثلاثي البعد لدينا $n_f = 3$ ويكون:

$$\{d_i\} = \begin{cases} u_i \rightarrow \text{مركبة الانتقال في الاتجاه } u \\ v_i \rightarrow \text{مركبة الانتقال في الاتجاه } v \\ w_i \rightarrow \text{مركبة الانتقال في الاتجاه } w \end{cases} \quad (٣-٧)$$

لاحظ أنه يمكن لمركبات الانتقال أن تكون دورانات كما هو الحال بالنسبة للجوائز أو الصفائح. يمثل $\{d_e\}$ شعاع الانتقالات لكامل العنصر ويمكن كتابته كما يلي:

$$\{d_e\} = \begin{cases} \{d_1\} \rightarrow \text{انتقال العقدة ١} \\ \{d_2\} \rightarrow \text{انتقال العقدة ٢} \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ \{d_{n_d}\} \rightarrow \text{انتقال العقدة } n_d \end{cases} \quad (٨-٣)$$

أي أن عدد درجات الطلاقة للعنصر هو $n_d \times n_f$. تمثل $[N]$ مصفوفة توابع الشكل لعقد العنصر والتي تكون معرفة مسبقاً لاعتبار كيفية تغير الانتقالات بالنسبة للإحداثيات ويكون شكلها العام كالتالي:

$$[N(x, y, z)] = \begin{bmatrix} [N_1(x, y, z)] & [N_2(x, y, z)] & \cdots & [N_{n_d}(x, y, z)] \end{bmatrix} \quad (٩-٣)$$

$\downarrow \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \cdots \qquad \qquad \downarrow$
 للعقدة ١ للعقدة ٢ للعقدة n_d

حيث $[N_i]$ هي مصفوفة جزئية لتوابع الشكل لمركبات الانتقال ترتيبها كما يلي:

$$[N_i] = \begin{bmatrix} N_{i1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_{i2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_{in_f} \end{bmatrix} \quad (١٠-٣)$$

حيث N_{ik} هو تابع الشكل لمركبة الانتقال (درجة الطلاقة) k عند العقدة i . بالنسبة للجسم ثلاثي الأبعاد لدينا $n_f = 3$ وعادة يكون $N_{i1} = N_{i2} = N_{i3} = N_i$. لاحظ أنه من غير الضروري استخدام نفس تابع الشكل لكافة مركبات الانتقال عند العقدة، حيث نستخدم غالباً توابع مختلفة للانتقالات والدورانات.

٣-٤-٣ إجراءات بناء توابع الشكل

لدينا عنصر ذو n_d عقدة إحداثياتها $\bar{x}_i (i=1, 2, \dots, n_d)$ ، حيث $\bar{x}^T = [x]$ في المسائل أحادية البعد، $\bar{x}^T = [x \ y \ z]$ في المسائل ثنائية البعد و $\bar{x}^T = [x \ y \ z]$ في المسائل ثلاثية البعد. يجب أن يكون لدينا n_d تابع شكل لكل مركبة انتقال للعنصر. فيما يلي سنتبرر مركبة انتقالات واحدة في شرح الإجراءات النموذجية في بناء توابع الشكل. علماً أن الإجراءات النموذجية قابلة للتطبيق على مركبات الانتقالات الأخرى. أولاً، نقوم بتقريب مركبة الانتقالات على شكل تركيب خطي لقاعدة مكونة من n_d تابع $p_i(\bar{x})$ مستقل خطياً، أي:

$$u^h(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{n_d} p_i(\bar{x}) \alpha_i = \{P(\bar{x})\}^T \{\alpha_i\} \quad (١١-٣)$$

حيث u^h هو تقريب مركبة الانتقال، $p_i(\bar{x})$ هو تابع قاعدة أحاديّات الحد في فضاء الإحداثيات $\bar{x}$ و α_i هو المعامل الموافق لأحادي الحد $p_i(\bar{x})$. نعرف الشعاع $\{\alpha\}$ كما يلي:

$$\{\alpha\}^T = \{\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3 \ \dots \ \alpha_{n_d}\} \quad (١٢-٣)$$

تبنى التوابيع $p_i(\bar{x})$ بواسطة n_d تابع أحادي الحد في المسائل ذات البعد الواحدي أو بالاعتماد على مثلث باسكال في المسائل الثنائية البعد أو عن طريق هرم باسكال المشهور للمسائل ثلاثية البعد كما هو مبين في الشكلين أدناه.

يكون شكل القاعدة التامة من المرتبة p للمحالات أحادية البعد كما يلي:

$$\{P(x)\}^T = \{1 \ x \ x^2 \ x^3 \ x^4 \ \dots \ x^p\} \quad (١٣-٣)$$

أما في المجالات ثنائية البعد فتكون القاعدة التامة من المرتبة p معطاة وفق:

$$\{P(\bar{x})\}^T = \{P(x, y)\}^T = \{1 \ x \ y \ xy \ x^2 \ y^2 \ \dots \ x^p \ y^p\} \quad (١٤-٣)$$

أخيراً في المجالات ثلاثية البعد تكون القاعدة التامة من المرتبة p كالتالي:

$$\{P(\bar{x})\}^T = \{P(x, y, z)\}^T = \{1 \ x \ y \ z \ xy \ yz \ xz \ x^2 \ y^2 \ z^2 \ \dots \ x^p \ y^p \ z^p\} \quad (١٥-٣)$$

كقاعدة عامة يجب اختيار حدود $p_i(\bar{x})$ المستخدمة في القاعدة وعددها n_d من الحد الثابت إلى الحد ذي المرتبة الأعلى بشكل متناظر من مثلث أو هرم باسكال. يمكن إدراج حدود ذات مرتبة أعلى من قاعدة كثيرات الحدود، بشكل اختياري إذا كانت هناك حاجة خاصة لذلك.

يمكن تحديد المعاملات α_i بجعل الانتقالات المحسوبة بالمعادلة (١١-٣) مساوية لانتقالات العقد في n_d عقدة في العنصر. بذلك يكون لدينا عند العقدة i :

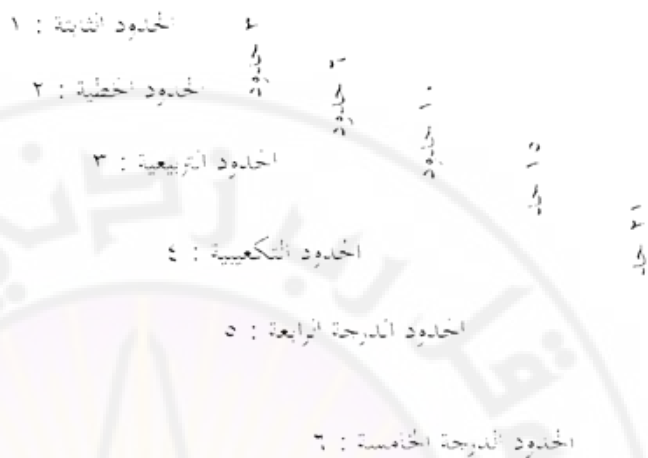
$$d_i = \{P(\bar{x}_i)\}^T \{\alpha\} \quad i=1,2,3,\dots,n_d \quad (١٦-٣)$$

حيث d_i هي قيمة u^h عند $\bar{x} = \bar{x}_i$. يمكن صياغة المعادلة (١٦-٣) بالشكل المصفوفي التالي:

$$\{d_e\} = [P] \{\alpha\} \quad (١٧-٣)$$

حيث $\{d_e\}$ هو الشعاع الحاوي على قيم مركبات الانتقالات في كافة عقد العنصر.

$$\{d_e\} = \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n_d} \end{Bmatrix} \quad (١٨-٣)$$



الشكل ٢-٣: مثلث باسكال لأحاديات الحدود (الحالة ثنائية البعد)



الشكل ٣-٣: هرم باسكال لأحاديات الحدود (الحالة ثنائية البعد)

أما $[P]$ فتدعى مصفوفة العزم وتعطى وفق:

$$[P] = \begin{bmatrix} \{P(\bar{x}_1)\}^T \\ \{P(\bar{x}_2)\}^T \\ \vdots \\ \{P(\bar{x}_{n_d})\}^T \end{bmatrix} \quad (١٩-٣)$$

حيث يكون منشور هذه المصفوفة كالتالي:

$$[P] = \begin{bmatrix} p_1(\bar{x}_1) & p_2(\bar{x}_1) & \cdots & p_{n_d}(\bar{x}_1) \\ p_1(\bar{x}_2) & p_2(\bar{x}_2) & \cdots & p_{n_d}(\bar{x}_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_1(\bar{x}_{n_d}) & p_2(\bar{x}_{n_d}) & \cdots & p_{n_d}(\bar{x}_{n_d}) \end{bmatrix} \quad (٢٠-٣)$$

في الحالة ثنائية البعد لدينا بالنسبة لتتابع قاعدة كثيرات الحدود:

$$[P] = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1 y_1 & x_1^2 & y_1^2 & x_1^2 y_1 & x_1 y_1^2 & x_1^3 & \cdots \\ 1 & x_2 & y_2 & x_1 y_1 & x_1^2 & y_1^2 & x_1^2 y_1 & x_1 y_1^2 & x_1^3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n_d} & y_{n_d} & x_{n_d} y_{n_d} & x_{n_d}^2 & y_{n_d}^2 & x_{n_d}^2 y_{n_d} & x_{n_d} y_{n_d}^2 & x_{n_d}^3 & \cdots \end{bmatrix} \quad (٢١-٣)$$

باستخدام العلاقة (١٧-٣) وبفرض أن مقلوب مصفوفة العزم $[P]$ موجود يصبح لدينا:

$$\{\alpha\} = [P]^{-1} \{d_e\} \quad (٢٢-٣)$$

بتعويض العلاقة (٢٢-٣) في العلاقة (١١-٣) نحصل على:

$$u^h(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{n_d} N_i(\bar{x}) d_i \quad (٢٣-٣)$$

أو وفق الشكل المصفوفي:

$$u^h(\bar{x}) = [N(\bar{x})] \{d_e\} \quad (٢٤-٣)$$

حيث $[N(\bar{x})]$ هي مصفوفة توابع الشكل $N_i(\bar{x})$ المعرفة وفق:

$$[N(\vec{x})] = \{p(\vec{x})\}^T [P]^{-1} = \begin{bmatrix} \underbrace{\{p(\vec{x})\}^T [P_1]^{-1}}_{N_1(\vec{x})} & \underbrace{\{p(\vec{x})\}^T [P_2]^{-1}}_{N_2(\vec{x})} & \cdots & \underbrace{\{p(\vec{x})\}^T [P_n]^{-1}}_{N_n(\vec{x})} \end{bmatrix} \quad (٢٥-٣)$$

$$= [N_1(\vec{x}) \quad N_2(\vec{x}) \quad \cdots \quad N_n(\vec{x})]$$

حيث $[P_i]^{-1}$ هو الحد رقم i في المصفوفة $[P]^{-1}$ ولدينا:

$$N_i(\vec{x}) = \{p(\vec{x})\}^T [P_i]^{-1} \quad (٢٦-٣)$$

لدى الحصول على العلاقة (٢٦-٣) افترضنا وجود مقلوب للمصفوفة $[P]$. توجد بعض الحالات حيث $[P]^{-1}$ غير موجودة وبالتالي فإن إجرائية بناء توابع الشكل ستفشل. يعتمد وجود $[P]^{-1}$ على قاعدة التوابع المستخدمة من جهة وعلى توزيع عقد العنصر من جهة أخرى. يجب اختيار توابع القاعدة من مجموعة قواعد مستقلة خطياً ومن ثم يجب أن يعتمد إدراج حدود القاعدة على التوزيع العقدي في العنصر. لاحظ أنه يمكن الحصول على مشتقات توابع الشكل بسهولة كمن حيث أن جميع التوابع المستخدمة هي كثيرات حدود. يعطى المشتق رقم i لتوابع الشكل ببساطة كما يلي:

$$N_i^{(j)}(\vec{x}) = \{p^{(j)}(\vec{x})\}^T [P_i]^{-1} \quad (٢٧-٣)$$

هناك العديد من الطرق لبناء توابع الشكل وهي لا تتبع بالضرورة الإجرائية التي قمنا بتوصيفها. تستخدم بعض هذه الطرق أساليب مختصرة سنناقشها لاحقاً. تعتمد هذه الاختصارات على خواص توابع الشكل التي سنناقشها بالتفصيل فيما يلي.

٣-٤-٤: خواص توابع الشكل

الخاصة الأولى: ميزات الاستنساخ والتطابق

يعتمد تطابق توابع الشكل في العنصر على المرتبة التامة لأحاديات الحدود $p_i(\vec{x})$ المستخدمة في العلاقة (١١-٣)، بالتالي يعتمد أيضاً على عدد العقد في العنصر. إذا كانت k المرتبة التامة لأحادي الحد فإننا نقول أن تابع الشكل يملك تماسكاً C^k . أي أن أي حقل يمكن استنساخه بالضبط في العنصر عن طريق التقريب باستخدام توابع الشكل، ما دام تابع هذا الحقل محتوياً في توابع القاعدة المستخدمة لبناء توابع الشكل. يشير تماسك توابع الشكل إلى ميزة هامة لتوابع الشكل وهي خاصية الاستنساخ التي تنص على أنه يمكن استنساخ أي تابع محتوياً في القاعدة. يكمن الفارق بين خاصية الاستنساخ والتماسك في أن التماسك يعتمد على المرتبة التامة لتوابع القاعدة أما الاستنساخ فيعتمد على محتوى قاعدة التوابع.

الخاصة الثانية: ميزة الاستقلال الخطي

تكون توابع الشكل مستقلة خطياً ويعزى هذا إلى أن توابع القاعدة مستقلة خطياً والمصفوفة $[P]^{-1}$ موجودة. قد لا يلقي الكثير من مستخدمي طريقة العناصر المنتهية بالاً لهذا الاستقلال الخطي إلا أنه الأساس لكي تحقق توابع الشكل خاصية تابع دلنا المبينة فيما يلي.

الخاصة الثالثة: ميزات تابع دلنا

$$N_i(\bar{x}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j, \quad j = 1, 2, \dots, n_d \\ 0 & i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \dots, n_d \end{cases} \quad (28-3)$$

حيث δ_{ij} هو تابع دلنا. تشير خاصية تابع دلنا إلى أن تابع الشكل يساوي الواحد عند العقدة الرئيسية i ويختفي عند العقدة البعيدة $j \neq i$ في العنصر. علماً أنه يمكن لتوابع الشكل لبعض العناصر مثل عناصر الجوائز الرقيقة والصفائح ألا تحقق خاصية التابع دلنا.

الخاصة الرابعة: ميزة تجزئة الواحدة

تشكل توابع الشكل تجزئة للواحدة وفق:

$$\sum_{i=1}^n N_i(\bar{x}) = 1 \quad (29-3)$$

وذلك عندما يكون الحد الثابت محتوي في القاعدة. من جهة أخرى فإن ميزة تجزئة الواحدة لتوابع الشكل تسمح بتوليد حقل ثابت أو حركة الجسم الصلب.

الخاصة الخامسة: ميزة توليد الحقل الخطي

إذا كان وحيد الحد من المرتبة الأولى محتوي في القاعدة فإن توابع الشكل تولد الحقل الخطي، أي أن:

$$\sum_{i=1}^{n_d} N_i(x) x_i = x \quad (30-3)$$

حيث x_i هي قيمة الحقل الخطي عند العقد.

المبرهنة ١: شرط تحقيق توابع الشكل لميزة تجزئة الواحدة

من أجل مجموعة من توابع الشكل ذات الصيغة العامة التالية:

$$N_i(\bar{x}) = c_{1i} + c_{2i} p_2(\bar{x}) + c_{3i} p_3(\bar{x}) + \dots + c_{n_d i} p_{n_d}(\bar{x}) \quad (31-3)$$

حيث $p_1(\bar{x}) = 1$ و $p_i(\bar{x})_{i=2, \dots, n_d}$ هي قاعدة توابع مستقلة خطياً، الشرط اللازم والكافي لمجموعة توابع

الشكل هذه لتجزئة الواحدة هو:

$$\begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = C_3 = \dots = C_{n_d} = 0 \end{cases} \quad (32-3)$$

حيث

$$C_k = \sum_{i=1}^{n_d} c_{ki} \quad (33-3)$$

المبرهنة ٢: شرط تحقيق توابع الشكل لميزة تجزئة الواحدة

أية مجموعة مؤلفة من n_d تابع شكل ستحقق تلقائياً ميزة تجزئة الواحدة إذا حققت: الشرط الأول: إذا كان أي تشكيل خطي من نفس المجموعة المستقلة خطياً من n_d تابع قاعدة يحوي على تابع القاعدة الثابت ومصفوفة العزم المعرفة بالعلاقة (٣-٢٠) تامة.

الشرط الثاني: إذا كانت تحقق ميزة تابع دلنا.

المبرهنة ٣: شرط تحقيق توابع الشكل لميزة توليد الحقل الخطي

أية مجموعة مؤلفة من n_d تابع شكل ستحقق تلقائياً ميزة توليد الحقل الخطي إذا حققت: الشرط الأول: إذا كان أي تشكيل خطي من نفس المجموعة المستقلة خطياً من n_d تابع قاعدة يحوي على تابع القاعدة الثابت ومصفوفة العزم المعرفة بالعلاقة (٣-٢٠) تامة.

الشرط الثاني: إذا كانت تحقق ميزة تابع دلنا.

تؤمن خاصية التابع دلنا تأكيداً مناسباً للشروط الحدية الأساسية (شرط قبول الحقل في مبدأ هاملتون)، ذلك أن الانتقال عند عقدة مستقل عن الانتقالات في بقية العقد. بالتالي يمكن كتابة الشرط الحدي على شكل تقييد نقطة وحيدة. عندما يكون الانتقال على عقدة مثبتاً فكل ما نحتاجه هو إزالة العمود والسطر الموافق دون التأثير على الصفوف والأعمدة الأخرى.

تعطي الخاصة الرابعة طريقة مناسبة للتأكيد على ميزة تجزئة الواحدة لتوابع الشكل. ما دامت القاعدة الثابتة (الواحد) محتواه في قاعدة التوابع فإن توابع الشكل المبنية تحقق تجزئة الواحدة. تعد الخاصتان الرابعة والخامسة أساسيتين في طريقة العناصر المنتهية لتحقيق اختبار الصلاحية patch test المستخدم لعقود في التحقق من صحة صياغة العناصر. نقوم في اختبار الصلاحية النموذجي بتقطيع النموذج وفق عدة عناصر تحوي على الأقل عقدة داخلية. نطبق بعد ذلك انتقالات خطية على حدود (أطراف) النموذج. لكي ينجح اختبار الصلاحية يجب أن يعطي الحل بطريقة العناصر المنتهية حقل انتقالات خطية (أو انفعالات ثابتة) عند أية عقدة داخلية. أي أن خاصية توليد حقل الانتقالات الخطية لتوابع الشكل يمثل الأساس لتمرير اختبار الصلاحية. لاحظ أن خاصية توليد حقل الانتقالات الخطية لتوابع الشكل لا يشكل نجاحاً لاختبارات الصلاحية من حيث إمكانية وجود مصادر أخرى للأخطاء مثل التكاملات العددية التي قد تؤدي للفشل.

قد تبدو المبرهنة ١ كتكرار إذ إن الخاصية الرابعة محققة. إلا أنها مناسبة جداً لاختبار خاصية تجزئة الواحدة لتوابع الشكل التي يتم بناؤها باستخدام طرق مختصرة، عوضاً عن الإجرائية النموذجية الموصّفة في الفقرة ٣-٤-٣ باستخدام المبرهنة ١ نحتاج فقط للتأكد إذا كانت توابع الشكل تحقق العلاقة (٣-٣٢).

تمثل المبرهنة ٢ خاصية أخرى مناسبة جداً لاختبار خاصية تجزئة الواحدة لتوابع الشكل. باستخدام المبرهنة ٢ نحتاج فقط للتأكد أن توابع الشكل المبنية وعددها n_d تحقق خاصية التابع دلنا وأنها تشكيل خطي من نفس المجموعة المستقلة خطياً من n_d تابع قاعدة يحوي على تابع القاعدة الثابت. قد يكون التأكد من أن مصفوفة العزم تامة صعباً بعض الشيء. نفرض عادة أن المصفوفة تامة للعناصر العادية ما دامت توابع القاعدة مستقلة خطياً. في الأحوال العادية لن نكون قادرين على الحصول على توابع الشكل ما لم تكن مصفوفة العزم تامة. إذا نحنا بطريقة ما بالحصول على توابع الشكل فيمكن أن نؤكد أن مصفوفة العزم الموافقة تامة.

تناسب المبرهنة ٣ كثيراً اختبار خاصية توليد توابع الشكل للحقل الخطي. باستخدام المبرهنة ٣ سنحتاج فقط للتأكد أن توابع الشكل المبنية وعددها n_d تحقق خاصية التابع دلنا وأنها تشكيل خطي من نفس المجموعة المستقلة خطياً من n_d تابع قاعدة يحوي على تابع القاعدة الخطية.

٣-٤-٥ صياغة معادلات العناصر المنتهية في مستوي الإحداثيات الموضعي

بعد أن يتم بناء توابع الشكل يمكن صياغة معادلات العناصر المنتهية لعنصر باستخدام الإجرائية التالية. بتعويض استيفاء العقد، أي العلاقة (٥-٣) وعلاقة الانفعالات-الانتقالات أي (٥-٢) في حد طاقة الانفعال في العلاقة (٣-٣) نحصل على:

$$\begin{aligned}\Pi &= \frac{1}{2} \int_{V_e} \{\varepsilon\}^T [c] \{\varepsilon\} dV \\ &= \frac{1}{2} \int_{V_e} \{d_e\}^T [B]^T [c] [B] \{d_e\} dV \\ &= \frac{1}{2} \{d_e\}^T \left(\int_{V_e} [B]^T [c] [B] dV \right) \{d_e\}\end{aligned}\quad (٣-٣٤)$$

حيث يشير الدليل e للعنصر. لاحظ أنه تم استبدال التكامل الحجمي على كامل الجسم بالتكامل على العناصر. إن ذلك ممكن لأننا افترضنا أن حقل الانتقالات المعتبر يحقق شروط التوافقية (انظر الفقرة ٣-٣) على كامل الحواف بين العناصر. تسمى المصفوفة $[B]$ في العلاقة السابقة (٣-٣٤) بمصفوفة الانفعالات وتعرف وفق:

$$[B] = [L][N] \quad (٣-٣٥)$$

حيث $[L]$ هي مصفوفة الاشتقاق المعرفة للمسائل المختلفة في الفصل الثاني. بالنسبة للأجسام الصلبة ثلاثية الأبعاد 3D تعطى هذه المصفوفة بالعلاقة (٣٧، ٢). إذا اعتبرنا:

$$[k_e] = \int_{V_e} [B]^T [c][B] dV \quad (٣٦-٣)$$

و التي تسمى مصفوفة الصلابة للعنصر، يمكن إعادة كتابة العلاقة (٣٤-٣) كما يلي:

$$\Pi = \frac{1}{2} \{d_e\}^T [k_e] \{d_e\} \quad (٣٧-٣)$$

لاحظ أن مصفوفة الصلابة $[k_e]$ متناظرة لأن:

$$\begin{aligned} [k_e]^T &= \int_{V_e} [B]^T [c][B] dV \\ &= \int_{V_e} [B]^T [c]^T [B]^T dV \\ &= \int_{V_e} [B]^T [c][B] dV = [k_e] \end{aligned} \quad (٣٨-٣)$$

أي أن المصفوفة $[k_e]$ مساوية لمقلوبها، علماً أننا استخدمنا لدى استنباط العلاقة السابقة كون $[c] = [c]^T$ بالاعتماد على تناظر مصفوفة الصلابة فإننا نحتاج لحساب وتخزين نصف حدود هذه المصفوفة. بتعويض العلاقة (٣٥-٣) في العلاقة (٣٢-٣) يمكن صياغة الطاقة الحركية كما يلي:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int_{V_e} \rho \{\dot{U}\}^T \{\dot{U}\} dV \\ &= \frac{1}{2} \int_{V_e} \rho \{\dot{d}_e\}^T [N]^T [N] \{\dot{d}_e\} dV \\ &= \frac{1}{2} \{\dot{d}_e\}^T \left(\int_{V_e} \rho [N]^T [N] dV \right) \{\dot{d}_e\} \end{aligned} \quad (٣٩-٣)$$

إذا اعتبرنا:

$$[m_e] = \int_{V_e} \rho [N]^T [N] dV \quad (٤٠-٣)$$

والتي تسمى مصفوفة الكتلة للعنصر، يمكن إعادة كتابة العلاقة (٣٩-٣) وفق:

$$T = \frac{1}{2} \{\dot{d}_e\}^T [m_e] \{\dot{d}_e\} \quad (٤١-٣)$$

حيث من الواضح هنا أيضاً أن مصفوفة الكتلة للعنصر متناظرة.

أخيراً، للحصول على العمل الناتج عن القوى الخارجية نعوض العلاقة (٣-٥) في العلاقة (٣-٤):

$$\begin{aligned} W_f &= \int_{V_e} \{d_e\}^T [N]^T \{f_b\} dV + \int_{S_e} \{d_e\}^T [N]^T \{f_s\} dS \\ &= \{d_e\}^T \left(\int_{V_e} [N]^T \{f_b\} dV \right) + \{d_e\}^T \left(\int_{S_e} [N]^T \{f_s\} dS \right) \end{aligned} \quad (٣-٤٢)$$

وهنا نحسب التكامل السطحي فقط للعناصر على حدود المجال حيث تطبق القوى. إذا اعتبرنا:

$$F_b = \int_{V_e} [N]^T \{f_b\} dV \quad (٣-٤٣)$$

و

$$F_s = \int_{S_e} [N]^T \{f_s\} dS \quad (٣-٤٤)$$

يمكن كتابة العلاقة (٣-٤٢) كالتالي:

$$W_f = \{d_e\}^T \{F_b\} + \{d_e\}^T \{F_s\} = \{d_e\}^T \{f_e\} \quad (٣-٤٥)$$

$\{F_b\}$ و $\{F_s\}$ هي القوى المؤثرة على عقد العنصر وهي تكافئ القوى الحجمية والسطحية المطبقة على العنصر في صياغة العمل الناتج عن الانتقالات الافتراضية. بالتالي يمكن إضافة شعاعي القوة هذين على شكل الشعاع الكلي للقوى المطبقة على العقد:

$$\{f_e\} = \{F_b\} + \{F_s\} \quad (٣-٤٦)$$

بتعويض العلاقات (٣-٣٧) و (٣-٤١) و (٣-٤٦) في العلاقة (٣-١) نحصل على:

$$L = \frac{1}{2} \{\dot{d}_e\}^T [m_e] \{\dot{d}_e\} - \frac{1}{2} \{d_e\}^T [k_e] \{d_e\} + \{d_e\}^T \{f_e\} \quad (٣-٤٧)$$

بتطبيق مبدأ هاملتون لدينا:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{1}{2} \{\dot{d}_e\}^T [m_e] \{\dot{d}_e\} - \frac{1}{2} \{d_e\}^T [k_e] \{d_e\} + \{d_e\}^T \{f_e\} \right) dt = 0 \quad (٣-٤٨)$$

لاحظ أنه بالإمكان تبديل ترتيب التكامل والتفاضل لتعذر العلاقة السابقة كما يلي:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\delta \{\dot{d}_e\}^T [m_e] \{\dot{d}_e\} - \delta \{d_e\}^T [k_e] \{d_e\} + \delta \{d_e\}^T \{f_e\} \right) dt = 0 \quad (٣-٤٩)$$

لإيضاح عملية التفاضل في العلاقة السابقة نستخدم كمثال نظام ذو درجتي طلاقة. مثلاً لاستنباط الحد الثاني

من العلاقة (٣-٤٩) نجد:

$$\begin{aligned}
\delta \left(\frac{1}{2} \{d_e\}^T [k_e] \{d_e\} \right) &= \delta \left(\frac{1}{2} \{d_1 \ d_2\} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} \right) \\
&= \frac{1}{2} \delta (d_1^2 k_{11} + 2d_1 d_2 k_{12} + d_2^2 k_{22}) \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial (d_1^2 k_{11} + 2d_1 d_2 k_{12} + d_2^2 k_{22})}{\partial d_1} \delta d_1 + \frac{\partial (d_1^2 k_{11} + 2d_1 d_2 k_{12} + d_2^2 k_{22})}{\partial d_2} \delta d_2 \right] \\
&= (d_1 k_{11} + d_2 k_{12}) \delta d_1 + (d_1 k_{12} + d_2 k_{22}) \delta d_2 \\
&= \{\delta d_1 \ \delta d_2\} \begin{Bmatrix} d_1 k_{11} + d_2 k_{12} \\ d_1 k_{12} + d_2 k_{22} \end{Bmatrix} \\
&= \{\delta d_1 \ \delta d_2\} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} \\
&= \delta \{d_e\}^T [k_e] \{d_e\}
\end{aligned}$$

في العلاقة (٤٨-٣) يمكن أيضاً تبديل التغير والتفاضل بالنسبة للزمن أي:

$$\delta \{\dot{d}_e\}^T = \delta \left(\frac{d \{d_e\}^T}{dt} \right) = \frac{d}{dt} (\delta \{d_e\}^T) \quad (٥٠-٣)$$

بالتالي بتعويض العلاقة (٥٠-٣) في العلاقة (٤٩-٣) ومكاملة الحد الأول بالتجزئة نحصل على:

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2} \delta \{\dot{d}_e\}^T [m_e] \{\dot{d}_e\} dt &= \underbrace{\delta \{d_e\}^T [m_e] \{\dot{d}_e\}}_{=0} \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \delta \{d_e\}^T [m_e] \{\ddot{d}_e\} dt \\
&= - \int_{t_1}^{t_2} \delta \{d_e\}^T [m_e] \{\ddot{d}_e\} dt
\end{aligned} \quad (٥١-٣)$$

لاحظ أنه لدى صياغة العلاقة السابقة استخدمنا الشرط $\delta \{d_e\} = 0$ عند t_1 و t_2 ، مما يؤدي لاختفاء الحد $\delta \{d_e\}^T [m_e] \{\dot{d}_e\} \Big|_{t_1}^{t_2}$. ذلك أنه يجب تحقيق الشروط الحدية الابتدائية عند t_1 والشروط الحدية النهائية عند t_2 من أجل أي حقل انتقالات $\{d_e\}$ (مقبول وفق الشروط المطلوبة في مبدأ هاملتون) وبالتالي لا يسمح بأيّة تغيرات عند t_1 و t_2 .

بتعويض العلاقة (٥١-٣) في العلاقة (٤٩-٣) نجد:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta \{\dot{d}_e\}^T \left(-[m_e] \{\ddot{d}_e\} - [k_e] \{d_e\} + \{f_e\} \right) dt = 0 \quad (٥٢-٣)$$

هذا يعني بالضرورة انعدام الحد داخل التكامل أي:

$$\delta \{ \dot{d}_e \}^T \left(-[m_e] \{ \ddot{d}_e \} - [k_e] \{ d_e \} + \{ f_e \} \right) = 0 \quad (٥٣-٣)$$

كي تتحقق هذه المعادلة من أجل أية تغييرات على الانتقالات يجب أن يكون:

$$[k_e] \{ d_e \} + [m_e] \{ \ddot{d}_e \} = \{ f_e \} \quad (٥٤-٣)$$

تمثل العلاقة (٥٤-٣) معادلة العناصر المنتهية لعنصر، حيث $[k_e]$ و $[m_e]$ هما مصفوفتا الصلابة والكتلة للعنصر و $\{ f_e \}$ هو شعاع القوى الممثل لمحصلة القوى الخارجية المؤثرة على عقد العنصر. يمكن الحصول على المصفوفات والأشعة الخاصة بالعنصر بسهولة عن طريق مكاملة توابع الشكل المعطاة للانتقالات.

٣-٤-٦ تحويل الإحداثيات

تمت صياغة معادلة العنصر المعطاة بالعلاقة (٥٤-٣) اعتماداً على نظام الإحداثيات الموضعي المعرف على العنصر. نقوم عادة بتقسيم الجسم إلى عدة عناصر ذات توجيهات متباينة (انظر الشكل ٣-١). لصياغة معادلات النظام الكلية بتجميع كافة معادلات العنصر يجب أن نحري تحويلاً في الإحداثيات لكل عنصر بحيث نصيغ معادلات كل عنصر في نظام الإحداثيات الكلية المعرف على كامل الجسم.

يعطي تحويل الإحداثيات العلاقة بين شعاع الانتقالات $\{ d_e \}$ في نظام الإحداثيات الموضعي وبين شعاع الانتقالات $\{ D_e \}$ لنفس العنصر ولكن في نظام الإحداثيات الكلية:

$$\{ d_e \} = [T] \{ D_e \} \quad (٥٥-٣)$$

حيث $[T]$ هي مصفوفة التحويل ولها أشكال مختلفة تبعاً لنمط العنصر وسناقش هذا الأمر بالتفصيل لاحقاً. يمكن تطبيق مصفوفة التحويل أيضاً على أشعة القوى بين نظامي الإحداثيات الموضعي والكلية:

$$\{ f_e \} = [T] \{ F_e \} \quad (٥٦-٣)$$

حيث $\{ F_e \}$ هو شعاع القوى عند العقدة i في نظام الإحداثيات الكلية. يعطي تعويض العلاقة (٥٥-٣) في العلاقة (٥٤-٣) إلى معادلة العنصر في نظام الإحداثيات الكلية:

$$[K_e] \{ D_e \} + [M_e] \{ \ddot{D}_e \} = \{ F_e \} \quad (٥٧-٣)$$

حيث:

$$[K_e] = [T]^T [k_e] [T] \quad (٥٨-٣)$$

$$[M_e] = [T]^T [m_e] [T] \quad (٥٩-٣)$$

$$\{ F_e \} = [T]^T \{ f_e \} \quad (٦٠-٣)$$

٣-٤-٧ جميع معادلة العناصر المنتهية الكلية

يمكن تجميع معادلات العناصر المنتهية معاً لتشكيل المعادلة الكلية:

$$[K]\{D\} + [M]\{\ddot{D}\} = \{F\} \quad (٣-٦١)$$

حيث $[K]$ و $[M]$ هما مصفوفتا الصلابة والكتلة الكليتان، $\{D\}$ هو شعاع كافة الانتقالات عند كل عقد الجسم و $\{F\}$ هو شعاع كافة قوى العقد المكافئة. تتألف إجرائية التجميع بكل بساطة من إضافة مساهمة كافة العناصر المتصلة بالعقدة. سيتم تطبيق هذه العملية على مثال تطبيقي في الفصل القادم. لعله من المهم هنا التذكير بأننا يمكن أن نتجاوز عملية التجميع هذه عن طريق ربطها بحل المعادلة. هذا يعني أن تجميع حد من المصفوفة الكلية يتم فقط عندما تستخدم عملية حل المعادلة هذا الحد.

٣-٤-٨ تطبيق الشروط الحدية للانتقالات

تكون مصفوفة الصلابة $[K]$ في العلاقة (٣-٥٩) غير تامة عادة، لأن قيود الانتقالات (المساند) لم يتم تطبيقها، كما أنها معرفة غير سالبة أو موجبة نصف معرفة. فيزيائياً، يمكن للجسم أو الإنشاء غير المقيّد أن يخضع لحركة جسم صلب. بالتالي، إذا كان الجسم أو الإنشاء حالياً من القيود فإن العلاقة (٣-٥٩) تعطي سلوكية تتضمن ديناميك الجسم الصلب وذلك إذا كانت خاضعة لقوى ديناميكية. إذا كانت القوى الخارجية المطبقة ستاتيكية فلا يمكن حساب الانتقالات الناتجة عن أي شعاع قوى فقط من العلاقة (٣-٥٩). من غير المنطقي حساب انتقالات جسم أو إنشاء غير مقيّد يمكنه التحرك بحرية.

بالنسبة للأجسام والإنشاءات المقيّدة، يمكن تطبيق القيود ببساطة عن طريق إزالة الصفوف والأعمدة الموافقة لانتقالات العقد المقيّدة. سنرى هذه الطريقة في مثال تطبيقي في الفصول اللاحقة. بعد معالجة القيود (و إذا كانت القيود كافية)، تغدو مصفوفة الصلابة $[K]$ المعرفة بالعلاقة (٣-٥٩) تامة وموجبة معرفة. بما أننا سبق وبرهنا أن $[K]$ مصفوفة متناظرة فهي بالتالي متناظرة ومعرفة موجبة.

ملاحظات:

تعرف رتبة مصفوفة *matrix rank* بأنها أكبر عدد من الصفوف أو الأعمدة المستقلة خطياً وعندما تكون هذه الرتبة مساوية لبعاد المصفوفة المربعة فإنها تسمى مصفوفة تامة *full rank matrix*.

تكون المصفوفة المربعة $[A]$ معرفة موجبة *positive-definite* إذا كان $\{u\}^T [A] \{u\} > 0$ من أجل $\{u\}$ شعاع مركباته حقيقية غير معدومة.

تكون المصفوفة المربعة $[A]$ موجبة نصف معرفة *positive semi-definite* إذا كان $\{u\}^T [A] \{u\} \geq 0$ من أجل $\{u\}$ شعاع مركباته حقيقية غير معدومة.

تكون المصفوفة متناظرة عندما تحقق $[A]^T = [A]$.

لكل مصفوفة مربعة معرفة موجبة $[A]$ مقلوب يحقق $[A]^{-1}[A] = [A][A]^{-1} = [I_n]$ حيث $[I_n]$ هي المصفوفة المربعة الواحدة من الرتبة n .

٣-٤-٩ حل المعادلة الكلية للعناصر المنتهية

بحل معادلة العناصر المنتهية الكلية نحصل على انتقالات العقد. بعد ذلك يمكن حساب الانفعالات والإجهادات في كل عنصر بتعويض العلاقة (٣-٥) في العلاقتين (٢-٥) و (٢-٨).

٣-٥ التحليل الستاتيكي

ينطوي التحليل الستاتيكي على حل المعادلة (٣-٦١) دون الحدود المتعلقة بمصفوفة الكتلة الكلية $[M]$ ، بالتالي تغدو مجموعة المعادلات الستاتيكية وفق الصيغة التالية:

$$[K]\{D\} = \{F\} \quad (٣-٦٢)$$

هناك العديد من الطرق والخوارزميات لحل هذه المعادلة المصفوفاتية. بالنسبة للمنظومات الصغيرة تستخدم غالباً طريقة تعويضات غوص وطريقة التحليل LU ، أما بالنسبة للمنظومات الكبيرة فتستخدم الطرق التقريبية التكرارية. توجد هذه الطرق عموماً في أية مكتبة رياضية لأي نظام حاسوبي.

٣-٦ تحليل الاهتزازات الحرة (تحليل القيم الذاتية)

من أجل منظومة إنشائية ذات N درجة طلاقة إجمالية، تكون لمصفوفتي الصلابة $[K]$ والكتلة $[M]$ في العلاقة (٣-٦١) أبعاد $N \times N$. يحل هذه المعادلة يمكننا الحصول على حقل الانتقالات ومن ثم كل من الانفعالات والإجهادات. يبقى السؤال عن كيفية حل هذه المعادلة خصوصاً وأن N تكون عادة كبيرة جداً في المسائل الهندسية الإنشائية. إحدى الطرق المستخدمة في حل هذه المعادلة هي ما يسمى بطريقة التكمال المباشر التي سنعرضها في الفقرة المقبلة. هناك طريقة بديلة لحل المعادلة (٣-٦١) باستخدام ما يسمى تقنية التحليل الطيفي (أو تقنية تراكب الأنماط). في هذه التقنية، نقوم أولاً بحل المعادلة المتجانسة الناتجة عن المعادلة (٣-٦١). نحصل على المعادلة المتجانسة عندما نفترض أن $\{F\} = 0$ ، يسمى هذه الحل أيضاً بتحليل الاهتزازات الحرة من حيث إن النظام لا يخضع لأية قوى خارجية. تصبح المعادلة (٣-٦١) لإنشاء خاضع للاهتزازات الحرة كما يلي:

$$[K]\{D\} + [M]\{\ddot{D}\} = 0 \quad (٣-٦٣)$$

يمكن أن نفرض الحل للاهتزازات الحرة من الشكل:

$$\{D\} = \{\Phi \exp(i\omega t)\} \quad (٣-٦٤)$$

حيث $\{\Phi\}$ هو مطال الانتقالات في العقد، ω هو تردد الاهتزازات الحرة و t هو الزمن. بتعويض المعادلة (٦٤-٣) في المعادلة (٦٣-٣) نحصل على:

$$[[K] - \omega^2 [M]]\{\Phi\} = 0 \quad (٦٥-٣)$$

أو

$$[[K] - \lambda [M]]\{\Phi\} = 0 \quad (٦٦-٣)$$

حيث

$$\lambda = \omega^2 \quad (٦٧-٣)$$

تسمى العلاقة (٦٥-٣) أو (٦٦-٣) بمعادلة القيم الذاتية. للحصول على حل $\{\Phi\}$ غير معدوم يجب أن يكون مميز المصفوفة معدوماً أي:

$$\det [[K] - \lambda [M]] = [[K] - \lambda [M]] = 0 \quad (٦٨-٣)$$

يقود نشر المعادلة أعلاه لكثير حدود بدلالة λ من الدرجة N . ويكون لهذه المعادلة N جذر، $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ ، تسمى بالقيم الذاتية المرتبطة بالترددات الطبيعية للإنشاء. يعد التردد الذاتي من المواصفات الهامة للإنشاء الخاضع لحمولات ديناميكية. حيث وُجد أنه إذا خضع إنشاء حمولة ديناميكية ذات تردد مساوٍ لأحد تردداته الطبيعية فإنه سيخضع لاهتزازات عنيفة جداً تقود غالباً إلى التحطم الكارثي لهذا الإنشاء. تسمى هذه الظاهرة بالطنين. بالتالي فإنه يجب إجراء تحليل القيم الذاتية عن تصميم أي إنشاء يمكن أن يخضع لحمولات ديناميكية.

بتعويض إحدى القيم الذاتية λ_i في معادلة القيم الذاتية (٦٦-٣) لدينا:

$$[[K] - \lambda_i [M]]\{\Phi\} = 0 \quad (٦٩-٣)$$

و هي مجموعة من N معادلة جبرية. يحل هذه المعادلة بالنسبة للشعاع $\{\Phi\}$ نحصل على شعاع $\{\Phi_i\}$ يوافق القيمة الذاتية λ_i ويسمى بالشعاع الذاتي الذي يحقق العلاقة التالية:

$$[[K] - \lambda_i [M]]\{\Phi_i\} = 0 \quad (٧٠-٣)$$

يوافق الشعاع الذاتي $\{\Phi_i\}$ نمط الاهتزازات الذي يعطي شكل الإنشاء المهتز عند هذا النمط. يعطي تحليل معادلة القيم الذاتية معلومة هامة حول أنماط الاهتزازات الذاتية التي يخضع لها الإنشاء. تعد أنماط الاهتزاز الذاتية مواصفة هامة أخرى لإنشاء يخضع لحمولات ديناميكية. رياضياً، يمكن استخدام الأنماط الذاتية كقاعدة لبناء حقل الانتقالات. وقد وُجد أنه باستخدام القليل من الأنماط المنخفضة يمكن الحصول على نتائج دقيقة جداً للعديد من المسائل الهندسية. تم تطوير تقنيات التحليل الطيفي (النمطي) للاستفادة من خواص الأنماط الطبيعية.

بما أنه، في المعادلة (٣-٦٦)، مصفوفة الكتلة $[M]$ متناظرة ومعروفة موجبة كما أن مصفوفة الصلابة $[K]$ متناظرة موجبة معروفة أو نصف معروفة، فإن كافة القيم أو الترددات الذاتية حقيقية موجبة أو مساوية للصفر. يمكن أن تتطابق بعض القيم الذاتية، بالتالي يكون لمعادلة القيم الذاتية جذوراً مضاعفة. فإذا كان هناك m جذر مضاعف للمعادلة (٣-٧٠) فسيكون هناك m شعاع يحقق هذه المعادلة. وهناك العديد من الطرق والخوارزميات المعقدة والجهازية للاستخدام من أجل حساب الترددات والأنماط الذاتية، هذه الطرق متوافرة عموماً في الكثير المصادر المفتوحة والمكتبات الحاسوبية.

٣-٧ ملخص إجرائية العناصر المنتهية

نقوم في طريقة العناصر المنتهية بصياغة حقل الانتقالات $\{U\}$ بدلالة انتقالات العقد باستخدام توابع الشكل المعرفة على العناصر. بعد الحصول على توابع الشكل يمكن الحصول على مصفوفة الكتلة وشعاع القوى باستخدام العلاقات (٣-٤٠) و (٣-٤٣) و (٣-٤٤) و (٣-٤٦). يمكن الحصول أيضاً على مصفوفة الصلابة باستخدام العلاقة (٣-٣٦) ما إن يتم الحصول على توابع الشكل ومصفوفة الانفعالات. بالتالي لصياغة معادلة العناصر المنتهية لأي نمط من الإنشاءات، كل ما نحتاجه هو صياغة توابع الشكل $[N]$ ومن ثم بناء مصفوفة الانفعالات $[B]$. بقية الإجراءات متشابهة كثيراً. من هذا المنطلق فإننا سنركز في الفصول القادمة على استنباط توابع الشكل ومصفوفة الانفعال لمختلف الأنماط من الأجسام وعناصر الإنشاءات.

٣-٨ أسئلة للمراجعة

١. ما هو الفرق بين الصيغتين القوية والضعيفة لمجموعة المعادلات؟
٢. ما هي الشروط التي يجب أن تحققها الانتقالات المفترضة لتطبيق مبدأ هاملتون؟
٣. لخص باختصار الخطوات الأساسية المكونة بطريقة العناصر المنتهية.
٤. هل من الضروري تقطيع الجسم المدروس لتطبيق مبدأ هاملتون؟ ما الهدف من تقطيع الجسم المدروس لعناصر؟
٥. من أجل تابع معرف وفق $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ برهن أن:
 a. عمليتي التفاضل والتكامل قابلتان للتبادل، أي $\int [\delta f(x)] dx = \delta \left[\int f(x) dx \right]$
 b. عمليتي الاشتقاق والتفاضل قابلتان للتبادل، أي $\delta \frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx} [\delta f(x)]$
٦. ما هي خواص توابع الشكل؟ هل يمكننا استخدام توابع شكل لا تحقق هذه الخواص؟
٧. لدينا التقطيعان A و B لنفس الجسم:

- a. أي التقطيعان يؤدي إلى نتائج أكثر دقة؟
b. أيها سيكون أكثر كلفة من حيث الحساب؟
c. اقترح طريقة للتقطيع تؤدي لنتائج دقيقة نسبياً بحيث تكون في ذات الوقت أقل كلفة من التقطيع B من حيث الحساب.
٨. لماذا نحتاج لعملية تحويل إحداثيات لكل عنصر؟
٩. اشرح آلية تجميع مصفوفات العناصر مع بعضها لتشكيل المصفوفة الكلية.

الفصل الرابع

طريقة العناصر المنتهية في القضبان



طريقة العناصر المنتهية في القضبان

٤-١ مقدمة:

تعد القضبان واحدة من أبسط العناصر الإنشائية وأوسعها استخداماً. والقضيب هو عبارة عن دعامة مستقيمة مصمم لتحمل قوى محورية فقط وبالتالي يتشوه وفق اتجاهه المحوري فقط. يبين الشكل ٢-٧ مثالاً نموذجياً لاستخداماته. يمكن للمقطع العرضي للقضيب أن يكون عشوائياً إلا أن أبعاد هذا المقطع يجب أن تكون أصغر بكثير من البعد في الاتجاه المحوري. سنفصل فيما يلي معادلات العناصر المنتهية لهذه القضبان. تعرف هذا العناصر عادة بالقضبان أو الدعامات ويتم استخدامها لتحليل إنشاءات الهياكل الشبكية سواء المستوية ثنائية البعد منها أو الفراغية ثلاثية البعد. توجد مختلف المفاهيم والصياغات والإجراءات المتعلقة بالموضوع في العديد من الكتب ويمكن الرجوع إلى (Reddy, 1993; Rao, 1999; Zienkiewicz & Taylor, 2000...). توجد في الهياكل المستوية مركبتان للانتقالات أو للقوى وفق الاتجاهين x و y . أما بالنسبة للهياكل الفراغية فهناك ثلاثة مركبات وفق الاتجاهات x و y و z لكل من الانتقالات والقوى. في الهياكل الإنشائية المكوّنة من قضبان يتم الربط بين مختلف العناصر بواسطة البراغي أو التباشيم (و ليس عن طريق اللحام) بحيث تكون هناك قوى (أو عزوم) تنتقل بين هذه القضبان. لشرح هذا المفهوم بوضوح سنعتبر في هذا الفصل أن للقضيب مقطوعاً عرضياً منتظماً. أما بالنسبة للقضبان ذات المقطع العرضي المتغير فيمكن استنباط المعادلات الموافقة باتباع نفس الإجراءات المستخدمة في القضبان ذات المقطع العرضي المنتظم. لاحظ أنه من وجهة نظر ميكانيكية ليس هناك استخدامات للقضبان ذات المقطع العرضي المتغير باعتبار أن القوى في القضيب منتظمة.

٤-٢ معادلات طريقة العناصر المنتهية

٤-٢-١ بناء توابع الشكل

ليكن لدينا إنشاء هيكلي مؤلف من مجموعة من القضبان أو الدعامات. يمكن اعتبار كل عنصر كقضيب أو دعامة ذي مقطع عرضي منتظم تحده عقدتان ($n_i = 2$). نعتبر عنصراً ذا عقدتين ١ و ٢ عند لمآتيه كما هو موضح في الشكل ٤-١. ليكن طول العنصر l_i . نأخذ المحور الموضعي x وفق الاتجاه المحوري للعنصر مع العقدة ١ كمبدأً.

الشكل ٤-١: عنصر قضيب مع نظام الإحداثيات

في نظام الإحداثيات الموضوعي، هناك درجة طلاقة وحيدة عند كل عقدة من العنصر وهي الانتقال المحوري. أي أن هناك إجمالاً درجتي طلاقة للعنصر (). تبعاً لطريقة العناصر المنتهية التي ناقشنا صياغتها في الفصل السابق يجب كتابة انتقال العنصر وفق الصيغة:

(٤-١)

حيث هو تقريب الانتقالات في العنصر، هي مصفوفة توابع الشكل والتي تتمتع بالخواص التي ناقشناها في الفصل السابق أما فهو شعاع الانتقالات لعقدتي العنصر:

(٤-٢)

السؤال الآن هو: كيف يمكن تحديد توابع الشكل لعناصر القضبان؟ الجواب أننا نتبع الإحرائية النموذجية لبناء توابع الشكل والتي تم توصيفها في الفقرة ٣-٤-٣ حيث نفرض أن الانتقال المحوري في العنصر يمكن كتابته وفق الشكل العام:

(٤-٣)

حيث هو تقريب الانتقالات، هو شعاع مكوّن من ثابتين مجهولين و ، أما فهو شعاع توابع قاعدة كثيرات الحدود (أو أحاديات الحدود). بالنسبة لهذه المسألة بالتحديد نستخدم قاعدة كثيرات الحدود حتى الدرجة الأولى. يمكن حسب المسألة استخدام توابع قاعدة كثيرات حدود لدرجة أعلى. يعطى ترتيب توابع قاعدة كثيرات الحدود حتى الدرجة وفق:

$$[p^T] = [1 \quad x \quad \dots \quad x^n] \quad (4-4)$$

يعتمد عدد حدود توابع القاعدة أو أحاديّات الحدود المستخدمة على عدد العقد ودرجات الطلاقة في العنصر. اخترنا هنا حدين اثنين من توابع القاعدة مما يعطي المعادلة (3-4).

لاحظ أننا نستخدم عادة قاعدة تامة من كثيرات الحدود أي أننا لا نهمّل أي حد ذي درجة أدنى في صياغة المعادلة (3-4). يضمن لنا هذا الأمر قدرة توابع الشكل على توليد كافة كثيرات الحدود حتى الدرجة n . إذا أهمّلنا كثير حدود من الدرجة k في القاعدة، فإن توابع الشكل المولدة ستكون قادرة على تأمين تماسك Consistency من الدرجة $k-1$ مهما يكن عدد أحاديّات الحدود من المرتبة الأعلى في القاعدة. ينتج هذا من خاصية تماسك توابع الشكل (الخاصية الأولى) التي ناقشناها في الفقرة 3-4-4.

نتوقع بالاعتماد على الخواص 3 و 4 و 5 التي ناقشناها في الفصل الثالث أن تضمن قاعدة التوابع الخطية التامة المستخدمة في المعادلة (3-4) تحقيق توابع الشكل الشروط الكافية في طريقة العناصر المنتهية: خاصية التابع دلّنا وخاصية توزيع الحقل الواحد الخطي.

نستخدم لدى استنباط تابع الشكل:

$$\begin{aligned} u(x=0) &= u_1 & \text{عندما } x=0 \\ u(x=l_e) &= u_2 & \text{عندما } x=l_e \end{aligned} \quad (5-4)$$

باستخدام المعادلة (3-4) يصبح لدينا:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & l_e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{Bmatrix} \quad (6-4)$$

بحل هذه المعادلة بالنسبة لـ α نجد:

$$\begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/l_e & 1/l_e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (7-4)$$

بتعويض هذه المعادلة في العلاقة (3-4) نحصل على:

$$\begin{aligned} u^h(x) &= [p^T] \{\alpha\} = \{1 \quad x\} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/l_e & 1/l_e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \\ &= \left\{ 1 - \frac{x}{l_e} \quad \frac{x}{l_e} \right\} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = [N(x)] \{d_e\} \end{aligned} \quad (8-4)$$

و التي تمثل المعادلة (1-4) المطلوبة. أي أن مصفوفة توابع الشكل التي حصلنا عليها هي:

(٩-٤)

حيث تكتب توابع الشكل لعنصر القضيبي وفق:

(١٠-٤)

و قد حصلنا على تابعي شكل لأننا لدينا درجتا طلاقة في عنصر القضيبي.
يبين الجدول المرفق (١-٤) علاقة عدد درجات الحرية للعنصر وفضاء برتبة كثير الحدود.
جدول ١-٤ العلاقة بين فضاء المسألة ودرجات الطلاقة ورتبة كثير الحدود
رتبة كثير الحدود

فمثلاً للحالة المدروسة (عنصر قضيبي وذو درجتين طلاقة) تكون رتبة كثير الحدود ١.
يمكن التأكد بسهولة أن تابعي الشكل هذين يحققان خاصية تابع دلنا المعرفة بالمعادلة (٣-٣٤) وخاصية توزيع
الواحدة المعرفة بالعلاقة (٣-٤١). نترك التحقق للقارئ كتمرين بسيط. يبين الشكل ٢-٤ التمثيل البياني
لتوابع الشكل الخطية.

الشكل ٢-٤: توابع الشكل الخطية

يبدو جلياً أن التابع يعطي "شكل" المساهمة من انتقال العقدة ولذلك تدعى هذه التوابع بتوابع الشكل.
في هذه الحالة تتغير توابع الشكل خطياً وهي تدعى بتوابع الشكل الخطية. بتعويض المعادلات (٩-٤) و (١٠-٤)
(١٠) و (٢-٤) في المعادلة (١-٤) نحصل على:

(١١-٤)

و هي تبين بوضوح أن الانتقال في العنصر يتغير خطياً. لهذا السبب يدعى العنصر بالعنصر الخطي.

٤-٢-٢ مصفوفة الانفعال

هناك، حسب المناقشة في الفصل الثاني، مركبة وحيدة للإجهادات σ_x في القضيب ويمكن الحصول على الانفعال الموافق ε_x كالتالي:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_2 - u_1}{l_e} \quad (٤-٢٢)$$

و ذلك كنتيجة مباشرة من العلاقة (٤-١١) بالنسبة لـ x لاحظ أن الانفعال في العلاقة (٤-٢٢) ذو قيمة ثابتة على كامل العنصر.

بينما في الفصل السابق أنه يجب استنتاج مصفوفة الانفعال $[B]$ وبعد ذلك يمكن الحصول على مصفوفتي الصلابة والكتلة. في هذه الحالة يمكن تنفيذ الأمر بسهولة بإعادة كتابة العلاقة (٤-٢٢) على شكل مصفوفات:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = L[N]\{d_e\} = [B]\{d_e\} \quad (٤-١٣)$$

حيث يكون لمصفوفة الانفعال للقضيب الشكل التالي:

$$[B] = L[N] = \frac{\partial}{\partial x} \left[1 - \frac{x}{l_e} \quad \frac{x}{l_e} \right] = \left[\frac{-1}{l_e} \quad \frac{1}{l_e} \right] \quad (٤-١٤)$$

٤-٢-٣ مصفوفات العنصر في نظام الإحداثيات الموضعية

بعد الحصول على مصفوفة الانفعال $[B]$ يمكن استنتاج مصفوفة الصلابة لعناصر القضبان باستخدام العلاقة (٣-٧١) في الفصل السابق:

$$[k_e] = \int_{V_e} \{B^T\} c [B] dV = A \int_0^{l_e} \left\{ \frac{-1}{l_e} \quad \frac{1}{l_e} \right\} E \left[\frac{-1}{l_e} \quad \frac{1}{l_e} \right] dx = \frac{AE}{l_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (٤-١٥)$$

حيث A هي مساحة المقطع العرضي للقضيب. لاحظ أن مصفوفة ثوابت المادة c مختصرة في ثابت المرونة E من أجل عنصر القضيب أحادي البعد (انظر العلاقة (٢-٣٩)). من الواضح أن مصفوفة صلابة العنصر المعطاة بالعلاقة (٤-١٥) متناظرة. هذا يؤكد البرهان المعطى بالعلاقة (٢-٧٣). بالاستفادة من تناظر مصفوفة الصلابة يكفي تحديد نصف عناصر المصفوفة وتخزينها أثناء الحساب.

يمكن الحصول على مصفوفة الكتلة لعنصر القضيب من العلاقة (٣-٧٥):

$$[m_e] = \int_{V_e} \rho[N] \{N^T\} dV = A \rho \int_0^{l_e} \begin{bmatrix} N_1 N_1 & N_1 N_2 \\ N_1 N_2 & N_2 N_2 \end{bmatrix} dx = \frac{A \rho l_e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (١٦-٤)$$

بشكل مماثل نلاحظ أن مصفوفة الكتلة متناظرة. يمكن الحصول على شعاع القوى باستخدام المعادلات (٣,٧٨) و (٣,٨١). بفرض أن العنصر يخضع لحسولة موزعة بانتظام f_x على طول المحور x . وقوتين مركبتين f_{s_1} و f_{s_2} على العقدتين ١ و ٢ بالترتيب. كما هو مبين في الشكل ١-٤ يصبح شعاع القوى الكلي على العقد:

$$f_e = \int_{V_e} \{N^T\} f_b dV + \int_{S_e} \{N^T\} f_s dS = f_x \int_0^{l_e} \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{Bmatrix} dx + \begin{Bmatrix} f_{s_1} \\ f_{s_2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{f_x l_e}{2} + f_{s_1} \\ \frac{f_x l_e}{2} + f_{s_2} \end{Bmatrix} \quad (١٧-٤)$$

٤-٢-٤ مصفوفات العنصر في نظام الإحداثيات الكلي

قمنا في العلاقات (٤-١٥) و (٤-١٦) و (٤-١٧) بصياغة مصفوفات العنصر بالاعتماد على نظام الإحداثيات المحلي حيث ينطبق المحور x على المحور المركزي في القضيب ٢-١ كما في الشكل ١-٤. عملياً هناك عدة قضبان في الهياكل الشبكية ذات اتجاهات ومواضع مختلفة. لجميع كافة مصفوفات العناصر وتشكيل مصفوفات النظام الكلية يجب أن نقوم بتغيير الإحداثيات لكل عنصر من أجل صياغة مصفوفة العنصر في نظام الإحداثيات الكلي وذلك لكامل الهيكل الشبكي. سنجري فيما يلي التحويلات اللازمة للهيكل المستوية والفراغية.

الهياكل الفراغية

بفرض أن العقد المحلية ١ و ٢ للعنصر توافق العقد الكلية i و j بالترتيب وكما يبدو في الشكل ١-٤. سيكون للانتقالات عند عقدة كلية في الفراغ ثلاثة مركبات وفق الاتجاهات X و Y و Z ومركبة تبعاً لذلك. مثلاً هذه المركبات الثلاثة عند العقدة i ستكون أرقامها D_{3i-2} و D_{3i-1} و D_{3i} . تعطي التحويلات الهندسية العلاقة بين شعاع الانتقالات $\{d_e\}$ في نظام الإحداثيات الموضعية وشعاع الانتقالات $\{D_e\}$ لذات العنصر ولكن في نظام الإحداثيات الكلي XYZ :

$$\{d_e\} = [T] \{D_e\} \quad (١٨-٤)$$

حيث:

$$\{D_e\} = \begin{Bmatrix} D_{3i-2} \\ D_{3i-1} \\ D_{3i} \\ D_{3j-2} \\ D_{3j-1} \\ D_{3j} \end{Bmatrix} \quad (١٩-٤)$$

و تكون مصفوفة التحويل لعنصر القضيب كالتالي:

$$[T] = \begin{bmatrix} l_{ij} & m_{ij} & n_{ij} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_{ij} & m_{ij} & n_{ij} \end{bmatrix}_e \quad (٢٠-٤)$$

و في هذه المصفوفة:

$$\begin{aligned} l_{ij} &= \cos(x, X) = \frac{X_j - X_i}{l_e} \\ m_{ij} &= \cos(x, Y) = \frac{Y_j - Y_i}{l_e} \\ n_{ij} &= \cos(x, Z) = \frac{Z_j - Z_i}{l_e} \end{aligned} \quad (٢١-٤)$$

و هي تجيبات التوجيه لمحور العنصر. يمكننا التأكد بسهولة أن:

$$[T][T^T] = [I] \quad (٢٢-٤)$$

حيث $[I]$ هي المصفوفة الواحدة 2×2 . أي أن المصفوفة $[T]$ ناظمية. يمكن حساب طول العنصر l_e باستخدام الإحداثيات الكلية لعقدتي العنصر وفق:

$$l_e = \sqrt{(X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2 + (Z_j - Z_i)^2} \quad (٢٣-٤)$$

يمكن بسهولة تحقيق العلاقة (١٨-٤) ذلك أنه يمكننا أن نقول ببساطة أن d_1 عند العقدة i يساوي مجموع كافة المساقط D_{3i-2} و D_{3i-1} و D_{3i} على المحور x الموضعي وكذلك الأمر بالنسبة للعقدة j .
تحوّل المصفوفة $[T]$ لعنصر القضيب شعاع 6×1 في نظام الإحداثيات الكلي إلى شعاع 2×1 في نظام الإحداثيات الموضعي.

تطبق مصفوفة التحويل أيضاً على أشعة القوى بين نظامي الإحداثيات الموضعي والكلي:

$$\{f_e\} = [T]\{F_e\} \quad (٢٤-٤)$$

حيث:

$$\{F_e\} = \begin{Bmatrix} F_{3i-2} \\ F_{3i-1} \\ F_{3i} \\ F_{3j-2} \\ F_{3j-1} \\ F_{3j} \end{Bmatrix} \quad (٢٥-٤)$$

حيث F_{3i-2} و F_{3i-1} و F_{3i} هي المركبات الثلاثة لشعاع القوى عند العقدة i في نظام الإحداثيات الكلي. بتعويض العلاقة (٢٤-١٨) في العلاقة (٢٩-٣) نحصل على معادلة العنصر في نظام الإحداثيات الكلي:

$$[k_e][T]\{D_e\} + [m_e][T]\{\ddot{D}_e\} = \{f_e\} \quad (٢٦-٤)$$

بضرب طرفي هذه العلاقة من اليسار بالمصفوفة $[T^T]$ نحصل على:

$$[T^T][k_e][T]\{D_e\} + [T^T][m_e][T]\{\ddot{D}_e\} = [T^T]\{f_e\} \quad (٢٧-٤)$$

أو

$$[K_e]\{D_e\} + [M_e]\{\ddot{D}_e\} = \{F_e\} \quad (٢٨-٤)$$

حيث

$$[K_e] = [T^T][k_e][T] = \frac{AE}{l_e} \begin{bmatrix} l_{ij}^2 & l_{ij}m_{ij} & l_{ij}n_{ij} & -l_{ij}^2 & -l_{ij}m_{ij} & -l_{ij}n_{ij} \\ l_{ij}m_{ij} & m_{ij}^2 & m_{ij}n_{ij} & -l_{ij}m_{ij} & -m_{ij}^2 & -m_{ij}n_{ij} \\ l_{ij}n_{ij} & m_{ij}n_{ij} & n_{ij}^2 & -l_{ij}n_{ij} & -m_{ij}n_{ij} & -n_{ij}^2 \\ -l_{ij}^2 & -l_{ij}m_{ij} & -l_{ij}n_{ij} & l_{ij}^2 & l_{ij}m_{ij} & l_{ij}n_{ij} \\ -l_{ij}m_{ij} & -m_{ij}^2 & -m_{ij}n_{ij} & l_{ij}m_{ij} & m_{ij}^2 & m_{ij}n_{ij} \\ -l_{ij}n_{ij} & -m_{ij}n_{ij} & -n_{ij}^2 & l_{ij}n_{ij} & m_{ij}n_{ij} & n_{ij}^2 \end{bmatrix} \quad (٢٩-٤)$$

$$[M_e] = [T^T][m_e][T] = \frac{A\rho l_e}{6} \begin{bmatrix} 2l_{ij}^2 & 2l_{ij}m_{ij} & 2l_{ij}n_{ij} & l_{ij}^2 & l_{ij}m_{ij} & l_{ij}n_{ij} \\ 2l_{ij}m_{ij} & 2m_{ij}^2 & 2m_{ij}n_{ij} & l_{ij}m_{ij} & m_{ij}^2 & m_{ij}n_{ij} \\ 2l_{ij}n_{ij} & 2m_{ij}n_{ij} & 2n_{ij}^2 & l_{ij}n_{ij} & m_{ij}n_{ij} & n_{ij}^2 \\ l_{ij}^2 & l_{ij}m_{ij} & l_{ij}n_{ij} & 2l_{ij}^2 & 2l_{ij}m_{ij} & 2l_{ij}n_{ij} \\ l_{ij}m_{ij} & m_{ij}^2 & m_{ij}n_{ij} & 2l_{ij}m_{ij} & 2m_{ij}^2 & 2m_{ij}n_{ij} \\ l_{ij}n_{ij} & m_{ij}n_{ij} & n_{ij}^2 & 2l_{ij}n_{ij} & 2m_{ij}n_{ij} & 2n_{ij}^2 \end{bmatrix} \quad (٣٠-٤)$$

لاحظ أن تغيير الإحداثيات يحافظ على خواص التناظر لمصفوفتي الصلابة والكتلة.
بالنسبة للقوى المعطاة بالعلاقة (٤-١٧) لدينا:

$$[F_c] = [T^T][f_c] = \begin{Bmatrix} \left(\frac{f_{s1}l_e}{2} + f_{s1}\right)l_{ij} \\ \left(\frac{f_{s1}l_e}{2} + f_{s1}\right)m_{ij} \\ \left(\frac{f_{s1}l_e}{2} + f_{s1}\right)n_{ij} \\ \left(\frac{f_{s2}l_e}{2} + f_{s2}\right)l_{ij} \\ \left(\frac{f_{s2}l_e}{2} + f_{s2}\right)m_{ij} \\ \left(\frac{f_{s2}l_e}{2} + f_{s2}\right)n_{ij} \end{Bmatrix} \quad (٤-٣١)$$

لاحظ، أنه في نظام الإحداثيات الكلي الثلاثي الأبعاد، تكون أبعاد مصفوفتي الصلابة $[K_c]$ والكتلة $[M_c]$ مساوية 6×6 ، أما الانتقالات $[D_c]$ والقوى $[F_c]$ فهي أشعة أبعادها 6×1 .
الهياكل المستوية

بالنسبة للهياكل المستوية يمكن استخدام الإحداثيات الكلية $X-Y$ لتمثيل مستوي القضبان. كما يمكن الحصول على كل صياغات تغيير الإحداثيات من صياغة الهياكل في الفراغ بإزالة الصفوف و/أو الأعمدة المتعلقة بالإحداثيات Z (أو Z). يجب أن يكون الانتقال العقدة i في الإحداثيات العامة مركبتان فقط وفق الاتجاهين X و Y هما D_{2i-1} و D_{2i} . كما سيكون لتغيير الإحداثيات الذي يعطي العلاقة بين شعاع الانتقالات $\{d_c\}$ في مجموعة الإحداثيات الموضعية وشعاع الانتقالات $\{D_c\}$ نفس الصيغة في العلاقة (٤-١٨) ما عدا:

$$\{D_c\} = \begin{Bmatrix} D_{2i-1} \\ D_i \\ D_{2j-1} \\ D_{2j} \end{Bmatrix} \quad (٤-٣٢)$$

و تعطى مصفوفة التحويل $[T]$ بالعلاقة:

$$[T] = \begin{bmatrix} l_{ij} & m_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_{ij} & m_{ij} \end{bmatrix} \quad (٤-٣٣)$$

أما شعاع القوى في مجموعة الإحداثيات الكلية فيكون:

$$\{F_e\} = \begin{Bmatrix} F_{2i-1} \\ F_i \\ F_{2j-1} \\ F_{2j} \end{Bmatrix} \quad (٣٤-٤)$$

ستكون لكافة المعادلات الأخرى بالنسبة للهيكل المستوية نفس صيغة المعادلات الموافقة للقضبان الفراغية. تكون أبعاد المصفوفتين $[K_e]$ و $[M_e]$ للهيكل المستوية في نظام الإحداثيات الكلي 4×4 . تكتب هاتان المصفوفتان كالتالي:

$$\begin{aligned} [K_e] &= [T^T][k_e][T] \\ &= \begin{bmatrix} K_{11}^e & K_{12}^e & K_{13}^e & K_{14}^e \\ K_{12}^e & K_{22}^e & K_{23}^e & K_{24}^e \\ K_{13}^e & K_{23}^e & K_{33}^e & K_{34}^e \\ K_{14}^e & K_{24}^e & K_{34}^e & K_{44}^e \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (٣٥-٤)$$

$$= \frac{AE}{l_e} \begin{bmatrix} l_{ij}^2 & l_{ij}m_{ij} & -l_{ij}^2 & -l_{ij}m_{ij} \\ l_{ij}m_{ij} & m_{ij}^2 & -l_{ij}m_{ij} & -m_{ij}^2 \\ -l_{ij}^2 & -l_{ij}m_{ij} & l_{ij}^2 & l_{ij}m_{ij} \\ -l_{ij}m_{ij} & -m_{ij}^2 & l_{ij}m_{ij} & m_{ij}^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} [M_e] &= [T^T][m_e][T] \\ &= \begin{bmatrix} M_{11}^e & M_{12}^e & M_{13}^e & M_{14}^e \\ M_{12}^e & M_{22}^e & M_{23}^e & M_{24}^e \\ M_{13}^e & M_{23}^e & M_{33}^e & M_{34}^e \\ M_{14}^e & M_{24}^e & M_{34}^e & M_{44}^e \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (٣٦-٤)$$

$$= \frac{A\rho l_e}{6} \begin{bmatrix} 2l_{ij}^2 & 2l_{ij}m_{ij} & l_{ij}^2 & l_{ij}m_{ij} \\ 2l_{ij}m_{ij} & 2m_{ij}^2 & l_{ij}m_{ij} & m_{ij}^2 \\ l_{ij}^2 & l_{ij}m_{ij} & 2l_{ij}^2 & 2l_{ij}m_{ij} \\ l_{ij}m_{ij} & m_{ij}^2 & 2l_{ij}m_{ij} & 2m_{ij}^2 \end{bmatrix}$$

٤-٢-٥ الشروط الحدية

مصفوفة الصلابة في العلاقة (٤-٢٨) غير نظامية عادة، ذلك أن كامل الإنشاء يمكن أن يخضع لحركات جسم صلب. هناك درجتا طلاقة لحركة الجسم الصلب للهيكل المستوية وثلاث للقضبان الفراغية. يتم تقييد

العناصر المنتهية

حركات الجسم الصلب عن طريق المساند أو تثبيت الانتقال. عملياً، تثبيت الهياكل الشبكية عند بعض العقد بطريقة ما إلى الأرض أو إلى هيكل شبكي رئيسي. عند تثبيت عقدة يجب أن يكون الانتقال معدوماً عند هذه العقدة. يمكن فرض شرط التثبيت هذا في العلاقة (٤-٢٨). يقود هذا الشرط الحدي إلى إلغاء الصفوف والأعمدة الموافقة في مصفوفة الصلابة. بالتالي تغدو مصفوفة الصلابة المختصرة متناظرة وموجبة ومعروفة وذلك إذا تم تثبيت ما يكفي من الانتقالات.

٤-٢-٦ استنتاج الإجهادات والانفعالات

يمكن باستخدام الإجراءات القياسية حل المعادلة (٤-٢٨) والحصول على الانتقالات عند كافة العقد بعد فرض الشروط الحدية. كما يمكن الحصول على الانتقالات في أي موضع مختلف عن مواضع العقد عن طريق الاستيفاء باستخدام توابع الشكل. يمكن أيضاً استنتاج الإجهادات في عنصر القضيب باستخدام المعادلة التالية: (٤-٣٧)

للحصول على هذه العلاقة استخدمنا قانون هوك بالتلازم مع العلاقتين (٤-١٣) و (٤-١٨).

٤-٣ أمثلة توضيحية

٤-٣-١ المثال ١-٤: قضيب منتظم خاضع لقوة محورية

لدينا قضيب سطح مقطعه العرضي منتظم. نثبت القضيب في إحدى نهايتيه ونطبق حمولة أفقية عند نهايته الأخرى. يظهر الشكل ٤-٣ أبعاد القضيب، أما مادة القضيب فهي متجانسة ومتماثلة المناحي مع معامل يونغ .

الشكل ٤-٣: قضيب مثبت تحت حمولة ستاتيكية

الحل التحليلي

بما أن المسألة بسيطة فنقوم باستنباط الحل التحليلي. من الصيغة القوية للمعادلة الحاكمة (٢-٤٣) لدينا:

(٤-٣٨)

لاحظ أن القضيب في المثال الحالي لا يخضع لأية قوى حجمية وبالتالي . يمكن الحصول على الصيغة العامة لحل المعادلة (٤-٣٨) ببساطة:

(٤-٣٩)

حيث c_0 و c_1 هما ثابتان مجهولان نحصل عليهما بتطبيق الشروط الحدية. يمكن التعبير عن شرط الانتقال الحدي لهذه المسألة وفق:

$$u = 0 \quad \text{عندما} \quad x = 0 \quad (٤٠-٤)$$

أي أنه لدينا $c_0 = 0$ وتغدو المعادلة (٣٩-٤) كالتالي:

$$u(x) = c_1 x \quad (٤١-٤)$$

باستخدام المعادلات (٢، ٣٨) و (٢، ٣٩) و (٤١-٤) نحصل على:

$$\sigma_x = E \frac{\partial u}{\partial x} = c_1 E \quad (٤٢-٤)$$

يمكن التعبير عن شرط القوى الحدي على القضيب وفق:

$$\sigma_x = \frac{P}{A} \quad \text{عندما} \quad x = l \quad (٤٣-٤)$$

بمساواة الطرفين اليمينيين للعلاقين (٤٢-٤) و (٤٣-٤) نحصل على:

$$c_1 = \frac{P}{EA} \quad (٤٤-٤)$$

بتعويض العلاقة (٤٤-٤) في العلاقة (٤٢-٤) نحصل على الإجهاد في القضيب:

$$\sigma_x = \frac{P}{A} \quad (٤٥-٤)$$

أما الانتقالات في القضيب فنحصل عليها من تعويض العلاقة (٤٤-٤) في العلاقة (٤١-٤) كما يلي:

$$u(x) = \frac{P}{EA} x \quad (٤٦-٤)$$

عند النهاية $x = l$ لدينا:

$$u(x=l) = \frac{Pl}{EA} \quad (٤٧-٤)$$

الحل بطريقة العناصر المنتهية

باستخدام عنصر وحيد يمكن نمذجة القضيب كما في الشكل ٤-٤.

يمكن كتابة مصفوفة الصلابة للعنصر باستخدام العلاقة (١٥-٤):

$$K = k_e = \frac{AE}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (٤٨-٤)$$

حيث لا توجد حاجة لإجراء تغيير في الإحداثيات كون نظامي الإحداثيات الكلي والموضعي متطابقان.

الشكل ٤-٤: نموذج قضيب مثبت خاضع لحمولة ستاتيكية باستخدام عنصر وحيد

كما أنه لا توجد حاجة لإجراء عملية تجميع كون العنصر في النموذج وحيد. تصبح معادلة العنصر المنتهي:

$$(٤-٤٩)$$

حيث هي قوة رد الفعل عند العقدة ١ وهي مجهولة حتى الآن. ما نعرفه عند العقدة ١ هو شرط الانتقال الحادّي حسب المعادلة (٤-٤٠). يمكننا بالتالي إزالة المعادلة الأولى في العلاقة (٤-٤٩) أي:

$$(٤-٥٠)$$

مما يقودنا إلى:

$$(٤-٥١)$$

هذا الحل بطريقة العناصر المنتهية مطابق تماماً للحل التحليلي الذي حصلنا عليه في العلاقة (٤-٤٧). يمكن الحصول على توزيع الانتقالات في القضيب بتعويض العلاقتين (٤-٤٠) و (٤-٥١) في العلاقة (٤-١):

$$(٤-٥٢)$$

و هو أيضاً مطابق للحل التحليلي المستنبط في العلاقة (٤-٤٦). باستخدام العلاقات (٤-٣٧) و (٤-١٤) نحصل على الإجهاد في القضيب:

$$(٤-٥٣)$$

و هنا أيضاً حصلنا على حل مطابق للحل التحليلي المعطى بالعلاقة (٤-٤٥).

خصائص الحل بطريقة العناصر المنتهية

١ - خاصّة الاستنساخ في طريقة العناصر المنتهية

لدى استخدام طريقة العناصر المنتهية، نتوقع عادة الحصول على حل تقريبي فقط. إلا أننا في المثال ٤-١ حصلنا على الحل التحليلي. لماذا؟ يعود هذا الأمر لكون الحل التحليلي للانفعال في القضيب تابع من الدرجة

الأولى (انظر المعادلة (٤-٤١)). كما أن توابع الشكل المستخدمة في طريقة العناصر المنتهية هي أيضاً من الدرجة الأولى وتمّ بناؤها باستخدام قاعدة كاملة من وحيدات حدود من الدرجة الأولى. بهذا فإن الحل التحليلي للمسألة محتوى في مجموعة الانتقالات لتوابع الشكل. نفهم من الفصل الثالث أن طريقة العناصر المنتهية المعتمدة على مبدأ هاملتون تضمن الحصول على أفضل حل يمكن بناؤه عن طريق توابع الشكل. في المثال ٤-١ إن أفضل حل يمكن بناؤه عن طريق توابع الشكل هو الحل التحليلي وهذا يرجع لخاصة الاستنساخ لتوابع الشكل وقد أنتجت طريقة العناصر المنتهية بالفعل الحل التحليلي. يؤكد هذا الأمر خاصية الاستنساخ لطريقة العناصر المنتهية أي أنه إذا كان بالإمكان بناء الحل التحليلي بواسطة التوابع الأساسية المستخدمة لبناء توابع الشكل فإن طريقة العناصر المنتهية ستعطي دائماً الحل التحليلي طالما لا يوجد في العملية أية أخطاء حسابية.

٢- خاصة التقارب في طريقة العناصر المنتهية

لا يمكن في المسائل المعقدة كتابة الحل كتشكيل من أحاديّات الحلول. بهذا فإن طريقة العناصر المنتهية التي تستخدم كثيرات الحدود كتوابع شكل لن تنتج الحل التحليلي لمثل هذه المسائل. السؤال الذي يطرح نفسه هو كيف يمكن أن نؤكد أن طريقة العناصر المنتهية يمكن أن تزودنا بتقريب جيد للحل في هذه المسائل المعقدة؟ يمكن أن يأتي التأكيد من خاصية التقارب في طريقة العناصر المنتهية التي تقرّ بأن حل العناصر المنتهية سيتقارب من الحل التحليلي المستمر بدقة عشوائية عندما تصبح أبعاد العناصر متناهية في الصغر وما دامت قاعدة كثيرات الحدود الكاملة محتواة في القاعدة المعتمدة لبناء توابع الشكل. تستند القاعدة النظرية لهذا التقارب إلى حقيقة أن أي تابع مستمر يمكن تقريبه بتوابع من الدرجة الأولى مع خطأ تقرب من الدرجة الثانية. يمكن إيضاح هذه الحقيقة باستخدام نشر تايلور الموضوعي والذي بناءً عليه يمكن تقريب أي تابع مستمر أي الانتقالات $u(x)$ باستخدام العلاقة التالية:

$$u = u_i + \frac{\partial u}{\partial x_i} (x - x_i) + O(h^2) \quad (٤-٥٤)$$

حيث h هو البعد المميز المرتبط بالحد $x - x_i$ أو بعد العنصر.

من الوارد التساؤل عما إذا كان استخدام توابع ثابتة يمكن أن يؤلّد التابع u ولكن بدقة $O(h^1)$ تبعاً للعلاقة (٤-٥٤). على أي حال فإن الانتقالات الثابتة على العناصر لن تكون مستمرة بين العناصر إلا إذا كان حقل الانتقالات كله ثابتاً (حالة حركة الجسم الصلب). بالتالي لكي نضمن التقارب نحو حل مستمر يجب استخدام قاعدة كثيرات حدود من المرتبة الأولى على الأقل.

٣- معدل التقارب لنتائج طريقة العناصر المنتهية

يمكن كتابة نشر تايلور حتى المرتبة p وفق:

$$u = u_i + \frac{\partial u}{\partial x} \bigg|_i (x - x_i) + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \bigg|_i (x - x_i)^2 + \dots + \frac{1}{p!} \frac{\partial^p u}{\partial x^p} \bigg|_i (x - x_i)^p + O(h^{p+1}) \quad (٥٥-٤)$$

إذا استخدمت قاعدة كثيرات حدود حتى المرتبة p لبناء توابع الشكل فإن الحدود الأولى حتى $(p+1)$ في المعادلة (٥٥-٤) سيتم استنباطها باستخدام توابع الشكل لطريقة العناصر المنتهية. سيكون الخطأ من المرتبة $O(h^{p+1})$ وبالتالي سيكون معدل التقارب $O(h^{p+1})$. بالنسبة للعناصر الخطية لدينا $p=1$ ورتبة معدل التقارب ستكون $O(h^2)$. هذا يشير إلى أنه عند تقسيم بعد العناصر إلى النصف سينخفض الخطأ في الانتقالات إلى الربع.

خصائص طريقة العناصر المنتهية آنفة الذكر، أي الاستنساخ والتقارب، هي المفتاح لتزودنا طريقة العناصر المنتهية بنتائج عددية موثوقة لمسائل الميكانيك وذلك لعلمنا مسبقاً بنوعية النتائج التي سنحصل عليها. بالنسبة للمسائل البسيطة التي تقبل حلاً تحليلياً من نمط كثيرات الحدود، تستطيع طريقة العناصر المنتهية توليد حل تحليلي باستخدام أقل عدد من العناصر ما دامت قاعدة التوابع المستخدمة تحوي توابع من مرتبة الحل التحليلي. في المثال ٤-١ يكفي عنصر وحيد من المرتبة الأولى. في المسائل المعقدة حيث الحل التحليلي هو كثير حدود من مرتبة عليا أو ليس من نمط كثيرات الحدود، يعود للمستخدم اختيار الكثافة المناسبة لعناصر التقطيع للحصول على نتائج عددية دقيقة بما فيه الكفاية مع معدل تقارب $O(h^{p+1})$ للانتقالات.

كامتداد لهذه الملاحظات نذكر مفهومي ما يسمى بطريقة التكيف h (h -adaptivity) أو طريقة التكيف p (p -adaptivity) المستخدمة بكثرة في الدراسات الحديثة لطريقة العناصر المنتهية. نستخدم عادة h للإشارة إلى مواصفات أبعاد العنصر أما p فتشير إلى مرتبة توابع قاعدة كثيرات الحدود. للحصول على الدقة المطلوبة في نتائج التحليل، يعتمد التحليل باستخدام الطريقة h على عناصر أكثر نعومة في التقطيع (h أصغر) أما التحليل بالطريقة p فيعتمد على توابع شكل من مرتبة أعلى (p أعلى).

٤-٣-٢ مثال ٤-٢: هيكل شبكي مثلث الشكل خاضع لقوة شاقولية

لدينا الهيكل الشبكي المستوي الموضح في الشكل ٤-٥. يتألف الإنشاء من ثلاثة قضبان مستوية خاضعة لقوة شاقولية مطبقة نحو الأسفل على العقدة ٢ قيمتها ١٠٠٠ نيوتن. يظهر الشكل ترقيم العناصر المستخدمة (الأرقام ضمن مربعات) وترقيم العقد (الأرقام ضمن دوائر).

يبين الشكل ٤-٦ نظم الإحداثيات الموضعية للعناصر الثلاثة. كما يظهر الشكل ترقيم درجات الحرية الكلية $D_1, D_2, \dots, D_6$ الموافقة للعقد الثلاثة للإنشاء.

الشكل ٤-٥: هيكل شبكي مستوي بثلاثة قضبان

الشكل ٤-٦: الإحداثيات الموضعية ودرجات الطلاقة لعناصر الهيكل الشبكي

لاحظ أن هناك إجمالاً ست درجات طلاقة كلية توافق درجتي طلاقة في الاتجاهين و لكل عقدة. إلا أن هناك درجة طلاقة وحيادة لكل عقدة في الإحداثيات الموضعية لكل عنصر. يتضح من الشكل أن درجات الطلاقة في كل عقدة تنتج عن أكثر من عنصر. مثلاً عند العقدة الأولى تتأثر درجتا الطلاقة و بالعنصرين ١ و ٢. هذا سيؤدي دوراً هاماً في عملية تجميع مصفوفات العناصر المنتهية. يبين الجدول ٤-٢ أبعاد القضبان وخواص المواد المستخدمة.

الجدول ٤-٢: أبعاد ومواصفات المواد للقضبان

رقم العنصر	مساحة المقطع العرضي	الطول	معامل يونغ
()	()	()	()

١. الخطوة الأولى: حساب تجميعات التوجيه للعناصر

بمعرفة إحداثيات العقد في نظام الإحداثيات الكلي، ستكون الخطوة الأولى هي النظر في توجيه العناصر في نظام الإحداثيات الكلي. يمكن الحصول على هذا بحساب تجميعات التوجيه باستخدام العلاقة (٤-٢١). بما أن المسألة مستوية، ليس هناك حاجة لحساب الحدود n_{ij} . يوضح الجدول ٣-٤ إحداثيات العقد وتجميعات التوجيه m_{ij} و l_{ij} .

الجدول ٣-٤: الإحداثيات الكلية للعقد وتجميعات توجيه العناصر

رقم العنصر	العقدة الكلية الموافقة لـ		الإحداثيات في النظام الكلي				تجميعات التوجيه	
	العقدة الموضعية 1 (i)	العقدة الموضعية 2 (j)	X_i	Y_i	X_j	Y_j	l_{ij}	m_{ij}
1	1	2	0	0	1	0	1	0
2	1	3	0	0	0	1	0	1
3	3	3	1	0	0	1	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$

٢. الخطوة الثانية: حساب مصفوفات العنصر في مستوى الإحداثيات الكلي

بعد الحصول على تجميعات التوجيه أصبح بإمكاننا استنتاج مصفوفات العنصر في مستوى الإحداثيات الكلي. لاحظ هنا أن المسألة ستاتيكية وبالتالي لا داعي لحساب مصفوفة الكتلة للعناصر. أي أنه يبقى حساب مصفوفات الصلابة. نذكر هنا بأن أبعاد مصفوفة الصلابة في مستوى الإحداثيات الموضعية هو 2×2 لأن عدد درجات الطلاقة هو ٢ لكل عنصر. إلا أنه لدى التحويل إلى مستوى الإحداثيات الكلي سيصبح لكل عنصر ٤ درجات طلاقة وبالتالي ستكون أبعاد مصفوفة الصلابة لكل عنصر في مستوى الإحداثيات الكلية 4×4 . يمكن حساب مصفوفات الصلابة باستخدام العلاقة (٤-٣٥) كما يلي:

$$K^{el} = \frac{(0.1)(70 \times 10^9)}{1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (٤-٥٦)$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -7 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times 10^9 N/m^2$$

$$K^{e2} = \frac{(0.1)(70 \times 10^9)}{1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & 7 \end{bmatrix} \times 10^9 N/m^2 \quad (٥٧-٤)$$

$$K^{e3} = \frac{(0.1)(70 \times 10^9)}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{7}{2\sqrt{2}} & -\frac{7}{2\sqrt{2}} & -\frac{7}{2\sqrt{2}} & \frac{7}{2\sqrt{2}} \\ -\frac{7}{2\sqrt{2}} & \frac{7}{2\sqrt{2}} & \frac{7}{2\sqrt{2}} & -\frac{7}{2\sqrt{2}} \\ -\frac{7}{2\sqrt{2}} & \frac{7}{2\sqrt{2}} & \frac{7}{2\sqrt{2}} & -\frac{7}{2\sqrt{2}} \\ \frac{7}{2\sqrt{2}} & -\frac{7}{2\sqrt{2}} & -\frac{7}{2\sqrt{2}} & \frac{7}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix} \times 10^9 N/m^2 \quad (٥٨-٤)$$

٣. الخطوة الثالثة: تجميع مصفوفات العناصر المنتهية الكلية

بعد الحصول على مصفوفات العنصر ستكون الخطوة التالية تجميع مصفوفات العناصر في مصفوفة العناصر المنتهية الكلية. بما أن عدد درجات الطلاقة للهيكل الشبكي هو ٦ فإن أبعاد مصفوفة الصلابة ستكون 6×6 . يتم التجميع بإضافة مساهمة كل عقدة للعنصر الذي يشارك في هذه العقدة. مثلاً، بالنظر في الشكل ٤-٦ يمكن ملاحظة أن العنصر ١ يساهم في درجتَي طلاقة العقدة ١ أي D_1 و D_2 ولكن أيضاً في درجتَي طلاقة العقدة ٢ أي D_3 و D_4 . من جهة أخرى، يساهم العنصر ٢ في درجتَي طلاقة العقدة ١ أي D_1 و D_2 كما

يساهم في D_5 و D_6 درجتَي طلاقة العقدة ٣. بإضافة هذه المساهمات من مصفوفات العناصر في المواضع الموافقة لدرجات الطلاقة في المصفوفة الكلية نحصل على مصفوفة الصلابة الكلية. تسمى عملية التجميع هذه بالتجميع المباشر. عند بداية التجميع تكون كافة حدود مصفوفة الصلابة الكلية مساوية للصفر. بإضافة مصفوفة العنصر ١ في المصفوفة الكلية نحصل:

$$K = 10^9 \times \begin{array}{cccccccc} & D_1 & D_2 & D_3 & D_4 & & & \\ & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & & \\ \left[\begin{array}{cccccccc} \boxed{7} & 0 & \boxed{-7} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{-7} & 0 & \boxed{7} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] & \begin{array}{l} \rightarrow D_1 \\ \rightarrow D_2 \\ \rightarrow D_3 \\ \rightarrow D_4 \end{array} \end{array} \quad (٥٩-٤)$$

حيث نلاحظ أن العنصر ١ يساهم في درجات الطلاقة D_1 حتى D_4 . بإضافة مصفوفة العنصر ٢ إلى المصفوفة الكلية السابقة يصبح لدينا:

$$K = 10^9 \times \begin{array}{cccccccc} & D_1 & D_2 & & D_5 & D_6 & & \\ & \uparrow & \uparrow & & \uparrow & \uparrow & & \\ \left[\begin{array}{cccccccc} 7 + \boxed{0} & 0 + \boxed{0} & -7 & 0 & \boxed{0} & \boxed{0} \\ 0 + \boxed{0} & 0 + \boxed{7} & 0 & 0 & \boxed{0} & \boxed{-7} \\ -7 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{0} & \boxed{0} & 0 & 0 & \boxed{0} & \boxed{0} \\ \boxed{0} & \boxed{-7} & 0 & 0 & \boxed{0} & \boxed{7} \end{array} \right] & \begin{array}{l} \rightarrow D_1 \\ \rightarrow D_2 \\ \\ \\ \rightarrow D_5 \\ \rightarrow D_6 \end{array} \end{array} \quad (٦٠-٤)$$

يساهم العنصر ٢ في درجات الطلاقة D_1 و D_2 و D_5 و D_6 . ختاماً بإضافة مصفوفة العنصر ٣ إلى المصفوفة السابقة نحصل على:

$$\begin{array}{cccccc}
 & D_3 & D_4 & D_5 & D_6 & \\
 & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\
 K = 10^9 \times \begin{bmatrix} 7 & 0 & -7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & -7 \\ -7 & 0 & 7 + \frac{7}{\sqrt{2}} & \frac{-7}{\sqrt{2}} & \frac{-7}{\sqrt{2}} & \frac{7}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{-7}{\sqrt{2}} & \frac{7}{\sqrt{2}} & \frac{7}{\sqrt{2}} & \frac{-7}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{-7}{\sqrt{2}} & \frac{7}{\sqrt{2}} & \frac{7}{\sqrt{2}} & \frac{-7}{\sqrt{2}} \\ 0 & -7 & \frac{7}{\sqrt{2}} & \frac{-7}{\sqrt{2}} & \frac{-7}{\sqrt{2}} & 7 + \frac{7}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \rightarrow D_3 \\ \rightarrow D_4 \\ \rightarrow D_5 \\ \rightarrow D_6 \end{array} & (٦١-٤)
 \end{array}$$

حيث يساهم العنصر ٣ في درجات الطلاقة D_3 حتى D_6 . باختصار يصبح لدينا مصفوفة الصلابة الكلية:

$$\begin{array}{cccccc}
 D_1 & D_2 & D_3 & D_4 & D_5 & D_6 \\
 \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\
 K = 10^9 \times \begin{bmatrix} 7 & 0 & -7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & -7 \\ -7 & 0 & 7 + \frac{7}{\sqrt{2}} & \frac{-7}{\sqrt{2}} & \frac{-7}{\sqrt{2}} & \frac{7}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{-7}{\sqrt{2}} & \frac{7}{\sqrt{2}} & \frac{7}{\sqrt{2}} & \frac{-7}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{-7}{\sqrt{2}} & \frac{7}{\sqrt{2}} & \frac{7}{\sqrt{2}} & \frac{-7}{\sqrt{2}} \\ 0 & -7 & \frac{7}{\sqrt{2}} & \frac{-7}{\sqrt{2}} & \frac{-7}{\sqrt{2}} & 7 + \frac{7}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \rightarrow D_1 \\ \rightarrow D_2 \\ \rightarrow D_3 \\ \rightarrow D_4 \\ \rightarrow D_5 \\ \rightarrow D_6 \end{array} & (٦٢-٤)
 \end{array}$$

عملية التجميع المباشر الموضحة أعلاه بسيطة ويمكن برمجتها على الحاسوب بسهولة كبيرة. كل ما نحتاج فعله هو إضافة محتوى مصفوفات العناصر في المواضع الموافقة من مصفوفة الصلابة الكلية. يتم تبسيط عملية إيجاد المواضع الموافقة باستخدام ما يسمى بالدلائل التي تعطي العلاقة بين رقم العنصر وأرقام العقد الكلية.

قد نتساءل هنا كيف يمكن ببساطة إضافة مصفوفات العناصر في المصفوفة الكلية؟ وما الذي يبرهن أن هذه العملية تقود بالتأكيد لمصفوفة الصلابة الكلية؟ الجواب هو أنه يمكننا إنجاز ذلك ويمكن صياغة البرهان بسهولة باستخدام شروط التوازن العامة في كل العقد في مجال الدراسة. فيما يلي سنقدم برهاناً بسيطاً على ذلك.

يتم البرهنة على نتيجة التجميع لحدود السطر الثالث من مصفوفة الصلابة الكلية المعطاة بالعلاقة (٦٢-٤). عملية البرهان هذه تنطبق تماماً على كافة الأسطر المتبقية. بالنسبة للسطر الثالث من المعادلة تعتبر توازن القوى في الاتجاه x على العقدة ٢ من العنصرين ١ و ٣، هذا يوافق درجة الطلاقة الكلية الثالثة في الهيكل الشبكي والتي تربط العنصرين الأول والثالث. في المسائل الستاتيكية يمكن كتابة معادلة العناصر المنتهية للعنصر الأول وفق الصيغة العامة التالية (في مستوى الإحداثيات الكلية):

$$\begin{bmatrix} K_{11}^{e1} & K_{12}^{e1} & K_{13}^{e1} & K_{14}^{e1} \\ K_{12}^{e1} & K_{22}^{e1} & K_{23}^{e1} & K_{24}^{e1} \\ K_{13}^{e1} & K_{23}^{e1} & K_{33}^{e1} & K_{34}^{e1} \\ K_{14}^{e1} & K_{24}^{e1} & K_{34}^{e1} & K_{44}^{e1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^{e1} \\ F_2^{e1} \\ F_3^{e1} \\ F_4^{e1} \end{Bmatrix} \quad (٦٣-٤)$$

توافق المعادلة الثالثة من العلاقة (٦٣-٤) درجة الطلاقة الكلية الثالثة وهي:

$$K_{13}^{e1}D_1 + K_{23}^{e1}D_2 + K_{33}^{e1}D_3 + K_{34}^{e1}D_4 = F_3^{e1} \quad (٦٤-٤)$$

كما يمكن كتابة معادلة العناصر المنتهية للعنصر الثالث وفق الصيغة العامة التالية:

$$\begin{bmatrix} K_{11}^{e3} & K_{12}^{e3} & K_{13}^{e3} & K_{14}^{e3} \\ K_{12}^{e3} & K_{22}^{e3} & K_{23}^{e3} & K_{24}^{e3} \\ K_{13}^{e3} & K_{23}^{e3} & K_{33}^{e3} & K_{34}^{e3} \\ K_{14}^{e3} & K_{24}^{e3} & K_{34}^{e3} & K_{44}^{e3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_3^{e3} \\ F_4^{e3} \\ F_5^{e3} \\ F_6^{e3} \end{Bmatrix} \quad (٦٥-٤)$$

توافق المعادلة الأولى من العلاقة (٦٥-٤) درجة الطلاقة الكلية الثالثة وهي:

$$K_{11}^{e3}D_1 + K_{12}^{e3}D_2 + K_{13}^{e3}D_3 + K_{14}^{e3}D_4 = F_3^{e3} \quad (٦٦-٤)$$

تتكون القوى المطبقة على العقدة ٢ وفق الاتجاه x من القوة F_3^{e1} من العنصر الأول والقوة F_3^{e3} من العنصر الثالث والقوة الخارجية المحتملة F_3 . يجب أن تحقق هذه القوى معادلة التوازن التالية:

$$F_3^{e1} + F_3^{e3} = F_3 \quad (٦٧-٤)$$

بتعويض العلاقتين (٦٤-٤) و (٦٦-٤) في العلاقة السابقة نجد:

$$K_{13}^{e1}D_1 + K_{23}^{e1}D_2 + (K_{33}^{e1} + K_{11}^{e3})D_3 + (K_{34}^{e1} + K_{12}^{e3})D_4 + K_{13}^{e3}D_5 + K_{14}^{e3}D_6 = F_3 \quad (٦٨-٤)$$

مما يؤكد أن الحدود في الطرف الأيسر من المعادلة السابقة هي حدود السطر الثالث من مصفوفة الصلابة الكلية المعطاة بالعلاقة (٦٢-٤). يبقى هذا البرهان صالحاً لكافة الصفوف في مصفوفة الصلابة الكلية.

٤. الخطوة الرابعة: تطبيق الشروط الحدية

يمكن بشكل عام اختزال أبعاد المصفوفة الكلية بتطبيق الشروط الحدية. في حالتنا تكون درجات الطلاقة D_1 و D_2 و D_3 مقيّدة وبالتالي:

$$D_1 = D_2 = D_3 = 0 \quad (٦٩-٤)$$

هذا يعني أن الصفوف الأولى والثاني والخامس لن يكون لها تأثير على حل المعادلة المصفوفاتية وبالتالي يمكننا تبسيط هذه المعادلة بإزالة هذه الصفوف والأعمدة الموافقة:

$$K = 10^9 \times \begin{bmatrix} 7 & 0 & -7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & -7 \\ -7 & 0 & 7 + \frac{7}{\sqrt{2}} & \frac{-7}{\sqrt{2}} & \frac{-7}{\sqrt{2}} & \frac{7}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{-7}{\sqrt{2}} & \frac{7}{\sqrt{2}} & \frac{7}{\sqrt{2}} & \frac{-7}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{-7}{\sqrt{2}} & \frac{7}{\sqrt{2}} & \frac{7}{\sqrt{2}} & \frac{-7}{\sqrt{2}} \\ 0 & -7 & \frac{7}{\sqrt{2}} & \frac{-7}{\sqrt{2}} & \frac{-7}{\sqrt{2}} & 7 + \frac{7}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{matrix} \rightarrow D_1 \\ \rightarrow D_2 \\ \rightarrow D_3 \\ \rightarrow D_4 \\ \rightarrow D_5 \\ \rightarrow D_6 \end{matrix} \quad (٧٠-٤)$$

فتصبح مصفوفة الصلابة الكلية المختزلة بأبعاد 3×3 كما يلي:

$$K = \begin{bmatrix} 7 + \frac{7}{2\sqrt{2}} & -\frac{7}{2\sqrt{2}} & \frac{7}{2\sqrt{2}} \\ -\frac{7}{2\sqrt{2}} & \frac{7}{2\sqrt{2}} & -\frac{7}{2\sqrt{2}} \\ \frac{7}{2\sqrt{2}} & -\frac{7}{2\sqrt{2}} & 7 + \frac{7}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix} \times 10^9 N / m^2 \quad (٧١-٤)$$

ويمكننا بسهولة التأكد أن مصفوفة الصلابة هذه متناظرة وموجبة وغير شاذة. تغدو معادلة العناصر المنتهية:

$$[K]\{D\} = \{F\} \quad (٧٢-٤)$$

حيث

$$\{D\} = \begin{Bmatrix} D_3 \\ D_4 \\ D_6 \end{Bmatrix} \quad (٧٣-٤)$$

ويعطى شعاع القوى وفق:

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -1000 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (٧٤-٤)$$

لاحظ أن القوة الوحيدة المطبقة هي عند العقدة ٢ باتجاه D_4 أي نحو الأسفل. تكافئ العلاقة (٧٢-٤) في المواقع ثلاث معادلات في آن واحد للمتحويلات D_3 و D_4 و D_6 وفق التالي:

$$\begin{aligned} \left[\left(7 + \frac{7}{2\sqrt{2}} \right) D_3 - \frac{7}{2\sqrt{2}} D_4 + \frac{7}{2\sqrt{2}} D_6 \right] \times 10^9 &= 0 \\ \left[\frac{7}{2\sqrt{2}} D_3 + \frac{7}{2\sqrt{2}} D_4 - \frac{7}{2\sqrt{2}} D_6 \right] \times 10^9 &= -1000 \\ \left[\frac{7}{2\sqrt{2}} D_3 - \frac{7}{2\sqrt{2}} D_4 + \left(7 + \frac{7}{2\sqrt{2}} \right) D_6 \right] \times 10^9 &= 0 \end{aligned} \quad (٧٥-٤)$$

٥. الخطوة الخامسة: حل معادلة العناصر المنتهية المصفوفاتية

الخطوة النهائية ستكون حل معادلة العناصر المنتهية أي المعادلات (٧٢-٤) أو (٧٥-٤) وذلك للحصول على D_3 و D_4 و D_6 . يمكن حل هذه المعادلات يدوياً كونها ثلاث معادلات بثلاثة مجاهيل. بهذا نحصل على:

$$\begin{aligned} D_3 &= -1.429 \times 10^{-7} m \\ D_4 &= -6.898 \times 10^{-7} m \\ D_6 &= -1.429 \times 10^{-7} m \end{aligned} \quad (٧٦-٤)$$

للحصول على الإجهادات في العناصر نستخدم العلاقة (٣٧-٤) كالتالي:

$$\begin{aligned} \sigma_v^I &= E[B][T]\{D_e\} \\ &= 70 \times 10^9 \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1.429 \times 10^{-7} \\ -6.898 \times 10^{-7} \end{Bmatrix} = -10003 Pa \end{aligned} \quad (٧٧-٤)$$

$$\sigma_N^2 = E[B][T]\{D_e\}$$

$$= 70 \times 10^9 \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1.429 \times 10^{-7} \end{Bmatrix} = 10003 Pa \quad (٧٨-٤)$$

$$\sigma_N^3 = E[B][T]\{D_e\}$$

$$= 70 \times 10^9 \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -1.429 \times 10^{-7} \\ -6.898 \times 10^{-7} \\ 0 \\ -1.429 \times 10^{-7} \end{Bmatrix}$$

$$= 14140 Pa \quad (٧٩-٤)$$

عادة تكون المسائل الهندسية أكبر بكثير أي أن عدد المجاهيل أو درجات الطلاقة سيكون أيضاً أكبر بكثير. بالتالي لا بد من استخدام الطرائق العددية أو ما يسمى بإجرائيات الحل للتعامل مع معادلات العناصر المنتهية. تتعامل المسائل الهندسية الحقيقية عادة مع مئات الألوف إن لم يكن ملايين درجات الطلاقة. يتوفر العديد من إجرائيات الحل الجاهزة في المكتبات الرياضية أو العددية الموجودة على أنظمة الحاسب.

٤-٤ العناصر أحادية البعد في الاهتزازات الحرة

تعطى العلاقة العامة في الاهتزازات الحرة بالعلاقة:

$$m \ddot{u} + k u = 0 \quad (٨٠-٤)$$

بإستبدال مصفوفة الصلابة (٤-١٥) والكتلة (٤-١٦) نجد:

$$[m_e] \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + [k_e] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (٨١-٤)$$

$$\frac{A \rho l_e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \frac{AE}{l_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

إن شكل الحل للاهتزازات الحرة دوماً من الشكل:

$$u = A e^{i \omega t} \quad (٨٢-٤)$$

نشتق بالنسبة للزمن نجد السرعة:

$$\dot{u} = \frac{du}{dt} = A i \omega e^{i \omega t} \quad (٨٣-٤)$$

نشتق السرعة فنحصل على التسارع

(٨٤-٤)

نعوض (٨٤-٤) و (٨٢-٤) في (٨١-٤) فنجد

(٨٥-٤)

(٨٦-٤)

٤-٥ العناصر أحادية البعد من مراتب أعلى

لا توجد حاجة لاستخدام عناصر من مراتب أعلى للقضبان التي لا تخضع لقوى حجمية، ذلك أنه يمكن للعنصر الخطي إعطاء حل تحليلي كما وضحنا في المثال ٤-١. إلا أنه عندما تخضع القضبان لقوى حجمية موزعة بشكل عشوائي على طول الاتجاه المحوري لهذه القضبان فإنه يمكن استخدام عناصر ذات درجة أعلى لمزيد من الدقة في التحليل. تبقى إجرائية تطوير هذه العناصر أحادية البعد ذات المرتبة الأعلى مماثلة لتلك المستخدمة في العناصر الخطية. الاختلاف الوحيد هو توابع الشكل. عادة، عند استنباط توابع الشكل من درجة أعلى نستخدم الإحداثية الطبيعية بدلاً من الإحداثية الفيزيائية. تعرف الإحداثية الطبيعية كما يلي:

(٨٧-٤)

حيث هي الإحداثية الفيزيائية لنقطة الوسط للعنصر الأحادي البعد. يعرف العنصر في نظام الإحداثيات الطبيعي ضمن المجال . يظهر الشكل ٤-٧ عنصراً أحادي البعد من المرتبة ٧. يحتوي على عقدة.

يمكن كتابة توابع الشكل لهذا العنصر وفق الصيغة التالية المسماة استيفاءات لاغرانج:

(٨٨-٤)

حيث هي استيفاءات لاغرانج الشهيرة والمعرفة كما يلي:

...
... (٨٩-٤)

من الواضح في العلاقة (٨٢-٤) أنه:

في العقدة عندما
(٩٠-٤)

في بقية العقد

بالتالي فإن توابع الشكل ذات المرتبة الأعلى والمعرفة بالعلاقة (٨١-٤) تحقق خاصية توابع دلنا.

الشكل ٨-٤: العنصر أحادي البعد التربيقي والتكعيي مع عقد موزعة بانتظام

() عنصر تربيقي - () عنصر تكعيبي

باستخدام العلاقة (٨٢-٤) فإن العنصر التربيقي أحادي البعد يحوي ثلاث عقد كما هو موضح في الشكل ٨-٤ ، يمكن الحصول على هذا العنصر تفصيلياً وفق:

(٩١-٤)

بالعودة للجدول (١-٤) نجد أن الحالة المدروسة (عنصر قضيب و ذو ثلاث درجات طلاقة (تكون رتبة كثير الحدود ٢.

كذلك يمكن الحصول على العنصر التكعيبي أحادي البعد بأربعة عقد وفق:

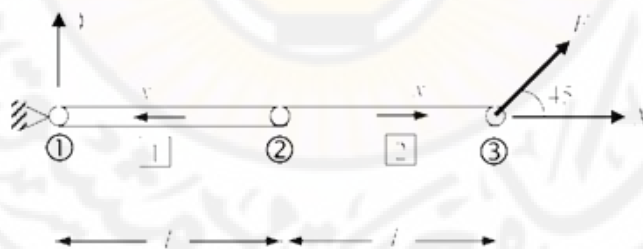
(٩٢-٤)

بالعودة للجدول (١-٤) نجد أن الحالة المدروسة (عنصر قضيب وذو أربع درجات طلاقة) تكون رتبة كثير الحدود .

٤-٦ أمثلة تطبيقية:

٤-٦-١ مثال ٤-٣: إنشاء ذو عنصري قضيب

لدينا الإنشاء المؤلف من عنصري قضيب متوضعين بشكل أفقي، والمبين بالشكل ٤-٩، حيث تم وضع ترقيم العناصر المستخدمة (ضمن مربعات) والعقد (ضمن دوائر)، كما حددت محاور الإحداثيات الموضعية لكل عنصر والكلية المرتبطة بالإنشاء ، بفرض أن طول كل عنصر هو وأن مساحة المقطع العرضي لكل من القضبان هو وأن معامل يونغ لمعدن هذين القضيبين هو ، كما تم تثبيت العقدة الأولى تثبيتاً تاماً وتطبيق قوة مائلة بزاوية 45° درجة بالنسبة للمحور .



الشكل ٤-٩: إنشاء ذو عنصري قضيب

والمطلوب:

١. اكتب مصفوفة الصلابة لكل من هذين العنصرين ومصفوفة الصلابة الكلية لهذا الإنشاء.
٢. احسب انتقال كل من عقد الإنشاء بدلالة المقطع العرضي ومعامل يونغ لقضبان الإنشاء.
٣. احسب ردود الأفعال في العقد الأولى.
٤. احسب الإجهادات في كل من عنصري الهيكل.

تكتب مصفوفة الصلابة (٤-١٥) لكلا العنصرين على الشكل التالي:

$$[K^{e1}] = [K^{e2}] = \frac{AE}{l} \times \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (٩٣-٤)$$

ومصفوفة الصلابة الكلية تكتب على الشكل التالي:

$$[K] = \frac{AE}{l} \times \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (٩٤-٤)$$

لحساب انتقال كل من عقد الإنشاء بدلالة المقطع العرضي نقوم بتطبيق الشروط الحدية حيث $D_1 = 0$ فتصبح معادلة العناصر المنتهية للإنشاء بعد حذف السطر الأول والعمود الأول من (٩٤-٤) على الشكل:

$$[K] \cdot \{U\} = \{F\}$$

$$\frac{AE}{l} \times \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{F\sqrt{2}}{2} \\ \frac{F\sqrt{2}}{2} \end{Bmatrix} \quad (٩٥-٤)$$

$$D_2 = \frac{Fl}{AE} \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$D_3 = \frac{Fl}{AE} \sqrt{2} \quad (٩٦-٤)$$

لحساب ردود الأفعال في العقدة الأولى، نقوم بتطبيق المعادلة الأساسية للعناصر المنتهية $\{K\} \cdot \{U\} = \{F\}$ ، فنجد بعد تعويض قيم D_2 و D_3 من العلاقة (٩٦-٤) (٩٧-٤)

$$\frac{AE}{l} \times \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{Fl}{AE} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{Fl}{AE} \sqrt{2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ 0 \\ F \frac{\sqrt{2}}{2} \end{Bmatrix} \quad (٩٧-٤)$$

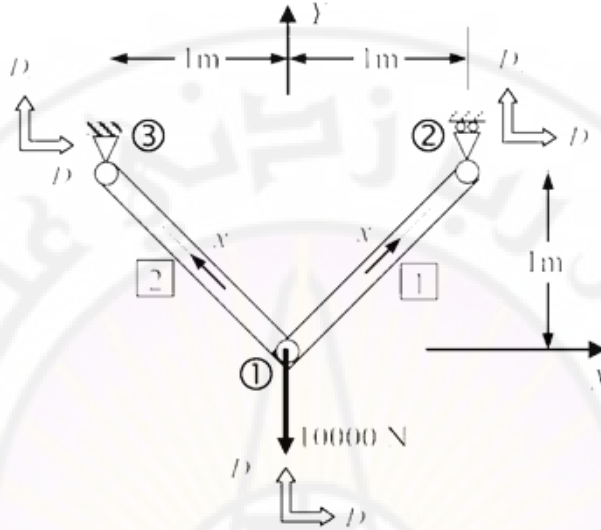
$$F_1 = -F \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (٩٨-٤)$$

وتكون الإجهادات في كل من عنصري الهيكل:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{F}{A} \quad (٩٩-٤)$$

٤-٦-٢ مثال ٤-٤: هيكل شبكي مستوي ثنائي العناصر

لدينا الهيكل الشبكي المستوي الموضح في الشكل ٤-١٠، يتألف هذا الإنشاء من قضيبين خاضعين لقوة شاقولية مطبقة نحو الأسفل عند العقدة ② قيمتها ١٠٠٠٠ نيوتن.



الشكل ٤-١٠: هيكل شبكي مستوي ثنائي لعناصر

يظهر الشكل ترقيم العناصر المستخدمة (ضمن مربعات) وترقيم العقد (ضمن دوائر) بالإضافة لمحاور الإحداثيات الكلية $X-Y$ المرتبطة بالإنشاء ومحاور الإحداثيات الموضعية x المرتبطة بكل عنصر. تبلغ مساحة المقطع العرضي لكل قضيب $10^{-3} m^2$ أما معدن هذه القضبان فهو من الفولاذ ذي معامل يونغ $21 \times 10^{10} N/m^2$.

المطلوب:

١. احسب تيجيات التوجيه لكل من عنصري الهيكل.
٢. اكتب مصفوفة الصلابة لكل من العنصرين في مستوى الإحداثيات الكلية.
٣. اكتب مصفوفة الصلابة الكلية للإنشاء في مستوى الإحداثيات الكلية.
٤. اكتب المعادلة المصفوفاتية للعناصر المنتهية بعد تطبيق الشروط الحدية.
٥. متى تكون مصفوفة الصلابة شاذة؟ وماذا يعني عملياً هذا الأمر؟
٦. هل يمكن حساب الانتقالات غير المقيدة لعقد هذا الإنشاء أي (D_1, D_2, D_3) ؟ كيف تبرّر ذلك؟

الحل:

- ١- يبين الجدول ٤-٤ تيجيات التوجيه لكل من عنصري الهيكل.

جدول ٤-٤: تجميعات التوجيه لكل من عنصري الهيكل

رقم العنصر	العقدة الكلية الموافقة لـ		الإحداثيات في النظام الكلي				طول العنصر	تجميعات التوجيه	
	العقدة الموضعية ١ (i)	العقدة الموضعية ٢ (j)	X_i	Y_i	X_j	Y_j		l_{ij}	m_{ij}
1	1	2	0	0	1	1	$\sqrt{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
2	1	3	0	0	-1	1	$\sqrt{2}$	$\frac{-1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$

٢- مصفوفة الصلابة لكل من العنصرين في مستوي الإحداثيات الكلي: سبق أن وجدنا المصفوفة المعبرة عن مصفوفة الصلابة العنصرية في مستوي الإحداثيات العامة (٤-٣٥) التالية:

$$[K^e] = \frac{AE}{l_e} \begin{bmatrix} l_{ij}^2 & l_{ij}m_{ij} & -l_{ij}^2 & -l_{ij}m_{ij} \\ l_{ij}m_{ij} & m_{ij}^2 & -l_{ij}m_{ij} & -m_{ij}^2 \\ -l_{ij}^2 & -l_{ij}m_{ij} & l_{ij}^2 & l_{ij}m_{ij} \\ -l_{ij}m_{ij} & -m_{ij}^2 & l_{ij}m_{ij} & m_{ij}^2 \end{bmatrix}$$

وباستخدامها نجد أن مصفوفة الصلابة للعنصر الأول العامل بين درجات الحرية D_1 و D_2 و D_3 و D_4 . نجد:

$$[K^{e1}] = \frac{10^{-3} \times 21 \times 10^{10}}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{21 \times 10^7}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (٤-١٠٠)$$

مصفوفة الصلابة للعنصر الثاني العامل بين درجات الحرية D_1 و D_2 و D_5 و D_6 . نجد:

$$[K^{e2}] = \frac{10^{-3} \times 21 \times 10^{10}}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{21 \times 10^7}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (٤-١٠١)$$

٣- مصفوفة الصلابة الكلية للإنشاء في مستوي الإحداثيات الكلي.

$$[K] = \frac{21 \times 10^7}{2\sqrt{2}} \times \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (١٠٢-٤)$$

٤- لكتابة المعادلة المصفوفاتية للعناصر المنتهية بعد تطبيق الشروط الحدية، نقوم بتطبيق الشروط الحدية

$$D_4 = D_5 = D_6 = 0 \text{ الموافقة لحذف الأسطر والأعمدة ٤ و ٥ و ٦ من المصفوفة السابقة تصبح المعادلة}$$

$$\frac{21 \times 10^6}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -10000 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (١٠٣-٤)$$

٥- تكون مصفوفة الصلابة شاذة عندما يكون المعين معدوماً وبالتالي تكون غير قابلة للقلب. عملياً هذا يعني

أن مجموعة المعادلات ليس لها حل وحيد بسبب وجود حركة جسم صلب أو عدم الاستقرار في الإنشاء.

٦- نلاحظ أن معين المصفوفة المختزلة في السؤال الرابع معدوم وبالتالي لا يوجد حل لهذه المعادلات ولا يمكن حساب الانتقالات في العقد الطليقة. نبرر ذلك كون الإنشاء غير مستقر فيما يتعلق بالانزلاق الأفقي للعقدة الثانية.

٤-٦-٣ مثال ٤-٥: هيكل شبكي مستوي ثلاثي العناصر

نضيف للإنشاء السابق قضيباً ثالثاً له نفس مواصفات القضيبين الأولين. يربط هذا القضيب الإضافي بين

العقدتين الثانية والثالثة مع المحافظة على الحمولة والشروط الحدية دون أي تعديل كما يبين الشكل ٤-١١، والمطلوب:

١١، والمطلوب:

١- حساب تيجيات التوجيه للعنصر الثالث.

٢- اكتب مصفوفة الصلابة للعنصر الثالث في مستوى الإحداثيات الكلي.

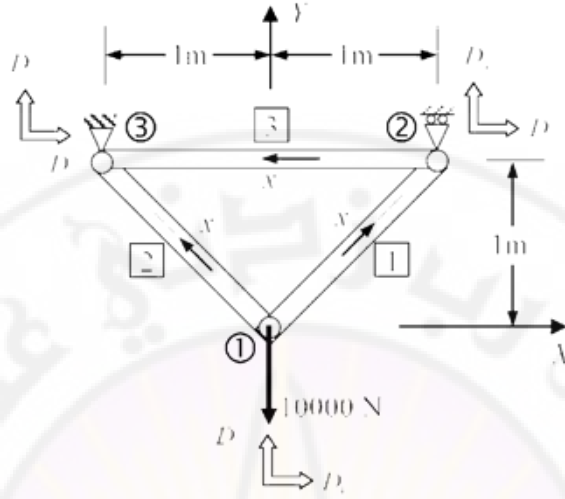
٣- اكتب مصفوفة الصلابة الكلية للإنشاء في مستوى الإحداثيات الكلي.

٤- اكتب المعادلة المصفوفاتية للعناصر المنتهية بعد تطبيق الشروط الحدية.

٥- احسب الانتقالات غير المقيدة لعقد هذا الإنشاء (D_1, D_2, D_3).

٦- احسب الإجهادات في كل من عناصر الهيكل.

٧- احسب ردود الأفعال في العقد المقيدة (F_4, F_5, F_6).



الشكل ٤-١١: هيكل شبكي مستو ثلاثي العناصر

الحل:

١- يبين الجدول ٤-٥ تجميعات التوجيه للعناصر الثلاثة.

جدول ٤-٥: تجميعات التوجيه للعناصر الثلاثة.

رقم العنصر	العقدة الكلية الموافقة لـ		الإحداثيات في النظام الكلي				طول العنصر		تجميعات التوجيه	
	العقدة الموضعية (i) 1	العقدة الموضعية (j) 2	X_i	Y_i	X_j	Y_j			l_{ij}	m_{ij}
1	1	2	0	0	1	1	$\sqrt{2}$		$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$
2	1	3	0	0	-1	1	$\sqrt{2}$		$-1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$
3	2	3	1	1	-1	1	2		-1	0

٢- مصفوفة الصلابة للعنصر الثالث في مستوي الإحداثيات الكلي.

$$[K^{e3}] = \frac{21 \times 10^6}{2\sqrt{2}} \times \begin{bmatrix} \boxed{\sqrt{2}} & \boxed{0} & \boxed{-\sqrt{2}} & \boxed{0} \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} \\ \boxed{-\sqrt{2}} & \boxed{0} & \boxed{\sqrt{2}} & \boxed{0} \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} \end{bmatrix} \quad (٤-١٠)$$

٣- مصفوفة الصلابة الكلية للإنشاء في مستوي الإحداثيات الكلي.

$$[K] = \frac{21 \times 10^6}{2\sqrt{2}} \times \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1+\sqrt{2} & 1 & \sqrt{2} & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -\sqrt{2} & 0 & 1+\sqrt{2} & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (١٠٥-٤)$$

٤- تكتب المعادلة المصفوفاتية للعناصر المنتهية بعد تطبيق الشروط الحدية، عبر تطبيق الشروط الحدية $D_4 = D_5 = D_6 = 0$ الموافقة لحذف الأسطر والأعمدة ٤ و ٥ و ٦ من المصفوفة السابقة تصبح المعادلة:

$$\frac{21 \times 10^6}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1+\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -10000 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (١٠٦-٤)$$

٥- يتم حساب الانتقالات غير المقيدة لعقد هذا الإنشاء (D_3 و D_2 ، D_1)، بحل هذه المعادلات نجد:

$$D_1 = -238 \times 10^{-6} m ; D_2 = -911 \times 10^{-6} m ; D_3 = -476 \times 10^{-6} m$$

٦- الإجهادات في كل من عناصر الهيكل:

$$\begin{aligned} \sigma_v^1 &= E[B^1][T^1]\{D_e^1\} \\ &= 21 \times 10^{10} \times \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (١٠٧-٤) \\ &= 7.07 \times 10^7 Pa = 70.7 MPa \end{aligned}$$

$$\sigma_x^2 = E[B^2][T^2]\{D_e^2\}$$

$$= 21 \times 10^{10} \times \begin{bmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (١٠٨-٤)$$

$$= 7.07 \times 10^7 Pa = 70.7 MPa$$

$$\sigma_x^3 = E[B^3][T^3]\{D_e^3\}$$

$$= 21 \times 10^{10} \times \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (١٠٩-٤)$$

$$= -5 \times 10^7 Pa = -50 MPa$$

٧- نحسب ردود الأفعال في العقد المقيدة (F_6, F_5, F_4)، بتطبيق المعادلة الأساسية للعناصر المنتهية:

$$[K]\{D\} = \{F\} \Rightarrow$$

$$\frac{21 \times 10^6}{2\sqrt{2}} \times \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1+\sqrt{2} & 1 & \sqrt{2} & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -\sqrt{2} & 0 & 1+\sqrt{2} & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -10000 \\ 0 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{Bmatrix} \quad (١١٠-٤)$$

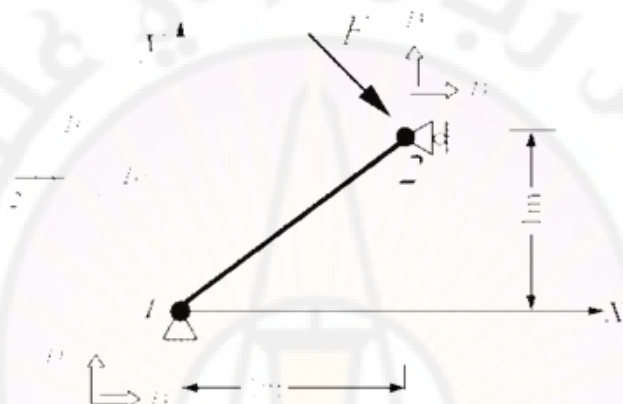
$$F_5 = \frac{21 \times 10^6}{2\sqrt{2}} (-D_1 + D_2 - \sqrt{2} D_3) = 0 N$$

$$F_4 = \frac{21 \times 10^6}{2\sqrt{2}} (-D_1 - D_2 + D_3) = 5000 N \quad (١١١-٤)$$

$$F_6 = \frac{21 \times 10^6}{2\sqrt{2}} (D_1 - D_2) = 5000 N$$

٤-٦-٤ مثال ٤-٦: إنشاء هندسي وحيد العنصر

لدينا إنشاءً محملاً بحمل قدره نيوتن يصنع زاوية مع الأفق مولفاً من قضيب فولاذي يصنع أيضاً زاوية مع الأفق، كما هو مبين بالشكل ٤-١٢، حيث يظهر الشكل أرقام العقد وأبعاد المقطع العرضي مقدرة — كما يظهر محاور الإحداثيات الكلية المرتبطة بالإنشاء، فإذا علمت أن معامل يونغ للفولاذ $E = 210 \text{ GPa}$ ، وأن درجات الحرية للعقدتين الأولى والثانية للعقدة المطلوبة:



الشكل ٤-١٢: إنشاء هندسي وحيد العنصر

- ١- اكتب مصفوفة الصلابة وفق جملة الإحداثيات المعطاة .
- ٢- احسب انتقالات العقدة ٢ .
- ٣- احسب ردود الأفعال في العقدة الأولى. (ماذا تستنتج)
- ٤- هل لزاوية ميل القوة تأثير على الإنشاء؟ علل إجابتك.
- ٥- احسب الإجهادات في القضيب ومن ثم قارنها بالقيمة النظرية (بفرض أن قيمة عامل الأمان واحد).
- ٦- هل الإنشاء بوضعه الحالي يحقق شرط المتانة؟ إن كان الإنشاء ضعيفاً ماذا تقترح؟ علل الإجابة بالحسابات.
- ٧- ما هو شكل وقياس المقطع المناسب إذا طلب منك إعادة التصميم

الحل:

نحسب المقدار الثابت:

$$(4-112)$$

نحسب تجميع التوجيه للعنصر الوحيد والتي تعطى بحسب الجدول ٤-٦:

جدول ٤-٦: تجميع التوجيه للعنصر الوحيد

رقم العنصر	العقدة الكلية الموافقة لـ		الإحداثيات في النظام الكلي				طول العنصر	تجميعات التوجيه	
	العقدة الموضعية ١	العقدة الموضعية ٢	X_i	Y_i	X_j	Y_j		l_{ij}	m_{ij}
1	1	2	0	0	1	1	$\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$

نكتب مصفوفة التحويل (٤-٢٠) وفق جملة الإحداثيات المعطاة.

$$[T_e^3] = \begin{bmatrix} l_{ij} & m_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_{ij} & m_{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad (٤-١١٣)$$

تصبح المصفوفة (٤-٣٥) بالشكل

$$K^e = \frac{(128 \times 10^7)}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

٢- نحسب انتقالات العقدة ٢ من تطبيق العلاقة الأساسية $\{K\}\{D\} = \{f\}$

$$\frac{(128 \times 10^7)}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{1x} \\ f_{1y} \\ f_{2x} \\ f_{2y} \end{Bmatrix} \quad (٤-١١٥)$$

$$\frac{(128 \times 10^7)}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ D4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{1x} \\ f_{1y} \\ F \cos 45^\circ \\ -F \sin 45^\circ \end{Bmatrix} \quad (١١٦-٤)$$

$$\frac{(128 \times 10^7)}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ D4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{1x} \\ f_{1y} \\ F \cos 45^\circ \\ -F \sin 45^\circ \end{Bmatrix} \quad (١١٧-٤)$$

$$\frac{1}{2} \frac{(128 \times 10^7)}{\sqrt{2}} D4 = -10^7 \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow 64 \times 10^7 D4 = -10^7 \Rightarrow D4 = \frac{-10^7}{64 \times 10^7} = -0.015625 \quad m \quad (١١٨-٤)$$

٣- نحسب ردود الأفعال في العقدة الأولى من تطبيق العلاقة الأساسية $\{f\} = [K]\{D\}$.

$$\frac{(128 \times 10^7)}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ D4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{1x} \\ f_{1y} \\ \frac{10^7}{\sqrt{2}} \\ -\frac{10^7}{\sqrt{2}} \end{Bmatrix} \quad (١١٩-٤)$$

$$\frac{1}{2} \frac{(128 \times 10^7)}{\sqrt{2}} D4 = f_{1x} \Rightarrow f_{1x} = \frac{1}{2} \frac{(128 \times 10^7)}{\sqrt{2}} \left(\frac{-1}{64} \right) = -\frac{10^7}{\sqrt{2}}$$

$$-\frac{1}{2} \frac{(128 \times 10^7)}{\sqrt{2}} D4 = f_{1y} \Rightarrow f_{1y} = -\frac{1}{2} \frac{(128 \times 10^7)}{\sqrt{2}} \left(\frac{-1}{64} \right) = \frac{10^7}{\sqrt{2}}$$

٤- لزاوية الميل أثر واضح من خلال إسقاط مركبات القوة.

٥- احسب الإجهادات في القضيب ومن ثم قارنها بالقيمة النظرية (بفرض أن قيمة عامل الأمان واحد).

$$\sigma_x = E[B][T]\{D_e\} = 20 \times 10^{10} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{64} \end{Bmatrix} \quad (١٢٠-٤)$$

$$= -\frac{10^{11}}{64} Pa = -1562.5 \times 10^6 \frac{N}{m^2}$$

بالمقارنة مع إجهاد حد المرونة نجد أن الإنشاء ينهار.

$$1562.5 \times 10^6 > 235 \times 10^6 \frac{N}{m^2} \quad (١٢١-٤)$$

٦- هل الإنشاء بوضعه الحالي يحقق شرط المتانة؟ في حال أن الإنشاء ضعيف ماذا تقترح؟ علل الإجابة بالحسابات.

من الممكن زيادة مساحة المقطع مع المحافظة على شكل المقطع.

باعتبار أن المسألة ضمن المجال الخطي من سلوك المادة فيمكن زيادة المقطع بشكل خطي أي بحدود

$$\frac{1562.5 \times 10^6}{235 \times 10^6} = 6.6 \approx 7 \quad (١٢٢-٤)$$

ست مرات أي بحدود $6.4 \times 10^{-3} \times (7) = 0.0448 \approx 0.05$

بإعادة الحسابات نجد أن التبدلي:

$$\frac{(10^7)}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ D4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{1x} \\ f_{1y} \\ F \cos 45^\circ \\ -F \sin 45^\circ \end{Bmatrix} \quad (١٢٣-٤)$$

$$\frac{1}{2} \frac{(10^{10})}{\sqrt{2}} D4 = -10^7 \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$0.5 \times 10^{10} D4 = -10^7 \Rightarrow$$

$$D4 = 2 \frac{-10^7}{10^{10}} = -0.002 \quad m$$

بإعادة الحسابات نجد أن الإجهادات:

(١٢٤-٤)

إن الإجهاد الذي يخضع له القضيب أقل من حد المرونة وبالتالي الإنشاء متين.
من الممكن اختيار مقطع دائري مصمت بحيث يحقق نفس المساحة $0,05$ (قطره بخدود 25 سنتيمتر) . أو
مقطع مربع مصمت (ضلعه بخدود 22 سنتيمتر) أو مستطيل.

٤-٦-٥ مثال ٤-٧: إيجاد التواتر الذاتي لقضيب أحادي العنصر

المطلوب إيجاد التواتر الذاتي للقضيب المكون من عنصر واحد والمبين بالشكل ٤-١٣، علماً أن:



الشكل ٤-١٣: قضيب أحادي العنصر

نطبق العلاقة (٤-٨١) ونحذف الأسطر والإعمدة الموافقة لمكان التثبيت نجد:

(١٢٥-٤)

نحصل على:

(١٢٦-٤)

نعوض

(١٢٧-٤)

نجد:

$$\frac{AE}{l_e} u_2 - \omega^2 \frac{A \rho l_e}{6} (2u_2) = 0 \quad (١٢٨-٤)$$

$$\omega^2 = \frac{\frac{AE}{l_e}}{\frac{2A \rho l_e}{6}} = \frac{\frac{E}{l_e}}{\frac{\rho l_e}{3}} = \frac{3E}{\rho l_e^2} \quad (١٢٩-٤)$$

بالتعويض رقمياً نجد:

$$\omega^2 = \frac{3 \times 2 \times 10^{11}}{7800} = 76923076 \quad (١٣٠-٤)$$

$$\omega = 8770.58 \text{ Hz}$$

٤-٦-٦ مثال ٤-٨: إيجاد التواتر الذاتي للقضيب ثنائي العنصر

المطلوب إيجاد التواتر الذاتي للقضيب المكون من عنصرين والمبين بالشكل ٤-١٤، علماً أن:

$$E = 2 \times 10^{11} \text{ N/m}^2, \quad \rho = 7800 \text{ kg/m}^3, \quad A = 30 \times 10^{-6} \text{ m}^2, \quad l = 1 \text{ m}$$



الشكل ٤-١٤: قضيب ثنائي العنصر

نطبق العلاقة (٤-٨١) (مع تعديل مصفوفتي الصلابة والكتلة من أجل عنصرين) ونحذف الأسطر والأعمدة الموافقة لمكان التثبيت نجد:

بالعودة لمصفوفة الصلابة (٤-٩٤) نجدها:

$$[K] = \frac{AE}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (١٣١-٤)$$

بالنسبة لمصفوفة الكتلة (٤-١٦) لعنصرين تصبح على الشكل:

$$[M] = \frac{A \rho l_e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2+2 & 0+1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{A \rho l_e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (١٣٢-٤)$$

$$[M] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} + [K] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\frac{A \rho l_e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} + \frac{AE}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (١٣٣-٤)$$

مع الانتباه أن

$$l_e = \frac{L}{2} \quad (١٣٤-٤)$$

$$\frac{A \rho L}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} + \frac{2AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (١٣٥-٤)$$

نحذف الأسطر والأعمدة الموافقة لمكان التثبيت نجد:

$$\frac{A \rho L}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} + \frac{2AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (١٣٦-٤)$$

$$\frac{A \rho L}{12} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} + \frac{2AE}{L} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

نجد

$$\frac{2AE}{L} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \omega^2 \frac{A \rho L}{12} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad (١٣٧-٤)$$

لإيجاد التواترات (عددتها اثنان) نطبق الشرط (٦٨-٣)

$$\det [[K] - \lambda [M]] = 0 \quad (١٣٨-٤)$$

حيث: $\lambda = \omega^2$

$$\det \left[\frac{AE}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} - \lambda \frac{A \rho l_e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \right] = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} \frac{AE}{l} - \lambda \frac{A \rho l_e}{3} & -\frac{AE}{l} - \lambda \frac{A \rho l_e}{6} & 0 \\ \frac{2AE}{l} - \lambda \frac{2A \rho l_e}{3} & -\frac{AE}{l} - \lambda \frac{A \rho l_e}{6} & \\ \text{sym} & \frac{AE}{l} - \lambda \frac{A \rho l_e}{3} & \end{bmatrix} = 0 \quad (١٣٩-٤)$$

$$\left(\frac{AE}{l} - \lambda \frac{A \rho l_e}{3} \right) \begin{bmatrix} \frac{2AE}{l} - \lambda \frac{2A \rho l_e}{3} & -\frac{AE}{l} - \lambda \frac{A \rho l_e}{6} \\ \text{sym} & \frac{AE}{l} - \lambda \frac{A \rho l_e}{3} \end{bmatrix} -$$

(١٤٠-٤)

$$\left(-\frac{AE}{l} - \lambda \frac{A \rho l_e}{6} \right) \begin{bmatrix} -\frac{AE}{l} - \lambda \frac{A \rho l_e}{6} & -\frac{AE}{l} - \lambda \frac{A \rho l_e}{6} \\ 0 & \frac{AE}{l} - \lambda \frac{A \rho l_e}{3} \end{bmatrix}$$

بالحل نحصل على التواترين المطلوبين.

يبين الجدول ٤-٧ تغير عدد التواترات الذاتية بدلالة عدد العناصر

جدول ٤-٧: تغير عدد التواترات الذاتية بدلالة عدد العناصر

العقد	عدد العناصر			
	1	2	3	4
1	8770.6	8160.724	8045	7791
2		28505	26312	25596
3			47733	45059
4				71475

٤-٦ أسئلة للمراجعة

١. ما هي مواصفات الوصلات في الهياكل الشبكية وما هي تأثيراتها على خواص الإجهاد والانفعال في عنصر القضيب؟
٢. ما هو عدد درجات الطلاقة في عنصر قضيب مستوٍ ثنائي العقد وذلك في مستوى الإحداثيات الموضعية ومستوى الإحداثيات الكلية؟ لماذا يوجد فرق في عدد درجات الطلاقة بين هذين المستويين؟

٣. ما هو عدد درجات الطلاقة في عنصر قضيب فراغي ثنائي العقد وذلك في مستوى الإحداثيات الموضعية ومستوى الإحداثيات الكلية؟ لماذا يوجد فرق في عدد درجات الطلاقة بين هذين المستويين؟

٤. اكتب صيغة مصفوفة الصلابة لعنصر ذي معامل يونغ ، بطول و سطح مقطعه العرضي معطى بالمتر المربع بالعلاقة (ملاحظة: مساحة المقطع العرضي غير منتظمة).
٥. اكتب صيغة مصفوفة الكتلة لعنصر له نفس المواصفات الواردة في السؤال السابق.
٦. تمرين (١):

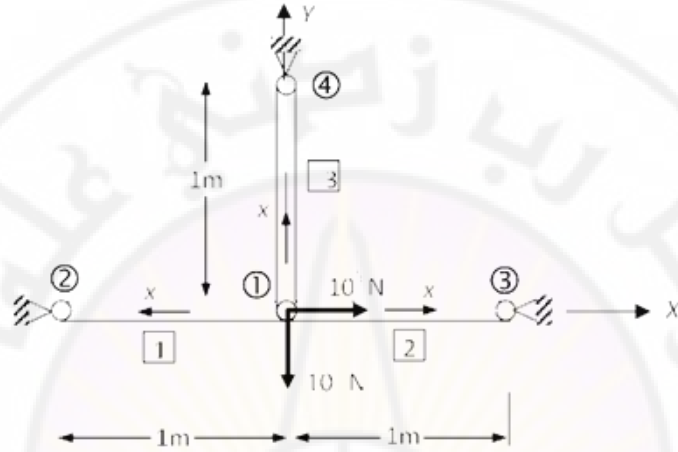
أوجد انتقالات الهيكل الشبكي الموضح بالشكل ٤-١٥. علماً أن كافة قضبان الهيكل مصنوعة من نفس المادة (معامل يونغ) ولها نفس مساحة المقطع العرضي .

الشكل ٤-١٥: هيكل شبكي مستو مؤلف من ثلاثة قضبان

٧. تمرين (٢):

لدينا الهيكل الشبكي المستوي الموضح في الشكل ٤-١٦، يتألف هذا الإنشاء من ثلاثة قضبان مستوية طول كل منهما ، نخضع الهيكل لقوتين مطبقتين عند العقدة الثانية المشتركة بينهما، حيث الأولى شاقولية باتجاه الأسفل، والثانية أفقية، وقيمة كل منهما نيوتن كما نقوم بتثبيت العقد الثانية والثالثة والرابعة تثبيتاً تاماً. يظهر الشكل ترقيم العناصر المستخدمة (ضمن مربعات) وترقيم العقد (ضمن دوائر)، إضافة لمحااور الإحداثيات الكلية المرتبطة بالإنشاء ومحااور الإحداثيات الموضعية المرتبطة بالعناصر.

تبلغ مساحة المقطع العرضي لجميع القضبان وهي مصنعة من الفولاذ بمعامل يونغ يساوي . نريد حساب انتقالات العقد والإجهادات في العناصر وردود الأفعال عند القيود باستخدام طريقة العناصر المنتهية:



الشكل ٤-١٦: هيكل شبكي مستو ثلاثي العناصر

١. احسب تخبّيات التوجيه لعناصر الهيكل.
٢. اكتب مصفوفة الصلابة لعناصر الهيكل في مستوى الإحداثيات الكلي.
٣. اكتب مصفوفة الصلابة الكلية للإنشاء في مستوى الإحداثيات الكلي.
٤. احسب انتقالات العقدة الأولى في الإنشاء.
٥. احسب ردود الأفعال في العقد الثانية والثالثة والرابعة.
٦. احسب الإجهادات في كل من عناصر الهيكل.
٧. نريد تصميم قضبان الهيكل، باعتبار معامل أمان يساوي ١,٥ بالنسبة لحد المرونة ، وذلك من إحدى حلائط الفولاذ التالية:

الخليفة الأولى:

الخليفة الثانية:

الخليفة الثالثة:

بين مع التعليل أي الخلائط يجب أن نختار علماً أن كافة قضبان الهيكل مصنعة من نفس الخليفة. علماً أن كافة قضبان الهيكل مصنعة من نفس المادة (معامل يونغ) ولها نفس مساحة المقطع العرضي .

الفصل الخامس

طريقة العناصر المنتهية في الجوائز



طريقة العناصر المنتهية في الجوائز

١-٥ مقدمة

الجائز هو أحد العناصر الإنشائية البسيطة الشائعة الاستخدام، هندسياً الجائز هو دعامة مستقيمة ذات مقطع عرضي عشوائي ولكنه يتشوه فقط في الاتجاهات العمودية على محاوره. لاحظ أن الفارق الرئيسي بين الجائز والقضيب هو نمط الحمولة التي يخضع لها كليهما. تخضع الجوائز لحمولات عرضية، تشمل القوى العرضية والعزوم التي ينتج عنها تشوه عرضي. سنقوم في هذا الفصل بصياغة معادلات العناصر المنتهية للجوائز حيث يعرف العنصر الذي ستم صياغته بعنصر الجائز.

يتم تجميع الجوائز فيما بينها في الإنشاءات بعملية اللحام (لا عن طريق البراغي أو التباشيم كما في حالة القضبان في الهياكل الشبكية) بحيث يتم نقل القوى والعزوم بين الجوائز. سنفترض في هذا المؤلف أن المقطع العرضي للجائز منتظم. كما ينصح فيما إذا كان للجائز مقطعاً عرضياً متغيراً أن تتم تجزئته إلى جوائز أقصر حيث يمكن اعتبار كل منها كجائز ذي مقطع عرضي منتظم. مع ذلك، يمكن استنباط مصفوفات العناصر المنتهية لجوائز ذات مقاطع عرضية متغيرة بسهولة باستخدام نفس المفاهيم التي سيتم تطويرها. تستند صياغة عنصر الجائز في هذا الفصل إلى نظرية جائز أولر-برنولي والتي تطبق على الجوائز الرقيقة.

٢-٥ معادلات طريقة العناصر المنتهية

توجد في عناصر الجوائز المستوية درجتا طلاقة عند كل عقدة في مستوى الإحداثيات الموضعية. هناك التدرج v في الاتجاه y والدوران θ حول المحور z في المستوى $x-y$ (انظر الفقرة ٢-٥). لذلك يكون إجمالاً لكل عنصر جائز أربع درجات طلاقة.

١-٢-٥ بناء توابع الشكل

نعتبر عنصر جائز طوله $l = 2a$ مع العقدتين ١ و ٢ عند نهايتي العنصر كما هو موضح في الشكل ١-٥. يؤخذ المحور الموضعي x وفق الاتجاه المحوري للعنصر بحيث يكون مبدؤه في المقطع العرضي عند منتصف الجائز. بشكل مماثل لبقية العناصر الإنشائية، لصياغة معادلات العناصر المنتهية نبدأ ببناء توابع الشكل التي تساعد في عملية استيفاء المتحولات من قيم هذه المتحولات عند العقد. بما أنه لدينا أربع درجات طلاقة لعنصر الجائز فيجب أن يكون هناك أربعة توابع شكل. غالباً ما يكون من الأنسب استنباط توابع الشكل من

مجموعة إحداثيات موضعية خاصة تسمى عادة بمجموعة الإحداثية الطبيعية. يكون مركز مجموعة الإحداثية الطبيعية في مركز العنصر ويعرّف العنصر من إلى كما هو مبين في الشكل ١-٥.

الشكل ١-٥: عنصر جانز مع نظام الإحداثيات الموضعي: الإحداثية الفيزيائية والإحداثية الطبيعية يمكن ببساطة كتابة العلاقة بين مجموعة الإحداثيات الطبيعية ومجموعة الإحداثيات الموضعية كالتالي:

(١-٥)

لاستنباط توابع الشكل الأربعة في الإحداثيات الطبيعية نفترض بداية أن الانتقالات في العنصر تكتب كتابع كثير حدود من الدرجة الثالثة بالنسبة للإحداثية بحيث يحوي على أربعة ثوابت:

(٢-٥)

حيث إلى هي الثوابت الأربعة المجهولة. تم اختيار كثير الحدود من الدرجة الثالثة لوجود أربعة مجاهيل في كثير الحدود الشيء الذي يمكن ربطه بدرجات الطلاقة الأربع في عقدتي عنصر الجانز. يمكن كتابة العلاقة أعلاه بشكل مصفوفي كما يلي:

(٣-٥)

أو

(٤-٥)

حيث هو شعاع القاعدة للتوابع و هو شعاع الثوابت حسب ما تم شرحه في الفصلين ٣ و ٤. يمكن الحصول على الدوران من مفاضلة المعادلة (٢-٥) باستخدام العلاقة (١-٥):

(٥-٥)

يمكن تحديد الثوابت المجهولة الأربعة إلى باستخدام الشروط الأربعة التالية:

عند أو :

$$(1) \quad v(-1) = v_1$$

$$(2) \quad \left. \frac{dv}{dx} \right|_{x=-1} = \theta_1 \quad (٦-٥)$$

عند $x = +a$ أو $\xi = +1$:

$$(3) \quad v(1) = v_2$$

$$(4) \quad \left. \frac{dv}{dx} \right|_{x=1} = \theta_2 \quad (٧-٥)$$

يعطي تطبيق الشروط الأربعة هذه:

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{a} & -\frac{2}{a} & \frac{3}{a} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{a} & \frac{2}{a} & \frac{3}{a} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} \quad (٨-٥)$$

أو

$$\{d_e\} = [A_e] \{\alpha\} \quad (٩-٥)$$

يعطي حل هذه المعادلة بالنسبة لـ α :

$$\{\alpha\} = [A_e]^{-1} \{d_e\} \quad (١٠-٥)$$

حيث

$$[A_e]^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & a & 2 & -a \\ -3 & -a & 3 & -a \\ 0 & -a & 0 & a \\ 1 & a & -1 & a \end{bmatrix} \quad (١١-٥)$$

بالنتيجة يعطي تعريض العلاقة (١٠-٥) في العلاقة (٤-٥):

$$v = [N(\xi)] \{d_e\} \quad (١٢-٥)$$

حيث $[N]$ هي مصفوفة توابع الشكل المعطاة وفق:

$$[N(\xi)] = [P^T] [A_e]^{-1} = [N_1(\xi) \quad N_2(\xi) \quad N_3(\xi) \quad N_4(\xi)] \quad (١٣-٥)$$

حيث نجد توابع الشكل كما يلي:

$$N_1(\xi) = \frac{1}{4}(2 - 3\xi + \xi^2)$$

$$N_2(\xi) = \frac{a}{4}(1 - \xi - \xi^2 + \xi^3)$$

(١٤-٥)

$$N_3(\xi) = \frac{1}{4}(2 + 3\xi - \xi^3)$$

$$N_4(\xi) = \frac{a}{4}(-1 - \xi + \xi^2 + \xi^3)$$

يمكن بسهولة التأكد أن تابعي الشكل الانتقاليين N_1 و N_3 يحققان الشروط المعرفة بالعلاقين (٣-٣٤) و (٣-٤١). غير أن تابعي الشكل الدورانيين N_2 و N_4 لا يحققان الشروط المعرفة بالعلاقين (٣-٣٤) و (٣-٤١). يرجع هذا لكون هذين التابعين متعلقين بدرجات طلاقة دورانية مستنبطة من توابع التدلي. يؤمن تحقيق N_1 و N_3 للعلاقة (٣-٣٤) التمثيل الصحيح لحركة الجسم الصلب لعنصر الجائز. بالعودة للجدول ١-٤ نجد أن الحالة المدروسة (عنصر قضيب ID وذو أربع درجات طلاقة D.O.F=4) تكون رتبة كثير الحدود (٣)

جدول ١-٤ العلاقة بين فضاء المسألة ودرجات الطلاقة ورتبة كثير الحدود

رتبة كثير الحدود	1D	2D	3D
	D.O.F	D.O.F	D.O.F
1	2	3	4
2	3	6	10
3	4	10	20
4	5	15	35
5	6	21	56

٥-٢-٢ مصفوفة الانفعال

بعد حصولنا على توابع الشكل نتقل للخطوة التالية المتمثلة باستنباط مصفوفة انفعال العنصر. بتعويض العلاقة (٥-١٢) في العلاقة (٢-٤٧)، التي تعطي العلاقة بين الانفعال والتدلي، نجد:

$$\varepsilon_{xx} = [B] \{d_e\} \quad (٥-١٥)$$

حيث تعطي مصفوفة الانفعال $[B]$ وفق:

$$[B] = -yL[N] = -y \frac{\partial^2}{\partial x^2} N = -\frac{y}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} N = -\frac{y}{a^2} N'' \quad (٥-١٦)$$

استخدمنا في استنباط العلاقة السابقة كلاً من العلاقة (٢-٤٨) و (٥-١). من العلاقة (٥-١٤) لدينا:

$$N'' = [N_1'' \quad N_2'' \quad N_3'' \quad N_4''] \quad (٥-١٧)$$

$$N_1'' = \frac{3}{2}\xi \quad ; \quad N_2'' = \frac{a}{2}(-1+3\xi) \quad (١٨-٥)$$

$$N_3'' = -\frac{3}{2}\xi \quad ; \quad N_4'' = \frac{a}{2}(1+3\xi)$$

٣-٢-٥ مصفوفات العنصر

بحصولنا على مصفوفة الانفعال أصبح بإمكاننا الحصول على مصفوفتي الصلابة والكتلة للعنصر. يمكن الحصول على مصفوفة الصلابة بتعويض العلاقة (١٦-٥) في العلاقة (٧١-٣) وفق:

$$[k_e] = \int_V [B^T] c [B] dV = E \int_A y^2 dA \int_{-a}^a \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} N \right)^T \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} N \right) dx \quad (١٩-٥)$$

$$= EI_z \int_{-1}^1 \frac{1}{a^4} \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} N \right)^T \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} N \right) a d\xi = \frac{EI_z}{a^3} \int_{-1}^1 [N'']^T [N''] d\xi$$

حيث $I_z = \int_A y^2 dA$ هو العزم الثاني للسطح (أو عزم العطالة) للمقطع العرضي للجائز بالنسبة للمحور z.

بتعويض العلاقة (١٧-٥) في العلاقة (١٩-٥) نحصل على:

$$[k_e] = \frac{EI_z}{a^3} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} N_1'' N_1'' & N_1'' N_2'' & N_1'' N_3'' & N_1'' N_4'' \\ N_2'' N_1'' & N_2'' N_2'' & N_2'' N_3'' & N_2'' N_4'' \\ N_3'' N_1'' & N_3'' N_2'' & N_3'' N_3'' & N_3'' N_4'' \\ N_4'' N_1'' & N_4'' N_2'' & N_4'' N_3'' & N_4'' N_4'' \end{bmatrix} d\xi \quad (٢٠-٥)$$

يقودنا حساب التكاملات في العلاقة السابقة إلى:

$$[k_e] = \frac{EI_z}{2a^3} \begin{bmatrix} 3 & 3a & -3 & 3a \\ 4a^2 & -3a & 2a^2 & \\ & 3 & -3a & \\ \text{Sym.} & & & 4a^2 \end{bmatrix} \quad (٢١-٥)$$

في بعض الأدبيات العلمية الخاصة بمصفوفة الصلابة للعنصر المذكور تكتب بدلالة طول الجائز L حيث نستبدل $a=L/2$ في (٢١-٥) وتكون من الشكل:

$$[k_e] = \frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ & & 12 & -6L \\ \text{Sym.} & & & 4L^2 \end{bmatrix}$$

للحصول على مصفوفة الكتلة نعوض العلاقة (٥-١٣) في العلاقة (٣-٧٥):

$$[m_e] = \int_V \rho [N^T] [N] dV = \rho \int_A dA \int_{-a}^a [N^T] [N] dx = \rho A \int_{-1}^1 [N^T] [N] ad\xi$$

$$= \rho A a \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} N_1 N_1 & N_1 N_2 & N_1 N_3 & N_1 N_4 \\ N_2 N_1 & N_2 N_2 & N_2 N_3 & N_2 N_4 \\ N_3 N_1 & N_3 N_2 & N_3 N_3 & N_3 N_4 \\ N_4 N_1 & N_4 N_2 & N_4 N_3 & N_4 N_4 \end{bmatrix} d\xi \quad (٥-٢٢)$$

حيث A هي مساحة سطح المقطع العرضي للجائز. يقودنا حساب التكاملات في العلاقة السابقة إلى:

$$[k_e] = \frac{\rho A a}{105} \begin{bmatrix} 78 & 22a & 27 & -13a \\ & 8a^2 & 13a & -6a^2 \\ & & 78 & -22a \\ Sym. & & & 8a^2 \end{bmatrix} \quad (٥-٢٣)$$

يبقى من مصفوفات العنصر شعاع القوى. يمكن الحصول على شعاع القوى في العقد للجائز باستخدام العلاقات (٣-٧٨) و (٣-٧٩) و (٣-٨١). بفرض أن العنصر يخضع لحمولة خارجية موزعة بانتظام f_y على طول المحور x . بالإضافة لقوتين مركبتين f_{s1} و f_{s2} وعزمين m_{s1} و m_{s2} مطبقة على العقدتين ١ و ٢ بالترتيب، يصبح شعاع القوى عند العقد:

$$\{f_e\} = \int_V [N^T] \{f_b\} dV + \int_{S_f} [N^T] \{f_s\} dS_f$$

$$= f_y a \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{bmatrix} d\xi + \begin{Bmatrix} f_{s1} \\ m_{s1} \\ f_{s2} \\ m_{s2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_y a + f_{s1} \\ \frac{f_y a^2}{3} + m_{s1} \\ f_y a + f_{s2} \\ -\frac{f_y a^2}{3} + m_{s2} \end{Bmatrix} \quad (٥-٢٤)$$

سيكون لمعادلة العناصر المنتهية النهائية نفس صيغة المعادلة (٣-٨٩) ولكن مع مصفوفات العنصر المعرفة بالعلاقات (٥-٢١) و (٥-٢٣) و (٥-٢٤).

٥-٣ ملاحظات

نظرياً، يمكن استعمال تغيير الإحداثيات لتحويل مصفوفات العنصر من نظام الإحداثيات الموضعي إلى نظام الإحداثيات الكلي. غير أن هذا التحويل يغدو ضرورياً إذا احتوى الإنشاء على أكثر من جائز بحيث يكون

هناك على الأقل جائزين بتوجيه مختلف. يدعى إنشاء الجوائز الحاوي جائزين بتوجيه مختلف على الأقل إطار أو جمالون. لتحليل الإطارات أو الجمالونات يجب استخدام عناصر الإطار التي تخضع لقوى محورية وقوى انحناء ونحتاج بالتالي لتغيير الإحداثيات. سنناقش بالتفصيل في الفصل القادم صياغة معادلات هذه الإطارات أو الجمالونات.

٥-٤ أمثلة تطبيقية

٥-٤-١: جوائز ناتى منتظم خاضع لقوة شاقولية

نعتبر الجوائز الناتى الموضح في الشكل ٥-٢- كما يبدو فإن الجوائز مثبت عند إحدى نهايتيه وذو مقطع عرضي منتظم. يخضع الجوائز لحمولة انحناء ستاتيكية تسببها قوة شاقولية مطبقة عند النهاية الحرة.

الشكل ٥-٢: جوائز ناتى تحت حمولة ستاتيكية

يبين الشكل السابق أبعاد الجوائز كما أن مواصفات مادة الجوائز المصنّع من الألمنيوم هي معامل يونغ ومعامل بواسون

الحل:

لإيضاح خطوات الحل في هذا المثال البسيط سنستخدم في البداية عنصر جوائز وحيد لحل مسألة التادلي. ستكون لعنصر الجوائز هذا درجات الطلاقة المبينة في الشكل ٥-١.

١. - الخطوة الأولى: بناء مصفوفات العنصر

الخطوة الأولى في صياغة معادلات العناصر المنتهية هي بناء مصفوفات العنصر، وفي حالتنا حيث العنصر المستخدم وحيد فإن مصفوفات العنصر هي مصفوفات العناصر المنتهية الكلية حيث لا توجد حاجة لعملية التجميع. تعطى توابع الشكل لدرجات الطلاقة الأربعة بالعلاقة (٥-١٤). يمكن الحصول على مصفوفة الصلابة للعنصر من العلاقة (٥-٢١). لاحظ أنه لا حاجة لمصفوفة الكتلة كون المسألة ستاتيكية. يعطى العزم الثاني لسطح المقطع العرضي حول المحور كالتالي:

(٥-٢٥)

بما أن المسألة ذات عنصر وحيد فإن مصفوفة الصلابة للجوائز هي ذات المصفوفة للعنصر:

$$[k_e] = \frac{(69 \times 10^9)(1.8 \times 10^{-6})}{2 \times 0.25^3} \begin{bmatrix} 3 & 0.75 & -3 & 0.75 \\ 0.75 & 0.25 & -0.75 & 0.125 \\ -3 & -0.75 & 3 & -0.75 \\ 0.75 & 0.125 & -0.75 & 0.25 \end{bmatrix} \quad (26-5)$$

$$= 3.974 \times 10^6 \begin{bmatrix} 3 & 0.75 & -3 & 0.75 \\ 0.75 & 0.25 & -0.75 & 0.125 \\ -3 & -0.75 & 3 & -0.75 \\ 0.75 & 0.125 & -0.75 & 0.25 \end{bmatrix} Nm^{-2}$$

تصبح معادلة العنصر المنتهي:

$$3.974 \times 10^6 \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 0.75 & -3 & 0.75 \\ 0.75 & 0.25 & -0.75 & 0.125 \\ -3 & -0.75 & 3 & -0.75 \\ 0.75 & 0.125 & -0.75 & 0.25 \end{bmatrix}}_K \underbrace{\begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}}_D = \underbrace{\begin{bmatrix} Q_1 = ? \\ M_1 = ? \\ Q_2 = P \\ M_2 = 0 \end{bmatrix}}_F \quad (27-5)$$

حيث Q_1 هي قوة قص المسند مجهولة و M_1 عزم رد الفعل المسند المجهول. بما أن الجائز مثبت عند العقدة ١ فإن القوة والعزم عند هذه العقدة هما قوة رد الفعل والعزم الموافق وهما مجهولان قبل حل معادلة العناصر المنتهية بالنسبة للانتقالات. لحل المعادلة (27-5) نحتاج لفرض شروط الانتقال الحدية عند العقدة المثبتة.

٢. - الخطوة الثانية: تطبيق الشروط الحدية

بما أن إحدى نهايتي الجائز مثبتة فهذا يعني أن التديلي v_1 والدوران θ_1 عند هذه العقدة يجب أن يكونان مساويان للصفر:

$$v_1 = \theta_1 = 0 \quad (28-5)$$

يقود فرض الشرط أعلاه إلى إزالة الصفين الأول والثاني من مصفوفة الصلابة:

$$3.974 \times 10^6 \begin{bmatrix} 3 & 0.75 & -3 & 0.75 \\ 0.75 & 0.25 & -0.75 & 0.125 \\ -3 & -0.75 & 3 & -0.75 \\ 0.75 & 0.125 & -0.75 & 0.25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 = ? \\ M_1 = ? \\ Q_2 = P \\ M_2 = 0 \end{bmatrix} \quad (29-5)$$

تصبح مصفوفة الصلابة المختزلة ذات البعد كالتالي:

$$K = 3.974 \times 10^6 \begin{bmatrix} 3 & -0.75 \\ -0.75 & 0.25 \end{bmatrix} Nm^{-2} \quad (30-5)$$

بهذا تصبح معادلة العناصر المنتهية بعد فرض الشروط الحدية كما يلي:

$$[K]\{d\} = \{F\} \quad (٣١-٥)$$

حيث

$$[d^T] = [v_2 \quad \theta_2] \quad (٣٢-٥)$$

و شعاع القوى معطى وفق:

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} -1000 \\ 0 \end{Bmatrix} N \quad (٣٣-٥)$$

لاحظ أنه على الرغم من أننا لا نعرف قيمة قوة القص Q_1 والعزم M_1 فإن هذا لا يؤثر على حل معادلة العناصر المنتهية ذلك أننا نعرف بدلاً عنهما التادلي v_2 والدوران θ_2 . يسمح لنا هذا بإزالة كل من Q_1 و M_1 المجهولين من معادلة العناصر المنتهية الأساسية. سنعود لحساب Q_1 و M_1 المجهولين بعد حل معادلات العناصر المنتهية بالنسبة للانتقالات (التادلي والدوران).

٣. - الخطوة الثالثة: حل معادلة العناصر المنتهية المصفوفاتية

ستكون الخطوة الأخيرة في هذا المثال البسيط حل المعادلة (٣١-٥) للحصول على v_2 و θ_2 . في حالتنا تكافئ المعادلة (٣٢-٥) معادلتين آتيتين بمجهولين ويمكن ببساطة حلها يدوياً. بالطبع عندما يكون لدينا معادلات أكثر أو درجات طلاقة أكثر فسنحتاج إلى طرق عديدة لحل معادلة المصفوفات. يصبح حل المعادلة (٣١-٥):

$$v_2 = -3.355 \times 10^{-4} m \quad (٣٤-٥)$$

$$\theta_2 = -1.007 \times 10^{-3} rad$$

بعد الحصول على v_2 و θ_2 نعوض قيمتهما في المعادلتين الأولى والثانية من العلاقة (٢٧-٥) للحصول على قوة القص عند العقدة ١:

$$Q_1 = 3.974 \times 10^6 (-3v_2 + 0.75\theta_2) = 998.47 N \quad (٣٥-٥)$$

و العزم عند العقدة ١:

$$M_1 = 3.974 \times 10^6 (-0.75v_2 + 0.125\theta_2) = 499.73 Nm \quad (٣٦-٥)$$

و بهذا نكون قد أنهينا إجرائية الحل لهذه المسألة.

لاحظ أن هذا الحل مطابق تماماً للحل التحليلي. مرة ثانية نلاحظ خاصية الاستنساخ لطريق العناصر المنتهية التي شرحناها في المثال ٤-١. في هذه الحالة يرجع الأمر إلى كون الحل التحليلي لتدلي جسر ناتئ رقيق هو كثير حدود من الدرجة الثالثة، الشيء الذي يمكن الحصول عليه بسهولة من حل الصيغة القوية لمجموعة

معادلات الجائز المعطاة بالعلاقة (٥-٥٩) عندما تكون $f_y = 0$. من جهة أخرى فإن توابع الشكل المستخدمة في التحليل بطريقة العناصر المنتهية هي أيضاً كثيرات حدود من الدرجة الثالثة (انظر المعادلة (٥-١٤) أو (٥-٢)). بالتالي فإن الحل التحليلي للمسألة محتوى في مجموعة حلول التديلي المفترضة. هذا يؤكد إذاً أن طريقة العناصر المنتهية المستندة لمبدأ هاملتون أنتجت الحل التحليلي. هذا يبقى بالطبع صحيحاً لو أردنا حساب التديلي في أية نقطة مغايرة للعقد. مثلاً لحساب التديلي في منتصف الجائز يمكننا استخدام العلاقة (٥-١٢) مع $x = 0.25$ أو في نظام الإحداثيات الطبيعية $\xi = 0$ والتعويض بالقيم المحسوبة عند العقد:

$$\begin{aligned} v_{\xi=0} &= [N]_{\xi=0} \{d_e\} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{16} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{16} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -3.355 \times 10^{-4} \\ -1.007 \times 10^{-3} \end{Bmatrix} \\ &= -1.048 \times 10^{-4} m \end{aligned} \quad (٥-٣٧)$$

لحساب الدوران عند منتصف الجائز نستخدم مشتقات توابع الشكل كما يلي:

$$\begin{aligned} \theta_{\xi=0} &= \left(\frac{dv}{dx} \right)_{\xi=0} \\ &= \left(\frac{d[N]}{dx} \right)_{\xi=0} \{d_e\} = \begin{bmatrix} -3 & -\frac{1}{4} & 3 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -3.355 \times 10^{-4} \\ -1.007 \times 10^{-3} \end{Bmatrix} \\ &= -7.548 \times 10^{-4} rad \end{aligned} \quad (٥-٣٨)$$

لاحظ أنه لحساب الحد $\frac{d[N]}{dx}$ تم استخدام قاعدة التفاضل مع العلاقة بين x و ξ الموضحة بالعلاقة (٥-١).

٥-٤-٢: الجائز ثنائي العناصر خاضع لقوة شاقولية

يبين الشكل (٥-٣) جائزاً مثبتاً من طرف ويتعرض لقوة مركزة في طرفه الحر ومستند في منتصفه على مسند يسمح له بالدوران فقط.

والمطلوب نمذجة الجائز بعنصرين فقط مستخدماً صيغة مصفوفة الصلابة العنصرية بدلالة طول الجائز واحسب:

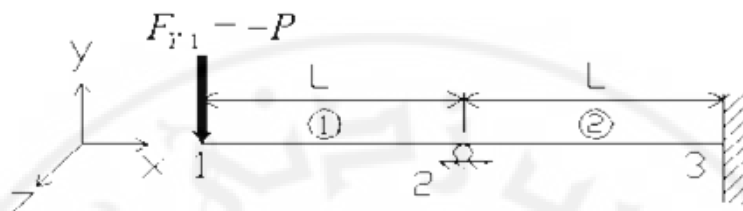
١- مصفوفة الصلابة العنصرية لكل من العنصرين.

٢- أوجد مصفوفة الصلابة الكلية.

٣- أوجد الانتقالات غير المعطاة (درجات الحرية في العقدتين ٢ و ٣).

٤- حساب ردود الفعل.

٥- رسم مخططات القوى المقاسة وعزوم الانعطاف.



الشكل ٣-٥ جانز ثنائي العناصر خاضع لقوة شاقولية.

الحل:

شعاع درجات الحرية للعقد الثلاث المكونة للعنصرين

$$\{d_e\} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ \phi_1 \\ v_2 \\ \phi_2 \\ v_3 \\ \phi_3 \end{Bmatrix} \quad (٣٩-٥)$$

كما مر معنا فإن مصفوفة الصلابة العنصرية بدلالة طول الجانز L هي:

$$[k_e] = \frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ & & 12 & -6L \\ \text{Sym.} & & & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (٤٠-٥)$$

مصفوفة الصلابة للعنصر الأول (المكون من العقدتين الأولى والثانية) بدلالة الشعاع الجزئي لدرجات الحرية

$$\langle d_e \rangle = \langle v_1 \quad \phi_1 \quad v_2 \quad \phi_2 \rangle \quad (٤١-٥)$$

$$[k_e^1] = \frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L & 0 & 0 \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 \\ -12 & -6L & 12 & -6L & 0 & 0 \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (٤٢-٥)$$

مصنوفة الصلابة للعنصر الثاني (المكون من العقدتين الثانية والثالثة) بدلالة الشعاع الجزئي لدرجات الحرية

$$\langle d_e \rangle = \langle v_2 \quad \varphi_2 \quad v_3 \quad \varphi_3 \rangle$$

$$[k_e] = \frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 6L & -12 & 6L \\ 0 & 0 & 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ 0 & 0 & -12 & -6L & 12 & 6L \\ 0 & 0 & 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (٤٣-٥)$$

بتجميع هاتين المصفوفتين بأبعاد المسألة 6x6 نجد:

$$[K] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L & 0 & 0 \\ & 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 \\ & & 12+12 & -6L+6L & -12 & 6L \\ & & & 4L^2+4L^2 & -6L & 2L^2 \\ & & & & 12 & -6L \\ & & & & & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (٤٤-٥)$$

لإيجاد المجاهيل (الانتقالات والدورانات المجهولة) لا بد من تطبيق الشروط الحدية

$$\frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L & 0 & 0 \\ & 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 \\ & & 12+12 & -6L+6L & -12 & 6L \\ & & & 4L^2+4L^2 & -6L & 2L^2 \\ & & & & 12 & -6L \\ & & & & & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \varphi_1 \\ v_2 \\ \varphi_2 \\ v_3 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{1y} \\ M_1 \\ F_{2y} \\ M_2 \\ F_{3y} \\ M_3 \end{bmatrix} \quad (٤٥-٥)$$

عند العقدة الأولى:

$$M_1 = 0, F_{y1} = -P \quad (٤٦-٥)$$

عند العقدة الثانية:

$$v_2 = 0, M_2 = 0 \quad (٤٧-٥)$$

عند العقدة الثالثة:

$$v_3 = \varphi_3 = 0 \quad (٤٨-٥)$$

نحذف الأسطر والأعمدة التالية (الثالث والخامس والسادس)

$$\frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L & 0 & 0 \\ & 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 \\ & & 12+12 & -6L+6L & -12 & 6L \\ & & & 4L^2+4L^2 & -6L & 2L^2 \\ & & & & 12 & -6L \\ & & & & & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \phi_1 \\ 0 \\ \phi_2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -P \\ 0 \\ F_{2y} \\ 0 \\ F_{3y} \\ M_3 \end{Bmatrix} \quad (٤٩-٥)$$

نجد

$$\frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & 6L \\ 6L & 4L^2 & 2L^2 \\ 6L & 2L^2 & 8L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -P \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (٥٠-٥)$$

$$v_1 = -\frac{7PL^3}{12EI} \quad \phi_1 = \frac{3PL^2}{4EI} \quad \phi_2 = \frac{PL^2}{4EI} \quad (٥١-٥)$$

لحساب ردود الفعل المساند، نطبق القانون الأساسي $[K]\{U\} = \{f\}$ ، بعد حساب الانتقالات وفقاً للعلاقات (٥١-٥):

$$\frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L & 0 & 0 \\ & 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 \\ & & 12+12 & -6L+6L & -12 & 6L \\ & & & 4L^2+4L^2 & -6L & 2L^2 \\ & & & & 12 & -6L \\ & & & & & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\frac{7PL^3}{12EI} \\ \frac{3PL^2}{4EI} \\ 0 \\ \frac{PL^2}{4EI} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1y} \\ M_1 \\ F_{2y} \\ M_2 \\ F_{3y} \\ M_3 \end{Bmatrix} \quad (٥٢-٥)$$

$$F_{1y} = -P, M_1 = 0, F_{2y} = \frac{5}{2}P, M_2 = 0, F_3 = -\frac{3}{2}P, M_3 = \frac{1}{2}PL \quad (٥٣-٥)$$

للعنصر الأول

$$\begin{Bmatrix} f_{1y} \\ m_1 \\ f_{2y} \\ m_2 \end{Bmatrix} = [k]^{(1)} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \phi_1 \\ v_2 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} = \frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ \text{Sym.} & & 12 & -6L \\ & & & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\frac{7PL^3}{12EI} \\ \frac{3PL^2}{4EI} \\ 0 \\ \frac{PL^2}{4EI} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -P \\ 0 \\ P \\ -PL \end{Bmatrix} \quad (٥٤-٥)$$

للعنصر الثاني

$$\begin{Bmatrix} f_{2y} \\ m_2 \\ f_{3y} \\ m_3 \end{Bmatrix} = [K]^{(2)} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \phi_2 \\ v_3 \\ \phi_3 \end{Bmatrix} = [K]^{(2)} \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{PL^2}{4EI} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{3}{2}P \\ PL \\ -\frac{3}{2}P \\ \frac{PL}{2} \end{Bmatrix} \quad (٥٥-٥)$$

تفصيل القوى



مخطط القوى القاصة



مخطط عزوم الانعطاف

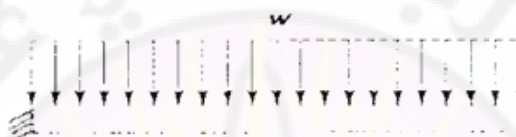
الشكل ٥-٤ مخططات القوى والعزوم للمسألة المدروسة

٥-٤-٣ المثال ٣-٥: جانز خاضع لقوة موزعة بانتظام:

يبين الشكل (٥-٥) جانزاً مثبتاً من طرف ويتعرض لقوى موزعة على طوله.

والمطلوب نمذجة الجانز بعنصر واحد فقط مستخدماً صيغة مصفوفة الصلابة العنصرية بدلالة طول الجانز واحسب:

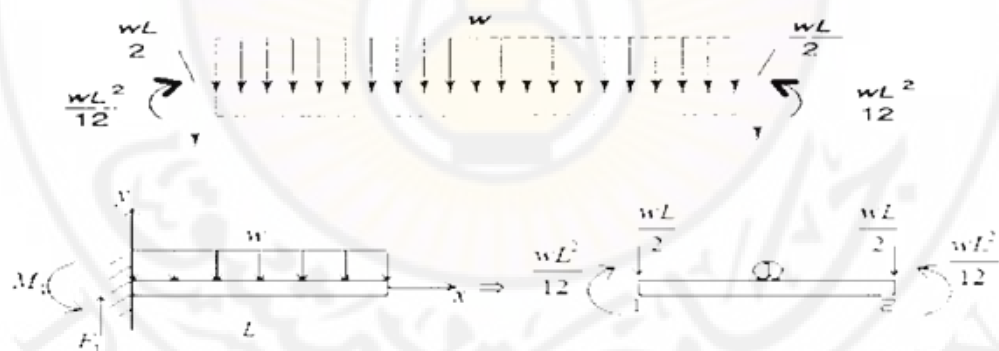
- ١- مكافأة الحمل الموزع إلى أحمال (قوى وعزوم) على العقد وفق معطيات علم مقاومة المواد.
- ٢- أوجد مصفوفة الصلابة بدلالة طول الجانز.
- ٣- أوجد الانتقالات غير المعطاة (درجات الحرية في العقدة ٢)
- ٤- حساب ردود الفعل في المسند.



الشكل ٥-٥ جانز خاضع لقوة موزعة بانتظام

الحل:

- ١- مكافأة الحمل الموزع إلى أحمال (قوى وعزوم) على العقد وفق معطيات علم مقاومة المواد.



الشكل ٦-٥ تمثيل القوى

شعاع درجات الحرية هو:

$$\langle d_e \rangle = \langle v_1 \quad \phi_1 \quad v_2 \quad \phi_2 \rangle \quad (٥٦-٥)$$

- ٢- مصفوفة الصلابة العنصرية بدلالة طول الجانز L هي:

$$[k_e] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ & & 12 & -6L \\ \text{Sym.} & & & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (٥٧-٥)$$

٣- نحذف السطرين والعمودين الأول والثاني الموافقين لمكان التثبيت وذلك عند العقدة الأولى:

$$v_1 = 0, \phi_1 = 0$$

مع العلم أن

$$F_2 = -\frac{wL}{2}, M_2 = \frac{wL^2}{12}$$

$$\frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ & & 12 & -6L \\ & & & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \phi_1 \\ v_2 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ M_1 \\ F_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} \quad (٥٨-٥)$$

تصبح (٥٨-٥) على الشكل:

$$\frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & -6L \\ -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -wL/2 \\ wL^2/12 \end{Bmatrix} \quad (٥٩-٥)$$

وبشكل آخر:

$$\begin{Bmatrix} v_2 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} = \frac{L}{6EI} \begin{bmatrix} 2L^2 & 3L \\ 3L & 6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -wL/2 \\ wL^2/12 \end{Bmatrix} = \frac{L^3}{EI} \begin{Bmatrix} -wL/8 \\ -w/6 \end{Bmatrix} \quad (٦٠-٥)$$

لحساب ردود الفعل بالمساند نعيد تطبيق العلاقة الأساسية $[K]\{U\} = \{f\}$ مع تعويض القيم التي تم

حسابها في (٦٠-٥) نجد:

$$\frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ & & 12 & -6L \\ & & & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{L^3}{EI} \cdot \frac{-wL}{8} \\ \frac{L^3}{EI} \cdot \frac{-w}{6} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ M_1 \\ -\frac{wL}{2} \\ \frac{wL^2}{12} \end{Bmatrix} \quad (٦١-٥)$$

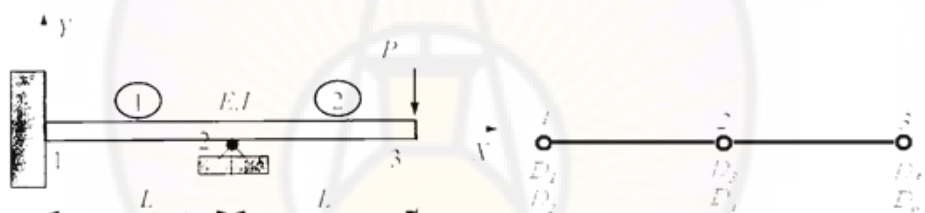
أو بشكل آخر:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ M_1 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} -12 & 6L \\ -6L & 2L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{L^3}{EI} \cdot \frac{-wL}{8} \\ \frac{L^3}{EI} \cdot \frac{-w}{6} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 & 6L \\ -6L & 2L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{-wL}{8} \\ \frac{-w}{6} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ M_1 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ M_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 & 6L \\ -6L & 2L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -wL/8 \\ -w/6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{wL}{2} \\ \frac{5wL^2}{12} \end{Bmatrix} \quad (٦٢-٥)$$

٥-٤-٤ : المثال ٥-٤ : جانز خاضع لقوة موزعة بانتظام:

لدينا الجانز الموضح في الشكل ٧-٥، يخضع هذا الجانز لقوة مركزة، شدتها P ، مطبقة نحو الأسفل، يتم نمذجة الجانز بعنصري جانز وفقاً للترقيم الموضوع ضمن الدوائر، درجات الحرية للعقد مبينة بالشكل (٥-٧) وتشمل: التبدلي D_1 والدوران D_2 .



الشكل ٧-٥ جانز خاضع لقوة مركزة شاقولية

فإذا علمت أن:

$$P = 50kN, \quad k = 200kN/m, \quad L = 3m, \quad E = 210GPa, \quad I = 2 \times 10^{-4}m^4$$

المطلوب إيجاد مصفوفة الصلابة الكلية وتشكيل المعادلات التي تسمح بإيجاد الانتقالات والدورانات.

الحل:

مصفوفة الصلابة للعنصر الأول (بين العقدتين ١ و ٢) وبين درجات الحرية D_1, D_2, D_3, D_4

$$[k_e^1] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (٦٣-٥)$$

مصفوفة الصلابة للعنصر الأول (بين العقدتين ٢ و ٣) وبين درجات الحرية D_3, D_4, D_5, D_6

$$[k_e] = \frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ & & 12 & -6L \\ \text{Sym.} & & & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (٦٤-٥)$$

مصفوفة الصلابة الإجمالية بأبعاد ٦x٦

$$[K] = \frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L & 0 & 0 \\ & 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 \\ & & 24 & 0 & -12 & 6L \\ & & & 8L^2 & -6L & 2L^2 \\ & & & & 12 & -6L \\ & & & & & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (٦٥-٥)$$

١- لإيجاد المعادلات التي تسمح بإيجاد الانتقالات والدورانات نطبق الشروط الحدية وذلك بحذف الأسطر والأعمدة الموافقة لأمكنة التثبيت.

نحذف الأسطر والأعمدة الموافقة لدرجات الحرية المقيدة $D_1 = D_2 = D_3 = 0$

$$\frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L & 0 & 0 \\ & 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 \\ & & 24 & 0 & -12 & 6L \\ & & & 8L^2 & -6L & 2L^2 \\ & & & & 12 & -6L \\ & & & & & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{Bmatrix} \quad (٦٦-٥)$$

نجد

$$\frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 8L^2 & -6L & 2L^2 \\ & 12 & -6L \\ & & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_4 \\ D_5 \\ D_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -P \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (٦٧-٥)$$

نحصل على ثلاث معادلات بثلاثة مجاهيل

$$\begin{aligned} \frac{EI_z}{L^3} (8L^2 D_4 - 6LD_5 + 2L^2 D_6) &= 0 \\ \frac{EI_z}{L^3} (-6LD_4 + 12D_5 - 6LD_6) &= -P \\ \frac{EI_z}{L^3} (2L^2 D_4 - 6LD_5 + 4L^2 D_6) &= 0 \end{aligned} \quad (٦٨-٥)$$

٥-٤-٥ المثال ٥-٥: جائر مثبت من طرف ومستند على مساند بسيطة ومحمل بقوة موزعة:

لدينا الجائر الموضح في الشكل ٨-٥، يخضع هذا الجائر لقوى موزعة جزئياً شدتها P ، مطبقة نحو الأسفل، يتم نمذجة الجائر بعنصري جائر وفقاً للترقيم الموضوع ضمن الدوائر، درجات الحرية للعقد مبينة أيضاً بالشكل (٨-٥) وتشمل: التدلي v والدوران θ .
والمطلوب:



الشكل ٨-٥ جائر مثبت من طرف ومستند على مساند بسيطة ومحمل بقوة موزعة

الحل:

شعاع درجات الحرية

$$\langle d_e \rangle = \langle v_1 \quad \theta_1 \quad v_2 \quad \theta_2 \quad v_3 \quad \theta_3 \rangle \quad (٦٩-٥)$$

مصفوفة الصلابة العنصرية لكل من العنصرين هي:

$$[k_e^1] = [k_e^2] = \frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ & & 12 & -6L \\ \text{Sym.} & & & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (٧٠-٥)$$

$$[k_e^1] = [k_e^2] = \frac{(200 \times 10^9) \times (4 \times 10^{-6})}{1^3} \begin{bmatrix} 12 & 6 & -12 & 6 \\ & 4 & -6L & 2 \\ & & 12 & -6 \\ \text{Sym.} & & & 4 \end{bmatrix} \quad (٧١-٥)$$

$$[k_e^1] = [k_e^2] = 8 \times 10^5 \begin{bmatrix} 12 & 6 & -12 & 6 \\ & 4 & -6 & 2 \\ & & 12 & -6 \\ \text{Sym.} & & & 4 \end{bmatrix}$$

تكون مصفوفة الصلابة الكلية

$$8 \times 10^5 \begin{bmatrix} 12 & 6 & -12 & 6 \\ 6 & 4 & -6 & 2 \\ -12 & -6 & 12+12 & -6+6 \\ 6 & 2 & -6+6 & 4+4 \\ & & -12 & -6 \\ & & 6 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{y1} \\ M_1 \\ F_{y2} \\ M_2 \\ F_{y3} \\ M_3 \end{bmatrix} \quad (٧٢-٥)$$

و بتطبيق الشروط الحدية $M_2 = -1000$, $M_3 = 1000$ و $v_1, \theta_1, v_2, v_3 = 0$

تصبح على الشكل:

$$8 \times 10^5 \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1000 \\ 1000.0 \end{bmatrix} \quad (٧٣-٥)$$

بعد الحل نجد:

$$\begin{bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{28 * 8 \times 10^5} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1000 \\ 1000.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.679 \times 10^{-4} \\ 4.464 \times 10^{-4} \end{bmatrix} \quad (٧٤-٥)$$

حساب ردود الفعل بالمساند

$$8 \times 10^5 \begin{bmatrix} 12 & 6 & -12 & 6 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & -6 & 2 & 0 & 0 \\ -12 & -6 & 24 & 0 & -12 & 6 \\ 6 & 2 & 0 & 8 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & -12 & -6 & 12 & -6 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & -6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2.679 \times 10^{-4} \\ 0 \\ 4.464 \times 10^{-4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{y1} \\ M_1 \\ F_{y2} \\ M_2 \\ F_{y3} \\ M_3 \end{bmatrix} \quad (٧٤-٥)$$

(٧٥-٥)

(٧٦-٥)

الشكل ٩-٥ تحليل العناصر.

٥-٤-٦: جائر بسيط بعنصر واحد مستند على نابض

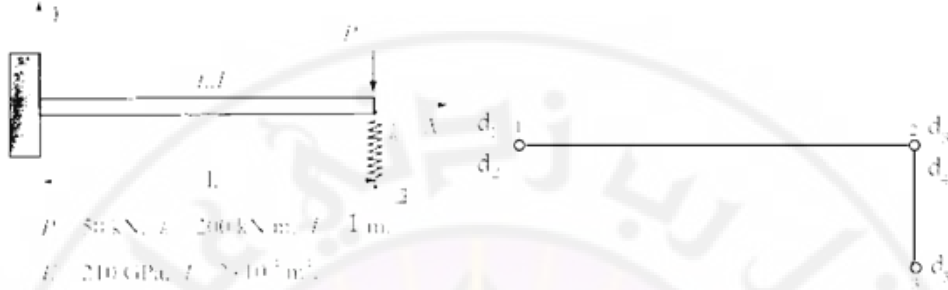
لدينا الجائر الموضح في الشكل ١٠-٥، حيث يُخضع لقوة مركزة شدتها P مطبقة نحو الأسفل، ويستند الجائر في مكان تطبيق الحمولة على نابض ثابت صلابته k (المعطيات الرقمية للجائر على الشكل). يتم نمذجة الجائر بعنصرين: الأول هو عنصر جائر ذو عقدتين ١ و ٢ والعنصر الثاني عنصر قضيب (نابض) بين العقدتين ٢ و ٣، درجات الحرية للعقد مبينة بالشكل ذاته وتشمل: التدلي والدوران أما عن فهي تمثل تدل. المطلوب:

١. اكتب مصفوفة الصلابة للجائر وللنابض بأبعاد ثم اكتب مصفوفة الكلية للمنشأة والتي يجب أن تكون بأبعاد .

٢. كتابة المعادلات التي تسمح بحساب الانتقالات غير المحددة ومن ثم احسب قيمها.

٣. حساب ردود الفعل في المسند اليساري عند العقدة ١ وكذلك حساب ردود الفعل في المسند السفلي عند العقدة ٣

٤. قارن النتيجة التي حصلت عليها مع النتيجة التحليلية التي نحصل عليها من جداء ثابت صلابة نابض في انتقال العقدة ٢ التي حصلت عليها في الطلب الثالث.
٥. احسب الخطأ بين النتيجةين.



الشكل ١٠-٥ جانز بسيط بعنصر واحد مستند على نابض.

الحل:

١- مصفوفة الصلابة للجانز بأبعاد 5x5

$$\frac{EI}{L^3} \begin{Bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L & 0 \\ & 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 \\ & & 12 & -6L & 0 \\ & & & 4L^2 & 0 \\ sym & & & & 0 \end{Bmatrix} \quad (٧٧-٥)$$

مصفوفة الصلابة للنابض بأبعاد 5x5

$$k \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{Bmatrix} \quad (٧٨-٥)$$

المصفوفة الكلية للمنشأة والتي يجب أن تكون بأبعاد 5x5

$$\frac{EI}{L^3} \begin{Bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L & 0 \\ & 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 \\ & & 12 & -6L & 0 \\ & & & 4L^2 & 0 \\ sym & & & & 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 & -k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k & 0 & k \end{Bmatrix} \quad (٧٩-٥)$$

$$\frac{EI}{L^3} \left\{ \begin{array}{ccccc} 12 & 6L & -12 & 6L & 0 \\ & 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 \\ & & 12 & -6L & 0 \\ & & & 4L^2 & 0 \\ sym & & & & 0 \end{array} \right\} + \frac{EI}{L^3} \left\{ \begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{k}{EI} & 0 & -\frac{k}{EI} \\ & & L^3 & & L^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{k}{EI} & 0 & \frac{k}{EI} \\ & & L^3 & & L^3 \end{array} \right\} \quad (٨٠-٥)$$

نسمي المقدار $k^{\circ} = \frac{k}{EI} = \frac{kL^3}{EI}$ وبالقيم الرقمية:

$$k^{\circ} = \frac{k}{EI} = \frac{200000 \times (1)^3}{210 \times 10^9 \times 2 \times 10^{-4}} = \frac{2 \times (1)^3}{210 \times 2} = 4.76 \times 10^{-3} \quad (٨١-٥)$$

$$\frac{EI}{L^3} = \frac{210 \times 10^9 \times 2 \times 10^{-4}}{1^3} = \frac{420 \times 10^5}{1} = 42 \times 10^6 \quad (٨٢-٥)$$

$$\frac{EI}{L^3} \left\{ \begin{array}{ccccc} 12 & 6L & -12 & 6L & 0 \\ & 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 \\ & & 12 & -6L & 0 \\ & & & 4L^2 & 0 \\ sym & & & & 0 \end{array} \right\} + \frac{EI}{L^3} \left\{ \begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k^{\circ} & 0 & -k^{\circ} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k^{\circ} & 0 & k^{\circ} \end{array} \right\} \quad (٨٣-٥)$$

تصبح مصفوفة الصلابة الكلية للعنصرين معاً

$$\frac{EI}{L^3} \left\{ \begin{array}{ccccc} 12 & 6L & -12 & 6L & 0 \\ & 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 \\ & & 12 + k^{\circ} & -6L & -k^{\circ} \\ & & & 4L^2 & 0 \\ sym & & & & k^{\circ} \end{array} \right\} \quad (٨٤-٥)$$

٢- لإيجاد المعادلات التي تسمح بحساب الانتقالات غير المحددة لا بد من حساب المجاهيل

نحذف الاسطر والاعمدة المقابلة لأمكنة القيود الصفرية

$$\frac{EI}{L^3} \begin{Bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L & 0 \\ & 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 \\ & & 12+k^\circ & -6L & -k^\circ \\ & & & 4L^2 & 0 \\ sym & & & & k^\circ \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ M_1 \\ F_2 \\ M_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} \quad (٨٥-٥)$$

لدينا حسب الشكل: d_1 و d_2 و d_5 كلها أصفار لذلك نحذف الاسطر والاعمدة الموافقة

$$\frac{EI}{L^3} \begin{Bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L & 0 \\ & 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 \\ & & 12+k^\circ & -6L & -k^\circ \\ & & & 4L^2 & 0 \\ sym & & & & k^\circ \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ M_1 \\ -P \\ 0 \\ F_3 \end{Bmatrix} \quad (٨٦-٥)$$

نجد بعد الحذف:

$$\frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12+k^\circ & -6L \\ -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_3 \\ d_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -P \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (٨٧-٥)$$

حساب قيم الانتقالات غير المحددة.

$$42 \times 10^6 \begin{bmatrix} 12.00476 & -6 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_3 \\ d_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -50000 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (٨٨-٥)$$

بعد الحل:

$$\begin{aligned} d_3 &= -3.96 \times 10^{-4} \text{ m} \\ d_4 &= -6 \times 10^{-4} \text{ rad} \end{aligned} \quad d_3 = \frac{4}{6} d_4 \Rightarrow \quad (٨٩-٥)$$

٣- حساب ردود الفعل في المسند اليساري عند العقدة ١

$$42 \times 10^6 \begin{Bmatrix} 12 & 6 & -12 & 6 & 0 \\ & 4 & -6 & 2 & 0 \\ & & 12+k^\circ & -6 & -k^\circ \\ & & & 4 & 0 \\ sym & & & & k^\circ \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -3.96 \times 10^{-4} \\ -6 \times 10^{-4} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ M_1 \\ -50000 \\ 0 \\ F_3 \end{Bmatrix} \quad (٩٠-٥)$$

بعد حل ثلاث معادلات بثلاثة مجاهيل نجد:

$$42 \times 10^6 \left[(12 \times 3.96 \times 10^{-4}) + 6(-6 \times 10^{-4}) \right] = F_1$$

$$42 \times 10^6 \left[(6 \times 3.96 \times 10^{-4}) + 2(-6 \times 10^{-4}) \right] = M_1 \quad (٩١-٥)$$

$$42 \times 10^6 \left[(4.76 \times 10^{-3} \times 3.96 \times 10^{-4}) \right] = F_3$$

بعد الحل

$$F_1 = 48 \text{ N}$$

$$M_1 = 49.392 \text{ N.m} \quad (٩٢-٥)$$

$$F_3 = 79 \text{ N}$$

٤- مقارنة النتيجة التي تم الحصول عليها مع النتيجة التحليلية

$$F_{3(analytical)} = 200000 \times 3.96 \times 10^{-4} = 79.2 \text{ N} \quad (٩٣-٥)$$

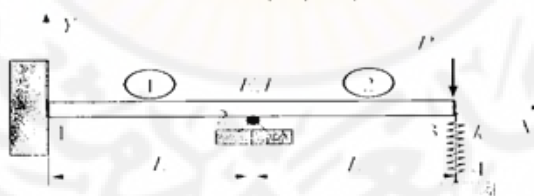
٥- الخطأ بين النتيجتين

$$(79.2-79)/79.2=0.0025 \quad (٩٤-٥)$$

٥-٤-٧ المثال ٥-٧: جاذر بسيط ذو عنصرين مستند على نابض

لدينا الجاذز الموضح في الشكل (١١-٥) يخضع هذا الجاذز لقوة مركزة شدتها P مطبقة نحو الأسفل، ويستند الجاذز في مكان تطبيق الحمولة على نابض ثابت صلابته k (المعطيات الرقمية للجاذز على الشكل). يتم نمذجة الإنشاء بعنصري جاذز وعنصر قضيب (نابض) بين العقدتين ٣ و ٤. يعطى شعاع درجات الحرية

$$\langle d_e \rangle = \langle v_1 \quad \theta_1 \quad v_2 \quad \theta_2 \quad v_3 \quad \theta_3 \quad v_4 \rangle$$



الشكل ١١-٥ جاذز بسيط ذو عنصرين مستند على نابض

فيإذا علمت أن:

$$P = 50 \text{ kN}, \quad k = 200 \text{ kN/m}, \quad L = 3 \text{ m}, \quad E = 210 \text{ GPa}, \quad I = 2 \times 10^{-4} \text{ m}^4$$

يعامل النابض معاملة القضيبي

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \end{matrix}$$

المطلوب:

١. اكتب مصفوفة الصلابة للجائز وللنابض بأبعاد 7x7 ثم اكتب مصفوفة الكلية للمنشأة والتي يجب أن تكون بأبعاد 7x7.
٢. كتابة المعادلات التي تسمح بحساب الانتقالات غير المحددة ومن ثم احسب قيمها.
٣. حساب ردود الفعل في المساند المختلفة .

الحل:

١- مصفوفة الصلابة للجائز للعنصر الأول أو الثاني من الشكل:

$$\frac{EI}{L^3} \left\{ \begin{matrix} 12 & 6L & -12 & 6L & 0 \\ & 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 \\ & & 12 & -6L & 0 \\ & & & 4L^2 & 0 \\ sym & & & & 0 \end{matrix} \right\} \quad (٩٥-٥)$$

مصفوفة الصلابة الكلية للجائز بأبعاد 6X6

$$\frac{EI}{L^3} \left\{ \begin{matrix} 12 & 6L & -12 & 6L & 0 & 0 \\ & 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 \\ & & 24 & 0 & -12 & 6L \\ & & & 8L^2 & -6L & 2L^2 \\ & & & & 12 & -6L \\ & & & & & 4L^2 \end{matrix} \right\} \quad (٩٦-٥)$$

مصفوفة الصلابة الكلية للجائز بأبعاد 7X7

$$\frac{EI}{L^3} \left\{ \begin{array}{cccccc} 12 & 6L & -12 & 6L & 0 & 0 & 0 \\ & 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 & 0 \\ & & 24 & 0 & -12 & 6L & 0 \\ & & & 8L^2 & -6L & 2L^2 & 0 \\ & & & & 12 & -6L & 0 \\ & SYM & & & & 4L^2 & 0 \\ & & & & & & 0 \end{array} \right\} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \\ v_4 \end{Bmatrix} \quad (٩٧-٥)$$

مصفوفة الصلابة الكلية للناقض (والذي هو بالأساس عنصر قضيب) بأبعاد 7X7

$$\frac{EA}{L} \left\{ \begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right\} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \\ v_4 \end{Bmatrix} \quad (٩٨-٥)$$

بتجميع المصفوفتين

$$\frac{EI}{L^3} \left\{ \begin{array}{cccccc} 12 & 6L & -12 & 6L & 0 & 0 & 0 \\ & 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 & 0 \\ & & 24 & 0 & -12 & 6L & 0 \\ & & & 8L^2 & -6L & 2L^2 & 0 \\ & & & & 12 & -6L & 0 \\ & sym & & & & 4L^2 & 0 \\ & & & & & & 0 \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & -\frac{EA}{L} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & \frac{EA}{L} \end{array} \right\} \quad (٩٩-٥)$$

$$\frac{EI}{L^3} \left\{ \begin{array}{cccccc} 12 & 6L & -12 & 6L & 0 & 0 & 0 \\ & 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 & 0 \\ & & 24 & 0 & -12 & 6L & 0 \\ & & & 8L^2 & -6L & 2L^2 & 0 \\ & & & & 12 & -6L & 0 \\ & sym & & & & 4L^2 & 0 \\ & & & & & & 0 \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K & 0 & -K \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -K & 0 & K \end{array} \right\} \quad (١٠٠-٥)$$

أو

$$EI \left\{ \begin{array}{ccccccc} 12 & 6L & -12 & 6L & 0 & 0 & 0 \\ & 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 & 0 \\ & & 24 & 0 & -12 & 6L & 0 \\ & & & 8L^2 & -6L & 2L^2 & 0 \\ & & & & 12 & -6L & 0 \\ & & & & & 4L^2 & 0 \\ & & & & & & 0 \end{array} \right\} + \frac{EI}{L^3} \left\{ \begin{array}{ccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K/\frac{EI}{L^3} & 0 & -K/\frac{EI}{L^3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -K/\frac{EI}{L^3} & 0 & K/\frac{EI}{L^3} \end{array} \right\} \quad (١٠١-٥)$$

sym

حيث:

$$K' = K / \frac{EI}{L^3} = \frac{KL^3}{EI} \quad (١٠٢-٥)$$

تصبح المصفوفة الكلية

$$\frac{EI}{L^3} \left\{ \begin{array}{ccccccc} 12 & 6L & -12 & 6L & 0 & 0 & 0 \\ & 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 & 0 \\ & & 24 & 0 & -12 & 6L & 0 \\ & & & 8L^2 & -6L & 2L^2 & 0 \\ & & & & 12+K' & -6L & -K' \\ & & & & & 4L^2 & 0 \\ & & & & & & K' \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \\ v_4 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} F_{1y} \\ M_1 \\ F_{2y} \\ M_2 \\ F_{3y} \\ M_3 \\ F_{4y} \end{array} \right\} \quad (١٠٣-٥)$$

SYM

٢- بتطبيق الشروط الحدية:

$$v_1 = \theta_1 = v_2 = v_4 = 0, M_2 = M_3 = 0, F_{3y} = -P \quad (١٠٤-٥)$$

يُحد

$$\frac{EI}{L^3} \left\{ \begin{array}{ccc} 8L^2 & -6L & 2L^2 \\ -6L & 12+k' & -6L \\ 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ -P \\ 0 \end{array} \right\} \quad (١٠٥-٥)$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{array} \right\} = \frac{-PL^3}{EI(12+7k')} \left\{ \begin{array}{c} 3 \\ 7L \\ 9 \end{array} \right\} \quad (١٠٦-٥)$$

بعد الحل

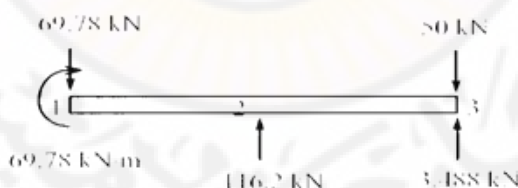
$$\begin{Bmatrix} \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.002492 \text{ rad} \\ -0.01744 \text{ rad} \\ -0.007475 \text{ rad} \end{Bmatrix} \quad (١٠٧-٥)$$

٣- لإيجاد ردود الفعل بالمساند، نعوض (١٠٧-٥) في (١٠٣-٥) نحصل:

$$\frac{EI}{L^3} \begin{Bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L & 0 & 0 & 0 \\ & 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 & 0 \\ & & 24 & 0 & -12 & 6L & 0 \\ & & & 8L^2 & -6L & 2L^2 & 0 \\ & & & & 12+K' & -6L & -K' \\ & & & & & 4L^2 & 0 \\ & & & & & & K' \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.002492 \\ -0.01744 \\ -0.007475 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1y} \\ M_1 \\ F_{2y} \\ 0 \\ -P \\ 0 \\ F_{4y} \end{Bmatrix} \quad (١٠٨-٥)$$

بالحل نحصل:

$$\begin{Bmatrix} F_{1y} \\ M_1 \\ F_{2y} \\ F_{4y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -69.78 \text{ KN} \\ -69.78 \text{ KN.m} \\ 116.2 \text{ KN} \\ 3.488 \text{ KN.m} \end{Bmatrix} \quad (١٠٩-٥)$$



الشكل ١١-٥ القوى والعزوم المحسوبة

٥-٥ أسئلة للمراجعة

١. كيف نقوم بصياغة عنصر جاتز يُخضع أيضاً لقوى محورية؟
٢. احسب شعاع القوى لجاتز ذي استناد بسيط يُخضع لقوة ناظرية في منتصفه، عندما نستخدم عنصراً وحيداً لنمذجته كما يظهر في الشكل ٥-٣:

الشكل ٥-١٢: جوائز بمسندين بسيطين منمذج بعنصر جوائز وحيد

٣. احسب شعاع القوى لجوائز ذي استناد بسيط يخضع لقوة ناظرية في منتصفه، عندما نستخدم عنصرين بطول متساو لنمذجته وفق ما هو مبين في الشكل ٥-٤:

الشكل ٥-١٣: جوائز بمسندين بسيطين منمذج بعنصري جوائز لهما نفس الطول

٤. ما هو عدد العناصر الواجب استخدامها للحصول على التادلي المضبوط وذلك لجوائز ناتئ خاضع لقوة ناظرية عند نهايته الحرة ؟

الفصل السادس

طريقة العناصر المنتهية في الجمالونات



طريقة العناصر المنتهية في الجمالونات

٦-١ مقدمة

تتم صياغة عنصر الجمالون لنمذجة دعامة مستقيمة ذات مقطع عرضي عشوائي وبممكنها التشوه ليس فقط في الاتجاه المحوري وإنما في الاتجاه العمودي على محور هذه الدعامة. تستطيع هذه الدعامة تحمل قوى محورية وعرضية بالإضافة للعزوم. لهذا فإن عنصر الجمالون يمتلك خواص القضبان والجوائز. في الواقع نجد منشآت الجمالون في معظم مسائل الإنشاءات في عالمنا الحقيقي، ذلك أنه لا يوجد الكثير من الإنشاءات التي تشوه وتخضع لحمولات صافية وفق الاتجاه المحوري وكذلك الأمر بالنسبة للحمولات العرضية. في هذا الفصل، تسهل صياغة معادلات العناصر المنتهية لعنصر الجائز عملية صياغة هذه المعادلات لعناصر الجمالون.

يعرف عنصر الجمالون أيضاً في العديد من البرمجيات التجارية تحت اسم عنصر الجائز العام أو بكل بساطة عنصر الجائز. تقدم البرمجيات التجارية عادة عناصر جائز صافية أو عناصر جمالون، ولكن تبقى عناصر الجمالون الأكثر استخداماً في التطبيقات الهندسية. تخضع إنشاءات الجمالون الفراغية ثلاثية الأبعاد لقوى وعزوم وفق كافة الاتجاهات. لذلك يمكن اعتبارها العناصر الأكثر عمومية من ضمن العناصر الأحادية البعد. تستخدم عناصر الجمالون لتحليل الإنشاءات الهيكلية المستوية (جمالون ثنائي البعد) أو الفراغية (جمالون ثلاثي البعد) يظهر الشكل ٦-١ جمالوناً نموذجاً ثلاثي الأبعاد.

يتم تجميع العناصر في الجمالون باللحام مما يؤمن تمرير القوى والعزوم بين عناصر الجمالون. سنفترض فيما يلي أن لعناصر الجمالون مقطعاً عرضياً منتظماً. إذا أردنا نمذجة عناصر ذات مقطع عرضي متغير باستخدام الصياغة المطورة في هذا الفصل فينصح بتقسيم هذا الإنشاء لعناصر أصغر ذات مقاطع عرضية مختلفة ولكن منتظمة. بالطبع إذا كان التغير في المقطع العرضي كبيراً فللحصول على تقريب جيد لا بد من صياغة المعادلات بوجود مقاطع عرضية متغيرة ويتم هذا الأمر دون صعوبات تذكر باستخدام نفس المفاهيم والإجراءات المستخدمة في هذا الفصل.

٦-٢ معادلات طريقة العناصر المنتهية للجمالونات المستوية

نعتبر جمالوناً حيث يمكن تجزئة الإنشاء إلى عناصر تتصل فيما بينها بعقد. طول كل عنصر $l_e = 2a$ وله عقدتان عند نهايته. ترقم العنصر والعقد بشكل منفصل وبطريقة مناسبة. هناك ثلاث درجات طلاقة في عناصر الجمالون المستوية وذلك عند كل عقدة في نظام الإحداثيات الموضعية كما يبدو في الشكل ٦-٢.



الشكل ٦-١: مثال لجمالون فراغي

الشكل ٦-٢: عنصر الجمالون المستوي ودرجات طلاقته

درجات الطلاقة هي الانفعال المحوري II وفق الاتجاه x ؛ التدلي v وفق الاتجاه y والدوران θ في المستوي $x-y$ بالنسبة للمحور z . بالتالي فإن كل عنصر ذي عقدتين له ست درجات طلاقة.

١-٢-٦ المعادلات في نظام الإحداثيات الموضعي

ليكن لدينا العنصر المبين في الشكل ٦-٢ مع عقدتين مرقمتين ١ و ٢ عند كل طرف للعنصر. من الواضح أن محور الموضعي منطبق على الاتجاه المحوري للعنصر مع المبدأ في منتصف هذا العنصر. كما أشرنا فإن لعنصر الجمالون مواصفات كل من عنصر القضيب وعنصر الجائز. لذلك يمكن صياغة مصفوفات عنصر الجمالون بالجمع بين مصفوفات عنصر القضيب ومصفوفات عنصر الجائز، دون الدخول في تفاصيل عملية بناء توابع الشكل واستخدام المعادلات النازمة للجمالون. نذكر أن لعنصر القضيب درجتَي طلاقة عند كل عقدة (الانفعال العرضي والدوران). عملية التجميع تعطي درجات الطلاقة لعنصر الجمالون وهكذا يمكن كتابة شعاع الانتقالات لعنصر الجمالون كالآتي:

مركبات الانتقال عند العقدة

(١-٦)

مركبات الانتقال عند العقدة

لبناء مصفوفة الصلاية نقوم أولاً بتمديد مصفوفة صلاية عنصر القضيب في المعادلة (٤-١٥) إلى مصفوفة موافقة لدرجات طلاقة عنصر القضيب في شعاع الانتقالات في المعادلة (٦-١):

(٢-٦)

بعد ذلك نقوم أيضاً بتمديد مصفوفة صلاية عنصر الجائز في المعادلة (٥-٢١) إلى مصفوفة موافقة لدرجات طلاقة عنصر الجائز في شعاع الانتقالات في المعادلة (٦-١):

$$[k_e^{beam}] = \begin{bmatrix} 0 & \downarrow d_2(v_1) & \downarrow d_3(\theta_{z1}) & 0 & \downarrow d_5(v_2) & \downarrow d_6(\theta_{z2}) \\ 0 & \frac{3EI_z}{2a^3} & \frac{3EI_z}{2a^2} & 0 & -\frac{3EI_z}{2a^3} & \frac{3EI_z}{2a^2} \\ \frac{3EI_z}{2a^3} & \frac{3EI_z}{2a^2} & \frac{2EI_z}{a} & 0 & -\frac{3EI_z}{2a^2} & \frac{EI_z}{a} \\ 0 & \frac{2EI_z}{a} & 0 & 0 & -\frac{3EI_z}{2a^2} & \frac{EI_z}{a} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3EI_z}{2a^3} & -\frac{3EI_z}{2a^2} & \frac{2EI_z}{a} \\ Sym. & & & & \frac{2EI_z}{a} & \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow d_2(v_1) \\ \leftarrow d_3(\theta_{z1}) \\ \leftarrow d_5(v_2) \\ \leftarrow d_6(\theta_{z2}) \end{matrix} \quad (3-6)$$

بتركيب المصفوفتين في المعادلتين (٢-٦) و (٣-٦) نحصل على مصفوفة لعنصر الجداول:

$$[k_e] = \begin{bmatrix} \frac{AE}{2a} & 0 & 0 & -\frac{AE}{2a} & 0 & 0 \\ \frac{3EI_z}{2a^3} & \frac{3EI_z}{2a^2} & \frac{2EI_z}{a} & -\frac{3EI_z}{2a^3} & \frac{3EI_z}{2a^2} & \frac{EI_z}{a} \\ \frac{3EI_z}{2a^3} & \frac{3EI_z}{2a^2} & \frac{2EI_z}{a} & -\frac{3EI_z}{2a^3} & \frac{3EI_z}{2a^2} & \frac{EI_z}{a} \\ 0 & \frac{2EI_z}{a} & 0 & \frac{AE}{2a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2EI_z}{a} & 0 & \frac{AE}{2a} & 0 & 0 \\ Sym. & & & & \frac{3EI_z}{2a^3} & -\frac{3EI_z}{2a^2} & \frac{2EI_z}{a} \end{bmatrix} \quad (4-6)$$

يمكن أيضاً الحصول على مصفوفة الكتلة للعنصر بنفس الطريقة. نقوم بتمديد مصفوفتي الكتلة لعنصري القضيب والجائز في المعادلتين (٤-٦) و (٥-٢٣) إلى مصفوفتين 6×6 ومن ثم يتم تجميعهما للحصول على مصفوفة الكتلة لعنصر الجداول:

$$[m_e] = \frac{\rho A a}{105} \begin{bmatrix} 70 & 0 & 0 & 35 & 0 & 0 \\ & 78 & 22a & 0 & 27 & -13a \\ & & 8a^2 & 0 & 13a & -6a^2 \\ & & & 70 & 0 & 0 \\ & & & & 78 & -22a \\ Sym. & & & & & 8a^2 \end{bmatrix} \quad (5-6)$$

يمكن تطبيق نفس الإجرائية البسيطة لشعاع القوى أيضاً. نقوم بتمديد شعاعي القوى لعنصري القطيب والجائز في المعادلتين (٤-١٧) و (٥-٢٤) إلى شعاعين 6×1 موافقة لدرجات الطلاقة ومن ثم يتم تجميعهما. إذا خضع العنصر للقوتين الخارجيتين f_x و f_y الموزعتين بانتظام على طول المحور x . وللقوى المركزة f_{x1} و f_{x2} و f_{y1} و f_{y2} وللعزوم m_{s1} و m_{s2} بالترتيب على العقدتين ١ و ٢، يصبح شعاع القوى عند العقد:

$$\{f_e\} = \begin{Bmatrix} f_x a + f_{x1} \\ f_y a + f_{y1} \\ \frac{f_y a^2}{3} + m_{s1} \\ f_x a + f_{x2} \\ f_y a + f_{y2} \\ -\frac{f_y a^2}{3} + m_{s2} \end{Bmatrix} \quad (٦-٦)$$

بالتالي يكون لمعادلة العناصر المنتهية النهائية نفس صيغة المعادلة (٣-٥٧) ولكن مع مصفوفات العنصر المعرفة بالعلاقات (٦-٤) و (٦-٥) و (٦-٦).

٢-٦-٦ المعادلات في نظام الإحداثيات الكلي

تمت صياغة المصفوفات في الفقرة السابقة لعنصر جمالون خاص ذي توجيه محدد. تحوي منشأة الجمالون عادة على عدة عناصر مرتبطة ببعضها ذات توجيه مختلف. بهذا سيغير نظام الإحداثيات الموضعي الخاص بها من توجيه لآخر. لتجميع مصفوفات العناصر مع بعضها يجب أولاً كتابة كافة المصفوفات في نظام إحداثيات موحد هو نظام الإحداثيات الكلي. إجرائية تغيير الإحداثيات ستكون مماثلة لتلك التي ناقشناها في الفصل الرابع للهيكل الشبكية.

بفرض أن العقد المحلية ١ و ٢ للعنصر توافق العقد الكلية i و j بالترتيب. سيكون للانتقال عند عقدة موضعية مركبي انزياح وفق الاتجاه x والاتجاه y ودوران واحد، نرقمها بالترتيب u و v و θ في كل من عقدي العنصر كما هو موضح في الشكل ٦-٣. كما سيكون للانتقال عند عقدة كلية مركبي انزياح وفق الاتجاه X والاتجاه Y ودوران واحد، نرقمها بالترتيب D_{3j-2} و D_{3j-1} و D_{3j} عند العقدة ذات الرقم i كما هو مبين في الشكل ٦-٣. ينطبق نفس الاعتبار في الترقيم أيضاً على العقدة j .

يعطي تغيير الإحداثيات العلاقة بين شعاع الانتقالات $\{d_e\}$ في نظام الإحداثيات الموضعي وشعاع الانتقالات $\{D_e\}$ لنفس العنصر في نظام الإحداثيات الكلي:

العقدة الكلية j

العقدة الموضعية 2

العقدة الكلية i

العقدة الموضعية 1

الشكل ٦-٣: تغيير الإحداثيات لعنصر الجملون ثنائي البعد

$$\{d_e\} = [T]\{D_e\} \quad (٦-٧)$$

حيث

$$\{D_e\} = \begin{Bmatrix} D_{3j-2} \\ D_{3j-1} \\ D_{3j} \\ D_{3j-2} \\ D_{3j-1} \\ D_{3j} \end{Bmatrix} \quad (٦-٨)$$

حيث $[T]$ مصفوفة التحويل لعنصر الجملون معطاة كالتالي:

$$[T] = \begin{bmatrix} l_x & m_x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_y & m_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_x & m_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_y & m_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (٦-٩)$$

و في هذه المصفوفة:

$$l_x = \cos(x, X) = \cos \alpha = \frac{X_j - X_i}{l_e} \quad (١٠-٦)$$

$$m_x = \cos(x, Y) = \sin \alpha = \frac{Y_j - Y_i}{l_e}$$

حيث α هي الزاوية بين المحور x والمحور X كما هو مبين في الشكل ٦-٣. كما لدينا:

$$l_y = \cos(y, X) = \cos(90^\circ + \alpha) = -\sin \alpha = -\frac{Y_j - Y_i}{l_e} \quad (١١-٦)$$

$$m_y = \cos(y, Y) = \cos \alpha = \frac{X_j - X_i}{l_e}$$

لاحظ أن تغيير الإحداثيات في المستوي $X-Y$ لا يؤثر على درجة الطلاقة الدورانية، حيث إن اتجاهها وفق المحور z (الناظمي على المستوي $x-y$) سيبقى نفس الاتجاه Z في نظام الإحداثيات الكلي. يمكن حساب طول العنصر l_e بالعلاقة:

$$l_e = \sqrt{(X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2} \quad (١٢-٦)$$

يمكن بسهولة التحقق من العلاقة (٦-٧) والتي تعني ببساطة أنه عند العقدة i ، الانتقال u يساوي مجموع كافة مساقط D_{3i-1} و D_{3i-2} على المحور الموضعي x والانتقال v يساوي مجموع كافة مساقط D_{3i-1} و D_{3i-2} على المحور الموضعي y . ويقال نفس الشيء عند العقدة j . تحوّل المصفوفة $[T]$ مصفوفة 6×6 إلى مصفوفة 6×6 . باستخدام مصفوفة التحويل $[T]$ تصبح مصفوفات عنصر الجمالون في نظام الإحداثيات الكلي كالتالي:

$$[K_e] = [T^T][k_e][T] \quad (١٣-٦)$$

$$[M_e] = [T^T][m_e][T] \quad (١٤-٦)$$

$$\{F\}_e = [T^T]\{f_e\} \quad (١٥-٦)$$

لاحظ أنه لا يوجد أي تغيير في الأبعاد بين المصفوفات والأشعة في مستويي الإحداثيات الموضعي والكلي.

٦-٣ معادلات طريقة العناصر المنتهية للجمالونات الفراغية

يمكن اعتماد ذات المنهجية المستخدمة لصياغة معادلات عناصر الجمالونات ثنائية البعد لصياغة عناصر الجمالونات الثلاثية البعد. الفارق الوحيد هو وجود درجات طلاقة في عقدة الجمالونات الثلاثية البعد أكثر منها في عناصر الجمالونات الثنائية البعد. يوجد إجمالاً ست درجات طلاقة في عقدة عنصر ثلاثي البعد: ثلاثة

انزياحات وفق الاتجاهات و و وثلاثة دورانات حول المحاور و و . بالتالي لعنصر بعقدتين هناك تماماً اثنتا عشرة درجة طلاقة. كما هو مبين في الشكل ٤-٦.

الشكل ٤-٦: عنصر جمالون فراغي يحوي اثنتا عشرة درجة طلاقة

يمكن كتابة شعاع الانتقالات لعنصر الجمالون في الفراغ كالتالي:

مركبات الانتقال عند العقدة

(١٦-٦)

مركبات الانتقال عند العقدة

يمكن الحصول على مصفوفات العنصر بطريقة مشابهة لطريقة للحصول على مصفوفات عناصر القضبان والجوائز وإضافتهما معاً. لن ندخل هنا في التفاصيل وذلك لكبر حجم المصفوفات، إلا أننا ندرج فيما يلي مصفوفة الصلابة التي يمكن التأكد من حدودها ببساطة:

$$[k_e] = \begin{bmatrix} \frac{AE}{2a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{AE}{2a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3EI_z}{2a^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{3EI_z}{2a^3} & 0 & -\frac{3EI_z}{2a^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{3EI_z}{2a^3} & 0 \\ \frac{3EI_y}{2a^3} & 0 & -\frac{3EI_y}{2a^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{3EI_y}{2a^3} & 0 & -\frac{3EI_y}{2a^3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{GJ}{2a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{2a} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2EI_z}{a} & 0 & 0 & 0 & \frac{3EI_z}{2a^2} & 0 & \frac{2EI_z}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2EI_y}{a} & 0 & -\frac{3EI_y}{2a^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EI_z}{a} & 0 & 0 \\ \frac{AE}{2a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3EI_z}{2a^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{3EI_z}{2a^3} & 0 & \frac{3EI_z}{2a^3} & 0 & 0 & \frac{3EI_z}{2a^3} & 0 & 0 \\ \frac{3EI_y}{2a^3} & 0 & \frac{3EI_y}{2a^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{3EI_y}{2a^3} & 0 & \frac{3EI_y}{2a^3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{GJ}{2a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{2a} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2EI_z}{a} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2EI_y}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{Sym.} & & & & & & & & & & & \end{bmatrix} \quad (١٧-٦)$$

$$[m_e] = \begin{bmatrix} 70 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 35 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 78 & 0 & 0 & 0 & 22a & 0 & 27 & 0 & 0 & 0 & 0 & -13a \\ 78 & 0 & -22a & 0 & 0 & 0 & 0 & 27 & 0 & 13a & 0 & 0 \\ 70r_x^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -35r_x^2 & 0 & 0 & 0 \\ 8a^2 & 0 & 0 & 0 & -13a & 0 & -6a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8a^2 & 0 & 13a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6a^2 & 0 & 0 & 0 \\ 70 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 78 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -22a & 0 & 0 & 0 \\ 78 & 0 & 22a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 70r_x^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{Sym.} & & & & & & & & & & & 8a^2 \end{bmatrix} \quad (١٨-٦)$$

حيث I_y و I_z هي العزم الثاني للسطح (أو عزم العطالة) للمقطع العرضي للحائز بالنسبة للمحورين y و z بالترتيب. لاحظ أن درجة الطلاقة الرابعة توافق تشوه قص. إن صياغة عنصر قص لقضيب يشبه كثيراً صياغة عنصر القضيب. الفرق الوحيد هو أنه يستعاض عن التشوه المحوري بتشوه قص زاوي، ويستعاض عن القوى

المحورية بعزم الفتل. بالتالي يستعاض عن صلابة الشد AE/l_e في المصفوفة السابقة بصلابة الفتل GJ/l_e حيث G هو معامل القص و J عزم العطالة القطبي للمقطع العرضي للقصيب. تكون مصفوفة الكتلة أيضاً كما هو موضح بالعلاقة (٦-١٨).

حيث

$$I_N^2 = \frac{I_N}{A} \quad (٦-١٩)$$

و I_N هو العزم الثاني للسطح (أو عزم العطالة) للمقطع العرضي للجائز بالنسبة للمحور x .

المعادلات في نظام الإحداثيات الكلي

بعد معرفة مصفوفات العنصر في نظام الإحداثيات الموضعي ستكون الخطوة التالية تحويل هذه المصفوفات إلى نظام الإحداثيات الكلي وذلك معالجة الاختلاف في توجيه نظم الإحداثيات الموضعية لعنصر الجملون. بفرض أن العقدتين المحليتين ١ و ٢ للعنصر توافق العقدتين الكليتين i و j بالترتيب. يوجد عند عقدة موضعية ثلاثة مركبات للانزياح وفق الاتجاهات x و y و z وثلاثة مركبات للدوران حول المحاور x و y و z . يتم ترقيمها بالتالي d_1 إلى d_{12} وهي توافق التشوه الحقيقي كما هو معرف في المعادلة (٦-١٦).

يوجد عند عقدة كلية ثلاثة مركبات للانزياح وفق الاتجاهات X و Y و Z وثلاثة مركبات للدوران حول المحاور X و Y و Z . يتم ترقيمها بالتالي $D_{6i-5}, D_{6i-4}, \dots, D_{6i}$ وذلك للعقدة i كما هو مبين في الشكل ٦-٦. ويتم الترقيم في العقدة z بنفس الشكل.

يعطي تغيير الإحداثيات العلاقة بين شعاع الانتقالات في نظام الإحداثيات الموضعي $\{d_e\}$ وبين شعاع الانتقالات في نظام الإحداثيات الكلي $\{D_e\}$ لنفس العنصر:

$$\{d_e\} = [T]\{D_e\} \quad (٦-٢٠)$$

حيث

$$\{D_e\} = \begin{Bmatrix} D_{6i-5} \\ D_{6i-4} \\ D_{6i-3} \\ D_{6i-2} \\ D_{6i-1} \\ D_{6i} \\ D_{6j-5} \\ D_{6j-4} \\ D_{6j-3} \\ D_{6j-2} \\ D_{6j-1} \\ D_{6j} \end{Bmatrix} \quad (٦-٢١)$$

و $[T]$ مصفوفة التحويل للعنصر معطاة وفق:

$$[T] = \begin{bmatrix} [T_3] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [T_3] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [T_3] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [T_3] \end{bmatrix} \quad (٦-٢٢)$$

و فيها

$$[T_3] = \begin{bmatrix} l_x & m_x & n_x \\ l_y & m_y & n_y \\ l_z & m_z & n_z \end{bmatrix} \quad (٦-٢٣)$$

حيث l_k و m_k و n_k ($k = x, y, z$) هي تجميعات التوجيه المعرفة كما يلي:

$$\begin{aligned}
l_x &= \cos(x, X), & m_x &= \cos(x, Y), & n_x &= \cos(x, Z) \\
l_y &= \cos(y, X), & m_y &= \cos(y, Y), & n_y &= \cos(y, Z) \\
l_z &= \cos(z, X), & m_z &= \cos(z, Y), & n_z &= \cos(z, Z)
\end{aligned} \quad (٢٤-٦)$$

لتحديد تجميعات التوجيه هذه يجب تعريف موضع وتوجيه عنصر الجمالون أولاً. بواسطة العقدتين ١ و ٢ يتم تثبيت موضع العنصر في إحداثيات الجمالون الموضعية ويتم تثبيت التوجيه العنصر وفق الاتجاه x . إلا أنه يمكن لإحداثيات الجمالون الموضعية الدوران حول محور الجائز. يجب إذا تعريف نقطة إضافية في الإحداثيات الموضعية. يمكن اختيار هذه النقطة في أي موضع في المستوي $x-y$ مغايرة لنقاط المحور x . بالتالي يتم اختيار عقدة ثالثة كما هو موضح في الشكل ٦-٦-

الشكل ٦-٦: أشعة تعريف موضع وتوجيه عنصر الجمالون الفراغي

يمكن التعبير عن أشعة الموضع $\bar{V}_1$ و $\bar{V}_2$ و $\bar{V}_3$ كما يلي:

$$\bar{V}_1 = X_1 \bar{X} + Y_1 \bar{Y} + Z_1 \bar{Z} \quad (٢٥-٦)$$

$$\bar{V}_2 = X_2 \bar{X} + Y_2 \bar{Y} + Z_2 \bar{Z} \quad (٢٦-٦)$$

$$\bar{V}_3 = X_3 \bar{X} + Y_3 \bar{Y} + Z_3 \bar{Z} \quad (٢٧-٦)$$

حيث X_k و Y_k و Z_k ($k = x, y, z$) هي إحداثيات العقدة k و $\bar{X}$ و $\bar{Y}$ و $\bar{Z}$ هي أشعة الواحدة على المحاور X و Y و Z . نعرف أيضاً:

$$\left. \begin{aligned}
X_{kl} &= X_k - X_l \\
Y_{kl} &= Y_k - Y_l \\
Z_{kl} &= Z_k - Z_l
\end{aligned} \right\} \quad k, l = 1, 2, 3 \quad (٢٨-٦)$$

بهذا يمكن الحصول على الشعاعين $(\vec{V}_2 - \vec{V}_1)$ و $(\vec{V}_3 - \vec{V}_1)$ باستخدام العلاقتين (٢٥-٦) و (٢٩-٦) كما يلي:

$$\vec{V}_2 - \vec{V}_1 = X_{21}\vec{X} + Y_{21}\vec{Y} + Z_{21}\vec{Z} \quad (٢٩-٦)$$

$$\vec{V}_3 - \vec{V}_1 = X_{31}\vec{X} + Y_{31}\vec{Y} + Z_{31}\vec{Z} \quad (٣٠-٦)$$

كما يمكن الحصول على طول العنصر بالعلاقة:

$$l_e = 2a = |\vec{V}_2 - \vec{V}_1| = \sqrt{X_{21}^2 + Y_{21}^2 + Z_{21}^2} \quad (٣١-٦)$$

أما شعاع الواحدة على المحور X فيمكن صياغته وفق:

$$\vec{x} = \frac{(\vec{V}_2 - \vec{V}_1)}{|\vec{V}_2 - \vec{V}_1|} = \frac{X_{21}}{2a}\vec{X} + \frac{Y_{21}}{2a}\vec{Y} + \frac{Z_{21}}{2a}\vec{Z} \quad (٣٢-٦)$$

بالتالي تعطى تجميعات التوجيه وفق الاتجاه X كما يلي:

$$l_x = \cos(x, X) = \vec{x} \cdot \vec{X} = \frac{X_{21}}{2a}$$

$$m_x = \cos(x, Y) = \vec{x} \cdot \vec{Y} = \frac{Y_{21}}{2a} \quad (٣٣-٦)$$

$$n_x = \cos(x, Z) = \vec{x} \cdot \vec{Z} = \frac{Z_{21}}{2a}$$

يتضح من الشكل ٦-٦ أن اتجاه المحور Z يمكن تعريفه بالجداء الشعاعي لكل من $(\vec{V}_2 - \vec{V}_1)$ و $(\vec{V}_3 - \vec{V}_1)$ أي أن شعاع الواحدة على المحور Z يمكن كتابته:

$$\vec{z} = \frac{(\vec{V}_2 - \vec{V}_1) \times (\vec{V}_3 - \vec{V}_1)}{|(\vec{V}_2 - \vec{V}_1) \times (\vec{V}_3 - \vec{V}_1)|} \quad (٣٤-٦)$$

بتعويض كل من (٢٩-٦) و (٣٠-٦) في العلاقة السابقة نحصل على:

$$\vec{z} = \frac{1}{2A_{123}} \{ (Y_{21}Z_{31} - Y_{31}Z_{21})\vec{X} + (Z_{21}X_{31} - Z_{31}X_{21})\vec{Y} + (X_{21}Y_{31} - X_{31}Y_{21})\vec{Z} \} \quad (٣٥-٦)$$

حيث

$$A_{123} = \sqrt{(Y_{21}Z_{31} - Y_{31}Z_{21})^2 + (Z_{21}X_{31} - Z_{31}X_{21})^2 + (X_{21}Y_{31} - X_{31}Y_{21})^2} \quad (٣٦-٦)$$

باستخدام العلاقة (٣٥-٦) نجد أن:

$$l_z = \vec{z} \cdot \vec{X} = \frac{1}{2A_{123}}(Y_{21}Z_{31} - Y_{31}Z_{21})$$

$$m_z = \vec{z} \cdot \vec{Y} = \frac{1}{2A_{123}}(Z_{21}X_{31} - Z_{31}X_{21}) \quad (37-6)$$

$$n_z = \vec{z} \cdot \vec{Z} = \frac{1}{2A_{123}}(X_{21}Y_{31} - X_{31}Y_{21})$$

بما أن المحور y عمودي على كل من المحور x والمحور z ، يمكن الحصول على المحور y بالجداء الشعاعي:

$$\vec{y} = \vec{z} \times \vec{x} \quad (38-6)$$

و التي تعطي:

$$l_y = m_z n_x - n_z m_x$$

$$m_y = n_z l_x - l_z n_x \quad (39-6)$$

$$n_y = l_z m_x - m_z l_x$$

حيث نحصل على l_x و m_x و n_x و l_z و m_z و n_z من العلاقتين (33-6) و (37-6).

باستخدام مصفوفة التحويل $[T]$ يمكن الحصول على مصفوفات عنصر الجمالون الفراغي في نظام الإحداثيات الكلي كما يلي:

$$[K_e] = [T^T][k_e][T] \quad (40-6)$$

$$[M_e] = [T^T][m_e][T] \quad (41-6)$$

$$\{F_e\} = [T^T]\{f_e\} \quad (42-6)$$

٦-٤ ملاحظات

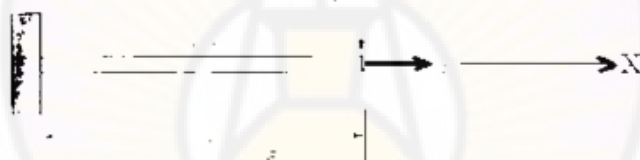
استخدمنا لصياغة مصفوفات عنصر الجمالون في هذا الفصل تجميع عنصري القضيب والجائز. تفترض هذه التقنية عدم ارتباط تأثير الحمولة المحورية بتأثير حمولة الانحناء في العنصر. مما يعني ببساطة أن القوى المحورية المطبقة على العنصر لا تنتج عنها أية تشوهات انحناء وأن قوى الانحناء لا ينتج عنها أية تشوهات محورية. يمكن استخدام عناصر الجمالون للإنشاءات التي تحوي عناصر منحنية. في هذه الحالة تظهر تأثيرات الارتباط حتى على مستوى العنصر. بالتالي، حسب تحدد العنصر، تصبح عملية التقطيع هامة جداً. مثلاً إذا كان التحدد كبيراً وينتج عنه تأثير واضح للارتباط فإن التقطيع الدقيق ضروري للحصول على الدقة المطلوبة. من النادر أن تخضع الإنشاءات الحقيقية لحمولة عرضية صافية. تتكون معظم الهياكل الشبكية من قضبان أو جوائز تخضع لحمولات محورية وعرضية. يتضح الآن أن عنصر الجائز الذي درسناه في الفصل الخامس كما

عنصر القضيب الذي درسه في الفصل الرابع ليسا إلا حالات خاصة من عنصر الجمالون. لهذا السبب فإنه في معظم البرمجيات التجارية يكون عنصر الجمالون نفس عنصر الجائز.

تعتمد صياغة عنصر الجائز في الفصل الخامس أو عنصر الجمالون في الفصل الحالي على نظرية أولر-برنولي للجوائز والتي تناسب الجوائز الرقيقة ذات السماكة القليلة حيث نسبة الطول للبعدين الآخرين أصغر من $1/20$ ، بالنسبة للجوائز الشخينة ذات السماكة الكبيرة بالنسبة للطول يجب استخدام نظرية الجوائز الموافقة لصياغة عناصر الجوائز الشخينة الموافقة. تزود معظم البرمجيات التجارية عناصر للجوائز الشخينة، وتستخدم هذه العناصر بشكل مشابه لعناصر الجوائز الرقيقة.

٦-٥ مثال تطبيقي:

للجمالون المبين بالشكل ٦-٧ والذي يخضع لقوى قاصة وشادة كل منها P ، فإذا علمت أن:
 $P = 50kN$, $A = 2 \times 10^{-6}$, $L = 1m$, $E = 210GPa$, $I = 2 \times 10^{-4}m^4$
 المطلوب حساب قيمة الإزاحات المجهولة بعد نمذجة الجمالون بعنصر وحيد.



الشكل ٦-٧: جمالون ناتى معرض لقوى محورية وقاصة

الحل:

شعاع درجات الحرية للجمالون $\langle d_c \rangle = \langle u_1 \ v_1 \ \theta_{z1} \ u_2 \ v_2 \ \theta_{z2} \rangle$
 بتطبيق المعادلة العامة بحالة السكون

$$\begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & 0 & 0 & -\frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{12EI_z}{2L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} \\ -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & \frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{2L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_{z1} \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_{z2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ M_{z1} \\ f_{x2} \\ f_{y2} \\ M_{z2} \end{Bmatrix} \quad (٦-٤٣)$$

Sym.

$$\begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & 0 & 0 & -\frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ & \frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{12EI_z}{2L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} \\ & & \frac{4EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} \\ & & & \frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ & & & & & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_{z1} \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_{z2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ M_{z1} \\ p \\ -p \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (٤٤-٦)$$

Sym.

$$\begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & 0 & 0 & -\frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ & \frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{12EI_z}{2L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} \\ & & \frac{4EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} \\ & & & \frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ & & & & & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_{z1} \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_{z2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ M_{z1} \\ p \\ -p \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (٤٥-٦)$$

Sym.

نطبق الشروط الحدية وذلك بحذف الأسطر والأعمدة الثلاث الأوائل وبعد الحل نجد:

$$\begin{aligned} u_2 &= \frac{PL}{AE} \\ \theta_{z2} &= -\frac{PL^2}{2EI_z} \\ v_2 &= -\frac{PL^3}{3EI_z} \end{aligned} \quad (٤٦-٦)$$

بعد التعويض بالأرقام

$$u_2 = \frac{PL}{AE} = \frac{50000}{2 \times 10^{-6} \times 210 \times 10^9} = 0.11 \text{ m}$$

$$\theta_{z2} = -\frac{PL^2}{2EI_z} = \frac{50000}{2 \times 210 \times 10^9 \times 2 \times 10^{-4}} = \frac{1}{1680} = 5.95 \times 10^{-4} \text{ rad} \quad (٤٧-٦)$$

$$v_2 = -\frac{PL^3}{3EI_z} = \frac{50000}{3 \times 210 \times 10^9 \times 2 \times 10^{-4}} = \frac{1}{2520} = 3.96 \times 10^{-4} \text{ m}$$

٦-٦ أسئلة للمراجعة

١. احسب الانتقالات في الجمالون المستوي الموضح في الشكل ٦-٧.

الشكل ٦-٨: جمالون مستوي بثلاثة عناصر

علماً أن لكل عناصر الإنشاء نفس خواص المادة ($E = 69.0 \text{ GPa}$, $\nu = 0.33$) ونفس المقطع العرضي الذي مساحته 0.01 m^2 . قارن نتائج الحساب بنتائج السؤال السادس من أسئلة المراجعة في الفصل الرابع.

٢. بين كيفية استخدام مبدأ التجميع لصياغة عناصر الجمالون ببساطة باستخدام عناصر القضبان والجوائز، تحت أية شروط يمكن لهذه التقنية أن تفشل؟

٣. في التحويل من نظام الإحداثيات الموضعي لنظام الإحداثيات الكلي في الجمالونات المستوية، هل تخضع درجة الطلاقة الدورانية لأي تحول؟ لماذا؟

الفصل السابع

طريقة العناصر المنتهية للأجسام الصلبة ثنائية البعد

جامعة دمشق
Damascus University

طريقة العناصر المنتهية للأجسام الصلبة ثنائية البعد

١-٧ مقدمة

سنطوّر في هذا الفصل وبطريقة سهلة الفهم، معادلات العناصر المنتهية لتحليل إجهادات العنصر الصلب ثنائي البعد 2D الخاضع لحمولات خارجية، يسمى العنصر الذي سنطوّره العنصر الصلب ثنائي البعد 2D ويستخدم في المسائل الإنشائية حيث تكون الحمولات، وبالتالي التشوهات، في المستوي. على الرغم من أنه لا يوجد إنشاء ثنائي البعد حقيقة، إلا أن المخللين ذوي الخبرة ينمذجون العديد من المسائل العملية بمسائل ثنائية البعد للحصول على نتائج مقبولة، حيث يكون التحليل ثنائي البعد أكثر فاعلية وأقل كلفة مقارنة بالتحليل الثلاثي البعد 3D. يوجد في التطبيقات الهندسية مسائل عملية إضافية يمكن نمذجتها كمسائل ثنائية البعد. لقد ناقشنا في الفصل الثاني وجود مسائل إجهاد مستوي أو انفعال مستوي حيث يجب استخدام عناصر إجهاد أو انفعال مستوي موافقة لحل هذه المسائل. مثلاً لو كان لدينا صفيحة محملة ضمن مستوياتها كما في الشكل ١-٧ فسنحتاج عناصر إجهاد مستوي ثنائية البعد.

الشكل ١-٧: مسألة نموذجية ثنائية البعد - إجهاد مستوي

لو أردنا نمذجة تأثير ضغط الماء على جسر، كما في الشكل ٢-٧، فعلينا استخدام عناصر انفعالات مستوية ثنائية البعد.

لاحظ أنه في الشكل ١-٧ تطبق شروط الإجهاد المستوي عادة على الإنشاءات ذات السماكة النسبية الصغيرة مقارنة بالبعدين الآخرين. نظراً لغياب أية قوى خارجية خارج المستوى فإن الإجهادات الناعظمة مهمة مما يقود لحالة الإجهاد المستوي. في الحالات التي تطبق فيها شروط الانفعال المستوي، كما في الشكل ٢-٧، فإن سماكة الإنشاء (في الاتجاه ج) كبيرة نسبياً مقارنة بالبعدين الآخرين وتكون الحمولة (الضغط) منتظمة وفق اتجاه الامتداد. بالتالي كتقريب يعتبر الانفعال ثابت في السماكة. في هذه الحالة، يكون الانفعال خارج المستوي

(مركبات الانفعال وفق الاتجاه α) مهماً مما يقود لحالة الانفعال المستوي. يمكن في كل من حالة الإجهاد المستوي أو الانفعال المستوي تبسيط معادلات الحاكمة بشكل جادري كما بينا في الفصل الثاني. تتطابق الصياغة في حالة مسائل الإجهاد المستوي أو الانفعال المستوي ما عدا الفرق في مصفوفة ثوابت المواد.

الشكل ٧-٢: مسألة نموذجية ثنائية البعد - انفعال مستوي

يمكن للعناصر الصلبة ثنائية البعد 2D، في حالة الإجهاد المستوي أو الانفعال المستوي، أن تكون مثلثية أو مستطيلة أو تريبعية الشكل مع حواف مستقيمة أو منحنية. تكون معظم العناصر المستخدمة في التطبيقات الهندسية خطية. كما تستخدم العناصر الرباعية في الحالات التي تتطلب دقة عالية في الإجهادات إلا أنها أقل استخداماً في المسائل العملية، تم تطوير عناصر ذات مرتبة أعلى إلا أنها أقل استخداماً ما عدا بعض المسائل الخاصة. تحدّد مرتبة العنصر الثنائي البعد 2D تبعاً لمرتبة توابع الشكل المستخدمة. يستخدم العنصر الخطي توابع شكل خطية وبالتالي فإن حواف العنصر مستقيمة. يستخدم العنصر التريباعي توابع شكل تريبعية ويمكن لحواف العنصر أن تكون منحنية. نفس الأمر ينطبق على العناصر التكميحية أو العناصر ذات المرتبة الأعلى. يمكن للنموذج ثنائي البعد 2D أن يتشوّه في المستوي حيث تمّ تعريف النموذج وفي أغلب الحالات يكون هذا المستوي $x-y$. في أية نقطة يكون للمجهول، أي الانتقالات، مركبتين وفق الاتجاهين x و y وكذا الأمر بالنسبة للقوى الخارجية. عادة بالنسبة لمسائل الانفعال المستوي لا تكون السماكة في الحقيقة كبيرة وتعالج عادة ككمية واحدة منتظمة في كامل النموذج الثنائي البعد 2D. في حين تكون السماكة في مسائل الإجهاد المستوي معاملاً هاماً لحساب مصفوفة الصلابة والإجهادات. سنعتبر في هذا الفصل أن للعنصر سماكة منتظمة t . إذا كانت سماكة الجسم متغيرة فيجب تقسيمه إلى عناصر أصغر حيث يمكن اعتبار سماكة ثابتة على كل جزء. من جهة أخرى فإن صياغة عناصر ثنائية البعد ذات سماكة متغيرة ممكنة بسهولة، حيث أن الإجرائية

تشبه كثيراً تلك المتعلقة بعناصر ذات سماكة منتظمة. يحوي القليل من البرمجيات التجارية عناصر ذات سماكة متغيرة.

ستكون صياغة المعادلات للعنصر ثنائي البعد 2D أكثر تعقيداً بالمقارنة مع العنصر أحادي البعد ID بسبب البعد الأكبر. إلا أن الإجرائية المتبعة لتطوير العنصر تشبه كثيراً إجرائية عناصر القضبان أحادية البعد والتي تمت صياغته في الفصل الرابع. نلخص هذه الخطوات في الإجرائية التالية بثلاث خطوات:

١. بناء مصفوفة توابع الشكل $[N]$ التي تحقق العلاقات (٣-٣٤) و (٣-٤١).
٢. صياغة مصفوفة الانفعال $[B]$.
٣. حساب المصفوفات $[k_e]$ و $[m_e]$ و $[f_e]$ باستخدام $[N]$ و $[B]$ والعلاقات (٣-٧١) و (٣-٧٥).

سنركز على صياغة ثلاثة أنماط بسيطة ولكن من أهم هذه العناصر: العنصر الخطي المثلث والعنصر المستطيل ثنائي الخطية والعنصر الخطي المربع isoparametric. بمجرد فهم أنماط العناصر الثلاثة هذه يغدو تطوير أنماط عناصر ذات مرتبة أعلى واضحاً، ذلك أنه يمكن استخدام نفس التقنيات. ستم مناقشة تطوير عناصر ذات مرتبة أعلى في نهاية هذا الفصل.

٧-٢ العناصر المثلثية الخطية

كان العنصر الخطي المثلثي أول العناصر المطوّرة للجسم الصلب الثنائي البعد 2D. وتعد صياغته الأبسط بين كافة العناصر الصلبة الثنائية البعد 2D. لقد وُجد أن العنصر الخطي المثلث أقل دقة من العناصر الخطية الرباعية. لهذا السبب غالباً ما يُعتقد أن الأمثل استخدام العناصر الرباعية، إلا أن الحقيقة أن العنصر المثلث يبقى عنصراً مفيداً جداً لتأقلمه مع الأشكال الهندسية المعقدة. تستخدم العناصر المثلثة عادة عند تقطيع نموذج ثنائي البعد ذي هندسة معقدة تحوي زوايا حادة. أضف إلى ذلك أن العناصر المثلثة مع أبسط الميزات الشكلية (الطولوجية) تجعل تطوير إجرائيات تقطيع أمراً بسيطاً. يأمل المستخدمون في أيامنا استخدام إجرائية مؤتمتة بشكل كامل لتوليد التقطيع لإنجاز مهمات التحليل المعقدة التي تتطلب إعادة أو تكييف التقطيع. تولّد معظم مولدات التقطيع المؤتمتة عناصر مثلثة. توجد مولدات تقطيع مؤتمتة تولّد عناصر مربعة إلا أنها لا تزال تستخدم عناصر مثلثة كبديل في بعض الحالات الصعبة ولتنتهي عملية التقطيع باستخدام عناصر مختلطة. بناءً على ذلك فإننا سنسبقي نستخدم عناصر مثلثة في العديد من المسائل الهندسية العملية رغبتنا بذلك أم لا.

نعتبر نموذج ثنائي البعد 2D في المستوي $x-y$ على النحو المبين في الشكل المبسط ٧-٣. يتم تقطيع المجال الثنائي البعد بطريقة ملائمة لعدد من عناصر مثلثة.

الشكل ٧-٣: مجال مستطيل مقطّع بعناصر مثلثة

ستتم مناقشة التقطيع الملائم لمجال ما بإيجاز في الفصل الثامن حيث سنضع لائحة من التوجيهات. يكون لكل عنصر مثلث، في التقطيع بالعناصر المثلثة، ثلاث عقد وثلاث حواف مستقيمة.

٧-٢-١ استيفاء حقل المتحولات

ليكن لدينا الآن عنصراً مثلثاً سماكته h . نرقم عقد هذا العنصر ١ و ٢ و ٣ وذلك بدوران عكس عقارب الساعة كما هو مبين في الشكل ٧-٤. تشكل الانتقالات حقل المتحولات بالنسبة للعناصر الصلبة ثنائية البعد $2D$ ويكون لها مركبتا (u و v) وبالتالي يكون لكل عقدة درجتا طلاقة. بما أن للعنصر المثلث ثلاثة عقد فإن العدد الكلي لدرجات طلاقة العنصر المثلث هو ست. بالنسبة للعناصر المثلثة، يمكن اختيار الإحداثيات الموضعية لكل عنصر مطابقة للإحداثيات الكلية، بما أنه لا توجد أية ميزات في تحديد نظام إحداثيات موضعية مختلف لكل عنصر.

الشكل ٧-٤: عنصر خطي مثلث

لننظر الآن في كيفية صياغة عنصر مثلث. تؤخذ الانتقالات $\{U\}$ عادة كنابع للإحداثيات x و y وتكتب الانتقالات في أية نقطة من العنصر باستخدام توابع الشكل والانتقالات عند العقد. يصبح لدينا إذاً (انظر الفقرة ٣-٤-٢):

$$[U^h(x, y)] = [N(x, y)] \{d_e\} \quad (٧-١)$$

حيث يؤشر الدليل h لتقريب الانتقالات و $\{d_e\}$ هو شعاع انتقالات العقد منظمة وفق الترتيب التالي:

الانتقالات عند العقدة ١

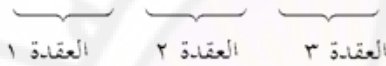
الانتقالات عند العقدة ٢

(٧-٢)

الانتقالات عند العقدة ٣

ونرتب مصفوفة توابع الشكل كما يلي:

(٧-٣)



حيث هي ثلاثة توابع شكل موافقة للعقد الثلاثة للعنصر المثلث، يمكن كتابة العلاقة (٧-١) بوضوح وفق:

(٧-٤)

هذا يعني أنه يتم تقريب كل مركبة من مركبات الانتقال في أية نقطة من العنصر بالاستيفاء من انتقالات العقد باستخدام توابع الشكل. ينتج هذا من عدم ارتباط مركبتي الانتقالات أساساً. السؤال الآن هو كيف يمكن بناء توابع الشكل للعنصر المثلث بما يحقق الشروط الكافية: خاصة توابع دلتا وخاصة تجزئة الواحدة وخاصة إعادة توليد الحقل الخطي.

٧-٢-٢ بناء توابع الشكل

يمثل بناء توابع الشكل عادة أول وأهم خطوة في صياغة معادلات العناصر المنتهية لأي غط من العناصر. لدى بناء توابع الشكل للعناصر المثلثة، يمكننا بالطبع إتباع ذات الإجرائية النموذجية الموصّفة في الفقرتين ٣-٤-٣ و ٤-٢-١، ونبدأ بنمذجة الانتقالات باستخدام قاعدة كثيرات حدود ذات ثوابت مجهولة. يتم تحديد هذه الثوابت فيما بعد باستخدام الانتقالات في عقد العنصر. قد تصلح هذه الإجرائية النموذجية لصياغة أي غط من العناصر ولكنها قد لا تكون الطريقة الأنسب. سنرهن فيما يلي على توجه مختلف قليلاً لبناء توابع الشكل. نبدأ بافتراض توابع الشكل مباشرة باستخدام قاعدة كثيرات حدود ذات ثوابت مجهولة ومن ثم نحدد هذه الثوابت باستعمال خواص توابع الشكل. الفارق الوحيد هنا هو أننا نفترض توابع الشكل

مباشرة عوضاً عن الانتقالات. بالنسبة للعنصر الخطي المثلث نفترض توابع شكل خطية بالنسبة لـ x و y . بالتالي سيكون لها الصيغة التالية:

$$N_1(x, y) = a_1 + b_1x + c_1y \quad (٥-٧)$$

$$N_2(x, y) = a_2 + b_2x + c_2y \quad (٦-٧)$$

$$N_3(x, y) = a_3 + b_3x + c_3y \quad (٧-٧)$$

حيث a_i, b_i, c_i ($i = 1, 2, 3$) هي ثوابت يجب تحديدها. يمكن كتابة العلاقة (٥-٧) بالشكل المختزل التالي:

$$N_i = a_i + b_ix + c_iy, \quad i = 1, 2, 3 \quad (٨-٧)$$

و تكتب توابع الشكل كمصفوفات وفق:

$$N_i = [1 \quad x \quad y] \begin{Bmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \end{Bmatrix} = [p^T] \{\alpha\} \quad (٩-٧)$$

حيث $\{\alpha\}$ هو شعاع الثوابت الثلاثة المجهولة و $\{p\}$ هو شعاع توابع قاعدة كثيرات الحدود. باستخدام العلاقة (٣-٢١) تغدو مصفوفة العزم $[P]$ الموافقة للقاعدة $\{p\}$:

$$[P] = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \quad (١٠-٧)$$

لاحظ أن المعادلة السابقة مكتوبة لتوابع الشكل وليس للانتقالات. في هذه المسألة الخاصة نستخدم قاعدة كثيرات حدود حتى المرتبة الأولى. يمكن تبعاً للمسألة استخدام قاعدة توابع كثيرات حدود من مرتبات أعلى. تعطى توابع كثيرات الحدود التامة في المستوي ثنائي البعد حتى المرتبة n عن طريق ما يسمى مثلث باسكال الموضح في الشكل ٣-٢. يعتمد عدد الحدود في $[P]$ على عدد العقد في العنصر ثنائي البعد 2D. نحاول عادة استخدام حدود من أدنى مرتبة لجعل القاعدة تامة ما أمكن. من الممكن أيضاً اختيار حدود خاصة من مرتبات أعلى لأنماط مختلفة من العناصر. بالنسبة للعنصر المثلث هناك ثلاث عقد وبالتالي نستخدم حدوداً أقل مع المرتبة الأولى التامة كما في العلاقة (٩-٧). تعني فرضية المعادلة (٥-٧) أن الانتقالات تتغير خطياً في العنصر. توجد في العلاقة (٨-٧) إجمالاً تسعة ثوابت يجب تحديدها. سنقوم فيما يلي بتحديد هذه الثوابت.

إذا كانت لتوابع الشكل خاصة توابع دلنا بالاعتماد على الخاصيتين ٢ و ٣ المعطاة في الفصل الثالث، سيكون لتوابع الشكل خاصة تجزئة الواحدة وخاصة إعادة توليد الحقل الخطي، ما دامت مصفوفة العزم المعطاة بالعلاقة (١٠-٧) تامة. أي أننا نتوقع أن قاعدة التوابع الخطية التامة المستخدمة في العلاقة (٩-٧) تضمن أن توابع

الشكل تحقق الشروط الكافية لتوابع شكل طريقة العناصر المنتهية. ما يجب القيام به الآن هو ببساطة فرض خاصة توابع دلنا على توابع الشكل التي افترضناها لتحديد الثوابت a_i, b_i, c_i .
تقول خاصة توابع دلنا أن قيمة توابع الشكل هي الواحد عند عقدتها وصفر في العقد الأخرى. في مسألة ثنائية البعد يمكن صياغة هذا الأمر كما يلي:

$$N_i(x_j, y_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (١١-٧)$$

بالنسبة للعنصر المثلث يترجم هذا الشرط لتوابع الشكل الثلاثة وفق المعادلات التالية. بالنسبة لتابع الشكل N_1 لدينا:

$$\begin{aligned} N_1(x_1, y_1) &= 1 \\ N_1(x_2, y_2) &= 0 \\ N_1(x_3, y_3) &= 0 \end{aligned} \quad (١٢-٧)$$

ذلك أن العقدة ١ عند (x_1, y_1) هي العقدة الموافقة للتابع N_1 ، والعقدة ٢ عند (x_2, y_2) والعقدة ٣ عند (x_3, y_3) هي العقدة المغايرة للتابع N_1 . باستخدام العلاقات (٥-٧) و (١٢-٧) لدينا:

$$\begin{aligned} N_1(x_1, y_1) &= a_1 + b_1 x_1 + c_1 y_1 = 1 \\ N_1(x_2, y_2) &= a_1 + b_1 x_2 + c_1 y_2 = 0 \\ N_1(x_3, y_3) &= a_1 + b_1 x_3 + c_1 y_3 = 0 \end{aligned} \quad (١٣-٧)$$

نحل المعادلات (١٣-٧) بالنسبة للثوابت a_1 و b_1 و c_1 نجد:

$$a_1 = \frac{x_2 y_3 - x_3 y_2}{2A_e}, \quad b_1 = \frac{y_2 - y_3}{2A_e}, \quad c_1 = \frac{x_3 - x_2}{2A_e} \quad (١٤-٧)$$

حيث A_e هو سطح العنصر المثلث الذي يمكن حسابه باستخدام مميز مصفوفة العزم:

$$A_e = \frac{1}{2} |P| = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} [(x_2 y_3 - x_3 y_2) + (y_2 - y_3)x_1 + (x_3 - x_2)y_1] \quad (١٥-٧)$$

لاحظ أنه ما دامت مساحة العنصر غير معدومة أي أنه ما دامت العقد الثلاثة غير متناحذية فإن مصفوفة العزم $[P]$ ستكون تامة. بتعويض العلاقة (١٤-٧) في العلاقة (٥-٧) نحصل على:

$$N_1 = \frac{1}{2A_e} [(x_2 y_3 - x_3 y_2) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y] \quad (١٦-٧)$$

والتي يمكن كتابتها كما يلي:

$$N_1 = \frac{1}{2A_p} [(y_2 - y_3)(x - x_2) + (x_3 - x_2)(y - y_2)] \quad (٧-١٧)$$

تبين هذه العلاقة بوضوح أن N_1 هو سطح في الفراغ (x, y, N) يمر عبر الحافة ٢-٣، ويختفي عند العقدتين ٢ عند (x_2, y_2) و ٣ عند (x_3, y_3) . كما أن هذا المستوي يمر من العقدة $(x, y, 1)$ في الفراغ، بما يضمن القيمة الواحدة لتابع الشكل عند العقدة الموافقة. بما أن تابع الشكل يتغير خطياً داخل العنصر فإنه يمكن رسم التابع N_1 بسهولة كما في الشكل ٧-٥-أ).

الشكل ٧-٥: العنصر الخطي المثلث وتوابع الشكل الخاصة به

بالاستفادة من ميزات التابع N_1 يمكننا مباشرة كتابة تابعي الشكل الآخرين للعقدتين ٢ و ٣. بالنسبة للعقدة ٢ تكتب الشروط كما يلي:

$$N_2(x_1, y_1) = 0$$

$$N_2(x_2, y_2) = 1 \quad (١٨-٧)$$

$$N_2(x_3, y_3) = 0$$

كما أن تابع الشكل N_2 يجب أن يمر من الحافة ١-٣ أي أن:

$$N_2 = \frac{1}{2A_e} [(x_3 y_1 - x_1 y_3) + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y] \quad (١٩-٧)$$

$$= \frac{1}{2A_e} [(y_3 - y_1)(x - x_3) + (x_1 - x_3)(y - y_3)]$$

يبين الشكل (b) ٥-٧ الرسم الخاص بهذا التابع. في العقدة ٣ تكتب الشروط كما يلي:

$$N_3(x_1, y_1) = 0$$

$$N_3(x_2, y_2) = 0 \quad (٢٠-٧)$$

$$N_3(x_3, y_3) = 1$$

و تابع الشكل N_3 يجب أن يمر من الحافة ١-٢ أي أن:

$$N_3 = \frac{1}{2A_e} [(x_1 y_2 - x_2 y_1) + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y] \quad (٢١-٧)$$

$$= \frac{1}{2A_e} [(y_1 - y_2)(x - x_1) + (x_2 - x_1)(y - y_1)]$$

يبين الشكل (c) ٥-٧ الرسم الخاص بهذا التابع. تعد إجرائية تحديد هذه الثوابت عملية جبرية أساسية. نلخص

فيما يلي توابع الشكل بصيغة مختزلة وفق:

$$N_i = a_i + b_i x + c_i y \quad (٢٢-٧)$$

$$a_i = \frac{1}{2A_e} (x_j y_k - x_k y_j)$$

$$b_i = \frac{1}{2A_e} (y_j - y_k) \quad (٢٣-٧)$$

$$c_i = \frac{1}{2A_e} (x_k - x_j)$$

حيث مؤشر الدليل i للقيم ١ و ٢ و ٣ ويتم تحديد z و k بعملية دوران وفق الترتيب $i \rightarrow j \rightarrow k$. مثلاً إذا

كانت $i=1$ فعندئذ $j=2$ و $k=3$. عندما $i=2$ يكون $j=3$ و $k=1$.

٣-٢-٧ إحداثيات المساحة

توجد طريقة بديلة وفعالة لإيجاد توابع شكل للعناصر المثلثة وتسمى بإحداثيات المساحة L_1 و L_2 و L_3 . سيقود استخدام إحداثيات المساحة مباشرة لتوابع شكل للعناصر المثلثة، إلا أنه لا بد من تعريف إحداثيات المساحة أولاً.

لتعريف L_1 نعتبر نقطة P عند (x, y) داخل المثلث، كما يبدو في الشكل ٦-٧، بحيث تشكل المثلث $2-3-P$.

الشكل ٦-٧: تعريف إحداثيات المساحة

لو كانت مساحة هذا المثلث A_1 فإنه يمكن حسابها بالصيغة:

$$A_1 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} [(x_2 y_3 - x_3 y_2) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y] \quad (٢٤-٧)$$

أما إحداثية المساحة L_1 فتعرف وفق:

$$L_1 = \frac{A_1}{A_e} \quad (٢٥-٧)$$

بشكل مماثل بالنسبة للإحداثية L_2 تعطى المساحة A_2 للمثلث $3-1-P$ بالصيغة:

$$A_2 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_3 & y_3 \\ 1 & x_1 & y_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} [(x_3 y_1 - x_1 y_3) + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y] \quad (٢٦-٧)$$

و تعرف إحداثية المساحة L_2 كما يلي:

$$L_2 = \frac{A_2}{A_p} \quad (٢٧-٧)$$

و نكتب بالنسبة للإحداثية L_3 :

$$L_3 = \frac{A_3}{A_p} \quad (٢٨-٧)$$

حيث A_3 هي مساحة المثلث $1-2-P$ وتحسب بالصيغة:

$$A_3 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} [(x_1 y_2 - x_2 y_1) + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y] \quad (٢٩-٧)$$

يمكننا بسهولة التأكد من خاصية تجزئة الواحدة لإحداثيات المساحة L_1 و L_2 و L_3 . بداية تشكل هذه الإحداثيات تجزئة للواحدة أي أن:

$$L_1 + L_2 + L_3 = 1 \quad (٣٠-٧)$$

و يمكن إثبات هذا الأمر من تعريف إحداثيات المساحة:

$$L_1 + L_2 + L_3 = \frac{A_1}{A_p} + \frac{A_2}{A_p} + \frac{A_3}{A_p} = \frac{A_1 + A_2 + A_3}{A_p} = 1 \quad (٣١-٧)$$

ثانياً نتحقق هذه الإحداثيات خاصية توابع دلتا. مثلاً ستستخدم الإحداثية L_1 إذا كانت النقطة P في إحدى العقدتين ٢ و ٣ وستكون قيمتها الواحد إذا كانت P في العقدة ١. ينطبق الأمر أيضاً على كل من L_2 و L_3 .

تنطبق هاتان الخاصتان على خواص توابع الشكل وبالتالي يصبح لدينا مباشرة:

$$L_1 = N_1, \quad L_2 = N_2, \quad L_3 = N_3 \quad (٣٢-٧)$$

يمكن التأكد من العلاقة السابقة بسهولة عن طريق مقارنة العلاقات (١٦-٧) مع (٢٥-٧) و (١٩-٧) مع (٢٧-٧) و (٢١-٧) مع (٢٨-٧). تناسب إحداثيات المساحة كثيراً بناء توابع شكل من مرتبة أعلى للعناصر المثلثة.

بعد صياغة مصفوفة توابع الشكل، يمكننا كتابة الانتقالات في أية نقطة من العنصر بدلالة انتقالات العقد وفق العلاقة (١-٧). ستكون الخطوة التالية بناء مصفوفة الانفعالات لكتابة الانفعال، وبالتالي الإجهاد، في أية نقطة من العنصر بدلالة انتقالات العقد. سيقود هذا فيما بعد إلى مصفوفات العنصر.

٧-٢-٤ مصفوفة الانفعال

لنتنقل الآن إلى الخطوة الثانية وهي صياغة مصفوفة الانفعال اللازمة لحساب مصفوفة الصلابة للعنصر. كما وجدنا في الفصل الثاني، توجد ثلاث مركبات رئيسية للإجهاد $[\sigma^T] = [\sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{xy}]$ في المسائل المستوية 2D، والانفعالات الموافقة $[\epsilon^T] = [\epsilon_{xx} \quad \epsilon_{yy} \quad \epsilon_{xy}]$ يمكن صياغتها كما يلي:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (٣٣-٧)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

أو بالشكل المصفوفي المحتزل:

$$\{\varepsilon\} = [L]\{U\} \quad (٣٤-٧)$$

حيث $[L]$ هي مصفوفة معامل الاشتقاق ويمكن الحصول عليها بسهولة من العلاقة (٣٣-٧):

$$[L] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (٣٥-٧)$$

بتعويض العلاقة (٧-١) في العلاقة (٣٤-٧) لدينا:

$$\{\varepsilon\} = [L]\{U\} = [L][N]\{d_e\} = [B]\{d_e\} \quad (٣٦-٧)$$

حيث تدعى $[B]$ مصفوفة الانفعال ويمكن الحصول عليها من العلاقة التالية ما إن تتم معرفة توابع الشكل:

$$[B] = [L][N] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} [N] \quad (٣٧-٧)$$

تشير العلاقة (٣٧-٧) إلى صياغة الانفعالات بدلالة الانتقالات في عقد العنصر باستخدام مصفوفة الانفعال. تطبق العلاقتان (٣٦-٧) و (٣٧-٧) على كافة أنماط العناصر ثنائية البعد 2D.

باستخدام العلاقات (٧-٣) و (٧-٢٢) و (٧-٢٣) يمكن الحصول ببساطة على مصفوفة الانفعال $[B]$ للعنصر المثلث الخطي وفق الصيغة البسيطة التالية:

$$[B] = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & a_2 & 0 & a_3 & 0 \\ 0 & b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 \\ b_1 & a_1 & b_2 & a_2 & b_3 & a_3 \end{bmatrix} \quad (٣٨-٧)$$

و من الواضح أن مصفوفة الانفعال $[B]$ للعنصر المثلث الخطي مصفوفة ثابتة. يشير هذا إلى كون الانفعال في العنصر المثلث ثابت وكذا الأمر بالنسبة للإجهاد. لذلك تدعى العناصر المثلثة الخطية بعناصر الانفعال الثابت أو عناصر الإجهاد الثابت. في الواقع يتغير الانفعال والإجهاد في الإنشاء، لذلك فإن استخدام العناصر المثلثة الخطية بتقطيع حشن سيقود إلى نتائج غير دقيقة بالنسبة لتوزع الانفعالات والإجهادات. لتوضيح تغيّرات الانفعال والإجهاد في الإنشاء نحتاج إذاً لتقطيع ناعم بالعناصر المثلثة الخطية.

٧-٢-٥ مصفوفات العنصر

بعد الحصول على توابع الشكل ومصفوفة الانفعال، يمكن كتابة الانتقالات والانفعالات (و بالتالي الإجهادات) بدلالة انتقالات عقد العنصر. يمكن إيجاد مصفوفات العنصر، أي مصفوفة الصلابة $[k_e]$ ومصفوفة الكتلة $[m_e]$ وشعاع القوى $\{f_e\}$ ، باستخدام المعادلات المطوّرة في الفصل الثالث.

يمكن الحصول على مصفوفة الصلابة $[k_e]$ للعناصر الصلبة الثنائية البعد 2D باستخدام العلاقة (٣-٧١):

$$[k_e] = \int_{V_e} [B^T][c][B] dV = \int_{A_e} \left(\int_0^h dz \right) [B^T][c][B] dA = \int_{A_e} h [B^T][c][B] dA \quad (٧-٣٩)$$

لاحظ أن مصفوفة ثوابت المادة $[c]$ معطاة بالعلاقين (٢،٣١) و (٢،٣٢) في مسائل الإجهادات المستوية والانفعالات المستوية بالترتيب. بما أن مصفوفة الانفعال $[B]$ ثابتة، كما هو موضح بالعلاقة (٧-٣٨)، وأن سماكة العنصر منتظمة فرضاً فإن التكامل في العلاقة (٧-٣٩) يمكن حسابه ببساطة ويعطى:

$$[k_e] = h A_e [B^T][c][B] \quad (٧-٤٠)$$

يمكن أيضاً الحصول على مصفوفة الكتلة $[m_e]$ بتعويض مصفوفة توابع الشكل في العلاقة (٣-٧٥):

$$[m_e] = \int_{V_e} \rho [N^T][N] dV = \int_{A_e} \int_0^h dx \rho [N^T][N] dA = \int_{A_e} h \rho [N^T][N] dA \quad (٧-٤١)$$

بالنسبة للعناصر ذات السماكة والكثافة المنتظمة يمكننا إعادة كتابة العلاقة (٧-٤١) وفق:

$$[m_e] = \rho h \int_{V_e} \begin{bmatrix} N_1 N_1 & 0 & N_1 N_2 & 0 & N_1 N_3 & 0 \\ 0 & N_1 N_1 & 0 & N_1 N_2 & 0 & N_1 N_3 \\ N_2 N_1 & 0 & N_2 N_2 & 0 & N_2 N_3 & 0 \\ 0 & N_2 N_1 & 0 & N_2 N_2 & 0 & N_2 N_3 \\ N_3 N_1 & 0 & N_3 N_2 & 0 & N_3 N_3 & 0 \\ 0 & N_3 N_1 & 0 & N_3 N_2 & 0 & N_3 N_3 \end{bmatrix} dA \quad (٧-٤٢)$$

يمكن حساب تكامل كافة حدود مصفوفة الكتلة بسهولة باستخدام الصيغة الرياضية المطورة من قبل آيزنبرغ ومالفيرن (Eisenberg & Malvern 1973):

$$\int_{A_e} L_1^m L_2^n L_3^p dA = \frac{m!n!p!}{(m+n+p+2)!} 2A \quad (٤٣-٧)$$

حيث $L_i = N_i$ هي إحداثيات المساحة للعناصر المثلثة والمطابقة لتوابع الشكل كما رأينا في الفقرة ٧-٢، بالتالي نجد مصفوفة الكتلة $[m_e]$ كما يلي:

$$[m_e] = \frac{\rho h A}{12} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ & & 2 & 0 & 1 & 0 \\ & & & 2 & 0 & 2 \\ \text{Sym.} & & & & 2 & 0 \\ & & & & & 2 \end{bmatrix} \quad (٤٤-٧)$$

يمكن الحصول على شعاع القوى $\{f_e\}$ للعناصر الصلبة الثنائية البعد 2D باستخدام العلاقات (٧٨-٣) و (٧٩-٣) و (٨١-٣). لنفرض أن العنصر محمل بقوة موزعة بانتظام $\{f_s\}$ على الطرف 2-3 من العنصر، كما هو موضح في الشكل ٧-٤، يصبح شعاع القوى في العقد:

$$\{f_e\} = \int_l [N^T]_{2-3} \begin{Bmatrix} f_{sx} \\ f_{sy} \end{Bmatrix} dl \quad (٤٥-٧)$$

إذا كانت الحمولة موزعة بانتظام، أي أن f_{sx} و f_{sy} ثابتة في العنصر، تصبح المعادلة السابقة:

$$x\{f_e\} = \frac{1}{2} l_{2-3} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ f_{sx} \\ f_{sy} \\ f_{sx} \\ f_{sy} \end{Bmatrix} \quad (٤٦-٧)$$

حيث l_{2-3} هو طول الحافة 2-3 في العنصر.

بالحصول على مصفوفة الصلابة $[k_e]$ ومصفوفة الكتلة $[m_e]$ وشعاع القوى $\{f_e\}$ ، يمكن الحصول على المعادلة الكلية للعناصر المنتهية بتجميع مصفوفات العناصر عن طريق جمع مساهمات العناصر المتجاورة عند العقد المشتركة.

٣-٧ العناصر الخطية الرباعية

في أيامنا لا يفضل الكثير من المحللين العناصر المثلثة، إلا إذا كانت هناك صعوبات في تقطيع وإعادة تقطيع نماذج ذات أشكال هندسية معقدة. يكمن السبب في أن العناصر المثلثة عادة أقل دقة من العناصر المستطيلة أو الرباعية. كما رأينا في الفقرة السابقة، تكون مصفوفة الانفعال في العناصر المثلثة الخطية ثابتة مما يفسر عدم الدقة. مع تطور خوارزميات التقطيع فإن العديد من النماذج ذات الأشكال الهندسية المعقدة الحاوية على حواف حادة أو أطراف محدبة يمكن نمذجتها بعناصر تربيعية. هذا يسمح بالحصول على تمثيل أقرب للواقع لتوزيع الانفعالات وبالتالي الإجهادات في الإنشاء. تعد صياغة العنصر المستطيل أبسط بالمقارنة مع العناصر المثلثة، ذلك أنه يمكن بناء توابع الشكل بسهولة أكبر بالنظر لانتظام شكل العناصر المستطيلة. تبقى الإجرائية ثلاثية الخطوات قابلة للتطبيق وسنبينها في الفقرات القادمة.

١-٣-٧ بناء توابع الشكل

نعتبر مجالاً ثنائي البعد. يتم تقطيع هذا المجال إلى عدد معين من العناصر المستطيلة بأربع عقد وأربع حواف مستقيمة، كما يبدو في الشكل ٧-٧.

الشكل ٧-٧: مجال مستطيل تم تقطيعه بعناصر مستطيلة

نقوم بترقيم عقد كل عنصر ١ و ٢ و ٣ و ٤ وفق عكس اتجاه عقارب الساعة. لاحظ أيضاً أنه بما أن لكل عقدة درجتين طلاقة فإنه سيكون للعنصر المستطيل الخطي ثماني درجات طلاقة. نعرف أبعاد العنصر $2a \times 2b \times h$. ونعرف مستوى الإحداثيات الطبيعي الموضعي (ξ, η) مع المبدأ في مركز العنصر المستطيل. تعطى العلاقة بين الإحداثيات الفيزيائية (x, y) والإحداثيات الطبيعية الموضعية (ξ, η) كما يلي:

$$\xi = \frac{x}{a}, \quad \eta = \frac{y}{a} \quad (٧-٤٧)$$

تعرف العلاقة (٧-٤) بشكل بسيط ترابط الإحداثيات بين نظامي الإحداثيات الفيزيائية والطبيعية للعنصر المستطيل كما هو موضح في الشكل ٧-٨. يمكننا الآن اعتماد نظام الإحداثيات الطبيعي في صياغتنا. سيجعل استخدام الإحداثيات الطبيعية بناء توابع الشكل وحساب تكاملات المصفوفات أسهل بكثير. تعد تقنيات

ترابط الإحداثيات هذه من أكثر التقنيات استخداماً في طريقة العناصر المنتهية وهي من التقنيات الفعالة جداً لدى صياغة عناصر ذات أشكال معقدة.

الشكل ٧-٨: العنصر المستطيل ونظامي الإحداثيات.

() عنصر مستطيل في نظام الإحداثيات الفيزيائية. () عنصر مربع في نظام الإحداثيات الطبيعية

نقوم باستيفاء حقل المتغيرات وتحديد الانتقالات داخل العنصر بالاستيفاء من انتقالات العقد وباستخدام توابع الشكل. نعتبر شعاع الانتقالات وفق الصيغة التالية:

(٧-٨)

حيث يتم ترتيب شعاع انتقالات العقد وفق:

الانتقالات عند العقدة ١

الانتقالات عند العقدة ٢

(٧-٩)

الانتقالات عند العقدة ٣

الانتقالات عند العقدة ٤

و تكون مصفوفة توابع الشكل كما يلي:

(٧-١٠)

العقدة ٤ العقدة ٣ العقدة ٢ العقدة ١

هي ثلاثة توابع شكل موافقة للعقد الأربع للعنصر المستطيل.

حيث

لتحديد توابع الشكل يمكننا اتباع نفس الخطوات المستخدمة في الفقرتين ٤-١-٢ و ٧-٢-٢، ونبدأ بافتراض الانتقالات أو توابع الشكل باستخدام قاعدة توابع كثيرات الحدود مع ثوابت مجهولة. نقوم بعد ذلك بتحديد هذه الثوابت باستخدام الانتقالات في عقد العنصر أو خواص توابع الشكل. الفارق الوحيد هنا هو أننا بحاجة لأربعة توابع قاعدة من وحيدات الحدود. كما رأينا في الفقرة ٧-٢-٢ فإن العملية شاقة وطويلة. في العديد من الحالات نلجأ لبناء توابع الشكل إلى طرق مختصرة. إحدى هذه الطرق هي inspection واستخدام خواص توابع الشكل.

انطلاقاً من انتظام العنصر التربيعة في نظام الإحداثيات الطبيعية، يمكن كتابة توابع الشكل في العلاقة (٧-٥٠) مباشرة، دون الدخول في تفاصيل العملية التي تم توصيفها في الفقرة السابقة للعناصر المثلثة، كمايلي:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \\ N_2 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \\ N_3 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \\ N_4 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \end{aligned} \quad (٧-٥١)$$

يمكننا التأكيد بسهولة أن كافة توابع الشكل المعطاة بالعلاقة (٧-٥١) تحقق خاصية توابع دلتا المعرفة بالعلاقة (٣-٣٤). مثلاً بالنسبة للتابع N_3 لدينا:

$$\begin{aligned} N_3|_{node1} &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \Big|_{\substack{\xi=-1 \\ \eta=-1}} = 0 \\ N_3|_{node2} &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \Big|_{\substack{\xi=-1 \\ \eta=1}} = 0 \\ N_3|_{node3} &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \Big|_{\substack{\xi=1 \\ \eta=1}} = 1 \\ N_3|_{node4} &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \Big|_{\substack{\xi=-1 \\ \eta=1}} = 0 \end{aligned} \quad (٧-٥٢)$$

يمكننا أيضاً التحقق بنفس الطريقة أن التوابع N_1 و N_2 و N_4 تحقق هذه الخاصية.

يمكننا بسهولة أيضاً التأكيد أن كافة توابع الشكل المعطاة بالعلاقة (٧-٥١) تحقق خاصية تجزئة الواحدة الموضحة في العلاقة (٣-٤١):

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^4 N_i &= N_1 + N_2 + N_3 + N_4 \\ &= \frac{1}{4} [(1-\xi)(1-\eta) + (1+\xi)(1-\eta) + (1+\xi)(1+\eta) + (1-\xi)(1+\eta)] \quad (٥٣-٧) \\ &= \frac{1}{4} [2(1-\xi) + 2(1+\xi)] = 1\end{aligned}$$

يمكن أيضاً التحقق من خاصية تجزئة الواحدة باستخدام المبرهنة الأولى في الفصل الثالث. للدقة يجب تسمية المعادلة (٥٣-٧) توابع شكل ثنائية الخطية، ذلك أنها تتغير بشكل خطي في كلا الاتجاهين ξ و η . كما أنها تتغير بشكل تربيعي في أي اتجاه آخر مغاير لاتجاهين ξ و η . بتسمية الإحداثيات الطبيعية عند العقدة j وفق (ξ_j, η_j) ، يمكن إعادة كتابة تابع الشكل ثنائي الخطية N_j وفق الصيغة المختصرة:

$$N_j = \frac{1}{4} (1 + \xi_j \xi) (1 + \eta_j \eta) \quad (٥٤-٧)$$

٧-٣-٢ مصفوفة الانفعالات

باستخدام نفس الإجرائية في حالة العناصر المثلثة، سيكون لمصفوفة الانفعال $[B]$ نفس الشكل كما في العلاقة (٣٧-٧) كما يلي:

$$\begin{aligned}[B] &= [L][N] \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{1-\eta}{a} & 0 & \frac{1-\eta}{a} & 0 & \frac{1+\eta}{a} & 0 & -\frac{1+\eta}{a} & 0 \\ 0 & -\frac{1-\xi}{b} & 0 & -\frac{1+\xi}{b} & 0 & \frac{1+\xi}{b} & 0 & \frac{1-\xi}{b} \\ -\frac{1-\xi}{b} & -\frac{1-\eta}{a} & -\frac{1+\xi}{b} & \frac{1-\eta}{a} & \frac{1+\xi}{b} & \frac{1+\eta}{a} & \frac{1-\xi}{b} & -\frac{1+\eta}{a} \end{bmatrix} \quad (٥٥-٧)\end{aligned}$$

من الواضح الآن أن مصفوفة الانفعال للعنصر المستطيل ثنائي الخطية لم تعد مصفوفة ثابتة. هذا يعني أن الانفعال، وبالتالي الإجهاد، داخل العنصر المستطيل الخطي غير ثابت.

٧-٣-٣ مصفوفات العنصر

بعد الحصول على توابع الشكل ومصفوفة الانفعال $[B]$ ، يمكن الحصول على مصفوفات العنصر، أي مصفوفة الصلابة $[k_e]$ ومصفوفة الكتلة $[m_e]$ وشعاع القوى في العقد $\{f_e\}$ ، باستخدام المعادلات المطورة في الفصل الثالث. بداية باستخدام العلاقة (٤٧-٧) لدينا:

$$dx dy = ab d\xi d\eta \quad (٥٦-٧)$$

بتعويض العلاقة (٥٦-٧) في العلاقة (٣٩-٧) نحصل على:

$$[k_e] = \int_A h[B]^T [c][B] dA = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} abh[B]^T [c][B] d\xi d\eta \quad (٥٧-٧)$$

تعطى مصفوفة ثوابت المادة $[c]$ بالعلاقين (٢,٣١) و (٢,٣٢) لمساائل الإجهادات المستوية والانفعالات المستوية بالترتيب. لن يكون حساب التكامل في العلاقة (٥٧-٧) مباشراً، ذلك أن مصفوفة الانفعال $[B]$ تابعة لكل من ξ و η . ما زال بإمكاننا الحصول على الشكل النهائي لمصفوفة الصلابة بحساب التكاملات في العلاقة (٥٧-٧) تحليلياً. غالباً ما نستخدم في الواقع إجرائية تكامل عددي لحساب التكامل، وسنقوم هنا بالتعريف بإجرائية تكامل غوص Gauss الشائعة الاستعمال. تعد إجرائية تكامل غوص Gauss طريقة بسيطة وإجرائية فعالة لحساب التكاملات وسنقدم لها باختصار فيما يلي.

٧-٣-٤ تكامل غوص

ليكن لدينا بداية التكامل الأحادي البعد. باستخدام طريقة غوص يتم حساب التكامل ببساطة عن طريق جمع الحد داخل التكامل بعد حسابه في m نقطة غوص مضروباً بمعاملات التثقيل كما يلي:

$$I = \int_{-1}^{+1} f(\xi) d\xi = \sum_{j=1}^m w_j f(\xi_j) \quad (٥٨-٧)$$

تم إيجاد مواضع نقاط غوص ومعاملات التثقيل من أجل قيم مختلفة لـ m كما هو موضح في الجدول ٧-١. عموماً يقود استخدام نقاط غوص أكثر إلى نتائج أدق للتكامل. على أي حال فإن المبالغة في استخدام نقاط غوص سيزيد من وقت الحساب وسيحتاج للمزيد من ذاكرة الحساب دون أن يقود بالضرورة لنتائج أفضل.

جدول ٧-١ مواضع نقاط غوص ومعاملات التثقيل من أجل قيم مختلفة لـ m

n	w_j	ξ_j	m
١	2	0	١
٣	1.1	$-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}$	٢
٥	5/9, 8/9, 5/9	$-\sqrt{0.6}, 0, \sqrt{0.6}$	٣
٧	0.347855, 0.652145, 0.652145, 0.347855	-0.861136, -0.339981, 0.339981, 0.861136	٤
٩	0.236927, 0.478629, 0.568889, 0.478629, 0.236927	-0.906180, -0.538469, 0, 0.538469, 0.906180	٥
١١	0.171324, 0.360762, 0.467914, 0.467914, 0.360762, 0.171324	-0.932470, -0.661209, -0.238619, 0.238619, 0.661209, 0.932470	٦

يعتمد عدد نقاط غوص المناسب على تعقيد الحد داخل التكامل. من المثبت أن استخدام m نقطة غوص يعطي النتيجة الدقيقة عند مكاملة كثيرات حدود حتى المرتبة $n = 2m - 1$. مثلاً، إذا كان الحد المكامل تابعاً خطياً (خط مستقيم) لدينا $2m - 1 = 1$ الذي يعطي $m = 1$. هذا يعني أنه إذا كان الحد المكامل خطياً فإن نقطة غوص واحدة ستكون كافية للحصول على النتيجة الدقيقة للتكامل. إذا كان الحد المكامل كثير حدود من الدرجة الثالثة، لدينا $2m - 1 = 3$ ويعطي $m = 2$. هذا يعني أنه لحساب تكامل كثير حدود من الدرجة الثالثة فإن نقطتي غوص ستكونان كافيتين للحصول على النتيجة الدقيقة للتكامل. سيعطي استخدام أكثر من نقطتين نفس النتيجة ولكن سيستهلك المزيد من وقت الحساب.

بالنسبة للتكاملات الثنائية، يتم تقسيم تكامل غوص وفق اتجاهين كما يلي:

$$I = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{i=1}^{n_v} \sum_{j=1}^{n_v} w_i w_j f(\xi_j, \eta_j) \quad (59-7)$$

يبين الشكل 7-9(b) مواضع النقاط الأربع المستخدمة في تكامل منطقة مربعة.

الشكل 7-9: نقاط التكامل من أجل $n_v = n_\eta = 1, 2, 3$ في منطقة مربعة.

يمكن الحصول على مصفوفة الصلابة $[k_e]$ عددياً عن طريق حساب التكاملات في العلاقة (57-7) باستخدام إجراءات تكامل غوص في العلاقة (59-7). كما أن نقاط غوص 2×2 الموضحة في الشكل 7-9-9 (b) كافية للحصول على الحل الدقيق لمصفوفة الصلابة المعطاة بالعلاقة (57-7). يعود هذا لكون الحدود في مصفوفة الانفعال $[B]$ هي توابع خطية للمتحوّلين ξ و η . يتكون الحد المكامل في العلاقة (57-5) من $[B]^T [c] [B]$ والتي تقود لجداء تابعين خطيين وبالتالي تصبح حدوداً تربيعية. يبين الجدول 7-1 أن استخدام نقطتي غوص في كل اتجاه يكفي للحصول على النتائج الدقيقة لتابع كثير حدود حتى الدرجة الثالثة في هذا الاتجاه. يبين الشكلان 7-9(a) و 7-9(c) أعداداً أخرى ممكنة لنقاط التكامل في منطقة مربعة. للحصول على مصفوفة الكتلة $[m_e]$ نعوض العلاقة (56-7) في العلاقة (75-3) وفق:

$$[m_e] = \int_V \rho [N]^T [N] dV = \int_A \int_0^h dx \rho [N]^T [N] dA \quad (٦٠-٧)$$

$$= \int_A h \rho [N]^T [N] dA = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} abh \rho [N]^T [N] d\xi d\eta$$

بعد حساب التكامل وتعويض العلاقة (٥٠-٧) في العلاقة (٦٠-٧) نحصل على مصفوفة الكتلة $[m_e]$ للعنصر تحليلياً كما يلي:

$$[m_e] = \frac{abh\rho}{9} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ & 4 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ & & 4 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ & & & 4 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ & & & & 4 & 0 & 2 & 0 \\ & & & & & 4 & 0 & 2 \\ & & & & & & 4 & 0 \\ & & & & & & & 4 \end{bmatrix} \quad (٦١-٧)$$

Sym.

للحصول على العنصر m_{ij} في مصفوفة الكتلة قمنا بحساب التكاملات التالية واستخدامها:

$$\begin{aligned} m_{ij} &= abh\rho \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} N_i N_j d\xi d\eta \\ &= \frac{abh\rho}{16} \int_{-1}^{+1} (1+\xi_i \xi_j) (1+\xi_j \xi_j) d\xi \int_{-1}^{+1} (1+\eta_i \eta_j) (1+\eta_j \eta_j) d\eta \\ &= \frac{abh\rho}{4} \left(1 + \frac{1}{3} \xi_i \xi_j\right) \left(1 + \frac{1}{3} \eta_i \eta_j\right) \end{aligned} \quad (٦٢-٧)$$

مثلاً لحساب الحد m_{33} نستخدم المعادلة السابقة للحصول على:

$$m_{33} = \frac{abh\rho}{4} \left(1 + \frac{1}{3} \times 1 \times 1\right) \left(1 + \frac{1}{3} \times 1 \times 1\right) = 4 \times \frac{abh\rho}{9} \quad (٦٣-٧)$$

في الواقع نقوم غالباً بحساب التكاملات في العلاقة (٦٠-٧) عددياً باستخدام إجرائية تكامل غوص.

يمكن الحصول على شعاع القوى لعنصر مستطيل عن طريق العلاقات (٧٨-٣) و (٧٩-٣) و (٨١-٣). بفرض أن العنصر محمل بقوة $\{f_i\}$ موزعة بانتظام على الحافة 2-3 كما هو موضح في الشكل ٧-٨، يصبح شعاع القوى في العقد:

$$\{f_e\} = \int_l [N]^T \begin{Bmatrix} f_{xx} \\ f_{yy} \end{Bmatrix} dl \quad (٦٤-٧)$$

إذا كانت الحمولة موزعة بانتظام على العنصر و f_{xx} و f_{yy} ثابتتان، تصبح المعادلة السابقة:

$$\{f_c\} = b \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ f_x \\ f_y \\ f_x \\ f_y \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (٧-٦٥)$$

حيث b هو نصف طول الطرف 2-3. تظهر العلاقة (٧-٦٥) أن الحمولة الموزعة بانتظام تم تقسيمها بالتساوي على العقدتين ٢ و ٣.

يمكن استخدام مصفوفة الصلابة $[k_e]$ ومصفوفة الكتلة $[m_e]$ وشعاع القوى $\{f_e\}$ مباشرة لتجميع معادلة العناصر المنتهية الكلية (٣-٩٦). سنحتاج إلى تحويل الإحداثيات إذا لم تتطابق الإحداثيات الطبيعية الموضعية مع نظام الإحداثيات الكلي. في مثل هذه الحالات يستخدم غالباً العناصر الرباعية التي ستم صياغتها في الفقرة القادمة.

٧-٤ العناصر الرباعية الخطية

على الرغم من أن العناصر المستطيلة مفيدة جداً وعادة أكثر دقة من العنصر المثلث، إلا أنه من الصعب استخدامها في مسائل ذات شكل هندسي غير مستطيل. بالتالي فإن استخدامها العملي محدود جداً. العنصر الأكثر فائدة وفعالية سيكون ما يسمى بالعنصر الرباعي، حيث أطرافه غير متوازية. مع ذلك يمكن أن تواجهنا مشاكل لدى مكاملة مصفوفة الصلابة ومصفوفة الكتلة للعناصر الرباعية بسبب الشكل غير المنتظم لمنطقة التكامل. لا يمكن استخدام إجرائية تكامل غوص مباشرة مع العناصر الرباعية. بالتالي ما نحتاجه هو بداية الانتقال من العنصر الرباعي إلى نظام الإحداثيات الطبيعية ليصبح العنصر مربعاً، بحيث تصبح توابع الشكل وطريقة التكامل المستخدمة في العنصر المستطيل قابلة للتطبيق. من هنا فإن مفتاح صياغة العنصر الرباعي هو تحويل الإحداثيات. ما إن تتم عملية تحويل الإحداثيات حتى تصبح بقية خطوات الإجرائية مطابقة لتلك المستخدمة لصياغة العنصر المستطيل في الفقرة السابقة.

٧-٤-١ تحويل الإحداثيات

يبين الشكل ٧-١٠ مجالاً ثنائي البعد 2D بشكل جناح طائرة. يمكننا أن نتخيل بسهولة أنه من المستحيل تقطيع هذا المجال إلى عناصر مستطيلة بأطراف متوازية. يمكن ببساطة إتحاز هذا العمل باستخدام عناصر رباعية ذات أطراف مستقيمة ولكن غير متوازية كما هو موضح في الشكل ٧-١٠.

الشكل ٧-١٠: مجال ثاني البعد وتقطيعه بعناصر رباعية

نستخدم لصياغة العناصر المربعة نفس تحويل الإحداثيات المستخدم للعناصر المستطيلة في الفقرة السابقة. سيكون التحويل أصعب قليلاً بسبب التعقيد المتزايد في شكل العنصر إلا أن الإجراءية ستبقى ذاتها. ليكن لدينا عنصراً رباعياً بأربع عقد مرقمة ١ و ٢ و ٣ و ٤ وفق عكس اتجاه عقارب الساعة كما هو موضح في الشكل ٧-١١. يبين الشكل ٧-١١ إحداثيات العقد الأربعة في نظام الإحداثيات الطبيعية.

الإحداثيات

الإحداثيات

الشكل ٧-١١: التحويل بين نظامي الإحداثيات

يمكن للإحداثيات الفيزيائية أن تكون نفس نظام الإحداثيات الكلي لكامل الإنشاء. بما أنه لدينا درجتا طلاقة عند كل عقدة فسيكون للعنصر الرباعي الخطي ثماني درجات طلاقة تماماً كما للعنصر المستطيل. لبناء توابع الشكل نستخدم نظام إحداثيات موضعي طبيعي مع مبدأ الإحداثيات في مركز العنصر الرباعي بعد تحويله من نظام الإحداثيات الكلي، كما نقوم باستيفاء الانتقالات باستخدام العلاقة:

(٧-٦٦)

يبين العلاقة (٧-٦٦) استيفاء حقل متغيرات باستخدام انتقالات العقد. باستخدام صياغة شبيهة يمكن استيفاء الإحداثيات و . بمعنى آخر، نقوم باستيفاء الإحداثيات و من إحداثيات العقد باستعمال توابع الشكل المصاغة بدلالة الإحداثيات الطبيعية. نكتب هذا الاستيفاء الرياضي كما يلي:

(٦٧-٧)

حيث هو شعاع الإحداثيات الفيزيائية:

(٦٨-٧)

و هي مصفوفة توابع الشكل المعطاة بالعلاقة (٥٠-٧). يمثل في العلاقة (٦٧-٧) الإحداثيات الفيزيائية عند عقد العنصر وهو معطى كالتالي:

الإحداثيات عند العقدة ١

الإحداثيات عند العقدة ٢

(٦٩-٧)

الإحداثيات عند العقدة ٣

الإحداثيات عند العقدة ٤

يمكن كتابة العلاقة (٦٧، ٦٨) بشكل تفصيلي كما يلي:

(٧٠-٧)

حيث هي توابع الشكل المعرفة للعنصر المستطيل في العلاقات (٥٣-٧) أو (٥٤-٧). لاحظ أنه، اعتماداً على خواص توابع الشكل، سيكون الاستيفاء دقيقاً عند هذه العقد. مثلاً يعطى تعويض و في العلاقة (٧٠-٧) ، كما هو مبين في الشكل ١١-٧. فيزيائياً، هذا يعني أن النقطة ٢ في نظام الإحداثيات الطبيعية تتحول إلى النقطة ٢ في نظام الإحداثيات الفيزيائية والعكس صحيح. كما نلاحظ نفس الشيء بالنسبة للنقاط ١ و ٣ و ٤.

لنحلل الآن هذا التحويل عن قرب. يعطى تعويض في العلاقة (٧٠-٧):

(٧١-٧)

$$x = \frac{1}{2}(x_2 + x_3) + \frac{1}{2}\eta(x_3 - x_2) \quad (٧٢-٧)$$

$$y = \frac{1}{2}(y_2 + y_3) + \frac{1}{2}\eta(y_3 - y_2)$$

بحذف η من المعادلتين السابقتين نجد:

$$y = \frac{(x_3 - x_2)}{(y_3 - y_2)} \left\{ x - \frac{1}{2}(x_2 + x_3) \right\} + \frac{1}{2}(y_2 + y_3) \quad (٧٣-٧)$$

و هذا يمثل الخط المستقيم الواصل بين (x_2, y_2) و (x_3, y_3) . هذا يعني أن الحافة ٢-٣ في نظام الإحداثيات الفيزيائية تتحول إلى الحافة ٢-٣ في نظام الإحداثيات الطبيعية. كما نلاحظ نفس الشيء بالنسبة للحواف الثلاثة المتبقية. أي أننا نرى أن الحواف المستقيمة الأربعة للرابعي في نظام الإحداثيات الفيزيائية توافق الحواف المستقيمة الأربعة للمربع في نظام الإحداثيات الطبيعية. بالتالي فإن مجال العنصر الرابعي تتحول ضمن عنصر مربع واحد.

٧-٤-٢ مصفوفة الانفعالات

بعد إتمام تحويل الإحداثيات يمكننا الآن صياغة مصفوفة الانفعالات $[B]$. يلزمنا في هذه الحالة كتابة الاشتقاق بدلالة حدود الإحداثيات الطبيعية، ذلك أن العلاقة بين الإحداثيتين x و y والإحداثيات الطبيعية لم تعد مباشرة كما في حالة العناصر المستطيلة. بتطبيق قاعدة السلسلة على الاشتقاق الجزئي يصبح لدينا:

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \quad (٧٤-٧)$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \eta} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta}$$

يمكن كتابة المعادلتين السابقتين على شكل مصفوفات كما يلي:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (٧٥-٧)$$

حيث $[J]$ هي مصفوفة اليعقوبي المعرفة وفق:

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (٧٦-٧)$$

نعوض الآن استيفاء الإحداثيات المعرف بالعلاقة (٧٠-٧) في العلاقة أعلاه ونجد:

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} & \frac{\partial N_4}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} & \frac{\partial N_4}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix} \quad (٧٧-٧)$$

بإعادة كتابة العلاقة (٧٥-٧) نحصل على:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J^{-1}] \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (٧٨-٧)$$

و هي تعطي العلاقة بين مشتقات توابع الشكل بالنسبة للمتحويلين x و y مع المشتقات بالنسبة للمتحويلين ξ و η . يمكننا الآن استخدام العلاقة $[B] = [L][N]$ لحساب مصفوفة الانفعال $[B]$ ، بتعويض كافة مشتقات توابع الشكل بالنسبة للمتحويلين x و y بالمشتقات بالنسبة للمتحويلين ξ و η ، باستخدام العلاقة (٧٨-٧). نحتاج هذه الإحرائية للحساب العددي على الحاسوب.

٧-٤-٣ مصفوفات العنصر

ما إن يتم الحصول على مصفوفة الانفعال $[B]$ حتى نقوم بحساب مصفوفات العنصر. يمكن الحصول على مصفوفة الصلابة بالعلاقة (٣٩-٧). نستخدم لحساب التكامل العلاقة التالية والتي برهنها Murnaghan في العام ١٩٥١ وهي:

$$dA = \det|J| d\xi d\eta \quad (٧٩-٧)$$

حيث $\det|J|$ هو المميز لمصفوفة اليعقوبي. بالتالي يمكن كتابة مصفوفة صلابة العنصر كما يلي:

$$k_e = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} h [B^T][c][B] \det|J| d\xi d\eta \quad (٨٠-٧)$$

يمكن حساب التكاملات أعلاه باستخدام طريقة تكامل غوص التي تمت مناقشتها في الفقرة السابقة. لاحظ كيف يمكننا تحويل الإحداثيات من استخدام طريقة تكامل غوص على منطقة مربعة بسيطة.

توابع الشكل المعرفة بالعلاقة (٧-٥٣) هي توابع ثنائية الخطية للمتحوّلين η و η . نحصل على عناصر مصفوفة الانفعال $[B]$ باشتقاق هذه التوابع ثنائية الخطية بالنسبة للمتحوّلين η و η وبالتقسيم على مصفوفة اليعقوبي والتي عناصرها أيضاً توابع ثنائية الخطية. بالتالي فإن عناصر $[B] \det[J] [c]^T$ هي توابع كسرية، لا يمكن صياغتها عادة ككثيرات حدود. هذا يعني أننا قد لا نتمكن من حساب مصفوفة الصلابة بدقة باستخدام طريقة تكامل غوص على عكس حالة العنصر المستطيل.

يمكن أيضاً حساب مصفوفة الكتلة للعنصر $[m_e]$ بنفس طريقة حسابها للعنصر المستطيل باستخدام العلاقة (٧-٦٠):

$$[m_e] = \int_V \rho [N^T] [N] dV = \int_A \int_0^h dx \rho [N^T] [N] dA = \int_A h \rho [N^T] [N] dA \quad (٧-٨١)$$

$$= \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} h \rho [N^T] [N] \det[J] d\xi d\eta$$

يتم الحصول على شعاع القوى بنفس الطريقة المذكورة بالنسبة للعنصر المستطيل، ذلك أن التكاملات لحساب شعاع القوى خطية أحادية البعد. بعد الحصول على مصفوفات العنصر نقوم بتجميع هذه المصفوفات بالطريقة المعروفة للحصول على المصفوفات الكلية.

٧-٤-٤ ملاحظات

توابع الشكل المستخدمة لاستيفاء الإحداثيات في العلاقة (٧-٧٠) هي نفسها المستخدمة لاستيفاء الانتقالات. يسمى هذا العنصر بالعنصر isoparametric. عموماً، ليس من الضروري أن نستخدم نفس توابع الشكل للإحداثيات والانتقالات. يقود استخدام توابع شكل مختلفة للإحداثيات والانتقالات إلى تطوير ما يسمى بالعناصر subparametric أو Superparametric. تمت دراسة هذه العناصر في الأبحاث الأكاديمية ولكنها أقل استخداماً في التطبيقات العملية. لن نقوم بتغطية عناصر كهذه في الكتاب.

٧-٥ عناصر ذات مرتبة أعلى

سنأخذ عائلة العناصر المثلثة

٧-٥-١ الصياغة العامة لتوابع الشكل

نستخدم، لدى تطوير عناصر ذات مرتبة أعلى، نظام إحداثيات المساحة. يبين الشكل ٧-١٢ الحالة العامة لعنصر مثلث من المرتبة p ويحوي على n_d عقدة تحسب بالعلاقة:

$$n_d = (p+1)(p+2)/2 \quad (٧-٨٢)$$

تتوضع العقدة $i(I, J, K)$ عند العقدة I في الاتجاه L_1 وعند العقدة J في الاتجاه L_2 وعند العقدة K في الاتجاه L_3 . تبعاً للشكل ٧-١٢ لدينا عند كل عقدة:

$$I + J + K = p \quad (٧-٨٣)$$

يمكن كتابة توابع الشكل وفق الصيغة (Argyris, 1968):

$$N_i = l_I^I(L_1) l_J^J(L_2) l_K^K(L_3) \quad (٧-٨٤)$$

حيث l_I^I و l_J^J و l_K^K معرفة بالعلاقة (٨٢، ٤) مع تبديل الإحداثية x بإحداثيات المساحة، أي:

$$l_\beta^\beta(L_\alpha) = \frac{(L_\alpha - L_{\alpha 0})(L_\alpha - L_{\alpha 1}) \cdots (L_\alpha - L_{\alpha(\beta-1)})}{(L_{\alpha I} - L_{\alpha 0})(L_{\alpha I} - L_{\alpha 1}) \cdots (L_{\alpha I} - L_{\alpha(\beta-1)})} \quad (٧-٨٥)$$

الشكل ٧-١٢: عنصر مثلث من المرتبة معرف باستخدام نظام إحداثيات المساحة. تتوضع العقدة $i(I, J, K)$ عند العقدة I في الاتجاه L_1 وعند العقدة J في الاتجاه L_2 وعند العقدة K في الاتجاه L_3 . لدينا عند كل عقدة $I + J + K = p$.

حيث $\alpha = 1, 2, 3$ و $\beta = I, J, K$. مثلاً، عندما تكون $\alpha = 1$ و $\beta = I$ لدينا:

$$l_I^I(L_1) = \frac{(L_1 - L_{10})(L_1 - L_{11}) \cdots (L_1 - L_{1(I-1)})}{(L_{1I} - L_{10})(L_{1I} - L_{11}) \cdots (L_{1I} - L_{1(I-1)})} \quad (٧-٨٦)$$

بما أن:

$$l_{\beta}^{\beta}(L_{\alpha}) = \begin{cases} 1 & \text{عندما } L_{\alpha} = L_{\alpha I} \\ 0 & \text{في الحالات الأخرى} \end{cases} \quad (٨٧-٧)$$

من السهل التأكد من خاصية تابع دلنا من أجل:

$$N_i = \begin{cases} 1 & \text{عند العقد } L_1 = L_{1I}, L_1 = L_{1J}, L_1 = L_{1K} \\ 0 & \text{في العقد الأخرى} \end{cases} \quad (٨٨-٧)$$

يمكن من العلاقتين (٨٤-٧) و (٨٥-٧) ملاحظة أن ترتيب تابع الشكل هو نفس الترتيب التالي:

$$(L_1)' (L_2)' (L_3)^K \quad (٨٩-٧)$$

بما أن L_{α} هي تابع خطي بالنسبة لكل من x و y فإن مرتبة تابع الشكل ستكون:

$$I + J + K = p \quad (٩٠-٧)$$

٧-٥-٢ العناصر المثلثة التربيعية

ليكن لدينا العنصر المثلث التربيعي المبين في الشكل ٧-١٣. يحوي هذا العنصر على ست عقد: ثلاث عقد في الزوايا وثلاث عقد في أنصاف الحواف.

الشكل ٧-١٣: عنصر مثلث تربيعي

يمكن الحصول بسهولة على توابع الشكل باستخدام العلاقتين (٨٤-٧) و (٨٥-٧). نبين فيما يلي حساب التابع N_1 . لاحظ أنه بالنسبة للعنصر المبين في الشكل ٧-١٣، يكون للإحداثية L_1 ثلاث قيم مختلفة:

$$\begin{array}{ll} L_{10} = 0 & \text{عند العقد ٢ و ٣ و ٥} \\ L_{11} = 0.5 & \text{عند العقدتين ٤ و ٦} \\ L_{12} = 1.0 & \text{عند العقدة ١} \end{array} \quad (٩١-٧)$$

لدينا باستخدام العلاقة (٨٤-٧):

$$\begin{aligned}
N_1 &= l_2^2 (L_1) l_0^0 (L_2) l_0^0 (L_2) = l_2^2 (L_1) \times 1 \times 1 = l_2^2 (L_1) \\
&= \frac{(L_1 - L_{10})(L_1 - L_{11})}{(L_{12} - L_{10})(L_{12} - L_{11})} = \frac{(L_1 - 0)(L_1 - 0.5)}{(1 - 0 - 1)(1 - 0.5)} = (2L_1 - 1)L_1
\end{aligned} \quad (٩٢-٧)$$

كما يكون لدينا نفس المعادلة للزاويتين المتبقيتين ٢ و ٣:

$$N_1 = N_2 = N_3 = (2L_1 - 1)L_1 \quad (٩٣-٧)$$

أما بالنسبة لعقدة وسط الحافة لدينا:

$$\begin{aligned}
N_4 &= l_1^1 (L_1) l_1^1 (L_2) l_0^0 (L_2) = l_1^1 (L_1) l_1^1 (L_2) \times 1 = l_1^1 (L_1) l_1^1 (L_2) \\
&= \frac{(L_1 - L_{10})(L_2 - L_{20})}{(L_{11} - L_{10})(L_{21} - L_{20})} = \frac{(L_1 - 0)(L_1 - 0)}{(0.5 - 0)(0.5 - 0)} = 4L_1 L_2
\end{aligned} \quad (٩٤-٧)$$

هذه المعادلة صالحة أيضاً للعقدتين في وسط الحرفين المتبقيين، أي أنه لدينا:

$$N_4 = N_5 = N_6 = 4L_1 L_2 \quad (٩٥-٧)$$

٣-٥-٧ العناصر المثلثة التكميلية

بالنسبة للعنصر المثلث التكميلي الموضح في الشكل ٧-١٤ والذي يحوي على تسعة عقد، يمكن أيضاً الحصول على توابع الشكل باستخدام العلاقة (٧-٨٤)، كذا الأمر بالنسبة لقيم إحداثيات المساحة (مثلاً L_1):

الشكل ٧-١٤: عنصر مثلث تكميلي

$$\begin{aligned}
L_{10} &= 0 && \text{عند العقد ٢ و ٦ و ٧ و ٣} \\
L_{11} &= \frac{1}{3} && \text{عند العقد ٥ و ١٠ و ٨} \\
L_{12} &= \frac{2}{3} && \text{عند العقد ٤ و ٩} \\
L_{13} &= 1 && \text{عند العقدة ١}
\end{aligned} \quad (٩٦-٧)$$

دون التعرّيج على إجرائية الحساب نعرض فيما يلي النتائج. من المفيد جداً للقارئ التأكد من هذه النتائج. من أجل عقد الزوايا (١ و ٢ و ٣):

$$N_1 = N_2 = N_3 = \frac{1}{2}(3L_1 - 1)(3L_1 - 2)L_1 \quad (٩٧-٧)$$

بالنسبة لعقد الخواف (من ٤ إلى ٩):

$$N_4 \sim N_9 = \frac{9}{2}L_1L_2(3L_1 - 1) \quad (٩٨-٧)$$

بالنسبة للعقدة الداخلية (١٠):

$$N_{10} = 27L_1L_2L_3 \quad (٩٩-٧)$$

الفصل الثامن

تقنيات النمذجة بطريقة العناصر المنتهية

جامعة دمشق
Damascus University

تقنيات النمذجة بطريقة العناصر المنتهية

٨-١ مقدمة

سنستعرض في هذا الفصل الكثير من تقنيات النمذجة حيث لبعضها ضرورة ملحة عند القيام بتحليل أو دراسة بطريقة العناصر المنتهية وذلك لضمان وثوقية ودقة النتائج المستخلصة. حيث بتطور التقنيات الحاسوبية وبرمجياته أصبحت إمكانية إجراء التحليلات بواسطة العناصر المنتهية أكثر سهولة.

لذا فإنه غالباً ما تستخدم حزم طريقة العناصر المنتهية كصندوق أسود لكثير من خطط التصميم الحالية من قبل محللين قد لا يملكون الخلفية الكافية بالتحليلات بواسطة العناصر المنتهية ومع ذلك فإن الاستخدام السيئ لأي برنامج تجاري يمكن أن يقود إلى نتائج خاطئة تختبئ في كثير من الأحوال خلف الرسم اللوني لتوزيع الإجهادات أو أي نتيجة أخرى دون معرفة المستخدم.

وصف النظريات ومنهجيات طريقة العناصر المنتهية، يتوجب على القارئ أن يملك فكرة كافية عما يجري في حزمة برنامج التجاري للعناصر المنتهية، وعليه فإن الهدف الأساسي لهذا البحث هو تسليط المزيد من الضوء على الصندوق الأسود وبذلك يتجنب القارئ الأخطاء غير الضرورية عند إنشاء نموذج بطريقة العناصر المنتهية عن طريق استخدام حزمة تجارية ما، كما أن هناك سبباً آخر وراء تعلم بعض هذه التقنيات وذلك لتحسين كفاءة وفاعلية حساب نتائج العناصر المنتهية ودقتها فالحلل المتمرس يجب أن يكون قادراً على الحصول على نتائج دقيقة بأقل جهد لازم لإنجاز النموذج وباستخدام القادر الأقل من موارد النظام الحاسوبي المستخدم لإنجاز الحساب بطريقة العناصر المنتهية حيث تقاس فاعلية أو كفاءة التحليل بطريقة العناصر المنتهية من خلال نسبة الجهد المبذول إلى الدقة الناتجة كما هو مبين بالشكل ٨-١. فعلى سبيل المثال، يمكن استخدام نموذج متناظر لمحاكاة مسألة ذات شكل هندسي متناظر من اختصار الزمن اللازم لإنشاء النموذج والزم من اللازم للحساب على حد سواء مع الاحتفاظ بإمكانية الحصول على قدر كبير من دقة النتائج. لذا فإن التحليل الجيد يتطلب أكثر من التشبيك الجيد لمجال المسألة بواسطة العناصر وللحصول على نموذج جيد للعناصر المنتهية فإنه يجب أن نأخذ بالحسبان العوامل التالية:

- قدرة البيئة الحاسوبية والإمكانات البشرية وتحدد مقياس نموذج طريقة العناصر المنتهية.
- النتائج المطلوبة وتعين الهدف وبالتالي طريقة التحليل.
- الخواص الميكانيكية لهندسة الشكل لمجال المسألة ويحدد نوع العناصر الواجب استخدامها.
- الأحمال والشروط الابتدائية والشروط الحدية.

لجهد

لجهد

لجهد

لجهد

الشكل ٨-١: علاقة الجهد الأدنى للمحلل بالدقة الأعلى للنتائج.

٨-٢ زمن وحدة المعالجة المركزية

بالرغم من التقدم في صناعة الحواسيب إلا أن موارد البيئة الحاسوبية تبقى واحداً من العوامل الحاسمة في مدى تعقيد نموذج العناصر المنتهية. يمكن تنبؤ زمن وحدة المعالجة المركزية اللازم لإجراء تحليلات سكون "ستاتيكية" باستخدام العلاقة البسيطة التالية:

$$(٨-١)$$

حيث :

هو إجمالي عدد درجات الحرية في نظام معادلات العناصر المنتهية.

ثابت ضمن المجال من ٢,٠ إلى ٣,٠ وهو يعتمد على أنظمة الحل المختلفة المستخدمة في حزم طريقة العناصر المنتهية وبناء مصفوفة الصلابة، إن من أهم العوامل المؤثرة في قيمة هو عرض حزمة مصفوفة الصلابة كما هو موضح بالشكل ٨-٢ حيث عرض الحزمة الأصغر يؤدي إلى قيمة أصغر لـ وبالتالي حساب أسرع ويعتمد عرض حزمة مصفوفة الصلابة على اختلاف عدد العقد الإجمالي المحدد للعناصر.

تظهر المعادلة ٨-١ بوضوح أن شبكة العناصر المنتهية الأنعم ذات العدد الأكبر من درجات الطلاقة تنتج تزايداً أسياً لزمن الحساب مما يدل على ضرورة تخفيض عدد درجات الطلاقة. في هذا البحث سنناقش الكثير من التقنيات المرتبطة بتخفيض عدد درجات الطلاقة حيث أهدافنا الأساسية هي :

إنشاء نموذج بطريقة العناصر المنتهية بدرجات طلاقة أقل إجمالية باستخدام العناصر الأصغر.

استخدام شبكة عناصر منتهية كبيرة قدر الإمكان مع شبكة عناصر ناعمة فقط للمناطق الهامة ويتوجب تحقيق هذا دون التضحية بشيء من جودة أو دقة الحساب.

مناظرة

الشكل ٨-٢: مخطط بنية مصفوفة الصلابة.

٨-٣ نمذجة الشكل الهندسي

إن الهياكل و التركيبات الحالية معقدة للغاية ويتوجب على المحلل أن يقرر كيف وأين يمكن تبسيط الشكل الهندسي المعقد لآخر طيع وأكثر مرونة. ففي الدرجة الأولى يحتاج المحلل لتحديد ما هو نوع العناصر الواجب استخدامه : عناصر ثلاثية الأبعاد أم ثنائية الأبعاد (ثنائية الأبعاد صلبة، مستوية، قشرية) أم أحادية الأبعاد (جمالونات، جوائز) وهذا يحتاج إلى فهم جيد بميكانيك المسألة حيث يمكن أن نستخدم عموماً العناصر ثلاثية الأبعاد لنمذجة جميع أنواع الهياكل ولكنه من المكلف جداً استخدام هذه العناصر في أي مكان من المسألة ككل وذلك كون أن هذا يؤدي بلا ريب إلى زيادة كبيرة في عدد درجات الطلاقة لذا فإنه في المسائل المعقدة يتم الجمع بين أنواع مختلفة من العناصر المحدث بالاستفادة من كافة مزايا الشكل الهندسي لمجال المسألة. ينبغي على المحلل أن يحلل المسألة فاحصاً الشكل الهندسي لمجال المسألة محاولاً استخدام العناصر الثنائية والأحادية الأبعاد في مناطق الهيكل المدروس وأجزائه الأمر الذي يرضي الافتراضات التي تقود لصياغة عناصر ثنائية وأحادية الأبعاد.

عادة تستخدم العناصر ثنائية الأبعاد للمناطق والأجزاء التي تملك شكلاً هندسياً أقرب ما يكون للمستوي أو القشري، وتستخدم العناصر الأحادية البعد للمناطق والأجزاء التي تملك شكلاً هندسياً أقرب ما يكون للجوائز والقضبان، وتستخدم العناصر الثلاثية الأبعاد فقط للأجزاء الضخمة من التركيبات أو الهياكل المدروسة، والتي لا يمكن استخدام العناصر الأحادية أو الثنائية الأبعاد لنمذجتها، إن هذه الجزئية هامة جداً وذلك كون استخدام العناصر الأحادية أو الثنائية الأبعاد يخفض بشكل كبير من عدد درجات الحرية.

كما يبين الشكل ٨-٣ حيث إنه عند نمذجة الأجسام أو أجزائها وحيث يتوجب استخدام العناصر ثلاثية الأبعاد فإن هياكل ذات الشكل الهندسي نفسه يجب أن يتم إنشاؤها، وأما عندما يتوجب استخدام العناصر ثنائية الأبعاد فإنه يكفي بإنشاء المستوي المحايد، والذي يكون عادة السطح الوسطي في حين أنه عندما يتوجب استخدام عناصر أحادية البعد فإنه يكفي أيضاً بإنشاء المحور المحايد والذي يكون عادة المحور الوسطي. لذا فإن الفائدة الإضافية لاستخدام عناصر ثنائية أو أحادية الأبعاد تكمن في التخفيض الكبير لمهمة إنشاء الشكل الهندسي.



شكل ٨-٣: نمذجة الشكل الهندسي

يمكن أن تستخدم عند الحدود بين الأنواع المختلفة من العناصر تقنيات توصيل خاصة والتي ستناقش بشيء من التفصيل لاحقاً وتأتي حاجة هذه التقنيات من أن درجات حرية العقد تختلف باختلاف أنواع العناصر، ويعطي الجدول ٨-١ عدد درجات الحرية لبعض أنواع العناصر.

إن النتائج المطلوبة هي من العوامل الهامة أيضاً عند تعيين حقل المسألة فعلى سبيل المثال يعطي المحلل عادة نموذجاً تفصيلياً للشكل الهندسي للمناطق والتي يتوقع فيها الحصول على نتائج هامة أو حاسمة. تذكر أن الكثير من الهياكل والتركيبات الآلية تصمم حالياً باستخدام حزم برامج تصميم بمساعدة الحاسب لذا فإن

الشكل الهندسي للتركيبية قد تم إنشاؤه إلكترونياً، الكثير من حزم البرامج التجارية لطريقة العناصر المنتهية تستطيع قراءة صيغ معينة من ملفات الـ (CAD)، إمكانية استخدام هذه الصيغ تؤدي إلى تخفيض الجهد المبذول لإنشاء الشكل الهندسي ولكن هذا يتطلب مقداراً من الجهد لتعديل الشكل الهندسي لـ (CAD) ليصبح مناسباً للتشبيك وفق طريقة العناصر المنتهية. وهناك أيضاً نشاط بحثي متقدم للتحويل التلقائي للشكل الهندسي الثلاثي الأبعاد إلى آخر ثنائي أو أحادي الأبعاد ضمن طريقة العناصر المنتهية ولكن حتى الآن لا توجد أي حزم تجارية متوافرة للاستخدام.

جدول ٨-١: أنواع العناصر وعدد درجات الحرية لعقدتها

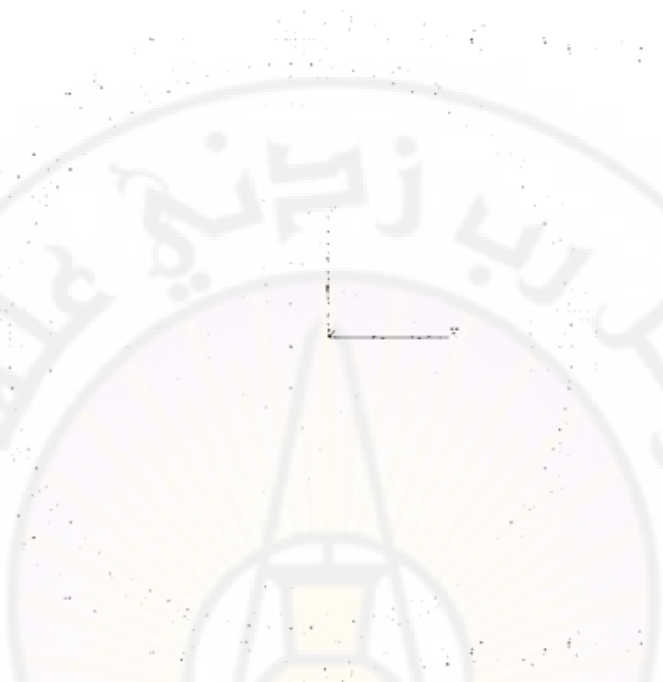
الوصف	درجات حرية العقد
تحليل ثنائي الأبعاد باستخدام عناصر ثنائية الأبعاد	٣ (٢ خطية و ١ دورانية)
تحليل ثلاثي الأبعاد باستخدام عناصر ثلاثي الأبعاد	٦ (٣ خطية و ٣ دورانية)
تحليل ثنائي الأبعاد لتحليل ذي إجهاد أو انفعال خطيين	٢ (إزاحة خطية)
تحليل ثلاثي الأبعاد لأحسام صلبة ذات شكل وشروط تحميل عامة	٣ (إزاحة خطية)
تحليل ثنائي الأبعاد لأحسام صلبة ذات تناظر محوري أو شروط تحميل ذات تناظر محوري	٢ (إزاحة خطية)
تحليل انعطاف صفيحة لشروط تحميل خارج المستوي	٣ (٢ خطية و ١ دورانية)
صفائح أو تجمعات صفائح ذات شروط تحميل عامة	٥-٦ (٣ خطية و ٢-٣ دورانية)
تحليل سطوح قشرية عامة لبياكل رقيقة الجدران	٥-٦ (٣ خطية و ٢-٣ دورانية)
تحليل أحادي الأبعاد لمسائل ذات تناظر محوري بشروط تحميل ذات تناظر محوري	٣ (٢ خطية و ١ دورانية)

٨-٤ بناء شبكة العناصر المنتهية

٨-٤-١ كثافة الشبكة

لتخفيض عدد درجات الحرية فإننا غالباً ما نقوم بإنشاء شبكات بكثافات متفاوتة حيث ينبغي أن تكون الشبكة ناعمة فقط في المناطق الهامة كالمناطق التي يتوقع فيها ظهور تركيز في الإجهادات مثل الزوايا، الثقوب، الحزوز، الأسنان أو الشقوق. بين الشكل ٨-٤ مثالاً على شبكة عناصر منتهية حيث يوضح تغير كثافة الشبكة حسب طبيعة المنطقة المقسمة لشبكة العناصر المنتهية يركز تحليل هذا المثال لمجموعة نجمة-جزيير على قوى التماس بين النجمة والجزيير حيث إن منطقة مركز النجمة غير مهمة حالياً لذا فإن شبكة العناصر المنتهية المستخدمة في هذه المنطقة ذات تقسيمات كبيرة نسبياً.

ضبط كثافة شبكة العناصر المنتهية في مختلف الحزم التجارية لطريقة العناصر المنتهية غالباً ما ينجز من خلال ما يسمى توزع الشبكة، حيث يتم إنشاء توزع الشبكة بعد إنشاء الشكل الهندسي وقبل إنشاء الشبكة نفسها.



الشكل ٨-٤: شبكة العناصر المنتهية لمجموعة نجمة-جزير

٨-٤-٢ تشوه العناصر

إنه ليس من الممكن دائماً الحصول على شكل منتظم للعناصر المستخدمة لتقسيم الأشكال الهندسية غير المنتظمة، وعليه فإن استخدام عناصر مشوهة أو غير منتظمة هو أمر مقبول عند النمذجة بطريقة العناصر المنتهية إلا أن هنالك حدوداً لا يجب تخطيها لهذا الاستخدام حيث ينبغي ضبط درجة هذا التشوه في مرحلة توليد شبكة العناصر المنتهية. ويقاس هذا التشوه نسبة إلى الشكل الأساسي للعنصر والذي يمكن أن يكون:

مربعاً للعناصر الرباعية الأضلاع

مثلثاً متساوي الأضلاع للعناصر المثلثة

مكعب للعناصر الخمسة سداسية السطوح

هرم مثلي متساوي الأضلاع للعناصر الخمسة الرباعية السطوح.

يمكن عموماً أن نميز الأشكال الخمسة التالية لتشوه العناصر:

١. التشوه في نسب الشكل (استطالة العنصر): وفيه تتجاوز أحد أبعاد العنصر ما يتناسب مع الأبعاد الأخرى، كما هو مبين بالشكل ٨-٥، وهذه النسبة يجب ألا تتجاوز بشكل عام النسب التالية:

. : مسائل تحليل الإجهادات

. : مسائل تحليل الانتقالات

الشكل ٨-٥: التشوه في نسب الشكل

٢. التشوه الزاوي للعنصر (الانحراف أو المذهب) "شكل ٨-٦" عندما تقترب الزاوية بين الحروف من ٠ أو ١٨٠.

الشكل ٨-٦: التشوه الزاوي

٣. تشوه القوس للعنصر "شكل ٨-٧" عندما تشوه الحافة المستقيمة لعنصر إلى منحنية أو مقوسة وذلك عند محاذاة العقد إلى نقاط الشكل الهندسي.

الشكل ٨-٧: تشوه القوس

٤. التشوه العقدة المنصفة ويحدث عند استخدام عناصر بدرجات عالية حيث تحتوي عقد في منتصفات حوافها، فالنقطة المنصفة يجب أن تتوضع قدر المستطاع في منتصف حافة العنصر. إن حدود إزاحة العقدة المنصفة بعيداً عن منتصف الحافة هو ربع طول حافة العنصر كما هو مبين بالشكل ٨-٨.

الشكل ٨-٨: التشوه العقدة المنصفة

٥. التشوه الحجمي ويحدث في العناصر المقعرة، حيث يكون هناك مناطق خارج العنصر (انظر المنطقة المظلمة في الشكل ٨-٩) يمكن أن تحول إلى مناطق داخلية في نظام الإحداثيات المعتمد وبذلك يأخذ تكامل مساحة المنطقة المظلمة إشارة سالبة. يبين الشكل ٨-١٠ بعض حالات لأشكال عناصر غير مقبولة.

الشكل ٨-٩: التشوه الحجمي

إن الكثير من حزم طريقة العناصر المنتهية مزودة بأدوات خاصة لتحليل نسب تشوهات العناصر لشبكة العناصر المنفذة، وكل ما يتوجب على المستخدم فعله هو فقط استدعاء هذه الأدوات بعد إتمام تنفيذ الشبكة وقبل إرسال النموذج للحساب، وعندها نحصل على تقرير لنسب التشوه ليصار بالتالي لتحليله وتقييم فعالية الشبكة المنفذة أو ضرورة تعديلها.

الشكل ٨-١٠: مقارنة لعناصر غير مقبولة مع آخر مقبول

٨-٥ تناغم الشبكة

وجدنا سابقاً أن من شروط صياغة معادلات الإزاحة، استمرار الإزاحة على كامل مجال المسألة المدروسة. وعليه فإن الشبكة تكون متناغمة إذا أعطت إزاحات مستمرة عبر جميع الحواف بين العناصر في الشبكة، حيث إن استخدام أنواع مختلفة من العناصر في الشبكة نفسها أو الاتصال غير الصحيح للعناصر فيما بينها يمكن أن يؤدي إلى شبكة غير متناغمة. سنناقش فيما يلي بشيء من التفصيل أسباب عدم التناغم هذا والوسائل الممكنة اتباعها لإصلاحه أو حتى تجنبه.

٨-٥-١ العناصر المختلفة الدرجات

تنشأ إمكانية إنتاج شبكة غير متناغمة أو متوافقة عند وجود انتقال بين كثافات مختلفة للشبكة، أو عند استخدام أنواع مختلفة من العناصر في الشبكة نفسها، فعلى سبيل المثال وصل عناصر تربيعية مع عنصر خطي أو أكثر كما هو مبين بالشكل ٨-١١، حيث ينشأ عدم التناغم بسبب اختلاف درجة توابع الشكل المستخدمة، فللعنصر التربيعي ثنائي عقد في الشكل ٨-١١ معادلة شكل تربيعية والتي تضمن أن التشوه عبر الحواف يتبع صيغة تربيعية. ومن جهة أخرى تنتج معادلة الشكل الخطية المستخدمة في العنصر الخطي رباعي العقد تشوهات خطية عبر كل من حواف العنصر.

خطي تربيعي خطي تربيعي

الشكل ٨-١١: العناصر المختلفة الدرجات.

للحالة المبينة بالشكل ٨-١١- إن للعقدتين و لكل من العنصر الخطي والتربيعي الانزياح نفسه في حين أن تشوه الخواف بينهما يختلف للعنصر التربيعي عن العنصر الخطي، لنفترض أن العقدتين و ثابتان والعقدة ستزاح لمسافة ما فإن تشوه هذه الخواف سيأخذ المنحى المبين بخط منقط وبذلك يلاحظ سلوك أشبه بتشقق مما يمكن أن يقود إلى أخطاء مختلفة بالنتائج. للحالة المبينة بالشكل ٨-١١- فإن للعقد ، و الإزاحة نفسها في حين أن التشوه بين العقدتين و والعقدتين و يختلف للعنصر التربيعي عنه للعنصر الخطي، بفرض أن العقدتين و ثابتان والعقدة ستزاح لمسافة ما فإن تشوه هذه الخواف سيأخذ المنحى المبين بخط كمنقط وبالتالي فإننا نلاحظ أيضاً سلوكاً أشبه بتشقق.

إن حل هذا النوع من مشاكل عدم التوافق يمكن أن يتم بإحدى الوسائل التالية:

١. استخدام النوع نفسه من العناصر على كامل الجملة وهو الحل الأبسط والذي يحقق توافقاً تلقائياً كاملاً كما هو مبين بالشكل ٨-١٢.

تربيعي تربيعي خطي خطي

الشكل ٨-١٢: استخدام العناصر متجانسة الدرجات

٢. عند ضرورة استخدام عناصر من درجات مختلفة لسبب ما فإنه يمكن لنا استخدام نوع خاص من العناصر تسمى عناصر انتقال، حيث تمتاز هذه العناصر بأن لها صيغة شكل مختلفة لكل حافة كما هو مبين بالشكل ٨-١٣ حيث إن العنصر خماسي العقد يمكن أن يسلك هيئة تربيعية في الجهة اليسارية و هيئة خطية في الخواف الأخرى وبذلك يتحقق توافق شبكة العناصر المنتهية.

خطي انتقال تربيعي

ينتحول بشكل خطي
على امتداد هذه الحافة
عنصر انتقال
ينتحول بشكل تربيعي
على امتداد هذه الحافة

الشكل ٨-١٣: استخدام عناصر انتقال بين العناصر مختلفة الدرجات

٣. استخدام طريقة معادلات () لإجبار شبكة على التوافق. وهي طريقة معقدة تعتمد على إدراج معادلات إضافية لبعض العقد وتتطلب القدرة على صياغة هذه المعادلات.

٨-٥-٢ العناصر ذات التوضع الخاطئ

التوضع الخاطئ للعناصر يمكن أن يؤدي إلى عدم تناغم بشبكة العناصر المنتهية كما هو مبين بالشكل ٨-١٤، بالرغم من أن صيغ الشكل للعناصر المتصلة نفسها إلا أن التوضع الخاطئ للعناصر يمكن أن يولد عدم تناغم بالتشوه بين العقدتين و والعقدتين و كما هو مبين بالخط المنقط على الشكل ٨-١٤. إن الحل الوحيد لهذا النوع من المشاكل هو التأكد من خلو الشبكة من عناصر ذات توضع خاطئ، بالرغم من أن معظم مولدات شبكات العناصر المنتهية غير مصممة لتوليد مثل هذا النوع من الأخطاء، إلا أنه يجب الانتباه بالشكل الكافي للشبكات العناصر المنتهية المولدة تلقائياً أو يدوياً للتأكد من خلوها من عناصر ذات توضع خاطئ.

تربيعي
تربيعي

الشكل ٨-١٤: العناصر ذات التوضع الخاطئ

٨-٦ استخدام التناظر

تظهر الكثير من التراكيب والأجسام بعضاً من أشكال التناظر، يظهر الشكل ٨-١٥ الأنواع المختلفة من أشكال تناظر التركيبات الآلية شائعة الاستخدام.

التناظر المحوري.

تناظر المرأة أو التناظر المستوي.

تناظر التكرار الدوري.

تناظر التكرار الخطي.

إن المحلل المتمرس يستفيد بشكل كامل من مزايا التناظر في الهياكل المدروسة لتبسيط آليات نمذجته وبالتالي عدد درجات الطلاقة للجملة المدروسة ومن ثم زمن الحساب اللازم للتحليل.

للتخيل مثلاً أن نموذجاً كاملاً لرج إيفل يحتوي على عنصر، من الممكن تبسيط هذا النموذج بالاستفادة من خواص التناظر المستوي له وذلك بنمذجة ربع الهيكل فقط؛ وبذلك يخفّض عدد العناصر إلى

عنصر، وبالتالي فإن عدد درجات طلاقة الجملة سينخفض للربع، وبالتالي وباستخدام المعادلة ٨-١

معادلة حساب زمن المعالجة وباعتبار فإن زمن المعالجة سينخفض إلى مقارنة بالزمن اللازم لمعالجة نموذج الجملة كاملة، والأكثر من ذلك فإن نموذج الربع يتطلب زمناً أقل من المحلل لإنشائه بالإضافة إلى أن الدقة يمكن أن تكون أعلى وذلك نتيجة تخفيض عدد المعادلات الرياضية اللازمة لإنجاز الحساب وبالتالي تخفيض الأخطاء الناجمة عن الحسابات الرقمية وعليه فإن تقنيات النمذجة يجب أن تستخدم كاملة وذلك بالاستفادة من جميع خصائص التناظر الأمر الذي سيناقش بشيء من التفصيل في هذا البحث.

سأخبر بركة



الشكل ٨-١٥: أشكال التناظر.

تكنيفي بمساحة ربع النموذج

الشكل ٨-١٦: تبسيط الأجسام بالاستفادة من التناظر

٨-٦-١ تناظر المرأة أو التناظر المستوي

إن تناظر المرأة هو تناظر حول مستو محدد وهو من الحالات الأكثر شيوعاً، حيث يشكل نصف الهيكل أو الجسم صورة مرآة للنصف الآخر ويسمى موضع المرأة مستوى التناظر، ويقال إن الجسم متناظر إذا كان متناظراً من حيث الشكل الهندسي وظروف التثبيت وخواص المواد؛ إن الكثير من الأجسام تظهر هذا الشكل من التناظر حيث إن بعضها متناظر نسبة لمستو محدد في حين أن البعض الآخر متناظر نسبة لأكثر من مستو. فعلى سبيل المثال للشكل المكعب المبين بالشكل ٨-١٦، يمكن لمستخدم ما الاستفادة من خواص التناظر حول مستو واحد، وبالتالي فإنه سيعد نموذجاً لنصف المكعب، في حين أن مستخدماً آخر سيستفيد من خواص التناظر حول مستويين ليخفض بشكل أكبر نموذج العناصر المنتهية إلى ربع الجسم الأصلي؛ كما يمكن أيضاً اعتبار مستو ثالث للتناظر، وبالتالي نمذجة الجسم الأصلي فقط، في هذه الحالة يمكن أن يكون مشابهاً للتناظر الدوراني الذي سيناشر لاحقاً.

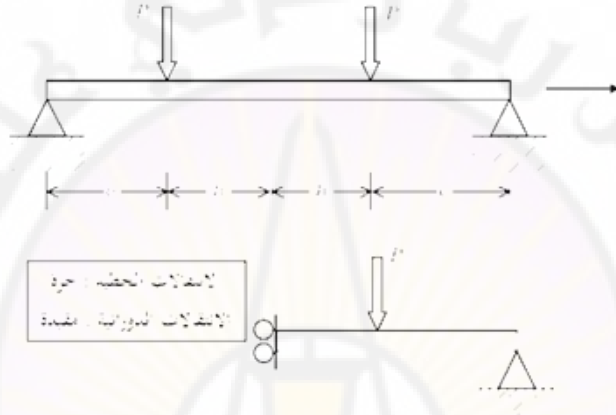
لنعتبر الجسم ثنائي الأبعاد المتناظر والمبين بالشكل ٨-١٧ إن هذا الجسم يملك تناظراً حول المحور فالقسم اليميني للحملة سينمذج باعتبار الشروط التناظر الحدية التالية على محاور التناظر:

(٨-٢)

الشكل ٨-١٧: تناظر المرأة أو التناظر المستوي

شروط التحميل في الأجسام المتناظرة يجب أن تؤخذ أيضاً بالحسبان فيعتبر الحمل متناظراً إذا كان يمكن له أن ينعكس أيضاً على مستوى محدد كما هو مبين بالشكل ٨-١٨ في هذه الحالة تكون المسألة متناظرة لأن الجملة ككل متناظرة، الشكل الهندسي و شروط التثبيت والأحمال أيضاً متناظرة حول المستوي بالتالي فإن دراسة نصف الجائز باستخدام الشروط الحدية للتناظر عند يمكن أن تعطي النتيجة نفسها لدراسة الجملة كاملة وذلك بما يمكن أن يتجاوز ربع الجهد اللازم لإنجاز الحل.

المسائل يمكن أن تكون متناظرة عكسياً إذا كان الجسم متناظراً ولكن الأحمال متناظرة عكسياً كما هو موضح بالشكل ٨-١٩ وهنا أيضاً يمكن لنموذج نصفه أن يعطي حلاً للجسم ككل مع اعتماد الشروط الحدية للتناظر العكسي والتي يمكن أن تختلف باختلاف مستوى التناظر ففي المثال الموضح بالشكل ٨-١٩ فإن الشروط الحدية للتناظر العكسي هي أن التشوه في مستوى التناظر معدوم، مع الملاحظة أن الدوران حول مستوى التناظر لا ينبغي أن يكون معدوماً على عكس حالة تناظر الأحمال.



الشكل ٨-١٨: تبسيط جانز يحقق خواص التناظر.

الانفصال الحظي: مقيدة
الانفصال الدوراني: حرة

الشكل ٨-١٩: تبسيط جانز يحقق خواص التناظر العكسي

يمكن تطبيق القواعد العامة التالية لدى وضع الشروط الحدية عند مستوى التناظر عندما تكون المسألة متناظرة كما هو مبين بالشكل ٨-١٨:

- ١- لا يوجد مركبات لانتقالات خطيه عاموديه على مستوى التناظر
- ٢- لا يوجد مركبات لانتقالات دورانية حول المحاور الموازية لمستوي التناظر.
- وإذا كانت المسألة متناظرة عكسياً كما هو مبين ٨-١٩ عندها:
- ١- لا يوجد مركبات لانتقالات خطيه موازية لمستوي التناظر
- ٢- لا يوجد مركبات لانتقالات دورانية حول المحاور العمودية على مستوى التناظر
- الجدول ٨-٢ و ٨-٣ تبين شروط التناظر والتناظر العكسي للحالات العامة للأجسام ثلاثية الأبعاد.

جدول ٨-٢: الشروط الحدية عند مستوى التناظر للأجسام المتناظرة

مستوى التناظر	u	v	w	θ_x	θ_y	θ_z
xy	حر	حر	ثابت	ثابت	ثابت	حر
yz	ثابت	حر	حر	حر	ثابت	ثابت
zx	حر	ثابت	حر	ثابت	حر	ثابت

جدول ٨-٣: الشروط الحدية عند مستوى التناظر للأجسام المتناظرة عكسياً

مستوى التناظر	u	v	w	θ_x	θ_y	θ_z
xy	ثابت	ثابت	حر	حر	حر	ثابت
yz	حر	ثابت	ثابت	ثابت	حر	حر
zx	ثابت	حر	ثابت	حر	ثابت	حر

إن جميع الأحمال يمكن أن تفكك إلى أحمال متناظرة وأحمال متناظرة عكسياً، ولذلك فإنه طالما كان الجسم متناظراً "في الشكل الهندسي و خواص المواد والشروط الحدية" فإننا يمكن الاستفادة دوماً من خواص التناظر. لنأخذ الحالة المبينة بالشكل ٨-٢٠-٨، حيث إن الجائز نفسه والمستند إلى مسنديه متناظر ولكن الحمولة غير متناظرة وعليه فالمسألة يمكن أن تعالج دوماً على أنهما اجتماع مسألتين:

- ١- الجملة نفسها تحت تأثير حمولة متناظرة تعادل نصف الحمولة.
- ٢- الجملة نفسها تحت تأثير حمولة متناظرة عكسياً تعادل نصف الحمولة.
- في هذه الحالة يمكن لنا دراسة مسألتين وكل مسألة تحتوي على نصف العدد من درجات الطلاقة للحملة ككل، إحداها متناظرة والأخرى متناظرة عكسياً.

الشكل ٨-٢١ يبين مثلاً آخر حول كيفية تحليل جملة ذات حمل غير متناظر إلى نصفي جملة، الأول ذو حمل متناظر والآخر ذو حمل متناظر عكسياً وذلك بجمع مسألتين للجسم نفسه الأولى تخضع لحمولة متناظرة

والأخرى تخضع لحمولة متناظرة عكسياً، ففي هذا المثال نرى عنصراً جانزياً في مستوى التناظر يجب أن يقسم أيضاً لقسمين لكل نصف نموذج وهذا يعني أن جميع الخواص التي يمكن أن تستند لمصفوفة الصلابة لهذا العنصر يجب تقسيمها لقسمين وإذا كان التحليل ديناميكياً يجب أيضاً تقسيم الكثافة لقسمين.



الشكل ٨-٢٠: تبسيط جانز يخضع لتحميل غير متناظر

المسائل الديناميكية يمكن أن تحل بالطريقة نفسها باستخدام خواص التناظر أو التناظر العكسي فعلى سبيل المثال ليكن لدينا جانزاً يملك شروطاً حدية متناظرة ويطلب تحليل التردد الطبيعي له، إن التردد الطبيعي الناتج يوافق فقط حالات التناظر. الشكل ٨-٢٢ يظهر شروط التناظر والتناظر العكسي لتحليل اهتزاز الجانز البسيط المستند

مناظر

الهيكل الكلي

مناظر عكسيا

مناظر

مناظر
عكسيا

الخصائص نصفت

لهذا الجزء

جميع العقد قيدت على هذا الخط
لجهة الانتقالات الأفقية والدورانات

جميع العقد قيدت على هذا الخط
لجهة الانتقالات الشاقولية

الشكل ٨-٢١: تبسيط جمالون يخضع لتحميل غير متناظر

الحركة متناظرة

الانتقالات الدورانية : مقيدة

حول هذه العقدة

الحركة متناظرة عكسيا

الانتقالات الحلقية : مقيدة

حول هذه العقدة

الشكل ٨-٢٢: تبسيط دراسة اهتزاز جانز

٨-٦-٢ التناظر المحوري

يقال عن تركيبة أو جسم أنه متناظر محوريا عندما يمكن أن يولد بدوران شكل مستوٍ حول محور ما. وبالتالي مثل هذه التراكيب يمكن أن تمثل بواسطة عناصر خاصة أحادية أو ثنائية البعد تدعى عناصر متناظرة محوريا في هذه الطريقة فإن الأجسام ثلاثية الأبعاد يمكن أن تمثل باستخدام عناصر أحادية أو ثنائية البعد مما سيخفض بشكل كبير الجهد اللازم للنمذجة والحساب على حد سواء فعلى سبيل المثال إن الهياكل الأسطوانية رقيقة الجدران يمكن أن تمثل باستخدام عناصر أحادية البعد متناظرة محورياً كما هو مبين بالشكل ٨-٢٣. الشكل ٨-٢٤ يبين مثالا على جسم ثلاثي الأبعاد متناظر محورياً وهو يمكن أن يمثل باستخدام عناصر متناظرة الأبعاد.

الشكل ٨-٢٣: الأسطوانة أحد أشكال التناظر المحوري

الشكل ٨-٢٤: جزع المخروط أحد أشكال التناظر المحوري

إن صيغ العناصر أحادية أو ثنائية الأبعاد المتناظرة محورياً مشاهجة للعناصر أحادية أو ثنائية الأبعاد التقليدية باستثناء كون هذه المعادلات يجب أن تصاغ في نظام الإحداثيات القطبية بدلاً من الإحداثيات الديكارتية النظامية، عموماً يمكن القول إن استخدام العناصر المتناظرة محورياً يحتاج إلى إمكانيات حاسوبية أقل بكثير

مقارنة مع العناصر ثلاثية الأبعاد. إن العناصر المتناظرة محورياً متوافرة تقريباً في جميع أو على الأقل معظم الخزم البرمجية للعناصر المنتهية واستخدام هذه العناصر هو مشاهدة لحد بعيد لمقابلاتها من العناصر أحادية أو ثنائية الأبعاد التقليدية.

٣-٦-٨ التناظر التكرار الدوراني

يسود التناظر الدوراني في المسائل حيث يظهر الشكل الهندسي والأحمال كقطاعات متكررة، في مثل هذه الحالة يمكنه استخلاص حل متكامل من خلال تحليل قطاع واحد فقط كممثل عن الجملة ككل مع مجموعة من الشروط الحدية على حدود هذه القطاعات كما هو مبين بالشكل ٨-٢٥.



الشكل ٨-٢٥: التناظر التكرار الدوراني.

إن الشروط الحدية الدورانية للمسألة المبينة بالشكل ٨-٢٥ يجب أن تكون فيها جميع المتحولات على امتداد الحافة مطابقة تماماً لتلك على الحافة و بذلك فإن معادلات الارتباط على جميع العقد المتقابلة على امتداد الحواف و تكتب على الشكل التالي:

$$(٣-٨)$$

٤-٦-٨ تناظر التكرار الخطي

يكون تناظر التكرار في الأجسام أو التركيبات المكونة من مقاطع متكررة باستمرار تحت شروط تحميل محددة "عادة في نفس اتجاه تكرار المقاطع" كما هو مبين بالشكل ٨-٢٦ في مثل هذه الحالة يمثل مقطع واحد فقط ويحلل وكما في التناظر الدوراني فإن معادلات الارتباط تستخدم للعقد المتناظرة عند سطوح القطع مثل:

$$(٤-٨)$$

الحالية المعبرة عن الجسم

الشكل ٨-٢٦: التناظر التكرار الخطي.

٨-٧ نمذجة مسافات الانزياح

في نمذجة الجوائز والأجسام رقيقة الجدران يتم تمثيل الأجسام باستخدام المحور أو السطح المخايد (محور أو مستوى التوسط الهندسي) كما هو مبين بالشكل ٨-٢٧. للعناصر غير المتسامية أو غير متحدة المستوى.

الانزياح
نقطة التوصل
طول الجانز
الانزياح

عقد الزوايا

٢٧-٨

الشكل ٨-٢٧: نمذجة مسافات الانزياح

وهناك مسافة انزياح بين عقدها في حين أنها متصلة في الهيكل الأصلي. الشكل ٨-٣ يبين حالة نموذجية لجائزين بلخانات مختلفة متصلة عند الزاوية. في شبكة العناصر المنتهية، تكون عقدتا الزاوية منفصلتين، في هذه الحالة هناك مسافتنا نسخ α و β ، وبذلك تستخدم بعض التقنيات المناسبة لنمذجة مسافات الانزياح بهدف نمذجة حالة الاتصال الحقيقي.

إذا كانت مسافة الانزياح صغيرة جداً مقارنة مع طول الجائز يمكن عموماً إهمالها وتمثيل نقطة الوصل عندها بإزاحة نقاط الزوايا إلى نقطة الوصل كما هو مبين بالشكل ٨-٢٧ وإذا كانت هذه المسافة كبيرة فإنه يجب معالجتها باستخدام تقنيات مناسبة، على أية حال يجب أن نمذج اعتماداً على المحاكات الهندسية للمحلل. من الممكن اتباع الشروط التالية على اعتبار أن l طول الجائز:

- ١- $a < l/100$ فإن مسافات الانزياح يمكن إهمالها بأمان.
 - ٢- $l/100 < a < l/5$ فإن مسافات الانزياح يجب نمذجتها.
 - ٣- $a > l/5$ فإنه يجب عدم استخدام العناصر من النوع جوائز أو العناصر المستوية أو القشرية وتستخدم عندها عناصر صلبة ثنائية أو ثلاثية الأبعاد.
- إن نمذجة مسافات الانزياح ذات أهمية كبيرة في حالة التركيبات رقيقة الجدران سواء أكانت القوى المؤثرة في مستو واحد أو مستويين، حيث إن تغيراً بسيطاً في مسافات العقد يمكن أن يولد خطأ ملموساً في النتائج. تستخدم غالباً ثلاث طرائق لنمذجة مسافات الانزياح.

٨-٧-١ عناصر شديدة الصلابة

استخدام عنصر صناعي بقساوة عالية "معامل يونغ عال جداً، مساحة مقطع كبيرة أو عزم عطالة مقطع كبير" لوصل عقدي الزاوية كما هو مبين بالشكل ٨-٢٨-١ وهي تستخدم عادة بزيادة معامل يونغ لدرجة كبيرة ولنقل 10^6 للعناصر شديدة الصلابة، إن هذه الطريقة بسيطة جداً وهي ملائمة للاستخدام ولكن لا ينصح بها عادة، وذلك كون استخدام فرق كبير في القساوة أو الصلابة عبر العناصر في نموذج العناصر المنتهية نفسه يمكن أن يولد شروطاً غير صحيحة للمجموعة النهائية لمصفوفة الصلابة الإجمالية.

٨-٧-٢ العناصر الجاسئة

استخدام عنصر صناعي من نوع عنصر جاسئ Rigid element لوصل عقدي الزاوية كما هو مبين بالشكل ٨-٢٨-٢، تعتبر هذه الطريقة من الطرائق الجيدة وهي متوفرة في الكثير من الحزم البرمجية التجارية المسوقة حالياً وكل ما ينبغي على المحلل فعله هو إنشاء عنصر بين عقدي الزاوية وتعريفه كعنصر جاسئ ويعامل هذا العنصر ضمن البرنامج بالآلية نفسها المستخدمة في الطريقة التالية من خلال معادلات MPC ولكن الفرق أن لهذا النوع من العناصر معادلات مدرجة مسبقاً في البرنامج وبالتالي فإن المحلل ليس بحاجة إلى صياغتها.

عنصر جاسي

عنصر شديد الصلابة

عقد الزوايا

عقد الزوايا

الشكل ٨-٢٨: تمثيل مسافات الانزياح عبر
- عناصر شديدة الصلابة ، - عناصر جاسئة

٨-٧-٣ استخدام معادلات

وتستخدم إذا كانت العناصر الجاسئة غير متوافرة في الخزمة البرمجية المستخدمة عندها يتوجب صياغة ما يسمى بمعادلات القيود المتعددة النقاط لإنشاء العلاقة بين درجات طلاقة عقدتي الزاوية وبعدها يتم إدخالها في دخل برنامج الحساب حيث إن جميع البرامج تدعم هذه الإمكانية. يتم صياغة معادلات من خلال استخدام جسم جاسي يصل هاتين العقدتين كما هو مبين بالشكل ٨-٢٩.

جسم جاسي متصل

عقدتي الزوايا

عقد الزوايا

الشكل ٨-٢٩: تمثيل مسافات الانزياح عبر جسم جاسي

٨-٨ نمذجة المساند

تكون مساند الهياكل عادة معقدة كثيراً وطريقة العناصر المنتهية تسمح بفرض قيود مختلفة على العقد المختلفة، حيث تستخدم طرائق مختلفة لنمذجة هذه المساند على سبيل المثال عند نمذجة جائر غليظ المقطع باستخدام

عناصر ثنائية الأبعاد من النوع ذي الإجهادات المستوية فإن هناك ثلاثة احتمالات لتمثيل النهاية المثبتة كما هو مبين بالشكل ٨-٣٠.

فرض قيود كاملة على العقد الحدودية في الاتجاهات الأفقية فقط.

فرض قيود جزئية على العقد الحدودية.

فرض تثبيت كامل على جميع العقد الحدودية.

جانر ذو نهاية تثبيت

(a) مقيد بشكل كامل

بالاتجاه الأفقي فقط

(b) مقيد بشكل كامل على

السطح السفلي فقط

(c) مقيد بشكل كامل

الشكل ٨-٣٠: نمذجة القيود والمسند

إنه ليس من السهل القول أي من الطرائق أفضل لذلك فإن المحاكاة الهندسية الجيدة والخبرة العميقة والفهم الكبير لحالة التثبيت يؤدي دوراً هاماً في إنشاء نموذج جيد للعناصر المنتهية وعليه فإنه ينبغي على المحلل في الحالات غير الواضحة أن يقوم بدراسة تجريبية وبارامترية وكذلك دراسة الأخطاء، وحتى إنه يمكن تنفيذ تحليل عكسي وبشكل مشابه فإن هناك طرائق واحتمالات أخرى لنمذجة المسند كما هو مبين بالشكل ٨-٣١. للمسند الأكثر تعقيداً فإنه من المجدي استخدام شبكة ناعمة بالقرب من الحدود مما يعطي مرونة أكبر لنمذجة المسند، وذلك كون طريقة العناصر المنتهية تسمح بفرض قيود مختلفة على العقد المختلفة.



الشكل ٨-٣١: نمذجة القيود والمساند

ريشة العنفة

العقد البينية

قرص العنفة

(الفصل المشترك)

الشكل ٨-٣٢: نمذجة الوصلات

٨-٩ نمذجة الوصلات

من الضروري جداً الانتباه لدى وصل عناصر من أنواع مختلفة فالمشاكل أو الأخطاء يمكن أن تأتي نتيجة اختلاف درجات طلاقة العناصر المختلفة، في كثير من الحالات يحتاج إلى تقنيات خاصة أو معادلات لإتمام عملية النمذجة لهذه الوصلات.

لنعتبر وصلة بين شفرة عنفة وقرص العنف كما هو مبين بالشكل ٨-٣٢ فالشفرة عادة موصولة بإحكام إلى القرص حيث ينبغي علينا إنشاء نموذج للعناصر المنتهية لدراسة الجملة شفرة/قرص.

إذا تمت نمذجة كل من الشفرة والقرص باستخدام العناصر ثنائية الأبعاد كما هو مبين بالشكل ٨-٣٢ فإن وصلاً جيداً يمكن أن يتحقق بتشارك كل من الشفرة والقرص للعقد نفسها عند خط الفصل. لنفترض أن لدينا نموذجاً حيث تم تمثيل الشفرة باستخدام عناصر من النوع جوائز والقرص باستخدام عناصر ثنائية الأبعاد كما هو مبين بالشكل ٨-٣٣. ستختصر طريقة النمذجة هذه بلا شك من عدد العقد وبالتالي عدد درجات الحرية ومع ذلك فإنه ينبغي استخدام تقنيات خاصة لنمذجة الوصلة بشكل جيد وذلك لتلافي الأخطاء الناجمة عن التمثيل السيئ لمنطقة الوصل.

الشكل ٨-٣٣: نمذجة الوصلات

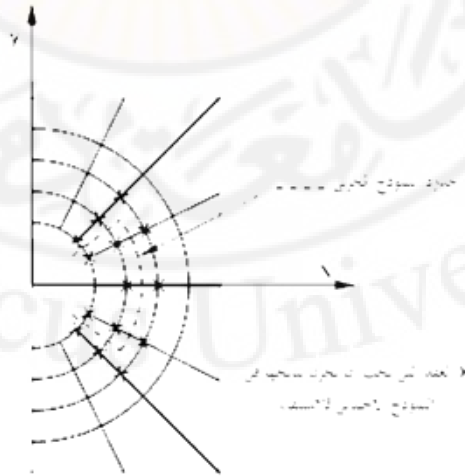
من الجداول ٨-١ نعلم أن لعقد العناصر الصلبة ثنائية الأبعاد درجتَي طلاقة للانتقال الخطي ولعقد العناصر الجائزية ثلاث درجات حرية منها اثنتان منها خطية والثالثة دورانية، وبالتالي فإنه في هذه الحالة حيث تتشارك العناصر الجائزية والعناصر ثنائية الأبعاد بعقدة واحدة حيث إن الإزاحات الخطية نفسها عند نقطة الوصل لكل من العناصر الجائزية والعناصر الصلبة ثنائية الأبعاد أما درجة الطلاقة الدورانية فهي حرة وبالتالي فإن

الشفرة يمكن أن تدور بحرية نسبة للقرص الممثل بعناصر صلبة ثنائية الأبعاد وهذا لا يتطابق مع شروط الوصل المطلوبة، فالمشكلة هي نقص في ارتباط مختلف أنواع درجات الطلاقة بين العناصر الجائزية والعناصر الصلبة ثنائية الأبعاد، فدرجة الدوران لا يمكن تمريرها عبر عقد العناصر الصلبة ثنائية الأبعاد وذلك كونها لا تملك الدرجة نفسها من الحرية، وعليه فإن الحل يكمن في استخدام تقنيات خاصة في النمذجة أو طريقة معادلات

إن الطريقة البسيطة لحل هذه المشكلة هو تثبيت دوران العناصر الجائزية بالنسبة للعناصر الصلبة ثنائية الأبعاد وذلك بمد الجائز الممثل للشفرة بشكل اصطناعي إلى داخل الشبكة الممثلة للقرص لمسافة عقدتين على الأقل كما هو مبين بالشكل ٨-٣٣، الأمر الذي سيسمح بحل مشكلة الانتقال الدوراني للشفرة نسبة للقرص إلا أن من عيوب هذه الطريقة هو إدخال مادة إضافية بالقرب من منطقة الوصل الأمر الذي يمكن أن يؤثر على النتائج عند التحليل الديناميكي للأجسام.

٨-١٠ تقنية النموذج الجزئي

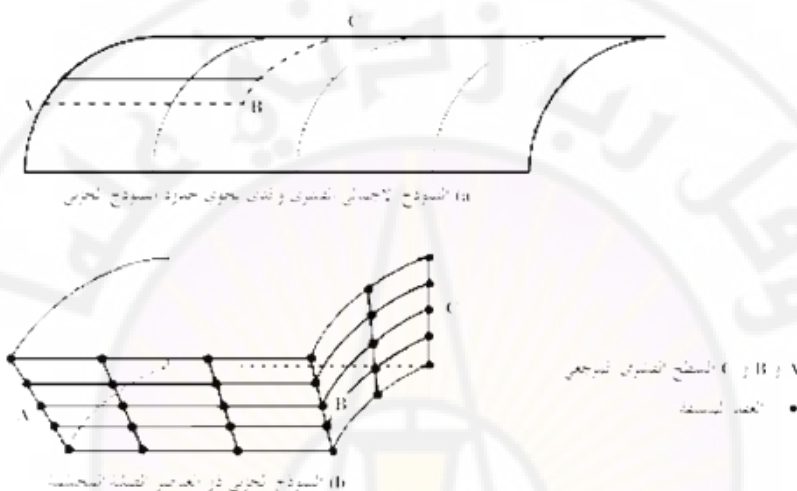
تعتبر تقنية النماذج الجزئية من التقنيات الحديثة والمستخدمه لتحليل المسائل المعقدة حيث نستخدم النموذج الجزئي لدراسة منطقة ذات أهمية خاصة من النموذج الإجمالي (شكل ٨-٣٤) بشيء من التفصيل مثل المناطق ذات القيم العالية للإجهادات، حيث يطلب في معظم الحالات تنعيم شبكة العناصر بشكل كبير في هذه المناطق، وبالتالي فإن النموذج الجزئي يمكن أن يعطي حلاً تفصيلياً دقيقاً للمنطقة المطلوبة، كما يمكن الاستفادة من هذه التقنية بتغيير فضاء النموذج من نموذج إجمالي رقيق الجدران "قشري" لنموذج جزئي ثلاثي الأبعاد أكثر توصيفاً للمسألة المطلوبة "شكل ٨-٣٥".



الشكل ٨-٣٤: مبدأ النموذج الجزئي

إن إنشاء النموذج الجزئي يتم على مرحلتين:

١. إنشاء تحليل إجمالي للنموذج الكلي للمسألة.
٢. إنشاء النموذج الجزئي ونشتق الشروط الحدية لهذا النموذج الجزئي بالعلاقة مع المتحولات المرتبطة بالزمن والمخزنة نتيجة التحليل الإجمالي للنموذج الكلي.



الشكل ٨-٣٥: النموذج الجزئي ثلاثي الأبعاد لمنطقة قشرية

مثال:

في دراسة أعدت لتحليل التشققات الصغيرة وانتشارها في عينة شد كان من المجدي للمحلل أن يدرس نموذجاً جزئياً "الشكل ٨-٣٦" لنموذج الإجمالي لربع العينة "شكل ٨-٣٧" المدروس من قبله وذلك ليتمكن من تمثيل الشق الصغير المطلوب دراسته والذي يتطلب شبكة عناصر منتهية شديدة النعومة.



الشكل ٨-٣٦: النموذج الجزئي ثلاثي لعينة شد



الشكل ٨-٣٧: النموذج الكلي ثلاثي لربع عينة الشد

الفصل التاسع

البرمجيات التي تستخدم طريقة العناصر المنتهية

جامعة دمشق
Damascus University

الفصل التاسع

البرمجيات التي تستخدم طريقة العناصر المنتهية

٩-١ مقدمة

إن المسائل الواقعية للعناصر المنتهية يمكن أن تتكون من مئات أو آلاف أو حتى ملايين من العناصر والعقد لذا فإنها تحل عملياً باستخدام الحزم البرمجية التجارية المتوفرة، هناك حالياً الكثير من الحزم البرمجية التجارية المستخدمة لحل مجال كبير من المسائل: الجسم الصلب، الهياكل الميكانيكية، انتقال الحرارة والكتلة، ميكانيك السوائل، الصوت ... إلخ وهي يمكن أن تكون خطية أو لاخطية، مسائل سكونية أو ديناميكية؛ معظم هذه البرامج تستخدم طريقة العناصر المنتهية أو مزيجاً منها مع طريقة أخرى من الطرائق الرقمية.

٩-٢ معايير اختيار برامج التحليل باستخدام طريقة العناصر المنتهية

إنساع طيف برامج التحليل باستخدام طريقة العناصر المنتهية المسوقة تجارياً - كما أسلفنا - يضع المستخدم أمام جملة التساؤلات لاختيار البرنامج الأكثر ملائمة، والملائمة بالمفهوم الهندسي لا تعني التعويل على البرنامج الذي يملك المزايا الواسعة والقادر على إنجاز مختلف المسائل والتطبيقات الهندسية إلا أن الملائمة تتعدى ذلك لتقييم الخصائص الأخرى للبرمجيات مثل يطلق عليه "الكلفة والتبرير"، والكثير من الأمور الأخرى المرتبطة بالمطور والدعم الفني والتقني، وكذلك سهولة الاستخدام، ويبين الشكل ٩-١ المعايير الأساسية والفرعية لاختيار وتقييم برنامج تحليل بطريقة العناصر المنتهية.

يتم تعريف المعايير الأساسية والفرعية على النحو التالي:

- ١- **الكلفة:** وهي القيمة التي سيتم دفعها لاقتناء البرنامج فيما تتضمنه من تكاليف الشراء والصيانة السنوية على مدى استخدام البرنامج ونفقات التدريب عليه وعلى التقنيات المختلفة التي يتضمنها.
- **الشراء:** تختلف البرامج باختلاف تكاليف شرائها، وهل هذه التكاليف تقابل حقوق استخدام البرنامج من قبل مستخدم واحد أو مستخدمين متعددين، كما أن هناك بعض الشركات تعرض برامجها بسعر منخفض للمؤسسات البحثية والأكاديمية ولأغراض التدريب والبحث العلمي، كما يمكن أن يكون شراء حقوق الاستخدام أو استثمار لها لفترة عادة ما تكون سنة قابلة للتجديد وفي هذه الحالة يتضمن السعر الدعم الفني والتحديث.



الصيانة: توفر الصيانة تحديثات المنتج والدعم الفني لأسئلة حول استخدام المنتج، حيث أن للعديد من البرمجيات تكاليف صيانة لا يمكن الاستهانة بها، ويجب أخذها بالحسبان لدى التخطيط لاقتناء برنامج ما.

التدريب: إن استخدام التقنيات المتقدمة التي يتيحها كل برنامج تتطلب العديد من الدورات التدريبية التي توفرها الشركة التي تقوم بتطوير البرنامج، والتي عادة مات كون مأجورة وغير متضمنة في سعر البرنامج المنتج أو الصيانة.

٢- التوافق: يعد توافق برنامج التحليل باستخدام طريقة العناصر المنتهية المزمع استخدامه، من القضايا الهامة التي يجب الوقوف عندها، حيث في حال لم يحقق البرنامج الذي تم اقتناؤه التوافق مع نظام

التشغيل المستخدم وكذلك التكامل المطلوب مع البرمجيات الأخرى المستخدمة فإن هذا سيؤدي إلى الكثير الكثير من المشكلات سواء في أداء البرنامج أم في فعاليته للقيام بالمطلوب.

• نظام التشغيل: يجب التأكد من أن البرنامج متوافق تماماً مع نظام التشغيل المعرف على محطات العمل (الحواسيب) أو مخدم الحساب المستخدمة، وذلك في ظل تنوع أنظمة التشغيل المتوافرة مثل Windows، Unix، Linux وكذلك الإصدارات المختلفة لها وإمكانية توافقه مع الإصدارات اللاحقة. وهذا العامل كثيراً ما نلجسه مع العديد من البرمجيات حتى الخدمية منها، عند صدور إصدار جديد لنظام التشغيل.

• استيراد البيانات: كثيراً ما يكون من الضروري استيراد تصاميم معينة من برمجيات الـ CAD الأخرى، وذلك وفقاً للعديد من التنسيقات الهندسية مثل DXF، SAT، STEP، IGES، وذلك للعديد من الأسباب وعليه من الأسئلة الهامة التي يجب الإجابة عليها هل يمكن للبرنامج استيراد تنسيق أو أكثر من التنسيقات التي نعمل عليها وماهي الصعوبات المترتبة عن هذا الاستيراد وكذلك توفير البرنامج لأدوات الإصلاح التي من شأنها إصلاح أية عيوب محتملة بالتصميم أو النموذج المستورد.

• تصدير البيانات: كثيراً ما يكون من الضروري أيضاً تصدير التصميم المنجزة على البرنامج المراد اقتناؤه إلى برمجيات الـ CAD الأخرى، وذلك وفقاً للعديد من التنسيقات الهندسية مثل DXF، SAT، STEP، IGES، وذلك للعديد من الأسباب وعليه من الأسئلة الهامة التي يجب الإجابة عليها هل يمكن للبرنامج تصدير تنسيق أو أكثر من التنسيقات التي نعمل عليها وماهو درجة كفاءة التصميم أو النموذج المصدر وماهو حجم العيوب المحتملة وكيفية إصلاحها أو التعامل معها؛ من جهة أخرى كثيراً ما تتطلب الدراسات تصدير النتائج وإنشاء تقارير أو الحاجة للنسخ واللصق المباشرين من و/ أو إلى البرنامج وبالتالي يجب تحديد ماهي إمكانية تنفيذ ذلك في البرنامج المطلوب.

• التكامل مع برامج الـ CAD: وهو معيار هام جداً عندما نمتلك العديد من برمجيات الرسم والتصميم بمساعدة الحاسب الـ CAD، حيث إن التكامل بين برنامج التحليل بطريقة العناصر المنتهية وبرامج الـ CAD الأخرى يمكن أن يساعد في تسهيل الكثير من مهام التصميم بالإضافة إلى زيادة الكفاءة الإجمالية، حيث يمكن لبعض البرامج أن تمتلك بيئة عمل مستقلة مع

أدوات للربط مع البرمجيات الأخرى في حين تبدو برامج أخرى وكأنها وحدة متكاملة هي برنامج CAD، كما أن هناك برامج متكاملة تحتوي في آن معاً أدوات للتحليل بطريقة العناصر المنتهية وأخرى للرسم والتصميم بمساعدة الحاسب الـ CAD وهو ما يحقق أعلى درجات التكامل.

٣- المستخدم: وهو من أهم العناصر فهو الذي سيقضي الوقت الأطول بالعمل على البرنامج، هنا لا بد من التنبؤ بما سوف يواجهه المستخدم عند استخدام البرنامج.

- سهولة الاستخدام (التألف): هل المستخدم قادر على فهم كيفية عمل البرنامج خلال وقت قصير، هل البرنامج سهل الاستخدام أم هل يتطلب جهداً كبيراً لفهمه والتعامل معه وصولاً لبناء النماذج المراد دراستها، هل يمكن البرنامج المستخدم من الوصول إلى هدفه بخطوات واضحة وبسيطة أم يتطلب ذلك الكثير من الإجراءات والعمليات والتي يتم الوصول إليها بشكل غير مباشر.
- زمن التعلم: هذا المعيار الفرعي يعني الوقت الذي يحتاجه المستخدم كي يكون قادراً على معرفة الخطوات الأساسية لإنجاز تحليل دقيق باستخدام البرنامج.
- زمن الحساب: وهو الزمن الذي سيستغرقه البرنامج باستخدام موارد النظام الحاسوبي العامل عليه، لإنجاز تحليل ما، وهذا يرتبط بشكل كبير بمعالج البرنامج وما يحتويه من تراكيب رياضية للوصول لمختلف النتائج المطلوبة.
- استقرار البرنامج: هل الأداء العام للبرنامج مستقر أم يمكن أن يكون عرضة للتوقفات المفاجئة (مثلاً كما يحدث عند معالجة الصور في بعض البرامج).
- تنوع التحليل: ويعرف هذا المعيار الفرعي إمكانية البرنامج للقيام بالتحليل ضمن حدود معينة من التطبيقات أو النظريات أو الفرضيات، مما سيتوجب عنه إقتناء برامج متعددة متخصصة، وهنا يجب أن يتم التقييم الدقيق لإمكانيات البرنامج وما هو طيف المسائل التي يمكنه التصدي لها ومدى مطابقة ذلك لنشاط الجهة التي ستقوم باقتنائه، لأن ذلك يرتبط بشكل كبير بالكلفة سواء عند اقتناء برامج متخصصة متعددة لأداء المطلوب أم عند اقتناء برنامج ضخم يمكن أن يتصدي لمجال كبير جداً من المسائل يفوق الحاجة.

- المكتبات المتاحة: من أهم الأدوات الأساسية للعمل على برامج التحليل بطريقة العناصر المنتهية هو المكتبات المتوفرة (مواد - عناصر - سلوك - خواص ...)، وتتنوع البرامج البرامج المختلفة بحسب حجم المكتبات المتاحة فيها، فيقدر ماتكون هذه المكتبات واسعة وشاملة بقدر ما يستطيع المستخدم القيام بمختلف التحليلات المرغوبة دون قيود أو صعوبات.
- الدليل: هل دليل التعليمات واضح ومفصل؟ هل يتوجب على المستخدم الاعتماد بشكل كبير على الدعم الفني، مستوى الموقع الإلكتروني للبرنامج من حيث سهولة البحث فيه وشموله على ردود لأكثر قدر ممكن من التساؤلات المتكررة للمستخدمين، بالإضافة إلى كتيبات التشغيل أو أي مستندات أخرى مساعدة وقابليتها للطباعة.
- البرمجة: وهي من النقاط الهامة للمستخدمين المتقدمين، حيث من المهم في الكثير من الحالات للمستخدمين القيام بعمليات برمجة ضمن البرنامج للقيام بتحليلات متقدمة، وعليه يجب تقييم ما يسمح البرنامج به للمستخدمين من استخدام برامج فرعية للقيام بما يتطلبه عمله من تحليلات خاصة، كذلك إمكانية البرنامج استخدام أدوات "ماكرو" لتبسيط عمليات النمذجة واستخراج النتائج وتحليلها.
- الإدارات: إن مما يهم الإدارة ما يترتب على مسؤولي وإدارة تكنولوجيا المعلومات المختصة عند شراء البرمجيات وماهي الأعباء الناجمة والتي يمكن أن تضاف إلى الأعمال التي يقومون بها.
- التنصيب: هل تثبيت المكونات المطلوبة للاستخدام الأمثل للبرنامج سهل لمسؤول تكنولوجيا المعلومات أم ينطوي على العديد من الصعوبات والتعقيدات.
- التحديث: كيف سيتم تثبيت التحديثات المختلفة للبرنامج وهل تتم بشكل تلقائي أم تتطلب البحث الدوري عنها وتثبيتها بشكل يدوي، وهل تتطلب إزالة البرنامج وإعادة تثبيته أم يتم تثبيتها بشكل مباشر كإضافة للبرنامج، كما أنه من الأسئلة الهامة والتي ترتبط بالكلفة هل التحديث مجاني أم مدفوع؟
- الترخيص: طبيعة الترخيص هامة جداً، حيث يمكن أن يعطي شراء البرنامج ترخيص استخدام عام لمدة غير محددة، أو ترخيصاً محدداً لكل جهاز ("القفل على الأجهزة") أو لفترة محددة.

٥- **سمعة المطور:** يجب النظر في سمعة المطور والمورد المحلي عند شراء مثل هذه البرامج، ما هو القائمة الحالية للعملاء في المنطقة، ما هو عدد التراخيص المباعة في المنطقة وحول العالم، كلها دلائل لفهم أفضل لثقة العملاء وقيمة الدعم الفني بعد البيع.

- **المورد:** هل المورد الذي يعرض المنتج هو إحدى الجهات ذات الوثوقية العالية والسمعة الجيدة.
- **المطور:** هل مطور البرمجيات لديها سمعة جيدة؟ وخبرة طويلة ومتميزة في تطوير مثل هذا النوع من البرمجيات.
- **خدمة العملاء:** مستوى الخدمات التي يقدمها كل من المطور وكذلك الدعم الفني ما بعد البيع؟

٩-٣ أكثر البرامج استخداماً

يظهر سوق التصميم الميكانيكي بمساعدة الحاسب أو ما نسميه سوق النمذجة والمحاكاة الرقميين، انتشاراً كبيراً للعديد من البرمجيات والتي تهدف بمجملها إلى تبسيط إجراءات عمليات النمذجة والمحاكاة إضافة إلى تحمل العبء الأكبر في حل وحساب المجموعات الهائلة من المعادلات الرياضية وصولاً للنتائج المطلوبة، وتكون هذه البرمجيات بإمكانات ومزايا مختلفة ومتنوعة وبعضها متخصص في مسائل محددة والبعض الآخر أكثر عمومية إلا أنه لا يمكن القول بأن برنامجاً ما هو البرنامج المثالي فلكل برنامج ما يميزه لتطبيقات محددة ويجعله ربما غير ملائم لتطبيقات أخرى.

يبين الجدول ١-١ بعض أهم البرامج التجارية الأكثر انتشاراً علماً أن بعضها يمكن أن يستخدم طرائق عديدة أخرى غير طريقة العناصر المنتهية (Finite Element Method (FEM مثل :

- | | |
|-------------------------------|---------------------------|
| ✓ طريقة الحجوم المنتهية (FVM) | ✓ Finite Volume Method |
| ✓ طريقة العناصر الحدية (BEM) | ✓ Boundary Element Method |

من المتعذر في معرض هذا الكتاب الدخول في تفاصيل مختلف البرمجيات سواء الحثانية أم المسوقة في الأسواق العالمية، إلا أنه سيتم التركيز على اثنين من أكثر البرامج استخداماً وتلبية لمختلف متطلبات المصممين أو المحللين والعاملين في مجال التحليل بطريقة العناصر المنتهية وهما (ABAQUS و ANSYS)، حيث سيتم بالفصلين اللاحقين شرح كلا البرنامجين بشيء من التفصيل إضافة لعرض مفصل لتسلسل الخطوات اللازمة لتحليل بعض الحالات العملية باستخدامهما.

جدول ١-١: الحزم البرمجية التجارية المتوفرة لتصميم الميكانيكي بطريقة النمذجة العددية

البرنامج	الطريقة المستخدمة	المسائل الممكنة دراستها
ABAQUS	FEM (implicit, explicit)	تحليل هياكل - صوت - تحليل حراري ... إلخ
I-deas	FEM (implicit)	تحليل هياكل - صوت - تحليل حراري ... إلخ
LS-DYNA	FEM (implicit)	ديناميك الهياكل - ديناميك السوائل - التأثير المتبادل بين السوائل والهياكل... إلخ
Sysnoise	FEM/BEM	صوتيات
NASTRAN	FEM (implicit)	تحليل هياكل - صوت - تحليل حراري ... إلخ
MARC	FEM (implicit)	تحليل هياكل - صوت - تحليل حراري ... إلخ
MSC-DYTRAN	FEM + FVM (explicit)	ديناميك الهياكل - ديناميك السوائل - التأثير المتبادل بين السوائل والهياكل... إلخ
ANSYS	FEM (implicit)	تحليل هياكل - صوت - تحليل حراري ... إلخ
ADINA DIANA	FEM (implicit)	ديناميك الهياكل - ديناميك السوائل - التأثير المتبادل بين السوائل والهياكل... إلخ

الفصل العاشر

مدخل إلى النمذجة باستخدام برنامج

ABAQUS

Damascus University

مدخل إلى النمذجة باستخدام برنامج

ABAQUS

١٠-١ مقدمة

Abaqus هو مجموعة من برامج المحاكاة الهندسية القوية، والتي تعتمد طريقة العناصر المنتهية، ويمكن له حل المشاكل التي تتراوح بين التحليل الخطي البسيط نسبياً إلى المحاكاة غير الخطية الأكثر تعقيداً، يحتوي Abaqus على مكتبة واسعة من العناصر التي يمكن بواسطتها نمذجة مختلف الأشكال الهندسية، كما يحتوي على مكتبة كبيرة من المواد والتي تحاكي سلوك معظم المواد الهندسية العيانية بما في ذلك المعادن، المطاط، البوليمرات والمواد المركبة، الخرسانة المسلحة، المواد الرغوية، والمواد الجيوتكنيكية مثل التربة والصخور.

صممت هذه المجموعة لتكون أداة محاكاة للأغراض العامة، تتجاوز مسائل الهياكل (إجهاد / انفعال)، حيث يمكن محاكاة مشاكل في مجالات متنوعة مثل انتقال الحرارة، تحول المادة، العناصر الكهربائية، التحليل الكهربوي حراري، والصوتيات، ميكانيك التربة، التحليل الكهروضغطي، وتحليل الكهرومغناطيسي، وديناميك السوائل.

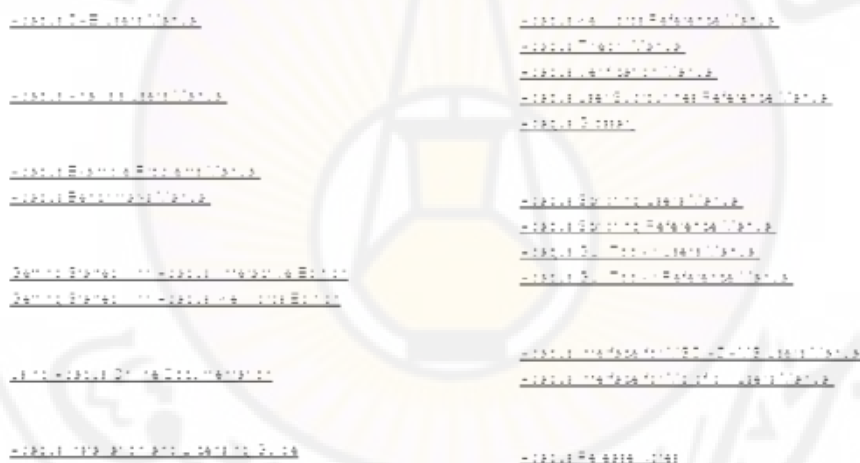
كما يقدم Abaqus مجموعة واسعة من القدرات لمحاكاة التطبيقات الخطية وغير الخطية، وكذلك مسائل الأنظمة ذات المكونات المتعددة من خلال ربط تلك المكونات بعد أين يتم توصيفها بشكل مستقل ثم بناء التأثير المتبادل فيما بينها، ويستطيع Abaqus في مسائل التحليل اللاخطي أن يختار تلقائياً وبشكل مستمر كل من زيادات التحميل المناسبة ومعدل التقارب لضمان الحصول على الحل الدقيق بكفاءة.

تعود حالياً ملكية البرنامج لشركة Dassault Systèmes وهو جزء من مجموعة SIMULIA من المنتجات البرمجية لهذه الشركة.

عند التنصيب الكامل للبرنامج فإن المجموعة والتي تظهر لك بالضغط على زر ابدأ أو Start ومن ثم جميع البرامج All Programs كما هو موضح بالشكل ١٠-١، تتكون من الخزم التالية:

- | | | |
|---------------------|---|---|
| Abaqus CAE | : | ١. لتشغيل نافذة التطبيق الرسومية |
| Abaqus Command | : | ٢. لتشغيل نافذة الأوامر |
| Abaqus Licensing | : | ٣. لإدارة ترخيص نسخة مجموعة البرامج |
| Abaqus Verification | : | ٤. للتحقق من قيام مجموعة البرامج بمختلف وظائفها |

متقدماً وهو موجه للمستخدمين ذوي الخبرة، لذا لن يتم التطرق له في هذا المدخل، ويمكن للمهتم التعرف أكثر على هذا الخيار في مجموعة الوثائق أو المكتبة الملحق بالبرنامج (شكل ١٠-٢)، والتي تشكل مجموعة هامة جداً من المصادر أو المراجع في كل من استخدام الحزم المختلفة للبرنامج، المفاهيم المختلفة لطريقة العناصر المنتهية المستخدمة في Abaqus، الكثير من العلوم والنظريات الهندسية والمعرفة ضمن البرنامج، مجموعة من الصيغ البرمجية للبرامج الفرعية التي يمكن تطبيقها في Abaqus، والكثير الكثير من الأمثلة التطبيقية إضافة إلى دليل البرمجة باستخدام Python في Abaqus.



الشكل ١٠-٢: مجموعة الوثائق أو المكتبة الملحق بالبرنامج ABAQUS.

تتكون مجموعة Abaqus من ثلاث حزم تحليل وهي Abaqus/Standard ، Abaqus/Explicit ، Abaqus/CFD، مع العديد من الإضافات والملحقات والتي تساعد في زيادة قدرات الحزم السابقة، كما تتيح نافذتا Moldflow و MSC.ADAMS الولوج مباشرة إلى كل من Moldflow و MSC.ADAMS على الترتيب، كما وتشمل مجموعة Abaqus على مترجمات تسمح بالتحويل بشكل مباشر بين Abaqus ومجموعة من البرامج الأخرى للرسم والتصميم بمساعدة الحاسب CAD، ويبين الشكل ١٠-٣ البناء العام لمجموعة Abaqus والعلاقة بين مكوناتها.



الشكل ١٠-٣: البناء العام لمجموعة Abaqus والعلاقة بين مكوناتها.

١٠-٢ الحزم البرمجية الأساسية والاختيارية ضمن Abaqus

• Abaqus/Standard :

وهو برنامج العناصر المنتهية للأغراض العامة وغيره يمكن أن تحل مجموعة واسعة من المسائل الخطية وغير الخطية، بما فيها المكونات ذات الاستجابة السكونية أو ديناميكية أو حرارية أو الكهربائية أو كهرومغناطيسية.

• Abaqus/Explicit :

وهو برنامج العناصر المنتهية لأغراض خاصة (التحليل الديناميكي)، يستخدم صيغ العناصر المنتهية الديناميكية التفصيلية. وهو مناسب لنمذجة الأحداث الديناميكية الوجيهة أو العابرة، مثل مسائل التحطم والانفجار، وهو فعال جداً للمشاكل غير الخطية العالية بما فيها تلك التي تتضمن تغير شروط الاتصال أو التأثير المتبادل، كمحاكاة عمليات التشكيل مثلاً.

• Abaqus/CFD :

وهو برنامج لأغراض تحليل ديناميك الموائع. وهو يسمح بحل فئة واسعة من المسائل الموائع القابلة للانضغاط بما فيها الجريانات الصفائحية والمضطربة، وتدفق الأحمال الحرارية.

• Abaqus/Aqua :

وهو برنامج اختياري، يمكن أن تضيف قدرات إضافية إلى Abaqus/Standard و Abaqus/Explicit، والغرض منه هو محاكاة الهياكل البحرية مثل منصات البترول، كما يملك بعض القدرات تشمل أحمال الأمواج والرياح والطفو.

• *Abaqus/Design* :

وهو برنامج اختياري، يمكن أن تضيف قدرات إضافية إلى Abaqus/Standard، لتنفيذ حسابات تصميمية حساسة.

• *Abaqus/AMS* :

وهو برنامج اختياري، يمكن أن تضيف قدرات إضافية إلى Abaqus/Standard، ويستخدم في الحل التلقائي للهيكل الفرعية متعدد المستويات خلال استخراج التردد الطبيعي.

• *Abaqus/Foundation* :

ويؤمن سهولة الوصول إلى وظائف التحليل الخطي والديناميكي لـ Abaqus/Standard.

١٠-٣ بدء العمل على Abaqus

سيتم في الفقرات التالية عرض أسلوب العمل على Abaqus للمستخدمين الجدد مع التأكيد أن هذا العرض يفترض بأن المستخدم قد ألف مسبقاً العمل على برامج التصميم بمساعدة الحاسب.

في Abaqus كما في غيره من برامج النمذجة بطريقة العناصر المنتهية يبنى أي تحليل أو دراسة عبر ثلاث مراحل (شكل ١٠-٤) كما بينا في الفصل الأول هي: ماقبل المعالجة، والمحاكاة أو الحل، وأخيراً التحليل أو مابعد المعالجة، ويتم في المرحلة الأولى بناء النموذج وإسناد الخواص والشروط والأحمال المختلفة له، وهو ما يتم بشكل في الغالب عبر نافذة Abaqus/CAE، وينتج عن هذه المرحلة ملف الدخول Input file والذي يحمل اللاحقة .inp. ويحوي هذا الملف على يحمل توصيف النموذج من التقسيم الشبكي إلى الخواص والشروط والأحمال المختلفة وكذلك شروط المحاكاة وظروفها والمتحولات المطلوب حسابها، يقوم المستخدم بهذه المرحلة بشكل كامل مستفيداً من الأدوات التي تتيحها نافذة Abaqus/CAE، أما المرحلة الثانية فيقوم بها بشكل كامل الحاسب بعد إعطائه أمر الحساب لملف الدخول المعد في المرحلة الأولى، وتستغرق هذه المرحلة زمناً يمكن أن يكون صغيراً أو كبيراً بحسب حجم المسألة المدروسة وطبيعة شبكة العناصر المنتهية فيها كما بينا سابقاً، ينتج في نهاية هذه المرحلة مجموعة من ملفات الخرج output files والتي تحتوي على نتائج التحليل وهي ذات اللواحق .odb، .dat، .res، .fil. ومن ثم يتم في المرحلة الثالثة والأخيرة معالجة النتائج المتضمنة في هذه الملفات باستخدام نافذة التطبيق Abaqus/Viewer المستقلة أو المتضمنة في Abaqus/CAE أو حتى بأي برنامج آخر يدعم هذه الصيغ من الملفات.

وعموماً يتم تمثيل مختلف المسائل ضمن Abaqus عبر حزمة من الخطوات، أهمها: بناء الشكل الهندسي وتوصيفه، تحديد خواص المقطع والمواد المصنوع منها، بناء التراكيب التجميعية للحملة المكونة من عدة أجزاء

وتوصيف الوضع النسبي بينها وتأثيرها فيما بينها، إسناد الأحمال والشروط الحدية، توصيف شبكة العناصر المنتهية بما فيها أبعاد العناصر، شكلها الهندسي، درجة دقتها، خواصها، تحديد المتحولات المراد حسابها، وأخيراً توليد ملف الدخول، وسنقوم في الفقرات اللاحقة بشرح بعض الأمثلة لتوضيح كيفية تنفيذ هذه الخطوات.



الشكل ١٠-٤: مراحل التحليل بطريقة العناصر المنتهية على Abaqus.

للبداء بالعمل على Abaqus نقوم بالذهاب إلى قائمة ابدأ أو Start ومن ثم جميع البرامج All Programs ومن ثم حزمة برامج Abaqus (شكل ١٠-١) ونختار الاختصار Abaqus CAE، (يجب التنويه إلى أن الكثير من الأوامر يمكن تنفيذها عن طريق نافذة الأوامر Abaqus Command إلا أنه لا يتسع المجال هنا لشرح كيفية القيام بذلك، ويمكن للتوسع في ذلك بالذهاب إلى مجموعة الوثائق أو المكتبة Documentation (شكل ١٠-٢) ومن ثم اختيار الحزمة Tutorials، ومن ثم Getting Started with Abaqus: Interactive Edition)، عندئذ يبدأ البرنامج بالإقلاع من خلال نافذة البدء المبينة بالشكل ١٠-٥ والتي تسمح كما يبين الشكل بالخيارات التالية:



الشكل ١٠-٥: نافذة البدء بالعمل على Abaqus.

Create Model Database:	إنشاء نموذج لتحليل جديد
With Standard/Explicit Model	باستخدام Abaqus/Standard أو Abaqus/Explicit
Create Model Database:	إنشاء نموذج لتحليل جديد
With CFD Model	باستخدام Abaqus/CFD
Open Database	فتح تحليل سابق
Run Script	تنفيذ الملفات الحاوية على أوامر لبناء نموذج ما
Start Tutorial	تشغيل البرنامج التعليمي
Recent Files	الوصول إلى الخمس الملفات الأخيرة التي تم العمل عليها

بالضغط على أمر إنشاء نموذج لتحليل جديد Create Model Database نتحول إلى النافذة الأساسية للبرنامج والمبينة بالشكل ١-٦ والتي تحتوي على العناصر التالية:

١. شريط العنوان Title bar: ويوضح إصدار البرنامج واسم النموذج الذي يجري العمل عليه.
٢. القائمة الرئيسية Menu bar: وتتيح الوصول إلى مختلف الأوامر في البرنامج.
٣. شريط الأدوات: وتتيح الوصول السريع إلى بعض الأوامر الأكثر استخداماً في البرنامج.
٤. شريط المسار Context bar: وهو الشريط الذي يسمح بالتنقل بين المودولات المختلفة التي يتيحها البرنامج لإنشاء النموذج (تشكل هذه المودولات بطريقة أو بأخرى خطوات إنشاء النموذج). كما يسمح بالتنقل بين الأجزاء المختلفة للتركيبة التجميعية من عدة أجزاء.
٥. شجرة النموذج Model Tree: تسمح بالوصول بشكل مصور للنموذج بكل مكوناته من مواد، مقاطع، أحمال، شروط حدية، شبكة، ... إلخ.
٦. شجرة النتائج Results Tree: تسمح بالوصول بشكل مصور لنتائج التحليل بطريقة العناصر المنتهية، كما تسمح بالتنقل بين ملفات النتائج المختلفة والتي يجري العمل عليها في الوقت نفسه.
٧. صندوق الأدوات Toolbox area: ويختلف باختلاف الموديول الذي يتم العمل عليه حيث يتضمن مجموعة من الأدوات التي يتم العمل عليها بما يتناسب مع كل موديول بما يسمح بالوصول السريع إلى الأوامر الأكثر استخداماً في الموديول الموافق.
٨. منطقة العمل أو الرسم Canvas and drawing area: وهي المنطقة التي يتم فيها ترتيب نوافذ الرسم والإظهار، ويمكن أن تشغل بشكل كامل بنافذة واحدة.
٩. نافذة الرسم والإظهار Viewport: وهي الإطار المخصص لرسم وإظهار النموذج المدروس.

١٠. منطقة التفاعل السريع Prompt area: وتستخدم لإظهار التعليمات التي يجب اتباعها لإتمام الأوامر المختلفة في أثناء بناء النموذج أو إظهاره.



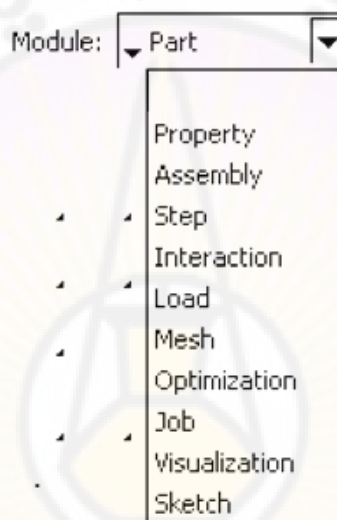
الشكل ١٠-٦: نافذة البدء بالعمل على Abaqus.

١١. منطقة الرسائل Message area: ويتم فيها إظهار حالة البرنامج أو الأعمال التي يقوم بها أو رسائل الخطأ أو التحذير، ويمكن باستخدام شريط التمرير التنقل لإظهار الرسائل السابقة، وتبادل هذه المنطقة حيز الشاشة المخصص لها مع نافذة الأوامر ويتم الوصول إليها بالضغط على الرمز >>>.

١٢. نافذة الأوامر Command line interface: ويستخدم هذا الحيز لكتابة وتنفيذ أوامر أو عمليات رياضية باستخدام لغة Python، وتبادل هذه المنطقة حيز الشاشة المخصص لها مع منطقة الرسائل ويتم الوصول إليها بالضغط على الرمز >>>.

كما تم التنويه، فإن Abaqus/CAE يقسم إلى مجموعة من الوحدات التنفيذية تسمى وحدات نمطية أو موديول module، كما أن ترتيب الوحدات النمطية في القائمة يتوافق مع التسلسل المنطقي المتبع لإنشاء النموذج، ويفضل في كثير من الظروف اتباع هذا التسلسل لإتمام مهمة إنشاء النموذج، إلا أن البرنامج يتيح لك مع ذلك اختيار أي وحدة في أي وقت، بغض النظر عن الحالة الآتية للنموذج، وإن كان هناك العديد من الخطوات التي لا يمكن لك القيام بها قبل غيرها.

ويحتوي كل موديول على مجموعة من الأدوات التي تناسب المرحلة التي يمثلها من مراحل بناء النموذج، وتكون هذه الموديولات بحسب الشكل ١٠-٧ كما يلي:



الشكل ١٠-٧: قائمة موديول.

١. جزء Part: لإنشاء الأجزاء الفردية المراد دراستها أو التي تمثل أحد مكونات التركيبة التجميعية المراد دراستها، ويتيح رسم الجزء المطلوب أو استيراده من أي من برامج الرسم الأخرى.
٢. الخواص Property: لتعريف خصائص الجزء أو منطقة من الجزء، مثل تعريف المواد والمقاطع.
٣. التجميع Assembly: لتعريف التركيبة التجميعية لمجموعة أجزاء والوضع النسبي بينها وكذلك التأثير المتبادل فيما بينها، ويستخدم هذا المودول حتى في الحالة التي يكون فيها الجزء المدروس وحيداً، حيث يساعد هذا في الانتقال من جملة الإحداثيات المحلية المرتبطة بالجزء إلى جملة الإحداثيات الإجمالية.
٤. خطوة Step: لإنشاء وتكوين خطوات التحليل وطبيعتها وتحديد متحولات الخرج المطلوبة.
٥. التأثير المتبادل Interaction: لتحديد التأثير المتبادل أو الروابط بين الأجزاء المختلفة المكونة لتركيبة آلية، سواء أكانت ميكانيكية أم حرارية.

٦. الحمل Load: لوضع وتحديد الأحمال، الشروط الحدية، في كل خطوة من خطوات التحليل.
٧. الشبكة Mesh: تسمح بتوليد شبكة العناصر المنتهية للتركيبة أو الأجزاء التي تم إنشاؤها وتحديد أبعاد وطبيعة العناصر المستخدمة فيها وطبيعة توزيعها.
٨. الأمثلية Optimization: وهي تؤمن مجموعة من الأدوات لتحسين النموذج.
٩. العمل Job: بمجرد الانتهاء من جميع المهام التي تدخل في تحديد نموذج، يمكن عبر هذا الموديول إعطاء أمر التحليل أو المحاكاة للنموذج الذي تم إنشاؤه، ورصد التقدم المحرز.
١٠. العرض أو الإظهار Visualization: ويوفر هذا الموديول وحدة عرض رسومية لنموذج العناصر المنتهية ونتائجه، والتحكم بإظهار وعرض متحولات الخرج المطلوبة.
١١. رسم Sketch: وهو مخصص لرسم المقاطع المستوية والتي يتم باستخدامها توليد الجسومات بهدف عمليات النمذجة.

١٠-٤ نظام الوحدات في Abaqus

لا يوجد نظام معرف للوحدات في برنامج Abaqus، حيث يترك للمستخدم بناء الانسجام والتناغم بين القيم المدخلة والتي تعبر عن الثوابت المختلفة المستخدمة في النموذج قيد الدراسة، ويعتبر المستخدم هو المسؤول عن ضمان تحديد الوحدات الصحيحة والتجانس فيما بينها، فمثلاً إذا تم إدخال قيم أبعاد الجزء في أثناء إنشائه مقدرة بوحدة mm يجب أن يتم إدخال مختلف القيم الأخرى التي ترتبط بالأبعاد كالمسافات أو المساحة أو الحجم أو الإجهاد أو العزم أو... إلخ آخذين بالحسبان أن يتم تحويلها للتناغم مع نظام ال mm، وإذا تم الإدخال بوحدة m يتم إدخال مختلف القيم الأخرى آخذين بالحسبان أن يتم تحويلها للتناغم مع نظام ال m، وهكذا بالنسبة لأنظمة القياس الأخرى، وللتذكير بالأنظمة المرجعية المعتمدة يمكن مراجعة الشكل ١٠-٨.

١٠-٥ نظام الإحداثيات ودرجات الحرية في Abaqus

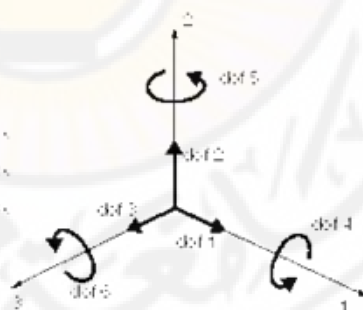
يستخدم Abaqus بشكل افتراضي نظام الإحداثيات الديكارتية x,y,z وعليه تكون مرجعية مختلف نقاط الجسم إلى هذا النظام ويمكن التمييز بين نظام إحداثيات إجمالي للجمل أو التراكيب المدروسة كما يمكن تعريف نظام إحداثيات محلي لنقطة أو منطقة ما لضرورات التحليل أو الدراسة ويتم تحديد هذا النظام باستخدام أدوات رسومية بسيطة ويقوم البرنامج نفسه بتحديد الانسحابات أو الدورانات اللازمة لإسناد نظام الإحداثيات المحلي المعرف إلى نظام الإحداثيات الإجمالي.

يتم تعريف درجات الحرية dof الميكانيكية كما هو معتاد في ميكانيك الأجسام الصلبة أو الأوساط المستمرة سواء أكانت انتقالات أم دورانات، إلا أن ترميز تلك الدرجات يختلف قليلاً في Abaqus، حيث نلاحظ من الشكل ١٠-٨، أن الانتقالات تأخذ الرموز U1 ، U2 ، U3 وذلك بحسب المحاور x ، y ، z على الترتيب والدورانات تأخذ الرموز UR1 ، UR2 ، UR3 وذلك حول المحاور x ، y ، z على الترتيب.

الجدول ١٠-١: أنظمة القياس المرجعية.

Quantity	SI <i>m</i>	SI <i>mm</i>	US Unit <i>ft</i>	US Unit <i>inch</i>	الكمية
Length	<i>m</i>	<i>mm</i>	<i>ft</i>	<i>in</i>	الطول
Force	<i>N</i>	<i>N</i>	<i>lpf</i>	<i>lpf</i>	القوة
Mass	kg	tonne (10^3 kg)	slug	lbf s ² / in	الكتلة
Time	s	s	s	s	الزمن
Stress	Pa (N / m ²)	MPa (N / mm ²)	lbf / ft ²	psi (lbf / in ²)	الإجهاد
Energy	J	mJ (10^{-3} J)	ft lbf	in lbf	الطاقة
Density	kg / m ³	tonne / mm ³	slug / ft ³	lbf s ² / in ⁴	الكثافة

- 1 Translation in the 1-direction (U1).
- 2 Translation in the 2-direction (U2).
- 3 Translation in the 3-direction (U3).
- 4 Rotation about the 1-direction (UR1).
- 5 Rotation about the 2-direction (UR2).
- 6 Rotation about the 3-direction (UR3).



الشكل ١٠-٨: درجات الحرية dof في Abaqus.

١٠-٦ المثال الأول: تحليل هيكل جهازي

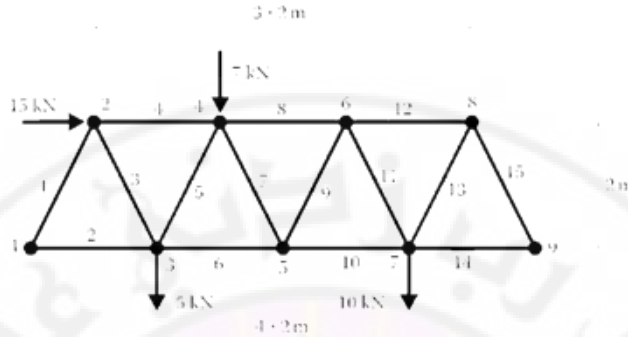
أولاً : ليكن لدينا الهيكل الجهازي المبين بالشكل ١٠-٩ والمكونة من ١٥ جأزاً موزعة على الشكل التالي:

الجوائز الأفقية: $E = 30 \times 10^6 \text{ kN / m}^2$, $\nu = 0.3$, $\rho = 7800 \text{ kg / m}^3$, $A = 0.045 \text{ m}^2$

الجوائز القطرية: $E = 30 \times 10^6 \text{ kN / m}^2$, $\nu = 0.3$, $\rho = 7800 \text{ kg / m}^3$, $A = 0.02 \text{ m}^2$

مدخل إلى النمذجة باستخدام برنامج

والمطلوب هو بناء نموذج العناصر المنتهية لهذا الهيكل ودراسة القوى والإجهادات والانفعالات المؤثرة على مختلف جوائزه.



الشكل ١٠-٩: قائمة موديول.

سنشرح فيما يلي كيفية إعداد النموذج وتحليل النتائج خطوة بخطوة:

- ١- نبدأ بتشغيل البرنامج عبر الذهاب إلى قائمة ابدأ أو ومن ثم جميع البرامج حزمة برامج (شكل ١٠-١) ونختار الاختصار
- ٢- على نافذة البدء المبينة بالشكل ١٠-٥ نختار الأمر إنشاء نموذج أو

- ٣- على النافذة الأساسية للبرنامج والمبينة بالشكل ١٠-٦ نقوم بالضغط على زر إنشاء جزء من صندوق الأدوات
- بعد أن يتم اختيار الموديول جزء من قائمة موديول على شريط المسار أو من شجرة النموذج (شكل ١٠-١٠)،
- للسروع بإنشاء النموذج.

- ٤- في نافذة إنشاء الجزء المبينة بالشكل ١٠-١١، نقوم بملي بيانات الجزء كالآتي:

- نضع الاسم بشكل اختياري وليكن
- نختار من فضاء النموذج ، مستر ثنائي الأبعاد
- نختار من النوع ، قابل للانفعال
- نختار من قاعدة الشكل ، سلك
- ونضع في ، أبعاد منطقة العمل للدلالة على بما يتسع للجزء المراد إنشاؤه وبما يتناسب مع أبعاده. من هنا يجب الانتباه أنه تم اعتماد واحدة للأبعاد وبالتالي يجب الانتباه لواحادات القيم التي سيتم إدخالها لاحقاً بما يتناغم مع الجدول ١٠-١.
- نضغط

٥- سيتم التحول إلى نافذة الرسم المبينة بالشكل ١٠-١٢ والتي تحتوي على أدوات الرسم التقليدي والتي تتشابه مع الكثير من برامج الرسم الأخرى (لذا لن يتم الدخول في تفاصيلها)، ويتم فيها رسم الهيكل الشبكي وعند الانتهاء من الرسم يتم الضغط على زر تم الموجود في منطقة التفاعل السريع ، وبذلك يتم العودة إلى نافذة جزء ، والشكل النهائي للجسم يجب أن يظهر كما في الشكل ١٠-١٣.

الشكل ١٠-١٣: الشكل الهندسي للهيكل الشبكي.

٦- ننتقل الآن إلى موديول الخواص ، ونقوم بتعريف مادة عبر الضغط على زر إنشاء مادة ، فتظهر لنا النافذة المخصصة لإضافة مادة جديدة أو تعديل مادة سابقة (شكل ١٠-١٤) وفيها نجد قوائم تسمح باسناد مختلف الخواص الميكانيكية والفيزيائية والحرارية أو أية خصائص أخرى. بما أن مختلف جوائز الهيكل المدروس مصنوعة من المادة نفسها، لذا سنقوم بتعريف مادة واحدة ولنسميها مثلاً ، يجب التذكر دائماً أنه في كل مرة يمكن الوصول إلى مختلف النوافذ عن طريق شجرة النموذج.

٧- لإدخال خواص المادة يتم الضغط على ومن ثم وبعدها (شكل ١٠-١٥) وندخل القيمة لمعامل المرونة (تم التحويل إلى نيوتن لتجانس الوحدات بحسب الجدول ١٠-١) و لمعامل بواسون، ثم بالضغط على يكون قد تم إنشاء المادة المطلوبة.

٨- في الخطوة التالية يتم تعريف المقاطع العرضية للجوائز، وبما أن مساحة المقطع العرضي للجوائز الأفقية مختلفة عن تلك القطرية لذا سيتم تعريف مقطع عرضي لكل منهما، ويتم ذلك عبر الضغط على زر إنشاء مقطع ، فتظهر لنا النافذة المبينة بالشكل ١٠-١٦ وفيها يتم إدخال البارامترات التالية:

a. نضع الاسم Name بشكل اختياري وليكن Longitudinal للجوائز الطولية و Diagonal للجوائز القطرية.

b. نختار من المجموعة Category، و جائر Beam.

c. نختار من النوع Type، هيكل شبكي (جمالون) Truss.



الشكل ١٠-١٥: تحديد خواص المادة.

الشكل ١٠-١٤: إضافة مادة.



الشكل ١٠-١٧: تحديد خواص المقطع.

الشكل ١٠-١٦: إضافة مقطع.

٩- عند الضغط على زر المتابعة Continue تظهر نافذة تحرير المقطع Edit Section كما هو مبين بالشكل ١٠-١٧، يتم اختيار المادة من المواد التي تم إنشاؤها مسبقاً (في هذه الحالة Truss_material) في حقل المادة Material، ثم يتم إدخال قيمة مساحة المقطع العرضي Cross sectional area بحيث تكون للجوائز الطولية 0.045 m^2 و للجوائز القطرية 0.02 m^2 .

١٠- بعد أن تم إنشاء المقاطع اللازمة يجب إسنادها إلى الجوائز الموافقة لها، يتم ذلك عبر الضغط على زر إسناد مقطع ، عندها تظهر عبارة

في منطقة التفاعل السريع ، فنقوم باختيار الجوائز التي تمتلك المقطع نفسه ويتم ذلك عبر النقر عليها باستخدام الفأرة بشكل متتال مع استمرار الضغط على مفتاح على لوحة المفاتيح كما في الشكل ١٠-١٨، حتى يتم اختيارها جميعها ومن ثم نضغط على زر فتظهر لنا نافذة اسناد المقاطع المبينة بالشكل ١٠-١٩، حيث يتم اختيار المقطع المناسب للجوائز التي تم تحديدها (بحسب الجوائز التي تم تحديدها بحسب الشكل ١٠-١٨)، وتعاد هذه العملية مرة أخرى لمجموعة الجوائز الأخرى (ويتم عندها اختيار المقطع). لاحظ تغيير لون الجوائز للدلالة على أنها أصبحت مسندة لمقطع محدد.



الشكل ١٠-١٨: تحديد الجوائز تمهيداً لإسناد مقطع محدد لها.

١١- نتنقل الآن إلى موديول تجميع ، وهنا نلاحظ اختفاء الرسم للإشارة بأن التركيبة لا تحتوي على أية أجزاء، وعليه نقوم بإضافته عبر الضغط على زر إضافة جزء — ، فيظهر مربع حوار إنشاء تركيبة المبين بالشكل ١٠-٢٠، وهنا يتم عرض قائمة بمختلف الأجزاء الموجودة في النموذج (في حالتنا هذه لدينا فقط جسم واحد وهو)، نقوم باختيار ثم نضغط .

لاحظ أنه في مختلف النوافذ أو مربعات الحوار التي تظهر لنا هناك شروط أخرى يجب إضافتها، إلا أنه يجب تركها بقيمتها الافتراضية ما لم يذكر خلاف ذلك، حيث اقتضت سهولة فهم خطوات العمل عدم الخوض في شرحها في هذا المثال لتجنب الدخول بتفاصيل لا ترتبط به.





الشكل ١٠-٢٠: نافذة إنشاء تركيبة.

الشكل ١٠-١٩: نافذة إسناد مقطع.

١٢- نتقل الآن إلى موديول خطوة Step، وعليه نقوم بإضافة خطوة عبر الضغط على زر إضافة خطوة "Create Step"، فيظهر مربع الحوار المبين بالشكل ١٠-٢١، وهنا يتم إعطاء اسم للخطوة وليكن Apply_Loads، كما يتم اختيار طبيعة التحليل (في حالتنا Static, General)، بما يتناسب مع المسألة المدروسة، (لاحظ وجود خطوة تسمى Initial بشكل مسبق وهي الحد الأدنى لأي تحليل وتكون عادة لوضع الشروط الابتدائية أو الشروط الحدية)، ثم نضغط على زر المتابعة Continue، فتظهر نافذة تحرير الخطوة Edit Step كما في الشكل ١٠-٢٢، حيث يمكن وضع توصيف للخطوة ضمن الحقل description وليكن applying joint loads، ونترك باقي التفاصيل كما هي في حالتنا هذه ونضغط على زر OK.



الشكل ١٠-٢٢: نافذة تحرير خطوة.

الشكل ١٠-٢١: نافذة إنشاء خطوة.

١٣- ننتقل الآن إلى موديول حمل ، حيث سيتم هنا إضافة الأحمال والشروط الحدية كمايلي:

.نبدأ بتعريف الشروط الحدية الموافقة للمسند عند العقدة ١، حيث يقيد هذا المسند الحركات الخطية

في جميع الاتجاهات ويسمح فقط بالدورانات، ولتوصيف ذلك نضغط على زر تعريف شروط حدية

، عندها يظهر لنا مربع الحوار المبين بالشكل ١٠-٢٣، حيث

تتم تسمية الشرط الحدي وليكن ، ثم التأكد من اختيار الخطوة ضمن

الحقل خطوة ، وضمن الحقل نختار شرط تناظر/تناظر عكسي/تثبيت

، ونعود عند الضغط على الزر إلى واجهة

الرسم كي نقوم باختيار العقد أو العناصر التي سيتم تطبيق الشرط الحدي عليها، نستدل على ذلك

بظهور عبارة في منطقة التفاعل السريع

كما في الشكل ١٠-٢٤، فنقوم باختيار العقدة ١ ونضغط على الزر ، فيظهر لنا مربع

الحوار الذي يسمح لنا باختيار حالة التثبيت المطلوبة كما في الشكل

١٠-٢٥، فنقوم باختيار ، ونضغط على زر ، فنلاحظ إضافة

رمز التثبيت على العقدة.



Figure 10-23: Defining the boundary condition

الشكل ١٠-٢٤: نافذة إنشاء شرط حدي.

الشكل ١٠-٢٥: نافذة اختيار حالة التثبيت المطلوبة.



الشكل ١٠-٢٦: نافذة تحرير خطوة.



الشكل ١٠-٢٥: نافذة تحرير خطوة.

b. نعيد الكرة من أجل مسند العقدة ٩، حيث يقيّد هذا المسند الحركة الخطية بالاتجاه الشاقولي ويسمح بها في الاتجاه الأفقي بالإضافة للدورانات، مع الانتباه إلى وضع تسمية أخرى للشرط الحدي وليكن Roller_Support، مع اختيار العقدة ٩، اختيار $XASYMM (U1=U3=UR1=0)$ ، كما في الشكل ١٠-٢٦.

c. ثم ننتقل إلى إضافة الأحمال (القوى)، بالضغط على زر إنشاء حمل "Create Load"، عندها يظهر لنا مربع الحوار المبين بالشكل ١٠-٢٧، حيث تتم تسمية الحمل وليكن Load_N2 للدلالة على حمل العقدة ٢ مثلاً، ثم التأكد من وضع خطوة Apply_Loads في حقل الخطوة Step، وفي الحقل Category نختار Mechanical وفي الحقل Type نختار Concentrated Force والتي تعبر عن قوة مركزة، ونعود عند الضغط على الزر Continue إلى واجهة الرسم كي نقوم باختيار العقد أو العناصر التي سيتم تطبيق القوى عليها، وذلك بظهور عبارة Select the points for The load في منطقة التفاعل السريع Prompt area، فنقوم باختيار العقدة ٢ ونضغط على الزر Done، فيظهر لنا مربع الحوار Edit Load الذي يسمح لنا بتحديد القوى المطبقة كما في الشكل ١٠-٢٨، فنقوم بوضع القيمة $CF1=15000$ حيث المحور ١ يقابل المحور الأفقي والقيمة موجبة كون اتجاه القوة يطابق الاتجاه الموجب لهذا المحور، ونضغط على زر OK، فنلاحظ إضافة سهم يدل على منحى القوة واتجاهها.



الشكل ١٠-٢٨: نافذة تحرير حمل.



الشكل ١٠-٢٧: نافذة إنشاء حمل.

d. نعيد الكرة من أجل قوى العقدة ٣ و ٤ و ٧، مع الانتباه إلى وضع تسمية جديدة لكل حمل وليكن Load_N3، Load_N4، Load_N7 على الترتيب، واختيار العقدة ٣، ٤، ٧ الموافقة لكل حالة، مع وضع القيمة $CF2 = -5000$ ، $CF2 = -7000$ ، $CF2 = -10000$ على الترتيب، حيث المحور ٢ يقابل المحور الشاقولي والقيمة سالبة كون اتجاه جميع القوى هو عكس الاتجاه الموجب لهذا المحور، ونضغط على زر OK، فنلاحظ إضافة سهم يدل على منحى كل قوة واتجاهها.

١٤- ننتقل الآن إلى موديول شبكة Mesh، حيث سيتم هنا بناء شبكة العناصر المنتهية للحملة وتوصيفها، يجب الانتباه هنا إلى ضرورة اختيار part في حقل Object على شريط المسار Context bar كما يبين الشكل ١٠-٢٩، ثم نبدأ بعملية توصيف الشبكة وبنائها كما يلي:



الشكل ١٠-٢٩: اختيار part في حقل Object على شريط المسار Context bar.

a. نبدأ بتعريف طبيعة العناصر المنتهية التي ستستخدم في نموذج الحملة المدروسة، وذلك بالضغط على زر تعيين نوع العنصر Assign Element Type، عندها تظهر في منطقة التفاعل السريع Prompt area عبارة 'Select the regions to be assign element type'، لاختيار المنطقة التي نود تعيين نوع العناصر المنتهية المكونة لها، ونقوم باختيار كامل الجائز بواسطة الفأرة ثم نضغط على الزر Done، فيظهر لنا مربع الحوار نوع العنصر Element Type المبين بالشكل ١٠-٣٠، حيث نضع في مكتبة العناصر Element Library نضغط على Standard، وفي العائلة Family نختار

Truss (يجب سحب القائمة نحو الأسفل حتى تظهر عائلة العناصر) ، وفي الدرجة الهندسية Geometric order نختار الحالة خطي Linear، فيظهر في الأسفل تقريباً عبارة تدل على ترميز العنصر المنتهي الموافق للتوصيف السابق وهي T2D2: A 2:node linear 2-D truss، ثم نضغط على OK لإتمام التوصيف.



الشكل ٣٠-١٠: نافذة اختيار العناصر المنتهية. الشكل ٣١-١٠: نافذة التقسيم إلى عناصر منتهية .

b. لتقسيم الجوانب إلى عناصر منتهية، نضغط على الزر تقسم الحواف Seed Edge، عندها تظهر في منطقة التفاعل السريع Prompt area عبارة Select the regions to be assigned local seed، لاختيار المنطقة التي نود تقسيمها إلى عناصر، ونقوم باختيار كامل الجانز بواسطة الفأرة ثم نضغط على الزر Done، فيظهر لنا مربع حوار التقسيم Local Seed المبين بالشكل ٣١-١٠، حيث نختار لوحة بسيط Basic، ونضع في الطريقة Method باستخدام العدد By number، ونضع الرقم ١ بجوار عدد العناصر Number of Element ضمن القائمة Sizing Control، (يشير الرقم ١ هنا إلى أن التقسيم سيكون عنصر في كل ضلع أي جانز في حالتنا هذه)، ثم نضغط على OK لإتمام التقسيم.

c. نقوم بعد ذلك بإنشاء الشبكة النهائية، ويتم ذلك بالضغط على الزر شبكة الجزء Mesh Part، عندها تظهر في منطقة التفاعل السريع Prompt area عبارة Ok to mesh the part، نضغط عندها على الزر Yes، فيتم بذلك تحويل الشكل الهندسي للهيكل الشبكي إلى عناصر منتهية، ويدل على ذلك تغير لون الهيكل.

١٥- بالوصول إلى هذه المرحلة نستطيع القول بأن عملية النمذجة قد تمت على الوجه الأكمل، ننتقل الآن إلى إنشاء ملف الخرج والقيام بالحساب أو المحاكاة، ويتم ذلك بالانتقال إلى موديول عمل Job، ويتم ذلك بالضغط على الزر إنشاء عمل Create Job، عندها يظهر مربع الحوار Create Job والمبين بالشكل ٣٢-١٠، حيث تتم وضع اسم وليكن Truss_Problem_1 والذي سيكون اسماً لكل من ملف الدخول وملفات الخرج، وبالضغط على زر متابعة Continue، يظهر مربع الحوار تحرير العمل Edit Job والمبين بالشكل ٣٣-١٠، حيث يمكن وضع توصيف للعمل في الحقل Description وليكن Analysis of a truss، ثم نضغط على OK لإتمام إنشاء العمل دون أن نقوم بأية تعديلات على الحقول الأخرى.



الشكل ٣٣-١٠: نافذة تحرير حل.

الشكل ٣٢-١٠: نافذة إنشاء عمل.

١٦- للبدء بعملية المحاكاة أو الحساب نضغط على الزر إدارة الأعمال Job Manager، عندها يظهر مربع الحوار Job Manager والمبين بالشكل ٣٤-١٠، ومن ثم نضغط على زر إرسال Submit

للبشروع بعملية الحساب. لاحظ تغير مضمون حقل الحالة Status، بدءاً من None قبل الإرسال، إلى Submitted لدى الإرسال وريشما يتم التحقق من بناء النموذج، ثم Running في أثناء عملية الحساب، وانتهاء ب Completed عند إتمام الحساب. يجب الانتباه فيما لو ظهرت كلمة Aborted ضمن حقل الحالة Status، لأن هذا يدل على أن الحساب لم يتم وأنه من المحتمل أن هناك مشكلة في النموذج، عندها يجب مراجعة بناء النموذج والتحقق من صحة الإجراءات المتخذة.



Name	Model	Type	Status	Action
Job_1	Model_1	Job Type	Completed	Create Edit Copy Paste Delete Close
Job_2	Model_2	Job Type	Completed	Create Edit Copy Paste Delete Close
Job_3	Model_3	Job Type	Completed	Create Edit Copy Paste Delete Close

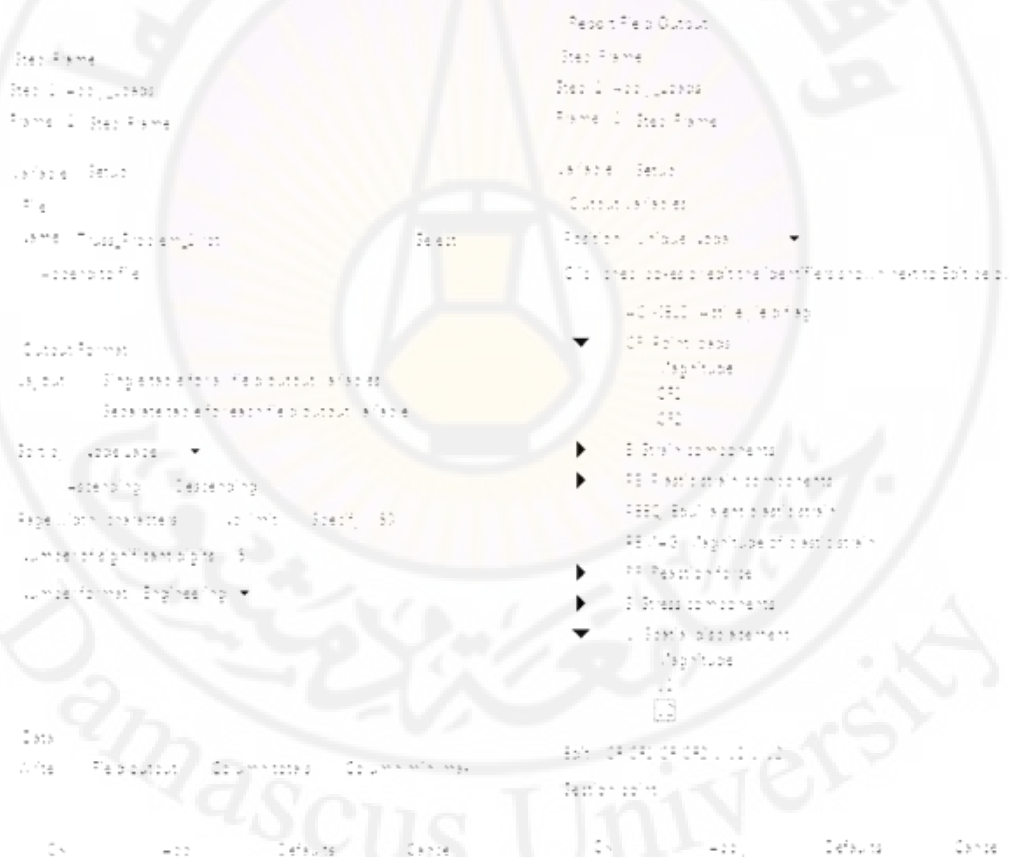
الشكل ١٠-٣٤: نافذة إنشاء حمل.

١٧- نأتي الآن إلى المرحلة الأهم وهي استعراض النتائج وتحليلها، ويتم ذلك بالانتقال إلى موديل إظهار Visualization ومن ثم فتح ملف النتائج عبر القائمة الرئيسية File ثم Open ثم نختار الملف Truss_Problem_1.odt، أو بالضغط مباشرة على زر Result (شكل ١٠-٣٤).

١٨- بالضغط على الزر Plot Deformed Shape يتم إظهار الشكل المشوه للجائز كما هو مبين بالشكل ١٠-٣٥، وهنا تأخذ الجوائز ألواناً تتدرج من الأحمر لتلك التي تتعرض لقيم مرتفعة من الإجهاد أو إجهادات الشد وحتى اللون الأزرق لتلك التي تتعرض لقيم منخفضة من الإجهاد أو إجهادات الضغط.

الشكل ١٠-٣٥: الشكل المشوه للجائز

٢١- يتم إنشاء ملف نصي يحتوي على متحولات الخرج المرغوبة كقوى ردود الأفعال و إزاحات العقد، بالذهاب إلى القائمة الرئيسية Report ومن ثم Field Output ، فيظهر مربع الحوار تقرير متحولات الخرج Report Field Output المبين بالشكل ١٠-٣٨، نبدأ ببطيئة المتحولات variable ، ونختار Unique nodal للحقل Position و من ثم نحدد في حقل متحولات الخرج Output Variable المركبات RF1 و RF2 للمتحول RF: Reaction force، والمركبات U1 و U2 للمتحول U: Spatial displacement، ومن ثم ننتقل إلى طبقة الإعدادات Setup، كما هو موضح بالشكل ١٠-٣٩، حيث يتم تسمية ملف التقرير وليكن Truss_Problem_1.rpt، ونلغي اختيار Append to file، ونضغط على OK.



الشكل ١٠-٣٨: متحولات تقرير متحولات الخرج. الشكل ١٠-٣٩: إعداد تقرير متحولات الخرج.

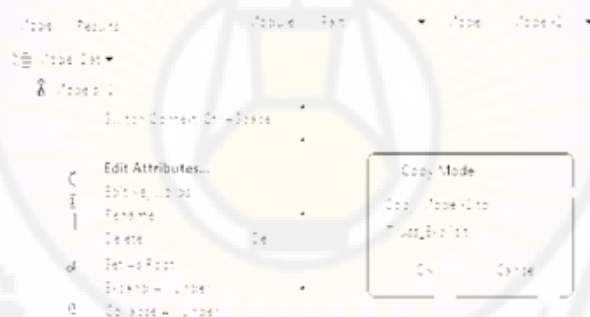
٢٢- يتم قراءة الملف النصي بالذهاب إلى مجلد ملفات Abaqus على القرص الصلب ونقوم بفتح ملف التقرير Truss_Problem_1.rpt باستخدام أي من برنامج تحرير النصوص المتاحة، فيظهر الملف كما

يبين الشكل ١٠-٤٠، وهو يشير إلى قيم متحولات الخرج التي تم تحديدها لكل عقدة بحسب الأرقام التي ولدها البرنامج بشكل تلقائي للعقد.

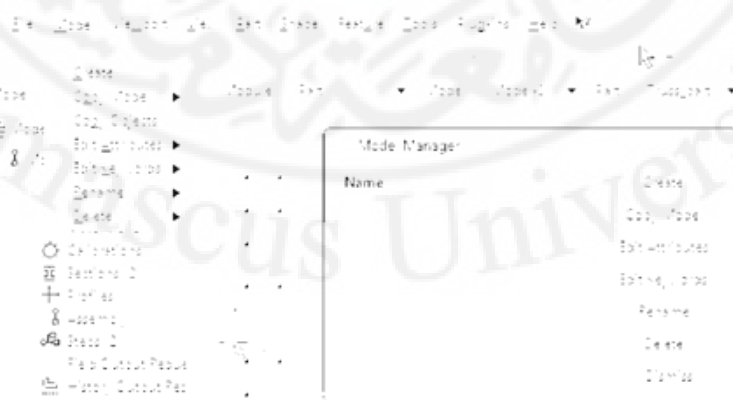
```
.....
Field Output Report, Written Thu Oct 02 05:10:24 2014
Source 1
.....
ODB: D:\8-0.5 Truss_Problem\1.odb
Step: 1001, 10000
Frame: Increment 1: Step time = 1.000
Job 1 : Model files from source 1
Output sorted by column (Node label).
Field output reported at nodes for part: TRUSS_P-47-1
```

Node label	CFIELD U(1)	CFIELD U(2)	CFIELD U(3)	CFIELD U(4)
1	0.	0.	0.	0.
2	0.	0.	0.	0.
3	0.	0.	0.	0.
4	0.	0.	0.	0.
5	0.	0.	0.	0.
6	0.	0.	0.	0.
7	0.	0.	0.	0.
8	0.	0.	0.	0.
9	0.	0.	0.	0.
10	0.	0.	0.	0.
11	0.	0.	0.	0.
12	0.	0.	0.	0.
13	0.	0.	0.	0.
14	0.	0.	0.	0.
15	0.	0.	0.	0.
16	0.	0.	0.	0.
17	0.	0.	0.	0.
18	0.	0.	0.	0.
19	0.	0.	0.	0.
20	0.	0.	0.	0.
21	0.	0.	0.	0.
22	0.	0.	0.	0.
23	0.	0.	0.	0.
24	0.	0.	0.	0.
25	0.	0.	0.	0.
26	0.	0.	0.	0.
27	0.	0.	0.	0.
28	0.	0.	0.	0.
29	0.	0.	0.	0.
30	0.	0.	0.	0.
31	0.	0.	0.	0.
32	0.	0.	0.	0.
33	0.	0.	0.	0.
34	0.	0.	0.	0.
35	0.	0.	0.	0.
36	0.	0.	0.	0.
37	0.	0.	0.	0.
38	0.	0.	0.	0.
39	0.	0.	0.	0.
40	0.	0.	0.	0.
41	0.	0.	0.	0.
42	0.	0.	0.	0.
43	0.	0.	0.	0.
44	0.	0.	0.	0.
45	0.	0.	0.	0.
46	0.	0.	0.	0.
47	0.	0.	0.	0.
48	0.	0.	0.	0.
49	0.	0.	0.	0.
50	0.	0.	0.	0.
51	0.	0.	0.	0.
52	0.	0.	0.	0.
53	0.	0.	0.	0.
54	0.	0.	0.	0.
55	0.	0.	0.	0.
56	0.	0.	0.	0.
57	0.	0.	0.	0.
58	0.	0.	0.	0.
59	0.	0.	0.	0.
60	0.	0.	0.	0.
61	0.	0.	0.	0.
62	0.	0.	0.	0.
63	0.	0.	0.	0.
64	0.	0.	0.	0.
65	0.	0.	0.	0.
66	0.	0.	0.	0.
67	0.	0.	0.	0.
68	0.	0.	0.	0.
69	0.	0.	0.	0.
70	0.	0.	0.	0.
71	0.	0.	0.	0.
72	0.	0.	0.	0.
73	0.	0.	0.	0.
74	0.	0.	0.	0.
75	0.	0.	0.	0.
76	0.	0.	0.	0.
77	0.	0.	0.	0.
78	0.	0.	0.	0.
79	0.	0.	0.	0.
80	0.	0.	0.	0.
81	0.	0.	0.	0.
82	0.	0.	0.	0.
83	0.	0.	0.	0.
84	0.	0.	0.	0.
85	0.	0.	0.	0.
86	0.	0.	0.	0.
87	0.	0.	0.	0.
88	0.	0.	0.	0.
89	0.	0.	0.	0.
90	0.	0.	0.	0.
91	0.	0.	0.	0.
92	0.	0.	0.	0.
93	0.	0.	0.	0.
94	0.	0.	0.	0.
95	0.	0.	0.	0.
96	0.	0.	0.	0.
97	0.	0.	0.	0.
98	0.	0.	0.	0.
99	0.	0.	0.	0.
100	0.	0.	0.	0.
101	0.	0.	0.	0.
102	0.	0.	0.	0.
103	0.	0.	0.	0.
104	0.	0.	0.	0.
105	0.	0.	0.	0.
106	0.	0.	0.	0.
107	0.	0.	0.	0.
108	0.	0.	0.	0.
109	0.	0.	0.	0.
110	0.	0.	0.	0.
111	0.	0.	0.	0.
112	0.	0.	0.	0.
113	0.	0.	0.	0.
114	0.	0.	0.	0.
115	0.	0.	0.	0.
116	0.	0.	0.	0.
117	0.	0.	0.	0.
118	0.	0.	0.	0.
119	0.	0.	0.	0.
120	0.	0.	0.	0.
121	0.	0.	0.	0.
122	0.	0.	0.	0.
123	0.	0.	0.	0.
124	0.	0.	0.	0.
125	0.	0.	0.	0.
126	0.	0.	0.	0.
127	0.	0.	0.	0.
128	0.	0.	0.	0.
129	0.	0.	0.	0.
130	0.	0.	0.	0.
131	0.	0.	0.	0.
132	0.	0.	0.	0.
133	0.	0.	0.	0.
134	0.	0.	0.	0.
135	0.	0.	0.	0.
136	0.	0.	0.	0.
137	0.	0.	0.	0.
138	0.	0.	0.	0.
139	0.	0.	0.	0.
140	0.	0.	0.	0.
141	0.	0.	0.	0.
142	0.	0.	0.	0.
143	0.	0.	0.	0.
144	0.	0.	0.	0.
145	0.	0.	0.	0.
146	0.	0.	0.	0.
147	0.	0.	0.	0.
148	0.	0.	0.	0.
149	0.	0.	0.	0.
150	0.	0.	0.	0.
151	0.	0.	0.	0.
152	0.	0.	0.	0.
153	0.	0.	0.	0.
154	0.	0.	0.	0.
155	0.	0.	0.	0.
156	0.	0.	0.	0.
157	0.	0.	0.	0.
158	0.	0.	0.	0.
159	0.	0.	0.	0.
160	0.	0.	0.	0.
161	0.	0.	0.	0.
162	0.	0.	0.	0.
163	0.	0.	0.	0.
164	0.	0.	0.	0.
165	0.	0.	0.	0.
166	0.	0.	0.	0.
167	0.	0.	0.	0.
168	0.	0.	0.	0.
169	0.	0.	0.	0.
170	0.	0.	0.	0.
171	0.	0.	0.	0.
172	0.	0.	0.	0.
173	0.	0.	0.	0.
174	0.	0.	0.	0.
175	0.	0.	0.	0.
176	0.	0.	0.	0.
177	0.	0.	0.	0.
178	0.	0.	0.	0.
179	0.	0.	0.	0.
180	0.	0.	0.	0.
181	0.	0.	0.	0.
182	0.	0.	0.	0.
183	0.	0.	0.	0.
184	0.	0.	0.	0.
185	0.	0.	0.	0.
186	0.	0.	0.	0.
187	0.	0.	0.	0.
188	0.	0.	0.	0.
189	0.	0.	0.	0.
190	0.	0.	0.	0.
191	0.	0.	0.	0.
192	0.	0.	0.	0.
193	0.	0.	0.	0.
194	0.	0.	0.	0.
195	0.	0.	0.	0.
196	0.	0.	0.	0.
197	0.	0.	0.	0.
198	0.	0.	0.	0.
199	0.	0.	0.	0.
200	0.	0.	0.	0.
201	0.	0.	0.	0.
202	0.	0.	0.	0.
203	0.	0.	0.	0.
204	0.	0.	0.	0.
205	0.	0.	0.	0.
206	0.	0.	0.	0.
207	0.	0.	0.	0.
208	0.	0.	0.	0.
209	0.	0.	0.	0.
210	0.	0.	0.	0.
211	0.	0.	0.	0.
212	0.	0.	0.	0.
213	0.	0.	0.	0.
214	0.	0.	0.	0.
215	0.	0.	0.	0.
216	0.	0.	0.	0.
217	0.	0.	0.	0.
218	0.	0.	0.	0.
219	0.	0.	0.	0.
220	0.	0.	0.	0.
221	0.	0.	0.	0.
222	0.	0.	0.	0.
223	0.	0.	0.	0.
224	0.	0.	0.	0.
225	0.	0.	0.	0.
226	0.	0.	0.	0.
227	0.	0.	0.	0.
228	0.	0.	0.	0.
229	0.	0.	0.	0.
230	0.	0.	0.	0.
231	0.	0.	0.	0.
232	0.	0.	0.	0.
233	0.	0.	0.	0.
234	0.	0.	0.	0.
235	0.	0.	0.	0.
236	0.	0.	0.	0.
237	0.	0.	0.	0.
238	0.	0.	0.	0.
239	0.	0.	0.	0.
240	0.	0.	0.	0.
241	0.	0.	0.	0.
242	0.	0.	0.	0.
243	0.	0.	0.	0.
244	0.	0.	0.	0.
245	0.	0.	0.	0.
246	0.	0.	0.	0.
247	0.	0.	0.	0.
248	0.	0.	0.	0.
249	0.	0.	0.	0.
250	0.	0.	0.	0.
251	0.	0.	0.	0.
252	0.	0.	0.	0.
253	0.	0.	0.	0.
254	0.	0.	0.	0.
255	0.	0.	0.	0.
256	0.	0.	0.	0.
257	0.	0.	0.	0.
258	0.	0.	0.	0.
259	0.	0.	0.	0.
260	0.	0.	0.	0.
261	0.	0.	0.	0.
262	0.	0.	0.	0.
263	0.	0.	0.	0.
264	0.	0.	0.	0.
265	0.	0.	0.	0.
266	0.	0.	0.	0.
267	0.	0.	0.	0.
268	0.	0.	0.	0.
269	0.	0.	0.	0.
270	0.	0.	0.	0.
271	0.	0.	0.	0.
272	0.	0.	0.	0.
273	0.	0.	0.	0.
274	0.	0.	0.	0.
275	0.	0.	0.	0.
276	0.	0.	0.	0.
277	0.	0.	0.	0.
278	0.	0.	0.	0.
279	0.	0.	0.	0.
280	0.	0.	0.	0.
281	0.	0.	0.	0.
282	0.	0.	0.	0.
283	0.	0.	0.	0.
284	0.	0.	0.	0.
285	0.	0.	0.	0.
286	0.	0.	0.	0.
287	0.	0.	0.	0.
288	0.	0.	0.	0.
289	0.	0.	0.	0.
290	0.	0.	0.	0.
291	0.	0.	0.	0.
292	0.	0.	0.	0.
293	0.	0.	0.	0.
294	0.	0.	0.	0.
295	0.	0.	0.	0.
296	0.	0.	0.	0.
297	0.	0.	0.	0.
298	0.	0.	0.	0.
299	0.	0.	0.	0.
300	0.	0.	0.	0.
301	0.	0.	0.	0.
302	0.	0.	0.	0.
303	0.	0.	0.	0.
304	0.	0.	0.	0.
305	0.	0.	0.	0.
306	0.	0.	0.	0.
307	0.	0.	0.	0.
308	0.	0.	0.	0.
309	0.	0.	0.	0.
310	0.	0.	0.	0.
311	0.	0.	0.	0.
312	0.	0.	0.	0.
313	0.	0.	0.	0.
314	0.	0.	0.	0.
315	0.	0.	0.	0.
316	0.	0.	0.	0.
317	0.	0.	0.	0.
318	0.	0.	0.	0.
319	0.	0.	0.	0.
320	0.	0.	0.	0.
321	0.	0.	0.	0.
322	0.	0.	0.	0.
323	0.	0.	0.	0.
324	0.	0.	0.	0.
325	0.	0.	0.	0.
326	0.	0.	0.	0.
327	0.	0.	0.	0.
328	0.	0.	0.	0.

ثانياً : يهدف المقارنة سنقوم بإعادة دراسة هذا المثال باستخدام Abaqus/Explicit، في هذه الحالة يطلب تحليل الاستجابة الديناميكية، لذا وقبل المتابعة، انقر فوق علامة التبويب نموذج في الجانب الأيسر من النافذة الرئيسية للتبديل إلى شجرة النموذج، ثم استخدم الزر اليميني للماوس للنقر على نموذج في شجرة النموذج ومن ثم حدد نسخ نموذج Copy Model من القائمة التي تظهر لنسخ النموذج الحالي إلى نموذج جديد، وليكن اسمه Truss_Explicit، كما هو موضح بالشكل ١٠-٤٢، يمكن الوصول لتنفيذ ذلك عبر الذهاب إلى القائمة الرئيسية، ثم اختيار قائمة نموذج Model وبعد ذلك اختيار نسخ نموذج Copy Model، أو اختيار إدارة النماذج Model Manager ومن ثم نضغط على الزر نسخ نموذج Copy Model في مربع حوار إدارة النماذج، كما هو موضح بالشكل ١٠-٤٣، لاحظ أنه عند بناء النموذج لم نقم بتعديل الاسم الافتراضي للنموذج والذي هو Model-1، وعليه أصبح الآن لديك نموذجان الأول يحمل اسم Model-1 وهو الذي تمت عليه الدراسة الأولى (السكونية) والثاني يحمل اسم Truss_Explicit (شكل ١٠-٤٤) وهو الذي ستتم عليه الدراسة الثانية (الديناميكية)، وبذلك سنقوم بمختلف التغيرات على النموذج الجديد Truss_Explicit.



الشكل ١٠-٤٢: نسخ نموذج عبر شجرة النموذج.



الشكل ١٠-٤٣: نسخ نموذج عبر القائمة الرئيسية.



الشكل ١٠-٤٤: استعراض النماذج التي تم إنشاؤها.

- ١- نذكر أننا في الخطوة ١٢ من بناء النموذج قمنا بإنشاء خطوة تحميل وتم اختيار طبيعة التحليل Static, General، وعليه سوف نحتاج إلى استبدال تلك الخطوة بأخرى ديناميكية، وتعديل متحولات الخرج المطلوبة، توصيف المواد، وتغيير عائلة العناصر قبل أن تتمكن من إعادة الحساب.
- ٢- نبدأ باستبدال الخطوة السابقة السكونية Static, General، بأخرى ديناميكية، ويتم ذلك بالذهاب إلى شجرة النموذج والتأكد من أنه قد تم الانتقال للعمل على نموذج Truss_Explicit، من خلال الضغط على إشارة - أيسر Model-1 ومن ثم نضغط على إشارة + أيسر Truss_Explicit بذلك تغلق مكونات النموذج الأول Model-1 وتنسدل مكونات النموذج الجديد Truss_Explicit، ثم نضغط بالزر اليساري للفأرة على إشارة + أيسر Steps فتظهر القائمة الفرعية الخاصة بها والتي تحتوي على Apply Loads، والذي يعطي بالضغط عليه بالزر اليميني للفأرة خيار التبدل Replace، والذي يعيدنا بالضغط عليه إلى مربع حوار إضافة خطوة Create Step، المبين بالشكل ١٠-٢١، حيث يتم اختيار Dynamic, Explicit، كما هو مبين بالشكل ١٠-٤٥، ثم نضغط على زر المتابعة Continue، فتظهر نافذة تحرير الخطوة Edit Step كما في الشكل ١٠-٢٢، حيث يمكن وضع توصيف للخطوة ضمن الحقل description وليكن central load, suddenly applied 10kN، ثم نضع زمن الخطوة 0.01 s، ونترك باقي التفاصيل كما هي ونضغط على زر OK.



يجب ملاحظة أن الأحمال والشروط الحدية التي كانت مطبقة في الخطوة التي تم استبدالها ستبقى في الخطوة الجديدة مادامت قابلة للتطبيق في حالة التحليل الجديدة وإلا فستحذف بشكل تلقائي، (في مثالنا هذا جميع القوى ستحافظ على وجودها كونها تتناسب مع حالة التحليل الديناميكي أيضاً).

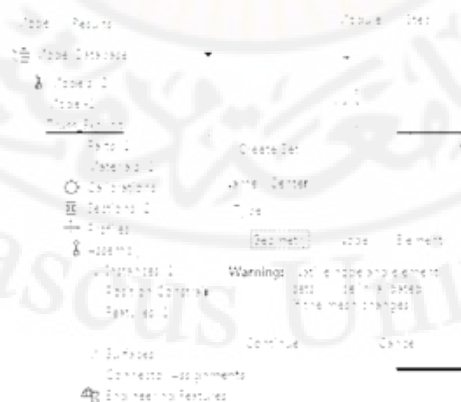
- ٣- بما أن التحليل ذو طبيعة ديناميكية، فإنه من المهم الحصول على الاستجابة العابرة للهيكل، لذا فإن من المفيد الحصول على الانتقالات عبر الزمن، الأمر الذي يمكن الحصول عليه لمجموعة محددة، لذا يتوجب تعريف مجموعة جزئية من الهيكل، ولتكن تلك النقطة الموجودة في أسفل الجمالون ومتصفه، ويتم ذلك من خلال الضغط والذهاب إلى شجرة نموذج، وتوسيع قائمة التجميع، ثم النقر المزدوج على مجموعات Sets فيظهر مربع حوار إنشاء مجموعة Create Set، كما هو مبين بالشكل ١٠-٤٦، حيث

العناصر المنتهية

يمكن أن نضع اسماً للمجموعة المراد إنشاؤها وليكن ، ويتم قبول التعيين الافتراضي لنوع المجموعة كتفاصيل هندسية ، ونعود عند الضغط على الزر ، إلى واجهة الرسم كي نقوم باختيار التفاصيل الهندسية المراد إضافتها إلى المجموعة، وذلك بظهور عبارة في منطقة التفاعل السريع ، لنقوم باختيار العقدة التي في أسفل الجمالون ومنتصفه، ثم بالضغط على نكون قد أنشأنا المجموعة المطلوبة.



الشكل ١٠-٤٥: استبدال خطوة غلط تحليل بخطوة ذات غلط تحليل آخر .

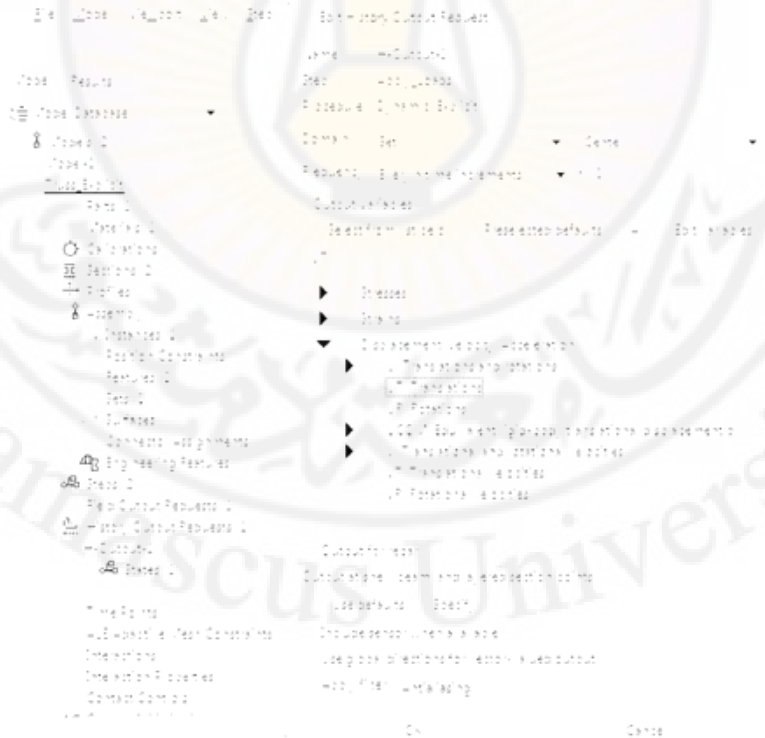


الشكل ١٠-٤٦: إنشاء مجموعة.

يجب ملاحظة أنه يمكن إنشاء مجموعات من العقد أو العناصر وفي هذه الحالة فإن هذه المجموعات مرتبطة بتوزيع شبكي محدد وأن إعادة توليد الشبكة يوجب إعادة تعريف هذه المجموعات.



٤- لتعديل متطلبات تغيرات الخرج الزمنية نذهب إلى شجرة نموذج، ونقوم بتوسيع قائمة History Output Requests، والقوائم المنبثقة عنها حتى نصل إلى الخطوة التي تم إنشاؤها سابقاً Apply_loads، ثم بالنقر المزدوج عليها يظهر مربع حوار تحرير متطلبات تغيرات الخرج الزمنية Edit History Output Requests، حيث يتم تغيير قيمة الحقل Domain إلى Set وعندما يتم اختيار المجموعة الوحيدة التي تم إنشاؤها Center، ويتم تغيير قيمة الحقل Frequency لاختيار Every n time increments ونضع في الحقل n القيمة ١ مما يعني أنه سيتم إخراج النتائج لكل تزايد increment (فواصل زمنية ضمن الخطوة) كما هو مبين بالشكل ١٠-٤٧، كما يتم إزالة الخيار عن energy في حقل متحولات الخرج Output Variables، ومن ثم الضغط على المثلث على يسار Displacement/Velocity/Acceleration لإظهار قائمة المتحولات ضمنه ومن ثم يتم اختيار UT, Translations لإخراج الإزاحات في ملف النتائج، ثم نضغط على الزر OK.



الشكل ١٠-٤٧: تحرير متطلبات تغيرات الخرج الزمنية.

٥- بما أننا الآن بصدد إجراء تحليل ديناميكي، لذا يجب أن يتم التعريف الكامل للمواد وتحديد قيمة الكثافة بالإضافة للخواص التي تم تعريفها مسبقاً، ويتم ذلك بالذهاب إلى شجرة نموذج، و توسيع قائمة مواد Material ثم النقر المزدوج على Truss_material فيظهر مربع حوار تحرير مادة، كما في الشكل ١٠-٤٨، وفيه يتم اختيار الخاصية عام General ثم كثافة Density، ويتم إدخال قيم كثافة المادة ٧٨٠٠ دون أي تحويل كون واحدتها مناسبة لنظام الوحدات الذي تم البدء به بحسب الجدول ١٠-١، ونضغط على Ok.

٧- ننتقل الآن إلى إنشاء ملف الخرج والقيام بالحساب أو المحاكاة، ويتم ذلك بالانتقال إلى موديل عمل Job، ويتم ذلك بالضغط على الزر إنشاء عمل Create Job، عندها يظهر مربع الحوار Create Job والمبين بالشكل ١٠-٤٩. (يجب التأكد أن النموذج المحدد هو Truss_Explicit والذي يتم العمل عليه في هذا الجزء من المثال) حيث يتم وضع اسم وليكن Truss_Explicit والذي سيكون اسماً لكل من ملف الدخول وملفات الخرج، وبالضغط على زر متابعة Continue، يظهر مربع الحوار تحرير العمل Edit Job والمبين بالشكل ١٠-٣٣، ثم نضغط على OK لإتمام إنشاء العمل دون أن نقوم بأية تعديلات على الحقول الأخرى.



الشكل ١٠-٤٩: تحديد النموذج الذي سيتم إنشاء العمل له.

٨- للبدء بعملية المحاكاة أو الحساب نضغط على الزر إدارة الأعمال Job Manager، عندها يظهر مربع الحوار Job Manager والمبين بالشكل ١٠-٣٤، ومن ثم نضغط على زر إرسال Submit للشروع بعملية الحساب، بعد التأكد من أن العمل المحدد هو Truss_Explicit والذي يتم العمل عليه في هذا الجزء من المثال، لاحظ تغير مضمون حقل الحالة Status، بدءاً من None قبل الإرسال، إلى Aborted، هذا يعني أن هناك مشكلة ما في النموذج أدت إلى فشل عملية الحساب. ويمكن معرفة طبيعة تلك المشكلة من خلال قراءة الرسالة التي تركها البرنامج في منطقة الرسائل Message area، كما هو مبين بالشكل ١٠-٥٠، وتفيد هذه الرسالة بأن الشروط الحدية المفروضة والتي هي من النوع XASYMM غير مدعومة في Abaqus/Explicit.

```

The job input file "Truss_Explicit.inp" has been submitted for analysis.
Error in job Truss_Explicit: BOUNDARY CONDITION TYPE XASYMM IS NOT SUPPORTED IN Abaqus/Explicit
Job Truss_Explicit: Analysis Input File Processor aborted due to errors.
Error in job Truss_Explicit: Analysis Input File Processor exited with an error.
Job Truss_Explicit aborted due to errors.

```

الشكل ١٠-٥٠: رسالة الخطأ التي تعبر عن سبب فشل عملية الحساب.

٩- نقوم بتعديل هذا الشرط بشرط آخر يحقق القيود المفروضة ويكون مدعوماً في ،
وبذلك سنتعرف على أسلوب آخر لفرض قيود في الاتجاهات المرغوبة، ويتم ذلك بالعودة إلى
موديول حمل ، نضغط على زر إدارة الشروط الحدية

الموجود أيمن زر تعريف شروط حدية ، عندها يظهر لنا
مربع الحوار المبين بالشكل ١٠-٥١، حيث نقوم بحذف الشروط التي تم إنشاؤها سابقاً ونقوم
بانشاء شروط جديدة بالضغط على زر إنشاء فيظهر مربع حوار إنشاء شروط حدية حيث
تتم تسمية الشرط الحدي وليكن ، ثم التأكد من اختيار الخطوة ضمن
الحقل خطوة ، وضمن الحقل نختار إزاحة/دوران ،
ونعود عند الضغط على الزر إلى واجهة الرسم كي نقوم باختيار العقد أو العناصر التي
سيتم تطبيق الشرط الحدي عليها، نستدل على ذلك بظهور عبارة

في منطقة التفاعل السريع ، فنقوم باختيار العقدة ١ ،
ونضغط على الزر ، فيظهر لنا مربع الحوار الذي يسمح لنا
باختيار القيود المطلوبة (لاحظ ظهور درجات الحرية للحالة المستوية)، فنقوم باختيار كل من
و ونضغط على زر ، كما في الشكل ١٠-٥٢، فنلاحظ إضافة رمز التثبيت على العقدة،
ثم نقوم بإضافة الشرط الآخر للعقدة ٩، حيث يقيّد هذا المسند الحركة الخطية بالاتجاه الشاقولي
ويسمح بها في الاتجاه الأفقي بالإضافة للدورانات، مع الانتباه إلى وضع تسمية أخرى للشرط الحدي
وليكن ، مع اختيار العقدة ٩، واختيار فقط ونضغط على زر .



الشكل ١٠-٥١: إدارة الشروط الحدية.



الشكل ١٠-٥٢: تحرير الشروط الحدي من غط إزاحة/دوران.

١٠- نعود من جديد لإنجاز عملية المحاكاة أو الحساب من خلال الضغط على الزر إدارة الأعمال Job Manager، عندها يظهر مربع الحوار Job Manager والمبين بالشكل ١٠-٣٤، ومن ثم نضغط على زر إرسال Submit للشروع بعملية الحساب، بعد التأكد من أن العمل المحدد هو Truss_Explicit، سيظهر رسالة تحذيرية على هيئة مربع حوار كما هو مبين بالشكل ١٠-٥٣، تدل هذه الرسالة على أن اسم ملف العمل موجود سابقاً وهذا طبيعي لأنه ملف تم إنشاؤه في المرة السابقة التي فشلت فيها عملية المحاكاة وعليه اضغط على OK لاستبدال الملف السابق، لاحظ أن هذه الرسالة هامة جداً في حال استخدامك لاسم لملفات الدخول والخروج قد تم استخدامه مسبقاً في حساب آخر، وبالتالي استبداله سيعرض لخسارة الملفات السابقة التي يمكن أن تكون مفيدة.



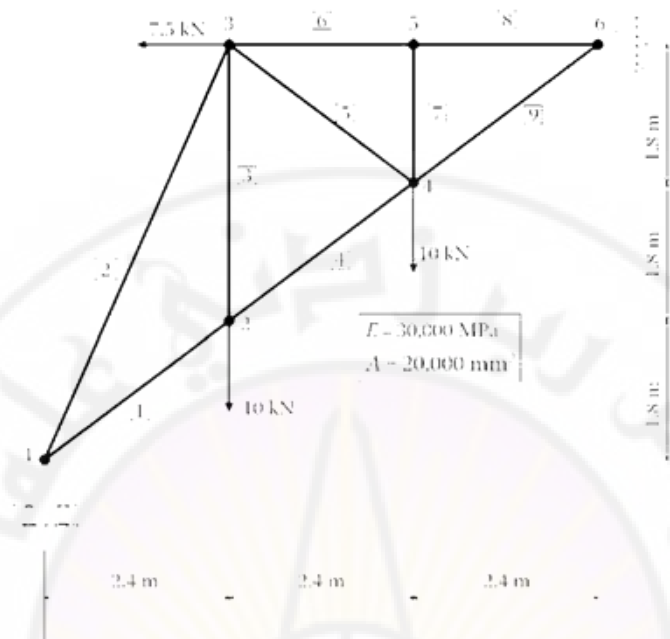
الشكل ١٠-٥٣: رسالة تحذير عند الوجود المسبق لملف دخل وفقاً للاسم المعروف.

١٠-٧ المثال الثاني: تحليل هيكل جمالوني

ليكن لدينا الهيكل الجمالوني المبين بالشكل ١٠-٥٤ والمكونة من ٩ جوائز تملك الخواص التالية:

$$E = 30 \times 10^6 \text{ kN/m}^2, \nu = 0.3, \rho = 7800 \text{ kg/m}^3, A = 0.02 \text{ m}^2$$

والمطلوب هو بناء نموذج العناصر المنتهية لهذا الهيكل ودراسة القوى والإجهادات والانفعالات المؤثرة على مختلف جوائزه.



الشكل ١٠-٥٤: هيكل جملوني.

إن دراسة هذا الهيكل تشابه تماماً دراسة الهيكل في المثال الأول لذا سنقوم بسرر لخطوات العمل وستترك للقارئ القيام بالمطلوب كتدريب إضافي:

١- نبدأ بتشغيل البرنامج عبر الذهاب إلى قائمة ابدأ أو Start ومن ثم جميع البرامج All Programs ومن ثم حزمة برامج Abaqus ونختار الاختصار Abaqus CAE.

٢- على نافذة البدء نختار الأمر إنشاء نموذج Create Model Database باستخدام Abaqus/Standard أو Abaqus/Explicit.

٣- على النافذة الأساسية للبرنامج نقوم بالضغط على زر إنشاء جزء Create Part من صندوق الأدوات Toolbox area بعد أن يتم اختيار الموديول جزء part من قائمة موديول module على شريط المسار Context bar أو من شجرة النموذج Model Tree، للشروع بإنشاء النموذج.

٤- في نافذة إنشاء الجزء، نقوم بممل، بيانات الجزء كالآتي:

a. نضع الاسم Name بشكل اختياري

b. نختار من فضاء النموذج Modeling Space، مستوي ثنائي الأبعاد 2D Planar.

c. نختار من النوع type، قابل للانفعال Deformable.

d. نختار من قاعدة الشكل Base Feature، سلك Wire.

مدخل إلى النمذجة باستخدام برنامج

- . ونضع في
- أبعاد منطقة العمل بما يتسع للجزء المراد إنشاؤه وبما يتناسب مع
- أبعاده.
- . نضغط

٥- في نافذة الرسم يتم فيها رسم الهيكل الشبكي وعند الانتهاء من الرسم يتم الضغط على زر تم الموجود في منطقة التفاعل السريع ، وبذلك يتم العودة إلى نافذة جزء ، وبذلك يتم الحصول على الهيكل المطلوب كما هو موضح بالشكل ١٠-٥٥.

الشكل ١٠-٥٥: الهيكل بعد رسمه.

٦- ننتقل الآن إلى موديول الخواص ، ونقوم بتعريف مادة عبر الضغط على زر إنشاء مادة σ ، وبما أن مختلف جوائز الهيكل المدروس مصنوعة من المادة نفسها، لذا سنقوم بتعريف مادة واحدة.

٧- يتم إدخال خواص المادة بالضغط على ومن ثم وبعدها وندخل القيمة لمعامل المرونة و لمعامل بواسون، ثم بالضغط على يكون قد تم إنشاء المادة المطلوبة.

٨- في الخطوة التالية يتم تعريف المقاطع العرضية للجوائز، ويتم ذلك عبر الضغط على زر إنشاء مقطع ، ويتم إدخال البارامترات التالية:

- . نضع الاسم بشكل اختياري.
- . نختار من المجموعة ، و جائز .

. نختار من النوع ، هيكل شبكي (جمالون) .

٩- عند الضغط على زر المتابعة تظهر نافذة تحرير المقطع ، يتم اختيار المادة التي تم إنشاؤها مسبقاً في حقل المادة ، ثم يتم إدخال قيمة مساحة المقطع العرضي بحيث تكون .

بعد أن تم إنشاء المقاطع اللازمة يجب إسنادها إلى الجوائز المختلفة، يتم ذلك عبر الضغط على زر إسناد مقطع ، عندها تظهر عبارة

في منطقة التفاعل السريع ، فنقوم باختيار جميع الجوائز كونها تملك المقطع والخواص نفسها عبر النقر عليها باستخدام الفأرة بشكل متتال مع استمرار الضغط على مفتاح على لوحة المفاتيح ومن ثم نضغط على زر فتظهر لنا نافذة إسناد المقاطع.

١١- ننتقل الآن إلى موديول تجميع ، نقوم باختيار الجزء الموجود ثم نضغط .

١٢- ننتقل الآن إلى موديول خطوة ، وعليه نقوم بإضافة خطوة عبر الضغط على زر إضافة خطوة ، وهنا يتم إعطاء اسم اختياري للخطوة، كما يتم اختيار طبيعة التحليل (في حالتنا

) بما يتناسب مع المسألة المدروسة، ثم نضغط على زر المتابعة ، فتظهر نافذة تحرير الخطوة ، حيث يمكن وضع توصيف اختياري للخطوة ضمن الحقل ، ونترك باقي التفاصيل كما هي في حالتنا هذه ونضغط على زر .

١٣- ننتقل الآن إلى موديول حمل ، حيث سيتم هنا إضافة الأحمال والشروط الحدية كمايلي:

نبدأ بتعريف الشروط الحدية الموافقة للمسند عند العقدة ٦، حيث يقيد هذا المسند الحركات الخطية في جميع الاتجاهات ويسمح فقط بالدورانات، ولتوصيف ذلك نضغط على زر تعريف شروط حدية ، عندها يظهر لنا مربع الحوار يتم فيه تسمية الشرط الحدي

باسم اختياري، ثم التأكد من اختيار الخطوة ضمن الحقل خطوة ، وضمن الحقل نختار شرط تناظر/تناظر عكسي/تثبيت ،

ونعود عند الضغط على الزر إلى واجهة الرسم كي نقوم باختيار العقد أو العناصر التي سيتم تطبيق الشرط الحدي عليها، نستدل على ذلك بظهور عبارة

في منطقة التفاعل السريع ، فنقوم باختيار العقدة ٦ ونضغط على الزر ، فيظهر لنا مربع الحوار حالة التثبيت المطلوبة، فنقوم باختيار ، ونضغط على زر ، فنلاحظ إضافة رمز التثبيت على العقدة.

b. نعيد الكرة من أجل مسند العقدة ١، حيث يقيّد هذا المسند الحركة الخطية بالاتجاه الشاقولي ويسمح بها في الاتجاه الأفقي بالإضافة للدورانات، مع الانتباه إلى وضع تسمية أخرى للشرط الحدي، مع اختيار العقدة ١، اختيار $XASYMM (U1=U3=UR1=0)$.

c. ثم تنتقل إلى إضافة الأحمال (القوى)، بالضغط على زر إنشاء حمل Create Load، عندها يظهر لنا مربع الحوار الذي يسمح بتسمية الحمل بحسب العقدة المطبق عليها، ثم التأكد من وضع خطوة التحميل التي تم إنشاؤها في حقل الخطوة Step، وفي الحقل Category نختار Mechanical وفي الحقل Type نختار Concentrated Force والتي تعبر عن قوة مركزة، ونعود عند الضغط على الزر Continue إلى واجهة الرسم كي نقوم باختيار العقد أو العناصر التي سيتم تطبيق القوى عليها، وذلك بظهور عبارة Select the points for The load في منطقة التفاعل السريع Prompt area، فنقوم باختيار العقدة ٣ ونضغط على الزر Done، فيظهر لنا مربع الحوار Edit Load الذي يسمح لنا بتحديد القوى المطبقة، فنقوم بوضع القيمة $CF1 = -7500$ حيث المحور ١ يقابل المحور الأفقي والقيمة السالبة كون اتجاه القوة يعاكس الاتجاه الموجب لهذا المحور، ونضغط على زر OK، فنلاحظ إضافة سهم يدل على منحنى واتجاه القوة.

d. نعيد الكرة من أجل قوى العقدة ٢ و ٤، مع الانتباه إلى وضع تسمية جديدة لكل حمل، واختيار العقدة ٢، ٤، الموافقة لكل حالة، مع وضع القيمة $CF2 = -10000$ لكلا العقدتين لتتطابق قيمة الحمل لكليهما، حيث المحور ٢ يقابل المحور الشاقولي والقيمة سالبة كون اتجاه جميع القوى هو عكس الاتجاه الموجب لهذا المحور، ونضغط على زر OK، فنلاحظ إضافة سهم يدل على منحنى واتجاه كل قوة.

١٤- نتقل الآن إلى مودول شبكة Mesh، حيث سيتم هنا بناء وتوصيف شبكة العناصر المنتهية للحملة، يجب الانتباه هنا إلى ضرورة اختيار part في حقل Object على شريط المسار Context bar، ثم نبدأ بعملية توصيف وبناء الشبكة كمايلي:

a. نبدأ بتعريف طبيعة العناصر المنتهية التي ستستخدم في نموذج الحملة المدروسة، وذلك بالضغط على زر تعيين نوع العنصر Assign Element Type، عندها تظهر في منطقة التفاعل السريع Prompt area عبارة Select the regions to be assign element type، لاختيار المنطقة التي نود تعيين نوع العناصر المنتهية المكونة لها، ونقوم باختيار كامل الجائز بواسطة الفأرة ثم نضغط على الزر Done، فيظهر لنا مربع الحوار نوع العنصر Element Type، حيث نضع في مكتبة العناصر Element Library نضغط على Standard، وفي العائلة Family نختار Truss، وفي الدرجة

الهندسية Geometric order نختار الحالة خطي Linear، فيظهر في الأسفل تقريباً عبارة تدل على ترميز العنصر المنتهي الموافق للتوصيف السابق وهي T2D2: A 2:node linear 2-D truss، ثم نضغط على OK لإتمام التوصيف.

b. لتقسيم الجوائز إلى عناصر منتهية، نضغط على الزر تقسيم الخواف Seed Edge، عندها تظهر في منطقة التفاعل السريع Prompt area عبارة Select the regions to be assigned local seed، لاختيار المنطقة التي نود تقسيمها إلى عناصر، ونقوم باختيار الجائزة كله بواسطة الفأرة ثم نضغط على الزر Done، فيظهر لنا مربع حوار التقسيم Local Seed حيث نختار لوحة بسيط Basic، ونضع في الطريقة Method باستخدام العدد By number، ونضع الرقم ١ بجوار عدد العناصر Number of Element ضمن القائمة Sizing Control، (يشير الرقم ١ هنا إلى أن التقسيم سيكون عنصراً في كل ضلع أي جائزاً في حالتنا هذه)، ثم نضغط على OK لإتمام التقسيم.

c. نقوم بعد ذلك بإنشاء الشبكة النهائية، ويتم ذلك بالضغط على الزر شبكة الجزء Mesh Part، عندها تظهر في منطقة التفاعل السريع Prompt area عبارة Ok to mesh the part، نضغط عندها على الزر Yes، فيتم بذلك تحويل الشكل الهندسي للهيكل الشبكي إلى عناصر منتهية، ويدل على ذلك تغير لون الهيكل.

١٥- بالوصول إلى هذه المرحلة نستطيع القول بأن عملية النمذجة قد تمت على الوجه الأكمل، ننتقل الآن إلى إنشاء ملف الخرج والقيام بالحساب أو المحاكاة، ويتم ذلك بالانتقال إلى موديول عمل Job، ويتم ذلك بالضغط على الزر إنشاء عمل Create Job، عندها يظهر مربع الحوار Create Job، حيث يتم وضع اسم اختياري له والذي سيكون اسماً لكل من ملف الدخول وملفات الخرج، وبالضغط على زر متابعة Continue، يظهر مربع الحوار تحرير العمل Edit Job حيث يمكن وضع توصيف للعمل في الحقل Description وليكن Analysis of a truss، ثم نضغط على OK لإتمام إنشاء العمل دون أن نقوم بأية تعديلات على الحقول الأخرى.

١٦- للبدء بعملية المحاكاة أو الحساب نضغط على الزر إدارة الأعمال Job Manager، عندها يظهر مربع الحوار Job Manager، ومن ثم نضغط على زر إرسال Submit للشروع بعملية الحساب. لاحظ تغير مضمون حقل الحالة Status، بدءاً من None قبل الإرسال، إلى Submitted لدى الإرسال وريثما يتم التحقق من بناء النموذج، ثم Running في أثناء عملية الحساب، وانتهاء ب Completed عند إتمام الحساب.

١٧- يتم استعراض النتائج وتحليلها بالانتقال إلى موديول إظهار Visualization ومن ثم فتح ملف النتائج عبر القائمة الرئيسية File ثم Open ثم نختار الملف ذا التوسع odb، أو بالضغط مباشرة على زر Result .

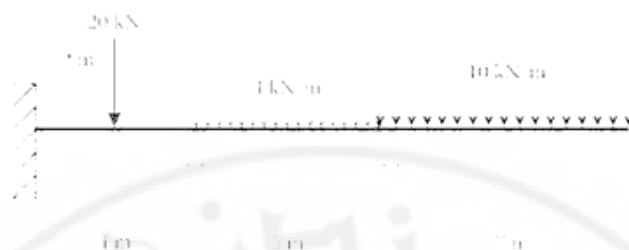
١٨- بالضغط على الزر Plot Deformed Shape يتم إظهار الشكل المشوه للجائز كما هو موضح بالشكل ١٠-٥٦، وهنا تأخذ الجوائز ألواناً تتدرج من الأحمر لتلك التي تتعرض لقيم مرتفعة من الإجهاد أو إجهادات الشد وحتى اللون الأزرق لتلك التي تتعرض لقيم منخفضة من الإجهاد أو إجهادات الضغط.

الشكل ١٠-٥٦: إظهار شكل الهيكل المشوه.

١٩- يمكن تغيير المتحول الذي يتم إظهاره بالذهاب إلى القائمة الرئيسية Result ثم Field Output فيظهر مربع الحوار الذي يسمح باختيار المتحول المراد إظهاره.

١٠-٨ المثال الثالث: تحليل جائز

ليكن لدينا الجائز المبين بالشكل ١٠-٥٧، فإذا علمت أنه مصنوع من الحديد ذي معامل المرونة $E = 200GPa$ ، وأن شكل وأبعاد مقطعه كما هو مبين بالشكل ١٠-٥٨، المطلوب بناء نموذج العناصر المنتهية لهذا الجائز ودراسة القوى والإجهادات والانفعالات المؤثرة عليه.



الشكل ١٠-٥٧: جاذر مثبت من نهايته.

الشكل ١٠-٥٨: المقطع العرضي للجاذر (الأبعاد بالميليمتر).

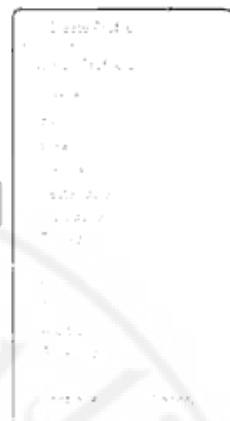
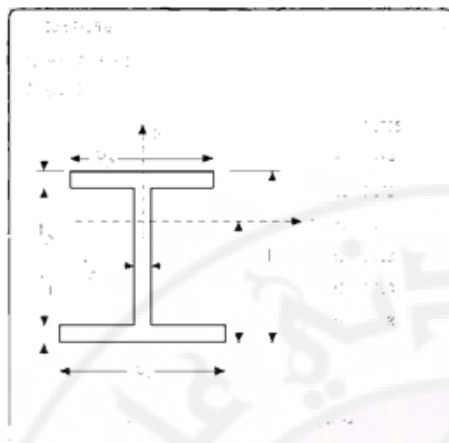
لدراسة هذا الجاذر سوف نستعرض بشكل سريع الخطوات المشابهة لتلك في الأمثلة السابقة وستقف بشئ من التفصيل فقط عند تلك الخطوات المختلفة لخصوصيتها:

- ١- نبدأ بتشغيل البرنامج عبر الذهاب إلى قائمة ابدأ أو Start ومن ثم جميع البرامج All Programs ومن ثم حزمة برامج Abaqus ونختار الاختصار Abaqus CAE.
- ٢- على نافذة البدء نختار الأمر إنشاء نموذج Create Model Database باستخدام Abaqus/Standard أو Abaqus/Explicit.
- ٣- على النافذة الأساسية للبرنامج نقوم بالضغط على زر إنشاء جزء Create Part من صندوق الأدوات Toolbox area بعد أن يتم اختيار الموديول جزء part من قائمة موديول module على شريط المسار Context bar أو من شجرة النموذج Model Tree ، للشروع بإنشاء النموذج.
- ٤- في نافذة إنشاء الجزء ، نقوم بملي بيانات الجزء كالآتي:
a. نضع الاسم Name بشكل اختياري

- b. نختار من فضاء النموذج Modeling Space، مستوى ثنائي الأبعاد 2D Planar.
- c. نختار من النوع type، قابل للانفعال Deformable.
- d. نختار من قاعدة الشكل Base Feature، سلك Wire.
- e. ونضع في Approximate Size، أبعاد منطقة العمل بما يتسع للجزء المراد إنشاؤه وبما يتناسب مع أبعاده.
- f. نضغط Continue.
- ٥- في نافذة الرسم يتم فيها رسم الهيكل الشبكي وعند الانتهاء من الرسم يتم الضغط على زر تم Done الموجود في منطقة التفاعل السريع Prompt area، وبذلك يتم العودة إلى نافذة جزء part، تذكر أن تقوم برسم الجانز على ٤ أجزاء بما يتناسب ونقاط الإستناد والتحميل، كما يبين بالشكل ١٠-٥٩.

الشكل ١٠-٥٩: الجانز (الأبعاد بالمتر).

- ٦- ننتقل الآن إلى مودبول الخواص Property، ونقوم بتعريف مادة عبر الضغط على زر إنشاء مادة σ Create Material، ونقوم بتعريف مادة الجانز وذلك بالضغط على Mechanical ومن ثم Elasticity وبعدها Elastic وندخل القيمة $200e-6 \text{ kN/m}^2$ لمعامل المرونة و 0.3 لمعامل بواسون، ثم بالضغط على OK يكون قد تم إنشاء المادة المطلوبة.
- ٧- في الخطوة التالية يتم إنشاء المقطع العرضي للجانز، ويتم ذلك عبر الضغط على زر إنشاء شكل مقطع Create Profile، فتظهر الواجهة الخاصة باختيار شكل المقطع العرضي كما هو مبين بالشكل ١٠-٦٠، حيث يتم فيها اختيار المقطع I الموافق لمقطع الجانز، كما يمكن تسمية شكل المقطع وليكن Beam_Profile، ثم بالضغط على زر Continue تظهر واجهة Edit Profile لتوصيف أبعاد المقطع المبينة بالشكل ١٠-٦١، حيث يتم إدخال قيم أبعاد المقطع ثم بالضغط على زر OK يكون قد تم إنشاء المقطع المطلوب.



الشكل ١٠-٦١: واجهة توصيف أبعاد المقطع.

الشكل ١٠-٦٠: الواجهة اختيار شكل المقطع العرضي.

٨- في الخطوة التالية يتم تعريف المقطع العرضي للجائز، ويتم ذلك عبر الضغط على زر إنشاء مقطع ، ويتم إدخال البارامترات التالية:

. نضع الاسم بشكل اختياري.

. نختار من المجموعة ، و جائز .

. نختار من النوع ، جائز .

٩- عند الضغط على زر المتابعة تظهر نافذة تحرير المقطع ، يتم اختيار

المادة التي تم إنشاؤها مسبقاً في حقل المادة ، كما يتم اختيار شكل المقطع الذي تم إنشاؤه

مسبقاً ، يجب ترك قيمة معامل بواسون للمقطع على القيمة صفر دون تغيير، كما هو

مبين بالشكل ١٠-٦٢.

١٠- بعد أن تم إنشاء المقطع اللازم يجب إسناده إلى الجائز، يتم ذلك عبر الضغط على زر إسناد مقطع

في ، عندها تظهر عبارة

منطقة التفاعل السريع ، فنقوم باختيار جميع قطع الجائز عبر النقر عليها باستخدام الفأرة

بشكل متتال مع استمرار الضغط على مفتاح على لوحة المفاتيح ومن ثم نضغط على زر

فتظهر لنا نافذة إسناد المقاطع.

في ، يجب أن يكون لعنصر الجائز اتجاه في الفضاء. الاتجاه الافتراضي هو ذلك المبين

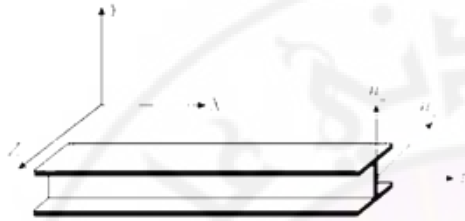
في الشكل ١٠-٦٣، حيث يكون محور في الاتجاه المعاكس للمحور الكلي ، للجائز

المستوي يجب أن يكون اتجاه بشكل دائم مساو إلى ، وهذا يعني،

الناظم على المستوي الذي تتم فيه الحركة. لذلك، فإن الجائز المستوي يمكن أن ينحني فقط

حول محور مقطع الجائز الأول.





الشكل ١٠-٦٣: اتجاهات الجانز.



الشكل ١٠-٦٤: نافذة تحرير المقطع.

١١- لتعديل اتجاه العناصر نضغط على الزر  ، عندها تظهر عبارة "Select the regions to be assigned a beam section orientation"، فنقوم باختيار جميع قطع الجانز عبر النقر عليها باستخدام الفأرة بشكل متتال مع استمرار الضغط على مفتاح Shift على لوحة المفاتيح ومن ثم نضغط على زر Done فتظهر لنا في منطقة التفاعل السريع رسالة لإدخال اتجاه n_1 ، وبجانبيها حقل مخصص لإدخال الاتجاه وهو يحوي القيمة الافتراضية $(0.0, 0.0, -1.0)$ وعند الضغط على زر Entre على لوحة المفاتيح تظهر لنا أسهم التوجيه وتظهر في منطقة التفاعل السريع رسالة لقبول القيمة المدخلة عبر الضغط على زر OK، كما هو مبين بالشكل ١٠-٦٥، وبذلك يتم إتمام عملية توجيه العنصر الجانز OK.

١٢- لإعطاء الجانز شكله بحسب المقطع I الذي تم تعريفه نقوم باختيار القائمة View ضمن شريط القوائم menu bar ثم Part Display Options، فتظهر لنا واجهة خيارات عرض الجزء ثم يتم التوجه إلى الورقة General حيث ضمن النطاق Idealizations يتم اختيار Render beam profiles ثم In the Part Display Options نضغط على الزر Apply، كما هو مبين بالشكل ١٠-٦٦ (تذكر استخدام أدوات العرض للوصول للإظهار المناسب).

الشكل ١٠-٦٤: ضبط اتجاهات عناصر الجانز.

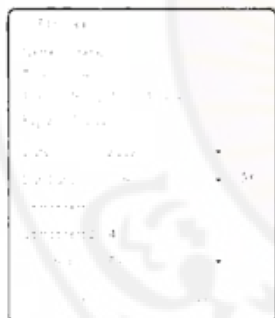
الشكل ١٠-٦٥: تمثيل اتجاهات عناصر الجانز.

الشكل ١٠-٦٦: إظهار تمثيل الجانز وفقاً لشكل المقطع I.

- ١٣- ننتقل الآن إلى موديول تجميع ، نقوم باختيار الجزء الموجود ثم نضغط .
- ١٤- ننتقل الآن إلى موديول خطوة ، وعليه نقوم بإضافة خطوة عبر الضغط على زر إضافة خطوة ، وهنا يتم إعطاء اسم اختياري للخطوة، كما يتم اختيار طبيعة التحليل (في حالتنا *) بما يتناسب مع المسألة المدروسة، ثم نضغط على زر المتابعة ، فتظهر نافذة تحرير الخطوة ، حيث يمكن وضع توصيف اختياري للخطوة ضمن الحقل ، ونترك باقي التفاصيل كما هي في حالتنا هذه ونضغط على زر .
- ١٥- ننتقل الآن إلى موديول حمل ، حيث سيتم هنا إضافة الأحمال والشروط الحدية كمايلي:
- نبدأ بتعريف الشروط الحدية الموافقة للنهاية اليسرى والمثبتة تثبيتاً حاسماً، حيث يجب تقييد الحركات الخطية والدورانية في جميع الاتجاهات، ولتوصيف ذلك نضغط على زر تعريف شروط حدية ، عندها يظهر لنا مربع الحوار يتم فيه تسمية الشرط الحدي باسم اختياري، ثم التأكد من اختيار الخطوة ضمن الحقل خطوة ، وضمن الحقل نختار تناظر/تناظر عكسي/تثبيت ، ونعود عند الضغط على الزر إلى واجهة الرسم كي نقوم باختيار العقدة اليسرى التي سيتم تطبيق الشرط الحدي عليها، نستدل على ذلك بظهور عبارة في منطقة التفاعل السريع ، وعند الضغط على الزر ، يظهر لنا مربع الحوار الذي يسمح لنا باختيار حالة التثبيت المطلوبة، فنقوم باختيار ، ونضغط على زر ، فنلاحظ إضافة رمز التثبيت على العقدة.
- نعيد الكرة من أجل مساند العقد الثلاث الأخرى، حيث تقيّد هذه المساند الحركة الخطية بالاتجاه الشاقولي وتسمح بما في الاتجاه الأفقي بالإضافة للدورانات، مع الانتباه إلى وضع تسمية أخرى للشرط الحدي، مع اختيار العقد الثلاث الموافقة لمواقع المساند، ثم نختار الشرط .
- ثم ننتقل إلى إضافة الأحمال (القوى)، بالضغط على زر إنشاء حمل ، عندها يظهر لنا مربع الحوار الذي يسمح بتسمية الحمل، ثم التأكد من وضع خطوة التحميل التي تم إنشاؤها في حقل الخطوة ، وفي الحقل نختار وفي الحقل نختار وذلك للقوة المركزة، ونعود عند الضغط على الزر إلى واجهة الرسم كي نقوم باختيار العقدة التي سيتم تطبيق القوى عليها، وذلك بظهور عبارة

points for The load في منطقة التفاعل السريع Prompt area، فنقوم باختيار مكان الحمل المركز على بعد مترين عن النهاية المثبتة (النقطة محدثة فعلاً بفضل إنشاء الجأزر على ٤ أجزاء بما يتناسب ونقاط الإستناد والتحميل كما ذكر سابقاً) ونضغط على الزر Done، فيظهر لنا مربع الحوار Edit Load الذي يسمح لنا بتحديد القوى المطبقة، فنقوم بوضع القيمة $CF2 = -20$ حيث المحور ٢ يقابل المحور الشاقولي والقيمة السالبة كون اتجاه القوة يعاكس الاتجاه الموجب لهذا المحور، ونضغط على زر OK، فنلاحظ إضافة سهم يدل على منحنى القوة واتجاهها.

d. نعيد الكرة من أجل الحمل الموزع مع مراعاة أن يتم اختيار Line load في الحقل Type، ومن ثم عند العودة إلى واجهة الرسم كي نقوم باختيار الجسم الذي سيتم تطبيق القوى عليه، وذلك بظهور عبارة Select the bodies for the load في منطقة التفاعل السريع Prompt area، فنقوم باختيار الجزء الأوسط من الجأزر ونضغط على الزر Done، فيظهر لنا مربع الحوار Edit Load الذي يسمح لنا بتحديد القوى المطبقة، كما في الشكل ١٠-٦٧، فنقوم بوضع القيمة $Component2 = -4$ حيث المحور ٢ يقابل المحور الشاقولي والقيمة السالبة كون اتجاه القوة يعاكس الاتجاه الموجب لهذا المحور، ونضغط على زر OK، فنلاحظ إضافة مجموعة أسهم تدل على منحنى واتجاه القوة الموزعة.



الشكل ١٠-٦٧: توصيف القوة الموزعة.

e. نعيد الكرة من أجل الحمل الموزع الآخر مع مراعاة اختيار الجزء الأيمن من الجأزر و وضع القيمة $Component2 = -10$ حيث المحور ٢ يقابل المحور الشاقولي والقيمة السالبة كون اتجاه القوة يعاكس الاتجاه الموجب لهذا المحور، ونضغط على زر OK، فنلاحظ إضافة مجموعة أسهم تدل على منحنى القوة الموزعة واتجاهها.

١٦- نتقل الآن إلى موديول شبكة Mesh، حيث سيتم هنا بناء شبكة العناصر المنتهية للحملة وتوصيفها، يجب الانتباه هنا إلى ضرورة اختيار part في حقل Object على شريط المسار Context bar، ثم نبدأ بعملية توصيف الشبكة وبنائها كمايلي:

a. نبدأ بتعريف طبيعة العناصر المنتهية التي ستستخدم في نموذج الحملة المدروسة، وذلك بالضغط على زر تعيين نوع العنصر Assign Element Type، عندها تظهر في منطقة التفاعل السريع Prompt area عبارة Select the regions to be assign element type، لاختيار المنطقة التي نود تعيين نوع العناصر المنتهية المكونة لها، ونقوم باختيار كامل الجائز بواسطة الفأرة ثم نضغط على الزر Done، فيظهر لنا مربع الحوار نوع العنصر Element Type، حيث نضع في مكتبة العناصر Element Library نضغط على Standard، وفي العائلة Family نختار Beam، وفي الدرجة الهندسية Geometric order نختار الحالة خطي Linear، فيظهر في الأسفل تقريباً عبارة تدل على ترميز العنصر المنتهي الموافق للتوصيف السابق وهي B21: A 2:node linear Beam in Plane، ثم نضغط على OK لإتمام التوصيف.

b. لتقسيم الجائز إلى عناصر منتهية، نضغط على الزر تقسيم الحواف Seed Edge، عندها تظهر في منطقة التفاعل السريع Prompt area عبارة Select the regions to be assigned local seed، لاختيار المنطقة التي نود تقسيمها إلى عناصر، ونقوم باختيار جميع الجائز بواسطة الفأرة ثم نضغط على الزر Done، فيظهر لنا مربع حوار التقسيم Local Seed حيث نختار لوحة بسيط Basic، ونضع في الطريقة Method باستخدام العدد By size، ونضع الرقم ١ بخوار قياس العناصر التقريبي Approximate Element Size ضمن القائمة Sizing Control، (يشير الرقم ١ هنا إلى أن التقسيم سيكون عنصراً لكل متر عنصر في كل ضلع أي جائزاً في حالتنا هذه)، ثم نضغط على OK لإتمام التقسيم.

c. نقوم بعد ذلك بإنشاء الشبكة النهائية، ويتم ذلك بالضغط على الزر شبكة الجزء Mesh Part، عندها تظهر في منطقة التفاعل السريع Prompt area عبارة Ok to mesh the part، نضغط عندها على الزر Yes، فيتم بذلك تحويل الشكل الهندسي للهيكل الشبكي إلى عناصر منتهية، ويدل على ذلك تغير لون الهيكل.

d. يمكن إظهار أرقام العناصر والعقد عبر الذهاب إلى القائمة View ضمن شريط القوائم menu bar ثم Part Display Options، فتظهر لنا واجهة خيارات عرض الجزء ثم يتم التوجه إلى الورقة Mesh

حيث يتم تفعيل اختيار كل من Show node labels و Show elemnt labels ثم نضغط على الزر Apply، فتظهر أرقام العقد والعناصر على الجائز مباشرة كما هو مبين بالشكل ٦٨-١٠

الشكل ٦٨-١٠: إظهار أرقام العناصر والعقد.

١٧- بالوصول إلى هذه المرحلة نستطيع القول بأن عملية النمذجة قد تمت على الوجه الأكمل، ننتقل الآن إلى إنشاء ملف الخرج والقيام بالحساب أو المحاكاة، ويتم ذلك بالانتقال إلى موديول عمل Job، ويتم ذلك بالضغط على الزر إنشاء عمل Create Job، عندها يظهر مربع الحوار Create Job، حيث يتم وضع اسم اختياري له والذي سيكون اسماً لكل من ملف الدخل وملفات الخرج، وبالضغط على زر متابعة Continue، يظهر مربع الحوار تحرير العمل Edit Job حيث يمكن وضع توصيف للعمل في الحقل Description، ثم نضغط على OK لإتمام إنشاء العمل دون أن نقوم بأية تعديلات على الحقول الأخرى.

١٨- للبدء بعملية المحاكاة أو الحساب نضغط على الزر إدارة الأعمال Job Manager، عندها يظهر مربع الحوار Job Manager، ومن ثم نضغط على زر إرسال Submit للشروع بعملية الحساب. لاحظ تغير مضمون حقل الحالة Status، بدءاً من None قبل الإرسال، إلى Submitted لدى الإرسال وريثما يتم التحقق من بناء النموذج، ثم Running في أثناء عملية الحساب، وانتهاء ب Completed عند إتمام الحساب.

١٩- يتم استعراض النتائج وتحليلها بالانتقال إلى موديول إظهار Visualization ومن ثم فتح ملف النتائج عبر القائمة الرئيسية File ثم Open ثم نختار الملف ذا التوسع .odb، أو بالضغط مباشرة على زر .Result

- ٢٠- بالضغط على الزر Plot Deformed Shape يتم إظهار الشكل المشوه للجائز وهنا تأخذ الجوائز ألواناً تتدرج من الأحمر لتلك التي تتعرض لقيم مرتفعة من الإجهاد أو إجهادات الشد وحتى اللون الأزرق لتلك التي تتعرض لقيم منخفضة من الإجهاد أو إجهادات الضغط كما في الشكل ١٠-٦٩.
- ٢١- يمكن تغيير المتحول الذي يتم إظهاره بالذهاب إلى القائمة الرئيسية Result ثم Field Output فيظهر مربع الحوار الذي يسمح باختيار المتحول المراد إظهاره.

الشكل ١٠-٦٩: إظهار النتائج.

الفصل الحادي العاشر

مدخل إلى النمذجة باستخدام برنامج

ANSYS

جامعة دمشق
Damascus University

ANSYS

١١-١ مقدمة

ANSYS هو مجموعة من برامج المحاكاة الهندسية القوية، والتي تعتمد طريقة العناصر المنتهية، ويمكن له حل المشاكل التي تتراوح بين التحليل الخطي البسيط نسبياً إلى المحاكاة غير الخطية الأكثر تحدياً، يحتوي ANSYS على مكتبة واسعة من العناصر التي يمكن بواسطتها نمذجة مختلف الأشكال الهندسية، كما يحتوي على مكتبة كبيرة من المواد والتي تحاكي سلوك معظم المواد الهندسية العيانية بما في ذلك المعادن، البوليمرات والمواد المركبة، وغيرها. كما صممت هذه المجموعة لتكون أداة محاكاة للأغراض العامة، تتجاوز مسائل الهياكل (إجهاد / انفعال)، حيث يمكن محاكاة مشاكل في مجالات متنوعة مثل انتقال الحرارة، العناصر الكهربائية المغناطيسية، التحليل الكهروحراري، الضجيج، ميكانيك التربة، التحليل الكهروضغطي، وتحليل الكهرومغناطيسي، وديناميك السوائل. كما يقدم ANSYS مجموعة واسعة من القدرات لمحاكاة التطبيقات الخطية وغير الخطية.

عند التنصيب الكامل للبرنامج فإن المجموعة والتي تظهر لك بالضغط على زر ابدأ أو Start ومن ثم جميع البرامج All Programs كما هو موضح بالشكل ١١-١، تتكون من الخزم التالية:

```

1000
1001
1002
1003
1004
1005
1006
1007
1008
1009
1010
1011
1012
1013
1014
1015
1016
1017
1018
1019
1020
1021
1022
1023
1024
1025
1026
1027
1028
1029
1030
1031
1032
1033
1034
1035
1036
1037
1038
1039
1040
1041
1042
1043
1044
1045
1046
1047
1048
1049
1050
1051
1052
1053
1054
1055
1056
1057
1058
1059
1060
1061
1062
1063
1064
1065
1066
1067
1068
1069
1070
1071
1072
1073
1074
1075
1076
1077
1078
1079
1080
1081
1082
1083
1084
1085
1086
1087
1088
1089
1090
1091
1092
1093
1094
1095
1096
1097
1098
1099
1100
1101
1102
1103
1104
1105
1106
1107
1108
1109
1110
1111
1112
1113
1114
1115
1116
1117
1118
1119
1120
1121
1122
1123
1124
1125
1126
1127
1128
1129
1130
1131
1132
1133
1134
1135
1136
1137
1138
1139
1140
1141
1142
1143
1144
1145
1146
1147
1148
1149
1150
1151
1152
1153
1154
1155
1156
1157
1158
1159
1160
1161
1162
1163
1164
1165
1166
1167
1168
1169
1170
1171
1172
1173
1174
1175
1176
1177
1178
1179
1180
1181
1182
1183
1184
1185
1186
1187
1188
1189
1190
1191
1192
1193
1194
1195
1196
1197
1198
1199
1200
1201
1202
1203
1204
1205
1206
1207
1208
1209
1210
1211
1212
1213
1214
1215
1216
1217
1218
1219
1220
1221
1222
1223
1224
1225
1226
1227
1228
1229
1230
1231
1232
1233
1234
1235
1236
1237
1238
1239
1240
1241
1242
1243
1244
1245
1246
1247
1248
1249
1250
1251
1252
1253
1254
1255
1256
1257
1258
1259
1260
1261
1262
1263
1264
1265
1266
1267
1268
1269
1270
1271
1272
1273
1274
1275
1276
1277
1278
1279
1280
1281
1282
1283
1284
1285
1286
1287
1288
1289
1290
1291
1292
1293
1294
1295
1296
1297
1298
1299
1300
1301
1302
1303
1304
1305
1306
1307
1308
1309
1310
1311
1312
1313
1314
1315
1316
1317
1318
1319
1320
1321
1322
1323
1324
1325
1326
1327
1328
1329
1330
1331
1332
1333
1334
1335
1336
1337
1338
1339
1340
1341
1342
1343
1344
1345
1346
1347
1348
1349
1350
1351
1352
1353
1354
1355
1356
1357
1358
1359
1360
1361
1362
1363
1364
1365
1366
1367
1368
1369
1370
1371
1372
1373
1374
1375
1376
1377
1378
1379
1380
1381
1382
1383
1384
1385
1386
1387
1388
1389
1390
1391
1392
1393
1394
1395
1396
1397
1398
1399
1400
1401
1402
1403
1404
1405
1406
1407
1408
1409
1410
1411
1412
1413
1414
1415
1416
1417
1418
1419
1420
1421
1422
1423
1424
1425
1426
1427
1428
1429
1430
1431
1432
1433
1434
1435
1436
1437
1438
1439
1440
1441
1442
1443
1444
1445
1446
1447
1448
1449
1450
1451
1452
1453
1454
1455
1456
1457
1458
1459
1460
1461
1462
1463
1464
1465
1466
1467
1468
1469
1470
1471
1472
1473
1474
1475
1476
1477
1478
1479
1480
1481
1482
1483
1484
1485
1486
1487
1488
1489
1490
1491
1492
1493
1494
1495
1496
1497
1498
1499
1500
1501
1502
1503
1504
1505
1506
1507
1508
1509
1510
1511
1512
1513
1514
1515
1516
1517
1518
1519
1520
1521
1522
1523
1524
1525
1526
1527
1528
1529
1530
1531
1532
1533
1534
1535
1536
1537
1538
1539
1540
1541
1542
1543
1544
1545
1546
1547
1548
1549
1550
1551
1552
1553
1554
1555
1556
1557
1558
1559
1560
1561
1562
1563
1564
1565
1566
1567
1568
1569
1570
1571
1572
1573
1574
1575
1576
1577
1578
1579
1580
1581
1582
1583
1584
1585
1586
1587
1588
1589
1590
1591
1592
1593
1594
1595
1596
1597
1598
1599
1600
1601
1602
1603
1604
1605
1606
1607
1608
1609
1610
1611
1612
1613
1614
1615
1616
1617
1618
1619
1620
1621
1622
1623
1624
1625
1626
1627
1628
1629
1630
1631
1632
1633
1634
1635
1636
1637
1638
1639
1640
1641
1642
1643
1644
1645
1646
1647
1648
1649
1650
1651
1652
1653
1654
1655
1656
1657
1658
1659
1660
1661
1662
1663
1664
1665
1666
1667
1668
1669
1670
1671
1672
1673
1674
1675
1676
1677
1678
1679
1680
1681
1682
1683
1684
1685
1686
1687
1688
1689
1690
1691
1692
1693
1694
1695
1696
1697
1698
1699
1700
1701
1702
1703
1704
1705
1706
1707
1708
1709
1710
1711
1712
1713
1714
1715
1716
1717
1718
1719
1720
1721
1722
1723
1724
1725
1726
1727
1728
1729
1730
1731
1732
1733
1734
1735
1736
1737
1738
1739
1740
1741
1742
1743
1744
1745
1746
1747
1748
1749
1750
1751
1752
1753
1754
1755
1756
1757
1758
1759
1760
1761
1762
1763
1764
1765
1766
1767
1768
1769
1770
1771
1772
1773
1774
1775
1776
1777
1778
1779
1780
1781
1782
1783
1784
1785
1786
1787
1788
1789
1790
1791
1792
1793
1794
1795
1796
1797
1798
1799
1800
1801
1802
1803
1804
1805
1806
1807
1808
1809
1810
1811
1812
1813
1814
1815
1816
1817
181
```

الشكل ١١-١ مجموعة ANSYS في قائمة ابدأ أو Start

ومن بين الحزمة السابقة ما يهمنا هو أحد برنامجي ANSYS وهما:

- 1- Mechanical APDL (Ansys Parametric Design Language)
- 2- Workbench

لكل من البرنامجين واجهة مختلفة عن الآخر وسنقتصر على البرنامج الأول بشيء من التفصيل.

يبين الشكل ١١-٢ واجهة برنامج Ansys Workbench وتظهر ضمن نافذته عناوين بعض التطبيقات المختلفة.



الشكل ١١-٢ الواجهة الرئيسية لبرنامج Ansys Workbench

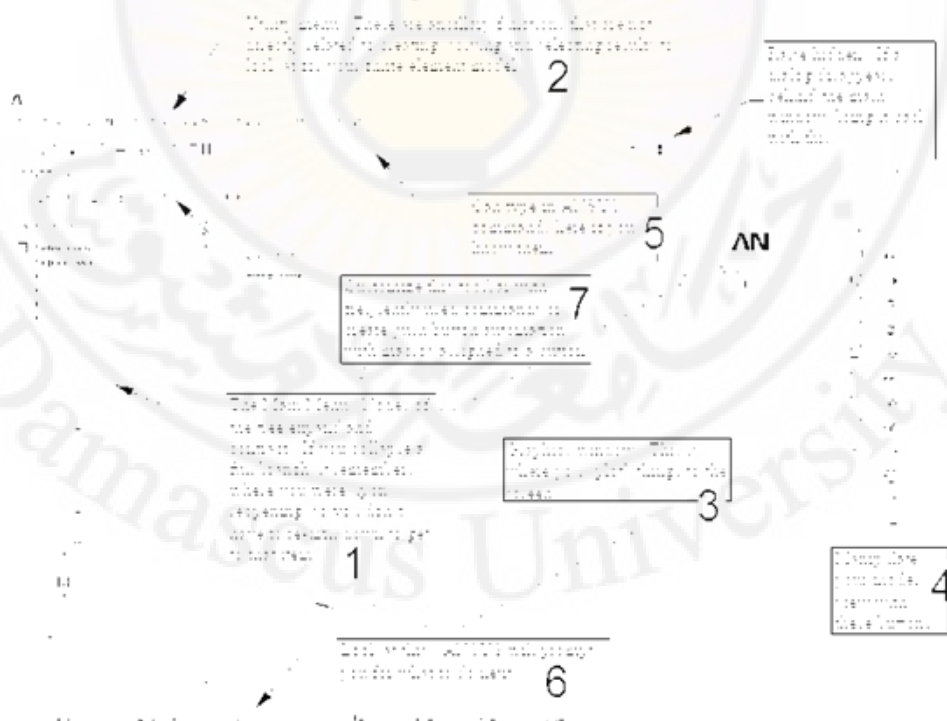
كما يبين الشكل ١١-٣ واجهة برنامج Mechanical APDL، و يبين الشكل ١١-٤ القوائم التالية:

- ١- القائمة الأساسية Main Menu
- ٢- القائمة المساندة أو الرديفة Utility Menu
- ٣- نافذة العرض Graphics Windows
- ٤- منطقة أزرار تحريك النموذج المعالج Manipulate the model
- ٥- منطقة الأوامر الكتابية Command Line
- ٦- منطقة التوضيحات والإرشادات الواجب تنفيذها
- ٧- منطقة الأوامر الأكثر استخداماً

بالطبع فإن كل من القوائم السابقة تحتوي على كثير من البنود التفصيلية.



الشكل ١١-٣ الواجهة الرئيسية لبرنامج MECHANICAL APDL



الشكل ١١-٤ الواجهة الرئيسية لبرنامج MECHANICAL APDL

- Electromagnetic -Low Frequency
- Electromagnetics-High Frequency
- Field and Coupled-Field Analysis



الشكل ١١-٦ مجموعة الوثائق أو المكتبة الملحقة ببرنامج ANSYS.

١١-٢ الواجهات الأساسية في القائمة الرئيسية Main Menu

١- عندما نطلب تعليمات Preferences من القائمة الأساسية Main Menu تظهر لنا النافذة المبينة

بالشكل ١١-٧ التي تحتوي أنواع المعالجة الممكنة في البرنامج وهي:

- سكونية Structural
- حرارية Thermal
- جريانات Ansys Fluid و Ansys Edge
- مغناطيسية Magnetic
- ترددات عالية High Frequency
- كهربائية Electric



الشكل ١١-٧ الواجهة المتعلقة بتعليمية Preferences

٢- مرحلة ما قبل المعالجة وتشمل بناء الشكل الهندسي وتعريف الأحمال والمساند والمادة المستخدمة والعنصر المنتهي المرغوب..... الخ. يبين الشكل ١١-٨ الواجهة المتعلقة بقائمة Preprocessor



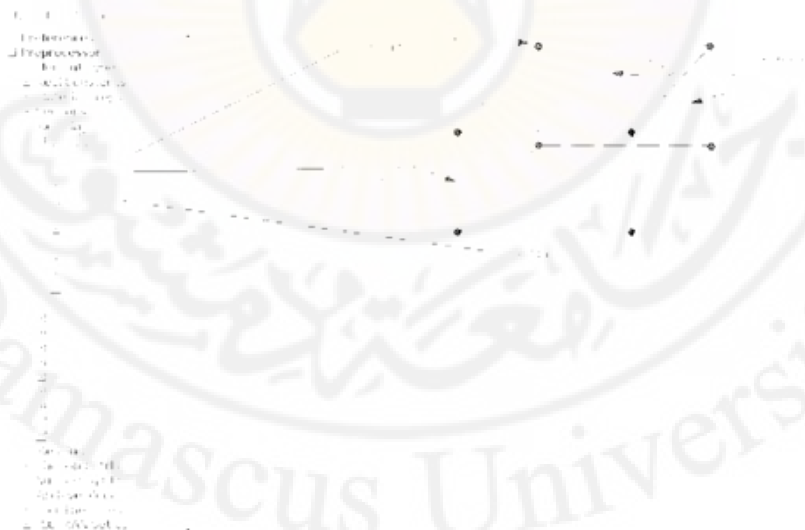
الشكل ١١-٨ الواجهة المتعلقة بتعليمية Preprocessor

٣- من أهم مراحل العمل مرحلة بناء النموذج الهندسي عبر تعليمية Modeling وبها يتم إنشاء أي مكون من عناصر النموذج وتعديله ونسخه وحذفه. يبين الشكل ١١-٩ القائمة الأساسية Modeling وسيتم التطرق لبعض عناصر هذه القائمة لاحقاً



الشكل ٩-١١ الواجهة المتعلقة بتعليمية Modeling

٤- يتم بقائمة Create إنشاء النموذج ويبدو من الشكل ١٠-١١ أنه يحوي إنشاء العناصر الأساسية من نقاط Keypoint ومستقيمات Lines وسطوح Areas وحجوم Volumes وعقد Nodes وعناصر Elements كما يبدو الشكل



الشكل ١٠-١١ الواجهة المتعلقة بتعليمية Create

٥- لتحديد نوع التحليل المطلوب سواءً تحليلاً سكونياً أم حركياً أم حرارياً فيتم ذلك من خلال تعليمية Solution . يبين الشكل ١١-١١ قائمة Solution وبها يتم تحديد الأحمال المطبقة وأماكنها

وأنواعها (حمل مركز - حمل موزع وفق خط محدد - حمل ضغط على سطح...) وكذلك الأمر يتم تحديد القيود (أماكن التثبيت مثل المساند الثنائية والأحادية....)



الشكل ١١-١١ الواجهة المتعلقة بتعليمة Solution

٦- تحديد الأحمال المطبقة على الانتقالات (وهنا القائمة تطبق على المساند) فيتم ذلك من خلال

تعليمة Define Load>Apply>Displacement.

يبين الشكل ١١-١٢ قائمتها حيث يتم تحديد القيود (أماكن التثبيت مثل المساند الثنائية والأحادية....) فمثلا هنا يطبق حمل "قيد" على الانتقالات على نقاط Keypoints وهنا يتم تحديد الإحداثية المقيدة سواء باتجاه x أم y أم الدورانات ROT أم الكل.

٧- تحديد الأحمال المطبقة على القوى (وهنا القائمة تطبق على القوى) فيتم ذلك من خلال تعليمة

.Define Load>Apply>Force/Moment

يبين الشكل ١١-١٣ قائمتها حيث يتم تحديد القوى (نوع الحمل المطبق ومكانه وعلى أي عنصر هندسي مطبق) فمثلا هنا يطبق حمل من نوع قوة وفق المحور x على نقاط Keypoints وهنا يتم تحديد قيمة القوة واتجاهها.

٨- تحديد الأحمال المطبقة على السطوح فيتم ذلك من خلال تعليمة Define Load>Apply>

.Pressure

يبين الشكل ١١-١٤ قائمتها حيث يتم تحديد الضغط وعلى أي عنصر هندسي مطبق (مستقيمات - مساحات - عقد - عناصر - عوارض) مطبق وبأي قيمة



الشكل ١١-١٢ الواجهة المتعلقة بتعليمة Define Load>Apply>Displacement



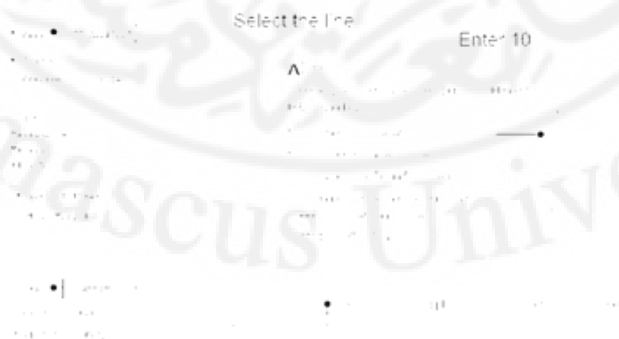
الشكل ١١-١٣ الواجهة المتعلقة بتعليمة Define Load>Apply>force/moment



الشكل ١١-١٤ الواجهة المتعلقة Define Load>Apply>Pressure

ففي الشكل ١١-١٥ يطبق حمل ضغط على عارضة بقيمة 10 Pa (هنا مطبق على خط أو مستقيم) يتم تحديد الخط بواسطة الفأرة مثلاً

Solution > Define Loads > Apply > Structural > Pressure > On Beams



Press OK to finish

الشكل ١١-١٥ الواجهة المتعلقة Define Load>Apply>Pressure>On beam

١١-٣ الواجهات الأساسية في قائمة Utility Menu>file

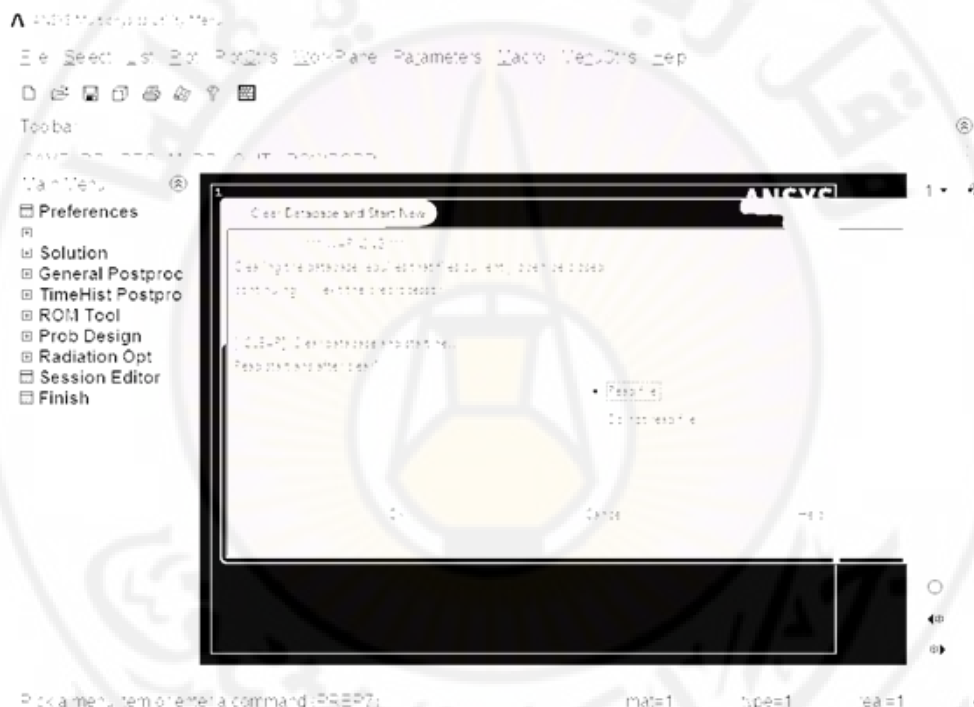
سنستعرض بعض الواجهات الأكثر شيوعاً في القائمة المذكورة:

١- في البداية لابد من حذف كل ماسبق من معلومات قديمة تم العمل معها من أجل البدء بتمرين

جديد. يبين الشكل ١١-١٦ الواجهة التي تظهر وذلك بدءاً من القائمة المساندة أو الرديفة Utility

Menu وذلك عبر التعليمية :

File>Clear &Start New>Read file



الشكل ١١-١٦ الواجهة المتعلقة بتعليمية Read file

٢- إعطاء اسم للملف المراد العمل عليه حتى انتهاء التحليل ويعود السبب في ذلك أن برنامج Ansys

يتعامل مع اسم افتراضي File وفي حال لم يتم المستخدم باختيار اسم محدد فسوف يتم تسجيل كل خطوات المعالجة على اسم الملف الافتراضي وهو ما يسبب محي كل المعلومات التي كانت مسجلة على الاسم القديم File. لذلك نطلب تحديد اسم الملف من القائمة المساندة أو الرديفة

Utility Menu كما يبين الشكل ١١-١٧ وفق التعليمية:

File>Change Jobname

٣- تعديل مكان تسجيل الملفات و النتائج عن المكان الافتراضي كما يبين الشكل ١١-١٨ وفق التعليمات:

318

٤- تعديل عنوان التطبيق والذي يظهر باستمرار على واجهات البرنامج كما يبين الشكل ١١-١٩ وفق التعليمات:

File>change Title



الشكل ١١-١٩ الواجهة المتعلقة بتعليمات Chane Title

٥- من الممكن أن يكون الملف قد نفذ سابقاً (وفي هذه الحالة يكون الملف بلا حقة db.) ونريد تنفيذه من جديد وفي هذه الحالة نطلب الملف من التعليمات:

File>Resume Jobname.db



الشكل ١١-٢٠ الواجهة المتعلقة بتعليمات Resume Jobname.db

٨- تسجيل الملف البياني الذي تم تنفيذه باستخدام الواجهة البيانية عبر ملف نصي كما يبدو الشكل ٢٣-١١ وفق التعليمات:

File>write DB log file



الشكل ٢٣-١١ الواجهة المتعلقة بتعليمات write DB log file

٩- قراءة ملف نصي وفق أحد الأنماط المبينة بالشكل ٢٤-١١ وفق التعليمات:

File>Read Input From



الشكل ٢٤-١١ الواجهة المتعلقة بتعليمات Read Input From

١٠- لاستيراد نموذج مرسوم وفق أحد برامج CAD أو مصمم وفق برنامج عناصر منتهية آخر إلى

برنامج Ansys فيتم ذلك باستخدام تعليمة Import وذلك وفق التعليمة: File>import
وهنا نحدد بأي لاحقة سيتم العمل حيث يتوافر لدى برنامج Ansys مجموعة من اللواحق كما
يبدو الشكل ١١-٢٥

الشكل ١١-٢٥ الواجهة المتعلقة بتعليمة Import

١١- لتصدير نموذج مرسوم وفق برنامج Ansys إلى أي برنامج آخر فيتم ذلك باستخدام تعليمة

Export وذلك وفق التعليمة: File>Export
وهنا نحدد بأي لاحقة سيتم تصدير الملف حيث يتوافر لدى برنامج Ansys مجموعة من اللواحق
كما يبدو الشكل ١١-٢٦

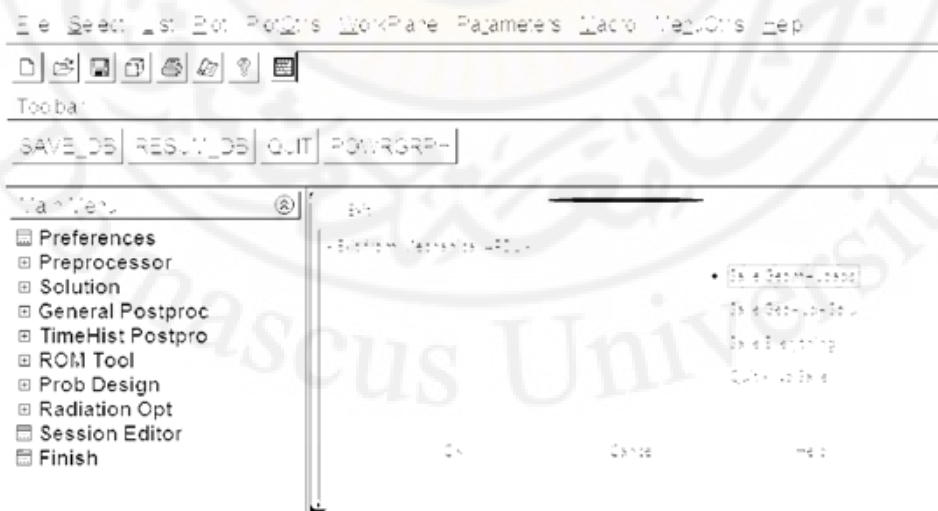
الشكل ١١-٢٦ الواجهة المتعلقة بتعليمة Export

١٢- لتوليد تقرير متكامل عن التطبيق الذي تم تنفيذه خطوة بخطوة من خلال البناء الهندسي ونوعية العناصر المستخدمة والمواد المستخدمة والحمولات المطبقة والإجهادات الناتجة... الخ فيتم ذلك وفق التعليمات: File>report Generator كما يبدو في الشكل ١١-٢٧



الشكل ١١-٢٧ الواجهة المتعلقة بتعليمات Report Generator

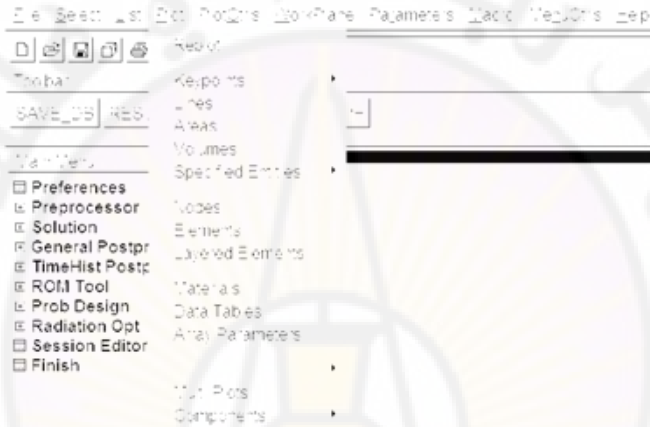
١٣- عند الانتهاء من التطبيق نلجأ لتعليمات الخروج من Ansys وفق التعليمات File>Exit وهنا يسأل البرنامج عن عدة خيارات منها الخروج وتسجيل كل شيء (وهو الأغلب) أو الخروج دون تسجيل أو حفظ الجانب الهندسي والحمولات فقط أو حفظ الجانب الهندسي والحمولات فقط مع النتائج. ويتضح ذلك من الشكل ١١-٢٨



الشكل ١١-٢٨ الواجهة المتعلقة بتعليمات Exit

١١-٤ الواجهات الأساسية في القائمة Utility Menu>List

تهدف قائمة List إلى قراءة مختلف أنواع البيانات مع تفصيلاتها فمثلاً يمكن معرفة أرقام العقد التي تشكل عنصر ما (له رقم محدد) وكذلك الأمر قراءة جميع الخصائص المتعلقة بهذا العنصر من حيث نوعه ونوع مادته....الخ. يبين الشكل ١١-٢٩ الواجهة الخاصة بالتعليمة Utility Menu>List كذلك الأمر عندما نطلب List الخاصة بالأحمال فهي تعطي تفاصيل الحمل المطبق من حيث القيمة وعلى أي عنصر هندسي (نقطة - مستقيم - عقدة ...) تم تطبيقه وفي أي اتجاه....الخ.



الشكل ١١-٢٩ الواجهة المتعلقة بتعليمة Utility Menu>List

١١-٥ الواجهات الأساسية في القائمة Utility Menu>Plot

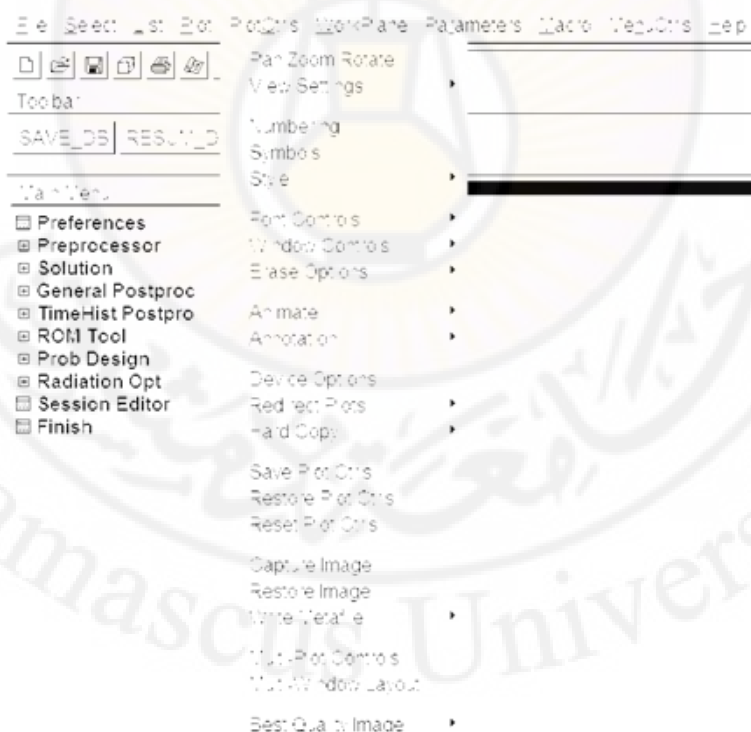
تهدف قائمة plot إلى إظهار (رسم) مختلف أنواع البيانات مع تفصيلاتها فمثلاً يمكن إظهار العقد وكذلك الأمر إظهار ورسم المستقيمات والأسطح والحجوم....الخ. يبين الشكل ١١-٣٠ الواجهة الخاصة بالتعليمة Utility Menu>Plot.

١١-٦ الواجهات الأساسية في القائمة Utility Menu>PlotCtrls

تهدف قائمة PlotCtrls إلى إظهار (رسم) تفاصيل مختلف أنواع البيانات فمثلاً يمكن إظهار أرقام العقد وكذلك الأمر إظهار ورسم المستقيمات مع أرقامها وكذلك ترقيم الأسطح والحجوم....الخ. كما يمكن إجراء تحريك النموذج قبل وبعد التحميل من خلال تعليمة Animate كما يمكننا أخذ صورة لواجهة محددة عبر تعليمة Capture Image وغيرها من التطبيقات. يبين الشكل ١١-٣١ الواجهة الخاصة بالتعليمة Utility Menu>PlotCtrls



الشكل ٣٠-١١ الواجهة المتعلقة بتعليمة Utility Menu>Plot

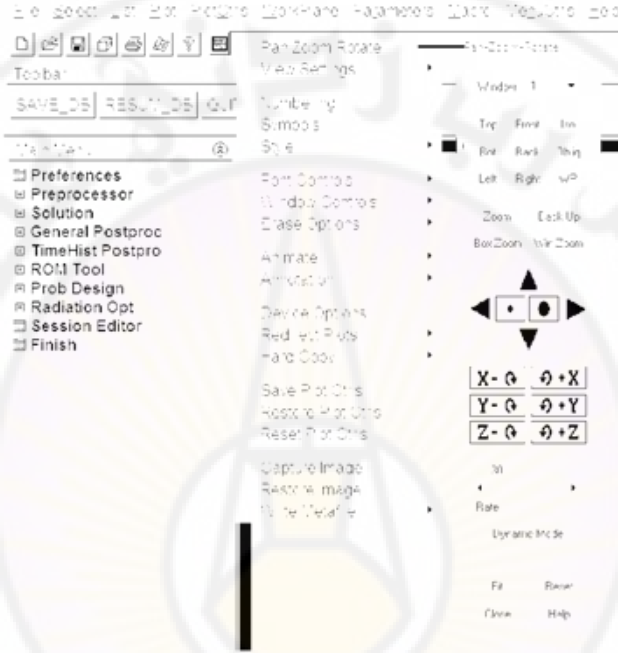


الشكل ٣١-١١ الواجهة المتعلقة بتعليمة Utility Menu>PlotCtrls

١١-٦-١ Utility Menu>PlotCtrls>Pan Zoom Rotate واجهة

تهدف قائمة Pan Zoom Rotate إلى إظهار (رسم) تفاصيل مختلف أنواع البيانات من خلال التكبير أو التصغير أو التدوير وفق أحد المحاور الثلاثة أو الدوران حول أحد المحاور الثلاثة. يبين الشكل ١١-٣٢ الواجهة

الخاصة بالتعليمة : Utility Menu>PlotCtrls>Pan Zoom Rotate



الشكل ١١-٣٢ الواجهة المتعلقة بتعليمة Utility Menu>PlotCtrls>Pan Zoom Rotate

١١-٦-٢ Utility Menu>PlotCtrls>Numbring واجهة

تهدف Numbring إلى ترقيم جميع أنواع البيانات من خلال ترقيم النقاط والعقد والمستقيمات والعناصر والمواد وغير ذلك ومن الممكن تفعيل الكل أو تفعيل ترقيم بعض العناصر وترك الباقي دون ترقيم . ومن الممكن استخدام الألوان مع الترقيم وفق خيار متاح على الواجهة. يبين الشكل ١١-٣٣ الواجهة الخاصة

بالتعليمة : Utility Menu>PlotCtrls>Numbring

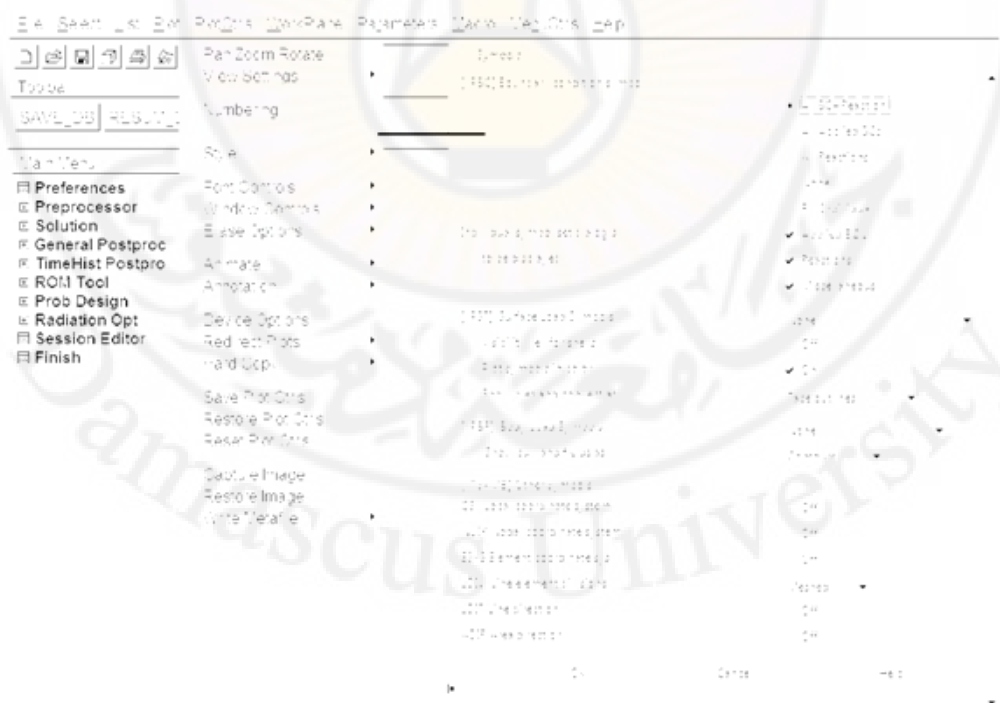
١١-٦-٣ Utility Menu>PlotCtrls>Symbols واجهة

تهدف Symbols إلى إظهار رموز كافة الاحمال المطبقة من قوى و ضغط وكذلك الأمر إظهار الشروط الحدية من مساند، كذلك الأمر إظهار ردود الفعل الأحادية والثنائية وغيرها. ومن الممكن تفعيل الكل أو تفعيل إظهار البعض وترك الباقي دون تفعيل . ومن الممكن استخدام الألوان مع الرموز وفق خيار متاح على

الواجهة. يبين الشكل ١١-٣٤ الواجهة الخاصة بالتعليمة Utility Menu>PlotCtrls>Symbols



الشكل ١١-٣٣ الواجهة المتعلقة بتعليمة Numbring > PlotCtrls > Utility Menu

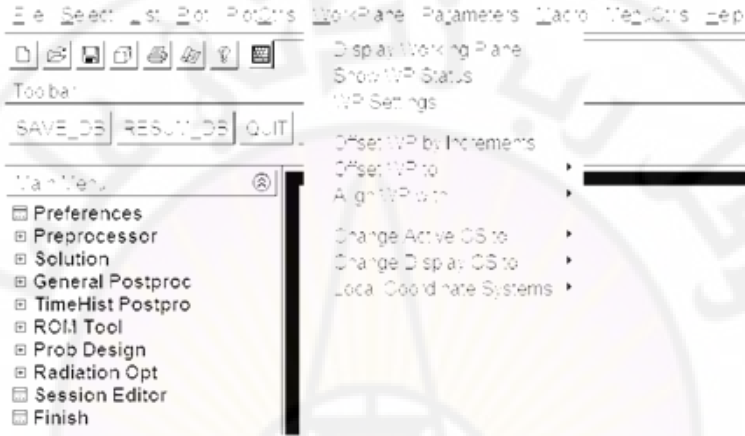


الشكل ١١-٣٤ الواجهة المتعلقة بتعليمة Symbols > PlotCtrls > Utility Menu

١١-٧ الواجهات الأساسية في القائمة الرئيسية Utility Menu>Workplane

تهدف قائمة Workplane إلى إظهار (رسم) تفاصيل مختلف أنواع حمل الإحداثيات من حيث تغييرها ونقلها وتعديلها والتنقل من جملة إحداثيات ديكرتية إلى جملة إحداثيات اسطوانية أو كروية. يبين الشكل ١١-٣٥

الواجهة الخاصة بالتعليمة Utility Menu> Workplane



الشكل ١١-٣٥ الواجهة المتعلقة بتعليمة Utility Menu> Workplane

١١-٨ العناصر المنتهية المتاحة في برنامج ANSYS

يتوافر في مكتبة البرنامج عدد كبير من العناصر المنتهية والتي تستخدم في النمذجة. فكل عنصر له خصائصه من حيث الشكل (منها عناصر وحيدة البعد وثنائية البعد وثلاثية) وكذلك من حيث التطبيق (فمنها ما يستخدم في المجالات السكونية ومنها في المجال الديناميكي أو الحراري أو في مجال دراسات الجريانات وديناميك الغازات والضجيج والمغناطيسية وغير ذلك) مجال العمل من المجال الخطي من سلوك المادة إلى المجال اللاخطي. ولكل عنصر معطيات دخل وكذلك الأمر مخرجات خاصة به من حيث الإجهادات والانتقالات وغير ذلك. تجدر الإشارة أن مع كل إصدار جديد يتم إقحام عناصر منتهية جديدة تكون ثمرة عمل فرق بحثية لعدة سنوات. يبين الشكل ١١-٣٦ كيفية التعرف على مكتبة العناصر المنتهية المستخدمة في برنامج ANSYS.

١١-٩ الحزم البرمجية الأساسية والاختيارية ضمن ANSYS

يبين الشكل ١١-٣٧ الحزم البرمجية ضمن برنامج ANSYS وكما يبدو ألها تعالج موضوعات متنوعة على صعيد العمل الهندسي لكن سنسلط الضوء فقط على الجانب الميكانيكي منها.

[illegible]: *Ansys/CFD* •: *Ansys/CFX* •

يتم تعريف درجات الحرية dof الميكانيكية كما هو معتاد في ميكانيك الأجسام الصلبة أو الأوساط المستمرة سواء أكانت انتقالات أو دورانات، حيث نلاحظ من الشكل ١١-٣٩، أن الانتقالات تأخذ الرموز U_x ، U_y ، U_z وذلك بحسب المحاور x ، y ، z على الترتيب والدورانات تأخذ الرموز ROT_x ، ROT_y ، ROT_z وذلك حول المحاور x ، y ، z على الترتيب.

١١-١٢ بدء العمل على ANSYS

سيتم في الفقرات التالية عرض أسلوب العمل على ANSYS للمستخدمين الجدد مع التأكيد أن هذا العرض يفترض بأن المستخدم قد ألف مسبقاً العمل على برامج التصميم بمساعدة الحاسب. في ANSYS كما في غيره من برامج النمذجة بطريقة العناصر المنتهية يبنى أي تحليل أو دراسة عبر ثلاث مراحل: ماقبل المعالجة، والمحاكاة أو الحل، وأخيراً التحليل أو مابعد المعالجة، ويتم في المرحل الأولى بناء النموذج وإسناد الخواص والشروط والأحمال. أما المرحلة الثانية فيقوم بها بشكل كامل الحاسب بعد إعطائه أمر التنفيذ وتستغرق هذه المرحلة زمناً يمكن أن يكون صغيراً أو كبيراً بحسب حجم المسألة المدروسة وطبيعة شبكة العناصر المنتهية فيها كما بينا سابقاً، ينتج في نهاية هذه المرحلة مجموعة من ملفات الخرج output files والتي تحتوي على نتائج التحليل وهي ذات اللواحق .res، ومن ثم يتم في المرحلة الثالثة والأخيرة معالجة النتائج.

وعموماً يتم تمثيل مختلف المسائل ضمن ANSYS عبر حزمة من الخطوات، أهمها: بناء الشكل الهندسي وتوصيفه، تحديد خواص المقطع والمواد المصنوع منها، بناء التراكيب التجميعية للحملة المكونة من عدة أجزاء وتوصيف الوضع النسبي بينها وتأثيرها فيما بينها، إسناد الأحمال والشروط الحدية، توصيف شبكة العناصر المنتهية بما فيها أبعاد العناصر، شكلها الهندسي، درجة دقتها، خواصها، تحديد المتحولات المراد حسابها، وسنقوم في الفقرات اللاحقة بشرح بعض الأمثلة لتوضيح كيفية تنفيذ هذه الخطوات.

١١-١٣ مثال ١: جائر مثبت من طرف ويخضع لقوة مركزة نحو الأسفل من الطرف الحر

يبين الشكل ١١-٣٩ جائر ذو مقطع مستطيل مصمت مثبت من طرف ويخضع لقوة مركزة نحو الأسفل من الطرف الحر. فإذا علمت أن المعطيات الهندسية هي:



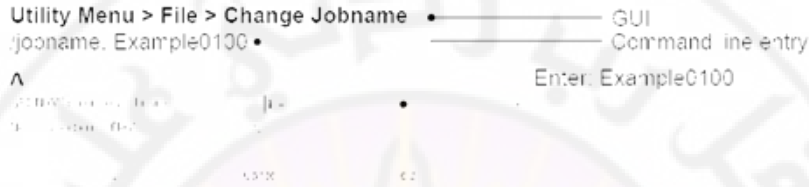
الشكل ١١-٣٩ جائر ذو مقطع مستطيل مثبت من طرف وتحمل بقوة مركزة من طرفه الحر

$$E = 210000 \text{ N/mm}^2, \nu = 0.3, L = 100 \text{ mm}, a = 10 \text{ mm}, b = 10 \text{ mm}, F = 100 \text{ N}$$

حل التمرين سنتبع الخطوات التالية:

١- تعريف اسم الملف

كما مر معنا في الفقرة ٣-١١ وفق الشكل ١٧-١١ حيث نقترح اسماً للمسألة المدروسة ولتكن Example 100 كما يبدو الشكل ٤٠-١١.



الشكل ٤٠-١١ تسمية ملف المسألة Example 100

نلاحظ هنا أننا لم نغير موقع الجلد الخاص بتسجيل البيانات كما مر معنا في الشكل ١٨-١١ بل تركناه على النحو الافتراضي.

٢- تعريف عنوان الملف

كما مر معنا في الفقرة ٣-١١ وفق الشكل ١٩-١١ حيث نقترح عنواناً للمسألة المدروسة ولتكن Cantilever Beam وهذا العنوان سيظهر على كل واجهة بيانية كما يبدو الشكل ٤١-١١.



الشكل ٤١-١١ إعطاء عنوان للمسألة Cantilever Beam

٣- إنشاء نقطتين Key points

ويتم ذلك من خلال تعليمة Create كما مر معنا في الفقرة ٢-١١ وكما بين الشكل ١٠-١١ وبالتالي يتم تعريف نقطتين Keypoints وفق التعليمة:

Preprocessor>Modeling>Create>KeyPoints>In Active CS

ثم نصل بينهم عبر تعليمة Line كما ستوضح الأشكال التالية.

يبين الشكل ٤٢-١١ توليد النقطة الأولى والتي تقع في المبدأ (0,0) وفي هذه الحالة لا داعي لإدخال أي قيمة وتترك الخانات فارغة.



الشكل ١١-٤ توليد النقطة الأولى

أما النقطة الثانية ذات الإحداثيات (100,0) فيتم إدخالها كما يبين الشكل ١١-٤٣



الشكل ١١-٤ توليد النقطة الثانية

٤- ترقيم النقاط

كما مر معنا في الفقرة ١١-٦ وكما رأينا في الشكل ١١-٣٣ وهنا نعمل Key points ونجعلها On كما يوضح الشكل ١١-٤٤.



الشكل ١١-٤٤ ترقيم النقاط

٥- إنشاء مستقيم يصل بين النقطتين السابقتين

ويتم ذلك من خلال تعليمة Create كما مر معنا في الفقرة ١١-٢ وكما يبين الشكل ١١-١٠ وبالتالي يتم تعريف مستقيم Line وفق التعليمة:

Preprocessor>Modeling>Create>Lines>Straight Line

يبين الشكل ١١-٤٥ توليد المستقيم المار من النقطتين Key point1 and Keypoint2 مستخدمين مؤشر الفأرة (الزر اليمين) في انتخاب النقطة الأولى ثم الثانية عبر الضغط على زر Apply.



الشكل ١١-٤ توليد مستقيم Line بدءاً من نقطتين Key points

٦- رسم النقاط و المستقيم بياناً

ويتم ذلك من خلال تعليمة Plot كما مر معنا في الفقرة ١١-٤ وكما يبين الشكل ١١-٢٩ وبالتالي يتم رسم مستقيم Line وفق التعليمة:

Utility Menu>Plot> Keypoints
Utility Menu>Plot> Lines

يبين الشكل ١١-٥٥ كيفية رسم النقاط ثم المستقيمات



الشكل ١١-٥٥ رسم المستقيم Line ورسم النقطتين Key points

٧- اختيار العنصر المنتهي

في النسخة 15 Ansys نستخدم العنصر Beam188 وهو يتعامل مع الجوائز بحالة عامة من خلال تحديد مقطعيها وفق تعليمة:

Main Menu>Preprocessor>Add/Edit /Delete

يبين الشكل ١١-٤٦ الواجهة التي تظهر عند طلب التعليمة



الشكل ١١-٦ تعريف العنصر

ونعرف المقطع المناسب وفق التعليمية:

Preprocessor>section>beam>Common Sections

وفي هذه الحالة نحدد واجهة للمقاطع الأكثر شيوعاً كما يبين الشكل ١١-٧



الشكل ١١-٨ تعريف مقطع

يمكن العودة لأي تفصيلات إضافية من خلال Help

ومن الممكن طباعة شكل المقطع وفق التعليمية:

Preprocessor>section>beam>Plot Sections



الشكل ١١-٤ طباعة شكل المقطع

٨- إدخال الموصفات المادية للجائز

ويتم ذلك كما مر معنا من خلال الفقرة ١١-٢ ووفق الشكل ١١-٨ وفق التعليمات:

Preprocessor>Material Props>Material Models

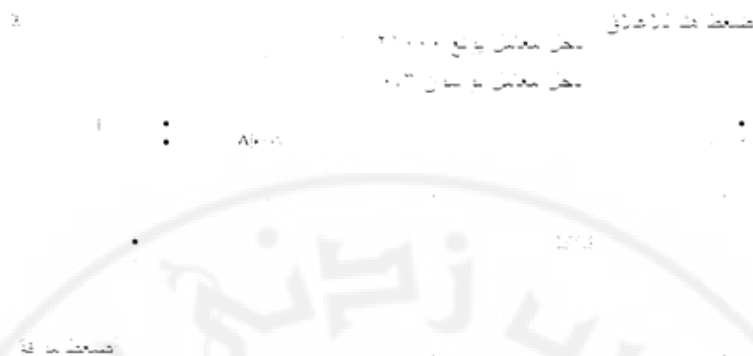
وهنا نضيف Add ونختار من قائمة المواد المصنوع منها العارضة Beam3 يبين الشكل ١١-٥٠ الواجهة الموافقة لاختيار مادة الجائز وهنا يلزم معرفة معامل يونغ ومعامل بواسون.



الشكل ١١-٥٠ تعريف مادة الجائز

بمجرد الضغط على زر موافق تظهر نافذة جديدة تطلب معلومات تفصيلية عن ثوابت المادة للجائز من خلال

إدخال معامل يونغ ومعامل بواسون كما يبدو الشكل ١١-٥١



الشكل ١١-٥١ إدخال ثوابت مادة الجانز

٩- التقطيع

ويتم ذلك كما مر معنا من خلال الفقرة ١١-٢ ووفق الشكل ١١-٨ وفق التعليمات: Preprocessor>Meshing>Size Cntrls>ManualSize>Lines>Picked Lines وهنا نستخدم التقطيع اليدوي (علماً أنه يمكننا استخدام التقطيع الآلي) وبه نحدد المستقيم المراد تقطيعه ويتم انتقاؤه عبر الفأرة بالزر الأيسر. يبين الشكل ١١-٥٢ الواجهة الموافقة للتقطيع مع الخيارات المتاحة فمثلاً يمكن تحديد طول القطعة أو من الممكن تحديد عدد القطع.



الشكل ١١-٥٢ تقطيع الجانز

بمجرد الضغط على زر موافق تظهر نافذة جديدة تطلب منا استخدام الزر الأيمن للفأرة لتحديد المستقيم الوحيد الذي حددناه سابقاً كما يبدو الشكل ١١-٥٣ ووفق التعليمات

Preprocessor>Meshing>Mesh> Lines

اختيار مستقيمت محددة لتطبيقه وذلك عبر زر الفقرة الأيسر

اختيار كافة المستقيمت لتد تطبيقه

الشكل ١١-٥٢ اختيار المستقيم المراد تطبيقه

١٠- مرحلة تحديد نوع الحل Analysis Type

وهنا نحدد نوع التحليل المراد تنفيذه سواءً سكونياً أم حركياً أم حرارياً كما رأينا سابقاً من خلال الفقرة ١١-٢ في الشكل ١١-١١ ويمكن تنفيذ التعليمات :

Solution>Analysis Type>New Analysis

يبين الشكل ١١-٥٣ أنواع الحلول الممكنة.

٨٤

اختيار نوع الحل

مسند ما فتح

الشكل ١١-٥٣ اختيار نوع الحل

١١- تطبيق القيود

بما القيد المطبق هو مسند تام (وثاقفة) فيتم تعريف القيد كما مر معنا في الفقرة ١١-٢ في الشكل ١١-١٢ ويمكن تنفيذ التعليمات

Solution>Define Loads>Apply>Structural>Displacement>On Key points

يبين الشكل ١١-٥٤ حالات المساند المختلفة حيث نقوم بتثبيت درجة الحرية الموافقة. ولحللتنا هذه نقوم بتثبيت النقطة Key point 1 ونثبت كل درجات الحرية All dof.



الشكل ١١-٥٤ تحديد القيد التام على النقطة الأولى Key point 1

١٢- تطبيق القوة المركزة

بما أن الحمل المطبق هو قوة مركزة بنقطة Key point 2 مطبقة نحو الأسفل فيمكن تعريفها كما مر معنا في الفقرة ١١-٢ في الشكل ١١-١٣ ويمكن تنفيذ التعليمات:

Solution>Define Loads>Apply>Structural>Force/moment>On KeyPoints

يبين الشكل ١١-٥٥ نحدد قيمة الحمل F_y وبالقائمة السالبة -1000 (لأن جهة القوة نحو الأسفل وهي مطبقة على النقطة ٢).



الشكل ١١-٥٥ تحديد الحمل المركز على النقطة الثانية Key point 2

بعد ذلك تظهر الشاشة الشكل ١١-٥٦ (الواجهة البيانية) وعليها جميع المعلومات من بناء للنموذج والحمل والمساند

R15.0

11

الشكل ١١-٥٦ الواجهة البيانية مع كل التفاصيل

١٣- تسجيل البيانات على شكل ملف تنفيذي

كما رأينا سابقاً في الفقرة ١١-٢ ووفق الشكل ١١-٢٢. يتم تسجيل البيانات على ملف (0100) وفق التعليمات:

File>Write DB log file

يبين الشكل ١١-٥٧ الواجهة الخاصة بتسجيل البيانات.

خمس سجلات : 0100

الشكل ١١-٥٧ كتابة البيانات على ملف تنفيذي

١٤- مرحلة الحل

وهي المرحلة الأخيرة حيث ننفذ من خلالها كل ما سبق من تعليمات. وتتم من خلال التعليمة:
Solution>Solve>Current LS
يبين الشكل ١١-٥٨ الواجهة الخاصة بالحل.



تمتصفت بما قبل

الشكل ١١-٥٨ تنفيذ الحل

بمجرد الانتهاء من الحل تظهر رسالة تفيد أن الحل قد أنجز كما يبدو الشكل ١١-٥٩.



أصغر عدد

C:\ansys

الشكل ١١-٥٩ انتهاء الحل

١٥- مرحلة إظهار النتائج

وهي المرحلة التي تدعى بمرحلة ما بعد المعالجة (وهي مرحلة إظهار النتائج) وتتم بموجب التعليمة:
General Postproc>Plot Results>Deformed Shape
كما يبين الشكل ١١-٦٠ إظهار النتائج وطباعتها قبل وبعد التشوه.

٨٠

خمس إظهار : بعد التشوه
تمتصفت بما قبل

الشكل ١١-٦٠ إظهار الجانز بعد وقبل التشوه

كما يبدو الشكل ١١-٦١ الواجهة البيانية للنتائج وفيها يعطى التبدلي الأعظمي .

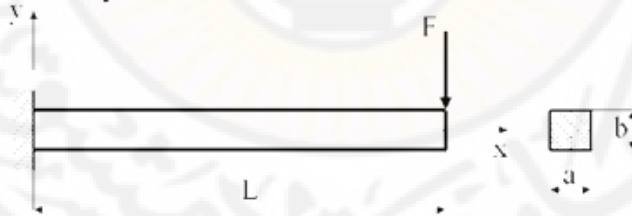


الشكل ١١-٦١ إظهار نتائج الدراسة على الجانز

١١-١٤- مثال ٢: جانز ثلاثي البعد مثبت من طرف ويخضع لقوة مركزة من الطرف الحر

يبين الشكل ١١-٦٣ جانز ثلاثي البعد ذو مقطع مستطيل مصمت مثبت من طرف ويخضع لقوة مركزة نحو الأسفل من الطرف الحر. ثخناته وفق المحور z هي Th ، فإذا علمت أن المعطيات الهندسية هي:

$$E = 210000 \text{ N/mm}^2, \nu = 0.3, L = 100 \text{ mm}, a = 10 \text{ mm}, b = 10 \text{ mm}, F = 100 \text{ N}$$



الشكل ١١-٦٣ جانز ثلاثي البعد مثبت من جهة ومحمل بقوة مركزة في الطرف الحر

ملاحظة: هناك العديد من الخطوات المشتركة مع التمرين السابق لذلك سنمر عليها سريعاً وسنقف عند كل ما هو جديد .

تعريف اسم الملف وعنوان للواجهات البيانية (كما مر معنا)

١- بناء النموذج الهندسي للجانز ثلاثي البعد

يبين الشكل ١١-٦٤ واجهة بناء مساحة على شكل مستطيل عبر تعليمة :

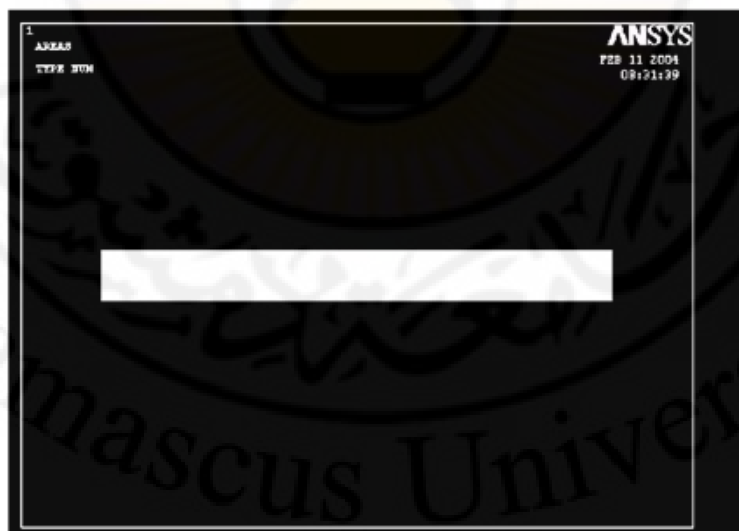
Preprocessor > Modeling > Create > Areas > Rectangle > By Dimensions

Create an area given by X= 3.150 and Y= 0.10



الشكل ١١-٦٤ توليد مساحة بدلالة الأبعاد

بمجرد تنفيذ التعليمة السابقة تظهر لنا الواجهة البيانية كما يظهر الشكل ١١-٦٥ وبها المساحة (السطح) الذي تولد.



الشكل ١١-٦٥ إظهار المساحة المنقذة

يتم بعد ذلك بثق المساحة وفق البعد الثالث Z عبر الشحانة والبالغة ١٠ مم وفق التعليمة المبينة بالشكل

١١-٦٦

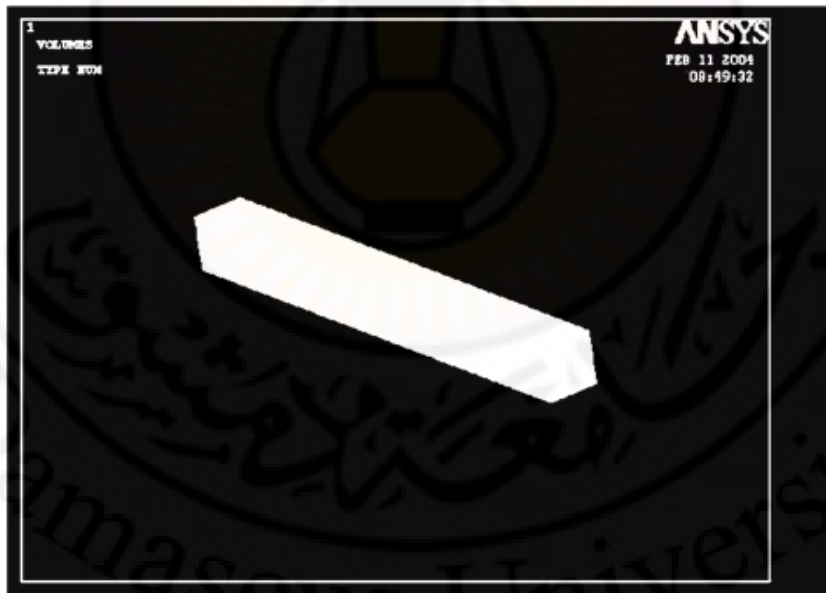
Preprocessor > Modeling > Operate > Extrude > Areas > Along Normal

... حدد - (إلى سطح ، سطح عن سطح



الشكل ١١-٦٦ تعليمية تنفيذ الحجم المبتلق عن السطح بعمق ١٠ مم

بمجرد تنفيذ التعليمة السابقة تظهر لنا الواجهة البيانية كما يظهر الشكل ١١-٦٧ وبها الحجم الذي تولد.



الشكل ١١-٦٧ إظهار الحجم المبتلق عن السطح بعمق ١٠ مم.

٢- تعريف العنصر المنتهي:

في هذا التمرين يكون العنصر حجمي ويتم اختيار عنصر حجمي مناسب وليكن Solid 186 (وهو عنصر

مكعب ذو ٢٠ عقدة) وفق التعليمة المبينة بالشكل ١١-٦٨

Preprocessor > Element Type > Add/Edit/Delete



تستخدم عنصر من عناصر Solid 186

الشكل ٦٨-١١ اختيار العنصر Solid 186

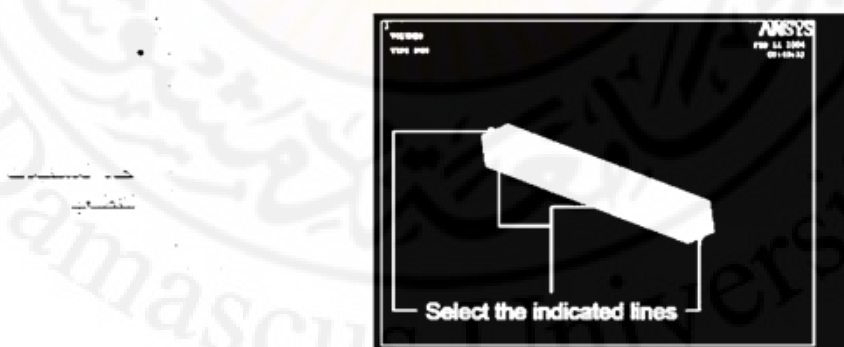
٣- تحديد نوع المادة

اختيار المادة من نوع متجانس بدلالة معامل يونغ ومعامل بواسون وهي بنفس خطوات التمرين السابق.

٤- التقطيع

من الممكن تقطيع العارضة الثلاثية الأبعاد بعدة طرق ومنها الطريقة الآلية. وفي هذا التمرين طريقة يدوية تعتمد على تقطيع مستقيمات وفق خطوة محددة ثم تقطيع الحجم بما يتناغم معها. يبين الشكل ٦٩-١١ التعليمات والواجهة البنيانية الموافقة لتقطيع المستقيمات.

Preprocessor > Meshing > Size Cntrl > ManualSize > Lines > Picked Lines



تستخدم في هذا التمرين من الشكل

الشكل ٦٩-١١ تقطيع المستقيمات

بمجرد تنفيذ التعليمة السابقة تظهر لنا الواجهة البيانية كما يظهر الشكل ١١-٧٠ والتي تطلب عدد القطع المرغوب بها في كل من المستقيمات المختارة.

Preprocessor > Meshing > Size Cntrl > ManualSize > Lines > Picked Lines

٨٠

حجم عدد المستقيمات المختارة

تظهر في هذا الشكل

الشكل ١١-٦٩ تقطيع المستقيمات بعنصرين

يبين الشكل ١١-٧١ التعليمة والواجهة البيانية الموافقة لتقطيع الحجم.

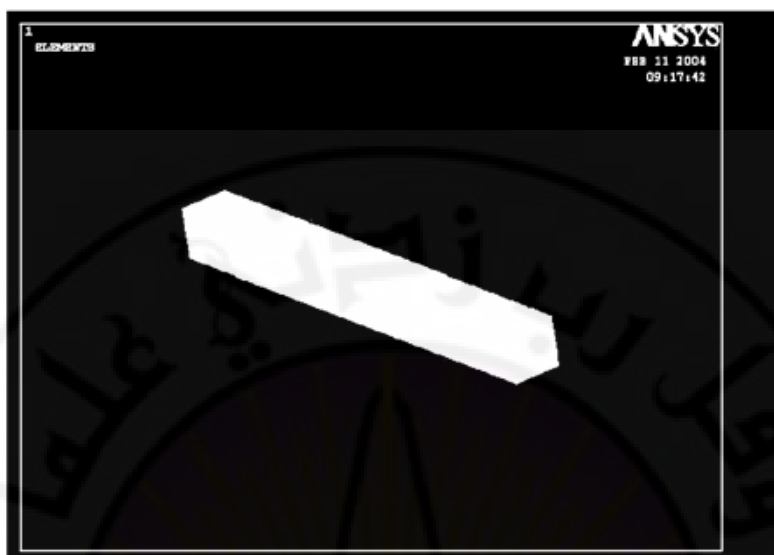
Preprocessor > Meshing > Mesh > Volumes > Mapped > 4 or 6 sided

حجم عدد المستقيمات المختارة

حجم عدد المستقيمات المختارة

الشكل ١١-٧١ تقطيع الحجم

بمجرد تنفيذ التعليمة السابقة تظهر لنا الواجهة البيانية كما يظهر الشكل ١١-٧٢ والتي تظهر فيها العارضة الثلاثية بعد التقطيع.



الشكل ٧٢-١١ إظهار العارضة الثلاثية بعد تقطيع الحجم

٥- تحديد نوع التحليل

وفي هذا الجزء يشبه التمرين السابق.

٦- تطبيق القيود

بما أن السطح الأيسر مثبت فنطبق التعليمة المبينة بالشكل ٧٣-١١ مع التعليمة الموافقة حيث نثبت جميع درجات الحرية.

Solution > Define Loads > Apply > Structural > Displacement > On Areas

نحدد نحن درجات الحرية (تثبيت)



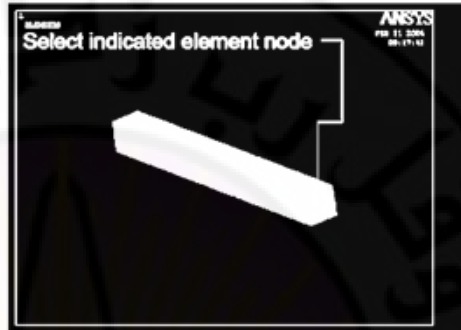
الشكل ٧٣-١١ تطبيق القيد (وثاقه) على السطح الأيسر.

٧- تطبيق القوة

أن السطح الأيمن معرض لحمل مركز في طرف الجائز الحر فنطبق الحمل المركز في العقدة في منتصفه . يبين الشكل ١١-٧٤ الواجهة مع التعليمات الموافقة حيث نطبق قوة نحو الأسفل بقيمة ١٠٠٠ نيوتن.

Solution > Define Loads > Apply > Structural > Force/Moment > On Nodes

نحدد الحملات على شكل قوة -إشارة- حد



Press OK

الشكل ١١-٧٤ تطبيق القوة على العقدة في منتصف الخط العلوي للسطح الأيمن

بمجرد تنفيذ التعليمات السابقة تظهر لنا الواجهة البيانية كما يظهر الشكل ١١-٧٥ والتي تظهر فيها جميع المعلومات الخاصة بتطبيق حمل مركز.

Solution > Define Loads > Apply > Structural > Force/Moment > On Nodes

حدد الحمل -إشارة- بعد

ANSYS



الشكل ١١-٧٥ تطبيق القوة على العقدة في منتصف الخط العلوي للسطح الأيمن

يظهر الشكل ١١-٧٦ وعليه جميع القيود والأحمال.



الشكل ١١-٧٦ إظهار القيود والحمل المركز

٨- مرحلة التنفيذ SOLUTION

وهي بنفس التسلسل للتمرين السابق

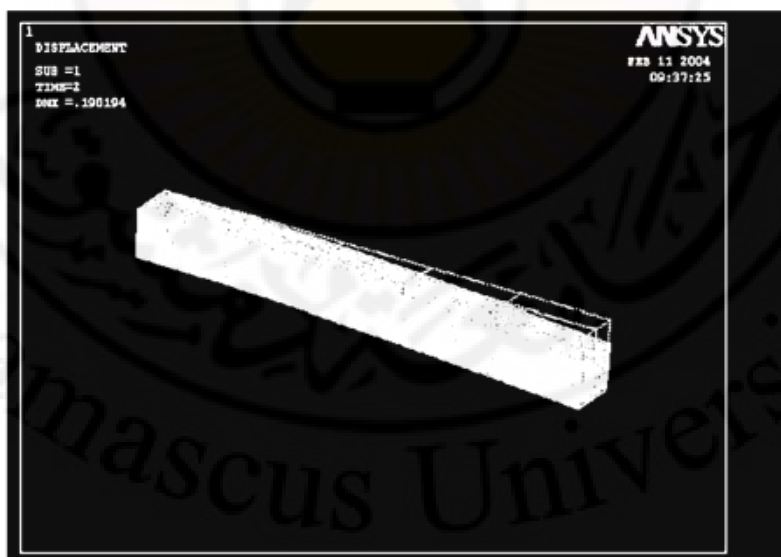
٩- مرحلة ما بعد التحليل (إخراج النتائج)

وهي تشبه من حيث التعليمات كل ما ورد في التمرين السابق وسنظهر نتائج التحليل من خلال إظهار الشكل قبل وبعد التحميل وهو ما يظهر في الشكل ٧٧-١١ والشكل ٧٨-١١

٨٠

حد أقصى بعد التحميل
تسعة مفاصل

الشكل ٧٧-١١ طباعة التشوه قبل وبعد التحميل.



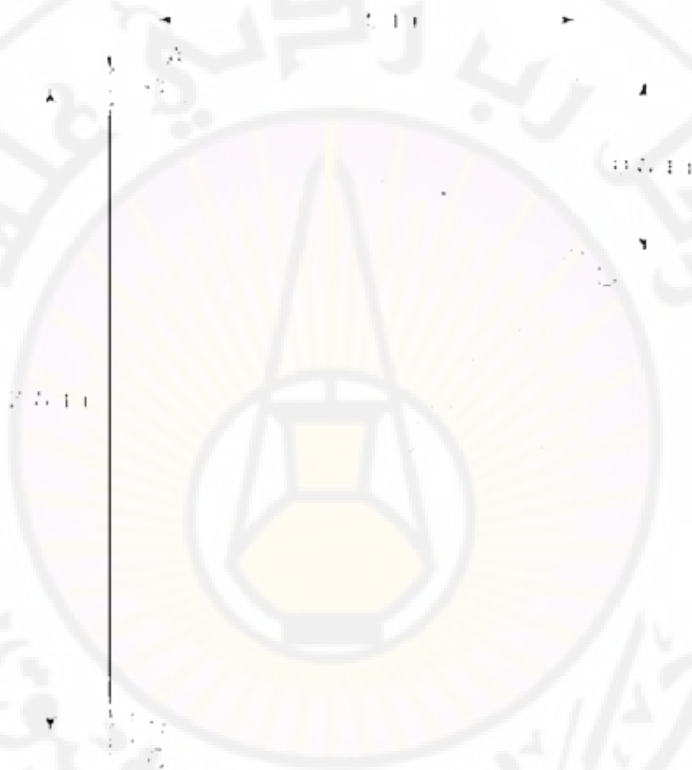
Read Maximum displacement: DMX

الشكل ٧٨-١١ الجانز قبل التشوه وبعد التشوه

١١-١٥-٣: مثال ٣: هيكلًا شبكيًا مكونًا من ثلاث قضبان:

يبين الشكل ١١-٧٩ هيكلًا شبكيًا مكونًا من ثلاثة قضبان، وهو محملًا في العقدة بقوة متجهة نحو الأسفل قدرها ٢٨٠٠٠ نيوتن. الأبعاد الهندسية معطاة على الرسم.

مساحة المقطع ومعامل المرونة ومعامل بواسون



الشكل ١١-٧٩ الهيكل الشبكي المكون من ثلاث قضبان

بالطبع لن نأتي على ذكر الخطوات الأساسية التي تكررت في الأمثلة السابقة من خلال تسمية الملف والعنوان وأن المعالجة لنموذج إنشائي سنبداً بتعريف العنصر المنتهي كأول خطوة:

١- تعريف العنصر

يتم من خلال التعليمات

والعنصر المناسب للهيكل الشبكية المستوية في المجال السكوني هو كما يبين الشكل ١١-٨٠ وذلك وفق النسخة وفي النسخ القديمة قبل ١٢ فيسمى العنصر



ANSYS Workbench

Define Element Types



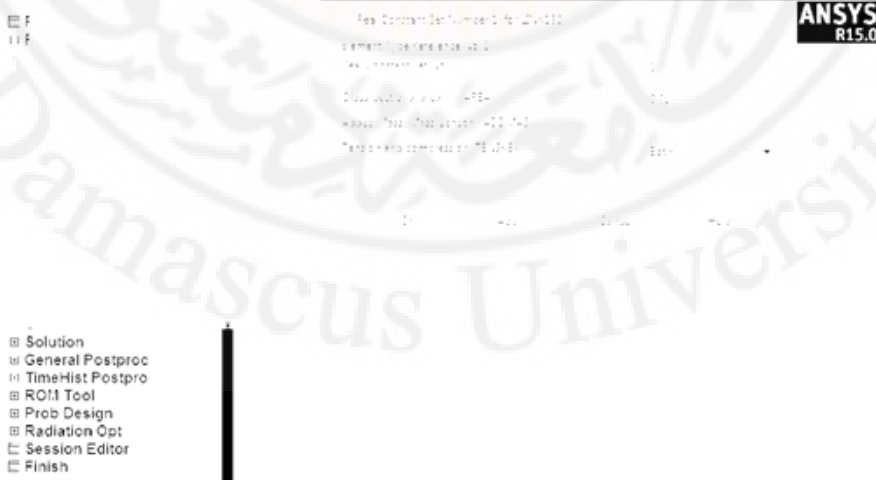
الشكل ٨٠-١١ تعريف العنصر المنته Link180

٢- تعريف خصائص المقطع Real Constant

تشمل خصائص المقطع في هذه الإنشاءات فقط مساحة المقطع (لأن العناصر الإنشائية المتفصلة لا تحمل سوى قوى شد أو ضغط أي وفق محورها الطولي). يبين الشكل ٨١-١١ الواجهة الخاصة بتعريف خصائص المقطع.



ANSYS Workbench



الشكل ٨١-١١ تعريف ثوابت المقطع للعنصر المنته Link180

٣- بناء النموذج

كما مر معنا سابقاً نقوم بإنشاء نقاط Key points ومستقيمات Lines وتصل بين هذه النقاط ومن ثم نقوم بعملية التقطيع لتوليد عقد وعناصر. وفي هذا التمرين سيتم بناء عقد مباشرة Nodes ومن ثم عناصر

Elements تصل بين هذه العقد. يبين الشكل ١١-٨٢ الواجهة الموافقة لبناء العقد وفق التعليمات:

MainMenu>preprocessor>Modeling >Create>Nodes>In Active CS

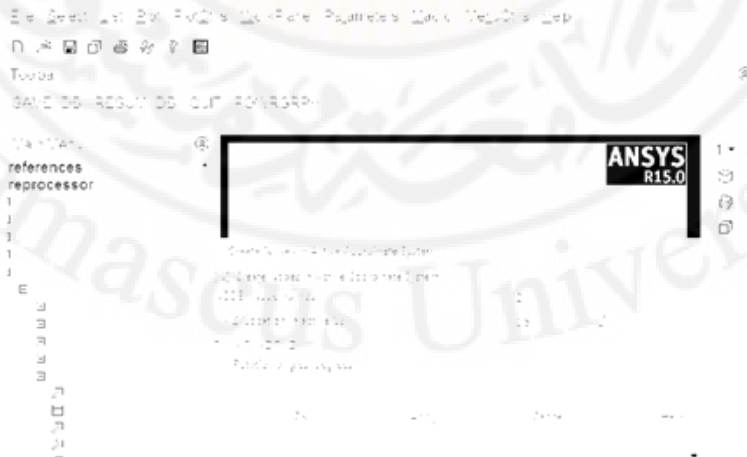
نبدأ بإدخال إحداثيات العقدة الأولى (0,0) كما في الشكل ١١-٨٣

نبدأ بإدخال إحداثيات العقدة الثانية (1.5,2) كما في الشكل ١١-٨٤

نبدأ بإدخال إحداثيات العقدة الثالثة (0,2.8) كما في الشكل ١١-٨٥



الشكل ١١-٨٣ الواجهة الموافقة لبناء العقدة الأولى



الشكل ١١-٨٤ الواجهة الموافقة لبناء العقدة الثانية.

File Select List Plot Results WorkPlane Parameters Macro Menus Help

Icons

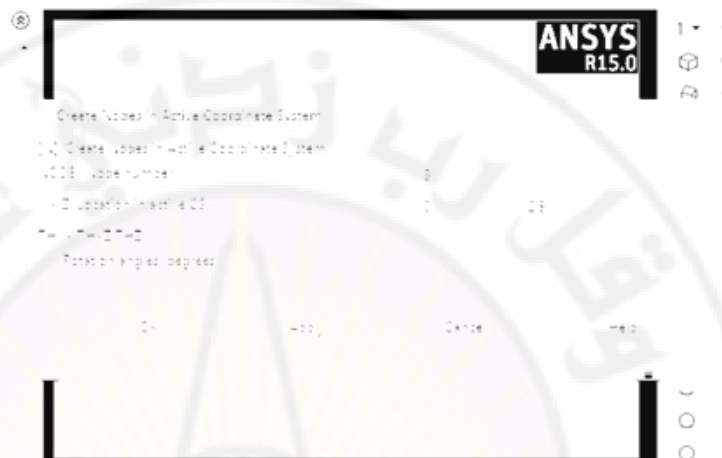
Toolbar

SAVE_DB RESUME_DB QUIT POWERGRP-

Main Menu

Preferences
Preprocessor

Icons



الشكل ٨٥-١١ الواجهة الموافقة لبناء العقدة الثالثة

بعد الإدخال نجد النقاط الثلاث على الواجهة البيانية المبينة بالشكل ٨٦-١١



الشكل ٨٦-١١ الواجهة البيانية التي تظهر العقد الثلاث.

٤- مرحلة بناء العناصر Elements

يبين الشكل ١١-٨٧ الواجهة الموافقة لبناء العناصر الثلاثة وفق التعليمات:

MainMenu>preprocessor>Modeling >Create>Elements>AutoNumbered>Thru Nodes

وهنا نستخدم الزر الأيسر للفارة لانتقاء العقد التي ستشكل العناصر.



الشكل ١١-٨٧ الواجهة البيانية المستخدمة لبناء العناصر

نبدأ بربط العقدة ١ مع العقدة ٢ مشكلة العنصر الأول كما نربط العقدة ٢ مع العقدة ٣ مشكلة العنصر الثاني وأخيراً نبدأ بربط العقدة ١ مع العقدة ٣ مشكلة العنصر الثالث. كما يبين الشكل ١١-٨٨.

ANSYS
R15.0

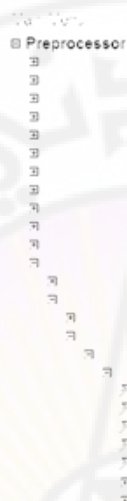
الشكل ١١-٨٨ الواجهة البيانية المستخدمة لبناء العناصر الثلاثة

٥- تطبيق الشروط الحدية:

وكما مر معنا سابقاً من خلال التعليمات

Main Menu>preprocessor>Load >Define Load>Apply>Structural>Displacement>On Nodes

وكما يبدو من الشكل ٨٩-١١ الواجهة البيانية عند تطبيق الشروط الحدية على الانتقالات.



الشكل ٨٩-١١ الواجهة البيانية عند تطبيق الشروط الحدية على الانتقالات

فيما يخص العقدة ١ : يتم تقييد الحركة وفق اتجاه محور السينات أي تقييد U_x . كما يبينه الشكل ٩٠-١١

فيما يخص العقدة ٣ : يتم تقييد الحركة بالاتجاهين أي تقييد U_x و U_y . كما يبينه الشكل ٩١-١١

يبين الشكل ٩٢-١١ الواجهة النهائية بعد تطبيق الشروط الحدية.



الشكل ٩٠-١١ الواجهة البيانية عند تطبيق الشروط الحدية على الانتقالات للعقدة ١



الشكل ٩١-١١ الواجهة البيانية عند تطبيق الشروط الحدية على الانتقالات للعقدة ٣



الشكل ٩٢-١١ الواجهة البيانية بعد تطبيق الشروط الحدية.

٦- تطبيق الأحمال

وكما مر معنا سابقاً من خلال التعليمات

Main Menu>preprocessor>Load >Define Load>Apply>Structural>Force/Moment>On Nodes

وكما يبدو من الشكل ٩٣-١١ الواجهة البيانية عند تطبيق الشروط الحدية على القوى.



الشكل ٩٣-١١ الواجهة البيانية الموافقة لتطبيق الأحمال على العقد.

فيما يخص العقدة ٢ : يتم تطبيق حمل نحو الأسفل (سالب القيمة) وفق اتجاه محور العينات أي F_y وبقيمة ٢٨٠٠ نيوتن كما يبينه الشكل ٩٤-١١



الشكل ٩٤-١١ تطبيق حمل مركز على العقدة ٢.

يبين الشكل ٩٥-١١ الواجهة النهائية بعد تطبيق الحمل المركز على العقدة ٢.



الشكل ١١-٩٥ الواجهة البيانية الموافقة لتطبيق حمل مركز على العقدة ٢.

٧- مرحلة تحديد نوع الحل Analysis Type

وهنا نحدد نوع التحليل المراد تنفيذه سواء سكونياً أم حركياً أم حرارياً كما رأينا سابقاً من خلال الفقرة ١١-٢ في الشكل ١١-١١ وفق التعليمات :

Solution>Analysis Type>new Analysis

وهنا نختار الحل السكوني من بين قائمة الخيارات.

٨- مرحلة الحل

وهي المرحلة الأخيرة حيث ننفذ من خلالها كل ما سبق من تعليمات. وتتم من خلال التعليمات MainMenu>Solve>Current LS كما هو مبين بالشكل ١١-٩٦ :



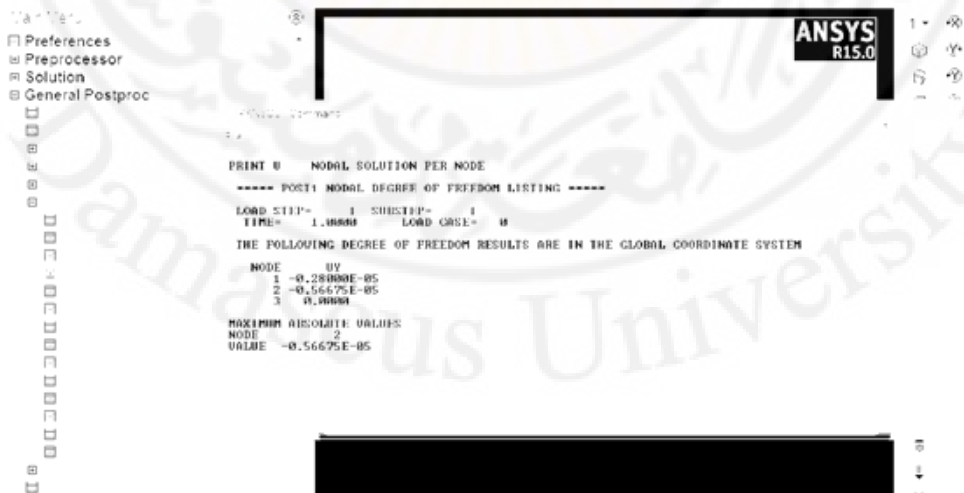
الشكل ١١-٩٦ الواجهة البيانية الموافقة لبدء الحل

كما يبدو الشكل ٩٩-١١ الواجهة البيانية للنتائج وفيها يعطى التبدلي الأعظمي .

ANSYS
R15.0

الشكل ٩٩-١١ إظهار الجانز بعد وقبل التشوه

من الممكن إخراج قيم انتقالات العقد على شكل قائمة كما يتضح بالشكل ١٠٠-١١



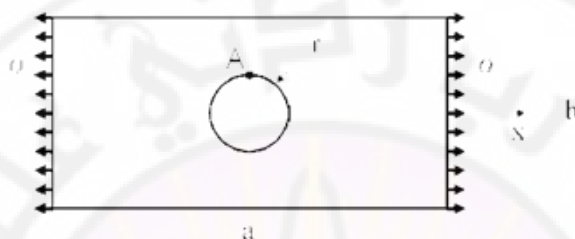
الشكل ١٠٠-١١ إظهار قيم انتقالات عقد الجانز

١١-١٦- مثال ٤ : صفيحة رقيقة مثقوبة تتعرض لقوى شد من الطرفين

يبين الشكل ١١-١٠ صفيحة رقيقة مثقوبة تتعرض لقوى شد من الطرفين.

$$E = 210000 \text{ N/mm}^2, \nu = 0.3, \sigma = 100 \text{ N/mm}^2$$

$$a = 200 \text{ mm}, b = 100 \text{ mm}, t = 10 \text{ mm}, r = 10 \text{ mm}$$



الشكل ١١-١٠ صفيحة مثقوبة رقيقة تتعرض لقوى شد من الطرفين

بالطبع لن نأتي لذكر الخطوات الأساسية التي تكررت في الأمثلة السابقة من خلال تسمية الملف JobName والعنوان Title وأن المعالجة لنموذج إنشائي Structural. سنبدأ بتعريف العنصر المنتهي كأول خطوة:

١- بناء النموذج الهندسي

بما أن الشكل متناظر فنكتفي ببناء ربع النموذج ولتنفيذ ذلك ننشئ مستطيلاً ثم نقتطع من زوايته السفلية اليسارية ربع دائرة فيتشكل معنا الشكل المطلوب.

ننشئ أولاً مستطيلاً بدلالة الأبعاد وفق التعليمات المبينة على الشكل ١١-٢٠ فتظهر الواجهة المبينة بالشكل

١١-٢٠

Preprocessor > Modeling > Create > Areas > Rectangle > By Dimensions

نحدد سطحاً بـ ٢٠٠ وارتفاعاً بـ ١٠٠ وعرضاً بـ ١٠٠



الشكل ١١-٢٠ إنشاء مستطيل بدلالة الأبعاد

الشكل ١١-١٠٣ إنشاء مستطيل بدلالة الأبعاد

ثم ننشئ دائرة بدلالة المركز ونصف القطر وفق التعليلة المبينة على الشكل ١١-١٠٤ فتظهر الواجهة المبينة بالشكل ١١-١٠٥

Preprocessor > Modeling > Create > Areas > Circle > Solid Circle

لننشئ دائرة بدلالة المركز $X, Y = 0, 0$ ونصف نصف قطر Radius = 10



نختار
نضغط على

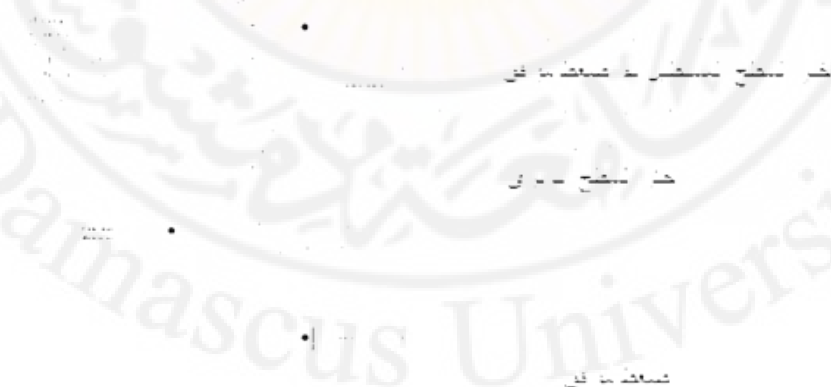
الشكل ١١-١٠٤ إنشاء دائرة بدلالة المركز ونصف القطر

الشكل ١١-١٠ إنشاء مستطيل بدلالة الأبعاد

بعد ذلك نقوم باقتراع الدائرة من المستطيل وفق التعليلة المبينة على الشكل ١١-١٠ فتظهر الواجهة المبينة بالشكل ١١-١٧

Preprocessor > Modeling > Operate > Booleans > Subtract > Areas

من المستطيل من الدائرة



الشكل ١١-١٠ عملية اقتراع دائرة من مستطيل

الشكل ١١-١٠ إنشاء مستطيل بدلالة الأبعاد

٢- تعريف العنصر

يتم من خلال التعليمات:

MainMenu>preprocessor>Element Type>Add

والعنصر المناسب للصفائح التي تخضع لإجهادات مستوية في المجال السكوني هو Solid 182 كما يبين الشكل

١١-١٠



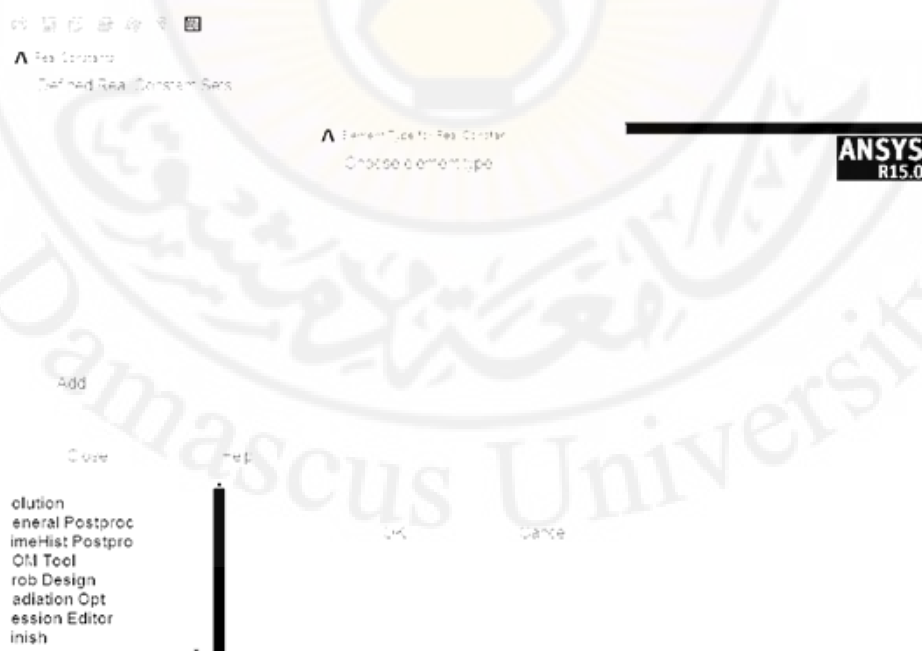
الشكل ١١-١٠ اختيار العنصر

لاختيار حالة الإجهادات المستوية على العنصر الذي تم اختياره فيتم ذلك من Option ونختار الخيار Plane stress with th (مع إدخال الثخانة) كما هو موضح بالشكل ١٠٩-١١



الشكل ١٠٩-١١ اختيار عنصر صفائح ذي إجهادات مستوية مع إدخال الثخانة

ولتعريف قيمة الثخانة فيتم ذلك من خلال Real Constant

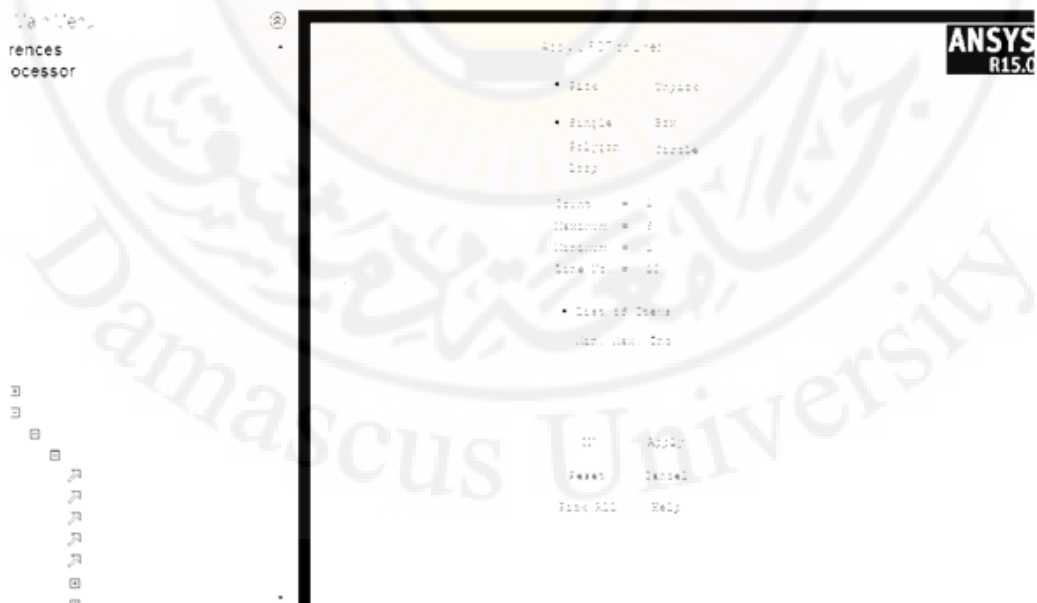


الشكل ١١٠-١١ إدخال الثخانة 10 مم

يُبين الشكل ١١-١١ الواجهة التي تظهر قيمة الشحنة المدخلة ١٠ مم



الشكل ١١-١١ إدخال الشحنة 10 مم



الشكل ١١-١٢ إدخال الشرط الحدي على تناظر المستقيم اليساري بالنسبة محور العينات

٣- تعريف المادة

تتم بنفس التسلسل السابق والذي تم شرحه في التمارين السابقة.

٤- تطبيق الشروط الحدية على مستقيمات التناظر

وكما مر معنا سابقاً من خلال التعليمات

Main Menu>preprocessor>Load >Define Load>Apply>Structural>Displacement>On Line

وكما يبدو من الشكل ١١-١٢ الواجهة البيانية عند تطبيق الشروط الحدية على الانتقالات.

باعتبار أننا نمذجنا ربع الصفيحة فلا بد من إقحام شروط التناظر وفق المحورين العينات (على الخط اليساري)

وحول السينات (على الخط السفلي).

يبين الشكل المذكور تطبيق الشرط الحدي (التناظر حول العينات)

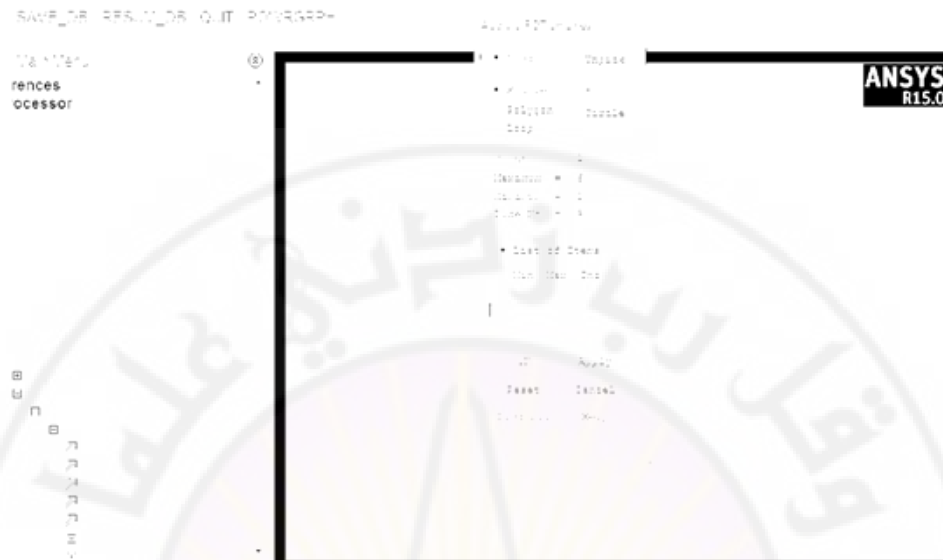
بمجرد الانتهاء من تنفيذ التعليمات تظهر الواجهة المبينة بالشكل ١١-١٣

ANSYS
R15.0



الشكل ١١-١٣ تناظر بالنسبة لمحور العينات

يبين الشكل ١١-١٤ المذكور تطبيق الشرط الحدي (التناظر حول السينات)



الشكل ١١-١١ إدخال الشرط الحدي على تناظر المستقيم الأسفل بالنسبة لخور السينات

بمجرد الانتهاء من تنفيذ التعليمة تظهر الواجهة المبينة بالشكل ١١-١٥



الشكل ١١-١٥ تناظر بالنسبة لخور السينات

يبين الشكل ١١-١٦ رموز التناظر على خطي التناظر

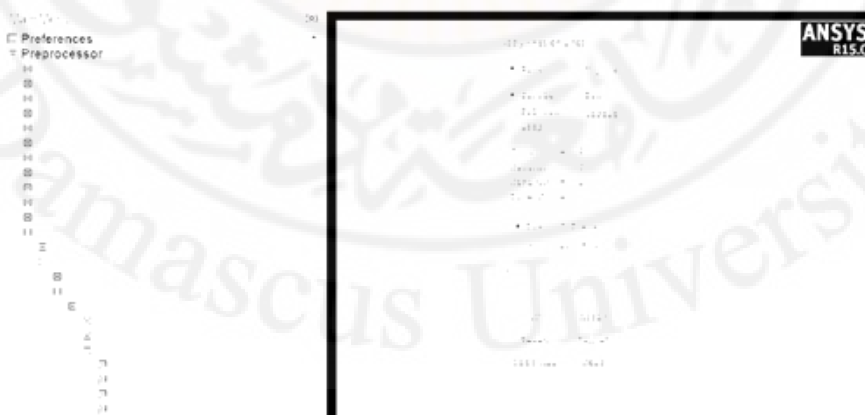
الشكل ١١-١٦ ظهور رموز التناظر وفق المحاورين

٥- تطبيق الضغط (الإجهاد) على الخط اليميني

وكما مر معنا سابقاً من خلال التعليمات

Main Menu>preprocessor>Load >Define Load>Apply>pressure>On Line

وكما يبدو من الشكل ١١-١٧ الواجهة البيانية عند تطبيق الضغط. يبين الشكل المذكور تطبيق الضغط على المستقيم الأيمن



الشكل ١١-١٧ تطبيق حمل ضغط (بقيمة سالبة) على الخط الأيمن

يبين الشكل ١١-١٨ إدخال قيمة الضغط



الشكل ١١-١٨ تطبيق حمل ضغط (بقيمة سالبة) على الخط الأيمن

يبين الشكل ١١-١٩ شكل النموذج (ربع الصفحة) مع كل الشروط الحدية من انتقالات وحمولات.



الشكل ١١-١٩ إظهار كافة الشروط الحدية المطبقة

٦- التقطيع

من الممكن تقطيع الصفحة الثنائية الأبعاد بعدة طرق ومنها الطريقة الآلية. يبين الشكل ١١-٢٠ التعليمات والواجهة البيانية الموافقة لتقطيع المساحة.

Preprocessor>Meshing>mesh>Area>Free

الشكل ١١-١٢٠ تقطيع آلي للصفحة

٧- اختيار الحل (سكوي)

٨- تنفيذ الحل Solution

٩- إخراج النتائج

وهي المرحلة التي تدعى بمرحلة ما بعد المعالجة (وهي مرحلة إظهار النتائج) وتتم بموجب التعليمات:

General Postproc>plot Results>Deformed Shape

كما يبين الشكل ١١-١٢١ إظهار النتائج وطباعتها قبل وبعد التشوه.

الشكل ١١-١٢١ الصفحة قبل وبعد التشوه

لإظهار الإجهادات وفق معيارية Von_Misses يتم ذلك كما هو مبين بالشكل ١١-١٢٢، وأما التوزيع اللوني للإجهادات فيظهر بالشكل ١١-١٢٣.



الشكل ١١-١٢٢ تعليمية الإجهادات Von_Misses

ANSYS
R15.0

١١-١٧- مثال ٥: فرنًا صناعيًا مكونًا من ثلاث طبقات عازلة

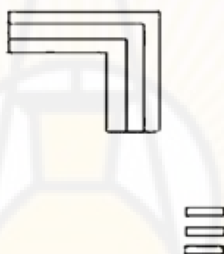
يبين الشكل ١١-١٢ فرنًا صناعيًا مكونًا من ثلاث طبقات عازلة سماكة الطبقة الواحدة ٥ سم ومعاملات التوصيل الحراري لطبقات الفرن الداخلية والوسطى والخارجية هي:

$$\text{Fire Brick (Inner Layer)} = 0.3 \frac{w}{m \cdot c}$$

$$\text{Red Brick (Middle Layer)} = 0.63 \frac{w}{m \cdot c}$$

$$\text{Magnesia (Outer Layer)} = 1.41 \frac{w}{m \cdot c}$$

الأبعاد الهندسية معطاة على الشكل والمطلوب: نمذجة الفرن ودراسة التوزيع الحراري .



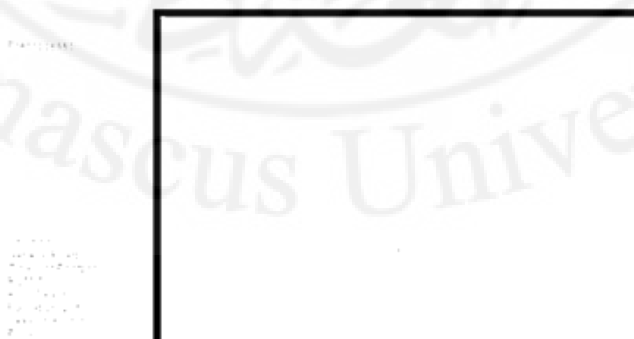
الشكل ١١-١٢ فرن صناعي مكون من ثلاث طبقات عازل.

بما أن المسألة حرارية فنبدأ من اختيار الحل الحراري.

١- اختيار التطبيق

يتم تحديد الحل الحراري كما هو مبين وفق التعليمات التالية والمبينة بالشكل ١١-١٢٥

Main Menu>preferences>Thermal

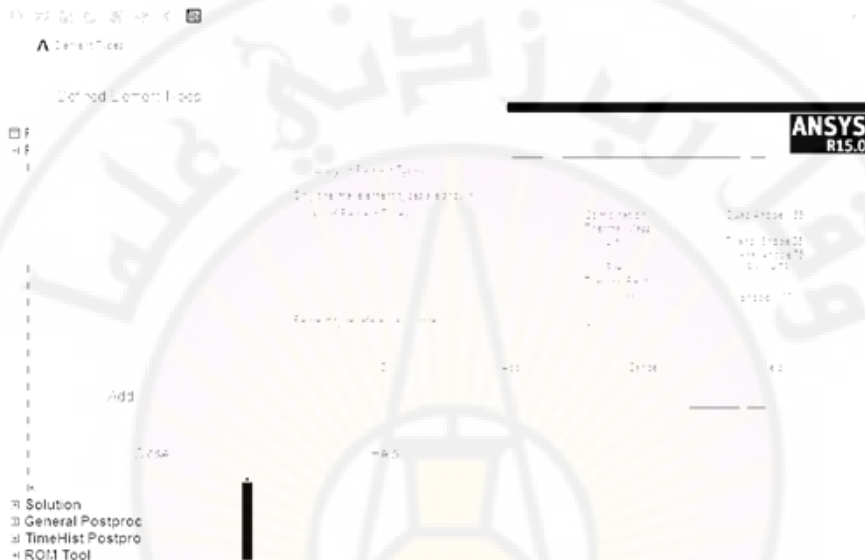


الشكل ١١-١٢٥ اختيار الحل الحراري

٢- تعريف العنصر

يتم من خلال التعليمات Add Element Type > Main Menu > preprocessor > Element Type > Add العنصر المناسب للصفائح المستوية التي تخضع لإجهادات حرارية هو Plane77 كما يبين الشكل ١١-١

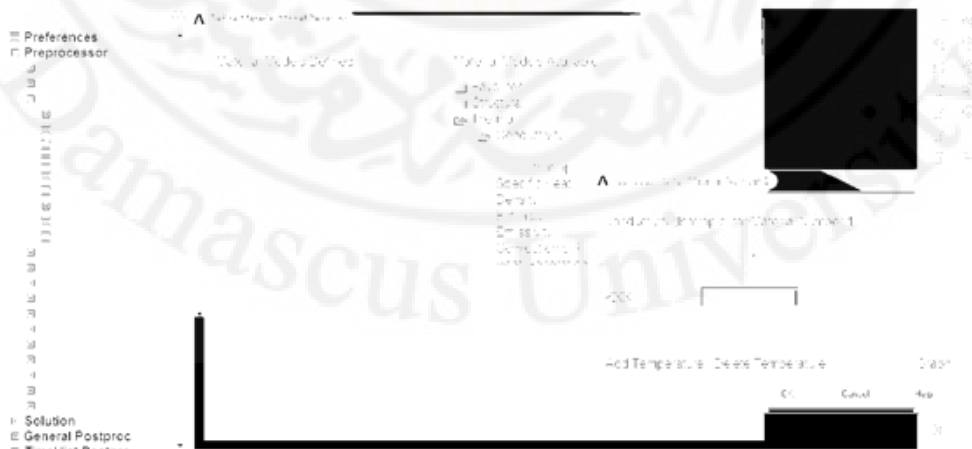
١٢٦



الشكل ١١-١٢٦ اختيار العنصر

٣- اختيار المادة

بما أننا نتعامل مع مواد حراريًا فلا بد من تعريف معامل التوصيل الحراري لكل مادة وذلك ما يبينه الشكل ١١-١٢٧. وهنا نكرر الخطوة ثلاث مرات لثلاث مواد عازلة.



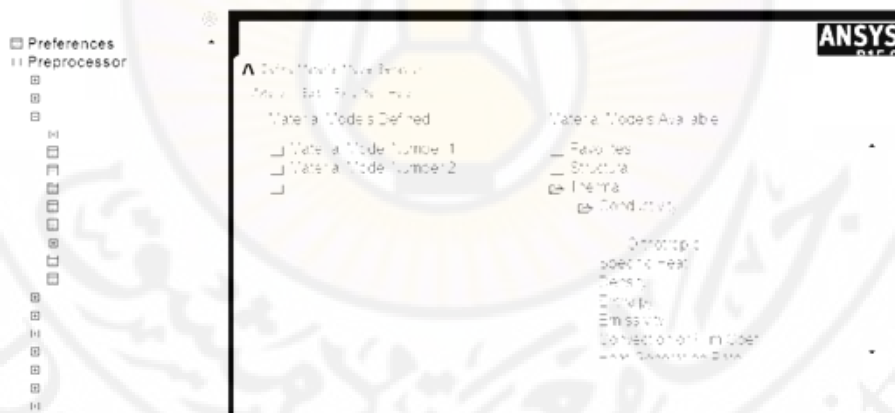
الشكل ١١-١٢٧ تعريف المادة الأولى ذات عامل التوصيل الحراري ٠,٣

نضيف مادة ثانية من قائمة Material ثم نكرر الخطوة السابقة فندخل معامل التوصيل الثاني ٠,٦٣ كما يبدو من الشكل ١٢٨-١١



الشكل ١٢٨-١١ إضافة المادة الثانية

بعد تعريف المواد الثلاث نحصل على الشكل ١٢٩-١١



الشكل ١٢٩-١١ المواد الثلاث بعد تعريفها

٤- إنشاء نموذج الهندسي

في هذا التطبيق يتم بناء السطوح الثلاثة (التي تمثل ثلاث طبقات عازلة) عبر وصل مجموعة من المستقيمات والتي يتم تعريفها عبر مجموعة من النقاط Key points. ويتم ذلك من خلال تعليمة Create كما مر معنا في الفقرة ١١-٢ وكما يبين الشكل ١٣٠-١١ وبالتالي يتم تعريف نقطتين Keypoints وفق التعليمة:

Preprocessor>Modeling>Create>Keypoints>In Active CS



الشكل ١١-١٣ تعريف النقطة الأولى

فيما يتعلق بباقي النقاط يتم إدخالها وفق الجدول ١١-١.

الجدول ١١-١ النقاط اللازمة لنمذجة الطبقات الثلاث للقرن

رقم النقطة	X	Y
١	٠,٦	٠
٢	٠,٦٥	٠
٣	٠,٧	٠
٤	٠,٧٥	٠
٥	٠,٦	٠,٦
٦	٠,٦٥	٠,٦٥
٧	٠,٧	٠,٧
٨	٠,٧٥	٠,٧٥
٩	٠	٠,٦
١٠	٠	٠,٦٥
١١	٠	٠,٧
١٢	٠	٠,٧٥

إنشاء مستقيم يصل بين النقاط السابقة

ويتم ذلك من خلال تعليمة Create كما مر معنا في الفقرة ١١-٢ وكما يبين الشكل ١١-١٣ يتم تعريف

مستقيمات Lines وفق التعليمة:

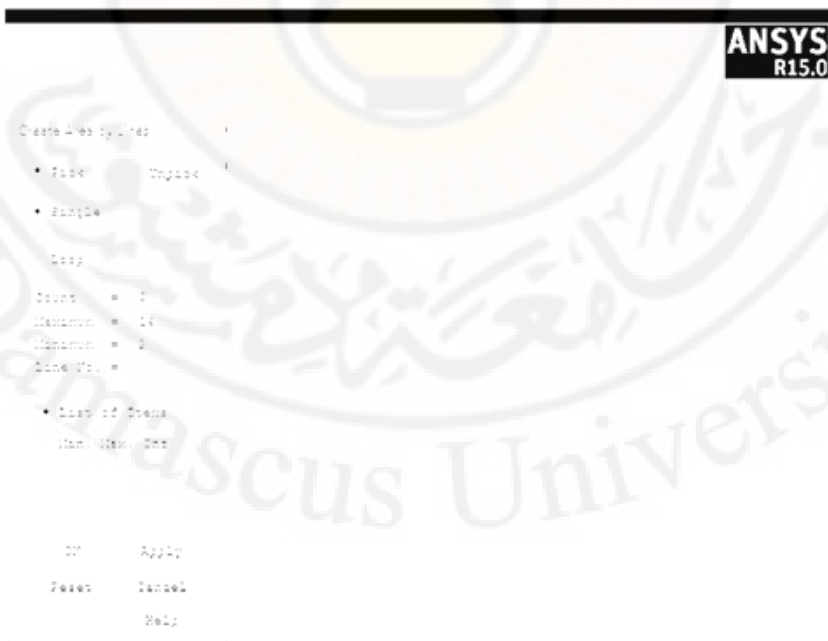
Preprocessor>Modeling>Create>Lines> Straight Line



الشكل ١١-١٣١ تعريف المستقيمات بدءاً من النقاط

بعد ذلك نعرف ثلاث مساحات عن طريق ربط مجموعة من المستقيمات بمساحة وفق التعليمات:

Preprocessor>Modeling>Create>Areas> Arbitrary>By Lines



الشكل ١١-١٣٢ تعريف المساحات بدءاً من المستقيمات



الشكل ١١-١٣٣ المساحات الثلاث

٥- التقطيع

باعتبار أنه لدينا ثلاث مساحات تمثل ثلاث مناطق مختلفة الخواص الحرارية فهنا لا بد من ربط كل من المساحات الثلاث مع الخصائص المادية الثلاث التي تم تعريفها في بند المواد السابق (البند الثالث) ثم نقوم بالتقطيع الآلي. إن مرحلة ربط كل مساحة بمادتها تتم وفق التعليمات:

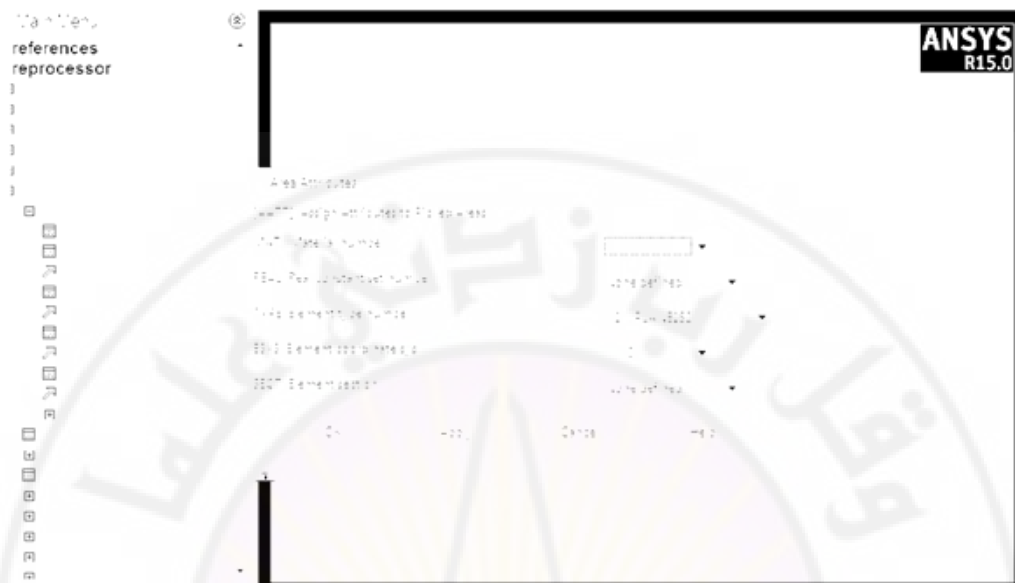
Main Menu>preprocessor>meshing>Mesh Attributes>Picked Areas

والمبينة بالشكل ١١-١٣٤ حيث نستخدم زر الفأرة اليمين لالتقاط السطح الأول وربطه بالمادة الأولى، ثم الثاني ثم الثالث.



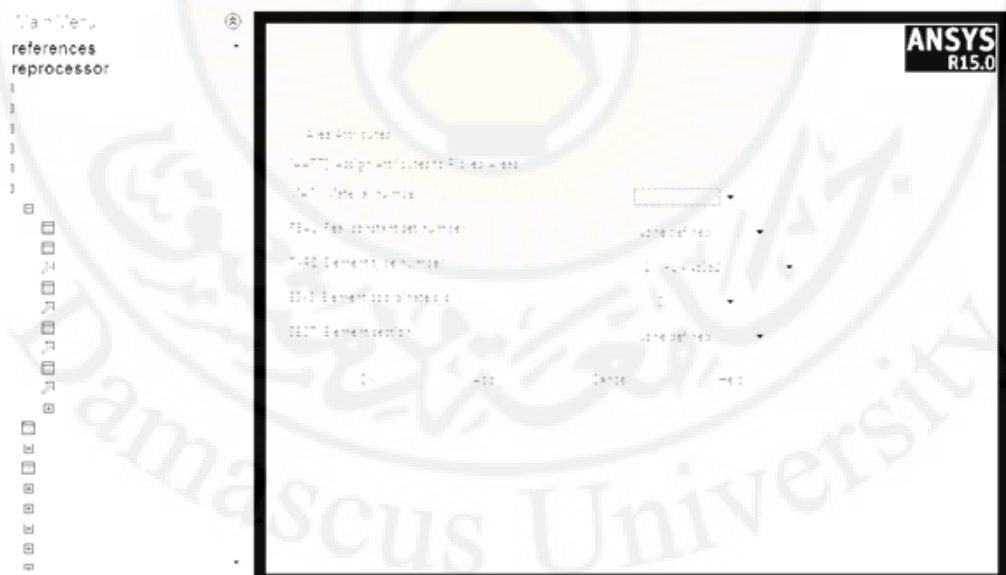
الشكل ١١-١٣٤ ربط المساحات الثلاث مع المواد الثلاث

يبين الشكل ١١-١٣٥ ربط المساحة الأولى مع المادة الأولى



الشكل ١١-١٣٥ ربط المساحات الأولى مع المادة رقم ١

يبين الشكل ١١-١٣٦ عملية ربط السطح الثاني بالمادة الثانية



الشكل ١١-١٣٦ ربط المساحات الأولى مع المادة رقم ٢

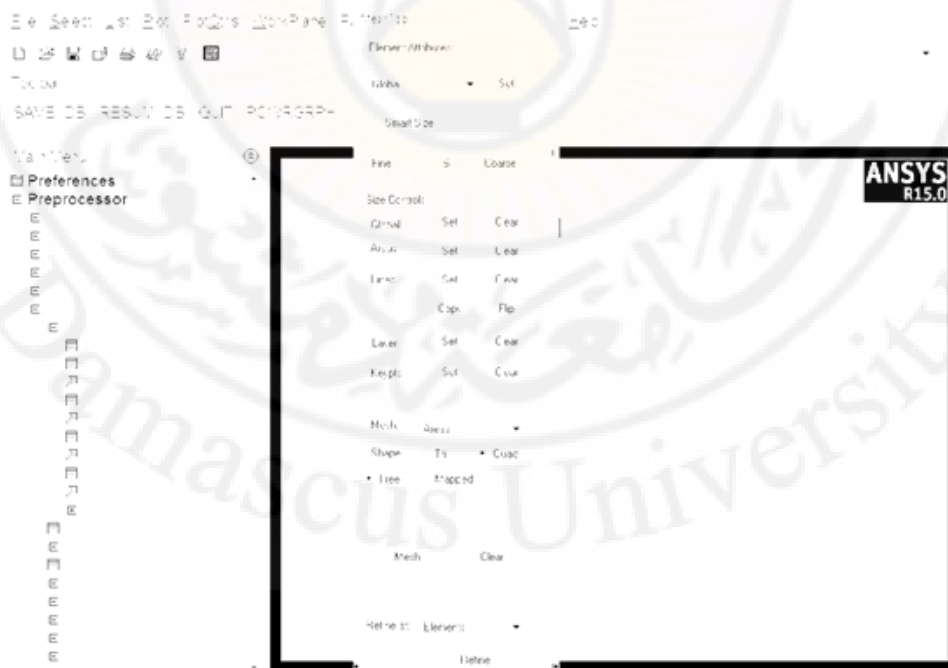
يبين الشكل ١١-١٣٧ عملية ربط السطح الثالث بالمادة الثالثة



الشكل ١١-١٣ ربط المساحات القائمة مع المادة رقم ٣

نقوم الآن بمرحلة التقطيع وليكن التقطيع الآلي. يبين الشكل ١١-١٣ التعليمات والواجهة البيانية الموافقة لتقطيع المساحات الثلاث.

Preprocessor>Meshing>mesh>Area>Free



الشكل ١١-١٣ اختيار كل الأسطح للتقطيع الآلي

كما يبين الشكل ١١-١٣٩ الشكل النهائي للمساحات بعد التقطيع



الشكل ١١-١٣٩ تقطيع الآلي للمساحات الثلاث

يمكن التحقق من صحة العمل عبر طباعة جدول List للسطوح الثلاث والتأكد من تمام عملية الربط كما هو مبين بالجدول ١١-٢.

الجدول ١١-٢: جدول List للسطوح الثلاث

LIST ALL SELECTED AREAS.												
NUMBER	LOOP	LINES			AREA	ELEM SIZE	#NODES	#ELEM	MAT	REAL	TYP	ESVS
1	1	1	2	3	4	N/A	0.000	0	0	1	0	0
		5	6									
2	1	10	3	2	7	N/A	0.000	0	0	2	0	0
		8	9									
3	1	13	14	9	8	N/A	0.000	0	0	3	0	0
		11	12									

٦- تطبيق الشروط الحدية

هنا الشروط الحدية هي درجات الحرارة، حيث نطبق درجة حرارة ٢٧ درجة مئوية (٣٠٠ كلفن) على الخططين الممثلين للسطح الخارجي و٧٢٧ درجة مئوية (١٠٠٠ كلفن) على الخططين الممثلين للسطح الداخلي. يبين الشكل ١١-١٤٠ الواجهة الموافقة لتعليمة تطبيق شرط حدي (درجة حرارة).

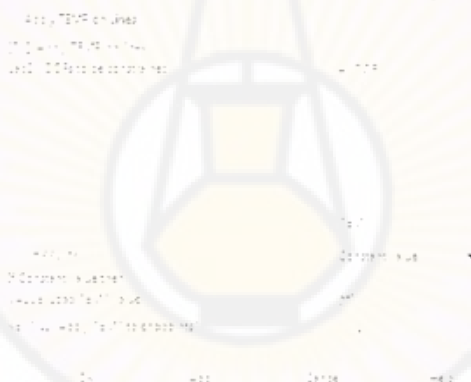
Preprocessor>Load >Define Loads>Apply>Thermal>Temperature

كما ستبين الأشكال اللاحقة ١١-١٤١ الشكل ١١-١٤٢ تفاصيل متممة للواجهة المبينة بالشكل ١١-

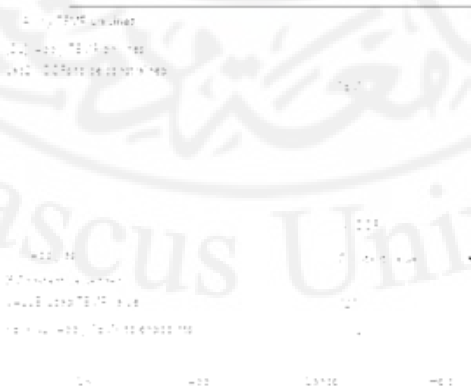
١٤٠



الشكل ١١-١٤ تطبيق درجات الحرارة كشرط حدية



الشكل ١١-١٤١ تطبيق درجة الحرارة ٢٧ على المستقيمين الخارجيين

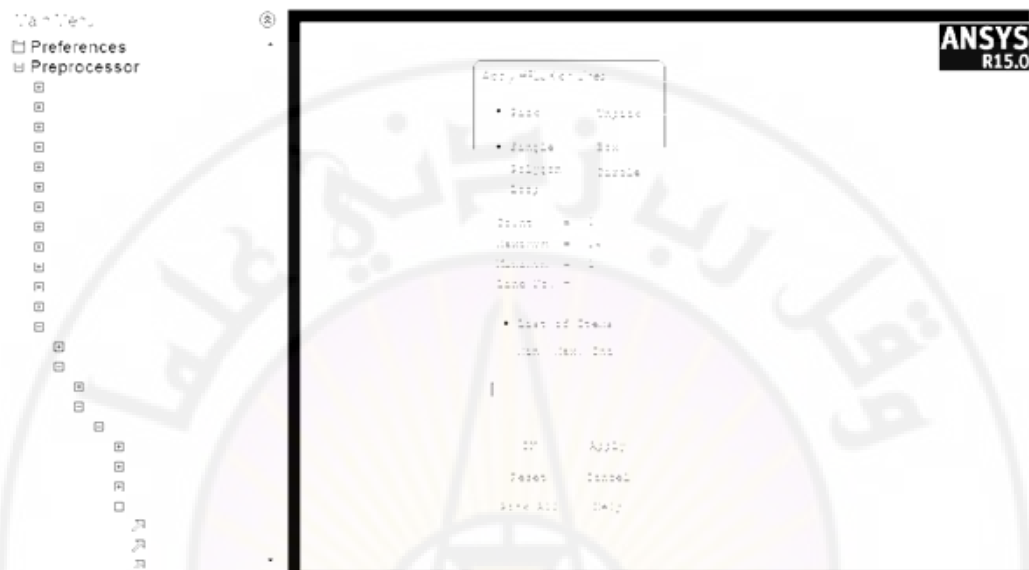


الشكل ١١-١٤٢ تطبيق درجة الحرارة ٧٢٧ على المستقيمين الداخليين

تطبيق الشرط الحدي على خطي التناظر (تدفق حراري معدوم) ويتم ذلك عبر التعليمات

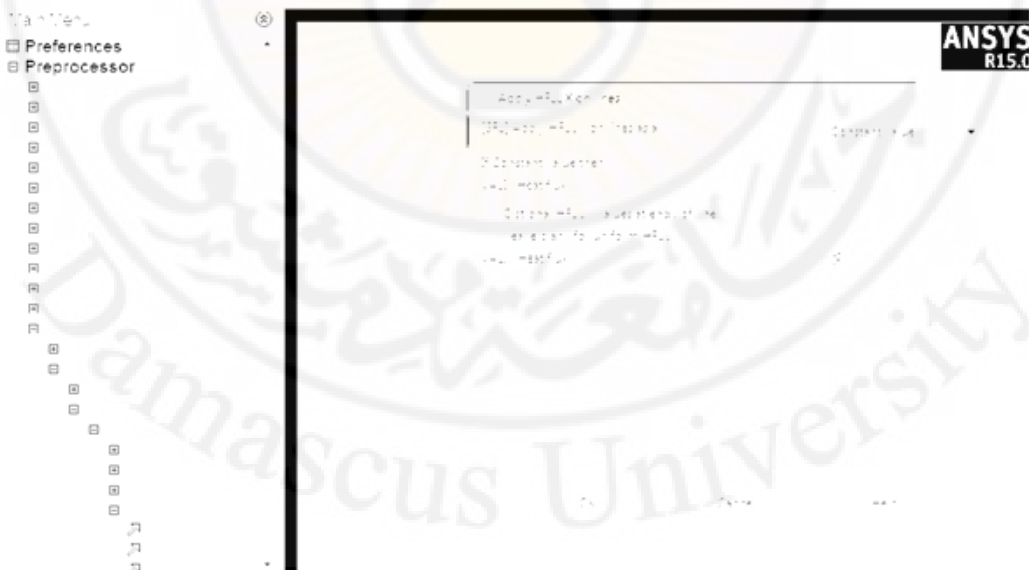
Preprocessor>Load >Define Loads>Apply>Thermal>Heat Flux

كما يبين الشكل ١١-١٤٣



الشكل ١١-١٤٣ اختيار المستقيمات المعيرة عن شرط التناظر وعلى خطي التناظر

يبين الشكل ١١-١٤٤ إدخال تدفق حراري صفري



الشكل ١١-١٤٤ (انعدام التدفق الحراري) على خطي التناظر

٧- تنفيذ الحل Solution

٨- إخراج النتائج

وهي المرحلة التي تدعى بمرحلة ما بعد المعالجة (وهي مرحلة إظهار النتائج) وتتم بموجب التعليمات:

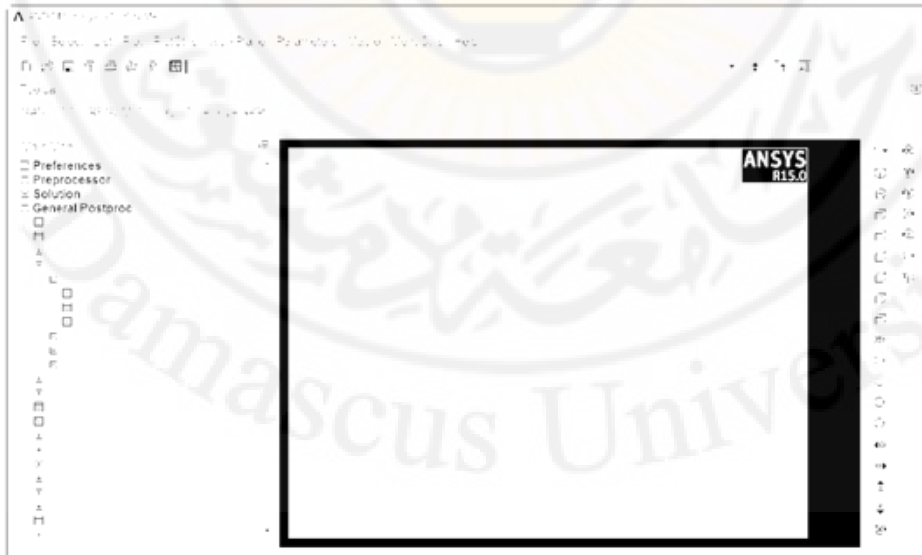
General Postproc>plot Results>Deformed Shape

كما يبين الشكل ١١-١٤٥ التعليمات المناسبة لإظهار توزيع درجات الحرارة عبر طبقات العوازل الثلاث.

كما يبين الشكل ١١-١٤٦ توزيع درجات الحرارة قبل وبعد التطبيق الحراري.

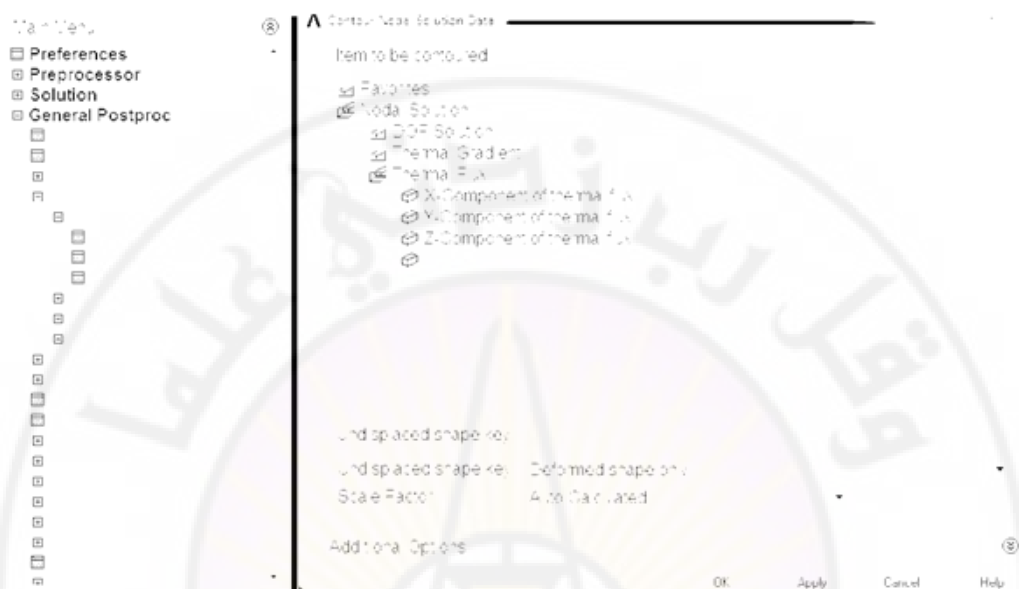


الشكل ١١-١٤٥ تعليمات إظهار توزيع درجات الحرارة عبر طبقات العوازل

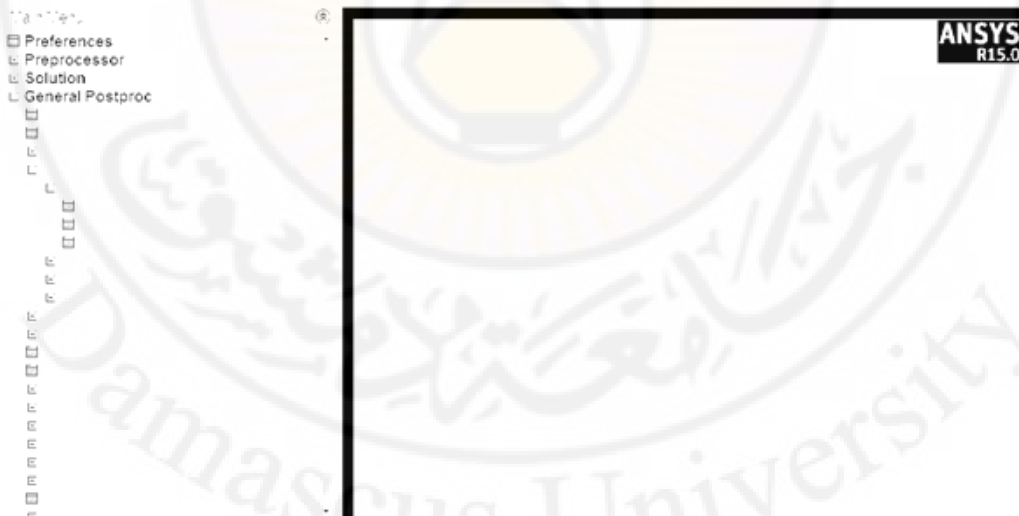


الشكل ١١-١٤٦ توزيع درجات الحرارة عبر طبقات العوازل

كما يبين الشكل ١١-١٤٧ التعليمات المناسبة لإظهار توزيع التدفق الحراري عبر طبقات العوازل الثلاث. كما يبين الشكل ١١-١٤٨ توزيع التدفق الحراري عبر الطبقات العازلة الثلاث.



الشكل ١١-١٤٧ تعليمات إظهار توزيع التدفق الحراري عبر طبقات العوازل

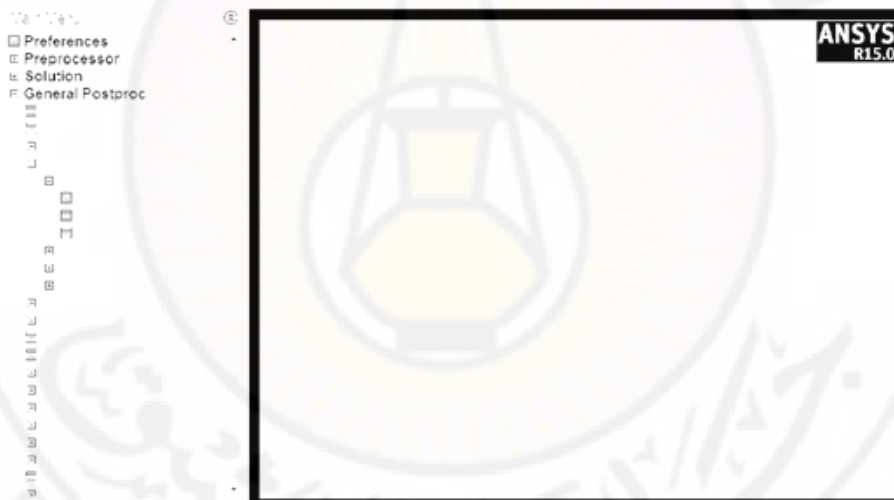


الشكل ١١-١٤٨ التدفق الحراري عبر طبقات العوازل

كما يبين الشكل ١١-١٤٩ التعليمات المناسبة لإظهار التدرج الحراري عبر طبقات العوازل الثلاث. كما يبين الشكل ١١-١٥٠ التدرج الحراري عبر الطبقات العازلة الثلاث.



الشكل ١١-١٤٩ تعليمية إظهار التدرج الحراري عبر طبقات العوازل



الشكل ١١-١٥٠ التدرج الحراري عبر طبقات العوازل

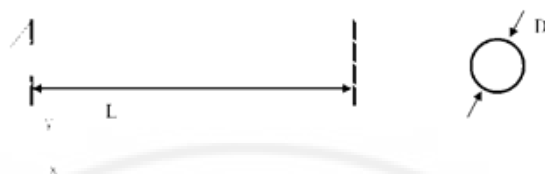
١١-١٨- مثال ٦: جانراً ذا مقطعاً دائري مشبّاً من الطرفين يخضع لدرجة حرارة

يبين الشكل ١١-١٥ جازر ذا مقطعاً دائري مثبتاً من الطرفين يخضع لدرجة حرارة ١٧٥ درجة مئوية والمطلوب تحديد ردود فعل المساند نتيجة الحمل الحراري المطبق.

الأبعاد الهندسية والمواصفات الحرارية والميكانيكية هي:

$$L = 250\text{mm}, D = 25\text{mm}, T = 175\text{c}^\circ, T_{ref} = 25\text{c}^\circ$$

$$E = 205 \text{ GPa}, \nu = 0.3, \alpha = 11.7 \cdot 10^{-6} \frac{1}{^\circ\text{C}}$$



الشكل ١١-١٥١ جانز ذو مقطع دائري مثبت من الطرفين يخضع لدرجة حرارة ثابتة

حيث: درجة حرارة الوسط المحيط $T_{ref} = 25^{\circ}C$

$$\alpha = 11.7 \cdot 10^{-6} \frac{1}{^{\circ}C}$$

لنمذجة هذه المسألة الإنشائية الحرارية لابد من اتباع الخطوات التالية (طبعاً هناك الكثير من الخطوات المتكررة سنمر عليها سريعاً باعتبارها قد عولجت سابقاً)

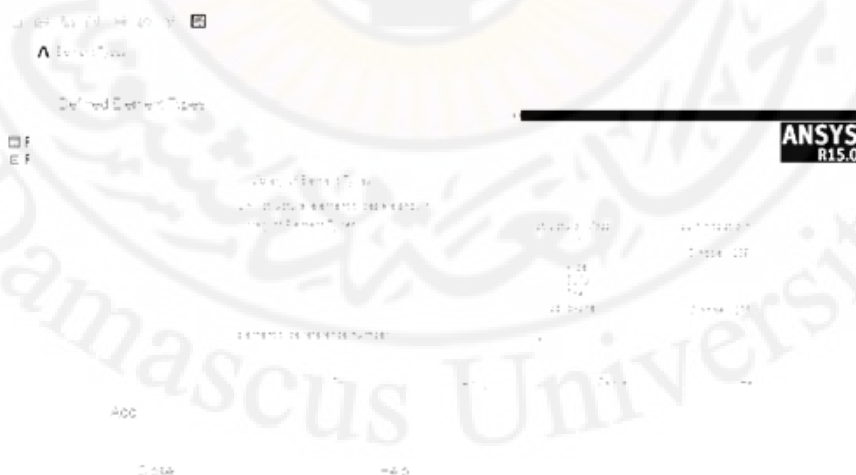
١- نفس الخطوات تسمية الملف والعنوان والمجلد كما مر معنا في الفقرة ١١-٣.

٢- فيما يتعلق بنوع المعالجة فهي Preference>Structural

بما أن درجة حرارة الوسط المحيط ٢٥ مئوية وباعتبار أن جميع المواد في مكتبة المواد تكون درجة الحرارة المحيطية صفر فلا بد من تعديلها وفق التعليمات التي تكتب وتنفذ في قائمة منطقة الأوامر

الكتابية Command Line بالشكل التالي: MP,REFT,1,25

٣- اختيار العنصر وهو Beam188 كما يبين الشكل ١١-١٥٢.



الشكل ١١-١٥٢ اختيار العنصر

٤- اختيار المواد وهنا ندخل المعاملات الميكانيكية والحرارية من أجل المادة نفسها وفق الشكل ١١-١١-

١٥٣ والشكل ١١-١٥٤



الشكل ١١-١٥٣ إدخال الثوابت الميكانيكية

الشكل ١١-١٥٤ إدخال الثوابت الحرارية

٥- تعريف قيم بارامترية للجائز

سنقوم بإنشاء النموذج الهندسي بشكل بارامتري (أي نترك الطول L والقطر D) بحيث تكون قابلة للتعديل. القيم البارامترية يتم إدخالها عبر utility Menu>Parameters كما يبين الشكل ١١-١٥٥ وندخل القيم الثلاث وبعد الانتهاء من كل إدخال نضغط Accept كما يبين الشكل ١١-١٥٦



الشكل ١١-١٥٥ تعليمة إدخال قيم بارامترية



الشكل ١١-١٥٥ إدخال أول قيمة بارامترية لقطر الجانز

بمجرد الانتهاء من الإدخالات يمكن التأكد من أن القيم الثلاث أصبحت بارامترية كما يبين الشكل ١١-١٥٦.

١٥٦.



الشكل ١١-١٥٦ تنفيذ تعليمة Scalar parameters

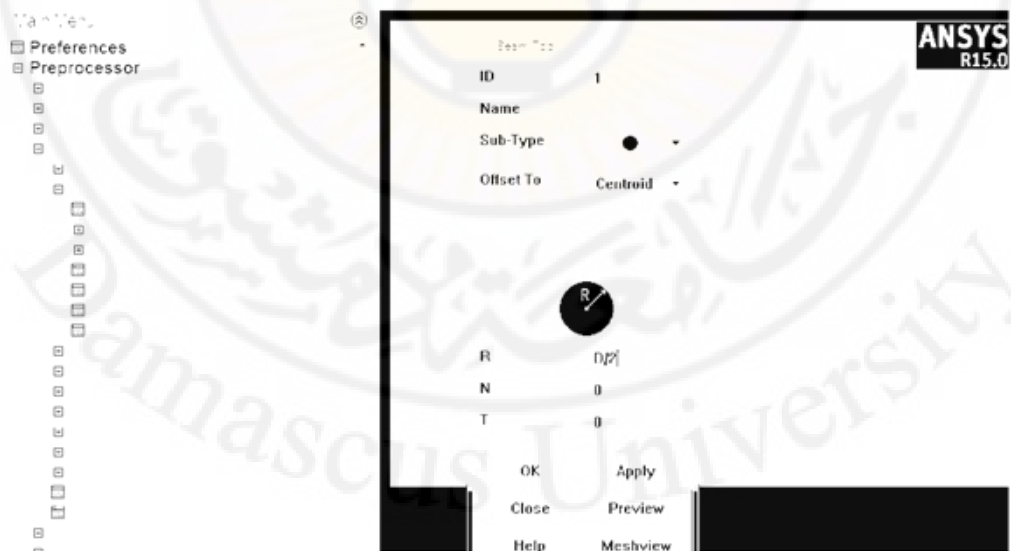
يبين الشكل ١١-١٥٩ توليد مستقيم (كما مر معنا سابقاً).



الشكل ١١-١٥٩ توليد المستقيم

٧- تعريف نوع المقطع

يبين الشكل ١١-١٦٠ تعريف مقطع دائري وبنصف قطر بارامترى D



الشكل ١١-١٦٠ تعريف مقطع دائري للجائز.

٨- التقطيع

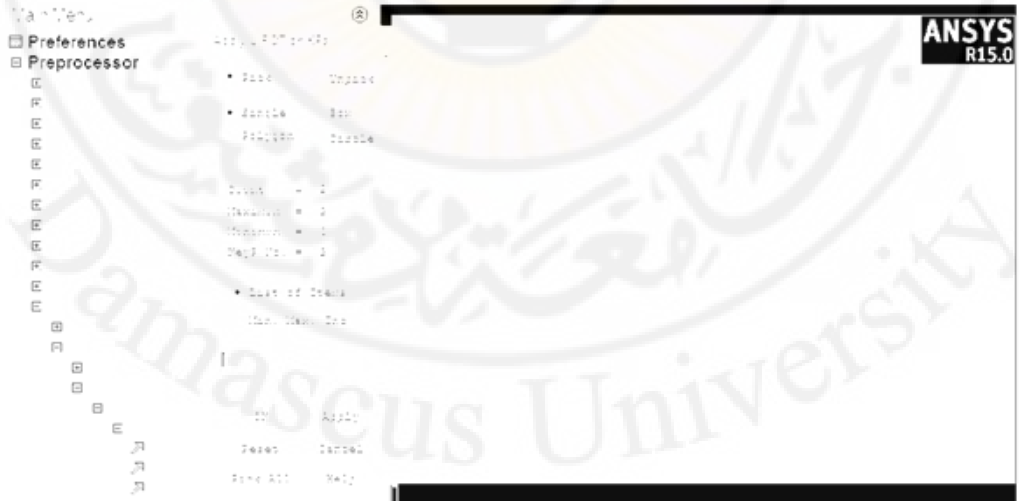
يبين الشكل ١١-١٦ الشكل النهائي للجائز المقطع لثلاثة عناصر ويمكن العودة للتمرين الأول إن لزم الأمر.



الشكل ١١-١٦ تقطيع الجائز

٩- تعريف الشروط الحدية

يبين الشكل ١١-١٦ الشكل النهائي لتثبيت النهايتين (تثبيت كل درجات الحرية) ويمكن العودة للتمرين الأول إن لزم الأمر.



الشكل ١١-١٦ الشروط الحدية على النهايتين

يبين الشكل ١١-١٦٣ الشكل النهائي لتعليمة تطبيق درجات حرارة كشرط حدي على كل المستقيم المكون لكل العقد.



الشكل ١١-١٦٣ الواجهة الموافقة لتطبيق الشروط الحدية (درجة حرارة) على المستقيم

كما يبين الشكل ١١-١٦٤ إدخال درجة الحرارة كشرط حدي.



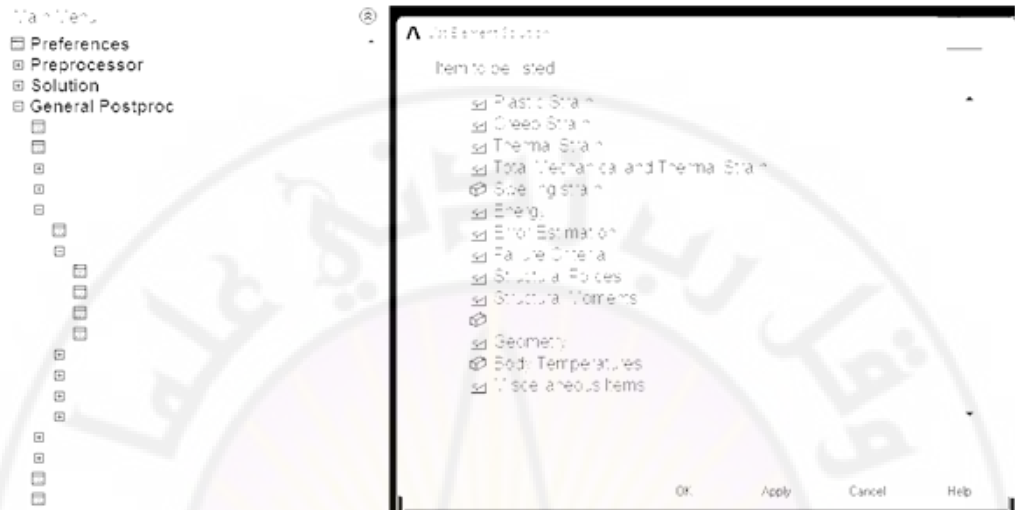
الشكل ١١-١٦٤ الشروط الحدي (درجة حرارة ١٧٥ مئوية) على كل المستقيم

١٠- مرحلة الحل

وهي بنفس التسلسل للتمارين السابقة.

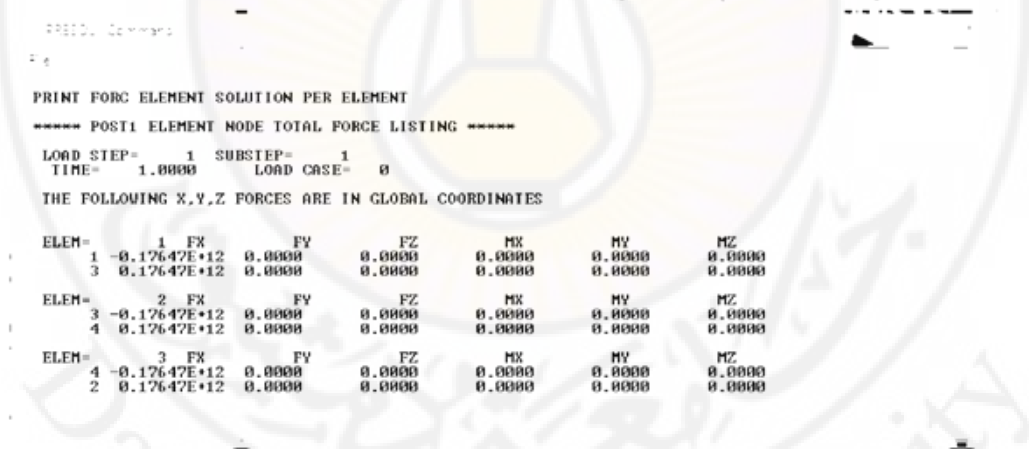
١١- إخراج النتائج

يبين الشكل ١١-١٦ التعليمات المناسبة لإظهار ردود فعل المساند نتيجة تطبيق درجة حرارة ١٢٧ مئوية.



الشكل ١١-١٦ الواجهة الموافقة لطباعة قيم ردود فعل المساند بفعل درجة الحرارة ١٢٧ مئوية

كما يبين الشكل ١١-١٦ قيم ردود فعل المساند.



الشكل ١١-١٦ قيم ردود فعل المساند بفعل درجة الحرارة ١٢٧ مئوية

المراجع

1. Amar Khennane, Introduction to Finite Element Analysis Using MATLAB and Abaqus, CRC press Taylor & Francis Group, 2013.
2. Richard Gagné, Ali Gharbi, « Exemples de cas d'analyse multicritère dans le cadre d'études de faisabilité pour des projets technologiques », Département de génie de la production automatisée, École de technologie supérieure, Montréal, Québec.
3. ABAQUS Documentation V6.11, Dassault Systèmes, 2011
4. ANSYS Documentation V15, SAS IP Inc, 2013.
5. Jacob Fish, Ted Belytschko , A first course in finite element analysis, JohnWiley & Sons, Ltd, 2007
6. G. R. LIU, S. S. QUEK, The finite element method a practical course, Elsevier Science Ltd. , 2003

اللجنة العلمية:

الأستاذ الدكتور محمد رشيد الشرجي

الأستاذ الدكتور محمد علي سلامة

الأستاذ الدكتور خليل عزيمة

المدقق اللغوي:

الأستاذ الدكتور محمد موعد

حقوق الطبع والترجمة والنشر محفوظة

لمديرية الكتب والمطبوعات

جامعة دمشق

