نظرية القياس

وقل رب زدني علما
Damascus University

منشورات جامعة دمشق
كلية العلوم

نظرية القياس

(موجز في نظرية القياس وتكامل لوبيغ)

الدكتور
محمد بشير قابيل
أستاذ في قسم الرياضيات
كلية العلوم_ جامعة دمشق

الدكتور
عهد كفى
أستاذ في قسم الرياضيات
كلية العلوم_ جامعة تشرين

الدكتور
محمود باكير
مدرس في قسم الرياضيات
كلية العلوم_ جامعة تشرين

جامعة دمشق

١٤٤٠ - ١٤٤١ هـ
٢٠١٨ - ٢٠١٩ م

وقل رب زدني علما
Damascus University

الفهرس

		أرقام الصفحات
	المقدمة	٧
الـفصل الأول	بعض المفاهيم الأساسية في نظرية القياس	٩
الـفصل الثاني	القياس الموجب	٢٣
الـفصل الثالث	التطبيقات القيوسة	٦٥
الفصل الـرابع	التكامل	٨١
الفصل الخامس	الصفوف المطردة و جداء فضائين قيوسين	٩٥
الفصل السادس	القياسات العقدية ومبرهنة رادون _ نيكوديم	١١٥
الفصل السابع	بعض أنماط التقارب في نظرية القياس والفضاءات $L^p(\mu)$	١٣٣
الملحق(١)	أ – حول مفهوم الدالة المميزة	١٦٧
	ب– حول مفهوم النهاية العليا والنهاية الدنيا	١٦٨
الملحق(٢)	لمحة عن الدوال ذات التغير المحدود	١٦٩
الملحق(٣)	كلمات عن تكامل ستيلجس	١٧٥
	تمارين محلولة	١٧٩
	أهم المصطلحات العلمية	٢٢٩
	المراجع العلمية	٢٣٣

وقل رب زدني علما
Damascus University

مقدمة

إن هدف هذا الكتاب تقديم عرض موجز لنظرية القياس "**Measure Theory**" وفي الواقع ليست نظرية القياس إلا نظرية التكامل المعاصرة التي بدأت حينما بحث الرياضيون في حساب السطوح والحجوم والذي يؤول إلى حساب التكامل الريماني لدوال (لتوابع) "منتظمة" كأن تكون مستمرة أو مستمرة قطعياً منطلقين للوصول إلى ذلك من قياس كل فترة (مجال) بطولها، وكل حيّز في الفضاء بحجمه. إلا أنّ الرياضيين سرعان ما اكتشفوا أن القياس بالطول والمساحة والحجم لا يختلف من حيث خصائصه عن قياس الشحنات الكهربائية أو الكتل المادية أو احتمالات الأحداث، بل وجدوا أن بعض المواقف التقليدية تقتضي قياس الفترة لا بطولها وإنما بتغير دالة متزايدة معرفة على هذه الفترة مما أدى إلى استنباط تكامل استيلجس.

وهكذا لجأ الرياضيون إلى التجريد في دراستهم لنظرية القياس فافترضوا مجموعة غير خالية وصفّاً من أجزائها مغلقاً بالنسبة للعمليات المجموعاتية العدودة على الأكثر، وافترضوا أن عدداً موجباً ملحق بكل منها، بحيث نحصل على دالة معرفة على هذا الصف تتصف بخصائص القياس التقليدي على صف الفترات. وكما أدى قياس الفترات بأطوالها إلى تكامل ريمان للدوال الحقيقية "المنتظمة" أدى هذا التعريف المجرد إلى مقابلة كل قياس بمفهوم للتكامل لدوال عددية أو حتى لدوال تأخذ قيمها في فضاءات متجهية(شعاعية). وهكذا وجد الإنسان نفسه – بعد أن اقتصر على المفهوم التقليدي للتكامل قروناً طويلة – أمام ما لا حصر له من مفاهيم التكامل بحيث يستطيع أن يصطفي تكاملاً لكل المجالات التي كانت موصدة في وجهه.

إلا أن الرياضي بعد أن قام بهذا التعميم الرائع لمفهوم القياس وجد أن كمال عمله يكمن في مكاملة دوال، وأنه إذا قرن كل دالة بتكاملها فإنه يجد نفسه أمام تطبيق خطي على فضاء دوال، وهذا ما حدا به إلى عكس المسألة وتعريفه للتكامل بأنه تطبيق خطي على فضاء دوال، يحقق بعض الشروط البسيطة. ومن ثم توسيع كل تكامل إلى صف أوسع من الدوال [وبصورة خاصة إلى صف يشتمل على الدوال المميزة لمجموعات تلعب دوراً أساسياً في هذا الفضاء].

ولكل من الطريقتين مزاياها في التطبيقات المتعددة فقد يكون " المفهوم الأول" أسهل تناولاً في بعضها، في حين يكون "المفهوم الثاني" أسهل تناولاً في بعضها الآخر.قمنا في هذا الكتاب بعرض الاتجاه الأول والتصدي بإيجاز لهذا الموضوع.

ويشمل هذا الكتاب المواضيع الآتية:

بعض المفاهيم الأساسية في نظرية القياس - القياس الموجب - التطبيقات القيوسة - التكامل - الصفوف المطردة و جداء فضائين قيوسين- القياسات العقدية ومبرهنة رادون_نيكوديم - بعض أنماط التقارب في نظرية القياس والفضاءات $L^p(\mu)$ - لمحة عن الدوال ذات التغير المحدود وعن تكامل ستيلجس.

ونأمل أن يستفيد منه طلاب الرياضيات في دراستهم لمقرر نظرية القياس وكذلك طلاب السنة الثالثة إحصاء لدى دراستهم لمقرر التحليل التابعي والقياس.

نشكر كل من أسهم في إعداد هذا الكتاب والله ولي التوفيق.

المؤلفون

الفصل الأول

بعض المفاهيم الأساسية في نظرية القياس

سندرس في هذا الفصل المفاهيم الآتية:

- الحلقة " Ring " • الجبر "Algebra" • الحلقة التامة " σ - Ring "
- الجبر التام " σ - Algebra " • المجموعات البوريلية " Borel Sets "

وسندرس في فصول لاحقة مفهوم القياس الموجب على جبر تام، ومفهوم الدوال القيوسة، ثم مفهوم تكامل دالة قيوسة بالنسبة إلى قياس معطى، وسنبدأ بمفهوم المجموعات العدودة.

١-١- المجموعات العدودة:

فيما يأتي X أو Ω تشير إلى مجموعة غير خالية، و $\overset{\Omega}{2}$ أو $\mathcal{P}(\Omega)$ تشير إلى مجموعة أجزاء Ω، وكل مجموعة جزئية من $\mathcal{P}(\Omega)$ سنسميها صفاً من أجزاء Ω أو جماعة من أجزائها. نقول عن Ω إنها مجموعة منتهية إذا كانت خالية أو كان بالإمكان إيجاد تقابل (تطبيق متباين وغامر) $\varphi:\{1,2,....,n\}\to\Omega$ ونكتب عند ذلك: $|\Omega|=n$ ونقول عندئذ إن Ω منتهية، وإن عدة Ω تساوي n، وسنضع تعريفاً $|\phi|=o$:عدد عناصر المجموعة الخالية يساوي الصفر.وفي خلاف ذلك نقول إنها غير منتهية.

ونقول عن Ω إنها مجموعة قابلة للعد (عدودة) إذا أمكن اصطناع تطبيق متباين وغامر $\varphi:\{1,2,...,n,....\}\to\Omega$. أي إذا أمكن إيجاد تقابل بينها وبين مجموعة الأعداد الطبيعية.

وهنا نرى أن:

١ــ أية مجموعة جزئية غير منتهية من مجموعة عدودة Ω تكون عدودة.

٢ــ مجموعة الأعداد العادية الموجبة تماماً $\mathbb{Q}^+$ عدودة.

٣ – الاجتماع العدود لمجموعات عدودة هو مجموعة عدودة.

٤ – مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ هي مجموعة غير منتهية وغير قابلة للعد.

١-١-١- تدريبان :

١- هل مجموعة الأعداد الأولية منتهية أو غير منتهية ؟

٢- تعلم أن مجموعة قواسم عدد طبيعي منتهية، ما هي مجموعة قواسم العدد $(91)^2$ وما عدتها ؟

١-٢- الحلقة والحلقة التامة من أجزاء مجموعة Ω:

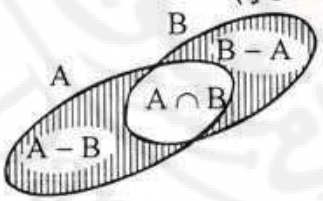
١-٢-١- تعريف الحلقة البوليانية: نقول عن جماعة τ " من أجزاء Ω " إنها حلقة بوليانية أو حلقة من أجزاء Ω إذا تحقق ما يلي:

1. $\phi \in \tau$
2. $A,B \in \tau \Rightarrow A \cup B \in \tau, A \cap B \in \tau, A - B \in \tau$

ينتج مباشرة من ذلك أنه إذا كان $A,B \in \tau$ فإن:

$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$ (الفرق التناظري)

مجموعة تنتمي إلى τ.



١-٢-٢- مبرهنة :

إذا كانت τ جماعة من أجزاء Ω فإن الشرط اللازم والكافي كي تكون هذه الجماعة حلقةً هو أن يتحقق ما يلي:

1. $\phi \in \tau$
2. $A,B \in \tau \Rightarrow A \Delta B \in \tau, A \cap B \in \tau$

وهكذا تكون الثلاثية $(\tau, \Delta, \cap)$ حلقة بالمعنى الجبري المألوف.

وفكرة الإثبات تستند إلى الخواص الآتية:

- $A\Delta B=(A-B)\cup(B-A)$
- $A\Delta B=(A\cup B)-(B\cap A)$
- $A\cap B=(A\cup B)\Delta(B\Delta A)$
- $A\cup B=(A\Delta B)\Delta(B\cap A)$
- $A-B=A\Delta(B\cap A)$
- $A\ \Delta\ (B\Delta C)=(A\Delta B)\Delta C$
- $A\cap(B\Delta C)=(A\cap B)\Delta(A\cap C)$
- $\phi\Delta A=A$
- $A\Delta A=\phi$

حيث A,B,C مجموعات جزئية من المجموعة غير الخالية X .

١-٢-٣- تدريبات:

تدريب (١): لتكن $\Re\neq\phi$ جماعة غير خالية من أجزاء Ω تحقق ما يلي:

$$(i_0)\ A,B\in\Re\Rightarrow A\cup B\in\Re,\ A-B\in\Re$$

برهن أن هذا الشرط يكافئ كلاً من الشروط الآتية:

$$(i_1)\ A,B\in\Re\Rightarrow A\Delta B\in\Re,\ A\cap B\in\Re$$

$$(i_2)\ A,B\in\Re\Rightarrow A\Delta B\in\Re,\ A\cup B\in\Re$$

$$(i_3)\ A,B\in\Re\Rightarrow A\Delta B\in\Re,\ A-B\in\Re$$

هل تستنتج من ذلك أن $\Re$ تكون حلقة إذا حققت أحد الشروط الأربعة السابقة المتكافئة ؟

تدريب (٢): إذا كانت $\Re\neq\phi$ جماعة غير خالية من أجزاء Ω تحقق الشرط

$$(j_0)\ A,B\in\Re\Rightarrow A\cup B\in\Re,\ A\cap B\in\Re$$

فإن $\Re$ ليست بالضرورة حلقة.

تدريب (٣): إذا كان $f : X_1 \to X_2$ تطبيقاً مفروضاً و $\mathfrak{R}_1$ حلقة من أجزاء X_1 و $\mathfrak{R}_2$ حلقة من أجزاء X_2 فهل

$$f(\mathfrak{R}_1) = \{f(A_1) : A_1 \in \mathfrak{R}_1\}$$

حلقة ؟ وهل $f^{-1}(\mathfrak{R}_2) = \{f^{-1}(A_2) : A_2 \in \mathfrak{R}_2\}$ حلقة ؟علّل إجابتك.

تدريب (٤): أوجد جميع الحلقات والجبور من أجزاء $\Omega = \{a,b\}$.

١-٢-٤- تعريف الحلقة التامة :

نقول عن جماعة τ من أجزاء Ω إنها حلقة تامة أو سيغما حلقة : σ- حلقة إذا كانت τ حلقةً وتحقق الشرط الآتي – الشرط σ-:

$$\text{if } A_1, A_2, \ldots \subseteq \tau \text{ then } \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A \in \tau \qquad (\text{الشرط } \sigma)$$

وهذا يعني إن اتحاد أيّ متتالية من عناصر τ هو عنصر من τ .

١-٢-٥- أمثلة:

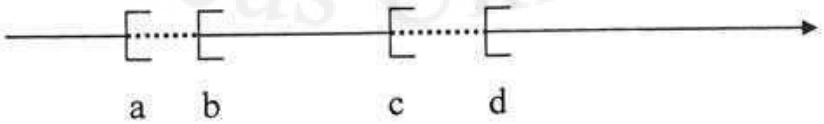
١- إذا كانت $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ مجموعة نتائج رمي حجر نرد مرة واحدة. وكانت $\tau_1 = \{\phi, \{1\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$ جماعة من أجزاء Ω

$\tau_2 = \{\phi, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$ جماعة ثانية من أجزاء Ω

$\tau_3 = \mathcal{P}(\Omega)$ جماعة أجزاء Ω

فإنّ τ_1 حلقة وكذلك τ_3 لكن τ_2 ليست حلقة.

٢- بما أن اجتماع مجالين ليس بالضرورة مجالاً (أنظر الشكل المجاور)



فإن صف (أوجماعة) المجالات التي من الشكل $]a,b[$ ليست حلقة من أجزاء $\mathbb{R}$.

٣- صف المجموعات المنتهية في أي مجموعة Ω غير خالية هو حلقة من أجزائها.

١-٣- الجبور البوليانية:

لنفرض أن Ω مجموعة غير خالية و $\mathcal{A} \subseteq 2^{\Omega}$ جماعة من أجزائها، نقول إن $\mathcal{A}$ جبر بولياني أو جبر من أجزاء Ω إذا تحقق مايلي :

1. $\phi \in \mathcal{A}$
2. $A,B \in \Omega \Rightarrow A \cup B, A \cap B, A - B \in \mathcal{A}$
3. $\Omega \in \mathcal{A}$

وينتج من ذلك أن $\mathcal{A}$ يكون جبراً إذا كان $\mathcal{A}$ حلقةً مغلقةً بالنسبة لعملية التتميم:

$$A \in \mathcal{A} \Rightarrow \Omega - A = A^c \in \mathcal{A}$$

١-٣-١- تدريبان:

تدريب(١) : إذا كانت $\mathcal{R}$ حلقة من أجزاء Ω فبرهن أن الشرطين الآتيين متكافئان:

$(j_1)\ A \in \mathcal{R} \Rightarrow A^c \in \mathcal{R}$

$(j_2)\ \Omega \in \mathcal{R}$

إذن تكون أي حلقة تحقق أحد الشرطين السابقين المتكافئين جبراً من أجزاء Ω

تدريب (٢):

١- هل صف المجموعات المحدودة في $\mathbb{R}$ حلقة؟ هل هو جبر؟!

٢- هل صف المجموعات المغلقة في $\mathbb{R}$ حلقة؟ هل هو جبر؟!

١-٤- **تعريف الجبر التام:** نقول عن جبر $\mathcal{A}$ من أجزاء Ω إنه جبر تام **أو** سيغما جبر: σ- جبر إذا وفقط إذا كان مغلقاً بالنسبة للاتحاد العدود أي إذا حقق الشرط (σ):

$$A_1, A_2, ..., A_n, .. \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$$

وعندئذ نسمي الثنائية $(\Omega, \mathcal{A})$ **فضاء قيوساً** " Measurable Space " أو **فضاء قابلاً للقياس**، ونسمي كل عنصر من $\mathcal{A}$ **مجموعة قيوسة.**

١-٤- ١- أمثلة :

١ - إن 2^{Ω} جماعة جميع المجموعات الجزئية من Ω هي جبر تام (ومن ثم هي جبر). كذلك الصف $\mathcal{A} = \{\phi, \Omega\}$ جبر تام.

٢- إذا كانت X مجموعة ما غير خالية وكانت $\mathcal{A}$ جماعة أجزاء X العدودة أو المنتهية أو التي متمماتها كذلك:

$$\mathcal{A} = \{E \subseteq X; E \text{ (عدودة أو منتهية) أو } E^c \text{ (عدودة أو منتهية)}\}$$

فإن $\mathcal{A}$ جبر تام.

٣- إذا كانت $X = \mathbb{R}$ مجموعة الأعداد الحقيقية وكانت:

$$\mathcal{A} = \{E \subseteq X; E \text{ منتهية أو } E^c \text{ منتهية}\}$$

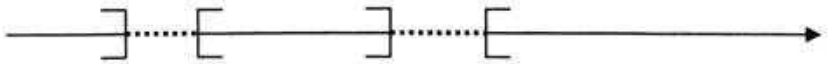
فإن $\mathcal{A}$ جبر من أجزاء X وليست جبراً تاماً (لماذا؟)

٤- إذا كانت X مجموعة غير خالية وكان $E \subseteq X$ فإن:

$\mathcal{A} = \{E, E^c, X, \phi\}$ جبر (بل جبر تام في X).

٥- إن جماعة المجالات المفتوحة في $\mathbb{R}$ ليست جبراً، فمن باب أولى ألا تكون هذه الجماعة جبراً تاماً.

(تذكر أن اجتماع مجالين مفتوحين ليس بالضرورة مجالاً مفتوحاً)



أو لاحظ أن اجتماع المجالين المفتوحين المرسومين أعلى هذا السطر ليس مجالاً.

١-٤-٢- تدريبات:

تدريب (١): إذا كان $\mathcal{A}$ جبراً تاماً في $\mathbb{R}$ يحوي جميع المجالات المحدودة المغلقة من اليسار والمفتوحة من اليمين، أي ذات الشكل $[a,b[$، فإن $\mathcal{A}$ سيحوي صف كل المجالات في $\mathbb{R}$، المفتوحة والمحدودة، أو غير المحدودة، والمغلقة المحدودة، وكذلك صف جميع المجالات المحدودة المفتوحة من اليسار والمغلقة من اليمين أي التي من الشكل $]a,b]$ ، وصف المجالات $]-\infty,b[$ أياً كان a و b من $\mathbb{R}$.

تدريب (٢): برهن أن الشرطين الآتيين متكافئان:

- $\mathcal{A}$ جبر تام في X.
- $\mathcal{A}$ جبر في X ومغلق بالنسبة للاتحاد العدود المنفصل أي إذا كانت $\{B_n\}_{n\geq 1}$ متتالية منفصلة من عناصر $\mathcal{A}$ فإن $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = B \in \mathcal{A}$

تدريب (٣): برهن أن الشرطيين الآتيين متكافئان:

- $\mathcal{A}$ جبر تام في X
- $\mathcal{A}$ جبر في X ومغلق بالنسبة للاتحاد العدود المتزايد أي إذا كانت $\{E_n\}_{n\geq 1}$ متتالية متزايدة من عناصر $\mathcal{A}$ فإن $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = E \in \mathrm{A}$.

تدريب (٤): برهن على أن تقاطع حلقتين حلقة وتقاطع جبرين جبر وتقاطع σ- حلقتين هو σ - حلقة ....!!. هل يمكن تعميم ذلك من أجل أي جماعة غير منتهية من الجبور التامة ؟

١-٦- الجبر التام المولد بصف غير خال

١-٦-١- ملاحظة وتعريف: إذا كانت ξصفاً من أجزاء $X \neq \phi$ فثمة جبر تام واحد على الأقل يحويه هو $\mathcal{P}(\Omega) = 2^{\Omega}$على سبيل المثال. وإن تقاطع جميع الجبور التامة التي تحوي ξهي جبر تام يحوي ξ ومن ثمّ سيكون أصغر جبر تام يحوي ξ. نسمي هذا الجبر التام "الجبر التام المولد بـــ ξأو الذي يولده ξ" ونرمّزه $\hat{\xi}$ أو $\sigma(\xi)$. ولما كان إثبات هذه سهل فسنتركه للقارئ.

١-٦-٢- ملاحظة أساسية : من الواضح أنه إذا كان ξ و η جماعتين غير خاليتين من أجزاء مجموعة X فإن:

$$\eta \subseteq \hat{\xi} \Rightarrow \hat{\eta} \subseteq \hat{\xi} \quad \text{و} \quad \xi \subseteq \hat{\eta} \Rightarrow \hat{\xi} \subseteq \hat{\eta} \quad \text{و} \quad \xi \subseteq \eta \Rightarrow \hat{\xi} \subseteq \hat{\eta}$$

١-٦-٣- نتيجة: إذا كان $\hat{\eta} \subseteq \xi$ و $\hat{\xi} \subseteq \eta$ فإن $\hat{\xi} = \hat{\eta}$.

أي إنّ الجبر التام المولد بأحدهما هو الجبر التام المولد بالآخر.

١-٧- جبر بوريل في فضاء تبولوجي (X,τ) والمجموعات البوريلية

نعلم أنه إذا كانت $X \neq \phi$و τجماعة من أجزاء Xفإننا نقول إن τ تبولوجيا على X إذاا:

1. $\phi, X \in \tau$
2. $A,B \in \tau \Rightarrow A \cup B \in \tau, A \cap B \in \tau$
3. "اتحاد أي جماعة منتهية أو غير منتهية من عناصر τهو عنصر من τ"

وعندئذ نسمي كل عنصر من τ مجموعة مفتوحة في الفضاء التبولوجي (X,τ).

إن τ صف المجموعات المفتوحة ليست بالضرورة حلقة، فمن باب أولى ألا تكون جبراً ولا جبراً تاماً. إن أصغر جبر تام يحوي τ سنرمز له بـ $\hat{\tau}$ أوبـ $\sigma(\tau)$ أو بـ $\mathfrak{B}_X$ ونسميه **جبر بوريل التام** في X أو **جبر بوريل** في X للسهولة.

١-٧-١- **تعريف:** كل عنصر ينتمي إلى جبر بوريل في فضاء تبولوجي (X,τ) يسمى **مجموعة بوريلية**.

(وهكذا كل مجموعة مفتوحة تكون بوريلية ولكن العكس ليس صحيحاً بالضرورة).

١-٧- ٢- نتائج:

في أي فضاء تبولوجي (X,τ) يتحقق ما يلي:

١- $\tau \subseteq \hat{\tau} = \sigma(\tau)$ أي إنّ كل مجموعة مفتوحة هي مجموعة بوريلية.

٢- كل مجموعة مغلقة هي مجموعة بوريلية.

٣- أي تقاطع عدود لمجموعات مفتوحة في X ليس بالضرورة مجموعة مفتوحة ولكنه مجموعة بوريلية.

٤- أي اتحاد عدود لمجموعات مغلقة ليس بالضرورة مجموعة مغلقة ولكنه مجموعة بوريلية.

١-٧- ٣- مثال:

لتكن $X=\{1,2,3,4\}$ ولتكن $\tau=\{\phi,X,\{1\},\{3\},\{1,3\}\}$

إن τ تبولوجيا على Xولكنها ليست حلقة وليست جبراً. وواضح أن كل جبر من أجزاء X هو جبر تام (لأن Xمجموعة منتهية)، وإن أصغر جبر يحوي τهو:

$$\sigma(\tau)=\hat{\tau}=\{\phi,X,\{1\},\{3\},\{1,3\},\{2,3,4\},\{1,2,4\},\{2,4\}\}$$

١-٧-٤- تطبيق :

إذا كان (X,τ) فضاء تبولوجياً و τ' جماعة المجموعات المغلقة في هذا الفضاء فإن:

$$\hat{\tau}=\hat{\tau}'=\mathfrak{B}_X \equiv "X \text{ جبر بوريل في }"$$

نعبر عن ذلك بقولنا إن جماعة المغلقات تولد جبر بوريل.

١-٨- جبر بوريل في $\mathbb{R}$: في الفضاء الحقيقي $\mathbb{R}$ المزود بالتبولوجيا المألوفة (حيث كل مجموعة مفتوحة هي اتحاد لمجالات مفتوحة) يكون:

١- كل مجال مفتوح في $\mathbb{R}$ هو مجموعة بوريلية.

٢- كل مجال مغلق في $\mathbb{R}$هو مجموعة بوريلية.

٣- كل مجال نصف مغلق من النمط $[a,b[$ هو مجموعة بوريلية.

٤- كل مجال نصف مفتوح من النمط $]a,b]$ هو مجموعة بوريلية.

٥- كل مجموعة وحيدة العنصر هي مجموعة بوريلية.

(برهن كل ذلك أو علِّل صحة ذلك!)

٦- مجموعة الأعداد الناطقة (أو المُنْطَقَة) $\mathbb{Q}$ هي مجموعة بوريلية. لأنها مجموعة عدودة فهي إذاً الاجتماع المعدود للمجموعات الأحادية الجزئية منها والتي هي مجموعات بوريلية وفق ما تقدم: $\bigcup_{x\in\mathbb{Q}}\{x\}\in\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$

١-٨-١- مبرهنات هامة

مبرهنة (١) :إن جماعة المجالات المفتوحة والمحدودة في $\mathbb{R}$ والتي نرمز لها بالرمز J_1 تولد جبر بوريل في $\mathbb{R}$ أي:

$$\text{if} \quad J_1 = \{]a,b[, a,b \in \mathbb{R}, a \le b\} \quad \text{then} \quad \hat{J}_1 = \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$$

الإثبات: نعلم أنه إذا رمزنا بـ τ لصف المجموعات المفتوحة في $\mathbb{R}$ كان $J_1 \subseteq \tau$ ومن ثمّ فإن $\hat{J}_1 \subseteq \hat{\tau} = \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$

ثم إنه إذا كانت O أية مفتوحة في $\mathbb{R}$ فيبرهن أن O يمكن أن تكتب على شكل اتحاد عدود لمجالات مفتوحة، وهذا يكفي للقول بأن: $\tau \subseteq \hat{J}_1$ ومن ثمّ فإن: $\hat{\tau} \subseteq \hat{J}_1$ أي $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}} \subseteq \hat{J}_1 \subseteq \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$ ومنه $\hat{J}_1 = \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$ وهو المطلوب.

سنورد فيما يلي بعض المبرهنات تاركين إثباتها للقارئ.

مبرهنة (٢) :

إن جماعة المجالات المغلقة والمحدودة في $\mathbb{R}$ والتي سنرمز لها بالرمز J_2 تولد جبر بوريل في $\mathbb{R}$. أي:

$$\text{if} \quad J_2 = \{[a,b], a,b \in \mathbb{R}, a \le b\} \quad \text{then} \quad \hat{J}_2 = \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$$

مبرهنة (٣):

إن جماعة المجالات من النمط $[a,b[$ (المغلقة من اليسار والمفتوحة من اليمين) في $\mathbb{R}$ تولد جبر بوريل في $\mathbb{R}$ أي :

$$\text{if} \quad J_3 = \{[a,b[, a,b \in \mathbb{R}, a \le b\} \quad \text{then} \quad \hat{J}_3 = \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$$

مبرهنة (٤):

إن جماعة المجالات من النمط $]a,b[$ (المفتوحة من اليسار والمغلقة من اليمين) **في** $\mathbb{R}$ **تولد جبر بوريل في** $\mathbb{R}$ **أي:**

$$\text{if } J_4=\{]a,b],a,b\in\mathbb{R},a\le b\} \text{ then } \hat{J}_4=\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$$

مبرهنة (٥):

إن جماعة المجالات المفتوحة والممتدة إلى اليمين تولد جبر بوريل في $\mathbb{R}$ أي:

$$\text{if } J_5=\{]a,\infty[,a\in\mathbb{R}\} \text{ then } \hat{J}_5=\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$$

مبرهنة (٦):

إن جماعة المجالات المغلقة والممتدة إلى اليمين تولد جبر بوريل في $\mathbb{R}$ أي:

$$\text{if } J_6=\{[a,\infty[,a\in\mathbb{R}\} \text{ then } \hat{J}_6=\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$$

مبرهنة (٧):

إن جماعة المجالات المفتوحة والممتدة إلى اليسار تولد جبر بوريل في $\mathbb{R}$ أي:

$$\text{if } J_7=\{]-\infty,b[,b\in\mathbb{R}\} \text{ then } \hat{J}_7=\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$$

مبرهنة (٨): (انظر الإثبات صفحة ١٨٥)

إن جماعة المجالات المغلقة والممتدة إلى اليسار تولد جبر بوريل في $\mathbb{R}$ أي:

$$\text{if } J_8=\{]-\infty,b],b\in\mathbb{R}\} \text{ then } \hat{J}_8=\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$$

Damascus University

تتمات وتمارين الفصل الأول

(إن التمارين في هذا الكتاب جزء لا يتجزأ من النظري)

١ ناقش صحة أو خطأ مايلي:

١. $[a,b]^c =]-\infty,a[\cup]b,\infty[$

٢. $]a,b[= \bigcup_{n=1}^{\infty}\left[a+\frac{1}{n},b-\frac{1}{n}\right]$

٣. $]a,b] = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left[a+\frac{1}{n},b\right]$

٤. $]a,\infty[= \bigcup_{n=1}^{\infty}]a,a+n[$

٢ صل بين الكلمة من العمود الأول ومعناها الموجود في العمود الثاني:

(1)	جبر	(1)	Ring
(2)	σ - جبر (جبر تام)	(2)	σ - Ring
(3)	حلقة	(3)	Algebra
(4)	σ- حلقة	(4)	σ -Algebra
(5)	مجموعة مفتوحة	(5)	Open set
(6)	مجموعة مغلقة	(6)	Closed set
(7)	مجال (فترة)	(7)	Interval

٣ إذا كان $\mathcal{A}$ جبراً من أجزاء مجموعة منتهية X فإن $\mathcal{A}$ تبولوجيا على X علّل ذلك! هل العكس صحيح؟ علّل ذلك!

٤ ما أصغر حلقة تحوي الصف $\{\{1,2\},\{3\}\} = \tau$ من أجزاء المجموعة $X = \{1,2,3,4\}$؟ ما أصغر جبر يحوي الصف τ؟ما أصغر تبولوجيا تحوي τ ؟

علماً بأن أصغر حلقة تحوي صفاً τ هي تعريفاً تقاطع جميع الحلقات التي تحوي الصف τ بكلمات أخرى هي جماعة τ_1 من أجزاء X تحقق الشرطين:

- $\tau \subseteq \tau_1$
- أي حلقة تحوي τ ستحوي τ_1

٥) إذا كان $X \neq \phi$ وكان $s = \{\{a\}, a \in X\}$ فبين أن:

- أصغر حلقة تحوي s هي صف المجموعات المنتهية في X.
- أصغر جبر يحوي s هو صف المجموعات المنتهية أو التي متمماتها منتهية.
- أصغر جبر تام يحوي s هو صف المجموعات العدودة على الأكثر في X أو التي متمماتها عدودة على الأكثر.

٦) إذا كان (X,d) فضاء متريا و τ صف المفتوحات فيه ناقش صحة أو خطأ ما يلي:

أ . كل مجموعة وحيدة العنصر تكون بوريلية.

ب . كل مجموعة متراصة تكون بوريلية.

جـ . كل كرة مغلقة تكون بوريلية.

ء . كل كرة مفتوحة تكون بوريلية.

هـ .كل مجموعة من النمط F_σ (أي التي تكون اتحاداً لمتتالية من المجموعات المغلقة) هي بوريلية.

و. كل مجموعة من النمط G_σ (أي التي تكون تقاطعاً لمتتالية من المجموعات المفتوحة) هي بوريلية.

الفصل الثاني

القياس الموجب
Positive Measure

٢-١- القياس الموجب:

إن المفهوم الرياضي للقياس الموجب ما هو إلا تعميم لبعض القياسات المعروفة في الهندسة والميكانيك والفيزياء كالطول والمساحة والحجم والكتلة والشحنة الكهربائية وغير ذلك كثير. ففي المستقيم الحقيقي $\mathbb{R}$ يمكن أن نلحق بمجالٍ طوله، وفي المستوي $\mathbb{R}^2$ نلحق بمستطيلٍ مساحته ، وفي $\mathbb{R}^3$ نلحق بمتوازي مستطيلاتٍ حجمه، وفي الميكانيك نلحق بجسمٍ كتلته، وفي الفيزياء نلحق بحيزٍ الشحنة الكهربائية التي يشتمل عليها. سنعرف الآن القياس الموجب والذي يعد تمديداً للمفاهيم السابقة وتعميماً لها.

٢-١-١- تعريف: لتكن X مجموعة ما غير خالية مزودة بجبر تام $\mathcal{A}$. يعرف القياس الموجب على $\mathcal{A}$ بأنه تطبيق (أو تطبيق مجموعاتي):

$$\mu : \mathcal{A} \to [0,\infty]$$
$$E \mapsto \mu(E)$$

يحقق الخاصتين التاليتين:

(1) $\mu(\phi) = 0$ (قياس الخالية يساوي الصفر)

(2) إذا كانت $E_1, E_2, \ldots$ متتالية منفصلة من عناصر $\mathcal{A}$. (أي $E_j \cap E_k = \phi$ من أجل كل j,k من $\mathbb{N}$ بحيث $k \neq j$) فإن:

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$$

ونعبر عن ذلك بقولنا إن μ **جمعي عداً** على $\mathcal{A}$.

ينتج من ذلك أنه إذا كانت $E_1, E_2, \ldots, E_n$ متوالية(متتالية) منفصلة منتهية من عناصر $\mathcal{A}$ فإن: $\mu(\bigcup_{i=1}^{n} E_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i)$

ونعبر عن ذلك بقولنا إن μ **جمعي انتهاءً على** $\mathcal{A}$.

٢-١-٢- تعاريف:

(١) إذا كانت X مجموعة غير خالية ، وكان $\mathcal{A}$ جبراً تاماً في X فإننا نسمي الثنائية $(X, \mathcal{A})$فضاء قيوساً ونسمي كل عنصر من $\mathcal{A}$ مجموعة قيوسة.

(٢) وإذا كان μ قياساً على $(X, \mathcal{A})$ فإننا نسمي الثلاثية $(X, \mathcal{A}, \mu)$ فضاءً مقيساً أو فضاء القياس μ.

(٣) وإذا كان $\mu(X) < \infty$ قلنا إن μ قياس منته، ويسمى μ قياس احتمال أو احتمالاً على سبيل الاختصار إذا كان $\mu(X) = 1$

(٤) نقول عن قياس μ إنه قياس $\sigma-$ منتهٍ على X إذا أمكن إيجاد متتالية $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ من عناصر $\mathcal{A}$ بحيث $\mu(E_i) < \infty$ من أجل كل i و $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$.

٢-١-٣- ملاحظة (١): إن أكثر القياسات التي سنصادفها هي قياسات $\sigma-$ منتهية.

٢-١-٤- ملاحظة (٢): إذا كان μ هو (القياسُ الطولُ على $\mathbb{R}$) أي الذي يقيس كل مجال بطوله كما هو مألوف في المستقيم الحقيقي فإننا نلاحظ أن μ قياس $\sigma-$ منتهٍ، ذلك أن:

$$\mu(\mathbb{R}) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} [-n, n+1[) = \infty$$

٢-١-٤- ملاحظة (٣): نعلم من دراستنا في الاحتمالات أن الفضاء الاحتمالي هو الثلاثية (Ω, ξ, P) حيث Ω هي مجموعة غير خالية (مجموعة نتائج

تجربة مفروضة أو فضاء الأحداث الابتدائية لتجربة عشوائية) و ξ جبر الأحداث وهو جبر تام من أجزائها، و P تطبيق لـ ξفي $\mathbb{R}$ يحقق ما يلي:

١) $P(E) \geq 0$ من أجل كل E من ξ .

٢) $P(\Omega) = 1$.

٣) إذا كانت $E_1, E_2, \ldots$ متتالية عدودة من عناصر ξ المنفصلة مثنى فإن

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i)$$

والتعريف الآنف الذكر هو تعريف الاحتمال وفق مفهوم " كولموغوروف "، أو ما يسمى التعريف الموضوعاتي للاحتمال وفيما يلي جدول مساعد للمقارنة بين تعابير أو عبارات ترد في نظرية القياس وما يقابلها من عبارات ترد في نظرية الاحتمالات.

عبارات نظرية القياس	عبارات نظرية الاحتمال
فضاء مقيس (X, A, μ)	فضاء احتمالي (Ω, ξ, P)
A جبر تام	ξ جبر الأحداث
A مجموعة قيوسة	A حدث
f تطبيق قيوس (سيُعرَّف لاحقاً)	X متغير عشوائي
$\int f du$: تكامل f (سيُعرَّف لاحقاً)	E(X) التوقع أو الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X
$a\varepsilon[\mu]$ غالباً في كل مكان (سيُعرَّف لاحقاً)	(a.s) بصورة شبه أكيدة

٢-١-٥- أمثلة:

١) لنأخذ $X = \mathbb{R}$ والمزودة بجبر بوريل $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$ (وهو أصغر جبر تام يحوي صف المجموعات المفتوحة كما تعلم.) ثمة قياس وحيد λ على المجموعات البوريلية يدعى قياس لوبيغ – بوريل على $\mathbb{R}$ يحقق الخاصة التالية:

$\lambda([a,b[) = (b-a)$ لكل مجال من النمط $[a,b[$ و

$$\lambda(E) = \inf\{\sum_{k=1}^{\infty}(b_k - a_k), \bigcup_{k=1}^{\infty}[a_k, b_k[\supseteq E\} \qquad \forall E \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$$

سنقبل بوجوده حالياً.

٢) لنفرض أن X مجموعة ما و $\mathcal{A}$ أي جبر تام عليها و a نقطة مثبتة من X ولنعرف التطبيق $\delta_a : \mathcal{A} \to \{0,1\}$

بالقاعدة التالية $\forall E \in \mathcal{A}$:

$$\delta_a(E) = \begin{cases} 1 & \text{عندما} \quad a \in E \\ 0 & \text{عندما} \quad a \notin E \end{cases}$$

إن δ_a قياس على $\mathcal{A}$ يسمى قياس ديراك المتمركز عند النقطة a.

٣) إذا كانت X مجموعة غير خالية وكان التطبيق:

$$\mu : 2^X \to [0,\infty]$$
$$E \mapsto \mu(E)$$

معرفاً كما يلي:

$\mu(E) = \infty$ إذا كانت E غير منتهية

و $\mu(E) = |E|$ إذا كانت E منتهية

حيث $|E|$ " عدّة المجموعة E " أي عدد عناصرها.

فإن μ قياس على 2^X يسمى **قياس العد** على مجموعة أجزاء X.

٢-٢- بعض خواص القياس الموجب:

٢-٢-١- مبرهنة أساسية: لنفرض أن $(X,\mathcal{A},\mu)$ فضاء القياس μ وأن كل المجموعات فيما يلي قيوسة:

١) إذا كانت E,F منفصلتين فإن $\mu(E\cup F)=\mu(E)+\mu(F)$ (أي أن μ جمعي).

٢) إذا كانت $E\subseteq F$ فإن $\mu(E)\le\mu(F)$ أي أن μ مطرد.

٣) إذا كانت $A_1\subseteq A_2\subseteq\dots$ ، $A_n\nearrow A$ (A_n تتزايد إلى A) حيث $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ فإن $\mu(A_n)\nearrow\mu(A)$.

وسيشار إلى ذلك بالعبارة :

إذا كان $A=\lim_n A_n$ فإن $\mu(A)=\lim_n\mu(A_n)$ أو اختصاراً $\mu(\lim_n A_n)=\lim_n\mu(A_n)$، ونقول إن μ مستمر من الأدنى عند A.

٤) إذا كانت $V_1\supseteq V_2\supseteq\dots$ ولنفرض أن $V_n\searrow V$ وأنه من أجل قيمة ما $n_0\ge1$ يكون $\mu(V_{n_0})<\infty$ فإن $\mu(V_n)\searrow\mu(V)$ ولنعبر عن ذلك اختصاراً بالعبارة $\mu(\lim_n V_n)=\lim_n\mu(V_n)$ حيث $\lim_n V_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}V_n$ وسنقول إن μ مستمر من الأعلى عند V.

٥) من أجل أي جماعة من المجموعات $E_1,E_2\dots$ فإن:

$$\mu(E_1\cup E_2)\le\mu(E_1)+\mu(E_2)$$

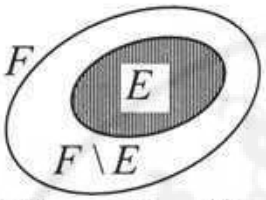
وأن:
$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n)\le\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n)$$

الإثبات:

١) لنأخذ $E_1=E, E_2=F, E_n=\phi$ من أجل كل $n\ge3$ ، ومن ثم فإن **الجماعة** $E_1,E_2\dots$ منفصلة ومن تعريف القياس نجد أن:

$$\mu(E \cup F) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = \mu(E) + \mu(F)$$

٢) لما كانت $E \subseteq F$ فإن



$F = E \cup (F \setminus E)$ و $E \cap (F \setminus E) = \phi$.

مـــن (١) نجـــد أن $\mu(F) = \mu(E \cup (F \setminus E)) = \mu(E) + \mu(F \setminus E)$

وحيث أن μ موجب فإن $\mu(E) \le \mu(F)$

نتيجة: إذا كان $\mu(E) < \infty$ كان: $\mu(F \setminus E) = \mu(F) - \mu(E)$.

٣) لنضع $E_1 = A_1, E_n = A_n \setminus A_{n-1}$ من أجل كل $n \ge 2$. ومـــن ثـــم فـــإن المتتالية $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ منفصلة وأن $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$.

$$\mu(A) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \mu(\bigcup_{i=1}^{n} E_i) = \lim_{n\to\infty} \mu(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \lim_{n} \mu(A_n)$$

٤) لنفـــرض مـــثلاً أن $n_0 = 1$ ولنـــضع $U_n = V_{n_0} \setminus V_n$ ومـــن ثـــم فـــإن $U_1 \subseteq U_2 \subseteq \dots$ ومنـــه $U_n \nearrow \left(U = V_{n_0} \setminus V\right)$ ومـــن ثـــم فـــإن:

$\mu(U_n) \nearrow \mu(V_{n_0} \setminus V)$.

من أجل كل $n > n_0$ يكون $V_n \subseteq V_{n_0}$ كذلك فإن $V \subseteq V_{n_0}$ بيد أن:

$$\mu(U_n) = \mu(V_{n_0} \setminus V_n) = \mu(V_{n_0}) - \mu(V_n)$$

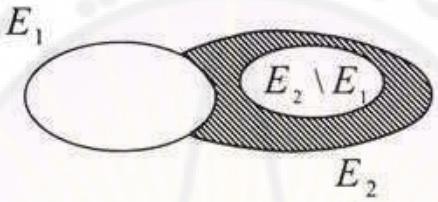
وأن $\mu(V_{n_0} \setminus V) = \mu(V_{n_0}) - \mu(V)$ (لماذا؟)

إذن $\mu(V_{n_0}) - \mu(V_n) \nearrow \mu(V_{n_0}) - \mu(V)$

ولما كان $\mu(V_{n_0}) < \infty$ فإننا نستطيع اختصارها من الطرفين ثم نضرب هذين الطرفين بالعدد (-1) فنجد: $\mu(V_n) \searrow \mu(V)$.

٥) نعلم أن $E_1 \cup E_2 = E_1 \cup (E_2 \setminus E_1)$ وأن $E_1 \cap (E_2 \setminus E_1) = \phi$ ومن ثم

$$\mu(E_1 \cup E_2) = \mu(E_1 \cup (E_2 \setminus E_1))$$
$$= \mu(E_1) + \mu(E_2 \setminus E_1) \le \mu(E_1) + \mu(E_2)$$



وذلك لأن $(E_2 \setminus E_1) \subseteq E_2$ ومن ثم $\mu(E_2 \setminus E_1) \le \mu(E_2)$

وبالاستقراء نجد أن هذا صحيح من أجل كل n من $\mathbb{N}$ أي أن:

$\mu(\bigcup_{i=1}^{n} E_i) \le \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i)$. ولما كان $\bigcup_{i=1}^{n} E_i \nearrow \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ فإن

$\mu(\bigcup_{i=1}^{n} E_i) \nearrow \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i)$ ومنه:

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \lim_n \mu(\bigcup_{i=1}^{n} E_i) \le \lim_n \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$$

٢-٢-٢- ملاحظة: يمكن ألا يكون الجزء (٤) من المبرهنة الأساسية السابقة صحيحاً إذا لم نشترط أن $\mu(V_{n_0}) < \infty$ من أجل قيمة معينة n_0 من $\mathbb{N}$. لتوضيح ذلك نأخذ، مثلاً، $X = \mathbb{R}$، و $\mathcal{A}$ جبر بوريل في $\mathbb{R}$، والقياس μ قياس لوبيغ - بوريل على $\mathbb{R}$. لنأخذ $V_n = [n, \infty[$ لكل n ، واضح

$V_n \searrow V$ و $V = \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n = \phi$ ومنه $\mu(V_n) = \infty \to \infty$ في حين

$$\mu(V) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n\right) = \mu(\phi) = 0$$ وهذا خُلْف.

٢-٣- المجموعة الهمولة والفضاء المقيس الكامل

٢-٣-١- تعريف: نقول عن مجموعة $F \supseteq X$، في الفضاء $(X, \mathcal{A}, \mu)$، إنها همولة- μ (أو مهملة- μ) أو همولة بالنسبة للقياس μ ، إذا كانت F جزءاً من مجموعة قيوسة G قياسها $\mu(G)=0$. أي إذا تحقق ما يلي:

$$\exists G \in \mathcal{A} : F \subseteq G \ \& \ \mu(G)=0$$

٢-٣-٢- ملاحظة: ليس من الضروري أن تكون المجموعة الهمولة منتمية إلى الجبر التام المعطى $\mathcal{A}$.

٢-٣-٢- تدريب: في الفضاء المقيس $(X, \mathcal{A}, \mu)$ أي مجموعة جزئية من مجموعة همولة هي مجموعة همولة. وإذا كانت $F_1, F_2, \ldots$ مجموعات همولة فإن $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ مجموعة همولة. أي إن أي اجتماع عدود لمجموعات همولة هو مجموعة همولة.

٢-٣-٣- تعريف: نقول عن الفضاء $(X, \mathcal{A}, \mu)$ إنه فضاء مقيس كامل إذا كانت كلُ مجموعةٍ همولةٍ - μ قيوسةً أي تنتمي إلى الجبر التام $\mathcal{A}$.

وأحياناً يقال إن الجبر التام $\mathcal{A}$ كامل بالنسبة للقياس μ أو إن μ كامل بالنسبة للجبر التام $\mathcal{A}$.

سنرى الآن أنه يمكن تكميل أي فضاء قياس غير كامل بالمعنى الذي توضحه المبرهنة التالية.

٢-٣-٤- مبرهنة أساسية: لنفرض أن الفضاء $(X, \mathcal{A}, \mu)$ غير كامل، ولنضع: $\widetilde{\mathcal{A}} = \{E \cup F : E \in \mathcal{A} \ \& \ F$ همولة - μ أو همولة اختصاراً$\}$

١) إن $\widetilde{\mathcal{A}}$ جبر تام على X يحوي $\mathcal{A}$.

٢) من أجل كل $E \cup F$ من $\widetilde{\mathcal{A}}$ إذا عرفنا التابع $\tilde{\mu}$ بالقاعدة التالية :

$$\tilde{\mu}(E \cup F) = \mu(E)$$

فإن $\tilde{\mu}$ معرف جيداً ، ويتطابق مع μ على $\mathcal{A}$، وهو قياس على $\widetilde{\mathcal{A}}$. ونقول إن $\tilde{\mu}$ قياس يمدد μ إلى $\widetilde{\mathcal{A}}$ (يسمى $\tilde{\mu}$ " مكمل القياس μ ").

٣) إن الفضاء $(X, \widetilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mu})$كامل. ونسمي هذا الفضاء" مكمل الفضاء $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ".

البرهان: من الواضح أن $\mathcal{A} \subseteq \widetilde{\mathcal{A}}$ وذلك لأنه إذا كانت E من $\mathcal{A}$ فإن $E = E \cup \phi$ وهي من $\widetilde{\mathcal{A}}$ لأن ϕ همولة.

لنثبت الآن أن $\widetilde{\mathcal{A}}$ جبر تام. ويكفي لإثبات ذلك أن نبرهن أن $\widetilde{\mathcal{A}}$ مغلق بالنسبة للتتميم ثم بالنسبة للاتحاد العدود :

أ- لنفرض أن $E \cup F = E_1$ من $\widetilde{\mathcal{A}}$ حيث Eمن $\mathcal{A}$ و F همولة $-\mu$ ولنثبت أن E_1^cتنتمي إلى $\widetilde{\mathcal{A}}$.

تذكر أن (ثمة G من $\mathcal{A}$ بحيث يكون $F \subseteq G$و $\mu(G) = 0$) ويمكنك إثبات أن

$$X \setminus (E \cup F) = [X \setminus (E \cup G)] \cup [E^c \cap (G \setminus F)] \quad (\star)$$

ولما كانت $E^c \cap (G \setminus F)$ همولة$-\mu$

(لأن $E^c \cap (G \setminus F) \subseteq (G \setminus F) \subseteq G$ و $\mu(G) = 0$)،

و $X \setminus (E \cup G)$ من $\mathcal{A}$ فإن الطرف الأيمن من المساواة (★) من $\widetilde{\mathcal{A}}$. أي إن $E_1^c \in \widetilde{\mathcal{A}}$

ب- لنفرض أن $\{E_n \cup F_n\}_{n=1}^{\infty}$ من $\widetilde{\mathcal{A}}$ من أجل كل n من $\mathbb{N}$. إنّ:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}(E_n \cup F_n) = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) \in \widetilde{\mathcal{A}}$$

لأن $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ مجموعة همولة$-\mu$ (اجتماع عدود لمجموعات همولة)، و $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ من $\mathcal{A}$ (E_n من $\mathcal{A}$ من أجل كل n من $\mathbb{N}$).

٢) لإثبات أن $\tilde{\mu}$ معرف جيداً نفرض $E_1 \cup F_1 = E_2 \cup F_2$ من $\widetilde{\mathcal{A}}$ ، حيث E_1, E_2 من $\mathcal{A}$ و F_1, F_2 همولتان- μ . أي إن ثمة G_1, G_2 من $\mathcal{A}$ بحيث يكون $F_1 \subseteq G_1$ و $F_2 \subseteq G_2$ و $\mu(G_1) = \mu(G_2) = 0$.

ولنبرهن على أن $\tilde{\mu}(E_1 \cup F_1) = \tilde{\mu}(E_2 \cup F_2)$

أي لنثبت أن $\mu(E_1) = \mu(E_2)$ وفق تعريف $\tilde{\mu}$.

لما كانت $E_1 \subseteq E_1 \cup F_1 = E_2 \cup F_2 \subseteq E_2 \cup G_2$ فإن

$$\mu(E_1) \le \mu(E_2 \cup G_2) \le \mu(E_2) + \mu(G_2) = \mu(E_2) + 0 = \mu(E_2)$$

بالطريقة ذاتها نثبت أن $\mu(E_2) \le \mu(E_1)$ ومنه $\mu(E_2) = \mu(E_1)$.

من الواضح أن $\tilde{\mu}$ يتطابق مع μ على $\mathcal{A}$، لأنه إذا كانت E من $\mathcal{A}$ فإن

$$\tilde{\mu}(E) = \tilde{\mu}(E \cup \phi) = \mu(E)$$

لنثبت أن $\tilde{\mu}$ قياس على $\widetilde{\mathcal{A}}$.

أ- مما سبق نجد أن $\tilde{\mu}(\phi) = \mu(\phi) = 0$

ب- لنفرض أن $\{E_n \cup F_n\}_{n=1}^{\infty}$ متوالية من المجموعات المنفصلة في $\widetilde{\mathcal{A}}$.

و من ثم فإن $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ متوالية من المجموعات المنفصلة في $\mathcal{A}$. ومنه

$$\tilde{\mu}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(E_n \cup F_n)\right) = \tilde{\mu}\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E\right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n\right)\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty}\tilde{\mu}(E_n \cup F_n)$$

٣) سنترك لك إثبات أن الفضاء $(X, \widetilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mu})$ كامل.

٢-٤- حول مفهوم القياس الخارجي

٢-٤-١- تعريف: إذا كانت $X \neq \phi$ و $\mathcal{P}(X) = 2^X$ مجموعة أجزائها و

$$\mu^* : \mathcal{P}(X) \to \overline{\mathbb{R}_+}$$
$$E \mapsto \mu^*(E)$$

تطبيقٌ محقِّقٌ لما يأتي:

1. $\mu^*(\phi) = 0$
2. $A \subseteq B \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$
3. $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \Rightarrow \mu^*(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k)$

نسمي μ^* قياساً خارجياً على X (أو على أجزاء X).

وينتج عن ذلك أن:

•..... $\mu^*(\bigcup_{j=1}^{n} A_j) \leq \sum_{j=1}^{n} \mu^*(A_j)$

•• ..... $\mu^*(K_1 \bigcup K_2) \leq \mu^*(K_1) + \mu^*(K_2)$

(جميع المجموعات الواردة بعد μ^* هي أجزاء من X).

٢-٤-٢- مثال: لتكن $X = \{1,2,3,4,5\}$ ولنعرف على الصف $\mathcal{P}(X)$ التطبيق الآتي :

$$A \mapsto \mu^*(A) = \sqrt{|A|}$$

حيث $|A|$ =: " عدد عناصر A "

نتحقق بسهولة من أن μ^* قياس خارجي على X ولكنه ليس قياساً على $\mathcal{P}(X)$.

لنأخذ مثلاً $A_1 = \{1,2\}$, $A_2 = \{3,4\}$ ومنه نجد أن :

$$A_1 \bigcup A_2 = \{1,2,3,4\}$$

$$\mu^*(A_1 \bigcup A_2) = \sqrt{4} = 2 \stackrel{?}{=} \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2)$$
$$\stackrel{?}{=} \sqrt{2} + \sqrt{2}$$

لكن $2 \neq \sqrt{2} + \sqrt{2}$ كما تعلم .

٢-٤-٣- تمرين : لتكن $X = \mathbb{Z}$ حيث $\mathbb{Z}$ مجموعة الأعداد الصحيحة ولنعرف على $\mathcal{P}(X)$ التطبيق الآتي:

$$A \mapsto \mu^*(A) = \begin{cases} 1 & \text{if } A \neq \phi \\ 0 & \text{if } A = \phi \end{cases}$$

نتحقق بسهولة من أن μ^* قياس خارجي على X. هل هو قياس على $\mathcal{P}(X)$؟! علّل إجابتك .

٢-٤-٤- مبرهنة : كل قياس على $\mathcal{P}(X)$ هو قياس خارجي عليها. (أثبت ذلك).

سنورد فيما يلي عدداً من المبرهنات لنستخدمها حين اللزوم تاركين لك الاطلاع على برهان بعضٍ منها.

٢-٤-٥- مبرهنة وتعريف: إذا كان μ تطبيقاً معرفاً على الجبر $\mathfrak{M}$ من أجزاء X ويحقق مايلي:

1. $\mu(\phi) = 0$
2. $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ if $\begin{cases} A, B \in \mathfrak{M} \\ \wp \\ A \cap B = \phi \end{cases}$
3. $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{1}^{\infty} \mu(A_n)$ if $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{M}$

وإذا وضعنا من أجل كل $E \subseteq X$:

$$\mu^*(E) = \inf\{\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) : \ A_k \in \mathfrak{M} \ , \ E \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\}$$

فإن μ^* قياس خارجي على $\mathcal{P}(X)$ (أو على X) يسمى القياس الخارجي المولّد بـــ μ أو المستنتج منه.

٢-٤-٦- مبرهنة وتعريف: إذا كان μ^* قياساً خارجياً على X (أو على $\mathcal{P}(X)$) فإن الصف الآتي جبر تام من أجزاء X .

$$\mathfrak{M}^* = \{A \subseteq X : \forall K_1 \subseteq A, \forall K_2 \subseteq A^c : \\ \mu^*(K_1 \bigcup K_2) = \mu^*(K_1) + \mu^*(K_2)\}$$

وينتج من ذلك :

$$A \in \mathfrak{M}^* \Leftrightarrow \forall K \subseteq X : \mu^*(K) = \mu^*(K \bigcap A) + \mu^*(K \bigcap A^c)$$

يسمى هذا الشرط شرط كاراثيودوري.

يسمى $\mathfrak{M}^*$ الجبر التام المولد بـــ μ^*، ويسمى كل عنصر من $\mathfrak{M}^*$ مجموعة قيوسة بالنسبة لـــ μ^*. وسيكون υ مقصور μ^* على $\mathfrak{M}^*$ قياساً عليها ونسميه القياس المولد بـــ μ^* (سنقبل كل ذلك) وسنبرهنها لاحقاً على مراحل.

٢-٤-٧-تدريب : ليكن $X = \{1,2,3,4,5\}$ كما في المثال (٢-٤-٢) وليكن

$$\mu^*(A) = \sqrt{|A|} \quad \text{if} \quad A \subseteq X$$

وجدنا أن μ^* ليس قياساً علـــى $\mathcal{P}(X)$ ولكنـــه قيـــاس خـــارجي. وواضـــح أن $X, \phi \in \mathfrak{M}^*$.

1) بين أن المجموعة: $A = \{1\} \notin \mathfrak{M}^*$

الحل : لنأخذ $K = \{1,2\}$ ومنه نجد $K \bigcap A = \{1\}$, $K \bigcap A^c = \{2\}$

$$\mu^*(K \bigcap A) + \mu^*(K \bigcap A^c) = 1 + 1 = 2$$

ولكن $\mu^*(K) = \sqrt{2} \neq 2$ و A غير قيوسة بالنسبة لـــ μ^* .

2) هل المجموعة $B=\{1,2,3\}$ تنتمي إلى μ^* ؟

لنأخذ $K=X$ عندئذ نجد : $K\cap B=B$ و $K\cap B^c=B^c=\{4,5\}$

لكن $\mu^*(K)=\sqrt{5}$ و $\mu^*(B)+\mu^*(B^c)=\sqrt{3}+\sqrt{2}$

ومنه $B=\{1,2,3\}$ لا تنتمي إلى $\mathfrak{M}^*$ ذلك أن: $\sqrt{5}\neq\sqrt{3}+\sqrt{2}$.

3) هل $\mathfrak{M}^*=\{\phi,X\}$ فقط ؟ علّل إجابتك.

إثبات المبرهنة (٢-٤-٦):

المرحلة الأولى: لنثبت أن $\mathfrak{M}^*$ جبر في X .

- إن من الواضح أن ϕ و X تنتمي إلى $\mathfrak{M}^*$.

وأن $A\in\mathfrak{M}^*\Leftrightarrow A^c\in\mathfrak{M}^*$ ذلك أن شرط القيوسية بالنسبة إلى لـــ μ^* متناظر في المجموعة ومتممتها.

- لنثبت الآن أن $\mathfrak{M}^*$ مغلق بالنسبة للاتحاد المنتهي.

لتكن $A_1,A_2\in\mathfrak{M}^*$ ولنبرهن أن $A=A_1\cup A_2\in\mathfrak{M}^*$

لذلك نقول :

$\forall K\subseteq X$:

$$\mu^*(K)=\mu^*(K\cap A_1)+\mu^*(K\cap A_1^c)$$

$$=\mu^*(K\cap A_1)+\mu^*(K\cap A_1^c\cap A_2)+\mu^*(K\cap A_1^c\cap A_2^c)$$

(لأن A_2 قيوسة بالنسبة لـــ μ^*)

بالاستفادة من كون μ^* قياساً خارجياً نجد:

$$\mu^*(K)\geq\mu^*[K\cap(A_1\cup(A_1^c\cap A_2))]+\mu^*(K\cap(A_1\cup A_2)^c)$$

$$=\mu^*[K\cap(A_1\cup(A_2-A_1))]+\mu^*(K\cap(A_1\cup A_2)^c)$$

$$=\mu^*[K\cap(A_1\cup A_2)]+\mu^*(K\cap(A_1\cup A_2)^c)$$

وهذا كاف للقول بأن: $\mu^*(K)=\mu^*(K\cap A)+\mu^*(K\cap A^c)$

و A قيوسة بالنسبة لـــ μ^* .

وينتج عن ذلك بسهولة أنه إذا كانت $A_1, A_2, ..., A_n \in \mathfrak{M}^*$ ومنفصلة فإن $(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) = A \in \mathfrak{M}^*$

ترى هل عندئذ

$$\mu^*(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) = \sum_{j=1}^{n} \mu^*(A_j) \quad ??$$

نعم، بل سنبرهن خاصة أقوى منها

المرحلة الثانية : $\forall K \subseteq X$, $\forall \underbrace{A_1, A_2, ..., A_n}_{\text{المنفصلة}} \in \mathfrak{M}^*$

فإن: $$\mu^*\left(K \cap \left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right)\right) = \sum_{j=1}^{n} \mu^*(K \cap A_j)$$

يكفي إثباتها من أجل $n = 2$ ثم بالاستقراء.

لنضع: $A_1 = A$, $A_2 = B$

$$\mu^*(K \cap (A \cup B)) \overset{?}{=} \mu^*(K \cap A) + \mu^*(K \cap B)$$

$$\mu^*\left(\underbrace{K \cap (A \cup B)}_{K_1}\right) \overset{?}{=} \mu^*(K_1 \cap A) + \mu^*(K_1 \cap B)$$

نعم إذا لاحظنا أن: $K_1 \cap A = (K \cap (A \cup B)) \cap A$

$$= (K \cap (A \cup B) \cap A)$$

$$= K \cap A$$

وأن: $$K_1 \cap A^c = (K \cap (A \cup B)) \cap A^c$$

$$=\left(K\cap(A\cup B)\cap A^{c}\right)$$
$$=K\cap B$$

ويتم المطلوب.

المرحلة الثالثة: لنبرهن أن $\mathfrak{M}^{*}$ جبر تام.

يكفي أن نبرهن أنه إذا كانت $(B_n)_{n\geq 1}$ متتالية منفصلة من عناصر $\mathfrak{M}^{*}$ فإن $B=\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n$ ينتمي إلى $\mathfrak{M}^{*}$ (لماذا؟) لنثبت ذلك.

لدينا $\forall K\subseteq X$:

$$\mu^{*}(K)=\mu^{*}\left(K\cap\left(\bigcup_{j=1}^{n}B_j\right)\right)+\mu^{*}\left(K\cap\left(\bigcup_{j=1}^{n}B_j\right)^{c}\right)$$
$$\geq\sum_{j=1}^{n}\mu^{*}\left(K\cap B_j\right)+\mu^{*}\left(K\cap\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}B_j\right)^{c}\right)$$

ومنه:

$$\mu^{*}(K)\ \geq\sum_{j=1}^{\infty}\mu^{*}\left(K\cap B_j\right)+\mu^{*}\left(K\cap\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}B_j\right)^{c}\right)$$
$$\geq\mu^{*}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}\left(K\cap B_j\right)\right)+\mu^{*}\left(K\cap\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}B_j\right)^{c}\right)$$
$$\geq\mu^{*}\left(K\cap\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}B_j\right)\right)+\mu^{*}\left(K\cap\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}B_j\right)^{c}\right)$$

وهذا كافٍ للقول بالتساوي، إذن:

$$\forall K\subseteq X:\ \mu^{*}(K)=\mu^{*}\left(K\cap B\right)+\mu^{*}\left(K\cap B^{c}\right)$$

وهذا يعني أن $B\in\mathfrak{M}^{*}$.

المرحلة الرابعة: لنثبت الآن أن μ^* قياس على $\mathfrak{M}^*$.

لتكن $(B_n)_{n\geq 1}$ متتالية من عناصر $\mathfrak{M}^*$ المنفصلة و $B=\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n$

لنثبت أن لدينا:

$$\forall K\subseteq X:\ \mu^*\left(K\cap\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\right)\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu^*\left(K\cap B_n\right)$$

فيتم المطلوب.

إن:

$$\mu^*\left(K\cap B\right)=\mu^*\left(K\cap\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\right)\right)\geq\mu^*\left(K\cap\left(\bigcup_{n=1}^{m}B_n\right)\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{m}\mu^*\left(K\cap B_n\right)\ :\ \forall m$$

إذن:

$$\mu^*\left(K\cap\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\right)\right)\geq\sum_{n=1}^{\infty}\mu^*\left(K\cap B_n\right)$$

$$\geq\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}K\cap B_n\right)$$

$$=\mu^*\left(K\cap\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\right)\right)$$

$$=\mu^*\left(K\cap B\right)$$

إذن هذه المتراجحات مساويات ومنه:

$$\mu^*\left(K\cap\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\right)\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu^*\left(K\cap B_n\right)$$

ولو وضعت $K=X$ لوجدت $\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu^*\left(B_n\right)$

وواضح أن $\mu^*\left(\phi\right)=0$ إذن μ^* قياس موجب على $\mathfrak{M}^*$

وبذلك يتم المطلوب.

٢-٤-٨- مبرهنة: إذا كان μ قياساً موجباً على جبر $\mathfrak{M}$ من أجزاء X وإذا كان $\mathfrak{M}^*$ هو صف المجموعات القيوسة بالنسبة لـــ μ^* المستنتج من μ فإن:

(١) υ "مقصور μ^* على $\mathfrak{M}$" يساوي μ.

(٢) $\mathfrak{M}\subseteq\mathfrak{M}^*$.

٢-٤-٩- نتيجة:

كل قياس μ منته على جبر $\mathcal{A}$ يمكن تمديده إلى الجبر التام $\widehat{\mathcal{A}}$ وهـذا التمديـد وحيد.

٢-٤-١٠- تعريف ومبرهنة:

يقال عن قياس υ على جبر تـام $\mathfrak{M}$ إنـه قيـاس **(كامـل أو شـامل)** إذا:

$$\forall A\in\mathfrak{M}\ :\ \text{if}\ \upsilon(A)=0\ \text{then}\ \mathcal{P}(A)\in\mathfrak{M}$$

إن مقصور أي قياس خارجي μ^* على الجبر التام $\mathfrak{M}^*$ المولد به هو قياس شامل.

الإثبات: لقد أثبتنا أنه قياس، ويكفي لإثبات أنه شامل أن نبرهن أن كل مجموعة قياسها الخارجي معدوم تكون قيوسة بالنسبة لـــ μ^* :

$$\forall A\subseteq X\ :\ \text{if}\ \mu^*\left(A\right)=0\ \text{then}\ A\in\mathfrak{M}^*$$

وهذا صحيح ذلك أن:

$$\forall K \subseteq X : \ \mu^*(K) \le \mu^*(K \cap A) + \mu^*(K \cap A^c)$$
$$\le \mu^*(A) + \mu^*(K) = 0 + \mu^*(K)$$

ومنه $\mu^*(K) = \mu^*(K \cap A) + \mu^*(K \cap A^c)$

٢-٤-١١- مبرهنة كاراتيودوري لتمديد قياس

سنفترض فيما يلي أن $\mathbb{A}$ حلقة تحقق الشرط الآتي:

$$\exists D_1, D_2, ..., D_n, ... \in \mathbb{A} : X = \bigcup_{j=1}^{\infty} D_j$$

وسنفترض أن μ قياس على $\mathbb{A}$ وأن $\mu(D_j) < \infty$ لكل j ولنضع

$$\mu^* : \mathcal{P}(x) \to \overline{\mathbb{R}}$$
$$E \mapsto \mu^*(E) = \inf\{\sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) : \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \supseteq E\}$$

عندئذ يمكن إثبات ما يلي:

I. إن μ^* قياس خارجي على $\mathcal{P}(X)$.

II. إن $\mathfrak{M}^*$ صف المجموعات القيوسة بالنسبة لـ μ^* جبر تام يحوي $\mathbb{A}$ (ومن ثمّ سيحوي الجبر $\sigma(\mathbb{A})$ التام المولد بـ $\mathbb{A}$) وسيكون υ " مقصور μ^* على $\mathbb{A}$" هو μ.

(لا تنس أن مقصور μ^* على $\mathfrak{M}^*$ هو قياس ومن ثمّ مقصوره على $\sigma(\mathbb{A})$ هو قياس مُمدَّدٌ لـ μ).

٢-٥- حول مفهوم قياس لوبيغ على $\mathbb{R}$

سنورد لك بعض المبرهنات الهامة التي تحتاجها في دراستك لهذا المقرر:

٢-٥-١- مبرهنة : لنفترض $\mathfrak{T}$ صف المجالات نصف المفتوحة من النمط $]a,b] \subseteq \mathbb{R}$ حيث $a \le b$ ولنضع: $\lambda(]a,b]) = b-a$

(نعبر عن ذلك بقولنا إن λ يقيس المجال المذكور بطوله)

إن:

1. $\lambda(\phi) = 0$
2. if $a \le c \le b$ then $\lambda(]a,c]) + \lambda(]c,b]) = \lambda(]a,b])$

(نعبر عن ذلك بقولنا إن λ جمعي)

3. if $]a,b] \subseteq \bigcup_{k=1}^{n}]a_k,b_k]$ then $\lambda(]a,b]) \le \sum_{k=1}^{n} \lambda(]a_k,b_k])$
4. if $\bigsqcup_{k=1}^{n}]a_k,b_k] \subseteq]a,b]$ then $\sum_{k=1}^{n} \lambda(]a_k,b_k]) \le \lambda(]a,b])$

(حيث الرمز $\sqcup$ يعني اتحاداً منفصلاً).

5. if $]a,b] = \bigsqcup_{k=1}^{n}]a_k,b_k]$ then $\lambda(]a,b]) = \sum_{k=1}^{n} \lambda(]a_k,b_k])$

اتحاد منفصل

(نعبر عن ذلك بقولنا إن λ جمعي انتهاءً).

6. if $\bigsqcup_{k=1}^{\infty}]a_k,b_k] \subseteq]a,b]$ then $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda(]a_k,b_k]) \le \lambda(]a,b])$

اتحاد منفصل

7. if $]a,b] \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty}]a_k,b_k]$ then $\lambda(]a,b]) \le \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(]a_k,b_k])$
8. if $]a,b] = \bigsqcup_{k=1}^{\infty}]a_k,b_k]$ then $\lambda(]a,b]) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(]a_k,b_k])$

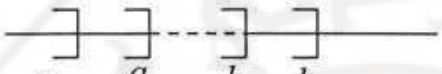
اتحاد منفصل

(نعبر عن ذلك بقولنا إن λ جمعي عداً).

الإثبات: سنترك لك إثبات الخاصتين 1 و 2 ، ونقدم فيما يلي إثبات باقي الخواص.

.3

$$\text{if }]a,b] \subseteq \bigcup_{k=1}^{n}]a_k, b_k] \text{ then } \lambda(]a,b]) \le \sum_{k=1}^{n} \lambda(]a_k, b_k])$$



لو كان $n = 1$ فالنتيجة واضحة .

(انظر الشكل للاستئناس)

لنفرض أن $n > 1$ ولنفترض $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n$ عندئذ يكون:

$$a_1 \le a \le b_1, \quad a_n \le b \le b_n, \quad a_{k+1} \le b_k \le b_{k+1}$$

وعليه يكون

$$\begin{aligned} b - a \le b_n - a_1 &= b_n - a_n + a_n - a_{n-1} + \ldots + a_2 - a_1 \\ &\le b_n - a_n + b_{n-1} - a_{n-1} + \ldots + b_1 - a_1 \\ &= \sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) \end{aligned}$$

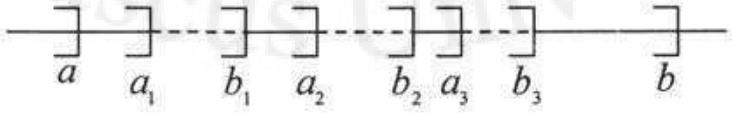
.4

$$\text{if } \bigsqcup_{k=1}^{n}]a_k, b_k] \subseteq]a,b] \text{ then } \sum_{k=1}^{n} b_k - a_k \le b - a$$

حيث الرمز $\sqcup$ يعني اتحاداً منفصلاً.

لو كانت $n = 1$ لما احتاج الأمر لإثبات. لنفترض $n > 1$ وأن :

$$a \le a_1 \le b_1 \le a_2 \le b_2 \le \ldots \le a_n \le b_n \le b$$



إن:

$$b-a \geq b_n - a_1 = b_n - a_n + a_n - b_{n-1} + b_{n-1} - a_{n-1} + \dots + b_2 - a_2 + a_2 - b_1 + b_1 - a_1 \geq \sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k)$$

.5

$$\text{if }]a,b] = \bigsqcup_{k=1}^{n}]a_k, b_k] \text{ then } \lambda(]a,b]) = \sum_{k=1}^{n} \lambda(]a_k, b_k])$$

بالعودة إلى كلٍ من الخاصتين 4 و 3 يتم المطلوب الخامس.

6. إذا كانت $]a_k, b_k[$ حيث $k = 1,2,\dots,n,\dots$ متتالية من المجالات المنفصلة مثنى والمحتواة في المجال $]a,b[$ عندئذ يكون:

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda(]a_k, b_k[) \leq \lambda(]a,b[)$$

وذلك أياً يكن n . بجعل n تسعى إلى ∞ نجد :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda(]a_k, b_k[) \leq \lambda(]a,b[)$$

7. لدينا :

$]a,b[\subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty}]a_k, b_k[$ ، وليكن $\varepsilon > 0$ بحيث $a < a+\varepsilon < b$ عندئذ نجد

$$[a+\varepsilon, b] \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} \left] a_k, b_k + \frac{\varepsilon}{2^k} \right[$$

وحسب مبرهنة هاين ـ بوريل

يوجد n بحيث $[a+\varepsilon, b] \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} \left] a_k, b_k + \frac{\varepsilon}{2^k} \right[$ أي أن:

$$]a+\varepsilon, b] \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} \left] a_k, b_k + \frac{\varepsilon}{2^k} \right]$$

واستناداً إلى الخاصة 3 لدينا :

$$(b-a)-\varepsilon \le \sum_{k=1}^{n}\left[\left(b_k+\frac{\varepsilon}{2^k}\right)-a_k\right]$$

أي أن :
$$(b-a)-\varepsilon \le \sum_{k=1}^{n}\left[(b_k-a_k)\right]+\sum_{k=1}^{n}\frac{\varepsilon}{2^k}$$

أي :
$$(b-a)-\varepsilon \le \sum_{k=1}^{\infty}\left[(b_k-a_k)\right]+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^k}$$

وهكذا فإن:
$$(b-a)-\varepsilon \le \sum_{k=1}^{\infty}\left[(b_k-a_k)\right]+\frac{\varepsilon}{1-\frac{1}{2}}$$

إذن:
$$(b-a)-\varepsilon \le \sum_{k=1}^{\infty}\left[(b_k-a_k)\right]+2\varepsilon$$

وحيث إن هذه المتراجحة صحيحية مهما تكن ε ، بجعل εتسعى إلى الصفر

نجد:
$$(b-a) \le \sum_{k=1}^{\infty}(b_k-a_k)$$

8. بالعودة إلى كلٍ من الخاصتين 6 و 7 يتم المطلوب الثامن.

٢-٥-٢- مبرهنة : أياً كانت $A \subseteq \mathbb{R}$ لنضع:

$$\lambda^*(A)=\inf\{\sum_{n=1}^{\infty}\lambda([\,a_n,b_n\,]):A\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}]a_n,b_n[\}$$
$$=\inf\{\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-a_n):A\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}]\,a_n,b_n\,[\}$$

إن:

1. $\lambda^*(\phi)=0$
2. if $A\subseteq B$ then $\lambda^*(A)\le\lambda^*(B)$
3. if $A=\bigcup_{m=1}^{\infty}A_m$ then $\lambda^*(A)\le\sum_{m=1}^{\infty}\lambda^*(A_m)$

(إذن λ^* قياس خارجي على أجزاء $\mathbb{R}$).

4. $\lambda^*(]a,b]) = \lambda(]a,b]) = b-a$

الإثبات:

لنثبت 3 و 4 ليكن $\varepsilon > 0$ و $m \geq 1$ استناداً لخواص الـ inf الوارد في التعريف ثمة :

$$J_{m,k} = \left]a_{m,k}, b_{m,k}\right] \quad , k = 1,2,...$$

بحيث $A_m \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} J_{m,k}$ و

$$\lambda^*(A_m) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(J_{m,k}) \leq \lambda^*(A_m) + \frac{\varepsilon}{2^m}$$

ولما كان: $$A = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m \subseteq \bigcup_{m=1}^{\infty}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} J_{m,k}\right)$$

إذن: $$\lambda^*(A) \leq \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \lambda(J_{m,k})$$

$$\leq \sum_{m=1}^{\infty}\left[\lambda^*(A_m) + \frac{\varepsilon}{2^m}\right]$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^*(A_m) + \varepsilon$$

وحيث ε كيفي فإذا جعلنا $\varepsilon \to 0$ وجدنا $\lambda^*(A) = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^*(A_m)$

وتم المطلوب الثالث.

إثبات 4 : القياس الخارجي لمجال يساوي طوله.

$$\lambda^*(]a,b]) \overset{?}{=} \lambda(]a,b]) = b-a$$

لدينا : $$]a,b] \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}]a_n, b_n] =]a,b] \cup \phi \cup \phi \cup ...$$

حيث أخذنا $$a = a_1, b = b_1, a_2 = b_2 = ... = a_n = b_n = b = ...$$

وذلك أياً يكن $n \geq 2$ ، وعليه فإن:

$$\lambda^*(]a,b[) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(]a_n,b_n[) = (b-a)+0+0+\ldots = b-a$$

$$\lambda^*(]a,b[) \leq \lambda(]a,b[) = b-a$$

لنثبت المتراجحة المعاكسة:

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \exists J_k =]a_k,b_k[, k = 1,2,3,\ldots$$

بحيث $]a,b[\subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} J_k$ (*)

و $\lambda^*(]a,b[) \leq \sum_{k=1}^{\infty}(\lambda(J_k)) \leq \lambda^*(]a,b[) + \varepsilon$

لكن (*) تعطي حسبما مر معنا في المبرهنة السابقة أن:

$$b-a \leq \sum_{k=1}^{\infty}(b_k - a_k) = \sum_{k=1}^{\infty}\lambda(J_k)$$

$$b-a \leq \lambda^*(]a,b[) + \varepsilon$$

فإذا جعلنا ε تسعى إلى الصفر نجد: $b-a \leq \lambda^*(]a,b[)$

مما أُطر نجد المطلوب $\lambda^*(]a,b[) = \lambda(]a,b[) = b-a$.

٢-٥-٣- تدريب هام: أثبتنا في المبرهنة السابقة أن λ^* المعرف بالعلاقة :

$$\lambda^*(A) = \inf\{\sum_{n=1}^{\infty}\lambda(]a_n,b_n[) : A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}]a_n,b_n[\}$$

$$= \inf\{\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n) : A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}]a_n,b_n[\}$$

وذلك أياً كانت $A \subseteq \mathbb{R}$ ، قياس خارجي على أجزاء $\mathbb{R}$، وبالتالي فإن صف المجموعات القيوسة بالنسبة لـ λ^* ولنرمّزه $\mathfrak{M}^*$ يحقق ما يلي:

1. $A \in \mathfrak{M}^* \overset{\text{تعريفاً}}{\Leftrightarrow}$

$$\forall K \subseteq \mathbb{R}: \ \lambda^*(K \cap A) + \lambda^*(K \cap A^c) \leq \lambda^*(K)$$

إن $\mathfrak{M}^*$ جبر تام من أجزاء $\mathbb{R}$.

2. $\forall a \in \mathbb{R} :]-\infty, a] \in \mathfrak{M}^*$

3. $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}} \subseteq \mathfrak{M}^*$, $\mathfrak{I} \subseteq \mathfrak{M}^*$

حيث $\mathfrak{I}$ صف المجالات المفتوحة في $\mathbb{R}$.

4. $\forall a,b \in \mathbb{R} : a \le b$, $]a,b] \in \mathfrak{M}^*$

5. $\forall A \subseteq \mathbb{R}$:

$$\text{if } \lambda^*(A) = 0 \quad \text{then} \quad A \in \mathfrak{M}^*$$

بعبارة أدق كل مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$ قياسها الخارجي معدوم تكون قيوسة بالنسبة لـ λ^*.

6. $\text{if} \quad \mu = \lambda^*|_{\mathfrak{M}^*} \quad \text{then}$

μ قياس على $\mathfrak{M}^*$ (صف المجموعات القيوسة بالنسبة لـ λ^*)، نسمي هذا القياس **بقياس لوبيغ على** $\mathbb{R}$.

الإثبات:

1. انظر المبرهنة (٢-٤-٦).

2. لنأخذ المجال $]-\infty, a]$ ولتكن $K \subseteq \mathbb{R}$ ولنضع :

$$K_1 = K \cap]-\infty, a] \quad \text{و} \quad K_2 = K \cap]a, \infty]$$

ليكن $\varepsilon > 0$، إذا كان $J_n =]a_n, b_n]$ بحيث أن :

$$K \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n \quad \text{و} \quad \lambda^*(K) \ge \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(J_n) - \varepsilon$$

ولنضع: $J_n' =]-\infty, a] \cap J_n$ و $J_n'' =]a, \infty[\cap J_n$

عندئذ يكون: $\lambda(J_n) = \lambda(J_n') + \lambda(J_n'')$

وهنا نرى أن: $K_1 \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n'$ و $K_2 \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n''$.

إذن: $\lambda^*(K_1)\le\sum_{n=1}^{\infty}\lambda(J_n')$ و $\lambda^*(K_2)\le\sum_{n=1}^{\infty}\lambda(J_n'')$

وبالتالي فإن : $\lambda^*(K_1)+\lambda^*(K_2)\le\sum_{n=1}^{\infty}\lambda(J_n)\le\sum_{n=1}^{\infty}\lambda(K)+\varepsilon$

وهذا كاف لتحقيق المراد.

3. بما أن $\mathfrak{M}^*$ جبر تام فهو سيحوي الجبر التام المولد بصف المجالات $]-\infty,a]$ حيث $a\in\mathbb{R}$ إذن سيحوي جبر بوريل $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$ في $\mathbb{R}$.

فكل مجال مفتوح سيكون قيوساً بالنسبة لـ λ^*، أي أنَّ $\mathfrak{I}\subseteq\mathfrak{M}^*$. وكذلك كل مجموعة مفتوحة ستكون قيوسة بالنسبة لـ λ^* (لماذا؟).

4. لما كان $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}\subseteq\mathfrak{M}^*$ عندئذ سيكون كل مجال من النمط $]a,b[$ حيث $a,b\in\mathbb{R}$ و $a\le b$ ، قيوساً بالنسبة لـ λ^* (علِّل ذلك) .

5. إذا كان $\lambda^*(A)=0$ وذلك أياً كانت المجموعة الجزئية A من $\mathbb{R}$ ، وكانت $B\subseteq A$ فإن $\lambda^*(B)=0$. الآن لنأخذ مجموعة اختيارية K من $\mathbb{R}$ لاحظ أن $A\supseteq K\cap A$ و $K\supseteq K\cap A^c$ وأن λ^* متزايد أي :

$$\begin{aligned}\lambda^*(K)&\ge\lambda^*(K\cap A^c)\\&\ge 0+\lambda^*(K\cap A^c)\\&\ge\lambda^*(K\cap A)+\lambda^*(K\cap A^c)\end{aligned}$$

وبذلك يتم المطلوب.

6. انظر المبرهنة (٢-٤-٦).

تدريب: تحقق من صحة ما يلي: if $\mu=\lambda^*|_{\mathfrak{M}^*}$ then

$$\mu(]a,b])=\lambda^*(]a,b])=\lambda(]a,b])=b-a$$
$$\mu(]a,b[)=\lambda^*(]a,b[)=\lambda(]a,b[)=b-a$$
$$\mu([a,b])=\lambda^*([a,b])=\lambda([a,b])=b-a$$

٢-٥-٤- مبرهنة: أياً تكن $A \subseteq \mathbb{R}$ ، فإن:

$$\lambda^*(A) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n) : A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}]a_n, b_n[\right\}$$

الإثبات: انظر كتاب نظرية القياس للأستاذ الدكتور عهد كفى- الفصل الثالث .

٢-٥-٥- نتيجة: أياً تكن $A \subseteq \mathbb{R}$ ، فإن:

$$\lambda^*(A) = \inf\{\mu(O) : A \subseteq \quad O \text{ مفتوحـــة}\}$$

٢-٥-٦- مبرهنة: لتكن $A \subseteq \mathbb{R}$ ، الشرط اللازم والكافي لكي تكون A مجموعة قيوسة بالنسبة لـــ μ ، هو أن توجد من أجل كل $\varepsilon > 0$ مجموعة مفتوحة O تحوي A ، بحيث يكون: $\lambda^*(O - A) < \varepsilon$

الإثبات: لزوم الشرط: لنفرض أن A مجموعة قيوسة بالنسبة لـــ λ^* ، إذا كان $\lambda^*(A) < \varepsilon$ ، عندئذ أياً يكن $\varepsilon > 0$ توجد متتالية $(]a_n, b_n[)_{n\geq 1}$ ، بحيث تكون $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}]a_n, b_n[$ ، وبحيث يكون: $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n) < \mu(A) + \varepsilon$

ينتج أن المجموعة المفتوحة $O = \bigcup_{n=1}^{\infty}]a_n, b_n[$ تحوي A ، وأن:

$$\mu(O - A) = \mu(O) - \mu(A)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n) - \mu(A) < \varepsilon$$

أما إذا كانت $\mu(A) = +\infty$ ، ووضعنا $B_n = [-n, n]$ ، و $A_n = A \cap B_n$ من أجل $n = 1, 2, \ldots$ ، فإن $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ و A_n مجموعة قيوسة بالنسبة لـــ λ^* و $\lambda^*(A_n) < +\infty$ ، من أجل $n = 1, 2, \ldots$. عندئذ، يوجد استناداً إلى القسم الأول من الإثبات، من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$ مجموعة مفتوحة O_n

تحوي A_n ، بحيث يكون $\mu(O_n - A_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$. وعليه فإن $O = \bigcup_{n=1}^{\infty} O_n$ مجموعة مفتوحة تحوي A بحيث يكون :

$$\mu(O - A) \le \mu\left[\bigcup_{n=1}^{\infty}(O_n - A_n)\right] \le \sum_{n=1}^{\infty}\mu(O_n - A_n) < \varepsilon$$

كفاية الشرط: يوجد، استناداً إلى الفرض، من أجل كل عدد طبيعي $n \ge 1$، مجموعة مفتوحة O_n تحوي A ، بحيث يكون $\lambda^*(O_n - A_n) < \frac{1}{n}$. عندئذ تكون $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$ مجموعة قيوسة بالنسبة لـ λ^* تحوي A. من جهة أخرى لدينا:

$$\lambda^*(G - A) \le \lambda^*(O_n - A) < \frac{1}{n} \quad , \quad \forall n \ge 1$$

إذاً $\lambda^*(G - A) = 0$، وبالتالي فإن $G - A$ مجموعة قيوسة بالنسبة لـ λ^*. أخيراً بما أن $A = G - (G - A)$ إذاً A مجموعة قيوسة بالنسبة لـ λ^*، وبذلك يتم المطلوب.

قياس لوبيغ $\mu = \lambda^*|_{\mathfrak{M}}$ لا يتأثر بالانسحاب

لتكن $A \subseteq \mathbb{R}$ وليكن α عدداً حقيقياً. ندل على المجموعة $\{x : x - \alpha \in A\}$ بالرمز $A + \alpha$ أو بالرمز $\alpha + A$، ونسميها المجموعة الناتجة عن A بانسحاب معين بالعدد α.

من أهم الخواص المميّزة لقياس لوبيغ انه لا يتأثر بالانسحاب. أي أنه إذا كانت A مجموعة قيوسة بالنسبة لـ μ ، فإن $A + \alpha$ تكون قيوسة بالنسبة لـ μ ويكون $\mu(A + \alpha) = \mu(A)$، كما يتضح ذلك من المبرهنة التالية:

٢-٥-٧- مبرهنة : أياً يكن العدد الحقيقي α، أياً تكن $A \subseteq \mathbb{R}$، فإن $\lambda^*(A+\alpha)=\lambda^*(A)$ بالإضافة إلى ذلك، فإن A تكون قيوسة بالنسبة لـ μ، وعندئذ يكون : $\mu(A+\alpha)=\mu(A)$.

الإثبات: إذا كانت $A=]a,b[$ ، فإن A تكون قيوسة بالنسبة لـ μ ،كما تكون $A+\alpha=]a+\alpha,b+\alpha[$ تكون قيوسة بالنسبة لـ μ، ويكون:

$$\mu(A+\alpha)=\mu(A)=b-a$$

وإذا كانت A مجموعة مفتوحة، فإنها تكون قيوسة بالنسبة لـ μ، ويمكن كتابتها على الشكل $A=\bigsqcup_{n=1}^{\infty}]a_n,b_n[$، حيث الرمز $\sqcup$ يعني اتحاداً منفصلاً(علّل ذلك). وعندئذ تكون $A+\alpha=\bigsqcup_{n=1}^{\infty}]a_n+\alpha,b_n+\alpha[$ مجموعة مفتوحة أي أن $A+\alpha$ قيوسة بالنسبة لـ μ، ويكون:

$A+\alpha=\bigsqcup_{n=1}^{\infty}]a_n+\alpha,b_n+\alpha[$ مجموعة مفتوحة أي أن $A+\alpha$ تكون قيوسة بالنسبة لـ μ، ويكون :

$$\mu(A+\alpha)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[(b_n+\alpha)-(a_n+\alpha)\right]=\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-a_n)=\mu(A)$$

لتكن الآن A مجموعة جزئية كيفية من $\mathbb{R}$.

نعلم أن:

$$\lambda^*(A)=\inf\{\mu(O):A\subseteq \text{ مفتوحة } O\}$$

كما يمكننا التحقق بسهولة من أن O تكون مفتوحة وتحوي A، إذا وفقط إذا كانت $O+\alpha$ مجموعة مفتوحة، وتحوي $A+\alpha$. إذاً:

$$\lambda^*(A+\alpha)=\inf\{\mu(O+\alpha):A\subseteq \text{ مفتوحة } O\}$$
$$=\inf\{\mu(O):A\subseteq \text{ مفتوحة } O\}=\lambda^*(A)$$

لنفرض أن A مجموعة قيوسة بالنسبة لـــ μ ، عندئذ أياً تكن $K \subseteq \mathbb{R}$ فإن:

$$\lambda^*(K) = \lambda^*(K-\alpha)$$
$$= \lambda^*\left[(K-\alpha)\cap A\right] + \lambda^*\left[(K-\alpha)\cap A^c\right]$$
$$= \lambda^*\left[\alpha + \left((K-\alpha)\cap A\right)\right] + \lambda^*\left[\alpha + \left((K-\alpha)\cap A^c\right)\right]$$
$$= \lambda^*\left[\left(K\cap(A+\alpha)\right)\right] + \lambda^*\left[K\cap(A+\alpha)^c\right]$$

أي أن $A+\alpha$ مجموعة قيوسة بالنسبة لـــ μ ، بالعكس إذا كانت $A+\alpha$ مجموعة قيوسة بالنسبة لـــ μ ، فإن المجموعة الناتجة عنها بانسحاب معين بالعدد $-\alpha$ ، أي المجموعة A ، تكون قيوسة بالنسبة لـــ μ وذلك استناداً إلى ما تقدم.

أخيراً من الواضح إذا كانت A تكون قيوسة بالنسبة لـــ μ ، فإن:

$$\mu(A) = \lambda^*(A) = \lambda^*(A+\alpha) = \mu(A+\alpha)$$

وبذلك يكتمل الإثبات.

٢-٥-٨- تعريف: ندعو كل قياس μ_1 معرف على $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$ قياساً بوريلياً على $\mathbb{R}$.

نقول عن قياس بوريلي μ_1 على $\mathbb{R}$ إنه نظامي إذا حقق الشرط :

$$\forall B \subseteq \mathfrak{B}_{\mathbb{R}} : \mu_1(B) = \inf\left\{\mu_1(O) : \quad O \text{ مفتوحـــة } \supseteq B\right\}$$

ينتج من التعريف أن مقصور قياس لوبيغ على $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$ هو قياس بوريلي نظامي وذلك استناداً إلى النتيجة (٢-٥-٥).

من جهة أخرى، لدينا:

٢-٥-٩- مبرهنة: أياً تكن المجموعة المتراصة K في $\mathbb{R}$ ، فإن:

$$\mu(K) < +\infty$$

الإثبات: في الواقع، إذا كانت K متراصة فإنها تكون محدودة وبالتالي يوجد مجال J محدود في $\mathbb{R}$، بحيث إن $K \subseteq J$. عندئذ يكون:

$$\mu(K) \le \mu(J) < +\infty$$

٢-٥-١٠- مبرهنة: أياً تكن المجموعة المفتوحة O في $\mathbb{R}$، فإن:

$$\mu(O) = \sup\{\mu(K) : K \text{ متراصة } K \subseteq O\}$$

الإثبات: انظر كتاب نظرية القياس للأستاذ الدكتور عهد كفى- الفصل الثالث .

٢-٥-١١- ملاحظة: ندعو أحياناً كل قياس بوريلي نظامي يحقق المبرهنتين السابقتين

(٢-٥-٩) و(٢-٥-١٠) ، قياس رادون على $\mathbb{R}$.

وهكذا يتضح أن مقصور قياس لوبيغ على $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$ هو قياس رادون.

على الرغم من أن قياس لوبيغ ليس معرفاً- كما رأينا- من أجل كل أجزاء $\mathbb{R}$، إلا أن تقديم مثالٍ لمجموعة غير قيوسة لا يبدو أمراً بديهياً. نستخدم فيما يلي ما يعرف ببديهية الاختيار لعرض مثال لمجموعة غير قيوسة.

بديهية الاختيار: إذا كان $\{A_i : i \in I\}$ صفاً غير خالٍ من المجموعات غير الخالية والمنفصلة، فإنه توجد مجموعة $B \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$، بحيث أن $B \cap A_i$ تكون مجموعة وحيدة العنصر، وذلك من أجل $i \in I$.

مثال(١) : لتكن $A = [0,1]$ ولنعرف من أجل كل x من A المجموعة A_x على النحو التالي:

$$A_x = \{y \in A : x - y \in \mathbb{Q}\}$$

من الواضح أن A_x غير خالية، وذلك أياً يكن $x \in A$ ، لأن $x \in A_x$ ، وأن الصف $\{A_x : x \in A\}$ غير خال، لأن مجموعة الأعداد العادية في A عنصر منه.

من جهة أخرى، أياً يكن $x \in A$ ، فإن $x \in A_x$ و بالتالي فإن $A = \bigcup_{x \in A} A_x$.

لنلاحظ أيضاً أنه أياً يكن x_1 و x_2 من A ، فإن $A_{x_1} = A_{x_2}$ إذا كان $x_1 - x_2$ عدداً عادياً و $A_{x_1} \cap A_{x_2} = \phi$ إذا كان $x_1 - x_2$ عدداً غير عادي (أصم).

لنختر استناداً إلى بديهية الاختيار عنصراً واحداً فقط من كل من المجموعات المختلفة A_x ، ولنرمز بـ S لمجموعة العناصر المختارة تلك. نبرهن فيما يلي أن S مجموعة غير قيوسة بالنسبة لقياس لوبيغ μ.

لتكن $(r_n)_{n\geq 1}$ متتالية الأعداد العادية في المجال $[-1,1]$،ولنضع $C_n = S + r_n$ حيث $n = 1,2,...$. عندئذ أياً يكن $n \neq m$ فإن $C_n \cap C_m = \phi$. إذا لو كان x عنصراً من التقاطع المذكور لكان كل من $x - r_n$ و $x - r_m$ عنصراً من S وذلك غير ممكن، لأن فرق العددين الأخيرين هو عدد عادي، وبالتالي فهما ينتميان إلى مجموعة واحدة من المجموعات A_x ، وذلك يناقض تعريف S .

لنضع $C = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$ ، عندئذ $C \subseteq [-1,2]$. من جهة أخرى، إذا كان $x \in A$ فإنه يوجد $y \in S$، بحيث يكون $x - y$ عدداً عادياً من المجال $[-1,1]$، أي أنه يوجد عدد طبيعي n_0 ، بحيث يكون $x = y + r_{n_0}$.

عندئذ $x \in C_{n_0}$ ، أي أن $x \in C$ ، إذاً $A \subseteq C$.

لنفرض الآن أن S مجموعة قيوسة بالنسبة لـ μ. عندئذ تكون $S + r_n$ مجموعة قيوسة بالنسبة لـ μ، ويكون:

$$\mu(S) = \mu(S + r_n) = \mu(C_n)$$

أياً يكن $(n=1,2,...)$. كما تكون C مجموعة قيوسة بالنسبة لـــ μ أيضاً، ويكون:

$$\mu(C)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(S+r_n)$$

فإذا كان $\mu(S)=0$ فإن $\mu(C)=0$ وذلك غير ممكن لأن:

$$\mu(C)\geq\mu(A)=1$$

أما إذا كان $\mu(S)>0$ فإن $\mu(C)=\infty$، وذلك غير ممكن أيضاً لأن:

$$\mu(C)\leq\mu([-1,2])$$

ينتج أن فرضنا S مجموعة قيوسة بالنسبة لـــ μ فرض خاطئ، وبالتالي فإن S غير قيوسة بالنسبة لـــ μ.

يتضح من المثال السابق أن توجد مجموعات جزئية من $\mathbb{R}$ غير بوريلية. أي أن $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$ محتوى تماماً في مجموعة أجزاء $\mathbb{R}$.

مثال (٢) : (مجموعة كانتور)

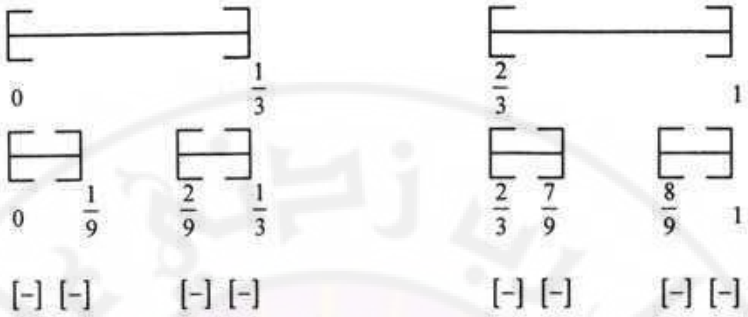
لتكن $C_0=[0,1]$، ولتكن C_1 المجموعة الناتجة من C_0 بحذف داخل ثلثها الأوسط، أي بحذف المجال $\left]\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right[$، أي أن:

$$C_1=\left[0,\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{2}{3},1\right]$$

ولتكن C_2 المجموعة الناتجة من C_1 بحذف داخل الثلث الأوسط لكل من المجالين المشكلين لها، أي بحذف المجالين $\left]\frac{1}{9},\frac{2}{9}\right[$ و $\left]\frac{7}{9},\frac{8}{9}\right[$، أي أن:

$$C_2=\left[0,\frac{1}{9}\right]\cup\left[\frac{2}{9},\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{2}{3},\frac{7}{9}\right]\cup\left[\frac{8}{9},1\right]$$

يوضح الشكل الآتي المجالات المحذوفة في الخطوات الثلاث الأولى.



بمتابعة العمل بنفس الطريقة نجد أن C_n تتألف من 2^n مجالاً مغلقاً طول كل منها $\frac{1}{3^n}$. فإذا حذفنا داخل الثلث الأوسط لكل منها نحصل على C_{n+1} .

نعرّف مجموعة كانتور C ، بأنها المجموعة: $C=\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$.

من الواضح أن C مجموعة بوريلية، وبالتالي مجموعة قيوسة بالنسبة لـــ μ ، وأن $\mu(C)=0$ لأن مجموعة أطوال المجالات المحذوفة من C_{n-1} للحصول على C_n يساوي $2^{n-1}\cdot\frac{1}{3^n}$ ، وذلك أياً يكن $n\geq 1$ إذاً:

$$\mu(C)=\mu([0,1])-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{3^n}=1-1=0$$

نذكر من خواص مجموعة كانتور بهذا الصدد أنها غير عدودة.

٢-٦- قياس لوبيغ _ استيلجس على $\mathbb{R}$

يعتبر قياس لوبيغ _ استيلجس على $\mathbb{R}$ من القياسات الشهيرة التي يبدو قياس لوبيغ حالة خاصة منها. لتكن F دالة توزيع على $\mathbb{R}$ أي حقيقية متزايدة ومستمرة من اليمين. لنعرف على $\Im$ صف المجالات المحدودة ونصف المفتوحة من اليسار من الشكل $]a,b]$ حيث $a,b\in\mathbb{R}$ و $a\leq b$ دالة λ_F بالعلاقة:

$$\lambda_F(]a,b])=F(b)-F(a)$$

عندئذ من الواضح أن $\lambda_F \geq 0$ و $\lambda_F(\phi) = 0$. كما نلاحظ بسهولة أن :

$$\lambda_F(]\, a,b\,]) = \lambda_F(]\, a,c\,]) + \lambda_F(]\, c,b\,])$$

كما يبرهن أنه إذا كان $]\, a,b\,] \subseteq \bigcup_{n=1}^{m}]\, a_n,b_n\,]$ ، فإن:

$$\lambda_F(]\, a,b\,]) \leq \sum_{n=1}^{m} \lambda_F(]\, a_n,c_n\,])$$

وإذا كان $]\, a,b\,] \supseteq \bigsqcup_{n=1}^{m}]\, a_n,b_n\,]$ حيث الرمز $\sqcup$ يعني اتحاداً منفصلاً، فإن:

$$\sum_{n=1}^{m} \lambda_F(]\, a_n,c_n\,]) \leq \lambda_F(]\, a,b\,])$$

وعندئذ نحصل على النتيجة التالية:

٢-٦-١- نتيجة: إذا كانت المجالات $]\, a_n,b_n\,]$ حيث $n \geq 1$ منفصلة مثنى، وكان $]\, a_n,b_n\,] \subseteq \bigsqcup_{n=1}^{m}]\, a,b\,]$ فإن:

$$\lambda_F(]\, a,b\,]) \leq \sum_{n=1}^{m} \lambda_F(]\, a_n,c_n\,])$$

لنمدد الدالة λ_F على الحلقة $\mathbb{A}$ ، حلقة الاتحادات المنتهية للمجالات المحدودة ونصف المفتوحة من اليسار والمنفصلة، بالشكل الآتي:

إذا كانت $A = \bigsqcup_{n=1}^{m}]\, a_n,b_n\,] \in \mathbb{A}$ حيث المجالات $]\, a_n,b_n\,]$ منفصلة مثنى وذلك أياً يكن $n \geq 1$ ، فإننا نضع:

$$\lambda_F(A) = \sum_{n=1}^{m} \lambda_F(]\, a_n,c_n\,]) \qquad (3)$$

عندئذ تضمن النتيجة (٢-٦-١) أن القيمة $\lambda_F(A)$ مستقلة عن الطريقة التي نعبر بها عن A باتحاد منته لمجالات محدودة ونصف مفتوحة من اليسار ومنفصلة.

ويبرهن أن λ_F المعرفة على الحلقة $\mathbb{A}$ بالعلاقة (3) ، هي قياس على $\mathbb{A}$.

عندئذ باستخدام مبرهنة التمديد (٢-٤-١١)، نجد أنه يوجد ممدد وحيد للقياس λ_F على $\sigma(\mathbb{A})=\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$ ، صف المجموعات البوريلية في $\mathbb{R}$.

فإذا رمزنا بـــ $\widetilde{\mu_F}$ لمكمل الممدّد المذكور وذلك ضمن ما تشير إليه المبرهنة (٢-٣-٤)، فإننا نسمي $\widetilde{\mu_F}$ بقياس لوبيغ- استيلجس المعين بالدالة F .

كما ينتج أن كل مجموعة قيوسة بالنسبة لـــ $\widetilde{\mu_F}$ هي اتحاد مجموعة بوريليه ومجموعة همولة بالنسبة لـــ $\widetilde{\mu_F}$.

وهكذا، فإن كل مجموعة وحيدة العنصر $\{a\}$ حيث $a\in\mathbb{R}$ ، هي مجموعة قيوسة بالنسبة لـــ $\widetilde{\mu_F}$ ، زد على ذلك أن:

$$\begin{aligned}\widetilde{\mu_F}(\{a\}) &= \lim_{n\to\infty}\widetilde{\mu_F}\left(\left]a-\frac{1}{n},a\right]\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\left[F(a)-F\left(a-\frac{1}{n}\right)\right]\\ &= F(a)-F(a-)\end{aligned}$$

حيث رمزنا بـــ $F(a-)$ لنهاية الدالة F من اليسار في النقطة a

كما يمكننا أن نتحقق بسهولة من أن:

$$\widetilde{\mu_F}(]a,b])=F(b)-F(a)$$

$$\begin{aligned}\widetilde{\mu_F}(]a,b[) &= \lim_{n\to\infty}\widetilde{\mu_F}\left(\left]a,b-\frac{1}{n}\right]\right)\\ &= F(b-)-F(a)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{\mu_F}([a,b]) &= \lim_{n\to\infty}\widetilde{\mu_F}\left(\left]a-\frac{1}{n},b-\frac{1}{n}\right]\right)\\ &= F(b-)-F(a-)\end{aligned}$$

أخيراً، من الواضح أنه إذا كانت $F(x)=x$، من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ ، فإن قياس لوبيغ- استيلجس المعين بالدالة F ما هو إلا قياس لوبيغ على $\mathbb{R}$.



.....☼☼.....

تتمات و تمارين الفصل الثاني

١) $(X,\mathcal{A},\mu)$ فضاء مقيس و $\mu_1(A)=\sqrt{\mu(A)}$ لكل A من $\mathcal{A}$

برهن أن μ_1 يحقق مايلي:

$1-\ \mu_1(\phi)=0$

$2-\ \mu_1(A)\le\mu_1(B)\qquad A,B\in\mathcal{A}$ و $A\subseteq B$

$3-\ \mu_1(A\cup B)\le\mu_1(A)+\mu_1(B)\qquad \forall A,B\ \in\mathcal{A}$

هل μ_1 قياس على $\mathcal{A}$؟

٢) $(X,\mathcal{A},\mu)$ فضاء مقيس. برهن أن

$$\text{if } A,B\in\mathcal{A} \text{ ﷺ } \mu(A\Delta B)=0 \text{ then } \mu(A)=\mu(B)$$

٣) $(X,\mathcal{A},\mu)$فضاء مقيس و لنضع لكل A,B من $\mathcal{A}$:

$$\rho(A,B)=\mu(A\Delta B)$$

أثبت أن ρ يحقق ما يلي :

$$\rho(A,B)\ge 0\quad,\quad \rho(A,B)=\rho(B,A)$$

$$\rho(A,B)+\rho(B,C)\ge\rho(A,C)$$

وذلك مهما تكن A,B,C من $\mathcal{A}$. هل ρ مسافة على $\mathcal{A}$؟

٤) لتكن $X=\mathbb{R}$

$\mathcal{A}=\{A\subseteq\mathbb{R},$ أو A (عدودة أو منتهية) و A^c (عدودة أو منتهية)$\}$

$$\mu:\mathcal{A}\to\overline{\mathbb{R}}+\quad,\quad A\mapsto|A|=\begin{cases}\text{عدد عناصر } A \text{ إن كانت منتهية}\\ \infty \qquad\qquad \text{خلاف ذلك}\end{cases}$$

هل $(X,\mathcal{A},\mu)$ فضاء مقيس كامل ؟

٥) إذا كان $J=\{[a,b[\quad : a\le b \quad , a,b\in\mathbb{R}\}$

وكان F تابعاً مستمراً ومتزايداً على $\mathbb{R}$ ومحدوداً عليها إذا وضعنا

$$\lambda([a,b[)=F(b)-F(a)$$

فأثبت أن:

أ- $\lambda(\phi)=0$

ب- $\bigsqcup_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n[=[a,b[\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\lambda([a_n,b_n[)=\lambda([a,b[)$

حيث الرمز $\sqcup$ يعني اتحاداً منفصلاً.هل λ قياس على J ؟!

٦) $(X,\mathcal{A},\mu)$ فضاء مقيس وكان: $\mu(X)<\infty$ أثبت أنه:

إذا $A,B\in\mathcal{A}$ عندئذ:

$$\mu(A\cup B)=\mu(A)+\mu(B)-\mu(A\cap B)$$

إذا $A,B,C\in\mathcal{A}$ عندئذ:

$$\mu(A\cup B\cup C)=\mu(A)+\mu(B)+\mu(C)-$$
$$-\mu(A\cap B)-\mu(A\cap C)-\mu(B\cap C)+\mu(A\cap B\cap C)$$

٧) فيما يلي $(X,\mathcal{A})$ فضاء قيوس

أ- $\{\mu_n\}$ متتالية متزايدة من القياسات الموجبة على الفضاء القيوس $(X,\mathcal{A})$

لنضع $\mu(A)=\lim_{n\to\infty}\mu_n(A)$

برهن على أن μ قياس على X.

ب- إذا كان $\{\mu_n\}$ متتالية من القياسات الموجبة ووضعنا

$\mu(A)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n(A)$ فهل μ قياس على $\mathcal{A}$؟

(٨) لتكن $X = \mathbb{R}$ ولنعرف μ^* على أجزائها كما يلي:

$$\mu^*(A) = \begin{cases} \sqrt[3]{n} & \text{if} \quad |A| = n \\ +\infty & \text{if} \quad A \text{ غير منتهية} \end{cases}$$

حيث $|A|$ = عدد عناصر A (إذا كانت A منتهية)

هل μ^* قياس خارجي؟

ليكن:

$$\mathfrak{L}_1 = \{\phi, \mathbb{Q}, \mathbb{Q}^c, \mathbb{R}\}$$
$$\mathfrak{L}_2 = \{\phi, \{0\}, \mathbb{R}^*, \mathbb{R}\}$$

هل مقصور μ^* على $\mathfrak{L}_1$ قياس؟

هل مقصور μ^* على $\mathfrak{L}_2$ قياس؟ علِّل ذلك.

(٩) إذا كان μ^* قياساً خارجياً على X وإذا كان:

$$\mu^*(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} \mu^*(A_k)$$

من أجل أي متتالية منتهية $A_1, A_2, ..., A_n$ من أجزاء X فإن μ^* قياس على X.

(١٠) هات أمثلة أخرى عن القياس الخارجي على (أجزاء) X.

.....☼☼.....

وقل رب زدني علما
Damascus University

الفصل الثالث

التطبيقات(الدوال) القيوسة

Measurable Mappings

٣-١- تمهيد: نعلم أنه إذا كان $f: X \to Y$ تطبيقاً للمجموعة X في المجموعة Y فإنه يولّد تطبيقاً $f^{-1}: 2^Y \to 2^X$ معرّفاً كما يلي:

$$\forall E \subseteq Y : f^{-1}(E) = \{x \in X : f(x) \in E\}$$

لذلك فإن: $f^{-1}(Y) = X$ و $f^{-1}(\phi) = \phi$

وإذا كانت $E_1 \subseteq E_2$ فإن $f^{-1}(E_1) \subseteq f^{-1}(E_2)$ من أجل كل E_1, E_2 من 2^Y.

كذلك فإن $f^{-1}(\bigcup_{i\in I} E_i) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(E_i)$ و $f^{-1}(\bigcap_{i\in I} E_i) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(E_i)$

و $f^{-1}(E^c) = [f^{-1}(E)]^c$ حيث E, E_i من 2^Y من أجل كل i من مجموعة الأدلة I.

٣-١-١- تدريب: أثبت أنه إذا كانت الجماعة $\Im$ جبراً تاماً في Y فإن الجماعة:

$$S = \{f^{-1}(E) : E \in \Im\}$$

جبر تام في X.

٣-٢- التطبيقات القيوسة

٣-٢-١- تعريف: إذا كان $(X,S),(Y,\Im)$ فضائين قيوسين و $f: X \to Y$ فإننا نقول عن التطبيق f إنه قيوس، بالنسبة للجبرين التامين $S, \Im$، إذا كانت الصورة العكسية وَفْق f لأي مجموعةٍ قيوسة في المستقر مجموعةً قيوسة في المنطلق، أي إذا تحقق: $\forall E \in \Im : f^{-1}(E) \in S$

وإذا لم يكن ثمة التباس فإننا نقول إن f قيوس دون الحاجة إلى ذكر الجبرين التامين.

٣-٢-٢- تـدريبـان:

تدريب (١): أثبت أن تركيب تطبيقين قيوسين هو تطبيق قيوس.

تدريب مشهور(٢) : إذا كان $(X,S),(Y,\Im)$ فضائين قيوسين و $\Im=\sigma(\xi)$ حيث $\xi\subseteq 2^Y$ فأثبت أن الشرط اللازم والكافي كي يكون $f:X\to Y$ قيوساً هو أن يكون:

$$\forall E\in\xi: f^{-1}(E)\in S$$

٣-٢-٣- نتيجة: إذا كان $(X,\tau_1),(Y,\tau_2)$ فضائين تبولوجيين، وكان $f:X\to Y$ تطبيقاً مستمراً فإن f قيوس بالنسبة للجبرين التامين $\mathfrak{B}_X,\mathfrak{B}_Y$.

لأنه إذا كانت E مجموعة مفتوحة في Y (E من τ_2) فإن $f^{-1}(E)$ مجموعة مفتوحة في X ($f^{-1}(E)$ من τ_1) لأن f مستمر. ومن ثم فإن $f^{-1}(E)$ من $\mathfrak{B}_X$. ومن التمرين السابق فإن f قيوس.

٣-٢-٤- تعريف: إذا كان (X,S) فضاء قيوساً و (Y,τ) فضاء تبولوجياً، و $f:X\to Y$ فإننا نقول إن f تطبيق $S-$ قيوس (أو قيوس بالنسبة إلى S) إذا كان f قيوساً بالنسبة لـ S و $\mathfrak{B}_Y$. أي إذا كانت الصورة العكسية، وفق f، لأي مجموعة بوريلية في المستقر مجموعة قيوسة في المنطلق. ويكفي لتحقق ذلك أن تكون الصورة العكسية لأي مجموعة مفتوحة في المستقر مجموعة قيوسة في المنطلق. لماذا؟

٣-٢-٥- ملاحظة: إن بعض المراجع (انظر مثلاً Rudin) تعرّف التطبيق لفضاء قيوس في فضاء تبولوجي بأنه قيوس إذا كانت الصورة العكسية لأي مجموعة مفتوحة في المستقر مجموعة قيوسة في المنطلق. فهل لهذا ما يفسّره ؟

٣-٢-٦- تعريف: نقول عن التطبيق $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ إنه بوريلي إذا كان قيوساً بالنسبة لجبر بوريل $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$.

٣-٢-٧- تدريب: هات ستة صفوف من المجالات كل منها يولد جبر بوريل في $\mathbb{R}$.

٣-٢-٨- مبرهنة أساسية: إذا كان (X,S) فضاء قيوساً و $f:X\to\mathbb{R}$ فإن f يكون $S-$ قيوساً إذا وفقط إذا تحقق أحد الشروط التالية:

1. $\forall a\in\mathbb{R}: f^{-1}(]a,\infty[)\in S$
2. $\forall a\in\mathbb{R}: f^{-1}([a,\infty[)\in S$
3. $\forall a\in\mathbb{R}: f^{-1}(]-\infty,a[)\in S$
4. $\forall a\in\mathbb{R}: f^{-1}(]-\infty,a])\in S$

الإثبات: لقد أثبتنا سابقاً أن أي صف من المجالات التالية تولد جبر بوريل في $\mathbb{R}$:

$$\{]a,\infty[: a\in\mathbb{R}\}\quad,\quad\{[a,\infty[: a\in\mathbb{R}\}$$
$$\{]-\infty,a[: a\in\mathbb{R}\}\quad,\quad\{]-\infty,a]: a\in\mathbb{R}\}$$

واعتماداً على التدريب المشهور السابق ذكره نجد أن f قيوس.

٣-٢-٩- ملاحظة: إن المجموعات السابقة تكتب أحياناً بطريقة مكافئة على النحو التالي:

$$f^{-1}(]a,\infty[)=\{x\in X: f(x)\in]a,\infty[\}=\{x\in X: f(x)>a\}$$
$$=[f>a]$$
$$f^{-1}([a,\infty[)=\{x\in X: f(x)\in[a,\infty[\}=\{x\in X: f(x)\geq a\}$$
$$=[f\geq a]$$

وهكذا دواليك.

٣-٢-١٠- **نتيجة:** إذا كان $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ أو $f:\mathbb{R}\to\overline{\mathbb{R}}$ أو $f:\overline{\mathbb{R}}\to\overline{\mathbb{R}}$ فإن f يكون بوريلياً إذا وفقط إذا كانت الصورة العكسية، وفق f، لأي من المجموعات التي تولد جبر بوريل في $\mathbb{R}$ أو $\overline{\mathbb{R}}$، بالترتيب، مجموعة بوريلية.

٣-٢-١١- **تعريف:** إذا كان (X,S) فضاء قيوساً و $f:X\to\mathbb{R}$ و E مجموعة جزئية من S فإننا نقول إن f قيوس على E إذا تحقق:

$$\forall F\in\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}: f^{-1}(F)\bigcap E\in S$$

٣-٢-١٢- **تدريب:** إذا كان (X,S) فضاء قيوساً و $f,g:X\to\mathbb{R}$ (أو $\overline{\mathbb{R}}$) تطبيقين قيوسين فإن $M=\{x\in X: f(x)<g(x)\}$ مجموعة قيوسة.

٣-٢-١٣- **مبرهنة:**

إذا كان (X,S) فضاء قيوساً، و $f,g:X\to\mathbb{R}$ (أو $\overline{\mathbb{R}}$) تطبيقين قيوسين فإن:

١) التطبيق λf قيوس من أجل كل λ من $\mathbb{R}$.

٢) التطبيق $f+g$ قيوس.

٣) التطبيق fg قيوس.

٤) إذا كان $g\geq 0$ فإن $\frac{1}{g}$ قيوس (حيث نصطلح على أن $\frac{1}{0}=\infty$).

البرهان:

١) نميز بين ثلاث حالات:

أ- إذا كان $\lambda>0$ فإن $\{x\in X:\lambda f(x)>a\}=\{x\in X: f(x)>\frac{a}{\lambda}\}$

وهي مجموعة قيوسة وذلك أياً كان العدد الحقيقي a، ومن ثم فإن λf قيوس.

ب- إذا كان $\lambda<0$ فإن $\{x\in X:\lambda f(x)>a\}=\{x\in X: f(x)<\frac{a}{\lambda}\}$

وهي مجموعة قيوسة وذلك أياً كان العدد الحقيقي a، ومن ثم فإن λf قيوس.

ج- إذا كان $\lambda = 0$ فإن $\forall x \in X : (\lambda f)(x) = \lambda . f(x) = 0 . f(x) = 0$

ومنه فإن λf تطبيق ثابت، ومن ثم فهو قيوس. إذْ إنّ التطبيقات الثابتة قيوسة، لأنه إذا كان(أو $\mathbb{R}$ $(\overline{\mathbb{R}})$ $f : (X, S) \to \mathbb{R}$ تطبيقاً ثابتاً وليكن مثلاً $(f(x) = k, \forall x \in X)$، حيث k من $\mathbb{R}$، فإن المجموعة $\{x \in X : f(x) \geq \lambda\}$ قيوسة أياً كانت λ من $\mathbb{R}$ (علِّل ذلك).

٢) لنثبت أولاً أن $f + c$ تطبيق قيوس حيث c أي عدد حقيقي مثبّت.

بما أن f قيوس، فرضاً، فإن $\{x \in X : f(x) > a - c\} \in S$، ومن ثم فإن $\{x \in X : f(x) + c > a\} \in S$. أي أن $f + c$ قيوس.

٢') $$(f+g)^{-1}(]a,\infty[) = \{x \in X : f(x) + g(x) > a\}$$
$$= \{x \in X : g(x) > -f(x) + a\}$$

ولما كان g قيوساً فرضاً، و $f + a -$ تطبيق قيوس(لأن f قيوس)، نجد بالأعتماد على التدريب(٣-٢-١٢) أن المجموعة $\{x \in X : g(x) > -f(x) + a\}$ قيوسة، ومن ثم فإن $f + g$ تطبيق قيوس.

٣) لنثبت أولاً أن f^2 تطبيق قيوس. ويكفي لإثبات ذلك أن نرى أنه أياً كان العدد الموجب a فإن:

$$(f^2)^{-1}(]a,\infty[) = \{x \in X : f^2(x) > a\}$$
$$= \{x \in X : f(x) > \sqrt{a}\} \cup \{x \in X : f(x) < -\sqrt{a}\}$$

وهي مجموعة قيوسة لأنها اجتماع مجموعتين قيوستين. أي أن f^2 قيوس.

كذلك فإن:

$$fg = \frac{1}{2}[(f+g)^2 - f^2 - g^2]$$

قيوس (علِّل ذلك).

-٤

$$\left(\frac{1}{g}\right)^{-1}(]a,\infty[)=\left\{x\in X:\frac{1}{g(x)}>a\right\}$$

$$=\begin{cases}\left\{x\in X:g(x)<\dfrac{1}{a}\right\} & \text{if} \quad a>0\\ X & \text{if} \quad a=0\\ \phi & \text{if} \quad a<0\end{cases}$$

(لأن $g(x)\geq 0$)

ولما كان g قيوساً، فإن كلٍ من المجموعات الناتجة قيوس. ومن ثمَّ $\dfrac{1}{g}$ تطبيق قيوس.

٣-٢-١٤- مبرهنة:

إذا كانت $(f_n)_{n\geq 1}$ متتالية من التطبيقات القيوسة المعرفة على الفضاء القيوس (X,S) والتي تأخذ قيمها في $\mathbb{R}$ أو $\overline{\mathbb{R}}$ فإن:

١) $\min\{f_1,f_2\}$ و $\max\{f_1,f_2\}$ و $|f_i|$ تطبيقات قيوسة.

٢) $\inf\{f_1,f_2,\ldots\}$ و $\sup\{f_1,f_2,\ldots\}$ تطبيقان قيوسان.

٣) $\{f_m,f_{m+1},f_{m+2},\ldots\}$ و $\liminf_{m\to\infty}$ و $\limsup_{m\to\infty}$ تطبيقان قيوسان .

٤) إذا كانت $\lim_n f_n(x)$ موجودة فإنها تطبيق قيوس. بمعنى أنه إذا كانت المتتالية (f_n) تتقارب نقطياً نحو f أي أن: $f(x)=\lim_n f_n(x)$ $\forall x\in X$ فإن f تطبيق قيوس.

الإثبات:

١)

$$\left(\min\{f_1,f_2\}\right)^{-1}\left([a,\infty[\right)=$$
$$=\{x\in X:\min\{f_1,f_2\}(x)\geq a\}$$
$$=\{x\in X:\min\{f_1(x),f_2(x)\}\geq a\}$$
$$=\{x\in X:f_1(x)\geq a\}\cap\{x\in X:f_2(x)\geq a\}$$

ولما كان كلاً من f_1,f_2 قيوسين فإن المجموعتين الناتجتين قيوستان. كذلك فإن تقاطعهما مجموعة قيوسة. ومنه فإن $\min\{f_1,f_2\}$ تطبيق قيوس.

وعلى نحو مماثل نثبت أن $\max\{f_1,f_2\}$ تطبيق قيوس.

ولما كان $|f_i|=\max\{f_i,-f_i\}$ و f_i قيوس فإن $|f_i|$ قيوس.

٢) لنأخذ $f(x)=\inf\{f_1(x),f_2(x),...\}$ وليكن a أي عدد حقيقي

لدينا
$$f^{-1}\left([a,\infty[\right)=\{x\in X:f(x)\geq a\}$$
$$=\{x\in X:f_n(x)\geq a,\forall n\in\mathbb{N}\}$$
$$=\bigcap_{n=1}^{\infty}\{x\in X:f_n(x)\geq a\}$$

إن الطرف الأيمن من المساواة الأخيرة مجموعة قيوسة لأنها تقاطع عدود لمجموعات قيوسة. ومن ثم فإن f قيوس.

وبطريقة مشابهة نثبت أن $\sup\{f_1,f_2,...\}$ تطبيق قيوس.

٣) نضع $h_m=\inf\{f_m,f_{m+1},...\}$ ، ومن ثم فإن h_m تطبيق قيوس (من الجزء (٢)).

كذلك فإن $\{f_m, f_{m+1}, f_{m+2}, \ldots\} \subseteq \{f_{m+1}, f_{m+2}, \ldots\} \subseteq \ldots \subseteq \ldots$

أي أن $h_m \leq h_{m+1} \leq h_{m+2} \leq \ldots$

ومنه فإن (h_m) متتالية متزايدة. ومن ثمّ فإن $\lim_m h_m$ موجودة في $\overline{\mathbb{R}}$، وهي قيوسة (من الجزء(٢)) . أي أن $\{f_m, f_{m+1}, f_{m+2}, \ldots\}$ $\lim_{m\to\infty} \inf$ تطبيق قيوس.

وبطريقة مماثلة نبرهن على أن $\{f_m, f_{m+1}, f_{m+2}, \ldots\}$ $\lim_{m\to\infty} \sup$ تطبيق قيوس.

٤- إذا كانت $\lim_n f_n$ موجودة فإنها تساوي كلاً من

$\{f_n, f_{n+1}, f_{n+2}, \ldots\}$ $\lim_n \sup$ و $\{f_n, f_{n+1}, f_{n+2}, \ldots\}$ $\lim_n \inf$. ومن ثم فإنها تطبيق قيوس.

٣-٢-١٥- نتيجة: تشير المبرهنة السابقة إلى أن نهاية متتالية من التطبيقات القيوسة المعرفة على فضاء قيوس $(X, \mathcal{A})$ هي تطبيق قيوس في حال وجودها.

٣-٣- الجبر التام المولد بجماعة من التطبيقات

٣-٣-١- ملاحظة: لنفرض أن X مجموعة ما غير خالية و $\{(Y_\alpha, \mathcal{A}_\alpha) : \alpha \in I\}$ جماعة من الفضاءات القيوسة، $f_\alpha : X \to Y_\alpha$ تطبيق لـ X في Y_α من أجل كل α من مجموعة الأدلة I. فإن ثمة جبراً تاماً أصغرياً على X يجعل جميع التطبيقات f_α قيوسة.

وذلك لأنه إذا زودنا X بالجبر التام 2^X فإن الصورة العكسية لأي مجموعة قيوسة في Y_α، وفق f_α، مجموعة قيوسة في X. أي أن ثمة جبراً تاماً واحداً على الأقل على X (هو 2^X) يجعل كل f_α قيوساً. وتقاطع كل الجبور التامة التي تجعل كل f_α قيوساً هو جبر تام يجعل كل f_α قيوساً. وهذا الجبر التام الناتج محتوى في كل جبر تام على X يجعل كل f_α قيوساً لأنه تقاطع جبور تامة.

٣-٣-٢- تعريف: يسمى الجبر المشار له آنفاً " الجبر التام المولّد بجماعة التطبيقات $\{f_\alpha : \alpha \in I\}$".وهو بالتحديد الجبر التام المولد بالجماعة $\{f_\alpha^{-1}(E_\alpha) : E_\alpha \in \mathcal{A}_\alpha, \alpha \in I\}$.

٣-٣-٣- تعريف: إذا كانت $Y = \prod_{\alpha \in I} Y_\alpha$ (أي أنها جداء المجموعات Y_α) حيث $\{(Y_\alpha, \mathcal{A}_\alpha) : \alpha \in I\}$ جماعة من الفضاءات القيوسة، فإن الجبر التام الذي تولده جماعة تطبيقات الإسقاط $\Pr_{\alpha_0} : Y \to Y_{\alpha_0}$ حيث $y = (y_\alpha)_{\alpha \in I} \mapsto y_{\alpha_0}$ يسمى الجبر التام الجداء للجبور التامة $\mathcal{A}_\alpha$ أو الجداء التنسوري للجبور التامة $\mathcal{A}_\alpha$. ويرمز له بـ $\bigotimes_{\alpha \in I} \mathcal{A}_\alpha$.

من الواضح أنه الجبر التام الذي تولده الجماعة:

$$\{pr_\alpha^{-1}(E_\alpha) : E_\alpha \in \mathcal{A}_\alpha, \alpha \in I\}$$

٣-٣-٤- تدريب :

إذا كان $(X, \mathcal{A})$ فضاء قيوساً و $\{(Y_\alpha, \mathcal{A}_\alpha) : \alpha \in I\}$ جماعة من الفضاءات القيوسة، و (Y, B) فضاء قيوساً حيث $Y = \prod_{\alpha \in I} Y_\alpha$ و $B = \bigotimes_{\alpha \in I} \mathcal{A}_\alpha$ الجداء التنسوري للجبور التامة $\mathcal{A}_\alpha$، و $\Pr_\alpha : Y \to Y_\alpha$ تطبيق الإسقاط على Y_α، و $f : X \to Y$ فإن الشرط اللازم والكافي كي يكون f قيوساً (بالنسبة للجبرين التامين $\mathcal{A}, B$) هو أن يكون $f_\alpha = \Pr_\alpha \circ f$ قيوساً (بالنسبة للجبرين التامين $\mathcal{A}, \mathcal{A}_\alpha$) وذلك من أجل كل α من I.

٣-٤- التوابع الدرجية

٣-٤-١- تعريف التوابع الدرجية: إذا كان (X,S) فضاء قيوساً و $E \subseteq X$ فسنرمز بالرمز χ_E للدالة المعرفة كما يلي:

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad x \in E \\ 0 & \text{if} \quad x \notin E \end{cases}$$

ونسمي هذه الدالة **الدالة المميزة** للمجموعة E أو دالة المجموعة E وقد يُرمز لها بـ 1_E.

٣-٤-٢- ملاحظة:

إن دالة أي مجموعة قيوسة تكون قيوسة ذلك أنه أياً كان العدد الحقيقي a فإن:

$$\{x \in X : \chi_E(x) > a\} = \begin{cases} E & \text{عندما} \quad 0 \le a < 1 \\ X & \text{عندما} \quad a < 0 \\ \phi & \text{عندما} \quad a \ge 1 \end{cases}$$

٣-٤-٣- تعريف: نقول عن تطبيق $f : X \to \mathbb{R}$ إنه **دالة درجية أو دالة بسيطة** على $(X,\mathcal{A})$ إذا كان من الشكل $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}$، حيث α_i من $\mathbb{R}$، و E_i مجموعة قيوسة من أجل كل i حيث $1 \le i \le n$. أي إذا كان f عبارة خطية بأمثال حقيقية لدوال مميزة لمجموعات قيوسة.

٣-٤-٤- مثال: الدالة الدرجية على $\mathbb{R}$ التي من الشكل $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{I_i}$ حيث I_i مجالات منفصلة من أجل $1 \le i \le n$.

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{I_i}(x) = \alpha_{i_0} . 1 = \alpha_{i_0} \quad \text{if} \quad x \in I_{i_0}$$

من أجل قيمة معينة i_o من $\{1,....,n\}$ لأن المجالات منفصلة، بمعنى أن x من I_{i_0}.

٣-٤-٥- تـــدريب : إذا كان (X, S) فضاء قيوساً والمجموعات المذكورة في الأسطر التالية قيوسة فإنه $\forall x \in X$:

1. $\chi_{\phi}(x) = 0 \quad , \quad \chi_X(x) = 1$
2. $\chi_{A\cap B}(x) = \chi_A(x).\chi_B(x)$
3. $\chi_{A\cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_{A\cap B}(x)$
4. $A \subseteq B \Leftrightarrow \chi_A(x) \le \chi_B(x) \quad ;\forall\, x \in X$
5. $A = A_1 \bigcup A_2; A_1 \bigcap A_2 = \phi \Rightarrow \chi_A(x) = \chi_{A_1}(x) + \chi_{A_2}(x)$
6. $\chi_{A\setminus B}(x) = \chi_A(x) - \chi_{A\cap B}(x)$
7. $\chi_{A\Delta B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - 2\chi_{A\cap B}(x)$

٣-٤-٦- ملاحظة: إن أي دالة درجية هي تطبيق قيوس. لماذا؟ بيد أن العكس غير صحيح بالضرورة. أي ليس كل تطبيق قيوس دالة درجية. ويكون التطبيق القيوس $f : (X, S) \to \mathbb{R}$ دالة درجية إذا كان مستقره $f(X)$ مجموعة جزئية منتهية من $\mathbb{R}$. (أثبت صحة ذلك).

٣-٤-٧- تعريف: تسمى العبارة $f = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \chi_{E_i}$ "العبارة النموذجية" أو "التمثيل النموذجي للدالة الدرجية f البسيطة". إذا كانت $\{\beta_1, ..., \beta_n\}$ مختلفة. والمتتالية $\{E_i\}_{i=1}^{n}$ منفصلة واجتماعها X.

٣-٤-٨- تـــدريب: إذا كانت φ, ψ دالتين درجيتين:

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i} \quad , \quad \psi = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \chi_{F_j}$$

فإن:

1. $\varphi + \psi = \sum_i \sum_j (\alpha_i + \beta_j) \chi_{E_i \cap F_j}$
2. $\varphi.\psi = \sum_i \sum_j (\alpha_i.\beta_j) \chi_{E_i \cap F_j}$
3. $\varphi - \psi = \sum_i \sum_j (\alpha_i - \beta_j) \chi_{E_i \cap F_j}$

٣-٤-٩- ملاحظة: إن أي دالة درجية يمكن تمثيلها على نحو نموذجي.

٣-٤-١٠- تـدريب:

إذا كان $f: X \to \mathbb{R}$ و $(X, \mathcal{A})$ فضاء قيوساً، و $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}$ حيث α_i من $\mathbb{R}$ و $\{E_i\}_{i=1}^{n}$ جماعة من المجموعات الجزئية المنفصلة في X، و χ_{E_i} الدالة المميزة لـ E_i من أجل كل i من $I = \{1, ..., n\}$، فإن: f قيوس (بالنسبة إلى A) إذا وفقط إذا كانت E_i قيوسة من أجل كل i من I.

٣-٤-١١- مبرهنة أساسية:

لنفرض أن (X, S) فضاء قيوس، و $f: X \to [0, \infty]$ تطبيق موجب $(f \geq 0)$.

إن الشرط اللازم والكافي ليكون f قيوساً هو وجود متوالية متزايدة (φ_n) من الدوال الدرجية الموجبة والمتقاربة نقطياً إلى f.

الإثبات : لنفرض أن ثمة متوالية من الدوال الدرجية المتقاربة نقطياً من تطبيق وليكن f. ولما كانت أي دالة درجية تطبيق قيوس فإن النهاية f تطبيق قيوس وفق مبرهنة سابقة.

لنفرض الآن أن f قيوس ولنثبت وجود مثل هذه المتوالية.

لنفرض أن n أي عدد صحيح موجب مثبّت، ولنضع:

$$E_n^r = \begin{cases} \{x \in X : \frac{r}{2^n} \leq f(x) < \frac{r+1}{2^n}\} & \text{عندما } 0 \leq r < 2^{2n} \\ \{x \in X : 2^n = \frac{2^{2n}}{2^n} \leq f(x)\} & \text{عندما } r = 2^{2n} \end{cases}$$

حيث r عدد طبيعي.

أي أن:

$$E_n^r = \begin{cases} \{x \in X : f(x) \in [\frac{r}{2^n}, \frac{r+1}{2^n}[\} & \text{عندما} \quad 0 \le r < 2^{2n} \\ \{x \in X : f(x) \in [2^n, \infty]\} & \text{عندما} \quad r = 2^{2n} \end{cases}$$

إن المجموعات E_n^r قيوسة من أجل كل n و r لأن f قيوس فرضاً.

لنثبت أن المجموعات E_n^r منفصلة، أي أن يكون $E_n^{r_1} \cap E_n^{r_2} = \phi$ من أجل $0 \le r_1, r_2 \le 2^{2n}$ و $r_1 \ne r_2$.

لنفرض دون مس بالعمومية أن $r_1 < r_2$ ومن ثم فإن $r_1 + 1 \le r_2$، ومنه $[\frac{r_1}{2^n}, \frac{r_1+1}{2^n}[\cap [\frac{r_2}{2^n}, \frac{r_2+1}{2^n}[= \phi$، أي أن $E_n^{r_1} \cap E_n^{r_2} = \phi$ عندما $r_1 < r_2 < 2^{2n}$، حيث:

$$E_n^{r_1} = \{x \in X : f(x) \in [\frac{r_1}{2^n}, \frac{r_1+1}{2^n}[\}$$

و

$$E_n^{r_2} = \{x \in X : f(x) \in [\frac{r_2}{2^n}, \frac{r_2+1}{2^n}[\}$$

وكذلك نجد أن $E_n^{r_1} \cap E_n^{r_2} = \phi$ عندما $r_1 < r_2 = 2^{2n}$ (علّل ذلك).

إن اجتماع المجموعات E_n^r يساوي X، أي أن $X = \bigcup_{r=0}^{r=2^{2n}} E_n^r$، وذلك لأن $f \ge 0$ فرضاً، ومن ثم فإن:

$$f(x) \in [0, \infty] = \bigcup_{r=0}^{r<2^{2n}} [\frac{r}{2^n}, \frac{r+1}{2^n}[\cup [2^n, \infty] \quad , \forall x \in X$$

وهذا يعني أن x من $E_n^{r_0}$ من أجل قيمة معينة r_0 لـ r. والعكس صحيح أيضاً.

لنضع:

$$\varphi_n(x) = \sum_{r=0}^{r=2^{2n}} \frac{r}{2^n} \chi_{E_n^r}(x)$$

إن φ_n دالة درجية لأنها عبارة خطية بأمثال حقيقية لدوال مميزة لمجموعات قيوسة. كذلك فإن $\varphi_n(x) \le f(x)$ من أجل كل x من X لأن أصغر قيمة يأخذها f على E_n^r هي $f(x) = \frac{r}{2^n}$ من تعريف E_n^r. و (φ_n) متوالية متزايدة، $\varphi_n \le \varphi_{n+1}$ (علِّل ذلك). ومن ثم فإن (φ_n) متوالية متزايدة من الدوال الدرجية. لنبرهن على أنها متقاربة نقطياً من f.

إذا كان $f(x) < 2^n$ فإن $f(x) - \varphi_n(x) < \frac{1}{2^n}$، وذلك لأنه في هذه الحالة يكون $f(x)$ من $[\frac{r}{2^n}, \frac{r+1}{2^n}[$ ، $\bigcup_{r=0}^{r<2^{2n}}$ ، ومن ثم فإنه يوجد $0 \le r_0 < 2^{2n}$ بحيث يكون $\frac{r_0}{2^n} \le f(x) < \frac{r_0+1}{2^n}$ ، أي أن $x \in E_n^{r_0}$ ، ومنه:

$$f(x) - \varphi_n(x) < \frac{r_0+1}{2^n} - \sum_{r=0}^{r=2^{2n}} \frac{r}{2^n} \chi_{E_n^r}(x) \le \frac{r_0+1}{2^n} - \frac{r_0}{2^n} = \frac{1}{2^n}$$

نفرض أن x من X ولنميز بين حالتين: $f(x) < \infty$ أو $f(x) = \infty$. إذا كانت $f(x) < \infty$ فإن $f(x) < 2^N$ من أجل بعض قيم N، حيث N عدد صحيح موجب. ومن ثم من أجل $n > N$ فإن $f(x) < 2^N < 2^n$. ومنه $\varphi_n(x) \to f(x)$ ومن ثم فإن $|f(x) - \varphi_n(x)| < \frac{1}{2^n} \to 0$. وإذا كانت $f(x) = \infty$ فإن $f(x) > 2^n$ من أجل كل n، أي أن $f(x)$ من $[2^n, \infty]$. ومنه $x \in E_n^{2^{2n}}$ من أجل كل n. ومن ثم:

$$\varphi_n(x) = \frac{2^{2n}}{2^n} = 2^n \to \infty = f(x)$$

ومنه $\varphi_n(x) \to f(x)$ من أجل كل x من X.

تتمات وتمارين الفصل الثالث

(١) أثبت جميع التدريبات والتمارين التي وردت في هذا الفصل وترك لك إثباتها. (لاسيما التدريبات ٣-١-١ و٣-٢-٢ و٣-٢-١٢) لا تنسى أن التمارين النظرية هي جزء لا يتجزأ من النظري.

(٢) إذا كان φ, ψ تابعين درجين على $X = [0,7]$ وكان

$$\varphi = 3\chi_{[0,4[} + 5\chi_{[4,7]} \quad \text{و} \quad \psi = 2\chi_{[0,3[} + 3\chi_{[3,6]} + 7\chi_{[6,7]}$$

أحسب $\varphi(6)$ و $\psi(6)$ ثم ارسم بيان كل منهما وحدد عبارة كل من

$$\varphi^2,\ \psi^2,\ \varphi+\psi,\ \varphi.\psi,\ \varphi-\psi$$

(٣) خذ $f(x) = x^2$ وحدد المتتالية (φ_n) من التوابع الدرجية المتقاربة من f والموافقة لما ورد في المبرهنة الأخيرة. من أجل $n = 1$ ثم من أجل $n = 2$ ثم من أجل $n = 3$ ووضح ذلك برسومات مناسبة ؟

(٤) إذا كان f تابعاً قيوساً وإذا وضعنا:

$$f_n(x) = \frac{[2^n f(x)]}{2^n} \quad \text{if} \quad f(x) < n$$

$$f_n(x) = n \quad \text{if} \quad f(x) \geq n$$

فإن $f_n \nearrow f$

تذكرة: نذكر أن الرمز $[y]$ يعني هنا الجزء الصحيح للعدد الحقيقي y وهو أكبر عدد صحيح k يصغر أو يساوي y إذن $k = [y]$،

تعني $k \leq y < k+1, k \in Z$، وهكذا فإن $[3.14] = 3$ و $[-3.14] = -4$

و $[2006] = 2006$ وهكذا.....

(٥) إذا كانت $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$ حيث f_k تابع قيوس لكل k فأثبت أن: $\forall a \in \mathbb{R} : \{f < a\} = \bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k\geq n}^{\infty}\left\{f_k < a - \frac{1}{m}\right\}$. ماذا تستنتج؟

وقل رب زدني علما
Damascus University

الفصل الرابع

التكـــامـــل

Integration

سنفترض في كلٍ ممـــا يلـــي أن (X, A, μ) فـضاء القيـــاس μ، وأن $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ تطبيق قيوس، حيث $\overline{\mathbb{R}}$ مزودة بجبر بوريل.

٤-١- تكامل الدوال الدرجية

٤-١-١- تعريف: إذا كان f دالة درجيـــة $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}$ فإننـــا نعـــرّف تكامل f على X بالمساواة:

$$\int_X f d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(E_i)$$

وإذا كانت F مجموعة قيوسة فإننا نعرّف تكامل f على F بـــ:

$$\int_F f d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(E_i \cap F)$$

إن التعريف الأول حالة خاصة من التعريف الثاني وذلك بوضع $X = F$.

٤-١-٢- ملاحظة: نـــصطلح علـــى أن $0 \times \infty = \infty \times 0 = 0$ (فـــي نظريـــة القياس).

هذا ومن الممكن أن تكون $\alpha_i = 0$ من أجل بعض قيم i، و $\mu(E_i \cap F) = \infty$.

لبيان صحة هذا التعريف يجب أن نثبت أن تكامل أي دالة درجية على مجموعة قيوسة مستقل عن الشكل الذي تكتب وفقاً له هذه الدالة.

٤-١-٣- توطئة: إذا كانت φ,ψ دالتين درجيتين على الفضاء $(X,\mathcal{A},\mu)$،

وكانت : $\varphi=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\chi_{E_i}$ و $\psi=\sum_{j=1}^{m}\beta_j\chi_{F_j}$

حيث $\{\alpha_1,....,\alpha_n\}$، $\{\beta_1,....,\beta_m\}$ أعداد حقيقية موجبة.

($X=\bigcup_{i=1}^{n}E_i=\bigcup_{j=1}^{m}F_j$ و $\{E_i\}_{i=1}^{n}$ منفصلة، و $\{F_j\}_{j=1}^{m}$ منفصلة)، وكان $\varphi\le\psi$، فإن $\int_X\varphi d\mu\le\int_X\psi d\mu$.

البرهان: إذا كانت $x\in E_{i_0}\cap F_{j_0}$ فإن: $\varphi(x)=\alpha_{i_0}$ و $\psi(x)=\beta_{j_0}$.

ومن ثم فإن: $\varphi(x)\le\psi(x)\Leftrightarrow\alpha_{i_0}\le\beta_{j_0}$

ومنه:

$$\int_X\varphi d\mu=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mu(E_i)=\sum_{i,j}\alpha_i\mu(E_i\cap F_j)\le$$

$$\le\sum_{i,j}\beta_j\mu(E_i\cap F_j)=\sum_{j=1}^{m}\beta_j\mu(F_j)=\int_X\psi d\mu$$

وذلك اعتماداً على أن $X=\bigcup_{i=1}^{n}E_i=\bigcup_{j=1}^{m}F_j$، ومنه:

$$\forall\, i:\ E_i=\bigcup_{j=1}^{m}(E_i\cap F_j)$$

ويكون: $\mu(E_i)=\mu(\bigcup_{j=1}^{m}(E_i\cap F_j))=\sum_{j=1}^{m}\mu(E_i\cap F_j)$

٤-١-٤- نتيجة: نستنتج مما تقدم أنه إذا كانت f دالة درجية بحيث:

$$f=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\chi_{E_i}=\sum_{j=1}^{m}\beta_j\chi_{F_j}$$

فإن: $\int_X fd\mu=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mu(E_i)=\sum_{j=1}^{m}\beta_j\mu(F_j)$

وذلك بأخذ $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}$ و $\psi = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \chi_{F_j}$ ، واعتماداً على أن:

$$\psi \le \varphi \ \ \& \ \ \varphi \le \psi \ \ \Leftrightarrow \varphi = \psi$$

٤-٢- تكامل لوبيغ للتطبيقات القيوسة الموجبة

٤-٢-١- تعريف: إذا كان التطبيق $f \ge 0$ فإننا نعرّف تكامل f على X بـ:

$$\int_X f d\mu = \sup\{\int_X \varphi d\mu : \text{دالة درجية } \varphi,\ 0 \le \varphi \le f\}$$

يسمى الجانب الأيسر من المساواة، **تكامل لوبيغ لـ f على X بالنسبة للقياس μ.**

سنبين الآن أن هذا التعريف صحيح بمعنى أنه متماسك أو "جيد" من خلال التوطئة التالية:

٤-٢-٢- توطئة: إذا كانت f دالة درجية موجبة فإن:

$$\int_X f d\mu = \sup\{\int_X \varphi d\mu : \text{دالة درجية } \varphi,\ 0 \le \varphi \le f\}$$

البرهان: نعلم من التوطئة السابقة أنه إذا كانت f, φ دالتين درجيتين بحيث $0 \le \varphi \le f$، فإن: $0 \le \int_X \varphi d\mu \le \int_X f d\mu$

ومن ثم:

$$\sup\{\int_X \varphi d\mu : \text{دالة درجية } \varphi,\ 0 \le \varphi \le f\} \le \int_X f d\mu \qquad (١)$$

ومن جهة أخرى، لما كانت f دالة درجية فإن:

$$\int_X f d\mu \in \{\int_X \varphi d\mu : \text{دالة درجية } \varphi,\ 0 \le \varphi \le f\} \quad (\text{خذ } \varphi = f)$$

ومنه:

$$\int_X f d\mu \le \sup\{\int_X \varphi d\mu : \text{دالة درجية } \varphi,\ 0 \le \varphi \le f\} \qquad (٢)$$

من (١) و(٢) نجد المطلوب.

٤-٣- تكامل التطبيقات القيوسة

٤-٣-١- تعريف: من أجل أي تطبيق f نضع $f^+ = \max\{f,0\}$ و $f^- = -\min\{f,0\}$. أي إنه من أجل كل x من X يكون:

$$f^+(x) = \max\{f(x),0\}$$

و $$f^-(x) = -\min\{f(x),0\} = \max\{-f(x),0\}$$

أو بصياغة أخرى إن:

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{if} \quad f(x) > 0 \\ 0 & \text{if} \quad f(x) \le 0 \end{cases}$$

$$f^-(x) = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad f(x) \ge 0 \\ -f(x) & \text{if} \quad f(x) < 0 \end{cases}$$

نلاحظ من التعريف أن كلاً من $f^+(x), f^-(x)$ غير سالب. وأن:

$$f = f^+ - f^- \quad \text{and} \quad |f| = f^+ + f^-$$

يسمى f^+ **القسم الموجب لـ** f، و f^- **القسم السالب لـ** f.

ومن ثمَّ إذا كان f قيوساً فإن f^+, f^- قيوسان، والعكس صحيح أيضاً، كذلك فإن $|f|$ قيوس.

إذا كان $\int_X f^+ d\mu < \infty$ أو $\int_X f^- d\mu < \infty$ فإننا نعرّف:

$$\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu$$

وفي خلاف ذلك فإن $\int_X f d\mu$ ليس معرّفاً.

وهذا التعريف توسيع للتعريف المذكور آنفاً. هذا ومن الممكن أن يأخذ التكامل في هذا التعريف قيماً غير منتهية.

٤-٣-٢- **ملاحظة:** من الممكن كتابة $\int_X f d\mu$ على النحو $\int f d\mu$ أو $\int_X f(x)d\mu(x)$ أو $\int_X f(t)d\mu(t)$.

٤-٣-٣- **تعريف:** إذا كان $\int_X |f| d\mu < \infty$ فإننا نقول إن f كمول.

وسنضع $\mathcal{L}^p = \{f : X \to \overline{\mathbb{R}}, \int_X |f|^p \, d\mu < \infty$ و $f\}$ قيوس أياً كان العدد الحقيقي $p \geq 1$.وسنهتم في هذا الفصل بحالة $p = 1$.

٤-٤- مبرهنة أساسية:

١) إذا كان $0 \leq f \leq g$، وكان f, g قيوسين فإن:

$$\int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu$$

٢) إذا كان $f \leq g$، وكان $\int_X g d\mu$ و $\int_X f d\mu$ معرّفين فإن:

$$\int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu$$

٣) من أجل أي تطبيق قيوس f فإن:

$$\left| \int_X f d\mu \right| \leq \int_X |f| d\mu$$

٤) f كمول إذا وفقط إذا كان f^+, f^- كمولين.

سنترك الإثبات للقارئ.

٤-٤-١- ملاحظة هامة:

لنفرض أن φ دالة درجية في الفضاء $(X, \mathcal{A}, \mu)$، و E من $\mathcal{A}$ إن:

$\int_E \varphi d\mu = \int_X (\varphi . \chi_E) d\mu$. أثبت ذلك

٤-٥- مبرهنة لوبيغ الأولى: (مبرهنة التقارب المتزايد)

إذا كانت $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ متتالية من التوابع القيوسة **الموجبة** وكانت هذه المتتالية متزايدة:

$$\forall x: \ 0 \le f_1(x) \le f_2(x) \le \ldots \le f_n(x) \le \ldots$$

وإذا كان $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$

فإن f تطبيق قيوس و $\int_X f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu$

الإثبات: إن f تطبيق قيوس لأنه نهاية متوالية من التطبيقات القيوسة.

ولما كانت (f_n) متوالية متزايدة من التطبيقات القيوسة فإن متوالية الأعداد $(\int_X f_n d\mu)$ متزايدة (لماذا؟). ولما كان $f_n \le f$ من أجل كل n من $\mathbb{N}$ فإن:

$$\int_X f_n d\mu \le \int_X f d\mu$$

ومن ثم فإن:

$$\lim_n \int_X f_n d\mu \le \int_X f d\mu \qquad (1)$$

سنثبت صحة العكس، وعندها يتم المطلوب.

لنفرض أن φ دالة درجية بحيث $0 \le \varphi \le f$، ولنفرض أن λ عدد حقيقي $0 \le \lambda < 1$.

من أجل كل n من $\mathbb{N}$ نضع:

$$A_n = \{x \in X : f_n(x) \ge \lambda\varphi(x)\} \qquad , n = 1,2,3,\ldots\ldots$$

ومن ثم فإن A_n قيوسة من أجل كل n من $\mathbb{N}$، و $A_n \subseteq A_{n+1}$ نظراً إلى أن (f_n) متزايدة. (إذا كانت x من A_n فإن $f_n(x) \ge \lambda\varphi(x)$. ولما كان $f_{n+1}(x) \ge f_n(x)$ فإن $f_{n+1}(x) \ge \lambda\varphi(x)$ أي إن x من A_{n+1}).

كذلك فإن $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = X$، وذلك لأنه إذا كانت x من X فإنه إما أن يكون $f_n(x) = 0$ من أجل كل n من $\mathbb{N}$، أو أن يكون $f_n(x) > 0$ من أجل

بعض قيم n من $\mathbb{N}$. في الحالة الأولى يكون $f(x)=0$، ومن ثم فإن $\varphi(x)=0$ لأن $0\le\varphi\le f$. ومنه فإن x من A_n من أجل كل n من $\mathbb{N}$.

وفي الحالة الثانية يكون $\lim_n f_n(x)=\sup_n f_n(x)=f(x)>0$

ومن ثم فإن $f(x)>\lambda f(x)\ge\lambda\varphi(x)$ لأن $0\le\lambda<1$ و $0\le\varphi\le f$.

أي أن $\sup_n f_n(x)=f(x)>\lambda\varphi(x)$. ومن خاصة لـ sup نجد أنه لا بد من وجود عدد طبيعي N بحيث إنه من أجل كل $n>N$ يكون:

$$f_n(x)\ge f_N(x)>\lambda\varphi(x)$$

أي إن x من A_n من أجل بعض قيم n من $\mathbb{N}$. ومن ثمَّ فإن: $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=X$ وهو ما سنعبر عنه بـ: $A_n\nearrow X$.

لنفرض أن $\varphi=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\chi_{E_i}$.

لما كان $f_n\ge\chi_{A_n}f_n\ge\lambda\chi_{A_n}\varphi$ فإن $\int_X f_n d\mu\ge\int_X\lambda\,\chi_{A_n}\varphi\,d\mu$.

ولكن من أجل كل n من $\mathbb{N}$ لدينا:

$$\int_X\lambda\,\chi_{A_n}\varphi\,d\mu=\int_{A_n}\lambda\varphi\,d\mu=\lambda\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\mu(E_i\cap A_n)$$

ومنه: $$\lambda\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\mu(E_i\cap A_n)\le\int_X f_n d\mu$$

بأخذ النهايات مع ملاحظة أنه من أجل m $1\le i\le m$ يكون:

$$E_i\cap A_n\nearrow E_i\cap X=E_i$$

$$\lambda\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\mu(E_i)\le\lim_n\int_X f_n d\mu$$

أي إن: $$\lambda\int_X\varphi\,d\mu\le\lim_n\int_X f_n d\mu$$

ولما كانت المتراجحة صحيحة أياً كانت $0 \le \lambda < 1$، فبجعل $\lambda \to 1$ نجد أن:

$$\int_X \varphi \, d\mu \le \lim_n \int_X f_n d\mu$$

ولكن φ أي دالة درجية بحيث $0 \le \varphi \le f$، إذن:

$$(\sup\{\int_X \varphi d\mu : \varphi \text{ دالة درجية}, 0 \le \varphi \le f\}) = \int_X f d\mu \le \lim_n \int_X f_n d\mu \quad (٢)$$

من (١) و(٢) نجد أن $\int_X f d\mu = \lim_n \int_X f_n d\mu$.

٤-٦- مبرهنة التقارب المتزايد الثانية:

١) إذا كانت (f_n) متوالية من التطبيقات القيوسة، و $f_n \nearrow f$، ومن أجل قيمة معينة N، $\int_X f_N d\mu > -\infty$ فإن:

$$\int_X f_n d\mu \nearrow \int_X f d\mu$$

٢) إذا كانت (g_n) متوالية من التطبيقات القيوسة، و $g_n \searrow$ لـ g، ومن أجل قيمة معينة N، $\int_X g_N d\mu < \infty$ فإن:

$$\int_X g_n d\mu \searrow \text{لـ} \int_X g d\mu$$

الإثبات:

١) من أجل $n > N$ يكون $f_n - f_N \ge 0$ لأن $f_n \nearrow f$.

كذلك فإن: $f_n - f_N \nearrow f - f_N$

ومن مبرهنة التقارب المتزايد السابقة نجد أن:

$$\int_X f_n d\mu - \int_X f_N d\mu = \int_X (f_n - f_N) d\mu \nearrow \int_X (f - f_N) d\mu$$

$$= \int_X f d\mu - \int_X f_N d\mu$$

ولما كان $\int_X f_N d\mu > -\infty$ فإننا نستطيع أن نضيفه إلى كلا الجانبين، ومن ثم نجد أن: $\int_X f_n d\mu \nearrow \int_X f d\mu$

٢) تنتج هذه من الجزء (١) بعد أن نضع $f_n = -g_n$.

٤-٦-١- ملاحظة: إن اقتصارنا على $\int_X g_N d\mu < \infty$ ضروري، لأننا نعلم أنه إذا كانت $A_n \searrow A$ فإن $\mu(A_n) \searrow \mu(A)$ **بشرط** أن يكون $\mu(A_N) < \infty$ من أجل قيمة معينة N، وأن $A_n \searrow A$ هي مكافئة تماماً لـ $\chi_{A_n} \searrow \chi_A$.

٤-٧- توطئة فاتو(Fatou):

إذا كانت (f_n) متوالية من التطبيقات القيوسة، وكان ثمة تطبيق g قيوس بحيث يكون $f_n \geq g$ من أجل كل n من $\mathbb{N}$، و $\int_X g d\mu > -\infty$ فإن:

$$\int_X (\liminf_n f_n) d\mu \leq \liminf_n \int_X f_n d\mu$$

أو اختصاراً: $\int \liminf f_n \leq \liminf(\int f_n)$

أي إنّ تكامل النهاية الدنيا للمتوالية (f_n) لا يتجاوز النهاية الدنيا للمتوالية $(\int_X f_n d\mu)$ (متتالية التكاملات).

البرهان: لنشكل المتوالية (g_n) على النحو التالي:

$$g_n = \inf\{f_n, f_{n+1}, f_{n+2}, \ldots\}$$

واضح أن $g_n \geq g$ من أجل كل n من $\mathbb{N}$. ومن ثم فإن:

$$\int_X g_n d\mu \geq \int_X g d\mu > -\infty$$

كذلك فإن: $g_n \nearrow \liminf_n f_n$

أي إنّ: $\liminf_n f_n = \lim_n g_n$ (١)

وإذا كان $n \le m$ فإن $g_n \le f_m$، ومنه:

$$\int_X g_n d\mu \le \int_X f_m d\mu$$

ومن ثم:

$$\int_X g_n d\mu \le \inf_{n \le m} \left(\int_X f_m d\mu \right) \qquad (٢)$$

وبتطبيق مبرهنة التقارب المتزايد الثانية على المتوالية (g_n) (أو على (١)) نجد أن:

$$\int_X (\liminf_n f_n) d\mu = \lim_n \int_X g_n d\mu \le \liminf_n \inf_{n \le m} \int_X f_m d\mu = \liminf_n \int_X f_n d\mu$$

٤-٧-١- نتيجة: لنفرض أن (f_n) كما في السابق، وأن ثمة g بحيث يكون $f_n \le g$ من أجل كل n من $\mathbb{N}$، وأن $\int_X g d\mu < \infty$، فعندئذٍ:

$$\limsup_n \int_X f_n d\mu \le \int_X (\limsup_n f_n) d\mu$$

الإثبات: نأخذ $(-f_n)$ ثم نستخدم توطئة فاتو.

٤-٨- مبرهنة التقارب المتزايد (Dominated Convergence Theorem):

إذا كانت (f_n) متوالية من التطبيقات القيوسة، و $f_n \to f$، ولنفترض أن ثمة g بحيث $|f_n| \le g$ من أجل كل n من $\mathbb{N}$، وأن $\int_X g d\mu < \infty$، فإن f كمول و $\int_X f d\mu \to \int_X f_n d\mu$، أي إن $\int_X f d\mu = \lim_n \int_X f_n d\mu$.

الإثبات: من الفرض نجد أن $-g \le f_n \le g$ من أجل كل n من $\mathbb{N}$، ومن ثم نستطيع تطبيق توطئة فاتو ونتيجتها للمتوالية (f_n).

كذلك فإن $|f_n| \to |f|$، ومن ثم فإن $|f| \le g$. أي إن $\int_X |f| d\mu \le \int_X g d\mu < \infty$، ومن ثم فإن f كمول.

لما كانت $f_n \to f$ فإن $\liminf_n f_n = \limsup_n f_n = f$.

ومن ثمَّ:

$$\int_X f d\mu = \int_X (\liminf_n f_n) d\mu \le \liminf_n \int_X f_n d\mu \le$$

$$\le \limsup_n \int_X f_n d\mu \le \int_X (\limsup_n f_n) d\mu = \int_X f d\mu$$

أي إن هناك مساواة بين جميع الأطراف. إذن، من أجل المتوالية $(\int_X f_n d\mu)$ من الأعداد الحقيقية يكون لدينا: $\liminf_n \int_X f_n d\mu = \limsup_n \int_X f_n d\mu$

وهذا يعني أن نهاية هذه المتوالية موجودة، ولها القيمة نفسها، ومنه:

$$\lim_n \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$$

٤-٩- مبرهنة أساسية: لنفرض أن $(X, \mathcal{A}, \mu)$ فضاء القياس μ، وأن $f \ge 0$ تطبيق قيوس على X و E مجموعة قيوسة. نعرّف التطبيق υ بالقاعدة التالية:

$$\upsilon(E) = \int_X \chi_E f d\mu$$

إن υ قياس على $\mathcal{A}$ وسنترك لك إثباتها.

٤-٩-١- ملاحظة: نكتب عادة $\int_X \chi_E f d\mu$ على النحو $\int_E f d\mu$ وذلك لأن:

$$\int_X \chi_E f d\mu = \int_{E \cup E^c} \chi_E f d\mu = \int_E \chi_E f d\mu + \int_{E^c} \chi_E f d\mu = \int_E f d\mu$$

لأن χ_E على E يساوي 1 وعلى E^c يساوي الصفر. لذلك من الممكن تعريف التطبيق υ على النحو $\upsilon(E) = \int_E f d\mu$.

٤-١٠- تعريف: نفرض أن $p(x)$ خاصة (أو عبارة) في الفضاء $(X, \mathcal{A}, \mu)$ حيث x متغيرها. نقول إن $p(x)$ محققة تقريباً أو غالباً في كل مكان بالنسبة للقياس μ إذا وجدت مجموعة همولة E بحيث تكون $p(x)$ محققة من أجل

كل x ليست من E. ونعبّر عن ذلك رمزاً بـ p محققة $a.e.[\mu]$ ذلك أن almost everywhere تعني غالباً في كل مكان.

٤-١٠-١- مثال: لنأخذ $\mathbb{R}$ المزودة بجبر بوريل، والقياس المألوف (الذي يقيس كل مجال بطوله)، ولنأخذ التطبيق f المعرّف بـ:

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{عندما } x \text{ غير عادي (أصم)}\\ 1 & \text{عندما } x \text{ عادي (ناطق)}\end{cases}$$

فإن $f(x)=0$ تقريباً في كل مكان، ونكتب $f=0 \ \ ae[\mu]$، وذلك لأن $\mathbb{Q}$ مجموعة الأعداد العادية هممولة. ينتج ذلك من:

$$0\le \mu(\mathbb{Q})=\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{q_n\})\le \sum_{n=1}^{\infty}\mu(\{q_n\})=0$$

حيث $q_1,q_2,...$ ترقيم لعناصر $\mathbb{Q}$ وأن $f(x)=0$ من أجل كل x ليس من $\mathbb{Q}$. يسمى هذا التطبيق **تطبيق ديريكيليه** (Dirichlet).

٤-١٠-٢- ملاحظة: هذا التطبيق قيوس لكنه غير كمول ريمانياً.

٤-١٠-٣- مبرهنة: إذا كان f تطبيقاً قيوساً وموجباً في الفضاء $(X,\mathcal{A},\mu)$ فإن:

$$f=0 \ \ ae[\mu] \text{ إذا وفقط إذا كان } \int_X f d\mu=0$$

الإثبات: لنفرض أن $f=0 \ \ ae[\mu]$ ولنثبت أن $\int_X f d\mu=0$.

لتكن E مجموعة هممولة بحيث يكون $f(x)=0$ من أجل كل $x\notin E$. إن E قيوسة لأن: $E=\{x\in X: f(x)>0\}$ و $f\ge 0$ قيوس. ومن ثم من أجل كل x من X فإن: $0\le f(x)\le \lim_n n\chi_E(x)$

ومن مبرهنة التقارب المتزايد نجد أن:

$$0\le \int_X f d\mu\le \int_X \lim_n n\chi_E d\mu=\lim_n \int_X n\chi_E d\mu=\lim_n n.\mu(E)=0$$

ومن ثم فإن: $\int_X f d\mu = 0$.

العكس: لنفرض أن $\int_X f d\mu = 0$ ، ولنثبت أن $f = 0 \quad a\varepsilon[\mu]$.

لنفرض أن $E = \{x \in X : f(x) > 0\}$ ولنبرهن على أن هذه المجموعة مهولة، وعندها نحصل على المطلوب لأن $f \geq 0$ فرضاً.

لنضع $E_k = \{x \in X : f(x) \geq \frac{1}{k}\}$ من أجل $k = 1,2,3,....$

إن: $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ لأنه إذا كانت x من E فإن $f(x) > 0$ ، ومن ثم فإن $f(x) > \frac{1}{k}$ من أجل قيمة ما لـ k. بمعنى أن $x \in E_k$ من أجل قيمة ما لـ k. والعكس صحيح أيضاً.

إن:

$$0 \leq \int_X \chi_{E_k}(x) d\mu(x) \leq \int_X k.f(x) d\mu(x) = k \int_X f(x) d\mu(x) = k.0 = 0$$

وذلك لأنه من أجل كل x من X فإن: $0 \leq \chi_{E_k}(x) \leq k.f(x)$

ومن ثم فإن: $\int_X \chi_{E_k}(x) d\mu(x) = 0$ ، أي إن E_k مهولة $(\mu(E_k) = 0)$ من أجل كل k. ومنه فإن E مهولة لأنها اجتماع عدود لمجموعات مهولة.

٤-١٠-٤- تدريبان:

تدريب(١): إذا كان f, g كموليين، $f = g \quad a\varepsilon[\mu]$ فإن $\int_X f d\mu = \int_X g d\mu$.

العبارة $f = g \quad a\varepsilon[\mu]$ تعني أن المجموعة $\{x \in X : f(x) \neq g(x)\}$ مهولة.

تدريب(٢): في $\mathbb{R}$ المزودة بجبر بوريل والقياس هو القياس المألوف، قياس لوبيغ، يكون: $\int_{[a,b]} f d\mu = \int_{]a,b[} f d\mu = \int_{[a,b[} f d\mu = \int_{]a,b]} f d\mu$ حيث f مستمر

تتمات وتمارين الفصل الرابع

١) إذا كانت φ دالة درجية في الفضاء (X,S,μ) و F,G مجموعتين قيوستين منفصلتين فإن: $\int_{F\cup G}\varphi d\mu=\int_{F}\varphi d\mu+\int_{G}\varphi d\mu$

٢) إذا كانت φ,ψ دالتين درجيتين في الفضاء (X,S,μ) حيث $\varphi=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\chi_{E_i}$ و $\psi=\sum_{j=1}^{m}\beta_j\chi_{F_j}$ مكتوبتان بالشكل النموذجي، فإن:

$$\int_X(\varphi+\psi)d\mu=\int_X\varphi d\mu+\int_X\psi d\mu$$

٣) إذا كان f,g قيوسين وموجبين $(f\geq 0,g\geq 0)$ في الفضاء (X,S,μ) فإن: $\int_X(f+g)d\mu=\int_X fd\mu+\int_X gd\mu$

(مبرهنة Beppo- Lévi): إذا كانت (f_n) متوالية من التطبيقات القيوسة بحيث $f_n\geq 0$ من أجل كل n من $\mathbb{N}$ فإن: $\int_X(\sum_{n=1}^{\infty}f_n)d\mu=\sum_{n=1}^{\infty}(\int_X f_n d\mu)$

إذا كان $f=g-h$ حيث g,h موجبان وكمولان فإن f كمول و:

$$\int_X fd\mu=\int_X gd\mu-\int_X hd\mu$$

٥) إذا كان $f=g-h$ حيث g,h موجبان وكمولان فإن f كمول و:

$$\int_X fd\mu=\int_X gd\mu-\int_X hd\mu$$

٦) إذا كان f,g كمولين فإن: $\int_X(f+g)d\mu=\int_X fd\mu+\int_X gd\mu$

٧) إذا كانت (f_n) متوالية من التطبيقات القيوسة، وكان $\sum_{n=1}^{\infty}\int_X|f_n|d\mu<\infty$

فإن: $\sum_{n=1}^{\infty}\int_X f_n d\mu=\int_X\sum_{n=1}^{\infty}f_n d\mu$

الفصل الخامس

الصفوف المطردة و جداء فضائين قيوسين

سنتعرض في هذا الفصل لمفاهيم الصفوف المطردة، الجداء التنسوري لجبرين تامين والجداء التنسوري لقياسين ثم لمبرهنة فوبيني.

٥-١- الصفوف المطردة

٥-١-١- تعريف: نقول عن جماعة غير خالية $\mathcal{M}$ من أجزاء مجموعة ما X غير خالية إنها صف مطرد في X إذا تحقق الشرطان التاليان:

١) إذا كانت $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ متوالية متزايدة من عناصر $\mathcal{M}$ (أي أن $E_n \subseteq E_{n+1}$ من أجل كل n من $\mathbb{N}$)، فإن $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ عنصر من $\mathcal{M}$. أو بصيغة أخرى إذا كانت $E_n \nearrow E$ فإن E من $\mathcal{M}$.

٢) إذا كانت $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ متوالية متناقصة من عناصر $\mathcal{M}$ (أي أن $F_n \supseteq F_{n+1}$ من أجل كل n من $\mathbb{N}$)، فإن $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ عنصر من $\mathcal{M}$. أو بصيغة أخرى إذا كانت $F_n \searrow F$ فإن F من $\mathcal{M}$.

٥-١-٢- مثال: إذا كانت X مجموعة غير خالية فإن 2^X صف مطرد فيها. كما أن كل جبر تام في مجموعة X هو صف مطرد في المجموعة ذاتها.

٥-١-٣- تدريب : إذا كان $\mathcal{A}$ جبراً في مجموعة ما غير خالية X، وكان أيضاً صفاً مطرداً في X، فإنه جبر تام في X.

٥-١-٤- ملاحظة وتعريف: إذا كانت ξ جماعة جزئية غير خالية من مجموعة أجزاء مجموعة ما X فإنه يوجد صف مطرد $\mathcal{M}(\xi)$ يحوي ξ

ومحتوى في أي صف مطرد آخر حاوٍ لـ ξ. نسمي هذا الصف " أصغر صف مطرد يحوي ξ " أو " الصف المطرد المولد بالجماعة ξ" .

٥-١-٥- مبرهنة: إذا كانت الجماعة $\mathcal{A}$ جبراً في المجموعة X فإن $\mathcal{M}(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{A})$. (أي أن أصغر صف مطرد يحوي جبراً $\mathcal{A}$ لا بد وأن يحوي $\widehat{\mathcal{A}} = \sigma(\mathcal{A})$ بل يساويه).

الإثبات: إن أي جبر تام في مجموعة هو صف مطرد في هذه المجموعة، ومن ثم فإن $\sigma(\mathcal{A})$ صف مطرد يحوي $\mathcal{A}$. ولما كان $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ أصغر صف مطرد يحوي $\mathcal{A}$ فإن $\mathcal{M}(\mathcal{A}) \subseteq \sigma(\mathcal{A})$.

لنبرهن الآن على صحة العكس $\sigma(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{A})$. وهذا يتم إذا أثبتنا أن $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ جبر تام، لأن $\sigma(\mathcal{A})$ أصغر جبر تام يحوي $\mathcal{A}$. وبالاستفادة من التمرين السابق يكفي إثبات أنه جبر.

أ- سنثبت أنه **مغلق بالنسبة للتتميم:**

نضع $S = \{E \subseteq X : E^c \in \mathcal{M}(\mathcal{A})\}$ ولنبرهن على أن S صف مطرد يحوي $\mathcal{A}$. إن $\mathcal{A} \subseteq S$ لأنه إذا كان $E \in \mathcal{A}$ فإن $E^c \in \mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{A})$. إذن E من S.

إذا كانت $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ متوالية متزايدة من عناصر S، فإن $\{E_n^c\}_{n=1}^{\infty}$ متوالية متناقصة من $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ (من تعريف S)، ومن ثم فإن $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n^c$ من $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ لأن هذا الأخير صف مطرد. وباستخدام قانون دي مورغان نجد أن $(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n)^c$ من $\mathcal{M}(\mathcal{A})$. إذن فإن $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ من S.

وعلى نحو مماثل نثبت أنه إذا كانت $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ متوالية متناقصة من S فإن $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ من S. ومن ثم فإن S صف مطرد يحوي $\mathcal{A}$. أي أن $S \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{A})$.

لذلك إذا كانت E من $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ فإن E من S، ومن ثم فإن E^c من $\mathcal{M}(\mathcal{A})$.
أي أن $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ مغلق بالنسبة للتتميم.

ب- سنثبت أنه **مغلق بالنسبة للاجتماع المنتهي:**

من أجل ذلك يكفي أن نثبت أنه مغلق بالنسبة لاجتماع أي عنصرين من $\mathcal{M}(\mathcal{A})$. لنثبّت أي مجموعة جزئية G من X، ولنضع:

$$S_G = \{E \subseteq X : E \cup G \in \mathcal{M}(\mathcal{A})\}$$

سنثبت أن S_G صف مطرد. نأخذ $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ متوالية متزايدة من S_G، ومن ثم فإن $\{E_n \cup G\}_{n=1}^{\infty}$ متوالية متزايدة من عناصر $\mathcal{M}(\mathcal{A})$. ومنه فإن $(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) \cup G$ من $\mathcal{M}(\mathcal{A})$. أي أن $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ من S_G. وعلى نحو مماثل نثبت أنه إذا كانت $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ متوالية متناقصة من عناصر S_G فإن $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ من S_G.

نأخذ الآن A **من** $\mathcal{A}$، ولنضع $S_A = \{E \subseteq X : E \cup A \in \mathcal{M}(\mathcal{A})\}$.
إن $\mathcal{A} \subseteq S_A$ لأنه إذا كان E من $\mathcal{A}$ فإن $E \cup A$ من $\mathcal{A}$ لأن $\mathcal{A}$ جبر.
ولما كان $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{A})$ فإن $E \cup A$ من $\mathcal{M}(\mathcal{A})$. ومن ثم فإن E من S_A (وفق تعريف S_A).
ولما كان S_A صفاً مطرداً يحوي $\mathcal{A}$ فإن $\mathcal{M}(\mathcal{A}) \subseteq S_A$. أي أنه إذا كان E من $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ فإن E من S_A، بمعنى أن $E \cup A$ من $\mathcal{M}(\mathcal{A})$.

نأخذ الآن E **من** $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ ولنضع $S_E = \{G \subseteq X : G \cup E \in \mathcal{M}(\mathcal{A})\}$.
بيّنا آنفاً أنه إذا كان A من $\mathcal{A}$ و E من $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ فإن $A \cup E$ من $\mathcal{M}(\mathcal{A})$.
ومن ثم فإن $\mathcal{A} \subseteq S_E$، وذلك لأنه من أجل كل A من $\mathcal{A}$ فإن $A \cup E$ من $\mathcal{M}(\mathcal{A})$، أي أن A من S_E. ولما كان S_E صفاً مطرداً يحوي $\mathcal{A}$ فإن $\mathcal{M}(\mathcal{A}) \subseteq S_E$. أي أنه إذا كان F من $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ فإن F من S_E، وهذا يعني أن $F \cup E$ من $\mathcal{M}(\mathcal{A})$. ويتم المطلوب.

٥-٢- فضاءات الجداء

٥-٢-١- تعريف: لنفرض أن $(X,S),(Y,\Im)$ فضاءان قيوسان. من أجل كل A من S و B من $\Im$ نسمي المجموعة الجزئية $A\times B$ $(\subseteq X\times Y)$ **مستطيلاً قيوساً**.

إذا كانت $\mathcal{A}$ مجموعة كل الاجتماعات المنتهية للمستطيلات القيوسة فإننا نسمي $\sigma(\mathcal{A})$ **الجبر التام الجداء** أو σ- **جبر الجداء**، ويرمز له بـ $S\otimes\Im$. أي أن $\sigma(\mathcal{A})=S\otimes\Im$.

٥-٢-٢- توطئة: إذا كانت $\mathcal{A}$ كما في التعريف السابق فإنها جبر.

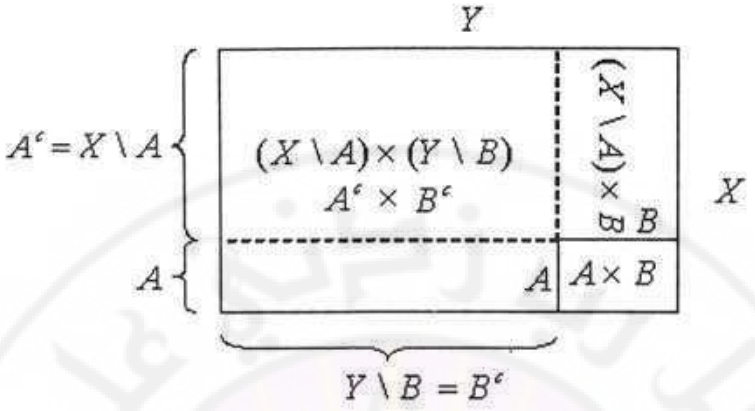
البرهان:

١- إن $\mathcal{A}$ مغلقة بالنسبة للاجتماع المنتهي لأن الاجتماع المنتهي لعناصر من $\mathcal{A}$ هو من $\mathcal{A}$.

٢- لنثبت أن $\mathcal{A}$ مغلقة بالنسبة للتتميم.

سنبرهن أولاً أن متممة أي مستطيل قيوس هي من $\mathcal{A}$. نفرض أن $A\times B$ مستطيل قيوس في $X\times Y$. ومنه:

$$\begin{aligned}(X\times Y)\setminus(A\times B)&=([(X\setminus A)\cup A]\times Y)\setminus(A\times B)\\&=[((X\setminus A)\times Y)\setminus(A\times B)]\cup[(A\times Y)\setminus(A\times B)]\\&=[(X\setminus A)\times(Y\setminus B)]\setminus[A\times B]\cup[A\times(Y\setminus B)]\\&=((X\setminus A)\times(Y\setminus B))\cup((X\setminus A)\times B)\cup(A\times(Y\setminus B))\end{aligned}$$



الطرف الأيمن من المساواة الأخيرة اجتماع ثلاثة مستطيلات قيوسة. ومن ثم فإنه من $\mathcal{A}$. أي إن متممة مستطيل قيوس هي من $\mathcal{A}$.

لنأخذ الآن أي مجموعة من $\mathcal{A}$، ولتكن $\bigcup_{i=1}^{n}(A_i \times B_i)$، فإن:

$$(X \times Y) \setminus (\bigcup_{i=1}^{n}(A_i \times B_i)) = \bigcap_{i=1}^{n}((X \times Y) \setminus (A_i \times B_i))$$

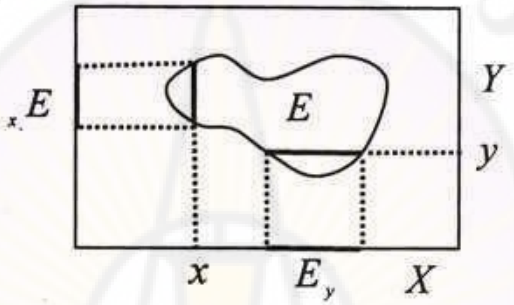
أي أن الطرف الأيمن تقاطع عدد منته من المستطيلات القيوسة. ولما كان تقاطع مستطيلين قيوسين هو مستطيل قيوس (لأن $(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2)$) فإن الطرف الأيمن هو من $\mathcal{A}$.

٥-٢-٣- نتيجة: من المبرهنة السابقة نجد أن $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{M}(\mathcal{A})$.

٥-٢-٤- مثال: نعلم أن جبر بوريل في $\mathbb{R}$ هو $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$. ومن ثم فإن جبر بوريل في $\mathbb{R}^2$ هو $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}} \times \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$. وينتج هذا من حقيقة أن المجموعات البوريلية في $\mathbb{R}^2$ تتولد بواسطة المستطيلات المفتوحة $]a,b[\times]c,d[$ بالمعنى المألوف، والتي هي مستطيلات قيوسة بالمعنى المعروف في الجبر التام.

٥-٢-٥- تعريف: إذا كانت X,Y مجموعتين غير خاليتين وكانت $E \subseteq X \times Y$، و x من X، و y من Y فإن مقطع (قصة) E عند x (وفق x) هي المجموعة: $_xE = \{y \in Y : (x,y) \in E\}$ (ويشار إليها في كثير من الكتب بالرمز E_x) ومقطعه (قصته) عند y (وفق y) هي المجموعة: $E_y = \{x \in X : (x,y) \in E\}$ (ويشار إليها في كثير من الكتب بالرمز E^y).

انظر الشكل الآتي:



٥-٢-٦- توطئة: إذا كان $(X,S),(Y,\Im)$ فضائين قيوسين، و E من $S \otimes \Im$ فإن $_xE$ من $\Im$ من أجل كل x من X، و E_y من S من أجل كل y من Y. ونعبّر عن ذلك بقولنا إن مقطع أي مجموعة قيوسة في $X \times Y$ وفق x تكون قيوسة في Y، ومقطعها وفق y مجموعة قيوسة في X وذلك من أجل كل x,y من X,Y بالترتيب.

البرهان: لنثبّت x من X ولنضع:

$$\mathcal{U} = \{E \subseteq X \times Y : {}_xE \in \Im\}$$

لنبرهن على أن $\mathcal{U}$ صف مطرد في $X \times Y$ يحوي A.

لنفرض أن $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ متوالية متزايدة من عناصر $\mathcal{U}$ ولنثبت أن $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ من $\mathcal{U}$.

من تعريف $\mathcal{U}$ نجد أن $\{({}_xE_n)\}_{n=1}^{\infty}$ متوالية متزايدة من عناصر $\Im$ ($E_n \subseteq E_{n+1} \Rightarrow {}_xE_n \subseteq {}_xE_{n+1}$). ولما كان $\Im$ جبراً تاماً

فإن $\bigcup_{n=1}^{\infty}(E_n)_x$ من $\Im$. ولكن $(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n)_x=\bigcup_{n=1}^{\infty}(E_n)_x$ (يمكن إثباتها انطلاقاً من تعريف مقطع مجموعة)، إذن $(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n)_x$ من $\Im$. ومن تعريف $\mathcal{U}$ نجد أن $\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$ من $\mathcal{U}$.

وبالطريقة ذاتها نثبت أنه إذا كانت $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ متوالية متناقصة من عناصر $\mathcal{U}$ فإن $\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n$ من $\mathcal{U}$.

كذلك فإن $\mathcal{U}\subseteq\mathcal{A}$، لأنه إذا كان $A\times B$ مستطيلاً قيوساً (أي من $\mathcal{A}$) فإن:

$$(A\times B)_x=\begin{cases}B & \text{if} \quad x\in A\\ \phi & \text{if} \quad x\notin A\end{cases}$$

ولما كانت ϕ, B من $\Im$ فإن $A\times B$ من $\mathcal{U}$. فإذا أخذنا أي عنصر من $\mathcal{A}$ مثل $\bigcup_{i=1}^{n}(A_i\times B_i)$ (وهو اجتماع منته لمستطيلات قيوسة) فإن:

$$(\bigcup_{i=1}^{n}(A_i\times B_i))_x=\bigcup_{i=1}^{n}(A_i\times B_i)_x$$

ولما كان أي مستطيل $A_i\times B_i$ هو من $\mathcal{U}$، إذن مقطعه وفق x $((A_i\times B_i)_x)$ من $\Im$. ومن ثم فإن الطرف الأيمن من المساواة الأخيرة من $\Im$ لأنه جبر تام.

إذن $\bigcup_{i=1}^{n}(A_i\times B_i)$ من $\mathcal{U}$. إذن $\mathcal{U}$ صف مطرد يحوي $\mathcal{A}$، ومنه:

$$\mathcal{U}\supseteq\mathcal{M}(\mathcal{A})=\sigma(\mathcal{A})=S\otimes\Im$$

لذلك إذا كان E من $S\otimes\Im$ فإنه من $\mathcal{U}$، ومن ثم فإن E_x من $\Im$.

يبرهن النصف الآخر بطريقة مماثلة.

٥-٢-٧- توطئة:

إذا كان μ,υ قياسين منتهيين في الفضائين $(X,S,\mu),(Y,\Im,\upsilon)$ و E من $S\otimes\Im$ فإن التطبيقين: $x\mapsto\upsilon({}_xE)\quad,\quad y\mapsto\mu(E_y)$ قيوسان وموجبان.

وأن: $$\int_X\upsilon({}_xE)d\mu(x)=\int_Y\mu(E_y)d\upsilon(y)$$

البرهان: لنأخذ الجماعة:

$$\xi=\{E\in S\otimes\Im: x\mapsto\upsilon({}_xE), y\mapsto\mu(E_y)\ \text{قيوسان وموجبان}\ \&\int_X\upsilon({}_xE)d\mu(x)=\int_Y\mu(E_y)d\upsilon(y)\}$$

أي أن ξ جماعة المجموعات E المنتميـة إلـى $S\otimes\Im$ والمحققـة للـشروط المطلوبة.

سنثبت أن $S\otimes\Im=\xi$ وعندها يتم المطلوب. وهذا ممكن إذا أثبتنا أن ξ صف مطرد يحوي $\mathcal{A}$، لأنه سيكون عنـدها $\mathcal{M}(\mathcal{A})\subseteq\xi\subseteq S\otimes\Im=\mathcal{M}(\mathcal{A})$، بمعنى أن $S\otimes\Im=\xi$.

أ- $\mathcal{A}\subseteq\xi$

نأخذ المستطيل القيوس $A\times B$، ومنه نجد أن:

$${}_x(A\times B)=\begin{cases}B & \text{if}\quad x\in A\\ \phi & \text{if}\quad x\notin A\end{cases}$$

إذن:

$$\upsilon({}_x(A\times B))=\left\{\begin{matrix}\upsilon(B) & \text{if} & x\in A\\ 0 & \text{if} & x\notin A\end{matrix}\right\}=\chi_A(x).\upsilon(B)$$

وهو تطبيق لـ x قيوس وموجب لأن χ_A تطبيق قيوس و $\upsilon(B)$ عدد حقيقي.

ومنه:

$$\int_X \upsilon({}_x(A\times B))d\mu(x) = \int_X \upsilon(B).\chi_A(x)d\mu(x)$$
$$= \upsilon(B)\int_X \chi_A(x)d\mu(x) = \upsilon(B).\mu(A)$$

وبالمثل فإن $\mu((A\times B)_y) = \chi_B(y).\mu(A)$ وهو تطبيق لـ y قيوس وموجب.

كذلك فإن: $\int_Y \mu((A\times B)_y)d\upsilon(y) = \mu(A).\upsilon(B)$

ومن ثم فإن $x \mapsto \upsilon({}_x(A\times B))$ و $y \mapsto \mu((A\times B)_y)$ قيوسان وموجبان، و: $\int_X \upsilon({}_x(A\times B))d\mu = \int_Y \mu((A\times B)_y)d\upsilon$

ومن تعريف ξ نجد أن $A\times B$ من ξ. أي أن المستطيلات القيوسة من ξ.

لنأخذ الآن أي عنصر p من A، أي أن p اجتماع منته لمستطيلات قيوسة.

ويمكن التعبير عنه كاجتماع منته منفصل لمستطيلات قيوسة. أي أن:

$$p = \bigcup_{i=1}^{n}(A_i\times B_i) = \bigcup_{j=1}^{m}(D_j\times G_j)$$

حيث $D_j\times G_j$ منفصلة مثنى مثنى من أجل كل $1\le j\le m$.

$${}_xp = {}_x(\bigcup_{j=1}^{m}(D_j\times G_j)) = \bigcup_{j=1}^{m}{}_x(D_j\times G_j)$$

$$\upsilon({}_xp) = \upsilon(\bigcup_{j=1}^{m}{}_x(D_j\times G_j)) = \sum_{j=1}^{m}\upsilon({}_x(D_j\times G_j)) = \sum_{j=1}^{m}\chi_{D_j}(x).\upsilon(G_j)$$

ولما كان $x \mapsto \chi_{D_j}(x).\upsilon(G_j)$ تطبيق لـ x قيوس، فإن التطبيق:

$$x \mapsto \chi_{D_1}(x).\upsilon(G_1) + ... + \chi_{D_m}(x).\upsilon(G_m) = \sum_{j=1}^{m}\chi_{D_j}(x).\upsilon(G_j)$$

قيوس.

ومنه: $\int_X \upsilon({}_xp)d\mu(x) = \int_Y \mu(p_y)d\upsilon(y)$

ومن تعريف ξ نجد أن p من ξ.

ب- ξ صف مطرد.

لتكن (E_n) متوالية من عناصر ξ بحيث إن $E_n \nearrow E$، ولنثبت أن E من ξ.

من الفرض نجد أن ${}_xE \nearrow ({}_xE_n)$. ومن مبرهنة الاستمرار من الأدنى نجد أن: $\upsilon({}_x(E_n)) \nearrow \upsilon({}_xE)$ (★)

لما كانت E_n من ξ من أجل كل n من $\mathbb{N}$ فإن التطبيق $x \mapsto \upsilon({}_x(E_n))$ قيوس من أجل كل n. وباستخدام مبرهنة التقارب المتزايد الأولى يكون $x \mapsto \upsilon({}_xE)$ قيوساً من (★) (نهاية متوالية من التطبيقات القيوسة).

وباستخدام مبرهنة التقارب المتزايد مرة ثانية نجد أن:

$$\int_X \upsilon({}_x(E_n))d\mu(x) \nearrow \int_X \upsilon({}_xE)d\mu(x)$$

وعلى نحو مماثل نجد أن التطبيق $y \mapsto \mu(E_y)$ قيوس، وأن:

$$\int_Y \mu((E_n)_y)d\upsilon(y) \nearrow \int_Y \mu(E_y)d\upsilon(y)$$

ولما كانت E_n من ξ من أجل كل n من $\mathbb{N}$ فإن:

$$\int_X \upsilon({}_x(E_n))d\mu(x) = \int_Y \mu((E_n)_y)d\upsilon(y)$$

$$\int_X \upsilon({}_xE)d\mu(x) = \int_Y \mu(E_y)d\upsilon(y)$$

ومن تعريف ξ نجد أن E من ξ.

وعلى نحو مماثل: إذا كانت (E_n) متوالية من عناصر ξ بحيث إن $E_n \searrow E$ فإن E من ξ. والتغيير الوحيد في البرهان هو أن نلاحظ أنه نظراً إلى أن كلاً من μ, υ منته، فإن $\upsilon({}_x(E_n)) < \infty$ من أجل كل n من $\mathbb{N}$. لذلك نستطيع استخدام مبرهنة التقارب المتزايد للمتوالية المتناقصة $\upsilon({}_x(E_n))$، وعلى نحو

مماثل فإن $\int_X \upsilon({}_x(E_n))d\mu(x) < \infty$. لذلك نستطيع استخدام مبرهنة التقارب المتزايد مرة ثانية. ومن ثم فإن ξ صف مطرد.

٥-٢-٨- مبرهنة: إذا كان $(X,S,\mu),(Y,\Im,\upsilon)$ فضائين مقيسين، حيث μ,υ قياسان منتهيان، فإنه يوجد قياس وحيد λ على $S\otimes\Im$ بحيث إن:

$$\lambda(A\times B)=\mu(A).\upsilon(B)$$

من أجل كل مستطيل قيوس $A\times B$. والأكثر من ذلك، من أجل كل E من $S\otimes\Im$ فإن:

$$\lambda(E)=\int_X \upsilon({}_xE)d\mu(x)=\int_Y \mu(E_y)d\upsilon(y)$$

الإثبات: لنعرّف التطبيق λ على $S\otimes\Im$ بالقاعدة التالية:

$\lambda(E)=\int_X \upsilon({}_xE)d\mu(x)$ من أجل كل E من $S\otimes\Im$.

لنثبت أن λ قياس على $S\otimes\Im$.

١) من الواضح أن $\lambda(\phi)=0$.

٢) لنفرض أن (E_n) متوالية منفصلة من عناصر $S\otimes\Im$، ولنثبت أن:

$$\lambda(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda(E_n)$$

من الفرض نجد أن $({}_xE_n)$ متوالية منفصلة من عناصر $\Im$ لأن مقطع مجموعة قيوسة هو مجموعة قيوسة. ومن ثم فإن:

$$\upsilon({}_x(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n))=\upsilon(\bigcup_{n=1}^{\infty}{}_x(E_n))=\sum_{n=1}^{\infty}\upsilon({}_x(E_n))$$

ومنه:

$$\lambda(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n)=\int_X \upsilon({}_x(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n))d\mu(x)$$

$$=\int_X\sum_{n=1}^{\infty}\upsilon({}_x(E_n))d\mu(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_X\upsilon({}_x(E_n))d\mu(x)$$

(وذلك بالاستفادة من **مبرهنة** Beppo- Lévi المذكورة في تمارين الفصل السابق)

إذن: $$\lambda(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n)$$

ومن ثم فإن λ قياس على الجبر التام $S \otimes \Im$.

وإذا كان $A \times B$ مستطيلاً قيوساً فإن:

$$\lambda(A \times B) = \int_X \upsilon({}_x(A \times B)) d\mu(x) = \mu(A).\upsilon(B)$$

ذلك من برهان التوطئة السابقة.

لنثبت وحدانية القياس λ:

لنفرض أن τ قياس آخر على $S \otimes \Im$ بحيث إن $\tau(A \times B) = \mu(A).\upsilon(B)$ من أجل أي مستطيل قيوس $A \times B$.

لنأخذ:

$$\xi = \{E \in S \otimes \Im : \lambda(E) = \tau(E)\} \subseteq S \otimes \Im$$

ولنبرهن على أن $S \otimes \Im = \xi$، ومن ثم سيكون عندها $\lambda = \tau$، بمعنى أن λ وحيد. ويكفي لذلك أن نبرهن على أن ξ صف مطرد يحوي $\mathcal{A}$ لأنه سيكون عندها $S \otimes \Im \supseteq \xi \supseteq \mathcal{M}(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{A}) = S \otimes \Im$ أي أن $S \otimes \Im = \xi$.

أ- $\mathcal{A} \subseteq \xi$

من الواضح أن ξ تحوي المستطيلات القيوسة وذلك من تعريف λ, τ. لأن:

$$\lambda(A \times B) = \mu(A).\upsilon(B) = \tau(A \times B)$$

أي أن ξ غير خالية.

لنفرض أن p عنصر من $\mathcal{A}$، بمعنى أن p اجتماع منته لمستطيلات قيوسة. نعلم أن p يمكن كتابته كاجتماع منته ومنفصل لمستطيلات قيوسة، أي

أن $p=\bigcup_{i=1}^{n}(A_i\times B_i)$ ، ولنثبت أن p من ξ. لذلك يجب إثبات أن $\lambda(p)=\tau(p)$.

$$\lambda(\bigcup_{i=1}^{n}(A_i\times B_i))=\sum_{i=1}^{n}\lambda(A_i\times B_i)=\sum_{i=1}^{n}\tau(A_i\times B_i)=\tau(\bigcup_{i=1}^{n}(A_i\times B_i))$$

ب- ξ صف مطرد:

لنفرض أن $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ متوالية متزايدة من عناصر ξ بحيث إن $E_n\nearrow E$ ولنثبت أن E من ξ. لما كانت E_n من ξ من أجل كل n من $\mathbb{N}$ فإنها من $S\otimes\Im$. ومن ثم فإن E من $S\otimes\Im$ لأن هذا الأخير جبر تام في $X\times Y$. ولإثبات أن E من ξ يجب إثبات أن $\lambda(E)=\tau(E)$. لما كانت $E_n\nearrow E$ فإن $\lambda(E_n)\nearrow\lambda(E)$ و $\tau(E_n)\nearrow\tau(E)$ اعتماداً على خاصة الاستمرار من الأدنى. بمعنى أن:

$$\tau(E)=\lim_n\tau(E_n)\quad,\quad\lambda(E)=\lim_n\lambda(E_n)$$

ومنه:

$$\lambda(E)=\lim_n\lambda(E_n)=\lim_n\tau(E_n)=\tau(E)$$

وبالطريقة ذاتها نثبت أنه إذا كانت $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ متوالية متناقصة من عناصر ξ بحيث $E_n\searrow E$ فإن E من ξ. والفرق الوحيد في البرهان هو أن نلاحظ أن شرط الاستمرار من الأعلى محقق لأن λ,τ منتهيان، وذلك لأن:

$$\lambda(X\times Y)=\mu(X).\upsilon(Y)<\infty\quad,\quad\tau(X\times Y)=\mu(X).\upsilon(Y)<\infty$$

وبالنسبة للجزء الثاني من المبرهنة فقد تمَّ برهانه في التوطئة السابقة.

٥-٢-٩- تعريف: يسمى القياس λ على $S\otimes\Im$ **الجداء التنسوري (الموتري) للقياسين** μ,υ، كما يسمى أحياناً **القياس الجداء**، ويرمز له بـ $\mu\times\upsilon$ (أو بـ $\mu\otimes\upsilon$) ويحقق الخاصة الآتية: $(\mu\times\upsilon)(A\times B)=\mu(A).\upsilon(B)$

٥-٢-١٠- تعريف: إذا كان $f: X \times Y \to \mathbb{R}$ تطبيقاً معرفاً بالقاعدة: $(x,y) \mapsto f(x,y)$ وإذا كانت x من X و y من Y فإننا نسمي التطبيق:

$${}_xf: Y \to \mathbb{R}$$

$$y \mapsto {}_xf(y) = f(x,y)$$

مقطع f عند x، أو **قصة f عند x**. ونسمي التطبيق:

$$f_y: X \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f_y(x) = f(x,y)$$

مقطع f عند y، أو **قصة f عند y**.

٥-٢-١١- مبرهنة: قصة أي تابع قيوس تكون قيوسة أي:

إذا افترضنا أنّ S جبر تام على X و τ جبر تام على Y و $S \otimes \tau$ الجبر التام الجداء وأن: $f: X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$

تطبيق قيوس فإن $f_y, {}_xf$ تطبيقان قيوسان مهما تكن $x \in X$ ومهما تكن $y \in Y$، حيث:

${}_xf: Y \to \overline{\mathbb{R}}$ قصة f وفق x

$$y \mapsto {}_xf(y) = f(x,y)$$

$f_y: X \to \overline{\mathbb{R}}$ قصة f وفق y

$$x \mapsto f_y(x) = f(x,y)$$

الإثبات: يكفي لإثبات ذلك أن نلاحظ أنه أياً كانت الفترة المفتوحة V في $\overline{\mathbb{R}}$ فإن:

$$E = f^{-1}(V) = \{(x,y): f(x,y) \in V\} \subseteq S \otimes \tau$$

ومن ثمّ فإن $E_y, {}_xE$ قيوستان

ولما كانت:

$$ {}_xE = \{y : (x,y) \in E\} = \{y : f(x,y) \in V\} $$
$$ = \{y : {}_xf(y) \in V\} = ({}_xf)^{-1}(V) $$

وهـــذا يعنـــي أن التطبيـــق ${}_xf$ قيـــوس، وبالطريقـــة نفـــسها ســـنجد أن: $E_y = (f_y)^{-1}(V)$ وهذا يعني أن f_y قيوس.

٥-٣- حول التكامل الثنائي لتابع قيوس موجب:

٥-٣-١- تمهيد:

لنفترض الآن أنّ $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}_+}$ قيوس موجب وأنّ μ قياس موجب منته (أو $\sigma-$ منته) على S و υ قياس موجب منته (أو $\sigma-$ منته) على τ و $\lambda = \mu \otimes \upsilon$ القياس الجداء على $S \otimes \tau$ الذي هو أصغر جبر تام يحوي صف المستطيلات $A \times B$ حيث $A \in S$ و $B \in \tau$. نعلم أن ${}_xf$ قيوس موجب أياً كانت $x \in X$ وكذلك f_y قيوس موجب أياً كانت y من Y. وإذا وضعنا:

$$ \varphi : x \mapsto \varphi(x) = \int_Y f(x,y)d\upsilon(y) = \int_Y {}_xf(y)d\upsilon(y) = \int_Y {}_xf d\upsilon $$

و:

$$ \psi : y \mapsto \psi(y) = \int_X f(x,y)d\mu(x) = \int_X f_y(x)d\mu(x) = \int_X f_y d\mu $$

ويبرهن أن φ, ψ قيوسان وهما موجبان وضوحاً، فهل:

$$ \int_{X\times Y} f d\lambda = \int_X \varphi d\mu = \int_Y \psi d\upsilon $$

أو هل:

$$ \int_{X\times Y} f(x,y)d\lambda(x,y) = \int_X (\int_Y f(x,y)d\upsilon(y))d\mu(x) $$
$$ = \int_Y (\int_X f(x,y)d\mu(x))d\upsilon(y) $$

إنّ الجواب نعم، وهذا ما يسمى بمبرهنة فوبيني **Fubini** من أجل التوابع القيوسة الموجبة.

فكرة الإثبات: نفترض أولاً $f = \chi_E$ دالة مميزة لمجموعة قيوسة E في $X \times Y$ فيكون:

$$\forall x \in X : \quad \varphi(x) = \int_Y f(x,y)d\upsilon(y) = \int_Y \chi_E(x,y)d\upsilon(y)$$
$$= \int_Y \chi_{{}_xE}(y)d\upsilon(y) = \upsilon({}_xE)$$

وكذلك سيكون $\psi(y) = \mu(E_y)$ أياً كان $y \in Y$. ويكون φ, ψ قيوسين استناداً للتوطئة(٥-٢-٧) كما سيكون:

$$\int_X \varphi d\mu = \int_Y \psi d\upsilon = \lambda(E) = \int_{X\times Y} \chi_E d\lambda = \int_{X\times Y} f d\lambda$$

وذلك استناداً للمبرهنة السابقة(٥-٢-٨).

ثم نفترض $f = \sum_{j=1}^{k} c_j \chi_{E_j}$ دالة بسيطة قيوسة موجبة ونتحقق من صحة المساواة المطلوبة.

وأخيراً نفترض f دالة قيوسة موجبة فعندئذ توجد متتالية متزايدة (f_n) من الدوال الدرجية الموجبة التي تتقارب نقطياً نحو f:

$$\forall (x,y) \in X \times Y : \quad f_n(x,y) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x,y)$$

وإذا وضعنا:

$$\varphi_n(x) = \int_Y f_n(x,y)d\upsilon(y)$$
$$\psi_n(y) = \int_X f_n(x,y)d\mu(x)$$

لمكن أن نثبت باستخدام مبرهنة التقارب المطرد أنّ:

$$\varphi_n \to \varphi \quad , \quad \psi_n \to \psi$$

وأن: $\int_X \varphi_n d\mu \to \int_X \varphi d\mu \ , \ \int_Y \psi_n d\upsilon \to \int_Y \psi d\upsilon$

$$\int_{X\times Y} f_n d\lambda \to \int_{X\times Y} f d\lambda$$

ولما كانت الخطوة الثانية تؤكد أن: $\int_X \varphi_n d\mu = \int_{X\times Y} f_n d\lambda$

إذن بالمرور إلى النهايات نجد: $\int_X \varphi d\mu = \int_{X\times Y} f d\lambda$

وبالطريقة نفسها نجد: $\int_Y \psi d\upsilon = \int_{X\times Y} f d\lambda$

ويتم المطلوب.

٥-٣-٢- ملاحظة: إذا كان التطبيق $f: X\times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ كمولاً بمعنى أن: $\int_{X\times Y} |f| d\lambda < \infty$

فإن المساويات الواردة أعلاه محققة بمعنى أن:

$$\int_{X\times Y} f(x,y) d\lambda(x,y) = \int_X (\int_Y f(x,y) d\upsilon(y)) d\mu(x)$$
$$= \int_Y (\int_X f(x,y) d\mu(x)) d\upsilon(y)$$

Damascus University

تتمات وتمارين الفصل الخامس

(١) لنفترض أن $I \times I = [0,1] \times [0,1]$ حيث سننظر إليه مزوداً بقياس لوبيغ وليكن:

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad \text{if} \quad (x,y) \neq (0,0) \quad , \quad f(0,0) = 0$$

أثبت أن f غير كمول على $I \times I$.

لاحظ أن:

$$\int_0^1 (\int_0^1 f(x,y)dy)dx = \frac{\pi}{4} \neq -\frac{\pi}{4} = \int_0^1 (\int_0^1 f(x,y)dx)dy$$

(٢) إذا كان:

$$f(x,y) = \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2} \quad \text{if} \quad (x,y) \neq (0,0) \quad , \quad f(0,0) = 0$$

احسب:

$$\int_0^\infty (\int_0^\infty f(x,y)dy)dx \quad , \quad \int_0^\infty (\int_0^\infty f(x,y)dx)dy$$

ثم:

$$\int_{[0,\infty[\times [0,\infty[} f(x,y)dxdy$$

هنا نضع: $dxdy = d\lambda$ ، $dy = d\upsilon$ ، $dx = d\mu$

(٣) فيما يلي $X = Y$ ، و $\mathcal{A}$ جبر تام يحوي صف المفتوحات في X و $\mathcal{B}$ جبر تام يحوي صف المفتوحات في Y.

بين أن الجبر التام $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ يحوي صف المفتوحات في $X \times Y$.

④ لنفرض أن $(X,\mathcal{A},\mu)\xrightarrow{f}\mathbb{R}$ حيث f تابع كمول

$$x \mapsto f(x)$$

و $(X,\mathcal{A},\mu)\xrightarrow{g}\mathbb{R}$ حيث g تابع كمول

$$x \mapsto g(x)$$

والمطلوب بين أنه إذا كان $\lambda=\mu\otimes\nu$ و $h = fg$ فإن:

$$\int_{X\times Y} h\, d\lambda = \int_X f d\mu \int_Y g d\nu$$

⑤ ليكن $J=[0,1]\times[0,1]$ ، μ قياس لوبيغ على $X=[0,1]$ ، ν قياس العد على $Y=[0,1]$ وليكن :

$$f(x,y)=\begin{cases}1 & \text{if } x=y\\ 0 & \text{خلاف ذلك}\end{cases}$$

احسب:

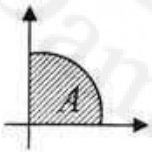
$$\int_0^1\left(\int_0^1 f(x,y)d\mu(x)\right)d\nu(y)$$

$$\int_0^1\left(\int_0^1 f(x,y)d\nu(y)\right)d\mu(x)$$

ماذا تستنتج؟

⑥ لتكن $A=\{x^2+y^2\le 1\ ,x\ge 0,y\ge 0\}$ ،

و $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ و $g=\chi_A\cdot f$



المطلوب: احسب $\int_{X\times Y} g(x,y)\,dxdy$.

وقل رب زدني علما
Damascus University

الفصل السادس

القياسات العقدية ومبرهنة رادون _ نيكوديم

Complex Measures and Radon-Nikodym Theorem

٦-١- التغير الكلي لقياس عقدي:

٦-١-١- مقدمة:

لنفرض أن X مجموعة غير خالية، و $\mathfrak{M}$ جبر تام من أجزاء X.

نقول عن متتالية $\{E_j\}_{j\geq 1}$ من عناصر $\mathfrak{M}$ إنها تجزئة للمجموعة E من $\mathfrak{M}$ إذا $E=\bigsqcup_{j\geq 1} E_j$ حيث الرمز $\sqcup$ يعني اتحاداً منفصلاً (أي أن $E_j \cap E_k = \phi$ عندما $j \neq k$).

وسنرمز لمجموعة التجزئات المتعلقة بمجموعة E بـ $\tau(E)$.

وسنقول عن تطبيق : $\mu : \mathfrak{M} \to \mathbb{C}$

$$E \mapsto \mu(E)$$

إنه قياس عقدي على X إذا:

- $\mu(\phi)=0$
- $\mu(E)=\sum_{j\geq 1}\mu(E_j) \quad : \forall \{E_j\}_{j\geq 1} \in \tau(E)$

وهنا نلاحظ أنه إذا غيرنا ترتيب حدود السلسلة في الطرف الأيمن من العلاقة الأخيرة فإن مجموع السلسلة لايتغير وفق التعريف، إذن ينتج من ذلك أن هذه السلسلة متقاربة إطلاقاً:

$$\sum_{j\geq 1}|\mu(E_j)|<+\infty$$

٦-١-٢- مسألة:

لندرس الآن مسألة إيجاد قياس λ موجب ومعرَّف على $\mathfrak{M}$ ويحقق المتراجحة: $\forall E \in \mathfrak{M} : \lambda(E) \geq |\mu(E)|$ ولنختر أصغر قياس λ يحقق هذه المتراجحة (إن أمكن!). إن هذا القياس إن وجد فسيحقق:

$$\lambda(E) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(E_j) \geq \sum_{j=1}^{\infty} |\mu(E_j)| : \forall \{E_j\}_{j\geq 1} \in \tau(E)$$

فإذا عرفنا التابع $|\mu|$ على $\mathfrak{M}$ على النحو التالي:

$$v(\mu\ ;\ .) = |\mu| : \mathfrak{M} \to \overline{\mathbb{R}}.$$

$$E \mapsto |\mu|(E) = \sup\left\{\sum_{j=1}^{\infty} |\mu(E_j)| ; \{E_j\}_{j\geq 1} \in \tau(E)\right\}$$

(حيث نأخذ الحد الأعلى على جميع التجزئات الممكنة لـ E).

وهنا نلاحظ أن: $|\mu(E)| = \left|\sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j)\right| \leq \sum_{j\geq 1} |\mu(E_j)| \leq |\mu|(E)$

$$v(\mu; E) = |\mu(E)| = \left|\sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j)\right| \leq \sum_{j\geq 1} |\mu(E_j)| \leq |\mu|(E)$$

حيث $\{E_j\}_{j\geq 1}$ تجزئة ما لـ E.

فإذا برهنا أن $|\mu|$ قياس فإننا نكون بذلك قد وجدنا حلاً لمسألة ايجاد λ وسنرى ذلك.

٦-١-٣- تعريف : سندعو $|\mu|$ **التغير الكلي** لـ μ أو (قياس التغير الكلي المرافق لـ μ)

٦-١-٤- تدريب :

إذا كان μ قياساً موجباً فأثبت أن $\mu = |\mu|$؟

الحل : نعلم أن:

$$|\mu|(E)=\sup\left\{\sum_{j=1}^{\infty}|\mu(E_j)| \;;\{E_j\}_{j\geq 1}\in\tau(E)\right\}$$

$$=\sup\left\{\sum_{j\geq 1}\mu(E_j)=\mu(E),\{E_j\}_{j\geq 1}\in\tau(E)\right\}$$

$$=\mu(E)$$

٦-١-٥- مبرهنة : التغير الكلي $|\mu|$ لقياس عقدي على جبر تام $\mathfrak{M}$ هو قياس موجب على $\mathfrak{M}$.

الإثبات :

لتكن $\{E_j\}_{j\geq 1}$ تجزئة لـ $E\in\mathfrak{M}$ ، نود إثبات أن $|\mu|(E)=\sum_{j\geq 1}|\mu|(E_j)$.

لنبرهن أولاً أن: $|\mu|(E)\geq\sum_{j\geq 1}|\mu|(E_j)$.

- نرى أن:

$$\forall j\geq 1:\exists\{A_{jk}\}_{k\geq 1}\in\tau(E_j):\sum_{k\geq 1}|\mu(A_{jk})|>|\mu|(E_j)-\frac{\varepsilon}{2^j}$$

ولما كانت $\{A_{jk}\}_{\substack{j\geq 1\\ k\geq 1}}$ هي بدورها تجزئة لـ E فإننا سنجد أن:

$$|\mu|(E)\geq\sum_j\sum_k|\mu(A_{jk})|\geq\sum_{j\geq 1}|\mu|(E_j)-\varepsilon$$

إذن: $$|\mu|(E)\geq\sum_{j\geq 1}|\mu|(E_j).$$

•• لنبرهن المتراجحة المعاكسة: $|\mu|(E)\leq\sum_{j\geq 1}|\mu|(E_j)$

لتكن $\{B_k\}_{k\geq 1}$ تجزئة لـ E عندئذ يكون:

- $\{E_j\cap B_k\}_{k\geq 1}$ من أجل كل j مثبتة تجزئة لـ E_j
- $\{E_j\cap B_k\}_{k\geq 1}$ من أجل كل k مثبتة تجزئة لـ B_k

إذن سيكون:

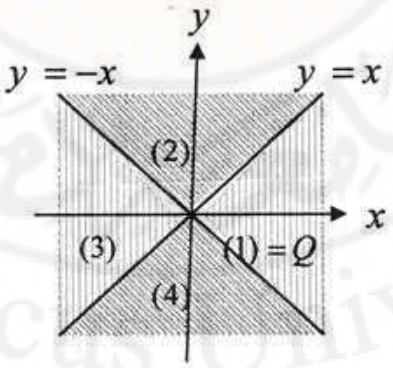
$$\sum_k |\mu(B_k)| = \sum_k \left|\sum_j \mu(B_k \cap E_j)\right|$$
$$\leq \sum_k \sum_j |\mu(B_k \cap E_j)| \quad \text{(لماذا ؟)}$$
$$\leq \sum_j \sum_k |\mu(B_k \cap E_j)|$$
$$\leq \sum_j |\mu|(E_j)$$

وبما أن المتراجحة الأخيرة محققة أياً كانت التجزئة $\{B_k\}_{k\geq 1}$ لـ E فينتج من ذلك أن:

$$|\mu|(E) \leq \sum_j |\mu|(E_j)$$

ومنه المساواة و $|\mu|$ جمعي عداً، فهو قياس موجب(لماذا ؟).

٦-١-٦- **توطئة :** أياً كانت $\{z_1, z_2, ..., z_n\} \subseteq \mathbb{C}$ فثمة مجموعة جزئية S من المجموعة $\{1, 2, ..., n\}$ بحيث يكون: $\left|\sum_{j\in S} z_j\right| \geq \frac{1}{6}\sum_{j=1}^{n} |z_j|$



الإثبات :

ليكن w العدد الحقيقي الموجب: $w = |z_1| + |z_2| + ... + |z_n| = \sum_{j=1}^{n} |z_j|$

ولنلاحظ أن المستقيمين $y=x$ و $y=-x$ يقسمان المستوي إلى أربعة أرباع محددة على الشكل وأن واحد منها على الأقل Q تتحقق من أجله المتراجحة: $\sum_{z_j\in Q}|z_j|\geq\frac{w}{4}$. ويمكن دون مس للعمومية أخذ Q الواضحة في الرسمة بحيث $z=-x+iy$ وهذا بدوره يقتضي $x\geq|y|$.

وعندئذ يكون:

$$z\in Q\Rightarrow|z|^2=x^2+y^2\leq x^2+x^2=2x^2$$

$$\Rightarrow|z|\leq x\sqrt{2}\Rightarrow\frac{|z|}{\sqrt{2}}\leq x\Rightarrow \mathrm{Re}\,z\geq\frac{|z|}{\sqrt{2}}$$

فإذا أخذنا S مجموعة كل الأدلة $j\in\{1,2,...,n\}$ بحيث $z_j\in Q$ كان:

$$\left|\sum_{j\in S}z_j\right|\geq\sum_{j\in S}\mathrm{Re}\,z_j \qquad \text{(لماذا؟)}$$

$$\geq\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{j\in S}|z_j|\geq\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{w}{4}=\frac{w}{\sqrt{32}}\geq\frac{w}{\sqrt{36}}=\frac{w}{6}$$

وهو المطلوب.

بالاعتماد على التوطئة السابقة سنبرهن الآن أن $|\mu|(X)<+\infty$ من ثمّ سيكون $|\mu|(E)<+\infty$ أياً كانت $E\in\mathfrak{M}$ (لماذا؟)

٦-١-٧- **مبرهنة** :إذا كان μ قياساً عقدياً على X فإن $|\mu|(X)<+\infty$.

الإثبات :

سيتم بطريقة نقض الفرض ولكن بعد أن يتم إثبات صحة التوطئة التالية:

٦-١-٨- **توطئة** : إذا وجدت مجموعة $E\in\mathfrak{M}$ وبحيث $|\mu|(E)=\infty$ فيمكن إيجاد مجموعتين قيوستين A و B بحيث:

$$(*).....E=A\cup B\ \text{و}\ A\cap B=\phi\ \text{و}\ |\mu|(B)=\infty\ \text{و}\ |\mu(A)|>1$$

في الواقع استناداً إلى تعريف $|\mu|$ نقول :

$$\forall t<+\infty\ :\exists\{E_j\}_{j\geq 1}\in\tau(E)\ :\sum_{j\geq 1}|\mu(E_j)|>t$$

لنأخذ $t=6(1+|\mu(E)|)$ ، نؤكد أن ثمة $n\in\mathbb{N}$ وبحيث: $\sum_{j=1}^{n}|\mu(E_j)|>t$

(هذا من تعريف مجموع سلسلة).

ثم لنأخذ $z_j=\mu(E_j)$ ولنطبق التوطئة السابقة ولنضع: $A=\bigcup_{j\in S}E_j$

ينتج عن ذلك أن $A\subseteq E$ وأن:

$$|\mu(A)|=\left|\sum_{j\in S}\mu(E_j)\right|\geq\left(\sum_{j\geq 1}|\mu(E_j)|\right)\Big/6>\frac{t}{6}=1+|\mu(E)|\geq 1$$

فإذا أخذنا $B=E-A$ ينتج عن ذلك أن $B\in\mathfrak{M}$

وأن:

$$|\mu(B)|=|\mu(E)-\mu(A)|\geq|\mu(A)|-|\mu(E)|>\frac{t}{6}-|\mu(E)|=1$$

وبما أن $|\mu|$ قياس إذن: $\infty=|\mu|(E)=|\mu|(A)+|\mu|(B)$

إذن إما $|\mu|(A)=\infty$ أو $|\mu|(B)=\infty$ أو كلاهما.

وهذا يكفي لتأكيد صحة ما ذكر في * أعلاه (نبادل بين A و B إن لزم الأمر).

لنفرض مؤقتاً الآن أن: $|\mu|(X)=\infty$ ولنضع $B_0=X$ وفق (*)

توجد مجموعتان A_1 و B_1 منفصلتان و قيوستان وبحيث يكون:

$$B_0=A_1\cup B_1$$
$$|\mu|(B_1)=\infty$$
$$|\mu(A_1)|>1$$

نعيد الكَرَّة من أجل B_1 نحصل على $A_2,B_2\in\mathfrak{M}$ بحيث $A_2\cap B_2=\phi$ و $B_1=A_2\cup B_2$ وبحيث يكون: $|\mu|(B_2)=\infty$ و $|\mu(A_2)|>1$ وهكذا...

نحصل على متتالية $\{A_n\}_{n\geq 1}$ من عناصر $\mathfrak{M}$ وهي منفصلة مثنى فإذا وضعنا $C=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ فسنجد أن $\mu(C)=\sum_{1}^{\infty}\mu(A_n)$. وبما أن $|\mu(A_n)|>1$ أياً كانت n فإن: $\sum_{n=1}^{\infty}|\mu(A_n)|=\infty$ من ثمّ فالسلسلة $\sum_{1}^{\infty}\mu(A_n)$ ليست متقاربة بالإطلاق وهذا خُلْفٌ (تناقض مع تعريف القياس العقدي).

إذن $|\mu|(X)<\infty$ وهو المطلوب.

٦-١-٩- تعريف ومبرهنة :

إذا كان μ,μ_1,μ_2 قياسات عقدية على الجبر التام $\mathfrak{M}$ وكان $\alpha\in\mathbb{C}$ فإننا سنضع تعريفاً :

- $\forall E\in\mathfrak{M}:(\mu_1+\mu_2)(E)=\mu_1(E)+\mu_2(E)$ $\quad\forall E\in\mathfrak{M}$
- $(\alpha\mu)(E)=\alpha\mu(E)$ $\quad\forall E\in\mathfrak{M}$
- $\|\mu\|=|\mu|(X)$

فعندئذ يكون $\mu_1+\mu_2$ و $\alpha\mu$ قياسين عقديين ويكون $\|\cdot\|$ نظيم على فضاءات القياسات العقدية.

الإثبات : واضح أن $\mu_1+\mu_2$ و $\alpha\mu$ قياسان عقديان وأن:

1) $\forall\mu:\|\mu\|\geq 0$
2) $\|\mu\|=0\Leftrightarrow\mu=0$
3) $\|\alpha\mu\|=|\alpha|\ \|\mu\|$

ذلك أن:

$$\|\alpha\mu\|=|\alpha\mu|(X)=\sup\left\{\sum_{j=1}^{\infty}|(\alpha\mu)(X_j)|:\{X_j\}_{j\geq 1}\in\tau(X)\right\}$$

$$=\sup\left\{|\alpha|\sum_{j=1}^{\infty}|\mu(X_j)|:\{X_j\}_{j\geq 1}\in\tau(X)\right\}$$

$$\|\alpha\mu\| = |\alpha| \sup\left\{\sum_{j=1}^{\infty} |\mu(X_j)| : \{X_j\}_{j\geq 1} \in \tau(X)\right\}$$
$$= |\alpha| \ \|\mu\|$$

كذلك: $\|\mu_1 + \mu_2\| \leq \|\mu_1\| + \|\mu_2\|$

لأن: $\|\mu_1 + \mu_2\| = |\mu_1 + \mu_2|(X)$

$$= \sup\left\{\sum_j |(\mu_1 + \mu_2)(X_j)| : \{X_j\} \in \tau(X)\right\}$$
$$\leq \sup\left\{\sum_{j\geq 1} |\mu_1(X_j)| + \sum_{j\geq 1} |\mu_2(X_j)| : \{X_j\}_{j\geq 1} \in \tau(X)\right\}$$
$$\leq |\mu_1|(X) + |\mu_2|(X)$$
$$\leq \|\mu_1\| + \|\mu_2\|$$

٦-٢- التغير الموجب والتغير السالب لقياس حقيقي:

إذا كان $\mu : \mathfrak{M} \to \mathbb{C}$ قياساً عقدياً وكان $\mu(E) \in \mathbb{R}$ أياً كانت $E \in \mathfrak{M}$ فسنقول إن μ قياس حقيقي وعندئذ نضع $\mu^+ = \frac{1}{2}(|\mu| + \mu)$ وندعوه التغير الموجب لـــ μ . ونضع $\mu^- = \frac{1}{2}(|\mu| - \mu)$ وندعوه التغير السالب لـــ μ .

وهكذا نرى أن μ^+ و μ^- قياسان موجبان محدودان على $\mathfrak{M}$ وأن

$$\mu = \mu^+ - \mu^- \quad \text{.....} (*)$$
$$|\mu| = \mu^+ + \mu^- \quad \text{و}$$

يدعى التفريق (*) **تفريق جوردان لـــ μ** .

(وهو تمثيل للقياس الحقيقي μ على شكل فرق قياسين حقيقيين موجبين)

٦-٣- الاستمرار المطلق:

٦-٣-١- تعاريف : ليكن υ قياساً موجباً على الجبر التام $\mathfrak{M}$ من أجزاء مجموعة $X \neq \phi$. وليكن λ قياساً (موجباً أو حقيقياً أو عقدياً بمعنى أن مستقره $\overline{\mathbb{R}}$ أو $\mathbb{R}$ أو $\mathbb{C}$) على الجبر التام $\mathfrak{M}$.

- نقول إن λ مطلق الاستمرار بالنسبة لـ υ ونكتب $\lambda \ll \upsilon$

(ونقرأ ذلك υ مهيمن على λ، أو λمطلق الاستمرار بالنسبة لـ υ) إذا:

$$\forall E \in \mathfrak{M} : \upsilon(E) = 0 \Rightarrow \lambda(E) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots(١)$$

- نقول إن λ (محمول على مجموعة $A \in \mathfrak{M}$ أو متمركز على مجموعة $A \in \mathfrak{M}$)

أو نقول إن المجموعة $A \in \mathfrak{M}$ تحمل λ إذا

$$\forall E \in \mathfrak{M} : \lambda(E) = \lambda(A \cap E) \quad \ldots\ldots\ldots(٢)$$

وهذا يكافئ القول:

$$\forall B \in \mathfrak{M} : A \cap B = \phi \Rightarrow \lambda(B) = 0 \ldots\ldots\ldots(٣)$$

الإثبات :

(٢) $\Leftarrow$ (٣)

لنفرض (٢) محققة و أن $B \in \mathfrak{M}$ و $A \cap B = \phi$

عندئذٍ يكون:

$$\lambda(B) = \lambda(A \cap B) = \lambda(\phi) = 0$$

(٣) $\Leftarrow$ (٢)

لنفرض (٣) محققة وأن $E \in \mathfrak{M}$ إن:

$$E = E \cap X = E \cap (A \cup A^c) = (E \cap A) \cup (E \cap A^c)$$

إذن:

$$\lambda(E)=\lambda(E\cap A)+\lambda(E\cap A^c)=\lambda(E\cap A)+0$$

(لماذا ؟)

إذن: $\lambda(E)=\lambda(E\cap A)$

••• نقول عن قياسين λ_1 و λ_2 موجبين أو عقديين معرفين على جبر تام $\mathfrak{M}$ من أجزاء X إنهما غريبان فيما بينهما أو إن λ_1 غريب عن λ_2 أو λ_2 غريب عن λ_1 أو λ_1 يعامد λ_2 ونكتب $\lambda_1\perp\lambda_2$ إذاا تحقق مايلي:

توجد مجموعتان $A_1,A_2\in\mathfrak{M}$ وبحيث A_1 تحمل λ_1 و A_2 تحمل λ_2 و $A_1\cap A_2=\phi$.

٦-٣-٢- مبرهنة أساسية :

لنفترض أن $\upsilon,\lambda,\lambda_1,\lambda_2$ قياسات على الجبر التام $\mathfrak{M}$ وأن υ قياس موجب عندئذ تتحقق الخواص التالية:

(١)- λ محمول على $A\in\mathfrak{M}$ $\Leftarrow$ $|\lambda|$ محمول على A.

(٢)- $\lambda_1\perp\lambda_2$ $\Leftarrow$ $|\lambda_2|\perp|\lambda_1|$

(٣)- $\begin{cases}\lambda_1\perp\upsilon\\ \lambda_2\perp\upsilon\end{cases}\Leftarrow\lambda_1+\lambda_2\perp\upsilon$

(٤)- $\begin{cases}\lambda_1\ll\upsilon\\ \lambda_2\ll\upsilon\end{cases}\Leftarrow\lambda_1+\lambda_2\ll\upsilon$

(٥)- $|\lambda|\ll\upsilon\Leftarrow\lambda\ll\upsilon$

(٦)- $\begin{cases}\lambda_1\ll\upsilon\\ \lambda_2\perp\upsilon\end{cases}\Leftarrow\lambda_1\perp\lambda_2$

(٧)- $\begin{cases}\lambda\ll\upsilon\\ \lambda\perp\upsilon\end{cases}\Leftarrow\lambda=0$

الإثبات :

(١)- لنفترض $E \in \mathfrak{M}$ وأن $E \cap A = \phi$ عندئذ يكون $\lambda(E) = 0$ ولنثبت أن $|\lambda|(E) = 0$.

لتكن $\{E_j\}_{j\geq 1} \in \tau(E)$ إن $E_j \cap A = \phi$ أياً كانت $j \geq 1$.

إذاً $\lambda(E_j) = 0$ وذلك أياً كانت j

إذاً $\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda(E_j)| = 0$

إذاً $|\lambda|(E) = \sup\left\{\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda(E_j)|; \{E_j\}_{j\geq 1} \in \tau(E)\right\} = 0$

إذاً $|\lambda|$ محمول على A.

(٢)- لنفترض A_1 تحمل λ_1 و A_2 تحمل λ_2 و $A_1 \cap A_2 = \phi$ عندئذ تكون A_1 حاملة لـ $|\lambda_1|$ و A_2 حاملة لـ $|\lambda_2|$ و $A_1 \cap A_2 = \phi$ إذن $|\lambda_1| \perp |\lambda_2|$.

(٣)- وفق الفرض توجد مجموعتان قيوستان منفصلتان A_1 و B_1 بحيث يكون λ_1 محمولاً على A_1 و υ محمولاً على B_1 وكذلك توجد مجموعتان قيوستان منفصلتان A_2 و B_2 وبحيث يكون λ_2 محمولاً على A_2 و υ محمولاً على B_2.

فإذا أخذنا $A = A_1 \cup A_2$ و $B = B_1 \cap B_2$ كان واضحاً أن $\lambda_1 + \lambda_2$ يكون محمولاً على A و υ محمول على B وواضح أن $A \cap B = \phi$ ذلك أن:

$$\forall E \in \mathfrak{M}: E \cap A = \phi \Rightarrow E \cap A_1 = \phi,\ E \cap A_2 = \phi$$
$$\Rightarrow \lambda_1(E) = 0,\ \lambda_2(E) = 0$$
$$\Rightarrow (\lambda_1 + \lambda_2)(E) = 0$$

إذن $\lambda_1 + \lambda_2$ محمول على A، وهكذا نتابع الإثبات لما تبقى، من ثمَّ $\lambda_1 + \lambda_2 \perp \upsilon$.

(٤)- واضحة استناداً للتعريف.

(٥)- إذا كان $E \in \mathfrak{M}$ و $\upsilon(E)=0$ كان $\lambda(E)=0$ من ثمَّ يسهل إثبات أن $|\lambda|(E)=0$ ومنه $\lambda \ll |\lambda|$.

(٦)- إذا كان $\lambda_1 \ll \upsilon$ و $\lambda_2 \perp \upsilon$ فنود إثبات أن $\lambda_1 \perp \lambda_2$. هذا سهلٌ، ذلك أنه توجد مجموعتان منفصلتان $A, B \in \mathfrak{M}$ وبحيث يكون υ محمولاً على A و λ_2 محمولاً على B من ثمّ فإن $\upsilon(B)=0$ إذن $\lambda_1(B)=0$ وهكذا

$$\forall B_1 \subseteq B:\ B_1 \in \mathfrak{M} \Rightarrow \left(\upsilon(B_1)=0\ ,\ \lambda_1(B_1)=0\right)$$

إذن λ_1 محمول على B^c لأن:

$$\begin{aligned}\forall E \in \mathfrak{M}:\ \lambda_1(E) &= \lambda_1(E \cap (B \cup B^c)) \\ &= \lambda_1(E \cap B) + \lambda_1(E \cup B^c)\end{aligned}$$

ومنه: $\lambda_1(E) = 0 + \lambda_1(E \cap B^c) = \lambda_1(E \cap B^c)$

وحيث أن λ_2 محمول على B إذن $\lambda_1 \perp \lambda_2$.

(٧)- توجد مجموعتان منفصلتان $A, B \in \mathfrak{M}$ بحيث يكون λ محمولاً على A و υ محمولاً على B إذاً

$$\forall E \in \mathfrak{M}: \lambda(E) = \lambda(E \cap A)$$

ولكن $\upsilon(E \cap A)=0$ إذن $\lambda(E \cap A)=0$

إذن $\lambda(E)=0$ من ثمّ $\lambda = 0$.

تدريبان هامان:

تدريب (١): إذا كان $\int_X |f|^2 \, d\upsilon < \infty$ فإن $\int_X |f| \, d\upsilon < \infty$

تدريب (٢): بين أن $L^2(\upsilon)$ فضاء هيلبرت وإذا كان $\varphi : L^2(\upsilon) \to \mathbb{R}$ شكلاً خطياً مستمراً بمعنى أن :

$$\forall f, g \in L^2(\upsilon), \forall \alpha \in \mathbb{R} : \bullet \ \varphi(f+g) = \varphi(f) + \varphi(g)$$
$$\bullet \ \varphi(\alpha f) = \alpha \, \varphi(f)$$
$$\bullet \ |\varphi(f)| \le c \, \|f\|_2$$

حيث c ثابت موجب و $\|f\|_2 = \left(\int |f|^2 \, d\upsilon \right)^{\frac{1}{2}}$

فهل بالإمكان ايجاد تابع $\psi \in L^2(\upsilon)$ وبحيث :

$$\forall f \in L^2(\upsilon) : \varphi(f) = \langle \psi, f \rangle := \int f(x) \, \psi(x) \, d\upsilon$$

حاول إثبات ذلك .

٦-٤- مبرهنة رادون_ نيكوديم_لوبيغ:

ليكن λ و υ قياسين موجبين محدودين على الجبر التام $\mathfrak{M}$ من أجزاء مجموعة $X \neq \phi$ عندئذ هنالك زوج وحيد من القياسات الموجبة λ_a و λ_s على $\mathfrak{M}$ يحققان مايلي:

1) $\lambda_a \ll \upsilon$

2) $\lambda_s \perp \upsilon$

3) $\lambda = \lambda_a + \lambda_s$ (تدعى هذه المساواة تفريق لوبيغ للقياس λ بالنسبة إلى υ)

4) $\lambda_a \perp \lambda_s$

5) $\exists h \in L^1(\mu), h \ge 0; \ \lambda_a(E) = \int_E h d\upsilon \ : \forall E \in \mathfrak{M}$

(يدعى h مشتق رادون_نيكوديم لـ λ_a بالنسبة لـ υ ويرمز له أحياناً بـ $h=\frac{d\lambda_a}{d\upsilon}$ أو نكتب $d\lambda_a = hd\upsilon$)

الإثبات :

سنترك للقارئ إثبات الوحدانية وسنتبع طريقة فونيومن (Von Neumann) في إثبات هذه المبرهنة.

فكرة البرهان:

هي استخدام القياس $\beta = \lambda + \upsilon$ وإثبات أن:

$$\varphi : L^2(\beta) \to \mathbb{R}$$
$$f \mapsto \varphi(f) = \int f d\lambda$$

شكل خطي مستمر على $L^2(\beta)$ ومن ثمّ هناك $g \in L^2(\beta)$ بحيث يكون:

$$\int f d\lambda = \int fg d\beta \quad \forall f \in L^2(\beta)$$

ثم استنتاج المراد كما سنرى حيث نضع:

$$B = \{x : g(x) = 1\} \ , \ A = \{x : 0 \le g(x) < 1\}$$

و

$$\lambda_s(E) = \lambda(E \cap B) \ , \ \lambda_a(E) = \lambda(E \cap A)$$

فنجد تحقق المراد فعلاً.

التفاصيل :

إذا وضعنا $\beta = \lambda + \upsilon$ كان β قياساً موجباً ومنتهياً على $\mathfrak{M}$ كما أنه سيكون:

$$\int f d\beta = \int f d\lambda + \int f d\upsilon \ : \forall f \in L^2(\beta)$$

(ذلك أن المساواة صحيحة من أجل كل تابع f له الشكل $f=\chi_E$ حيث E مجموعة قيوسة، ثم من أجل كل تابع درجي ثم من أجل كل تابع قيوس موجب، ثم من أجل كل تابع قيوس كمول ومن ثمّ من أجل كل $f\in L^2(\beta)$).

وهنا نرى أن التطبيق:

$$\begin{aligned} L^2(\beta) &\xrightarrow{\int} \mathbb{R} \\ f &\mapsto \int f d\lambda \end{aligned}$$

يحقق الشرط (وفق متراجحة شوارتز)

$$\begin{aligned} \left|\int f d\lambda\right| &\le \int |f|\, d\lambda \\ &\le \int |f|\, d\beta \\ &= \int (|f|*1)\, d\beta \\ &\le \left(\int_X |f|^2 d\beta\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_X 1 d\beta\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|f\|_2 \cdot \sqrt{\beta(X)} = \sqrt{\beta(X)} \cdot \|f\|_2 \end{aligned}$$

إذن التطبيق $\int$ هو شكل خطي مستمر على $L^2(\beta)$ الذي هو فضاء هيلبرت.

إذن ثمة $g\in L^2(\beta)$ بحيث يحقق مايلي:

$$(*)\ldots\ldots \forall f\in L^2(\beta): \int f d\lambda = \int fg\, d\beta$$

وسنثبت أنه يمكن اختيار g بحيث يكون $0\le g\le 1$ ذلك أنه إذا كان $f=\chi_E$ وعوضنا في (*) وجدنا $\int \chi_E \cdot g d\beta = \int \chi_E d\lambda$ أي:

$\int_E g d\beta = \lambda(E) \le \beta(E)$. فإذا افترضنا $\beta(E)\neq 0$ كان لدينا:

$$\forall E\in \mathfrak{M},\ \beta(E)\neq 0 : \quad 0\le \frac{1}{\beta(E)} \int_E g d\beta \le 1$$

إذن سيكون $0\le g\le 1$ $ae\,[\mu]$ استناداً للتوطئة التي سنبرهنها لاحقاً.

إذن يمكن أن نفترض $0 \le g \le 1$.

لنعد إلى العلاقة (*) أمكن أن نكتب:

$$\int f d\lambda = \int fg \, d\beta = \int fg \, d\lambda + \int fg \, d\upsilon$$

إذن :

$$\int f d\lambda - \int fg \, d\lambda = \int fg \, d\upsilon$$

$$(**) \ldots\ldots \int f(1-g) d\lambda = \int fg \, d\upsilon \qquad \forall f \in L^2(\beta)$$

لنضع الآن :

$$A = \{x : 0 \le g(x) < 1\} \quad \text{و} \quad B = \{x : g(x) = 1\}$$

نرى أن:

$$A \cap B = \phi$$

$$A \cup B = X \quad \text{و}$$

و $\upsilon(B) = 0$ (عد إلى ** وخذ $f = \chi_B$ نجد أن $\upsilon(B) = 0$)

ولنضع الآن :

$$\forall E \in \mathfrak{M} : \begin{cases} \lambda_a(E) = \lambda(E \cap A) \\ \lambda_s(E) = \lambda(E \cap B) \end{cases}$$

نرى أن λ_s محمول على B ذلك أن :

$$\forall E \in \mathfrak{M} : \ E \cap B = \phi \ \Rightarrow \ \lambda_s(E) = \lambda(E \cap B) = 0$$

و υ محمول على A ذلك أن:

$$\forall E \in \mathfrak{M} : \ E \cap A = \phi \ \Rightarrow \ E \subseteq B$$

$$\Rightarrow \ \upsilon(E) \le \upsilon(B) = 0$$

وبما أن $A \cap B = \phi$ فإن $\lambda_s \perp \upsilon$

إذن لنعد إلى المساواة:

$$(1) \ldots \int_X f(1-g) \, d\lambda = \int_X fg \, d\mu \quad : \forall f \in L^2(\beta)$$

لنأخذ $E \in \mathfrak{M}$ و $f = (1+g+.....+g^n)\chi_E$ فنجد أن (1) تأخذ الشكل:

$$(2)..... \int_E (1-g^{n+1})d\lambda = \int_E (1+g+...+g^n)gd\mu$$

وهنا نرى أن: $\forall x \in B: \ (1-g^{n+1}(x)) = 0$ وأن:

$$\forall x \in A: 0 \le g^{n+1}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

إذن $(1-g^{n+1}(x)) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ (وإن $0 \le 1-g^{n+1} \le 1$) وفق لوبيغ الأولى إذن :

$$\int_E (1-g^{n+1})d\lambda = \int_{A\cap E} (1-g^{n+1})d\lambda \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda(A\cap E) = \lambda_a(E)$$

و

$$\forall x \in A \cap E$$

$$\left(g(1+g+...+g^n)\right)(x) = (g+g^2+...+g^{n+1})(x) \to h(x)$$

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{g(x)}{1-g(x)} & : \forall x \in A \cap E \\ 0 & : \forall x \in B \cap E \end{cases}$$

ونرى أن h قياس موجب وفق مبرهنة التقارب المطرد تكون نهاية الطرف الأيمن من (2) هي $\int_E hd\mu$. ومن الواضح أن $\lambda_a \ll \mu$ (لماذا؟). ولكن $\int_X hd\mu = \lambda_a(X) < \infty$ ، إذن $h \in L^1(\mu)$ ، وواضحٌ أن $\lambda = \lambda_a + \lambda_s$ ، وهو المطلوب.

تتمات وتمارين الفصل السادس

ليكن $(X,\mathfrak{M},\upsilon)$ فضاء مقيساً منتهياً : $\upsilon(X)<\infty$ وليكن α قياساً موجباً منتهياً على $\mathfrak{M}$

١) بين أن $\alpha\le\upsilon \Rightarrow \alpha\ll\upsilon$

لاحظ أن العكس غير صحيح بالضرورة (خذ $\alpha=10\upsilon$).

٢) إذا كان $\beta=\alpha+\upsilon$ فبين أن $\upsilon\ll\beta$ وأن $\alpha\ll\beta$

٣) وأياً كان $f:X\to\mathbb{R}^{+}$ قيوساً موجباً فإن

$$\int f\ d\beta=\int f\ d\alpha+\int f\ d\upsilon$$

وبالتالي: $\int f\ d\alpha\le\int f\ d\beta$

٤) إذا كان $\alpha(A)=\int_A h\ d\upsilon$ حيث $h\in L^1(\upsilon)$ فبين أن $\alpha\ll\upsilon$

الفصل السابع

بعض أنماط التقارب في نظرية القياس والفضاءات $L^p(\mu)$

من المعلوم أنه توجد أكثر من طريقة لتعريف تقارب متتالية من الدوال ، وأن كلاً من هذه الطرق تلبي حاجة ضرورية في سياق دراسة معينة.

نوجّه اهتمامنا في هذا الفصل لدراسة بعض أشكال التقارب المرتبطة بمفهوم القياس، بما في ذلك، علاقة تلك الأشكال ببعضها.

سنفترض فيما يلي أن $(X,\mathfrak{M},\mu)$ فضاء القياس μ ، وأن كل الدوال الواردة في الدراسة تأخذ قيمها في $\overline{\mathbb{R}}$ ، وأنها قيوسة، ونشير إلى أن المجموعة التي سندرس التقارب عليها هي المجموعة الكلية X بوجه عام، وذلك بهدف تبسيط الدراسة دون الانتقاص من عموميتها.

٧-١- التقارب بانتظام تقريباً

نذكّر أولاً بمفاهيم التقارب النقطي والتقارب المنتظم، والتقارب غالباً في كل مكان (أو تقريباً في كل مكان).

نقول عن المتتالية $(f_n)_{n\geq 1}$ إنها تتقارب نقطياً من الدالة f ، إذا كانت $(f_n(x))_{n\geq 1}$ تتقارب من $f(x)$ ، وذلك أياً يكن $x\in X$ ،أي إذا تحقق الشرط: $\forall \varepsilon>0\ \exists n_0(\varepsilon,x): n\geq n_0 \Rightarrow |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$

من أجل كل $x\in X$. وعندئذ نكتب:

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f \quad \text{أو} \quad f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{نقطياً}} f$$

ونقول عن المتتالية $(f_n)_{n\geq 1}$ إنها تتقارب بانتظام من الدالة f، إذا تحقق الشرط:

$$\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0(\varepsilon): n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

وعندئذ نكتب: $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{بانتظام}} f$ أو $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u} f$

كما نقول عن المتتالية $(f_n)_{n\geq 1}$ إنها تتقارب غالباً في كل مكان (أو تقريباً في كل مكان) بالنسبة للقياس μ من الدالة f ، إذا وجدت مجموعة قيوسة A، بحيث يكون $\mu(A^c) = 0$ ، وبحيث تتقارب $(f_n)_{n\geq 1}$ نقطياً من f على المجموعة A . نعبر عن شرط التقارب هذا على النحو :

$$\exists A \in \mathfrak{M}: \mu(A^c) = 0, \forall x \in A, f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$$

فإذا كانت $(f_n)_{n\geq 1}$ متقاربة غالباً في كل مكان (أو تقريباً في كل مكان) بالنسبة للقياس μ من الدالة f فإننا نكتب: $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ غالباً في كل مكان (أو تقريباً في كل مكان) بالنسبة للقياس μ، أو $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ غالباً في كل مكان (أو تقريباً في كل مكان)- إذا لم ينجم عن ذلك أي التباس- كما نكتب أحياناً $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{a.e} f$.

ينتج مما تقدم أن التقارب المنتظم لمتتالية من الدوال يقتضي التقارب النقطي لتلك المتتالية، الذي يقتضي بدوره التقارب غالباً في كل مكان (أو تقريباً في كل مكان). إلا أن العكس غير صحيح بوجه عام، كما يتضح ذلك من المثال التالي:

مثال(١): لتكن $(f_n)_{n\geq 1}$ متتالية معرفة بحدها العام على النحو الآتي:

$$f_n(x) = x^n \quad , \ \forall x \in [0,1]$$

من الواضح أن $(f_n)_{n\geq 1}$ تتقارب غالباً في كل مكان (أو تقريباً في كل مكان) بالنسبة لقياس لوبيغ λ ، من الدالة الصفرية على المجال $[0,1]$.

إلا أن $(f_n)_{n\geq 1}$ ليست متقاربة نقطياً من الدالة الصفرية على المجال $[0,1]$ ،لأنها تتقارب في النقطة $x=1$ من العدد 1.

ومن باب أولى، فإن $(f_n)_{n\geq 1}$ لا تتقارب بانتظام على المجال $[0,1]$. هذا مع العلم، أن $(f_n)_{n\geq 1}$ تتقارب بانتظام من الدالة الصفرية على مجال من الشكل $[0,\alpha]$ ، حيث $\alpha<1$.بتعبير أخر، فإن إخفاق المتتالية في التقارب بانتظام من الدالة الصفرية على المجال $[0,1]$ ناجم عن سلوكها بجوار العدد 1 . الأمر الذي يوحي بوجه عام بأنه إذا كانت $(f_n)_{n\geq 1}$ متقاربة غالباً في كل مكان من الدالة f على مجموعة قيوسة A ، فإنها يمكن أن تكون متقاربة بانتظام من تلك الدالة على مجموعة ناتجة من A بحذف جزءٍ صغير منها.

ولعلّ المبرهنة التالية، المعروفة بمبرهنة "إيغوروف" من أهم النتائج بهذا الصدد.

٧-١-١ مبرهنة (مبرهنة إيغورف):

إذا كانت $(f_n)_{n\geq 1}$ متتالية من الدوال القيوسة ، متقاربة غالباً في كل مكان على X من الدالة f وكان $\mu(X)<+\infty$ ، فإنه توجد من أجل كل $\varepsilon>0$ مجموعة قيوسة A بحيث يكون $\mu(A^c)<\varepsilon$ ، بحيث تتقارب $(f_n)_{n\geq 1}$ بانتظام من الدالة f على A .

الإثبات: سنفرض أن المتتالية $(f_n)_{n\geq 1}$ متقاربة نقطياً من الدالة f على X. إذ أننا لا نحتاج خلاف ذلك إلا لحذف مجموعة قيوسة قياسها معدوم، مما لا يفقد المبرهنة شيئاً من عموميتها.

لنضع من أجل كل عددين طبيعيين $i,j\geq 1$:

$$A_{j,i}=\bigcap_{n=i}^{\infty}\left\{x:\left|f_n(x)-f(x)\right|<\frac{1}{j}\right\}$$

عندئذ، أياً يكن $j \geq 1$، فإن $\left(A_{j,i}\right)_{i\geq 1}$ متتالية متزايدة من المجموعات القيوسة. كذلك، بما أن $\left(f_n\right)_{n\geq 1}$ متقاربة من الدالة f على X ، إذاً $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_{j,i}$ ، وذلك من أجل كل $j \geq 1$.

ينتج أن $\left(A_{j,i}^c\right)_{i\geq 1}$ متتالية متناقصة من المجموعات القيوسة. وحيث إن $\mu(X) < +\infty$، إذاً:

$$\lim_{i\to\infty}\left(A_{j,i}^c\right) = \mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_{j,i}^c\right) = \mu(\phi) = 0$$

ومنه أياً يكن $\varepsilon > 0$، وأياً يكن $j \geq 1$ ، فإنه يوجد عدد طبيعي i_j ، بحيث يكون: $\mu\left(A_{j,i_j}^c\right) < \frac{\varepsilon}{2^j}$

لتكن $A = \bigcap_{j=1}^{\infty} A_{j,i_j}$. عندئذ تكون A قيوسة ويكون:

$$\mu\left(A^c\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu\left(A_{j,i_j}\right) < \varepsilon$$

أخيراً، من أجل كل $j \geq 1$ ، إذا كان $n \geq i_j$ وكان $x \in A$ ، فإن :

$$\left|f_n(x) - f(x)\right| < \frac{1}{j}$$

مما يعني أن $\left(f_n\right)_{n\geq 1}$ متقاربة بانتظام من الدالة f على المجموعة A ، وبذلك ينتهي الإثبات.

٧-١-٢- مبرهنة التقارب المتزايد الثانية:

لنفرض أن $(f_n)_{n\geq 1}$ متوالية من التطبيقات القيوسة في الفضاء $(X, \mathcal{A}, \mu)$ الكامل، وأن $f_n \xrightarrow{a.e} f$، وأن ثمة تطبيقاً كمولاً $g \geq 0$ بحيث $\left|f_n\right| \leq g \quad a.e\,[\mu]$ من أجل كل n من $\mathbb{N}$، فإن: $\int_X f_n d\mu \to \int_X f d\mu$

الإثبات: لنضع $E_n = \{x \in X : |f_n(x)| \not\leq g(x)\}$ من أجل $n = 1,2,3,....$ ومن ثم فإن E_n مهملة من أجل كل n من $\mathbb{N}$ لأن $|f_n| \leq g \quad ae[\mu]$.

لنضع $E_0 = \{x \in X : f_n(x) \not\to f(x)\}$. E_0 مهملة. ومن ثم فإن $E = \bigcup_{n=0}^{\infty} E_n$ مهملة. لنضع $F = X \setminus E$.

ومنه $|\chi_F(x).f_n(x)| \leq g(x)$ من أجل كل x من X وكل n من $\mathbb{N}$. كذلك فإن:

$$(\star) \qquad \chi_F(x).f_n(x) \to \chi_F(x).f(x)$$

من أجل كل x من X، وأن $\chi_F f_n = f_n \quad ae[\mu]$ و $\chi_F f = f \quad ae[\mu]$.

ومن التمرين السابق(انظر المثال(١)) نجد أن:

$$\int_X \chi_F f_n d\mu = \int_X f_n d\mu \quad \text{و} \quad \int_X \chi_F f d\mu = \int_X f d\mu$$

وبتطبيق مبرهنة التقارب المتزايد على (★) نجد أن:

$$\int_X \chi_F f_n d\mu \to \int_X \chi_F f d\mu$$

وبالاستفادة من المساواتين أعلاه نجد أن $\int_X f_n d\mu \to \int_X f d\mu$.

نضع في ضوء مبرهنة إيغورف التعريف التالي:

٧-١- ٣- **تعريف:** نقول عن متتالية $(f_n)_{n\geq 1}$ من الدوال القيوسة إنها متقاربة بانتظام تقريباً من الدالة f على X، وندلّ على ذلك بالرمز

$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{a.u} f$ إذا تحقق الشرط:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A \in \mathfrak{M} : \mu(A^c) < \varepsilon, \quad f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{بانتظام}} f$$

وهنا لابد من لفت الانتباه إلى ضرورة عدم الخلط بين مفهوم التقارب الآنف الذكر، أي " التقارب بانتظام تقريباً " ، وبين مفهوم التقارب " التقارب غالباً في كل مكان " .

ينتج من التعريف، أن شرط كوشي الموافق لمفهوم " التقارب بانتظام تقريباً " هو:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists A \in \mathfrak{M} :$$

$$\mu\left(A^c\right) < \varepsilon, \forall \delta > 0 \ \exists n_0 : \left| f_n(x) - f_m(x) \right| < \delta$$

وذلك، أياً يكن $n, m \geq n_0$ ،وأياً يكن $x \in A$.

وكما يمكننا أن نلاحظ ، فإن الشرط المذكور يكافئ شرط " التقارب بانتظام تقريباً ".

يتّضح من التعريف أيضاً، أنه إذا كانت $\left(f_n\right)_{n\geq 1}$ متقاربة بانتظام، فإنها تكون متقاربة بانتظام تقريباً. إلا أن عكس ذلك غير صحيح بالضرورة، كما يبيّن المثال (١) الذي أوردناه سابقاً:

إذ أنه، أياً يكن $0 < \varepsilon < 1$، فإن المتتالية $\left(f_n\right)_{n\geq 1}$ المعرفة بحدها العام $f_n(x) = x^n$ وذلك على المجال $[0,1]$ ، تكون متقاربة بانتظام من الدالة الصفرية على المجال $\left[0,1-\frac{\varepsilon}{2}\right]$ و $\lambda\left(\left]1-\frac{\varepsilon}{2},1\right[\right) < \varepsilon$. أي أن $\left(f_n\right)_{n\geq 1}$ متقاربة بانتظام تقريباً من الدالة الصفرية على المجال $[0,1]$ ، ولكنها ليست متقاربة بانتظام على ذلك المجال.

٧-١-٤- مبرهنة: إذا كانت $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{a.u} f$ فإن $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{a.e} f$.

الإثبات: لنفرض أن $\left(f_n\right)_{n\geq 1}$ لا تتقارب من f غالباً في كل مكان. عندئذ، توجد مجموعة قيوسة A قياسها موجب تماماً، بحيث إن $\left(f_n\right)_{n\geq 1}$ لا تتقارب من f على A . ينتج أنه، أياً تكن المجموعة القيوسة B التي تتقارب عليها $\left(f_n\right)_{n\geq 1}$ بانتظام من f ، فإن $B \subseteq A^c$.وعندئذ تكون $A \subseteq B^c$.

ومنه فإن $\mu(B^c) \geq \mu(A) > 0$. وذلك يناقض كون $(f_n)_{n\geq 1}$ متقاربة بانتظام تقريباً. فالفرض خاطئ، وبالتالي فإن $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{a.e} f$.

إن عكس المبرهنة السابقة صحيح، شريطة أن يكون $\mu(X) < +\infty$ كما أوضحت ذلك مبرهنة إيغورف (٧-١-١). وهنا تجدر الإشارة إلى أن الشرط $\mu(X) < +\infty$ ضروري لصحة المبرهنة (٧-١-١) ، كما يتضح ذلك من المثال التالي:

مثال(٢) : لتكن $X = \mathbb{R}$ ، وليكن $\mu = \lambda$ = قياس لوبيغ على $\mathbb{R}$ ولتكن $f_n = \chi_{[n,+\infty[}$ ، وذلك أياً يكن $n \geq 1$. من الواضح أن $(f_n)_{n\geq 1}$ تتقارب نقطياً من الدالة الصفرية على $\mathbb{R}$. فإذا فرضنا أن $(f_n)_{n\geq 1}$ متقاربة بانتظام على المجموعة A القيوسة بالنسبة لقياس لوبيغ λ ، عندئذ من أجل $\varepsilon = \frac{1}{2}$ يوجد عدد طبيعي n_0 بحيث يكون $f_n(x) \leq \frac{1}{2}$ ، من أجل $n \geq n_0$ ، وأياً يكن $x \in A$. ومنه فإن $f_{n_0}(x) = 0$ من أجل كل $x \in A$.

ينتج أن $A \subseteq]-\infty, n_0[$ ، وبالتالي فإن $\lambda(A^c) = +\infty$. الأمر الذي يعني أن $(f_n)_{n\geq 1}$ لا يمكن أن تكون متقاربة بانتظام تقريباً.

٧-٢- التقارب بالقياس

إن لهذا النوع من التقارب دوراً مهماً في نظرية الاحتمالات، حيث يعرف بالتقارب بالاحتمال.

٧-٢-١- تعريف: نقول عن متتالية $(f_n)_{n\geq 1}$ من الدوال القيوسة إنها تتقارب بالقياس μ من دالة قيوسة f ، إذا تحقق الشرط:

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n\to\infty} \mu\left(\left\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\right\}\right) = 0$$

وعندئذ نكتب: $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mu} f$ أو $(\mu)\lim_{n\to\infty} f_n = f$

نصوغ شرط كوشي الموافق لهذا النوع من التقارب على الشكل:

$$\forall \delta > 0\ ,\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 : n,m \geq n_0 \Rightarrow$$

$$\mu\left(\left\{x : \left|f_n(x) - f_m(x)\right| \geq \delta\right\}\right) < \varepsilon$$

ونقدم بهذا الصدد المبرهنة التالية:

٧-٢-٢- مبرهنة: إذا كانت $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mu} f$ فإن $(f_n)_{n\geq 1}$ تكون متتالية لكوشي بالقياس μ .

الإثبات: نعلم أن:

$$\left|f_n(x) - f_m(x)\right| \leq \left|f_n(x) - f(x)\right| + \left|f_m(x) - f(x)\right|$$

وذلك أياً يكن العددان الطبيعيان $n,m \geq 1$. وبالتالي فإن:

$$\left\{x : \left|f_n(x) - f_m(x)\right| \geq \delta\right\} \subseteq$$

$$\left\{x : \left|f_n(x) - f(x)\right| \geq \frac{\delta}{2}\right\} \cup \left\{x : \left|f_m(x) - f(x)\right| \geq \frac{\delta}{2}\right\}$$

وذلك من أجل كل $\delta > 0$. ينتج أن:

$$\mu\left(\left\{x : \left|f_n(x) - f_m(x)\right| \geq \delta\right\}\right) \leq$$

$$\mu\left(\left\{x : \left|f_n(x) - f(x)\right| \geq \frac{\delta}{2}\right\}\right) + \mu\left(\left\{x : \left|f_m(x) - f(x)\right| \geq \frac{\delta}{2}\right\}\right)$$

من جهة أخرى واستناداً إلى الفرض، يوجد من أجل كل ε عدد طبيعي n_0 ، بحيث يكون: $\mu\left(\left\{x : \left|f_n(x) - f(x)\right| \geq \delta\right\}\right) < \frac{\varepsilon}{2}$

وذلك من أجل $n \geq n_0$. إذاً أياً يكن $\delta > 0$ و $\varepsilon > 0$ و $n,m \geq n_0$ فإن:

$$\mu\left(\left\{x : \left|f_n(x) - f_m(x)\right| \geq \delta\right\}\right) < \varepsilon$$

وبذلك ينتهي الإثبات.

نتعرّف من خلال المبرهنة التالية على الخواص الأساسية لمفهوم التقارب بالقياس.

٧-٢-٣ – مبرهنة: لتكن $(f_n)_{n\geq 1}$ و $(g_n)_{n\geq 1}$ متتاليتين من الدوال القيوسة، ولتكن f و g دالتين قيوستين. عندئذ:

i) إذا كانت $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mu} f$ و $g_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mu} f$ ، فإن $\alpha f_n + \beta g_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mu} \alpha f + \beta g$ ، وذلك أياً يكن العددان الحقيقيان α و β.

ii) إذا كانت $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mu} f$ فإن $|f_n| \xrightarrow[n\to\infty]{\mu} |f|$.

iii) إذا كانت $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mu} f$ و $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mu} g$ ، فإن $g = f \ a\varepsilon[\mu]$

الإثبات: من الواضح أنه إذا كان $\alpha = 0$ ،أو $\beta = 0$ ، فإن النتيجة صحيحة.

لنفرض أن كلاً من العددين α و β مغاير للصفر. عندئذ، بما أن:

$$\left|\alpha f_n(x) + \beta g_n(x) - \left(\alpha f(x) + \beta g(x)\right)\right| \leq$$
$$|\alpha|\left|f_n(x) - f(x)\right| + |\beta|\left|g_n(x) - g(x)\right|$$

إذاً:

$$\left\{x : \left|\alpha f_n(x) + \beta g_n(x) - \left(\alpha f(x) + \beta g(x)\right)\right| \geq \varepsilon\right\} \subseteq$$
$$\subseteq \left\{x : \left|f_n(x) - f(x)\right| \geq \frac{\varepsilon}{2|\alpha|}\right\} \cup \left\{x : \left|g_n(x) - g(x)\right| \geq \frac{\varepsilon}{2|\beta|}\right\}$$

ومنه فإن:

$$\mu\left(\left\{x : \left|\alpha f_n(x) + \beta g_n(x) - \left(\alpha f(x) + \beta g(x)\right)\right| \geq \varepsilon\right\}\right) \subseteq$$
$$\subseteq \mu\left(\left\{x : \left|f_n(x) - f(x)\right| \geq \frac{\varepsilon}{2|\alpha|}\right\} \cup \left\{x : \left|g_n(x) - g(x)\right| \geq \frac{\varepsilon}{2|\beta|}\right\}\right)$$

وعندما يسعى n إلى $+\infty$ نحصل على النتيجة المطلوبة.

ii)تكفي ملاحظة أن :

$$\left\| f_n \right| - \left| f \right\| \le \left| f_n - f \right| \qquad ,\forall n \ge 1$$

iii) لنفرض أن $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mu} f$ و $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mu} g$ ، وليكن $\varepsilon > 0$. عندئذ باستخدام متراجحة المثلث، نجد أن:

$$\left\{x : \left| f(x) - g(x) \right| \ge \varepsilon\right\} \subseteq$$

$$\subseteq \left\{x : \left| f_n(x) - f(x) \right| \ge \frac{\varepsilon}{2}\right\} \cup \left\{x : \left| f_n(x) - g(x) \right| \ge \frac{\varepsilon}{2}\right\}$$

ويكون بالتالي:

$$\mu\left(\left\{x : \left| f(x) - g(x) \right| \ge \varepsilon\right\}\right) \le$$

$$\le \mu\left(\left\{x : \left| f_n(x) - f(x) \right| \ge \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right) + \mu\left(\left\{x : \left| f_n(x) - g(x) \right| \ge \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right)$$

وعندما يسعى n إلى $+\infty$ ، نجد أن:

$$\mu\left(\left\{x : \left| f(x) - g(x) \right| \ge \varepsilon\right\}\right) = 0 \qquad ,\forall \varepsilon > 0$$

ولكن:

$$\mu\left(\left\{x : f(x) \ne g(x)\right\}\right) = \mu\left(\left\{x : \left| f(x) - g(x) \right| > 0\right\}\right)$$

$$= \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}\left\{x : \left| f(x) - g(x) \right| \ge \frac{1}{i}\right\}\right)$$

إذاً:

$$\mu\left(\left\{x : f(x) \ne g(x)\right\}\right) \le \sum_{i=1}^{\infty} \mu\left(\left\{x : \left| f(x) - g(x) \right| \ge \frac{1}{i}\right\}\right) = 0$$

أي أن $f = g \quad a\varepsilon\,[\mu]$.

٧-٢-٤- مبرهنة: إذا كانت $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{a.u} f$ فإن $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mu} f$.

الإثبات: توجد استناداً إلى الفرض ، من أجل أي عددين $\varepsilon,\delta > 0$ مجموعة قيوسة A ويوجد عدد طبيعي n_0 ، بحيث يكون:

$$\mu\left(A^c\right) < \varepsilon, \left|f_n(x) - f(x)\right| < \delta, \forall n \geq n_0, \forall x \in A$$

إذاً:
$$\mu\left(\left\{x : \left|f_n(x) - f(x)\right| \geq \delta\right\}\right) < \varepsilon, \forall n \geq n_0$$

أي أن:
$$\lim_{n\to\infty} \mu\left(\left\{x : \left|f_n(x) - f(x)\right| \geq \delta\right\}\right) = 0$$

وذلك ينهي الإثبات.

إن التقارب غالباً في كل مكان ، لا يؤدي بوجه عام إلى التقارب بالقياس كما يتّضح من المثال التالي:

مثال(٣): لتكن $X = \mathbb{R}$ ، وليكن $\mu = \lambda =$ قياس لوبيغ على $\mathbb{R}$. إذا كانت:

$$f_n = \chi_{[n,n+1[} \quad , \quad \forall n \geq 1$$

فإن:
$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \quad , \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

أي أن $\left(f_n\right)_{n\geq 1}$ تتقارب نقطياً من الدالة الصفرية على $\mathbb{R}$.

من جهة أخرى، بما أن:

$$\lambda\left(\left\{x : \left|f_n(x)\right| \geq 1\right\}\right) = \lambda\left([n,n+1]\right) = 1, \quad \forall n \geq 1$$

إذاً $\left(f_n\right)_{n\geq 1}$ لا تتقارب بالقياس λ من الدالة الصفرية على $\mathbb{R}$.

النتيجة التالية ترصد ما تقدم في الحالة التي يكون فيها $\mu(X) < +\infty$.

٧-٢-٥- نتيجة: إذا كانت $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{a.e} f$ ، وكان $\mu(X) < +\infty$ ، فإن $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mu} f$.

الإثبات: يكفي تطبيق مبرهنة إيغوروف، واستخدام المبرهنة (٧-٢-٤).

وجدنا سابقاً أن كل متتالية متقاربة بالقياس هي متتالية لكوشي بالقياس (مبرهنة (٧-٢-٢)). تمثل المبرهنة التالية خطوةً أساسيةً في اتجاه إثبات صحة العكس.

٧-٢-٦- مبرهنة: إذا كانت $(f_n)_{n\geq 1}$ متتالية لكوشي بالقياس ، فإنه توجد متتالية جزئية منها $(f_{n_m})_{m\geq 1}$ ، بحيث تكون متقاربة بانتظام تقريباً.

الإثبات: يوجد استناداً إلى الفرض من أجل كل عدد طبيعي $m \geq 1$ ، عدد طبيعي i_m، بحيث يكون:

$$\mu\left(\left\{x : |f_n(x) - f_m(x)| \geq \frac{1}{2m}\right\}\right) < \frac{1}{2m} \qquad (1)$$

وذلك من أجل $n, m \geq i_m$. لنضع:

$$n_1 = i_1 \quad , \quad n_m = \max\{n_{m-1} + 1, n_m\}$$

عندئذ تكون $(k_m)_{m\geq 1}$ متتالية متزايدة تماماً من الأعداد الطبيعية، وتكون $(f_{n_m})_{m\geq 1}$ متتالية جزئية من المتتالية $(f_n)_{n\geq 1}$ ، كما تكون العلاقة (1) محققة من أجل $n, m \geq n_m$.

لنعرّف الآن من أجل كل $m \geq 1$ المجموعة القيوسة A_m بالعلاقة:

$$A_m = \left\{x : |f_{n_{m+1}}(x) - f_{n_m}(x)| \geq \frac{1}{2m}\right\}$$

وليكن $\varepsilon > 0$ ، و j عدداً طبيعياً يحقق المتراجحة $\frac{1}{2^{j-1}} < \varepsilon$. إذا وضعنا $B = \bigcap_{m=j}^{\infty} A_m^c$ فإننا نجد من العلاقة (1) أن:

$$\mu(B^c) \leq \sum_{m=j}^{\infty} \mu(A_m) < \frac{1}{2^{j-1}} < \varepsilon$$

لنتحقق أخيراً من أن $(f_{n_m})_{m\geq 1}$ تحقق شرط كوشي في التقارب المنتظم على المجموعة B .

ليكن $\delta > 0$ ، و i عدداً طبيعياً يحقق المتراجحتين:

$$i > j \ , \ \frac{1}{2^{i-1}} < \delta$$

عندئذ أياً يكن $r \geq s \geq i$ وأياً يكن $x \in B$ ، فإن:

$$\left| f_{n_s}(x) - f_{n_r}(x) \right| \leq \sum_{m=s}^{\infty} \left| f_{n_m}(x) - f_{n_{m+1}}(x) \right|$$

$$< \sum_{m=s}^{\infty} \frac{1}{2^m} = \frac{1}{2^{s-1}} < \delta$$

ينتج أن $\left(f_{n_m}\right)_{m\geq 1}$ تحقق شرط كوشي الموافق للتقارب بانتظام تقريباً، وبالتالي فهي متقاربة بانتظام تقريباً، وبذلك يتم الإثبات.

يمكننا الآن على ضوء المبرهنة السابقة إثبات أن كل متتالية لكوشي بالقياس هي متتالية متقاربة بالقياس.

٧-٢-٧- مبرهنة: إذا كانت $\left(f_n\right)_{n\geq 1}$ متتالية لكوشي بالقياس μ ، فإنه توجد دالة f بحيث تكون $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mu} f$.

الإثبات: توجد، استناداً إلى المبرهنة (٧-٢-٦) متتالية جزئية $\left(f_{n_m}\right)_{m\geq 1}$ ، متقاربة بانتظام تقريباً. أي أنه توجد دالة f بحيث تكون:

$$f_{n_m} \xrightarrow[m\to\infty]{a.u} f$$

ليكن $\varepsilon > 0$. بما أن:

$$\left\{x : \left|f_n(x) - f(x)\right| \geq \varepsilon\right\} \subseteq$$

$$\subseteq \left\{x : \left|f_n(x) - f_{n_m}(x)\right| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\} \cup \left\{x : \left|f_{n_m}(x) - f(x)\right| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}$$

إذاً

$$\mu\left(\left\{x:\left|f_n(x)-f(x)\right|\geq\varepsilon\right\}\right)\leq$$

$$\leq\mu\left(\left\{x:\left|f_n(x)-f_{n_m}(x)\right|\geq\frac{\varepsilon}{2}\right\}\right)+\mu\left(\left\{x:\left|f_{n_m}(x)-f(x)\right|\geq\frac{\varepsilon}{2}\right\}\right)$$

وحيث إن $\left(f_n\right)_{n\geq1}$ متتالية لكوشي بالقياس μ، فإنه يمكن جعل الحد الأول الوارد في الطرف الأيمن من المتراجحة الأخيرة صغيراً بالقدر الذي نريد عندما يكون n, n_m كبيرين بما فيه الكفاية، كذلك يمكن جعل الحد الثاني الوارد في الطرف الأيمن من نفس المتراجحة صغيراً بالقدر الذي نريد، عندما يكون n_m كبيراً بما فيه الكفاية، وذلك لأن التقارب بانتظام تقريباً يقتضي التقارب بالقياس.

ينتج أنه يمكن جعل الطرف الأيمن من المتراجحة الأخيرة صغيراً بالقدر الذي نريد، عندما يكون n كبيراً بما فيه الكفاية. الأمر الذي يعني أن:

$$\lim_{n\to\infty}\mu\left(\left\{x:\left|f_n(x)-f(x)\right|\geq\varepsilon\right\}\right)=0$$

أي أن: $f_n\xrightarrow[n\to\infty]{\mu}f$

وذلك ينهي الإثبات.

٧-٢-٨- نتيجة: إذا كانت $f_n\xrightarrow[n\to\infty]{\mu}f$ فإنه توجد متتالية جزئية منها $\left(f_{n_m}\right)_{m\geq1}$، بحيث تكون: $f_{n_m}\xrightarrow{a.e}f$

الإثبات: استناداً إلى الفرض تكون $\left(f_n\right)_{n\geq1}$ متتالية لكوشي بالقياس. عندئذ استناداً إلى المبرهنة (٧-٢-٦)، توجد متتالية جزئية $\left(f_{n_m}\right)_{m\geq1}$ متقاربة بانتظام تقريباً. لنفرض أن $f_{n_m}\xrightarrow{a.u}g$. عندئذ استناداً إلى المبرهنة (٧-١-٣) تكون: $f_{n_m}\xrightarrow[m\to\infty]{a.e}g$ واستناداً إلى المبرهنة (٧-٢-٤)

تكون: $f_{n_m} \xrightarrow[m\to\infty]{\mu} g$ ولكن $f_{n_m} \xrightarrow[m\to\infty]{\mu} f$ وذلك استناداً إلى الفرض، إذاً $f = g \;\; ae\,[\mu]$ ، وذلك استناداً إلى المبرهنة (٧-٢-٢).

أي أن $f_{n_m} \xrightarrow[m\to\infty]{a.e} f$ وذلك ينهي الإثبات.

نقدّم فيما يلي مثالاً لمتتالية متقاربة بالقياس من دالة معينة، دون أن تكون متقاربة نقطياً من تلك الدالة.

مثال(٤): لتكن $X = \mathbb{R}$ ، وليكن $\mu = \lambda =$ قياس لوبيغ، ولنجزئ المجال $]0,1]$ إلى k مجالاً جزئياً: $\left]0,\frac{1}{n}\right], \left]\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right], \ldots, \left]\frac{n-1}{n},1\right]$ ، ولنضع :

$$f_{n,k} = \chi_{\left]\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right]} \quad , \; k = 1,2,\ldots,n$$

وذلك أياً يكن $n \geq 1$.

عندئذ تتقارب المتتالية:

$$f_{1,1}, f_{2,1}, f_{2,2}, f_{3,1}, f_{3,2}, f_{3,3}, \ldots, f_{n,1}, f_{n,2}, \ldots, f_{n,n}, \ldots$$

بالقياس λ من الدالة الصفرية على المجال $]0,1]$، ولا تتقارب في أية نقطة من ذلك المجال من العدد 0 .

قبل الانتقال إلى التعرّف على نوع آخر من أنواع التقارب المرتبط بمفهوم القياس، نتوقف لتذكير بمتراجحتين شهيرتين، هما متراجحة هولدر ومتراجحة مينكوفسكي.

٧-٣- متراجحتا هولدر ومينكوفسكي

٧-٣-١- مبرهنة(متراجحة هولدر) :

ليكن $1<p<\infty$ و $1<q<\infty$ بحيث إن $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. إذا كانت f و g دالتين قيوستين بحيث تكون الدالتان $|f|^p$ و $|g|^q$ كمولتين ، فإن الدالة $f.g$ تكون كمولة ويكون:

$$\int_A |f.g|\,d\mu \le \left(\int_A |f|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.\left(\int_A |g|^q\,d\mu\right)^{\frac{1}{q}} \qquad (1)$$

وذلك أياً تكن المجموعة القيوسة A.

الإثبات: انظر الفصل السابع من كتاب نظرية القياس- للأستاذ الدكتور عهد كفى.

حالة خاصة: (متراجحة شوارتز) إذا كان $p=q=2$ في متراجحة هولدر، فإننا نحصل على المتراجحة الشهيرة المعروفة **بمتراجحة شوارتز:**

إذا كانت f و g قيوستين، وكانت $|f|^2$ و $|g|^2$ كمولتين فإن $f.g$ تكون كمولة، ويكون:

$$\left(\int_A |f.g|\,d\mu\right)^2 \le \left(\int_A |f|^2\,d\mu\right)\left(\int_A |g|^2\,d\mu\right)$$

وذلك أياً تكن المجموعة القيوسة A .

ملاحظة: غالباً ما نحتاج إلى استخدام المتراجحة التالية:

$$|f+g|^p \le 2^p|f|^p + 2^p|g|^p \qquad (3)$$

ولإثبات صحتها ، نلاحظ أنه أياً يكن $x \in X$ ، فإن:

$$|f(x)+g(x)| \le 2\max\{|f(x)|,|g(x)|\}$$

أي أن:

$$|f(x)+g(x)|^p \le \max\left\{2^p|f(x)|^p, 2^p|g(x)|^p\right\}$$

$$\le 2^p|f(x)|^p + 2^p|g(x)|^p$$

٧-٣-٢- مبرهنة (متراجحة مينكوفسكي):

إذا كان $p \ge 1$ ، وكانت f و g دالتين قيوستين، بحيث تكون الدالتان $|f|^p$ و $|g|^p$ كمولتين، فإن $|f+g|^p$ تكون كمولة، ويكون:

$$\int_A |f+g|^p d\mu \le \left(\int_A |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_A |g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \qquad (4)$$

وذلك أياً تكن المجموعة القيوسة A .

الإثبات: انظر الفصل السابع من كتاب نظرية القياس- للأستاذ الدكتور عهد كفى

٧-٤- التقارب بالوسط

ننتقل الآن إلى تعريف ودراسة نوع آخر من أنواع التقارب المرتبط بالقياس μ ، ذي تطبيقاتٍ واسعةٍ في التحليل ونظرية الاحتمالات.

٧-٤-١- تعريف: ليكن $p \ge 1$ ،ولتكن $(f_n)_{n\ge1}$ متتالية من الدوال القيوسة بحيث تكون $|f_n|^p$ كمولة، أياً يكن $n \ge 1$ ، ولتكن f دالة قيوسة بحيث تكون $|f|^p$ كمولة.

نقول عن المتتالية $(f_n)_{n\ge1}$ إنها تتقارب بالوسط من المرتبة p من الدالة f ، إذا كانت:

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f|^p \, d\mu = 0$$

عندئذ نكتب: $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ (m^p) ، أو $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{m^p} f$.

فإذا كان $p=1$ فإننا نقول إن $(f_n)_{n\geq 1}$ تتقارب بالوسط من الدالة f . وإذا كان $p=2$ ، فإننا نقول إن $(f_n)_{n\geq 1}$ تتقارب بالوسط التربيعي من الدالة f.

يعود الاهتمام بدراسة هذا النوع من التقارب، إلى أنه يسمح بالانتقال إلى النهاية تحت رمز التكامل، كما يتضح ذلك من المبرهنة التالية:

٧-٤-٢- مبرهنة: الشرط اللازم والكافي لتقارب متتالية $(f_n)_{n\geq 1}$ من الدوال الكمولة بالوسط من الدالة الكمولة f ، هو أن تكون:

$$\lim_{n\to\infty}\int_A f_n\, d\mu=\int_A f\, d\mu$$

وذلك بانتظام في A . أي أنه، أياً يكن $\varepsilon>0$ فإنه يوجد عدد طبيعي n_0 ، بحيث تكون:

$$\left|\int_A f_n\, d\mu-\int_A f\, d\mu\right|<\varepsilon$$

من أجل $n\geq n_0$ ، وأياً تكن المجموعة القيوسة A .

الإثبات:

لزوم الشرط: لنفرض أن $(f_n)_{n\geq 1}$ تتقارب بالوسط من الدالة f . عندئذ، بما أن:

$$\left|\int_A f_n\, d\mu-\int_A f\, d\mu\right|\leq\int_A|f_n-f|\,d\mu$$
$$\leq\int_X|f_n-f|\,d\mu$$

إذاً:

$$\lim_{n\to\infty}\int_A f_n\, d\mu=\int_A f\, d\mu$$

وذلك بانتظام في A .

كفاية الشرط: لنفرض أن $\lim_{n\to\infty}\int_A f_n\, d\mu=\int_A f\, d\mu$ بانتظام في A

ولنضع :

$$A_n = \{x : f_n(x) > f(x)\} \quad ,\forall n \le 1$$

فإن: $\int_X |f_n - f| \, d\mu =$

$$= \left(\int_{A_n} f_n \, d\mu - \int_{A_n} f \, d\mu \right) - \left(\int_{A_n^c} f_n \, d\mu - \int_{A_n^c} f \, d\mu \right)$$

ومنه فإن:

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| \, d\mu = 0$$

أي أن $(f_n)_{n\ge 1}$ تتقارب بالوسط من الدالة f ، وذلك ينهي الإثبات.

٧-٤-٣- **مبرهنة:** إذا كانت $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{m^p} f$ ، وكانت $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{m^p} g$ فإن $f = g \;\; ae[\mu]$.

الإثبات: استناداً إلى متراجحة مينكوفسكي، نجد أن:

$$\left(\int_X |f - g|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \le$$

$$\le \left(\int_X |f_n - f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X |f_n - g|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

وعندما يسعى n إلى $+\infty$، نجد أن $\int_X |f_n - f|^p \, d\mu = 0$.

إذاً $f = g \;\; ae[\mu]$.

٧-٤-٤- **مبرهنة:** ليكن $\mu(X) < +\infty$. إذا كانت $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{m^p} f$ ، وكان $1 \le q < p$ ، فإن $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{m^q} f$.

الإثبات: من المتراجحتين :

$$|f|^q \le 1+|f|^p \quad , \quad |f_n|^q \le 1+|f_n|^p$$

ينتج أن $|f|^q$ كمولة وأن $|f_n|^q$ كمولة أيضاً وذلك أياً يكن $n \ge 1$. عندئذ باستخدام متراجحة هولدر نجد أن:

$$\int_X |f_n - f|^q \, d\mu \le \left(\int_X \left(|f_n - f|^q \right)^{\frac{p}{q}} d\mu \right)^{\frac{q}{p}} . \left(\int_X 1^{\frac{p}{p-q}} d\mu \right)^{\frac{p-q}{p}}$$

$$\int_X |f_n - f|^q \, d\mu \le \left(\int_X |f_n - f|^p \, d\mu \right)^{\frac{q}{p}} . \left[\mu(X) \right]^{\frac{(p-q)}{p}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f|^q \, d\mu = 0$$

أي أن: $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{m^q} f$ وبذلك ينتهي الإثبات.

نقدّم فيما يلي مثالاً يوضح أن علاقة التقارب بالوسط من المرتبة p ، حيث $p \ge 1$ ، بالأنواع الأخرى من التقارب ضعيفةً نسبياً.

مثال(٤): لتكن $X = \mathbb{R}$ ، وليكن $\mu = \lambda =$ قياس لوبيغ على $\mathbb{R}$. إن المتتالية $(f_n)_{n\ge 1}$ المعرفة بحدها العام:

$$f_n = n^{\frac{-1}{p}} \chi_{[0,n]} \quad , \quad \forall n \ge 1$$

تتقارب بانتظام من الدالة الصفرية على $\mathbb{R}$. إذ أنه أياً يكن $x \in \mathbb{R}$ ، فإن:

$$f_n \le n^{\frac{-1}{p}} \quad , \quad \forall n \ge 1$$

من جهة أخرى، لدينا:

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n|^p d\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \lambda\left([0,n]\right) = 1$$

أي أن $(f_n)_{n\geq 1}$ لا تتقارب بالوسط من المرتبة p من الدالة الصفرية.

ينتج، من باب أولى أن أياً من: التقارب بانتظام تقريباً، والتقارب غالباً في كل مكان (أو تقريباً في كل مكان)، والتقارب بالقياس لا يقتضي التقارب بالوسط من المرتبة p ، أما في الاتجاه المعاكس فإننا نجد الاقتضاء التالي:

٧-٤-٥- مبرهنة: إذا كانت $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{m^p} f$ فإن $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mu} f$.

الإثبات: ليكن $\varepsilon > 0$ ، ولنضع:

$$A_n = \{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} \quad , \quad \forall n \geq 1$$

عندئذ، نجد أن:

$$\int_X |f_n - f|^p d\mu \geq \int_{A_n} |f_n - f|^p d\mu \geq \varepsilon^p \mu(A_n)$$

ومنه فإن:

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) \leq \frac{1}{\varepsilon^p} \lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f|^p d\mu = 0$$

أي أن $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$. الأمر الذي يعني أن $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mu} f$ ، وذلك ينهي الإثبات.

٧-٤-٦- مبرهنة: إذا كانت $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{m^p} f$ ، فإنها تكون متتالية لكوشي بالوسط من المرتبة p .

الإثبات: استناداً إلى متراجحة مينكوفسكي، نجد أن:

$$\left(\int_X |f_n - f_m|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq \left(\int_X |f_n - f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X |f_m - f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

وذلك أياً يكن $n,m \geq 1$.

عندئذ أياً يكن $\varepsilon > 0$ يوجد عدد طبيعي n_0 ، بحيث يكون:

$$\int_X |f_m - f_n|^p d\mu < \varepsilon$$

من أجل $n,m \geq n_0$. أي أن $(f_n)_{n\geq 1}$ متتالية لكوشي بالوسط من المرتبة p .

٧-٤-٧ -- **مبرهنة:** إذا كانت $(f_n)_{n\geq 1}$ متتالية لكوشي بالوسط من المرتبة p ، فإنها تكون متتالية لكوشي بالقياس.

الإثبات: ليكن $\varepsilon > 0$ ، لنضع:

$$A_{n,m} = \{x : |f_n(x) - f_m(x)| \geq \varepsilon\} \quad , \quad \forall n,m \geq 1$$

عندئذ نجد أن:

$$\int_X |f_n - f_m|^p d\mu \geq \int_{A_{n,m}} |f_n - f_m|^p d\mu \geq \varepsilon^p \mu(A_{n,m})$$

أي أن: $\mu(\{x : |f_n(x) - f_m(x)| \geq \varepsilon\}) \leq \frac{1}{\varepsilon^p} \int_X |f_n - f_m|^p d\mu$

ومنه نحصل على النتيجة المطلوبة.

٧-٤-٨- **مبرهنة:** إذا كانت $|f_n|^p$ كمولة، وذلك أياً يكن $n \geq 1$ ، وكانت $(f_n)_{n\geq 1}$ متتالية لكوشي بالوسط من المرتبة p ، فإن:

$$\sup_n \int_X |f_n|^p d\mu < \infty$$

الإثبات: ليكن $\varepsilon > 0$. يوجد استناداً إلى الفرض، عدد طبيعي n_0 بحيث يكون:

$$\int_X |f_n - f_{n_0}|^p d\mu < \varepsilon$$

وذلك أياً يكن $n \geq n_0$.

من جهة أخرى، استناداً إلى المتراجحة (3) في الفقرة (٧-٣)، ينتج أنه أياً يكن $n \geq n_0$، فإن:

$$\int_X |f_n|^p d\mu \leq 2^p . \int_X |f_n - f_{n_0}|^p d\mu + 2^p . \int_X |f_{n_0}|^p d\mu$$

$$\leq 2^p \varepsilon + 2^p \sup_{n \leq n_0} \int_X |f_{n_0}|^p d\mu < \infty$$

ينتج أن:

$$\sup_n \int_X |f_n|^p d\mu < \infty$$

وذلك ينهي الإثبات.

٧-٤-٩- مبرهنة: إذا كانت $|f_n|^p$ كمولة، وذلك أياً يكن $n \geq 1$، وكانت $(f_n)_{n \geq 1}$ متتالية لكوشي بالوسط من المرتبة p فإنها تكون متقاربة بالوسط من المرتبة p.

الإثبات: استناداً إلى المبرهنة (٧-٤-٥)، تكون $(f_n)_{n \geq 1}$ متتالية لكوشي بالقياس. عندئذ، استناداً إلى المبرهنة (٧-٢-٦)، توجد متتالية جزئية $(f_{n_m})_{m \geq 1}$ متقاربة بانتظام تقريباً، وبالتالي متقاربة غالباً في كل مكان (أو تقريباً في كل مكان). لنضع:

$$\lim_{m \to \infty} f_{n_m} = f \quad a\varepsilon[\mu]$$

عندئذ تكون:

$$\lim_{m \to \infty} |f_{n_m}|^p d\mu = |f|^p \quad a\varepsilon[\mu]$$

ويكون بالتالي:

$$\int_X |f|^p d\mu \leq \liminf_m \int_X |f_{n_m}|^p d\mu < \infty$$

وذلك استناداً إلى توطئة فاتو. ينتج أن $|f|^p$ كمولة.

من جهة أخرى، لدينا:

$$\lim_{m\to\infty}\left|f_n - f_{n_m}\right|^p = \left|f_n - f\right|^p \quad a\varepsilon[\mu] \quad ,\forall n \geq 1$$

وبالتالي فإن:

$$\int_X \left|f_n - f\right|^p d\mu \leq \liminf_m \int_X \left|f_n - f_{n_m}\right|^p d\mu \quad ,\forall n \geq 1$$

وذلك استناداً إلى توطئة فاتو أيضاً. وحيث إن $(f_n)_{n\geq 1}$ متتالية لكوشي بالوسط من المرتبة p، إذاً يوجد من أجل كل $\varepsilon > 0$ عدد طبيعي n_0 بحيث يكون:

$$\int_X \left|f_n - f_{n_m}\right|^p d\mu < \varepsilon$$

وذلك من أجل $n, n_m \geq n_0$ ينتج أن:

$$\int_X \left|f_n - f\right|^p d\mu < \varepsilon \quad , \forall n \geq n_0$$

أي أن $(f_n)_{n\geq 1}$ تتقارب بالوسط من المرتبة p من الدالة f، وبذلك يكتمل الإثبات.

٧-٥- الفضاءات $L^p(\mu)$

يتكون العديد من الفضاءات التقليدية في التحليل الدالي من دوالّ قيوسة. ولعلّ أكثر النظائم (جمع نظيم) على تلك الفضاءات معرّف بوساطة التكامل . وفي الواقع، فإن نظرية التكامل تتيح لنا دراسة أهم خصائص تلك الفضاءات. تعتبر الفضاءات L^p من تلك الفضاءات الآنفة الذكر، والتي نخصّص ما تبقّى من هذا الفصل لدراستها.

يَحتفظ فيما يلي الرمزُ $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ بدلالته على فضاء قياس مثّبت، كما سنبقي على فرضية أن الدوال قيد الدراسة تأخذ قيمها في $\overline{\mathbb{R}}$ ، وأنها $\mu-$ قيوسة.

٧-٥-١- تعريف: ليكن $1 \le p < \infty$. نرمز لمجموعة الدوال $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ القيوسة بالنسبة لـ μ ، بحيث تكون $|f|^p$ كمولة على X بالرمز $L^p(\mu)$ ، أو بالرمز $L^p(X)$، وذلك إذا استدعى الإيضاح الإشارة إلى الفضاء X ، أو -اختصاراً- بالرمز L^p إذا لم يؤد ذلك إلى أي التباس.

من الواضح أنه إذا كانت $f \in L^p(\mu)$، فإن $\alpha f \in L^p(\mu)$ ، وذلك أياً يكن $\alpha \in \mathbb{R}$. كذلك إذا كانت $f, g \in L^p(\mu)$ ، فإن $f + g \in L^p(\mu)$ ، وذلك استناداً إلى المتراجحة:

$$|f + g|^p \le 2^p \left(|f|^p + |g|^p \right)$$

أي أن $L^p(\mu)$ فضاء متجهي حقيقي.

لعلّ من أهم خواص الفضاء $L^p(\mu)$ أنه فضاء باناخ، الأمر الذي يستدعي التذكير بتعريف هذا الفضاء الأخير.

٧-٥-٢- تعريف: نقول عن دالة حقيقية $\| \cdot \|$ معرّفة على فضاء متجهي X فوق الحقل العددي K ($K = \mathbb{R}$ أو $K = \mathbb{C}$) إنها نظيم على X ، إذا حققت الشروط التالية:

i) $\| x \| \ge 0$ ، وذلك أياً يكن $x \in X$.

ii) $\| x \| = 0$ إذا وفقط إذا كان $x = 0$.

iii) $\| \alpha x \| = |\alpha| \cdot \| x \|$.

iv) $\| x + y \| \le \| x \| + \| y \|$

وذلك أياً يكن $x, y \in X$ و $\alpha \in K$.

تُعرف المتراجحة الواردة في الشرط iv) بمتراجحة المثلث. إذا كانت الدالة $\| \cdot \|$ نظيماً على الفضاء المتجهي X ، فإننا نسمي الثنائية $(X, \| \cdot \|)$

فضاءً منظماً، على الرغم من أننا نكتفي في غالب الأحيان بالقول إن X فضاء منظّم، إذا لم ينجم عن ذلك أي التباس.

إذا كان X فضاء منظّماً، فإنه من الواضح أن الدالة $d: X \times X \to \mathbb{R}^+$ المعرّفة بالعلاقة $d(x,y) = \|x - y\|$ تعرّف مسافة على X ، نسميها المسافة المشتقة من النظيم $\|\ .\ \|$. بتعبير آخر، فإن كل فضاء منظّم هو فضاء متري.

نقول عن متتالية $(x_n)_{n\geq 1}$ في فضاء منظّم X إنها متقاربة، إذا وجد $x \in X$ بحيث تكون:

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$$

وعندئذ نكتب:

$$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x \quad \text{أو} \quad x_n \xrightarrow[n\to\infty]{\|\ \|} x$$

ونسمي x نهاية المتتالية $(x_n)_{n\geq 1}$. ونقول عن متتالية $(x_n)_{n\geq 1}$ إنها متتالية لكوشي في X ، إذا وجد من كل $\varepsilon > 0$ عدد طبيعي n_0 ، بحيث يكون:

$$\|x_n - x_m\| < \varepsilon \quad ,\forall n, m \geq n_0$$

كما نقول عن فضاء منظم X إنه فضاء باناخ، إذا كانت كل متتالية لكوشي في X متقاربة . وهذا ما يكافئ – كما نعلم– القول إن الفضاء المتري X تامّ. بتعبير آخر، يكون الفضاء المنظّم X فضاء باناخ، إذا كان تاماً بالنسبة للمسافة المشتقة من النظيم على X .

لنضع من أجل كل $f \in L^p(\mu)$:

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

عندئذ من الواضح أن $\|f\|_p \geq 0$ ، و $\|\alpha f\|_p = |\alpha| \cdot \|f\|_p$ ، كما أن:

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

وذلك استناداً إلى متراجحة مينكوفسكي ، وأنه إذا كانت $f = 0$ فإن $\|f\|_p = 0$، وذلك أياً يكن $f, g \in L^p(\mu)$ و $\alpha \in \mathbb{R}$.

يبقى أن نلاحظ أيضاً أنه إذا كان $\|f\|_p = 0$، أي إذا كان $\left(\int_X |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = 0$ فإن $f = 0$ غالباً في كل مكان (أو تقريباً في كل مكان) بالنسبة لـــ μ على X.

وهكذا نجد أن الدالّة $\|\cdot\|_p$ تخفق في أن تعرّف نظيماً على الفضاء $L^p(\mu)$، وذلك بسبب عدم صحة الاقتضاء $\|f\|_p = 0 \Rightarrow f = 0$. وقد جرت العادة في التعامل مع هذه المسألة، أن نقول عن دالتين من الفضاء $L^p(\mu)$ ، إنهما متكافئتان، إذا كانتا متساويتين غالباً في كل مكان (أو تقريباً في كل مكان). عندئذ، من الواضح أن ذلك يعرّف علاقة تكافؤ على $L^p(\mu)$، وتغدو الدالة $\|\cdot\|_p$ نظيماً على فضاء صفوف تكافؤ العلاقة الآنفة الذكر. بتعبير آخر، فإن العلاقة $\|\tilde{f}\| = \left(\int_X |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$ ، حيث f ممثل لصف التكافؤ $\tilde{f}$ ، تعرّف نظيماً على فضاء صفوف التكافؤ. وهكذا فإننا نعتبر الفضاء $L^p(\mu)$ فضاءً منظماً، شريطة عدم التميز بين الدوال المتساوية غالباً في كل مكان (أو تقريباً في كل مكان)، واعتبار أن صفوف التكافؤ قضية صورية تتعلق بخلفية المسألة. أي أننا نتعامل مع عناصر الفضاء $L^p(\mu)$ على أساس أنها دوال،

حيث نعتبر كل دالتين متساويتين غالباً في كل مكان (أو تقريباً في كل مكان) دالتين متساويتين.

لتكن $(f_n)_{n\geq 1}$ متتالية في $L^p(\mu)$. بما أن $(f_n)_{n\geq 1}$ تتقارب من الدالة f إذا وفقط إذا كانت:

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n - f\|_p = \lim_{n\to\infty}\int_X |f_n - f|^p d\mu = 0$$

إذاً، فالتقارب في الفضاء $L^p(\mu)$ هو نفسه التقارب بالوسط من المرتبة p ، الذي تمت دراسته في الفقرة (٧-٤) من هذا الفصل. وعلى ضوء ذلك، فإنه ينتج من المبرهنة (٧-٤-٩) أن الفضاء المنظم $L^p(\mu)$ هو فضاء تام، وبالتالي فهو فضاء باناخ. كما ينتج أن المبرهنات الست التالية هي صياغة بمفردات الفضاء $L^p(\mu)$ ، $(1\leq p<\infty)$ للمبرهنات (٧-٤-٢)، (٧-٤-٣)، (٧-٤-٤)، (٧-٤-٥)، (٧-٤-٦)، (٧-٤-٧) على الترتيب.

٧-٥-٣- مبرهنة: إذا كانت $(f_n)_{n\geq 1}$ متتالية في $L^1(\mu)$ ، فإنها تتقارب من الدالة f في $L^1(\mu)$ إذا وفقط إذا تحقق الشرط:

$$\forall \varepsilon>0, \exists n_0 : n>n_0 \Rightarrow \left|\int_A f_n d\mu - \int_A f d\mu\right| < \varepsilon$$

وذلك أياً تكن المجموعة القيوسة A .

٧-٥-٤- مبرهنة: إذا كانت $(f_n)_{n\geq 1}$ متتالية في $L^p(\mu)$ ، $(1\leq p<\infty)$ متقاربة من الدالة f ومن الدالة g في $L^p(\mu)$ ، فإن $f = g \quad ae[\mu]$.

٧-٥-٥- مبرهنة: إذا كان $1\leq q<p<\infty$ ، وكان $\mu(X)<+\infty$ ، فإن كل متتالية متقاربة في $L^p(\mu)$ تكون متقاربة في $L^q(\mu)$ من نفس الدالة.

٧-٥-٦- مبرهنة: إذا كانت $(f_n)_{n\geq 1}$ متتالية متقاربة في $L^p(\mu)$ ، فإنها تكون متقاربة بالقياس μ من نفس الدالة.

٧-٥-٧- مبرهنة: كل متتالية متقاربة في $L^p(\mu)$ هي متتالية لكوشي.

٧-٥-٨- مبرهنة: كل متتالية لكوشي في الفضاء $L^p(\mu)$ تكون متتالية متقاربة فيه.

نختم هذه الفقرة بالمبرهنة التالية:

٧-٥-٩- مبرهنة: إذا كان $1\leq p<\infty$ ، فإن مجموعة الدوال البسيطة (الدرجية) تكون كثيفة في الفضاء $L^p(\mu)$ بالنسبة للتوبولوجيا المشتقة من النظيم على $L^p(\mu)$.

الإثبات: إذا كانت f دالة غير سالبة من الفضاء $L^p(\mu)$، فإن:

$f=\lim_{n\to\infty} s_n$ حيث $(s_n)_{n\geq 1}$ متتالية متزايدة من الدوال البسيطة وغير السالبة، وذلك استناداً إلى المبرهنة الأساسية (٣-٤-١١). عندئذ تكون $(f-s_n)_{n\geq 1}$ متتالية متناقصة، متقاربة من الدالة الصفرية على X ، وتكون $(f-s_n)^p\leq f^p$. أي أن $f-s_n\in L^p(\mu)$ ، وذلك أياً يكن $n\geq 1$.

ومنه فإن: $$\lim_{n\to\infty}\|f-s_n\|_p=\lim_{n\to\infty}\left(\int_X (f-s_n)^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}=0$$

وذلك استناداً إلى مبرهنة التقارب المتزايد الثانية (٧-١-٢).

وفي الحالة العامة، إذا كانت $f\in L^p(\mu)$ فإن $f=f^+-f^-$. وعندئذ تكون $f^+, f^-\in L^p(\mu)$. وبالتالي، استناداً إلى القسم الأول من الإثبات توجد متتالية $(t_n)_{n\geq 1}$ من الدوال البسيطة، بحيث تكون: $\lim_{n\to\infty}\|f-t_n\|=0$

وبذلك يكتمل الإثبات.

٧-٦- الفضاء $L^{\infty}(\mu)$

ليكن $(X,\mathfrak{M},\mu)$ فضاء قياس، ولتكن $f:X\to\overline{\mathbb{R}}$. نعرف الحد الأعلى الأساسي للدالة f بـ $\inf\{\alpha:|f(x)|\le\alpha \quad ae[\mu]\}$، ونرمز له بـ $\|f\|_{\infty}$، أي أن: $\|f\|_{\infty}=\inf\{\alpha:|f(x)|\le\alpha \quad ae[\mu]\}$

ينتج من التعريف أن $|f|\le\|f\|_{\infty}$، غالباً في كل مكان.

نتحقق بسهولة من صحة الخواص التالية للحد الأعلى الأساسي:

1) إذا كانت $f=g \quad ae[\mu]$، فإن $\|f\|_{\infty}=\|g\|_{\infty}$.

2) $\|f\|_{\infty}\ge 0$، وذلك أياً تكن الدالة الحقيقية f المعرفة على X.

3) $\|f\|_{\infty}=0$، إذا وفقط إذا كانت $f=0 \quad ae[\mu]$.

4) $\|\alpha f\|_{\infty}\le|\alpha|.\|f\|_{\infty}$، وذلك أياً يكن $\alpha\in\mathbb{R}$.

5) $\|f+g\|_{\infty}\le\|f\|_{\infty}+\|g\|_{\infty}$.

6) إذا كانت $|f|\le|g|$، فإن $\|f\|_{\infty}\le\|g\|_{\infty}$.

٧-٦-١- تعريف: ندل على مجموعة الدوال القيوسة f، التي يكون من أجلها $\|f\|_{\infty}<\infty$ بالرمز $L^{\infty}(\mu)$.

نتائج مباشرة:

i) إذا كان $\mu(X)<+\infty$، فإن $L^{\infty}(\mu)\subseteq L^{p}(\mu)$، وذلك أياً يكن $p\ge 1$.

ii) $L^{\infty}(\mu)$ فضاء متجهي حقيقي، وذلك استناداً إلى 4) و 5).

iii) $L^{\infty}(\mu)$ فضاء منظم، وذلك استناداً إلى 2)، 3)، 4)، 5)، حيث النظيم معرّف بالعلاقة: $\forall f\in L^{\infty}(\mu), \quad \|f\|=\|f\|_{\infty}$

حيث نصطلح هنا أيضاً على اعتبار أن كل دالتين متساويتين غالباً في كل مكان هما دالتان متساويتان.

٧-٦-٢- مبرهنة: $L^{\infty}(\mu)$ فضاء باناخ.

الإثبات: لنبرهن أن $L^{\infty}(\mu)$ فضاء تام بالنسبة لتوبولوجيا المسافة المشتقة من النظيم $\|\ \|_{\infty}$.

لنفرض أن $(f_n)_{n\geq 1}$ متتالية لكوشي في $L^{\infty}(\mu)$ ، ولنتحقق من وجود دالة f من $L^{\infty}(\mu)$ بحيث تكون: $\lim_{n\to\infty}\|f_n - f\|_{\infty} = 0$

ليكن $\varepsilon > 0$. يوجد، استناداً إلى الفرض، عدد طبيعي n_0 بحيث يكون:

$$\|f_n - f_m\|_{\infty} < \varepsilon \quad , \forall n,m \geq n_0$$

عندئذ تكون : $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \quad , \forall n,m \geq n_0$

غالباً في كل مكان. توجد إذاً، مجموعة قيوسة A قياسها معدوم بحيث تكون:

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \quad , \forall n,m \geq n_0 \ , \forall x \in A^c$$

عندئذ تكون $(f_n(x))_{n\geq 1}$ متتالية لكوشي غالباً في كل مكان في $\mathbb{R}$.

وبالتالي فإنها تكون متقاربة من أجل كل $x \in A^c$. لنضع:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad , \forall x \in A^c$$

و:

$$f(x) = 0 \quad , \forall x \in A$$

عندئذ تكون f قيوسة ويكون $\|f\|_{\infty} < \infty$. إذاً $f \in L^{\infty}(\mu)$.

من جهة أخرى، لدينا:

$$|f(x) - f_m(x)| = \lim_{n\to\infty}|f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon$$

وذلك من أجل كل $x \in A^c$ ، وأياً يكن $m \geq n_0$. ينتج أن

$\|f(x) - f_m(x)\| \leq \varepsilon$ ، من أجل كل $m \geq n_0$.

أي أن: $\lim_{m\to\infty}\|f-f_m\|_\infty=0$ وذلك ينهي الإثبات.

تجدر الإشارة أخيراً، إلى أنه إذا كان $X=\mathbb{N}$ و $\mathfrak{M}=2^{\mathbb{N}}$ و μ قياس العدّ، وكان $1\le p\le\infty$ ، فإننا نرمز للفضاء $L^p(\mu)$ بالرمز l^p . وفي هذه الحالة، فإن الدوال المعرّفة على $\mathbb{N}$ هي المتتاليات والتكامل بالنسبة للقياس μ يعني الجمع. بتعبير آخر، فإن l^p هو فضاء المتتاليات $x=(x_n)_{n\ge1}$ التي يكون من أجلها $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p<\infty$ ، و $\|x\|_p=\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$.

أما l^∞ فهو فضاء المتتاليات $x=(x_n)_{n\ge1}$ حيث $\|x\|_\infty=\sup_n|x_n|$.

إن الفضاءات l^p $(1\le p\le\infty)$ قابلة للمقارنة دوماً، بخلاف الفضاءات $L^p(\mu)$ ، كما يتضح ذلك من المبرهنة التالية.

٧-٦-٣- مبرهنة: إذا كان $1\le q<p\le\infty$ فإن $l^q\subseteq l^p$.

الإثبات: لنلاحظ أولاً أنه إذا كانت $x=(x_n)_{n\ge1}$ من l^q ، حيث $1\le q<\infty$، فإن $(x_n)_{n\ge1}$ تكون متتالية محدودة لأنها تتقارب من الصفر، وبالتالي فإن $x\in l^\infty$. أي أن $l^q\subseteq l^\infty$ ، وذلك من أجل $1\le q<\infty$. لنفرض أن $1<p<\infty$، وأن $x=(x_n)_{n\ge1}\in l^q$. بما أن $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^q<\infty$ ، إذاً، يوجد عدد طبيعي n_0 ، بحيث يكون $|x_n|<1$ ، من أجل كل $n\ge n_0$. عندئذ $|x_n|^p\le|x_n|^q$ من أجل كل $n\ge n_0$. إذاً $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p<\infty$. أي أن $x=(x_n)_{n\ge1}\in l^p$. ومنه فإن $l^q\subseteq l^p$.

تجدر الإشارة أخيراً إلى أن $l^q\ne l^p$، إذ يكفي ملاحظة أن $\left(n^{-q}\right)_{n\ge1}$ هو عنصر من l^p ولا ينتمي إلى l^q .

تتمات وتمارين الفصل السابع

١) لتكن $X = \mathbb{R}$ ، وليكن $\mu = \lambda$ قياس لوبيغ على $\mathbb{R}$ ولتكن $(f_n)_{n\geq 1}$ متتالية معرفة بحدها العام:

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & , 1 \leq x \leq n \\ 0 & , x > n \end{cases}$$

i) برهن أن $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u} 0$ على المجال $[1,\infty[$.

ii) تحقق من أن $\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1[} f_n d\lambda \neq 0$. ماذا تستنتج؟

٢) برهن أنه إذا كانت $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mu} f$ فإن:

i) $f_n^+ \xrightarrow[n\to\infty]{\mu} f^+$

ii) $f_n^- \xrightarrow[n\to\infty]{\mu} f^-$

٣) لتكن $X = \mathbb{R}$ ، وليكن $\mu = \lambda$ قياس لوبيغ على $\mathbb{R}$. برهن أنه إذا كانت $f_n(x) = \dfrac{x}{n}$ ، من أجل $n = 1,2,...$ ، وأياً يكن $x \in \mathbb{R}$ ، فإن $(f_n)_{n\geq 1}$ لا تتقارب بالقياس λ. ماذا تستنتج؟

٤) برهن أنه:

i) إذا كانت $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mu} f$ ، فإن كل متتالية جزئية من $(f_n)_{n\geq 1}$ تتقارب بالقياس من f .

ii) إذا كانت $(f_n)_{n\geq 1}$ متتالية لكوشي بالقياس، فإن كل متتالية جزئية منها هي متتالية لكوشي بالقياس.

٥) استخدم الدالتين $f=\chi_{[0,1]}$ و $g=\chi_{[1,2]}$ ، لبيان أن متباينة مينكوفسكي غير صحيحة من أجل $p<1$.

٦) لتكن $(f_n)_{n\geq 1}$ متتالية من الدوال القيوسة، بحيث إن $|f_n|^p$ تكون كمولة، $\forall n\geq 1$. برهن أنه إذا كانت f قيوسة، وكانت:

$$\lim_{n\to\infty}\int_X |f_n-f|^p d\mu=0$$

فإن $|f|^p$ تكون كمولة، وتكون $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{m^p} f$.

٧) لتكن $X=]0,1]$ ، وليكن $\mu=\lambda$ ، قياس لوبيغ على $]0,1]$. برهن أنه إذا كانت $f_n(x)=x^{-\frac{1}{p}}$ ، حيث $p>1$ و $x\in]0,1]$ ، فإن المتتالية: $f, f, f, \ldots$ تتقارب بالوسط من المرتبة 1، ولا تتقارب بالوسط من المرتبة p.

٨) لنفترض أن $(X,\mathfrak{M},\mu)$ فضاء مقيس و $\mu(X)<\infty$ ولنضع:

$$\rho(f,g)=\int_X \frac{|f-g|}{1+|f-g|}d\mu$$

بين أن ρ نصف مسافة على X و أن:

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mu} f \Leftrightarrow \rho(f_n-f)\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

الملحق(١)

تعرضنا في هذا المقرر لعددٍ من المفاهيم كالدالة المميزة والنهايات العليا والدنيا، ونظراً إلى أهميَّة هذه المفاهيم، وضرورة أن يكون القارئ ملمّاً بها، رأينا ضرورة عرض بعض من خواصها، ونحيط القارئ علماً إلى أننا سنترك له مهمة إثبات هذه الخواص.

أ- حول مفهوم الدالة المميزة

إذا كان $E \subseteq X$ فسنضع:

$$\chi_E = 1_E : X \to \{0,1\}$$

$$\chi_E(x) = 1 \text{ if } x \in E$$

$$\chi_E(x) = 0 \text{ if } x \notin E$$

يسمى χ_E دالة المجموعة E أو كاشف E أو الدالة المميزة لـ E.

برهن أن:

$$E \subseteq F \Rightarrow \chi_E \leq \chi_F$$

$$\chi_{E \cap F} = \chi_E \cdot \chi_F$$

$$\chi_{E \cup F} = \chi_E + \chi_F - \chi_E \cdot \chi_F$$

$$\chi_{E \cup F} = \max\{\chi_E, \chi_F\}$$

ب – حول مفهوم النهاية العليا والنهاية الدنيا

إذا كانت $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ متتالية من أجزاء مجموعة غير خالية X وكانت $A \subseteq X$ فسنقول $\lim_{n\to\infty} A_n = A$ إذا كانت $\lim_{n\to\infty} \chi_{A_n} = \chi_A$.

- برهن أنه إذا كانت $\{A_n\}_{n\geq 1}$ متزايدة فإن $\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

وإذا كانت $\{A_n\}_{n\geq 1}$ متناقصة فإن $\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$

- إذا كانت $\{A_n\}_{n\geq 1}$ متتالية من أجزاء مجموعة Ω غير خالية ووضعنا

$$A^* = \left\{ x : \begin{array}{l} x \text{ تنتمي إلى عدد لانهائي من المجموعات } A_n \\ \text{أو } x \in A_n \text{ من أجل عدد لا نهائي من قيم } n \end{array} \right\}$$

$$A_* = \left\{ x : \begin{array}{l} x \in A_n \text{ من أجل جميع قيم } n \text{ ما خلا عدداً} \\ \text{منتهياً منها} \end{array} \right\}$$

أ. برهن أن: $A^* = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m$, $A_* = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$, $A_* \subseteq A^*$

تسمى A_* **النهاية الدنيا للمتتالية** $\{A_n\}_{n\geq 1}$ ونكتب

$$A_* = \liminf_n A_n = \underline{\lim} A_n$$

كذلك نسمي A^* **النهاية العليا للمتتالية** $\{A_n\}_{n\geq 1}$ ونكتب

$$A^* = \limsup_n A_n = \overline{\lim} A_n$$

ب. برهن أن $\underline{\lim} A_n^c = \left(\overline{\lim} A_n\right)^c$ و $\overline{\lim} A_n^c = \left(\underline{\lim} A_n\right)^c$

جـ. أوجد النهاية العليا والنهاية الدنيا للمتتالية $A, B, A, B, A, B, ...$ حيث A, B مجموعتان جزئيتان من $\mathbb{R}$.

الملحق(٢)

لمحة عن الدوال ذات التغير المحدود

٧-١- تعاريف لا بد منها :

" التجزئة النقطية لمجال مغلق - نظيمها - التغير الكلي لدالة "

لنفترض $[a,b]$ مجالاً مغلقاً ومحدوداً في مجموعة الأعداد الحقيقية:

- نسمي أي مجموعة منتهية $P=\{t_0,t_1,t_2,...,t_n\}$ حيث $t_0=a<t_1<...<t_n=b$ **تجزيئاً** للمجال $[a,b]$ أو **تجزئة نقطية** له (أو تجزئة على سبيل الاختصار).
- نسمي أكبر الأعداد $t_1-t_0,t_2-t_1,...,t_n-t_{n-1}$ نظيم التجزئة P ونرمز له بالرمز $\eta(P)$ أو $\|P\|$ إن أمن الالتباس. .
- إذا كانت $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}$

$$t\mapsto\gamma(t)$$

دالة معرفة على المجال $[a,b]$ وكانت $P=\{t_0,t_1,t_2,...,t_n\}$ تجزئة نقطية للمجال $[a,b]$ فسنضع $\Delta\gamma_k=\gamma(t_k)-\gamma(t_{k-1})$ حيث $k=1,...,n$ وهنا نرى أن:

$$\sum_{k=1}^{n}\Delta\gamma_k=(\gamma(t_1)-\gamma(t_0))+(\gamma(t_2)-\gamma(t_1))+..+(\gamma(t_n)-\gamma(t_{n-1}))$$

$$=-\gamma(t_0)+\gamma(t_n)=-\gamma(a)+\gamma(b)=\gamma(b)-\gamma(a)$$

وسنسمي المجموع $\sum_{k=1}^{n}|\Delta\gamma_k|$ بتغير الدالة γ الموافق للتجزئة P ونرمّزه $v(\gamma,P)$ ونكتب $v(\gamma,P)=\sum_{k=1}^{n}|\Delta\gamma_k|$. فإذا وجد عددٌ M بحيث يكون $v(\gamma,P)\le M$ مهما كانت التجزئة P قلنا إن γ دالة ذات تغير محدود

أو دالة محدودة التغير على المجال المذكور، **ونسمي الحد الأعلى (الأصغري)** للمجموعة $\{v(\gamma,P):[a,b]$ تجزيء لـ $P\}$ ونرمزه بالرمز $v(\gamma)$ أو بالرمز $\overset{b}{\underset{a}{v}}(\gamma)$ **بالتغير الكلي للدالة على المجال** $[a,b]$.

٧-٢- **مبرهنة أساسية (*): الشرط اللازم والكافي لكي تكون الدالة γ ذات تغير محدود على مجال مغلق محدود هو أن تكون فرقاً لدالتين متزايدتين.** أي إذا كانت دالة ما γ ذات تغير محدود فثمة دالتان متزايدتان α,β وبحيث يكون $\gamma=\alpha-\beta$ (وبالعكس).

سنبرهن كفاية الشرط من خلال المبرهنتين التاليتين وسنترك لك إثبات اللزوم .

مبرهنة (١):

إذا كانت α دالة متزايدة على المجال $[a,b]$ فإن α دالة ذات تغير محدود وتغيرها الكلي $v(\alpha)=\alpha(b)-\alpha(a)$.

الإثبات: ليكن $P=\{t_0,t_1,t_2,...,t_n\}$ أي تجزيء للمجال $[a,b]$. إن:

$$v(\alpha,P)=\sum_{k=1}^{n}\left|\Delta\alpha_k\right|=\left|\alpha(t_1)-\alpha(t_0)\right|+...+\left|\alpha(t_n)-\alpha(t_{n-1})\right|$$

وبما أن α دالة متزايدة فإن $\Delta\alpha_k=\alpha(t_k)-\alpha(t_{k-1})\geq 0$ ومن ثمّ فإن:

$$v(\alpha,P)=\sum_{k=1}^{n}\left|\Delta\alpha_k\right|=\sum_{k=1}^{n}\Delta\alpha_k=\alpha(b)-\alpha(a)$$

إذن $v(\alpha)=\alpha(b)-\alpha(a)$

مبرهنة (٢):

إذا كانت α,β دالتين متزايدتين وكانت $\gamma_0=\alpha+\beta$ وكانت $\gamma=\alpha-\beta$ **فإن** كلاً من هذه الدوال المعرفة على المجال $[a,b]$ دالة ذات تغير محدود وإنّ

$$v(\gamma)\leq(\alpha+\beta)(b)-(\alpha+\beta)(a)=v(\alpha+\beta)$$

إثبات المتراجحة الأخيرة : لتكن $P=\{t_0,t_1,t_2,...,t_n\}$ تجزئة نقطية للمجـال $[a,b]$ فإن:

$$\begin{aligned}
v(\gamma,P) &= \sum_{k=1}^{n}\left|\gamma(t_k)-\gamma(t_{k-1})\right| \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left|(\alpha-\beta)(t_k)-(\alpha-\beta)(t_{k-1})\right| \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left|(\alpha(t_k)-\alpha(t_{k-1})+\beta(t_{k-1})-\beta(t_k))\right| \\
&\le \sum_{k=1}^{n}\left|\alpha(t_k)-\alpha(t_{k-1})\right|+\left|\beta(t_k)-\beta(t_{k-1})\right| \\
&\le \sum_{k=1}^{n}(\Delta\alpha_k)+\sum_{k=1}^{n}(\Delta\beta_k)=(\alpha(b)-\alpha(a))+(\beta(b)-\beta(a)) \\
&= (\alpha+\beta)(b)-(\alpha+\beta)(a)=v(\alpha+\beta)
\end{aligned}$$

ومن ثمّ سيكون $v(\gamma)\le v(\alpha+\beta)$

٧-٣- تدريبات

(١) بين أن $\gamma(x)=\sqrt{x}$ حيث $0\le x\le 1$ دالة ذات تغير محدود على $[0,1]$.

(٢) بين أنه إذا كان $\gamma(x)=x^2-\sin x$ حيث $0\le x\le\frac{\pi}{2}$ فإن γ دالة ذات تغير محدود على المجال $[0,\frac{\pi}{2}]$.

(٣) بين أنه إذا كانت $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}$ مستمرة، واشتقاقية على المجال $]a,b[$ ومشتقتها γ' محدودة فإن γ تكون دالة ذات تغير محدود. (تذكر أن $\gamma(t_1)-\gamma(t_0)=\gamma'(\tau)(t_1-t_0)$ من أجل $t_0\le\tau\le t_1$ ، τ مناسبة).

(٤) هل الدالة $\gamma(x)=x^2\cos\frac{\pi}{2x}$ if $x\neq 0$

$\gamma(0)=0$

دالة ذات تغير محدود؟ (استفد من التمرين السابق)

(٥) لنفترض $P_n = \{0, \frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}, ..., \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\}$ تجزئة للمجال $[0,1]$

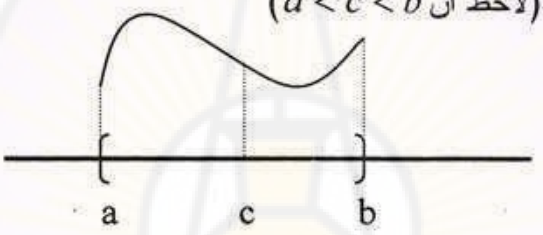
$\gamma(0) = 0$ و $\gamma(x) = x\cos\frac{\pi}{2x}$ خلاف ذلك. احسب $\eta(P_1), \eta(P_2)$

ثم احسب $\eta(P_n)$ ثم احسب $v(\gamma, P_1), v(\gamma, P_2)$ ثم هل تجد

أن $v(\gamma, P_n) \geq 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}$ لكل n ماذا تستنتج؟

(٦) برهن أن مجموع دالتين γ_1, γ_2 كل منهما ذات تغير محدود دالة ذات تغير محدود.

(٧) انظر الشكل: (لاحظ أن $a < c < b$)



ولتكن γ دالة ذات تغير محدود على المجال $[a,b]$ برهن أن

$$\overset{c}{\underset{a}{v}}(\gamma) + \overset{b}{\underset{c}{v}}(\gamma) = \overset{b}{\underset{a}{v}}(\gamma)$$

(٨) مبرهنة أساسية أخرى:

إذا كانت γ دالة معرفة ومستمرة هي ومشتقتها الأولى على المجال $[a,b]$ فإن γ ذات تغير محدود وتغيرها الكلي:

$$v(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt$$

تطبيق: بين أن الدالة:

$$\gamma(t) = \sin t \quad , \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

دالة ذات تغير محدود على المجال $[0, 2\pi]$ ثم احسب تغيرها الكلي.

٧-٤- ملاحظة: إذا كانت الدالة: $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$

$$t\mapsto\gamma(t)=u(t)+iv(t)$$

نقول إن الدالة العقدية γ ذات تغير محدود إذا وفقط إذا كان كل من قسمها الحقيقي u وقسمها التخيلي v دالة ذات تغير محدود.

برهن أن هذا الشرط يكافئ :

$$\exists M>0:\ \forall P=\{t_0,t_1,...,t_n\}\subseteq[a,b]:$$

(حيث $t_0=a<t_1<...<t_n=b$)

$$v(\gamma,P)=\sum_{k=1}^{n}|\Delta\gamma_k|=\sum_{k=1}^{n}|\gamma_k(t_k)-\gamma_{k-1}(t_k)|\le M$$

٧-٥- تمرين هام

إذا كان $\Im=\{]a,b[\ :a\le b\}$ وكانت γ دالة ذات تغير محدود على كل مجال مغلق في $\mathbb{R}$ وإذا وضعنا : $\mu(]a,b[)=\overset{b}{\underset{a}{v}}(\gamma)$ فهل μ جمعي على $\Im$ ؟علّل إجابتك.

وإذا وضعنا : $\mu^*(E)=\inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\overset{b_k}{\underset{a_k}{v}}(\gamma):\bigcup_{k=1}^{\infty}]a_k,b_k[\supseteq E\right\}$

فهل μ^* قياس خارجي على $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ هنا عالج الحالة التي تكون فيها γ متزايدة ومستمرة من اليمين.

وقل رب زدني علما
Damascus University

الملحق (٣)

كلمات عن تكامل استيلجس

إذا كانت $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ دالة محدودة و $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}$ دالة محدودة التغير، نود شرح ما نعنيه بالرمز: $\int_a^b f(t)d\gamma(t)$ " تكامل استيلجس للدالة الأولى بالنسبة إلى الثانية " .

نعلم أن كل دالة محدودة التغير هي فرقٌ لدالتين متزايدين محدودتين: $\gamma=\alpha-\beta$ حيث α دالة متزايدة و β متزايدة فإذا شرحنا ما يعنيه الرمز: $\int_a^b f(t)d\alpha(t)$ حيث α دالة متزايدة ووضعنا بعد ذلك تعريفاً:

$$\int_a^b f(t)d\gamma(t)=\int_a^b f(t)d\alpha(t)-\int_a^b f(t)d\beta(t)$$

وصلنا إلى المطلوب.

فلنتكلم إذن عما نعنيه بالرمز: $\int_a^b f(t)d\alpha(t)$ ، " تكامل استيلجس للدالة f بالنسبة إلى الدالة المتزايدة α " .

لهذا الغرض: سنعرّف تكامل استيلجس العلوي وتكامل استيلجس السفلي لدالة محدودة f بالنسبة لدالة متزايدة α.

لتكن P تجزئة نقطية للمجال $[a,b]$ و $P=\{t_0,t_1,t_2,...,t_n\}$ حيث $t_0=a<t_1<....<t_n=b$ وليكن:

$$M_k=\sup_{t_{k-1}\le t\le t_k} f(t)$$

$$m_k=\inf_{t_{k-1}\le t\le t_k} f(t)$$

$$\Delta\alpha_k = \alpha(t_k) - \alpha(t_{k-1})$$

و $t_{k-1} \le \xi_k \le t_k$ لكل k نسمي المجموع:

$$U(P) = U(P, f, \alpha) = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta\alpha_k$$

المجموع العلوي الموافق للتجزئة P ونسمي $\inf_P U(P)$ (الحد الأدنى لهذه المجاميع العلوية) تكامل استيلجس العلوي لـ f على $[a,b]$ ونرمز له $\overline{\int_a^b} f d\alpha$.

في حين نسمي المجموع:

$$L(P) = L(P, f, \alpha) = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta\alpha_k$$

المجموع السفلي الموافق للتجزئة P ونسمي $\sup_P L(P)$ (الحد الأعلى لهذه المجاميع السفلية) تكامل استيلجس السفلي لـ f على $[a,b]$ ونرمز له $\underline{\int_a^b} f d\alpha$.

ونسمي المجموع $S(P, f, \alpha) = \sum f(\xi_k)\Delta\alpha_k$ **مجموعاً أوسط** موافقاً للتجزئة P " ولنقط الاختيار $\xi_1, \ldots, \xi_n$".

نقول إن f قابل للمكاملة بالنسبة للدالة α على المجال $[a,b]$ إذا وفقط إذا كان التكامل العلوي له مساوياً التكامل السفلي، ونرمز للقيمة المشتركة عندئذ بـ: $\int_a^b f d\alpha = A$ **ويكفي لتحقق ذلك أن يتحقق ما يلي: مقابل أي** $\varepsilon > 0$ **يمكن إيجاد** $\delta > 0$ **بحيث إذا كانت** P **أي تجزئة نقطية نظيمها** $\eta(P) < \delta$ **فإن** $|S(P, f, \alpha) - A| \le \varepsilon$. ونسمي هذا العدد **تكامل استيلجس للتابع** f **بالنسبة للتابع المتزايد** α.

ويبرهن أن كل دالة مستمرة على مجال مغلق محدود $[a,b]$ تكون قابلة للمكاملة بالنسبة لـــ α على المجال $[a,b]$ كما يبرهن أن

$$\int_a^b f d\alpha = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{kl}{n}\right)\Delta\alpha_k$$

حيث $l=b-a$ و $\Delta\alpha_k = \alpha\left(a+\frac{kl}{n}\right)-\alpha\left(a+\frac{k-1}{n}l\right)$.

خـــواص تـــكامـــل اســـتيلجـــس:

$$\int_a^b (f+g)d\alpha = \int_a^b f d\alpha + \int_a^b g d\alpha$$

$$\int_a^b (\lambda f)d\alpha = \lambda \int_a^b f d\alpha \quad (\lambda \text{ عدد ثابت})$$

$$\left|\int_a^b f d\alpha\right| \le \int_a^b |f| d\alpha$$

Damascus University

تمـــاريـــن

١) لتكن $a<c<b$ إذا كان :

$$\alpha(x)=\begin{cases}0 & \text{if } a<x\le c\\ 1 & \text{if } c<x\le b\end{cases}$$

وكان f تابعاً مستمراً على $[a,b]$ فأثبت أن : $\int_a^b f d\alpha = f(c)$

٢) أثبت صحة خواص تكمل استيلجس الواردة في الصفحة السابقة.

٣) أثبت أنه إذا كان α قابلاً للاشتقاق وكمولاً على $[a,b]$ فإن:

$$\int_a^b f(t)d\alpha(t)=\int_a^b f(t)d\alpha'(t)$$

تمارين محلولة

أولاً_ حول تدريبات وتمارين الفصل الأول

تدريب(٢) _ الصفحة (١٠) :

مجموعة قواسم عدد طبيعي α هي دوماً مجموعة منتهية.

إذْ لو كان: $\alpha=(p_1)^{m_1}(p_2)^{m_2}...(p_k)^{m_k}$ حيث $p_1,p_2,...,p_k$ القواسم الأولية للعدد α و $m_1,m_2,...,m_k$ أعداد طبيعية كل منها أكبر أو يساوي الواحد. لكان كل قاسم للعدد α من الشكل : $b=(p_1)^{r_1}(p_2)^{r_2}...(p_k)^{r_k}$ حيث $0\le r_j\le m_j$ و $(j=1,2,...,k)$.

(وبالعكس) ولما كان r_j يستطيع أن يكون أي عدد من الأعداد $0,1,2,...,m_j$ فإننا نستنتج أن عدد قواسم α يكون استناداً للمبدأ الأساسي في العد هو:

$$(1+m_1)(1+m_2)...(1+m_k)$$

مثال ذلك إن العدد $2520=2^3\times3^3\times5^1\times7^1$ وعليه فإن عدد القواسم لهذا العدد هو : $4\times4\times2\times2=64$

مثال أخر:

إن العدد : $91=7^1\times13^1$ و $(91)^2=7^2\times13^{12}$

فعدد قواسم 91 هو $2\times2=4$ وعدد قواسم $(91)^2$ هو $3\times3=9$

أما هذه القواسم فهي $D=\{1,7,13,49,91,169,637,1183,8281\}$

تدريب(١) _ الصفحة (١١):

لدينا $\mathfrak{R} \neq \phi$ جماعة غير خالية من أجزاء X نريد إثبات أن:

$$(i_0) \Leftrightarrow (i_1) \Leftrightarrow (i_2) \Leftrightarrow (i_3)$$

سنوجز لك الإثبات متبعين الخطة الآتية :

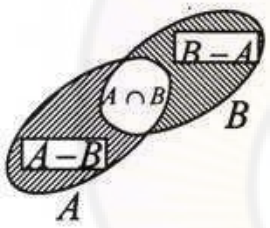
$$(i_0) \Rightarrow (i_1) \Rightarrow (i_2) \Rightarrow (i_3) \Rightarrow (i_0)$$

تقول i_0 :

$$(i_0) \quad A,B \in \mathfrak{R} \Rightarrow A \cup B \in \mathfrak{R},\ A - B \in \mathfrak{R}$$

وهي تقتضي i_1:

$$(i_1) \quad A,B \in \mathfrak{R} \Rightarrow A \Delta B \in \mathfrak{R},\ A \cap B \in \mathfrak{R}$$



ذلك أن: $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$

و $A \cap B = A - (A - B)$

(انظر الشكل للاستئناس)

و (i_1)تقتضي (i_2):

$$(i_2) \quad A,B \in \mathfrak{R} \Rightarrow A \Delta B \in \mathfrak{R},\ A \cup B \in \mathfrak{R}$$

ذلك أن $A \cup B = (A \Delta B) \Delta (A \cap B)$

و إن (i_2)تقتضي (i_3):

$$(i_3) \quad A,B \in \mathfrak{R} \Rightarrow A \Delta B \in \mathfrak{R},\ A - B \in \mathfrak{R}$$

ذلك أن $A - B = (A \cup B) \Delta B$

وإن (i_3)تقتضي (i_0):

$$(i_0) \quad A,B \in \mathfrak{R} \Rightarrow A \cup B \in \mathfrak{R},\ A - B \in \mathfrak{R}$$

ذلك أن $A \cup B = A \Delta (B - A)$

تدريب(٢) _ الصفحة (١١):

خذ $\Omega = \mathbb{R}$ و $\mathfrak{R}$ صف المجموعات التي تحوي المجموعة $\{0,1\}$ تجد أن $\mathfrak{R}$ مغلقة بالنسبة للاتحاد والتقاطع ولكنها ليست حلقة.

التدريب (٣)_ الصفحة (١١) :

نحو الحل: (أ) خذ: $X_1 = \{-1,1\}$ و $X_2 = \mathbb{R}$

$$f : X_1 \to X_2$$
$$x \mapsto f(x) = x^2$$

وخذ $\mathfrak{R}_1 = \mathcal{P}(X_1)$ إذن $\mathfrak{R}_1 = \{\phi, X_1, \{-1\}, \{1\}\}$ و

$$f(\mathfrak{R}_1) = \{f(A_1) : A_1 \in \mathfrak{R}_1\} = \{\phi, \{1\}\}$$

إن $\mathfrak{R}_1$ حبر ولكن $f(\mathfrak{R}_1)$ ليس كذلك.

إن $\mathfrak{R}_1$ حلقة و $f(\mathfrak{R}_1)$ حلقة هنا فهل هذا صحيح دوماً؟

خذ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x) = x^2$$

و $\mathfrak{R}_1 = \{\phi, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_+, \mathbb{Z}_-^*\}$

عندئذ ستجد أن : $f(\mathfrak{R}_1) = \{\phi, \mathbb{N}, \mathbb{N}, \mathbb{N}^*\} = \{\phi, \mathbb{N}, \mathbb{N}^*\}$

وهذه ليست حلقة في $\mathbb{R}$.

(ب) إذا كانت $\mathfrak{R}_2$ حلقة في المستقر فإن:

$$f^{-1}(\mathfrak{R}_2) = \{f^{-1}(A_2) : A_2 \in \mathfrak{R}_2\}$$

حلقة أيضاً ويكفي أن تتذكر أن:

$$f^{-1}(\phi) = \phi, f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B),$$
$$f^{-1}(A - B) = f^{-1}(A) - f^{-1}(B)$$

تدريب (٤) _ الصفحة (١٢):

لدينا $\Omega=\{a,b\}$ إن الصفوف الآتية هي حلقات من أجزاء Ω :

$$\mathfrak{R}_1=\{\phi\},\quad \mathfrak{R}_2=\{\phi,\{a\}\},\quad \mathfrak{R}_3=\{\phi,\{b\}\}$$

$$\mathfrak{R}_4=\{\phi,\{a\},\{b\},\{a,b\}\},\quad \mathfrak{R}_5=\{\phi,\Omega\}$$

هل ثمة حلقة من أجزاء Ω لم تذكر هنا ؟!

تدريب (٢) _ الصفحة (١٣) :

١- هل صف المجموعات المحدودة في $\mathbb{R}$ حلقة؟ وهل هو جبر؟

الجواب : تذكر أن المجموعة الجزئية $A\subseteq\mathbb{R}$ تكون محدودة إذا وجد مجال مغلق من الشكل $[-\alpha,\alpha]$ يحويها حيث $\alpha>0$ وعليه نجد أن ϕ مجموعة محدودة في $\mathbb{R}$ لأنها محتواة في أي مجال، واتحاد مجموعتين محدودتين هو مجموعة محدودة وكذلك فرق مجموعتين محدودتين هو مجموعة محدودة.

فإذن صف المجموعات المحدودة في $\mathbb{R}$ حلقة. ولكنه ليس جبراً ذلك أن $\mathbb{R}$ ليست محدودة.

٢- هل صف المجموعات المغلقة في $\mathbb{R}$ حلقة؟ وهل هو جبر؟

الجواب: تذكر أن المجموعة الجزئية $F\subseteq\mathbb{R}$ تكون مغلقة إذا كانت مكملتها مجموعة مفتوحة. وأن $O\subseteq\mathbb{R}$ تكون مفتوحة إذا كانت مجالاً مفتوحاً أو اتحاد مجالات مفتوحة. وهكذا تجد أن المجموعة $A=[0,\infty[$ مجموعة مغلقة و $\mathbb{R}$ مجموعة مغلقة ولكن $\mathbb{R}-A=]-\infty,0[$ ليس مجموعة مغلقة إذن، صف المغلقات ليس حلقة، ولا جبراً.

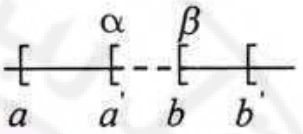
تدريب(١) ـ الصفحة (١٥):

أولاً لنبين أن صف المجالات نصف المغلقة:

$$\mathcal{A}_0 = \{[a,b[,\ a \le b,\ a,b \in \mathbb{R}\}$$

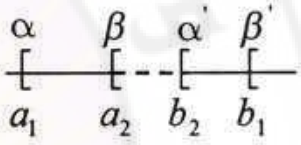
ليس جبراً تاماً (بل ولا حلقة) من أجزاء $\mathbb{R}$ رغم أنه يحقق مايلي:

1. $\phi \in \mathcal{A}_0$
2. $[a,b[\cap[a',b'[=[\alpha,\beta[$

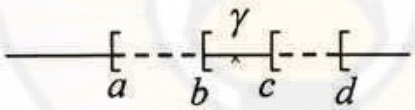


$\mathcal{A}_0$ مغلق بالنسبة للتقاطع.

3. $[a_1,b_1[-[a_2,b_2[=[\alpha,\beta[\cup[\alpha',\beta'[$



فرق مجالين هو اتحاد لمجالين من $\mathcal{A}_0$ وهو ليس حلقة لأن اتحاد مجالين ليس مجالاً بالضرورة. وذلك أن : $A = [a,b[\cup[c,d[$ (انظر الشكل)



والمجموعة A ليست مجالاً لاحظ أن $b < \gamma < c$ ولكنه لا ينتمي إلى الاتحاد.

هذه الرسومات للاستئناس ولتثبيت الأفكار.

أما الآن فسنبين أنه إذا كان $\mathcal{A}$ جبراً تاماً يحوي الصف $\mathcal{A}_0$ فإن $\mathcal{A}$ سيحوي كل المجالات، أي سنبرهن أن كلاً من المجموعات الآتية تنتمي إلى هذا الجبر التام $\mathcal{A}$:

$$A_1 =]\alpha,\beta[,\ A_2 =]\alpha,\infty[,\ A_3 =]-\infty,\beta[,\ A_4 =]-\infty,\infty[=\mathbb{R}$$

$$A_5 = [\alpha,\beta],\ A_6 = [\alpha,\infty[,\ A_7 =]-\infty,\beta],\ A_8 =]\alpha,\beta]$$

$$A_9 = [\alpha,\beta[$$

ولهذا لنضع $\beta-\alpha=2\ell$ ولنفترض $\ell>0$ نرى أن :

- $A_1=]\alpha,\beta[=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[\alpha+\frac{\ell}{n},\beta\right[$

فهذه المجموعة A_1 هي اتحاد عدود لعناصر من $\mathcal{A}_0$ أي A_1 اتحاد عدود لعناصر من الجبر التام $\mathcal{A}$. إذن A_1 تنتمي إلى الجبر التام $\mathcal{A}$.

- $A_2=]\alpha,\infty[=\bigcup_{n=1}^{\infty}]\alpha,\alpha+n[$

ولما كانت المجالات $]\alpha,\alpha+n[$ كلها تنتمي إلى الجبر التام $\mathcal{A}$فإن اتحادها ينتمي إليه، إذن A_2 تنتمي إلى الجبر التام $\mathcal{A}$.

- $A_3=]-\infty,\beta[=\bigcup_{n=1}^{\infty}]\beta-n,\beta[$

والمجموعات $]\beta-n,\beta[$ تنتمي إلى الجبر التام $\mathcal{A}$ فكذلك اتحادها العدود. إذن A_3 تنتمي إلى الجبر التام $\mathcal{A}$.

- $A_4=\mathbb{R}=]-\infty,\infty[=\bigcup_{n=1}^{\infty}[-n,n[$

وهي تنتمي إلى $\mathcal{A}$.

- $A_5=[\alpha,\beta]=\bigcap_{n=1}^{\infty}\left[\alpha,\beta+\frac{1}{n}\right[$

إذن $A_5\in\mathcal{A}$.

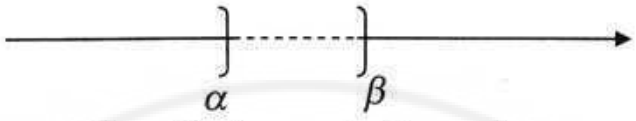
- $A_6=[\alpha,\infty[=(]-\infty,\alpha[)^c$

لاحظ أن

ماذا تستنتج؟

كما أن $[\alpha,\infty[=\bigcup_{n=1}^{\infty}[\alpha,\alpha+n[$ وسنترك لك إثبات أن $A_7\in\mathcal{A}$

وأيضاً سنترك لك أن تلاحظ أن:



$$A_8 =]\alpha,\beta] =]-\infty,\beta] -]-\infty,\alpha]$$

وأن تستنتج المراد.

تدريب(٢)_ الصفحة (١٥):

نعلم أن: $\phi \neq X$ و $\mathcal{A}$ جبر تام في X إذا وفقط إذا تحقق:

1. $\phi, X \in \mathcal{A}$
2. $A_1,\ldots,A_n,\ldots \in \mathcal{A} \Rightarrow A_1 \cup A_2 \cup \ldots \in \mathcal{A}$
3. $A,B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A}\ ,\ A \cup B \in \mathcal{A},\ A - B \in \mathcal{A}$

وينتج عن ذلك أن

4. $A \in \mathcal{A} \Rightarrow X - A = A' \in \mathcal{A}$

لنفترض $\mathcal{A}$ جماعة غير خالية من أجزاء X ، $\mathcal{A}$ جبر أي يحقق1 و 3 و 4.

ولنفرض أن

$$B_1,B_2,\ldots,B_n,\ldots \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = B \in \mathcal{A}$$

متتالية منفصلة

إثبات أن $\mathcal{A}$ يحقق الخاصة 2 :

في الواقع إذا كانت $A_1,A_2,\ldots,A_n,\ldots \in \mathcal{A}$ ووضعنا $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ ثم

$$B_1 = A_1,\ B_2 = A_2 - A_1,\ B_3 = A_3 - (A_1 \cup A_2),\ldots$$

$$B_n = A_n - (A_1 \cup \ldots \cup A_{n-1}),\ldots$$

وكلها مجموعات منفصلة تنتمي إلى $\mathcal{A}$ سنترك لك أن تبرهن أن :

$A=\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n$ وبالتالي $A\in\mathcal{A}$ وتحقق الشرط 2 .

تدريب(٣)_ الصفحة (١٥):

$\mathcal{A}$ جبر في X ومغلق بالنسبة للاتحاد المتزايد :

$$\forall E_n\in\mathcal{A}: E_1\subseteq E_2\subseteq\ldots\subseteq E_n\subseteq\ldots\Rightarrow\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n=E\in\mathcal{A}$$

لنبرهن أن الشرط 2 الوارد في التدريب السابق محقق لنفرض :

$$A_1,A_2,\ldots,A_n,\ldots\in\mathcal{A}$$

ولنضع $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=A$ و

$$E_1=A_1,\ E_2=A_1\cup A_2,\ldots,E_n=A_1\cup\ldots\cup A_n,\ldots$$

فهي متزايدة وكل عناصرها من $\mathcal{A}$ إذن اجتماعها $\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$ ينتمي إلى $\mathcal{A}$ ولما كان من السهل عليك أن تثبت أن $\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n=A$ فيتم المطلوب.

إثبات المبرهنة (٨) _ الصفحة (٢٠) :

← ليكن $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$ جبر بوريل في $\mathbb{R}$ وهو أصغر جبر تام يحوي صف المجموعات المفتوحة في $\mathbb{R}$. إذن $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$ جبر تام وهو يحوي المجموعة المفتوحة $]b,\infty[$ أياً كان b من $\mathbb{R}$ إذن سيحوي متممتها $]-\infty,b[$.

→ لتكن A أي مجموعة بوريلية نريد إثبات أن A تنتمي إلى أي جبر تام $\hat{J}_8$ يحوي صف المجالات $]-\infty,b[$ حيث $b\in\mathbb{R}$. يكفي أن نثبت أن $\hat{J}_8$ يحوي صف المجالات المفتوحة والمحدودة في $\mathbb{R}$ ، بما أن

$$]a,b[^{c}=]-\infty,a]\cup[b,\infty[$$

إن $]-\infty,a[$ ينتمي إلى $\hat{J}_8$ وإن:

$$[b,\infty[=(]-\infty,b[)^c=\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\left]-\infty,b-\frac{1}{n}\right]\right)^c$$

إذن $]b,\infty[$ ينتمي إلى $\hat{J}_8$. وبالتالي يتم المطلوب.

ملاحظة: في دروس التبولوجيا مر معك أن كل مجموعة مفتوحة في $\mathbb{R}$ وغير خالية هي اتحاد عدود لمجالات مفتوحة ومحدودة.

التمرين(٣) _ الصفحة(٢١):

X مجموعة منتهية مثلاً لتكن $X=\{a_1,a_2,...,a_n\}$ و $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{P}(X)$:
جماعة من أجزاء X .

- $\mathcal{A}$ جبر (جبر تام) في X إذا وفقط إذا تحقق:

1. $\phi,X\in\mathcal{A}$
2. $A_1,A_2\in\mathcal{A}\Rightarrow A_1\cup A_2\in\mathcal{A},\ A_1\cap A_2\in\mathcal{A},\ A_1-A_2\in\mathcal{A},$
   $X-A_2\in\mathcal{A}$

- $\mathcal{A}$ تبولوجيا على المجموعة المنتهية X إذا وفقط إذا تحقق:

1. $\phi,X\in\mathcal{A}$
2. $A_1,A_2\in\mathcal{A}\Rightarrow A_1\cup A_2\in\mathcal{A}$
   $A_1\cap A_2\in\mathcal{A}$

وهكذا فإذا كان $\mathcal{A}$ جبراً فهو تبولوجيا على X المنتهية العكس غير صحيح
وإليك مثالاً معاكساً خذ $X=\{1,2,3,4\}$ وخذ

$$\tau=\{\phi,X,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$$

تجد أن τ تبولوجيا على X ولكن τ ليس جبراً ذلك أن :

$$X-\{1\}=\{2,3,4\}\notin\tau$$

التمرين(٤) _ الصفحة(٢١):

خذ $X=\{1,2,3,4\}$ و $\tau=\{\{1,2\},\{3\}\}$ نرى أن τ ليس حلقة ذلك أن $\phi\notin\tau$ أو $\{1,2\}\cup\{3\}\notin\tau$ فمن باب أولى لن تكون جبراً وهي ليست تبولوجيا على X.

- أصغر حلقة ${}^{\Delta}\tau$ تحوي τ:

$$\tau_1={}^{\Delta}\tau=\{\phi,\{1,2\},\{3\},\{1,2,3\}\}$$

- أصغر جبر يحوي τ وهو أصغر جبر يحوي τ_1:

$$\tau_2=\left\{\phi,\{1,2\},\{3\},\{1,2,3\},\phi',\{1,2\}',\{3\}',\{1,2,3\}'\right\}$$
$$=\{\phi,X,\{1,2\},\{3,4\},\{3\},\{1,2,4\},\{1,2,3\},\{4\}\}$$

- أصغر تبولوجيا تحوي τ

$$\tau_3=\{\phi,X,\{1,2\},\{3\},\{1,2,3\}\}$$

ثانياً_ حول تمارين الفصل الثاني

التمرين(١) _ الصفحة(٦١):

الحل: لدينا

1. $\mu_1(\phi)=\sqrt{\mu(\phi)}=0$

فالشرط (1) محقق.

$2-\text{if } A\subseteq B,\ A,B\in\mathcal{A}\ \text{ then } \mu(A)\le\mu(B)$

ومنه $\sqrt{\mu(A)} \le \sqrt{\mu(B)}$

أي $\mu_1(A) \le \mu_1(B)$

فالشرط (2) محقق.

3 –

نعلم أن $\mu(A \cup B) \le \mu(A) + \mu(B) \qquad \forall A, B \in \mathcal{A}$

إذن:

$$\mu_1(A \cup B) = \sqrt{\mu(A \cup B)} \le \sqrt{\mu(A) + \mu(B)}$$
$$\le \sqrt{\mu(A)} + \sqrt{\mu(B)}$$
$$= \mu_1(A) + \mu_1(B)$$

وتم المطلوب.

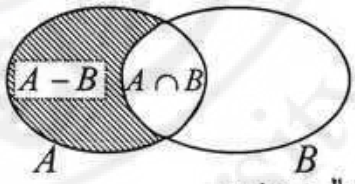
ونترك للقارئ التحقق من أن μ_1 ليس بالضرورة قياساً.

التمرين(٢) _ الصفحة(٦١):

$\mu(A \Delta B) = 0 \Rightarrow \mu(A) = \mu(B)$

$\mu(A - B) + \mu(A \cap B) = \mu(A)$

$\mu(B - A) + \mu(A \cap B) = \mu(B)$



بالجمع نجد

$$\mu(A - B) + \mu(B - A) + 2\mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$$

أي: $\underbrace{\mu(A \Delta B)}_{=0} + 2\mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$

$$\mu(A) + \mu(B) = 2\mu(A \cap B) \le 2\mu(A)$$

إذن: $\mu(B) \le \mu(A) \quad \text{if } \mu(A) < +\infty$

ونشير إلى أن المتراجحة الأخيرة محققة عندما $\mu(A) = \infty$ (لماذا؟) .

كذلك بالأسلوب نفسه نثبت أن $\mu(A) \le \mu(B)$ ويتم المطلوب.

طريقة أفضل: بما أن $\mu(A - B) = 0$ (لماذا؟) و $\mu(B - A) = 0$ (لماذا؟).

نجد أن $\mu(A) = \mu(B) = \mu(A \cap B)$

التمرين(٣) ـ الصفحة(٦١):

if $\rho(A,B) = \mu(A \Delta B)$ then

1. $\rho(A,B) \ge 0$
2. $\rho(A,B) = \mu(A \Delta B) = \mu(B \Delta A) = \rho(A,B)$
3. $\rho(A,B) + \rho(B,C) \overset{?}{\ge} \rho(A,C)$ هل

$\mu(A \Delta B) + \mu(B \Delta C) \overset{?}{\ge} \mu(A \Delta C)$ أي هل

وهنا نرى أنه يكفي لتحقيق المراد أن يكون :

$$(A \Delta B) \cup (B \Delta C) \supseteq (A \Delta C)$$

ولما كان :

$$\begin{aligned}(A \Delta B) \cup (B \Delta C) &\supseteq (A \Delta B) \Delta (B \Delta C) \\ &= A \Delta \underbrace{(B \Delta B)}_{=\phi} \Delta C \\ &= A \Delta \phi \Delta C \\ &= A \Delta C\end{aligned}$$

فقد تم المطلوب.

ثالثاً_ حول تدريبات وتمارين الفصل الثالث

التدريب (٣-١-١)_ رقم الصفحة (٦٥):

الفرض : $f: X \to Y$ تطبيق و τ جبر تام من أجزاء Y

و $S = \{f^{-1}(E): E \in \tau\}$

الطلب: S جبر تام.

فكرة الحل: تذكّر أن $f^{-1}(\phi) = \phi,\ f^{-1}(Y) = X$

$$f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(E_n),\ f^{-1}(E_1 - E_2) = f^{-1}(E_1) - f^{-1}(E_2)$$

ثم تعريف الجبر التام تجد المراد.

التدريب (١) _ الصفحة (٦٦):

الفرض: $X_1 \xrightarrow{f_1} X_2 \xrightarrow{f_2} X_3$ ، $f = f_2 \circ f_1$

f_j قيوس حيث $(j = 1,2)$ و $f = f_2 \circ f_1$ و τ_j جبر تام في X_i حيث $(i = 1,2,3)$.

الطلب: f قيوس.

فكرة الإثبات: نأخذ مجموعة ما E_3 من الجبر التام τ_3 فنجد أن $E_2 = f_2^{-1}(E_3)$ تنتمي إلى الجبر التام τ_2 لأن f_2 قيوس ثم نأخذ $E_1 = f_1^{-1}(E_2)$ فتكون من τ_1 لأن f_1 قيوس.

ولما كان:

$$f^{-1}(E_3) = (f_2 \circ f_1)^{-1}(E_3) = f_1^{-1}(f_2^{-1}(E_3)) = E_1$$

كان f^{-1} قيوساً.

تدريب(٢) _ الصفحة(٦٦):

الفرض: $(X,S)\xrightarrow{f}(Y,\tau)$

$\tau=\sigma(\xi)$: الجبر التام المولد بـ ξ هو τ (إذن $\xi\subseteq\tau$)

الطلب: f قيوس $\Leftrightarrow \forall E\in\xi: f^{-1}(E)\in S$ *

الإثبات:

($\Leftarrow$) لنفرض f قيوساً بما أن $\xi\subseteq\tau$ فالشرط * محقق حكماً

($\Rightarrow$) لنضع $\tau_1=\{E\subseteq Y: f^{-1}(E)\in S\}$ إن τ_1 جبر تام من أجزاء Y (برهن ذلك) . وإن $\xi\subseteq\tau_1$ استناداً إلى * إذن $\sigma(\xi)=\tau_1$ أي $\tau\subseteq\tau_1$ ويتم المطلوب.

ملاحظة:

كل فضاء تبولوجي (X,τ) نعتبره ضمناً فضاء قيوساً مصحوباً بالجبر التام $\mathfrak{B}_X=\sigma(\tau)$ جبر بوريل على X.

تدريب (٣-٢-١٢)_ الصفحة (٦٨):

لاحظ أن

$$M=\{x: f(x)<g(x)\}=\bigcup_{r\in Q}\{x: f(x)<r<g(x)\}$$

وأن

$$\{x: f(x)<r<g(x)\}=\{x: f(x)<r\}\cap\{x: g(x)>r\}$$

تجد المراد.

تدريب(٣-٤-٥)_ الصفحة (٧٥):

(إثبات٧)

$$\chi_{A\Delta B}(x)=\chi_A(x)+\chi_B(x)-2\chi_{A\cap B}(x)$$
$$=\chi_A(x)+\chi_B(x)-2\,\chi_A(x)\cdot\chi_B(x)$$

نميز الحالات الآتية :

- $x\notin B,\ x\in A$

عندئذ $\chi_{A\Delta B}(x)=1$ وإن

$$\chi_A(x)+\chi_B(x)-2\chi_{A\cap B}(x)=1+0-2(0)=1$$

والمساواة محققة.

- $x\in B,\ x\notin A$

عندئذ $\chi_{A\Delta B}(x)=1$ وإن

$$\chi_A(x)+\chi_B(x)-2\chi_{A\cap B}(x)=0+1-2(0)=1$$

- $x\in B,\ x\in A$

عندئذ $x\in A\cap B$ و $\chi_{A\Delta B}(x)=0$ و

$$\chi_A(x)+\chi_B(x)-2\chi_{A\cap B}(x)=1+1-2(1)(1)=0$$

والمساواة محققة.

- $x\notin B,\ x\notin A$

عندئذ $\chi_{A\Delta B}(x)=0$ و

$$\chi_A(x)+\chi_B(x)-2\chi_{A\cap B}(x)=0+0-0=0$$

والمساواة محققة.

التمرين (٥)_ الصفحة (٧٩):

الفرض: $\forall x \qquad f_k(x)\underset{k\to\infty}{\to} f(x)$

و $a\in\mathbb{R}$.

الطلب: $$\{f<a\}\overset{?}{=}\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}\left\{f_k<a-\frac{1}{m}\right\}$$

محاولة الإجابة على السؤال:

$$\text{if } x\in\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}\left\{f_k<a-\frac{1}{m}\right\} \text{ then}$$

$$\exists m_0\geq 1:\quad x\in\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}\left\{f_k<a-\frac{1}{m_0}\right\}$$

$$\exists n_0: x\in\bigcap_{k=n_0}^{\infty}\left\{f_k<a-\frac{1}{m_0}\right\}$$

$$\forall k\geq n_0:\quad f_k(x)<a-\frac{1}{m_0}$$

بالمرور إلى النهايات (بجعل $k\to\infty$) سنجد : $f(x)\leq a-\frac{1}{m_0}<a$

ومنه $x\in\{f<a\}$

$$\text{if } x\in\{f<a\}: f(x)<a \text{ then } \exists m_0\in\mathbb{N}: f(x)<a-\frac{1}{m_0}$$

(لماذا؟)

أي أن: $\lim_{k\to\infty} f_k(x)<a-\frac{1}{m_0}$ واستناداً إلى تعريف النهاية نجد:

$$\exists n_0:\ k\geq n_0\Rightarrow f_k(x)<a-\frac{1}{m_0}$$

$$\Rightarrow x\in\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}\left\{f_k<a-\frac{1}{m}\right\}$$

رابعاً_ حول تمارين الفصل الرابع ومابعده

(إن التمارين جزء لا يتجزأ من النظري)

التمرين (١)_ الصفحة (٩٤):

$$\varphi : X \to \mathbb{R}_+$$

$$x \mapsto \varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{A_i}(x)$$

حيث $A_1, A_2, \ldots, A_n$ تجزئة لـ X و $A_i = \{x : \varphi(x) = c_i\}$

و $c_1, c_2, \ldots, c_n$ أعداد مختلفة مثنى.

نعلم أنه إذا كانت $E \in S$ حيث S الجبر التام من أجزاء X المعطى فإن:

$$\int_E \varphi \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} c_i \mu(A_i \cap E)$$

فإذا كانت $E = F \cup G$ حيث $F \cap G = \phi$ كان

$$\int_{F \cup G} \varphi \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} c_i \mu(A_i \cap (F \cup G))$$

$$= \sum_{i=1}^{n} c_i \mu((A_i \cap F) \cup (A_i \cap G))$$

$$= \sum_{i=1}^{n} c_i \left(\mu(A_i \cap F) + \mu(A_i \cap G)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} c_i \mu(A_i \cap F) + \sum_{i=1}^{n} c_i \mu(A_i \cap G)$$

$$= \int_F \varphi d\mu + \int_G \varphi d\mu$$

نتيجة: إذا كانت $E_1, E_2, \ldots, E_n$ تجزئة لـ X فإن:

$$\int_X \varphi \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} \int_{E_i} \varphi \, d\mu$$

ملاحظة أساسية:

إذا كان

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j}$$

$$\varphi = \sum_{k=1}^{m} b_k \chi_{F_k}$$

حيث $E_1, E_2, \ldots, E_n$ تجزئة لـ X من المجموعات القيوسة

و $F_1, F_2, \ldots, F_n$ تجزئة لـ X من المجموعات القيوسة أيضاً

فإنه أياً كانت $E \in S$ سيكون: $\int_E \varphi \, d\mu = \sum_{j=1}^{n} a_j \mu\left(E_j \cap E\right)$

$$= \sum_{k=1}^{m} b_k \mu\left(E_k \cap E\right)$$

حاول تفسير ذلك.

التمرين(٢) ـ الصفحة(٩٤):

إذا كان $\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j}$ و $\psi = \sum_{k=1}^{m} b_k \chi_{F_k}$ كان:

$$\varphi + \psi = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \left(a_j + b_k\right) \chi_{E_j \cap F_k}$$

$$\int_X (\varphi + \psi) \, d\mu = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \left(a_j + b_k\right) \mu\left(E_j \cap F_k\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} a_j \mu\left(E_j \cap F_k\right) + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} b_k \mu\left(E_j \cap F_k\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_j \left(\sum_{k=1}^{m} \mu\left(E_j \cap F_k\right) \right) + \sum_{k=1}^{m} b_k \left(\sum_{j=1}^{n} \mu\left(E_j \cap F_k\right) \right)$$

إي أن:

$$\int_X (\varphi+\psi)\,d\mu = \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(E_j) + \sum_{k=1}^{m} b_k \mu(F_k)$$
$$= \int_X \varphi\, d\mu + \int_X \psi\, d\mu$$

التمرين(٣) _ الصفحة(٩٥):

استناداً إلى مبرهنة سابقة يمكن إيجاد متتاليتين متزايدتين $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ و$(\psi_n)_{n\geq 1}$ من التوابع البسيطة (الدرجية) الموجبة تتقارب الأولى منهما إلى f وتتقارب الثانية إلى g . إذاً ستكون المتتالية $(\varphi_n+\psi_n)_{n\geq 1}$ متزايدة ومتقاربة من $f+g$ فباستخدام مبرهنة التقارب المتزايد نجد أن:

$$\int_X (f+g)\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X (\varphi_n+\psi_n)\,d\mu$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(\int_X \varphi_n\, d\mu + \int_X \psi_n\, d\mu\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(\int_X \varphi_n\, d\mu\right) + \lim_{n\to\infty}\left(\int_X \psi_n\, d\mu\right)$$
$$= \int_X f\, d\mu + \int_X g\, d\mu$$

نتيجة: إذا كانت $(f_n)_{n\geq 1}$ متتالية من التطبيقات القيوسة الموجبة فإن:

$$\int_X \sum_{n=1}^{\infty} f_n\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n\, d\mu$$

يكفي أن تلاحظ أن:

$$\int_X \sum_{n=1}^{m} f_n\, d\mu = \sum_{n=1}^{m} \int_X f_n\, d\mu \qquad , \forall m \geq 1$$

فإذا وضعنا $h_m = \sum_{n=1}^{m} f_n = f_1 + f_2 + \ldots + f_m$ كانت المتتالية $(h_m)_{m\geq 1}$ متتالية متزايدة من التوابع القيوسة الموجبة نهايتها $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = h$ (عندما m تسعى إلى $+\infty$ فلنطبق مرة ثانية مبرهنة التقارب المتزايد فنجد:

$$\int_X h\, d\mu = \lim_{m\to\infty} \int_X h_m\, d\mu = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \left(\int_X f_n d\mu \right)$$

$$= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n d\mu \right)$$

ويتم المطلوب.

التمرين (٥)_ الصفحة(٩٤):

لنفرض أن $h = f + g$ حيث f و g تابعان حقيقيان عندئذ يكون:

$$h = h^+ - h^- = \left(f^+ - f^-\right) + \left(g^+ - g^-\right) \ldots\ldots (*)$$

حيث كما تعلم $h^+ = \frac{|h| + h}{2}$ و $h^- = \frac{|h| - h}{2}$

ومن العلاقة * نجد:

$$h^+ + f^- + g^- = f^+ + g^+ + h^-$$

$$\int_X \left(h^+ + f^- + g^-\right) = \int_X \left(f^+ + g^+ + h^-\right)$$

أي :

$$h^+ + f^- + g^- = f^+ + g^+ + h^-$$

$$\int_X h^+ + \int_X f^- + \int_X g^- = \int_X f^+ + \int_X g^+ + \int_X h^-$$

ويمكن أن نكتبها على الشكل:

$$\int_X h^+ - \int_X h^- = \int_X f^+ - \int_X f^- + \int_X g^+ - \int_X g^-$$

أي:

$$\int_X h = \int_X f + \int_X g$$

وتم المطلوب.

التمرين(١) ـ الصفحة (١١٢):

$$f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} \qquad \text{if} \quad (x,y)\neq(0,0)$$

$$f(0,0)=0$$

لنبرهن أن:

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\,dxdy=\frac{-\pi}{4}$$

وينتج عن ذلك أن:

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\,dydx=\frac{\pi}{4}$$

لاحظ إذا أخذنا:

$$\varphi(x,y)=\frac{x}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

لكان:

$$\varphi'_x(x,y)=\frac{(1)\left(x^2+y^2\right)-(2x)(x)}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$\varphi'_x(x,y)=\frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}=-\frac{\left(x^2-y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

إذن:

$$\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}dx = \int_0^1 -\left(\frac{x}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right)_x dx$$

$$= \frac{-x}{\left(x^2+y^2\right)^2}\Bigg]_0^1 = \frac{-1}{1+y^2}$$

$$\int_0^1 \frac{-1}{1+y^2}dy = -\arctan y\,\Big]_0^1 = -\left[\frac{\pi}{4}-0\right] = -\frac{\pi}{4}$$

ويتم المطلوب.

التمرين(١) ـ صفحة(١٣٢):

$$\alpha \le \upsilon \Rightarrow \alpha \ll \upsilon$$

لنفرض $A \in \mathfrak{M}$ وأن $\upsilon(A)=0$ عندئذ $0 \le \alpha(A) \le \upsilon(A) \le 0$

إذن: $\alpha(A)=0$ وبالتالي $\alpha \ll \upsilon$.

وواضح أن إذا كان $\alpha = 10\upsilon$ فإن $\upsilon(A)=0$ ومنه $\alpha(A)=0$

إذن $\upsilon \ll \alpha$ ولكن $\upsilon \not\ll \alpha$.

التمرين(١)ـ الصفحة(١٦٥):

i)ليكن $\varepsilon > 0$. عندئذ تحقق المتراجحة $\left|f_n(x)-0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$ من أجل كل $n \ge n_0$ ، حيث n_0 أصغر عدد طبيعي أكبر تماماً من $\frac{1}{\varepsilon}$ ، ومن أجل **كل x من المجال** $]\infty,1]$. أي أن $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u} 0$ على المجال $]\infty,1]$.

ii) لدينا:

$$\int_{[1,+\infty[} f_n d\lambda = \int_{[1,n]} f_n d\lambda + \int_{]n,+\infty[} f_n d\lambda \quad ,\forall n \geq 1$$

$$= \frac{1}{n}\lambda\left([1,n]\right) + 0\lambda\left(]n,+\infty[\right)$$

$$= \frac{n-1}{n}$$

ينتج أن:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[1,+\infty[} f_n d\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = 1$$

وبالتالي فإن:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[1,+\infty[} f_n d\lambda = 1 \neq 0 = \int_{[1,+\infty[} \lim_{n\to\infty} f_n d\lambda$$

نستنتج أن التقارب بانتظام لمتتالية من الدوال ليس كافياً بوجه عام من أجل تحقق المساواة:

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n d\lambda = \int_A \lim_{n\to\infty} f_n d\lambda$$

التمرين(٢)_ الصفحة(١٦٥):

من العلاقة:

$$\left|f_n^+ - f^+\right| \leq \left|f_n - f\right| \quad , \quad \forall n \geq 1$$

ينتج أنه أياً يكن $\varepsilon > 0$، فإن:

$$\left\{x : \left|f_n^+(x) - f^+(x)\right| \geq \varepsilon\right\} \subseteq \left\{x : \left|f_n(x) - f(x)\right| \geq \varepsilon\right\}$$

إذاً :

$$0 \leq \mu\left(\left\{x : \left|f_n^+(x) - f^+(x)\right| \geq \varepsilon\right\}\right) \leq$$

$$\leq \mu\left(\left\{x : \left|f_n(x) - f(x)\right| \geq \varepsilon\right\}\right)$$

وحيث إن $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mu} f$ ، إذاً:

$$\lim_{n\to\infty} \mu\left(\left\{x : \left|f_n^+(x) - f^+(x)\right| \geq \varepsilon\right\}\right) = 0$$

أي أن $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mu} f^+$.

بطريقة مشابهة تماماً، نجد أن $f_n^- \xrightarrow[n\to\infty]{\mu} f^-$ ، وذلك بعد الاستفادة من العلاقة:

$$\left|f_n^- - f^-\right| \leq \left|f_n - f\right| \quad , \quad \forall n \geq 1$$

التمرين(٣)_ الصفحة(١٦٥):

لنضع : $A_n = \left\{x : \left|\frac{x}{n}\right| \geq 1\right\} \quad , \quad \forall n \geq 1$

عندئذ نجد أن :

$$\begin{aligned}\lambda(A_n) &= \lambda\left(\left\{x : |x| \geq n\right\}\right) \\ &= \lambda\left(\left\{x : |x| \geq n\right\} \cup \left\{x : |x| \leq -n\right\}\right) \\ &= +\infty\end{aligned}$$

وذلك أياً $n \geq 1$. الأمر الذي يعني أن $(f_n)_{n\geq 1}$ لا تتقارب بالقياس λ من الدالة الصفرية على $\mathbb{R}$.

أخيراً، إذا لاحظنا أن $\frac{x}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، فإننا نستنتج أن التقارب النقطي لمتتالية من الدوال لايقتضي تقاربها بالقياس بوجه عام.

التمرين(٤)_ الصفحة(١٦٥):

i) بما أن $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mu} f$ ، إذاً أياً يكن $\varepsilon > 0$ فإن:

$$\lim_{n\to\infty} \mu\left(\left\{x : \left|f_n(x) - f(x)\right| \geq \varepsilon\right\}\right) = 0$$

وبالتالي أياً يكن $\delta > 0$ فإنه يوجد عدد طبيعي n_0 بحيث يكون:

$$\mu\left(\left\{x : \left|f_n(x) - f(x)\right| \geq \varepsilon\right\}\right) < \delta \quad ,\forall n \geq n_0$$

ومنه فإن:

$$\mu\left(\left\{x : \left|f_{n_m}(x) - f(x)\right| \geq \varepsilon\right\}\right) < \delta \quad ,\forall n_m \geq n_0$$

أي أن $f_{n_m} \xrightarrow[m\to\infty]{\mu} f$.

ii) ليكن $\varepsilon > 0$. بما أن $(f_n)_{n\geq 1}$ متتالية لكوشي بالقياس ، إذاً من أجل كل $\delta > 0$ يوجد عدد طبيعي n_0 بحيث يكون:

$$\mu\left(\left\{x : \left|f_n(x) - f_m(x)\right| \geq \varepsilon\right\}\right) < \delta$$

وذلك أياً يكن $n, m \geq n_0$. عندئذ إذا كانت $\left(f_{n_j}\right)_{j\geq 1}$ متتالية جزئية من المتتالية $(f_n)_{n\geq 1}$، فإن: $\mu\left(\left\{x : \left|f_{n_j}(x) - f_{n_i}(x)\right| \geq \varepsilon\right\}\right) < \delta$

وذلك من أجل $n_j, n_i \geq n_0$. أي أن $\left(f_{n_j}\right)_{j\geq 1}$ متتالية لكوشي بالقياس.

التمرين(٥)_ الصفحة(١٦٦):

ليكن p و $\mu = \lambda$ =قياس لوبيغ على $\mathbb{R}$ عندئذ:

$$\left(\int_{\mathbb{R}} |f|^p \, d\lambda\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_{\mathbb{R}} \left|\chi_{[0,1]}\right|^p \, d\lambda\right)^{\frac{1}{p}} = 1.\lambda([0,1]) = 1$$

$$\left(\int_{\mathbb{R}} |g|^p \, d\lambda\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_{\mathbb{R}} \left|\chi_{[1,2]}\right|^p \, d\lambda\right)^{\frac{1}{p}} = 1.\lambda([1,2]) = 1$$

$$\left(\int_{\mathbb{R}}|f+g|^p\,d\lambda\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\int_{\mathbb{R}}\left|\chi_{[0,1]}+\chi_{[1,2]}\right|^p\,d\lambda\right)^{\frac{1}{p}}=$$

$$=\left[\int_{[0,1[}\left(\chi_{[0,1]}+\chi_{[1,2]}\right)^p\,d\lambda+\int_{[1,2]}\left(\chi_{[0,1]}+\chi_{[1,2]}\right)^p\,d\lambda\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$=(1+1)^{\frac{1}{p}}=2^{\frac{1}{p}}$$

ينتج أن :

$$\left(\int_{\mathbb{R}}|f+g|^p\,d\lambda\right)^{\frac{1}{p}}=2^{\frac{1}{p}}>\left(\int_{\mathbb{R}}|f|^p\,d\lambda\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\int_{\mathbb{R}}|g|^p\,d\lambda\right)^{\frac{1}{p}}$$

أي أن متراجحة مينكوفسكي غيرصحيحة من أجل $p<1$.

التمرين(٦)_ الصفحة(١٦٦):

لدينا: $|f|^p=|f-f_n+f_n|^p\le 2^p|f-f_n|^p+2^p|f_n|^p$

ذلك أياً يكن $n\ge 1$. إذاً:

$$\int_X|f|^p\,d\mu\le 2^p\int_X|f-f_n|^p\,d\mu+2^p\int_X|f_n|^p\,d\mu$$

من جهة أخرى، بما أن $\lim_{n\to\infty}\int_X|f-f_n|^p\,d\mu=0$، إذاً يوجد عدد طبيعي n_0 بحيث يكون:

$$\int_X|f-f_n|^p\,d\mu<1\quad,\forall n\ge n_0$$

كذلك بما أن $|f_n|^p$ كمولة من أجل $n\ge 1$، إذاً $\int_X|f_n|^p\,d\mu<+\infty$ من أجل $n\ge 1$.

ينتج أن: $\int_X |f|^p d\mu < +\infty$

أي أن $|f|^p$ كمولة على X . وحيث إن: $\lim_{n\to\infty} \int_X |f - f_n|^p d\mu = 0$

إذاً : $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{m^p} f$

التمرين(٧)_ الصفحة(١٦٦):

من الواضح أن المتتالية $(f_n)_{n\geq 1}$ المعرّفة بالعلاقة:

$$f_n(x) = x^{-\frac{1}{p}} \quad ,\forall x \in]0,1] \quad ,\forall n \geq 1$$

تتقارب بالوسط من المرتبة 1، من الدالة $f(x) = x^{-\frac{1}{p}}$ على المجال $[0,1]$،

ذلك لأن f دالة كمولة على المجال $[0,1]$، ذلك أن $\int_{]0,1]} x^{-\frac{1}{p}} d\lambda = \frac{p}{p-1}$ ،

كما أن: $\lim_{n\to\infty} \int_{]0,1]} \left| x^{-\frac{1}{p}} - x^{-\frac{1}{p}} \right| d\lambda = 0$

في حين أن الدالة $|f_n|^p = \frac{1}{x}$ ليست كمولة على المجال $[0,1]$، وذلك أياً يكن $n \geq 1$ إذ إن:

$$\int_{]0,1]} |f_n|^p d\lambda = \int_{]0,1]} \frac{1}{x} d\lambda = \int_0^1 \frac{dx}{x}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0+} (-\ln \varepsilon)$$

$$= +\infty$$

ينتج أن $(f_n)_{n\geq 1}$ تتقارب بالوسط من المرتبة 1 ولا تتقارب بالوسط من المرتبة p حيث $p > 1$.

خامساً_ تمارين عامة داعمة

التمرين (١): لتكن D حلقة في X و $(D_n)_{n\geq 1}$ متتالية من عناصر D . جد متتالية $(A_n)_{n\geq 1}$من عناصر D المنفصلة، بحيث يكون $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$.

جد أيضاً متتالية متزايدة $(B_n)_{n\geq 1}$ من عناصر D ، بحيث يكون $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$.

الحل: لنضع :

$$A_1 = D_1 \quad , \quad A_n = D_n - \bigcup_{m=1}^{n-1} D_m \quad ,\forall n \geq 2$$

عندئذ $\bigcup_{m=1}^{n-1} D_m \in D$ من أجل $n \geq 2$، وذلك لأن الحلقة صف مغلق بالنسبة لعملية الاتحاد المنتهي، الأمر الذي يؤدي بدوره إلى أن تكون $D_n - \bigcup_{m=1}^{n-1} D_m$ عنصراً من الحلقة D ، لكونها صفاً مغلقاً أيضاً بالنسبة لعملية الفرق. ينتج أن $A_n \in D$ من أجل $n \geq 1$.

من جهة أخرى، لو فرضنا أن $D_n \cap D_m \neq \phi$ من أجل أي زوجٍ من الأعداد الطبيعية n و m ، حيث $n,m \geq 1$ و $n \neq m$، وأن $x \in A_n \cap A_m$ ، لترتّب على ذلك أن يكون $x \in D_n \cap D_m$ و $x \notin \bigcup_{j=1}^{k} D_j$ حيث $k = \max\{n-1, m-1\}$. فإذا كان $n > m$ فإن $x \notin D_m$ ، وإذا كان $m > n$ فإن $x \notin D_n$ ، وبذلك نحصل على تناقضٍ في

كلتا الحالتين. إذاً $A_n \cap A_m = \phi$ من أجل $m \neq n$. وهكذا تكون $(A_n)_{n\geq 1}$متتالية من عناصر D المنفصلة.

أخيراً بالعودة إلى تعريف المتتالية $(A_n)_{n\geq 1}$ نجد أن $A_n \subseteq D_n$ من أجل $n \geq 1$ ، إذاً $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$. ثم أنه إذا كان $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$ ، وفرضنا أن n_0 هو أصغر عدد طبيعي أكبر أو يساوي الواحد بحيث إن $x \in D_{n_0}$ و $x_n \notin D_n$ من أجل $n < n_0$ ، فإن $x \in A_{n_0} \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. أي أن $\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. وهكذا نجد أن $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$.

أما من أجل المتتالية $(B_n)_{n\geq 1}$فإننا نضع:

$$B_n = \bigcup_{m=1}^{n} D_m \quad ,\forall n \geq 1$$

عندئذ تكون B_n اتحاداً منتهياً لعناصر من D، وبالتالي فإن $B_n \in D$ من أجل $n \geq 1$ ، كما تكون $B_n \subseteq B_{n+1}$ من أجل $n \geq 1$، ثم أنه من الواضح أن $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$.

التمرين(٢):

لتكن X مجموعة غير عدودة. عين الجبر التام المولد بصف المجموعات المنتهية في X .

الحل:

لنرمز بـ $\mathfrak{M}$ للجبر التام المولد بصف المجموعات المنتهية في X . عندئذ أياً يكن $a \in X$ ، فإن $\{a\} \in \mathfrak{M}$. وبالتالي، أياً تكن المجموعة العدودة $A = \{a_1, a_2, ...\}$ من 2^X فإن $A \in \mathfrak{M}$ ينتج أن $\mathfrak{M}$ يحوي صف

المجموعات العدودة على الأكثر ومتمماتها. بتعبير آخر، إذا كانت A عدودة على الأكثر أو كانت A^c عدودة على الأكثر فإن $A \in \mathfrak{M}$. فإذا رمزنا بـ $\mathfrak{M}_0$ لصف المجموعات الجزئية من X ، العدودة على الأكثر أو التي متمماتها عدودة على الأكثر فإن $\mathfrak{M}_0 \subseteq \mathfrak{M}$.

من جهة أخرى، إذا كانت $A \in \mathfrak{M}_0$ فإن $A^c \in \mathfrak{M}_0$. لأنه، إما أن تكون A عدودة على الأكثر وعندئذ A^c متممة لمجموعة عدودة على الأكثر وبالتالي $A^c \in \mathfrak{M}_0$ ، أو أن تكون A^c عدودةً على الأكثر وعندئذ $A^c \in \mathfrak{M}_0$. وهكذا فإن $\mathfrak{M}_0$ صف مغلق بالنسبة لعملية التتميم . بالإضافة إلى ذلك، إذا كانت $(A_n)_{n\geq 1}$ متتالية من عناصر $\mathfrak{M}_0$ ، وكانت A_n عدودة على الأكثر من أجل $n \geq 1$ ، فإن $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ تكون مجموعة عدودة على الأكثر وبالتالي فإن $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{M}_0$. أما إذا كانت إحدى المجموعات A_n غير عدودة، ولتكن A_{n_0} ، فإن $A_{n_0}^c$ تكون عدودة على الأكثر ، وحيث إن:

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c \subseteq A_{n_0}$$

إذاً $\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c$ مجموعة عدودة على الأكثر، وعندئذ $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{M}_0$. وهكذا نجد أن $\mathfrak{M}_0$ صف مغلق بالنسبة للاتحاد العدود. فإذا لاحظنا بالإضافة إلى ذلك أنه صف غير خالٍ من أجزاء X ، إذ أن $X \in \mathfrak{M}_0$ لأن $X^c = \phi$ منتهية، لوجدنا أن $\mathfrak{M}_0$ جبر تام في X . أخيراً، إذاً $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{M}_0$. وحيث وجدنا سابقاً أن $\mathfrak{M}_0 \subseteq \mathfrak{M}$، إذاً $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_0$.

التمرين(٣):

ليكن H صفاً غير خال من أجزاء X ، ولتكن $A \subseteq X$ برهن أن مقصور الجبر التام $\sigma(H)$ على A هو جبر تام . ثم برهن أنه الجبر التام المولد بـ $\{A \cap B : B \in H\}$ في A .

الحل: لنرمز بـ $\mathfrak{M}$ لمقصور الجبر التام $\sigma(H)$ على A . أي أن:

$$\mathfrak{M} = \{A \cap C : C \in \sigma(H)\}$$

إن $\mathfrak{M}$ صف غير خالٍ من أجزاء A ، إذ أن $A = A \cap X \in \mathfrak{M}$. لتكن $A \cap C \in \mathfrak{M}$ ، عندئذ $A - (A \cap C) = A \cap C^c \in \mathfrak{M}$. أي أن $\mathfrak{M}$ صف مغلق بالنسبة لعملية التتميم في A. ثم أنه إذا كانت $(A \cap C_n)_{n \geq 1}$ متتالية من عناصر $\mathfrak{M}$ ، فإن:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}(A \cap C_n) = A \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n\right) \in \mathfrak{M}$$

أي أن $\mathfrak{M}$ صف مغلق بالنسبة للاتحاد العدود. وهكذا نجد مما تقدّم أن $\mathfrak{M}$ جبر تام في A. لنرمز بـ $\mathfrak{M}_0$ للجبر التام المولد بـ $\{A \cap B : B \in H\}$ في A. عندئذ، بما أن $H \subseteq \sigma(H)$، إذاً $\mathfrak{M}_0 \subseteq \mathfrak{M}$.

من جهة أخرى، إذا كان $\mathfrak{M}'$ جبراً تاماً في A يحوي الصف $\{A\} \cap H$، فإنه مقصور لجبر تام في X يحوي الصف H ، على A . $\left(\mathfrak{M}'\right.$ مقصور الجبر التام $\mathfrak{M}' \cup \mathfrak{M}''$، حيث $\mathfrak{M}''$ جبر تام في A^c يحوي الصف $\left.\left(\{A^c\} \cap H\right)\right.$ ، وبالتالي فإن $\mathfrak{M}' \subseteq \mathfrak{M}$. ينتج أن $\mathfrak{M}$ هو أصغر الجبور التامة في A التي تحوي الصف $\{A\} \cap H$. أي أن $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_0$.

التمرين(٤):

ليكن $\mathfrak{M}$ جبراً تاماً في X ، ولتكن $A \subseteq X$. برهن أن الصف:

$$\mathfrak{M}_0 = \{(A \cap B) \cup (A^c \cap C) : B, C \in \mathfrak{M}\}$$

هو الجبر التام المولد بـ $H = \{A\} \cup \mathfrak{M}$

الحل: من الواضح أن كل عنصر من الصف $\mathfrak{M}_0$ هو عنصر من $\sigma(H)$.

أي أن:

$$\mathfrak{M}_0 \subseteq \sigma(H) \qquad (1)$$

من جهة أخرى، من العلاقات:

$$(A \cap \phi) \cup (A^c \cap \phi) = \phi$$

$$\left[(A \cap B) \cup (A^c \cap C)\right]^c = \left[(A \cap B^c) \cup (A^c \cap C^c)\right]$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \left[(A \cap B_n) \cup (A^c \cap C_n)\right] =$$

$$= \left[\left(A \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right)\right) \cup \left(A^c \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n\right)\right)\right]$$

ينتج أن $\mathfrak{M}_0$ جبر تام. بالإضافة إلى ذلك، أياً تكن $B \in \mathfrak{M}$ فإن:

$$B = (A \cap B) \cup (A^c \cap B) \in \mathfrak{M}_0$$

كذلك فإن: $A = (A \cap X) \cup (A^c \cap \phi) \in \mathfrak{M}_0$

ومنه فإن $H \subseteq \mathfrak{M}_0$. إذاً:

$$\sigma(H) \subseteq \mathfrak{M}_0 \qquad (2)$$

من (1) و (2) ينتج أن $\sigma(H) = \mathfrak{M}_0$.

التمرين(٥):

أعط مثالاً لصف مطّرد $\mathfrak{M}$ ، بحيث إن $\phi, X \in \mathfrak{M}$ ، وبحيث لا يكون $\mathfrak{M}$ جبراً تاماً في X .

الحل: ليكن الصف: $H = \{\phi, A, X\}$

حيث $A \subseteq X$. عندئذ من الواضح أن H صف مطّرد، وأنه ليس جبراً تاماً في X ، إذ أنه غير مغلق بالنسبة لعملية التتميم.

التمرين(٦):

ليكن $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ فضاء قياس. إذا كانت $(A_n)_{n\geq 1}$ و $(B_n)_{n\geq 1}$ متتاليين من المجموعات القيوسة، بحيث أن $A_n \subseteq B_n$ ، من أجل $n = 1,2,...$ ، فأثبت أن:

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n - \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n - A_n) \qquad (a$$

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_k - \bigcap_{n=1}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n - A_n) \qquad (b$$

الحل: لاحظ أن: $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n - \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=1}^{\infty} (B_n - A_m)$

وأن: $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n - \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=1}^{\infty} (B_m - A_n)$

لتجد أن :

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n - \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left[\bigcap_{m=1}^{\infty} (B_n - A_m)\right]$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n - A_m) \quad ,\forall m \geq 1$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n - A_n)$$

وأن:

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}B_n-\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\right)\le\sum_{n=1}^{\infty}\mu\left[\bigcap_{m=1}^{\infty}(B_m-A_n)\right]$$

$$\le\sum_{n=1}^{\infty}\mu(B_m-A_n)\quad,\forall m\ge1$$

$$\le\sum_{n=1}^{\infty}\mu(B_n-A_n)$$

التمرين(٧): توطئة (بوريل-كانتيللي) :

ليكن $(X,\mathfrak{M},\mu)$ فضاء قياس. ولتكن $(A_n)_{n\ge1}$ متتالية من المجموعات القيوسة. برهن أنه إذا كان $\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)<\infty$ ، فإن $\mu\left(\limsup_n A_n\right)=0$.

الحل: نعلم أن : $\limsup_n A_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m\ge n}A_m$

إذاً :

$$0\le\mu\left(\limsup_n A_n\right)\le\mu\left(\bigcup_{m\ge n}A_m\right)$$

$$\le\sum_{m=n}^{\infty}\mu(A_m)\quad,\quad\forall n\ge1$$

وحيث إن $\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)$ متسلسلة متقاربة، إذاً فالباقي من المرتبة n يسعى إلى الصفر عندما يسعى n إلى $+\infty$، أي أن:

$$0\le\mu\left(\limsup_n A_n\right)\le\lim_{n\to\infty}\sum_{m=n}^{\infty}\mu(A_m)=0$$

إذاً $\mu\left(\limsup_n A_n\right)=0$.

التمرين(٨):

ليكن μ^* قياساً خارجياً منتهياً على X ، ولنفرض أنه أياً تكن $A \subseteq X$ فإنه توجد مجموعة B قيوسة بالنسبة لـ μ^* و تحوي A ، بحيث إن $\mu^*(A) = \mu^*(B)$. برهن أن الشرط اللازم والكافي لكي تكون A مجموعة قيوسة بالنسبة لـ μ^*، هو أن يكون:

$$\mu^*(X) = \mu^*(A) + \mu^*(A^c)$$

الحل: نعلم أنه إذا كانت A مجموعة قيوسة بالنسبة لـ μ^*، فإن:

$$\forall K \subseteq X, \quad \mu^*(K) = \mu^*(K \cap A) + \mu^*(K \cap A^c)$$

ومن أجل $K = X$ نجد أن: $\mu^*(X) = \mu^*(A) + \mu^*(A^c)$

من أجل البرهان على صحة العكس ، نفرض أن $A \subseteq X$ ، وأن:

$$\mu^*(X) = \mu^*(A) + \mu^*(A^c)$$

ونتحقق من أن A مجموعة قيوسة بالنسبة لـ μ^*.

لتكن $K \subseteq X$. توجد، استناداً إلى الفرض، مجموعة B مجموعة قيوسة بالنسبة لـ μ^* وتحوي K ، بحيث يكون $\mu^*(K) = \mu^*(B)$. عندئذ نجد أن:

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \cap B^c)$$

و

$$\mu^*(A^c) = \mu^*(A^c \cap B) + \mu^*(A^c \cap B^c)$$

وبجمع المساواتين الأخيرتين طرفاً لطرف نحصل على:

$$\begin{aligned}\mu^*(X) &= \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \cap B^c) + \\ &\quad + \mu^*(A^c \cap B) + \mu^*(A^c \cap B^c) \\ &\geq \mu^*(B) + \mu^*(B^c) = \mu^*(X)\end{aligned}$$

ينتج أن:

$$\mu^*(B)+\mu^*(B^c)=\mu^*(A\cap B)+\mu^*(A\cap B^c)+$$
$$+\mu^*(A^c\cap B)+\mu^*(A^c\cap B^c)$$

ولكن:

$$\mu^*(B^c)=\mu^*\left[(B^c\cap A)\cup(B^c\cap A^c)\right]$$
$$\le \mu^*(B^c\cap A)+\mu^*(B^c\cap A^c)$$

إذاً: $\mu^*(B)\ge \mu^*(B\cap A)+\mu^*(B\cap A^c)$

لأن $\mu^*(B^c)\le \mu^*(X)<+\infty$.

فإذا أخذنا بعين الاعتبار أن $K\subseteq B$ ، وأن $\mu^*(K)=\mu^*(B)$ ، نجد:

$$\mu^*(K)\ge \mu^*(K\cap A)+\mu^*(K\cap A^c)$$

الأمر الذي يعني أن A مجموعة قيوسة بالنسبة لـ μ^*.

التمرين(٩):

ليكن H صفاً من أجزاء X بحيث إن $\phi\in H$ ، وبحيث إنه توجد من أجل آية مجموعة جزئية $(A\subseteq X)$ متتالية $(A_n)_{n\ge1}$ من عناصر H تحقق العلاقة $A\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$. لتكن φ دالة معرفة على الصف H بحيث تكون غير سالبة، وبحيث إن $\varphi(\phi)=0$. لنعرف على 2^X دالة μ^* ، بالعلاقة:

$$\mu^*(A)=\inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\varphi(A_n):A\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n,\ A_n\in H,\forall n\ge1\right\}$$

a) برهن أن μ^* قياس خارجي على X .

b) برهن أنه إذا كانت $A \in \mathrm{H}$ ، وكانت كل متتالية $(A_n)_{n\geq 1}$ من عناصر H ، بحيث إن $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ تحقق المتراجحة $\varphi(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n)$، فإن $\mu^*(A) = \varphi(A)$.

c) برهن أن عناصر الصف H تكون قيوسة بالنسبة لـ μ^* ، إذا وفقط إذا كان:

$$\mu^*(A_1) = \mu^*(A_1 \cap A_2) + \mu^*(A_1 \cap A_2^{\,c})$$

من أجل $A_1, A_2 \in \mathrm{H}$.

d) برهن أنه إذا كان $\mathrm{H} \subseteq \mathfrak{M}^*$ ، فإنه توجد من أجل أية مجموعة جزئية $(K \subseteq X)$ مجموعة $B \in \sigma(\mathrm{H})$ بحيث تكون:

$$K \subseteq B \quad , \quad \mu^*(K) = \mu^*(B)$$

الحل: a) بما أن $\varphi \geq 0$، إذاً $\mu^* \geq 0$. لتكن $B_1 \subseteq B_2 \subseteq X$. عندئذ أياً تكن المتتالية $(A_n)_{n\geq 1}$ من عناصر H بحيث إن $B_2 \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ ، فإن $B_1 \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$، إذاً $\mu^*(B_1) \leq \mu^*(B_2)$.

أخيراً ، إذا كانت $(B_n)_{n\geq 1}$ متتالية من عناصر 2^x، وكان $\varepsilon > 0$، فإنه توجد متتالية $(A_{n,m})_{m\geq 1}$من عناصر H، بحيث يكون $B_n \subseteq \bigcup_{m=1}^{\infty} A_{n,m}$ من أجل كل $n \geq 1$، ويكون:

$$\mu^*(B_n) + \frac{\varepsilon}{2^n} \geq \sum_{m=1}^{\infty} \varphi(A_{n,m})$$

وحيث إن $\left(A_{n,m}\right)_{m\geq 1}$متتالية من عناصر H ، و $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \subseteq \bigcup_{n,m=1}^{\infty} A_{n,m}$،

إذاً:

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \leq \sum_{n,m=1}^{\infty} \varphi\left(A_{n,m}\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*\left(B_n\right) + \varepsilon$$

وحيث إن ε موجب كيفي إذاً:

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*\left(B_n\right)$$

ينتج ممّا تقدّم أن μ^*– قياس خارجي.

b) لتكن $A \in H$ ، ولنضع:

$$A_1 = A \quad , \quad A_n = \phi \quad , \quad \forall n \geq 2$$

عندئذ تكون $\left(A_n\right)_{n\geq 1}$ متتالية من عناصر H بحيث إن $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. إذاً :

$$\mu^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \varphi\left(A_n\right) = \varphi\left(A_1\right) = \varphi(A) \qquad (1)$$

من جهة أخرى، بما أن $\varphi(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \varphi\left(A_n\right)$، وذلك أياً تكن المتتالية

$\left(A_n\right)_{n\geq 1}$ من عناصر H بحيث إن $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ ، إذاً:

$$\varphi(A) \leq \mu^*(A) \qquad (2)$$

من (1)و (2)ينتج أن :

$$\mu^*(A) = \varphi(A) \qquad ,\forall A \in H$$

c)لتكن $A \in H$ ، ولنفرض أن A مجموعة قيوسة بالنسبة لـــ μ^* . عندئذ:

$$\mu^*(K) = \mu^*(K \cap A) + \mu^*\left(K \cap A^c\right) \quad ,\forall K \subseteq X$$

فإذا كانت $A_1, A_2 \in H$ ، ووضعنا $K = A_1$ و $A = A_2$ ، نجد أن:

$$\mu^*(A_1) = \mu^*(A_1 \cap A_2) + \mu^*(A_1 \cap A_2^c) \qquad (3)$$

بالعكس لنفرض أن العلاقة (3) صحيحة من أجل كل زوج A_1 و A_2 من عناصر H، ولتكن $A \in H$. عندئذ أياً تكن $K \subseteq X$ ، وأياً يكن $\varepsilon > 0$، فإنه توجد متتالية $(A_n)_{n\geq 1}$ من عناصر H بحيث إن $K \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ ، و:

$$\mu^*(K) + \varepsilon \geq \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n)$$

وعندئذ نجد أن:

$$\mu^*(K \cap A) \leq \mu^*\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \cap A\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n \cap A)$$

و

$$\mu^*(K \cap A^c) \leq \mu^*\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \cap A^c\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n \cap A^c)$$

ومنه فإن:

$$\mu^*(K \cap A) + \mu^*(K \cap A^c) \leq$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left[\mu^*(A_n \cap A) + \mu^*(A_n \cap A^c)\right]$$

إذاً: $\mu^*(K \cap A) + \mu^*(K \cap A^c) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n)$

و استناداً إلى العلاقة (3)، وإلى المتراجحة $\mu^*(A_n) \leq \varphi(A_n)$ ، من أجل $n \geq 1$.

ينتج أن:

$$\mu^*(K \cap A) + \mu^*(K \cap A^c) \leq \mu^*(K) + \varepsilon$$

وحيث إن ε موجب كيفي، إذاً:

$$\mu^*(K)\geq\mu^*(K\cap A)+\mu^*\left(K\cap A^c\right)$$

أي أن A مجموعة قيوسة بالنسبة لـ μ^*.

d) لنفرض أن $H\subseteq\mathfrak{M}^*$ ، وأن $K\subseteq X$ ، ولنتحقق من وجود مجموعة B من $\sigma(H)$، بحيث تكون:

$$K\subseteq B \quad , \quad \mu^*(K)=\mu^*(B)$$

في الواقع، أياً يكن العدد الطبيعي $n\geq 1$ ، فإن توجد متتالية $\left(A_{n,m}\right)_{m\geq 1}$ من عناصر H بحيث إن $K\subseteq\bigcup_{m=1}^{\infty}A_{n,m}$ ، و:

$$\mu^*(K)+\frac{1}{n}\geq\sum_{m=1}^{\infty}\varphi\left(A_{n,m}\right)$$

لنضع $B_n=\bigcup_{m=1}^{\infty}A_{n,m}$ عندئذ تكون $K\subseteq B_n$ ، و $B_n\in\sigma(H)$، ويكون:

$$\mu^*(B_n)\leq\sum_{m=1}^{\infty}\mu^*\left(A_{n,m}\right)\leq\sum_{m=1}^{\infty}\varphi\left(A_{n,m}\right)$$

فإذا وضعنا $B=\bigcap_{n=1}^{\infty}B_n$، نجد أن $K\subseteq B$ و $B\in\sigma(H)$، وأن يكون:

$$\mu^*(K)\leq\mu^*(B)\leq\mu^*(B_n)\leq\mu^*(K)+\frac{1}{n} \qquad ,\forall n\geq 1$$

إذاً :

$$\mu^*(K)=\mu^*(B)$$

التمرين(١٠):

لتكن $A \subseteq \mathbb{R}$ و $\lambda = \mu =$ قياس لوبيغ على $\mathbb{R}$. برهن أن الشرط اللازم والكافي لكي تكون A مجموعة قيوسة بالنسبة لقياس لوبيغ λ ، هو أن توجد من أجل كل $\varepsilon > 0$ مجموعة مغلقة F محتواة في A ، بحيث يكون $\lambda(A - F) < \varepsilon$.

الحل: لنفرض أن A مجموعة قيوسة بالنسبة λ، عندئذ تكون A^c مجموعة قيوسة . ليكن $\varepsilon > 0$ توجد، استناداً إلى المبرهنة (٢-٥-٦) ، مجموعة مفتوحة O تحوي A^c بحيث يكون: $\lambda(O - A^c) < \varepsilon$

عندئذ تكون O^c مغلقة محتواة في A ، ويكون:

$$\lambda(A - O^c) = \lambda(O - A^c) < \varepsilon$$

بالعكس، لنفرض أنه أياً يكن $\varepsilon > 0$ فإنه توجد مجموعة مغلقة F محتواة في A بحيث يكون: $\lambda(A - F) < \varepsilon$

ولنتحقق من أن A مجموعة قيوسة بالنسبة λ، بما أن F مغلقة ومحتواة في A، إذاً F^c مفتوحة وتحوي A^c ، و:

$$\lambda^*(F^c - A^c) = \lambda^*(A - F) < \varepsilon$$

ينتج أن A^c مجموعة قيوسة بالنسبة λ، وذلك استناداً إلى المبرهنة (٢-٥-٦) ومنه فإن A مجموعة قيوسة بالنسبة λ.

التمرين(١١): لتكن $A \subseteq \mathbb{R}$ ، و لنضع:

$$\lambda^*(A) = \inf\{\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(]a_n, b_n]) : A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}]a_n, b_n]\}$$

$$= \inf\{\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) : A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}]a_n, b_n]\}$$

ولتكن : $-A = \{x : -x \in A\}$ برهن أن:

$i)$ $\lambda^*(-A) = \lambda^*(A)$

$ii)$ A تكون مجموعة قيوسة بالنسبة لـ λ ، إذا وفقط إذا كانت $(-A)$ مجموعة قيوسة بالنسبة لـ λ.

الحل:

$i)$ نعلم أن : $\lambda^*(A) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) : \bigcup_{n=1}^{\infty}]a_n, b_n[\supseteq A\right\}$

وحيث إن $A \subseteq]a_n, b_n[$ إذا وفقط إذا كان $-A \subseteq]-b_n, -a_n[$ ، إذاً:

$$\lambda^*(-A) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} (-a_n - (-b_n)) : \bigcup_{n=1}^{\infty}]-b_n, -a_n[\supseteq -A\right\}$$

$$= \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) : \bigcup_{n=1}^{\infty}]a_n, b_n[\supseteq A\right\}$$

أي أن : $\lambda^*(-A) = \lambda^*(A)$

$ii)$ لنفرض أن A مجموعة قيوسة بالنسبة لـ λ. عندئذٍ من العلاقات:

$$-K \cap A = -(K \cap (-A))$$

$$-K \cap A^c = -\left(K \cap \left(-A^c\right)\right) = -\left(K \cap (-A)^c\right)$$

ومن i) ينتج أن :

$$\lambda^*(K)=\lambda^*(-K)=\lambda^*(-K\cap A)+\lambda^*(-K\cap A^c)$$
$$=\lambda^*\left[-\left(K\cap(-A)\right)\right]+\lambda^*\left[-\left(K\cap(-A)^c\right)\right]$$
$$=\lambda^*\left(K\cap(-A)\right)+\lambda^*\left(K\cap(-A)^c\right)$$

وذلك أياً تكن $K\subseteq X$. الأمر الذي يعني أن $(-A)$ مجموعة قيوسة بالنسبة لـ λ.

بالعكس، إذا كانت $(-A)$ مجموعة قيوسة بالنسبة لـ λ، فإنه، واستناداً إلى ماتقدم ، تكون $\left(-(-A)\right)$ مجموعة قيوسة بالنسبة لـ λ، أي تكون A مجموعة قيوسة بالنسبة لـ λ.

التمرين(١٢):

ليكن $(\mathbb{R},\mathfrak{M},\mu)$ فضاء قياس، بحيث إن $\mathfrak{M}$ يحوي صف كل المجالات في $\mathbb{R}$. ولنعرف على $\mathbb{R}$ دالة F_α ، $(\alpha\in\mathbb{R})$ كما يلي:

$$F_\alpha(x)=\begin{cases}-\mu(]x,\alpha])& \text{if } x<\alpha\\ 0 & \text{if } x=\alpha\\ \mu(]x,\alpha]) & \text{if } x>\alpha\end{cases}$$

برهن أن :

i) $F_\alpha(b)-F_\alpha(a)=\mu(]a,b])$

ii) F_α دالة توزيع على $\mathbb{R}$.

الحل: i) استناداً إلى تعريف الدالة F_α ، وبعد إجراء حسابات بسيطة نجد أن :

$$F_\alpha(b)-F_\alpha(a)=\mu(]\,a,b])$$

وذلك أياً يكن $a\le b$.

ii) بما أن $\mu(]a,b]) \geq 0$ ، إذاً F_α دالة متزايدة. من جهة أخرى لدينا:

$$\lim_{b\to a+}\left[F_\alpha(b)-F_\alpha(a)\right]=\lim_{b\to a+}\mu(]a,b])$$

$$=\lim_{n\to\infty}\mu\left(\left]a,a+\frac{1}{n}\right]\right)$$

وبما أن F_α دالة حقيقية، إذاً $\mu\left(\left]a,a+\frac{1}{n}\right]\right)<\infty$ من أجل $n\geq 1$

وبالتالي فإن:

$$\lim_{n\to\infty}\mu\left(\left]a,a+\frac{1}{n}\right]\right)=\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\left]a,a+\frac{1}{n}\right]\right)$$

$$=\mu(\phi)=0$$

إذاً :

$$\lim_{b\to a+}\left[F_\alpha(b)-F_\alpha(a)\right]=0$$

أي إن F_α دالة مستمرة من اليمين على $\mathbb{R}$. ينتج مما تقدم أن F_α دالة توزيع على $\mathbb{R}$.

التمرين(١٣):

عين صف التطبيقات $f: X\to\overline{\mathbb{R}}$ ، القيوسة بالنسبة للجبر التام:

$$\mathfrak{M}=\{\phi,\mathbb{R},]-\infty,0],]0,\infty]\}$$

الحل: إذا كانت f ثابتة على $\mathbb{R}$ وتساوي α، حيث $\alpha\in\overline{\mathbb{R}}$ ، عندئذ أياً يكن $a\in\mathbb{R}$ فإن:

$$f^{-1}[a,+\infty]=\begin{cases}\mathbb{R} & ,\alpha\geq a\\ \phi & ,\alpha<a\end{cases}$$

وحيث إن $\phi, \mathbb{R} \in \mathfrak{M}$، إذاً f قيوسة. وإذا كانت f ثابتة على كل من المجالين $]-\infty, 0]$ و $]0, +\infty[$ ،حيث:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha & , x \in]-\infty, 0] \\ \beta & , x \in]0, +\infty[\end{cases}$$

وفرضنا $\alpha < \beta$، فإن:

$$f^{-1}[a, +\infty] = \begin{cases} \phi & , \quad a > \beta \\ ]0, +\infty[& , \ \alpha < a \leq \beta \\ \mathbb{R} & , \quad a \leq \alpha \end{cases}$$

وحيث إن ϕ , $\mathbb{R}$, $]0, +\infty[$ عناصر من $\mathfrak{M}$ ، إذاً f قيوسة أيضاً في هذه الحالة. أما إذا لم تكن f ثابتة على $\mathbb{R}$ أو على أي من المجالين $]-\infty, 0]$ و $]0, +\infty[$ فإنها لن تكون قيوسة، فعلى سبيل المثال، إذا فرضنا أنه توجد نقطة x_0 من المجال $]-\infty, 0]$ بحيث تكون:

$$f(x_0) = \alpha \neq f(x) \ , \ \forall x \in]-\infty, 0] - \{x_0\}$$

فإن:

$$f^{-1}(\{\alpha\}) = \{x_0\} \cup A$$

حيث: $A = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = \alpha\} \subseteq]0, +\infty]$. وعندئذ لا تكون الصورة العكسية وفق f للمجموعة البوريلية $\{\alpha\}$ عنصراً من $\mathfrak{M}$ ، الأمر الذي يعني أن f ليست قيوسة.

التمرين(١٤):

أعط مثالاً لدالتين حقيقيتين f_1 و f_2 غير قيوستين بالنسبة لقياس لوبيغ λ، بحيث تكون $f_1 . f_2$ دالة قيوسة بالنسبة لقياس لوبيغ λ.

الحل: لتكن S مجموعة غير قيوسة بالنسبة لقياس لوبيغ λ. عندئذ تكون كل من الدالتين χ_S و χ_{S^c} غير قيوسة بالنسبة لـ λ (كل منهما دالة مميزة

لمجموعة غير قيوسة بالنسبة لـــ λ) في حين إن الدالة $\chi_s \cdot \chi_{s^c}$، المساوية للدالة الصفرية على $\mathbb{R}$ ، تكون دالة قيوسة بالنسبة لقياس لوبيغ.

التمرين(١٥):

ليكن $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ فضاء قياس ولتكن f دالة قيوسة وغير سالبة. برهن أنه إذا كانت $f_n(x) = \min\{f(x), n\}$ ، $(\forall n \geq 1)$فإن:

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$$

الحل: استنادا إلى الفرض فإن $(f_n)_{n\geq 1}$متتالية متزايدة من التطبيقات (الدوال) القيوسة وغير السالبة، $f_n \leq f$ من أجل $(n = 1,2,...)$ بالإضافة إلى ذلك فإن:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \sup_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad , \forall x \in X$$

عندئذ بالاستفادة من مبرهنة لوبيغ الأولى (٤-٥)، نجد أن:

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$$

التمرين(١٦):

ليكن $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ فضاء قياس. برهن أنه إذا كانت f كمولة على X ، وكانت g دالة قيوسة ومحدودة، فإن $f \cdot g$ تكون كمولة.

الحل: يوجد استناداً إلى الفرض عدد حقيقي موجب تماماً α بحيث تكون $|g(x)| \leq \alpha$ وذلك أياً يكن $x \in X$. وعندئذ تكون $|f \cdot g| \leq \alpha |f|$.

من جهة أخرى، بما أن f دالة كمولة على X، إذاً $|f|$ كمولة أيضاً، وبالتالي فإن:

$$\int_X |f \cdot g| d\mu \leq \alpha \int_X |f| d\mu < +\infty$$

الأمر الذي يعني أن $|f \cdot g|$ كمولة، وعندئذ تكون $f \cdot g$ كمولة.

التمرين(١٧):

تحقق من أن:

$$(i \qquad \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}$$

$$(ii \qquad \int_0^{\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx \quad \text{متباعد.}$$

الحل: i) بما أن $\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x}$ موجودة، فإن التكامل $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$ متقارب في النقطة $x = 0$.

ليكن $\varepsilon > 0$ ، عندئذ من أجل كل $t > \varepsilon$ ، لدينا:

$$\int_{\varepsilon}^{t} \frac{\sin x}{x}\, dx = \int_{\varepsilon}^{t} \frac{d\left(1-\cos x\right)}{x} = \frac{1-\cos x}{x}\Big]_{\varepsilon}^{t} + \int_{\varepsilon}^{t} \frac{1-\cos x}{x^2} dx$$

وعندما يسعى ε إلى الصفر، نجد أن:

$$\int_0^{t} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{1-\cos t}{t} + \int_0^{t} \frac{1-\cos x}{x^2} dx \qquad (*)$$

وبما أن : $\left|\frac{1-\cos x}{x^2}\right| \le \frac{2}{x^2} \quad , \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$

فالتكامل $\int_0^{\infty} \frac{1-\cos x}{x^2} dx$ متقارب إطلاقاً في اللانهاية، وبالتالي إذا سعى t إلى $+\infty$ في العلاقة $(*)$ نحصل على:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{\infty} \frac{1-\cos x}{x^2} dx$$

أي أن $\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ متقارب ويساوي $\int_0^{\infty}\frac{1-\cos x}{x^2}dx$ (احسب قيمة التكامل الأخير).

ii) لدينا من أجل كل x من المجال $\left[(n-1)\pi, n\pi\right]$، حيث $(n=1,2,...)$:

$$\left|\frac{\sin x}{x}\right| \geq \frac{1}{n\pi}|\sin x|$$

ومنه فإن:

$$\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx \geq \frac{1}{n\pi}\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}|\sin x|\,dx = \frac{2}{n\pi}$$

إذاً:

$$\int_0^{n\pi}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx \geq \frac{2}{n\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

ولما كانت المتسلسلة $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ متباعدة، فإن المتتالية التي حدها العام $\int_0^{n\pi}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx$ تتباعد إلى $+\infty$ عندما يسعى n إلى $+\infty$. ينتج أن $\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ متباعد.

التمرين(١٨):

لتكن $X_1 = X_2 = \mathbb{N}$ ، وليكن $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}_2 = 2^{\mathbb{N}}$ ، وليكن كل من μ_1 و μ_2 قياس العدّ على $2^{\mathbb{N}}$. إذا كانت f معرفة على $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ كما يلي:

$$f(x_1,x_2)=\begin{cases}1+2^{-x_1} & \text{if} \quad x_1 = x_2 \\ -1-2^{-x_1} & \text{if} \quad x_1 = x_2+1 \\ 0 & \text{if} \quad \text{خلاف ذلك}\end{cases}$$

برهن أن f قيوسة، من ثمَّ احسب:

$$I_1 = \int_{\mathbb{N}}\int_{\mathbb{N}} f_{x_1} d\mu_2 d\mu_1 \quad \text{و} \quad I_2 = \int_{\mathbb{N}}\int_{\mathbb{N}} f_{x_2} d\mu_1 d\mu_2$$

ماذا تستنتج؟

الحل: من أجل البرهان على قيوسية f بالنسبة للجبر التام الجداء $2^{\mathbb{N}}\times 2^{\mathbb{N}}$، نفرض أن B مجموعة بوريلية كيفية في $\mathbb{R}$. عندئذ تكون $f^{-1}(B)$ مجموعة جزئية من $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$، إذاً فهي تكتب على الشكل $\bigcup_{i,j}\{i\}\times\{j\}$، حيث $i,j\in\mathbb{N}$. أي أنها اتحاد عدود لمستطيلات من الشكل $\{i\}\times\{j\}$، وحيث إن $\{i\},\{j\}\in 2^{\mathbb{N}}$، إذاً $f^{-1}(B)\in 2^{\mathbb{N}}\times 2^{\mathbb{N}}$.

ومنه فإن f دالة قيوسة.

من جهة أخرى، لدينا:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\mathbb{N}}\int_{\mathbb{N}} f_{x_1} d\mu_2 d\mu_1 \\ &= \int_{\mathbb{N}}\left[\left(1+2^{-x_1}\right)\mu_2\left(\{x_2\}\right)+\left(-1-2^{-x_1}\right)\mu_2\left(\{x_2\}\right)+0\right]d\mu_1 \\ &= \int_{\mathbb{N}}\left(1+2^{-x_1}-1-2^{-x_1}\right)d\mu_1 = 0 \end{aligned}$$

$$I_2 = \int_{\mathbb{N}}\int_{\mathbb{N}} f_{x_2}\, d\mu_1 d\mu_2$$

$$= \int_{\mathbb{N}} \left[\left(1+2^{-x_2}\right)\mu_1\left(\{x_1\}\right) + \left(-1-2^{-x_2-1}\right)\mu_1\left(\{x_1\}\right) + 0 \right] d\mu_2$$

$$= \int_{\mathbb{N}} \left(1+2^{-x_2}-1-2^{-x_2-1}\right) d\mu_2 = \sum_{x_2=1}^{\infty} \frac{1}{2^{x_2+1}} = \frac{1}{2}$$

أي أن $I_1 \neq I_2$

نستنتج أن شرط كون الدالة f غير سالبة أو كمولة ضروري لصحة مبرهنة فوبيني.

أهم المصطلحات العلمية

عربي – إنكليزي

أ

استمرار مطلق	Absolute Continuity
تبولوجيا	topology

ت

تابع (دالة)	Function
تطبيق	Mapping
تطبيق الإسقاط	Projection Mapping
تطبيق قيوس	Measurable Mapping
تفريق هان	Hahn Decomposition
تفريق لوبيغ	Lebesgue Decomposition
تقارب بالنسبة للقياس	Convergence in Measure
تقريباً في كل مكان (غالباً في كل مكان)	Almost everyWhere
تكامل لوبيغ	Lebesgue Integral
تكامل ستيلجس (ملحق(٣))	Stieltjes Integral
توطئة فاتو	Fatou's Lemma

ج

جبر	algebra
جبر بولياني	Boolean algebra

ج

Borel algebra	جبر بوريل
σ - algebra	جبر تام ، σ – جبر

ح

Ring	حلقة
Boolean Ring	حلقة بوليانية
Boolean σ - Ring	حلقة تامة ، σ حلقة

د

Simple Function	دالة درجية (دالة بسيطة)

ش

Caratheodory's Condition	شرط كاراتيودوري

ص

Monotone Class	صف مطرد

ف

Measurable Space	فضاء قيوس
Measure Space	فضاء مقيس
Cartesian Product	فضاءات الجداء

ق

Measure	قياس
Finitely additive Measure	قياس جمعي انتهاءً
Countably additive Measure	قياس جمعي عداً
Outer Measure	قياس خارجي

ق

Counting Measure	قياس العد
Complex Measure	قياس عقدي
Complete Measure	قياس كامل
Finite Measure	قياس منته

م

theorem	مبرهنة
Dominated Convergence theorem	مبرهنة التقارب الراجح
Monotone Convergence theorem	مبرهنة التقارب المطرد (المتزايد)
Egoroff theorem	مبرهنة إيغوروف
Radon-Nikodym theorem	مبرهنة رادون- نيكوديم
Fubini – Tonelli theorem	مبرهنة فوبيني_ تونللي
Carathéodory theorem	مبرهنة كاراثيودوري
Holder inequality	متراجحة هولدر
Minkowski	متراجحة مينكوفسكي
Convergent	متقاربة
Convergent in measure	متقاربة بالقياس
Convergent in mean	متقاربة بالوسط
Uniformly convergent	متقاربة بانتظام
Almost uniformly convergent	متقاربة بانتظام تقريباً
Convergent almost everywhere	متقاربة غالباً في كل مكان

م

Pointwise convergent	متقاربة نقطياً
Borel Set	مجموعة بوريلية
Measurable Set	مجموعة قيوسة
Neglegable Set	مجموعة مهملة
Measurable Rectangle	مستطيل قيوس
Section of Set	مقطع مجموعة
Section of Function	مقطع داله

ن

Regular Borel measure	نظامي(قياس بوريلي نظامي)
norm	نظيم

Damascus University

المراجع العلمية

• المراجع العلمية الأجنبية

1. V.I.Bogachev,
Measure Theory, Volume I, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007. ويضم هذا الجزء 1055 مرجعا

2. V.I.Bogachev,
Measure Theory, Volume II, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007. ويضم هذا الجزء 2038 مرجعا

3. M.Capiński, E.Kopp,
Measure, Integral and Probability, Springer-Verlag, 2005.

4. D.L.Cohn,
Measure Theory, Birkhäuser Boston, 1980.

5. P.R. Halmos ,
Measure Theory, Springer-Verlag, 1974.

6. J.F.C.Kingman , S.J.Taylor ,
Introduction to Measure and Probability , Cambridge University Press, 1966.

7. A.Mukherjea, K.Pothoven,
Real and Functional Analysis, Plenum Press, 1978.

8. W.Rudin,
Real and Complex Analysis, McGraw-Hill, 1987.
وقد ترجم إلى الفرنسية

9. W.Rudin,
Principles of Mathematical Analysis, McGraw-Hill, 1976. وقد ترجم إلى الفرنسية

- **المراجع العلمية العربية**

(١) إيروين كريزيك (ترجمة د.خضر الأحمد) :

المدخل إلى التحليل الدالي وتطبيقاته(الطبعة الأولى) – منشورات جامعة دمشق ١٩٨٤_١٩٨٥.

(٢) د.صلاح أحمد + د.محمد بشير قابيل :

نظرية القياس (الطبعة الثالثة) _ منشورات جامعة دمشق _ ٢٠٠٢_٢٠٠٣ م.

(٣) د. صلاح أحمد:

الاحتمالات _ منشورات جامعة دمشق _ ١٩٨١_١٩٨٢م.

(٤) د.صلاح أحمد + د.موفق دعبول + د.إلهام الحمصي :

معجم الرياضيات المعاصرة_مؤسسة الرسالة_ بيروت_1983 .

(٥) د.موفق دعبول :

تحليل (٦) _ منشورات جامعة دمشق(الطبعة الأولى) _ ١٩٨١_ ١٩٨٢م .

(٦) د.محمد صبح + د.عدنان عمورة + د.عزات قاسم :

الاحتمالات_ منشورات جامعة دمشق _ ٢٠٠٠_ ٢٠٠١ م .

(٧) د.عهد كفى :

نظرية القياس _ منشورات جامعة تشرين _ ٢٠٠٣ _٢٠٠٤م

(٨) ف.ي.سمير نوف:

(ترجمة د.القدسي+ صلاح أحمد+موفق دعبول + خضر الأحمد + أنيس كنجو)

دروس في الرياضيات العالية (الجزء الخامس من القسم الأول)

مطبوعات وزارة التعليم العالي _ ١٩٧٣م.

• للاستزادة والاطلاع

1. Adams M.,Guillemin V.
Measure theory and probability . Birkhäuser, Boston, 1996; xvi+205 pp.[3]

2. Aldaz J.M.
Borel extensions of Baire measures. Fund. Math. 1997 .V. 154 .P. 275 – 293.[131].

3. Ash R.B.
Real analysis and probability. Academic Press, New York_ London, 1972;xv+476 pp.

4. Ash R.B.
Measure, integration, and functional analysis.
Academic Press, New York _ London, 1972;xiii+284 pp.

5. Barra G. de.
Measure theory and integration.Ellis Horwood, Chichester; John Wiley & Sons, New York, 1981;239 pp. (2nd ed .: 2003).

6. Bartle R.G.
A modern theory of integration. Amer. Math. Soc.,Providence, Rhode Island, 2001; xiv+458 pp.

7.Basu A.K.

Measure theory and Probability. Prentice-Hall of India, New Delhi, 2003; 236 pp.

8.Bauer H.

Sur l'èquivalence des thèories de l'intègration selon N. Bourbakı et selon M.H. Stone.Bull.Soc.Math.France. 1957. V. .85 P. 51–75.[155]

9. Bauer H.

Measure and integration theory. Walter de Gruyter, Berlin, 2001; xvi+230 pp.;German ed.:Maß-und Integrationstheorie. Walter de Gruyter, Berlin, 1992, 2e Aufl., 260 S.;

10.Bear H.S.

A primer of Lebesgue integration. Academic Press, San Diego, California, 1995; xii+163 pp.

11.Berezansky Yu.M., Sheftel Z.G.,Us G.F.

Functional analysis . V. 1.Translated from the Russian. Birkhäuser, Basel-Boston-Berlin, 1996; xvi+423 pp.(Russian ed.: Kiev, 1990)

12. Billingsley P.

Probability and measure . 3d

1995 ; 593pp.

13. Bledsoe W.W., Wilks C.E.

On Borel product measures. Pacific J.Math 1972 .

V. 42 . P. 569 – 579.[444]

14. Dudley R.M.

Real analysis and probability. Wadsworth & Brooks,

Pacific Grove, California, 1989 ; xii+436pp.

15. Elstrodt J.

Mass-und Integrationstheorie. 4e Aufl. Springer-Verlag,

Berlin-New York, 2005 ; xvi+434S.

16. Gelbaum B.

Problems in real and complex analysis. Springer- New

York, 1992 ; x+488pp.

17. Krée P.

Intégration et théorie de la mesure. Une approche

géométrique. Cours et exercices corrigés .Ellipses, Paris,

1997 .

18. Topsøe F.

Topology and measure. Lecture Notes in Math. V. 133. Springer-Verlag, 1970; xiv+79pp.

19. Tjur T.

Probability based on Radon measures. John Wiley & Sons, Chichester, 1980; xi+232 pp.

20. Väth M.

Integration theory. A second course. World Sci., River Edge, 2002; viii+277 pp.

21. Vo-Khac Kh.

Measure, intégration, convolution,& analyse de Fourier. Interprétation dans le langage des probabilities. Ellipses, Paris, 1984; 256 pp.

22. Wang Z.Y., Klir G.J.

Fuzzy measure theory. Plenum Press, New York, 1992; x+354 pp.

اللجنة العلمية

الأستاذ الدكتور: **محمد بشير قابيل**

الأستاذ الدكتور: **محمـــد صبـــح**

الأستاذ الدكتور: **عـــزات قاســـم**

المدقق اللغوي

الدكتور أسامة اختيار

حقوق الطبع والترجمة والنشر محفوظة لمديرية الكتب والمطبوعات الجامعية