المعادلات التكاملية وحساب التحولات

لطلاب السنة الرابعة رياضيات

(شعبة التحليل الرياضي)

منشورات جامعة دمشق

كلية العلوم

المعادلات التكاملية وحساب التحولات

الدكتور

محمد مناف الحمد

أستاذ في قسم الرياضيات

الدكتور

جمال مللي

أستاذ مساعد في قسم الرياضيات

جامعة دمشق

الفهرس

الموضوع	الصفحة

الموضوع	الصفحة
١ . ٢٣ . معادلات آبل التكاملية.	٧٣
١ . ٢٤ . معادلة آبل.	٧٥
١ . ٢٥ . مثال محلول (٣).	٧٧
١ . ٢٦ . تعميم مسألة آبل.	٧٨
١ . ٢٧ . رد معادلة فولتيرا التكاملية من النوع الأول إلى النوع الثاني.	٨٠
١ . ٢٨ . مبرهنة أساسية (١).	٨١
١ . ٢٩ . مثال محلول (٤).	٨١
١ . ٢٩ . ١ . ملاحظة (معادلة فولتيرا التكاملية من النوع الثالث).	٨٢
١ . ٣٠ . ملاحظات هامة.	٨٣
١ . ٣١ . مثال محلول (٥).	٨٤
١ . ٣٢ . معادلات فولتيرا التكاملية من النوع الأول الملفوف.	٨٥
١ . ٣٣ . مثال محلول (٦).	٨٥
١ . ٣٤ . معادلات فولتيرا التكاملية من النوع الأول ذات نوى لوغاريتيمة.	٨٦
١ . ٣٥ . تمارين محلولة.	٨٨
١ . ٣٦ . تمارين غير محلولة.	١٤٦

الفصل الثاني

الموضوع	الصفحة

الموضوع	الصفحة

الموضوع	الصفحة
٢ . ٢ . ٧ . ١ . مثال محلول (٢٣).	١٩٩
٢ . ٢ . ٧ . ٢ . مثال محلول (٢٤).	١٩٩
٢ . ٢ . ٨ . معادلات أولر . لاغرانج القانونية.	٢٠٠
٢ . ٢ . ٨ . ١ . مثال محلول (٢٥).	٢٠٢
٢ . ٢ . ٨ . ٢ . مثال محلول (٢٦).	٢٠٣
٢ . ٢ . ٩ . قاعدة هاملتون.	٢٠٤
٢ . ٢ . ١٠ . مبرهنة (٤) (قاعدة هاملتون).	٢٠٥
٢ . ٢ . ١١ . ملاحظة.	٢٠٦
٢ . ٢ . ١٢ . مثال محلول (٢٧).	٢٠٧
٢ . ٢ . ١٣ . مثال محلول (٢٨).	٢٠٧
٢ . ٢ . ١٤ . مثال محلول (٢٩).	٢٠٨
٢ . ٢ . ١٥ . مثال محلول (٣٠).	٢٠٩
٢ . ٢ . ١٦ . داليات تعتمد على مشتقات ذات مراتب عليا.	٢١٠
٢ . ٢ . ١٧ . مثال محلول (٣١).	٢١٢
٢ . ٢ . ١٨ . مثال محلول (٣٢).	٢١٣
٢ . ٢ . ١٩ . مثال محلول (٣٣).	٢١٤
٢ . ٢ . ٢٠ . مثال محلول (٣٤).	٢١٥

الموضوع	الصفحة

الموضوع	الصفحة
٢ . ٣ . ٧ . مثال محلول (٤٢).	٢٣٦
٢ . ٣ . ٨ . مثال محلول (٤٣) (معادلة شرودنجر).	٢٣٧
٢ . ٣ . ٩ . المسألة العكسية.	٢٣٩
٢ . ٣ . ١٠ . مثال محلول (٤٤).	٢٤١
٢ . ٣ . ١١ . مثال محلول (٤٥).	٢٤٢
٢ . ٣ . ١٢ . تمارين غير محلولة.	٢٤٤
٢ . ٤ . مسائل التغيرات ذات نقاط أطراف متحركة.	٢٤٦
٢ . ٤ . ١ . مسائل التغيرات للدالي J[y] بنقاط أطراف متحركة.	٢٤٦
٢ . ٤ . ٢ . أبسط المسائل بنقط أطراف متحركة.	٢٤٦
٢ . ٤ . ٣ . مثال محلول (٤٦).	٢٤٨
٢ . ٤ . ٤ . ملاحظة هامة.	٢٤٨
٢ . ٤ . ٥ . مثال محلول (٤٧).	٢٤٨
٢ . ٤ . ٦ . المنحنيات الحرجة للدالي J [y] عندما تتحرك نقطتي الأطراف على منحنيين.	٢٥٠
٢ . ٤ . ٧ . ملاحظة.	٢٥٣
٢ . ٤ . ٨ . مثال محلول (٤٨).	٢٥٣
٢ . ٤ . ٩ . مثال محلول (٤٩).	٢٥٤

الموضوع	الصفحة

الموضوع	الصفحة

الموضوع	الصفحة

الموضوع	الصفحة

الموضوع	الصفحة

المقدمة

اهتممنا في هذا الكتاب بدراسة نظرية المعادلات التكاملية وحساب التحولات، التي كان ولا يزال لها أثرٌ مهمٌّ في معالجة الكثير من المسائل الرياضية والفيزيائية وحلها، وقد أُعِدَّ هذا الكتاب بحيث يكون منسجماً مع منهاج السنة الرابعة في قسم الرياضيات بكلية العلوم بجامعة دمشق، والجدير بالذكر أن فهم المقرر يستند إلى مبادئ التحليل الرياضي وإلى نظرية المعادلات التفاضلية، إضافة إلى المعلومات الأساسية في مكاملة المعادلات التفاضلية.

اعتمدنا في هذا الكتاب بتبسيط المعلومات بشكل يناسب مستوى الطالب، وأوضحنا جميع الأفكار الواردة فيه بأمثلة ملائمة ومتدرجة في الصعوبة، وأعددنا الكثير من التمرينات المحلولة وغير المحلولة في نهاية كل فصل، بغية ترسيخ المعلومات في الذهن وبهدف تذليل العقبات التي تواجه الطالب أثناء دراسة المنهاج من خلال ما استنبطناه في المحاضرات التي ألقيت على طلاب السنة الرابعة (شعبة التحليل الرياضي) خلال السنوات الأخيرة.

يتألف الكتاب من فصلين يعالج الفصل الأول المعادلات التكاملية بنوعيها فريدهولوم وفولتيرا، ويدرس الفصل الثاني حساب التحولات.

خصص الفصل الأول لدراسة المعادلات التكاملية لفريدهولوم بنوعيها الأول والثاني وتم دراسة طرائق حلها المختلفة، كما كرس هذا الفصل لدراسة المعادلات التكاملية لفولتيرا بنوعيها الأول والثاني وطرائق حلها المختلفة، وتم دراسة معادلات فولتيرا اللاخطية وجمل المعادلات التكاملية وحلها باستخدام تحويلات لابلاس.

انتقل الكتاب بعد ذلك لمعالجة الفصل الثاني وهو حساب التحولات وكما نعلم فقد اهتم حساب التفاضل والتكامل بالقيم القصوى (العظمى والصغرى) للدوال لكثرة تطبيقاتها، لكنه لا يمكن أن يعلمنا عن ماهية أقل مسافة بين نقطتين معلومتين في مستوٍ، أو أقصر مسافة بين نقطتين معلومتين على سطح معلوم أو أقل زمن يستغرقه جسيم للتحرك من نقطةٍ إلى أخرى على سطح معين، أو عن شكل المنحنى المغلق ذي المحيط المعلوم الذي يحد أكبر مساحة ممكنة ولا عن شكل المنحنى الذي ينزلق عليه جسيم في أقل زمن ممكن. وللإجابة عن تلك الأسئلة، وإيجاد فرع من الرياضيات يضع الحلول المناسبة لمثل تلك المسائل التي حل بعضها الرياضيان السويسريان يوحنا برنولي (١٦٦٧م . ١٧٤٨م) ويعقوب برنولي (١٦٥٤م . ١٧٠٥م)، وكذلك الألماني ليبنز (١٦٤٦م . ١٧١٦م)، والإنجليزي نيوتن (١٦٤٢م . ١٧٢٧م)، والفرنسي لوبيتال (١٦٦١م . ١٧٠٤م) فقد وضع السويسري أولر (١٧٠٧ . ١٧٨٣م) أساسيات هذا الفرع من التحليل الرياضي معرفاً ما يسمى الداليات Functionals «دوال من مجموعة الدوال أو من فضاء متجهي منظم إلى مجموعة الأعداد الحقيقية»، وأوجد الشرط الضروري (معادلة أو معادلات أولر) لوجود القيم القصوى التي أدت إلى حل أمثال تلك المسائل وغيرها في الميكانيكا التحليلية والمرونة، ونشر أبحاثه في هذا المجال سنة ١٧٤١م، وبعد دراسة الفرنسي لاغرانج (١٧٣٦م . ١٨١٣م) لأعمال أولر في ١٧٥٥م، توصل إلى نفس الشروط بطريقة أخرى «ولهذا السبب يسمي البعض معادلة أولر وبمعادلة أولر . لاغرانج، وأرسل ذلك إلى أولر، فأعجب بها، وسماها حساب التغيرات (حساب التحولات) التي أصبحت عنواناً لهذا الفرع من التحليل الرياضي المهتم بالقيم القصوى للداليات، والذي تطور كثيراً في الفترة الزمنية الأخيرة، واستطاع حل الكثير من المشاكل العالقة في الرياضيات والفيزياء، ووضعت شروط لازمة وكافية أخرى لوجود القيم القصوى من قبل العالم الفرنسي لوجاندر (١٧٥٢ . ١٨٣٣م)، والألمانيين [جاكوبي (١٨٠٤ . ١٨٥١م)، فايرشتراس (١٨١٥ . ١٨٩٧م)] وبعد ظهور نظرية التحكم استخدم حساب التغيرات

لاستنتاج معادلة بلمان التي قدمت أسلوباً آخراً لاشتقاق معادلة هاملتون كما استخدم حساب التغيرات من قبل العالم الرياضي الروسي بونترياجن لحساب دوال التحكم وإيجاد الشروط الضرورية للتحكم الأقصى.

ولتزويد القارئ بمقدمة بسيطة عن هذا الموضوع وبعض تطبيقاته وحاجة طلبة الجامعات إلى مرجع باللغة العربية في هذا المجال نقدم جهدنا المتواضع الذي ضم ستة فقرات تناولنا في الأولى منها الداليات وخواصها وأبسط مسائل التحولات بنقاط أطراف ثابتة، ثم مفهوم التغير للداليات التي بدأ مع كل من أولر ولاغرانج، ثم عمم في أعمال كل من الإيطالي فولتيرا (١٨٦٠م . ١٩٤٠م)، والفرنسي هادمارد (١٨٦٥م . ١٩٦٣م)، أما التغير بمفهومه الحديث فقد ظهر في أعمال الفرنسي جاتيكس، ثم تناولنا القيم القصوى للداليات وشرط أولر الضروري لوجود قيم قصوى، وتناولنا في الفقرة الثانية بعض الحالات الخاصة من معادلة أولر . لاغرانج، والداليات عديدة المتغيرات إضافة للداليات المعتمدة على مشتقات ذات رتب عليا وداليات بشروط إضافية ومعادلة هاملتون وبعض تطبيقاتها، وتناولنا في الفقرة الثالثة مسائل التغيرات بداليات ذات تكاملات متعددة والمسألة العكسية واشتقاق معادلة شرودنجر في الميكانيك الكمي (ميكانيكا الكم)، أما الفقرة الرابعة فقد خصصت لدراسة مسائل التحولات بنقاط أطراف متحركة بدءاً بأبسط المسائل ثم الداليات عديدة المتغيرات واشتقاق معادلة هاملتون . جاكوبي ودراسة بعض تطبيقاتها، ثم دراسة منحنيات القيم القصوى ذات النقاط الركنية وشروطها، وخصصت الفقرة الخامسة لدراسة الشروط اللازمة والكافية لوجود قيم قصوى لكل من معادلات لوجاندر وجاكوبي وفايرشتراس، وتناولنا في الفقرة الأخيرة مبادئ التحكم الأمثل من صياغة المسألة إلى قاعدة بلمان وتطبيقاتها والشروط الضرورية للتحكم الأقصى، ثم قاعدة القيمة القصوى وبعض تطبيقاتها.

نأمل أن نكون قد وفقنا في تقديم هذا المرجع الذي يعالج المعادلات التكاملية وحساب التحولات، وأن يستفيد منه الطلاب والباحثون، ويكون عوناً لهم على فهم هذا الموضوع، ولذلك فإننا نكون شديدي الامتنان إلى زملائنا الأعزاء من أساتذة وطلاب، إذ يتكرمون بتقديم ملاحظهم حول ما جاء فيه.

إن هذه الملاحظ ستكون عوناً لنا عند إعادة طبعه إذا استمرت الحاجة إليه.

المؤلفان

د. جمال مللي **د. محمد مناف الحمد**

الفصل الأول

المعادلات التكاملية الخطية

١ . ١ . مقدمة:

للمعادلات التكاملية أثرٌ مميز ومهمٌّ في حقول التحليل والميكانيك والفيزياء الرياضية حيث ترد كثير من مسائل القيم الحدية للفيزياء الرياضية إلى معادلات تكاملية.

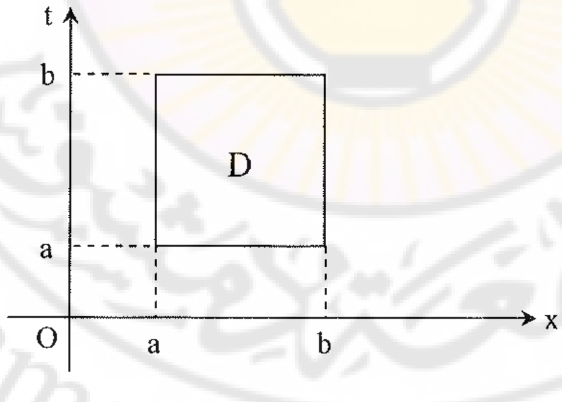
١ . ٢ . تعريف المعادلة التكاملية:

وهي المعادلة من الشكل:

$$\psi(x) = h(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\psi(t)dt \qquad (1)$$

إن $[a, b]$ هنا هي فترة معطاة، و $\psi(x)$ دالة على $[a, b]$ وهي مجهولة. λ عدد حقيقي أو عقدي، كما أن $h(x)$ هي دالة معطاة على $[a, b]$.

إن النواة $k(x, t)$ للمعادلة هي دالة معرفة على المربع $D = [a, b] \times [a, b]$، انظر الشكل (١ . ١).



ساحة التعريف D للنواة k في المعادلة التكاملية (١) في حالة عددين موجبين a و b.

الشكل (١ . ١)

يمكن كتابة المعادلة التكاملية (١) بالشكل:

$$L\,[\psi(x)] = h\,(x)$$

بفرض أن L مؤثر تكاملي خطي مناسب.

إذا كان A_1 و A_2 ثابتين كيفيين فإن:

$$L[A_1\,\psi_1(x) + A_2\,\psi_2(x)] = A_1\,L\,[\psi_1(x)] + A_2\,L\,[\psi_2(x)]$$

يقال عن المعادلة التكاملية إنها خطية إذا كانت العمليات التي تخضع لها الدالة المجهولة في المعادلة هي عمليات خطية، فالمعادلة التكاملية (١) خطية أما المعادلة:

$$\psi(x) - \lambda \int_0^{2\pi} k(x,t)[\psi(t)]^2\,dt = 0$$

فليست خطية.

لنلاحظ أن الدوال $h(x), \psi(x), k(x, t)$ هي دوال حقيقية أو عقدية، إنما t, x متغيران حقيقيان.

١ . ٣ . تعريف (١):

نقول عن الدالة ψ إنها كمولة تربيعياً على المجال المغلق $[a, b]$ إذا تحقق الشرط التالي:

$$\int_a^b |\psi(t)|^2\,dt < \infty \qquad (2)$$

١ . ٤ . تعريف (٢):

نقول عن النواة $k(x,t)$ إنها كمولة تربيعياً على المربع $D(a \le x \le b,\ a \le t \le b)$ إذا تحققت الشروط التالية:

$$\int_a^b\int_a^b |k(x,t)|^2\,dx\,dt < \infty \qquad (3)$$

$$\int_a^b |k(x,t)|^2 dt < \infty; \forall x \in [a,b] \qquad (4)$$

$$\int_a^b |k(x,t)|^2 dx < \infty; \forall t \in [a,b] \qquad (5)$$

١ . ٥ . الأنواع الرئيسية للمعادلات التكاملية الخطية:

(آ) . **معادلات فريدهولم الخطية من النوع الثاني**: وهي معادلات من الشكل:

$$\psi(x) = h(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\psi(t)dt \qquad (6)$$

إذا كان $h(x) = 0$ فإننا نسمي المعادلة (6) بمعادلة فريدهولم المتجانسة المقابلة لـ (6).

(ب) . **معادلات فولتيرا الخطية من النوع الثاني**: وهي معادلات من الشكل:

$$\psi(x) = h(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)\psi(t)dt \qquad (7)$$

يجدر بنا الانتباه إلى أن الحد الأعلى للتكامل في المعادلة (7) متحول في حين يكون حدا التعامل في (6) ثابتتين.

وكذلك يجب الانتباه إلى أن النواة $k\,(x, t)$ تتمتع بالصفة التناظرية أي إن:

$$k\,(x, t) = k\,(t, x)$$

١ . ٦ . حل معادلة فريدهولم التكاملية الخطية (الحالة العامة):

سنبين باستخدام طريقة التقريبات المتتالية الوصول إلى حل لمعادلة فريدهولم التكاملية فارضين أن كلاً من الدالتين $h(x)$ و $k\,(x,t)$ كمولة تربيعياً. لنعوض في الطرف الأيمن من (6) $\psi(t) = 0$ عندئذ نحصل على التقريب الأول $\psi_0(x) = h(x)(8)$.

نعوض هذا التقريب في معادلة فريدهولم فنحصل على التقريب الثاني:

$$\psi_1(x) = h(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\psi_0(t)dt \qquad (9)$$

وعليه، فإن التقريب الثالث هو:

$$\psi_2(x) = h(x) + \lambda\int_a^b k(x,t)\left[h(t) + \lambda\int_a^b k(t,z)h(z)dz\right]dt$$

ولكن بما أن:

$$\psi_1(y) = h(y) + \lambda\int_a^b k(y,t)\psi_0(t)dt$$

فإنه حسب (9) يكون لدينا:

$$\psi_2(x) = h(x) + \lambda\int_a^b k(x,t)\psi_1(t)dt \qquad (10)$$

وهكذا نستمر... فنجد أن التقريب من المرتبة $n + 1$ يعطى بـ:

$$\psi_{n+1}(x) = h(x) + \lambda\int_a^b k(x,t)\psi_n(t)dt \qquad (11)$$

وهكذا نحصل على متتالية من الحلول $\{\psi_{n+1}(x)\}$، فإذا كانت هذه المتتالية متقاربة بانتظام على المجال المغلق $[a, b]$ عندئذ:

$$\psi_{n+1}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \psi(x)$$

ومن ثمّ:

$$\lim_{n\to\infty} \psi_{n+1}(x) = \psi(x) = h(x) + \lambda\int_a^b k(x,t)\psi(t)dt \qquad (12)$$

وهذه النهاية هي حل لمعادلة فريدهولم التكاملية.

هدفنا الآن هو إيجاد هذه النهاية وبغية هذا الأمر علينا إجراء الحسابات بالشكل التالي:

$$\psi_0(x) = h(x)$$

$$\psi_1(x) = h(x) + \lambda\int_a^b k(x,t)h(t)dt$$

$$\psi_1(x) = h(x) + \lambda\int_a^b k(x,t)\psi_0(t)dt$$

$$\psi_2(x) = h(x) + \lambda\int_a^b k(x,t)\left[h(t) + \lambda\int_a^b k(t,z)h(z)dz\right]dt$$

$$\psi_2(x) = h(x) + \lambda\int_a^b k(x,t)h(t)dt + \lambda^2\int_a^b k(x,t)\left[\int_a^b k(t,z)h(z)dz\right]dt$$

لندخل الرموز التالية:

$$k_1(x,t) = k(x,t) \qquad (13)$$

$$k_2(x,t) = \int_a^b k(x,z)k_1(z,t)dz \qquad (14)$$

$$k_3(x,t) = \int_a^b k_1(x,z)k_2(z,t)dz \qquad (15)$$

$$k_4(x,t) = \int_a^b k_1(x,z)k_3(z,t)dz \qquad (16)$$

$$K_m(x,t) = \int_a^b k_1(x,z)k_{m-1}(z,t)dz \qquad (17)$$

وبالعودة إلى عبارة $\psi_2(x)$ نجد أن:

$$\psi_2(x) = h(x) + \lambda\int_a^b k_1(x,t)h(x)dt + \lambda^2\int_a^b k_2(x,t)h(t)dt \qquad (18)$$

وذلك بعد أن غيرنا ترتيب المكاملة في الحد الثالث من الطرف الأيمن في عبارة $\psi_2(x)$ بالشكل التالي:

$$\lambda^2\int_a^b k(x,t)\left[\int_a^b k(t,z)h(z)dz\right]dt = \lambda^2\int_a^b k(x,z)\left[\int_a^b k(z,t)h(t)dt\right]dz$$

$$= \lambda^2\int_a^b\int_a^b k(x,z)k(z,t)h(t)dtdz =$$

$$= \lambda^2 \int_a^b h(t)dt \int_a^b k(x,z)k(z,t)dz$$

$$= \lambda^2 \int_a^b h(t)k_2(x,t)dt$$

بمتابعة العمل نجد أن:

$$\psi_3(x) = h(x) + \lambda \int_a^b k_1(x,t)h(t)dt + \lambda^2 \int_a^b k_2(x,t)h(t)dt +$$
$$+ \lambda^3 \int_a^b k_3(x,t)h(t)dt \qquad (19)$$

وهكذا يكون:

$$\psi_n(x) = h(x) + \sum_{m=1}^{n} \lambda^m \int_a^b k_m(x,t)h(t)dt \qquad (20)$$

نطلق على $k_m(x,t)$ النواة المكررة الـ m.

لنفرض الآن أن المتسلسلة في (20) متقاربة بانتظام وكما هو معلوم فإن التقارب المنتظم هو شرط كافٍ للانتقال إلى النهاية أي إن:

$$\psi(x) = \lim_{n\to\infty} \psi_n(x) = h(x) + \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^m \int_a^b k_m(x,t)h(t)dt \qquad (21)$$

إن المتسلسلة في الطرف الأيمن من المعادلة (21) تسمى متسلسلة نيومن.

سندرس الآن تقارب متسلسلة نيومن مستخدمين بذلك متراجحة شفارتز.

$$\left|\int_a^b k_m(x,t)h(t)dt\right|^2 \le \int_a^b |k_m(x,t)|^2 dt \cdot \int_a^b |h(t)|^2 dt \qquad (22)$$

$$\left|\int_a^b k_m(x,t)h(t)dt\right|^2 \le C_m^2 \cdot A^2 \qquad (23)$$

حيث:

$$C_m^2 = \sup_x \int_a^b |k_m(x,t)|^2 dt \qquad (24)$$

$$A^2 = \int_a^b |h(t)|^2 dt \qquad (25)$$

لدينا:

$$k_m(x,t) = \int_a^b k_1(x,z) k_{m-1}(z,t) dz$$

$$k_{m-1}(x,t) = \int_a^b k_1(x,z) k_{m-2}(z,t) dz$$

أي إن:

$$k_m(x,t) = \int_a^b \int_a^b k_1(x,z) k_1(z,y) k_{m-2}(y,t) dy dz$$

$$= \int_a^b k_{m-2}(y,t) dy \int_a^b k_1(x,z) k_1(z,y) dz =$$

$$= \int_a^b k_{m-2}(y,t) k_2(x,y) dy$$

ومنه إذا وضعنا في العلاقة السابقة المتحول z بدلاً من y لوجدنا أن:

$$k_m(x,t) = \int_a^b k_{m-2}(z,t) k_2(x,z) dz = \int_a^b k_2(x,z) k_{m-2}(z,t) dz$$

ولكن لدينا أيضاً:

$$k_m(x,t) = \int_a^b k_{m-1}(x,z) k_1(z,t) dz$$

بتطبيق متراجحة شفارتز على العلاقة الأخيرة نجد أن:

$$|k_m(x,t)|^2 \le \int_a^b |k_{m-1}(x,z)|^2 dz \cdot \int_a^b |k_1(z,t)|^2 dz$$

نكامل طرفي المتراجحة بالنسبة لـ t نحصل على:

$$\int_a^b |k_m(x,t)|^2 dt \le \int_a^b |k_{m-1}(x,z)|^2 dz \cdot \int_a^b\int_a^b |k_1(z,t)|^2 dzdt$$

أي إن:

$$\sup_x \int_a^b |k_m(x,t)|^2 dt \le \sup_x \int_a^b |k_{m-1}(x,z)|^2 dt \cdot \int_a^b\int_a^b |k_1(z,t)|^2 dzdt$$

أو:

$$C_m^2 \le C_{m-1}^2 \cdot B^2 \tag{26}$$

حيث:

$$B^2 = \int_a^b\int_a^b |k_1(z,t)|^2 dzdt \tag{27}$$

وجدنا أن:

$$\left|\int_a^b k_m(x,t)h(t)dt\right|^2 \le C_m^2 \cdot A^2$$

ومنه يكون:

$$\left|\int_a^b k_m(x,t)h(t)dt\right|^2 \le A^2B^2C_{m-1}^2 \le ..... \le A^2B^{2m-2}C_1^2 \tag{28}$$

أي إن القيمة المطلقة للحد العام لمتسلسلة نيومن يكتب بالشكل:

$$\left|\lambda^m \int_a^b k_m(x,t)h(t)dt\right| \le |\lambda|^m A \cdot B^{m-1} \cdot C_1 = \frac{A \cdot C_1}{B}\left[|\lambda| \cdot B\right]^m$$

إن المقدار $|\lambda| \cdot B$ أساس لمتسلسلة هندسية مجموعها هو $\dfrac{1}{1-|\lambda| \cdot B}$ ومنه إذا كان $|\lambda|\, B < 1$ فإن المتسلسلة تكون متقاربة وحسب اختبار فايرشتراس تكون متسلسلة نيومن متقاربة بانتظام، ومن ثمَّ فإن لمعادلة فريدهولوم حلاً يعطى بالشكل التالي:

$$\psi(x) = \lim_{n\to\infty} \psi(x) = h(x) + \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^m \int_a^b k_m(x,t)h(t)dt \tag{29}$$

وذلك لأجل كل قيمة لـ λ تحقق الشرط $|\lambda| < \frac{1}{B}$.

١ . ٧ . مبرهنة (١):

إن حل معادلة فريدهولوم التكاملية الخطية (1) إن وجد وحيد.

البرهان: لنفرض الآن أن لـ (1) حلين هما $\psi_1(x)$ و $\psi_2(x)$ أي إن:

$$\psi_1(x) = h(x) + \lambda\int_a^b k(x,t)\psi_1(t)dt$$

$$\psi_2(x) = h(x) + \lambda\int_a^b k(x,t)\psi_2(t)dt$$

وبالطرح وبفرض أن $\psi_1(x) - \psi_2(x) = \psi_0(x)$ نحصل على:

$$\psi_0(x) = \lambda \int_a^b k(x,t)\psi_0(t)dt$$

نطبق متراجحة شفارتز على هذه المعادلة فنجد أن:

$$|\psi_0(x)|^2 \leq |\lambda|^2\int_a^b |k(x,t)|^2 dt\int_a^b |\psi_0(t)|^2 dt$$

نكامل طرفي المتراجحة الأخيرة بالنسبة لـ x فنجد:

$$\int_a^b |\psi_0(x)|^2 dx \leq |\lambda|^2\int_a^b\int_a^b |k(x,t)|^2 dxdt\int_a^b |\psi_0(t)|^2 dt$$

أو:

$$\int_a^b |\psi_0(x)|^2 dx \leq |\lambda|^2 \cdot B^2 \cdot \int_a^b |\psi_0(t)|^2 dt$$

لنعوض في الطرف الأيمن كل t بـ x فنجد:

$$\int_a^b |\psi_0(x)|^2 dx \leq |\lambda|^2 \cdot B^2 \cdot \int_a^b |\psi_0(x)|^2 dx$$

أي إن:

$$\left(1-|\lambda|^2 \cdot B^2\right)\int_a^b |\psi_0(x)|^2 dx \le 0 \qquad (30)$$

ولكن بما أن:

$$|\lambda|\, B < 1$$

فإننا نجد:

$$\psi_0(x) \equiv 0 \qquad \forall\, x \in [a, b]$$

وهذا يعني أن:

$$\psi_1(x) = \psi_2(x)$$

وذلك بفرض أن $\psi_1(x)$ و $\psi_2(x)$ دالتان مستمرتان على المجال المغلق $[a, b]$.

١ . ٨ . النواة الحالة:

لننظر الآن إلى المتسلسلة:

$$k_1(x, t) + \lambda\, k_2(x, t) + \lambda^2 k_3(x,t) + \ldots + \lambda^{m-1} k_m(x,t) + \ldots. \qquad (31)$$

لنرمز لمجموع المتسلسلة (31) بالرمز $R\ (x,\ t,\ \lambda)$. إن هذه الدالة R هي متسلسلة قوى في λ وهي دالة تحليلية وتسمى النواة الحالة لـ $k\ (x,\ t)$.

$$R(x,t,\lambda) = k_1(x,t)+\lambda k_2(x,t)+\lambda^2 k_3(x,t)+\ldots+\lambda^{m-1}k_m(x,t)+\ldots \qquad (32)$$

نعلم أن:

$$k_m(x,t) = \int_a^b k_{m-1}(x,z)k_1(z,t)dz$$

بتطبيق متراجحة شفارتز:

$$|k_m(x,t)|^2 \le \int_a^b |k_{m-1}(x,z)|^2 dz \cdot \int_a^b |k_1(z,t)|^2 dz \qquad (33)$$

إذا فرضنا أن:

$$C_0^2 = \sup_x \int_a^b |k_1(z,t)|^2 dz \qquad (34)$$

ومنه بالعودة إلى العلاقة (33) نجد:

$$\left|k_m(x,t)\right|^2 \leq C_{m-1}^2 \cdot C_0^2 \qquad (35)$$

ولكن وجدنا سابقاً أن:

$$C_m^2 \leq C_{m-1}^2 \cdot B^2 \leq C_{m-2}^2 B^4 \leq \ldots \leq C_1^2 \cdot B^{2m-2}$$

ومنه نجد أن:

$$C_{m-1}^2 \cdot B^2 \leq C_1^2 \cdot B^{2(m-1)} \qquad (36)$$

$$C_{m-1}^2 \leq C_1^2 \cdot B^{2(m-2)}$$

وذلك بالتقسيم على B^2 وعليه يكون:

$$\left|k_m(x,t)\right|^2 \leq C_0^2 \cdot C_1^2 \cdot B^{2m-4}$$

أو بجذر الطرفين:

$$\left|k_m(x,t)\right| \leq C_0 \cdot C_1 \cdot B^{m-2} \qquad (37)$$

لنأخذ القيمة المطلقة للحد العام للنواة الحالة:

$$\left|\lambda^{m-1} k_m(x,t)\right| \leq \left|\lambda\right|^{m-1} C_0 \cdot C_1 \cdot B^{m-2} =$$

$$= \frac{C_1 \cdot C_0}{B} \left[\left|\lambda\right| \cdot B\right]^{m-1}$$

إن $[|\lambda|.B]^{m-1}$ تمثل حداً عاماً لمتسلسلة هندسية أساسها $|\lambda|B$ وتكون متقاربة ضمن الشرط $|\lambda| < \frac{1}{B}$ أي إن المتسلسلة السابقة هي متسلسلة متقاربة بانتظام حسب اختبار فايرشتراس.

بكلام أوضح: إن المتسلسلة السابقة متقاربة إذا كان $|\lambda| < \frac{1}{B}$ أي في القرص: $D\left(0, \frac{1}{B}\right)$ ومن ثمّ فإن $R(x, t, \lambda)$ تمثل دالة تحليلية في القرص المذكور.

ملاحظة: إن استخدام النواة الحالة أو النواة المتكررة لحل المعادلة التكاملية يكون في القرص $|\lambda| < \frac{1}{B}$ وهذا القرص يقع في المستوي الذي مركزه الصفر ونصف قطره $\frac{1}{B}$، ويمكننا بالتمديد التحليلي إيجاد قرص أوسع ما يمكن، وذلك لأن التمديد التحليلي للحل هو حل أيضاً.

١ . ٩ . استنتاج صيغ الحل للمعادلات التكاملية:

نعلم أن:

$$R(x, t, \lambda) = k(x,t) + \lambda k_2(x,t) + \lambda^2 k_3(x,t) + \ldots + \lambda^{m-1} k_m(x,t) + \ldots$$

لنضرب طرفي العلاقة الأخيرة بـ $k(z,x)$ فنحصل على:

$$k(z,x)\, R(x, t, \lambda) = k(z,x)\, k(x,t) + \lambda\, k(z,x)\, k_2(x,t) + \lambda^2\, k(z,x).$$
$$.k_3(x,t) + \ldots + \lambda^{m-1}\, k(z,x)\, k_m(x,t) + \ldots$$

ولنكامل طرفي العلاقة السابقة بالنسبة لـ x ونضرب بـ λ فنجد:

$$\lambda\int_a^b k(z,x)R(x,t,\lambda)dx = \lambda\int_a^b k(z,x)k(x,t)dx + \lambda^2\int_a^b k(z,x)k_2(x,t)dx$$

$$+\lambda^3\int_a^b k(z,x)k_3(x,t)dx + \ldots + \lambda^m\int_a^b k(z,x)k_m(x,t)dx + \ldots$$

أي إن:

$$\lambda\int_a^b k(z,x)R(x,t,\lambda)dx = \lambda k_2(z,t) + \lambda^2 k_3(z,t) + \lambda^3 k_4(z,t)$$

$$+ \ldots + \lambda^m k_{m+1}(z,t) + \ldots$$

أو:

$$\lambda\int_a^b k(z,x)R(x,t,\lambda)dx = R(z,t,\lambda) - k(z,t)$$

ومن هنا يكون:

$$R(z,t,\lambda) = k(z,t) + \lambda\int_a^b k(z,x)R(x,t,\lambda)dx$$

أو: بتعويض: $x \to z$، و $z \to x$ فنحصل على:

$$R(x,t,\lambda) = k(x,t) + \lambda\int_a^b k(x,z)R(x,t,\lambda)dz \qquad (38)$$

المعادلة (38) تمثل معادلة تكاملية من نمط معادلة فريدهولوم (t يلعب دور الوسيط).

ويمكن للقارئ أن يبرهن (بشكل مشابه) على صحة العلاقة التالية:

$$R(x,t,\lambda) = k(x,t) + \lambda\int_a^b k(z,t)R(x,z,\lambda)dz \qquad (39)$$

لنوجد الآن صيغة حل معادلة فريدهولوم التكاملية باستخدام النواة الحالة.

نعلم أن:

$$\psi(x) = h(x) + \lambda\int_a^b k(x,t)\psi(t)dt$$

ومنه يمكن كتابة المعادلة السابقة على الشكل التالي:

$$\frac{\psi(x) - h(x)}{\lambda} = \int_a^b k(x,t)\psi(t)dt \qquad (40)$$

نعوض (39) في (40) فنحصل على:

$$\frac{\psi(x) - h(x)}{\lambda} = \int_a^b \left[R(x,t,\lambda) - \lambda\int_a^b k(z,t)R(x,z,\lambda).dz \right]\psi(t)dt$$

$$= \int_a^b R(x,t,\lambda)\psi(t)dt - \lambda\int_a^b\int_a^b k(z,t)R(x,z,\lambda)\psi(t).dz.dt$$

وبحسب (40) نجد:

$$= \int_a^b R(x,t,\lambda)\psi(t)dt - \lambda\int_a^b R(x,z,\lambda)\left[\frac{\psi(z) - h(z)}{\lambda}\right]dz$$

$$= \int_a^b R(x,t,\lambda)\psi(t)dt - \int_a^b R(x,z,\lambda)\psi(z)dz + \int_a^b R(x,z,\lambda)h(z)dz$$

لنبدل في الحد الأول بالطرف الأيمن كل t بـ z فنحصل على:

$$\frac{\psi(x)-h(x)}{\lambda} = \int_a^b R(x,z,\lambda)\psi(z)dz - \int_a^b R(x,z,\lambda)\psi(z)dz$$

$$+ \int_a^b R(x,z,\lambda)h(z)dz$$

$$= \int_a^b R(x,z,\lambda)h(z)dz$$

من هنا يكون:

$$\psi(x) = h(x) + \lambda\int_a^b R(x,z,\lambda)h(z)dz$$

لنعوض في الأخيرة كل z بـ t فنحصل على:

$$\psi(x) = h(x) + \lambda\int_a^b R(x,t,\lambda)h(t)dt \qquad (41)$$

إن المعادلة (41) تمثل صيغة الحل باستخدام النواة الحالة، بعبارة أخرى: ليس لمعادلة فريد هولوم المفروضة سوى الحل (41) وبالعكس إن الدالة $\psi(x)$ المعطاة بـ (41) هي حل لمعادلة فريدهولوم وذلك لأن:

$$\int_a^b k(x,z)\psi(z)dz = \int_a^b k(x,z)h(z)dz + \lambda\int_a^b\int_a^b k(x,z)R(z,t,\lambda)h(z)dzdt$$

وبالاستفادة من (38) نجد:

$$\int_a^b k(x,z)\psi(z)dz = \int_a^b R(x,t,\lambda)h(t)dt$$

ومن هنا يكون:

$$\psi(x) = h(x) + \lambda\int_a^b k(x,z)\psi(z)dz \qquad (42)$$

وهذا ما يراد برهانه.

ملحوظة مهمة: يجدر بنا الانتباه إلى أن الحل المعطى وفق الصيغة (41) لا يختلف عن الحل المعطى وفق الصيغة (21). ويمكن التأكد من ذلك مباشرة بالمقارنة وإجراء الحسابات. فنحسب أولاً التكامل:

$$\int_a^b R(x,t,\lambda)h(t)dt$$

وذلك بعد تعويض الدالة الحالة بالمتسلسلة المعطاة بالصيغة (31)، والمكاملة حداً حداً فنحصل بذلك على المطلوب.

١ . ١٠ . حل معادلة فريدهولم التكاملية ذات النواة المتردية (المتحللة أو المتفسخة):

إذا أمكن كتابة النواة $k(x, t)$ على الشكل التالي:

$$k(x,t) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x) b_k(t) \qquad (43)$$

حيث: $a_1(x), \dots, a_n(x)$ دوال مستقلة خطياً.

و $b_1(t), \dots, b_n(t)$ دوال مستقلة خطياً كذلك.

بينما $k(x,t)$ كمولة تربيعياً على المربع $D\ (a \le x \le b,\ a \le t \le b)$.

عندئذ نسمي النواة $k\ (x,t)$ نواة متردية.

فمثلاً إن النواة:

$$k\ (x,t) = x \ln t - t \ln x$$

هي نواة متردية لأنه أمكن كتابتها على شكل مجموع عدد منته من الحدود يتكون كل حد منها من جداء مضروبين أحدهما تابع لـ x والآخر تابع لـ t أي إن:

$$a_1(x) = x\ ,\ b_1(t) = \ln t$$
$$a_2(x) = \ln x\ ;\ b_2\ (t) = -t$$

لنعوض (43) في (6) فنجد:

$$\psi(x) = h(x) + \lambda \int_a^b \left(\sum_{k=1}^{n} a_k(x) b_k(t) \right) \psi(t) dt$$

$$\psi(x) = h(x) + \lambda \sum_{k=1}^{n} a_k(x) \int_a^b b_k(t) \psi(t) dt \qquad (44)$$

لنرمز بـ:

$$c_k = \int_a^b b_k(t) \psi(t) dt; (k = \overline{1,n}) \qquad (45)$$

عندئذ (44) تكتب بالشكل:

$$\psi(x) = h(x) + \lambda \sum_{k=1}^{n} c_k a_k(x) \qquad (46)$$

حيث c_k ثوابت غير معلومة (هذا يعني أن $\psi(x)$ دالة مجهولة).

وبهذه الطريقة، فإن حل المعادلة التكاملية ذات النواة المتردية يؤول إلى إيجاد الثوابت c_k.

لدينا:

$$\psi(t) = h(t) + \lambda \sum_{k=1}^{n} c_k a_k(t) \qquad (47)$$

نعوض (47) في (45) نحصل على:

$$c_k = \int_a^b b_k(t) \left[h(t) + \lambda \sum_{m=1}^{n} c_m a_m(t) \right] dt \qquad (k = \overline{1,n})$$

$$c_k = \int_a^b b_k(t) h(t) dt + \lambda \int_a^b b_k(t) \sum_{m=1}^{n} c_m a_m(t) dt$$

$$c_k = \int_a^b b_k(t) h(t) dt + \lambda \sum_{m=1}^{n} c_m \int_a^b b_k(t) a_m(t) dt \qquad (48)$$

لندخل الفرضيات التالية:

$$h_k = \int_a^b b_k(t) h(t) dt$$

$$a_{km} = \int_a^b b_k(t) a_m(t) dt \qquad (k = \overline{1,n}, m = \overline{1,n}) \qquad (50)$$

عندئذ نحصل على:
$$c_k = h_k + \lambda \sum_{m=1}^{n} c_m a_{km} \qquad (k = \overline{1,n})$$

$$c_m = h_m + \lambda \sum_{k=1}^{n} c_k a_{mk} \qquad ; \ (m = \overline{1,n})$$

أو بالشكل:

$$c_m - \lambda \sum_{k=1}^{n} a_{mk} c_k = h_m \qquad (m = \overline{1,n}) \qquad (51)$$

العلاقة الأخيرة يمكن كتابتها بالشكل التالي:

$$(1 - \lambda a_{11})\, c_1 - \lambda\, a_{12} c_2 - \ldots - \lambda a_{1n} c_n = h_1$$
$$-\lambda\, a_{21} c_1 + (1 - \lambda a_{22})\, c_2 - \ldots - \lambda a_{2n} c_n = h_2$$

$$-\lambda a_{n1} c_1 - \lambda_{an2} c_2 - \ldots + (1 - \lambda a_{nn}) c_n = h_n$$

مستخدمين بذلك رمز دلتا كرونيكر: $\sum_{k=1}^{n} (\delta_{mk} - \lambda a_{mk}) c_k = h_m$

فمن أجل إيجاد الثوابت c_k نحصل على جملة معادلات جبرية خطية في المجاهيل c_k. إن معين الأمثال لهذه الجملة يكتب بالشكل:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda a_{11} & -\lambda a_{12} & \ldots & -\lambda a_{1n} \\ -\lambda a_{21} & 1 - \lambda a_{22} & \ldots & -\lambda a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -\lambda a_{n1} & -\lambda a_{n2} & \ldots & 1 - \lambda a_{nn} \end{vmatrix}$$

إذا كان $\Delta(\lambda) \neq 0$، عندئذ للمجموعة (51) حلٌّ وحيدٌ $c_1, c_2, \ldots, c_n$، ومن ثمَّ يوجد للمعادلة التكاملية المفروضة حل وحيد. إن حل المعادلة التكاملية (6) يحدد بالصيغة التالية:

$$\psi(x) = h(x) + \lambda \sum_{k=1}^{n} c_k a_k(x) \qquad (52)$$

حيث تحدد قيمة الثوابت $c_k(k = \overline{1,n})$ من الصيغة (45)، وفي هذه الحالة نسمي λ قيمة غير مميزة.

أما إذا كان $\Delta(\lambda) = 0$ فعندئذ لا يكون للمجموعة (51) أي حل أو يكون لها عدد غير منته من الحلول، وفي هذه الحالة نسمي λ قيمة مميزة.

١ . ١١ . حل معادلة فريدهولم المتجانسة:

إن معادلة فريدهولم المتجانسة من النوع الثاني ذات النواة المتردية تكتب بالشكل:

$$\psi(x) - \lambda \int_a^b k(x,t)\psi(t)dt = 0 \qquad (53)$$

وحل هذه المعادلة يؤول إلى حل المجموعة المتجانسة من المعادلات الجبرية التالية:

$$\sum_{m=1}^{n} (\delta_{km} - \lambda a_{km}) c_m = 0 \qquad (k = \overline{1,n}) \qquad (54)$$

حيث:
$$\delta_{km} = \begin{cases} 1 \text{ if } k = m \\ 0 \text{ if } k \neq m \end{cases}$$

إن معين الأمثال لـ (54) هو:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda a_{11} & -\lambda a_{12} & \dots. & -\lambda a_{1n} \\ -\lambda a_{21} & 1-\lambda a_{22} & \dots. & -\lambda a_{2n} \\ \dots. & \dots. & \dots. & \dots. \\ -\lambda a_{n1} & -\lambda a_{n2} & \dots. & 1-\lambda a_{nn} \end{vmatrix}$$

إذا لم تكن λ قيمة مميزة للنواة $k(x, t)$، أي إن معين الأمثال لا يساوي الصفر عندئذ يوجد هناك حل وحيد وهو $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$ (الحل الصفري) ومن ثمَّ يكون لدينا في هذه الحالة $\psi(x) = 0$.

أما إذا كانت λ قيمة مميزة للنواة $k(x, t)$، أي إن معين الأمثال يساوي الصفر عندئذ يكون لمجموعة المعادلات (54) عدد غير منته من الحلول. لنقابل كل حل بشعاع $\vec{c} = (c_1, c_2 ......, c_n)$، إن مجموعة هذه الحلول تشكل فضاءً متجهاً ويسمى بفضاء الحلول، ونعلم أن هذا الفضاء منتهي البعد وإذا رمزنا له بـ $E_{(\lambda)}$، فعندئذ يكون:

$\dim E_{(\lambda)} = P$ حيث P بعد الفضاء $E_{(\lambda)}$، أي لدينا P حلاً مستقلاً خطياً لـ (54)، وهذا يعني وجود قاعدة لفضاء الحلول تتكون من P متجهاً مستقلاً ولتكن:

$$\vec{c}^{(1)}, \vec{c}^{(2)}, ..., \vec{c}^{(P)}$$

وإن أي حل هو تركيب خطي لمتجهات القاعدة. لنوضح ذلك من خلال المثال التالي:

لنأخذ جملة المعادلات التالية:

$$\begin{aligned} c_1 - c_2 + 2c_3 &= 0 \\ 2c_1 + c_2 - c_3 &= 0 \\ -3c_1 - 3c_2 + 4c_3 &= 0 \end{aligned}$$

إن معين الأمثال لهذه الجملة:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

ومن ثمَّ يوجد حل لهذه الجملة غير الحل الصفري، ومنه:

$$\begin{aligned} c_2 &= -5c_1 \\ c_3 &= -3c_1 \\ c_1 &= -\rho \quad (\rho \text{ وسيط ما}) \end{aligned}$$

أي إن:

$$c_1 = -\rho$$

$$c_2 = 5\rho$$
$$c_3 = 3\rho$$

ومن ثمَّ فإن:

$$\vec{c} = (c_1, c_2, c_3) = (-\rho, 5\rho, 3\rho) = \rho\,(-1, 5, 3)$$

إذاً متجه القاعدة هو (3 ,5 ,1-) ومن ثمَّ بعد الفضاء هو الواحد (لأنه لدينا وسيط واحد هو ρ).

نعود الآن إلى فضاء الحلول: من (52) وبملاحظة $h(x) = 0$ نجد أن:

$$\psi(x) = \lambda \sum_{k=1}^{n} c_k a_k(x) \qquad (55)$$

إن الدوال:

$$\psi_1(x) = \lambda \sum_{k=1}^{n} c_k^{(1)} a_k(x)$$

$$\psi_2(x) = \lambda \sum_{k=1}^{n} c_k^{(2)} a_k(x)$$

$$\psi_P(x) = \lambda \sum_{k=1}^{n} c_k^{(P)} a_k(x)$$

تشكل حلولاً للمعادلة التكاملية المتجانسة الموافقة لـ (6)، فإذا كانت المتجهات $\vec{c}^{(1)}, \vec{c}^{(2)}, \dots, \vec{c}^{(P)}$ مستقلة خطياً فيما بينها فعندئذ تكون الدوال $\psi_1(x), \psi_2(x), \dots$ $\psi_P(x)$ مستقلة خطياً والعكس صحيح أيضاً، ويكون الحل العام هو تركيب خطي لهذه الحلول، أي إن:

$$\psi(x) = e_1\,\psi_1(x) + e_2\,\psi_1(x) + \dots + e_P\,\psi_P(x)$$

سنبرهن الآن على صحة ذلك: لنفرض أن المتجهات $\vec{c}^{(1)}, \vec{c}^{(2)}, \dots, \vec{c}^{(P)}$ مستقلة خطياً، ولنبرهن أن الحلول $\psi_1(x), \psi_2(x), \dots \psi_P(x)$ مستقلة خطياً كذلك.

لنفرض جدلاً أن الحلول مرتبطة خطياً عندئذ يكون:

$$\gamma_1\psi_1 + \gamma_2\psi_2 + \ldots + \gamma_P\psi_P = 0$$

حيث $\gamma_1, \gamma_2,\ldots,\gamma_P$ ليست جميعها أصفاراً، ومنه:

$$\gamma_1\lambda\sum_{k=1}^{n} c_k^{(1)} a_k(x) + \gamma_2\lambda\sum_{k=1}^{n} c_k^{(2)} a_k(x) + \ldots + \gamma_P\lambda\sum_{k=1}^{n} c_k^{(P)} a_k(x) = 0$$

$$\lambda\left[\gamma_1\sum_{k=1}^{n} c_k^{(1)} a_k(x) + \gamma_2\sum_{k=1}^{n} c_k^{(2)} a_k(x) + \ldots + \gamma_P\sum_{k=1}^{n} c_k^{(P)} a_k(x)\right] = 0$$

$$\gamma_1\left(c_1^{(1)}a_1(x) + c_2^{(1)}a_2(x) + \ldots + c_n^{(1)}a_n(x)\right) + \gamma_2\left(c_1^{(2)}a_1(x) + c_2^{(2)}a_2(x)\right.$$
$$\left. + \ldots + c_n^{(1)}a_n(x)\right) + \ldots + \gamma_P\left(c_1^{(P)}a_1(x) + c_2^{(P)}a_2(x) + \ldots + c_n^{(P)}a_n(x)\right) = 0$$

$$[\left(\gamma_1 c_1^{(1)} + \gamma_2 c_1^{(2)} + \ldots + \gamma_P c_1^{(P)}\right)a_1(x) + \left(\gamma_1 c_2^{(1)} + \gamma_2 c_2^{(2)} + \ldots + \gamma_P c_2^{(P)}\right)a_2(x) +$$
$$\ldots + \left(\gamma_1 c_n^{(1)} + \gamma_2 c_n^{(2)} + \ldots + \gamma_P c_n^{(P)}\right)a_n(x)] = 0$$

أو:

$$\left[\gamma_1 c_1^{(1)}a_1(x) + \gamma_1 c_2^{(1)}a_2(x) + \ldots + \gamma_1 c_n^{(1)}a_n(x)\right] +$$
$$+ \left[\gamma_2 c_1^{(2)}a_1(x) + \gamma_2 c_2^{(2)}a_2(x) + \ldots + \gamma_2 c_n^{(2)}a_n(x)\right] + \ldots +$$
$$+ \left[\gamma_P c_1^{(P)}a_1(x) + \gamma_P c_2^{(P)}a_2(x) + \ldots + \gamma_P c_n^{(P)}a_n(x)\right] = 0$$

فإذا فرضنا أن الدوال $a_1(x), a_2(x),\ldots, a_n(x)$ مستقلة خطياً عندئذ:

$$(\gamma_1 c_1^{(1)} + \gamma_2 c_1^{(2)} + \ldots + \gamma_P c_1^{(P)}, \gamma_1 c_2^{(1)} + \gamma_2 c_2^{(2)} + \ldots + \gamma_P c_2^{(P)}, \ldots$$
$$, \gamma_1 c_n^{(1)} + \gamma_2 c_n^{(2)} + \ldots + \gamma_P c_n^{(P)}) = 0$$

أي إن:

$$\gamma_1 c_1^{(1)} + \gamma_2 c_1^{(2)} + \ldots + \gamma_P c_1^{(P)} = 0, \gamma_1 c_2^{(1)} + \gamma_2 c_2^{(2)} + \ldots + \gamma_P c_2^{(P)} = 0$$
$$\ldots \gamma_1 c_n^{(1)} + \gamma_2 c_n^{(2)} + \ldots + \gamma_P c_n^{(P)} = 0$$

أو:

$$\gamma_1 \vec{c}^{(1)} + \gamma_2 \vec{c}^{(2)} + \ldots + \gamma_P \vec{c}^{(P)} = 0$$

وهذا يعني أن:

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \ldots = \gamma_P = 0$$

ومن ثمَّ هذا تناقض ويبرهن العكس بطريقة مشابهة تماماً.

إن حل معادلة فريدهولوم التكاملية في حالة $(h(x) \neq 0)$ و $(\Delta(\lambda) = 0)$ يجعلنا نتحدث عن المعادلة التكاملية المنقولة.

١ . ١٢ . المعادلة التكاملية المنقولة:

وهي معادلة من الشكل:

$$\varphi(x) = \ell(x) + \lambda\int_a^b k(t,x)\varphi(t)dt \qquad (56)$$

وهنا نلاحظ أن النواة في المعادلة (6) لا تختلف عن النواة في (56) سوى أن x و t تبادلا موضعيهما. فمثلاً إن المعادلة التكاملية التالية:

$$\varphi(x) = \sin x + \lambda\int_0^1 (t - x)\varphi(t)dt$$

هي منقول المعادلة التكاملية:

$$\psi(x) = x + \lambda\int_0^1 (x - t)\psi(t)dt$$

يجدر بنا الانتباه إلى أن المعادلة التكاملية المنقولة المتجانسة الموافقة لـ (56) تكتب بالشكل:

$$\varphi(x) = \lambda\int_a^b k(t,x)\varphi(t)dt \qquad (57)$$

الآن إذا كانت النواة في (56) متردية فعندئذ يكون:

$$k(t,x) = \sum_{k=1}^{n} b_k(x)a_k(t) \qquad (58)$$

لنعوض (58) في (56) فنجد:

$$\varphi(x) = \ell(x) + \lambda\int_a^b \left(\sum_{k=1}^{n} b_k(x)a_k(t)\right)\varphi(t)dt$$

$$\varphi(x) = \ell(x) + \lambda\sum_{k=1}^{n} b_k(x)\int_a^b a_k(t)\varphi(t)dt \qquad (59)$$

لنضع:

$$c_k = \int_a^b a_k(t)\varphi(t)dt \qquad (60)$$

عندئذ (59) تكتب بالشكل:

$$\varphi(x) = \ell(x) + \lambda\sum_{k=1}^{n} c_k b_k(x) \qquad (61)$$

لدينا:

$$\varphi(t) = \ell(t) + \lambda\sum_{k=1}^{n} c_k b_k(t) \qquad (61)$$

نعوض (62) في (60) فنحصل على:

$$c_k = \int_a^b a_k(t)\left[\ell(t) + \lambda\sum_{m=1}^{n} c_m b_m(t)\right]dt \qquad (k = \overline{1,n})$$

$$c_k = \int_a^b a_k(t)\ell(t)dt + \lambda\int_a^b a_k(t)\sum_{m=1}^{n} c_m b_m(t)dt$$

$$c_k = \int_a^b a_k(t)\ell(t)dt + \lambda\sum_{m=1}^{n} c_m\int_a^b a_k(t)b_m(t)dt \qquad (63)$$

لندخل الفرضيات التالية:

$$\ell_k = \int_a^b a_k(t)\ell(t)dt \qquad (k = \overline{1,n})$$

$$a_{km} = \int_a^b a_k(t)b_m(t)dt \qquad (k = \overline{1,n}, m = \overline{1,n})$$

عندئذ من (63) يكون لدينا:

$$c_k = \ell_k + \lambda \sum_{m=1}^{n} c_m a_{km}$$

أو:

$$c_m - \lambda \sum_{k=1}^{n} a_{mk} \cdot c_k = \ell_m; \qquad (k = \overline{1,n}, m = \overline{1,n}) \qquad (64)$$

إذن نستنتج أن حل المعادلة (56)، عندما تكون النواة متردية، مكافئ لحل مجموعة المعادلات (64).

وهنا نلاحظ أن معين الأمثال للمجموعة (64) يساوي معين الأمثال لـ (51)، وهذا يعني بدوره أن القيم المميزة للنواة $k\ (x, t)$ تساوي القيم المميزة للنواة $K\ (t, x)$. ينتج مما سبق أنه إذا كان للمعادلة (6) حل وحيد فإن للمعادلة (56) أيضاً حلاً وحيداً.

إذا كانت مجموعة المعادلات (64) متجانسة أي إن $\ell_m = 0$، فعندئذ يكون لجملة المعادلات:

$$\sum_{m=1}^{n} (\delta_{km} - \lambda a_{km}) c_m = 0$$

حيث:

$$\delta_{km} = \begin{cases} 1 & \text{if } k = m \\ 0 & \text{if } k \neq m \end{cases}$$

حل غير الحل الصفري، فإذا فرضنا أن $E`_{(\lambda)}$ فضاء الحل للمعادلات المنقولة فإنه يكون بعد الفضاء $E`_{(\lambda)}$ مساوياً لبعد الفضاء $E_{(\lambda)}$ حيث $E_{(\lambda)}$ فضاء الحل لجملة المعادلات التالية:

$$\sum_{m=1}^{n} (\delta_{km} - \lambda a_{km}) c_m = 0 \qquad (k = \overline{1,n})$$

فإذا فرضنا أن:

$$c^{(m)} = \vec{c}_1^{(m)}, \vec{c}_2^{(m)}, \ldots, \vec{c}_n^{(m)} \qquad (m = \overline{1,P})$$

قاعدة للفضاء $E`_\lambda$. فعندئذ يعطينا كل حل من هذه الحلول بتعويضه في المعادلة الموافقة المتجانسة (61) لنجد أن:

$$\varphi^{(m)}(x) = \lambda \sum_{k=1}^{n} c_k^{(m)} b_k(x) \qquad (m = \overline{1, P}) \qquad (65)$$

إذن لدينا حلاً $\varphi^{(m)}(x)$ للمعادلة المتجانسة الموافقة لـ (56). إن الحلول:

$$\varphi^{(1)}(x), \varphi^{(2)}(x), \dots, \varphi^{(P)}(x)$$

هي دوال مستقلة خطياً والأكثر من ذلك تشكل قاعدة لفضاء حلول هذه المعادلة.

لكن نعلم أن الشرط اللازم والكافي لحل المعادلات (51) في حالة معين الأمثال مساوٍ للصفر هو أن يكون المتجه $h = (h_1, h_2, \dots, h_n)$ متعامداً مع جميع المتجهات $\vec{c}^{(m)}$ وحيث $m = 1, 2, \dots, P$، أي إن:

$$\vec{h} \cdot \vec{c}^{(m)} = 0 \qquad (m = \overline{1, P}) \qquad (66)$$

ومنه:

$$\sum_{k=1}^{n} h_k . c_k^{(m)} = 0 \qquad (m = \overline{1, P})$$

أو:

$$\sum_{k=1}^{n} \int_a^b b_k(t) h(t) c_k^{(m)} dt = 0$$

نضرب طرفي العلاقة السابقة بـ λ فنحصل على:

$$\lambda \sum_{k=1}^{n} \int_a^b b_k(t) h(t) c_k^{(m)} dt = 0$$

ويمكن كتابتها بالشكل:

$$\int_a^b \left[\sum_{k=1}^{n} c_k^{(m)} b_k(t) \right] h(t) dt = 0$$

وبملاحظة (65) نجد أن:

$$\int_a^b \varphi^{(m)}(t)h(t)dt = 0 \quad \text{(شرط التعامد)} \qquad (m=\overline{1,P}) \qquad (67)$$

إذن إذا ما تحققت الشروط (67) عندئذ يكون للمعادلة (6) حل. سندرس الآن كيفية إيجاد هذا الحل.

لنفرض أنه يوجد حل خاص للمعادلة (6) وليكن $\psi_0(x)$. ولنجرِ التحويل:

$$\psi(x) = \psi_0(x) + \bar{\psi}_1(x)$$

عندئذ بالتعويض في (6) يكون:

$$\psi_0(x) + \bar{\psi}_1(x) = h(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\left[\psi_0(t) + \bar{\psi}_1(t)\right]dt$$

$$= h(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\psi_0(t)dt + \lambda \int_a^b k(x,t)\bar{\psi}_1(t)dt$$

$$= \psi_0(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\bar{\psi}_1(t)dt$$

أي إن:

$$\bar{\psi}_1(x) = \lambda \int_a^b k(x,t)\bar{\psi}_1(t)dt \qquad (68)$$

فنلاحظ أنها نفس المعادلة (6) ولكنها متجانسة محل ψ هو $\bar{\psi}_1$ ، إذاً الحل العام للمعادلة (6) هو حل خاص ψ_0 مضافاً إليه $\bar{\psi}_1(x)$ ، والحل العام للمعادلة (68) هو تركيب خطي لمجموعة من الحلول المستقلة خطياً $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_P$، أي إن:

$$\bar{\psi}_1 = e_1\psi_1 + e_2\psi_2 + \ldots + e_P\psi_P$$

ومنه فإن الحل العام لـ (6) يكتب بالشكل:

$$\psi = \psi_0 + e_1\psi_1 + e_2\psi_2 + \ldots + e_P\psi_P$$

وعلى ضوء ذلك فإنه يمكن صياغة مبرهنة فريدهولم بالشكل الآتي:

إذا لم تكن λ قيمة مميزة للنواة $k(x, t)$، فللمعادلة التكاملية المتجانسة ولمنقولها الحل الصفري فقط، ويكون للمعادلة (6) ولمنقولها حل وحيد. بينما إذا كانت λ قيمة مميزة للنواة $k(x, t)$ فإن للمعادلة التكاملية المتجانسة الموافقة لـ (6) حلولاً غير الحل الصفري، وهذه الحلول تشكل فضاءً ذا بعد منتهٍ كما يكون لمنقول هذه المعادلة المتجانسة كذلك حلول غير الحل الصفري، وهذه الحلول أيضاً تشكل فضاء ذا بعد منتهٍ. وإذا كانت $\psi^{(1)}, \psi^{(2)}, \ldots, \psi^{(P)}$ قاعدة لمجموعة الحل الأولى و $\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \ldots, \varphi^{(P)}$ قاعدة لمجموعة الحل الثانية، فعندئذ إن الشرط اللازم والكافي كي يكون للمعادلة (6) حل هو أن تتحقق الشروط (67)، ويكون الحل العام هو حل خاص مضافاً إليه حل عام للمعادلة المتجانسة الموافقة لها، وإذا لم تتحقق هذه الشروط فالمعادلة مستحيلة الحل.

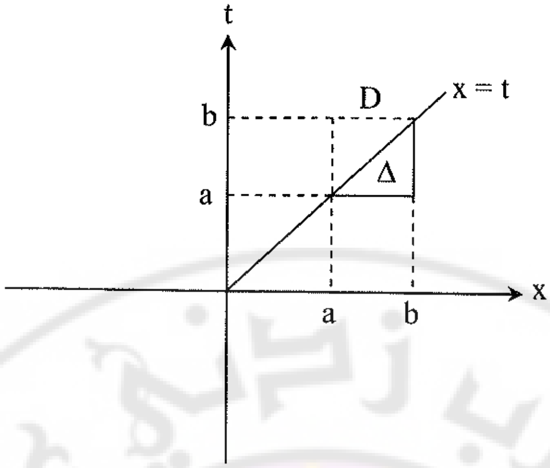
١ . ١٣ . معادلة فولتيرا التكاملية من النوع الثاني:

سنحاول في هذا البند إيجاد حل لمعادلة فولتيرا التكاملية:

$$\psi(x) - \lambda\int_a^x H(x,t)\psi(t)dt = h(x) \qquad (69)$$

فارضين أن الدالة $h(x)$ كمولة تربيعياً على المجال المغلق $[a, b]$ والنواة $H(x,t)$ مستمرة على المنطقة المثلثة Δ وعلى محيطها في المستوي xt المحددة بالمتباينات $a\leq t \leq x$، $a \leq x \leq b$. (انظر إلى الشكل (١)).

من الملائم في معادلة فولتيرا التكاملية أن نردها إلى معادلة فريدهولوم، وذلك بتعريف نواة $\overline{H}(x, t)$ بالشكل الآتي:



الشكل (١)

$$\overline{H}(x,t)=\begin{cases}H(x,t) & \text{if} \quad a\le t\le x\\ 0 & \text{if} \quad x<t<b\end{cases}$$

وهنا نلاحظ بسهولة أن النواة $\overline{H}(x, t)$ محدودة ومستمرة في المربع: $D\ (a \le x \le b,\ a \le t \le b)$ باستثناء القطر $x = t$ (وذلك لوجود نقاط انقطاع على نقاط قطر المربع D والتي تشكل مجموعة مهملة). ولذا فإنه يمكن أن نسلك أسلوب النواة الحالة للوصول إلى الحل المطلوب وعليه فإن النوى المكررة هي:

$$H(x, t) = H_1(x, t) \qquad (70)$$

$$H_2(x,t)=\int_a^b H_1(x,z)H_1(z,t)dz$$

$$H_2(x,t)=\int_a^t H_1(x,z)H_1(z,t)dz+\int_t^x H_1(x,z)H_1(z,t)dz$$

$$+\int_x^b H_1(x,z)H_1(z,t)dz$$

وعلى ضوء ما تقدم فإن التكاملين الأول والثالث معدومان، ومن ثمَّ فإن:

$$H_2(x,t)=\int_t^x H_1(x,z)H_1(z,t)dz \qquad (71)$$

وبشكل مشابه نرى أن:

$$H_3(x,t) = \int_t^x H_1(x,z)H_2(z,t)dz \qquad (72)$$

وهكذا نجد:

$$H_m(x,t) = \int_t^x H_1(x,z)H_{m-1}(z,t)dz \qquad (73)$$

لكن بما أن المثلث Δ مغلق ومحدود فهو متراص و H مستمرة على Δ فكل مستمر على متراص محدود هذا يعني أن H محدودة على Δ، وليكن مثلاً:

$$|H_1(x, t)| \le c \qquad (74)$$

وذلك حسب نظرية هاين بوريل.

ومن (71) يكون:

$$|H_2(x, t)| \le (x-t) \,.\, c^2$$

أيضاً من (72) نجد:

$$|H_3(x,t)| \le \frac{(x-t)^2}{2!} \cdot c^3$$

وهكذا بشكل مشابه نحصل على:

$$|H_m(x,t)| \le \frac{(x-t)^m}{(m-1)!} \cdot c^m \qquad (75)$$

لنفرض الآن أن (75) صحيحة من أجل m ولنبرهن صحتها من أجل m+1 كما يلي:

$$H_{m+1}(x,t) = \int_x^t H_1(x,z)H_m(z,t)dz$$

$$|H_{m+1}(x,t)| = \left|\int_x^t H_1(x,z)H_m(z,t)dz\right| \le \int_x^t |H_1(x,z)| \cdot |H_m(z,t)| dz$$

من (74) و (75) نجد:

$$\left|H_{m+1}(x,t)\right| \le \int_x^t c.c^m \cdot \frac{(z-t)^{m-1}}{(m-1)!} dz =$$

$$= \int_x^t c^{m+1} \cdot \frac{(z-t)^{m-1}}{(m-1)!} dz =$$

$$= \frac{c^{m+1}}{(m-1)!} \int_x^t (z-t)^{m-1} . d(z-t) =$$

ومن هنا يكون:

$$\left|H_{m+1}(x,t)\right| \le \frac{c^{m+1} (x-t)^m}{m!}$$

وهذا يعني أن الدستور (75) صحيح من أجل أي قيمة لـ m.

نعلم أن:

$$R(x, t, \lambda) = H_1(x,t) + \lambda H_2(x,t) + \lambda^2 H_3(x,t) + \dots +$$
$$+ \lambda^{m-1} H_m(x,t) + \dots\dots$$

وكذلك:

$$\left|H_m(x,t)\right| \le \frac{c^m}{(m-1)!} (x-t)^{m-1}$$

ومن ثمَّ:

$$\left|\lambda^{m-1} H_m(x,t)\right| \le \left|\lambda\right|^{m-1} \frac{c^m}{(m-1)!} (x-t)^{m-1}$$

$$\left|\lambda^{m-1} H_m(x,t)\right| \le \frac{c}{(m-1)!} \left|\lambda \cdot c \cdot (x-t)\right|^{m-1}$$

ومن هنا يتضح أن المتسلسلة متقاربة بانتظام في المثلث المغلق Δ، وذلك لأجل أية قيمة لـ λ، وهذا يعني أن النوة الحالة لمعادلة فولتيرا التكاملية هي متسلسلة صحيحة في λ

ومن ثمَّ مهما كانت قيمة λ ومهما كانت الدالة $h(x)$ فإنه يوجد لمعادلة فولتيرا التكاملية حل وحيد يعطى بالصيغة:

$$\psi(x) = h(x) + \lambda\int_a^x R(x,t,\lambda)h(t)dt \qquad (76)$$

١ . ١٤ . تحويل معادلة فولتيرا التكاملية إلى معادلة تفاضلية عادية:

نلفت النظر أنه يمكن تحويل معادلة فولتيرا التكاملية من النوع الثاني:

$$\psi(x) = h(x) + \lambda\int_a^x k(x,t)\psi(t)dt$$

إلى معادلة تفاضلية عادية بدالة مجهولة وحيدة ψ وذلك باشتقاقها مرتين بالنسبة لـ x ضمن شرط كون الدالتين $k(x, t)$ و $h(x)$ المستمرتين قابلتين للاشتقاق.

سنذكر بأن دستور الاشتقاق المستخدم هو:

$$\frac{d}{dx}\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,t)dt = \beta'(x)f(x,\beta(x)) - \alpha'(x)f(x,\alpha(x)) + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial f(x,t)}{\partial x}dt \quad (76)$$

حيث: $f(x, t) = k(x,t)\,\psi(t)$

سنطرح المثال الآتي للتوضيح. لنأخذ معادلة فولتيرا النظامية:

$$\psi(x) = \sin x + \int_0^x \sin(x-t)\psi(x)dt \qquad (77)$$

لنشتق هذه المعادلة مرتين متتاليتين فنجد:

$$\psi'(x) = \cos x + \int_0^x \cos(x-t)\psi(x)dt \qquad (78)$$

$$\psi''(x) = -\sin x + \psi(x) - \int_0^x \sin(x-t)\psi(x)dt \qquad (79)$$

وبحذف التكامل $\int_{0}^{x}\sin(x-t)\psi(x)dt$ من المعادلتين (79) و (77) فنحصل عندئذ على المعادلة التفاضلية:

$$\psi''(x)=0 \qquad (80)$$

أي إن:

$$\psi(x)=c_2x+c_1$$

هدفنا الآن تعيين الثوابت c_1 و c_2 من الشروط الابتدائية.

من المعادلة (77) نجد: $\psi(0)=0=c_1$

من المعادلة (78) نجد: $\psi'(0)=1=c_2$

ومن ثمَّ فإن حل مسألة كوشي (المعادلة التفاضلية (80) مقرونة بالشروط الابتدائية) يعطى بالصيغة: $\psi(x)=x$

١ . ١٥ . مفاهيم أساسية:

لتكن $g(t)$ دالة عقدية للمتحول الحقيقي t $(-\infty<t<+\infty)$.

وليكن $z=x+iy$ متحولاً عقدياً في ساحة D من المستوي العقدي z.

لننظر إلى التكامل:

$$I=\int_{0}^{\infty}g(t)e^{-zt}dt \qquad (1)$$

والمسمى بتكامل لابلاس للدالة $g(t)$. من الواضح أن التكامل (1) متعلق بالوسيط z، كما أنه، في الحالة العامة، لا يكون متقارباً من أجل جميع الدوال $g(t)$ وجميع قيم الوسيط z. فمثلاً إذا كان $\lim\limits_{t\to\infty}g(t)=A\neq 0$ و $\mathrm{Re}z<0$ فإن التكامل (1) يكون متباعداً. لذلك من الطبيعي أن نحدد أولاً صف الدوال $g(t)$ وساحة تحول الوسيط z بحيث يتقارب تكامل لابلاس.

في هذه الفقرة سنتعامل مع الدوال العقدية $g(t)$ للمتحول الحقيقي t والمحققة للشروط التالية:

آ . $g(t) \equiv 0$ من أجل $t < 0$.

ب . من أجل $t \geq 0$، الدالة $g(t)$ مستمرة جزئياً. أي إنه في كل مجال محدود من نصف المحور الحقيقي $(0, \infty)$ يمكن أن يكون للدالة عدد منته من نقاط الانقطاع التي هي من النوع الأول.

ج . مع تزايد المتحول t يمكن لطويلة الدالة $g(t)$ ($|g(t)|$) أن تتزايد إلا أنها تبقى محققة لعلاقة من الشكل:

$$|g(t)| \leq N\, e^{xt} \; ; \; N > 0 \; ; \; x \geq 0 \qquad (2)$$

نسمي الدالة العقدية $g(t)$ والحققة للشروط (آ) و (ب) و (ج) أصلاً. في كثير من الأحيان تكون النقطة $t = 0$ نقطة انقطاع من النوع الأول للدالة $g(t)$ وبما أننا مستقبلاً سنتعامل مع القيمة $g(0)$ فإننا نفهم هذه القيمة بمفهوم النهاية عندما تنتهي t إلى الصفر من اليمين. أي إن:

$$g(0) = \lim_{t \to +0} g(t)$$

وبالمثل إذا كانت $t = 0$ نقطة انقطاع من النوع الأول لـ $g^{(n)}(t)$ $(n = 1,2,..)$ فإن:

$$g^{(n)}(0) = \lim_{t \to +0} g^{(n)}(t) \qquad (n = 1,2,....)$$

سنستعرض الآن أمثلة من الدوال المحققة للشرط (2):

١ . جميع الدوال المحدودة تحقق الشرط (2) ويكون من أجلها $x = 0$ وذلك لأن:

$$|g(t)| \leq N$$

٢ . الدوال من الشكل: $g(t) = t^P$ حيث $\mathrm{Re}P = \alpha > 0$ ليكون من أجلها أيضاً $x=0$. وذلك لأن طويلة أي دالة من هذه الدوال تتزايد بشكل أبطأ من الدالة النيبرية $e^{\varepsilon t}$ حيث ε عدد موجب وصغير بقدر كافٍ وهذا ينتج من العلاقة:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{|t^p|}{e^{\varepsilon t}}=\lim_{t\to\infty}\frac{t^{\alpha}}{e^{\varepsilon t}}=0$$

وهذا بدوره يعني أن الدالة $\frac{|t^P|}{e^{\varepsilon t}}$ محدودة في المجال $0 \le t \le \infty$ ومن ثمَّ فإنه من أجل جميع قيم $0 \le t$ تتحقق العلاقة:

$$\frac{|t^P|}{e^{\varepsilon t}} < A_1 \quad \text{أو} \quad |t^P| < A_1 e^{\varepsilon t}$$

حيث A_1 عدد موجب ما و ε موجب وصغير بقدر كافٍ.

لنلاحظ أنه من أجل $\operatorname{Re} P = \alpha < 0$ فإن العلاقة (2) تكون غير محققة.

وكمثال على دالة لا تتحقق من أجلها العلاقة (2) نذكر الدالة $g(t)=e^{t^2}$.

١ . ١٦ . خواص الأصول:

١ . **الخاصة الأولى**: إذا كان $g(t)$ أصلاً فإن $|g(t)|$ يكون أصلاً محققاً للعلاقة (2) من أجل نفس العدد x.

٢ . **الخاصة الثانية**: إذا كانت الدوال $g_1(t)$ $g_2(t)$,..., $g_n(t)$ أصولاً ومحققة للعلاقة (2) من أجل x_1، x_2، ...، x_n فإن الدالة:

$$g(t) = e_1g_1(t) + e_2g_2(t) + \ldots + e_ng_n(t)$$

حيث: ($e_1, e_2, \ldots, e_n$ ثوابت حقيقية أو عقدية) تكون أصلاً ومحققة للعلاقة (2) من أجل العدد x الأكبر بين الأعداد x_1، x_2، ...، x_n.

٣ . **الخاصة الثالثة**: إذا كانت الدالة $g(t)$ أصلاً فإن الدالة:

$$\psi(t)=\int_0^t g(u)du$$

تكون أصلاً في المجال $0 \le t < \infty$ وتحقق العلاقة (2) من أجل العدد x_0 $(x_0 > x)$.

البرهان: حسب الفرض $g(t)$ أصلاً، هذا يعني أنه في كل مجال مغلق ومحدود من المجال $[0, \infty]$ لا يوجد أكثر من عدد منته من نقاط الانقطاع من النوع الأول لهذه الدالة ومن ثمّ فإن التكامل $\int_0^t g(u)du$ يكون موجوداً من أجل جميع قيم $t > 0$. وبما أن $|g(t)|$ أصل استناداً إلى الخاصة الأولى من خواص الأصول، فإن التكامل $\int_0^t |g(u)|du$ يكون موجوداً. أي إن الأصل $g(t)$ يكون قابلاً للاستكمال إطلاقاً على كل مجال مغلق $[0 \le t \le T]$; $T > 0$ وهذا بدوره يبرهن على استمرار الدالة $\int_0^t |g(u)|du$ من أجل $t > 0$ أي إنه من أجل أي عدد $\varepsilon > 0$ يوجد عدد $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ بحيث إنه من أجل $|\Delta t| < \delta$ يكون:

$$\left|\int_0^{t+\Delta t}|g(u)|du - \int_0^t |g(u)|du\right| = \left|\int_0^{t+\Delta t}|g(u)|du\right| < \varepsilon$$

ومن ثمّ يكون:

$$\left|\int_0^{t+\Delta t}|g(u)|du - \int_0^t |g(u)|du\right| = \left|\int_t^{t+\Delta t}|g(u)|du\right| \le \left|\int_t^{t+\Delta t}|g(u)|du\right| < \varepsilon$$

وذلك من أجل $|\Delta t| < \delta$ وهذا يعني بدوره أن الدالة:

$$\psi(t) = \int_0^t g(u)du$$

مستمرة من أجل جميع $t \ge 0$.

لنبرهن الآن على أن الدالة $\psi(t)$ تحقق علاقة مماثلة لـ (2) في المجال $(0 \le t < \infty)$.

لنفرض أولاً أن قيم الدالة $g(t)$ حقيقية وليست سالبة أي إن $g(t) \ge 0$. عندئذ يكون:

$$\psi(t)e^{-xt} = e^{-xt}\int_0^t g(u)du = e^{-(x-x_1)t}\int_0^t g(u)e^{-xt}du <$$

$$< e^{-(x-x_1)t}\int_0^t g(u)e^{-x_1u}du \qquad (3)$$

ولنفرض أن الأصل $0 \le g(u)$ يحقق العلاقة (2) من أجل x_0 أي إن:

$$g(u) \le N e^{x_0 \cdot u} \qquad (N > 0)$$

لنضرب طرفي المتراجحة الأخيرة بـ e^{-x_1u} $(x_1 > x_0)$ فنجد:

$$g(u)e^{-x_1u} \le Ne^{-x_1u}e^{x_0u} = Ne^{-(x_1-x_0)u} \qquad (4)$$

لكن نعلم أن:

$$\int_0^\infty Ne^{-(x_1-x_0)u}du = \frac{N}{x_1 - x_0} \qquad (x_1 > x_0)$$

وبملاحظة المتراجحة (4) ينتج أن التكامل $\int_0^\infty g(u)e^{-x_1 \cdot u}du$ متقاربة من أجل $x_0 < x_1$.

الآن لنفرض أن:

$$\int_0^\infty g(u)e^{-x_1 \cdot u}du = N_1 \qquad (N_1 > 0)$$

واستناداً إلى المتراجحة (3) يكون:

$$\psi(t) < N_1 e^{x_1t} \qquad (N_1 > 0 ; 0 \le t < \infty)$$

لتكن الآن $g(t)$ دالة عقدية. بما أن:

$$|\psi(t)| \le \int_0^t |g(u)|du$$

وأن الطرف الأيمن محدود، كما برهنا أعلاه، فإنه يكون:

$$|\psi(t)| \le N_1 \ e^{x_1t} \qquad (N_1 > 0, x_1 > x_0)$$

حيث x_1 أي عدد أكبر من x_0 ومن ثمَّ فإن الدالة $\psi(t)$ تحقق المتراجحة (2) من أجل أصغر الأعداد x_0.

من الواضح أن $\psi(t) \equiv 0$ من أجل $0 > t$. وهو ما يبرهن صحة الخاصة الثالثة.

٤ . **الخاصة الرابعة**: إذا كانت الدالة $g(t)$ أصلاً فإن الدوال الآتية تكون أصولاً:

آ . الدالة $g_1(t) = g(\alpha t)\ ;\ (\alpha > 0)$ وتحقق العلاقة (2) من أجل $x_1 = \alpha x$.

ب . الدالة $g_2(t) = e^{\lambda t}\, g(t)$ (حيث λ عدد عقدي أو حقيقي) تحقق العلاقة (2) من أجل:

$$x_2 = x + \operatorname{Re}\lambda \ \text{if}\ x + \operatorname{Re}\lambda > 0$$
$$x_2 = 0 \qquad \text{if}\ x + \operatorname{Re}\lambda < 0$$

ج . الدالة المعطاة بالشكل:

$$g_3(t) = \begin{cases} 0 & \text{if}\ \ t < \tau\ \ (\tau > 0) \\ g(t-\tau) & \text{if}\ \ \ t > \tau \end{cases}$$

وتحقق العلاقة (2) من أجل $x_3 = x$.

د . الدالة $g_4(t) = t^P\, g(t)$ (P عدد حقيقي أو عقدي) وتحقق العلاقة (2) من أجل $x_4 = x$.

لنثبت صحة الخاصة الرابعة من أجل الدالة $g_4(t)$. نلاحظ أنه من أجل أي عدد حقيقي x_0 تتحقق العلاقة التالية:

$$\left|\frac{t^P g(t)}{e^{x_0 t}}\right| = \left|t^P g(t) e^{-(x_0 - x)t} e^{-xt}\right| \le t^{\operatorname{Re}P} e^{-(x_0-x)t} N e^{xt} e^{-xt} =$$
$$= N t^{\operatorname{Re}P} e^{-(x_0-x)t}$$

أي إن:

$$\left|\frac{t^P g(t)}{e^{x_0 t}}\right| < N \frac{t^{\operatorname{Re}P}}{e^{(x_0-x)t}}$$

وبملاحظة أنه من أجل $x_0 > x$ يكون:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t^{\operatorname{Re}P}}{e^{(x_0-x)t}} = 0$$

فإنه ينتج:

$$\lim_{t\to\infty}\left|\frac{t^P g(t)}{e^{x_0 t}}\right| = 0$$

ومن ثمَّ فإن التابع $\left|\frac{t^P g(t)}{e^{x_0 t}}\right|$ $(x_0 > x)$ محدود في المجال $0 \le t < \infty$ أي إن:

$$\left|\frac{t^P g(t)}{e^{x_0 t}}\right| \le N_1 \qquad (N_1 > 0)$$

من المتراجحة الأخيرة نجد أنه في جميع نقاط المجال $(0 \le t < \infty)$ تتحقق المتراجحة التالية:

$$\left|t^P g(t)\right| \le N_1 e^{x_0 t} \qquad (x_0 > x) \qquad (5)$$

وبما أن x_0 أي عدد موجب أكبر من s، فإن المتراجحة (2) تتحقق من أجل أصغر الأعداد وهو x.

بسهولة يمكن للقارئ البرهان على تحقق الشرطين آ) و ب) بالنسبة للدالة $g_4(t)$.

١ . ١٧ . تعريف الصورة:

لنفرض أن تكامل لابلاس للأصل $g(t)$ موجود من أجل قيم الوسيط $z = x + iy$ المنتمية إلى ساحة D $(z \in D)$، عندئذ يعرف التكامل (1) في الساحة D دالة عقدية $G(z)$ للمتحول العقدي z:

$$G(z) = \int_0^\infty g(t) e^{-zt} dt \qquad (6)$$

نسمي الدالة $G(z)$ بصورة الأصل $g(t)$، أو اختصاراً بالصورة كما نسمي التحويل الذي يقابل الأصل $g(t)$ بالصورة $G(z)$ بتحويل لابلاس، كما نرمز للصلة القائمة بين الدالتين $g(t)$ و $G(z)$ وفق تحويل لابلاس على الشكل التالي:

$$L[g(t)] = G(z)$$

وعلى سبيل المثال لنطرح المثالين الآتيين:

مثال (١): ليكن المطلوب إيجاد صورة الدالة $g(t) = c$ حيث $c = \text{constant}$ (حقيقي أو عقدي).

الحل:

$$L[c] = \int_0^{\infty} ce^{-zt}dt = -c \cdot \frac{e^{-zt}}{z}\Big|_0^{\infty} = \frac{c}{z}\left(1 - \lim_{t\to\infty} e^{-zt}\right)$$

بفرض أن $z = x + iy$ فنجد أن: $\left|e^{-zt}\right| = e^{-xt}$ ومن ثمَّ إذا كان $\text{Re}\, z = x > 0$ فإن $\lim_{t\to\infty} e^{-zt} = 0$ ويكون:

$$L[c] = \frac{c}{z}\ ;\ \text{Re}\, z > 0$$

وفي حالة خاصة: إذا كان $c = 1$ فإن:

$$L[1] = \frac{1}{z}\ ;\ \text{Re}\, z > 0$$

مثال (٢): أوجد صورة الدالة $g(t) = e^{\lambda t}$ حيث λ عدد حقيقي أو عقدي.

الحل: لنلاحظ أنه إذا كان $\text{Re}\, \lambda > 0$ فإن الدالة $g(t)$ تحقق العلاقة (2) من أجل $x = \text{Re}\, \lambda > 0$ وأما إذا كان $\text{Re}\, \lambda < 0$ فإن الدالة $|e^{\lambda t}|$ تكون أصلاً ومن ثمَّ $x = 0$ وهكذا نجد:

$$L[e^{\lambda t}] = \int_0^{\infty} e^{-(z-\lambda)}dt = -\frac{1}{z-\lambda} e^{-(z-\lambda)t}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{z-\lambda}(1 - \lim_{t\to\infty} e^{-(z-\lambda)t})$$

وبفرض أن $z = x + iy$، $\lambda = \alpha + i\beta$ عندئذ نجد أن:

$$\left|e^{-(z-\lambda)t}\right| = e^{-(x-\alpha)t}$$

ومن ثمَّ إذا كان $0 < \text{Re}\,(z - \lambda) = x - \alpha$ فإن $\lim\limits_{t\to\infty} e^{-(z-\lambda)t} = 0$ وعندئذ يكون:

$$L[e^{\lambda t}] = \frac{1}{z-\lambda} \quad ; \quad \text{Re}z > \text{Re}\lambda$$

من الواضح أنه إذا كانت $\text{Re}\,\lambda < 0$ فإن ساحة تعريف صورة الدالة $e^{\lambda t}$ تكون أشمل من نصف المستوي $0 < \text{Re}\,z = x$.

في حالة خاصة نجد أن:

$$L\left[e^{iwt}\right] = \frac{1}{z-iw}\,; \text{Re}z > \text{Re}(iw) = -I_m(w)$$

$$L\left[e^{-iwt}\right] = \frac{1}{z+iw} \quad ; \quad \text{Re}z > \text{Re}(-iw) = I_m w$$

حيث w عدد عقدي ما.

١ . ١٨ . الخواص الرئيسية لتحويل لابلاس:

لتكن الدالة $g(t)$ أصلاً ومحققة للعلاقة (2) من أجل $0 \le x_0$.

١ . ١٨ . ١ . مبرهنة (١):

إن تكامل لابلاس (1) للأصل $g(t)$ يتقارب إطلاقاً في نصف المستوي $\text{Re}z > x_0$، ويتقارب إطلاقاً وبانتظام في نصف المستوي $\text{Re}\,z \ge x_1 > x_0$.

البرهان:

لنفرض أن: $\text{Re}\,z = x > x_0$; $z = x + iy$ عندئذ من (1) نجد:

$$\left|\int_0^\infty g(t)e^{-zt}dt\right| \le \int_0^\infty |g(t)|\left|e^{-(x+iy)t}\right|dt \le N\int_0^\infty e^{-(x-x_0)t}dt = \frac{N}{x-x_0} \qquad (8)$$

وهو ما يبرهن على التقارب المطلق لتكامل لابلاس في نصف المستوي $\text{Re}\,z \ge x \ge x_0$ إذا كان $\text{Re}\,z = x \ge x_1 > x_0$ فإنه من أجل جميع قيم $t \ge 0$ يكون:

$$\left|g(t)e^{-zt}\right| \le Ne^{-(x_1-x_0)t} \qquad (9)$$

وبما أن:

$$\int_0^\infty \left|g(t)e^{-zt}\right|dt \le \int_0^\infty Ne^{-(x_1-x_0)t}dt = \frac{N}{x_1 - x_0}$$

فإن تكامل لابلاس يتقارب بانتظام بالنسبة للوسيط z في نصف المستوي:

$$\operatorname{Re} z = x \ge x_1 > x_0$$

١ . ١٨ . ٢ . مبرهنة (٢):

إن $G(z)$، صورة الأصل $g(t)$، بتحويل لابلاس، هي دالة تحليلية في نصف المستوي $\operatorname{Re} z > x_0$.

البرهان:

إن الدالة: $\psi(t, z) = g(t)\ e^{-zt}$ تحليلية بالنسبة لـ z في جميع نقاط المستوي العقدي z. أي إن:

$$\psi`_z(t, z) = -t\,g(t)\,e^{-zt}$$

وبالاستناد إلى العلاقة (9) نجد:

$$\left|\psi'_z(t,z)\right| = \left|-tg(t)e^{-zt}\right| \le Nte^{-(x_1-x_0)t}$$

ومن ثمَّ فإن:

$$\int_0^\infty \left|-tg(t)e^{-zt}\right|dt \le N\int_0^\infty te^{-(x_1-x_0)t}dt = \frac{N}{(x_1-x_0)^2}$$

أي إن تكامل المشتق بالنسبة لـ z متقارب بانتظام في نصف المستوي:

$$\operatorname{Re} z = x \ge x_1 > x_0$$

ومن ثمَّ فإن الدالة:

$$G(z) = \int_0^{\infty} g(t)e^{-zt}dt$$

تكون تحليلية في نصف المستوي $\text{Re } z \geq x_1 > x_0$ ومن ثمَّ في نصف المستوي $\text{Re } z > x_0$ وذلك لأن x_1 هو أي عدد محقق للمتراجحة $x_0 < x_1$.

ملاحظة: وجدنا أن الصورة $G(z)$ تكون دالة تحليلية في نصف المستوي $x_0 < \text{Re } z$ وسنرى لاحقاً. ومن أجل معظم الدوال أن ساحة تعريف الصورة (ساحة تقارب تكامل لابلاس) تكون أشمل من نصف المستوي $\text{Re } z > x_0$.

١ . ١٨ . ٣ . مبرهنة (٣):

إذا انتهت النقطة z إلى اللانهاية وبحيث $\text{Re } z = x$ ينتهي إلى اللانهاية فإنه تتحقق العلاقة التالية:

$$\lim_{\text{Re} z \to \infty} G(z) = 0 \qquad (10)$$

إن صحة هذه المبرهنة تنتج مباشرة من (8).

١ . ١٨ . ٤ . استخدام تحويلات لابلاس في حل معادلة فولتيرا التكاملية:

سنبين إمكانية استخدام تحويلات لابلاس في حل معادلة فولتيرا التكاملية من النوع الثاني:

$$\psi(t) = h(t) + \lambda\int_0^t k(t,s)\psi(s)ds \qquad (11)$$

وذلك في الحالة التي تكون فيها نواة المعادلة التكاملية $k\ (t, s)$ تابعاً للفرق بين المتحولين t و s أي إن:

$$k\ (t, s) = k\ (t - s)$$

فارضين أن الدالتين $h(t)$ و $k\ (t - s)$ يحققان شروط الأصل الواردة في الفقرة ١ . ١٥ بالنسبة لـ t وأن:

$$L\ [\psi(t)] = \psi(z)\ ;\ L\ [h(t)] = H\ (z)$$
$$L\ [k(t)] = k\ (z)$$

من (11) نجد أن:

$$e^{-zt}\psi(t)=e^{-zt}h(t)+\lambda e^{-zt}\int_0^t k(t-s)\psi(s)ds$$

أي إن:

$$\int_0^\infty e^{-zt}\psi(t)dt=\int_0^\infty h(t)e^{-zt}dt+\lambda e^{-zt}\int_0^\infty\left\{\int_0^t k(t-s)\psi(s)ds\right\}dt$$

أو:

$$L[\psi(t)]=L[h(t)]+\lambda\, k(z)\, \psi(z)$$

وهكذا يكون:

$$\psi(z)=H(z)+\lambda\, k(z)\, \psi(z)$$

أو:

$$\psi(z)=\frac{H(z)}{1-\lambda k(z)}$$

وبالانتقال إلى الأصل نجد حل معادلة فولتيرا التكاملية من النوع الثاني.

١ . ١٨ . ٥ . استخدام تحويلات لابلاس في حل المعادلات التفاضلية . التكاملية:

نسمي العلاقة التابعية من الشكل:

$$M[\psi(t)]=h(t)-\int_0^t k(t,s)N[\psi(s)]ds \qquad (12)$$

حيث $\psi(t)$ دالة مجهولة، $M[\psi(t)]$، $N[\psi(t)]$ عبارتان تفاضليتان (مؤثران تفاضليان) من المرتبة m و n على الترتيب أمثالهما في الحالة العامة تابعة للمتحول المستقل t، بمعادلة تفاضلية . تكاملية.

سنتعرض هنا للحالة التي تكون فيها العبارتان التفاضليتان خطيتين وأمثالهما ثوابت عددية، والنواة $k(t,s)$ تابع للفرق بين المتحولين t و s.

إن طريقتي تحويل لابلاس المتبعتين في حل المعادلات التفاضلية وحل المعادلات التكاملية يمكن دمجهما في حل المعادلات التفاضلية . التكاملية، وسنوضح ذلك بالأمثلة المناسبة في الفقرة القادمة (١ . ٣٥).

١ . ١٨ . ٦ . حل جملة معادلات فولتيرا التكاملية باستخدام تحويلات لابلاس:

لتكن مجموعة من المعادلات التكاملية:

$$\varphi_i(x) = f_i(x) + \sum_{j=1}^{s} \int_0^x k_{ij}(x-t)\varphi_j(t)dt \qquad i = 1,2,\ldots,5 \qquad (1)$$

لإيجاد الحل المشترك لهذه المجموعة، يمكن استخدام تحويلات لابلاس، وذلك بفرض أن التوابع $f_i(x), k_{ij}(x)$ هي توابع معلومة ومستمرة ولها تحويل لابلاس.

بتطبيق تحويل لابلاس على طرفي (1)، نحصل على مجموعة معادلات جبرية خطية بالنسبة للتوابع $\phi_j(p)$ حيث:

$$\phi_j(p) = L\,[\varphi_j(x)]$$

وبفرض:

$$F_i(p) = L\,[f_i(x)] \Rightarrow k_{ij}\,(p) = L\,[k_{ij}(x)]$$

نجد:

$$\phi_j(p) = F_i(p) + \sum_{j=1}^{s} k_{ij}(p) \cdot \phi_j(p) \qquad (2)$$

بإيجاد الحل المشترك لمجموعة المعادلات (2) وبتطبيق تحويل لابلاس العكسي على الحل المشترك نحصل على حل (1).

١ . ١٩ . معادلات فولتيرا التكاملية اللاخطية:

إن معادلات فولتيرا التكاملية اللاخطية لها الشكل:

$$y(x) = y_0 + \int_0^x F[t, y(t)]dt \qquad (3)$$

أو بشكل أعم، فإنها تأخذ الشكل:

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x F[x, t, \varphi(t)]dt \qquad (4)$$

ولحل هذا النوع من المعادلات، يمكن تطبيق طريقة التقريبات المتتالية:

• بالواقع إن حل المعادلة التفاضلية:

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y) \quad , \quad y|_{x=0} = y_0$$

يؤول إلى حل المعادلة التكاملية اللاخطية (3)، كما هو الحال في حالة المعادلة التكاملية الخطية.

سنبني حل المعادلة (4) كنهاية للمتتالية $\{\varphi_n(x)\}$ حيث يمكن اعتبار $\varphi_0(x) = f(x)$ مثلاً، أما بقية عناصر المتتالية $\varphi_k(x)$ فتحسب بشكل تتابعي من الصيغة:

$$\varphi_k(x) = f(x) + \int_0^x F[x, t, \varphi_{k-1}(t)]dt \qquad (k = 1, 2, ...) \qquad (5)$$

إذا كان $f(x)$ و $F(x,t,z)$ تابعين قابلين للمكاملة تربيعياً ويحققان الشروط:

$$|F(x,t,z_2) - F(x.t, z_1)| \leq a\ (x, t)\ |z_2 - z_1| \qquad (6)$$

$$\left| \int_0^x F[x, t, f(t)]dt \right| \leq n(x) \qquad (7)$$

حيث التابع: $a\ (x, t)$ يحقق المتراجحة:

$$\int_0^a dx \int_0^x a^2(x,t)dt \leq A^2 \quad ; \quad (0 \leq t \leq x \leq a)$$

والتابع $n\ (x)$ يحقق المتراجحة:

$$\int_0^a n^2(x)dx \leq N^2 \quad ; \quad (0 \leq t \leq x \leq a)$$

وهكذا فإن معادلة فولتيرا اللاخطية (4) تملك حلاً وحيداً $\varphi(x)\in L^2(0,a)$، وهذا الحل يُعرَّف بالعلاقة التالية:

$$\varphi(x)=\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)$$

أي إن هذا الحل يُعرَّف كنهاية للتوابع $\{\varphi_n(x)\}$ المعرفة في العلاقة (5)، وبالنسبة لـ $\varphi_0(x)$ يمكن أخذه كأي تابع في $L^2(0,a)$، (وفي الحالة الخاصة، يمكن اعتباره تابعاً مستمراً). وبحيث إن الشرط (7) محقق، ومن المفيد الإشارة إلى أن اختيار $\varphi_0(x)=0$ يُسهل إيجاد حل المعادلة التكاملية. وعلى سبيل المثال نطرح المثال التالي:

١ . ٢٠ . مثال محلول (١):

باستخدام طريقة التقريبات المتتالية، أوجد حل المعادلة التكاملية اللاخطية التالية:

$$\varphi(x)=\int_0^x \frac{1+\varphi^2(t)}{1+t^2}dt$$

باعتبار التقريبين الصفريين التاليين:

١ . $\varphi_0(x)=0$.

٢ . $\varphi_0(x)=x$.

الحل:

١ . لنأخذ التقريب من المرتبة صفر: $\varphi_0(x)=0$ عندئذ:

$$\varphi_1(x)=\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}=\arctan x$$

$$\varphi_2(x)=\int_0^x \frac{1+\arctan^2 t}{1+t^2}dt=\arctan x+\frac{1}{3}\arctan^3 x$$

$$\varphi_3(x)=\int_0^x \frac{1+\left(\arctan t+\frac{1}{3}\arctan^3 t\right)^2}{1+t^2}dt=\arctan x$$

$$+\frac{1}{3}\arctan^3 x+\frac{2}{3\times 5}\arctan^5 x+\frac{1}{7\times 9}\arctan^7 x$$

$$\varphi_4(x)=\int_0^x\frac{1+\varphi_3^2(t)}{1+t^2}dt=\arctan x+\frac{1}{3}\arctan^3 x+$$

$$+\frac{2}{3\times 5}\arctan^5 x+\frac{17}{5\times 7\times 9}\arctan^7 x+\frac{38}{5\times 7\times 9^2}\arctan^9 x+$$

$$+\frac{134}{9\times 11\times 21\times 25}\arctan^{11} x+\frac{4}{3\times 5\times 7\times 9\times 13}\arctan^{13} x+$$

$$+\frac{1}{7^2\times 9^2\times 15}\arctan^{15} x,...$$

نفرض الآن أن: $\text{arxtan } x = u$ وبمقارنتها مع الصيغ المختلفة للتوابع $\varphi_n(x)$ نجد التعميم:

$$\tan u=\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu-1}\frac{2^{2\nu}(2^{2\nu}-1)}{(2\nu)!}B_{2\nu}u^{2\nu-1}\quad ;\ |u|<\frac{\pi}{2}$$

حيث B_ν هي أعداد برنولي والتي تعرف كما يلي:

أ . إن أعداد برنولي ذات الدليل الفردي كلها معدومة، أي:

$$B_{2\nu+1}=0$$

باستثناء $B_1=-\frac{1}{2}$

ب . إن أعداد برنولي ذات الدليل الزوجي تُعرّف بالعلاقة التدريجية التالي:

$$B_{2\nu}=-\frac{1}{2\nu+1}+\frac{1}{2}-\sum_{k=2}^{2\nu-2}\frac{2\nu(2\nu-1)...(2\nu-2k+2)}{k!}B_k$$

و $B_0=1$

نلاحظ أن:

$$\varphi_n(x)\xrightarrow[n\to\infty]{}\tan(\arctan x)=x$$

ويلاحظ أن التابع $\varphi(x) = x$ هو حل للمعادلة التكاملية المعالجة.

٢ . إذا اعتبرنا أن $\varphi_0(x) = x$ عندئذ:

$$\varphi_1(x) = \int_0^x \frac{1+t^2}{1+t^2}\,dt = x$$

بطريقة مشابهة نجد:

$$\varphi_n(x) = x \qquad (n = 2, 3, \ldots..)$$

ومن ثمّ فمتتالية التوابع:

$$\{\varphi_n(x)\} = \{x\}$$

ونهايتها:

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = x$$

وهو حل المعادلة التكاملية المطلوب.

١ . ٢١ . معادلات فولتيرا التكاملية على المجال $(x, +\infty)$:

سنعالج في هذه الفقرة معادلات تكاملية من الشكل:

$$\varphi(x) = f(x) + \int_x^{\infty} k(x-t)\varphi(t)\,dt \qquad (1)$$

والتي تَرِدُ في بعض المسائل الفيزيائية، وهذا النوع من المعادلات التكاملية يمكن حلها بوساطة تحويلات لابلاس باستخدام جداء الطي.

من أجل التكامل:

$$\int_x^{\infty} k(x-t)\varphi(t)\,dt$$

من المعلوم وباستخدام تحويل فورييه:

$$F\left[\int_{-\infty}^{+\infty} g(x-t)\psi(t)\,dt\right] = \sqrt{2\pi}\,G(\lambda)\psi(\lambda) \qquad (2)$$

حيث $\psi(\lambda), G(\lambda)$ هي تحويلات فورييه للتوابع $g(x)$ و $\psi(x)$ على الترتيب.

لنضع:

$$g(x) = k(x)$$

أي إن:

$$g(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x > 0 \\ k(x) & ; \quad x < 0 \end{cases}$$

$$\psi(x) = \varphi_+(x) = \begin{cases} \varphi(x) & ; \quad x > 0 \\ 0 & ; \quad x < 0 \end{cases}$$

ومن ثمّ يمكن كتابة (2) كما يلي:

$$F\left[\int_{-\infty}^{+\infty} g(x-t)\varphi(t)dt\right] = \sqrt{2\pi}\tilde{k}_-(\lambda)_F \tilde{\phi}_+(\lambda)_L \qquad (3)$$

F تعني تحويل فورييه و L تعني تحويل لابلاس، ومن المعلوم أنه للانتقال من تحويل فورييه إلى تحويل لابلاس، نعتمد على العلاقة:

$$F_L(p) = \sqrt{2\pi}[F_+(ip)]_F \qquad (4)$$

إذن من (3) و (4) نجد:

$$L\left[\int_{x}^{\infty} k(x-t)\varphi(t)dt\right] = \sqrt{2\pi}\left[\tilde{k}_-(ip)\right]_F\left[\phi+(p)\right]_L$$

ولنعبر الآن عن $\left[\sqrt{2\pi}\tilde{k}_-(ip)\right]_F$ بواسطة تحويل لابلاس فنكتب:

$$\left[\sqrt{2\pi}\tilde{k}_-(ip)\right]_F = \int_{-\infty}^{0} k(x)e^{-px}dx = \int_{0}^{\infty} k(-x)e^{px}dx$$

لنضع $k(-x) = \Re(x)$ فنجد:

$$\left[\sqrt{2\pi}\tilde{k}_-(ip)\right]_F = \tilde{\Re}_L(-p) = \int_{0}^{\infty} k(-x)e^{px}dx$$

وهكذا:

$$L\left\{\int_x^\infty k(x-t)\varphi(t)dt\right\} = \widetilde{\Re}_L(-p)\Phi_L(p)$$

نأخذ تحويل لابلاس لطرفي المعادلة (1) نحصل:

$$\Phi(p) = F(p) + \widetilde{\Re}(-p)\,\Phi(p)$$

وبإدخال الرمز L:

$$\Phi(p) = \frac{F(p)}{1-\widetilde{\Re}(-p)} \qquad \left(\widetilde{\Re}(-p) \neq 1\right)$$

حيث:

$$\widetilde{\Re}(-p) = \int_0^\infty k(-x)e^{px}dx$$

إن التابع:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{F(p)}{1-\widetilde{\Re}(-p)}e^{px}dp$$

هو حل خاص للمعادلة التكاملية (1).

١ . ٢٢ . مثال محلول (٢):

أوجد حل المعادلة التكاملية:

$$\varphi(x) = x + \int_x^\infty e^{2(x-t)}\varphi(t)dt \qquad (5)$$

الحل:

في هذه الحالة لدينا: $f(x) = x\ ,\ k(x) = e^{2x}$

لذلك:

$$F(p) = \frac{1}{p^2}, \widetilde{\Re}(-p) = \int_0^\infty e^{-2x}e^{px}dx = \frac{1}{2-p}, \operatorname{Re} p < 2$$

وهكذا نحصل على المعادلة:

$$\Phi(p) = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{2-p}\Phi(p)$$

أي:

$$\Phi(p) = \frac{p-2}{p^2(p-1)}$$

وبالنتيجة:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{p-2}{p^2(p-1)} e^{px} dp \qquad (0 < \gamma < 2) \tag{6}$$

ويحسب التكامل الوارد في (6) كتكامل مركب وأن التابع المكامل له قطب من الدرجة الثانية $p = 0$ وقطب بسيط في $p = 1$ وذلك من أجل $\gamma > 1$. لنحل المعادلة المتجانسة الموافقة للمعادلة (5) وهي:

$$\varphi(x) = \int_x^{\infty} e^{2(x-t)}\varphi(t)dt$$

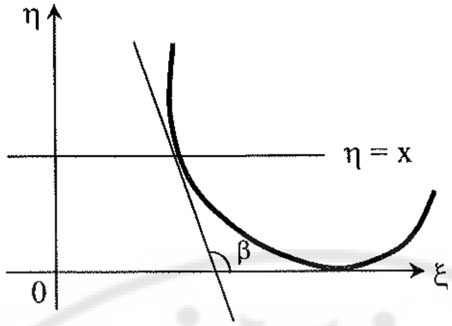
وإن رواسب التابع المكامل في الأقطاب هي:

$$\underset{p=0}{\text{res}}\left(\frac{p-2}{p^2(p-1)} e^{px}\right) = 2x + 1 \ , \ \underset{p=1}{\text{res}}\left(\frac{p-2}{p^2(p-1)} e^{px}\right) = -e^x$$

ومن ثمَّ فإن حل المعادلة التكاملية (5) هو: $\varphi(x) = 2x + 1 + Ce^x$ حيث C ثابت اختياري.

١ . ٢٣ . معادلات آبل التكاملية Abel's equation:

جسيم يتحرك في المستوي الشاقولي (η , ξ) تحت تأثير الجاذبية، فإذا كانت β هي زاوية ميل المماس للمسار مع المحور 0ξ كما في الشكل. إن سرعة هذا الجسيم ستكون $\upsilon = \sqrt{2g(x-\eta)}$ ومن ثمَّ:



$$\frac{d\eta}{dt} = -\sqrt{2g(x-\eta)}\sin\beta$$

$$dt = -\frac{d\eta}{\sqrt{2g(x-\eta)}\sin\beta}$$

وبالمكاملة من الصفر إلى x وبوضع $\varphi(\eta) = \dfrac{1}{\sin\beta}$ نحصل على معادلة آبل:

$$\int_0^x \frac{\varphi(\eta)d\eta}{\sqrt{x-\eta}} = -\sqrt{2g}f_1(x)$$

بوضع $-\sqrt{2g}f_1(x) = f(x)$ نجد:

$$\int_0^x \frac{\varphi(\eta)}{\sqrt{x-\eta}}d\eta = f(x)$$

حيث $\varphi(x)$ هو التابع المطلوب و $f(x)$ هو التابع المعلوم، بعد إيجاد $\varphi(\eta)$ نستطيع تشكيل معادلة المنحني:

$$\varphi(\eta) = \frac{1}{\sin\beta}$$

عندئذ:

$$\eta = \Phi(\beta)$$

إضافة لذلك فإن:

$$d\xi = \frac{d\eta}{\tan\beta} = \frac{\Phi'(\beta)d\beta}{\tan\beta}$$

ومن ثمَّ:

$$\xi = \int \frac{\Phi'(\beta)d\beta}{\tan\beta} = \Phi_1(\beta)$$

وبالنتيجة فإن المنحني المطلوب يتعين بالمعادلات الوسيطية:

$$\begin{cases} \xi = \Phi_1(\beta) \\ \eta = \Phi(\beta) \end{cases}$$

وهكذا فإن مسالة آبل تؤول إلى المعادلة التكاملية:

$$f(x) = \int_0^x k(x,t)\varphi(t)dt$$

حيث $k(x,t)$ هي النواة وهي معلومة، $f(x)$ تابع معلوم، أما $\varphi(x)$ هو التابع المجهول.

بالنظر إلى المعادلة التكاملية، نرى أن مسألة آبل تؤول إلى إيجاد حل لمعادلة فولتيرا التكاملية من النوع الأول.

١ . ٢٤ . معادلة آبل:

بشكل عام فإن معادلة آبل تأخذ الشكل:

$$\int_0^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^\alpha} dt = f(x) \qquad (1)$$

حيث α ثابت ويحقق المتراجحة $0 < \alpha < 1$ (ندعو المعادلة (1) بمعادلة آبل التكاملية المعممة). سنعتبر لاحقاً بأن للتابع $f(x)$ مشتقات مستمرة فوق مجال ما $[0,\alpha]$. لاحظ أنه من أجل $\alpha \geq \frac{1}{2}$ فإن نواة المعادلة (1) غير قابلة للمكاملة تربيعياً، هذا يعني أن هذه النواة لا تنتمي إلى L^2.

على كل حال، فإن للمعادلة (1) حلاً يتم إيجاده كما يلي:

● بفرض أن المعادلة التكاملية (1) لها حلٌ، باستبدال x بـ s في المعادلة وبضرب طرفي المعادلة الناتجة بـ:

$$\frac{ds}{(x-s)^{1-\alpha}}$$

وبالمكاملة بالنسبة لـ s من 0 إلى x نجد:

$$\int_0^x \frac{dx}{(x-s)^{1-\alpha}} \int_0^s \frac{\varphi(t)}{(s-t)^{\alpha}} dt = \int_0^x \frac{f(s)}{(x-s)^{1-\alpha}} ds$$

وبتبديل ترتيب التكاملات في الطرف الأيسر نحصل:

$$\int_0^x \varphi(t) dt \int_t^x \frac{ds}{(x-s)^{1-\alpha}(s-t)^{\alpha}} = F(x) \qquad (2)$$

حيث:

$$F(x) = \int_0^x \frac{f(s)}{(x-s)^{1-\alpha}} ds$$

وبإجراء التبديل في التكامل الداخلي نجد:

$$\int_t^x \frac{ds}{(x-s)^{1-\alpha}(s-t)^{\alpha}} = \int_0^1 \frac{dy}{y^{\alpha}(1-y)^{1-\alpha}} = \frac{\pi}{\sin \alpha\pi}$$

إذن، من (2) نحصل:

$$\int_0^x \varphi(t) dt = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} F(x)$$

أو بالشكل:

$$\varphi(x) = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} F'(x) = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \left(\int_0^x \frac{f(s)}{(x-s)^{1-\alpha}} ds \right)'_x \qquad (3)$$

إذن فالحل الوحيد للمعادلة (1) يعطى بالعلاقة (3)، وبوساطة التكامل بالتجزئة، فإن هذا الحل يمكن كتابته بالشكل:

$$\varphi(x)=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\left[\frac{f(0)}{x^{1-\alpha}}+\int_0^x\frac{f'(s)}{(x-s)^{1-\alpha}}ds\right] \qquad (4)$$

لهذا الحل معنى فيزيائي فقط عندما تكون قيمته المطلقة أقل من واحد.

$$\left[\varphi(x)=\frac{1}{\sin\beta}\right]$$

ملاحظة: سنبرهن الآن بأنه في حالة $f(x) = c = cte$، فإن حل مسألة آبل هو سيكلوئيد.

١ . ٢٥ . مثال محلول (٣):

أوجد المنحني الذي على طوله يتحرك جسيم تحت تأثير الجاذبية بدون احتكاك ويصل الموقع الأدنى في نفس الوقت، وبدون الأخذ بعين الاعتبار الموقع الابتدائي.

الحل: في هذه الحالة $\alpha=\frac{1}{2}$، عندئذ بوساطة (4) نجد:

$$\varphi(x)=\frac{1}{\pi}\frac{C}{\sqrt{x}}$$

ولذلك:

$$\sin\beta=\frac{\pi\sqrt{\eta}}{C}$$

عندئذ:

$$\eta=\frac{C^2}{\pi^2}\sin^2\beta$$

والأكثر من ذلك:

$$d\xi=\frac{d\eta}{\tan\beta}=\frac{C^2}{\pi^2}\frac{2\sin\beta\cos\beta}{\tan\beta}=\frac{C^2}{\pi^2}(1+\cos2\pi)d\beta$$

وبالمكاملة نحصل على:

$$\xi = \frac{C^2}{\pi^2}\left(\beta + \frac{1}{2}\sin 2\beta\right) + C_1$$

وأخيراً، نجد:

$$\begin{cases} \xi = \dfrac{C^2}{\pi^2}\left(\beta + \dfrac{1}{2}\sin 2\beta\right) + C_1 \\ \eta = \dfrac{C^2}{\pi^2}(1 - \cos 2\beta) \end{cases}$$

وهي المعادلات الوسيطية لمنحني السيكلوئيد.

١ . ٢٦ . تعميم مسألة آبل:

لنعتبر المعادلة التكاملية:

$$\int_0^x (x-t)^\beta \varphi(t)dt = x^\lambda \qquad (5)$$

حيث ($0 \leq \lambda$, $-1 < \beta$ حقيقي) التي هي معادلة تكاملية أكثر عمومية من معادلة آبل (1).

نضرب طرفي (5) بـ ($-1 < \mu$) ; $(z-x)^\mu$

وبالمكاملة بالنسبة لـ x من 0 إلى z:

$$\int_0^z (z-x)^\mu \left(\int_0^x (x-t)^\beta \varphi(t)dt\right)dx = \int_0^z x^\lambda (z-x)^\mu dx \qquad (6)$$

نضع $x = \rho z$ في التكامل في الطرف الأيمن، ومن (6) نجد:

$$\int_0^z x^\lambda (z-x)^\mu dx = z^{\lambda+\mu+1}\int_0^1 \rho^\lambda (1-\rho)^\mu d\rho =$$

$$= z^{\lambda+\mu+1}(\lambda+1, \mu+1) = z^{\lambda+\mu+1}\frac{\Gamma(\lambda+1)\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\lambda+\mu+2)}$$

وحيث: $(\lambda + \mu + 1 > \lambda \geq 0)$

وبتبديل ترتيب التكامل في الطرف الأيسر من (6) نحصل:

$$\int_0^z\left(\int_0^x (z-x)^\mu (x-t)^\beta \varphi(t)dt\right)dx =$$

$$=\int_0^z\left(\int_t^z (z-x)^\mu (x-t)^\beta dx\right)\varphi(t)dt \qquad (7)$$

نبدل في التكامل الوارد في الطرف الأيمن من (7) فنجد:

$$x = t + \rho\,(z-t)$$

عندئذ يكون:

$$\int_t^z (z-x)^\mu (x-t)^\beta dx = (z-t)^{\mu+\beta+1}\int_0^1 \rho^\beta (1-\rho)^\mu d\rho =$$

$$=(z-t)^{\mu+\beta+1}B(\beta+1,\mu+1)=\frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\beta+\mu+2)}(z-t)^{\mu+\beta+1}$$

نجد من (6) أن:

$$\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+\mu+2)}\int_0^z (z-t)^{\mu+\beta+1}\varphi(t)dt=\frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+\mu+2)}z^{\lambda+\mu+1} \qquad (8)$$

باختيار μ بحيث إن:

$$\mu+\beta+1=n$$

حيث n عدد صحيح غير سالب.

عندئذ من (8) نجد أن:

$$\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n+1)}\int_0^z (z-t)^n \varphi(t)dt=\frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+n-\beta+1)}z^{\lambda+n-\beta}$$

أو بالشكل:

$$\int_0^z \frac{(z-t)^n}{n!}\varphi(t)dt=\frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\lambda+n-\beta+1)}z^{\lambda+\beta-1} \qquad (9)$$

بمفاضلة طرفي العلاقة (9) $n + 1$ مرة بالنسبة لـ z نحصل:

$$\varphi(z) = \frac{\Gamma(\lambda+1)(\lambda+n-\beta)(\lambda+n-\beta-1)\ldots(\lambda-\beta)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\lambda+n-\beta+1)} z^{\lambda-\beta-1}$$

أو من أجل:

$$\lambda - \beta + k \neq 0 \quad (k = 0, 1, \ldots, n)$$

$$\varphi(z) = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\lambda-\beta)} z^{\lambda-\beta-1} \qquad (10)$$

وهو حل المعادلة التكاملية.

يلاحظ أنه إذا كانت الكمية $\lambda - \beta - 1$ تمثل عدداً صحيحاً سالباً يصبح الحل $\varphi(z) = 0$.

إن المعادلة (5) لا تملك حلاً في صف التوابع العادية.

١ . ٢٧ . رد معادلة فولتيرا التكاملية من النوع الأول إلى النوع الثاني:

إن معادلة فولتيرا التكاملية من النوع الأول هي من الشكل:

$$\int_0^x k(x,t)\varphi(t)dt = f(x) \quad ; \quad f(0) = 0 \qquad (11)$$

حيث $\varphi(x)$ هو التابع المجهول.

نفرض أن $f(x)$، $k(x,t)$، $\frac{\partial k(x,t)}{\partial x}$ هي توابع مستمرة في المنطقة المحددة بالمتراجحات: $0 \le t \le x \;,\; 0 \le x \le a$.

بمفاضلة طرفي العلاقة (11) بالنسبة لـ x نجد:

$$k(x,x)\varphi(x) + \int_0^x \frac{\partial k(x,t)}{\partial x}\varphi(t)dt = f'(x) \qquad (12)$$

إن أي حلول $\varphi(x)$ مستمرة للمعادلة (11) ومحققة للمتراجحة $0 \le x \le a$ تحقق هذه المعادلة، وبالعكس، أي حل مستمر للمعادلة (12) من أجل $0 \le x \le a$ يحقق المعادلة (11) أيضاً، من (12) نجد:

$$\varphi(x) = \frac{f'(x)}{k(x,x)} - \int_0^x \frac{k'_x(x,t)}{k(x,x)}\varphi(t)dt \qquad (13)$$

بشرط كون $k(x,x)$ لا تنعدم في أي نقطة من المجال $[0, a]$.

من المعادلة (13) نلاحظ أن المعادلة التكاملية (11) التي هي من النوع الأول قد آلت إلى معادلة تكاملية من النوع الثاني.

مما سبق نكون قد برهنا النظرية التالية:

١ . ٢٨ . مبرهنة أساسية (١):

نفرض أن k, f من الصف C^1 و $k(x,x) \neq 0 \ \forall x \in [a, b]$.

إن معادلة فولتيرا التكاملية من النوع الأول (1) تؤول إلى معادلة فولتيرا التكاملية من النوع الثاني.

١ . ٢٩ . مثال محلول (٤):

أوجد حل المعادلة التكاملية من النوع الأول، وذلك بردها إلى معادلة تكاملية من النوع الثاني:

$$\int_0^x \cos(x-t)\varphi(t)dt = x \qquad (14)$$

الحل:

إن التوابع: $k(x,t) = \cos(x-t) \quad , \quad f(x) = x$

(نلاحظ $f(0) = 0$).

تحقق جميع العلاقات وشروط الاستمرار والتفاضل الواردة في الفقرة السابقة.

بمفاضلة طرفي العلاقة (14) بالنسبة لـ x، نجد:

$$\varphi(x)\cos 0-\int_0^x \sin(x-t)\varphi(t)dt=1$$

أو:

$$\varphi(x)=1+\int_0^x \sin(x-t)\varphi(t)dt \qquad (15)$$

تمثل المعادلة (15) معادلة تكاملية من النوع الثاني لفولتيرا من النموذج الالتفافي، ومن ثمَّ باستخدام تحويلات لابلاس فإن حلها هو:

$$\phi(p)=\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2+1}\phi(p)$$

ومن ثمَّ فإن:

$$\phi(p)=\frac{p^2+1}{p^3}=\frac{1}{p}+\frac{1}{p^3} \qquad (16)$$

بتطبيق تحول لابلاس المعاكس فإن: $\varphi(x)=1+\dfrac{x^2}{2}$

إن التابع الناتج $\varphi(x)$ هو حل للمعادلة (15) ومن ثمَّ فهو حل للمعادلة الأساسية (14).

١ . ٢٩ . ١ . ملاحظة: (معادلات فولتيرا التكاملية من النوع الثالث):

إذا انعدمت $k(x,x)$ في بعض نقاط المجال $[0, a]$، مثلاً في النقطة $x = 0$، عندئذ، فإن المعادلة (13) تُعرِّف معادلة تكاملية من النوع الثالث ذات خصائص بيكاردية (نسبة إلى Picard). وهنا تظهر تعقيدات مماثلة لتلك التي تصادف عند انعدام عوامل المشتقات العليا في المعادلات التفاضلية الخطية.

١ . ٣٠ . ملحوظات مهمّة:

١ . كان من الممكن الحصول على الحل بتطبيق تحويل لابلاس مباشرة على طرفي المعادلة (14) وبدون إجراء العمليات الرياضية من اشتقاق جزئي وغير ذلك.

إن (14) تكتب بالشكل:

$$\cos x * \varphi(x) = x \Rightarrow L\,[\cos x * \varphi(x)] = L\,[x]$$

أي:

$$\frac{p}{p^2+1} \cdot \phi(p) = \frac{1}{p^2}$$

ومنه نجد:

$$\Phi(p) = \frac{p^2+1}{p^3}$$

وهي نفس المعادلة (16).

٢ . إذا كان $k(x,x) = k(0) \neq 0$ عندئذ يكون للمعادلة (11) حل.

٣ . كما أشرنا سابقاً، فإن الشرط الضروري لوجود حل مستمر للمعادلة التكاملية التي من الشكل:

$$\int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} \varphi(t)dt = f(x)$$

يتضمن امتلاك التابع $f(x)$ مشتقات من مراتب أعلى من n، أما بقية المشتقات الأولى التي عددها $n - 1$ فهي معدومة من أجل $x = 0$.

١ . ٣١ . مثال محلول (٥):

لتكن المعادلة التكاملية:

$$\int_0^x (x-t)\varphi(t)dt = x \qquad (17)$$

هنا $n = 2,\ f(x) = x$ من الواضح أن جميع مشتقات التابع $f(x)$ موجودة من أجل أي مرتبة وأن المشتق الأول $f'(x) = 1 \neq 0$، أي إن الشرط الضروري غير محقق.

بأخذ تحويل لابلاس لطرفي (17) نجد:

$$\frac{1}{p^2}\Phi(p) = \frac{1}{p^2}$$

عندئذ فإن: $\Phi(p) = 1$

وهذا هو تحويل لابلاس للتابع δ الذي يرمز له $\delta(x)$.

ولنتذكر أن:

$$\delta(x) = 1 \Rightarrow \delta^{(m)}(x) = p^m$$

حيث m عدد صحيح أكبر أو يساوي الصفر.

وهكذا فإن حل المعادلة التكاملية (17) هو التابع δ:

$$\varphi(x) = \delta(x)$$

يمكن تعريف جداء الطي للتابع δ مع أي تابع $g(x)$ كما يلي:

$$g(x) * \delta(x) = g(x)$$

$$\delta^{(k)}(x) * g(x) = g^{(k)}(x) \qquad (k = 1,2,\ldots,)$$

وفي هذا المثال: $g(x) = k(x) = x$

$$\int_0^x k(x-t)\delta(t)dt = k(x) = x$$

وهكذا فإن حل المعادلة التكاملية (17) موجود.

١ . ٣٢ . معادلات فولتيرا التكاملية من النوع الأول الملفوف:

هي معادلات من الشكل:

$$\int_0^x k(x-t)\varphi(t)dt = f(x) \qquad (18)$$

حيث النواة $k(x,t)$ تابعة للفرق $x - t$.

لحل هذا النوع من المعادلات، نفرض أن التوابع $f(x), k(x)$ هي أصول وأن:

$$L[f(x)] = F(p) \, , \, L[k(x)] = k(p)$$

إن المعادلة (18) تكتب بالشكل:

$$k(x) * \varphi(x) = f(x) \qquad (19)$$

بتطبيق تحويل لابلاس على طرفي (19)، نجد: $k(p) \, . \, \phi(p) = F(p)$

أي إن:

$$\phi(p) = \frac{F(p)}{K(p)} \quad ; \quad K(p) \neq 0 \qquad (20)$$

وبتطبيق تحويل لابلاس العكسي على طرفي (20) نحصل:

$$\varphi(x) = L^{-1}[\phi(p)] = L^{-1}\left[\frac{F(p)}{K(p)}\right]$$

١ . ٣٣ . مثال محلول (٦):

أوجد حل المعادلة التكاملية:

$$\int_0^x e^{x-t}\varphi(t)dt = x \qquad (21)$$

الحل: بأخذ تحويل لابلاس على طرفي (21)، نجد:

$$\frac{1}{p-1}\Phi(p) = \frac{1}{p^2}$$

$$\Phi(p) = \frac{p-1}{p^2} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2}$$

إذن التابع $\varphi(x) = 1 - x$ هو حل للمعادلة (21).

١ . ٣٤ . معادلات فولتيرا التكاملية من النوع الأول ذات نوى لوغاريتمية:

لتكن المعادلة التكاملية:

$$\int_0^x \varphi(t)\ln(-t)dt = f(x), f(0) = 0 \qquad (22)$$

بالواقع يمكن حل هذا النوع من المعادلات التكاملية بوساطة تحويلات لابلاس

نعلم أن:

$$x^v = \frac{\Gamma(v+1)}{p^{v+1}} (\operatorname{Re} v > -1) \qquad (23)$$

بمفاضلة العلاقة (23) بالنسبة لـ v، نحصل:

$$x^v \ln x = \frac{1}{p^{v+1}} \frac{d\Gamma(v+1)}{p^{v+1}} + \frac{1}{p^{v+1}} \ln\frac{1}{p}\Gamma(v+1)$$

$$x^v \ln x = \frac{d\Gamma(v+1)}{p^{v+1}} \left[\frac{\frac{d\Gamma(v+1)}{dv}}{d\Gamma(v+1)} + \ln\frac{1}{p} \right] \qquad (24)$$

من أجل $v = 0$، نجد:

$$\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} = -\gamma$$

حيث γ ثابت أولر، والصيغة (24) تأخذ الشكل:

$$\ln x = \frac{1}{p}(-\gamma - \ln p) = -\frac{\ln p + \gamma}{p} \qquad (25)$$

نعتبر $\phi(p) = L[\varphi(x)]$ و $F(p) = L[f(x)]$، بأخذ تحويل لابلاس لطرفي (22) وباستعمال (25) نجد:

$$-\Phi(p)\frac{\ln p+\lambda}{p}=F(b)$$

عندئذ يكو لدينا:

$$\Phi(p)=-\frac{pF(b)}{\ln p+\gamma} \qquad (26)$$

لنكتب $\phi(p)$ بالشكل:

$$\Phi(p)=-\frac{p^2F(p)-f'(0)}{p(\ln p+\gamma)}-\frac{f'(0)}{p(\ln p+\gamma)} \qquad (27)$$

وبما أن $f(0) = 0$، ينتج أن:

$$[f''(x)] = p^2 F(p) - f'(0) \qquad (28)$$

بالعودة إلى العلاقة (23) التي يمكن كتابتها بالشكل:

$$L\left[\frac{x^v}{\Gamma(v+1)}\right]=\frac{1}{p^{v+1}} \qquad (29)$$

بمكاملة طرفي (29) بالنسبة لـ v من 0 إلى يتحقق لدينا:

$$L\left[\int_0^\infty\frac{x^v}{\Gamma(v+1)}dv\right]=\int_0^\infty\frac{dv}{p^{v+1}}=\frac{1}{p\ln p}$$

وبشكل مشابه يكون لدينا:

$$L\left[\int_0^\infty\frac{x^v a^{-v}}{\Gamma(v+1)}dv\right]=\frac{1}{p\ln(ap)}=\frac{1}{p(\ln p+\ln a)}$$

إذا وضعنا $\alpha = e^\gamma$، نحصل:

$$L\left[\int_0^\infty \frac{x^v e^{-\gamma v}}{\Gamma(v+1)}dv\right]=\frac{1}{p(\ln p+\gamma)} \tag{30}$$

بمقتضى العلاقة (30)، فإن (27) تكتب بالشكل:

$$L^{-1}\left[\frac{f'(0)}{p(\ln p+\gamma)}\right]=f'(0)\int_0^\infty \frac{x^v e^{-\gamma v}}{\Gamma(v+1)}dv$$

بالأخذ بعين الاعتبار (28) و (30)، فإن الحد الأول من الطرف الأيمن لـ (27) يمثل جداء طي، وبتطبيق نظرية الجداء نجد الأصل.

$$\frac{p^2F(p)-f'(0)}{p(\ln p+\gamma)}=\int_0^x f''(t)\left(\int_0^\infty \frac{(x-t)^v e^{-\gamma v}}{\Gamma(v+1)}dv\right)dt$$

لذلك فإن الحل $\varphi(x)$ للمعادلة التكاملية (22) يصبح من الشكل:

$$\varphi(x)=-\int_0^\infty f''(t)\left(\int_0^\infty \frac{(x-t)^v e^{-\gamma v}}{\Gamma(v+1)}dv\right)dt-f'(0)\int_0^\infty \frac{x^v e^{-\gamma v}}{\Gamma(v+1)}dv$$

حيث γ ثابت أولر.

في الحالة الخاصة إذا كان $f(x) = x$ فإن:

$$\varphi(x)=-\int_0^\infty \frac{x^v e^{-\gamma v}}{\Gamma(v+1)}dv$$

١ . ٣٥ . تمارين محلولة:

تمرين (١):

حل المعادلة التكاملية:

$$\psi(x)=h(x)+\lambda\int_0^1 x.t.\psi(t)dt$$

مستخدماً النواة الحالة.

الحل: لدينا:

$$k(x,t) = x.t$$
$$a = 0 \ , \ b = 1$$

كذلك نجد أن:

$$k_1(x,t) = k(x,t) = x.t$$

$$k_2(x,t) = \int_a^b k(x,z)k(z,t)dz$$
$$= \int_0^1 (x.z)(z.t).dz$$
$$= \int_0^1 x.z^2.t.dz$$
$$= x.t.\int_0^1 z^2 dz = \frac{x.t}{3}$$

$$K_3(x,t) = \int_a^b k(x,z)k_2(z,t)dz$$
$$= \int_0^1 (x.z)\left(\frac{z.t}{3}\right)dz$$
$$= \frac{1}{3}\cdot x\cdot t\cdot\int_0^1 z^2 dz = \frac{x.t}{(3)^2}$$

$$K_m(x,t) = \int_a^b k_1(x,z)k_{m-1}(z,t)dz$$
$$= \int_0^1 (x.z)\cdot\left(\frac{z\cdot t}{(3)^{m-2}}\right)dz$$
$$= \frac{x\cdot t}{(3)^{m-2}}\int_0^1 z^2.dz = \frac{x\cdot t}{(3)^{m-2}}\cdot\frac{1}{3}$$

$$= \frac{x \cdot t}{(3)^{m-1}}$$

لكن نعلم أن:

$$R(x,t,\lambda) = k_1(x,t) + \lambda k_2(x,t) + \lambda^2 k_3(x,t) + \ldots\ldots$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} k_m(x,t)\lambda^{m-1}$$

$$= x.t.\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{3}\right)^{m-1}$$

$$= \frac{3 \cdot x \cdot t}{3-\lambda} \quad ; \quad |\lambda| < 3$$

وعليه فإن حل المعادلة التكاملية المفروضة يعطى بالصيغة:

$$\psi(x) = h(x) + \lambda\int_0^1 \frac{3xt}{3-\lambda} h(t)dt$$

وفي حالة خاصة، عندما $h(x) = x$ فإننا نحصل على الحل التالي:

$$\psi(x) = \frac{3x}{3-\lambda} \quad ; \quad \lambda \neq 3$$

تمرين (٢):

حل المعادلة التكاملية الآتية:

$$\psi(x) = \frac{1}{2}\int_0^1 \psi(t)dt + \sin \pi x$$

مستخدماً طريقة التقريبات المتتالية.

الحل: النواة $h(x), k(x,t)$ كمولة تربيعياً.

ننطلق من التقريب ذي المرتبة صفر.

$$\psi_0(x) = h(x) = \sin \pi x$$

$$\psi_1(x) = \sin \pi x + \frac{1}{2}\int_0^1 \psi_0(t)dt$$

$$= \sin \pi x + \frac{1}{2}\int_0^1 \sin \pi t dt = \sin \pi x + \frac{1}{\pi}$$

$$\psi_2(x) = \sin \pi x + \frac{1}{2}\int_0^1 \psi_1(t)dt$$

$$\psi_2 = \sin \pi x + \frac{1}{2}\int_0^1 \left[\sin \pi t + \frac{1}{\pi}\right]dt$$

$$= \sin \pi x + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2\pi}$$

$$\psi_3(x) = \sin \pi x + \frac{1}{2}\int_0^1 \psi_2(t)dt = \sin \pi x + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{2^2 \pi}$$

وبشكل عام:

$$\psi_n(x) = 2\pi x + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{2^2 \pi} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}\pi}$$

$$= \sin \pi x + \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}\right]$$

$$= \sin \pi x + \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^k}$$

نأخذ النهاية:

$$\lim_{n\to\infty} \psi_n(x) = \sin \pi x + \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^k} = 2\pi + \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$$= \sin \pi x + \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right]$$

$$= \sin \pi x + \frac{2}{\pi}$$

تمرين (٣):

حل المعادلة التكاملية التالية:

$$\varphi(t) = t - \frac{1}{2}\int_0^t t\varphi(u)du$$

مستخدماً طريقة النواة الحالة.

الحل: نرى أن:

$$H_1(t,u) = H(t,u) = t$$

$$H_2(t,u) = t\cdot\left(\frac{t^2-u^2}{2}\right)$$

$$H_3(t,u) = t\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{t^2-u^2}{2}\right)^2$$

وبسهولة يمكن التحقق بأن:

$$H_j(t,u) = t\cdot\frac{1}{(j-1)!}\left(\frac{t^2-u^2}{2}\right)^{j-1} \quad ; \ j = 1,2,....$$

ومنه فإن النواة الحالة هي من الشكل:

$$N(t,u,\lambda) = t\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\lambda^{j-1}}{(j-1)!}\left(\frac{t^2-u^2}{2}\right)^{j-1}$$

$$= te^{\lambda\frac{t^2-u^2}{2}}$$

ولما كانت $\lambda = -\frac{1}{2}$ أُعطِي حل المعادلة المفروضة بالصيغة:

$$\varphi(t) = t - \frac{1}{2}\int_0^t te^{-\frac{t^2-u^2}{4}}udu$$

$$\varphi(t) = t - te^{-\frac{t^2}{4}} \int_0^t d(e^{\frac{u^2}{4}})du$$

$$\varphi(t) = te^{-\frac{t^2}{4}}$$

تمرين (٤):

أوجد حل المعادلة التكاملية:

$$\psi(x) = 1 + x^2 + \frac{1}{\ln 2}\int_0^1 \frac{x}{1+t^2}\psi(t)dt$$

مستخدماً طريقة النواة الحالة.

الحل: إن :

$$k_1(x,t) = k(x,t) = \frac{x}{1+t^2}$$

$$k_2(x,t) = \int_0^1 \frac{x}{1+z^2}\cdot\frac{z}{1+t^2}dz = \frac{\ln 2}{2}\cdot\frac{x}{1+t^2}$$

$$k_3(x,t) = \left(\frac{\ln 2}{2}\right)^2\cdot\frac{x}{1+t^2}$$

$$k_m(x,t) = \left(\frac{\ln 2}{2}\right)^{m-1}\cdot\frac{x}{1+t^2}$$

ومنه يكون:

$$R(x,t,\lambda) = \sum_{m=1}^{\infty}\lambda^{m-1}H_m(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{\ln 2}{2}\cdot\lambda\right)^{m-1}\frac{x}{1+t^2}$$

$$= \frac{1}{1-\frac{\ln 2}{2}\lambda}\cdot\frac{x}{1+t^2} \quad ; \quad |\lambda| < \frac{2}{\ln 2}$$

أي إن شرط تقارب المتسلسلة هو $|\lambda| < \dfrac{2}{\ln 2}$ ، فالنواة دالة تحليلية في λ.

لنلاحظ أن:

$$B^2 = \int_0^1\int_0^1 |k(x,t)|^2 \, dxdt = \frac{\pi + 2}{24}$$

أي إن الشرط:

$$|\lambda| < \frac{1}{B} = \left(\int_a^b\int_a^b |k(x,t)|^2 \, dxdt\right)^{-\frac{1}{2}}$$

يؤول إلى:

$$|\lambda| < 2 \cdot \sqrt{\frac{6}{2+\pi}}$$

وعلى هذا فإن:

$$2 \cdot \sqrt{\frac{6}{2+\pi}} > \frac{2}{\ln 2}$$

وبملاحظة أن $\lambda = \dfrac{1}{\ln 2}$ فإنه يكون:

$$R(x,t,\lambda) = 2 \cdot \frac{x}{1+t^2}$$

وعليه فإن حل المعادلة المفروضة يعطى بالصيغة:

$$\psi(x) = 1 + x^2 + \frac{1}{\ln 2}\int_0^1 2 \cdot \frac{x}{1+t^2}(1+t^2)dt$$

$$= 1 + x^2 + \frac{2}{\ln 2} \cdot x$$

تمرين (٥):

حل المعادلة التكاملية: $\psi(x) = 1 + \int_0^1 x.t^2.\psi(t)dt$

مستخدماً طريقة التقريبات المتتالية.

الحل: في هذا التمرين لدينا $\lambda = 1$ و $k(x, t) = xt^2$ ومن ثمَّ فإن الشرط $|\lambda| < \frac{1}{B}$ محقق (تأكد من ذلك). لنضع $\psi_0(x) = 1$ وعندئذ يكون:

$$\psi_1(x) = \int_0^1 x.t^2.1.dt + 1 = 1 + \frac{x}{3}$$

$$\psi_2(x) = 1 + \int_0^1 x \cdot t^2 \cdot \left(1 + \frac{t}{3}\right) \cdot dt = 1 + \frac{x}{3}\left(1 + \frac{1}{4}\right)$$

$$\psi_3(x) = 1 + \int_0^1 x.t^2.\left[1 + \frac{t}{3}\left(1 + \frac{1}{4}\right)\right].dt = 1 + \frac{x}{3}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2}\right)$$

وبسهولة نرى أن:

$$\psi_{n+1}(x) = 1 + \frac{x}{3}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + ... + \frac{1}{4^n}\right)$$

ومن ثمَّ:

$$\lim_{n \to \infty} \psi_{n+1}(x) = \psi(x) = 1 + \frac{4}{9}x$$

وهو يمثل حل المعادلة المفروضة.

تمرين (٦):

حل المعادلة التكاملية:

$$\psi(x) - \lambda \int_0^{\pi} \left(\cos^2 x \cos 2t + \cos 3x \cos^3 t\right) \psi(t) dt = 0$$

مستخدماً النواة المتردية.

الحل: في الواقع نرى أن:

$$a_1(x) = \cos^2 x \qquad b_1(t) = \cos 2t$$
$$a_2(x) = \cos 3x \qquad b_2(t) = \cos^3 t$$

ومن ثمّ فإن:

$$a_{11} = \int_a^b b_1(t) a_1(t) dt$$

$$a_{11} = \int_0^\pi \cos 2t . \cos^2 t dt = \frac{\pi}{4}$$

$$a_{21} = \int_0^\pi \cos^3 t . \cos^2 t dt = 0$$

$$a_{12} = \int_0^\pi \cos 2t . \cos 3t dt = 0$$

$$a_{22} = \int_0^\pi \cos^3 t . \cos 3t dt = \frac{\pi}{8}$$

وإن المعادلات التي تعين C_k هي:

$$\left(1 - \lambda \frac{\pi}{4}\right) C_1 - 0 = 0$$

$$0 + \left(1 - \lambda \frac{\pi}{8}\right) = 0$$

ومعين الأمثال لهذه المجموعة هو:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda \frac{\pi}{4} & 0 \\ 0 & 1 - \lambda \frac{\pi}{8} \end{vmatrix} = 0$$

وعلى هذا فإن القيم المميزة هي:

$$\lambda_1 = \frac{4}{\pi} \quad ; \quad \lambda_2 = \frac{8}{\pi}$$

من أجل $\lambda_1 = \frac{4}{\pi}$. نعوض في المجموعة الأخيرة فنجد:

$$0 . c_1 = 0$$
$$\frac{1}{2} . c_2 = 0$$

ومن هنا يكون:

$$c_2 = 0$$
$c_1 = A$ (A ثابت كيفي)

ومن ثمّ فإن الحل الخاص الأول يكتب بالشكل:

$$\psi_1(x) = c_1 . \lambda . \cos^2 x$$

أو بالشكل:

$$\psi_1(x) = \cos^2 x$$

حيث اعتبرنا $c_1 . \lambda = 1$

ومن أجل $\lambda = \frac{8}{\pi}$ نعوض في المجموعة نفسها نحصل على:

$$(-1)\, c_1 = 0$$
$$0 . c_2 = 0$$

ومن هنا يكون:

$$c_1 = 0$$
$c_2 = A_1$ (A_1 كيفي)

ومن ثمّ فإن الحل الخاص الثاني يكتب بالشكل:

$$\psi_2(x) = c_2 . \lambda . \cos 3x$$
$$\psi_2(x) = \cos 3x$$

حيث اعتبرنا $c_2 . \lambda = 1$

أما من أجل $\lambda \neq \lambda_1 , \lambda_2$ فعندئذ يكون:

$$c_1 = 0 , c_2 = 0$$

ومن ثمَّ فإن حل المعادلة المفروضة يعطى بالشكل:

$$\psi(x) = 0 \quad \text{(الحل الصفري)}$$

تمرين (٧):

حل المعادلة التكاملية:

$$\psi(x) - \lambda\int_0^1 (3x-2)t\psi(t)dt = 0$$

الحل: إن:

$$a_1(x) = 3x \qquad b_1(t) = t$$
$$a_2(x) = 1 \qquad b_2(t) = -2t$$

ومن ثمَّ فإن:

$$a_{11} = \int_0^1 3 \cdot t \cdot tdt = 3\int_0^1 t^2 dt = 1$$

$$a_{21} = \int_0^1 (-2t)(3t)dt = -6\int_0^1 t^2 dt = -2$$

$$a_{12} = \int_0^1 tdt = \frac{1}{2}$$

$$a_{22} = -2\int_0^1 tdt = -1$$

وإن المعادلات التي تعين c_k هي:

$$(1-\lambda)c_1 - \frac{\lambda}{2}c_2 = 0$$

$$2\lambda c_1 + (1 + \lambda) c_2 = 0$$

ومعين الأمثال لهذه المجموعة هو:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -\frac{\lambda}{2} \\ 2\lambda & 1+\lambda \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

إذاً حلها الوحيد هو الحل الصفري، أي إن:

$$\psi(x) = 0$$

ولا توجد هناك أيُّ قيمة مميزة لـ λ.

تمرين (٨):

حل المعادلة التكاملية التالية:

$$\psi(x) - \lambda \int_{-\pi}^{\pi} (x^2 \cos t + x \sin t)\psi(t)dt = \cos x$$

مستخدماً النواة المتردية.

الحل: نلاحظ أن المعادلة السابقة هي معادلة فريدهولم التكاملية الخطية من النوع الثاني ذات النواة المتردية لأن:

$$k(x,t) = x^2 \cos t + x \sin t \ ; \ h(x) = \cos x$$

لدينا:

$$k(x, t) = x^2 \cos t + x \sin t$$

النواة $k(x, t)$ كمولة تربيعياً لأن:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |k(x,t)|^2 dxdt = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (x^2 \cos t + x \sin t)^2 dxdt$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (x^4 \cos^2 t + x^2 \sin^2 t + 2x^3 \sin t \cos t) dxdt$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \left[\cos^2 t \int_{-\pi}^{\pi} x^4 dx + \sin^2 t \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx + 2 \sin t \cos t \int_{-\pi}^{\pi} x^3 dx \right] dt$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \left[\cos^2 t \left[\frac{x^5}{5} \right]_{-\pi}^{\pi} + \sin^2 t \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-\pi}^{\pi} + \sin 2t \left[\frac{x^4}{4} \right]_{-\pi}^{\pi} \right] dt$$

$$= \frac{2\pi^5}{5} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt + \frac{2\pi^3}{3} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt$$

$$= \frac{2\pi^5}{5} \left[\frac{t}{2} + \frac{1}{4} \sin 2t \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{2\pi^3}{3} \left[\frac{t}{2} - \frac{1}{4} \sin 2t \right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{2\pi^6}{5} + \frac{2\pi^4}{3} < \infty$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |k(x,t)|^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} (x^4 \cos^2 t + x^2 \sin^2 t + 2x^3 \sin t \cos t) dt$$

$$= \frac{2\pi^5}{5} \cos^2 t + \frac{2\pi^3}{3} \sin^2 t < \infty \quad \forall t \in [-\pi, \pi]$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |k(x,t)|^2 dt = \int_{-\pi}^{\pi} (x^4 \cos^2 t + x^2 \sin^2 t + 2x^3 \sin t \cos t) dt$$

$$= x^4 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt + x^2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt + x^3 \int_{-\pi}^{\pi} \sin 2t dt$$

$$= \pi x^4 + \pi x^2 < \infty \qquad \forall x \in [-\pi, \pi]$$

لدينا:

$$\begin{cases} a_1(x) = x^2 \\ a_2(x) = x \end{cases} \qquad \begin{cases} b_1(t) = \cos t \\ b_2(t) = \sin t \end{cases}$$

إن الدوال a_1 & a_2 مستقلة خطياً لأن:

$$\begin{vmatrix} x^2 & x \\ 2x & 1 \end{vmatrix} = x^2 - 2x^2 = -x^2 \neq 0$$

كما أن الدوال b_1 & b_2 مستقلة خطياً لأن:

$$\begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{vmatrix} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1 \neq 0$$

إذاً فالشروط محققة

وحل هذه المعادلة يعطى وفق الصيغة (52).

إن

$$h_1 = \int_a^b b_1(t) h(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} \cos t . \cos t dt = \pi$$

$$h_2 = \int_a^b b_2(t) h(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} \sin t . \cos t dt = 0$$

$$a_{11} = \int_a^b b_1(t) a_1(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} \cos t . t^2 dt = 4\pi$$

$$a_{12} = \int_a^b b_1(t) a_2(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} \cos t . t dt = 0$$

$$a_{21} = \int_a^b b_2(t) a_1(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} \sin t . t^2 dt = 0$$

$$a_{22} = \int_a^b b_2(t) a_2(t) dt = \int_{\pi}^{\pi} \sin t . t dt = +2\pi$$

وإن المعادلات التي تعين c_k هي:

$$(1 - 4\pi\lambda)\, c_1 = \pi$$

$$(1 - 2\pi\lambda)\, c_2 = 0$$

لنكتب معين الأمثال لهذه المجموعة:

$$\Delta(\lambda) \begin{vmatrix} 1 - 4\pi\lambda & 0 \\ 0 & 1 - 2\pi\lambda \end{vmatrix} = (1 - 2\pi\lambda)(1 - 4\pi\lambda) = 0$$

وعلى هذا فهناك قيمتان مميزتان وهما: $\lambda_1 = \frac{1}{4\pi}$ و $\lambda_2 = \frac{+1}{2\pi}$.

من أجل $\lambda \neq \lambda_1, \lambda_2$ عندئذ بالتعويض في المجموعة الأخيرة نجد:

$$c_1 = \frac{\pi}{1-4\pi\lambda}; c_2 = 0$$

ومن ثمَّ فإن حل المعادلة المفروضة يعطى بالشكل:

$$\psi(x) = h(x) + \lambda\, c_1\, a_1(x) + \lambda\, c_2 a_2(x)$$

$$\psi(x) = \cos x + \frac{\lambda\pi}{1-4\pi\lambda}$$

أما من أجل $\lambda = \lambda_1 = \frac{1}{4\pi}$ عندئذ بالتعويض في المجموعة نفسها نحصل على:

$$(1\text{-}4\pi \,.\, \frac{1}{4\pi})\, c_1 = \pi$$

$$(1 + 2\pi \,.\, \frac{1}{4\pi})\, c_2 = 0$$

أي إن:

$$c_1 - c_1 = 0 \neq \pi$$

$$(1 + \frac{1}{2})\, c_2 = 0$$

وهذا مستحيل.

من هنا نستنتج أنه لا يوجد حل للمعادلة التكاملية المفروضة.

أما في حالة $\lambda_2 = \frac{1}{2\pi}$ وعندئذ يكون لدينا:

$$0 \,.\, c_2 = 0 \quad ; \quad c_2 = A \text{ كيفي} \quad ; \quad c_1 = -\,\pi$$

وهذا يعني أن الحل موجود ويعطى بالصيغة:

$$\psi(x) = \cos x - \frac{1}{2}x^2 + Ax$$

تمرين (٩):

حل المعادلة التكاملية:

$$\psi(x) - \lambda\int_0^1 (xt - 2x^2)\psi(t)dt = 0$$

الحل: نرى في هذه المعادلة أن:

$k(x, t) = xt - 2x^2$

$a_1(x) = x \quad ; \quad b_1(t) = t$

$a_2(x) = -2x^2 \quad ; \quad b_2(t) = 1$

ومن ثمَّ:

$$a_{11} = \int_a^b b_1(t)a_1(t)dt = \int_0^1 t.t.dt = \frac{1}{3}$$

$$a_{12} = \int_a^b b_1(t)a_2(t)dt = -\int_0^1 t.(2t^2).dt = -\frac{1}{2}$$

$$a_{21} = \int_a^b b_2(t)a_1(t)dt = \int_0^1 t.dt = \frac{1}{2}$$

$$a_{22} = \int_a^b b_2(t)a_2(t)dt = -\int_0^1 2t^2.dt = -\frac{2}{3}$$

وإن المعادلات التي تعين c_k هي:

$$\left(1 - \frac{\lambda}{3}\right)c_1 + \frac{\lambda}{2}c_2 = 0$$

$$-\frac{\lambda}{2}c_1 + (1 + \frac{2}{3}\lambda)c_2 = 0$$

إن معين الأمثال لهذه المجموعة يساوي:

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix}1-\frac{\lambda}{3} & \frac{\lambda}{2}\\ -\frac{\lambda}{2} & 1+\frac{2}{3}\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+6)^2=0$$

ومن ثمَّ يوجد قيمة مميزة واحدة هي $\lambda = -6$. نعوض في المجموعة الأخيرة $\lambda = -6$ فنجد:

$c_1 = A \quad ; \quad c_2 = A$ (A كيفي)

من هنا يكون:

$$\psi(x) = A\,(x - 2x^2)$$

تمرين (١٠):

حل المعادلة التكاملية:

$$\psi(x)-\lambda\int_0^1 \sin(\ln x)\psi(t)dt = 2x$$

مستخدماً طريقة النواة المتردية.

الحل: لدينا:

$$k(x, t) = \sin(\ln x)$$

$$a_1(x) = \sin(\ln x) \qquad ; \qquad b_1(t) = 1$$

ومن ثمَّ:

$$a_{11} = \int_0^1 \sin(\ln t)dt = -\frac{1}{2}$$

(وتجدر الإشارة هنا أننا كاملنا بمفهوم التكاملات المعتلة).

$$h_1 = \int_0^1 2t dt = 1$$

أي إن:

$$c_1 = h_1 + \lambda\, a_{11}\, c_1$$

$$c_1 = 1 + \lambda \left(-\frac{1}{2}\right) c_1$$

$$c_1 = \frac{2}{2+\lambda}$$

ومن ثمّ نعلم أن صيغة الحل تعطى بالشكل:

$$\psi(x) = h(x) + \lambda c_1 a_1(x)$$

أو:

$$\psi(x) = 2x + \lambda \cdot \frac{2}{2+\lambda} \sin(\ln x)$$

أي إن المعادلة المفروضة تملك حلاً وحيداً بشرط $\lambda \neq -2$.

أما لو أخذنا المعادلة المتجانسة الموافقة:

$$\psi(x) - \lambda \int_0^1 \sin(\ln x)\psi(t)dt = 0$$

لامتلكنا فقط الحل الصفري $\psi(x) \equiv 0$.

في حالة خاصة عندما $\lambda = -2$ فيمكن التحقق بسهولة من أن المعادلة المعطاة غير قابلة للحل.

تمرين (١١):

لتكن لدينا المعادلة التكاملية:

$$\psi(x) - \lambda \int_0^{\pi} \cos(x+t)\psi(t)dt = \cos 3x$$

ولنوجد حل هذه المعادلة وكذلك حل المعادلة المتجانسة الموافقة.

الحل: إن:

$$h(x) = \cos 3x$$
$$k(x, t) = \cos(x + t) = \cos x \cos t - \sin x \sin t$$
$$a_1(x) = \cos x \qquad b_1(t) = \cos t$$
$$a_2(x) = -\sin x \qquad b_2(t) = \sin t$$

ومنه:

$$a_{11} = \int_a^b b_1(t)a_1(t)dt = \int_0^\pi \cos t.\cos t dt = \frac{\pi}{2}$$

$$a_{12} = \int_a^b b_1(t)a_2(t)dt = -\int_0^\pi \cos t.\sin t dt = 0$$

$$a_{21} = \int_a^b b_2(t)a_1(t)dt = \int_0^\pi \sin t.\cos t dt = 0$$

$$a_{22} = \int_a^b b_2(t)a_2(t)dt = -\int_0^\pi \sin t.\sin t dt = -\frac{\pi}{2}$$

$$h_1 = \int_a^b b_1(t)h(t)dt = \int_0^\pi \cos t.\cos 3t dt = 0$$

$$h_2 = \int_a^b b_2(t)h(t)dt = \int_0^\pi \sin t.\cos 3t dt = 0$$

ومن ثمَّ فإن:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda\frac{\pi}{2} & 0 \\ 0 & 1+\lambda\frac{\pi}{2} \end{vmatrix} = (1-\lambda\frac{\pi}{2})(1+\lambda\frac{\pi}{2})$$

عندما $\lambda \neq \pm\frac{2}{\pi}$ $(\Delta(\lambda) \neq 0)$ عندئذ فإن:

$$c_1 = 0 \quad ; \quad c_2 = 0$$

وفي هذه الحالة المعطاة المعادلة تملك حلاً وحيداً هو:

$$\psi(x) = \cos 3x$$

وعليه فإن المعادلة المتجانسة الموافقة:

$$\psi(x) - \lambda \int_0^{\pi} \cos(x+t)\psi(t)dt = 0$$

تملك حل صفري فقط هو $\psi(x) \equiv 0$

أما في حالة $\lambda_1 = \frac{2}{\pi}$ فعندئذ يكون:

$$c_1 = A \quad ; \quad c_2 = 0$$

أي إن للمعادلة المعطاة عدداً غير منتهٍ من الحلول تعطى بالشكل:

$$\psi(x) = \frac{2}{\pi}.A.\cos x + \cos 3x$$

أو:

$$\psi(x) = \tilde{c} \cos x + \cos 3x$$

وعليه فإن المعادلة المتجانسة الموافقة في هذه الحالة تمتلك مجموعة غير منتهية من الحلول تعطى بالصيغة:

$$\psi(x) = \tilde{c} \cos x$$

ولما $\lambda_2 = -\frac{2}{\pi}$ فنجد:

$$c_1 = 0 \quad ; \quad c_2 = A$$

والحل العام للمعادلة المعطاة يكتب بالشكل:

$$\psi(x) = \tilde{c} \sin x + \cos 3x$$

تمرين (١٢):

حل المعادلة التكاملية:

$$\psi(x) = e^x + \lambda\int_0^1 (5x^2 - 3)t^2\psi(t)dt$$

ثم أوجد حل المعادلة المتجانسة الموافقة لها.

الحل: لدينا:

$$k(x, t) = (5x^2 - 3)\, t^2$$
$$a_1(x) = 5x^2 - 3 \qquad b_1(t) = t^2$$
$$h(x) = e^x$$

ومن ثمَّ:

$$a_{11} = \int_0^1 t^2(5t^2 - 3)dt = 0$$

$$h_1 = \int_0^1 t^2 e^t dt = e - 2$$

إذن:

$$c_1 = h_1 + \lambda\, a_{11}\, c_1 \Rightarrow c_1 = e - 2$$

أي إن المعادلة المعطاة من أجل أية قيمة لـ λ تملك حلاً وحيداً يعطى بالصيغة:

$$\psi(x) = h(x) + \lambda\, c_1\, a_1(x)$$
$$\psi(x) = e^x + \lambda\,(e - 2)\,(5x^2 - 3)$$

أما المعادلة المتجانسة الموافقة:

$$\psi(x) - \lambda\int_0^1 (5x^2 - 3)t^2\psi(t)dt = 0$$

فإنها تملك حلاً صفرياً فقط هو:

$$\psi(x) = 0$$

تمرين (١٣):

حل المعادلة التكاملية التالية:

$$\psi(x) = e^{x^2} + \int_0^x e^{x^3 - t^2} \psi(t)dt$$

الحل: في هذا المثال لدينا:

$$k(x,t) = e^{x^2 - t^2} \quad ; \quad \lambda = 1$$

ومن ثمّ فإن:

$$k_1(x,t) = e^{x^2 - t^2}$$

$$k_2(x,t) = \int_t^x k_1(x,z)k_1(z,t)dz$$

$$= \int_t^x e^{x^2 - z^2} e^{z^2 - t^2} dz = e^{x^2 - t^2}(x - t)$$

$$k_3(x,t) = \int_t^x e^{x^2 - z^2} e^{z^2 - t^2}(z - t)dz$$

$$k_3(x,t) = e^{x^2 - t^2} \frac{(x - t)^2}{2!}$$

وفي الحقيقة نتوقع أن يكتب $k_m(x, t)$ بالشكل:

$$k_m(x,t) = e^{x^2 - t^2} \frac{(x - t)^{m-1}}{(m - 1)!}$$

ولكي يكون هذا الدستور صحيحاً يجب أن نبرهنه من أجل $m + 1$.

$$k_{m+1}(x,t) = \int_t^x e^{x^2 - z^2} e^{z^2 - t^2} \frac{(z - t)^{m-1}}{(m - 1)!} dz$$

بإجراء المكاملة والإصلاح نجد:

$$k_{m+1}(x,t) = e^{x^2 - t^2} \frac{(x - t)^m}{m!}$$

وهو صحيح من أجل m لأنه صحيح من أجل $m + 1$.

لنكتب الآن النواة الحالة:

$$R(x, t, \lambda) = k_1(x, t) + \lambda k_2(x, t) + \lambda^2 k_3(x, t) + \dots \quad ; \lambda = 1$$

$$= e^{x^2-t^2} + e^{x^2-t^2}(x-t) + e^{x^2-t^2}\frac{(x-t)^2}{2!} + \dots$$

$$+ e^{x^2-t^2}\frac{(x-t)^m}{m!} + \dots$$

$$= e^{x^2-t^2}\left[1 + (x-t) + \frac{(x-t)^2}{2!} + \dots \frac{(x-t)^m}{m!} + \dots\right]$$

$$= e^{x^2-t^2} e^{x-t}$$

إن صيغة الحل لمعادلة فولتيرا التكاملية تعطى ب:

$$\psi(x) = h(x) + \lambda\int_a^x R(x, t, \lambda) h(t) dt$$

بالتعويض نجد:

$$\psi(x) = e^{x^2} + \int_0^x e^{x^2-t^2} e^{x-t} e^{t^2} dt$$

$$\psi(x) = e^{x^2+x} + e^{x^2}$$

تمرين (١٤):

حل المعادلة التكاملية:

$$\psi(x) = x - \frac{1}{2}\int_0^x x\psi(t) dt$$

الحل: كما نلاحظ أن المعادلة المعطاة هي معادلة فولتيرا التكاملية، ومنه:

$$k_1(x, t) = x$$

$$k_2(x, t) = \int_t^x k_1(x, z) k_1(z, t) dz$$

$$k_2(x,t)=\int_t^x (x)(z)dz = x\left(\frac{x^2-t^2}{2}\right)$$

$$k_3(x,t)=\int_t^x k_1(x,z)k_2(z,t)dz$$

$$=\int_t^x (x)(z)\left(\frac{z^2-t^2}{2}\right)dz$$

$$=x\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{x^2-t^2}{2}\right)^2$$

وبسهولة يمكن التحقق بأن:

$$k_m(x,t)=x\cdot\frac{1}{(m-1)!}\left(\frac{x^2-t^2}{2}\right)^{m-1}$$

وعندئذ فإن النواة الحالة تكتب بالشكل:

$$R(x,t,\lambda)=x\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\lambda^{m-1}}{(m-1)!}\left(\frac{x^2-t^2}{2}\right)^{m-1}$$

$$=xe^{\lambda\frac{x^2-t^2}{2}}$$

ولما كانت $\lambda=-\frac{1}{2}$ فإن حل المعادلة المفروضة هو:

$$\psi(x)=-xe^{-\frac{x^2}{4}}+x$$

تمرين (١٥):

حل المعادلة التكاملية بتحويلها إلى معادلة تفاضلية عادية.

$$y(x)=x+2\sin x-1-\int_0^x (x-t)y(t)dt \qquad (1)$$

الحل: باشتقاق المعادلة التكاملية مرتين نجد:

$$y'(x) = 1 + 2\cos x - \int_0^x y(t)dt \qquad (2)$$

$$y''(x) = -2\sin x - y(x)$$

والمعادلة الأخيرة يمكن كتابتها بالشكل:

$$y''(x) + y(x) = -2\sin x \qquad (3)$$

إن الشروط الابتدائية يمكن إيجادها من المعادلتين (1) و (2) وذلك عندما $x = 0$ أي إن:

$$y(0) = -1 \quad ; \quad y'(0) = 3 \qquad (4)$$

وبحل المعادلة التفاضلية (3) مستفيدين من الشروط الابتدائية (4) نجد:

$$y(x) = 2\sin x + (x-1)\cos x$$

وهو يمثل حل المعادلة التكاملية المفروضة.

تمرين (١٦):

حل معادلة فولتيرا التكاملية:

$$\psi(t) = 1 + \int_0^t \cos(t-s)\sin(t-s)\psi(s)ds$$

الحل: في هذا المثال نجد:

$$h(t) = 1 \quad ; \quad k(t,s) = k(t-s) = \cos(t-s)\sin(t-s)$$
$$= \frac{1}{2}\sin 2(t-s)$$

$$k(t) = \frac{1}{2}\sin 2t$$

ومن ثمَّ:

$$L[k(t)] = L[\frac{1}{2}\sin 2t] = \frac{1}{z^2+4} = k(z)$$

$$L[\psi(t)] = \psi(z)$$

$$L[h(t)] = L[1] = \frac{1}{z} = H(z)$$

بالتعويض في المعادلة $\psi(z) = \dfrac{H(z)}{1-\lambda k(z)}$ نجد:

$$\psi(z) = \frac{\frac{1}{z}}{1-\frac{1}{z^2+4}} = \frac{z^2+4}{z(z^2+3)} = \frac{A}{z} + \frac{Bz+C}{z^2+3}$$

وبتعيين الثوابت C, B, A نجد:

$$\psi(z) = \frac{4}{3z} + \left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{z}{z^2+3}$$

وبالانتقال إلى التحويل المعاكس نجد الأصل:

$$\psi(t) = \frac{1}{3}\left(4 - \cos\sqrt{3}t\right)$$

تمرين (١٧):

حل معادلة فولتيرا التكاملية:

$$\psi(x) = 1 + \int_0^t ch(t-s)\psi(s)ds$$

الحل: في هذا المثال لدينا:

$$h(t) = 1 \;\; ; \;\; k(t,s) = ch(t-s)$$

$$k(t) = ch\, t$$

$$L[1] = \frac{1}{z} \;\; ; \;\; L[k(t)] = L[cht] = \frac{z}{z^2-1}$$

$$L[\psi(t)] = \psi(z)$$

ومن ثمَّ نجد:

$$\psi(z) = \frac{1}{z} + \frac{z}{z^2 - 1}\psi(z)$$

أو:

$$\psi(z) = \frac{z^2 - 1}{z(z^2 - z - 1)} = \frac{1}{z} + \frac{1}{(z - \frac{1}{2})^2 - \frac{5}{4}}$$

وبالانتقال إلى التحويل المعاكس نجد الأصل:

$$\psi(t) = 1 + \frac{2}{\sqrt{5}} e^{\frac{t}{2}} sh \frac{\sqrt{5}}{2} t$$

تمرين (١٨):

أوجد حل المعادلة التفاضلية . التكاملية:

$$\psi'(t) + \int_0^t [\cos(t - s) - 2]\psi(s) ds = 0$$

والمحقق للشرط الابتدائي $\psi(0) = 4$.

الحل: نفرض أن:

$$L[\psi(t)] = \psi(z) \quad ; \quad L[\psi'(t)] = z\,\psi(z) - \psi(0) = z\psi(z) - 4$$

وبما أن:

$$L[\cos t] = \frac{z}{z^2 + 1} \quad ; \quad L[-2] = -\frac{2}{z}$$

فإننا نجد المعادلة التالية:

$$z\psi(z) - 4 + \left(\frac{z}{z^2 + 1} - \frac{2}{z}\right)\psi(z) = 0$$

ومن ثمَّ فإن:

$$\psi(z)=\frac{4z^3-4z}{z^4-2}=\frac{(2-\sqrt{2})z}{z^2+\sqrt{2}}+\frac{(2+\sqrt{2})z}{z^2-\sqrt{2}}$$

وبالانتقال إلى التحويل المعاكس نجد الأصل:

$$\psi(t)=(2-\sqrt{2})\cos t\sqrt[4]{2}+(2+\sqrt{2})\operatorname{ch}t\sqrt[4]{2}$$

تمرين (١٩):

أوجد حل المعادلة التفاضلية . التكاملية:

$$\psi''(t)-4\int_0^t e^{-(t-s)}\left[\psi'(s)+\psi(s)\right]ds=0$$

والمحقق للشروط الابتدائية: $\psi(0)=0\ ,\ \psi'(0)=12$.

الحل: في هذا المثال لدينا:

$$k(t)=e^{-t}$$

وبما أن:

$$L[k(t)]=L[e^{-t}]=\frac{1}{z+1}$$

$$L[\psi(t)]=\psi(z)$$

فإننا نجد:

$$L[\psi'(t)]=z\,\psi(z)-\psi(0)=z\,\psi(z)$$
$$L[\psi''(t)]=z^2\psi(z)-\psi'(0)=z^2\,\psi(z)-12$$

وبالتعويض نجد:

$$z^2\psi(z)-12-4\left[\frac{1}{z+1}(z\psi(z)+\psi(z))\right]=0$$

أو:

$$z^2\,\psi(z)-12-4\,\psi(z)=0$$

ومنه نجد:

$$\psi(z)=\frac{12}{z^2-4}$$

وبالانتقال إلى التحويل المعاكس نجد الأصل: $\psi(t) = 6\ \mathrm{sh}2t \quad ; \quad t > 0$

تمرين (٢٠):

أوجد حل المعادلة التفاضلية . التكاملية:

$$\psi''(t)+\int_0^t e^{2(t-s)}\psi'(s)ds=e^{2t}$$

والذي يحقق الشروط الابتدائية: $\psi(0) = \psi'(0) = 0$

الحل: في هذا المثال نجد:

$$L[\psi(t)] = \psi(z)$$
$$L[\psi'(t)] = z\psi(z) - \psi(0) = z\,\psi(z)$$
$$L[\psi''(t)] = z^2\psi(z) - \psi'(0) - z\,\psi(0) = z^2\,\psi(z)$$
$$k(t) = e^{2t} \Rightarrow L[k(t)] = L[e^{2t}] = \frac{1}{z-2}$$

وبالتعويض نجد:

$$\psi(z)=\frac{1}{z(z-1)^2}=\frac{1}{z}+\frac{1}{(z-1)^2}-\frac{1}{z-1}$$

وبالانتقال إلى التحويل المعاكس نجد الأصل:

$$\psi(t) = t\,e^t - e^t + 1$$

تمرين (٢١):

أوجد حل معادلة فولتيرا التكاملية التالية:

$$\psi(t)=\sin t+2\int_0^t\cos(t-s)\psi(s)ds$$

الحل: إن:

$$L[\sin t] = \frac{1}{z^2+1}$$

$$L[\cos t] = \frac{z}{z^2+1} \quad ; \quad L[\psi(t)] = \psi(z)$$

ومن ثمّ فإن:

$$\psi(z) = \frac{1}{z^2+1} + \frac{2z}{z^2+1}\psi(z)$$

أي إن:

$$\psi(z) = \frac{1}{(z-1)^2}$$

وبالانتقال إلى التحويل المعاكس نجد الأصل:

$$\psi(t) = t\,e^t$$

تمرين (٢٢):

حل المعادلة التالية:

$$g(s) = 1 + \lambda\int_0^{\pi} \sin(t+s)g(t)dt$$

الحل: نلاحظ أننا أمام معادلة فيردهولم التكاملية غير المتجانسة حيث إن:

$a = 0\,,\ b = \pi\,,\ f(s) = 1 \quad ; \quad k\,(s,t) = \sin\,(s+t) = k_1\,(s,\,t)$

ومن ثمّ لنحسب النوى المكررة:

$$k_2(s,t) = \int_0^{\pi} k_1(s,z)k_1(z,t)dz = \int_0^{\pi} \sin(s+z)\sin(z+t)dz$$

$$= \int_0^{\pi} -\frac{1}{2}\left[\cos(2z+s+t) - \cos(s-t)\right]dz$$

$$= \int_0^{\pi} -\frac{1}{2}\cos(2z+s+t)dz + \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos(s-t)dz$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin(2z+s+t)\right]_0^{\pi} + \frac{1}{2}[\cos(s-t)z]_0^{\pi}$$

$$\Rightarrow k_2(s,t) = \frac{\pi}{2}\cos(s-t)$$

$$k_3(s,t) = \int_0^{\pi} k_1(s,z)k_2(z,t)dz = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\sin(s+z)\cos(z-t)dz$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}[\sin(s-t+2z)+\sin(s+t)]dz$$

$$= \frac{\pi}{4}\left[\int_0^{\pi}\sin(s-t+2z)dz + \int_0^{\pi}\sin(s+t)dz\right]$$

$$= \frac{\pi}{4}\left[-\frac{\cos(s-t+2z)}{2} + z\sin(s+t)\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{\pi}{4}\left[-\frac{1}{2}\cos(s-t+2\pi) + \pi\sin(s+t) + \frac{1}{2}\cos(s-t) - 0\sin(s+t)\right]$$

$$\Rightarrow k_3(s,t) = \frac{\pi^2}{4}\sin(s+t) = \frac{\pi^2}{4}k_1(s,t)$$

$$k_4(s,t) = \int_0^{\pi} k_1(s,z)k_3(z,t)dz = \frac{\pi^2}{4}\int_0^{\pi}\sin(s+z)\sin(z+t)dz$$

$$\Rightarrow k_4(s,t) = \frac{\pi^2}{4}\left[\frac{\pi}{2}\cos(s-t)\right] = \frac{\pi^3}{8}\cos(s-t) = \frac{\pi^2}{4}k_2(s,t)$$

$$k_5(s,t) = \int_0^{\pi} k_1(s,z)k_4(z,t)dz = \frac{\pi^3}{8}\int_0^{\pi}\sin(s+z)\cos(z-t)dz$$

$$\Rightarrow k_5(s,t) = \frac{\pi^3}{8}\left[\frac{\pi}{2}\sin(s+t)\right] = \frac{\pi^4}{16}k_1(s,t) = \frac{\pi^4}{2^4}k_1(s,t)$$

لدينا:

$$R(s, t, \lambda) = k_1(s, t) + \lambda\, k_2(s, t) + \lambda^2 k_3(s, t) + \lambda^3 k_3(s, t) + \ldots$$

فنجد بالتعريف:

$$R(s,t,\lambda) = \sin(s+t) + \lambda\frac{\pi}{2}\cos(s-t) + \lambda^2\frac{\pi^2}{2^2}\sin(s+t) +$$

$$+\lambda^3\frac{\pi^3}{2^3}\cos(s-t) + \ldots\ldots$$

$$= \sin(s+t)\left[1 + \left((\lambda\frac{\pi}{2})^2\right)^1 + \left((\lambda\frac{\pi}{2})^2\right)^2 + \left((\lambda\frac{\pi}{2})^2\right)^3 + \ldots\right]$$

$$+\cos(s-t)\left[\lambda\frac{\pi}{2} + \left(\lambda\frac{\pi}{2}\right)^3 + \left(\lambda\frac{\pi}{2}\right)^5 + \ldots\right]$$

$$= \sin(s+t)\cdot\frac{1}{1-\dfrac{\lambda^2\pi^2}{4}} + \cos(s-t)\cdot\frac{\lambda\dfrac{\pi}{2}}{1-\lambda^2\dfrac{\pi^2}{4}}$$

$$= \sin(s+t)\cdot\frac{4}{4-\lambda^2\pi^2} + \cos(s-t)\cdot\frac{2\lambda\pi}{4-\lambda^2\pi^2}$$

$$;\ \left|\lambda^2\frac{\pi^2}{4}\right| < 1 \qquad \left|\lambda^2\right| < \frac{4}{\pi^2}$$

$$R(s,t,\lambda) = \frac{4\sin(s+t) + 2\lambda\pi\cos(s-t)}{4-\lambda^2\pi^2} \quad ;\ \left|\lambda^2\right| < \frac{4}{\pi^2}$$

وهو شرط تقارب السلسلة. أما $R(s, t, \lambda)$ فهي النواة الحالة لـ $k(s, t)$.

والآن نعوض في صيغة الحل باستخدام النواة الحالة:

$$g(s) = f(s) + \lambda\int_a^b R(s,t,\lambda) f(t)\,dt$$

فيكون لدينا:

$$g(s)=1+\lambda\int_0^{\pi}\frac{4\sin(s+t)+2\lambda\pi\cos(s-t)}{4-\lambda^2\pi^2}dt$$

$$=1+\frac{4\lambda}{4-\lambda^2\pi^2}\int_0^{\pi}\sin(s+t)dt+\frac{2\lambda^2\pi}{4-\lambda^2\pi^2}\int_0^{\pi}\cos(s-t)dt$$

$$=1+\frac{4\lambda}{4-\lambda^2\pi^2}\left[-\cos(s+t)\right]_0^{\pi}+\frac{2\lambda^2\pi}{4-\lambda^2\pi^2}\left[-\sin(s-t)\right]_0^{\pi}$$

$$=1+\frac{4\lambda}{4-\lambda^2\pi^2}\left[-\cos(s+\pi)+\cos(s+0)\right]+$$

$$+\frac{2\lambda^2\pi}{4-\lambda^2\pi^2}\left[-\sin(s-\pi)+\sin(s-0)\right]$$

$$=1+\frac{4\lambda}{4-\lambda^2\pi^2}\left[\cos s+\cos s\right]+\frac{2\lambda^2\pi}{4-\lambda^2\pi^2}\left[+\sin s+\sin s\right]$$

$$=1+\frac{4\lambda}{4-\lambda^2\pi^2}2\cos s+\frac{2\lambda^2\pi}{4-\lambda^2\pi^2}2\sin s$$

$$\Rightarrow g(s)=1+\frac{4\lambda}{4-\lambda^2\pi^2}\left[2\cos s+\pi\lambda\sin s\right]$$

وهو الحل المطلوب.

تمرين (٢٣):

لتكن لدينا المعادلة التكاملية:

$$g(s)=1+\lambda\int_0^1 s.t.g(t)dt$$

. بين باستخدام العلاقة $B|\lambda|<1$ أن متسلسلة نيومن متقاربة عندما $|\lambda|<3$.

. أوجد $g(s)$ مستخدماً طريقة النواة الحالة.

الحل:

المتحولات مستقلة لذلك يمكن المكاملة مباشرة وحيث $k(s, t) = s\,.\,t$ ومن ثمّ:

$$B^2 = \int_0^1\int_0^1 s^2t^2 dsdt =$$

$$B^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow |B| = \frac{1}{3}$$

وشرط التقارب هو: $B|\lambda| < 1$ أي $\frac{1}{3}|\lambda| < 1$

$$\Rightarrow |\lambda| < 3$$

وهو شرط كافٍ للتقارب وليس لازماً

$$k_1(s,t) = st, k_2(s,t) = \int_0^1 s.z.z.tdz = \frac{st}{3} = \frac{1}{3}k_1(s,t)$$

$$k_3(s,t) = \frac{1}{9}k_1(s,t) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 k_1(s,t)$$

ونستمر بهذه الطريقة فنجد:

$$k_m(s,t) = \left(\frac{1}{3}\right)^{m-1} k_1(s,t)$$

$$k_{m+1}(s,t) = \left(\frac{1}{3}\right)^{m} k_1(s,t)$$

$$R(s,t,\lambda) = k_1 + \lambda k_2 + \lambda^2 k_3 + \ldots..$$

$$= k_1(s,t)\left[1 + \frac{\lambda}{3} + \left(\frac{\lambda^2}{3}\right)^2 + \ldots.\right]$$

ما داخل القوس المتوسط يمثل متسلسلة هندسية أساسها $\frac{\lambda}{3}$ ومتقاربة عندما $\frac{|\lambda|}{3} < 1$ أي إن $|\lambda| < 3$.

لذلك نستبدل المتسلسلة الهندسية بمجموعها:

$$R(s,t,\lambda) = k_1(s,t)\frac{1}{1-\frac{\lambda}{3}} = \frac{3k_1(s,t)}{3-\lambda} = \frac{3st}{3-\lambda}$$

$$g(s) = 1 + \frac{3\lambda s}{3-\lambda}\int_0^1 t\,dt = 1 + \frac{3\lambda s}{2(3-\lambda)}$$

تمرين (٢٤):

حل المعادلة التكاملية:

$$\varphi(t) - \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \varphi(u)du = \sin t$$

الحل: يجب التحقق من الشرط $|\lambda| < \frac{1}{B}$ (تأكد من ذلك)، وكذلك نجد:

$$H_1(t,u) = 1$$

$$H_2(t,u) = \int_0^\pi H_1(t,z)H_1(z,u)dz$$

$$= \int_0^\pi dz = \pi$$

$$H_3(t,u) = \int_0^\pi H_2(t,z)H_1(z,u)dz$$

$$= \int_0^\pi \pi \cdot dz = \pi^2$$

$$H_4(t,u) = \int_0^\pi H_3(t,z)H_1(z,u)dz$$

$$= \int_0^\pi \pi^2 \cdot dz = \pi^3$$

$$H_{n+1}(t,u) = \pi^n$$

$$R(t,u,\lambda) = H_1(t, u) + \lambda H_2(t, u) + \lambda^2 H_3(t, u) + \lambda^3 H_4(t, u) + \ldots + \lambda^n H_{n+1}(t, u) + \ldots\ldots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda\pi)^n = \frac{1}{1-\lambda\pi}$$

$$\varphi(t) = \sin t + \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} R(t,u,\lambda)\cdot\varphi(u)du$$

$$= \sin t + \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{1-\lambda\pi}\cdot h(u)du$$

$$= \sin t + \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{1-\lambda\pi}\cdot \sin u du$$

$$= \sin t + \frac{1}{2\pi}\frac{1}{1-\lambda\pi}[-\cos u]_0^{\pi}$$

$$= \sin t + \frac{1}{2\pi}\frac{1}{1-\lambda\pi}[+1-(-1)]$$

$$= \sin t + \frac{1}{\pi-\lambda\pi^2}$$

تمرين (٢٥):

حل المعادلة التفاضلية ـ التكاملية الآتية:

$$225\psi''(t) - 16\int_0^t \cos\frac{t-s}{3}\psi'(s)ds = -15\sin\frac{t}{3}$$

حيث: $\psi(0) = 0 \; ; \; \psi'(0) = \dfrac{1}{5}$

الحل: لدينا: $L[\psi''(t)] = z^2\,\psi(z) - z\,\psi(0) - \psi'(0) = z^2(z) - \dfrac{1}{5}$

$$L[\psi'(t)] = z\,\psi(z) - \psi(0) = z\,\psi(z)$$

$$k(t, s) = k(t-s) = \cos\frac{(t-s)}{3} \Rightarrow k(t) = \cos\frac{t}{3}$$

$$L[k(t)] = L[\cos\frac{t}{3}] = \frac{z}{z^2+\frac{1}{9}} = \frac{9z}{9z^2+1}$$

$$L[h(t)] = L[-15\sin\frac{t}{3}] = -15 \cdot \frac{1/3}{z^2+\frac{1}{9}} = -5 \cdot \frac{9}{9z^2+1}$$

بإجراء تحويل لابلاس على المعادلة المفروضة:

$$225(z^2\psi(z)-\frac{1}{5})-16\cdot\frac{9z}{9z^2+1}z\psi(z) = -5\cdot\frac{9}{9z^2+1}$$

$$\psi(z)\left[225z^2-\frac{144z^2}{9z^2+1}\right] = +45-\frac{45}{9z^2+1}$$

$$\psi(z)\left[\frac{2025z^4+225z^2-144z^2}{9z^2+1}\right] = \frac{405z^2+45-45}{9z^2+1}$$

$$\psi(z) = \frac{405z^2}{2025z^4+81z^2} = \frac{45z^2}{225z^4+9z^2} = \frac{5}{25z^2+1} = \frac{\frac{1}{5}}{z^2+\frac{1}{25}}$$

بالانتقال إلى تحويل لابلاس العكسي:

$$L^{-1}[\psi(z)] = L^{-1}\left[\frac{\frac{1}{5}}{z^2+\frac{1}{25}}\right]$$

$$\psi(t) = \sin\frac{t}{5}$$

تمرين (٢٦):

أوجد حل المعادلة التكاملية:

$$\psi(x) = \cos 2x + \int_{0}^{2\pi} \sin x \cos t \psi(t) dt$$

وذلك بالطريقة التي تراها مناسبة.

الحل: إن:

$$k_1(x, t) = k(x, t) = \sin x \cos t$$

$$k_2(x, t) = \int_{0}^{2\pi} (\sin x \cos z)(\sin z \cos t) dz$$

$$= \sin x . \cos t \int_{0}^{2\pi} \cos z . \sin z dz = 0$$

ومنه نجد أن هذه المتسلسلة متقاربة وذلك أياً كانت λ أي إن:

$$k_3(x, t) = k_4(x, t) = k_5(x, t) = \dots = 0$$

وبما أن كل متسلسلة منتهية متقاربة، فإنه حسب دستور النواة الحالة يكون لدينا:

$$R(x, t, \lambda) = \sin x . \cos t$$

ومن ثمَّ فإن:

$$\psi(x) = h(x) + \lambda \int_{a}^{b} R(x, t, \lambda) h(t) dt$$

$$\psi(x) = \cos 2x + \lambda \int_{0}^{2\pi} (\sin x . \cos t)(\cos 2t) dt$$

$$\psi(x) = \cos 2x + \lambda \int_{0}^{2\pi} \sin x . (\cos t . \cos 2t) dt$$

$$\psi(x) = \cos 2x + \lambda \sin x \int_{0}^{2\pi} \cos t \cos 2t dt$$

$$\psi(x) = \cos 2x + 0$$

$$\psi(x) = \cos 2x$$

تمرين (٢٧):

١ . مستخدماً طريقة التقريبات المتتالية.

٢ . مستخدماً طريقة النواة المتكررة الـ m.

حل المعادلة التكاملية:

$$\psi(x)=1+\lambda\int_0^1(1-3xt)\psi(t)dt$$

الحل:

١ . طريقة التقريبات المتتالية:

لا بد من حساب B^2.

$$B^2=\int_a^b\int_a^b|k(x,t)|^2dxdt$$

$$B^2=\int_0^1\int_0^1|1-3xt|^2dxdt=\int_0^1\left[x+3x^3t^2-3x^2t\right]_0^1dt$$

$$=\int_0^1\left[1+3t^2-3t\right]dt=\left[t+t^3-3\frac{t^2}{2}\right]_0^1=\frac{1}{2}$$

لدينا:

$$\psi(x)=h(x)+\lambda\int_a^b k(x,t)\psi(t)dt$$

نفرض $\psi_0(x)=h(x)$ عندئذ نجد:

$$\psi_1(x)=h(x)+\lambda\int_a^b k(x,t)\psi(t)dt$$

$$=1+\lambda\int_0^1(1-3xt)(1)dt=1+\left[\lambda\left(\frac{2-3x}{2}\right)\right]$$

$$\psi_2(x)=h(x)+\lambda\int_a^b k(x,t)\psi_1(t)dt$$

$$=1+\lambda\int_0^1(1-3xt)\left(1+\lambda\left(\frac{2-3t}{2}\right)\right)dt$$

$$=1+\lambda\int_0^1(1-3xt)\left(1+\lambda-\frac{3t\lambda}{2}\right)dt$$

$$=1+\lambda\int_0^1(1+\lambda-\frac{3t\lambda}{2}-3xt-3xt\lambda+9\frac{xt^2\lambda}{2})dt$$

$$\psi_2(x)=1+\lambda\left[t+\lambda t-3\frac{t^2\lambda}{4}-3x\frac{t^2}{2}-\frac{3xt^2\lambda}{2}+\frac{3x\lambda t^3}{2}\right]_0^1$$

$$\psi_2(x)=1+\lambda\left[1+\lambda-3\frac{\lambda}{4}-\frac{3x}{2}-\frac{3x}{2}\lambda+\frac{3x}{2}\lambda\right]$$

$$=1+\lambda+\frac{1}{4}\lambda^2-\frac{3x}{2}\lambda=1+\lambda\left(1-\frac{3x}{2}\right)+\frac{1}{4}\lambda^2$$

$$\psi_3(x)=1+\lambda\int_a^b k(x,t)\psi_2(t)dt$$

$$=1+\lambda\int_0^1(1-3xt)\left[1+\lambda\left(1-\frac{3t}{2}\right)+\frac{1}{4}\lambda^2\right]dt$$

$$=1+\lambda\int_0^1\left[1+\lambda\left(1-\frac{3t}{2}\right)+\frac{1}{4}\lambda^2\right]dt$$

$$-3xt\lambda\int_0^1\left[1+\lambda\left(1-\frac{3t}{2}\right)+\frac{1}{4}\lambda^2\right]dt$$

«فرقنا التكامل لتكاملين».

$$\psi_3(x)=1+\lambda\left(1-\frac{3x}{2}\right)+\frac{1}{4}\lambda^2+\frac{1}{4}\lambda^3\left(1-\frac{3x}{2}\right)$$

$$\psi_4(x)=1+\lambda\int_0^1(1-3xt)\psi_3(t)dt$$

$$\psi_4(x)=1+\lambda\left(1-\frac{3}{2}x\right)+\frac{1}{4}\lambda^2+\frac{\lambda^3}{4}\left(1-\frac{3x}{2}\right)+\left(\frac{\lambda^2}{4}\right)^2$$

$$=1+\left(1-\frac{3x}{2}\right)\left(\lambda+\frac{\lambda^3}{4}\right)+\frac{\lambda^2}{4}\left(1+\frac{\lambda^2}{4}\right)$$

$$\psi_5(x)=1+\lambda\int_0^1(1-3xt)\psi_4(t)dt$$

$$=1+\lambda\left(1-\frac{3x}{2}\right)+\frac{1}{4}\lambda^2+\frac{\lambda^3}{4}\left(1-\frac{3x}{2}\right)+\left(\frac{\lambda^2}{4}\right)^2+\frac{\lambda^5}{16}\left(1-\frac{3x}{2}\right)$$

$$=1+\left(1-\frac{3}{2}x\right)\left[\lambda+\frac{\lambda^3}{4}+\frac{\lambda^5}{16}\right]+\frac{\lambda^2}{4}\left[1+\frac{\lambda^2}{4}\right]$$

ونحسب $\psi_6(x)$ بنفس الأسلوب السابق فنجد:

$$\psi_6=1+\lambda\left(1-\frac{3x}{2}\right)+\frac{1}{4}\lambda^2+\frac{\lambda^3}{4}\left(1-\frac{3x}{2}\right)+\left(\frac{\lambda^2}{4}\right)^2+\frac{\lambda^5}{16}\left(1-\frac{3x}{2}\right)+\frac{\lambda^6}{4\cdot16}$$

$$\psi_6(x)=1+\left(1-\frac{3}{2}x\right)\left[\lambda+\frac{\lambda^3}{4}+\frac{\lambda^5}{16}\right]+\frac{\lambda^2}{4}\left[1+\frac{\lambda^2}{4}+\frac{\lambda^4}{16}\right]$$

«وهكذا حتى $\psi_n(x)$».

الآن نقوم بترتيب الحدود بالشكل التالي:

$$\lim_{n\to\infty}\psi_n(x)=1+\left(1-\frac{3x}{2}\right)\left(\lambda+\frac{\lambda^3}{4}+\frac{\lambda^5}{16}+\frac{\lambda^7}{64}+\dots\right)$$

$$+\left(\frac{1}{4}\lambda^2+\left(\frac{\lambda^2}{4}\right)^2+\frac{\lambda^6}{4\cdot16}+\dots\right)$$

$$=1+\lambda\left(1-\frac{3x}{2}\right)\left(1+\frac{\lambda^2}{4}+\frac{\lambda^4}{16}+\frac{\lambda^6}{64}+\dots\right)$$

$$+\left(\frac{1}{4}\lambda^2+\left(\frac{\lambda^2}{4}\right)^2+\frac{\lambda^6}{4\cdot16}+\dots\right)$$

$$=\lambda\left(1-\frac{3x}{2}\right)\left(1+\frac{\lambda^2}{4}+\frac{\lambda^4}{16}+\frac{\lambda^6}{64}+....\right)+$$

$$+\left(1+\frac{\lambda^2}{4}+\frac{\lambda^4}{16}+\frac{\lambda^6}{64}+...\right)$$

$$\psi(x)=\lim_{n\to\infty}\psi_n(x)=1+\lambda\left(1-\frac{3x}{2}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda^2}{4}\right)^n+\frac{\lambda^2}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda^2}{4}\right)^n$$

لكن نلاحظ أن: $\left(1+\frac{\lambda^2}{4}+\frac{\lambda^4}{16}....\right)$ هي متسلسلة هندسية أساسها $\frac{\lambda^2}{4}$

ومنه مجموع المتسلسلة الهندسية يعطى بالعلاقة:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda^2}{4}\right)^n=\frac{1}{1-\frac{\lambda^2}{4}}=\frac{4}{4-\lambda^2}$$

$$\psi\,|\,x\,|=\lim_{n\to\infty}\psi_n(x)=1+\frac{4\lambda}{4-\lambda^2}\left[1-\frac{3}{2}x+\frac{\lambda}{4}\right]=\frac{4+2\lambda(2-3x)}{4-\lambda^2}$$

ومنه الحل يصلح باستثناء القيم التي تعدم المقام.

٢ . لنحل المعادلة التكاملية التالية باستخدام طريقة النوى المتكررة الـ m:

$$\psi(x)=1+\lambda\int_0^1(1-3xt)\psi(t)dt$$

الحل:

$$k_1(x,t)=k(x,t)=1-3xt$$

$$k_2(x,t)=\int_0^1 k_1(x,z)k_1(z,t)dt$$

$$=\int_0^1(1-3xz)(1-3zt)dz$$

$$=\int_0^1 (1-3zt-3xz+9z^2xt)dz$$

$$=\left[z-\frac{3z^2t}{2}-\frac{3xz^2}{2}+\frac{9z^3xt}{3}\right]_0^1$$

$$=1-\frac{3t}{2}-\frac{3x}{2}+\frac{9xt}{3}$$

$$=1-\frac{3}{2}t-\frac{3}{2}x+3xt$$

$$K_3(x,t)=\int_0^1 k_1(x,z)k_2(z,t)dt$$

$$=\int_0^1 (1-3zx)\left(1-\frac{3}{2}t-\frac{3}{2}z+3zt\right)dz$$

$$=\int_0^1\left(1-\frac{3}{2}t-\frac{3}{2}z+3zt-3zx+\frac{9}{2}ztx+\frac{9}{2}z^2x-9z^2tx\right)dz$$

$$k_3(x,t)=\left[z-\frac{3}{2}tz-\frac{3}{4}z^2+3z^2\frac{t}{2}-3\frac{z^2x}{2}+\frac{9}{2}z^2\frac{tx}{4}+\right.$$

$$\left.+9\frac{z^3x}{3\cdot 2}-9\frac{z^3tx}{3}\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{4}-\frac{3tx}{4}=\frac{1}{4}(1-3xt)=\frac{1}{4}k_1(x,t)$$

وبنفس الأسلوب نحصل على:

$$k_4(x,t)=\frac{1}{4}k_2(x,t)$$

$$k_5(x,t)=\frac{1}{4}k_3(x,t)$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$k_m(x,t)=\frac{1}{4}k_{m-2}(x,t)$$

نعوض في متسلسلة نيومن:

$$\psi(x)=1+\lambda\int_0^1(1-3xt)dt+\lambda^2\int_0^1(1+3xt-\frac{3x}{2}-\frac{3}{2}t)dt$$

$$+\lambda^3\int_0^1\frac{1}{4}(1-3xt)dt+\ldots\ldots\ldots.$$

$$\psi(x)=1+\int_0^1(1-3xt)dt\left[\lambda+\frac{\lambda^3}{4}+\frac{\lambda^5}{4^2}+\ldots..\right]+$$

$$+\int_0^1(1-3xt-\frac{3x}{2}-\frac{3}{2}t)dt\left[\lambda^2+\frac{\lambda^4}{4}+\ldots..\right]$$

نلاحظ أن:

$$\left(\lambda+\frac{\lambda^3}{4}+\frac{\lambda^5}{4^2}+\ldots\ldots.\right)=\lambda\left(1+\frac{\lambda^2}{4}+\frac{\lambda^4}{4^2}+\ldots.\right)$$

حصلنا على سلسلة هندسية أساسها $\left(\frac{\lambda^2}{4}\right)$.

وبنفس الأسلوب مع التكامل الثاني: $\lambda^2\left(1+\frac{\lambda^2}{4}+\ldots.\right)$

فنحصل بذلك على متسلسلة هندسية أساسها $\left(\frac{\lambda^2}{4}\right)$.

ومنه:

$$\psi(x)=1+\left(1-\frac{3}{2}x\right)\left(\frac{4\lambda}{4-\lambda^2}\right)+\left(\frac{4\lambda^2}{4-\lambda^2}\right)$$

$$= \frac{4 + 2\lambda(2 - 3x)}{4 - \lambda^2}$$

حيث قرص التقارب هو $D\left(0, \frac{1}{B}\right)$

$$B^2 = \int_0^1 \int_0^1 |k(x,t)|^2 \, dx dt$$

$$= \int_0^1 \left[\int_0^1 (1 - 3xt)^2 \, dx \right] dt$$

$$= \int_0^1 \left[1 + 3t^2 - 3t \right] dt$$

$$= \frac{1}{2} \Rightarrow B = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

أي إن المتسلسلة الهندسية السابقة متقاربة عندما:

$$|\lambda| < \frac{1}{B} \Rightarrow |\lambda| < \sqrt{2}$$

ومنه: $D = (0, \sqrt{2})$ (قرص التقارب)

$\lambda \in D$ وهو محقق لأن: السلاسل السابقة هندسية وشرط تقاربها هو $\lambda < 1$.

تمرين (٢٨):

أوجد حل المعادلة التكاملية التالية:

$$\int_0^x \psi(t) \cdot \psi(x - t) dt = \frac{x^3}{6}$$

الحل: لنفرض أن: $L[\psi(x)] = \psi(z)$

عندئذ بتطبيق تحويل لابلاس على طرفي المعادلة المفروضة نجد:

$$\psi^2(z) = \frac{1}{z^4}$$

بجذر الطرفين نجد:

$$\psi(z) = \pm \frac{1}{z^2}$$

بأخذ تحويل لابلاس العكسي نجد:

$$L^{-1}[\psi(z)] = \pm L\left[\frac{1}{z^2}\right]$$

أي إن:

$$\psi(x) = \pm x$$

إن الدالتين $\psi_2(x) = - x$ ، $\psi_1(x) = + x$ يمثلان حلين للمعادلة المفروضة، بعبارة أخرى ليس للمعادلة المعطاة حل وحيد.

تمرين (٢٩):

حل المعادلة التكاملية الآتية:

$$\int_0^x \cos(x-t)\psi(t)dt = x + x^2$$

الحل: واضح أن هذه المعادلة تمثل معادلة فولتيرا التكاملية الخطية من النوع الأول.

$$x + x^2 = \cos x * \psi(x)$$

نطبق تحويل لابلاس على الطرفين فنجد:

$$L\,[x + x^2] = L\,[\cos x]\,.\,L\,[\psi(x)]$$

$$L[x] + L[x^2] = L\,[\cos x]\,.\,L[\psi(x)]$$

$$\frac{1}{z^2} + \frac{2}{z} = \frac{z}{z^2+1}\cdot\psi(z)$$

$$\frac{z+2}{z^3} = \frac{z}{z^2+1}\cdot\psi(z)$$

$$\psi(z) = \frac{(z+2)(z^2+1)}{z^4}$$

$$\psi(z)=\frac{z^3+2z^2+z+2}{z^4}$$
$$=\frac{1}{z}+\frac{2}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\frac{2}{z^4}$$

بأخذ تحويل لابلاس العكسي لطرفي المعادلة نجد:

$$\psi(x)=1+2x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3} \Rightarrow \psi(t)=1+2t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}$$

تمرين (٣٠):

أوجد حل معادلة فولتيرا التكاملية من النوع الأول:

$$\int_0^x \sin(x-t)\psi(t)dt=\sin^2 t$$

الحل: لدينا: $k(x-t)=\sin(x-t) \Rightarrow k(x)=\sin x$، وبما أن:

$$L[\sin^2 x]=L\left[\frac{1}{2}(1-\cos 2x)\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z}-\frac{z}{z^2+4}\right)$$

$$L[\sin x]=\frac{1}{z^2+1}$$

وبما أن $L[\psi(x)]=\psi(z)$، فعندئذ يكون:

$$\frac{1}{z^2+1}\psi(z)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z}-\frac{z}{z^2+4}\right)$$

$$\psi(z)=\frac{2(z^2+1)}{z(z^2+4)}=\frac{1}{2z}+\frac{3z}{2(z^2+4)}$$

وبالانتقال إلى التحويل المعاكس نجد:

$$\psi(x)=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\cos 2x \quad ; \quad x>0$$

أو:
$$\psi(t)=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\cos 2t\ ;\ t>0$$

تمرين (٣١):

أوجد الحل المشترك لجملة المعادلات التكاملية التالية لفولتيرا:

$$\psi_1(x)=1-2\int_0^x e^{2(x-t)}\psi_1(t)dt+\int_0^x \psi_2(t)dt$$

$$\psi_2(x)=4x-\int_0^x \psi_1(t)dt+4\int_0^x (x-t)\psi_2(t)dt$$

الحل: بتطبيق تحويل لابلاس على طرفي المعادلتين نجد:

$$\psi_1(z)=\frac{1}{z}-\frac{2}{z-2}\psi_1(z)+\frac{1}{z}\psi_2(z)$$

$$\psi_2(z)=\frac{4}{z^2}-\frac{1}{z}\psi_1(z)+\frac{4}{z^2}\psi_2(z)$$

بحل جملة المعادلتين الجبريتين نجد:

$$\psi_1(z)=\frac{z}{(z+1)^2}$$

$$\psi_2(z)=\frac{3z+2}{(z-2)(z+1)^2}$$

بتفريق الكسور إلى كسورها الجزئية البسيطة نحصل على:

$$\psi_1(z)=\frac{1}{z+1}-\frac{1}{(z+1)^2}$$

$$\psi_2(z)=\frac{8}{9}\frac{1}{z-2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(z+1)^2}-\frac{8}{9}\cdot\frac{1}{z+1}$$

وبأخذ تحويل لابلاس العكسي للدالتين $\psi_1(z)$ و $\psi_2(z)$ نجد:

$$\psi_1(x)=e^{-x}-xe^{-x}$$

$$\psi_2(x) = \frac{8}{9}e^{2x} + \frac{1}{3}xe^{-x} - \frac{8}{9}e^{-x}$$

وهما الحل المشترك لمجموعة المعادلات التكاملية.

تمرين (٣٢):

أوجد الحل المشترك لجملة المعادلات التكاملية الآتية:

$$\left.\begin{aligned}
\psi_1(x) &= 1 - \int_0^x \psi_2(t)dt \\
\psi_2(x) &= \cos x - 1 + \int_0^x \psi_3(t)dt \\
\psi_3(x) &= \cos x + \int_0^x \psi_1(t)dt
\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

الحل: بتطبيق تحويل لابلاس على المعادلات التكاملية:

$$\left.\begin{aligned}
\psi_1(z) &= \frac{1}{z} - L[1 * \psi_2(t)] \\
\psi_2(z) &= \frac{z}{z^2+1} - \frac{1}{z} + L[1 * \psi_3(t)] \\
\psi_3(z) &= -\frac{z}{z^2+1} + L[1 * \psi_1(t)]
\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

$$\left.\begin{aligned}
\psi_1(z) &= \frac{1}{z} - \frac{1}{z}\psi_2(z) \\
\psi_2(z) &= \frac{z}{z^2+1} - \frac{1}{z} + \frac{1}{z}\psi_3(z) \\
\psi_3(z) &= \frac{z}{z^2+1} + \frac{1}{z}\psi_1(z)
\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

ولنحل جملة المعادلات الجبرية:

لنعوض الأولى من (3) في الثالثة من (3) فنجد:

$$\psi_3(z) = \frac{z}{z^2+1} + \frac{1}{z}\left[\frac{1}{z} - \frac{1}{z}\psi_2(z)\right]$$

$$\psi_3(z) = \frac{z}{z^2+1} + \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^2}\psi_2(z) \qquad (4)$$

نعوض (4) في الثانية من (3) فنجد:

$$\psi_2(z) = \frac{z}{z^2+1} - \frac{1}{z} + \frac{1}{z}\left[\frac{z}{z^2+1} + \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^2}\psi_2(z)\right]$$

$$\psi_2(z) = \frac{z}{z^2+1} - \frac{1}{z} + \frac{z}{z(z^2+1)} + \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^3}\psi_2(z)$$

$$\psi_2(z) = \frac{z}{z^2+1} - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2+1} + \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^3}\psi_2(z)$$

$$\psi_2(z)\left(1 + \frac{1}{z^3}\right) = \frac{z}{z^2+1} - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2+1} + \frac{1}{z^3}$$

$$\psi_2(z)\left(\frac{z^3+1}{z^3}\right) = \frac{z^4 - z^2(z^2+1) + z^3 + z^2 + 1}{z^3(z^2+1)}$$

$$\psi_2(z)\left(\frac{z^3+1}{z^3}\right) = \frac{z^4 - z^4 - z^2 + z^3 + z^2 + 1}{z^3(z^2+1)}$$

$$\psi_2(z)\left(\frac{z^3+1}{z^3}\right) = \frac{z^3+1}{z^3(z^2+1)}$$

ومنه نجد:

$$\psi_2(z) = \frac{1}{z^2+1} \qquad (5)$$

وبتطبيق تحويل لابلاس العكسي نجد:

$\psi_2(x) = \sin x$

الآن لنبدل قيمة $\psi_2(z)$ من (5) في المعادلة الأولى من (3) فنجد:

$$\psi_1(z)=\frac{1}{z}-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{z^2+1}$$

$$\psi_1(z)=\frac{1}{z}-\frac{1}{z(z^2+1)}=\frac{z^2+1-1}{z(z^2+1)}$$

$$\psi_1(z)=\frac{z^2}{z(z^2+1)}=\frac{z}{z^2+1} \qquad (6)$$

بالانتقال إلى تحويل لابلاس العكسي نجد:

$$\psi_1(x)=\cos x$$

نبدل (6) في المعادلة الثالثة من (3) فنجد:

$$\psi_3(z)=\frac{z}{z^2+1}+\frac{1}{z}\cdot\frac{z}{z^2+1}=\frac{z}{z^2+1}+\frac{1}{z^2+1}$$

بأخذ تحويل لابلاس العكسي نجد: $\psi_3(x)=\cos x+\sin x$.

تمرين (٣٣):

استخدم تحويلات لابلاس في حل المعادلة التكاملية الآتية:

$$\psi(t)=1-2t-4t^2+\int_0^t\left[3+6(t-s)-4(t-s)^2\right]\psi(s)ds$$

الحل: لدينا: $\lambda=1$ وكذلك نجد أن:

$$h(t)=1-2t-4t^2 \Rightarrow L[h(t)]=\frac{1}{z}-\frac{2}{z^2}-\frac{8}{z^3}=H(z)$$

$$k(t,s)=3+6(t-s)-4(t-s)^2 \Rightarrow$$
$$k(t)=3+6t-4t^2$$

$$L[k(t)]=\frac{3}{z}+\frac{6}{z^2}-\frac{8}{z^3}=k(z)$$

بالتعويض في القانون:

$$\psi(z) = \frac{H(z)}{1-\lambda k(z)}$$

$$\psi(z) = \frac{z^2-2z-8}{z^3-3z^2-6z+8} = \frac{(z+2)(z-4)}{(z+2)(z-1)(z-4)}$$

$$\psi(z) = \frac{1}{z-1}$$

بالانتقال إلى الأصل نجد تحويل لابلاس العكسي:

$$L^{-1}[\psi(z)] = \psi(t) = L^{-1}\left[\frac{1}{z-1}\right] = e^t$$

تمرين (٣٤):

حل المعادلة التالية:

$$y(x) = \frac{x^2}{2} + \int_0^x (x-t)y(t)dt$$

الحل: وهي معادلة فولتيرا التكاملية من النوع الثاني:

$$y(x) - \int_0^x (x-t)y(t)dt = \frac{x^2}{2}$$

وفيها: $\lambda = 1, f(x) = \frac{x^2}{2}, k(x,t) = k(x-t) = x-t$

ومن ثمَّ نحسب:

$$f(p) = L[f(x)] = L\left[\frac{x^2}{2}\right] = \frac{1}{2}L[x^2] = \frac{1}{2}\frac{2!}{p^3} = \frac{1}{p^3}$$

$$k(p) = L[k(x)] = L[x] = \frac{1}{p^2}$$

وبالتعويض في المعادلة الرمزية الموافقة: $y(p) = \frac{f(p)}{1-\lambda k(p)}$

$$y(p)=\frac{\frac{1}{p^3}}{1-\frac{1}{p^2}}=\frac{\frac{1}{p^3}}{\frac{p^2-1}{p^2}}=\frac{1}{p^3}\cdot\frac{p^2}{p^2-1}=\frac{1}{p(p-1)(p+1)}$$

$$\Rightarrow y(p)=\frac{A}{p}+\frac{B}{p-1}+\frac{C}{p+1}$$

نضرب الطرفين بـ p ونجعل p = 0 فنجد:

$$\frac{1}{(-1)(+1)}=A\Rightarrow A=-1$$

نضرب الطرفين بـ (p-1) ونجعل p = 1 فنجد:

$$\frac{1}{(1)(2)}=B\Rightarrow B=\frac{1}{2}$$

نضرب الطرفين بـ (p + 1) ونجعل p = -1 فنجد:

$$\frac{1}{(-1)(-2)}=C\Rightarrow C=\frac{1}{2}$$

وبالتبديل نجد أن:

$$y(p)=-\frac{1}{p}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p-1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p+1}$$

وبأخذ تحويل لابلاس العكسي نجد أن:

$$y(x)=-1+\frac{1}{2}\cdot e^{x}+\frac{1}{2}e^{-x}\Rightarrow y(x)=-1+\frac{1}{2}\left(e^{x}+e^{-x}\right)=-1+\text{sh}x$$

تمرين (٣٥):

استخدم تحويلات لابلاس في حل المعادلة التفاضلية . التكاملية التالية:

$$\psi''(t)-2\psi'(t)+\psi(t)+2\int_0^t\cos(t-s)\psi''(s)ds+2\int_0^t\sin(t-s)\psi'(s)ds=\cos t$$

والمقرونة بالشروط الابتدائية التالية:

$$\psi(0) = \psi'(0) = 0$$
$$f[\psi(t)] = \Psi(z)$$

الحل: لدينا:

لنأخذ تحويل لابلاس لجميع الحدود فنجد:

$$f[\psi'(t)] = z\,\Psi(z) - \psi(0) = z\,\Psi(z)$$
$$f[\psi''(t)] = z^2\,\Psi(z) - z\,\psi(0) - \psi'(0) = z^2\,\Psi(z)$$
$$f[\cos t] = \frac{z}{z^2+1}$$
$$f[\sin t] = \frac{1}{z^2+1}$$

بالتعويض كل حد بقيمته نجد:

$$z^2\,\Psi(z) - 2z\,\Psi(z) + \Psi(z) + \frac{2z}{z^2+1}\,z^2\,\Psi(z) + \frac{2}{z^2+1}\,z\,\Psi(z) =$$
$$= \frac{z}{z^2+1}$$
$$[z^2 - 2z + 1 + \frac{2z^3}{z^2+1} + \frac{2z}{z^2+1}]\,\Psi(z) = \frac{z}{z^2+1}$$
$$\Rightarrow \left[\frac{z^4+z^2-2z^3-2z+z^2+1+2z^3+2z}{z^2+1}\right]\Psi(z) = \frac{z}{z^2+1}$$
$$(z^4 + 2z^2 + 1)\,\Psi(z) = z$$

أي إن:

$$\psi(z) = \frac{z}{z^4+2z^2+1} = \frac{z}{(z^2+1)^2}$$

بالانتقال إلى تحويل لابلاس العكسي نحصل على:

$$\psi(t)=\frac{t}{2}\sin t$$

تمرين (٣٦):

تحقق من أن شروط الحل محققة وفي حال الإيجاب حل المعادلة التكاملية إن أمكن:

$$\psi(x)=\cot gx+\lambda\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} tgt\psi(t)dt$$

الحل:

أولاً: نتحقق من الشروط:

$k(x, t)$ كمولة تربيعياً

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}|k(x,t)|^2\,dxdt$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} tg^2 tdxdt=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left[xtg^2 t\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}dt$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} tg^2 tdt$$

لنفرض:

$$tg\, t=u$$

$$\Rightarrow (1+tg^2t)\,dt=du\Rightarrow dt=\frac{du}{1+u^2}$$

ومنه أصبح التكامل:

$$=\frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1}\frac{u^2du}{1+u^2}=\frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1}\frac{u^2+1-1}{1+u^2}du$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1}\left[1-\frac{1}{1+u^2}\right]du=\left[u-\operatorname{arctg}u\right]_{-1}^{1}$$

$$=\frac{\pi}{2}\left[(1-\operatorname{arctg}(1))-(-1-\operatorname{arctg}(-1))\right]$$

$$\frac{\pi}{2}\left[\left(1-\frac{\pi}{4}\right)-\left(-1+\frac{\pi}{4}\right)\right]=\frac{\pi}{2}\left[2-\frac{\pi}{2}\right]=\pi-\frac{\pi^2}{4}<\infty$$

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(k(x,t))^2dt=2-\frac{\pi}{2}<\infty \qquad \forall t\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$$

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}|k(x,t)|^2dx=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}tg^2tdx=xtg^2t\Big]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{2}tg^2t<\infty \qquad \forall t\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$$

إن $k(x, t) = tg\ t$ تكتب على شكل مجموع «حد واحد» لجداء مضروبين المضروب الأول دالة في x وهي $a_1(x) = 1$ والمضروب الثاني دالة في t وهي $b_1(t) = tg\ t$.

نلاحظ أن $a_1(x)$ مستقلة خطياً «دالة واحدة».

كما أن $b_1(x)$ مستقلة خطياً. فالشروط محققة نبدأ بالحل:

لنحسب:

$$a_{11}=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}b_1(t)\cdot a_1(t)dt$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}tgtdt=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin t}{\cos t}dt$$

$$a_{11} = -\ln|\cos t|\Big]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = -\left(\ln\frac{\sqrt{2}}{2} - n\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$$

$$h_1 = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} b_1(t)h(t)dt$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} tgt \cdot \cot gtdt = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin t}{\cos t} \cdot \frac{\cos t}{\sin t} dt$$

$$= t\Big]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{2}$$

نعوض في جملة المعادلات الجبرية الخطية غير المتجانسة:

$$(1 - \lambda\, a_{11})\, C_1 = h_1$$

ومنه:

$$(1 - \lambda(0))\, C_1 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow C_1 = \frac{\pi}{2}$$

ومن ثمَّ نعوض في شكل الحل فنجد:

$$\psi(x) = \text{cotg}\ x + \lambda\ C_1\ a_1\ (x)$$

$$\psi(x) = \text{cotg}\ x + \lambda\ \frac{\pi}{2}$$

لنتحقق من الجواب نعوض دالة الحل في المعادلة التكاملية فنجد:

$$\cot gx + \lambda\frac{\pi}{2} = \cot gx + \lambda \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} tgt\left(\cot gt + \lambda\frac{\pi}{2}\right)dt$$

$$= \cot gx + \lambda[t]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} + \frac{\lambda^2\pi}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} tgtdt$$

$$= \cot gx + \frac{\pi\lambda}{2}$$

إذن هي محققة فعلاً.

تمرين (٣٧):

حل المعادلة: $$\psi(x) = \lambda \int_{-1}^{1} |x| \psi(t) dt$$

بطريقة النواة المتحللة وذلك بعد التأكد من الشروط.

الحل:

لدينا $k(x, t) = |x|$ كمولة تربيعياً لأن:

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} |k(x,t)|^2 dxdt = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} x^2 dxdt$$

$$= \int_{-1}^{1} \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} dt = \int_{-1}^{1} \frac{2}{3} dt = \frac{2}{3} t\Big]_{-1}^{1} = \frac{4}{3} < \infty$$

$$\int_{-1}^{1} |k(x,t)|^2 dt = \int_{-1}^{1} x^2 dt = x^2 t\Big]_{-1}^{1} = 2x^2 < \infty \quad \forall x \in [-1,1]$$

$$\int_{-1}^{1} |k(x,t)|^2 dx = \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big]_{-1}^{1} = \frac{1}{3} - \left(\frac{-1}{3}\right) = \frac{2}{3} < \infty \quad \forall x \in [-1,1]$$

لدينا: $b_1(t) = 1 \quad \& \quad a_1(x) = |x|$

$$|x| = \begin{cases} x & ; x \geq 0 \\ -x & ; x \leq 0 \end{cases}$$

لنحسب: $$a_{11} = \int_{-1}^{1} b_1(t) a_1(t) dt = \int_{-1}^{1} |t| dt$$

$$= \int_{-1}^{0} -t dt + \int_{0}^{1} t dt = -\frac{t^2}{2}\Big]_{-1}^{0} + \frac{t^2}{2}\Big]_{0}^{1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

لنعوض في المعادلات التي تحوي c_1:

$$c_1 = h_1 + \lambda C_1 a_{11}$$

بالتعويض نجد:

$$c_1 - \lambda c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

ومن ثمَّ المعادلة لها حل وحيد وهو الحل الصفري:

$$\psi(x) = 0$$

١ . ٣٦ . تمارين غير محلولة:

١ . برهن أن التابع المعطى بجانب كل معادلة تكاملية هو حل لها:

$$1 -\ \psi(x) = 1\ ;\ \psi(x) + \int_0^1 x(e^{xt} - 1)\psi(t)dt = e^x - x$$

$$2 -\ \psi(x) = e^x\left(2x - \frac{2}{3}\right)\ ;\ \psi(x) + 2\int_0^1 e^{x-t}\psi(t)dt = 2xe^x$$

$$3 -\ \psi(x) = 1 - \frac{2\sin x}{1 - \frac{\pi}{2}}\ ;\ \psi(x) - \int_0^{\pi} \cos(x+t)\psi(t)dt = 1$$

$$4 -\ \psi(x) = \sqrt{x}; \psi(x) - \int_0^1 k(x,t)\psi(t)dt = \sqrt{x} + \frac{x}{15}\left(4x^{3/2} - 7\right)$$

حيث النواة $k(x, t)$ هي:

$$k(x,t) = \begin{cases} \dfrac{x(2-t)}{2}, 0 \le x \le t \\ \dfrac{t(2-x)}{2}, t \le x \le 1 \end{cases}$$

$$5 -\ \psi(x) = e^x; \psi(x) + \lambda\int_0^1 \sin xt\psi(t)dt = 1$$

$$6 -\ \psi(x) = \cos x; \psi(x) - \int_0^x (x^2 + t)\cos t\psi(t)dt = \sin x$$

$$7 - \psi(x) = \sin\frac{\pi}{2}x \;;\; \psi(x) = \frac{x}{2} + \frac{\pi^2}{4}\int_0^1 k(x,t)g(t)dt;$$

حيث:

$$k(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(2x - xt); 0 \le x \le t \\ \frac{1}{2}(2t - xt); t \le x \le 1 \end{cases}$$

٢ . أوجد حل المعادلات التكاملية ذات النوى المتحللة:

$$1 - \psi(x) - 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\psi(t)dt = 2x - \pi$$

$$2 - \psi(x) - \int_{-1}^{1} e^{\arcsin x}\psi(t)dt = \tan x$$

$$3 - \psi(x) - \lambda\int_0^1 \cos(9\ln t)\psi(t)dt = 1$$

$$4 - \psi(x) - \lambda\int_0^1 \arccos t\psi(t)dt = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$5 - \psi(x) - \lambda\int_0^1 (\ln\frac{1}{t})^p \psi(t)dt = 1 \qquad (p > -1)$$

$$6 - \psi(x) - \lambda\int_{-\pi}^{+\pi} (x\cos t + t^2\sin x + \sin t\cos x)\psi(t)dt = x$$

$$7 - \psi(x) - \lambda\int_0^1 (x\ln t - t\ln x)\psi(t)dt = \frac{6}{5}(1-4x)$$

$$8 - \psi(x) - \lambda\int_0^{\pi} \sin(x-t)\psi(t)dt = \cos x$$

$$9 - \psi(x) - \lambda\int_0^{2\pi} (\sin x\cos x - \sin 2x\cos 2t + \sin 3x\cos 3t)\psi(t)dt = \cos x$$

$$10 - \psi(x) = \lambda\int_{-1}^{+1} (5xt^3 + 4x^2t + 3xt)\psi(t)dt = \cos x$$

٣ . أوجد حل المعادلات التكاملية التالية:

$$1 - \psi(x) - \int_0^1 x\left(1 - \frac{3}{2}t\right)\psi(t)dt = 1$$

$$2 - \psi(x) - \int_0^1 \sin 2\pi xt\psi(t)dt = 0$$

$$3 - \psi(x) - \int_{-1}^{+1} \cos\pi x \cos 3\pi t\psi(t)dt = \cos 3\pi x$$

$$4 - \psi(x) - \int_{-\pi}^{+\pi} \sin(x + 2t)\varphi(t)dt = x$$

$$5 - \psi(x) - \frac{1}{3}\int_{-1}^{+1}(x^2 + 1 + xt)\psi(t)dt = 1$$

٤ . باستخدام النواة الحالة، أوجد حل المعادلات التكاملية الآتية:

$$1- \psi(x) - \lambda\int_0^{2\pi} \sin(x + t)\psi(t)dt = 1$$

$$2 - \psi(x) - \lambda\int_0^1 (2x - t)\psi(t)dt = \frac{x}{6}$$

$$3 - \psi(x) - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos t\psi(t)dt = 1$$

$$4 - \psi(x) + \int_0^1 e^{x-t}\psi(t)dt = e^x$$

$$5 - \psi(x) - \lambda\int_0^1 (4xt - x^2)\psi(t)dt = x$$

٥ . حل المعادلات التكاملية بالطرق التي تراها مناسبة:

$$1 - \psi(x) - \lambda\int_0^\pi \cos(x + t)\psi(t)dt = \cos 3x$$

$$2 - \psi(x) - \lambda\int_0^\pi \cos^2 x\psi(t)dt = 1$$

$$3 - \psi(x) - \lambda \int_0^{2\pi} |x - t| \psi(t) dt = x$$

$$4 - \psi(x) - \lambda \int_{-1}^{1} (x^2 - 2xt) \psi(t) dt = x^3 - x$$

$$5 - \psi(x) - \lambda \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{\pi} \cos x \cos t + \frac{1}{\pi} \sin 2x \sin 2t\right) \psi(t) dt = \sin x$$

وذلك إن أمكن (بعد التحقق من الشروط المناسبة).

٦ . حل المعادلات التكاملية التالية بالطريقة التي تراها مناسبة:

1) $\psi(x) = x + 4\int_0^1 x^2 t^2 \psi(t) dt$

2) $\psi(x) = \frac{5}{6} x + \frac{1}{2} \int_0^1 x \cdot t \psi(t) dt$

3) $\psi(x) = \sin \pi x + \frac{1}{2} \int_0^1 \psi(t) dt$

4) $\psi(x) = h(x) + \lambda \int_0^1 e^{x-t} \psi(t) dt$

5) $\psi(x) = 6\int_0^1 \left(xt - \frac{x+t}{2} + \frac{1}{3} \right) \psi(t) dt + x$

٧ . أوجد القيم المميزة ثم حل كل من المعادلات التكاملية الآتية:

1) $\psi(x) - \lambda \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x \psi(t) dt = 0$

2) $\psi(x) - \lambda \int_0^{2\pi} \sin x \cos t \psi(t) dt = 0$

3) $\psi(x) - \lambda \int_0^{2\pi} \sin x \sin t \psi(t) dt = 0$

4) $\psi(x) - \lambda \int_{-1}^{+1} (x\,\mathrm{ch}\,t - t\,\mathrm{sh}\,x) \psi(t) dt = 0$

5) $\psi(x)-\lambda\int_{-1}^{+1}(5xt^3+4x^2t)\psi(t)dt=0$

6) $\psi(x)-\lambda\int_{0}^{1}(45x^2\ln t-9t^2\ln x)\psi(t)dt=0$

7) $\psi(x)-\lambda\int_{0}^{1}(x+t)\psi(t)dt=h(x)$

8) $\psi(x)-\lambda\int_{0}^{1}\arccos x\psi(t)dt=0$

9) $\psi(x)-\lambda\int_{-1}^{+1}|x|\psi(t)dt=0$

٨ . حل المعادلات التكاملية التالية:

1) $\psi(x)-4\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\psi(t)dt=2x-\pi$

2) $\psi(x)-\int_{-1}^{+1}e^{\arcsin x}\psi(t)dt=tgx$

3) $\psi(x)-\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\left[x-\frac{1}{2}(3t^2-1)+\frac{1}{2}t(3x^2-1)\right]\psi(t)dt=1$

4) $\psi(x)-\lambda\int_{0}^{2\pi}[\sin x\cos x-\sin 2x\cos 2t+\sin 3x\cos 3t]\psi(t)dt=\cos x$

بجميع الطرق الممكنة.

٩ . أوجد القيم المميزة ثم حل المعادلات التكاملية التالية:

1) $\psi(x)-\lambda\int_{-1}^{+1}xe^{t}\psi(t)dt=0$

2) $\psi(x)-\lambda\int_{0}^{\pi}\cos^2 x\psi(t)dt=0$

3) $\psi(x)-\lambda\int_{0}^{2\pi}|x-\pi|\psi(t)dt=x$

4) $\psi(x)-\lambda\int_0^1(2xt-4x^2)\psi(t)dt=1-2x$

5) $\psi(x)-\lambda\int_{-1}^{+1}(x^2-2xt)\psi(t)dt=x^3-x$

6) $\psi(x)-\lambda\int_0^{2\pi}(\frac{1}{\pi}\cos x\cos t+\frac{1}{\pi}\sin 2x\sin 2t)\psi(t)dt=\sin x$

١٠ . حل معادلات فولتيرا التكاملية الآتية:

1) $\psi(x)=1+x^2+\int_0^x\frac{1+x^2}{1+t^2}\psi(t)dt$

2) $\psi(x)=e^{2x+x^2}+2\int_0^x e^{x^2-t^2}\psi(t)dt$

3) $\psi(x)=1-2x-\int_0^x e^{x^2-t^2}\psi(t)dt$

4) $\psi(x)=54^x-\int_0^x 4^{x-t}\psi(t)dt$

5) $\psi(x)=1+\int_0^x(x-t)\psi(t)dt$

6) $\psi(x)=e^x\sin x+\int_0^x\frac{2+\cos x}{2+\cos t}\psi(t)dt$

7) $\psi(x)=chx+\int_0^x\frac{chx}{cht}\psi(t)dt$

١١ . حل المعادلات التكاملية التالية بتحويلها إلى معادلات تفاضلية عادية:

1) $y(x)=e^x+\int_0^x y(t)dt$

2) $y(x)=1+\int_0^x ty(t)dt$

3) $y(x)=\frac{1}{1+x^2}+\int_0^x \sin(x-t)y(t)dt$

4) $y(x)=e^{-x}\cos x-\int_0^x \cos x e^{-(x-t)}y(t)dt$

5) $y(x)=4e^x+3x-4-\int_0^x (x-t)y(t)dt$

6) $y(x)=x-1+\int_0^x (x-t)y(t)dt$

7) $y(x)=\sin x+\frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2 y(t)dt$

8) $y(x)=chx-\int_0^x sh(x-t)y(t)dt$

9) $y(x)=x+\int_0^x [4\sin(x-t)-x+t]y(t)dt$

10) $y(x)=1+\int_0^x [(x-t)^2-(x-t)]y(t)dt$

11) $\psi(t)=sht-\int_0^t ch(t-s)\psi(s)ds$

12) $\psi(t)=1-2t-4t^2+\int_0^t [3+6(t-s)-4(t-s)^2]\psi(s)ds$

١٢ . حل المعادلات التفاضلية . التكاملية المحققة للشروط الابتدائية المذكورة بجانب المعادلة:

1) $\psi'(t)-\psi(t)+\int_0^t \sin(t-s)\psi(s)ds=1-\sin t\ ;\ \psi(0)=0$

2) $\psi''(t)+\int_0^t e^{2(t-s)}\psi'(s)ds=e^{2t}\ ;\ \psi(0)=0;\psi'(0)=1$

3) $\psi'(t)-\psi(t)+\int_0^t (t-s)\psi'(s)ds-\int_0^t \psi(s)ds=t\ ;\ \psi(0)=-1$

$$4)\ \psi''(t)+2\psi'(t)-2\int_0^t \sin(t-s)\psi'(s)ds=\cos t\ ;\ \psi(0)=\psi'(0)=0$$

$$5)\ \psi''(t)-2\psi'(t)+\psi(t)+2\int_0^t \cos(t-s)\psi''(s)ds+$$

$$+2\int_0^t \sin(t-s)\psi'(s)ds=\cos t\ ;\ \psi(0)=\psi'(0)=0$$

$$6)\ 225\psi''(t)-16\int_0^t \cos\frac{t-s}{3}\psi'(s)ds=-15\sin\frac{t}{3};\ \psi(0)=\psi'(0)=\frac{1}{5}$$

١٣ . أوجد القيم المميزة ثم حل المعادلات الآتية:

$$1)\ \psi(x)-\lambda\int_0^{\pi}\cos(x+t)\psi(t)dt=0$$

$$2)\ \psi(x)-\lambda\int_0^{1}(2xt-4x^2)\psi(t)dt=0$$

$$3)\ \psi(x)=x+\lambda\int_{-\pi}^{\pi}(x\cos t+t^2\sin x+\cos x\sin t)\psi(t)dt$$

$$4)\ \psi(x)=\cos x+\lambda\int_0^{\pi}\cos(x-t)\psi(t)dt$$

$$5)\ \psi(x)=ax^2+b+\lambda\int_{-1}^{+1}(xt+x^2t^2)\psi(t)dt$$

١٤ . بين أن المعادلة التكاملية الآتية:

$$\psi(x)=\lambda\int_0^{+1}(x-t)\psi(t)dt+x$$

ليس لها أي حل عندما $\lambda = -2$ ولها حل وحيد عندما $\lambda \neq -2$.

١٥ . حل المعادلات التكاملية وجمل المعادلات التكاملية التالية، وذلك بعد التحقق من شروط وجود الحل:

$$1)\ \int_0^{x}(2+x^2-t^2)y(t)dt=x^2$$

2) $\int_0^x \sin(x-t)y(t)dt = e^x - 1$

3) $y_1(x) = -1 + \int_0^x y_2(t)dt$

$y_2(x) = x - \int_0^x y_1(t)dt$

4) $y(x) = e^x + \int_0^x y(t)dt$

5) $y(x) = 1 + \int_0^x ty(t)dt$

6) $y(x) = \dfrac{1}{1+x^2} + \int_0^x \sin(x-t)y(t)dt$

7) $y(x) = e^{-x}\cos x - \int_0^x \cos xe^{-(x-t)}y(t)dt$

8) $y(x) = 4e^x + 3x - 4 - \int_0^x (x-t)y(t)dt$

9) $y(x) = x - 1 + \int_0^x (x-t)y(t)dt$

10) $y(x) = \sin x + \dfrac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2 y(t)dt$

11) $y(x) = 1 + \int_0^x t^p y(t)dt; p = 0,1,2,......$

12) $y(x) = 2^x + \int_0^x 2^{(x-t)}y(t)dt$

13) $y(x) = \dfrac{x^2}{2} + \int_0^x (x-t)y(t)dt$

(14) $y(x) = xe^{2x} - \int_0^x e^{2(x-t)}y(t)dt$

15) $y(x) = \sin x + \int_0^x \cos(x-t)y(t)dt$

16) $y(x) = e^x + \int_0^x \sin(x-t)y(t)dt$

17) $y(x) = \sin x - \int_0^x sh(x-t)y(t)dt$

18) $y(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2 y(t)dt$

19) $y(x) = e^{2x} + \int_0^x (x-t)e^{x-t}y(t)dt$

20) $y(x) = 1 + \int_0^x \cos(x-t)\sin(x-t)y(t)dt$

21) $y(x) = 1 + x\cos x - \sin x + \int_0^x (x-t).\sin(x-t)y(t)dt$

22) $y(x) = 1 + \int_0^x e^{-2(x-t)}y(t)dt$

23) $y(x) = 2 + \frac{1}{6}\int_0^x (x-t)^3 y(t)dt$

24) $y(x) = e^{-x} + \int_0^x e^{-(x-t)}\sin(x-t)y(t)dt$

25) $y(x) = e^{-\frac{x}{2}} + \int_0^x (1 - e^{-(x-t)})y(t)dt$

26) $y_1(x) = -1 + \int_0^x y_2(t)dt$

$y_2(x) = x - \int_0^x y_1(t)dt$

27) $y_1(x) = -x + \int_0^x y_2(t)dt$

$$y_2(x) = -3x^2 + x - 5\int_0^x y_1(t)dt + 2\int_0^x y_2(t)dt$$

28) $y_1(x) = x + \int_0^x y_2(t)dt$

$$y_2(x) = \frac{x^3}{6} + 2x - 1 - \int_0^x (x-t)y_1(t)dt$$

29) $y_1(x) = e^x - \int_0^x y_2(t)dt + 4\int_0^x e^{x-1}y_2(t)dt$

$$y_2(x) = 1 - \int_0^x e^{-(x-t)}y_1(t)dt + \int_0^x y_2(t)dt$$

30) $y_1(x) = x + \int_0^x y_2(t)dt, \; y_2(x) = 1 - \int_0^x y_1(t)dt$

$$y_3(x) = \sin x + \frac{1}{2}\int_0^x (x-t)y_1(t)dt$$

31) $\int_0^x (x-t)y(t)dt = e^x - x - 1$

32) $\int_0^x e^{x-t}y(t)dt = \frac{x^2}{2}$

33) $\int_0^x 3^{x-t}y(t)dt = x$

34) $\int_0^x \sin(x-t)y(t)dt = 1 - \cos x$

35) $\int_0^x \text{sh}(x-t)y(t)dt = \text{sh}x - x$

36) $\int_0^x (x-t)^2 y(t)dt = x^3$

37) $\int_0^x (x-t)^2 y(t)dt = x^3 + x^2$

38) $\int_0^x (1+x-t)y(t)dt = \frac{1}{2}e^{-x}\sin x$

39) $\int_0^x (1-x^2+t^2)y(t)dt = \frac{x^2}{2}$

40) $\int_1^x (2t-x)y(t)dt = x^8 - 1$

41) $\int_0^x (x-t)y(t)dt = \operatorname{ch}x - 1$

42) $\int_0^x \sin(x-t)y(t)dt = \frac{1}{2}x^4$

43) $\int_0^x \cos(x-t)y(t)dt = x\sin x$

44) $\int_0^x \operatorname{sh}(x-t)y(t)dt = 2\sin^2\frac{x}{2}$

45) $\int_0^x (x-t)\sin(x-t)y(t)dt = \sin^2 x$

46) $\int_0^x (x-t)e^{x-t}y(t)dt = \frac{1}{2}e^{2x} - xe^x - \frac{1}{2}$

47) $\int_0^x e^{x-t}\cos(x-t)y(t)dt = xe^x$

48) $\int_0^x e^{x-t}\operatorname{sh}(x-t)y(t)dt = \frac{1}{4}e^{2x} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$

49) $\int_0^x (x-t)\operatorname{sh}(x-t)y(t)dt = x\operatorname{ch}x - \operatorname{sh}x$

50) $\int_0^x \sqrt{x-t}\,y(t)dt = x^3\sqrt{x}$

51) $\varphi(x) = e^x + \int_0^x e^{x-t}\varphi(t)dt$

52) $\varphi(x) = \sin x + 2\int_0^x e^{x-t}\varphi(t)dt$

53) $\varphi(x) = x3^x - \int_0^x 3^{x-t}\varphi(t)dt$

54) $\varphi(x) = e^x \sin x + \int_0^x \frac{2+\cos x}{2+\cos t}\varphi(t)dt$

55) $2\varphi(x) - \int_0^x \varphi(t)\varphi(x-t)dt = \sin x$

56) $\varphi(x) = \frac{1}{2}\int_0^x \varphi(t)\varphi(x-t)dt - \frac{1}{2}\text{sh}x$

57) $\varphi(x) = x - \int_0^x e^{x-t}\varphi(t)dt$

58) $\varphi(x) = e^{2x} + \int_0^x e^{t-x}\varphi(t)dt$

59) $\varphi(x) = x - \int_0^x (x-t)\varphi(t)dt$

60) $\varphi(x) = \cos x - \int_0^x (x-t)\cos(x-t)\varphi(t)dt$

61) $\varphi(x) = x + \int_0^x \sin(x-t)\varphi(t)dt$

62) $\varphi(x) = \sin x + \int_0^x (x-t)\varphi(t)dt$

63) $\varphi(x) = x - \int_0^x \text{sh}(x-t)\varphi(t)dt$

64) $\varphi(x) = \text{sh}x - \int_0^x \text{ch}(x-t)\varphi(t)dt$

65) $\varphi(x) = e^x + 2\int_0^x \cos(x-t)\varphi(t)dt$

66) $\varphi(x) = \cos x + \int_0^x \varphi(t)dt$

67) $\varphi_1(x) = \sin(x) + \int_0^x \varphi_2(t)dt$

$\varphi_2(x) = 1 - \cos x - \int_0^x \varphi_1(t)dt$

68) $\varphi_1(x) = e^{2x} + \int_0^x \varphi_2(t)dt$

$\varphi_2(x) = 1 - \int_0^x e^{2(x-t)}\varphi_1(t)dt$

69) $\varphi_1(x) = e^x + \int_0^x \varphi_1(t)dt - \int_0^x e^{x-t}\varphi_2(t)dt$

$\varphi_2(x) = -x - \int_0^x (x-t)\varphi_1(t)dt + \int_0^x \varphi_2(t)dt$

70) $\varphi_1(x) = e^x - \int_0^x \varphi_1(t)dt + 4\int_0^x e^{x-t}\varphi_2(t)dt$

$\varphi_2(x) = 1 - \int_0^x e^{t-x}\varphi_1(t)dt + \int_0^x \varphi_2(t)dt$

71) $\varphi'(x) - \varphi(x) + \int_0^x (x-t)\varphi'(t)dt - \int_0^x \varphi(t)dt = x; \varphi(0) = -1$

72) $\varphi''(x) - 2\varphi'(x) + \varphi(x) + 2\int_0^x \cos(x-t)\varphi''(t)dt +$

$+ 2\int_0^x \sin(x-t)\varphi'(t)dt = \cos x; \varphi(0) = \varphi'(0) = 0$

73) $\varphi''(x) + 2\varphi'(x) - 2\int_0^x \sin(x-t)\varphi'(t)dt = \cos x; \varphi(0) = \varphi'(0) = 0$

74) $\int_0^x \frac{\varphi(t)dt}{(x-t)^a} = x^n \quad (0 < a < 1)$

75) $\int_0^x \frac{\varphi(t)dt}{\sqrt{x-t}} = \sin x$

76) $\int_0^x \frac{\varphi(t)dt}{\sqrt{x-t}} = e^x$

77) $\int_0^x \frac{\varphi(t)dt}{\sqrt{x-t}} = x^{1/2}$

78) $\int_0^x (x-t)^{1/3}\varphi(t)dt = x^{4/3} - x^2$

79) $\int_0^x (x-t)^{1/2}\varphi(t)dt = \pi x$

80) $\int_0^x (x-t)^{1/4}\varphi(t)dt = x + x^2$

81) $\int_0^x (x-t)^2\varphi(t)dt = x^3$

82) $\frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2\varphi(t)dt = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$

83) $\int_0^x e^{x-t}\varphi(t)dt = \sin x$

84) $\int_0^x 3^{x-t}\varphi(t)dt = x$

85) $\int_0^x a^{x-t}\varphi(t)dt = F(x), F(0) = 0$

86) $\int_0^x (1 - x^2 + t^2)\varphi(t)dt = \frac{x^2}{2}$

87) $\int_0^x (x-t)\varphi(t)dt = \sin x$

88) $\int_0^x (x-t)^2 \varphi(t)dt = x^2 + x^3$

89) $\int_0^x \sin(x-t)\varphi(t)dt = 1 - \cos x$

90) $\int_0^x \cos(x-t)\varphi(t)dt = \sin x$

91) $\int_0^x (x-t)^{1/2} \varphi(t)dt = x^{5/2}$

92) $\int_0^x e^{2(x-t)} \varphi(t)dt = \sin x$

93) $\int_0^x e^{x-t} \varphi(t)dt = x^2$

94) $\int_0^x \cos(x-t)\varphi(t)dt = x \sin x$

95) $y(x) = 1 + \frac{2}{\sqrt{3}} \int_0^x e^{-\frac{x-t}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}(x-t) y(t)dt$

96) $y(x) = \frac{1}{1+x^2} + \int_0^x \frac{1+t^2}{1+x^2} y(t)dt$

97) $\psi''(t) + 2\psi'(t) - 2\int_0^t (t-s)\psi'(s)ds = \cos t; \psi(0) = \psi'(0) = 0$

98) $\int_0^x (2x^3 - 3x^2 t + t^3)\psi(t)dt = x^4$

١٦ . أوجد صور الدوال التالية:

$g(t) = e^{5t}$; $g(t) = \cos 4t$; $g(t) = e^{3t} \cos 3t \sin 2t$;

$g(t) = e^{4(t-5)} \cos(t-5)$; $g(t) = \cos(3t-4)$; $g(t) = t^2 \cos 3t$;

$g(t) = \int_0^t \frac{\sin u}{u} du$; $g(t) = \frac{sh^2 t}{t}$; $g(t) = \frac{e^{-2t} \sin^2 3t}{t}$

١٧ . استخدم نظريتي النشر الثانية والنشر الأولى في إيجاد أصل الصور التالية:

$$G(z)=\frac{4z+3}{(z-1)(z^2+2z+5)}\ ;\ G(z)=\frac{z-1}{z^2+3z}\ ;\ G(z)=\frac{1}{z}\cos\frac{1}{z}\ ;$$

$$G(z)=\frac{1}{\sqrt{z}}e^{\frac{1}{z}}$$

١٨ . حل معادلات فولتيرا التكاملية مستخدماً تحويلات لابلاس:

1) $\psi(t)=e^t-\int_0^t e^{t-s}\psi(s)ds$

2) $\psi(t)=t-\int_0^t e^{t-s}\psi(s)ds$

3) $\psi(t)=e^{2t}+\int_0^t e^{t-s}\psi(s)ds$

4) $\psi(t)=t-\int_0^t (t-s)\psi(s)ds$

5) $\psi(t)=\cos t+\int_0^t \psi(s)ds$

6) $\psi(t)=e^t+2\int_0^t \cos(t-s)\psi(s)ds$

الفصل الثاني

حساب التحولات

٢ . ١ . صياغة المسألة والشروط اللازمة للقيم القصوى:

يهتم حساب التغيرات (التحولات) بدراسة القيم العظمى، والصغرى للداليات، وتضم هذه الفقرة ثلاثة بنود، تناولنا في الأول منها تعاريف الداليات وبعض أنواعها وأمثلة على أبسط أنواع مسائل التغيرات، وتناولنا في الثاني دراسة القيم العظمى والصغرى للداليات وضم البند الثالث الشروط الأساسية، وشرط أولر الضروري لمعرفة القيم الحرجة وقيم الثبات.

٢ . ١ . ١ . **تعريف** (١):

إذا كانت F مجموعة الدوال وكانت R مجموعة الأعداد الحقيقية فتسمى الدالة $J:F\to R$ دالي (Functional).

إذاً الدالي هو دالة تقرن كل دالة أو منحنٍ بعدد حقيقي وللداليات صور مختلفة تبعاً لمتغيراتها نذكر منها ما يلي:

$$\int_a^b F(x)dx \;,\; J[y(x)] = \int_a^b F[x, y(x), y'(x)]dx$$

$$J[y(x)] = \int_a^b F[x, y(x), y^{(1)}(x), \dots y^{(n)}]dx$$

$$J[y_1, \dots, y_n] = \int_a^b F[x, y_1, y_2, \dots y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n]dx$$

وفيما يلي بعض الأمثلة على الداليات.

٢ . ١ . ٢ . مثال (١):

طول القوس (Arc Length) لمنحني $y = y(x)$، في المستوي، الذي يصل بين النقطتين $B(b, d), A(a, c)$ يمثل دالياً لأن $L: F \to R$، حيث:

$$L[y(x)] = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2}\,dx$$

٢ . ١ . ٣ . مثال (٢):

أقل مساحة سطحية S لسطح $z = (z(x, y)$ ناتجة من منحنٍ مغلق تُمثل دالياً أيضاً لأن $S: F \to R$، حيث:

$$S[z(x,y)] = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$$

حيث D هو مسقط السطح على المستوي x y. لاحظ أنه يمكن إنشاء هذا السطح بغمر سلك رفيع له شكل المنحني المغلق في سائل صابوني، ثم رفعه من السائل.

وحيث إن حساب التغيرات يهتم بدراسة طرق تعيين القيم القصوى (العظمى، والصغرى) للداليات، فقد أطلق على المسائل المتعلقة بمعرفة القيم القصوى للداليات، مسائل التغيرات (Variation Problems)، وفيما يلي بعض الأمثلة على أبسط أنواعها.

٢ . ١ . ٤ . مثال (٣):

(مسألة أقصر بعد بين نقطتين في المستوي The Geodesics Problems)

إذا كان المستوي هو R^2 فتكون المسألة إيجاد منحني $y = y(x)$ يصل بين نقطتين $B(b, d), A(a, c)$ في المستوي xy ذي أقل طول ممكن، وفي هذه الحالة يكون الدالي هو طول الخط $L[y(x)]$، الذي يجعل قيمة:

$$L[y(x)] = \int_a^b \sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx$$

قيمة صغرى أما إذا كان المستوي هو R^3، فقد تكون المسألة هي إيجاد أقصر منحنٍ يصل بين النقطتين $A, B \in R^3$، الواقعتين على السطح $F(x,y,z) = 0$، وتكون المشكلة هي جعل القيمة: $L = \int_a^b \sqrt{1+y'^2+z'^2}\,dx$ أقل ما يمكن. ولقد حلت هذه المسألة عام ١٦٩٨م من قبل الرياضي السويسري يعقوب برنولي (١٦٥٤ . ١٧٠٥م).

٢ . ١ . ٥ . مثال (٤):

(مسألة ذات المحيط المعلوم Isoperimetric Problem)

تتعلق هذه المسألة بإيجاد منحنٍ مغلق ذي محيط معلوم يحدد أكبر مساحة ممكنة وهي من أقدم مسائل التغيرات التي شغلت اهتمام الرياضيين.

لاحظ أن طول المنحني يكون ثابتاً، كما أن:

$$L = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2}\,dt$$

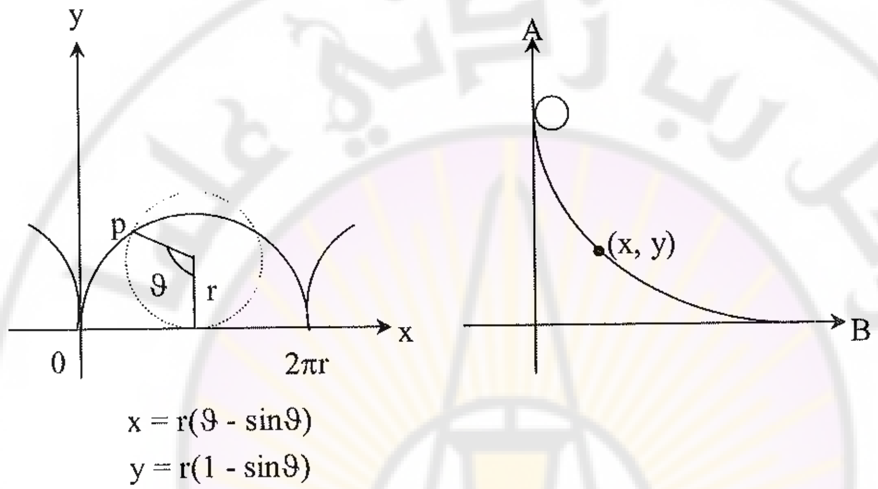
هو دائرة كما هو معلوم لقدماء اليونانيين.

٢ . ١ . ٦ . مثال (٥): (مسألة منحني أقصر زمن Brachistochrone)

وهي مسألة إيجاد أقصر منحنٍ يصل بين نقطتين معلومتين في المستوى R^2 بشرط أن انزلاق جسم على ذلك المنحني بدون احتكاك من $A(0, 0)$ إلى $B(b, y_1)$ يستغرق أقل زمن ممكن، وأول من قدم الحل لهذه المسألة الرياضي السويدي يوحنا برنولي (١٦٦٧ . ١٧٤٨م) عام ١٦٩٦م، كما حلت من قبل يعقوب برنولي، والألماني ليبنز (١٦٤٦ . ١٧١٦م) والإنجليزي نيوتن (١٦٤٢ . ١٧٢٧م)، والفرنسي لوبيتال (١٦٦١ . ١٧٠٤م) لاحظ (كما سنثبت لاحقاً) أن:

$$t(y(x)) = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^b \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}\,dx$$

حيث g التعجيل أو التسارع الأرضي، $y(b) = y_1,\ y(0) = 0$، كما أن المنحني المطلوب هو الدحرورجي «cycloid» وهو المحل الهندسي لنقطة على دائرة متدحرجة على خط مستقيم شكل (٢ . ١).



شكل (٢ . ١)

والآن ليكن V فضاء متجهات (linear or vector space) على الحقل R ولنقرن مع كل عنصر $v \in V$ العدد الحقيقي $\|v\|$ والذي يسمى معياراً أو مقياساً أو نظيماً (Norm) v بحيث إن:

(أ) $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0\ ,\ \|v\| \geq 0$

(ب) $\|\alpha v\| = |\alpha| \,.\, \|v\|$ لكل $\alpha \in R\ ,\ v \in V$

(ج) $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$ لكل $u, v \in V$.

نجد أن (V, d) حيث $d: V \times V \to R,\ d(v, v) = \|v - v\|$ فضاء متري (metric space)، وسنهتم بدراسة مسائل التغيرات للداليات في الفضاء D_n, D_1, ℓ

حيث ℓ فضاء الدوال المستمرة على الفترة $[a, b]$، ولكل $f \in \ell$ يكون $\|f((x)\| = \max f(x)$ وإذا كان D_1 فضاء جميع الدوال المستمرة على $[a, b]$ التي تكون مشتقتها الأولى مستمرة على $[a, b]$، ولكل $f \in D_1$ يكون:

$$\|f(x)\|_{D1} = \max_{x\in[a,b]}|f(x)| + \max_{x\in[a,b]}|f'(x)|$$
$$= |f(x)|_\ell + |f'(x)|_\ell$$

أما D_n وحيث $n = 1,2,\ldots,n$ فهو فضاء الدوال f المستمرة على $[a, b]$، التي تكون مشتقاتها $f^{(r)}$ وحيث $r = 1,2,\ldots,n$ مستمرة على $[a, b]$ ولكل $f \in D_n$ يكون:

$$\|f(x)\| = \sum_{r=0}^{n}\max_{x\in[a,b]}|f^{(r)}(x)| = \sum_{r=0}^{n}\max_{x\in[a,b]}\|f^{(r)}(x)\|_\ell \quad \text{حيث} \quad f(x) = f^{(0)}(x)$$

٢ . ١ . ٧ . تعريف (٢):

يقال عن دالي $J: F \to R$ إنه دالٍ خطي (linear functional)، إذا كان:

(أ) $J[ky(x)] = k.J[y(x)]$، لكل $y \in F$، $k \in R$.

(ب) $J[y_1(x) + y_2(x)] = J[y_1(x)] + J[y_2(x)]$ لكل $y_1, y_2 \in F$.

٢ . ١ . ٨ . مثا ل (٦):

أثبت أن الدالي $J[f(x)] = \int_a^b \alpha(x)f(x)dx$ دالٍ خطي حيث $\alpha(x)$ دالة ثابتة.

الإثبات:

بما أن:

أ . $$J[kf(x)] = \int_a^b \alpha(x)kf(x)dx$$
$$= k\int_a^b \alpha(x)f(x)dx = k.J[f(x)]$$

ب . $$J[f_1(x) + f_2(x)] = \int_a^b \alpha(x)(f_1(x) + f_2(x))dx$$

$$= \int_a^b \alpha(x) f_1(x) dx + \int_a^b \alpha(x) f_2(x) dx$$

$$= J[f_1(x)] + J[f_2(x)]$$

٢ . ١ . ٩ . تعريف (٣):

يقال عن الدالي $J: F \to R$ إنه مستمر عند النقطة $y = y_0(x)$، إذا كان لكل $\varepsilon > 0$ توجد $\delta > 0$ بحيث إن:

$$\|y - y_0\| < \delta \Rightarrow |J(y(x)) - J(y_0(x))| < \varepsilon$$

ومن ثم إن J دالٍ مستمر عند $y = y_0(x)$، إذا كان $\lim\limits_{y \to y_0} J[y(x)] = J[y_0(x)]$

٢ . ١ . ١٠ . مثال (٧):

أثبت أن $J[y(x)] = \int_a^b \alpha(x) y(x) dx$ بحيث $\alpha(x)$ دالة ثابتة، أنه دالٍ خطي ومستمر في الفضاء ℓ.

الإثبات:

لاحظ أن $J[y(x)]$ دالي خطي حسب مثال (٢ـ ١ـ ٨) ولكي نثبت أن $J[y(x)]$ دالٍ مستمر، لاحظ أن $\alpha(x)$ دالة محددة، إذاً $|\alpha(x)| \leq M$، M ثابت، وعليه فإن لكل $\|y - y_0\|_\ell < \delta = \dfrac{\varepsilon}{M(b-a)}$، نجد أن:

$$|J[y(x)] - J[y_0(x)]| = \left| \int_a^b \alpha(x)(y - y_0) dx \right|$$

$$\leq \int_a^b |\alpha(x)| |y - y_0| dx$$

$$\leq M. \max_{x \in [a,b]} |y - y_0| (b - a)$$

$$\leq M \cdot \|y - y_0\|_\ell (b - a) < \varepsilon$$

حيث: $\|y-y_0\|_\ell < \dfrac{\varepsilon}{M(b-a)} = \delta$

٢ . ١ . ١١ . مثال (٨):

أثبت أن الدالي $L: D_1 \to R$ حيث $L[y(x)] = \int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx$ مستمر على D_1.

الإثبات:

بما أن:

$$|L[y(x)] - L[y_0(x)]| = \left|\int_a^b \left(\sqrt{1+y'^2} - \sqrt{1+y_0'^2}\right)dx\right|$$

إذاً:

$$|L[y(x)] - L[y_0(x)]| \le \int_a^b \left|\left(\sqrt{1+y'^2} - \sqrt{1+y_0'^2}\right)\right|dx$$

ومن ثمَّ:

$$\sqrt{1+y'^2} - \sqrt{1+y_0'^2} = \frac{\left(1+y'^2\right) - \left(1+y_0'^2\right)}{\sqrt{1+y'^2} + \sqrt{1+y_0'^2}}$$

$$= \frac{\left(y'-y_0'\right)\left(y'+y_0'\right)}{\sqrt{1+y'^2} + \sqrt{1+y_0'^2}}$$

إذاً:

$$|L[y(x)] - L[y_0(x)]| \le \int_a^b \frac{|y'-y_0'||y'+y_0'|}{\sqrt{1+y'^2} + \sqrt{1+y_0'^2}}\,dx$$

لكن المشتقات y', y_0' مستمرة في الفترة المغلقة $[a, b]$، إذاً:

$$\frac{|y' + y'_0|}{\sqrt{1 + y'^2} + \sqrt{1 + y_0'^2}} \le M$$

وعلاوة على ذلك فمن تعريف المقياس (النظيم) في الفضاء D_1 نجد أن:

$$\max_{x \in [a,b]} |y' - y'_0| = \|y' - y'_0\|_C \le \|y' - y'_0\|_{D_1}$$

ومن ثم فإن:

$$|L[y(x)] - L[y_0(x)]| \le M \int_a^b |y' - y'_0| dx$$

$$\le M \max_{x \in [a,b]} |y' - y'_0| (b - a)$$

$$\le M \|y - y_0\|_{D_1} (b - a)$$

إذاً لكل $0 < \varepsilon$ يمكن اختيار $\delta = \varepsilon/M\ (b\text{-}a)$، وعليه فإن لكل $y \in D_1$ حيث $\|y - y_0\|_{D1} < \delta$ نجد أن:

$$|L[y(x)] - L[y_1(x)]| \le M\ (b - a)\ \|y'\text{-}y'_0\|_{D1} < \varepsilon$$

إذاً $L[y(x)]$ دالي مستمر في D_1.

والآن لنأتِ إلى بعض الحقائق الأساسية المتعلقة بالداليات الخطية المستمرة والقضايا الآتية، والتي أثبتت عام ١٨٧٩م من قبل الرياضي الألماني باول ديو بوا ريموند (Paul Du Bois Reymon) (١٨٣١ . ١٨٨٩م).

٢ . ١ . ١٢ . تمهيدية (١): (أولر . لاغرانج):

إذا كانت $\alpha(x)$ دالة مستمرة على الفترة $[a, b]$، وكان $\int_a^b \alpha(x) f(x) dx = 0$ لكل $f(x) \in \ell$ بحيث إن $f(a) = f(b) = 0$، فإن $\alpha(x) = 0$ لكل $x \in [a, b]$.

البرهان:

إذا أثبتنا أن $\alpha(x) = 0$ لكل $x \in (a, b)$، فإن استمرار $\alpha(x)$ على $[a, b]$ يؤدي إلى كون $\alpha(x) = 0$ لكل $x \in [a, b]$، لذا نفرض أن $\alpha(x^*) \neq 0$، $x^* \in (a,b)$. إذاً إما $\alpha(x^*) > 0$ وإما $\alpha(x^*) < 0$، ويكفي أن نثبت القضية عندما $\alpha(x^*) > 0$ لأنه إذا كانت $\alpha(x^*) < 0$، فإن $-\alpha(x^*) > 0$ بما أن $\alpha(x)$ مستمرة بالفرض، إذاً $\alpha(x) > 0$ لكل $x \in (c, d)$ حيث d, c أعداد حقيقية تحقق العلاقة $a < c < x^* < d < b$ وعليه إذا كانت:

$$f^*(x) = \begin{cases} (x-c)(d-x) & ;\forall x \in [c,d] \\ 0 & ;\forall x \in [a,b]-[c,d] \end{cases}$$

فإن $f^* \in \ell$، كما أن $f^*(c) = f^*(d) = f^*(a) = f^*(b) = 0$

إذاً:
$$\int_c^d \alpha(x)(x-c)(d-x)dx = 0$$

لكن: $\alpha(x) > 0$ بالفرض، $(d-x) > 0, (x-c) > 0$

إذاً $\alpha(x)(x-c)(d-x) > 0$ لكل $x \in (c, d)$

وعليه فإن $\int_c^d \alpha(x)(x-c)(d-x)dx > 0$ وهذا تناقض.

إذاً:

$\alpha(x) = 0$ لكل $x \in [a, b]$.

ملاحظة:

يمكن تعميم التمهيدية (٢ . ١ . ١٢) كالآتي:

إذا كانت $\alpha(x)$ دالة مستمرة على $[a, b]$ وكان $\int_a^b \alpha(x)f(x)dx = 0$ لكل $f(x) \in D_n$ بحيث إن $f^{(r)}(a) = f^{(r)}(b) = 0$ لكل $r \in N$، فإن $\alpha(x) = 0$ لكل $x \in [a, b]$.

ولإثبات تلك العبارة نتبع نفس البرهان في التمهيدية (٢ . ١ . ١٢)، وجعل:

$$f^*(x) = \begin{cases} (x-c)^{n+1}(d-x)^{n+1} & \forall x \in [c,d] \\ 0 & \forall x \in [a,b]-[c,d] \end{cases}$$

فنحصل على المطلوب.

٢ . ١ . ١٣ . تمهيدية (٢):

إذا كانت $\alpha(x)$ دالة مستمرة على $[a, b]$، وكان $\int_a^b \alpha(x)f'(x)dx = 0$ لكل $f(x) \in D_1$ بحيث إن $f(a) = f(b) = 0$ فإن $\alpha(x) = C$ لكل $x \in [a, b]$، حيث $C \in R$.

البرهان:

نفرض أن: C معرف بالعلاقة: $\int_a^b [\alpha(x) - C]dx = 0$.

ولنفرض أن: $\int_a^x [\alpha(\omega) - C]d\omega = 0$.

إذاً $f(x) \in D_\ell$، كما أن $f(a) = f(b) = 0$. لكن:

$$\int_a^b [\alpha(x) - C]f'(x)dx = \int_a^b \alpha(x)f'(x)dx - C\int_a^b f'(x)dx$$
$$= 0 - C(f(b) - f(a)) = 0$$

كما أن:

$$\int_a^b [\alpha(x) - C]h'(x)dx = \int_a^b [\alpha(x) - C][\alpha(x) - C] = \int_a^b [\alpha(x) - C]^2 dx$$

إذاً:
$$\int_a^b [\alpha(x) - C]^2 dx = 0$$

وعليه فإن $\alpha(x) - C = 0$ ومنها نجد أن $\alpha(x) = C$ لكل $x \in [a, b]$.

٢ . ١ . ١٤ . تمهيدية (٣):

إذا كانت $\alpha(x)$ دالة مستمرة على $[a, b]$، وكان $\int_a^b \alpha(x)f''(x)dx = 0$ لكل $f(x) \in D_2$، بحيث إن $f(a) = f(b) = 0$ و $f'(a) = f'(b) = 0$، فإن:

$\alpha(x) = c_0 + c_1 x$ لكل $x \in [a, b]$، $c_0, c_1 \in R$.

البرهان:

نفرض أن c_0, c_1 معرفان بالعلاقتين الآتيتين: $\int_a^b [\alpha(x) - C_0 - C_1 x]dx = 0$،

$$\int_a^b dx \int_a^x [\alpha(t) - C_0 - C_1 t]dt = 0 .$$

ولنفرض أن $f(x) = \int_a^x dt \int_a^t [\alpha(r) - C_0 - C_1 r]dr = 0$ إذاً $f(x) \in D_2$

كما أن $f(a) = f(b) = 0$، $f'(a) = f'(b) = 0$، وعليه فإن:

$$\int_a^b [\alpha(x) - C_0 - C_1 x]f''(x)dx = \int_a^b \alpha(x)f''(x) - C_0[f'(b) - f'(a)]$$

$$- C_1 \int_a^b xf''(x)dx$$

$$= 0 - 0 - C_1 \int_a^b xf(x)dx = -C_1 \int xf''(x)dx$$

$$= -C_1 \left[xf'(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)dx \right]$$

$$= -C_1 [x[f'(b) - f'(a)] - [f(b) - f(a)]] = 0$$

لكن:

$$\int_a^b [\alpha(x) - C_0 - C_1 x]f''(x)dx = \int_a^b [\alpha(x) - C_0 - C_1 x][\alpha(x) - C_0 - C_1 x]dx$$

$$=\int_a^b [\alpha(x)-C_0-C_1x]^2 dx$$

إذاً $\int_a^b [\alpha(x)-C_0-C_1x]^2 dx=0$، وعليه فإن $\alpha(x) = C_0 + C_1x$ لكل $x\in [a, b]$.

٢ . ١ . ١٥ . تمهيدية (٤):

إذا كان كل من $\beta(x), \alpha(x)$ دالتين مستمرتين على $[a, b]$

وكان: $\int_a^b [\alpha(x)f(x)+\beta(x)f'(x)]dx = 0$ لكل $f(x) \in D_1$ بحيث إن $f(a) = f(b) = 0$ فإن $\beta(x)$ قابلة للاشتقاق و $\beta'(x) = \alpha(x)$ لكل $x\in[a, b]$.

البرهان:

لتكن $A(x) = \int_a^x \alpha(t)dt$، إذاً $A'(x) = \alpha(x)$ ومن التكامل بالتجزئة، نجد أن:

$$\int_a^b \alpha(x)f(x)dx = A(x)f(x)\Big|_a^b - \int_a^b A(x)f'(x)dx$$

$$= A(x)[f(b)-f(a)] - \int_a^b A(x)f'(x)dx$$

$$= 0 - \int_a^b A(x)f'(x)dx = -\int_a^b A(x)f'(x)dx$$

وعليه فإن:

$$\int_a^b [\alpha(x)f(x)+\beta(x)f'(x)]dx = \int_a^b [-A(x)+\beta(x)]f'(x)dx = 0$$

إذاً $\beta(x) - A(x) = C$ حسب التمهيدية (٢) في (٢ . ١ . ١٣) وعليه فإن $\beta'(x) = A'(x)$، لكن $A'(x) = \alpha(x)$ إذاً $\beta'(x) = \alpha(x)$ لكل $x \in [a, b]$.

٢ . ١ . ١٦ . القيم القصوى للداليات:

تعود دراسة التغير بالنسبة لبعض الداليات إلى كل من أولر ولاغرانج، ثم عممت تلك المفاهيم في أعمال كل من الإيطالي فولتيرا (١٨٦٠ . ١٩٤٠)، والفرنسي هادمارد (١٨٦٥ . ١٩٦٣م)، أما التغير بمفهومه الجديد فقد ظهر في أعمال الفرنسي جاتكس (Gateaux) ولتعريف التغير بمفهومه الجديد، لاحظ أنه إذا كان $\mathfrak{X}$ فضاء معيارياً (مترياً)، فإن المجموعة $\{y \in \mathfrak{X} \mid \|y - x\| < r\}$ كرة مركزها x ونصف قطرها r ويرمز عادة لتلك الكرة بالرمز $B_r(x)$ ويقال عن مجموعة جزئية D من $B_r(x)$ إنها مجموعة مفتوحة (open set)، إذا كان لكل $x \in D$ نجد أن $B_r(x) \subseteq D$. ويقال عن مجموعة جزئية D إنها مجموعة مغلقة إذا كانت مكملتها مجموعة مفتوحة.

٢ . ١ . ١٧ . مثال محلول (٩):

إذا كانت $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ نقطتين في R^2، وعرفنا النظيم:

$$\|A - B\| = d(AB) = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

فنجد أن R^2 فضاء متري كما أن $D = \{(x,y) \in R^2 \mid a<x<b,\ c<y<d\}$ مجموعة جزئية مفتوحة من R^2، لأن لكل $P(x, y) \in D$ يوجد $B_r(P) \subseteq D$ حيث:

$$0 < r = \min\{x - a,\ b - x,\ y - c,\ d - y\} \in R$$

وسنورد الآن تعريف التغيّر بالنسبة للداليات.

٢ . ١ . ١٨ . تعريف (٤):

إذا كان J دالياً معرفاً على المجموعة الجزئية المفتوحة D من الفضاء المتري $\mathfrak{X}$ فيقال إن للدالي J تغيراً عند النقطة $x \in D$، إذا وجد دالي δJ تكون قيمة $\delta J\,(x, h)$ معرفة لكل $h \in \mathfrak{X}$ و $\delta J(x,h) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{J(x + \varepsilon h) - J(x)}{\varepsilon}$.

إذاً: $\delta J(x,h) = \dfrac{d}{d\varepsilon}\big(J(x + \varepsilon a h)\big)\Big|_{\varepsilon=0}$، كما أن $\delta J\,(x, 0) = 0$،

$$\delta J(x,ah)=\frac{d}{d\varepsilon}\big(J(x+\varepsilon ah)\big)\Big|_{\varepsilon=0}=a\frac{d}{da}\big(J(x+ah)\big)\Big|_{a=0}=a\delta J(x,h)$$

وبالتعويض عن h بالرمز Δx، نجد أن:

$$\delta J(x,\Delta x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{J(x+\varepsilon\Delta x)-J(x)}{\varepsilon}=\frac{d}{d\varepsilon}J(x+\varepsilon\Delta x)\Big|_{\varepsilon=0}$$

٢ . ١ . ١٩ . مثال محلول (١٠):

احسب التغير للدالي:

$$J(y(x))=\int_a^b F(x,y(x),y'(x))dx$$

ثم أوجد $\delta J(y,\Delta y)$ عندما $F(x,y,y')=\sqrt{\dfrac{1+(y')^2}{2g(y_0-y)}}$.

الحل:

بما أن $J(y)\int_a^b F(x,y,y')dx$ ، إذاً:

$$J(y+\varepsilon\Delta y)=\int_a^b F(x,y+\varepsilon\Delta y,y'+\varepsilon\Delta y')dx$$

وعليه فإن:

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\varepsilon}J(y+\varepsilon\Delta y)&=\frac{d}{d\varepsilon}\int_a^b F(x,y+\varepsilon\Delta y,y'+\varepsilon\Delta y')dx\\&=\int_a^b\frac{\partial}{\partial\varepsilon}F(x,y+\varepsilon\Delta y,y'+\varepsilon\Delta y')dx\end{aligned}$$

لكن:

$$\frac{\partial F(x,y+\varepsilon\Delta y,y'+\varepsilon\Delta y')}{\partial\varepsilon}=\frac{\partial F(x,y+\varepsilon\Delta y,y'+\varepsilon\Delta y')}{\partial y}\Delta y+$$

$$+\frac{\partial F(x, y+\varepsilon\Delta y, y'+\varepsilon\Delta y')}{\partial y'}\Delta y'$$

$$\left.\frac{\partial F(x, y+\varepsilon\Delta y, y'+\varepsilon\Delta y')}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}=\frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y}\cdot\Delta y+\frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y'}\cdot\Delta y'$$

وعليه فإن:

$$\delta J(y,\Delta y)=\int_a^b\left[\frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y}\cdot\Delta y+\frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y'}\cdot\Delta y'\right]dx$$

وعندما:

$$F(x,y,y')=\sqrt{\frac{1+(y')^2}{2g(y_0-y)}}$$

نجد أن:

$$\frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y}=\frac{1}{2(y_0-y)}\sqrt{\frac{1+(y')^2}{2g(y_0-y)}}$$

$$\frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y}=\frac{y'}{\sqrt{2g(y_0-y)\left[1+(y')^2\right]}}$$

وعليه فإن:

$$\delta J(y,\Delta y)=\int_a^b\left[\frac{1}{2(y_0-y)}\sqrt{\frac{1+(y')^2}{2g(y_0-y)}}\cdot\Delta y+\frac{y'\Delta y}{\sqrt{2g(y_0-y)\left[1+(y')^2\right]}}\right]dx$$

والآن إلى تعريف القيم القصوى للداليات ودراسة خواصها.

٢ . ١ . ٢٠ . تعريف (٥):

لتكن D مجموعة جزئية غير خالية في الفضاء المتري ⁎، ولتكن $y_0 \in D$، J دالياً على D.

(أ) يقال عن $J(y_0)$ إنها قيمة عظمى محلية (Local Maximum Value) للدالي J، إذا وجدت كرة $B_r(y_0)$، بحيث إن $J(y) \le J(y_0)$ لكل $y \in D \cap B_r(y_0)$.

(ب) يقال عن $J(y_0)$ إنها قيمة صغرى محلية (Local minimum Value) للدالي J إذا كان $J(y) \ge J(y_0)$ لكل $y \in D \cap B_r(y_0)$.

(ج) يقال عن $J(y_0)$ إنها قيمة قصوى (Extremum Value) للدالي J عند $y_0 \in D$ إذا كانت $J(y_0)$ قيمة عظمى أو صغرى للدالي J، وتسمى القيمة القصوى قيمة قصوى ضعيفة إذا كان للفرق $\Delta J(y)$ نفس الإشارة لكل $y \in \ell$، ولإيجاد العلاقة بين القيم القصوى للداليات والتغير، نورد ما يلي:

٢ . ١ . ٢١ . مبرهنة (١):

إذا كان للدالي J المعرف على المجموعة الجزئية المفتوحة D في الفضاء المتري $\cancel{x}$، قيمة قصوى عند $y_0 \in D$، وكان للدالي J تغيراً عند y_0 فإن $\delta J(y_0,h) = 0$ لكل $h \in \cancel{x}$.

البرهان:

نفرض أن $J(y_0) \in D$ قيمة صغرى محلية للدالي J، إذاً $J(y_0+\varepsilon h)-J(y_0) \ge 0$ لكل الأعداد الصغيرة ε، ولكل $h \in \cancel{x}$، وعليه فإن $\frac{J(y_0+\varepsilon h)-J(y_0)}{\varepsilon} \ge 0$ لكل الأعداد الصغيرة الموجبة ε، بينما $\frac{J(y_0+\varepsilon h)-J(y_0)}{\varepsilon} \le 0$ لكل الأعداد الصغيرة السالبة ε. ومن ثمّ فإن:

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon<0}} \frac{J(y_0+\varepsilon h)-J(y_0)}{\varepsilon} \le 0 \ , \ \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \frac{J(y_0+\varepsilon h)-J(y_0)}{\varepsilon} \ge 0$$

إذا كانت تلك النهايات موجودة. إذاً: $\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{J(y_0+\varepsilon h)-J(y_0)}{\varepsilon} = 0$

لكل نقطة نهاية صغرى $y_0 \in D$، عندما تكون تلك النهاية موجودة.

وبالمثل نجد أن:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{J(y_0 + \varepsilon h) - J(y_0)}{\varepsilon} = 0$$

عندما $y_0 \in D$ نقطة (منحني) نهاية عظمى. لكن:

$\delta J(y_0 h) = \lim_{\varepsilon \to 0} \dfrac{J(y_0 + \varepsilon h) - J(y_0)}{\varepsilon}$ إذا: $\delta J(y_0 h) = 0$.

ملاحظة: إذا كانت $\delta J(y_0, h) = 0$ لكل $h \in \cancel{x}$، فإن ذلك قد لا يعني أن $J(y_0)$ قيمة قصوى للدالي J، كما يوضح ذلك المثال الآتي.

٢ . ١ . ٢٢ . مثال محلول (١١):

(أ) إذا كان $J: R \to R$، وكان $J(x) = x^2$ لكل $J \in R$، فإن $\delta J = J'$ وعليه فإن $J'(0) = 0$، بينما $J(0)$ ليست قيمة قصوى للدالة J.

(ب) إذا كان $J: R^2 \to R$، $J(x = (x_1, x_2)) = x_2^2 - x_1^2$ لكل $(x_1, x_2) \in R^2$، فإن:

$$\delta J(x,h) = \frac{\partial J}{\partial x_1} h_1 + \frac{\partial J}{\partial x_2} h_2 = -2x_1 h_1 + 2x_2 h_2$$

لكل $h = (h_1, h_2) \in R^2$ إذاً $\delta J\,(0, 0) = 0$، لكن $J\,(0, 0)$ ليست قيمة قصوى للدالي J.

٢ . ١ . ٢٣ . شرط أولر اللازم: (Euler's Necessary Condition)

سنركز اهتمامنا في هذا الجزء على تحديد الشرط الضروري المؤدي إلى ما يعرف بمعادلة أولر لاغرانج التي تؤدي إلى معرفة القيم الحرجة أو قيم الثبات (Stationary Values) للداليات، إضافة إلى بعض التطبيقات.

٢ . ١ . ٢٤ . مبرهنة (٢):

إذا كان للدالي $J(y)=\int_a^b F(x,y,y')dx \in D_1$، حيث $y(a)=A,\ y(b)=B$

قيمة قصوى على المنحني $y(x)$، فإن:

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)=0 \qquad (1)$$

أي إن الشرط الضروري لامتلاك $J(y)$ قيماً قصوى عند $y(x)$ هو تحقيق $y(x)$ للمعادلة التفاضلية (1).

البرهان:

بما أن $\delta J(y,\Delta y)=\int_a^b\left(\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\Delta y+\frac{\partial F}{\partial y}\Delta y'\right)dx$ حسب مثال (١٠)، إذاً:

$$\delta J(y+\Delta y)=\int_a^b\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\Delta y dx+\int_a^b\frac{\partial F}{\partial y'}\cdot\Delta y' dx$$

لكن بالمكاملة بالتجزئة، نجد أن:

$$\int_a^b\frac{\partial F}{\partial y'}\cdot\Delta y' dx=\frac{\partial F}{\partial y'}\cdot\Delta y\Big|_a^b-\int_a^b\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\cdot\Delta y dx$$

وحيث إن $\Delta y(a)=\Delta y(b)=0$، إذاً:

$$\int_a^b\frac{\partial F}{\partial y'}\cdot\Delta y' dx=-\int_a^b\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)\cdot\Delta y dx$$

وعليه فإن:

$$\delta J(y,\Delta y)=\int_a^b\left[\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]\cdot\Delta y dx$$

لكن للدالي $J(y)$ قيمة قصوى عند $y = y(x)$، إذاً $\delta J(y, \Delta y) = 0$ حسب المبرهنة (١)، وعليه فإن $\int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right] \cdot \Delta y dx = 0$، لكن Δy دالة مستمرة على $[a, b]$ إذاً $\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$ حسب التمهيدية (١).

تُعرف المعادلة (1) بمعادلة أولر نسبة للرياضي أولر الذي توصل إليها عام ١٧٤١م، وبعد دراسة لاغرانج لأعمال أولر توصل عام ١٧٥٥م إلى نفس المعادلة بطريقة أخرى وكان عمره ١٩ سنة، فأرسل ذلك إلى أولر الذي أثنى عليه كثيراً، وأطلق على تلك الطريقة حساب التغيرات، ولهذا السبب تسمى المعادلة (1) بمعادلة أولر . لاغرانج، التي تساعد على إيجاد القيم القصوى وقيم التوقف أو الثبات للداليات.

٢ . ١ . ٢٥ . ملاحظة:

حيث إن: $\frac{\partial F}{\partial y'} = F_{y'}, \frac{\partial F}{\partial y} = F_y, \frac{d}{dx}(F_{y'}) = F_{xy'} + F_{yy'} \cdot y' + F_{y'y'} \cdot y''$

إذاً معادلة أولر . لاغرانج هي:

$$(F_{y'y'}) \,.\, y'' + (F_{yy'}) \,.\, y' + (F_{xy'}) - F_y = 0$$

وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية، تُسمى منحنيات تكاملاتها $y = (y,x, C_1, C_2)$ المنحنيات الحرجة أو منحنيات التوقف التي قد تكون منحنيات قيم قصوى للدالي $J\ (y)$.
وسنورد الآن بعض التطبيقات والأمثلة المناسبة.

٢ . ١ . ٢٦ . مثال محلول (١٢):

أوجد المنحنيات التي قد يكون للدالي $J[y(x)] = \int_0^{\pi/2} (y'^2 - y^2)dx$ قيم قصوى عليها حيث $y(\pi/2) = 1, y(0) = 0$ ثم احسب هذه القيمة.

الحل:

حيث إن $F = y'^2 - y^2$ إذاً $F_y = -2y, F_{y'} = 2y', \frac{d}{dx} F_{y'} = 2y''$

ومن ثمَّ فإن معادلة أولر . لاغرانج:

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$$

تأخذ الشكل: $y'' + y = 0$، والحل العام لهذه المعادلة هو:

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

وباستخدام الشروط الحدية (الابتدائية) نجد أن $C_1 = 0, C_2 = 1$ ومن ثم فإن $y = \sin x$ هو المنحني الذي توجد عليه القيم القصوى للدالي المفروض.

$$J[y(x)] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\cos^2 x - \sin^2 x] dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x dx = 0$$

أي إن القيمة تساوي الصفر للدالي: $J[y(x)] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (y'^2 - y^2) dx$

٢ . ١ . ٢٧ . مثال محلول (١٣):

على أي منحنٍ يمكن للدالي التالي:

$$J[y(x)] = \int_0^1 (y'^2 + 12xy) dx$$

حيث $y(2) = 8 , y(\pi) = \pi^3$، أن يحصل على قيمه القصوى؟

الحل:

إن معادلة أولر . لاغرانج $F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$ تأخذ الشكل $y'' = 6x$، وحل هذه المعادلة هو:

$$y = x^3 + C_1 x + C_2$$

وباستخدام الشروط الحدية نجد أن $C_1 = C_2 = 0$، إذاً يمكن الحصول على القيم القصوى للدالي $J(y)$ على المنحني $y = x^3$.

۲ . ۱ . ۲۸ . مثال محلول (۱٤):

أوجد معادلة المنحني الواصل بين النقطتين $(0, 0), (1, e)$ الذي يجعل للدالي $J(y) = \int_0^1 (y^2 + y'^2 + 2ye^x)dx$ قيمة توقف.

الحل:

بما أن: $F(x, y, y') = (y^2 + y'^2 - 2ye^x)$، $y(0) = 0 , y(1) = e$

إذاً: $F_{y'} = 2y' , F_y = 2y + 2e^x$

وتصبح معادلة أولر كالآتي: $2y + 2e^x - \frac{d}{dx}(2y') = 0$

وعليه فإن: $y + e^x - y'' = 0$

ومن ثمَّ فإن: $y'' - y = e^x \qquad (1)$

وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية حلها العام هو $y = y_C + y_P$، حيث y_c هو حل للمعادلة المتجانسة $y'' - y = 0$، y_P وهو الحل الخاص للمعادلة غير المتجانسة (1). لكن $y_C = Ae^{-x} + Be^x$، $y_P = \frac{1}{D^2 - 1}(e^x) = \frac{1}{2}xe^x$

إذاً $y = Ae^{-x} + Be^x + \frac{1}{2}xe^x$، وباستخدام الشروط الحدية: $y(0) = 0$, $y(1) = e$.

نجد أن: $Ae^{-1} + Be = \frac{1}{2}e, A + B = 0$

وعليه فإن:
$$A = \frac{e^2}{2(1-e^2)}, B = \frac{e^2}{2(e^2-1)}$$

ومن ثمَّ فإن:
$$y = \frac{e^2}{2(e^2-1)}\left[e^x - e^{-x}\right] + \frac{1}{2}xe^x$$

$$y = \frac{e^2}{(e^2-1)}\sinh x + \frac{1}{2}xe^x$$

هو المنحني الذي يجعل للدالي $J(x)$ قيمة توقف.

٢ . ١ . ٢٩ . ملاحظة:

على الرغم من كون معادلة أولر . لاغرانج معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية، إلى أنه قد يكون للدالي $J(y)$ قيمة قصوى على منحنٍ $y(x)$ لكن $y''(x)$ غير موجودة كما يوضح ذلك المثال الآتي:

ليكن $y(1) = 1, y(-1) = 0, J(y) = \int_{-1}^{1} y^2(2x - y')^2 dx$. إذاً معادلة أولر . لاغرانج هي $y^2y'' + yy'^2 - 2y^2 - 4x^2y = 0$ وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية. لاحظ أن $J(y) = 0$ قيمة صغرى للدالي $J(y)$ على المنحني:

$$y(x) = \begin{cases} 0 & -1 \le x \le 0 \\ x^2 & 0 < x \le 1 \end{cases}$$

وبالرغم من ذلك فإن $y''(0)$ غير موجودة.

وفيما يلي نورد المبرهنة الهامة التالية:

٢ . ١ . ٣٠ . مبرهنة (٣):

لتكن $y = y(x)$ دالة مشتقتها الأولى مستمرة، كما أن $F_y - \frac{d}{dx}(F_{y'}) = 0$ فإذا كانت المشتقات الجزئية الأولى والثانية للدالة $F(x,y,y')$ بالنسبة إلى كل من x، y، y' مستمرة، وكان $F_{y'y'} \neq 0$ فإن $y''(x)$ موجودة ومستمرة عند كل النقاط (x,y).

البرهان:

بما أن: $\Delta F_{y'} = F_{y'}(x + \Delta x, y + \Delta y, y' + \Delta y') - F_{y'}(x, y, y')$

$$= \Delta x \; \overline{F}_{y'x} + \Delta y \; \overline{F}_{y'y} + \Delta y' \; \overline{F}_{y'y'}$$

حيث: $F_{y'x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \overline{F}_{y'x}$ ، $F_{y'y} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \overline{F}_{y'y}$ ، $F_{y'y'} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \overline{F}_{y'y'}$ ، لأن المشتقة الثانية للدالة $F(x, y, y')$ موجودة ومستمرة إذاً:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F_{y'}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\overline{F}_{y'x} + \frac{\Delta y}{\Delta x} \overline{F}_{y'y} + \frac{\Delta y'}{\Delta x} \overline{F}_{y'y'} \right)$$

لكن من معادلة أولر . لاغرانج، نجد أن:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F_{y'}}{\Delta x} = \frac{d}{dx}(F_{y'}) = F_{y'}$$

إذاً $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(\overline{F}_{y'x} + \frac{\Delta y}{\Delta x} \overline{F}_{y'y} + \frac{\Delta y'}{\Delta x} \overline{F}_{y'y'} \right)$ موجود. لكن $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \overline{F}_{y'x} = F_{y'x}$

و y' موجودة، $F_{y'y}$ مستمرة، إذاً $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \overline{F}_{yy'} = y' F_{y'y}$.

وعليه فإن: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y'}{\Delta x} \overline{F}_{y'y'} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y'}{\Delta x} \overline{F}_{y'y'}$ موجودة.

إذاً $y'' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y'}{\Delta x}$ موجودة.

وحيث إن: $F_y - F_{xy'} - F_{yy'} \,.\, y' - F_{y'y'} \,.\, y'' = 0$ و $F_{y'y'} \neq 0$

إذاً $y'' = \dfrac{F_y - F_{xy'} - F_{yy'} \cdot y'}{F_{y'y'}}$ وهي دالة مستمرة لكل النقاط (x, y).

٢ . ١ . ٣١ . تمارين غير محلولة:

(١) أثبت أن $J[y(x)]=\int_0^1 (\sin x)y^3(x)dx$ دالٍ مستمر في D_1.

(٢) أثبت أن $J[y(x)]=\int_a^b \sqrt{1+(y'(x))^2}dx$ دالٍ غير خطي في الفضاء ℓ.

(٣) أثبت أن كلاً مما يأتي دالٍ خطي:

أ) $J[f(x)]=\int_a^b f(x)dx$

ب) $L[y(x)]=\int_a^b [p(x)y(x)+q(x)y'(x)]dx$

(٤) هل $J[y(x)]$ دالي خطي في D_1 عندما:

أ) $J[y(x)]=\int_0^1 x^2 y(x)dx$

ب) $J[y(x)]=\int_0^1 x^2 y^2(x)dx$

ج) $J[y(x)]=\int_{1/2}^1 (\sin x)y(x)dx$

(٥) احسب $\delta J[y, \Delta y]$ عندما:

أ) $J(y)=2\pi\int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}dx$

ب) $J(y)=\int_a^b x^2(y')^2dx$

(٦) ادرس الداليات الآتية من حيث وجود منحنيات القيم القصوى:

أ) $J(y)=\int_0^1 xyy'dx$ ، $y(0)=0$ ، $y(1)=1$.

ب) $J(y)=\int_0^1 \left(xy+y^2-2y^2y'\right)dx$ ، $y(0)=1$ ، $y(1)=2$.

ج) $J(y)=\int_a^b \left(y^2-y'^2-2y\sin x\right)dx$.

د) $J(y)=\int_a^b \left(y^2-y'^2-2y\cosh x\right)dx$.

هـ) $J(y)=\int_1^3 \left(x^2y'^2-yy'\right)dx$ ، $y(1)=1$ ، $y(3)=2$.

و) $J(y)=\int_0^1 \left[\frac{1}{2}y'^2+y'+yy'+y\right]dx$ ، $y(0)=0$ ، $y(1)=0$.

٧ . أوجد الحل العام لمعادلة أولر . لاغرانج، بالنسبة للدالي:

$$J(y)=\int_a^b f(x)(1+y'^2)^{1/2}dx$$

ثم حدد ذلك الحل عندما:

أ) $f(x)=x^{1/2}$ ب) $f(x)=x$

٨ . أوجد القيم القصوى للدالي:

$$J(y)=\int \sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

ملاحظة: استخدم الإحداثيات القطبية.

٩ . أوجد معادلة أقصر منحنٍ يصل بين النقطتين (x_0, y_0, z_0)، (x_1, y_1, z_1) الواقعتين على الأسطوانة الدائرية القائمة:

$$z=z(0)\ ,\ y=a\sin\vartheta\ ,\ x=a\cos\vartheta$$

لاحظ أن: $F=\sqrt{\left(\frac{dx}{d\vartheta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\vartheta}\right)^2+\left(\frac{dz}{d\vartheta}\right)^2}$

٢ . ٢ . مسائل التغيرات بنقط أطراف ثابتة:

تضم هذه الفقرة أربعة بنود، تناولنا في الأول منها بعض الحالات الخاصة من معادلات أولر . لاغرانج وتكاملاتها، أما في البند الثاني فقد درسنا الداليات متعددة المتغيرات إضافة إلى الشكل القانوني لمعادلات أولر . لاغرانج وقاعدة هاملتون وبعض تطبيقاتها، وتناولنا في البند الثالث الداليات التي تعتمد على مشتقات ذات مراتب عليا والحصول على ما يسمى معادلة أولر . بواسون أما البند الرابع فقد خصص لدراسة الداليات بشروط إضافية وبعض تطبيقاتها.

وسندرس فيما يلي بعض الحالات الخاصة من معادلة أولر . لاغرانج وبعض تطبيقاتها الهندسية والفيزيائية.

٢ . ٢ . ١ . إذا كانت F لا تعتمد على y':

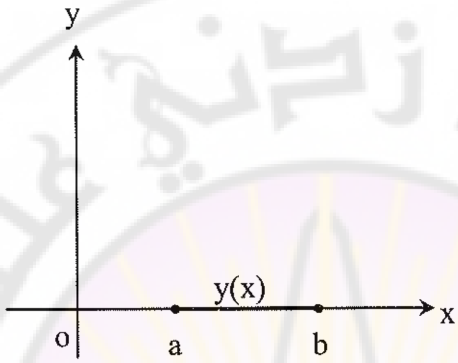
في هذه الحالة تكون $F=F(x, y(x))$، وعليه فإن معادلة أولر هي $F_y(x,y)=0$، وحل هذه المعادلة لا يحوي أي ثوابت اختيارية ومن ثمَّ فإنه لا يحقق الشروط الحدية $y(a) = y_0$, $y(b) = y_1$ ومن ثم لا يوجد حل لمسألة التغيرات هذه إلا عندما يمر المنحني $F_y(x,y) = 0$ بالنقاط الحدية $(a, y_0), (b, y_1)$، فيكون للدالي قيم قصوى على ذلك المنحني.

٢ . ٢ . ١ . ١ . مثال محلول (١٥):

ليكن $J[y]=\int_a^b (x-y)^2 dx$. إذاً $F(x,y) = (x-y)^2$ وعليه فإن $F_y = 0$ ومن ثمَّ فإن $y = x$. لاحظ أن $J(y) = 0$ لكل نقطة من نقاط المستقيم $y = x$.

٢ . ٢ . ١ . ٢ . مثال محلول (١٦):

إذا كان $|\lambda| < \frac{1}{B}$، فإن معادلة أولر- لاغرانج هي $F_y = 0$ وعليه فإن $y(x) = 0$ ومن ثمَّ فإن منحني القيم القصوى يمر بنقط الحدود عندما $y_0 = 0$ و $y_1 = 0$ (انظر الشكل (٢ . ٢)).



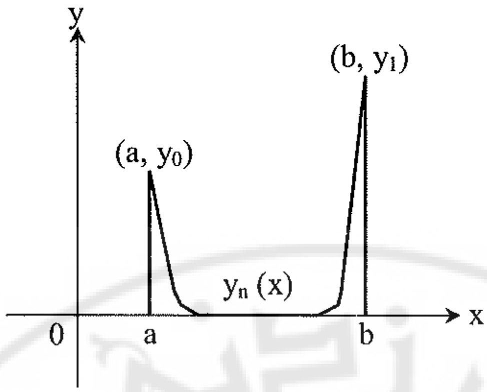
الشكل (٢ . ٢)

إذا كان $y_0 = 0,\ y_1 = 0$ فإن الدالة $y(x) = 0$ تعطي قيمة صغرى للدالي المفروض أي:

$$J[y(x)] = \int_a^b y^2 dx$$

$J[y(x)] \geq 0\ ;\ J(y) = 0$ عندما $y(x) = 0$.

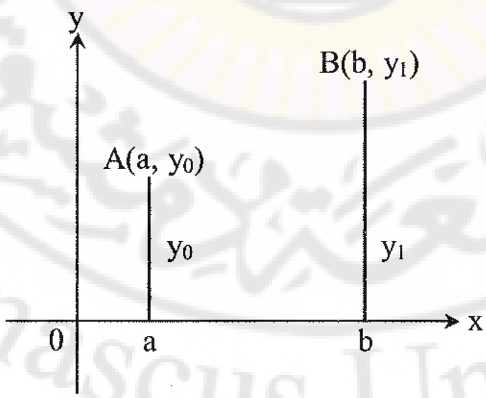
ولكن إذا كان على الأقل إحدى النقاط y_0, y_1 لا تساوي الصفر فإن الدالي لا يحصل على قيمة صغرى على الدوال المستمرة، حيث إنه من الممكن اختيار متتالية من الدوال المستمرة $y_n(x)$ التي رسمها يتكون من أقواس لمنحنٍ يبدأ من النقطة $(0,\ y_0)$ ثم يتجه إلى محور ox ثم يأخذ جزء من المحور ox ينطبق تقريباً مع الفترة (a, b) وأخيراً جزءاً من المنحني القريب من b ويرتفع إلى النقطة (b, y_1) (انظر الشكل (٢ . ٣)).



شكل (٢ . ٣)

واضح أن قيم الدالي على المتتالية $y = y_n(x)$ تكون مختلفة قليلاً عن الصفر. ومن ثم فإن أصغر حد لقيم الدالي يكون صفراً ولا يمكن الحصول على هذا الحد على منحنٍ مستمر حيث إنه لأي منحنٍ مستمر $y(x) \neq 0$ فإن $\int_a^b y^2 dx > 0$ ولكن هذا الحد الأصغر لقيم الدالي يمكن الحصول عليه من الدالة غير المستمرة الآتية، انظر الشكل (٢ . ٤).

$$\begin{aligned} &y(a) = y_0 , \\ &y(x) = 0 , \qquad a < x < b \\ &y(b) = y_1 . \end{aligned}$$



شكل (٢ . ٤)

٢ . ٢ . ٢ . إذا كانت الدالة F خطية في y':

وفي هذه الحالة نجد أن:

$$F(x,y,y') = M(x, y) + N(x, y) . y'$$

وعليه فإن:
$$J[y(x)] = \int_a^b [M(x, y) + N(x, y).y']dx$$

ومن ثمّ فإن معادلة أولر $F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$ تكون على الشكل:

$$\frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial y} \cdot y' - \frac{dN}{dx} = 0$$

لكن:

$$\frac{dN}{dx} = \frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} \cdot y' - = 0$$

إذاً:
$$(1)\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 0$$

وكما سبق فإن هذه المعادلة ليست معادلة تفاضلية والمنحني:

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 0$$

لا يحقق الشروط الحدية ومن ثمّ فإن: مسألة التغيرات في هذه الحالة ليس لها حل في مجموعة الدوال المستمرة.

ولكن إذا كان $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$ فإن $M\ dx + N\ dy$ معادلة تفاضلية تامة ويكون:

$$J[y(x)] = \int_a^b \left(M + N\frac{dy}{dx} \right)dx$$
$$= \int_a^b (Mdx + Ndy)$$

لا يعتمد على مسار التكامل وتكون قيمة الدالي ثابتة على كل المنحنيات المسموح بها. ومن ثمَّ تكون مسألة التغيرات هنا ليس لها معنى.

٢ . ٢ . ٢ . ١ . مثال محلول (١٧):

ليكن $J[y(x)] = \int_0^1 (y^2 + x^2 y')dx$ ، حيث $y(0) = 0, y(1) = a$ إذاً:

$$F(x,y,y') = M + N \cdot y'$$

وعليه فإن معادلة أولر $\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 0$ تأخذ الشكل $y - x = 0$ ونلاحظ أن الشرط الحدي الأول $y(0) = 0$ يتحقق. بينما الشرط الثاني $y(1) = a$ يتحقق فقط إذا كانت $a = 1$. ولكن إذا كانت $a \neq 1$ فإنه لا توجد منحنيات قصوى تحقق الشروط الحدية.

٢ . ٢ . ٢ . ٢ . مثال محلول (١٨):

ليكن:

$$J[y(x)] = \int_a^b (y + xy')dx$$

$$= \int_a^b d(x \cdot y) = by_1 - ay_0$$

حيث: $y(a) = y_0 , y(b) = y_1$ إذاً $\frac{\partial N}{\partial y} = 1, \frac{\partial M}{\partial y} = 1$

وعليه فإن المكامل $y\,dx + x\,dy$ معادلة تفاضلية تامة ومن ثمَّ فإن التكامل لا يعتمد على المسار.

$$J[y(x)] = \int_a^b ydx + xdy$$

$$= \int_a^b d(xy) = by_1 - ay_0$$

واضح أن قيمة الدالي تعتمد فقط على نقطة البداية والنهاية، ولا تعتمد على مسار التكامل أي المنحني الذي نكامل عليه، ومن ثم فإن مسألة التغيرات هنا تصبح لا معنى لها.

٢ . ٢ . ٣ . إذا كانت الدالة F تعتمد فقط على y':

وفي هذه الحالة تكون إذاً $F = F(y')$ وتكون معادلة أولر على الشكل:

$F_{y'y'} \cdot y'' = 0$ لأن $F_y = F_{xy'} = F_{yy'} = 0$ ومن ثم فإن $y'' = 0$ أو $F_{y'y'} = 0$.

أولاً: إذا كانت $y'' = 0$ فإن $y = C_1x + C_2$ تمثل عائلة من المستقيمات ذات ثابتين.

ثانياً: إذا كانت للمعادلة $F_{y'y'}(y') = 0$ جذر حقيقي أو أكثر $y' = k_i$ فإن: $y = k_i\, x + C$ تمثل عائلة من المستقيمات بثابت واحد وهي محتواه في العائلة السابقة ذات الثابتين. ولهذا إذا كان $F = F(y')$ فإن المنحنيات القصوى للدالي تكون خطوطاً مستقيمة $y = C_1x + C_2$.

٢ . ٢ . ٣ . ١ . مثال محلول (١٩):

أوجد أقصر منحنٍ يصل بين النقطتين (2- ,1-)، (2, 7).

الحل:

بما أن $J[y(x)] = \int_{-1}^{2}\sqrt{1+y'^2}\,dx$، $y(2) = 7,\ y(-1) = -2$. إذاً:

$F = \sqrt{1+y'^2}$، وعليه فإن معادلة أولر. لاغرانج هي $\frac{d}{dx}(F_{y'}) = 0$. ومنها نجد أن $F_{y'} = C$، ومن ثمَّ فإن $C = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$، وعليه فإن $m = \frac{C}{\sqrt{1-C^2}} = y'$ إذاً $y = mx + b$.

لكن $y(-1) = -2$، $y(2) = 7$ إذاً $m = 3,\ b = 1$ وعليه فإن أقصر منحنٍ هو المستقيم $y = 3x + 1$.

٢ . ٢ . ٤ . إذا كانت $F = F(x, y')$:

وفي هذه الحالة نجد أن معادلة أولر . لاغرانج هي:

$$\frac{d}{dx}F_{y'}(x, y') = 0$$

وعليه فإن $F_{y'}(x,y') = C$ ومن ثمَّ فإن $y' = f(x, C)$، مما يؤدي إلى:

$$y = \int_0^x f(t,c)dt + C_1$$

وهي معادلة منحني التوقف بالنسبة للدالي $J[y]$.

٢ . ٢ . ٤ . ١ . مثال محلول (٢٠):

ليكن $J[y] = \int_{-1}^{\sqrt{3}} \sqrt{1 + x^2 y'^2}dx$ ، $y(1) = 0$، $y(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{2}$ إذاً $F = F(x, y')$

وعليه فإن $F_{y'} = C$، لكن $F_{y'} = \frac{x^2 y'}{\sqrt{1+x^2 y'^2}}$ ، إذاً $\frac{x^2 y'}{\sqrt{1+x^2 y'^2}} = C$ ، وعليه فإن

$y' = \frac{C}{x\sqrt{x^2 - C^2}}$ ومن ثمَّ فإن $y + k = \cos^{-1}\left(\frac{C}{x}\right)$ ، إذاً $x\cos(y + k) = C$ لكن

$y(1)=0$، $y(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{2}$ ، إذاً $C = \frac{-\sqrt{3}}{2}, k = \frac{5\pi}{6}$، وعليه فإن:

$$x\cos\left(y + \frac{5\pi}{6}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

هي معادلة منحني التوقف الذي قد يكون للدالي $J(y)$ قيم قصوى عليه.

٢ . ٢ . ٤ . ٢ . مثال محلول (٢١):

ليكن $J[y] = \int_1^2 \frac{1}{x}\sqrt{1 + y'^2}dx$ ، $y(1) = 0$، $y(2) = 1$، إذاً:

وعليه فإن معادلة أولر . لاغرانج تأخذ الشكل $F_y = C$. لكن $F = F(x, y')$

$F_{y'} = \dfrac{y'}{x\sqrt{1+y'^2}}$ إذاً $\dfrac{y'}{x\sqrt{1+y'^2}} = C$ وعليه فإن $y' = \dfrac{Cx}{x\sqrt{1-C^2x^2}}$ ومن

ثمَّ فإن $y = \int \dfrac{Cx}{\sqrt{1-C^2x^2}}dx = \dfrac{1}{C}\sqrt{1-C^2x^2} + a$.

إذاً: $\dfrac{1}{C^2} = (y-a)^2 + x^2$ وهي أسرة دوائر مركزها على المحور oy.

لكن $y(2) = 1,\ y(1) = 0$، إذاً $a = 2,\ C = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$، وعليه فإن منحني التوقف

هو $(y-2)^2 + x^2 = 5$.

۲ . ۲ . ٥ . حالة $F = F(y, y')$:

وفي هذه الحالة نجد أن: $F_y - \dfrac{d}{dx}(F_{y'}) = F_y - F_{y'y}\cdot y' - F_{y'y'}\cdot y''$، وعليه

فإن: $F_y\cdot y' - F_{y'y}\cdot y'^2 - F_{y'y'}\cdot y'y'' = \dfrac{d}{dx}(F - y'F_{y'})$.

ومن ثمَّ فإن $F - y'F_{y'} = C$، حيث C ثابت وبحل هذه المعادلة بالنسبة إلى y'، وبإجراء عملية فصل المتغيرات أو بعض التعويضات المناسبة نحصل على المنحني الذي قد يكون للدالي $J[y]$ قيم قصوى عليه.

۲ . ۲ . ٥ . ۱ . مثال محلول (۲۲):

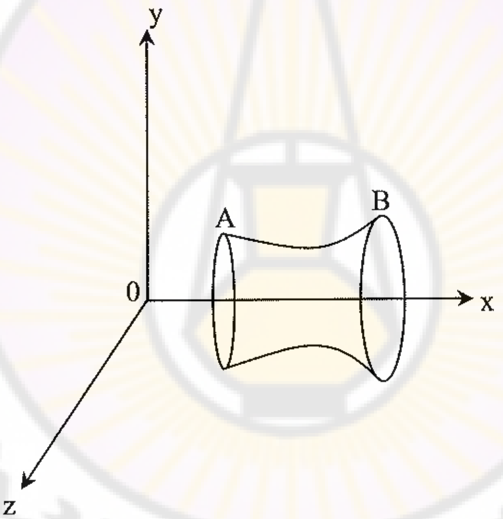
أوجد معادلة المنحني المار بالنقطتين (a, A)، (b, B) والذي إذا دار حول محور السينات ولّد سطحاً مساحته أقل ما يمكن.

الحل:

بما أن $S[y(x)] = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}dx$، $y(a) = A$، $y(b) = B$. إذاً $F = F(y, y')$ وعليه فإن $F - y'F_{y'} = C$، ومن ثمَّ فإن:

وعليه فإن $y\sqrt{1+y'^2} - y' \cdot \dfrac{yy'}{\sqrt{1+y'^2}} = C$ وعليه فإن $\dfrac{y}{\sqrt{1+y'^2}} = C$ ، ولحل هذه المعادلة نفرض أن: $y' = \sinh t$، إذاً $y = C\sqrt{1+y'^2} = C\cosh t$.

وحيث إن: $y' = \dfrac{dy}{dx}$ ، إذاً $dx = \dfrac{dy}{y'} = \dfrac{C\sinh t}{\sinh t}dt = Cdt$ ، وعليه فإن $x = C.t + C_1$. إذاً $t = \dfrac{x - C_1}{C}$ ، ومن ثمّ فإن $y = C\cosh\left(\dfrac{x - C_1}{C}\right)$ وهذه المعادلة تمثل عائلة من منحنيات السلسلة (الكاتينة) ودورانها يعطي سطوحاً يسمى كل منها سطح سلسلي الشكل أو كاتينة (Catenoid)، والثابتان C_2, C_1 يمكن تعيينهما طبقاً للشروط الحدية التي تعتمد على موضع النقط A, B. انظر الشكل (٢ . ٥).



شكل (٢ . ٥)

٢ . ٢ . ٥ . ٢ . مسألة منحني أقصر زمن:

وهي مسألة إيجاد منحنٍ إذا انزلق عليه جسم كتلته m بدون احتكاك من A (0, 0), $B = (b, y_1)$ استغرق أقل زمن ممكن. ولإيجاد ذلك المنحني لاحظ أن عند

أية لحظة وأية نقطة (x, y) نجد أن الطاقة الحركية للجسم تساوي الطاقة الكامنة له، وهذا يعني أن:

$\frac{1}{2}mv^2 = mgy$ وعليه فإن $v = \sqrt{2gy}$، لكن $v = \frac{ds}{dt}$، $ds = \sqrt{1+y'^2}$

إذاً: $\frac{ds}{dt} = \sqrt{2gy}$، ومن ثمّ فإن $dt = \frac{ds}{\sqrt{2gy}} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \cdot \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}$،

إذاً: $t[y(x)] = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_a^b \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}dx$، $y(b) = B, y(0) = 0$.

وعليه فإن $1+y'^2 = \frac{1}{Cy}$، وهذا يعني أن $y' = \sqrt{\frac{1-Cy}{Cy}}$، ومنها نجد أن

$dx = \sqrt{\frac{Cy}{1-Cy}}dy$، إذاً: $x = \int\sqrt{\frac{Cy}{1-Cy}}dy + C_2$ والآن لو فرضنا أن

$1\text{-}2Cy=\cos\vartheta$ لوجدنا أن $Cy = \frac{1-\cos\vartheta}{2}$، $dy = \frac{1}{2C}\sin\vartheta d\vartheta$ وعليه فإن:

$$x = \frac{1}{2C}\sqrt{\frac{1-\cos\vartheta}{1+\cos\vartheta}} \cdot \sin\vartheta d\vartheta = \frac{1}{2C}\sqrt{\frac{1-\cos\vartheta}{1+\cos\vartheta} \cdot \frac{1-\cos\vartheta}{1-\cos\vartheta}} \cdot \sin\vartheta d\vartheta$$

$$= \frac{1}{2C}\int(1-\cos\vartheta)d\vartheta = \frac{1}{2C}(\vartheta - \sin\vartheta) + C_2$$

وعليه فإن $x = \frac{1}{2C}\cos^{-1}(1-2cy) - \sqrt{\frac{y}{C} - y^2} + c_2$، لكن $y(0) = 0$ إذاً

$C_2 = 0$ وعليه فإن $x = \frac{1}{2C}\cos^{-1}(1-2cy) - \sqrt{\frac{y}{C} - y^2}$ وهي معادلة

(cycloid)، لأن $x = \frac{1}{2C}(\vartheta - \sin\vartheta)$، $y = \frac{1}{2C}(\vartheta - \cos\vartheta)$ تمثلان معادلة

(Cycloid).

٢ . ٢ . ٦ . داليات عديدة المتغيرات:

يدرس هذا الجزء الشروط اللازمة لوجود منحنيات حرجة (توقف) بالنسبة للداليات من الشكل $J[y_1(x),\ldots,y_n(x)]$ إضافة إلى الشكل القانوني لمعادلات أولر . لاغرانج وبعض التطبيقات الهندسية والفيزيائية ولا سيّما قاعدة هاملتون ومعادلات لاغرانج.

٢ . ٢ . ٧ . معادلات أولر . لاغرانج للداليات المعتمدة على n من المتغيرات:

ليكن:

$J[y_1(x),\ldots,y_n(x)] = \int_a^b F(x, y_1,\ldots y_n, y_1',\ldots y_n')dx$ ، $y_i(a) = A_i$ ،

$y_i(b) = B_i$ ، $y_i(x) \in D_1$ ، $\frac{\partial F}{\partial y_i}, \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y_i'}$ دوال مستمرة على $[a, b]$.

لإيجاد الشروط الضرورية لوجود منحنيات توقف (حرجة) قد يكون للدالي J قيم قصوى عندها، لاحظ أن:

$$\delta J[y_1,\ldots,y_n] = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} J(y_1 + \varepsilon\Delta y_1,\ldots,y_n + \varepsilon\Delta y_n, y' + \varepsilon\Delta y_1',\ldots y_n' + \varepsilon\Delta y_n')\Big|_{\varepsilon=0}$$

$$= \frac{d}{d\varepsilon}\int_a^b F(x, y_1 + \varepsilon\Delta y_1,\ldots,y_n + \varepsilon\Delta y_n, y_1' + \varepsilon\Delta y_1',\ldots,y_n' + \varepsilon\Delta y_n')dx$$

$$= \int_a^b \frac{d}{d\varepsilon} F(x, y_1 + \varepsilon\Delta y_1,\ldots,y_n + \varepsilon\Delta y_n, y_1' + \varepsilon\Delta y_1',\ldots,y_n' + \varepsilon\Delta y_n')dx$$

$$= \int_a^b \left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial y_i}\cdot\Delta y_i + \frac{\partial F}{\partial y_i'}\cdot\Delta y_i'\right)\right]dx$$

لكن Δy_i ,$i = 1,\ldots,n$ دوال مستقلة $\Delta y_i(a) = \Delta y_i(b) = 0$ إذاً يمكن اختيار أي واحدة منها وجعل الباقي صفراً، وعليه إذا كان $\delta J = 0$ فإن:

$$\int_a^b (F_{y_i}\Delta y_i + F_{y_i'}\Delta y_i')dx = 0$$

لكن $\Delta y_i(x) \in D_1$ ، $F_{y_i'}, F_{y_i}$ دوال مستمرة على $[a,b]$ إذاً $\frac{d}{dx}(F_{y_i'}) = F_{y_i}$

حسب التمهيدية (٤). وعليه فإن $F_{y_i} - \frac{d}{dx}(F_{y_i'}) = 0$ ، لكل $i = 1, \ldots, n$، وهي

تمثل معادلات أولر . لاغرانج، وهي الشرط الضروري لوجود منحنيات حرجة للدالي J

وهي n من المعادلات التفاضلية من المرتبة الثانية حلها يعطي أسرة من المنحنيات ذات

2n من الثوابت في فضاء بعده $(n + 1)$، قد يكون للدالي J قيم قصوى عليها.

٢ . ٢ . ٧ . ١ . مثال محلول (٢٣):

أوجد منحنيات التوقف، التي قد يكون للدالي:

$$J[y,z] = \int_0^{\pi/2} (y'^2 + z'^2 + 2yz)dx$$

حيث: $y(0) = z(0) = 0$ ، $y(\frac{\pi}{2}) = 1, z(\frac{\pi}{2}) = -1$ ، قيم قصوى عليها.

الحل:

بما أن $F = y'^2 + z'^2 + 2yz$، $F_y - \frac{d}{dx}(F_{y'}) = 0$ ، $F_z - \frac{d}{dx}(F_{z'}) = 0$

إذاً $y'' - z = 0$ و $z'' - y = 0$ وعليه فإن $y^{(4)} - y = 0$ وحل هذه المعادلة التفاضلية

هو $y = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3\cos x + C_4\sin x$ وحيث إن $y'' = z$ إذاً:

$$z = C_1e^x + C_2e^{-x} - C_3 \cos x - C_4 \sin x$$

ولتعيين الثوابت C_1, C_2, C_3, C_4 نستخدم الشروط الحدية فنجد أن:

$C_1 = C_2 = C_3 = 0, C_4 = 1$ وعليه فإن منحنيات التوقف للدالي $J(y, z)$ هي:

$y(x) = \sin x, z(x) = - \sin x$.

٢ . ٢ . ٧ . ٢ . مثال محلول (٢٤):

أوجد منحنيات التوقف للدالي: $J[y,z] = \int_a^b F(y' + z')dx$

الحل:

بما أن معادلتي أولر . لاغرانج هما:

$$F_{y'y'} \, . \, y'' + F_{y'z'} \, . \, z'' = 0 \qquad (1)$$

$$F_{y'z'} \, . \, y'' + F_{z'z'} \, . \, z'' = 0 \qquad (2)$$

إذاً بضرب المعادلة (١) في $F_{z'z'}$ والمعادلة (2) في $F_{y'z'}$ ثم الطرح نحصل على:

$$[F_{y'y'} \, F_{z'z'} - (F_{y'z'})^2] \, . \, y'' = 0$$

وبفرض أن $F_{y'y'} \, F_{z'z'} - (F_{y'z'})^2 \neq 0$، إذاً $y''= 0$، وعليه فإن $y= C_1x+C_2$.

وبالمثل نجد أن $z'' = 0$ ومنه نجد أن $z = C_3x + C_4$، ومن ثم فإن $z(x)$ و $y(x)$ تمثل عائلة من الخطوط المستقيمة حيث C_1, C_2, C_3, C_4 ثوابت اختيارية يمكن تعيينها من الشروط الحدية.

وكحالة خاصة من (٢ . ١ . ٤) نجد أن منحني أقصر مسافة بين النقطتين $(0,1,0)$، $(1,0,-1)$ في R^3، تتحدد بجعل قيمة $J[y(x),z(x)] = \int_0^1 \sqrt{1+y'^2+z'^2}\,dx$ أقل ما يمكن، $y(0)=z(0)=1$، $y(1) = 0$ $z(1) = -1$، هما المستقيمان $y=C_1x+C_2$، $z = C_3x + C_4$، وباستخدام الشروط الحدية نجد أن $C_4 = 1$، $C_3 = -2$، $C_2 = 1$، $C_1 = -1$ وعليه فإن $y = -x + 1$، $z = -2x + 1$.

٢ . ٢ . ٨ . معادلات أولر . لاغرانج القانونية:

(Canonical Euler – Lagrange Equations):

ليكن:

$$J[y_1,\dots,y_n] = \int_a^b F(x, y_1,\dots, y_n, y'_1,\dots, y'_n)dx \qquad (1)$$

$y_i(b) = B_i, \; y_i(a) = A_i$ إذاً معادلات أولر . لاغرانج هي:

$$F_{y_i} - \frac{d}{dx}(F_{y'_i}) = 0 \; ; \; i = 1,2,\dots,n \qquad (2)$$

وهي مجموعة مكونة من n من المعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية، حلها يعطي منحنيات التوقف أو المنحنيات الحرجة التي قد يكون للدالي J قيم قصوى عليها، ولتسهيل حل تلك المعادلات بالتعبير عنها كنظام مكون من (2n) من المعادلات ذات المرتبة الأولى دون التأثير على طبيعة المسائل أو المشاكل التي تعالجها، نفرض أن:

$$P_i = F_{y'_i} \;;\; i = 1, \ldots, n \qquad (3)$$

يطلق على P_i المتغير المرافق للمتغير y_i، ولنفرض أنه يمكن حل المعادلة (3) والتعبير عن y'_i بدلالة P_i، y_i، x ومن ثم يمكن تعريف دالة جديدة H، تسمى دالة هاملتون (The Hamiltonian) ترافق (1) حيث:

$$H(x, y_1, \ldots, y_n, P_1, P_2, \ldots, P_n) = \sum_{i=1}^{n} P_i y'_i - F(x, y_1, \ldots, y_n, y'_1, \ldots, y'_n$$

لكن:

$$dH = \sum_{i=1}^{n} (P_i y'_i + y'_i dP_i) - F_x dx - \sum_{i=1}^{n} (F_{y_i} dy_i + F_{y'_i} dy'_i)$$

$$= -F_x dx + \sum_{i=1}^{n} (y'_i dP_i - F_{y_i} dy_i)$$

إذاً:

$$-F_{y'_i} = \frac{\partial H}{\partial y_i}, y'_i = \frac{\partial H}{\partial P_i}$$

وعليه فإن:

$$\frac{-dP_i}{dx} = H_{y_i}, y'_i = H_{P_i} \quad ; \quad i = 1, \ldots, n \text{ لكل} \qquad (4)$$

وهي نظام مكون من (2n) من المعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى، أطلق عليها اسم معادلات أولر . لاغرانج القانونية المصاحبة للدالي $J[y_1, \ldots y_n]$، وبحل تلك المعادلات باستخدام الجبر الخطي أو غيرها من الطرق نحصل على منحنيات التوقف للدالي J.

٢ . ٢ . ٨ . ١ . مثال محلول (٢٥):

أوجد منحني التوقف للدالي:

$$J[y(x),z(x)]=\int_a^b(-2y^2+2yz-y'^2+z'^2)dx$$

حيث: $y(a)=a_1,\ z(a)=a_2$، $y(b)=b_1,\ z(b)=b_2$.

الحل:

بما أن معادلات أولر . لاغرانج هي:

$$F_y-\frac{d}{dx}(F_{y'})=0\Rightarrow y''-2y+z=0$$

$$F_z-\frac{d}{dx}(F_{z'})=0\Rightarrow y-z''=0$$

إذاً $z^{(4)}-2z^{(2)}+z=0$، وعليه إذا كان $u(x)=z^{(2)}-z$، فإن $u^{(2)}-u=0$ ومن ثمّ فإن $u(x)=Ae^x+Be^x$، وعليه فإن $z^{(2)}-z=Ae^x+Be^{-x}$. فإذا كان $u(x)=Ae^x+Be^{-x}=0$، $z^{(2)}-z=0$، فإن $z=Ce^x+De^{-x}$. أما إذا كان $u(x)\neq 0$، فإن استخدام طريقة تغيير الوسيط (Method of Variation of Parameters) لحل المعادلة التفاضلية $z^{(2)}-z=Ae^x+Be^{-x}$ يمكننا من إثبات أن:

$$\begin{aligned}z(x)&=C(x)e^x+D(x)e^{-x}\\&=\left(C_0-\frac{A}{4}\right)e^x+\left(D_0-\frac{B}{4}\right)e^{-x}+\frac{x}{2}\left(Ae^x-Be^{-x}\right)\end{aligned}$$

وعليه فإن:

$$y(x)=\left(C_0+\frac{3}{4}A\right)e^x+\left(D_0+\frac{3}{4}B\right)e^{-x}+\frac{x}{2}\left(Ae^x-Be^{-x}\right)$$

وباستخدام الشروط الحدية يمكننا إيجاد C_0, D_0, A, B.

٢ . ٢ . ٨ . ٢ . مثال محلول (٢٦):

ليكن $J[y(x)] = \int_a^b (y'^2 + y^2)dx$ ، إذاً $F = F(y, y') = y'^2 + y^2$، وعليه فإن معادلة أولر . لاغرانج هي $F_y - \frac{d}{dx}(F_{y'}) = 0 \Rightarrow y'' - y = 0$ وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية حلها العام هو $y(x) = Ae^x + Be^{-x}$ ولإيجاد معادلات أولر . لاغرانج القانونية للدالي $J[y]$ نفرض أن $P = F_{y'}$ إذاً $P = 2y'$ وعليه فإن:

$$H(x, y, P) = P_{y'} - F(y, y') = \frac{P^2}{4} - y^2$$

ومن ثمَّ فإن $\frac{-dP}{dx} = H_y = -2y, y' = H_P = \frac{P}{2}$

إذاً معادلات أولر . لاغرانج القانونية المصاحبة للدالي $J[y]$ هي:

$$P' = 2y \, , \; y' = H_P = \frac{P}{2}$$

وهما عادلتان تفاضليتان من المرتبة الأولى، ولحل هذا النظام نلاحظ أن:

$$P' = 2y \Rightarrow P' = 0 \,.\, P + 1 \,.\, P'$$
$$(P')' = 2y' \Rightarrow P = 1 \,.\, P + 0 \,.\, P'$$

وعليه فإن $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$، ولحساب القيم الذاتية للمصفوفة A، نلاحظ أن $\det(A - \lambda I) = 0$ يعني أن $\lambda^2 - 1 = 0$، وعليه فإن القيم الذاتية هي $\lambda = \pm 1$ وعندما $\lambda = 1$ نجد أن المتجه الذاتي المصاحب لها هو $v_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ، أما المتجه الثاني المصاحب للمتجه الذاتي $\lambda = -1$ فهو $v_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

وعليه:

$$\begin{pmatrix} P' \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1e^{x} + C_2e^{-x} \\ C_1e^{x} - C_2e^{-x} \end{pmatrix}$$

حل لمعادلات أولر ـ لاغرانج القانونية، لكن $P' = 2y$ إذاً:

$$y = \frac{1}{2}C_1e^{x} + \frac{1}{2}C_2e^{-x} = Ae^{x} + Be^{-x}$$

حل لمعادلة أولر ـ لاغرانج.

٢ . ٢ . ٩ . قاعدة (مبدأ) هاملتون (Hamilton's Principle):

يعود ما يسمى الميكانيك الكلاسيكي أو قوانين الحركة إلى كل من ابن سينا وهبة الله بن ملكا البغدادي وغاليلو، ثم طوّره نيوتن، وهيجنز، ولايبنز، وجيمس وبرنولي وأولر معبرين عن الحركة الموجودة في الكون بدلالة متجهات كالقوى والتسارع، وقد نشر نيوتن القانون الثاني للحركة عام ١٦٨٧م معبراً عنه بالكلمات فقط، أما التعبير عن ذلك القانون بدلالة الإحداثيات المتعامدة فقد ظهر عند جيمس برنولي عام ١٧٤٢م، وفي عام ١٧٤٤م، أثبت أولر إمكانية الحصول على قوانين نيوتن من قاعدة أقل فعل ممكن (principle of least action)، وفي عام ١٧٨٨م بين لاغرانج أن قسماً كبيراً مما يسمى الميكانيك الكلاسيكي (قوانين الحركة) يمكن الحصول عليها من تلك القاعدة عندما يكون مجال القوى محافظاً، وفي عام ١٨٣٥م بين هاملتون (١٨٠٥م ـ ١٨٦٥م) إمكانية توسعة قاعدة أقل فعل ممكن ـ لتشمل مجال القوى المحافظة وغير المحافظة ـ إلى ما يسمى الآن قاعدة هاملتون معتمداً مفهوم الطاقة الحركية والطاقة الكامنة (طاقة الوضع)، وما يهمنا في هذا الجزء تعريف القارئ بتلك القاعدة وبعض تطبيقاتها.

والآن، إذا كان S نظاماً ديناميكياً (ميكانيكياً) منتهياً، فيقال إن لذلك النظام n درجة حرية (Degree of freedom)، إذا أمكن تحديد اتجاه جسيمات S بـ n من

الإحداثيات المستقلة $q_1, q_2, \ldots, q_n$، لاحظ أنه إذا كان $|S| = 1$، فإن $n = 3$ حيث q_1, q_2, q_3 تمثل الإحداثيات المتعامدة أو الإحداثيات الكروية. أما إذا كان $|S| = 2$ وكان البعد بين الجسمين وحدة واحدة، فإن $n = 5$ حيث q_1, q_2, q_3 تمثل اتجاه أو وضع الجسيم الأول، أما q_4, q_5 فتحدد اتجاه الخط الواصل بين الجسمين.

وحيث إنه يمكن وصف النظام الديناميكي بدلالة طاقته الحركية T وطاقته الكامنة (طاقة الوضع) V إذاً إذا كان النظام محافظاً، فإن طاقته الكامنة لا تعتمد على الزمن وعليه فإن: $T(q_1,\ldots,q_n, q'_1,\ldots,q'_n) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} q'_i q'_k$

حيث: $q'_i = \dfrac{dq_i}{dt}, a_{ik} = a_{ki}$ فإذا كان $L = T - V$، والذي يسمى دالة لاغرانج للنظام S، فإن: $L = F(t,q_1,\ldots,q_n, q'_1,\ldots q'_n)$

ويمكننا أن نثبت ما يلي:

٢ . ١٠ . ٢ . مبرهنة (٤) (قاعدة هاملتون):

يمكن وصف حركة نظام ديناميكي مكون من n من الجسمات كتلتها m_i خلال الفترة $[t_0, t_1]$ بالدوال $q'(t)$، $q(t)$، $1 < i \leq n$ التي تجعل $H = \int_{t_0}^{t_1} L dt$، أقل ما يمكن.

أي إن حركة أي نظام ديناميكي من شكل إلى آخر تتم بحيث يكون للتكامل $H = \int_{t_0}^{t_1} (T - V) dt$ قيمه توقف على منحنٍ ما من المنحنيات المسموح بها والتي تمر بنفس نقطتي البداية والنهاية.

البرهان:

سنثبت أن قاعدة هاملتون تعطي قوانين الحركة. ولإثبات ذلك لاحظ أن:

$$H(q_1,\dots,q_n) = \int_{t_0}^{t_1} L(t,q_1,\dots,q_n,q'_1,\dots,q'_n)dt$$

وعليه فإن معادلات أولر . لاغرانج للدالي H هي:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial q'_i}\right) = 0$$

وحيث إن:

$$L = T - V$$

إذاً:

$$\frac{-\partial V}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}(m_i q'_i) = 0$$

مما يؤدي إلى أن:

$$\frac{-\partial V}{\partial q_i} = m_i q''_i = F_i$$

وهي معادلات نيوتن لنظم مكون من n من الجسيمات.

٢ . ١١ . ٢ . ملاحظة:

للتعبير عن قاعدة هاملتون بالشكل القانوني، نفرض أن:

$$P_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} \; ; i = 1, \dots, n$$

ولنعرف دالة هاملتون (The Hamiltonian) كالآتي:

$$T(t,q_1,\dots,q_n,P_1,\dots,P_n) = \sum_{i=1}^{n} P_i q'_i - L$$

وليكن:

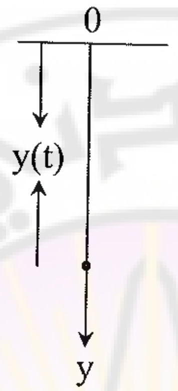
$$I(q_1,\dots,q_n,P_1,\dots,P_n) = \int_{t_0}^{t_1}\left(\sum_{i=1}^{n} P_i q'_i - H\right)dt$$

إذاً $\delta I = 0$ يعني أن معادلات أولر . لاغرانج القانونية هي: $\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{dP_i}{dt}$ و $\frac{\partial H}{\partial P_i} = \frac{dq_i}{dt}$ ، $i = 1, \dots, n$ وهي مجموعة مكونة من (2n) من المعادلات التفاضلية تعرف في الميكانيك بمعادلات هاملتون القانونية.

٢ . ٢ . ١٢ . مثال محلول (٢٧):

أوجد معادلة حركة جسيم كتلته m ساقط تحت تأثير الجاذبية الأرضية بفرض إهمال مقاومة الهواء.

الحل:



الشكل (٢ . ٦)

نفرض أن موضع الجسيم عند أية لحظة t هو $y(t)$، ولنفرض أن نقطة أصل القياس هي نقطة سقوط الجسيم كما هو مبين في شكل (٢ . ٦)، إذاً $T = \frac{1}{2}my'^2$، $V = -mgy$ حيث g ثابت الجاذبية. وعليه فإن $H[y(t)] = \int_0^t [\frac{1}{2}y'^2 + gy]dt$، ومن ثمّ فإن معادلة أولر . لاغرانج هي $g - \frac{d}{dt}(y') = 0$، وعليه فإن $y'(t) = gt+c_1$ ومنها نجد أن $y(t) = \frac{1}{2}gt^2 + c_1t + c_2$ لكن $y(0) = 0$، إذاً $y(t) = \frac{1}{2}gt^2 + c_1t$.

٢ . ٢ . ١٣ . مثال محلول (٢٨):

أوجد باستخدام قاعدة هاملتون، معادلات حركة جسيم كتلة m يتحرك بالقرب من الأرض تحت تأثير الجاذبية الأرضية.

الحل:

بما أن: $T = \frac{1}{2}\ mv^2 = \frac{1}{2}\ m\,(x'^2 + y'^2 + z'^2)$ و $V = mgz$

إذاً: $$L = \frac{1}{2}m(x'^2 + y'^2 + z'^2 - gz)$$

وعليه فإن: $$H(x,y,z) = \frac{1}{2}m\int_{b_0}^{t_1}(x'^2 + y'^2 + z'^2 - gz)dt$$

ومنها نجد أن معادلات أولر . لاغرانج هي:

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial x'}\right) = 0 \Rightarrow x'' = 0 \Rightarrow x' = c_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right) = 0 \Rightarrow y'' = 0 \Rightarrow y' = c_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial z'}\right) = 0 \Rightarrow z' = 0 \Rightarrow z'' = -g$$

وهذا يعني بأنه تحت تأثير الجاذبية وبالقرب من سطح الأرض تكون السرعة الأفقية ثابتة والسرعة العمودية (-g).

٢ . ٢ . ١٤ . مثال محلول (٢٩):

أوجد معادلات حركة جسيم (بالإحداثيات القطبية) في مجال مركزي للقوى.

الحل:

نفرض أن كتلة الجسيم هي m، عندئذ يكون:

$$dx = \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2}\ ،\ v = \frac{ds}{dt}$$

وعليه فإن $v^2 = r'^2 + r^2\,\theta'^2$ ومن ثمّ فإن $T = \frac{1}{2}\ m(r'^2 + r^2\theta'^2)$

لكن $L = T - v$، إذاً $L = \frac{1}{2} m(r'^2 + r^2\theta'^2) - V(r, \theta)$، وعليه فإن:

$$H = \int_{t_0}^{t_1} [\frac{1}{2} m(r'^2 + r^2\theta'^2) - V(r,\theta)]dt$$

وعليه فإن معادلات أولر . لاغرانج تكتب بالشكل الآتي:

$$\frac{-\partial v}{\partial r} + mr\theta' - \frac{d}{dt}(mr') = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{-\partial v}{\partial \theta} - \frac{d}{dt}(mr^2\theta'^2) = 0 \qquad (2)$$

ومن ثمَّ فإن:

$$m(r'' - r\theta'^2) = -\frac{\partial v}{\partial r} \qquad (3)$$

$$m(r^2\theta'' + 2rr'\theta') = \frac{-\partial v}{\partial \theta} \Rightarrow m(r\theta'' + 2r'\theta') = \frac{-1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \qquad (4)$$

لاحظ أن $\frac{-\partial v}{\partial r}$، $\frac{-1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}$ تمثلان مركبات القوة $(F = ma)$ المؤثرة في الجسيم باتجاه r واتجاه θ وعليه فإن مركبتي التسارع هما $a_r = r'' - r\theta'^2$ والتي تمثل التسارع المركزي $\frac{v^2}{r}$ عندما $v = r\theta$، $a_\theta = r\theta''^2 + 2r'\theta'$ والتي تمثل التسارع المركزي (Coriolis acceleration).

٢ . ٢ . ١٥ . مثال محلول (٣٠):

أوجد معادلات حركة جسيم كتلة m يتحرك في مجال مركزي للقوى بحيث تكون طاقته الكامنة تعتمد على بعده عن المركز.

الحل:

بما أن $V = V(r), T = \frac{1}{2}\left(r'^2 + r^2\theta'^2\right)$

إذاً $L = \frac{1}{2}m\left(r'^2 + r^2\theta'^2\right) - V(r)$

وعليه فإن معادلات لاغرانج هي:

$$\frac{\partial L}{\partial r} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial r'}\right) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \theta'}\right) = 0$$

ومن ثمَّ فإن:

$$mr'' - mr\theta'^2 = \frac{-\partial v}{\partial r} \qquad (1)$$

$$\frac{d}{dt}(mr^2\theta') = 0 \Rightarrow r^2\theta' = C \qquad (2)$$

وهي قانون كبلر الثاني.

٢ . ٢ . ١٦ . داليات تعتمد على مشتقات ذات مراتب عليا:

سنركز اهتمامنا في هذا الجزء على دراسة الشروط الضرورية لوجود منحنيات التوقف لنوعين من الداليات المعتمدة على مشتقات ذات رتب عليا.

أ . إذا كان الدالي من الشكل: $J[y(x)] = \int_a^b F(x, y, y', \ldots, y^{(n)})dx$ ، حيث $y(x) \in D_n$.

$$y(a) = A_0,\ y'(a) = A_1,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(a) = A_{n-1}$$
$$y(b) = B_0,\ y'(b) = B_1,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(b) = B_{n-1}$$

فلتحديد الشروط الضرورية لوجود منحني توقف قد يكون للدالي $J[y(x)]$ قيم قصوى عليه، لاحظ أن:

$$\delta J = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} J(y + \varepsilon \Delta y, y' + \varepsilon \Delta y', \ldots, y^{(n)} + \varepsilon \Delta y^{(n)})\Big|_{\varepsilon = 0}$$

$$= \frac{d}{d\varepsilon} \int_a^b F(x, y + \varepsilon \Delta y, y' + \varepsilon \Delta y', \ldots, y^{(n)} + \varepsilon \Delta y^{(n)}) dx$$

$$= \int_a^b \frac{\partial}{\partial \varepsilon} F(x, y + \varepsilon \Delta y, y' + \varepsilon \Delta y', \ldots, y^{(n)} + \varepsilon \Delta y^{(n)}) dx$$

$$= \int_a^b (F_y \Delta y + F_{y'} \Delta y' + \ldots + F_{y^{(n)}} \Delta y^{(n)}) dx$$

فإذا كان $\delta J = 0$ فإن:

$$\int_a^b (F_y \Delta y + F_{y'} \Delta y' + \ldots + F_{y^{(n)}} \Delta y^{(n)}) dx = 0 \qquad (1)$$

لكن بتكامل الحد الثاني في (1) بالتجزئة نجد أن:

$$\int_a^b F_{y'} \Delta y' dx = [F_{y'} \Delta y]_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx} F_{y'} \Delta y dx$$

لكن: $\Delta y(a) = \Delta y(b) = 0$

إذاً: $\int_a^b F_{y'} \Delta y' dx = -\int_a^b \frac{d}{dx} F_{y'} \Delta y dx$

وبتكامل الحد الثالث في (1) بالتجزئة مرتين نجد أن:

$$\int_a^b F_{y''} \Delta y'' dx = \left[F_{y''} \Delta y'\right]_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx} F_{y''} \Delta y' dx$$

$$= \left[F_{y''} \Delta y'\right]_a^b - \left[\frac{d}{dx} F_{y'} \Delta y\right]_a^b = \int_a^b \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} \Delta y dx$$

لكن: $\Delta y'(a) = \Delta y'(b) = 0 \, , \, \Delta y(a) = \Delta y(b) = 0$

إذاً: $\int_a^b F_{y''} \Delta y'' dx = \int_a^b \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} \Delta y dx$

وبتكامل الحد الرابع في (1) بالتجزئة ثلاث مرات والحد الخامس أربع مرات،..
والحد النوني (n – 1) من المرات وتطبيق الشروط الحدية نجد أن (1) تصبح كالآتي:

$$\int[F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2}F_{y''} + \ldots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}F_{y^{(n)}}]\Delta y dx = 0$$

وبتطبيق التمهيدية (1) نجد أن:

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2}F_{y''} + \ldots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}F_{y^{(n)}} = 0$$

وعليه فإن الدالة $y(x)$ التي قد يكون للدالي $J[y]$ قيم قصوى عليها يجب أن تكون حلاً للمعادلة التفاضلية الآتية:

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2}F_{y''} + \ldots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}F_{y^{(n)}} = 0$$

وهذه المعادلة التفاضلية ذات المرتبة 2n تسمى بمعادلة أولر . بواسون (– Euler Boisson) وحلها العام يحتوي على 2n من الثوابت الاختيارية يمكن تعيينها باستخدام 2n من الشروط الحدية الموجودة في بداية المسألة.

٢ . ٢ . ١٧ . مثال محلول (٣١):

عالج مسألة القيم القصوى:

$$\int_{x_1}^{x_2}(y''^2 - 2y'^2 + y^2 - 2\sin x)dx$$

ملاحظة: المسألة معطاة بشكل عام بدون شروط حدية أي الثوابت لا يمكن تعيينها.

الحل:

$$\frac{\partial H}{\partial y} = 2y \qquad \& \qquad \frac{\partial H}{\partial y'} = -4y'$$

$$\frac{\partial H}{\partial y''} = 2y'' \Rightarrow \frac{d^2}{dx^2} 2y'' = 2y''''$$

من معادلة أولر:

$$\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{d}{dx} H_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} H_{y''} = 0$$

بتعويض ما وجدناه في هذه المعادلة نجد:

$$2y + 4y'' + 2y'''' = 0$$
$$\Rightarrow y'''' + 2y'' + y = 0$$

معادلتها المميزة: $\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0$

$$\Rightarrow (\lambda^2 + 1)^2 = 0$$
$$\Rightarrow (\lambda - i)^2 (\lambda + i)^2 = 0$$

ومنه: $\lambda = i$ جذر مكرر مرتين، $\lambda = -i$ جذر مكرر مرتين.

ومنه الحل العام من الشكل:

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + x\, c_3 \cos x + x\, c_4 \sin x$$
$$\Rightarrow y = (c_1 + x\, c_3) \cos x + (c_2 + x\, c_4) \sin x$$

٢ . ٢ . ١٨ . مثال محلول (٣٢):

أوجد منحنيات التوقف للدالي:

$$J[y(x)] = \int_0^{\pi/2} (y''^2 - y^2 + x^2)dx$$

حيث: $y(0) = 1\ ,\ y'(0) = 0$

$$y(\frac{\pi}{2}) = 0, y'(\frac{\pi}{2}) = -1$$

الحل:

معادلة أولر . بواسون هي:

$$y^{(IV)} - y = 0$$

وحلها العام هو:

$$y(x) = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3\cos x + C_4 \sin x$$

وباستخدام الشروط الحدية لتعيين الثوابت نجد أن:

$$C_3 = 1, C_1 = C_2 = C_4 = 0$$

ومن ثم فإن القيم القصوى للدالي نحصل عليها على المنحني الذي معادلته $y = \cos x$.

٢ . ٢ . ١٩ . مثال محلول (٣٣):

أوجد منحنيات التوقف للدالي:

$$I[y(x)] = \int_0^{\pi} (16y^2 - y''^2 + x^2)dx$$

حيث: $y(0) = y(\pi) = 0 , y'(0) = y'(\pi) = 1$

الحل:

معادلة أولر ـ بواسون ـ بالنسبة إلى هذا الدالي ـ هي:

$$32y + (-1)^2 \frac{d^2}{dx^2}(-y'') = 0 \quad \text{أو} \quad y^{(4)} - 16y = 0$$

والحل العام لهذه المعادلة هو:

$$y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} + C_3\cos 2x + C_4\sin 2x$$

وباستخدام الشروط الحدية لتعيين الثوابت نحصل على:

$$C_1 = C_2 = C_3 = 0, C_4 = \frac{1}{2}$$

ومن ثمّ فإن:

$$y(x) = 1/2 \sin 2x$$

ب ـ إذا كان الدالي على الشكل:

$$J[y(x),z(x)]=\int_a^b F(x,y,y',\dots,y^{(n)},z,z',..z^{(m)})dx \text{ ، } y(x),z(x)\in D_n$$

فإننا نجعل $y(x)$ دالة متغيرة ونفرض أن $z(x)$ ثابتة ومن ثمَّ نحصل على:

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}+\frac{d^2}{dx^2}F_{y''}+\dots+(-1)^n\frac{d^n}{dx^n}F_{y^{(n)}}=0 \qquad (2)$$

وبالمثل نجعل $z(x)$ دالة متغيرة بينما $y(x)$ ثابتة لنحصل على:

$$F_z-\frac{d}{dx}F_{z'}+\frac{d^2}{dx^2}F_{z''}+\dots+(-1)^m\frac{d^m}{dx^m}F_{z^{(m)}}=0 \qquad (3)$$

ومن ثم فإن الدالتين $z(x)$، $y(x)$ يحققان نظاماً من معادلتين هما (3)، (2).

ومن هنا فإنه يمكننا دراسة دالٍ يعتمد على أي عدد من الدوال، فإذا كان:

$$J[y_1(x),y_2(x),\dots,y_m(x)]=\int_a^b F(x,y_1,y_1',\dots,y_1^{(n_1)},y_2,y_2',\dots,y_2^{(n_2)}$$

$$,\dots,y_m,y_m',\dots,y_m^{(n_m)})dx$$

حيث $y_i(x)\in D_n$ لكل $i=1,\dots,m$.

وكانت إحدى هذه الدوال متغيرة ولتكن $y_i(x)$ فرضنا أن الدوال الأخرى ثابتة.

فإننا نحصل على الشرط الضروري لوجود القيم القصوى للدالي في الشكل الآتي:

$$F_{yi}-\frac{d}{dx}F_{y_i'}+\frac{d^2}{dx^2}F_{y_i''}+\dots+(-1)^{n_i}\frac{d^{n_i}}{dx^{n_i}}F_{y_i^{(ni)}}=0 \;;\; i=1,2,\dots,m$$

٢ . ٢ . ٢٠ . مثال محلول (٣٤):

أوجد منحنيات التوقف للدالي:

$$J[y,z]=\int_a^b (y''^2+y^1-y^2+z'^2+z''^2)dx$$

الحل:

بما أن معادلتي أولر . بواسون هما:

$$z^{(2)} + z^{(4)} = 0 \ , \ y^{(4)} - y = 0$$

عندئذ يكون:

$$y(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} + A \cos x + B \sin x$$

$$z(x) = b_1 + b_2 x + b_3 \cos x + b_4 \sin x$$

٢ . ٢ . ٢١ . داليات بشروط إضافية:

(Functional with subsidiary conditions)

قد تتطلب بعض المسائل جعل تكامل ما نهاية قصوى، والاحتفاظ بتكامل أو شروط إضافية على نفس المتغيرات ثابت، وهذا ما نرغب بدراسته في هذه الفقرة.

فإذا كان:

$$y(a) = A, y(b) = B, J[y] = \int_a^b F(x, y, y')dx \quad \text{و} \quad K[y] = \int_a^b G(x, y, y')dx = L$$

حيث L ثابت، وكانت $y = y(x)$ قيمة قصوى للدالي $J[y]$ بينما $y(x)$ ليست قيمة قصوى للدالي $K[y]$، فيوجد ثابت λ بحيث إن $y(x)$ قيمة قصوى للدالي $S[y] = \int_a^b (F + \lambda G)dx$، وتسمى λ مضاعف لاغرانج (Lagrange's multiplleir)

وهذا يعني أن $y(x)$ تحقق معادلة أولر . لاغرانج الآتية:

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} + \lambda\left[G_y - \frac{d}{dx}G_{y'}\right] = 0$$

٢ . ٢ . ٢٢ . مثال محلول (٣٥):

من بين جميع المنحنيات الواقعة في الربع الأول، التي طول كل منها L، وتمر بالنقطتين $(-a, 0)$، $(a, 0)$، أوجد ذلك المنحني الذي يكوّن مع الفترة $[-a, a]$ أكبر مساحة ممكنة.

الحل:

لإيجاد المنحني $y(x)$ الذي يجعل للدالي $J[y]=\int_a^b y\,dx$ ، أكبر قيمة ممكنة، بشرط أن $y(-a) = y(a) = 0$، $K[y]=\int_{-a}^{a}\sqrt{1+y'^2}\,dx = L$ ، لاحظ أن معادلة أولر ـ لاغرانج للدالي تكتب بالشكل التالي:

$$S[y]=J[y]+\lambda K[y]=\int_{-a}^{a}\left(y+\lambda\sqrt{1+y'^2}\right)dx$$

هي:

$$1+\lambda\frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right)=0$$

وعليه فإن $x+\lambda\dfrac{y}{\sqrt{1+y'^2}}=c$ ، ومنها نجد أن $(x-b)^2 + (y-c)^2 = \lambda^2$ التي تمثل أسرة دوائر مركزها (b, c) ونصف قطرها λ، ويمكن تحديد قيم b, c من الشروط $K[y] = L, y(-a) = y(a) = 0$، فمن الشرط $y(-a) = y(a) = 0$ نجد أن

$$a^2 + c^2 = \lambda^2 \,,\; b = 0$$

لكن: $K[y] = L$، $y'=\dfrac{x}{\sqrt{\lambda^2-x^2}}$

إذاً:

$$L=\int_{-a}^{a}\sqrt{1+y'^2}\,dx=\int_{-a}^{a}\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2-x^2}}\,dx$$

$$=2\lambda\int_0^a\frac{dx}{\sqrt{\lambda^2-x^2}}=2\lambda\sin^{-1}\left(\frac{a}{\lambda}\right)$$

وعليه فإن:

$$\frac{L}{2\lambda}=\sin^{-1}\left(\frac{a}{\lambda}\right)\Rightarrow a=\lambda\sin\left(\frac{L}{2\lambda}\right)$$

ومن ثمّ فإن $C=\lambda\sqrt{1-\sin\left(\dfrac{L}{2\lambda}\right)}$ ، وعليه فإن معادلة المنحني هي:

$$x^2+\left(y-\lambda\sqrt{1-\sin\left(\frac{L}{2\lambda}\right)}\right)^2=\lambda^2$$

٢ . ٢ . ٢٣ . مثال محلول (٣٦):

أوجد منحني التوقف (المنحني الحرج) للدالي $J[y]=\int_{-a}^{a} y\sqrt{1+y'^2}\,dx$

حيث: $y(-a)=y(a)=b$، $K[y]=\int_{-a}^{a} y\sqrt{1+y'^2}\,dx=2L$

الحل:

بما أن $S[y]=J[y]+\lambda K[y]$، إذاً $S[y]=\int_{-a}^{a}(y+\lambda)\sqrt{1+y'^2}\,dx$،

وعليه فإن معادلة أولر . لاغرانج هي:

$$\sqrt{1+y'^2}-\frac{d}{dx}\left[\frac{(y+\lambda)y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right]=0$$

ومن ثمَّ فإن: $$\frac{d}{dx}\left[(y+\lambda)\sqrt{1+y'^2}-\frac{(y+\lambda)y'^2}{\sqrt{1+y'^2}}\right]=0$$

وعليه فإن: $$\frac{d}{dx}\left[\frac{(y+\lambda)}{\sqrt{1+y'^2}}\right]=0$$

إذاً: $$\frac{(y+\lambda)}{\sqrt{1+y'^2}}=c$$

وعليه فإن: $$y'=\frac{\sqrt{(y+\lambda)^2-c^2}}{c}$$

ومنها نجد أن: $$\cosh^{-1}\left(\frac{y+\lambda}{c}\right)=\frac{x}{c}+e$$

وحيث إن المنحني متناظر حول محور التراتيب إذاً $e = 0$.

وعليه فإن:
$$y + \lambda = c\cosh\left(\frac{x}{c}\right)$$

لكن: $y(a) = b$ إذاً $\lambda = c\cosh\left(\frac{a}{c}\right) - b$

وحيث إن:
$$\int_{-a}^{a}\sqrt{1+y'^2}\,dx = 2L \Rightarrow \int_{-a}^{a}\sqrt{1+\sinh^2\left(\frac{x}{c}\right)}\,dx = 2L$$
$$\Rightarrow \int_{0}^{a}\cosh\left(\frac{x}{c}\right)dx = L \Rightarrow \sinh\left(\frac{a}{s}\right) = \frac{L}{c}$$

إذاً:
$$\cosh\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{\sqrt{L^2+c^2}}{c}$$

وعليه فإن:
$$\lambda = \sqrt{L^2+c^2} - b$$

ومن ثمّ فإن:
$$y = c\cosh\left(\frac{x}{c}\right) + b - \sqrt{L^2+c^2}$$

٢ . ٢ . ٢٤ . ملاحظة:

إذا كان: $J[y_1,\ldots,y_n] = \int_a^b F[x,y_1,\ldots,y_n,y'_1,y'_2,\ldots y'_n]dx$ ، $y_i(a)=A_i$ ، $y_i(b)=B_i$

لكل $i = 1,\ldots,n$.

وكان: $K_j[y_1,\ldots,y_n] = \int_a^b G_j[x,y_1,\ldots,y_n,y'_1,y'_2,\ldots y'_n]dx = L_j$ ، $j = 1,\ldots,m$

فإن معادلة أولر . لاغرانج للدالي:
$$S[y_1,\ldots,y_n] = J[y_1,\ldots,y_n] + \lambda_j K_j[y_1,\ldots,y_n]$$

هي:

$$\frac{\partial}{\partial y_i}\left(F+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j G_j\right)-\frac{d}{dx}\left[\frac{\partial}{\partial y_i'}\left(F+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j G_j\right)\right]=0$$

٢ . ٢ . ٢٥ . مثال محلول (٣٧):

أوجد منحني التوقف للدالي:

$$y(0)=y(1)=0, J[y]=\int_0^1 y'^2 dx$$

$$K_2[y]=\int_0^1 xydx=1, K_1[y]=\int_0^1 ydx=0$$

الحل:

بما أن:

$$S[y]=\int_0^1 y'^2+\lambda_1 y+\lambda_2 xy)dx$$

إذاً معادلة أولر . لاغرانج هي:

$$2y''-\lambda_1-\lambda_2 x=0$$

وعليه فإن $y''=\frac{1}{2}\lambda_1+\frac{1}{2}\lambda_2 x$ ، ومن ثمَّ فإن: $y'=\frac{1}{2}\lambda_1 x+\frac{1}{4}\lambda_2 x^2+c_1$

وعليه فإن: $y=\frac{1}{4}\lambda_1 x^2+\frac{1}{12}\lambda_2 x^3+c_1 x+c_2$.

لكن $y(0)=y(1)=0$ إذاً $c_2=0$، ومن ثمَّ:

$$3\lambda_1+\lambda_2+12c_1=0 \qquad (1)$$

لكن:

$$\int_0^1 xydx=1, \int_0^1 ydx=0$$

إذاً:

$$4\lambda_1+\lambda_2+24c_1=0 \qquad (2)$$

$$15\lambda_1+4\lambda_2+80c_1=0 \qquad (3)$$

ومن (1)، (2)، (3) نجد أن:

$$c_1 = 60 \,,\ \lambda_2 = -1440 \,,\ \lambda_1 = 720$$

وعليه فإن:

$$y = 60 + 180x^2 - 120\,x^3$$

٢ . ٢ . ٢٦ . ملاحظة:

إذا كان $J[y,z] = \int_0^b F(x,y,z,y',z')dx$ ، $G(x,y,z) = 0$، $y(a) = A_1$، $y(b) = B_1$، $z(a) = A_2$، $z(b) = B_2$، وكان للدالي $J[y]$ قيمة قصوى على المنحني $y = y(x)$، $z = z(x)$ وليس كل من G_y, G_x يساوي صفراً عند أي نقطة من نقاط السطح $G(x,y,z)$، فتوجد دالة $\lambda(x)$ بحيث إن $z(x)$، $y(x)$ قيم قصوى للدالي:

$$S[y,z] = \int_a^b [F + \lambda(x)G]dx$$

ومن ثمّ فإن معادلتي أولر . لاغرانج هما:

$$F_y + \lambda G_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0$$

$$F_z + \lambda G_z - \frac{d}{dx}F_{z'} = 0$$

٢ . ٢ . ٢٧ . مثال محلول (٣٨):

أوجد المنحنيات الحرجة للدالي:

$J[y,z] = \int_0^1 \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\,dx$ ، $y^2 + z^2 = 1$، $y(0) = z(1) = 1$، $y(1) = z(0) = 0$.

الحل:

بما أن $F = \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}$ ، $G = y^2 + z^2 - 1 = 0$، إذاً معادلتي أولر . لاغرانج هما:

$F_y + \lambda G_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0$ ، $F_z + \lambda G_z - \frac{d}{dx}F_{z'} = 0$ وعليه فإن:

$$2\lambda y - \frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}\right) = 0 \qquad (1)$$

$$2\lambda z - \frac{d}{dx}\left(\frac{z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}\right) = 0 \qquad (2)$$

وحيث إن $y^2 + z^2 = 1$، إذاً إذا كانت $y = \cos\vartheta$، $z = \sin\vartheta$، فإن $y''^2 + z'^2 = \vartheta'^2$ وبالتعويض في (1)، (2) ينتج أن:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{-\vartheta'\sin\vartheta}{\sqrt{1+\vartheta'^2}}\right) - 2\lambda\cos\vartheta = 0$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\vartheta'\cos\vartheta}{\sqrt{1+\vartheta'^2}}\right) - 2\lambda\sin\vartheta = 0$$

وعليه فإن: $\sin\vartheta\frac{d}{dx}\left[\frac{\vartheta'\sin\vartheta}{\sqrt{1+\vartheta'^2}}\right] + \cos\vartheta\frac{d}{dx}\left[\frac{\vartheta'\cos\vartheta}{\sqrt{1+\vartheta'^2}}\right] = 0$

وبالتكامل بالتجزئة نجد أن $\frac{d}{dx}\left(\frac{\vartheta'}{\sqrt{1+\vartheta'^2}}\right) = 0$، وعليه فإن $\vartheta' = c$، ومن ثمّ فإن $\vartheta = cx + b$ حيث c, b ثوابت.

إذاً: $\sin^{-1}(z) = cx + b\ ,\ \cos^{-1}(y) = cx + b$

وعليه فإن: $z = \sin(cx + b)\ ,\ y = \cos(cx + b)$

لكن $y(0) = z(1) = 1$، $y(1) = z(0) = 0$، إذاً $b = 0$، $c = \frac{\pi}{2}$، وعليه فإن منحني التوقف هو:

$$z = \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \ , \ z = \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$$

٢ . ٢ . ٢٨ . مثال محلول (٣٩):

أوجد منحنيات التوقف للدالي: $J[y,z] = \int_0^1 (y'^2 + z'^2)dx$ حيث:

$y(0) = 2$، $y(1) = e$، $z(0) = 1$، $z(1) = 2e$، $G(x,y,z,y',z') = y'-z$

الحل:

بما أن $F = y'^2 + z'^2$، $G = y'-z$، إذاً $F + \lambda G = y'^2 + z'^2 + \lambda(y'-z)$،

وعليه فإن معادلتي أولر . لاغرانج هما:

$$2y'' + \lambda' = 0 \quad (1) \quad , \quad 2z'' + \lambda = 0 \quad (2)$$

ومن (1) و (2) ينتج أن: $y^{(4)} - y^{(2)} = 0$

وعليه فإن: $y = c_1 + c_2x + c_3e^x + c_4 e^{-x}$، لكن $z = y'$

إذاً: $z = c_2 + c_3e^x - c_4e^{-x}$

ومن الشروط الابتدائية يمكن إيجاد c_1, c_2, c_3, c_4 بكل سهولة.

٢ . ٢ . ٢٩ . تمارين غير محلولة:

١) أوجد حل معادلة أولر . لاغرانج لكل مما يأتي:

أ) $J[y]=\int_a^b \sqrt{x(1+y'^2)}dx$، ب) $J[y]=\int_a^b x\sqrt{1+y'^2}dx$

ج) $J[y]=\int_a^b x\sqrt{1-y'^2}dx$، د) $J[y]=\int_a^b \sqrt{\frac{1+y'^2}{x}}dx$

هـ) $J[y]=\int_a^b (y'+x^2y'^2)dx$، و) $J[y]=\int_a^b (xy'+y'^2)dx$

ز) $J[y]=\int_a^b \sqrt{1+y^2y'^2}dx$، ح) $J[y]=\int_a^b y\sqrt{y^2+y'^2}dx$

ط) $J[y]=\int_a^b \frac{yy'^2dx}{1+yy'}$، ي) $J[y]=\int_a^b \frac{1+y^2}{y'^2}$

ك) $J[y]=\int_a^b e^x\sqrt{1+y'^2}dx$، ل) $J[y]=\int_a^b (y^2+2xyy')dx$

م) $J[y]=\int_a^b y'(1+x^2y')dx$، ن) $J[y]=\int_a^b (y^2+y'^2-2y\sin x)dx$

س) $J[y]=\int_a^b x^{-3}y'^2dx$، ع) $J[y]=\int_a^b (y'^2+2yy'-16y^2)dx$

٢) إذا كان $J[y]=\int_a^b F[x,y,y']dx$، $y(a)=A$، $y(b)=B$، فأثبت أنه يمكن التعبير عن معادلة أولر . لاغرانج كالآتي:

$$\frac{d}{dx}\left(F-y'F_{y'}\right)-F_x=0$$

٣) حدد شكل مسار شعاع ضوئي يمر بوسط معامل انكسار الضوء فيه بالإحداثيات القطبية يتناسب مع $\frac{1}{r^2}$.

٤) أوجد منحنيات التوقف (المنحنيات الحرجة) التي يمكن أن يكون للدالي قيمة قصوى عليها عندما:

أ) $J[y]=\int_1^2 x^2y'dx$ ، $y(1)=1$، $y(2)=2$.

ب) $J[y]=\int_0^1 (xy+y^2-y^2y')dx$ ، $y(0)=1$، $y(1)=2$.

ج) $J[y]=\int_0^1 (y^2-yy'+y'^2)dx$ ، $y(0)=1$، $y(1)=2$.

د) $J[y]=\int_0^1 y'^2dx$ ، $y(0)=0$، $y(1)=1$.

هـ) $J[y]=\int_0^1 \sqrt{y(1+y'^2)}dx$ ، $y(-1)=y(1)=2$

و) $J[y]=\int_0^1 y'dx$ ، $y(1)=1 , y(0)=0$

ز) $J[y]=\int_0^1 yy'dx$ ، $y(0)=0$، $y(1)=1$.

٥) إذا كان $J[y]=\int_a^b f(y)\sqrt{1+y'^2}dx$ ، فأثبت أن: $x=b+c\int\frac{dy}{\sqrt{(f(y))^2c^2}}$

ثم حدد شكل منحني التوقف عندما:

أ) $f(y)=y$، ب) $f(y)=\frac{1}{\sqrt{y}}$

ج) $f(y)=\frac{1}{y}$ ، $y(0)=1$، $y(2)=3$.

د) $f(y)=\frac{1}{y^2}$.

٦) أوجد حل معادلتي أولر . لاغرانج في كل مما يأتي:

(أ) $$J[y,z]=\int_a^b (y'^2+z'^2+y'z')dx$$

(ب) $$J[y,z]=\int_a^b (2yz-2y^2+y'^2-z'^2)dx$$

٧) إن مسألة إيجاد أقل زمن يستغرقه جسيم متحرك من (x_0, y_0, z_0) إلى (x_1,y_1,z_1) الواقعتين على منحنٍ في R^3، يحددها إيجاد القيمة الصغرى للدالي:

$$J[y,z]=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{\frac{1+y'^2+z'^2}{y}}dx$$

أوجد حل معادلتي أولر . لاغرانج لذلك الدالي.

٨) أوجد $y(x)$, $z(x)$ بحيث يكون للدالي $J[y,z]=\int_0^1 (y'^2+z'^2-2gz)dx$، قيمة صغرى حيث g ثابت، $y(0)=z(0)=0$، $y(1)=a$، $z(1)=0$.

٩) أوجد معادلتي المنحني $y(x)$، $z(x)$، إذا كان للدالي $J[y,z]=\int_0^1 (y'^2+z'^2)dx$ قيمة صغرى عندما:

(أ) $y(0)=z(0)=0$، $y(1)=0$، $z(1)=2$.

(ب) $y(0)=y(1)=0$، $z(0)=0$، $z(1)=2$.

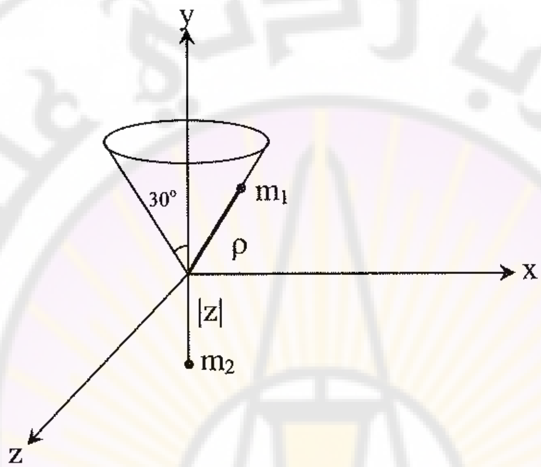
١٠) باستخدام معادلات أولر . لاغرانج القانونية، أوجد منحنيات التوقف لكل مما يأتي:

(أ) $$J[y]=\int\sqrt{(x^2+y^2)(1+y'^2)}dx$$

(ب) $$J[x]=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}(mx'^2-ax^2)dt$$

١١) أوجد معادلة حركة جسم يتحرك على محور السينات، إذا كانت طاقته الكامنة (طاقة الوضع) $v = \frac{1}{2}kx^2$.

١٢) يتحرك جسيم كتلة m_1 غم بدون احتكاك على سطح مخروط دائري قائم كما في الشكل (٢ . ٧)، ويتحرك جسيم آخر كتلته m_2 غم مربوط بخيط ثابت الطول إلى الأعلى والأسفل. أوجد معادلات لاغرانج لحركة تلك المجموعة من الجسيمات.



الشكل (٢ . ٧)

١٣) أوجد منحنيات القيم القصوى (المنحنيات الحرجة) في كل مما يأتي:

أ) $J[y] = \int_a^b [2xy + (y^{(3)})^2]dx$

ب) $J[y] = \int_a^b (x^2 + 16y^2 - y''^2)dx$

ج) $J[y] = \int_a^b [y^2 - 2x^3y + (y^{(3)})^2]dx$

د) $J[y] = \int_a^b (y''^2 - 2y'^2 + y^2 - 2y\sin)dx$

هـ) $J[y]=\int_a^b (y''^2+y'^2+y^2)dx$

و) $J[y]=\int_0^1 (1+y''^2)dx$ ، $y(0)=0$ ،$y(1)=1$ ،$y'(0)=y'(1)=1$.

ز) $J[y]=\int_a^b (\frac{1}{2}\alpha y''^2+\beta y)dx$ ،

حيث: α, β ثوابت، $y(-a)=y(a)=y'(a)=y'(-a)=0$

ح) $J[y]=\int_a^b (y''^2-y^2+x^2)dx$ ، $y(0)=1$ ،$y(\frac{\pi}{2})=0$ ،$y'(0)=0$ ،

$y'(20\pi)=1$.

١٤) أوجد معادلة المنحني المار بالنقطتين $(0,0)$، $(1,0)$، الذي يجعل للدالي $J[y]=\int_0^1 y''^2 dx$ قيمة صغرى عندما $y'(0)=a$ ،$y'(1)=a$.

١٥) أوجد المنحنيات الحرجة (منحنيات التوقف) لكل مما يأتي:

أ) $J[y]=\int_0^1 (x^2+y'^2)dx$ ، بشرط أن $K[y]=\int_0^1 y^2dx=2$ ، $y(0)=y(1)=0$

ب) $J[y]=\int_a^b y'^2dx$ و $K[y]=\int_a^b ydx=L$

ج) $J[y]=\int_0^1 y'^2dx$ بشرط أن $K[y]=\int_0^1 ydx=\frac{1}{3}$ ، $y(0)=0$ ،$y(1)=1$.

د) $J[y]=\int_0^1 y'^2dx$ بشرط أن $y(0)=0, y(1)=1$ ، $K[y]=\int_0^1 \sqrt{1+y'^2}dx=2$

هـ) $J[y]=\int_{t_0}^{t_1} xy'dt$ و $K[y]=\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'^2+y'^2}dt=L$

و) $J[y]=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} (xy'-yx')dt$ و $K[y]=\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'^2+y'^2}dt=L$

(ز) $J[y,z]=\int_0^1 (y'^2+z'^2-yxz'-yz)dx$ بشرط أن $\int_0^1 (y'^2-xy'-z'^2)dx=2$ ،

$y(0)=z(0)=0$ ، $y(1)=z(1)=1$.

(ح) $J[y,z]=\int_0^1 (y^2+y'+z'^2)dx$ و $y'-z=0$.

(ط) $J[y,z]=\int_0^1 (y^2+y'^2+z'^2)dx$ و $y'+z'-y=0$ ، $y(0)=0$ ، $y(1)=1$ ،

$z(0)=0$ ، $z(1)=0$.

٢ . ٣ . مسائل التغيرات بداليات ذات تكاملات متعددة والمسألة العكسية:

قد تكون بعض الداليات ذات تكاملات متعددة (مضاعفة)، وتملك قيماً قصوى على منحنيات معينة، ولمعرفة الشروط الضرورية لوجود منحنيات توقف (حرجة) يكون للدالي قيمة قصوى عندها، نتناول في هذه الفقرة دراسة تلك الداليات وتحديد معادلات أولر . لاغرانج بالنسبة لها ودراسة بعض التطبيقات المهمة الهندسية والفيزيائية، أما في البند الثاني من هذا الفقرة، فقد تناولنا المسألة العكسية وهي إيجاد الدوال $F(x,y,y')$ التي يكون المنحني $y(x)$ حلاً لمعادلة أولر . لاغرانج الناتجة منها.

٢ . ٣ . ١ . مسائل التغيرات بداليات ذات تكاملات متعددة وبعض تطبيقاتها:

يضم هذا الجزء دراسة قيم التوقف «المنحنيات الحرجة» للداليات ذات التكاملات المضاعفة أو المتعددة (multiple integrals)، وإعطاء بعض التطبيقات المهمة كإيجاد معادلة الحركة لسلك متذبذب (مهتز) من الجهتين، واشتقاق معادلتي لابلاس وشرودنجر، إضافة إلى بعض التطبيقات الهندسية، فإذا كان:

$$J[z(x,y)] = \iint_R F(x,y,z,z_x,z_y)\,dxdy \in \ell_2$$

حيث ℓ_2 مجموعة الدوال التي تكون مشتقاتها الجزئية الأولى والثانية متصلة (مستمرة) على المنطقة المغلقة R، كما أن للدالة $z(x,y)$ قيم معروفة ومحددة على ∂R، حيث ∂R هي حدود R ولتحديد شروط قيم التوقف (المنحنيات الحرجة)، نورد ما يلي:

٢ . ٣ . ٢ . تمهيدية مساعدة (١):

إذا كانت $f(x,y)$ دالة مستمرة على المنطقة المغلقة R، وكان $\iint_R F(x,y)h(x,y)\,dxdy = 0$ لكل $h(x,y) \in \ell_2$، كما أن $h(x,y) = 0$ لكل $(x,y) \in \partial R$، فإن $f(x,y) = 0$ لكل $(x,y) \in R$.

البرهان:

نفرض وجود $(x^*, y^*) \in R$ بحيث إن $f(x^*, y^*) \neq 0$. أما $f > 0$ أو $f < 0$، فإذا كانت $f(x^*, y^*) > 0$، فإن استمرار f على R يعني أن $f(x, y) > 0$ لكل $(x, y) \in B = \{(x, y) \in R \mid (x - x^*)^2 + (y - y^*)^2 \leq r^2\} \subseteq R$، وعليه فإذا كانت h^* دالة معرفة على R كالآتي:

$$h^*(x - y) = \begin{cases} 0 & , \forall (x, y) \in R - B \\ \left(r^2 - \left[(x - x^*)^2 + (y - y^*)^2\right]\right)^3 & , \forall (x, y) \in B \end{cases}$$

فإن $h^* \in \ell_2$ كما أن $\iint_R F((x, y)h(x, y)dxdy = 0$، وهذا غير ممكن لأن $f(x,y)\, h^*(x,y) > 0$ لكل $(x,y) \in B$، وعليه فإن $f(x^*, y^*)$ لا يمكن أن تكون أكبر من الصفر. وبنفس الطريقة يمكن أن نثبت أن $f(x^*, y^*)$ لا يمكن أن تكون أصغر من الصفر، وعليه فإن $f(x, y) = 0$ لكل $(x, y) \in R$.

والآن إلى المبرهنة الآتية التي تحدد شروط وجود قيم التوقف.

٢ . ٣ . ٣ . مبرهنة (٥):

إذا كانت $z(x,y)$ معرفة ومحددة على ∂R، وكان للدالي:

$$J[z(x, y)] = \iint_R F(x, y, z, z_x, z_y)dxdy \in \ell_2$$

قيمة قصوى على المنحني $z(x, y)$ فإن F تحقق معادلة أولر . لاغرانج، أي إن:

$$F_z - \frac{\partial}{\partial x} F_{z_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{z_y} = 0$$

والمسماة بمعادلة أوستروغرادسكي أيضاً.

البرهان:

بما أن:

$$\delta J = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} J(z + \varepsilon \Delta z)\bigg|_{\varepsilon=0}$$

$$= \iint_R \frac{\partial}{\partial \varepsilon} F(x, y, z + \varepsilon \Delta z, z_x + \varepsilon \Delta z_x, z_y + \varepsilon \Delta z_y) dxdy$$

$$= \iint_R (F_z \Delta z + F_{z_x} \Delta z_x + F_{z_y} \Delta z_y) dxdy$$

لكن $\Delta z = 0$ لكل $(x,y) \in \partial R$،

$$\iint_R (F_{z_x} \Delta z_x + F_{z_y} \Delta z_y) dxdy = \iint_R \frac{\partial}{\partial x}(F_{z_x} \Delta z_x) + \frac{\partial}{\partial y}(F_{z_y} \Delta z_y) dxdy -$$

$$- \iint_R (\frac{\partial}{\partial x} F_{z_x} + \frac{\partial}{\partial y} F_{z_y}) dxdy$$

وباستخدام نظرية غرين التي تنص على أن:

$$\iint_R \left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) dxdy = \int_{\partial R} N dx + M dy$$

نجد أن:

$$\iint_R (F_{z_x} \Delta z_x + F_{z_y} \Delta z_y) dxdy = \int_{\partial R} (F_{z_x} \Delta z dy - F_{z_y} \Delta z dx) -$$

$$- \iint_R (\frac{\partial}{\partial x} F_{z_x} + \frac{\partial}{\partial y} F_{z_y}) \Delta z dxdy$$

لكن $\Delta z = 0$ لكل $(x,y) \in \partial R$، إذاً:

$$\int_{\partial R} (F_{z_x} \Delta z dy - F_{z_y} \Delta z dx) = 0$$

وعليه فإن:

$$\iint_R (F_{z_x} \Delta z_x + F_{z_y} \Delta z_y) dxdy = -\iint_R (\frac{\partial}{\partial x} F_{z_x} + \frac{\partial}{\partial y} F_{z_y}) \Delta z dxdy$$

ومن ثمَّ فإن:

$$\delta J = \iint_R (F_z - \frac{\partial}{\partial x} F_{z_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{z_y}) \Delta z dx dy$$

لكن للدالي J قيمة قصوى على $Z(x,y)$، إذاً $\delta J = 0$، وعليه فإن:

$$\delta J = \iint_R (F_z - \frac{\partial}{\partial x} F_{z_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{z_y}) \Delta z dx dy = 0$$

لكن $F_z - \frac{\partial}{\partial x} F_{z_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{z_y}$ دالة مستمرة (متصلة) على R. كما أن $\Delta Z = 0$ لكل $(x,y) \in \partial R$، إذاً حسب التمهيدية المساعدة (١) يكون:

$$F_z - \frac{\partial}{\partial x} F_{z_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{z_y} = 0 \qquad (*)$$

وهي تمثل معادلة أوستروغراوسكي (في حالة التكامل الثنائي).

٢ . ٣ . ٤ . ملاحظة (١):

(١) إذا كان للدالي:

$$J[u] = \int_R \dots \int F(x_1, \dots, x_n, \dots, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}) dx_1 \dots dx_n \in \ell_2$$

وكان للدالة $u(x_1,\dots,x_n)$ قيماً محددة في ∂R، وللدالي $J[u]$ قيمة قصوى على $u(x_1,\dots,x_n)$ فإن معادلة أولر . لاغرانج هي:

$$F_u - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} F_{u_{x_i}} = 0$$

(٢) إذا كان للدالي:

$$J[z,w] = \iint_R F(x, y, z, w, z_x, z_y, w_x, w_y) dx dy \in \ell_2$$

قيمة قصوى على $w(x,y), z(x,y)$، فإن معادلتي أولر . لاغرانج هما:

$$F_w - \frac{\partial}{\partial x} F_{w_x} - \frac{\partial}{\partial x} F_{w_y} = 0 \text{ ،} F_z - \frac{\partial}{\partial x} F_{z_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{z_y} = 0$$

وبصورة عامة إذا كان للدالي:

$$J[u,v]=\int\limits_R\dots\int F(x_1,\dots,x_n,\dots,u,v,u_{x_1},\dots,u_{x_n},v_{x_1},\dots,v_{x_n})dx_1\dots dx_n \in \ell_2$$

قيمة قصوى على $u(x_1,\dots,x_n)$، $v(x_1,\dots,x_n)$ فإن معادلتي أولر . لاغرانج هما:

$$F_v-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}F_{v_{x_i}}=0 \text{ ، } F_u-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}F_{u_{x_i}}=0$$

(٣) إذا كان للدالي:

$$J[z(x,y)]=\iint\limits_R F(x,y,z,z_x,z_y)dxdy$$

قيمة قصوى بشرط أن:

$$K[z(x,y)]=\iint\limits_R G(x,y,z,z_x,z_y)dxdy=A$$

فإن معادلة أولر . لاغرانج للدالي:

$$S[z(x,y)]=\iint\limits_R (F+\lambda G)dxdy$$

هي:

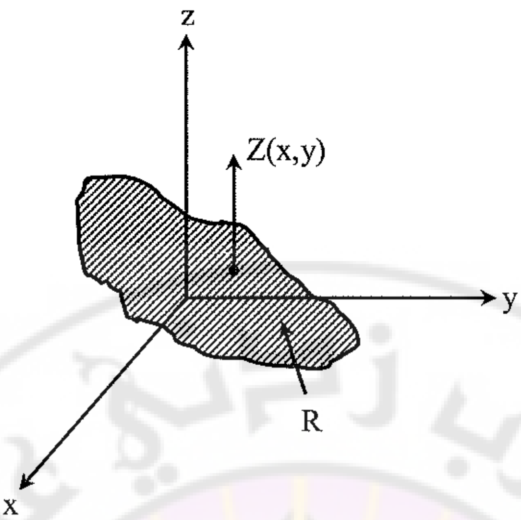
$$F_z+\lambda G_z-\frac{\partial}{\partial x}(F_{z_x}+\lambda G_{z_x})-\frac{\partial}{\partial y}(F_{z_y}+\lambda G_{z_y})=0$$

والآن إلى بعض التطبيقات والأمثلة التي تغطي الدراسة النظرية بشكل كامل.

٢ . ٣ . ٥ . مثال محلول (٤٠):

أصغر سطح Minimal surface Plateau's Problem

لإيجاد سطح $Z(x, y)$ متولد من منحنٍ مغلق «انظر الشكل (٢ . ٨)» مساحته $S=\iint\limits_R\sqrt{1+Z_x^2+Z_y^2}\,dxdy$ أقل ما يمكن.



الشكل (٢ . ٨)

لاحظ أن معادلة أولر . لاغرانج هي:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{z_x}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{z_y}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}\right)=0$$

أو:

$$z_{xx}(1+z_y^2)-2z_xz_yz_{xy}+z_{yy}(1+z_x^2)=0$$

وهي معادلة تفاضلية جزئية لأصغر سطح، وحل مثل تلك المعادلة معقد جداً، لذلك نستخدم الهندسة التفاضلية في هذا المجال لتحديد معدل التقوس (mean curvature) لذلك السطح، فإن كان التقوس صغيراً كان ذلك السطح ذا أقل مساحة ممكنة، هذا ونود أن نشير إلى أن لاغرانج هو أول من درس السطوح ذات أقل مساحة ممكنة، أما النظرية العامة لمثل تلك السطوح فتعود إلى الفيزيائي البلجيكي الأعمى بلاتو (١٨٠١ . ١٨٣٣م) الذي حدد الكثير من خواص تلك السطوح من خلال تجاربه على

فقاعات الصابون، لأن مثل تلك السطوح يمكن تكوينها من إدخال سلك رفيع له شكل المنحني المغلق في سائل صابون ثم رفعه منه، وللتوضيح أكثر نطرح المثال الآتي:

إذا كان: $J[z(x,y)] = \iint\limits_R [z_x^2 + z_y^2 + 2zf(x,y)]dxdy$

فإن معادلة أولر . لاغرانج هي:

$$z_{xx}^2 + z_{yy}^2 = f(x,y)$$

وهذه هي معادلة بواسون (١٧٨١ . ١٨٤٠م) التي تستخدم في الفيزياء الرياضية.

٢ . ٣ . ٦ . مثال محلول (٤١):

إذا كان:

$$J[u(x,y,z)] = \iiint\limits_R (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)dxdydz$$

فإن معادلة أولر . لاغرانج للدالي $J[u]$ هي:

$$u_{xx}^2 + u_{yy}^2 + u_{zz}^2 = 0$$

وهي معادلة لابلاس (١٧٤٩ - ١٨٢٧م)، التي يجب أن يحققها الجهد الكهربائي في فضاء خالٍ من الشحنات، ولها أيضاً تطبيقات عديدة في الفلك والهندسة التفاضلية والتوصيل الحراري وديناميكا الموائع، وغير ذلك من المسائل في الفيزياء الرياضية.

٢ . ٣ . ٧ . مثال محلول (٤٢):

سلك منتظم كتلته m لكل وحدة طول، مثبت (مشدود) بين حاملين $x = 0$، $x = s$ وتحت تأثير شد (توتر) ثابت k فإذا عُملت ذبذبات صغيرة سعتها $u(x, t)$، فإن الطاقة الحركية للسلك هي $T = \frac{1}{2}m\int_0^s u_t^2dx$، أما الطاقة الكامنة (طاقة الوضع) فهي:

$$V = \frac{1}{2}k\int_0^s u_x^2dx$$

وعليه فإن:

$$J[z(x,t)] = \int_{t_1}^{t_2} (T - V)dt = \int_{t_1}^{t_2}\int_{0}^{s} (\frac{1}{2}mu_t^2 - \frac{1}{2}ku_x^2)dxdt$$

حسب قاعدة هاملتون، ومنها نجد أن:

$$F = \frac{1}{2}mu_t^2 - \frac{1}{2}ku_x^2$$

وعليه فإن معادلة أولر . لاغرانج هي:

$$F_u - \frac{d}{dt}(F_{u_t}) - \frac{d}{dx}(F_{u_x}) = 0$$

ومنها نجد أن: $- mu_{tt} + ku_{xx} = 0$ وعليه فإن $u_{tt} = a^2u_{xx}$ حيث $a = \sqrt{\frac{k}{m}}$

هي معادلة حركة السلك، وهي معادلة انتشار الموجات ببعد واحد.

٢ . ٣ . ٨ . مثال محلول (٤٣):

معادلة شرودنجر Schrodinger's Equation

يمكن اشتقاق معادلة شرودنجر في ميكانيكا الكم باستخدام حساب التغيرات كالآتي:

نفرض أن $H = - k\nabla^2 + V(x,y,z)$ حيث $k = \frac{h^2}{8\pi^2m}$، m كتلة الجسيم الذي تدرس حركته، h ثابت بلانك، V طاقة الوضع (الطاقة الكامنة) للجسيم، H مؤثر هاملتون (Hamilton Operator) أو مؤثر الطاقة (Energy Operator)، $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ ولإيجاد دالة Ψ بحيث إن للدالي:

$$E = J[\Psi, \Psi^*] = \iiint_R \Psi^*(H\Psi)dxdydz = 0 \qquad (1)$$

قيمة قصوى بشرط أن:

$$G\left[\Psi,\Psi^*\right]=\iiint_R \Psi^*\Psi \, dxdydz=1 \qquad (1)$$

حيث Ψ^* مرافق Ψ، كما أن لكل من Ψ، Ψ^* نفس القيم ونفس المشتقات عند الحدود المتقابلة أو أنها تنعدم على ∂R. لاحظ أن بالتكامل بالتجزئة نجد أن:

$$\int \Psi^* \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}dx=\left[\Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right]_{x_1}^{x_2}-\int\frac{\partial\Psi^*}{\partial x}\cdot\frac{\partial\Psi}{\partial x}dx$$

$$=0-\int\Psi_x^*\cdot\Psi_x\cdot dx=-\int\Psi_x^*\cdot\Psi_x\cdot dx$$

إذاً:

$$\iiint_R \Psi^*(-k\nabla^2+V)\Psi \, dxdydz=\iiint_R k(\nabla\Psi^*).(\nabla\Psi)+\Psi^*\Psi V]dxdydz$$

$$=\iiint_R\left[k(\Psi_x\Psi_x^*+\Psi_y\Psi_y^*+\Psi_z\Psi_z^*)+\Psi^*\Psi V\right]dxdydz \quad (3)$$

ومن (2)، (3) نجد أن:

$$S[\Psi,\Psi^*]=\iiint_R\left[k(\Psi_x\Psi_x^*+\Psi_y\Psi_y^*+\Psi_z\Psi_z^*)+\Psi^*\Psi V+\lambda\Psi^*\Psi\right]dxdydz$$

وعليه فإن معادلات أولر . لاغرانج هي:

$$F_\Psi-\frac{\partial}{\partial x}\left(F_{\Psi_x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(F_{\Psi_y}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(F_{\Psi_z}\right)=0$$

$$F_{\Psi^*}-\frac{\partial}{\partial x}\left(F_{\Psi_x^*}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(F_{\Psi_y^*}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(F_{\Psi_z^*}\right)=0$$

ومن ثمَّ فإن:

$$V\Psi^*+\lambda\Psi^*-k[\Psi_{xx}^*+\Psi_{yy}^*+\Psi_{zz}^*]=0 \qquad (4)$$

$$V\Psi+\lambda\Psi-k[\Psi_{xx}+\Psi_{yy}+\Psi_{zz}]=0 \qquad (5)$$

لكن:

$$H\Psi = -k\,\nabla^2 + \Psi V$$
$$= -\,k\Psi_{xx} + \Psi_{yy} + \Psi_{zz}\Psi V$$

إذاً (5) هي:

$$H\Psi = -\,\lambda\,\Psi \qquad (6)$$

ولتحديد قيمة λ نضرب طرفي (6) في Ψ^* فنجد أن:

$$H\Psi\Psi^* = -\,\lambda\,\Psi\Psi^*$$

وعليه فإن:

$$E = \iiint_R \Psi H\Psi^* dxdydz = -\lambda \iiint_R \Psi\Psi^* dxdydz = -\lambda$$

وبالتعويض في (6) نجد أن:

$$H\Psi = E\Psi$$

وهي معادلة شرودنجر في ميكانيكا الكم.

٢ . ٣ . ٩ . المسألة العكسية «Inverse Problem»

وهي إيجاد مجموعة الدوال $F(x,y,y')$، بحيث إن $y(x)$ حل لمعادلة أولر . لاغرانج للدالي $J[y] = \int_a^b F(x,y,y')dx$.

ولتحديد مجموعة الدوال القابلة للتكامل $F(x, y, y')$ بحيث إنه إذا كانت:

$$g \in D_2,\ g: R^3 \to R$$

وكانت: $y(x): [a,b] \to R$ بحيث إن:

(1) $y(x) = g(x,\alpha,\beta)$، حل لمعادلة أولر . لاغرانج الآتية:

$$\frac{d}{dx}(F_{y'}) - F_y = 0 \Rightarrow F_{y'y'}\cdot y'' + F_{yy'}\cdot y' + F_{xy'} - F_y = 0 \quad (2)$$

افرض أن $F_{y'y'} \neq 0$ كما أن $F(x,y,y')$ قابلة للاشتقاق وللحصول على المعادلة التفاضلية التي حلها العام ممثل في المعادلة (1) نفرض إمكانية حذف ثوابت التكامل α, β، أي إنه توجد دوال مستمرة:

$$\phi: [a,b] \times R^2 \to R$$
$$\Psi: [a,b] \times R^2 \to R$$

بحيث يكون:

$$\begin{aligned} y(x) &= g[x, \phi(x,y,y'), \Psi(x,y,y')] \\ y'(x) &= g_x[x, \phi(x,y,y'), \Psi(x,y,y')] \end{aligned} \qquad (4)$$

وهذا يعني أنه يمكن إيجاد α, β بدلالة x, y, y' من المعادلتين التاليتين:

$$y'(x) = g_x(x,\alpha,\beta) \quad , \quad y(x) = g(x,\alpha,\beta)$$

ومن ثمَّ فإن:

$$y''(x) = G(x,y,y') \qquad (5)$$

حيث $G: [a,b] \times R^2 \to R$، $G(x,y,y') = g_{xx}[x,\phi(x,y,y'),\Psi(x,y,y')]$

وعليه فإن المعادلة (5) تمثل المعادلة التفاضلية ذات الحل العام (1). والآن لتحديد الدالة $F(x,y,y')$ بحيث إن المعادلة (5) تمثل حل لمعادلة أولر . لاغرانج (2) لاحظ أن:

$$F_y - F_{xy'} - y'F_{yy'} = G\, F_{y'y'} \qquad (6)$$

وحيث إن (1) تمثل الحل العام للمعادلة (6)، إذاً يجب إيجاد حل لكل شرط ابتدائي $(y(a),y'(a))\in R^2$ وعليه فإن المعادلة (6) تتحقق لكل $(x,y,y')\in[a,b]\times R^2$ وبإجراء التفاضل للمعادلة (6) بالنسبة إلى y' ثم الفرض بأن:

$$F_{y'y'}(x,y,y') = K\,(x,y,y') \qquad (7)$$

حيث $K: [a,b] \times R^2 \to R$، نجد أن:

$$K_x + y'K_y + GK_{y'} + G_{y'}K = 0 \qquad (8)$$

وهي معادلة تفاضلية جزئية في المتغير K، ومن ثمَّ فإن الحل العام للمعادلة (8) هو «يمكن التأكد من ذلك بالتعويض»:

$$K(x,y,y') = \frac{u(\phi,\Psi)}{v(x,\phi,\Psi)} \qquad (9)$$

حيث $u: R^2 \to R$ دالة تفاضلية غير صفرية وما عدا ذلك فهي اختيارية،

$$v(x,\alpha,\beta) = \exp\left(\int G_{y'}(x, g(x,\alpha,\beta), g_x(x,\alpha,\beta)dx\right) \qquad (10)$$

إذاً يمكن إيجاد الدالة $F(x,y,y')$ من المعادلة (9) كالآتي:

$$F(x,y,y') = \int_0^{y'}\int_0^{r} K(x,y,p)dpdr + y'\lambda(x,y) + \mu(x,y) \qquad (11)$$

حيث $\lambda: [a,b] \times R \to R$، $\mu: [a,b] \times R \to R$ دوال اختيارية، أما بالنسبة للدالة $F(x,y,y')$ فيجب أن تكون المعادلة (6) محققة.

٢ . ٣ . ١٠ . مثال محلول (٤٤):

أوجد الدوال القابلة للتكامل $F(x,y,y')$ التي تكون منحنياتها القصوى خطوطاً مستقيمة.

الحل:

نفرض أن $y(x) = \alpha x + \beta$، إذاً من المعادلة (4) نجد أن:

$$\phi(x,y,y') = y' \text{،} \qquad \Psi(x,y,y') = y - xy'$$

لكن $y''(x) = 0$ إذاً $G(x,y,y') = 0$، وعليه فإن المعادلة (10) تصبح كالآتي: $v(x,\alpha,\beta) = 1$.

ومن ثمَّ فإن معادلة (9) تأخذ الشكل:

$$K(x,y,y') = u(y', y - xy')$$

والحصول على الدوال $F(x,y,y')$ يتم بإجراء التكامل بالتجزئة كالآتي:

$$\int_0^{y'}\int_0^{r} K(x,y,p)\,dp\,dr = r\int_0^{r} K(x,y,p)\,dp\Big]_0^{y'} - \int_0^{y'} rK(x,y,r)\,dr$$

$$= \int_0^{r} (y-r)K(x,y,r)\,dr$$

ومن ثم فإن المعادلة (11) تصبح كالآتي:

$$F(x,y,y') = \int_0^{r} (y-r)u(r,y-xr)\,dr + y'\lambda(x,y) + \mu(x,y)$$

و $F(x,y,y')$ تحقق المعادلة (6).

والآن نفرض أن $z = y - xr$، إذاً:

$$u(r, y\text{-}xr) = u(r, z)$$

ومنها نجد أن: $u_x = u_z \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x} = -ru_z$ ، $u_y = u_z \cdot \dfrac{\partial z}{\partial y} = u_z$

وبالتعويض في (6) نجد أن: $\dfrac{\partial \lambda}{\partial x} = \dfrac{\partial \mu}{\partial y}$

وعليه توجد دالة $\omega: R^2 \to R$ بحيث إن $\lambda(x,y) = \omega_g$ ، $\mu(x,y) = \omega_x$

والتي تمثل قيوداً (شروطاً) على الدالتين λ, μ.

٢ . ٣ . ١١ . مثال محلول (٤٥):

إذا أثرت قوة $P = P(x,y)$ في جسيم كتلته ١ غم، فأزاحته مسافة قدرها y سم. فإنه حسب قانون نيوتن الثاني للحركة نجد أن $P = ma = 1\ .\ y'' = y''$.

والآن نفرض أن القوة P ناتجة من تفاضل طاقة الوضع (الطاقة الكامنة) V للجسيم، إذاً $V: R^2 \to R$ ، $P = \dfrac{\partial V(x,y)}{\partial y}$ ، ومن قاعدة هاملتون نجد أن معادلة حركة الجسيم تكون حلاً لمعادلة أولر . لاغرانج للدالي:

$$J[y]=\int_{x_0}^{x_1}\left[\frac{1}{2}y'^2+V(x,y)\right]dx$$

حيث: $y(x_1)=y_1\ ,\ y(x_0)=y_0$

وهذا يعني أن $y''-\dfrac{\partial V}{\partial y}=0$ وهذا هو قانون نيوتن الثاني مرة أخرى.

أما إذا كانت القوة P ليست مشتقة من الجهد، فأفرض أنها دالة، تعتمد على x,y,y' ولتكن G، إذاً معادلة الحركة هي:

$$G(x,y,y')=y''(x) \qquad (12)$$

وإذا كان الحل العام للمعادلة (12) معلوم، فيمكننا الحصول على عدد لا نهائي من الداليات التي تكون لها المعادلة (12) معادلة أولر . لاغرانج، ولتعيين دالة القوة G والتكامل المناظر لها التي لها المعادلة (12) معادلة أولر ـ لاغرانج نفرض أن $a,b,c:R^2\to R$ دوال من النوع ℓ، وأفرض أن:

$$G(x,y,y')=a(x,y)+b(x)y'+c(y)y'^2 \qquad (13)$$

وهذا ضروري لحل المعادلة (12). والآن اعتبر أن الدالة u في المعادلة (9) دالة اختيارية قابلة للتفاضل وغير صفرية، إذاً يمكن أن نفرض أن:

$$u(\alpha,\beta)=1$$

وعليه فإن:

$$K(x,y,y')=v^{-1}\left[x,\phi(x,y,y')\ ,\ \Psi(x,y,y')\right]$$

وباستخدام المعادلتين (10)، (13) نجد أن:

$$v[x,\phi(x,y,y'),\Psi(x,y,y')]=e^{\int b(x)dx+2\int c(y)dy}=\theta(x,y)$$

وعليه فإن معادلة (11) تصبح كالآتي:

$$F(x,y,y')=\frac{1}{2}\theta^{-1}(x,y)y'^2+\int a(x,y)\theta^{-1}(x,y)dy \qquad (14)$$

ومن ثم فإن المعادلة:

$$y'' = a(x,y) + b(x)y' + c(y)y'^2$$

تمثل معادلة أولر . لاغرانج للدالي:

$$J[y] = \int_a^b F(x, y, y')dx$$

حيث F معرفة بالمعادلة (14).

أما إذا كانت دالة القوة G مشتقة من الطاقة الكامنة، فإن:

$$G(x, y, y') = a(x, y) = \frac{\partial V(x, y)}{\partial y}$$

وتكون المعادلة (14) هي:

$$F(x, y, y') = \frac{1}{2}y'^2 + V(x, y)$$

وبذلك نصل مرة أخرى إلى قاعدة هاملتون كحالة خاصة.

٢ . ٣ . ١٢ . تمارين غير محلولة:

(١) أوجد معادلة أولر . لاغرانج لكل مما يأتي:

(أ) $$J[Z(x, y)] = \iint_R (Z_{xx} + Z_{yy})^2 dxdy$$

(ب) $$J[Z] = \iint_R (Z_x^2 + Z_y^2)dxdy$$

(ج) $$J[Z] = \iint_R \left[1 + \frac{1}{2}(Z_x^2 + Z_y^2)\right]dxdy$$

(د) $$J[u(x, y, z)] = \iiint_R \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}\,dxdydz$$

(هـ) $$J[u] = \iiint_R \left[u_x^2 + u_y^2 + u_z^2\right]dxdydz$$

(و) $$J[u]=\iiint\limits_R\left[u_x^2+u_y^2+u_z^2+2uf(x,y,z)\right]dxdydz$$

(٢) غشاء مهتز (vibrating membrance) ذو سطح متجانس (منتظم) يمكن التعبير عن معادلة سطحه بالشكل: $Z = Z(x,y,t)$ لكل $(x,y)\in R$ حيث R هو مسقط سطح الغشاء على R^2 الذي يصنع إزاحة عمودية للغشاء باتجاه (x,y) في الزمن t. فإذا كانت الطاقة الكامنة (طاقة الوضع) للغشاء المهتز اهتزازاً طفيفاً هي $V=\frac{k}{2}\iint\limits_R(Z_x^2+Z_y^2)dxdy$ ، حيث k ثابت يقيس الشد الحاصل في السطح نتيجة لذلك الاهتزاز، أما الطاقة الحركية فهي $T=\frac{m}{2A}\iint\limits_R Z_t^2dxdy$ حيث m الكتلة الكلية للسطح، A مساحة المنطقة R في R^2. فإذا كانت:

$$A(Z)=\int_{t_0}^{t_1}(T-V)dt=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\iint\limits_R\left[\rho Z_t^2-K(Z_x^2+Z_y^2)\right]dxdydt$$

حيث $\rho=\frac{m}{A}$ ، فأثبت أن معادلة حركة الغشاء هي:

$\rho Z_{tt}=K\,(Z_{xx}+Z_{yy})$ لكل $t\in[t_0,t_1]$، ولكل $(x,y)\in R$.

(٣) إذا كانت $y = y(x)$ منحنياً حرجاً (منحني توقف) للدالي:

$$J[y]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')dx$$

فأوجد $F(x,y,y')$ في الحالتين الآتيتين:

(أ) $y(x)=\sqrt{c^2-(x-d)^2}$ حيث c, d ثوابت.

(ب) $y''=-ky$، $0<K\in R$.

٢ . ٤ . مسائل التغيرات ذات نقاط أطراف متحركة:

درسنا في الفقرات السابقة مسائل التغيرات بنقط أطراف ثابتة، وسنركز اهتمامنا في هذه الفقرة على دراسة مسائل التغيرات بنقط أطراف متحركة (متغيرة) وبعض تطبيقاتها مثل معادلة هاملتون ـ جاكوبي، وقد ضمت هذه الفقرة أربعة بنود تناولنا في الأول منها مسائل التغيرات بالنسبة للدالي $J[y]$ عندما تتحرك نقطتي الأطراف على مستقيمين متوازيين، وعندما تتحرك نقطتي الأطراف على منحنيين، وتناولنا في البند الثاني مسائل التغيرات بنقط أطراف متحركة بالنسبة للداليات العديدة المتغيرات، أما في البند الثالث، فقد درست معادلة هاملتون ـ جاكوبي وبعض تطبيقاتها، وتناولنا في البند الأخير مسائل التغيرات بنقاط ركنية.

٢ . ٤ . ١ . مسائل التغيرات للدالي $J[y]$ بنقاط أطراف متحركة:

يضم هذا البند جزأين، تناولنا في الأول منها منحنيات القيم القصوى، إذا تحركت نقطتا الأطراف على مستقيمين متوازيين، وتناولنا في الثاني منحنيات القيم القصوى، عندما تتحرك نقطتا الأطراف على منحنيين.

٢ . ٤ . ٢ . أبسط المسائل بنقط أطراف متحركة:

يضم هذا الجزء تحديد الشروط اللازمة لوجود المنحنيات الحرجة للدالي $J[y]=\int_a^b F(x,y,y')dx$، عندما تتحرك نقطتا طرفي المنحنيات $y(x)$ على المستقيمين المتوازيين $x=b,\ x=a$، انظر شكل (٢ . ٩) ولتحديد تلك الشروط لاحظ أن:

$$\Delta J = J[y+\varepsilon\Delta y]-J[y]$$
$$=\int_a^b [F(x,y+\varepsilon\Delta y, y'+\varepsilon\Delta y')-F(x,y,y']dx$$

إذاً:

$$\delta J = \int_a^b (F_y \Delta y + F_{y'} \Delta y')dx \qquad (1)$$

وبالتكامل بالتجزئة نجد أن:

$$\delta J = \int_a^b (F_y - \frac{d}{dx} F_{y'})\Delta y(x)dx + [F_{y'} \Delta y(x)]_{x=a}^{x=b}$$

$$= \int_a^b (F_y - \frac{d}{dx} F_{y'})\Delta y(x)dx + F_{y'}|_{x=b} \Delta y(b) - F_{y'}|_{x=a} \Delta y(a) \qquad (2)$$

وعندما $\Delta y(a) = \Delta y(b) = 0$، نجد أن $\delta J = 0$ يعني أن:

$$\int_a^b (F_y - \frac{d}{dx} F_{y'})\Delta y(x)dx = 0$$

ومن ثمَّ فإن: $F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$، لكل $a < x < b$

إذاً لكي يكون المنحني $y(x)$ حلاً لمسألة التغيرات بنقاط أطراف متحركة، يجب أن يكون $y(x)$ منحني قيمة قصوى للدالي $J[y]$، وهذا يعني أن $y(x)$ يجب أن يحقق معادلة أولر . لاغرانج (3). لكن إذا كان $y(x)$ قيمة قصوى للتكامل في (2) فإن $\delta J=0$ يعني أن:

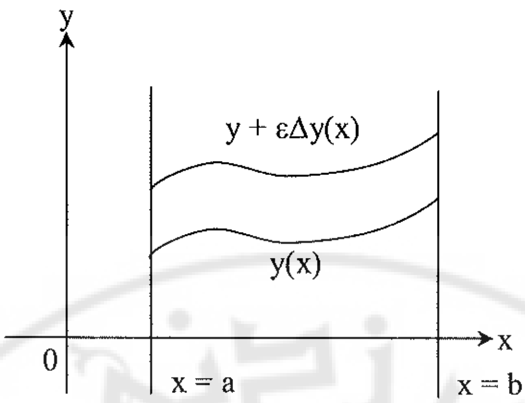
$$F_{y'}|_{x=b} \Delta y(b) - F_{y'}|_{x=a} \Delta y(a) = 0$$

ومنها نجد أن:

$$F_{y'}|_{x=a} \Delta y(a) = 0 \, , F_{y'}|_{x=b} \Delta y(b) = 0 \qquad (4)$$

لأن $\Delta y(x)$ دالة اختيارية غير صفرية عند a, b.

إذاً لحل مسألة التغيرات بنقط أطراف متغيرة، يجب أولاً حل معادلة أولر . لاغرانج ثم استخدام الشرط (4) لتعيين الثوابت الاختيارية.



الشكل (٢ . ٩)

٢ . ٤ . ٣ . مثال محلول (٤٦)

أوجد منحنيات القيم القصوى للدالي:

$J[y]=\int_0^1 y'^2dx$ ، حيث $y(0)$، $y(1)$ ليست ثابتة.

الحل:

بما أن معادلة أولر . لاغرانج للدالي $J[y]$، هي $y''=0$ إذاً $y=ax+b$.

ولكي نوجد b, a نستخدم الشرط (4)، وهو:

$$F_{y'}|_{x=1}=0\,,\,F_{y'}|_{x=0}=0$$

لكن $F_{y'}=2y'=0$، يعني أن $y=b$ هو المنحني الحرج للدالي $J[y]$.

٢ . ٤ . ٤ . ملحوظة مهمة:

إذا كان $y(b),\ y(a)=A$ متغيرة، فإن وجود قيمة قصوى للدالي $J[y]$ يعني أن:

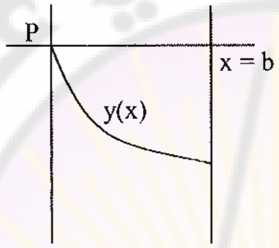
$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}=0$ لكل $a\le x<b$ و $F_{y'}|_{x=b}=0$

٢ . ٤ . ٥ . مثال محلول (٤٧):

انزلق جسم ثقيل من النقطة $P(a, A)$ إلى أسفل على منحنٍ في مستوٍ رأسي. ما شكل المنحني الذي يحدده الجسم ليصل إلى الخط الرأسي $x = b$، $b \neq a$ في أقل زمن ممكن.

الحل:

نفرض أن نقطة الانطلاق منطبقة على نقطة الأصل للنظام الإحداثي xy كما في شكل (٢ . ١٠).



الشكل (٢ . ١٠)

إذاً: $$v = \frac{ds}{dt} \Rightarrow v = \sqrt{1 + y'^2}\,\frac{dx}{dt}$$

وعليه فإن: $$dt = \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{v}dx$$

ولكن $\frac{1}{2}mv^2 = mgy$، حيث g ثابت الجاذبية الأرضية.

إذاً $v = \sqrt{2gy}$، وعليه فإن $dt = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}$، ومن ثمَّ فإن $t = \int \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}dx$

وعليه فإن $F = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}$، ومنها نجد أن معادلة أولر . لاغرانج $F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0$ تأخذ الشكل:

$$F_{y'}\Big|_{x=b}=0\ ,\ \frac{1}{\sqrt{y(1+y'^2)}}=C \qquad (1)$$

وحيث إن الحل العام لمعادلة أولر . لاغرانج انظر الفقرة (٢ . ٢ . ٥ . ٢) هو:

$$y = r\,(1 - \cos\theta)\ ,\ x = r(\theta - \sin\theta)$$

وهو منحنٍ دحروجي (cycloid). إذاً لتحديد r نستخدم الشرط $F_{y'}|_{x=b} = 0$ فنجد أن:

$$\frac{y'}{\sqrt{2gy(1+y'^2)}}\Big|_{x=b}=0$$

وعليه فإن $y'|_{x=b} = 0$، ومن ثمَّ فإن المماس للمنحني $y(x)$ عند طرفه الأيمن مماس أفقي، وهذا يعني أن $\theta = \pi$ عندما $x = b$.

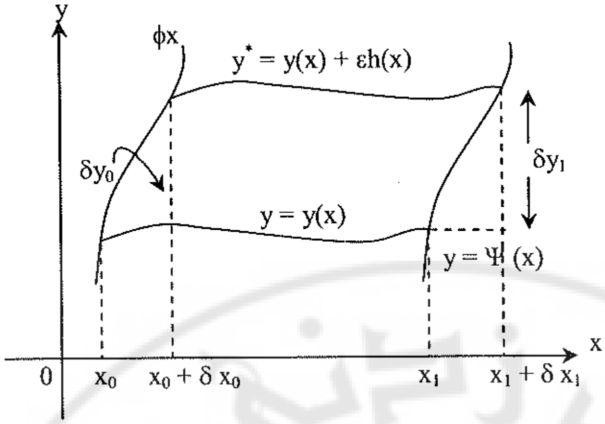
إذاً: $b = r(\pi - \sin\pi) = r\pi$

وعليه فإن: $r = \frac{b}{\pi}$ ، ومن ثمَّ فإن المنحني المطلوب هو:

$$y=\frac{b}{\pi}(1-\cos\theta)\ ،\ x=\frac{b}{\pi}(\theta-\sin\theta)$$

٢ . ٤ . ٦ . المنحنيات الحرجة للدالي $J[y]$ عندما تتحرك نقطتا الأطراف على منحنيين:

لتحديد الشروط اللازمة لوجود منحنيات قيم قصوى للدالي $J[y]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')dx$ في هذه الحالة، نفرض أن $(x_0,\ y_0)$، $(x_1,\ y_1)$ تمثلان نقطتي النهاية للمنحني $y(x)$، وأن $(x_0,\ y_0)$ تتحرك على المنحني $y = \phi(x)$ بينما تتحرك (x_1,y_1) على المنحني $y = \Psi(x)$، ولنفرض أن $(x_0 + \delta x_0, y_0 + \delta y_0)$، $(x_1 + \delta x_1, y_1 + \delta y_1)$ تمثلان نقطتي النهاية للمنحني $y^* = y(x) + \varepsilon h(x)$ انظر شكل (٢ . ١١).



الشكل (٢ . ١١)

إذاً:

$$\Delta J[y] = J[y+\varepsilon h] - J[y]$$

$$= \int_{x_0+\delta x_0}^{x_1+\delta x_1} F(x, y+\varepsilon h, y'+\varepsilon h')dx - \int_{x_0}^{x_1} F(x,y,y').\,dx$$

وعليه فإن:

$$\Delta J[y] = \int_{x_0}^{x_1} \left[F(x, y+\varepsilon h, y'+\varepsilon h') - F(x,y,y')\right]dx$$

$$+ \int_{x_1}^{x_1+\delta x_1} F(x, y+\varepsilon h, y'+\varepsilon h')dx - \int_{x_0}^{x_0+\delta x_0} F(x, y+\varepsilon h, y'+\varepsilon h')dx$$

ومن ثمَّ فإن:

$$\delta J[y] = \int_{x_0}^{x_1} (F_y - \frac{d}{dx}F_{y'})h(x)dx + \left[F_{y'}h(x) + F\delta(x)\right]_{x_0}^{x_1}$$

لكن من شكل (٢ . ١١) نجد أن:

$h(x_1) = \delta y_1 - y'(x_1)\,\delta x_1$ ،$h(x_0) = \delta y_0 - y'(x_0)\,\delta x_0$

ومن ثمَّ يكون:

$$\delta J[y]=\int_{x_0}^{x_1}(F_y-\frac{d}{dx}F_{y'})h(x)dx+\left[F_{y'}\delta y\right]_{x_0}^{x_1}+(F-F_{y'}y')\delta x\Big|_{x_0}^{x_1} \quad (1)$$

وتسمى المعادلة (1) التغير العام (general variation) للدالي $J[y]$.

وعندما يكون للدالي $J[y]$ قيمة قصوى على $y(x)$ نجد أن $\delta J = 0$ وعليه فإن:

$$\int_{x_0}^{x_1}(F_y-\frac{d}{dx}F_{y'})h(x)dx+\left[F_{y'}\delta y\right]_{x_0}^{x_1}+(F-F_{y'}y')\delta x\Big|_{x_0}^{x_1}=0$$

لكن: $\delta y_0=(\phi^{(1)}(x_0)+\varepsilon_0)\delta x_0$ ، $\delta y_1=(\varphi^{(1)}(x_1)+\varepsilon_1)\delta x_1$

و: $\varepsilon_0\to 0$ عندما $\delta x_0\to 0$ ، $\varepsilon_1\to 0$ عندما $\delta x_1\to 0$

ومن ثمَّ فإن: $F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}=0$ ،

$$\left[F_{y'}\Psi'+F-y'F_{y'}\right]_{x=x_1}\delta x_1-(F_{y'}\phi'+F-y'F_{y'})\Big|_{x=x_0}\delta x_0=0 \quad (2)$$

وحيث إن $\delta x_1, \delta x_0$ مستقلين بعضهما عن بعض، إذاً (2) تعني أن:

$$F_{y'}\phi'+F-y'F_{y'}\Big|_{x=x_0}=0$$

$$F_{y'}\Psi'+F-y'F_{y'}\Big|_{x=x_1}=0$$

وعليه فإن:

$$\left.\begin{aligned}F+(\phi'-y')F_{y'}\Big|_{x=x_0}&=0\\ F+(\Psi'-y')F_{y'}\Big|_{x=x_1}&=0\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

والتي يطلق عليها الشروط الاعتراضية (Transversality Conditions). إذاً لحل كل مسائل التغيرات من هذا النوع، يجب أن تحل معادلة أولر . لاغرانج $F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}=0$ ، ثم تستخدم الشروط الاعتراضية (3) لإيجاد الثوابت الواردة في حل معادلة أولر . لاغرانج.

٢ . ٤ . ٧ . ملاحظة:

للتعبير عن المعادلة (3) بالشكل القانوني، نفرض أن $P = F_{y'}$، $H = py' - F$، إذاً:

$$\delta J = \int_{x_0}^{x_1}(F_y - \frac{d}{dx}F_{y'})h(x)dx + \left[P\delta y - H\delta x\right]_{x=x_0}^{x=x_1} \qquad (4)$$

وإذا كان للدالي $J[y]$ قيمة قصوى على $y(x)$، فإن $y(x)$ يجب أن تحقق الشروط الآتية:

$$\left.\begin{aligned} x_0 < x < x_1, F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0 \\ P\delta y - H\delta x\Big]_{x=x_0}^{x=x_1} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

وإذا كان x_0, x_1ثابتين، فإن $\delta y = 0, \delta x = 0$ وعليه فإن (5) تصبح كالآتي:

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0 \text{ ، } a \le x \le b$$

أما إذا كانت $x = a$، $x = b$، فإن $\delta x = 0$، $\delta y = h(x)$.

٢ . ٤ . ٨ . مثال محلول (٤٨):

أوجد الشروط الاعتراضية للدالي:

$$J[y] = \int_a^b A(x,y)\sqrt{1+y'^2}dx$$

الحل:

بما أن:

$$F(x,y,z) = A(x)\sqrt{1+y'^2}$$

إذاً:

$$F_{y'} = \frac{A(x,y)y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{F(x,y,y')y'}{1+y'^2}$$

وعليه فإن الشروط الاعتراضية هي:

$$F + (\phi' - y')F_{y'} = 0 \Rightarrow \frac{(1+y'\phi')F}{1+y'^2} = 0$$

$$F + (\Psi' - y')F_{y'} = 0 \Rightarrow \frac{(1+y'\Psi')F}{1+y'^2} = 0$$

ومنها نجد أن: $y'\phi' = -1$, $y'\Psi' = -1$

ومن ثمَّ فإن شرطي الاعتراض في هذه الحالة هي شروط التعامد.

٢ . ٤ . ٩ . مثال محلول (٤٩):

ادرس منحنيات القيم القصوى للدالي:

$$J[y] = \int_0^b \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y}dx \text{ ، } y(0) = 0 \text{ ،} y(b) = b - 5$$

الحل:

بما أن: $F = F(y, y')$

إذاً التكامل الأول لمعادلة أولر . لاغرانج هو: $F - y'F_{y'} = c_1$

وعليه فإن:
$$\frac{1}{y\sqrt{1+y'^2}} = c_1$$

ومنها نجد أن:
$$y\sqrt{1+y'^2} = \frac{1}{c_1} = c$$

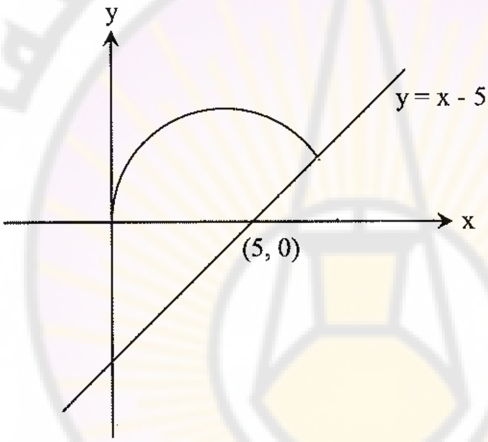
ومن ثمَّ فإن:
$$y' = \frac{1}{y}\sqrt{c^2 - y^2}$$

وعليه فإن:
$$(c^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}} y dy = dx$$

إذاً: $$(x-a)^2+y^2=c^2$$

لكن: $y(0)=0$، إذاً $a=c$.

وحيث إن شرط الاعتراض للدالي $J[y]$ يتحول إلى شرط التعامد حسب المثال المحلول (٤٨) الفقرة (٢ . ٤ . ٨)، إذاً الخط المستقيم $y(b)=b-5$ يجب أن يكون قطراً في الدائرة، ومن ثم فإن مركز تلك الدائرة يقع على النقطة $(5,\ 0)$ لأن المستقيم $y(b)=b-5$ يقطع محور السينات. إذاً $(x-5)^2+y^2=25$، وعليه فإن $y=\pm\sqrt{10x-x^2}$ ومن ثمَّ فإنه يمكن الحصول على القيم القصوى للدالي $J[y]$، على أقواس من الدائرة $y=-\sqrt{10x-x^2}$ ، $y=\sqrt{10x-x^2}$ شكل (٢ . ١٢).



الشكل (٢ . ١٢)

٢ . ٤ . ١٠ . ملحوظة مهمة:

(أ) إذا كانت $A(x_0,\ \ y_0)$ ثابتة وكانت نقطة الحدود $B(x_1,y_1)$ تتحرك على خط رأسي $x=x_1$، فإن $\delta x_1=0$، ومن ثمَّ فإن الشرط الضروري لوجود قيم قصوى هو: $F_y-\dfrac{d}{dx}F_{y'}=0$ ، $F_{y'}\big|_{x=x_1}=0$.

(ب) إذا كانت $A(x_0, \ y_0)$ ثابتة ونقطة الحدود $B(x_1, \ y_1)$ تتحرك على خط مستقيم أفقي $y = y_1$، فإن الشرط اللازم لوجود قيم قصوى هو:

$$(F - y'F_{y'})\Big|_{x=x_1} = 0 \ ; \ F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0$$

٢ . ٤ . ١١ . داليات عديدة المتغيرات:

سنركز اهتمامنا في هذا الجزء على منحنيات القيم القصوى للدالي $J[y,z] = \int_{x_0}^{x_1} F(x,y,z,y',z')dx$، إذا وقعت نقطتا النهاية $A(x_0, \ y_0, \ z_0)$، $B(x_1, y_1, z_1)$ على سطحين، ثم نعمم ذلك بالنسبة للداليات $J[y_1,\ldots,y_n]$.

ولإيجاد منحنٍ من بين كل المنحنيات التي تقع نقطتا نهايتها على السطحين $\phi(y,z)$، $\Psi(y,z)$، يجعل الدالي $J[y,z]$ يملك قيماً قصوى، لاحظ أن:

$$\Delta J = \int_{x_0+\delta x_0}^{x_1+\delta x_1} F(x, y+\delta y, z+\delta z, y'+\delta y', z'+\delta z')dx - \int_{x_0}^{x_1} F(x,y,z,y',z')dx$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} F(x, y+\delta y, z+\delta z, y'+\delta y', z'+\delta z')dx - \int_{x_0}^{x_1} F(x,y,z,y',z')dx$$

$$+ \int_{x_1}^{x_1+\delta x_1} F(x, y+\delta y, z+\delta z, y'+\delta y', z'+\delta z')dx$$

$$- \int_{x_1}^{x_1+\delta x_1} F(x, y+\delta y, z+\delta z, y'+\delta y', z'+\delta z')dx$$

إذاً:

$$\delta J = \int_{x_0}^{x_1} \left[(F_y - \frac{d}{dx}F_{y'})\delta y + (F_z - \frac{d}{dx}F_{z'})\delta z \right] dx + \left[F\delta x + F_{y'}\delta y + F_{z'}\delta z \right]_{x_0}^{x_1}$$

وعليه فإن $\delta J = 0$ يعني أن:

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0 \qquad (1)$$

$$F_z - \frac{d}{dx} F_{z'} = 0 \qquad (2)$$

$$\left[F\delta x + F_{y'}\delta y + F_{z'}\delta z \right]_{x_0}^{x_1} = 0 \qquad (3)$$

وإذا فرضنا أن $y(x_i) = y_i$، $z(x_i) = z_i$، $i = 0,1$ نجد أن:

$$\delta y|_{x=x_1} = \delta y_1 - y'(x_1)\,\delta x_1 \quad ، \delta y|_{x=x_0} = \delta y_0 - y'(x_0)\,\delta x_0$$

$$\delta z|_{x=x_1} = \delta z_1 - z'(x_1)\,\delta x_1 \quad ، \delta z|_{x=x_0} = \delta z_0 - z'(x_0)\,\delta x_0$$

وعليه فإن:

$$F - y'F_{y'} - z'F_{z'}|_{x=x_0}\ \delta x_0 + F_{y'}|_{x=x_0}\ \delta y_0 + F_{z'}|_{x=x_0}\ \delta z_0 = 0 \qquad (4)$$

$$F - y'F_{y'} - z'F_{z'}|_{x=x_1}\ \delta x_1 + F_{y'}|_{x=x_1}\ \delta y_1 + F_{z'}|_{x=x_1}\ \delta z_1 = 0 \qquad (5)$$

لكن $A(x_0, y_0, z_0)$ تقع على السطح $z = \phi(x,y)$ بينما $B(x_1,y_1,z_1)$ تقع على السطح $z = \Psi\,(x,y)$، إذاً:

$$\left.\begin{aligned} \delta z_0 &= \phi'_{x_0}\delta x_0 + \phi'_{y_0}\delta y_0 \\ \delta z_1 &= \phi'_{x_1}\delta x_1 + \phi'_{y_1}\delta y_1 \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

ومن (4)، (5)، (6) نجد أن:

$$F - y'F_y - z'F_{z'}|_{x=x_0}\ \delta x_0 + F_y|_{x=x_0}\ \delta y_0 + F_{z'}|_{x=x_0}\ (\phi'_{x_0}\delta x_0 + \phi'_{y_0}\delta y_0) = 0$$

$$F - y'F_y - z'F_{z'}|_{x=x_1}\ \delta x_1 + F_y|_{x=x_1}\ \delta y_1 + F_{z'}|_{x=x_1}\ (\phi'_{x_1}\delta x_1 + \phi'_{y_1}\delta y_1) = 0$$

وعليه فإن:

$$\left[F - y'F_{y'} + (\phi'_{x_0} - z')F_{z'} \right]\delta x_0 + (F_{y'} + \phi'_{y_0}.F_{z'})\delta y_0\Big|_{x=x_0} = 0$$

$$\left[F - y'F_{y'} + (\phi'_{x_1} - z')F_{z'} \right]\delta x_1 + (F_{y'} + \phi'_{y_1}.F_{z'})\delta y_1\Big|_{x=x_1} = 0$$

وحيث إن δx_0, δy_0 مستقلة بعضها عن بعض، وكذلك δx_1، δy_1 مستقلة بعضها عن بعض أيضاً، إذاً:

$$F - y'F_{y'} + (\phi'_{x_0} - z')F_{z'} = 0 \qquad (7)$$

$$F_{y'} + \phi'_{y_0} F_{z'} = 0 \qquad (8)$$

$$F - y'F_{y'} + (\Psi'_{x_0} - z')F_{z'} = 0 \qquad (9)$$

$$F_{y'} + \Psi'_{y_1} F_{z'} = 0 \qquad (10)$$

وهي الشروط الاعتراضية التي يمكن منها حساب الثوابت الأربعة التي تظهر في الحل العام لمعادلتي أولر . لاغرانج (1)، (2).

٢ . ٤ . ١١ . ١ . ملاحظة أساسية:

(أ) إذا كانت $A(x_0, y_0, z_0)$ تقع على المنحني $y_0 = \phi(x_0)$، $z_0 = \Psi(x_0)$ و $B(x_1,y,z_1)$ تقع على المنحني $y_1 = \phi(x_1)$، $z_1 = \Psi(x_1)$. فإن:

$$\delta y_0 = \phi'(x_0)\,\delta x_0 \quad ، \quad \delta z_0 = \Psi'(x_0)\delta x_0$$

$$\delta y_1 = \phi'(x_1)\,\delta x_1 \quad ، \quad \delta z_1 = \Psi'(x_1)\delta x_1$$

وتصبح الشروط الاعتراضية كالآتي:

$$F + (\phi - y')F_{y'} + (\Psi' - z')F_{z'}\,|_{x=x_0} = 0$$
$$F + (\phi - y')F_{y'} + (\Psi' - z')F_{z'}\,|_{x=x_1} = 0$$

(ب) إذا كان $J[y_1,\ldots,y_n] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1,\ldots,y_n, y'_1,\ldots,y'_n)dx$، وكانت $A(x_0, y_{10}, y_{20},\ldots,,\ldots,y_{n0})$ ، $B(x_1, y_{21},\ldots,y_{n1})$ نقاط متحركة، فإن الشروط الاعتراضية هي:

$$(F - \sum_{i=1}^{n} y'_i F_{y'_i})\,|_{x=x_0}\ \delta x_0 + \sum_{i=1}^{n} F_{y'_i}\,|_{x=x_0}\ \delta y_{i0} = 0$$

$$(F-\sum_{i=1}^{n} y_i' F_{y_i'})|_{x=x_1}\ \delta x_1 + \sum_{i=1}^{n} F_{y_i'}\ |_{x=x_0}\ \delta y_{i1} = 0$$

٢ . ٤ . ١٢ . مثال محلول (٥٠):

أوجد الشروط الاعتراضية للدالي التالي:

$$J[y,z]=\int_{x_0}^{x_1} A(x,y,z)\sqrt{1+y'^2+z'^2}\,dx$$

إذا كان $z_1 = \phi(x_1, y_1)$.

الحل:

الشروط الاعتراضية هي:

$$F - y'F_{y'} + (\phi'_x - z')\ F_{z'}|_{x=x_1} = 0 \Rightarrow 1 + \phi'_{x_1} z' = 0$$

$$(F_{y'} + F_{x'}\ \phi'_y)|_{\ x=x_1} = 0 \Rightarrow y' + z'\ \phi'_{y_1} = 0$$

ومنها نجد أن $\dfrac{1}{\phi'_{x_1}} = \dfrac{y'}{\phi'_{y_1}} = \dfrac{z'}{-1}$ وهي شروط تعامد منحني القيم القصوى والسطح $Z = \phi(x,y)$.

٢ . ٤ . ١٣ . مثال محلول (٥١):

أوجد أقل بعد بين السطحين $Z = \phi(x,y)$، $Z = \psi(x,y)$.

الحل:

بما أن: $L = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2+z'^2}\,dx$, $A(x_0,\ \ y_0,\ \ z_0)$ تحقق العلاقة $Z_0 = \phi(x_0, y_0)$، والنقطة $B\ (x_1,y_1,z_1)$ تحقق العلاقة $Z_1=\psi(x_1,y_1)$، ومن ثم فإن معادلتين أولر . لاغرانج هما $y''F_{y'y'} + z''F_{y'z'} = 0$، $y''F_{y'z'} + z''F_{z'z'} = 0$ لكن $F_{y'y'}F_{z'z'} - (F_{y'z'})^2 \neq 0$ إذاً $z'' = 0,\ y'' = 0$ وعليه فإن: $y = c_1\ x + c_2$، $z = c_3\ x + c_4$، وهي تمثل عائلة مستقيمات في الفضاء. لكن الشروط الاعتراضية

للدالي L هي شروط تعامد حسب المثال المحلول (٥٠) في الفقرة (٢ . ٤ . ١٢)، إذاً يمكن الحصول على القيم القصوى على المستقيمات العمودية على السطح $Z = \phi(x,y)$ عند $A(x_0, y_0, z_0)$، والعمودية على السطح $Z = \psi(x,y)$ عند $B(x_1, y_1, z_1)$.

٢ . ٤ . ١٤ . مثال محلول (٥٢):

أوجد منحنيات القيم القصوى للدالي $J[y,z] = \int_{x_0}^{x_1} (y'^2 + z'^2 + 2yz)dx$،

حيث $z(0) = 0, y(0) = 0$ بينما تتحرك $B(x_1,y_1,z_1)$ في المستوى $x = x_1$.

الحل:

بما أن معادلتي أولر . لاغرانج للدالي $J[y,z]$ هما:

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0 \Rightarrow y'' - z = 0 \qquad (1)$$

$$F_z - \frac{d}{dx} F_{z'} = 0 \Rightarrow z'' - y = 0 \qquad (2)$$

وبحل المعادلتين (1) و (2) نجد أن:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x$$
$$z = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - C_3 \cos x - C_4 \sin x$$

لكن $y(0) = 0$، $z(0) = 0$، إذاً:

$$C_1 + C_2 + C_3 = 0$$
$$C_1 + C_2 - C_3 = 0$$

وعليه فإن $C_1 + C_2 = 0$، ومن ثمّ فإن $C_1 = -C_2$ لكن الشرط الاعتراضي عند نقطة الحدود المتحركة هو:

$$(F - y'F_{y'} - z'F_{z'})\Big|_{x=x_1} \delta_{x_1} + F_{y'}\Big|_{x=x_1} \delta_{y_1} + F_{z'}\Big|_{x=x_1} \delta_{z_1} = 0$$

والنقطة $B(x_1, y_1, z_1)$ تتحرك في المستوى $x = x_1$، إذا $\delta_{x1} = 0$ بينما كل من δ_{y1}، δ_{z1} اختيارية، وعليه فإن $F_{y'}\big|_{x=x_1} = 0$ و $F_{z'}\big|_{x=x_1} = 0$.

لكن $F_{y'} = 2y'$ و $F_{z'} = 2z'$، إذاً $y'(x_1) = 0$، $z'(x_1) = 0$

وعليه فإن:

$$C_1e^{x_1} - C_2e^{-x_2} - C_3\cos x_1 + C_4\sin x_1 = 0 \qquad (3)$$

$$C_1e^{x_1} - C_2e^{-x_2} + C_3\cos x_1 - C_4\sin x_1 = 0 \qquad (4)$$

وبجمع (3) و (4) ينتج أن:

$$C_1e^{x_1} - C_2e^{-x_2} = 0$$

لكن $C_2 = - C_1$ إذاً $C_1(e^{x_1} + e^{-x_2}) = 0$، وعليه فإن $C_1 = 0$، ومن ثمَّ فإن $C_2 = 0$. لكن $C_3 = C_1 + C_2$، إذاً $C_3 = 0$ وعليه فإن $C_4 \cos x_{1==0}$.

فإذا كان $\cos x_1 \neq 0$، فإن $C_4 = 0$، وفي هذه الحالة تكون منحنيات القيم القصوى هي المستقيم $z = 0$، $y = 0$.

أما إذا كان $\cos x_1 = 0$، فإن $x_1 = \frac{\pi}{2} + n\pi$، حيث n عدد صحيح، وعليه فإن C_4 ثابت اختياري، ومن ثمَّ فإن منحنيات القيم القصوى هي:

$$z = - C_4 \sin x \ , \ y = C_4 \sin x$$

٢ . ٤ . ١٥ . معادلة هاملتون . جاكوبي: Hamilton – Jacobi Equation

في هذه الفقرة، سنركز اهتمامنا على اشتقاق معادلة هاملتون جاكوبي، وبعض تطبيقاتها. وللوصول إلى هدفنا، نعتبر أن:

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx \qquad (1)$$

معرفاً على المنحنيات الواقعة في منطقة R، وإن للدالي $J[y]$ قيمة قصوى واحدة على المنحني المار بالنقطتين A, B، ولنُسمِّ التكامل $S = \int_{x_0}^{x_1} F(x,y,y')dx$ والمحسوب على منحني القيم القصوى الواصل بين $A(x_0, y_1^0)$، $B(x_1, y_1^1)$ أقصر بعد (geodetic distance) بين A، B، فمن الواضح أن S دالة وحيدة القيمة (single valued function) للإحداثيات A، B.

٢ . ٤ . ١٦ . مثال محلول (٥٣):

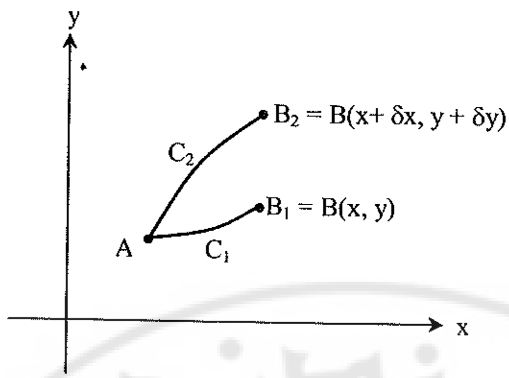
(أ) إذا كانت J تمثل طول القوس، فإن S تمثل البعد بين B، A.

(ب) إذا كانت $T = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}{v} dt$، $v = v(x,y,z,x',y',z')$ سرعة الجسم عند أي نقطة والتي تعتمد على إحداثيات تلك النقطة واتجاهها، فإن S تمثل الزمن الذي يستغرقه الجسم للانتقال من A إلى B.

والآن لنفرض أن $A = (a, y_a)$ نقطة ثابتة بينما، $B = (x, y)$ نقطة متحركة إذاً $S = S(x, y)$ دالة معتمدة على B فقط. ولإيجاد المعادلة التفاضلية التي تكون S حلاً لها، يجب أن نحسب $\frac{\partial S}{\partial x}, \frac{\partial S}{\partial y}$ من العلاقة:

$$\Delta S = S(x + \delta x, y + \delta y)$$

لكن $\Delta J = J[c_2] - J[c_1]$، حيث c_1 هو منحني القيم القصوى الواصل بين $A(a, y_a)$، $B = (x,y)$، أما c_2 فهو منحني القيم القصوى الواصل بين A، $B(x+\delta x, y+\delta y)$، شكل (٢ . ١٣). إذاً $ds = \delta J$. لكن $\delta J = P\delta y - H\delta x\Big|_{x=a}^{x=b}$، حسب العلاقة (5) في الفقرة (٢ . ٤ . ٧) حيث H دالة هاملتون.



شكل (٢ . ١٣)

إذاً:

$$\frac{\partial S}{\partial x} = -H, \frac{\partial S}{\partial y} = P \qquad (1)$$

حيث $P = P(x,y) = F_{y'}$، $H = H(x,y,p(x,y)) = P_{y'} - F$ ومن (1) نجد أن S يجب أن تحقق العلاقة الآتية:

$$\frac{\partial S}{\partial x} + H(x, y, \frac{\partial S}{\partial y}) = 0 \qquad (2)$$

والتي يطلق عليها معادلة هاملتون . جاكوبي.

وسنورد الآن العديد من المبرهنات الهامة ذات التطبيقات العملية الواسعة.

٢ . ٤ . ١٧ . مبرهنة (١):

إذا كانت $S = S(x,y,\alpha)$ حلاً لمعادلة هاملتون . جاكوبي، حيث α ثابت التكامل عند الحل، فإن $\frac{\partial S}{\partial \alpha}$ ثابت على كل المنحنيات الحرجة (منحنيات القيم القصوى)، $y = y(x)$ للدالي $J[y]$.

البرهان:

يكفي أن نثبت أن $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial S}{\partial \alpha}\right)=0$ ، ولإثبات ذلك، لاحظ أن:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial S}{\partial \alpha}\right)=\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial \alpha}+\frac{\partial^2 S}{\partial y \partial \alpha}\cdot\frac{dy}{dx} \qquad (3)$$

لكن تفاضل الطرف (2) بالنسبة للوسيط α هو:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial \alpha}=-\frac{\partial H}{\partial P}\cdot\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha \partial y} \qquad (4)$$

إذاً من (3)، (4) نجد أن:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial S}{\partial \alpha}\right)=\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial \alpha}\left(\frac{dy}{dx}-\frac{\partial H}{\partial P}\right)$$

لكن $\frac{\partial H}{\partial P}=\frac{dy}{dx}$، إذاً $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial S}{\partial \alpha}\right)=0$ ، وعليه فإن $\frac{\partial S}{\partial \alpha}=\beta$، حيث β ثابت.

٢ . ٤ . ١٨ . مبرهنة (٢): (مبرهنة جاكوبي)

إذا كان $S = S(x,y,\alpha)$ حلاً لمعادلة هاملتون . جاكوبي، وكان $\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha \partial y}\neq 0$ ،

فإن $y = y(x,\alpha,\beta)$، حيث β ثابت معرف بالعلاقة $\frac{\partial S}{\partial \alpha}=\beta$، $P=\frac{\partial S}{\partial y}$ حل عام للنظام القانوني:

$$\frac{\partial H}{\partial P}=\frac{dy}{dx} \text{ ، } \frac{dP}{dx}=-\frac{\partial H}{\partial y}$$

البرهان:

بما أن $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial S}{\partial \alpha}\right)=\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial \alpha}+\frac{\partial^2 S}{\partial y \partial \alpha}\cdot\frac{dy}{dx}$ ، $\frac{\partial^2 S}{\partial y \partial \alpha}\neq 0$ ، $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial S}{\partial \alpha}\right)=0$ حسب مبرهنة (1) في (٢ . ٤ . ١٧).

إذاً: $\frac{\partial H}{\partial P} = \frac{dy}{dx}$. لكن $P = \frac{\partial S}{\partial y}$ ، إذاً:

$$\frac{dP}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 S}{\partial^2 y} \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$= \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial H}{\partial P} \qquad (5)$$

لكن $\frac{\partial s}{\partial x} + H(x, y, \frac{\partial s}{\partial y}) = 0$ ، إذاً بالتفاضل بالنسبة إلى y، نجد أن:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} = \frac{-\partial H}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial P} \cdot \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} \qquad (6)$$

ومن (5) ، (6) نجد أن:

$$\frac{dP}{dx} = -\frac{\partial H}{\partial y}$$

٢ . ٤ . ١٩ . ملاحظة:

إذا كان:

$$S = S(x, y_1, \ldots y_n) \text{ ، } J[y_1, \ldots, y_n] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n')dx$$

فإن معادلة هاملتون . جاكوبي هي:

$$\frac{\partial S}{\partial x} + H(x, y_1, \ldots, y_n, \frac{\partial S}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial y_n}) = 0$$

$$P_i' = -\frac{\partial H}{\partial y_i} \quad y_i' = -\frac{\partial H}{\partial P_i} \text{ ، } P_i = F_{y_i'} \text{ ، } \frac{\partial S}{\partial y_i} = P_i \text{ ، } \frac{\partial S}{\partial x} = -H$$

٢ . ٤ . ٢٠ . مثال محلول (٥٤):

حل معادلة هاملتون . جاكوبي المناظرة للدالي:

$$J[y]=\int_a^b y'^2dx$$

الحل:

بما أن $F(x,y,y')=y'^2$، $P=F_{y'}=2y'$، إذاً دالة هاملتون هي:

$$H(x,y,P)=Py'-F=\frac{1}{2}P^2-\frac{1}{4}P^2=\frac{1}{4}P^2$$

وعليه فإن معادلة هاملتون . جاكوبي هي:

$$\frac{\partial S}{\partial x}+\frac{1}{4}\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2=0$$

وهي معادلة تفاضلية جزئية غير متجانسة من المرتبة الأولى، ولحلها نفرض أن:

$S=u(x)+v(y)$، إذاً $\frac{du}{dx}+\frac{1}{4}\left(\frac{dv}{dy}\right)^2=0$، وعليه فإن، $\frac{du}{dx}=c$، لأن $\frac{du}{dx}$

لا تعتمد على y و $\left(\frac{dv}{dy}\right)^2$ لا يعتمد على x. إذاً $u=-\alpha^2x$، حيث α ثابت، وعليه

فإن $-\alpha^2+\frac{1}{4}\left(\frac{dv}{dy}\right)^2=0$، ومن ثمّ فإن، $\frac{dv}{dy}=2\alpha$، وعليه فإن $v=2\alpha y+\beta$،

إذاً $S=-\alpha^2x+2\alpha y+\beta$ حل لمعادلة هاملتون جاكوبي. لكن من مبرهنة (١) في

(٢ . ٤ . ١٧)، نجد أن $\frac{\partial S}{\partial \alpha}=K$، إذاً $y=\alpha x+a$، $\frac{\partial S}{\partial \beta}=K_1$ وعليه فإن منحني

القيم القصوى هي خط مستقيم.

٢ . ٤ . ٢١ . مثال محلول (٥٥):

أوجد معادلة أقصر مسار على سطح فيه:

$$dS=\sqrt{[\phi_1(x)+\phi_2(y)](dx^2+dy^2)}$$

الحل:

بما أن: $J[y]=\int_a^b \sqrt{[\phi_1(x)+\phi_2(y)](1+y'^2)}dx$

إذاً: $H=\frac{\sqrt{\phi_1(x)+\phi_2(x)}}{\sqrt{1+y'^2}}=\sqrt{\phi_1(x)+\phi_2(x)}\cdot\sqrt{1-P^2}$

حيث $P=\frac{y}{\sqrt{1+y'^2}}$ ، $H^2+P^2=\phi_1(x)+\phi_2(y)$

وعليه فإن معادلة هاملتون . جاكوبي هي:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)^2=\phi_1(x)+\phi_2(y) \quad \text{أو} \quad \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2-\phi_1(x)=\phi_2(y)-\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)^2$$

وهي معادلة تفاضلية جزئية ذات متغيرات منفصلة، وعند وضع:

$$\phi_2(y)-\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)^2=\alpha,\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2-\phi_1(x)=\alpha$$

نجد أن:

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\sqrt{\phi_2(y)-\alpha},\frac{\partial P}{\partial x}=\sqrt{\phi_1(x)+\alpha}$$

وعليه فإن:

$$P=\int\sqrt{\phi_1(x)+\alpha}dx+\int\sqrt{\phi_2(y)-\alpha}dy$$

إذاً معادلة أقصر مسار هو المستقيم $\frac{\partial P}{\partial x}=\beta$ على الشكل:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{\phi_1(x)+\alpha}}-\int\frac{dy}{\sqrt{\phi_2(y)-\alpha}}=\beta$$

٢ . ٤ . ٢٢ . مثال محلول (٥٦):

أوجد معادلة هاملتون . جاكوبي للدالي:

$$J[y,z]=\int_a^b (y'^2+z'^2-2cz)dx$$

الحل:

بما أن معادلة هاملتون . جاكوبي للدالي $J[y,z]$ هي:

$$H(x,y,z,P_1,P_2)=P_1y'+P_2y'-F(x,y,z,y',z')\cdot\frac{\partial\delta}{\partial x}+H(x,y,z,P_1,P_2)=0$$

$$P_2=F_{z'} \text{ ،} P_1=F_{y'} \text{ ،} F=y'^2+z^2-2cz$$

إذاً: $P_2=2z'$ ،$P_1=2z'$ ،

وعليه فإن: $H=y'^2+z'^2+2cz=\frac{1}{4}P_1^2+\frac{1}{4}P_2^2+2cz$

لكن: $P_2'=-\frac{\partial H}{\partial z}=-2c$ ،$P_1'=-\frac{\partial H}{\partial y}=0$

إذاً: $P_2=2A-2cx$ ،$P_1=2B$

حيث A, B ثوابت. وحيث إن $z'=\frac{1}{2}P_2$ ،$y'=\frac{1}{2}P_1=B$

إذاً $z=Ax-\frac{1}{2}cx^2$ وعليه فإن ،$z'=A-cx$ ،$y=Bx$

ومن ثمَّ فإن: $H=B^2+(A-cx)^2+2c(Ax-\frac{1}{2}cx^2)=A^2+B^2=\alpha$

وعليه فإن معادلة هاملتون . جاكوبي هي:

$$\frac{\partial\delta}{\partial x}+\alpha=0$$

٢ . ٤ . ٢٣ . منحنيات القيم القصوى ذات النقاط الركنية:

Extremals with corners

تعاملنا في الفقرات السابقة مع مسائل التغيرات التي تكون منحنيات قيمها القصوى متصلة (مستمرة) وذات مشتقات مستمرة أيضاً، وحيث إن لكثير من مسائل التغيرات منحنيات قيم قصوى ليست مستمرة عند بعض النقاط، والتي يطلق عليها نقاط ركنية، فقد خُصص هذا البند لدراسة هذا النوع من مسائل التغيرات، وهو يضم ثلاثة أجزاء، تناولنا في الأول منها مسألة انعكاس منحنيات القيم القصوى، وتناولنا في الثاني مسألة انكسار منحنيات القيم القصوى التي تعتبر تعميماً للمسائل التي تهتم بدراسة انعكاس أو انكسار الضوء، وتناولنا في الجزء الثالث الشروط التي يجب أن تحققها الحلول ذات النقاط الركنية.

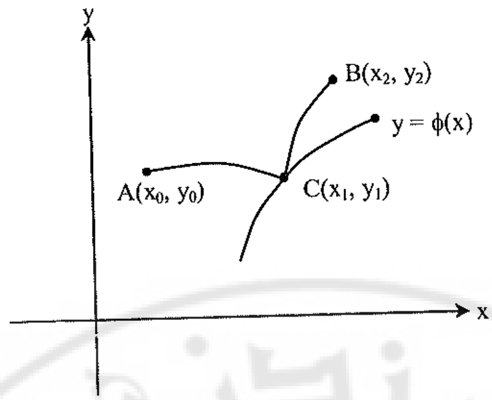
٢ . ٤ . ٢٤ . انعكاس منحنيات القيم القصوى: Reflection of extremals

سنركز اهتمامنا في هذا البند على دراسة منحنيات القيم القصوى للداليات، التي تمر بنقطة مثل A، وتمر بالنقطة B بعد انعكاسها عند نقطة مثل C واقعة على منحنٍ معلوم.

ولإيجاد منحني القيم القصوى $y = y(x)$ للدالي $J[y]=\int_{x_0}^{x_2} F(x,y,y')dx$

والذي يمر بالنقطة $A(x_0, y_0)$، ويمر في $B(x_2, y_2)$ بعد انعكاس عند النقطة $C(x_1,y_1)$ الواقعة على المنحني $y = \phi(x)$، انظر شكل (٢ . ١٤). لاحظ أن نقطة الانعكاس $C(x_1, y_1)$ هي نقطة ركنية «نقطة تكون عندها المشتقة الأولى غير مستمرة» لمنحني القيم القصوى $y(x)$، إذاً المشتقتان اليمنى واليسرى للدالة $y(x)$ عندها مختلفتان، أي إن $y'(x_1^-) \neq y'(x_1^+)$، ومن ثم فإنه من المناسب أن نعبر عن $J[y]$ كالآتي:

$$J[y]=\int_{x_0}^{x_1} F(x,y,y')dx + \int_{x_1}^{x_2} F(x,y,y')dx$$



الشكل (٢ . ١٤)

إذاً $y'(x)$ مستمرة على كل من الفترتين $[x_0, x_1]$، $[x_1, x_2]$، ومن ثمَّ فإن:

$$\delta J = \delta\left(\int_{x_0}^{x_1} F(x,y,y')dx + \int_{x_1}^{x_2} F(x,y,y')dx\right)$$

وحيث إن النقطة $C_1(x_1, \ y_1)$ يمكن أن تتحرك على المنحني $y \ = \ \phi(x)$، إذاً حساب التغير لكل من $\int_{x_0}^{x_1} F(x,y,y')dx$ ، $\int_{x_1}^{x_2} F(x,y,y')dx$ يقع ضمن شروط مسألة التغيرات ذات نقاط الأطراف المتحركة، ومن ثم يمكن استخدام نتائج البندين الأول والثاني في هذه الفقرة. وحيث إن كلاً من المنحنيين AC, BC هو منحني قيم قصوى، إذاً كل منهما يمثل حلاً لمعادلة أولر . لاغرانج الناتجة، وإذا فرضنا أن أحد المنحنيين معلوم بينما الآخر متغير، تحولت المسألة إلى إيجاد منحنيات القيم القصوى للدالي:

$$J_1[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x,y,y')dx \quad \text{أو} \quad J_2[y] = \int_{x_1}^{x_2} F(x,y,y')dx$$

بنقاط أطراف ثابتة، وعليه فإن:

$$\delta J_1 = \left[F + (\phi' - y')F_{y'}\right]_{x=x_1^-} \delta x_1 \qquad (1)$$

$$\delta J_2 = \left[F + (\phi' - y')F_{y'}\right]_{x=x_1^+} \delta x_1 \qquad (2)$$

حيث $x = x_1^-$ ، $x = x_1^+$ يعني أخذ النهاية اليسرى والنهاية اليمنى على الترتيب عندما تؤول x إلى x_1. لكن المشتقة y' ليست مستمرة عند C، إذا كان $\delta J = 0$ يعني أن:

$$F + (\phi' - y')F_{y'} |_{x=x_1^-} \ \delta x_1 = F + (\phi' - y')F_{y'} |_{x=x_1^+} \ \delta x_1$$

وحيث إن δx_1 اختيارية، إذاً:

$$F + (\phi' - y')F_{y'} |_{x=x_1^-} = F + (\phi' - y')F_{y'} |_{x=x_1^+} \qquad (3)$$

أو:

$$F(x_1, y_1, y'(x_1^-)) + \left[\phi'(x_1) - y'(x_1^-)\right]F_{y'}(x_1, y_1, y'(x_1^-))$$
$$= F(x_1, y_1, y'(x_1^+)) + \left[\phi'(x_1) - y'(x_1^+)\right]F_{y'}(x_1, y_1, y'(x_1^+))$$

والذي يطلق عليه شرط الانعكاس (Reflection Condition).

٢ . ٤ . ٢٥ . مثال محلول (٥٧):

أوجد شرط الانعكاس للدالي:

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_2} A(x, y) \cdot \sqrt{1 + y'^2}\, dx$$

الحل:

بما أن:

$$F(x, y, y') = A(x, y) \cdot \sqrt{1 + y'^2}$$

إذاً شرط الانعكاس (3) يأخذ الشكل:

$$A(x_1, y_1)\left[\sqrt{1 + y'^2} + (\phi' - y') \cdot \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}\right]_{x=x_1^-} =$$

حيث $x = x_1^-$ ، $x = x_1^+$ يعني أخذ النهاية اليسرى والنهاية اليمنى على الترتيب عندما تؤول x إلى x_1. لكن المشتقة y' ليست مستمرة عند C، إذا كان $\delta J = 0$ يعني أن:

$$F + (\phi' - y')F_{y'}\big|_{x=x_1^-}\ \delta x_1 = F + (\phi' - y')F_{y'}\big|_{x=x_1^+}\ \delta x_1$$

وحيث إن δx_1 اختيارية، إذاً:

$$F + (\phi' - y')F_{y'}\big|_{x=x_1^-} = F + (\phi' - y')F_{y'}\big|_{x=x_1^+} \qquad (3)$$

أو:

$$F(x_1, y_1, y'(x_1^-)) + \left[\phi'(x_1) - y'(x_1^-)\right]F_{y'}(x_1, y_1, y'(x_1^-))$$
$$= F(x_1, y_1, y'(x_1^+)) + \left[\phi'(x_1) - y'(x_1^+)\right]F_{y'}(x_1, y_1, y'(x_1^+))$$

والذي يطلق عليه شرط الانعكاس (Reflection Condition).

٢ . ٤ . ٢٥ . مثال محلول (٥٧):

أوجد شرط الانعكاس للدالي:

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_2} A(x, y) \cdot \sqrt{1 + y'^2}\, dx$$

الحل:

بما أن:

$$F(x, y, y') = A(x, y) \cdot \sqrt{1 + y'^2}$$

إذاً شرط الانعكاس (3) يأخذ الشكل:

$$A(x_1, y_1)\left[\sqrt{1 + y'^2} + (\phi' - y') \cdot \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}\right]_{x=x_1^-} =$$

ومنها نجد أن زاوية السقوط = زاوية الانعكاس.

٢ . ٤ . ٢٦ . ملاحظة هامة:

إذا كانت نقطة تتحرك بسرعة $v(x,y)$ فإن الزمن الذي تستغرق هذه النقطة للانتقال من الموضع $A(x_0,y_0)$ إلى الموضع $B(x_1, y_1)$ هو قيمة التكامل:

$$J[y]=\int_{x_0}^{x_1}\frac{1}{v(x,y)}\cdot\sqrt{1+y'^2}dx$$

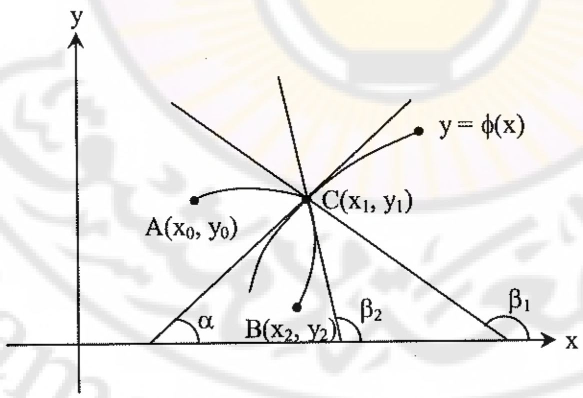
وهذا التكامل ينتمي إلى مجموعة الداليات التي على الشكل:

$$J[y]=\int_{x_0}^{x_1}A(x,y)\cdot\sqrt{1+y'^2}dx$$

٢ . ٤ . ٢٧ . انكسار منحنيات القيم القصوى:

Refraction of Extremals:

ليكن $J[y]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')dx$ ، ولنفرض أن للدالة $F(x,y,y')$ منحنٍ غير مستمر $y=\phi(x)$، وأن النقاط $A(x_0, y_0)$، $B(x_2, y_2)$ تقع على جانبي هذا المنحني غير المستمر. انظر الشكل (٢ . ١٦).



الشكل (٢ . ١٦)

إذاً: $J[y] = \int\limits_{x_0}^{x_1} F_1(x,y,y')dx + \int\limits_{x_1}^{x_2} F_2(x,y,y')dx$

حيث $F_1(x,y,y') = F(x,y,y')$ على أحد جانبي المنحني $y = \phi(x)$

بينما $F_2(x,y,y') = F(x,y,y')$ على الجانب الآخر للمنحني $y = \phi(x)$

ولنفرض أن كلاً من F_1, F_2 هي دالة قابلة للتفاضل ثلاث مرات. ومن الطبيعي أن نتوقع أن هناك نقطة ركنية عند النقطة $c(x_1, y_1)$ وهي نقطة تقاطع المنحني $y = y(x)$ مع $y = \phi(x)$. كما نلاحظ أن كلاً من المنحني (القوس) AC, CB هو منحني قيم قصوى «وهذا واضح من حقيقة اعتبار إحدى هذه الأقواس ثابتة وتغيير الأخرى للحصول على مسألة تغيرات ذات نقط أطراف ثابتة» ولهذا السب فبالنسبة إلى منحنيات المقارنة فإنه يمكننا أن نأخذ منحنياً يتكون من قوسين من منحنيات القيم القصوى. ومن ثمّ فإن التغير (مع ملاحظة أن النقطة قابلة للحركة على المنحني $y = \phi(x)$) يكون:

$$\delta J = \delta \int\limits_{x_1}^{x_2} F_1(x,y,y')dx + \delta \int\limits_{x_1}^{x_2} F_2(x,y,y')dx$$

$$= \left[F_1 + (\phi' - y')F_{1y'}\right]_{x=x_1^-} \delta x_1 - \left[F_2 + (\phi' - y')F_{2y'}\right]_{x=x_1^+} \delta x_1$$

والشرط الضروري لوجود منحنيات قيم قصوى $\delta J = 0$ يؤدي إلى الآتي:

$$\left[F_1 + (\phi' - y')F_{1y'}\right]_{x=x_1^-} = \left[F_2 + (\phi' - y')F_{2y'}\right]_{x=x_1^+}$$

وهذا هو شرط الانكسار (The refraction Condition) وحيث إن y' غير مستمرة عند نقطة الانكسار فإن هذا الشرط يمكن كتابته كما يلي:

$$F_1(x,y,y'(x_1^-)) + \left[\phi'(x_1) - y'(x_1^-)\right]F_{1y'}(x_1,y_1,y'(x_1^-)) =$$

$$= F_2(x,y,y'(x_1^+)) + \left[\phi'(x_1) - y'(x_1^+)\right]F_{2y'}(x_1,y_1,y'(x_1^+))$$

كما أن شرط الانكسار بالإضافة إلى المعادلة $y_1 = \phi(x_1)$ قد يساعدنا في تعيين إحداثيات النقطة C.

٢ . ٤ . ٢٨ . مثال محلول (٥٨):

أوجد شروط الانكسار للدالي:

$$J[y]=\int_{x_0}^{x_2} A(x,y)\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

الحل:

نفرض أن: $J[y]=\int_{x_0}^{x_1} A_1(x,y)\sqrt{1+y'^2}\,dx+\int_{x_1}^{x_2} A_2(x,y)\sqrt{1+y'^2}\,dx$

إذاً شرط الانكسار:

$$A_1(x,y)\cdot\left.\frac{1+\phi' y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right|_{x=x_1^-}=A_2(x,y)\cdot\left.\frac{1+\phi' y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right|_{x=x_1^+}\qquad(1)$$

ومما سبق، نجد أن:

$$\phi'(x_1)=\tan\alpha \ \text{،}\ y'(x_1^-)=\tan\beta_1 \ \text{،}\ y'(x_1^+)=\tan\beta_2$$

ومن ثمَّ فإن المعادلة (1) بعد عملية التبسيط والضرب في $\cos\alpha$ تتحول إلى:

$$A_1(x_1,y_1)\,.\,\cos(\alpha-\beta_1)=A_2(x_1,y_1)\cos(\alpha-\beta_2)$$

وعليه فإن:

$$\frac{\cos(\alpha-\beta_1)}{\cos(\alpha-\beta_2)}=\frac{A_2(x_1,y_1)}{A_1(x_1,y_1)} \quad \text{أو} \quad \frac{\sin\left[\frac{\pi}{2}-(\alpha-\beta_1)\right]}{\sin\left[\frac{\pi}{2}-(\alpha-\beta_2)\right]}=\frac{A_2(x_1,y_1)}{A_1(x_1,y_1)}$$

والذي يعتبر تعميماً للقانون المشهور الخاص بانكسار الضوء والذي ينص على أن «النسبة بين جيب زاوية السقوط وجيب زاوية الانكسار تساوي النسبة بين السرعات،

$v_1(x,y) = \dfrac{1}{A_1(x,y)}$ ، $v_2(x,y) = \dfrac{1}{A_2(x,y)}$ ، في الوسطين وعند الحدود التي يحدث عندها الانكسار».

٢ . ٤ . ٢٩ . الشروط الركنية: Corners Conditions

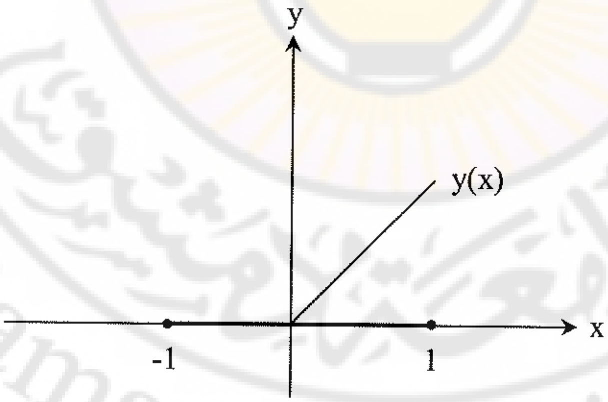
قد يكون لمسألة تغيرات قيم قصوى على منحنيات ذات نقاط ركنية، لكنها ليست نقاط انعكاس أو انكسار، فمثلاً إذا كان:

$$J[y] = \int_{-1}^{1} y^2(1-y')^2 dx \text{ ، } y(-1) = 0 \text{ ، } y(1) = 1$$

فإن $J[y] \geq 0$ ومن الواضح أن أصغر قيمة للدالي J هي الصفر التي يمكن الوصول إليها عندما $y = 0$ أو $y' = 1$، أي إن $y = 0$ أو $y = x + c$، لكن $y(-1) = 0$، $y(1) = 1$ يعني أن $c = 0$، وعليه فإن $y = 0$ أو $y = x$، وهذا يعني أن للدالي J قيمة صغرى على المنحني.

$$y = y(x) = \begin{cases} 0 & -1 \leq x \leq 0 \\ x & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

إذاً $y'(x)$ ليست مستمرة عند $x = 0$، وعليه فإن $x = 0$ نقطة ركنية شكل (٢ . ١٧).



الشكل (٢ . ١٧)

إذاً توجد مسائل تغيرات قيم قصوى على منحنيات ذات نقاط ركنية ويطلق على مثل تلك المنحنيات المنحنيات الملساء (الممهدة) جزئياً أو مقطعياً « Piecewise smooth curves» وبصورة عامة، يقال عن منحنٍ أو دالة إنه ممهد جزئياً في I=[a,b]، إذا كان y(x) مستمراً على I و y′(x) ليست مستمرة عند عدد محدود من نقاط I.

ولإيجاد الشروط التي يجب أن تتحقق في الحلول ذات النقاط الركنية لمسائل القيم القصوى للدالي:

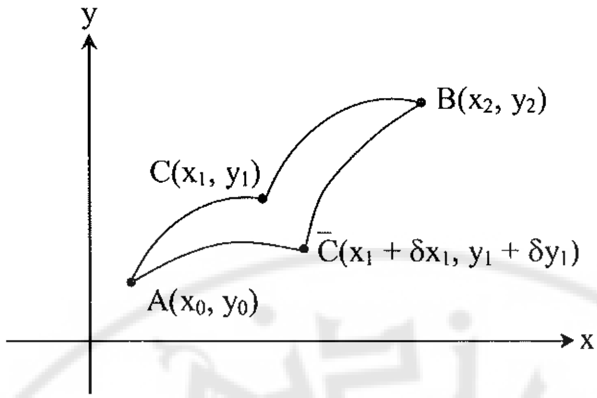
$$J[y]=\int_{x_0}^{x_2} F(x,y,y')dx$$

لاحظ أن المنحنيات الممهدة جزئياً التي تعتبر خط قيم قصوى منكسر، يجب أن تمثل حلولاً لمعادلة أولر . لاغرانج، ويتضح ذلك من حقيقة أنه إذا كانت كل الأجزاء (ما عدا واحداً فقط) من هذا الخط المنكسر ثابتة، تحولت المسألة إلى مسألة بسيطة ذات نقاط أطراف ثابتة، ومن ثم فإن الجزء غير الثابت يجب أن يكون قوساً من منحني القيم القصوى.

وإذا فرضنا أن لمنحني القيم القصوى نقطة ركنية واحدة وهذا لغرض التبسيط، «لأنه إذا كان للمنحني أكثر من نقطة ركنية، فيمكن استخدام نفس الطريقة لكل نقطة ركنية»، فإن الشروط التي يجب أن تتحقق عند النقطة الركنية يمكن استنتاجها كالآتي:

$$J[y]=\int_{x_0}^{x_1} F(x,y,y')dx+\int_{x_1}^{x_2} F(x,y,y')dx$$

حيث x_1 هي الإحداثي السيني للنقطة الركنية. انظر الشكل (٢ . ١٨).



الشكل (٢ . ١٨)

وحيث إن كلاً من CB، AC هو حل لمعادلة أولر . لاغرانج وأن C تتحرك بطريقة اختيارية، إذاً:

$$\delta J=(F-y'F_{y'})|_{x=x_1^-}\ \delta x_1+F_{y'}|_{x=x_1^-}\ \delta y_1-(F-y'F_{y'})|_{x=x_1^+}\ \delta x_1-F_{y'}|_{x=x_1^+}\ \delta y_1$$

لكن δy_1، δy_2 مستقلة بعضهما عن بعض، إذاً:

$$(F-y'F_{y'})|_{x=x_1^-}=(F-y'F_{y'})|_{x=x_1^+} \qquad (1)$$

$$F_{y'}|_{x=x_1^+} \qquad (2)$$

وهذه هي الشروط المطلوبة والتي يطلق عليها الشروط الركنية أو شروط أردمان . فيشتراس (Erdmann – weierstrass) كما أن هذه الشروط بالإضافة إلى شروط الاستمرار لمنحنيات القيم القصوى قد تمكننا من تعيين إحداثيات النقطة الركنية.

٢ . ٤ . ٣٠ . مثال محلول (٥٩):

أوجد منحنيات القيم القصوى ذات النقط الركنية (إن وجدت) للدالي:

$$J[y]=\int_0^a (y'^2-y^2)dx$$

الحل:

بما أن: $F_{y'}|_{x=x_1^-} = F_{y'}|_{x=x_1^+}$ ، إذاً $y'(x_1^-) = y'(x_1^+)$

وعليه فإن المشتقة $y'(x)$ مستمرة عند $x = x_1$ ومن ثمَّ فإنه لا يوجد نقاط انعكاس أو انكسار، وعليه فإن منحنيات القيم القصوى هي منحنيات ممهدة (smooth curve).

٢ . ٤ . ٣١ . مثال محلول (٦٠):

أوجد منحنيات القيم القصوى ذات النقط الركنية (إن وجدت) للدالي:

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_2} y'^2(1-y')^2 dx$$

الحل:

بما أن: $F = y'^2(1-y')^2 = F(y')$

إذاً منحنيات القيم القصوى هي عبارة عن خطوط مستقيمة:

$$y = cx + b$$

وبالنسبة إلى هذا الدالي. فإن الشروط عند النقطة الركنية تأخذ الشكل:

$$-y'^2(1-y')(1-3y')|_{x=x_1^-} = -y'^2(1-y')(1-3y')|_{x=x_1^+} \quad (1)$$

$$2y'(1-y')(1-2y')|_{x=x_1^-} = 2y'(1-y')(1-2y')|_{x=x_1^+} \quad (2)$$

وإذا فرضنا أن $y'(x_1^-) = \alpha$ ، $y'(x_1^+) = \beta$ ، وعوضنا في (1)، (2) لوجدنا أن:

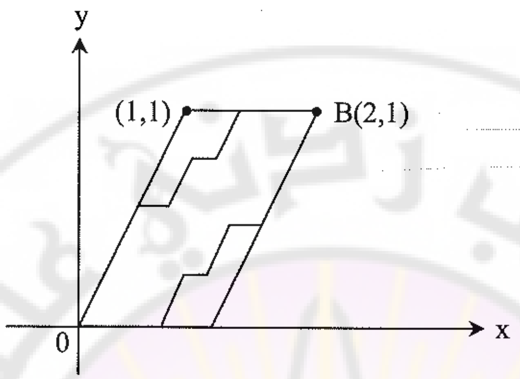
$$\alpha^2(1-\alpha)(1-3\alpha) = \beta^2(1-\beta)(1-3\beta) \quad (3)$$

$$\alpha(1-\alpha)(1-2\alpha) = \beta(1-\beta)(1-2\beta) \quad (4)$$

وبحل المعادلتين (3)، (4) مع الغرض $\alpha \neq \beta$ لوجدنا أن:

$\alpha = 0$ ، $b = 1$ أو $\alpha = 1$ ، $b = 0$

وعليه فإن منحنيات القيم القصوى ذات النقاط الركنية تتكون من أجزاء من الخطوط المستقيمة التي تنتمي إلى العائلات $y = c_1$، $y = x + c_2$ حيث c_1، c_2 ثوابت، انظر شكل (٢ . ١٩).



الشكل (٢ . ١٩)

٢ . ٤ . ٣٢ . مثال محلول (٦١):

أوجد منحنيات القيم القصوى ذات النقاط الركنية (إن وجدت) للدالي:

$$J[y] = \int_a^b (y'^2 + y'^3)dx$$

الحل:

بما أن $F = y'^2 + y'^3$، إذاً $F_{y'} = 2y' + 3y'^2$

وعليه فإن: $F - y'^2F_{y'} = -(y'^2 + 2y'^3)$

ولمعرفة وجود نقاط ركنية، نطبق شروط إيردمان . فيرشتراس:

$$F_{y'}|_{x=x_1^-} = F_{y'}|_{x=x_1^+} \text{ ،} F - y'F_{y'}|_{x=x_1^-} = F - y'F_{y'}|_{x=x_1^+}$$

فنجد أن:

$$y'^2 + 2y'^3|_{x=x_1^-} = y'^2 + 2y'^3|_{x=x_1^+} \qquad (1)$$

$$2y' + 3y'^2 \big|_{x=x_1^-} = 2y' + 3y'^2 \big|_{x=x_1^+} \qquad (2)$$

ونفرض أن $y'(x_1^-) = \alpha$ ، $y'(x_1^+) = \beta$ والتعويض في (1)، (2) نجد أن:

$$\alpha^2 + 2\alpha^3 = \beta^2 + 2\beta^3 \qquad (3)$$

$$2\alpha + 3\alpha^2 = 2\beta + 3\beta^2 \qquad (4)$$

وبحل المعادلتين (3)، (4) نجد أن $\alpha = \beta = -\dfrac{1}{3}$

وعليه لا توجد نقاط ركنية. أما منحنيات التوقف لذلك الدالي فهي عائلة خطوط مستقيمة.

٢ . ٤ . ٣٣ . تمارين غير محلولة:

(١) أوجد منحنيات القيم القصوى للدالي:

$$J[y] = \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y}\,dx \text{ ، } y(0) = 0$$

بينما تتحرك $B(x_1, y_1)$ على المنحني $(x-9)^2 + y^2 = 9$

(٢) أوجد الشروط الاعتراضية للدالي:

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} A(x,y)e^{\tan^{-1}(y')}dx, A(x,y) \neq 0$$

(٣) أوجد منحنيات القيم القصوى للدالي:

$$J[y] = \int_0^{\pi/4} (y^2 - y'^2)\,dx \text{ ، } y(0) = 0$$

بينما تتحرك $(\frac{\pi}{4}, y(\frac{\pi}{4}))$ على المستقيم $x = \dfrac{\pi}{4}$.

(٤) أوجد منحني القيم القصوى للدالي:

$$J[y] = \int_0^1 (y''^2 - 2xy)\,dx \text{ ، } y(0) = y'(0) = 0$$

$y(1)=\frac{1}{120}$، بينما $y'(1)$ ليست معطاة.

(٥) أوجد منحنيات القيم القصوى ذات النقاط الركنية (إن وجدت) لكل مما يأتي:

(أ) $J[y]=\int_0^4 (y'-1)^2(y'+1)^2dx$ ، $y(0)=0$، $y(4)=2$

(ب) $J[y]=\int_{x_0}^{x_1} (y'^2+2xy-y^2)dx$ ، $y(x_0)=y_0$، $y(x_1)=y_1$

(ج) $J[y]=\int_0^2 y^2(1-y')^2dx$ ، $y(0)=0$، $y(2)=1$

(د) $J[y]=\int_0^{x_1} (y'^4-by'^2)dx$ ، $y(0)=0$، $y(x_1)=y_1$

(هـ) $J[y]=\int_0^4 y^2\cdot(1+y'^2)dx$

(و) $J[y]=\int_a^b y^n\cdot\sqrt{1+y'^2}dx$ ، $n>0$.

(ز) $J[y]=\int_a^b (y'^2-1)^2dx$

(ح) $J[y]=\int_a^b x^2y'^2dx$

(٦) أوجد باستخدام معادلة هاملتون . جاكوبي، منحنيات القيم القصوى للدالي:

$$J[y]=\int\sqrt{(x^2+y^2)(1+y'^2)}dx$$

(٧) حل معادلة هاملتون . جاكوبي المرافقة للدالي:

$$J[y]=\int_a^b f(y)\sqrt{1+y'^2}dx$$

٢ . ٥ . الشروط اللازمة والكافية للقيم القصوى:

درسنا في الفقرة الأولى من هذا الفصل شرط أولر اللازم لوجود قيم قصوى محلية، ثم تناولنا الشروط الركنية الواجب تحققها عند وجود منحنيات قيم قصوى ذات نقاط ركنية، وسندرس في هذه الفقرة الشروط اللازمة والكافية لوجود قيم قصوى للداليات، وقد ضمت هذه الفقرة ثلاثة بنود تناولنا في الأول منها شرط لوجاندر وتناولنا في الثاني شروط جاكوبي، وفي الثالث شرط فيرشتراس.

٢ . ٥ . ١ . شرط لوجاندر (**Legendre Condition**):

إذا كانت D مجموعة جزئية مفتوحة من الفضاء المتري x، وكان J دالياً معرفاً وقابلاً للاشتقاق، n من المرات عند $x \in D$، فإن $\delta^n J(x,\Delta x) = \frac{d^n}{d\varepsilon^n} J(x+\varepsilon\Delta x)|_{\varepsilon=0}$ يسمى التغير النوني للدالي J، وعندما n=2، نجد أن $\delta^2 J(x,\Delta x) = \frac{d^2}{d\varepsilon^2} J(x+\varepsilon\Delta x)|_{\varepsilon=0}$ الذي يسمى التغير الثاني (second variation) للدالي J.

٢ . ٥ . ٢ . مثال محلول (٦٢):

(أ) إذا كان $J: (a,b) \to R$، فإن:

$$\delta J(x,\Delta x) = \frac{d}{d\varepsilon} J(x+\varepsilon\Delta x)|_{\varepsilon=0} = J'(x)\Delta x$$

$$\delta^2 J(x,\Delta x) = \frac{d^2}{d\varepsilon} J(x+\varepsilon\Delta x)|_{\varepsilon=0}\ J''(x)(\Delta x)^2$$

(ب) إذا كانت R^n $\ni$ $x = (x_1,\ldots,x_n)$، J دالة حقيقية معرفة على منطقة مفتوحة في R^n، فإن:

$$\frac{d}{dx} J(x+\varepsilon\Delta x) = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial}{\partial x} J(x+\varepsilon\Delta x)\right]\Delta x_i$$

$$\delta^2 J(x,\Delta x) = \frac{d^2}{d\varepsilon^2} J(x+\varepsilon\Delta x)\,|_{\varepsilon=0} = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 J(x+\varepsilon\Delta x)}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \Delta x_i \Delta x_j\,|_{\varepsilon=0}$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 J(x)}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \partial x_i \partial x_j$$

(ج) إذا كان $J[y] = \int_a^b F(x, y(x), y'(x))dx \in D_1$

فإن:

$$J(y+\varepsilon\Delta y) = \int_a^b F(x, y(x)+\varepsilon\Delta y(x), y'(x)+\varepsilon\Delta y'(x))dx$$

وعليه فإن:

$$\frac{d}{d\varepsilon} J(y+\varepsilon\Delta y) = \int_a^b \left[F_y(x, y+\varepsilon\Delta y, y'+\varepsilon\Delta y')\Delta y + F'_y(x, y+\varepsilon\Delta y, y'+\varepsilon\Delta y')\Delta y'\right]dx$$

$$\frac{d^2}{d\varepsilon^2} J(y+\varepsilon\Delta y) = \int_a^b [F_{yy}(x, y+\varepsilon\Delta y, y'+\varepsilon\Delta y')(\Delta y)^2 + F_{yy'}(x, y+\varepsilon\Delta y, y'+\varepsilon\Delta y')\Delta y\Delta y'$$

$$+ F_{y'y'}(x, y+\varepsilon\Delta y, y'+\varepsilon\Delta y')(\Delta y')^2]dx$$

ومن ثمَّ فإن:

$$\delta^2 J(y+\Delta y) = \int_a^b \left[F_{yy}(x,y,y')(\Delta y)^2 + 2F_{yy'}(x,y,y')\Delta y\Delta y' + F_{y'y'}(x,y,y')(\Delta y')^2\right]dx$$

ونقدم فيما يلي العديد من المبرهنات.

٢ . ٥ . ٣ . مبرهنة (١):

لتكن D مجموعة جزئية مفتوحة من الفضاء المتري χ، وليكن J دالياً معرفاً على D.

(أ) إذا كانت $x^* \in D$ نقطة نهاية صغرى للدالي J، فإن $\delta^2 J(x^*, \Delta x) \geq 0$ لكل $\Delta x \in \chi$.

(ب) إذا كانت $x^* \in D$ نقطة نهاية عظمى للدالي، فإن $\delta^2 J(x^*, \Delta x) \le 0$ لكل $\Delta x \in \chi$.

البرهان:

بما أن: $\Delta J = J(x^*, \varepsilon\Delta x) - J(x^*,\Delta x) = \dfrac{\varepsilon^2}{2!}\, \delta^2 J(x^*,\Delta x) + R_2(x^*,\Delta x,\varepsilon)$

وبما أن: $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \dfrac{R_2(x^*,\Delta x,\varepsilon)}{\varepsilon^2} = 0$، $\delta(x^*, \Delta x) = 0$

إذاً إذا كانت $x^* \in D$ نقطة نهاية صغرى فإن:

$$\Delta J = J(x^* + \varepsilon\Delta x) - J(x^*,\Delta x) \ge 0$$

وعليه فإن: $\delta^2 J(x^*, \Delta x) \ge 0$.

أما إذا كانت $x^* \in D$ نقطة نهاية عظمى للدالي J، فإن $\Delta J \le 0$، وعليه فإن $\delta^2 J(x^*, \Delta x) \le 0$.

والآن ليكن: $J[y] = \int_a^b F(x,y,y')dx$، $y(a) = A$، $y(b) = B$.

إذاً:

$$\delta^2 J = \int_a^b \left[F_{yy}(\Delta y)^2 + 2F_{yy'}\Delta y\Delta y' + F_{y'y'}(\Delta y')^2\right]dx \qquad (1)$$

لكن بالتكامل بالتجزئة نجد أن:

$$2\int_a^b F_{yy'}\Delta y\Delta y' dx = \int_a^b F_{yy'} d((\Delta y)^2)dx = F_{yy'}(\Delta y)^2 \Big|_a^b - \int_a^b (\Delta y)^2 \frac{d}{dx} F_{yy'} dx$$

وحيث إن: $\Delta y(a) = \Delta y(b) = 0$، إذاً:

$$2\int_a^b F_{yy'}\Delta y\Delta y' dx = -\int_a^b (\Delta y)^2 \frac{d}{dx} F_{yy'} dx \qquad (2)$$

ومن (1)، (2) نجد أن:

$$\delta^2 J = \int_a^b \left[F_{y'y'}(\Delta y')^2 + (F_{yy} - \frac{d}{dx}F_{yy'})(\Delta y)^2 \right] dx$$

وإذا فرضنا أن $P = F_{y'y'}$، $\Delta y = h$، $Q = F_{yy} - \dfrac{d}{dx}F_{yy'}$

لوجدنا أن:

$$\delta^2 J[h] = \int_a^b (Ph'^2 + Qh^2)dx \qquad (3)$$

٢ . ٥ . ٤ . مبرهنة (٢):

إذا كان: $\delta^2 J[h] = \int_a^b (Ph'^2 + Qh^2)dx \geq 0$

لكل $h \in D_1$، $h(a) = h(b) = 0$، فإن $P(x) \geq 0$، لكل $x \in [a,b]$.

البرهان:

لكي نثبت أن $P(x) \geq 0$ لكل $x \in [a,b]$، نفرض وجود $x_0 \in [a,b]$، بحيث إن $P(x_0) = -2\beta$، $\beta > 0$. وحيث إن $P(x)$ دالة مستمرة على $[a,b]$، إذاً توجد $\alpha>0$ بحيث إن $a \leq x_0 - \alpha \leq x_0 + \alpha \leq b$، $P(x_0) \leq -\beta$، $x_0-\alpha \leq x \leq x_0+\alpha$

والآن لتكن:

$$h(x) = \begin{cases} \sin^2\left(\dfrac{\pi(x-x_0)}{\alpha}\right) & ,x_0 - \alpha \leq x \leq x_0 + \alpha \\ 0 & ,x \notin [x_0-\alpha, x_0+\alpha] \end{cases}$$

إذاً:

$$\delta^2 J[h] = \int_{x_0-\alpha}^{x_0+\alpha} \frac{P\pi^2}{\alpha^2}\sin^2\left(\frac{2\pi(x-x_0)}{\alpha}\right)dx + \int_{x_0-\alpha}^{x_0+\alpha} Q\sin^4\left(\frac{\pi(x-x_0)}{\alpha}\right)dx < \frac{-2\beta\pi^2}{\alpha} + 2M\alpha$$

حيث: $M = \max_{a \leq x \leq b} |Q(x)|$

وعندما تكون α صغيرة جداً، نجد أن:

$$\delta^2 J[h] = \frac{-\beta\pi^2}{\alpha} + 2M_\alpha < 0$$

وعليه عندما $\delta^2 J(h) \geq 0$ تكون $P(x) \geq 0$، لكل $x \in [a,b]$.

وأخيراً إلى المبرهنة الآتية التي تعطي شرط لوجاندر الضروري.

٢ . ٥ . ٥ . مبرهنة (٣): (شرط لوجاندر الضروري)

إذا كان للدالي:

$$J[y] = \int_a^b F(x, y, y')dx \in D_1 \text{ ، } y(a) = A \text{ ، } y(b) = B$$

قيمة صغرى على المنحني $y(x)$، فإن $F_{y'y'} \geq 0$ لأي نقطة واقعة على $y(x)$.

البرهان:

بما أن للدالي $J[y]$ قيمة صغرى على $y(x)$، إذاً $\delta^2 J[h] \geq 0$ لكل $h(x) = \Delta y(x) \in D_1$. لكن $\delta^2 J[h] \geq 0$، لكل $h(a) = h(b) = 0$، يعني أن $P = F_{y'y'} \geq 0$ لكل $x \in [a,b]$ حسب مبرهنة (٢ . ٥ . ٤).

٢ . ٥ . ٦ . ملحوظة مهمة:

(أ) إذا كان للدالي $J[y] = \int_a^b F(x, y, y')dx \in D_1$ ، $y(a) = A$ ، $y(b) = B$ قيمة عظمى محلية على $y(x)$، فإن $F_{y'y'} \leq 0$ لكل $x \in [a,b]$.

(ب) إذا كان $F_{y'y'} > 0$ لكل $x \in [a, b]$، فإن للدالي $J[y]$ قيمة صغرى محلية على $y(x)$.

أما إذا كان $F_{y'y'} < 0$ لكل $x \in [a,b]$، فإن للدالي $J[y]$ قيمة عظمى محلية على المنحني $y(x)$.

٢ . ٥ . ٧ . مثال محلول (٦٣):

ليكن $J[y]=\int_0^1 y'^3 dx$ ، $y(0) = 0$، $y(1) = 1$

إذاً الحل العام لمعادلة أولر . لاغرانج هو $y = C_1x + C_2$ لكن $y(0) = 0$، $y(1) = 1$ يعني أن $c_2 = 0$، $C_1 = 1$، إذاً $y = x$. لكن $F_{y'y'} = 6y'$، $y' = 1$ إذاً $F_{y'y'} = 6 > 0$، لكل $x \in [0,1]$، وعليه فإن للدالي $J[y]$ قيمة صغرى محلية على المستقيم $y = x$.

٢ . ٥ . ٨ . مثال محلول (٦٤):

ليكن $J[y]=\int_0^1 (12xy - y'^2)dx$ ، $y(0) = 0$، $y(1) = 1$

إذاً معادلة أولر . لاغرانج هي: $12x + 2y'' = 0$.

وحلها العام هو: $y = - x^3 + C_1x + C_2$.

لكن $y(0) = 0$، $y(1) = 1$، إذاً $C_2 = 0$، $C_1 = 2$، وعليه فإن $y = 2x - x^3$، لكن $F_{y'} = -2y'$، إذاً $F_{y'y'} = -2 < 0$، وعليه فإن للدالي $J[y]$ قيمة عظمى محلية على المنحني $y = 2x - x^3$.

٢ . ٥ . ٩ . شروط جاكوبي **Jacobi Conditions**:

ليكن:

$$J[h]=\int_a^b (Ph'^2 + Qh^2)dx \in D_1 \qquad (1)$$

حيث: $P(x) = F_{y'y'}$ ، $Q(x) = F_{yy} - \frac{d}{dx}F_{yy'}$ ، $h(a) = h(b) = 0$. إذاً معادلة أولر . لاغرانج للدالي $J[y]$، هي $F_h - \frac{d}{dx}F_{h'} = 0$ وعليه فإن:

$$Qh - \frac{d}{dx}(Ph') = 0 \qquad (2)$$

وهي معادلة تفاضلية خطية من المرتبة الثانية تحقق الشرط $h(a) = h(b) = 0$، يطلق عليها عادة معادلة جاكوبي نسبة للرياضي الألماني كارل جاكوبي الذي درسها عام ١٨٤٢م، والآن إلى التعريف الآتي.

٢ . ٥ . ١٠ . تعريف (١):

يقال عن نقطة $\bar{a}$ إنها نقطة مرافقة (Conjugate Point) للنقطة a، $\bar{a} \neq a$ إذا كان $h:[a, \bar{a}] \to R$ حلاً لمعادلة جاكوبي وكان $h(a) = h(\bar{a}) = 0$ بينما $h(x) \neq 0$ لكل $x \in [a, \bar{a}]$.

لاحظ أن $\bar{a}$ نقطة مرافقة للنقطة a، إذا كانت $\bar{a} \neq a$ ، وكان $h(\bar{a}) = 0$، حيث h حل لمعادلة جاكوبي، $h(a) = 0$، $h'(a) = 1$.

٢ . ٥ . ١١ . مثال محلول (٦٥):

ليكن $J[y] = \int_0^a (y'^2 - y^2)dx$ ، $y(0) = 0$، $y(a) = 0$

إذاً معادلة جاكوبي للدالي $J[h]$ هي $-2h - \frac{d}{dx}(F_{y'y'}h') = 0$، ومنها نجد أن $h'' + h = 0$، وعليه فإن $h(x) = C_1\cos x + C_2 \sin x$ لكن $h(0) = 0$، $h(a) = 0$، إذاً $C_1 = 0$، $C_2 \sin a = 0$، وعليه فإن $a = n\pi$، وهذا يعني أن $h(x)= C_2 \sin x$ تنعدم عند النقاط $x = n\pi$، حيث n عدد صحيح، وعليه إذا كانت $a > n\pi$، فإن $x = n\pi$ نقطة مرافقة للنقطة $x = 0$ نقطة مرافقة للنقطة $x = 0$. أما إذا كانت $a < \pi$ فإن $h(x) = 0$ عند $x = 0$ فقط، وفي هذه الحالة لا توجد نقاط مرافقة للصفر.

ونقدم فيما يلي المبرهنة الهامة الآتية:

٢ . ٥ . ١٢ . مبرهنة (٤): (شرط جاكوبي الضروري)

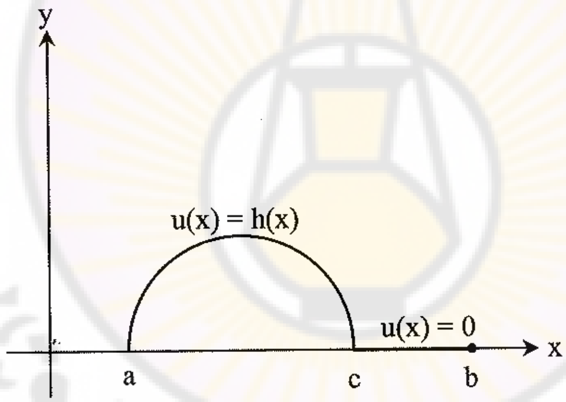
إذا كان للدالي $J[y]=\int_a^b F(x,y,y')dx \in D_1$ قيمة صغرى محلية على المنحني $y(x)$، وكان $F_{y'y'}>0$ لكل $x\in[a,b]$، فلا توجد في الفترة (a,b) أي نقطة مرافقة للنقطة a.

البرهان:

نفرض أن $c<b$ نقطة مرافقة للنقطة a. إذاً يوجد حل $h(x)$ لمعادلة جاكوبي التفاضلية بحيث إن $h(a)=h(c)=0$، بينما $h(x)\neq 0$ لكل $x\in(a,c)$.

والآن لنعرف الدالة:

$$u(x)=\begin{cases} h(x) & ,x\in[a,c] \\ 0 & ,x\in[c,b] \end{cases} \qquad (1)$$ شكل (٢ . ٢٠)



شكل (٢ . ٢٠)

إذاً $u(x)$ تحقق معادلة جاكوبي، ومن ثمّ فإنها تحقق معادلة أولر . لاغرانج على الشكل:

$$g_u(x,u,u')=\frac{d}{dx}g_{u'}(x,u,u') \qquad (2)$$

على [a,c] و [c,b] على التوالي.

والآن افرض أن:

$$F_{y'y'} \,.\, u^2 + 2\,F_{yy'} \,.\, uu' + F_{y'y'} \,.\, u'^2 = 2g(x,u,u')$$

نجد أن:

$$2gg_u = 2F_{yy} \,.\, u + 2\,F_{y'y} \,.\, u'$$
$$2gg_{u'} = 2\,F_{y'y} \,.\, u + 2u'\,F_{y'y'} \,.\, u'$$

وعليه فإن:

$$2g(x,u,u') = ug_u + u'g_{u'} \qquad (3)$$

ومن (2)، (3) نجد أن $2g(x,u,u') = u\cdot\frac{d}{dx}g_{u'} + u'\cdot g_{u'}$، ومن ثمَّ فإن:

$$2g(x,u,u') = \frac{d}{dx}(u\cdot g_{u'}) \qquad (4)$$

لكن $y(x) \in D_1$، إذاً $\frac{d}{dx}(u\cdot g_{u'})$ دالة مستمرة على [a, c] وعلى [c,b]،
وعليه فإن $u'(c^+) = u'(c^-) = 0$، كما أن:

$$J[y(x)] = \int_a^c d(ug_{u'}) + \int_c^b 2g(x,u,u')dx$$

لكن: $u(a) = u(c) = 0$، إذاً $\int_a^b d(ug_{u'}) = 0$.

وحيث إن $u(x) = 0$، لكل $x \in [c,b]$، إذاً $g(x,u,u') = 0$ وعليه فإن $\int_c^d 2g(x,u,u') = 0$. إذاً $J[y(x)] = 0$ وعليه فإن $J[y(x)]$ قيمة صغرى محلية للدالي $J[y]$ ومن ثمَّ فإن $h'(c) = 0$، لكن لمعادلة جاكوبي حل وحيد لأنها معادلة تفاضلية خطية من المرتبة الثانية بمعاملات مستمرة. إذاً $h(c) = h'(c) = 0$، وعليه فإن $h(x) = 0$ لكل $x \in [a,c]$ وهذا خلاف الفرض. إذاً c لا يمكن أن ترافق a.

٢ . ٥ . ١٣ . مثال محلول (٦٦):

هل يتحقق شرط جاكوبي لمنحني القيم القصوى للدالي:

$$J[y]=\int_0^a (y'^2-y^2)dx \text{ ، } y(0)=0 \text{ ، } y(a)=0.$$

الحل:

بما أن $h(x) = c \sin x$ حل لمعادلة جاكوبي إذاً إذا كانت $a < \pi$ فلا توجد نقطة مرافقة للنقطة $x = 0$ في $(0, a)$، وعليه فإن شرط جاكوبي متحقق في هذه الحالة أما إذا كانت $a > \pi$، فإن الفترة $(0, a)$ تحوي نقطة مرافقة للنقطة، $x = 0$ وعليه فإن شرط جاكوبي لا يتحقق في هذه الحالة.

٢ . ٥ . ١٤ . مثال محلول (٦٧):

هل يتحقق شرط جاكوبي لمنحني قيم القصوى للدالي:

$$J[y]=\int_0^a (y'^2+y^2+x^2)dx \text{ ، } y(0)=0 \text{ ، } y(a)=0.$$

الحل:

بما أن معادلة جاكوبي للدالي هي $h''-h=0$، إذاً حلها العام هو $h(x)=C_1e^x+C_2e^{-x}$ لكن $h(0) = 0$، إذاً $C_2 = -C_1$، وعليه فإن $h(x)=C_1(e^x-e^{-x})$، ومن ثمَّ فإن $h(x) = 0$ عندما $x = 0$ وعليه فإن شرط جاكوبي يتحقق لأي قيمة للثابت a.

٢ . ٥ . ١٥ . مثال محلول (٦٨):

هل يتحقق شرط جاكوبي لمنحني القيم القصوى للدالي:

$$J[y]=\int_{-a}^a y\sqrt{1+y'^2}\,dx \text{ ، } y(-a)=y(a)=b.$$

الحل:

بما أن حل معادلة أولر - لاغرانج للدالي $J[y]$ هو $y = c\cosh\left(\frac{x}{c}\right)$ (تأكد من ذلك)، إذاً لتحديد معادلة جاكوبي، لاحظ أن $F = y\sqrt{1+y'^2}$، $y = c\cosh\left(\frac{x}{c}\right)$

إذاً: $F_{y'} = \frac{yy'}{\sqrt{1+y'^2}}$، $F_{y'y'} = \frac{y}{(1+y'^2)^{3/2}} = c\,\mathrm{sech}^2\left(\frac{x}{c}\right) > 0$، لكل $c > 0$.

لكن: $F_{yy} = 0$، $F_{yy'} = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \tanh\left(\frac{x}{c}\right)$ إذاً معادلة جاكوبي هي:

$$c\frac{d}{dx}\left(h'\,\mathrm{sech}^2\left(\frac{x}{c}\right)\right) + \frac{h}{c}\mathrm{sech}^2\left(\frac{x}{c}\right) = 0 \qquad (1)$$

و $h(x) = \sinh\left(\frac{x}{c}\right)$ حل أولي للمعادلة (1)، وباستخدام طريقة تغير الوسائط (البرامترات) «Variation of Parameters» لحل المعادلة (1)، وفرضنا أن $h = z\sinh\left(\frac{x}{c}\right)$ نجد أن:

$$\frac{h(x)}{c} = A\sinh\left(\frac{x}{c}\right) + B\left[\left(\frac{x}{c}\right)\sinh\left(\frac{x}{c}\right) - \cosh\left(\frac{x}{c}\right)\right]$$

وبوضع $h(-a)= 0$، $B = 1$، نجد أن:

$$h(x) = \left[x + a - c\coth\left(\frac{a}{c}\right)\right]\sinh\left(\frac{x}{c}\right) - \cosh\left(\frac{x}{c}\right)$$

لكن $h(-a) = 0$، $h'(-a) = -\coth\left(\frac{a}{c}\right)\cosh\left(\frac{-a}{c}\right) < 0$، $h'(\infty) > 0$

إذاً يوجد جذر للمعادلة $h(x)$ مختلف عن $x = \frac{-a}{c}$ وعليه فإن شرط جاكوبي يكافئ الشرط:

$$h(a)=2\left[a\sinh\left(\frac{a}{c}\right)-c\cosh\left(\frac{a}{c}\right)\right]\le 0$$

وعليه فإن $h(a)=0 \Leftrightarrow \coth\left(\frac{a}{c}\right)=\frac{a}{c}$. إذاً $h(a)=0$ عندما $\frac{a}{c}=1.1197$،

ومن ثمّ فإن $h(a) \le 0$ لكل $\frac{a}{c}\le 1.1197$ وعليه فإن شرط جاكوبي يتحقق للقيم الصغيرة إلى $\frac{a}{c}$، والمحددة بالعلاقة $c.\cosh\left(\frac{x}{c}\right)=b>0$، ولا يتحقق للقيم الكبيرة إلى $\frac{a}{c}$.

وأخيراً إلى المبرهنة الآتية التي تحدد الشرط الكافي لوجود قيم قصوى محلية «تسمى قيماً قصوى ضعيفة، إذا كانت للفرق $\Delta J[y]$ نفس الإشارة لكل $y \in D_1$، وتسمى قيماً قصوى قوية، إذا كان للدالي $\Delta J[y]$ نفس الإشارة لكل $y \in \ell$ ».

٢ . ٥ . ١٦ . مبرهنة (٥):

يكون للدالي $J[y]=\int_a^b F(x,y,y')dx \in D_1$ ، $y(a)=A$، $y(b)=B$ قيمة صغرى محلية ضعيفة على المنحني $y=y(x)$، إذا تحققت الشروط الآتية:

(أ) $y(x)$ حل لمعادلة أولر . لاغرانج.

(ب) $P(x)=F_{y'y'}>0$ لكل $x\in[a,b]$.

(ج) لا تحتوي الفترة المغلقة $[a, \ b]$ أي نقطة مرافقة للنقطة a «يسمى هذا الشرط: شرط جاكوبي الموسع».

البرهان:

بما أن: $\delta^2 J=\int_a^b\left[F_{yy}h^2+2hh'F_{yy'}+h'^2F_{y'y'}\right]dx$

إذاً: $$\delta^2 J = \int_a^b \left[F_{yy}h^2 + hh'F_{yy'} + hh'F_{yy'} + h'^2F_{y'y'}\right]dx$$

$$= \int_a^b \left[h(hF_{yy} + h'F_{yy'}) + h'(hF_{yy'} + h'F_{y'y'}\right]dx$$

وبالتكامل بالتجزئة بالنسبة للحد الأخير واستخدام الشرط $h(a) = h(b) = 0$،

نجد أن:

$$\delta J^2 = \int_a^b \left[hF_{yy} + h'F_y - \frac{d}{dx}(hF_y + h'F_{y'y'}) \right] h(x)dx$$

وعليه فإن: $$(1)\,\delta^2 J = \int_a^b \left[hF_{yy} + h'F_{yy'} - \frac{d}{dx}(h'F_{y'y'}) \right] h(x)d(x)$$

والآن إذا وجدت $h(x)$ بحيث إن:

$$hF_{yy} - h'F_{yy'} - \frac{d}{dx}(h'F_{y'y'}) = 0$$

فإن ذلك يعني أن $h(x)$ تحقق العلاقة:

$$\frac{d}{dx}(h'F_{y'y'}) + h(x)\left[\frac{d}{dx}(F_{yy'} - F_{y'y'})\right] = 0 \qquad (2)$$

$h(a) = h(b) = 0$. وإذا فرضنا عدم وجود نقطة مرافقة للنقطة a في [a,b] فإن

ذلك يعني وجود دالة $u(x)$ بحيث إن:

$$\frac{d}{dx}(u'F_{y'y'}) + u(x)\left[\frac{d}{dx}(F_{yy'} - F_{y'y'})\right] = 0 \qquad (3)$$

$u(a) = 0$، $u'(a) = 1$، $u(x) \neq 0$ لكل $x \in [a,b]$، وعليه فإن:

$$\frac{d}{dx}(F_{yy'} - F_{y'y'}) = \frac{-1}{u} \cdot \frac{d}{dx}(u'F_{y'y'}) \qquad (4)$$

ومن (1)، (4) نجد أن:

$$\delta^2 J=\int_a^b\left[\frac{h^2}{u}\cdot\frac{d}{dx}(u'F_{y'y'})-h\frac{d}{dx}(h'F_{y'y'})\right]d(x)$$

وبالتكامل بالتجزئة واستخدام الشرط $h(a)=h(b)=0$، نجد أن:

$$\delta^2 J=\int_a^b\left[h'^2F_{y'y'}-u'F_{y'y'}\frac{d}{dx}(\frac{h^2}{u})\right]dx$$

$$=\int_a^b F_{y'y'}\left[h'^2-\frac{2hh'u'}{u}+\frac{u'^2h^2}{u^2}\right]dx$$

$$=\int_a^b F_{y'y'}\left(h'-\frac{u'h}{u}\right)^2dx$$

لكن $\left(h'-\frac{u'h}{u}\right)^2>0$، لأنه إذا كان $h'-\frac{u'h}{u}=0$، فإن $h'-\frac{u'h}{u}=0$ وعليه فإن $u(x)=kh(x)$، حيث k ثابت. لكن $h(b)=0$، إذاً $u(b)=0$، وهذا خلاف الفرض. إذاً $\left(h'-\frac{u'h}{u}\right)^2>0$، وعليه فإن $\delta^2J>0 \Leftrightarrow F_{y'y'}>0$، وعليه فإن للدالي $J[y]$ قيمة صغرى محلية.

٢ . ٥ . ١٧ . مثال محلول (٦٩):

ليكن: $J[y]=\int_0^1 y'^3dx$، $y(0)=0$، $y(1)=1$.

إذاً معادلة أولر . لاغرانج للدالي $J[y]$ هي $y'=c$، وعليه فإن $y=cx+b$، لكن $y(0)=0$، $y(1)=1$، إذاً $y=x$. لكن $F_{y'y'}=6y'$، $y'=1$، إذاً $F_{y'y'}=6>0$ لكل $x\in[0,1]$. وحيث إن معادلة جاكوبي للدالي $J[y]$ هي $h'(x)=c$، إذاً $h(x)=x$ ومن ثمّ فإن $h(0)=0$، $h'(0)=1$ وعليه فإن $[0,1]$ لا

يحوي أي نقطة مرافقة للنقطة $x = 0$، ومن ثمَّ فإن للدالي $J[y]$ قيمة صغرى محلية ضعيفة على $y = x$.

٢ . ٥ . ١٨ . شرط فيرشتراس: Weirstrass Condition

سنركز اهتمامنا في هذا الجزء على دراسة شرط فيرشتراس الضروري واللازم لوجود قيم قصوى صغرى أو عظمى محلية للداليات وللتمهيد إلى ذلك نورد ما يلي:

٢ . ٥ . ١٩ . تعريف (١):

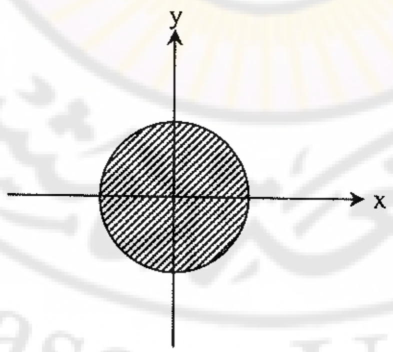
يقال عن أسرة المنحنيات $y = y(x, c)$، إنها تشكل مجالاً خاصاً أو فعلياً (Proper Field) في المنطقة $D \subseteq R^2$، إذا مرّ بكل نقطة من نقاط المنطقة D، منحنٍ واحد وواحد فقط من تلك العائلة.

ويعرف ميل المجال $P\ (x,y)$ عن النقطة (x,y)، بأنه ميل المماس لمنحنٍ من العائلة $y(x, c)$ يمر بالنقطة (x,y).

٢ . ٥ . ٢٠ . مثال محلول (٧٠):

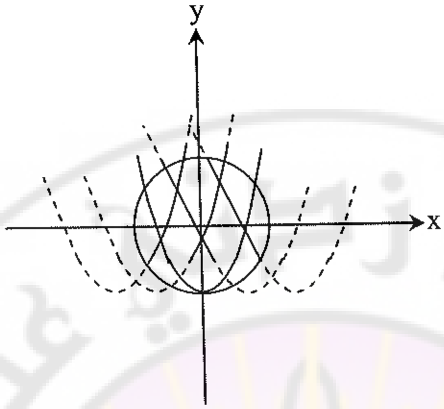
إذا كانت $D = \{(x,y) \in R^2 | x^2 + y^2 \le 1\}$، فإن:

(أ) عائلة الخطوط المستقيمة $y = x + c$، حيث c ثابت تمثل مجالاً خاصاً في المنطقة D، ميله $P(x,y) = 1$، انظر الشكل (٢ . ٢١).



الشكل (٢ . ٢١)

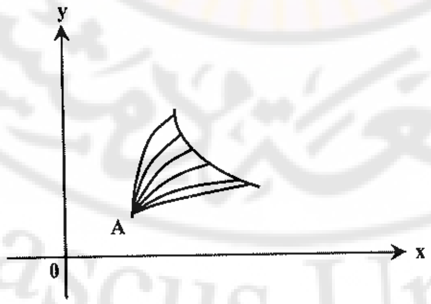
(ب) عائلة القطوع المكافئة $y = (x - a)^2 - 1$، لا تمثل مجالاً على D، لأن تلك القطاعات تتقاطع مع الدائرة $x^2 + y^2 = 1$، انظر شكل (٢ . ٢٢).



الشكل (٢ . ٢٢)

٢ . ٥ . ٢١ . ملاحظة:

إذا كانت كل منحنيات العائلة $y = y(x,c)$ تمر خلال نقطة معينة $A(x_0, y_0)$ فإنها لا تمثل مجالاً خاصاً في المنطقة D. وفي هذه الحالة، إذا كانت المنحنيات تغطي المنطقة D كلها ولا تتقاطع عند أي نقطة في D ما عدا عند النقطة $A(x_0, y_0)$. أي إن شروط تعريف المجال تتحقق عند كل نقاط D ما عدا عند النقطة $A(x_0, y_0)$. حينئذ نقول إن العائلة $y = y(x , c)$ تمثل مجالاً مركزياً (Central Field) انظر الشكل (٢ . ٢٣).

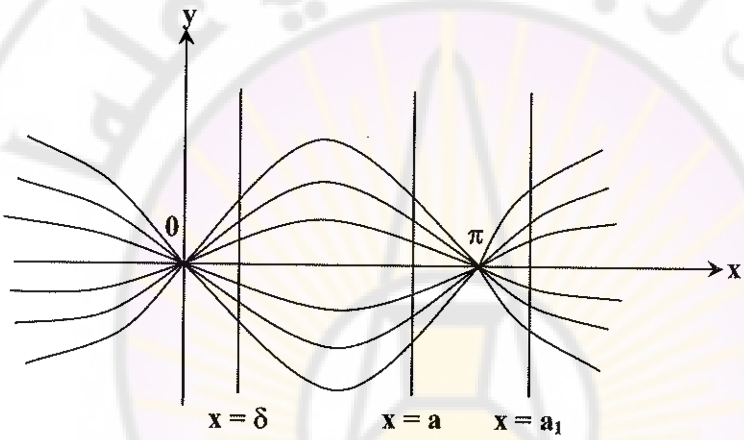


الشكل (٢ . ٢٣)

٢ . ٥ . ٢٢ . مثال محلول (٧١):

العائلة $y = c\sin x$ ،$0 \le x \le a,\ a < \pi$، حيث c ثابت اختياري، تمثل مجالاً مركزياً، انظر الشكل (٢ . ٢٤). لاحظ أن نفس العائلة (المنحني الجيبي) تمثل مجالاً خاصاً في جوار صغير لفترة من محور السينات وهي $\delta \le x \le a$، حيث $\delta > 0$، $a < \pi$. انظر الشكل (٢ . ٢٤).

كما نلاحظ أيضاً أن نفس العائلة لا تمثل مجالاً في جوار فترة من محور السينات هي $0 \le x \le a_1$ حيث $a_1 > \pi$. انظر الشكل (٢ . ٢٤).



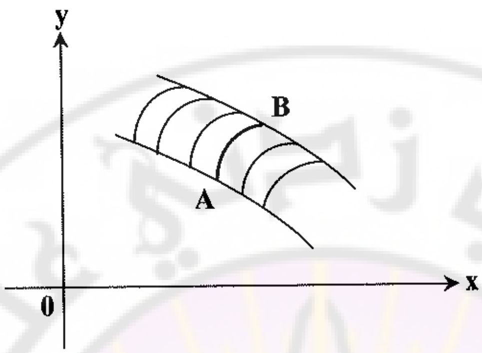
الشكل (٢ . ٢٤)

٢ . ٥ . ٢٣ . تعريف (٢):

إذا تكون المجال الخاص أو المجال المركزي من عائلة من منحنيات القيم القصوى لمسألة معينة من مسائل التغيرات، فإنه يسمى مجال قيم قصوى.

والآن إذا كان $y = y(x)$ منحني قيم قصوى للدالي $J[y] = \int_{x_2}^{x_1} F(x, y, y')dx$ وكانت نقاط الحدود $A(x_0,\ y_0)$ ،$B(x_1,\ y_1)$ ثابتة. فيقال إن منحني القيم القصوى $y = y(x)$ ينتمي إلى مجال القيم القصوى، إذا كانت عائلة منحنيات القيم القصوى

$y = y(x,c)$ لهذا الدالي تمثل مجالاً يحتوي على منحني القيم القصوى $y = y(x)$ لقيمة معينة $C = C_0$ والمنحني $y = y(x)$ لا يقع على حدود المنطقة D التي تمثل فيها العائلة $y = y(x,c)$ مجالاً خاصاً. انظر الشكل (٢ . ٢٥).



الشكل (٢ . ٢٥)

وإذا كان رسم منحنيات القيم القصوى ذات المركز $A(x_0, y_0)$، يمثل مجالاً في جوار منحني القيم القصوى $y = y(x)$ والذي يمر بالنقطة A، فإن المجال المركزي يحتوي على منحني القيم القصوى $y = y(x)$.

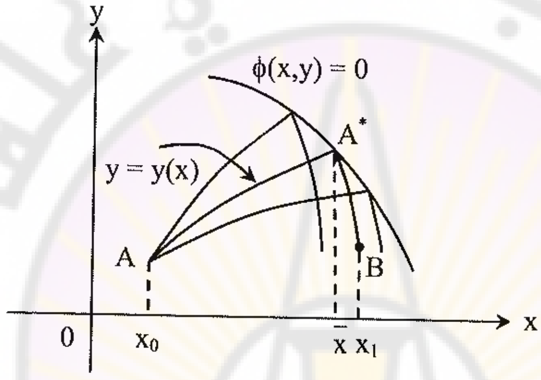
٢ . ٥ . ٢٤ . مثال محلول (٧٢):

ليكن: $J[y] = \int_0^1 (y'^2 - y^2)dx$ ، $y(0) = 0$ ، $y(a) = 0$.

إذاً الحل العام لمعادلة أولر . لاغرانج هو $y = c \sin x$، ومنحنيات هذه العائلة تكون مجالاً مركزياً في الفترة $[0,a]$، $a < \pi$، ويشتمل على منحني قيم قصوى $y = 0$ عندما $c = 0$. لاحظ أن $[0, a]$، $a < \pi$ لا يحوي نقاط مرافقة للنقطة $x = 0$. أما إذا كانت $a \geq \pi$ فإن العائلة $y = c \sin x$ لا تمثل مجالاً لأن الفترة $[0,a]$، $a \geq \pi$ تحوي نقاط مرافقة للنقطة $x = 0$.

٢ . ٥ . ٢٥ . ملاحظة:

إذا كانت $F(x,y,c) = 0$ عائلة من المنحنيات المارة بنقطة معينة $A(x_0, y_0)$ وتقاطع المنحنيان القريبان بعضهما من بعض في تلك العائلة عند نقاط من منحني $\phi(x,y)=0$ «يسمى مثل هذا المنحني المنحني المميز لتلك العائلة»، فإن منحنيات هذه العائلة التي تكون في حالة قرب من منحني القيم القصوى $y=y(x)$ الذي يمر بالنقطتين $A(x_0,y_0)$، $B(x_1,y_1)$ سوف تتقاطع عند نقاط قريبة من نقطة التماس للمنحني $y(x)$، مع المنحني المميز، انظر الشكل (٢ . ٢٦).

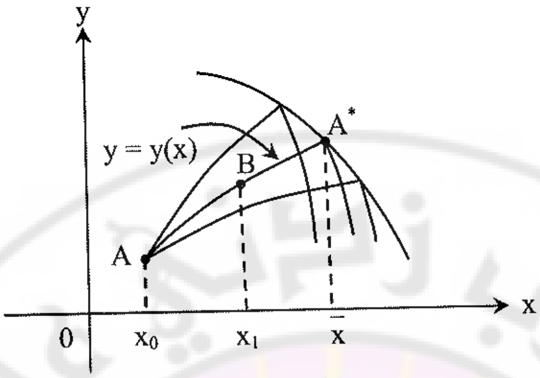


الشكل (٢ . ٢٦)

وإذا كان للقوس AB من منحني القيم القصوى $y = y(x)$، نقطة مثل A^* مختلفة عن A ومشتركة مع المنحني المميز للعائلة $y = y(x,c)$، فإن منحنيات هذه العائلة والقريبة من $y(x)$ سوف تتقاطع مع نفسها ومع المنحني $y(x)$ قريباً من النقطة A^*، ومن ثمّ فإنها لا تمثل مجالاً، شكل (٢ . ٢٦)، وهذا يعني أن A^* نقطة مرافقة للنقطة A، ومن ثمّ فإن A^* تمثل حلاً لمعادلة جاكوبي يحقق الشرط $h(x_0) = 0$، $h'(x_0) = 1$، وعليه فإن الفترة (x_0, x_1) تحوي نقطة مرافقة للنقطة x_0.

أما إذا كان القوس AB من منحني القيم القصوى $y = y(x)$، لا يشترك بنقاط مختلفة عن A مع المنحني المميز لعائلة منحنيات القيم القصوى التي تشتمل على المنحني

$y = y(x)$، فإن منحنيات القيم القصوى من هذه العائلة التي تكون قريبة قرباً كافياً من القوس AB يشتمل على هذا القوس، الشكل (٢ . ٢٧).



الشكل (٢ . ٢٧)

إذاً لا توجد نقاط مرافقة للنقطة A على القوس AB، وهذا يعني عدم وجود نقطة مرافقة للنقطة x_0 على الفترة $(x_0,\ x_1)$، ومن ثم فإن شرط جاكوبي يتحقق، وعليه فإن القوس AB يقع في مجال مركزي مكون من منحنيات القيم القصوى مركزه النقطة A.

والآن إلى تعريف دالة الزيادة لفيرشتراس.

٢ . ٥ . ٢٦ . تعريف (٣):

نسمي الدالةُ : $E: [a,b] \times R^3 \to R$، حيث:

$$E(x,y,y',P) = F(x,y,P) - F(x,y,y') - (P - y')\, F_{y'}(x,y,y')$$

حيث P ميل المجال (الحقل) المركزي، دالة الزيادة لفيرشتراس (weierstrass excess Function) نسبة للرياضي الألماني كارل فيرشتراس (١٨١٥م . ١٨٧٩م).

٢ . ٥ . ٢٧ . مثال محلول (٧٣):

إذا كان $J[y] = \int_0^1 y'^3 dx$ ، $y(0) = 0$ ، $y(1) = 1$

فإن حل معادلة أولر . لاغرانج هو $y = x$، وعليه فإن $y' = 1$. ومن ثمَّ فإن:

$$E(x,y,y',P) = P^3 - 1 - 3(P-1) = P^3 - 3P + 2$$

ونورد فيما يلي المبرهنات الهامة الآتية:

٢ . ٥ . ٢٨ . مبرهنة (١):

إذا كان $y(x)$ منحني قيمة صغرى محلية للدالي:

$J[y] = \int_a^b F(x,y,y')dx \in D_1$، $y(a) = A$، $y(b) = B$.

فإن $E(x,y,y',P) \geq 0$ لكل $x \in [a,b]$، ولكل $P \in R$.

البرهان:

ليكن $[c,d] \subset [a,b]$، ولنفرض أن:

$$y^*(x) = \begin{cases} y(x) & x \in [c,d] \subset [a,b] \\ Y(x) & x \in [c,\varepsilon], \varepsilon \in [c,d] \\ \phi(x,\varepsilon) & x \in [\varepsilon, d] \end{cases}$$

حيث: $Y(x) = y(c)+p(x-c)$، $P \in R$، $\phi(x,\varepsilon) = y(x) + \frac{Y(\varepsilon)-y(\varepsilon)}{d-\varepsilon}(d-\varepsilon)$

لكن للدالي $J[y]$ قيمة صغرى محلية على $y(x)$، إذاً $J[y] \leq J[y^*]$، $\Delta J(c)=0$. لكن

$$g(\varepsilon) = \Delta J(\varepsilon) = \int_c^\varepsilon [F(x,Y^*(x)) - F(x,y,y')]dx +$$
$$+ \int_\varepsilon^d [F(x,\phi(x,\varepsilon),\phi_x(x,\varepsilon)) - F(x,y,y')]dx$$

وباستخدام قاعدة ليبتز، نجد أن:

$$\delta J[\varepsilon] = F(x,Y^*(\varepsilon),Y'^*(\varepsilon)) - F(\varepsilon,\phi(\varepsilon,\varepsilon),\phi_x(\varepsilon,\varepsilon)) + \int_\varepsilon^d [F_y\phi_x(x,\varepsilon) + F_y\phi_{x\varepsilon}(x,\varepsilon)]dx \quad (1)$$

لكن $\phi_{\varepsilon x} = \phi_{x\varepsilon}$ وبالتكامل بالتجزئة نجد أن:

$$\int_{\varepsilon}^{d} F_y \phi_{\varepsilon x}(x,\varepsilon)dx = F_y(x,\phi(x,\varepsilon),\phi_x(x,\varepsilon))\Big|_{\varepsilon}^{d} - \int_{\varepsilon}^{d}(\phi_{\varepsilon}(x,\varepsilon)\frac{d}{dx}F_{y'})dx \qquad (2)$$

ومن (1)، (2) نجد أن:

$$\delta J[\varepsilon] = \int_{\varepsilon}^{d}(F_y - \frac{d}{dx}F_{y'})\phi_{\varepsilon}(x,\varepsilon)dx + F_{y'}(x,\phi(x,\varepsilon),\phi_x(x,\varepsilon))\phi_{\varepsilon}(x,\varepsilon)\Big]_{\varepsilon}^{d} \quad (3)$$

لكن: $Y(x) = y(c)$، $\phi_{\varepsilon}(x,\varepsilon) = \frac{Y'(\varepsilon)-y(\varepsilon)}{d-\varepsilon}(d-\varepsilon) + \frac{Y(\varepsilon)-y(\varepsilon)}{(d-\varepsilon)^2}(d-x)$

إذاً: $\phi_{\varepsilon}(d,c) = 0$،

$$\phi_{\varepsilon}(c,c) = Y'(\varepsilon) - y(\varepsilon) \qquad (4)$$

كما أن:

$$\phi_x(x,a) = y'(x) \text{، } \phi(x,a) = y(x) \text{ لكل } x \in [c,d] \qquad (5)$$

وعليه فإن بوضع $\varepsilon = c$ نجد أن (3) تصبح كالآتي:

$$F_{y'}(c,y(c),y'(c))\,[y'(c) - Y'(c)]$$

ومن (4)، (5) ومعادلة أولر . لاغرانج $F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0$ نجد أن:

$$g'(x) = F(c, Y(c), Y'(c)) - F(c, \phi(c,c), \phi_x(c,c) - \\ - [Y'(c) - y'(c)]\,F_{y'}(c, y(c), y'(c)) \qquad (6)$$

لكن $\phi(c,c) = y(c)$، $\phi_x(c,c) = y'(c)$، $Y(c) = y(c)$، $Y'(c) = P$، إذاً من الشرط $\delta J(c) \geq 0$ والعلاقة:

$$E(x,y,y',P) = F(x,y,P) - F(x,y,y') - (P - y')\,F_{y'}(x,y,y')$$

ومن المعادلة (6) ينتج أن:

$\delta J(c) = E(c,y(c), y'(c), P) \geq 0$ لكل $P \in R$.

٢ . ٥ . ٢٩ . ملاحظة:

إذا كان للدالي $J[y]$ قيمة عظمى محلية على $y(x)$، فإن:

$E(x,y,y',P) \le 0$ لكل $P \in R$.

وأخيراً إلى المبرهنة الآتية التي تحدد الشرط الكافي لوجود قيم قصوى محلية قوية.

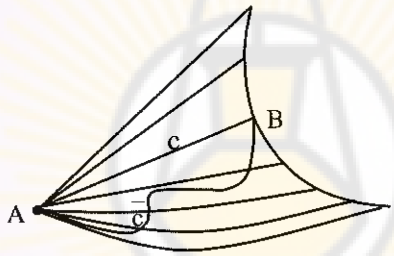
٢ . ٥ . ٣٠ . مبرهنة (٢):

إذا كان $J[y] = \int_a^b F(x,y,y')dx \in \ell_1$ ، $y(a) = A$ ، $y(b) = B$

وكان [a,b] لا يحوي أي نقطة مرافقة للنقطة a و $E(x,y,y',P) \; > \; 0$ لكل $P \in R$، فإن للدالي $J[y]$ قيمة صغرى محلية قوية على المنحني $y(x)$.

البرهان:

بما أن شرط جاكوبي متحقق، إذاً يمكن إحاطة منحني القيم القصوى المار بالنقطتين $A(a, \; y_a)$، $B \; (b, \; y_b)$ بمجال مركزي ميله $P \; = \; P(x,y)$، انظر الشكل (٢ . ٢٨).



الشكل (٢ . ٢٨)

والآن افرض أن:

$$\Delta J = \int_{\bar{c}} F(x,y,y')dx - \int_{c} F(x,y,y')dx$$

حيث $\bar{c}$ منحنٍ آخر يمر بالنقطتين A، B قريباً من c. وإذا كان:

$$K[y] = \int_{\bar{c}} \left[F(x,y,P) + (\frac{dy}{dx} - P)F_{y'}(x,y,P') \right] dx$$

فإن $\int_{c}[F(x,y,y') = K[y]$، لأن $y' = \dfrac{dy}{dx} = P$ في هذه الحالة.

لكن: $K[y] = \int_{\bar{c}} \left[F(x,y,P) - PF_{P}(x,y,P')\right]dx + F_{P}(x,y,P')dy$

عبارة عن تكامل تفاضل تام (exact differential) للدالي $\bar{J}[x,y]$ التي حول لها الدالي $J[x,y]$. إذاً:

$$\delta\bar{J} = F_{y'}(x,y,y')dy + [F(x,y,y') - y'F_{y'}(x,y,y')]dx$$

وعليه وعلى المنحني c نجد أن:

$$\int_{c}[F(x,y,P) + (y'-P)F_{P}]dx = \int_{c} F(x,y,y')dx$$

وحيث إن $K[y]$ تكامل تفاضل تام، إذاً $K[y]$ لا يعتمد على المسار الذي يؤخذ عليه التكامل «يسمى مثل هذا التكامل هلبرت اللامتغير Hilbert invariant integral».

إذاً: $\int_{c} F(x,y,y')dx = \int_{\bar{c}}[F(x,y,P) + (y'-P)F_{P}(x,y,P)]dx$

ليس على $c = \bar{c}$ فقط بل على اختيار للمسار $\bar{c}$، وعليه فإن:

$$\begin{aligned}
\Delta J &= \int_{\bar{c}} F(x,y,y')dx - \int_{c} F(x,y,y')dx \\
&= \int_{\bar{c}} F(x,y,y')dx - \int_{\bar{c}}\left[F(x,y,P) + (y'-P)F_{P}(x,y,P)\right]dx \\
&= \int_{\bar{c}}[F(x,y,y') - F(x,y,P) + (y'-P)F_{P}(x,y,P)]dx \\
&= \int_{\bar{c}} E(x,y,P,y')dx = \int_{a}^{b} E(x,y,P,y')dx
\end{aligned}$$

لكن $E(x,y,P,y') \geq 0$ يعني أن $\Delta J \geq 0$، وعليه فإن للدالي $J[y]$ قيمة صغرى محلية على المنحني $y(x)$، أما إذا كان $E(x,y,y',P) > 0$، فإن $\Delta J > 0$، وعليه فإن للدالي قيمة صغرى محلية قوية على المنحني $y(x)$.

٢ . ٥ . ٣١ . ملاحظة:

إذا تحقق شرط جاكوبي، وكان $E(x,y,y',P) < 0$، فإن للدالي $J[y]$ قيمة عظمى محلية قوية على $y(x)$.

٢ . ٥ . ٣٢ . مثال محلول (٧٤):

ليكن: $J[y] = \int n(x,y)\sqrt{1+y'^2}dx$

إذاً: $F_{y'y'}(x,y,p) = \dfrac{n(x,y)}{(1+p^2)^{3/2}} > 0$ لكل $P \in R$.

وعليه فإن شرط فيراشتراس متحقق.

ومن ثمَّ إذا أمكن إحاطة منحني القيم القصوى المار بنقطتين A، B بمجال فإنه يعطي للدالي قيمة صغرى قوية.

(١) إذا كانت $n(x, y) = y^{-1}$:

فإن منحنيات القيم القصوى في نصف المستوي $y > 0$ تكون عبارة عن أنصاف دوائر متعامدة مع 0x. وإذا لم تقع A، B في نصف المستوي العلوي على خط مستقيم عمودي على 0x، فإن منحنياً واحداً من هذه المنحنيات يمر بهاتين النقطتين ويمكن إحاطته بمجال.

(٢) إذا كانت $n(x,y) = \sqrt{y+h}$:

فإن $J[y] = \int\limits_a^b \sqrt{y+h}\sqrt{1+y'^2}dx$

حيث h عدد ثابت موجب.

وهنا نلاحظ أن الدالة F خالية من x. إذن معادلة أولر . لاغرانج تصبح على الشكل:

$$\sqrt{y+h}\sqrt{1+y'^2}-\frac{\sqrt{y+h}\,y'^2}{\sqrt{1+y'^2}}=c_1$$

وعليه فإن:

$$\frac{\sqrt{y+h}}{\sqrt{1+y'^2}}=c_1$$

بحل هذه المعادلة بالنسبة إلى y' ثم بالتكامل نحصل على الحل العام لمعادلة أولر . لاغرانج، وهو:

$$y+h-c_1^2=\left(\frac{x}{2c_1}+c_2\right)^2$$

وهذه المعادلة تمثل مجموعة من القطاعات المكافئة.

وإذا وضعنا $c_1 = 0$ نحصل على مستقيمات موازية لمحور $0y$ كمنحنيات قصوى.

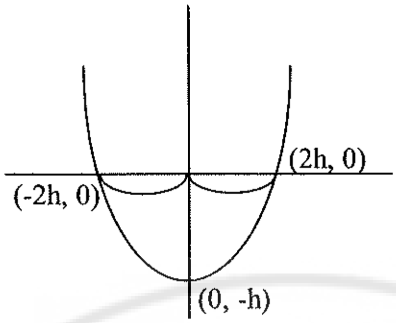
بأخذ مجموعة المنحنيات القصوى المنبعثة من المبدأ. أي نأخذ الشرطين الابتدائيين:

$$y(0) = 0 \text{ ،} y'(0) = \alpha$$

وبعد إيجاد c_1, c_2 من هذين الشرطين نحصل على:

$$y=\frac{(1+\alpha^2)}{4h}x^2+\alpha x$$

وهذه المعادلة تعطي، بعد الاشتقاق بالنسبة إلى α وحذفها، مغلف مجموعة القطاعات المكافئة $y=\frac{x^2}{4h}-h$، وهذا قطع مكافئ رأسه $(0, -h)$ ومحوره $x = 0$. انظر الشكل (٢ . ٢٩).



الشكل (٢ . ٢٩)

ويتحقق شرط جاكوبي على الجزء، من منحني القيم القصوى، واقع بين المبدأ وأية نقطة تسبق نقطة التماس لهذا القطع مع المغلف. وبالإضافة إلى ذلك فإن شرط لوجاندر يتحقق أيضاً لأن:

$$F_{y'y'} = \frac{\sqrt{y+h}}{(1+y'^2)^{3/2}} > 0$$

أي إنه يمكن إحاطة هذا الجزء من منحني القيم القصوى بحقل. كما أن هذا الجزء يعطي الدالة قيمة صغرى قوية.

٢ . ٥ . ٣٣ . مثال محلول (٧٥):

ليكن: $J[y] = \int_0^1 y'^3 dx$

ونطرح مسألة رسم منحني قيم قصوى يمر بين النقطتين $A(0,0)$، $B\ (1,1)$.

إن الحل العام لمعادلة أولر . لاغرانج هو:

$$y = c_1 x + c_2$$

لكن $y(0) = 0$، $y(1) = 1$، إذاً $y = x$، وعليه فإن $F_{yy} = F_{yy'} = 0$، $F_{y'y'} = 6y'$، ومن ثمَّ فإن $F_{y'y'} = 6 > 0$ على المستقيم $y = x$، ومن ثم فإن شرط لوجاندر يتحقق.

وتصبح معادلة جاكوبي $h' = c$ وحلها $h(x) = x$ حيث $h'(0)=1$، $h(0)=0$

إذاً شرطا لوجاندر وجاكوبي يتحققان على طول القطعة المستقيمة AB من مستقيم القيم القصوى $y = x$ وهذه القطعة تعطي قيمة صغرى ضعيفة كما أن دالة فيرشتراس تصبح:

$$E(x,y,y',p) = p^3 - y'^3 - 3(p - y')\,y'^2$$

وعلى طول المستقيم $y = x$ نجد أن:

$$E(x,y,y',p) = p^3 - 3p + 2$$

وعندما $p < -2$، نجد أن $E(x,y,y',p) < 0$، وهذا يعني عدم تحقق الشرط $E > 0$، وعليه فإن المستقيم $y = x$ لا يعطي قيمة صغرى قوية.

٢ . ٥ . ٣٤ . ملاحظة:

قد يكون من الصعب تحديد إشارة:

$$E(x,y,y',p) = F(x,y,p) - F(x,y,y') - (p - y')\,F_{y'}(x,y,y')$$

لذلك نستخدم مفكوك تايلور للحدين $F(x,y,p) - F(x,y,y')$ حتى حدود الدرجة الثانية في $(p - y')$، فيمكننا التعبير عن دالة فيرشتراس، كالآتي:

$$E = E(x,y,y',p) = \frac{1}{2}(p - y')^2 F_{y'y'}(x,y,\alpha)$$

حيث $\alpha \in (p - y')$، ومن ثم $E \geq 0$ إذا وإذا فقط $F_{y'y'}(x,y,\alpha) \geq 0$، وعليه فإن الشرط الكافي لوجود قيم صغرى محلية قوية للدالي $J[y]$ على المنحني $y(x)$ هو إمكانية إحاطة $y(x)$ بحقل تتحقق عند كل نقطة من نقاطه المتراجحة $F_{y'y'} > 0$.

٢ . ٥ . ٣٥ . مثال محلول (٧٦):

حدد نوع القيم القصوى للدالي:

$$J[y] = \int_0^a (6y'^2 - y'^4 + yy')\,dx \text{، } y(0) = 0 \text{، } y(a) = b \text{، } a>0 \text{، } b>0.$$

الحل:

بما أن: $F = F(y,y') = 6y'^2 - y'^4 + yy'$

إذاً معادلة أولر . لاغرانج هي:

$$F - y'F_{y'} = c_1$$

وعليه فإن $3y'^4 - 6y'^2 = c_1$، ومنها نجد أن $y' = c$ وعليه فإن $y = cx + d$

لكن $y(0) = 0$، إذاً $y = cx$، وحيث $y(a) = b$، إذاً $c = \frac{b}{a}$، وعليه فإن

$y = \frac{b}{a}x$ وهو محتوى في عائلة المستقيمات $y = cx$ التي تشكل مجالاً مركزياً. لكن:

$$E(x,y,y',p) = F(x,y,p) - F(x,y,y') - (p - y')\,F_{y'}(x,y,y')$$

$$E(x,y,y',p) = 6p^2 - p^4 - yp - 6y'^2 + y'^4 - yy' - (p - y')(12y' - 4y'^3 - y)$$
$$= 6p^2 - p^4 - 6y'^2 - 3y'^4 - 12py' - 4py'^3$$

إذاً من الصعب تحديد إشارة E، لذلك نستخدم الملاحظة أعلاه، فنجد أن:

$$E = E(x,y,y',p) = \frac{1}{2}(p - y')^2 F_{y'y'}(x,y,\alpha)$$

لكن $F_{y'y'} = 12(1 - y'^2)$، إذاً $F_{y'y'}(x,y,\alpha) = 12(1 - \alpha^2)$ وعليه فإن

$F_{y'y'} = 0$ يعني أن $\alpha = \pm 1$. إذاً $F_{y'y'} > 0$ لكل $0 < \frac{b}{a} = \alpha < 1$، وعليه توجد قيمة صغرى محلية للدالي $J[y]$. لكن $F_{y'y'} < 0$ لكل $\alpha > 1$، إذاً $E < 0$ لكل $\alpha > 1$ وعليه فإن للدالي قيمة عظمى محلية.

٢ . ٥ . ٣٦ . تمارين غير محلولة:

(١) احسب $\delta^2 J$ لكل مما يأتي:

(أ) $J[y]=\int_a^b x^2 y'^3 dx$. (ب) $J[y]=\int_a^b (y^2+y'^2-2y\sin x)dx$.

(٢) إذا كان $J[y]=\int_0^1 (y^2+y^3)dx \in \ell[0,1]$ ، فأثبت أن $y(x)=0$ قيمة صغرى محلية للدالي $J[y]$، بينما $y(x)=\dfrac{-2}{3}$ ، $0 \le x \le 1$ قيمة عظمى محلية للدالي $J[y]$.

(٣) إذا كان: $J[y]=\int_0^1 (y^2-y'^4)dx$ ، $y(0)=0$، $y(1)=1$

فأثبت أن $\delta J\,(0,\Delta y)=0$ لكل Δy بينما $\delta^2 J(0,\Delta y)>0$.

(٤) هل يتحقق شرط جاكوبي على كل مما يأتي:

(أ) $J[y]=\int_0^1 (y'^2+y')dx$ ، $y(0)=0$، $y(1)=1$.

(ب) $J[y]=\int_a^b (x^2+y^2+y'^2)dx$.

(ج) $J[y]=\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx$

(د) $J[y]=\int_a^b (y'^2-\alpha^2 y^2)e^{2y}dx$ ، $\alpha>1$.

(٥) هل يتحقق شرط جاكوبي الموسع على الدالي:

$J[y]=\int_0^a (y'^2+y^2+x^2)dx$ ، $y(0)=y(a)=0$

(٦) أوجد القيم القصوى وحدد نوعها في كل مما يأتي:

(أ) $J[y]=\int_0^a \sqrt{\dfrac{1+y'^2}{y}}\,dx$ ، $y(0)=0$، $y(a)=b$.

(ب) $J[y]=\int_0^2 (xy' + y'^2)dx$ ، $y(0)=1$ ، $y(2)=0$.

(ج) $J[y]=\int_0^a (y'^2 + 2yy' - 16y^2)dx$ ، $a>0$ ، $y(0)=y(a)=0$

(د) $J[y]=\int_{-1}^2 y'(1+x^2y')dx$ ، $y(-1)=y(2)=1$.

(٧) أوجد المنحني المار بالنقطتين $(-1,-1)$، $(1,1)$ الذي يجعل للدالي $J[y]=\int_{-1}^1 (x^2y'^2 + 12y^2)dx$ قيمة صغرى.

(٨) أوجد معادلة المنحني المار بالنقطتين $(1,3)$، $(2,5)$ الذي يجعل الدالي $J[y]=\int_1^2 y'(1+x^2y'^2)dx$ يملك قيمة صغرى.

(٩) حدد نوع القيم القصوى في كل مما يأتي:

(أ) $J[y]=\int_0^{\pi/4} (4y^2 - y'^2 + 8y)dx$ ، $y(0)=1$ ، $y(\pi/4)=0$.

(ب) $J[y]=\int_1^2 (x^2y'^2 + 12y^2)dx$ ، $y(1)=1$ ، $y(2)=8$.

(ج) $J[y]=\int_0^1 (y'^2 + y^2 + 2ye^{2x})dx$ ، $y(0)=\frac{1}{3}$ ، $y(1)=\frac{1}{3}e^2$.

(د) $J[y]=\int_0^a \frac{y}{y'^2}dx$ ، $y(0)=1$ ، $y(a)=b$ ، $0<b<1$ ، $a>0$.

(هـ) $J[y]=\int_0^a \frac{dx}{y'}dx$ ، $y(0)=0$ ، $y(a)=b$ ، $a, b>0$.

(و) $J[y]=\int_0^a \frac{dx}{y'^2}dx$ ، $y(0)=0$ ، $y(a)=b$ ، $a, b>0$.

(ز) $J[y]=\int_1^2 \frac{x^3}{y'^2}dx$ ، $y(1)=1$ ، $y(2)=4$.

(ح) $J[y]=\int_1^3 (12xy+y'^2)dx$ ، $y(1)=0$، $y(3)=26$.

(ط) $J[y]=\int_0^{\pi/4} (y^2-y'^2+6y\sin(2x))dx$ ، $y(0)=0$، $y(\frac{\pi}{4})=1$

(ي) $J[y]=\int_0^2 (y^2+y'^2-2xy)dx$ ، $y(0)=0$، $y(2)=3$.

(١٠) أثبت بتحقيق شرط جاكوبي أن الدالي:

$$J[y]=\int_0^1 \sqrt{1+y'^2}\,dx \text{ ، } y(0)=0\text{، } y(1)=1$$

قيمة صغرى على المستقيم $y = x$.

(١١) أثبت أن منحني القيم الصغرى للدالي:

$$J[y]=\int_0^1 (y'^2+y')dx \text{ ، } y(0)=0\text{، } y(1)=1$$

يحقق الشروط الضرورية لكل من لوجاندر، جاكوبي وفيرشتراس.

٢ . ٦ . التحكم الأمثل «Optional Control»:

تهتم نظرية التحكم الأمثل «Optional Control Theory» بدراسة القيم القصوى للداليات، التي تعتمد على متغيرات تحكم (Control Variable) منتمية إلى مجموعة من الدوال تحقق شروطاً معينة، وسنركز اهتمامنا في هذه الفقرة على دراسة المسائل البسيطة للتحكم الأمثل، وتضم أربعة بنود تناولنا في الأول منها كيفية صياغة المسألة وربط الضوابط وتجميع التكاليف، وتناولنا في البند الثاني، التكلفة المثلى ومبدأ الأمثلية لبلمان وبعض تطبيقاته، وتناولنا في البند الثالث الشروط الضرورية للتحكم الأمثل، أما في البند الأخير فقد درست قاعدة القيمة العظمى لبونترياجن وبعض تطبيقاتها.

٢ . ٦ . ١. صياغة المسألة وربط الضوابط وتجميع التكاليف:

في كثير من المسائل الهندسية، والتحكم بالصواريخ والاقتصاد وإدارة الأعمال يكون الهدف المطلوب تحديد القيم القصوى للداليات من الشكل:

$$J = \int_{t_0}^{t_1} F[t, X(t), U(t)]dt$$

حيث: $X(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t) \in R^n$،

$$U(t) = (u_1(t), \ldots, u_m(t) \quad \in R^m$$

التي تحقق شروطاً معينة تتضمن معادلات تفاضلية على الشكل:

$X'_i(t) = \frac{dX_i}{dt} = g_i(t, X(t), U(t))$، $i = 1, \ldots, n$، $x_i = x_i(t)$، $u_j = u_j(t)$.

وفي كثير من التطبيقات تمثل t الزمن، t_0 الزمن الابتدائي، t_1 الزمن النهائي، أما $X(t)$ فتسمى دالة الوضع أو الحالة (state function)، وتسمى $U(t)$ دالة التحكم (control function)، أما المعادلات التفاضلية $X'_i(t) = g_i(t, X(t), U(t))$

والشروط الأخرى، فتخدم سلوك دالة الوضع في حالة تحديد دالة التحكم، أما J فتمثل الكلفة أو الإنتاج المطلوب تقليلها أو تكثيرها بالنسبة للمعطيات. وإذا كان:

$$U(t) \in R^m \ , \ X(t) \in R^n \ , \ J = \int_{t_0}^{t_1} F[t, X(t), U(t)]dt \qquad (1)$$
$$X(t_0) = x_0 \ , \ X'(t) = g(X(t), U(t))$$

فيسمى النظام (1) نظاماً ذاتياً (Autonomous System)، ويسمى التحكم تحكماً بسيطاً.

٢ . ٦ . ٢ . مثال محلول (٧٧):

إذا كانت $F(t,X(t),U(t)) = X^2 + U^2$، $g(t,X(t),U(t))] = \alpha X + \beta U$ حيث α, β ثوابت، فإن:

$$X(t_0) = x_0 \text{ ،} X'(t) = \alpha X(t) + \beta U(t) \text{ ،} J = \int_{t_0}^{t_1} (X^2 + U^2)dt$$

٢ . ٦ . ٣ . مثال محلول (٧٨):

إذا كانت $F(t,x,u) = x^2 \cos^2 u$ ، $x'(t) = g(t,x,u) = \frac{1}{2}\sin U(t)$ ، $0 < t < \pi$ ، $x(0) = \frac{\pi}{2}$ فإن:

$$J[u] = \int_0^{\pi} x^2(t)\cos^2 u(t)dt \text{ ،} x'(t) = \frac{1}{2}\sin u(t) \text{ ،} x(0) = \frac{\pi}{2} .$$

٢ . ٦ . ٤ . مثال محلول (٧٩):

يراد زيادة أرباح شركة خلال فترة زمنية معينة من t_0 إلى t_1، ويوجد في تلك الشركة كمية من المال وعوامل إنتاج أخرى، وبإهمال بقية عوامل الإنتاج والتفكير في مصدر الربح (رأس المال) والذي يرمز له بالرمز $M(t)$، والتعبير عن معدل الإنتاج في اللحظة t بالرمز $U(t)$. نجد أن الربح يعتمد على كمية رأس المال ومعدل الإنتاج الذي يرمز له في هذه

الحالة بالرمز $F(t, M(t), U(t))$، وحيث إن معدل الإنتاج يعتمد على الزمن t. إذاً اتخاذ القرار يتغير بتغير الزمن، مما يجعل رأس المال متغيراً أيضاً، وعليه فإن $M' = \frac{dM}{dt} = g(t, M, U)$، وتصبح المسألة في هذه الحالة هي إيجاد أكبر قيمة للدالي:

$$M' = F(t,M,U) \text{ ، } J[U] = \int_{t_0}^{t_1} F(t, M(t), U(t))dt$$

والآن إلى بعض التعاريف المفيدة، التي تحدد بعض خواص دالة التحكم والدوال المعتمدة عليها.

٢ . ٦ . ٥ . تعريف (١):

يقال عن دالة التحكم $u : [\bar{t}_0, \bar{t}_1] \to R^m$، إنها مقبولة أو مسموح بها (Admissible)، إذا كانت:

(أ) معرفة ومستمرة مقطعياً (Piecewise continuous) على $[\bar{t}_0, \bar{t}_1]$.

(ب) $u(t) \in U$ لكل $t \in [\bar{t}_0, \bar{t}_1]$، حيث $U \subseteq R^n$ تصف مجموعة القيود (Constraint Set).

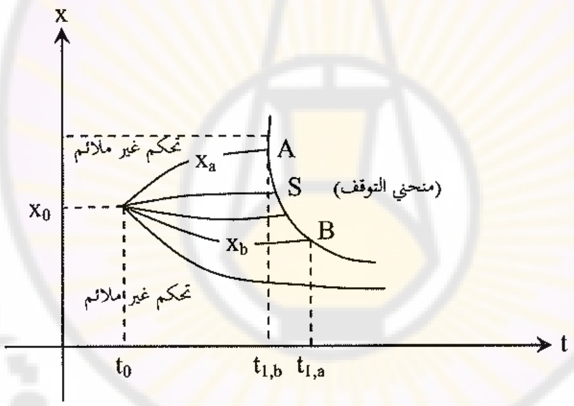
لاحظ أن استخدام التحكم المقبول (Admissible Control)، يتبت أن الشرط الابتدائي $x(t_0) = x_0$، $t_0 \in [\bar{t}_0, \bar{t}_1]$ يجعل المعادلة $X'(t) = g(x(t), u(t))$ تملك حلاً وحيداً أملس (ممهداً) مقطعياً (Piecewise X Smooth Solution)، حيث: $[t_0, t_1] \subset [\bar{t}_0, \bar{t}_1], X(t_0) = x_0, X : [t_0, t_1] \to R^n$

والآن لنركز اهتمامنا على المسائل التي يكون فيها الشرط الابتدائي معلوماً، بينما الشرط النهائي ينتمي إلى مجموعة جزئية B «يطلق عليها مجموعة الهدف Target Set» من R^n. إذاً $X(t_0) = x_0$، $X(t_1) \in B$.

٢ . ٦ . ٦ . تعريف (٢):

يقال عن تحكم $U:[t_0,t_1]\to R^m$، إنه تحكم ملائم أو عملي « Feasible Control» عند النقطة x_0، إذا كان U تحكماً مقبولاً، ويولد الحل $X:[t_0,t_1]\to R^n$ بحيث إن $X(t_0) = x_0$، $X(t_1) \in B$.

وحيث إن لكل قيمة ابتدائية $X(t_0) = x_0$، يكون للنظام $X'(T) = g(X(t),U(t))$ حلاً محدوداً، يطلق عليه المسار (Trajectory) أو متجه الوضع، وحيث إن $X(t_0) = x_0$ تعطى دائماً ويطلق تحديد $x_1 = X(t_1)$ خلال أو على سطح S يسمى السطح النهائي أو سطح التوقف (Terminal Surface)، وهو مجموعة جزئية من الفضاء الإقليدي R^{n+1}، وعندما $m = n = 1$ نجد أن S تمثل منحنياً، مثل المنحني في شكل (٢ . ٣٠) وتحدد S العلاقة بين $X(t)$ و t عند $t = t_1$.



الشكل (٢ . ٣٠)

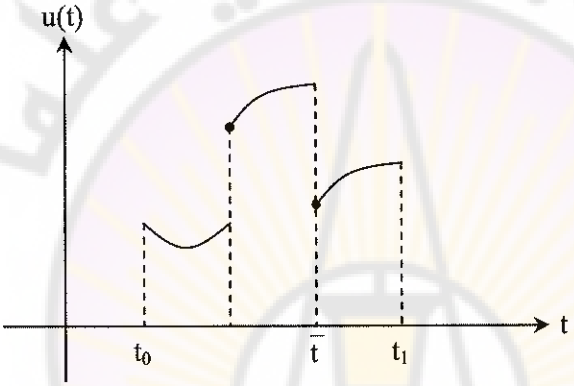
ويقال عن عملية تحكم إنها مثلى صغرى، إذا كان $J[u^*] \le J[u]$ لكل $u\in U$، ويقال عن عملية تحكم إنها مثلى عظمى إذا كان $J[u] \le J[u^*]$، لكل $u\in U$، ويسمى المسار المقابل أو المصاحب لتلك العملية، المسار الأمثل (Optimal trajectory). وفي الشكل (٢ . ٣٠)، نجد أنه إذا كانت x_0 هو المسار الأمثل فإن A هي نقطة النهاية،

$t_{1,a}$ الزمن النهائي، أما إذا كان x_0 مساراً أمثلَ، فإن B نقطة النهاية و $t_{1,b}$ الزمن النهائي، وكلتا النقطتين B, A تقعان على منحني التوقف S.

والآن إلى تعريف ربط تحكمين.

٢ . ٦ . ٧ . تعريف (٣):

يقال عن تحكم مقبول $u:[t_0,t_1]\to R^m$، إنه اتحاد أو رابط (Joining) لتحكمين مقبولين $v:[t_0,\bar{t}]\to R^m$، $\omega:[\bar{t},t_1]\to R^m$، إذا كان $u(t) = v(t)$ لكل $t\in[t_0,\bar{t}]$ و $u(t)=\omega(t)$ لكل $t\in[\bar{t},t_1]$. انظر الشكل (٢ . ٣١).



الشكل (٢ . ٣١)

والآن $v:[t_0,\bar{t}]\to R^m$ تحكماً مقبولاً، مولداً للحل $y:[t_0,\bar{t}]\to R^n$، تكلفته المناظرة $J[v]$، $\omega:[\bar{t},t_1]\to R^m$ تحكماً مقبولاً مولداً للحل $z:[\bar{t},t_1]\to R^n$، تكلفته المناظرة $J[\omega]$، حيث $y(t_0) = y_0$، $y(\bar{t}) = z(\bar{t})$، وكان $u:[t_0,t_1]\to R^m$ تحكماً مقبولاً، تكلفته $J[u]$ ومعرفاً بربط التحكمين v، ω، والمولد للحل $X:[t_0,t_1]\to R^n$، $X(t_0) = x_0$، حيث $X(t) = y(t)$ لكل $t\in[t_0,\bar{t}]$، $X(t) = z(t)$ لكل $t\in[\bar{t},t_1]$، فإن $J[u] = J[v] + J[\omega]$، أي إن التكلفة الكلية تساوي مجموع التكاليف.

وهذا تناقض، لأن التحكم هو تحكم أمثل أصغر عند x_0. إذاً $u^*(t) = \omega(t)$، لكل $t \in [t_0, t_1^*]$، وعليه فإن ω تحكم أمثل أصغر عند $x^*(\bar{t})$ و $\bar{t} \in [t_0, t_1^*]$.

والآن إلى بعض تطبيقات قاعدة الأمثلية، واستخدام حساب التغيرات للحصول على معادلة بلمان، واشتقاق معادلة هاملتون منها، وعليه، إذا كان المطلوب إيجاد القيمة العظمى للتحكم:

$J[u] = \int_{t_0}^{t_1} F(t,x,u)dt$، حيث $x' = g(x,x(t),u(t))$، $x(t_0) = x_0$ وفرضنا أن $\bar{J} = \max\limits_{u \in U} J[u]$، وبدلنا t_0 بالمتغير t، فإن:

$$\bar{J}(x,t) = \max_{u \in U} J[t,u] = \int_{t}^{t_1} F(t,x,u)dt$$

ويكون $\max\limits_{u \in U} J[u] = \bar{J}(t_0, x_0)$. لكن:

$$\bar{J}(t,x) = \max_{u \in U}[\int_{t}^{t+\Delta t} F(t,x,u)dt + \int_{t+\Delta t}^{t_1} F(t,x,u)dt]$$

وحسب قاعدة الأمثلية نجد أن:

$$\bar{J}(t+\Delta t, x+\Delta x) = \max_{u \in U} \int_{t+\Delta t}^{t_1} F(t,x;u)dt$$

ومن ثمّ فإن:

$$\bar{J}(t,x) = \max_{u \in U}[\int_{t}^{t+\Delta t} F(t,x,u)dt + \bar{J}(t+\Delta t, x+\Delta x)]$$

وإذا كانت Δt صغيرة جداً، فإن:

$$\int_{t}^{t+\Delta t} F(t,x,u)dt = F(t,x,u) \cdot \Delta t$$

وعليه فإن: $\bar{J}(t,x) = \max\limits_{u \in U}[F.\Delta t + \bar{J}(t+\Delta t, x+\Delta x)]$

وباستخدام متسلسلة تايلور، نجد أن:

$$\bar{J}(t+\Delta t, x+\Delta x) = \bar{J}(t,x) + \frac{\partial \bar{J}}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial \bar{J}}{\partial x}\Delta x + \ldots$$

وعليه فإن:

$$\bar{J}(t,x) = \max_{u\in U}[F.\Delta t + \bar{J}(t,x) + \frac{\partial \bar{J}}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial \bar{J}}{\partial x}\Delta x + \ldots]$$

ومنها نجد أن:

$$\max_{u\in U}[F + \frac{\partial \bar{J}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{J}}{\partial x}\cdot\frac{\Delta x}{\Delta t} + \ldots] = 0$$

لكن $\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t} = x'(t) = g(t,x,u)$، إذاً:

$$-\frac{\partial \bar{J}}{\partial t} = \max_{u\in U}[F(t,x,u) + \frac{\partial \bar{J}}{\partial x}\cdot g(t,x,u)] \qquad (1)$$

وتعرف المعادلة (1)، بمعادلة بلمان (Bellman's Equation). ويمكننا الآن استنتاج معادلة هاملتون من معادلة بلمان كالآتي:

نفرض أن $u = x'$، إذاً بالتعويض في (1) ينتج أن:

$$\max_{x'}[F(t,x,u) + \frac{\partial \bar{J}}{\partial x}\cdot x' + \frac{\partial \bar{J}}{\partial t}] = 0 \qquad (2)$$

وبأخذ المشتقة الجزئية بالنسبة إلى x' لكل حد داخل القوس في المعادلة (2)، ينتج أن:

$$\frac{\partial F}{\partial x'} + \frac{\partial \bar{J}}{\partial x} = 0 \qquad (3)$$

وعليه فإن:

$$F + \frac{\partial \bar{J}}{\partial x}\cdot x' + \frac{\partial J}{\partial t} = 0 \qquad (4)$$

وحيث إن: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial x'} + \frac{\partial \bar{J}}{\partial x}\right) = 0$، إذاً:

$$\frac{d}{dt}(F_{x'}) + \frac{\partial^2 \bar{J}}{\partial x \partial t} \cdot \frac{dt}{dt} + \frac{\partial^2 \bar{J}}{\partial x^2} \cdot \frac{dx}{dt} = 0 \qquad (5)$$

لكن: $\frac{\partial}{\partial x}(F + \frac{\partial \bar{J}}{\partial x} \cdot x' + \frac{\partial J}{\partial t}) = 0$، إذاً:

$$F_x + F_{x'} \cdot \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial^2 \bar{J}}{\partial x^2} \cdot x' + \frac{\partial^2 \bar{J}}{\partial t \partial x} + \frac{\partial \bar{J}}{\partial x} \cdot \frac{\partial x'}{\partial x} = 0$$

ومنها نجد أن:

$$F_x + (F_{x'} + \bar{J}_x) \cdot \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial^2 \bar{J}}{\partial x^2} \cdot x' + \frac{\partial^2 \bar{J}}{\partial t \partial x} = 0 \qquad (6)$$

ومن (3)، (6) ينتج أن:

$$F_x + \frac{\partial^2 \bar{J}}{\partial x^2} \cdot x' + \frac{\partial^2 \bar{J}}{\partial t \partial x} = 0$$

وعليه فإن:

$$\frac{\partial^2 \bar{J}}{\partial x^2} \cdot x' + \frac{\partial^2 \bar{J}}{\partial t \partial x} = -F_x \qquad (7)$$

ومن (5)، (7) ينتج أن:

$$F_x - \frac{d}{dx} F_{x'} = 0$$

وهي معادلة أولر . لاغرانج، لكن:

$L = \int_{t_0}^{t_1} (H + \lambda' x) dt - (\lambda_1 x_1 - \lambda_0 x_0)$، $\lambda(t_0) = \lambda_0$، $\lambda(t_1) = \lambda_1$،

$x(t_0) = x_0$، $x(t_1) = x_1$ و $\bar{L} = \bar{J}$ عند القيمة القصوى، وعليه فإن:

$$\frac{\partial \bar{L}}{\partial x_0} = \frac{\partial \bar{J}}{\partial x_0} = \bar{\lambda}_0 \qquad (8)$$

وحسب قاعدة بلمان للأمثلية، يمكن حذف نقطة البداية، وعندما تكون u في نهايتها العظمى، يكون:

$$H(t,x,u,\lambda)=F(t,x,u)+\lambda g(t,x,y)$$

$$=F(t,x,u)+\frac{\partial\bar{J}}{\partial x}\cdot x' \qquad (9)$$

وتصبح معادلة بلمان كالآتي:

$$-\frac{\partial\bar{J}}{\partial t}=H(t,x,u,\frac{\partial\bar{J}}{\partial x}) \qquad (10)$$

والمعادلة (10) هي معادلة هاملتون . جاكوبي، إذاً:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-\partial\bar{J}}{\partial t}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(H(t,x,u,\frac{\partial\bar{J}}{\partial x})\right)$$

ومن ثمّ فإن:

$$\frac{-\partial^2\bar{J}}{\partial x\partial t}=\frac{\partial H}{\partial x}+\frac{\partial H}{\partial\left(\frac{\partial\bar{J}}{\partial x}\right)}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\bar{J}}{\partial x}\right)=\frac{\partial H}{\partial x}+\frac{\partial H}{\partial\lambda}\cdot\frac{-\partial^2\bar{J}}{\partial x^2}$$

وعليه فإن:

$$\frac{-\partial H}{\partial x}=\frac{\partial^2\bar{J}}{\partial t\partial x}+\frac{\partial H}{\partial\lambda}\cdot\frac{\partial^2\bar{J}}{\partial x^2} \qquad (11)$$

وبتفاضل طرفي المعادلة (8) بالنسبة إلى t، ينتج أن:

$$\lambda'=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\bar{J}}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2\bar{J}}{\partial x\partial t}\cdot\frac{dt}{dt}+\frac{\partial^2\bar{J}}{\partial x^2}\cdot\frac{dx}{dt}=\frac{\partial^2\bar{J}}{\partial x\partial t}+\frac{\partial^2\bar{J}}{\partial x^2}\cdot x' \qquad (12)$$

ومن (9) نجد أن $\frac{\partial H}{\partial\lambda}=g(t,x,u)=x'$، لكن $\bar{J}$ قابلة للاشتقاق مرتين ومستمرة، إذاً:

$$\frac{\partial^2 \bar{J}}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 \bar{J}}{\partial t \partial x}$$

وعليه ومن (11)، (12) ينتج أن:

$$\lambda' = -\frac{\partial H}{\partial x}, \frac{\partial H}{\partial \lambda} = x'$$

وهي معادلات هاملتون.

٢ . ٦ . ١٠ . الشروط الضرورية للتحكم الأمثل:

سنركز اهتمامنا في هذا الجزء على تحديد $x(t)$ المتولدة من دالة التحكم $u(t)$ التي تجعل الدالي $J[u] = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x, u)dt$ حيث $x'(t) = g(t,x,u)$، $x(t_0) = x_0$، $t_0 < t < t_1$ يملك قيمة قصوى. أي إننا نحسب التحكم الأقصى، ولحساب ذلك، نفترض أن:

$$J[u] = \int_{t_0}^{t_1} F[t, x(t,u), u(t)]dt \qquad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} t > t_0 \ , \ \frac{d}{dt} x(t,u) &= g(t, x(t,u), u(t)) \\ x(t_0, u) &= x_0 \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

و u قيمة قصوى (صغرى) للدالي J، إذاً $\delta J[u,\Delta u] = 0$، لكل الدوال المستمرة Δu لكن:

$$\frac{d}{d\varepsilon} J(u + \varepsilon\Delta u) = \frac{d}{d\varepsilon} \int_{t_0}^{t_1} F[t, x(t, u + \varepsilon\Delta u), u(t) + \varepsilon\Delta u(t)]dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{d\varepsilon} F[t, x(t, u + \varepsilon\Delta u), u(t) + \varepsilon\Delta u(t)]dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} F_X[t, x(t, u + \varepsilon\Delta u), u(t) + \varepsilon\Delta u] \frac{\partial}{\partial x} x(t, u + \varepsilon\Delta u)$$

$$+ F_U[t, x(t, u + \varepsilon\Delta u), u + \varepsilon\Delta u]\Delta u$$

حيث $X = x\,(t,u + \varepsilon\Delta u)$، $X = u(x) + \varepsilon\Delta u(x)$، لكن:

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon} X(t, u + \varepsilon\Delta u)\,|_{\varepsilon=0} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{X(t, u + \varepsilon\Delta u) - X(t, u)}{\varepsilon} \qquad (3)$$

$$= X'(t,u)$$

إذاً:

$$\delta J(u, \Delta u) = \int_{t_0}^{t_1}\{F_X[t, x(t, u), u(t)]\frac{\partial}{\partial\varepsilon} X(t, u + \varepsilon\Delta u)\,|_{\varepsilon=0} +$$

$$+ F_U[t, x(t, u), u(t)]\Delta u(t)\}dt \qquad (4)$$

لكل الدوال المستمرة Δu، $X = X(t,u)$ تحددها العلاقة (2) أما:

$$\left.\begin{aligned} F_X[t, x(t, u), u(t)] = F_x(t, x, u) \\ F_U[t, x(t, u), u(t)] = F_u(t, x, u) \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

ومن (2)، (3) نجد أن:

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon} X(t, u + \varepsilon\Delta u) = \int_{t_0}^{t} e^{\int_{\tau}^{t} A(s)ds} \cdot B(\tau)\Delta u(\tau)d\tau \qquad (6)$$

حيث:

$$\left.\begin{aligned} A(t) = g_X[t, x(t, u), u(t)] = \frac{\partial}{\partial x} g(t, x, u)\,|_{\substack{x=x(t,u)\\ u=u(t)}} \\ B(t) = g_U[t, x(t, u), u(t)] = \frac{\partial}{\partial u} g(t, x, u)\,|_{\substack{x=x(t,u)\\ u=u(t)}} \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

وعليه فإن:

$$\delta J[u, \Delta u] = \int_{t_0}^{t_1}\left[F_x \cdot \int_{t_0}^{t} e^{\int_{\tau}^{t} A(s)ds} \cdot B(\tau)\cdot\Delta u(\tau)d\tau + F_u\right]dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \{F_u[t, x(t,u), u(t)] + \int_{\tau}^{t_1} \{F_x[\tau, x(\tau,u), u(\tau)]e^{t\int_{\tau}^{t} A(s)ds} \cdot B(t)d\tau\} \Delta u(t)dt$$

لكن $\delta J(u,\Delta u) = 0$، إذاً:

$$F_u[t, x(t,u), u(t)] + \int B(t)F_x[\tau, x(\tau,u), u(\tau)]e^{-\int_{\tau}^{t} A(s)ds} d\tau = 0 \quad (8)$$

حيث $t \in [t_0, t_1]$ وهو الشرط الذي يجعل $J[u]$ تملك قيمة قصوى، هذا ويمكن التعبير عن (8) كالآتي:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{F_u}{g_u}\right) + \left(\frac{F_u}{g_u}\right)g_x = F_x \qquad (9)$$

$$F_u(t_1, x(t_1,u), u(t_1)) = 0$$

٢ . ٦ . ١١ . مثال محلول (٨٠):

أوجد التحكم الأقصى للدالي:

$$J[u] = \int_0^{\pi} X^2(t)\cos^2 u(t)dt$$

حيث: $\frac{d}{dt}X(t) = \frac{\sin u(t)}{2}$، $0 < t < \pi$، $X(0) = \frac{\pi}{2}$

الحل:

بما أن $X = X(t,u)$، إذاً:

$$X(0) = \frac{\pi}{2}, X' = \frac{\sin u(t)}{2} \qquad (1)$$

وعليه فإن: $X(t,u) = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\int_0^t \sin u(\tau)d\tau$

لأي تحكم ثابت U. لكن $F(t,x,u) = x^2 \cos^2 u$، $g(t,x,u) = \frac{\sin u}{2}$، إذاً:

$F_x = 2x(t,u)\cos^2 u(t)$، $F_u = -2X^2(t,u)\cos u(t)\sin u(t)$، $g_u = \frac{\cos u(t)}{2}$،

$g_x = 0$ لكن:

$$F_u(t_1, x(t_1,u), u(t_1)) = 0, \frac{d}{dt}\left(\frac{F_u}{g_u}\right) + \left(\frac{F_u}{g_u}\right)g_x = F_x$$

إذاً:

$\frac{d}{dt}\left(\frac{-2X^2 \cos u \sin u}{\frac{\cos u}{2}}\right) + 0 = 2X\cos^2 u$، $X^2 \sin u \cos u = 0$، عندما $t = \pi$،

وعليه فإن:

$$2\frac{d}{dt}(X^2 \sin u) + X\cos^2 u = 0 \quad (1)$$

$X^2 \sin u \cos u = 0$، عندما

$t = \pi$ ومن (1)، (2) ينتج أن $X[2\frac{d}{dt}(X\sin u) + 1] = 0$، وعليه فإن:

$2\frac{d}{dt}(X\sin u) + 1 = 0$، ومن ثمَّ فإن:

$$X\sin u = \frac{-t}{2} + C \quad (3)$$

ومنها نجد أن:

$\sin u = \frac{c - \frac{t}{2}}{X}$، ومن ثمَّ فإن:

$$2X' = \frac{c - \frac{1}{2}}{X} \Rightarrow 2Xdx = (c - \frac{1}{2})dt \Rightarrow X^2 = ct - \frac{t^2}{4} + b$$

لكن $X(0) = \frac{\pi}{2}$، إذاً $b = \frac{\pi^2}{4}$، وعليه فإن:

$$X(t) = \sqrt{ct - \frac{t^2}{4} + \frac{\pi^2}{4}} \qquad (4)$$

ومن (3)، (4) نجد أن دالة التحكم الأقصى:

$$\sin u(t) = (c - \frac{t}{2})(\frac{\pi^2}{4} + ct - \frac{t^2}{4})^{-\frac{1}{2}} \qquad (5)$$

ومن (4)، (5) نجد أن:

$$0 \le t \le \pi, X^2 \cos^2 u = \frac{\pi^2}{4} - c^2 + 2ct - \frac{t^2}{2}$$

لكن $J[u] = \int_0^\pi X^2 \cos^2 u dt$، إذاً:

$$J = \int_0^\pi (\frac{\pi^2}{4} - c^2 + 2ct - \frac{t^2}{2})dt = (\frac{\pi^2}{4} - c^2)\pi + c\pi^2 - \frac{\pi^3}{6}$$

وعندما $c = \frac{\pi}{2}$، نجد أن $J = \frac{\pi^3}{3}$، وهي أكبر قيمة للدالي $J[u]$، (5) تحدد أقصى تحكم عندما $c = \frac{\pi}{2}$، أما المعادلة (4) فتحدد القيم للدالة $X(t)$ (extremum state function)، عندما $c = \frac{\pi}{2}$.

٢ . ٦ . ١٢ . قاعدة القيمة القصوى وبعض تطبيقاتها:

سنورد في هذا الجزء قاعدة (مبدأ) القيمة العظمى (maximum principle) لبونترياجن، التي تحدد أو تبين كيفية حساب التحكم الأمثل، ثم نطبقها في بعض المسائل، وللوصول إلى ما نريد، نفرض أن:

$$J[u] = \int_{t_0}^{t_1} (t, x, u)dt \qquad (1)$$

حيث: $x = (x_1(t),\dots,x_n(t)) \in R^n$ ،$u(t) = (u_1(t),\dots,u_m(t)) \in R^m$،

$x'_i = \frac{dx_i}{dt} = g_i(t,x,u)$ ، $i = 1,\dots,n$ ،$u(t) \in U$ دالة مستمرة مقطعياً (مستمرة جزءاً جزءاً)، $x(t_0) = x_0$ ،$x(t_1) = x$ إما أن تكون معلومة وإما تحقق علاقة معينة $g_j(t,x,u)$ دوال مستمرة بالنسبة لكل من t,x,u ومشتقاتها مستمرة بالنسبة إلى x ومركباتها، ولنفرض أن $\lambda(t) = (\lambda_1(t),\dots,\lambda_n(t)) \in R^n$ متغير مساعد، ولتكن دالة هاملتون معرفة كالآتي:

$$H(t,x,u,\lambda) = F(t,x,u) + \sum_{i=1}^{n}\lambda_i g_i(t,x,u)$$

والمطلوب إيجاد $x(t)$، $u(t)$ بحيث يكون J أكبر ما يمكن. والآن إلى القاعدة الآتية بدون إثبات، لأن إثباتها يتطلب معرفة الهندسة التفاضلية وخاصة الفضاء أو السطوح متعددة الطيات (Manifolds).

٢ . ٦ . ١٣ . مبرهنة (٢):

«**قاعدة** (مبدأ) **القيمة العظمى، Maximal principle**»

إذا كان التحكم الممكن $\bar{u}(t)$، والحل المتولد منه $\bar{x}(t)$ أمثلياً للدالي $J[u]$، المعرف في (1)، فتوجد دالة غير صفرية $\lambda(t)$ معرفة لكل $t \in [t_0, t_1]$ بحيث إن:

(أ) $\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \lambda_i}$ ، لكل $i = 1,\dots,n$

(ب) $\frac{d\lambda_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}$ ، لكل $i = 1,\dots,n$

(ج) تكون H أكبر ما يمكن عند $\bar{u}(t)$، أي إن $H(t,\bar{x},\bar{u},\lambda) \ge H(t,\bar{x},u,\lambda)$ لكل $u \in U$.

(د) $x_0(t_0) = x_0$ ،$\lambda_i(t_1) = 0$.

لاحظ أن كل المشتقات أعلاه تحسب عند $u = \bar{u}(t)$، كما أن مجموعة المعادلات في (أ) تمثل معادلات الحركة $x'_i = g_i$، والمعادلات في (أ) و (ب) تمثل معادلة هاملتون بالشكل القانوني، كما أن $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$، وتسمى العلاقات في (د) التي عددها 2n بالشروط الحدية أو الشروط الاعتراضية (Boundary or transversality conditions) وعليه فإن لحل أي مسألة بهذه القاعدة علينا استخدام المعادلات في (أ) و (ب) ثم استخدم المتباينة (ج) للحصول على $\bar{u}(t)$، $\bar{x}(t)$ مستفيداً من الشروط الاعتراضية لحساب الثوابت.

٢ . ٦ . ١٤ . مثال محلول (٨١): (مسألة أقل زمن)

وهي مسألة أقل زمن ممكن للانتقال من وضع معين إلى وضع آخر مثل (0,0). إذاً المطلوب:

$$\min_{u \in U} \int_{t_0}^{t_1} dt \text{ ، } x'_1 = g_1(t,x_1,x_2,u) = x_2 \text{ ، } x'_2 = g_2(t,x_1,x_2,u) = u$$

حيث: $u \in U$ دالة تحكم معرفة كالآتي، $|u(t)| \le 1$

الحل:

لاحظ أن المسألة أعلاه تكافئ الآتي:

$$\max_u J = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x_1, x_2, u)dt \text{ ، } F(t,x_1,x_2,u) = -1$$

إذاً $H = -1 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 u$، عندئذ تصبح المعادلات في (٢ . ٦ . ١٣ ب) كالآتي:

$$\frac{d\lambda_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\lambda_1 \text{ , } \frac{d\lambda_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0$$

ومنها نجد أن $\lambda_1 = c_1$، $\lambda_2 = c_2 - c_1 t$، حيث c_1، c_2 ثوابت. لكن من قاعدة القيمة العظمى نجد أن $J[u]$ أكبر ما يمكن إذا وإذا فقط كان $H(u)$ أكبر ما يمكن لكن $H(u)$ أكبر ما يمكن عندما يكون لكل من λ_2, u نفس الإشارة.

إذاً: $u(t) = \begin{cases} 1 & c_2 - c_1 t \geq 0 \\ -1 & c_2 - c_1 t < 0 \end{cases}$ لكل $t \in [t_0, t_1]$

وعندما $u = 1$، نجد أن $x'_2(t) = 1$، لكل $t \in [t_0, t_1]$ إذاً $x_2 = t + b$، حيث b ثابت، ومن العلاقة $x'_1 = x_2$، نجد:

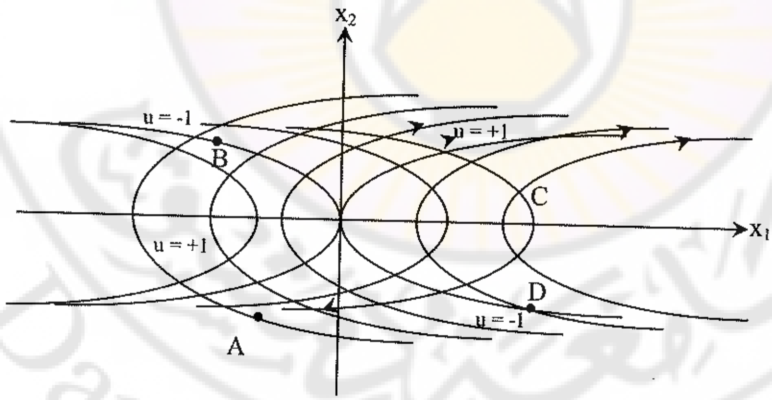
$$x_1 = \frac{t^2}{2} + bt + a = \frac{1}{2}(t+b)^2 + (a - \frac{b^2}{2}) = \frac{1}{2}x_2^2 + k$$ ، حيث $k = a - \frac{b^2}{2}$

وعندما $u = -1$، نجد أن $x_2 = -t + b_1$، $x_1 = -\frac{1}{2}x_2^2 + m$ حيث b_1, m ثوابت.

إذاً توجد عائلتان من القطوع المكافئة هما:

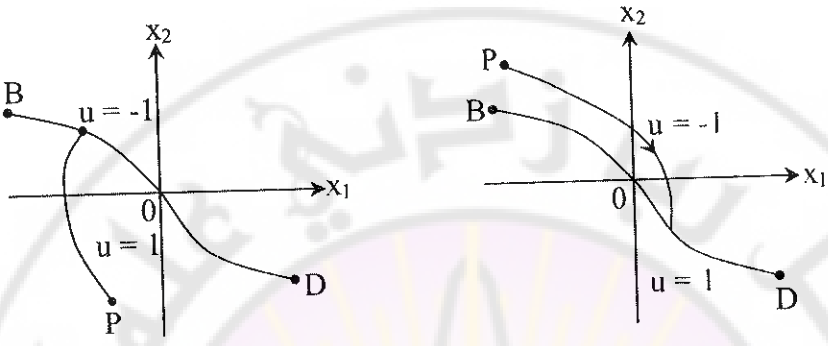
$$x_1 = \frac{1}{2}x_2^2 + k \text{ ،} \quad x_1 = -\frac{1}{2}x_2^2 + b_2$$

ويمثل الشكل (٢ . ٣٣) جزءاً منها.



الشكل (٢ . ٣٣)

وتتحرك النقطة (x_1, x_2) إلى الأعلى عندما $\frac{dx_2}{dt} = u = 1$ ، وإلى الأسفل عندما $\frac{dx_2}{dt} = u = -1$ ، وأقصر مسار للوصول إلى نقطة الأصل $(0,0)$ من أي نقطة كانت هو واحد من المسارين الموضحين في الشكل (٢ . ٣٤).



الشكل (٢ . ٣٤)

فإذا كانت العملية هي الانتقال من A، شكل (٢ . ٣٣)، $(u = 1, x_0 = A)$، فإن مسار تلك الحالة هو التحرك إلى الأعلى على قوس AB حتى الوصول إلى B، ثم التحرك على القوس B0 «للوصول إلى نقطة الأصل» وهو مقطع من القطع المكافئ $x_1 = \frac{1}{2}x_2^2$ ، $u = 1$ وهذا يعني أن التحرك من أي نقطة P في المستوي إلى نقطة الأصل يتطلب التحرك على قطع من القطع المكافئ $x_1 = -\frac{1}{2}x_2^2 + m$ ثم الانتقال (التحرك) على جزء من القطع المكافئ $x_1 = \frac{1}{2}x_2^2 + k$ أو العكس ويطلق على مثل تلك الحلول أو الحركات التي يتغير فيها التحكم من قيمة إلى أخرى تحكم الخبطة . خبطة (Bang – bang control).

٢ . ٦ . ١٥ . مثال محلول (٨٢):

أوجد أكبر قيمة للدالي:

$$x' = g(t,x,u) = x^2 - u(t) - 3x \text{ ،} J[u] = \int_0^{t_1} e^{-2t} u^2(t)dt$$

الحل:

بما أن: $H = e^{-2t}u^2 + \lambda(x^2 - u - 3x)$ ، إذاً:

$\lambda' = -\dfrac{\partial H}{\partial x} = -\lambda(2x-3)$ ، وعليه فإن:

$$2x = 3 - \frac{\lambda'}{\lambda} \qquad (1)$$

لكن $\dfrac{\partial H}{\partial u} = 0$ إذاً $2ue^{-2t} - \lambda = 0$ ، ومن ثمّ فإن:

$$\lambda = 2ue^{-2t} \qquad (2)$$

ومنها نجد أن:

$$\lambda' = -4ue^{-2t} + 2e^{-2t}u' \qquad (3)$$

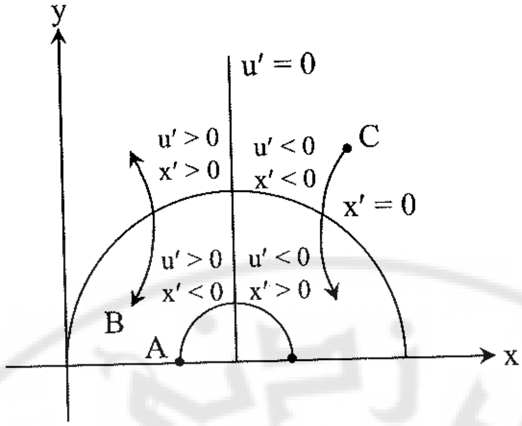
وعليه فإن:

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = -2 + \frac{u'}{u} \qquad (4)$$

ومن (1)، (4) ينتج أن:

$$u' = (5-2x)u \qquad (5)$$

وعندما $x = \dfrac{5}{2}$ ، نجد أن $u' = 0$ وعندما $u = x^2 - 3x$ ، فإن $x' = 0$ ويوضح الشكل (٢ . ٣٥) مسار الزمن الأمثلة من البداية إلى النهاية:



الشكل (٢ . ٣٥)

٢ . ٦ . ١٦ . تمارين غير محلولة:

(١) تصف المعادلتان $x'_1 = x_2$، $x'_2 = u$ حركة جسيم في المستوى. أوجد دالة التحكم $u(t)$ لكي يتحرك الجسيم من النقطة A إلى $B(0,0)$ في أقل زمن ممكن، حيث $|u(t)| \le 1$.

(٢) أوجد دالة التحكم u التي تجعل الدالي $J = \frac{1}{2}\int (x^2 + u^2)dt$ أقل ما يمكن بشرط أن:

$$x' = \frac{dx}{dt} = -x + u \text{ ، } 0 < t < 1 \text{ ، } x(0) = e^{\sqrt{2}}(1+\sqrt{2}) + e^{-\sqrt{2}}(-1+\sqrt{2})$$

(٣) $\min J = \int_{t_0}^{t_1} dt$، عندما $x' = (g(t,x,u) = u$، $x_0(t) = x_0$، $|u| \le 1$.

(٤) أوجد أقل قيمة إلى $J[u] = \int_0^x \sqrt{1 + u'^2}\,dt$، $x' = u$.

(٥) أوجد $u(t)$ التي تجعل الدالي J أكبر ما يمكن عندما:

$J[u]=\int_0^1 e^{-m}(x_1+x_2)dt$ ، $x_1'=(x_1+x_2)u$ ، $x_2'=(x_1+x_2)(1-u)$ ، $0\le|u|\le 1$.

(٦) أوجد $u(t)$ التي تجعل الدالي J أكبر ما يمكن عندما:

$J[y]=\int_0^1 u^2(t)dt$ ، $x'(t)=u$ ، $0<t<1$ ، $x(1)=x_1$ ، $x(0)=x_0$ ، $|u|\le 1$

(٧) تصف المعادلتان $x'_1=x^2$ ، $x'_2=-x_1+u$ حركة جسيم في المستوى. أوجد أقل زمن ممكن لتحرك الجسيم من نقطة A إلى $(0,0)$، عندما $|u|\le 1$.

(٨) أوجد أقل قيمة للدالي $J[u]=\int_{t_2}^{t_1} dt$ عندما:

$x'_1=u$ ، $x'_2=u^2$ ، $|u|\le 1$ ، $x(t_0)=x_0$.

٢ . ٧ . تمارين عامة محلولة:

مثال (١):

أوجد القيم القصوى للدالي:

$$I=\int_0^{\ln 2}(y'^2e^{2x}+3y^2e^{2x})dx\ ,\ y(0)=0,\ y(\ln 2)=\frac{15}{8}$$

الحل: ننطلق من معادلة أولر:

$$\frac{\partial H}{\partial y}-\frac{d}{dx}\cdot\frac{\partial H}{\partial y'}=0$$

$$\Rightarrow\frac{\partial H}{\partial y}=6ye^{2x}\ \&\ \frac{\partial H}{\partial y'}=2y'e^{2x}\Rightarrow\frac{d}{dx}\frac{\partial H}{\partial y'}=2y''e^{2x}+4y'e^{2x}$$

$$6ye^{2x}-2y''e^{2x}-4y'e^{2x}=0\Rightarrow e^{2x}(-2y''-4y'+6y)=0$$

$$e^{2x}\neq 0\Rightarrow y''+2y'-3y=0$$

$$\lambda^2+2\lambda-3=0\Rightarrow\lambda_1=3,\ \lambda_2=1$$

$$y = c_1e^x + c_2e^{-3x}$$

$$y(0) = 0 = c_1 + c_2$$

$$y(\ln 2) = \frac{15}{8} = c_1e^{\ln 2} + c_2e^{-3\ln 2}$$

$$= 2c_1 + \frac{1}{8}c_2 \Rightarrow c_1 = 1 , c_2 = -1$$

$$y = e^x - e^{-3x}$$

مثال (٢):

أوجد معادلة أوستروغراوسكي للدالي:

$$H = \iint_D \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial u}\right)^2 \right] dxdy$$

الحل:

لدينا:

$$H\,(x,y,u,u_x,u_y) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} 0 \;\&\; \frac{\partial H}{\partial u_x} = H_{u_x} = 2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)(1) = 2\frac{\partial u}{\partial x}$$ (لأنه لا يوجد u)

$$\frac{\partial H}{\partial u_y} = H_{u_y} = 2\left(\frac{\partial H}{\partial y}\right) \;\&\; \frac{\partial}{\partial x}\cdot H_{u_x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(2\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} H_{u_y} = 2\cdot\frac{\partial 2u}{\partial y^2}$$

نعوض في (*) في الفقرة (٢ . ٣ . ٢) فنجد:

$$0 - 2\frac{\partial 2u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial 2u}{\partial y^2} = 0$$

نقسم على (2-) $\Leftarrow$ $$\frac{\partial 2u}{\partial x^2}+\frac{\partial 2u}{\partial y^2}=0$$

وهي تمثل معادلة لابلاس أو معادلة الجهد ويرمز لها:

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = y_{2x} + u_{2y} = \frac{\partial 2u}{\partial x^2}+\frac{\partial 2u}{\partial y^2}$$

وحيث u_{xx} المشتق الثاني لـ u بالنسبة لـ x.

مثال (٣):

أوجد معادلة أوستروغراوسكي للدالي:

$$I=\iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}\,dx.dy$$

الحل:

للسهولة نفرض: $$p=\frac{\partial u}{\partial x}\ \&\ q=\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$r=u_{xx}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ \&\ s=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=u_{xu}\ \&\ t=u_{yy}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

عندئذ يصبح الدالي I بالشكل:

$$I=\iint_D \sqrt{1+p^2+q^2}\,dxdy$$

(لا يوجد u لوحدها) $$\frac{\partial H}{\partial u}=0\ \&\ \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial H}{\partial u_x}\right)=\frac{r\sqrt{1+p^2+q^2}-\left(\dfrac{2rp+2sq}{2\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)p}{1+p^2+q^2}$$

$$=\frac{r(1+p^2+q^2)-(rp^2+spq)}{(1+p^2+q^2)^{3/2}} \qquad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial H}{\partial u_y}\right)=\frac{t\sqrt{1+p^2+q^2}-\left(\frac{2ps+2qt}{2\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)q}{1+p^2+q^2}$$

$$=\frac{t+tp^2-spq}{(1+p^2+q^2)^{3/2}} \qquad (2)$$

نعوض (1) و (2) في الشكل العام لمعادلة أوستروغراوسكي:

$$r[1+q^2]+t[1+p^2]-2spq=0$$

حصلنا على معادلة تفاضلية تمثل معادلة أوستروغراوسكي وهي من المرتبة الثانية.

مثال (٤):

ليكن لدينا الدالي:

$$I=\int_0^1 (xy+y^2-2yy')dx$$

المرفق بالشروط الحدية: $y(0)=1 \;\;,\;\; y(1)=2$

أوجد المنحنيات القصوى.

الحل:

لدينا: $H(x,y,y')=xy+y^2-2yy'$

أي إن: $M(x,y)=xy+y^2$

$N(x,y)=-2y$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=x+2y$$

$$\frac{\partial N}{\partial x}=0$$

ومن ثمَّ بالتعويض في المعادلة:

$$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=0$$

نجد:

$$x+2y-0=0 \Rightarrow y=\frac{-x}{2}$$

نلاحظ أن الشروط الحدية الأول والثاني غير محققين بسبب:

$$y(0)=1 \neq 0$$

$$y(1)=2 \neq \frac{-1}{2}$$

مثال (٥):

أوجد المنحنيات القصوى للدالي:

$$I=\int_0^1 (1+y''^2)dx$$

$$y(0)=0 \ \& \ y'(0)=1 \ \& \ y(1)=1 \ \& \ y'(1)=1$$

الحل:

تكتب معادلة أولر بالشكل:

$$\frac{\partial H}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial H}{\partial y'}+\frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial H}{\partial y''}=0$$

$$H=1+y''^2 \Rightarrow \frac{\partial H}{\partial y}=\frac{\partial H}{\partial y'}=0 \ \& \ \frac{\partial H}{\partial y''}=2y''$$

$$\frac{d^2}{dx^2}(2y'')=2y''''$$

$$2y''''=0 \Rightarrow y''''=0$$

أو:

$$y'''=c_1$$

$$y''=c_1x+c_2$$

$$y' = c_1\frac{x^2}{2} + c_2x + c_3$$

$$y = c_1\frac{x^3}{2\cdot 3} + c_2\frac{x^2}{2} + c_3x + c_4$$

$$y'(0) = 0 \Rightarrow c_3 = 1$$

$$y'(1) = 1 \Rightarrow \frac{1}{2}\ c_1 + c_2 + c_3 = 1$$

$$y(0) = 0 \Rightarrow c_4 = 0$$

$$y(1) = 1 \Rightarrow \frac{1}{2\cdot 3}\ c_1 + \frac{1}{2}c_2 + c_3 + c_4 = 1$$

بالحل المشترك نجد: $c_2 = c_3 = 0$

ومن ثمّ فإن المنحنيات القصوى هي: $y = x$

مثال (٦):

ما المنحنيات القصوى للدالي:

$$I = \int_0^1 (y'^2 + 12xy)dx\ \ ,\ y(0) = 0\ \&\ y(1) = 1$$

الحل:

$$\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial H}{\partial y'} = 0$$

$$12x - 2y'' = 0$$

$$y'' = 6x \qquad (*)$$

نوجد حل المعادلة المتجانسة: $(A)\quad \lambda^2 = 0 \Leftarrow \lambda = 0$ جذر مكرر

من ثمّ حل المعادلة من الشكل:

$$y = x^2\,(ax + b)$$

$$y' = 3ax^2 + 2bx$$

$$y'' = 6ax + 2b$$

نعوض في (*) فنجد:

$$6ax + 2b = 6x$$
$$a = 1 \ \& \ b = 0$$
$$\Rightarrow y = x^3 \qquad (B)$$

الحل العام هو حل خاص لغير المتجانسة + الحل العام للمتجانسة أي:

$$y = x^3 + c_1 + c_2x$$

لنعين الثوابت:

$$\left.\begin{array}{l} y(0)=0 \\ y(1)=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \end{array}$$

ومن ثمّ فإن الحل العام يكتب بالشكل: $y = x^3$

وهو المطلوب.

مثال (٧):

ليكن: $I = \int_0^1 (y^2 + x^2y')dx$ والشروط الحدية $y(0) = 0 \ ; \ y(1) = a$

ناقش وجود قيم قصوى للدالي المذكور.

الحل:

$$M(x,y) = y^2 \ \& \ N(x,y) = x^2$$
$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2y \ \& \ \frac{\partial N}{\partial x} = 2x$$

نعوض في معادلة أولر:

$$2y - 2x = 0$$
$$y - x = 0 \Rightarrow y = x$$

نلاحظ أن الشرط الأول محقق: $y(0) = 0$

لكن الشرط الثاني غير محقق إلا في حالة $a = 1$

أي عندما $a = 1$ يوجد قيم قصوى وإلا فلا يوجد قيم قصوى.

مثال (٨):

$$I = \int_0^1 (xy + y^2 - 2y^2 y')dx$$

$y(0) = 1$ & $y(1) = 2$ ناقش وجود قيم قصوى.

الحل:

لدينا:

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 0$$

$$x = -2y \Rightarrow y = -\frac{x}{2}$$

$y(1) = -\frac{1}{2} \neq 2$ & $y(0) = 0 \neq 1$ ومن ثمَّ لا يوجد قيم قصوى.

مثال (٩):

استنتج القيم القصوى للدالي:

$$I = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} dx \qquad (1)$$

الحل:

إن المسألة هي البحث عن منحنٍ، من بين جميع المنحنيات الواصلة بين نقطتين مفروضتين (x_1, y_1)، (x_2, y_2)، بحيث إن نقطة مادية تسقط سقوطاً حراً ترسم المنحني في أقصر وقت.

لنوجه المحور y شاقولياً نحو الأسفل، أي باتجاه قوة الجاذبية. بما أن التابع المكامل في الدالي (1) لا يحوي x، فإننا نستطيع كتابة التكامل الأول لمعادلة أولر مباشرة:

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}-\frac{y'^2}{\sqrt{y}\sqrt{1+y'^2}}=\frac{1}{\sqrt{C_1}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{y}\sqrt{1+y'^2}}=\frac{1}{\sqrt{C_1}}$$

أو:

$$\sqrt{y}\sqrt{1+y'^2}=\sqrt{C_1}$$

أي إن:

$$y(1+y'^2)=C_1 \Rightarrow y'^2+1=\frac{C_1}{y}$$

أو:

$$y'^2=\frac{C_1-y}{y} \qquad (2)$$

لنضع:

$$y=\frac{C_1}{2}(1-\cos u)$$

بالاشتقاق:

$$y'=\frac{C_1}{2}\sin u.u'$$

عندئذ بالتعويض في (2) وبالإصلاح نجد:

$$\frac{C_1}{2}(1-\cos u)du=\pm dx$$

وهكذا فإن:

$$x=\pm(u-\sin u)+C_2$$

$$y = \frac{C_1}{2}(1-\cos u)$$

من هذا يتضح أن الأوضاع القصوى للتابعي (33) هي سيكلوئيدات.

ويعين الثابتان C_2, C_1 من نقطتي البداية والنهاية المفروضتين. فإذا كانت إحدى هاتين النقطتين هي مبدأ الإحداثيات يكون $C_2 = 0$ كما نحصل على مبدأ الإحداثيات من أجل $u = 0$.

أخيراً لنلاحظ أن للمسألة صفة خاصة حيث $y' = \dfrac{dy}{dx}$ يصبح كما هو واضح لا نهائياً في $u = 0$ أخيراً لنلاحظ أن للمسألة صفة خاصة حيث $y' = \dfrac{dy}{dx}$ يصبح كما هو واضح، بينما ينعدم المقام في التابع المكامل. وتختفي النقطة الشاذة في $u = 0$ إذا عدنا للمتحول u في التكامل.

مثال (١٠):

ابحث عن القيم القصوى للتكامل:

$$I = \int_{x_1=A}^{x_2=B} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y}dx \quad ; \quad A\,(1, 2)\ \ B\,(2, 3)$$

الحل:

H لا يحوي x عندئذ معادلة أولر: $H - \dfrac{\partial H}{\partial y'} \cdot y' = C$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y} - \left(\frac{2y'}{2y\sqrt{1+y'^2}}\right)y' = C$$

$$\frac{1+y'^2-y'^2}{y\sqrt{1+y'^2}} = C \Rightarrow y\sqrt{1+y'^2} = c_1 \Rightarrow y^2(1+y'^2) = c_2$$

$$y'^2=\frac{c_2-y^2}{y^2}\Rightarrow y'=\pm\frac{\sqrt{c_2-y^2}}{y}$$

$$\frac{dy}{dx}=\pm\frac{\sqrt{c_2-y^2}}{y}$$

$$\Rightarrow\frac{ydy}{\sqrt{c_2-y^2}}=\pm dx\Rightarrow-\sqrt{c_2-y^2}=\pm x+c_3$$ (حولناه لتكامل مصروب بمشتقه)

$$\Rightarrow c_2-y^2=(\pm x+c)^2\Rightarrow y^2=c_2-(\pm x+x)^2$$

A من $y(1)=2\Rightarrow(2)^2=c_2-(\pm1+c_3)^2$

B من $y(2)=3\Rightarrow(3)^2=c_2-(\pm2+c_3)^2\Rightarrow$

$$y=\pm\sqrt{13-(x-4)^2}$$

مثال (١١):

عين المنحني الواصل بين النقطتين M_2, M_1 في المستوي x0y بحيث يشكل سطحاً ذا مساحة صغرى عند تدويره حول المحور (0x).

الحل:

إن مساحة السطح الدوراني يعطى بالعلاقة:

$$S=2\pi\int_{M_1}^{M_2}yd\sigma\ :\ d\sigma^2=dx^2+dy^2$$

$$S=2\pi\int_{M_1}^{M_2}y\sqrt{dx^2+dy^2}$$

وبإخراج عامل مشترك $(dx)^2$ نجد:

$$S=2\pi\int_{M_1}^{M_2}y\sqrt{1+y'^2}dx$$

بغض النظر عن الثوابت 2π أصبحت المسألة إيجاد قيم قصوى للتكامل:

$$I = \int_{x_1}^{x_2} y\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

$$H - \frac{\partial H}{\partial y'}y' = c \Rightarrow y\sqrt{1+y'^2} - \frac{2y'\cdot y}{2\sqrt{1+y'^2}}\cdot y' = c$$

$$y\sqrt{1+y'^2} - \frac{y'\cdot y}{\sqrt{1+y'^2}}\cdot y' = c \Rightarrow \frac{y(1+y'^2) - yy'^2}{\sqrt{1+y'^2}} = c$$

$$\frac{y}{\sqrt{1+y'^2}} = c \Rightarrow y = c\sqrt{1+y'^2}$$

نربع الطرفين:

$$y^2 = c^2(1+y'^2) \Rightarrow y'^2 = \frac{y^2-c^2}{c^2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = \frac{c_1^2}{y^2-c_1^2}$$

قبلنا:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{c_1}{\sqrt{y^2-c_1^2}} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{c_1}{c_1\sqrt{\frac{y^2}{c_1^2}-1}}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{y}{c_1}\right)^2-1}}$$

نفرض:

$$\frac{y}{c_1} = ch(t) \qquad (*)$$

$$dy = c_1\, sh(t)\, dt$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{c_1 sh(t)dt}{\sqrt{ch^2(t)-1}} + c_2 \Rightarrow x = c_1 t + c_2 \qquad (**)$$

حيث: $ch^2(t) - 1 = sh^2(t)$

$$\Rightarrow x = c_1 \operatorname{arcch}\left(\frac{y}{c_1}\right) + c_2$$

$$\frac{y}{c_1} = ch(t) \Rightarrow \frac{y}{c_1} = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \frac{y}{c} = \frac{e^{2t}+1}{2e^t}$$

$$2e^t y = ce^{2t} + c_1 \Rightarrow ce^{2t} - 2ye^t + c_1 = 0$$

نفرض $e^t = z > 0$

$$cz^2 - 2zy + c = 0$$

$$\Delta = 4y^2 - 4c_2^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{y^2 - c_1^2}$$

$$z_1 = \frac{+2y + 2\sqrt{y^2 - c_1^2}}{2c_1} > 0 \quad \text{مقبول}$$

$z_2 < 0$ مرفوض

$$z_1 = \frac{y + \sqrt{y^2 - c_1^2}}{c_1} \Rightarrow e^t = z = \frac{y + \sqrt{y^2 - c_1^2}}{c_1}$$

$$t = \ln\left(y + \sqrt{y^2 - c_1^2}\right) - \ln c_1$$

نعوض في (**):

$$x = c_1\left[\ln(y + \sqrt{y^2 - c_1^2}) - \ln c_1\right] + c_2,$$

$$\ln\left[y + \frac{\sqrt{y^2 - c_1^2}}{c_1}\right] = \frac{x - c_2}{c_1}$$

$$y + \sqrt{y^2 - c_1^2} = c_1 e^{\frac{x-c_2}{c_1}}$$

بالعودة لـ (*): $y = c_1\, ch(t)$ أي إن:

$$y + c_1 sh(t) = c_1 e^{\frac{x-c_2}{c_1}}$$

$$y = c_1\left[e^{\frac{x-c_2}{c_1}} - \frac{\left(e^{\frac{x-c_2}{c_1}} - e^{\frac{-x-c_2}{c_1}}\right)}{2}\right]$$

$$y = c_1\left[\frac{e^{\frac{x-c_2}{c_1}} - e^{\frac{-x-c_2}{c_1}}}{2}\right] \Rightarrow y = c_1 ch\left(\frac{x-c_2}{c_1}\right)$$

مثال (١٢):

ابحث في القيم القصوى للتابعي:

$$I[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2}\left((y''')^2 + y^2 - 2yx^3\right)dx$$

الحل:

لدينا:

$$H(x, y, y', y'', y''') = y'''^2 + y^2 - 2yx^3$$

$$H_y = \frac{\partial H}{\partial y} = 2y - 2x^3$$

$$H_{y'} = \frac{\partial H}{\partial y'} = 0 \quad \& \quad H_{y''} = \frac{\partial H}{\partial y''} = 0$$

$$H_{y'''} = \frac{\partial H}{\partial y'''} = 2y'''$$

بالتعويض في: $\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial H}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial H}{\partial y''} - \frac{d^3}{dx^3}\frac{\partial H}{\partial y'''} = 0$

$$2y - 2x^3 - 2y^{(6)} = 0 \quad \Rightarrow y^{(6)} - y = -x^3$$

حل المعادلة التفاضلية المتجانسة:

معادلتها المميزة: $\lambda^6 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda^6 = 1 \Rightarrow \theta = 0, r = 1$

لإيجاد الجذور نستخدم الدستور:

$$\lambda_k = r^{\frac{1}{6}}\left[\cos\frac{\theta+2\pi k}{6} + i\sin\frac{\theta+2\pi k}{6}\right] \quad ; \quad k = 0,1,\dots,5$$

$$\lambda_0 = 1 \,.\, [\cos 0 + i \sin 0] = 1$$

$$\lambda_1 = 1 \,.\, [\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}] = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\lambda_2 = 1 \,.\, [\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}] = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\lambda_3 = 1 \,.\, [\cos \pi + i \sin \pi] = -1$$

$$\lambda_4 = 1 \,.\, [\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}] = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\lambda_5 = 1 \,.\, [\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3}] = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ومن ثمَّ الحل العام للمتجانسة الموافقة هو:

$$y_1 = c_1e^x + c_2e^{-x} + e^{\frac{x}{2}}(c_3\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_4\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x) +$$
$$+ e^{-\frac{x}{2}}(c_5\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_6\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x)$$

* الحل الخاص لغير المتجانسة من الشكل «بما أنه لا يوجد جذر مكرر».

$$y_I = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$
$$y'_I = 3x^2A + 2Bx + C$$
$$y''_I = 6Ax + 2B$$
$$y'''_I = 6A$$

$$y_I^{(4)} = 0\ ,\ y_I^{(5)} = 0\ ,\ y_I^{(6)} = 0$$

نعوض في المعادلة التفاضلية:

$$-Ax^3 - Bx^2 - Cx - D = -x^3$$

$$\Rightarrow A - A = -1 \Rightarrow A = 1$$

$$\Rightarrow B = C = D = 0$$

ومنه الحل الخاص: $y_I = x^3$

ومنه الحل العام: $y = y_C + y_I$

$$y = c_1e^x + c_2e^{-x} + e^{\frac{x}{2}}(c_3\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_4\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x) +$$
$$+ e^{-\frac{x}{2}}(c_5\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_6\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x) + x^3$$

مثال محلول (١٣):

ابحث عن القيم القصوى للتابعي:

$$I = \int_{x_1}^{x_2}[y''^2 - 2y'^2 + y^2 - 2y\sin x]dx$$

الحل:

لدينا: $H(x, y, y', y'') = y''^2 - 2y'^2 + y^2 - 2y\sin x$

$$H_y = \frac{\partial H}{\partial y} = 2y - 2\sin x$$

$$H_{y'} = \frac{\partial H}{\partial y'} = -4y'$$

$$H_{y''} = \frac{\partial H}{\partial y''} = 2y''$$

بالتعويض في معادلة أولر:

$$H_y - \frac{d}{dx}H_{y'} + \frac{d^2}{dx^2}H_{y''} = 0$$

$$2y - 2\sin x + 4y'' + 2y'''' = 0$$

$$y^{(4)} + 2y'' + y = \sin x$$

* الحل العام للمتجانسة الموافقة:

المعادلة المميزة لها: $\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0$

$(\lambda^2 + 1)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i$ جذر مكرر

ومن ثمَّ الحل العام لها:

$$y = C_1 \cos x + x\, C_2 \cos x + C_3 \sin x + x\, C_4 \sin x$$

* الحل الخاص لغير المتجانسة من الشكل:

$$y_c = x^2 [A \cos x + B \sin x]$$

$$\Rightarrow y'_c = 2x [A \cos x + B \sin x] + x^2 [-A \sin x + B \cos x]$$

$$= (Bx^2 + 2xA) \cos x + (2x B - A x^2) \sin x$$

$$y''_c = (2Bx + 2A)\cos x - (Bx^2 + 2xA)\sin x + (2B - 2Ax) \sin x + (2xB - Ax^2) \cos x$$

$$\Rightarrow y''_c = (-Ax^2 + 4Bx + 2A) \cos x + (-Bx^2 - 4Ax + 2B) \sin x$$

$$y'''_c = (4B - 2Ax) \cos x - (-Ax^2 + 4Bx + 2A) \sin x + (-2Bx - 4A) \sin x + (-Bx^2 - 4Ax + 2B) \cos x$$

$$\Rightarrow y'''_c = (-Bx^2 - 6Ax + 6B) \cos x + (Ax^2 - 6Bx - 6A) \sin x$$

$$y''''_c = (-2Bx - 6A) \cos x - (-Bx^2 - 6Ax + 6B) \sin x + (2Ax - 6B)\sin x + (Ax^2 - 6Bx - 6A) \cos x$$

$$\Rightarrow y''''_c = (Ax^2 - 8Bx - 12A) \cos x + (Bx^2 + 8Ax - 12B) \sin x$$

نعوض في المعادلة التفاضلية فنجد:

$$(Ax^2 - 8Bx - 12A) \cos x + (Bx^2 + 8Ax - 12B) \sin x$$

$$+ 2 (-Ax^2 + 4Bx + 2A) \cos x + 2(-Bx^2 - 4Ax + 2B) \sin x +$$
$$+ x^2 A \cos x + Bx^2 \sin x = \sin x$$
$$\Rightarrow -8A = 0 \Rightarrow A = 0$$
$$-8B = 1 \Rightarrow B = -\frac{1}{8}$$
$$\Rightarrow y_c = -\frac{x^2}{8} \sin x$$

ومن ثمَّ الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$y = C_1 \cos x + x C_2 \cos x + C_3 \sin x + x C_3 \cos x - \frac{x^2}{8} \sin x$$

وهو المطلوب.

مثال محلول (١٤): مسألة الخطوط الجيوديزية

تعريف: ليكن لدينا:

$$x = x(u, v)$$
$$y = y(u, v)$$
$$z = z(u, v)$$

عندئذ يكون لدينا:

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv$$
$$dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv$$
$$dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv$$
$$d\sigma^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$
$$= \left(\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv\right)^2$$

$$d\sigma^2 = E(du)^2 + 2F\,du\,dv + Q\,(dv)^2$$

$$d\sigma = \sqrt{E(du)^2 + 2F(du)(dv) + Q(dv)^2}$$

$$d\sigma = \sqrt{(du)^2\left(E + 2F.\frac{dv}{du} + Q\left(\frac{dv}{du}\right)^2\right)}$$

$$d\sigma = \sqrt{E + 2F.\frac{dv}{du} + Q\left(\frac{dv}{du}\right)^2}\,du$$

$$d\sigma = \sqrt{E + 2Fv' + Qv'^2}\,du$$

حيث إن:

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2$$

$$F = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}\right) + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}\right)$$

$$Q = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2$$

$$v' = \frac{dv}{du} \quad ; \quad E = E(u, v)$$

نستخلص مما سبق: أن الخطوط الجيوديزية على السطح هي تلك المنحنيات المعينة بالشرط اللازم من أجل قيمة صغرى للدالي:

$$I = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{E + 2Fv' + Qv'^2}\,.du$$

الذي يعطي طول المنحني، حيث اعتبرنا v تابعاً لـ u على طول المنحني، وعندئذ تصبح معادلة أولر . لاغرانج بالشكل:

$$\frac{\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}+2\frac{\partial F}{\partial v}v'+\frac{\partial Q}{\partial v}v'^2}{\sqrt{E+2Fv'+Qv'^2}}\cdot\frac{d}{du}\frac{F+Qv'}{\sqrt{E+2Fv'+Qv'^2}}=0$$

تطبيق: لنوجد الآن الخطوط الجيوديزية لكرة مركزها مبدأ الإحداثيات ونصف قطرها واحدة الأطوال:

$$x=\sin\theta\cos\varphi$$
$$y=\sin\theta\sin\varphi$$
$$z=\cos\theta$$

عندئذ يكون:

$$d\sigma^2=(d\theta)^2+(\sin^2\theta)\,.\,(d\varphi^2)$$

ويصبح الدالي I بالشكل الآتي:

$$I=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sqrt{1+\sin^2\theta\varphi'^2}\,d\theta$$

حيث φ' هو مشتق φ بالنسبة لـ θ، وبما أن التابع المكامل لا يحوي φ لذا نحصل على الحل الآتي:

$$\frac{\sin^2\theta\cdot\varphi'^2}{\sqrt{1+\sin^2\theta\cdot\varphi'^2}}=C$$

وبوضع $C=0$ نحصل على $\varphi'=0$ وهذا يعني أن $\varphi=\text{const}$.

فالخطوط الجيوديزية لكرة هي خطوط الطول عليها، أي الدوائر العظمى المارة بقطبي الكرة ($\theta=\pi, \theta=0$)، ونظراً لأن اختيار القطب هو كيفي، فإن جميع الدوائر العظمى لكرة هي وضوحاً خطوط جيوديزية.

دليل المصطلحات العلمية

نورد فيما يلي قائمة بأهم المصطلحات المستعملة في هذا الكتاب مرتبة وفق حروف الهجاء العربية مع مقابل كل منها باللغة الإنكليزية.

Spherical coordinates	إحداثيات كروية
Linear independence	استقلال خطي
Iteration method	أسلوب تكراري
Parametric forms	أشكال وسيطية
Bessel function	تابع بسل
Homogeneous function	تابع متجانس
Complete	تام
Functional analysis	تحليل دالي
First variation	تحويل أول
Inverse Laplace transform	تحويل لابلاس العكسي
Variation	تغير
Second variation	تغير ثنائي
Multiple integrals	تكاملات متعددة (مضاعفة)
Control	تحكم
Optimal control	تحكم أمثل

Admissible control	تحكم مقبول
Feasible control	تحكم ملائم (عملي)
Function	دالة
Functional	دالي
Linear functional	دالي خطي
Continuous functional	دالي مستمر
Functional of several variables	دالي عديد المتغيرات
The Hamiltonian	دالة هاملتون
Weierstrass excess function	دالة الزيادة لفيرشتراس
Control function	دالة تحكم
State function	دالة الوضع أو الحالة
Piecewise continuous function	دالة مستمرة مقطعياً (جزءاً جزءاً)
Terminal surface	سطح نهائي (توقف)
Cycloid	شكل دحروجي (سيكلوئيد)
Necessary condition	شرط لازم
Sufficient condition	شرط كافي
Euler's condition	شرط أولر
Legendre condition	شرط لجندر

Jacobi condition	شرط جاكوبي
Weierstrass condition	شرط فيراشتراس
Transversality conditions	شروط اعتراضية
Subsidiary conditions	شروط إضافية
Reflection condition	شرط الانعكاس
Refraction condition	شرط الانكسار
Corner conditions	شروط ركنية
Erdmann – Weierstrass condition	شرط أردمان . فيراشتراس
Arc length	طول القوس
Kinetic energy	طاقة حركية
Potential energy	طاقة الوضع (الطاقة الكامنة)
Vector space	فضاء متجهي
Metric space	فضاء متري
Local maximum value	قيمة عظمى محلية
Local minimum value	قيمة صغرى محلية
Extremum value	قيمة قصوى
Extremal with corners	قيم قصوى ذات نقاط ركنية
Proposition	قضية

Stationary Value	قيم الثبات (التوقف)
Critical value	قيمة حرجة
Hamilton principle	قاعدة (مبدأ) هاملتون
Optimality principle	قاعدة الأمثلية
Eigen value	قيمة ذاتية
Week extremum	قيمة قصوى ضعيفة
Strong extremum	قيمة قصوى قوية
Absolute extremum	قيمة قصوى مطلقة
Unilateral extremum	قيمة قصوى وحيدة الطرف
Potential	كمون
Principle of least action	مبدأ الفعل الأدنى
Maximal principle	مبدأ القيمة العظمى
Geodesics problem	مسألة أقصر بعد
Variation problem	مسائل التغيرات
Isoperimetric Problem	مسألة ذات المحيط المتساوي
Brachistochrone	مسألة منحني أقل زمن
Norm	معيار أو مقياس أو نظيم
Theorem	مبرهنة

Open set	مجموعة مفتوحة
Euler – Lagrange equation	معادلة أولر . لاغرانج
Canonical equation	معادلة قانونية (شكل قانوني)
Euler – Boisson equation	معادلة أولر . بواسون
Lagrange's multiplier	مضروب أو مضاعفات لاغرانج
Plateau's Problem	مسألة بلاتو
Mean curvature	معدل التقوس (الانحناء)
Laplace equation	معادلة لابلاس
Schrodinger's equation	معادلة شرودنجر
Hamilton operator	مؤثر هاملتون
Energy Operator	مؤثر الطاقة
Quantum Mechanics	ميكانيكا الكم
Fuchs's equation with one singularity	معادلة فوكس بنقطة شاذة واحدة
Fuchs's equation with two singularities	معادلة فوكس بنقطتين شاذتين
Hypergeometric equation	معادلة فوق الهندسية
Laplace's equation	معادلة لابلاس
Legendere's equation	معادلة لوجاندر

Euler's equation	معادلة أولر
Voltera equation	معادلة فولتيرا
Fredholm equation	معادلة فريدهولوم
Fuchs's equation	معادلة فوكس
Hamilton – Jacobi equation	معادلة هاملتون . جاكوبي
Smooth curve	منحني ممهد (أملس)
Proper field	مجال (حقل) خاص
Central field	مجال مركزي
Control variables	متغيرات تحكم
Target set	مجموعة الهدف
Optimal Trajectory	مسار أمثل
Constant end points	نقاط أطراف ثابتة
Moving points	نقاط متحركة
Autonomous System	نظام ذاتي
Ordinary Point	نقطة عادية
Point at infinity	نقطة اللانهاية
Kernel	نواة
Resolvent kernel	نواة حالة

Degenerate kernel	نواة متردية
Iterated kernels	نوى متكررة
Symmetric kernel	نواة متناظرة
Kernel of integral equation	نواة معادلة تكاملية
Uniqueness of solution	وحدانية الحل.

المراجع العلمية

١ . د. موفق دعبول، نظرية المعادلات، جامعة دمشق ١٩٨٥ .

٢ . إيروين كريزيك، المدخل إلى التحليل الدالي وتطبيقاته.
ترجمة: د. خضر الأحمد، جامعة دمشق ١٩٨٥ .

٣ . سمير نوف، دروس في الرياضيات العالية.
ترجمة: و. قدسي، ص. أحمد، م. دعبول، خ. أحمد، آ. كنجو، وزارة التعليم العالي، سوريا. ١٩٧٢ .

٤ . د. شحادة الأسدي، الرياضيات (5)، جامعة حلب ١٩٨٤ .

٥ . إيلكولتس إل. ي . المعادلات التفاضلية وحساب التحولات، دار العلم، موسكو ١٩٦٩ .

٦ . إيلكولتس إل. ي . المعادلات التفاضلية، دار العلم، موسكو ١٩٥٧ .

٧ . راما نوفسكي بي. ي . التوابع الخاصة وتحويلات لابلاس، موسكو، ١٩٦١ .

٨ . فولاكوف ي. أ، إيفيموف آ. ب، زيمسكوف ب. ن ، كاراكولين آ. ف، ليسين ب . ب، باسبيلوف آ. س، تيريشنكا آ. م، مسائل في الرياضيات دار العلم، موسكو ١٩٩٠ .

٩ . كاشليا كوف ن . س، المعادلات الرياضية للفيزياء، المدرسة العليا، موسكو ١٩٧٠ .

١٠ . محمد مناف الحمد، الطرائق الرياضية للفيزياء، جامعة دمشق ١٩٩٥م .

١١ . معروف بسوت لليش، المعادلات التكاملية وحساب التحولات، جامعة حلب ٢٠٠٧م.

12 – Charles Bryne, Notes on the calculus of variation. Lowell, MA 01854, USA, April 2, 2009.

13 – B.V. Ramana, Calculus of variations, chapter 4, August 30, 2006.

14 – Robert Kohn, Calculus of variations, Compiled by Eduardo corona, Fall 2009.

15 – Martin Bendersky, the calculus of variations, December 2008. Lectures notes.

16 – Russak. I. B., calculus of variations MA 4311, Lectures notes, Monterey California 93943, July 9, 2002.

17 – Elena chersaev and Andre j cherkaev, calculus of variations and Applications, lectures notes, October 24, 2003.

18 – Erich Miersemann, calculus of variations, lectures notes, version October, 2012.

19 – G.F. simmons, Differential Equations, MCGRAW Hill, Publishing company Ltd, New Delhi, 1985.

20 – C.R. Wylie, Differential Equations, MCGRAW Hill Company 1979.

21 – E.T. Copson, Theory of Functions of a Complex Variable, Oxford Press, 1962.

22 – LI.G Chambers. Integral Equations, International Textbook Company Limited, London, 1976.

23 – M.KRASNOV, A. KISELEV, G.MAKARENKO, problems and exercises in integral equations. MIR publishers – Moscow, 1971.

24 – M.KRASNOV, A.KISELEV, G. MAKARENKO, problems and exercises in the calculus of variation. MIR publisher – Moscow, 1975.

25 – F.W. Gehring, S.Axler, K.A. Ri[illegible] the calculus of variations., Bruce Van Brunt, springer, universitext, 2004 springer – [illegible]rlag, New York USA, Inc, ISB No. 387 – 40247 [illegible]

26 – HARRY HOCH STADT, Integral equations, Awiley – inter science publication, New York – USA, copyright 1973, by John Wiley Sons, Inc, ISB No – 471-40165-x

27 – N.I. Akhiezer "The Calculus of variation" (translated by A.H. Frink) Blaisdell publishing co. New York (1962).

28 – A.M. Arthurs, "Calculus of variations" Routledge and Kegan Paul, London and Boston 1975.

29 – G.A. Bliss, " Calculus of variations" Open Court publishing Co. Chicago (1962).

30 – M. Boas, "Mathematical methods in the Physical Science" John Wiley and Sons.

31 – R. Courant and D. Hilbert, "Methods of Mathematical Physics" vol. 1, Inmterscience Publishing co. New York, (1953).

32 – J. W. Craggs, "Calculus of variations" George Allen and Unwin Ltd London 1973.

33 – S.E. Dreyfus, "Dynamic Programming and The Calculus of variations" Academic Press 1965.

34 – L.Elsgolts, "Differential Equations and the Calculus of Variations" Mir Publishers, Moscow 1970.

35 – I. M Gelfand and S.V. Fomin, "Calculus of Variations" (Translated and Edited by R.A. Silverman) Prentice – Hall, Englewood, New Jersey (1963).

36 – D.Koo, "Elements of Optimization" Springer – Verlag, New York, Berlin (1997).

37 – Leitmann, "The Calculus of Variations and Optimal Control" Plenum Press New York and London (1981).

38 – G.F. Simmon, "Differential Equations with Applications and Historical notes" Tata Mc Graw – Hill New Delhi (1984).

39 – R.R. Smith, "Variational Methods in Optimization" Prentice – Hall, Englewood, New Jersey (1974).

اللجنة العلمية

أ.د. محمد صبح

أ. د. خالد خنيفس

أ.م.د. صفوان زيزون

المدقق اللغوي

د. محمد قاسم