منشورات جامعة دمشق
كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية

انتقـــال الحـــرارة

الدكـــتور
نديـــم مخـــيبر

جـامعة دمشـق
١٤٣٣ - ١٤٣٤ هـ
٢٠١١ - ٢٠١٢ م

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

منشورات جامعة دمشق
كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية

انتقال الحرارة

السنة
الرابعة
قوى ميكانيكية

جامعة دمشق
١٤٣٢ - ١٤٣٣ هـ
٢٠١١ - ٢٠١٢ م

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

المقدمة

تصادف عملية انتقال الحرارة في كثير من التجهيزات المستخدمة في تكنولوجيا توليد ونقل وتحويل الطاقة ، وبنتيجة مباشرة يعتبر موضوع انتقال الحرارة من المواضيع الهامة من الناحيتين النظرية والتطبيقية .

تم اعداد هذا الكتاب من تسعة فصول مستقلة بحيث تتوضع المعلومات ضمن كل بحث بشكل مستقل عن بقية الابحاث بغية تسهيل استخدام الكتاب وتفهم محتواه .

الغرض من هذا الكتاب هو تغطية منهاج مقرر انتقال للسنة الرابعة في قسم هندسة القوى الميكانيكية .

تبحث فصول هذا الكتاب بشكل عام بالمواضيع الاساسية المتعلقة بانتقال الحرارة من التوصيل والحمل والاشعاع الحراري مع التنويه الى أنه تم تخصيص القسم الاخير لموضوع حساب وتصميم المبادلات الحرارية بغية وضع الطالب في موضع التطبيق العملي لما درسه من الاسس والمفاهيم النظرية المختلفة وبالتالي انشاء أساس جديد يربط مابين المعلومات النظرية والتصميم والتطبيق .

كما تتضمن في نهاية كل فصل تمارين بغية تسهيل فهم الاسس

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

النظريـة •

ان لنا وطيد الامل في أن يكون هذا الكتاب عونا ومرشـدا لشبابنا المهندس المثقف أمل الوطن ومنبع قدراته ولايسعنـا الا الا أن أقدم الشكر العميق لكل الذين ساهموآ معي في اخراج هـذا الكتاب وأخص بالذكر الاخ المهندس رياض الفرا الذي كان لمساهمته الاثر الكبير في اخراج هذا الكتاب •

المؤلف

الدكتور المهندس

نـديـم مخيـبـر

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الفصل الأول

- مفاهيم أساسية حول النقل الحراري بالتوصيل :
" Basic Concepts of conduction"

مقدمة

يعرف علم انتقال الحرارة (Heat Transfer Science) بأنه علم الاجراءات التلقائية الغير عكسية الخاصة بانتشار الحرارة في الفراغ .

ان انتشار الحرارة في وسط ما تعني حدوث تغييرفي الطاقة الداخلية لجزئيات الوسط المعتبر ، علما بأن عملية الانتشار الحراري يمكن أن تتم بثلاثة أشكال هي :

- التوصيل (Conduction) ، الحمل (Convection) والاشعاع الحراري (Thermal Radiation) .

يمكن أن نعرف عملية انتقال الحرارة بالتوصيل على أنها اجراء نقل الحرارة في الاجسام (أو فيما بينها) عن طريق حركة جزئياتها تبعا لتغيير درجة الحرارة في الجسم ، أما عملية انتقال الحرارة بالحمل فتتم فقط عند وجود وسط مائع (Fluid Medium) هذا

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الشرط ينطبق على حالة نقل الحرارة الحاصلة نتيجة حركة كتل من الغاز أو السائل من مناطق ذات درجة حرارة ما الى مناطق ذات درجة حرارة أخرى ، أي أن انتقال الحرارة بالحمل متلازم مع حركة الوسط نفسه مع ملاحظة أن حركة الوسط يمكن أن تكون حرة أو قسرية وعندئذ فان انتقال الحرارة في الحالة الاولى يتم بالحمل الحر(Free Co- nvection..) أما في الحالة الثانية فيتم بالحمل القسري(Forced- Conveetion.) .

ان الحركة الحرة للوسط تنجم من وجود فروقات في كثافة الغاز او السائل نتيجة عدم تساوي درجة الحرارة في كامل كتلة الغاز أو السائل . أما الحركة القسرية فتتم من طريق مؤثر خارجي .

تعرف ظاهرة الاشعاع الحراري بأنها عملية انتشار الحرارة عن طريق الموجات الكهرطيسية (Electro-Magnetic Waves....)حيث تتحول الطاقة الداخلية للجسم المشع الى طاقة اشعاعية ومن ثم تنتشر هذه الموجات في الفراغ ليقوم جسم ثاني بامتصاص هذه القدرة ،أي أن عملية التبادل الحراري بالاشعاع فيما بين جسمين تتم بثلاثة مراحل .

غالبا ماتتم عملية انتقال الحرارة في الطبيعة والتطبيقات الهندسية بشكل مختلط (Complex Heat Transfer...) مابين الاشكال الاساسية الثلاث لانتقال الحرارة ، التوصيل ، الحمل والاشعاع .

يمكن أن تلحظ عملية النقل الحراري بالتوصيل في الاجسام الصلبة فقط ، كما يمكن أن تترافق عملية انتقال الحرارة بالحمل مع

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

النقل بالتوصيل .

تصادف في الحياة العملية والتطبيقات الهندسية حالة الانتقال الحراري مابين موائع مختلفة يفصل فيما بينهاجدار صلب،

ان عملية انتقال الحرارة من مائع ساخن الى آخر بارد مفصولين عن بعضهما بجدار صلب تتم بالطرق الثلاثة لانتقال الحرارة المنوه عنها آنفا وكمثال على ذلك يمكن أن نأخذ أنابيب تسخين المياه في مرجل بخاري حيث تنتقل الحرارة من نواتج الاحتراقالغازية الى السطح الخارجي للانابيب عن طريق كل من التوصيل والحمل والاشعاع ومن ثم تنتقل الحرارة بالتوصيل عبر طبقة الرمادالرقيقة المحيطة بالانبوب وعبر جدار الانبوب نفسه .

أخيرا فان الحرارة تنتقل من السطح الداخلي للانبوب الى الماء بواسطة الحمل والتوصيل .

يمكن أن تحدث عملية النقل الحراري في أوساط مادية مختلفة سواء كانت هذه الاوساط نقية أو مختلطة ، كما يمكن أن تتم عملية النقل هذه عند حدوث أو عدم حدوث تغير طوري في الوسط العامل .

ان العديدمن اجراءات انتقال الحرارة تترافق مع حدوث انتقال في الكتل وكمثال على ذلك يمكن أن نأخذ ظاهرة تبخر الماء حيث أن الماء الساخن يطرح حرارةالى المزيج البخاري - الهوائيالكائن

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

فوقه بشكل مترافق مع عملية تشكل البخار أي أن انتقال جزئيات الماء المتبخرة يتم بنتيجة التأثير المتبادل بين جزئيات الماء الساخن من جهة وبنتيجة ظاهرة الحمل من جهة أخرى .

يمكن أن نميز وجود أوساط مادية متجانسة (Homogeneous - Media..) وأوساط مادية غير متجانسة (Hetergeneous Media..) في الاوساط المادية المتجانسة تكون الخواص الفيزيائية متماثلة في مختلف نقاط الوسط وذلك عند تساوي قيمتي الضغط ودرجة الحرارة بالنسبة لكافة الحجم العامل أما في الاوساط المادية الغير متجانسة فان الخواص الفيزيائية تختلف من نقطة الى أخرى .

يمكننا أيضا التمييز بين وسط ايزوتروبي (Isotropic Media.) ووسط غير ايزوتروبي (Anisotropic Media.) .

ان الخواص الفيزيائية لوسط ايزوتروبي وفي أية نقطة من من هذا الوسط لاترتبط بالاتجاه وعلى العكس من ذلك ففي نقطة معينة من وسط غير ايزوتروبي تتغير الخواص تبعا للاتجاه المعتبر .

في التطبيقات العملية غالبا مانواجه مسألة انتقال الحرارة في وسط ايزوتروبي ، لذلك فاننا سنركز على دراسة هذا النوع من المسائل .

تقسم الاوساط المادية من حيث حالتها الطورية الى أوساط مستمرة أحادية الطور (Single-Phase Continuous Media..) وأوساط

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مستمرة متعددة الاطوار(Multiphase Continuous Media..) ان خواص وسط مادي احادي الطور يتألف من مادة نقية أو من مزيج من المواد تتغير في كامل الحجم بشكل مستمر تبعا للشروط المطبقة ، أما خواص وسط متعدد الاطوار يتألف من عدة أجزاء وحيدة الطور فانها تتغير بشكل قفزات عند السطوح الفاصلة لهذه الاطوار علما بان انتقال الحرارة في كل من الاوساط الاحادية والمتعددة الاطوار يمكن أن يتم بالاشكال المختلفة لانتقال الحرارة .

ان موضوع هذا البحث هو دراسة القوانين المنظمة لعملية انتقال الحرارة بشكليها البسيط والمركب في الأوساط المادية المختلفة .

١-١: حقل درجات الحرارة (Temperature Field..) :

تعرف ظاهرة التوصيل الحراري على أنها عملية انتشار الطاقة الحرارية من طريق التماس المباشر بين جزيئات الجسم ذات درجات الحرارة المختلفة حيث يتم هذا الانتشار نتيجة حركة الجسيمات الميكرونية للمادة ، في الغازات تتأثر عملية انتقال الحرارة بالتوصيل بمدى انتشار ذرات وجزيئات هذا الغاز، اما انتقال الحرارة في المعادن فيتأثر بشكل رئيسي بامكانية انتشار الالكترونات الحرة حيث يبقى تأثير الاهتزازات المرنة لـ عناصر الشبكة البلورية أقل أهمية .

ومن الجدير بالذكر أن انتقال الحرارة بالتوصيل الصافي يمكن أن يحدث في السوائل والغازات فقط عندما يصبح من غير الممكن

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

انتقال الحرارة عن طريق الحمل(عندما يكون الناشل أو الغازساكنا)

بشكل عام تتغيير الخواص الفيزيائية لوسط فيزيائيتبعـــا للمكان والزمان كماان اجراء توصيل الحرارة مثل ماهي عليه الاشـــكال الاخرى لانتقال الحرارة يمكن أن يتم فقط عند تمتع النقاط المختلفة لجسم ما (أو سلسلة من الاجسام) بدرجات حرارة مختلفة .

غالبا ماتترافق عملية التوصيل الحراري في الاجسام الصلبة بتغيرات في درجات الحرارة تبعا للتغيرات المكانية والزمنية وقد قادت الابحاث التحليلية الخاصة بموضوع توصيل الحرارة الى دراسة تغيرات درجة الحرارة تبعا للزمان والمكان ، أي حسب المعادلة :

$$t=f(x,y,z,\tau) \qquad (1-1)$$

المعادلة (١ - ١) هي التعبير الرياضي للحقل الحراري ويمكن بواسطتها معرفة درجة الحرارة في أي نقطة من الوسط المدروس وفي أي لحظة زمنية .

يوجد نوعين من الحقول الحرارية :

الحقل الحراري المستقر Steady-State Tempreature Field.

والحقل الحراري العابر (الغيرمستقر)

Transient Temperature Field...

والمعادلة (١ - ١) تعد النوع الاعم من الحقول الحرارية

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

والذي تتغير درجة الحرارة فيه تبعا للزمن ومن نقطة الى أخرى .

أما في الحالة التي يتم فيها انتقال الحرارة دون أن تتغير درجة حرارة مختلف نقاط الجسم مع الزمن فيمكن عندئذ القول بأن الحقل الحراري هو من النوع المستقر وبالتالي تصبح درجة الحرارة تابعة للاحداثيات المكانية فقط حسب المعادلة :

$$t=f_1(x,y,Z) \; ; \; \frac{\partial t}{\partial \tau} = 0 \qquad (1-2)$$

ان الحقل الحراري المعبر عنه بالمعادلة (1-1) والمعادلة (1-2) هو حقل ثلاثي الابعاد (فراغي) (Three-Dimensional Field.) حيث أن درجة الحرارة تتبع ثلاثة احداثيات .

أما اذا كانت درجة الحرارة تتبع لاحداثيين فقط فالحقل الحراري يصبح ثنائي البعد ويمكن وصفه بالمعادلة التالية :

$$t=f_2(x,y,\tau) \; ; \; \frac{\partial t}{\partial Z} = 0 \qquad (1-3)$$

وبشكل مشابه فعندما تكون درجة الحرارة تابعة لاحداثي واحد فالحقل يصبح أحادي البعد (One-Dimensional Field...) ويوصف بالمعادلة :

$$t=f_3(x,\tau) \; ; \; \frac{\partial t}{\partial y} = \frac{\partial t}{\partial Z} = 0 \qquad (1-4)$$

نأخذ معادلة الحقل الحراري الاحادي البعد والمستقر شكلا بسيطا كما يلي (One-Dimensional Steady One-Dimension Steady-State Temperature Field..).

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$t = f_4(x) \; ; \; \frac{\partial t}{\partial \tau} = 0 \; ; \frac{\partial t}{\partial y} = 0 \; ; \frac{\partial t}{\partial z} = 0 \qquad (1\text{-}5)$$

١-٢- تدرج درجة الحرارة (Temperature Gradient..):

اذا قمنا بوصل جميع نقاط الجسم التي تتمتع بدرجة حرارة واحدة فاننا نحصل على سطح متماثل من حيث درجة الحرارة يصطلح على تسميته بالسطح الايزوترمي(Isothermic Surface...) .

من هنا يمكن تعريف السطح الايزوترمي لجسم بانه المحل الهندسي لمختلف النقاط الكائنة في الحقل الحراري ذات درجات الحرارة المتطابقة، وباعتبار أنه لايمكن لاية نقطة من السطح الايزوترمي أن تتمتع في آن واحد بدرجتي حرارة مختلفتين ،لذا فانه لايمكن حدوث تقاطع فيما بين السطوح الايزوترمية .

يمكن أن يكون السطح الايزوترمي مغلقا أو مفتوحا ،وفي الحالة الاولى فان السطح الايزوترمي يكون محتوى بكامله ضمن الجسم أما في الحالة الثانية فان حدود السطح الايزوترمي تنتهي على سطح الجسم نفسه .

لندرس سطحين ايزوترميين قريبين من بعضهما درجة حرارتهما t ، $t+\Delta t$ (الشكل ١ – ١) ، عند الانتقال من النقطة A يبرز لدينا أن شدة تغير درجة الحرارة في اتجاهات مختلفة غير متساوي ، أما اذا كانت الازاحة تحدث على السطح الايزوترمي فانه لايظهر لدينا أي تغيير في درجة الحرارة .

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

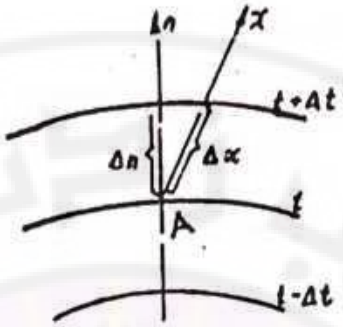


Fig. 1-1. Isotherms

الشكل(1-1) السطوح الايزوترمية وخطوط
تـدفـــق الحـــــرارة

اذا كانت الازاحة باتجاه ما X فانه يظهرلدينا تغيير في درجة الحرارة ،ويظهرأكبر تغيرفي درجة الحرارة بواحدة الطول في اتجاه ناظمي على السطح الايزوترمي .

الحد الذي يمثل نسبة تغير درجة الحرارة Δt الى المسافة العمودية الفاصلة بين سطحين ايزوترميين Δn عندماتنتهي Δn الى الصفر يسمى بتدرج درجة الحرارة (Temperature Gradient..) أي:

$$\text{grad } t = \text{Lim} \left| \frac{\Delta t}{\Delta n} \right|_{\Delta n \to 0} = \frac{\partial t}{\partial n} \left[\frac{C^o}{m} \right] \qquad (1\text{-}6)$$

ومنه فان تدرج درجة الحرارة عبارة عن شعاع يأخذمنحى ناظمي على السطح الايزوترمي ويعتبر هذا الشعاع موجبا عندمايؤخذ باتجاه تزايد درجة الحرارة ونحصل على هذا الشعاع باشتقاق درجة الحرارة بالنسبة للناظم n .

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

يعبر عن الشعاع grad t بالمعادلة:

$$\text{grad } t = \vec{n}_o \frac{\partial t}{\partial n} \qquad (1\text{-}6')$$

حيث: $\vec{n}_o$ = شعاع الواحدة و $\frac{\partial t}{\partial n}$ = مشتق درجة الحرارة باتجاه الناظم n .

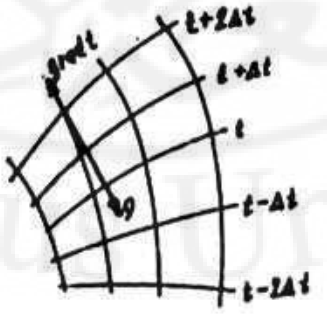
ان قيمة التدرج $\frac{\partial t}{\partial n}$ تتغير بالنسبة لنقاط السطح الايزوترمي الواحد حيث تزداد القيمة عند نقصان المسافة ∂n الواصلة بين سطحين متجاورين، بأسقاط الشعاع grad t على المحاور الاحداثية ox , oy , oz نحصل على :

$$\begin{cases} (\text{grad } t)_x = \frac{\partial t}{\partial n}.\text{Cos}(\hat{n,x}) = \frac{\partial t}{\partial x} \\ (\text{grad } t)_y = \frac{\partial t}{\partial n}.\text{Cos}(\hat{n,y}) = \frac{\partial t}{\partial y} \\ (\text{grad } t)_z = \frac{\partial t}{\partial n}.\text{Cos}(\hat{n,z}) = \frac{\partial t}{\partial z} \end{cases} \qquad (1\text{-}7)$$

١-٣ القانون الاساسي للتوصيل الحراري (قانون فوريه):

-(FOURIER'S LAW)....

ان انتشار الحرارة يتطلب وجود توزيع غير منتظم في درجات الحرارة ضمن الوسط المعتبر وهذا يعني أن عملية انتقال الحرارة



الشكل (1-2) السطوح الايزوترمية وخطوط تدفق الحرارة

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

بالتوصيل تتطلب وجود تدرج لدرجات الحرارة ذو قيمة أكبر من الصفر وذلك في مختلف نقاط الجسم ، طبقا لقانون فوريه فان كمية الحرارة dQ_τ التي تعبر سطح عنصري dF من سطح ايزوترمي خلال فترة زمنية $d\tau$ تتناسب مع تدرج درجة الحرارة $\frac{\partial t}{\partial n}$.

يعبر عن هذا القانون رياضيا بالمعادلة :

$$dQ_\tau = -\lambda . \frac{\partial t}{\partial n} . dF . d\tau \qquad (1-8)$$

ان عامل التناسب λ في المعادلة (1-8) قدتم حسابه تجريبيا وهو يعبر عن خاصية فيزيائية للمادة المعتبرة .

يسمى هذا المعامل بمعامل التوصيل الحراري (Thermal Conductivity) ويحدد مدى امكانية المادة لتوصيل الحرارة ، تسمى كمية الحرارة المنتقلة عبر واحدة السطح من سطح ايزوترمي بواحدة الزمن :

$$q = \frac{dQ_\tau}{dF . d\tau} \quad , \quad \left[W/m^2\right]$$

بمعدل تدفق الحرارة والتي يعبر عنها بشعاع يحدد بالمعادلة :

$$\vec{q} = \vec{n}_o . \lambda . \frac{\partial t}{\partial n} \qquad (1-9)$$

يعامد الشعاع $\vec{q}$ (معدل تدفق الحرارة) (Rate Of Heat Flow...) السطح الايزوترمي ويأخذ اشارة موجبة في اتجاه نقصان درجة الحرارة

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

وبما أن الحرارة دائما تتدفق من المناطق الاسخن في الجسم الى المناطق الباردة بالتالي فان الاشعة $\bar{q}$ و grad t تمتد على نفس المسار وبشكل متعاكس وهذا يفسر الاشارة السالبة في الطرف الايمن من المعادلتين (1-8)و(1-9) .

تسمى الخطوط التي يتطابق منحى تماساتها في كل نقطة مع اتجاه الشعاع $\bar{q}$ بخطوط التدفق الحراري(Heat Flow Lines...)حيث تتعامد خطوط التدفق هذه مع السطح الايزوترمي (الشكل 2-1) .

تكتب المعادلة التي تعطي قيمة معدل التدفقالحراري $[w/m^2]$ بالشكل :

$$q = -\lambda . \frac{\partial t}{\partial n} \qquad (1-10)$$

تمت البرهنة على صحة قانون فورييه تجريبيالذافانهيمكن الاخذ بالمعادلة (1-8) كما هو الحال أيضا بالنسبة للمعادلة (1-9) على أنها صيغة رياضية لقانون التوصيل الاساسي و هذه الصيغة وضعت على أساس أن معدل التدفق الحراري يتناسب طردا مع تدرج درجة الحرارة .

ان كمية الحرارة التي تعبر سطحا ايزوترميا F خلال واحدة الزمن تدعى بالسيالة الحرارية (Heat Flux...) .

في الحالة التي تنعدم فيها مجموعة النقاط لسطح ايزوترمي

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

بتدرجات مختلفة لدرجة الحرارة فان كمية الحرارة التي تجتاز السطح الايزوترمي خلال واحدة الزمن تساوي :

$$Q = \int_F q \cdot dF = \quad (1\text{-}11)$$

$$= - \int_F \lambda \cdot \frac{\partial t}{\partial n} \cdot dF$$

حيث : dF سطح عنصري من السطح الايزوترمي Q السيالة الحرارية المنتقلة [Watts]

ان مجمل كمية الحرارة Q [j] التي عبرت سطحا ايزوترميا F خلال زمن τ تعطى بالمعادلة :

$$Q_\tau = - \int_0^\tau \int_F \lambda \cdot \frac{\partial t}{\partial n} \cdot dF \cdot d\tau \quad (1\text{-}12)$$

كما أن كمية الحرارة التي يمكن أن تنتقل عبر سطح عنصري dF_1 يصنع زاوية φ مع المستوى المماس للسطح الايزوترمي (الشكل 1-3) يمكن تحديدها بنفس الدستور (12-1) آخذين بعين الاعتبار أن :

$$q_1 = q \cdot \cos\varphi = \frac{dQ_\tau}{d\tau} \cdot \frac{1}{dF} \cos\varphi = \quad (1\text{-}1)$$

$$\frac{dQ_\tau}{d\tau} \quad \frac{1}{dF_1}$$

بما أن $dF = dF_1 \cdot \cos\varphi$ هو مسقط السطح dF_1 على السطح الايزوترمي

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner



الشكل(3 ـ 1) حساب السيالة الحرارية

لـ ا فـان كمية الحرارة المتدفقة عبر السطح العنصري dF_1 خلال زمن قدره $d\tau$ تحدد بـالمعادلة :

$$dQ_\tau = q_1 . dF_1 . d\tau = q . (dF_1 . \cos\varphi) d\tau = q . dF . d\tau \qquad (1-14)$$

كما أن الكمية الاجمالية للحرارة المتدفقة عبر السطح F_1 خلال الزمن τ تحدد بـالمعادلة :

$$Q_\tau = - \int_0^\tau \int_{F_1} \lambda \cdot \frac{\partial t}{\partial l} . dF_1 . d\tau \qquad (1-15)$$

نستنتج من المعادلة (1-13) أن المعدل الاعظمي للتدفق الحراري يحدث بشكل عمودي على السطح الايزوترمي .

اذا قمنا باسقاط الكمية q على المحاور الاحداثية ox ، oz,oy وبالتماثل مع المعادلات (1-7) نحصل على :

$$q_x = - \lambda . \frac{\partial t}{\partial x}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$(1\text{-}16) \quad \begin{cases} q_y = -\lambda \cdot \dfrac{\partial t}{\partial y} \\ q_z = -\lambda \cdot \dfrac{\partial t}{\partial z} \end{cases}$$

ان معدلات التدفق الحراري المعبر عنها بالمعادلات(1-16) ماهي الا مكونات شعاع يمثل معدل التدفق الحراري ويكتب بالشكل :

$$(1\text{-}17) \qquad \vec{q} = i\, q_x + j\, q_y + k\, q_z$$

مماسبق نستنتج أنه لتحديد كمية الحرارة المنتقلة عبر سطح جسم صلب فانه يلزم معرفة توزع الحقل الحراري ضمن هذا الجسم

لذلك فان المسألة الرئيسية الخاصة بتحليل نظرية توصيل الحرارة تكمن في تحديد حقل درجات الحرارة .

١ – ٤ – معامل التوصيل الحراري :

(Thrmal Conductivity Coefficient..)

كمانوهنا سابقافان معامل التوصيل الحراري عبارة عن بارامتر فيزيائي خاص بالمادة .

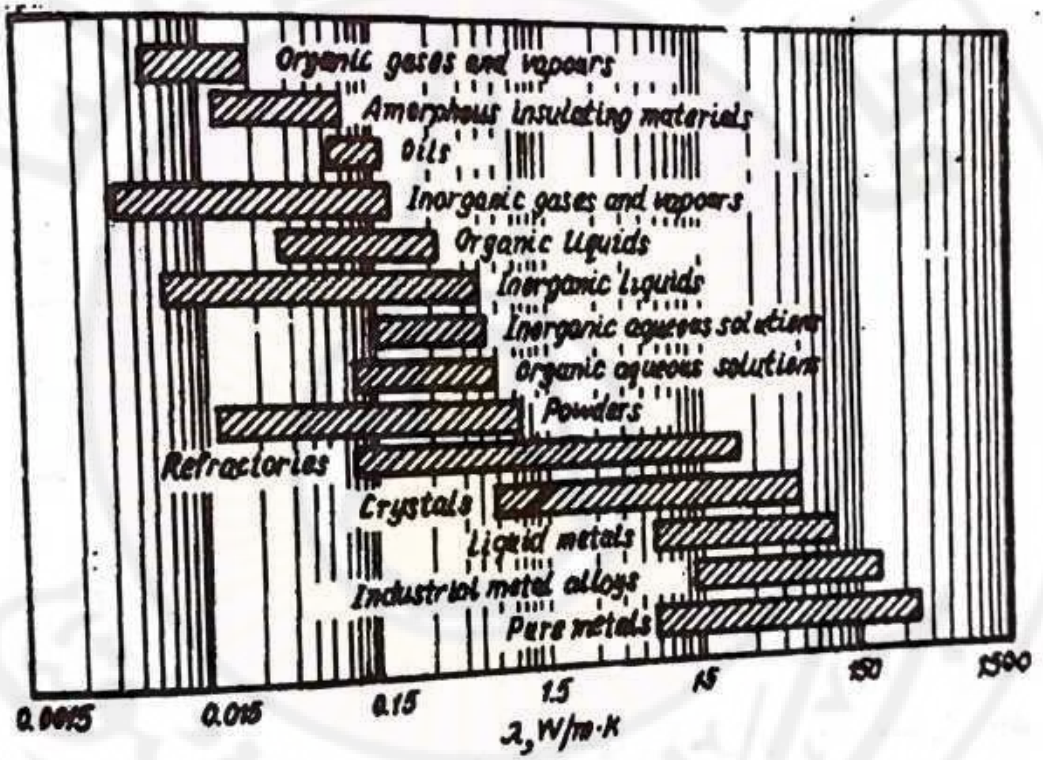
بشكل عام يتعلق معامل التوصيل الحراري بكل من درجة الحرارة ، الضغط وطبيعة المادة ، غالبا ماتقدر قيمة هذا المعامل بالنسبة للمواد المختلفة تجريبيا حيث تجرى قياسات لكل من معدل تدفق الحرارة (Rate Of Heat Flow...) وتدرج درجة الحرارة ضمن

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

المادة المدروسة .

يحدد معامل التوصيل الحراري $\lambda[W/m.K]$ من العلاقة

$$\lambda = \frac{|\vec{q}|}{|\text{grad } t|} \qquad (1\text{-}18)$$



الشكل (4 – 1) رتب معاملات التوصيل الحراري للمواد المختلفة

من المعادلة (1-8) ينتج أن القيمة العددية لمعامل التوصيل الحراري تساوي الى كمية الحرارة التي تعبر واحدة المساحة من سطح ايزوترمي خلال واحدة الزمن وعندما يكون تدرج درجة الحرارة مساويا للواحد .

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

طالما أن الاجسام يمكن أن تتمتع بدرجات حرارة مختلفة كما أن عدم انتظام توزيع درجات الحرارة ضمن الجسم الواحد خلال عملية الانتقال الحراري تبرر ضرورة معرفة العلاقة الكائنة بين معامل التوصيل الحراري من جهة ودرجة الحرارة من جهة أخرى .

لقد بينت التجارب وبدقة كافية للتطبيقات العملية أنه يمكن اعتماد العلاقة الخطية التالية والتي تعطي معامل التوصيل الحراري كتابع لدرجة الحرارة :

$$\lambda = \lambda_o [1 + b (t - t_o)] \qquad (1-19)$$

حيث :

λ_o = معامل التوصيلِ الحراري عنددرجةحرارة t_o

b = ثابت تجريبي ..

آـ معامل التوصيل الحراري للغازات :

طبقا للنظرية الحركية للمادة فان انتقال الحرارة بالتوصيل في الغازات عند فقط ودرجة حرارة نظاميين يحدث من خلال انتقال الطاقة الحركية للجزيئات نتيجة الحركات والاصطدامات العشوائية لهذه الجزيئات .

- يحدد معامل التوصيل الحراري للغازات بالعلاقة :

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$\lambda = \frac{1}{3} \cdot \bar{v} \cdot \bar{l} \cdot C_v \cdot \rho / 3 \qquad (1\text{-}20)$$

حيث :

$\bar{v}$ = السرعة الوسطية لجزيئات الغاز ،

$\bar{l}$ = المسافة الوسطية لانتقال جزيئة الغاز بين اصطدامين متتاليين .

C_v = الحرارة النوعية للغاز عند حجم ثابت .

ρ = كثافة الغاز .

عند ازدياد قيمة الضغط تزداد كثافة الغاز ρ بنفس المعدل بينما تنخفض قيمة $\bar{l}$ بتناسب عكسي ، لذا يبقى الجداء $\rho . \bar{l}$ ثابتا .

مما سبق ينتج أن معامل التوصيل الحراري لايتأثر بتغيرات الضغط اذا كانت هذه التغيرات تتم في المجال :

$$(2.66 \times 10^3 \longrightarrow 2 \times 10^9)\ P_a$$

ان السرعة الوسطية لجزيئات الغاز تتعلق بدرجة الحرارة وفقا للمعادلة التالية :

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{3 R_g . T}{M}}$$

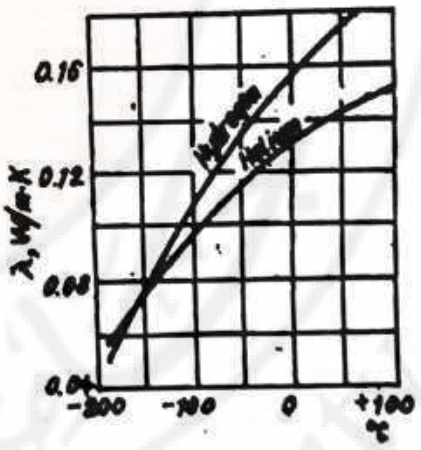
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

حيث :

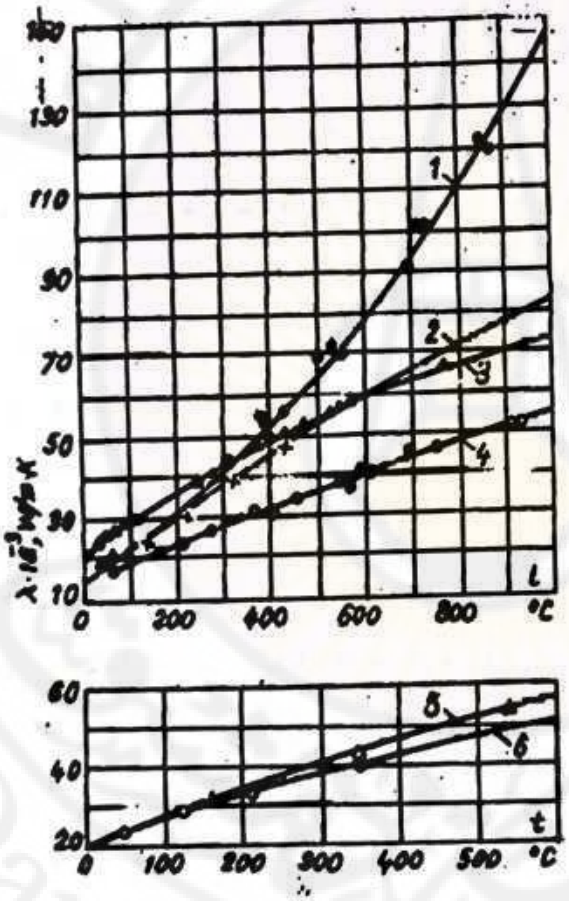
R_{μ} = 8314.2 [j/kmol.K] : ثابت الغاز العام .

μ : الوزن الجزيئي للغاز.

T [K] : درجة الحرارة المطلقة.



الشكل(6-1)معامل التوصيل الحراري لكل من الهيليوم والهيدروجين .



الشكل(5-1)معاملات التوصيل الحراري للغازات :١- بخار الماء ٢-ثاني اكسيد الكربون،٣- الهواء ٤-ارغون،٥-اكسجين ٦- آزوت .

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

كما أن السعة الحرارية للغازات تزداد مع زيادة درجة الحرارة وهذا يفسر زيادة معامل التوصيل الحراري مع زيادة درجة الحرارة .

يتراوح معامل التوصيل الحراري للغازات مابين $\lambda=0.006$ الى $\lambda = 0.6 \left[W/m.K\right]$.

يختلف كل من الهيليوم والهيدروجين عن الغازات الاخرى من حيث أن معامل توصيلهما الحراري أكبر من معامل توصيل بقية الغازات بنسبة خمسة الى عشرة أضعاف .

يوضح الشكل السابق (6-1) قيمة معامل التوصيل الحراري لكل من الهيليوم والهيدروجين بالتناسب مع درجة الحرارة .

ان الكتلة الجزيئية لكل من غازي الهيليوم والهيدروجين صغيرة مما يتيح سرعة وسطية عالية لجزيئاتهما وهذا بدوره يفسر كبر معامل توصيلهما الحراري .

ان قيمة معامل التوصيل الحراري لكل من بخار الماء والغازات الاخرى الغير كاملة تتعلق بالضغط المطبق وهذا يشكل فرقا جوهريا بالمقارنة مع الغازات الكاملة .

تجدر الاشارة الى أن معامل التوصيل الحراري لمزيج من الغازات لايمكن أن يحدد تحليليا بل تستخرج قيمته تجريبيا .

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

ب ـ معامل الانتقال الحراري للسوائل :

(Thermal Conductivity Of Liquids..)

يمكن تصور آلية انتشار الحرارة في السوائل على أنهـــا انتقال للطاقة من طريق الاهتزازات المرنة العشوائية للجزيئـــات واستنادا للفرضية السابقة يمكن البرهنة على صلاحية المعادلـــة التالية لحساب معامل التوصيل الحراري لغالبية السوائل :

$$\lambda = A. \frac{C_p \cdot \rho^{4/3}}{M^{1/3}} \qquad (1-21)$$

حيث :

C_p الحرارة النوعية للسائل عندضغط ثابت.

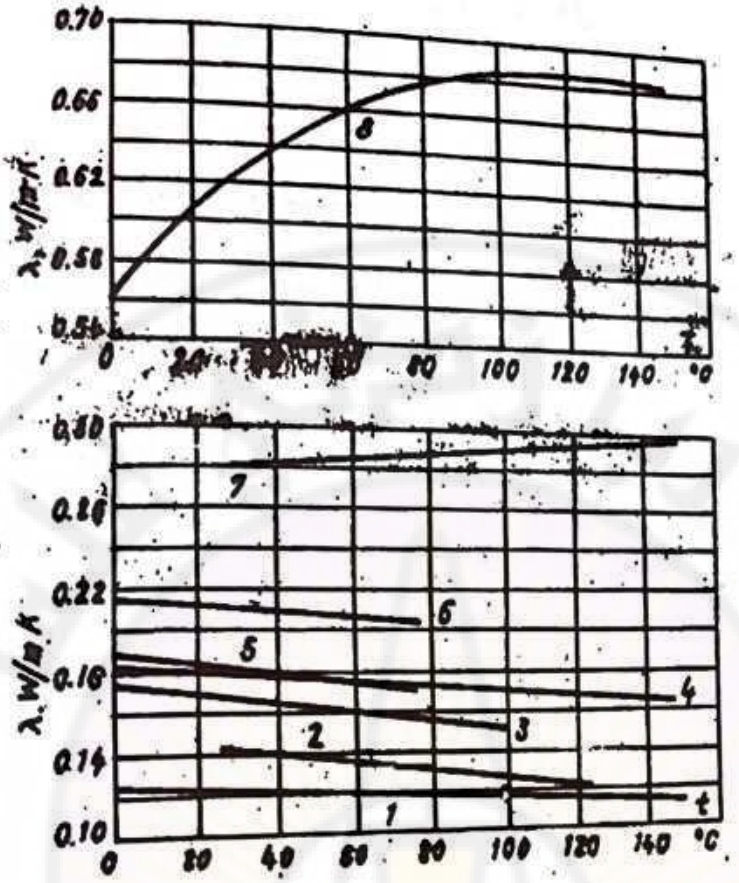
ρ الكثافة الحجمية للسائل .

M الوزن الجزيئي .

يعتمد العامل A على طبيعة السائل حيث يتناسب هـــذا العامل مع سرعة انتشار الموجات المرنة ضمن السائل المعتبر مـــع الاشارة الى أن قيمة الجداء $A.C_p$ لاتتغير بتغير درجة الحرارة .

بما أن كثافة السائل ρ تتناقص مع ارتفاع درجة الحرارة نستنتج من المعادلة (1-21) أن معامل التوصيل الحراري لسائل ذو وزن جزيئي ثابت ينخفض مع ارتفاع درجة الحرارة .

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner



الشكل(7-1) λ(t) لسوائل مختلفة :

١- فازلين ٢- بنزين ٣- اسيتون ٤- زيت الخروع ٥-ايتلين

٦- ميتيلين ٧- غليسيرين ٨- الماء .

وقد أكدت التجارب والقياسات العملية أن قيمة معامل التوصيل الحراري λ تنخفض مع ارتفاع درجة الحرارة ويستثنى من ذلك كل من الماء والغليسيرين اللذين يزداد معامل توصيلهما الحراري طردا مع زيادة درجة الحرارة (الشكل 7-1) .

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

تتراوح قيم معامل التوصيل الحراري لمختلف السوائل في المجال 0.07 الى $\frac{W}{m.K}$ 0.7 مع الاشارة الى أن زيادة الضغط تؤدي الى زيادة قيمة معامل التوصيل الحراري للسوائل .

جـ ـ معامل التوصيل الحراري للاجسام الصلبة :

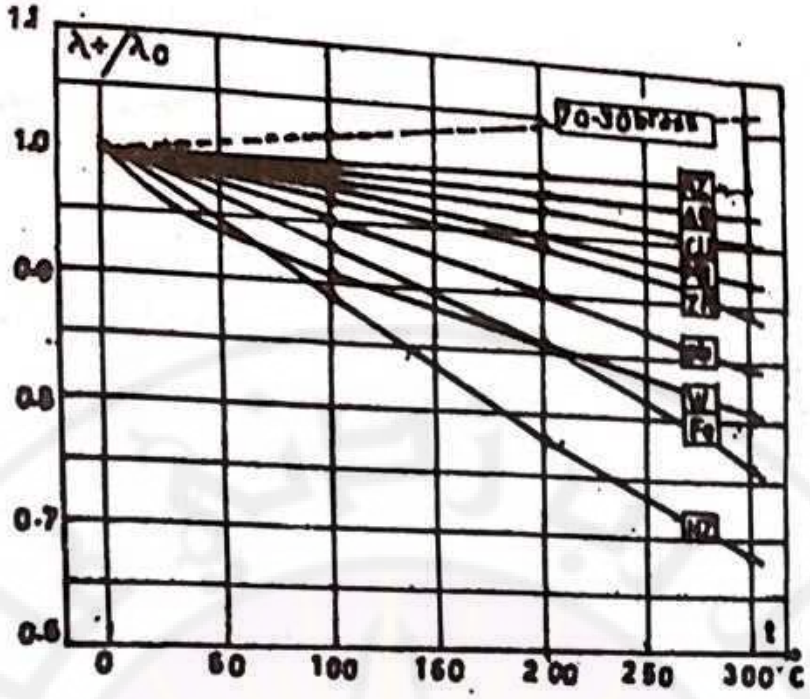
(Thermal Conductivity Of Solids..)

المعادن والخلائط :

تعتبر الالكترونات الحرة في المعادن العامل الاساسي في عملية توصيل الحرارة وتشبه عملية التوصيل هذه عملية التوصيل في غاز مثالي أحادي الذرة ،يمكن أن تتم عملية الانتقال الحراري أيضا من خلال الحركة الاهتزازية للذرات أو بواسطة الموجات الصوتية المرنة (...Elastic Sound Waves) ولكن تبقى الكمية المنتقلة بهذه الطرق قليلة الاهمية بالمقارنة مع الطاقة المنتقلة بواسطة الغاز الالكتروني .

ان حركة الالكترونات الحرة تؤدي الى حصول تساوي في درجات حرارة (...Temperature Equalization) نقاط الجسم المعدني المسخن أو المبرد حيث تنتقل هذه الالكترونات من المناطق ذات درجات الحرارة الاعلى الى المناطق ذات درجات الحرارة الاخفض وفي هذه الحالة تقوم الالكترونات بأخذ الطاقة من الذرات الواقعة في المنطقة الاولى (الاسخن) لتعطيها الى الذرات الواقعة في المنطقة الثانية (الابرد) .

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner



الشكل 8 - 1 مخطط يبين تغير معامل التوصيل الحراري لبعض المعادن النقية تبعا لدرجة الحرارة .

بما أن الالكترونات الحرة في المعادن تنقل كل من الحرارة والكهرباء فان معامل التوصيل الحراري لمعدن ما يتناسب مع الناقلية الكهربائية لهذا المعدن .

مع ارتفاع درجة الحرارة يتعاظم عدد الالكترونات المبعثرة بسبب عدم التجانس الحراري الناشيء في المعدن وهذا يؤدي الى حدوث ميلان في الخط البياني الممثل لكل من الناقلية الحرارية والكهربائية ، الشكل (8 - 1) .

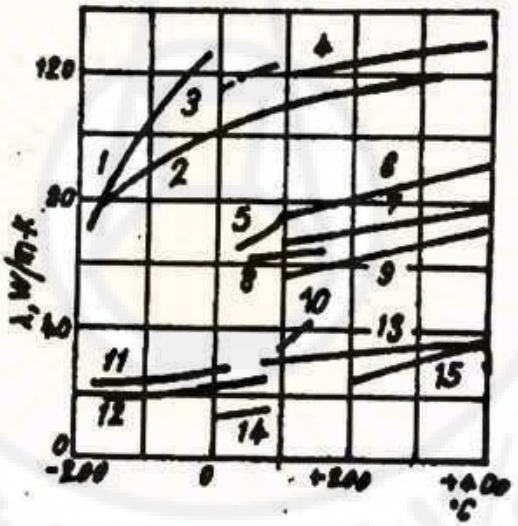
تنخفض الناقلية الحرارية للمعادن النقية عند وجود أي نوع من

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الشوائب وتفسر هذه الظاهرة بأنها نتيجة زيادة عدم التجانس البنيوي والذي يؤدي الى زيادة عدد الالكترونات المبعثرة وعلى سبيل المثال فان معامل التوصيل الحراري λ للنحاس النقي يساوي الى $396 \frac{W}{m.K}$ اما معامل التوصيل الحراري لنفس النحاس والمحتوي على كميات قليلة من الزرنيخ (Arsenic) فيساوي :

$$\lambda = 142 \frac{W}{m.K}$$

وعلى العكس من المعادن النقية فان الناقلية الحرارية للخلائط تزداد مع زيادة درجة الحرارة الشكل (9-1) .



الشكل (9 - 1) $\lambda(t)$ للخلائط المختلفة .

١- نحاس أصفر 18 ، ٢- نحاس أصفر 30 ، ٣- نحاس أصفر 12
٤- نيكروم ، ٥- برونز ٦ ، ٦ - برونز مانغانيزي ، ٧ - برونز البنادق
٨ - خليطة Zn-Sn ، ٩ - برونز فوسفوري ، ١٠ - المعدن الأبيض

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

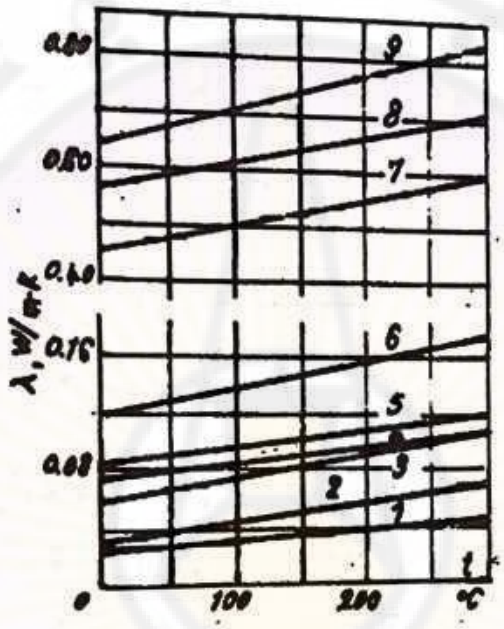
١١ ـ كونستنتان ، ١٢ ـ معدن مونيل ، ١٣ ـ

١٤ ـ فولاذ ـ نيكل ، ١٥ ـ سائل Zn-Sn .

- العوازل الصلبة (غير المعدنية) :

(Solid Dielectrics)..

عادة تزداد الناقلية الحرارية للعوازل مع زيادة درجة الحرارة كما هو مبين بالشكل (10-1) .



الشكل (10-1) $\lambda(t)$ لمواد البناء

ومواد العزل الحراري .

١ ـ هواء ، ٢ ـ صوف زجاجي ، ٣ ـ صوف خبثي ، ٤ ـ 85 % مغنيسيا

٥ ـ سوفيليت ، ٦ ـ بلوك مردوج ، ٧ ـ آجر أحمر ، ٨ ـ بلوك اسمنت خبثي ، ٩ ـ آجر مواقد .

وكقاعدة عامة فان المواد ذات الكثافة الحجمية العالية

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

تتميز بناقلية حرارية عالية حيث تعتمد هذه الناقلية ايضا على بنية المادة ، مساميتها ومحتواها من الرطوبة .

تتميز كثيرا من المواد الانشائية والمواد العازلة للحرارة (بلوك بيتون ، اسبيستوس) ببنية مسامية حيث يبقى تطبيق قانون فوريه اعتباري الى حد كبير بسبب ان وجود المسامات يجعل من غير الممكن تصور هذه المواد كوسط مستمر .

تعتمد الناقلية الحرارية بشكل كبير (Thermal Conductivity) لمادة حبيبية (بودرة) (Powdery Materials...) أو مادة مسامية (Poro-us Structure) على كثافتها الحجمية ρ ، وعلى سبيل المثال فالناقلية الحرارية لمادة الأسبيستوس تتزايد :

من 0.105 الى $0.248 \frac{W}{m.K}$

بشكل يتناسب مع تزايد الكثافة :

من 400 الى $800 \frac{Kg}{m^3}$

ويفسر هذا التغير من حقيقة كون معامل الناقلية الحرارية للهواء المالئ للمسامات اقل بكثير من قيمته بالنسبة للماده الصلبة نفسها .

كما ان الناقلية الحرارية لمادة مسامية تتأثر بشكل كبير بمحتوى المادة من الرطوبة ، حيث ان معامل الناقلية الحرارية للمادة الرطبة اكبر بشكل معتبر من معامل الناقلية الحرارية للمادة الجافة

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

وأكبر من معامل الناقلية الحرارية للماء بشكله الحر وعلى سبيل المثال فان معامل التوصيل الحراري للبلوك الجاف يساويالى $\lambda=0.35$ وللماء $\lambda= 0.60$ أما معامل التوصيل الحراري لبلوك رطب فيساوي الى :

$$\lambda \cong 1.0 \ \frac{W}{m \cdot K}$$

تفسر هذه الزيادة في قيمة معامل الناقلية الحرارية بانها نتيجة حصول انتقال للحرارة بواسطة كل من التوصيل والحمل ،حيث أن ظاهرة الحمل هنا تحدث بسبب حركة الماء ضمن الفراغات الشعرية (Capillary Movement Of Water...) (المسامات) الكائنة ضمن المادة المسامية .

تزداد الناقلية الحرارية لمادة حبيبية (Granular Materials) طردا مع زيادة درجة الحرارة وتفسر هذه الظاهرة بسبب كون زيادة درجة الحرارة تؤدي الى زيادة معامل التوصيل الحراري للوسط المالىء للفراغات الكائنة بين الحبيبات اضافة الى زيادة شدة انتقال الحرارة بالاشعاع (Intensification Of Radiant Heat-Transfer....) ضمن المادة الحبيبية .

تتراوح معاملات التوصيل الحراري لمواد الانشاءات ومواد العزل الحراري في المجال :

$$0.023 \text{ الى } 2.9 \ \frac{W}{m \cdot K}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

وبشكل عام تستعمل المواد ذات معامل التوصيل الحراري المنخفض (أقل من $0.25 \frac{W}{m \cdot K}$) كمواد عازلة للحرارة وتسمى مواد العزل الحراري (Heat-Insulating Materials.....) .

الجدول التالي يبين قيم معامل التوصيل الحراري لبعض المواد :

الجدول(١ – ١)قيم معامل التوصيل الحراري لبعض المواد

التسمية	ρ Kg/m^3	t C^o	λ W/m.K	C $Kj/Kg.K^o$	$\alpha X10^6$ m^3/Sec
صفائح الاسبستوس	770	30	0.1163	0.816	0.186
اسفلت	2110	20	0.6978	2.09	0.156
بيتون	2300	20	1.279	1.13	0.622
أرض رطبة	1700	17	0.657	2.01	0.192
فحم حجري	1400	20	0.186	1.31	0.103
قرميد أحمر	1800	0	0.768	0.879	–
قرميدناري(مقاوم للحرارة)	1900	0	0.814	0.837	0.514
جليد	920	0	2.25	2.26	1.08
صوف معدني	200	50	0.0465	0.921	0.253
رمل جاف	1500	20	0.326	0.795	2.74
صفائح فلينية	200	27	0.0419	1.884	0.117
مطاط صلب	1200	0	0.169	1.382	0.098
رمل سكب	1600	0	0.582	1.256	0.278
ميكا	290	20	0.582	0.879	0.289
ثلج	560		0.462	2.09	0.4
زجاج	2500	20	0.744	0.67	0.444

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

صوف زجاجي	200	0	0.037	0.67	0.278
خبث مرجلي	1000	0	0.29	0.754	–
صوف خبثي	250	100	0.0698	–	–
طينة كلسية	1600	0	0.689	0.837	–
المنيوم	2670	0	204	0.921	86.7
نحاس	8800	0	384	0.381	112.5
نيكل	9000	10	58	0.461	17.8
زئبق	13600	0	7.9	0.138	4.3
فضة	10500	0	418	0.234	170
فولاذ (نسبة الكربون 0.5 %)	7900	20	45	0.461	14.7
الماء	999.9	0	0.5513	4.212	0.131
هواء (جاف)	1.293	0	0.0244	1.005	18.8
اكسجين	1.429	0	0.0247	0.915	18.9
آزوت	1.25	0	0.0243	1.03	18.9
هيدروجين	0.089	0	0.1721	14.192	135
ثاني أكسيد الكربون	1.25	0	0.0233	1.039	17.9
الواح من خشب الدلب	800	20	0.207	1.758	0.147

١ – ٥ المعادلة التفاضلية للتوصيل الحراري :
(Differential Equation Of Conduction)

ترتبط دراسة أي ظاهرة فيزيائية بايجاد العلاقات الكائنة بين الكميات والنواحي المتعلقة بالظاهرة المدروسة .

في العمليات الفيزيائية المعقدة يصعب غالبا تحديد هذه

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

العلاقات وبشكل خاص عندما تتغير الكميات والخواص مع المكان والزمان .

في هذه الحالات من الافضل استعمال طرق الفيزياء الرياضية التي تطبق على جزء عنصري من المادة المدروسة وخلال فترة زمنية صغيرة جدا ، هذا الافتراض يسمح باهمال التغيرات الطفيفة الحاصلة في الكميات والمواصفات التي تصف اجراء ما مما يبسط عملية التحليل والدراسة .

ان الحجم العنصري dv والفترة الزمنية $d\tau$ المؤخذين بعين الاعتبار هما رياضيا كميتين لامتناهيتين في الصغر من هنا ومن وجهة النظر الفيزياوية يمكننا اعتبار صغرهما كاف لكي تهمل البنية !! المميزة للوسط وبحيث نعتبره كوسط مستمر .

تسمى العلاقة الناتجة بعد الاخذ بعين الاعتبار الفرضيات السابق ذكرها بالمعادلة التفاضلية العامة للاجراء .

بمكاملة المعادلة الناتجة نحصل على علاقة تحليلية تشمل قيم كامل مجال التكامل ولاية لحظة زمنية .

لكي نحلل مشاكل حقل درجات الحرارة يجب ايجاد المعادلة التفاضلية لاجراء التوصيل الحراري ، ولكي نسهل عملية استخراج المعادلة التفاضلية يمكننا أن نضع الافتراضات التالية :

آـ ان الوسط متجانس وايزوتروبي .

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

ب ـ الوسط ذو بارامترات فيزيائية ثابتة .

ج ـ ان التشوه الحاصل في الحجم المعتبر نتيجة تغيرات درجة الحرارة على درجة كافية من الصغر قياسا على الحجم نفسه .

د ـ ان المصادر الحرارية الداخلية (التي يمكن اعطاؤها بالعلاقة ($q_v = f(x,y,z,\tau)$ في الحالة العامة) موزعة بانتظام في الوسط .

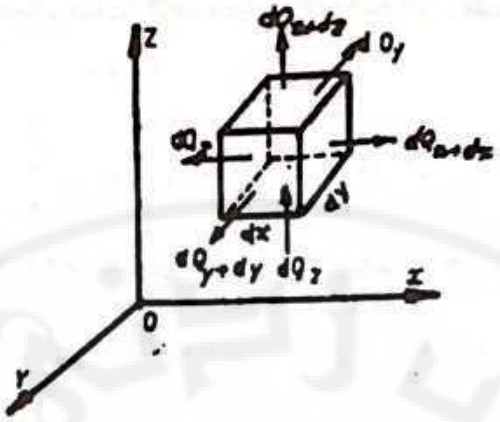
تعتمد طريقة استخراج المعادلة التفاضلية للتوصيل الحراري على قانون انحفاظ الطاقة والذي يمكن صياغته بالنسبة لحالة التناظر على الشكل التالي :

الفرق في كمية الحرارة الداخلة الى عنصر حجمي (متوازي سطوح) وكمية الحرارة الخارجة خلال فترة زمنية $d\tau$ تصرف على تغيير الطاقة الداخلية للحجم العنصري المذكور .

لنعتبر أنه لدينا حجم عنصري بشكل موشور سداسي أبعاده dz و dy و dx الشكل(11- 1) بحيث تكون أضلاعه موازية لمحاور الاحداثيات .

بما أن درجات حرارة سطوح الموشور تختلف في القيمة من سطح الى آخر ، هذا يؤدي الى حدوث انتقال للطاقة الحرارية في الاتجاهات الثلاثة لمحاور الاحداثيات .

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner



الشكل (1-11) استخراج المعادلة التفاضلية للتوصيل الحراري

عبر السطح العنصري dx.dy وخلال فترة زمنية $d\tau$ تمر كمية من الحرارة تتحدد وفق القانون فوريه بالشكل :

$$dQ_{z1} = -\lambda . dx.dy. \frac{\partial t}{\partial z}.d\tau \qquad (1-22)$$

عبر السطح المقابل وعلى مسافة قدرها dz من السطح الاول تطرح من الحجم العنصري كمية من الحرارة قدرها dQ_{z2} حيث :

$$dQ_{z2} = -\lambda .dx.dy.\frac{\partial}{\partial z}(t+\frac{\partial t}{\partial z}dz).d\tau \qquad (1-23)$$

حيث $(t+\frac{\partial t}{\partial z}.dz)$ درجة حرارة السطح المقابل و $\frac{\partial t}{\partial z}dz$ تعادل التغير الحاصل في درجة الحرارة باتجاه محور z .

يمكن وضع المعادلة الاخيرة بالشكل :

$$dQ_{z2} = -\lambda.dx.dy.d\tau \frac{\partial t}{\partial z} - \lambda.dx.dy.dz.d\tau \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \qquad (1-24)$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

ومنه تتحدد الزيادة الحاصلة في الطاقة الداخلية للموشور في الاتجاه z

بالمعادلة :

$$dQ_z = dQ_{z1} - dQ_{z2} = \lambda \ldots {}^{*}y.dz.d\tau. \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \qquad (1-25)$$

بنفس الطريقة نحصل على الزيادة الحاصلة في الطاقة الداخلية للموشور في الاتجاهين x و y :

$$dQ_y = \lambda .dx.dy.dz.d\tau. \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \qquad (1-26)$$

$$dQ_x = \lambda .dx.dy.dz.d\tau. \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \qquad (1-27)$$

وتكون الزيادة الكلية في الطاقة الداخلية للموشور :

$$dQ = dQ_x + dQ_y + dQ_z \qquad (1-28)$$

$$= \lambda .dx.dy.dz.d\tau \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}\right)$$

ومن ناحية أخرى وحسب قانون انحفاظ القدرة تعطى قيمة dQ للموشور من العلاقة :

$$dQ = dx.dy.dz.\rho.C. \frac{\partial t}{\partial \tau}.d\tau \qquad (1-29)$$

حيث :

$dx.dy.dz$ حجم الموشور .

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$dx.dy.dz.\rho$ كتلة الموشور .

C السعة الحرارية الكتلية .

$\frac{\partial t}{\partial \tau} \cdot d\tau$ تغير درجة الحرارة مع الزمن.

بمساواة المعادلتين (1-28) و(1-29) نحصل على:

$$\lambda.dx.dy.dz.d\tau \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}\right)$$

$$= dx.dy.dz.\rho.C.\frac{\partial t}{\partial \tau}.d\tau$$

ومنه:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\lambda}{C.\rho}\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}\right) \qquad (1-30)$$

تسمى القيمة :

$$\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}\right)$$

بمعامل لابلاس ويرمز له بـ $\nabla^2 t$

كما يسمى المقدار $a = \frac{\lambda}{C.\rho}$ بمعامل انتشار الحرارة ومنه يمكن كتابة العلاقة الاخيرة بالشكل :

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a\,\nabla^2 t \qquad (1-31)$$

تسمى المعادلة (1-30) بالمعادلة التفاضلية للتوصيل الحراري أو معادلة فوريه في حالة حقل درجات حرارة غير مستقر

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

في الابعاد مع عدم وجود مصادر حرارية داخلية .

تعتبر المعادلة الاخيرة أساسية عند دراسة مسألة تسخين أو تبريد جسم من طريق التوصيل الحراري حيث تبين العلاقة بين الزمن وتغير درجة الحرارة في أية نقطة من الجسم .

في حالة التوصيل الحراري مع وجود منبع حراري داخلي نأخذ المعادلة التفاضلية لهذا الاجراء الشكل :

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}\right) + \frac{q_v}{c.\rho} \qquad (1-32)$$

حيث :

q_v كمية الحرارة التي ينتجها المنبع الحراري الداخلي لواحدة حجم الجسم خلال وحدة الزمن $\frac{w}{m^3}$.

c السعة الحرارية الكتلية للمادة $\frac{J}{Kg.C^o}$.

ρ الكثافة $\frac{Kg}{m^3}$.

يمكن كتابة المعادلة (1-32) بالاحداثيات الاسطوانية كمايلي :

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a\left(\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial t}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}\right) + \frac{q_v}{c.\rho} \qquad (1-32')$$

حيث :

r شعاع نصف القطر .

φ الزاوية القطبية .

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

عند انتشار الحرارة باتجاه واحد يمكن عندئذ اختصار المعادلة (1-32) حيث تصبح :

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{q_v}{c.\rho} \qquad (1-33)$$

أخيرا وفي حالة حقل حراري مستقر وعند انتشار الحرارة باتجاه واحد تتحول المعادلة الاخيرة الى :

$$\frac{d^2 t}{dx^2} = -\frac{q_v}{\lambda} \qquad (1-33')$$

١- ٦ المدلول الفيزيائي للمعادلة التفاضلية للتوصيل الحراري والشروط الحدية :

تعتمد المعادلة التفاضلية للتوصيل الحراري على قوانين فيزيائية عامة ، لذا فهي تصف ظاهرة التوصيل في شكل عام، وبكلمة أخرى يمكن القول بأن المعادلة التفاضلية المستخرجة تصف الشكل العام لظاهرة التوصيل الحراري.

بالتالي لكي نصف اجراء ما من بين عدة اجراءات ولكي نعطيه وصفا رياضيا دقيقا من الضروري أن نعطي المعادلة التفاضلية مع وصف رياضي لكل المميزات الخاصة للاجراء المدروس (الشروط الحدية)

المعلومات الاضافية الواجب توفرها لنتمكن من حل المعادلة التفاضلية هي :

آ- الشروط الهندسية المتعلقة بشكل وحجم الجسم التي تجري

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

عملية التوصيل الحراري ضمنه .

ب ـ الشروط الفيزيائية والتي تعني الخواص الفيزيائية للجسم الصلب والوسط المحيط .

ج ـ الشروط الزمنية (الابتدائية) التي تصف توزع درجات الحرارة ضمن الجسم في اللحظة الابتدائية .

د ـ الشروط الحدية والتي تحدد التأثيرات المتبادلة بين الجسم المدروس والوسط المحيط .

من الواضح أن الشروط الهندسية تتحدد بمعرفة شكل وحجم الجسم الذي تتم عبره عملية التوصيل الحراري ، أما الشروط الفيزيائية فتتحدد عن طريق معرفة الخواص الفيزيائية للجسم المعتبر ، مثل λ , c , ρ .. الخ... اضافة الى القانون الناظم لتوزيع المصادر الحرارية الداخلية عند وجودها .

يجب أن تحدد الشروط الأبتدائية عند دراسة الحالات العابرة ومن ضمنها تحديد توزع درجات الحرارة ضمن الجسم الصلب عند اللحظة الأبتدائية المعتبرة والتي تتحدد رياضيا كمايلي :

عندما : $\tau=0$ $\Longleftarrow$ $t = f(x,y,z)$

اذا كان توزيع درجات الحرارة ضمن الجسم منتظما عندها تأخذ الشروط الابتدائية شكلا بسيطا كما يلي :

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$t = t_o = \text{Const.} \Longleftarrow \tau = 0$$

يمكن أن تعطى الشروط الحدية بعدة طرق :

آـ شروط حدية من النوع الاول :

شروط توزع درجات الحرارة على السطح الخارجي للجسم معطاة لكل لحظة زمنية :

$$t_s = f(x,y,z,\tau) \qquad (1\text{-}34)$$

حيث t_s هي درجة حرارة السطح و (x,y,z) هي احداثيات السطح .

تأخذ المعادلة (1-34) شكلا أبسط في الحالة الخاصة التي تبقى عندها درجة حرارة السطح ثابتة طوال فترة عملية انتقال الحرارة بالتوصيل ، ويعبر عن ذلك بالعبارة :

$$t_s = \text{Const.}$$

ب ـ شروط حدية من النوع الثاني :

في هذه الحالة تعطى معدلات تدفق الحرارة لكل نقطة من سطح الجسم ولكل لحظة زمنية والتي يعبر عنها رياضيا كالتالي:

$$q_d = f(x,y,z,t) \qquad (1\text{-}35)$$

حيث : q_d كثافة التدفق الحراري عبر سطح الجسم .

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

في الحالة البسيطة يبقى معدل تدفق الحرارة ثابتا مع الزمن ولكامل نقاط سطح الجسم :

$$q_d = q_o = Const. \qquad (1-36)$$

يتم انتقال الحرارة بهذه الطريقة على سبيل المثال في الأجسام المعدنية المسخنة بالافران ذات درجات الحرارة العالية .

جـ ـ شروط حدية من النوع الثالث :

في هذه الحالة تعطى درجة حرارة الوسط المحيط t_f كما يعطى القانون المنظم لانتقال الحرارة بين سطح الجسم والوسط المحيط .

يمكن وصف عملية انتقال الحرارة بين سطح الجسم والوسط المحيط بواسطة قانون نيوتن .

يعتبر اجراء التبادل الحراري بين سطح الجسم والوسط المحيط من الاجراءات المعقدة من حيث اعتماده على عدد كبير من المتغيرات .

بالاعتماد على قانون نيوتن فان كمية الحرارة المنتقلة من واحدة سطح الجسم خلال واحدة الزمن تتناسب مع الفرق بين درجة حرارة السطح t_s ودرجة حرارة الوسط المحيط t_F ، $(t_s > t_F)$:

$$q = \alpha (t_s - t_F) \qquad (1-37)$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

حيث α عبارة عن عامل تناسب يسمى معامل انتقال الحرارة (Heat-Transfer Coefficient.....) وواحدته $\left[\frac{W}{m^2 . K}\right]$.

يعتبر معامل انتقال الحرارة مقياسا لشدة الانتقال الحراري بين كل من سطح الجسم والوسط المحيط به وهو يساوي عدديا لكمية الحرارة المطروحة من(أو المكتسبة) واحدة السطح خلال واحدة الزمن عند فرق درجة حرارة مقداره درجة مئوية واحدة بين سطح الجسم والوسط المحيط .

تبعا لقانون انحفاظ الطاقة فان كمية الحرارة المطروحة من واحدة السطح خلال واحدة الزمن [المعادلة (37 - 1)] تساوي لكمية الحرارة المكتسبة عبر واحدة السطح بالتوصيل من الحجم الداخلي للجسم [المعادلة (1-10)] (يكون هذا صحيحا أيضا في حالة انتقال الحرارة بالاتجاه المعاكس) أي أن :

$$\alpha (t_s - t_F) = -\lambda \left(\frac{\partial t}{\partial n} \right)_w \qquad (1-38)$$

حيث n هي الناظم على سطح الجسم ، الرمز w يشير السطح الذي تطابق كل من درجة الحرارة مع تدرج درجة الحرارة على السطح (عند $n = 0$) .

تكتب الشروط الحدية من النوع الثالث كشكل أخير كمايلي:

$$\left(\frac{\partial t}{\partial n} \right)_w = - \frac{\alpha}{\lambda} (t_w - t_F) \qquad (1-39)$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

حيث تعبر فعلياً من قانون انخفاض الطاقة في الحالة الخاصة المتعلقة بسطح الجسم .

يعتمد معامل انتقال الحرارة α على متغيرات كثيرة ومع ذلك يمكن اعتباره في حالات كثيرة من العوامل الغير قابلة للتغير لذلك سوف نعتبره من العوامل الثابتة وذلك خلال حل المسائل المتعلقة بالتوصيل .

(d) تحدد الشروط الحدية من النوع الرابع عملية التوصيل الحراري بين جسم مفرد (أو عدة أجسام) وبين الوسط المحيط

يفترض أن تكون الاجسام على تماس تام (أي أن السطوح المتلامسة تتمتع بنفس درجة الحرارة) .

ضمن الشروط المعتبرة فان تدفق الحرارة عبر السطوح المتلامسة يكون متساويا ، أي أن :

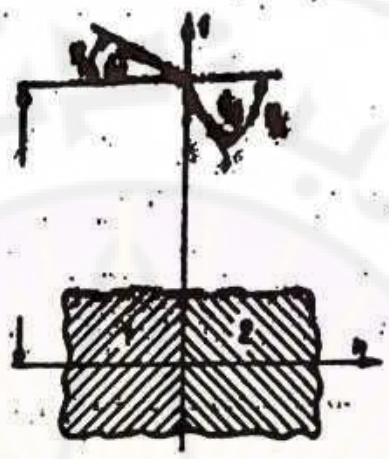
$$\lambda_1 \left(\frac{\partial t_1}{\partial n} \right)_w = \lambda_2 \left(\frac{\partial t_2}{\partial n} \right)_w \qquad (1\text{-}40)$$

في الحالات التي تدخل في تنظيمها الشروط الحدية من النوع الرابع فان معدل ميلان مماسات منحنيات درجة الحرارة في النقطة المتماسة لجسمين أو لجسم مع الوسط المحيط يعطي كمايلي (الشكل (1-12)) :

$$\frac{\tan \varphi_1}{\tan \varphi_2} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \text{Const.} \qquad (1\text{-}41)$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

باعتبار أنه في حالة التماس التام بين جسمين ، تتمتع سطوح التماس بدرجة حرارة واحدة فان خطوط التماس للسطح الفاصل تمر من نفس النقطة (الشكل 12-1) .



الشكل (12-1) الشروط الحدية من النوع الرابع

* * *

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الفصل الثاني

التوصيل الحراري في الحالة المستقرة

- Steady-State Coduction -

لندرس أولا الحالات التي تتفق مع الشروط الحدية من النوع الاول أي بمعرفة توزع درجات الحرارة على سطح جسم .

٢-١ التوصيل الحراري عبر جدار مستو:

-(Heat Transfer Through a Plain Wall.).

في الحالة المستقرة للتوصيل الحراري تبقى درجة حرارة الجسم ثابتة مع الزمن أي :

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = 0$$

حيث تأخذ المعادلة التفاضلية الشكل التالي :

$$a.\ \nabla^2 t + \frac{q_v}{C.\rho} = 0 \qquad (2-1)$$

$$\nabla^2 t + \frac{q_v}{\lambda} = 0 \qquad (2-1')$$

في حالة عدم وجود منابع حرارية داخلية أي ($q_v = 0$) عندها تأخذ المعادلة (2-1) شكلا أبسط :

$$\nabla^2 t = 0 \qquad (2-2)$$

أو

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = 0 \qquad (2-2')$$

يهتم هذا الفصل بدراسة انتقال الحرارة بالتوصيل عبر أجسام ذات شكل هندسي بسيط إضافة لدراسة الحالة التي توجد فيها منابع حرارية داخلية ($q_v \neq 0$) وحالة عدم وجود منابع حرارية داخلية ($q_v = 0$) .

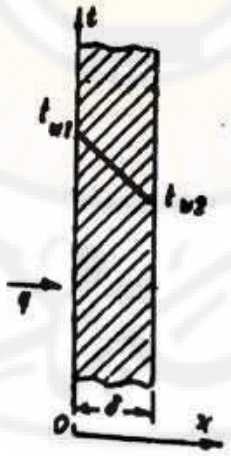
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

لندرس الان حالة انتقال الحرارة عبر جدار مستو مؤلف من طبقة واحدة مع ($q_v=0$) .

نعتبر جدارا متجانسا وايزوتروبيا ذو سماكة δ معامل توصيله الحراري ثابت ويساوي الى λ ولنفترض أن درجة حرارة السطحين الخارجيين ثابتة وتساوي إلى t_{W1} و t_{W2} .

تتغير درجة الحرارة ضمن الشروط المعطاة فقط في الاتجاه المعامد للجدار المستوي ، وباعتبار أن محور ox يأخذ التوجيه المبين في الشكل(1-2) عندها فان درجة الحرارة تبقى ثابتة في اتجاه محور oy ومحور oz أي أن :

$$\frac{\partial t}{\partial y} = \frac{\partial t}{\partial z} = 0$$



الشكل(1-2) جدار مستو متجانس

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

بالتالي فان درجة الحرارة ستكون تابعة للاحداثي X فقط .

تأخذ المعادلة التفاضلية للتوصيل في الحالة المعتبرة الشكل التالي :

$$\frac{d^2t}{dx^2} = 0 \qquad (2-3)$$

يمكن صياغة الشروط الحدية المتعلقة بهذه الحالة حسب الشكل التالي :

$$\begin{cases} \text{عندما : } X = 0 \Longleftarrow t = t_{w1} \\ \text{عندما : } X = \delta \Longleftarrow t = t_{w2} \end{cases} \qquad (2-4)$$

تعطى المعادلة (2-3) والشروط الحدية (2-4)وصفا رياضيا دقيقا للمسألة المدروسة ، حيث يمكن حل هذه المسألة فتبي ايجاد توزع درجات الحرارة ضمن الجدار ، أي تحديدالتابع $t = f(X)$ اضافة الى تحديد قانون تدفق الحرارة عبر الجدار خلال واحدة الزمن

بمكاملة المعادلة (2-3) مرتين يمكن ايجاد قانون توزع درجات الحرارة ضمن سماكة الجدار حيث :

يعطي التكامل الاول :

$$\frac{dt}{dX} = C_1 \qquad (2-5)$$

كما ينتج من التكامل الثاني:

$$t = C_1 . X + C_2 \qquad (2-6)$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

نستنتج من المعادلة (2-6) أنه عند معامل توصيلحراري ثابت فان التغير في درجة الحرارة ضمن الجدار يتم بشكل خطي .

يتم تحديد الثوابت C_1 و C_2 الداخلة في المعادلـــــة (2-6) من الشروط الحدية كمايلي :

عند: $X=0 \Longleftarrow t = t_{w1}$, $C_2 = t_{w1}$

عند: $X=\delta \Longleftarrow t = t_{w2}$, $C_1 = -\frac{t_{w1} - t_{w2}}{\delta}$

بالتعويض في قيمة الثوابت في المعادلة (2-6) نحصل على معادلة توزع درجات الحرارة في الجدار المستوي :

$$t = t_{w1} - \frac{t_{w1} - t_{w2}}{\delta} \cdot X \qquad (2-7)$$

باعتبار أن : $\Delta t = t - t_{w2}$ ، $\Delta t = t_{w1} - t_{w2}$ يمكننا كتابة المعادلة السابقة بشكل لابعدي كمايلي :

$$\Delta t = \Delta t_o - \frac{\Delta t_o}{\delta} \cdot X \qquad (2-8)$$

أو :

$$\frac{\Delta t}{\Delta t_o} = 1 - \frac{X}{\delta}$$

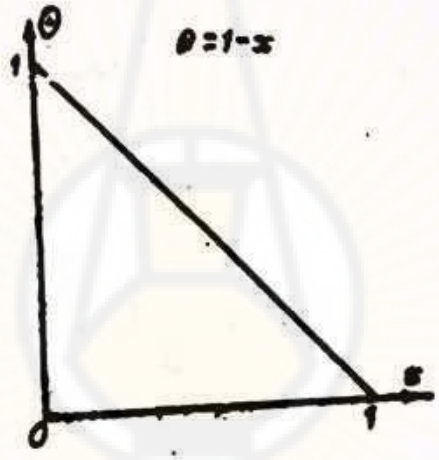
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

بوضع: $\theta = \frac{\Delta t}{\Delta t_o}$ ، $X = \frac{x}{\delta}$ نحصل على المعادلة :

$$\theta = 1 - X \qquad (2-8')$$

تعطي المعادلة الاخيرة (2-8') صورة واضحة من توزع درجات الحرارة على طول سماكة الجدار وبشكل خط مستقيم وذلك لاية قيمة معطاة لـ t_{w1} ، t_{w2} و δ الشكل(2-2) .

يعتبر استعمال المعادلات اللابعدية مناسبا في دراسة مسائل التوصيل الحراري .



الشكل(2-2) حقل درجات الحرارة اللابعدية في جدار مستو $\theta=1-X$

تتحدد كمية الحرارة المتدفقة عبر واحدة مساحة الجدار خلال واحدة الزمن وباتجاه محور ox استنادا الى قانون فوريه بالمعادلة التالية :

$$q = -\lambda . \frac{\partial t}{\partial x}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

بما أن : $\frac{\partial t}{\partial x} = C_1 = \frac{-(t_{w1} - t_{w2})}{\delta}$

وبعد تعويض هذه القيمة في التعبير الممثل لقانون فوريه نحصل على :

$$q = \frac{\lambda}{\delta} (t_{w1} - t_{w2}) \qquad (2-9)$$

من المعادلة (2-9) ينتج أن كمية الحرارة التي تعبر واحدة سطح الجدار خلال واحدة الزمن تتناسب طردا مع قيمة معامل التوصيل الحراري λ ومع فرق درجتي حرارة السطحين الخارجيين للجدار($t_{w1} - t_{w2}$) كما تتناسب عكسا مع سماكة الجدار δ (Wall Thickness...) .

ومن الواضح أن معدل تدفق الحرارة لايعتمد على القيم المطلقة لدرجات الحرارة بل يعتمد على فرق هذه الدرجات ($\Delta t = t_{w1} - t_{w2}$)(Temperature Difference...). تسمى النسبة $\frac{\lambda}{\delta} \left[\frac{W}{m^2.K}\right]$ بالناقلية الحرارية للجدار (Thermal Conductance Of The Wall) .

ويسمى مقلوبها $\frac{\delta}{\lambda} \left[\frac{m^2.K}{W}\right]$ بالمقاومة الحرارية للجدار (Thrmal Resistance Of The Wall...) .

تمثل النسبة الاخيرة مقدار هبوط قيمة درجة الحرارة على طول سماكة الجدار بالنسبة لواحدة معدل تدفق الحرارة .

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

نستطيع بسهولة حساب كمية الحرارة الاجمالية Q_τ المنتقلة عبر سطح الجدار خلال فترة زمنية τ وذلك عند معرفتنا لقيمة معدل تدفق الحرارة كمايلي :

$$Q_\tau = q \cdot F \cdot \tau = \frac{\lambda}{\delta} (t_{w1} - t_{w2}) \cdot F \cdot \tau \qquad (2-10)$$

من المعادلة (2-9) نجد أن :

$$\frac{t_{w1} - t_{w2}}{\delta} = \frac{q}{\lambda}$$

بالتعويض عن التعبير الاخير في المعادلة (2-7) (معادلة حقل درجات الحرارة) نحصل على :

$$t = t_{w1} - \frac{q}{\lambda} \cdot x \qquad (2-11)$$

من المعادلة (2-11) ينتج عند ثبات الشروط الاخرى أن معدل تدفق الحرارة يزداد بازدياد معدل هبوط درجة الحرارة .

أثناء استخراج المعادلتين (2-7)و(2-9) افترضنا أن معامل التوصيل الحراري λ يتمتع بقيمة ثابتة وهذا في الواقع مخالف للحقيقة اذ تتمتع λ بقيمة متغيرة .

لنعتبر الحالة التي يكون فيها معامل التوصيل الحراري λ تابعا لدرجة الحرارة فقط أي :

$$\lambda = \lambda(t)$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

لغالبية المواد يرتبط تغير معامل توصيل الحرارة تبعا لدرجة الحرارة بعلاقة خطية من الشكل :

$$\lambda = \lambda_o \ (1 + b.t \ )$$

حيث : λ_o هي معامل توصيل الحرارة للمادة المعتبرة عند درجة الحرارة $0\ C^o$ من قانون فوريه :

$$(a) \qquad q = -\lambda(t).\frac{dt}{dx} = -\lambda_o(1+b.t).\frac{dt}{dx}$$

بعد فصل المتحولات واجراء المكاملة فيما بين حدود التكامل من $x=0$ وحتى $x=\delta$ ومن t_{w1} حتى t_{w2} نحصل على :

$$(b) \qquad q.\delta = \lambda_o \left[1+b\ \frac{t_{w1}+t_{w2}}{2}\right].(t_{w1}+t_{w2})$$

يسمى المقدار $\lambda_o.(\ 1 + b\ \frac{t_{w1}+t_{w2}}{2})$ بالتوسط التكاملي لمعامل التوصيل الحراري(...Integral Mean Thermal Conductivity) حيث يمكن وضعه بالصيغة :

$$(2\text{-}12) \qquad \lambda_m = \frac{1}{t_{w1} - t_{w2}} \cdot \int_{t_{w2}}^{t_{w1}} \lambda(t).dt$$

مما سبق يمكن حساب معدل تدفق الحرارة $q\left[\frac{w}{m^2}\right]$ عبر سطح

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الجدار بالمعادلة التالية :

$$q = \frac{\lambda_m}{\delta} (t_{w1} \quad t_{w2}) \qquad (2\text{-}13)$$

ن المعادلة (2-13) ينتج أنه عندما ترتبط قيمة λ بقيمة درجة الحرارة فانه يمكن حساب معدل تدفق الحرارة q تقريبيا عن طريق حساب قيمة وسطية لـ λ بين درجتي الحرارة t_{w2}, t_{w1} حيث نعتبر عندها القيمة المحسوبة ثابتة على كامل المجال. $\lambda = Const.$.

للحصول على معادلة حقل درجات الحرارة نكامل المعادلة (a) بين $X=0$ وأية احداثية أخرى X وبين t_{w1} الى t حيث نحصل على المعادلة :

$$t = \sqrt{(\frac{1}{b} + t_{w1})^2 - \frac{2q.x}{\lambda o.b}} - \frac{1}{b} \qquad (2\text{-}14)$$

من المعادلة الاخيرة نرى أن تغير درجة الحرارة ضمن الجدار يتم بشكل غير خطي حيث يتبع هذا التغير منحنيا يعتمد شكله على قيمة واشارة العامل b .

٢-٢ التوصيل الحراري عبر جدار مستو مؤلف من n طبقة متجانسة (Heat Transfer Through Composite Plane Wall.)

لندرس حالة التوصيل الحراري عبر جدار مستوي مركب (Composite Plane Wall) يتألف من n طبقة متجانسة ، بالتتالي

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

أن التماس بين الطبقات تام وبالتالي تتمتع السطوح المتماسه بدرجات حرارة متساوية .

في الحالة المستقرة للتوصيل الحراري تتساوى كميات الحرارة التي تنتقل عبر أي سطح ايزوترمي من جدار متجانس أي أن :

$$\frac{\partial q}{\partial x} = 0$$

عند معرفتنا لدرجات حرارة السطوح الخارجية للجدار بالاضافة الى سماكة وقيمة معامل التوصيل الحراري لكل طبقة يمكننا وضع المعادلات التالية :

$$(a) \quad \begin{cases} q = \dfrac{\lambda_1}{\delta_1} (tw_1 - tw_2) \\ q = \dfrac{\lambda_2}{\delta_2} (tw_2 - tw_3) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ q = \dfrac{\lambda_n}{\delta_n} \left[tw_n - tw_{(n+1)} \right] \end{cases}$$

من المعادلات (a) يمكن تحديد فرق درجات الحرارة لكل طبقة ، بجمع هذه المعادلات طرفا الى طرف نحصل على :

$$t_{w_1} - t_{w_{(n+1)}} = q \left(\frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \cdots\cdots + \frac{\delta_n}{\lambda_n} \right)$$

ومنه نحصل على معدل تدفق الحرارة :

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$q = \frac{t_{w1} - t_{w(n+1)}}{\frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \cdots + \frac{\delta_n}{\lambda_n}} = \frac{t_{w1} - t_{w(n+1)}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{\delta_i}{\lambda_i}} \quad (2-15)$$

إن الوسط $\sum_{i=1}^{n} \frac{\delta_i}{\lambda_i}$ يساوي الى مجموع قيم المقاومات الحرارية لكل الطبقات المؤلفة للجدار (n طبقة) وتسمى بالمقاومة الحرارية الكلية لجدار مركب (Full Thermal Resistance Of Co- nduction Of The Compsite Wall) يمكن أن نتم مقارنة الجدار المركب غير جدار مستوي بسيط وجدار مستوي مركب من طبقة واحدة ذو معامل التوصيل الحراري المكافئ λ_{eq} (Equivalent Thermal Conductivity) .

يساوي هذا المعامل بالتعريف الى معامل التوصيل الحراري لجدار متجانس مؤلف من طبقة واحدة ذو سماكة قدرها Δ تساوي الى سماكة الجدار المركب (مجموع سماكات الطبقات) $\sum_{i=1}^{n} \delta_i$ ومقاومة حرارية مماثلة للمقاومة الحرارية للجدار المركب أي أن :

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} \delta_i}{\lambda_{eq}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta_i}{\lambda_i}$$

ومنه :

$$\lambda_{eq} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \delta_i}{\sum_{i=1}^{n} \frac{\delta_i}{\lambda_i}} \quad (2-16)$$

نستنتج من المعادلة (2-16) أن معامل التوصيل الحراري

Damascus University

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

المكافئ λ_{eq} (Equivalent Thermal Conductivity) لا يعتمد فقط على الخواص الفيزيائية والحرارية للطبقات فحسب بل يعتمد أيضا على سماكة هذه الطبقات .

تعطى درجة حرارة أي سطحين متلامسين لطبقتين متجاورتين بالمعادلات التالية :

$$\begin{cases} t_{w_2} = t_{w_1} - q\dfrac{\delta_1}{\lambda_1} \\ t_{w_3} = t_{w_1} - q\left(\dfrac{\delta_1}{\lambda_1} + \dfrac{\delta_2}{\lambda_2}\right) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ t_{w(i+1)} = t_{w_1} - q\sum_{i=1}^{i}\dfrac{\delta_i}{\lambda_1} \end{cases} \qquad (2\text{-}17)$$

تتغير درجة الحرارة ضمن كل طبقة حسب المعادلتين (2-7) او (2-14) كما يمكن تمثيل تغير درجة الحرارة (Temperature Profile) لجدار مركب خطا منكسرا بشكل عام .

يمكن أن نحصل على درجات الحرارة المجهولة بين طبقات الجدار بيانيا كما هو مبين في الشكل (3 -2) .

لهذا الغرض نقوم بتحديد درجات الحرارة المعلومة لدينا t_{w_1} ، t_{w_4} على محور العينات وبأية مقياس مناسب ونحدد قيم المقاومات الحرارية للطبقات حسب الترتيب على محور العينات .

من الشكل نجد :

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$\frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB} \Longrightarrow DE = \frac{BC}{AB} AD$$

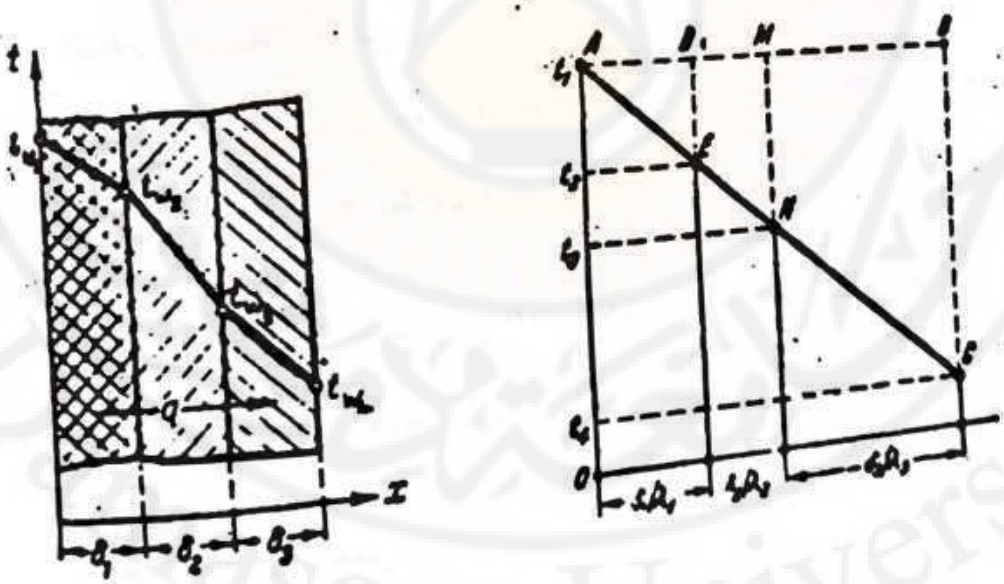
نبدل من كل بقيمته :

$$DE = \frac{t_{w_1} - t_{w_4}}{\frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \frac{\delta_3}{\lambda_3}} \cdot \frac{\delta_1}{\lambda_i}$$

$$DE = q.\frac{\delta_1}{\lambda_1} = t_{w_1} - t_{w_2}$$

وبنفس الطريقة نحصل على :

$$MN = q.\left(\frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2}\right) = t_{w_1} - t_{w_2}$$



الشكل (2-3)

حساب درجات الحرارة بيانيا

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٢-٣ انتقال الحرارة عبر جدار اسطواني ($q_v = 0$) :

(Heat Transfer Through a Cylindricalwall)

لنعتبر الحالة المستقرة للتوصيل الحراري عبر جـــدار اسطواني (انبوب) بقطر داخلي $d_1=2r_1$ وقطر خارجي $d_2=2r_2$. (الشكل 4 - 2) .

تكون درجات حرارة سطحي الجدار ثابتة وتساوي الى t_{w_1} و t_{w_2} .

نعتبر أيضا أن معامل التوصيل الحراري λ لمادة الجدار ثابت في مجال درجات الحرارة المعطى .

من الضروري أن نجد توزع درجات الحرارة ضمن الجـــدار الاسطواني اضافة الى معدل تدفق الحرارة عبره ، في هذه الحالـــة من المناسب كتابة المعادلة التفاضلية للتوصيل بصيغة الاحداثيـــات الاسطوانية :

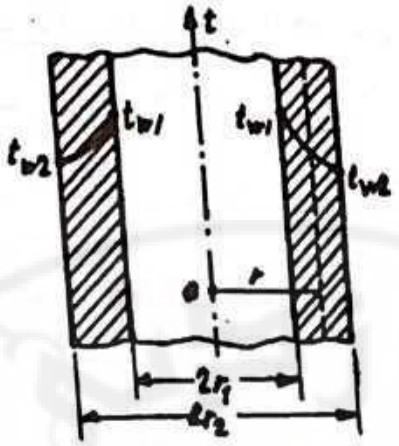
$$\nabla^2 t = \frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial t}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \qquad (2\text{-}18)$$

$$\frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = 0$$

مع الاخذ بعين الاعتبار أن محور z يتطابق مع محـــور الانبوب المدروس .

تتغير درجة الحرارة حسب الشروط المعطاة فقط في الاتجاه النصف قطري ، كما أن حقـل درجات الحرارة يعتبر من نوع أحـــادي

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner



الشكل (2-4) .

التوصيل الحراري عبر جدار اسطواني

البعد ، بالتالي :

$$\frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = 0 \quad , \quad \frac{\partial t}{\partial z} = 0 \qquad (a)$$

بالاضافة الى ماسبق وباعتبار أن درجات حرارة السطوح الخارجية والداخلية للجدار ثابتة ، فان السطوح الايزوترمية تكون بشكل اسطوانات متحدة المحاور ومنطبقة على محور الانبوب نفسه .

لذا فان قيمة درجة الحرارة لاتتغير مع الزاوية φ

أي أن :

$$\frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2} = 0 \quad , \quad \frac{\partial t}{\partial \varphi} = 0 \qquad (b)$$

مع الاخذ بعين الاعتبار كل من التعابير a و b تصبح المعادلة (2-18) على الشكل :

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$\frac{d^2t}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dt}{dr} = 0 \qquad (2-19)$$

تكتب الشروط الحدية بالشكل التالي :

$$\begin{cases} t = t_{w_1} \longleftarrow r = r_1 & \text{عندما :} \\ t = t_{w_2} \longleftarrow r = r_2 & \text{عندما :} \end{cases} \qquad (2-20)$$

بحل المعادلة (2-19) مع المعادلة (2-20) نحصل على حقل درجات الحرارة في جدار اسطواني.

بادخال المتحول الجديد:

$$U = \frac{dt}{dr} \qquad (a)$$

نحصل على :

$$\frac{d^2t}{dr^2} = \frac{du}{dr} \; ; \; \frac{1}{r} \cdot \frac{dt}{dr} = \frac{u}{r} \qquad (d)$$

بالتبديل عن (c)و (d) في المعادلة (2-19) نحصل على

$$\frac{du}{dr} + \frac{1}{r} \cdot u = 0 \qquad (2-21)$$

بمكاملة المعادلة (2-21) ينتج :

$$\ln u + \ln r = \ln C_1 \qquad (e)$$

بعد التخلص من اللوغاريتميات والعودة الى المتحولات الاصلية نحصل على :

$$dt = C_1 \cdot \frac{dr}{r} \qquad (f)$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

بالمكاملة ينتج :

$$t = C_1 . \ln r + C_2 \qquad (2\text{-}22)$$

يمكن تحديد قيمة كل من الثوابت C_2, C_1 فيما اذا بدلنا من الشروط الحدية في المعادلة (2-22) :

$$(g) \quad \begin{cases} t_{w_1} = C_1 . \ln r_1 + C_2 \text{ و } t=t_{w_1} \Longleftarrow r=r_1 & \text{عندما:} \\ t_{w_2} = C_1 . \ln r_2 + C_2 \text{ و } t=t_{w_2} \Longleftarrow r=r_2 & \text{عندما:} \end{cases}$$

بحل المعادلات (g) بين C_1 و C_2 نحصل على :

$$C_1 = \frac{t_{w_1} - t_{w_2}}{\ln \frac{r_1}{r_2}}$$

$$C_2 = t_{w_1} - (t_{w_1} - t_{w_2}) \cdot \frac{\ln r_1}{\ln \frac{r_1}{r_2}}$$

بالتبديل عن قيم C_1 و C_2 في المعادلة (2-22) نحصل على :

$$t = t_{w_1} - (t_{w_1} - t_{w_2}) \cdot \frac{\ln \frac{r}{r_1}}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$$

أو :

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$t = t_{w_1} - (t_{w_1} - t_{w_2}) \cdot \frac{\ln \frac{d}{d_1}}{\ln \frac{d_2}{d_1}} \qquad (2\text{-}23)$$

يأخذ التعبير المستخرج شكل معادلة منحني لوغاريتمي .

يفسر توزع درجات الحرارة بشكل منحني عبر جدار الاسطوانة كالتالـــي :

في حالة جدار مستوي فان معدل تدفق الحرارة q متســـاوي بالنسبة لكافة السطوح الايزوترمية وبالتالي فان تدرج درجة الحرارة يبقى ثابتا لكل السطوح الايزوترمية ، أما في حالة جدار اسطوانـــي فان معدل تدفق الحرارة عبر أية سطح ايزوترمي يعتمد على نصف القطر

يمكن ايجاد كمية الحرارة التي تعبر سطحا اســـطوانيـــا F خلال واحدة الزمن من قانون فوريه :

$$Q = -\lambda \cdot \frac{dt}{dr} \cdot F$$

بالتعويض عن قيمة تدرج درجة الحرارة المعطاة بالمعادلة (F) في قانون فوريه آخذين بعين الاعتبار أن $F = 2\pi.r.1$ نحصل على :

$$Q = \frac{2\pi\lambda 1(t_{w_1} - t_{w_2})}{\ln \frac{d_2}{d_1}} \qquad (2\text{-}24)$$

حيث واحدة Q معطاة بالواط (w) .

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

ينتج من المعادلة (2-24) أن كمية الحرارة التي تعبر جدار اسطواني خلال واحدة الزمن تتحدد تماما بالشروط الحدية المعطاة ولاتعتمد على نصف القطر .

يمكن أن ينسب تدفق الحرارة (2-24) أما لواحدة طول الانبوب أو لواحدة مساحة السطح الداخلي أوالخارجي عندها نستطيع الحصول على الدساتير الحسابية التالية الخاصة بمعدل تدفق الحرارة :

معدل تدفق الحرارة منسوبا لواحدة مساحة السطح الداخلي :

$$\frac{Q}{\pi . d_1 . 1} = q_1 = \frac{2\lambda_1 (t_{w_1} - t_{w_2})}{d_1 \cdot \ln \frac{d_2}{d_1}} \qquad (2-25)$$

معدل تدفق الحرارة منسوبا لواحدة مساحة السطح الخارجي :

$$\frac{Q}{\pi . d_2 . 1} = q_2 = \frac{2\lambda (t_{w_1} - t_{w_2})}{d_2 . \ln \frac{d_2}{d_1}} \qquad (2-26)$$

معدل تدفق الحرارة منسوبا لواحدة طول الانبوب ($\frac{w}{m}$) :

$$\frac{Q}{1} = q_1 = \frac{\pi (t_{w_1} - t_{w_2})}{\frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1}} \qquad (2-27)$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

يقاس معدل تدفق الحرارة المنسوب لواحدة طول الانبوب بالـ $\frac{W}{m}$ ويسمى بالمعدل الخطي لتدفق الحرارة (Linear Rate Of Heat Flow).

تبين المعادلة (2-27) عدم اعتماد معدل التدفق الخطي للحرارة على مساحة جدار الاسطوانة عند تمتع هذا الجدار بنسبة أقطار ثابتة $\frac{d_2}{d_1}$.

لدى انتقال الحرارة عبر انبوب ، فان معدلات تدفق الحرارة q_1 و q_2 عن طريق السطحين الداخلي والخارجي للجدار الاسطواني غير متساوية .

وكما يرى بوضوح من المعادلتين (2-25) و (2-26) يتبين أن قيمة q_1 دائما أكبر من قيمة q_2 .

يمكن بسهولة ايجاد العلاقات الكائنة بين q_1 ، q_2 و q_1 من خلال المعادلات (2-25) ، (2-26) و (2-27) حيث نجد :

$$q_1 = \pi d_1 \cdot q_1 = \pi . d_2 \cdot q_2 \qquad (2-28)$$

عندما يكون معامل التوصيل الحراري تابعا لدرجة الحرارة أي من الشكل $\lambda(t) = \lambda_o(1+b.t)$ يمكن تبيان امكانية حساب معدل تدفق الحرارة وفق القانون المستخرج عند قيمة λ - Const.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$q_1 = \frac{\pi(t_{w_1} - t_{w_2})}{\frac{1}{2\lambda_m} \cdot \ln \frac{d_2}{d_1}} \qquad (2\text{-}29)$$

مع ضرورة التذكر أن الحد λ_m في القانون (2-29) هو عبارة عن المتوسط التكاملي لمعامل التوصيل الحراري :

$$\lambda_m = \frac{1}{(t_{w_1} - t_{w_2})} \cdot \int_{t_{w_2}}^{t_{w_1}} \lambda(t).dt$$

لايجاد حقل درجات الحرارة في الحالة التي يكون عندها $\lambda = \lambda(t) = \lambda_o(1+b.t)$ يمكننا استعمال معادلة فوريه المطبقة على حالة جدار اسطواني :

$$q_1 = -\lambda(t).\frac{dt}{dr} \cdot 2\pi r \qquad (2\text{-}30)$$

بعد فصل المتحولات ومكاملة المعادلة (2-30) ضمن حدود التكامل من $r = r_1$ وحتى r ومن $t = t_{w_1}$ وحتى t اضافة الى ايجاد قيمة t من التعبير الناتج حيث نحصل على التعبير التالي الخاص بحقل درجات الحرارة :

$$t = \sqrt{(\frac{1}{b} + t_{w_1})^2 - \frac{q_1 \cdot \ln \frac{d}{d_1}}{\pi \cdot b \cdot \lambda_o}} - \frac{1}{b} \qquad (2\text{-}31)$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٢-٤ انتقال الحرارة عبر جدار اسطواني مؤلف من عدة طبقات

(Heat Transfer Through a Composite Cylindrical Wall)

لندرس حالة جدار اسطواني مؤلف من ثلاث طبقات على تماس تام مع بعضها ولتكن قيم درجات حرارة السطوح الخارجية t_{w_1} , t_{w_4} ومعاملات التوصيل الحراري للطبقات الثلاثة λ_1 , λ_2 , λ_3 وأقطار الطبقات الثلاثة تباعا لتدرج السطوح على التوالي d_1, d_2, d_3, d_4 ،حيث تتغير درجة الحرارة ضمن كل طبقة حسب منحني لوغاريتمي .

في الحالة المستقرة لانتقال الحرارة تمر نفس كمية الحرارة عبر جميع السطوح الايزوترمية (سطوح التماس بين الطبقات) .

حيث :

$$\left.\begin{aligned} Q &= \frac{2\pi.\lambda_1.1(t_{w_1} - t_{w_2})}{\ln\frac{d_2}{d_1}} \\ Q &= \frac{2\pi.\lambda_2.1(t_{w_2} - t_{w_3})}{\ln\frac{d_3}{d_2}} \\ Q &= \frac{2\pi.\lambda_3.1(t_{w_3} - t_{w_4})}{\ln\frac{d_4}{d_3}} \end{aligned}\right\} \quad (2\text{-}32)$$

من المعادلات (2-23) نستخرج قيمة فرق درجات الحرارة

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

بين سطحي كل طبقة :

$$\begin{cases} t_{w_1} - t_{w_2} = \dfrac{Q}{2\pi.\lambda_1.1} \cdot \ln \dfrac{d_2}{d_1} \\ t_{w_2} - t_{w_3} = \dfrac{Q}{2\pi.\lambda_2.1} \cdot \ln \dfrac{d_3}{d_2} \\ t_{w_3} - t_{w_4} = \dfrac{Q}{2\pi.\lambda_3.1} \cdot \ln \dfrac{d_4}{d_3} \end{cases} \quad (2\text{-}33)$$

بجمع المعادلات (2-33) طرفا الى طرف نحصل على :

$$t_{w_1} - t_{w_4} = \frac{Q}{2\pi.1} \cdot \left(\frac{1}{\lambda_1} \cdot \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\lambda_2} \cdot \ln \frac{d_3}{d_2} + \frac{1}{\lambda_3} \cdot \ln \frac{d_4}{d_3} \right) \quad (2\text{-}34)$$

ومنه نحصل على معدل التدفق الحراري :

$$Q = \frac{2\pi.1\,(t_{w_1} - t_{w_4})}{\frac{1}{\lambda_1} \cdot \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\lambda_2} \cdot \ln \frac{d_3}{d_2} + \frac{1}{\lambda_3} \cdot \ln \frac{d_4}{d_3}} \quad (2\text{-}35)$$

بنفس التحليل السابق نحصل على معدل تدفق الحرارة في جدار اسطواني مؤلف من n طبقة متجانسة :

$$Q = \frac{2\pi.1\left[t_{w_1} - t_{w(n+1)}\right]}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i} \cdot \ln \frac{d_{(i+1)}}{d_i}} \quad (2\text{-}36)$$

بادخال مفهوم معامل التوصيل الحراري المكافىء λ_{eq}

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

في المعادلة (2-36) نحصل على :

$$Q = \frac{2\pi \lambda_{eq} \left[t_{w_1} - t_{w_{(n+1)}} \right]}{\sum_{i=1}^{n} \ln \frac{d_{(i+1)}}{d_i}} \qquad (2-37)$$

يحدد معامل التوصيل الحراري المكافىء لجدار اسطواني مؤلف من عدة طبقات كما ورد في تعريف هذا المعامل في حالة جدار مستوي مؤلف من عدة طبقات متجانسة ، بمقارنة المعادلتين (2-36) و (2-37) نحصل على :

$$\lambda_{eq} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \ln \frac{d_{(i+1)}}{d_i}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i} \cdot \ln \frac{d_{(i+1)}}{d_i}} \qquad (2-38)$$

نحصل على درجات حرارة سطوح التماس بين الطبقات من المعادلات التالية :

$$\begin{cases} t_{w_2} = t_{w_1} - \dfrac{Q}{2\pi \cdot \lambda_1 \cdot 1} \cdot \ln \dfrac{d_2}{d_1} \\ t_{w_3} = t_{w_2} - \dfrac{Q}{2\pi \cdot \lambda_2 \cdot 1} \cdot \ln \dfrac{d_3}{d_2} \end{cases} \qquad (2-39)$$

٢-٥ التوصيل الحراري عبر جدار كروي :

(Heat Conduction Through a Spherical Wall)

لندرس حالة التوصيل الحراري عبر جدار كرة كاملة نصف قطرها الداخلي r_1 والخارجي r_2 .

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

يتألف جدار الكرة من طبقة واحدة ذات معامل توصيل حراري ثابت λ درجات حرارة السطحين الداخلي والخارجي ثابتة وتساوي الى t_{w_1} و t_{w_2} على التوالي .

بما أنه في الحالة المعتبرة تتغير درجة الحرارة فقط في اتجاه نصف قطر الكرة ، لذا فان السطوح الايزوترمية تأخذ في هذه الحالة شكل سطوح كروية متحدة المركز ، تأخذ المعادلة التفاضلية للتوصيل الحراري بالاحداثيات الاسطوانية الشكل التالي :

$$\nabla^2 t = \frac{d^2t}{dr^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{dt}{dr} = 0 \qquad (2\text{-}40)$$

أما الشروط الحدية فتأخذ الشكل :

$$\begin{cases} \text{عندما} \quad r = r_1 \longleftarrow t = t_{w_1} \\ \text{عندما} \quad r = r_2 \longleftarrow t = t_{w_2} \end{cases} \qquad (2\text{-}41)$$

بمكاملة المعادلة (2-40) نحصل على :

$$\frac{dt}{dr} = \frac{C_1}{r^2} \qquad (a)$$

بمكاملة التعبير الناتج نحصل على :

$$t = C_2 - \frac{C_1}{r} \qquad (2\text{-}42)$$

تحدد ثوابت التكامل الداخلة في المعادلة (2-42) من الشروط الحدية (2 - 41) حيث ينتج :

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

(b) $$C_1 = -\frac{t_{w_1} - t_{w_2}}{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)}$$

(c) $$C_2 = t_{w_1} - \frac{t_{w_1} - t_{w_2}}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} \cdot \frac{1}{r_1}$$

بالتعويض عن قيم الثوابت C_1 و C_2 في المعادلة (2-42) نحصل على التعبير الممثل لحقل درجات الحرارة في جدار كروي :

(2-43) $$t = t_{w_1} - \frac{t_{w_1} - t_{w_2}}{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)} \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r}\right)$$

لايجاد كمية الحرارة التي تعبر جدارا كرويا مساحته F خـــلال واحدة الزمن ، نستعمل قانون فوريه :

$$Q = -\lambda . \frac{dt}{dr} \quad , \quad F = -\lambda . 4\pi r^2 . \frac{dt}{dr} \quad [Watts]$$

بالتبديل عن قيمة تدرج درجة الحرارة $\frac{dt}{dr}$ في المعادلة الاخيرة نحصل على:

(2-44) $$Q = \frac{4\pi . \lambda (t_{w_1} - t_{w_2})}{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)}$$

$$= \frac{2\pi . \lambda . \Delta t}{\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2}}$$

$$= \pi . \lambda . \frac{d_1 . d_2}{\delta} . \Delta t$$

تعتبر المعادلة (2-44) القانون الحسابي للحرارة المنتقلة بالتوسيل عبر جدار كروي .

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

ينتج من المعادلة (2-43) أن توزع درجات الحرارة عبر جدار الكوني يمكن أن يمثل بقطع زائد (Hyperbola..) وذلك باعتبار أن معامل التوصيل الحراري λ ثابت .

٢-٤ طريقة الحل العام لمسائل انتقال الحراري عبر جدار مستوي أو اسطواني أو كروي :

(Generalized Solution-Method For Problems Of Heat Transfer Through a Plain; Cylindrical And Spherical Wall..)

يمكن استعمال هذا الحل لحساب انتقال الحرارة عبر جدار مستو ، اسطواني وكروي ، في كلا الحالتين التي يكون فيها معامل التوصيل الحراري λ ثابتا أو معتمدا على قيمة درجة الحرارة .

لندرس حالة التوصيل الحراري أحادي البعد في ثلاثة جدران مختلفة تتمتع بمعامل توصيل حراري ثابت ، يأخذ توزع درجات الحرارة الشكل $t = f_1(X)$ بالنسبة للجدار المستوي $t = f_2(r)$ بالنسبة للجدار الاسطواني و $t = f_3(r)$ بالنسبة للجدار الكروي .

اذا قبلنا بأن الاجسام المعتبرة تتمتع بسطوح ايزوترمية مغلقة ، عندها فان درجة الحرارة تصبح تابعة فقط للاحداثي n الذي يتعامد السطوح الايزوثرمية ، حيث تتناسب كمية الحرارة المتدفقة مع تدرج درجة الحرارة $\frac{\partial t}{\partial n}$ اضافة الى مساحة السطح بتتابع من الشكل $F = f(n)$.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

ان السطوح الايزوترمية للاسطوانة والكره هما من النوع المغلق كليا ، أما في حالة الجدار المستوي فيمكن أيضا اعتبار سطوحه الايزوترمية من النوع المغلق باعتبار أن $n \longrightarrow \infty$.

بما أن السطوح الايزوترمية من النوع المغلق فان كمية الحرارة المتدفقة عبر جدار أي جسم يمكن أن تكتب بالشكل :

$$Q = -\lambda \frac{dt}{dn} F(n) \qquad (2-45)$$

باعتبار أن قيمة Q ثابتة لأية سطح ايزوترمي ضمن الجسم وبعد فصل المتحولات في المعادلة (2-45) واجراء التكامل ضمن الحدود $n = n_1$ و $n = n_2$ وتغير درجة الحرارة من t_{w_1} الى t_{w_2} نحصل على :

$$Q = \frac{\lambda (t_{w_1} - t_{w_2})}{\int_{n_1}^{n_2} \frac{dn}{F(n)}} \qquad (2-46)$$

بسهولة نرى أن القانون (2-46) يشابه التعبير المستخرج سابقا في حالة الجدار المستوي :

$$q = \frac{\lambda (t_{w_1} - t_{w_2})}{S}$$

حيث Q تشابه معدل تدفق الحرارة q كما أن التكامل $\int_{n_1}^{n_2} \frac{dn}{F(n)}$ يشابه سماكة الجدار .

يمكن أن نستعمل المعادلة (2-46) في وصف التدفق الحراري

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

عبر الجدران ذات الاشكال الهندسية الثلاثة المعتبرة .

من الواضح أن الكمية $\int_{n_1}^{n_2} \frac{dn}{F(n)}$ تعتمد على شكل الجدار فقط

(a) بالنسبة للجدار المستوي (صفيحة) $n = x$ ، $n_1 = 0$ كما

$F(n) = F = Const.$ ، $n_2 = \delta$ أن

لذا :

$$I_{n_1}^{n_2} = \int_{n_1}^{n_2} \frac{d(n)}{F} = \frac{1}{F} \int_{0}^{\delta} dx = \frac{\delta}{F}$$

باستبدال القيمة الناتجة لـ $I_{n_1}^{n_2}$ في المعادلة (2-46)

نحصل على التعبير الممثل لتدفق الحرارة Q عبر الجدار المستوي (صفيحة) .

$$Q = \frac{\lambda(t_{w_1} - t_{w_2})}{\delta} . F \qquad (2-47)$$

(b) بالنسبة لحالة جدار اسطواني $n = r$ ، $n_1 = r_1$ ، $n_2 = r_2$

$$F(n) = F(r) = 2 \pi r l$$

ومنه :

$$I_{n_1}^{n_2} = \int_{n_1}^{n_2} \frac{d(n)}{F(n)} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{2\pi . r . 1} = \frac{1}{2\pi . l} . \ln \frac{r_2}{r_1}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

بالتبديل عن القيمة الناتجة لـ $I_{n_1}^{n_2}$ في المعادلة (2-46) نحصل على :

$$Q = \frac{2\pi . 1 . \lambda (t_{w_1} - t_{w_2})}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \qquad (2-48)$$

(C) بالنسبة لحالة جدار كروي $n=r$ ، $n_1 = r_1$ ، $n_2 = r_2$

$$F(n) = F(r) = 4\pi r^2$$

ومنه :

$$I_{n_1}^{n_2} = \int_{n_1}^{n_2} \frac{d(n)}{F(n)} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{4\pi r^2} = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

بالتالي فان المعادلة (2-46) تأخذ في هذه الحالة الشكل

$$Q = \frac{2\pi . \lambda (t_{w_1} - t_{w_2})}{\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2}} \qquad (2-49)$$

بمكاملة التعبير (2-45) ضمن الحدود من n_1 وحتى أية احداثية n ومن t_{w_1} وحتى أية درجة حرارة t فاننا نحصل على معادلة حقل درجات الحرارة :

$$t = t_{w_1} - \frac{Q}{\lambda} \int_{n_1}^{n} \frac{d(n)}{F(n)}$$

حيث يكتب التعبير $\int_{n_1}^{n} \frac{d(n)}{F(n)}$ بـ $I_{n_1}^{n_2}$ نرمز الى التكامل

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الاخير بالشكل :

$$t = t_{w_1} - \frac{Q}{\lambda} I^n_{n_1}$$

بالتعويض في المعادلة الاخيرة عن قيمة Q من المعادلة (2-46)

نحصل على:

$$t = t_{w_1} - (t_{w_1} - t_{w_2}) \cdot \frac{I^n_{n_1}}{I^n_{n_1 2}} \qquad (2\text{-}50)$$

يمكن اعتبار النسبة $\frac{I^n_{n_1}}{I^n_{n_1 2}}$ من المعادلة (2-50) كاحداثي لابعدي X

حيث يعتمد هذا الاحداثي على الشكل الهندسي للجدار وبالتالي يمكن كتابة المعادلة (2-50) بشكل لابعدي :

$$\frac{t - t_{w_2}}{t_{w_1} - t_{w_2}} = 1 - \frac{I^n_{n_1}}{I^n_{n_1 2}} \qquad (2\text{-}51)$$

اذا رمزنا لدرجة الحرارة اللابعدية $\frac{t - t_{w_1}}{t_{w_1} - t_{w_2}}$ بـ θ وللنسبة $\frac{I^n_{n_1}}{I^n_{n_1 2}}$ بـ X تأخذ المعادلة (2-51) الشكل التالي :

$$\theta = 1 - X \qquad (2\text{-}51')$$

تمثل المعادلة (2-51) التعبير العام اللابعدي لحقل درجات الحرارة للجدران الثلاثة وتحسب الاحداثيات اللا بعدية الداخلة في المعادلة (2-51') بالاخذ بعين الاعتبار الشكل الهندسي للجسم .

فمن أجل جدار مستوي يكون :

$$X = X_p = \frac{x}{\delta} \qquad (2\text{-}52)$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

ولجدار اسطواني :

$$X=X_c=\frac{\ln\frac{r}{r_1}}{\ln\frac{r_2}{r_1}} \qquad (2-53)$$

ولجدار كروي :

$$X=X_{sph}=\frac{\left(\frac{1}{d_1}-\frac{1}{d}\right)}{\left(\frac{1}{d_1}-\frac{1}{d_2}\right)} \qquad (2-54)$$

تجدر الاشارة الى أن المعادلات (2-46) و (2-51) استخرجت بافتراض أن معامل التوصيل الحراري للجدار λ ثابت

بالتشابه مع ما سبق يمكن استخراج العلاقات العامة في الحالة التي يكون فيها معامل التوصيل الحراري λ ذو قيمة متغيرة تبعا لدرجة الحرارة .

* * *

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مسائل :

م١: أوجد التدفق الحراري المار عبر جدار قرميدي طوله a = 4m وارتفاعه b = 5m وسماكته δ = 25 cm علما بأن درجة حرارة سطحي الجدار هي $t_{w_1} = 27\ C^o$, $t_{w_2} = -23\ C^o$ ومعامل التوصيل الحراري لمادة الجدار .... $\lambda = 0.77 \frac{w}{m.C^o}$.

الحل :

$$Q = \frac{\lambda}{\delta} .F(t_{w_1} - t_{w_2})$$

$$= \frac{0.77}{0.25} \times (5x4) \times \left[27 - (-33) \right] = 3696 \ [Wat$$

م٢: أوجد فرق درجة الحرارة بين السطحين الخارجي والداخلي لجدار مرجل بخاري فولاذي يعمل تحت ضغط مانومتري 19 bar سماكة الجدار δ = 20 mm درجة حرارة الماء الداخل إلى المرجل 46 C^o مع العلم أن كل $1\ m^2$ من مساحة سطح المرجل ينتج 25 $\frac{kg}{hr}$ من البخار الجاف ، معامل التوصيل الحراري للفولاذ $\lambda = 50 \frac{w}{m.C^o}$ بافتراض أن جدار المرجل هو من النوع المستوي .

الحل :

الضغط المطلق داخل المرجل :

$$P_{abs} = 19 + 1 = 20 \text{ bar}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

تستخرج قيمة انتالبي البخار المشبع عند قيمة الضغط المطلق المحسوبة من جداول الماء والبخار :

$$i'' = 2799.2 \quad \frac{Kj}{Kg}$$

انتالبي الماء الداخل الى المرجل عند الدرجة $46\ C^o$:

$$i' = 192 \quad \frac{Kj}{Kg}$$

نحسب شدة التدفق الحراري من شرط كون أن كل $1\ m^2$ من سطح المرجل يرفع قيمة انتالبي ماء الدخول بمعدل $25\ \frac{Kg}{hr}$ الى قيمة تساوي انتالبي البخار المشبع المتولد أي :

$$q = m_v(i''-i')$$

$$q = 25\ (\ 2799.2 - 192\ ) = 65180 \quad \frac{Kj}{m^2.hr}$$

$$q = \frac{\lambda}{\delta}\ .\ \Delta t \longrightarrow \Delta t = \frac{\delta}{\lambda}\ .q$$

$$\Delta t = \frac{0.02 \times 65180 \times 1000}{50 \times 3600} = 7.24\ C^o$$

م٣: احسب شدة التدفق الحراري عبر جدار مرجل بخاري ذو سماكة اجمالية قدرها 625 mm يتالف الجدار من ثلاثة طبقات ،طبقة أولى من الطف الاجري بسماكة 250 mm ، طبقة ثانية عازلة من الخبث بسماكة 125 mm ، أما الثالثة فهي من الآجر

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الاحمر بسماكة 250 mm درجة حرارة السطح الداخلي $t_{w_1} = 1527\ C^o$ والخارجي $t_{w_4} = 47\ C^o$ ، معاملات التوصيل الحراري تساوي للطـــف الآجري $\lambda_1 = 1.28\ \frac{w}{m.C^o}$ وللمادة العـــازلـــة $\lambda_2 = 0.15\ \frac{w}{m.C^o}$ وللقرميـــد $\lambda_3 = 0.8\ \frac{w}{m\ .\ C^o}$.

٢ـ كيف يتغير التدفق الحراري عبر الجدار اذا استبدلنـــا الطبقة العازلة بالقرميد الاحمر بافتراض أن درجات حرارة السطـــوح الداخلية والخارجية ثابتة .

٣ـ أوجد النسبة المئوية للتوفير في كمية الحرارة الضائعـــة الناتج عن استعمال الطبقة العازلة بدلا من الآجر .

٤ـ أوجد درجات الحرارة بين طبقات الجدار بافتراض أن الجدار مستوي وأن التماس بين الطبقات تام .

الحـــل :

١ـ شدة التدفق الحراري في الحالة الاولى :

$$q = \frac{Q}{F} = \frac{t_{w_1} - t_{w_4}}{\frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \frac{\delta_3}{\lambda_3}}$$

$$= \frac{1527 - 47}{\frac{0.25}{1.28} + \frac{0.125}{0.15} + \frac{0.25}{0.8}} = 1103.5\ \frac{w}{m^2}$$

٢ـ عند تبديل الطبقة العازلة بالقرميد الاحمر تصبح السماكـــة

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الكلية للقرميد الاحمر :

$$\delta = 0.25 + 0.125 = 0.375 \quad m$$

ومنه :

$$q = \frac{1527 - 47}{\frac{0.25}{1.28} + \frac{0.375}{0.8}} = 2228.7 \quad \frac{w}{m^2}$$

٣-النسبة المئوية لتوفير في الطاقة الحرارية الضائعة :

$$\frac{2228.7 - 1103}{2228.7} \times 100\ \% = 50.5\ \%$$

٤-درجة حرارة سطح التماس بين طبقتي الطف الآجري والمادة العازلة :

$$t_{w_2} = t_{w_1} - \frac{q.\delta_1}{\lambda_1}$$

$$t_{w_2} = 1527 - 1103 \times \frac{0.25}{1.28} = 1311.5\ C^o$$

درجة حرارة سطح التماس بين المادة العازلة والقرميد الاحمر :

$$t_{w_3} = t_{w_2} - q.\frac{\delta_2}{\lambda_2} = t_{w_1} - q.\left(\frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2}\right)$$

$$t_{w_3} = 1311.5 - 1103 \times \frac{0.125}{0.15} = 392.33\ C^o$$

في الحالة الثانية (عند استبدال الطبقة العازلة بالقرميد الاحمر):

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$t_{w_2} = 1527 - 2228.7 \times \frac{0.25}{1.28} = 1091.7 \ C^o$$

نلاحظ أن فائدة الطبقة العازلة اضافة الى التوفير في قيمة التسرب الحراري الى خارج المرجل فانها تحفظ الاجر القرميدي من التلف وخاصة عند زيادة درجة الحرارة داخل المرجل .

م٤: لدينا جدار فولاذي مستوي سماكته $\delta_1 = 0.02$ m ومعامل توصيله الحراري $\lambda_1 = 50 \ \frac{w}{m \cdot C^o}$ يعزل هذا الجدار بطبقة من الاسبستوس ذات معامل توصيل حراري قدره $\lambda_2 = 0.15 \ \frac{w}{m \cdot C^o}$ وبسماكة قدرها $\delta_2 = 0.2$ m وبطبقة من الفلين سماكتها $\delta_3 = 0.1$ m ومعامل توصيل $\lambda_3 = 0.045 \ \frac{w}{m \cdot C^o}$.

اذا أردنا استبدال طبقتي الاسبستوس والفلين بطبقة من مادة البيتون الرغوي ذات معامل توصيل حراري قدره $\lambda = 0.08 \ \frac{w}{m.C^o}$ ، احسب سماكة طبقة البيتون الرغوي في حالة الحصول على نفس درجة العزل .

الحل :

نحسب معامل التوصيل الحراري المكافىء للجدار الثلاثي الطبقات من العلاقة :

$$\lambda_{eq} = \frac{\sum_{i=1}^{3} \delta_i}{\sum_{i=1}^{3} \frac{\delta_i}{\lambda_i}} = \frac{\delta_1 + \delta_2 + \delta_3}{\frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \frac{\delta_3}{\lambda_3}}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$\lambda_{eq} = \frac{0.02 + 0.2 + 0.1}{\frac{0.02}{50} + \frac{0.2}{0.15} + \frac{0.1}{0.045}} = 0.0899 \frac{w}{m.C}$$

باستبدال طبقتي الاسبستوس والفلين بطبقة البيتون الرغوي وللمحافظة على نفس درجة العزل يجب المحافظة على قيمة معامل التوصيل الحراري المكافئ وبالتالي تبقى قيمة الفقد الحراري ثابتة أي :

$$\lambda'_{eq} = \lambda_{eq} = \frac{\delta_1 + x}{\frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{x}{\lambda}} = \frac{0.02 + x}{\frac{0.02}{50} + \frac{x}{0.08}} = 0.0899$$

ومنه نحسب سماكة طبقة البيتون الرغوي اللازمة .

$$x = 0.1613 \text{ m}$$

م٥: لدينا انبوب فولاذي قطره الداخلي $d_3 = 200$ mm والخارجي $d_2 = 220$ mm معامل التوصيل الحراري لمادة الانبوب $\lambda_1 = .50 \frac{w}{m.C^o}$ ، يغلف هذا الانبوب بطبقتي عزل .

مواصفات الطبقة الاولى: $\lambda_2 = 0.2 \frac{w}{m.C^o}$, $\delta_2 = 50$ mm

ومواصفات الطبقة الثانية : $\lambda_3 = 0.1 \frac{w}{m.C^o}$, $\delta_3 = 80$ mm

درجة حرارة السطح الداخلي للانبوب $t_{w_1} = 327\ C^o$ والسطح الخارجي $t_{w_4} = 47\ C^o$ والمطلوب :

١- احسب الضياع الحراري لواحدة طول الانبوب المعزول .

٢- احسب درجات حرارة سطوح التماس بين الطبقات المختلفة .

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الحـــل :

ا- يحسب الضياع الحراري لواحدة الطول من الجملة المتسلسلة (2-36):

$$q_l = \frac{Q}{l} = \frac{2\pi.\left[t_{w_1} - t_{w_{(n+1)}}\right]}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i} \ln \frac{d_{(i+1)}}{d_i}}$$

حيث n هي عدد الطبقات (n = 3) .

حيث : $d_1 = 0.2$ m , $d_2 = 0.22$ m , $d_3 = 0.32$ m , $d_4 = 0.48$m

$$q_l = \frac{2\pi\left(327 - 47\right)}{\frac{1}{50}.\ln\frac{0.22}{0.2} + \frac{1}{0.2}\ln\frac{0.32}{0.22} + \frac{1}{0.1}\ln\frac{0.48}{0.32}}$$

$$q_l = 296.67 \ \frac{W}{m}$$

٢- حساب درجات حرارة سطوح التماس بين الطبقات المعادلات (2-39) .

$$t_{w_2} = t_{w_1} - \frac{q_l}{2\pi\lambda_1}.\ln\frac{d_2}{d_1}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$t_{w_2} = 327 - \frac{296.67}{2\pi \times 50} \cdot \ln \frac{0.22}{0.20} = 326.9\ C^{o}$$

$$t_{w_3} = t_{w_2} - \frac{q_1}{2\pi \cdot \lambda_2} \cdot \ln \frac{d_3}{d_2}$$

$$t_{w_3} = 326.9 - \frac{296.67}{2\pi \times 0.2} \cdot \ln \frac{0.32}{0.22} = 238.44\ C^{o}$$

* * *

*

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الفصل الثالث

التوصيل الحراري في الحالة المستقرة (تدفق حراري منتظم)

النوع الثالث من الشروط الحدية "بمعرفة درجة حرارة الوسط المحيط"

٣-١ انتقال الحرارة عبر جدار مستو مؤلف من طبقة واحدة وعدة طبقات :

(Heat Transfer Through Simble, Composite Plain Wall)

يطلق على اجراء انتقال القدرة الحرارية من وسط متحرك (ساخن) الى آخر بارد عبر جدار صلب مستوي مؤلف من طبقة واحدة أو من عدة طبقات متجانسة باجراء انتقال الحرارة .

في الحياة العملية تصادف عملية انتقال الحرارة في حالات عديده منها على سبيل المثال وليس الحصر انتقال الحرارة من الماء الساخن الى الهواء عبر جدار مشع التدفئة المركزية ، انتقال الحرارة من نواتج الاحتراق الغازية الى الماء عبر جدران أنابيب التسخين في المراجل البخارية ، انتقال الحرارة من البخار المتكاثف الى مياه التبريد عبر جدران أنابيب مكثف بخاري ، في جميع الحالات التي ذكرناها استخدم الجدار الفاصل بين المائعين كموصل للحرارة واختير بحيث يكون معامل التوصيل الحراري للجدار مرتفعا .

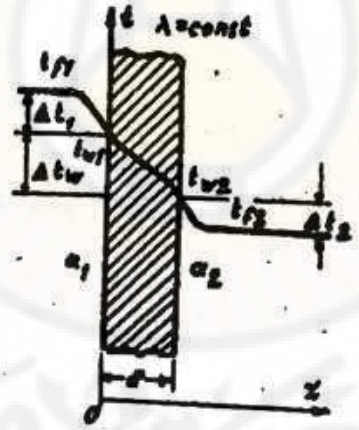
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

تتضمن عملية انتقال الحرارة في الحالات المذكورة ثلاثة مراحل هي :

انتقال الحرارة من الوسط المائع (الساخن) إلى سطح الجدار ، انتقال الحرارة بالتوصيل عبر سماكة الجدار ، انتقال الحرارة من سطح الجدار الى المائع البارد .

لندرس حالة انتقال الحرارة عبر جدار مستوي بسيط متجانس وآخر متعدد الطبقات .

لتكن سماكة الجدار المتجانس δ [(الشكل 1 - 3)] وليكن



الشكل (1 - 3) انتقال الحرارة عبر جدار متجانس

معامل التوصيل الحراري لمادة الجدار λ ، درجات حرارة الوسط

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

المحيط t_{f_1} و t_{f_2} ، معاملات انتقال الحرارة α_1 و α_2 .

لنفترض أيضا أن قيم t_{f_1} ، t_{f_2} ، α_1 ، α_2 ،ثابتة على كامل سطح الجدار أي أن تغير درجات حرارة الجدار والموائع المحيطة به يتم فقط في الاتجاه المعامد لسطح الجدار .

من الضروري أن يتم تحديد كمية الحرارة المتدفقة ضمن الشروط المعطاة من المائع الساخن الى المائع البارد اضافة الى تحديد درجتي حرارة سطحي الجدار .

يتحدد معدل تدفق الحرارة من المائع الساخن الى الجدار بالمعادلة التالية :

$$q = \alpha_1 (t_{f_1} - t_{w_1}) \qquad (3\text{-}1)$$

حيث : α_1 معامل انتقال الحرارة مابين الوسط المائع الساخن وسطح الجدار بعد الأخذ بعين الاعتبار جميع أشكال الانتقال الحراري

F : سطح الجدار $[m^2]$.

في شروط الحالة المستقرة تنتقل نفس كمية الحرارة بالتوصيل عبر سماكة الجدار :

$$q = \frac{\lambda}{\delta} (t_{w_1} - t_{w_2}) \qquad (3\text{-}2)$$

أيضا تنتقل كمية مساوية من الحرارة من سطح الجدار الى المائع البارد :

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$q = \alpha_2 (t_{w_2} - t_{f_2}) \qquad (3-3)$$

يمكن اعادة كتابة المعادلات (3-1) ، (3-2) و (3-3) بالشكل :

$$\begin{cases} q.\frac{1}{\alpha_1} = t_{f_1} - t_{w_1} \\ q.\frac{\delta}{\lambda} = t_{w_1} - t_{w_2} \\ q.\frac{1}{\alpha_2} = t_{w_2} - t_{f_2} \end{cases} \qquad (3-4)$$

بجمع المعادلات (3-4) طرفا الى طرف نحصل على :

$$q.\left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}\right) = t_{f_1} - t_{f_2}$$

فمما سبق نحصل على معدل تدفق الحرارة $\left[\frac{w}{m^2}\right]$:

$$q = \frac{t_{f_1} - t_{f_2}}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}} \qquad (3-5)$$

يرمز الى :

$$\frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}} = K \left[\frac{w}{m^2.K}\right] \qquad (3-6)$$

بالاخذ بعين الاعتبار المعادلة (3-6) يمكن اعادة كتابة المعادلة (3-5) بالشكل التالي :

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$q = K(t_{f_1} - t_{f_2}) \ , \left[\frac{w}{m^2}\right] \qquad (3-7)$$

- للعامل K نفس واحدات العامل α ويسمى بمعامل انتقال الحرارة الكلي (Overall Heat-Transfer Coefficient) ولتحديد قيمته فانه يجب تحديد قيم α_1 و α_2 حيث :

$$\alpha = \alpha_r + \alpha_c$$

α_r : معامل انتقال الحرارة بالاشعاع .

α_c : معامل انتقال الحرارة بالحمل .

يعبر العامل K عن شدة انتقال الحرارة من مائع الى آخر عبر جدار فاصل حيث يساوي عدديا الى كمية الحرارة التي تعبر واحدة سطح الجدار خلال واحدة الزمن عند فرق درجات حرارة قدره $1\ C^\circ$.

يسمى مقلوب هذا المعامل بمعامل المقاومة الحرارية الكلي لانتقال الحرارة (Overall Thermal Resistance Coefficient) .

يأخذ معامل المقاومة الحرارية الكلي لجدار متجانس وحيد الطبقة الصيغة التالية :

$$R = \frac{1}{K} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2} \qquad (3-8)$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

من المعادلة (3-8) نرى أن المقاومة الحرارية الكلية تساوي الى مجموع المقاومات الحرارية الافرادية $\frac{1}{\alpha_1}$ ، $\frac{\delta}{\lambda}$ ، $\frac{1}{\alpha_2}$ ، حيث :

$R_1 = \frac{1}{\alpha_1}$: المقاومة الحرارية (Thermal Resistance) لانتقال الحرارة من السائل الساخن الى الجدار .

$R_w = \frac{\delta}{\lambda}$: المقاومة الحرارية لانتقال الحرارة بالتوصيل عبر الجدار .

$R_2 = \frac{1}{\alpha_2}$: المقاومة الحرارية لانتقال الحرارة من الجدار الى السائل البارد .

باعتبار أن المقاومة الحرارية الكلية لجدار مركب (مؤلف من عدة طبقات) تساوي الى مجموع المقاومات الحرارية للطبقات الافرادية ، فمن الواضح أن :

$$R = \frac{1}{K} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \ldots + \frac{\delta_n}{\lambda_n} + \frac{1}{\alpha_2}$$

أو :

$$R = \frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2}$$

ومنه :

$$K = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2}} \qquad (3-9)$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مماسبق يعطى معدل تدفق الحرارة عبر جدار مركب يتألف من n طبقة بالمعادلة :

$$q = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2}} (t_{f_1} - t_{f_2}) = K(t_{f_1} - t_{f_2}) \qquad (3-10)$$

نلاحظ أن المعادلة (3-10) لجدار مركب تشبه المعادلة (3-7) الخاصة بجدار مستوي مؤلف من طبقة واحدة حيث تختلف فقط في قيمة معامل الانتقال الحراري الكلي K. بالمقارنة بين المعادلتين (3-9) و (3-6) نرى أن الاخيرة ماهي الا حالة خاصة من المعادلة الاولى وذلك عندما تكون n = 1 .

تعطى كمية الحرارة Q [w] المتدفقة عبر سطح الجدار F بالمعادلة :

$$Q = q.F = K.F.\Delta t \qquad (3-11)$$

كما يمكن ايجاد درجات حرارة سطحي الجدار البسيط من المعادلة (3-4) كمايلي :

$$t_{w_1} = t_{f_1} - q.\frac{1}{\alpha_1}$$

$$t_{w_2} = t_{f_1} - q.\left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda}\right)$$

أو :

$$t_{w_2} = t_{f_2} + q.\frac{1}{\alpha_2}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

تبين المقارنة بين المعادلتين (3-11) و (3-10) أن انتقال الحرارة عبر جدار مركب ضمن شروط حدية من النوع الاول هو عبارة عن حالة خاصة من انتقال الحرارة عبر نفس الجدار ضمن شروط حدية من النوع الثالث .

مماسبق ذكره فانه يمكن تحديد درجات حرارة سطوح التماس بين كل طبقتين من طبقات جدار مركب i و i + 1 في حالة الشروط الحدية من النوع الثالث بالمعادلة التالية :

$$t_{w(i+1)} = t_{f_1} - q.\left(\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^{i} \frac{\delta_i}{\lambda_i}\right) \qquad (3-12)$$

يمكن أيضا تحديد درجات حرارة سطوح التماس الداخلية بيانيا وذلك بالتوافق مع المعادلة (3-12) .

تعتمد الطريقة البيانية الخاصة بتحديد درجات حرارة السطوح الداخلية لجدار مركب (مؤلف من عدة طبقات) على العزة الخطية الكائنة بين فرق درجات الحرارة في الجدار والمقاومة الحرارية ، أي :

(حالة جدار مؤلف من طبقة واحدة): $t_{f_1} - t_{f_2} = q.\frac{1}{K}$

(حالة جدار مؤلف من عدة طبقات): $t_{w_i} - t_{w(i+1)} = q\frac{\delta_i}{\lambda_i}$

تسمح لنا هذه العلاقة بتصور جدار وهمي تتناسب سماكة كل طبقة من الطبقات المؤلفة له مع قيمة المقاومة الحرارية العائدة لهذه الطبقة علما بأن قيمته المقاومة الحرارية الكلية

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

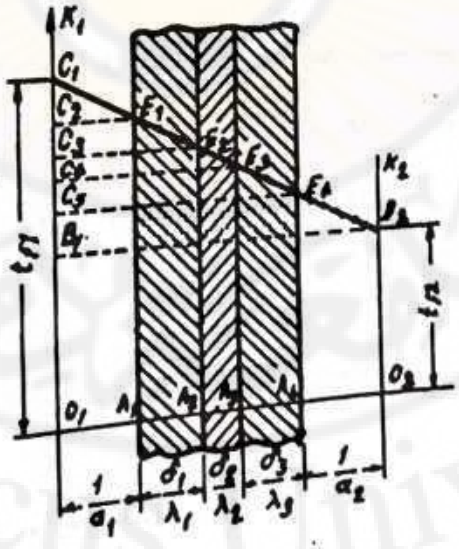
لانتقال الحرارة عبر هذا الجدار (حالة جدار ثلاثي الطبقات) تساوي

الـى :

$$R = \frac{1}{K} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \frac{\delta_3}{\lambda_3} + \frac{1}{\alpha_2}$$

لنحدد المسافات $A_4O_2, A_3A_4, A_2A_3, A_1A_2, O_1A_1$ على المحور الافقي وبشكل يتناسب مع قيمة المقاومة الحرارية لكل طبقة على التوالي :

$\frac{1}{\alpha_2}$ ، $\frac{\delta_3}{\lambda_3}$ ، $\frac{\delta_2}{\lambda_2}$ ، $\frac{\delta_1}{\lambda_1}$ ، $\frac{1}{\alpha_1}$ الشكل (3-2)



الشكل (3-2) الطريقة البيانية لتحديد درجة الحـــرارة

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

نقوم برفع أعمدة في كل من النقاط O_1 ، A_1 ، A_2 ، A_3 و A_4 ، O_2 .

تعين درجات حرارة الوسط المحيط t_{f_1} و t_{f_2} على كل من المستقيمين O_1K_1 و O_2K_2 وبأية مقياس مناسب (النقطتان B_1 ، C_1)

نصل النقطتين B_1 ، C_1 بخط مستقيم ، تعبر المسافات A_1E_1 ، A_2E_2 ، A_3E_3 ، A_4E_4 عن درجات الحرارة المجهولة t_{w_1} ، t_{w_2} ، t_{w_3} ، t_{w_4} .

بما أن المثلثين $C_1B_1B_2$ و $C_1C_2E_1$ متشابهين ينتج :

$$\frac{C_1C_2}{t_{f_1} - t_{f_2}} = \frac{\frac{1}{\alpha_1}}{\frac{1}{K}} \quad \text{أو} \quad \frac{C_1C_2}{C_1B_1} = \frac{C_2E_1}{B_1B_2} \qquad (3\text{-}13)$$

ومنه ينتج :

$$C_1C_2 = t_{f_1} - t_{w_1}$$

$$A_1E_1 = O_1C_1 - C_1C_2 = t_{w_1}$$

بالتشابه مع ماسبق يمكن البرهان أن المسافات A_2E_2 ، A_3E_3 و A_4E_4 تساوي درجات الحرارة t_{w_2} ، t_{w_3} و t_{w_4}

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

على التوالي .

٣-٢ انتقال الحرارة عبر جدار اسطواني مكون من طبقة واحدة أو عدة طبقات :

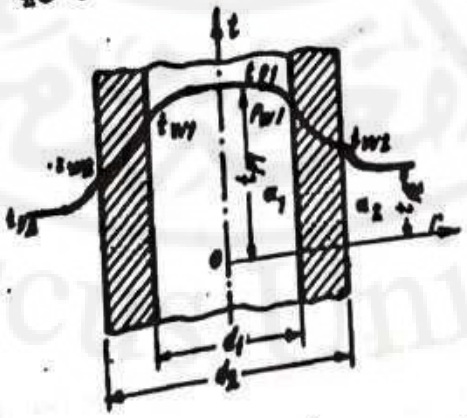
(Heat Transfer Through a Simple,Or Composite Cylinorical Wall.)

لنعتبر حالة جدار اسطواني متجانس (انبوب) ذو معامل توصيل حراري λ ثابت .

معطى لدينا درجات حرارة الوسط المحيط t_{f_1} و t_{f_2} اضافة الى معاملا- انتقال الحرارة من جهة السطح الداخلي للانبوب α_1 والسطح الخارجي α_2 الشكل (3-3) والتي تتمتع جميعها بقيم ثابتة .

من الضروري ايجاد قيم q_1 و t_w .

لنفترض أن الانبوب ذو طول مناسب بالمقارنة مع سماكة الجدار اضافة الى اعتبار أن الضياع الحراري عبر طرفي الانبوب مهمل .



الشكل(3 – 3) انتقال الحرارة عبر جدار اسطواني متجانس

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

في الحالة المستقرة للتوصيل الحراري تتساوى كمية الحرارة المنتقلة من المائع الساخن الى السطح الخارجي للجدار مع الكمية المنتقلة عبر الجدار مع الكمية المنتقلة للمائع البارد .

مماسبق يمكننا كتابة المعادلات التالية :

$$(3\text{-}14)\quad \begin{cases} q_1 = \alpha_1 . \pi d_1 (t_{f_1} - t_{w_1}) \\ q_1 = \dfrac{\pi (t_{w_1} - t_{w_2})}{\frac{1}{2\lambda} . \ln \frac{d_2}{d_1}} \\ q_1 = \alpha_2 . \pi . d_2 (t_{w_2} - t_{f_2}) \end{cases}$$

باعادة ترتيب الحدود في المعادلات السابقة تصبح على الشكل:

$$(3\text{-}14')\quad \begin{cases} t_{f_1} - t_{w_1} = \dfrac{q_1}{\pi} \cdot \dfrac{1}{\alpha_1 . d_1} \\ t_{w_1} - t_{w_2} = \dfrac{q_1}{\pi} \cdot \dfrac{1}{2\lambda} . \ln \dfrac{d_2}{d_1} \\ t_{w_2} - t_{f_2} = \dfrac{q_1}{\pi} \cdot \dfrac{1}{\alpha_2 . d_2} \end{cases}$$

بجمع المعادلات (3-14') طرفا الى طرف نحصل على فرق درجات الحرارة الكلي :

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$t_{f_1} - t_{f_2} = \frac{q_1}{\pi}\left(\frac{1}{\alpha_1 . d_1} + \frac{1}{2\lambda} . \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\alpha_2 . d_2}\right)$$

ومنه :

$$q_1 = \frac{\pi(t_{f_1} - t_{f_2})}{\frac{1}{\alpha_1 . d_1} + \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\alpha_2 . d_2}} \qquad (3\text{-}15)$$

نعتبر أن :

$$K_1 = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1 . d_1} + \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\alpha_2 . d_2}} \qquad (3\text{-}16)$$

بالاخذ بعين الاعتبار المعادلة (3-16) يمكن كتابة المعادلة (3-15) بالشكل :

$$q_1 = K_1 . \pi(t_{f_1} - t_{f_2}) \qquad (3\text{-}15')$$

يسمى المقدار K_1 بالمعامل الخطي الكلي لانتقال الحرارة (Linear Overall Heat-Transfer Coeficient) وواحدته $\left[\frac{w}{m.K}\right]$

يحدد هذا المعامل كثافة انتقال الحرارة من مائع الى آخر عبر جدار فاصل وتساوي القيمة العددية لـ K_1 لكمية الحرارة المنتقلة عبر جدار واحدة طول الانبوب خلال واحدة الزمن من مائع الى آخر وعند فرق درجات حرارة قدره درجة واحدة .

يسمى مقلوب المعامل الخطي الكلي لانتقال الحرارة $R_1 = \frac{1}{K_1}$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

بالمقارنة الحرارية الخطية لانتقال الحرارة (Linear Thermal Resistance Of Heat Transfer):

$$R_1 = \frac{1}{K_1} = \frac{1}{\alpha_1 . d_1} + \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\alpha_2 . d_2} \qquad (3\text{-}17)$$

حيث : R_1 معطاة بواحدات $\left[\frac{m.K}{w}\right]$.

تعبر الاجزاء الداخلة في المقاومة الحرارية الكلية من :

$\frac{1}{\alpha_1 . d_1}$ و $\frac{1}{\alpha_2 . d_2}$ = المقاومة الحرارية لانتقال الحرارة من جهة السطوح الخارجية للجدار R_{1_1} , R_{1_2} على التوالي .

$\frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1}$ = المقاومة الحرارية للتوصيل عبر الجدار R_{1_w} .

يجب ملاحظة أن المقاومة الحرارية الخطية لانبوب لاتتحدد فقط بمعاملات انتقال الحرارة α_1 و α_2 بل بقطري الانبوب الداخلي والخارجي .

اذا نسبنا معدل تدفق الحرارة عبر جدار اسطواني لكل من السطح الداخلي والخارجي نحصل على معدل تدفق الحرارة $\left[\frac{w}{m^2}\right]$ منسوبالواحدة السطح وفق المعادلات التالية :

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$q_1 = \frac{Q}{\pi . d_1 . l} = \frac{K_1}{d_1} (t_{f_1} - t_{f_2})$$

$$q_2 = \frac{Q}{\pi . d_2 . l} \quad \frac{K_1}{d_2} (t_{f_1} - t_{f_2}) \quad : \text{و}$$

$$q_1 = K_1 (t_{f_1} - t_{f_2}) \quad : \text{أو}$$

$$q_2 = K_2 (t_{f_1} - t_{f_2})$$

حيث :

$$K_2 = \frac{K_1}{d_2} \; , \; K_1 = \frac{K_1}{d_1}$$

توضح التعابير الأخيرة العلاقات الخاصة بمعاملات انتقال الحرارة عندما يكون هذا الانتقال منسوبا لواحدة طول وسطح الجدار الاسطواني :

$$K_1 = d_1 . K_1 = d_2 . K_2$$

حيث : K_1 بدلالة $\frac{W}{m.K}$

تحدد القوانين الخاصة بـ K_1 ، K_2 $\left[\frac{W}{m^2.K}\right]$ بالمعادلات التالية :

$$\begin{cases} K_1 = \dfrac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{d_1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{d_1}{\alpha_2 . d_2}} \\ K_2 = \dfrac{1}{\frac{1}{\alpha_1} \cdot \frac{d_2}{d_1} + \frac{d_2}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\alpha_2}} \end{cases} \qquad (3\text{-}18)$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

في الواقع تكون سماكة جدران الاسطوانة صغيرة بالمقارنة مع قطرها ، لذلك يمكن عندها اجراء الحسابات باستعمال دساتير مبسطة والتي نحصل عليها بالطريقة التالية :

بنشر المقدار $\ln \frac{d_2}{d_1}$ على شكل سلسلة :

$$\ln \frac{d_2}{d_1} = \left(\frac{d_2}{d_1} - 1 \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{d_2}{d_1} - 1 \right)^2 + \ldots$$

اذا انتهت النسبة $\frac{d_2}{d_1}$ الى الواحد تتقارب السلسلة وهذا يمكننا وبدقة كافية لاستعمال الحد الاول فقط واهمال بقية حدود السلسلة :

$$\ln \frac{d_2}{d_1} \approx \left(\frac{d_2}{d_1} - 1 \right) = \frac{d_2 - d_1}{d_1} = \frac{2\delta}{d_1}$$

حيث δ سماكة جدار الاسطوانة m

بالتبديل عن القيمة الناتجة لـ $\ln \frac{d_2}{d_1}$ في المعادلة (3-18) نحصل على :

$$K_l = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}} \qquad (3-19)$$

مماسبق ولأجل جدار ذو سماكة صغيرة يمكن أن نجري الحسابات على أساس الدستور التالي :

$$Q = K \cdot \pi \cdot d.l.(t_{f_1} - t_{f_2}) \qquad (3-20)$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

طبقا للمعادلة (3-19) $K \left[\frac{w}{m^2.K}\right]$

حيث أخذت

وكأنها لجدار مستو .

اذا كانت النسبة $\frac{d_2}{d_1} < 2$ فان نسبة الخطأ في الحسابات لاتتجاوز الـ 4% أي أن نسبة الخطأ العظمى والتي لاتتجاوز الـ 4% تبقى معقولة بالنسبة للحسابات الهندسية ، وتجدر الاشارة الى أن المعادلة (3-20) تستعمل بشكل عام عندما تكون $\frac{d_2}{d_1} \ll 1.8$.

يمكن تصغير قيمة الخطأ اذا تم نسب المعادلة (3-20) الى السطح الذي تكون قيمه α له أصغر مايمكن .

(1) اذا : $\alpha_1 \ll \alpha_2$ يكون $d_x = d_2$

(2) اذا $\alpha_2 \gg \alpha_1$ يكون $d_x = d_1$

(3) اذا $\alpha_1 = \alpha_2$ يكون $d_x = \frac{d_1+d_2}{2}$

بالنسبة لحالة انتقال الحرارة عبر جدار اسطواني متعدد الطبقات فيجب استبدال نظام المعادلات (3-14') بنظام معادلات يأخذ بعين الاعتبار المقاومة الحرارية للتوصيل عبر جميع الطبقات أي :

$$\begin{cases} t_{f_1} - t_{w_1} = \frac{q_1}{\pi} \cdot \frac{1}{\alpha_1 . d_1} \\ t_{w_1} - t_{w_2} = \frac{q_1}{\pi} \cdot \frac{1}{2\lambda_1} \cdot \ln \frac{d_2}{d_1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

١٠٠

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$
(3\text{-}21)\quad \begin{cases} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ t_{w_n} - t_{w_{(n+1)}} = \dfrac{q_1}{\pi} \cdot \dfrac{1}{2\lambda_n} \ln \dfrac{d_{n+1}}{d_n} \\ t_{w_{(n+1)}} - t_{f_2} = \dfrac{q_1}{\pi} \cdot \dfrac{1}{\alpha_2 \cdot d_{n+1}} \end{cases}
$$

بجمع هذه المعادلات طرفا الى طرف وحلها بالنسبة لـ $q_1\left[\frac{w}{m}\right]$ نحصل على :

$$
(3\text{-}22)\quad q_1 = \frac{\pi (t_{f_1} - t_{f_2})}{\frac{1}{\alpha_1 \cdot d_1} + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{2\lambda_i} \cdot \ln \frac{d_{i+1}}{d_i} + \frac{1}{\alpha_2 \cdot d_{n+1}}}
$$

أو :

$$
(3\text{-}22') \quad q_1 = K_1 \cdot \pi (t_{f_1} - t_{f_2})
$$

تسمى القيمة :

$$
(3\text{-}22'')\quad \frac{1}{K_1} = R_1 = \frac{1}{\alpha_1 \cdot d_1} + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{2\lambda_i} \ln \frac{d_{i+1}}{d_i} + \frac{1}{\alpha_2 \cdot d_{n+1}}
$$

بالمقاومة الحرارية الكلية لجدار اسطواني مؤلف من عدة طبقات :

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

(Total Thermal Resistance Of a Comopite Cylindrical Wall..)

وتقاس بـ $\left[\frac{m^2.K}{W}\right]$.

ينتج من المعادلة (3-21) أن :

$$(3\text{-}23)\quad \begin{cases} t_{w_1} = t_{f_1} - \frac{q_1}{\pi} \cdot \frac{1}{\alpha_1 . d_1} \\ t_{w_2} = t_{f_1} - \frac{q_1}{\pi} \left(\frac{1}{\alpha_1 . d_1} + \frac{1}{2\lambda_i} . \ln \frac{d_2}{d_1} \right) \\ t_{w(i+1)} = t_{f_1} - \frac{q_1}{\pi} \left(\frac{1}{i d_1} + \sum_{i=1}^{i} \frac{1}{2\lambda_i} . \ln \frac{d_{i+1}}{d_i} \right) \end{cases}$$

عندما تكون الشروط الحدية من النوع الاول معطاة فيمكن اعتبارها حالة خاصة من الشروط الحدية من النوع الثالث ، وعندما تقترب قيم معاملات انتقال الحرارة α_1 ، α_2 من اللانهاية ينتج من ذلك أن قيم درجات حرارة الوسط المائع t_{f_1} و t_{f_2} تصبح مساوية لدرجات حرارة سطحي الجدار t_{w_1} و $t_{w(n+1)}$ مماسبق فالمعادلة (3-22) تأخذ الشكل التالي :

$$(3\text{-}24)\quad q = \frac{\pi \left(t_{w_1} - t_{w(n+1)} \right)}{\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{2\lambda_i} . \ln \frac{d_{i+1}}{d_i}}$$

ويعطى الدستور الحسابي لحساب درجات حرارة سطوح التماس

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الداخلية على الشكل :

$$t_{w_{(i+1)}} = t_{w_1} - \frac{q_1}{\pi} \sum_{i=1}^{i} \frac{1}{2\lambda_i} \ln \frac{d_{i+1}}{d_i} \qquad (3-25)$$

٣-٣ القطر الحرج (الحدي) لجدار اسطواني :

-(Critical Diameter Of a Cylindrical Wall..)

لندرس كيفية تغير المقاومة الحرارية لجدار اسطواني متجانس مع تغير القطر الخارجي. من المعادلة (3-17) نجد :

$$R_1 = \frac{1}{\alpha_1 . d_1} + \frac{1}{2\lambda} . \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\alpha_2 . d_2}$$

باعتبار أن قيم كل من α_1 ، d_1 ، α_2 ثابتة ، نرى أن المقاومة الحرارية الكلية لانتقال الحرارة عبر جدار اسطواني تعتمد فقط على قيمة القطر الخارجي ومنه ينتج من المعادلة (3-17) أنه في هذه الحالة

$$\frac{1}{\alpha_1 . d_1} = R_{1_1} = \text{Const.}$$

تزداد المقاومة الحرارية للتوصيل $\frac{1}{2\lambda} . \ln \frac{d_2}{d_1} = R_{1_w}$ طردا مع زيادة قيمة d_2 بينما تتناقص قيمة المقاومة الحرارية لانتقال الحرارة من الجدار الى الوسط $\frac{1}{a_2 . d_2} = R_{1_2}$ مع زيادة d_2 .

من الواضح أن تحديد قيمة المقاومة الحرارية الكلية يمكن أن يتم عن طريق دراسة تغيرات الاجزاء R_{1_w} و R_{1_2} . يبين الشكل (3-4) تغيرات قيم المقاومات الحرارية الجزئية .

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

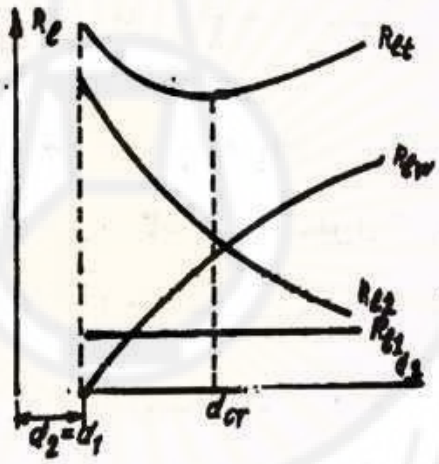
في الواقع لكي نحدد تغيرات R_1 مع زيادة سماكة الجدار الاسطواني .

يجب علينا دراسة R_1 كتابع لـ d_2 بمحافظة R_1 كتابع لـ d_2.

ومساواة التفاضل بالصفر نحصل على :

$$\frac{d(R_1)}{d(d_2)} = \frac{1}{2\lambda . d_2} - \frac{1}{\alpha_2 . d_2^2} = 0$$

في هذه المعادلة تأخذ d_2 قيمة بحيث يكون عندها للمنحني $R_1 = f(d_2)$ نهاية حدية .



الشكل (١ ـ 3) اعتماد المقاومة الحرارية لجدار اسطواني على d_2

بدراسة هذا المنحني من حيث تحديد نهاياته الدنيا والعظمى بأي من الطرق المعروفة ، نجد أن لهذا المنحني نهاية حدية صغرى أي تكون المقاومة الحرارية أصغرية عندما $d_2 = \frac{2\lambda}{\alpha_2}$.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

يسمى القطر الخارجي الذي يناسب مقاومة حرارية عظمى بالقطر الحرج (Critical Diameter) ويرمز له بـ dcr حيث يحسب هذا القطر الحرج وفق الدستور :

$$d_{cr} = \frac{2\lambda}{\alpha_2} \qquad (3-26)$$

في المجال الذي يحقق $d_2 < d_{cr}$ فان قيمة المقاومة الحرارية تنخفض طردا مع زيادة d_2 بسبب أن الزيادة الحاصلة في السطح الخارجي تؤثر على المقاومة الحرارية أكثر مما تؤثر بها زيادة سماكة الجدار .

في المجال الذي يكون عنده $d_2 > d_{cr}$ تزداد قيمة المقاومه الحرارية لانتقال الحرارة طردا مع زيادة d_2 وهذه الزيادة تعود الى تأثير زيادة سماكة الجدار وبالتالي يجب أن تؤخذ هذه العوامل بعين الاعتبار عند اختيار العازل الحراري لمختلف الانابيب والتجهيزات ذات الشكل الاسطواني .

لنعتبر القطر الحرج للعزل الموجود على الانبوب المبين بالشكل (3-5) .

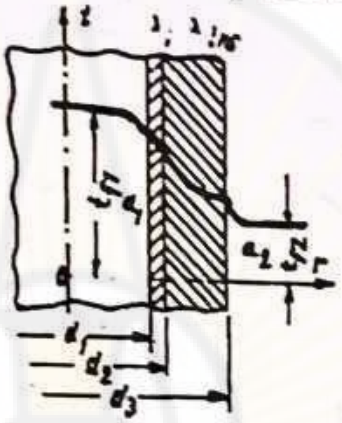
يمكن تحديد المقاومة الحرارية لانتقال الحرارة عبر الانبوب بالدستور :

$$R_1 = \frac{1}{\alpha_1 . d_1} + \frac{1}{2\lambda_w} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{2\lambda_{ins}} \ln \frac{d_3}{d_2} + \frac{1}{\alpha_2 . d_3}$$

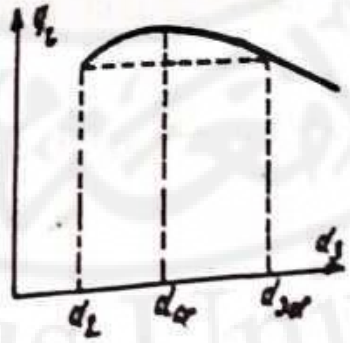
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

بالاضافة الى ذلك ينتج من المعادلة $q_1 = \frac{\pi \cdot \Delta t}{R_1}$ أن قيمة q_1 سوف تزداد مع زيادة القطر الخارجي للعازل d_3 وتبلغ قيمتها العظمى عند $d_3 = d_{cr}$.

عند زيادة القطر d_3 الى مافوق القيمة d_{cr} فان قيمة q_1 تأخذ بالهبوط ، الشكل (5 – 3) .



الشكل(5 – 3)خاص بمفهوم القطر الحرج للعزل



الشكل(5 – 3) اعتماد قيمة الضياع الحراري على سماكة العازل المحيط بالجدار الاسطواني

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

عند اختيار أية مادة عزل حراري لجدار اسطواني من الضروري أن يتم حساب القطر الحرج باستعمال القيم المعطاة لـ λ_{ins} و α_2 [المعادلة (26 - 3)] .

اذا بينت نتيجة الحساب أن قيمة القطر الحرج d_{cr} أكبر من قيمة القطر الخارجي d_2 عندها من المفيد أن نحتمل المسافة العازلة لعزل الانبوب .

عند زيادة سماكة العازل في المجال $d_2 < d_3 < d_{cr_{ins}}$ تزداد قيمة الضياع الحراري ويشاهد هذا بوضوح في الشكل (٣ - ٦) .

في الحالة التي يكون فيها $d_3 = d_{3ef}$ تصبح قيمة الضياع الحراري مساوية لكمية الحرارة الضائعة من الانبوب فيما اذا لم يتم عزله وبالتالي فان أية طبقة من العازل الحراري لن تحقق الغاية من وجودها .

مما سبق ينتج أنه لكي يكون العازل الحراري فعالا فيجب أن يتم اعتماد قطر حرج للعازل $d_{cr_{ins}}$ مساوي لـ أو أصغر من قيمة d_2 ($d_{cr_{ins}} \leq d_2$)

مثال :

لدينا انبوب ذو قطر خارجي $d = 20$ mm والمطلوب عزله بطبقة من الاسبستوس ذات معامل التوصيل الحراري $\lambda = 0.1 \frac{W}{m.K}$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$\alpha_2 = 5 \frac{w}{m^2.K}$ تبلغ قيمة معامل انتقال الحرارة من جهة المحيط والمطلوب تحديد فيما اذا كان من المفيد في هذه الحالة استعمال الاسبستوس كمادة عازلة .

نحسب القطر الحرج للعازل :

$$d_{cr_{ins}} = \frac{2\lambda_{ins}}{\alpha_2} = \frac{2 \times 0.1}{5} = 0.04 \text{ m} = 40 \text{ mm}$$

بما أن $d_2 < d_{cr_{ins}}$ لاتوجد فائدة في استعمال الاسبستوس .

في هذه الفقرة تمت معالجة مسالة القطر الحرج بالنسبة للاسطوانة ، يلحظ أيضا تحليل مماثل بالنسبة للاجسام من أي شكل هندسي آخر ذات سطوح داخلية وخارجية .

٣-٤ انتقال الحرارة عبر جدار كروي :

-(Heat Transfer Through a.Spherical Wall.).

في هذه الحالة تتضمن الشروط الحدية (النوع الثالث) اضافة الى قيم r_1 و r_2 ، درجات الحرارة t_{f_2} و t_{f_1} ومعاملات انتقال الحرارة بين سطوح الجدار الكروي والوسط المحيط α_1 و α_2

نفترض أن قيم درجات الحرارة t_{f_1} و t_{f_2} ومعاملات انتقال الحرارة α_1 و α_2 ثابتة مع الزمن اضافة الى افتراض أن α_1 و α_2 ثابتين على كامل السطح .

باعتبار حالة التوصيل الحراري المستقر وباعتبار أن التدفق

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الحراري Q [w] ثابت عبر جميع السطوح الايزوترمية يمكننا كتابة :

$$Q = \alpha_1 . \pi . d_1^2 \ (t_{f_1} - t_{w_1})$$

$$Q = \frac{2 \pi \lambda}{\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2}} \ (t_{w_1} - t_{w_2})$$

$$Q = \alpha_2 . \pi . d_2^2 \ (t_{w_2} - t_{f_2})$$

من المعادلات السابقة ينتج :

$$Q = \frac{\pi \ (t_{f_1} - t_{f_2})}{\frac{1}{\alpha_1 . d_1^2} + \frac{1}{2\lambda} \left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2} \right) + \frac{1}{\alpha_2 . d_2^2}} \qquad (3\text{-}27)$$

حيث تسمى القيمة :

$$K_{sph} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1 . d_1^2} + \frac{1}{2\lambda} \left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2} \right) + \frac{1}{\alpha_2 . d_2^2}}$$

بمعامل الانتقال الحراري الكلي لجدار كروي (Overall Heat-Transfer Coefficient Of a Spherical Wall).. ويقاس بالـ $\left[\frac{w}{K}\right]$. ويسمى مقلوبها :

$$\frac{1}{K_{sph}} = R_{sph} = \frac{1}{\alpha_1 . d_1^2} + \frac{1}{2\lambda} \left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2} \right) + \frac{1}{\alpha_2 . d_2^2}$$

بالمقارنة الحرارية لتدفق الحرارة عبر جدار كروي حيث

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

يقاس بـ $\left[\frac{K}{W}\right]$

٣-٥ التوصيل الحراري عبر قضيب ذو مقطع ثابت :

-(Heat Conduction Through a Rod(Fin)Of Constant Cross-Section.

a) المعادلة التفاضلية وحلها :

يمكن أن تكون القضبان ذات مقاطع مختلفة (مستطيل،دائري مثلثي ..الخ .. بما في ذلك مقاطع ذات أشكال غير منتظمة) .

لنعتبر حالة انتشار الحرارة عبر قضيب ذو مقطع ثابت f ومحيط u ولتكن درجة حرارة الوسط المحيط بالانبوب ثابتة وقدرها t_f نفترض أيضا أن معامل انتقال الحرارة من سطح القضيب الى الوسط المحيط ذو قيمة ثابتة على كامل سطح القضيب وأن معامل التوصيل الحراري لمادة القضيب λ كبيرة بدرجة كافية وأن مقطع القضيب على درجة كافية من الصغر نسبة الى طوله .

تسمح لنا الفرضية الاخيرة باهمال تغيرات درجة الحرارة عبر كامل مساحة المقطع وبالتالي اعتبار أن تغير درجة الحرارة يتم فقط في اتجاه محور القضيب .

لتبسيط الحسابات نعتبر أن درجة الحرارة $t_f = Const.$ هي درجة حرارة قياسية أي نرجع الزيادة في درجة حرارة القضيب الى هذه القيمة القياسية والتي نرمز لها بـ v أي : $v = t - t_f$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

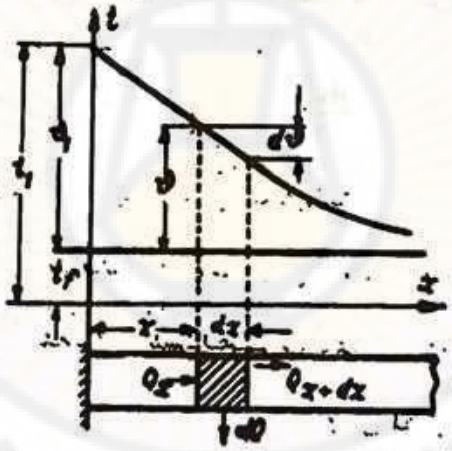
حيث :

t_f درجة حرارة الوسط المحيط .

t درجة حرارة القضيب .

عند درجة حرارة معطاة t_1 للقاعدة (بداية) القضيب عندها تكون الزيادة في درجة الحرارة :

$$v_1 = t_1 - t_f$$



الشكل(٦ ـ ٥) انتقال الحرارة عبر القضيب

لنعتبر جزء عنصري من القضيب dx على بعد قدره X من القاعدة ، يمكن كتابة معادلة توازن الحرارة بالنسبة لهذا الجزء العنصري كمايلي :

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

(a) $$Q_x - Q_{x+dx} = dQ$$

حيث :

Q_x كمية الحرارة التي تدخل السطح اليساري للجـــــزء العنصري خلال واحدة الزمن .

Q_{x+dx} كمية الحرارة المتدفقة عبر السطح المقابـــل خلال نفس الزمن .

dQ كمية الحرارة الضائعة خلال واحدة الزمن الى الوسط المحيط من السطح الخارجي للقضيب ، طبقا لقانون فوريه :

$$Q_x = -\lambda \frac{dv}{dx} . f$$

و :

$$Q_{x+dx} = -\lambda . \frac{d}{dx} (v + \frac{dv}{dx} .dx).f$$

أي:

$$Q_{x+dx} = -\lambda .f. \frac{dv}{dx} - \lambda.f. \frac{d^2v}{dx^2} .dx$$

وبالتالي :

(b) $$Q_x - Q_{x+dx} = \lambda.f. \frac{d^2v}{dx^2} .dx$$

من ناحية أخرى وطبقا لقانون نيـوتـن :

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

(c) $$dQ = \alpha_f . v . u . dx$$

بمساواة المعادلتين (b) و (c) نحصل على المعادلة التفاضلية التالية لتوزيع درجات الحرارة ضمن القضيب :

(3-28) $$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{\alpha_f . u}{\lambda . f} \cdot v = m^2 . v$$

حيث :

(d) $$m = + \sqrt{\frac{\alpha_f . u}{\lambda . f}} \qquad \left[\frac{1}{m}\right]$$

ينتج من المعادلة (d) أنه للقضيب ذو شكل وقياس محددتكون قيمة m ثابتة باعتبار أن معامل انتقال الحرارة α_f ثابت على كامل السطح الخارجي اضافة الى كون قيمة معامل التوصيل الحراري λ ثابتة ضمن مجال درجات الحرارة المعتبر .

بمكاملة المعادلة (3-28) ينتج :

(3-29) $$v = C_1 . e^{m.x} + C_2 . e^{-m.x}$$

تحدد قيم الثوابت C_2 و C_1 من الشروط الحدية والتي يمكن أن تعطى بعدة أشكال بالاعتماد على طول القضيب وبقية العوامل الاخرى .

(b) قضيب ذو طول لامتناهي .....(Infinite Rod).

نعتبر أن درجة الحرارة عند بداية القضيب ثابتة أي :

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

عند : $x = 0$ تكون $v = v_1$

في حالة كون القضيب ذو طول لانهائي ($L \to \infty$) فان كل الحرارة المكتسبة سوف تذهب الى الوسط المحيط وبالتالي عند $x \to \infty$ فان $v = 0$ بالاخذ بعين الاعتبار الشروط الحدية في المعادلة (3-29) نحصل على :

عندما : $x = 0 \Longleftarrow v_1 = C_1 + C_2$

عندما : $x \to \infty \Longleftarrow C_1 . e^{\infty} = 0$

تكون المساواة الثانية صحيحة فقط عندما $C_1 = 0$ ومنه تكون $C_2 = v_1$.

بالتبديل عن قيم C_1 و C_2 في المعادلة (3-29) نحصل على :

$$v = v_1 . e^{-m.x} \qquad (3-30)$$

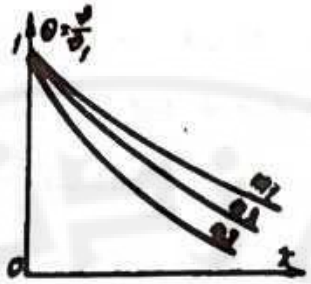
يمكن أيضا كتابة المساواة (3-30) بالشكل التالي :

$$\theta = \frac{v}{v_1} = e^{-m.x} \qquad (3-30')$$

حيث θ هي درجة الحرارة اللابعدية صيغت بادخال درجة حرارة بداية القضيب v_1 .

يبين الشكل (3-8) العلاقة الكائنة بين درجة الحرارة اللابعدية θ وطول القضيب ولعدة قيم لـ m $(m_1 < m_2 < m_3)$.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner



الشكل (٥ - ٤) تغيير درجة الحرارة على

طول القضيب

من الواضح أيضا أن درجة الحرارة اللابعدية تنقص مع زيادة قيمة العامل m وعندما $x \longrightarrow \infty$ فان جميع المنحنيات تقارب المستقيم $\theta = 0$.

ينتج من المعادلة $m = \sqrt{\frac{\alpha_f . u}{\lambda . f}}$ أن قيمة m تتناسب طردا مع الحرارة المطروحة من السطح المحيط وتتناسب عكسا مع المقدار $\sqrt{\lambda . f}$ والذي يعبر عن كمية الحرارة المنتقلة بالتوصيل باتجاه محور القضيب .

مماسبق نستنتج أنه لتفيع زعانف (ريش) التبريد يجب استعمال مواد ذات معامل توصيل حراري عالي للحصول على قيمة منخفضة لـ m

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

بافتراض أن النسبة $\frac{\alpha_f}{\lambda}$ ثابتة نستنتج أن القيمة m تزداد مع زيادة النسبة $\frac{u}{f}$ من هذا نستنتج أنه لزيادة فعالية الريش يجب اعتماد أقل قيمة ممكنة للنسبة $\frac{u}{f}$ وضمن المساحة المعطاة.

ان كمية الحرارة المطروحة من القضيب الى الوسط المحيط تساوي الى الكمية التي تعبر بداية هذا القضيب حيث تعطى كمية الحرارة المتدفقة عبر بداية القضيب بالمعادلة :

$$Q = -\lambda . f\left(\frac{dv}{dx}\right)_{x=o} [watts]$$

من المعادلة (3-30) نجد :

$$\left(\frac{dv}{dx}\right)_{x=o} = -m.e^{-m.x} . v_1\Big|_{x=o} = -m.v_1$$

بالتبديل عن قيمة تدرج الحرارة عند $x = 0$ في معادلة تدفق الحرارة ، نحصل على كمية الحرارة (تدفق الحرارة) المكتسبة أو المطروحة من القضيب الى الوسط المحيط :

$$Q = \lambda.f.m.v_1 = v_1 \cdot \sqrt{\alpha_f . u . \lambda . f} \qquad (3-31)$$

(c) قضيب محدد الطول (Finite Rod).

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

تبقى المعادلة التفاضلية (3-28) وحلها (3-29) صالحين للاستعمال في حالة قضيب محدد الطول ، وفي هذه الحالة تختلف الشروط الحدية :

$$\begin{cases} \text{عندما : } x=0 \text{ , } v = v_1 \\ \text{عندما : } x = 1 \text{ , } -\lambda\left(\frac{dv}{dx}\right)_{x=1} = \alpha_1 \cdot v_1 \\ \text{أو : } \left(\frac{dv}{dx}\right)_{x=1} = -\frac{\alpha_1}{\lambda} \cdot v_1 \end{cases} \quad (3-32)$$

حيث : v_1 درجة الحرارة في نهاية القضيب .

α_1 معامل انتقال الحرارة في نهاية القضيب .

عندما $x = 1$ فان كمية الحرارة المنتقلة بالتوصيل الى نهاية القضيب تساوي الى كمية الحرارة المطروحة من هذه النهاية الى الوسط المحيط .

تحدد الثوابت C_1 و C_2 في المعادلة (3-29) باستعمال الشروط الحدية (3-32) :

$$\text{عندما } x = 0 \text{ , } v_1 = C_1 + C_2$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

عندما $x = 1$ ،

$$(3\text{-}32') \quad \begin{cases} \left(\frac{dv}{dx}\right)_{x=1} = C_1.m.e^{m.1} - C_2.m.e^{-m.1} \\ \qquad = -\frac{\alpha_1}{\lambda} \cdot v_1 \\ \text{و :} \\ v_1 = C_1.e^{m.1} + C_2.e^{-m.1} \end{cases}$$

حيث ينتج :

$$C_1 = \frac{v_1\left(m - \frac{\alpha_1}{\lambda}\right)}{e^{2m1}\left(m + \frac{\alpha_1}{\lambda}\right) + m - \frac{\alpha_1}{\lambda}}$$

$$C_2 = v_1 \cdot \frac{e^{2m1}.\left(m + \frac{\alpha_1}{\lambda}\right)}{e^{2m1}.\left(m + \frac{\alpha_1}{\lambda}\right) + m - \frac{\alpha_1}{\lambda}}$$

بالتبديل عن قيم C_1 و C_2 في المعادلة (3-29) نحصل على :

$$(3\text{-}33) \quad v = v_1 \left[\frac{e^{m.x}.\left(m - \frac{\alpha 1}{\lambda}\right)}{e^{2m1}.\left(m + \frac{\alpha_1}{\lambda}\right) + m - \frac{\alpha 1}{\lambda}} + \right.$$

$$\left. + \frac{e^{mxe^{2m1}}\left(m + \frac{\alpha 1}{\lambda}\right)}{e^{2m1}\left(m + \frac{\alpha 1}{\lambda}\right) + m - \frac{\alpha 1}{\lambda}} \right]$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

بضرب وتقسيم الجزء اليميني من المعادلة (3-33) بالمقدار $e^{-m.l}$ وبالاصلاح ينتج :

$$v = v_1 \left[\frac{m\left[e^{m(1-x)} + e^{-m(1-x)}\right] + \frac{\alpha_1}{\lambda}\left[e^{m(1-x)} - e^{-m(1-x)}\right]}{m(e^{ml}+e^{-ml}) + \frac{\alpha_1}{\lambda}(e^{ml}-e^{-ml})} \right]$$

بالاعادة الى الذهن أن :

$$\frac{e^{x}-e^{-x}}{2} = \text{Sinh}(x) \quad , \quad \frac{e^{x}+e^{-x}}{2} = \text{Cosh}(x)$$

يمكن كتابة المعادلة (3-33) بالشكل التالي :

$$v = v_1 \frac{\text{Cosh}\left[m(1-x)\right] + \frac{\alpha_1}{\lambda.m}\text{Sinh}\left[m(1-x)\right]}{\text{Cosh}(m.1) + \frac{\alpha_1}{\lambda.m}\text{Sinh}(m.1)} \qquad (3\text{-}33')$$

في الحالة التي يمكن فيها اهمال الضياعات الحرارية من نهاية القضيب عندها يمكن كتابة الشروط الحدية (3-32) على الشكل التالي:

عندما : $x = 0 \longleftarrow v = v_1$

عندما : $x = 1 \longleftarrow \left(\frac{dv}{dx}\right)_{x=1} = 0$

يمكن القبول بالشرط الاخير في الحالة التي تكون فيها قيمة α_1 عند نهاية القضيب صغيرة وقيمة معامل التوصيل الحراري λ للمادة كبيرة وبالتالي فالنسبة $\frac{\alpha_1}{\lambda} \longrightarrow 0$ أي أنه يمكن اهمال الضياعات الحرارية الحاصلة في نهاية القضيب .

ضمن هذه الشروط الحدية تتناهى الحدود الكسرية في

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

المعادلة (3-33') الى الطرف وبالتالي تأخذ المعادلة الشكل التالي :

$$v = v_1 \frac{\cosh[m(1-x)]}{\cosh(ml)} \qquad [c^o] \qquad (3-34)$$

يمكن استعمال المعادلة (3-33') و (3-34) لحساب درجة الحرارة في أية مقطع من القضيب مع التنويه الى أن كمية الحرارة الضائعة تكون عادة صغيرة بالمقارنة مع الضياعات الحاصلة في السطوح الجانبية ، وبشكل عام يستعمل الدستور (3-34) في الحسابات الهندسية العملية .

في الحالة الحدية عندما $x = 1$ يأخذ الدستور (3-34) الشكل التالي :

$$v_{x=1} = \frac{v_1}{\cosh(m.1)}$$

ان كمية الحرارة Q_f المنتقلة من سطح القضيب الى الوسط المحيط تساوي لكمية الحرارة التي تعبر قاعدته :

$$Q_f = -\lambda . f\left(\frac{dv}{dx}\right)_{x=0}$$

من المعادلة (3-34) نجد :

$$\left(\frac{dv}{dx}\right)_{x=0} = -v_1 . m . \frac{\sinh(m.1)}{\cosh(m.1)}$$

$$= -v_1 . m . \tanh(m.1)$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

ومنه :

$$Q_f = \lambda . f . v_1 . m . \tanh(m.1)$$

بالتعويض عن قيمة $m = \sqrt{\frac{\alpha_f \cdot u}{\lambda \cdot f}}$ في المعادلة (3-35).

نحصل على :

$$Q_f = v_1 \cdot \sqrt{\alpha_f . u . \lambda . f} \cdot \tanh(m.1) \qquad (3-35')$$

في حالة قضيب طويل جدا ، عندها $\infty \longleftarrow \cosh(m.1)$ و

$\tanh(m.1) \rightarrow 1$ وبالتالي :

$$v_{x=1} = 0$$

والمعادلة (3-35) تتحول الى المعادلة (3-31) .

٣-٦ انتقال الحرارة عبر جدار مستوي مريش

(Heat Fransfer Through a Finned Plane Wall.....)

تكمن المسألة في ايجاد معدل تدفق الحرارة عبر المساحات الغير مريشة من سطح جدار مريش باعتبار أن الريش قد وضعت في الجانب ذو معامل انتقال الحرارة الاصغر .

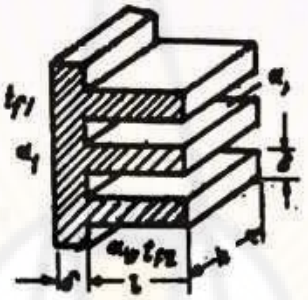
تعطى قيمة معامل انتقال الحرارة للجانب الغير مريش α_1 كما تعطى قيمته بالنسبة للسطح المريش α_w ولسطوح الريش نفسها α_f ، كما يعطى أيضا قياس الريش (الشكل 9 ـ 3) ودرجات حرارة الوسط المحيط t_{f_1} و t_{f_2} .

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

بما أن عرض الريشة أكبر بكثير من سماكتها $(b \gg \delta)$ ، لذا نفترض أن قيمة محيط مقطع الريشة تساوي $u = 2b$

ومساحة مقطع الريشة $f = b.\delta$ وبالتالي :

$$m = \sqrt{\frac{\alpha_f . u}{\lambda . f}} = \sqrt{\frac{2\,\alpha_f}{\lambda . \delta}} \quad , \quad \left[\frac{1}{m}\right]$$



الشكل(3 – 9) انتقال الحرارة عبر جدار مريش

بالتبديل عن هذه القيمة في المعادلة (35-3) والضرب والتقسيم بالقيمة 21 نحصل على :

$$Q_f = v_1 . \sqrt{\alpha_f . 2b . \lambda . b . \delta} \cdot \frac{21}{21} \tanh\left(\frac{1}{\delta}\sqrt{\frac{2\alpha_f . \delta}{\lambda}}\right)$$

$$= \alpha_f . v . F_f \cdot \frac{\tanh\left(\frac{1}{\delta}\sqrt{\frac{2\,\alpha_f . \delta}{\lambda}}\right)}{\frac{1}{\delta}\sqrt{\frac{2\,\alpha_f . \delta}{\lambda}}}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

حيث $Bi = \frac{\alpha_f \cdot \delta}{\lambda}$ تعبير لابعدي يدعى بعدد بيو والذي يعبر عن خاصية هامة لاجراء تـــوصيل الحرارة .

يمثل عدد بيو النسبة بين المقاومة الحرارية الداخليـــة للتوصيل والمقاومة الحرارية الخارجية لانتقال الحرارة حيث يمكـن كتابته بالشكل :

$$B_i = \frac{\frac{\delta}{\lambda}}{\frac{1}{\alpha_f}}$$

يمكن كتابة معادلة تدفق الحرارة من سطح الريشة بشـــكل آخر كمايلي :

$$Q_f = \alpha_f' \cdot v_1 \cdot F_f \cdot \frac{\tanh\left(\frac{1}{\delta}\sqrt{2\,Bi}\right)}{\frac{1}{\delta}\sqrt{2\,Bi}} \qquad (3-36)1$$

لنرمز للتعبير :

$$\frac{\tanh\left(\frac{1}{\delta}\sqrt{2\,Bi}\right)}{\frac{1}{\delta}\sqrt{2\,Bi}}$$

بـ E والذي يسمى بمردود الريشة .

عندها تأخذ المعادلة (3-36) الشكل :

$$Q_f = \alpha_f \cdot v_1 \cdot F_f \cdot E$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

تنتهي قيمة مردود الريشة $E = f(\frac{1}{S}\sqrt{2\,Bi})$ الى

قيمة عظمى تساوي الواحد عندما : $\frac{1}{S}\sqrt{2\,Bi} \longrightarrow 0$

عند قيم معطاة لابعاد الريشة يكون هذا ممكنا عندما

$\lambda \longrightarrow \infty$ وبالتالي $Bi \longrightarrow 0$.

تتحدد كمية الحرارة [w] Q_w المطروحة من السطوح الكاشفة بين الريش بـ :

$$Q_w = \alpha_w . v_1 . F_w$$

كما أن كمية الحرارة الاجمالية المطروحة تتحدد بـ :

$$Q = Q_f + Q_w = \alpha_f . v_1 . F_f . E + \alpha_w . v_1 . F_w \qquad (a)$$

أو :

$$\begin{cases} Q = \alpha_{red} . v_1 . F_{fw} \\ F_{fw} = F_f + F_w \end{cases} \qquad (b)$$

بمقارنة (a) و (b) نجد :

$$\alpha_{red} = \alpha_f . E . \frac{F_f}{F_{fw}} + \alpha_w . \frac{F_w}{F_{fw}} \qquad (3-37)$$

تسمى القيمة α_{red} الواردة في المعادلة (3-37)

بمعامل انتقال الحرارة المكافىء .

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

(Reduced Heat-Transfer Coefficient.....) ويعبر عن القيمة الوسطية لمعامل انتقال الحرارة عبر جدار مريش حيث يأخذ بعين الاعتبار كمية الحرارة المطروحة عبر السطوح الجانبية للريش وكمية الحرارة المطروحة عبر سطوح الجدار المستوية الكائنة بين الريش اضافة الى مردود الريش .

يمكن وصف عملية انتقال الحرارة عبر جدار مريش بمجموعة المعادلات التالية :

$$Q = \alpha_1 . F_1 (t_{f_1} - t_{w_1})$$

$$Q = \frac{\lambda}{\delta'} (t_{w_1} - t_{w_2}) . F_1$$

$$Q = \alpha_{red} (t_{w_2} - t_{f_2}) . F_{fw}$$

حيث δ' (انظر الشكل 9 – 3).

من هذه المعادلات نحصل على:

$$Q = \frac{t_{f_1} - t_{f_2}}{\frac{1}{\alpha_1 F_1} + \frac{\delta'}{\lambda . F_1} + \frac{1}{\alpha_{red} . F_{fw}}} \qquad (3-38)$$

بنسب معادلة التدفق الحراري لواحدة سطح الجدار المريش نحصل على :

$$\frac{Q}{F_{fw}} = q_{fw} = \frac{t_{f_1} - t_{f_2}}{\frac{1}{\alpha_1} . \frac{F_{fw}}{F_1} + \frac{\delta'}{\lambda} . \frac{F_{fw}}{F_1} + \frac{1}{\alpha_{red}}} = K_{fw} (t_{f_1} - t_{f_2}) \qquad (3-39)$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

حيث يسمى المقدار :

$$K_{fw} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1}\cdot\frac{F_{fw}}{F_1} + \frac{\delta}{\lambda}\cdot\frac{F_{fw}}{F_1} + \frac{1}{\alpha_{red}}}$$

بمعامل انتقال الحراري الكلي لجدار مريش -(Overall He-
at-Transfer Coefficient Of Finned Wall).. مع نسب كمية
الحرارة المنتقلة لواحدة سطح الجدار المريش . $\left[w/m^2.K \right]$.

اذا نسبنا التدفق الحراري لواحدة سطح الجزء الغير المريش
من الجدار نحصل على :

$$(3-40) \qquad \frac{Q}{F_1} = q_1 = \frac{t_{f_1} - t_{f_2}}{\frac{1}{\alpha_1}\cdot\frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_{red}}\cdot\frac{F_1}{F_{fw}}} = K_1(t_{f_1} - t_{f_2})$$

حيث يسمى المقدار :

$$K_1 = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_{red}}\cdot\frac{F_1}{F_{fw}}}$$

بمعامل انتقال الحرارة الكلي منسوبا لواحدة سطح الجزء
الغير مريش من الجدار -(Overall Heat-Transfer Coefficient Re-
duced To The Non-Finned Surface Of The Wall)....

تسمى النسبة مساحة السطح المريش F_{fw} الى مساحة السطح
النستوي F_1 بمعامل التريش ....(Finning Factor) .

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

يمكن توضيح تأثير عملية التربيش على معامل انتقال الحرارة بالمثال التالي :

ليكن $\alpha_1 = 1000\ w/m^2.K$ و $\alpha_2 = 20\ w/m^2.K$

ولنفترض أن قيمة النسبة $\frac{\delta}{\lambda}$ مهملة ،لدينا :

$$K_1' = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_{red}} \cdot \frac{F_1}{F_{fw}}}$$

ومن أجل سطح مستوي (مندوعامل تربيش $\frac{F_{fw}}{F_1}$ مساوي للواحد) نحصل على :

$$K_1' = \frac{1}{\frac{1}{1000} + \frac{1}{20}} \approx 20 \quad w/m^2.K$$

في حالة وجود ريش على سطح الجدار من جهة واحدة وبعامل تربيش قدره $\frac{F_{fw}}{F_1} = 2$ ينتج :

$$K_1 = \frac{1}{\frac{1}{1000} + \frac{1}{20} \cdot \frac{1}{2}} \approx 40 \quad w/m^2.K$$

بالتالي وعند أية قيم معطاة لمعاملات انتقال الحرارة فانه يمكن تقريبا مضاعفة كمية التدفق الحراري من طريق وضع ريش في جهة السطح المستوي من الجدار ذو معامل انتقال الحرارة الاصغر α والمحافظة على معامل تربيش قيمته $\frac{F_{fw}}{F_1} = 2$.

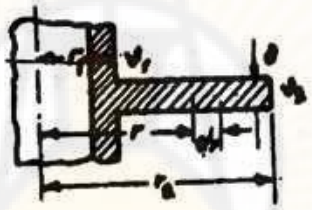
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٣-٧ انتقال الحرارة عبر ريشة دائرية ذات سماكة ثابتة

-(Heat Transfer Through a Circular Fin Of Constat Thickness).

ان حساب الريش ذات المقطع المتغير ذو طبيعة أعقد من حساب الريش المستقيمة ذات المقطع الثابت .

لنعتبر حالة انتقال الحرارة عبر ريشة دائرية ذات مقطع ثابت (الشكل 10- 3) مماثلة للريش المستعملة في حالة السطوح الاسطوانية (انبوب) .



الشكل (10- 3) انتقال الحرارة عبر ريشة دائرية ذات مقطع ثابت

تتضمن المعلومات المعطاة بالنسبة للريشة ،قطرها الداخلي r_1 والقطر الخارجي r_2 ،السماكة δ ومعامل التوصيل الحراري λ ،درجة حرارة الوسط المحيط t_f ثابتة ،فرق درجة حرارة الريشة هو $v = t - t_f$.

يعطى أيضا معامل انتقال الحرارة α لكامل سطح الريشة

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

ودرجة الحرارة v_1 عند قاعدة الريشة .

يصبح اجراء انتقال الحرارة مستقرا في الحالة التي يصبح بها تغير درجة الحرارة يتم باتجاه ارتفاع الريشة فقط .

من هذه الشروط نجد المعادلة التفاضلية التي تصف عملية التوصيل الحراري عبر هذه الريشة .

لنقم أولا بتحديد معادلة توازن الطاقة لجزء حلقي من الريشة سماكته dr :

$$Q_r - Q_{r+dr} = dQ \qquad (3-41)$$

بايجاد قيم الحدود الداخلة في المعادلة (3-41)نحصل على معادلة تفاضلية بالشكل التالي :

$$\frac{d^2v}{dr^2} + \frac{1}{r}.\frac{dv}{dr} - \frac{2\alpha}{\lambda.\delta} v = 0 \qquad (3-42)$$

بالرمز الى المقادير :

$$\frac{1}{r} = \frac{m}{z} \quad , \quad m.r = z \quad , \quad \frac{2\alpha}{\lambda.\delta} = m^2$$

وبالتبديل من القيم التالية بمايساويها :

$$\frac{d^2v}{dr^2} = m^2.\frac{d^2v}{dz^2} \quad , \quad \frac{dv}{dr} = \frac{dv}{dz}.m$$

تصبح المعادلة (3-43) :

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$\frac{d^2v}{dz^2} + \frac{1}{z}\cdot\frac{dv}{dz} - v = 0 \qquad (3\text{-}43)$$

تسمى المعادلة (3-43) بمعادلة بسل والتي حلها العام :

$$v = C_1 . I_o(z) + C_2 . K_o(z) \qquad (3\text{-}44)$$

حيث :

$I_o(z) = I_o(m.r)$ متحول بسل المعدل من النوع الاول

$K_o(z) = K_o(m.r)$ متحول بسل المعدل من النوع الثاني

لهذه المتحولات الخواص التالية :

عندما $r = 0$ ⟸ فإن $I_o(m.r)$ ، $K_o(m.r)$ ⟵ ∞

عندما $r = \infty$ ⟸ $I_o(m.r)$ ⟵ ∞ ، $K_o(m.r) = 0$

تتحدد الثوابت C_1 و C_2 من الشروط الحدية .

اذا افترضنا أن الضياع الحراري من طرف الريشة الدائرية مهمل ،عندها تأخذ الدساتير الحسابية الشكل التالي :

من أجل توزع درجات الحرارة على طول الريشة :

$$v = v_1 \cdot \frac{I_o(m.r).K_1(m.r_2)+I_1(m.r_2).K_o(m.r)}{I_o(m.r_1).K_1(m.r_2)+I_1(m.r_2).K_o(m.r_2)} \qquad (3\text{-}45)$$

وبالنسبة لدرجة الحرارة عند طرف (س) الريشة :

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$v_2 = v_1 \cdot \frac{I_o(m.r_2).K_1(m.r_2)+I_1(m.r_2).K_o(m.r_2)}{I_o(m.r_1).K_1(m.r_2)+I_1(m.r_2).K_o(m.r_1)} \qquad (3-46)$$

وبالنسبة لكمية الحرارة :

$$Q = -\lambda 2\pi.r_1.\delta\left(\frac{dv}{dr}\right)_{r=r_1} = 2\pi.r_1.\alpha.\delta.m.v_1.\psi \qquad (3-47)$$

حيث :

$$\psi = \frac{I_1(m.r_2).K_1(m.r_1)-I_1(m.r_1).K_1(m.r_2)}{I_o(m.r_1).K_1(m.r_2)+I_1(m.r_2).K_o(m.r_1)}$$

عند استعمال هذه الدساتير يمكن الاخذ بعين الاعتبار كمية الحرارة المتدفقة من طرف الريشة عن طريق زيادة قيمة ارتفاع الريشة r_2 بمقدار نصف السماكة .

تعتبر الدساتير المعبر عنها بالمعادلات (3-45) و (3-46) و (3-47) غير مناسبة للاستعمال في الحسابات الهندسية .

يمكن معالجة وحساب الريش الدائرية ذات السماكة الثابتة اضافة الى مختلف الريش المستقيمة ذات المقطع المتغير باعتبارها كريش مستقيمة ذات سماكة ثابتة ، عندها فان كمية الضياع الحراري من سطح الريشة الدائرية ذات السماكة الثابتة هو :

$$Q = \varepsilon . F . q \qquad (3-48)$$

حيث :

Q كمية الحرارة المطروحة من الريشة الدائرية [W]

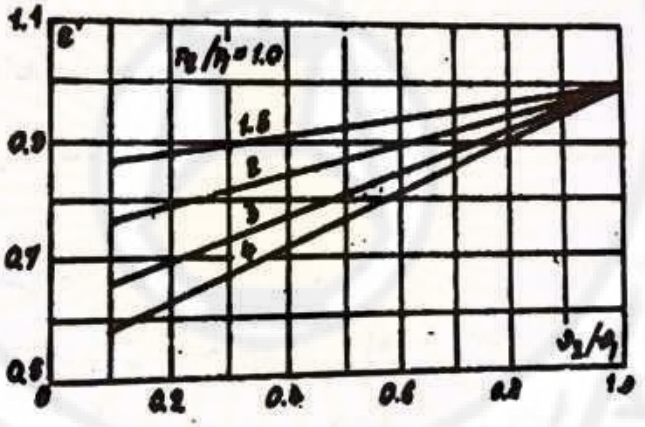
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

F مساحة الريشة الدائرية

$q = \frac{Q}{F}$ كمية الحرارة المطروحة خلال واحدة الزمن من واحدة سطح ريشة مستقيمة ذات سماكة مساوية لسماكة الريشة الدائرية وطولها 1 m .

$\varepsilon' = f(\frac{v_2}{v_1}, \frac{r_2}{r_1})$ عامل تصحيح يؤخذ من المخطط البياني (الشكل 11 – 3)

تعبر القيمة $\frac{v_2}{v_1}$ عن نسبة درجات الحرارة عند قاعدة وطرف الريشة وتحسب بواسطة الدستور المستخرج في حالة ريشة مستقيمة ذات مقطع ثابت .



الشكل (11 – 3) $\left[\varepsilon' = f(\frac{v_2}{v_1}, \frac{r_2}{r_1})\right]$ مخطط مساعد لحساب الزعانف الدائرية ذات سماكة ثابتة .

اضافة الى ماسبق نقوم بحساب درجة حرارة من الريشة

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

ومعدل تدفق الحرارة من الريشة المستقيمة ، ومن ثم نحوض من قيمتين q و q' الناتجتين في المعادلة (3-48) حيث نحصل على التدفق الحراري من الريشة الدائرية .

٣-٨ التوصيل الحراري عبر ريشة مستقيمة ذات سماكة متغيرة : (Conduction Through a Straight Fin Of Variable Thickness).

عند تصميم أنظمة التبريد لمعدات وآلات مختلفة وخاصة تلك المستخدمة في حقل الطيران .

تكمن أهمية المسألة في ايجاد مبادلات حرارية ذات حد أدنى من الوزن قادرة على نقل طاقة حرارية أعظمية .

والسؤال المطروح هو :

ماهو البروفيل المفضل للريشة الذي يحقق اقتصادية في الوزن عند قيمة معطاة لمعدل انتقال الحرارة .

ريشة ذات وزن أصغري :

في هذه الحالة تحل المسألة عن طريق اشتراط كون جميع مقاطع الريشة لها نفس المرود والفعالية أي يجب أن يكون المعدل النوعي لانتقال الحرارة ثابتا على كامل مساحة مقطع الريشة وهذا يعني أن خطوط تدفق الحرارة يجب أن تكون موازية لمحور الريشة .

عند مثل هذه الشروط فان توزع درجات الحرارة على طول

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

خطوط تدفق الحرارة يأخذ منحى خطي (الشكل 12- 3). عند درجة حرارة معطاة t_1 لقاعدة الريشة وعند درجة حرارة طرف الريشة قريبة من درجة حرارة الوسط المحيط t_f ، تصبح المسألة ذات بعد واحد .

محاسبق يمكن كتابة المعادلة التالية ولأية مقطع من الريشة :

$$t - t_f = \frac{x}{h} (t_1 - t_f)$$

حيث x البعد المقاس على طول محور الريشة ابتداء من (سن) الريشة ، h الارتفاع الكلي للريشة .

لنعتبر سطحا عنصريا من الريشة على بعد x حيث يشكل هذا السطح زاوية قدرها φ مع محور الريشة ، اذا كان معدل تدفق الحرارة عبر مقطع يعامد محور الريشة هو q فان معدل التدفق الحراري عبر هذا السطح العنصري سيكون $q.\sin\varphi$ الشكل(12- 3)

محاسبق نكتب :

$$q.\sin\varphi = \alpha(t-t_f)$$

أو :

$$q.\sin\varphi = \frac{\alpha}{h} .x.(t_1-t_f) \qquad (3-50)$$

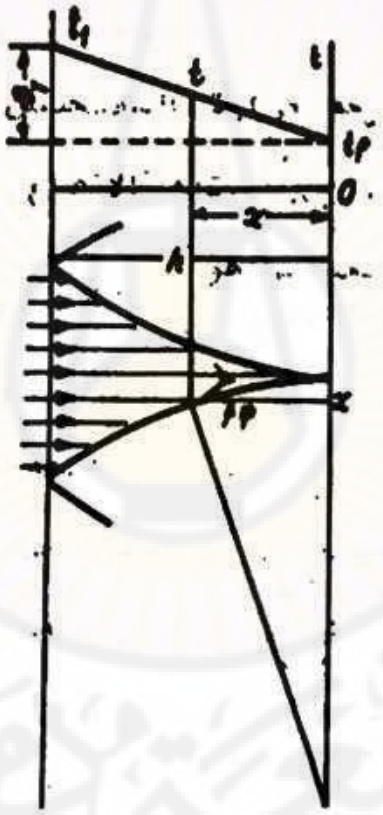
ينتج من المعادلة (3-50) أن الزاوية φ تتبع في تغيرها للمتغير x أي :

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$\text{Sin}\,\varphi = \frac{\alpha \cdot v_1}{g \cdot h_1} \cdot x \qquad (3\text{-}50')$$

ان محيط الريشة المحدد بهذه الطريقة هو عبارة عن قوس دائري نصف قطره r وحيث أن $\text{Sin}\,\varphi = \frac{x}{r}$ بالتالي ينتج من المعادلة (3-50') أن :

$$r = \frac{g \cdot h}{\alpha \cdot v_1}$$



الشكل (12 - 3) مقطع عبر ريشة ذات وزن أصغري

مماسبق نرى أن الريشة ذات البروفيل الدائري تحقق شرط

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الوزن الاصغري .

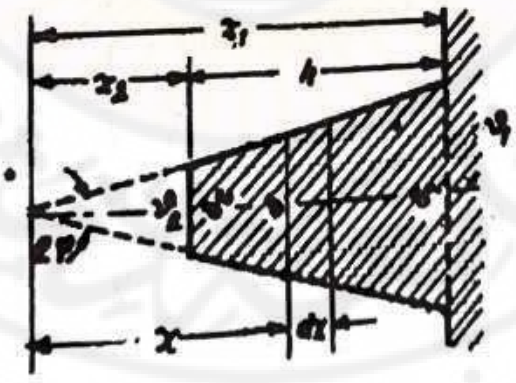
مثل هذه الريشة تختلف قليلا في الوزن عن الريشة المستقيمة ذات المقطع المثلثي (Straight Triangular Fin) ومع ذلك ومن الناحية التكنولوجية تبقى الاخيرة أسهل في التصنيع وهذا يفسر انتشار هذا النوع من الريش .

الريش ذات مقطع شبه المنحرف أو المثلثي :

(Triangular And Trapezoidal Fins).

تستعمل الريش المستقيمة من كلا النوعين ذات المقطع المثلثي (الحاد) وذات مقطع شبه المنحرف (مشطوف الرأس) استعمالا واسعا في التطبيقات الهندسية .

لنفترض أنه معطى لدينا أبعاد الريشة الهرمية الشكل (13- 3) ودرجة الحرارة عند القاعدة v_1 .



الشكل (13- 3) انتقال الحرارة عبر ريشة مستقيمة ذات مقطع شبه منحرف

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

من المناسب أن نأخذ مبدأ الاحداثيات عند رأس الهرم مع توجيه المحور x بحيث ينطبق على محور تناظر الريشة ، في هذه الحالة يأخذ اتجاه تدفق الحرارة اتجاها معاكسا للاتجاه الموجب لمحور X ، تكون مساحة مقطع هذه الريشة f تابعة فقط للاحداثي x أي أن :

$$f = 1.\varsigma = 21.x.\tan\varphi \qquad (a)$$

تساوي كمية الحرارة المنتشرة من الجزء العنصري dx الى الوسط المحيط للمقدار :

$$d(\lambda.f.\frac{dv}{dx}) = a.u.v.dx' \qquad (b)$$

حيث :

a :معامل انتقال الحرارة من سطح الريشة .

u :محيط بروفيل الريشة على بعد x والذي يمكن وصفه بالشكل $u = 2.1$.

dx' : $dx' = \frac{dx}{\cos\varphi}$.

بمطابقة (b) مع الاخذ بعين الاعتبار المعادلة (a) نحصل على :

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{1}{x}.\frac{dv}{dx} - \frac{1}{x}.\frac{\alpha}{\lambda.\sin\varphi} = 0 \qquad (c)$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

بإدخال متحول جديد $z = \frac{\alpha}{\lambda . \sin \varphi} . x$ تصبح المعادلة السابقة

على الشكل :

$$\frac{d^2v}{dz^2} + \frac{1}{z} . \frac{dv}{dz} - \frac{1}{z} v = 0 \qquad (3-51)$$

تعبر المعادلة التفاضلية (3-51) عن معادلة بسل المعدلة

والتي حلها :

$$v = C_1 . I_o(2\sqrt{z}) + C_2 . K_o(2\sqrt{z}) \qquad (3-52)$$

حيث I_o و K_o توابع بسل المعدلة من النوع الاول والثاني

يمكن ايجاد ثوابت التكامل C_1 و C_2 الداخلة في المعادلة (3-52) من الشروط الحدية وهي :

عند : $x=x_1$ $\Longleftarrow$ $v=v_1$

اضافة لما سبق وباهمال كمية الحرارة المطروحة من طرف الريشة ، لدينا :

عند : $x=x_2$ $\Longleftarrow$ $v=v_2$, $(\frac{dv}{dx})_{x=x_2} = 0$

بعد تحديد قيم ثوابت التكامل C_1 و C_2 نحصل على :

بالنسبة لتوزع درجات الحرارة على طول الريشة :

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$v = v_1 \cdot \frac{I_o(2\sqrt{z}).K_1(2\sqrt{z_2}) + I_1(2\sqrt{z_2}).K_o(2\sqrt{z_2})}{I_o(2\sqrt{z_1}).K_1(2\sqrt{z_2}) + I_1(2\sqrt{z_2}).K_o(2\sqrt{z_1})} \qquad (3-53)$$

بالنسبة لدرجة الحرارة عند طرف الريشة :

$$v_2 = v_1 \cdot \frac{I_o(2\sqrt{z_2}).K_1(2\sqrt{z_2}) + I_1(2\sqrt{z_2}).K_o(2\sqrt{z_2})}{I_o(2\sqrt{z_1}).K_1(2\sqrt{z_2}) + I_1(2\sqrt{z_2}).K_o(2\sqrt{z_1})} \qquad (3-54)$$

يمكن تحديد التدفق الحراري بواسطة قانون فوريه :

$$Q = -\lambda . f_1 \left(\frac{dv}{dx}\right)_{x=x_1} \qquad (3-55)$$

$$= \frac{\alpha . v_1 . \delta_1 . 1}{\sqrt{z_1} . \sin\varphi} \cdot \left[\frac{I_1(2\sqrt{z_1}).K_1(2\sqrt{z_2}) - I_1(2\sqrt{z_2}).K_1(2\sqrt{z_1})}{I_o(2\sqrt{z_1}).K_1(2\sqrt{z_2}) + I_1(2\sqrt{z_2}).K_o(2\sqrt{z_1})}\right]$$

عند استعمال هذه الدساتير يمكن الاخذ بالحسبان لكمية الحرارة المطروحة من طرف الريشة عن طريق زيادة ارتفاع الريشة h بمقدار نصف السماكة $\frac{\delta_2}{2}$ ،

من أجل ريشة ذات بروفيل مثلثي $x_2 = 0$ وبالتالي $z_2 = 0$

و $I_1(0) = 0$ عندها فان الدساتير (3-53)، (3-54) و (3-55) تأخذ الصيغ التالية :

$$v = v_1 \cdot \frac{I_o(2\sqrt{z})}{I_o(2\sqrt{z_1})} \qquad (3-56)$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

(3-57) $$v_2 = v_1 \cdot \frac{1}{I_o\left(2\sqrt{z_1}\right)}$$

(3-58) $$Q = \frac{\alpha.\delta_1.v_1.1}{\sqrt{z_1}.\sin\varphi} \cdot \left[\frac{I_1\left(2\sqrt{z_1}\right)}{I_o\left(2\sqrt{z_1}\right)}\right]$$

تصبح كمية الحرارة المنتقلة عبر ريشة ذات مقطع مثلثي وعند وزن معطى أعظمية عندما تتحقق المساواة التالية :

(3-59) $$\frac{h}{\delta_1/2} = 1.309 \sqrt[3]{\frac{2\lambda}{\alpha.\delta_1}}$$

تعتبر الدساتير (3-53) ، (3-54) و (3-55) غير مناسبة للتطبيق من الوجهة العلمية ، لذا تحسب الريش ذات المقطع المتغير كريش ذات بروفيل أو مقطع ثابت ، ومنه :

(3-60) $$Q'' = \varepsilon''.q.F''$$

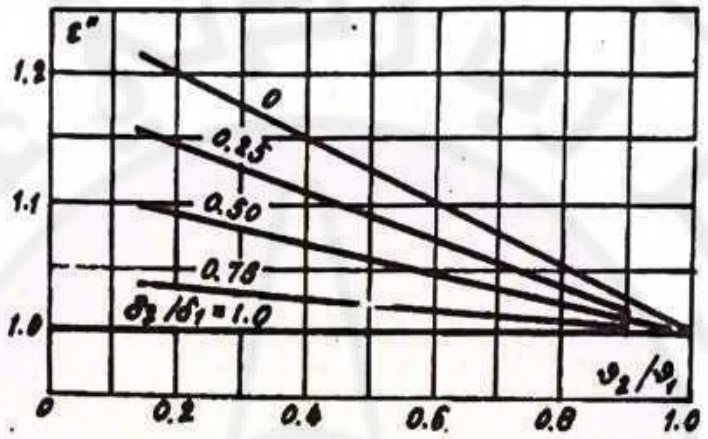
حيث : Q'' كمية الحرارة المتدفقة خلال واحدة الزمن .

F'' سطح التبريد للريشة .

$q = \frac{Q}{F}$ معدل تدفق الحرارة لريشة مستقيمة ذات طول وارتفاع وسماكة مساوية على التوالي الى طول وارتفاع والسماكة الوسطية لريشة مخروطية .

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$\varepsilon'' = f(\frac{v_2}{v_1}, \frac{\delta_2}{\delta_1})$ عامل تصحيح للريش المخروطية وتقدر قيمته من المخطط المبين في الشكل (14 – 3) .



الشكل(14– 3) مخطط $\varepsilon'' = f(\frac{v_2}{v_1}$ و $\frac{\delta_2}{\delta_1})$

مساعدلحساب الريش ذات المقطع المثلثي والهرمي

يتعلق المنحني السفلي (عند $\frac{\delta_2}{\delta_1} = 1$) بحساب الريش المستقيمة ذات المقطع الثابت ، أما المنحني العلوي $\frac{\delta_2}{\delta_1} = 0$ فيتعلق بحساب الريش الهرمية الشكل .

تحسب النسبة $\frac{v_2}{v_1}$ من الدستور (2-34) كماتؤخذ كمية الحرارة المنتقلة من طرف الريشة ، بعين الاعتبار عن طريق زيادة ارتفاع الريشة h بمقدار نصف سماكتها .

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٣-٩ التوصيل الحراري عبر صفيحة مستوية ومتجانسة نصف منتهية
(Conduction Through a Flat Semi-Finite Homogeneous Plate).

لنعتبر صفيحة مستوية ومتجانسة سماكتها δ ذات معامل توصيل حراري λ ثابت وباعتبار أن طول هذه الصفيحة باتجاه محور oy غير محدود [الشكل(15- 3)] .

درجة حرارة سطح الصفيحة المحدد بالاحداثيات $x = 0$ ، $x = \delta$ و $y \longrightarrow \infty$ يفترض أن تكون ثابتة ومساوية لـ t_1 بينما تكون درجة الحرارة عبر مقطع الصفيحة وعند قيمة محددة لـ y تابعة للاحداثي x ، أي $t = f(x)$.



الشكل(15- 3) صفيحة نصف منتهية

نفترض أن الصفيحة رقيقة نسبيا في اتجاه محور oz كما أن سطوح الصفيحة موازية للمستوي xoy وهي معزولة عزلا حراريا

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

وبشكل مثالي

على أساس الفرضية السابقة يمكن اهمال تدرج درجة الحرارة $\frac{\partial t}{\partial z}$ وبالتالي يكون حقل درجات الحرارة لمثل هذه الصفيحة ثنائي البعد .

تأخذ المعادلة التفاضلية لحالة التوصيل المستقر ثنائي البعد .....(Two-Dimensional Steady State Conduction) الشكل التالي :

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = 0$$

أو :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \qquad (3\text{-}61)$$

حيث v هي مقدار ارتفاع درجة الحرارة من درجة الحرارة القياسية t_1 ، أي :

$$v = t - t_1$$

تأخذ الشروط الحدية الشكل :

$$\left.\begin{array}{ll} x = 0 \text{ أو } x = S & \text{عند } 0 \\ y \longrightarrow \infty & \text{عند } 0 \end{array}\right\} = v \qquad (3\text{-}62)$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$y = 0$

عند $f(x) - t_1 = f(x)$

نقوم بحل المعادلة (3-61) بطريقة فصل المتحولات ومنه تصبح $v(x,y) = \varphi(x).\ \psi(y)$

وبفرض أن :

المعادلة (3-61) على الشكل :

$$\frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} = -\frac{\psi''(y)}{\psi(y)} = \text{Const.} \qquad (3\text{-}63)$$

ان كلا من الحدين اليميني واليساري في هذه المعادلة متطابقين وثابتين ،بالرمز لهذا الثابت بـ (ξ^2-) نحصل على معادلتين تفاضليتين عاديتين :

$$\varphi''(x) : \xi^2\ \varphi(x) = 0 \qquad (3\text{-}64)$$

$$\psi''(y) - \xi^2\ \psi(y) = 0 \qquad (3\text{-}65)$$

ان حل المعادلة (3-64) هو تابع من الشكل :

$$\varphi(x) = C_1.\text{Cos}(\xi.x) + C_2.\text{Sin}(\xi.x) \qquad (3\text{-}66)$$

طبقا للمعادلة (3-29) فان الحل العام للمعادلة (3-65) يأخذ الشكل التالي :

$$\psi(y) = C_3.e^{\xi y} + C_4.e^{-\xi y} \qquad (3\text{-}67)$$

ان الحل العام للمعادلة (3-61) ينتج عن جداء المعادلتين

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

(3-66)و(3-67). الحل (3-66) يحقق الشروط الحديـــة (3-66,)

$v = 0$ عند $x = 0$ و $\varphi(x) = 0$.

وهذا يكون ممكنا عندما $C_1 = 0$. تكون الشروط الحدية $V_1 = 0$ عند $y \longrightarrow \infty$ محققة عندما يكون التابع $\psi(y)$ مساويا للصفر عندما $y \longrightarrow \infty$ ويكون هذا محققا عندما تكون $C_3 = 0$

لذا فان حل المعادلة (3-61) يصبح :

$$v = C.e^{-\varepsilon.y} .Sin(\varepsilon.x)$$

لكي يحقق التعبير الناتج الشروط الحدية $v = 0$ عنـــد $x = \delta$ يجب أن يساوي $Sin(\varepsilon.\delta)$ أو $\varepsilon = \frac{n.\pi}{\delta}$ (حيـــث $n = 1,2,3,.....$) .

من أجل أية قيمة لـ n يوجد حل جزئي ولكل حل خاص توجد ثوابت تكامل متعلقة به .

يتألف الحل العام من مجموع الحلول الجزئية ولكل القيم الموجبة لـ n :

$$v = \sum_{n=1}^{n=\infty} C_n.e^{-\frac{n.\pi}{\delta}.y} . Sin\left(\frac{n.\pi}{\delta}.x\right) \qquad (3-68)$$

ان الحل الناتج يحقق الشرط الحدي الثالث أي : $v = 0$ عندما $y \longrightarrow \infty$ يحدد ثابت التكامل C_n من الشروط الحدية $v = F(x)$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

عند $y = 0$ ومنه :

$$F(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} C_n . Sin(\frac{n.\pi}{\delta} . x)$$

التعبير الناتج ماهو الا تنشور التابع ($F(x)$) وفقا لسلسلة فوريه ، تحدد ثوابت هذه السلسلة وفقا للمعادلة التالية

$$C_n = \frac{2}{\delta} \int_0^{\delta} F(x) . Sin(\frac{n.\pi}{\delta} x) \, dx$$

بالاخذ بعين الاعتبار المعادلة الاخيرة يمكن كتابة الحل الممثل لحقل درجات الحرارة كمايلي :

$$v = \frac{2}{\delta} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n.\pi}{\delta} . y} . Sin(\frac{n.\pi}{\delta} x)$$

$$\int_0^{\delta} F(x) . Sin(\frac{n.\pi}{\delta} . x) \, dx$$

لذا وبعد تحديد ثوابت التكامل فان الحل العام للمسالة ثنائية البعد يظهر كمجموعة حدود لسلسلة غير منتهية .

بالتشابه مع ما سبق يمكننا الحصول على حل المسالة الخاصة باسطوانة طلية فحدما تتغير درجات الحرارة فقط في اتجاهين والذي

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

سوف يظهر كمجموع لحدود سلسلة غير منتهية كما هو في حالة الصفيحة المستوية .

عند حل مسائل ذات طبيعة خاصة يؤخذ التكامل التابع للمعادلة (2-69) على افتراض أن درجة الحرارة معطاة .

وتتمثل الخطوة اللاحقة في حساب حدود السلسلة بالاعتماد على مدى الدقة والانحراف المطلوبين ، وعلى سبيل المثال اذا كانت $t = t_2 = Const.$ عند $y = 0$ يكون $f(x) = t_2$ و $F(x) = t_2 - t_1$ والتكامل هو :

$$\int F(x).Sin(\frac{n.\pi}{\delta}x)\,dx = -\frac{\delta}{n.\pi}(t_2-t_1).(-Cos\frac{n.\pi}{\delta}x)\Big|_0^{\delta} =$$

$$= \frac{2\delta}{n.\pi}(t_2-t_1)$$

حيث : $n = 1, 3, 5, 7, \ldots\ldots$

بتعويض القيمة الناتجة في المعادلة (3-69) نجد :

$$v = (t_2-t_1)\frac{4}{\pi}\left[e^{-\frac{\pi}{\delta}y}Sin(\frac{\pi}{\delta}x) + \right. \tag{3-70}$$

$$\left. + \frac{1}{3}e^{-\frac{3\pi}{\delta}y}.Sin(\frac{3\pi}{\delta}x) + \frac{1}{5}e^{-\frac{5\pi}{\delta}y}.Sin(\frac{5\pi}{\delta}x) + \ldots\right]$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

من الواضح أن السلسلة الناتجة هي سلسلة متقاربة .

يمكن حساب خطوط ثبوت درجة الحرارة (الايزوترمات) بعدة طرق مختلفة ، والطريقة الاكثر دقة تعتمد على افتراض أن y ثابتة وبالتالي نحصل على مجموعة من المنحنيات تطابق القيمة الثابتة لـ y .

٣-١٠ التبريد النفوذي لصفيحة مستوية :

-(Porous Cooling Of a Plane Plate)..

تستعمل المواد المسامية (Porous Materials) بشكل واسع في المبادلات الحرارية ذات درجات الحرارة العالية شفرات التوربينات ،فوهات النفث ... الخ .

عمليا يمكن اجراء عملية تبريد المواد ذات البنية المسامية عن طريق حقن سائل أو غاز عبر المسامات الكائنة في المادة .

تأخذ عملية انتقال الحرارة بهذا الاسلوب شكلا معقدا جدا .

لحل هذه المسألة نفترض أن اجراء انتقال الحرارة ضمن الصفيحة المستوية تتم عن طريق التوصيل الحراري عبر الطور الصلب كما نفترض أن الفرق بين درجة حرارة الجسم الصلب والسائل صغير

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

في أية نقطة من المجموعة .

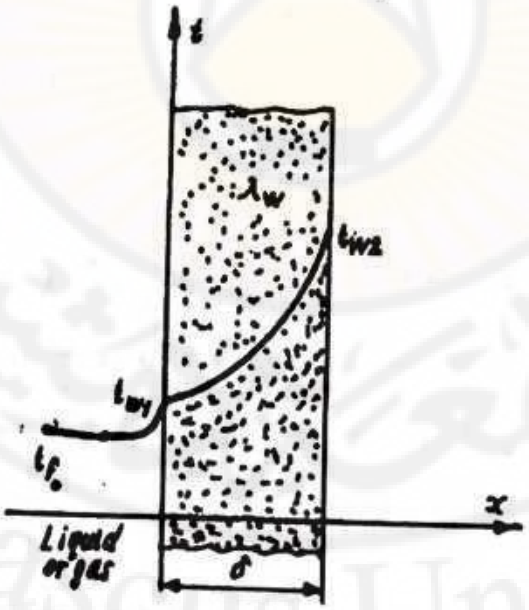
لنعتبر صفيحة مستوية ذات معامل توصيل حراري λ_w ثابت الشكل (16- 3)، أبعاد هذه الصفيحة في اتجاهين y و z كبيرة حيث يفترض أن حقل درجات الحرارة أحادي البعد(One-Dimensional)

نعتبر أيضا أن الفرضية السابقة تشمل سائل التبريد ، أي

$$t = t(x) \quad \text{عند} \quad 0 \leq x \leq \delta$$

$$t_f = t_f(x) \quad \text{عند} \quad 0 \leq x \leq \infty$$

عند $x = \delta$ تكون درجة حرارة سطح الصفيحة t_{w_2} كما أن درجة حرارة السائل المحقون عبر الصفيحة وباتجاه محور ox تساوي الى t_{f_o} عند بعد $x \longrightarrow -\infty$ حيث أن كلا درجتي الحرارة t_{w_2} و t_{f_o} معروفتين .



شكل (16- 3) التبريد النفوذي لصفيحة مستوية

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

تتضمن القيم المعطاة أيضا معدل التدفق الكتلي للسائل $G \left(\frac{Kg}{m^2 . S}\right)$ كما يفترض أن تكون الحرارة النوعية C_{pf} ومعامل التوصيل الحراري λ_f للسائل ثابتين .

من الضروري أن نجد توزع درجات الحرارة ضمن الجسيدار المسامي .

نعرف مسامية الصفيحة P(Plate Porosity) على أنها نسبة حجم المسامات الى الحجم الكلي لمادة الصفيحة ، وعند توزع مسامي منتظم يمكن الافتراض بأن مساحة تدفق السائل في واحدة مساحة الصفيحة المعامدة لاتجاه تدفق السائل هو $f_f = P$ كما أن مساحة السطح الصلب لتوصيل الحرارة هي $f_w = 1-f_f = 1-P$.

يجب أن نلاحظ أنه اذا كان معدل التدفق الكتلي للسائل قبل دخوله الى الصفيحة هو G فان معدل التدفق الكتلي للسائل ضمن الصفيحة هو

يمكن تصور أن عملية انتقال الحرارة في صفيحة مسامية تتألف من انتقال للحرارة بالتوصيل عبر هذه الصفيحة وانتقال للحرارة بين الجسم الصلب والسائل المار عبر القنوات الداخلية (المسامات) .

يمكن كتابة معادلة توصيل الحرارة في متطوعي الصفيحة x و x+dx كمايلي :

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$q_x = - \lambda_w \cdot \frac{dt}{dx} (1-P)$$

و :

$$q_{x+dx} = - \lambda_w \cdot \frac{d}{dx}(t + \frac{dt}{dx} .dx).(1-P)$$

بسبب انتقال الحرارة بين الجسم الصلب والسائل فان الحرارة المكتسبة للعنصر dx سوف تصرف لتسخين هذا السائل أي :

$$dq = q_x - q_{x+dx} = G.C_{pf}.dt$$

أو :

$$-\lambda_w.(1-P).\frac{dt}{dx} + \lambda_w(1-P)\frac{dt}{dx} + \lambda_w(1-P)\frac{d^2t}{dx^2} dx = G.C_{Pf}.dt$$

لذلك تأخذ المعادلة التفاضلية ضمن المجال $0 \leq x \leq \delta$ الشكل :

$$(a) \qquad \frac{d^2t}{dx^2} - \frac{G.C_{Pf}}{\lambda_w(1-P)} \cdot \frac{dt}{dx} = 0$$

وباعتبار أن :

$$\frac{G.C_{Pf}}{\lambda_w(1-P)} = f_w$$

تصبح المعادلة (a) على الشكل :

$$(3-71). \qquad \frac{d^2t}{dx^2} - f_w \cdot \frac{dt}{dx} = 0$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

إضافة الى ماسبق يمكن الحصول على المعادلة التفاضلية

ضمن المجال $0 \leq x \leq \infty$ بشكل مشابه :

$$\frac{d^2t}{dx^2} - f_f \frac{dt}{dx} = 0 \qquad (3\text{-}72)$$

حيث :

$$f_f = \frac{G.C_{pf}}{\lambda_f}$$

ان الحل العام للمعادلة (3-71) هو :

$$t = C_1 . e^{fw.x} + C_2$$

حيث تحدد الثوابت C_1 و C_2 من الشروط الحدية :

عند $x=0$ $\Longleftarrow$ $t=t_{w_1}$

عند $x=\delta$ $\Longleftarrow$ $t=t_{w_2}$

بعد تحديد قيم الثوابت C_1 و C_2 نحصل على معادلة t ضمن المجال $0 \leq x \leq \delta$:

$$t=t_{w_1} + \frac{t_{w_2} - t_{w_1}}{e^{fw.x} - 1} . (e^{fw.x} - 1) \qquad (3\text{-}73)$$

ان الحل العام للمعادلة (3-72) هو :

$$t_f = C_3 . e^{ff.x} + C_4$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

والذي توافق الشروط الحدية التالية لتدفق المائع :

$$t_f = t_{f_o} \Longleftarrow \quad x = -\infty \text{ عند}$$

$$\lambda_f \cdot \frac{dt_f}{dx} = \lambda_w (1-p) \cdot \frac{dt}{dx} \Longleftarrow \quad x = 0 \text{ عند}$$

من هذه الشروط نجد ثوابت التكامل :

$$C_4 = t_{f_o}$$

$$C_3 = \frac{t_{w_2} - t_{w_1}}{e^{\int w \cdot \delta} - 1}$$

مماسبق يمكن كتابة حل المعادلة (3-72) كمايلي :

$$t_f = t_{f_o} + \frac{t_{w_2} - t_{w_1}}{-e^{\int w \cdot \delta} - 1} \cdot e^{\int r \cdot x} \qquad (-\infty < x < 0) \qquad (3-74)$$

بالاعتماد على المعادلة (3-74) يمكن حذف درجة الحرارة المجهولة t_{w_1} في المعادلة (3-73) :

عند $x = 0$

$$t_f = t_{w_1} = t_{f_o} + (t_{w_2} - t_{f_o}) \cdot e^{-\int w \cdot \delta}$$

بتعويض قيمة t_{w_1} في المعادلة (3-73) نحصل على التعبير

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

النهائي الممثل لتوزع درجات الحرارة في صفيحة مسامية ($\delta \gg x \gg 0$):

$$\frac{t - t_{f_o}}{t_{w_2} - t_{f_o}} = e^{-f_w \cdot \delta (1-x/\delta)} \qquad (3\text{-}75)$$

بالرمز θ الى درجة حرارة اللابعدية للصفيحة $\theta = \frac{t - t_{f_o}}{t_{w_2} - t_{f_o}}$

يمكن عندها كتابة المعادلة (3-75) كمايلي :

$$\theta = e^{-f_w \cdot \delta (1-x/\delta)} \qquad (3\text{-}75')$$

تحسب درجة الحرارة الوسطية عبر المقطع المسامية عند قيمة معطاة لـ ($f_w \cdot \delta$) من التكامل $\bar{\theta} = \frac{1}{\delta} \int_0^{\delta} \theta \, . \, dx$

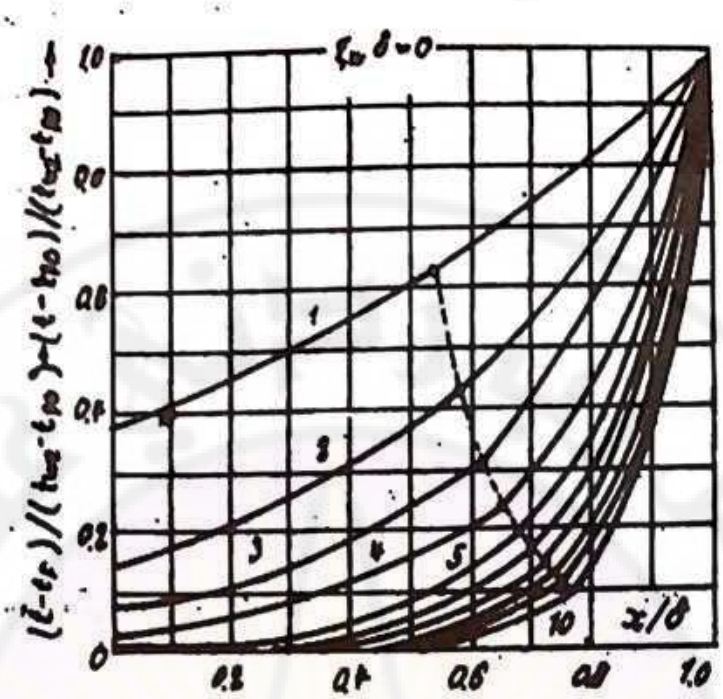
حيث تساوي الى :

$$\bar{\theta} = \frac{\bar{t} - t_{f_o}}{t_{w_2} - t_{f_o}} = \frac{1}{f_w \cdot \delta} (1 - e^{-f_w \cdot \delta}) \qquad (3\text{-}76)$$

اذا اعتبرنا القيمة $f_w \cdot \delta$ أنها مقدار متحول (بارامتر) يمكن بالتالي تمثيل المعادلة (3-75) كما هو مبين بالشكل (3-17) والذي يوضح بيانيا درجة الحرارة الوسطية المحسوبة بالمعادلة (3-76) بالتوافق مع قيم $f_w \cdot \delta$.

من أجل حل مسألة توزع درجات الحرارة في صفيحة مبردة نظريا وعند شروط حدية مختلفة ، نفترض أن المسامات ذات الاقطار المصغرة موزعة بانتظام على كامل حجم الجدار المستوي (الشكل 18-3)

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner



الشكل(17- 3) توزع درجات الحرارة وذرجة الحرارة الوسطية في صفيحة مسامية

نفرض أن معدل التدفق الكتلي للمائع عبر المسامات هو G_f $\left[\frac{Kg}{m^2}\right]$ كما أن درجات حرارة المائع والجدار متساويتان في أية مقطع معطى اضافة الى اعتبار أن البارامترات الفيزيائية مستقلة عن درجة الحرارة .

تكتب معادلات توصيل الحرارة والشروط الحدية بالشكل التالي :

$$\frac{d^2t}{dx^2} + \frac{G_p \cdot C_{pf}}{\lambda} \cdot \frac{dt}{dx} = 0 \qquad (3-77)$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$\alpha_g (t_g - t_{w_1}) - G_f \cdot r = -\lambda \left(\frac{dt}{dx} \right)_{x=0} \qquad (3-78)$$

$$\alpha_f (t_{w_2} - t_f) = -\lambda \left(\frac{dt}{dx} \right)_{x=\delta} \qquad (3-79)$$

حيث :

r الحرارة الكامنة للتبخر ·

C_{pf} الحرارة النوعية للسائل ·

α_g و α_f معاملا انتقال الحرارة لسطوح الجدار من جهة الغار والسائل على التوالي ·



الشكل (3 - 18) التبريد النفوذي لصفيحة
(في حالة الشروط الحدية من النوع الثالث)

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

في الحالة العامة يجب أن نأخذ بالحسبان أنه قيمة معامل التوصيل الحراري λ الداخلة في المعادلة (3-77) تأخذ بعين الاعتبار الحرارة المنتقلة بالتوصيل فيما بين الجسم الطب وسائل التبريد ، علما بأنه يمكن اهمال قيمة معامل توصيل الحـــــرارة للسائل في حالة جدران معدنية مسامية ذات معامل توصيل حراري كبير وحجم مسامات صغير .

يمكننا هنا أيضا افتراض بأن :

$$\lambda = \lambda_w (1-p)$$

بغض النظر عن العمليات الحسابية المتسلسلة .

لـ[illegible] المعادلة الممثلة للحل النهائي للمعادلة (3-77) في حالة الشروط الحدية (3-78) و (3-79) :

$$t = t_g - \frac{G_f . r}{\alpha_g} - \frac{\left[(t_g - t_f) - \frac{G_f . r}{\alpha_g} \right]}{(1+K_g)-(1-K_f).e^{-f.\delta}} . \qquad (3-80)$$

$$. \left[1+K_g - e^{-f.x} \right]$$

حيث :

$$K_g = \frac{G_f . C_{pf}}{\alpha_g} \quad , \quad K_f = \frac{G_f . C_{pf}}{\alpha_f} \quad , \quad f = \frac{G_f . C_{pf}}{\lambda}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

في الحالة التي يتم فيها تبريد الجدار الجسامي دون أن تتضمن عملية التبريد تبخر سائل التبريد أي $r = 0$ عندما تأخذ المعادلة (3-80) الشكل التالي :

$$t = t_g - \frac{t_g - t_f\,(1+K_g - e^{-\mu.x})}{(1+K_g)-(1-K_f).e^{-\mu.\delta}} \qquad (3-81)$$

* * *

مسائل :

م١: أوجد كثافة التيار الحراري المار عبر جدار فولاذي مسطح سماكته $\delta = 10$ mm معامل التوصيل الحراري لمادة الجدار $\lambda = 50 \frac{w}{m^2.C^o}$ درجة حرارة الغاز $t_{f_1} = 1127\ C^o$ درجة حرارة الماء $t_{f_2} = 227\ C^o$ معامل انتقال الحرارة من الغاز الى الجدار $\alpha_1 = 100 \frac{w}{m^2.C^o}$ ومابين الجدار والماء $\alpha_2 = 5000 \frac{w}{m^2.C^o}$.

يغطى الجدار المسخن بجهة الغاز بطبقة من هباب الفحم سماكتها $\delta = 2$ mm ومعامل توصيلها الحراري $\lambda = 0.09 \frac{w}{m.C^o}$ والمطلوب حساب درجة الحرارة بين الطبقتين وحساب مقدار نقصان معامل الانتقال الحراري الكلي عند ظهور طبقة الهباب بفرض أن درجات حرارة كلا من الغاز والماء تبقى كما هي .

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الحـــل :

١ـ الحالة الاولى :

نحسب أولا قيمة معامل انتقال الحرارة الكلي :

$$K = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{S}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}} =$$

$$\frac{1}{\frac{1}{100} + \frac{0.01}{50} + \frac{1}{5000}} = 96.15 \quad \left[\frac{w}{m^2.C^o}\right]$$

كثافة التيـــار الحـــراري :

$$q = K(t_{f_1} - t_{f_2}) = 96.15(1127-227) = 86535 \left[\frac{w}{m^2}\right]$$

درجة حرارة سطح الجدار من جهة الغـــاز :

$$t_{w_1} = t_{f_1} - \frac{q}{\alpha_1} = 1127 - \frac{86535}{100} = 261.65 \quad C^o$$

درجـة حرارة سطح الجدار من جهـة المـــاء :

$$t_{w_2} = t_{f_2} + \frac{q}{\alpha_2} = 227 + \frac{86535}{5000} = 244 \quad C^o$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٢- الحالة الثانية :

نحسب معامل الانتقال الحراري الكلي :

$$K = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \frac{1}{\alpha_2}}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{100} + \frac{0.002}{0.09} + \frac{0.01}{50} + \frac{1}{5000}} = 30.65 \left[\frac{w}{m^2, c^o}\right]$$

كثافة التيار الحراري المار :

$$q = K(t_{f_1} - t_{f_2}) = 30.65(1127-227) = 27585 \left[\frac{w}{m^2}\right]$$

درجة حرارة سطح طبقة الهباب بجهة الغاز :

$$t_{w_1} = t_{f_1} - \frac{q}{\alpha_1} = 1127 - \frac{27585}{100} = 851.15 \ c^o$$

درجة حرارة سطح التماس بين طبقة الهباب والجدار الحولادي :

$$t_{w_2} = t_{w_1} - q.\frac{\delta_1}{\lambda_1} = 851.15 - 27585 \times \frac{0.002}{0.09} = 238.15 \ c^o$$

درجة حرارة سطح الجدار بجهة الماء :

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$t_{w_3} = t_{f_2} + \frac{q}{\alpha_2} = 227 + \frac{27585}{5000} = 232.52 \quad C^{o}$$

معاسبق نلاحظ أن تشكل طبقة هباب الفحم بسماكة 2 mm تنقص معامل الانتقال الحراري بمقدار 3.13 مرة.

م٢: كيف تتغير شدة التيار الحراري ودرجتي حرارة الجدار اذا ظهر زبد جاف على الجدار (المسألة السابقة) بجهة الماء بسماكة 10 mm و 30 mm حيث $\lambda = 2 \frac{w}{m.C^{o}}$ باعتبار أن سطح الجدار بجهة الغاز نظيف .

الحل :

نحسب معامل الانتقال الحراري الكلي في حالة وجود زبدجاف على سطح الجدار بجهة الماء بسماكة 10 mm :

$$K_a = \frac{1}{\frac{1}{100} + \frac{0.01}{50} + \frac{0.01}{2} + \frac{1}{5000}} = 64.93 \quad \frac{w}{m^2 C^{o}}$$

شدة التيار الحراري المار عبر الجدار :

$$q = 64.93 \ (1127 - 227) = 58437 \quad \frac{w}{m^2}$$

درجة حرارة سطح الجدار من جهة الغاز :

$$t_{w_1} = 1127 - \frac{58437}{100} = 542.63 \quad C^{o}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

درجة حرارة سطح الجدار من جهة الماء :

$$t_{w_3} = 227 \cdot \frac{58437}{5000} = 238.68 \ C^o$$

درجة حرارة سطح التماس بين الجدار وطبقة الزبد الجاف :

$$t_{w_2} = 542.63 - 58437 \times \frac{0.01}{50} = 530.94 \ C^o$$

في الحالة الثانية (سماكة طبقة الزبد الجاف 30 mm)

نحسب معامل انتقال الحرارة الكلي :

$$K_b = \frac{1}{\frac{1}{100} + \frac{0.01}{50} + \frac{0.03}{2} + \frac{1}{5000}} = 39.37 \ \frac{w}{m^2.C^o}$$

شدة التيار الحراري :

$$q = 39.37 \ (1127-227) = 35433 \ \left[\frac{w}{m^2.C^o}\right]$$

درجات حرارة السطوح :

$$t_{w_1} = 1127 - \frac{35433}{100} = 772.67 \ C^o$$

$$t_{w_3} = 227 + \frac{35433}{5000} = 234 \ C^o$$

$$t_{w_2} = 772.67 - 35433 \times \frac{0.01}{50} = 765.58 \ C^o$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

من الحسابات السابقة نستنتج أن ظهور طبقة الزبد الجاف بسماكة 10mm تؤدي الى انقاص قيمة معامل انتقال الحرارة الكلي بمقدار 32.4 % أما اذا أصبحت سماكة طبقة الزبد 30 mm فان معامل انتقال الحرارة ينقص بمقدار 59 % بالاضافة الى هذا نجد أن ظهور طبقة الزبد بسماكة 30 mm ترفع درجة حرارة سطح الجدار من جهة الغاز من 261.65 C^o الى 772.67 C^o وهذا يؤدي مع زيادة سماكة طبقة الرغوة الى انفجار المرجل .

م٣ : أوجد كمية الحرارة المنتقلة عبرمساحة $1\ m^2$ من جدار مريش بمعامل ترييش قدره $\frac{F_{fw}}{F_f} = 12$ ، الجدار مصنوع من حديد زهر الكبريت حيث معامل توصيله الحراري $\lambda = 63\ \frac{w}{m.C^o}$ وسماكته 12 mm .

معامل انتقال الحرارة من الجسم العامل الى الجدار

$$\alpha_1 = 250\ \frac{w}{m^2.C}$$

كما أن معامل انتقال الحرارة من الجدار الى الهواء

$$\alpha_2 = 12\ \frac{w}{m^2..C}$$

درجة حرارة الجسم العامل $t_{f1}=117C^o$ والهواء $t_{f2} = 170\ C^o$

الحل :

يعطى معامل الانتقال الحراري الكلي لجدار مريش بالعلاقة :

$$K = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}.\frac{F_{fw}}{F_f}}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

ومنه :

$$K = \frac{1}{\frac{1}{250} + \frac{0.012}{63} + \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{12}} = 89.8 \ \frac{w}{m^2.c^o}$$

شدة التيار الحراري :

$$q = K(t_{f_1} - t_{f_2}) = 89.8(117-17) = 8980 \ \frac{w}{m^2}$$

عندما يكون الجدار مسطح من الطرفين (غير مريش) يصبح معامل انتقال الحرارة :

$$K = \frac{1}{\frac{1}{250} + \frac{0.012}{63} + \frac{1}{12}} = 11.42 \ \frac{w}{m^2.c^o}$$

شدة التيار الحراري المنتقل عبر الجدار الغير مريش:

$$q = 11.42 \ (117-17) = 1142 \ \frac{w}{m^2}$$

نستنتج أن وجود الريش قد أدى الى زيادة كمية الحرارة المنتقلة عبر الجدار بمقدار 7.86 مرة .

٤٩: انبوب بخار قطره الداخلي $d_1 = 180$ mm والخارجي $d_2 = 200$ mm .

معامل توصيله الحراري $\lambda_1 = 50 \ \frac{w}{m.c^o}$ يغلف الانبوب بعازلة للحرارة سماكتها 50 mm ومعامل توصيلها بعادة مقاومة وعازلة

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$\frac{w}{m.C^o}$ $\lambda_2 = 0.18$ وتوضع فوقها طبقة من الفلين سماكتها 50 mm أيضا ، ومعامل توصيلها الحراري $\frac{w}{m.C^o}$ $\lambda_3 = 0.06$ ،درجة حرارة البخار المار عبر الانبوب $t_{f_1} = 427\ C^o$ ودرجة حرارة الهواء المحيط بالانبوب $t_{f_2} = 27\ C^o$ ، معامل انتقال الحرارة من جهة البخار $\alpha_1 = 200\ \frac{w}{m^2.C^o}$ ومن جهة الهواء $\alpha_2 = 10\ \frac{w}{m^2.C^o}$

المطلوب ايجاد كمية الحرارة المنتشرة عبر 1 m من طول الانبوب وكذلك درجات حرارة سطوح الطبقات .

الحل :

يعطى معامل انتقال الحرارة الكلي لجذار اسطواني مكون من عدة طبقات بالعلاقة :

$$K = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1.d_1} + \frac{1}{2\lambda_1} \ln\frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{2\lambda_1} \ln\frac{d_3}{d_2}}$$

$$\frac{1}{+\frac{1}{2\lambda_3}.\ln\frac{d_4}{d_3} + \frac{1}{\alpha_2.d_4}}$$

ومنه :

$$K = \frac{1}{\frac{1}{200x0.18} + \frac{1}{2x50}.\ln\frac{200}{180} + \frac{1}{2x0.18}\ln\frac{300}{200}}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$\frac{1}{+\frac{1}{2\times0.06}\cdot\ln\frac{400}{300}+\frac{1}{10\times0.4}} = 0.263\ \frac{w}{m^2.c^o}$$

$$q = K.\pi.(t_{f_1}-t_{f_2}) = 0.263\,\pi\,(427-27) = 330\ \frac{w}{m^2}$$

درجة حرارة السطح الداخلي للانبوب :

$$t_{w_1} = t_{f_1} - \frac{q}{\alpha_1.d_1.\pi} = 427 - \frac{330}{200\times0.18\times\pi} = 424\ c^o$$

يمكن اهمال المقاومة الحرارية للانبوب الفولاذي وبالتالي اعتبار درجة حرارة السطح الخارجي للانبوب الغير معزول مساويا لدرجة حرارة السطح الداخلي $t_{w_1} = 424\ c^o$.

درجة حرارة السطح الخارجي للمادة العازلة المقاومة للحرارة $(t_{w_2} = t_{w_1})$:

$$t_{w_3} = t_{w_2} - \frac{q}{2\pi.\lambda_2}\ln\frac{d_3}{d_2} = 424 - \frac{330}{2\pi\times0.18}\ln\frac{300}{200} = 306\ c^o$$

درجة حرارة السطح الخارجي لطبقة الفلين :

$$t_{w_4} = t_{w_3} - \frac{q}{2\pi.\lambda_3}.\ln\frac{d_4}{d_3} = 306 - \frac{330}{2\pi\times0.06}\ln\frac{400}{300} = 54.2\ c^o$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

في هذه المسألة نلاحظ أن درجة حرارة السطح الخارجي للمادة العازلة المقاومة للحرارة مرتفعة جدا ولاتحفظ الفلين من التلف حيث أن درجة الحرارة المسموح بها بالنسبة للفلين يجب أن لاتتجاوز الـ $80\ C^o$ من هنا نستنتج أنه يجب زيادة سماكة الطبقة العازلة المقاومة للحرارة لحفظ الفلين .

م٥: حدد الضياع الحراري عبر جهاز تبخير كروي قطره الداخلي $d_1 = 1.5\ m$ والقطر الخارجي مع العزل $d_2 = 2\ m$ ، معامل التوصيل الحراري الوسطي للجدار $\lambda = 0.12\ \frac{w}{m.C^o}$ درجة حرارة الجسم العامل داخل الكرة $t_{f_1} = 127\ C^o$ ،درجة حرارة الوسط المحيط $t_{f_2} = 27\ C^o$ ، معاملات انتقال الحرارة :

بجهة الوسط العامل $\alpha_1 = 200\ \frac{w}{m^2.C^o}$ وبجهة الوسط المحيط $\alpha_2 = 8\ \frac{w}{m^2.C^o}$.

الحل :

يعطى معامل انتقال الحرارة الكلي لجدار كروي بالمعادلة :

$$K = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1 . d_1^2} + \frac{1}{2\lambda_2}\left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2}\right) + \frac{1}{\alpha_2 . d_2^2}}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$K = \frac{1}{\frac{1}{200x(1.5)^2} + \frac{1}{2x0.12}\left(\frac{1}{1.5} - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{8x(2)^2}} = 1.37 \frac{W}{C^\circ}$$

$$Q = K.\pi.(t_{f_1} - t_{f_2}) = 1.37x\pi x(127-27) = 430.4\ [w]$$

* * *

*

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الفصل الرابع

توصيل الحرارة مع وجود منبع حراري داخلي

(Conduction With Inner Heat Sources...)

لم يؤخذ بعين الاعتبار في كافة المسائل التي تم بحثها في الفصل السابق ، وجود منبع حراري داخلي ومع ذلك يمكن في كثير من الاحيان أن تتم ضمن الاجسام المدروسة اجراءات ما ينتج عنها اطلاق أو امتصاص للحرارة ، والامثلة التالية توضح هذا النوع من الاجراءات :

اطلاق الحرارة بفعل تأثير جول الناتج عن مرور تيار عبر قاطع كهربائي .

الانبعاث الحجمي للحرارة من عناصر اطلاق الحرارة لتفاعلات ذري عن طريق كبح تسارع التفاعلات التسلسلية لنواتج انشطار الوقود الذري .

اطلاق أو امتصاص الحرارة خلال الكثير من التفاعلات الكيميائية .. الخ ..

عند دراسة انتقال الحرارة في مثل هذه الحالات من الجوهري أن يتم معرفة كثافة الحرارة المنبعثة (الممتصة) والتي يعبر

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

منها كميا باستطاعة المصدر الحراري الداخلي :

$$q_v \left[\frac{w}{m^3}\right]$$

اذا كانت اشارة q_v موجبة عندئذ يمكن القول بأن الجسم يملك مصدرا حراريا موجبا ، أما الاشارة السالبة لـ q_v فتعني وجود مصادر حرارية داخلية سالبة .

بالاعتماد على الصفات المميزة لتغيرات q_v في الفراغ يمكن أن نتكلم عن مصادر حرارية نقطية ، خطية ، سطحية وحجمية .

في حالة الاجراءات المستقرة $\frac{\partial t}{\partial \tau} = 0$ تأخذ المعادلة التفاضلية للتوصيل (1-32) وبوجود المصادر الحرارية الداخلية الشكل التالي :

$$\nabla^2 t + \frac{q_v}{\lambda} = 0 \qquad (4-1)$$

(a) التوصيل الحراري عبر صفيحة متجانسة :

-(Condaction Through a Homogeneous Plate..)

لنعتبر صفيحة طويلة سماكتها 2δ صغيرة بالمقارنة مع أبعادها الاخرى ، المصادر الحرارية موزعة بانتظام على كامل الحجم وهي ذات قيمة ثابتة $q_v = Const.$.

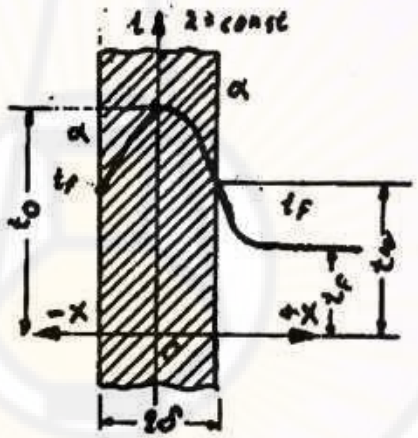
تتضمن الشروط المعطاة لانتقال الحرارة كلا من معامل انتقال الحرارة α ودرجة حرارة الوسط t_f على بعد كاف من

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الصفيحة وعلى اعتبار أن هاتين القيمتين ثابتتين .

درجتي حرارة سطحي الصفيحة متساويتين بسبب التبريد المنتظم ، تبعا للشروط المعطاة فان درجة الحرارة ضمن الصفيحة سوف تتغير فقط في اتجاه محور x والذي يعامد سطح الصفيحة .

نرمز لدرجة الحرارة عند محور الصفيحة وعند السطح على التوالي بـ t_0 و t_w وهما مجهولتين (الشكل 1-4) :



الشكل(1-4) انتقال الحرارة عبرجدار مستوي مع وجودمنابع حرارية داخلية

علاوة على ماسبق من الضروري معرفة توزع درجات الحرارة ضمن الصفيحة وكمية الضياع الحراري الى الوسط المحيط في هذه الحالة تأخذ المعادلة التفاضلية (3-82) الشكل التالي :

$$\frac{d^2t}{dx^2} + \frac{q_v}{\lambda} = 0 \qquad (4-2)$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

بينما تأخذ الشروط الحدية الثانية :

$$\mp\left(\lambda \frac{\partial t}{\partial x}\right)_{x=\mp\delta} = \alpha\,(t_w - t_f) \quad \text{عند } x=\mp\delta$$

بما أن الشروط الحدية متماثلة لكلا جانبي الصفيحة فإن لحقل درجات الحرارة ضمن الصفيحة يأخذ شكلا متناظرا بالنسبة للسطح $x = 0$ حيث أن الحرارة تنتشر عبر سطحي الصفيحة اليميني واليساري بكثافة متساوية ، كما أن كمية الحرارة المطروحة من كلا نصفي الصفيحة متساوية ، هذا يعني أنه يمكن اعتبار نصف الصفيحة فقط وعلى سبيل المثال النصف الايمن (انظر الشكل 1 - 4) حيث يمكن كتابة الشروط الحدية بالنسبة لهذا النصف كما يلي :

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial t}{\partial x}\right)_{x=0} = 0 \quad , \quad x = 0 & \text{عند:} \\ -\lambda\left(\dfrac{\partial t}{\partial x}\right)_{x=\delta} = \alpha\,(t_w - t_f) \quad , \quad x = \delta & \text{عند:} \end{cases} \tag{4-3}$$

يعطي تكامل المعادلة (4-2) :

$$\frac{dt}{dx} = -\frac{q_v \cdot x}{\lambda} + C_1 \tag{4-4}$$

$$t = -\frac{q_v}{2\lambda} \cdot x^2 + C_1 \cdot x + C_2 \tag{4-5}$$

تحدد ثوابت التكامل C_1 و C_2 من الشروط الحدية (3-4):

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

عند: $x = 0$ نجد من المعادلة (4-4) أن $C_1 = 0$

عند: $x = \delta$ نحصل على :

$$-\lambda\left(\frac{dt}{dx}\right)_{x=\delta} = -\alpha(t_w - t_f)$$

من المعادلة (4-4) :

$$\left(\frac{dt}{dx}\right)_{x=\delta} = -\frac{q_v \cdot \delta}{\lambda}$$

ومنه يكون $t_w = \frac{q_v \cdot \delta}{\alpha} + t_f$ بتعويض هذه القيمة في المعادلة (4-5) عند $x = \delta$ نحصل على :

$$C_2 = t_f + \frac{q_v \cdot \delta}{\alpha} + \frac{q_v \cdot \delta^2}{2\lambda}$$

بالتبديل عن قيم C_1 و C_2 في المعادلة (4-5) نحصل على معادلة حقل درجات الحرارة :

$$t_x = t_f + \frac{q_v \cdot \delta}{\alpha} + \frac{q_v \cdot \delta^2}{2\lambda}\left[1 - \left(\frac{x}{\delta}\right)^2\right] \qquad (4\text{-}6)$$

في المسألة المدروسة يتغير التدفق الحراري على طول محور x وفقا للعلاقة :

$$q = q_v \cdot x$$

عند $x = 0$ ، $q = 0$ ينتج نفس الامر من الشرط أنه

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$\left(\frac{dt}{dx}\right)_{x=0} = 0$$

عند

ان معدل التدفق الحراري لواحدة سطح الصفيحة عند $x = \delta$

يساوي :

$$q = \alpha(t_w - t_f) = q_v \cdot \delta \qquad (4-7)$$

كما أن كمية الحرارة المنتشرة من كامل سطح الصفيحة خلال واحدة الزمن (المساحة الكاملة للسطح F هي عبارة عن مجموع السطحين الجانبيين F_1) تساوي :

$$Q = q.F = q_v \cdot \delta . 2F_1 \qquad (4-8)$$

ينتج من المعادلة (4-6) أن توزع درجات الحرارة ضمن جدار مستو ذو طبيعة متناظرة يأخذ شكل قطع مكافىء .

اذا وضعنا $\alpha \longrightarrow \infty$ في المعادلة (4-6) فان التعبير الناتج سوف يمثل حقل درجات الحرارة في حالة الشروط الحدية من النوع الاول حيث $t_w = t_f$ عند $\alpha \longrightarrow \infty$.

بالاخذ بما سبق بعين الاعتبار تأخذ المعادلة (4 - 6) الشكل التالي :

$$t = t_w + \frac{q_v}{2\lambda}(\delta^2 - x^2) \qquad (4-9)$$

تعطى درجة الحرارة عند محور تناظر الصفيحة ($x = 0$)

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$t_o = t_w + \frac{q_v}{2\lambda} \cdot \delta^2$$

كما أن فرق درجة الحرارة بين محور التناظر وسطح الصفيحة هو :

$$t_o - t_w = \frac{q_v}{2\lambda} \cdot \delta^2 = \frac{q}{2\lambda} \cdot \delta \qquad (4\text{-}10)$$

أثناء استخراج هذه المعادلات ، افترض أن معامل التوصيل الحراري لمادة الجدار ثابت مع زيادة فروقات درجة الحرارة يصبح من الضروري الاخذ بعين الاعتبار اعتماد معامل التوصيل الحراري على درجة الحرارة حيث تأخذ العلاقة بينهما شكلا خطيا أي :

$$\lambda = \lambda_o(1+bt)$$

ومنه :

$$q_v \cdot x = -\lambda_o(1+bt) \cdot \frac{dt}{dx} \qquad (a)$$

بفصل المتحولات ومكاملة المعادلة (a) نحصل على :

$$t + b\frac{t^2}{2} = -\frac{1}{\lambda_o} \cdot \frac{q_v \cdot x^2}{2} + C \qquad (b)$$

عند : $x = 0$ ، $t = t_o$ حيث ينتج من المعادلة (b) أن :

$$C = t_o + \frac{b}{2} t_o^2$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

بتعويض القيمة المحسوبة لـ C في المعادلة (b) وحل معادلة الدرجة الثانية بالنسبة لـ t نحصل على المعادلة التالية والتي تحدد شكل منحني توزع درجات الحرارة :

$$t = -\frac{1}{b} + \sqrt{(t_o + \frac{1}{b})^2 - \frac{q_v \cdot x^2}{\lambda_o \cdot b}} \qquad (4-11)$$

6- التوصيل الحراري عبر قضيب اسطواني متجانس :

-(Conduction Through a Homogeneous Cylidrical Rod.).

لنعتبر اسطوانة دائرية (الشكل 2-4) نصف قطرها صغير بالمقارنة مع طولها ، وبالتالي فان تغيير درجة الحرارة سوف يتم فقط في اتجاه نصف القطر .

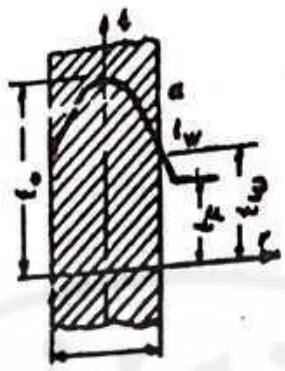
تتوزع المصادر الحرارية الداخلية بشكل منتظم على كامل الحجم الصلب ، كما تعطى قيم درجة حرارة الوسط المحيط t_f (ثابتة) ومعامل انتقال الحرارة على كامل السطح ، تحت هذه الشروط فان كل النقاط المتناظرة ضمن الاسطوانة تتمتع بنفس درجة الحرارة .

بالنسبة لمثل هذه الاسطوانة تأخذ المسألة المطروحة شكلا متناظرا وأحادي البعد

كما ورد في حالة الصفيحة المستوية تأخذ المعادلة (4 - 4) الشكل التالي:

$$\frac{d^2t}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dt}{dr} + \frac{q_v}{\lambda} = 0 \qquad (4-12)$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner



الشكل (٤-٩) انتقال الحرارة عبر أنبوب
دائري متجانس مع وجود مصدر حراري داخلي

تأخذ الشروط الحدية الشكل التالي :

$$\left.\begin{array}{ll} \text{عند} \quad r = 0 & \Longleftarrow \quad \left(\frac{dt}{dr}\right)_{r=0} = 0 \\ \vdots & \\ \text{عند} \quad r = r_o & \Longleftarrow \quad \left(\frac{dt}{dr}\right)_{r=r_o} = -\frac{a}{\lambda}(t_w - t_f) \end{array}\right\} \qquad (4\text{-}13)$$

من الضروري أن نحدد معادلة حقل درجات الحرارة ومعادلة التدفق الحراري ودرجات الحرارة عند المحور t_o والسطح t_w . بإدخال المتحول الجديد u حيث $u = \frac{dt}{dr}$ تكتب المعادلة (٤-٩) بالشكل :

$$\frac{du}{dr} + \frac{u}{r} + \frac{q_v}{\lambda} = 0$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

أو:

$$r.du + u.dr + \frac{q_v}{\lambda} r.dr = 0$$

بمكاملة التعبير الناتج نحصل على :

$$u + \frac{q_v.r}{2\lambda} = \frac{C_1}{r}$$

أو :

$$\frac{dt}{dr} + \frac{q_v.r}{2\lambda} = \frac{C_1}{r} \qquad (4-14)$$

بمكاملة المعادلة (4-14) نحصل على :

$$t = -\frac{q_v.r^2}{4\lambda} + C_1.\ln r + C_2 \qquad (4-15)$$

حيث تحددقيم الثوابت C_1 و C_2 من الشروط الحديـــــة المتمثلـة بالمعادلات (4-13)، عند $r = 0$ ، نجدمـن المعادلة (4-14) أن $C_1 = 0$ ، عند $r = r_o$:

$$\left(\frac{dt}{dr}\right)_{r=r_o} = -\frac{q_v.r_o}{2\lambda}$$

بتعويض التعبير الاخير في المعادلة (4-13) نحصل على :

$$\frac{q_v.r_o}{2} = \alpha(t_w - t_f)$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

و:

$$t_w = \frac{q_v \cdot r_o}{2\alpha} + t_f$$

من المعادلة (4-15) نجد قيمة ثابت التكامل C_2 :

$$C_2 = t_f + \frac{q_v \cdot r_o}{2\alpha} + \frac{q_v \cdot r_o^2}{4\lambda}$$

بالتعويض من قيم C_1 و C_2 في المعادلة (4-15) نجد:

$$t = t_f + \frac{q_v \cdot r_o}{2\alpha} + \frac{q_v}{4\lambda}(r_o^2 - r^2) \qquad (4\text{-}16)$$

من الممكن حساب درجة الحرارة في أية نقطة من الاسطوانة باستعمال المعادلة الاخيرة والتي تبين أن منحى توزع درجات الحرارة في الاسطوانة يأخذ شكل قطع مكافئ، عند $r = 0$ يمكن ايجاد درجة الحرارة عند محور الاسطوانة من المعادلة (4-16) :

$$t_o = t_f + \frac{q_v \cdot r_o}{2\alpha} + \frac{q_v \cdot r_o^2}{4\lambda} \qquad (4\text{-}16')$$

كمايمكن تحديد معدل تدفق الحرارة عبر واحدة سطح الاسطوانة بالمعادلة :

$$q = \alpha(t_w - t_f) = \frac{q_v \cdot r_o}{2} \qquad (4\text{-}17)$$

أما التدفق الحراري الكلي عبر سطح الاسطوانة :

$$Q = q.F = \frac{q_v \cdot r_o}{2} 2\pi r_o \cdot 1 = q_v \cdot \pi \cdot r_o^2 \cdot 1 \qquad (4\text{-}17')$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

نستنتج من المعادلة (4-17) أن معدل تدفق الحرارة يعتمد فقط على استطاعة المصادر الحرارية الداخلية ومساحة السطح الخارجي (r_o) الذي يتم عبره الانتقال الحراري .

لنفترض الان أنه معطى لدينا الشروط الحدية من النوع الاول أي درجة حرارة السطح t_w وهي حالة خاصة من المسألة السابقة الذكر وذلك عندما ينتهي معامل انتقال الحرارة الى اللانهاية أي $\alpha \longrightarrow \infty \Longrightarrow t_f = t_w$ وبالتالي تأخذ المعادلة (4-16) الشكل التالي :

$$t = t_w + \frac{q_v \cdot r_o^2}{4\lambda}\left[1-(\frac{r}{r_o})^2\right] \qquad (4-18)$$

درجة الحرارة عند محور الاسطوانة ($r = 0$) تساوي :

$$t_o = t_w + \frac{q_o \cdot r_o^2}{4\lambda} \qquad (4-19)$$

اذا كان معطى لدينا العلاقة التي تربط بين معامل توصيل الحرارة مع درجة الحرارة :

$$\lambda(t) = \lambda_o(1+bt)$$

عندها نكامل التعبير :

$$q_v \cdot \pi \cdot r^2 = -2\pi r \lambda_o (1+bt) \cdot \frac{dt}{dr}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

حيث نحصل على :

$$t + \frac{b}{2}t^2 = -\frac{1}{4\lambda_o}.q_v.r_o^2 + C \qquad (4-20)$$

يحدد ثابت التكامل C من الشروط الحدية عند $r = 0$ و $t = t_o$

$$C = t_o + \frac{b}{2}t_o^2 .$$

بتعويض هذه القيمة في المعادلة (4-20) وحل التعبير الناتج من أجل t نحصل على القانون التالي الممثل لمنحني درجة الحرارة :

$$t = -\frac{1}{b}\sqrt{(\frac{1}{b} + t_o)^2 - \frac{q_v.r^2}{2\lambda_o.b}} \qquad (4-21)$$

حـ ـ التوصيل عبر جدار اسطواني :

-(Conduction Through a Cylindrical Wall..).

لنعتبر جدارا اسطوانيا ذي طول غير محدد (انبوب) بنصف قطر داخلي r_1 ونصف قطر خارجي r_2 ومعامل توصيل حراري ثابت λ حيث تتوزع المصادر الحرارية ضمن سماكة الجدار، في مثل هذا الجدار سوف تتغير درجة الحرارة فقط في الاتجاه النصف القطري حيث يمكن وصف عملية التوصيل ضمن هذا الجدار بالمعادلة (4-12) :

$$\frac{d^2t}{dr^2} + \frac{1}{r}.\frac{dt}{dr} + \frac{q_v}{\lambda} = 0$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

بمكاملة التعبير الاخير نحصل على المعادلة (4-15) :

$$t = -\frac{q_v \cdot r^2}{4\lambda} + C_1 \cdot \ln r + C_2$$

تحدد ثوابت التكامل C_2 و C_1 من الشروط الحدية .

نعتبر الحالات التي تطرح فيها الحرارة من السطح الخارجي فقط أو الداخلي أو من كلاهما معا .

1- الحرارة تطرح فقط من السطح الخارجي :

في هذه الحالة سوف نعتبر الحالة التي تكون فيها الشروط الحدية من النوع الثالث فقط ، أي درجة حرارة الوسط المحيط t_{f_2} من جهة السطح الخارجي ومعامل انتقال الحرارة الشمسا بمست لكامل سطح الانبوب (الشكل 3 - 4) عندها تكتب الشروط الحدية كمايلي :

$$\text{عند } r = r_1 \Longleftarrow q = 0 \text{ أو: } \left(\frac{dt}{dr}\right)_{r=r_1} = 0$$

$$\text{عند } r = r_2 \Longleftarrow \left(\frac{dt}{dr}\right)_{r=r_2} = -\frac{a}{\lambda}(t_{w_2} - t_{f_2})$$

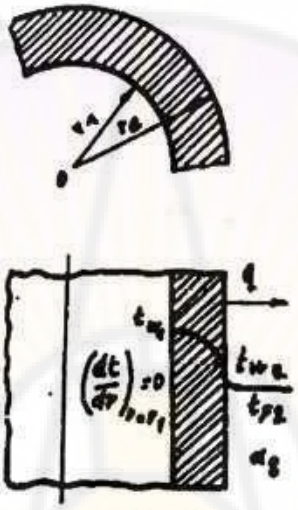
من المعادلة (4-15) نحصل على :

$$\frac{dt}{dr} = -\frac{q_v}{2\lambda} r + \frac{C_1}{r}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

عند $r = r_1$ ، $-\frac{q_v}{2\lambda} r_1 + \frac{C_1}{r_1} = 0$ ومنه: $\left(\frac{dt}{dr}\right)_{r=r_1}$

$$C_1 = \frac{q_v \cdot r_1^2}{2\lambda}$$



الشكل (4-3) طرح الحرارة عن طريق السطح الخارجي لجدار اسطوانيمع وجود منابع حرارية داخلية

باخذ قيمة C_1 هذه بعين الاعتبار عند $r = r_2$ من المعادلة (4-15) نحصل على :

(a) $$t_{w_2} = -\frac{q_v \cdot r_2^2}{4\lambda} + \frac{q_v \cdot r_1^2}{2\lambda} \cdot \ln r_2 + C_2$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

بملاحظة أن :

$$\left(\frac{dt}{dr}\right)_{r=r_2} = -\frac{a}{\lambda}(t_{w_2} - t_{f_2})$$

نحصل على :

$$t_{w_2} = t_{f_2} + \frac{q_v \cdot r_2}{2\lambda} - \frac{q_v \cdot r_1^2}{2\alpha \cdot r_2} \qquad (b)$$

بمساواة (a) و (b) نجد :

$$C_2 = t_{f_2} + \frac{q_v \cdot r_2}{2\alpha} + \frac{q_v \cdot r_2^2}{4\lambda} - \frac{q_v}{2\alpha} \cdot \frac{r_1^2}{r_2} - \frac{q_v \cdot r_1^2}{2\lambda} \cdot \ln r_2$$

بتعويض القيم الناتجة لـ C_1 و C_2 في المعادلة (4-15)

نحصل على التعبير التالي الممثل لحقل درجات الحرارة :

$$t = t_{f_2} + \frac{q_v \cdot r_2}{2\alpha}\left[1-\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2\right] + \qquad (4\text{-}22)$$

$$+ \frac{q_v \cdot r_2^2}{4\lambda}\left[1+\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \cdot 2\ln\frac{r}{r_2} - \left(\frac{r}{r_2}\right)^2\right]$$

ومن أجل سطح الطرح الحراري الخارجي (عند $r = r_2$):

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$t_{w_2} = t_{f_2} + \frac{q_v \cdot r_2}{2\alpha}\left[1-\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2\right] \qquad (4-23)$$

يتحدد معدل التدفق الحراري عبر واحدة هذا السطح بالمعادلة التالية :

$$q = \alpha(t_{w_2} - t_{f_2}) = \frac{q_v \cdot r_2}{2}\left[1-\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2\right] \qquad (4-24)$$

يمكن ايجاد درجة حرارة السطح الداخلي للجدار (انبوب) من المعادلة (4-22) بادخال القيمة $r = r_1$:

$$t_{w_1} = t_{f_2} + \frac{q_v \cdot r_2}{2\alpha}\left[1-\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2\right] + \frac{q_v \cdot r_2^2}{4\lambda}\left[1+\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 . \ln\frac{r_1}{r_2} - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2\right] \qquad (4-25)$$

لنعتبر الان أنه معطى لدينا الشروط الحدية من النوع الاول أي درجة حرارة سطح التبادل الحراري t_{w_2} ، يمكن اعتبار هذه الشروط كحالة خاصة للمسألة عندما يكون معامل انتقال الحرارة عبر السطح كبيرا جدا ($\alpha \longrightarrow \infty$) ومنه تكون درجة حرارة المائع مساوية لدرجة حرارة سطح الانبوب بالاخذ بعين الاعتبار لما سبق ذكره تصبح المعادلة (4-22) :

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$t = t_{w_2} + \frac{q_v \cdot r_2^2}{4\lambda}\left[1+\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 . 1n\,\frac{r}{r} - \left(\frac{r}{r_2}\right)^2\right] \qquad (4\text{-}26)$$

بفرض أن $r = r_1$ و $t = t_{w_1}$ نجد فرق درجات الحرارة عبر الجدار الاسطواني :

$$t_{w_1} - t_{w_2} = \frac{q_v \cdot r_1^2}{4\lambda}\left[\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 - 2 1n\,\frac{r^2}{r_1} - 1\right] \qquad (4\text{-}27)$$

٢- الحرارة تطرح فقط من السطح الداخلي للانبوب(الشكل 4-4)

في الحالة التي يكون لدينا معطى معامل انتقال الحرارة α من جهة السطح الداخلي ودرجة حرارة الوسط المحيط t_{f_1} تأخذ الشروط الحدية الشكل التالي :

$$\left(\frac{dt}{dr}\right)_{r=r_1} = -\frac{\alpha}{\lambda}(t_{w_1} - t_{f_1}) \quad \Longleftarrow \quad r=r_1 \text{ عند}$$

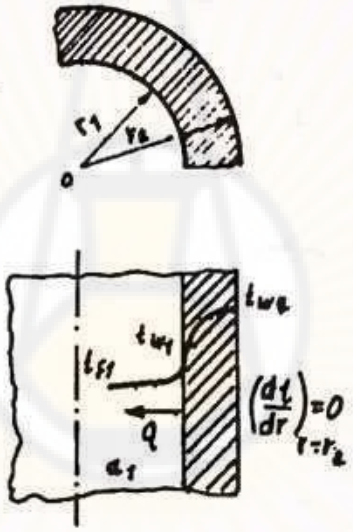
$$\left(\frac{dt}{dr}\right)_{r=r_2} = 0 \quad \Longleftarrow \quad r=r_2 \text{ عند}$$

كماهو في الحالة السابقة تحدد ثوابت التكامل C_1 و C_2 الداخلة في المعادلة (4-15) من هذه الشروط الحدية ، بعدتحديد هذه الثوابت وتعويضها في المعادلة (4-15) نحصل على :

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$t = t_{f_1} + \frac{q_v \cdot r_1}{2\alpha}\left[\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 - 1\right] + \qquad (4\text{-}28)$$

$$+ \frac{q_v \cdot r_2^2}{4\lambda}\left[2\ln\frac{r}{r_1} + \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 - \left(\frac{r}{r_2}\right)^2\right]$$



الشكل (4-4) طرح الحرارة عبر السطح
الداخلي لجدار اسطواني مع وجود منابع حرارية
داخليـــة

يمكن ايجاد فرق درجات الحرارة بين الوسط المحيط والسطح

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الناشر للحرارة وذلك بتبديل r_1 في المعادلة (4-28) ومنه :

$$t_{w_1} - t_{f_1} = \frac{q_v \cdot r_1}{2\alpha} \left[\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 - 1 \right] \qquad (4-29)$$

في الحالة التي تعطى فيها درجة حرارة السطح الناشر للحرارة (والتي تناسب قيمة $\alpha \to \infty$) عندها تأخذ المعادلة (4-28) الشكل التالي :

$$t = t_{w_1} + \frac{q_v \cdot r_2^2}{4\lambda} \left[2\ln\frac{r}{r_1} + \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 - \left(\frac{r}{r_2}\right)^2 \right] \qquad (4-30)$$

بافتراض : $r = r_2$ و $t = t_{w_2}$ نحصل على الفرق الكلي لدرجات الحرارة عبر الجدار :

$$t_{w_2} - t_{w_1} = \frac{q_v \cdot r_2^2}{4\lambda} \left[2\ln\frac{r_2}{r_1} + \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 - 1 \right] \qquad (4-31)$$

٣- الحرارة تطرح من كلا سطحي الانبوب الداخلي والخارجي :

في هذه الحالة تتواجد درجة الحرارة العظمى ضمن الجدار نفسه وذلك لكي تنتشر الحرارة الى الوسط المحيط عبر كلا السطحين الداخلي والخارجي للانبوب .

يقسم السطح الايزوترمي ذو درجة الحرارة العظمى t_o سماكة الجدار الى طبقتين حيث تتدفق الحرارة باتجاه محور

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الانبوب (نحو الداخل) في الطبقة الداخلية ، أما في الطبقة الخارجية فتتدفق الحرارة باتجاه الخارج .

تناسب درجة الحرارة العظمى النسبة $\frac{dt}{dr}=0$ وبالتالي $q = 0$.

مما سبق يمكن حل هذه المسألة باستعمال العلاقات التي تم استخراجها ، لهذا الغرض من الضروري معرفة نصف القطر r_o الشكل (5-4) الذي يناسب درجة الحرارة العظمى t_o .



الشكل (5-4) حالة طرح الحرارة المتولدة عن المصادر الداخلية من كلا سطحي الجدار الاسطواني

بالتوافق مع المعادلة (25-4) والمعادلة (31-4) فان الفروقات

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

العظمى في درجة الحرارة لكل من الطبقتين الخارجية والداخلية يمكن تحديدهما من المعادلات التالية :

$$t_o - t_{w_2} = \frac{q_v . r_o^2}{4\lambda}\left[\left(\frac{r_2}{r_o}\right) - 2\ln\frac{r_2}{r_o} - 1\right] \quad (a)$$

$$t_o - t_{w_1} = \frac{q_v . r_o^2}{4\lambda}\left[\left(\frac{r_1}{r_o}\right)^2 + 2\ln\frac{r_o}{r_1} - 1\right] \quad (b)$$

بجمع المعادلتين (a) و (b) طرفا الى طرف نحصل على :

$$t_{w_1} - t_{w_2} = \frac{q_v . r_o^2}{4\lambda}\left[\left(\frac{r_2}{r_o}\right)^2 - \left(\frac{r_1}{r_o}\right)^2 + 2\ln\frac{r_o}{r_2} - 2\ln\frac{r_o}{r_1}\right]$$

بحل هذه المعادلة بالنسبة لـ r_o نحصل على :

$$r_o^2 = \frac{4\lambda(t_{w_1} - t_{w_2})}{q_v . 2\ln\frac{r_1}{r_2}} - \frac{r_2^2 - r_1^2}{2\ln\frac{r_1}{r_2}}$$

أو :

$$r_o^2 = \frac{q_v(r_2^2 - r_1^2) - 4\lambda(t_{w_1} - t_{w_2})}{q_v . 2\ln\frac{r_2}{r_1}} \quad (4-32)$$

بتعويض القيمة r_o المحسوبة من المعادلة (4-32) في المعادلة (a) أو (b) نحصل على درجة الحرارة العظمى ضمن الجدار

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

يمكن ايجاد توزع درجة الحرارة ضمن الطبقة الداخلية عن طريق تعويض القيمة الفعلية للاحداثي r حيث $r_1 < r < r_2$ في المعادلة (4-30) كما يمكن ايجاد توزع درجة الحرارة ضمن الطبقة الخارجية بتعويض الاحداثي r حيث $r_o < r < r_2$ في المعادلة (4-26). في الحالة التي تكون فيها درجات حرارة السطوح الخارجية للجدار الاسطواني متساوية أي t_{w_1} تساوي t_{w_2}. عندها تتبسط المعادلة (4-32) ومن ثم :

$$r_o^2 = \frac{r_2^2 - r_1^2}{2 \ln \frac{r_2}{r_1}} \qquad (4-32')$$

أي أن r_o تعتمد فقط على ابعاد الجدار ودون الاعتماد على الشروط الحرارية وكمثال عندما تكون $r_2=2$ ، $r_1 = 1$ فان $r_o = 1.46$.

في حالة كون درجات حرارة سطوح الجدار t_{w_1} و t_{w_2} مجهولة ،حيث معطى لدينا فقط درجات حرارة الموائع t_{f_1} و t_{f_2} من جهة السطحين الداخلي والخارجي على التوالي اضافة الى معاملات انتقال الحرارة α_1 و α_2 ، في هذه الحالة يجب أن تلحق بالمعادلة (4-32) المعادلات التالية وذلك لكي نحدد قيمة r_o :

$$(c) \quad \begin{cases} q_{l_1} = \alpha_1 (t_{w_1} - t_{f_1}) . 2\pi r_1 \\ q_{l_2} = \alpha_2 (t_{w_2} - t_{f_2}) . 2\pi r_2 \end{cases}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

حيث :

$$q_{1_1} = q_v \cdot \pi \cdot (r_o^2 - r_1^2)$$

و :

$$q_{1_2} = q_v \cdot \pi \cdot (r_2^2 - r_o^2)$$

لكي نحدد قيمة r_o نقوم بحل المعادلات (c) حلا مشتركا مع المعادلة (4-32) .

* * *

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مسائل :

م١ : لدينا اطار فولاذي ذو مقطع مستطيل 90x3 mm يمر فيه تيار كهربائي شدته 320 A ، درجة حرارة الاطار لاتتجاوز الـ 75 C^o عند درجة حرارة للهواء المحيط قدرها 20 C^o .

١- أوجد استطاعة المنبع الحراري الداخلي ودرجة حرارة سطح الاطار ، اذا كان معامل التوصيل الحراري لمادة الاطار $\lambda = 57 \frac{W}{m.C^o}$ والمقاومة الكهربائية النوعية $\rho = 0.13 \frac{\Omega.mm^2}{m}$.

٢- كم يجب أن يكون معامل الانتقال الحراري للاطار بحيث لاتتجاوز درجة حرارة سطح الاطار الـ 75 C^o ؟

الحل :

المقاومة الكهربائية لوحدة طول الاطار :

$$R_1 = \frac{\rho}{s} = \frac{0.13}{90x3} = 0.481 \times 10^{-3} \quad \frac{\Omega}{m}$$

كمية الحرارة المتولدة عبر واحدة الطول :

$$q_1 = I^2 R_1 = (320)^2 \times 0.481 \times 10^{-3} = 49.25 \quad \frac{W}{m}$$

استطاعة المنبع الحراري الداخلي لواحدة الحجم :

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$q_v = \frac{q_1}{S} = \frac{49.25}{90 \times 3 \times 10^{-6}} = 1.824 \times 10^5 \left[\frac{w}{m^3}\right]$$

درجة الحرارة عند سطح الاطار :

$$t_s = t_{max} - \frac{q_v \cdot \delta^2}{2\lambda} =$$

$$= 75 - \frac{1.824 \times 10^5 (1.5 \times 10^{-3})^2}{2 \times 57} = 74.996\ c^o$$

معامل التوصيل الحراري مابين سطح الاطار والهواء :

$$q = q_v \cdot \delta = \alpha.(t_s - t_f) \Longleftarrow \alpha = \frac{q_v \cdot \delta}{t_s - t_f}$$

$$\alpha = \frac{1.824 \times 10^5 \times 1.5 \times 10^{-3}}{74.996 - 20} = 4.975 \quad \frac{w}{m^2.c^o}$$

---

٢٤ : يمر تيار كهربائي شدته 200 A عبر اسطوانة مصمتة من الفولاذ الغير قابل للصدأ ، قطرها d = 10 mm ، كل الحرارة المتولدة داخل هذه الاسطوانة تنتشر عبر السطح الخارجي .

أوجد الاستطاعة الحرارية الحجمية للمنبع الحراري الداخلي ودرجة الحرارة العظمى للاسطوانة ، اذا كانت درجة حرارة سطح

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الاسطوانة $t_s = 50\ C^o$ والمقاومة الكهربائية النوعية $\rho = 0.850 \frac{\Omega.mm^2}{m}$

ومعامل التوصيل الحراري $\lambda = 18.6 \frac{W}{m.C^o}$.

الحـــل :

المقاومة الكهربائية لواحدة طول الأسطوانة المصمتة :

$$R_1 = \frac{\rho}{S} = \frac{0.85}{\pi (5)^2} = 0.01081 \quad \frac{\Omega}{m}$$

كمية الحرارة المنتشرة عبر واحدة الطول :

$$q_1 = I^2 . R_1 = (200)^2 x\ 0.01081 = 432.4 \quad \frac{W}{m}$$

الاستطاعة الحرارية الحجمية للمنبع الحراري الداخلي :

$$q_v = \frac{q_1}{\pi r^2} = \frac{432.4}{\pi (5)^2 x 10^{-6}} = 5.503 \times 10^6 \quad \frac{W}{m^3}$$

درجة الحرارة العظمى عند محور الاسطوانة :

$$t_{max} = t_s + \frac{q_v . r^2}{4 \lambda} =$$

$$= 50 + \frac{5.505 \times 10^6 \ x (5)^2 x 10^{-6}}{4 x 18.6} = 51.849\ C^o$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

م٣ : يمر تيار كهربائي شدته 300 A عبر انبوب من الفولاذ الكرومي ، قطره الداخلي 14 mm والخارجي 14.6 mm .

أوجد الاستطاعة الحرارية الحجمية للمنبع الحراري الداخلي وانخفاض درجة الحرارة عبر جدار الانبوب ، على فرض أن :

آـ الحرارة تطرح فقط عبر السطح الداخلي للانبوب .

ب ـ الحرارة تطرح فقط عبر السطح الخارجي للانبوب .

حيث : $\rho = 1.170 \ \frac{\Omega.mm^2}{m}$ ، $\lambda = 17.2 \ \frac{W}{m.C^o}$.

الحـــل :

المقاومة الكهربائية لواحدة طول الانبوب :

$$R_1 = \frac{\rho}{S} = \frac{1.17}{\pi(7.3^2-7^2)\pi} = 0.0868 \ \frac{\Omega}{m}$$

الحرارة المطروحة عبر واحدة طول الانبوب :

$$q_1 = 1^2.R_1 = 300^2 \times 0.0868 = 7812 \ \frac{W}{m}$$

الاستطاعة الحرارية الحجمية للمنبع الحراري الداخلي :

$$q_v = \frac{q_1}{\pi(r_2^2 - r_1^2)} = \frac{7812}{\pi(7.3^2-7^2)\times 10^{-6}} = 5.798 \times 10^8 \ \frac{W}{m^3}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

آ – في الحالة التي يتم فيها طرح الحرارة عبر السطح الداخلي للانبوب فقط :

$$\Delta t = t_{w_1} - t_{w_2} = \frac{q_v (r_2^2 - r_1^2)}{4\lambda} \left[\frac{2r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \ln \frac{r_2}{r_1} - 1 \right]$$

$$= \frac{q_1}{4\pi\lambda} \left[\frac{2r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \ln \frac{r_2}{r_1} - 1 \right]$$

$$= \frac{7812}{4\pi \times 17.2} \left[\frac{2 \times 7.3^2}{7.3^2 - 7^2} \ln \frac{7.3}{7} - 1 \right]$$

$$= 1.538 \ C^o$$

ب – الحالة التي يتم فيها طرح الحرارة عبر السطح الخارجي فقط :

$$\Delta t = t_{w_1} - t_{w_2} = \frac{q_v (r_2^2 - r_1^2)}{4\lambda} \left[1 - \frac{2r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \ln \frac{r_2}{r_1} \right]$$

$$= \frac{q_1}{4\pi\lambda} \left[1 - \frac{2r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} . \ln \frac{r_2}{r_1} \right]$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$= \frac{7812}{4\,\pi \times 17.2}\left[1 - \frac{2.7^2}{7.3^2 - 7^2} \cdot \ln \frac{7.3}{7}\right]$$

$$= 33.56C^{o}$$

* * *

*

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الفصل الخامس

التوصيل الحراري في الحالة الغيرمستقرة (العابرة)
" Transient Thermal Conduction"

٥-١: وصف الاجراء وطرق الحل :

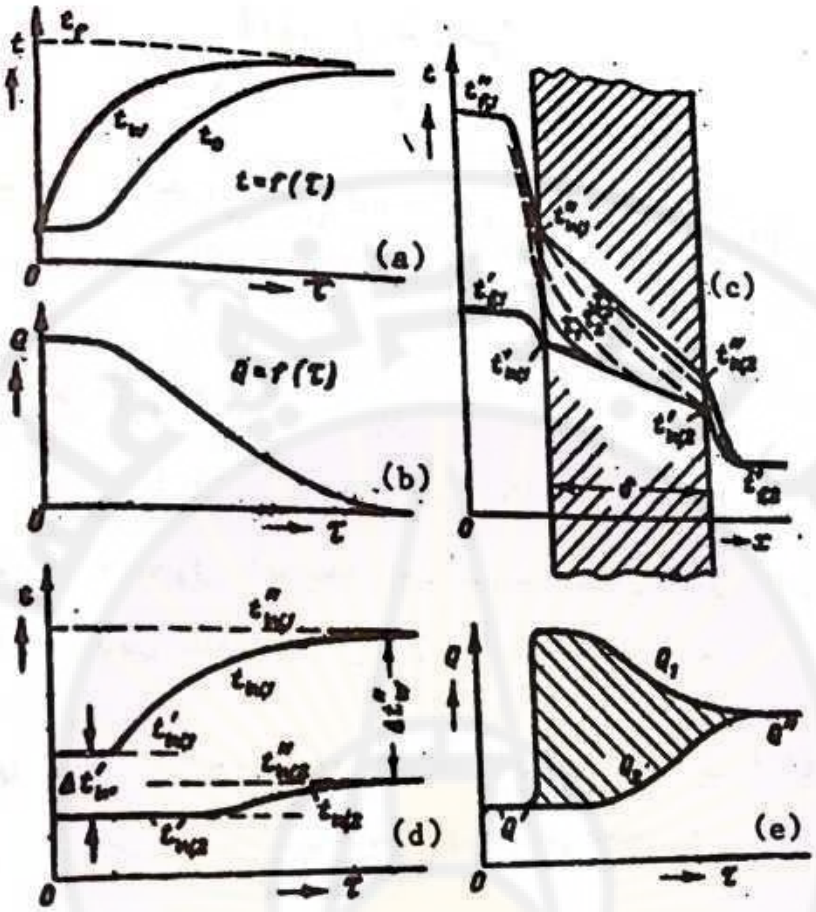
-(Process Discription And Solution Methods.).

تم في الفصول السابقة بحث ظروف انتقال الحرارة في الحالة المستقرة حيث يبقى الحقل الحراري ثابتا مع الزمن .

في الحالة التي يتغير فيها حقل درجات الحرارة مع الزمن يسمى الاجراء باجراء التوصيل الحراري الغير مستقر .

عدم استقرار اجراءات انتقال الحرارة تتوقف على تغير المخزون الحراري للاجسام والتي تتعلق دومابظواهرالتسخين أوالتبريد وكمثال على ذلك عند وضع جسم ضمن وسط ذو درجة حرارة عالية تنشأ مباشرة عملية تبادل حراري بين الوسط والجسم حيث يبدأ الجسم بالتسخين ابتداء من الطبقات السطحية وبالتدريج تنتقل الحرارة الى عمق الجسم ، ويمكن التعبير عن طبيعة تغير درجات حرارة مختلف نقاط الجسم خلال زمن التسخين بالمنحنيات المبينة بالشكل (5-1) حيث t_w ، t_o درجات حرارة سطح ومركز الجسم على التوالي .

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner



الشكل (1-5) التوصيل الحراري في الحالة العابرة ، طبيعة تغيردرجات الحرارة ، كمية الحرارة المعطاة بتغير الزمن

بزيادة الفترة الزمنية (نظريا بشكل لانهائي)تتعادل درجات حرارة مختلف نقاط الجسم حيث تتساوى مع درجة حرارة الوسط المحيط وبالتالي يتم التوازن الحراري .

في الحالة العابرة تكون كمية الحرارة المنتقلة أيضا غير ثابتة مع الزمن ويعبر عن مقدار التغير في الكمية المنتقلة بالشكل

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

(5-1-b)حيث تتناقص كمية الحرارة المكتسبة كلما ارتفعت درجة حرارة الجسم الى أن تساوي الصفر عندما تتعادل درجة حرارة نقاط الجسم مع درجة حرارة الوسط المحيط .

تتحدد كمية الحرارة المكتسبة خلال الزمن τ بالمساحة المحصورة بين المحورين الاحداثيين والمنحني ، وبشكل مماثل تتم نفس العملية عند تبريد الجسم عندئذ تتناقص الطاقة الحرارية الداخلية نتيجة انتقال الحرارة الى الوسط المحيط وكمثال على ذلك نأخذ عملية انتقال الحرارة عبر جدار باعتبار أن النظام في البداية مستقر ودرجة حرارة الوسط الساخن تساوي الى t_{f_1} ودرجة حرارة الوسط البارد t_{f_2} ودرجتي حرارة سطحي الجدار t'_{w_1} و t'_{w_2} الشكل (5-1-c) .

اذا غيرنا الان نظام الانتقال الحراري مثلا عن طريق الرفع الفجائي لدرجة حرارة الوسط الساخن حتى t'_{f_1} يصبح اجراء انتقال الحرارة غير مستقرلمدة وجيزة وبالتالي يتغير شكل المنحنيالحراري $t_{f_2} - t'_{w_2} - t'_{w_1} - t'_{f_1}$ بشكل مستمر طوال فترة عدم الاستقرارالى أن نصل الى الحالة المستقرة المتمثلةبالمنحني $t_{f_2} - t''_{w_2} - t''_{w_1} - t''_{f_1}$ يوضح الشكل (5-1-d) طبيعة تغيير كلاً من t_{w_1} و t_{w_2} مع الزمن كما يوضح الشكل (5-1-e) تغيير كمية الحرارة المنتقلة عبر الجدار مع الزمن ، حيث Q' ، Q'' كميات الحرارة المنتقلة في الحالة المستقرة ، Q_1 ، Q_2 كميات الحرارة المنتقلة عبر سطحي الجدار الساخن والبارد في الحالة العابرة .

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

تعبر المساحة المهشرة من كمية الحرارة المصروفة على تغيير الطاقة الحرارية المختزنة ضمن الجدار .

مماسبق نستنتج أن استقرار أو عدم استقرار اجراء انتقال الحرارة يرتبط بثبات أو تغير كمية الطاقة الحرارية المختزنة ضمن الجسم وباعتبار أن سرعة تغير كمية الطاقة الحراريةالمختزنة تتناسب طردا مع قدرة المادة على توصيل الحرارة (أي مع معامل التوصيل الحراري λ) وتتناسب عكسا مع قيمة السعة الحرارية الحجمية $C.\rho$ وبالتالي تتناسب سرعة الانتشار الحراري فيالنظام النير مستقر مع معامل انتشار الحرارة $\left[\frac{m^2}{hr}\right]$ $a = \frac{\lambda}{C.\rho}$ والذي يعبر من خاصية هامة في اجراء توصيل الحرارة في الحالة العابرة مثلما يعبر معامل توصيل الحرارة λ في الانظمة المستقرة .

يبقى طابع تغيير درجة الحرارة وكمية الحرارة المنتقلة المذكورين أعلاه صحيحين في حالة التوصيل الحراري عبر الاجسام العلبة فقط .

في الحالة التي يتم عندها تسخين الاجسام السائلة أو الغازية تنشأ تيارات حملية تساعد على استقرار درجة الحرارة وفي هذه الحالة يمكن أن نتكلم فقط عن تغيير درجة الحرارةالوسطية للسائل مع الزمن .

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

يتضمن حل مسألة التوصيل الحراري الغير مستقر ايجاد العلاقات الناظمة لتغير درجة الحرارة وكمية الحرارة المكتسبة أو المنتشرة مع تغير الزمن ولأية نقطة من الجسم .

يمكن الحصول على هذه العلاقات من طريق حل المعادلة التفاضلية للتوصيل الحراري والتي تحل عادة بواسطة سلاسل فوريه

يهدف الحل التحليلي الى ايجاد الحل العام للمسألة المدروسة والذي غالبا مايكون ذو طبيعة معقدة جدا باستثناء بعض الحالات المتعلقة بانتقال الحرارة عبر جسم صلب ذو شكل بسيط (كالصفيحة والاسطوانة والكرة) وبوجود سلسلة متكاملة من الافتراضات التبسيطية كما مر معنا في فصل سابق ، ومن المناسب عمليا عند حل مسائل تكنيكية محددة استعمال طريقة الموازنة الابتدائية أو طريقة الفروق النهائية حيث تستند هذه الطرق على افتراض امكانية استبدال الاجراء المستمر باجراء ذي قفزات من حيث الفراغ العامل أو بالزمن

يمكن تجزئة أية اجراء تسخين أو تبريد لجسم مالى ثلاثة مراحل ، تتميز المرحلة الاولى بانتشار الحرارة ضمن الفراغ العامل بشكل تدريجي مع ملاحظة أنه يمكن أن تختلف سرعة تغير درجة الحرارة (التدرج الحراري) من نقطة لأخرى حيث يتعلق حقل درجات الحرارة بشكل أساسي بالحالة الابتدائية التي تتميز بشكل عام بطابع عرضي أو عابر ، لذلك نطلق على هذه المرحلة من الاجراء بالاجراء الغير منتظم .

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

بعد انقضاء فترة زمنية كافية (نظريا بعد زمن لانهائي) تسيطر المرحلة الثالثة والتي تتميز بثبات توزع درجات الحرارة مع تغير الزمن (ثبات الحقل الحراري) ويسمى الاجراء في هذه المرحلة بالاجراء المستقر .

يصعب الحصول على الحل التحليلي بسبب أن هذا الحل يهدف الى الحصول على علاقة عامة تصلح في كل مراحل الاجراء الثلاثة ، أما في الحالة التي تهدف الى ايجاد الحل الخاص باحدى هذه المراحل فعندها تتبسط المسألة بشكل كبير .

عند حل الكثير من المسائل العملية المتعلقة بتبريد وتسخين الاجسام فانه يمكن اهمال المرحلة الاولى من الاجراء حينئذ تبقى فقط المرحلة الثانية والتي تتبع قانون الاسي .

تتحدد ضرورة حساب التبادل الحراري في الحالة الغير مستقرة بأهمية هذا التبادل بالنسبة للجهاز المدروس وعلى سبيل المثال يمكن اعتبار حالة عمل المراجل البخارية والعديد من الاجهزة الداخلة في محطات توليد الطاقة الكهربائية حيث تسود الحالة الغير مستقرة بالنسبة لهذه التجهيزات فقط عند تشغيل أو ايقاف أو تغيير نظام العمل والتي تتميز بطابع مؤقت ، لذا فان حساب هذه التجهيزات يتم فقط من أجل الحالة الاساسية أي الحالة المستقرة وبالتالي لاتوجد هناك أية أهمية لدراسة الحالة العابرة ، أما في حالة دراسة تجهيزات أفران التسخين فعلى العكس من ذلك حيث تعتبر الحالة الغير مستقرة حالة أساسية وعند حسابها يلزم تحديد الزمن

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الضروري واللازم لتسخين المعدن حتى درجة حرارة محددة أو حتى تلك الدرجة من الحرارة التي يصل اليها المعدن خلال زمن معين .

٥-٢: الحل التحليلي .. (Analytical Solution) :

تأخذ المعادلة التفاضلية للتوصيل الحراري عبر الاجسام الصلبة ، الشكل التالي :

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}\right) \qquad (5\text{-}1)$$

من أجل حل هذه المعادلة حلا تحليليا من الضروري معرفة الشروط الحدية التالية :

أ ـ التوزع الابتدائي لدرجات الحرارة ضمن الجسم .

ب ـ التأثير المتبادل بين السطح والوسط المحيط .

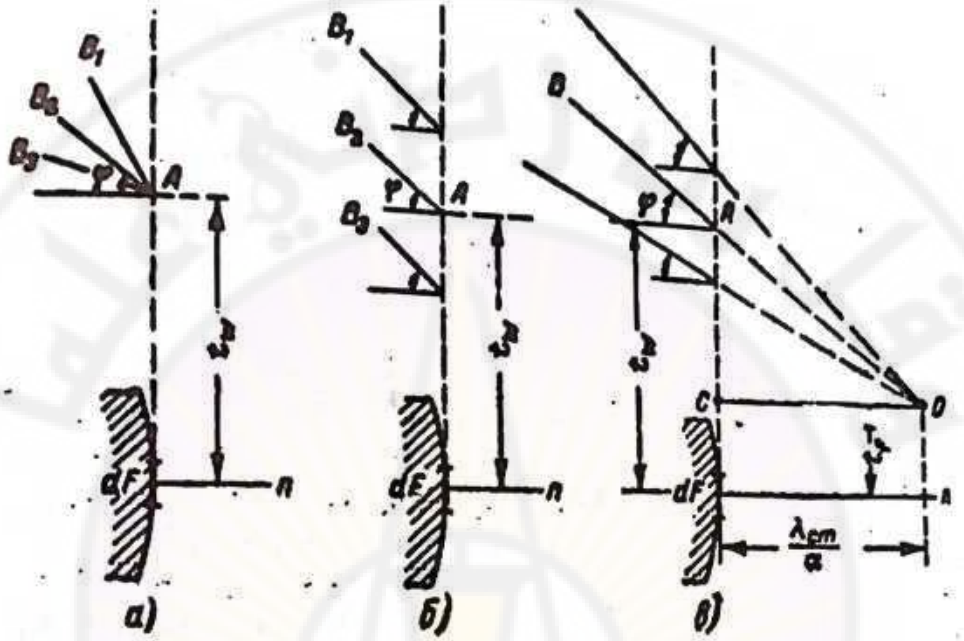
حيث يمكن اعطاء الشرط الاخير بثلاثة طرق منها أن تعطى درجة حرارة السطح t_w والتي يمكن التعبير عنها بيانيا بتحديد النقطة A ، الشكل (5-2-a) :

تكون كمية الحرارة dQ المارة عبر عنصر السطح عادة غير معلومة ويعبر عن ذلك بيانيا بمستقيم ذو ميل غير محدد φ ($tg\varphi = -\frac{\partial t}{\partial n}$) حيث تساوي كمية الحرارة المنتشرة من

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

داخل الجسم الى الطبقة السطحية من الجسم في أية لحظة زمنية الى:

$$dQ = -\lambda \frac{\partial t}{\partial n} \cdot dF \qquad (a)$$



الشكل (2-5) التمثيل البياني للطرق الثلاث
في اعطاء الشروط الحدية

وبحسب الطريقه الثانية لاعطاء الشروط الحدية تعطى كمية الحرارة التي تعبر السطح (أي الزاوية φ) اضافة الى كون درجة الحرارة t_w معروفة الشكل (ب-2-5) أي يتم تحديد موضع النقطة A .

في الطريقة الثالثة تعطى درجة حرارة الوسط المحيط t_f اضافة الى معامل انتقال الحرارة بين الوسط المحيط والسطح α بالاضافة الى المعادلة (a) ، يمكن تحديد كمية الحرارة dQ التي

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

تعبر السطح من معادلة نيوتن :

$$dQ = \alpha (t_w - t_f).dF \qquad (b)$$

وبتعويض العلاقة (a) في العلاقة (b) نجد :

$$\therefore \frac{\partial t}{\partial n} = \frac{\alpha}{\lambda}(t_w - t_f) \qquad (5-2)$$

تعبر المعادلة (5-2) عن الصيغة الرياضية للشرط الحدي من النوع الثالث، من الشكل (5-2-c) نجد :

$$tg\varphi = - \frac{\partial t}{\partial n} = \frac{AC}{CO} = \qquad (c)$$

$$= \frac{t_w - t_f}{\frac{\lambda}{\alpha}} = \frac{t_w - t_f}{S}$$

مماسبق نستنتج أنه يمكن تحديد النقطة 0 من الشرط الحدي (النوع الثالث) والتي يجب أن تمر منها كل مماسات المنحني الحراري لنقطة تقع على سطح الجسم .

تقع النقطة 0 على مسافة $S = \frac{\lambda}{\alpha}$ من السطح مع الاشارة الى أن قيمة S [m] لاتتعلق بشكل السطح .

يسمى مقلوب S بالمعامل النسبي لانتقال الحرارة $\left[m^{-1}\right]$

$$\frac{1}{S} = \frac{a}{\lambda_{st}} = h \quad \left[\frac{1}{m}\right] \qquad (d)$$

يمكن اعتبار العلاقات المستخرجة أعلاه صحيحة بالنسبة لكلا

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

حالتي الاجراءات المستقرة والعابرة مع ملاحظة أنه في الحالة الاخيرة يجب اعطاء الشروط الحدية كتابع للزمن .

يتم حل المعادلة (5-1) بواسطة سلاسل فوريه حيث يجب أن يحقق الحل الناتج كلا من المعادلة الاساسية والشروط الحدية مع التنويه الى أنه عند شروط حدية مختلفة نحصل على نتائج مختلفة علما بأن منهاج الحل واحد .

من أجل الاغراض العملية يمكن في أغلب الحالات الاكتفاء ببحث سير الاجراء في اتجاه معين x فقط وفي هذه الحالة يأخذ الحل الشكل التالي :

من أجل جدار مستوي :

$$t = bX + C + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n . \text{Cos } m_n X + P_n . \text{Sin } m_n X) . e^{-\alpha m_n^2 \tau} \qquad (5-3)$$

من أجل جدار اسطواني :

$$t = b \ln r + C + \sum_{n=0}^{\infty} A_n [J_o(m_n . r) + P_n . Y_o(m_n . r)] . e^{-\alpha m_n^2 . \tau} \qquad (5-4)$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

حيث :

Y_o, J_o توابع بسل من الدرجة الاولى والثانية .

يمكن تحديد الثوابت C, b من شروط استقرار النظام (عندما $\tau \to \infty$) كما يمكن تحديد P_n و m_n من الشروط الحدية أما A_n فتتحدد من الشروط الابتدائية (عندما $\tau = 0$) .

في هذا البحث سنقتصر على دراسة النتائج النهائية للحل من أجل أجسام ذات أشكال بسيطة مثل الصفيحة والاسطوانة والكرة وذلك عند حدوث تغير مفاجئ لدرجة حرارة الوسط .

نلاحظ من المعادلتين (3-5) و (4-5) أن التابع المجهول θ يتعلق بعدد كبير من المتحولات ، الا أنه لدى تحليل هذه المعادلات يتبين لنا امكانية جمع هذه المتحولات في ثلاثة مجموعات لاقياسية :

$$\frac{\alpha . l}{\lambda} \quad , \quad \frac{\alpha \tau}{l^2} \quad , \quad \frac{X}{l}$$

تعتبر هذه المجموعات أعداد تشابهية حيث يتم الحصول عليها من المعادلات (1-5) و (2-5) ويرمز لها وفقا لما يلي:

عدد بيو $$B_i = \frac{\alpha . l}{\lambda}$$

عدد فوريه $$F_o = \frac{\alpha . \tau}{l^2}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$L = \frac{X}{l}$$

عدد رياضي تشابهي

بالاعتماد على نظرية التشابه يمكن التعبيرعن التابع المجهول $\frac{\theta}{\theta'}$ باستعمال درجة الحرارة اللاأبعادية t وفق العلاقة التالية :

$$\frac{\theta}{\theta'} = \phi(B_i, F_o, 1) \qquad (5-5)$$

حيث يتطابق التابع ϕ بالنسبة لجميع الاجراءات المتشابهة

a) حالة الجدار المستوي :

نعتبر جدار مستوي غير محدود سماكته 2δ ($L=\delta$) وباعتبار أن درجة حرارة الوسط المحيط t_f هي درجة حرارة ارجاعية (Reference Temperature) نرمز للفرق بين درجة حرارة الجدار والوسط المحيط بـ :

$$\theta = t_f - t_w$$

بالتعويض من التعبير الاخير في المعادلة التفاضلية (5-1) ينتج :

$$\frac{\partial \theta}{\partial T} = a \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \qquad (e)$$

الشروط الحدية :

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

عندما $x = \pm \delta$ $\Longleftarrow$ $\frac{\partial \theta}{\partial x} = \pm \frac{\alpha . \theta}{\lambda}$ (f)

والشرط الابتدائي :

عندما $\tau = 0$ $\Longleftarrow$ $\theta = \theta'$ (g)

في المسائل العملية يكتفى في كثير من الحالات بتحديد درجة الحرارة على السطح θ_w وفي المستوي المتوسط للجدار θ_o في هذه الحالة تتبسط المعادلة (5-5) حيث يصبح الحد L عددا ثابتا (عندما $x=0 \Longleftarrow L=0$ وعندما $x=\delta \Longleftarrow L=1$) .

ومنه :

$$\frac{\theta_w}{\theta'} = \phi_w (B_i, F_o) \quad (5-6)$$

$$\frac{\theta_o}{\theta'} = \phi_o (B_i, F_o) \quad (5-7)$$

بالاضافة الى توزع درجات الحرارة ، غالبا ما يطلب تحديد كمية الحرارة Q_τ المكتسبة خلال الزمن τ والتي تتناسب مع مقدار تغير الطاقة الحرارية وتساوي الى جداء الطاقة الحرارية الاولية المختزنة $Q' = 2.\delta.F.C.\theta' \left[\frac{Kcal}{m^2}\right]$ بالتغير النسبي لدرجة الحرارة الوسطية للجسم $\frac{\theta_b}{\theta'}$ خلال الزمن τ :

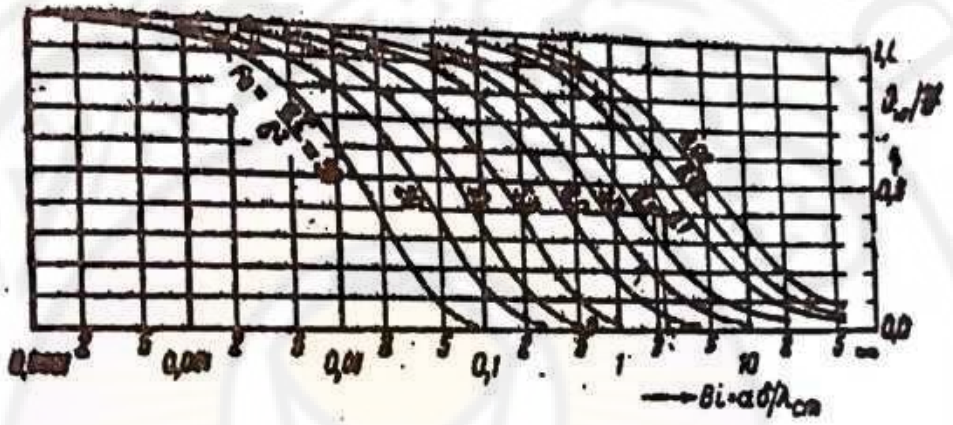
$$\theta' = t_f - t' \quad , \quad \theta_b = \theta_{body}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

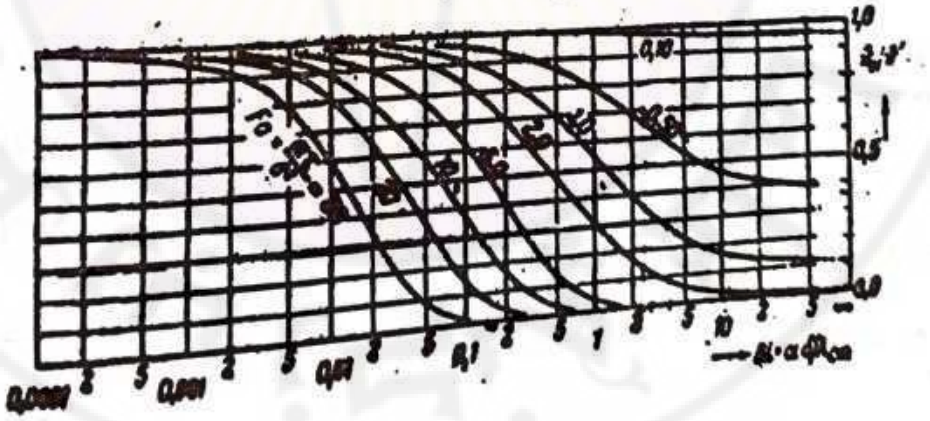
حيث 't درجة الحرارة الابتدائية للجسم .

اذا فالتغير النسبي للمخزون الحراري هو أيضا تابع لعددين فقط هما B_i , F_o :

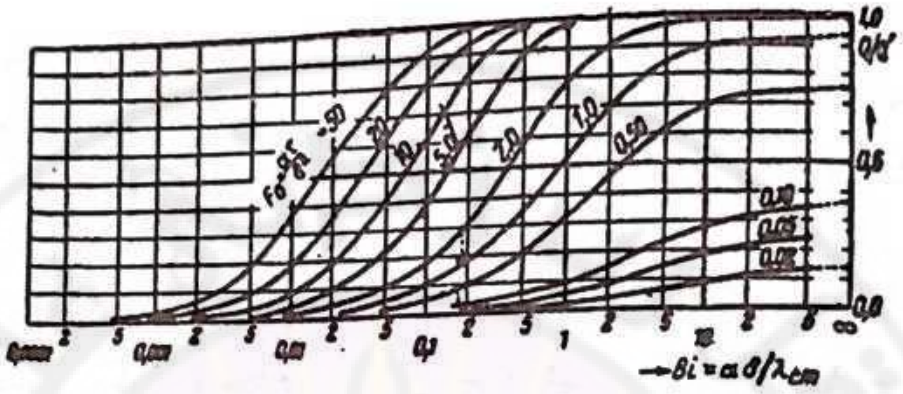
$$\frac{Q_\tau}{Q'} = \phi_Q (B_i, F_o) \qquad (5-8)$$



الشكل(5-3) تمثيل العلاقة $\frac{\theta_w}{\theta'} = f(B_i, F_o)$ من أجل جدار مستوي غير محدود .



الشكل (5-4) تمثيل العلاقة $\frac{\theta_o}{\theta'} = f(B_i, F_o)$ من أجل جدار مستوي غير محدود



الشكل (5-5) تمثيل العلاقة $\frac{\theta}{\theta'} = f(B_i, F_o)$

من أجل جدار مستوي غير محدود

يمكن تمثيل العلاقات (5-6) ,(5-7),(5-8) كماهو مبين بالاشكال (5-3) , (5-4) , (5-5) ، عند تحديد المقادير المجهولة من الضروري أولا حساب الكميات $B_i = \frac{\alpha \cdot \delta}{\lambda}$ و $F_o = \frac{\alpha \cdot \tau}{\delta 2}$ حيث يمكن عندئذ تحديد قيم $\frac{\theta}{\theta'}$ و $\frac{Q_\tau}{Q'}$ من المخططات البيانية.

من السهل أيضا حساب قيم θ_w , θ_o , Q باعتبار أن كلا من قيمتي θ' و Q' معلومتين .

مماسبق يمكن بشكل تقريبي انشاء المنحني البياني الممثل لتوزع درجات الحرارة ضمن الجسم وذلك بعد تحديدميل المماس لهذا المنحني في ثلاثة نقاط الشكل (5-6) .

تمر المماسات الخاصة بالنقطتين $x = \mp \delta$ من النقاط

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

القطبية 0 و 0_1 الواقعة على مسافة $\pm \frac{\lambda}{\alpha}$ من الجدار .

في النقطة $x = 0$ يكون اتجاه المماس بشكل افقي بحكم تناظر المنحني الحراري $\frac{\partial \theta}{\partial x} = 0$ وعلى هذا الاساس يمكن رسم المنحني البياني لتوزع درجات الحرارة من أجل أية لحظة زمنية τ الشكل (5-6).

تتحدد القيم المطلقة لدرجات حرارة سطح الجدار ودرجة الحرارة في مستوى التناظر عند أية لحظة زمنية من العلاقات التالية :

$$\frac{\theta_w}{\theta'} = \frac{t_f - t_w}{t_f - t'} \quad , \quad \frac{\theta_o}{\theta'} = \frac{t_f - t_o}{t_f - t'} \qquad (5-9)$$

حيث :

t_f درجة حرارة الوسط المحيط .

t' درجة الحرارة الابتدائية للجسم .

t_w درجة الحرارة على السطح .

t_o درجة الحرارة عند المستوي المتوسط للجسم .

B) معادلة الاستوانة :

تأخذ المعادلة التفاضلية للتوصيل الحراري بالنسبة

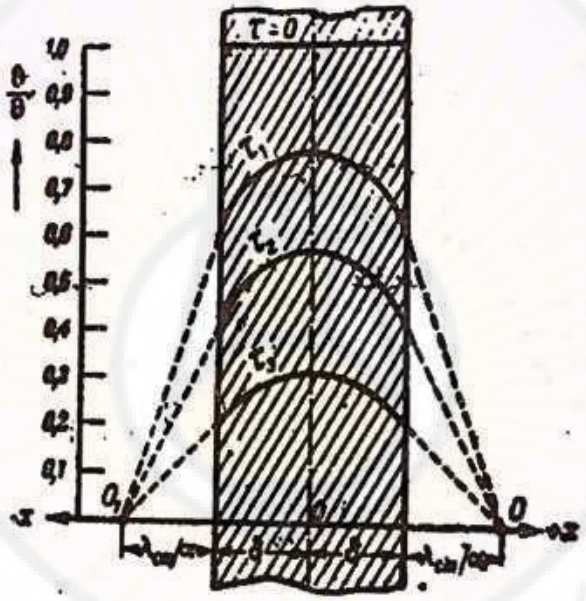
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

لاسطوانة طويلة بشكل غير محدود ونصف قطرها R الشكل الثالثي :

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = a\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial r}\right)$$

الشرط الحدي : عندما $r=R$ $\Longleftarrow$ $-\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\alpha}{\lambda}\theta$ (i)

والشرط الابتدائي : عندما $\tau=0$ $\Longleftarrow$ $\theta = \theta'$ (j)

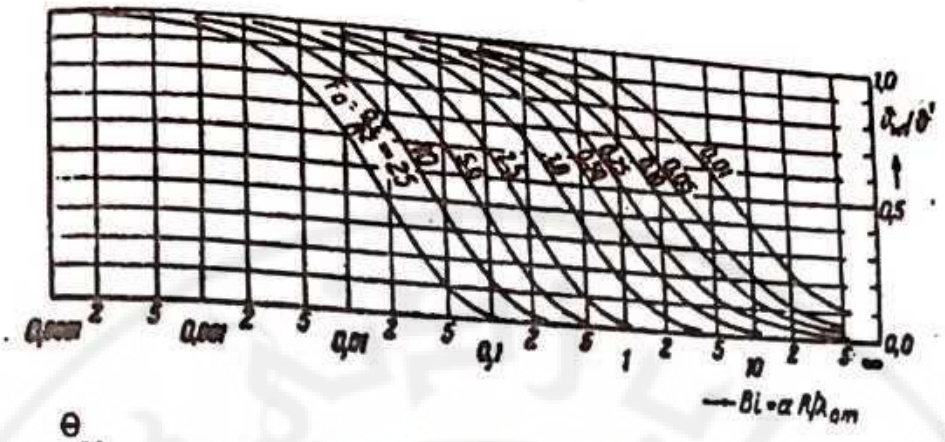


الشكل (6-5) تغير الحقل الحراري
لدى تبريد جدار مستوي غير محدود

ان الحل العام بالنسبة لـ $\frac{\theta_w}{\theta'}$ ، $\frac{\theta_o}{\theta'}$ و $\frac{Q}{Q'}$ يعتبر أيضا تابعا لعددين هما B_i و F_o .

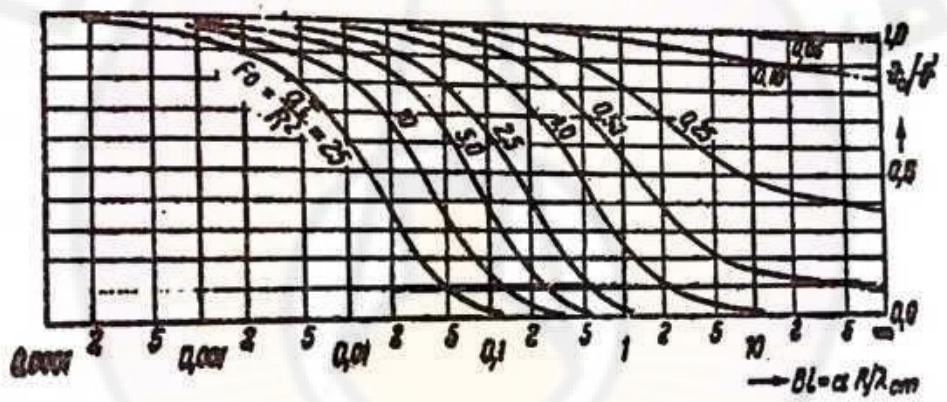
وتمثل هذه العلاقات (الحلول) بشكل منحنيات بيانية كما هو مبين بالاشكال (5-7) ، (5-8) و (5-9) .

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner



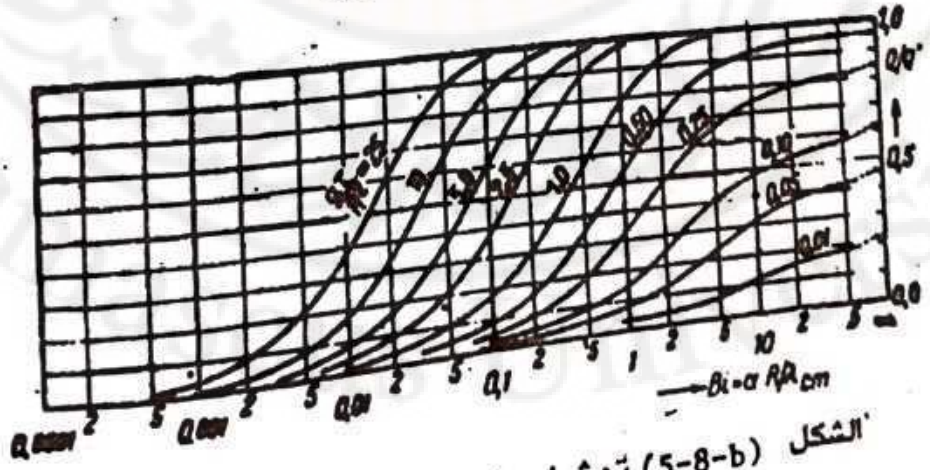
$\frac{\theta_w}{\theta'} = f(B_i, F_o)$ الشكل (5-7) تمثيل العلاقة

من أجل اسطوانة لانهائية الطول



$\frac{\theta_o}{\theta'} = f(B_i, F_o)$ الشكل (5-8-a) تمثيل العلاقة

من أجل اسطوانة لانهائية الطول



$\frac{\theta}{\theta'} = f(B_i, F_o)$ الشكل (5-8-b) تمثيل العلاقة

من أجل اسطوانة لانهائية الطول

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

ان المخزون الحراري الابتدائي لجزء من الاسطوانة طوله 1 يساوي الى :

$$Q' = \pi . R^2 . C . \rho . 1 . \theta' \qquad [Kcal]$$

c) حالة الكرة :

تأخذ المعادلة التفاضلية للتوصيل الحراري من أجل كرة نصف قطرها R الشكل التالي :

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = a\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial \theta}{\partial r}\right) \qquad (n)$$

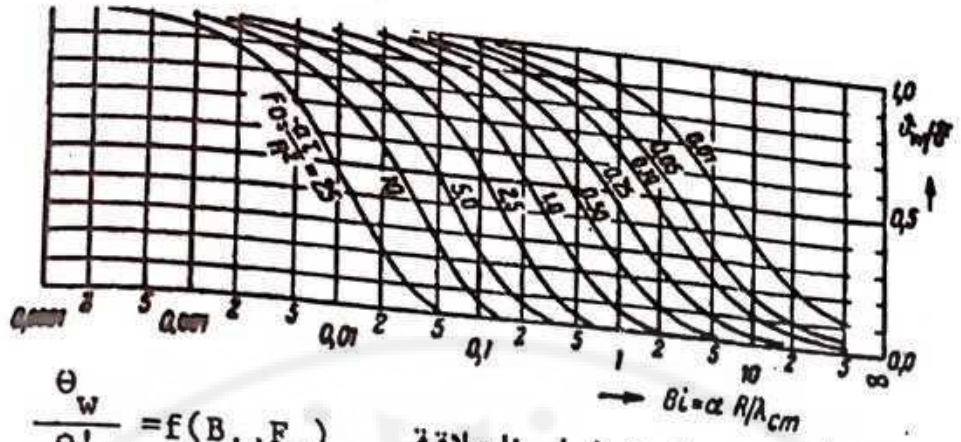
الشرط الحدي :

عندما : $r = R$ $\Longleftarrow$ $-\frac{\partial \theta}{\partial r} = \frac{\alpha}{\lambda}\theta$ (1)

والشرط الابتدائي.

عندما : $\tau = 0$ $\Longleftarrow$ $\theta = \theta'$ (m)

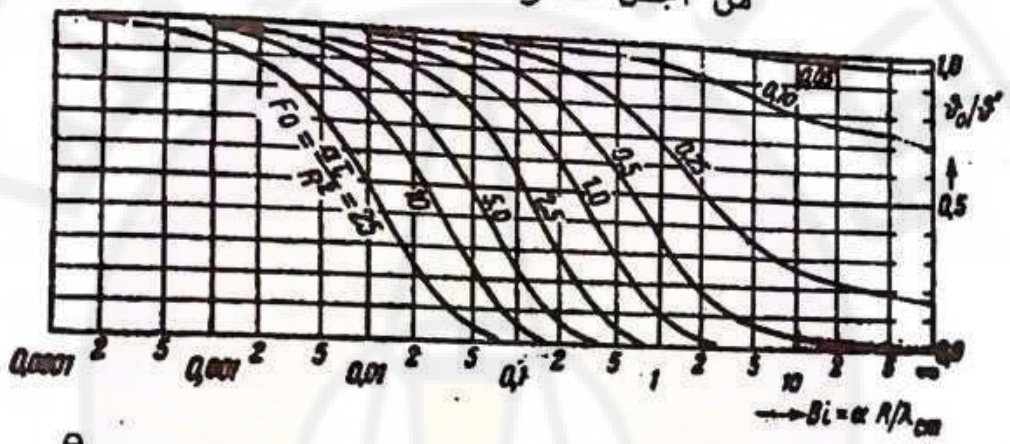
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner



$$\frac{\theta_w}{\theta'} = f(B_i, F_o)$$

الشكل (5-9) تمثيل العلاقة

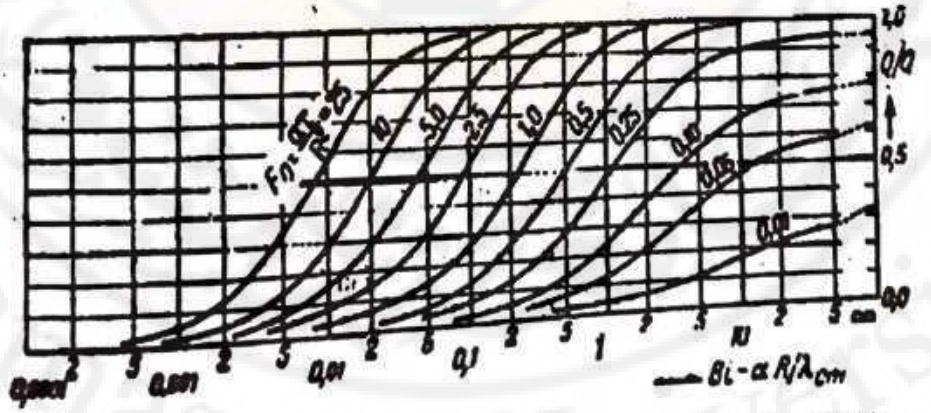
من أجل كـــرة .



$$\frac{\theta_o}{\theta'} = f(B_i, F_o)$$

الشكل (5-10) تمثيل العلاقة

من أجل كـــرة



$$\frac{Q}{Q'} = f(B_i, F_o)$$

الشكل (5-11) تمثيل العلاقة

من أجـــل كـــرة .

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

في الحالة المدروسة يعتبر الحل أيضا بالنسبة لـ $\frac{\theta_w}{\theta'}$ و $\frac{\theta_o}{\theta'}$ تابعا فقط لعددين لاقياسيين هما B_i و F_o .

وتمثل هذه العلاقات على شكل منحنيات بيانية ، الاشكال (5-9) ، (5-10) و (5-11) حيث أن المخزون الحراري الابتدائي للكرة يساوي الى :

$$Q' = \frac{4}{3}\pi.R^3.\rho.C.\theta' \quad [KCal]$$

d) ارتباط اجراء توزع الحرارة بشكل ومقاييس الجسم :

تكون سرعة اجراء الانتشار الحراري بالنسبة لجسم ما أكبر كلما كبرت نسبة سطح الى حجم هذا الجسم ويمكننا التأكد من ذلك فيما اذا قارنا فيم θ_o عند قيم واحدة لـ B_i و F_o وذلك بالنسبة لاجسام مختلفة الشكل .

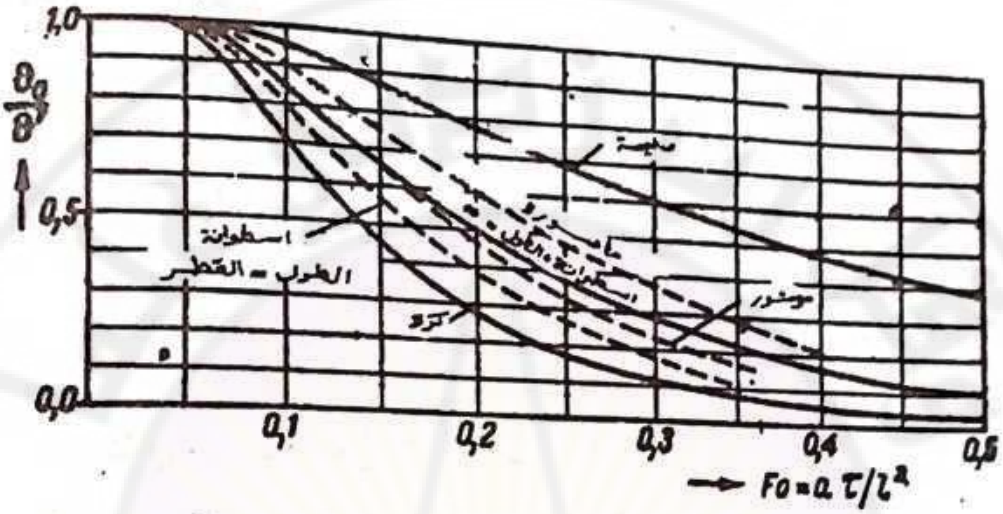
تتوضح هذه المقارنة بيانيا في الشكل (5-12) حيث اعطيت علاقات $\frac{\theta_o}{\theta'} = f(F_o)$ بالنسبة لاجسام مختلفة عند قيمة ثابتة لـ B_i (B_i=Const.) .

نلاحظ من الشكل (5-12) أن سرعة الاجراء بالنسبة للاجسام الكروية أكبر منها لأية أجسام أخرى .

ترتبط سرعة الاجراء بالنسبة للاجسام الاسطوانية والموشورية ارتباطا كبيرا بأطوالها حيث تزداد سرعة الاجراء كلما نقص مقدار

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

هذا الطول وتجدر الاشارة بانه من أجل نقاط مختلفة على السطح تختلف سرعة الاجراء من نقطة الى أخرى كما يكون هبوط درجة الحرارة في جسم محدود الطول أكبر مما هو في حالة جسم طويل بشكل غير محدود .



الشكل (12-5) تمثيل العلاقة $\frac{\theta_o}{\theta'} = f(F_o)$

من أجل أجسام ذات أشكال مختلفة عند $B_i = Const.$

عند دراسة أجسام ذات أشكال معينة مثل الاسطوانات القصيرة والمواسير القائمة الزوايا ومتوازيات المستطيلات ، يمكن اعتبارها كأجسام متشكلة من تقاطع اسطوانة وصفيحة ذات مقاييس غير محدودة وذات سماكة محددة حيث تؤخذ سماكتها مساوية لطول الاسطوانة وبالتالي فان درجة الحرارة النسبية $\frac{\theta}{\theta'}$ بالنسبة لنقطة ما من اسطوانة قصيرة تكون مساوية لحاصل جداء درجة الحرارة النسبية لنقطة مماثلة موجودة في اسطوانة ذات طول لامتناه بدرجة الحرارة النسبية في مستوي تناظر صفيحة لانهائية الامتداد وعلى سبيل المثال تكون درجة الحرارة النسبية لنقطة واقعة على سطح اسطوانة وفي

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

منتصف الارتفاع مساوية لحاصل جداء درجة الحرارة النسبية لسطح اسطوانة لانهائية الامتداد $\frac{\theta_w}{\theta'}$ بدرجة الحرارة النسبية في مستوي تناظر صفيحة لامتناهية الابعاد $\frac{\theta_o}{\theta'}$ وبالتاكيد فان درجة الحرارة النسبية لنقطة واقعة على محور الاسطوانة ومنتصف الارتفاع تساوي الى حاصل جداء $\frac{\theta_o}{\theta'}$ لاسطوانة لانهائية الامتداد و $\frac{\theta_o}{\theta'}$ لصفيحة غير محدودة .

مثـــال :

حدد درجة الحرارة في مركز وسطح اسطوانة من الـ ـة قطرهـا $d=0.3$ m وطولها $l=0.6$ m بعد ساعة من ادخالها الى الفـــرن درجة الحرارة الابتدائية للاسطوانة $t' = 20\ C^o$ ، درجـــة حرارة الفرن $t_f = 1020\ C^o$.

$$\gamma = 7800\ \frac{Kg}{m^2} \quad , \quad c = 0.17\ \frac{Kcal}{Kg.C^o}$$

$$\lambda_{st} = 30\ \frac{Kcal}{m.h.C^o} \quad , \quad \alpha = 200\ \frac{Kcal}{h.m^2.C^o}$$

الحـــل :

لنجري الحساب أولا معتبرين أن الاسطوانة لانهائية الطول :

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$a = \frac{\lambda}{c.\rho} = \frac{30}{0.17 \times 7800} = 0.0225 \quad \frac{m^2}{hr}$$

$$B_i = \frac{\alpha . R}{\lambda} = \frac{200 \times 0.150}{30} = 1$$

$$F_o = \frac{a\,\tau}{R^2} = \frac{0.0225 \times 1}{(0.15)^2} = 1$$

(5-7) بالاعتماد على القيم المحسوبة وبمساعدة المخططات

و (5-8) نجد قيم $\frac{\theta_w}{\theta'}$ و $\frac{\theta_o}{\theta'}$ حيث ينتج :

$$\frac{\theta_w}{\theta'} = 0.16 \qquad \text{و} \qquad \frac{\theta_o}{\theta'} = 0.26$$

وبما أن : $\theta' = t_f - t' = 1020 - 20 = 1000\ C^o$

ينتج :

$$\theta_w = t_f - t_w = 0.16 \times 1000 = 160\ C^o$$

أو :

$$t_w = 1020 - 160 = 860 \quad C^o$$

و :

$$\theta_o = t_f - t_o = 0.26 \times 1000 = 260\ C^o$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

أو :

$$t_o = 1020 - 260 = 760 \quad C^o$$

لنأخذ الان بعين الاعتبار تأثير طول الاسطوانة حسب القاعدة الموضحة أعلاه :

ثخانة الصفيحة $2\delta = 1 = 0.6m$ ومنه $\delta = 0.3 \quad m$

نحسب B_i ، F_o بالنسبة للصفيحة حيث ينتج :

$$B_i = \frac{\alpha . \delta}{\lambda} = \frac{200 \times 0.3}{30} = 2$$

$$F_o = \frac{a . \tau}{2} = \frac{0.0225 \times 1}{0.09} = 0.25$$

بناء على هذه النتائج ومن الشكلين (3-5) و (4-5) نجد القيم التالية :

$$\frac{\theta_w}{\theta'} = 0.43 \quad , \quad \frac{\theta_o}{\theta'} = 0.88$$

بحساب جداءات درجات الحرارة النسبية لكل من الاسطوانة والصفيحة كماورد ذكره سابقا نحصل على درجات الحرارة النسبية للنقاط التالية :

1- لنقطة واقعة على سطح قاعدة الاسطوانة :

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$\frac{\theta_1}{\theta'} = \left(\frac{\theta_w}{\theta'}\right)_{Cylinder} \cdot \left(\frac{\theta_w}{\theta}\right)_{Plate}$$

$$= 0.16 \times 0.43 = 0.069$$

$$\theta_1 = 69 \quad C^o$$

ومنه :

2) لنقطة واقعة على سطح قاعدة الاسطوانة :

$$\frac{\theta_2}{\theta'} = \left(\frac{\theta_o}{\theta'}\right)_{Cylinder} \cdot \left(\frac{\theta_w}{\theta'}\right)_{Plat}$$

$$= 0.26 \times 0.43 = 0.112$$

$$\theta_2 = 112 \quad C^o$$

ومنه :

3) لنقطة واقعة في منتصف ارتفاع السطح الجانبي للاسطوانة :

$$\frac{\theta_3}{\theta'} = \left(\frac{\theta_w}{\theta'}\right)_{Cylinder} \cdot \left(\frac{\theta_o}{\theta'}\right)_{Plate}$$

$$= 0.16 \times 0.88 = 0.140$$

ومنه :

$$\theta_3 = 140 \quad C^o$$

4) نقطة واقعة في منتصف ارتفاع محور الاسطوانة :

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$\frac{\theta_4}{\theta'} = \left(\frac{\theta_o}{\theta'}\right)_{Cylinder} \cdot \left(\frac{\theta_o}{\theta'}\right)_{Plate}$$

$$= 0.26 \times 0.88 = 0.228$$

ومنه : $\theta_4 = 228 \ C^o$

بما أن: $\theta_i = t_f - t_i$

اذن : $t_i = t_f - \theta_i$

ومنه ينتج : $t_1 = 1020-69 = 951 \ C^o$

$t_2 = 1020-112 = 908 \ C^o$

$t_3 = 1020-140 = 880 \ C^o$

$t_4 = 1020-228 = 792 \ C^o$

بالمقارنة مع الحسابات المجراة في بداية الحل على اعتبار أن الاسطوانة لانهائية الطول يمكن كتابة :

$t_1 = t_w = 860 \ C^o$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$t_2 = t_o = 770 \quad c^o$$

$$t_3 = t_{..} = 860 \quad c^o$$

$$t_4 = t_o = 770 \quad c^o$$

نستنتج أن تسخين الاسطوانة ذات الطول المحدود يتم بسرعة أكبر منها في حالة اسطوانة لانهائية الامتداد .

٥-٢: اسلوب النظام المنتظم :

لندرس اجراء تبريد جسم صلب وذلك عندما تكون شروط التبريد (درجة حرارة الوسط المحيط t_f ومعامل انتقال الحرارة على سطح الجسم α) ثابتين مع تغير الزمن وباعتبار عدم وجود أية مصادر حرارية داخلية .

في هذه الحالة وكما ذكرنا سابقا يمكن تقسيم اجراء تبريد (أو تسخين) الجسم زمنيا الى ثلاثة مراحل :

١- فترة الاجراء الغير منتظم .

٢- فترة الاجراء المنتظم .

٣- فترة التوازن الحراري .

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

تتصف الفترة الاولى بأن الحقل الحراري فيها يرتبط ارتباطا قويا بالحالة الحرارية الابتدائية للجسم وبشكل عام يمكن القول بأنها ذات طابع عرضي غير مرتبط بشروط التبريد .

تسود الفترة الثانية للتبريد بعد مرور زمن كاف من بداية الاجراء حيث لايعود للحالة الحرارية الابتدائية أية تأثير وبالتالي يأخذ قانون تغير الحقل الحراري مع الزمن شكلا بسيطا واعتبارا من هذه المرحلة يأخذ منحنى تغير اللوغاريتم الطبيعي لدرجة الحرارة الفائضة θ مع الزمن* ولأية نقطة من الجسم قانونا خطيا ، أي أن انخفاض درجة حرارة النقطة بمرور الزمن يتبع قانون أسي :

$$\ln \theta = - m.\tau + C \qquad (a)$$

المقدار m عبارة عن عدد موجب ويحدد سرعة تبريد الجسم ويسمى وتيرة أو معدل التبريد .

ان قيمة m لاتتعلق بالشروط البدائية أي بالحقل الحراري الابتدائي بل تتعلق بمقاييس وشكل الجسم وبقيمة الاعداد الحالية الحرارية للجسم مثل α ، λ ، ρ وبشروط التبادل الحراري t_f و α *(ندعو الفرق بين درجة حرارة الجسم t ودرجة حرارة الوسط المحيط t_f بدرجة الحرارة الفائضة أي $\theta = t - t_f$) .

ينبغي بشكل خاص التأكيد على أن قيمة m تبقى ثابتة

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

بالنسبة لجميع نقاط الجسم ، هذه الحالة التي أملتها النظرية وأكدتها التجربة تعتبر الدليل المميز للنظام المنتظم وخاصة به فقط .

بدراسة سرعة تغير درجة الحرارة $\frac{\partial \theta}{\partial \tau}$ نجد أنها تختلف من نقطة الى أخرى كما أنها تتغير مع الزمن في نفس النقطة .

يشاهد مثل هذا الوضع في كلا مرحلتي التبريد الاولى والثانية بشكل متماثل مع التنويه الى أن سرعة تغير لوغاريتم درجة الحرارة تصبح خلال المرحلة الثانية ثابتة مع الزمن وعلى كامل الفراغ العامل .

من المعادلة (a) نجد :

$$\frac{\partial(\ln \theta)}{\partial \tau} = -m \qquad (b)$$

ومنه نستنتج أن الثابت m لايتعلق بالاحداثيات المكانية أو الزمن .

يتم التمثيل البياني للاجراء المدروس كالتالي :

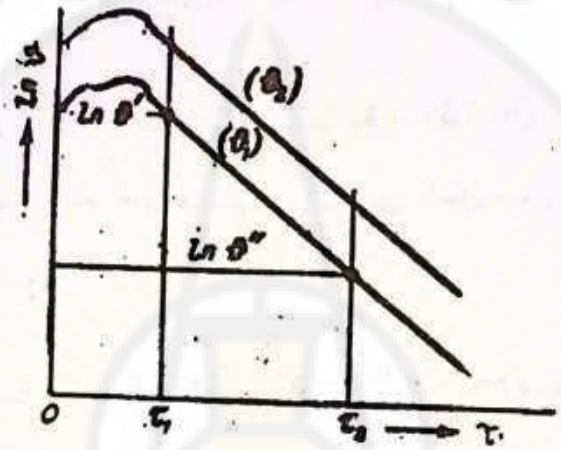
لنرسم منحنيات التبريد من أجل نقاط ما من الجسم

$M_2(x_2, y_2, z_2)$ ، $M_1(x_1, y_1, z_1)$.

بتمثيل الزمن على المحور الافقي (محور السينات)و $\ln \theta$ على المحور الشاقولي (محور الصينات) وبعد مرور فترة زمنية

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

τ_1 اعتبارا من بداية اجراء التبريد نلاحظ أن نظام تغيـــر درجات الحرارة θ_1 و θ_2 للنقاط M_1 و M_2 يأخذ شكلا منتظمـــا وبالتالي يأخذ هـذا التغير شكلا خطيا عند تمثيله بالاحداثيـــات النصف لوغاريتمية ، الشكل(13-5).مع الاشارة الى أن ميل هـــذه المستقيمات يكون متساوي بالنسبة لكافة النقاط .



الشكل (13-5) تغيردرجةالحرارة مع الزمن لدى تبريد جسم (بالتمثيل النصف لوغـاريتمـــي)

في المجال الزمني $0 < \tau < \tau_1$ لايأخذ منحني التبريـــد شكلا خطيا حيث أنه وضمن هذه الفترة تلعب الشروط الابتدائية دورا هاما في التأثير على منحني تغير درجة الحرارة كمايؤثر مكـــان توضع النقطة المدروسة .

بتعويض قيمتي لحظتين زمنيتين اختياريتين τ_1 و τ_2 فـــي المعادلة (a) وطرح احدى المعادلتين الناتجتين من الاخرى نحصل على :

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$m = \frac{\ln\theta' - \ln\theta''}{\tau_2 - \tau_1} \quad \left[\frac{1}{h}\right] \qquad (5-10)$$

بما أن قيمة θ تتناهى الى الصفر عندما $\tau \longrightarrow \infty$ لذا يكون ميل المستقيمات الممثلة في الشكل (5-13) سالب دوما ، أي :

$$\tau_2 > \tau_1 \Longleftarrow \theta' > \theta'' \quad , \quad m > 0$$

يمكن من طريق استثمال العلاقة (5-10) تحديد قيمة العدد m تجريبيا حيث يتم قياس قيمة θ من أجل لحظتين زمنيتين مختلفتين τ_1 و τ_2 .

عمليا يرسم عادة منحني التبريد $\ln\theta = f(\tau)$ بوصل النقاط الناتجة على الاحداثيات النصف لوغاريتمية حيث تساوي m الى ظل الزاوية (ميل) التي يصنعها منحني التبريد مع محور السينات .

ان نظرية النظام المنتظم المبتكرة من قبل العالم السوفيتي كونراتييف تسمح بالاشارة الى الاسلوب العام للحل الرياضي للمسألة الخاصة باجسام ذات أشكال مختلفة كما تؤكد شكل العلاقة بين معدل التبريد m من جهة وبين القيم والخواص الفيزيائية والهندسية للجسم وشروط التبريد α من جهة أخرى .

يدل التحليل على أن قيمة m تتحدد في الحالة العامة بالمعادلة التالية :

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$m = \psi . F . \frac{\alpha}{C_v} \left[h^{-1}\right] \qquad (5\text{-}11)$$

تعبر هذه المعادلة من قانون انحفاظ الطاقة بالنسبة لمجموعة تتألف من جسم مبرد ووسط تبريد ذو درجة حرارة ثابتة t_f .

حيث :

α معامل انتقال الحرارة $\left[\frac{Kcal}{m^2.h.C^o}\right]$

F المساحة الكلية لسطح الجسم $[m^2]$.

C_v السعة الحرارية للجسم $C_\gamma . V$ $[Kcal/C^o]$

C السعة الحرارية النوعية $[Kcal/Kg.C^o]$.

ρ الكثافة $[Kg/m^3]$

V حجم الجسم $[m^3]$

ψ معامل تناسب لاقياسي وهو تابع لعدد بيو B_i حيث

$B_i = \frac{\alpha l}{\lambda}$.

λ معامل التوصيل الحراري للجسم $\left[\frac{Kcal}{m.h.C^o}\right]$

l تعبر عن مقاس خطين للجسم المعتبر وعلى سبيل المثال نصف القطر R في حالة الكرة .

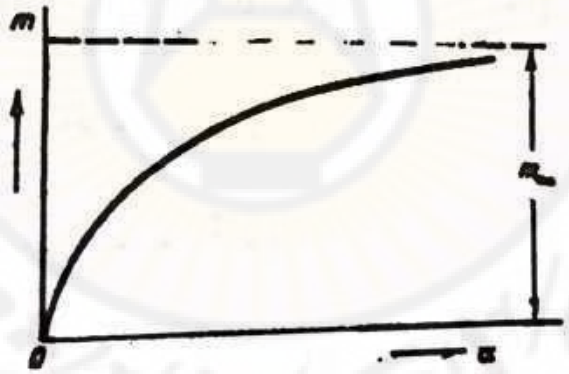
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

تتناقص قيمة ψ من الواحد وحتى الصفر عند التزايد اللامتناهي للعدد B_i .

من الشكل (5-14) تتوضح العلاقة $\psi = f(B_i)$ بالنسبة للكمرة .

من الناحية الفيزيائية تعني ψ نسبة درجة الحرارة الوسطية لسطح الجسم θ_F الى درجة الحرارة الوسطية لمادة الجسم θ_v أي :

$$\psi = \frac{\theta_F}{\theta_v}$$



الشكل (5-14) تمثيل العلاقة $m = f(\alpha)$

مماسبق يمكن تسمية العدد ψ بعدد عدم انتظام الحقل الحراري وفي الحالة التي يكون فيها الحقل الحراري منتظما تكون $\psi = 1$ وكلما اختلفت قيمة ψ عن الواحد كلما كان الحقل الحراري

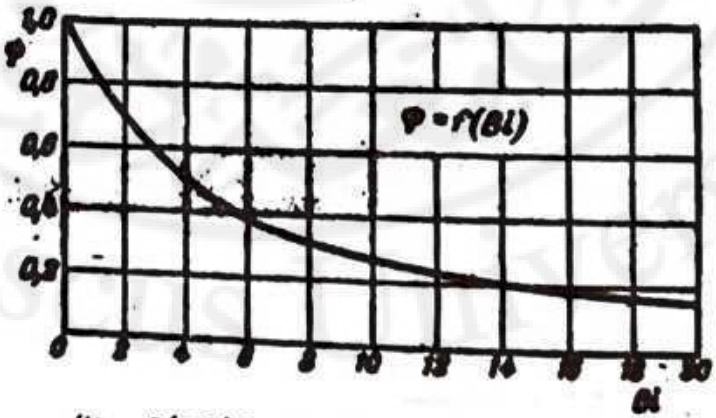
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

أكثر اضطرابا الى أن تصل قيمة ψ الى الصفر عندها يصبح توزع درجات الحرارة مضطرب جدا حيث تكون درجة حرارة كامل سطح الجسم مساوية لدرجة حرارة الوسط المحيط أما درجات حرارة كافة نقاط الجسم الداخلية فتختلف في القيمة .

لنفترض الان أن نفس الجسم يدرس في شروط تبريد مختلفة أي بوجود قيم مختلفة لمعامل انتقال الحرارة α على كامل السطح فكلما كبرت قيمة α كلما كان التأثير التبريدي للوسط أقوى وبالتالي تتم عملية تبريد الجسم بشكل أسرع أي تزداد قيمة m .

ومن الشكل (15-5) يتوضح أنه عندما تنتهي α الى اللانهاية تتقارب قيمة m الى قيمة محددة ، وحسب نظرية كونراتييف الاولى وعندما $\alpha \to \infty$ تصبح قيمة m متناسبة طردا مع معامل التوصيل الحراري أي :

$$\alpha = K.m \qquad (5\text{-}12)$$



الشكل (15-5) تمثيل العلاقة $\varphi = f(Bi)$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

يتعلق معامل التناسب K بشكل ومقاييس الجسم فقط وواحدته $[m^2]$ ويساوي بالنسبة للكرة :

$$K = \frac{R^2}{\pi^2} \cdot M^2 \qquad (c)$$

بالنسبة لاسطوانها طولها L :

$$K = \frac{1}{(\frac{2.4048}{R})^2 + (\frac{\pi}{l})^2} \cdot M^2 \qquad (d)$$

بالنسبة لمتوازي مستطيلات أطوال أضلاعه l_1 , l_2 , l_3 :

$$K = \frac{1}{(\frac{\pi}{l_1})^2 + (\frac{\pi}{l_2})^2 + (\frac{\pi}{l_3})^2} .M^2 \qquad (e)$$

بغية تدقيق وتعميم العلاقات الناتجة تفضل صياغتها بشكل لاقياسي .

عند ضرب m بالقيمة $\frac{l^2}{\alpha}$ نحصل على عدد لاقياسي هو:

$$P = \frac{l^2 . m}{\alpha} \qquad (f)$$

هنا l تعني بعدا مميزا للجسم المدروس lo (نصف القطر مثلا) حسب العلاقة التالية :

$$l^2 = \frac{lo.V}{F} \qquad (g)$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

يتصف النظام المنتظم بوجود علاقة على شكل تابع بين البعديين اللاقياسيين P و B_i وهذا مايوافق العلاقة المبينة أعلاه بين m و α والتي تأخذ شكل تابع :

$$P = \psi . B_i \qquad (5-13)$$

بما أن ψ هو أيضا تابع للعدد B_i الشكل(5-14) وينتهي الى الصفر عند تزايد B_i فانه عندما $B_i \to \infty$ يصبح الطرف الايمن من المعادلة(5-13) غير معين $(0.\infty)$.

وبالاعتماد على نظرية كوندراتييف الاولى [المعادلة (5-12)] عندما $B_i \to 0$ حيث يصبح الطرف الايمن للمعادلة (5-13) غير معين فان قيمة P تنتهي الى نهاية ما n أي الى عدد ذو قيمة منتهية تختلف عن الصفر .

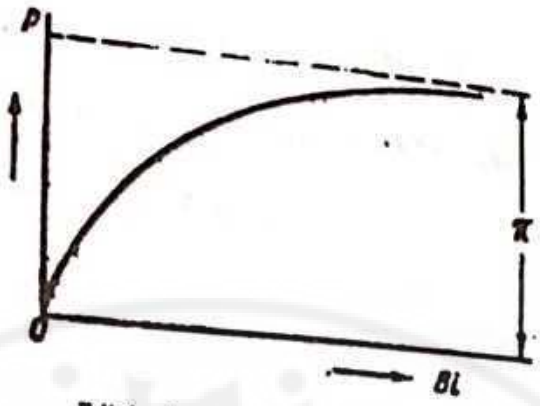
من المعادلة (5-12) نرى أن العدد n يرتبط بالقيمة K وفق العلاقة التالية :

$$K = \frac{L^2}{n} \qquad (h)$$

في بعض الحالات من المناسب استعمال عدد آخر p يتحدد بالشكل التالي :

$$p = l_0 \sqrt{\frac{m}{\alpha}} \qquad (5-14)$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner



الشكل (5-16) تمثيل العلاقة $p = f(B_i)$

تكمن أهمية المعادلة (5-13) في أن شكل كل من التابعين φ و n يتبع فقط للشكل الهندسي للجسم دون الاخذبعين الاعتبار لمقاييس هذا الجسم .

تكون قيم φ و n بالنسبة لاجسام متماثلة الشكل وذات مقاييس مختلفة متساوية .

يبدو تأثير شكل الجسم واضحا على شكل التعبير التحليلي للعلاقة بين الاعداد اللاقياسية p و B_i .

لايجاد شكل المعادلة (5-13) من الضروري اعطاء شكل الجسم ومكاملة المعادلة الاساسية للتوصيل الحراري،وبدلا عن العلاقة (5-13) يكون من الاسهل أحيانا استعمال العلاقات التالية :

$$B_i = f(p) \quad \text{أو} \quad B_i = f(p) \qquad (5\text{-}15)$$

تجيب المعادلة الاخيرة (5-15) على السؤال التالي :

عند أية قيمة لـ B_i تتم عملية التبريد بمعدل معين ؟

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

تفيد نظرية النظام المنتظم في المسائل العلمية المختلفة وبشكل خاص من أجل تقدير زمن تسخين وتبريد الاجسام .

يتحدد الزمن τ الذي تتغير خلاله درجة حرارة نقطة ما من الجسم من θ' الى θ'' بالعلاقة التالية :

$$\tau = \frac{1}{m} . \ln \left(\frac{\theta'}{\theta''} \right) \qquad (5-16)$$

يمكن حساب قيمة m نظريا فيما اذا كان معطى لدينا شكل ومقاييس الجسم والاعداد الحالية الحرارية للمادة .

يجدر بالذكر أنه بالاعتماد على نظرية النظام المنتظم اقترحت أساليب جديدة لتحديد الاعداد الحالية الحرارية للمادة مثل λ و c ومعامل انتقال الحرارة α حيث تتميز هذه الاساليب بالبساطة والدقة العالية في النتائج .

٥-٤-اسلوب الفروق النهائية :

غالبا مايستعمل اسلوب الفروق النهائية في الحسابات العملية الخاصة بحل مسائل التوصيل الحراري الغير منتظم .

يعتمد هذا الاسلوب على افتراض امكانية استبدال الاجزاء الغير مستمر باجزاء على شكل قفزات سواء في الفراغ أو الزمان عندئذ تستبدل المعادلة التفاضلية للتوصيل الحراري (5-1) بمعادلة تمثل الفروق النهائية والتي تاخذ الشكل التالي بالنسبة

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

لحقل متجانس :

$$\frac{\Delta t}{\Delta \tau} = a \frac{\Delta^2 t}{x^2} \qquad (5\text{-}17)$$

ان طريقة استعمال هذا الاسلوب لحساب الاجسام المستوية والاسطوانية والكروية وأيضا لحساب الحقول الحرارية ذات البعدين قد ابتكرت أول ما ابتكرت من قبل العالم ايرن شميدت .

لندرس هذه الطريقة في حالة جدار مستوي .

لنقسم سماكة الجدار الى عدة طبقات ذات سماكة متساوية في الشكل (5-17) حيث نرمز لها بـ ٠٠٠٠و (n - 1), n,(n + 1)

لنقسم أيضا الزمن الى عدة مجالات $\Delta\tau$ نرمز لها على التوالي بـ ٠٠٠٠و(K + 1) , K .

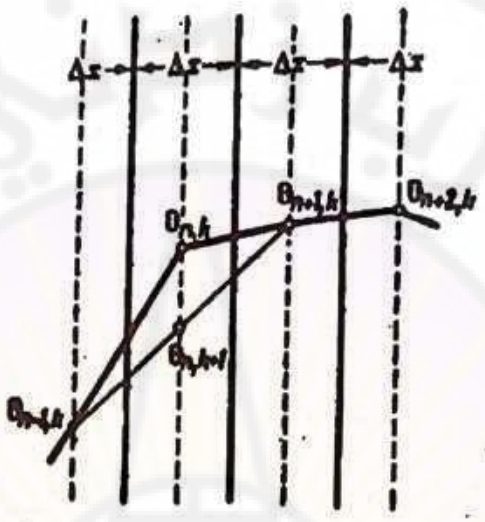
في هذه الحالة فان K و $t_{n,k}$ ترمز لدرجة الحرارة ضمن الطبقة n خلال كامل الفترة الزمنية K وبالتالي يأخذ المنحني الحراري شكل خط منكسر .

في الشكل (5-17) نلاحظ أن المنحني الحراري ضمن الطبقة n ينكسر بحيث يحقق ميلين مختلفين ومنه توجد قيمتين مختلفتين لمشتق درجة الحرارة بالنسبة للاحداثي x هما :

$$(a) \qquad \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)_+ = \frac{t_{n+1,K} - t_{n,K}}{\Delta x}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

(b) $$\left(\frac{t}{x}\right)_{-} = \frac{t_{n,K} - t_{n-1,K}}{\Delta x}$$



الشكل (17-5) اسلوب الفروق الحدية. الشارات الاصطلاحية والتمثيل البياني للاسلوب

وبالنسبة للمشتق الثاني نحصل على العبارة التالية :

(c) $$\frac{\Delta^2 t}{\Delta x^2} = \frac{1}{\Delta x}\left[\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)_{+} - \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)_{-}\right] =$$

(d) $$= \frac{1}{\Delta x^2}\left[t_{n+1,K} + t_{n-1,K} - 2\,t_{n,K}\right]$$

يأخذ مشتق درجة الحرارة بالنسبة للزمن ضمن الطبقة n الشكل التالي :

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$\frac{\Delta t}{\Delta \tau} = \frac{t_{n,K+1} - t_{n,K}}{\Delta \tau} \qquad (d)$$

بتعويض التعابير (c) و (d) في المعادلة (5-17) نجد :

$$\frac{t_{n,K+1} - t_{n,K}}{\Delta \tau} = a \frac{t_{n+1,K} + t_{n-1,K} - 2t_{n,K}}{\Delta x^2}$$

أي أن :

$$t_{n,K+1} = 2a \frac{\Delta \tau}{\Delta x^2} \cdot \frac{t_{n+1,K} + t_{n-1,K}}{2} - \left(2a \frac{\Delta \tau}{\Delta x^2} - 1 \right) t_{n,K} \qquad (e)$$

وبهذا الشكل نجد توزع درجات الحرارة في الجسم من أجل المجال الزمني K .

بالاعتماد على المعادلة (e) يمكن ايجاد توزع درجات الحرارة للمجال الزمني التالي (K+1) وهكذا .

اذا تم اختيار المجالات الزمنية $\Delta \tau$ ومقاييس الطبقات Δx بحيث يحقق العلاقة $2a \frac{\Delta \tau}{\Delta x^2} = 1$ عندها تأخذ المعادلة (e) الشكل التالي :

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$t_{n,K+1} = \frac{1}{2}\left(t_{n+1,K} + t_{n-1,K}\right) \qquad (5\text{-}18)$$

من المعادلة (5-18) ينتج أنه يمكن اعتبار $t_{n;k+1}$ متوسطا حسابيا بين $t_{n+1;k}$ و $t_{n-1;k}$ وهذا مما يسهل الحساب كما يمكن حل المعادلة (5-18) بيانيا ببساطة .

تتحدد قيمة المجال الزمني $\Delta\tau$ من العلاقة التالية :

$$\Delta\tau = \frac{\Delta x^2}{2\,a} \qquad (5\text{-}19)$$

وعلى سبيل المثال في حالة جدار بيتوني ($a = 0.002 \frac{m^2}{h_r}$) وباعتبار أن سماكة الطبقة الجزئية تساوي 5 cm يحسب المجال الزمني بالشكل التالي :

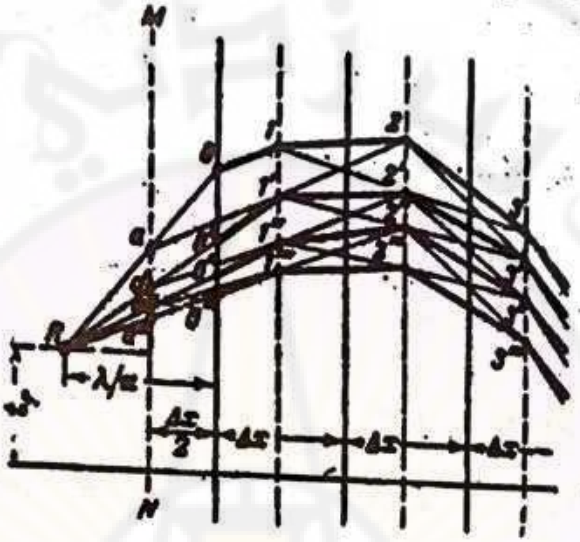
$$\Delta\tau = \frac{\Delta x^2}{2\,a} = \frac{(0.05)^2}{2 \times 0.002} = 0.625 = 5/8 \text{ h.}$$

وبهذا الشكل وعند حل مسألة معينة يلزم في البدء اختيار قيمة لـ Δx ملائمة للرسم البياني وبعد ذلك نقوم برسم التوزع الابتدائي لدرجات الحرارة على شكل الخط المنكسر .....0;1;2;3; مثلا ، الشكل (5-18) .

يوصل النقطة 1 مع النقطة 3 نحصل على النقطة '2 ثم يوصل النقطة 2 مع النقطة 4 نحصل على النقطة '3 وهكذا .

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

لتحديد النقطتين '0 و '1 من الضروري اعتبار تأثير الوسط الخارجي ، لذا نقوم بتحديد النقطة القطبية R والتي يتحدد ترتيبها بدرجة حرارة الوسط المحيط t_f أما فاصلتها فتتحدد بالمسافة $S = \frac{\lambda}{\alpha}$.



الشكل (18-5) الطريقة البيانية لحل مسألة التوصيل الحراري اللامستقر

نرسم خطا موازيا للسطح MN* ويبعد عنه بمقدار $\frac{\Delta x}{2}$ نصل النقطة o مع النقطة القطبية R ومن ثم نصل مابين النقطتين a و 2 فنحصل على النقطة 1 التابعة للمنحني الحراري الجديد .

يجب ايجاد القطعة المستقيمة '0'1 من المنحني البياني حسب النقطة القطبية R . باعتبار النقاط الناتجة '3 و '2 و'1 و '0 أنها تمثل توزع ابتدائي لدرجات الحرارة ، يمكن استناد الطريقة المشروحة أعلاه استنتاج المنحني المار من النقاط "3 و "2 و"1 و"0

* الخط MN ضروري من أجل تحديد النقاط ... "1 و '1 و 1 .

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

و''3و''2و''1و''0 ..الخ...

في الحالة التي تتغير فيها قيمة α خلال سير الاجراء يمكن اعتبار هذا التغير كتغير موافق في كل لحظة لوضعية النقطة القطبية R .

عند حساب جدار متعدد الطبقات يجب رسم المنحني الحراري بمقياس المقاومات الحرارية أي تمثل على المحور الافقي المسافة $\frac{\Delta x}{\lambda}$ بدلا من Δx .

بهذا الشكل وبمساعدة الاسلوب المذكور يمكن حل العديد من مسائل التوصيل الحراري الغير مستقر وعند أية شكل للشروط الحدية .

تكمن نقطة الضعف في هذا الاسلوب أن الاقداد الحالية الفيزيائية للجسم تعتبر ثابتة .

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الفصل السادس

انتقال الحرارة بالحمل في وسط متجانس

" Hrat Transfer by Convection in a Homogeneous Medium "

٦-١- تعاريف ومفاهيم أساسية :

(Basic Concept and Definitions)

يطلق مفهوم الحمل على اجراء انتقال الحرارة نتيجة حركة السائل أو الغاز حيث يتم انتقال الحرارة أثناء هذا الاجراء بالتوصيل والحمل معا .

الحمل يعني اجراء انتقال الحرارة الحاصل نتيجة حركة كتل في السائل أو الغاز من منطقة ذات درجة حرارة ما الى منطقة ذات درجة حرارة أخرى .

يكون اجراء انتقال الحرارة بالحمل ممكنا فقط في حالة وجود وسط مائع حيث يرتبط انتقال الحرارة شرطيا بحركة الوسط نفسه .

نفرض أن التدفق الكتلي للمائع المتحرك هو $\rho.\bar{w}$ حيث $\bar{w}$ سرعة المائع ، ρ كثافته .

تتحدد كمية الحرارة المنتقلة مع حركة السائل (بالحمل) بالمعادلة :

$$\bar{q}_{conv} = \rho.\bar{w}.i \left[\frac{J}{m^2.S}\right] \qquad (6-1)$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

حيث : $\left[\frac{J}{Kg}\right]$ انتالبي المائع .

دوما تترافق عملية انتقال الحرارة بالحمل بانتقال حراري بالتوصيل بسبب أن جزئيات الغاز أو السائل المتحرك والتي تتمتع بدرجات حرارة مختلفة تتلامس فيما بينها .

مماسبق يمكن وصف الحرارة المنتقلة بالحمل بالمعادلة التالية :

$$\bar{q} = \bar{q}_{cond} + \bar{q}_{conv} = \lambda . \Delta t + \rho . \bar{w} . i \qquad (6-2)$$

في القانون (6-2) تعبر $\bar{q}$ عن معدل التدفق الموضعي للحرارة بالحمل .

يصف الحد الاول من الطرف اليميني للمعادلة (6-2) الحرارة المنتقلة بالتوصيل ، أما الحد الثاني فيصف الحرارة المنتقلة بالحمل .

تسمى عملية الحمل بين تيار سائل أو غازوسطح صلب بانتقال الحرارة بالحمل أو انتقال الحرارة .

في الحياة العملية يتعامل المهندسون مع حالات مختلفة لانتقال الحرارة مثل انتقال الحرارة من جدار الى وسط مائع

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

أو بالعكس ، حيث يبقى انتقال الحرارة بالحمل ضمن الوسط المائع نفسه ذو أهمية ثانوية .

عمليا تعتمد الحسابات الخاصة بانتقال الحرارة على قانون نيوتن :

$$dQw = \alpha \, (t_w - t_f) \, .df \qquad (6-3)$$

طبقا للمعادلة السابقة تتناسب كمية الحرارة dQw المنتقلة من المائع الى عنصر المساحة dF (أو من عنصر سطح الجدار dF الى المائع) طردا مع dF ومع فرق درجات الحرارة $\Delta t = t_w - t_f$ حيث t_w درجة حرارة سطح الجدار و t_f درجة حرارة المائع المحيط .

يسمى الفرق بين درجات الحرارة $t_w - t_f$ بانخفاض درجة الحرارة .

يسمى معامل التناسب α في المعادلة (6-3) بمعامل انتقال الحرارة الموضعي (Local Heat-Transfer Coefficient)

تحسب قيمة هذا المعامل عند الشروط الخاصة التي يتم عندها الاجراء الفعلي لانتقال الحرارة والتي تؤثر على شدة هذا الانتقال ، بالاعتماد على المعادلة (6-3) نجد :

$$\alpha = \frac{dQw}{(t_w - t_f) \, .df} = \frac{q_w}{t_w - t_f} \qquad (6-4)$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

يمكن قبول المطابقة (6-4) كتعريف لمعامل انتقال الحرارة الموضعي والذي يقاس بـ $\left[\frac{w}{m^2 . K}\right]$.

مماسبق نعرف معامل انتقال الحرارة بأنه معدل تدفق الحرارة q_w عند سطح التماس بين المائع والجسم الصلب منسوبا لفرق درجتي حرارة السطح الصلب والمائع المحيط .

في الحالة العامة تتغير قيمة معامل انتقال الحرارة على كامل السطح f أما في الحالة التي تبقى فيها قيم كل من Δt و α ثابتين على كامل السطح f عندها يأخذ قانون نيوتن الشكل التالي :

$$Qw = \alpha (t_w - t_f) f$$

يعتمد معامل انتقال الحرارة الموضعي على عوامل عديدة وفي الحالة العامة تكون قيمة α تابعة لشكل وأبعاد الجسم الصلب ولطبيعة تدفق المائع ، سرعة المائع ودرجة حرارته ،الخواص الفيزيائية له .. الخ .

يمكن أن تتم عملية انتقال الحرارة من الجسم الصلب الى المائع وبالعكس بعدة طرق وذلك بالاعتماد على طبيعة ومنشأ حركة المائع .

لكي يتحرك المائع لابد من تطبيق قوة عليه ، يمكن تصنيف القوى المطبقة على أية عنصر من المائع كقوى حجمية أو كتلية

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

(Mass Or Volumetric Ardsurface Forces)

وقوى سطحية

نعني بالقوى الكتلية تلك القوى المطبقة على جميع جزئيات المائع من طريق تطبيق حقل قوى خارجي (كمثال قوى التثاقل الناتجة عن حقل الجاذبية) .

تنشأ القوى السطحية من طريق تأثير الاجسام الصلبة أو المائعة المحيطة بالمائع المعتبر والتي تؤثر فقط على سطحه .

تندرج ضمن اطار القوى السطحية قوى الضغط الخارجي وقوى الاحتكاك .

يمكن التمييز بين نوعين من الحمل ، حمل حر أو طبيعي وحمل قسري ، يتم الحمل الحر أو الطبيعي عندما يكون منشأ حركة الحجم المعتبر من المائع مجموعة غير متجانسة من القوى الكتلية تؤثر على هذا الحجم ، وتشاهد مثل هذه الحالة عندما يتمتع المائع المعتبر بتوزيع غير منتظم لدرجات الحرارة وبالتالي للقيم الكثافة وهذا يؤدي الى تولد حركة داخلية ضمن المائع بسبب سيطرة حقل الجاذبية .

في الفقرات اللاحقة سوف نعتبر أن الحمل التثاقلي الحر يحدث هنا بسبب عدم تجانس الحقل الحراري .

تحدث الحركة القسرية لحجم المائع المعتبر عن طريق تأثير السطوح الخارجية المطبقة على حدود هذا المائع والتي تولد

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

طاقة حركية (مثال على ذلك : مضخة ، مروحة ،... الخ.) .

اضافة الى ماسبق يمكن ادراج الحالة التي تتم فيهـــا حركة المائع تحت تأثير حقل داخلي متجانس في القوى الكتلية ضمن اطار الحركة القسرية .

يمكن توضيح الحركة القسرية من هذا النوع بتدفق طبقـــة من سائل ذو درجة حرارة متساوية على جدار تحت تأثير الجاذبيـــة .

في الحالة العامة يمكن أن تترافق الحركة القسرية بحركة حرة أو طبيعية وفي هذه الحالة يتعاظم الاثر النسبي للحركة الحرة بازدياد الفرق في درجات حرارة جزئيات المائع نتيجة انخفـــاض سرعة الحمل أو الحركة القسرية ، أما في الحالة التيتكون فيهـــا سرعة الجريان القسري كبيرة فيمكن عندئذ اهمال تأثير الحمل الحر.

في الفقرات اللاحقة سوف يتم اعتبار الحالة المستقـــرة للتدفق وانتقال الحرارة ، علما بأن الشروط التي تؤدي لتحقيـــق الحالة المستقرة تتضمن ثبات كل من سرعة ودرجة حرارة المائع مـــع الزمن في أية نقطة من المائع .

٦-٢- الخواص الفيزيائية للموائع :

(Physical Properbes Offluids)

يحدث اجراء انتقال الحرارة بعدة أشكال مختلفة بالاعتمـــاد على نوعية المائع وخواصه الفيزيائية .

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

يتأثر اجراء انتقال الحرارة بشكل خاص بالخواص الفيزيائية التالية :

- معامل التوصيل الحراري λ .
- الحرارة النوعية C_p .
- الكثافة ρ .
- الناشرية الحرارية a والتي تعتمد عادة عندما يؤخذ بعين الاعتبار وجود التوصيل واللزوجة μ .

لهذه الخواص قيم عددية محددة بالنسبة لكل مادة وكقاعدة عامة تتبع هذه العوامل لدرجة الحرارة علما بأن بعضها يتبع أيضا للضغط .

يمكن أن تتغير الخواص الفيزيائية بشكل جوهري في المجالات الحرجة للاجراءات الترموديناميكية وفي المناطق التي تتمتع بدرجات حرارة منخفضة .

ان الاجراءات المطروحة للبحث لاحقا في هذا الكتاب ذات طبيعة وحيدة الطور حيث لاتوجد تغيرات جوهرية في الخواص الفيزيائية للمواد المعتبرة في الاجراء .

أيضا سوف تتم معالجة حالة انتقال الحرارة في المجالات المحيطة بالنقاط الحرجة .

بغرض التسهيل سوف نفترض أثناء التحليل النظري لانتقال

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الحرارة بالحمل ، أن الخواص الفيزيائية للمائع المدروس تبقى ثابتة ضمن مجال درجات الحرارة المعتبر .

من المعروف أن جميع الموائع الحقيقية تتمتع بدرجة معينة من اللزوجة وبالتالي فان قوى الاحتكاك الداخلية الناشئة تسبب في اعاقة الجريان وهذه القوى تنشأ دائما بين طبقات المائع التي تجري بسرعات متباينة فيما بينها .

طبقا لقانون نيوتن فان القوى المماسية S (منسوبة لواحدة المساحة) والتي تؤثر في أي نقطة من الجريان وفي مستوى موازي لاتجاه الجريان تتناسب طردا مع تدرج السرعة (أي مع تغير السرعة في اتجاه معامد لاتجاه الجريان) :

$$S = \mu . \frac{d_w}{d_n} \qquad (6-5)$$

يسمى المعامل μ باللزوجة التحريكية Dynamic Viscosity) واختصارا باللزوجة وتقاس بـ $\left[\frac{N.s}{m^2}\right]$ وعندما $\frac{dw}{dn} = 1$ فان $\mu = S$ عدديا .

فالمعادلات المتضمن المعادلات الخاصة بتحريك السوائل وانتقال الحرارة نسبة اللزوجة μ الى الكثافة ρ والتي تسمى اصطلاحا باللزوجة الحركية (Kinematic Viscosity) حيث يرمز لها بـ ν : $\left[\frac{m^2}{s}\right]$

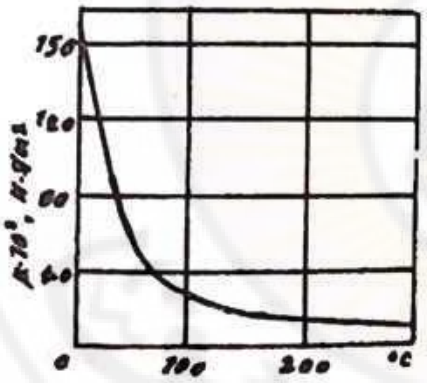
$$\nu = \frac{M}{P}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

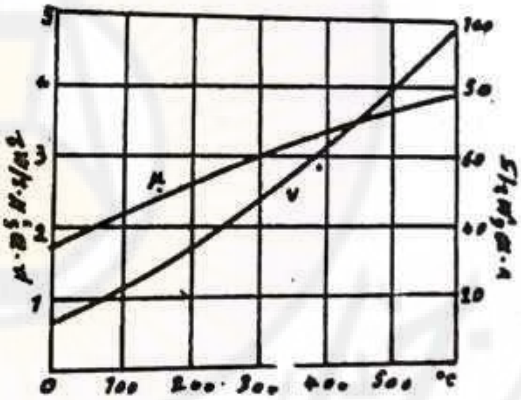
ان كلا من معاملي اللزوجة μ و ν يعبران عن خاصة فيزيائية للمائع وهما يعتمدان بشكل جوهري على درجة الحرارة (5-6) وتسمى بالسوائل (بعض السوائل لاتنطبق على قانون نيوتن الغير نيوتونية) .

في غالب الاحيان لاتتعلق لزوجة السوائل بالضغط المطبق بينما تنحدر قيمة اللزوجة بشدة مع ارتفاع درجة الحرارة .

توضح هذه العلاقة بيانيا $\mu = f(t)$ في الشكل (6-1)



الشكل (6-1) اعتماد اللزوجة التحريكية للماء على درجة الحرارة



الشكل (6-2) اعتماد اللزوجة الحركية والتحريكية للهواء على درجات الحرارة عند ضغط $P = 760$ mm Hg

تزداد لزوجة الغازات μ مع درجات الحرارة [الشكل

Damascus University
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

(6-2)كما أن زيادة الضغط بالنسبة للغازات تترافقمع زيادة قيمة اللزوجة .

تتناقص اللزوجة الحركية ν للسوائل مع زيادة درجة الحرارة غالبا بنفس المعدل الذي تتناقص به μ حيث أن ρ تعتمد بشكل ضئيل على قيمة درجة الحرارة لذا فان اللزوجة الحركية تزداد بسرعة مع درجة الحرارة .

تسبب الاحتكاكات الداخلية في جريانات السوائل (أوالغازات) اللزجة مايسمى بضياع أو تبدد الطاقة (Dissipotion Of Energy)

في جوهر الامر يتحول جزء من الطاقة الحركية للمائع الى طاقة حرارية تسبب تسخين مجمل المائع علما بأنه يمكن اعتبار هذا التسخين مهملا طالما أن سرعة تدفق وقيمة لزوجةالمائع صغيرين لذلك وفي كافة الاجراءات التي سيتم دراستها لاحقا سوف نهمل كمية الحرارة المتولدة نتيجة لاحتكاك .

تتأثر عملية انتقال الحرارة بما يسمى بمعامل انضغاطية المائع (Combressibility Of Fluid) يمكن التعبير عن معامل انضغاطية الجسم عند t = Constont بالمعادلة التالية :

$$\varepsilon = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial \rho} \right)_t \qquad (6-6)$$

والتي تمثل التغير النسبي في الكثافة عند تغير الضغط

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

بمقدار الواحدة .

تتميز السوائل عادة بمعامل انضغاطية صغير جدا وعلى سبيل المثال تكون قيمته بالنسبة للماء $\varepsilon = 5 \times 10^{-10} [pa^{-1}]$ أي أنه عند ارتفاع قيمة الضغط بمقدار 1 bar فان ذلك يؤدي الى نقصان نسبي في الكثافة بحدود 1/20.000 .

ينطبق نفس الامر على بقية السوائل، حيث أن معامل انضغاطيتها صغير جدا الى حد يمكن معه اهمالها .

يساوي معامل انضغاطية الهواء عند الشروط القياسية الى $\varepsilon = 10^{-5} [Pa^{-1}]$ حيث أن هذه القيمة أكبر بـ 20.000 مرة من قيمة معامل الانضغاطية للماء .

ومع ذلك تبقى النقطة الرئيسية في الموضوع بغض النظر عن مقدار انضغاطية الغاز قيمة البعد الذي يمكن الوصول اليه كضغط فعلي في أية جريان معتبر .

في الحالة التي يكون فيها فرق الضغط الحاصل أثناء جريان الغاز صغيرا بالمقارنة مع الضغط المطلق للغاز عندها يكون التغير الحاصل في الحجم صغير وبالتالي يمكن اعتبار جريان الغاز غير قابل للانضغاط كتقريب أول .

ومن ناحية أخرى تنشأ تغيرات كبيرة في الضغط في الجريانات ذات السرعات العالية ، عندها يجب الاخذ بعين الاعتبار لكمية

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الحرارة الناتجة من الاحتكاك والانضغاطية ونتيجة لماسبق تتميز عملية انتقال الحرارة عند سرعات عالية بعدد من المميزات قد يؤدي اهمالها الى ارتكاب أخطاء كبيرة .

هنا سوف نهتم بشكل رئيسي باجراءات انتقال الحرارة في حالة الموائع الغير قابلة للانضغاط مع التنويه الى أننا نعني بكلمة مائع كلا من السوائل والغازات .

يفترض عادة أن الدساتير الخاصة بالجريان وانتقال الحرارة استخرجت بالنسبة للموائع الغير قابلة للانضغاط وهي قابلة للتطبيق في حالة جريان الغاز بسرعة لاتتجاوز قيمتها قيمة ربع سرعة الصوت .

يدرج تحت اسم الانضغاطية عند درجة حرارة ثابتة مايسمى بالتمدد الحراري للموائع (Thermal Expansion Of Fluids) حيث يعتبر العامل الاخير ذو أهمية كبيرة .

يمكن تحديد هذا التأثير بمعامل التمدد الحجمي المقدر عند ضغط ثابت (P = Const) بالمعادلة :

$$\beta = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_p \qquad (6-7)$$

يعرف معامل التمدد الحجمي $\beta \left[\frac{1}{K}\right]$ بأنه التغيرالنسبي في الحجم الناتج عن تغير درجة الحرارة بمقدار 1K مع المحافظة على P = Const .

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

تكون قيمة معامل التمدد الحجمي للسوائل صغيرة نسبيا (باستثناء المجالات القريبة في النقطة الحرجة) ، كما يمكن أن يكون المعامل β سالبا بالنسبة لبعض السوائل وعلى سبيل المثال ناخذ حالة الماء ذو درجة الحرارة أخفض من $4\ C^{o}$.

بالنسبة للغازات تعطى قيمة معامل التمدد الحجمي بالمعادلة $\beta = \frac{1}{T}$ أي أنه يساوي الى مقلوب درجة حرارة الغاز المطلقة .

عند تسخين المائع بشكل غير منتظم وبنتيجة التمددالحراري يتغير حقل كثافة غير متجانس يؤدي الى حدوث حركة حرةللجزئيات .

٦-٢-المعادلات التفاضلية لانتقال الحرارة بالحمل :

(Differntial Fquations Of Heat Transfer Byconvection)

(عرض مسائل القيمة الحدية في انتقال الحرارة بالحمل)

(Statement Of Bourdary-Value Problems in Heat Transfer -By Convection)

من المعادلات (2-6) :

$$\vec{q} = -\lambda . \Delta t + \rho \vec{w} i$$

ينتج أن معدل تدفق الحرارة يتحدد بشكل وحيد في أية نقطة من المائع ولأية لحظة زمنية وذلك إذا كان كلا من حقل درجات الحرارة وحقلي السرعة والانتالبي معروفة ومحددة .

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

يمكن ربط كل من الانتالبي ودرجة الحرارة بالطريقة التالية :

بالنسبة للسائل الحقيقي $i = i(T,P)$ ومنه يمكن كتابة التعبير التالي طبقا لمفهوم التفاضل التام (الكلي) :

$$di = \left(\frac{\partial i}{\partial T}\right)_p . dT + \left(\frac{\partial i}{\partial P}\right)_T . dp$$

ومنه :

$$i = \int_T C_p . dT + \int_p \left(\frac{\partial i}{\partial p}\right)_T . dp$$

من المعادلات الترموديناميكية التفاضلية ومن تعريف معامل التمدد الحجمي يمكن كتابة :

$$\left(\frac{\partial i}{\partial p}\right)_T = \frac{1}{\rho}\left[1 + \frac{T}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p\right] = \frac{1}{\rho}(1-BT)_p$$

عند حل الكثير من المسائل التي يفترض فيها عدم قابلية السائل للانضغاط (ρ =Const) ، يمكن الافتراض وبدقة كافية أن $(\partial i/\partial p)_T = 0$ أي يمكننا استخدام العلاقة التالية والتي تطلح ترموديناميكيا للغازات الحقيقية أو المثالية :

$$di = C_p . dt$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

ومنه :

$$i = \int_{T} C_p . dT$$

تسمح لنا العلاقات المذكورة أعلاه بايجاد العلاقة بين حقلي الانتالبي ودرجة الحرارة .

نظريا لايجاد حقل درجات الحرارة (الانتالبي) وحقل السرعة ولتحديد $\vec{q}$ يجب أن تتوفر المعادلات التالية :

معادلة الطاقة : .....(Equation Of Energy)

لنستخرج المعادلة التفاضلية التي تصف حقل درجات الحرارة في مائع متحرك ، بافتراض أن المائع متجانس وايزوتروبي وذو خواص فيزيائية ثابتة .

لنعتبر ضمن جريان المائع عنصر حجمي بشكل مكعب ثابت بالنسبة لنظام الاحداثيات الشكل (3-6) أطوال أضلاعه dx , dy و dz على التوالي .

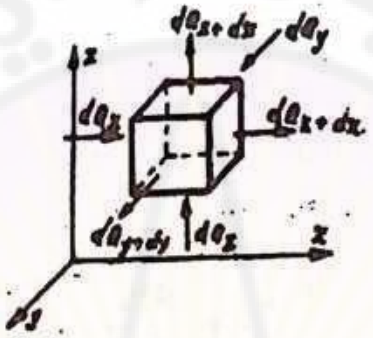
تنتقل الحرارة عبر سطوح المكعب الجانبية عن طريق كل من التوصيل والحمل ، باعتبار المعادلة التفاضلية للتوصيل الحراري يمكن كتابة :

$$\rho \frac{\partial i}{\partial \tau} = \text{div}.\vec{q} + q_v$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

حيث :

$$\text{div}.\vec{q} = \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}$$



الشكل (3-6) استخراج المعادلة التفاضلية للطاقة

طبقا للمعادلة (2-6) تأخذ مساقط شعاع معدل تدفق الحرارة $\vec{q}$ على محاور الاحداثيات ox, oy و oz . الشكل التالي :

$$q_x = -\lambda \frac{\partial t}{\partial x} + \rho.w.x.i \; ; \; q_y = -\lambda \frac{\partial t}{\partial y} + \rho.w.v.i \qquad (6-8)$$

$$q_z = -\lambda \frac{\partial t}{\partial z} + \rho\ w.z.i$$

بتعويض قيم q_x, q_y و q_z في المعادلة التفاضلية للتوصيل الحراري نحصل على :

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$\rho \frac{\partial i}{\partial \tau} = \lambda\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}\right) -$$

$$- \rho\left(w_x \frac{\partial}{\partial x} + w_y \frac{\partial i}{\partial y} + w_z \frac{\partial i}{\partial z}\right) -$$

$$- \rho\left(\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z}\right) + q_v$$

المعادلة $\rho = Const$ من أجل الموائع الغير قابلة للانضغاط

: (6-20)

$$div\ \vec{w} = \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} = 0$$

ومنه :

$$\frac{\partial i}{\partial \tau} + w_x \frac{\partial i}{\partial x} + w_y \frac{\partial i}{\partial y} + w_z \frac{\partial i}{\partial z} = \quad (6\text{-}9)$$

$$= \frac{\lambda}{\rho}\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}\right) + \frac{q_v}{\rho . C_p}$$

بتعويض الحد $i = \int_T C_p . dt$ في المعادلة (6-9). وباعتبار

أن $a = \frac{\lambda}{\rho . C_p}$ نحصل على :

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} + w_x \frac{\partial t}{\partial x} + w_y \frac{\partial t}{\partial y} + w_z \frac{\partial t}{\partial z} \quad (6\text{-}10)$$

$$= a\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}\right) + \frac{q_v}{\rho . C_p}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

تمثل الحدود الواقعة في الطرف اليساري من المعادلة (6-10) المشتق الكلي لدرجة الحرارة بالنسبة للزمن .

وفي الواقع اذا كان $t = t(\tau,x,y,z)$ وبالاعتماد على مفهوم التفاضل التام أو الكلي يكون :

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{\partial t}{\partial \tau} + \frac{\partial t}{\partial x}\cdot\frac{dx}{d\tau} + \frac{\partial t}{\partial y}\cdot\frac{dy}{d\tau} + \frac{\partial t}{\partial z}\frac{dz}{d\tau}$$

حيث : $\frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}, \frac{dz}{d\tau}$ مركبات شعاع السرعة w_x, w_y, w_z .

تصف النسبة $\frac{\partial t}{\partial \tau}$ هنا تغيرات درجة الحرارة مع الزمن عند أية نقطة من المائع أي أنها تمثل التغير الموضعي لدرجة الحرارة t .

يمثل الحد :

$$w_x\frac{\partial t}{\partial x} + w_y\frac{\partial t}{\partial y} + w_z\frac{\partial t}{\partial z}$$

تغير درجة الحرارة من نقطة الى أخرى أي أنه يمثل تغير t بسبب الحمل .

بادخال المفهوم :

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = \nabla^2 t$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

يمكن تمثيل معادلة الطاقة بالشكل التالي :

$$\frac{dt}{d\tau} = a\nabla^2 t + \frac{q_v}{\rho c_p} \qquad (6\text{-}10)$$

اذا كان $w_x = w_y = w_z = 0$ عندها تأخذ معادلة الطاقة شكل معادلة التوصيل .

من أجل حالة حقل درجات الحرارة المستقر والاحادي البعد كل المشتقات بالنسبة لـ y, x, τ ستساوي الصفر بالتالي تأخذ المعادلة (6-10) شكلاً أبسط كما ينتج من المعادلة (6-10) يعتمد حقل درجات الحرارة في نواتج متحرك على مركبات السرعة w_x, w_y و w_z .

معادلات الجريان : .. (Equations Of Flow.)

تتضمن عملية استخراج المعادلات التفاضلية الخاصة بالجريان للموائع اللزجة على حسابات معقدة ومع ذلك يمكن استخراج هذه المعادلات بشكل مبسط في حالة الجريان أحادي البعد لمائع لزج وغير قابل للانضغاط .

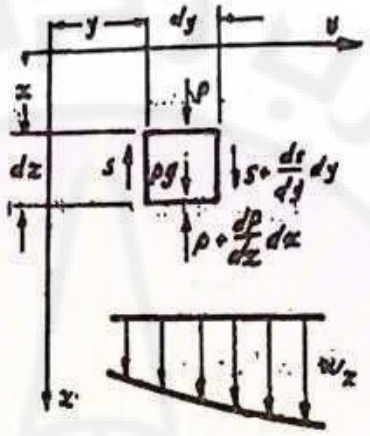
لنعتبر عنصر حجمي صغير ، أبعاده dy, dx و dz موجود ضمن جريان مائع لزج الشكل (4-6) ولنفترض أن تغير سرعة الجريان يتم في اتجاه محور y فقط .

نستخرج معادلة الجريان من قانون نيوتن الثاني والذي

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

ينص على أن القوة تساوي الى جداء الكتلة في التسارع .

يمكن أن نصنف القوى المؤثرة على الحجم العنصري المختبر للمائع كقوى كتلية (أو حجمية) وقوى سطحية .



الشكل (6-4) استخراج المعادلة التفاضلية لجسريان المائع

نميز القوى الكتلية بالشعاع $\vec{f}$, $\left[\frac{m^2}{s}\right]$ السندي يساوي عدديا الى نسبة القوى المؤثرة على عدد معطى من الجزئيات الى كتلة هذه الجزئيات .

في الحالة التي نأخذ فيها بعين الاعتبار الجاذبية الارضية فقط عندها تكون $\vec{F} = \vec{g}$ حيث $\vec{g}$ هي تسارع الجاذبية الارضية .

تعرف القوى السطحية بأنها نسبة القوى المؤثرة على سطح

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مساحة معينة من السطح الى قيمة مساحة هذا السطح، يعتبر الضغط وقوى الاحتكاك من نوع القوى السطحية .

وباختصار : توجد هنالك ثلاثة قوى تؤثر على العنصر المعتبر من المائع : قوى الثقالة ، قوى الضغط ، وقوى الاحتكاك .

لنجد مساقط هذه القوى على محور ox .

تتركز قوة الثقالة df_1 في مركز ثقل العنصر الحجمي ومسقطه على محور ox هو ناتج جداء مسقط قوة التسارع g_x وكتلة العنصر أي :

$$df_1 = \rho . g_x . dV$$

نحدد تاثير قوى الضغط المطبقة df_2 كمايلي :

اذا كان الضغط النوعي للمائع عند الوجه العلوي من العنصر الحجمي يساوي الى p وبالتالي تنشأ قوة قدرها Pdy dz تؤثر على المساحة dy dz .

يتعرض الوجه السفلي من العنصر الى ضغط نوعي يساوي الى $p + \frac{dp}{dx} dx$ بدقة محددة وفقا للحد الثاني من سلسلة تايلور عندها تكون القوة المؤثرة على هذا الوجه هي :

$$-(p + \frac{dp}{dx} . dx)\ dy\ dz$$

تدل الاشارة السالبة على أن القوة تؤثر في اتجاه معاكس

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

لجريان المائع .

تساوي محصلة قوى الضغط الى المجموع الجبري لهذه القوى

$$dF_2 = - \frac{dp}{dx} . dV$$

تتحدد محصلة قوى الاحتكاك dF_3 من الاعتبارات التاليـة :

طالما أن تغير السرعة يتم فقط في اتجاه محور oy فان قـوى الاحتكاك تظهر فقط على السطوح الجانبية للعنصر المائعي المعتبر الشكل (4-5) .

ان سرعة الجزيئات القريبة من السطح اليساري أقل من سرعة العنصر الحجمي نفسه لذلك وفي مقطع عرضي y تأخذ قوى الاحتكاك المؤثرة على العنصر اتجاها مضادا للجريان وتساوي الى $s\ dx\ dz$ ويكون العكس صحيحا بالنسبة للوجه اليميني حيث تتحرك جزيئات المائع هنا بسرعة تزيد عن سرعة العنصر الحجمي لذلك وفي المقطع العرضي $y + dy$ تؤثر قوى الاحتكاك في اتجاه الجريان وتساوي $(S + \frac{ds}{dy} dy)\ dx.dz$.

محصلة هذه القوى تساوي الى مجموعها الجبري :

$$dF_3 = (S + \frac{ds}{dy} dy)\ dx.dz - S\ dx.dz = \frac{ds}{dy} dV$$

بالاخذ بعين الاعتبار المعادلة $S = \mu(dw_x/dy)$ ينتج :

$$dF_3 = \mu \frac{d^2 w_x}{dy^2} . dV$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

بجمع المعادلات الخاصة بـ df_1, df_2 و df_3 نحصل على مسقط محصلة القوى المؤثرة على الحجم المعتبر باتجاه محور ox :

$$dF = (\rho g_x - \frac{dp}{dx} + \mu \frac{d^2 w_x}{dy^2}).dV \qquad (a)$$

طبقا لقانون التحريك الثاني تساوي محصلة القوى المؤثرة الى حاصل جداء كتلة العنصر المعتبر بتسارعه $\frac{dw_x}{dx}$ والتي تساوي الى قوة العطالة :

$$df = \rho . \frac{dw_x}{d\tau} . dV$$

بمساواة الاطراف اليمنى من المعادلتين (a) و (b) والاصلاح نحصل على المعادلة التالية باتجاه محور ox :

$$\rho \frac{dw_x}{d\tau} = \rho g_x - \frac{dp}{dx} + \mu \frac{d^2 w_x}{dy^2}$$

يصبح الوصف الرياضي لجريان المائع أكثر تعقيدا عندما تتغير السرعة في ثلاثة اتجاهات .

في الحالة العامة لجريان مائع غير قابل للانضغاط ثلاثي البعد يوصف حقل السرعة رياضيا بثلاثة معادلات للجريان ، كل منها تتعلق على التوالي بالمساقط على المحاور ox , oy و oz. فيما يتعلق باتجاه محور ox نجد :

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$\rho \frac{dw_x}{d\tau} = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial z^2}\right) \quad (6\text{-}11)$$

في اتجاه محور oy :

$$\rho \frac{dw_y}{d\tau} = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_y}{\partial z^2}\right) \quad (6\text{-}12)$$

في اتجاه محور oz :

$$\rho \frac{dw_z}{d\tau} = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu\left(\frac{\partial^2 w_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_z}{\partial z^2}\right) \quad (6\text{-}13)$$

تعرف هذه المعادلات أيضا تحت اسم معادلات نافييه ستوك التفاضلية .

يعبر عن واحدة جميع الحدود الداخلة في المعادلة بالقوة بالنسبة لواحدة الحجم .

في الحالة العامة تتغير مركبات السرعة w_x, w_y و w_z مع المكان والزمان ، الحد الذي يمثل الطرف اليساري من المعادلات (6-11) , (6-12) و (6-13) يعبر عن المشتق الكلي للسرعة بالنسبة للزمن .

يحدد مفهوم المشتق الكلي لمساقط السرعة على المحاور الاحداثية كمايلي :

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$\frac{dw_x}{d\tau} = \frac{\partial w_x}{\partial \tau} + w_x \cdot \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \cdot \frac{\partial w_x}{\partial y} + w_z \cdot \frac{\partial w_x}{\partial z} \qquad (6\text{-}14)$$

$$\frac{dw_y}{d\tau} = \frac{\partial w_y}{\partial \tau} + w_x \cdot \frac{\partial w_y}{\partial x} + w_y \cdot \frac{\partial w_y}{\partial y} + w_z \cdot \frac{\partial w_y}{\partial z} \qquad (6\text{-}15)$$

$$\frac{dw_z}{d\tau} = \frac{\partial w_z}{\partial \tau} + w_x \cdot \frac{\partial w_z}{\partial x} + w_y \cdot \frac{\partial w_z}{\partial y} + w_z \cdot \frac{\partial w_z}{\partial z} \qquad (6\text{-}16)$$

تصف المشتقات $\frac{\partial w_x}{\partial \tau}$ ، $\frac{\partial w_y}{\partial \tau}$ ، $\frac{\partial w_z}{\partial \tau}$ تغير السرعة مع الزمن في أية نقطة من المائع ، أي التغيرات المكانية في السرعة ممثلة بالحدود الثلاثة الاخرى من الطرف اليميني للمعادلات تحدد تغيرات السرعة عند الانتقال من نقطة الى نقطة أخرى ضمن الجريان .

بتمثيل المعادلات (6-11),(6-12),(6-13) بالشكل الشعاعي نحصل على :

$$\rho \cdot \frac{\vec{dw}}{d\tau} = \vec{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{w} \qquad (6\text{-}17)$$

أثناء استخراج المعادلة (6-17) أهملنا ارتباط البارامترات الفيزيائية بدرجة الحرارة وبشكل خاص اعتماد كثافة المائع على درجة الحرارة، لم تؤخذ بعين الاعتبار أيضا الحركة الحرة للمائع أو الحمل الطبيعي بسبب الفرق في الكثافة بين المناطق البادرة والساخنة من المائع .

لنحدد بشكل تقريبي مدى تغير الكثافة (في الحالة العامة

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

عند $P \neq Const$ يجب أن يؤخذ بعين الاعتبار طاقة التوتر الكامن) لهذا السبب ندخل معامل التمدد الحجمي β بافترا ض أنه ذو قيمة ثابتة وغير معتمدة على درجة الحرارة ضمن مجال درجات الحرارة المعطى .

من تعريف معامل التمدد الحجمي للغازات نكتب :

$$\beta = \frac{\rho_0 - \rho}{\rho_0 \cdot V}$$

حيث ρ و ρ_0 هي كثافة الغاز عند درجتي حرارة t و t_0 و $v = t - t_0$ باعتبار أن t_0 هي درجة حرارة قياسيه .

من هذه العلاقة ينتج أن :

$$\rho = \rho_0(1-\beta v)$$

بتعويض قيمة الكثافة من المعادلة الاخيرة في معادلة الجريان (6-17) نحصل على :

$$\frac{\vec{dw}}{dt} = \rho_0(1-\beta v)\vec{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{w} \qquad (6-17')$$

لندرس الحد $\rho_0(1-\beta v)\vec{g} = \rho_0 \vec{g} - \rho_0 \vec{g} \beta v$ والذي يمكن اعتباره مجموع لقوة الجاذبية $\rho_0 \vec{g}$ مأخوذة عند كثافة محددة وقوة الطفو (الرفع) $\rho_0 \vec{g} \beta v$.

يمكن تمثيل الحد $\rho_0 \vec{g}$ كتدرج لضغط هيدروستاتيكي P_0 في مائع ثابت (غير متحرك) ذو كثافة قدرها ρ_0 .

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

بالاخذ بعين الاعتبار لما سبق يمكن استبدال الحد $(\nabla p - \rho_o \vec{g})$ في المعادلة (6-17') بالقيمة $-\nabla P_1$، حيث $P_1 = p - P_o$

باهمال الدليل "o" المكتوب تحت ρ والدليل "1" المكتوب تحت p وباشتقاق طرفي المعادلة اليميني واليساري بالنسبة لـ ρ نحصل على معادلة الجريان التالية :

$$\frac{\overrightarrow{dw}}{d\tau} = -\vec{g}\beta v - \frac{1}{\rho}\nabla p + \mu\nabla^2\vec{w} \qquad (5\text{-}18)$$

معادلة الاستمرار....(Equotion Of Continuity):

لنعتبر عنصرا حجميا بشكل متوازي مستطيلات ثابت ضمن الجريان المعتبر أبعاده dx, dy و dz، ولنحسب كتلة المائع التي تعبر هذا الحجم خلال زمن قدره $d\tau$ في اتجاه محاور الاحداثيات ox , oy و oz الشكل (5-6)

تساوي كمية المائع المتدفقة عبر متوازي مستطيلات باتجاه محور ox الى :

$$dM_x = \rho . w_x . dy . dz . d\tau \qquad (a)$$

يعبر المقدار $\rho . w_x$ عن كمية المائع المتدفقة خلال واحدة الزمن عبر واحدة مساحة المقطع .

تساوي كمية المائع التي تترك العنصر من الوجه المقابل الى :

$$dM_{x+dx} = \rho w_x + dx . dy . dz . d\tau \qquad (a')$$

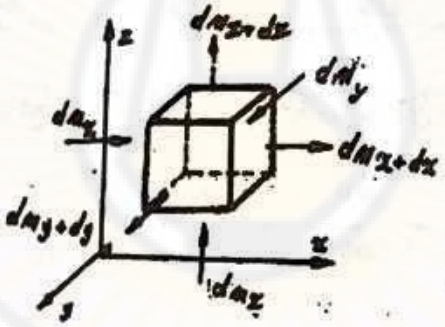
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

بالاخذ بعين الاعتبار الحدين الاولين فقط من منشور السلسلة نجد أن كتلة المائع dM_{x+dx} التي تغادر متوازي الاضلاع باتجاه محور ox تساوي الى :

$$(b) \qquad dM_{x+dx} = \left[\rho w_x + \frac{\partial(\rho w_x)}{\partial x} dx\right] dy.dz.d\tau$$

بطرح (a) من (b) نحصل على الكمية الزائدة من كتلة المائع التي تغادر متوازي الاضلاع باتجاه محور ox :

$$(c) \qquad dM_x + dx - dM_x = \frac{\partial(\rho.w_x)}{\partial x} dV.d\tau$$



الشكل (5-6) استخراج معادلة الاستمرار التفاضلية

بشكل مشابه يمكن ايجاد كمية المائع الزائدة التي تغادر متوازي الاضلاع في اتجاه محوري oy و oz :

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$dM_y + dy - dM_y = \frac{\partial(\rho w_y)}{\partial y} \cdot dV \cdot d\tau \qquad (d)$$

$$dM_z + dz - dM_z = \frac{\partial(\rho w_z)}{\partial z} \cdot dV \cdot d\tau \qquad (e)$$

تساوي الكمية الاجمالية الزائدة للمائع لمجموع العلاقات (c), (d) و (e) هذه الزيادة تنتج من تغير كثافة المائع في الحجم dV وتساوي الى مقدار تغير الكتلة ضمن الحجم المعتبر مع الزمن $\frac{\partial \rho}{\partial \tau} dV.d\tau$.

بحذف dV و $d\tau$ ونقل كل الحدود الى الطرف الايسر للمساواة نحس أخيرا على المعادلة التفاضلية للاستمرار لمائع قابل للانضغاط :

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \frac{\partial(\rho w_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho w_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho . w)}{\partial z} = 0 \qquad (6\text{-}19)$$

من أجل مائع غير قابل للانضغاط أي: $\rho = Const$ نحصل على :

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} = 0 \qquad (6\text{-}20)$$

أو :

$$div\ \vec{w} = 0 \qquad (6\text{-}20')$$

تعبر معادلة الاستمرار عن مفهوم حفظ الكتلة .

مماسبق فانه يمكن معالجة اجراء الحمل بالنسبة لوسط أحادي الطور وغير قابل للانضغاط وبخواص فيزيائية ذات قيم ثابتة بنظام المعادلات التفاضلية المستخرجة سابقا (6-2), (6-10) و (6-18)

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

و (6-20) .

٦ – ٤ الطبقات الحدية الحرارية والهيدرو ديناميكية :

-(Hydrodynamic And Thermel Boundary Layers.)..

يعتبر التبادل الحراري بين جسم صلب ومائع من المواضيع التي تحوز على اهتمام عملي كبير .

لندرس مميزات الجريان وانتقال الحرارة عبر طبقة المائع المتماسة مع الجدار .

شروط الالتصاق (Conditions Of Adhesion):

في الوقت الحاضر قادت الفرضيات المعتمدة في حقل هيدرو ديناميك السوائل اللزجة الى القبول بأن جزئيات السائل التي تقع بتماس مباشر مع الجسم الصلب تلتصق به أي أن سرعتها تصبح مساوية لسرعته (تساوي الصفر في حالة كون الجسم الصلب ثابت).

ان طبقة المائع الملتصقة على الجدار رقيقة جدا ، كما أن الفرضية القائلة بأن سرعة السائل عند الجدار تساوي الصفر قد وجدت قبولا غير مباشر من حيث موافقتها للنتائج في أعمال ودراسات نظرية كثيرة اعتمدت عليها .

تبقى سرعة السائل عند الجدار مساوية للصفر طالما اعتبرنا الوسط المائعي كوسط مستمر .

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

يضعف التأثير المتبادل بين الغاز والجدار كلما تناقصت كثافة الغاز (أو كلما ازداد تخلخله) حيث يبدأ الغاز المتخلخل بالانزلاق قرب الجدار .

يعبر عن درجة التخلخل لجريان ما بقيمة عدد كندسن $\frac{\bar{l}}{l_o}$ والتي هي نسبة طول المسافة الوسطية الحرة لحركة الجزيئات $\bar{l}$ الى البعد القياسي للجسم الصلب l_o (على سبيل المثال قطر الانبوب أو سلك) .

اذا كان $\frac{\bar{l}}{l_o} > 0.001$ لايمكن اعتبار الغاز كوسط مستمر بشكل تتوفر فيه شروط الالتصاق .

عندما يكون عددكندسن أكبر من 10 يجب تصور جريان الغاز كجريان جزئيات حرة حيث يمكن وصف التأثير المتبادل بين هذه الجزيئات والجسم الصلب بالقوانين نظرية كندسن للغازات .

عند عدد كندسن يتراوح في المجال 0.001 و 10 لايمكن اعتبار الغاز المتخلخل على أساس أنه وسط مستمر تماماولاكجزئيات حرة ، في هذه الحالة وضمن هذا المجال من عدد كندسن نستخدم طرق خاصة لحساب الجريان وانتقال الحرارة .

هنا سوف نهتم بشكل رئيسي بالاوساط المستمرة وسوف ننطلق من الشرط القائل بأن سرعة طبقة رقيقة جدا عن المائع تقع على تماس مباشر مع سطح جسم صلب تساوي الصفر .

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

معادلة انتقال الحرارة (Heat Transfer Equotion):

بما أنه توجد طبقة رقيقة وثابتة من المائع عند سطح الجسم الصلب ، ينتج من المعادلة (6-2) أنه يمكن تحديد نسبة التدفق الحراري عند الجدار بمساعدة معادلة فوريه :

$$q_w = -\lambda (\partial t/\partial n)n = 0 \qquad (6-21)$$

حيث n هي العمود الناظم لسطح الجسم الصلب ومنه نستنتج أنه اذا كان حقل درجات الحرارة معلوما ، يمكن بالتالي حساب q_w بدون تطبيق قانون نيوتن :

$$q_w = \alpha(t_w - t_f) \qquad (6-21')$$

عند الضرورة يمكن استعمال حقل درجات الحرارة المعروف لدينا لتحديد معامل انتقال الحرارة الموضعي ، حيث ينتج من المعادلتين (6-21) و (6-21') أن :

$$\alpha = -\frac{\lambda}{t_w - t_f} \cdot \left(\frac{\partial t}{\partial n}\right)_n = 0 \qquad (6-22)$$

تسمى المعادلة (6-22) بمعادلة انتقال الحرارة من الجسم الصلب الى المائع أو بالعكس .

من شرط كون أن السرعة النسبية للمائع عند سطح الجدار تساوي الى الصفر ، يتبع ذلك الحصول على عدة استنتاجات ذات اهتمامات عملية هامة اضافة الى تسهيل مطابقة حقل درجات الحرارة

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

ومن ثم تحديد معدل تدفق الحرارة q_w ومعامل انتقال الحرارة α .

الطبقة الحدية الهيدرو ديناميكية :
-(Hydroynamic Boundary Layer .).

لنعتبر أنه يوجد لدينا سطح صلب ومستوى معرفي لجريان مائع لانهائي الامتداد ، سرعة ودرجة حرارة الجريان الحر (على مسافة كافية من السطح) ثابتين ويساويان الى w_o و t_o على التوالي ، كلما اقتربت جزيئات المائع من السطح تنخفض سرعتها وعند السطح تلتصق الجزيئات به كنتيجة لقوى اللزوجة .

تتكون طبقة رقيقة راكدة من المائع بالقرب من الجدار حيث تتغير سرعة جريان المائع ضمن هذه الطبقة من الصفرعند سطح الجسم الى سرعة الجريان الحر (على مسافة كافية من السطح) .

تسمى هذه الطبقة الراكدة من المائع تحت اسم الطبقة الحدية الهيدرو ديناميكية ، ومن الجدير بالذكر أن نظرية الطبقة الحدية الهيدرو ديناميكية اقترحت من قبل العالم براندل عام 1904 .

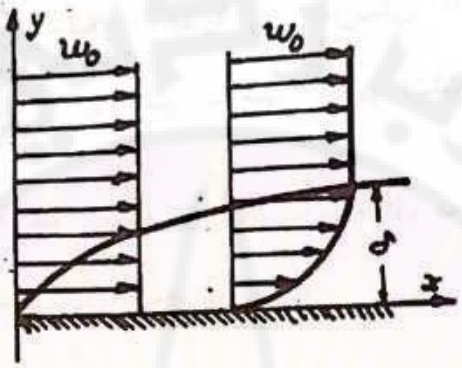
تزداد سماكة الطبقة الحدية كلما ازدادت المسافة x اعتبارا من حافة الصفيحة ،على الشكل (6-6) تتوضح خواص الطبقة الحدية من حيث توزع السرعة لعدة قيم بالنسبة لـ x .

يكون الشرط $\frac{\partial w_x}{\partial y} \neq 0$ صحيحا من أجل جريان مائع مع

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

وجود طبقة حدية والتعبير التالي يأخذ بعين الاعتبار جريان المائع فوق الطبقة الحدية وعند الحدود الخارجية :

$$w_x = w_o \quad \text{و} \quad \partial w_x / \partial y = 0$$



الشكل (6-6) تغير السرعة ضمن طبقة حدية هيدرو ديناميكية

يبقى كل من مفهومي سماكة الطبقة الحدية والحد الخارجي للطبقة الحدية مفهومين وهميين تماما بسبب أنه لايوجد انتقال أو تحول مفاجيء ملموس فيما بين الطبقة الحدية وجريان المائع فوقها .

ضمن الطبقة الحدية تميل السرعة الى أخذ قيمة w_o بشكل متقارب طردا مع زيادة قيمة y .

مماسبق يمكن تعريف سماكة الطبقة الحدية δ بأنها المسافة

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الطبقة بدءا من سطح الجدار الى الحد الذي تتغير قيمة السرعة فيه بمقدار 1 > ع > 0 من سرعة الجريان (على سبيل المثال 1%) عند $y = \delta$ تكون السرعة $w_x = (1-\varepsilon) w_o$.

أي عند جريان مائع فوق جسم صلب يعتبر الجريان وكأنه ينقسم الى قسمين : الطبقة الحدية والجريان الخارجي والذي تسود فيه قوى العطالة بينما يختفي تأثير قوى اللزوجة .

أما في الطبقة الحدية فتتناسب كل من قوى اللزوجة وقوى العطالة في تأثيرهما على الجريان .

مما سبق يمكننا كتابة نظام المعادلات التفاضلية التالي والذي يصف حقل السرعة الثابت ذو الامتداد غير المحدود بمحاذاة oz بالنسبة لصفيحة موجودة ضمن جريان طولي للمائع .

نأخذ معادلات الجريان الشكل :

$$w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} = \nu \left(\frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \qquad (6-23)$$

$$w_x \frac{\partial w_y}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_y}{\partial y} = \nu \left(\frac{\partial^2 w_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_y}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \qquad (6-24)$$

نأخذ معادلة الاستمرار بالنسبة لهذه الحالة الصيغة :

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} = 0 \qquad (6-25)$$

لنرى فيما اذا كان ممكنا تبسيط نظام المعادلات التفاضلية

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

المبين أعلاه من أجل الطبقة الحدية ولنتعين الحدود التي يبقى ضمنها وصف حقل السرعة الثابت بالشكل المبسط صحيحا .

بسبب صغر سماكة الطبقة الحدية نفترض أن الضغط يبقى ذو قيمة ثابتة عبر هذه الطبقة أي أن $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$ عند جريان لانهائي الإمتداد على سطح صفيحة مستوية بحيث تكون سرعة الجريان الخارجي ثابتة وتساوي الى w_o ينتج من معادلة برنولي :

$$p + \frac{\rho w_o}{2} = \text{Const.}$$

لاتتغير قيمة الضغط في الجريان الخارجي أيضا ومنه $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$.

في الهيدرو ديناميك يسمى مثل هذا الجريان بالجريان الغير متدرج .....(Gradientless Flow) .

تقودنا الشروط $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$ بالنسبة للطبقة الحدية و $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$ بالنسبة للجريان الخارجي الى استنتاج أن قيمة المشتق $\frac{\partial p}{\partial x}$ تساوي الى الصفر في مجال الطبقة الحدية (في الحالة المعتبرة) .

تتغير السرعة w_x ضمن الطبقة الحدية من الصفر الى w_o ولنقدر رتبة w_x بالنسبة لـ w_o .

لنأخذ المقياس l من أجل الاحداثي الطولي ومنه (الرمز o يعني تماثل رتب الكميات الواقعة على طرفيه) :

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} = O(\frac{w_o}{1})$$

طبقا لمعادلة الاستمرار (6-25) تكون رتبة المشتقات $\frac{\partial w_x}{\partial x}$ و $\frac{\partial w_y}{\partial y}$ متماثلة ومنه :

$$\frac{\partial w_y}{\partial y} = O(\frac{w_o}{1}) = O(w_o \cdot \frac{\delta}{1} \cdot \frac{1}{\delta})$$

حيث δ تمثل رتبة الاحداثي العرضي y من أجل الطبقة الحدية ، يمكن تقدير رتبة w_y بالشكل :

$$w_y = O(w_o \frac{\delta}{1})$$

لتقييم الحدود الجزئية للاجزاء المتعلقة بالعطالة واللزوجة المداخلين في مسقط معادلة الجريان على محور ox :

$$w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} = O(\frac{w_o^2}{1}) \quad , \quad w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} = O(w_o \frac{\delta}{1} \cdot \frac{w_o}{\delta}) = O(\frac{w_o^2}{1})$$

$$\nu \frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} = \nu \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial w_x}{\partial x} = O(\nu \frac{w_o}{1^2})$$

$$\nu \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} = \nu \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial w_x}{\partial y} = O(\nu \frac{w_o}{\delta^2})$$

ينتج من التقييم المذكور أعلاه أن رتبة الحدود الجزئية المتعلقة بجزء العطالة مماثل ومساوي الى $\frac{w_o^2}{1}$.

تعطي نسبة البنود المتعلقة باللزوجة :

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$\frac{\partial^2 w_x / \partial x^2}{\partial^2 w_x / \partial y^2} = O\left(\frac{w_o / l_o}{w_o / \delta^2}\right) = O\left(\frac{\delta^2}{l^2}\right)$$

من أجل الطبقة الحدية $\delta \ll 1$ يكون $\frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} \gg \frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2}$

وبالتالي يمكن اهمال المشتق الاخير بحيث يمكن كتابة معادلة الجريان على محور ox بالشكل التالي :

$$w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} \qquad (6-26)$$

ان رتبة الطرف اليساري من هذه المعادلة تساوي الى رتبة $O\left(\frac{w_o^2}{l}\right)$ وللطرف اليميني $O\left(\frac{\nu w_o}{\delta^2}\right)$ بمساواة الرتب نحصل على :

$$O\left(\frac{w_o}{l}\right) = O\left(\frac{\nu w_o}{\delta^2}\right)$$

أو :

$$\frac{\delta}{l} = O\left(\frac{1}{\sqrt{w_o l/\nu}}\right) = O\left(\frac{1}{\sqrt{R_e}}\right) \qquad (6-27)$$

حيث $R_e = w_o . l/\nu$ عدد رينولدز والذي يصف نسبة قوى العطالة الى قوى اللزوجة .

عندما $R_e \ll 1$ يكون $\frac{\delta}{l} \gg 1$ ($\delta \gg l$) من حيث المفهوم لاينفصل الجريان الى منطقتين حيث تسيطر على كامل الحقل المحيط للجدار قوى اللزوجة فقط .

اذا كان $R_e \gg 1$ ومنه $\delta \ll 1$ أي أنه تتشكل طبقة رقيقة نسبيا راكدة عند سطح الجسم الصلب وعندها تكون التبسيطات المذكوره

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

منها أعلاه بالنسبة لهذه الطبقة صحيحة كتقريب أول ، وبالتالي يمكن استعمال نظرية الطبقة الحدية كطريقة لتبسيط الوصف الرياضي لمسألة القيمة الحدية وكإمكانية مساعدة في حل هذه المسألة .

لنقيم رتب الحدود الداخلة في مسقط معادلة الجريان على محور oy بالأخذ بعين الاعتبار المعادلة (6-27) ،نجدرتبة الحدود:

$$O\left(\frac{w_o^2}{1}\cdot\frac{\delta}{1}\right) = O\left(\frac{w_o^2}{1}\cdot\frac{1}{\sqrt{R_e}}\right)$$ هي :

$$w_x\frac{\partial^2 w_y}{\partial x^2} = O\left(\frac{w_o^2}{1}\cdot\frac{1}{R_e\sqrt{R_e}}\right)$$ ورتبة الحد :

ومنه تعتبر رتبة المساقط على محور oy الداخلة في معادلة الجريان صغيرة بالمقارنة مع البنود الداخلة في المعادلة (6-23) حيث يمكن اهمال المعادلة (6-24) من أجل الطبقة الحدية .

مماسبق ومن أجل حالة جريان مستقر لاتدرجي ومستوي لسائل لزج ضمن الطبقة الحدية قرب السطح المستوي يمكن كتابة :

$$w_x\frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y\frac{\partial w_x}{\partial y} = \nu\frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} \qquad (6\text{-}28)$$

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} = 0 \qquad (6\text{-}29)$$

تتحدد المتحولات الغير مستقلة الداخلة في المعادلتين

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

w_y و w_x في (6-29) و (6-28)

يمكن تمثيل الطرف اليميني من المعادلة (6-28) بالشكل $\frac{1}{\rho}\frac{\partial \delta}{\partial y}$ حيث δ هي الاجهاد المماسي بسبب الاحتكاك في المستوي الموازي للمستوي xz .

الطبقة الحدية الحرارية (Thermal Boundary layer):

يتحدد مفهوم الطبقة الحدية الحرارية بالتشابه مع ما ورد ذكره بالنسبة للطبقة الحدية الهيدروديناميكية ، الشكل (6-7) .

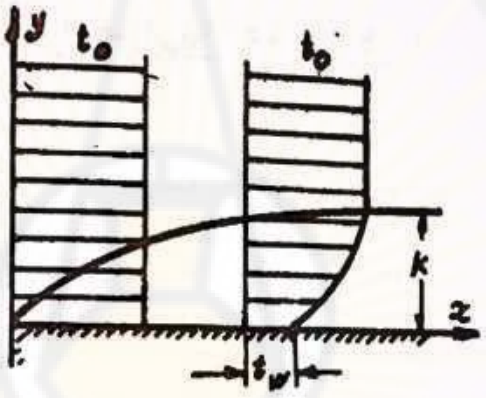
حيث توجد طبقة من المائع قرب الجدار تتغير درجة الحرارة ضمنها من قيمة درجة حرارة الجدار الى قيمة درجة حرارة المائع .

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

على بعد كاف من الجدار .

يكون الشرط $\frac{\partial t}{\partial y} \neq 0$ صحيحا من أجل المنطقة الكائنة ضمن الطبقة الحدية الحرارية بينما يكون الشرط بالنسبة للحد الخارجي لتلك الطبقة الحدية وفيمايليها (لدقة أكبر عند $\xi \ll 1$) حيث $y = Kt = (1-\xi)t_o$ هو :

$$t = t_o \quad \text{و} \quad \partial t / \partial y = 0$$



الشكل (7-6) تغير درجة الحرارة
ضمن الطبقة الحدية الحرارية

أي أن جميع التغيرات في درجة الحرارة تتركز ضمن طبقة رقيقة نسبيا على تماس مباشر مع سطح الجدار .

فيما يلي باعتبار ظاهرة انتقال الحرارة لصفيحة مستوية ضمن جريان لسري طولي ، سوف نوضح الشرط الذي يحقق المتراجحة

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$k \ll 1$ حيث k هي سماكة الطبقة الحدية الحرارية .

في الحالة العامة لاتتطابق سماكتي الطبقة الحدية الهيدرو ديناميكية δ و الطبقة الحدية الحرارية k وهذا الامر يعتمد على طبيعة المائع المعتبر وعلى مواصفات ومميزات خاصة بطبيعة الجريان وانتقال الحرارة .

لنفترض أن كلا السماكتين ذات رتب متساوية $k = O(\delta)$.

يمكن اهمال انتقال الحرارة بالتوصيل على طول الطبقة الحدية الحرارية بسبب صغر سماكتها بالمقارنة مع انتقال الحرارة في الاتجاه العرضي أي أنه يمكننا الافتراض :

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} = 0 \quad \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \right) \text{ بسبب أن } k^2 \ll 1^2$$

ومنه تأخذ معادلة الطاقة من أجل الحالة المعتبرة الشكل التالي :

$$w_x \frac{\partial t}{\partial x} + w_y \frac{\partial t}{\partial y} = a \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \qquad (6\text{-}30)$$

بما أن $q_y = -\lambda(\partial t/\partial y)$ و $\lambda(\partial^2 t/\partial^2 y) = -\partial q_y/\partial y$

يمكن بالتالي تمثيل الطرف الايمن من المعادلة (6-30) بالشكل $\frac{1}{\rho . C_p} . \frac{\partial q_y}{\partial y}$.

لتغطية المسألة يجب أن نضيف الى المعادلة (6-30) كل من معادلة الجريان (6-28) ومعادلة الاستمرار (6-29) .

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

يجب التذكر أنه قدتم استخراج نظام المعادلات التفاضلية (6-28)و (6-29) و (6-30) من أجل حالة الجريان المستقر واللاتدرجي لمائع ذو مواصفات فيزيائية ثابتة فوق سطح مستوي مع الاخذ بعين الاعتبار لعدم وجود أية مصادر حرارية داخلية ضمن المائع واهمال كمية الطاقة الحرارية المتولدة بسبب الاحتكاك .

يجب ملاحظة أنه ضمن الشروط المفترضة أعلاه يكون حقل السرعات مستقلا عن حقل درجات الحرارة .

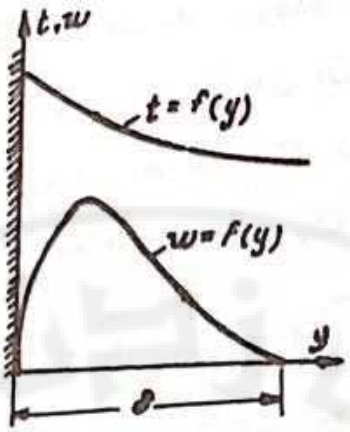
في حالة الحمل الطبيعي الناتج عن فروقات الكثافة الحاصلة نتيجة اختلاف تسخين جزيئات المائع تنشأ الطبقة الحدية بطريقة خاصة .

يبقى تعريف الطبقات الحدية المذكورة سابقا صحيحا في حالة الحمل الطبيعي أيضا ولكن غالبا ماتكون سرعة الجريان عند بعد كاف من الجسم w_o والتي تحصل بسببه عملية الحمل الطبيعي أو الحر مساوية للصفر .

يبين الشكل (6-8) توزع كل من درجات الحرارة والسرعة بالنسبة لمقطع معين من المجريان في حالة جريان حر قرب جسم ساخن ، هنا أيضا يمكن أن لاتتطابق سماكتي الطبقة الحدية الهيدرو ديناميكية والطبقة الحدية الحرارية .

من أجل حالات الحمل الطبيعي ($0 - w_o$) يجب أن يؤخذ

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner



الشكل (8-6) الطبقة الحدية الهيدروديناميكية
والطبقة الحدية الحرارية في حالة الحركة الحرة

بالحساب الحد $v \frac{\partial w}{\partial x} + g$ في المعادلة التفاضلية للجريان (28-6)

في هذه الحالة يتوافق بشدة كل من حقل السرعة وحقل درجات الحرارة أي يحدث التوافق مع اجراء انتقال الحرارة نفسه .

ان شكل وقياس سطح الانتقال الحراري له تأثير جوهري على فعلية انتقال الحرارة حيث يمكن أن تنشأ الطبقة الحدية بأساليب مختلفة .

في التطبيقات الهندسية المختلفة تستعمل مجموعة كبيرة من سطوح التسخين ، كل سطح من هذه السطوح يحدث أو يخلق شروط نوعية للحركة (الحمل) وانتقال الحرارة .

من المعروف عموما أنه يوجد نوعين أساسيين من حيث طبيعة

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الجريان ، صفائحي ومضطرب ، تتحرك جزيئات المائع في جريان صفائحي بدون أية امتزاج فيما بينها ضمن الطبقات ، بينما تتغير جزيئات المائع ذو الجريان المضطرب بحركة عشوائية حيث يتغير بشكل مستمر كل من سرعة واتجاه هذه الجزيئات .

يلحظ تأثير هذين النظامين من الجريان على الطبقة الحدية عند قيم صغيرة لـ x ، يجري المائع في الطبقة الحدية بشكل صفائحي ،بزيادة قيمة x تزداد سماكة الطبقة الحدية وتصبح هذه الطبقة غير مستقرة حيث يصبح الجريان ضمن هذه الطبقة من النوع المضطرب .

سوف نرى فيما بعد أن انتقال الحرارة يعتمد بشكل ملموس على طبيعة الجريان وتجدر الاشارة هنا الى أن نظام المعادلات المستخرجة (28-6) حتى (30-6) تصف اجراء انتقال الحرارة الحاصل في طبقة حدية صفائحية فقط .

٦- ٥ مفهوم التشابه..(Similarity Concept):

يمكن وصف عملية انتقال الحرارة بالحمل بنظام المعادلات التفاضلية اضافة الى شروط تحديد أخرى تتضمن عددا كبيرا من المتحولات وبالتالي يصعب الحل التحليلي لهذه المعادلات .

مكنت الدراسات التجريبية من الحصول على قيم عددية للمتحولات المجهولة من أجل قيم معينة خاصة بالمسألة المدروسة

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

ومن ثم يتم اختيار المعادلات التي تصف النتائج التجريبية الناتجة .

على أية حال وعند دراسة اجراء معقد مثل اجراء انتقال الحرارة بالحمل ليس من السهل دوما مواطئة العمل التجريبي .

لكي نبحث تأثير أية خاصة من خواص الاجراء يجب في هذه الحالة المحافظة على الخواص الاخرى ، وهذا غير ممكن دائما بسبب وجود عدد كبير من المتحولات في آن واحد .

بالاضافة الى ذلك يجب على الباحث أن يكون متأكدا من امكانية تطبيق النتائج المستحصل عليها مخبريا بالنسبة لاجراءات مشابهة .

تساعد نظرية التشابه على حل الصعوبات من هذا النوع حيث تسمح نظرية التشابه بوضع البارامترات الفيزيائية القياسية بشكل مجموعات لاقياسية ذات عدد أقل من عدد البارامترات الداخلة فيها .

يمكن اعتماد المجموعات اللاقياسية الناتجة بهذه الطريقة كمتحولات جديدة .

ان ادخال المجموعات اللاقياسية في المعادلات يخفض من عدد القيم الداخلة تحت اشارة التابع وهذا يبسط عملية دراسة الاجراءات الفيزيائية ، علاوة على ماسبق تأخذ المتحولات اللاقياسية الجديدة بعين الاعتبار ليس فقط تأثير العوامل الجزئي بل أيضا تأثير

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مجموعاتها ككل وهذا يجعل من السهل تحديد الروابط الفيزيائية ضمن الاجراء .

تمكن نظرية التشابه أيضا من وضع الشروط التي عندهايمكن تطبيق نتائج البحث المخبري على الظواهر الطبيعية المشابهة والمراد دراستها ،أيضا لايمكن بطريقة نظرية التشابه تحديد نوع التوابع المجهولة ، تسهل هذه النظرية غالبا عملية تحليل الاجراء ووصف النتائج المستحصل عليها .

في التطبيقات العملية لنظرية التشابه جرت العادة على ارجاع الوصف الرياضي للاجراء المدروس الى شكل لاقياسي حيث توجد عدة طرق لانجاز هذه العملية وسوف نستعمل الطريقة المسماة بطريقة تحويل المقاس ...(Scale Conversion).

٦ - ٦ اعطاء التعبير الرياضي لمسألة القيمة الحدية بالمتحولات اللاقياسية (Presenting The Methematical Statement Of The Bo- undary - Value Problem In Dimensionless Varables.):

لنعتبر أنه يوجد لدينا سطح جسم صلب معرض لجريان مائع غير قابل للانضغاط باعتبار أن كلا من درجة حرارته وسرعته على بعد كاف من الجسم ثابتتين ويساويان على التوالي الى t_o و w_o. معطى لدينا أيضا بعد الجسم الطلب i_o ودرجة حرارة سطحه t_w .

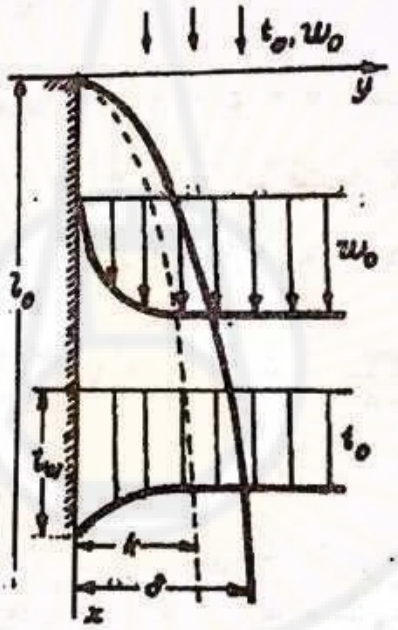
نفترض أن $t_o < t_w$ ، كمانفترض أن الخواص الفيزيائية

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

للمائع ثابتة (نأخذ بعين الاعتبار أن قوة الرفع تنتج فقط بسبب ارتباط كثافة المائع بدرجة الحرارة)

نهمل أيضا الحرارة المتولدة نتيجة الاحتكاك ونعتبر أن الاجراء من النوع المستقر .

نأخذ مبدأ الاحداثيات كما هو مبين بالشكل (9-6).



الشكل (9-6) عرض مسالة القيمة الحدية في انتقال الحرارة بالحمل

بغرض التبسيط نفترض أن محور oy يعامد سطح الجسم وأن محور ox يصنع زاوية 90^o درجة مع oy وعلى امتداد سطح الجسم في هذه الحالة $g = g_o$ كما أن مساقط شعاع الثقالة (أوقوى الرفع) على محوري oy و oz تساوي الى الصفر ($g_y = g_z = 0$) .

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

نفترض أيضا أن بعد الجسم باتجاه محور oz يتجاوز بكثير القيمة l_o .

ضمن الشروط المفترضة يمكن وصف حقلي السرعة ودرجة الحرارة في الطبقة الحدية بواسطة المعادلات التفاضلية .

لنعتبر أن قوة الرفع $\rho.g.\beta.V$ تتناسب مع الحد الذي يمثل اللزوجة $\mu (\partial^2 w_x / \partial^2 y)$.

لندخل أيضا الاصطلاح $v = t - t_o$ حيث t هي درجة حرارة المائع (يجب ملاحظة أن $dt = dv$ باعتبار أن $t_o = Const$) بالنسبة للحالة المعتبرة يمكن كتابة المعادلات التالية :

معادلة الطاقة

$$w_x \frac{\partial v}{\partial x} + w_y \frac{\partial v}{\partial y} = a \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

معادلة الجريان :

$$w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} + g.\beta.v$$

معادلة الاستمرار :

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} = 0$$

تكتب الشروط الحدية كما يلي :

(1) عند بعد عن الجسم قدره ($y = \infty$)

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$v = v_o = 0$$

$$w_x = w_o \quad , \quad w_y = 0$$

(a) $0 < x < l_o$, $y = 0$, $-\infty < z < +\infty$ (2)عند السطح

$$v = v_w = t_w - t_o = \text{Const.}$$

$$w_x = w_y = w_z = 0$$

يمكن أن نميز ثلاثة أنواع من القيم في كل من المعادلات وشروط التحديد :

- المتحولات المستقلة...(Independent Variables)- الاحداثيات x,y .

- المتحولات الغير مستقلة.(Dependent Varibles)-

v , w_x و w_y والتي تحدد بشكل وحيد بواسطة المتحولات المستقلة باعتبار أن القيم الداخلة في شروط التحديد معطاة .

- الثوابت ..... w_o , t_o , v_w, l_o, v , α , β, g الخ .... والتي تعطي بواسطة شروط التحديد ولأية مسألة محددة حيث تكون مستقلة عن المتحولات اضافة الى أنه يمكن لهذه الثوابت أن تتغير من مسألة لأخرى .

تسمى هذه القيم بالثوابت بسبب أنها لاتتبع المتحولات المستقلة .

مماسبق تعتمد المتحولات الغيرالمستقلة والمجهولة v , w_x, w_y على كميات عديدة تتبع جميعها للمتحولات المستقلة والثوابت المحددة وفقا لشروط التحديد(الشروط الخاصة للمسألة).

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

يمكن صياغة الحدود القياسية الداخلة في المعادلات وشروط التحديد بشكل مجموعات لاقياسية بحيث يصبح عدد الحدود أو المجموعات الناتجة أقل من عدد الكميات القياسية .

لتحويل هذه التعابير الى أشكال لاقياسية (Dimensionless Form) نختار مقاييس ارجاع بحيث تكون مناسبة لتكييف الثوابت المعطاة وفقا لشروط التحديد .

من أجل القيم الخطية يمكن اختيار أي بعد ارجاع وعلى سبيل المثال : طول سطح الانتقال الحراري l_o من أجل السرعة w_o ومن أجل درجة الحرارة v_w .

لنرمز للكميات اللاقياسية كمايلي :

$$(b)\quad \begin{cases} X = \dfrac{x}{l_o} \ , \ Y = \dfrac{y}{l_o} \ ; \ W_x = \dfrac{w_x}{w_o} \\ W_y = \dfrac{w_y}{w_o} \ , \ \theta = \dfrac{v}{v_w} \end{cases}$$

ومنه :

$$(c)\quad \begin{cases} x = l_o X \ , \ y = l_o Y \ , \ w_x = w_o W_x \\ w_y = w_o W_y \ , \ v = v_w \theta \end{cases}$$

بتعويض القيم الداخلة في العلاقات (c) في المعادلات وبالاطلاع بالنسبة لمعادلة الطاقة على سبيل المثال نحصل على التعبير

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

التـــالـــي :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial(l_o . Y)} \left[\frac{\partial(v_w . \theta)}{\partial(l_o . Y)}\right] = \frac{v_w}{l_o^2} . \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2}$$

بالتعويض عن القيم الداخلة في (c) وبضرب الطرف اليميني واليساري لمعادلة الطاقة بالحد $\frac{l_o^2}{\alpha}$ نحصل على :

$$\frac{x_o l_o}{\alpha} \left(W_x \frac{\partial \theta}{\partial X} + W_y \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right) = \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \qquad (6\text{-}31)$$

يمكن اصلاح معادلة الجريان بنفس الاسلوب وذلك بعيدانتجويض بالكميات (c) حيث نضرب كلا طرفي معادلة الجريان بالمقدار $l_o^2/\nu\, w_o$ حيث نحصل على :

$$\frac{w_o l_o}{\nu} \left(W_x \frac{W_x}{X} + W_y \frac{\partial W_x}{\partial Y} \right) = \frac{\partial^2 W_x}{\partial Y^2} + \frac{g . \beta v_w . l_o^2}{w_o . \nu} \theta$$

يمكن كتابة الحد الاخير من هذه المعادلة كمايلي :

$$\frac{g\beta . v_w . l_o^2}{\nu . w_o} \theta = \frac{g\beta\, v_w . l_o^3}{\nu^2} . \frac{\nu}{w_o l_o} \theta$$

ومنه نحصل على :

$$\frac{w_o l_o}{\nu} \left(W_x \frac{\partial W_x}{\partial X} + W_y \frac{\partial W_x}{\partial Y} \right) = \qquad (6\text{-}32)$$

$$\frac{\partial^2 W_x}{\partial Y^2} + \frac{g\beta . v_w . l_o^3}{\nu^2} . \frac{\nu}{w_o l_o} \theta$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

بعد اصلاح معادلة الاستمرار نحصل على :

$$\frac{w_o}{l_o}\left(\frac{\partial W_x}{\partial X}+\frac{\partial W_y}{\partial Y}\right)=0$$

أو باعتبار أن القيمة $\frac{w_o}{l_o}$ لاتساوي الصفر :

$$\frac{\partial W_x}{\partial X}+\frac{\partial W_y}{\partial Y}=0 \qquad (6\text{-}33)$$

بارجاع الشروط الحدية الى شكل لاقياسي نحصل على :

$$(d)\quad \begin{cases} (1)\text{على مسافة من الجسم } (Y=\infty) \\ W_y=0\ ,\ W_x=1\ ,\ \theta=\theta_o=0 \\ (2)\text{عند السطح } (0<X<1\ ,\ Y=0) \\ W_x=W_y=0\ ,\ \theta=\theta_w=1 \end{cases}$$

في الحالة المعتبرة نلاحظ من الشروط (d) أن الحدود اللاقياسية θ_o , θ_w , W_x الخ .. لها قيم عددية محددة بغض النظر عن قيمة الكميات w_o , t_o , t .. الخ .. المعطاة في الشروط الحدية القياسية .

في الحالة التي يكون فيها حقل درجات الحرارة معروفا يمكن تحديد معامل انتقال الحرارة المكاني من المعادلة :

$$\alpha=-\frac{\lambda}{t_w-t_o}\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)_y=0$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

نتيجة ذلك يمكننا كتابة :

$$q_w = -\left[\frac{\partial}{\partial \tau}\int_0^h \rho i.dy + \frac{\partial}{\partial x}\int_0^h (\rho w_x i - \lambda\frac{\partial t}{\partial x})dy\right. \qquad (6\text{-}61)$$

$$\left. - \int_0^h q_v.dy\right]$$

لنضرب ونقسم الطرف الايمن بالحد $b = u$ مع الاخذ بعين الاعتبار أن عنصر مساحة المقطع العرضي dF يساوي الى $b\text{-}d_y$ ومنه يمكن تمثيل المعادلة الاخيرة بالشكل :

$$q_w = -\frac{1}{u}\left[\frac{\partial}{\partial \tau}\int_0^{F_o} \rho i.dF + \frac{\partial}{\partial x}\int_0^{F_o} (\rho w_x i - \lambda\frac{\partial t}{\partial x})\,df \right. \qquad (6\text{-}62)$$

$$\left. - \int_0^{F_o} q_v.dF\right]$$

حيث F_o هي المساحة الكلية للمقطع العرضي والتي تناسب العرض الحسابي u .

تكون المعادلة (6-62) صحيحة من أجل جميع الاقنيةذات المقطع العرضي الثابت ولأية طول .

يعبر الحد الاول من الطرف اليميني للمعادلة (6-62) عن عملية انتقال الحرارة في الحالة اللامستقرة (العابرة) أما الحد الثاني فيعبر عن كمية الحرارة المنتقلة باتجاه محورالقناة

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

بصياغة المعادلة الاخيرة بشكل لاقياسي نحصل على :

$$\frac{\alpha \cdot l_o}{\lambda} = -\left(\frac{\partial \theta}{\partial Y}\right)_{Y=0} \qquad (6-34)$$

يتم تحديد الحد اللاقياسي $\frac{\alpha \cdot l_o}{\lambda}$ بشكل تام بواسطة المشتق $(\partial\theta/\partial Y)_{Y=0}$.

٦-٧ الحدود اللاقياسية (مقياس التشابه) ومعادلات التشابه اللاقياسية :

-(Dimensionless Terms (Criteria Of Similarity) And Dimensionless Equation Of Similarity..).

بالاضافة الى الحدود اللاقياسية θ , W_x , W_y والاحداثيات اللاقياسية والتي تتألف من كميات فيزيائية متجانسة توجد حدود لاقياسية تتألف من بارامترات فيزيائية متباينة تدخل في صياغة معادلات الحمل وشروط التحديد ، مثل :

$$\frac{\alpha\, l_o}{\lambda} \quad , \quad \frac{w_o l_o}{\nu} \quad , \quad \frac{w_o l_o}{\alpha} \quad , \quad \frac{g\beta \cdot v_w \cdot l_o^3}{\nu^2}$$

تسمى مثل هذه الحدود بمقياس أو معيار التشابه وقد أطلق عليها أسماء العلماء الذين قاموا بتطوير البحوث في حقلي انتقال الحرارة والهيدرو ديناميك :

يرمز للحد الاول بالشكل :

$$Nu = \frac{\alpha \cdot l_o}{\lambda} \qquad (6-35)$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

ويسمى بعدد نسل (Nusselt Number) يصف عدد نسل اجراء انتقال الحرارة عند الحد الفاصل بين الجدار والمائع كما ينتج من المعادلات (3-6) و (31-6) :

يكون هذا العدد عادة مجهولا في مسائل الحمل باعتبار أنه يتضمن معامل انتقال الحرارة α والذي يجب تحديده .

على الرغم من الشبه الظاهري بين هذا العدد وعدد بيو الذي يعتبر عند دراسة التوصيل ، الا أنه يختلف بشكل جوهري .

يتضمن عدد بيو معامل التوصيل الحراري للجسم الصلب بينما يدخل في تكوين عدد نسل معامل التوصيل الحراري للمائع ، علاوة على ذلك فان معامل انتقال الحرارة الداخل في عددبيو يعطى عند شروط تحديد خاصة بينما يعتبر معامل إنتقال الحرارة الداخل في عدد نسل كبارامتر مجهول .

الحد اللاقياسي :

$$R_e = \frac{w_o l_o}{\nu} \qquad (6-36)$$

يسمى بعدد رينولدز (Reynolds Number) ويصف العلاقة الكائنة بين قوى العطالة وقوى اللزوجة ،في الواقع يتم الحصول على عدد رينولدز بتقسيم الحد المتعلق بالعطالة في معادلة الجريان على الحد المتعلق باللزوجة بنفس المعادلة :

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$\frac{w_x \cdot \partial w_x/\partial x}{\nu \cdot \partial^2 w_x/\partial y^2} = \frac{w_o^2/l_o}{\nu w_o/l_o^2} \cdot \frac{w_x \cdot \partial w_x/\partial x}{\partial^2 w_x/\partial y^2} = \frac{w_o l_o}{\nu} \cdot \frac{w_x \cdot \partial w_x/\partial x}{\partial^2 w_x/\partial y^2}$$

حيث طبقنا عمليات مشابهة للتي طبقت عند ارجاع معادلة الجريان في الفقرة السابقة الى الشكل اللاقياسي ،يعتبر عدد رينولدز مميزة هامة جدا بالنسبة لكل من اجراءات جريان المواقع الابروترمية وغير الابروترمية .

يرمز للحد الثالث اللاقياسي :

$$Pe = \frac{w_o l_o}{a} \qquad (6\text{-}37)$$

ويسمى بعدد بيكلت (Peclet Number) حيث يمكن اعادة كتابته بالشكل التالي :

$$\frac{w_o l_o}{a} = \frac{\rho . c_p w_o \nu}{\frac{\lambda}{l_o} \nu}$$

تعبر صورة الكسر عن كمية الحرارة المنتقلة بالحمل بينما يعبر المخرج عن كمية الحرارة المنتقلة بالتوصيل .

يمكن الحصول على عدد بيكلت بتقسيم الحد الداخل لمعادلة الطاقة والمعبر عن الحرارة المنتقلة بالحمل على الحد الداخل في نفس المعادلة والذي يعبر عن الحرارة المنتقلة بالتوصيل

الحد اللاقياسي :

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$Gr = \frac{g \beta v_w l_o^3}{\nu^2} \qquad (6\text{-}38)$$

يسمى بعدد كراشوف (Grashof Number.) وهو يصف قوة الرفع (الطفو) التي تظهر ضمن المائع بسبب فروقات الحشاشة .

أثناء استخراج معادلة الجريان (6-18) افترض أن $\beta v = \frac{\rho_o - \rho}{\rho_o}$ وبالتالي يمكن استبدال حد كراشوف G_r بالصيغة العامة له والتي يعبر عنها بعدد أرخميدس (Archimedeas Number)

$$Ar = \frac{g \cdot l_o^3}{r^2} \cdot \frac{\rho_o - \rho}{\rho_o} \qquad (6\text{-}39)$$

يتطابق Ar مع عدد كراشوف في الحالة التي يكون بها β =Const .

باستعمال الحدود اللاقياسية يمكن تمثيل نظام المعادلات التفاضلية بالشكل التالي :

$$Nu = (\partial\theta / \partial Y)_{Y=0} \qquad (6\text{-}40)$$

$$Pe \left(W_x \frac{\partial\theta}{\partial x} + W_y \frac{\partial\theta}{\partial Y} \right) = \frac{\partial^2\theta}{\partial Y^2} \qquad (6\text{-}41)$$

$$Re \left(W_x \frac{\partial W_x}{\partial x} + W_y \frac{\partial W_x}{\partial Y} \right) = \frac{Gr}{Re} \theta + \frac{\partial^2 W_x}{Y^2} \qquad (6\text{-}42)$$

$$\frac{\partial W_x}{\partial X} + \frac{\partial W_y}{\partial Y} = 0 \qquad (6\text{-}43)$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

تقدم هذه المنظومة من المعادلات التفاضلية اللاقياسية وشروط التحديد اللاقياسية (d) وصفا رياضيا للمسألة المدروسة .

يمكن اعتبار الحدود اللاقياسية $Gr,Pe,Re,Nu,Y,X,W_x,\theta$ كمتحولات جديدة حيث يمكن تصنيفها ضمن ثلاثة مجموعات :

متحولات مستقلة ، الاحداثيات اللاقياسية X,Y ، متحولات غير مستقلة Nu , θ , W_x , W_y حيث يتم تحديدها بشكل وحيد بواسطة المتحولات المستقلة وعند قيم محددة للكميات وفقا لشروط التحديد .

ثوابت Gr,Re,Pe والتي تعطى ضمن شروط التحديد وهي قيم ثابتة بالنسبة للمسألة المعينة (في الواقع وكما ينتج من المعادلات (6-36) وحتى (6-38) تتألف أعداد بيكليت ريتراشوف ورينولدز من قيم تدخل ضمن شروط التحديد المعطاة للمسألة) .

مما سبق ذكره ينتج أن :

$$Nu = F_1(X_w, Y_w, Pe, Re, Qr) \quad (6-44)$$

$$\theta = F_2(X, Y, Pe, Re, Gr) \quad (6-45)$$

$$W_x = F_3(X, Y, Pe, Re, Gr) \quad (6-46)$$

$$W_y = F_4(X, Y, Pe, Re, Gr) \quad (6-47)$$

تسمى المعادلات من هذا النوع بالمعادلات المعيارية (Criterion Equations.) أو بمعادلات التشابه المميزة اللاقياسية .

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

في المعادلة (6-44) يتعلق كل من X_w ، Y_w بسطح انتقال الحرارة (الجدار) .

لايوجد معنى لايجاد قيمة α (أو N) لنقاط الفراغ الغير موجودة على سطح الجدار ، في المسالة المعتبرة $Y_w=0$.

اذا قمنا بارجاع الحد $\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$ الداخل في معادلة الجريان الى الشكل اللاقياسي فسوف ياخذ منلهر حد آخر :

$$\frac{l_o}{\rho . w_o}\frac{\partial \bar{p}}{\partial X} = \frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{p}{\rho . w^2}, \frac{w_o l_o}{\nu}\right) = \frac{\partial}{\partial X}(Eu.Re)$$

يسمى الحد اللاقياسي:

$$Eu = \frac{p}{\rho . w_o^2} \qquad (6-48)$$

يسمى بعدد اويلر (Euler Number) وهو يصف العلاقة الكائنة بين قوى الضغط وقوى العطالة ، يظهر هذا الحد في معادلة انتقال الحرارة بالحمل فقط تحت اشارة الاشتقاق والذي يعني في حالة اعتبار مائع غير قابل للانضغاط وذو خواص فيزيائية ثابتة أنه ليس الجوهري في الامر الضغط المطلق بل التغيرات الحاصلة في الضغط (في حالة جريان مائع قابل للانضغاط من الضروري معرفة اعتماد الكثافة على الضغط حيث تلعب هنا قيمة الضغط المطبق دورا هاما) ، لذا يكتب عادة عدد أويلر بالشكل التالي :

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$E_u = \frac{p - p_o}{\rho . w_o^2}$$

حيث p_o هي أية قيمة ثابتة للضغط وعلى سبيل المثال يمكن اعتبار الضغط عند مدخل القناة والذي يمكن أن يكون مجهولا، علاوة على l_o توجد أبعاد ارجاع أخرى على درجة كبيرة من الاهمية بالنسبة لكثير من اجراءات الجريان وانتقال الحرارة ، على سبيل المثال تكون الابعاد الارجاعية في حالة جريان مائع ضمن انبوب مستقيم هي : قطره وطوله ، أما في حالة انبوب منحني فيمكن اعتبار نصف قطر انحنائه كبعد ارجاع اضافي ..

في حالة جريان المائع ضمن انبوب خشن نهتم بارتفاعات السطح الغير منتظمة وتوزيعها على كامل السطح وعند دراسة مسألة معينة يجب أن يتم اعطاء جميع الابعاد الارجاعية مثل l_2, l_1, l_o الخ ..

يجب أن يتضمن رمز التابع في المعادلات (6-14) الى (6-17) القيم :

$$L_1 = \frac{l_1}{l_o} \quad , \quad L_2 = \frac{l_2}{l_o} \quad , \ldots\ldots \text{الخ} ..$$

ومن الواضح أن تقديم هذه القيم $L_1, L_2, \ldots\ldots, L_n$ تحت رمز التابع يعتبر أمرا جوهريا .

يجب أن تكون قائمة الحدود اللاقياسية دائما مرتبطة

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

بالوصف الرياضي للمسألة المعتبرة .

حيث أن أية اضافة أو حذف لمتحولات جديدة بشكل كيفي غير مقبول مطلقا باعتبار أنه يجب اثبات أو برهنة أية عملية من هذا النوع .

بواسطة الصياغة الرياضية للمسألة المحددة يمكن الحصول على حدود لاقياسية جديدة عن طريق ضرب الحدود اللاقياسية بعضها بالآخر بطريقة معينة مع ملاحظة أنه عند اجراء ذلك فان عددالمتحولات الموضوعة تحت اشارة التابع يجب أن لايتغير .

يمكن الحصول على عدد بيكلت بارجاع معادلة الطاقة الى شكل لاقياسي حيث يمكن تمثيله كحاصل ضرب حدين لاقياسيين .

$$Pe = Re \cdot Pr = \frac{w_o \cdot l_o}{\nu} \cdot \frac{\nu}{a} \qquad (6-49)$$

الحد $P = \frac{\nu}{a}$ عبارة عن مقياس جديد يسمى بعددبراندل (Prandtl Number..)يتألف كليا من بارامترات فيزيائيةلذلك يعتبر هو نفسه كبارامتر فيزيائي أيضا .

يمثل عدد براندل بالشكل التالي :

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{\mu \cdot C_p}{\lambda} \qquad (6-50)$$

يمكن أن يعطى لعدد براندل معنى فيزيائي معين ولتوضيح هذه الفكرة نكتب كلا من معادلة الطاقة (6-30) :

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$W_x \frac{\partial t}{\partial x} + W_y \frac{\partial t}{\partial y} = a \frac{\partial^2 t}{\partial y^2}$$

ومعادلة الحركة (6-28) :

$$W_x \frac{\partial W_x}{\partial x} + W_y \frac{\partial W_x}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 W_x}{\partial y^2}$$

حيث نلحظ أنه لكلا المعادلتين تمثيل متشابه كما أننا نلاحظ أنه عند $a = \nu$ يتشابه كل من حقل درجة الحرارة وحقل السرعة اضافة الى كون شروط التحديد نفسها متشابهة .

من أجل الحالة $a = \nu$ يكون $Pr = \frac{\nu}{a} = 1$ ومنه يمكن اعتبار عدد برانتل عند شروط معينة كمقياس للتشابه بين حقلي درجة الحرارة والسرعة .

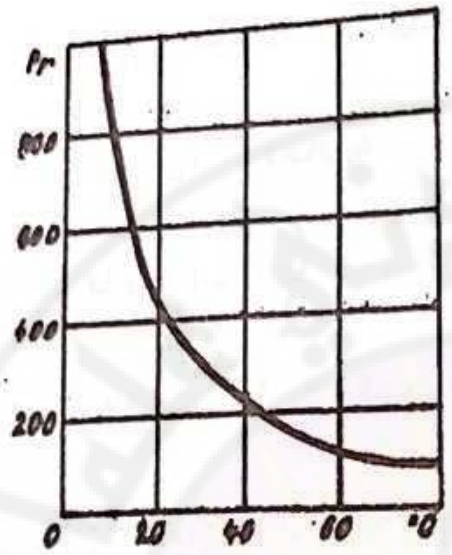
بالنسبة للسوائل يعتمد عدد برانتل بشكل كبير على درجة الحرارة ولغالبية السوائل تكون هذه العلاقة بشكل رئيسي مشابهة للعلاقة الكائنة بين اللزوجة (η) ودرجة الحرارة حيث يكون اعتماد كل من الحرارة النوعية c_p ومعامل التوصيل الحراري λ على درجة الحرارة أقل أهمية .

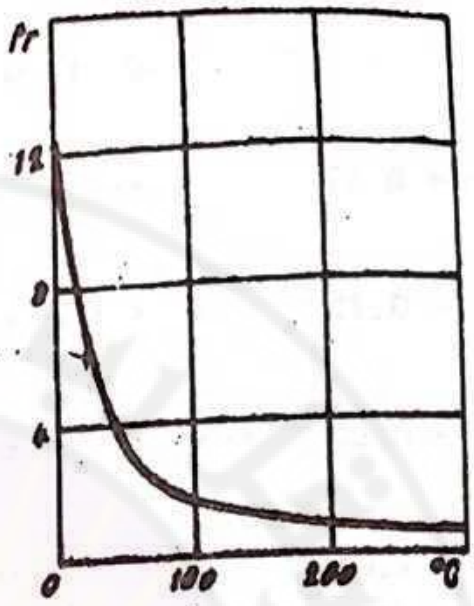
وكقاعدة : يتناقص عدد برانتل بشكل حاد مع ارتفاع درجة الحرارة . الشكل (6-10)

من أجل الماء يوضح الشكل (6-11) الخط البياني الممثل للعلاقة الكائنة بين عدد برانتل ودرجة الحرارة حيث نلاحظ هبوط قيمته طردا مع ارتفاع درجة الحرارة في المجال $(0 - 180^{\circ})$ من Par 13.7 الى 1) يحدث مثل هذا الهبوط الحاد بسبب هبوط

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

في قيمة لزوجة الماء وزيادة قيمة λ ضمن هذا المجال من درجات الحرارة حيث تعتمد الحرارة النوعية على درجة الحرارة بشكل أقل .





الشكل (6-10) تغير عدد برانـدل لزيت المتحولات بالاعتماد على تغير درجة الحرارة .

الشكل (6-11) تغير عدد برانـدل بالاعتماد على تغير درجة الحرارة ضمن المجـال 0°-$300^{\circ}C$

عند درجة حرارة للماء تتراوح بين 130° و 310 C يتغير عـدد برانـدل للمـاء بشكل ضئيل حيث تتناهى قيمته الى الواحد .

تتغير طبيعة اعتماد عدد برانـدل على درجة الحرارة بشكل مفاجىء فقط عند قيم الضغوط ودرجات الحرارة الموافقة للنقـاط القريبة من المنطقة الحرجة .

في حالة الغازات بشكل خاص لايعتمد عدد برانـدل على قيمـة

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

درجة الحرارة أو الضغط حيث يعتبر هذا العدد ثابتا بالنسبة لسكل غاز ويحدد عن طريق تكافؤه الكيميائي .

من النظرية الحركية للغازات ينتج أن :

للغازات الاحادية ..... $Pr = 0.67$

للغازات الثنائية ..... $Pr = 0.72$

للغازات الثلاثية ..... $Pr = 0.80$

للغازات الرباعية ..... $Pr = 1.0$

ومع ذلك تنحرف قيمة عدد براندل قليلا بالنسبة للغازات الحقيقية عن القيم المبينة .

يتغير عدد براندل بالنسبة للمعادن السائلة الفلزية والشفيلة والتي تستعمل كوسيلة لنقل الحرارة ضمن حدود تقريبية من 0.005 الى 0.05 حيث يؤخذ الرقم الاصغر بالنسبة للمعادن السائلة ذات معامل التوصيل الحراري العالي، بالأخذ بعين الاعتبار لقيمة عدد براندل يمكن تقسيم السوائل الى ثلاثة زمر أو مجموعات

السوائل ذات الحرارة ذات $Pr < 1$ (المعادن السائلة) ، سوائل نقل $Pr = 1$ (السوائل الغير معدنية عند درجات الحرارة العالية والغازات) ، والسوائل ذات $Pr > 1$ (السوائل

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الغير معدنية) .

باعتبار أن $P_e = R_e . P_r$ يمكن صياغة المعادلات المميزة اللاقياسية (6-44) وحتى (6-47) بالشكل التالي :

$$N = F_1(X_w, Y_w, Re, Pr, Gr) \quad (6-51)$$

$$\theta = F_2(X, Y, Re, Pr, Gr) \quad (6-52)$$

$$W_x = F_3(X, Y, Re, Pr, Gr) \quad (6-53)$$

$$W_y = F_4(X, Y, Re, Pr, Gr) \quad (6-54)$$

باستعراض المعادلات من (6-44) الى (6-47) ومن (6-51) وحتى (6-54) نرى أنه يمكن تقسيم الحدود اللابعدية الى نوعين :

الحدود المجهولة : مثل Nu , θ , W_x, W_y والتي تتضمن المتحولات المجهولة والغير مستقلة ضمن الحالة المعتبرة مثل W_y, W_x, ν, α ..... .

حدود الارجاع : وهي المعيار الذي يتألف كليا من متحولات مستقلة أو ثوابت معطاة في شروط التحديد ، وفي الحالة المعتبرة لدينا Pr, Re, Y, X (أو Pe) و Gr .

تسمى الحدود اللاقياسية والتي تتألف من بارامترات معطاة (ثوابت) ضمن الوصف الرياضي للاجراء بمعايير التشابه .

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٦-٨ شروط تشابه الاجراءات الفيزيائية :

(Conditions Of Similarity For Physical Processes).

كما هو الحال في المجموعة الاساسية للمعادلات الثنائية فان المجموعة المستخرجة من المعادلات التفاضلية اللاثنائية (6-40) الى (6-43) تصف عدد لامتناه من الاجراءات الخاصة بالحمل حيث يمكن استخدامها في أية اجراء لانتقال الحرارة بين جسم صلب وسائع غير قابل للانضغاط مع التنويه الى أن هذه الاجراءات يجب أن تحقق الافتراضات المعتبرة أثناء استخراج معادلات انتقال الحرارة .

ومنه فان نظام المعادلات الناتج يصف مجموعة كبيرة من الظواهر الطبيعية أي يمكن وصف مجموعة كاملة من الاجراءات الفيزيائية ذات آليات الفعل المتشابهة .

في الفصل الاول من هذا الكتاب وجدنا أن المعادلة التفاضلية لتوصيل الحرارة $\nabla^2 t = 0$ تصف عدد لامتناه من الاجراءات العملية ضمن نفس الصنف ، حيث تتميز جميع هذه الاجراءات بآلية المتشابهة لانتشار الحرارة ومع ذلك توجد معادلات تفاضلية أخرى ذات شكل مشابه لشكل المعادلة التفاضلية للتوصيل وعلى سبيل المثال معادلة القانون الكهربائي .

تتشابه كلا المعادلتين من حيث الشكل وذلك فيما اذا رمزنا لدرجة الحرارة والقانون الكهربائي بنفس الرموز وبالرغم من أنهما تتشابهان بالشكل الا أنهما تصفا نوعين مختلفين من الظواهر

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

باعتبار أن القيم الداخلة في كلا المعادلتين تختلف فيزيائيا .

تعكس المعادلات التفاضلية المميزات العامة للظاهرة الطبيعية المعتبرة دون الاخذ بالخصائص النوعية مثل الشكل الهندسي وأبعاد النظام الذي يحدث ضمنه الاجراء الفيزيائي .

تتضمن المميزات الخاصة للاجراء أيضا الخواص الفيزيائية للاجسام العاملة أو الشروط المنظمة لتطور الاجراء عند حدود النظام .. الخ ....

تتحدد المميزات الخاصة للظواهر المختلفة والتي تخص نفس الصنف من الاجراءات من شروط التحديد المعطاة .

يوضح التحليل السالف الذكر للمعادلات التفاضلية اللاقياسية وشروط التحديد ، الشروط العامة للتشابه بالنسبة للاجراءات الفيزيائية والتي يمكن صياغتها وفقا للقواعد الثلاثة التالية :

(1) يجب أن تكون الاجراءات المتشابهة متشابهة نوعيا أي أنها يجب أن تكون ذات طبيعة فيزيائية متشابهة وبالتالي يمكن وصفها بمعادلات تفاضلية ذات شكل متشابه .

(2) يجب أن تتشابه شروط التحديد للأجراءات المتشابهة في جميع نواحيها باستثناء القيم العددية للثوابت المعطاة .

(3) يجب أن تكون المعايير الارجاعية (الاعداد اللاقياسية)

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

للاجراءات المتشابهة متساوية عدديا .

تحدد القواعد المذكورة أعلاه شروط التشابه للاجراءات الفيزيائية المختلفة .

يفيد الشرط الاول أن الاجراءات المتشابهة يجب أن تنتمي الى نفس الصنف أو النوع من الظواهر الفيزيائية اضافة الى أنه بغض النظر عن تشابه طبيعتها الفيزيائية فانه يشترط امكانية وصفها بمعادلات تفاضلية ذات شكل متشابه .

عند اعتبار حالة الحمل الحر في حجم ما فانه يمكن اهمال تدرج الضغط ضمن المائع علما بأن اهمال تدرج الضغط في معادلة الجريان يؤدي الى تغيير شكل المعادلة التي تصف الاجراء وبالتالي يتغير صنف الظاهرة المعتبرة .

مماسبق فان الاجراءات المتشابهة لانتقال الحرارة بالحمل يجب أن تتمتع بطبيعة متشابهة وقوى تحريض متطابقة .

يمكن أن يتم وصف الاجراءات الجزئية بمعادلات تفاضلية مختلفة (اذا كانت فقط تمثل حالة خاصة لمعادلات عامة)وعندها لايمكننا القول بتشابه هذه الاجراءات .

يتطلب شرط التشابه الثاني أن تكون شروط التحديد (الشرط الابتدائي) للاجراءات المتشابهة متطابقة من حيث الوصف بشكل عام (الشروط الحدية) مع التنويه الى امكانية اختلاف القيم العددية

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

للثوابت المعطاة مثل القيمة المقاسة لسرعة جريان التيار الحر w_o ، درجة حرارة الجدار t_w ... الخ ....

ان مقارنة الشروط الحدية (a) و (d) الواردة في الفقرة (6-6) تبين أن :

الشروط الحدية اللاقياسية سوف تبقى نفسها لجميع هذه الاجراءات على الرغم من القيم المختلفة للثوابت المعطاة مثل

$$w_o \ , \ t_o \ , \ t_w \ , \ \ldots \text{ الخ ..}$$

من هاتين القاعدتين ينتج أن الاجراءات المتشابهة يجب أن توصف بمعادلات تفاضلية وشروط تحديد لاقياسيين متطابقة .

عند الصياغة بالشكل اللاقياسي فان الوصف الرياضي للاجراءات المتشابهة المعتبرة هنا يأخذ شكلا واحدا حيث يمكن وضعها بصيغة وحيدة على سبيل المثال :

$$Nu = F_1(X_w , Re , Pr)$$

أو :

$$\theta = F_2(X , Y , Re , Pr), \quad \ldots \text{ الخ ...}$$

يتطابق التابع F_1 بالنسبة لجميع الاجراءات المتشابهة كما هو الحال أيضا بالنسبة للتابع F_2 ... الخ .

يمكن أن تلحظ صعوبات رياضية معتبرة في ايجاد التوابع

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$F_2;F_1$ وذلك في الحالة التي يكون فيها نظام المعادلات اللاقياسية وشروط التحديد ذات طبيعة معقدة جدا ولكن يجب دائما التذكير أن هذه التوابع موجودة .

لايمكن اعتبار شرطي التشابه المذكورين أعلاه كافيين لوحدهما فقط لاعتبار تشابه فيزيائي تام حيث أنه من الضروري اضافة الشروط التي تجعل من الحدود الارجاعية للاجراءات المتشابهة متساوية عدديا أي :

$$X = idem^{*} \quad , \quad Y = idem \quad , \quad Re = idem$$

$$Pr = idem \quad , \quad Gr = idem^{*} \quad .....$$

بما أن الاجراءات المتشابهة تتميز بنفس التوابع F_2,F_1 وحدود ارجاع متساوية عدديا ، ينتج عن ذلك تساوي قيم الحدود اللاقياسية المجهولة عدديا أي :

$$Nu = idem \quad , \quad \theta = idem \quad , \quad W_x = idem$$

الخ .....

$$W_y = idem.....$$

٦-٩ النتائج الطبيعية لنظرية التشابه :

(Corollaries Of The Theory Of Similarity)

لنعتبر اجرائين متشابهين لانتقال الحرارة بالحمل وكمثال

* نفس الشيء = idem .

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

جريان مائع على طول مجاري ذات مقطع كيفي .

لنرمز لأحد الاجراشين بالرمز A وللاجراء الثاني بالرمز B. يمكن أن نأخذ كبعد ارجاع (قياسي) أية بعد خطي للمجرى A أو B وعلى سبيل المثال ارتفاعها h_A و h_B ومنه ؛

$$X_A = \frac{x_A}{h_A} \; ; \; Y_A = \frac{y_A}{h_A} \; , \quad Z_A = \frac{z_A}{h_A}$$

و :

$$X_B = \frac{xx_B}{h_B} , Y_B = \frac{y_B}{h_B} \; , \quad Z_B = \frac{z_B}{h_B}$$

لنعتبر سير الاجراشين A و B في النقاط المحددة وفق المعادلات التالية ؛

$$X_A = X_B \; , \; Y_A = Y_B \; , \; Z_A = Z_B \qquad (6\text{-}55)$$

تسمى النقاط التي تحقق هذه الشروط بالنقاط المتطابقة حيث تكون العلاقات التالية صحيحة بالنسبة لهذه النقاط ؛

$$XA = XB \frac{hA}{hB} = XB.C_L$$

$$yA = yB \frac{hA}{hB} = yB \; C_L$$

$$ZA = ZB \frac{hA}{hB} = ZB \; C_L$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$C_1 = \frac{hA}{hB}$$

حيث،

اذا كانت الكميات الداخلة في العلاقات (55-6) محققة بالنسبة لكلا الاجزائين فمن الواضح أن العلاقات التالية يجب أن تكون محققة بالنسبة للنقاط المتطابقة :

$$W_{xA} = W_{xB}$$

أو :

$$\frac{W_{xA}}{W_{oA}} = \frac{W_{xB}}{W_{oB}}$$

حيث W_{oA} و W_{oB} هي السرعات المعطاة وفق شروط التحديد ويمكن أن تكون هذه على سبيل المثال سرعات الدخول لكلا المجريين A و B على التوالي .

من المساواة الاخيرة ينتج :

$$\frac{W_{xA}}{W_{xB}} = \frac{W_{oA}}{W_{oB}} = C_w = \text{Const}$$

أي أن نسبة السرعات تبقى ثابتة عند أية نقطة متطابقة بالنسبة لكلا الاجزائين المتشابهين وبشكل مشابه يمكننا كتابة :

$$\frac{\alpha_A}{\alpha_B} = \frac{\lambda A}{\lambda B} \cdot \frac{h_A}{h_B} = C_\alpha = \frac{C_\lambda}{C_1} = \text{Const}$$

$$\frac{V_A}{V_B} = C_v = \text{Const} \quad , \text{etc..}$$

ومنه اذا كان الاجزائين A و B متشابهين تكون أية قيمة

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

فيزيائية φ عند نقطة معطاة من الاجراء A تتناسب مع قيمتهـا عند النقطة المطابقة من الاجراء B أي :

$$\varphi_A = C_\varphi \; ; \; \varphi_B \qquad (6\text{-}56)$$

تسمى عوامل التناسب C_φ بثوابت التشابه (Constants Of Similarity.) وهي لاقياسية ولاتساوي الواحد في الحالة العامة كما لاتعتمد على الاحداثيات ، الزمن أو الاتجاه .

في الحالة التي تكون فيها ثوابت التشابه مساوية للواحد يمكن القول عن الاجراءات بأنها متماثلة أو متطابقة. لايمكن أن يتم اختيار ثوابت التشابه اعتباطيا ولنوضح هذا بالمثال التالي :

من أجل اجرائي حمل قسري متشابهين A و B مع وجود الشروط أن Re_A , Re_B حيث :

$$Re_B = \frac{w_{oB} \cdot l_{oB}}{\nu_B} \quad , \quad Re_A = \frac{w_{oA} \cdot l_{oA}}{\nu_A}$$

يمكن نسب القيم المتناظرة في هاتين المعادلتين أن بعضها البعض عن طريق استعمال ثوابت التشابه :

$$\nu_A = C_\nu \cdot \nu_B \; , \; l_{oA} = C_l \cdot l_{oB} \; , \; w_{oA} = C_w \cdot w_{oB}$$

بادخال هذه العلاقات في معادلة Re_A نحصل على :

$$Re_A = \frac{C_w \cdot C_l}{C_\nu} \; \frac{w_{oB} \cdot l_{oB}}{\nu_B} = \frac{C_w \cdot C_l}{C_\nu} \cdot Re_B$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

أو:

$$\frac{Re_A}{Re_B} \cdot \frac{C_w \cdot C_l}{C_\nu} = 1$$

من هذه النتيجة يتوضح لنا الشرط الذي يحدد أو يقيد اختيار الثوابت C_w ، C_l و C_ν . بالتشابه مع ماسبق نجد :

$$\frac{pr_A}{pr_B} = \frac{C_\nu}{C_\alpha} = 1 \quad ; \quad \frac{Nu_A}{Nu_B} = \frac{C_\alpha \cdot C_l}{C_\lambda} = 1 \text{ ,...etc..}$$

٦-١٠- معامل انتقال الحرارة المكاني :

-(Local Heat-Transfer Coefficient)..

يحدد معامل انتقال الحرارة المكاني من المعادلة (6-4)

$$\alpha = \frac{dQ_w}{(t_w - t_f) \cdot df} = \frac{q_w}{t_w - t_f}$$

حيث أخذت الكميتان q_w ، t_w بالنسبة لعنصر السطح df .

في الحالة العامة لانتقال الحرارة بالحمل تتغير درجة حرارة المائع ضمن الحجم أو الفراغ المعتبرحيث يصبح من الضروري أن تحدد درجة حرارة المائع التي يمكن استعمالها في الحسابات .

من الشائع استعمال قيم مختلفة لدرجات الحرارة في الحسابات ، وعلى سبيل المثال في حالة جريان مائع ضمن أنابيب يمكن أن تأخذ كدرجة حرارة حسابية درجة الحرارة الوسطية للمائع

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$\bar{t}$ لكامل المقطع المعتبر أو درجة الحرارة الوسطية لمقطع الدخول $\bar{t}_{in}$.

بالاعتماد على القيمة المختارة لدرجة الحرارة الحسابية للمائع يمكن أن تتغير القيم العددية لمعامل انتقال الحرارة البطاني .

في هذا الكتاب سوف نأخذ كدرجة حرارة حسابية درجة الحرارة الوسطية للمائع على كامل المقطع العرضي للانبوب .

أما في الحالة التي نعتبر فيها انتقال الحرارة عبر سطح طلب ضمن جريان لانهائي فسوف نعتبر درجة الحرارة الحسابية هي درجة حرارة المائع للنقاط الكائنة مابعد حدود الطبقة الحدية الحرارية ....(Thermal Boundary Layer.) .

٦-١١ درجة الحرارة الوسطية على كامل مقطع الجريان :

-(Mean Fluid Temperature Over The Cross-Section Of Flow.).

في الحالة العامة تتغير درجة حرارة وسرعة المائع عبر المقطع العرضي للجريان ، يبين الشكل (6-12) التوزع الممكن لكل من t , w_x عبر مقطع انبوب معين ، لنعتبر في المقطع العرضي للانبوب عنصر مساحة df فيكون معدل التدفق الكتلي عبر df هو : $dG = \rho . w_x . df$.

وخلال df تساوي كمية الحرارة المنتقلة بالحمل عبر

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

واحدة الزمـــن الى :

$$dQ_x = \rho w_x . i . df$$



الشكل (12-6) توزع سرعة ودرجة حرارة
المائع على كامل المقطـــع العرضـــــي

بالمكاملة على كامل المقطع العرضي نحصل على كميةالحرارة المنتقلة باتجاه محور x خلال واحدة الزمن وللمقطع المعطى :

$$(a) \qquad Q_x = \int_o^f \rho\, w_x\, i\, df$$

وباعتبار انتالي نوعي وسطي $\bar{i}$ تصبح المعادلة علـــى الشكل :

$$(b) \qquad Q_x = \bar{i} \int_o^f \rho . w_x . df = \bar{i}\, G$$

من المعادلتين (a) و (b) ينتج :

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$\bar{i} = \frac{\int_o^{f_o} \rho . w_x . i . df}{\int_o^{f_o} \rho . w_x . df} = \frac{1}{G} \int_o^{f_o} \rho \cdot w_x i . df \qquad (6-57)$$

يسمى الانتالبي الوسطي المحسوب بالمعادلة (6-57) بالانتالبي الكتلي الوسطي ..(Mass Mean Enthaipy.) على كامل المقطع العرضي للجريان ، كما تسمى درجة الحرارة $\bar{t}$ والتي تناسب الانتالبي الكتلي الوسطي بدرجة الحرارة الكتلية الوسطية (Mass Mean Temperature.....) للمائع عبر كامل المقطع العرضي للجريان .

اذا اعتبرنا أن تغيرات قيم ρ و C_p في المقطع المعطى مهملة عندها تاخذ المعادلة (6-57) الشكل التالي :

$$\bar{t} = \frac{1}{f_o} \int_o^{f_o} t . df \qquad (6-59)$$

يمكن تحديد كل من درجة الحرارة والانتالبي الوسطيين بشكل أبسط تجريبيا عن طريق وضع جهاز مزج (خلاط) .

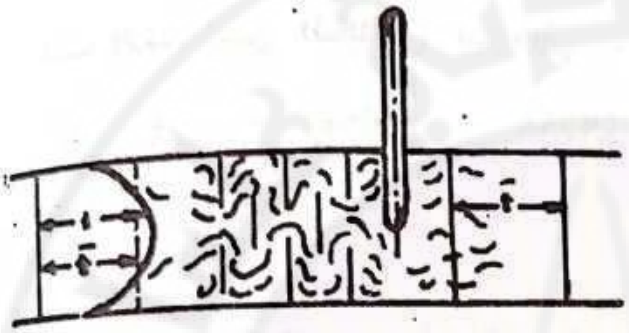
درجة حرارة المائع بعد جهاز المزج تصبح مساوية لدرجة الحرارة الوسطية والتي يمكن قياسها باخذ قراءة عند نقطة معينة (الشكل (6-13)) .

٦-١٢ .تحديد السيالة الحرارية من شروط توازن طاقة المائع:-(Determining The Heat Flux From The Fluid Energy Balance).

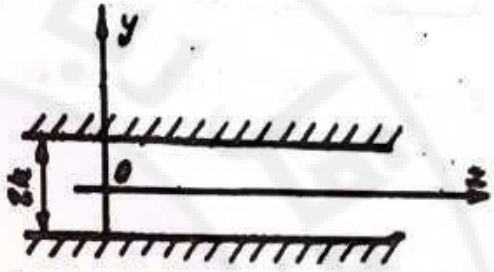
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

لنعتبر جريان صفائحي لسائل غير قابل للانضغاط ضمن قناة مستوية ارتفاعها 2h صغير جدا بالمقارنة مع عرضها b .

نفترض أن حقلي السرعة والانتالبي ثابتين بالنسبة لكامل المستوي xz, (الشكل (6-14)) .



الشكل (13-6) التحديد التجريبي لدرجة الحرارة الوسطية



الشكل (14-6) تحديد السيانة الحرارية طبقا لتوازن الطاقة في المائع

ان ثبوت الانتالبي والسرعة في المستوي المذكور يؤدي بدوره الى ثبوت الحقل الحراري على كامل oxz ، بسهولة نرى أنه عند $y = 0$ فان مركبات الشعاع الممثل لمعدل تدفق الحرارة:

$$q_y\ Cond = \frac{-\partial t}{\partial y}$$

و $q_y\ Conv = g.w_y^i$ تساوي الى الصفر في المجالات $(0,+h)$ و $(0,-h)$ تكون لمركبات شعاع معدل التدفق q اشارات جبرية مختلفة ولكنها تكون متساوية عند نفس القيمة $/y/$.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

يمكن القول بأن المستوي xz يعتبر مستويا اديباباتيكيا.

كما تسمح لنا الشروط المفترضة باهمال المشتقات بالنسبة لـ z .

من أجل الحالة المعتبرة تأخذ معادلة الطاقة الشكل التالي :

$$\rho \left(\frac{\partial i}{\partial \tau} + w_x \frac{\partial i}{\partial x} + w_y \frac{\partial i}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial t}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda \frac{\partial t}{\partial y}\right) + q_v$$

باضافة الحد :

$\rho \cdot i \left(\partial w_x / \partial x + \partial w_y / \partial y\right)$ الى الطرف الايسر

من المعادلة ونحصل على :

$$\rho \cdot \frac{\partial t}{\partial \tau} + \rho \cdot w_x \frac{\partial t}{\partial x} + \rho \cdot i \frac{\partial w_x}{\partial x} + \rho \cdot w_y \frac{\partial i}{\partial y} + \rho \cdot i \frac{\partial w_y}{\partial y} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial t}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda \frac{\partial t}{\partial y}\right) + q_v$$

أو:

$$\rho \frac{\partial i}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho \cdot w_x i\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho \cdot w_y i\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial t}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda \frac{\partial t}{\partial y}\right) + q_v$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

وبضرب طرفي المعادلة الاخيرة بـ dy والمكاملة بالنسبة لـ y بين الحدين $y = 0$ و $y = h$:

$$\int_0^h \rho \frac{\partial i}{\partial \tau} dy + \int_0^h \frac{\partial(\rho w_x i)}{\partial x} dy + \int_0^h \frac{\partial(\rho w_y i)}{\partial y} dy \qquad (6\text{-}60)$$

$$= \int_0^h \frac{\partial}{\partial x}(\lambda \frac{\partial t}{\partial x})\, dy + \int_0^h \frac{\partial}{\partial y}(\lambda \frac{\partial t}{\partial y}) dy + \int_0^h q_v . dy$$

يساوي التكامل الثالث في الطرف اليساري من المعادلة الاخيرة باعتبار أنه عند $y = h$ فان $w_y = 0$ بسبب وجود الحاجز (الجدار) .

عند $y = 0$ تكون $w_y = 0$ بسبب تناظر الجريان .

لنحسب الان التكامل الثاني من الطرف الايمن للمعادلة (6-60):

$$\int_0^h \frac{\partial}{\partial y}(\lambda \frac{\partial t}{\partial y})\, dy = \lambda \frac{\partial t}{\partial y}\Big|_0^h = \lambda(\frac{\partial t}{\partial y})_{y=h} = -q_w$$

بالتعويض في المعادلة (6-60) :

وباعتبار أن المتحولات τ , x و y هي متحولات مستقلة فانه يمكن تغيير ترتيب التفاضلات بالنسبة لـ τ , x والتكامل بالنسبة لـ y .

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

بالتوصيل والحمل معا ويعبر الحد الثالث عن كمية الحرارة المتولدة من المصادر الحرارية الداخلية .

تتحدد كمية الحرارة التي تعبر جدران انبوب ذو طبـــول 1 بالطريقة التالية :

$$Q_w = \int_0^1 q_w . u . dx \qquad (6-63)$$

اذا كان $q_w = 0$ ، $/\lambda \frac{\partial t}{\partial y}/ \geq /\rho . w_x . i/$ اضافة الـــى كون الاجراء من النوع المستقر ينتج من المعادلة (6-62) أن :

$$q_w = -\frac{1}{u}\left(\frac{d}{dx}\int_0^{F_o} \rho . w_x . i . dF\right) = -\frac{1}{u} dQ_x/dx$$

ومنه :

$$Q_w = -\int_0^1 \frac{1}{u} . \frac{dQ_x}{dx} \quad , \quad dx = Q_{x=0} - Q_{x=1}$$

$$= (\bar{i} . G)_{x=0} - (\bar{i} . G)_{x=1}$$

أو باعتبار أن : $G = Const.$.

$$Q_w = G . (\bar{I}_{x=0} - i_{x=1}) \qquad (6-64)$$

اذا كانت $C_p = Const.$ عندها يمكن تمثيل المعـــادلـــة (6-64) بالشكل التالي :

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$Q_w = G.c_p(\bar{t}_{x=0} - \bar{t}_{x=1}) \qquad (6-65)$$

يكون المعدل المكاني للتدفق الحراري :

$$q_w = \frac{G.c_p}{u} \cdot \frac{d\bar{t}}{dx} \qquad (6-66)$$

تستعمل المعادلتين (6-62) و (6-63) بشكل واسع في الحسابات العملية حيث تكونا صحيحتين في الاجراءات البسيطة نسبيا

في الحالات الاعم يجب أن يتم الحساب باستعمال المعادلتين (6-62) و (6-63) .

تجب ملاحظة أن تطبيق المعادلتين (6-64) و (6-65) مشروط بعدة أمور من بينها وجوب كون المقطع العرضي للقناة ثابتا.

تكون المعادلة (6-64) صحيحة أيضا في حالة الجريان المضطرب للمائع .

٦-١٣ قياس معدل تدفق الحرارة ودرجة حرارة كل من الجدار والمائع على طول انبوب :

-(Measuring The Rate Of Heat Flow, Fluid And Wall Temperature Along a tube.).

لنوجد توزع درجة الحرارة الكتلية الوسطية t على كامل مقطع الجريان وعلى طول انبوب ، نفترض أن شكل توزع معامل انتقال

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الحرارة المكاني $\alpha = \alpha(x)$ وشكل توزع درجة حرارة الجدار $t_w = t_w(x)$ معروفين لدينا .

بالتطابق مع المعادلة (6-66) ومن أجل عنصر طولي dx من الانبوب يمكننا كتابة :

$$q_w(x).u.dx = \alpha(x).\left[t_w(x) - t\right]u.dx = G.c_p.dt \qquad (6\text{-}67)$$

حيث وكما افترضنا سابقا G, c_p و u مستقلة عن المتحول x والذي يتم قياسه اعتبارا من بداية الانبوب .

يمكن تمثيل المعادلة (6-67) بالشكل التالي :

$$\frac{dt}{dx} + f(x)i = g(x) \qquad (6\text{-}68)$$

$$f(x) = \frac{a(x).u}{G.c_p} \quad ; \quad g(x) = f(x).t_w(x)$$

لنستعمل طريقة لافرانج لتغيرات الثابت الكيفية $C(x)$ تبعا لهذه الطريقة يأخذ الحل الشكل التالي :

$$t = C(x)\ Exp^{*}\left[-\int_{o}^{x} f(x).dx\right] \qquad (6\text{-}69)$$

بالتبديل عن قيمة t من المعادلة (6-69) في المعادلة (6-68) نحصل على :

$$Exp(x) = e^{x}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$\text{Exp}\left[-\int_0^x f(x).dx\right]\frac{dC(x)}{dx} - C(x).f(x).\text{Exp}\left[-\int_0^x f(x)dx\right]$$

$$+ C(x).f(x).\text{Exp}\left[-\int_0^x f(x).dx\right] = g(x)$$

بعد الاطلاع :

$$\frac{dC(x)}{dx} = g(x).\text{Exp}\left[\int_0^x f(x).dx\right]$$

بفصل المتحولات والمكاملة بين $x = 0$ و x نحصل على :

$$C(x) = \int_0^x g(x).\text{Exp}\left[\int_0^x f(x).dx\right] + C(0)$$

حيث $C(0)$ هي قيمة الثابت الكيفية عند $x = 0$.

عند استبدال $C(x)$ في المعادلة (6-69) نجد أن :

$$t = \left\{C(0)+\int_0^x g(x).\text{Exp}\left[\int_0^x f(x).dx\right]\right\}\text{Exp}\left[-\int_0^x f(x).dx\right]$$

لنرمز لدرجة حرارة المائع عند مدخل الانبوب $t(0)$ بـ t_o

من المعادلة الاخيرة وعند $x = 0$ ينتج أن :

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$t_o = \left\{ C(0) + \int_o^o g(x).Exp\left[\int_o^o f(x).dx \right] dx \right\} .$$

$$. Exp\left[- \int_o^o f(x).dx \right] = C(0)$$

بتعويض قيمة $C(0)$ نحصل على :

$$t = \left[t_o + \int_o^x g(x).e^{\varphi(x)} .dx \right] e^{-\varphi(x)} \qquad (6-70)$$

حيث :

$$\varphi(x) = \int_o^x f(x).dx = \int_o^x \frac{\alpha(x)u}{G.c_p} dx \qquad (6-71)$$

$$g(x) = \frac{\alpha(x).u}{G.c_p} t_w(x)$$

لنعتبر بعض الحالات الخاصة من المعادلة (6-70) باعتبار أن $t_w = Const$ ينتج :

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \int_o^x f(x).dx = f(x)$$

$$\varphi(0) = \int_o^o f(x).dx = 0$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

حيث نحصل من المعادلة (6-70) على :

$$t = \left[t_o + \int_o^x f(x).t_w.e^{\varphi(x)}.dx\right] . e^{-\varphi(x)}$$

$$= \left[t_o + t_w \int_o^x \frac{d\varphi}{dx}.e^{\varphi(x)}.dx\right] e^{-\varphi(x)}$$

$$= \left[t_o + t_w \int_o^{\varphi(x)} e^{\varphi(x)}.d\varphi\right] e^{-\varphi(x)}$$

$$= \left[t_o + t_w(e^{\varphi(x)} - 1)\right] e^{-\varphi(x)} = t_w + (t_o - t_w).e^{-\varphi(x)}$$

باعتبار أن $v = t - t_w$ وبالتالي $v_o = t_o - t_w$ حيث v_o فرق درجات الحرارة الابتدائي يمكن وضع النتيجة بالشكل التالي :

$$v = v_o.e^{-\varphi(x)} = v_o.Exp\left[-\int_o^x \frac{\alpha(x).u}{G.c_p}.dx\right] \qquad (6\text{-}72)$$

تعد المعادلة (6-72) تغيرات كل من درجة الحرارة الكتلية والوسطية بالنسبة لمقطع الجريان للمائع على طول الانبوب وفرق درجات الحرارة (عند $t_w = Const.$).

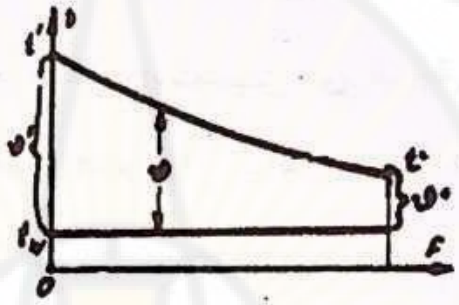
اذا كانت قيمة α ثابتة أيضا ، يكون :

$$\varphi(x) = \int_o^x \frac{\alpha.u}{G.c_p}\,dx = \frac{\alpha.u}{G,c_p}\,x = A.x$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

يبين الشكل (15-6) تغيرات درجة حرارة المائع (المتعلق بفرق درجات الحرارة) والتي تناسب الشروط، $t_w=Const$ و $\alpha=Const$

اذا أمكن ايجاد العلاقة $t(x)$ عند قيم معطاة لـ $\alpha(x)$ و $t_w(x)$ عندها يمكن بسهولة استخدام قانون نيوتن لتحديد توزع $q_w(x)$.



الشكل (15-6) تغير هبوط درجة الحرارة v على طول انبـــوب مع $t_w=Const.$ و $\alpha=Const.$.

في الحالة الخاصة عندما $\alpha-Const.$ و $t_w-Const.$

لدينا:

$$q_w(x) = \alpha\left[t_w - t(x)\right] = -\alpha v = -\alpha . v_o . e^{-Ax}$$

تكون تغيرات q_w مشابهة لتغيرات درجة حرارة المائع المبينة في الشكل (15-6) .

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

إذا كان معلوما لدينا العلاقات $\alpha(x)$ و $q_w(x)$ ينتج من المعادلة (6-66) أن :

$$dt = \frac{u}{G.c_p} q_w(x).dx$$

أو :

$$\int_{t_o}^{t} dt = \frac{u}{G.c_p} \int_{o}^{x} q_w(x).dx$$

وكنتيجة فانه يمكن التعبير عن درجة الحرارة الكتلية والوسطية على كامل مقطع الجريان بالمعادلة :

$$t = t_o + \frac{u}{G.c_p} \int_{o}^{x} q_w(x).dx \qquad (6-73)$$

من أجل الحالة الخاصة q_w : Const. ينتج من المعادلة (6-73) أن :

$$t = t_o + \frac{q_w.u}{G.c_p} x$$

أي أن تغير درجة حرارة المائع على طول الانبوب يتم بشكل خطي .

في الحالة التي يكون فيها معامل انتقال الحرارة المكاني α ثابتا أيضا ، ينتج من قانون نيوتن أن :

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$t_w(x)-t(x) = \frac{q_w}{\alpha} = \text{Const.}$$

أي أن فرق درجات الحرارة لايتغير على طول الانبوب .

باعتبار أنه عند $q_w = \text{Const.}$ تكون درجة الحرارة t تابعا خطيا للاحداثي x ويكون تغير درجة حرارة الجدار t_w خطيا أيضا .

من قانون نيوتن والمعادلة (6-73) وعندما $\alpha = \alpha(x)$ و $q_w = q_w(x)$ نحصل على :

$$t_w = t(x) + \frac{q_w(x)}{\alpha(x)} = \tag{6-75}$$

$$= t_o + \frac{q_w(x)}{\alpha(x)} + \frac{u}{G.c_p}\int_o^x q_w(x).dx.$$

٦-١٤- المعامل الوسطي لانتقال الحرارة وفرق درجات الحرارة :
-(Averaging Heat-Transfer Coefficients And Temperature-Difference.).

غالبا ما تتطلب حسابات انتقال الحرارة معرفة معامل انتقال الحرارة السطحي الوسطي .

يتحدد معامل انتقال الحرارة الوسطي α من قانون نيوتن كمايلي :

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$\bar{\alpha} = \frac{Q_w}{\Delta\bar{t}.F} = \frac{\bar{q}_w}{\Delta\bar{t}} \qquad (6\text{-}76)$$

بحساب القيم الوسطية التكاملية لكل من معدل تدفق الحرارة $\bar{q}_w$ وفرق درجات الحرارة $\Delta\bar{t}$ عندها يمكن تمثيل الدستور (6-76) بالشكل التالي :

$$\alpha = \frac{\bar{q}_w}{\Delta t} = \frac{\frac{1}{F_o}\int_o^{F_o} q_w.df}{\frac{1}{F_o}\int_o^{f_o} \Delta t.df} = \frac{\int_o^{F_o} \alpha.\Delta t.dF}{\int_o^{F_o} \Delta t.dF} \qquad (6\text{-}77)$$

حيث F_o ترمز الى كامل السطح الذي يتم حساب القيمة الوسطية لـ α و q_w بالنسبة اليه .

اذا كان معامل انتقال الحرارة المكاني α يتغير فقط في اتجاه محور احداثي واحد ، عندها يكون :

$$\bar{\alpha} = \frac{\int_o^{x_o} \alpha.\Delta t.dx}{\int_o^{x_o} \Delta t.dx} \qquad (6\text{-}77')$$

يتحدد المعامل الوسطي التكاملي لانتقال الحرارة كمايلي:

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{F_o}\int_o^{F_o} \alpha.dF \quad \& \quad \alpha = \frac{1}{x_o}\int_o^{x_o} \alpha.dx \qquad (6\text{-}78)$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

القيم المتوسطة الناتجة وفق المعادلات (6-77) و(6-78) يمكن أن تعطي نتائج مختلفة وفي بعض الحالات يمكن أن يصل هـــذا الفرق الى عدة عشرات بالمئة .

اذا كان $\Delta t = t_w - t_f$ =Const. يتحول القانون (6-77) الى القانون (6-78) وبالتالي يمكن اعتبار المعادلة الاخيـــرة كحالة خاصة من المعادلة (6-77) .

في الوقت الحاضر نستعمل كلا طريقتي حساب الوسطي فـــي حسابات انتقال الحرارة عندما $\Delta t \neq$ Const. مع اعطـــاء الافضلية للطريقة الاولى والمعبر عنها بالمعادلة (6-77) .

عندما $\Delta t \neq$/Const فان استعمال المعامل الوسطـــي التكاملي لانتقال الحرارة يجعل من الضروري أن نقدم في الحسابـــات فرق درجات حرارة وسطي ذو اختياز خاص حيث عندها فقط يمكـــن الحصول على قيمة صحيحة للسيالة الحرارية .

من الان وصاعدا سوف يتم وضع اشارة افقية فوق الرمز الدال على القيم الوسطية لمعامل انتقال الحرارة $\bar{\alpha}$ وعددنسل $\overline{Nu}$ (اضافة الى الكميات الوسطية الاخرى) ، عندماتحسب القيمة الوسطية لمعامل انتقال الحرارة على كامل السطح المعتبر عندها فان $\bar{\alpha}$ سوف لاتعتمد على الاحداثيات

ولكن اذا تم حساب القيمة الوسطية للمعامل من أجل مقاطع جزئيـــة من السطح عندها فان القيم الوسطية الناتجة يمكن أن تختلف في الحالة العامة من مقطع الى آخر .

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

تسمح المعادلات المحسوبة من أجل مقطع معطى من حيث المبدأ بحساب فرق درجات الحرارة الوسطي التكاملي :

$$\bar{t} = \frac{1}{F_o}\int_o^{F_o} \Delta t.dF \quad \text{or} \quad \Delta\bar{t} = \frac{1}{x_o}\int_o^{x_o} \Delta t.dx \qquad (6\text{-}79)$$

والذي يتطلب حساب انتقال الحرارة بالقانون (6-77) .

ومع ذلك وفي الحالة العامة يمكن أن يتضمن حساب فرق درجات الحرارة الوسطي التكاملي صعوبات معتبرة (وخصوصا عندما يتم تحديد معامل انتقال الحرارة الوسطي تجريبيا)، لذلك يتم غالبا تحديد معاملات انتقال الحرارة الوسطية بالمعادلة (6-76) باستعمال المتوسط الحسابي لدرجات الحرارة:

$$\Delta\bar{t}_{ar} = \frac{\Delta t_1 + \Delta t_2}{2} \qquad (6\text{-}80)$$

أو باستعمال المتوسط اللغاريتمي لدرجات الحرارة :

$$\Delta\bar{t}_{log} = \frac{\Delta t_1 - \Delta t_2}{\ln \Delta t_1 / \Delta t_2} \qquad (6\text{-}81)$$

(حيث Δt_1 و Δt_2 على التوالي فرق درجات الحرارة المكاني عند بداية ونهاية المقطع المتوسط) تعتبر فروقات درجات الحرارة $\Delta\bar{t}_{ar}$ و $\Delta\bar{t}_{log}$ حالات خاصة من فرق درجات

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الحرارة الوسطي التكاملي ومن المعتاد استعمالها .

لنستخرج الان العلاقة (6-81) بفرض أن $t_w = Const.$

عندها يتحدد فرق درجات الحرارة المكاني من المعادلة (6-72) كنتيجة :

$$\overline{\Delta t} = \bar{v} = \frac{1}{x}\int_0^x v.dx = \quad (6-82)$$

$$= \frac{1}{x}\int_0^x v_o.Exp\left[-\int_0^x f(x).dx\right]$$

حيث : $f(x) = \alpha(x)u/G.c_p$. بطرح مفهوم القيمة الوسطية التكاملية لمعامل انتقال الحرارة للمقطع $x - 0$ يمكننا كتابة :

$$\frac{\bar{\alpha}.u}{G.c_p} = \bar{f}.x = \int_0^x f(x).dx$$

بتعويض التعبير الاخير في المعادلة (6-82) والمكاملة نحصل على :

$$\bar{v} = \frac{1}{x}\int_0^x v_o.e^{-\bar{f}x}.dx =$$

$$= -\frac{v_o}{x}\left|\frac{e^{-\bar{f}x}}{\bar{f}}\right|_0^x = \frac{v_o}{x\bar{f}}(e^{-\bar{f}x}-1)$$

من المعادلة ينتج أن : $v = v_o.Exp(-\bar{f}x)$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$\ln \frac{v}{v_o} = -\bar{f}x \quad , \quad \frac{v}{v_o} = e^{-\bar{f}x}$$

بتعويض هذه القيم في المعادلة الخاصة بـ $\bar{v}$ نحصل على:

$$\bar{v} = \frac{v_o}{\ln v/v_o} \left[\frac{v}{v_o} - 1\right] =$$

$$= \frac{v_o - v}{\ln v_o/v} = \frac{\Delta t_1 - \Delta t_2}{\ln \Delta t_1/\Delta t_2} = \Delta \bar{t}_{log}$$

اذن ينتج فرق درجات الحرارة الوسطي اللوغاريتمي عن الفرق الوسطي التكاملي بأخذ t_w=Const. وأخذ القيمة الوسطية لمعامل انتقال الحرارة بواسطة المعادلة (6-78) (أو α=Const.)

أيضا يتم التقيد بالفرضيات المفترضة أثناء استخراج الدساتير (6-66) أو (6-72) .

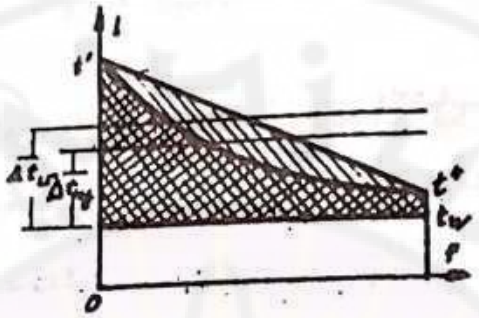
لنقارن $\Delta \bar{t}_{ar}$ و $\Delta \bar{t}_{log}$.

تناسب المساحات المهشرة المبينة في الشكل (6-16) القانونين الاسي والخطي الناظمين لتغيرات درجة حرارة المائع على طول سطح انتقال الحرارة وعند t_w = Const. (المنحنيات "t't و "tt) .

تتناسب المساحات المهشرة على التوالي لكل من فرقي

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

درجات الحرارة الوسطيين $\Delta\bar{t}_{ar}$ و $\Delta\bar{t}_{log}$ ينتج من المقارنة أن : $\Delta\bar{t}_{ar} > \Delta\bar{t}_{log}$.



الشكل (16-6) مقارنة فرق درجات الحرارة الوسطية اللغاريتمي والحسابي

اذا كان $\Delta t_2 / \Delta t_1 > 0.5$ ومنه ولدقة كافية لمعظم حسابات انتقال الحرارة يتطابق فرق درجات الحرارة الوسطي اللوغاريتمي مع فرق درجات الحرارة الوسطي الحسابي(الفرق فيما بينهما أقل من 4%) .

مماسبق بحثه في هذا الفصل فان القيم العددية لـ $\bar{\alpha}$ يمكن أن تعتمد على طريقة التحديد وبشكل خاص على اختيار القيمة الحسابية لـ $\Delta\bar{t}$ وعند الحصول على $\bar{\alpha}$ يجب الاشارة الى طريقة التحديد .

٦-١٥ انتقال الحرارة في حالة الجريان الصفائحي في الانابيب (Heat Transfer In Case Of Laminar Flow In a Tubes.)-

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

تتغير شدة التبادل الحراري في الانابيب المستقيمة الملساء ضمن مجال واسع حيث تخضع بالدرجة الاولى الى سرعة جريان التيار السائلي ضمن هذه الانابيب .

يمكن أن يكون جريان السائل في الانابيب صفائحيا أو مضطربا ،ويتحددنظام الجريان هذا بعدد رينولدز اللاقياسي حيث يكون نظام الجريان صفائحي عندما $R_e < 2300$

يؤثرالحمل في حالة الجريان الصفائحي على عملية تغير سرعة الجريان عبر المقطع كما يؤثر على شدة التبادل الحراري .

في الجريان الصفائحي وعند عدم وجود حمل طبيعي تتم عملية التبادل الحراري عن طريق التوصيل الحراري فقط ومع ظهور حركة حرة للجريان فان الحرارة تنتقل بكل من التوصيل الحراري والحمل .

تتغير قيمة معامل الانتقال الحراري على طول قناة الجريان حيث تكون قيمته كبيرة عند مدخل القناة ويصبح مستقرا على مسافة قدرها 50 d اعتبارا من المدخل .

لتحديد قيمة معامل الانتقال الحراري الوسطي في حالة الجريان الصفائحي على طول الانابيب الملساء نستعمل العلاقة التالية :

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$Nu_m = 0.15\ Re_m^{0.33} \cdot Pr_m^{0.43} \cdot Gr_m^{0.1} \left(\frac{Pr_m}{Pr_s}\right)^{0.25} \qquad (6\text{-}83)$$

حيث s ترمز للسطح و m للسائل .

وبالنسبة للهواء تصبح المعادلة :

$$Nu_m = 0.13\ Re_m^{0.33} \cdot Gr_m^{0.1} \qquad (6\text{-}84)$$

بعد تحديد قيمة عدد نسل من المعادلة (6-83) أو (6-84) يمكن بالتالي تحديد قيمة معامل الانتقال الحراري الوسلي حسب العلاقة التالية :

$$\alpha = Nu \cdot \frac{\lambda}{d} \qquad (6\text{-}85)$$

مع التنويه الى أنه عند حساب الاعداد اللاقياسية التي تدخل في المعادلات السابقة فانه يجب استخدام درجة حرارة السائل الوسطية $\bar{t}_m$ والسرعة الوسطية للسائل في الانبوب .

بواسطة المعادلتين (6-83) و (6-85) نحصل على قيمة معامل الانتقال الحراري الوسلي عند $\frac{1}{d} > 50$ حيث تطبق هذه المعادلات بالنسبة لأية سائل يجري في الانابيب مع الاخذ بعين الاعتبار تأثير الحمل الطبيعي واتجاه الجريان .

في الحالات التي نستخدم فيها أنابيب ذات $\frac{1}{d} < 50$ فانه

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

يمكن حساب قيمة $\bar{\alpha}$ أيضا من المعادلتين السابقتين مع اعتبار معامل تصحيح $\bar{\varepsilon}_1$ نضرب به الطرف اليميني من المعادلتين .

ترتبط قيمة معامل التصحيح $\bar{\varepsilon}_1$ بقيمة النسبة $\frac{1}{d}$ وفقا للجدول التالي :

جدول (1-6)

1/d	1	2	5	10	15	20	30	40	50
$\bar{\varepsilon}_1$	1.9	1.7	1.44	1.28	1.18	1.13	1.05	1.02	1.0

تتحدد جهة التيار الحراري وفق النسبة $(\frac{Pr_m}{Pr_s})^{0.25}$.

بالنسبة للهواء والغازات الثنائية الذرة لايرتبط عدد براندل بدرجة الحرارة لذلك يكون :

$$\frac{Pr_m^{\circ}}{Pr_s} = 1$$

١٦-٦ انتقال الحرارة في حالة الجريان المضطرب للسوائل في الانابيب :

(Heat Transfer In Case Of Turbulant Fluid Flow In Tubes...)

في حالة الجريان المضطرب للسوائل فان عملية الازاحة (انتقال الكتل) تتم بشكل كبير حيث لايلعب الحمل الطبيعي تقريبا دورا هاما في عملية الانتقال الحراري .

عمليا تكون درجة حرارة السائل في مركز المقطع ثابتة

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

حيث يظهر التغير الكبير في درجة الحرارة فقط في الطبقة الحدية ويلاحظ أن شدة الانتقال الحراري في حالة تبريد السائل أكبرمنها في حالة تسخينه وهذا يتبع بشكل قوي ومباشر للنسبة :

$$\left(\frac{Pr_m}{Pr_s}\right)^{0.25}$$

لتحديد معامل الانتقال الحراري الوسطي عندما $Re_m > 10^4$ يمكن استخدام العلاقة التالية :

$$Nu_m = 0.021\ Re_m^{0.8}\ .\ Pr_m^{0.43}\ .\ \left(\frac{Pr_m}{Pr_s}\right)^{0.25} \qquad (6\text{-}86)$$

وبالنسبة للهواء :

$$Nu_m = 0.018\ Re_m^{0.8} \qquad (6\text{-}87)$$

في كلا المعادلتين (6-86) و (6-87) نعتبر فقط درجة الحرارة الوسطية للسائل $\bar{t}_m$ حيث يمكن استخدام هاتين المعادلتين ضمن المجال التالي لعدد رينولدز :

$$Re_m = 1 \times 10^4 \div 5 \times 10^6$$

ولمجال عدد براندل :

$$Pr_m = 0.6 \div 2500$$

بعد حساب قيمة عدد نسل Nu_m يمكن بالتالي تحديد قيمة

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$\bar{\alpha}$ كما مرمعنا في حالة الجريان الصفائحي مع التنويه أنه في حالة الانابيب ذات النسبة $l/d < 50$ تكبر قيمة معامل الانتقال الحراري $\bar{\alpha}$.

من أجل حساب قيمة هذا المعامل نضرب الطرف اليميني من المعادلة (6-86) أو (6-87) في حالة الهواء بمعامل التصحيح $\bar{\varepsilon}_l$ والذي نحصل عليه من الجدول التالي [جدول (6-2)]:

$\frac{l}{d}$	$\bar{\varepsilon}_l$		
	$Re = 2 \times 10^3$	$Re = 2 \times 10^4$	$Re = 1 \times 10^5$
1	1.9	1.51	1.28
2	1.7	1.4	1.22
5	1.44	1.27	1.15
10	1.28	1.18	1.1
15	1.18	1.13	1.08
20	1.13	1.1	1.06
30	1.05	1.05	1.03
40	1.02	1.02	1.02
50	1.0	1.0	1.0

جـــدول (6-2).

في حالة الجريان المضطرب ضمن الانابيب الحلزونية تكبر عندئذ قيمة معامل الانتقال الحراري ولحساب هذا المعامل نضرب المعادلتين السابقتين بمعامل التصحيح التالي :

$$\bar{\varepsilon}_{zm} = 1 + 3.6 \frac{d}{D} \qquad (6\text{-}88)$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

حيث :

d قطر الانبـــوب .

D قطر انحنـاء الانبوب الحلزوني .

يسمى مجال الجريان الذي يناسب $Re_m = 2300 \div 1x10^4$ بالمجال الانتقالي حيث تتغير قيمة معامل الانتقال الحراري بصورة فجائية حسب الحالة .

في هذه الحالة يمكن أن نحصل على قيمة معامل الانتقـال الحراري الوسطي من المعادلة التالية :

$$K_o = Nu_m . Pr_m^{-0.43} . \left(\frac{Pr_m}{Pr_s}\right)^{-0.25} \qquad (6-39)$$

حيث K_o يتبع لعدد رينولدز ضمن المجال $Re_m = 2x10^3 \div 1x10^4$ $\left[K_o - f(Re_m)\right]$ وفقا للجدول (6-3) :

$Re_m x10^3$	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	3	4	5	6	8	10
K_o	1.9	2.2	3.3	3.8	4.4	6	10.3	15.5	19.5	27	33.3

الجـــدول (6-3)

٦-١٧ الانتقال الحراري عند جريان سـائل على طول صفيحـــة -(Heat Transefer In Case Of Fluid Flow Over a Flat Sheet.).

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

تتحدد طبيعة الانتقال الحراري من السائل الى الصفيحة المستوية وفقا لنظام جريان السائل على سطح الصفيحة حيث تتشكل قرب سطح الصفيحة طبقة محيطة ذات حركة صفائحية أو مضطربة وحتى في الحالة التي تكون الطبقة مضطربة فانه تبقى هنالك طبقة صفائحية رقيقة (حدية) بالقرب من سطح الصفيحة ذات مقاومة حرارية .

يتحدد معامل الانتقال الحراري الوسطي في حالة الجريان على صفيحة من العلاقة التالية :

a) في حالة الجريان المضطرب ، أي عندما : $Re_m > 4 \times 10^4$

$$Nu_m = 0.037\, Re_m^{0.8}\, Pr_m^{0.43} \left(\frac{Pr_m}{Pr_s}\right)^{0.25} \qquad (6\text{-}90)$$

b) في حالة الجريان الصفائحي أي عندما : $Re_m < 4 \times 10^4$

$$Nu_m = 0.66 \times Re_m^{0.5}\, Pr_m^{0.43} \left(\frac{Pr_m}{Pr_s}\right)^{0.25} \qquad (6\text{-}91)$$

c) في حالة جريان مضطرب ($Re_m > 4 \times 10^4$) من أجل الهواء أو الغازات ثنائية الذرة :

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$Nu_m = 0.032\ Re_m^{0.8} \qquad (6\text{-}92)$$

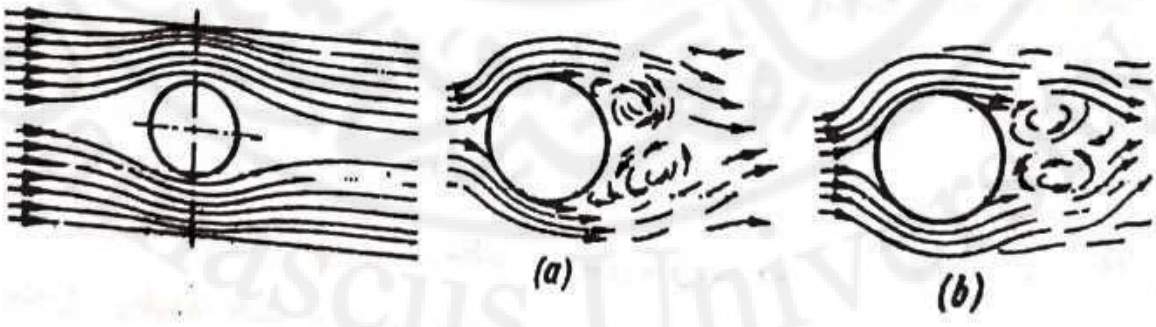
d) حالة الهواء أو الغازات الثنائية الذرة، جريان صفائحي : $(Re_{em} < 4x10^4)$

$$Nu_m = 0.57\ Re_m^{0.5} \qquad (6\text{-}93)$$

٦-١٨ التبادل الحراري في حالة انسياب (جريان) عرضي على انبوب وحيد :

-(Heat Transfer For a Single Round Tube In Cross Flow.).

تنطوي عملية التبادل الحراري في حالة جريان عرضي على انبوب اسطواني وحيد على مواصفات خاصة فمن الشكلين (6-17) و (6-18) نلاحظ أن الجريان الانسيابي على سطح الانبوب يشمل فقط المنطقة الجبهية من سطح الانبوب (تتراوح مابين 160^o-170^o) أما الجزء الاخر من سطح الانبوب فان الجريان حوله يكون بشكل اعصار



الشكل (6-18) الجريان العرضي حول اسطوانة a)طبقة صفائحية ، b) طبقة مضطربة

الشكل (6-17) الجريان العرضي حول اسطوانة

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

وبقدر مايكون الجريان مضطربا بقدر مايؤدي الى نقصان المنطقة الاصطارية حول الانبوب وتحسين المنطقة الانسيابية .

نتيجة لهذه الصورة يكون معامل الانتقال الحراري حول الانبوب متغيرا وتكون له أكبر قيمة حيث تكون الطبقة المحيطة (الحدية) أصغر مايمكن أي في النقطة $\varphi = 0$ (نقطة الركود) .

تزداد سماكة الطبقة المحيطة على طول الجريان على سطح الانبوب حيث تكون قيمتها أعظمية عند خط استواء الانبوب ($\varphi=90^{\circ}$).

نتيجة لزيادة سماكة الطبقة المحيطة تنقص بالتالي قيمة معامل الانتقال الحراري الى أن يأخذ أدنى قيمة له في المنطقة الاستوائية .

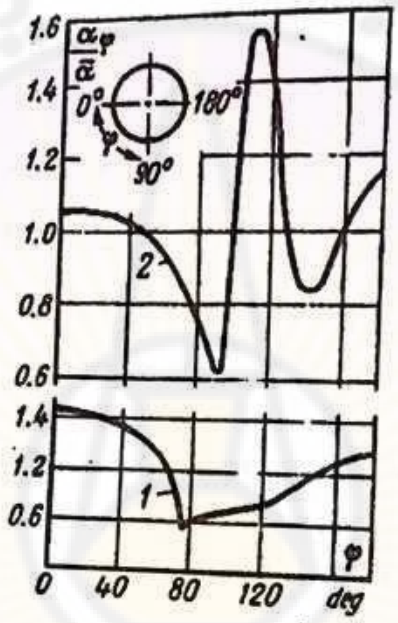
بعد المنطقة الاستوائية ($90^{\circ} < \varphi < 270^{\circ}$) تبدأ الطبقة المحيطة في مؤخرة الانبوب بالتحلم أي تنتص سماكتها وبالتالي تأخذ قيمة معامل انتقال الحرارة في الزيادة حيث يصل الى قيمته العظمى عندما $\varphi = 180^{\circ}$.

يبقى ماذكر أعلاه صحيحا ضمن مجال عدد رينولدز $Re = 5 \div 2 \times 10^5$ مع ملاحظة أنه عندما يكون $Re < 5$ يكون الجريان انسيابي على طول سطح الانبوب وعندما $Re > 2 \times 10^5$ تتحول الطبقة الحدية الصفائحية الى مضطربة .

نلاحظ من خلال التجربة أن قيمة معامل الانتقال الحراري

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

عبر المحيط ترتبط بسرعة واتجاه تيار السائل اضافة الى درجة حرارة وقطر الانبوب واتجاه التيار الحراري وأخير التنوعية السائل نفسه .



الشكل (19-6) تغيرات معامل انتقال الحرارة الموضعي α حول اسطوانة في جريان عادي لغاز (اسطوانة ضمن جريان عرضي) .
1) $Re = 70800$ ، 2) $Re = 219000$ ، $\bar{\alpha}$ معامل انتقال الحرارة الوسطي على كامل المحيط وعند $q_w = Const$.

لتحديد معامل الانتقال الحراري الوسطي في حالة جريان مزفي على انبوب وحيد، نقوم بحساب عدد نسل وفق العلاقات التالية :

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

في المجال: $Re_m = 5 \div 1x10^3$:

$$Nu_m = 0.5 \; Re_m^{0.5} \cdot P_m^{0.38} \cdot \left(\frac{Pr_m}{Pr_s}\right)^{0.25} \qquad (6\text{-}94)$$

وفي المجال $Re_m = 1x10^3 \div 2x10^5$:

$$Nu_m = 0.25 \; Re_m^{0.6} \cdot Pr^{0.38} \cdot \left(\frac{Pr_m}{Pr_s}\right)^{0.25} \qquad (6\text{-}95)$$

بالنسبة للهواء وضمن نفس المجالات لعدد رينولدز تأخذ المعادلة (6-94) الشكل :

$$Nu_m = 0.43 \; Re_m^{0.5} \qquad (6\text{-}96)$$

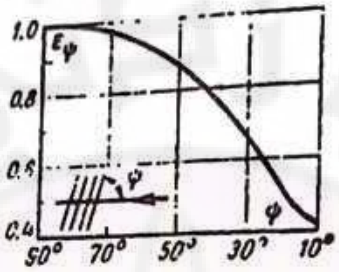
أما المعادلة (6-95) فتصبح على الشكل :

$$Nu_m = 0.216 \; Re_m^{0.6} \qquad (6\text{-}97)$$

عند حساب الاعداد اللاقياسية نستعمل دوما القطر الخارجي للانبوب ودرجة الحرارة الوسطية للسائل أما السرعة فتحسب عند أقل مقطع للقناة ، تطبق المعادلات السابقة للاستعمال في حالة اسطوانة تتوضع بشكل معامد لاتجاه جريان السائل .

في حالة كون زاوية ورود التيار $\varphi < 90^\circ$ فان معامل الانتقال الحراري لهذه الحالة يساوي لمعامل الانتقال الحراري عندما $\varphi = 90^\circ$ مضروبا بمعامل تصحيح ε_φ نحصل عليه من المخطط المبين في الشكل (6-19) .

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner



الشكل (6-19) اعتماد معامل
الانتقال الحراري على زاوية
الورود

كما هو ملاحظ من المخطط نجد أنه مع نقصان زاوية ورود التيار السائل تنخفض قيمة معامل التصحيح وبالتالي تقل قيمة معامل الانتقال الحراري .

٦-١٩ -الانتقال الحراري في حالة جريان عرضي على حزمة أنابيب :
-(Heat Transfer In Flow Across Banks Of Tubes.).

في التطبيقات الهندسية كثيرا ما تشاهد مثل هذه الحالة لذلك تتصف دراسة الانتقال الحراري بالحمل للحالة المذكورة بأهمية خاصة .

تتوضع الانابيب عادة بأحد شكلين وهما التوزع المتوازي

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

والتوزع الشطرنجي ، شكل (20-6) .

تتحدد مواصفات حزمة الانابيب بكل من قطر الانابيب ونسبة الخطوة بالعرض $\frac{S_1}{d}$ وبالعمق $\frac{S_2}{d}$.

تلعب طريقة توضع الانابيب دورا هاما في نوعية الجريان المتشكل على كل صف من الانابيب وهذا يؤثر بدوره على عملية التبادل الحراري .

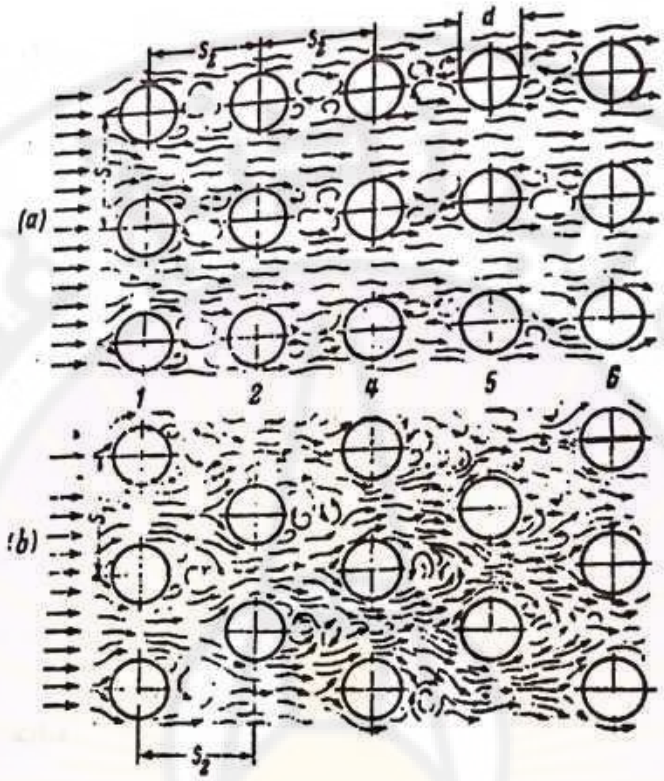
في كلتا حالتي التوضع (متوازي أوشطرنجي) يكون شكل الجريان بالنسبة للصف الاول من الانابيب مشابها للشكل المشاهد في حالة انبوب وحيد (الفقرة السابقة) .

بالنسبة للصف الثاني من حزمة الانابيب تتغير طبيعة الانسياب للسائل في كلتا حالتي التوضع .

في حالة التوضع المتوازي فان أنابيب كل صف تظلل أنابيب الصف الذي يليه وهذا مما يسيء الى عملية الانسياب على الصفوف التالية حيث يكون القسم الاعظم من الانابيب محاط بالمنطقة الاعصارية

أما في حالة التوضع الشطرنجي فانه لاتتم عملية حجب انبوب لآخر ولهذا السبب تكون قيمة معامل الانتقال الحراري أعظمية لكافة أجزاء الانبوب حيث تكون قيمته متساوية بالنسبة لكافة الصفوف وباختلاف غير كبير من قيمة معامل الانتقال الحراري للصف الاول .

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner



الشكل (20-6) التوزع المتوازي
والشطرنجي لحزمة الانابيـــــــب

في حالة التوضع المتوازي للانابيب نحصل على قيمة عظمى لمعامل الانتقال الحراري بالنسبة لأنابيب الصف الثاني والانابيب التي تليها في منطقة من الانبوب بزاوية قدرها "30 باتجاه التيار.

وأن أي انبوب في أي صف يسبب في زيادة اضطراب الجريان لذلك يكون معامل الانتقال الحراري للصف الثاني أعلى منه للصف الاول وكذلك قيمته بالنسبة للصف الثالث أعلى منه بالنسبة للصف الثاني .

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

واعتبارا من الصف الثالث يبدأ تيار السائل بالاضطراب وبالتالي يصبح معامل الانتقال الحراري بالنسبة للصفوف التالية ثابتا وعلى سبيل المثال اذا اخذنا معامل الانتقال الحراري لأنابيب الصف الثالث 100% فان معامل الانتقال الحراري للصف الاول في كلا حالتي التوضع المتوازي والشطرنجي يشكل 60% أما قيمته بالنسبة للصف الثاني في حالة التوضع المتوازي 90% وللتوضع الشطرنجي 70%.

ويجدر الذكر أن قيمة معامل الانتقال الحراري في حالة التوضع الشطرنجي تكون أكبر مما هي في حالة التوضع المتوازي بسبب كون اضطراب الجريان في الحالة الاولى يتم بشكل أفضل.

في حالة الجريان العرضي على حزمة أنابيب تبرز لدينا ثلاثة أنظمة للجريان : الطائحي والمختلط والمضطرب والاكثر شيوعا هو نظام الجريان المختلط الذي يتحقق وعدد رينولدز ضمن المجال $Re = 1x10^3 \quad 10^5$.

لتحديد قيمة معامل الانتقال الحراري لإنابيب الصف الثالث وللصفوف التي تليه لحالة الجريان المختلط أي ضمن المجال $R_e = 1x10^3 \div 1x10^5$ ولأجل التوضع المتوازي لحزمة الانابيب نستخدم العلاقة :

$$Nu_m = 0.26 \; Re_m^{0.65} \cdot Re_m^{0.33} \cdot \left(\frac{Pr_m}{Pr_s}\right)^{0.25} \cdot \varepsilon_s \qquad (6-98)$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

حيث :

$$\varepsilon_s = \left(\frac{S_2}{d}\right)^{-0.15}$$

S_2 خطوة الانابيب بالعمق .

أما في حالة التوضع الشطرنجي للانابيب فنستعمل العلاقة التالية :

$$Nu_m = 0.41 \cdot Re_m^{0.6} \cdot R/_m P^{0.33} \cdot \left(\frac{Pr_m}{Pr_s}\right)^{0.25} \cdot \varepsilon_s \qquad (6\text{-}99)$$

حيث :

$$\varepsilon_s = \left(\frac{S_1}{S_2}\right)^{1/6}$$

عندما $\frac{S_1}{S_2} < 2$ و $\varepsilon_s = 1.12$

عندما : $\frac{S_1}{S_2} \geq 2$.

S_1 الخطوة العرضية للانابيب .

عند حساب الاعداد اللابعدية فان درجة الحرارة المعتبرة هي درجة الحرارة الوسطية للسائل والسرعة المعتبرة هي سرعة السائل عند أضيق تضيق بين صفين من الانابيب .

يمكن استعمال العلاقات السابقة لأية سائل معتبر .

بالنسبة للهواء والغازات الثنائية الذرة تتبسط المعادلتين (6-98) و (6-99) وفقا للشكل التالي :

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

- في حالة التوضع المتوازي :

$$Nu_m = 0.21 \cdot Re_m^{0.65} \cdot \varepsilon_s \qquad (6\text{-}100)$$

- في حالة التوضع الشطرنجي :

$$Nu_m = 0.37 \cdot Re_m^{0.6} \cdot \varepsilon_s \qquad (6\text{-}101)$$

تتحدد قيمة معامل الانتقال الحراري لانابيب الصف الاول في كلا حالتي توضع الانابيب عن طريق ضرب قيمة معامل الانتقال الحراري بمعامل تصحيح $\varepsilon_1 = 0.6$ ولانابيب الصف الثاني في حالة التوضع الشطرنجي بمعامل تصحيح $\varepsilon_2 = 0.7$ ولانابيب الصف الثاني في حالة التوضع المتوازي بمعامل تصحيح $\varepsilon_2 = 0.9$.

تتحدد قيمة معامل الانتقال الحراري الوسطي لكافة حزم الانابيب من العلاقة التالية :

$$\bar{\alpha}_m = \frac{\alpha_1 . F_1 + \alpha_2 . F_2 + \ldots\ldots + \alpha_n . F_n}{F_1 + F_2 + \ldots\ldots + F_n} \qquad (6\text{-}102)$$

حيث : $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_n$ معامل الانتقال الحراري لصفوف الانابيب بدءا من الصف الاول وحتى الصف n .

$F_1, F_2, \ldots\ldots, F_n$ سطح كل صف من الانابيب .

إذا كانت حزمة الأنابيب معرضة لجريان تيار سائلي قسري وبزاوية ورود قدرها ψ عندئذ يجب تخفيض قيمة معامل الانتقال

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الحراري المحسوب وفقا للمعادلات (6-98) و (6-99) من طريق ضربهما بمعامل تصحيح ε_φ نحصل عليه من الجدول (6-4) .

φ°	90	80	70	60	50	40	30	20	10
ε_φ	1.0	1.0	0.98	0.94	0.88	0.78	0.67	0.52	0.42

جـــــدول (6-4)

٦-٢٠ الانتقال الحراري بالحمل للمعادن المنصهرة :

-(Convective Thermal Transfer For Melting Metals.).

في بعض الاحيان وعندما يتطلب الامر نقل الحرارة عند فقوط منخفضة ودرجة حرارة مرتفعة فانه من المفضل استخدام المعادن المنصهرة حيث أنها تمتاز بدرجة حرارة غليان مرتفعة ومعامل انتقال حراري كبير .

ان استخدام بخار الماء في مثل هذه الحالات غير مفيد لأنه وكما هو معروف يكون فقط بخار الماء كبيرا عند درجات الحرارة العالية اضافة الى تميزه بمعامل انتقال حراري مغير وسعه حرارية منخفضة ، وكأمثلة على نوعية المعادن المنصهرة المستخدمة في عمليات النقل الحراري مثل الصوديوم والبوتاسيوم والزئبق والبزموت وخلائط البزموت مع القصدير .

لتحديد معامل الانتقال الحراري في حالة جريان مضطرب

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

تسري لمعظم المعادن الخفيفة والثقيلة نستخدم العلاقة التالية :

$$Nu_m = 4.5 + 0.014 \left(Re_m . Pr_m \right)^{0.8} \qquad (6\text{-}103)$$

درجة الحرارة المعتبرة هنا أثناء حساب الاعداد اللاتيماسية هي درجة الحرارة الوطية للسائل والقطر المستعمل هو القطر المكافئ ، وتستعمل المعادلة الاخيرة بالشروط التالية :

$$Pr_m = 0.004 \div 0.032 \ , \ \frac{L}{d} > 30 \ , \ Re = 10^4 \div 10^6$$

في الحالة التي تكون فيها النسبة $\frac{L}{d} < 30$ نضرب المعادلة (6-103) بمعامل تصحيح ε تحسب قيمته من العلاقة $\varepsilon = 1.72 \left(\frac{d}{l}\right)^{0.1}$.

في حالة الجريان الحر لمعظم المعادن الخفيفة والثقيلة وخلائطها نستخدم العلاقة التالية :

$$Nu_m = C . Gr_m^n . Pr_m^{0.4} \qquad (6\text{-}104)$$

في العلاقة الاخيرة يتبع كل من C و n لعدد كراشوف Gr .

عند جريان مضاعي أي: $Gr_m = 10^2 \div 10^9$ تكون $C = 0.52$

و $n = 0.25$.

عند جريان مضطرب أي: $Gr_m = 10^9 \div 10^{13}$ تكون $C = 0.106$

و $n = 0.33$.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

درجة الحرارة المعتبرة هنا هي درجة الحرارة الوسطية مابين السائل والسطح أي :

$$t_{ms} = \frac{t_m + t_s}{2} \qquad (6\text{-}105)$$

حيث :

t_m درجة الحرارة الوسطية للسائل .

t_s درجة حرارة السطح .

٦-٢١ الانتقال الحراري بالحمل للغازات عند السرعة العالية :
(Convective Heat Transfer In Gases At High Velocites.).

مع تقدم العلوم التقنية وتعدد التطبيقات التي تعتمد على انتشار الغازات بسرعات عالية جدا مثل العنفات الغازية والطائرات النفاثة المخترقة لجدار الصوت والصواريخ ..الخ ..

وحتى عهد قريب كانت نظرية الانتقال الحراري بالحمل تهتم فقط بحالات التبادل الحراري عند سرعات منخفضة للموائع المستخدمة أي عندما لاتؤثر القدرة الحركية للتيار على درجة حرارة المائع .

ارتبط الانتقال من دراسة انتقال الحرارة بالحمل عند السرعات المنخفضة الى دراسته عند السرعات العالية بضرورة دراسة عملية الانتقال الحراري بالحمل في حسابات الطائرات .

بالنسبة للتيارات وحسب القانون الاول للترموديناميك

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

لدينا :

$$dQ = di + \frac{dw^2}{2} \qquad (6\text{-}106)$$

في الفتحات النفاثة وعند الشروط الادياباتيكية تزداد سرعة الغاز وتنخفض درجة حرارته أما في الابواق فتنقص سرعة الغاز بينما تزداد درجة حرارته وتظهر أعلى درجة حرارة يمكن التوصل اليها عند فرملة كاملة للتيار أي عندما تصبح سرعة التيارمساوية للصفر .

تتحدد درجة حرارة التيار T_T في حالة الفرملة الكاملة للتيار عند الشروط الادياباتيكية كمايلي :

$$di + \frac{dw^2}{2} = 0 \Longrightarrow c_p.dT + \frac{dw^2}{2} = 0$$

بمكاملة التعبير الاخير باعتبار أن $c_p = Const$ نحصل على:

$$c_p(T_2-T_1) + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} = 0$$

في حالة فرملة التيارتكون $w_2 = 0$ حيث w_1, T_1 هما درجة حرارة وسرعة التيار قبل حدوث الفرملة ومنه :

$$c_p T_2 = c_p.T_1 + \frac{w_1^2}{2}$$

$$T_T = T_2 = T_1 + \frac{w_1^2}{2c_p} \qquad (a)$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

بالنسبة للغازات المثالية تكون :

$$c_p = \frac{K}{K-1} . R$$

عندها تأخذ المعادلة (a) بالنسبة للغازات المثاليـــة الشكل التالـــي :

$$(b) \quad T_T = T + \frac{K-1}{K.R} . \frac{w_1^2}{2} = T\left(1 + \frac{K-1}{2} . \frac{w_1^2}{K.T_1.R} \right)$$

حيث :

$T_1 = T$ درجة الحرارة الترموديناميكية للغاز قبـــل الفرملة .

تتحدد سرعة الصوت في حالة الغاز المثالي من العلاقة :

$$a = \sqrt{K.v.P} = \sqrt{K.R.T} \Longrightarrow a^2 = K.R.T$$

نعوض قيمة R من العلاقة الاخيرة في المعادلة (b) حيـــث تصبـــح :

$$\frac{T_T}{T} = \frac{K-1}{2} . \frac{w^2}{a^2} = \frac{K-1}{2} M^2 + 1$$

حيث : $M = \frac{w}{a}$ تسمى بعدد ماك وتعبر عن نسبة سرعـــة التيار الى سرعة انتشار الصوت فيه .

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

اذا كانت: $M < 1$ سرعة التيار أقل من سرعة الصوت ،أي تحت صوتية .

$M = 1$ سرعة التيار تساوي الى سرعة الصوت .

$M > 1$ سرعة التيار أكبر من سرعة الصوت أي فوق صوتية .

يساعد عدد ماك على تحديد تأثير القدرة الحركية للتيار على عملية الانتقال الحراري بالحمل .

عند جريان تيار غازي على سطح جسم ما فان قوى الاحتكاك الداخلية التي تحصل نتيجة ممانعة الجريان (بسبب لزوجة الغاز) تؤدي الى زيادة درجة الحرارة وبنتيجة مباشرة تكون درجة حرارة جزيئات الغاز التي هي على تماس مباشر مع السطح الصلب المعزول حراريا أعلى من درجة حرارة الجزيئات الواقعة على بعد ما من الجدار وفي الحالة العامة لاتكون مساوية لدرجة حرارة الغرملة T_T.

تكون درجة حرارة سطح الجدار المعزول حراريا متوازنة مع درجة حرارة الجزيئات الواقعة على تماس معه وتسمى درجة حرارة هذا السطح (أو الجزيئات المتماسة) بدرجة حرارة التوازن T_{sp} والتي يمكن قياسها بواسطة ميزان درجة حرارة معزول مثبت ضمن تيار الغاز .

يتحدد الفرق مابين درجة حرارة التوازن ودرجة الحرارة

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الترموديناميكية (درجة الحرارة الترموديناميكية : تلك الدرجة التي يقرأوها مقياس درجة حرارة يتحرك بنفس سرعة الجريان) بالعلاقة التالية :

$$T_{sp} - T = r \frac{w^2}{2 c_p}$$

ومنه :

$$T_{sp} = T + r \frac{w^2}{2 c_p} \qquad (c)$$

حيث : r عامل الاسترجاع .(Recovary Factor) ويتبع للخواص الفيزيائية للغاز ولنوعية الجريان وللشكل الهندسي للجسم .

بمقارنة المعادلتين (a) و (c) نستنتج قيمة r وفقا للعلاقة التالية :

$$r = \frac{T_{sp} - T}{T_T - T}$$

في حالة الجريان اللزج للهواء على صفيحة يكون $r = \sqrt{Pr}$ أما في حالة الجريان المضطرب فيساوي $r = \sqrt[3]{Pr}$ ، أما في الحالات الاخرى تتم تحديد قيمة r تجريبيا .

عند جريان الغاز بسرعات عالية تصبح معادلة نيوتن $q = \alpha(T_T - T_s)$ غير صالحة للتطبيق، عندها يتم حساب معامل الانتقال الحراري من المعادلة التالية :

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$q = \alpha\left(T + \frac{r.w^2}{2c_p} - T_s\right) = \alpha(T_{sp} - T_s) \qquad (d)$$

في حالة السرعات المنخفضة للجريان الغازي يمكن اهمال الحد $\frac{r.w^2}{2.c_p}$ وبالتالي يتحول التعبير (d) الى معادلة نيوتن.

لتحديد معامل الانتقال الحراري الوسطي عند جريان على صفيحة أو جريان عرضي على حزمة أنابيب وعندما $M < 1$ عندها نستخدم المعادلات التي سبقت دراستها في الفقرات السابقة .

٦-٢٢ .الانتقال الحراري بالحمل في حالة جريان حر :

-(Convective Heat Transfer In Free Fluid Flow.).

كما ذكرنا سابقا تتم الحركة الحرة للسائل بسبب فروقات الكثافة الموضعية الناتجة من فروقات درجة الحرارة وتسمى هذه الظاهرة بالحمل الطبيعي .

تلاحظ مثل هذه الظاهرة في المشعات الحرارية (الرديياتورات) المستخدمة في التدفئة المركزية .

في الحياة العملية يلعب هذا الشكل من التبادل الحراري دورا هاما في التطبيقات الصناعية .

تبرز عملية التبادل الحراري الحر أو الطبيعي عندتسخين الغازات أو السوائل الموجودة ضمن فراغ محدد أو غير محدد .

في الحالة التي تكون فيها درجة حرارة الجسم أعلى من

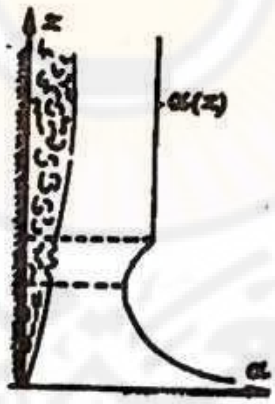
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

درجة حرارة المائع المحيط به فان عملية الحمل تتم على الشكل التالي :

تسخن طبقة المائع الملامسة للجسم الساخن حيث ترتفع للأعلى نتيجة انخفاض كثافتها ومن ثم تحل محلها طبقة أخرى باردة وهكذا تتشكل حركة خرة دائمة في المائع المحيط .

لندرس حالة تبادل حراري حر في وسط غير محدود عبر صفيحة أو انبوب شاقولي .

يبين الشكل (21-6) شكل الحركة الطبيعية للطبقة القريبة من الصفيحة الشاقولية حيث ترتفع في القسم السفلي من الجدار كمية قليلة من المائع بحركة بطيئة مشكلة بذلك طبقة صفائحية .



الشكل (21-6) تغير معامل انتقال الحرارة على طول جدار شاقولي

تزداد سماكة هذه الطبقة مع ارتفاعها الى الاعلى ومع

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

زيادة الارتفاع وزيادة سرعة هذه الطبقة تبدأ الطبقة الصفائحية بالتحطم نتيجة ازدياد سرعتها حيث يتحول شكل الجريان الى الحالة المضطربة مع طبقة صفائحية رقيقة تبقى ملتصقة على سطح الجدار.

مع زيادة سماكة الطبقة الصفائحية اعتبارا من أسفل الجدار تقل قيمة معامل الانتقال الحراري حيث يأخذ أدنى قيمة له عند أكبر سماكة الطبقة الصفائحية.

يمكن اعتبار منطقة بداية تحطم الطبقة الصفائحية وظهور الاضطراب في الجريان بمثابة منطقة ثبات قيمة معامل الانتقال الحراري .

بشكل أساسي تتعلق طبيعة حركة المائع وحدود الطبقة الصفائحية والمضطربة بفرق درجة الحرارة $t = t_m - t_B$ حيث t_m درجة حرارة المائع المحيط و t_B درجة حرارة سطح الجدار

عندما تكون قيمة Δt صغيرة فانه يمكن اعتبار أن حركة المائع ذات طابع صفائحي وعندما تكون Δt كبيرة يصبح الجريان مضطربا .

ان الذي يلعب دورا هاما في الحمل الحر هو مقدار طول سطح التبادل وفيما يلي سوف نقدم العلاقات المستخدمة في الحصول

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

على معامل الانتقال الحراري للجريان الحر ولحالات مختلفة :

لانبوب افقي قطره d وعندما $10^8 > (Gr_m.Pr_m) > 10^3$

نستخدم العلاقة التالية :

$$Nu_m = 0.75\,(Gr_m.Pr_m)^{0.25}.\left(\frac{Pr_m}{Pr_s}\right)^{0.25} \qquad (6\text{-}107)$$

لانبوب أو صفيحة شاقولية نستعمل العلاقة التالية لحالة الجريان الصفائحي أي عندما يكون :

$$10^9 > (Gr_m.Pr_m) > 10^3$$

$$Nu_m = 0.76\,(Gr_m.Pr_m)^{0.25}.\left(\frac{Pr_m}{Pr_s}\right)^{0.25} \qquad (6\text{-}108)$$

وفي حالة الجريان المضطرب أي $Gr_m.Pr_m > 10^9$ نستخدم المعادلة :

$$Nu_m = 0.15\,(Gr_m.Pr_m)^{0.33}\left(\frac{Pr_m}{Pr_s}\right)^{0.25} \qquad (6\text{-}109)$$

في المعادلات السابقة تكون درجة الحرارة المعتبرة في حساب الاعداد اللاقياسية هي درجة حرارة المحيط .

في حالة السوائل تكون النسبة $\frac{Pr_m}{Pr_s}$ مساوية للواحد

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

لذلك وعند تطبيق المعادلات السابقة تهمل هذه النسبة في حالة استخدام الفارات .

أثناء عملية تسخين السطوح الافقية لمائع يقع فوقها تجب زيادة معامل الانتقال الحراري المحسوب بالمعادلات (6-107) و (6-108) و (6-109) بمقدار 30% أما اذا كان المائع المسخن يقع تحت السطح الافقي فعندما يتم انقاص القيمة المحسوبة لمعامل انتقال الحرارة بمقدار 30% .

* * *

*

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مسائل

م١ : أوجد معامل الانتقال الحراري وكمية الحرارة المنتقلة عند جريان الماء في انبوب افقي قطره $d = 0.008\ m$ وطوله $l=6\ m$ اذا كانت السرعة $w = 0.1 \frac{m}{Sec}$ ودرجة حرارة الماء $t_w = 80\ C^o$ ودرجة حرارة السطح $t_s = 20\ C^o$.

الحـــل :

عند الدرجة $t_m = 80\ C^0$ يكون بالنسبة للماء :

$$\lambda_m = 0.675 \quad \frac{w}{m.C^o}$$

$$\nu_m = 0.365 \times 10^{-6} \quad \frac{m^2}{.Sec}$$

$$\beta = 6.32 \times 10^{-4} \quad \frac{1}{T}$$

$$Pr_m = 2.21$$

بالنسبة للسطح وعند الدرجة $t_s = 20\ C^o$ يكون $Pr_s = 7.02$

نحسب عدد رينولدز للجريان المعتبر :

$$Re_m = \frac{w.d}{\nu} = \frac{0.1 \times 0.008 \times 10^6}{0.365} = 2191.8$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$Re_m^{0.33} = 12.66$$

$$Pr_m^{0.43} = 1.4$$

$$\left(\frac{Pr_m}{Pr_s}\right)^{0.25} = 0.75$$

$$t = t_m - t_s = 60^\circ$$

$$Gr_m = \frac{g.d^3.\beta.\Delta t}{\nu^2} = \frac{9.81(0.008)^3 6.32x10^{-4} x60}{(0.365x10^{-6})^2}$$

$$= 1.43 \times 10^6$$

$$Gr_m^{0.1} = 4.12$$

نحسب عدد نسل من العلاقة :

$$Nu_m = 0.15.Re_m^{0.33}.Pr_m^{0.43}.Gr_m^{0.1}.\left(\frac{Pr_m}{Pr_s}\right)^{0.25}$$

$$Nu_m = 0.15 \times 1.26 \times 1.4 \times 4.12 \times 0.75 = 8.18$$

ومنه :

$$\alpha = Nu_m.\frac{\lambda_m}{d} = 8.18\ \frac{0.675}{0.008} = 690\ \frac{w}{m^2.C^\circ}$$

$$Q = (\pi.d.1).\alpha.(t_m - t_s) = 3.14x0.008x6x690x60$$

$$= 6243 \quad [w]$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

م٢ : أوجد معامل الانتقال الحراري α في حالة تيار هوائي يسير بسرعة $w = 10 \frac{w}{Sec}$ في انبوب مستقيم قطره $d = 0.1\ m$ وطوله $l = 2\ m$ ، درجة الحرارة الوسطية للهواء $t_m = 120\ C^o$.

الحل :

عند درجة حرارة الهواء $t_w = 120\ C^o$ يكون :

$$\lambda_m = 0.0334 \quad \frac{w}{m.C^o}$$

$$\nu_m = 25.45 \times 10^{-6} \quad \frac{m^2}{Sec}$$

عند هذه الشروط :

$$Re_m = \frac{w.d}{\nu} = \frac{10 \times 0.1 \times 10^6}{25.45} = 39292$$

أي أن الجريان مضطرب :

$$Re_m^{0.8} = 4736$$

نحسب عدد نسل من العلاقة :

$$Nu_m = 0.018\ Re_m^{0.8} = 0.018 \times 4736 = 85.2$$

$$\alpha = Nu_m . \frac{\lambda_m}{d} = \frac{85.2 \times 0.0334}{0.1} = 28.4 \quad \frac{w}{m^2.C^o}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

بما أن النسبة :

$$\frac{l}{d} = \frac{2}{0.1} = 20 < 50$$

فيجب ضرب معامل الانتقال الحراري المحسوب بالمعادلة السابقة بمعامل التصحيح ε_1 والمأخوذة من الجدول :

$$\varepsilon_1 = 1.13$$

$$\alpha = 28.4 \times 1.13 = 32.1 \quad \left[\frac{w}{m^2.C^o}\right]$$

م٣ : أوجد معامل الانتقال الحراري والتيار الحراري المنتقل من جدران انبوب نشر: $d = 60$ mm وطوله $l = 10$ m الى الماء المتدفق ضمنه بسرعة $w = 2 \frac{m}{Sec}$ ، درجة حرارة الماء $t_m = 40\ C^o$ ودرجة حرارة الجدار $t_s = 90\ C^o$.

الحل :

عند الدرجة $t_m = 40\ C^o$ يكون :

$$\lambda_m = 0.636 \quad \left[\frac{w}{m.C^o}\right]$$

$$\nu_m = 0.659 \times 10^{-6} \quad \left[\frac{m}{Sec}\right]$$

$$Pr_m = 4.31$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$t_s = 90^{\circ} \Longrightarrow Pr_s = 1.95$$

عند هذه الشروط :

$$Re_m = \frac{w.d}{\nu} = \frac{2 \times 0.06 \times 10^6}{0.659} = 182094$$

$$Re_m^{0.8} = 16152$$

$$Pr_m^{0.43} = 1.87$$

$$\left(\frac{Pr_m}{Pr_s}\right)^{0.25} = \left(\frac{4.31}{1.95}\right)^{0.25} = 1.22$$

ضمن المجال المحسوب لعدد رينولدز نحسب عدد نسل من المعادلة :

$$Nu_m = 0.021 \; Re_m^{0.8} \; Pr_m^{0.43} \left(\frac{Pr_m}{Pr_s}\right)^{0.25}$$

$$Nu_m = 0.021 \times 16152 \times 1.87 \times 1.22 = 773.8$$

$$\alpha = Nu_m \cdot \frac{\lambda_m}{d} = 773.8 \times \frac{0.636}{0.06} = 8202.3 \; \frac{w}{m^2.C^{\circ}}$$

$$Q = \pi.l.d.\alpha.\Delta t = 3.14 \times 10 \times 0.06 \times 8202.3 \times 50 =$$

$$Q = 773048.5 \quad w$$

م٤ : صفيحة مستوية طولها $l = 2$ m وعرضها $b = 1.5$ m

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

يجري عليها تيار مستمر من الهواء درجة حرارته $t_m = 20\ C^o$

وسرعته $w = 4\ \frac{m}{Sec}$.

والمطلوب : حساب معامل الانتقال الحراري α والتيار الحراري Q اذا كانت درجة حرارة سطح الصفيحة $t_s = 80\ C^o$.

الحل :

عند : $t_m = 20\ C^o$;

$$\lambda_m = 0.0223 \quad \frac{W}{m \cdot {}^oC}$$

$$\nu_m = 15.06 \times 10^{-6} \quad \frac{m^2}{Sec}$$

$$Re_m = \frac{w.l}{\nu} = \frac{4 \times 2 \times 10^6}{15.06} = 531208$$

$$Re_m^{0.8} = 38037 \quad ; \quad Pr_m = 0.703 \quad ; \quad Pr_m^{0.43} = 0.859$$

$$\frac{Pr_{rm}}{Pr_{rs}} = 1$$

$$Nu_m = 0.037\ Re_m^{0.8}\ Pr_m^{0.43}$$

$$= 0.037 \times 38037 \times 0.859 = 1209$$

$$\alpha = Nu_m \frac{\lambda_m}{1} = 1209\ \frac{0.0223}{2} = 13.48 \quad \frac{W}{m^2 \cdot {}^oC}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

كمية الحرارة المنتقلة الى الهواء :

$$Q = \alpha . F . \Delta t = 13.4\ (2 \times 1.5)\ \ 60 = 2412 \quad w$$

م٥ : انبوب اسطواني قطره الخارجي $d = 30$ mm وطوله $l = 5$ m يبرد بواسطة تيار مائي درجة حرارته $t_m = 10\ C^o$ وسرعته $w = 2\ \frac{m}{Sec}$ درجة حرارة سطح الانبوب $t_s = 80\ C^o$ وزاوية ورود التيار $\psi = 50^o$.

أوجد معامل انتقال الحرارة من سطح الانبوب الى الماء وكمية الحرارة المنتقلة .

الحل :

عند درجة حرارة السائل $t_m = 10\ C^o$ فان :

$$\lambda_m = 0.575 \left[\frac{w}{m . C^o} \right]$$

$$Re_m = \frac{w.d}{\nu} = \frac{2 \times 0.03 \times 10^6}{1.306} = 45942$$

$$Pr_s = 2.21 \quad ; \quad Pr_m = 9.52$$

$$\left(\frac{Pr_m}{Pr_s} \right)^{0.25} = \left(\frac{9.52}{2.21} \right)^{0.25} = 1.44$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$Nu_m = 0.25 \times Re_m^{0.6} \times Pr_m^{0.38} \times 1.44 = 531.5$$

$$\alpha = Nu_m \cdot \frac{\lambda_m}{d} = 531.5 \times \frac{0.575}{0.03} = 10187 \quad \left[\frac{w}{m^2.C^o}\right]$$

مع الاخذ بعين الاعتبار زاوية ورود التيار نستخرج قيمة معامل التصحيح من المخطط حيث ينتج $\varepsilon = 0.87$ ومنه :

$$\alpha = 10187 \times 0.87 = 8862.7 \quad \left[\frac{w}{m^2.C^o}\right]$$

كمية الحرارة المنتقلة :

$$Q = \pi.l.d.\alpha.\Delta t = 3.14 \times 0.03 \times 5 \times 8862.7 \times 70 = 292353 \quad w$$

م٦ : أوجد معامل الانتقال الحراري الوسطي مابين تيار غازي دخاني مؤلف من H_2O 11% ، CO_2 13% و N_2 76 % وجدران حزمة أنابيب مكونة من ثمانية صفوف موزعة بشكل شطرنجي حيث :

قطر الانبوب $d = 60$ mm ، السرعة الوسطية لتيار الغازات في أضيق مقطع للحزمة $w = 10 \frac{m}{Sec}$ ، درجة حرارة الغازات قبل الحزمة $t_1 = 1200\ C^o$ وبعد الحزمة $t_2 = 800\ C^o$. زاوية ورود التيار $\varphi = 50^o$ ، ضغط البخار ضمن الانابيب 100 Bar درجة حرارة سطح الانابيب $t_s = 311\ C^o$.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

للمقارنة أعد الحساب بالنسبة لحزمة الانابيب فيما اذا توضعت بشكل متوازي مع بقاء الشروط الاخرى ثابتة .

الحل :

درجة الحرارة الوسطية لتيار الغازات :

$$t_m = \frac{t_1+t_2}{2} = \frac{1200+800}{2} = 1000\ C^\circ$$

عند هذه الدرجة يكون :

$$\nu_m = 174.3 \times 10^{-6} \quad \left[\frac{m^2}{Sec}\right]$$

$$\lambda_m = 0.109 \quad \left[\frac{w}{m.C^\circ}\right] \; ; \; Pr_m = 0.58 \; ; \; Pr_s = 0.652$$

$$Re_m = \frac{w.d}{\nu} = \frac{10 \times 0.06 \times 10^6}{174.3} = 3442.3$$

$$Re_m^{0.65} = 199 \; ; \; Re_m^{0.6} = 132.5 \; ; \; Pr_m^{0.33} = 0.835 \; ; \; \left(\frac{Pr_m}{Pr_s}\right)^{0.25} = 0.97$$

في حالة التوضع المتوازي :

$$Nu_m = 0.23\ Re_m^{0.6} \cdot Pr_m^{0.33} \cdot \left(\frac{Pr_m}{Pr_s}\right)^{0.25}$$

$$N_m = 0.23 \times 199 \times 0.835 \times 0.97 = 37$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

في حالة التوضع الشطرنجي :

$$Nu_m = 0.41\ Re_m^{0.6} \cdot Pr_m^{0.33} \cdot \left(\frac{Pr_m}{Pr_s}\right)^{0.25}$$

$$Nu_m = 0.41 \times 133^{0.6} \times 0.835^{0.33} \times 0.97 = 44.1$$

نحسب معامل الانتقال الحراري للصف الثالث من الانابيب :

للوضع المتوازي :

$$\alpha_3 = Nu \cdot \frac{\lambda_m}{d} = \frac{37 \times 0.109}{0.06} = 67.2 \quad \left[\frac{W}{m^2.C^o}\right]$$

للوضع الشطرنجي :

$$a_3 = \frac{44.1 \times 0.109}{0.06} = 80.1 \quad \frac{W}{m^2.C^o}$$

معامل الانتقال الحراري للصف الاول في كلاحالتي التوضع :

المتوازي $\alpha_1 = 0.6\ \alpha_3 = 0.6 \times 67.2 = 40.3 \quad \frac{W}{m^2.C^o}$

الشطرنجي $\alpha_1 = 0.6\ \alpha_3 = 0.6 \times 80.1 = 48 \quad \frac{W}{m^2.C^o}$

معامل الانتقال الحراري لصف الانابيب الثاني في التوضع المتوازي :

$$\alpha_2 = 0.9\ \alpha_3 = 0.9 \times 67.2 = 60.5 \quad \frac{W}{m^2.C^o}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

وفي حالة التوضع الشطرنجي يكون :

$$\alpha_2 = 0.7\ \alpha_3 = 0.7 \times 80.3 = 66,2 \ \frac{w}{m^2.C^o}$$

نحسب معامل الانتقال الحراري الوسطي بافتراض أن جميع الانابيب متساوي في كلا الحالتين :

للتوضع المتوازي :

$$\bar{\alpha}_m = \frac{[\alpha_1+\alpha_2+\ldots,+\alpha_8].F}{8F} = \frac{[40.6+60.8+6\times67.6]F}{8F} = 64 \ \frac{w}{m^2.C^o}$$

وللتوضع الشطرنجي :

$$\bar{\alpha}_m = \frac{[48 +56,2+6\times80.3]F}{8F} = 73,5 \ \frac{w}{m^2.C^o}$$

م٧: عبر انبوب قطره $d = 20$ mm وطوله $l = 2m$ يجري زئبق درجة حرارته الوسطية $t_m = 300\ C^o$ بسرعة $3 \ \frac{m}{Sec}$

أوجد معامل الانتقال الحراري بين الزئبق وجدار الانبوب وكثافة التيار الحراري اذا كانت درجة حرارة جدار الانبوب $t_s = 200\ C^o$.

الحل :

لتحديد معامل الانتقال الحراري في حالة جريان مضطرب ومضطرب للمعادن السائلة نطبق المعادلة التالية :

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$Nu_m = 4.5 + 0.014 \left(Re_m \cdot Pr_m \right)^{0.8}$$

الخواص الفيزيائية للزئبق عند $t_m = 300\ C^o$

$\nu_m = 7.1 \times 10^{-7}\ \frac{m^2}{Sec}$ ، $\lambda_m = 11.73\ \frac{w}{m.C^o}$ ؛ $Re_m = 90107$

$$Re_m = \frac{w.d}{\nu} = \frac{3 \times 0.2 \times 10^7}{7} = 857142$$

$$(Re_m . Pr_m)^{0.8} = (85714 \times 0.0107)^{0.8} = 1479$$

$$Nu_m = 4.5 + 0.014 \times 1479 = 25.2$$

$$\alpha = Nu_m . \frac{\lambda_m}{d} = 25.2 \times \frac{11.73}{0.02} = 14780 \quad \left[\frac{w}{m^2.C^o} \right]$$

$$q = \alpha (t_m - t_s) = 14780\ (300-200) = 1478 \quad \left[\frac{Kw}{m^2} \right]$$

---

٨٩ : أوجد كمية الحرارة المنتقلة في حالة الحمل الحر من أنابيب شاقولية الى الهواء علما بأن : قطر الانبوب $d = 120$ mm ، ارتفاع الانبوب $h = 6$ m ، درجة حرارة جدار الانابيب $t_s = 250\ C^o$ ودرجة حرارة الهواء $t_m = 20\ C^o$.

الحل :

عند الدرجة $t_m = 20\ C^o$ تكون الخواص الفيزيائية

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

للهواء :

$$\lambda_m = 0.020 \frac{w}{m.C^o} \quad ; \quad Pr_m = 0.703 \quad ; \quad \nu_m = 15.06 \times 10^{-6} \frac{m^2}{Sec}$$

$$\frac{Rr_m}{Rr_s} = 1$$

يتحدد عدد كراشوف بالعلاقة :

$$Gr_m = \frac{B.h^3.g.\Delta t}{2} = \frac{6^3 \times 9.81 \times 230}{293 \times (15.06 \times 10^{-6})^2} = 7.34 \times 10^{12}$$

$$Gr_m.Pr_m = 7.34 \times 10^{12} \times 0.703 = 5.16 \times 10^{12}$$

عند هذه الشروط يكون جريان الهواء مضطربا حيث نحسب عدد نسل من العلاقة التالية :

$$Nu_m = 0.15(Gr_m.Pr_m)^{0.33} = 0.15(5.16 \times 10^{12})^{0.33} = 2351$$

معامل الانتقال الحراري :

$$= Nu_m.\frac{\lambda_m}{h} = 2351 \times \frac{0.026}{6} = 10.2 \left[\frac{w}{m^2.C^o}\right]$$

$$Q = \alpha.F.(t_s - t_m) = 10,2 \times 0,12 \times 6 \times 230 = 5300 \ [w]$$

م٩: أوجد معامل الانتقال الحراري لسطح أنابيب درجة حرارته $t_s = 500\ C^o$.

يسيل ضمن هذه الانابيب صوديوم درجة حرارته $t_m = 400C^o$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

حيث قطر الانبوب : $d = 60 \quad mm$.

الحـــل :

عند الدرجة $t_m = 400 \ .C^o$ يكون :

$$\lambda_m = 64 \left[\frac{w}{m.C^o}\right] \; ; \; \nu_m = 33x10^{-8} \left[\frac{m^2}{Sec}\right]$$

$$Pr_m = 0.0056 \; ; \; \beta = 2.79 \times 10^{-4} \left[\frac{1}{K^o}\right]$$

$$Gr_m = \frac{g.\beta.d^3.\Delta t}{\nu^2} = \frac{9.81x2.79x10^{-4}x(0.06)^3x200}{(33x10^{-8})^2} = 1.085 \ x10^9$$

نحسب عدد نسل من العلاقة :

$$Nu_m = C.Gr_m^n . Pr_m^{0.4}$$

حيث :

$$n = 0.33 \quad , \quad C = 0.106$$

$$Nu_m = 0.106x(1.085x10^9)^{0.33} x(0.0056)^{0.33} = 18.36$$

$$a = Nu_m . \frac{\lambda_m}{d} = 18.36 \times \frac{64}{0.06} = 19584 \left[\frac{w}{m^2.C^o}\right]$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الفصل السابع

الانتقـــال الحراري في حالة التغيرالطوري للمواد

"Heat Transfer With Phase Changes....."

٧ - ١الانتقال الحراري أثناء الغليان :

-(Heat Transfer During Boiling.).

حتى الان درسنا اجراءات انتقال الحرارة في "٢ مـــواد مختلفة عندما لايكون هنالك تغير في حالتها الطورية.

في هذا الفصل سنتناول عملية الانتقال الحراري عنـــد حدوث تغير طوري في المادة أي عند انتقال المادة من حالة الـــى أخرى مثل الغليان أو التكاثف حيث تنتقل المادة في الحالة الاولى من الطور السائل الى الطور الغازي وعلى العكس من ذلك في الحالـة الثانية .

هنالك شكلين لعملية الغليان هما الغليان على سطح صلـب ،غليان حبيبي //(Local Boiling) والغليان ضمن حجم السائـــل (الغليان الحجمي) (Bulk Boiling...) حيث يتم النوع الاخير عند تسخين السائلحتى درجة الحرارة الاشباعية عند الضغط الموافـــق أو عند تعريض السائل الى ضغط منخفض مفاجيء أو عند وجود منبـع حراري داخل السائل .

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

عند ملاحظة عملية الغليان يشاهد على سطح التبادل الحراري (اذا كانت درجة حرارة السطح أعلى من درجة حرارة الغليان أو الدرجة الاشباعية) فقاعات صغيرة من البخار تتولد في أماكن معينة من سطح التسخين تسمى بمراكز تشكل البخار ، لدى انفصال فقاعة البخار ترتفع نحو الاعلى ضمن حجم السائل والذي درجة حرارته أعلى من درجة الحرارة الاشباعية مما يؤدي الى حدوث تبخر اضافي عند سطح التماس مع الفقاعة المرتفعة وبالتالي يأخذ حجم الفقاعة بالزيادة الى أن تصل الى أكبر حجم لها عند السطح الفاصل بين السائل والوسط المحيط حيث سنهجر عنده الفقاعة .

ان تشكل الحبيبات وانفصالها عند سطح التسخين وحركتها نحو الاعلى تؤدي الى حدوث حركة نشيطة في السائل وازاحة كبيرة عند الطبقات المحيطية مما يؤدي الى تنشيط عملية التبادل الحراري مابين السائل والسطح ، يسمى هذا النوع من الغليان بالغليان الحبيبي .

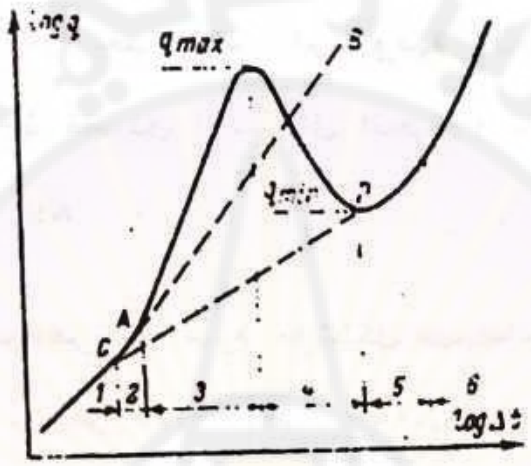
في حالة الغليان الحبيبي يتم نقل كاملكمية الحرارة عبر الطبقة المحيطية للسائل ، مع زيادة شدة التيار الحراري يزداد عدد مراكز تشكل البخار الى أنتتصل مع بعضها وتشكل بالتالي طبقة بخارية متصلة .

يسمى الغليان في هذه الحالة بالغليان الصفيحي .

يكون لهذه الطبقة الرقيقة معامل توصيل حراري صغيرومقاومة

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

حرارية كبيـــرة .



الشكل (1-7) تغير قيمة α , q تبعاً لقيمة Δt (الفرق بين درجة حرارة السائل وسطح التسخين) .

تعتمد قيمة معامل انتقال الحرارة في حالة الجريان الحر على الخواص الفيزيائية للسائل وعلى قيمة التدفق الحراري والضغط

على الشكل (1-7) نبين الخطوط البيانية الممثلة لتغيـــر كل من معامل الانتقال وشدة التيار الحراريين في حالة غليـــان الماء تبعا لقيمة Δt .

عند قيم صغيرة لـ Δt (حتى 5 درجات) يمكن تحديـــد

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

معامل الانتقال الحراري بالطرق المتبعة في حالة الحمل الحر والمدروسة سابقا (المنحني AB) .

مع زيادة Δt تزداد قيمة معامل انتقال الحرارة بسرعة ويأخذ أكبر قيمة له في النقطة K .

في هذه النقطة يحدث تغير في نوعية الغليان من حبيبي الى صفيحي بولتالي يأخذ معامل الانتقال الحراري بالتناقص وبشكل حاد طردا مع زيادة Δt .

تترافق الظاهرة الاخيرة مع تشكل حبيبات كثيرة ونشيطة من البخار دون أن تتمكن هذه الحبيبات من الانفصال وبالتالي تتشكل طبقة رقيقة متصلة من البخار تعزل السائل عن الجدران (سطوح التسخين) .

تسمى قيم Δt , α و q التي تتفق ولحظة الانتقال من الغليان الحبيبي الى الغليان الصفيحي بالقيم الحرجة .

تعتبر قيمة Δt_k ذات أهمية كبيرة لاختيار نظام عمل الغليان الجيد وأجهزة البخار .

لحساب قيمتي معامل الانتقال الحراري والتيار الحراري الحرج في حالة الغليان الحبيبي عند الحمل الحر في حجم كبير نستعمل المعادلتين التاليتين :

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$\alpha = 0.008\left(\frac{\rho''}{\rho' - \rho''}\right)^{0.033}\left(\frac{\rho'}{\sigma}\right)^{0.33}\frac{\lambda^{0.75}\, q^{0.7}}{\mu^{0.45}\, C^{0.12}\, T_H^{0.37}} \quad [w/m^2C^o] \tag{1-7}$$

$$q_k = 5466.\frac{\lambda^{0.4}\,(\rho'-\rho'')^{0.48}.(\rho'.r)^{0.36}.T_H^{0.32}.\sigma^{0.21}}{\rho'^{0.31}\,\mu^{0.14}\,C^{0.8}} \quad [w/m^2] \tag{2-7}$$

حيث :

ρ كثافة السائل والبخار .

r حرارة تشكل البخار .

σ معامل التوتر السطحي .

λ معامل التوصيل الحراري للسائل .

μ معامل اللزوجة التحريكية للسائل .

c السعة الحرارية للسائل .

T_H درجة الحرارة المطلقة للبخار المشبع عند الضغط المحدد .

في حالة الغليان الحبيبي للماء ضمن مجال الضغط P=0.2 ← 80 Par نستخدم العلاقة التالية :

$$\alpha = 3.15 x P^{0.15} . q^{0.7} = 46\ \Delta t^{2.33} x P^{0.5} \quad [w/m^2.c^o] \tag{3-7}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$\Delta t = t_s - t_H$$

حيث :

t_s درجة حرارة الجدار .

t_H درجة حرارة السائل .

P الضغط المطلق للبخار bar .

q كثافة التيار الحراري $[w/m^2]$.

٧-٢ الانتقال الحراري عند التكاثف

-(Heat Transfer In Condensing Pure Vapour..).

عند ملامسة البخار لسطح أو جسم ما ذو حرارة أخفض من درجة الحرارة الاشباعية يحدث تبادل حراري بين السطح والبخار مسببا الى تكاثف الاخير .

طبقا لحالة السطح يمكن ملاحظة نوعين من التكاثف حبيبي وصفائحي .

اذا كان سطح التكاثف لايبلل بالسائل (كأن يكون السطح مغطى بمادة دهنية معينة ، كيروسين ، بعض أنواع النفط) فان تكاثف البخار يتم بشكل نقاط منفصلة وبهذا الشكل تتم عملية التكاثف الحبيبية (النقطية) .

في حالة التكاثف على السطوح المبللة يتكاثف البخار على شكل طبقة رقيقة يسمى مثل هذا النوع من التكاثف بالتكاثف الطبقي ، تشاهد حالة التكاثف النقطي بشكل قليل وعابر ولفترات قصيرة حيث يكون التبادل الحراري

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

أثناء نشيط جدا .

يساوي معامل الانتقال الحراري في حالة التكاثف النقطي 15-20 مرة من قيمة معامل الانتقال الحراري للتكاثف الصفيحي وتفسر هذه الظاهرة بأن البخار المتكاثف نقطيا يكون في تلامس مباشر مع السطح البارد .

في حالة التكاثف الصفيحي تنتقل حرارة البخار الى الطبقة الرقيقة للبخار المتكاثف ومنها الى السطح .

تشكل الطبقة الرقيقة المتكاثفة مقاومة حرارية وبقدر ماتزداد سماكتها تقل قيمة معامل الانتقال الحراري .

في المبادلات الحرارية العاملة على بخار الماء يتم فيها بشكل عام تكاثف صفيحي في القسم العلوي من الجدران الشاقولية أو الانابيب تهبط الطبقة الصفيحية الى الاسفل بسرعة بطيئة ويكون جريانها ذو طبيعة صفائحية وعند زيادة سرعة الطبقة المتكاثفة يتحول جريانها الى مضطرب .

لندرس عملية التبادل الحراري في حالة التكاثف الصفيحي وعندما يكون الجريان ذو طبيعة صفائحية عندها تتم عملية التبادل الحراري بالتوصيل فقط .

لنفرض أن درجة حرارة سطح الطبقة المتكاثفة من جهة

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

البخار t_H (درجة حرارة الاشباع) ،

ودرجة حرارة الطبقة الصفيحية بجهة الجدار t_s ،

باعتبار أن معامل التوصيل الحراري للطبقة λ و δ سماكتها ، عندها نحصل شدة التبادل الحراري بالعلاقة :

$$q = \frac{\lambda}{\delta}(t_H - t_s) \qquad \left[\frac{w}{m^2}\right] \tag{a}$$

يمكن تحديد شدة التبادل الحراري من قانون نيوتن وذلك عند كون قيمة معامل الانتقال الحراري α معروفا لدينا وفق العلاقة التالية :

$$q = \alpha (t_H - t_s) \tag{b}$$

بمساواة المعادلتين (a) و (b) نجد :

$$\alpha = \frac{\lambda}{\delta} \qquad \left[w/m^2.C^o\right] \tag{4-1}$$

من المعادلة (4-1) نستنتج أن قيمة معامل الانتقال الحراري α تتناسب عكسا مع زيادة سماكة الطبقة الرقيقة المتكاثفة .

قام العالم نوسيلت بدراسة ووضع النظرية الاساسية للتكاثف بهدف استطاع تحديد سماكة طبقة البخار المتكثف والتي تهبط على جدار شاقولي ارتفاعه H وأوجد معادلة تحدد قيمة معامل الانتقال الحراري .

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

اضافة الى دراسات نوسيلت قام العالم السوفييتي كابتيت بطرح مفهوم الحركة الموجية للطبقة الرقيقة من البخار المتكاثف حيث تكون قيمة معامل الانتقال الحراري لمثل هذه الطبقة أكبر بـ 21 % منه بالنسبة لنفس الطبقة عند جريانها بشكل صفيحي .

في الحسابات العملية تقترح المعادلة التالية لحساب معامل الانتقال الحراري الوسطي .

1) في حالة جدار شاقولي :

$$\alpha = 1.14 \sqrt[4]{\frac{g.\rho.r.\lambda^3}{\nu.H.(t_H - t_s)}} \qquad [\ w/m^2.C^\circ\ ] \qquad (5-7)$$

2) في حالة جدار افقي :

$$\alpha = 0.72 \sqrt[4]{\frac{g.\rho.r.\lambda^3}{\nu.d.(t_H - t_s)}} \qquad [\ w/m^2.C^\circ\ ] \qquad (6-7)$$

حيث :

g التسارع الارضي .

λ معامل التوصيل الحراري للسائل .

r حرارة تشكل البخار .

ρ كثافة السائل .

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

ν اللزوجة الحركية للسائل .

H ارتفاع الجدار الشاقولي .

t_H درجة حرارة البخار المشبع .

t_s درجة حرارة سطح الجدار .

d القطر الخارجي للانابيب .

تؤخذ قيم البارامترات الفيزيائية للبخار المتكاثف λ ، ν ، ρ.

عند درجة حرارة وسطية للطبقة المتكاثفة .

أي : $t_m = 0.5\ (t_H - t_s)$ أما حرارة تشكل البخار

فتؤخذ عند قيمة درجة الحرارة الاشباعية t_H .

بشكل عام يمكن املاء المعادلة الخاصة بالتبادل الحراري عند التكاثف في حالة الجريان الصفائحي بدلالة الاعداد اللاقياسية وهي :

$$Nu = C.\sqrt[4]{Gr.K.Pr.\left(\frac{Pr_m}{Pr_s}\right)} \qquad (7-7)$$

حيث :

$$K = \frac{r}{C_{P_m}.\Delta t} \quad ; \quad Nu = \frac{\alpha.l}{\lambda}$$

$$Gr = \frac{g.l^3}{\nu^2} \quad , \quad Pr = \frac{\nu}{a}$$

$C = 0.72$ بالنسبة للانابيب الافقية .

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$C = 0.42$ بالنسبة للانابيب الشاقولية .

تتحدد كمية البخار المتكاثفة على سطح مساحته $1m^2$ بالعلاقة :

$$m = \frac{q}{r} = \frac{\lambda}{\delta . r} (t_H - t_s) \quad \left[Kg/Sec.m^2 \right] \qquad (7-8)$$

بما أن ارتفاع الانابيب دائما أكبر من أقطارها ، لذا يكون معامل الانتقال الحراري عند التوضع الافقي للانابيب أكبر منه في حالة الوضعية الشاقولية .

فيما يلي نستعرض العوامل التي تؤثر في عملية الانتقال الحراري أثناء التكاثف .

تعطي كل من المعادلتين (7-5) و (7-6) قيمة معامل الانتقال الحراري عند حركة بطيئة للبخار $w < 10$ m/Sec أو عندما تكون السرعة مساوية للصفر .

اذا كانت حركة البخار تتم باتجاه حركة الطبقة العليحية المتكاثفة عندها تأخذ سماكة هذه الطبقة بالنقصان وبالتالي تزداد قيمة معامل الانتقال الحراري .

عندما تتم حركة تيار البخار باتجاه معاكس لحركة الطبقة العليحية المتكاثفة عندها تزداد سماكة الطبقة المتكاثفة وبالتالي تنقص قيمة معامل الانتقال الحراري .

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

عندما تكون سرعة البخار كبيرة تتحطم الطبقة العليمية المتكثفة وهذا يؤدي الى زيادة معامل الانتقال الحراري بشكل كبير .

في حالة تكاثف بخار زائد التسخين (محمص) فانه يجب الاخذ بعين الاعتبار لكمية الحرارة الناتجة من زيادة التسخين والتي تساوي الى :

$$q_s = C_{pm} (t_s - t_H)$$

حيث t_s هنا هي درجة حرارة البخار المحمص و t_H درجة حرارة التكاثف (الاشباع) ، في هذه الحالة تكون كمية الحرارة الداخلة في الدستور الخاص بحساب معامل انتقال الحرارة عبارة عن مجموع حرارة زيادة التسخين وحرارة التكاثف أي: $r + q_s$.

أما فرق درجة الحرارة Δt فتبقى كماهي في السابق

$$\Delta t = t_H - t_s .$$

تلعب نوعية سطح التكاثف دورا هاما وعلى سبيل المثال بالنسبة للانابيب المدفئة وذات الخشونة الكبيرة تكون سماكة الطبقة العليحية المتكاثفة كبيرة جدا حيث يؤدي ذلك الى التقليل من قيمة معامل الانتقال الحراري بأكثر من 30% بالمقارنة مع قيمته بالنسبة للانابيب الملساء والنظيفة .

تقل قيمة معامل الانتقال الحراري أيضا عند وجود مزيج

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

من مختلف الغازات مع البخار المتكاثف والسبب في ذلك هو أنه لدى تكاثف البخار تبقى الغازات الاخرى أو الهواء على السطوح الباردة مغلفة اياها بشكل طبقة وعلى سبيل المثال عند وجود نسبة من الهواء قدرها 1% مع البخار عندها تقل قيمة معامل الانتقال الحراري بمقدار 60% .

يلعب التوضع الصحيح للانابيب في المكثف دورا هاما في رفع قيمة معامل الانتقال الحراري .ففي حالة الانابيب الشاقولية يعمد الى وضع حواجز جانبية على مسافات متتالية مما يؤدي الى زيادة مقدار التبادل الحراري للمكثف بـ 3 — 2 مرة .

أما في حالة الانابيب الافقية فاننا نحصل على فعالية كبيرة لعملية التبادل الحراري عندما يسيل السائل المتكاثف على الانبوب العلوي على جزء صغير من الانابيب السفلية وبالتالي تزداد فعالية التبادل الحراري بالنسبة لهذه الانابيب نتيجة التفاس المباشر بين البخار الغير المتكاثف وسطوح التبريد اللاحقة .

* * *

*

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مسائل

م١ : احسب قيمة معامل انتقال الحرارة عند غليان الماء وكمية البخار المتشكلة خلال ساعة من بدء الغليان ، علما أن :

مساحة سطح التبادل الحراري الكلي $F = 5\ m^2$ ، درجة حرارة الجدار $t_s = 156\ C^o$ ، ضغط البخار $P = 4.5\ bar$ ، درجة حرارة الاشباع عند الضغط المعطى $t_H = 148\ C^o$ ، حرارة تشكل البخار $r = 2120 [Kj/Kg]$.

الحل :

يحسب معامل انتقال الحرارة بالعلاقة :

$$\alpha = 46\ \Delta t^{2.33}\ .P^{0.5} \qquad [\ w/m^2.C^o\ ]$$

$$= 46(156-148)^{2.33}\ x(4.5)^{0.5} = 12404 \qquad [\ w/m^2.C^o\ ]$$

تساوي كمية الحرارة المنتقلة الى :

$$Q = \alpha.F.\ \Delta t$$

$$= 12404 x 5 x 8 = 496160\ [w] = 496 \qquad [kw]$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

كمية البخار التي نحصل عليها خلال ساعة واحـــدة :

$$m = \frac{q}{r}$$

$$= \frac{496160 \times 3600}{2120.4 \times 1000} = 842.4 \left[Kg/h \right]$$

م٢ : أوجد معامل الانتقال الحراري من البخار الى انبـوب مكثف الفقي ، قطر الانبوب الخارجي $d = 30$ mm ، ارتفاع الانبوب $H = 3$ m ، درجة حرارة السطح $t_s = 11$ C^o على سطـح أنابيب المكثف يتكاثف بخار جاف مشبع عند ضغط $P = 0.04$ bar ودرجة حرارة $t_H = 29$ C^o .

الحـــل :

. نحسب معامل الانتقال الحراري من المعادلة :

$$\alpha = 1.14 \sqrt[4]{\frac{g . \rho . r . \lambda^3}{\nu . H . (t_H - t_s)}}$$

مع ملاحظة أن قيم λ , ρ , ν تؤخذ عند درجة حرارة وشطيـــة t_m حيث :

$$t_m = 0.5(t_s + t_H) = 0.5(11+29) = 20 \ C^o$$

ومنه :

$$\nu = 1.006 \times 10^{-6} \ [m^2/Sec] \ ; \ \lambda = 0.515 \ [w/m.^oC] ; \ \rho = 998.2 [kg/m^2]$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

نأخذ حرارة تشكل البخار r عند قيمة درجة الحرارة الاشباعية $t_H = 29\ C^o$ ومنه :

$$r = 2432.3 \quad [Kj/Kg.]$$

بتعويض القيم المستخرجة في معادلة معامل انتقال الحرارة نحصل على :

$$h = 1.14 \sqrt[4]{\frac{9.81 \times 998.2 \times 2432.3 \times 1000 \times (0.515)^3}{1.006 \times 10^{-6} \times 0.03 \times 18}} = 10028 \ [w/m^2.C^o]$$

كمية الحرارة المنتقلة الى سطح الانابيب :

$$Q = \alpha . F . \Delta t = 10028\ (3.14 \times 0.03 \times 3) \times 18 = 51036 \quad [w]$$

كمية البخار المتكاثف :

$$m = \frac{q}{r} = \frac{51036 \times 3600}{2432.3 \times 1000} = 75.5 \quad [kg/h]$$

لدى اعالدة الحسابات بالنسبة لمكثف شاقولي يعمل ضمن نفس الشروط نلاحظ أن كمية البخار المتكاثفة في حالة المكثف الافقي أكبر من كمية البخار المتكاثف في حالة المكثف الشاقولي بنسبة الضعف .

* * *

*

*

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الفصل الثامن

الانتقـــال الحـــراري بالاشـعـاع

"Radiation Heat Transfer....."

٨-١ مفاهيم عامة حول الاشعاع الحراري :

-(Basic Concepts Of Thermal Radiation.).

تظهر الطاقة الحرارية الاشعاعية في الاجسام نتيجة تسخينها حيث تنتشر في الفراغ على شكل موجات كهرطيسية .

بشكل أساسي تتبع كمية الحرارة الاشعاعية للخـــــواص الفيزيائية ودرجة حرارة الجسم المشع .

تختلف الموجات الكهرطيسية عن بعضها البعض بما يسمـــى بطول الموجة أو بعدد الذبذبات في الثانية ، يمكن تحديد سرعـــة الاشعاع ضمن الفراغ المطلق بمعرفة طول الموجة λ وعدد الذبذبـات في الثانية N من العلاقة التالية :

$$w = \lambda . N = 300,000 \quad [Km/Sec] \qquad (8-1)$$

يلعب طول الموجة λ دورا بارزا في تحديد خواص كـــل الاشعة وأقصر الموجات هي موجة الاشعة الكونية حيث $\lambda = 0.1\ A - 10\ A$ (انغستروم = A و $1\ A = 10^{-7}$ mm) ،طول مـوجـة أشعة غامـا

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

10 A ،وأشعة رونتجن A 200-10 ،والاشعة فوق البنفسجية ذات موجة طولها μ0,4-200A = λ (ميكرون = μ) ، الاشعة الضوئية μ 0.8-0.04 ، الاشعة تحت الحمراء أو الاشعة الحرارية μ 400÷0.8 = λ وأخيرا يبلغ طول موجة الاشعة الكهرمغناطيسية (الراديو) μ400 < λ .

من كل أنواع الاشعة المذكورة أعلاه وبالنسبة لموضوع انتقال الحرارة ، تهمنا الاشعة الحرارية (ماتحت الحمراء) والتي يتراوح طول موجتها بحدود μ 400 ← 0.8 = λ .

جميع الاجسام تبث أو تمتص الطاقة الاشعاعية عندماتكون درجة حرارتها مختلفة عن الصفر المطلق وسواء كانت درجات حرارة هذه الاجسام متساوية أو غير متساوية وكيفما كان توضعها في الفراغ فانه يوجد دائما تبادل حراري اشعاعي بشكل دائم .

في حالة وجود توازن حراري بين الجسم والوسط فان كمية الحرارة التي يطرحها الجسم بالاشعاع تساوي كمية الحرارة التي يمتصها .

لنفترض الان أنه لدينا جسم يستقبل طاقة اشعاعية قدرها Q ، نلاحظ أن قسما من هذه الطاقة يمتص من قبل الجسم ومقداره Q_A كماينعكس قسما آخر من الطاقة Q_R أما الجزء الثالث من الطاقة Q_D فهو ينفذ عبر الجسم ، أي:-

$$Q = Q_A + Q_R + Q_D \qquad (8-2)$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

أو :

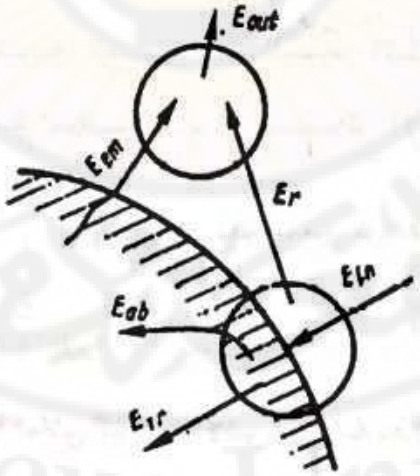
$$A + R + D = 1 \qquad (8-3)$$

حيث :

A: تسمى بمعامل الامتصاص وتساوي الى نسبة الطاقة الاشعاعية التي يمتصها الجسم الى مجموع الطاقة الاشعاعية التي تقع عليه .

R: تسمى بمعامل الانعكاس وتساوي الى نسبة الطاقة الاشعاعية المنعكسة من الجسم الى مجموع الطاقة الاشعاعية الكلية الواقعة على الجسم .

D: معامل النفاذ ويساوي الى نسبة الطاقة الاشعاعية التي تنفذ عبرالجسم الى الطاقة الاشعاعية الكلية .



الشكل (1-8) توزع الطاقة الاشعاعية عند اصطدامها بجسم

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

بالنسبة لغالبية الاجسام الصلبة يساوي المعامل D الى الصفر أي أن هذه الاجسام لاتسمح بنفاذ الطاقة الاشعاعية عبرها ، أي :

$$A + R = 1 \qquad (8-4)$$

اذا كان الجسم يمتص كامل الطاقة الاشعاعية التي تقع عليه عندها يكون :

$$D = 0 \quad , \quad R = 0 \quad , \quad A = 1$$

يسمى مثل هذا الجسم بالجسم الاسود المطلق .

أما اذا كان الجسم أو السطح يعكس كامل الطاقة الاشعاعية فيسمى بالسطح الابيض المطلق أي :

$$D = 0 \quad , \quad A = 0 \quad , \quad R = 1$$

وأخيرا فانه في الحالة التي يكون بها الجسم ذو قابلية مطلقة لنفاذ الاشعة الحرارية عبره ، عندها يكون :

$$A = 0 \quad , \quad R = 0 \quad , \quad D = 1$$

تجدر الاشارة الى أنه في الطبيعة لاتوجد أجسام مطلقة السواد أو البياض والنفوذية ، غير أن طرح مثل هذه المفاهيم يبقى ضروريا للمقارنة مع السطوح الحيائية في الطبيعة ، وعلى سبيل المثال يعتبر الكوارتز غير شفاف للأشعة الدوثية و الاشعة فوق البنفسجية .

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الحجر الملحي يعتبر شفافا بالنسبة للاشعة الحرارية وغير شفاف بالنسبة للاشعة فوق البنفسجية ، زجاج النوافذ يعتبر شفافا بالنسبة للاشعة الضوئية وغير شفاف بالنسبة للاشعة فوق البنفسجية والاشعة الحرارية .

السطوح البيضاء (مثل السطوح المدهونة) تعكس جيدا الاشعة المرئية ولكنها تمتص الاشعة الحرارية .

ان خواص الاجسام بالنسبة لامتصاص أو عكس الاشعة الحرارية تتبع أساسا لحالة السطح وليس للونه واذا كان السطح يعكس الاشعة بزاوية انعكاس مساوية لزاوية ورود تلك الاشعة فان هذا السطح يسمى بالسطح الصقيل ، أما اذا كانت الاشعة الواردة تنعكس على السطح وفق عدد كبير من الاتجاهات فيسمى هذا السطح بالسطح النافذ (مثل سطح الطباشير) .

٨ -٢ القوانين الاساسية للتبادل الحراري الاشعاعي :
-(Basic Laws Of Thermal Radiation.).

٨ -٢-١ قانون ستيفان - بولتسمان : (Stefan-Boltzmann's Low)-

يعبر هذا القانون عن العلاقة الكائنة بين درجة الحرارة المطلقة للجسم ومقدار الطاقة الاشعاعية الاجمالية E المنطلقة من هذا الجسم وفقا للعلاقة التالية :

$$E = \varepsilon . C_o \left(\frac{T}{100}\right)^4 = C . \left(\frac{T}{100}\right)^4 \qquad (8-5)$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

حيث :

E: اشعاعية الجسم أي كمية الطاقة الاشعاعية لوحدة سطح الجسم خلال واحدة الزمن $[w/m^2]$.

C_o. ثابت اشعاعي للجسم المطلق السواد ويساوي الى $5,679\left[\frac{w}{m^2.C^o}\right]$

ع درجة سواد الجسم وتساوي الى النسبة $\frac{E}{E_o} = \frac{C}{C_o}$.

E_o; اشعاعية الجسم المطلق السواد .

C; ثابت يسمى بمعامل الاشعاع .

في الجدول (8-1) نورد قيم ع لبعض المواد :

اسم المادة	t [C°]	ع
المنيوم صقيل	50 - 500	0.04 - 0.06
لبرونز	50	0.1
حديد صفائح (لماع)	30	0.23
تنك أبيض	20	0.28
ذهب صقيل	200 - 600	0.02 - 0.03
نحاس صقيل	50 - 100	0.02
نيكل صقيل	200 - 400	0.07 - 0.09
فضة صقيلة	200 - 600	0.02 - 0.03
صفائح فولاذية مدرفلة	500	0.56
فولاذ مؤكسد	200 - 600	0.8
فولاذ عالي الاكسدة	500	9.98
كرتون من الاسبستوس	20	0.96
خشب قاسي	20	0.8 - 0.9

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

اسم المادة	t [C°]	ع
قرميد مقاوم للاحتراق	500 - 1000	0.8 - 0.9
قرميد من الطف الحراري	1000	0.75
طلاء أسود	40 - 100	0.96 - 0.98
طلاء أبيض	40 - 100	0.8 - 0.95
دهان زيتي بألوان مختلفة	100	0.82 - 0.96
زجاج	20 - 100	0.95

جدول (8-1) قيم ع لبعض المواد



٨-٢-٢ قانون كيرشوف ;.....(Kirchhoff's Law)

لندرس حالة التبادل الحراري الاشعاعي بين سطحين مستويين ومتوازيين وذات درجات حرارة متساوية ، أحدهما رمادي والثاني مطلق السواد .

بفرض أن السطح المطلق السواد يشع قدرة حرارية قدرها E_o حيث يمتص السطح الرمادي جزءاً من هذه القدرة AE_o وتنعكس الكمية المتبقية من الطاقة والتي تساوي الى $(1-A)R_o$.

لدى انعكاس هذه الكمية تعود لتقع على الجسم المطلق السواد والذي يمتصها بشكل كامل .

كما نرمز لكمية الطاقة الاشعاعية الذاتية للجسم الرمادي بـ E_λ .

مماسبق تكون كمية الحرارة المنتقلة بالاشعاع عند درجة

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

حرارة واحدة للسطحين أي : $T = T_s$ مساوية للصفر ، أي :

$$q = E_\lambda - AE_o \qquad E_o = RE_o + E_\lambda$$

(8-6)

$$\Rightarrow E_o = (1 - A)E_o + E_\lambda$$ ومنه :

(8-7) $$\Rightarrow \boxed{E_\lambda = A.E_o = \varepsilon.E_o}$$

تعبر المعادلة (8-7) عن قانون كيرشوف والذي يشير الى أن كمية الاشعاع التي يطلقها الجسم تساوي الى حاصل ضرب معامل الامتصاص لهذا الجسم في كمية الاشعاع التي يطلقها الجسم الاسود المطلق .

٨-٢-٣ قانون لامبرت : .....(Lambert's Law):

يبحث قانون لامبرت في تحديد تغير كمية الطاقة الاشعاعية الصادرة عن الجسم في الاتجاهات المختلفة .

لندرس الاشعاعات الصادرة عن جسم صغير .

تتحدد كمية الطاقة الاشعاعية الصادرة عن الجسم خلال واحدة الزمن في جميع الاتجاهات ضمن مجال سطح نصف كرة مساحتها $1\ m^2$ بالعلاقة :

$$E = \varepsilon.C_o \left(\frac{T}{100}\right)^4$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

تكون قيمة الطاقة الاشعاعية E_n الساقطة بشكل عمـــودي على السطح أقل من كمية الطاقة الاشعاعية الكلية ضمن مجال نصـــف الكرة بـ $\pi = 3.14$ مرة أي : $E_n = \frac{E}{\pi}$.

كما تتحدد كمية الطاقة الاشعاعية في أية اتجاه آخـــــر يصنع مع الناظم للسطح زاوية φ بالعلاقة التالية :

$$E_\varphi = E_n . \cos\varphi = \frac{E}{\pi} \cos\varphi = \frac{\varepsilon . C_o (\frac{T}{100})^4}{\pi} \cos\varphi \qquad (8-8)$$

يكون قانون لامبرت [المعادلة (8-8)*] صحيحـــــا بالنسبة للاجسام المطلقة السواد أما بالنسبة للاجسام الرماديـــة فيمكن تطبيق القانون المذكور عندما $\varphi < 60^o$.

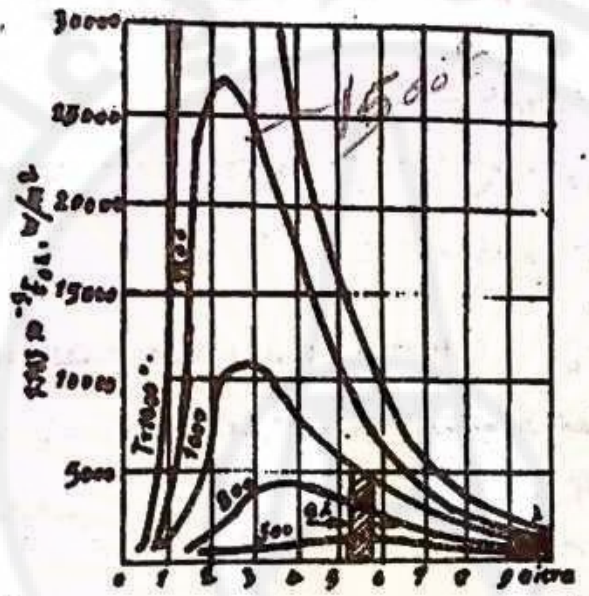
٨-٢-٤ قانون بلانك .. (Blanck's Law) :

تتبع شدة الاشعاع بالنسبة للجسم المطلق الســـواد $I_{s\lambda}$ ولأية جسم حقيقي I_λ لدرجة حرارة الجسم ولطول الموجة .

بالنسبة للجسم المطلق السواد وعند درجة حرارة محـــددة يطلق هذا الجسم اشعاعات حرارية ذات أطوال موجات مختلفة تتـــراوح مابين $\lambda = 0$ وحتى $\lambda = \infty$.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

بشكل ما اذا ماقسمنا كمية الاشعة وفقا للاطوال المختلفة للموجات وقمنا بقياس طاقة كل أشعة يتضح أنه ضمن مجال معين لأطوال الموجات تزداد كثافة الاشعة طردا مع زيادة طول الموجة الى أن يصل هذا الطول الى قيمة محددة ، عندها تبدأ الطاقة الاشعاعية بالنقصان [الشكل (2-8)] .



الشكل (2-8) التمثيل البياني
لقانون بلانك

تجدر الاشارة أيضا الى أنه عند طول معين للموجة تزداد الطاقة الاشعاعية (ذات طول الموجة المعتبر) طردا مع زيادة درجة الحرارة [الشكل (2-8)] .

لدى قيام العالم بلانك بدراسة الاشعاعات الكهرطيسية الطبيعية استطاع باستخدام مفهوم الطاقة الكوانتية وضع قانون

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

تغير شدة الاشعاع للجسم المطلق السواد كتابع لدرجة الحرارة ولطول الموجة وفق العلاقة التالية :

$$I_{s\lambda} = \frac{C_1 \cdot \lambda^{-5}}{e^{\frac{C_2}{\lambda . T}} - 1} \qquad (8-9)$$

حيث :

e; أساس اللوغاريتم الطبيعي، λ طول الموجة :

$$C_2 = 1.44 \times 10^{-2} \left[m.C^{\circ} \right] \; ; \; C_1 = 3.74 \times 10^{-16} \left[w/m^2 \right]$$

T: درجة الحرارة المطلقة $\left[K^{\circ} \right]$.

من الشكل (4-8) نلاحظ أنه مع زيادة طول الموجة وعند درجة حرارة ثابتة فان شدة الاشعاع $I_{s\lambda}$ تزداد من الصفر وحتى تبلغ نهاية عظمى ثم تأخذ بالنقصان حتى تنتهي الى الصفر عندما $\lambda = \infty$.

نلاحظ أيضا أنه عند طول محدد للموجة فان شدة الاشعاع $I_{s\lambda}$ تزداد مع زيادة مع زيادة درجة الحرارة .

٨-٢-٥-قانون فين (قانون الازاحة) : .(Wien'sLaw)

ينتج قانون فين عن قانون بلانك وهو يضع علاقة بين طول الموجة λ_m التي تناسب أكبر شدة للاشعاع من جهة مع درجة الحرارة

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

من جهة أخرى ووفقا للعلاقة التالية :

$$\lambda_m . T = 2.9 \ [mm.C^o] \Longrightarrow \lambda_m = \frac{2.9}{T} \ [mm] \qquad (8\text{-}10)$$

يظهر قانون فين أنه مع زيادة درجة الحرارة فان شدة الاشعاع الاعظمية تنزاح باتجاه الطول الاقصر للموجة .

ان صحة هذا القانون تبرهنه ظاهرة توهج المعادن حيث يكون اللون في البدء أحمر ومن ثم يتحول تدريجيا مع زيادة درجة الحرارة الى اللون البرتقالي فالاصفر ، أي وبما يتفق مع طول موجات أقصر فأقصر .

٨ -٣ التبادل الحراري بالاشعاع بين الاجسام الصلبة :

-(Radiation Heat Transfer Between Solids.)...

كما ورد ذكره يمكن بواسطة قانون ستيفان - بولتزمان تحديد شدة الاشعاع الذاتي E_e تبعا لدرجة الحرارة والخواص الفيزيائية للجسم .

في الحالة التي يكون فيها الجسم في وضع تبادل للطاقة الاشعاعية مع جسم خارجي فانه تقع على الجسم طاقة اشعاعية من الخارج قدرها E_o حيث يمتص جزء من هذه الطاقة قدره $A.E_o$ والتي تتحول الى طاقة داخلية وتنعكس الكمية الباقية من الطاقة الاشعاعية وتساوي الى $R.E_o$.

يسمى مجموع الاشعة الذاتية والمنعكسة التي يطلقها الجسم

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

بالاشعاعية الفعالة أي :

$$E_{eff} = E_e + R.E_o = E_e + (1-A)E_o \qquad (11-8)$$

نستنتج من المعادلة (11-8) أن الاشعاعية الفعالة لاتتبع فقط للخواص الفيزيائية للجسم ولدرجة حرارته فحسب بل تتبع أيضا للخواص الفيزيائية ولدرجة حرارة الاجسام المحيطة وتتبع أيضا لشكل الجسم ومقاساته ووضعية هذا الجسم في الفراغ .

بالنسبة للاجسام المطلقة السواد يكون $E_{eff} = E_o$.

لندرس عملية التبادل الحراري الاشعاعي بين جسمين رماديين على شكل صفيحتين متوازيتين يفصل بينهما وسط شفاف بفرض أن أبعاد الصفيحتين أكبر بكثير من المسافة الفاصلة بينهما .

نفترض أيضا أن الاشعاع الذي يصدره أحد الجسمين يقع بكامله على الجسم الاخر .

باعتبار أن درجة حرارة الصفيحتين T_1 ، T_2 وأن معامل الامتصاص لهما هو A_1 ، A_2 وشدة الاشعاع الذاتي E_1 ، E_2 وشدة الاشعاع الفعال للجسمين هو E_{1eff} ، E_{2eff} ومعامل الاشعاع C_1 ، C_2 .

بفرض أن $T_1 > T_2$ تشع الصفيحة الاولى طاقة اشعاعية على الصفيحة الثانية حيث تمتص الاخيرة جزءا من هذه الاشعاعات وتعكس الجزء الاخر على الصفيحة الاولى كما أن الصفيحة الاولى

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

تمتص جزءا من الاشعاع المنعكس على الثانية وتقوم بعكس الجزء الباقي وهكذا ...

مماسبق يمكن كتابة العلاقتين التاليتين :

الطاقة الاشعاعية الفعالة للصفيحة الاولى :

$$E_{1eff} = E_1 + (1-A_1).E_{2eff} \quad (a)$$

وللصفيحة الثانية :

$$E_{2eff} = E_2 + (1-A_2).E_{1eff} \quad (b)$$

هاتين المعادلتين بالنسبة لـ E_{1eff} ، E_{2eff} نحصل على :

$$\begin{cases} E_{1eff} = \dfrac{E_1 + E_2 - A_1E_2}{A_1 + A_2 - A_1A_2} \\ E_{2eff} = \dfrac{E_1 + E_2 - A_2E_1}{A_1 + A_2 - A_1A_2} \end{cases} \quad (8-12)$$

ومنه تكون شدة التيار الاشعاعي الحراري المكتسبة كطاقة داخلية بالنسبة للصفيحة الثانية :

$$q = E_{1eff} - E_{2eff} \quad (8-13)$$

بتعويض قيم E_{1eff} ، E_{2eff} من المعادلات (8-12) نجد

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

المعادلات (8-12) في المعادلة (8-13) نحصل على :

$$q = \frac{A_2E_1 - A_1E_2}{A_1 + A_2 - A_1A_2} = \quad (8\text{-}14)$$

$$= \frac{A_2 . C_1 (\frac{T_1}{100})^4 - A_1 . C_2 (\frac{T_2}{100})^4}{A_1 + A_2 - A_1 . A_2}$$

باعتبار أن $C = C_o . \varepsilon$ يمكن كتابة المعادلة الاخيرة بالشكل :

$$q = \frac{C_o \frac{\varepsilon_1}{A_1} (\frac{T_1}{100})^4 \; C_o \frac{\varepsilon_2}{A_2} (\frac{T_2}{100})^4}{\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} - 1} \quad (8\text{-}15)$$

بالعودة الى المعادلة (8-7) نجد أنه يمكننا اعتبار $A = \varepsilon$ ومنه :

$$q = \frac{C_o \left[(\frac{T_1}{100})^4 \quad (\frac{T_2}{100})^4 \right]}{\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} - 1} \quad (8\text{-}16)$$

بادخال مايسمى بمعامل الامتصاص المكافئ $A_{1,2}$ (Reduced Absorptivity) حيث يعطى بالعلاقة :

$$A_{1,2} = \frac{1}{\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} - 1} \quad (8\text{-}17)$$

يسمى الثابت المحدد وفق العلاقة التالية :

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$C_{1,2} = \frac{C_o}{\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} - 1} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} - \frac{1}{C_o}} \qquad (8\text{-}18)$$

بعامل الاشعاع المكافىء ... (Reduced Radiation Factor)

ويقاس بـ $\left[\frac{w}{m^2 . K^4}\right]$.

بتعويض القيمة $C_{1,2}$ من المعادلة (8-18) في المعادلة (8-16) نحصل على التعبير الممثل لكمية الحرارة الاشعاعية المتبادلة بين صفيحتين متوازيتين :

$$Q = C_{1,2} \cdot \left[\left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_2}{100}\right)^4\right] .F \qquad (8\text{-}19)$$

عوضا عن عامل الاشعاع المكافىء $\varepsilon_{1,2}$ يمكن استعمال ما يسمى بدرجة تعتيم الجسم $\varepsilon_{1,2}$ المدد وفقا للعلاقة التالية :

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{C_{1,2}}{C_o} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1} \qquad (8\text{-}20)$$

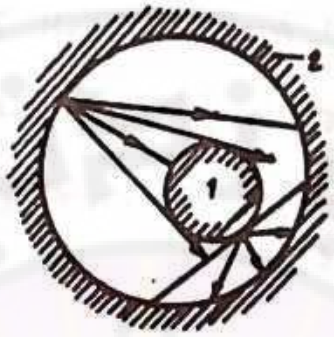
٨-٤-التبادل الحراري الاشعاعي بين جسمين أحدهما موجود ضمن الاخر :

(Radiation Heat Transfer Between a Body and Its Envelope.)-

لدينا جسمين أحدهما واقع ضمن الاخر . الشكل (8-3) نرمز للقيم المتعلقة بالجسم الداخلي بـ A_1 ، C_1 ، ε_1 ، T_1 ، F_1

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

وللجسم الخارجي بـ F_2 ، T_2 ، ε_2 ، C_2 ، A_2 ، .



الشكل (3-8) التبادل الحراري
الاشعاعي بين جسمين أحدهما
ضمن الاخر

ان الفرق الكائن في التبادل الحراري بين هذه الحالة وحالة جسمين متوازيين متقابلين هو أنه في هذه الحالة يسقط فقط جزء $\varphi_{2,1}$ (تسمى $\varphi_{2,1}$ بعامل الشكل (Mean View Factor) وتعبر عن نسبة الاشعة الساقطة من الجسم 2 على الجسم 1 الى الاشعة الكلية المنطلقة من الجسم 2 ومن الواضح أن العامل $\varphi_{1,2}$ يساوي الى الواحد باعتبار أن كل الاشعة المنطلقة من الجسم 1 تسقط على الجسم 2) من الاشعاعية الفعالة للجسم الخارجي على الجسم الداخلي أما القسم الباقي $(1-\varphi)$ فيسقط على سطح الجسم الخارجي نفسه .

تتألف الاشعاعية الفعالة للجسم الداخلي من اشعاع ذاتي

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

ومنعكس ، أي :

$$E_{1eff} = E_1 + (1-A_1)\,\varphi_{2,1}\cdot E_{2eff} \qquad (8-21)$$

تتألف الاشعاعية الفعالة للجسم الخارجي من الاشعاع الذاتي والاشعاع المنعكس (الاشعاع المنعكس ينتج عن الاشعة الواقعة على الجسم الداخلي من الجسم الخارجي ومن الاشعة الذاتية للجسم الداخلي نفسه) ومنه :

$$E_{2eff} = E_2 + (1-A_2)\,E_{1eff} + (1-A_2)(1-\varphi_{2,1})E_{2eff} \qquad (8-22)$$

مع التنويه الى أن الحد الثالث من الطرف اليمين للمعادلة (8-22) يعبر عن جزء الاشعة المنعكسة من الجسم الخارجي دون أن يصطدم بالجسم الداخلي حيث يصطدم بالجسم الخارجي في الجهة المقابلة ليعود فينعكس .

بحل كلا المعادلتين (8-21) و (8-22) حلا مشتركا بالنسبة لـ E_{1eff} و E_{2eff} نحصل على :

$$\begin{cases} E_{1eff} = \dfrac{A_2E_1 + \varphi_{1,2}E_1 + \varphi_{1,2}E_2 - \varphi_{1,2}A_1E_2 - \varphi_{1,2}A_2E_1}{A_2 + A_1\,\varphi_{1,2}^{(1-A_2)}} \\ E_{2eff} = \dfrac{E_1 + E_2 - A_2E_1}{A_2 + A_1\cdot\varphi_{1,2}^{(1-A_2)}} \end{cases} \qquad (8-23)$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

بدلا عن استخدام مفهوم الاشعاعية الفعالة يمكن اعـــادة كتابـة المعالات السابقة بدلالة كميات الحرارة الفعالة باعتبـــار أن : $Q_i = E_i . F_i$ (F_i مساحة سطح التبادل الحراري) ومنـــه تاخذ المعادلات (8-23) الشكل التالي :

$$(8-24)\quad \begin{cases} Q_{1eff} = \dfrac{A_2 Q_1 + \varphi_{2,1} Q_1 + \varphi_{2,1} Q_2 - \varphi_{2,1} A_1 Q_2 - \varphi_{2,1} A_2 Q_1}{A_2 + A_1 \cdot \varphi_{2,1} (1 - A_2)} \\ \\ Q_{2eff} = \dfrac{Q_1 + Q_2 - A_2 Q_1}{A_2 + A_1 \cdot \varphi_{2,1} (1 - A_2)} \end{cases}$$

تتحدد كمية الاشعاع الحراري المتبادل بين الجسمين(الطاقة الحرارية المنتقلة) بالعلاقة التالية :

$$(8-25) \qquad Q_{1,2} = Q_{1eff} - \varphi_{2,1} \cdot Q_{2eff}$$

بتعويض عن قيم Q_{1eff} ، Q_{2eff} من المعـــادلا ت (8-24)في المعادلة (8-25) والاصـــلاح نحصـــل علـــى :

$$(8-26) \qquad Q_{1,2} = \frac{\dfrac{Q_1}{A_1} - \dfrac{Q_2}{A_2} \cdot \varphi_{2,1}}{\dfrac{1}{A_1} + \left(\dfrac{1}{A_2} - 1\right) \cdot \varphi_{2,1}}$$

حسب قانون ستيفان ـ بوليتسمان نعوض فـــي المعادلـــة

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

Q_2 ، Q_1 من (8-26) بقيمتهما ، أي :

$$Q_1 = F_1 \left(\frac{T_1}{100}\right)^4 . C_o . \varepsilon_1$$

$$Q_2 = F_2 \left(\frac{T_2}{100}\right)^4 . C_o . \varepsilon_2$$

حيث نحصل على العلاقة التالية :

$$Q_{1,2} = \frac{C_o \left[\left(\frac{T_1}{100}\right)^4 \frac{\varepsilon_1}{A_1} F_1 - \left(\frac{T_2}{100}\right)^4 . \frac{\varepsilon_2}{A_2} F_2 . \varphi_{2,1} \right]}{\frac{1}{A_1} + \varphi_{2,1} \left(\frac{1}{A_2} - 1\right)} \qquad (8-27)$$

من أجل تحديد القيمة المجهولة $\varphi_{2,1}$ نفترض تجاوزا أن درجة حرارة الجسمين 1 و 2 متساوية أي $T_1 = T_2$ ومنه نكتب $Q_{1,2} = 0$ (لايوجد أية تبادل حراري) بتعويض هذه النتيجة في المعادلة (8-27) نحصل على :

$$\frac{\varepsilon_1}{A_1} F_1 - \frac{\varepsilon_2}{A_2} F_2 \varphi_{2,1} = 0$$

ومنه :

$$\varphi_{2,1} = \frac{\varepsilon_1}{A_1} . \frac{A_2}{\varepsilon_2} . \frac{F_1}{F_2} \qquad (8-28)$$

بتعويض القيمة الناتجة لـ $\varphi_{2,1}$ من المعادلة (8-28) في المعادلة (8-27) وبتقسيم كل من صورة ومخرج العلاقة الناتجة على الحد $\frac{\varepsilon_1}{A_1}$ نحصل على المعادلة التالية :

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$Q_{1,2} = -\frac{C_o \cdot F_1 \left[\left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_2}{100}\right)^4 \right]}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{A_2}{\varepsilon_2}\left(\frac{1}{A_2} - 1\right).\frac{F_1}{F_2}} \qquad (8-29')$$

بفرض أن $A = \varepsilon$ عندها تتحول المعادلة (8-28) الـــى الشكل :

$$\varphi_{2,1} = \frac{F_1}{F_2} \qquad (8-30)$$

كما تأخذ المعادلة (8-29) الشكل التالي :

$$Q_{1,2} = \frac{\left[\left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_2}{100}\right)^4 \right] C_o F_1}{\frac{1}{A_1} + \left(\frac{1}{A_2} - 1\right)\frac{F_1}{F_2}} \qquad (8-31)$$

باعتبار عامل الامتصاص المكافىء للمجموعة $A_{1,2}$ حســـب العلاقة :

$$A_{1,2} = \frac{1}{\frac{1}{A_1} + \left(\frac{1}{A_2} - 1\right)\frac{F_1}{F_2}} \qquad (8-32)$$

وعامل الاشعاع المكافىء للمجموعة $C_{1,2}$ حسب العلاقة :

$$C_{1,2} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \left(\frac{1}{C_2} - \frac{1}{C_o}\right)\frac{F_1}{F_2}} \qquad (8-33)$$

عندها يمكن كتابة المعادلة (8-31) بأحد الشكليـــــن

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

التاليين :

$$Q_{1,2} = \left[\left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_2}{100}\right)^4\right] C_o F_1 \cdot A_{1,2} \quad [Watt] \qquad (8-34)$$

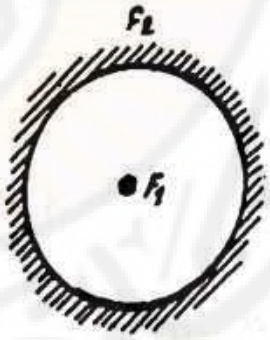
او :

$$Q_{1,2} = \left[\left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_2}{100}\right)^4\right] F_1 \cdot C_{1,2} \quad [Watt] \qquad (8-35)$$

في الحالة الخاصة والتي يكون فيها $F_1 \cong F_2$ الشكل (8-5) عندها يكون $\varphi_{1,2} = 1$ وبالتالي تنتقل كامل الطاقة المشعة من الجسم 1 الى الجسم 2 ويتحول الحل الممثل بالعلاقة (8-35) الى الحل الناتج من أجل حالة التبادل الحراري الاشعاعي بين صفيحتين متقابلتين ومتوازيتين .



الشكل (8-4) جسم يقع ضمن الاخر، حيث : $F_1 \cong F_2$



الشكل (8-5) جسم يقع ضمن الاخر حيث : $F_1 \ll F_2$

وفي الحالة التي يكون فيها مساحة أحد الجسمين صغيرة

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

جدا بالمقارنة مع مساحة الجسم الاخر أي: $F_1 \ll F_2$ الشكل (8-6) عندما $\varphi_{2,1} \to 0$ و $C_{1,2} \to C_1$.

٨-٥. التبادل الحراري الاشعاعي بين جسمين متوضعين بشكل كيفي: (Exchange Of Thermal Radiation Between Bodies Arbitrarily-Located In Space.).

تتميز معادلة التبادل الاشعاعي بين جسمين متوضعين كيفيا بشكل معقد جدا حيث يمكن حل مثل هذه المسألة لبعض الحالات الخاصة فقط .

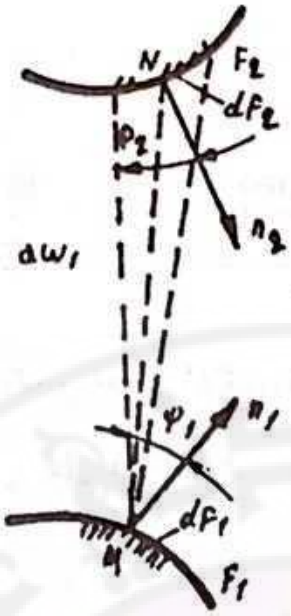
وبشكل عام يمكن تحديد التبادل الاشعاعي بين جسمين متوضعين بشكل كيفي من المعادلة التالية :

$$Q = \frac{C_1 C_2}{C_o}\left[\left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_2}{100}\right)^4\right] \cdot \int_{F_1} dF_1 \cdot \int_{F_2} \frac{\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2}{\pi r^2}\, dF_2 \qquad (8\text{-}36)$$

حيث : $\frac{C_1 \cdot C_2}{C_o}$: معامل الاشعاع للمجموعة المعطاة .

$\int_{F_1} dF_1 \cdot \int_{F_2} \frac{\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2}{\pi r^2}\, dF_2$ المعامل الزاوي أو معامل التعرض للاشعاع .

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner



الشكل (6-8) مجموعة مؤلفة من
جسمين متوضعين بشكل كيفـــــــي
في الفـــراغ

يتبع المعامل الزاوي لحجم وشكل الجسمين ولطريقة توضعهما وبشكل عام يتصف حساب هذا المعامل بأسلوب معقد ، لذا يعطى عادة بجداول أو بمنحنيات بيانية .

6-8- الشـــاشـــات :

في كثير من التطبيقات الهندسية يتطلب الامر التقليل من الطاقة الاشعاعية المنتقلة ، مثلا عند حماية سطح ما من حرارة سطح جسم قريب ذو درجة حرارة عالية ،كحماية مقاييس الترموستات من الطاقة الاشعاعية حيث أن هذه الاشعاعات تؤثر على دقة القياس

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

لتلافي مثل هذه الحالات توضع عادة شاشات تفصل بين هذين السطحين (الشاشة عبارة عن قماش رقيق أو مايشابهه ذات قابلية كبيرة للانعكاس) .

يمكن اعتبار درجات حرارة سطحي الشاشة متساويتين .

لندرس الان حالة شاشة متوضعة بين سطحين متوازيين مع اهمال الانتقال الحراري بالحمل .

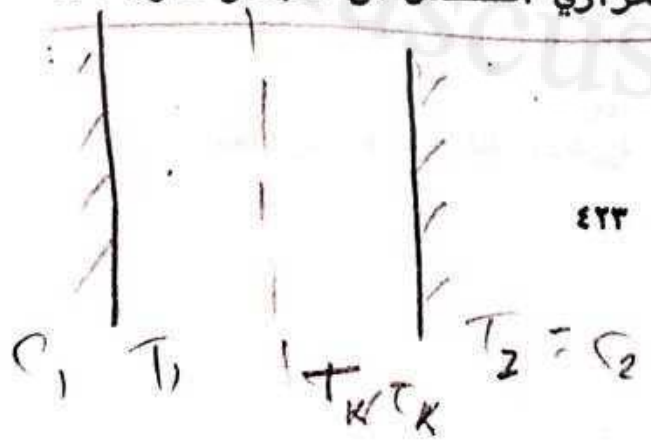
نفرض أن درجة حرارة السطحين المتوازيين $T_1 . T_2$ حيث $T_1 > T_2$.

لنفرض أيضا أن معاملات الاشعاع متساوية بالنسبة لكل من الجدران والشاشة وبالتالي تكون معاملات الاشعاع المكافئة للمجموعة المكونة من الجدارين بدون شاشة ومابين كل جدار على حده مع الشاشة متساوية .

يتحدد التيار الحراري المنتقل من الجدار الاول الى الثاني من المعادلة (19-8) كمايلي :

$$q_o = C_{1,2} \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right] \quad (a)$$

وتكون قيمة التيار الحراري المنتقل من الجدار الاول الى الشاشة :



الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$q_1 = C_{1,2}\left[\left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_k}{100}\right)^4\right] \qquad (b)$$

والتيار الحراري من الشاشة الى الجدار الثاني :

$$q_2 = C_{1,2}\left[\left(\frac{T_k}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_2}{100}\right)^4\right] \qquad (c)$$

حيث T_k درجة حرارة سطح الشاشة .

بما أن T_k تمثل درجة حرارة كلا سطحي الشاشة تكون $q_1 = q_2$ بمساواة المعادلتين (b) و (c) ينتج :

$$C_{1,2}\left[\left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_k}{100}\right)^4\right] = C_{1,2}\left[\left(\frac{T_k}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_2}{100}\right)^4\right] \qquad (d)$$

ومنه :

$$\left(\frac{T_k}{100}\right)^4 = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{T_1}{100}\right)^4 + \left(\frac{T_2}{100}\right)^4\right] \qquad (8-37)$$

نبدل من قيمة T_k من المعادلة (8-37) في المعادلة (b) فنحصل على :

$$q_{1,2} = \frac{1}{2} C_{1,2}\left[\left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_2}{100}\right)^4\right] \qquad (8-38)$$

بمقارنة المعادلة الاخيرة مع المعادلة (a) نجد :

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$q_{1,2} = \frac{1}{2} \cdot q_o \qquad (8-39)$$

نستنتج من المعادلة (8-39) أن وضع شاشة واحدة بين السطحين تقلل من كمية الحرارة المنتقلة بالاشعاع من الجسم الاول الى الثاني بمقدار النصف .

بالتماثل مع ما سبق تنخفض كمية الحرارة المنتقلة بالاشعاع الى الثلث فيما اذا قمنا بوضع شاشتين وتنخفض الى الربع في حالة وضع ثلاثة شاشات .

للحصول على فعالية عالية في تخفيض كمية الحرارة الاشعاعية المنتقلة يمكن استعمال شاشة من معدن صقيل (لمعان) عندها يكون :

$$q_{1,2} = 0.5 \frac{C'_{1,2}}{C_{1,2}} q_o \qquad (8-40)$$

حيث :

$C'_{1,2}$ معامل الاشعاع بين السطح والشاشة .

$C_{1,2}$ معامل الاشعاع بين السطحين .

٨-٧-اشعاعات الغازات :

يختلف اشعاع الغازات بشكل كبير عن اشعاع الاجسام الصلبة

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

تكون الغازات الوحيدة والثنائية الذرة ذات قابلية اشعاعية وامتصاصية صغيرة ، لذا تعتبر هذه الغازات شفافة بالنسبة للاشعة الحرارية .

تتميز الغازات الثلاثية الذرة مثل CO_2 ، H_2O والمتعددة الذرات بقابلية امتصاصية واشعاعية ممتازة .

عند درجة حرارة عالية يكون اشعاع الغازات الثلاثية الذرة كبيرة وعلى سبيل المثال تلعب الغازات الثلاثية الذرة الناتجة عن احتراق الوقود دورا قويا في عملية التبادل الحراري في مثل هذه الحالة فان الغازات الثلاثية الذرة تمتص وتشع الطاقة ضمن مجال محدد لطول الموجات حيث تعتبر هذه الغازات شفافة بالنسبة للاشعة ذات الاطوال الخارجة عن هذا المجال .

عندما تصادف الاشعة المنطلقة من هذه الغازات طبقة غازية معينة وعند مجال ملائم لطول الامواج الذي تكون عنده هذه الطبقة الغازية ذات قابلية جيدة لامتصاص أو اشعاع الطاقة عندها تمتص هذه الطبقة جزءا من هذه الاشعة وتسمح للجزء الباقي بالنفاذ عبرها بشدة أقل .

في الحالة التي تكون فيها سماكة طبقة الغازات كبيرة فانه من المحتمل أن تمتص كامل الطاقة الاشعاعية المارة عبرها .

تتعلق قابلية الغاز لامتصاص لطاقة الاشعاعية بعدة عوامل من بينها ضغط الغاز الجزئي وعدد الاوزان الجزئية ودرجة

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الحرارة حيث يمكن تحديد معامل الامتصاص للغاز من خلال العلاقة التالية :

$$A_\lambda = f(T_g, P, S) \qquad (8-41)$$

أو من المعادلة العامة :

$$A_\lambda = 1 - \frac{1}{e^{k.s}} \qquad (8-42)$$

حيث :

T_g درجة الحرارة الوسطية للغاز .

P الضغط الجزئي .

S سماكة الطبقة الغازية .

لندرس حالة التبادل الحراري بين مزيج غازي مكون من غازين مشعين H_2O و CO_2 مع جسم صلب على تماس معهما .

تتحدد كمية الحرارة التي يحصل عليها أو يعطيها الجسم الصلب في وحدة الزمن ولوحدة السطح حسب قانون ستيفان :

$$q = 5.69 \cdot \varepsilon_{eff} \left[\varepsilon_g \left(\frac{T_g}{100}\right)^4 - A_g \left(\frac{T_w}{100}\right)^4 \right] \qquad (8-43)$$

حيث :

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

T_w, T_g هما درجتا حرارة الغاز والسطح

A_g قابلية الغاز لامتصاص الاشعة عند درجة حرارة مساوية لدرجة حرارة سطح الجدار .

ε_g درجة تعتيم الغاز .

$$A_g = A_{CO_2} + A_{H_2O} \qquad (8-44)$$

اذا كانت درجة تعتيم (سواد) الجدار :

$$\varepsilon_w = 0.7 \div 1$$

تكون درجة تعتيم السطح الفعالة :

$$\varepsilon_{eff} = \frac{\varepsilon_w + 1}{2} \qquad (8-45)$$

تتباين قيمة درجة التعتيم بالنسبة للغازات المختلفة حيث تتبع كما ذكرنا لدرجة حرارة الغاز T_g والضغط الجزئي P ولطول موجة الاشعة l

لمزيج من الغازات كما هو في حالتنا يمكن ايجاد درجة التعتيم لهذا المزيج بالعلاقة التالية :

$$\varepsilon_g = \varepsilon_{CO_2}(P_{CO_2} \cdot l \cdot T_1) + \varepsilon_{H_2O}(P_{H_2O} \cdot l \cdot T_2, \beta) - \Delta\varepsilon_g \qquad (8-46)$$

حيث :

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

ε_g معامل تصحيح يأخذ بعين الاعتبار ، الاشعاع أو الامتصاص الحاصل بين غازي CO_2 و H_2O .

عادة في الحسابات الهندسية تهمل قيمة هذا المعامل .

β تصحيح لـ ε_{H_2O} على الضغط الجزئي لـ H_2O .

مماسبق عرفه نستنتج أنه لزيادة فعالية التبادل الحراري الاشعاعي فانه يجب زيادة درجة حرارة الجسم وزيادة تعتيم الجسم والعكس بالعكس .

* * *

*

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مسائل

م١ : أوجد التبادل الحراري الاشعاعي بين سطحين متوازيين غير محدودين ، درجة حرارة السطح الاول $T_1 = 800\ K^o$ ودرجة حرارة السطح الثاني $T_2 = 400\ K^o$ ، معامل الاشعاع للأول $C_1 = 5.1$ والثاني $C_2 = 4.2\ \frac{w}{m^2.K^4}$.

بفرض أن الضياعات الجانبية مهملة ، كيف سيتغير التبادل الحراري الاشعاعي اذا أصبحت $C_2 = 0.4\ \frac{w}{m^2.K^4}$ ، حيث C_o ثابتة وتساوي 5.67 .

الحل :

لدينا من قانون التبادل الحراري الاشعاعي بين صفيحتين متوازيتين :

$$q = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} - \frac{1}{C_o}} \left[\left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_2}{100}\right)^4 \right]$$

$$q = \frac{1}{\frac{1}{5.1} + \frac{1}{4.2} - \frac{1}{5.67}} \left\{ \left[\frac{800}{100} \right)^4 - \left(\frac{400}{100}\right)^4 \right] = 14895\ \frac{w}{m^2}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

في حالة $C_2 = 0.4$ نعوض بنفس الدستور السابق :

$$q = \frac{1}{\frac{1}{5.1} + \frac{1}{0.4} - \frac{1}{5.67}} \left[\left(\frac{800}{100}\right)^4 - \left(\frac{400}{100}\right)^4 \right] = 1534 \quad \frac{w}{m^2}$$

نستنتج أنه عند استبدال أحد السطحين بسطح صقيل فإن التبادل الحراري الاشعاعي يقل بمقدار 9.7 مرة تقريبا .

٢م : في صنبر يوضع مسخن فولاذي بدون عزل ، سطح المسخن مؤكسد بشكل قوي ، معامل الاشعاع $C_1 = 5.2 \frac{w}{m^2.K^4}$ درجة حرارة السطح الخارجي $T_1 = 430\ K^o$ ، طول المسخن $2 = 1\ m$ قطره $d = 1m$ ، درجة حرارة الصنبر $T_2 = 300\ K^o$ ومعامل الاشعاع لجدار الصنبر $C_2 = 3.5 \frac{w}{m^2.K^4}$ ، طول الصنبر 10 m ، مرفه 8 m ، ارتفاعه 4 m .

أوجد قيمة التبادل الحراري بين سطح المسخن والصنبر اذا كانت C_o تساوي $5.67 \frac{w}{m^2.K^4}$.

الحل :

نطبق في هذه الحالة دستور التبادل الحراري الاشعاعي لجسم موضوع داخل جسم :

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$Q = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{F_1}{F_2}\left(\frac{1}{C_2} - \frac{1}{C_o}\right)} \left[\left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_2}{100}\right)^4\right] F_1 \quad [w]$$

حيث :

$$F_1 = \pi . 2 + \frac{2 \times 3.14}{4} = 7.85 \quad m^2$$

$$F_2 = (8+10)x4x2 + (8x10)x2 = 304 m^2$$

ومنه :

$$Q = \frac{1}{\frac{1}{5.2} + \frac{7.85}{304}\left(\frac{1}{3.5} - \frac{1}{5.67}\right)} \left[\left(\frac{430}{100}\right)^4 - \left(\frac{300}{100}\right)^4\right] x7.85 =$$

$$= 10495 \quad w$$

---

٣٤ : توضع شاشة بين سطحين ،معامل اشعاعهما $C_1 = C_2 = 4.8 \frac{W}{m^2 . K^4}$ درجة حرارة السطحين $T_1 = 600\ K^o$ ، $T_2 = 300\ K^o$.

أوجد قيمة التبادل الاشعاعي قبل وبعد وضع الشاشة ، اذا كانت $C_k = C_1 = C_2$ حيث C_k معامل اشعاع الشاشة .

الحل :

قبل وضع الشاشة تتحدد قيمة التبادل الحراري الاشعاعي

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

بين الجدارين بالمعادلة :

$$q_o = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} - \frac{1}{C_o}} \left[\left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_2}{100}\right)^4 \right]$$

$$q_o = \frac{1}{\frac{1}{4.8} + \frac{1}{4.8} - \frac{1}{5.67}} \left[\left(\frac{600}{100}\right)^4 - \left(\frac{300}{100}\right)^4 \right] = 5056 \quad w/m^2$$

بعد وضع الشاشة تنخفض كمية الحرارة المنتقلة بالاشعاع من الجدار الاول الى الجدار الثاني الى النصف ، أي :

$$q_{1,2} = \frac{1}{2} q_o = \frac{1}{2} \times 5056 = 2528 \quad w/m^2$$

* * * *

*

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الفصل التاسع

المبـــادلات الحـــرارية

"Heat-Exchanger....."

٩-١-أنواع المبادلات الحرارية :

تعريف :

المبادلات الحرارية هي تلك الاجهزة التي يتبادل فيها مائعين للحرارة حيث يعطى المائع الاسخن الحرارة الى المائع الابـــرد .

وبحسب طريقة عمل أجهزة التبادل الحراري يمكن أن نميز ثلاثة أنواع أو نماذج :

1- المبادلات الحرارية الارجاعية :

-(Regenerator Heat Exchangers.).

2- المبادلات الحرارية المزجية :

-(Direct-Contact Heat Exchangers.).

3- المبادلات الحرارية التيارية :

-(Flow Heat Exchangers.).

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

1 ـ المبادلات الارجاعية :

ويتم فيها انتقال للطاقة الحرارية من المائع الساخن الى مجمع حراري حيث تنتقل الحرارة وبشكل دوري من المجمع الحراري الى المائع البارد ، أي أنه في هذا النوع من المبادلات الحرارية يكون كلا من المائعين البارد والساخن على تماس لنفس السطح ولكن بشكل دوري .

2 ـ المبادلات المزجية :

تتم عملية انتقال الحرارة في هذا النوع من المبادلات الحرارية بشكل مباشر من المائع الساخن الى المائع البارد من طريق مزجهما معا ، وكمثال على ذلك مكثفات المزج وأبراج التبريد .

3 ـ مبادلات التيار :

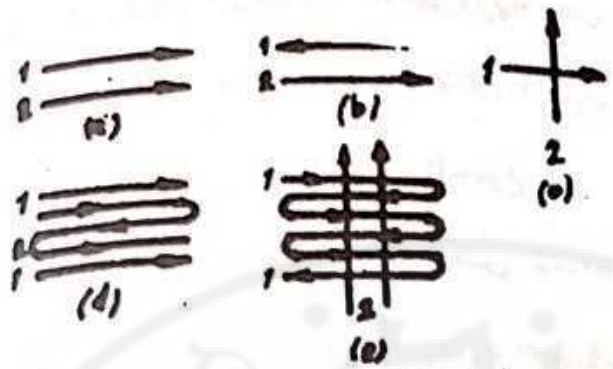
وهو النوع الاكثر انتشارا من المبادلات الحرارية حيث يتم التبادل الحراري بين المائعين الساخن والبارد عبر جدار يفصل بينهما .

في النوع الاخير من المبادلات الحرارية يمكن تحقيق جريان السائل بثلاثة أشكال :

اذا كانت جهة جريان المائعين الساخن والبارد متفقة في الجهة فان مثل هذه الحركة تسمى بالتيار المستقيم أو المتوازي

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

(9-1-a) الشكل (Parallel-Flow.).



الشكل (9-1) نظم الجريان في مبادلات التيار : a) جريان متوازي ، b)جريان متعاكس ، c) جريان عرضي، d)جريان مختلط .

أما اذا كانت جهة جريان المائعين الساخن والبارد بنم باتجاهين متعاكسين يسمى عندها الجريان ، بالجريان المعاكس (Counter Flow.), الشكل (9-1-b) .

في الحالة التي تكون فيها حركة أحد المائعين متعامدا مع حركة المائع الآخر عندها يسمى الجريان ، بالجريان العرضي (Cross-Flow.).

٩ - ٢ المفاهيم الاساسية ومعادلات الحساب:
(Basic Concepts and Calculation Equations.).

عند تصميم مبادلات حرارية جديدة تكمن المهمة الاساسية

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

في حساب سطح التبادل الحراري لهذا المبادل، أما اذا كان معلوما لدينا مسبقا سطح التبادل الحراري عندها يصبح من الضروري تحديد قيم درجات حرارة المواقع عند مداخل ومخارج المبادل الحراري .

تتحدد المعادلة الاساسية للتبادل الحراري في حالة الانتقال الحراري المنتظم بالمعادلة التالية :

$$Q = K.F(T_1 - T_2) \qquad (9-1)$$

حيث :

Q التدفق الحراري $[w]$.

K معامل الانتقال الحراري الوسطي الكلي $\left[\frac{w}{m^2.C^o}\right]$.

T_1, T_2 درجة الحرارة الوسطية للمائعين الساخن والبارد .

في حالة عدم وجود ضياعات حرارية أو تحول طوري يمكن كتابة معادلة التوازن الحراري :

$$Q = V_1 . \rho_1 . C_{p_1} (T_1' - T_1'') = V_2 . \rho_2 . C_{p_2} (T_2'' - T_2') \qquad (9-2)$$

حيث :

$V_1 \rho_1$; $V_2 . \rho_2$ هما الكتلة المتدفقة لوسيط التبادل الحراري (أحد المائعين) $[kg/Sec]$.

C_{p_1}, C_{p_2} السعة الحرارية الوسطية للمائعين فيما

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مجال درجات الحرارة من T' وحتى T'' .

T_1' ، T_2 هما درجة حرارة الدخول الى المبادل الحراري للمائعين البارد والساخن .

T_1'' ، T_2'' درجة حرارة الخروج من المبادل الحراري للمائعين البارد والساخن .

بتعويض القيمة $w_i = V_i \cdot \rho_i \cdot C_{p_i}$ في المعادلة (9-2) نحصل على :

$$\frac{w_2}{w_1} = \frac{T_1' - T_1''}{T_2'' - T_2'} = \frac{\Delta T_1}{\Delta T_2} \qquad (9-3)$$

حيث : ΔT_1 ، ΔT_2 تمثل تغير درجة حرارة المائعين البارد والساخن اعتبارا من مقطع الدخول وحتى مقطع الخروج .

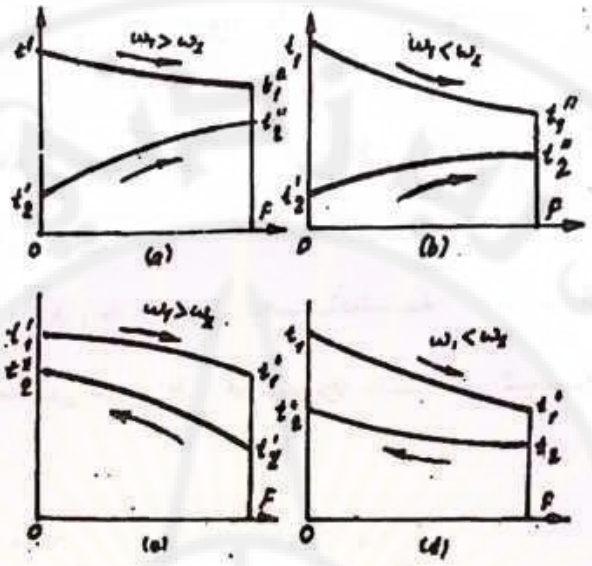
تكون العلاقة الاخيرة صحيحة بالنسبة لأية مائعين وضمن الشروط المفترضة في بداية هذه الفقرة .

من المعادلة (9-3) نلاحظ أن تغير درجة الحرارة تابع لـ w_1 ، w_2 فاذا كانت $w_1 - 2w_2$ عندها تكون قيمة تغير درجة المائع البارد ضعف قيمة تغير درجة حرارة المائع الساخن .

تتبع طبيعة تغير درجة حرارة السائل على امتداد سطوح التبادل الحراري لنوعية الجريان ولقيمة النسبة $\frac{w_1}{w_2}$ ، فاذا كان

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

جريان المائعين في المبادل الحراري يتم بشكل متوازي وباتجاه واحد عندها تتغير درجة حرارة المائعين على طول سطح التبادل F ، كما هو مبين بالشكل (9-2)(a,b) .



الشكل (2-9) تغير درجة حرارة الموائع في حالة الجريان المتوازي والمتعاكس

أما في الحالة التي يتم فيها جريان المائعين بشكل متوازي ومتعاكس في الجهة عندها تتغير درجة حرارة المائعين كما في الشكل (9-2)(c,d) .

من الشكل (2-9) نلاحظ أنه في حالة الجريان المتوازي باتجاه واحد تكون درجة حرارة خروج المائع البارد أخفض دوما من درجة حرارة خروج المائع الساخن ، أما في حالة الجريان المتعاكس فان درجة حرارة خروج المائع البارد يمكن أن تساوي أو تزيد عن درجة حرارة خروج المائع الساخن .

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مما سبق نستنتج أنه في المبادلات الحرارية العتصاكسة الجريان يكون مقدار تخفين المائع المبارد أكبر منه في حالة المبادلات الحرارية ذات نمط الجريان المتوازي باتجاه واحد وذلك عند نفس الشروط الاولية لكلا الحالتين .

بما أن قيمة درجة حرارة المائع (البارد أو الساخن) T تتغير على طول الجريان يجب أن نأخذ بعين الاعتبار أنه يمكن اعتبار Δt , K الداخلين في معادلة الانتقال الحراري ثابتين فقط ضمن سطح تبادل حراري صغير جدا

أي يصبح من الضروري كتابة المعادلة (1-9) بشكل تفاضلي كما يلي :

$$dQ = K.dF.\Delta T \qquad (9-4)$$

بمكاملة المعادلة (4-9) نحصل على مقدار التيار الحراري Q المتدفق عبر كامل السطح F وعند معامل انتقال حراري كلي وسطي K ومنه :

$$Q = \int_0^F K.dF.\Delta T = K.F.\Delta T_m \qquad (9-5)$$

حيث ΔT_m درجة الحرارة الوسطية اللوغاريتمية للمائع على كامل السطح F .

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

في الحالة التي تتغير فيها قيمة معامل انتقال الحرارة K بالنسبة لكامل سطح التبادل الحراري ، عندها يجب أن نأخذ بعين الاعتبار في المعادلة (9-5) لمعامل انتقال حراري وسطي K_m يحسب وفقا للعلاقة التالية :

$$K_m = \frac{F_1.K_1 + F_2.K_2 + \ldots + F_n.K_n}{F_1 + F_2 + \ldots\ldots + F_n} \qquad (9-6)$$

وبالتالي تأخذ المعادلة (9-5) الشكل التالي :

$$Q = K_m \int_0^F \Delta T.dF = K_m.\Delta T_m.F \qquad (9-7)$$

٩-٢-١- فرق درجة الحرارة الوسطي (Mean Temperature Difference)-

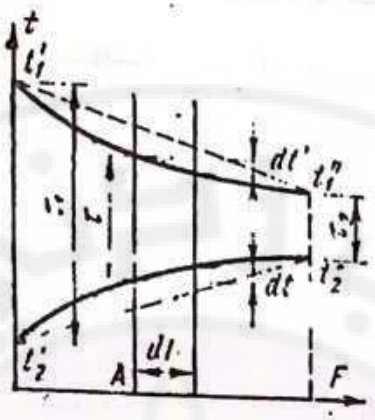
من المعروف أنه اذا كانت درجة حرارة المائعين تتغير وفق خط مستقيم ، عندها يمكن تحديد فرق درجة الحرارة الوسطية وفق العلاقة التالية :

$$\Delta T_m = \frac{t_1' + t_1''}{2} - \frac{t_2' + t_2''}{2} \qquad (9-8)$$

في الواقع لايتبع تغير درجة حرارة كل مائع منحنى خطي وبالتالي فالمعادلة السابقة لـ ΔT_m ماهي الا علاقة تقريبية يمكن استعمالها لفرق صغير بين درجات الحرارة عند مدخل ومخرج المبادل الحراري .

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

لنستخرج المعادلة الخاصة بحساب فرق درجات الحرارة الوسطي في حالة جريان تيار متوازي وباتجاه واحد الشكل (3-9) .



الشكل (3-9) استخراج معادلة تغير فرق درجات حرارة الموائع على طول سطح التبادل

عند مقطع لا على التعيين dF تكون درجتي حرارة المائع الساخن والبارد t_2, t_1 على التوالي ويكون الفرق بينهما :

(a) $$T = t_1 - t_2$$

تتحدد كمية الحرارة المنتقلة من المائع الساخن الى المائع البارد عبر سطح التبادل dF بالعلاقة :

(b) $$dQ = K.dF.T$$

نتيجة انتقال الطاقة الحرارية بين المائعين عبر سطح التبادل الحراري dF تنخفض درجة حرارة المائع الساخن بمقدار

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

dt_1 (ضمن مجال السطح dF فقط) بينما تزداد درجة حرارة المائع البارد بمقدار dt_2 الشكل (3-9) ، وبكتابة معادلة التوازن الحراري بالنسبة لكل مائع على حده نحصل على المساواة التالية :

$$dQ = -m_1 . C_{p_1} . dt_1 = m_2 . C_{p_2} . dt_2 \qquad (c)$$

أو :

$$dt_1 = \frac{-dQ}{m_1 . C_{p_1}} \quad ; \quad dt_2 = \frac{dQ}{m_2 . C_{p_2}} \qquad (d)$$

بمفاضلة المعادلة (a) نحصل على :

$$dT = dt_1 - dt_2 \qquad (e)$$

بتعويض قيم dt_1 , dt_2 من المعادلة (d) في المعادلة (e)نحصل على :

$$dt = - \frac{dQ}{m_1 . C_{p_1}} - \frac{dQ}{m_2 . C_{p_2}}$$

أو :

$$dQ = - \frac{dT}{\frac{1}{m_1 . C_{p_1}} + \frac{1}{m_2 . C_{p_2}}} = - \frac{dT}{N} \qquad (f)$$

حيث :

$$N = \frac{1}{m_1 . C_{p_1}} + \frac{1}{m_2 . C_{p_2}} \qquad (g)$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

بمساواة المعادلتين (b) و (f) نحصل على :

$$-\frac{dT}{N} = K.dF.T \Longrightarrow -\frac{dT}{T} = K.dF.N \qquad (i)$$

اذا كانت قيم كل من N,K ثابتة ضمن مجال سطح التبادل F عندها يمكننا مكاملة المعادلة (i) ضمن حدود التكامل من $T_1 = t'_1 - t'_2$ الى $T_2 = t''_1 - t''_2$ ومن 0 حتى F ، أي :

$$-\int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = N.K \int_{o}^{F} dF$$

ومنه :

$$\ln \frac{T_1}{T_2} = N.K.F$$

أو :

$$N = \frac{\ln \frac{T_1}{T_2}}{K.F} \qquad (9-9)$$

عند مكاملة المعادلة (f) نجد :

$$Q = \frac{T_1 - T_2}{N} \qquad (g)$$

نبدل عن قيمة (N) من المعادلة (9-9) في العلاقة (g) فنحصل على :

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$Q = \frac{T_1 - T_2}{\ln \frac{T_1}{T_2}} K.F = K.F.\Delta t_m \qquad (9\text{-}10)$$

ومنه :

$$\Delta t_m = \frac{T_1 - T_2}{\ln \frac{T_1}{T_2}} \qquad (9\text{-}11)$$

حيث :

Δt_m: فرق درجة الحرارة اللوغاريتمي .

T_1 : فرق درجات حرارة المائعين عند مقطع الدخول .

T_2 : فرق درجات حرارة المائعين عند مقطع الخروج .

مماسبق تأخذ معادلة فرق درجات الحرارة اللوغاريتمي بالنسبة للمبادلات الحرارية ذات الجريان المتوازي باتجاه واحد الشكل التالي :

$$\Delta t_m = \frac{(t'_1 - t'_2) - (t''_1 - t''_2)}{\ln \left(\frac{t'_1 - t'_2}{t''_1 - t''_2}\right)} \qquad (9\text{-}12)$$

وبنفس الاسلوب نحصل على معادلة فرق درجات الحرارة

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

اللوغاريتمي بالنسبة للمبادلات الحرارية ذات الجريان المتوازي والمتعاكس الاتجاه حيث تأخذ الصيغة التالية :

$$\Delta t_m = \frac{(t_1' - t_2'') - (t_1'' - t_2')}{\ln\left(\frac{t_1' - t_2''}{t_1'' - t_2'}\right)} \qquad (9\text{-}13)$$

تجدر الاشارة الى أن قيمة Δt_m في المبادلات الحرارية ذات الجريان المتعاكس تكون أكبر منها في حالة المبادلات ذات الجريان المتوازي (باتجاه واحد) وذلك عند نفس شروط العمل ولذلك يكون حجم المبادلات الحرارية ذات الجريان المعكوس أصغر منه بالنسبة للنوع الاخير عند نفس الاستطاعة الحرارية للمبادل .

٩-٢-٢ حساب درجات حرارة خروج المائعين في مبادل حراري :

في بعض الاحيان يكون من الضروري عمليا تحديد درجة حرارة خروج كل من المائعين في المبادل الحراري حيث يكون معلوما لدينا المقاسات التالية : سطح التبادل F ومعامل انتقال الحرارة k و w_1, w_2 ، درجتي حرارة المائعين عند الدخول الى المبادل الحراري وأخيرا كمية الحرارة المطلوب نقلها (الاستطاعة الحرارية للمبادل) .

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

a) حالة المبادلات ذات الجريان المتوازي :

لنفرض أنه لايوجد أية ضياع حراري للوسط المحيط عندهـــا تكون كمية الحرارة المنتقلة عبر السطح العنصري dF :

$$dQ = w_1.(-dt_1) = w_2.(dt_2)$$

أو :

$$dQ\ (dt_1-dt_2) = -\ dQ(\frac{1}{w_1} + \frac{1}{w_2}) \qquad (9-14)$$

كما أن :

$$dQ = K.\ (t_1 - t_2).dF \qquad (9-15)$$

بمساواة المعادلتين (9-14) و (9-15) نحصل على :

$$\frac{d(t_1-t_2)}{t_1-t_2} = -(\frac{1}{w_1} + \frac{1}{w_2}).K.dF \qquad (9-16)$$

بمكاملة المعادلة الاخيرة بالنسبة لكامل سطح التبادل ينتج :

$$\ln \frac{t''_1-t''_2}{t'_1-t'_2} = -(\frac{1}{w_1} + \frac{1}{w_2}).K.F$$

ومنه :

$$\frac{t''_1-t''_2}{t'_1-t'_2} = e^{-(\frac{1}{w_1} + \frac{1}{w_2}).K.F} \qquad (9-17)$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$(t_1'-t_1'')-(t_2'-t''_2) = (t_1'-t_2')\left[1-e^{-(\frac{1}{w_1}+\frac{1}{w_2}).K.F}\right] \quad (9\text{-}18)$$

ومن معادلات التوازن الحراري :

$$t_2'' - t_2' = \frac{w_1}{w_2}(t_1' - t_1'') \quad (9\text{-}19)$$

نعوض عن قيمة $(t_2''-t_2')$ من المعادلة (9-19) في المعادلة (9-18) فنحصل على :

$$(t_1' - t_1'') + \frac{w_1}{w_2}(t_1'-t_1'') = \quad (9\text{-}20)$$

$$=(t_1'-t_2')\left[1-e^{-(\frac{1}{w_1}+\frac{1}{w_2})K.F}\right]$$

باطلاع المعادلة (9-20) يمكن اعادة كتابتها بالشكل :

$$(t_1'-t_1'') = (t_1' - t_2')\frac{\left[1-e^{-(1+\frac{w_1}{w_2}).\frac{k.F}{w_1}}\right]}{1+\frac{w_1}{w_2}} \quad (9\text{-}21)$$

من المعادلة الاخيرة يمكن حساب درجة حرارة خروج المائع الساخن من المبادل الحراري ، لحساب درجة حرارة خروج المائع البارد نبدل على قيمة $t_1' - t_1''$ من المعادلة (9-19) في المعادلة (9-21) فنحصل على العلاقة التالية :

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$(9\text{-}22)\qquad (t_2'-t_2'') = (t_1'-t_2')\,\frac{w_1}{w_2}\,\frac{\left[1-e^{-(1+\frac{w_1}{w_2}).\frac{K.F}{w_1}}\right]}{1+\frac{w_1}{w_2}}$$

تتحدد كمية الحرارة المنتقلة من العلاقة التالية :

$$(9\text{-}23)\qquad Q = w_1(t_1'-t_1'') =$$

$$= w_1.(t_1'-t_2'').\frac{\left[1-e^{-(1+\frac{w_1}{w_2}).\frac{k.F}{w_1}}\right]}{1+\frac{w_1}{w_2}}$$

في حالة المبادلات الحرارية ذات الجريان المتعاكس فانه يمكن وبنفس الاسلوب تحديد درجات حرارة خروج المائع الساخن والبارد وكمية الحرارة المنتقلة .

العلاقة التالية تعطي درجة حرارة خروج المائع الساخن (بفرض أن درجة حرارة الدخول معروفة) :

$$(9\text{-}24)\qquad t_1'-t_1'' = (t_1'-t_2'').\frac{\left[1-e^{-(1-\frac{w_1}{w_2}).\frac{K.F}{w_1}}\right]}{\left[1-\frac{w_1}{w_2}.e^{-(1-\frac{w_1}{w_2}).\frac{K.F}{w_1}}\right]}$$

بالنسبة للمبادلات الحرارية ذات التيارات المتعاكسة (متعامدة) تأخذ الحسابات الحرارية لمثل هذه المبادلات طبيعة

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

معقدة حيث يمكن اجراء حسابات تقريبية تستند الى المعطيات التالية :

سطح التبادل الحراري F ، معامل الانتقال الحراري الكلي K ، w_1, w_2 درجتي الحرارة البدائية (درجات حرارة الدخول) t'_1 و t'_2 ومنه نستطيع ايجاد t''_1 و t''_2 وكمية الحرارة المنتقلة .

تتحدد كمية الحرارة التي يعطيها المائع الساخن بالعلاقة

$$Q = w_1 . (t'_1 - t''_1)$$

ومنه :

$$t''_1 = t'_1 - \frac{Q}{w_1} \qquad (K)$$

كما أن المائع البارد يكتسب كمية من الحرارة تتحدد بالعلاقة :

$$Q = w_2 . (t''_2 - t'_2)$$

ومنه :

$$t''_2 = t'_2 + \frac{Q}{w_2} \qquad (1)$$

بفرض أن تغير درجة حرارة كلا المائعين يتم بشكل خطي عندها يمكن كتابة :

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$Q = K.F\left[\left(\frac{t_1' + t_1''}{2}\right) - \left(\frac{t_2' + t_2''}{2}\right)\right] \quad (m)$$

بالتعويض عن قيم t_1'' و t_2'' من العلاقات (k) و (l) في المعادلة الاخيرة نحصل على :

$$Q = K.F\left[\frac{t_1' + t_1' - \frac{Q}{w_1}}{2} - \frac{t_2' + t_2' + \frac{Q}{w_2}}{2}\right] \quad (n)$$

باصلاح وترتيب الحدود في المعادلة (n) نحصل على العلاقة التالية والممثلة لكمية الحرارة المنتقلة :

$$Q = \frac{t_1' - t_2'}{\frac{1}{F.K} + \frac{1}{2w_1} + \frac{1}{2w_2}} \quad (9-25)$$

بمعرفة Q يمكننا بسهولة تحديد قيمة كل من t_1'' و t_2'' من العلاقات (k) و (l) .

* * *

*

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مسائل

م١ : مبادل حراري مائي (انبوب ضمن انبوب) من نوع الجريان المتعاكس ، أوجد مساحة سطح التبادل الحراري اذا كانت درجة حرارة الدخول للماء الساخن $t_1 = 97\ C^o$ بتصريف قدره $M_1 = 1\ Kg/Sec$ حيث تسير المياه الساخنة ضمن أنابيب من الفولاذ قطرها الخارجي $d_2 = 40\ mm$ والداخلي $d_1 = 37\ mm$ معامل التوصيل الحراري للانابيب الفولاذية $\frac{w}{m.C^o} = 50$.

يجري الماء البارد في قناة محيطة بالانابيب الفولاذية حيث ترتفع درجة حرارته من $t'_2 = 17\ C^o$ وحتى $t''_2 = 47 C^o$ القطر الداخلي للقناة المحيطة بالانابيب الفولاذية $54\ mm$.

، تصرف المياه الباردة $m_2 = 1.14\ \frac{kg}{Sec}$.

تهمل الضياعات الحرارية الى الوسط الخارجي .

الحل :

تتحدد كمية الحرارة المنتقلة الى الماء البارد بالعلاقة

$$Q = m_2 . C_{P_2} . (t''_2 - t'_2) = 1.14 x 4190 (47-17) = 143298\ [w]$$

درجة حرارة خروج مياه التسخين :

$$t''_1 = t'_1 - \frac{Q}{m_1 \times C_{P_1}} = 97 - \frac{143298}{1 \times 4190} = 62.8\ C^o$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

درجة الحرارة الوسطية لمياه التسخين :

$$t_1 = \frac{t_1' + t_1''}{2} = \frac{97 + 63}{2} = 79.9 \quad C^o$$

من جداول الماء والبخار نحدد الخواص الفيزيائية للماء عند درجة الحرارة الوسطية :

$$\rho_1 = 972 \ \frac{Kg}{m^2} \ ; \ \nu_1 = 0.365 \times 10^{-6} \ m^2/Sec$$

$$\lambda_1 = 0.674 \ \frac{w}{m.C^o} \ ; \ \alpha_1 = 1.66 \times 10^{-7} \ \frac{m^2}{Sec} \ ; \ Pr_1 = 2.2$$

درجة الحرارة الوسطية للمياه المسخنة :

$$t_2 = \frac{t_2' + t_2''}{2} = \frac{14+47}{2} = 32 \quad C^o$$

وتكون الخواص الفيزيائيةللماء عند هذه الدرجة :

$$\rho_2 = 995 \ Kg/m^3 \ ; \ \nu_2 = 0.1776 \times 10^{-6} \ m^2/Sec$$

$$\lambda_2 = 0.62 \ w/m.C^o \ ; \ \alpha_2 = 1.495 \times 10^{-7} \ m^2/Sec$$

$$Pr_2 = 5.2$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

سرعة جريان مياه التسخين ضمن الانابيب الفولاذية :

$$w_1 = \frac{4m_1}{\rho_1 \cdot \pi \cdot d_1^2} = \frac{4x1}{972x\pi x(0.037)^2} = 0.96 \text{ m/Sec}$$

سرعة جريان المياه المسخنة :

$$w_2 = \frac{4m_2}{\rho_2 \cdot \pi \cdot (D^2 - d_2^2)} =$$

$$= \frac{4x1.14}{995x\pi x\left[(0.054)^2 - (0.04)^2\right]} = 1.18 \text{ m/Sec}$$

عدد رينولدز بالنسبة للمياه الساخنة :

$$R_{e1} = \frac{w_1 \cdot d_1}{\nu_1} = \frac{0.96 \times 0.037 \times 10^6}{0.365} = 97315$$

نحسب عدد نسل من المعادلة التالية (راجع الفصل السادس):

$$Nu_m = 0.021 . Re_{m1}^{0.8} . \left(\frac{Pr_{m1}}{Pr_s}\right)^{0.25} . Pr_1^{0.43} . \varepsilon_p$$

بفرض $\frac{L}{d} = 50$ يكون $\varepsilon_p = 1$.

نعتبر أن درجة حرارة جدار الانبوب الداخلي هي قيمة وسطية بين درجات حرارة الماء الساخن والبارد ، أي :

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$t = 0.5(t_1+t_2) = 0.5\ (79.9 + 32) = 56\ C^o$$

ومنه :

$$Nu = 0.021(97315)^{0.8} x (\frac{2.2}{3.2})^{0.25} x 2.2 = 411.6$$

يتحدد معامل الانتقال الحراري مابين الماء الساخن ضمن الانبوب الفولاذي وجدار الانبوب الداخلي بالمعادلة :

$$\alpha_1 = Nu.\frac{\lambda_1}{d_1} = 411.6 \times \frac{0.674}{0.037} = 7498.28 \frac{w}{m}$$

عدد رينولدز للمياه الباردة :

$$Re_2 = \frac{w_2(D-d_2)}{\nu_2} = \frac{1.10(0.054-0.04)x10^6}{0.776} = 19845$$

نفرض أن $t_{s1} = t_{s2}$ ومنه يكون $Pr_{s1}=Pr_{s2}= 3.2$

$$Nu = 0.021 x Re_{m_2}^{0.8} x Pr_{m_2}^{0.43} (\frac{Pr_{m2}}{Pr_{s2}})^{0.25}$$

$$= 0.021(19845)^{0.8} x (5.2)^{0.43} x (\frac{5.2}{3.2})^{0.25} = 125.7$$

ومنه يمكن حساب معامل انتقال الحرارة مابين الماء البارد (المسخن) وجدران القناة الداخلية :

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$\alpha_2 = Nu_2 \cdot \frac{\lambda_2}{(D-d_2)} = \frac{125.7 \times 0.62}{0.014} = 5566.7 \ \frac{w}{m^2.c^o}$$

نحسب معامل الإنتقال الحراري الكلي مابين الماء الساخن والبارد من المعادلة التالية :

$$K = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1 . d_1} + \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\alpha_2 . d_2}}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{4772.6 \times 0.037} + \frac{1}{2 \times 50} \ln \frac{40}{37} + \frac{1}{5360 \times 0.04}}$$

$$= 90 \qquad w/m^2.c^o$$

فرق درجات الحرارة الوسطية اللغارتمية :

$$\Delta t_m = \frac{(t_1' - t_2') - (t_1'' - t_2')}{\ln(\frac{t_1' - t_2'}{t_1'' - t_2'})}$$

$$t_m = \frac{(97-47)-(62.8-17)}{\ln \frac{97-47}{62.8-17}} = 47.86 \ c^o$$

تحسب شدة التدفق الحراري لـ $1 \ m^2$ من مساحة سطح

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

التبادل الحراري :

$$q_o = K. t_m = 90 \times 47.86 = 4307.4 \quad w/m$$

تتحدد مساحة سطح التبادل بالعلاقة :

$$F = \frac{Q}{q} = \frac{143298}{4307.4} = 33.3 \quad m^2$$

* * *

*

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الفهرس

الموضوع		رقم الصفحة
الفصل الاول		١
مفاهيم أساسية حول انتقال الحرارة بالتوصيل		١
١ – ١	حقل درجات الحرارة	٥
١ – ٢	تدرج درجة الحرارة	٨
١ – ٣	القانون الاساسي للتوصيل الحرارة (قانون فوريه	١٠
١ – ٤	معامل التوصيل الحراري	١٥
١ – ٥	المعادلة التفاضلية التوصيل الحراري	٢٠
١ – ٦	المدلول الفيزيائي للمعادلة التفاضلية للتوصيل الحراري والشروط الحدية	٣٢
الفصل الثاني		٤٤
التوصيل الحراري في الحالة المستقرة		٤٤
٢ – ١	التوصيل الحراري عبر جدار مستوي	٤٤
٢ – ٢	التوصيل الحراري عبر جدار مستو مؤلف من طبقة متجانسة	٥٢
٢ – ٣	التوصيل الحراري عبر جدار اسطواني	٥٧
٢ – ٤	التوصيل عبر جدار اسطواني مؤلف من عدة طبقات	٦٥
٢ – ٥	التوصيل الحراري عبر جدار كروي	٦٧

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٢ ـ ٦ طريقة الحل العام لمسائل انتقال الحرارة
عبرجدارمستوي أو اسطواني أو كروي ٧٠

الفصل الثالث ٨٤

التوصيل الحراري في الحالةالمستقرة بمعرفة
درجة حرارة الوسط المحيط ٨٤

٣ ـ ١ انتقال الحرارة عبر جدار مستومؤلف من طبقة
واحدة وعدة طبقات ٨٤

٣ ـ ٢ انتقال الحرارة عبر جدار اسطواني مكـــون
من طبقة واحدة أو عدة طبقات ٩٤

٣ ـ ٣ القطر الحرج (الحدي) لجدار اسطواني ١٠٣

٣ ـ ٤ انتقال الحرارة عبز جدار كروي ١٠٨

٣ ـ ٥ التوصيل الحراري عبر قضيب ذو مقطع ثابت ١١٠

٣ ـ ٦ انتقال الحرارة عبر جدارمستوي مريش ١٢١

٣ ـ ٧ انتقال الحرارة عبر ريشة دائرية ذات
سماكة ثابتة ١٢٨

٣ ـ ٨ التوصيل الحراري عبر ريشة مستقيمة
ذات سماكة متغيرة ١٣٣

٣ ـ ٩ التوصيل الحراري عبر صفيحة مستوية
ومتجانسة ١٤٢

٣ ـ ١٠ التبريد النفوذي لصفيحة مستوية ١٤٨

الفصل الرابـع ١٦٩

توصيل الحرارة مع وجود منبع حراري داخلي ١٦٩

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

التوصيل الحراري عبر طبيعة متجانسة ١٢٦
التوصيل الحراري عبر قضيب اسطواني متجانس ١٢٦
التوصيل الحراري عبر جدار اسطواني ١٨١

الفصل الخامس ١٩٩

التوصيل الحراري في الحالة الغيرمستقرة
(العابرة) ١٩٩
٥ - ١ وصف الاجراء وطرق الحل ١٩٩
٥ - ٢ الحل التحليلي ٢٠٥
حالة الجدار المستوي ٢١٠
حالة الكرة ٢١٧
ارتباط اجراء توزع الحرارة بشكل
ومقاييس الجسم ٢١٩
٥ - ٣ اسلوب النظام المنتظم ٢٢٦
٥ - ٤ اسلوب الفروق النهائية ٢٣٧

الفصل السادس ٢٤٤

انتقال الحرارة بالحمل في وسط متجانس ٢٤٤
٦ - ١ تعاريف مفاهيم أساسية ٢٤٤
٦ - ٢ الخواص الفيزيائية للموائع ٢٤٩
٦ - ٣ المعادلة التفاضلية لانتقال الحرارة بالحمل .....

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٦ – ٤ الطبقات الحدية الحرارية والهيدروديناميكية ٢٧٣
٦ – ٥ مفهوم التشابه ٢٨٨
٦ – ٦ اعطاء التعبير الرياضي لمسألة القيمة الحدية بالمتحولات اللاقياسية ٢٩٠
٦ – ٧ الحدود اللاقياسية (مقياس التشابه) ومعادلات التشابه اللاقياسية ٢٩٨
٦ – ٨ شروط تشابه الاجراءات الفيزيائية ٣١٠
٦ – ٩ النتائج الطبيعية لنظرية التشابه ٣١٤
٦ – ١٠ معامل انتقال الحرارة المطاني ٣١٨
٦ – ١١ درجة الحرارة الوسطية على كامل مقطع الجريان ٣١٩
٦ – ١٢ تحديد السيالة الحرارية من شروط توازن طاقة المائع ٣٢١
٦ – ١٣ قياس معدل تدفق الحرارة ودرجة حرارة كل من الجدار والمائع على طول انبوب ٣٢٦
٦ – ١٤ المعامل الوسطي لانتقال الحرارة وفرق درجات الحرارة ٣٣٣
٦ – ١٥ انتقال الحرارة في حالة الجريان العفاجي في الانابيب ٣٣٩
٦ – ١٦ انتقال الحرارة في حالة الجريان المضطرب للسوائل في الانابيب ٣٤٢
٦ – ١٧ الانتقال الحراري عند جريان سائل على طول صفيحة .. ٣٤٥
٦ – ١٨ التبادل الحراري في حالة انسياب (جريان) عرضي على انبوب وحيد ٣٤٧
٦ – ١٩ الانتقال الحراري في حالة جريان عرضي على حزمة انابيب ٣٥١

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٦ -٢٠ الانتقال الحراري بالحمل للمعادن المنصهرة ٢٥٧
٦ -٢١ الانتقال الحراري بالحمل للغازات عند
السرعة العالية ٢٥٩
٦ -٢٢ الانتقال الحزاري بالحمل في حالة جريان حر ٢٦٤

الفصل السابع ٢٨٣

الانتقال الحراري في حالة التغير الطوري للمواد.. ٢٨٣
٧ - ١ الانتقال الحراري أثناء الغليان ٢٨٣
٧ - ٢ الانتقال الحراري أثناء التكاثف ٢٨٨

الفصل الثامن ٢٩٩

الانتقال الحراري بالاشعاع ٢٩٩
٨ - ١ مفاهيم عامة حول الاشعاع الحراري ٢٩٩
٨ - ٢ القوانين الاساسية للتبادل الحراري الاشعاعي ٤٠٢
٨ -٢-١ قانون ستيفان - بولتسمان ٤٠٢
٨ -٢-٢ قانون كيرشوف ٤٠٣
٨ -٢-٣ قانون لامبرت ٤٠٥
٨ -٢-٤ قانون بلانك ٤٠٦
٨ -٢-٥ قانون فين ٤٠٧
٨ - ٣ التبادل الحراري بالاشعاع بين الاجسام الصلبة ٤٠٩
٨ - ٤ التبادل الحراري الاشعاعي بين جسمين
احدهما موجود ضمن الاخر ٤١٤

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٨ – ٥ التبادل الحراري الاشعاعي بين جسمين متوازيين بشكل كيفي ٤٢١
٨ – ٦ الشاشات ٤٢٢
٨ – ٧ اشعاعات الغازات ٤٢٥

الفصل التاسع ٤٣٤

المبادلات الحرارية ٤٣٤
٩ – ١ أنواع المبادلات الحرارية ٤٣٤
٩ – ٢ المفاهيم الاساسية ومعادلات الحساب ٤٣٦
٩ –٢–١ فرق درجة الحرارة الوسطي ٤٤١
٩ –٢–٢ حساب درجات حرارة خروج المائعين في مبادل حراري ٤٤٦

Damascus University

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

جـــدول المصطلحـات

"List Of Symbols"

الرمز	الانكليزي	العربي
A	Absorptivity	قابلية الامتصاص
a	Sonic Velocity, Thermal Diffusivity	سرعة الصوت ، الانتشار الحراري
B	Intensity Or Brightness. Of Thermal Radiation.	شدة الاشعاع الحراري
b	Constant Determined. Experimentally.	ثابت محدد تجريبيا
C	Integration Constant.	ثابت تكاملي
c	Radiation Factor Of Grey Bodies, Specific Heat.	عامل الاشعاع للاجسام الرمادية الحرارة النوعية
C_f	Friction Coefficient.	معامل الاحتكاك
C_p	Specific Heat Of Liquid. At Constant Pressure.	الحرارة النوعية للسائل عندضغط ثابت
C_{v^m}	Specific Heat Of Gas At Constant Volume.	الحرارة النوعية للغاز عند حجم ثابـــت
C_1, C_2	First and Second Plank's Constant	ثابت بلانك الاول والثاني

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

D	Diffusion Cofficient, Transmissivity	معامل الانتشار، قابلية الانتقـــال
L_{pi}	Diffusion Cofficient Reduced To Partial Pressure Gradient.	معامل الانتشار مرجعا الى تدرج الضغط الجزئي
D_{tg}	Thermal Diffusion Coefficient	معامل الانتشار الحراري
d_o	Separation Diameter Of Vapour Bubble.	قطر انفصال فقاعة بخار المـــاء
D_{cr}	Critical Diameter.	القطر الحرج
$D_{cr\ ins}$	Critical Diameter Of Insulation.	القطر الحرج للعازل
E	Emissive Power , Fin Efficiency Fator.	طاقة البث ،عامل فعالية الريشـــة
e = 2.718..	Base Of Natural Logarithms.	أساس اللغاريتم الطبيعي
F	Surface, Heat-Transfer Surface.	السطح، سطح الانتقال الحراري
F_1	Centre Of The Sphere	مركز الكرة
F_o	AveragingSurface	السطح الوسطي
F_h	Cross-Sectional Area Of The Hydraulic Channel.	مساحة المقطع العرضي للقناة هيدروليكية
F_r	Reflecting Surface.	سطح الانعكاس

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

G	Mass Rate Of Flow.	معدل التدفق الكتلي
g	Acceleration Of Gravity.	تسارع الجاذبية الارضية
h	Height.	الارتفاع
I	Electric Current.	التيار الكهربائي
i	Specific Enthalpy.	الانتالبي النوعي
i_s	Saturation Enthalpy.	الانتالبي الاشباعي
J	Mass Flow.	التدفق الكتلي
j_{con}	Convective Mass Flow.	التدفق الكتلي بالتوصيل والحمل
j	Rate Of Mass Flow.	معدل التدفق الكتلي
K	Proportionality Factor.	عامل تناسبي
k	Turbulence Of The Free Stream Flow.	الاضطراب في جريان تيارحر
k	Measure Of Turb-lence Of Free-Stream Flow,Overall Heat-Transfer;	مقياس الاضطراب في جريان تيارحر ، معامل الانتقال الحراري الكلي ،
	Thickness Of Thermal Boundary Loiyer..	سماكة الطبقة الحدية الحرارية
k_t	Thermal Diffusion Ratio.	معدل الانتشار الحراري
L	l/d,Dimensionless Parameter.	متحول لاقياسي
l	Free Gas Molecular Path	مطال حركة جزئيات الغاز
l_o	Referance Linear Dimension.	بعد خطي ارجاعي

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

M	Molecular Weight.	الوزن الجزيئي
m	Mass Transfer Of a Component In Mixture, Number Of Molecules Per Unit Volum, Rate Of Cooling.	انتقال الكتلة لمكونات مزيج، عدد الجزيئات في وحدة الحجم، معدل التبريد
N	(Newton) Unit Of Force.	(نيوتن)، واحدة القوة
P	Pressure, Porosity	الضغط، المسامية
P_l	Local Partial Pressure.	الضغط الجزئي الموضعي
		كمية الحرارة، السيالة الحرارية
q	Rate Of Heat Flow.	معدل التدفق الحراري
q_d	Density Of Rate Of Heat Flow.	كثافة معدل التدفق الحراري
q_l	Rate Of Heat Flow Per Unit Length.	معدل التدفق الحراري بواحدة الطول
$q_{max,cr}$	Critical Heat Flux	السيالة الحرارية الحرجة
q_{min}	Mimimum Heat Flux.	السيالة الحرارية الدنيا
q_v	Inner Heat Source, Volume Rate Of Heat Liberation.	مصدر حراري داخلي، المعدل الحجمي للطرح الحراري
q_w	Rate Of Heat Flow Of The Wall.	معدل التدفق الحراري عبر الجدار
q_x	Projection Of The Rate Of Heat Flow	مسقط معدل التدفق الحراري
R	Reflectivity, Thermal Resistance.	الانعكاسية، المقاومة الحرارية

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

R_c	Thermal Resistance Of The Condensate Film.	المقاومة الحرارية للطبقة المتكاثفة
R_l	1/Kl, Linear Thermal Resistance.	المقاومة الحرارية الخطية
R_g	Thermal Resistance Of Dense Gas.	المقاومة الحرارية للغاز كثيف
R_v, R_g	Vapour and Gas Constants Respectively.	ثوابت البخار والغاز على التوالي
r	Heat Of Evaporation, Radius, Recovery Factor.	حرارة التبخر، نصف القطر، معامل الاسترجاع
S	Cooling Area.	سطح التبريد
s	Entropy, Force Of Friction Reduced To Unit Area.	الانتروبي، قوة الاحتكاك بواحدة السطح
s_1, s_2	Transverse and Longitudinal Pitches Of Banks Of Tubes Respectively.	الخطوة العرضية والطولية لصفوف الانابيب على التوالي
$s_1/d, s_2/d$	Relative Transverse And Longitudinal Pitches Of Banks Of Tubes Respectively.	الخطوة النسبية العرضية والطولية لصفوف الانابيب على التوالي
T	Absolute Temperature.	درجة الحرارة المطلقة
T_{aw}	Adiabatic Temperature Of The Wall.	درجة الحرارة الادياباتية للجدار

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

t_r	Recovery Temperature	درجة حرارة الاسترجاع الحراري
t_{st}	Stagnation Temperature.	درجة حرارة الركود
t	temperature.	درجة الحرارة
$\bar{t}$	Mean Temperature.	درجة الحرارة الوسطية
tar	Arithmetic Mean.	درجة الحرارة الوسطية الحسابية
t_f	Ambient Temberature.	درجة حرارة الوسط المحيط
t_{log}	Logarithmic Mean.	درجة الحرارة الوسطية اللوغاريتمية
t_w	Wet-Bulb Temperature.	درجة الحرارة الرطبة
t_s, t_w	Surface Temperature.	درجة حرارة السطح
u	Electrical Potential, Perimrter	فرق الكمون الكهربائي، محيط قطيب ذو مقطع مستطيل
V	Volume	الحجم
w	Flow Alternating Factor, Fluid Flow Velocity.	عامل تغير التدفق، سرعة تدفق المائع
$\bar{w}$	Mean Travel Velocity Of Gas Molecules, Mean Velocity Of flow.	سرعة الانتقال الوسطية لجزيئات الغاز، سرعة التدفق الوسطية
w_m	Maximum Probable Molecular Velocity.	السرعة العظمى المحتملة للجزيئات
X	Dimensionless, Coordinate.	احداثي لاقياسي
x	local coordinate.	احداثي مطاني

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

". GREEK LETTERS "

الاحرف اليونانية:

α	Heat-Transfer Coefficient.	معامل انتقال الحرارة
α_n	Heat-Transfer Coefficient Calculated.By Nusselt formula.	معامل انتقال الحرارة محسوب بواسطة قانون نيسل
$\alpha_{x=1}$	Local Heat-Transfer Coefficient Located By Coordinatex x=1	معامل انتقال الحرارة المطني عند الاحداثي x=1 .
β	Mass-Transfer Coefficient,Volume Rate Of Vapour Flow In Two Phase System,Volume Expansio Coefficient.	معامل انتقال الكتلة ، التدفق الحجمي للبخار في حالة نظام ذوطورين معامل التمدد الحجمي
β_p	Mass-Transfer Coefficient Reduced To Partial Pressure Difference.	معامل انتقال الكتلة مرجعا الى فرق الضغط الجزئي
Δ	Prefix Indicating Final Increment.	رمز يعني الزيادة النهائية
δ	Thickness Of Hydrodynamic Boundary Layer,Wall Thickness.	سماكة الطبقة الحدية الهيدرو ديناميكية ،سماكة الجدار
$\bar{\delta}$	Mean Layer Thickness	السماكة الوسطية للطبقة الحدية

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

δ_t	Variation In Fluid Temperature. In The Direction Of Flow.	تغير درجة حرارة المائع في اتجاه الجريان
δ/λ	Thermal Resistance.	المقاومة الحرارية
ε	Emissivity Of Grey Bodies	معامل بث الاجسام الرمادية
ε_i	Correction Factor Accounting For Variation In Heat Transfer In The First Rows Of a Bank Of Tubes.	معامل تصحيح يستعمل لحساب تغير معامل انتقال الحرارة بالنسبة للصف الاول من حزمة أنابيب .
ε_o	Turbulent Diffusivity Of Mass.	الانتشار المضطرب للكتلة
ε_q	Turbulent Diffusivity Of Heat	الانتشار المضطرب للحرارة
ε_s	Correction Factor For Banks Of Tubes Accounting For The Effect Of Relative Pitches.	معامل تصحيح يأخذ بعين الاعتبار تأثير الخطوة النسبية في حالة حزمة أنابيب
f	Local Friction Factor.	معامل الاحتكاك المحلي
η	Efficiency.	المردود
θ	Contact Angle, Dimensionless Temperature.	زاوية التماس ، درجة حرارة لاقياسية
v	Excess Temperature, Local Temperature Difference.	درجة الحرارة الفائضة ، فرق درجة الحرارة المحلي

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

λ	Thermal Conductivity, Wavelength.	معامل التوصيل الحراري ،طول الموجة
λ_{eq}	Equivalent Thermal Conductivity.	معامل التوصيل الحراري المكافئ
λ_{ins}	Thermal Conductivity Of Insulating Material.	معامل التوصيل الحراري لمادة عازلة
λ_m	Integral Mean Thermal Conductivity.	المعامل الوسطي التكاملي للتوصيل الحراري
λ_o	Thermal Conductivity At 0 C^o	معامل التوصيل الحراري عند درجة حرارة 0 C^o .
λ/δ	Thermal Conductance	الناقلية الحرارية.
μ	Molecular Weight Of Gas, Viscosity	الوزن الجزيئي للغاز، اللزوجة
ν	Kinematic Viscosity.	اللزوجة الحركية
ρ	Gas Density	كثافة الغاز
ρ_o	Specific Electrical Resistance.	المقاومة الكهربائية النوعية
σ	Boltzmann's Constant, Surface Tension Coefficient.	ثابت بولتزمان ،معامل الاجهاد السطحي
τ	Time	الزمن
φ	Geometrical View Factor..	عامل رؤية هندسية

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

Coefficient Of non-Uniform Temperature Distributian. معامل عدم انتظام توزع درجة الحرارة

" DIMENSIONLESS TERNS" : الحدود اللابعدية

Ar Archimedes Nuber = $\frac{g.l_o}{\nu^3}\frac{\rho_o-\rho}{\rho_o}$ عدد أرخميدس

Bi Biot Nuber = $\frac{a.l}{\lambda}$ عدد بيوت

Bo Boltzmann Number = $\frac{\rho.C_p.w}{\sigma_o.T^3}$ عدد بولتزمان

Eu Euler Number = $\frac{\Delta P}{\rho.w^2}$ عدد أويلر

Fo Fourier Number = $\frac{a.\tau}{l^2}$ عدد فوريه

Ga Galilei Number = $\frac{g.l_o^3}{\nu^2}$ عدد غاليليه

Gr Grashof Number = $\frac{g.B.v_w.l_o^3}{\nu^2}$ للدكراشوف

Ja Jacob Number = $\frac{C_p.\Delta t}{r}\frac{\rho.t}{\rho.v}$ عدد جاكوب

Ki Kirpichev Number = $\frac{\sigma_o . T^3}{\lambda . K}$ عدد كيربيتشيف

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

Kn Knudsen Number = $\frac{\bar{l}}{l_o}$ عدد كنوسين

Ko Kondratyeu Number = $NUfd.P_{r_f}/P_{r_w}$.) عددكوندراتيف

K Kutateladze Number= $\frac{r}{C_p .\Delta t}$ عددكوتاتيلادز

Le Lewis Number = $\frac{\alpha}{D}$ عدد لويس

M Mach Number = $\frac{w}{\alpha}$ عدد ماخ

Nu Nusselt Number = $\frac{\alpha . l_o}{\lambda}$ عدد نيسلت

Pe Peclet Number = $\frac{w_o . l_o}{\nu}$ عدد بيكلت

Pr Prandtl Number = $\frac{\nu}{\alpha}$ عدد براندل

Re Reynolds Number = $\frac{w_o . l}{\nu}$ عدد رينولدز

Sh Strounal Number = $\frac{f.d}{w_o} = 0.2$ عدد ستروهال

St Stanton Number = $\frac{\alpha}{\rho . C_p . w_o} = \frac{Nu}{R_e . P_r}$ عدد ستانتوت

X,Y,Z, Reference Dimensionless Terms..

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner