



منشورات جامعة دمشق

كلية العلوم

قسم الرياضيات

بحوث العمليات

لطلاب السنة الرابعة (تحليل + الرياضيات التطبيقية)

تأليف

د. خالد الخنيفس

أستاذ في قسم الرياضيات

كلية العلوم

د. غصون الجبرودي

مدرس في قسم الرياضيات

كلية العلوم

1435 - 1436 هـ

2013 - 2014 م

جامعة دمشق





بحوث العمليات
رقم الكتاب / 000 /

64	2.3- الحل الأمثل المحلي و الأعظمي (الأصغري)
65	2.3.1- مسائل البرامج المحدبة
66	تمارين
69	الفصل الثالث
69	ماهية مسائل بحوث العمليات واتخاذ القرار الأمثل
69	3.1- تمهيد
70	3.2- تعريفات أولية
72	3.3- أفضل القرارات في الظروف الغامضة – تحليل القرار
72	3.3.1- الخواص المميزة للقرار المتخذ
73	3.3.2- بناء النموذج والتحليل الكمي
74	3.3.3- المكونات الأساسية لعملية التحليل الكمي
75	3.4- نماذج مسائل بحوث العمليات
76	3.4.1- أنواع النماذج
86	3.5 – المسألة الإنتاجية أين ومتى
88	3.6- مسألة تنظيم الكميات الاقتصادية
93	3.7-مسألة ناتج مزج
99	تمارين
101	الفصل الرابع
101	البرمجة الخطية
101	Linear Programming
101	4.1- مقدمة
104	4.2- الصياغة العامة للبرامج الخطية
112	4.3- مبرهنات في البرمجة الخطية

119	4.4- مبدأ الثنوية في البرمجة الخطية
126	4.4.1- البرامج الخطية المرافقة (الثنوية)
130	4.5- الطريقة البيانية
144	4.6- الحالات الشاذة في البرمجة الخطية
144	4.6.1- تعدد الحلول المثلى
147	4.6.2- الحلول غير المحدودة
148	4.6.3- عدم وجود حلول مقبولة
149	4.6.4- الانحلال Degeneracy
151	تمارين
153	الفصل الخامس
153	خوارزمية السيمبلكس
153	5.1- مقدمة
155	5.2- طريقة سيمبلكس
156	5.3- خوارزمية السيمبلكس الأساسية
161	5.4- معيار سيمبلكس الأول I والثاني II
164	5.5- التمثيل الجدولي:
166	5.5- حالات الخوارزمية الخاصة
168	5.6- المجاهيل الاصطناعية
185	5.7- خواص الحل الأمثل
186	5.8- خواص التقارب
188	5.9- التمثيل المصفوفي لخوارزمية السيمبلكس
190	5.10- التحليل الحساس Sensitivity analysis
208	5.11- خوارزمية السيمبلكس المعدلة

211	5.12-استخدام Solver by Excel لحل مسائل البرمجة الخطية
221	تمارين
223	الفصل السادس
223	البرمجة الصحيحة
223	6.1- مقدمة
223	6.2- أسلوب التقريب
225	6.3- أسلوب قطع المستوي
226	6.3.1- طريقة كومري
247	6.4-التفرع والتحديد Branch and bound
261	6.5-البرمجة الثنائية (صفر-واحد) Zero-one programming
263	تمارين
265	الفصل السابع
265	مبدأ الثنوية والبرامج الثنوية
265	7.1- الحلول الثنوية والمسألة الأولية والمسألة الثنوية
268	7.2- قواعد إيجاد المسألة الثنوية
271	7.3- المجاهيل الخاملة
272	7.4- حل المسألة الثنوية
276	7.5- خوارزمية السيمبلكس الثنوية
278	7.6- المقارنة بين الخوارزمية الأولية والثنوية
280	تمارين
281	الفصل الثامن
281	مسألة النقل والمواصلات والإسناد
281	8.1- مقدمة

281	8.2- النموذج الرياضي لمسألة النقل
285	8.3-خوارزمية حل النقل
288	8.4-طريقة الزاوية الشمالية الغربية
293	8.5-خوارزمية تعديل خطة التوزيع
299	8.6- مسائل النقل غير المشبعة
300	8.7- طريقة فوجل Vogel's Approx mation method
307	8.8- مسألة الاسناد (التعيين)
309	8.9- طريقة هنغارين لحل مسألة الاسناد
313	تمارين
317	الفصل التاسع
317	نظرية المباريات الإستراتيجية
317	9.1- مقدمة
317	9.2- الإستراتيجيات ذات المجموع الصفري
319	9.3- الإستراتيجية الصرفة
319	9.4- نقاط الاستقرار في المباريات الإستراتيجية
322	9.5- الإستراتيجية المختلطة
329	9.6- الإستراتيجيات ذات المجموع غير صفري
331	تمارين
333	الفصل العاشر
333	تحليل الشبكات
333	10.1- مقدمة وتعريف
336	10.2- خطوات تشكيل الشبكة Networks Configuration Steps
338	10.3- تحديد المدة الزمنية للنشاط

341	10.4- المسار الحرج Critical path
349	10.5- خوارزمية أقصر طريق
352	10.6- مسائل التدفق الأعظمي
353	10.7- تحويل مسألة النقل إلى مسألة تدفق أعظمي
354	10.8- خوارزمية فورد - فولكرسون
376	تمارين
385	المصطلحات العلمية
393	المراجع العلمية

- نقول عن المصفوفة I أنها مصفوفة واحدة من المرتبة n إذا كانت مصفوفة قطرية من المرتبة $(n \times n)$ وكانت جميع عناصرها القطرية مساوية الواحد، ونرمز لها بـ I_n ، مثلاً:

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

- نقول عن المصفوفة C إنها تناظرية إذا كانت جميع عناصرها المتناظرة بالنسبة للقطر متساوية أي $C_{ij} = C_{ji}$ وذلك $\forall i, j$.
مثال:

$$C = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 \\ -3 & -2 & 6 \\ 4 & 6 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

من الملاحظ أن المصفوفة الواحدة هي مصفوفة تناظرية.
- نقول عن المصفوفة T إنها تناظرية تخالفية إذا كانت عناصرها المتناظرة بالنسبة للقطر متساوية بالقيمة المطلقة ومتعاكسة بالإشارة أي:

$$\forall i, j \quad t_{ij} = -t_{ji}$$

من الواضح أن عناصر القطر في المصفوفة T معدومة، أي $t_{ii} = 0$ ، مثال:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & -6 \\ -4 & 6 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

نلاحظ أن المصفوفة الصفرية $O_{n \times n}$ هي مصفوفة تناظرية تخالفية.
- نقول عن المصفوفة $D = (d_{ij})$ ، $i, j = 1, 2, \dots, n$ إنها مثلثية إذا كانت مربعة وجميع عناصرها $d_{ij} = 0$ من أجل $i < j$ أو من أجل $i > j$ ، أي:

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \dots & d_{1n} \\ 0 & d_{22} \dots & d_{2n} \\ \vdots & & \\ 0 \dots & d_{n-1,n-1} & d_{n-1,n} \\ 0 \dots & 0 & d_{nn} \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

1.2- منقول مصفوفة

لنكن لدينا المصفوفة $A = (a_{ij})$ حيث $i = 1, 2, \dots, m$ ، $j = 1, 2, \dots, n$. إذا بدلنا بأسطر المصفوفة A أعمدتها نحصل على مصفوفة ندعوها منقول المصفوفة ونرمز لها بـ A^T ، أي:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} \dots & a_{m2} \\ \vdots & & \\ a_{1n} & a_{2n} \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

ومنه إذا كانت المصفوفة A من المرتبة $m \times n$ فإن منقولها من المرتبة $n \times m$.
نتيجة:

المصفوفة تساوي منقولها إذا وفقط إذا كانت متناظرة.

1.3- العمليات على المصفوفات

1.3.1- ضرب مصفوفة بعدد

لنكن لدينا المصفوفة $M = (m_{ij})$ من المرتبة $m \times n$ وليكن $\alpha \in \mathbb{R}$ فإن $\alpha.M$ أو $M.\alpha$ هي مصفوفة

$$\alpha.M = \alpha(m_{ij}) = (\alpha m_{ij}) \quad (1.11)$$

أي لضرب المصفوفة بعدد حقيقي α نضرب كل عنصر من عناصرها بهذا العدد.

مثال:

$$4 \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 24 \\ 16 & 24 & 4 \end{pmatrix} \quad (1.12)$$

نتيجة:

يمكن أن نخرج أي عامل مشترك خارج قوسي المصفوفة بتقسيم جميع عناصرها على هذا العدد، مثلاً:

$$\begin{pmatrix} 8 & 0 & -10 \\ 6 & 2 & 12 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 4 & 0 & -5 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix} \quad (1.13)$$

1.3.2- المصفوفة الجزئية- وتوسيع المصفوفة

لتكن لدينا المصفوفة A من المرتبة $m \times n$ إذا حذفنا من هذه المصفوفة بعض الأسطر أو بعض الأعمدة أو بعض الأسطر والأعمدة، عندئذٍ نحصل على مصفوفة جزئية منها.

مثال:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 6 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 10 \end{pmatrix} \quad (1.14)$$

تدعى المصفوفات:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 6 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

بالمصفوفات الجزئية من المصفوفة المعطاة.

وبالاستفادة من هذه الخاصة يمكن أن نجزئ المصفوفة كما يلي:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} \dots & ..a_{1n} & \\ a_{21} & a_{22} \dots & ..a_{2n} & \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} \dots & ..a_{mn} & \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline D & E \end{array} \right) \quad (1.15)$$

وبالعكس إذا أضفنا بعض الأسطر أو بعض الأعمدة أو بعض الأسطر والأعمدة لهذه المصفوفة، فإننا نحصل على المصفوفة الموسعة. مثال:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} & 1 & 0.. & 0 \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} & 0 & 1.. & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} \dots & a_{mn} & 0 & 0.. & 1 \end{array} \right) \quad (1.16)$$

$$\left(\begin{array}{c} A \\ \hline 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} & & & \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} & & & \\ \vdots & & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} \dots & a_{mn} & & & \\ \hline 1 & 0 & \dots & 0 & & \\ 0 & 1 & \dots & 0 & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & & \end{array} \right) \quad (1.17)$$

ملاحظة:

إن المصفوفة الأصلية A تكون جزئية من المصفوفة الموسعة.

1.3.3- جمع المصفوفات

لتكن لدينا المصفوفتان A و B من المرتبة نفسها، نعرف مجموع هاتين المصفوفتين بأنه المصفوفة C :

$$C = A + B \quad (1.18)$$

حيث نحصل على عناصرها أي C_{ij} من جميع العناصر المتقابلة في المصفوفتين A, B أي:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad (1.19)$$

إن عملية جمع المصفوفات تحقق الخواص التالية:

- I. $A + B = B + A$ (الخاصة التبديلية).
- II. $A + (B + C) = (A + B) + C$ (الخاصة التجميعية).
- III. المصفوفة الصفرية هي العنصر المحايد (الحيادي) في عملية جمع المصفوفات

$$A = O + A = A + O$$

- IV. لكل مصفوفة A نظير بالنسبة إلى عملية الجمع، وهذا النظير نرمز له بـ $-A$

$$A + (-A) = 0$$

- V. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$ حيث A, B مصفوفتان من المرتبة نفسها و $\alpha \in \mathbb{R}$

- VI. $(A + B)^T = A^T + B^T$ أي منقول مجموع هو مجموع المناقيل.

1.3.4- جداء المصفوفات

لتكن A مصفوفة من المرتبة $m \times n$ ولتكن B مصفوفة من المرتبة $n \times p$ عندئذٍ نعرف الجداء لهاتين المصفوفتين بأنه المصفوفة:

$$C = A.B$$

من المرتبة $n \times p$ التي حددها العام معرف بالعلاقة التالية:

$$\begin{aligned} C_{ij} &= a_{i1}.b_{1j} + a_{i2}.b_{2j} + \dots + a_{in}.b_{nj} \\ &= \sum_{k=1}^n a_{ik}.b_{kj} \end{aligned} \quad (1.20)$$

مثال:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 4 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & 14 & -1 & 15 \end{bmatrix}$$

1.3.4.1- خواص جداء المصفوفات:

أ- جداء المصفوفات غير تبديلي بشكل عام أما في حالات المصفوفات القطرية فإن الجداء يكون تبديلياً.

مثال:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A.B = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \neq B.A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

مثال:

$$A.B = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \dots & 0 \\ 0 & a_{22} \dots & 0 \\ 0 & 0 \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & 0 \dots & 0 \\ 0 & b_{22} \dots & 0 \\ 0 & 0 \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \text{diag}(a_{11}b_{11}, a_{22}b_{22}, \dots, a_{nn}b_{nn})$$

$$= B.A$$

ب- جداء المصفوفات تجميعي:

لتكن لدينا المصفوفات A, B, C عندئذ يكون:

$$A.(B.C) = (A.B).C$$

فإذا كانت A من المرتبة $m \times n$ و B من المرتبة $n \times p$ و C من المرتبة $p \times q$ فإن الحد العام للجداء:

$$L = B.C$$

يكون:

$$l_{ij} = \sum_{k=1}^b b_{ik} c_{kj}$$

والحد العام للجداء:

$$R = A.(B.C) \text{ يكون:}$$

$$\begin{aligned} r_{ij} &= \sum_{d=1}^n a_{id} l_{dj} = \sum_{d=1}^n a_{id} \sum_{k=1}^p b_{dk} c_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^p \left(\sum_{d=1}^n a_{id} b_{dk} \right) c_{kj} \end{aligned}$$

وهذا يمثل الحد العام للجداء $(A.B).C$

ج- جداء المصفوفات توزيعي بالنسبة لجميع المصفوفات:

$$A.(B+C) = A.B + A.C$$

$$(B+C).A = B.A + C.A$$

لتكن A من المرتبة $m \times n$ ولتكن كل من B و C من المرتبة $n \times p$ فإن الحد العام للمصفوفة:

$$R = A.(B+C)$$

يكون:

$$\begin{aligned} r_{ij} &= \sum_{k=1}^n a_{ik} (b_{kj} + c_{kj}) \\ &= \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} + \sum_{k=1}^n a_{ik} c_{kj} \end{aligned}$$

وهذا يمثل الحد العام لـ $A.B + A.C$

$$\text{إذاً: } A.(B+C) = A.B + C.A$$

وبالطريقة نفسها يمكن أن نبين $(B+C).A = B.A + C.A$

د- منقول جداء يساوي المناقل بالترتيب المعاكس:

$$(A.B)^T = B^T . A^T$$

هـ - العنصر المحايد بالنسبة لجداء المصفوفات هو المصفوفة الواحدة

$$I.A = A.I = A$$

1.5- حل جملة معادلات خطية

لنكن لدينا جملة معادلات الخطية التالية:

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \right\} \quad (1.22)$$

يمكن كتابة جملة المعادلات الخطية (1.22) بالشكل المصفوفي كما يلي:

$$A.X = B \quad (1.23)$$

حيث تمثل A مصفوفة المعاملات (الأمثال):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ويمثل X متجه عمود المجاهيل (في جملة المعادلات الخطية):

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

ويمثل B متجه عمود الأعداد التي في الطرف الثاني (لجملة المعادلات الخطية):

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

1.5.1- إيجاد حلول لجملة معادلات خطية

لتكن لدينا جملة المعادلات الخطية (1.22)، التي تكتب بالشكل المصفوفي:

$$A.X = B$$

ولنفرض أن المصفوفة A من المرتبة r ، ولتكن C إحدى المصفوفات الجزئية الأعظمية في A عندئذٍ نستطيع أن نكتب:

$$A = \begin{pmatrix} C & K \\ L & N \end{pmatrix}$$

ويكفي للوصول إلى هذا الشكل بالتبديل في ترتيب المعادلات الخطية أو تبديل مركبات متجه X مع متجهات أعمدة معاملاتها في الشكل الأخير لـ A ونلاحظ أنه:

عندما تكون $r = m < n$ فإن كلاً من المصفوفتين L, N تكون غير موجودة.

وعندما تكون $r = n < m$ فإن كلاً من المصفوفتين K, N تكون غير موجودة.

وعندما تكون $r = m = n$ فإن كلاً من المصفوفتين K, L, N تكون غير موجودة.

إذا نستطيع أن نكتب الشكل المصفوفي لجملة المعادلات الخطية بالشكل التالي:

$$\begin{pmatrix} C & K \\ L & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} \quad (1.24)$$

حيث $x_1 \in R^r, x_2 \in R^{n-r}$ هي متجهات المجاهيل و $B_1 \in R^r, B_2 \in R^{n-r}$ هي متجهات الطرف الثاني لجملة المعادلات.

لنضرب طرفي الجملة (1.24) بالمصفوفة:

$$D = \begin{pmatrix} C^{-1} & 0 \\ -LC^{-1} & 1 \end{pmatrix}$$

فنحصل على الجملة المكافئة التالية:

$$= \begin{pmatrix} I & C^{-1}K \\ 0 & -LC^{-1}K + N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C^{-1}B_1 \\ -LC^{-1}B_1 + B_2 \end{pmatrix} \quad (1.25)$$

ولكن المصفوفة:

$$N - LC^{-1}K = 0$$

وذلك لأن أي عنصر غير معدوم من هذه المصفوفة يؤدي بإضافة العناصر الموافقة من سطره وعموده إلى I ، أي مصفوفة جزئية نظامية من A مرتبتها $(r+1) \times (r+1)$ وهذا يناقض كون مرتبة المصفوفة A هي r .

إذاً يمكن كتابة جملة المعادلات (1.25) كما يلي:

$$= \begin{pmatrix} I & C^{-1}K \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C^{-1}B_1 \\ -LC^{-1}B_1 + B_2 \end{pmatrix} \quad (1.26)$$

لحل جملة المعادلات الخطية (1.26) نميز حالتين:

أ- عندما تكون المصفوفة:

$$-LC^{-1}B_1 + B_2 = 0$$

فإننا نستطيع أن نكتب (1.26) كما يلي:

$$X_1 + C^{-1}KX_2 = C^{-1}B_1 \quad (1.27)$$

وبالتالي تكون حلول جملة المعادلات الخطية هي:

$$X_1 = C^{-1}B_1 - C^{-1}KX_2$$

حيث يتم إيجاد قيم المجاهيل X_1 بدلالة قيم اختيارية للمجاهيل X_2 ونستنتج في هذه الحالة أنه يمكن الاكتفاء بـ r معادلة خطية مستقلة خطياً،

ويكون عدد الحلول غير منتهٍ. إذا كانت المصفوفة K موجودة.

نسمي الحل $X_1 = C^{-1}B_1$ الذي يقابل $X_2 = 0$ بالحل القاعدي أو نقول عن المصفوفة C ذات المرتبة $r \times r$ إنها قاعدة.

ملاحظة:

كل مصفوفة مربعة نظامية يمكن أخذها قاعدة يقابلها حل قاعدي.

ملاحظة:

إذا كانت المصفوفة K غير موجودة فيكون الحل وحيداً:

$$X_1 = C^{-1}B_1$$

ب- إذا كانت المصفوفة:

$$-LC^{-1}B_1 + B_2 \neq 0$$

فإن جملة المعادلات الخطية (1.26) التي تكافئ جملة المعادلات الخطية:

$$A.X = B$$

تكون مستحيلة الحل لأن الطرف الأيسر لـ (1.26) لن يكون مساوياً طرفها الأيمن حينئذٍ لا يوجد حل لجملة المعادلات الخطية.

نتيجة:

يوجد حلول لجملة المعادلات الخطية $A.X = B$ إذا وفقط إذا كانت رتبة مصفوفة أمثال المجاهيل A مساوية رتبة المصفوفة الموسعة $(A|B)$.

مثال:

لنكن لدينا جملة المعادلات الخطية:

$$x_1 - x_2 + x_3 = 1$$

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 = 4$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 7$$

إن مصفوفة الأمثال هي:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

أما المصفوفة الموسعة فهي:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 7 \end{array} \right)$$

وبعد إجراء العمليات الجبرية على المصفوفات الموسعة نجد:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 5/3 \\ 0 & 1 & 0 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array} \right)$$

ومنه نجد أن مصفوفة المعاملات من المرتبة 2 أما المصفوفة الموسعة فمن المرتبة 3، إذاً فجملة المعادلات الخطية مستحيلة الحل.

مثال:

لنكن لدينا جملة المعادلات الخطية:

$$x_1 + x_2 - x_3 = 2$$

$$-2x_1 + x_2 + x_3 = 3$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 6$$

إن مصفوفة المعاملات هي:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

أما المصفوفة الموسعة فهي:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{array} \right)$$

وبعد إجراء العمليات الجبرية على المصفوفة الموسعة نجد:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

$$r(A|B) = r(A) = 3$$

ومنه

والحل هو:

$$x_1 = 1, x_2 = 3, x_3 = 3$$

1.5.2- طريقة غاوس - جوردان

لتكن لدينا جملة المعادلات الخطية:

$$AX = B$$

حيث مصفوفة المعاملات A مربعة ونظامية، أي أن $m = n$ والمحدد $|A|$ غير معدوم، إذا فمقلوب المصفوفة A^{-1} موجود، وبالتالي فإن:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

$$\Rightarrow IX = A^{-1}B$$

$$\Rightarrow X = A^{-1}B$$

يمكن أن نحصل على مصفوفة المقلوب A^{-1} بعد أن توسع المصفوفة A بمصفوفة الوحدة I ذات المرتبة $n \times n$ ومتجه الطرف الثاني، ثم نجري على أسطرها العمليات الجبرية المنطقية المناسبة:

إن كل عمود في المصفوفة A يمثل متجهاً ونرمز له بـ A_i .

نسمي المتجهات $A_1, A_2, \dots, A_n$ المتجهات الأساسية أما المتجهات $E_1, E_2, \dots, E_n$ (أعمدة مصفوفة الوحدة) فنسميها متجهات قاعدة الفضاء R^n .

A_1	A_2	...	A_n	E_1	E_2	...	E_n	B
a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	1	0	...	0	b_1
a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	0	1	0	...	b_2
.	.	.	.	.	.	.	.	.
a_{n1}	a_{n2}	...	a_{nn}	0	.	.	0 1	b_n

نتلخص طريقة غاوس - جوردان بما يلي:

نقسم السطر الأول على العدد a_{11} ثم تجعل بقية عناصر العمود الأول معدومة، وذلك بتطبيق عمليات جبرية، فنحصل على الشكل التالي:

A_1	A_2	...	A_n	E_1	E_2	...	E_n	B
1	a'_{12}	...	a'_{1n}	$1/a_{11}$	0		0	b'_1
0	a'_{22}	...	a'_{2n}	ε'_{21}	1	0...	0	b'_2
.								
.								
.								
0	a'_{n2}	...	a'_{nm}	ε'_{n1}	0	...	1	b'_n

والآن نقسم عناصر السطر الثاني على العدد a_{22} ، ثم نعدم بقية عناصر العمود الثاني، وذلك بتطبيق عمليات جبرية، فنحصل على ما يلي:

A_1	A_2	...	A_n	E_1	E_2	...	E_n	B
1	0	a''_{13}	a''_{1n}	ε''_{11}	ε''_{12}	0	0...	b''_1
0	1	a''_{23}	a''_{2n}	ε''_{21}	ε''_{22}	0	...	b''_2
.				.	.			
.				.	.			
.				.	.			
0	0	a''_{n3}	a''_{nm}	ε''_{n1}	ε''_{n2}		1	b''_n

وهكذا نتابع العملية فبعد عدد منته من الخطوات تصبح المتجهات $A_1, \dots, A_n$ متجهات قاعدة، إذ أتمكننا طريقة غاوس - جوردان من نقل المتجهات الأساسية إلى متجهات قاعدة، ويصبح الشكل النهائي للمصفوفة الموسعة كما يلي:

A_1	A_2	...	A_n	E_1	E_2	...	E_n	B
1	0		0	ε^*_{11}	ε^*_{12}		ε^*_{1n}	b^*_1
0	1		0	ε^*_{21}	ε^*_{22}		ε^*_{2n}	b^*_2
.				.				
.				.				
.				.				
0	0		1	ε^*_{n1}	ε^*_{n2}		ε^*_{nn}	b^*_n

تمثل المتجه B قيم المجاهيل أي:

$$x_1 = b^*_1, x_2 = b^*_2, \dots, x_n = b^*_n$$

أما المصفوفة (ε^*_{ij}) فتمثل مقلوب A .

مثال:

أوجد حل جملة المعادلات الخطية التالية، وذلك بتطبيق طريقة غاوس - جوردان:

$$x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 1$$

$$2x_1 - x_2 + 2x_3 = 7$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 13$$

1	4	-3	1	0	0	1
2	-1	2	0	1	0	7
3	2	1	0	0	1	13
1	4	-3	1	0	0	1
0	-9	8	-2	1	1	5
0	-10	10	-3	0	1	10
1	0	5/9	1/9	4/9	0	29/9
0	1	-8/9	2/9	-1/9	0	-5/9
0	0	10/9	-7/9	-10/9	1	40/9
1	0	0	1/2	1	-1/2	1
0	1	0	2/5	-1	8/10	3
0	0	1	-7/10	-1	9/10	4

$$\Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 3, x_3 = 4$$

ويكون مقلوب المصفوفة A هو:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 4 & -1/2 \\ 2/5 & -1 & 8/10 \\ -7/10 & -1 & 9/10 \end{pmatrix}$$

1.5.2.1- طريقة غاوس - جوردان في حل جملة المعادلات الخطية ذات

المصفوفة المستطيلة:

إن طريقة غاوس - جوردان في حل جملة المعادلات الخطية ذات المصفوفة المستطيلة لا تختلف عن الطريقة السابقة، وإنما الاختلاف يقع في الحصول على النتائج. إذا نلاحظ ما يلي:

أ- يكون الحل غير نظامي إذا كان أحد المجاهيل الأساسية معدوماً.

ب- لا يوجد مقلوب لمصفوفة المعاملات لأنها ليست مصفوفة مربعة.

مثال:

أوجد حل جملة المعادلات الخطية التالية باستخدام طريقة غاوس جوردان.

$$5x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 1$$

$$2x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 4$$

$$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 = -2$$

5	2	3	3	1	0	0	1
2	-2	5	2	0	1	0	4
3	4	2	2	0	0	1	-2
1	2/5	3/5	3/5	1/5	0	0	1/5
0	-14/5	19/5	4/5	-2/5	1	0	18/5
0	14/5	1/5	1/5	-3/5	0	1	-13/5
1	0	8/7	5/7	1/7	1/7	1	5/7
0	1	-19/7	-2/7	1/7	-5/14	0	-9/7
0	0	4	1	-1	1	1	1
1	0	0	3/7	3/7	-1/7	-2/7	3/7
0	1	0	3/54	-11/56	-1/56	19/56	-53/56
0	0	1	1/4	-1/4	1/4	1/4	1/4

يوجد في هذه الحالة عدد غير منتهٍ من الحلول من الشكل

$$x_1 = 3/7 - 3/7x_4$$

$$x_2 = -53/56 - 3/54x_4$$

$$x_3 = 1/4 - 1/4x_4$$

ومن أجل $x_4 = 0 \Leftarrow x_1 = 3/7, x_2 = -53/56, x_3 = 1/4$

1.6-تضافر المواد

إن المصفوفات تستخدم لتلخيص أو عرض مجموعة من الأرقام بطريقة مبسطة في صورة منظوم مكون من عدد من السطور وعدد من الأعمدة، حيث يمكن استخدام المصفوفات في المواد المباشرة والعمالة والمصاريف والتكاليف الصناعية والمواد المباشرة التي يسهل تحديدها وتحميلها مباشرة لمنتج معين، ومن التطبيقات العملية لجداء المصفوفات وجمعها تحديد كمية المواد الأولية اللازمة لإنتاج وحدة إنتاجية واحدة بل أكثر من ذلك يمكن أن نحدد كمية المواد الأولية حجم محدد وسوف نوضح هذه الفكرة من خلال الأمثلة التالية:

مثال:

يقوم مصنع بتصنيع مادتين أوليتين R_1, R_2 ففي المرحلة الأولى يصنع المواد نصف المصنعة L_1, L_2, L_3 وفي المرحلة النهائية ينتج C_1, C_2 المطلوب: عين مصفوفة الحاجة التي تبين لنا كمية المواد الأولية اللازمة لإنتاج وحدة إنتاجية واحدة من C_1 و وحدة إنتاجية واحدة من C_2 ، علماً أن مراحل الإنتاج ستكون وفق الجدولين التاليين:

	L_1	L_2	L_3		C_1	C_2
R_1	4	16	20	L_1	4	12
R_2	8	12	24	L_2	20	12
				L_3	16	4

إن المصفوفة الإنتاجية في المرحلة الأولى هي:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 4 & 16 & 20 \\ 8 & 12 & 24 \end{pmatrix}$$

أما المصفوفة الإنتاجية في المرحلة الثانية فهي:

$$M_2 = \begin{pmatrix} 4 & 12 \\ 20 & 12 \\ 16 & 4 \end{pmatrix}$$

عندئذ تكون مصفوفة الحاجة M هي:

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 16 & 20 \\ 8 & 12 & 24 \\ 16 & 4 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 12 \\ 20 & 12 \\ 16 & 4 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 656 & 320 \\ 656 & 336 \end{pmatrix}$$

و بالتالي:

	C_1	C_2
R_1	656	320
R_2	656	336

إذا لتصنيع وحدة إنتاجية واحدة من C_1 نحتاج لـ 656 وحدة إنتاجية من R_1 و لـ 656 وحدة إنتاجية من R_2 ، ولإنتاج وحدة إنتاجية واحدة من C_2 يحتاج لـ 320 وحدة إنتاجية من R_1 و لـ 336 وحدة إنتاجية من R_2
 فإذا أردنا تحديد كمية المواد الأولية اللازمة لإنتاج 10 وحدات من C_1 و 20 وحدة من C_2 ، نلاحظ أن:

$$C = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix}$$

حيث C مصفوفة المنتجات، و R مصفوفة المواد الأولية اللازمة، تعرف كمايلي:

$$R = M \cdot C$$

$$R = \begin{pmatrix} 656 & 320 \\ 656 & 336 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12960 \\ 13280 \end{pmatrix}$$

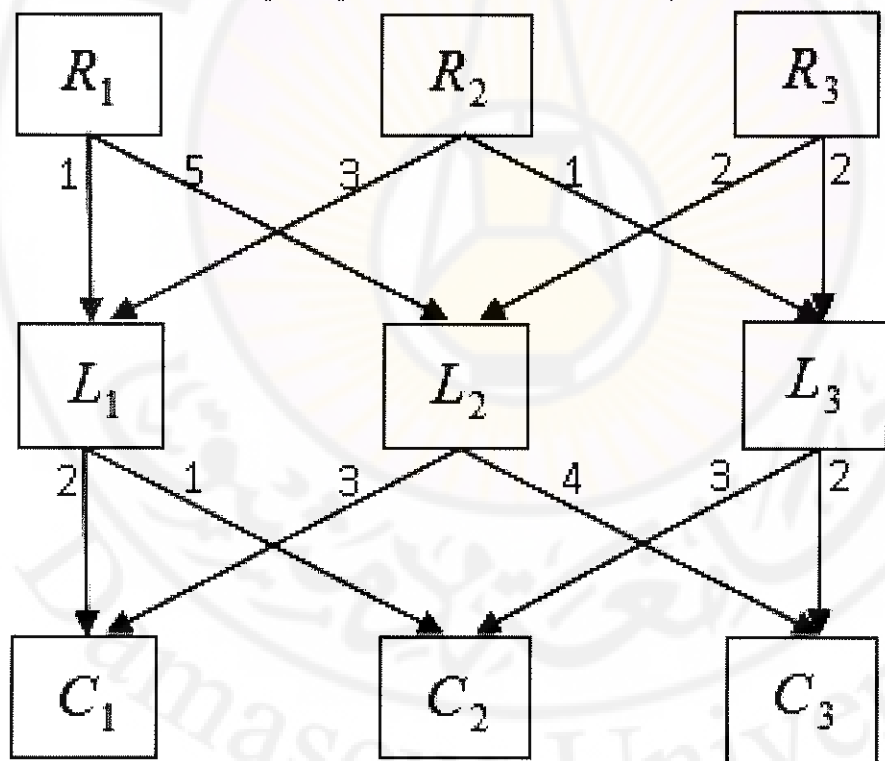
إذا لإنتاج 10 وحدات من C_1 و 20 وحدة من C_2 نحتاج لـ 12960 وحدة من R_1 و لـ 13280 وحدة من R_2

ملاحظة:

في بعض الحالات تكون الخطة الإنتاجية موضحة بواسطة الرسم البياني، الذي يبين سير الإنتاج، وتدعى مثل هذه الرسوم بالمخططات الإنتاجية، وسوف نوضح ذلك من خلال المثال التالي:

مثال:

يقوم مصنع بتصنيع ثلاث مواد أولية R_1, R_2, R_3 ففي المرحلة الإنتاجية الأولى يصنع المواد نصف المصنعة L_1, L_2, L_3 وفي المرحلة النهائية ينتج المنتجات C_1, C_2, C_3 على أن يتم العمل وفق المخطط الإنتاجي التالي:



المطلوب:

عين مصفوفة الحاجة، وماهي كمية المواد الأولية لإنتاج 10 وحدات من C_1 و 10 وحدات من C_2 و 10 وحدات من C_3

	L_1	L_2	L_3		C_1	C_2	C_3
R_1	1	5	0	L_1	2	1	0
R_2	3	0	1	L_2	3	0	4
R_3	0	2	2	L_3	0	3	2

إن المصفوفة الإنتاجية في المرحلة الأولى هي:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

أما المصفوفة الإنتاجية في المرحلة الثانية فهي:

$$M_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

عندئذ تكون مصفوفة الحاجة M هي:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 17 & 1 & 20 \\ 6 & 6 & 2 \\ 6 & 6 & 12 \end{pmatrix}$$

و بالتالي:

	C_1	C_2	C_3
R_1	17	1	20
R_2	6	6	2
R_3	6	6	12

إذا لإنتاج وحدة إنتاجية واحدة من C_1 نحتاج لـ 17 وحدة من R_1 و 6 وحدات من R_2 و 6 وحدات من R_3 وبالطريقة نفسها بالنسبة لـ C_2 و C_3 لدينا مصفوفة الإنتاج:

$$C = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$$

والمطلوب تحديد مصفوفة المواد الأولية:

$$R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix}$$

$$R = M.C$$

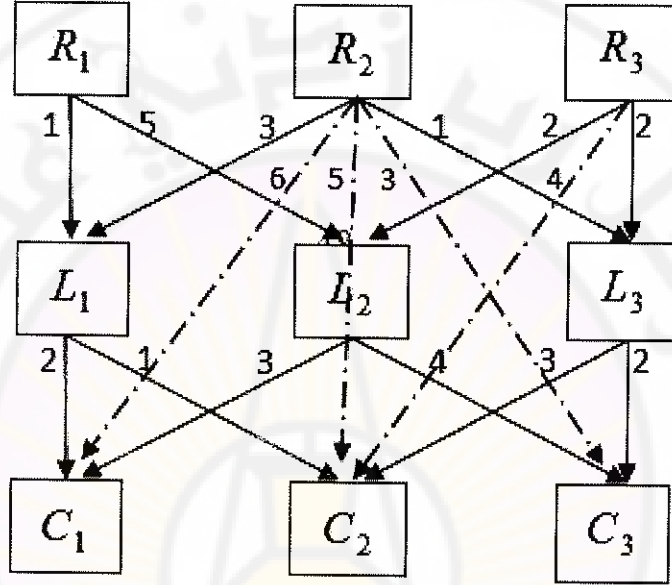
$$R = \begin{pmatrix} 17 & 1 & 20 \\ 6 & 6 & 2 \\ 6 & 6 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 380 \\ 140 \\ 240 \end{pmatrix}$$

إذا لإنتاج 10 وحدات من C_1 و 10 وحدات من C_2 و 10 وحدات من C_3 نحتاج لـ 380 وحدة من R_1 و 140 وحدات من R_2 و 240 وحدة من R_3

ملاحظة:

في بعض الحالات الصناعية نستخدم المواد الأولية أو المواد نصف المصنعة في بعض المراحل في مرحلة الإنتاج النهائي، نوضح هذه الفكرة مباشرة على المثال الأخير، وذلك بإضافة مخطط حاجة الإنتاج للمراحل السابقة للمخطط الإنتاجي:



لنشكل مصفوفة الزيادة وذلك بعد معرفة جدول الزيادة:

	C_1	C_2	C_3
R_1	0	0	0
R_2	6	5	3
R_3	0	4	0

تكون مصفوفة الزيادة:

$$Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & 5 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

عندئذ تصبح مصفوفة الحاجة في هذه الحالة:

$$M^* = M + Z = \begin{pmatrix} 17 & 1 & 20 \\ 6 & 6 & 2 \\ 6 & 6 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & 5 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M^* = \begin{pmatrix} 17 & 1 & 20 \\ 12 & 11 & 5 \\ 6 & 10 & 12 \end{pmatrix}$$

و يكون لدينا:

	C_1	C_2	C_3
R_1	17	1	20
R_2	12	11	5
R_3	6	10	12

تمارين

(1) لتكن لدينا المصفوفات التالية:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 5 & 6 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 8 & -4 & 2 \\ 10 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

المطلوب حساب ما يلي:

$$D^{-1}, |D|, |A|, D.A, A.D, B+C, (A.D)^T B^T$$

(2) يقوم مصنع بتصنيع المواد الأولية R_1, R_2, R_3, R_4 في المرحلة الأولى يصنع المواد المصنعة L_1, L_2, L_3 وفي المرحلة النهائية ينتج المواد C_1, C_2, C_3, C_4 وفق الجداول التالية:

	L_1	L_2	L_3
R_1	7	4	5
R_2	5	—	3
R_3	4	4	2
R_4	4	—	5

المرحلة الإنتاجية الأولى

	C_1	C_2	C_3	C_4
R_1	1	0	0	1
R_2	0	2	0	4
R_3	2	0	7	0
R_4	5	0	3	0

المرحلة الإنتاجية النهائية

أوجد مصفوفة الحاجة؟ وما هي كمية المواد الأولية اللازمة لإنتاج 10 وحدات إنتاجية من C_1 ، و 20 وحدة إنتاجية من C_2 و 30 وحدة إنتاجية من C_3 و 15 وحدة إنتاجية من C_4 .

(3) أوجد حل جملة المعادلات التالية، وذلك باستخدام طريقة غاوس - جوردان، ثم أوجد مقلوب مصفوفة الأمثال إن وجد:

ب - $x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -9$ $x_1 - x_2 + 3x_3 = 2$ $3x_1 - 6x_2 - x_3 = 25$	أ - $x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 = 2$ $2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 6$ $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$
	ت - $x_1 - 5x_2 - 8x_3 + x_4 = 3$ $3x_1 + x_2 - 3x_3 - 5x_4 = 1$ $x_1 - 7x_3 + 2x_4 = 5$



الفصل الثاني

التحليل المحدب

2.1- تعريفات أولية

ليكن لدينا الفضاء المتجهي R^n وليكن $x_1, x_2 \in R^n$ ، عندئذٍ نعرف المستقيم المار بالنقطتين x_1, x_2 بأنه مجموعة النقاط المعرفة كما يلي:

$$L = \{x : x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2, \lambda \in R\}$$

وتعرف القطعة المستقيمة التي طرفاها $x_1, x_2 \in R^n$ بأنها مجموعة النقاط المعرفة كما يلي:

$$[x_1, x_2] = \{x : x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2, 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

ونقول إنها قطعة مستقيمة مغلقة طرفاها x_1, x_2 كما نقول عن مجموعة النقاط التالية:

$$(x_1, x_2) = \{x : x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2, 0 < \lambda < 1\}$$

بأنها القطعة المستقيمة المفتوحة طرفاها x_1, x_2 .

2.2- المجموعة المحدبة

ليكن لدينا الفضاء الخطي E ولتكن لدينا $E \subseteq S$.

تكون S مجموعة محدبة إذا كان:

$$0 \leq \lambda \leq 1 \text{ حيث } \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in S \iff \forall x_1, x_2 \in S$$

إن أبسط الأمثلة التي يمكن إعطاؤها على المجموعات المحدبة هي:

القطعة المستقيمة غير محددة الطول، السطوح، وبعض الأشكال الهندسية والفراغية مثل الهرم، المكعب، الكرة.

ونلاحظ في بعض الأشكال الهندسية أن جزءاً من المستقيم الواصل بين نقطتين مفروضتين (x, y) من المجموعة السابقة يقع خارج المجموعة الأولى و يقع داخل المجموعة الثانية كما في الشكل (2.1).

إذا ندعو المضلع محدباً إذا كان كل طريق اتصال بين أي نقطتين من المضلع يقع تماماً داخل هذا المضلع.



الشكل (2.1)

مثال:

ليكن لدينا الفضاء الخطي R^2 ولتكن لدينا المجموعة:

$$S = \{(x_1, x_2) : x_2 \geq |x_1|\}$$

أثبت أن S مجموعة محدبة.

الحل:

لتكن $Z_1 = (x_1, y_1) \in S$ $Z_2 = (x_2, y_2) \in S$ ، إذاً:

$$y_1 \geq |x_1|, \quad y_2 \geq |x_2| \text{ إذا لتكن:}$$

$$Z_3 = \lambda Z_1 + (1-\lambda)Z_2 = (\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2)$$

ولنثبت أن $Z_3 \in S$ ،

$$\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2 \geq \lambda |x_1| + (1-\lambda)|x_2|$$

$$\geq |\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2|$$

إذاً $Z_3 \in S$ وبالتالي فإن المجموعة S مجموعة محدبة.

مثال:

ليكن لدينا الفضاء الخطي R^3 ولتكن لدينا المجموعة:

$$S = \{x : x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 5\}$$

أثبت أن المجموعة S محدبة؟

ليكن لدينا $Y = (y_1, y_2, y_3)$, $X = (x_1, x_2, x_3) \in \$$

$$\text{أي: } y_1 + 2y_2 - y_3 \leq 5 \quad \text{و} \quad x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 5$$

$$\text{ولتكن } Z = \lambda X + (1 - \lambda)Y$$

$$= (\lambda x_1 + (1 - \lambda)y_1, \lambda x_2 + (1 - \lambda)y_2, \lambda x_3 + (1 - \lambda)y_3)$$

ولنثبت أن $Z \in \$$

$$\lambda x_1 + (1 - \lambda)y_1 + 2\lambda x_2 + 2(1 - \lambda)y_2 - \lambda x_3 - (1 - \lambda)y_3$$

$$= \lambda(x_1 + 2x_2 - x_3) + (1 - \lambda)(y_1 + 2y_2 - y_3)$$

$$\leq 5\lambda + (1 - \lambda)5 = 5$$

إذاً $Z \in \$$ ، إذاً المجموعة $\$$ مجموعة محدبة.

2.3- التركيب الخطي

ليكن لدينا الفضاء الخطي E ولتكن لدينا $x_1, x_2, \dots, x_n$ مجموعة من المتجهات

في E ، نقول عن الشعاع x إنه تركيب خطي لهذه الأشعة إذا كان:

$$x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$$

حيث أن:

$$\text{أ- } \lambda_i \geq 0$$

$$\text{ب- } \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$$

وعندئذ نقول إن E فضاء خطي محدب.

2.4- تعاريف أولية ومبرهنات

مبرهنة (1):

ليكن لدينا الفضاء الخطي E ولتكن لدينا المجموعة $\$ \subset E$ ، عندئذ يكون:

الشرط اللازم والكافي كي تكون المجموعة $\$$ محدبة هو أن يكون:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \in \$$$

حيث:

$$i = 1, 2, \dots, n, \quad x_i \in \$ \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, \quad \lambda_i \geq 0$$

الإثبات:

كفاية الشرط:

ليكن:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \in \$$$

حيث:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, \quad \lambda_i \geq 0$$

عندئذ يكون من أجل $n = 2$.

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in \$ \quad \text{حيث} \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 1, \lambda_1, \lambda_2 \geq 0$$

نفرض أن $\lambda_1 = \alpha$ عندئذ يكون $\lambda_2 = 1 - \alpha$ وبالتالي فإن:

$$\Leftrightarrow 0 \leq \alpha \leq 1, \quad \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2 \in \$$$

إذا المجموعة \$ مجموعة محدبة.

لزوم الشرط:

ليكن \$ مجموعة محدبة عندئذ:

$$x_1, x_2 \in \$, \quad 0 \leq \alpha \leq 1, \quad \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2 \in \$ \quad (2.1)$$

بفرض أن $\alpha = \lambda_1$ عندئذ $1 - \alpha = \lambda_2$ إذا يكون:

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in \$ \quad \text{حيث} \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 1, \lambda_1, \lambda_2 \geq 0$$

إذا العلاقة (2.1) صحيحة من أجل $n = 2$.

نفرض أن العلاقة (2.1) صحيحة من أجل $n = k$ أي:

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1, \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad \lambda_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i \in \$$$

ولتثبت صحة العلاقة (2.1) من أجل $n = k + 1$

ليكن لدينا $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, \lambda_{k+1}$.

نميز حالتين:

أ- إذا كان أحد الأعداد λ_i معدوماً فإن العلاقة (2.1) تكون محققة وبذلك يتم المطلوب.

ب- إذا كان $\lambda_i \neq 0$ وذلك $\forall i = 1, 2, 3, \dots, k+1$ لتكن:

$$\lambda = \sum_{i=2}^{k+1} \lambda_i$$

وليكن $u_i = \frac{\lambda_i}{\lambda}$ حيث $i = 1, 2, 3, \dots, k+1$ إذاً $u_i \geq 0$

بما أن العلاقة صحيحة من أجل k فإن :

$$\tilde{x} = u_2 x_2 + \dots + u_{k+1} x_{k+1} \in \$$$

وبما أن $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k + \lambda_{k+1} = 1$ يكون لدينا $\lambda_1 + \lambda = 1$ ومنه فإن:
إذاً من أجل $x_1, \tilde{x} \in \$$ يكون:

$$\lambda_1 x_1 + (1 - \lambda_1) \tilde{x} \in \$$$

$$\lambda_1 x_1 + \lambda \tilde{x} \in \$$$

وبالتبديل نجد:

$$\lambda_1 x_1 + \lambda \sum_{i=1}^{k+1} \frac{\lambda_i}{\lambda} x_i \in \$$$

ومنه فإن:

$$\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i x_i \in \$$$

إذاً العلاقة (2.1) محققة من أجل $n = k+1$ وهو المطلوب.

مبرهنة (2):

ليكن لدينا E_1, E_2 فضاءين خطيين وليكن لدينا التطبيق الخطي:

$$F: E_1 \rightarrow E_2$$

إذا كانت $x \subseteq E_1$ مجموعة محدبة، عندئذٍ تكون:

$$Y = F(x) \subseteq E_2$$

مجموعة محدبة.

الإثبات:

X مجموعة محدبة، عندئذٍ يكون:

$$0 \leq \lambda \leq 1, \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in X \quad \forall x_1, x_2 \in X$$

ومنه فإن:

$$\begin{aligned} F(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) &\in Y = F(X) \\ \Rightarrow \lambda F(x_1) + (1 - \lambda)F(x_2) &\in Y \end{aligned}$$

إذاً المجموعة Y مجموعة محدبة، وهو المطلوب.

تعريف:

لتكن لدينا المجموعة المحدبة $\$$ ، نسمي أصغر مجموعة محدبة تحوي $\$$ غلاف $\$$ ونرمز لها بـ $H(\$)$.

تعريف:

لتكن $\$$ مجموعة محدبة، ولتكن $P \in \$$ نقول عن النقطة P إنها نقطة داخلية من $\$$ إذا كان:

$$\exists \varepsilon > 0, \varepsilon \in \mathbb{R} : N_\varepsilon(P) \subset \$$$

حيث $N_\varepsilon(P)$ جوار مفتوح مركزه P ونص قطره ε .

تعريف:

لتكن $\$$ مجموعة محدبة، ولتكن $P \in \$$ ، نقول إن P نقطة محيطية في $\$$ إذا كان:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists q : q \in N_\varepsilon(P) \wedge q \notin \$$$

تعريف:

لتكن S مجموعة محدبة، ولتكن $P \in S$ نقول إن P نقطة ملاصقة إذا كان:

$$\forall \varepsilon > 0; \varepsilon \in \mathbb{R} : N_\varepsilon(P) \cap S \neq \emptyset$$

مبرهنة (3):

لتكن S مجموعة محدبة، ولتكن $p \in S$ نقطة داخلية ولتكن $q \in S$ بحيث

$p \neq q$ ، عندئذٍ توجد نقطة مثل $t \in S$ و $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ بحيث يكون:

$$p = \alpha t + (1 - \alpha)q$$

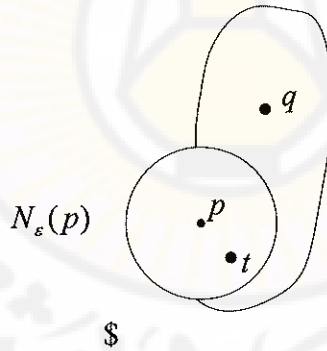
الإثبات:

$p \in S$ نقطة داخلية $\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 : N_\varepsilon(p) \subset S$

لنفرض أن: $\|p - q\| = \delta > 0$ ،

ولنفرض أن: $t = p + \frac{\varepsilon}{2\delta}(p - q)$

لنثبت أن $t \in N_\varepsilon(p)$: $\|t - p\| = \left\| \frac{\varepsilon}{2\delta}(p - q) \right\| = \frac{\varepsilon}{2\delta} \|p - q\| = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$



الشكل (2.2)

$$t = p(1 + \frac{\varepsilon}{2\delta}) - \frac{\varepsilon}{2\delta}q \Rightarrow p = \frac{2\delta}{2\delta + \varepsilon}t + \frac{\varepsilon}{2\delta + \varepsilon}q$$

لنفرض أن: $0 < \alpha = \frac{2\delta}{2\delta + \varepsilon} < 1$

$$1 - \alpha = \frac{\varepsilon}{2\delta + \varepsilon}$$

ومنه يكون $p = \alpha t + (1 - \alpha)q$ وهو المطلوب.

تعريفات:

- ليكن المتجه $C \in R^n$ والمتجه $X \in R^n$ وليكن $\alpha \in R$ ، عندئذ فإن المستوي $C^T X = \alpha$.

يحدد في الفضاء المتجهي R^n نصفي فضاء هما:

$$S_1 = \{X : R^n, C^T X \leq \alpha\}$$

$$S_2 = \{X : R^n, C^T X \geq \alpha\}$$

كل منهما مجموعة محدبة.

- نسمي مجموعة النقاط الملاصقة للمجموعة المحدبة S لصاقة S ونرمز لها بـ $\bar{S}$.

- نسمي مجموعة النقاط الداخلية في المجموعة المحدبة S داخل S ونرمز لها بـ S° .

- تكون المجموعة $S \subseteq R^n$ متعددة وجوه إذا كانت تقاطعاً لعدد منته من الفضاءات النصفية المغلقة أي:

$$S = \{X : X \in R^n, P_i^T X \leq \alpha_i\}$$

حيث P_i^T متجهات مغايرة للصفر، $\alpha \in R$.

تكون النقطة $t \in S$ ذروة إذا كان $\forall p, q \in S$ فإن $t \notin]p, q[$.

نتيجة (1):

متعدد الوجوه S هو مجموعة محدبة ومغلقة وذلك لأنه تقاطع لعدد منته من الفضاءات النصفية المغلقة.

ملاحظة:

الشرط اللازم والكافي كي تكون S مفتوحة هو أن يكون $S^\circ = S$.

مبرهنة (4):

إذا كانت المجموعة \$ محدبة فإن كل من المجموعات التالية:
 $H(\$)$, ${}^\circ \$$, $\bar{\$}$ مجموعات محدبة.

الإثبات:

أ- لنبين أن غلاف المجموعة \$ مجموعة محدبة:

إذا كانت $H(\$) = \emptyset$ عندئذ تكون محدبة، لذلك نفرض أن $H(\$) \neq \emptyset$ لنثبت أنه:

$$\forall \tilde{X}, \tilde{Y} \in H(\$) \forall \alpha \in]0,1[$$

$$\tilde{Z} = \alpha \tilde{x} + (1-\alpha) \tilde{y} \in H(\$) \quad \text{إن}$$

ليكن $\varepsilon > 0$ ، عندئذ $\exists x, y \in \$$ بحيث يكون:

$$\|x - \tilde{x}\| < \varepsilon , \quad \|y - \tilde{y}\| < \varepsilon$$

وبما أن \$ مجموعة محدبة فإن:

$$Z = \alpha x + (1-\alpha)y \quad \text{حيث } 0 < \alpha < 1$$

وبالتالي يكون:

$$\|Z - \tilde{Z}\| = \|\alpha x + (1-\alpha)y - \alpha \tilde{x} - (1-\alpha) \tilde{y}\|$$

$$< \alpha \|x - \tilde{x}\| + (1-\alpha) \|y - \tilde{y}\|$$

$$< \alpha \varepsilon + (1-\alpha) \varepsilon = \varepsilon$$

إذاً من أجل $\varepsilon > 0$ و $0 \leq \alpha \leq 1$ فإنه من أجل نقطة $Z \in \$$ توجد نقطة،

$\tilde{Z} \in H(\$)$ إذاً المجموعة $H(\$)$ مجموعة محدبة.

ب- لنثبت أن داخل المجموعة \$ مجموعة محدبة:

لتكن x, y نقطتين داخليتين اختياريين من المجموعة ${}^\circ \$ \Leftarrow x, y \in {}^\circ \$$.

وبما أن \$ مجموعة محدبة فإن $Z = \alpha x + (1-\alpha)y$ حيث $0 \leq \alpha \leq 1$.

لنثبت أن $Z \in {}^\circ \$$:

بما أن x, y نقطتان داخليتان فإنه $\exists \varepsilon > 0$:

$$N_\varepsilon(x) \subset \$, N_\varepsilon(y) \subset \$$$

ومنه يكون:

$$Z + \varepsilon = \alpha(x + \varepsilon) + (1 - \alpha)(y + \varepsilon) \in \$$$

$$Z \in \$^\circ \iff N_\varepsilon(Z) \subseteq \$ \quad \text{إذاً فإن}$$

ونترك للقارئ إثبات أن لصاقة المجموعة \$ هي مجموعة محدبة.
وهو المطلوب.

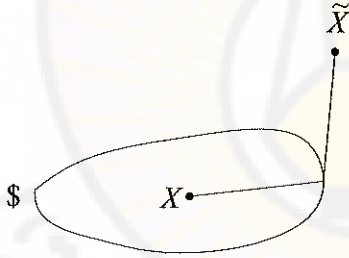
مبرهنة (5):

لتكن $\$ \subseteq R^n$ و متتالية تتمتع بـ:

$$\|y - x'\| \rightarrow \delta = \inf_{x \in \$} \|y - x\|$$

عندئذٍ من أجل x', x'' يكون:

$$\|x' - x''\| = 2\|x' - y\|_2 + 2\|x'' - y\|_2 - 4\|y - 1/2(x' + x'')\|_2$$

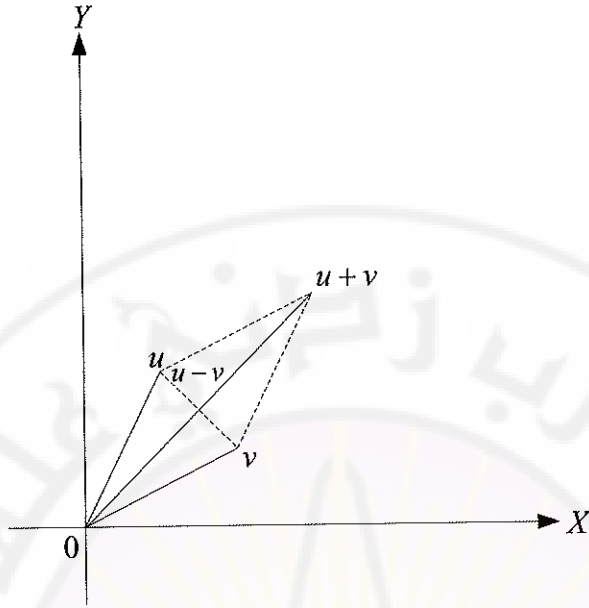


الشكل (2.3)

إن العلاقة السابقة صحيحة وذلك لأن:

تعلم أن:

$$\|u + v\|_2 + \|u - v\|_2 = 2\|u\|_2 + 2\|v\|_2$$



الشكل (2.4)

نفرض أن:

$$u = x^i - y$$

$$v = x^j - y$$

$$1/2(x^i + x^j) \in \$ \Rightarrow \|y - 1/2(x^i + x^j)\| \geq \delta$$

إذاً:

$$\|x^i + x^j\|_2 \leq 2\|x^i - y\|_2 + 2\|x^j - y\|_2 - 4\delta^2 \rightarrow 0$$

إذاً $\{x^i\}$ متتالية كوشي نهايتها $\tilde{x} \in \$$.

$$\|y - \tilde{x}\| = \delta \quad \text{إذاً}$$

إذاً $\tilde{x}$ موجودة ولثبت أنها وحيدة:

لتكن بحيث يكون:

$$\|y - \tilde{x}\| = \|y - x^*\| = \delta$$

نشكل المتوالية $\tilde{x}, x^* \in \$$ بحيث يكون:

$$\begin{aligned} x^i &= \tilde{x} & \text{من أجل } i \text{ فردياً} \\ x^i &= x^* & \text{من أجل } i \text{ زوجياً} \end{aligned}$$

وبما أن المتوالية تحقق العلاقة:

$$\|y - \tilde{x}\| \rightarrow \delta = \inf_{x \in S} \|y - x\|$$

إذاً يجب أن يكون $\tilde{x} = x^*$.

لنلزم الشرط وكفايته:

لتكن $\tilde{x} \in S$ أقرب نقطة إلى y .

ولنفرض أن العلاقة غير محققة توجد $x^\circ \in S$ بحيث يكون:

$$(y - \tilde{x})(x^\circ - \tilde{x}) = \varepsilon > 0$$

وبما أن $x^* \in S$ و $\tilde{x} \in S$ مجموعة محدبة فإن:

$$\hat{x} = (1 - \lambda)\tilde{x} + \lambda x^\circ \in S \quad \text{حيث } 0 \leq \lambda \leq 1$$

$$\varphi'(0) = -2(y - \tilde{x})^T (x^\circ - \tilde{x}) = -2\varepsilon < 0$$

ومنه فإن:

$$\varphi(\lambda) = \|y - \hat{x}\|_2 = \delta^2$$

وهذا تناقض، وذلك لأن $\tilde{x}$ هي أقرب نقطة من y وبالعكس:

لنفرض أن العلاقة محققة:

وليكن $x, \tilde{x} \in S$ بحيث $x \neq \tilde{x}$ ، عندئذ:

$$\begin{aligned} \|y - x\|_2 &= \|y - \tilde{x} + \tilde{x} - x\|_2 \\ &= \|y - \tilde{x}\|_2 + \|x - \tilde{x}\|_2 - 2(y - \tilde{x})^T (x - \tilde{x}) \\ &> \|y - \tilde{x}\|_2 \end{aligned}$$

إذاً $\tilde{x}$ أقرب نقطة من y وهو المطلوب.

مبرهنة (6):

لتكن $S \subseteq R^n$ مجموعة محدبة، ولتكن $y \notin H(S)$ عندئذ يوجد:

$a \in R^n$, $a \neq 0$ بحيث يكون:

$$\inf_{x \in \$} a^T x > a^T y$$

الإثبات:

إذا كانت $\$ = \emptyset$ فالعلاقة محققة.

لنفرض أن $\$ \neq \emptyset$ ولتكن $\tilde{x} \in H(\$)$ أقرب نقطة إلى y عندئذ يكون:

$$\forall x \in H(\$) \quad (y - \tilde{x})^T (x - \tilde{x}) \leq 0$$

ليكن $a = \tilde{x} - y$ عندئذ فإن:

$$\|a\|_2 = (\tilde{x} - y)^T (\tilde{x} - y) > 0$$

من أجل $x \in \$$ يكون:

$$a^T x \geq a^T \tilde{x} > 1/2 a^T (\tilde{x} + y) > a^T y$$

$$a^T x \geq a^T \tilde{x} > 1/2 a^T (\tilde{x} + y) > a^T y$$

إذاً

ومنه يكون:

$$a^T x > c > a^T y \Rightarrow a^T x > a^T y$$

إذا كانت $a \neq 0$ فإن:

$L = \{x : x \in R^n : a^T x = c\}$ مستويات في الفضاء الخطي R^n وهو المطلوب.

تعريف:

لتكن $\$ \subseteq R^n$ مجموعة محدبة وليكن $y \notin H(\$)$ ، عندئذ يوجد مستوي:

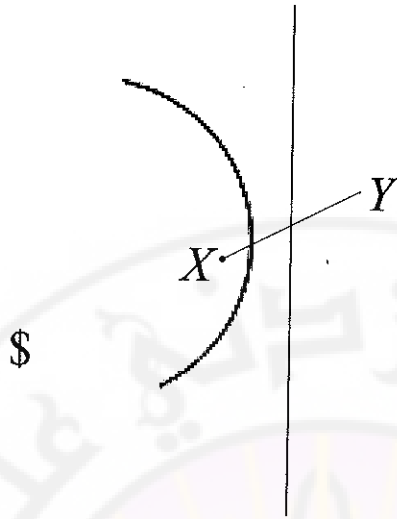
$$L = \{x : x \in R^n : a^T x = c\}$$

يفصل y عن $\$$ أي أن $\$$ تقع في نصف الفضاء المفتوح.

$$L_1 = \{x : x \in R^n : a^T x = c\}$$

و y تقع في نصف الفضاء المفتوح.

$$L_{21} = \{x : x \in R^n : a^T x = c\}$$



الشكل (2.5)

تعريف:

لتكن C مجموعة محدبة محتواة في R^n نقول عن الدالة $f: C \rightarrow R$ أنها

محدبة إذا حقق:

$$\forall x, y \in C, \forall \lambda \in [0, 1]$$

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

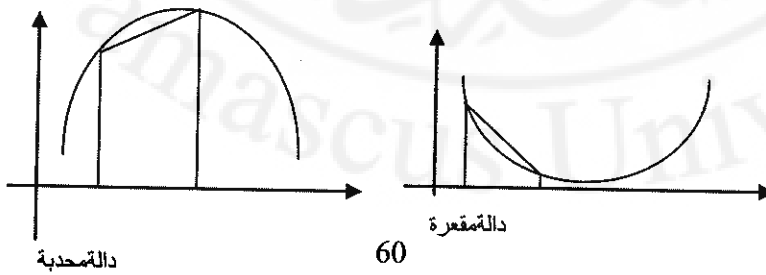
و أنها مقعرة إذا حقق:

$$\forall x, y \in C, \forall \lambda \in [0, 1]$$

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

نتيجة:

إذا كانت الدالة f محدبة فإن الدالة $-f$ -دالة مقعرة.



الشكل (2.6)

مثال:

لتكن لدينا الدالة التالية:

$$f: R^2 \rightarrow R : f(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2 + 9$$

هل هذه الدالة محدبة؟

الحل:

$$\begin{aligned} \forall u_1, u_2 \in R^2, \forall \lambda \in [0, 1] &\Rightarrow u_1 = (x_1, y_1), u_2 = (x_2, y_2) \\ f(\lambda u_1 + (1 - \lambda)u_2) &= f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2, \lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2) \\ &= 2(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) + 3(\lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2) + 9 \\ &= \lambda(2x_1 + 3y_1) + (1 - \lambda)(2x_2 + 3y_2) + 9 \\ &= \lambda(2x_1 + 3y_1 + 9) + (1 - \lambda)(2x_2 + 3y_2 + 9) \\ &= \lambda f(u_1) + (1 - \lambda)f(u_2) \end{aligned}$$

وبالتالي الدالة محدبة.

مبرهنة (7):

إذا كانت C مجموعة محدبة و $f: C \rightarrow R$ قابلة للاشتقاق في C

الدالة f تكون محدبة إذا وفقط إذا تحقق:

$$\forall x, y \in C : f(y) \geq f(x) + \nabla^T f(x)(y - x)$$

الاثبات:

لتكن f محدبة عندها

$$\forall x, y \in C, \forall \lambda \in [0, 1]$$

$$\begin{aligned} f((1 - \lambda)x + \lambda y) &\leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y) \\ \Rightarrow f(x + \lambda(y - x)) - f(x) &\leq \lambda(f(y) - f(x)) \\ \Rightarrow \frac{f(x + \lambda(y - x)) - f(x)}{\lambda} &\leq f(y) - f(x) \end{aligned}$$

عندما $\lambda \rightarrow 0$ فإن الطرف الأول من المتراجحة يصبح

$$\nabla^T f(x)(y-x) \Rightarrow \nabla^T f(x)(y-x) \leq f(y) - f(x)$$

وهو المطلوب $\square$

لنبرهن العكس بفرض

$$(1) \forall x, y \in C : f(y) \geq f(x) + \nabla^T f(x)(y-x)$$

ليكن $\forall \lambda \in [0,1]$ لنعرف

$$z = (1-\lambda)x + \lambda y$$

وبالتالي:

$$x - z = (1-\lambda)(x-y)$$

من العلاقة (1) نجد أن:

$$f(x) \geq f(z) + \nabla^T f(z)(x-z)$$

$$(2) f(x) \geq f(z) + \nabla^T f(z)(1-\lambda)(x-y)$$

$$y - z = -\lambda(x-y) \quad \text{ولدينا أيضاً}$$

ومن العلاقة (1) يكون لدينا

$$f(y) \geq f(z) + \nabla^T f(z)(y-z)$$

$$(3) f(y) \geq f(z) + \nabla^T f(z)(-\lambda)(x-y)$$

نضرب (2) بـ λ و نضرب (3) بـ $(1-\lambda)$ و نضيف الناتج فنحصل على

$$\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \geq f(z) = f(\lambda x + (1-\lambda)y)$$

و بالتالي f محدبة وهو المطلوب $\square$

مبرهنة (8):

إذا كانت C مجموعة محدبة و $f : C \rightarrow R$ قابل للاشتقاق مرتين ومستمر

في C

إذا كانت $\nabla^2 f(x)$ مصفوفة معرفة موجبة من أجل كل x فإن f محدبة

وبالعكس.

مبرهنة (9):

إذا كانت Q مصفوفة مربعة فإن الدالة $f(x) = x^T Q x$ تكون محدبة إذا وفقط إذا كانت المصفوفة Q معرفة موجبة

ملاحظات:

1- نقول عن مصفوفة A أنها معرفة موجبة إذا حققت:

$$x^T A x > 0 \quad \forall x \in R^n, x \neq 0$$

2- من أجل $\forall x \in R^n$

$$\nabla f(x) = \nabla f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

ولدينا:

$$\begin{aligned} \nabla^2 f(x) &= \nabla^2 f(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

مثال:

لتكن لدينا الدالة:

$$f: R^2 \rightarrow R : f(x_1, x_2) = x_1^2 + 9x_2^2 - 6x_1x_2$$

هل هذه الدالة محدبة أم مقعرة

الحل:

لنوجد

$$\forall x \in R^2 : \nabla^2 f(x)$$

$$\frac{\partial_2 f(x)}{\partial x_1^2} = 2, \frac{\partial_2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} = -6, \frac{\partial_2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_1} = -6, \frac{\partial_2 f(x)}{\partial x_1^2} = 18$$

$$\Rightarrow \nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -6 & 18 \end{pmatrix}$$

$$\forall x = (x_1, x_2) \neq 0$$

$$\Rightarrow x^T \nabla^2 f(x) x = 2x_1^2 + 18x_2^2 - 12x_1x_2$$

$$= 2(x_1 - 3x_2)^2 > 0$$

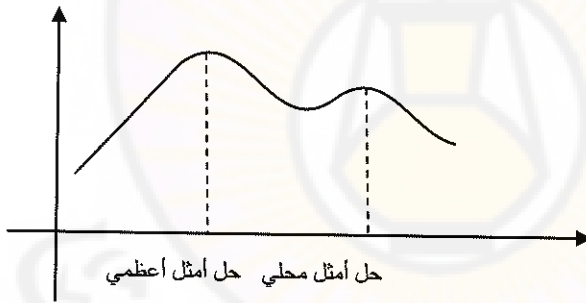
$$x^T \nabla^2 f(x) x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -6 & 18 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\nabla^2 f(x) \Leftarrow$$

مصفوفة معرفة موجبة و بالتالي الدالة محدبة.

2.3- الحل الأمثل المحلي و الأعظمي (الأصغري)

يعتبر إيجاد الحل الأمثل الأعظمي في العديد من المسائل صعباً جداً و لكن من الممكن إيجاد الحل الأمثل في مجال محدد إن هذا المجال يدعى الحل الأمثل المحلي.



تعريف:

إن المجال المعروف من منطقة الحلول $N_\varepsilon(\tilde{x})$ حول النقطة $\tilde{x}$ بنصف قطري ε

يدعى بـ F ويعرف كمايلي:

$$N_\varepsilon(\tilde{x}) = \{x : x \in F \text{ and } \|x - \tilde{x}\| \leq \varepsilon\}$$

تعريف الحل الأمثل المحلي $\bar{x}$: هو قيمة معينة من المجال $N_\varepsilon(\tilde{x})$ والتي

تعطي أفضل قيمة لدالة الهدف في هذا المجال

أي أن: $f(\bar{x}) > f(x) : \forall x \in N_\epsilon(\bar{x})$

2.3.1- مسائل البرامج المحدبة

تعد هذه المسائل صفاً مهماً من مسائل بحوث العمليات لأن لها خاصية مهمة وهي في حال وجد حل أمثلي محلي للمسألة فإن هذا يعني أنه بالإمكان إيجاد الحل الأمثل الأعظمي و نقول في مثل هذه الحالة أن شروط الأمثلية كافية.

ليكن لدينا البرنامج التالي:

$$f(x) \rightarrow \min$$

$$g_i(x) \geq 0 \quad i = 1, \dots, t$$

$$h_j(x) = 0 \quad j = 1, \dots, p$$

عندما تكون الدالة $f(x)$ محدبة والدوال $g_i(x)$ مقعرة و الدوال $h_j(x)$ دوال خطية عندها نقول عن البرنامج السابق أنه محدب.

مثال:

هل البرنامج التالي محدب أم لا

$$f = x_1^2 + 9x_2^2 - 6x_1x_2 \rightarrow \min$$

$$g = 2x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 \leq 0$$

$$h = 5x_1 - 3x_2 - 4 = 0$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

الحل:

إن الدالة f محدبة

وبنفس الطريقة ممكن أن نبرهن أن الدالة g هي دالة محدبة أيضاً و بالتالي إن

الدالة $-g$ هي دالة مقعرة. يمكن كتابة الشرط الأول من البرنامج السابق بالشكل

$$\text{التالي: } -g \geq 0 \Rightarrow g \leq 0$$

وبما أن الدالة h دالة خطية فإن البرنامج السابق هو برنامج محدب.

تمارين

(1) لتكن M, S مجموعتين محدبتين وليكن $C \in R$.

أثبت صحة ما يلي:

أ- المجموعة $C\$ = \{x : x = cs; s \in S\}$ مجموعة محدبة.

ب- المجموعة $M + \$ = \{x : x = m + x; m \in M; s \in S\}$ مجموعة محدبة.

(2) لتكن (S_i) حيث $i \in I$ ، أسرة من المجموعات المحدبة.

أثبت أن $\$ = \bigcap_i S_i$ مجموعة محدبة.

(3) لتكن لدينا المجموعة $\$ = \{x : x \in R^n, p^T x \leq \alpha\}$ حيث

$p \in R^n, \alpha \in R$ أثبت أن $\$$ مجموعة محدبة.

(4) لتكن $\$ \subseteq R^n$ مجموعة محدبة أثبت أن $\$' = R^n / S$ مجموعة محدبة.

(5) بين ما إذا كانت المجموعات التالية مجموعات محدبة:

$$1 - \$_1 = \{x : x_1^2 + x_2^2 \geq 0\}$$

$$2 - \$_2 = \{x : x_1^2 + x_2^2 \geq 9, x_1 \geq 0, x_2^2 > 4\}$$

$$3 - \$_2 = \{x : x_1^2 + x_2^2 \leq 9, 2x_1^2 + 3x_2^2 \geq 6\}$$

(6) أي من الدوال التالية محدبة، مقعرة، ليس محدبة أو مقعرة

$$f_1(x) = e^x$$

$$f_2(x) = 1 + 5x - 9x^2$$

$$f_3(x) = \ln(x)$$

$$f_4(x) = 2 \ln(x) + 7e^x$$

(7) أي من الدوال التالية محدبة، مقعرة، ليس محدبة أو مقعرة

$$f_1(x_1, x_2) = 1 + 8x_1 + 3x_2 + x_1^2 + 9x_2^2 - 6x_1x_2$$

$$f_2(x_1, x_2) = x_1^2 + 9x_2^2 - 5x_1x_2$$

$$f_3(x_1, x_2) = x_1^2 + 9x_2^2 - 7x_1x_2$$

$$f_4(x_1, x_2) = e^{x_1 + 9x_2} + e^{x_1 + x_2}$$

$$f_5(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 12x_2^4 + x_3^6 - 2x_1x_2^2$$

$$f_6(x_1, x_2, x_3) = \ln(x_1^2 + x_2^2) + x_3^6$$

(8) أي من المصفوفات التالية معرفة موجبة

$$A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} \quad A_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 8 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

(9) أي البرامج التالية محدبة وأيها غير محدبة ولماذا؟

$$f = x_1^2 + 12x_2^4 + x_3^6 - 2x_1x_2^2 \rightarrow \min \quad \text{أ-}$$

$$g = 2x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 \leq 0$$

$$h = 5x_1 - 3x_2 - 4 = 0$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$f = x_1^2 + 12x_2^4 + x_3^6 - 2x_1x_2^2 \rightarrow \min \quad \text{ب-}$$

$$g = 2x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 \leq 0$$

$$h = 5x_1 - 3x_2 - 4 = 0$$



الفصل الثالث

ماهية مسائل بحوث العمليات واتخاذ القرار الأمثل

3.1-مقدمة

ظهر هذا الاسم عملياً إبان الحرب العالمية الثانية حيث كان يدل في ذلك الوقت على جوهر الموضوعات والمسائل المطروحة، علماً أن تطبيقات هذا العلم كانت واسعة.

ويمكن أن نعرّف هذا العلم بأنه علم منظم لاتخاذ القرار الأفضل أو أنه الطريقة العلمية لإيجاد الحل الأمثل للمسائل الاقتصادية والإدارية والتنفيذية.

على الرغم من أن مصطلح البرمجة الخطية وضع خلال الحرب العالمية الثانية إلا أن الأصل العلمي لها يحمل جذوراً تاريخية عميقة:

فالأصول الرياضية الأولى وضعت من قبل الاقتصاديين كوني عام (1759) وورلي (1874)، من جهة أخرى فإن العلاقات الرياضية للأوليات الخطية أنشئت في القرن التاسع عشر جوردان (1873) وميتوسكي (1896) وفاركاس (1903)، علماً أنه كان لماركوف دور إبداعي في هذا المجال وبخاصة من الناحية الديناميكية، زيادة على ذلك كان هناك بعض الأفكار والمقترحات في مجال إدارة البضائع وإدارة الإنتاج التي نشرت بعض المجلات الهندسية عام 1920 ولكن من عهد قريب فقط أصبح لهذه الإبداعات المبكرة تطبيقات في تحليل القرارات واتخاذها بسبب ما يلي:

أ- التنافس والضغط للقيام بالأعمال المتنوعة وبشكل كبير منذ الحرب العالمية الثانية، الأمر الذي فرض على الجمعيات الحرفية التحسين من طرائقها التقليدية في تحليل القرارات و اتخاذها.

ب- إن التطورات المدهشة والاعتماد الواسع على الحواسيب أسهمت في زيادة الطرائق التي تهدف إلى تخمين القرارات، ولكن قد نكون غير واقعين إذا

تصورنا أنه في السنوات القليلة القادمة سوف تعتمد معظم الجمعيات الاقتصادية والتجارية على الحواسيب من أجل الاستفهام عن الأخبار الاقتصادية التجارية المهمة، علماً بأن بعض رؤساء الشركات المشهورة حالياً يستخدمون مثل هذه الحواسيب لتقدير الاستثمارات الكبرى.

ولكي نتمكن من تطبيق هذا العلم يتوجب ما يلي:

(1) إنشاء البنى (النماذج) الرياضية والاقتصادية والإحصائية للقرار المتخذ للمسائل المطروحة.

(2) تحليل العلاقات التي من شأنها تعيين كل النتائج المستقبلية للقرار المتخذ واتخاذ أفضل الإجراءات التنفيذية لتقدير الأعمال المستقبلية.

ومن الأمثلة على تطبيق البرمجة الخطية: بيان الإنتاج وإدارة البضائع الموجودة - سهولة التعويض والنفقة - سهولة الوقاية والإصلاح فيما يخص الآليات المستخدمة - إدارة سريعة للخدماتالخ.

إن هذا العلم يعالج أنواعاً أخرى من القرارات اليومية التي لا تتعرض لها بشكل مباشر مثل هذه المعالجة تقدم خططاً تنفيذية وتنظيمية، حيث تتضمن التفصيلات لتوسيع خطة إنتاج شركة ما أو تحسين برنامج يوسع خطة العمل أو تصميم شبكة مستودعات للبضائع التي ستباع بالجملة أو إدخال أعمال جديدة في الشركة.

3.2- تعريفات أولية

تعريف:

النموذج الرياضي أو الشبكي هو تمثيل بسيط للواقع الاقتصادي أو الإداري بواسطة علاقات رياضية كمية أو بيانية شبكية، تساعد على اتخاذ القرارات المثلى. ويتم وضع النموذج الرياضي أو الشبكي، بعد دراسة جميع المجاهيل والعوامل التي تضمن للإدارة إمكان السيطرة عليها والتحكم بها حسب مصلحة الشركة لتوظيف رؤوس الأموال أو تهيئة مستلزمات الإنتاج.

وللنماذج أشكال متعددة نذكر منها:

النماذج الخطية، النماذج الشبكية والبيانية، النماذج اللاخطية، النماذج الديناميكية، النماذج الاحتمالية، لذلك يجب اختيار النموذج المناسب لوصف المجاهيل المختارة، بحيث يعتمد هذا النموذج على طبيعة العلاقات بين هذه المجاهيل فإذا خضعت هذه المجاهيل إلى ناحية الكم والقياس أشار هذا إلى ضرورة استخدام النماذج الرياضية الاقتصادية أما إذا خضعت إلى ناحية الكيف فإن هذا يعني ضرورة استخدام النماذج الشبكية أو الاحتمالية.

تدرس النماذج الرياضية عادة من الناحيتين الرياضية والإدارية، حيث يتضمن الجانب الرياضي المفاهيم المتلفة للبرمجة الخطية واللاخطية، أما الجانب الإداري فإنه يتضمن هذه البرمجة في الحالات المختلفة.

تعريف:

بحوث العمليات هو العلم الذي يبحث عن الطرائق الرياضية لحل مختلف المشكلات الاقتصادية والإدارية على أفضل وجه وذلك من خلال التوصل إلى القيمة العظمى أو القيمة الدنيا للنموذج.

إن هذا يعني أنه من أجل أية مسألة إدارية أو اقتصادية يجب تحديد العلاقات الإنتاجية بين المجاهيل بشكل رياضي ومن ثم تحديد الهدف من حل هذه المشكلات بشكل رياضي أيضاً.

تعريف:

الحل الأمثل هو الحل الأفضل الذي تختاره من بين عدد منته أو غير منته من الحلول أو المقترحات أو الخطط التي يمكن وضعها، بحيث يحقق هذا الحل المثالي للنموذج الرياضي الشروط الموضوعة للمسألة والهدف من حلها.

3.3- أفضل القرارات في الظروف الغامضة - تحليل القرار

في الظروف غير الواضحة للمسائل المعقدة، تقسم هذه المسائل إلى أجزاء منفصلة بحيث يسهل حلها ومناقشتها، فيتم فحص هذه الأجزاء الأولية ودراستها ثم القيام بعملية جمع النتائج منها جميعاً لتعطي حلاً عاماً وإدراكاً شاملاً لأبعاد المسألة أو المشروع المقدم.

إن العوامل المحيطة مثل المنافسة بين الشركات لتحقيق أعظم ربح، تظهر ضمن إطار صعب ومعقد في الحياة العملية. لذلك فإنه من الصعب الحصول على بيان واقعي واقتصادي في الوقت نفسه، لأن مثل هذا الكشف يجب أن يتضمن دراسة للمواد الخام لتنفيذ المشروع ولكلفة التجهيزات واستطاعتها الإنتاجية وإمكان نجاحها في العمل ولحصر الزيادات الصناعية.

3.3.1- الخواص المميزة للقرار المتخذ

توجد طرائق كثيرة لحل مسائل الإدارة والتنظيم وأكثرها مرتبط ببعضه. بشكل عام لا يوجد فرق بين تلك القرارات المتخذة من قبل مختصين في بحوث العمليات وبين تلك التي اتُخذت من قبل المهندسين الصناعيين أو المختصين في التخطيط الاقتصادي، المهم في القرار المتخذ توافر الخصائص التالية:

أ- مصدر القوة الأساسي في القرار: النتائج الرئيسية يجب أن تكون مباشرة وغير غامضة لكي تمكننا من اتخاذ القرار في الأعمال التنفيذية.

ب- وضع الميزان الاقتصادي في الحسبان يتم التقرير فيما إذا كانت الأعمال المقدمة قابلة للتنفيذ على أرض الواقع بناءً على قيم معينة. هذه القيم مقدار الإيرادات أو كلفتها والسيولة النقدية المقدمة لتنفيذ المشروع ونسبة العائدات من تنفيذ المشروع، يتم بناءً على ذلك الحل المناسب للميزان الاقتصادي.

ت-النموذج الرياضي لخطة العمل: إن خطوات معالجة المعطيات ومن ثم تنفيذ الحل المعتمد يجب أن تكون واضحة لا لبس فيها، بمعنى آخر يجب ألا تتغير من منفذ إلى آخر إذ تعطي النتائج نفسها بإتباع الخطوات الرياضية نفسها.

ث-إن وجود علاقات رياضية معقدة أحياناً في خطة مشروع أو كبر حجم المعطيات المعالجة والحسابات اللازمة لإدارة المشروع تتطلب وجود حاسوب للمساعدة على تنفيذ العمل المقدم.

وهنا لا يفوتنا أن نذكر أن الكثير من المنفذين الاقتصاديين ورجال الأعمال الذين يستخدمون إحساسهم بنجاح مشروع أو فشله إلى جانب العلم والإيمان به يحققون نجاحاً ومستويات عالية من الأرباح في خططهم الإنتاجية. لذلك فالمسألة ليست: متى نطبق العلم أو متى نعتمد على شعورنا بمدى نجاح المشروع أو فشله وإنما المسألة تكمن في مزجهما معاً.

3.3.2- بناء النموذج والتحليل الكمي

لا يواجه المختصون في بحوث العمليات صعوبة في إيجاد حل (نموذج) مناسب إلى حد كبير. مثلاً من النادر أن يقود تحليل ما هي الأسواق التي يجب أن تزودها الشركة أو ما هي المنتجات التي يجب أن تنتج أو ما هي الاستثمارات التي يجب أن نشرع فيها أو ننشئ مصانعها ومخازنها، إلى اختيار مباشر بين البرمجة الخطية والبرمجة الديناميكية وطريقة المحاكاة.

إن براعة المحترفين في تحليل المسائل لا تزال عاملاً ذا إسهام محدود في انتشار التحليل الكمي. وعلى الرغم من الازدياد الهائل في نقل نماذج علم الإدارة إلا أن هناك تطبيقات قياسية قليلة جداً، حتى أن تطبيق النموذج الرياضي المناسب في شركة ما يتطلب مهارة عالية في علم الإدارة. لذلك من الضروري الإلمام بالجانبين الفني والعلمي للموضوع. يمكننا النموذج من توضيح خيارات القرار وتأثيراتها المؤقتة مسبقاً، وبيّن المعلومات المناسبة لتحليل الخيارات التي تؤدي لنتائج جيدة.

ويمكن أن يكون للنموذج دلالات متعددة نذكر منها:
أولاً: يمكن أن يكون النموذج عرضاً بديلاً عن الواقع كنموذج مصغر لطائرة أو قطار.

ثانياً: يمكن أن يكون النموذج تبسيطاً للواقع مثلاً كنموذج تخطيطي لمدينة.
لذلك يجب أن يصاغ النموذج بحيث يحتوي النقاط الحيوية في مسألة القرار وبالوقت نفسه يجب ألا يكون مثقلاً بالتفاصيل الثانوية لكي يتسنى إيجاد حل مثالي علمي.

لا يمكن أن يكون النموذج مستقلاً عن المحاكمة العقلية التي يجريها المديرون ذوو المعرفة، ويظهر هذا الشرط على التحليل الكمي بوضوح لأن عدد الأسئلة التي يمكن أن يطرحها المديرون لا حدود لها ولكن عدد الأجوبة التي يمكن أن يزودنا بها نموذج واحد محدود حتماً. وكذلك يجب رصد النموذج للتأكد من بقاءه صحيحاً ومن الاستمرار باستخدامه بشكل مناسب. ويجدر بنا التحديد من التفكير بالنموذج على أنه واقع وبالتالي بالحلول المرفقة على أنها لا يمكن الطعن بصحتها.

3.3.3- المكونات الأساسية لعملية التحليل الكمي

عن الخطوة التمهيدية للتحليل الكمي هو تحليل نوعي، أي تعريف العوامل التي تبدو مهمة وتحديد فكرة تمهيدية عن القرارات الرئيسية ومقدار التفاعل بين هذه القرارات وكذلك المميزات الفعالة للحل. وينتج عن التشخيص السابق قائمة عناصر المسألة التي تتضمن: المجاهيل التي يمكن التحكم بها والقيود والشروط على المجاهيل والأهداف، وذلك لتعريف حل مناسب.

أي يجب أن نقرر ما هي المعطيات المدخلة المناسبة والمعلومات المخرجة الملائمة، وتعريف العناصر الهيكلية الثابتة والديناميكية ثم نستنبط صيغاً رياضية لتمثيل علاقة هذه العناصر بعضها ببعض، والتي يمكن أن توضع على شكل شروط وقيود على المجاهيل، وكذلك تحديد أفق زمني لتقويم مدى فعالية القرارات المختلفة،

وهذا بدوره يؤثر في طبيعة القيود المفروضة، حيث من الممكن حذف أية قيود غير ملائمة لهذا الأفق الزمني.

يتضمن التحليل تحديداً لمدى حساسية الحل لمواصفات النموذج وبخاصة لدقة المعطيات المدخلة والفرضيات الإنشائية. ومن المؤلف استخدام النموذج أكثر من مرة في تحليل مسائل القرار وفي كل مرة يجب أن يعدل بحيث يضع في الحسبان المعطيات الحالية ومميزات المسألة. إذا ينبغي إدراك أن النموذج يمكن أن يكون أن يكون طويل الأمد لذلك يجب توثيق تفاصيله والتخطيط لتحديثه.

يمكن المجهود الأساس في إنشاء تمثيل رياضي وجمع المعلومات المطلوبة. والنموذج تقريبي بشكل أساسي ومسهب بشكل كافٍ لاحتواء الأساسيات وكذلك كثيف بشكل كافٍ لنحصل على حلول يمكن حسابها بالحاسوب. ويقام التوازن بين التفصيل وسهولة التشكيل بوساطة الاختيار وأسلوب الخط الذي يتضمن فحوصاً للنواتج المبدئية وتحليل الحساسية.

إن التحليل الكمي مساعد قيم لمنفذ القرار وفيما يلي نلقي نظرة توضيحية مبسطة عن بعض النماذج إذ نهدف أن نبين كيف تبدو نماذج البنى الرياضية.

3.4- نماذج مسائل بحوث العمليات

أن الشكل العام لمسائل بحوث العمليات يعطى بالشكل التالي :

$$f(x) \rightarrow \min \quad (3.1)$$

$$g_i(x) = 0 \quad i = 1, \dots, t \quad (3.2)$$

$$h_j(x) \leq 0 \quad j = 1, \dots, p$$

$$s_l(x) \leq 0 \quad l = 1, \dots, q$$

$$x_r \geq 0, \quad r \in \{1, \dots, n\}$$

حيث كل من f, g_i, h_j, s_l دوال عامة و المجهول $x \in R^n$

إن (3.1) تدعى دالة الهدف و (3.2) تدعى شروط المسألة. تهدف المسألة إلى إيجاد x التي تعطي أصغر قيمة لـ $f(x)$ بحيث تتحقق شروط المسألة.
تعريف منطقة الحلول F :

هي المنطقة التي تحوي جميع القيم x التي تحقق جميع شروط المسألة .
ملاحظة:

إن أي قيمة لـ x تنتمي لمنطقة الحلول F تدعى حل للمسألة
 $\forall x \in F \Rightarrow x$ حل للمسألة

تعريف الحل الأمثل x^* :

هو قيمة معينة في منطقة الحلول والتي تعطي أفضل قيمة لدالة الهدف.
 في حال الـ $\min$ يكون

$$\forall x \in F : f(x^*) \leq f(x)$$

دالة الهدف:

هناك شكلان لدالة الهدف

إما أن نحدد الحل من أجل أصغر قيمة لدالة الهدف و تأخذ الشكل:

$$\min f(x)$$

أو أن نحدد الحل من أجل أكبر قيمة لدالة الهدف وتأخذ الشكل:

$$\max f(x)$$

$$\min f(x) \Leftrightarrow \max -f(x) \quad \text{نلاحظ أن:}$$

3.4.1- أنواع النماذج

تقسم مسائل بحوث العمليات إلى فئتين: مسائل بمجاهيل مستمرة و مسائل بمجاهيل متقطعة. في المسائل المستمرة نتطلع لإيجاد مجموعة من الأعداد الحقيقية أو الدوال بينما في المسائل ذات المجاهيل المتقطعة نتطلع لإيجاد الحل الصحيح أو

دوال محددة أو غير محددة أو مجموعة. هناك العديد من التقنيات التي تستخدم لحل مسائل بحوث العمليات إن هذه التقنيات تعتمد على شكل الدوال في النموذج

أنواع نماذج بحوث العمليات تبعاً للدوالها:

1- في حال كان كل من الدوال الموجودة في دالة الهدف وشروط المسألة دوال خطية فإن المسألة عندئذ تدعى برنامج خطي.

مثال:

إن المسألة التالية هي برنامج خطي:

$$6x_1 + 15x_2 \rightarrow \min$$

$$2x_1 - 3x_2 \leq 2$$

$$5x_1 - 7x_2 = 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

2- في حال تابع دالة الهدف تابع تربيعي و الدوال الموجودة في شروط المسألة خطية فإن المسألة تدعى برنامج تربيعي.

مثال:

إن المسألة التالية هي برنامج تربيعي:

$$x_1^2 - 12x_2^2 + x_1 \rightarrow \max$$

$$x_1 - x_2 \geq 8$$

$$2x_1 + 7x_2 \leq 20$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

3- في حال كان أحد الدوال الموجودة في دالة الهدف أو شروط المسألة دالة غير خطية فإن المسألة عندها تدعى برنامج غير خطي.

مثال:

إن المسألة التالية هي برنامج غير خطي:

$$x_1^3 - 8e^{2x_1 - x_2} + x_1 \rightarrow \min$$

$$x_1 - 4x_2 = 8$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

4- في حال المسألة كانت لا تحوي شروطاً فإن المسألة تدعى مسألة أمثلية ليست مشروطة.

مثال:

إن المسألة التالية هي مسألة ليست مشروطة:

$$\sin(x_1^2 + 3x_1x_2 + 9x_2) \rightarrow \min$$

مسألة 1 :

مصنع ينتج ثلاثة أصناف من البطاطا، وهو يشتري البطاطا من مصدرين مختلفين في منتجاتهما بالحجم والنوعية:
والمطلوب من هذه المسألة تحديد كم طناً من البطاطا يجب أن تشتري الشركة من كل مصدر؟

يعتمد الجواب على الربح الذي يشارك به كل مصدر.

لنفرض أن الربح الذي يعطيه المصدر الأول لكل وحدة هو 5 والربح الذي يعطيه المصدر الثاني لكل وحدة هو 6. ومع أن الربح الذي يعطيه المصدر الثاني أكبر إلا أن هذا لا يعني أن تشتري الشركة كل احتياجاتها من هذا المصدر.

يجب على الشركة أن تعرف احتمال مبيعاتها وأن تقدر الكمية التي يمكن بيعها من كل نوع إن هذه القيم معطاة في الجدول التالي. بما أن تكاليف التخزين عالية جداً لذلك يجب ألا تستورد الشركة بطاطا بحيث تنتج أكثر من 1.8 أطنان من النوع الأول و 1.2 أطنان من النوع الثاني و 2.4 أطنان من النوع الثالث. ويبين الجدول التالي مميزات كل إنتاج:

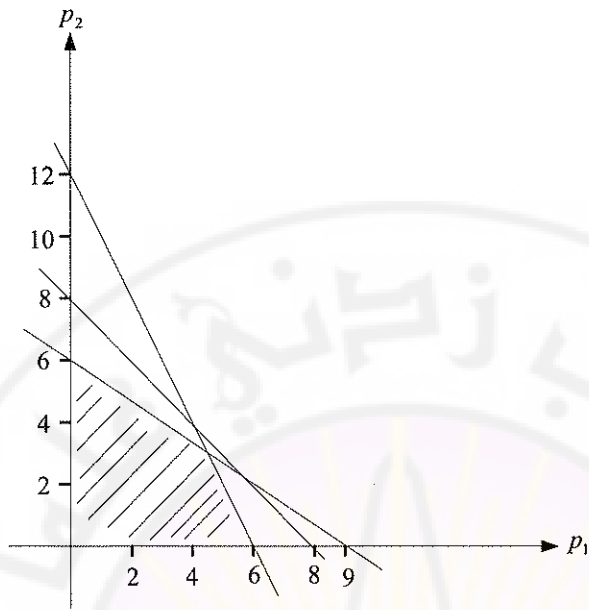
كمية الانتاج	المصدر الأول	المصدر الثاني	المنتجات
1.8	0.2	0.3	نوع اول
1.2	0.3	0.1	نوع ثان
2.4	0.3	0.3	نوع ثالث
	5	6	الربح

جدول (3.1)

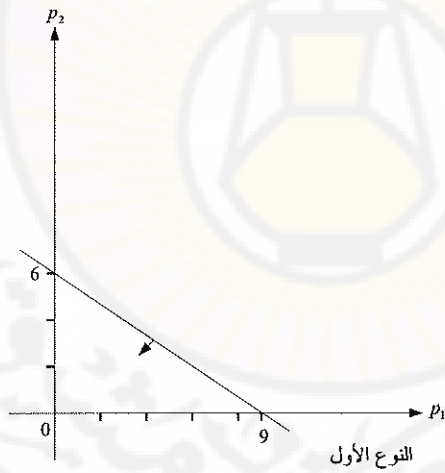
ويمكن أن نعبر رياضياً عن هذه الشروط كما يلي:
 لتكن p_1 كمية البطاطا المستوردة من المصدر الأول و p_2 كمية البطاطا المستوردة من المصدر الثاني عندئذ يجب أن تحقق p_1 ، p_2 المتباينات (المتراجحات) التالية:

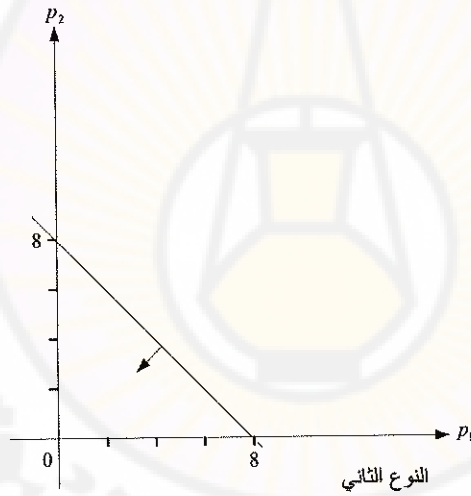
$$\left. \begin{array}{l} 0.2p_1 + 0.3p_2 \leq 1.8 \\ 0.2p_1 + 0.1p_2 \leq 1.2 \\ 0.3p_1 + 0.3p_2 \leq 2.4 \\ p_1 \geq 0 \text{ , } p_2 \geq 0 \end{array} \right\} (3.1)$$

لقد أضفنا شروط الإيجابية (عدم السلبية) لأن القيم السالبة ليس لها معنى.
 تظهر كل القيم التي تحقق المتباينات (3.1) مظللة في الشكل التالي:



الشكل (3.1)





الشكل (3.2)

ملاحظة:

يمثل كل مستقيم قيداً من (3.1) بتبديل المتباينة بمساواة، ويظهر السهم المرافق بالمستقيم باتجاه تحقق المتباينة.

ملاحظة:

إن قيمتي p_1, p_2 اللتين تحققان المتباينتين الأولى والثانية تحققان أيضاً المتباينة الثالثة.

لإيجاد أفضل قيم لـ p_1, p_2 نجعل الربح أعظم ما يمكن مع تحقيق الشروط (الشروط) (3.1) لذلك مسألة القيم الأفضل هي إيجاد:

$$\max(5p_1 + 6p_2) \quad (3.2)$$

في هذه المسألة البسيطة يمكن عرض الحل بيانياً كما في الشكل (3.2).

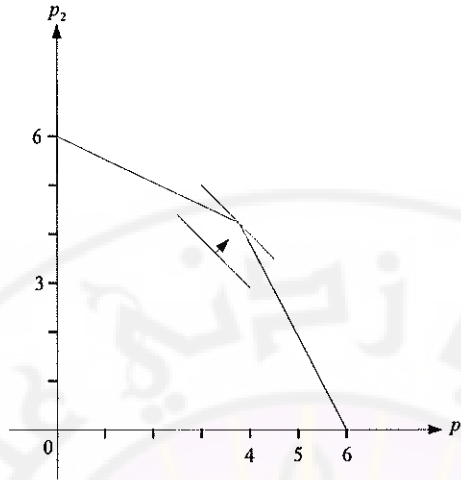
يمثل كل من القطع المستقيمة المتوازنة تراكيب مختلفة لـ p_1, p_2 التي تعطي قيمة مختلفة لدالة الهدف $5p_1 + 6p_2$. إن القطعة العليا تشترك مع منطقة إمكانيات الحل (منطقة الحلول) بنقطة واحدة وهي القيمة المثلى لدالة الهدف ، ومثل هذه النقطة هي الحل الأمثل ومنه يمكن أن نرى بوضوح أن هناك حلاً واحداً فقط مثالياً في هذا المثال.

ويمكن حساب (إحداثيات هذه النقطة) القيم المثلى من خلال حل المعادلات الخطية المتوافقة.

$$0.2p_1 + 0.3p_2 = 1.8$$

$$0.2p_1 + 0.1p_2 = 1.2$$

نجد أن $p_1 = 4.5$ $p_2 = 3$ كما هو واضح في الشكل وهي تعطي دالة الهدف القيمة 40.5.



الشكل (3.3)

تعطي هذه المسألة فكرة عن نموذج البرمجة الخطية إلا أن التطبيقات الواقعية للبرمجة الخطية تحتوي عادة على مئات المتباينات وآلاف المجاهيل وسوف نعرض كيف يصاغ ويحل مثل هذه النماذج.

مسألة 2:

ترغب إحدى الشركات في استخدام سكرتير جديد، وستطلب من قسم خدمات التوظيف أشخاصاً مؤهلين لإجراء مقابلة معهم. فوجد مدير الشركة من خلال خبرته السابقة أنه يمكن أن يقرر من خلال مقابلة المرشح إذا كان المرشح في حال استخدامه سيكون في النهاية ممتازاً أو جيداً أو فقط مقبولاً وحدد القيمة النسبية لكل سكرتير كما يلي:

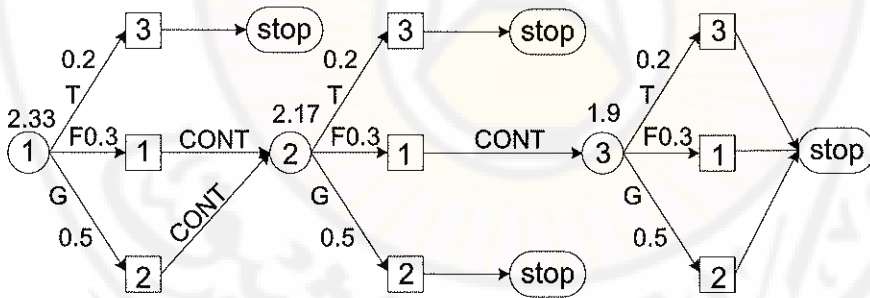
3 للسكرتير الممتاز و2 للسكرتير الجيد و1 للسكرتير المقبول، وقد قادته خبرته السابقة للاعتقاد بأن هناك فرصة 0.2 لمقابلة مرشح ممتاز و0.5 لمقابلة مرشح جيد و0.3 لمقابلة مرشح مقبول.

ويرغب مدير الشركة بمقابلة 3 مرشحين على الأكثر ولسوء الحظ إذا لم يستخدم المرشح بعد المقابلة فوراً فإنه سوف يأخذ وظيفة أخرى، وبالتالي عليه أن يقرر بعد المقابلة فوراً فيما إذا كان سيأخذ منصب السكرتير أم لا.

إذا كان المرشح الأول ممتازاً فإنه سيقبله فوراً أما إذا كان مقبولاً فإنه لن يخسر بإجراء مقابلة مع المرشح الثاني، ولكن إذا بدا المرشح الأول جيداً فإن المدير ليس متأكداً ماذا سيفعل.

فإذا استغنى عن المرشح الأول الجيد، فيمكن أن ينتهي المطاف عند مرشح مقبول وإذا وظفه فإنه سيتنازل عن فرصة الحصول على سكرتير ممتاز. بشكل مشابه، إذا كان قد اختار مقابلة المرشح الثاني فسوف يواجه مرة أخرى المشكلة نفسه فيما لو كانت نتيجة المقابلة هي مرشح جيد.

يمكن تمثيل مسألة الاختيار بشكل أكثر وضوحاً بما يسمى شجرة القرارات، وببين الشكل (3.4) استراتيجية الحل المثلى للحصول على أكبر توقع وهي الجزء الذي يعطي أكبر توقع من شجرة القرار.



الشكل (3.4)

تمثل الدائرة مقابلة الشخص المرشح، وتظهر التفرعات عن تلك العقد فرصهم التامة واحتمالاتها. وتشير المربعات أين يجب اتخاذ القرار ويعطي نهاية التفرغ القيمة النسبية لإيقاف معالجة القرار عند تلك النقطة.

إن مسألة إيجاد استراتيجية القرارات الأمثلية يمكن حلها بواسطة ما يدعى <<البرمجة الديناميكية>> وبخاصة ما يعرف <<بالاستقراء التعاودي>>.

إن معالجة الحل بسيطة جداً. بحيث يمكن أن تحسب بسهولة إستراتيجية التوظيف الأمثلية كما يلي:

لنفرض أن المدير أنهى المقابلة بتوظيف المرشح الثالث تكون القيمة الاحتمالية هي:

$$\text{التوقع} = \text{مجموع القيمة المتوقعة} \times \text{احتمال وقوعها}$$
$$3.(0.2) + 2.(0.5) + 1.(0.3) = 1.9$$

وبمعنى آخر، القيمة الوسطى للسكرتير المختار بشكل عشوائي من خلال المقابلة هي 1.9.

لنفرض أن التوقع المنطقي يمثل تقويم للحدث المصادف. نضع العدد 1.9 فوق الدائرة (3) في الشكل السابق. لنناقش ماذا سيحدث لو أجرى مع المرشح الثاني الذي نتيجته هي جيد. إذا قرر التوقف فإنه سيحصل على القيمة 2، ولكن إذا استمر فيمكنه التوقع بأنه فقط سيصل إلى القيمة 1.9 لذلك عليه أن يتوقف عندما يبدو المرشح الثاني جيداً لذلك سنتوقف عن الاستمرار عندما يكون السكرتير الثاني جيداً. فنحن جاهزون الآن لتحديد القرار الصحيح فيما إذا كان المرشح الأول جيداً. إذا توقف المدير عند المرشح الأول فإنه سيحصل على القيمة 2 ولكن إذا استمر سيحصل على القيم الاحتمالية لنتيجة مقابلة المرشح الثاني أو ربما المرشح الثالث هي:

$$3.(0.2) + 2.(0.5) + 1.9(0.3) = 2.17$$

يدل الحد الأول على توقع مقابلة مرشح ممتاز أما الحد الثاني يدل على توقع مقابلة المرشح الجيد أما الحد الثالث فيدل على مقابلة مرشح مقبول. بما أن 2.17 أكبر من 2 فإنه يتوجب على المدير الاكتفاء بالمرشح الثاني فقط إذا كانت نتيجة المرشح الأول ممتازة.

الحل الأمثل إذاً هو:

- التوقف بعد المقابلة الأولى فقط إذا كان المرشح الأول ممتازاً.
 - الاستمرار بعد المقابلة الثانية فقط إذا كان المرشح الثاني مقبولاً.
- وبالتالي فإن قيمة أكبر توقع لهذه المسألة هي:

$$3.(0.2) + 2.17(0.5) + 2.17(0.3) = 2.336$$

حيث 2.17 هي قيمة أكبر توقع للمقابلة الثانية (في حال جيد أو مقبول)

3.5 - المسألة الإنتاجية أين ومتى

نشأ اسم هذه المسألة من ملاحظة أن النموذج الرياضي الموافق له عدة تفسيرات، يظهر أحدها بدلالة تقرير مستويات الإنتاج الأمثل في مصنع واحد وبفترات زمنية متعددة. يمكن للنموذج أن يؤول إلى تركيب مسألتين: أين ومتى؟!.

سوف نوضح ذلك من خلال العرض المبسط التالي:

لدى شركة إنتاج كتب مدرسية N آلة. خطط مدير الإنتاج لإنتاج مجموعة كتب عددها D خلال فترة زمنية محددة.

فإذا رمزنا لـ x_i لكمية الإنتاج من الآلة i فإن مستويات الإنتاج $x_1, x_2, \dots, x_n$ يجب أن تحقق الشرط:

$$(3.3) x_1 + x_2 + \dots + x_n = D; x_i \geq 0$$

حيث أن $i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ ، ولنفرض أن كلفة إنتاج x_i هي $(\frac{1}{c_i})x_i^2$ حيث

$c_i > 0$ ثابت يعرف من المعلومات الحسابية المعطاة. وبالتالي فإن القيم المثلى لـ x_i تنتج من:

$$Min(\frac{x_1^2}{c_1} + \frac{x_2^2}{c_2} + \dots + \frac{x_n^2}{c_n}) \quad (3.4)$$

ضمن الشروط (3.3).

مسألة الأمثليات هذه يمكن أن تحل بواسطة طرائق البرمجة الديناميكية بالإضافة إلى بعض التقنيات البسيطة للترجمة غير الخطية.

يمكن أن تحسب الأجوبة العددية من الصيغة الرياضية التالية:

$$\text{Optimal } x_t = \frac{c_t \cdot D}{c_1 + c_2 + \dots + c_n} \quad (3.5)$$

$$t = 1, 2, \dots, n$$

التي تنتج عنها الكلفة الأصغرية (الإستراتيجية المثلى):

$$\frac{D^2}{c_1 + c_2 + \dots + c_n} \quad (3.6)$$

لنفرض على سبيل المثال:

$$\left. \begin{array}{l} D = 500, N = 4 \\ C_1 = 20, C_2 = 40, C_3 = 30, C_4 = 10 \end{array} \right\} \quad (3.7)$$

فإن $C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = 100$ عنها ينتج من العلاقة (3.5) مستويات الإنتاج التالية:

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = \frac{20 \times 500}{100} = 100 \\ x_2 = \frac{40 \times 500}{100} = 200 \\ x_3 = \frac{30 \times 500}{100} = 150 \\ x_4 = \frac{10 \times 500}{100} = 50 \end{array} \right\} \quad (3.8)$$

وبناءً على العلاقة (3.6) تكون الكلفة الكلية هي 2500.

بالعودة إلى طريقة متعددة التغير نجد أن:

لنفرض أننا فسرنا x_t أنها مستويات الإنتاج في آلة واحدة خلال فترة t . نلاحظ أنه في هذه الطريقة تكون جميع النفقات ناتجة عن الإنتاج ولا توجد نفقات تخزين بينما تكون الكميات مُدرجة في قائمة الموجودات خلال الفترة 1 وحتى نهاية الفترة N التي عندها تنتجز الطلبية D . تمكن هذه الرؤية من تقرير ما هي القيمة المثلى التي ستكون لـ x_t إذا كانت مستويات الإنتاج $x_1, x_2, \dots, x_{t-1}$ قد عيّنت مسبقاً أي أن:

$$\text{Optimal conditional } x_t = \frac{c_t(D - x_1 - x_{t-1})}{c_t + c_{t+1} + \dots + c_n} \quad (3.9)$$

حيث $x_1, x_2, \dots, x_{t-1}$ محددة مسبقاً.

لنفرض أنه في المثال السابق وضعت الشركة $x_1 = 180$, $x_2 = 196$ بدلاً من القيم المعطاة في (3.8) حيث أن هذه القيم هي مستويات الإنتاج في الفترتين 1,2 عندها بإعطاء تلك القيمتين المختارتين غير الأمثلتين نجد أن مستويات الإنتاج الأمثلي في الفترتين 3,4 هي:

$$x_3 = \frac{30 \times (500 - 180 - 196)}{30 + 10} = 93$$

$$x_4 = \frac{10 \times (500 - 180 - 196 - 93)}{10} = 31$$

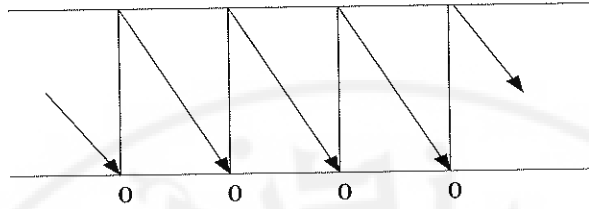
وذلك حسب العلاقة (3.9).

3.6- مسألة تنظيم الكميات الاقتصادية

صاحب مخزن لبيع الألبسة الجاهزة بالتجزئة غالباً ما يجد صعوبة في تخزين القياسات الصغيرة. لذلك قرر أن يتبنى نهجاً علمياً ليعيد قائمة الجرد وبذلك يتجنب مشكلة تخزين القياسات الصغيرة.

لنفرض أنه باع قياساً معيناً بمعدل M قطعة أسبوعياً، ولنفرض للتبسيط أنه لا يوجد شك في إمكان بيعها، وبالتالي إذا كان مستوى الموجودات KM قطعة فإن هذا المخزون سينفذ خلال K أسبوعياً بالضبط، علاوة على ذلك لنفرض أن النسبة M لا تتغير مع الزمن، وبذلك فإن نظام شراء بضائع جديدة سوف يعين بشكل منظم. والمسألة المطروحة الآن هي تحديد كمية الطلبية الأكثر اقتصادية (بفرض أن زمن التوزيع من أجل نظام ما هو أيضاً معروف، فكل عملية استيراد بضائع جديدة تتم قبل أن تستنفذ التي قبلها. وهكذا فإن الطلبية تصل بالضبط عندما يهبط مستوى الموجودات إلى الصفر).

لنرمز بـ Q لكمية الطلبية عندها يمكن التعبير عن مستوى الموجودات بالخط البياني المبين بالشكل التالي:



الشكل (3.5)

نلاحظ أنه في كل وقت تصل فيه الطلبية الجديدة فإن مستوى الموجودات يرتفع بمقدار كمية الطلبية Q ثم يعود المستوى ويتناقص بمقدار $M \dots$

إن كمية الطلبية المثلى ترصد الحساب بين نفقات استيراد بضائع جديدة وحيازة الموجودات، بشكل خاص لنفرض أننا عينا R ككلفة منشأة من شأنها إحداث طلبية في كل مرة، ولنفرض أن C هي كلفة شراء طلبية واحدة وأن h نفقة الحيازة لكل وحدة بضاعية موجودة في الأسبوع. إن النفقة المترتبة مرتبطة:

- بالجهد المصروف في توضيح الطلبية واستلامها.
- بنفقة الحيازة مقترنة بالتخزين والتأمين.
- برأس المال المدون في قائمة الموجودات.

ليكن المعيار الاقتصادي للفعالية مقيساً على أنه مقدار الخسائر في الأسبوع، عندها تكون الضريبة (الكلفة) الناتجة عن تكاليف الأعداد $K(\frac{M}{Q})$

وذلك لأن هناك $\frac{M}{Q}$ إعداداً أسبوعياً. وتكون النفقة الناتجة عن كلفة الشراء لطلبية

وحدة هي CM وذلك لأن M وحدة مستهلكة بالأسبوع.

أما النفقة الناتجة عن نفقات الحيازة فهي $H(Q/2)$ لأن $Q/2$ هي متوسط الموجودات في الأسبوع، بجمع هذه المركبات نحصل على متوسط الكلفة بالأسبوع:

$$AC = \frac{KM}{Q} + CM + hQ/2 \quad (3.10)$$

وبالتالي فإن كمية الطلبية الأمثلية تقابل $\min$ التابع السابق أي:

$$\text{Optimal } Q = \sqrt{\frac{2KM}{h}} \quad (3.11)$$

والتي يمكن إيجادها باشتقاق AC بالنسبة ل Q وانعدام المشتق ثم حل المعادلة بالنسبة ل Q .

ينتج من المعادلة (3.11) أن كمية الطلبية المثلى تتضاعف فقط عندما يصبح سعر الطلبية أربعة أضعاف سعرها الأصلي. ونلاحظ أيضاً أن كمية الطلبية الأمثلية يمكن تعيينها بوساطة النسبة بين المقاومة وكلفة الحيازة.

للتوضيح نفرض أن صاحب المخزن باع $M = 20$ بنطالاً من قياس ما كل أسبوع وكانت النفقات للاحتفاظ بالبضاعة هي $h = 0.02$ ليرة سورية وكلفة إعداد طلبية أخرى هي $K = 1.80$ ل.س. وبالتالي فإن كلفة البيع بالجملة (للبناطيل) هي عندها حسب العلاقة $C = 500$ ل.س يكون مقدار الشراء الأمثلي هو:

$$Q = \sqrt{\frac{2 \times (1.80) \times (20)}{0.02}} = 60$$

إذاً يستوجب أن يستورد بضاعة جديدة كل ثلاثة أسابيع $\frac{Q}{M} = 3$ ويكون متوسط الكلفة حسب العلاقة (3.10):

$$AC = 0.60 + 100 + 0.60 = 101.20 \text{ ل.س}$$

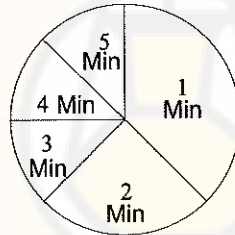
مسألة تركيب خطوط هاتف لمكتب شركة طيران:

فتحت شركة خطوط جوية مركز خدمات للحجز في إحدى المدن، من يرغب بالحجز يجب أن يكون قادراً على الاتصال هاتفياً بالمكتب ويعين طلبه. تود إدارة هذه الشركة معرفة عدد الخطوط الهاتفية الواجب تركيبها للإجابة عن مكالمات الحجز. تستطيع الشركة بسهولة حساب نفقات الموظفين والهاتف التي تتغير مع تغير عدد

الخطوط. لكنها ترغب بمقارنة مستوى الخدمة من أجل أعداد مختلفة من الخطوط الهاتفية. وبشكل خاص نفرض أن الشركة تحاول تحديد النسبة المئوية للزمن الذي تكون فيه جميع الخطوط مشغولة وتحديد متوسط فترات الإنشغال.

هذا النوع من التحليل يصنف على أنه نظرية طوابير أو خط الانتظار. يمكننا بناء نموذج واضح وإخضاعه للتحليل الرياضي ولكن بدلاً من ذلك سنشرح هنا كيف أن طريقة المحاكاة يمكن أن تستخدم لتحديد أشكال الخدمة. وللسهولة سوف نقدم تقانة بدائية.

بفرض أن الشركة حصلت على معلومات بيّنت التكرارات الإحصائية للدقائق بين المكالمات الهاتفية المتعاقبة. كتقريب أول لنفرض أن أزمنة المكالمات المتعاقبة مستقلة تماماً (هذه الاستقلالية ليست صحيحة بشكل عام، على سبيل المثال، لو اتصل مسافر فوجد الخطوط مشغولة فسيعيد الاتصال بالرقم مباشرة). إن الطريقة المثالية لإجمال هذا التوزيع هي في استخدام مخطط متعدد المقاطع كما في الشكل:



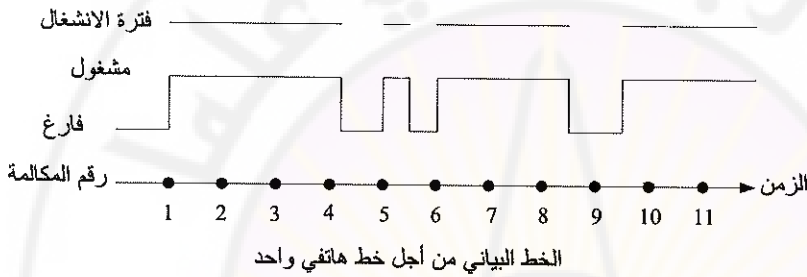
الشكل (3.6)

حيث نفترض أن الزمن بين مكالمتين لا يتعدى 5 دقائق.

لننتصور مؤشراً في منتصف القرص عندئذ يمكن تقليد حركة مرور المكالمات بإعطاء المؤشر امتدادات حادة متعاقبة وتدوين أزمنة المكالمات الواردة. بالإضافة لذلك، لنفرض أن لدى الشركة التوزيع التكراري لعدد الدقائق الواردة للمكالمات المطلوبة ولنفرض أن أزمنة الخدمات تلك مستقلة بعضها عن بعض ومستقلة عن

أزمنة الوصول، عندها يمكن رسم مخطط متعدد المقاطع وآلية الدوران لتوليد أزمنة الخدمة.

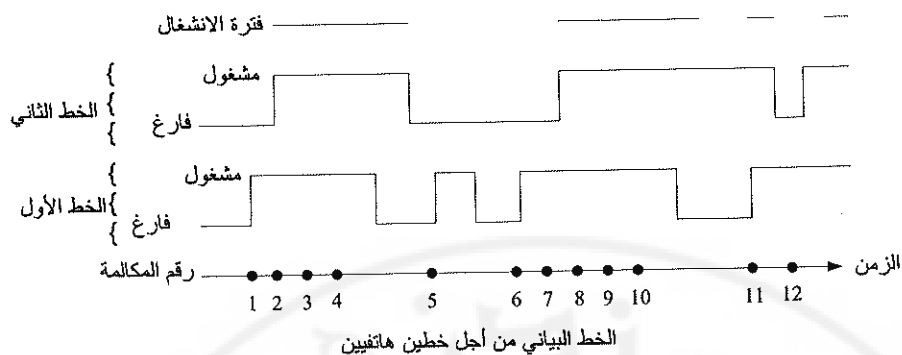
لنفرض في البداية أن لدينا خط هاتف واحداً عندئذ يمكن أن يكون الخط البياني الناتج عن عملية المحاكاة كما في الشكل (3.6) إن لحظة ورود المكالمات مسجلة على المحور الزمني ومعينة بواسطة دورانات متتالية لمؤشر الاقتراع، يصبح زمن وصول الخط الهاتفي مشغولاً عندما تصل أول مكالمة ويحدد طول فترة الإنشغال من خلال اقتراع زمن الخدمة.



الشكل (3.7)

نلاحظ أن المكالمات التي تصل في اللحظة المعلمة بدائرة لا تجاوب لأن الخط الهاتفي مشغول. يمكن الحصول على تقدير جيد لنسبة زمن انشغال الخط المؤبقة وأيضاً لمعدل فترة انشغال الخط وذلك بحساب التعدادات المقابلة من أجل تنفيذ طويل.

لنفرض الآن أنه يوجد خطان هاتفيان. عندئذ المتتالية نفسها من المكالمات الآتية يمكن أن تؤدي إلى شكل خدمات مشابه للشكل (3.8) ومن الواضح أنه تم تخديم مكالمات أكثر.



الشكل (3.8)

تعرف فترة الانشغال بأنها طول الفترة الزمنية التي يكون من خلالها كلا الخطين مشغولاً. ونلاحظ أن هذه الفترات أقصر في الشكل (3.8) مما هي عليه في الشكل السابق.

3.7- مسألة ناتج مزج

عندما يريد متخذ القرار اختيار ناتج المزج فهو يبحث عن مستويات الإنتاج خلال فترة زمنية معينة. هذه المستويات مقيدة بشروط تقانة معطاة على شكل معادلات أو متباينات خطية. وتحت هذه الشروط يبحث عن القيمة المثلى لدالة هدف معينة. في المثال التالي سيكون الهدف الربح الأعظمي.

مثال:

شركة الصناعات الكيماوية تنتج نوعين من المنتجات A, B باستخدام مادتين أوليتين Y, Z وهناك أسلوبان لإنتاج كل من A, B يوضح الجدول التالي معطيات الأساليب الأربعة التي تتضمن:

- أ- الجهد مقيساً بعدد ساعات العمل.
- ب- عدد أرطال المادة الأولى Y .
- ت- عدد صناديق المادة الثانية Z .

المادة	لإنتاج A		لإنتاج B		الكميات المتاحة
	أسلوب 1	أسلوب 2	أسلوب 3	أسلوب 4	
أسابيع العمل	1	1	1	1	≤ 15
أرطال للمادة Y	7	5	3	2	≤ 120
صناديق للمادة Z	3	5	10	15	≤ 100
الربح	4	5	9	11	MAX
مستوى الإنتاج	x_1	x_2	x_3	x_4	

الجدول (3.2)

بما أن معطيات كل طريقة تختلف عن الأخرى فإن الربح سيختلف حسب الأسلوب المتبع في الإنتاج للمادة نفسها. للشركة حرية اختيار واحد أو أكثر من أساليب الإنتاج ولكن ضمن شروط الإمكانيات المتاحة (من يد عاملة ومواد أولية).

3.7.1- بديهيات خطية:

أ- قابلية القسمة:

لكل أسلوب على حدة نجد أن الكميات المعطاة والربح الموافق تتناسب مع مستوى الإنتاج طردياً. أي مضاعفة المعطيات يؤدي إلى مضاعفة الإنتاج والربح. لتصنيع 10 وحدات بالأسلوب الأول ($x_1 = 10$) نحتاج إلى 10 أسابيع عمل و 70 رطلاً من المادة Y و 30 صندوقاً من المادة Z ويكون الربح الموافق 40 ل.س.

إن مسلمة قابلية القسمة تتضمن المجاهيل التي يمكن أن تأخذ قيماً كسرية بالإضافة للقيم الصحيحة.

ب- قابلية الجمع:

إذا جمعنا مستويات الإنتاج لأكثر من أسلوب فإننا نحتاج إلى مجموعات الكميات المعطاة لكل مستوى ونحصل على مجموع الربح الخاص بكل مستوى. مثلاً في الجدول السابق نجد أن مستويات الإنتاج $x_1 = 1, x_3 = 1$ يتطلب 2 أسبوع عمل و 10 أرطال من المادة Y و 13 صندوقاً من المادة Z فيكون الربح 13 ل.س.

■ إن قابلية القسمة والجمع المفترضين يكافئان القول إن النموذج الرياضي الأساسي يمكن أن يصاغ بعلاقات خطية.

■ يمكن أن نتخذ المسلمتان السابقتان قاعدةً وسنفترض صحتها عند استخدامهما في الأمثلة السابقة.

لنوضح الشروط التي تحققها مستويات الإنتاج:

$$\text{دالة الهدف } \text{Max Profit} = \text{Max}(4x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 11x_4)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 15$$

$$7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 120 \quad \text{شروط المسألة}$$

$$3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 \leq 100$$

وبما أنه ليس هناك معنى للقيم السالبة لذلك سنضيف الشروط الإيجابية (شروط عدم السلبية):

$$\text{شروط عدم السلبية } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$$

والمطلوب الآن إيجاد قيم المجاهيل x_i الخاضعة لشروط عدم السلبية وشروط المسألة والتي تهدف لتحقيق الربح الأعظمي. في الحالة العامة لا تكون القيم وحيدة إذ يمكن أن توجد حلول أمثلية اختيارية.

في نهاية المطاف ترغب الإدارة في معرفة علاقة الربح بالمعطيات والأسلوب المتبع في الإنتاج أي هل يزداد الربح بزيادة المعطيات أم بتحسين الأسلوب في الإنتاج أم بتغيير كلفة المواد الخام. لكن من النادر الإجابة عن هذه الأسئلة مع أنها

في بعض تطبيقات النماذج الخطية تعد أكثر أهمية من إيجاد القيم المثلى لمستويات الإنتاج.

مسألة مزج السوائل:

تعد المشكلة الاقتصادية المرتبطة بمزج السوائل مثل الزيوت الخام والمعادن المنصهرة ومواد كيميائية أخرى لإنتاج وسيط مبيع أو منتجات جاهزة حالة أخرى من نماذج المزج. بدلاً من استخدام قيم عددية كما في المثال السابق سوف نضع صيغة عامة للعلاقات:

لنفرض أن شركة منتجات كيميائية متنوعة تخطط لتحضير ثلاث كميات من الخلائط. يمكن أن يكون كل من هذه المنتجات خليطاً لمادتين على الأقل وهذا يخضع لتوافر المواد الأولية ولقيود المزج.

ليكن x_{ij} : هو عدد الغالونات للمادة الكيميائية i التي تستخدم في الناتج j حيث:

$$x_{ij} \geq 0, \quad i=1,2, \quad j=1,2,3$$

إن المتباينات التالية تحدد الكميات المتوافرة من المواد الأولية:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \geq 28$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \geq 25$$

تبين المتباينة الأولى أنه لا يمكن لعدد الغالونات من المادة 1 والمستخدم في النواتج 1,2,3 أن تتجاوز 28 غالوناً من المتوافر خلال الفترة المخطط لها. وباللغة نفسها نجد أن كمية المادة 2 يجب ألا تتجاوز 25 غالوناً.

أما المتباينات التالية فتحدد المستويات الأصغرى للإنتاج:

$$x_{11} + x_{21} \geq 20$$

$$x_{21} + x_{22} \geq 10$$

$$x_{31} + x_{32} \geq 14$$

وذلك أنه لا توجد خسارة حجمية عند مزج المادتين الكيميائيتين.

تحدد المتراحة الأولى أن مستوى الإنتاج 1 والناتج من مزج المادتين الأوليتين 1,2 يجب ألا تقل عن المستوى 20. كذلك الأمر بالنسبة لبقية المتباينات.

إن الشرط التالي يعبر عن خاصية ثقانة تظهر لنا من خلال المزج:
 - لنفرض أن كل مادة كيميائية معطاة تحوي مركباً خطراً معيناً وبالتحديد إن غالون من المادة 1 يحوي 0.1 من المركب الخطر وغالون من المادة 2 يحوي 0.2 من هذا المركب.

الارتباط هو في تحديد القيمة الدنيا للسعة النسبية للمركب الخطر:

$$\frac{0.1x_{11} + 0.2x_{12}}{x_{11} + x_{21}} \geq 0.15 \quad \text{في المادة الأولى}$$

$$\frac{0.5x_{12} + 0.04x_{22}}{x_{12} + x_{22}} \leq 0.045 \quad \text{في المادة الثانية}$$

وبعد الإصلاح نجد أن:

$$-0.5x_{11} + 0.05x_{21} \geq 0$$

$$0.005x_{12} - 0.005x_{22} \leq 0$$

وأخيراً توجد نسبة أصغرية بين المادتين الكيميائيتين في مزج الناتج 3 هي:

$$x_{13} - 3x_{23} \geq 0 \quad \text{أو} \quad \frac{x_{13}}{x_{23}} \geq 3$$

بفرض أن P_{ij} الربح الموافق لـ x_{ij} عندئذ تكون دالة الهدف:

$$\text{Max Profit} = \text{Max} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 P_{ij} x_{ij}$$

ونلخص النماذج الرياضية في الجدول التالي:

المادة	غالبون من						القيود
	الناتج الكيميائي 2			الناتج الكيميائي 1			
	1	2	3	1	2	3	
تزويد المادة 1	1	1	1				≤ 28
تزويد المادة 2				1	1	1	≤ 25
طلب الناتج 1	1			1			≥ 20
طلب الناتج 2		1			1		≥ 10
طلب الناتج 3			1			1	≥ 14
كفاءة الناتج 1	-0.05			-0.05			≥ 0
كفاءة الناتج 2		-0.05			-0.05		≤ 0
كفاءة الناتج 3			1			-3	≥ 0
الربح	P_{11}	P_{12}	P_{13}	P_{21}	P_{22}	P_{23}	MAX
المجاهيل	x_{j1}	x_{j2}	x_{j3}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	

جدول (3.3)

من خلال هذا النموذج تستطيع الإدارة أن تتدبر ما يلي:

أ- زيادة الإنتاج.

ب- تدريب العمال على السرعة في الإنتاج.

ت- تقليل الكلفة الاحتمالية في الفترات اللاحقة.

وهذا يؤدي إلى ربح أعظم وكلفة أقل.

تمارين

1. شركة تربية دواجن تشتري وتخرج عدة أنواع من الحبوب التي تحتوي على كميات غذائية مختلفة ويبين الجدول التالي المعطيات لهذه المواد. علماً أن مدير الإنتاج للمتطلبات الغذائية يضع الحدود الدنيا للغذاء التي يجب أن تتوفر في أي مزيج.

المادة	وزن الكمية من			الكميات الأصغرية
	حبوب 1	حبوب 2	حبوب 3	
مزيج A	2	3	7	≥ 1250
مزيج B	1	1	0	≥ 250
مزيج C	5	3	0	≥ 900
مزيج D	6	25	1	≥ 232.5
الكلفة	41	35	96	Min

اكتب الصيغة الخطية الموافقة لهذا المزيج، بحيث تهدف الشركة لتحقيق أقل كلفة؟

2. ينتج أحد المصانع ثلاث مواد A_1, A_2, A_3 وذلك باستخدام المادتين الأوليتين B_1, B_2 يتوافر من الأولى (20) وحدة بضاعية ومن الثانية 30 وحدة بضاعية إذا كان إنتاج وحدة واحدة من A_1 يتطلب استخدام (2) وحدة من B_1 و 4 من B_2 وإنتاج وحدة واحدة من A_2 يتطلب استخدام (2) وحدة من B_1 و (1) وحدة من B_2 .

المطلوب وضع خطة لتنظيم الإنتاج علماً أن:

أ- ربح الوحدة من A_1 هو 3 ومن A_2 هو 1 ومن A_3 هو 2.

ب- المصنع ملزم بإنتاج (10) وحدة من A_1 و (7) وحدة من A_2 .

3. لدى إحدى المزارع مساحة من الأرض قدرها (50) هكتاراً، يرغب صاحب هذه المزرعة في استثمارها، علماً أنه يعمل في المزرعة مزارعون ما يكفي لـ (1000) ساعة عمل، ولقد خصص لهذه الأرض مبلغ قدره (15000) ل.س، يمكن زراعة فاصولياء، قمح، ذرة.

وبعد دراسة هذه المسألة وجد أن الكلفة يمكن ترتيبها وفق الجدول التالي:

المادة	الريخ	ساعات العمل اللازمة	الكلفة
فاصولياء	400	25	300
قمح	800	40	400
ذرة	300	15	200

أوجد أفضل خطة لاستثمار هذه الأرض الزراعية؟

الفصل الرابع

البرمجة الخطية

Linear Programming

4.1-مقدمة

تحتل البرمجة الخطية في الوقت الحاضر مركزاً مرموقاً في مجالات بحوث العمليات ولها تطبيقات واسعة وقد تم تطوير الأساليب التقنية المستخدمة في حل مسائل البرمجة الخطية بعد الحرب العالمية الثانية في سنة 1947 حيث قام العالم E Dantzing بتطوير طريقة رياضية ذات كفاءة عالية وهي طريقة السمبلكس Simplex method، وقد نشر هذه الطريقة في عام 1951. وقد أدت البرمجة الخطية دوراً مهماً خلال الحرب العالمية الثانية وبعدها لضرورة عسكرية في البداية ثم للضرورات الاقتصادية فيما بعد، مما جعل هذا العلم يخطو خطوات كبيرة رغم حداثته.

تكمن أهمية البرمجة الخطية في كونها وسيلة لدراسة سلوك عدد كبير من الأنظمة وكذلك فإن البرمجة الخطية أبسط وأسهل أنواع النماذج التي يمكن إنشاؤها لمعالجة معضلات البرمجة الصناعية الكبرى.

تعرف البرمجة الخطية بأنها مجموعة أساليب فنية يمكن بواسطتها الحصول على المقدار الجبري الأمثل (أقصى أو أدنى) ويدعى ذلك بالهدف وتتحكم فيه شروط خطية.

إن أهم مرحلة في البرمجة الخطية هي مرحلة إنشاء نموذج البرمجة الخطية وهذه المرحلة تعتبر مرحلة عملية أكثر مما تكون فنية ونوضح مرحلة إنشاء نموذج البرمجة الخطية وذلك باعتبار الأمثلة الآتية حيث يمكن تتبع العمليات المطلوبة بسهولة.

مثال:

تنتج مؤسسة صناعية أربعة أنواع من الآلات التي نطلق عليها آلة A، آلة B، آلة C، وآلة D. تحتاج المؤسسة الصناعية إلى المواد الأولية I والمواد الأولية II وساعات عمل للقيام بالعملية الإنتاجية. الجدول أدناه يمثل المواد الأولية وساعات العمل المطلوبة.

نوع الآلة / المتطلبات	A	B	C	D
مواد أولية I	18	24	20	16
مواد أولية II	8	12	21	18
ساعات العمل	6	4	7	5

الجدول (4.1)

يتوفر في مركز المؤسسة الصناعية 800 طن من المواد الأولية I، 400 طن من المواد الأولية II، 150 ساعة عمل في كل أسبوع. تكلفة الطن الواحد من المواد الأولية I 2 ألف، تكلفة الطن الواحد من المواد الأولية II 4 ألف، تكلفة ساعة العمل الواحدة 1 ألف. تباع الآلات في السوق كما يلي:

نوع الآلة	سعر البيع
A	120 الفاً
B	116 الفاً
C	136 الفاً
D	150 الفاً

المطلوب: صياغة المشكلة على شكل برمجة خطية.

الحل:

نفرض أن

X1 : عبارة عن عدد الآلات المقترح إنتاجها من النوع A

X2 : عبارة عن عدد الآلات المقترح إنتاجها من النوع B

X3 : عبارة عن عدد الآلات المقترح إنتاجها من النوع C

X4 : عبارة عن عدد الآلات المقترح إنتاجها من النوع D

ستكون شروط المشكلة الخطية كما يلي:

1- شرط المواد الأولية I

$$18X1 + 24X2 + 20X3 + 16X4 \leq 800 \quad \text{الشرط الأول}$$

2- شرط المواد الأولية II

$$8X1 + 12X2 + 21X3 + 18X4 \leq 400 \quad \text{الشرط الثاني}$$

3- شرط ساعات العمل

$$6X1 + 4X2 + 7X3 + 5X4 \leq 150 \quad \text{الشرط الثالث}$$

قبل أن نحدد دالة الهدف يجب أن نحدد أرباح كل آلة.

بالنسبة للآلة A

تباع الآلة A بسعر 120 الف/لكل وحدة واحدة

كلفة المواد الأولية 1 2×18

كلفة المواد الأولية II 4×8

كلفة ساعات العمل 1×16

أو بعبارة أخرى

$$A = 120 - 36 - 32 - 6 = \text{ربح الآلة الواحدة من نوع A} \\ = 46$$

بالنسبة للآلة B $16 =$ الفأ لكل آلة

بالنسبة للآلة C $5 =$ الفأ لكل آلة

بالنسبة للآلة D $41 =$ الفأ لكل آلة

نفرض أن Z يمثل دالة الهدف

إذاً نحاول أن نجعل Z أعظم ما يمكن

$$Z = 46X_1 + 16X_2 + 5X_3 + 41X_4$$

إن مشكلة البرمجة الخطية ستكون كما يلي:

$$\text{Maximise } Z = 46X_1 + 16X_2 + 5X_3 + 41X_4$$

وفقاً إلى الشروط التالية:

$$18X_1 + 24X_2 + 20X_3 + 16X_4 \leq 800$$

$$8X_1 + 12X_2 + 21X_3 + 18X_4 \leq 400$$

$$6X_1 + 4X_2 + 7X_3 + 5X_4 \leq 150$$

$$X_1 \geq 0$$

$$X_2 \geq 0$$

$$X_3 \geq 0$$

$$X_4 \geq 0$$

4.2- الصياغة العامة للبرامج الخطية

يطرح البرنامج الخطي بشكل عام وفق أحد الأشكال التالية:

أ- أوجد قيم المجاهيل $X_j \geq 0$ حيث $j=1,2,\dots,n$ والتي تحقق الشروط التالية:

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right\} \quad (4.1)$$

والتي تجعل دالة الهدف Z تأخذ قيمة دنيا (أو عظمى) حيث:

$$Z = c_1x_1 + \dots + c_nx_n \rightarrow \min(\max) \quad (4.2)$$

نسمي جملة المعادلات (4.1) شروط المسألة الخطية أو شروطها والمعادلة (4.2) دالة الهدف.

ويمكن أن نعبر عن هذا البرنامج الخطي بشكل مصفوفي كما يلي:

$$P = C^T X \rightarrow \min(\max) \quad (\text{دالة الهدف})$$

$$AX = B \quad (\text{شروط المسألة})$$

$$X \geq 0 \quad (\text{شروط عدم السلبية})$$

$$\text{حيث } C^T = \begin{pmatrix} c_1 & \dots & c_n \end{pmatrix} \text{ منقول المصفوفة العمود}$$

A مصفوفة الأمثال و B متجه عمود يمثل الطرف الثاني من جملة الشروط و X متجه عمود يمثل المجاهيل X_j حيث $X_j \geq 0$ ($j=1,\dots,m$) شرط أو شرط عدم السلبية].

ب- أوجد قيم المجاهيل $X_j \geq 0$ حيث $j=1,\dots,n$ التي تحقق المتباينات التالية:

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m \end{array} \right\} \quad (4.3)$$

والتي تجعل دالة الهدف تأخذ قيمة دنيا أو (عظمى):

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \min(\max) \quad (4.4)$$

ونعبر عن هذا البرنامج بشكل مصفوفي كما يلي:

$$P = C^T X \rightarrow \min(\max) \quad (\text{دالة الهدف})$$

$$AX \leq B \quad (\text{شروط المسألة})$$

$$X \geq 0 \quad (\text{شروط عدم السلبية})$$

ت- أوجد قيم المجاهيل $X_j \geq 0$ حيث $j = 1, 2, \dots, n$ التي تحقق المتباينات التالية:

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \geq b_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \geq b_m \end{array} \right\} \quad (4.5) \quad (\text{قيود المسألة})$$

والتي تجعل دالة الهدف تأخذ القيمة الدنيا (أو العظمى):

$$P = c_1x_1 + \dots + c_nx_n \rightarrow \min(\max) \quad (4.6)$$

ث- أوجد قيم المجاهيل $X_j \geq 0$ حيث $j = 1, 2, \dots, n$ التي تحقق المتباينات التالية:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &\geq b_i, & i \in I_1 \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &= b_i, & i \in I_2 \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &\leq b_i, & i \in I_3 \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

حيث $J = \{1, 2, \dots, n\}$, $I = \{1, 2, \dots, m\}$

و $I_1 \cap I_2 \cap I_3 = \phi$ و $I_1 \cup I_2 \cup I_3 = I$

والتي تجعل دالة الهدف تأخذ القيمة الدنيا (أو العظمى):

$$P = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min(\max) \quad (4.8) \quad 7)$$

وتدعى الأشكال السابقة بالأشكال النظامية لمسألة البرمجة الخطية.
ملاحظة:

i. لتكن S مجموعة محدبة ولتكن لدينا الدالة الخطية:

$f = S \rightarrow R$ عندئذٍ تتحقق العلاقة التالية:

$$\min_{x \in S} f(x) = -\max_{x \in S} (-f(x))$$

ii. يمكن أن نطبق على البرنامج الخطي التحويلات الجبرية التالية:

أ- يمكن اتجاه المتباينة:

يمكن تمثيل جميع المتباينات في اتجاه واحد حيث يمكن أن نكتب:

$$\sum_{j=1}^n (-a_{ij}) x_j \geq -b_i \quad \text{بالشكل} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i$$

والعكس صحيح.

ب- تحويل المتباينة لمساواة:

يمكن تمثيل أي متباينة على شكل مساواة وذلك عن طريق إضافة مجاهيل غير سالبة أو طرحها.

i. إن المتباينة:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + S_l = b_i \quad \text{تكتب بالشكل} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i$$

حيث $i=1,2,\dots,m$ $l=n+i$.

نسمي هذه المجاهيل S_l المجاهيل الخاملة.

ii. نكتب المتباينة:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq b_i$$

بالشكل:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - t_l = b_i$$

حيث $i=1,2,\dots,m$ $l=n+i$.

نسمي هذه المجاهيل t_l مجاهيل الفروق.

ت- تحويل المساواة إلى متباينة:

يمكن تحويل المساواة إلى متباينة، وذلك عن طريق تحويلها إلى شرطين.

يمكن كتابة جملة المعادلات:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i$$

حيث $i=1,2,\dots,m$ بالشكل:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i$$

حيث $i=1,2,\dots,m$

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j x_j \leq \beta_i$$

حيث $\alpha_j = -a_j$, $\beta_i = -b_i$.

ث- تحويل مجاهيل مقيدة إلى مجاهيل سالبة:

عندما تكون X_j ، لبعض قيم j ، مجاهيل غير مقيدة بالإشارة في برنامج (نموذج) خطي ما، فهناك عدة طرق لتحويلها إلى مجاهيل سالبة.

الطريقة الأولى:

نختار أحد الشروط المعطى بمساواة والذي يحوي X_j ونحل معادلته بالنسبة لـ x_j ونعوض عن X_j في جميع العلاقات الخطية الأخرى. بما في ذلك دالة الهدف.

الطريقة الثانية:

نعبر عن X_j بوساطة الفرق بين مجهولين غير سالبين، ثم نعوض عن X_j في جميع العلاقات الخطية وفي دالة الهدف.

$$X_j = X_j' - X_j'' \quad \text{حيث} \quad X_j' \geq 0 \quad X_j'' \geq 0.$$

ومن مساوي هذه الطريقة أنها تزيد من عدد المجاهيل في النموذج الخطي.

الطريقة الثالثة:

نضيف مجهولاً جديداً غير سالب Z ونجري التبديل:

$$X_j = X_j' - Z \quad \text{حيث} \quad X_j' \geq 0, \quad Z \geq 0 \quad \text{لكل مجهول} \quad X_j \quad \text{غير مقيد بالإشارة.}$$

لنفرض أن X_j لأجل $j=1,2,\dots,k \leq n$ غير مقيد بالإشارة.

عندئذٍ تكتب الشروط:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i$$

$$\text{حيث } i=1,2,\dots,m.$$

بالشكل:

$$\sum_{j=1}^k a_{ij} x_j' + \sum_{j=k+1}^n a_{ij} x_j - \alpha_i z_j = b_i$$

$$\text{حيث } \alpha_i = \sum_{j=1}^k a_{ij} \quad \text{و } i=1,2,\dots,m$$

ج- تحويل مجاهيل محدودة من الأدنى إلى مجاهيل غير سالبة:

عندما يكون X_j مقيداً. بمتباينة من الشكل:

$X_j \geq b_j$ حيث $b_j \neq 0$ فيمكننا تحويله إلى مجهول غير سالب باستخدام العلاقة:

$X_j = b_j + X'_j$ حيث $X'_j \geq 0$ ونعوض X_j بقيمته في العلاقات الخطية ودالة الهدف.

إذا نستطيع كتابة النموذج الخطي بالشكل التالي:

$$P = c_1x_1 + \dots + c_nx_n \rightarrow \min(\max)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i$$

حيث $X_j \geq 0 \quad j=1,2,\dots,n$ و $i=1,2,\dots,m$

وبالشكل المصفوفي:

$$\left. \begin{array}{l} P = C^T X \rightarrow \min(\max) \\ AX = B \\ X \geq 0 \end{array} \right\} (4.9)$$

تعريف:

نسمي المجموعة $L = \{X : X \in R^n, AX = B, X \geq 0\}$ منطقة الحلول (منطقة الإمكانيات).

تعريف:

ليكن $X^* \in L$ ، يكون X^* حلاً مثالياً للمسألة الخطية (4.9) إذا تحقق ما يلي:

$$\forall X \in L \quad C^T X^* \leq C^T X$$

مبرهنة فاركاس Farkas:

لتكن A مصفوفة من المرتبة $m \times n$ و $B \in R^n$ عندئذ يكون لجملة المعادلات الخطية $AX = B$ حل غير مناسب إذا وفقط إذا تحقق الشرط:

$B^T U \geq 0$ من أجل جميع المتجهات $U \in R^n$ المحققة للشرط $A^T U \geq 0$.
الإثبات:

أ- لزوم الشرط:

$$\begin{aligned} \text{ليكن } A^T U \geq 0, \quad AX = B, \quad X \geq 0 \\ \text{عندئذ: } 0 \leq B^T U = (X^T A^T) U \\ \Rightarrow X^T (A^T U) \geq 0 \end{aligned}$$

ب- كفاية الشرط:

نفرض أن جملة المعادلات الخطية $AX = B$ لا تقبل حلاً غير سالبة، وهذا يعني أن B لا تنتمي إلى متعدد الوجوه المحدب المعين بالأعمدة $A_1, A_2, \dots, A_n$ من المصفوفة A ، أي: $B \notin M\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$.
إن المجموعة $M\{A_1, A_2, \dots, A_n\} \subseteq R^m$ مغلقة ومحدبة وغير خالية وبالتالي تكون شروطاً محققة.
إذاً:

$$\exists u \neq 0, \quad u \in R^m$$

بحيث $\forall Y \in M\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ فإن $U^T B < U^T Y$ وبما أن $U^T B < 0$ فإن $O \in M\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$.
لنثبت الآن أن $A^T U \geq 0$:

لنفرض أنه من أجل بعض القيم $Y \in M\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ ، يكون:

$$U^T Y < 0$$

وبما أن $\lambda Y \in M\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ لأجل $\lambda \geq 0$ كبيرة بقدر كافٍ فإن:

$$\lambda U^T Y < U^T B < 0$$

وهذا يناقض تعريف المستوي الفاصل.

إذاً:

$$U^T Y \geq 0, \quad \forall Y \in M\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$$

وبالتالي $U^T A_j \geq 0$ حيث $1 \leq j \leq n$ وبذلك نتحقق مبرهنة فاركاس.

4.3- مبرهنات في البرمجة الخطية

سوف نستعرض في هذه الفقرة أهم مبرهنات البرمجة الخطية وبشكل مبسط.

ليكن لدينا البرنامج الخطي:

$$\left. \begin{array}{ll} \text{(دالة الهدف)} & P = C^T X \rightarrow \max \\ \text{(قيود المسألة)} & AX \leq B \\ \text{(قيود عدم السلبية)} & X \geq 0 \end{array} \right\} \quad (4.10)$$

ولكن منطقة الحلول:

$$L = \{X : X \in R^n, AX \leq B, X \geq 0\} \quad (4.11)$$

حيث $C \in R^n$, $B \in R^m$ أما A فهي مصفوفة من المرتبة $m \times n$ وليكن

$$N = \{1, 2, \dots, n\}, \quad M = \{1, 2, \dots, m\}$$

ولنعرف $M+N$ كما يلي:

$$M+N = \{1, 2, \dots, m+n\}$$

عندئذ يمكن أن نكتب شروط المسألة $AX \leq B$ وشروط عدم السلبية $X \geq 0$ كما

يلي:

$$DX \leq F \quad (4.12)$$

$$D = \begin{bmatrix} A \\ -I \end{bmatrix}$$

حيث:

من المرتبة $(m+n) \times n$.

$$F = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \text{ من المرتبة } (n+m) \times 1 \text{ أي } F \in R^{m+n}.$$

إذاً نستطيع أن نكتب البرنامج الخطي (4.10) بالشكل التالي:

$$\left. \begin{aligned} Z = C^T X^* = \max_{x \in L} C^T X \\ L = \{X : X \in R^n ; DX \leq F\} \end{aligned} \right\} (4.13)$$

حيث X^* حل مثالي.

مبرهنة (2):

ليكن $D_i X = f_i$ أحد السطوح المحددة لمنطقة الحلول ولتكن $x \in [x_1, x_2]$ حيث $x_1, x_2 \in L$ ، عندئذٍ تقع النقطتان x_1, x_2 في المستوي نفسه.

الإثبات:

لأجل $X = X_1 = X_2$ المبرهنة صحيحة.

لنفرض أن $X = \lambda X_1 + (1 - \lambda) X_2$ حيث $0 \leq \lambda \leq 1$. عندئذٍ:

$$\begin{aligned} f_i = D_i X &= \lambda D_i X_1 + (1 - \lambda) D_i X_2 \\ &\leq \lambda f_i + (1 - \lambda) f_i = f_i \end{aligned}$$

إذاً لتتحقق المساواة يجب أن يكون:

$$\begin{aligned} D_i X_1 &= f_i \\ D_i X_2 &= f_i \end{aligned}$$

ومنه فالنقطتان X_1, X_2 تقعان في المستوي نفسه وهو المطلوب.

مبرهنة (3):

ليكن $|I| = n$ ، $I \subset M + N$

ليكن D_r مصفوفة مكونة من أسطر المصفوفة D ذات الأدلة من I ، فإذا كانت مرتبة D_r هي n فإن:

$$D_r X = F_I$$

تحدد نقطة في الفضاء الخطي R^n :

$$X^\circ = D_r^{-1} F_I$$

وإذا كانت النقطة X° تنتمي إلى منطقة الإمكانيات L ، أي:

$$D_{(M+N)}X^\circ = F_{(M+N)/I}$$

فإن X° تكون إحدى ذرا منطقة الحلول L .

الإثبات:

إذا تحقق $X^\circ = \lambda X_1 + (1-\lambda)X_2$ ، حيث $X_1, X_2 \in L$ فإن X_1, X_2 تقعان على

كل من السطوح:

$$(i \in I) \quad , \quad D_i X = f_i$$

وحسب المبرهنة (4.2) فإنه يكون: $D_i x_1 = D_i x_2 = F_i$.

$$X_1 = X_2 = X^\circ = D^{-1} F_i \quad \text{أي}$$

إذاً لا يمكن أن تقع X° على قطعة مستقيمة مفتوحة من الطرفين في L .

إذاً X° ذروة في L . وهو المطلوب.

مبرهنة (4):

كل نقطة X° تحقق العلاقة $DX^\circ < F$ هي نقطة داخلية في L .

الإثبات:

لتكن $X_1, X^\circ \in L$ ، عندئذٍ يوجد:

$\varepsilon \in R^n$ بحيث يكون:

$$\|X - X^\circ\| < \varepsilon$$

ومنه:

$$D_r X = D_r (X - X^\circ) + D_r X^\circ$$

$$\leq \|D_r\| \cdot \|X - X^\circ\| + D_r X^\circ$$

$$\leq \|D_r\| \cdot \varepsilon + DX^\circ \leq f_i$$

وذلك $\forall i \in M+N$.

إذاً نختار:

$$\varepsilon = \min_{i \in M+N} \frac{f_i - D_r X^\circ}{\|D_r\|}$$

فيوجد جوار مفتوح: $B_\varepsilon(X^\circ) \subset L$

إذاً X° نقطة داخلية في L وهو المطلوب.

ملاحظة:

نذكر هنا بتعريف المسافة بين نقطتين في الفضاء المتجهي R^n .

ليكن $X_1, X_2 \in R^n$ فإن:

$$\|X_1 - X_2\| = \sqrt{(X_1 - X_2)^T (X_1 - X_2)}$$

ففي الفضاء المتجهي R^2 حيث $X_1 = (a_1, b_1)$ ، $X_2 = (a_2, b_2)$ فإن:

$$\|X_1 - X_2\| = \sqrt{(a_1 - a_2)^T (b_1 - b_2)}$$

مبرهنة (5):

ليكن لدينا البرنامج الخطي التالي:

$$Z = C^T X^* = \max C^T X$$

$$X \in L$$

$$L = \{X : X \in R^n, DX \leq F\}$$

الذي يقبل X^* حلاً مثالياً، ومن أجله تكون قيمة دالة الهدف $Z = k$ إذا لم تكن

X^* ذروة L فإن المستوى $C^T X = k$ يكون ماراً بجميع نقاط القطعة المستقيمة

المغلقة المارة من X^* والتي طرفاها L .

الإثبات:

لتكن $X_1, X_2 \in L$ بحيث يكون:

$$X^* = \lambda X_1 + (1 - \lambda) X_2 \quad 0 \leq \lambda \leq 1$$

إذا لم تكن X_2 ، مثلاً واقعة في المستوى $C^T X = k$ فإن $C^T X_2 < k$ وذلك لأن

k هي القيمة العظمى لدالة الهدف في L ومنه:

$$C^T X_1 = \frac{1}{\lambda} (C^T X^* - (1 - \lambda) C^T X_2)$$

$$\begin{aligned} &> \frac{1}{\lambda}(k - (1 - \lambda)k) \\ &= k \end{aligned}$$

مما يناقض كون k هي أكبر قيمة إذاً X_1, X_2 واقعان في المستوى $C^T X_2 = k$ وهو المطلوب.

نتيجة:

لا يشترك المستوى $C^T X = k$ مع منطقة الحلول L بأي نقطة داخلية.

نتيجة:

إذا اشترك المستوى $C^T X = k$ مع منطقة الحلول L بنقطة وحيدة X^* فإن هذه النقطة هي ذروة.

مبرهنة (6):

إذا كان البرنامج الخطي:

$$\begin{aligned} Z = C^T X^* = \max C^T X \\ X \in L \end{aligned}$$

$$L = \{X : X \in R^n, DX \leq F\}$$

يقبل X^* حلاً، فإن المستوى $C^T X = C^T X^* = k$ يكون ماراً بإحدى ذرا منطقة الحلول.

الإثبات:

حسب المبرهنة (5) تكون X^* وجميع النقاط المشتركة بين منطقة الإمكانيات L والمستوي $C^T X = k$ نقاطاً محيطية.

أي أن هذه النقاط تقاطع بعض السطوح ولتكن:

$$(I \subset M + N) D_r X = f_r$$

(شروط المسألة)

وتكون هذه النقاط محققة لبقية المتباينات.

$$D_{(M+N)/I} X \leq F_{(M+N)/I}$$

إذا كانت رتبة المصفوفة D_r مساوية عدد المجاهيل n فإن X^* تكون ذروة في L حسب المبرهنة (3) وبالتالي يتحقق المطلوب.
 أما إذا كانت رتبة المصفوفة D_r هي $r < n$ ، فإن إحدى النقاط المشتركة بين منطقة الحلول L والمستوي $C^T X = k$ هي ذروة.
 ولإثبات ذلك يكفي أن تبرهن أن هذه النقطة المشتركة تحقق بالإضافة للمساواة:

$$D_r X = F$$

مساواة أخرى:

$$l \in (M+N)/I \text{ حيث } D_r X = f_l$$

وبالتالي نقل المصفوفة D_r ذات الرتبة r إلى المصفوفة ذات الرتبة $r+1$ ، وهكذا نتابع حتى نصل إلى n فنكون قد وصلنا للذروة X^* :
 لنفرض أن $r < n$ ولنفرض أن X^* ليست ذروة في منطقة الإمكانيات L عندئذٍ يوجد في منطقة الإمكانيات L نقطتان هما $X_1, X_2 \in L$ بحيث يكون:
 وحسب المبرهنة (5)، فإن النقطتين X_1, X_2 تقعان في المستوي $C^T X = k$ إذاً نستطيع أن نستنتج أن X_1, X_2 هما نقطتان مشتركتان بين منطقة الإمكانيات L والمستوي $C^T X = k$ أي أنهما تحققان المساواتين:

$$C^T X = k$$

$$D_r X = F_l$$

وتحققان المتباينات:

$$D_{(M+N)/I} X \leq F_{(M+N)/I}$$

ولنأخذ المستقيم:

$$T = \{X : X \in R^n, X = \lambda X_1 + (1 - \lambda) X_2; \lambda \in R\}$$

الذي يقع بكامله في المستويات:

$$D_r X = F_l$$

علماً أن نقاط هذا المستقيم تحقق المتباينات:

$$0 \leq \lambda \leq 1 \text{ حيث } D_{(M+N)/I} X \leq F_{(M+N)/I}$$

إذا المستقيم T لا يمكن أن يقع بكامله في منطقة الإمكانيات L لأن:

$$i \in N, X_i \geq 0$$

لتكن v نقطة من المستقيم T تقابل قيمة λ_0 واقعة خارج منطقة الإمكانيات L ، أي تحقق المتباينة:

$$D_q.v > F_q$$

من أجل:

$$q \subset (M+N)/I$$

وتحقق المتباينات:

$$D_{(M+N)/I} X \leq F_{(M+N)/I}$$

لنفرض أن $|q| = s$.

بما أن v تقع بالنسبة للمستويات $D_r X = F_k$ بجهة معاكسة لـ X^* إذا توجد قيم $\lambda_1, \dots, \lambda_k$.

تقابل نقاطاً من المستقيم T واقعة في المستويات:

$$D_{q1} X = f_{q1}$$

$$D_{q1} X = f_{q2}$$

.

.

.

$$D_{qs} X = f_{qs}$$

إذا كانت $\lambda_0 > 1$ نأخذ:

$$\lambda_i = \min_{i \in S} \lambda_i \quad S = \{1, 2, \dots, s\}$$

عندئذ تكون:

$$X = \lambda_i X_1 + (1 - \lambda_i) X_2$$

واقعة في المستويات $CX = k$ والمستويات $D_i X = F_i$ وتحقق المتباينات:

$$D_{(M+N)/I} X \leq F_{(M+N)/I}$$

وتحقق إحدى المتباينات كمساواة:

$$D_i X = f_i$$

وبالطريقة نفسها نبرهن من أجل $\lambda_0 < 0$ وذلك بأن نأخذ:

$$\lambda_i = \max_{i \in S} \lambda_i \text{ وهو المطلوب.}$$

4.4- مبدأ الثنوية في البرمجة الخطية

ليكن لدينا البرنامج الخطي التالي:

$$\left. \begin{array}{l} P = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \rightarrow \min \\ a_{11} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{1n} x_n \geq b_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n \geq b_m \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n \end{array} \right\} (I)$$

ولنشكل البرنامج الخطي التالي:

$$\left. \begin{array}{l} Z = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \dots + b_m y_m \rightarrow \max \\ a_{11} y_1 + a_{22} y_2 + \dots + a_{m1} y_n \leq c_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{1n} y_1 + a_{2n} y_2 + \dots + a_{mn} y_m \leq c_m \\ Y_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n \end{array} \right\} (II)$$

ويمكن أن نكتب كلاً من II, I بالشكل المصفوفي كما يلي:

$$\left. \begin{array}{l} P = C^T X \rightarrow \min \\ AX \geq B \\ X \geq 0 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} P = B^T y \rightarrow \max \\ A^T y \leq C \\ y \geq 0 \end{array} \right\}$$

يمكن أن نحصل على البرنامج الخطي II من البرنامج الخطي I وذلك من خلال تبديل بعناصر المتجه B عناصر المتجه C وتبديل بأسطر المعاملات في شروط المسألة I أعمدها، ووضع مجاهيل جديدة $j=1,2,\dots,m$ لتكن منطقة الحلول للبرنامج الخطي I هي:

$$L = \{X \in R^n : X \geq 0, AX \geq B\}$$

ولتكن منطقة الحلول للبرنامج الخطي II هي:

$$M = \{Y \in R^m : Y \geq 0, A^T Y \leq C\}$$

تعريف:

يدعى البرنامج الخطي II البرنامج الخطي المرافق (الثنوي) للبرنامج الخطي I، ويمكن أن نقول أن البرنامجين I, II مترافقان.

تمهيدية:

لتكن $X \in L$ و $Y \in M$ عندئذ يكون:

$$B^T Y \leq C^T X \quad (4.14)$$

الإثبات:

$$\forall Y \in M \quad \forall X \in L \quad \text{فإنه:}$$

$$AX \geq B \quad X \geq 0$$

و

$$A^T Y \leq C \quad y \geq 0$$

ومنه ينتج:

$$X^T A^T Y \leq X^T C = C^T X$$

أي:

$$X^T A^T Y \leq C^T X \quad (1)$$

تتحقق المساواة إذا كان:

$$i = 1, 2, \dots, m \text{ حيث } \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \text{ أو } Y_i = 0$$

وبالطريقة نفسها نجد أن:

$$Y^T A X \geq B^T Y \quad (2)$$

تتحقق المساواة إذا كان:

$$j = 1, 2, \dots, m \text{ حيث } \sum_{i=1}^m a_{ij} y_j = c_j \text{ أو } Y_j = 0$$

بمقارنة العلاقتين (1) و (2) نجد أن:

$$B^T Y \leq Y^T A X = X^T A^T Y \leq C^T X$$

ومنه:

$$B^T Y \leq C^T X$$

وهو المطلوب.

تمهيدية:

إذا كانت $L \neq \emptyset$, $M \neq \emptyset$ عندئذ يمكن أن يكون لـ I, II حلاً مثالياً.

مبرهنة (7):

الشرط اللازم والكافي كي يكون $\bar{X} \in R^n$ حلاً للبرنامج الخطي:

$$C^T \bar{X} = \max_{X \in L} C^T X \quad (4.15)$$

حيث

$$L = \{X : X \in R^n, A_{m,n}X \leq B\}$$

هو أن يكون $\bar{Y} \in R^m$ بحيث تحقق $\bar{X}$ و $\bar{Y}$ ما يلي:

$$A\bar{X} \leq B \quad (4.16)$$

$$\bar{X} \geq 0$$

$$A^T \bar{Y} \geq C \quad (4.17)$$

$$\bar{Y} \geq 0$$

$$\text{شروط الثتوية} \quad (\bar{Y})^T (B - A\bar{X}) = 0 \quad (4.18)$$

الإثبات:

لنرسم الشرط:

لنفرض أن X حل للبرنامج الخطي (4.15) وليكن:

$$M = \{1, 2, \dots, m\}$$

$$P = \{i : i \in M, A_i \bar{X} = b_i\}$$

$$Q = \{i : i \in M, A_i \bar{X} < b_i\}$$

عندئذ يكون لدينا:

$$A_p \bar{X} = B_p$$

$$A_q \bar{X} \leq B_q$$

إذا كانت $P = Q$ عندئذ يكون لدينا:

$$A\bar{X} - B < 0$$

ومن أجل أي قيمة $V \in R^n$ ، يمكن إيجاد عدد موجب α بحيث يكون:

$$A(\bar{X} + \alpha V) - B = (A\bar{X} - B) + \alpha AV \leq 0$$

ومن أجل أن يتحقق ذلك يكفي أن تختار α بحيث يكون:

$$\alpha A_i V \leq b_i - A_i \bar{X}, \quad \forall i \in M$$

وهي شروط محققة عندما تكون $A_i V \leq 0$ مهما كانت α الموجبة.

إذا كان أحد الجداءات $A_i V$ موجباً تماماً يمكن أن نأخذ:

$$\alpha = \min \left\{ \frac{b_i - A_i \bar{X}}{A_i V} : i \in M, A_i V > 0 \right\}$$

وهي قيمة موجبة تماماً، لأن أحد الجداءات $A_i V$ على الأقل موجب تماماً.

$$\begin{aligned} X &= \bar{X} + \alpha V \in L \\ C^T X &= \max C^T . X \\ X &\in L \end{aligned}$$

لذا يكون:

$$C^T X = C^T . X + \alpha C^T . V \leq C^T . X$$

أي:

$$\forall V \in R^n, C^T . V \leq 0$$

ولكن هذا لا يمكن أن يتحقق إلا إذا كانت $C \equiv 0$ ، لأنه إذا كانت إحدى مركبات C (ولتكن c_j) غير معدومة، ويأخذ V قيمه جميع مركباته معدومة ما عدا $v_j = c_j$ يكون لدينا: $c_j^2 \leq 0$ وهذه العلاقة لا تتحقق إلا من أجل $C = 0$.
إذاً نستنتج أن $P = Q$ لا يمكن أن تتحقق إلا من أجل $C = 0$ وفي هذه الحالة يكون:

$$\bar{Y} = 0 \in R^m$$

عند تحقق كل من العلاقات (4.16)، (4.17)، (4.18).

أما إذا كانت $P \neq Q$ فإن الجملة: $A_p X \leq 0$

$$C^T . X > 0$$

لا يمكن أن يكون لها حل.

لنفرض أنه يوجد بهذه الجملة حل وليكن X فيكون αX حلاً آخر لهذه الجملة وذلك $\forall \alpha \in R^+$ ومنه يكون:

$$C^T (\bar{X} + \alpha X) = C^T \bar{X} + \alpha C^T X > C^T X \quad (4.19)$$

إذاً $\forall \alpha \in R^+$ ، فإنه يكون:

$$A_p (\bar{X} + \alpha X) = B_p + \alpha A_p X \leq B_p \quad (4.19)$$

و $\forall \alpha \in R^+$ يكون:

$$A_Q(\bar{X} + \alpha X) = B_Q \bar{X} + \alpha A_Q X \leq B_Q \quad (4.19)$$

ولتكن المتباينة الأخيرة، كما يلي:

$$\alpha A_i X \leq b_i - A_i \bar{X}$$

وهذه العلاقة محققة عندما يكون، إذاً عندما يكون هناك جداءات موجبة

$A_i X$ يكفي أن تختار:

$$\alpha = \min \left\{ \frac{b_i - A_i \bar{X}}{A_i V} : i \in Q, A_i V > 0 \right\}$$

وهي قيمة موجبة. إذاً حسب العلاقة (4.20) والعلاقة (4.21) نجد أن:

$$\bar{X} + \alpha X \in L$$

العلاقة (4.19) تتناقض كون:

$$C^T \bar{X} = \max_{X \in L} C^T X$$

نستنتج أنه لا يمكن أن يكون للجملة حل. وحسب نظرية فاركاس يوجد حل

للجملة:

$$\left. \begin{array}{l} A^T P Y_P = C \\ Y_P \geq 0 \end{array} \right\} \quad (4.22)$$

لنأخذ $\bar{Y} \in R^m$ بحيث يكون:

$$i \in P \Rightarrow \bar{Y}_i = y_i \geq 0$$

$$i \in Q \Rightarrow \bar{Y}_i = 0$$

عندئذ يكون:

$$A^T \bar{Y} = A^T P Y_P + A^T Q \cdot 0 = C$$

وتتحقق العلاقة (4.17) ويكون $\bar{Y} \geq 0$ محققاً لشروط عدم السلبية، كما يكون:

$$(Y)^T (B - A\bar{X}) = \bar{Y}_P (B_P - A_P \bar{X}) + 0(B_Q - A_Q \bar{X})$$

وتتحقق العلاقة (4.18)، علماً أن X تحقق (4.15). وبهذا يتم برهان لزوم الشرط.

كفاية الشرط:

سنبرهن أنه إذا كان هناك:

$$\bar{X} \in R^n, \bar{Y} \in R^m$$

بحيث تتحقق العلاقات (4.16)، (4.17)، (4.18) يكون $\bar{X}$ حلاً للبرنامج الخطي (4.15).

من العلاقة (4.17) نجد أن:

$$C^T X = (\bar{Y})^T A X$$

و $\forall X \in L, \forall X \in R^n$ يكون:

$$C^T X = (\bar{Y})^T A X \leq (X)^T B$$

وذلك لأن العلاقة (4.17) محققة وتحقق شروط البرنامج الخطي (4.15).

ولكن من العلاقتين (4.17)، (4.18) نجد أن:

$$(\bar{Y})^T B = (\bar{Y})^T A \bar{X} = C^T \bar{X}$$

إذاً يكون:

$$C^T X \leq C^T \bar{X}$$

أي $\forall X \in L$ يكون $\bar{X}$ حلاً للبرنامج (4.15).

من العلاقة (4.18) نلاحظ أن:

$$\bar{Y}_i \neq 0 \Rightarrow b_i - A_j X = 0$$

$$b_i - A_j \bar{X} \neq 0 \Rightarrow \bar{Y}_i = 0$$

وذلك لأن:

$$Y \geq 0, B - A \bar{X} \geq 0$$

فإذا رمزنا لمجاهيل الفروق في البرنامج الخطي (4.15) لـ:

$$\bar{Y} = \begin{bmatrix} \bar{y}_1 \\ \vdots \\ \bar{y}_m \end{bmatrix} \in R^n$$

فيمكن كتابة الثنوية (4.18) بالشكل التالي:

$$\bar{y}_i - \bar{y}_i = 0 \quad \forall i \in M$$

نلاحظ أن عدد مركبات Y يساوي عدد المتباينات في البرنامج I ، إذ إن كل مركبة تقابل متباينة - وبالعكس كل مركبة من x تقابل مساواة في العلاقة (4.17). وهو المطلوب.

4.4.1- البرامج الخطية المرافقة (الثنوية)

$$\left. \begin{aligned} C^T \bar{X} &= \max C^T X \\ X &\in L \\ L &= \{X : X \in R^n, A_{m \times n} X \leq B\} \end{aligned} \right\} I$$

$$\left. \begin{aligned} B^T \bar{Y} &= \max B^T \bar{Y} \\ Y &\in E \\ E &= \{Y : Y \in R^m, (A_{m \times n})^T Y = C, Y \geq 0\} \end{aligned} \right\} II$$

أي من أجل $Y \in E$, $X \in L$ يكون:

$$Z = C^T X = Y^T A X \leq X^T B = P$$

حيث Z, P يرمزان لدالة الهدف ولكن مبرهنة الثنوية تبين أن $\bar{X}$ تكون حلاً للبرنامج الخطي I إذا وفقط إذا كان:

$$\bar{X} \in L ; \bar{Y} \in E ; (\bar{Y})^T (B - A\bar{X}) = 0$$

عندئذ يكون:

$$\bar{Z} = C^T \bar{X} = (\bar{Y})^T A X = (\bar{Y})^T B = \bar{P}$$

إذا $\forall Y \in E$ يكون:

$$B^T \bar{Y} \leq B^T Y$$

أي أن:

$$B^T \bar{Y} = \min_{Y \in E} B^T Y$$

ويكون $\bar{Y}$ حلاً للبرنامج الخطي II ونقول إن II تنوي I.

وبالعكس لنثبت أن I هو تنوي II ؟

ليكن لدينا البرنامج الخطي II بالشكل التالي:

$$-B^T Y = \max_{Y \in E} (-B^T Y)$$

$$E = \{y : y \in R^m, Hy \leq f\}$$

حيث:

$$H = \begin{bmatrix} A^T \\ A^T \\ -I \end{bmatrix} \quad f = \begin{bmatrix} C \\ -C \\ 0 \end{bmatrix}$$

وبذلك نكون قد كتبنا البرنامج الخطي II بشكل البرنامج الخطي I نفسه،

وللحصول على البرنامج الخطي الثنوي نضع: $U \in R^n$: لنقابل المتباينات:

$$A^T Y \leq B$$

ولنضع $V \in R^n$ لنقابل المتراجحات:

$$A^T Y \leq -B$$

ولنضع $W \in R^n$ لنقابل المتراجحات:

$$-IY = -Y \leq 0$$

وليكن:

$S = \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix}$ فيكون البرنامج الخطي الثنائي

$$F^T \bar{S} = B^T (\bar{V} - \bar{U}) = \min_{s \in G} B^T (U - V)$$

$$G = \{S : S = \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix}, U \in R^n, V \in R^n, W \in R^n\}$$

$$A(U - V) - W = -B, U \geq 0, V \geq 0, W \geq 0\}$$

ولیکن $X = V - U$ عندئذ تكون العلاقة:

$$\{-AX - W = -B, W \geq 0\}$$

$$AX < B$$

تكافئ:

يمكن كتابة العلاقة:

$$\begin{aligned} -B^T \bar{X} &= \min(-B^T X) \\ X &\in L \end{aligned}$$

بالشكل المكافئ:

$$\begin{aligned} B^T \bar{Y} &= \max B^T Y \\ Y &\in L \end{aligned}$$

وهذا هو البرنامج الخطي I . وهو المطلوب.

تمهيدية:

إذا كانت $M \neq \emptyset, L \neq \emptyset$ عندئذ يمكن يكون I, II حلاً مثالياً.

نتيجة:

الشرط اللازم والكافي لكي يكون $\bar{Y}, \bar{X}$ حلاً لكل من البرنامجين الخطيين I و

II هو أن يكون:

$$\bar{X} \in L; \bar{Y} \in E; (Y)^T (A\bar{X} - B) = 0$$

مثال:

أثبت أن $X = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ حل للبرنامج الخطي:

$$Z = 7x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

$$2x_1 - x_2 \leq 5$$

$$x_1 + x_2 \leq 4$$

$$x_1 - 2x_2 \leq 8$$

$$x_1 + 4x_2 \leq -2$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 1$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

مجاهيل الفروق:

$$Y^T = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}$$

$$2y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 7$$

$$-y_1 + y_2 - 2y_3 + 4y_4 + 2y_5 = 1$$

$$i=1,2,3,4,5, \quad y_i \geq 0$$

إذا كان X حلاً، عندئذٍ نستطيع تعيين Y التي تحقق شروط المسألة الثنوية، وشروط عدم السلبية.

$$y_i(b_i - A_i X) = 0$$

$$b_1 - A_1 X = 5 - 5 = 0$$

$$b_2 - A_2 X = 4 - 1 = 4 > 0 \Rightarrow y_2 = 0$$

$$b_3 - A_3 X = 8 - 4 = 4 > 0 \Rightarrow y_3 = 0$$

$$b_4 - A_4 X = -2 - (-2) = 0$$

$$b_5 - A_5 X = 1 - 0 = 1 > 0 \Rightarrow y_5 = 0$$

إذ نستطيع أن نكتب الشروط الخطية كما يلي:

$$2y_1 + y_4 = 7$$

$$-y_1 + 4y_4 = 1$$

ولهذه الجملة حل وحيد $y_1 = 3$, $y_4 = 1$.

إذاً X حل للبرنامج الخطي المعطى.

4.5- الطريقة البيانية

إن البرمجة الخطية هي طريقة لتخصيص الموارد النادرة بين نشاطين مستقلين أو أكثر حيث يتحدد تخصيص الموارد بواسطة تعظيم أو تصغير دالة هدف خطية تمثل مقياساً ذا تأثير فعلي للأرباح، التكاليف، المبيعات،...الخ.

ونحصل على حلول لمشكلات البرمجة الخطية بالطريق البيانية أو طريقة السمبلكس. تحل مشكلات البرمجة الخطية بواسطة الطريقة البيانية إذا كان عدد المجاهيل 3 أو أقل، وتعد الطريقة البيانية في البرمجة الخطية من أسهل الطرق إلا أنها طريقة غير كفأة في معالجة مشكلات البرمجة الخطية في الحياة العملية. لكن تؤدي الطريقة البيانية إلى إدراك وفهم خصائص مشكلات البرمجة الخطية بيانياً وتساعد على إدراك وفهم طريقة السمبلكس حيث تمكن من الوقوف على تفصيلات المشكلة. نوضح الطريقة البيانية بالاستعانة بالأمثلة الآتية:

مثال:

تقوم الشركة السورية لإنتاج السجاد في إحدى مراحل الإنتاج بتقطيع أطوال السجاد بعد إنتاجها في قسم آخر من الشركة وبعد تقطيع الأطوال بواسطة آلات خاصة إلى أطوال معينة، تطوى الأطوال على شكل لفات ثم تغلف بواسطة مواد معينة لبيعها في الأسواق نوضح في الجدول (4.2) البيانات الخاصة لحجمين من أحجام السجاد.

الوقت المتاح	المنتج B	المنتج A	أقسام الإنتاج
2,200	6	8	التقطيع
1,800	9	4	الطي
400	2	1	التغليف
	8	12	الأرباح لكل وحدة طول

الجدول (4.2)

تمثل البيانات في الجدول (4.2) التفصيلات التقنية للمنتجين A , B، مثلاً لإنتاج وحدة واحدة من المنتج A نحتاج إلى 8 وحدات زمنية (دقيقة) لإجراء عملية التقطيع، 4 دقائق لإجراء عملية الطي، دقيقة واحدة لإجراء عملية التغليف وعند بيع الوحدة الواحدة من المنتج A فإن الربح الإجمالي هو 12 ألفاً وكذلك بالنسبة للمنتج B. أما الوقت المتوفر في عمليات التقطيع فهو 2,200 دقيقة، وفي عمليات الطي 1,800 دقيقة، وعمليات التغليف 400 دقيقة، وهذه تشمل الأيدي العاملة مقاسة بالوقت المستثمر في العمل حيث إن كل منتج يجب أن يمر عبر العمليات الثلاث المذكورة في الجدول (4.2). الغرض من البرمجة الخطية هو إيجاد برنامج إنتاجي أمثل، أي تحديد عدد الوحدات المنتجة من كل منتج بحيث تكون الأرباح أعلى ما يمكن.

ينبغي الآن تحديد عدد الوحدات المنتجة من المنتج A والمنتج B، صياغة مشكلة البرمجة الخطية على شكل رياضي وكما يلي:

نفرض أن عدد الوحدات المنتجة من المنتج A تساوي X_1 وحدة خلال فترة الزمن المخصصة.

نفرض أن عدد الوحدات المنتجة من المنتج B تساوي X_2 وحدة خلال فترة الزمن المخصصة.

نحصل على دالة الهدف كما يلي:

الأرباح = عدد الوحدات من المنتج A × الربح الإجمالي للوحدة الواحدة + عدد الوحدات من المنتج B × الربح الإجمالي لوحدة الواحدة
نفرض أن الأرباح Z

إذاً

دالة الهدف

$$\text{Maximise } Z = 12X_1 + 8X_2$$

وفقاً للشروط الآتية:

شرط التقطيع $8X_1 + 6X_2 \leq 2.200$

شرط الطي $4X_1 + 9X_2 \leq 1.800$

شرط التغليف $X_1 + 2X_2 \leq 400$

الشروط

وأن:

$$X_1, X_2 \geq 0$$

تتلخص الخطوات في رسم الشروط بيانياً ومن ثم تحديد المنطقة الحلول المقبولة ويعدها رسم دالة الهدف وتحديد الحل الأمثل. قبل أن نتطرق إلى رسم الشروط للمشكلة الحالية نعرض أنواع الشروط التي قد تواجهنا في حياتنا العملية ومن هذه الشروط.

(1) أكبر أو يساوي كما في الشرط الآتي:

$$3X_1 + 2X_2 \geq 12$$

(2) أصغر أو يساوي كما في الشرط الآتي:

$$3X_1 + 2X_2 \leq 12$$

(3) المساواة كما في الشرط الآتي:

$$3X_1 + 2X_2 = 12$$

نرسم الآن الشرط الأول:

$$8X_1 + 6X_2 \leq 2,200$$

إن أي ترتيب من الإنتاج من A , B لا يتجاوز 2,200 دقيقة يعتبر حلاً مقبولاً بالنسبة للشرط أعلاه، مثلاً لو تقرر إنتاج 100 وحدة من المنتج , 150 وحدة من المنتج B (أي أن $X_2 = 150, X_1 = 100$) فإن نتيجة هذا الإنتاج هي:

$$\begin{aligned} & 8 \times 100 + 6 \times 150 \\ &= 800 + 900 \\ &= 1700 \end{aligned}$$

إن 1700 دقيقة أقل من 2,200 لذلك فإن هذا الحل هو من الحلول المقبولة، من أجل ذلك نفترض أننا نتج منتجاً واحداً فقط هو X_1 أي $X_2 = 0$ لذلك فإن عدد الوحدات التي يمكننا إنتاجها من المنتج A تساوي قيمة X_1 الناتجة عن حل المعادلة.

$$\begin{aligned} 8X_1 &= 2,200 \\ X_1 &= \frac{2,200}{8} \\ &= 275 \end{aligned} \quad \text{أو أن:}$$

ولذلك سنحصل على النقطة $A(0, 275)$ أي أن $X_2 = 0, X_1 = 275$ أما إذا لم ننتج A فهذا يعني أن $X_1 = 0$ ونحصل على الحد المطلوب لأعلى إنتاج من المنتج

B عن طريق حل المعادلة:

$$\begin{aligned} 6X_2 &= 2,200 \\ X_2 &= \frac{2,200}{6} \\ &= 366 \frac{2}{3} \end{aligned} \quad \text{أو}$$

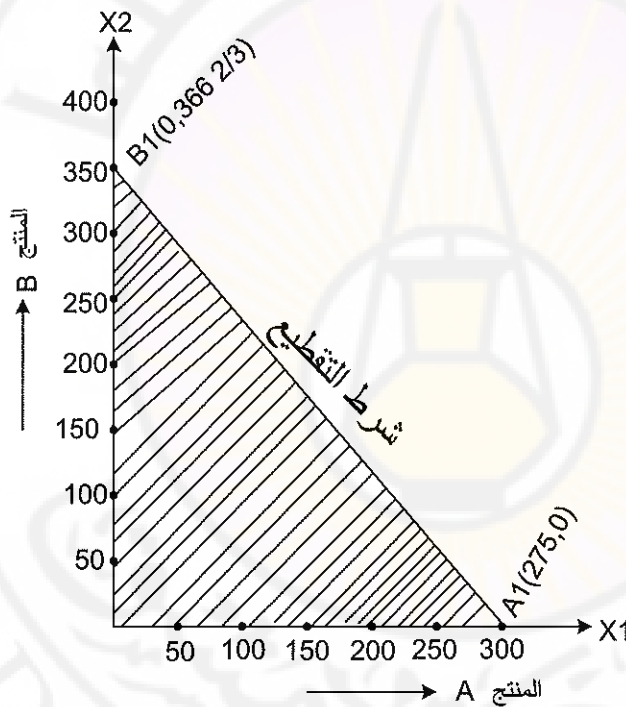
ولذلك سنحصل على النقطة $B(0, 366 \frac{2}{3})$

إذا وصلنا بين النقطتين A , B نحصل على مستقيم معادلته:

$$8X_1 + 6X_2 = 2,200$$

لرسم هذه المعادلة. نرسم محورين متعامدين أحدهما المحور السيني ليمثل عدد الوحدات المنتجة من المنتج A والمحور الآخر هو المحور العيني ليمثل عدد الوحدات المنتجة من المنتج B كما مبين في الشكل (4.1)

نقسم الدوران إلى أقسام متساوية، نعين النقطتين A , B على الرسم ونصل بينهما بخط مستقيم. بما أن عدد الوحدات المنتجة من A , B لا يمكن أن تكون بالسالب لذلك فإن الحل سيقع في الربع الأول. إن المنطقة المظللة في الشكل (4.1) عبارة عن منطقة الإمكانيات المتاحة لشرط التقطيع حيث إن أي نقطة تقع ضمن حدود المنطقة المظللة تحقق الشرط المذكور.



الشكل (4.1)

وبالطريقة نفسها نرسم الشرط الثاني

$$4X_1 + 9X_2 \leq 1.800$$

فإذا كان $X_2=0$ فإن $4X_1=1.800$

$$X_1 = \frac{1.800}{4} \quad \text{أو}$$

$$= 250$$

نحصل على النقطة $A_2(0,250)$

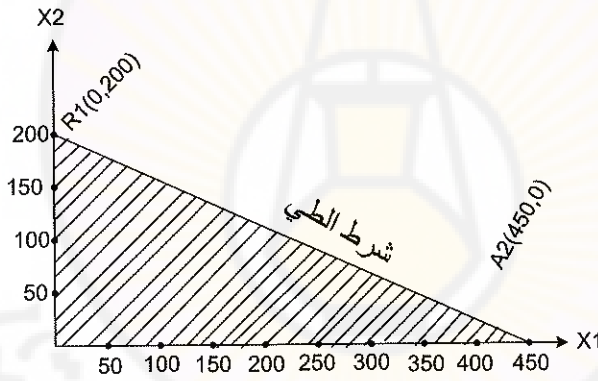
وإذا كان $X_1=0$ فإن $9X_2=1.800$

$$X_2 = \frac{1.800}{9} \quad \text{أو}$$

$$= 200$$

نحصل على النقطة $B_2(0,200)$

نرسم الآن الشرط الثاني في الشكل (4.2) كما مبين أدناه. إن المنطقة المظللة في الشكل (4.2) هي منطقة الحلول المقبولة بالنسبة لشرط الطي.



الشكل (4.2)

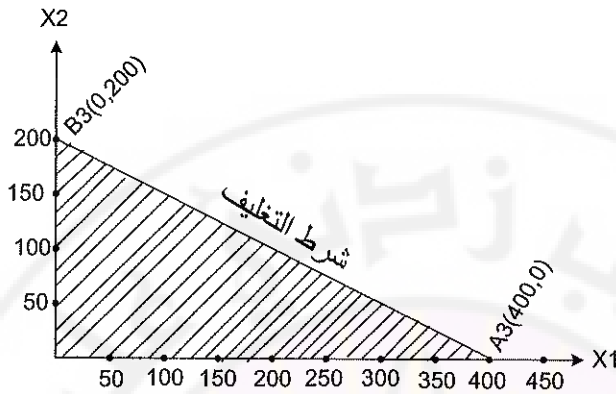
نرسم الشرط الثالث

$$X_1 + 2X_2 \leq 400$$

إذا كان $X_2=0$ فإن $X_1=400$

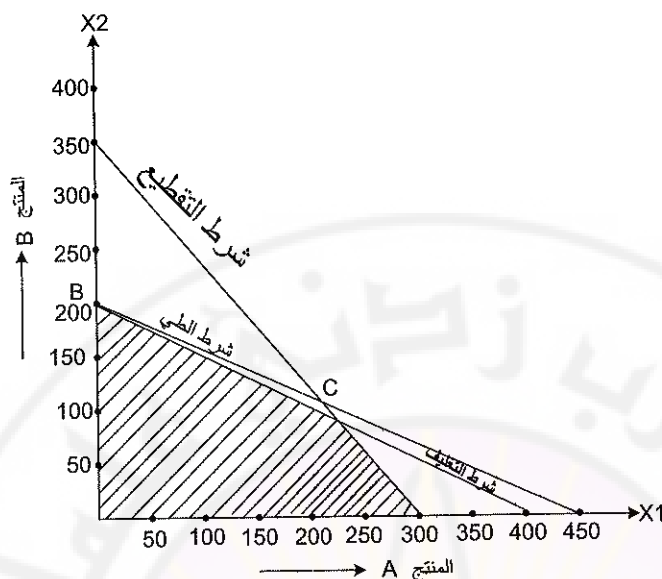
لذلك نحصل على النقطة $A_3(400,0)$ والنقطة $B_3(0,200)$

نرسم الشرط الثالث (شرط التغليف) كما في الشكل (4.3) المنطقة المظلمة في الشكل (4.3) عبارة عن منطقة الحلول المقبولة للشرط الثالث (شرط التغليف).



الشكل (4.3)

نجمع الآن الشروط الثلاثة في شكل واحد وهو الشكل (4.4) أدناه. المنطقة المظلمة في الشكل (4.4) أو بعبارة أخرى المضلع OACB عبارة عن منطقة الحلول المقبولة Feasible region، إن أية نقطة تقع في المنطقة المظلمة أو على حدود تلك المنطقة هي حل لمشكلة البرمجة الخطية بكاملها، حيث إن أية نقطة تقع ضمن المنطقة أو على حدودها تحقق الشروط الثلاثة، نلاحظ من الشكل (4.4) إن الشرط الثاني شرط الطي لا تأثير له على منطقة الحلول المقبولة ولذلك يمكن الاستغناء عن هذا الشرط ويطلق على هذا الشرط بالشرط الملغي "Redundant".



الشكل (4.4)

نهدف الآن إلى إيجاد نقطة واحدة على الأقل (X_1, X_2) ، في المضلع $OACB$ (منطقة الحلول المقبولة) تعظم الأرباح أو نجعل قيمة دالة الهدف الخطية $Z = 12X_1 + 8X_2$ أكبر ما يمكن.

نحصل على النقطة التي تجعل دالة الهدف أكبر ما يمكن في حالة التعظيم أما عن طريق الرسم، أي رسم دالة الهدف الخطية أو عن طريق الاختبار. أن النقطة التي تجعل دالة الهدف أكبر ما يمكن هي أبعد نقطة من نقطة مركز تصدير وأنها تقع على حدود المنطقة المحدبة في الشكل (4.4) وإنها إحدى نقاط رؤوس المنطقة المحدبة فقد تكون النقطة O ، A ، B أو C

ولأجل تحديد النقطة، نجد إحداثيات كل نقطة من النقاط الأربع أعلاه ثم نعوض إحداثيات النقطة في دالة الهدف الخطية.

النقطة التي تجعل قيمة دالة الهدف أعظم القيم هي النقطة المطلوبة، أو بعبارة أخرى هي القيمة المتلى وأن إحداثيات تلك النقطة هي الإحداثيات التي تحدد الإنتاج الأمثل:

إن إحداثيات النقطة O هي (0,0)

إحداثيات النقطة A هي (275,0)

إحداثيات النقطة B هي (0,200)

إحداثيات النقطة C هي (200,100)

نحصل على إحداثيات النقطة C وذلك بإسقاط عمود من النقطة C على الدوران X_1 , X_2 ونقطة تقاطع العمود مع كل من الدوران تحدد إحداثيات النقطة C ويمكن إيجاد إحداثيات النقطة C وذلك بحل الشرطين الأول والثالث ونقطة تقاطعهما هي إحداثيات C.

نوضح الطريقتين:

أولاً: إذا أسقطنا عموداً من النقطة C على محور X_1 فإنه يقطع X_1 في النقطة $X_1=200$ وإذا أسقطنا عموداً من النقطة C إلى محور X_2 فإنه يقطع X_2 في النقطة $X_2=100$. لذلك فإن إحداثيات النقطة C هي (200,100)

ثانياً: نجد حلاً للشرطين الأول والثالث، أي حل المعادلتين:

$$8X_1 + 6X_2 = 2.200 \quad (1)$$

$$X_1 + 2X_2 = 400 \quad (2)$$

من المعادلة الثانية:

$$X_1 = 400 - 2X_2 \quad (3)$$

نعوض المعادلة (3) في (1) ينتج:

$$8(400 - 2X_2) + 6X_2 = 2.200$$

$$3200 - 16X_2 + 6X_2 = 2.200$$

$$X_2 = \frac{1000}{10} = 100$$

$$X_1 = 400 - 2 \times 100$$

$$= 400 - 200 = 200$$

أو
أذن

إذا إحداثيات النقطة C هي (200,100)

$$\text{النقطة} \quad \text{قيمة} \quad Z = 12X_1 + 3X_2$$

$$0$$

$$O(0,0)$$

$$12 \times 275 + 0 = 3300$$

$$A(275,0)$$

$$12 \times 200 + 8 \times 100 = 3200$$

$$C(200,100)$$

$$12 \times 0 + 8 \times 200 = 1600$$

$$B(0,200)$$

إن أعلى قيمة لدالة الهدف الخطية $Z = 12X_1 + 8X_2$ هي 3300 ألف إذا اتبعت الشركة البرنامج الآتي: إنتاج 275 وحدة من المنتج A وعدم إنتاج المنتج B. أما إذا كان الهدف هو تغطية السوق بأكبر عدد ممكن من السجاد بغض النظر عن الأرباح التي تجنيها الشركة من جراء البرنامج الإنتاجي فإن من الأفضل إنتاج 100 وحدة من المنتج B وإنتاج 200 وحدة من المنتج A.

مثال:

ترغب الهيئة العامة للزراعة ومركز تصدير الزراعي - مديرية الثروة الحيوانية وضع برنامج خاص لإنتاج العلف الحيواني، وقد تقرر القيام بإنتاج نوعين من أنواع العلف. كل نوع من أنواع العلف يتكون من مزيج من المواد الغذائية التي تطحن في مطاحن خاصة لتصبح جاهزة للاستعمال وإن تكلفة كل نوع من أنواع العلف تختلف من نوع لآخر وكما مبين في الجدول (4.3) أدناه:

نوع المادة في تربية العلف	نوع العلف		الاحتياجات الأسبوعية / كيلو غرام
	A	B	
I	2	3	1250
II	1	1	250
III	5	3	900
IV	0.6	0.25	232.5
تكلفة الوحدة	41	35	

الجدول (4.3)

أوجد البرنامج الأمثل للعلف الحيواني بحيث تكون التكاليف أقل ما يمكن وتحقق الاحتياجات الأسبوعية؟

الحل:

نفرض أن عدد الوحدات المقرر إنتاجها من العلف A هي X_1 كيلو غرام
وأن عدد الوحدات المقرر إنتاجها من العلف B هي X_2 كيلو غرام. أن دالة
الهدف Z هي $Z = 41X_1 + 35X_2$.
والمطلوب جعل Z أقل ما يمكن، بعبارة أخرى تصغير قيمة Z وفقاً إلى الشروط
الآتية:

$$2X_1 + 3X_2 \geq 1250 \quad \text{الشروط الأول}$$

الشروط الأول عبارة عن حاصل جمع 2 وحدة مضروب في عدد الوحدات من
العلف A و 3 وحدة $\times$ عدد الوحدات من العلف B
أما بقية الشروط فهي:

$$X_1 + X_2 \geq 250$$

$$5X_1 + 3X_2 \geq 900$$

$$0.6X_1 + 0.25X_2 \geq 232.5$$

$$X_1 \cdot X_2 \geq 0$$

إذاً مشكلة البرمجة الخطية ستكون

$$\text{Minimise } Z = 41X_1 + 35X_2$$

وفقاً إلى الشروط الآتية:

$$2X_1 + 3X_2 \geq 1250$$

$$X_1 + X_2 \geq 250$$

$$5X_1 + 3X_2 \geq 900$$

$$0.6X_1 + 0.25X_2 \geq 232.5$$

$$X_1 \cdot X_2 \geq 0$$

نرسم الآن الشروط الأربعة في شكل واحد. من الشرط الأول

$$2X_1 + 3X_2 \geq 1250$$

إذا فرضنا أن $X_2 = 0$ فإن $2X_1 = 1250$ إذاً $X_1 = 625$ وبهذا نحصل على

النقطة $A1(625,0)$

إذا فرضنا أن $X_1 = 0$ فإن $3X_2 = 1250$

$$X_2 = 416\frac{2}{3}$$

وبهذا نحصل على النقطة $B1\left(0, 416\frac{2}{3}\right)$

نصل النقطة $A1$ بالنقطة $B1$ ، أن المنطقة الواقعة أعلى المستقيم $A1 B1$ هي

منطقة الحلول المقبولة بالنسبة للشرط الأول وكما مبين ذلك في الشكل (4.5)

من الشرط الثاني:

$$X_1 + X_2 \geq 250$$

إذا فرضنا أن $X_2 = 0$ فإن $X_1 = 250$

وبهذا نحصل على النقطة $A2(250,0)$

وإذا فرضنا أن $X_1 = 0$ فإن $X_2 = 250$

وبهذا نحصل على النقطة $B2(0,250)$

نصل النقطتين $A2, B2$ بمستقيم، حيث المنطقة الواقعة أعلى المستقيم $A2 B2$ عبارة عن منطقة الحلول المقبولة كما في الشكل (4.5)
من الشرط الثالث:

$$5X1 + 3X2 \geq 900$$

إذا فرضنا أن $X2 = 0$ فإن $5X1 = 900$

بعبارة أخرى $X1 = 180$ وبهذا نحصل على النقطة $A3(180,0)$

إذا فرضنا أن $X1 = 0$ فإن $3X2 = 900$ أو $X2 = 300$ وبهذا نحصل على النقطة $B3(0,300)$

نصل الآن النقطة $A3$ بالنقطة $B3$ ، لنحصل على الشرط الثالث حيث المنطقة الواقعة أعلى المستقيم $A3 B3$ هي منطقة الحلول المقبولة للمستقيم الثالث.
من الشرط الرابع:

$$0.6X1 + 0.25X2 \geq 232.5$$

إذا فرضنا أن $X2 = 0$ فإن $X1 = \frac{232.5}{0.6}$ أو $X1 = 387\frac{1}{2}$ وبهذا نحصل على

النقطة $A4\left(387\frac{1}{2}, 0\right)$

إذا فرضنا أن $X1 = 0$ فإن $X2 = \frac{242.5}{0.25} = 930$ وبهذا نحصل على النقطة

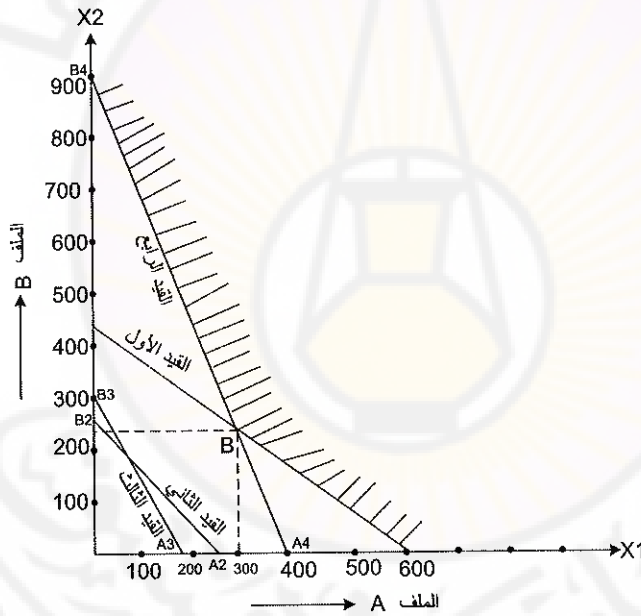
$B4(0,930)$

نصل الآن النقطة $A4$ بالنقطة $B4$ بخط مستقيم حيث تكون منطقة الحلول المقبولة أعلى المستقيم.

نرسم الآن الشكل (4.5) حيث نمثل بمحور السينات بعدد وحدات العلف نوع A (بـ $X1$) ونمثل محور العينات بعدد وحدات العلف نوع B (بـ $X2$)

إن منطقة الإمكانيات أو منطقة الحلول المقبولة للمشكلة بكاملها هي المنطقة المظللة وهي المنطقة المقعرة التي تتحدد بالنقاط A, B, C، حيث تسمى النقاط C, B, A بنقاط التطرف وأن الحل الأمثل يقع في إحدى هذه النقاط التي تكون أقرب إلى نقطة مركز تصدير لأن دالة الهدف الخطية هي جعل Z أقل ما يمكن. إن الشرطين الثاني والثالث لا يؤثران على المشكلة، لذلك فإنهما شرطان ملغيان redundant constraints. نحصل من الشكل (4.5) على:

- 1- إحداثيات النقطة A : $(625, 0)$
- 2- إحداثيات النقطة B : $(296.6, 219.2)$
- 3- إحداثيات النقطة C : $(0, 930)$



الشكل (4.5)

النفطة	قيمة Z
A(625,0)	$Z = 41 \times 625 + 0$ $= 25625$
B(296.6,219.2)	$= 41 \times 296.6 + 35 \times 219.2$ $= 19.833$
C(0,930)	$Z = 41 \times 0 + 930 \times 35$ $= 32550$

إن أقل قيمة إلى Z هي 19833 قرشاً حيث النقطة B تمثل البرنامج الأمثل للعلف الحيواني، أي البرنامج الأمثل للعلف الحيواني.

إنتاج 296.6 وحدة من العلف الحيواني نوع A

219.2 وحدة من العلف الحيواني نوع B.

إن مشكلات البرمجة الخطية عامة ويمكن تطبيقها في مجالات واسعة.

4.6- الحالات الشاذة في البرمجة الخطية

إن هناك حالات خاصة يجب مراعاتها ومن هذه الحالات:

1- تعدد الحلول المثلى multiple optimal solutions

2- الحلول غير المحدودة unbounded solutions

3- عدم وجود حلول مقبولة No feasible solutions

4- حلول منحلة Degenerate

نوضح الآن كل حالة من الحالات الأربع أعلاه:

4.6.1- تعدد الحلول المثلى

تكون لمشكلة البرمجة الخطية حلول مثلى متعددة عندما توازي دالة الهدف الخطية

أحد الشروط المحددة لمنطقة الإمكانيات كما يوضح ذلك المثال الآتي:

مثال:

$$\max imise Z = 2X_1 + 4X_2$$

وفقاً إلى الشروط الآتية:

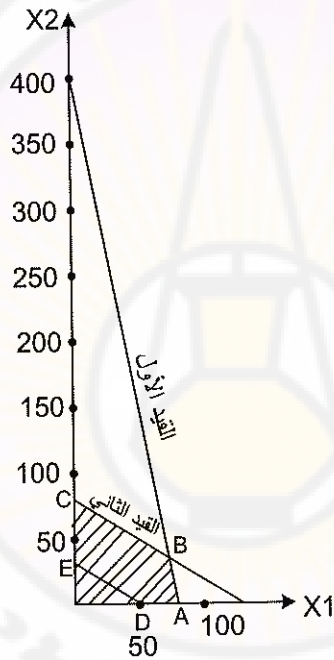
$$5X_1 + X_2 \leq 400$$

$$4X_1 + 8X_2 \leq 480$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

نرسم الآن شروط المسألة كما في الشكل (4.6) أدناه:

إذا كان X_2 في الشرط الأول يساوي سطرًا فإن $X_1=80$



الشكل (4.6)

وبهذا نحصل على النقطة $A(80,0)$

وإذا كان $X_1=0$ فإن $X_2=400$

وبهذا نحصل على النقطة $B1(0,400)$ ، نصل النقطتين $A1$, $B1$ بخط مستقيم لنحصل على حدود الشرط الأول، المنطقة الواقعة أسفل ذلك الشرط عبارة عن منطقة الحلول المقبولة للشرط الأول.

من الشرط الثاني:

$$X2=0 \text{ فإن } X1 = \frac{480}{4} \text{ أو } X1=120$$

وبهذا نحصل على النقطة $A2(120,0)$

$$X1=0 \text{ فإن } X2 = 8 \text{ أو } X2=60$$

وبهذا نحصل على النقطة $B2(0,60)$

نصل الآن النقطتين $A2$, $B2$ لنحصل على الشرط الثاني بالإمكان رسم دالة الهدف $Z = 2X1 + 4X2$ إذا افترضنا أية قيمة إلى Z فإذا فرضنا أن $Z = 100$ فإن الرسم البياني لدالة الهدف

$$100 = 2X1 + 4X2 \text{ سيكون}$$

$$X2=0 \text{ فإن } X1=50$$

وبهذا نحصل على النقطة $D(50,0)$

$$X1=0 \text{ فإن } X2=25 \text{ وبهذا نحصل على النقطة } E(0,25)$$

عين النقطتين D , E على الشكل (4.6) تجد أن المستقيم الواصل بينهما يوازي المستقيم CB . وهكذا مهما كانت قيمة Z فإن الرسم البياني لدالة الهدف يوازي الخط CB حتى تصل قيمة الهدف إلى أعلى حد ممكن حيث سينطبق المستقيم ED على المستقيم CB وبهذا فإن أي نقطة تقع على المستقيم CB بضمنها النقطتان B , C ستكون حلاً أمثلاً.

مثال:

تأكد من ذلك بإيجاد قيمة دالة الهدف عند عدد من النقاط الواقعة على الخط CB

؟

إن وجود حلول مثلى متعددة تساعد الاداري على اختبار البرنامج الإنتاجي المطلوب من قبل إدارته.

4.6.2-الحلول غير المحدودة

تنقسم مشكلات البرنامج الخطية عادة إلى نوعين هما:

أ- مشكلات البرمجة الخطية المحدودة.

ب- مشكلات البرمجة الخطية غير المحدودة.

وإن وجود مشكلات البرمجة الخطية غير المحدودة نادر وبخاصة في الحياة العلمية ولكي نفهم مشكلات البرمجة الخطية غير المحدودة نفترض المثال الآتي:

مثال:

$$\text{Maximise } Z = 10X_1 + 23X_2$$

وفقاً إلى الشروط الآتية

$$3X_1 + 5X_2 \geq 75$$

$$X_2 \leq 12$$

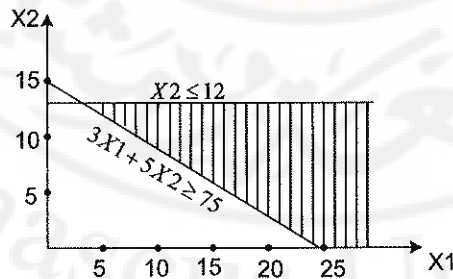
$$X_1, X_2 \geq 0$$

إذا رسمنا مجموعة الشروط أعلاه نحصل على الشكل (4.7)

من الشرط: $3X_1 + 5X_2 \leq 75$

إذا كان $X_2 = 0$ فإن $X_1 = 25$ وبهذا تتحدد النقطة (25,0).

وإذا كان $X_1 = 0$ فإن $X_2 = 15$ وبهذا تتحدد النقطة (0,15).



الشكل (4.7)

إن المنطقة المظللة في الشكل (4.7) عبارة عن منطقة الحلول المقبولة. وفي أية نقطة في المنطقة المظللة تحقق شروط المسألة. كذلك فإن أبعد نقطة عن نقطة مركز تصدير عبارة عن الحل الأمثل. إن المنطقة المظللة في الشكل (4.7) مفتوحة ولذلك كلما ابتعدنا عن نقطة مركز تصدير نحصل على حل أعلى من الحل السابق وبهذا لا نحصل على حل محدود وإنما يكون الحل غير محدود.

4.6.3- عدم وجود حلول مقبولة

إذا كانت شروط مشكلة البرمجة الخطية بصيغة معينة بحيث تكون منطقة تقاطع الشروط عبارة عن مجموعة خيالية، فإذا كانت هذه هي الحالة فلن نحصل على حلول مقبولة كما يوضح ذلك الشكل (4.8)

مثال:

$$\text{Maximise } Z = 20X_1 + 15X_2$$

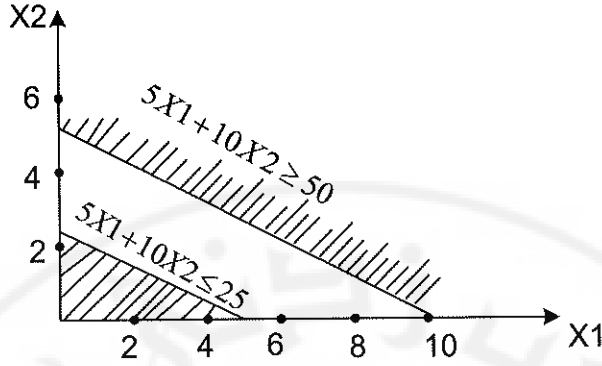
وفقاً إلى

$$5X_1 + 10X_2 \leq 25$$

$$5X_1 + 10X_2 \geq 50$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

نرسم الشروط كما في الشكل (4.8). يتضح من الشكل (4.8) عدم وجود نقطة واحدة تحقق جميع الشروط في آن معاً. إن هذه عبارة عن حالة خاصة حيث لا توجد حلول مقبولة في هذه الحالة.



الشكل (4.8)

4.6.4- الانحلالية Degeneracy

نوضح مشكلة الانحلالية . degeneracy بواسطة المثال الآتي:

مثال:

$$\text{Maximise } Z = 12X_1 + 8X_2$$

وفقاً للشروط

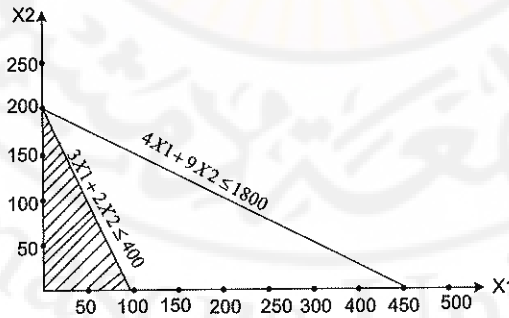
$$4X_1 + 9X_2 \leq 1800$$

$$3X_1 + 2X_2 \geq 400$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

نرسم الشرطين في الشكل (4.9):

الحل الأمثل هو الحل الذي تمثله النقطة A(0,200) أي $X_2=200, X_1=0$



الشكل (4.9)

إن عدد المجاهيل في الحل الأمثل هو مجهول واحد فقط أي $X_2=200$ ، وإن عدد الشروط هما شرطان وعلى هذا الأساس إذا كان عدد المجاهيل (المجاهيل الأساسية التي تكون قيمتها أكبر من سطرر) أقل من عدد الشروط فإن الحل هو حل منحل degenerate.



تمارين

1. أوجد بالطريقة البيانية حل للبرنامج الخطي التالي:

$$Z = 2x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

$$-2x_1 + 3x_2 \leq 6$$

$$x_1 + x_2 \leq 3$$

$$5x_1 - 2x_2 \leq 10$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

2. أوجد بالطريقة البيانية حل للبرنامج الخطي:

$$P = x_1 - x_2 \rightarrow \min$$

$$2x_1 + x_2 \geq 0$$

$$-x_1 - x_2 \geq 0$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

3. أثبت بياناً أن البرنامج الخطي التالي ليس له حل:

$$Z = 4x_1 - 3x_2 \rightarrow \max$$

$$-3x_1 + 4x_2 \leq 6$$

$$-x_2 \leq -7$$

$$x_1 + x_2 \leq 3$$

$$-2x_1 + x_2 \leq -1$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

4. حل بياناً البرنامج الخطي التالي:

$$Z = 2x_1 - 3x_2 \rightarrow \min$$

$$2x_1 - x_2 - x_3 \geq 3$$

$$x_1 - x_2 + x_3 \leq 2$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3$$



الفصل الخامس

خوارزمية السيمبلكس

(طريقة المبسط)

5.1- مقدمة

إن طريقة السيمبلكس من أكثر الطرق استخداماً لحل مسائل البرمجة الخطية (التي نصوغها كما شرح في الفصل الثاني):
المسألة المطروحة هي:

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min$$

دالة الهدف

ضمن الشروط:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i \in \{1, \dots, m\}$$

$$x_j \geq 0, \quad j \in \{1, \dots, n\}$$

وبالشكل المصفوفي يمكن أن نكتب:

$$(I) \begin{cases} c^T x \rightarrow \min & (5.1) \\ Ax = b & (5.2) \\ x \geq 0 \end{cases}$$

حيث A مصفوفة من المرتبة $m \times n$ حيث $m \leq n$ ورتبتها $\text{Rank}(A) = m$
 x متجه عمود المجاهيل.

c متجه عمود معاملات دالة الهدف.

b متجه عمود (أعداد الأطراف الثانية للمعادلات).

إذا كانت رتبة المصفوفة أصغر من m فإنه إما ألا يكون للجملة $Ax = b$ حل أو نقوم بحذف بعض التحديدات وهذا العمل الأخير كثيراً ما نقوم به في مسائل النقل. إذا كان $m \leq n$ و $\text{Rank}(A) = m$ للجملة $Ax = b$ (جملة من m معادلة بـ n مجهولاً) قابلة للحل بأشكال كثيرة.

نستخدم من هذه الطرائق خوارزمية غاوس التي تقوم بتحويل الجملة $Ax = b$ إلى جملة مكافئة لها بالتدرج ثم إلى شكل قانوني يعبر فيه عن المجهيل الأساسية (وعددها m) بدلالة المجهيل الباقية (وعددها $n-m$) غير الأساسية، وبتعويض المجهيل غير الأساسية بأعداد حقيقية اختيارية يمكن أن نحصل على القيم المقابلة للمجهيل الأساسية.

نضع عند اختيار المجهيل الأساسية في حسابنا شرط كون أعمدة المصفوفة A المقابلة للمجهيل الأساسية مستقلة خطياً.

تدعى المصفوفة المربعة الجزئية المكونة من هذه الأعمدة أساساً، ونرمز لها بـ B ويمكن أن يكون للجملة $Ax = b$ أكثر من أساس وبالتحديد (n^m) أساساً.

تعريف:

يدعى حل الجملة $Ax = b$ الذي يكون فيه قيم المجهيل غير الأساسية معدومة من أجل أساس مختار B ، حلاً مناسباً أساسياً.

باختيار الأساس يصبح الحل الأساسي وحيد التعيين، وكل حل أساسي ممكن أن يكون حلاً قاعدياً ويحقق أيضاً شروط عدم السلبية.

تعريف:

يدعى الحل الممكن $\hat{x} \in M = \{x : x \in \mathbb{R}^n; Ax = b, x \geq 0\}$ حلاً قاعدياً لمسألة البرمجة الخطية، إذا كانت أعمدة المصفوفة A ذات الأدلة للمركبات غير الصفريّة في x مستقلة خطياً، حيث M تمثل منطقة الحلول.

5.2- طريقة سيمبلكس

إن طريقة السيمبلكس تنتقل من حل قاعدي معطى إلى حل قاعدي مجاور يعطي دالة الهدف قيمة أفضل. ونقول عن حلين قاعديين أنهما متجاوران إذا كان الأساسان المقابلان لهما مختلفين بمتجه وحيد.

ليكن $B = \{a^1, \dots, a^m\}$ أساساً اختيارياً للجملة $Ax = b$ حيث a^{ij} هي المتجهات المختارة. ولنرمز بـ $\tilde{j} \in j$ لمجموعة أدلة المجاهيل المقابلة للأساس أي $\tilde{j} = \{i_1, \dots, i_m\}$.

لتكن D المصفوفة الجزئية ذات المرتبة $m \times (n-m)$ المكونة من الأعمدة المتبقية $n-m$ من المصفوفة A أي:

$$D = (a_j : j \in j - \tilde{j})$$

وليكن $\tilde{x}$ متجهاً ذا m مركبة مُشكلاً من المجاهيل الأساسية أي:

$$\tilde{x} = (x_j : j \in \tilde{j})^T$$

وليكن Y متجهاً ذا $n-m$ مركبة مُشكلاً من المجاهيل غير الأساسية أي:

$$Y = (x_j : j \in j - \tilde{j})^T \quad \text{و} \quad \tilde{c} = (c_j : j \in \tilde{j})^T$$

$$d = (c_j : j \in j - \tilde{j})^T$$

عندئذ تصبح المسألة بالشكل:

$$\tilde{c}^T \tilde{x} + d^T Y \rightarrow \min \quad (5.3)$$

$$B\tilde{x} + DY = b \quad (5.4)$$

$$\tilde{x} \geq 0, \quad Y \geq 0 \quad (5.5)$$

إن حل الجملة $B\tilde{x} + DY = b$ بالطريقة البسيطة من أجل أساس مختار B يعني نقلها إلى الشكل القانوني:

$$\tilde{x} = B^{-1}b - B^{-1}DY \quad (5.6)$$

وبالتالي تنتقل إلى الشكل التالي:

$$\tilde{c}^T B^{-1}b - \tilde{c}^T B^{-1}DY + d^T y \rightarrow \min \quad (5.7)$$

$$B^{-1}b - B^{-1}DY \geq 0 \quad (5.8)$$

$$Y \geq 0 \quad (5.9)$$

(وضعنا العلاقة (5.8) على الشكل: $B^{-1}b - B^{-1}DY \geq 0$ لأن $x \geq 0$).

إن الحل الأساسي $Y=0$ و $\tilde{x} = B^{-1}b$ لجملة المعادلات (5.6) سيكون حلاً قاعدياً للمسألة (I) إذا كان $B^{-1}b \geq 0$.

تعريف:

تدعى المصفوفة الجزئية النظامية B ذات المرتبة m من المصفوفة A ، أساساً ممكناً إذا تحقق الشرط $B^{-1}b \geq 0$ ويدعى الأساس الممكن المقابل للحل القاعدي المثالي للمسألة (I) أساساً مثالياً.

5.3- خوارزمية السيمبلكس الأساسية

إذا كنا نعلم أن الأساس الأولي ممكن B ، فيمكن دون التأثير في عمومية المسألة الفرض بأن الأعمدة m الأولى من المصفوفة $A = (a^1, \dots, a^n)$ تشكل الأساس B أي أن:

$$B = (a^1, \dots, a^m)$$

$$D = (a^{m+1}, \dots, a^n)$$

بهذا يكون الحل القاعدي ذا المركبات $\tilde{x} = B^{-1}b$ و $Y=0$ معيناً، ويمكن نقل جملة الشروط $Ax = b$ إلى الشكل القانوني:

$$(I : B^{-1}D)x = B^{-1}b \quad (5.10)$$

ونقل دالة الهدف $c^T x$ إلى الشكل:

$$\begin{aligned} \tilde{c}^T B^{-1}b + (c^T - \tilde{c}^T B^{-1}A)x = \\ \tilde{c}^T B^{-1}b + (d^T - \tilde{c}^T B^{-1}D)Y = f \end{aligned} \quad (5.11)$$

$$\text{حيث: } \tilde{c}^T = (c_1, \dots, c_m) \text{ و } d^T = (c_{m+1}, \dots, c_n)$$

لنضع:

$$T^{\circ} = B^{-1}b \quad (5.12)$$

$$T^j = B^{-1}a_j \quad ; \quad j \in \{1, \dots, n\} \quad (5.13)$$

حيث: $T = (T_{ij}), i \in \{1, \dots, m\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$ مصفوفة أعمدها من البعد .m

فيكون:

$$T = \tilde{c}^T B^{-1}b = \tilde{c}^T T^{\circ} \quad (5.14)$$

$$\tilde{c}^T B^{-1}a_j = \tilde{c}^T T_j = Z_j \quad ; \quad j \in \{1, \dots, n\} \quad (5.15)$$

$$T_{m+1} j = Z_j - c_j \quad (5.15)$$

من أجل سلامة وإمكان الحل القاعدي الأولي $\{\tilde{x} = T^{\circ} \& y = 0\}$ ينتج أن:

$$T_{i0} > 0 : i = 1, \dots, n$$

إن المتجهات $T_j = 1, 2, \dots, n$ و T° تمثل المتجهات a_j, b نفسها في الأساس .B

باستخدام الرموز السابقة يمكن كتابة المعادلة i من الجملة (5.10) كما يلي:

$$T_{io} = x_i + \sum_{j=m+1}^n T_{ij} x_j, \quad i = 1, \dots, m \quad (5.17)$$

ويمكن كتابة دالة الهدف (5.11) بالشكل:

$$T_{00} = f + \sum_{j=m+1}^n T_{j0} x_j \quad (5.18)$$

ترتب جميع عناصر T_{ij} حيث $i = 1, \dots, m+1$ و $j = 0, 1, \dots, n$ في جدول سيمبلكس كما يلي:

دالة الهدف	المجاهيل الأساسية	قيم المجاهيل الأساسية	c_1	c_2	...	c_m	c_{m+1}	...	c_n
c	x	b	x_1	x_2	...	x_m	x_{m+1}	...	x_n
c_1	x_1	T_{10}	1	0	...	0	x_{1m+1}	...	T_{1n}
c_2	x_2	T_{20}	0	1	...	0	x_{2m+1}	...	T_{2n}
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
c_m	x_m	T_{m0}	0	0	...	1	x_{mm+1}	...	T_{mn}
		T_{00}	0	0	...	0	x_{0m+1}	...	T_{0n}

الجدول (5.1)

حيث إن الجملة المنقولة للشرو هي العلاقة (5.17) ودالة الهدف هي العلاقة (5.18) المقابل للأساس B وأن عناصر أعمدة الحقل الداخلي للجدول تحوي معامل المصفوفة A مضروبة بالمصفوفة العكسية لمصفوفة متجهات الأساس والتي تتطابق مع قيم المجاهيل الأساسية المقابلة للحل القاعدي.

أما السطر الأخير من الجدول فيحوي قيم دالة الهدف (T_{00}) من أجل الحل القاعدي المجهول وبإشارة مخالفة لقيمة المجاهيل المقررة $(d^T - \tilde{c}^T B^{-1} D)_j$ المعروفة من جدول سيمبلكس.

إن الجدول المثالي للحل القاعدي بالمركبات:

$$x_i = T_{i0} / i = 1, \dots, m \text{ \& } x_i = 0 / i = m+1; \dots, n$$

$$T_{m+1j} \leq 0 \quad j = 1; \dots, n \quad \text{يكون: (5.19)}$$

إذا وجد عنصر من عناصر السطر الأخير في جدول سيمبلكس موجباً أي

$T_{01} > 0$ حيث $l = m+1, \dots, n$ ننقل إلى أساس جديد وكذلك كما يلي:

$$\hat{\lambda} = \sup \{ \lambda : T_{i0} - \lambda T_{il}, i = 1, \dots, m \}$$

وتكون قيمة $\hat{\lambda}$ محدودة فقط عندما يكون T_{il} موجوداً، في هذه الحالة يكون:

$$\hat{\lambda} = \min \left\{ \frac{T_{i0}}{T_{ih}} : h, i \in \{1, \dots, m\} \text{ \& } T_{il} > 0 \right\} \quad (5.20)$$

بفرض أنه تم الحصول على القيمة الصغرى $\hat{\lambda}$ في (5.20) من أجل الدليل $r \in \{1, \dots, m\}$ عندئذ يكون T_{rl} العنصر الأساسي. أما الأساس الجديد فسيحوي مكان العمود الدوراني a^r من المصفوفة A العمود I من المصفوفة نفسها. إن نقل الجملة $Ax = b$ المقابلة للأساس الجديد يتطلب التعبير عن المجهول الأساسي الجديد x_l بوساطة المجاهيل:

$$x_{m+1}, \dots, x_{l-1}, x_r, x_{l+1}, \dots, x_n$$

من المعادلة r من الجملة (5.17) نحصل على:

$$X_l = \frac{1}{T_{rl}} \left[T_{r0} - x_l - \sum_{j=m+1}^n T_{rj} X_j \right] \quad (5.21)$$

أي:

$$\frac{T_r}{T_{ro}} = X_l = \frac{1}{T_{rl}} + \sum_{\substack{j=m+1 \\ j \neq l}}^n \frac{T_{rj}}{T_{rl}} X_j \quad (5.22)$$

نعوض X_l المعين حسب (5.21) بالمعادلات المتبقية في الجملة (5.17) وبالعلاقة (5.18) أي دالة الهدف:

$$T_{l0} - \frac{T_{r0} T_{il}}{T_{rl}} = X_i + \sum_{\substack{j=m+1 \\ j \neq l}}^n (T_{ij} - \frac{T_{ij} T_{rj}}{T_{rl}}) X_j - \frac{T_{il}}{T_{rl}} X_r \quad (5.23)$$

لأجل $i \in \{1, \dots, m\}$, $i \neq r$

$$T_{00} - \frac{T_{0j} T_{ro}}{T_{rl}} = f + \sum_{\substack{j=m+1 \\ j \neq l}}^n (T_{0j} - \frac{T_{0j} T_{rj}}{T_{rl}}) X_j - \frac{T_{0l}}{T_{rl}} X_r \quad (5.24)$$

بما أن $T_{rr} = 1$ و $i \neq r$ يمكن كتابة كل من (5.22) و (5.23) و (5.24) بالشكل:

$$T_{io}^* = X_i + \sum_j T_{ij}^* X_j$$

$$T_{io}^* = X_i + \sum_j T_{ij} X_j \quad i \neq r, i = 1, \dots, m$$

$$T_{oo}^* = f + \sum_j T_{oj}^* X_j$$

$$T_{ij}^* = T_{ij} - \frac{T_{rj} T_{il}}{T_{rl}}; i \neq r, i = 1, \dots, m+1, j = 1, \dots, n \quad (5.25)$$

$$T_{ij}^* = \frac{T_{rj}}{T_{rl}} \quad (2.26)$$

إن العلاقات (5.25) و (5.26) تقابل الخطوات المتتالية لخوارزمية هدفها نقل متجه معامل المجهول X_i إلى متجه واحد مركبته الدورانية (رقم r) تساوي الواحد. يمكن تلخيص خوارزمية سيمبلكس الأساسية كما يلي:

1. الخطوة الأولى: نعين الحل القاعدي الأولي ونكتب جدول سيمبلكس المقابل له.
2. الخطوة الثانية: إذا كان $T_{il} \leq 0$ حيث $j = 1, \dots, m$ ننقل إلى الخطوة (4) وفي الحالة المعاكسة نختار دليل l من مجموعة الأدلة $\{m+1, \dots, n\}$ يكون من أجله $T_{ol} > 0$ (أي أكبر عدد موجب) وننقل إلى الخطوة (3).
3. الخطوة الثالثة: إذا كان $T_{il} \leq 0$ حيث $i = 1, \dots, m$ ننقل إلى الخطوة (5) وفي المحاولة المعاكسة نعين دليل r بحيث يكون:

$$\frac{T_{ro}}{T_{rl}} = \min \left\{ \frac{T_{io}}{T_{il}} ; i = 1, \dots, m, T_{il} > 0 \right\}$$

ونشكل جدول سيمبلكس جديد وفق الشروط:

- أ- في عمود أمثال دالة الهدف نبدل c_r بـ c_l وفي عمود المجاهيل الأساسية نبدل x_l بـ x_r .

ب- ننقل مصفوفة سيمبلكس:



$$T = (T_{ij}; i = 1, \dots, m+1, j = 0, \dots, n)$$

$$T_{ij}^* = T_{ij} - \frac{T_{rj} T_{il}}{T_{rl}}, i \neq r, i = 1, \dots, m+1, j = 0, \dots, n$$

$$T_{ij}^* = \frac{T_{ri}}{T_{rl}}$$

ثم ننتقل إلى الخطوة (2).

4. الخطوة الرابعة: النهاية. جدول سيمبلكس يعين الحل القاعدي المثالي.

5. الخطوة الخامسة: النهاية. دالة الهدف غير محدودة من الأسفل على منطقة الحلول الممكنة.

إن السطر الأخير في جدول سيمبلكس نسميه السطر صفر وترقم التحديدات الباقية بدءاً من الواحد علاقة علاقة.

ملاحظة:

لحساب قيمة دالة الهدف في المسألة الأعظمية max يتم التغيير في الخطوة الثانية لتصبح كالتالي:

إذا كان $\forall j = 1, \dots, n, T_{oj} \geq 0$ ننتقل إلى الخطوة (4) وفي الحالة المعاكسة نختار دليل $1 \in \{m+1, \dots, n\}$ فيكون من أجله $T_{ol} < 0$ العدد الأكثر سلبية وننتقل إلى الخطوة (3).

5.4 - معيار سيمبلكس الأول I والثاني II

لنأخذ المثال التالي:

$$4x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 11x_4 \rightarrow \min$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 15$$

$$7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 120$$

$$3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 \leq 100$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$$

5.4.1- معيار السيمبلكس الأول I (لمسألة أعظمية)

إذا كانت معاملات المجاهيل الأساسية سالبة في السطر صفر، نختار أحد هذه المجاهيل الذي يقابل المعامل الأكثر سلبية من أجل إدخال مجهول أساسي جديد وإخراج أحد المجاهيل الأساسية الأصلية. وعندما تصبح كل معاملات المجاهيل موجبة أو صفرية نكون بذلك قد وصلنا إلى الحل الأمثل.

في المثال السابق مثلاً يدخل المجهول x_4 المقابل للمعامل الأكثر سلبية (-11) ليصبح مجهولاً أساسياً ويخرج x_3 من المجاهيل الأساسية وتزداد قيمة دالة الهدف.

5.4.2- معيار السيمبلكس الثاني II

أ- خذ نسب معاملات الطرف الأيمن على معاملات x_r المدخل (تجاهل النسبة المعدومة أو التي تعطي قيمة سالبة في المقام).

ب- اختر النسبة الصغرى عندئذ تكون هذه النسبة مساوية قيمة المجهول المدخل بينما تصبح قيمة المجهول الذي خرج معدومة.

أنجزت الحسابات المشار إليها في المعيار II في الجدول (5.2):

الحل التالي	النسبة لأصغر	النسبة =	معاملات x_4 ÷ الطرف الأيمن	المجاهيل الأساسية
			-11 0	x_0
		15	1 15	x_5
		60	2 120	x_6
$x_4 = 6.66$ $x_7 = 0$	6.66	6.66	15 100	x_7

الجدول (5.2): تطبيق المعيار II من أجل المجهول x_4

لنتابع حل المثال وفق خوارزمية سيمبلكس:

لدينا:

$$4x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 11x_4 \rightarrow \min$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 15$$

$$7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 120$$

$$3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 \leq 100$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$$

بالتحويل إلى الشكل الثابت نحصل على:

$$(0) \quad x_0 - 4x_1 - 5x_2 - 9x_3 - 11x_4 = 0$$

$$(1) \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 15$$

$$(2) \quad 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_6 = 120$$

$$(3) \quad 3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 + x_7 = 100$$

$$x_i \geq 0, i \in 1:7$$

المعامل الأكثر سلبية في السطر (0) هو -11 وهو يقابل $l=4$.

النسبة الصغرى لعمود الطرف الثاني على عمود المجهول x_l هي $100/15$ وهي

تقابل $r=3$.

عنصر الدوران أو ما يسمى العنصر الأساسي هو $T_{34} = 15$.

ننقل الأمثال وفق العلاقة:

$$T_{ij}^* = T_{ij} - \frac{T_{rj} T_{il}}{T_{rl}}; j = 0, 1, \dots, n \quad i = 1, \dots, m+1$$

$$T_{lj}^* = \frac{T_{rj}}{T_{rl}}$$

تصبح لدينا المسألة:

$$(0) \quad x_0 - 9/5 x_1 - 4/3 x_2 - 5/3 x_3 + 11/15 x_7 = 220/3$$

$$(1) \quad 4/5 x_1 + 2/3 x_2 + 1/3 x_3 + x_5 - 1/15 x_7 = 25/3$$

$$(2) \quad 33/5 x_1 + 13/3 x_2 + 5/3 x_3 + x_6 - 2/15 x_7 = 320/3$$

$$(3) \quad 1/3 x_1 + 1/3 x_2 + 2/3 x_3 + x_4 + 1/15 x_7 = 20/3$$

نتج المعادلة (0) من ضرب المعادلة (3) بـ 11 والإضافة إلى المعادلة (0).

نتج المعادلة (1) من ضرب المعادلة (3) بـ -1 والإضافة إلى المعادلة (1).

تنتج المعادلة (2) من ضرب المعادلة (3) بـ 2 - والإضافة إلى المعادلة (2) .

وذلك بعد تقسيم المعادلة (3) على العنصر الأساسي.

نستمر بالطريقة السابقة نفسها حتى تكون جميع عناصر السطر (0) موجبة. عندها نحصل على دالة الهدف الأصغرية بعد أن نكون قد انتقلنا من حل إلى آخر حتى وصلنا إلى الحل الأمثل ونلاحظ أن دالة الهدف تقترب من قيمة الصغرى في كل خطوة.

5.5- التمثيل الجدولي:

في الشكل السابق كان الانتقال من حل تجريبي إلى حل يليه صعباً ومزعجاً ولم يكن من الضروري كتابة $x_1, \dots, x_n$ كما فعلنا في الفقرة السابقة واحتجنا فقط إلى معاملات المجاهيل لإجراء العمليات الحسابية.

لقد فهمنا عملية الانتقال من حل إلى آخر ويمكننا تنظيم العمليات الحسابية بشكل جدولي مناسب يسمى جدول سيمبلكس.

يوضح الجدولان (5.3)، (5.4) طريقتين لحل المثال السابق ونلاحظ أن الأعمدة المخصصة للمجاهيل في الجدول (5.3) سهلة جداً لدرجة أنه يمكن تجاهلها دون خطر نشوء غموض.

إن النموذج المكثف في الجدول (5.4) . هذا الجدول الصغير يتطلب إجراء عملية تغيير في عمود رئيسي واحد من أجل مجهول جديد غير أساسي في كل خطوة.

رقم قسط	رقم المتغير	المتغير الأساسية	الطرف اليمنى	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
1	x_0	0	-4	-5	-9	-11	0	0	0	0
	x_1	15	1	1	1	1	1	0	0	1
	x_2	120	7	5	3	2	0	1	0	2
	x_3	100	3	5	10	15	0	0	1	3
2	x_0	220/3	-9/5	-4/3	-5/3	0	0	0	11/15	0
	x_1	25/3	4/5	2/3	1/3	0	1	0	-1/15	1
	x_2	320/3	33/5	13/3	5/3	0	0	1	-2/15	2
	x_3	20/3	1/5	1/3	2/3	1	0	0	1/15	3
3	x_0	1105/12	0	1/6	-11/12	0	9/4	0	7/12	0
	x_1	125/12	1	5/6	5/12	0	5/4	0	-1/12	1
	x_2	455/12	0	-7/6	-13/12	0	-33/4	1	5/12	2
	x_3	55/12	0	1/6	7/12	1	-1/4	0	1/12	3
4	x_0	695/7	0	3/7	0	11/7	13/7	0	5/7	0
	x_1	50/7	1	5/7	0	-5/7	10/7	0	-1/7	1
	x_2	325/7	0	-6/7	0	13/7	-61/7	1	4/7	2
	x_3	55/7	0	2/7	1	12/7	-3/7	0	1/7	3

الجدول (5.3): جدول سيمبلكس لحل المسألة

رغم للطر	x_4	x_3	x_2	x_1	الطرف الأيمن	المجاهيل الأساسية	رغم للجدول
0	-11	-9	-5	-4	0	x_0	1
1	1	1	1	1	15	x_5	2
2	2	3	5	7	120	x_6	3
3	15	10	5	3	100	x_7	
	x_7	x_3	x_2	x_1			
0	1/15	-5/3	4/3	-9/5	220/3	x_0	1
1	1/15	1/3	2/3	4/5	25/3	x_5	2
2	2/15	5/3	3/3	33/5	320/3	x_6	3
3	1/15	2/3	1/3	1/5	20/3	x_4	
	x_7	x_3	x_2	x_1			
0	7/12	11/12	1/6	9/4	1105/12	x_0	1
1	-1/12	5/12	5/6	5/4	125/12	x_1	2
2	5/12	13/12	7/6	33/4	455/12	x_6	3
3	1/12	7/12	1/6	1/4	55/12	x_4	
	x_7	x_4	x_2	x_3			
0	5/7	11/7	3/7	3/7	695/7	x_0	1
1	-1/7	-5/7	5/7	0/7	50/7	x_1	2
2	4/7	13/7	6/7	61/7	325/7	x_6	3
3	1/7	15/7	2/7	-3/7	55/7	x_3	

الجدول (5.4): جدول سيمبلكس لحل المسألة

5.5- حالات الخوارزمية الخاصة

يمكن في بعض التكرارات أن تكون الحسابات التي تجري حسب المعيار I أو المعيار II لإدخال مجهول غير أساسي إلى المجاهيل الأساسية غامضة وذلك عندما نصادف مجهولين متساويي القيمة (في المعيار I) حيث يجب أن نختار أحدهما حسب قاعدة ما، يمكن أن نأخذ المجهول ذا الدليل الأصغر أو المجهول المتوقع لأن يكون مجهولاً أساسياً في النهاية.

كذلك عند تطبيق المعيار الثاني إذا هبط أكثر من مجهول من المجاهيل الأساسية إلى القيمة صفر فإن مجهولاً واحداً منها فقط يجب أن يخرج من المجاهيل الأساسية (المجهول الأساسي الناتج يسمى المجهول المنحل) وهنا يجب أن نقرر أي مجهول من المجاهيل التي أصبحت قيمتها صفرية يجب إزالته.

إن الخيار يمكن أن يكون كيفياً والخطر المرافق لعدم التقارب نادراً ما يحصل. إذا لم نجد في تكرار ما أثناء تطبيق المعيار الثاني في أي معامل موجب عندئذ يكون للمسألة حل غير محدود. وعندها يمكن وضع مجهول دال كيفي كبير وتزداد قيمة x_0 دون حدود وتبقى المجاهيل الأساسية المتبقية غير سالبة وبالتالي فالقيمة المثلى لدالة الهدف قيمة غير منتهية وتزودنا طريقة سيمبلكس. بمؤشرات عند ورود مثل هذه الحالة.

نصوغ هذه الحالة في المعيار II

5.5.1 - البدء بالمجاهيل الأساسية

نعود هنا إلى الاختيار البدائي الأولي للبدء بالخوارزمية. متباينات المثال الموجودة في الفقرة السابقة كلها كانت من الشكل:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_j, \quad b_i \geq 0 \quad (5.27)$$

وبإضافة مجهول فائض (مجاهيل الفروق) إلى كل علاقة فإن ذلك يؤدي إلى أن الحل يزودنا بطريقة سهلة للبدء بخوارزمية السيمبلكس. رأينا فيما سبق أن العلاقة (5.27) ليست الشكل الوحيد لمتباينات نموذج البرمجة الخطية. ورأينا أن كل نموذج برمجة خطية يمكن أن يكتب بالشكل:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i, \quad i=1, \dots, m \quad b_i \geq 0 \quad (5.28)$$

إذا كانت العلاقة i تحوي مجهولاً له معامل هو 1، كما هو الحل في المجهول الفائض، فإنه يكون مجهولاً أساسياً أولياً. أما عندما لا تحوي العلاقة أي مجهول مثل

المجهول الفائض (يحدث هذا عندما تكون العلاقة مرتبطة خطياً ببقية العلاقات) عندها نقوم بتحويل المعادلات إلى الشكل التالي:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + y_i = b_i, \quad i=1, \dots, m \quad b_i \geq 0, \quad y_i \geq 0 \quad (5.29)$$

حيث y_i يمثل هنا مجهولاً أساسياً في العلاقة i (وهنا افترضنا للسهولة أن كل معادلة تحتاج إلى مجهول اصطناعي y_i ; لأنه أضعف بشكل اصطناعي كي نحصل على حل أولي).

قد يوجد حل غير منظور وهنا فإن خوارزمية سيمبلكس قد أصبحت جاهزة ويمكن برمجتها على أي حاسوب.

5.6- المجهول الاصطناعي

هناك عدد من التقنيات الحسابية لضمان شروط المسألة بما أنها تتعلق بالدرجة الأولى بالمختصين ببحوث العمليات، وهذه المسألة بسيطة. نضيف إلى دالة الهدف المعطى كل y_i بمعامل كلفة كبير وكاف.

$$x_0 - \sum_{j=1}^n c_j x_j + \sum_{i=1}^m M y_i = 0 \quad (5.30)$$

حيث M كبيرة نسبياً عندئذ يكون كل مجهول y_i مكلفاً جداً بالمقارنة مع أي مجهول x_j ، للبدء بالخوارزمية علينا أولاً حذف كل y_i من (5.30) باستخدام (5.29) وهذا يعطي:

$$x_0 - \sum_{j=1}^n c_j x_j - M \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = -M \sum_{i=1}^m b_i \quad (5.31)$$

وهذا يكافئ:

$$x_0 - \sum_{j=1}^n (c_j + M \sum_{i=1}^m a_{ij}) x_j = -M \sum_{i=1}^m b_i \quad (5.32)$$

سنوضح هذه الطريقة بالمثال التالي:

- 1) $-3x_1 - 2x_2 \rightarrow \max$
- 2) $x_1 + x_2 = 10$
- 3) $x_1 \geq 4$
- 4) $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

نضيف المجهول x_3 إلى (3) فنجد:

$$x_0 + 3x_1 - 2x_2 = 0$$

- 5) $x_1 + x_2 = 10$
- $x_1 - x_3 = 4$

ثم ندخل المجاهيل الاصطناعية y_1, y_2 :

- 6) $x_3 + 3x_1 - 2x_2 + My_1 + My_2 = 0$ (0)
- $x_1 + x_2 + y_1 = 10$ (1)
- $x_1 - x_3 + y_2 = 4$ (2)

للبداء بالخوارزمية نطرح السطر (1) والسطر (2) من السطر (0) عشر مرات

حتى نحذف y_1, y_2 من دالة الهدف:

- 4) $x_0 - 17x_1 - 8x_2 + 10x_3 = -140$ (0)
- $x_1 + x_2 + y_1 = 10$ (1)
- $x_1 - x_3 + y_2 = 4$ (2)

لدينا مجهولان أساسيان هما y_2, y_1 ، نتابع حتى الوصول إلى الحل الأمثل الذي

يوافق:

$$x_1 = 4, x_2 = 6$$

مثال:

$$\text{Minimise } Z = 3X_1 + 8X_2 + X_3$$

وفقاً إلى الشروط

$$\begin{aligned} 6X_1 + 2X_2 + 6X_3 &\geq 6 \\ 6X_1 + 4X_2 &= 12 \\ 2X_1 - 2X_2 &\leq 2 \end{aligned}$$

هناك نسبتان متساويتان هما الأولى والثالثة، لذلك نختار إحداهما مثلاً الأولى .
 $R1$ سيكون المجهول الخارج وسيحل محله المجهول $X1$ في الجدول السيمبلكس
 (5.6). عنصر الدوران هو العنصر 6. بعد تطبيق خطوات الطريقة السيمبلكس
 ينتج:

$X1$	$X2$	$X3$	$S1$	$S2$	$R1$	$R2$	هدف
0	$2M-7$	$-6M+2$	$M-1/2$	0	$-2M+1/2$	0	$6M+3$
1	$1/3$	1	$-1/6$	0	$1/6$	0	1
0	2	-6	1	0	-1	1	6
0	$-8/3$	-2	$1/3$	1	$16/3$	0	0

جدول السيمبلكس (5.6)

الحل في الجدول غير أمثل لوجود قيم موجبه في دالة الهدف. نختار أكبر القيم
 الموجبة في دالة الهدف، حيث إن أكبر قيمة موجبة في دالة هدف الجدول (5.6) هو
 المقدار $2M-7$. لذلك فإن المجهول الداخل سيكون $X2$ لأن $2M-7$ هو معامل $X2$
 في دالة الهدف.

المجهول الخارج هو المجهول في عمود أقل نسبة من النسب

$\left[\frac{6}{2}, \frac{1}{3} \right]$ ، لا تؤخذ له نسبة لأن المقام كمية سالبة [أقل نسبة تقع في عمود

المجهول $R2$ لذلك فإن المجهول الخارج سيكون $R2$ ويحل محله المجهول $X2$.
 بتطبيق خطوات الطريقة السيمبلكس نحصل على الجدول السيمبلكس (5.7):

هـبف	$R2$	$R1$	$S2$	$S1$	$X3$	$X2$	$X1$	هـبف الأساسية
24	$-M+7/2$	$-M-3$	0	3	-19	0	0	Z
0	0	0	0	$-1/3$	2	0	1	$X1$
3	1	$-1/2$	0	$1/2$	-3	1	0	$X2$
8	0	4	1	$8/3$	-10	0	0	$\leftarrow S2$

جدول السيمبلكس (5.7)

$R1$, $R2$ مجهولان اصطناعيان يساعدان في إيجاد الحل وليس لهما أي دور آخر بعد أن خرجا من ضمن المجاهيل الأساسية ولذلك يحذف عمودا $R1$, $R2$ من أي اعتبارات أخرى. لا يزال الحل غير أمثل لوجود قيم موجبة في دالة هدف الجدول السيمبلكس (5.7). أكبر معامل موجب في دالة هدف الجدول السيمبلكس (5.7) هو المقدار 3 الواقع في عامود المجهول $S1$ وإن المجهول الخارج هو $S2$ ، أي أن $S1$ يحل محل $S2$ كما مبين ذلك في الجدول السيمبلكس (5.8):

هـبف	$S2$	$S1$	$X3$	$X2$	$X1$	هـبف الأساسية
15	$-9/8$	0	$-31/4$	0	0	Z
1	$1/8$	0	$1/4$	0	1	$X1$
$3/2$	$-3/16$	0	$-9/8$	1	0	$X2$
3	$3/8$	1	$-30/8$	0	0	$S1$

جدول السيمبلكس (5.8)

جميع القيم في دالة هدف الجدول السيمبلكس (5.8) سالبة ولذلك فإن الحل هو
الحل الأمثل وأن قيمة Z المثلى:

$$Z^* = 15$$

$$X_1 = 1$$

$$X_2 = 3/2$$

مثال:

$$\text{Maximise } Z = 3X_1 + X_2 - X_3$$

وفقاً إلى الشروط الآتية:

$$X_1 + X_2 + X_3 = 10$$

$$2X_1 - X_2 \geq 2$$

$$X_1 - 2X_2 + X_3 \leq 15$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

بعد إضافة مجاهيل خاملة ومجاهيل فروق ومجاهيل اصطناعية، تكون الشروط

كما يلي:

$$X_1 + X_2 + X_3 + R_1 = 10$$

$$2X_1 - X_2 - S_1 + R_2 = 2$$

$$X_1 - 2X_2 + X_3 + S_2 = 15$$

$$X_1, X_2, X_3, R_1, R_2, S_1, S_2 \geq 0$$

في حالة التعظيم maximize نطرح M مضروبة بـ R_1 , M مضروبة بـ R_2
من دالة الهدف. أي أن

$$\text{Maximise } Z = 3X_1 + X_2 - X_3 - MR_1 - MR_2$$

من أجل جميع معاملات R_1, R_2 في دالة الهدف تساوي صفر نضيف إليها:

$$M \times \text{معادلة } R_1$$

$$M \times \text{معادلة } R_2$$

$$\dots \dots \dots \text{الخ.}$$

$$\begin{aligned}
Z - 3X_1 + X_2 - X_3 - MR_1 - MR_2 &= 0 \\
-MX_1 - MX_2 - MX_3 - MR_1 &= -10M \\
-2MX_1 + MX_2 + MS_1 - MR_2 &= -2M
\end{aligned}$$

$$Z(3+3M)X_1 - X_2 + (1-M)X_3 + MS_1 = -12$$

تكتب دالة الهدف والشروط كما في الجدول السيمبلكس (5.9):

المتغيرات الأساسية	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	R_1	R_2	الثابت
Z	-3-3M	-1	-M+1	M	0	0	0	-12M
R1	1	1	1	0	0	1	0	10
← R2	2	-1	0	-1	0	0	1	2
S2	1	-2	0	0	1	0	0	6

جدول السيمبلكس (5.9)

في حالة التعظيم نختار المجهول الداخل ذا المعامل الأكثر سالبية في دالة الهدف. أكثر مقدار سالب في دالة الهدف هو $(-3-3M)$ إن X_1 سيكون مجهول الدخول. R_2 هو المجهول الخارج لأن أقل نسبة تقع في السطر R_2 . نطبق خطوات طريقة السيمبلكس على جدول السيمبلكس (5.9) وبذلك نحصل على جدول السيمبلكس (5.10):

المتغيرات الأساسية	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	R_1	R_2	الثابت
Z	0	$-3/2M-5/2$	$1-M$	$3/2-1/2M$	0	0	$1/2+1/2M$	$3-9M$
R1	0	$3/2$	1	$1/2$	0	1	$-1/2$	9
X_1	1	$-1/2$	0	$-1/2$	0	0	$1/2$	1

جدول السيمبلكس (5.10)

الحل غير أمثل/ لذلك نختار المعامل الأكثر سالبية في دالة هدف الجدول السيمبلكس (5.10). إن المقدار $\left(-\frac{3}{2}M - \frac{5}{2}\right)$ معامل X_2 هو الأكثر سالبية. X_2 يكون المجهول الداخل وأن R_1 سيكون المجهول الخارج بعد تطبيق خطوات الطريقة السيمبلكس نحصل على الجدول (5.11):

الثابت	R_2	R_1	S_2	S_1	X_3	X_2	X_1	التغيرات الأساسية
18	$M+2/3$	$M+5/3$	0	$-2/3$	$8/3$	0	0	Z
6	$-1/3$	$2/3$	0	$1/3$	$2/3$	1	0	X_2
4	$1/3$	$1/3$	0	$-1/3$	$1/3$	0	1	X_1
14	-1	1	1	(1)	2	0	0	$\leftarrow S_2$

جدول السيمبلكس (5.11)

R_2 , R_1 في الجدول السيمبلكس (5.11) مجاهيل غير أساسية ولذلك يحذفان من أي مجاهيل أخرى.

الحل لا يزال غير أمثل كما نلاحظ ذلك في الجدول السيمبلكس (5.11) حيث المعامل الأكثر سالبية هو المقدار $-2/3$ وهو معامل S_1 . لذلك فإن S_1 المجهول الداخل وأن S_2 سيكون المجهول الخارج. بعد تطبيق خطوات الطريقة السيمبلكس ينتج الجدول السيمبلكس ينتج الجدول السيمبلكس (5.12):

المتغيرات الأساسية	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	الثابت
Z	0	0	4	0	$2/3$	$82/3$
X_2	0	1	0	0	$-1/3$	$4/3$
X_1	1	0	1	0	$1/3$	$26/3$
S_1	0	0	2	1	1	14

جدول السيمبلكس (5.12)

$$Z^* = \frac{82}{3}$$

$$X_1 = \frac{26}{3}$$

$$X_2 = \frac{4}{3}$$

مثال:

$$\max \text{imize } Z = -3X_1 - 2X_2 - X_3$$

وفقاً للشروط:

$$2X_1 + X_2 + X_3 \geq 4$$

$$3X_1 + X_2 + 3X_3 \geq 10$$

$$-X_1 + 2X_2 - X_3 \geq 1$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

نحول الشروط إلى الشكل أصغر أو يساوي وذلك بضرب كل شرط بإشارة سالبة:

$$-2X_1 - X_2 - X_3 \leq -4$$

$$-3X_1 - X_2 - 3X_3 \leq -10$$

$$X_1 - 2X_2 + X_3 \leq -1$$

بعد إضافة المجاهيل الخاملة S_1, S_2, S_3 نحصل على الصيغة الآتية:

$$\max imise Z = 3X_1 + 2X_2 + X_3$$

$$-2X_1 - X_2 - X_3 + S_1 = -4$$

$$-3X_1 - X_2 - 3X_3 + S_2 = -10$$

$$X_1 - 2X_2 + X_3 + S_3 = -1$$

$$S_1, S_2, S_3, X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

نرتب البيانات أعلاه على شكل جدول سيمبلكس (5.13) :

المجاهيل الأساسية	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	الثابت
Z	3	2	1	0	0	0	0
S_1	-2	-1	-1	1	0	0	-4
$\leftarrow S_2$	-3	-1	-3	0	1	0	-10
S_3	1	-2	1	0	0	1	-1

جدول السيمبلكس (5.13)

المجهول الخارج هو المجهول الأساسي ذو القيمة الأكثر سالبية S_2 سيكون

المجهول الخارج

المجهول الداخل هو المجهول الواقع في عمود أصغر نسبة مطلقة في حالة

التعظيم حيث تعرف النسبة المطلقة بأنها النسبة التي تؤخذ بغض النظر عن الإشارة

السالبة أو الموجبة:

∴ أقل قيمة مطلقة هي 3.

	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3
معامل دالة الهدف Z	3	2	1	0	0	0
معامل سطر المجهول الخارج	-3	-1	-3	0	1	0
النسبة المطلقة	$ -3/3 $	$ -2/1 $	$ -1/3 $	-	-	-
النسبة	1	2	1/3	-	-	-

أقل نسبة $\frac{1}{3}$ تقع في عمود المجهول X_3 . لذلك فإن المجهول الداخل سيكون X_3 .

وإن عنصر الدوران (3-). بإتباع خطوات طريقة السيمبلكس نحصل على الجدول السيمبلكس (5.14):

المجاهيل الأساسية	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	الثابت
Z	2	$5/3$	0	0	$1/3$	0	$-10/3$
S_1	-1	$-2/3$	0	1	$-1/3$	0	$-2/3$
X_3	1	$1/3$	1	0	$-1/3$	0	$10/3$
$\leftarrow S_3$	0	$-7/3$	0	0	$1/3$	1	$-13/3$

جدول السيمبلكس (5.14)

بالطريقة نفسها نجد أن المجهول الخارج S_3 والمجهول الداخل X_2 والعنصر الدوران $\frac{-7}{3}$ وإن الجدول السيمبلكس سيكون:

المجاهيل الأساسية	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	الثابت
Z	2	0	0	0	$4/7$	$5/7$	$-45/7$
S_1	-1	0	0	1	$-3/7$	$-2/7$	$4/7$
X_3	1	0	1	0	$-2/7$	$1/7$	$19/7$
X_2	0	1	0	0	$-1/7$	$-3/7$	$13/7$

جدول السيمبلكس (5.15)

نلاحظ في الجدول (5.15) إن قيم $X_3=19/7$, $X_1=13/7$

$S1=4/7$ وإن جميعها أكبر أو تساوي صفراً. إذاً الحل الأمثل هو $Z^*=-45/7$.
 في حالة إضافة شروط جديدة لمسألة البرمجة الخطية أو تغيير بعض الكميات
 المتوفرة كتنغير قيمة $X3$ مثلاً إلى $X3 \leq 2$. من الجدول (5.15) نلاحظ أن $X3$
 تساوي $19/7$ وهذه أكبر من 2.

لذلك يجب إعادة حل المثال وفقاً للشرط الجديد المضاف وهكذا تكمن أهمية
 الأنموذج المقابل في عدم إعادة إيجاد الحل من جديد وإنما يضاف الشرط الجديد إلى
 آخر جدول سيمبلكس يمثل الحل الأمثل.

بعد إضافة المجهول المكمل $S4$ إلى الشرط الجديد:

$$X3 + S4 = 2$$

نعوض عن المجاهيل الأساسية بما يساويها في الجدول السيمبلكس الأمثل. إن
 المجهول الأساسي في المعادلة هو $X3$. نكتب من الجدول (5.15) معادلته كما
 يلي:

$$X1 + X3 - \frac{2}{7}S2 + \frac{1}{7}S3 = \frac{19}{7}$$

أو

$$X3 = \frac{19}{7} - X1 + \frac{2}{7}S2 - \frac{1}{7}S3$$

بعد التعويض عن $X3$ في المعادلة $X3 + S4 = 2$ ينتج:

$$-X1 + \frac{2}{7}S2 - \frac{1}{7}S3 + S4 = -\frac{5}{7}$$

بعد إضافة هذه المعادلة إلى الجدول السيمبلكس (5.15) نحصل على الجدول
 السيمبلكس (5.16):

المجاهيل الأساسية	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	S_4	الثابت
Z	2	0	0	0	4/7	3/7	0	-45/7
S_1	1	0	0	1	-3/7	-2/7	0	4/7
X_3	1	0	1	0	-2/7	1/7	0	19/7
X_2	0	1	0	0	-1/7	-3/7	0	13/7
$\leftarrow S_4$	-1	0	0	0	2/7	-1/7	1	-5/7

جدول السيمبلكس (5.16)

الحل في الجدول السيمبلكس غير أمثل. إن المجهول الخارج هو S_4 وإن المجهول الداخل يحدد كما يلي:

	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	S_4
معامل دالة الهدف	2	0	0	0	4/7	5/7	0
معامل سطر S_4	-1	0	0	0	2/7	-1/7	1
النسبة المطلقة	$ -2/1 $	-	-	-	-	$ 5/7 $ $ -1/7 $	-

أقل نسبة هي 2 تقع في عمود المجهول X_1 .

إذاً X_1 يكون المجهول الداخل وإن عنصر الدوران هو العنصر (-1). بإتباع طريقة السيمبلكس نحصل على:

المجاهيل الأساسية	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	S_4	الثابت
Z	0	0	0	0	5/7	3/7	2	-55/7
S_1	0	0	0	1	-5/7	-1/7	-1	9/7
X_3	0	0	1	0	0	0	1	2
X_2	0	1	0	0	-1/7	-3/7	0	13/7
X_1	1	0	0	0	-2/7	-1/7	-1	5/7

الجدول السيمبلكس (5.17)

الحل الأمثل :

$$X_1 = 5/7$$

$$X_2 = 13/7$$

$$X_3 = 2$$

$$Z = -55/7$$

وإن دالة الهدف:

مثال:

$$\text{Minimise } Z = 4X_1 + 3X_2 - 3X_3$$

وفقاً للشروط الآتية:

$$5X_1 - 2X_2 + X_3 \geq 3$$

$$3X_1 + 4X_2 + 2X_3 \geq 6$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

نكتب الشرطين على شكل أصغر أو يساوي وذلك بضرب كل منهما بإشارة سالبة

وكما يلي:

$$\text{Maximise } Z = -4X_1 - 3X_2 + 3X_3$$

وفقاً للشروط:

$$\begin{aligned}
-5X_1 + 2X_2 - X_3 &\leq -3 \\
-3X_1 - 4X_2 - 2X_3 &\leq -6 \\
X_1, X_2, X_3 &\geq 0
\end{aligned}$$

بعد إضافة المجاهيل الخاملة S_1, S_2 نحصل على الجدول السيمبلكس (5.18):

الثابت	S_2	S_1	X_3	X_2	X_1	التغيرات الأساسية
0	0	0	-3	-3	-4	Z
-3	0	1	-1	2	-5	S_1
-6	1	0	-2	-4	-3	$\leftarrow S_2$

جدول السيمبلكس (5.18)

الحل الابتدائي هو $Z = 0, S_2 = -6, S_1 = -3$

إن الحل الابتدائي أعلاه حل غير مقبول لأن قيم المجاهيل الأساسية سالبة. وإذا لاحظنا في الوقت نفسه دالة الهدف Z فإننا نستنتج أن معاملات مجاهيل دالة الهدف سالبة وهذا يعني عدم إمكانية إيجاد الحل الأمثل.

مثل هذه المشاكل يمكن إيجاد الحل الأمثل لها باستخدام الطريقة السيمبلكس للأنموذج المقابل حيث تختلف الطريقة السيمبلكس للأنموذج المقابل عن الأنموذج الأولي فقط في تحديد المجهول الداخل والمجهول الخارج

Variable & leaving variable

تحديد المجهول الخارج: leaving variable

إن الجهة اليمنى (الثابت) عبارة عن معاملات دالة الهدف في طريقة السيمبلكس (الأنموذج الأولي) لذلك نختار المقدار الأكثر سالبية في الجهة اليمنى. المجهول الأساسي ذو المقدار الأكثر سالبية سيكون المجهول الخارج. المقدار الأكثر سالبية

هو المقدار (-6) وهو قيمة المجهول الأساسي S2. وهكذا فإن S2 سيكون المجهول الخارج وسيحل محله المجهول الداخل الذي نحدده:

تحديد المجهول الداخل: Entering variable

نعين المجهول الداخل عن طريق حساب نسبة معاملات المجاهيل في دالة الهدف إلى الرقم الذي يقابله في سطر المجهول الخارج وتهمل القسمة على المقدار صفر أو المقدار الموجب.

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2
معاملات دالة الهدف Z	-4	-3	-3	0	0
معاملات المجهول الخارج S2	-3	-4	-2	0	1
النسبة	$4/3$	$3/4$	$3/2$	-	-

أقل نسبة هي $\frac{3}{4}$ وهي النسبة الواقعة في عمود x_2 ولذلك فإن المجهول الداخل هو المجهول x_2 . عنصر الدوران هو المقدار (-4). نتبع الآن العمليات المتبعة في طريقة السيمبلكس نفسها لحساب قيم الجدول السيمبلكس (5.18):

المجاهيل الأساسية	$x_1 \downarrow$	x_2	x_3	s_1	s_2	الثابت
Z	-7/4	0	-3/2	0	-3/9	9/2
$\leftarrow s_1$	-13/2	0	-2	1	1/2	-6
x_2	3/4	1	1/2	0	-1/4	3/2

جدول السيمبلكس (5.18)

الحل غير أمثل. المجهول الخارج سيكون s_1 لأنه المجهول الأساسي ذو القيمة الأكثر سالبية هو (-6).
نحدد المجهول الداخل كما يلي:

	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2
معاملات دالة الهدف	$-7/4$	0	$-3/2$	0	$-3/4$
معاملات المجهول الخارج S_1	$-13/2$	0	-2	1	$1/2$
النسبة	$7/26$	-	$3/4$	-	-

أقل نسبة هي النسبة الواقعة في عمود المجهول X_1 . إن X_1 سيكون المجهول الداخل وإن عنصر الدوران هو المقدار $(-\frac{13}{2})$ بإتباع خطوات البرمجة الخطية نحصل على الجدول السيمبلكس (5.19):

المجاهيل الأساسية	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	الثابت
Z	0	0	$-25/26$	$-7/26$	$-23/25$	$159/26$
X_1	1	0	$4/13$	$-2/13$	$-1/13$	$12/13$
X_2	0	1	$7/26$	$3/26$	$-5/26$	$21/26$

جدول السيمبلكس (5.19)

الحل هو الحل الأمثل لأن قيم المجاهيل الأساسية موجبة.

$$X_1 = \frac{12}{13}$$

$$X_2 = \frac{21}{26}$$

$$Z^* = \frac{159}{26} \text{ وإن دالة الهدف المثلى هي}$$

5.7- خواص الحل الأمثل

سوف نعرض ما توصلنا إليه في نموذج خوارزمية السيمبلكس.

(i) تطبق الخوارزمية على جميع الأمثليات الخطية.

(ii) يكون الحل النهائي في التكرار الأخير (في جدول سيمبلكس الأخير) حلاً دقيقاً للمسألة.

إذا حوى نموذج الأمثلية الخطي على حل أمثل منته فإنه يوجد حل أساسي أمثل. من أجل إثبات هذه النظرية لنفترض أنه لدينا حل لنموذج من برمجة خطية بـ 50 متباينة مستقلة خطياً و 300 مجهول إذا بقيت المسألة بهذا الشكل فإنه يوجد حل أمثل يحوي على الأكثر من 50 مجهولاً موجباً. ويمكن تحسين القيمة المثلى لدالة الهدف بإضافة مجاهيل أكثر ولكن هذا لن يزيد عدد المجاهيل الموجبة أكثر من 50 وهذا سيوسع حجم المجاهيل الأساسية.

5.8- خواص التقارب

عادةً يكون تحقيق التقارب أكثر المهمات صعوبة في تطوير الخوارزمية سنرى لماذا.

نعلم أن معياري سيمبلكس I و II يؤثران في النموذج الذي يكون الحل الناتج عن اختبارات متعاقبة والذي يمكن اعتباره حلاً متطوراً وقيمة دالة الهدف لا تكون أسوأ من القيمة الناتجة عن الحل السابق أي لو تناقصت قيمة دالة الهدف المراد تصغيرها في كل تكرار فإن هذا لا يعني التقارب.

لكي نبرهن أن خوارزمية سيمبلكس تقودنا بعدد محدود من الخطوات نحو الحل الأمثل للبرنامج الخطي يكفي أن نلاحظ أن الانتقال من الجدول رقم (i) إلى الجدول (i+1) حسب هذه الطريقة ينقلنا من ذروة A_i في منطقة الإمكانيات، التي تقابل القيمة f_i لدالة الهدف إلى ذروة $A_i + 1$ ، التي تقابل القيمة $f_{i+1} = f_i - \lambda.T_{os}$ لدالة الهدف حيث $s = \{1, \dots, n\}$ و T_{os} معاملات دالة الهدف و λ قيمة صغيرة موجبة.

وفي هذه الحالة تكون الذروتان الموافقتان متميزتين. وبما أننا ننقل في كل خطوة باتجاه واحد، بالنسبة لزيادة f (إذا كانت دالة ربح) أو لتناقصه (إذا كانت دالة خسارة) فإن أية خطوة تالية لا يمكن أن تعيدنا إلى الذروة A_i التي انتقلنا منها. من الواضح أن عدد الذرات المتميزة في برنامج خطي يحتوي على m متباينة و n مجهولاً لا يمكن أن يتجاوز عدد التوافيق.

$$C_m^n = \binom{n}{m} = \frac{n!}{m! (n-m)!} \quad (5.33)$$

لأن كل ذرة تقابل قاعدة قاعدة مكونة من m من الأعمدة المستقلة خطياً المختارة من أعمدة مصفوفة الأمثال.

إذاً لا يمكن أن نمر بالذرة نفسها أكثر من مرة واحدة وتقودنا الخوارزمية إلى الحل الأمثل بعدد من الخطوات لا يتجاوز $\binom{n}{m}$ إذا كان هذا الحل موجوداً.

ولنلاحظ أن عدد الخطوات هو بالفعل أصغر بكثير من $\binom{n}{m}$ وبالطبع. لا نعد إلى تغيير في جدول سيمبلكس الناتج إلا إذا كان $(T_{os} < 0)$ في دالة الربح أو $T_{os} > 0$ في دالة الخسارة. وبالتالي فإن الشرط $T_{os} \neq 0$ محقق دوماً عند وجود تغيير في القاعدة.

لنبحث إذاً في الحالة الوحيدة المتبقية وهي الحالة التي يتوجب فيها تغيير القاعدة (لوجود $T_{os} < 0$ في دالة ربح أو $T_{os} > 0$ في دالة خسارة) والتي يكون فيها:

$$\lambda = \min_j \left\{ \frac{T_{j0}}{T_{js}} \mid j \in 1:n, T_{js} > 0 \right\} = 0 \quad (5.34)$$

إن هذه الحالة يمكن أن تحصل فقط إذا كانت مجاهيل القاعدة ذات قيمة معدومة ونقول عن الحل الأساسي في هذه الحالة أنه حل منحل.

إذاً الحالة التي تحقق (5.34) والتي نبحث عنها تنتج حلاً غير سليم عند الانتقال من الجدول رقم i إلى الجدول رقم $i+1$ هذا لا يؤدي إلى تغيير قيمة دالة الهدف كما هو واضح من العلاقة (5.30)، ولا تكون الذروتان المقابلتان لهذين الجدولين متميزين، وهذا قد لا يحدث ونبقى في الذرة نفسها أو أن ندور في حلقة مفرغة لا تسمح لنا بالوصول إلى الحل الأفضل.

5.9 - التمثيل المصفوفي لخوارزمية السيمبلكس

سوف نشرح طريقة سيمبلكس ومجاهيلها من خلال تنظيم جميع معادلاتها في مصفوفة. إن استخدام فكرة المصفوفة تعد وسيلة مساعدة لإظهار الحسابات في شكل مختصر.

المسألة هي:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n c_j x_j &\rightarrow \max \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &\leq b_i \quad ; i = 1, \dots, m \\ x_j &> 0 \quad ; j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

وبالشكل المصفوفي نكتب:

$$C^T X \rightarrow \max \quad (5.35)$$

$$AX \leq B \quad (5.36)$$

$$X \geq 0 \quad (5.37)$$

عندما نتحول إلى التمثيل الجدولي نجد أن معطيات المسألة تبدو كالتالي:

$$\begin{bmatrix} 0 & -c_1 & \dots & -c_n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b & A_1 & \dots & A_n & v_1 & v_2 & \dots & v_m \end{bmatrix} \quad (5.38)$$

وهي مطابقة للشكل:

$$\begin{bmatrix} 0_{11} & c_{1 \times n} & 0_{1m} \\ b_{n \times 1} & A_{m \times n} & I_{m \times m} \end{bmatrix} \quad (5.39)$$

حيث 0_{pq} هي مصفوفة صفرية ذات المرتبة و $I_{m \times m}$ هي مصفوفة الوحدة و A مصفوفة المعاملات و c متجه معاملات دالة الهدف.

$$\begin{bmatrix} -CB \\ B \end{bmatrix} \text{ لتكن}$$

تمثل الأعمدة m من (5.39) المرافقة لمجموعة المجاهيل الأساسية الحالية.

B هي مصفوفة ذات المرتبة $m \times m$ يقابل العمود i فيها السطر (i) في ذلك التكرار. ومنه يكون جدول السيمبلكس الموافق لهذا التكرار:

$$\begin{bmatrix} C_B B^{-1} b & C_B B^{-1} A - C & C_B B^{-1} \\ B^{-1} b & B^{-1} A & B^{-1} \end{bmatrix} \quad (5.40)$$

حيث تنتج (5.40) عن ضرب (5.39) من اليسار بـ:

$$\begin{bmatrix} 1 & C_B B^{-1} \\ o_{m1} & B^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -C_B B \\ o_{m1} & B \end{bmatrix} \quad (5.41)$$

يمكننا المعيار I من البحث عن العنصر الأكثر كهرسلبية (التصغير) أو الأكثر إيجابية (التكبير) في $[C_B B^{-1} A - C \quad C_B B^{-1}]$ ، الحد الذي يمثل السطر (0) في (5.40) ولنفرض أن هذا العنصر هو مقابل لعمود x_j ، عندئذ يؤدي المعيار II إلى استخدام معاملات x_j في (5.40) وهي:

$$\begin{bmatrix} C_B B^{-1} A_j - C_j \\ B^{-1} A_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{oj} \\ r_{ij} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ r_{nj} \end{bmatrix} \quad (5.42)$$

لاحظ أنه إذا كان x_j مجهولاً فائضاً فإن $C_j = 0$ و $A_j = V_j$ (حيث V_j هو السطر i من المصفوفة الواحدة) في (5.42).

لنفرض أن النسبة الصغرى كانت تقابل السطر k ، تعادل النتيجة الحاصلة عن تغيير الحسابات الأساسية ضرب (5.40) من اليسار بـ E حيث:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & -r_{oj}/r_{kj} & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & -r_{lj}/r_{kj} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1/r_{kj} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -r_{mj}/r_{kj} & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (5.43)$$

حيث إن النسبة الموجودة في العمود $k+1$ من المصفوفة E إذا ضربناها بـ E نحصل على ما يسمى التحويل الأولي.

لاحظ أن القيم $B^{-1}b$ تكون أمثلية عندما يكون:

$$C_B B^{-1} - C \geq 0 \quad \text{و} \quad C_B B^{-1} \geq 0 \quad (5.44)$$

والقيمة المقابلة لدالة الهدف هي:

$$C_B B^{-1}b \quad (5.45)$$

5.10 - التحليل الحساس Sensitivity analysis

في معظم المسائل العملية تكون معاملات دالة الهدف، المصادر المتاحة، ومعاملات المجاهيل الأخرى غير معروفة بصورة أكيدة. وقد يتطلب الأمر في بعض الأحيان تقديراً أو التنبؤ بقيم معاملات دالة الهدف. فإذا وجدت مثل هذه المعاملات غير المعروفة بصورة أكيدة فمن الواضح أن نبحث عن تأثيرات هذه المعاملات على الحل الأمثل حيث يمكن إيجاد حدود معينة لتغير هذه المعاملات ويبقى الحل أمثلاً. إن التحليل الحساس هو الاسم المشتق من تحليل تغير الحل الأمثل وفقاً إلى تغير المعاملات المختلفة سواء كانت هذه المعاملات مواد أولية، أيد عاملة، تكاليف، أم أرباحاً... الخ.

درسنا في الفقرات السابقة آلية الحصول على حل أمثل لنموذج البرمجة الخطية، وإذا كان هناك حل، فبعد عدد محدود من الخطوات نتوصل له. وقد توجد عدة حلول مثلى ولكن يكون هناك حل أمثل واحد من أجل هدف معين مطلوب.

يناقش هذا البحث الدقة أي ما يسمى "التحليل ما بعد الأمثال". توجد عدة أسئلة دقيقة ومهمة يمكن أن نجيب عنها بسهولة وهي تعطي معلومات عديدة في جدول السيمبلكس الأخير. وهناك ثلاثة أسئلة هامة هي:

(1) إذا أنقصت قيمة الربح لرفع فعالية أساسية معينة فهل يبقى الحل الحالي أمثلياً؟!

(2) ماذا يحدث لو أن إحدى المواد خرجت من المسألة؟!

(3) ماذا يحدث لو أدخلت مادة جديدة إلى المسألة؟!

توجد أسئلة معقدة أكثر من هذه ولكنها تتطلب حاسوباً إلكترونياً لحلها، مع هذا فإن معظم الحواسيب، تمكنا من تطبيق الجداول للحصول على الحل الأمثل ولكنها لا تمكنا من تطبيق النموذج المعدل.

سندرس فيما يلي اختبار الحساسية وسنهتم بالجدولين الأول والأخير (I الأول، F الأخير).

5.10.1 - دالة الهدف

سنبحث الآن فيما إذا كان الحل الأمثل الملائم السابق يبقى أمثل إذا تغيرت المعاملات في دالة الهدف. إن تغيرات كهذه، لا تؤثر كثيراً في الحل السابق لذلك تكون دائماً الحلول المحسنة ممكنة وعلينا تكرار حسابات طريقة السيمبلكس مبتدئين بالجدول الأخير.

يمكن أن نجري تحسيناً على الحل الحالي، عندئذٍ نتعرض للسؤال التالي: من هي القيود التي يجب أن تضاف ليبقى الحل أمثلًا؟

بفرض أن معامل x_j في دالة الهدف تغير وأصبح $c_j + p_j$ حيث $p_j > 0$ عندئذٍ: إن طرح $p_j x_j$ من دالة الهدف يؤدي في عملية تكرار السيمبلكس لطرحها من جميع المعادلات. عند تكرار سيمبلكس ستتغير قيمة معامل x_j من c_j إلى c'_j وهنا إذا كان $p_j > c'_j$ عندها ستتدخل x_j الحل الأساسي وفق معيار سيمبلكس I. وبالتالي فإن معاملات السطر (0) النهائية للمجاهيل غير الأساسية تمثل الزيادات الموجبة الكبيرة لمعاملات دالة الهدف الأصلية التي تبعد عن الحل الأمثل. لو قمنا بإنقاص قابلية الربح لبعض المجاهيل، يمكن أن لا يبقى الحل الأساسي أمثلًا. سنحاول الآن الإجابة عن السؤال المطروح (الشرط الإضافي):
لنتذكر أن المسألة المطروحة هي مسألة سيمبلكس عظمية أي:

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max \quad (5.46)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad ; i = 1, \dots, m \quad (5.47)$$

$$x_j \geq 0 \quad ; j = 1, \dots, n \quad (5.48)$$

لو أنقصنا معاملات الربح لبعض المجاهيل وليكن للمجهول x_j بحيث يصبح معامل الربح $c_j + p_j$ فإنه من الممكن ألا يبقى الحل أمثلًا.

$$f = x_0 = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_j x_j + \dots + c_n x_n \rightarrow \max \quad (5.49)$$

نعدل على السطر (0) في الجدول الأول I ليصبح:

$$x_0 - c_1 x_1 - c_2 x_2 - \dots - (c_j + p_j) x_j - \dots - c'_n x_n = b' \quad (5.50)$$

تكن خطورة p_j فيما إذا كان $c'_j + p_j \geq 0$ في الجدول الأخير.

لنعد إلى مسألة السيمبلكس الأصلية (أي دون أن نضيف p_j إلى معامل x_j في دالة الهدف) وبالتحديد السطر (0) في الجدول الأخير:

$$x_0 + c''_1 x_1 + c''_2 x_2 + \dots + c''_j x_j + \dots + c''_n x_n = b''$$

نضرب السطر (0) ب p_j ونجمعه إلى (5.50) لنجد:

$$x_0 + (c'_1 + c''_1 p_j) x_1 + (c'_2 + c''_2 p_j) x_2 + \dots + (c'_n + c''_n p_j) x_n = b' + b'' + p_j \quad (5.51)$$

من العلاقة (5.51) الناتجة، ولكي تبقى جميع المجاهيل الأساسية بعد إضافة p_j أساسية فإن p_j يجب أن يحقق:

$$p_j = \frac{c'_r}{c''_r} \quad ; r = 1, \dots, n$$

وإذا فرضنا أن أصغر قيمة لـ p_j ، توافق المجهول x_s الذي هو ضمن المجاهيل الأساسية وأكبر قيمة لـ p_j ، توافق المجهول x_e ، عندئذٍ يجب أن تتحقق العلاقات التالية:

$$\frac{c'_s}{c''_s} \leq p_j \leq \frac{c'_e}{c''_e} \quad (5.52)$$

وهذا يحقق ما يسمى التقارب، فلن يخرج أي من المجاهيل الأساسية، ولن يدخل مجهول جديد إذا حققت p_j المتباينة أما الحالة المعاكسة، فلن يبقى الحل أمثلياً ويتقديم مماثل، يمكن أن نجري التغيير على عدد من معاملات دالة الهدف بالنسبة للمجاهيل الأساسية عندئذٍ في كل إضافة، سنتتج متباينة مشابهة للمتباينة (5.52). والتعبير الأمثل لتحليل البرمجة الوسيطة هو:

$$\sum_{j=1}^n (c_j + p_j \tilde{c}_j) x_j \quad (5.53)$$

حيث p_j وسيط معرف على مجال محدود. وفي الحالة البسيطة يكون $c_j = 0$ ماعداً واحداً منها يساوي الواحد و c^*_j هي تزايد c_j .

5.10.2- ثوابت الطرف الأيمن:

نستطيع الآن أن نستخدم التقنية الواضحة في الفقرة السابقة بإضافة قيم، ولكن هنا إلى الطرف الأيمن من المتباينات.

إذا غيرنا الثابت في السطر r ليصبح $b_r + M$ عندها سنجد في السطر نفسه من الجدول الأخير F العنصر الخامل x_r سيتغير بالكمية M وبالتالي سيبقى الحل ملائماً عندما تكون كل ثوابت الطرف الأيمن غير سالبة أي عندما تتحقق العلاقة:

$$\frac{b'_s}{b''_s} \leq M \leq \frac{b'_e}{b''_e} \quad (5.54)$$

بما أن ثوابت الطرف الأيمن هي قيم المجاهيل الأساسية، فيجب أن تكون هذه القيم غير سالبة وبالتالي، بعد إضافة M إلى الطرف الأيمن تصبح الثوابت:

$$b'_i + b''_i M \quad ; i = 1, \dots, m$$

ومنه:

$$M = \frac{b'_i}{b''_i}$$

وبفرض $\frac{b'_s}{b''_s}$ أصغر هذه القيم و $\frac{b'_e}{b''_e}$ أكبرها فإن تحقق (5.54) يعني أن الحل

يبقى أمثلياً.

وهنا أيضاً كما هو الحال في دالة الهدف يمكن تعميم المسألة، أي يمكن أن نضيف لكل متباينة قيمة للثابت ونستنتج علاقات مشابهة للعلاقة (5.53).

مثال:

تنتج الشركة العامة للبتروكيميا ثلاثة منتجات هي A , B , C . إن عملية إنتاج وحدة واحدة من كل من المنتجات الثلاث يجب أن تمر خلال ثلاث مراحل حيث إن كل منتج يستغرق وقتاً معيناً خلال مروره بمرحلة ما. الجدول يمثل الوقت المطلوب لكل منتج في كل مرحلة.

المنتجات / المراحل	A	B	C
المرحلة الأولى	3	2	4
المرحلة الثانية	1	5	1
المرحلة الثالثة	5	4	6

الوقت المتوفر للمرحلة الأولى 80 دقيقة، للثانية 70 دقيقة، وللمرحلة الثالثة 96 دقيقة. الأرباح الناجمة عن بيع كل وحدة من المنتجات الثلاثة هي 3 ألف و4 ألف وألف واحد على الترتيب. جد برنامج الإنتاج الأمثل لتحقيق أعلى الأرباح ؟.

الحل:

نفرض أن X_1 عدد الوحدات المنتجة من المنتج A

X_2 عدد الوحدات المنتجة من المنتج B

X_3 عدد الوحدات المنتجة من المنتج C

مشكلة البرمجة الخطية ستكون

$$\text{Maximise } Z = 3X_1 + 4X_2 + X_3$$

وفقاً إلى

$$3X_1 + 2X_2 + 4X_3 \leq 80$$

$$X_1 + 5X_2 + X_3 \leq 70$$

$$5X_1 + 4X_2 + 6X_3 \leq 96$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

بعد إضافة المجاهيل الخاملة واستخدام طريقة السمبلكس نحصل على الجداول السمبلكس الآتية:

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	الثابت
z	-3	-4	-1	0	0	0	0
s_1	3	2	4	1	1	0	80
s_2	1	5	1	0	0	0	70
s_3	5	4	6	0	0	1	96
z	-11/5	0	-1/5	0	4/5	0	56
s_1	13/5	0	18/5	1	-2/5	0	52
x_2	1/5	1	1/5	0	1/5	0	14
s_3	21/5	0	26/5	0	4/5	1	40
z	0	0	53/21	0	8/21	11/21	1616
s_1	0	0	8/21	1	2/21	-3/21	572/21
x_2	0	1	1/21	0	5/21	-1/21	254/21
x_1	1	0	26/21	0	4/21	5/21	200/21

جدول السيمبلكس (5.20)

إن s_1 , s_2 , s_3 هي المجاهيل الخاملة التي أضيفت إلى الشرط الأول الوقت المتوفر في المرحلة الأولى، الشرط الثاني الوقت المتوفر في المرحلة الثانية، الشرط الثالث الوقت المتوفر في المرحلة الثالثة.

من جدول السيمبلكس الأخير نجد أن الإنتاج من المنتج يكون صفراً ($x_3=0$) وإن الإنتاج من المنتج B يكون 254 / 21. إن لكل وحدة إضافية من الوقت في المرحلة الثانية تزداد عدد الوحدات المنتجة من المنتج B بمقدار 5/21 وحدة. (سطر $-x_2$ عمود s_2) وتنقص عدد الوحدات المنتجة من المنتج A بمقدار 4/21 وحدة ونتيجة لزيادة الوحدة الواحدة من الوقت في المرحلة الثانية ستزداد الأرباح بمقدار 8/21 ألفاً (سطر z عمود s_2).

إن لكل وحدة إضافية من الوقت في المرحلة الثالثة ستزيد عدد الوحدات المنتجة من A بمقدار 5/21 وتنقص عدد الوحدات المنتجة من المنتج B بمقدار 1/21- وهذا سيؤدي إلى زيادة الأرباح بمقدار 11/21 ألفاً.

إن الوقت في المرحلة الأولى لا تأثير له في الإنتاج. لوجود فائض من الوقت في المرحلة الأولى مقداره $572/21$ بعبارة أخرى $S1=572/21$.

التحليل الحساس للجهة اليمنى (الثابت)

	الثابت		$S2$	
Z	1661		$8/21$	$33944/21$
$S1$	$572/21$	+1	$2/21$	$574/21$
$X2$	$254/21$		$5/21$	$245/21$
$X1$	$200/21$		$-4/21$	$196/21$

التأثير المباشر على الجهة اليمنى نتيجة زيادة وحدتين في وقت المرحلة الثانية

$S2$ سيكون كما يلي:

1661		$8/21$		$33952/21$
$572/21$	+(2)	$2/21$	=	$576/21$
$254/21$		$5/21$		$264/21$
$200/21$		$-4/21$		$196/21$

نستمر بهذه العملية حتى إضافة 50 وحدة لوقت المرحلة الثانية.

1661		$8/21$		$34336/21$
$572/21$	+(50)	$2/21$	=	$672/21$
$254/21$		$5/21$		$504/21$
$200/21$		$-4/21$		0

وهكذا نرى أن قيمة $X1$ أصبحت صفراً وهذا يعني أن $X1$ سيخرج من ضمن المجاهيل الأساسية.

أما إذا أضفنا 51 وحدة إلى وقت المرحلة الثانية فإن:

1661		8/21		34344/21
572/21	+(51)	2/21	=	674/21
254/21		5/21		505/21
200/21		-4/21		-4/21

هذا الحل لا يمكن قبوله لأن قيمة $X1=4/21$ وهذا غير ممكن.

إن الجدول السيمبلكس الأخير سيكون كما يلي:

	$X1$	$X2$	$X3$	1	$S2$	$S3$	الثابت
Z	0	0	53/21	0	408/21	11/21	34344/21
$S1$	0	0	8/21	1	102/21	-3/21	674/21
$X2$	0	1	1	0	255/21	-1/21	505/21
$X1$	1	0	26/21	0	-204/21	5/21	-4/21

جدول السيمبلكس (5.21)

وهكذا نرى أن أعلى قيمة يزداد بها الوقت ويبقى الحل مقبولا هي 50 دقيقة.

فإذا كانت $B2$ تمثل الحلول المقبولة لزيادة وقت المرحلة الثانية فإن $B2 \leq 50$

لاستخراج صيغة رياضية لتحديد الحد الأعلى الذي تزداد به قيمة الجهة اليمنى

ويبقى الحل مقبولا نتبع ما يلي:

نختار العمود الذي نرغب في إيجاد التحليل الحساس للمجهول إزاءه.

فمثلاً في المثال السابق أردنا إيجاد تحليل الحساسية للوقت في المرحلة الثانية.
 بعبارة أخرى نختار عمود S2 ثم نختار الرقم الأقل سالبة حيث الرقم الأقل سالبة
 هو الرقم $\frac{-4}{21}$

ولذلك فإن:

$\frac{200}{21} + B2(\frac{-4}{21})$ يجب أن يكون أكبر أو يساوي صفراً أما إذا كان أقل من صفر
 فإن الحل لا يمكن قبوله.
 إذاً:

$$B2 \leq 50 \text{ أو } \frac{200}{21} + B2(\frac{-4}{21}) \geq 0$$

أما في حالة طرح وحدة واحدة من الوقت في المرحلة الثانية فإن النتيجة ستكون:

Z	1616		8/21		33928/21
	572/21	+(-1)	2/21	=	570/21
	254/21		5/21		249/21
	200/21		-4/21		204/21

لاستخراج صيغة رياضية لتحديد الحد الأدنى الذي تنقص به الجهة اليمنى ويبقى
 الحل مقبولاً نتبع ما يلي:

- 1- نختار العمود الذي نرغب في إيجاد تحليل الحساسية للمجهول إزاءه.
- 2- نختار الرقم الأكبر بالموجب في ذلك العمود (تستثنى الأرقام الواقعة في سطر دالة الهدف Z).

نختار عمود S2، إن أكبر رقم موجب في عمود S2 هو 5/21 لذلك فإن
 $254/21 + b2(5/21)$ يجب أن يكون أكبر أو يساوي صفراً.

$$\frac{254}{21} + B2(5/21) \geq 0$$

$$\left(\frac{5}{21}\right)B2 \geq \frac{-254}{21}$$

أو

$$B2 \geq \frac{-254}{5}$$

وهكذا ستكون الحدود

$$\frac{-254}{5} \leq B2 \leq 50$$

وهكذا فإن الوقت المسموح به للمرحلة الثانية و يبقى الحل مقبولا يتراوح بين $(70+50)$ & $(70 - \frac{254}{5})$ حيث 70 هي عدد الدقائق المتوفرة للمرحلة الثانية.

وهكذا سيكون الحد الأعلى=120 دقيقة

الحد الأدنى=19.2 دقيقة

نعين الآن الحدين الأعلى والأدنى للوقت المتوفر للمرحلة الثالثة.

من الجدول السيمبلكس للحل الأمثل في عمود S3 المقدار الأكثر سالبية $(-3/21)$ لذلك فإن :

$$572/21 + B3(-3/21) \geq 0$$

$$B3 \leq \frac{572}{3} \quad \text{أو}$$

المقدار الأكبر بالموجب $(5/21)$ لذلك فإن :

$$200/21 + B3(5/21) \geq 0$$

$$B3 \geq -50$$

$$-50 \leq B3 \leq \frac{572}{3} \quad \therefore$$

الحد الأعلى للوقت المتوفر للمرحلة الثالثة

$$96 + \frac{3}{572} = 286\frac{3}{2}$$

الحد الأدنى للوقت المتوفر للمرحلة الثالثة

$$96 - 50 = 46$$

التحليل الحساس لمعاملات دالة الهدف

تحدث الاختلافات في معاملات دالة الهدف بسبب تغير الأرباح أو التكاليف للمجاهيل الأساسية أو غير الأساسية.

1- تغيرات معامل دالة هدف المجاهيل غير الأساسية

إذا لاحظنا الحل الأمثل لبرنامج إنتاج الشركة العامة للبتروكيميا فإننا نرى أن الإنتاج من المنتج C يكون صفر وذلك سبب أرباحه المتدنية مقارنة بالأرباح الناجمة عن المنتجين A , B.

إذا انخفضت أرباح المنتج C إلى أقل من ألف واحد فإن هذا لا يؤثر على الحل الأمثل لكن يهمننا ارتفاع أرباح المنتج C. إذا ارتفع ربح الوحدة الواحدة من المنتج C فإن C ستكون ضمن برنامج الإنتاج في حالة ارتفاع ربح الوحدة الواحدة من C إلى حد معين، لذلك نحتاج أن نجد الحد المعين وهو الحد الأعلى لزيادة ربح المنتج C وهذا الحد الأعلى سيجعل إنتاج المنتج C ضروري لزيادة الأرباح الكلية للشركة العامة للبتروكيمياويات.

نفرض أن C_1 , C_2 , C_3 تمثل تكاليف أو أرباح الوحدة الواحدة من كل منتج على الترتيب ونفرض أن $\bar{C}_1, \bar{C}_2, \bar{C}_3$ تمثل معامل المجاهيل في دالة هدف الجدول السيمبلكس الأخير (الحل الأمثل). ونفرض أن P_1, P_2, P_3 هي مقدار التغير المطلوب.

بصورة عامة، إذا كان المجهول غير الأساسي هو X_j حيث $j = 1, 2, \dots, m$ فإن

$$P_j > \bar{C}_j$$

أي أن الحل الأمثل يتغير في حالة كون التغير P_j أكبر من $\bar{C}_j$ سواء كانت المشكلة الأساسية هي التعظيم أو التصغير.

من الجدول السيمبلكس (24) الأخير نلاحظ أن المجهول غير الأساسي الذي يهمننا هو X_3 (لأن S_2, S_3 عبارة عن مجاهيل خاملة لا تأثير لها).
إن:

$$C_3 = 53/21$$

$$P_3 > 53/21 \quad \therefore$$

فإذا ازدادت أرباح المنتج C بمقدار أكبر من

$$\frac{74}{21} = 1 + \frac{53}{21}$$

فإن المجهول غير الأساسي X_3 يكون مرشحاً للدخول ضمن المجاهيل الأساسية

حيث يكون في دائرة هدف الجدول السيمبلكس الأخير يساوي

$$\frac{53}{21} - \frac{74}{21} = -1$$

ولهذا سيكون جدول السيمبلكس الأخير أمثل لوجود مقدار في دالة الهدف.

2- تغيرات معامل دالة هدف المجاهيل الأساسية

يمكن الحصول على تغيرات معامل دالة الهدف للمجاهيل الأساسية وذلك بضرب كل معامل في سطر المجهول الأساسي X_i بالمقدار P_i حيث $(i=1,2,3,\dots,n)$ ثم يضاف حاصل الضرب إلى المعاملات اللاصفرية في دالة الهدف وإن الناتج يجب أن يكون أكبر من الصفر لنضمن بقاء الحل أمثلاً.

المجهول الأساسي X_1 :

$$P_1 > -\frac{53}{26} \quad \text{أو} \quad \frac{53}{21} + P_1 \left(\frac{26}{21} \right) > 0$$

$$P_1 < 2 \quad \text{أو} \quad \frac{8}{21} + P_1 \left(\frac{-4}{21} \right) > 0$$

$$P_1 > \frac{-11}{5} \quad \text{أو} \quad \frac{11}{21} + P_1 \left(\frac{5}{21} \right) > 0$$

حدود P_1 المقبولة ستكون:

$$\frac{-53}{26} < P1 < 2$$

الحد الأدنى لمعامل X1 يساوي $3 - \frac{53}{26} = \frac{25}{26}$

الحد الأعلى لمعامل X1 يساوي $3+2=5$

الحد الأمثل سيتغير إذا تغيرت أرباح المنتج A خارج الحدين الأدنى والأعلى مما يؤدي إلى إيجاد حل جديد للمسألة.

المجهول الأساسي X2:

$$P2 < 53 \text{ أو } \frac{53}{21} + P2 \left(\frac{-1}{21} \right) > 0$$

$$P1 > \frac{-8}{5} \text{ أو } \frac{8}{21} + P2 \left(\frac{5}{21} \right) > 0$$

$$P < 11 \text{ أو } \frac{11}{21} + P2 \left(\frac{-1}{21} \right) > 0$$

حدود P2 المقبولة هي:

$$\frac{-8}{5} < P2 < 11$$

بعبارة أخرى

$$4 - \frac{8}{5} = \frac{12}{5} \text{ يساوي X2 لمعامل}$$

$$4+11=15 \text{ يساوي X2 لمعامل}$$

إن الحل الأمثل سيتغير إذا تغيرت أرباح المنتج B خارج الحدين الأدنى.

مثال:

تقوم مؤسسة صناعية بإنتاج أربعة أنواع من الآلات المسماة A, B, C, D، تحتاج المؤسسة الصناعية إلى المواد الأولية I والمواد الأولية II وساعات عمل معينة لأجل القيام بالعملية الإنتاجية. الجدول أدناه يبين المواد الأولية وساعات العمل

الآلة / المتطلبات	A	B	C	D
مواد أولية I	18	14	20	16
مواد أولية II	8	12	21	18
ساعات العمل	6	4	7	5

يتوفر في مركز المؤسسة الصناعية 800 طن من المواد الأولية I، 400 طن من المواد الأولية II، 150 ساعة عمل كل أسبوع
تكلفة الطن الواحد من المواد الأولية I 2 ليرة
تكلفة الطن الواحد من المواد الأولية II 4 ليرة
تكلفة ساعة العمل الواحدة 1 ليرة
تباع الآلات في السوق كما يلي:

نوع الآلات	البيع
A	120 ليرة
B	116 ليرة
C	136 ليرة
D	150 ليرة

المطلوب:

1- صياغة المسألة على شكل برمجة خطية.

2- تحديد العدد الأمثل من الآلات المصنوعة لكل نوع.

الحل:

نفرض أن:

X1 عبارة عن عدد الآلات من النوع A

X2 عبارة عن عدد الآلات من النوع B

X3 عبارة عن عدد الآلات من النوع C

X4 عبارة عن عدد الآلات من النوع D

ستكون شروط المسألة الخطية كما يلي

1- شرط المواد الأولية I

$$18X1 + 24X2 + 20X3 + 16X4 \leq 800$$

2- شرط المواد الأولية II

$$8X1 + 12X2 + 21X3 + 18X4 \leq 400$$

3- شرط ساعات العمل

$$6X1 + 4X2 + 7X3 + 5X4 \leq 150$$

قبل أن نحدد دالة الهدف، يجب أن نحدد أرباح كل آلة بالنسبة للآلة الأولى

تباع الآلة A بسعر 120 ليرة / لكل وحدة واحدة

كلفة المواد الأولية I 2×18

كلفة المواد الأولية II 4×8

كلفة ساعات العمل 1×6

أو بمعنى آخر

$$6 - 32 - 36 - 120 = \text{ربح الآلة الواحدة من نوع A}$$

$$= 46$$

بالنسبة للآلة B

$$B \text{ ربح الآلة الواحدة من نوع } B = 116 - 48 - 48 - 4 = 16$$

بالنسبة للآلة C

$$C \text{ ربح الآلة الواحدة من نوع } C = 136 - 40 - 84 - 7 = 5$$

بالنسبة للآلة D

$$B \text{ ربح الآلة الواحدة من نوع } B = 150 - 32 - 72 - 5 = 41$$

نفرض أن Z يمثل دالة الهدف

إذاً نحاول أن نجعل Z أكبر ما يمكن

$$Z = 46X_1 + 16X_2 + 5X_3 + 41X_4$$

إن مشكلة البرمجة الخطية ستكون كما يلي:

$$\max Z = 46X_1 + 16X_2 + 5X_3 + 41X_4$$

وفقاً إلى الشروط التالية

$$18X_1 + 24X_2 + 20X_3 + 16X_4 \leq 800$$

$$8X_1 + 12X_2 + 21X_3 + 18X_4 \leq 400$$

$$6X_1 + 4X_2 + 7X_3 + 5X_4 \leq 150$$

$$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0, X_3 \geq 0, X_4 \geq 0$$

بعد إضافة المجاهيل الخاملة S1 , S2 , S3 نحصل على الشكل الآتي:

$$\max Z - 46X_1 - 16X_2 - 5X_3 - 41X_4 = 0$$

وفقاً إلى الشروط

$$18X_1 + 24X_2 + 20X_3 + 16X_4 + S_1 = 800$$

$$8X_1 + 12X_2 + 21X_3 + 18X_4 + S_2 = 400$$

$$6X_1 + 4X_2 + 7X_3 + 5X_4 + S_3 = 150$$

$$X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0$$

$$S_1, S_2, S_3 \geq 0$$

ضع معاملات المجاهيل أعلاه في الجدول كما يلي:

	$\downarrow X_1$	X_2	X_3	X_4	S_1	S_2	S_3	الثابت
Z	-46	-16	-5	-41	0	0	0	0
S_1	18	24	20	16	1	0	0	800
S_2	8	12	21	18	0	1	0	400
$\leftarrow S_3$	6	4	7	5	0	0	1	150

الجدول (5.22)

X_1 المجهول الداخل

S_3 المجهول الخارج

6 عنصر الدوران

بعد إجراء العمليات المحورية على الجدول (5.22) نحصل على الجدول

	X_1	X_2	X_3	$\downarrow X_4$	S_1	S_2	S_3	الثابت
Z	0	88/ 6	29 2/6	-1	0	0	46/6	1150
S_1	0	12	-1	1	1	0	3	350
$\leftarrow S_2$	0	40/ 6	70/ 6	104/ 6	0	1	-8/6	200
X_1	1	4/6	7/6	5/6	0	0	1/6	25

الجدول (5.23)

X_4 المجهول الداخل

S_2 المجهول الخارج

$(\frac{104}{6})$ عنصر الدوران

بعد إجراء العمليات المحورية على الجدول (5.23)

نحصل على الجدول

	X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	S_2	S_3	الثابت
Z	0	204/13	1910/13	0	0	2/13	267/26	15350/13
S_1	0	151/13	-78/52	0	1	-3/52	-38/13	4400/13
X_4	0	5/13	35/52	1	0	6/104	-1/13	150/13
X_1	1	9/26	63/104	0	0	5/52	3	200/13

الجدول (5.24)

الحل أمثل والإنتاج سيكون كما يلي

$$X_1 = 200/13$$

$$X_2 = 0$$

$$X_3 = 0$$

$$X_4 = 150/13$$

$$Z^* = 15320/13$$

5.11- خوارزمية السيمبلكس المعدلة

يبقى المعيار I كما هو (المسألة الأعظمية) أما معيار سيمبلكس II المعدل فهو

كما يلي:

1. خذ نسب الطرف الأيمن إلى المعاملات الموجبة للمجهول المدخل، ليكن r_1 قيمة النسبة الصغرى التي تظهر من أجل المجهول الأساسي في السطر k .
2. خذ فقط نسب (الطرف الأيمن - 1) إلى المعاملات السالبة للمجهول المدخل، ليكن r_2 قيمة النسبة الصغرى التي تظهر من أجل المجهول الأساسي k' .
3. ليكن $r = \min(r_1, r_2)$.
4. إذا كان $r \geq 1$ ، فلا تنجز أي حساب لتغيير القاعدة، أوجد تبديل الحد الأعلى الجزئي للمجهول المدخل.
5. إذا كان $r = r_1$ فنشكل معيار حساب تغيير القاعدة المجهول في السطر k .
6. إذا كان $r = r_2$ فنشكل معيار حساب تغيير القاعدة المجهول في السطر k' .

بعد ذلك أنجز التبديل الجزئي للحد الأعلى من أجل المجهول الأساسي السابق في السطر k' .

عندما تنتهي الخوارزمية فإن النموذج يحتوي بشكل واضح إما على x_r أو x'_r . في حال ظهور x_r كمجهول أساسي، يكون عند قيمته المثلى. أما بالنسبة لـ x'_r فإن ظهوره كمجهول أساسي، يعني أن قيمة x_r الأمثلية تساوي 1 ولكن ظهوره كمجهول أساسي يعني أن قيمة x_r المثلى هي $1 - x'_r$.

مثال:

لنأخذ المسألة التالية:

$$4x_1 + 10x_2 + 9x_3 + 11x_4 \rightarrow \max \quad (5.55)$$

$$\left. \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 5/2 \\ 3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 \leq 257/16 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array} \right\} \quad (5.65)$$

بفرض أن x_5, x_6 مجهولان خاملان للمتباينتين الأولى والثانية (إن هذه المجاهيل غير محدودة بالقيمة 1، ولكن لن يسبب أية صعوبة في الحسابات، نجد أن الحل الأساسي الأولي مكون من المجاهيل الخاملة. ويمكن أن نعرض التكرار بالجدول حسب معيار سيمبلكس I (المسألة الأعظمية) المجهول x_4 يعطي:

$$r = r_1 = \min(5/2, 257/(15.16)) = \frac{257}{15.16} = \frac{257}{240} > 1 \quad (5.57)$$

وعليه يشير معيار سيمبلكس II (المجاهيل المقيدة) إلى أن التبديل الجزئي للحد الأعلى من أجل أن يحسب لـ x_4 فهو يحقق النتيجة المجدولة أثناء التكرار (2) لأن الجدول يحوي المجهول x'_4 المعبر عن التبديل وقيم مجاهيل القاعدة المتداولة تتغير وفقاً لذلك.

الخطوة الثانية: دخل x_2 إلى الحل:

$$r = r_1 = \min\left(\frac{3}{2}, \frac{17}{15.1}\right) = \frac{17}{80} \quad (5.58)$$

وهكذا دخلت x_2 وخرجت x_6 من القاعدة بعد خطوة محور قاعدة التغير ومن ثم نلاحظ أن x_4 تدخل وكذلك يكون:

$$r_1 = \frac{103}{2.80}, \quad r_2 = \frac{17/80 - 1}{-3}, \quad r = r_2 = \frac{21}{80}$$

وتدخل الأساس وتغادره x_2 عند حدها الأعلى وعليه طبقنا خطوة محور قاعدة التغير ومن ثم تبديل الحد الأعلى لـ x_2 .

تظهر النتيجة أثناء التكرار (4) نلاحظ الآن أن x_1 تدخل القاعدة و x_5 تغادرها حيث $r = r_1 < 1$ تعطي قسم التكرار (5) نتحقق كنتيجة بأن x_3 تدخل القاعدة و x_4 تغادر عند حدها الأعلى. وهكذا إلى أن نصل إلى الجدول الأخير.

التكرار	المتغيرات الأساسية	القيم الحالية	x_1	x_2	x_3	x_4
1	x_0	0	-4	-10	-9	11
	x_5	5/2	1	1	1	1
	x_6	257/16	3	5	10	5
			x_1	x_2	x_3	x_4
2	x_0	11	-4	-10	-9	11
	x_5	3/2	1	1	1	-1
	x_6	71/16	3	5	10	-15
			x_1	x_2	x_3	x_4
3	x_0	105/8	-2	2	11	-19
	x_5	103/80	2/5	-1/5	-1	2
	x_2	17/80	3/5	1/5	2	-3
			x_1	x_2	x_3	x_2
4	x_0	1449/80	-9/5	11/15	-5/3	-19/3
	x_5	61/80	4/5	-1/15	1/3	-2/3
	x_4	21/80	-1/5	-1/15	-2/15	1/3
			x_5	x_6	x_3	x_2
5	x_0	1269/164	9/4	7/12	-11/3	29/6
	x_1	61/64	5/4	-1/12	5/12	-5/6
	x_4	29/64	1/4	-1/12	-7/12	1/6
			x_5	x_6	x_3	x_2
6	x_0	331/16	13/7	5/7	11/7	32/7
	x_1	9/16	10/7	-1/7	-5/7	-5/7
	x_3	15/16	-3/7	1/7	12/7	-2/7

5.12-استخدام Solver by Excel لحل مسائل البرمجة الخطية

لحل مسائل البرمجة الخطية باستخدام برنامج اكسل EXCEL لابد من استخدام

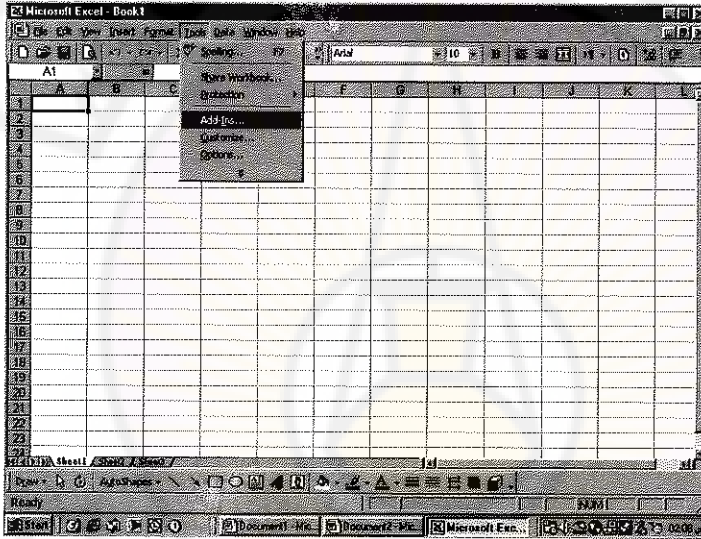
أداة سولفر Solver. للحصول على Solver قم بالآتي:

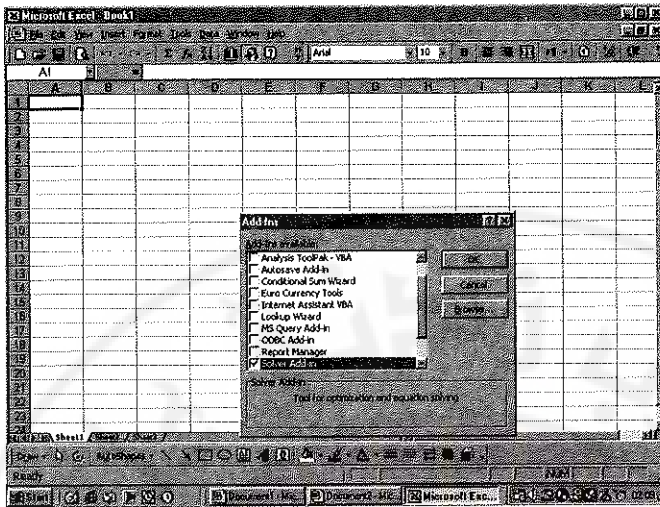
افتح برنامج EXCEL ، ثم من قائمة شريط الأدوات اختر Tools ، من

اختر Add-Ins. ستظهر لك نافذة جديدة اختر منها Solver بوضع إشارة عليها

ثم OK. الآن تم إضافة Solver إلى برنامج EXCEL.

الشكلان يوضحان هذه العملية.





لنأخذ المثال التالي تطبيقاً لاستخدام Solver:

أحد مصانع الألعاب يقوم بتصنيع ثلاثة أنواع من الألعاب الكهربائية، و كل نوع يحتاج إلى طريقة مختلفة في التصنيع. الوحدة الواحدة من النوع الأول تحتاج إلى 17 ساعة عمل و 8 ساعات اختبار و تحقق صافي ربح بقيمة 300 ليرة سورية. الوحدة الواحدة من النوع الثاني تحتاج إلى 10 ساعات عمل و 8 ساعات اختبار و تحقق صافي ربح بقيمة 200 ليرة سورية. الوحدة الواحدة من النوع الثالث تحتاج إلى 5 ساعات عمل و 5 ساعات اختبار و تحقق صافي ربح بقيمة 100 ليرة سورية. فإذا علمت أن المتاح لدى المصنع 1000 ساعة عمل و 500 ساعة اختبار، و أن قسم التسويق قد أكد أن الطلب على الأنواع الثلاثة لن يقل عن 20 و 30 و 40 وحدة لكل نوع على التوالي و بالتالي عدم تجاوز هذه الكميات عند الانتاج. و المطلوب:

1. اكتب الصيغة الرياضية المناسبة على شكل LP لتعظيم الأرباح الكلية من إنتاج هذه الألعاب.

2. أوجد الحل الأمثل إن أمكن باستخدام Solver.

الصيغة الرياضية كالتالي:

X_1 : عدد الألعاب المطلوب إنتاجها من النوع الأول

X_1 : عدد الألعاب المطلوب إنتاجها من النوع الثاني

X_1 : عدد الألعاب المطلوب إنتاجها من النوع الثالث

$$\text{Max } z = 300 X_1 + 200 X_2 + 100 X_3$$

Subject To

$$17 X_1 + 10 X_2 + 2 X_3 \leq 1000$$

$$8 X_1 + 8 X_2 + 2 X_3 \leq 500$$

$$X_1 \geq 20$$

$$X_2 \geq 30$$

$$X_3 \geq 40$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

لحل المسألة باستخدام Solver، نقوم بالتالي:

الخلايا B4, C4, D4 يكتب بها معاملات المتغيرات في دالة الهدف.

الخلايا B9 إلى B13 يكتب بها معاملات المتغير الأول في كل قيد. و يُعمل

نفس الشيء بالنسبة للمتغيرات الأخرى في الأعمدة C و D.

الخلايا F9 إلى F13 يكتب قيم الجانب الأيمن للقيود.

تُكتب التعاريف كما في الشكل.

في الخلية B6 أكتب المعادلة التالية بصيغة EXCEL: =B4*B5

انسخ المعادلة في الخلية B6 إلى الخلايا C6 و D6.

الخلية E6 مجموع الخلايا B6 إلى الخلية D6 و ذلك بكتابة المعادلة التالية:

$$=SUM(B6:D6)$$

في الخلية E9 أكتب التالي: =(B5*B9)+(C5*C9)+(D5*D9)

في الخلية E10 أكتب التالي: =(B5*B10)+(C5*C10)+(D5*D10)

في الخلية E11 أكتب التالي: =B5*B11

في الخلية E12 أكتب التالي: $=C5*C12$

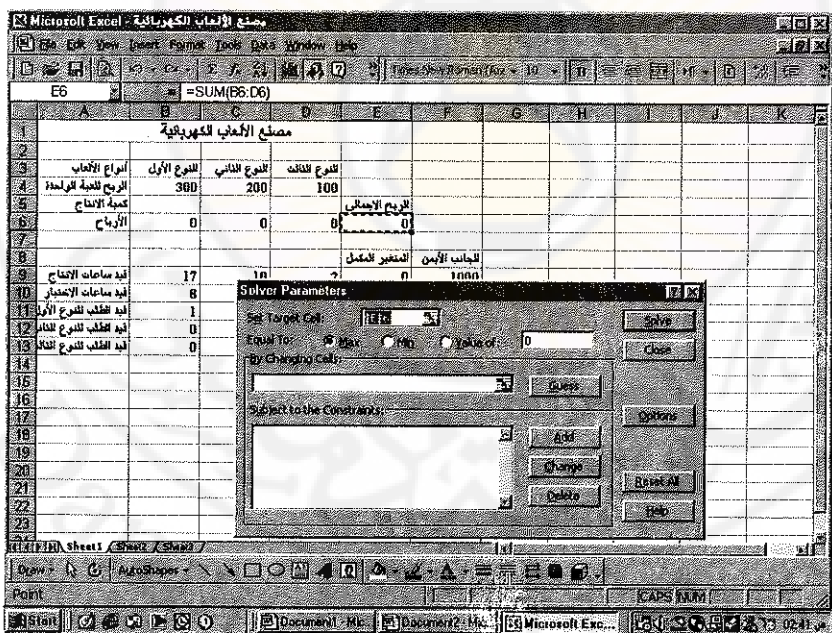
في الخلية E13 أكتب التالي: $=D5*D13$

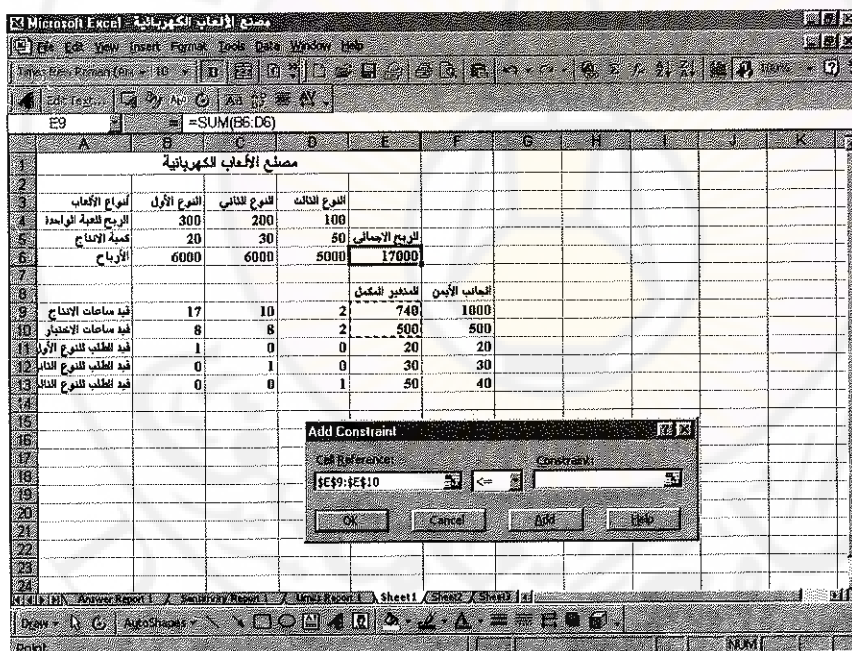
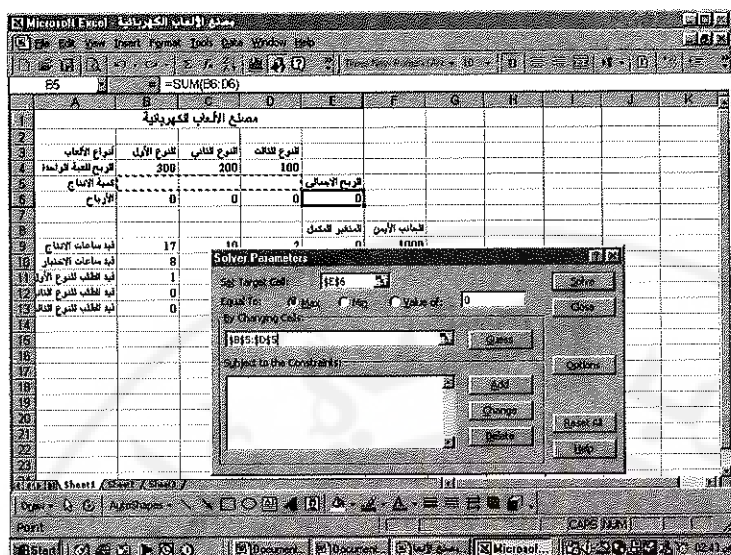
بالضغط على Tools في قائمة الأدوات، اختر Solver كما في الشكل 4.
من نافذة Solver Parameters حدد قيمة دالة الهدف في الخلية E6 و ذلك
باختيار Set Target Cell كما في الشكل.

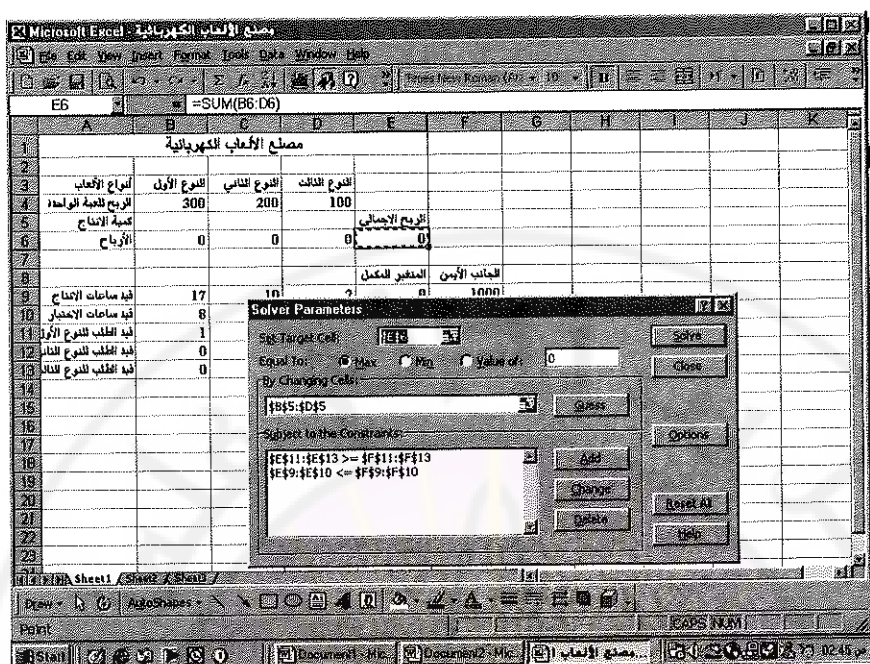
حدد متغيرات القرار في الخلايا B5 إلى D5 و ذلك باختيار By Changing
Cells كما في الشكل 6. اختر Add و ذلك لتحديد القيود، ثم في نافذة
Constraint اختر Cell Reference و حدد الخلايا E9 إلى E10 و أبق ($\leq$)
كما هي ثم اختر Constraint و حدد الخلايا F9-F10 ثم OK كما في الشكل
7. مرةً أخرى اختر Add و ذلك لتحديد القيود، ثم في نافذة Add Constraint
اختر Cell Reference و اعمل نفس الشيء بالنسبة للخلايا E11-E13 باختيار
Add Constraint و الخلايا F11-F13 باختيار Constraint لكن بتغيير الاتجاه
إلى ($\geq$). سيظهر أثر التغيير في نافذة Solver Parameter كما في الشكل.

نوع الألعاب	الربح للعبة الواحدة	كمية الإنتاج	الربح الإجمالي
الألعاب	300	0	0
الدمى	200	0	0
الدمى	100	0	0

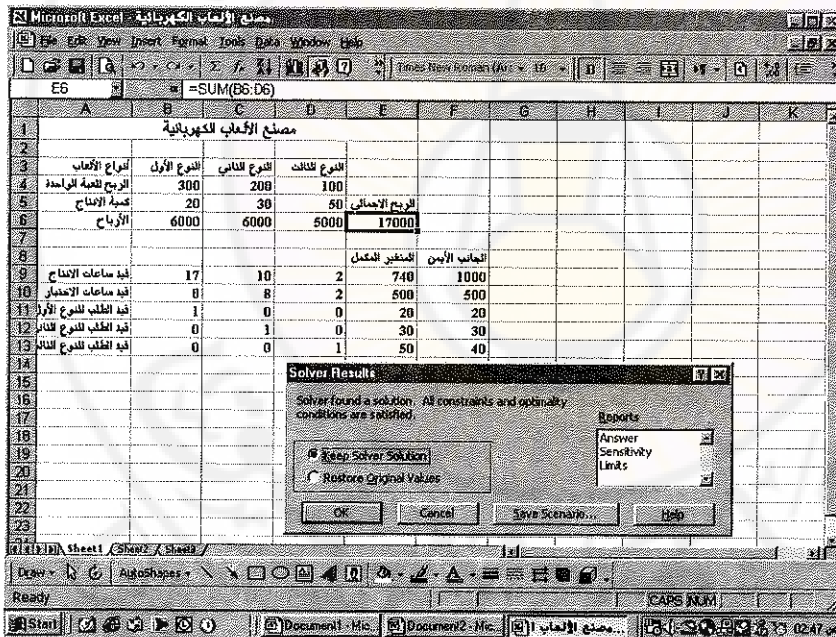
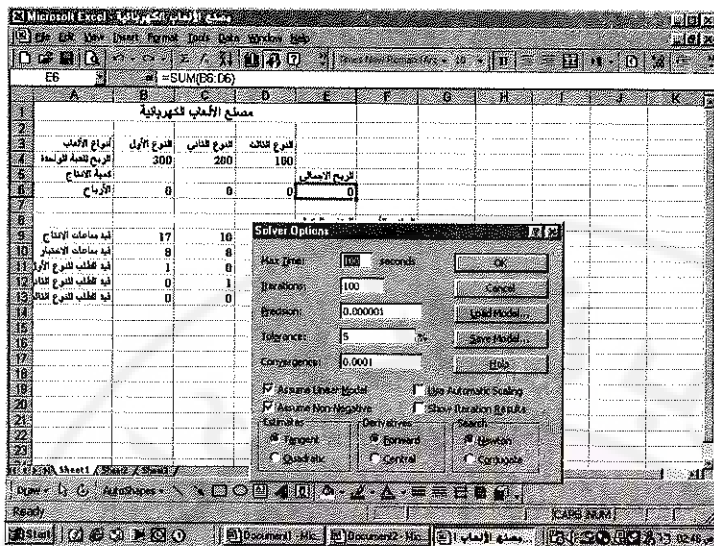
نوع الألعاب	الوقت المطلوب	الوقت المتاح
الوقت المطلوب	17	10
الوقت المتاح	8	8
الوقت المطلوب	1	0
الوقت المتاح	0	1
الوقت المطلوب	0	0
الوقت المتاح	0	1







الآن من نفس النافذة Solver Parameter اختر Options. ستظهر لك نافذة أخرى Solver Options و اختر العلاقة الخطية Assume linear Model و عدم السلبية Assume Non-Negative ثم OK كما في الشكل. من نافذة Solver Parameter اختر Solve. ستظهر لك الآن نافذة Solver Results كما في الشكل. اختر من Reports جميع الخيارات إن أردت و هي الإجابة Answer و الحساسية Sensitivity و الحدود Limits كما يظهر كما في الاشكال التالية.



Microsoft Excel - مصنع الألعاب الكهربائية

Microsoft Excel 9.0 Limits Report
Worksheet: [مصنع الألعاب الكهربائية]Sheet1
Report Created: 31/10/02 02:47:44 من

Cell	Target Name	Value
\$E\$6	الأرباح الإجمالي	17000

Cell	Adjustable Name	Value	Lower Target		Upper Target	
			Limit	Result	Limit	Result
\$B\$5	كمية الإنتاج للرقع الأزرق	20	20	17000	20	17000
\$C\$5	كمية الإنتاج للرقع الأخضر	30	30	17000	30	17000
\$D\$5	كمية الإنتاج للرقع لالتي	50	40	16000	50	17000

Microsoft Excel - مصنع الألعاب الكهربائية

Microsoft Excel 9.0 Sensitivity Report
Worksheet: [مصنع الألعاب الكهربائية]Sheet1
Report Created: 31/10/02 02:47:44 من

Adjustable Cells

Cell	Name	Final Value	Reduced Cost	Objective Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
\$B\$5	كمية الإنتاج للرقع الأزرق	20	0	300	100	1E+30
\$C\$5	كمية الإنتاج للرقع الأخضر	30	0	200	200	1E+30
\$D\$5	كمية الإنتاج للرقع لالتي	50	0	100	1E+30	25

Constraints

Cell	Name	Final Value	Shadow Price	Constraint R.H. Side	Allowable Increase	Allowable Decrease
\$E\$9	قوة ساعات الإنتاج للتدوير الكامل	740	0	1000	1E+30	260
\$E\$10	قوة ساعات الإنتاج للتدوير النصف	500	50	500	260	20
\$E\$11	قوة الطلب للرقع الأزرق للتدوير الكامل	20	-100	20	2.5	20
\$E\$12	قوة الطلب للرقع الأخضر للتدوير الكامل	30	-200	30	2.5	30
\$E\$13	قوة الطلب للرقع لالتي للتدوير الكامل	50	0	40	10	1E+30

Microsoft Excel - مصنع الألعاب الكهربائية

Microsoft Excel 9.0 Answer Report

Worksheet: [مصنع الألعاب الكهربائية]Sheet1

Report Created: 31/10/02 02:47:43 من

Target Cell (Max)

Cell	Name	Original Value	Final Value
\$E\$6	الأرباح للربح الإجمالي	0	17000

Adjustable Cells

Cell	Name	Original Value	Final Value
\$B\$5	كمية الإنتاج للربح الأول	0	20
\$C\$5	كمية الإنتاج للربح الثاني	0	30
\$D\$5	كمية الإنتاج للربح الثالث	0	50

Constraints

Cell	Name	Cell Value	Formula	Status	Slack
\$E\$9	قد ساعات الإنتاج للكمبيوتر الشخصي	740	\$E\$9<=\$F\$9	Not Binding	260
\$E\$10	قد ساعات الإنتاج للكمبيوتر الشخصي	500	\$E\$10<=\$F\$10	Binding	0
\$E\$11	قد الساعات للربح الأول للكمبيوتر الشخصي	20	\$E\$11>=\$F\$11	Binding	0
\$E\$12	قد الساعات للربح الثاني للكمبيوتر الشخصي	30	\$E\$12>=\$F\$12	Binding	0
\$E\$13	قد الساعات للربح الثالث للكمبيوتر الشخصي	50	\$E\$13>=\$F\$13	Not Binding	10

Answer Report 1

تمارين

ليكن لدينا:

(1) البرنامج الخطي التالي:

$$Z = 5x_1 + 4x_2 \rightarrow \max$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 24$$

$$x_1 + 4x_2 \leq 28$$

$$4x_1 - x_2 \leq 32$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

أ- حل هذا البرنامج بيانياً.

ب- طبق خوارزمية سيمبلكس على هذا البرنامج (وماذا تستنتج)؟

(2) ليكن لدينا البرنامج الخطي التالي:

$$Z = 2x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

$$x_1 + x_2 \leq 4$$

$$x_2 \geq 5$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

أ- حل هذا البرنامج بيانياً.

ب- طبق خوارزمية سيمبلكس على هذا البرنامج (وماذا تستنتج)!

(3) ليكن لدينا البرنامج الخطي التالي:

$$Z = x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

$$x_1 \leq 4$$

$$x_1 - x_2 \leq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

أ- حل هذا البرنامج بيانياً.

ب- طبق خوارزمية سيمبلكس على هذا البرنامج (وماذا تستنتج)؟

(4) حل البرنامج الخطي التالي:

$$Z = 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 + x_4 \rightarrow \max$$

$$-3x_1 - 2x_2 + 6x_3 - 9x_4 \geq 0$$

$$2x_1 + 4x_2 + 8x_3 - 5x_4 \geq -3$$

$$3x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 \leq 15$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

(5) حل البرنامج الخطي التالي:

$$Z = 3x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

$$2x_1 + 4x_2 \leq 21$$

$$5x_1 + 3x_2 \leq 18$$

$$4x_1 - x_2 \leq 32$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

(6) حل البرنامج الخطي التالي:

$$P = 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 \rightarrow \min$$

$$6x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 \geq 3$$

$$3x_1 + x_2 - 4x_3 - 3x_4 \geq 6$$

$$-2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 6x_4 \geq 8$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, 3, 4$$

الفصل السادس

البرمجة الصحيحة

6.1- مقدمة

إن تطبيقات البرمجة الصحيحة واسعة النطاق في المسائل العملية لأن كثيراً من الوحدات الإنتاجية يجب أن تكون بأشكال كاملة فمثلاً لا يمكن إنتاج سيارة ونصف أو لا يمكن تجنيد عشرة مجندين و ثلاثة أرباع المجند بل يجب تجنيد أحد عشر مجنداً أو عشرة مجندين وكذلك لا يمكن إنتاج سيارة واحدة ونصف وإنما سيارتين أو سيارة واحدة وهكذا نرى أن تطبيقات البرمجة الخطية محدودة في الحياة العملية إلى حد ما.

عند حل أي مشكلة من مشكلات البرمجة الصحيحة ، نجد حلاً لتلك المسألة باستخدام طريقة السمبلكس. فإذا تبين أن الحل قيم عددية صحيحة فإن المسألة قد أوجد لها حل ولا نحتاج إلى اتباع أساليب أخرى أما إذا لم يكن الحل كذلك وهذا هو الغالب فنتبع الأساليب التالية:

أ- أسلوب التقريب

ب- أسلوب قطع المستوي Cutting-Plane technique

ت- أسلوب التفرع والتحديد Dmneli and bound

فيما يلي نوضح مفهوم كل أسلوب من الأساليب الثلاثة

6.2- أسلوب التقريب

نحصل عندما نجد حل مسائل البرمجة الخطية باستخدام طريقة السمبلكس على قيم عددية صحيحة بصورة أوتوماتيكية ولكن هذه النتائج العددية الصحيحة محدودة ومسائل معينة فقط أما إذا ظهرت في الجدول الأخير من جداول طريقة السمبلكس قيم غير صحيحة وأن المطلوب في منطق المسألة قيم عددية صحيحة. ففي تلك الحالة نستعين بأسلوب التقريب لجعل هذه القيم غير العددية قيماً عددية

صحيحة. نستعين بأسلوب التقريب عادة عندما تكون قيم المجاهيل كبيرة جداً بحيث لا يؤثر تأثيراً فعالاً على الحل الأمثل لقيمة دالة الهدف.

افترض أن الحل الأمثل لمسألة ما باستخدام طريقة السمبلكس هو:

$$X1 = 456.1$$

$$X2 = 1672.9$$

$$X3 = 591.5$$

يمكن تقريب قيم المجاهيل الثلاثة أعلاه إذا افترضنا عدم حدوث تغيير ملحوظ في

قيمة دالة الهدف إلى القيم التقريبية التالية:

$$X1 = 456$$

$$X2 = 1673$$

$$X3 = 592$$

وهكذا استطعنا باستخدام هذا الأسلوب أن نحصل على الحل الأمثل لمسألة البرمجة الصحيحة بالرغم من سهولة هذا الأسلوب لكنه لا يمكن أن يطبق إلا على مشكلات محدودة جداً. في حالة كون قيم المجاهيل صغيرة أو مطلوب الحل الدقيق للمسألة فإن هذا الأسلوب ينتج لنا قيماً تكون غير مقبولة وبعيدة كل البعد عن الحل الأمثل. كما أن التقريب ممكن أن يجعل الحل خارج منطقة الحلول. بالإضافة إلى صعوبة الحصول على الحل الأمثل لكثير من المسائل باستخدام هذا الأسلوب وقد يستغرق وقتاً طويلاً.

مثال:

افرض أن قيم المجاهيل باستخدام طريقة السمبلكس لمسألة ما هي:

$$X1 = 5.4$$

$$X2 = 3.5$$

$$X3 = 2.6$$

لأجل الحصول على الحل الأمثل يجب اختبار جميع الحالات التي تكون فيها قيم

المجاهيل الثلاثة قريبة من القيم العددية الصحيحة وكما يلي:

$(5,3,2)$, $(6,3,2)$, $(5,4,2)$, $(6,4,2)$, $(5,3,3)$, $(6,4,2)$, $(6,3,3)$, $(5,4,3)$

من ثم نوجد الحلول الصحيحة التي تقع ضمن منطقة الحلول والتي تعطي أفضل قيمة لدالة الهدف.

نلاحظ في حالة وجود n عدد صحيح فإنه يجب تنفيذ

(2 مرفوعة للقوة n) محاولة فإذا كانت $n=7$ فإن عدد المحاولات ستكون 2^7 وتساوي 128 مرة وإذا كانت $n=10$ فإن عدد المحاولات ستكون 1024 ومع ذلك لا يمكن ضمان وجود حل أمثل للمسألة.

6.3- أسلوب قطع المستوي

cutting-plane algorithm

من الأساليب المهمة والفعالة في إيجاد حلول معظم مشكلات البرمجة العددية الصحيحة هو الأسلوب المسمى أسلوب قطع المستوي cutting plane. باستخدام أسلوب قطع المستوي يمكن تحويل الحلول الممكنة لمسائل البرمجة الخطية غير الصحيحة إلى حلول ممكنة للبرمجة الصحيحة وذلك بإضافة شروط جديدة للمسألة موضوعة البحث.

إن الشرط المضاف الجديد يسمى بالقطع (cutting). وتستمر عملية تكوين شروط جديدة وإضافتها إلى المسألة القديمة حتى نصل إلى حل أمثل لمسألة البرمجة الصحيحة.

إن عدد الخطوات المطلوبة عند استخدام هذا الأسلوب لا تتجاوز عدداً محدوداً وحسب طبيعة المسألة وعند عدم التوفيق في إيجاد الحل باستخدام أسلوب قطع المستوي فهناك أسلوب آخر سنتطرق له فيما بعد.

إن الخطوات المتبعة في إيجاد الحل الأمثل باستخدام أسلوب قطع المستوى هي خطوات طريقة السمبلكس نفسها ماعدا وجود مشكلة أخرى هي مشكلة تكوين شرط جديد ثم إضافة ذلك الشرط إلى المسألة. نوضح ذلك من خلال الأمثلة.

نلخص الخطوات المتبعة في هذا الأسلوب كما يلي:

الخطوة الأولى:

إيجاد حل للمسألة موضوعة البحث بغض النظر عن كون الحل قيماً عددية صحيحة أم قيماً غير صحيحة وذلك باستخدام طريقة السمبلكس.

الخطوة الثانية:

إذا كانت جميع قيم مجاهيل المسألة أعداداً صحيحة فذلك هو المطلوب. أما إذا لم تكن جميع قيم مجاهيل المسألة أعداداً صحيحة فنتبع الخطوة التالية.

الخطوة الثالثة:

تكوين شرط جديد (قطع) يضاف إلى المسألة ثم تعاد الخطوات السابقة. هذه هي مجمل الخطوات المتبعة عند حل أية مشكلة باستخدام أسلوب قطع المستوى.

6.3.1- طريقة كومري

نوضح الآن طريقة كومري في حالة استخدام أسلوب قطع المستوى. إن طريقة كومري عبارة عن أول طريقة نصل منها إلى الحل الأمثل للمسألة موضوعة البحث بعدد محدود من الخطوات. لقد تم تطوير هذه الطريقة من قبل ر.ي. كومري R.E.Gomory وإليك طريقة كومري.

طريقة كومري باتباع أسلوب قطع المستوى

افترض أن المعادلة التالية

$$a_1X_1 + a_2X_2 + \dots + a_nX_n = b \quad (6.1)$$

تتحقق بالقيم غير السالبة $X_1, X_2, \dots, X_n$

يعرف $[M]$ ، لأي عدد حقيقي M ، بأنه أكبر عدد صحيح أقل أو يساوي M .

$$M = [M] + e \quad \text{حيث } 0 \leq e < 1$$

مثال:

$$[6.5] = 6$$

$$[3] = 3$$

$$[-4 \frac{1}{2}] = -5$$

$$b = [b] + f \quad \text{وأن} \quad aj = [aj] + ff$$

عوض هذه الكميات في المعادلة (8.1) ينتج:

$$\sum_{j=1}^n ([aj] + ff) Xj = [b] + f$$

أو بعبارة ثانية

$$\sum_{j=1}^n ff Xj - f = [b] - \sum_{j=1}^n [aj] Xj \quad (6.2)$$

عندما يكون Xj ($j = 1, 2, \dots, n$) حلاً ممكناً للمعادلة (6.1) أي عبارة عن عدد صحيح فإن الجهة اليمنى من المعادلة (6.2) عبارة عن عدد صحيح وعلى هذا الأساس ستكون

$$M = \sum_{j=1}^n ff Xj - f$$

إذا علمنا أن $X1, X2, \dots, Xn$ أكبر أو تساوي صفرًا إضافة إلى كونها أعداداً صحيحة فإن:

$$M \geq 0$$

وإذا علمنا أن الحل الأمثل عندما لا نضع في الحسبان شرط العدد الصحيح يحتوي على أعداد كسرية فهذا يعني وجود كمية في الجهة اليمنى من الجدول غير عددية ولنفرض أن bio (الثابت في الجهة اليمنى من الصف i) كمية غير عددية إذاسيكون هناك مجهول أساسي Xi يدخل ضمن المجاهيل الأساسية أو بعبارة ثانية

$$X_i + \sum b_{ij}X_j = b_{io} \quad (6.3)$$

إن الأعداد الصحيحة غير السالبة تحقق المعادلة (6.3) وكذلك تحقق

$$0.X_i + \sum_j f_j X_j \geq f$$

للمجاهيل غير الأساسية

أو بعبارة أخرى

$$\sum_j f_j X_j \geq f \quad (6.4)$$

للمجاهيل غير الأساسية

$f > 0$ لأن b_{io} عدد كسري لذلك فإن حل البرمجة الخطية الحالي لا يحقق

(6.4) لأن $X_j = 0$ عندما $j = i$ ولذلك فإن المتراجحة (6.4) عبارة عن قطع (شرط

جديد يضاف للمسألة).

خطوات الحل

الخطوة الأولى: جد حلاً لمسألة البرمجة الخطية بدون وضع أي اعتبار لشرط الأعداد الصحيحة.

الخطوة الثانية: إذا كان الحل أعداداً صحيحة، فهذا يعني وجود حل عددي صحيح أمثل أما إذا كان الحل كسراً فإننا نتبع الخطوة التالية.

الخطوة الثالثة: اختر مجهول أساسي X_i مثلاً حيث أن قيمته كسرية، ثم أجري عملية تكوين قطع جديد وفقاً إلى الشرط (6.4) أعلاه يضاف إلى المسألة وتعاد الخطوات السابقة.

إن الجدول بعد إضافة الشرط الجديد يكون جدول ثنائي ولذلك تستخدم طريقة السمبلكس الثنوية لإيجاد الحل الأمثل.

إن عملية اختيار المجهول الأساسي الذي يحمل القيمة غير الصحيحة تكون باختيار المجهول الذي يحمل كسراً أكبر من بقية الكسور الأخرى ولأجل تبسيط ذلك أكثر إليك التوضيح الآتي:

15/4 عبارة عن $3 \frac{3}{4}$ إن الكسر عبارة عن $\frac{3}{4}$ أما كسر القيمة $19/2$ فإنه $1/2$ حيث أن $19/2$ عبارة عن $9 \frac{1}{2}$ لذلك فإن الكسر $\frac{3}{4}$ أكبر من الكسر $1/2$ وعلى هذا الأساس يكون الاختيار.

نوضح مفهوم قطع المستوي بالأمثلة الآتية:

مثال:

جد الحل الأمثل للمسألة الآتية:

$$\max Z = 5X_1 + 6X_2$$

وفقاً إلى الشروط:

$$2X_1 + 3X_2 \leq 18$$

$$2X_1 + X_2 \leq 12$$

$$X_1 + X_2 \leq 8$$

$$X_2 \geq 0, X_1 \geq 0$$

X_1, X_2 عدنان صحيحان

الحل:

الخطوة الأولى: حل المسألة كبرمجة خطية بدون وضع شرط الأعداد الصحيحة في الاعتبار.

تستخدم طريقة السمبلكس لإيجاد الحل الأمثل لمسألة البرمجة الخطية.

تضاف المجاهيل الخاملة S_1, S_2, S_3 إلى الشرط الأول، الثاني، الثالث على

الترتيب فينتج:

$$\max Z - 5X_1 - 6X_2 = 0$$

$$2X_1 + 3X_2 + S_1 = 18$$

$$2X_1 + X_2 + S_2 = 12$$

$$X_1 + X_2 + S_3 = 8$$

S_1, S_2, S_3 أكبر أو تساوي صفراً.

الحل الأمثل الأولي الممكن كما يلي:

$$X_1 = 0$$

$$X_2 = 0$$

$$Z = 0$$

$$S_1 = 18$$

$$S_2 = 12$$

$$S_3 = 8$$

ضع المعلومات أعلاه في الجدول (6.1):

	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	الثابت
Z	-5	-6	0	0	0	0
S_1	2	3	1	0	0	18
S_2	1	1	0	1	0	12
S_3	1	1	0	0	1	8

الجدول (6.1)

بعد تحديد المجهول الداخل Entering variable والمجهول الخارج leaving variable وعنصر الدوران Pivotal element تنفذ العمليات الدورانية Pivotal operation على الجدول (6.1)

إن أكبر معامل بالسالب في دالة الهدف: هو معامل X_2 ويساوي (-6). إن المجهول X_2 سيكون المجهول الداخل وإن المجهول الخارج هو المجهول الأساسي S_1 .
العنصر المحوري يساوي 3.
تنفذ العملية فنحصل على الجدول:

	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	الثابت
Z	-1	0	2	0	0	36
X_2	$2/3$	1	$1/3$	0	0	6
S_2	$1\frac{1}{3}$	0	$-1/3$	1	0	6
S_3	$1/3$	0	$-1/3$	0	1	2

الجدول (6.2)

حتى الآن لم نصل إلى الحل الأمثل بصيغته النهائية لمسألة البرمجة الخطية. إن أكبر معامل بالسالب في صف دالة الهدف هو معامل X_1 ويساوي -1. المجهول الداخل سيكون المجهول X_1 وسيكون المجهول الخارج هو المجهول S_2 وعنصر الدوران هو العنصر $1\frac{1}{3}$. بعد إجراء العملية الدورانية على الجدول (6.2) ينتج الجدول الآتي:

	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	الثابت
Z	0	0	$7/4$	$\frac{3}{4}$	0	$40\frac{1}{2}$
X_2	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	3
X_1	1	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	0	$4\frac{1}{2}$
S_3	0	0	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{2}$

الجدول (6.3)

يظهر من الجدول (6.3) أن الحل هو الأمثل لمسألة البرمجة الخطية حيث أن قيم المجاهيل كالآتي:

$$Z^* = 40\frac{1}{2}$$

$$X_1 = 4\frac{1}{2}$$

$$X_2 = 3$$

$$S_3 = 1/2$$

الخطوة الثانية: هل قيم المجاهيل أعلاه قيم عددية صحيحة أم هناك قيم غير عددية. يظهر من النتائج وجود قيم غير عددية. إذ أنتبع الخطوة الثالثة.

الخطوة الثالثة: تكوين قطع جديد (شرط جديد) أو ما يسمى بشرط كومري Gomory constraint يضاف إلى الجدول (6.3)

نختار المجهول الأساسي الذي يحمل أكبر كسر بين المجاهيل.
إن معادلة القطع التي سنختارها ستكون معادلة المجهول الأساسي X_1 . اكتب من الجدول (6.3) المعادلة الآتية:

$$1.X_1 + 0.X_2 - 1/4S_1 + 3/4S_2 + 0.S_3 = 4 \frac{1}{2}$$

تعاد كتابة المعادلة أعلاه وفقاً إلى القواعد المذكورة سابقاً من (6.1) إلى (6.4) وكما يلي:

$$(1+0).X_1 + 0.X_2 + (-1+3/4)S_1 + 3/4S_2 + 0.S_3 = 4 + 1/2$$

من المعادلة رقم (6.4) التي تنص على أن

$$\sum_j f_j X_j \geq f$$

للمجاهيل غير الأساسية

نجد أن المجاهيل غير الأساسية هي المجاهيل S_1, S_2 . إذ أفي ضوء ذلك سيكون الشرط كما يلي:

$$3/4S_1 + 3/4S_2 \geq 1/2$$

أو بشكل آخر

$$-3/4S_1 - 3/4S_2 \leq -1/2$$

إن الشرط أعلاه هو القطع المتكون الذي يضاف إلى المسألة لإيجاد الحل الأمثل عندما تكون المسألة عبارة عن مشكلة برمجة صحيحة.

بعد إضافة مجهول S_4 إلى شرط القطع أعلاه سيكون الشرط كما في المعادلة التالية:

$$-3/4S_1 - 3/4S_2 + S_4 = -1/2$$

أضف معاملات هذه المعادلة إلى الجدول التالي كما يلي:

	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	S_4	الثابت
Z	0	0	$7/4$	$\frac{3}{4}$	0	0	$40\frac{1}{2}$
X_2	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	3
X_1	1	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	0	0	$4\frac{1}{2}$
S_3	0	0	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{1}{2}$
S_4	0	0	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{4}$	0	1	$-\frac{1}{2}$

الجدول الثنوي

إن عمليات الطريقة الثنوية Dual simplex يشبه عمليات طريقة السيمبلكس إلا في حالة اختيار المجهول الداخل والمجهول الخارج.
يتم اختيار المجهول الخارج عن طريقه الثابت الأكثر سالبية.
إن الأكثر سالبية في الجدول السابق هو $(-1/2)$ الذي يقابل S_4 . إن المجهول الخارج سيكون المجهول S_4 .

لأجل تحديد المجهول الداخل نختار أصغر النسب المطلقة

$$\left[\left| \frac{3/4}{-3/4} \right|, \left| \frac{7/4}{-3/4} \right| \right]$$

إن أصغر نسبة هي النسبة $\frac{3/4}{-3/4}$ إذاً S_2 هو المجهول الداخل. وإن عنصر الدوران هو العنصر $-3/4$.

بعد تنفيذ العملية ينتج:

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	الثابت
z	0	0	1	0	0	1	40
x_2	0	1	1	0	0	-2/3	31/3
x_1	1	0	-1	0	0	1	4
s_3	0	0	0	0	1	-1/3	2/3
s_2	0	0	1	1	0	$\frac{3}{4}$	2/3

الجدول (6.4)

ولكن ما زالت قيم غير صحيحة موجودة. إذاً الحل غير أمثل.

نستمر في تكوين شروط جديدة تضاف للمسألة. نختار أكبر الكسور في الجدول

(6.4). نختار معادلة s_2 حيث الكمية الثابتة تساوي 2/3

سيكون الشرط الجديد كما يلي:

$$0x_1 + 0x_2 + (0+1)s_1 + (0+1)s_2 + 0s_3 + (-2+2/3)s_4 = 2/3$$

وحسب المعادلة (6.4) ينتج:

$$2/3s_4 \geq 2/3$$

أو بعبارة ثانية

$$-2/3s_4 \leq -2/3$$

بعد إضافة مجهول مكمل s_5 ينتج:

$$-2/3s_4 + s_5 = -2/3$$

تضاف المعادلة أعلاه إلى الجدول لأجل الحصول على الجدول التالي:

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	الثابت
z	0	0	1	0	0	1	0	40
x_2	0	1	1	0	0	-2/3	0	31/3
x_1	1	0	-1	0	0	1	0	4
s_3	0	0	0	0	1	-1/3	0	2/3
s_2	0	0	1	1	0	-4/3	0	2/3
s_5	0	0	0	0	0	-2/3	1	-2/3

الجدول (6.5)

إن الكمية الأكثر سالبية في عمود الثابت هي الكمية $(-2/3)$ في صف المجهول s_5 . إن المجهول s_5 سيخرج من المجاهيل الأساسية ليصبح مجهولاً غير أساسي (مجهولاً خارجياً). المجهول الداخل هو المجهول s_4 . عنصر الدوران $(-3/4)$ بعد تنفيذ العمليات على الجدول (6.5) نحصل على الجدول وكما يلي:

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	الثابت
z	0	0	1	0	0	0	3/2	39
x_2	0	1	1	0	0	0	-1	4
x_1	1	0	-1	0	0	0	3/2	3
s_3	0	0	0	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	1
s_2	0	0	1	1	0	0	-2	2
s_4	0	0	0	0	0	1	-3/2	1

الجدول (6.6)

جميع قيم المجاهيل في الجدول (6.6) أعداد صحيحة. إذاً الجدول (6.6) يمثل الحل الأمثل لمسألة البرمجة الصحيحة حيث:

$$Z^* = 39$$

$$X_1 = 3$$

$$X_2 = 4$$

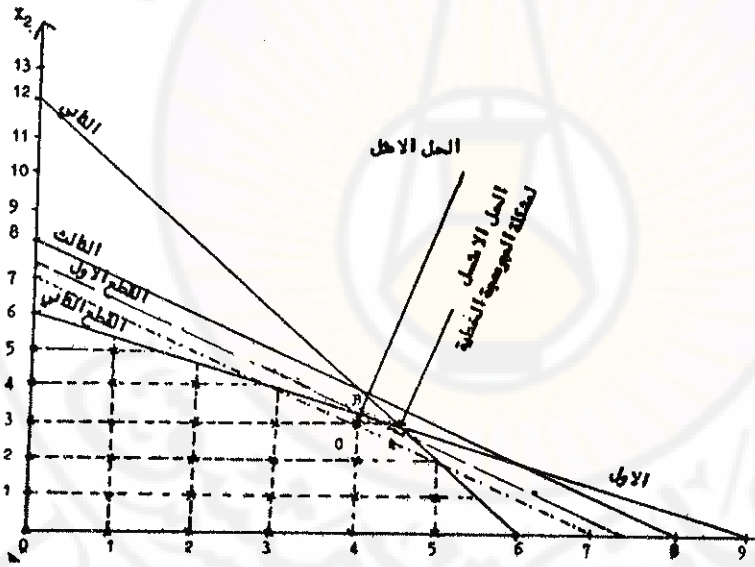
$$S_2 = 2$$

$$S_3 = 1$$

$$S_4 = 1$$

$$S_5 = 0$$

بعد الوصول إلى الحل الأمثل نوضح العمليات السابقة بيانياً من أجل وضع القارئ على بينة من أمر تغيير الحل بإضافة شروط جديدة (قطع). نرسم مشكلة البرمجة الخطية في المثال السابق ونحدد منطقة الإمكانات المتاحة والحل الأمثل كما في الشكل:



الشكل (6.1)

المنطقة المظلمة في الشكل (6.1) عبارة عن منطقة الإمكانات المتاحة. إن النقطة

A عبارة عن الحل الأمثل لمسألة البرمجة الخطية حيث أن

$$Z^* = 40 \frac{1}{2}, X_2 = 3, X_1 = 4 \frac{1}{2}$$

نرسم من كل نقطة من نقاط تقسيمات المحور السيني والعيني خطاً مستقيماً (عمودياً) متقطعاً كما في الشكل (6.1) إن نقاط تقاطع المستقيمات المتقطعة وضمن منطقة الإمكانيات المتاحة، ستكون النقاط المرشحة للحل الأمثل لمسألة البرمجة الصحيحة.

نعتبر عن القطع الأمل (شرط كومري) بدلالة المجاهيل X_1, X_2

إن القطع الأول هو القطع $-1/2 \leq -3/4S_1 - 3/4S_2$

نعوض عن S_1, S_2 في القطع الأول حيث أن

$$2X_1 + 3X_2 + S_1 = 18$$

أو

$$S_1 = 18 - 2X_1 - 3X_2$$

وأن

$$S_2 = 12 - 2X_1 - X_2$$

عوض في القطع أعلاه ينتج:

$$-3/4(18 - 2X_1 - 3X_2) - 3/4(12 - 2X_1 - X_2) \leq -1/2$$

بعد التبسيط ينتج الشرط (شرط القطع الأول بدلالة X_1, X_2) الآتي:

$$3X_1 + 3X_2 \leq 22$$

ارسم الشرط أعلاه:

إذا كان $X_1 = 0$ فإن $X_2 = 22/3$

إذاً تتعين النقطة $(0, 22/3)$

إذا كان $X_2 = 0$ فإن $X_1 = 22/3$

إذاً تتعين النقطة $(22/3, 0)$

نصل النقطتين أعلاه بخط مستقيم مقطع (إن هذا الخط المستقيم المقطع هو شرط

القطع الأول) كما مبين في الشكل (6.1)

شرط القطع أعلاه يقطع الشرط الأول في النقطة B. إحداثيات النقطة B هما الإحداثي السيني $X_1=4$ والإحداثي الصادي $X_2=3 \frac{1}{3}$ إن قيم X_1 , X_2 من الرسم البياني هي قيم X_1 , X_2 نفسها باستخدام الطريقة التثوية المبسطة كما في الجدول رقم (6.6)

لا زال الحل غير أمثل، نحتاج إلى أن نرسم القطع الثاني إن الشرط الثاني (شرط كومري) هو

$$-2/3 S_4 \leq -2/3$$

نعوض عن S_4 بدلالة X_1 , X_2

نجد أولاً S_4 من المعادلة

$$-3/4 S_1 - 3/4 S_2 + S_4 = -1/2$$

أو بعبارة أخرى

$$S_4 = -1/2 + 3/4 S_1 + 3/4 S_2$$

عوض عن S_1 , S_2 وكما يلي

$$2X_1 + 2X_2 \leq 14$$

بعد رسم هذا الشرط ينتج القطع الثاني المبين في الشكل يمر القطع الثاني خلال النقطة $B(4,3)$. إن النقطة B عبارة عن الحل الأمثل لمسألة البرمجة الصحيحة. وهكذا يبين المخطط البياني حقيقة مهمة وهي أن مجموعة الحلول الصحيحة الممكنة تكون أقل من مجموعة الحلول غير الصحيحة الممكنة أو تساويها دائماً. وهذا يبين أن القيمة المثلى لحل مشكلة صحيحة أقل أو تساوي القيمة المثلى لحل مشكلة غير صحيحة (نفس المسألة السابقة بدون شرط الأرقام الصحيحة) كما لاحظت ذلك في المثال السابق. حيث كانت دالة الهدف للمسألة الخطية تساوي 40 $\frac{1}{2}$ بينما أصبحت تساوي 39 في حالة المسألة الصحيحة.

مثال:

ليكن لدينا البرنامج الخطي التالي:

$$\max Z = X_1 + X_2$$

وفقاً إلى

$$2X_1 + X_2 \leq 6$$

$$X_1 + 4X_2 \leq 12$$

$$X_1 \geq 0$$

$$X_2 \geq 0$$

X_1 , X_2 عدنان صحيحان

الحل:

الخطوة الأولى: حل المسألة كبرمجة خطية بعد حذف شرط الأعداد الصحيحة باستخدام طريقة السمبلكس لإيجاد الحل الأمثل.

بعد إضافة المجاهيل الخاملة S_1 , S_2 إلى الشرط الأول والثاني على الترتيب

ينتج:

$$\max Z - X_1 - X_2 = 0$$

وفقاً إلى شروط المسألة:

$$2X_1 + X_2 + S_1 = 6$$

$$X_1 + 4X_2 + S_2 = 12$$

$$X_1 \geq 0$$

$$X_2 \geq 0$$

$$S_1 \geq 0$$

$$S_2 \geq 0$$

نحصل على الحل الأساسي الأولي الممكن كما يلي:

$$X1 = 0$$

$$X2 = 0$$

$$Z = 0$$

$$S1 = 6$$

$$S2 = 12$$

ضع المعلومات أعلاه في جدول السيمبلكس وليكن الجدول التالي:

	x_1	x_2	s_1	s_2	الثابت
z	-1	-1	0	0	0
s_1	2	1	1	0	6
s_2	1	4	0	1	12

الجدول (6.7)

اختر المجهول الداخل x_1 ، المجهول الخارج سيكون المجهول s_1 . عنصر الدوران سيكون 2.

بعد تنفيذ العمليات ينتج الجدول التالي:

	x_1	x_2	s_1	s_2	الثابت
z	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	3
x_1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	3
s_2	0	$3\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	9

الجدول (6.8)

x_2 سيكون المجهول الداخل، أما المجهول الخارج فسيكون المجهول المقابل

لأصغر الكميتين $\left[\frac{9}{7/2}, \frac{3}{1/2} \right]$

إن أصغر الكميتين يساوي $18/7$. s_2 سيكون المجهول الخارج.

بعد تنفيذ العملية المحورية ينتج الجدول التالي:

	$X1$	$X2$	$S1$	$S2$	الثابت
Z	0	0	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{30}{7}$
$X1$	1	0	$\frac{4}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$\frac{12}{7}$
$X2$	0	1	$-\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{18}{7}$

الجدول (6.9)

الحل أمثل من وجهة نظر البرمجة الخطية. لكنه لا يمثل الحل الأمثل للبرمجة الصحيحة.

الخطوة الأخرى: تكوين قطع جديد (شرط جديد) يضاف إلى جدول السيمبليكس (6.9)

نختار المجهول الأساسي الذي يحمل أكبر كسر في العمود الثابت. إن هذا المجهول هو المجهول $X1$

نكتب من الجدول (6.9) معادلة القطع الجديد

$$1.X1 + 0.X2 + 4/7S1 + (-1 + 6/7)S2 = (1 + 5/7)$$

أو بعبارة ثانية

$$-4/7S1 - 6/7S2 \leq -5/7$$

بعد إضافة مجهول خامل $S3$ نحصل على المعادلة

$$-4/7S1 - 6/7S2 + S3 = -5/7$$

تضاف هذه المعادلة إلى الجدول (6.9) للحصول على الجدول التالي:

	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	الثابت
Z	0	0	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{7}$	0	$\frac{30}{7}$
X_1	1	0	$\frac{4}{7}$	$-\frac{1}{7}$	0	$\frac{12}{7}$
X_2	0	1	$-\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	0	$\frac{18}{7}$
X_3	0	0	$-\frac{4}{7}$	$-\frac{6}{7}$	1	$-\frac{5}{7}$

الجدول (6.10)

تستخدم طريقة السمبلكس الثنوية لإيجاد الجدول الجديد.

المجهول الخارج حسب طريقة السمبلكس الثنوية سيكون المجهول S_2 المجهول

الداخل سيكون المجهول المقابل لأصغر نسبة مطلقة من النسب $\left[\left| \frac{1/7}{-6/7} \right|, \left| \frac{3/7}{-4/7} \right| \right]$

أصغر نسبة مطلقة هي النسبة $\frac{1/7}{6/7}$. المجهول الداخل سيكون المجهول S_2 ، وإن

عنصر الدوران هو العنصر $(-6/7)$

بعد تنفيذ العمليات في الجدول (6.10) ينتج جدول السمبلكس التالي:

	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	الثابت
Z	0	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{25}{6}$
X_1	1	0	$\frac{2}{3}$	0	$-\frac{1}{6}$	$\frac{11}{6}$
X_2	0	1	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{6}$	$\frac{14}{6}$
S_2	0	0	$\frac{2}{3}$	1	$-\frac{7}{6}$	$\frac{5}{6}$

جدول (6.11)

حتى الآن لم نصل إلى الحل الأمثل لمسألة البرمجة الصحيحة.

نكون قطعاً جديداً ولنختار المجهول X_1 الذي يحمل أكبر كسر في عمود الكميات الثابتة.

نكتب معادلة X_1 كما يلي:

$$(1+0)X_1 + 0.X_2 + 2/3S_1 + 0.S_2 + (-1+5/6)S_3 = 1+5/6$$

أو بعبارة ثانية $-5/6 \leq -2/3S_1 - 5/6S_3$

بعد إضافة المجهول الخامل S_4 نحصل على معادلة القطع الثاني

$$-2/3S_1 - 5/6S_3 + S_4 = -5/6$$

تضاف هذه المعادلة إلى الجدول (6.11) لينتج الجدول التالي:

	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	S_4	الثابت
Z	0	0	1/3	0	1/6	0	25/6
X_1	1	0	2/3	0	-1/6	0	11/6
X_2	0	1	-1/3	0	2/6	0	14/6
S_2	0	0	2/3	1	7/6	0	5/6
S_4	0	0	-2/3	0	-5/6	1	-5/6

جدول (6.12)

باستخدام طريقة السمبلكس الثنوية نحصل على جدول السمبلكس جديد.

سيكون المجهول الخارج S_4 ، المجهول الداخل يتحدد بإيجاد أصغر نسبة مطلقة

من النسبتين

$$\left[\left| \frac{1/6}{-5/6} \right|, \left| \frac{1/3}{-2/3} \right| \right]$$

إن أصغر نسبة مطلقة هي النسبة $\frac{1/6}{5/6}$. S_3 المجهول الداخل. بعد تنفيذ العمليات

ينتج الجدول التالي:

	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	S_4	الثابت
Z	0	0	1/5	0	0	1/5	4
X_1	1	0	4/5	0	0	-1/5	2
X_2	0	1	3/5	0	0	2/5	2
S_2	0	0	8/5	1	0	-7/5	2
S_3	0	0	4/5	0	1	-6/5	1

جدول (6.13)

قيم مجاهيل الجدول (6.13) صحيحة، وهي تمثل الحل الأمثل لمسألة البرمجة الصحيحة.

حيث أن:

$$Z^* = 4$$

$$X_1 = 2$$

$$X_2 = 2$$

$$S_2 = 2$$

$$S_3 = 1$$

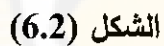
نوضح الحلول السابقة باستخدام الرسم البياني.

الشكل (6.2) يوضح الرسم البياني للمثال السابق

المنطقة المظللة في الشكل (6.2) عبارة عن منطقة الإمكانيات المتاحة لمسألة

البرمجة الخطية. وإن النقطة A عبارة عن الحل الأمثل لمسألة البرمجة الخطية حيث

$$X_2 = 18/7, X_1 = 12/7 \text{ ودالة الهدف } Z^* = 30/7 \text{ كما في الشكل (6.2)}$$



نعتبر عن القطع الأول (شرط كومري) بدلالة المجهولين X_1, X_2

القطع الأول هو الشرط

$$-4/7S_1 - 6/7S_2 \leq -5/7$$

عوض عن $S1$, $S2$ في الشرط أعلاه ينتج:

$$-4/7(6-2X_1-X_2)-6/7(12-X_1-4X_2)\leq-5/7$$

$$-24/7+8/7X_1+4/7X_2-72/7+6/7X_1+24/7X_2\leq-5/7$$

أو

$$2X_1+4X_2\leq13$$

ارسم الشرط أعلاه:

إذا كان $X_2=0$ فإن $X_1=13/2$

إذاً تتعين النقطة $(13/2, 0)$

نصل النقطتين بخط مستقيم متقطع (وهذا المستقيم يمثل شرط القطع الأول).

نرسم شرط القطع الثاني بدلالة X_2, X_1

إن شرط القطع الثاني هو الشرط

$$-2/3S_1-5/6S_3\leq-5/6$$

نعبر عن المجهول S_3 بدلالة S_1, S_2 .

حيث أن

$$S_3 = -5/7 + 4/7S_1 + 6/7S_2$$

$$= 13 - 2X_1 - 4X_2$$

عوض عن S_1, S_3 بدلالة X_2, X_1 في شرط القطع الثاني ينتج ما يلي:

$$-2/3(6-2X_1-X_2)-5/6(13-2X_1-4X_2)\leq-5/6$$

$$-24/6+8/6X_1+4/6X_2-65/6+10/6X_1+20X_1/6\leq-5/6$$

أو

$$3X_1+4X_2\leq14$$

ارسم الشرط أعلاه:

عندما $X_1=0$ فإن $X_2=14/4$

وبذلك تتعين النقطة $(0, 14/4)$

عندما $X_2=0$ فإن $X_1=14/3$

وبذلك تتعين النقطة $(14/3, 0)$

نصل النقطة $(0, 14/4)$ والنقطة $(14/3, 0)$ بمستقيم للحصول على رسم للشرط الثاني. يتضح من الرسم الشكل (6.2) أن النقطة B تمثل الحل الأمثل لمسألة البرمجة العددية. إن النقطة B عبارة عن النقطة التي إحداثيها السيني $X_1=2$ وإحداثيها العيني $X_2=2$ وإن دالة الهدف المثلى هي 4.

لقد تطرقنا في المثالين السابقين عن تعظيم دالة هدف البرمجة العددية. لحل مسائل البرمجة العددية إذا كانت دالة الهدف تصغير (minimize) تتبع الخطوات السابقة نفسها ويضاف القطع الجديد إلى المسألة وتستخدم طريقة السمبلكس الثنوية (Dual simplex) لإيجاد قيم الجدول السمبلكس الجديد. المجهول الخارج يتحدد بنفس الأسلوب سواء كان المطلوب تعظيم دالة الهدف أم تصغيرها. أما المجهول الداخل فيحدد بأقل نسبة من نسب الكميات الثابتة. إن الفرق في تحديد المجهول الداخل بين حالتي التعظيم والتصغير كالآتي:

أ- في حالة التعظيم يتم اختيار أقل نسبة مطلقة.

ب- في حالة التصغير يتم اختيار أقل نسبة .

وهكذا نصل إلى الحل الأمثل لمسائل البرمجة الصحيحة باستخدام طريقة كومري وبعدها محدود من الخطوات.

6.4-التفريع والتحديد Branch and bound

من الأساليب المهمة التي أحرز تطبيقها نجاحاً واسعاً في الوقت الحاضر هو أسلوب التفريع والتحديد.

لهذا الأسلوب مفهوم عام ويمكن استخدامه في إيجاد الحل الأمثل لكثير من المسائل العملية مثل مسألة البائع المتجول Salesman، ومسألة التوقيت Scheduling وغيرها من المسائل.

نصف الخطوات المتبعة في هذا الأسلوب كما يلي:

نجد الحل الأمثل لمسألة البرمجة الخطية (غير الصحيحة) وذلك بحذف شرط المجاهيل الصحيحة.

إذا وصلنا إلى الحل الأمثل وحقق شروطاً ومتطلبات البرمجة الصحيحة فقد أوجدنا الحل الأمثل للمسألة المطلوب حلها. أما إذا لم تتحقق شروط ومتطلبات البرمجة الصحيحة فنجزئ المسألة الأصلية إلى قسمين (فرعين) barnache وتكوين مسألتين جديدتين ونأخذ أحد المجاهيل الأساسية ذو القيمة غير الصحيحة. ونختار العدد الصحيح الأكبر من القيمة غير الصحيحة والعدد الصحيح الذي أصغر من القيمة العددية ونباشر بإيجاد حلين لمسألتين.

افرض أن المجهول الذي وقع عليه الاختيار هو المجهول X_i ولنفرض أن قيمته غير الصحيحة تساوي K_i

نفرض أن المسألة التي نرغب بإيجاد حل لها هي Z .

إذاً سيكون الحل كما يلي:

المسألة الأولى:

$$Z1 = Z$$

المسألة الثانية:

$$Z2 = Z$$

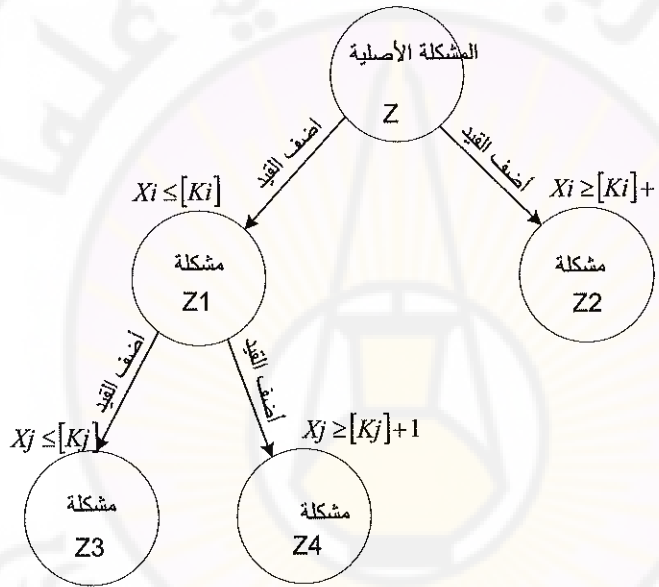
مع إضافة شرط جديد للمسألة Z هو

$$X_i \geq [k_i] + 1$$

إن أي حل للمسألة Z سيكون حلاً للمسألة $Z1$ أو $Z2$ ، وبذلك نحصل على حل للمسألة Z وذلك بإيجاد حلاً للمسألة $Z1$ و $Z2$ وتستمر العملية حتى الوصول إلى الحل الأمثل. الشكل (6.3) يوضح العمليات المطلوبة.

إذا توصلنا إلى الحل الأمثل بعد التجزئة (حل أمثل لمسألة البرمجة الصحيحة) فإن هذا هو المطلوب. أما إذا لم يتحقق الحل الأمثل لمسألة البرمجة الصحيحة فنقوم بتجزئة كل مسألة إلى مسألتين أخريين.

أن عملية التجزئة هذه تسمى "التفرع Branching" أما التحديد "bound" فيعني أن الحل الأمثل لمسألة البرمجة الصحيحة يكون دائماً أقل أو يساوي الحل الأمثل لمسألة البرمجة الخطية في حالة التعظيم (وهكذا فإنه يوجد حد أعلى upper bound)، وبالعكس فإن الحل الأمثل لمسألة البرمجة



الشكل (6.3)

الصحيحة يكون دائماً أكبر أو يساوي الحل الأمثل لمسألة البرمجة الخطية في حالة التصغير minimize (وهكذا فإنه يوجد حد أدنى Lower bound). إن وجود الحدود العليا والحدود الدنيا يغنيانا عن اتخاذ أي إجراءات أخرى غير ضرورية وبذلك نتمكن من اتخاذ القرار المناسب في ضوء الحدود العليا والدنيا للمسائل.

نوضح المفهوم الأساسي لأسلوب التفرع والتحديد بالمثال الآتي:

مثال:

أوجد الحل الأمثل للمسألة التالية:

$$\text{Max } Z = 2X_1 + 3X_2$$

وفقاً شروط المسألة:

$$X_1 \leq 3$$

$$X_2 \leq 3$$

$$X_1 + X_2 \leq 4.5$$

$$X_1 \geq 0$$

$$X_2 \geq 0$$

X_1, X_2 عدنان صحيحان

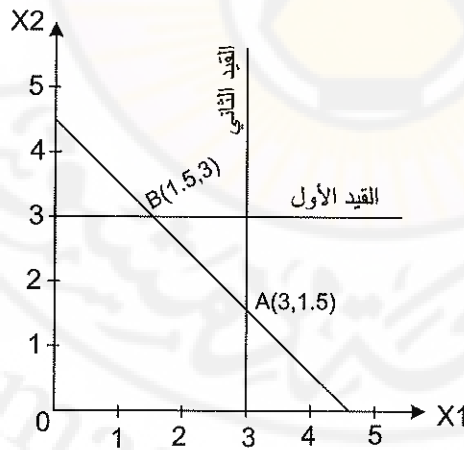
الخطوة الأولى: لإيجاد الحل الأمثل لأية مسألة برمجة صحيحة نجد الحل الأمثل

لمسألة البرمجة الخطية بعد حذف شروط المجاهيل الصحيحة.

إن المسألة في المثال السابق تحتوي على مجهولين. إذ نستطيع أن نحصل على

الحل الأمثل بواسطة الرسم البياني بدون استخدام طريقة السمبلكس وكما يوضح ذلك

الشكل (6.4):



شكل (6.4)

الرسم البياني للمثال السابق (مسألة Z حسب التعريف)
الحل الأمثل للبرمجة الخطية كما يلي:

$$X_1 = 1.5$$

$$X_2 = 3$$

أعلى قيمة لدالة الهدف Z تساوي

$$\begin{aligned} Z^* &= 2 \times 1.5 + 3 \times 3 \\ &= 12 \end{aligned}$$

هل الحل أعلاه، حل أمثل من وجهة نظر البرمجة الخطية؟ الجواب لا: لأن قيمة أحد المجاهيل لا زالت غير صحيحة. إذ يجب أن نتبع الخطوات التالية:
نكون مسألتين:

مسألة Z1: عبارة عن مسألة مع إضافة الشرط الجديد $X_1 \leq 1.5$

مسألة Z2: عبارة عن مسألة مع إضافة الشرط الجديد $X_1 \geq 2$
مسألة Z1:

$$\text{Max } Z_1 = 2X_1 + 3X_2$$

وفقاً لشروط المسألة:

$$X_1 \leq 3$$

$$X_2 \leq 3$$

$$X_1 + X_2 \leq 4.5$$

$$X_1 \leq 1.5 \quad (\text{الشرط الجديد})$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

X_1, X_2 عدنان صحيحان

مسألة Z2

$$\text{Max } Z_2 = 2X_1 + 3X_2$$

وفقاً لشروط المسألة:

$$X1 \leq 3$$

$$X2 \leq 3$$

$$X1 + X2 \leq 4.5$$

$$X1 \geq 2 \quad (\text{الشرط الجديد})$$

$$X1, X2 \geq 0$$

$X1, X2$ عدنان صحيحان

نستخدم الخطوط البيانية لإيجاد الحل الأمثل للمسألتين $Z1, Z2$

المنطقة المظللة في الشكل (6.4) تمثل منطقة الإمكانيات المتاحة لمسألة $Z1$. إن

قيم المجاهيل كما يلي:

$$X2 = 3$$

$$X1 = 1$$

دالة الهدف المثلى $Z1^*$ تساوي 11.

الحل أمثل من وجهة نظر البرمجة الصحيحة. وإن قيمة دالة الهدف $Z1^*$ أقل من

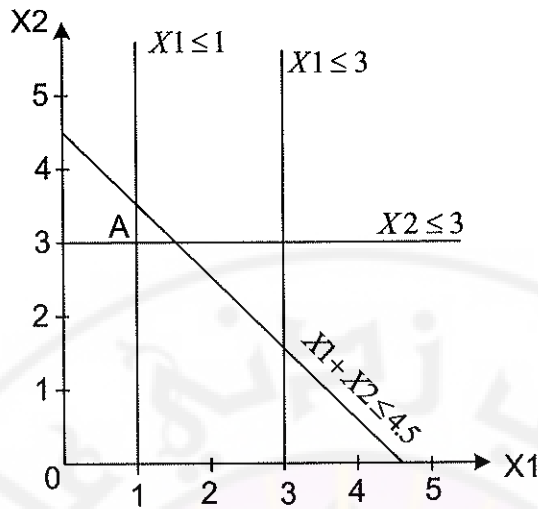
قيمة دالة الهدف Z^*

المنطقة المظللة في الشكل (6.4) تمثل منطقة الحلول للمسألة $Z2$

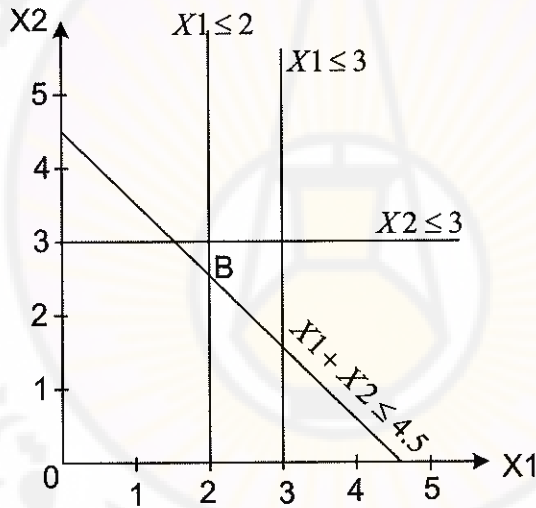
إن قيم المجاهيل كما يلي: $X2 = 2.5$

$$X1 = 2$$

$$Z2^* = 11.5$$



الشكل (6.5)



الشكل (6.6)

إن حل المسألة Z_2 غير أمثل $X_2=2.5$ وهذه القيمة تتنافي الشرط القائل بأن X_2 عدد صحيح.

إن القيمة المثلى لـ Z_2^* أعلى من القيمة المثلى لـ Z_1^* إن الحد الأعلى لدالة الهدف Z^* يساوي 12

يجب التأكد من الحل الأمثل الصحيح للمسألة $Z2$ لأن القيمة المثلى $Z2^*$ أكبر من $Z1^*$

نكوّن من المسألة $Z2$ مسألتين أخريين هما مسألة $Z3$, $Z4$ حيث أن:

مسألة $Z3$ عبارة عن مسألة $Z2$ مع إضافة شرط جديد $X2 \leq 2$

مسألة $Z4$ عبارة عن مسألة $Z2$ مع إضافة شرط جديد $X2 \geq 4$

مسألة $Z3$:

$$\text{Max } Z3 = 2X1 + 3X2$$

وفقاً لشروط المسألة:

$$X1 \leq 3$$

$$X2 \leq 3$$

$$X1 + X2 \leq 4.5$$

$$X1 \geq 2$$

$$X2 \leq 2$$

$$X1, X2 \geq 0$$

$X1, X2$ عدنان صحيحان

مسألة $Z4$:

$$\text{Max } Z4 = 2X1 + 3X2$$

وفقاً لشروط المسألة:

$$X1 \leq 3$$

$$X2 \leq 3$$

$$X1 + X2 \leq 4.5$$

$$X1 \geq 2$$

$$X2 \geq 3$$

$$X1, X2 \geq 0$$

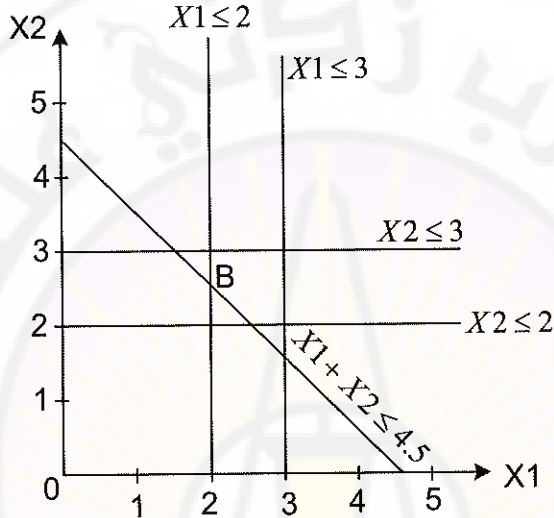
$X1, X2$ عدنان صحيحان

الرسم البياني لمسألة Z3 يوضحه الشكل 8.6 المنطقة المظلمة عبارة عن منطقة
الإمكانات المتاحة. إن الحل الأمثل الصحيح كما يلي:

$$X1 = 2$$

$$X2 = 2$$

$$Z3^* = 2 \times 2 + 2 \times 3$$



شكل (6.7)

الرسم البياني لمسألة Z3

لا يمكن الحصول على حل للمسألة Z4. لا يمكن الحصول على حل أفضل من
حل المسألة Z1، إن منطقة الحلول للمسألة Z2 لا تحتوي على حل أمثل صحيح
أفضل من مسألة Z1. بذلك نؤكد بأن الحل الأمثل يقع في منطقة الحلول للمسألة
Z1.

إذاً الحل الأمثل لمسألة Z كما يلي:

$$Z^* = 11$$

$$X1 = 1$$

$$X2 = 3$$

مثال:

جد الحل الصحيح الأمثل للمسألة الآتية باستخدام أسلوب التفريع والتحديد.

$$Max Z = 4X_1 + 5X_2 + X_3$$

وفقاً لشروط المسألة:

$$3X_1 + 2X_2 \leq 10$$

$$X_1 + 4X_2 \leq 11$$

$$3X_1 + 3X_2 + X_3 \leq 13$$

$$X_1 \geq 0$$

$$X_2 \geq 0$$

$$X_3 \geq 0$$

X_3, X_2, X_1 أعداد صحيحة.

الحل:

نستخدم طريقة السمبلكس لإيجاد الحل الأمثل لمسألة البرمجة الخطية بعد حذف شرط الأعداد الصحيحة.

بعد إضافة المجاهيل المكملة S_1, S_2, S_3 إلى الشروط الثلاثة أعلاه ينتج:

$$Max Z = -4X_1 - 5X_2 - X_3$$

$$3X_1 + 2X_2 + S_1 = 10$$

$$X_1 + 4X_2 + S_2 = 11$$

$$3X_1 + 3X_2 + X_3 + S_3 = 13$$

S_1, S_2, S_3 أكبر أو تساوي صفراً

الحل الأساسي الأولي الممكن كما يلي:

$$X_1 = X_2 = X_3 = 0$$

$$Z = 0$$

$$S1 = 10$$

$$S2 = 11$$

$$S3 = 13$$

نضع المعلومات أعلاه في جدول السيمبلكس التالي وكما يلي:

	X1	X2	X3	S1	S2	S3	الثابت
Z	-4	-5	-1	0	0	0	0
S1	3	2	0	1	0	0	10
S2	1	4	0	0	1	0	11
S3	3	3	1	0	0	1	13

جدول (6.14)

المجهول الداخل عبارة عن المجهول X2. المجهول الخارج هو المجهول S2. بعد تنفيذ العملية المحورية في جدول السيمبلكس (6.14) ينتج:

	X1	X2	X3	S1	S2	S3	الثابت
Z	$2\frac{3}{4}$	0	-1	0	$\frac{5}{4}$	0	$\frac{55}{4}$
S1	$2\frac{1}{2}$	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{9}{2}$
X2	$\frac{1}{4}$	1	0	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{11}{4}$
S2	$2\frac{1}{4}$	0	1	0	$-\frac{3}{4}$	1	$\frac{19}{4}$

جدول (6.15)

X1 المجهول الداخل. S1 المجهول الخارج. بعد تنفيذ العمليات على الجدول (6.15) ينتج جدول السيمبلكس التالي:

	$X1$	$X2$	$X3$	$S1$	$S2$	$S3$	الثابت
Z	0	0	-1	11/10	7/10	0	187/10
$X1$	1	0	0	2/5	-1/5	0	9/5
$X2$	0	1	0	-1/10	5/10	0	25/5
$S3$	0	0	1	-19/5	-3/10	1	7/10

جدول (6.16)

المجهول الداخل $S3$ المجهول الخارج، بعد تنفيذ العمليات ينتج الجدول التالي:

	$X1$	$X2$	$X3$	$S1$	$S2$	$S3$	الثابت
Z	0	0	0	2/10	4/10	1	$19\frac{4}{10}$
$X1$	1	0	0	2/5	-1/5	0	9/5
$X2$	0	1	0	-1/10	3/10	0	25/10
$X3$	0	0	1	9/10	-3/10	1	7/10

جدول (6.17)

حل البرمجة الخطية أمثل، حيث أن

$$Z^* = 19\frac{4}{10}$$

$$X1 = 9/5$$

$$X2 = 23/10$$

$$X3 = 7/10$$

لكن الحل غير أمثل من وجهة نظر البرمجة الصحيحة. إذ أنختار المجهول الأساسي الذي يحمل أكبر كسر.

إن المجهول الذي سنختاره هو $X1$

إن قيمة $X1$ تقع ما بين 1, 2. لذلك ستكون هناك مسألتان، هما مسألة $Z1$, $Z2$

مسألة $Z1$ عبارة عن مسألة Z مع إضافة الشرط الجديد $X1 \geq 2$

مسألة $Z2$ عبارة عن مسألة Z مع إضافة الشرط الجديد $X1 \leq 1$

مسألة $Z1$

بعد إضافة المجهول الخامل S4 إلى الشرط الجديد $X1 \leq 1$ ينتج:

$$X1 + S4 = 1$$

إن المجهول $X1$ عبارة عن مجهول أساسي. نكتب $X1$ بدلالة المجاهيل غير الأساسية. من الجدول 8.17 نحصل على معادلة $X1$ حيث أن

$$X1 + 2/5S1 - 1/5S2 = 9/5$$

أو

$$X1 = 9/5 - 2/5S1 + 1/5S2$$

عوض عن $X1$ في الشرط السابق تحصل على المعادلة الآتية:

$$-2/5S1 + 1/5S2 + S4 = -4/5 \quad (\text{المعادلة الجديدة})$$

أضف هذه المعادلة إلى جدول السيمبلكس (6.17) تحصل على الجدول التالي:

	$X1$	$X2$	$X3$	$S1$	$S2$	$S3$	$S4$	الثابت
Z	0	0	0	2/10	4/10	1	0	$19 \frac{4}{10}$
$X1$	1	0	0	2/5	-1/5	0	0	9/5
$X2$	0	1	0	-1/10	3/10	0	0	25/10
$X3$	0	0	1	9/10	-3/10	1	0	7/10
$S4$	0	0	0	2/5	-1/5	0	1	5/1-

جدول (6.18)

$S4$ عبارة عن مجهول خارج.

$S1$ مجهول داخل.

بعد تنفيذ العمليات على الجدول (6.18) ينتج الجدول السيمبلكس الجديد

(استخدم طريقة السيمبلكس الثنوية).

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4	الثابت
Z	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	19
x_1	1	0	0	0	0	0	1	1
x_2	0	1	0	0	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{5}{2}$
x_3	0	0	1	0	$-\frac{5}{4}$	1	$-\frac{9}{4}$	$\frac{5}{2}$
s_1	0	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{5}{2}$	2

جدول (6.19)

الحل غير أمثل من ناحية البرمجة الصحيحة حيث أن:

$$Z^*=19$$

$$x_1=1$$

$$x_2=2.5$$

$$x_3=2.5$$

نحتاج أن نجزئ مسألة Z_1 إلى مسألتين وهما Z_3, Z_4 لكن قبل الشروع بذلك نجد أن الحل الأمثل لمسألة Z_2 .

مسألة Z_2 :

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4	الثابت
Z	0	0	0	$\frac{2}{10}$	$\frac{4}{10}$	1	0	$19\frac{4}{10}$
x_1	1	0	0	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	0	$\frac{9}{5}$
x_2	0	1	0	$-\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	0	0	$\frac{23}{10}$
x_3	0	0	1	$-\frac{9}{10}$	$-\frac{3}{10}$	1	0	$\frac{7}{10}$
s_4	0	0	0	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	1	$-\frac{1}{5}$

جدول (6.20)

باستخدام طريقة السمبلكس الثنوية سيكون s_4 المجهول الخارج، s_2 المجهول الداخل، $-\frac{1}{5}$ - عنصر الدوران.

بعد تنفيذ العملية المحورية في الجدول رقم (6.20) ينتج جدول السمبلكس الجديد وكما يلي:

	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	S_4	الثابت
Z	0	0	0	1	0	1	1	19
X_1	1	0	0	0	0	0	2	2
X_2	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	2
X_3	0	0	1	$-\frac{3}{2}$	0	1	$-\frac{9}{2}$	1
S_2	0	0	0	-2	1	0	-5	1

جدول السيمبلكس (6.21) للمسألة Z2

الحل أمثل حيث جميع قيم المجاهيل أعداد صحيحة وكما يلي:

$$Z^*=19$$

$$X_1=2$$

$$X_2=2$$

$$X_3=1$$

إن الحد الأعلى لقيمة دالة الهدف يساوي $19\frac{4}{10}$ بينما الحد الأدنى لقيمة دالة

الهدف يساوي 19. قبل أن نقول شيئاً عن مشكلة Z1 يجب ملاحظة ما يلي:

إن قيمة دالة الهدف للمسألة Z1 تساوي 19 وهذا يعني إذا جزأنا المسألة Z1 إلى جزأين Z3, Z4 فسوف لا نحصل على قيمة لدالة الهدف أعلى من 19. نترك للقارئ تجزئة Z1.

نوضح مثلاً آخر ونقارن حل ذلك المثال بالأسلوبين أسلوب القطع للمستوي (قطع كومري)، وأسلوب التفريع والتحديد ويكون المثال تصغير دالة هدف بدلاً من مشكلة التعظيم التي تم توضيحها بشيء من التفصيل.

6.5- البرمجة الثنائية (صفر-واحد) Zero-one programming

تشرط قيم المجاهيل في مسائل البرمجة الخطية في بعض الأحيان بالقيم صفر أو واحد. أي أن قيم المجاهيل الأساسية تساوي صفرًا أو تساوي واحداً. إن هذا النوع من البرمجة الخطية يسمى بالبرمجة الثنائية. إن لهذا النوع من البرمجة تطبيقات كثيرة في المجالات الصناعية والإدارية.

نستطيع أن نحصل على حلول البرمجة الخطية الثنائية بواسطة أسلوب التفرع والتحديد أو استخدام طريقة قطع المستوي حيث يستخدم شرط يقيد قيم المجاهيل إما تساوي صفراً أو واحداً أو بالأحرى أقل أو تساوي واحداً، أكبر أو تساوي صفراً.

لا حظنا في البرمجة الخطية أن عدد الحلول الممكنة يكون عدداً غير نهائي. أي عدد من الحلول الممكنة ضمن منطقة الحلول وهناك حل أمثل يقع في تلك المنطقة. وقد لاحظنا أيضاً في البرمجة الصحيحة أن عدد الحلول الممكنة يكون نهائياً. أي أقل من عدد الحلول الممكنة ضمن منطقة الحلول.

أما في حالة البرمجة الخطية الثنائية فإن عدد الحلول يكون صغيراً جداً حيث كل مجهول يحدد بقيمتين إما صفراً أو واحداً. وعلى هذا الأساس يمكن الحصول على حل لمسائل البرمجة الثنائية أو ما تسمى في بعض الأحيان (صفر - واحد) عن طريق اختيار دالة الهدف لقيم معينة.

كمثال على هذه المسائل سندرس مسألة الاسناد التي سنأتي على ذكرها في فصول لاحقة.

تمارين

(1) حل البرنامج الخطي التالي:

$$Z = 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 + x_4 \rightarrow \max$$

$$-3x_1 - 2x_2 + 6x_3 - 9x_4 \geq 0$$

$$2x_1 + 4x_2 + 8x_3 - 5x_4 \geq -3$$

$$3x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 \leq 15$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

حيث أعداد صحيحة x_1, x_2, x_3, x_4

(2) حل البرنامج الخطي التالي:

$$Z = 3x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

$$2x_1 + 4x_2 \leq 21$$

$$5x_1 + 3x_2 \leq 18$$

$$4x_1 - x_2 \leq 32$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

حيث أعداد صحيحة x_1, x_2



الفصل السابع

مبدأ الثنوية والبرامج الثنوية

7.1- الحلول الثنوية والمسألة الأولية والمسألة الثنوية

باعتبار أنه، كانت لدينا المسألة الأولية هي حساب القيمة العظمى لدالة الهدف وضمن التحديدات وشروط عدم السلبية، فإن المسألة الثنوية (الثنوية) ستكون حساب القيمة الصغرى لدالة الهدف، وضمن تحديدات مشتقة من التحديدات السابقة ومحقة لشروط عدم السلبية.

فإذا كانت المسألة الأولية primal:

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max \quad (7.1)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad ; i = 1, \dots, m \quad (7.2)$$

$$x_j \geq 0 \quad ; j = 1, \dots, n \quad (7.3)$$

فإن المسألة الثنوية Dual:

$$\sum_{i=1}^m b_i y_i \rightarrow \min \quad (7.4)$$

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j \quad ; j = 1, \dots, n \quad (7.5)$$

$$y_i \geq 0 \quad ; i = 1, \dots, m \quad (7.6)$$

المسألة الثنوية يمكن أن ينظر إليها بالشكل:

(1) معاملات العمود z في المسألة الأولية هو نفسه السطر z في المسألة الثنوية.

(2) عمود الثوابت في الطرف الأيمن للمسألة الأولية هو معاملات سطر دالة الهدف الثنوية.

(3) معاملات سطر تابع الهدف للمسألة الأولية هو عمود الثوابت في الطرف الأيمن للمسألة الثنوية.

(4) اتجاه المتباينات للمسألة الأولية يعاكس اتجاه المتباينات للمسألة الثنوية. يجب التنبيه إلى نقطة مهمة وهي أن التحديدات في المسألة الثنوية بشكل $(\geq)$ وذلك من أجل توافق جداء المصفوفات.
مثال:

تمتلك شركة مصنعاً للسجاد يقوم بإنتاج نوعين I و II من السجاد. تقدر الأرباح العائدة من كل وحدة سجاد من النوع I بمقدار 200 ل.س ومن النوع II بمقدار 140 ل.س ونظراً لمحدودية الموارد فإن البرنامج الحالي للشركة يتضمن إنتاج 650 و 2600 وحدة من النوع I و II على الترتيب. تمر عملية إنتاج السجادة في أربعة أقسام ونتيجة للدراسة التي قام بها المختصون في الأقسام الأربعة تبين محدودية الوقت المتوفر هي العنصر الوحيد ذو الصلة بمحدودية الطاقة الإنتاجية يبين الجدول التالي الوقت بالساعة الذي يتطلبه صناعة كل وحدة من النوعين I و II في كل من الأقسام الأربعة والوقت المتوفر في كل من الأقسام (بالساعة شهرياً)

القسم	الوقت اللازم لصناعة الوحدة		الطاقة المتوفرة للقسم
	النوع I	النوع II	
1	0	3	6000
2	2.9	0	8000
3	2	2.5	7500
4	1.5	1.3	5000

نفرض أن X_1 عدد الوحدات المنتجة من النوع I

X_2 عدد الوحدات المنتجة من النوع II

وبالتالي البرنامج الخطي سيكون:

$$\text{Maximise } Z = 200X_1 + 140X_2$$

وفقاً إلى الشروط

$$3X_1 + 0X_2 \leq 6000$$

$$0X_1 + 2.9X_2 \leq 8000$$

$$2.5X_1 + 2X_2 \leq 7500$$

$$1.3X_1 + 1.5X_2 \leq 5000$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

المسألة الثنوية:

نلاحظ أن عنصر الوقت هو العنصر المهم الوحيد في عملية تصنيع السجاد، فإن تعهدك هذا يعني أن تتعهد الوقت المتوفر في الأقسام الأربعة و لو فرضنا أن y_1, y_2, y_3, y_4 تمثل تكلفة تعهدك للساعة الواحدة من الأقسام الأربعة و الذي يتوفر فيها 6000 و 8000 و 7500 و 5000 ساعة على الترتيب. لكنت التكلفة الكلية لتعهدك:

$$W = 6000y_1 + 8000y_2 + 7500y_3 + 5000y_4$$

ومن الطبيعي أن يكون هدفك جعل الكلفة الكلية أقل ما يمكن أي:

$$\text{Minimise } W = 6000y_1 + 8000y_2 + 7500y_3 + 5000y_4$$

ولكن ثمة شروط ضمنية تواجهك حيال تحقيق هدفك هو أن تدفع الشركة صاحبة المصنع عن كل وحدة تنتجها من نوعي السجاد I و II تعويضاً لا يقل عن الأرباح التي تجنيها الشركة من هذه الوحدة.

ولما كانت الوحدة من النوع I تستهلك 3 و 0 و 2.5 و 1.3 ساعات من وقت القسم الأول و الثاني و الثالث و الرابع على الترتيب، فإن تكلفة تعهدك للوحدة من النوع I و التي يجب أن لا تقل عن 200 ل.س يكون الشرط:

$$3y_1 + 0y_2 + 2.5y_3 + 1.3y_4 \geq 200$$

كذلك بالنسبة للنوع II يكون الشرط:

$$0y_1 + 2.9y_2 + 2y_3 + 1.5y_4 \geq 140$$

$$y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0 \quad \text{حيث أن}$$

و بالتالي المسألة الثنوية للثنوية الأساسية هي:

$$\text{Minimise } W = 6000y_1 + 8000y_2 + 7500y_3 + 5000y_4$$

$$3y_1 + 0y_2 + 2.5y_3 + 1.3y_4 \geq 200$$

$$0y_1 + 2.9y_2 + 2y_3 + 1.5y_4 \geq 140$$

$$y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$$

وتعتبر هذه الميزة من أهم ميزات البرمجة الخطية. فكل مسألة تضغير يقابلها مسألة تكبير و بالعكس، وتتضمن المسألتان البيانات نفسها ويطلق على إحداها اسم المسألة الأولية (الأساسية) و يطلق على الأخرى المسألة الثنوية (الثنوية) و يمكن اشتقاق أي هذه المسألتين من الأخرى مباشرة

7.2- قواعد إيجاد المسألة الثنوية

- 1- كل شرط في إحدى المسألتين يقابله مجهول في المسألة الأخرى (ما عدا شروط عدم السلبية)
- 2- الأطراف اليمنى للشروط في إحدى المسألتين تصبح أمثالاً لمجاهيل القرار في دالة الهدف في المسألة الأخرى
- 3- إذا كان الهدف في إحدى المسألتين هو التصغير فإن الهدف هو التكبير في المسألة الأخرى وبالعكس
- 4- جعل جميع الشروط في مسألة التكبير هي من النوع $\leq$ و جميع الشروط في مسألة التصغير من النوع $\geq$
- 5- المجاهيل في كل من المسألتين غير سالبة
- 6- الأمثال السطرية في الأطراف اليسرى للشرط في إحدى المسألتين تصبح أمثالاً عمودية في الأطراف اليسرى لشرط المسألة الأخرى

مثال:

أوجد المسألة الثنوية للمسألة التالية:

$$\text{Max } Z = 2x_1 + 3x_2$$

$$3x_1 + 5x_2 \leq 15$$

$$-x_1 + 2x_2 \geq 1$$

$$2x_1 - 5x_2 = 1$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

الحل: نحول أولاً جميع الشروط إلى الشكل $\leq$ فتصبح الشروط:

$$3x_1 + 5x_2 \leq 15$$

$$x_1 - 2x_2 \leq -1$$

$$2x_1 - 5x_2 \leq 1$$

$$-2x_1 + 5x_2 \leq -1$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

هناك مجهول ثنائي لكل شرط من شروط المسألة أي y_1, y_2, y_3, y_4
المسألة الثنوية:

$$\text{Min } W = 15y_1 - y_2 + y_3 - y_4$$

$$3y_1 + y_2 + 2y_3 - 2y_4 \geq 2$$

$$5y_1 - 2y_2 - 5y_3 + 5y_4 \geq 3$$

$$y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$$

نلاحظ أن الشرطين الثالث و الرابع هما شرط واحد وهو:

$$2x_1 - 5x_2 = 1$$

و بالتالي لنفرض أن $y = y_3 - y_4$ على الرغم من أن $y_3, y_4 \geq 0$ ولكن ليس بالضرورة أن يكون y موجب و بالتالي هو مجهول حر بالتعويض في مسألة الثنوية نحصل على المسألة:

$$\text{Min } W = 15y_1 - y_2 + y$$

$$3y_1 + y_2 + 2y \geq 2$$

$$5y_1 - 2y_2 - 5y \geq 3$$

$$y_1, y_2 \geq 0$$

حيث y مجهول حر

مبرهنة الثنوية:

أ- تملك كل من المسألتين الأولية والثنوية حلاً ملائمة وبالتالي إذا كان للمسألة الأولية حل أمثل $j \in \{1, \dots, n\}$ وللمسألة الثنوية حل أمثل عندئذ:

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j^* = \sum_{i=1}^m b_i y_i^*$$

ب- إذا كان لكل من المسألة الأولية أو الثنوية حل ملائم لقيمة دالة الهدف المحدودة، فإنه يكون للمسألة الأخرى حل ملائم له قيمة دالة الهدف أمثل نفسها

حيث $F_{\max} = F_{\min}$ و $F_{\min}$ قيمة دالة الهدف في المسألة الثنوية (min)

الإثبات:

إن أي حل ملائم لإحدى المسألتين يعطي شرطاً على القيمة المثلى لدالة الهدف للمسألة الأخرى. ولتكن x_j تحقق المتباينات في المسألة الأولية و y_i تحقق المتباينات في المسألة الثنوية. نضرب العمود في المسألة الأولية بـ y_i ونضرب السطر j في المسألة الثنوية بـ x_j حيث $x_j \geq 0, y_i \geq 0$ لن تتغير المتباينة، بجمع كل الشروط الموجودة في المسألة الأولية فنجد:

$$\sum_{i=1}^m y_i \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) \leq \sum_{i=1}^m b_i y_i \quad (7.7)$$

وبجمع شروط المسألة الثنوية نجد:

$$\sum_{j=1}^n x_j \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \right) \geq \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (7.8)$$

نلاحظ أن الطرف الأيسر في كلتا المتباينتين متساوٍ وبالتالي:

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j \leq \sum_{i=1}^m b_i y_i \quad (7.9)$$

إذا كان لإحدى المسألتين حل أمثلي فإن المسألة الأخرى لا تملك حلاً ملائماً. النتيجة التالية هامة لمبرهنة الثنوية.

7.3 - المجاهيل الخاملة

لتكن لدينا x_j^* ; $j=1, \dots, n$ و y_i^* ; $i=1, \dots, m$ حلول ملائمة لكل من المسألتين الأولية والثنوية على الترتيب عندئذ يكون الحلان أمثليين إذا وفقط إذا كان:

$$y_i^* \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^* - b_i \right) = 0 \quad ; \quad i=1, \dots, m$$

$$x_j^* \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^* - c_j \right) = 0 \quad ; \quad j=1, \dots, n$$

وهذا يعني أنه كلما وجد شرط في إحدى المسألتين وجد شرط خامل في المسألة الأخرى.

إذا كانت المسألة الأولية معطاة بالشكل المختلط (أي توجد متباينات ومساواة ضمن التحديات):

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max \quad (I)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad ; \quad i=1, \dots, h \leq m \quad (II)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad ; \quad i=h+1, \dots, m \quad (III)$$

$$x_j \geq 0 \quad ; \quad j=1, \dots, k \leq n \quad (IV)$$

$$x_j \text{ غير مقيد بالإشارة} \quad ; \quad j=k+1, \dots, n \quad (VI)$$

فالمسألة الثنوية لها الشكل:

$$\sum_{i=1}^m b_i y_i \rightarrow \min \quad (I')$$

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j \quad ; \quad j = 1, \dots, k \leq n \quad (II')$$

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i = c_j \quad ; \quad j = k+1, \dots, n \quad (III')$$

$$y_j \geq 0 \quad ; \quad i = 1, \dots, h \leq m \quad (IV')$$

$$y_i \text{ غير مقيد بالإشارة} \quad ; \quad i = h+1, \dots, m \quad (V')$$

7.4 - حل المسألة الثنوية

لا بد لكل من يعرف طريقة السيمبلكس أن يتساءل كيف يمكن حل المسألة الثنوية أو ما يسمى المسألة الثنوية؟. في نهاية هذا البحث سنكون قادرين على حساب الحلول الثنوية بسهولة.

7.4.1 - القيم الأمثلية للمجاهيل الثنوية (الثنوية)

لنعد إلى مثال عرض سابقاً وتم حله حسب طريقة السيمبلكس:

$$4x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 11x_4 \rightarrow \text{Max}$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \leq 15$$

$$7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 120$$

$$3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 \leq 100$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4$$

بعد إضافة المجاهيل الخاملة تصبح المعادلات بالشكل التالي:

$$x_0 - 4x_1 - 5x_2 - 9x_3 - 11x_4 = 0$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 15$$

$$7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_6 = 120$$

$$3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 + x_7 = 100$$

هناك خاصتان مهمتان:

أ- إن معاملات المجاهيل الخاملة في سطر دالة الهدف لجدول السيمبلكس التكراري للمسألة العظمى هي القيم المثلثية للمجاهيل الثانوية.

ب- يمثل حاصل طرح الطرف الأيسر والأيمن بالنسبة للشروط الإجبارية (المتباينات) للمسألة الثانوية أمثال المجهول x_j في سطر دالة الهدف لتكرار جدول السيمبلكس الأخير.

المسألة الثانوية للمثال المعروض هي:

$$15y_1 + 120y_2 + 100y_3 \rightarrow \min \quad (7.10)$$

$$\left. \begin{aligned} y_1 + 7y_2 + 3y_3 &\geq 4 \\ 2y_1 + 5y_2 + 5y_3 &\geq 5 \\ y_1 + 3y_2 + 10y_3 &\geq 9 \\ y_1 + 2y_2 + 15y_3 &\geq 11 \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (7.11)$$

بتطبيق الخاصة (أ) نجد:

$$x_5 = y_1^* = 13/7, \quad x_6 = y_2^* = 0, \quad x_7 = y_3^* = 5/7 \quad (7.12)$$

نعوض (7.12) في (7.11) نجد:

$$\left. \begin{aligned} (13/7) + 3(5/7) &= 28/7 \geq 4 \\ (13/7) + 5(5/7) &= 38/7 \geq 5 \\ (13/7) + 10(5/7) &= 63/7 \geq 9 \\ (13/7) + 15(5/7) &= 88/7 \geq 11 \end{aligned} \right\} \quad (7.13)$$

وكذلك نجد أن قيمة دالة الهدف للمسألة الثانوية مساوية قيمتها في المسألة الأولية:

$$(15)(13/7) + 120(0) + 100(5/7) = 695/7 \quad (7.14)$$

بملاحظة (7.13) و (7.14) فإن الخاصة (أ) محققة.

بالنسبة للخاصة الثانية لناخذ مثلاً المتباينتين الثانية والثالثة نجد:

$$38/7 - 5 = 3/7$$

$$63/7 - 9 = 0$$

وبالمقارنة مع جدول السيمبلكس للتكرار الأخير نجد أن أمثال x_2 هي 3/7 هي وأمثال x_3 هي الصفر. من هاتين الخاصتين يمكن تعميق مفهوم خوارزمية السيمبلكس الثنوية.

7.4.2- التحليل ما بعد الأمثال

إن دراسة المسألة الثنوية مشابهة لدراسة المسألة الأولية.

7.4.2.1- دالة الهدف:

عند دراسة المسألة الأولية إذا أضفنا مقداراً موجباً $p_j > 0$ لأمثال المجهول x_j عندها في المسألة الثنوية نستفيد من قيمة الثابت في الطرف الأيمن لإحدى المتباينات المتعلقة بأمثال x_j لتصبح:

$$b_1 y_1 + b_2 y_2 + \dots + b_n y_n \geq c_j + p_j$$

ومنه نجد أن الحل الثنوي الجديد مناسب إذا حققت المتباينة $p_j \geq c_j$ حيث c_j معامل x_j في السطر (0) في الجدول الأخير (وذلك قبل التعديل) وفيما عدا ذلك فإن الحل الثنوي لا يكون مناسباً وهذا يؤدي إلى عدم ملائمة الحل الأولي وهذا يتوافق مع ما توصلنا إليه في فقرة دالة الهدف للمسألة الأولية.

7.4.2.2- ثوابت الطرف الأيمن:

استنتجنا في فقرة ثوابت الطرف الأيمن للمسألة الأولية أن معامل المجهول الخامل (غير أساسي) في دالة الهدف للحل الأمثل يمثل قيمة وحدة المصدر الثنوي الأخير (إضافة مع متغيرها) مبرهنة الثنوية (ب)).

وقد بينا في الفقرة السابقة أن قيمة المجهول الثنوي المثلى هي المعامل نفسه، وبوضع هاتين الحاليتين نحصل على ما يلي:

تفسير المجاهيل الثنوية: نغير قيمة المجهول الثنوي المثلى إلى مقدار تغير دالة الهدف مع تغير ثابت الطرف الأيمن الثنوي بشرط أن تبقى القاعدة المثلى المتداولة ملائمة ومناسبة وهذا التفسير يتوافق مع علاقة المساواة الأساسية لمبرهنة الثنوية:

قيمة x_0 المثلى = مجموع (ثوابت الطرف الأيمن $\times$ المجاهيل الثنوية المثلى)
حيث x_0 قيمة دالة الهدف. تسمى عادة المجاهيل الثنوية المثلى كلفة الأكثر.

7.4.2.3 - اختبار الحساسية:

لنبدأ بأهم اختبار وهو اختبار الحساسية على a_{ij} ، ولنفرض أننا أضفنا فعالية جديدة كلياً (مجهولاً جديداً) إلى التحديات وتكون حلاً إذا انتمى ذلك المجهول إلى المجاهيل الأساسية (القاعدية)

نجد أن الاختبار الأسهل هو النظر فيما إذا تحقق الشرط الثنوي بواسطة قيم المجاهيل الثنوية وفي حالة عدم تحقق ذلك فإن هذه الفعالية الجديدة سوف تستخدم في الجداول التي تليه. إذا أضفنا الشروط الإجبارية المجهول x_{n+1} فالمعادلات ستصبح:

$$x_0 = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + a_{1n+1}x_{n+1} \leq b_1 \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n + a_{mn+1}x_{n+1} \leq b_m \end{cases}$$

عندئذٍ يصبح معامل الربح لـ x_{n+1} في دالة الهدف c_{n+1} ، عند أية قيمة لـ c_{n+1} تكون فائقة إدخال x_{n+1} . إن علاقة الثنوية ستكون عندئذٍ:

$$a_{1n+1}y_1 + a_{2n+1}y_2 + \dots + a_{mn+1}y_m \geq c_{n+1}$$

عملية استبدال قيم المجاهيل الثنوية المثلى تعطينا المتباينة التالية:

$$c_{n+1} \leq z \text{ (قيمة معينة)}$$

وعليه نجد أنه إذا تجاوزت c_{n+1} تلك القيمة فلا بد من إدخال x_{n+1} إلى المجاهيل الأساسية وبفرض أن قيمة c_{n+1} كانت r أكبر من z عندئذٍ الفرق بين القيمتين هو معامل x_{n+1} أي هو $r - z$.

7.5- خوارزمية السيمبلكس الثنوية

باختصار إن خوارزمية السيمبلكس الثنوية تعطينا العلاقات المتبادلة بين المسألتين الأولية والثنوية، وتعطي إمكانات أخرى لحل المسألة الخطية التي تبدو معقولة، لنفرض وجود خوارزمية للمسألة الأولية لكل منها حتى التكرار الأخير، حل أولي تجريبي غير مناسب بسبب احتوائه قيماً سالبة ولكن يبقى الحل الثنوي مناسباً في كل تكرار.

أن أهمية دراسة خوارزمية السيمبلكس الثنوية تكمن في السببين العمليين المهمين التاليين:

الأول: تسمح لنا هذه الخوارزمية في بعض الأحيان باختيار أساس أولي دون الحاجة لإضافة أية مجاهيل جديدة.

الثاني: تساعد هذه الخوارزمية على تحديد نماذج تحليل الحساسية وسوف نرى ذلك في الفقرة القادمة.

مما تقدم يمكن أن نربط دراسة خوارزمية السيمبلكس الثنوية مع الخوارزمية الأولية التي نأخذها كمقياس.

7.5.1- المسألة الأصغرية:

7.5.1.1- معيار السيمبلكس الثنوي (I):

في حال وجود مجاهيل أساسية لها قيم سالبة نختار مجهولاً يحمل القيم الأكثر سلبية وليكن x_r . أما إذا لم يوجد أي مجهول له قيمة سالبة فنكون قد وصلنا للحل الأمثل. ولكن لا بد من التذكرة بالاحتفاظ بالمسألة الثنوية المناسبة، بعد تغيير الأساس فإن معاملات السطر (0) تبقى غير موجبة.

7.5.1.2 - معيار السيمبلكس الثنائي (II):

أ- خذ نسبة معاملات المجاهيل الأساسية في السطر (0) إلى معاملات السطر الذي أبعدها فيه x_r (تجاهل النسبة الصفرية أو التي تعطي القيمة السالبة في المقام).

ب- خذ النسبة الصغرى من أجل المجهول x_r .

إن الحسابات المشار إليها في المعيار II قد أنجزت في الجدول التالي:

المتغيرات غير الأساسية	x_1	x_2	x_3
معاملات السطر	-2	0	-1
معاملات السطر	-1	2	-4
النسب	2	—	0.25
النسب الصغرى			0.25

7.5.2 - المسألة الأعظمية:

شرحت الخوارزمية (خوارزمية سيمبلكس الثنائية) من أجل المسألة الأصغرية ومن السهل بعد ذلك أن نحولها من أجل المسألة الأعظمية.

7.5.2.1 - معيار السيمبلكس I:

لاحظ أنه في كل تكرار معاملات المجاهيل غير الأساسية في السطر (0) هي معاملات غير سالبة. يجب أن نختار القيمة الأكثر سلبية من أجل أن ندخل مجهولاً في المجاهيل الأساسية ونخرج مجهولاً آخر (نلاحظ أن المعيار I لا يتغير).

7.5.2.2- معيار السيمبلكس II:

أ- خذ نسبة معاملات المجاهيل غير الأساسية في السطر (0) إلى معاملات السطر الذي أبعدنا فيه x_r (تجاهل النسبة المساوية للصفر التي تعطي قيمة سالبة في المقام).

ب- خذ النسبة الصغرى من أجل المجهول x_r .

ملاحظة:

تحتوي كثير من البرامج المتقدمة لنماذج المسائل الخطية المثلى في الحاسوب على خوارزمية سيمبلكس الثنوية، يختبر الحاسوب فيها مباشرة شروط المسألة ودالة الهدف ويقرر في حال إمكان تطبيق خوارزمية السيمبلكس الثنوية.

7.6- المقارنة بين الخوارزمية الأولية والثنوية

1. استخدام طريقة سيمبلكس الثنوية لنموذج البرمجة الخطية في المسألة الثنوية مطابق لاستخدام طريقة سيمبلكس الأولية.

2. إن تطبيق سيمبلكس في نموذج البرمجة الخطية في المسألة الثنوية مطابق لتطبيق سيمبلكس الأولية.

المجاهيل المشروطة بحد أعلى:

في كثير من النماذج الخطية المثلى المهمة، نلاحظ أن كل مجهول يكون مشروطاً بحد أعلى:

$$x_j \leq u_j \quad j=1, \dots, n \quad (7.15)$$

حيث أن x_j يمكن أن يكون اختيارياً فلن يكون هناك أي خطأ أو خسارة في اختيار $u_j=1$ ومع الملاحظة أن العلاقة (7.15) يمكن أن تكون ضمن بقية التحديدات لجعل هذا النموذج خطياً. تتطلب الطريقة تعديلاً طفيفاً فقط في قواعد طريقة سيمبلكس.

يمكن كتابة (7.15) بالشكل التالي:

$$x_j + x'_j = \quad (7.16) \quad \text{حيث } x'_j \geq 0 \text{ ومنه:}$$

$$x_j = 1 - x'_j \quad (7.17)$$

$$x'_j = 1 - x_j \quad (7.18)$$

ويمكن استخدام (7.17) أو (7.18) لإبعاد x_j أو x'_j عند الضرورة أثناء التكرارات وذلك للتخلص من الحد الأعلى.



تمارين

(1) اكتب البرنامج الخطي الثنوي للبرنامج الخطي التالي:

$$Z = -12x_1 - 10x_2 + 2x_3 - 7x_4 \rightarrow \max$$

$$6x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 \leq 2$$

$$4x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \geq 6$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, 3, 4$$

ثم أوجد حله، استنتج حل البرنامج الأصلي.

(2) اكتب البرنامج الخطي الثنوي للبرنامج الخطي التالي:

$$P = 2x_1 + 3x_2 + 5/2 x_3 \rightarrow \min$$

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 6$$

$$2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \geq 16$$

$$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 12$$

أ- أوجد الحل المثالي للبرنامج الخطي الثنوي.

ب- أوجد الحل المثالي للبرنامج الخطي المعطى.

الفصل الثامن

مسألة النقل والمواصلات والإسناد

8.1- مقدمة

تعد مسألة النقل والمواصلات من أهم مسائل البرامج الخطية، إذ يعتمد عليها في حل الكثير من المسائل الرياضية في قطاعات النقل والمواصلات، وذلك بسبب سهولة تنظيم الإنتاج وموارده والتموين والإمداد لأهم المواد الزراعية والصناعية.

8.2- النموذج الرياضي لمسألة النقل

ليكن لدينا عدد من مراكز التصدير A_i ، حيث $(i=1,2,\dots,m)$ ومعلوم لدينا احتياطي الكميات المعروضة للتصدير في كل مركز a_i ، ومن جهة أخرى لدينا عدد من مراكز الاستهلاك B_j حيث $j=1,2,\dots,n$ ، ومعلوم لدينا حجم طلبية كل مركز استهلاك b_j . كما أنه معلوم تكلفة النقل c_{ij} لنقل وحدة بضاعية من مركز التصدير A_i إلى مركز الاستهلاك B_j .

والمطلوب وضع خطة مثالية لنقل الشحنات من مراكز التصدير إلى مراكز الاستهلاك، بحيث تكون الكلفة أقل ما يمكن، وأن تحقق الخطة رغبة المصدرين والمستهلكين بأن واحد. نفرض أن كمية البضاعة من مركز التصدير A_i إلى مركز الاستهلاك B_j ، عندئذ يمكن أن نشكل جدول شروط المسألة وفق ما يلي:

مراكز الاستهلاك مراكز التصدير	B_1	B_2		B_n	الاحتياطي
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}		c_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}		c_{2n} x_{2n}	a_2
$\vdots$					$\vdots$
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}		c_{mn} x_{mn}	a_m
حجم الطلبية	b_1	b_2		b_m	$\sum_{i=1}^m a_i$ $\sum_{j=1}^n b_j$

الجدول (8.1)

في الجدول السابق وُضعت كلفة النقل في كل طلبية في خلايا الجدول، أما حجم الشحنة x_{ij} فلقد وضع في الزاوية السفلى واليسرى من كل خلية من خلايا الجدول. وعليه فإنه يمكن وضع عدد من خطط النقل من مركز التصدير A_i إلى مركز الاستهلاك B_j بحيث تكون كلفة النقل $c_{ij}x_{ij}$ وبذلك تكون الكلفة الإجمالية:

$$p = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij}x_{ij} \quad (8.1)$$

وهذا يمثل دالة الهدف. أما شروط المسألة فمحدودة بالشرطين التاليين:

- أ- تلبية رغبة المصدرين بحيث تنتقل البضائع إلى مراكز الاستهلاك :
- ب- تلبية رغبات المستهلكين بشكل كامل:

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = b_j, \quad (j=1,2,\dots,m) \quad (8.3)$$

وبذلك يمكن كتابة الشكل العام للبرنامج الخطي كما يلي:

$$p = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \text{Min} \quad (\text{دالة الهدف}) \quad (8.4)$$

$$\text{(شروط المسألة)} \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad (i=1,2,\dots,n) \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad (j=1,2,\dots,m) \end{array} \right. \quad (8.5)$$

$$\text{(شروط عدم السلبية)} \quad \begin{array}{l} x_{ij} \geq 0; \quad (i=1,2,\dots,m); \\ (j=1,2,\dots,n) \end{array}$$

فإذا افترضنا إن كمية الاحتياطي مساوية لكمية الطلبية أي:

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j = L \quad (8.7)$$

فإننا نقول أن مسألة النقل مشبعة وبالتالي فإن البرنامج الخطي مشبع.
مبرهنة:

إذا كان لدينا البرنامج الخطي المتعلق بمسألة النقل:

$$p = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \text{Min} \quad (8.8)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad (i=1,2,\dots,m) \quad (8.9)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad (j=1,2,\dots,n) \quad (8.10)$$

$$x_{ij} \geq 0 ; (i=1,2,\dots,m) ;$$

$$(j=1,2,\dots,n)$$

عندئذ يوجد حل مثالي واحد على الأقل.

الإثبات:

لنفرض أن:

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j = L$$

عندئذ يكون لدينا:

$$x_{ij} = \frac{a_i b_j}{L} ; (i=1,2,\dots,m, j=1,2,\dots,n)$$

يمكن إثبات هذه العلاقة بسهولة وذلك من خلال تطبيق العلاقتين (8.7)، (8.8) خطة نقل مقترحة، إن هذه الخطة تحقق كلاً من الشرطين (8.9)، (8.10) إلا أنها تحقق (8.8) إذاً فهي ليست مثالية.

نبدل x_{ij} بقيمتها في العلاقة (8.9) والعلاقة (8.10) فيكون لدينا:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = \sum_{j=1}^n \frac{a_i b_j}{L} = \frac{a_i}{L} \sum_{j=1}^n b_j = \frac{a_i}{L} L = a_i \quad (8.11)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = \sum_{i=1}^m \frac{a_i b_j}{L} = \frac{b_j}{L} \sum_{i=1}^m a_i = \frac{b_j}{L} L = b_j \quad (8.12)$$

نختار القيمة العظمى من بين القيم التي تحدد النقل من مراكز تصدير إلى مراكز

استهلاك أي:

$$c = \text{Max } c_{ij} \quad (8.13)$$

$$i=1,2,\dots,m$$

$$j=1,2,\dots,n$$

تبدل هذه القيمة في العلاقة (7.8) (دالة الهدف) نحصل على:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \leq c \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} = c \sum_{i=1}^m a_i = cL \quad (8.14)$$

ثم نختار القيمة الدنيا من بين القيم التي تحدد تعرفه النقل من مراكز التصدير إلى مراكز الاستهلاك أي:

$$c' = \min c_{ij} \quad (8.15)$$

$$i = 1, 2, \dots, m$$

$$j = 1, 2, \dots, n$$

تبدل هذه العلاقة (8.8) (دالة الهدف) فنحصل على العلاقة

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \geq c' \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} = c' \sum_{i=1}^m a_i = c' L \quad (8.16)$$

من العلاقتين (8.14) و (8.16) يكون لدينا:

$$c' L \leq p = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \leq cL \quad (8.17)$$

وهذا يعني أنه يوجد حل مثالي واحد على الأقل لمسألة النقل.

8.3- خوارزمية حل النقل

ليكن لدينا البرنامج الخطي المشبع لمسألة النقل المعطاة التالي:

$$p = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min \quad (8.18)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i ; (i=1, 2, \dots, m) \quad (8.19)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j ; (j=1, 2, \dots, n) \quad (8.20)$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$j = 1, 2, \dots, n$$

$$\left. \begin{array}{l} x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1n} = a_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{m1} + x_{m2} + \dots + x_{mn} = a_m \end{array} \right\} (8.21)$$

(m معادلة و $m \times n$ مجهولاً)

$$\left. \begin{array}{l} x_{11} + x_{21} + \dots + x_{m1} = b_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{1n} + x_{2n} + \dots + x_{mn} = b_n \end{array} \right\} (8.22)$$

(n معادلة و $m \times n$ مجهولاً)

وبالتالي فإنه لدينا $n + m$ معادلة و $m \times n$ مجهولاً.
 فإذا جمعنا حدود المعادلات في الجملة (8.21) نحصل على ما يلي:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} = \sum_{i=1}^m a_i \quad (8.23)$$

فإذا جمعنا حدود المعادلات في الجملة (7.22) نحصل على ما يلي:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} = \sum_{j=1}^n b_j \quad (8.24)$$

وبما أن المسألة مشبعة فإن:

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$$

إذاً فإن العلاقة (8.23) تطابق العلاقة (8.24)

وبالتالي تصبح شروط المسألة مكونة من $(m+n-1)$ معادلة و $m \times n$ مجهولاً. وبالتالي فإن الخطوة الأولى للتوزيع حاوية على $(m+n-1)$ مجهولاً موجباً أما بقية المجاهيل فقيمتها تكون مساوية للصفر.

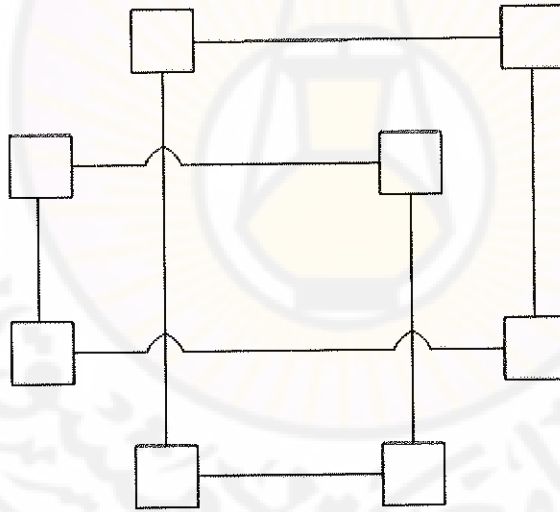
تعريف:

نسمي الخلايا التي تحوي قيماً للشحنات الخلايا المشغولة، أما الخلايا الباقية التي لا تحتوي على توزيع للشحنات فندعوها الخلايا الفارغة.

نرمز للخلية الفارغة بالرمز O، وللخلية المشغولة بالرمز $\square$

تعريف السلسلة المغلقة:

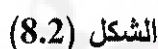
ندعو الخط الواصل بين عدد من الخلايا المشغولة والذي يعود في النهاية إلى الخلية نفسها التي انطلقنا منها بالسلسلة المغلقة، حيث يتم الانتقال من خلية إلى أخرى وفق الأسطر والأعمدة.



الشكل (8.1)

تعريف السلسلة المفتوحة:

ندعو الخط الواصل بين عدد من الخلايا المشغولة والذي لا يمكن أن يعود إلى الخلية نفسها المشغولة التي انطلقنا منها بالسلسلة المفتوحة.



288

مثال:

ليكن لدينا مراكز التوزيع A_i ، حيث احتياطي المركز A_i هو a_i ، ومراكز الاستهلاك B_j ، حيث حجم طلبية المركز هو b_j ، وليكن c_{ij} كلفة نقل وحدة بضاعية من مركز التوزيع A_i إلى مركز الاستهلاك B_j . جميع هذه المعطيات مبينة بالجدول التالي:

مراكز الاستهلاك مراكز التصدير	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	الاحتياطي
A_1	10	7	4	1	4	100
A_2	2	7	10	6	11	250
A_3	8	5	3	2	2	200
A_4	11	8	12	16	13	300
حجم الطلبية	200	200	100	100	250	850 850

الجدول (8.2)

والمطلوب إيجاد خطة مثالية للنقل، بحيث تكون كلفة النقل أقل ما يمكن. نبدأ بالجملة A_1B_1 حيث نجعلها تأخذ أعظم ما يمكن من مركز التصدير الأول، فإذا كان $a_1 < b_1$ فإننا نغلق باقي خلايا السطر الأول وننتقل إلى الخلية الأولى في السطر الثاني حتى نأمن باقي الطلبية من المركز التصدير الثاني وهكذا..... إما إذا كان $a_1 > b_1$ فإننا نتمكن من تلبية رغبة المستهلك الأول وبالتالي نغلق جميع خلايا العمود الأول وننتقل إلى الخلية الأولى في العمود الثاني، حيث نحاول

تلبية رغبات المستهلك الثاني من مركز التصدير الأول ... وهكذا نتابع حتى نصل إلى خطة أولية تلبي رغبات المصدرين ورغبات المستهلكين.
ففي مثالنا السابق يكون:

مستهلكون مصدرون	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	الاحتياطي
A_1	10 100	7 —	4 —	1 —	4 —	100
A_2	2 100	7 150	10 —	6 —	11 —	250
A_3	8 —	5 50	3 100	2 50	2 —	200
A_4	11 —	8 —	12 —	16 50	13 250	300
الطلبية	200	200	100	100	250	850 850

الجدول (8.3)

ففي المثال السابق يجب أن يكون عدد الخلايا المشغولة $5+4-1=8$
إذاً فإن هذا الشرط محقق في هذا التوزيع الأولي، ولا توجد سلسلة مغلقة، كما أن
المجموع للكميات المنقولة وفق الأسطر يساوي كمية الاحتياطي بالنسبة لكل مركز
تصدير.

والمجموع وفق الأعمدة للكميات المنقولة يساوي حجم الطلبية بالنسبة لكل مركز استهلاك ونلاحظ أن: $p = 6950$.

طريقة القيم الدنيا:

نتلخص هذه الطريقة في البحث عن أصغر تعرفة للنقل وفق الأسطر، فنضع في الخلية الموافقة لهذه القيمة، قيمة الطلبية لهذا المستهلك يجب أن لا تتجاوز احتياطي المصدر الموافق له، فإذا لم تُلب الطلبية نلجأ إلى مصدر آخر وهكذا نتابع، ثم نبحث عن أصغر قيمة تلي القيمة الأولى، وهكذا نتابع عملية التوزيع حتى نلبي رغبة المصدرين والمستهلكين.

نطبق هذه الطريقة على مثالنا:

مستهلكون مصدرون	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	الاحتياطي
A_1	10 —	7 —	4 —	1 100	4 —	100
A_2	2 200	7 50	10 —	6 —	11 —	250
A_3	8 —	5 —	3 —	2 —	2 200	200
A_4	11 —	8 150	12 100	16 —	13 50	300
الطلبية	200	200	100	100	250	850

الجدول (8.4)

نلاحظ أن عدد الخلايا المشغولة 7 لذلك نحمل إحدى الخلايا الفارغة حمولة صفرية بحيث لا تحتوي هذه الخطوة الأولية سلسلة مغلقة. إن دالة الهدف $p = 4300$ إن قيمة دالة الهدف بواسطة هذه الطريق أقل قيمة من قيمة دالة الهدف بالطريقة السابقة.

طريقة القيم المزدوجة (القيم الدنيا وفق الأسطر والأعمدة):
تتلخص هذه الطريقة بما يلي:

نبحث عن القيمة الصغرى لكلفة النقل وفق الأسطر ونضع في الخلية الموافقة إشارة (~)، ثم نبحث عن القيم الصغرى لكلفة النقل وفق الأعمدة، ونضع في الخلية الموافقة إشارة (~)، وبالنتيجة نحصل على عدد من الخلايا التي تحتوي على إشارتين، نضع في هذه الخلايا أكبر حمولة ممكنة، بعد أن ننتهي من الخلايا التي تملك إشارتين، نجد أن هناك بعض المستهلكين لم يحصلوا على الطلبية بشكل كامل أو جزئي، لذلك نبدأ بتحميل الخلايا التي تحوي إشارة واحدة، وهكذا نتابع حتى نحصل على الخطوة الأولية للنقل.

نطبق هذه الطريقة على المثال السابق:

مستهلكون مصدرون	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	الاحتياطي
A_1	10 —	7 —	4 —	1 $\tilde{100}$	4 —	100
A_2	2 200	7 —	10 50	6 —	11 —	250
A_3	8 —	5 —	3 —	2 $\approx$	2 200	200
A_4	11 —	8 $\tilde{200}$	12 50	16 —	13 50	300
الطلبيّة	200	200	100	100	250	850

الجدول (8.5)

نلاحظ أن عدد الخلايا المشغولة 7 لذلك حمل إحدى الخلايا الفارغة حمولة صفرية بحيث لا تحتوي هذه الخطة الأولية سلسلة مغلقة كما نلاحظ أن قيمة دالة الهدف $p = 4250$ أقرب إلى الحل المثال.

8.5- خوارزمية تعديل خطة التوزيع

مبرهنة:

إذا كانت خطة النقل $x^* = (x_{ij}^*)$ هي الخطة المثالية لمسألة النقل، فإنه يوجد $m+n$ مركزاً للتصدير v_j وللاستهلاك u_i يتحقق فيها:

$$u_i^* + v_j^* = c_{ij} \quad \text{من أجل الخلايا المشغولة} \quad (8.25)$$

$$u_i^* + v_j^* \leq c_{ij} \quad \text{من أجل الخلايا المشغولة} \quad (8.26)$$

حيث $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$ الإثبات:

ليكن لدينا البرنامج الخطي التالي لمسألة النقل والمواصلات:

$$p = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \text{Min} \quad (8.27)$$

$$(i = 1, 2, \dots, m) ; \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad (8.28)$$

$$(j = 1, 2, \dots, n) ; \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad (8.29)$$

إن كل علاقة خطية من هذا البرنامج تترافق علاقة في البرنامج الخطي لمسألة الثنوية، فإذا حددت المجاهيل u_i حيث:

$(i = 1, 2, \dots, m)$ للمعادلات الخطية في العلاقة (8.28) والمجاهيل v_j حيث

$(j = 1, 2, \dots, n)$ للمعادلات الخطية في العلاقة (8.29) يكون دالة الهدف في المسألة الثنوية معطاة بالعلاقة التالية:

$$z = \sum_{i=1}^m a_i u_i + \sum_{j=1}^n b_j v_j \rightarrow \text{Max} \quad (8.30)$$

وتكون شروط المسألة:

$$\begin{aligned} u_i + v_j &\leq c_{ij} \\ i &= 1, \dots, m \\ j &= 1, \dots, n \end{aligned} \quad (8.31)$$

وبما أن x^* هي خطة مثالية للمسألة الخطية فإن:

$$Y^* = (u_i^*, v_j^*) \text{ خطة مثالية للمسألة الثنوية} :$$

وحسب مبدأ الثنوية فإن $\text{Max } Z = \text{Min } f$.

وبالتعويض نجد أن:

$$z = \sum_{i=1}^m a_i u_i^* + \sum_{j=1}^n b_j v_j^* = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}^* \quad (8.32)$$

$$x_{ij}^* \geq 0 \quad \text{حيث}$$

إذاً فإن من أجل $x_{ij}^* \geq 0$ في المسألة الأصلية تحدد العلاقات:

$$u_i^* + v_j^* = c_{ij}$$

ومن أجل $x_{ij}^* = 0$ في المسألة نحصل على العلاقات:

$$u_i^* + v_j^* \leq c_{ij}$$

وهو المطلوب.

نتيجة:

إذا لم يتحقق أحد شروط العلاقة (8.26) في إحدى الخلايا الفارغة، فإن خطة التوزيع الموضوعة ليست مثالية ويجب البحث عن خطة أفضل منها.

إذاً يعطي أحد المجاهيل u_i ; $(i = 1, 2, \dots, m)$

أو إحدى المجاهيل v_j ; $(j = 1, 2, \dots, n)$ قيمة اختيارية ثم نحسب بقية المجاهيل u_i, v_j ، وذلك بتطبيق العلاقة (8.25) التي يجب أن تكون محققة في الخلايا المشغولة.

بعد ذلك نختبر هذه الخطة فيما إذا كانت مثالية، وذلك من خلال التحقق من صحة العلاقة (8.26) في الخلايا الفارغة.

إذا كان هناك بعض الخلايا الفارغة غير محققة للعلاقة (8.26) فإنه تكون محققة للعلاقة:

$$u_i + v_j \geq c_{ij} \quad (8.33)$$

فمن أجل تعديل خطة التوزيع، فإننا نختار الخلية الملائمة لإعادة التوزيع، لذلك فإن إعادة التوزيع يبنى على أساس أن تحمل الخلايا الموافقة للعلاقة:

(8.34)

$$Max[(u_i + v_j) - c_{ij}]$$

حيث تحمل هذه الخلية كمية تؤدي إلى تحسين خطة النقل.

وفيما يلي نبين كيفية تعيين الكمية الواجب تحميلها للخلية الموافقة للعلاقة (8.34):

من أجل تحديد التوزيع الجديد للشحنات، نضع في الخلية الفارغة التي اخترناها إشارة (+) ثم نشكل أكبر سلسلة مفتوحة تمر من هذه الخلية المختارة، حيث أن جميع رؤوسها خلاياها مشغولة عدا الخلية المختارة.

انطلاقاً من الخلية المختارة نضع بالتناوب إشارة (+, -, +, ...) حتى نعود إلى الخلية التي انطلقنا منها والتي أعطيناها الإشارة (+).

وبذلك نحصل على خطة نقل جديدة $Min x_{ij}$ ، ثم بعد ذلك نختبر هذه الخطة فإذا

لم تكن مثالية نكرر العملية السابقة، وهكذا حتى نحصل على خطة مثالية.

فإذا طبقنا هذه الخوارزمية على مثالنا السابق فإننا نجد ما يلي:

نبحث عن القيمة الدنيا للشحنات بين الخلايا المشغولة، و التي وضعت بجانبها إشارة (-) ونضيف هذه الكمية إلى الخلايا التي اعطيناها الإشارة (+)، كما نطرحها من الخلايا التي أعطيناها إشارة (-)	(8.35)
--	---------------

مستهلكون مصدرون		$v_1 = 3$	$v_2 = 8$	$v_3 = 12$	$v_4 = 7$	$v_5 = 13$	الإحتياطي
		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
$u_1 = -6$	A_1	10	7	4	11	4	100
$u_2 = -1$	A_2	2	7	10	6	11	250
$u_3 = -11$	A_3	8	5	3	2	2	200
$u_4 = 0$	A_4	11	8	12	16	13	300
حجم الطلبية		200	200	100	100	250	850

الجدول (8.6)

لنبين الخلية الواجب تحميلها نطبق العلاقة (8.34)

$$\text{Max}\{2, 3, 1, 1\} = 3$$

لتحديد الكمية الواجب تحميلها للخلية المختارة نطبق العلاقة (8.35) أي:

$$\text{Min}\{50, 100, 50\} = 50$$

ومنه نحصل على التوزيع الجديد التالي:

مستهلكون مصدرون		$v_1 = 3$	$v_2 = 8$	$v_3 = 12$	$v_4 = 7$	$v_5 = 10$	الإحتياطي
		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
$u_1 = -6$	A_1	10	7	4	1	4	100
$u_2 = -1$	A_2	2	7	10	6	11	250
$u_3 = -8$	A_3	8	5	3	2	2	200
$u_4 = -0$	A_4	11	8	12	16	13	300
حجم الطلبية		200	200	100	100	250	850

الجدول (8.7)

ويتطبيق ما سبق نحصل على الخطة المثالية التالية:

الإحتياطي	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	مستهلكون مصدرون
A_1	10 -	7 -	4 0	1 50	4 50	100
A_2	2 200	7	10	6	11 50	250
A_3	8	5	3	2	2 200	200
A_4	11	8 200	12 100	16	13	300
حجم الطلبة	200	200	100	100	250	850

الجدول (8.8)

إن قيمة دالة الهدف $p = 4150$

8.6- مسائل النقل غير المشبعة

نسمي مسائل النقل التي تساوي فيها مجموع الإحتياطي لمراكز التصدير مع مجموع حجم الطلبة لمراكز الاستهلاك مسائل نقل مغلقة:

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j \quad (8.36)$$

فإذا لم تتحقق العلاقة (8.36) فإننا ندعو هذا النوع من المسائل مسائل النقل غير

المشبعة، وهنا نميز حالتين:

أ- عندما يكون حجم الإحتياطي أكبر من حجم الطلبة أي:

$$\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j \quad (8.37)$$

ب- عندما يكون حجم الطلبية أكبر من حجم الاحتياطي أي:

$$\sum_{i=1}^m a_i < \sum_{j=1}^n b_j \quad (8.38)$$

ففي هذه الحالة فإن البحث عن خطة مثالية يتطلب إعادة المسألة غير المشبعة إلى مسألة مشبعة ثم إجراء الحسابات على جداولها وفقاً للطريقة العامة:
ففي الحالة أ- نضيف مركز استهلاك وهمياً B_{n+1} بحيث يكون حجم الطلبية في هذا المركز معطى بالعلاقة التالية:

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^n a_i - \sum_{j=1}^n b_j$$

أما في الحالة ب- فإننا نضيف مركز تصدير وهمياً A_{m+1} بحيث يكون احتياطي هذا المركز معطى بالعلاقة التالية:

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=1}^m a_i$$

على أن نفترض أن كلفة النقل بالنسبة للمستهلك الوهمي، وكذلك بالنسبة المصدر الوهمي مساوية للصفر.

8.7 - طريقة فوجل Vogel's Approx mation method

تعد طريقة فوجل من أهم الطرق الثلاث لما تتميز به هذه الطريقة من القدرة للوصول إلى الحل الأمثل أو الحل القريب من الحل الأمثل ونادراً ما تكون طريقتي أقل كلفة والشمالية الغربية أفضل من طريقة فوجل للوصول إلى الحل الأمثل بأقل كلفة ممكنة. لكن طريقة فوجل تحتاج إلى عمليات حسابية أطول مما تحتاجه طريقتا أقل كلفة والشمالية الغربية.

خطوات إيجاد الحل الأساسي الأولي بهذه الطريقة كما يلي:

- 1- حساب الفرق بين أقل كلفتين في كل سطر أو عمود.
- 2- اختيار الفرق الأكبر من بين السطور أو الأعمدة على السواء.

3- اختيار المربع الذي يحتوي على أقل كلفة في السطر أو العمود الذي تم تحديده في الخطوة التالية

4- تخصيص أكبر كمية متوفرة لتسديد احتياجات مركز استهلاك أو النفاذ لموجودات مركز تصدير

5- نحذف السطر أو العمود الذي تم استيعابه أو تحققه

6- إعادة الخطوات السابقة.

مثال:

يوضح المثال التالي طريق فوجل

الموجودات	مركز استهلاك 2	مركز استهلاك 1	الأصول
60	2	4	مركز تصدير 1
40	5	7	مركز تصدير 2
70	10	3	مركز تصدير 3
	65	105	الاحتياجات

جدول (8.9)

نطبق الخطوات على الجدول (8.9)

1- حساب الفرق بين أقل كلفتين في كل سطر أو عمود أقل كلفتين في السطر الأول هما 2 , 4 والفرق بينهما 2 أقل كلفتين في السطر الثاني هما 5 , 7 والفرق بينهما هو 2 أقل كلفتين في السطر الثالث هما 3 , 10 والفرق بينهما هو 7 أقل كلفتين في العمود الأول هما 3 , 4 والفرق بينهما هو 1 أقل كلفتين في العمود الثاني هما 2 , 5 والفرق بينهما هو 3

2- الفرق الأكبر بين السطور والأعمدة على السواء هو 7 وهذا الفرق يقع في السطر الثالث لذلك سنختار السطر الثالث ليكون السطر المرشح للتخصيص أو بعبارة أخرى مركز تصدير الذي يتم النقل منه.

3- أقل كلفة في ذلك السطر هي 3 وتقع في المربع (مركز تصدير 3، مركز استهلاك 1)

4- ننقل 70 وحدة وهذا ما يتوفر في مركز تصدير 3 لترسل إلى مركز استهلاك 1

5- لقد نفذت متوفرات مركز تصدير 3 ولذلك سنحذف ذلك السطر من أية اعتبارات أخرى ثم نعيد الخطوات السابقة.

إن جدول النقل الجديد هو:

الموجودات	مركز استهلاك 2	مركز استهلاك 1	
60	2	4	مركز تصدير 1
40	5	7	مركز تصدير 2
	65	35	الاحتياجات

جدول (8.10)

إن أقل كلفتين في السطر الأول هما 2 , 4 والفرق بينهما 2

إن أقل كلفتين في السطر الثاني هما 5 , 7 والفرق بينهما 2

إن أقل كلفتين في العمود الأول هما 4 , 7 والفرق بينهما 3

إن أقل كلفتين في العمود الثاني هما 2 , 5 والفرق بينهما 3

إن أكبر الفروق يقع في العمود الأول والثاني

نختار أياً من العمودين بصورة اعتباطية ولنختار العمود الثاني.

أقل كلفة في العمود الثاني هي 2 وإن متوفرات مركز تصدير 1 هي 60

وحدة تنتقل على مركز استهلاك 2 التي تحتاج إلى 65 وحدة وبذلك ستنفذ

متوفرات مركز تصدير 1 ويحذف من أية اعتبارات أخرى وإن ما تبقى في

مركز تصدير 2 هي 40 وحدة توزع بدون شك إلى مركز استهلاك 2 بمقدار

5 وحدات، وإلى مركز استهلاك 1 بمقدار 35 وحدة وسيكون جدول التوزيع

كالآتي:

الموجودات	مركز استهلاك 2	مركز استهلاك 1	الأصول
60	60		مركز تصدير 1
40	5	35	مركز تصدير 2
70		70	مركز تصدير 3
	65	105	الاحتياجات

جدول (8.11)

إذاً:

ننقل 60 وحدة من مركز تصدير 1 إلى مركز استهلاك 2 بتكاليف نقل 2 للوحدة الواحدة

ننقل 35 وحدة من مركز تصدير 2 إلى مركز استهلاك 1 بتكاليف نقل 2 للوحدة الواحدة

ننقل 5 وحدة من مركز تصدير 2 إلى مركز استهلاك 2 بتكاليف نقل 5 للوحدة الواحدة

ننقل 70 وحدة من مركز تصدير 3 إلى مركز استهلاك 1 بتكاليف نقل 3 للوحدة الواحدة

$$\begin{aligned} \text{مجموع التكاليف الكلية من جراء هذا التوزيع هو} \\ 3 \times 70 + 5 \times 5 + 7 \times 35 + 2 \times 60 = \\ 210 + 25 + 245 + 120 = 600 \end{aligned}$$

التوزيع بطريقة فوجل لهذا المثال هو التوزيع نفسه بطريقة أقل كلفة حيث أن مجموع التكاليف الكلية متساوي في الطريقتين.

مثال :

استخدام طريقة فوجل لإيجاد توزيع أولي ثم اوجد التوزيع المثالي؟

نعيد كتابة جدول النقل أدناه:

الموجودات	مركز استهلاك 5	مركز استهلاك 4	مركز استهلاك 3	مركز استهلاك 2	مركز استهلاك 1	
100	30	34	28	27	37	مركز تصدير 1
125	28	27	32	32	29	مركز تصدير 2
150	30	3	37	27	34	مركز تصدير 3
	90	80	70	60	75	الاحتياجات

جدول (8.12)

نطبق الخطوات على الجدول (8.12) حيث سنكتب الفروق بجانب الجدول كما

يلي:

الفروق	الموجودات	مركز استهلاك 5	مركز استهلاك 4	مركز استهلاك 3	مركز استهلاك 2	مركز استهلاك 1	
1	100	30	34	28	27	37	مركز تصدير 1
1	125	28	27	32	32	29	مركز تصدير 2
3	150	30	3	37	27	34	مركز تصدير 3
		90	80	70	60	75	الاحتياجات
		2	7	4	0	5	الفروق

جدول (8.13)

إن أكبر الفروق يقع في عمود العمود الرابع (مركز استهلاك 4). نختار العمود الرابع، أقل كلفة في العمود الرابع هي 27 تقع في المربع (مركز تصدير 2، مركز استهلاك 4).

نخصص 80 وحدة من مركز تصدير 2 لتنتقل إلى مركز استهلاك 4 وبذلك نتحقق مركز استهلاك 4 ويحذف العمود الرابع من أية اعتبارات أخرى ثم تعاد الخطوات السابقة:

الفروق	الموجودات	مركز استهلاك 5	مركز استهلاك 3	مركز استهلاك 2	مركز استهلاك 1	
1	100	30	28	27	37	مركز تصدير 1
1	45	28	32	32	29	مركز تصدير 2
3	150	30	37	27	34	مركز تصدير 3
		90	70	60	75	الاحتياجات
		2	4	0	5	الفروق

جدول (8.14)

أكبر الفروق هو 5 يقع في عمود العمود الأول (مركز استهلاك 1) نختار العمود الأول، أقل كلفة في العمود الأول هي 29 لذلك تخصص 45 وحدة تنتقل من مركز تصدير 2 وترسل إلى مركز استهلاك 1 ولذلك سنتفد متوفرات مركز تصدير 2 ويحذف من أية اعتبارات أخرى ونحتاج إلى 30 وحدة أخرى لكي نحقق احتياجات مركز استهلاك 1. إن الجدول الجديد سيكون:

الفرق	الموجودات	مركز استهلاك 5	مركز استهلاك 3	مركز استهلاك 2	مركز استهلاك 1	
1	100	30	28	27	37	مركز تصدير 1
3	150	30	37	27	34	مركز تصدير 3
		90	70	60	75	الاحتياجات
		0	9	0	3	الفرق

جدول (8.15)

أكبر الفروق هو 9 يقع في عمود العمود الثالث (مركز استهلاك 3). نختار العمود الثالث وإن أقل كلفة في ذلك العمود هي 28 حيث تخصص 70 وحدة وهي حاجة مركز استهلاك 3 وتنتقل من مركز تصدير 1 ليبقى في ذلك مركز تصدير 30 وحدة فقط وإن جدول النقل الجديد بعد أن نحذف العمود الثالث كما يلي:

الفرق	الموجودات	مركز استهلاك 5	مركز استهلاك 2	مركز استهلاك 1	
3	100	30	27	37	مركز تصدير 1
3	150	30	27	34	مركز تصدير 3
		90	60	3	الاحتياجات
		0	0	3	الفرق

إن أكبر الفروق هو 3 ويكون هذا الفرق في ثلاثة أماكن ولنختار أحدها بصورة عشوائية. لنفرض أن اختارنا وقع على العمود الأول. إن أقل كلفة في العمود الأول هي 34 وإن ذلك العمود يحتاج إلى 30 وحدة حيث تنتقل 30 وحدة من مركز تصدير 3 ليبقى في ذلك مركز تصدير 120 وحدة وترسل هذه الـ 30 وحدة إلى مركز استهلاك 1. تحقق الآن العمود الأول ويحذف من أية اعتبارات أخرى وسيكون الجدول كالاتي:

الفرق	الموجودات	مركز استهلاك 5	مركز استهلاك 2	
3	100	30	27	مركز تصدير 1
3	120	30	27	مركز تصدير 3
		90	60	الاحتياجات
		0	0	الفرق

إن أكبر الفرق يقع في مكانين نختار مركز تصدير 1 بصورة عشوائية وننقل 30 وحدة من مركز تصدير 1 إلى مركز استهلاك 2 وبعد تنفيذ متوفرات مركز تصدير 1 وتبقى 120 وحدة في مركز تصدير 3 توزع إلى مركز استهلاك 5 بعدد 90 وحدة وإلى مركز استهلاك 2 بعدد 30 وحدة ويكون جدول التوزيع كما يلي:

الموجودات	مركز استهلاك 5	مركز استهلاك 4	مركز استهلاك 3	مركز استهلاك 2	مركز استهلاك 1	
100			70	30		مركز تصدير 1
125		80			45	مركز تصدير 2
150	90			30	3	مركز تصدير 3
	90	80	70	60	75	الاحتياجات

جدول (8.16)

نقل 30 وحدة من مركز تصدير 1 إلى مركز استهلاك 2 بتكاليف 27 للوحدة الواحدة

نقل 70 وحدة من مركز تصدير 1 إلى مركز استهلاك 3 بتكاليف 28 للوحدة الواحدة

نقل 45 وحدة من مركز تصدير 2 إلى مركز استهلاك 1 بتكاليف 29 للوحدة الواحدة

نقل 80 وحدة من مركز تصدير 2 إلى مركز استهلاك 4 بتكاليف 27 للوحدة الواحدة

نقل 30 وحدة من مركز تصدير 3 إلى مركز استهلاك 1 بتكاليف 34 للوحدة الواحدة

نقل 30 وحدة من مركز تصدير 3 إلى مركز استهلاك 2 بتكاليف 27 للوحدة الواحدة

نقل 90 وحدة من مركز تصدير 3 إلى مركز استهلاك 5 بتكاليف 30 للوحدة الواحدة

حيث أن مجموع التكاليف الكلية

$$30 \times 90 + 27 \times 30 + 34 \times 30 + 27 \times 80 + 29 \times 45 + 28 \times 70 + 27 \times 30$$

$$= 2700 + 810 + 1020 + 2160 + 1305 + 1960 + 810 = 9765$$

8.8- مسألة الاسناد (التعيين)

8.8.1- النموذج الرياضي لمسألة الإسناد:

ليكن لدينا عدد من الوظائف n و المطلوب توزيع هذه الوظائف على m شخص بأقل كلفة ممكنة، حيث الوظيفة يجب أن تنجز من قبل شخص واحد و الشخص يقوم

بعمل واحد على الأكثر. تكلفة إنجاز الشخص i الوظيفة j هي c_{ij}

لنفرض أن $x_{ij} = 1$ في حال قام الشخص i بالوظيفة j

و $x_{ij} = 0$ في حال لم يقوم الشخص i بالوظيفة j

سنتكون دالة الهدف:

$$P = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij} x_{ij} \rightarrow \text{Min}$$

أما شروط المسألة:

أ- الوظيفة يجب أن تنجز من قبل شخص واحد:

$$\sum_{j=1}^m x_{ij} = 1, \quad (i=1,2,\dots,n)$$

ب- الشخص يقوم بوظيفة على الأكثر:

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} \leq 1, \quad (j=1,2,\dots,m)$$

ت- و أخيراً شروط المجاهيل:

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad (i=1,2,\dots,n, j=1,2,\dots,m)$$

سوف نوضح مسألة التعيين بوساطة المثال التالي:

مثال:

ترغب إحدى الشركات في تعيين عمال في خط سير الإنتاج (مراقبة الجودة، تجريب، تغليف). وبعد إجراء المسابقة نجح أربعة أشخاص، حيث كانت علاماتهم لأجل كل من هذه الأعمال معطاة بالجدول التالي:

العمل الأشخاص	مراقبة	تجريب	تغليف
الشخص الأول	11	11	14
الشخص الثاني	13	14	17
الشخص الثالث	12	12	16
الشخص الرابع	12	11	15

جدول (8.17)

فإذا افترضنا أن مرور كل شخص في العمل الذي سيعين به يقدر بالعلاقة التي نالها في هذا العمل، فكيف تعين ثلاثة أشخاص بحيث يكون المردود الكلي أعظماً؟.

إن هذه المسألة تشبه مسألة النقل والمواصلات حيث أن دالة الهدف:

$$Z = \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} \rightarrow \text{Max}$$

حيث $x_{ij} = 1$ في حال قام الشخص i بالوظيفة j

و $x_{ij} = 0$ في حال لم يقوم الشخص i بالوظيفة j

و بالتالي فإن دالة الهدف تصبح:

$$11x_{11} + 11x_{12} + 14x_{13} + 13x_{21} + 14x_{22} + 17x_{23} + 12x_{31} + 11x_{32} + 15x_{33} \rightarrow \text{Max}$$

أما شروط المسألة:

شروط الأشخاص:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 1$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 1$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} \leq 1$$

$$x_{41} + x_{42} + x_{43} \leq 1$$

شروط الأعمال:

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 1$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 1$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 1$$

وأخيراً شروط المجاهيل:

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad (i=1,2,3,4, j=1,2,3)$$

8.9- طريقة هنغارين لحل مسألة الاسناد

تقوم هذه الطريقة بحل مسألة الاسناد من إيجاد أصغر تكلفة لاسناد n شخص لـ n وظيفة.

خطوات الطريقة:

قم بالبداية بكتابة كلفة إتجاز الوظائف من قبل الأشخاص على شكل جدول ثم قم بالخطوات التالية:

1- أوجد أصغر عدد في كل سطر ثم قم بطرح هذا المقدار من جميع عناصر السطر

2- أوجد أصغر عدد في كل عمود ثم قم بطرح هذا المقدار من جميع عناصر العمود

3- ارسم أصغر عدد من الخطوط (على الأسطر أو الأعمدة) لتغطي كل الأصفار في الجدول السابق. إذا كان عدد الخطوط يساوي n توقف لقد حصلنا على الحل الأمثل

4- أوجد أصغر عدد غير مغطى بالخطوط، ثم قم بطرحه من جميع الأعداد غير المغطاة و أضف هذا المقدار للأعداد المغطاة بخطين. ثم انتقل إلى الخطوة 3

ملاحظة:

1- في حال عدد الأشخاص m أكبر من عدد الوظائف نقوم بإضافة وظائف وهمية كلفة أنجازها يساوي الصفر.

2- في حال عدد الوظائف n أكبر من عدد الأشخاص m نقوم بإضافة عمال وهميين كلفة أنجازهم للوظائف يساوي عدد كبير M .

مثال:

لنقم بحل المثال السابق بطريقة هنغارين. بما أن عدد الوظائف أقل من عدد الأشخاص نقوم بإضافة وظيفة وهمية بكلفة كبيرة M

	مراقبة	تجريب	تغليف	وظيفة وهمية
الشخص 1	11	11	14	0
الشخص 2	13	14	17	0
الشخص 3	12	12	16	0
الشخص 4	12	11	15	0

بإنجاز الخطوة 1 نحصل على الجدول السابق نفسه

بإنجاز الخطوة 2 نحصل على الجدول التالي:

	مراقبة	تجريب	تغليف	وظيفة وهمية
الشخص 1	0	0	0	0
الشخص 2	2	3	3	0
الشخص 3	1	1	2	0
الشخص 4	1	0	1	0

بإنجاز الخطوة 3 نحصل على الجدول التالي:

	مراقبة	تجريب	تغليف	وظيفة وهمية
الشخص 1	0	0	0	0
الشخص 2	2	3	3	0
الشخص 3	1	1	2	0
الشخص 4	1	0	1	0

وبما أن أصغر عدد ممكن من الخطوط التي تغطي الأصفار يساوي $n=4 > 3$ لذلك

نقوم بإنجاز الخطوة 4 نحصل على الجدول التالي:

	وظيفة وهمية	تغليف	تجريب	مراقبة
الشخص 1	0	0	1	0
الشخص 2	0	2	3	1
الشخص 3	1	1	1	0
الشخص 4	0	0	0	0

وبما أن أصغر عدد ممكن من الخطوط التي تغطي الأصفار يساوي $n=4$ فالحل هو الحل الأمثل. الحل الأمثل يوافق الأصفار الموجودة في الجدول الأخير

يقوم الشخص الأول بإنجاز العمل الأول أو الثالث أو الرابع

يقوم الشخص الثاني بإنجاز العمل الرابع

يقوم الشخص الثالث بإنجاز العمل الأول

يقوم الشخص الرابع بإنجاز العمل الأول أو الثاني أو الثالث أو الرابع

و بالتالي الحل الأمثل:

يقوم الشخص الأول بإنجاز العمل الثالث (التغليف)

و أن يقوم الشخص الثاني بإنجاز العمل الرابع (أن لايقوم بأي عمل)

و أن يقوم الشخص الثالث بإنجاز العمل الأول (المراقبة)

و أن يقوم الشخص الرابع بإنجاز العمل الثاني (التجريب)

$$\text{الكلفة الكلية} = 14 + 0 + 12 + 11 = 37$$

تمارين

1- لدينا أربعة مراكز تصدير $A_i (i=1,2,3,4)$ وخمسة مراكز استهلاك $B_j (j=1,2,3,4,5)$ ، علماً أن احتياطي مراكز التصدير، وحجم طلبية مراكز الاستهلاك وكلفة النقل من مركز التصدير إلى مركز الاستهلاك معطاة بالجدول التالي:

مستهلكون مصدرون	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	الاحتياطي
A_1	1	6	8	12	16	100
A_2	16	10	8	6	15	400
A_3	4	1	9	11	13	100
A_4	3	2	7	9	15	100
الطلبية	50	100	150	200	250	750

المطلوب وضع خطة نقل بحيث تكون التكلفة أقل مل يمكن؟

2- لدينا ثلاثة أنواع من الأراضي A_1, A_2, A_3 ، مساحتها بالترتيب 10,20,6 هكتاراً، ولدينا ثلاثة أنواع من الحبوب B_1, B_2, B_3 يتوفر منها ما يكفي لزراعة 10,15,6 هكتاراً على الترتيب. إذا كانت الأرض من النوع A_1 غير صالحة لزراعة B_1 ، علماً أن كلفة الهكتار الواحد 4 إذا زرع فيه B_2 ، 6 إذا زرع فيه B_3 . وإذا

كانت كلفة الهكتار الواحد من A_2 هي 5 لأجل B_1 ، 6 لأجل B_2 ، و 8 لأجل B_3 ، وإذا كانت كلفة الهكتار الواحد من A_3 هي 6 لأجل B_1 ، و 7 لأجل B_2 ، و 7 لأجل B_3 .

أوجد خطة تنظيم لزراعة هذه الأراضي بحيث تكون الكلفة الكلية أقل ما يمكن؟
 3- أوجد خطة نقل المثالية لمسألة النقل المعطاة بالجدول التالي:

مستهلكون مصدرون	B_1	B_2	B_3	B_4	الاحتياطي
A_1	3	4	2	8	15
A_2	1	3	4	11	25
الطلبية	10	10	10	5	

4- ترغب إحدى الشركات في تعيين عاملين في قسم العلاقات العامة سكرتير، ولقد تقدم للمسابقة 5 أشخاص، حيث أجريت لهم الامتحانات اللازمة وكانت علاماتهم كما يلي:

	لغة أجنبية	ثقافة عامة	تلكس
A_1	9	10	9
A_2	7	6	5
A_3	7	8	5
A_4	9	8	8
A_5	5	7	1

5- أوجد خطة النقل المثالية لمسألة النقل المعطاة بالجدول التالي:

مستهلكون مصدرون	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	الاحتياطي
A_1	7	3	2	4	2	50
A_2	6	5	8	3	4	70
A_3	3	2	5	7	1	90
الطلبة	20	60	80	40	10	210



الفصل التاسع

نظرية المباريات الإستراتيجية

9.1- مقدمة

إن نظرية المباريات الإستراتيجية (اللعب أمام استراتيجيات محددة) تعد من العلوم الحديثة في هذا العصر، وإن أول من فكر في وضع الأسس الرياضية لهذا العلم هو العالم الألماني جون فون نيومان G.Von Neuman في عام 1929 قام العالمان نيومان ومورغينشتيرن Morgenstern.O.and Von Neuman,J بنشر كتاب بعنوان "نظرية المباراة في السلوك الاقتصادي" ويعد هذا الكتاب المدخل الأول لنظرية المباراة الإستراتيجية إلى العلوم الإدارية والاقتصادية، حيث يتلخص مفهوم المباراة الإستراتيجية بوجود مباراة لها هدف نهائي يسعى من أجله جميع اللاعبين حسب قوانين اللعبة.

ففي بعض الأحيان نجد أن هدف المباراة هو الحصول على أكبر عدد ممكن من الأهداف (مثلاً مباراة كرة القدم)، بينما في بعض الأحيان نجد أن فاعلية المباراة تقاس من خلال الإستراتيجيات المرحلية التي يأخذها كل لاعب (مثلاً الشطرنج). وسوف نهتم في هذا البحث بالمباراة التنافسية.

تعريف:

المباراة التنافسية هي المباراة التي لها نهاية (ربح) يبحث عنها كل مشارك في هذه المباراة، ولكن لا يستطيع كل منهم بلوغها حيث يصل إلى هذه النهاية اللاعب الذي يحدد الإستراتيجيات المرحلية المثلى وضمن قوانين المباراة.

9.2- الإستراتيجيات ذات المجموع الصفري

المباراة الإستراتيجية ذات المجموع الصفري، هي مباراة يكون فيها مجموع خسارة اللاعبين وربحهم مساوياً للصفر، وفيما عدا ذلك فإننا ندعوها بالمباراة الإستراتيجية ذات المجموع غير الصفري.

تعريف:

مصفوفة المدفوعات هي الجدول الذي يمكن وضعه لتحديد قيمة الدفعات التي يجب أن تؤدي بعد إجراء كل خطوة في المباراة.
وفي المباراة ذات المجموع الصفري بلاعبين تكتب مدفوعات اللاعب الأول فقط، ذلك أن ما يربحه الأول يخسره الثاني.

مثال:

لدينا اللاعبان A, B ، يكتب كل منهما رقماً على ورقة لا يراها الآخر ثم تكشف الورقتان معاً. فإذا كان الرقمان فرديين يدفع B لـ A 3 ل.س، وإذا كان الرقمان زوجيين يدفع B لـ A 1 ل.س أما إذا كان الأول زوجياً والثاني فردياً فإن A يدفع لـ B 2 ل.س.

$A \backslash B$	فردي	زوجي
فردي	3	-2
زوجي	-2	1

مثال:

لدينا لاعبان A, B حيث لدى اللاعب A ثلاث إستراتيجيات P, Q, R ، أما اللاعب B فلديه إستراتيجيتان S, T حيث قواعد اللعبة محددة بمصفوفة المدفوعات.

$A \backslash B$	S	T
P	-2	-2
Q	-1	3
R	1	2

جدول (9.1)

حيث يمثل العدد السالب خسارة اللاعب A ، أما العدد الموجب فيمثل ربح اللاعب

. A

يمكن أن نناقش هذه اللعبة فنجد أن الإستراتيجية المثالية للاعب A هي R أما بالنسبة للاعب B فهي S ، وبذلك يخسر $B, 1$ ل.س فيما يربح $A, 1$ ل.س، وندعو هذه القيمة تسعيرة اللعبة.

9.3- الإستراتيجية الصرفة

هي أن يختار كل لاعب الإستراتيجية التي تضمن له دخل محدد على الأقل، وذلك بأن يختار أفضل أسوأ دخل لكل استراتيجية من الإستراتيجية المتاحة له. وفي المباراة ذات المجموع الصفري، تعطى الإستراتيجية الصرفة للاعب الأول بأن يختار الإستراتيجية التثويه للقيمة (العظمى- الدنيا)، أي:

$$\max_i \min_j a_{ij}$$

و تعطى الإستراتيجية الصرفة للاعب الثاني بأن يختار الإستراتيجية التثويه للقيمة (الدنيا- العظمى)، أي:

$$\min_j \max_i a_{ij}$$

9.4- نقاط الاستقرار في المباريات الإستراتيجية

لتعيين نقاط الاستقرار نبحث في مصفوفة المدفوعات عن القيمة (العظمى- الدنيا) بالنسبة للاعب الأول وعن القيمة (الدنيا- العظمى) بالنسبة للاعب الثاني. نقول عن المباراة أنها تحوي نقطة استقرار إذا تحققت العلاقة التالية:

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} \quad (9.1)$$

إذا فإن المباراة التي لا تحوي نقطة استقرار تحقق:

$$\max_i \min_j a_{ij} \neq \min_j \max_i a_{ij} \quad (9.2)$$

حيث a_{ij} ، $i = 1, 2, \dots, n$ ، $j = 1, 2, \dots, m$ عناصر مصفوفة المدفوعات.

إذاً نتلخص فكرة البحث عن نقاط الاستقرار في تحديد الأعداد التي تحقق القيم الدنيا للسطور، والأعداد التي تحقق القيم العظمى بالنسبة للأعمدة في الجدول المعطى نفسه، فإذا لم يكن هناك مثل هذه الأعداد، فإنه لا يوجد نقاط استقرار، وإن الإستراتيجية الموافقة للعدد المختار تقابل نقطة الاستقرار حيث تشكل الإستراتيجية المثالية للمباراة، ويشكل العدد المختار تسعيرة المباراة.

مثال:

$A \backslash B$	S	T	L	القيمة الدنيا
P	3	-5	0	-5
Q	-4	-2	1	-4
R	5	4	2	2
	5	4	2	

جدول (9.2)

إذاً فإن الاستراتيجية (R, L) هي الإستراتيجية التي تحقق فيها نقطة الاستقرار لأن القيمة (2) تشكل العدد ذا القيمة الدنيا في سطره وكذلك أكبر قيمة عددية في العمود الموافق.

مثال:

$A \backslash B$	I	II	III	القيمة الدنيا
I	1	2	1	1
II	0	-4	-1	-4
III	2	1	2	1
القيمة العظمى	2	2	2	

جدول (9.3)

في هذه المباراة لا توجد نقطة استقرار.

مثال:

$A \backslash B$	I	II	III	القيمة الدنيا
I	1	2	1	1
II	0	-4	-1	0
III	1	3	-2	-2
القيمة العظمى	1	3	1	

جدول (9.4)

في هذا الجدول توجد نقطتا استقرار (I,I)، (I,III).

تعريف:

تتألف المباراة المباشرة من لاعبين مع نتيجة صفرية ولها نقطة استقرار.

9.5- الإستراتيجية المختلطة

إذا كانت مصفوفة المدفوعات لا تحوي نقطة استقرار، أي أن المباراة ليس لها حل مثالي مباشر، فإنه لا يمكن عندئذٍ لأحد من اللاعبين اختيار إستراتيجية مثالية له، وعليه فإن لدى كل لاعب عدد من الإستراتيجيات ندعوها بالإستراتيجيات المختلطة.
مثال:

لدينا لاعبان A ، B يلعبان وفق مصفوفة المدفوعات التالية:

$B \backslash A$	I	II
I	-3	7
II	6	1

جدول (9.5)

فإذا لعب A حسب الإستراتيجية I وباحتمال قدره x ، فإنه يلعب الإستراتيجية II باحتمال $1-x$ ، أما إذا لعب A دوماً حسب الإستراتيجية II فإنه يضمن الربح دوماً.
وإذا لعب B طوال الوقت حسب الإستراتيجية I فيكون لدينا:

$$x(-3) + (1-x)6 = 6 - 9x \quad (9.3)$$

أما إذا لعب B طوال الوقت حسب الإستراتيجية II فيكون لدينا:

$$x(7) + (1-x)1 = 1 + 6x$$

والاحتمال الذي يحقق الإستراتيجية المثالية يكون:

$$6 - 9x = 1 + 6x \Rightarrow x = \frac{1}{3}, \quad 1 - x = \frac{2}{3}$$

وبالنتيجة يمكن للاعب A أن يحقق ربحاً قدره:

$$g(A) = \frac{1}{3}(-3) + \frac{2}{3}(6) = 3$$

إن اختيار أي احتمال آخر بالنسبة للاعب B سوف يحقق للاعب A الربح نفسه.

يمكن أن نطبق الأسلوب نفسه على اللاعب B ، فإذا افترضنا أن احتمال اختيار الإستراتيجية I هو y عندئذ فإن احتمال اختيار الإستراتيجية II هو $1-y$ ، إذاً تكون الإستراتيجية المثالية لـ B ، حيث اللاعب A يلعب الإستراتيجية I:

$$g(B) = y(-3) + 7(1-y) = 7 - 10y$$

أما إذا لعب اللاعب A طوال الوقت وفق الإستراتيجية II فإنه:

$$g(B) = 6y + (1-y)1 = 1 + 5y$$

إذاً تكون الإستراتيجية المثالية:

$$1 + 5y = 7 - 10y \Rightarrow y = \frac{2}{5}, 1 - y = \frac{3}{5}$$

إذاً:

$$g(B) = \frac{2}{5}(-3) + \frac{3}{5}(7) = 3$$

نلاحظ أن $g(A) = g(B)$ إذاً تحوي المباراة نقطة استقرار، وتسعيرة المباراة مساوية 3.

9.5.1- النموذج الرياضي

ليكن لدينا اللاعب A وليكن لديه عدد من الخطط الإستراتيجية m ، أما اللاعب B فله عدد من الخطط الإستراتيجية n . عندئذ تكون مصفوفة المدفوعات من المرتبة $m \times n$ أي:

$A \backslash B$	1	2		n
1	a_{11}	a_{12}		a_{1n}
2	a_{21}	a_{22}		a_{2n}
.				
.				
m	a_{m1}	a_{m2}		a_{mn}

جدول (9.6)

إذاً يلعب اللاعب A الإستراتيجيات المتاحة بنسب احتمالية مختلفة بحيث يكون:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_m = 1$$

حيث x_i احتمال أن يلعب اللاعب A الإستراتيجية i أما اللاعب B فإنه يلعب

الإستراتيجيات المتاحة بنسب احتمالية مختلفة بحيث يكون:

$$y_1 + y_2 + \dots + y_n = 1$$

حيث y_j احتمال أن يلعب اللاعب B الإستراتيجية j عندئذٍ يمكن أن نحدد

تسعيرة المباراة ولتكن g ، وبالتالي يكون لدينا:

$A \backslash B$	y_1	y_2		y_n
x_1	a_{11}	a_{12}		a_{1n}
x_2	a_{21}	a_{22}		a_{2n}
.				
.				
x_m	a_{m1}	a_{m2}		a_{mn}

جدول (9.7)

حيث، $x_i \geq 0$ حيث $i = 1, 2, \dots, m$ ، $y_j \geq 0$ حيث $j = 1, 2, \dots, n$ وبالتالي تكون بالنسبة للاعب A :

$$\left. \begin{array}{l} n \text{ متباينة بـ} \\ m+1 \text{ متغيراً} \end{array} \right\} \begin{cases} x_1 a_{11} + \dots + x_m a_{m1} \geq g \\ \cdot \\ \cdot \\ x_1 a_{1n} + \dots + x_m a_{mn} \geq g \end{cases} \quad (9.4)$$

حيث:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_m = 1 \quad (9.5)$$

أما بالنسبة للاعب B فيكون:

$$\left. \begin{array}{l} m \text{ متباينة بـ} \\ n+1 \text{ متغيراً} \end{array} \right\} \begin{cases} a_{11} y_1 + \dots + a_{m1} y_n \leq g \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m1} y_1 + \dots + a_{mn} y_n \leq g \end{cases} \quad (9.6)$$

حيث:

$$y_1 + \dots + y_n = 1 \quad (9.7)$$

إذاً لدينا $m+n+1$ مجهولاً ولكن عدد المتباينات حيث

$$y_j \geq 0, \quad x_i \geq 0$$

إذاً من أجل الوصول إلى الإستراتيجية المثالية بالنسبة للاعب A ، فإننا نعالج

العلاقات (9.4), (9.5)

وبما أن تسعيرة المباراة غير معلومة (g) حيث $g > 0$.

نفرض أن:

$$t_i \geq 0, \quad t_i = \frac{x_i}{g}, \quad i=1,2,\dots,m \quad (9.8)$$

عندئذ تصبح العلاقات (9.4) :

$$\begin{cases} a_{11}t_1 + \dots + a_{m1}t_m \geq 1 \\ \vdots \\ a_{1n}t_1 + \dots + a_{mn}t_m \geq 1 \end{cases} \quad (9.9)$$

أما العلاقات (9.5) فتصبح:

$$t_1 + t_2 + \dots + t_m = \frac{1}{g} \quad (9.10)$$

نحن نعلم أن هدف اللاعب A تحقيق أعظم قيمة لتسعيه المباراة أي $g \rightarrow \text{Max}$ أي إيجاد أدنى قيمة لـ $\frac{1}{g} \rightarrow \text{Min}$.

وبالتالي يكون البرنامج الخطي بالنسبة للاعب A هو:

$$P = t_1 + t_2 + \dots + t_m \rightarrow \text{Min} \quad (9.11) \quad (\text{دالة الهدف})$$

$$\begin{cases} a_{11}t_1 + \dots + a_{m1}t_m \geq 1 \\ \vdots \\ a_{1n}t_1 + \dots + a_{mn}t_m \geq 1 \end{cases} \quad (9.12) \quad (\text{قيود المسألة})$$

$t_i \geq 0, \quad i=1,2,\dots,m$ (شروط عدم السلبية)

وبالطريقة نفسها نستطيع إيجاد البرنامج الخطي بالنسبة للاعب B أي ضمن العلاقات (9.6), (9.7) حيث نفرض:

$$s_i \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad S_j = \frac{y_j}{g}$$

ونحن نعلم أن اللاعب B يبحث عن الإستراتيجية التي تجعل تسعيرة المباراة أصغر ما يمكن أي $g \rightarrow \text{Min}$ أي $\frac{1}{g} \rightarrow \text{Max}$. وبالتالي يكون البرنامج الخطي بالنسبة للاعب B هو:

$$Z = s_1 + s_2 + \dots + s_n \rightarrow \text{Max} \quad (9.13)$$

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}s_1 + a_{12}s_2 + \dots + a_{1n}s_n \leq 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{21}s_1 + a_{22}s_2 + \dots + a_{2n}s_n \leq 1 \end{array} \right\} \quad (9.14)$$

$$j = 1, 2, \dots, n \text{ حيث } s_i \geq 0$$

ملاحظة:

إن البرنامج الخطي الموافق للاعب B هو البرنامج الثنائي للبرنامج الخطي بالنسبة للاعب A وبالعكس.

وبعد أن استطعنا إيجاد برامج خطية لنظرية المباراة نستطيع أن نطبق مثلاً خوارزمية السيمبلكس في إيجاد الإستراتيجية المثلى بالنسبة لأحد اللاعبين.

مثال:

لتكن لدينا المباراة التي مصفوفة مدفوعاتها التالية:

$A \backslash B$	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	4	3	4	2
x_2	3	4	6	5
x_3	2	5	1	3

جدول (9.7)

المطلوب تحديد الإستراتيجية المثالية للاعب A ؟

الحل:

نشكل البرنامج الخطي الموافق للاعب A :

$$P = t_1 + t_2 + t_3 \rightarrow \text{Min}$$

$$4t_1 + 3t_2 + 2t_3 \geq 1$$

$$3t_1 + 4t_2 + 5t_3 \geq 1$$

$$4t_1 + 6t_2 + t_3 \geq 1$$

$$2t_1 + 5t_2 + 3t_3 \geq 1$$

$$i = 1, 2, 3 \quad t_i \geq 0$$

ويكون البرنامج الخطي بالنسبة للاعب B هو :

$$Z = s_1 + s_2 + s_3 + s_4 \rightarrow \text{Max}$$

$$4s_1 + 3s_2 + 4s_3 + 2s_4 \leq 1$$

$$3s_1 + 4s_2 + 6s_3 + 5s_4 \leq 1$$

$$2s_1 + 5s_2 + s_3 + 3s_4 \leq 1$$

$$j = 1, 2, 3, 4 \quad s_j \geq 0$$

نطبق خوارزمية السيمبلكس فيكون:

إن احتمال الإستراتيجية المثالية بالنسبة للاعب A فيكون:

$$T = \left(\frac{3}{4}, 0, 0, \frac{1}{4}\right)$$

إذاً يكون احتمال الإستراتيجية المثالية للاعب B :

$$S = \left(\frac{3}{14}, 0, 0, \frac{1}{14}\right)$$

أما تسعيرة المباراة:

$$Z = \frac{1}{g} = \frac{2}{7}$$

إذاً: $g = 3.5$

ونحن نعلم أن $t_i = x_i / g$ ، $s_j = y_j / g$

ومنه تكون الإستراتيجية المثالية للاعب A :

$$X = (\frac{1}{7}, \frac{1}{7}, \frac{1}{2}, 0)$$

أما الإستراتيجية المثالية للاعب B :

$$Y = (\frac{3}{4}, 0, 0, \frac{1}{4})$$

وتكون تسعيرة المباراة هي $g = 3.5$.

9.6- الإستراتيجيات ذات المجموع غير صفري

المباراة الإستراتيجية ذات المجموع غير صفري، هي مباراة يكون فيها دخل كل لاعب منفصلاً عن دخل باقي اللاعبين في المباراة
تعرف مصفوفة المدفوعات في هذه المباراة أيضاً على شكل جدول كل عنصر من عناصره يمثل بثنائية، عنصرها الأول يمثل دخل اللاعب الأول و الثاني يمثل دخل اللاعب الثاني

الإستراتيجية الصرفة في المباراة ذات المجموع غير صفري، هي أن يختار اللاعب الأول الإستراتيجية الثنويه للقيمة (العظمى - الدنيا)، أي:

$$\max_i \min_j a_{ij}$$

و أن يختار اللاعب الثاني الإستراتيجية الثنويه للقيمة (العظمى - الدنيا)، أي:

$$\max_j \min_i b_{ij}$$

حيث a_{ij} عنصر الثنائية الأول و b_{ij} عنصر الثنائية الثاني من مصفوفة الدخل.

مثال:

لدينا لاعبان A ، B يلعبان وفق مصفوفة المدفوعات التالية:

$A \backslash B$	I	II
I	$(3,4)$	$(-2,1)$
II	$(-1,5)$	$(-3,-4)$

جدول (9.8)

الاستراتيجية الصرفة للاعب الأول

$$\max_i \min_j a_{ij} = \max_i \{-2, -3\} = -2$$

وبالتالي أن يختار اللاعب الأول الاستراتيجية الأولى و يضمن أن يخسر 2 على

الأكثر

الاستراتيجية الصرفة للاعب الأول

$$\max_j \min_i b_{ij} = \max_j \{4, -4\} = 4$$

وبالتالي أن يختار اللاعب الثانية الاستراتيجية الأولى و يضمن أن يربح 4 على

الأقل

تمارين

(1) أوجد حلاً للمباريات الإستراتيجية التالية:

أ-

$A \backslash B$	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	2	1	0	-2
x_2	1	0	3	2

ب-

$A \backslash B$	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	4	-4	-5	6
x_2	-3	-4	-9	2
x_3	6	7	-8	-9
x_4	7	3	-9	5

ج-

$A \backslash B$	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	5	-10	9	0
x_2	6	7	8	1
x_3	8	7	15	2
x_4	3	4	-1	4

(2) اكتب مصفوفة المدفوعات من أجل البرنامج الخطي التالي:

$$Z = s_1 + s_2 + s_3 \rightarrow \text{Max}$$

$$s_1 + 4s_2 + 3s_3 \leq 1$$

$$4s_1 - 4s_2 + 2s_3 \leq 1$$

$$3s_1 - s_2 + 5s_3 \leq 1$$

$$s_i \geq 0$$



الفصل العاشر

تحليل الشبكات

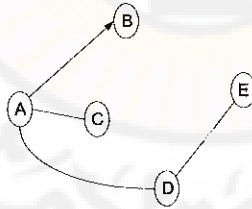
NETWORKS ANALYSIS

10.1 - مقدمة وتعريف

إن تحليل الشبكات هو نظام للتخطيط والإدارة، يتناول تخطيط العمليات المعقدة وإدارة تنفيذها بأقصر زمن ممكن وأقل كلفة. ويعتمد هذا النظام على تجزئة العمليات المعقدة إلى عمليات بسيطة ثم وضعها على شكل شبكة تعكس ترتيب جميع تلك العمليات وتوضح العلاقات بينهما. ونذكر مثلاً على التخطيط الشبكي: خطوط الاتصال - شبكات السكك الحديدية - شبكات الطرق - أنابيب النقل (بنترول، غاز) - خطوط الشحن البري - الشبكات الجوية ومسائل النقل.... الخ.

تعريف الشبكة (Net):

هي مجموعة من النقاط (points) أو العقد (nodes) ومجموعة من الأقواس (arcs) التي تصل بين أزواج العقد. ويمكن القول إن الشبكة هي منظومة خطوط أو قنوات وأصلة بين نقاط مختلفة. ويمكننا تمثيل شبكة مكونة من خمس عقد من A حتى E وأربعة أقواس هي: AB, AC, AD, DE على الشكل التالي:



شكل (10.1)

ويكون الضلع موجهاً إذا كان له اتجاه مرتبط به. وتحدد الاتجاهات بوضع أسهم على الأضلاع، وتسمى أقواساً يحدد السهم على القوس AB في الشكل (10.1) إن هذا القوس موجه من A إلى B ، وإن أي الحركة على هذا القوس يجب أن تبدأ من

A وتنتهي عند B ، ولا يسمح بحركة معاكسة من B إلى A ، والضلع يسمح بالحركة باتجاهين متعاكسين. ويكون القوسان متجاورين إذا كان لهما عقدة مشتركة، وفي الشكل (10.1) الأقواس AB و AC هي أقواس متجاورة ولكن الأقواس AB و CD ليست متجاورة.

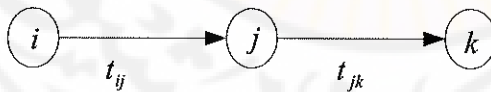
تعريف النشاط (Activity):

هو إجراء لتنفيذ عمل معين، ويكون النشاط مصحوباً بزمن ومقروناً بكلفة. أي أن لكل نشاط مدة زمنية محدودة ويتطلب موارد إنسانية ومادية لتنفيذه. ويرسم كل نشاط على الشبكة بواسطة سهم تعلوه المدة الزمنية اللازمة لتنفيذه أو كلفة هذا النشاط. وإن كل نشاط يكون دائماً محدد بحادثين، حادث بداية النشاط وحادث نهاية النشاط.

تعريف الحادث (Event):

هو واقعة تشير إلى بداية نشاط ما أو نهايته، ولا يرافق الحادث أي زمن أو تكلفة. وترسم الحوادث على الشبكة على كل دوائر (أو عقد) تتضمن أحرفاً أو أرقاماً. ويطلق على الحادث الذي يحدد بداية المشروع حادث المصدر، ويطلق على الحادث الذي يحدد نهاية المشروع . حادث النهاية أو يسمى الهدف.

وتسمى الأنشطة التي تنتهي بحادث (j) الأنشطة اللاحقة له. أما الأنشطة التي تبدأ من الحادث (j) فتسمى الأنشطة اللاحقة له. وسنرمز للنشاط بدليلي حادثتي بدايته ونهايته كما يلي: (i, j) و (j, k) ويمكننا تمثيل ذلك على الشكل التالي:



شكل (10.2)

فالنشاط (i, j) في الشكل (9.2) يعد من الأنشطة السابقة للحادث (j) وهو يبدأ من الحادث (i) وينتهي في الحادث (j) . أما النشاط (j, k) فيعد نشاطاً لاحقاً بالحادث (j) وينتهي بالحادث (k) . أما الرموز t_{ij} و t_{jk} فهما مدتا تنفيذ النشاطين (i, j) و (j, k) على الترتيب.

تعريف المشروع (Project):

هو مجموعة من الأنشطة المترابطة. التي يجب أن تنفذ وفق تسلسل معين يقصد الوصول إلى هدف نهائي.

تعريف المسار (Path):

ندعو مساراً كل ما يصل بين حادث البداية وحادث النهاية، أي تابع الأقواس (مع إهمال اتجاهاتها) الذي يصل بين حادث البداية وحادث النهاية. فمثلاً في الشكل (10.1) يتشكل مسار واصل بين الحادثين E و B بتسلسل الأقواس التالية ED, DA, AB ولكن تسلسل الأقواس المتصلة CA, AD, DC, CB ليست مساراً حيث تقع العقدة (c) مرتين فيه.

تعريف الحلقة (Cycle):

هي المسار الذي يبدأ بعقدة ما وينتهي بالعقدة ذاتها.

تعريف النشاط الوهمي (Dummy activity)

هو نشاط افتراضي لا يرافقه زمن ولا تكلفه، نستخدمه أحياناً للتخلص من بعض الحالات الشاذة، ونرسمه على الشبكة بشكل متقطع.

تعريف الحادث الوهمي (Dummy event)

هو حادث افتراضي نستخدمه للتخلص من بعض الحالات الخاصة. بهذا الشكل. يمكن تعريف الشبكة بأنها تمثيل متشابك ومتتال لمجموعة الأنشطة المتصلة فيما بينها بواسطة حوادث معينة. وتستخدم الأقواس الموجهة في الشبكات لتمثيل الأنشطة في المشروعات وتستخدم العقد لتمثيل حوادث هذه الأنشطة، أي أن كل نشاط يمثل بقوس موجه، وكل حادث يمثل بعقدة تأخذ شكل دائرة صغيره. وعند تشكيل الشبكات يجب أن نراعي فيها القواعد الأساسية التالية:

1. أن يكون للشبكة بداية وحيدة ولا يسبقه أي نشاط

2. أن لا تتضمن الشبكة أي حادث ليس له أنشطة سابقة (غير حادث البداية)، وإذا صادف واعترضتنا حوادث بدون أنشطة سابقة لها فإننا نقوم بإدخال أنشطة وهمية تصل حادث البداية أو أي حادث آخر مناسب بها.
3. أن يكون للشبكة حادث نهاية وحيد، يسمى الهدف ولا يلحق به أي نشاط كان.
4. أن لا تتضمن الشبكة أي حوادث ليس لها أنشطة لاحقة بها (غير حادث النهاية) وإذا اعترضتنا حوادث بدون أنشطة لاحقة فإننا ندخل على الشبكة أنشطة وهمية لوصل تلك الحوادث بالحادث الأخير أو بأي حادث آخر مناسب.
5. أن نضمن تأسيس علاقات الأسبقية بين الأنشطة بشكل صحيح في الشبكة أي أن يكون تتالي الحوادث وتشابك الأنشطة منسجماً مع قاعدة الأسبقية، التي تنص على مايلي:

لا يمكن أن يتحقق حادث مالم تنجز جميع الأنشطة السابقة له، كما لا يمكن البدء في تنفيذ أي نشاط مالم يكن حادث بدايته قد تحقق تماماً.

10.2 - خطوات تشكيل الشبكة Networks Configuration Steps

حتى نقوم بتشكيل شبكة يجب إعداد قائمة بجميع الحوادث والأنشطة في جدول خاص بحيث يتم توضيح الأنشطة السابقة واللاحقة لكل حادث. وسنوضح كيف يتم تشكيل الشبكة من خلال المثال التالي:

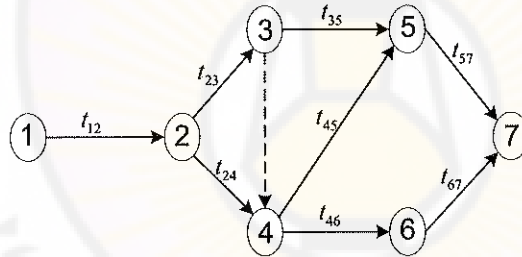
مثال:

لنرسم شبكة لمشروع بناء مركب سباق، يتألف من ثمانية أنشطة وسبعة حوادث الأنشطة السابقة والأنشطة اللاحقة ومدة التنفيذ لكل نشاط معروضة في الجدول التالي:

موضوع النشاط	الأنشطة السابقة	الأنشطة اللاحقة	مدة التنفيذ
بناء جسم المركب	—	(2,3) و (2,4)	t_{12}
بناء ظهر المركب	(1,2)	(3,5)	t_{23}
تركيب المحرك	(1,2)	(4,5) و (4,6)	t_{24}
بناء البنية الفوقية	(2,3)	(5,7)	t_{35}
شبكة المياه والكهرباء	(2,3) و (2,4)	(5,7)	t_{45}
تركيب الرادار	(2,3) و (2,4)	(6,7)	t_{46}
الإكمال الداخلي	(3,5) و (4,5)	—	t_{57}
الدهان	(4,6)	—	t_{67}

جدول (10.1)

نقوم برسم الشبكة انطلاقاً من حادث البداية (1) حتى حادث النهاية (7) وابتداءً من اليسار إلى اليمين وبحيث نراعي جميع العلاقات بين كل نشاط والأنشطة السابقة واللاحقة الواردة في الجدول (10.1)، فنحصل على الشكل (10.3) التالي:



شكل (10.3)

يمثل النشاط (3,4) المرسوم بخط منقط في الشكل (10.3) نشاطاً وهمياً افتراضياً غير موجود في الحقيقة ولكن وجود هذا القوس (النشاط) ضروري لتلافي الغموض في تسلسل الأعمال، ويكون زمن إنجاز النشاط الوهمي معدوماً دوماً. أي إن الحادث (4) يمثل إنجاز عمل تركيب المحرك والعمل الافتراضي، ولما كان العمل الافتراضي ينجز فور إنجاز عمل بناء ظهر المركب، فإن الحادث (4) يدل أصلاً على إنجاز العاملين تركيب المحرك وبناء ظهر المركب.

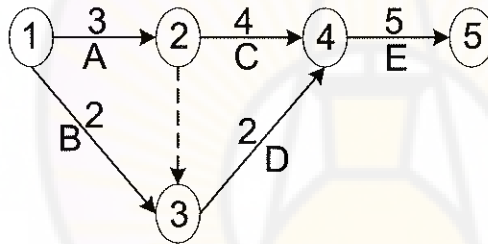
مثال:

ارسم شبكة لمشروع مؤلف من خمسة أنشطة. ولهذه الأنشطة الترتيب الموضح في الجدول (10.2) التالي :

النشاط	النشاط السابق	النشاط اللاحق	المدة الزمنية
A	-	C	3
B	-	D	2
C	A	E	4
D	A, B	E	2
E	C, D	-	5

جدول (10.2)

نرسم الشبكة على الشكل (10.4) التالي:



شكل (10.4)

يمثل القوس (2,3) نشاطاً وهمياً تساوي مدة إنجازه الصفر. يمثل الحادث (3) إنجاز العمل B والعمل الوهمي، ولما كان العمل الوهمي ينجز فور إنجاز A فإن الحادث (3) يدل أصلاً على إنجاز العاملين A و B.

10.3 - تحديد المدة الزمنية للنشاط

Determination Of The Activity Period

إن المدة الزمنية لكل نشاط إما أن تكون محدودة تماماً وعندها نعد أن مدة النشاط t_{ij} هي كمية غير عشوائية، وتسمى الشبكات في هذه الحالة الشبكات ذات المدة الزمنية المحدودة، وتنطبق هذه الحالة على الأنشطة المؤتمتة أو التي تتميز

بقصر مدتها. أو تكون المدة الزمنية t_{ij} للنشاط (i, j) عشوائية، وتسمى الشبكات في هذه الحالة الشبكات ذات المدة الزمنية العشوائية، وتطبق هذه الحالة على معظم المشاريع الاقتصادية. وبفرض أن أزمدة العمل في الشبكات معروفة، لكن يمكن أن تتغير هذه الأزمدة باختلاف مستوى الموارد. إلا أنه في جميع المشاريع تتجز فعاليات كثيرة مرة واحدة فقط، لذا فلن يكون هناك تجربة سابقة مع فعاليات مماثلة. وتستخدم تقنية شبكات.

يقرر ثلاثة تقديرات مختلفة لزمن إنجاز النشاط، وهذه التقديرات هي:

1. زمن الأكثر احتمالاً (most likely time)، ونرمز له بالرمز M.L.T

2. زمن التفاؤل (Optimistic time)، ونرمز له بالرمز O.T

3. زمن التشائم (pessimistic time)، ونرمز له بـ P.T

إن الزمن الأكثر احتمالاً هو الزمن اللازم لإنجاز النشاط في الشروط النظامية، بينما الزمن عند التشائم والتفاؤل يوفر مجالاً تتغير ضمنه أزمدة العمل. فالتقدير المتفائل هو تخمين جيد للزمن الأصغري الضروري لإنجاز النشاط، عندما يسير كل شيء وفق المخطط. أما التقدير المتشائم فهو تخمين للزمن الأعظمي اللازم لإنجاز النشاط في ظل ظروف معيقة، كحدوث عطل ميكانيكي أو أزمات طفيفة في العمل أو حدوث شح في المواد أو تأخير في استلامها.

وللحصول على أفضل تقدير للمدة الزمنية t_{ij} لإنجاز النشاط (i, j) يجب أن نأخذ التوقع الرياضي لـ t_{ij} . ولكن حساب هذا التوقع يحتاج إلى معرفة قانون التوزيع الاحتمالي للمدة الزمنية t_{ij} ، وإن أكثر قوانين التوزيع الاحتمالية المستخدمة في الشبكات هو توزيع بيتا Beta Distribution. وطبقاً لهذا التوزيع، فإن التوقع الرياضي لزمن إنجاز النشاط هو:

$$e = \frac{O.T + 4M.L.T + P.T}{6} \quad (10.1)$$

وبما أن الزمن الفعلي لإنجاز النشاط يمكن أن يختلف عن التوقع الرياضي له، فإننا نحتاج إلى تعيين تشتت هذا الزمن (انحرافه المعياري)، الذي نعبر عنه بالعلاقة التالية:

$$\sigma = \frac{P.T - O.T}{6} \quad (10.2)$$

ويتم تحديد المقادير P.T , O.T , M.L.T لنشاط ما إما عن طريق المعلومات المتراكمة لدى مركز البحوث العلمية وإما بواسطة استقصاء لدى الخبراء العاملين عن تقديراتهم لكل من هذه الكميات.

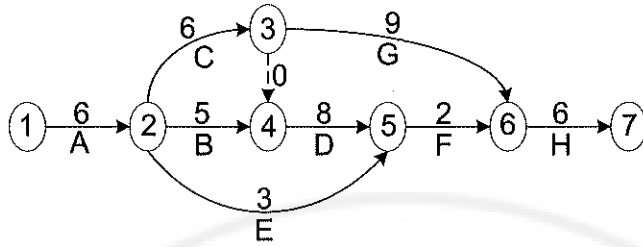
مثال:

لنأخذ مشروعاً مؤلفاً من ثمانية أنشطة (A, B, C, D, E, F, G, H)، الأنشطة السابقة وتقديرات الزمن وكذلك القيمة المتوقعة والانحراف المعياري لزمن إنجاز النشاط معطاة في الجدول (10.3) التالي:

النشاط	الأنشطة السابقة	تقديرات الزمن P.T-M.L.T-O.T	القيمة المتوقعة E	الانحراف المعياري σ
A	-	8 6 4	6	2/3
B	A	8 5 2	5	1
C	A	13 5 3	6	5/3
D	C, B	11 8 5	8	1
E	A	4 3 2	3	1/3
F	E, D	3 2 1	2	1/3
G	C	12 9 6	9	1
H	G, F	8 6 4	6	2/3

جدول (10.3)

يظهر الشكل (10.5) شبكة المشروع حيث تدل الأعداد المرافقة للأنشطة على القيمة المتوقعة لأزمنة هذا النشاط:



شكل (10.5)

يمثل هذا النشاط (3,4) المرسوم بخط منقط في الشكل (10.5) نشاطاً وهمياً افتراضياً، ويكون زمن إنجازه معدوماً. ويمثل الحادث (4) إنجاز العمل B والعمل الافتراضي، ولما كان العمل الافتراضي ينجز فور إنجاز العمل C، فإن الحادث (4) يدل أصلاً على العاملين B وC.

10.4- المسار الحرج Critical path

يعد المسار الحرج هدفاً أساسياً في التحليل الزمني للشبكات. فإذا قمنا بدراسة أي شبكة وجدنا أنها تتألف من عدد من المسارات التي تصل حادث بدايتها بحادث نهايتها. وإن كلاً من هذه المسارات يتألف من عدد من الأنشطة. وإن المدة الزمنية لكل مسار تساوي مجموع المدد الزمنية للأنشطة الواقعة عليه.

يقال عن نشاط إنه حرج إذا كان التأخير في البدء به يؤدي إلى تأخير تاريخ إنجاز المشروع بكامله. ويقال عن نشاط إنه غير حرج إذا كانت طبيعة المشروع تسمح بالبدء به في وقت مبكر أو إنجازه في وقت متأخر دون أن يؤثر ذلك على التاريخ المحدد لإنجاز المشروع بكامله. وعليه فإن النشاط غير الحرج يرافقه وقت فائض يعطي للإدارة مرونة في استخدام الموارد المتاحة.

ويتألف المسار الحرج في شبكة ما من سلسلة من الأنشطة الحرجة التي تصل بين حادث بداية الشبكة وحادث نهايتها، التي تشكل أطول مسار فيها. ولحساب المسار الحرج وإجراء تحليل زمني لجميع حوادث الشبكة سنقوم بتعريف المفاهيم التالية:

أبكر زمن لوقوع الحادث (j): The Earliest Time

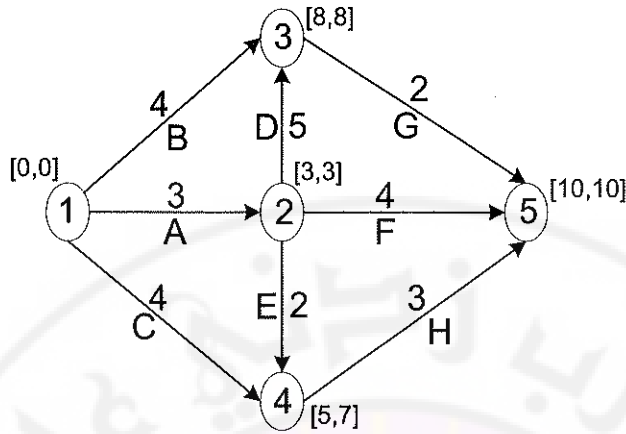
هو الزمن المبكر لوقوع الحادث (j) وهو يمثل اللحظة التي لا يمكن للحادث (j) أن يتحقق قبلها، ويعرف على أنه أقرب زمن يمكن خلاله ظهور الحادث (j). ويتم حساب هذا الزمن انطلاقاً من حادث بداية الشبكة ونتحرك نحو الأمام باتجاه حادث نهاية الشبكة. وقد اتفق من أجل حساب المسارات الحرجة على أن أبكر زمن لوقوع حادث بداية الشبكة هو $T_1 = 0$ ، وإذا رمزنا بـ t_{ij} إلى مدة النشاط (i, j) فإننا نحصل على أبكر زمن لتحقيق الحادث (j) والذي نرمز له بـ ET_j وذلك بتطبيق العلاقة التالية:

$$ET_j = \max_i (ET_i + t_{ij}) \quad (10.3)$$

وهكذا لكي نحسب أبكر زمن ET_j للحادث (j) فإنه يجب أن نحسب أولاً أبكر زمن للحوادث الخلفية ET_i لجميع الأنشطة (i, j) التي تنتهي بالحادث (j). ويكون أبكر زمن ET_j لتحقيق حادث النهاية هو أبكر زمن لإنجاز المشروع بكامله. ويمكن القول بأن ET_j هو اللحظة التي لا يجوز البدء بتنفيذ النشاط الذي يبدأ بالحادث (j) أي يعتبر زمن البداية المبكرة للبدء بتنفيذ النشاط الذي يبدأ بالحادث (j).

مثال:

احسب أبكر زمن ET_j لوقوع الحادث (j) في حالة شبكة المشروع الموضحة في الشكل (10.6) التالي:



شكل (10.6)

الحل:

لتضع أولاً $ET_1 = 0$.

يوجد نشاط وحيد (1,2) ينتهي بالحادث (2) بزمان يساوي $t_{12} = 3$ فيكون لدينا:

$$ET_2 = ET_1 + t_{12} = 0 + 3 = 3$$

وبالتالي 3 هو أبكر زمن لتحقيق الحادث (2).

وبما أنه يوجد نشاطان هما (1,3) و (2,3) ينتهيان بالحادث (3)، فإنه لا يمكن للحادث (3) أن يتحقق قبل إنجاز النشاطين السابقين له (1,3) و (2,3) معاً فيكون لدينا:

$$\begin{aligned} ET_3 &= \max_{i=1,2} (ET_i + t_{i3}) = \max(ET_1 + t_{13}, ET_2 + t_{23}) \\ &= \max(0 + 4, 3 + 5) = 8 \end{aligned}$$

ومن ثم 8 هو أبكر زمن لتحقيق الحادث (3) أي أن الحادث (3) لا يمكن أن يتحقق قبل زمن هو 8 وبالتالي لا يجوز البدء بتنفيذ النشاط الذي يبدأ بالحادث (3) وهو النشاط (3,5) قبل زمن قدره 8. وهكذا بمتابعة الحسابات نجد:

$$ET_4 = \max_{i=1,2} (ET_i + t_{i4}) = \max (ET_1 + t_{14}, ET_2 + t_{24})$$

$$= \max (0 + 4, 3 + 2) = 5$$

$$ET_5 = \max_{i=2,3,4} (ET_i + t_{i5}) = \max (ET_2 + t_{25}, ET_3 + t_{35}, ET_4 + t_{45})$$

$$= \max (3 + 4, 8 + 2, 5 + 3) = 10$$

وبذلك نجد أن حادث النهاية (5) لا يمكن أن يتحقق قبل انقضاء أطول هذه الأزمنة وهو 10 . وهو أيضاً أبكر زمن لإنجاز المشروع بكامله.

آخر زمن لتحقيق الحادث (i): The Latest Time

هو آخر زمن مسموح به لوقوع الحادث (i)، وهو يمثل اللحظة التي لا يجوز أن يتأخر عنها تحقق الحادث (i)، ويعرف بأنه الزمن الأبعد الذي يمكن من خلاله أن يظهر الحادث (i). ويتم حساب هذا الزمن بأن نسير باتجاه معاكس لما فعلناه في حساب أبكر زمن LT_i أي يبدأ من حادث نهاية الشبكة وينتهي عند حادث بدايتها. وحتى نتمكن من إجراء الحسابات يجب أن تكون اللحظة التي لا نريد للمشروع أن يتأخر عنها لحظة معلومة، لذلك سنعتبر أن أبكر زمن لتحقيق حادث النهاية LT_n هو نفسه أقصى زمن لإنجاز المشروع ككل. فإذا رمزنا الأخير زمن لتحقيق حادث النهاية بالرمز LT_n وقمنا بوضع المساواة التالية:

$$ET'_i = LT_n \quad (10.4)$$

فإن LT_n تكون هي اللحظة التي لا نسمح لتنفيذ المشروع أن يتأخر عنها. ولحساب أقصى زمن لتحقيق الحوادث الأخرى (i) نطبق العلاقة التالية:

$$LT'_i = \min_j (LT'_j - t_{ij}) \quad (10.5)$$

ويتم حساب هذه الأزمنة انطلاقاً من حادث نهاية الشبكة حتى بدايتها، حيث سنجد أن أقصى زمن لحادث بداية الشبكة يساوي أيضاً أبكر زمن له أي سيكون لدينا:

$$ET'_1 = LT_1 = 0$$

أما عملية الحساب فيمكن أن تتم مباشرة بأن نقوم بطرح المدة الزمنية t_{ij} للنشاط (i, j) من أقصى زمن للحادث (j) ولجميع الأنشطة اللاحقة بالحادث (i) ثم نأخذ أصغرها فنحصل على القيم LT'_i .

لنحسب الآن LT'_i لحوادث الشبكة الموضحة في الشكل (10.6) فنجد:

$$LT'_5 = LT_5 = 10$$

$$LT'_4 = LT'_5 - t_{45} = 10 - 3 = 7$$

$$LT'_3 = LT'_5 - t_{35} = 10 - 2 = 8$$

$$LT'_2 = \min_{j=3,4,5} (LT'_j - t_{1j}) = \min (LT'_2 - t_{12}, LT'_3 - t_{13}, LT'_4 - t_{14})$$

$$\text{وبعد} \quad = \min (8 - 3, 7 - 2, 10 - 4) = 3$$

$$LT'_1 = \min_{j=2,3,4} (LT'_j - t_{1j}) = \min (LT'_2 - t_{12}, LT'_3 - t_{13}, LT'_4 - t_{14})$$

$$= \min (3 - 3, 8 - 4, 7 - 4) = 0$$

حساب أبكر زمن وآخر زمن لتحقيق حادث ما، نثبت هذه المعلومات على الشبكة وذلك بوضعها ضمن قوسين $[x, y]$ بجانب كل حادث، حيث المركبة الأولى x تمثل أبكر زمن والمركبة الثانية y تمثل آخر زمن.

احتياطي الزمن عند الحادث (j):

الاحتياطي الزمني لحادث (j) هو الفرق بين آخر زمن وأبكر زمن لوقوع الحادث (j) أي:

$$S_j = LT'_j - ET_j \quad (10.6)$$

وهو يمثل المجال $[ET_j, LT'_j]$ الذي يمكن أن يتحقق ضمنه الحادث (j) دون أن يؤثر ذلك على مدة تنفيذ المشروع LT_n . أي أن احتياطي الزمن للحادث (j) يشير إلى مقدار التأخير المسموح به للوصول إلى ذلك الحادث دون حدوث تأخير في إنجاز المشروع.

فمن أجل شبكة المشروع الموضحة بالشكل (10.6) يكون:

$$S_1 = 0, S_2 = 0, S_3 = 0, S_4 = 2, S_5 = 0$$

تساعد المفاهيم والحسابات السابقة على تحديد النشاطات الحرجة المشكلة للمسار الحرج على النحو التالي:

نقول إن النشاط (i , j) هو نشاط حرج (Critical path) إذا استوفى القيود التالية:

$$1. ET_i = LT'_i$$

$$2. ET_j = LT'_j$$

$$3. LT_j - ET_i = LT'_j - ET'_i = t_{ij}$$

يمكن استبدال الشرطين (10.3) و (10.4) بالشرط التالي: $S_i = S_j = 0$

كما تسمى الحوادث التي لها احتياطي زمن معدوم بالحوادث الحرجة (Critical Events). وهكذا من أجل الشبكة الموضحة بالشكل (5) يكون المسار الحرج للمشروع هو الذي يمر بالأحداث 1,2,3,5 أما النشاطات الحرجة فهي: (1,2) و (2,3) و (3,5) أي النشاطات: A , D , G. ونجد في الجدول (10.4) ملخصاً عن نتائج تحليل شبكة المشروع الموضحة بالشكل (10.6):

الحادث	الزمن الالبر	الزمن الأقصى	احتياطي الزمن	ملاحظات
1	0	0	0	حرج
2	3	3	0	حرج
3	8	8	0	حرج
4	5	7	2	حرج
5	10	10	0	غير حرج
				حرج

جدول (10.4)

ومن أجل وضع سلم زمني وإعداد جدول زمنية للمشروع بدلالة الفعاليات المختلفة، ينبغي معرفة زمن بداية كل نشاط وزمن نهايته. ويمكن من خلال أزمنة الحوادث الحصول على المعلومات الخاصة بكل فعالية من فعاليات المشروع.

زمن البداية المتأخرة للنشاط (i, j):

Latest Start For an Activity

وهو آخر زمن مسموح به لبدء النشاط (i, j) أي يمثل اللحظة التي لا يجوز أن يتأخر بدء النشاط (i, j) عنها، ويمكن حسابه من العلاقة التالية:

$$U_{ij} = T'_j - t_{ij} \quad (10.7)$$

زمن النهاية المبكرة للنشاط (i, j):

Earliest Finish For an Activity

يمثل اللحظة التي لا يمكن للنشاط (i, j) أن يتحقق قبلها. ويعطى زمن النهاية المبكرة للنشاط (i, j) بالعلاقة:

$$V_{ij} = T_i - t_{ij} \quad (10.8)$$

الزمن الفائض الكلي للنشاط (i, j):

إن الفرق بين أقصى زمن لتحقيق الحادث (i) وأبكر زمن لتحقيق الحادث (j) هو عبارة عن الحد الأقصى لزمن إنجاز النشاط (i, j)، أي أن المقدار $T'_j - T_i$ هو عبارة عن الحد الأقصى لزمن إنجاز النشاط (i, j). والمقدار $T_j - T_i$ يمثل الفرق بين زمن البداية المبكرة للنشاط (i, j) الذي يبدأ بالحادث (i) وزمن البداية المبكرة للنشاط التالي له.

يرمز للزمن الفائض الكلي بالرمز r_{ij} وهو الفرق بين الحد الأقصى للوقت المتاح لإنجاز النشاط (i, j) وبين مدته الفعلية أي:

$$r_{ij} = T'_j - T_i - t_{ij} = T'_j - V_{ij} = U_{ij} - T_i \quad (10.9)$$

ويمكن أن يعرف بأنه زمن التأخير المسموح به لبداية النشاط دون أن يؤثر ذلك في مدة تنفيذ المشروع.

الزمن الفائض الحر للنشاط (i, j)

نرمز له بالرمز r'_{ij} وهو الفرق بين زمن البداية المبكرة للنشاط (i, j) الذي يبدأ بالحدث (i) وزمن البداية المبكرة للنشاط التالي له وبين مدته الفعلية أي:

$$r'_{ij} = T_j - T_i - t_{ij} = T_j - V_{ij} \quad (10.10)$$

بمقارنة الشرط الثالث من تعريف النشاط الحرج في العلاقات (10.7) مع الشرطين (10.9) و (10.10) نجد أنه يمكن أن نكتب بدلاً من الشرط الثالث في العلاقات (10.7) الشرط التالي.

$$r_{ij} = r'_{ij} = 0$$

وبناء على ذلك يمكن أن نقول أن النشاط (i, j) يكون نشاطاً حرجاً إذا كان:

$$R_i = R_j = 0 \quad , \quad r_{ij} = r'_{ij} = 0$$

ويبين الجدول (10.5) جدولة المشروع للشبكة الموضحة بالشكل (10.6)

ملاحظات	الزمن الفائض الحر r'_{ij}	الزمن الفائض الكلي r_{ij}	الزمن المتأخر		الزمن المبكر		المدد	النشاط
			نهاية	بداية	نهاية	بداية		
حرج	0	0	3	0	3	0	3	A
غير حرج	4	4	8	4	4	0	4	B
غير حرج	3	3	7	3	4	0	4	C
غير حرج	0	0	8	3	8	3	5	D
حرج	2	2	7	5	5	3	2	E
غير حرج	3	3	10	6	7	3	4	F
غير حرج	0	0	10	8	10	8	2	G
غير حرج	2	2	10	7	8	5	3	H
حرج								
غير حرج								

جدول (10.5)

تساعد نتائج الحسابات على المخطط الشبكي على وضع سلم زمني يوضح زمن تنفيذ جميع أنشطة المشروع. يسمى هذا السلم الخطة الزمنية، ويجب عند وضع هذه الخطة أخذ الموارد المتاحة في الحسبان، لأن تنفيذ عدة نشاطات بعضها مع بعض

(على التوازي) قد يكون غير ممكن بسبب القيود على الموارد المتاحة (يد عاملة، مواد أولية، الآلات)، في مثل هذه الحالات تتجلى أهمية الزمن الفائض الكلي لبعض النشاطات لأن القائمين على التنفيذ يمكنهم تحريك زمن تنفيذ هذه النشاطات هذه الجهة أو تلك (تكبيراً أو تأخيراً) بحدود زمنها الفائض الكلي لتخفيض الحاجة للمورد خلال فترة زمنية أو زيادة الحاجة بهدف جعل استخدام الموارد أكثر استقراراً. أي يساعد الزمن الفائض الكلي على جعل الموارد اللازمة خلال زمن التنفيذ أكثر توازناً وهذا مهم للغاية حتى لو لم تكن هناك قيود على الموارد.

من الجدول (10.5) نلاحظ أن النشاط الحرج (i, j) هو النشاط الذي ينعدم عنده الاحتياطي الكلي للزمن r_{ij} ، كما نلاحظ أن النشاط الحرج يجب أن يكون كل من احتياطي الكلي والحر يساوي الصفر. وأما النشاط غير الحرج فاحتياطي الكلي يجب أن يختلف عن الصفر بينما احتياطي الحر فيمكن أن يساوي الصفر في كثير من الشبكات.

10.5- خوارزمية أقصر طريق

Shortest Path Algorithm

من المسائل المهمة تطبيقاً في تدفق الشبكات هي تلك المتعلقة بتعيين المسار الأقصر بين عقدة المصدر وعقدة المصب. وتتلخص في إيجاد مجموعة الانتقال المتصلة فيما بينها والتي تشكل مجموعة أطوالها أقصر مسار يصل بين نقطة البداية (المصدر) مع نقطة النهاية (المصب).

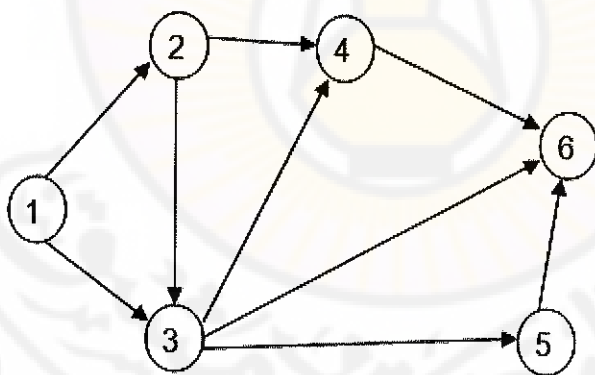
تحتوي هذه المسائل على شبكة مؤلفة من n عقدة، بحيث يقابل كل قوس (i, j) عدد غير سالب d_{ij} ، يدعى المسافة أو زمن العبور من العقدة (i) إلى العقدة (j) . تكمن المسألة في إيجاد أقصر طريق انطلاقاً من عقدة المصدر (1) إلى عقدة المصب (n) .

ومن الممكن أن تفسير هذه المسألة على أنها مسألة نقل نصف نقل واحدة كمية التدفق من المصدر (1) إلى المصب (n)، بحيث تكون واحدة الكلفة للنقل من (i) إلى (j) هي d_{ij} . ولذلك يمكن أن تصاغ مسألة أقصر طريق كمسألة برمجة خطية وتحل باستخدام إحدى طرق حل مسائل البرمجة الخطية. أو يمكن أن تحل باستخدام خوارزمية ديجكسترا. ولكن سنقدم خوارزمية بسيطة ولكنها تقدم الأسس الكافية لفهم آلية الحسابات (المتتالية). وهي خاصة لإيجاد أقصر طريق في الشبكات التي لا تسمح بالدوران.

وسنتعرف على خطوات هذه الخوارزمية من خلال المثال التالي:

مثال:

لتكن لدينا الشبكة المعطاة في الشكل (10.7) حيث تمثل النقطة (1) نقطة البداية (المصدر) وتمثل النقطة (6) نقطة النهاية (المصب). نلاحظ أنها شبكة لا تسمح بالدوران.



الشكل (10.7)

قبل البدء بالحل سنورد المصطلحات التالية:

d_{ij} - المسافة على الشبكة بين العقدتين (i) و (j).

u_j - أقصر مسافة بين النقطة (1) والنقطة (j) ويكون $u_1 = 0$.
وتنتهي العملية عندما نحصل على قيمة u_6 .
العلاقة العامة لحساب u_j تأخذ الشكل التالي:

$$u_j = \min_i (u_i + d_{ij}) \quad (10.11)$$

من هذه العلاقة ينتج أن أقصر مسافة u_j للنقطة (j) يمكن حسابها فقط بعد تحديد أقصر مسافة للنقاط السابقة كافة التي ترتبط بأضلع مع النقطة (j) من خلال نقطة المصدر (1). فمثلاً بتطبيق العلاقة (9.11) تأخذ الحسابات الشكل التالي:

$$u_1 = 0$$

$$u_2 = u_1 + d_{12} = 0 + 3 = 3 \quad \text{نصل إلى (2) من (1)}$$

$$u_3 = \min_{i=1,2} (u_i + d_{i3}) = \min (u_1 + d_{13}, u_2 + d_{23})$$

$$= \min (0 + 7, 3 + 2) = 5 \quad \text{نصل إلى (3) من (2)}$$

$$u_4 = \min_{i=1,3} (u_i + d_{i4}) = \min (u_1 + d_{14}, u_3 + d_{34})$$

$$= \min (0 + 4, 5 + 1) = 4 \quad \text{نصل إلى (4) من (1)}$$

$$u_5 = \min_{i=3,4} (u_i + d_{i5}) = \min (u_3 + d_{35}, u_4 + d_{45})$$

$$= \min (5 + 3, 4 + 3) = 7 \quad \text{نصل إلى (5) من (4)}$$

$$u_6 = \min_{i=2,3,5} (u_i + d_{i6}) = \min (u_2 + d_{26}, u_3 + d_{36}, u_5 + d_{56})$$

$$= \min (3 + 9, 5 + 6, 7 + 3) = 10 \quad \text{نصل إلى (6) من (5)}$$

فيكون أقصر مسار بين (1) و (6) هو 10 والمسار الأمثل هو:

$$1 \longrightarrow 4 \longrightarrow 5 \longrightarrow 6$$

10.6- مسائل التدفق الأعظمي

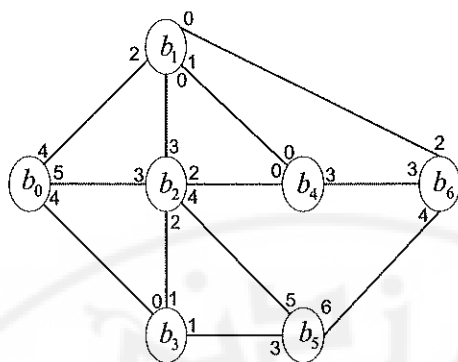
Maximal-Flow Problem

تهدف مسائل التدفق الأعظمي إلى وضع خطة تسمح بنقل أكبر كمية ممكنة من نقطة البداية (المصدر) إلى نقطة النهاية (المصب). وتوجد عدة مسارات (هي عبارة عن الأقواس التي تصل بين المراكز والتي من خلالها تتم عملية النقل) تصل بين نقطة البداية ونقطة النهاية بشكل مباشر أو عبر نقطة أو أكثر من نقاط الشبكة (التي تسمى مراكز الوصل أو المراكز الوسيطة).

ويفترض أن لا تخزن أي مادة منقولة في مراكز الوصل، بمعنى أن أي مواد منقولة تصل إلى مراكز الوصل تشحن مباشرة إلى مركز آخر. ويعبر عن مسألة التدفق الأعظمي بشبكة، تمثل فيها مراكز المصدر والمصب بعقدة وتمثل الأقواس المسارات التي من خلالها تنقل المواد. ويرتبط بكل عقدة وبكل قوس يخرج منها عدد غير سلمي يمثل أكبر كمية (طاقة التمرير أو طاقة التدفق) من المواد يمكن أن تشحن خلال القوس من عقدها الأولى. أي إن لكل مركزين (i, j) طاقة تمرير (أكبر كمية من المواد) محددة تساوي a_{ij} يمكن أن تشحن من المركز (i) إلى المركز (j) ولهما طاقة تدفق أخرى a_{ji} يمكن أن في الاتجاه المعاكس من المركز (j) إلى المركز (i) بحيث يكون $(a_{ij} \neq a_{ji})$.

مثال:

يوضح الشكل (10.8) التالي شبكة للنقل فيها المركز b_0 هو المصدر والمركز b_6 هو المصب والعقد b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 هي عبارة عن مراكز وصل. وتوضح طاقات التدفق لكل قوس في الاتجاهين بجوار بداية ونهاية كل قوس.



شكل (10.8)

نلاحظ من الشكل (10.8) أن (4) وحدات يمكن أن تشحن من المركز b_0 إلى المركز b_1 ولكن (2) وحدة يمكن أن تشحن في الاتجاه المعاكس أي من المركز b_1 إلى المركز b_0 .

10.7- تحويل مسألة النقل إلى مسألة تدفق أعظمي

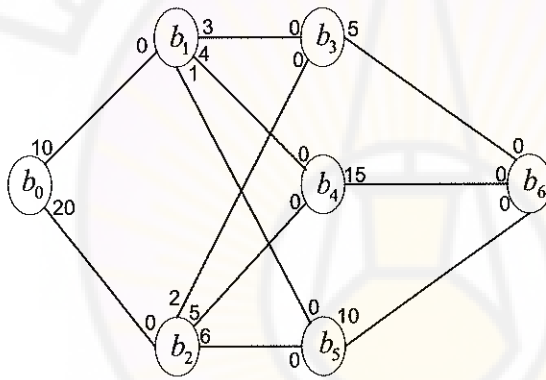
From a Transportation To a Maximal- Flow Problem

بفرض أننا نرغب في نقل مادة ما متوفرة لدينا في مركزين للتصدير b_1, b_2 ونريد نقلها إلى ثلاثة مراكز استيراد b_3, b_4, b_5 ، ولتكن الكميات المصدرة والمستوردة منقولة بوسائل نقل ذات حمولة مختلفة موضحة في الجدول التالي:

كمية متوفرة للتصدير	b_3	b_2	b_1	مراكز استيراد
مركز تصدير				
b_1	3	4	1	10
b_2	2	5	6	20
كميات مستوردة	5	15	10	

ولتحويل هذه المسألة إلى مسألة تدفق أعظمي نصل مراكز التصدير b_1, b_2 بمركز تصدير وهمي b_0 بحيث تكون طاقات الأقواس $b_0 b_1$ و $b_0 b_2$ هي الكميات المتوفرة في مراكز التصدير b_1 و b_2 ونصل مراكز الاستيراد b_3, b_4, b_5 بمركز استيراد وهمي b_6 ، بحيث تكون طاقات الأقواس $b_3 b_6$ و $b_4 b_6$ و $b_5 b_6$ هي الكميات المستوردة أو المطلوبة في مراكز الاستيراد.

ونظراً لأن اتجاه النقل المعاكس (من مركز استيراد إلى مركز تصدير) غير مسموح به فإننا نضع جانب نهاية كل قوس قيمة الصفر. وبذلك تكون قد تحولت مسألة النقل إلى مسألة تدفق أعظمي ونحصل نتيجة ذلك على الشبكة الممثلة في الشكل (10.9) التالي:



شكل (10.9)

10.8 - خوارزمية فورد - فولكرسون

Ford ant Fulkerson Algorithm

يمكن تطبيق هذه الخوارزمية على الشبكة مباشرة أو بشكل جدولي. وسنورد خطوات هذه الخوارزمية على الجدول، ويمكن بسهولة تطبيق الخطوات على الشبكة مباشرة.

1 - نضع طاقات التدفق للحلقات (b_i, b_j) في جدول كالتالي:

	*					
*	المركز	b_0	b_1	b_2	...	b_n
	b_0	—	a_{01}	a_{02}	...	a_{0n}
	b_1	a_{10}	—	a_{12}	...	a_{1n}
	b_2	a_{20}	a_{21}	—	...	a_{2n}
	...	...	...	...	...	...
	b_n	a_{n0}	a_{n1}	a_{n2}	...	—

حيث تشير الأعداد a_{ij} إلى كميات التدفق من المركز b_i إلى b_j .

2 - نوجد تدفقاً موجباً من نقطة المصدر b_0 باتجاه نقطة المصب b_n أي نقوم بالبحث عن مسار من b_0 إلى b_n ، ويتم ذلك وفق الخطوات التالية:

أ- نؤشر العمود والسطر b_0 بإشارة (*).

ب- نبحث في سطر b_0 عن جميع الحجر المشغولة بأعداد $a_{0i} \neq 0$ والمقابلة للأعمدة b_i ($i=1,2,...,n$) ونؤشر تلك الأعمدة بالثنائية $(0, h_i)$ حيث $h_i = a_{0i}$ ، ثم نضع أمام الأسطر b_i الموافقة للأعمدة السابقة نفس الإشارات العددية $(0, h_i)$.

ت- ندرس أحد الأسطر التي أشرنا عليها سابقاً $(0, h_i)$ ولين على سبيل المثال السطر b_2 ، فنبحث في هذا السطر عن الحجر التي فيها $a_{2k} \neq 0$ حيث أن b_k هي الأعمدة التي مازالت بدون تأشير نتيجة العمليات السابقة. ثم نقوم بتأشير تلك الأعمدة بواسطة الثنائية $(2, h_k)$ حيث أن h_k تحسب من العلاقة التالية:

$$h_k = \min(h_2, a_{2k})$$

أو بشكل عام نحسب h_k من العلاقة التالية:

$$h_k = \min(h_r, a_{rk}) \quad (10.12)$$

ثم نقوم بتأشير الأسطر الموافقة للأعمدة السابقة بواسطة الثنائية $(2, h_k)$.
ث- نكرر الخطوة السابقة (ت) إلى أن نتوصل إلى وضع إشارة على العمود الأخير b_n بواسطة الثنائية (s, h_n) . وعندها نكون قد توصلنا إلى الحلقة الأخيرة التي نرمز لها بالرمز (b_s, b_n) وحصلنا على مسار معين من b_0 إلى b_n وتكون طاقة تمرير هذا المسار تساوي Q_1 حيث:

$$Q_1 = h_n = \min(h_s, a_{sn}) \quad (10.13)$$

3 - نؤشر جميع كميات التدفق الموجبة على هذا المسار من b_0 إلى b_n بإشارة سالبة والكميات المناظرة (المعاكسة من b_n إلى b_0) بإشارة موجبة

4 - نطرح Q_1 من جميع حجر القيم المؤشرة بسالب وتضاف إلى جميع القيم المؤشرة بموجب وتوضع النتائج في جدول جديد.

5 - نعود ونطبق الخطوة (2) (والخطوات التي ضمنها) على الجدول الجديد فنحصل نتيجة ذلك على طاقات تمرير أخرى Q_2 و Q_3 و... الخ لمسارات جديدة. ونكرر ذلك حتى تصبح جميع الأعداد a_{in} في العمود الأخير مساوية للصفر.

6 - تحديد أكبر تدفق، ويتم ذلك بأخذ مجموع طاقات التدفق للمسارات كافة أي:

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots \quad (10.14)$$

ولتحديد مقدار التدفق في كل حلقة والكميات المنقولة من كل نقطة، نقوم بطرح آخر جدول تم التوصل إليه من الجدول الأساسي (الأول) ونثبت نتائج الطرح في جدول جديد. ومن هذا الجدول يكون:

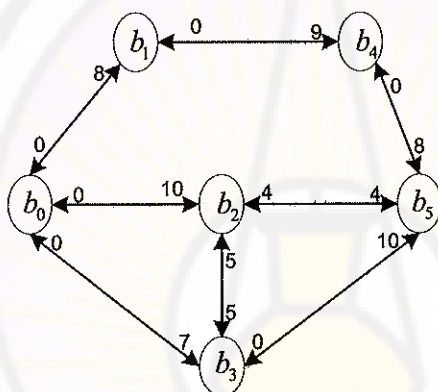
1- الأرقام الموجبة تمثل الأرقام الواصلة إلى نقطة الطلب j من كل نقطة من نقاط المصدر i .

2- تبين الأرقام السالبة الكميات المنقولة من كل نقطة من نقاط المصدر i إلى كل نقطة من نقاط الطلب j .

3- تعني الأرقام المساوية للصفر أنه لم تنقل أي كمية بين نقطتي المصدر والمصب المقابلتين للصفر.

مثال:

لتكن لدينا الشبكة الموضحة في الشكل (10.10) والممثلة لمسألة تدفق أعظمي حيث b_0 مصدر التدفق (ويمكن أن يكون حقل نفط - حقل غاز - حوض مياه...) أما النقطة b_n فهي نقطة المصب (ويمكن أن تمثل محطة تكرير - ميناء - خزان...) أما النقاط b_4, b_3, b_2, b_1 فتمثل نقاط عبور أو وسائل نقل (محطات ضخ - صهاريج...) وتمثل الأرقام على الأضلاع طاقة التدفق العظمى عبر هذه الأضلاع في الاتجاه الذي يحدده السهم على الضلع:



شكل (10.10)

نضع معلومات هذه الشبكة في الجدول (10.8) التالي:

* (0,8) (0,10) (0,7) (1,8) (2,4)

	المركز	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
*	b_0	-	8	-10	7		
(0,8)	b_1	0	-			9	
(0,10)	b_2	+		-	5		-4
(0,7)	b_3	0		5	-		10
(1,8)	b_4		0			-	8
(2,4)	b_5			+4	0	0	-

جدول (10.8)

ولتحديد مسار من b_0 إلى b_5 نقوم بما يلي:

نؤشر عمود وسطر b_0 بنجمة (*)، ثم نأخذ السطر الأول سطر المركز b_0 فنلاحظ أنه يتضمن ثلاثة أعداد موجبة هي 7, 10, 8 ومقابلة للأعمدة b_3, b_2, b_1 على التوالي، لذلك نقوم بتأشير هذه الأعمدة بالثنائيات (0,8)، (0,10)، (0,7) على الترتيب ونؤشر أيضاً b_3, b_2, b_1 بنفس تلك الثنائيات.

ثم نختار السطر المؤشر b_1 فنجد أنه يتضمن عنصراً موجباً واحداً فقط وهو (9) والمقابل للعمود غير المؤشر b_4 ، فنؤشر عمود b_4 بالثنائية (1,8) وذلك لأننا اخترنا السطر b_1 ولأن:

$$h_4 = \min(h_1, a_{14}) = \min(8, 9) = 0$$

ثم نعود ونختار السطر المؤشر b_2 فنجد أنه يتضمن العدد (4) المقابل للعمود غير المؤشر b_5 ، فنؤشر العمود b_5 بالثنائية (2,4) حيث:

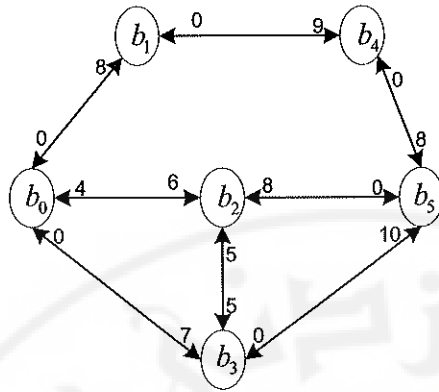
$$h_5 = \min(h_2, a_{25}) = \min(10, 4) = 4$$

أي نوّشر عمود وسطر b_5 بالثنائية (2,4) وبذلك نكون قد حصلنا على المسار الأول وهو (b_0, b_2, b_5) وإن طاقة التدفق عبر هذا المسار هي $Q_1 = h_5 = 4$.
ثم نوّشر الحجر التي تشكل هذا المسار وهي (b_0, b_2) و (b_2, b_5) بإشارة سالبة نوّشر الحجر المناظرة (b_2, b_0) و (b_5, b_2) بإشارة موجبة. ونطرح الكمية $Q_1 = 4$ من جميع الحجر المؤشرة بإشارة سالبة ونضيفها للحجر المؤشرة بإشارة موجبة، ونضع النتائج في الجدول التالي:

		*					
		(0,8) (0,6) (0,7) (1,8) (3,7)					
*	المركز	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
	b_0	-	8	6	-7		
	(0,8)	b_1	0	-		9	
	(0,6)	b_2	4		-	5	0
	(0,7)	b_3	+		5	-	-10
	(1,8)	b_4		0		-	8
	(3,7)	b_5			8	+0	0

جدول (10.9)

ولتمثيل هذه الخطوة على الشبكة مباشرة، نجد أن المسار (b_0, b_2, b_5) يستوعب (4) وحدات، وبشحن هذه الكمية فإننا نخفض طاقات $b_0 b_2$ و $b_2 b_5$ بمقدار (4) وحدات ونزيد طاقات $b_2 b_0$ و $b_5 b_2$ (4) وحدات. ويوضح الشكل (10.11) الشبكة الناتجة:



شكل (10.11)

نعود ونطبق خطوات مماثلة للخطوات السابقة على الجدول الجديد (10.9) وذلك لتحديد مسار جديد من b_0 إلى b_5 .

من أجل ذلك نؤشر الأعمدة والأسطر b_1, b_2, b_3, b_4 بالثنائيات $(0,7)$ ، $(1,8)$ ، $(0,6)$ ، $(0,8)$ على الترتيب، ثم نختار السطر b_3 الذي يحوي عنصر موجب (10) مقابل للعمود غير المؤشر b_5 ونحسب h_5 :

$$h_5 = \min(h_3, a_{35}) = \min(7, 10) = 7$$

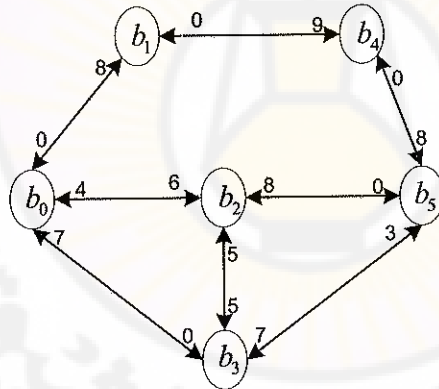
فنؤشر عمود وسطر b_5 بالثنائية $(3,7)$ وبذلك نكون قد حصلنا على مسار جديد ثان وهو المسار (b_0, b_3, b_5) الذي يستوعب (7) وحدات (حيث $Q_2 = h_5 = 7$).
ثم نؤشر الحجر (b_3, b_5) و (b_0, b_5) بإشارة سالبة والحجر المعاكسة (b_5, b_3) و (b_3, b_0) بإشارة موجبة، ونطرح الكمية $Q_2 = 7$ من الحجر المؤشرة بسالب ونضيفها للحجر المؤشرة بموجب، فنحصل نتيجة ذلك على الجدول (10.10) التالي:

* (0,8) (0,6) (2,5) (1,8) (3,3)

	المركز	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
*	b_0	-	8	-6	0		
(0,8)	b_1	0	-			9	
(0,6)	b_2	+4		-	-5		0
(2,5)	b_3	7		+5	-		-3
(1,8)	b_4		0			-	8
(3,3)	b_5			8	+7	0	-

جدول (10.10)

وبتطبيق ذلك على الشبكة في الشكل (10.11) نحصل على الشبكة الجديدة الموضحة في الشكل (10.12) التالي:



شكل (10.12)

ولتحديد مسار ثالث جديد نعود إلى الجدول (10.10) ونؤشر أعمدة وأسطر b_1, b_2, b_4 بالتناحيات (0,8)، (0,6)، (1,8) على الترتيب. ولتأشير عمود وسطر b_3 يجب أن نحسب h_3 ، ومن أجل ذلك نلاحظ أن سطر b_0 وسطر b_1 المؤشرين لا

يحويان أي عدد موجب مقابل للعمود b_3 لذلك ننتقل إلى سطر b_2 المؤشر فنلاحظ أنه يحوي العدد (5) المقابل للعمود b_3 فيكون:

$$h_3 = \min(h_2, a_{23}) = \min(6, 5) = 5$$

فنؤشر عمود وسطر b_3 بالثنائية (2,5).

ولتأشر عمود وسطر b_5 يجب علينا أن نحسب h_5 من السطر المؤشر b_3 كما يلي:

$$h_3 = \min(h_3, a_{35}) = \min(5, 3) = 3$$

فنؤشر عمود وسطر b_5 بالثنائية (3,3).

وبذلك نكون قد حصلنا على مسار ثالث جديد هو (b_0, b_2, b_3, b_5) الذي يستوعب

تدقيقاً قدره $Q_3 = h_5 = 3$.

ثم نؤشر الحجر (b_3, b_5) ، (b_2, b_3) ، (b_0, b_2) بإشارة سالبة والحجر المعاكسة

(b_5, b_3) ، (b_3, b_2) ، (b_0, b_0) بإشارة موجبة، وبالتالي نطرح الكمية $Q_3 = 3$ من

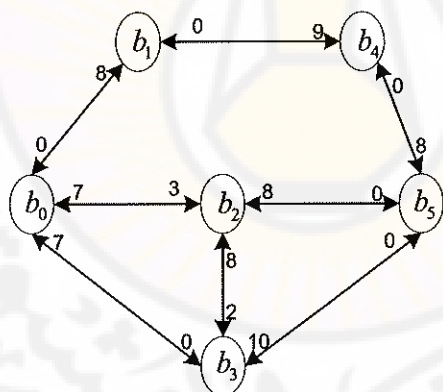
الحجر المؤشرة بسالب ونضيفها للحجر المؤشرة بموجب، فنحصل نتيجة ذلك على

الجدول التالي:

		*	(0,8)	(0,3)	(2,2)	(1,8)	(4,8)
	المركز	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
*	b_0	-	-8	3	0		
(0,8)	b_1	+0	-			-9	
(0,3)	b_2	7		-	2		0
(2,2)	b_3	7		8	-		0
(1,8)	b_4		+0			-	-8
(4,8)	b_5			8	10	+0	-

جدول (10.11)

وبتطبيق ذلك على الشبكة الموضحة في الشكل (10.12) نحصل على شبكة جديدة كما في الشكل (10.13) التالي:



شكل (10.13)

ولتحديد مسار رابع جديد، نكرر الخطوات التي اتبعناها سابقاً ونعود من جديد إلى الجدول (10.11) ونقوم بتأشير الأعمدة b_1, b_2, b_3, b_4 بالثنائيات (1,8)، (2,2)، (0,3)، (0,8) على الترتيب، ثم ندرس أحد الأسطر b_j المؤشرة والتي تحتوي أعداداً

مقابلة للعمود b_5 ، لذلك ندرس السطر المؤشر b_4 الذي يتضمن العدد (8) المقابل للعمود b_5 ونحسب h_5 كما يلي:

$$h_5 = \min(h_4, a_{45}) = \min(8, 8)$$

ومن ثم نؤشر عمود وسط b_5 بالثنائية (4,8).

وبذلك نكون قد حصلنا على مسار جديد هو (b_0, b_1, b_4, b_5) وتكون طاقة التدفق

عبر هذه المسار هي $Q_4 = h_5 = 8$.

فنطرح هذه الكمية $Q_4 = 8$ من الحجر (b_4, b_5) ، (b_1, b_4) ، (b_0, b_1) التي نؤشرها

بإشارة سالبة ونضيفها للحجر المعاكسة التي نؤشرها بإشارة موجبة، فنحصل نتيجة

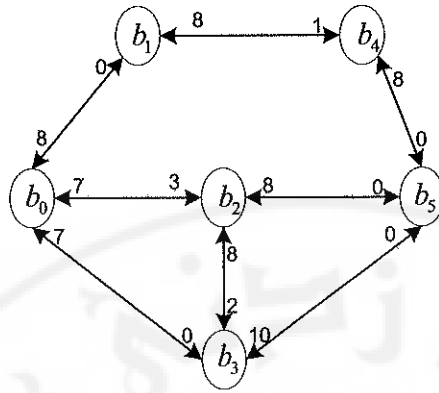
ذلك على الجدول التالي:

المركز	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
b_0	—	0	3	0		
b_1	8	—			1	
b_2	7		—	2		0
b_3	7		8	—		0
b_4		8			—	0
b_5			8	10	8	—

جدول (10.12)

وبتطبيق هذه الخطوات على الشبكة (الشكل (10.13)) نحصل على شبكة جديدة

كما في الشكل (10.14) التالي:



شكل (10.14)

من الجدول (10.12) نلاحظ أن جميع العناصر في العمود b_5 أصبحت مساوية للصفر ($a_{i5} = 0$) ومن ثم لا يوجد مسار من المصدر b_0 إلى المصب b_5 يسمح بتدفق موجب، لذلك فإن أكبر كمية يمكن أن ترسل من المصدر إلى المصب هي:

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 = 4 + 7 + 3 + 8 = 22$$

ولتحديد جدول الشحن المثل ومقدار التدفق والكميات المنقولة من كل نقطة من نقاط الشبكة، نقوم بما يلي:

نطرح عناصر آخر جدول (الجدول (10.12)) من العناصر المقابلة لها في الجدول الأساسي الأول (الجدول (10.8))، ثم توضع النتائج في جدول جديد (10.13) ونسميه جدول الشحن الأمثل:

المركز	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
b_0	—	8	7	7		
b_1	-8	—			8	
b_2	-7		—	3		4
b_3	-7		-3	—		10
b_4		-8			—	8
b_5			-4	-10	-8	—

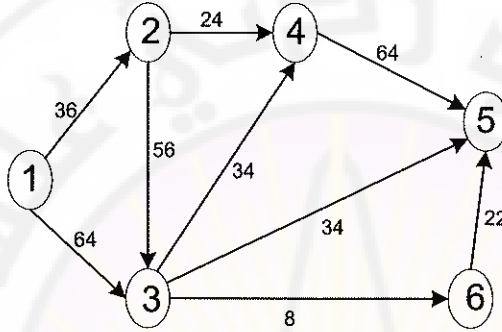
جدول (10.13)

من جدول الشحن الأمثل (10.13) يكون:

- 1- مجموع الأرقام في السطر الأول يساوي مجموع التدفق المنطلق من المصدر b_0 إلى جميع النقاط b_j ($j=1,2,3$).
- 2- مجموع الأرقام في العمود الأخير يساوي مجموع التدفق الواصل إلى المصب b_5 من جميع النقاط b_i ($i=2,3,4$).
- 3- تمثل الأرقام السالبة في العمود الأول النقص الحاصل في نقطة المصدر b_0 نتيجة التدفق، ومن جهة ثانية تبين مديونية كل نقطة من نقاط العبور لنقطة المصدر b_0 .
- 4- تمثل الأرقام السالبة في السطر الأخير مديونية نقطة المصب b_5 لكل نقطة من نقاط العبور.
- 5- وبما أن نقاط العبور لا تشكل مصدراً ولا مستقراً للتدفق فسوف يكون مجموع الأرقام في كل سطر وكل عمود لنقاط العبور مساوياً للصفر.

أمثلة:

- 1- بفرض لدينا شبكة الطرق الواصلة بين المدن (1)، (2)، (3)، (4)، (5)، (6). ويرغب شخص في السفر من المدينة (1) إلى المدينة (6) وهدفه هو سلوك أقصر طريق ممكن، حيث تدل الأعداد المرفقة للأقواس (i, j) على المسافة بين المدينتين i و j.



المطلوب

باستخدام خوارزمية أقصر طريق، حدد المسافة الأقصر (أقصر مسار) من المدينة (1) إلى المدينة (6).

الحل:

بتطبيق العلاقة:

$$u_j = \min_i (u_i + d_{ij})$$

نحصل على:

$$u_1 = 0$$

$$u_2 = u_1 + d_{12} = 0 + 36 = 36$$

يصل إلى (2) من (1)

$$u_3 = \min_{i=1,2} (u_i + d_{i3}) = \min (u_1 + d_{13}, u_2 + d_{23})$$

$$= (0 + 64, 36 + 56) = 64$$

يصل إلى (3) من (1)

$$u_4 = \min_{i=2,3} (u_i + d_{i4}) = \min (u_2 + d_{24}, u_3 + d_{34})$$

$$= \min(36 + 24, 64 + 34) = 60 \quad \text{يصل إلى (4) من (2)}$$

$$u_5 = u_3 + d_{35} = 64 + 8 = 72 \quad \text{يصل إلى (5) من (2)}$$

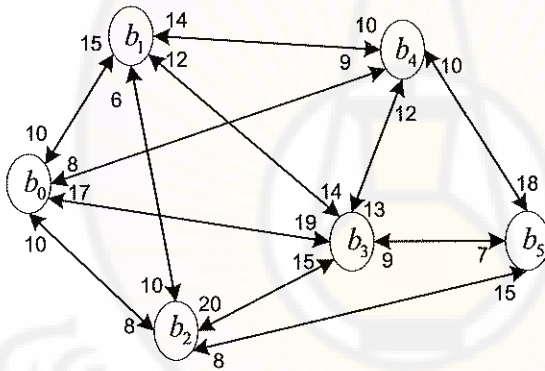
$$u_6 = \min_{i=3,4,5} (u_i + d_{i6}) = \min(u_3 + d_{36}, u_4 + d_{46}, u_5 + d_{56})$$

$$= \min(64 + 34, 60 + 64, 72 + 22) = 94 \quad \text{يصل إلى (6) من (5)}$$

ومن ثم نجد أن هذا الشخص يصل إلى (6) من (5) ويصل إلى (5) من (3) كما يصل إلى (3) من (1).
فيكون أقصر طريق هو:

$$1 \longrightarrow 3 \longrightarrow 5 \longrightarrow 6 \quad \text{ويساوي (94) واحدة طول.}$$

2- لتكن لدينا الشبكة الموضحة بالشكل التالي:



تمثل هذه الشبكة مسألة تدفق أعظمي حيث b_0 مصدر التدفق و b_5 المصب.
وتمثل الأعداد فوق الأقواس طاقة التدفق العظمي عبر هذه الأقواس وفي الاتجاه الذي يحدده السهم على القوس.

المطلوب:

وضع خطة نقل تسمح بنقل أكبر كمية ممكنة من نقطة المصدر إلى المصب.

الحل:

نضع جدول طاقات التدفق حيث يمثل كل سطر نقطة من نقاط المصدر وكل عمود نقطة من نقاط المصب.

* (0,15) (1,8) (0,19) (0,9) (2,8)

	المركز	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
*	b_0	—	15	-8	19	9	
(0,15)	b_1	10	—	-10	14	10	
(1,8)	b_2	+10	+6	—	15		-15
(0,19)	b_3	17	12	20	—	12	7
(0,9)	b_4	8	14		13	—	18
(2,7)	b_5			+8	9	10	—

من السطر b_2 نجد أن:

$$h_5 = \min(h_2, a_{25}) = \min(8, 15) = 8$$

فنؤشر عمود وسط b_5 بالثنائية (2,8)، وبذلك نكون قد حصلنا على مسار من b_0 إلى b_5 هو $b_0 \rightarrow b_2 \rightarrow b_5$ وأن طاقة التدفق عبر هذا المسار تساوي $Q_1 = h_5 = 8$.

نؤشر الحجر (b_2, b_5) و (b_0, b_2) بإشارة سالبة، والحجر المناظرة (b_5, b_2) و (b_2, b_0) بإشارة موجبة ثم نطرح (8) من الحجر المؤشرة بإشارة سالبة ونضيفها للحجر المؤشرة بإشارة موجبة، ونضع النتائج في الجدول الجديد التالي:

* (0,15) (1,10) (0,19) (0,9) (2,7)

	المركز	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
*	b_0	—	-15	0	19	9	
(0,15)	b_1	1 0	—	-10	14	10	
(1,10)	b_2	1 8	+6	—	15		-7
(0,19)	b_3	1 7	12	20	—	12	7
(0,9)	b_4	8	14		13	—	18
(2,7)	b_5			+16	9	10	—

من السطر b_1 نحسب:

$$h_5 = \min(h_1, a_{12}) = \min(15, 10) = 10$$

فنؤشر عمود وسط b_2 بالثنائية (1,10).

من السطر b_2 نحسب:

$$h_2 = \min(h_2, a_{25}) = \min(10, 7) = 7$$

فنؤشر عمود وسط b_5 بالثنائية (2,7)، وبذلك نكون قد حصلنا على مسار من

b_0 إلى b_5 هو $b_0 \longrightarrow b_1 \longrightarrow b_2 \longrightarrow b_5$ وأن طاقة التدفق عبر هذا المسار تساوي $Q_2 = h_5 = 7$.

ثم نقوم بتأشير الحجر (b_2, b_5) و (b_1, b_2) و (b_0, b_1) بإشارة سالبة، والحجر المناظرة (b_5, b_2) ، (b_2, b_1) ، (b_1, b_0) بإشارة موجبة، ونطرح (7) من الحجر المؤشرة بإشارة سالبة ونضيفها للحجر المؤشرة بإشارة موجبة، ونضع النتائج في الجدول الجديد التالي:

* (0,8) (1,3) (0,19) (0,9) (3,7)

	المركز	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
*	b_0	-	8	0	-19	9	
(0,8)	b_1	17	-	3	14	10	
(1,3)	b_2	18	13	-	15		0
(0,19)	b_3	+17	12	20	-	12	-7
(0,9)	b_4	8	14		13	-	18
(3,7)	b_5			23	+9	10	-

من السطر b_1 نحسب:

$$h_2 = \min(h_1, a_{12}) = \min(8, 3) = 3$$

فنؤشر عمود وسطر b_2 بالثنائية (1,3).

ومن السطر b_3 نحسب:

$$h_5 = \min(h_3, a_{35}) = \min(19, 7) = 7$$

فنؤشر عمود وسطر b_5 بالثنائية (3,7). وبذلك نكون قد حصلنا على مسار من b_0 إلى b_5 هو $b_0 \rightarrow b_3 \rightarrow b_5$ وطاقة تمرير هذا المسار تساوي $Q_3 = h_5 = 7$.

ثم نقوم بتأشير الحجر (b_3, b_5) و (b_0, b_3) بإشارة سالبة، والحجر المناظرة (b_5, b_3) ، (b_5, b_0) بإشارة موجبة، ونطرح (7) من الحجر المؤشرة بإشارة سالبة ونضيفها للحجر المؤشرة بإشارة موجبة، ونضع النتائج في الجدول الجديد التالي:

	*	(0,8)	(1,3)	(0,12)	(0,9)	(4,9)
المركز	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
*	b_0	-	8	0	12	-9
(0,8)	b_1	17	-	3	14	10
(1,3)	b_2	18	13	-	15	0
(0,12)	b_3	24	12	20	-	12
(0,9)	b_4	8	14		13	-
(4,9)	b_5			23	16	10

ن السطر b_1 نحسب:

$$h_2 = \min(h_1, a_{12}) = \min(8, 3) = 3$$

فنؤشر عمود وسط b_2 بالثنائية (1,3).

ومن السطر b_4 نحسب:

$$h_5 = \min(h_3, a_{45}) = \min(9, 18) = 9$$

فنؤشر عمود وسط b_5 بالثنائية (4,9). وبذلك نكون قد حصلنا على مسار من

b_0 إلى b_5 هو $b_0 \rightarrow b_4 \rightarrow b_5$ وإن طاقة التدفق عبر هذا المسار تساوي

$$Q_4 = h_5 = 9$$

ثم نقوم بتأشير الحجر (b_4, b_5) و (b_0, b_4) بإشارة سالبة، والحجر المناظرة

(b_5, b_4) ، (b_5, b_0) بإشارة موجبة، ثم نطرح $(Q_4 = 9)$ من الحجر المؤشرة بإشارة

سالبة ونضيفها للحجر المؤشرة بإشارة موجبة، ونضع النتائج في الجدول الجديد

التالي:

* (0,8) (1,3) (0,12) (3,12) (4,9)

	المركز	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
*	b_0	-	8	0	-12	0	
(0,8)	b_1	17	-	3	14	10	
(1,3)	b_2	18	13	-	15		0
(0,12)	b_3	+24	12	20	-	-12	0
(3,12)	b_4	19	14		+13	-	-9
(4,9)	b_5			23	16	+9	-

من السطر b_1 نحسب:

$$h_2 = \min(h_1, a_{12}) = \min(8, 3) = 3$$

فنؤشر عمود وسطى b_2 بالثنائية (1,3).

ومن السطر b_3 نحسب:

$$h_4 = \min(h_3, a_{34}) = \min(12, 12) = 12$$

فنؤشر عمود وسطى b_4 بالثنائية (3,12).

ومن السطر b_5 نحسب:

$$h_5 = \min(h_4, a_{45}) = \min(12, 9) = 9$$

فنؤشر عمود وسطى b_5 بالثنائية (4,9)، ونكون بذلك قد حصلنا على مسار من

b_0 إلى b_5 هو $b_0 \longrightarrow b_3 \longrightarrow b_4 \longrightarrow b_5$ وأن طاقة التدفق عبر هذا المسار

$$Q_5 = h_5 = 9 \text{ تساوي}$$

ثم نؤشر الحجر (b_4, b_5) و (b_3, b_4) و (b_0, b_3) بإشارة سالبة، والحجر المناظرة

(b_5, b_4) ، (b_4, b_3) ، (b_3, b_0) بإشارة موجبة. وأخير نقوم بطرح طاقة التمرير

$Q_5 = 9$ الحجر المؤشرة بإشارة سالبة ونضيفها للحجر المؤشرة بإشارة موجبة، ونضع

النتائج في الجدول الجديد التالي:

المركز	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
b_0	—	8	0	3	0	
b_1	17	—	3	14	10	
b_2	18	13	—	15		0
b_3	33	12	20	—	3	0
b_4	17	14		22	—	0
b_5			23	16	28	—

من هذا الجدول نلاحظ أن عمود b_5 لم يعد يحوي أعداداً موجبة، ومن ثم لا يوجد مسار من b_0 إلى المصب b_5 يسمح بتدفق موجب. لذلك فإن أكبر كمية يمكن أن تنقل من b_0 إلى b_5 هي:

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 + Q_5 = 8 + 7 + 7 + 9 + 9 = 40$$

ولتحديد جدول الشحن (النقل) الأمثل ومقدار التدفق والكميات المنقولة من كل نقطة، نقوم بطرح الجدول الأخير من الجدول الأساسي (الجدول الأول)، وتوضع النتائج في الجدول الجديد التالي:

المركز	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
b_0	–	7	8	16	9	
b_1	-7	–	7	0	0	
b_2	-8	-7	–	0		15
b_3	-16	0	0	–	9	7
b_4	-9	0		-9	–	18
b_5			-15	-7	-18	–

ومن هذا الجدول يكون:

- 1- مجموع الأرقام في السطر الأول يساوي أكبر كمية يمكن أن تنتقل من b_0 إلى جميع النقاط z (مجموع التدفق المنطلق من b_0 إلى b_5).
- 2 مجموع الأرقام في العمود الأخير يساوي مجموع التدفق الواصل إلى المصب b_5 من جميع النقاط i .
- 3- تمثل الأرقام السالبة في العمود الأول النقص الحاصل في نقطة المصدر b_0 نتيجة التدفق الحاصل، ويبين مدونية كل نقطة من نقاط العبور لنقطة المصدر b_0 .
- 4- تمثل الأرقام السالبة في السطر الأخير مدونية نقطة المصب b_5 لكل نقطة من نقاط العبور.

تمارين

- 1- ليكن لدينا مشروع مؤلف من خمسة أنشطة A,B,C,D,E والأنشطة السابقة وزمن تنفيذ كل نشاط معطى بالجدول التالي:

النشاط	الأنشطة السابقة	زمن تنفيذ النشاط
A	-	2
B	A	4
C	A	3
D	B	6
E	C,B	5

المطلوب:

رسم شبكة مناسبة تمثل هذا المشروع.

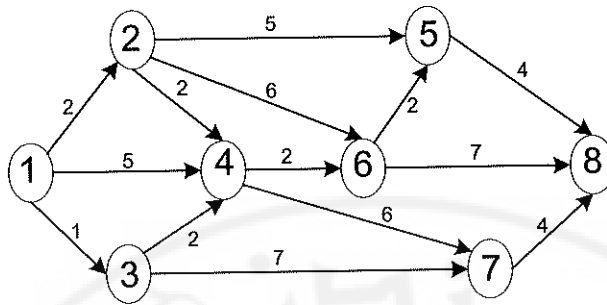
- 2- ليكن لدينا مشروع مؤلف من سبعة أنشطة A,B,C,D,E,F,G وذات الترتيب التالي:

النشاط	الأنشطة السابقة	زمن تنفيذ النشاط
A	-	2
B	A	3
C	A	4
D	B	2
E	C,B	6
F	-	5
G	F,E	3

المطلوب:

رسم الشبكة المناسبة تمثل هذا المشروع.

- 3- ليكن لدينا الشبكة التالية:



حيث تشير الأعداد فوق الأضلع إلى مدة تنفيذ النشاط.

المطلوب:

- 1- حساب أبكر زمن T_r ، أقصى زمن T_n' ، احتياطي الزمن R_j ، الزمن الفائض الكلي r_{ij} والزمن الفائض الحر r_{ij}' .
- 2- تحديد المسار الحرج.
- 4- ليكن لدينا مشروع مؤلف من ثمانية أنشطة A,B,C,D,E,F,G,H ويفترض أننا نعلم عن كل نشاط أنشطة سابقة وزمن تنفيذه الطبيعي والمضغوط وكلفة تنفيذه الطبيعية والمضغوطة، وجميع هذه المعلومات مرتبة في الجدول

التالي:

النشاط	الأنشطة السابقة	زمن التنفيذ (باليوم)		كلفة التنفيذ (بالدولار)	
		طبيعي	مضغوط	طبيعية	مضغوطة
A	-	10	7	4	5
B	-	5	4	2	5
C	B	3	2	2	5
D	C,D	4	3	3	5
E	C,D	5	3	3	5
F	D	6	3	5	5
G	E	5	2	1	5
H	G,F	5	4	4	5

المطلوب:

- 1- ارسم الشبكة المناسبة لهذا المشروع موضحاً فوق كل نشاط زمن تنفيذه الطبيعي والمضغوط.
- 2- رتب أنشطة الشبكة ومساراتها حسب الترتيب التصاعدي لشدة ميلها (ميل مستقيم الزمن / الكلفة).
- 3- حدد الخطة الزمنية المقابلة لأقل كلفة والتي تنفذ بأقل زمن ممكن وذلك من خلال جدول نهائي توضح فيه زمن التنفيذ النهائي والكلفة النهائية. أي وضح المزيج الأمثل للزمن والتكلفة.
- 5- ليكن لدينا مشروع مؤلف من الأنشطة A,B,C,D,E,F,G,H,I,K وبفرض أن الأنشطة السابقة لكل نشاط وزمن التنفيذ المضغوط والطبيعي وكلفة التنفيذ المضغوطة والطبيعية لهذا النشاط، معطاة كما في الجدول التالي:

النشاط	الأنشطة السابقة	زمن التنفيذ (يوم)		كلفة التنفيذ (دولار)	
		طبيعي	مضغوط	طبيعية	مضغوطة
A	-	8	5	100	200
B	-	11	9	600	690
C	-	9	7	100	20
D	A	8	7	300	350
E	A	5	2	200	245
F	B	6	3	400	460
G	B	3	1	300	360
H	C,D,F	9	6	350	650
I	C,D,F	4	2	500	520
K	G,H	3	3	100	00

المطلوب:

- 1- ارسم الشبكة المناسبة لهذا المشروع.
- 2- رتب أنشطة الشبكة ومساراتها حسب الترتيب التصاعدي لشدة ميلها (ميل مستقيم الزمن / الكلفة).
- 3- حدد الخطة الزمنية المقابلة لأقل كلفة والتي تنفذ بأقل زمن ممكن وذلك من خلال جدول نهائي توضح فيه زمن التنفيذ النهائي والكلفة النهائية.
- 6- ليكن لدينا مشروع مؤلف من ثلاثة عشر نشاطاً. وبفرض أننا نعلم عن هذه الأنشطة المعلومات التالية:

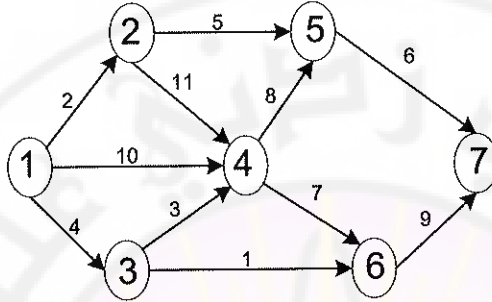
النشاط		زمن التنفيذ (يوم)		كافة التنفيذ (دولار)	
		مضغوط	طبيعي	مضغطة	طبيعية
1-2	5	2	100	200	
14	2	1	50	80	
1-5	2	1	150	80	
2-3	7	5	200	250	
2-5	5	2	20	40	
26	4	2	20	40	
3-4	3	1	60	80	
3-6	1	6	30	60	
4-6	5	2	10	20	
4-7	9	5	70	90	
5-6	4	1	100	30	
5-7	3	1	140	60	
6-7	3	1	200	240	

المطلوب:

- 1- ارسم الشبكة المناسبة لهذا المشروع موضحاً فوق كل نشاط زمن تنفيذه الطبيعي والمضغوط.
- 2- رتب أنشطة الشبكة ومساراتها حسب الترتيب التصاعدي لشدة ميلها (ميل مستقيم الزمن / الكلفة).

3- حدد الخطة الزمنية المقابلة لأقل كلفة والتي تنفذ بأقل زمن ممكن وذلك من خلال جدول نهائي توضح فيه زمن التنفيذ النهائي والكلفة النهائية. أي وضع المزيج الأمثل للزمن والتكلفة.

7- بفرض لدينا شبكة الطرق الواصلة بين المدن 1,2,3,4,5,6,7 التالية:

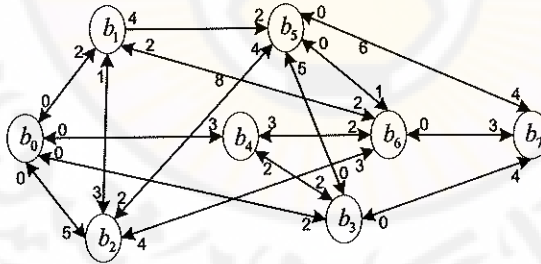


حيث تشير الأرقام على الأقواس إلى المسافة بين المدن، وبفرض أن أحد الأشخاص يريد الانتقال من (1) إلى (7).

المطلوب:

إيجاد أقصر طريق يمكن أن يسلكه.

8- لتكن لدينا الشبكة التالية:



المطلوب:

باستخدام خوارزمية التدفق الأعظمي أوجد أكبر قيمة للتدفق بين b_0 و b_7 علماً بأن الأعداد المبينة على خطوط الشبكة ترمز إلى طاقة التدفق عبر كل قوس وفي الاتجاه الذي يحدده السهم على القوس.

9- أوجد التدفق الأعظمي لشبكة نقل النفط الخام بين عدد من محطات التكرير المبنية على الجدول التالي:

المركز	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
b_0	—	10	8	-	15	20
b_1	5	—	7			17
b_2	12	15	—	20	30	40
b_3			20	—	24	730
b_4	20		50	30	—	100
b_5	25	15	50	35	150	—

حيث تمثل الأرقام ضمن الجدول طاقة التدفق بين محطات التكرير.

10- يحتوي الجدول التالي المعلومات حول الطاقة الإنتاجية لآبار النفط بالأطنان في

نقطة المصدر (b_0) والمعلومات حول استيعاب نقطة الطلب (b_5)

المركز	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
b_0	—	9	4		12	
b_1	12	—	8	10	7	6
b_2	10	2	—	10	6	
b_3		8	15	—	4	9
b_4	9	7	5	5	—	12
b_5		5		7	13	—

المطلوب:

باستخدام خوارزمية التدفق الأعظمي أوجد أكبر قيمة للتدفق بين b_0 و b_5 علماً بأن الأعداد ضمن الجدول ترمز إلى طاقة التدفق بين b_i و b_j وبالعكس.

أي المطلوب

وضع الجدول الذي يبين مقدار التدفق الأعظمي من نقطة المصدر (b_0) إلى نقطة المصب (b_5).



المصطلحات العلمية

Address	عنوان
Activity	نشاط
Algorithm	خوارزمية
Aim	هدف
Amount	كمية
Append	إلحاق، تذييل
Approximation	التقريب
Arithmetic	حسابي
Array	متّجه
Artificial variable	مجهول اصطناعي
Assignment Problem	مسألة الاسناد
Average	متوسط
Basic	أساسي
Beta Distribution	توزيع بيتا
Best Decision	أفضل قرار
Binary Programming	البرمجة الثنائية
Branch and Bound	التفرع و التحديد
Comparison	مقارنة
Complexity	تعقيد
Component	مكوّن
Canonical	قانوني
Condition	شرط

Constant	ثابت
Constraint	شرط (قييد)
Coordinates	إحداثيات
Convergence	تقارب
Convex	محدب
Critical Path	المسار الحرج
Cutting Plane Method	أسلوب قطع المستوي
Cycle	حلقة
Data	بيانات
Decrement	تناقص
Definition	تعريف
Degeneracy	الانحلال
Denominator	مقام
Decision Analysis	تحليل القرار
Decision Making	اتخاذ القرار
Dual	مرافق (ثنوي)
Dual Problem	المسألة المرافقة (الثنوية)
Dual principle	مبدأ المرافقة (الثنوية)
Dummy Activity	النشاط الوهمي
Dummy Event	الحادث الوهمي
Dynamic Programming	البرمجة الديناميكية
Earliest Time	الزمن المبكر
Efficiency	كفاءة

Element	عنصر
Enumerated	تعداد
Environment	بيئة
Exponent	أس
Expression	تعبير
Event	الحادث
Feasible Solution	الحل الملائم
Function	دالة
Fundamentals	أساسيات
Game Theory	نظرية المباراة
Gauss Method	طريقة غاوس
Graph	بيان
Graphical Solution	الحل البياني
Generate	توليد
Global	عام (شامل)
Infeasible Problem	مسألة مستحيلة (بدون حلول)
Infeasible Solution	الحل الغير ملائم
Integer	صحيح
Integer Programming	البرمجة الصحيحة
Latest Time	الزمن المتأخر
Linear	خطي
Linear Equations	معادلات خطية
Linear Combination	تركيب خطي

Linear Programming	برنامج خطي
Link	ارتباط
Local solution	الحل المحلي
Mathematical	رياضي
MathematicalModelling	نموذج رياضي
Mathematics	رياضيات
Matrix	مصفوفة
Maximum	الأكبر
Maximal Flow Problem	مسألة التدفق الأعظمي
Minimum	الأصغر
Mixed Strategy	الاستراتيجية المختلطة
Model	نموذج
Multiple solutions	حلول متعددة
Natural Logarithm	اللوغاريتم الطبيعي
Negation	عكس العلامة
Negative	سالب
Nested	متداخل
Net	شبكة
Network Analysis	تحليل الشبكات
Node	عقدة
Nonlinear	غير خطي
Nonlinear Programming	برنامج غير خطي
Not Equal	لا يساوي

Objective Function	دالة الهدف
Operational Research	بحوث العمليات
Operator	معامل
Optimization	الأمثليات
Optimal Strategy	الاستراتيجية المثلى
Optimal Solution	الحل الأمثل
Optimistic Time	زمن متفائل
Options	خيارات
Parameters	وسطاء
Path	مسار
Pessimistic Time	زمن متشائم
Positive	موجب
Profit	ربح
Project	مشروع
Precision	دقة
Primal Problem	المسألة الأولية (الأساسية)
Principle	مبدأ
Probability	إحتمالات
Program	برنامج
Properties	خصائص
Pure Strategy	الاستراتيجية الصرفة
Quadratic	تربيعي
Quadratic Program	برنامج تربيعي

Queue	طابور
Random	عشوائي
Reference	مرجع
Register	مسجل
Relational	علائقي
Remainder	الباقى
Relative order	الترتيب النسبي
Root	الجذر
Saddle Points	نقاط استقرار
Sensitivity	الحساسية
Set	مجموعة
Shortest Path	أقصر طريق
Simplex Method	طريقة السيمبلكس
Simplex Tableau	جدول السيمبلكس
Single	أحادي
Slack Variable	مجهول خامل
Solution	حل
Source	مصدر
Space	مسافة
Split Point	نقطة الفصل
Square Root	جذر تربيعي
Stability	الاستقرار
Standard	قياسي

Standard Form	الشكل القياسي
State	حالة
Statement	عبارة
Strategy	استراتيجية
Target	هدف
Transportation Problem	مسألة النقل
Transpose	منقول
Unbound Problem	مسألة غير محدودة
Uniform distribution	توزيع المنتظم
Update	تحديث
Upper limit	النهاية العظمة
Variable	مجهول
Vector	متجه
Verification	التحقق
Version	إصدار
View	عرض
Zero Sum Game	مباراة بجموع صفري



المراجع العلمية

- 1- د. خالد الخنيفس، 2004، " التنهيج الخطي " ، مديرية الكتب والمطبوعات الجامعية - جامعة دمشق، دمشق ، سوريا.
- 2- د. صباح الدين بقجه جي، د. جمال سليمان ، 2000، " بحوث العمليات " ، مديرية الكتب والمطبوعات الجامعية - جامعة دمشق، دمشق ، سوريا.
- 3- د. صباح الدين بقجه جي، وآخرون ، 1998، " بحوث العمليات " ، المركز العربي للتعريب والترجمة دمشق ، سوريا.
- 4- د.حمدو النجار، 2007 "بحوث العمليات " ، مديرية الكتب والمطبوعات الجامعية - جامعة حلب- حلب، سوريا.
- 5- د.عبد ذياب الجزاع، 1986 "بحوث العمليات"، وزارة التعليم العالي والبحث العلمي- جامعة البعث- بغداد، العراق.
- 6- د.كمال السلوم، 2005 "بحوث العمليات (1)"، مديرية الكتب والمطبوعات الجامعية - جامعة البعث- حمص، سوريا.
- 7- د.كمال السلوم، 2006 "بحوث العمليات (2)"، مديرية الكتب والمطبوعات الجامعية - جامعة البعث- حمص، سوريا.
8. 0 G May Wood "Military Decisions and Game Theory" operations Research Vol 2 p 365
9. Adams, VV.J. et al. Elements of linear Programming. New York: Van Nostrand Reinhold, 1969.
10. Argyris, C. "Management information system; The challenge to Rationality and Emotionality" Management science, 17 No 6 (Feb. 1971), P275-292
11. Battersby. A - "Network analysis for planning and Scheduling, Macmillan 1965
12. Childress, R.L. Sets, Matricse, and Linear Programming. Englewood Cliffs N.J.: Prentice-Hall, Inc., 1974

- Christofides, N., and S. Eilon: Algorithms for Large-scale Travelling salesman problems, oper. Res. O.Vol23, Dp 511-518, 1972 .13
- Cooper, L, and D. Steinberg: Linear Programming Philadelphia: W.B. Saunders Company 1974. .14
- Cooper, L., and D. Steinberg. Linear Programming Philadelphia: W.B. Saunders Company 1974. .15
- D. ELACKWELL."Game Theory" in operations Research for management, ED. J. Meloskey. .16
- Dakin, R.J. : A Tree-Search algorithm for mixed integer programming problems, computer. J. Vol 8, pp 250-255, 1965 .17
- Dantzig, G.B. Linear Programming and extensions, Princeton university press, Princeton N.J. 1963. .18
- Eastman, W.L: "Linear programming with pattern constraints" PhD, dissertation. Harvard university, Cambridge 1968 .19
- Fulkerson, D. "A Network flow computation for project cost curve" management science, 7, 167-178 (1961) .20
- Gass, S. Linear programming 2nd ed. McGraw-Hill, New York 1964. .21
- Held, M., and R M karp: The travelling – salesman problem and minimum spanning trees: part II Math, programming, Vol 1, 1971, pp 6-25 .22
- Hughes, A. J. and D. Grawiog. Linear Programming Reading, Mass: Addison-wesely publishing Co., Inc. 1973. .23
- KELLEY, J., "Critical path planning and scheduling: Mathematical basis operation research, 9 No.3 (1961) .24
- KELLEY, J., "The critical path method: Resource planning and scheduling" In industrial, scheduling Muth and thompson (eds) prentice - Hall Englewood cliffs, N. J. ; 1963. Ch. 21 .25
- L,D BERKOVITZ and M. DER3MER "Allocation of two types of Airerah in tactical Airwar' A game theoretic Analysis operations Research Vol 8 p 694 .26
- L.D. BERKOVITZ and M. DRESMER "A Game theory Analysis of tactical Airwar" operations Research vol 7 p 599 .27
- Lee, S,M. Goal programming for decision analysis. Philadelphia Auerbach publishes, Inc , 1972 .28

- Lockyer, K. An Introduction to critical path analysis 967 .29
- Loomba, N. P, and E Turban, Applied programming for .30
Management, Newyork: Holt, Rinehart and Winston, Inc 1974
- Loomba, N.P Linear programming. Newyork: McGraw-Hill book .31
company 1964.
- M Dresher: "Games of Strategy : Theory and applications" .32
Pisntice - H?H. Inc., Englewood Cliffs, N.J, 1961
- Macmillau, C. Mathematical programming. Newyork: John wiley .33
& sons, Inc., 1974
- McMillan, C. Mathematical programming. New york: John Wiley .34
& sons inc., 1974.
- Mitten, L. G: Branch bound Methods: General Formulation and .35
propertise, oper Res., .vol 18.pp. 24-34, 1970
- Moder, J. and C—Phillips, project management with CPM and .36
PERT, 2nd ed., Reinhold, New york VanNostrand 1970
- Murty, katta G., Linear and combinatorial programming, wiley, .37
Newyork 1976
- Simmons, D.M. Linear Programming for Operations .38
Research, San Francisco: Holden - day Inc. 1972.
- Strum J.E. introduction to linear Programming San Francisco: .39
Holden - day inc 1972.
- Strum, J.E. introduction to linear programming, san Francisco: .40
Holden-day inc. 1972.
- Tomlin J.A: "An Improved Branch Method for .41
Integer programming, oper Res, col 19, 1971, pp 1070-1074

التدقيق اللغوي

أ. د. محمد هيثم غرة : الأستاذ في قسم اللغة العربية- كلية الآداب- جامعة

دمشق

التدقيق العلمي

أ. د. حمدو النجار: الأستاذ في قسم الرياضيات- كلية العلوم- جامعة حلب

د. جبران جبران: المدرس في قسم الرياضيات- كلية العلوم- جامعة دمشق

د. ميسم جديد: المدرسة في قسم الرياضيات- كلية العلوم- جامعة دمشق

حقوق الطبع والترجمة والنشر محفوظة لمديرية الكتب والمطبوعات في جامعة

دمشق