



التحليل الرياضي / ٢ /



السنة: الأولى

القسم: العلوم الأساسية

الاختصاص: هندسة الحواسيب والأتمتة





منشورات جامعة دمشق  
كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية

# التحليل الرياضي / ٢ /

Mathematical Analysis /2/

د. معاذ عبد المجيد

أستاذ في قسم العلوم الأساسية

١٤٢٧ - ١٤٢٨ هـ

٢٠٠٦ - ٢٠١٧ م

جامعة دمشق



# فهرس

## الصفحة

## الموضوع

|          |                                                           |
|----------|-----------------------------------------------------------|
| ١١       | المقدمة                                                   |
| ٥٠ - ١٣  | الفصل الأول: مقدمة في الهندسة التحليلية في الفضاء الثلاثي |
| ١٥       | 1.1. جمل الإحداثيات في الفضاء الثلاثي                     |
| ٢٠       | 1.2. المتجهات                                             |
| ٣١       | 1.3. السطوح في الفضاء                                     |
| ٣٥       | 1.4. المستوي                                              |
| ٣٧       | 1.5. المستقيم في الفضاء                                   |
| ٣٩       | 1.6. سطوح الدرجة الثانية                                  |
| ٤٥       | 1.7. المجموعات النقطية في الفضاء الإقليدي $\mathbb{R}^n$  |
| ٤٧       | تمارين الفصل الأول                                        |
| ١٠٧ - ٥١ | الفصل الثاني: الحساب التفاضلي للدوال بمتغيرين فأكثر       |
| ٥٣       | 2.1. الدالة وساحة تعريفها                                 |
| ٥٥       | 2.2. نهاية دالة                                           |
| ٥٨       | 2.3. الاستمرار                                            |
| ٦١       | 2.4. المشتقات الجزئية                                     |
| ٦٣       | 2.5. مفهوم الدالة الفضولة                                 |
| ٦٩       | 2.6. مشتقات الدوال المركبة وتفاضلاتها - قاعدة السلسلة     |
| ٧٢       | 2.7. التفاضل التام                                        |
| ٧٤       | 2.8. المستوي المماس والمستقيم الناعظم لسطح في الفضاء      |
| ٧٥       | 2.9. المشتقات الجزئية من المرتبة الثانية ومن مراتب عليا   |
| ٧٩       | 2.10. التفاضل التام من مراتب عليا                         |
| ٨٠       | 2.11. الدوال الضمنية                                      |

| الموضوع                                                  | الصفحة    |
|----------------------------------------------------------|-----------|
| 2.12 نشر تابلور للدوال بمتغيرين                          | ٨٩        |
| 2.13 القيم القصوى (النهايات الحدية)                      | ٩١        |
| تمارين الفصل الثاني                                      | ١٠٣       |
| <b>الفصل الثالث: الحقل المتجهي</b>                       | ١٠٩ - ١٤١ |
| 3.1 الحقل السلمي والحقل المتجهي                          | ١١١       |
| 3.2 المشتق الموجه ومتجه التدرج                           | ١١٥       |
| 3.3 تفرق ودوران حقل متجهي                                | ١٢١       |
| 3.4 الحقل الكموني                                        | ١٢٣       |
| 3.5 الحقل اللولبي                                        | ١٢٧       |
| 3.6 العمليات على الحقول في الإحداثيات المنحنية المتعامدة | ١٢٨       |
| تمارين الفصل الثالث                                      | ١٣٩       |
| <b>الفصل الرابع: التكامل الثنائي</b>                     | ١٤٣ - ١٧٨ |
| 4.1 تعريف التكامل الثنائي وشروط وجوده                    | ١٤٥       |
| 4.2 التفسير الهندسي للتكامل الثنائي                      | ١٤٨       |
| 4.3 خواص التكامل الثنائي                                 | ١٤٨       |
| 4.4 حساب التكامل الثنائي                                 | ١٥٠       |
| 4.5 التكاملات الثنائية المشادة                           | ١٦٨       |
| تمارين الفصل الرابع                                      | ١٧٤       |
| <b>الفصل الخامس: التكامل الثلاثي</b>                     | ١٧٩ - ٢٠١ |
| 5.1 تعريف التكامل الثلاثي وشروط وجوده                    | ١٨١       |
| 5.2 التفسير الهندسي للتكامل الثلاثي                      | ١٨٢       |
| 5.3 خواص التكامل الثلاثي                                 | ١٨٣       |
| 5.4 حساب التكامل الثلاثي                                 | ١٨٣       |
| تمارين الفصل الخامس                                      | ١٩٨       |

| الصفحة    | الموضوع                                                               |
|-----------|-----------------------------------------------------------------------|
| ٢٠٣ - ٢٣٧ | الفصل السادس: التكاملات الخطية                                        |
| ٢٠٥       | 6.1 المنحني في الفضاء                                                 |
| ٢٠٨       | 6.2 التكامل الخطي من النوع الأول                                      |
| ٢١٥       | 6.3 التكامل الخطي من النوع الثاني                                     |
| ٢٣٥       | تمارين الفصل السادس                                                   |
| ٢٣٩ - ٢٧٣ | الفصل السابع: التكاملات السطحية                                       |
| ٢٤١       | 7.1 السطح الأمس                                                       |
| ٢٤١       | 7.2 السطح الموجه                                                      |
| ٢٤٤       | 7.3 التكامل السطحي من النوع الأول                                     |
| ٢٥١       | 7.4 التكامل السطحي من النوع الثاني                                    |
| ٢٦١       | 7.5 تكامل غاوس والزوايا المجسمة                                       |
| ٢٦٩       | تمارين الفصل السابع                                                   |
| ٢٧٥ - ٢٨٧ | الفصل الثامن: مفاهيم أساسية في المعادلات التفاضلية العادية            |
| ٢٧٧       | 8.1 تعريف المعادلة التفاضلية                                          |
| ٢٧٧       | 8.2 تصنيف المعادلات التفاضلية                                         |
| ٢٧٨       | 8.3 حل المعادلة التفاضلية العادية                                     |
| ٢٨١       | 8.4 تكوين المعادلات التفاضلية العادية                                 |
| ٢٨٦       | تمارين الفصل الثامن                                                   |
| ٢٨٩ - ٣٣٧ | الفصل التاسع: المعادلات التفاضلية العادية من المرتبة الأولى           |
| ٢٩١       | 9.1 المعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى المحلولة بالنسبة إلى المشتق |
| ٣١٦       | 9.2 المعادلات التفاضلية غير المحلولة بالنسبة للمشتق                   |
| ٣٢٧       | 9.3 مسألة القيمة الابتدائية - مبرهنات الوجود والوحدانية               |
| ٣٣٢       | 9.4 بعض التطبيقات المعادلات التفاضلية العادية من المرتبة الأولى       |

|           |                                                                          |
|-----------|--------------------------------------------------------------------------|
| ٣٣٤       | تمارين الفصل التاسع                                                      |
| ٣٣٨ - ٣٨٧ | الفصل العاشر: المعادلات التفاضلية العادية من مراتب عليا                  |
| ٣٤١       | 10.1 تعاريف ومفاهيم أولية                                                |
| ٣٤٨       | 10.2 المعادلات القابلة لتخفيض المرتبة                                    |
| ٣٥٣       | 10.3 المعادلات التفاضلية الخطية من مراتب عليا                            |
| ٣٥٩       | 10.4 المعادلات التفاضلية الخطية ذات الأمثال الثابتة                      |
| ٣٧٩       | 10.5 حل المعادلات التفاضلية الخطية بطريقة متسلسلات القوى<br>الصحيحة      |
| ٣٨١       | 10.6 تطبيق على المعادلات التفاضلية العادية من المرتبة الثانية            |
| ٣٨٤       | تمارين الفصل العاشر                                                      |
| ٣٨٩ - ٤٢٢ | الفصل الحادي عشر: جمل المعادلات التفاضلية                                |
| ٣٩١       | 11.1 تعاريف ومفاهيم أولية                                                |
| ٣٩٢       | 11.2 طرائق حل المعادلات التفاضلية النظامية                               |
| ٣٩٨       | 11.3 جمل المعادلات التفاضلية الخطية                                      |
| ٤٠٢       | 11.4 الجمل التفاضلية الخطية بأمثال ثابتة                                 |
| ٤١٣       | 11.5 الجمل التفاضلية الخطية غير النظامية بأمثال الثابتة                  |
| ٤١٦       | 11.6 تطبيق على جمل المعادلات التفاضلية في دراسة الاهتزازات<br>الكهربائية |
| ٤٢٠       | تمارين الفصل الحادي عشر                                                  |

|     |                                                                                             |
|-----|---------------------------------------------------------------------------------------------|
| ٤٢٥ | 12.1 تعاريف ومفاهيم أولية                                                                   |
| ٤٢٧ | 12.2 معادلات تفاضلية جزئية تكامل مباشرة                                                     |
| ٤٢٩ | 12.3 المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية من المرتبة الأولى                                   |
| ٤٣٤ | 12.4 المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية من مراتب عليا بتابع لتغيرين مستقلين ذات أمثال ثابتة |
| ٤٤٣ | 12.5 تطبيق على المعادلات التفاضلية الجزئية                                                  |
| ٤٤٩ | تمارين الفصل الثاني عشر                                                                     |
| ٤٥٣ | المصطلحات العلمية                                                                           |
| ٤٦٣ | المراجع                                                                                     |





## مُقَدِّمَةٌ

نعم في كتابنا هذا، المفاهيم التي عرضناها في كتاب التحليل الرياضي / ١ /، من أجل الدوال بمتغير واحد، حيث نعرض للحساب التفاضلي والحساب التكاملي للدوال بعدة متغيرات، بالإضافة إلى المعادلات التفاضلية.

يتألف كتاب التحليل الرياضي / ٢ / من اثني عشر فصلاً، وفقاً للمنهج المعتمد لطلاب السنة الأولى - هندسة الحواسيب والأتمتة.

خصصنا الفصل الأول مَدْخَلاً للهندسة التحليلية في الفضاء، عرضنا فيه للجمل الإحداثية والمتجهات وسطوح الدرجة الأولى والثانية. أما في الفصل الثاني، فقد عرضنا فيه للحساب التفاضلي للدوال بعدة متغيرات، من نهايات واستمرار واشتقاق جزئي وتفاضل تام ونشر وقيم قصوى. وتحدثنا في الفصل الثالث عن الخقل المتجهي والخقل السلمي. وتطرقنا في الفصلين الرابع والخامس للتكامل الثنائي والتكامل الثلاثي. أما الفصل السادس، فقد خصصناه للتكامل الخطي بنوعيه. وفي الفصل السابع عرضنا للتكامل السطحي بنوعيه. أما الفصل الثامن فقد خصصناه مقدمة للمفاهيم العامة للمعادلات التفاضلية. وعرضنا في الفصل التاسع للمعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى. وتطرقنا في الفصل العاشر للمعادلات التفاضلية من مراتب عليا. وعرضنا في الفصل الحادي عشر لحل بعض جمل المعادلات التفاضلية العادية. أما الفصل الثاني عشر والأخير فقد خصصناه لحل بعض المعادلات التفاضلية الجزئية.

وقد حاولنا أن نقدم عرضاً وجيزاً لبعض المواضيع، حيث حذفنا كثيراً من البراهين المعقدة وتركنا بعض البراهين كتمرين للمقارئ، وأبقينا على بعض البراهين التي وجدنا أنها ضرورية لفهم المواضيع المعروضة، وعرضنا مواضيع أخرى بأسلوب أوسع. وتوخينا الدقة في إعطاء التعاريف، وتحسينا تكرار التعاريف المتشابهة، حيث وضعنا في التعريف، المفهوم المشابه بين قوسين وكذلك ما يوافقه بين قوسين. واستخدمنا كثيراً من الأمثلة المساعدة في الفهم، وحاولنا التقليل ما أمكن من ترقيم المعادلات، وأتبعنا كل فصل بعدد غير قليل من التمارين والمسائل

غير المحلولة بمستويات مختلفة، لتساعد القارئ على ترسيخ المفاهيم المعروضة. وأدرجنا قائمة بالمصطلحات العلمية الواردة في الكتاب باللغتين العربية والإنكليزية المعتمدة عربياً. كما أدرجنا، أخيراً، قائمة بالمراجع المفيدة والمستخدم في إعداد هذا الكتاب. وأود أخيراً، أن أشكر كل من ساهم في إعداد هذا الكتاب وإخراجه إلى النور، كما أرحب بكل ملاحظة تتعلق به.

والله من وراء القصد

المؤلف

أ. د. معاذ عبد المجيد

## الفصل الأول

مقدمة في الهندسة التحليلية في الفضاء الثلاثي

### 1.1.1.1 جمل الإحداثيات في الفضاء الثلاثي

## 1.2 المتجهات

### 1.3 السطوح في الفضاء

#### 1.4 المستوى

### 1.5 المستقيم في الفضاء

1.6) سطوح الدرجة الثانية

1.7 المجموعات النقطية في الفضاء الإقليدي  $\mathbb{R}^n$



## مقدمة في الهندسة التحليلية في الفضاء الثلاثي

### 1.1.1.1 جمل الإحداثيات في الفضاء الثلاثي

نقول عن فضاء ثلاثي الأبعاد، اختصاراً فضاء، إنه منسوب إلى جملة محاور إحداثية، إذا استطعنا تحديد موضع وحيد لنقطة في هذا الفضاء بوساطة ثلاثة أعداد. وهناك عدة جمل إحداثية نورد منها الديكارتية والأسطوانية والكروية.

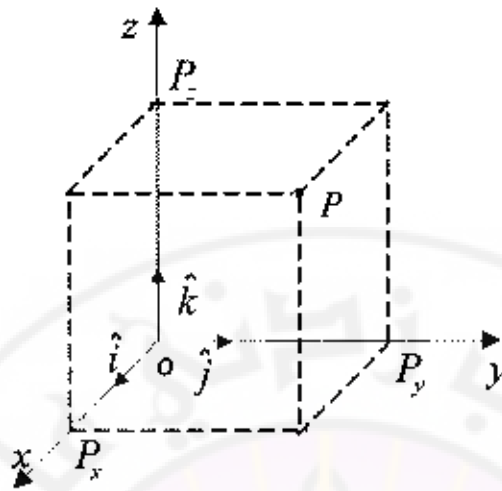
#### 1.1.1.1 جملة الإحداثيات الديكارتية المتعامدة المباشرة

نحدد هذه الجملة بثلاثة محاور متقاطعة في نقطة  $O$  وغير واقعة في مستوي واحد، وبحيث تكون هذه المحاور متعامدة متنى متنى وموجهة توجيهاً يميناً (أي أن الراصد الواقف على المستوي  $Oxy$ ، بحيث يكون اتجاه المحور  $Oz$  موجهاً من قدميه إلى رأسه، يرى المحور  $Ox$  على يمينه ويرى المحور  $Oy$  على يساره).

نسمي نقطة تقاطع المحاور  $O$  نقطة الأصل أو مبدأ الإحداثيات، ونسمي هذه المحاور محاور إحداثية، نرمز للأول  $Ox$  ويسمى محور السينات أو الفواصل، ونرمز للثاني  $Oy$  ويسمى محور العيّنات أو الترتيب، وللثالث  $Oz$  ويسمى محور الصادات أو الرواقم.

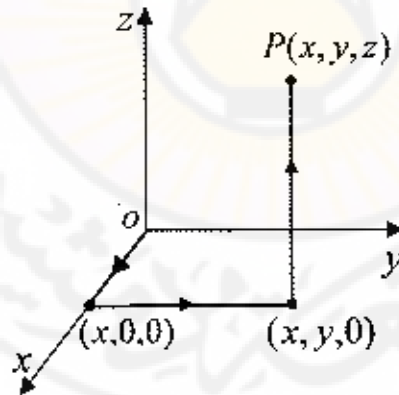
تعيّن المحاور الإحداثية ثلاثة مستويات  $Oxy$  و  $Oyz$  و  $Oxz$  تسمى المستويات الإحداثية، وتنقسم الفضاء لثمانية أجزاء.

لتكن  $P$  نقطة ما من الفضاء ثلاثي الأبعاد، الشكل 1.1، نمرر منها ثلاثة مستويات تعامد المحاور الإحداثية. نرمز لنقاط تقاطع هذه المستويات مع المحاور الإحداثية بـ  $P_x$  و  $P_y$  و  $P_z$ ، بالترتيب. نسمي الأعداد  $x = OP_x$  و  $y = OP_y$  و  $z = OP_z$  إحداثيات النقطة  $P$ . نسمي  $x$  سيناتها (فاصلتها)، و  $y$  عيّناتها (ترتيبها)، و  $z$  صاداتها (راقمها). عندئذ، يتعين موضع وحيد لهذه النقطة بمعرفة ثلاثية الأعداد المرتبة  $(x, y, z)$ .



الشكل 1.1

وبالعكس، فإن ثلاثية الأعداد المرتبة  $(x, y, z)$  تعين، بشكلٍ وحيد، نقطة  $P$  من الفضاء ثلاثي الأبعاد، ونكتب  $P(x, y, z)$ . أي هناك تقابل بين جميع نقاط الفضاء ومجموعة الثلاثيات المرتبة  $(x, y, z)$ . ويمكن رسم هذه النقطة تدرجياً يرسم النقطة  $(x, 0, 0)$ ، ثم النقطة  $(x, y, 0)$  ثم النقطة  $P(x, y, z)$ ، الشكل 1.2.



الشكل 1.2

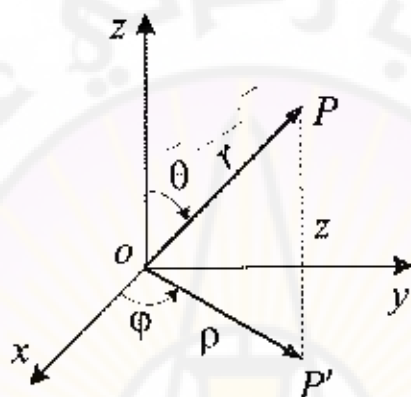
نرمز بـ  $\hat{i}$  و  $\hat{j}$  و  $\hat{k}$  لمتجهات الواحدة للمحاور الإحداثية  $ox$  و  $oy$  و  $oz$ ، بالترتيب.

نفرض دائماً أن الفضاء منسوب لجملة إحداثيات ديكارتية متعامدة مباشرة.

### 1.1.2 جملة الإحداثيات الأسطوانية

لتكن  $P'$  مسقط النقطة  $P$  على المستوي  $oxy$ ، الشكل 1.3.

تعيّن النقطة  $P$ ، بأسلوبٍ وحيد، إذا عُلِمَ راقمها  $z = PP'$  وموضع النقطة  $P'$  في المستوي  $oxy$ .



الشكل 1.3

نعين، الآن، موضع النقطة  $P'$  في المستوي  $oxy$  بالإحداثيات القطبية  $(\rho, \varphi)$ ، بالنظر إلى الجزء الموجب من المحور  $Ox$  على أنه المحور القطبي، حيث  $\rho$  نصف القطر المتجهي ويمثل القطعة المستقيمة  $OP'$  و  $\varphi$  الزاوية بين الاتجاه الموجب للمحور  $Ox$  و  $\rho$ .

وعليه، يتحدد موضع وحيد للنقطة  $P$  بمعرفة الأعداد  $\rho$  و  $\varphi$  و  $z$ ، والتي تسمى الإحداثيات الأسطوانية للنقطة  $P$  ونكتب  $P(\rho, \varphi, z)$ .

سُميت هذه الإحداثيات أسطوانية، لأن النقطة  $P$  تعين بتقاطع أسطوانة دورانية قائمة محورها  $Oz$ ، معادلتها  $\rho = c$  ( $c$  ثابت)، مع نصف مستوي يحوي المحور  $Oz$  ويصنع زاوية ثابتة  $h$  مع المستوي  $Oxz$ ، معادلته  $\varphi = h$ ، ومع مستوي يوازي المستوي  $Oxy$  ويبعد عنه بالمقدار الثابت

$z = k$  . ولما كانت هذه السطوح الثلاثة متعامدة، فإن مماسات المنحنيات التي تتقاطع فيها تكون متعامدة، وهي متقاطعة في النقطة  $P$ .

يمكن، بسهولة من الشكل 1.3، أن نجد العلاقات بين الإحداثيات الديكارتية والأسطوانية للنقطة  $P$ :

$$x = \rho \cos \varphi \quad \text{و} \quad y = \rho \sin \varphi \quad \text{و} \quad z = z$$

وبالمقابل، يمكن إيجاد  $\rho$  و  $\varphi$  و  $z$  من هذه العلاقات:

$$\varphi: \left\{ \begin{array}{l} \cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} , \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{array} \right\}$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} , z = z$$

بحيث

$$-\infty < z < \infty \quad \text{و} \quad 0 \leq \varphi < 2\pi \quad \text{و} \quad \rho \geq 0$$

كما هو واضح، فإن الزاوية  $\varphi$  لا تكون معينة، إذا كان  $x^2 + y^2 = 0$ ، أي إذا كان  $x = y = 0$  أو  $\rho = 0$ ، أي من أجل جميع نقاط المحور  $oz$ ، وتسمى هذه النقاط نقاطاً حرجة.

### 1.1.3 جملة الإحداثيات الكروية

يمكن أن يتعين موضع وحيد للنقطة  $P$ ، بمعرفة ثلاثة أعداد:

أ- نصف القطر المتجهي  $r$  (طول القطعة الواصلة بين النقطة  $P$  ونقطة الأصل  $O$ ).

ب- الزاوية  $\varphi$ ، وهي الزاوية بين الاتجاه الموجب للمحور  $ox$  و  $\overline{OP}$ ، وتسمى خط الطول.

ج- الزاوية  $\theta$  وهي الزاوية بين الاتجاه الموجب للمحور  $oz$  و  $r$ ، وتسمى خط العرض.

تسمى هذه الأعداد الثلاثة الإحداثيات الكروية للنقطة  $P$ ، وتكتب  $P(\rho, \varphi, z)$ .



سُميت هذه الإحداثيات كروية، لأنه يتعين موضع النقطة  $P$  بتقاطع كرة مركزها نقطة الأصل  $O$ ، والتي تسمى هنا القطب، ونصف قطرها ثابت، معادلتها  $r = c$ ، مع مخروط دوراني قائم محوره  $OZ$  ورأسه القطب  $O$  ونصف زاوية رأسه ثابتة، معادلته  $\theta = k$ ، ومع نصف مستوي يحوي المحور  $OZ$  ويصنع زاوية ثابتة  $h$  مع المستوي  $OXZ$ ، معادلته  $\varphi = h$ . ولما كانت هذه السطوح الثلاثة متعامدة، فإن مماسات المنحنيات التي تتقاطع فيها تكون متعامدة، وهي متقاطعة في النقطة  $P$ .

ملاحظة 1.1: تسمى هذه الإحداثيات، أيضاً، الإحداثيات القطبية الفضائية، لأن موضع النقطة  $P$  يتعين بمعرفة موضع النقطة  $P$  في المستوي المعين بهذه النقطة والمحور  $OZ$ ، حيث نعين موضع النقطة  $P$  في هذا المستوي بالإحداثيين القطبيين  $\theta$  و  $r$ ، بفرض  $OZ$  هو المحور القطبي، وبمعرفة، أيضاً، وضع هذا المستوي في الفضاء، أي بمعرفة الزاوية  $\varphi$  التي يصنعها مع المستوي  $OXZ$ .

يمكن، بسهولة، من الشكل 1.3، أن نوجد العلاقات بين الإحداثيات الديكارتية والكروية للنقطة  $P$ :

$$x = r \sin \theta \cos \varphi \quad \text{و} \quad y = r \sin \theta \sin \varphi \quad \text{و} \quad z = r \cos \theta$$

وبالمقابل، يمكن إيجاد  $r$  و  $\varphi$  و  $\theta$  بدلالة  $x$  و  $y$  و  $z$ :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\theta : \left\{ \cos \theta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \sin \theta = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right\}$$

$$\varphi : \left\{ \cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right\}$$

بحيث

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad \text{و} \quad 0 \leq \theta \leq \pi \quad \text{و} \quad r \geq 0$$

كما هو واضح، فإن الزاوية  $\theta$  لا تكون معينة، إذا كان  $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ ، أي إذا كان  $x = y = z = 0$  أو  $r = 0$ ، وهي تمثل القطب  $O$ .

وكذلك، فإن الزاوية  $\varphi$  لا تكون معينة، إذا كان  $x = y = 0$ ، أي من أجل جميع نقاط المحور  $Oz$ .

## 1.2 المتجهات (الأشعة)

### 1.2.1 تعاريف ومفاهيم أساسية

كثير من المقادير في الطبيعة تُعرّف تماماً بعدد، كالطول والزمن والشحنة الكهربائية وغيرها. غير أنه توجد مقادير تُعرّف بعدد واتجاه كالسرعة والقوة والحقل الكهربائي وغيرها. تسمى هذه المقادير متجهات.

نحدد أي نقطتين مرتبتي  $A$  و  $B$  من الفضاء قطعة مستقيمة موجهة. فإذا كانت  $A$  النقطة الأولى، فإنها تسمى بداية القطعة الموجهة، و النقطة الثانية  $B$  -نهايتها. ويُعدّ توجيه القطعة المستقيمة التوجيه من بدايتها إلى نهايتها.

تسمى القطعة الموجهة متجهاً (أو شعاعاً)، ونرمز له بـ  $\overrightarrow{AB}$  أو  $\vec{a}$ .

نسمي طول هذه القطعة المستقيمة طول أو مقدار المتجه، ونرمز له بـ  $|\overrightarrow{AB}|$  أو  $|\vec{a}|$ .

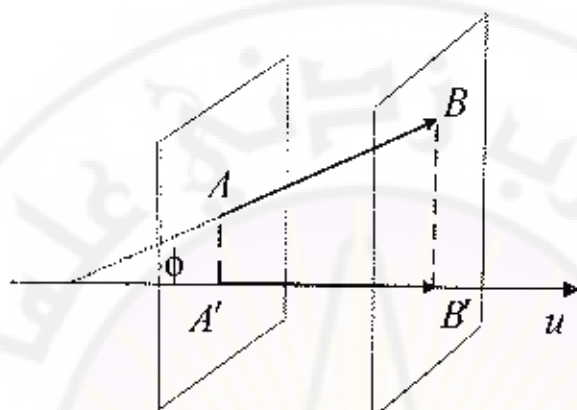
نعرّف المتجه الصفري  $\vec{0}$  على أنه متجه تنطبق بدايته على نهايته، أي أن طوله معدوم وتوجيهه غير معين.

نقول عن متجهين، إنهما متساويان أو متساويان، إذا كانا واقعين على مستقيم واحد أو على مستقيمين متوازيين.

نقول عن متجهين إنهما متساويان، إذا كانا متساويين ولهما الطول والاتجاه نفسه.

نعرف الزاوية بين متجهين، بأنها الزاوية بين المتجهين المسايرين هما والمرسومين من نقطة واحد، شرط ألا تزيد عن  $\pi$ ، الشكل 1.4.

نعرف متجه الوحدة للمتجه  $\hat{a}$ ، بأنه متجه  $\hat{a}$  مساير للمتجه  $\vec{a}$  وله توجيهه نفسه، وطوله يساوي الواحد  $|\hat{a}| = 1$ . وعليه، فإن  $\vec{a} = |\vec{a}| \hat{a}$ .



الشكل 1.4

مسقط متجه على محور: ليكن  $u$  محوراً في الفضاء، و  $\overline{AB}$  متجهاً لا ينطبق على هذا المحور. نمرر من النقطتين  $A$  و  $B$  مستويان يعامدان المحور  $u$ ، ولتكن  $A'$  و  $B'$  نقطتي تقاطع المستويين مع المحور، الشكل 1.4.

إن المتجه  $\overline{A'B'}$  هو مسقط المتجه  $\overline{AB}$  على المحور  $u$ ، ونرمز له بالرمز  $\overline{A'B'} = pr_u \overline{AB}$ . واضح من الشكل 1.4، أن

$$pr_u \overline{AB} = |\overline{AB}| \cos \phi$$

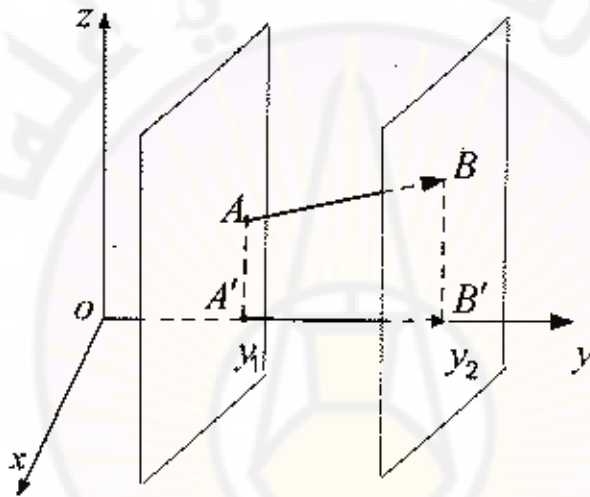
حيث  $\phi$  الزاوية بين  $\overline{AB}$  والمحور  $u$ .

مسقط متجه على المحاور الإحداثية: نرمز بـ  $x = pr_x \overline{AB}$  و  $y = pr_y \overline{AB}$  و

$z = pr_z \overline{AB}$ . نسمي المساقط  $x$  و  $y$  و  $z$  للمتجه  $\overline{AB}$ ، مرتبات هذا المتجه، ونكتب

$$\overrightarrow{AB} = (x, y, z)$$

وإذا كان  $A(x_1, y_1, z_1)$  و  $B(x_2, y_2, z_2)$ ، فإن  $x = x_2 - x_1$  و  $y = y_2 - y_1$  و  $z = z_2 - z_1$ . ولإثبات ذلك، نرسم من النقطتين  $A$  و  $B$  مستويين يعامدان المحور  $oy$ ، مثلاً، ولنرمز به  $A'$  و  $B'$  لنقطتي تقاطع هذين المستويين مع المحور  $oy$ ، وعيناهما  $y_1$  و  $y_2$ ، الشكل 1.5. واضح أن  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$ ، ولكن  $A'B' = y_2 - y_1$  أي أن  $y = y_2 - y_1$ . وبأسلوب مماثل، نجد  $x$  و  $z$ .

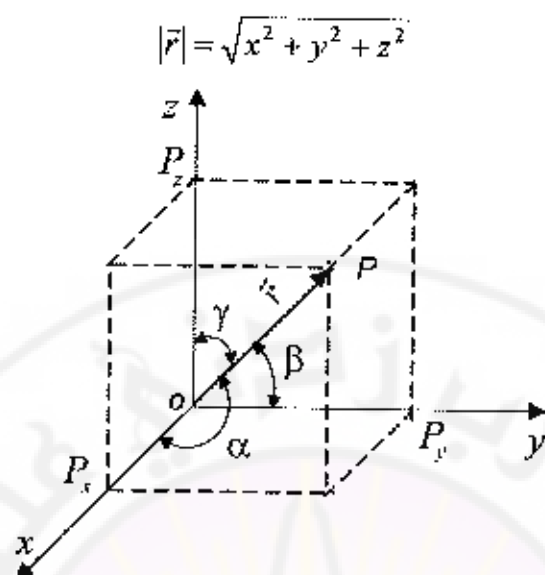


الشكل 1.5

إذا كانت بداية المتجه  $O$  ونهايته النقطة  $P(x, y, z)$ ، فإن هذا المتجه يسمى متجه الموضع للنقطة  $P$  ونرمز له بـ  $\overrightarrow{OP} = \vec{r}$ . نرسم من  $P$  ثلاثة مستويات تعامد المحاور الإحداثية الثلاثة، فنشكل متوازي مستطيلات، فيه القطر، الشكل 1.6. نعلم أن مربع طول القطر يساوي مجموع مربعات الأبعاد الثلاثة:

$$|\vec{r}|^2 = |\overrightarrow{OP}|^2 = |\overrightarrow{OP_x}|^2 + |\overrightarrow{OP_y}|^2 + |\overrightarrow{OP_z}|^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

أي أن



الشكل 1.6

نرمز بـ  $\alpha$  و  $\beta$  و  $\gamma$  للزوايا التي يصنعها المتجه  $\vec{r}$  مع الاتجاه الموجب للمحاور الإحداثية. واضح من الشكل 1.6، أن

$$\cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad \text{و} \quad \cos \beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\cos \gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

وتسمى جيوب تمام توجيه المتجه  $\vec{r}$ . بالتربيع والجمع، نجد العلاقة التي تربط بينها:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

إذا كانت  $A(x_1, y_1, z_1)$  و  $B(x_2, y_2, z_2)$  نقطتين في الفضاء، فإن طول المسافة  $d$  بينهما

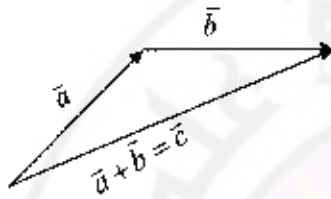
يُعطى بالعلاقة:

$$d = |\vec{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

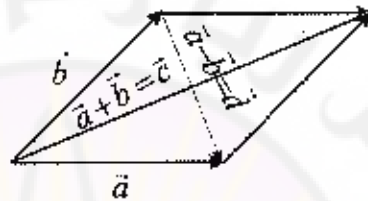
## 1.2.2 العمليات الخطية على المتجهات

**جمع وطرح متجهين:** نعرف مجموع أو محصلة متجهين  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  على أنه المتجه  $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$  والذي بدايته هي بداية المتجه  $\vec{a}$  ونهايته هي نهاية المتجه  $\vec{b}$ ، شرط أن تكون نهاية المتجه  $\vec{a}$  هي بداية المتجه  $\vec{b}$ ، الشكل 1.7-A.

ويمكن تمثيل المتجه  $\vec{c}$  كقطر متوازي الأضلاع المنشأ على المتجهين  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$ ، الشكل 1.7-B.



الشكل 1.7-A



الشكل 1.7-B

ونعرف حاصل طرح المتجه  $\vec{b}$  من المتجه  $\vec{a}$ ، على أنه المتجه  $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$  الذي إذا أضفناه إلى المتجه  $\vec{b}$  نتج المتجه  $\vec{a}$ ، الشكل 1.7-B، ونكتب:

$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{b} + \vec{d}$$

**ضرب متجه بعدد:** نعرف حاصل جداء متجه  $\vec{a}$  بعدد حقيقي  $\alpha \neq 0$ ، على أنه المتجه  $\alpha\vec{a}$ ، بحيث إن طوله  $|\alpha\vec{a}| = |\alpha||\vec{a}|$ ، وله اتجاه  $\vec{a}$  نفسه إذا كان  $\alpha > 0$ ، وعكس اتجاه  $\vec{a}$  إذا كان  $\alpha < 0$ . أما إذا كان  $\alpha = 0$ ، فإن  $\alpha\vec{a} = \vec{0}$ .

خواص: لتكن  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  و  $\vec{c}$  متجهات ما و  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$ ، فإن:

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} \quad \text{و} \quad \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

$$\alpha(\beta\vec{a}) = \beta(\alpha\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a} \quad \text{و} \quad \alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$$

$$(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$$

$$pr_u(\vec{a} + \vec{b}) = pr_u\vec{a} + pr_u\vec{b} \Rightarrow \vec{a} + \vec{b} = (x_a + x_b, y_a + y_b, z_a + z_b)$$

$$pr_a(\lambda \vec{a}) = \lambda pr_a \vec{a} \Rightarrow \lambda \vec{a} = (\lambda x_a, \lambda y_a, \lambda z_a)$$

وينتج من هذه العلاقة شرط تساير أو توازي متجهين:

$$\vec{a} // \vec{b} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^* : \vec{a} = \lambda \vec{b}$$

مثال 1.1: أثبت أنه إذا كان المتجهان  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  لا يقعان في مسنوّ واحد، فإن العلاقة  $\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} = \vec{0}$  لا تتحقق، إلا إذا كان  $\alpha = \beta = 0$ .

الحل: من العلاقة  $\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} = \vec{0}$  نجد  $\alpha \vec{a} = -\beta \vec{b}$  بفرض  $\alpha \neq 0$ ، فسيان  $\vec{a} = -\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \vec{b}$  أي أن المتجهين  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  متوازيان، وهذا يخالف للفرض، أي أن  $\alpha = 0$ . وعليه، فإن  $\beta = 0$ .

مبرهنة 1.1: لتكن  $\vec{i}$  و  $\vec{j}$  و  $\vec{k}$  متجهات الواحدة على المحاور الإحداثية:  $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$  وموجهه من  $O$ . إن أي متجه  $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$  يكتب بأسلوب وحيد، كتركيب خطي في متجهات الواحدة:  $\vec{a} = \lambda \vec{i} + \mu \vec{j} + \nu \vec{k}$ ، حيث  $\lambda$  و  $\mu$  و  $\nu$  أعداد ما.

الإثبات: نرسم المتجه  $\vec{a}$  من  $O$  ولتكن نهايته  $P(x, y, z)$ . نرسم من  $P$  ثلاثة مستويات تعامد المحاور الإحداثية، الشكل 1.8. ولتكن  $P_x$  و  $P_y$  و  $P_z$  نقاط تقاطع هذه المستويات مع المحاور الإحداثية. لتكن  $P'$  مسقط النقطة  $P$  على المستوي  $Oxy$ . من تعريف عملية الجمع، نجد

$$\vec{a} = \overrightarrow{OP'} + \overrightarrow{OP_z} : \overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP_x} + \overrightarrow{OP_y} \Rightarrow \vec{a} = \overrightarrow{OP_x} + \overrightarrow{OP_y} + \overrightarrow{OP_z}$$

ولما كان  $\overrightarrow{OP_x} = \lambda \vec{i}$  و  $\overrightarrow{OP_y} = \mu \vec{j}$  و  $\overrightarrow{OP_z} = \nu \vec{k}$ ، فإن  $\vec{a} = \lambda \vec{i} + \mu \vec{j} + \nu \vec{k}$ ، حيث  $\lambda$  و  $\mu$  و  $\nu$  أعداد ما.

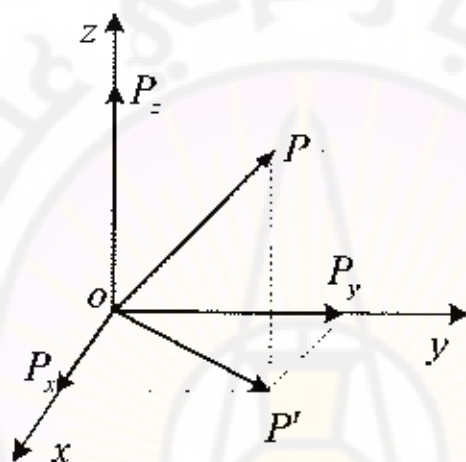
وعليه، فإن  $\vec{a} = \lambda \vec{i} + \mu \vec{j} + \nu \vec{k}$ .

ولإثبات الوحداية، نفرض أن  $x = \lambda$  و  $y = \mu$  و  $z = \nu$ ، حيث  $x$  و  $y$  و  $z$  إحداثيات

النقطة  $P$ . نبين أن  $x = \lambda$ . إذا كان المتجه  $\vec{a}$  موجه باتجاه  $\hat{i}$ ، فإن  $|\vec{OP}_x| = x$ ، وإذا كان المتجه  $\vec{a}$  موجه عكس اتجاه  $\hat{i}$ ، فإن  $x = -|\vec{OP}_x|$ ، وعليه، فإن  $\vec{OP}_x = x\hat{i}$  وبالمقارنة مع العلاقة  $\vec{OP}_x = \lambda\hat{i}$  نجد  $x = \lambda$ .

ونجد، بالأسلوب نفسه:  $y = v$  و  $z = w$ . أي أن

$$\vec{a} = \vec{OP} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} = (x, y, z)$$



الشكل 1.8

إذا كانت  $A(x_1, y_1, z_1)$  بداية المتجه  $\vec{AB}$  و  $B(x_2, y_2, z_2)$  نهايته، فإنه بأسلوب مشابه، يُكتب المتجه بدلالة مركباته كما يلي:

$$\vec{AB} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$$

مثال 1.2: عيّن مركبات متجه  $\vec{a} = (x, y, z)$  طوله  $a = 2$  ويصنع مع المحورين  $ox$  و  $oy$  الزاويتين  $\alpha = 120^\circ$  و  $\beta = 60^\circ$ ، بالترتيب.

الحل: لما كان  $\cos \alpha = \frac{x}{a}$ ، فإن:



$$-\frac{1}{2} = \frac{x}{2} \Rightarrow x = -1$$

وكذلك، فإن  $\cos \beta = \frac{y}{a}$ ، أي

$$\frac{1}{2} = \frac{y}{2} \Rightarrow y = 1$$

ولما كان  $a^2 = x^2 + y^2 + z^2$ ، فإن  $4 = 1 + 1 + z^2$ ، ومنه فإن  $z = \pm\sqrt{2}$ ، أي يوجد متجهان يحققان الشروط المعطاة هما:

$$\vec{a}_2 = (-1, 1, -\sqrt{2}) \quad \text{و} \quad \vec{a}_1 = (-1, 1, \sqrt{2})$$

#### 1.2.4 جداء المتجهات

1- جداء متجهين غير صفريين  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$ :

الجداء الداخلي (العددي - السلمي): هو بالتعريف العدد

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \phi \quad ; \quad \phi = (\vec{a}, \vec{b})$$

وإذا كان أحد المتجهين، على الأقل صفرياً، نقول إن الجداء الداخلي لها صفراً.

ولما كان  $pr_{\vec{a}} \vec{b} = |\vec{b}| \cos \phi$ ، فإن العلاقة الأخيرة يمكن أن تكتب كما يلي:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| pr_{\vec{a}} \vec{b} = |\vec{b}| pr_{\vec{b}} \vec{a}$$

خواص الجداء الداخلي: لتكن  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  و  $\vec{c}$  متجهات غير صفرية و  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$ ، عندئذ

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

$$\hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{j} \cdot \hat{k} = \hat{i} \cdot \hat{k} = 0$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} \quad , \quad \vec{a} \cdot \vec{a} = a^2$$

$$\hat{i} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$

$$(\alpha \vec{a}) \cdot (\beta \vec{b}) = (\alpha\beta)(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

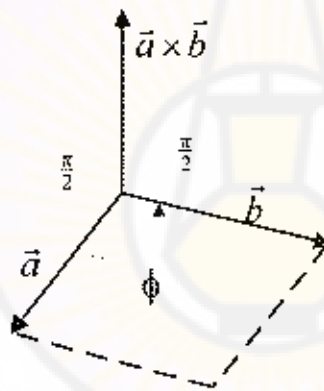
إذا كان  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$  و  $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$  فإن

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

من تعريف الجداء الداخلي، نجد الزاوية بين متجهين  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$ :

$$\cos \phi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

الجداء الخارجي (المتجهي): هو المتجه  $\vec{a} \times \vec{b}$  العمودي على مستوي المتجهين  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$ ، بحيث تشكل المتجهات  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  و  $\vec{a} \times \vec{b}$  ثلاثية مباشرة، الشكل 1.9.



الشكل 1.9

ويعطى طول الجداء الخارجي بالعلاقة:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \phi \quad ; \quad \phi = (\vec{a}, \vec{b})$$

وإذا كان أحد المتجهين، على الأقل صفرية، فإن  $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ .

إذا كان  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$  و  $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ ، فإن الجداء الخارجي يُعطى بالعلاقة:

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

أما التأويل الهندسي للقيمة المطلقة، لطول الجداء الخارجي لمتجهين، فهي مساحة متوازي الأضلاع المنشأ على هذين المتجهين.

خواص الجداء الخارجي: لتكن  $\bar{a}$  و  $\bar{b}$  و  $\bar{c}$  متجهات غير صفيرية و  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$ ، عندئذٍ

$$\bar{a} \times \bar{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \bar{a} \parallel \bar{b}$$

$$\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = \vec{0}$$

$$\bar{a} \times \bar{b} = -(\bar{b} \times \bar{a}) \quad , \quad \bar{a} \times \bar{a} = \vec{0}$$

$$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k} \quad , \quad \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i} \quad , \quad \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}$$

$$(\bar{a} + \bar{b}) \times \bar{c} = \bar{a} \times \bar{c} + \bar{b} \times \bar{c}$$

$$(\alpha \bar{a}) \times (\beta \bar{b}) = (\alpha\beta)(\bar{a} \times \bar{b})$$

## II - جداء ثلاثة متجهات غير صفيرية

يوجد لجداء ثلاثة متجهات غير صفيرية  $\bar{a}$  و  $\bar{b}$  و  $\bar{c}$  ثلاثة أنواع، وتُصنّف حسب نوعي إشاراتي الجداء:  $(\bar{a} \cdot \bar{b})\bar{c}$  ,  $(\bar{a} \times \bar{b}) \times \bar{c}$  ,  $\bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c})$ .

نسمي الجداء  $(\bar{a} \cdot \bar{b})\bar{c}$  جداءً عادياً، حيث إن الناتج متجه مسابر للمتجه  $\bar{c}$ .

ونسمي الجداء  $(\bar{a} \times \bar{b}) \times \bar{c}$  جداءً متجهياً، حيث إن الناتج متجه يعطى بالعلاقة:

$$(\bar{a} \times \bar{b}) \times \bar{c} = (\bar{a} \cdot \bar{c})\bar{b} - (\bar{b} \cdot \bar{c})\bar{a}$$

كما هو واضح، فإن تغيير مواضع الأقواس في الجداء العادي أو المتجهي يُغيّر من الناتج. فمثلاً،

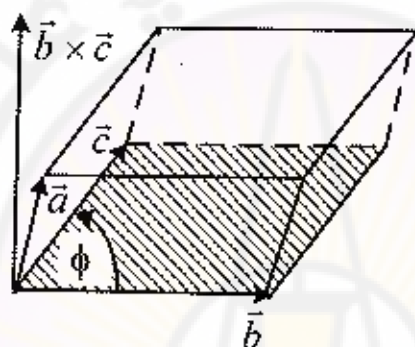
$$\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) = (\bar{a} \cdot \bar{c})\bar{b} - (\bar{a} \cdot \bar{b})\bar{c}$$

أما الجداء  $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$  فيسمى الجداء المختلط، ويظهر فيه أحد المتجهات مضروباً داخلياً بالجداء الخارجي للمتجهين الآخرين، ونرمز له بالرمز  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ ، ويكون:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

أما التأويل الهندسي للقيمة المطلقة للجداء المختلط  $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ ، فهو حجم متوازي السطوح المنشأ على هذه المتجهات، الشكل 1.10.

كما هو واضح، فإن ترتيب إشارتي الجداء غير مهم، وإنما المهم ترتيب المتجهات.



الشكل 1.10

خواص الجداء المختلط: لتكن  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  و  $\vec{c}$  و  $\vec{d}$  متجهات غير صفريّة.

١- الشرط اللازم والكافي كي تكون ثلاثة متجهات غير صفريّة مرتبطة خطياً، هو أن يكون جداولها المختلط معدوماً. وخصوصاً، فإن شرط وقوع ثلاث متجهات في مستوى واحد هو انعدام جداولها المختلط. علماً أن الجداء المختلط لثلاث متجهات ينعدم إذا تساوى أو توازى أي متجهين من هذه المتجهات.

٢- لا تتغير قيمة الجداء المختلط، عندما نحري تبديلاً دائرياً على هذه المتجهات، أي:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b})$$

٣- إن تغيير ترتيب متجهين من متجهات الجداء المختلط يغير من إشارة الجداء:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = -(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b})$$

$$(\alpha \vec{a}, \beta \vec{b}, \gamma \vec{c}) = (\alpha \beta \gamma)(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \quad ; \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^* \quad 1.4$$

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} + \vec{d}) = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) + (\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}) \quad 1.5$$

$$1.6 \quad \text{إذا كان } \vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \text{ و } \vec{b} = (b_1, b_2, b_3) \text{ و } \vec{c} = (c_1, c_2, c_3) \text{ فإن}$$

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

مثال 1.3: أثبت أن النقاط  $A(1,2,1)$  و  $B(0,1,-1)$  و  $C(3,-2,0)$  و  $D(4,5,7)$  تقع في مستوى واحد.

الحل: نشكل المتجهات  $\vec{AB}$ ,  $\vec{AC}$ ,  $\vec{AD}$ ، ثم نوجد الجداء المختلط لها.

$$\vec{AB} = (-1, -1, -2) \quad , \quad \vec{AC} = (2, -4, -1) \quad , \quad \vec{AD} = (3, 3, 6)$$

$$(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}) = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 2 & -4 & -1 \\ 3 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

أي أن المتجهات الثلاثة تقع في مستوى واحد. وعليه، فإن النقاط الأربع تقع في مستوى واحد.

### 1.3 السطوح في الفضاء

السطح في الفضاء هو المحل الهندسي لمجموعة نقاط الفضاء التي تحقق خاصية معينة تسمى الخاصية المميزة للسطح، حيث تعبر هذه الخاصية عن علاقة تربط بين إحداثيات نقطة ما  $P(x, y, z)$  واقعة على السطح. ويُعبر عن هذه الخاصية بمعادلة ديكارتية:

$$F(x, y, z) = 0 \quad (1.1)$$

وتسمى المعادلة الديكارتية للسطح، حيث  $F$  دالة مستمرة. وتمثل هذه المعادلة، الشرط اللازم والكافي لوقوع النقطة  $P(x, y, z)$  على هذا السطح.

فمثلاً، تُعرّف الكرة على أنها مجموعة نقاط الفضاء التي تبعد بُعداً ثابتاً  $a$  عن نقطة ثابتة  $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ، وهذا ما يسمى الخاصّة المميزة لسطح الكرة. ويُعبّر عن هذه الخاصّة ديكارتياً بالمعادلة:

$$F(x, y, z) \equiv (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 - a^2 = 0$$

ولما كان للنقطة في الفضاء ثلاث درجات حرية، فإنّ للنقاط الواقعة على السطح في الفضاء درجتين حرية فقط، لأن المتغيرات الثلاثة ترتبط بالمعادلة (1.1)، معادلة السطح. أي أنه يمكن التعبير عن العلاقة بين إحداثيات نقطة من السطح، وسيطياً بدلالة وسيطين  $u$  و  $v$  كما يلي:

$$\{x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v)\} \quad (1.2)$$

أي أن شرط وقوع النقطة  $P(x, y, z)$  على السطح (1.1) هو وجود قيمتين مقابلتين  $u$  و  $v$  تحقق المعادلات (1.2).

يتم الانتقال من الشكل الديكارتّي (1.1) لمعادلة سطح، إلى الشكل الوسيطّي (1.2) بفرض اثنين من المتغيرات  $x$  و  $y$  و  $z$  بمثابة وسيطين متناسبين  $u$  و  $v$ ، بحيث يتحقق الشرطان:

$$(x'_u)^2 + (y'_u)^2 + (z'_u)^2 \neq 0 \quad \text{و} \quad (x'_v)^2 + (y'_v)^2 + (z'_v)^2 \neq 0$$

وبالعكس، يتم الانتقال من الشكل الوسيطّي (1.2) إلى الشكل الديكارتّي (1.1) لمعادلة سطح بحذف الوسيطين  $u$  و  $v$  من المعادلات (1.2).

### 1.3.1 تناظر السطح

نقول عن السطح المعطى بالمعادلة (1.1)، إنه متناظراً بالنسبة إلى المستوي  $oxy$ ، إذا تحققت المساواة:

$$F(x, y, -z) = F(x, y, z)$$

وذلك من أجل جميع قيم  $x$  و  $y$  و  $z$  من ساحة تعريف الدالة  $F$ .

ونعرّف بأسلوب مماثل، التناظر بالنسبة إلى المستوي  $oyz$ ، و بالنسبة إلى المستوي  $oxz$ ، وذلك من أجل جميع قيم  $x$  و  $y$  و  $z$  من ساحة تعريف الدالة  $F$ .

نقول إن السطح المعطى بالمعادلة (1.1) متناظرٌ بالنسبة إلى المحور  $ox$ ، إذا تحققت المساواة:

$$F(x, -y, -z) = F(x, y, z)$$

وذلك من أجل جميع قيم  $x$  و  $y$  و  $z$  من ساحة تعريف الدالة  $F$ .  
ونعرف بأسلوب مماثل، التناظر بالنسبة إلى المحور  $oy$  و بالنسبة إلى المحور  $oz$ .  
نقول إن السطح المعطى بالمعادلة (1.1) متناظراً بالنسبة إلى نقطة الأصل  $O$ ، إذا تحققت المساواة:

$$F(-x, -y, -z) = F(x, y, z)$$

وذلك من أجل جميع قيم  $x$  و  $y$  و  $z$  من ساحة تعريف الدالة  $F$ .

### 1.3.2 السطح البسيط

نقول عن سطح فراغي إنه بسيط باتجاه أحد المحاور الإحداثية،  $oz$  مثلاً، إذا كان أي مستقيم يوازي المحور  $oz$  يقطع هذا السطح في نقطة واحدة على الأكثر.  
وتُعطى معادلة السطح باتجاه  $oz$ ، كما يلي:

$$z = f(x, y)$$

حيث  $f$  دالة صريحة ومستمرة بالنسبة إلى المتغيرين  $x$  و  $y$  في الساحة المستوية  $D$ ، المسقط القائم للسطح على المستوي  $oxy$ .

وبأسلوب مماثل نعرف السطح البسيط باتجاه  $oy$  و باتجاه  $ox$ .

### 1.3.3 السطح الجبري

إذا كانت الدالة  $F(x, y, z)$  حدودية من الدرجة  $N$ ، بثلاثة متغيرات  $x$  و  $y$  و  $z$ ، فإن المعادلة (1.1) تمثل سطحاً جبرياً من الدرجة  $N$ .

فالمعادلة  $Ax + By + Cz + D = 0$  تمثل سطحاً جبرياً من الدرجة الأولى وهو مستوي. و تمثل المعادلة

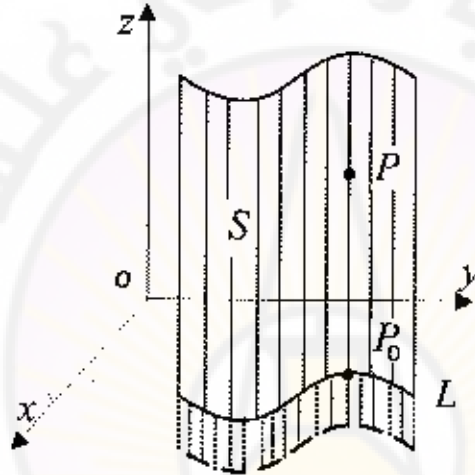
$$a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 + 2b_1xy + 2b_2yz + 2b_3xz + 2c_1x + 2c_2y + 2c_3z + d = 0$$

سطحاً جبرياً من الدرجة الثانية.

وسنعرض لاحقاً، لسطوح الدرجة الأولى والدرجة الثانية.

### 1.3.4 السطح الأسطواني

ليكن  $L$  منحنى يقع في المستوي  $oxy$ ، الشكل 1.11. نمرر من كل نقطة من نقاط هذا المنحنى مستقيماً يوازي المحور  $oz$ . تشكل هذه المستقيبات سطحاً فراغياً، يسمى سطحاً أسطوانياً. نسمي المستقيبات الموازية لـ  $oz$  مولدات السطح الأسطواني، ونسمي المنحنى  $L$  دليله. يُعرّف، بأسلوب مشابه، السطح الأسطواني الذي مولداته توازي المحور  $ox$  أو المحور  $oy$  أو توازي أي مستقيم ثابت في الفضاء.



الشكل 1.11

مبرهنة 1.2: إن معادلة السطح الأسطواني الذي مولداته توازي المحور  $oz$ ، هي

$$F(x, y) = 0 \quad (1.3)$$

الإثبات: تمثل المعادلة (1.3) منحنى في المستوي  $oxy$ . لتكن  $P(x, y, z)$  نقطة ما من السطح الأسطواني المفروض  $S$ . إن هذه النقطة تقع على إحدى مولداته. إذا كانت  $P_0$  نقطة تقاطع هذا المولد مع المستوي  $oxy$ ، فإن  $P_0 \in L$ ، ونحدد إحداثياتها  $x$  و  $y$  من المعادلة (1.3). أي أن الأعداد  $x$  و  $y$  و  $z$  تحقق هذه المعادلة، لأن الدالة  $F(x, y)$  غير متعلقة بالمتغير  $z$ . أي أن الإحداثيات  $x$  و  $y$  و  $z$  للنقطة  $P \in S$ ، تحقق المعادلة (1.3). واضح أنه إذا كان  $P(x, y, z) \notin S$ ، فإن  $P_0(x, y) \notin L$ ، مما يعني أن  $x$  و  $y$  لا تحقق المعادلة (1.3).



إذن، فالمعادلة (1.3) هي معادلة السطح الأسطوانى  $S$ .  
وهكذا، فإن معادلة السطح الأسطوانى الذى مولداته توازى المحور  $OZ$ ، لا تحوي المتغير  $z$ ، ولها معادلة الدليل  $L$  نفسه. فمثلاً، إذا كان الدليل قطع ناقص  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ، فإن هذه المعادلة هي نفسها معادلة السطح الأسطوانى المقابل، وتسمى أسطوانة ناقصية.  
ملاحظة 1.2: تمثل المعادلة (1.3) منحن فى المستوى  $oxy$ ، غير أن هذا المنحنى يعطى فى الفضاء  $xyz$  بالمعادلتين :

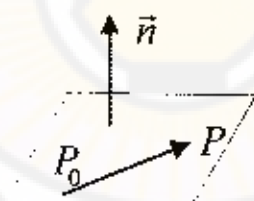
$$\{ F(x, y) = 0, z = 0 \}$$

#### 1.4 المستوى

هو سطح من الدرجة الأولى، غير محدود، إذا اشترك معه المستقيم بأكثر من نقطة انطبق عليه. ويتعين المستوى بطرائق عدة، نورد أهمها:

##### المعادلة الديكارتية العامة للمستوى

نعين المستوى يمر بالنقطة بنقطة ثابتة والمعامد لمتجه ثابت.  
نفرض المستوى يمر بالنقطة  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  ومعامد المتجه  $\vec{n} = (p, q, r)$  ولستكن  $P(x, y, z)$  نقطة دارجة على هذا المستوى، الشكل 1.12.



الشكل 1.12

عندئذ يكون

$$\overrightarrow{P_0P} \perp \vec{n} \Rightarrow \overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{n} = 0$$

ويأسقاط هذه المعادلة على المحاور الإحداثية، نجد:

$$p(x - x_0) + q(y - y_0) + r(z - z_0) = 0 \Rightarrow$$

$$px + qy + rz + h = 0 \quad (1.4)$$

حيث  $h = -(px_0 + qy_0 + rz_0)$ .

تسمى المعادلة (1.4)، المعادلة الديكارتية العامة للمستوي. ويسمى المتجه  $\vec{n}$  ناظم المستوي. ويمكن بسهولة، إثبات أن كل معادلة خطية في المتغيرات  $x$  و  $y$  و  $z$  تمثل مستويًا في الفضاء.

#### حالات خاصة:

... إذا كان  $h = 0$  في المعادلة (1.4)، فإن المعادلة  $px + qy + rz = 0$  تمثل مستويًا ماراً بنقطة الأصل  $O$ ، لأن النقطة  $O(0,0)$  تحقق هذه المعادلة.

... إذا كان  $p = 0$  في المعادلة (1.4)، فإن المعادلة  $qy + rz + h = 0$  تمثل مستويًا موازيًا للمحور  $ox$ .

وتعطى، معادلة المستوي الموازي للمحور  $oy$  وللمحور  $oz$ ، بأسلوب مشابه.

مثال 1.4: أوجد معادلات المستويات الإحداثية الثلاثة.

الحل: المستوي  $oxy$  يمر بالنقطة  $O$  ويوازي المتجه  $\vec{k} = (0,0,1)$  نعوض في المعادلة (1.4)، فنجد  $z = 0$ .

وبالأسلوب نفسه، نجد معادلة المستوي  $oxz$ ، وهي  $y = 0$ ، ومعادلة المستوي  $oyz$  وهي  $x = 0$ .

مثال 1.5: أوجد متجه واحد الناطم للمستوي المسار بالنقاط  $O$  و  $A(1,0,2)$  و  $B(-1,1,0)$ .

الحل: نشكل المتجهين  $\vec{OA} = (1,0,2)$  و  $\vec{OB} = (-1,1,0)$ ، ونوجد الجداء الخارجي:

$$\vec{OA} \times \vec{OB} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$$

وهذا المتجه عمودي على مستوي هذين المتجهين. أما متجه واحد الناطم، فهو المتجه

$$\hat{n} = \frac{\vec{OA} \times \vec{OB}}{|\vec{OA} \times \vec{OB}|} = \frac{2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{2}{3}\hat{i} + \frac{2}{3}\hat{j} - \frac{1}{3}\hat{k}$$

الزاوية بين مستويين: تُعرّف الزاوية بين مستويين بأنها الزاوية بين ناظميها، ونختار عادة الزاوية الحادة. فإذا كان  $\vec{n}_1 = (p_1, q_1, r_1)$  و  $\vec{n}_2 = (p_2, q_2, r_2)$  ناظمي المستويين، فإن الزاوية بينهما  $\phi$ ، تُعطى من العلاقة

$$\cos \phi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{p_1 p_2 + q_1 q_2 + r_1 r_2}{\sqrt{p_1^2 + q_1^2 + r_1^2} \sqrt{p_2^2 + q_2^2 + r_2^2}}$$

ومن هنا نجد شرط توازي مستويين هو شرط توازي ناظميها  $\vec{n}_1 = (p_1, q_1, r_1)$  و  $\vec{n}_2 = (p_2, q_2, r_2)$

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{q_1}{q_2} = \frac{r_1}{r_2}$$

و شرط تعامد مستويين هو شرط تعامد ناظميها  $\vec{n}_1 = (p_1, q_1, r_1)$  و  $\vec{n}_2 = (p_2, q_2, r_2)$

$$p_1 p_2 + q_1 q_2 + r_1 r_2 = 0$$

### 1.5 المستقيم في الفضاء

هو المحل الهندسي  $L$  لنقاط الفضاء المحققة للشرط  $\overrightarrow{P_0 P_1} \parallel \overrightarrow{P_0 P_2}$ ، من أجل أي ثلاث نقاط  $P_0, P_1, P_2$  من  $L$ . أي أن المستقيم يتعين بمعرفة نقطة ثابتة منه ومتجه ثابت يوازيه، أو بمعرفة نقطتين منه، أو بتقاطع مستويين.

#### المعادلات الديكارتية والوسيطية للمستقيم في الفضاء

نفرض أن المستقيم  $L$  يمر بالنقطة الثابتة  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  ويوازي المتجه  $\vec{V} = (l, m, n)$ . ولتكن  $P(x, y, z)$  نقطة دارجة على هذا المستقيم. عندئذ يكون:

$$\overrightarrow{P_0 P} \parallel \vec{V} \Rightarrow \overrightarrow{P_0 P} = \lambda \vec{V} ; \lambda \in \mathbb{R}^*$$

ويأسقاط هذه العلاقة على المحاور الإحداثية، نجد المعادلات الوسيطية للمستقيم  $L$  بدلالة الوسيط  $\lambda$ :

$$x - x_0 = \lambda l, \quad y - y_0 = \lambda m, \quad z - z_0 = \lambda n$$

أي أن

$$x = x_0 + \lambda l, \quad y = y_0 + \lambda m, \quad z = z_0 + \lambda n$$

ويحذف الوسيط  $\lambda$  من هذه المعادلات، نحصل على المعادلات الديكارتية للمستقيم:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

نسمي المتجه  $\vec{V}$  متجهي المستقيم  $L$ .

كما هو واضح، فإن هذه المعادلات عبارة عن جملة معادلتين مستقلتين من الدرجة الأولى تمثل كل منها مستويًا يوازي أحد المحاور الإحداثية.

مثال 1.6: أوجد المعادلات الوسيطة والمعادلات الديكارتية لمستقيم يمر بالنقطة  $P_0(1, -2, 1)$  ويوازي المتجه  $\vec{V} = (1, 1, -1)$ . ومن ثم أوجد نقطة تقاطع هذا المستقيم مع المستوي  $oxy$ .

الحل: المعادلات الوسيطة:

$$x = 1 + \lambda, \quad y = -2 + \lambda, \quad z = 1 - \lambda$$

والمعادلات الديكارتية:

$$\frac{x - 1}{1} = \frac{y + 2}{1} = \frac{z - 1}{-1}$$

لايجاد نقطة تقاطع هذا المستقيم مع المستوي  $oxy$ . نعوض المعادلات الوسيطة لهذا المستقيم في معادلة المستوي  $oxy$ ، أي في المعادلة  $z = 0$ ، فنجد

$$z = 0 \Rightarrow 0 = 1 - \lambda \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow$$

$$x = 1 + 1 = 2, \quad y = -2 + 1 = -1$$

ومنه، فإن نقطة التقاطع هي  $P_1(2, -1, 0)$ .

الزاوية بين مستقيمين: تُعرف الزاوية بين مستقيمين، بأنها الزاوية بين منحييهما، ونختار عادة الزاوية الحادة. فإذا كان  $\vec{V}_1 = (l_1, m_1, n_1)$  و  $\vec{V}_2 = (l_2, m_2, n_2)$  منحيي المستقيمين، فإن الزاوية بينهما  $\phi$ ، تُعطى من العلاقة

$$\cos \phi = \frac{|\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2|}{\|\vec{V}_1\| \|\vec{V}_2\|} = \frac{|l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2|}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}$$

ومن هنا نجد شرط توازي مستقيمين هو شرط توازي منحبيهما  $\vec{V}_1$  و  $\vec{V}_2$ :

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

و شرط تعامد مستقيمين هو شرط تعامد منحبيهما  $\vec{V}_1$  و  $\vec{V}_2$ :

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$$

## 1.6 سطوح الدرجة الثانية

هي السطوح التي تعطي معادلتها الديكارتية كما يلي:

$$a_1 x^2 + a_2 y^2 + a_3 z^2 + 2h_1 xy + 2h_2 xz + 2h_3 yz + 2c_1 x + 2c_2 y + 2c_3 z + d = 0 \quad (1.5)$$

حيث إن  $a_1, a_2, a_3, h_1, h_2, h_3, c_1, c_2, c_3, d$  ثوابت، لا تتعدم كلها في آن معاً.

يمكن، بإجراء دورانات وانسحابات معينة، رد المعادلة (1.5) إلى إحدى الأشكال التالية:

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + D = 0 \quad ; \quad \alpha\beta\gamma \neq 0$$

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + 2c_3 z = 0 \quad ; \quad \alpha\beta c_3 \neq 0$$

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + D = 0 \quad ; \quad \alpha\beta \neq 0$$

$$\alpha x^2 + 2c_2 y = 0 \quad ; \quad \alpha c_2 \neq 0$$

$$\alpha x^2 + D = 0 \quad ; \quad \alpha \neq 0$$

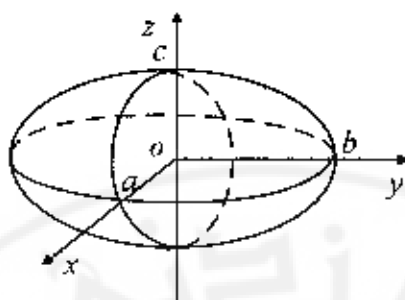
ونعرض فيما يلي السطوح الحقيقية النموذجية الممثلة هذه المعادلات، باستثناء الحالة الأخيرة التي تمثل مستويين (إما متوازيين أو منطبقين أو تحيليين).

١ - مجسم القطع الناقص: هو سطح مغلق، الشكل 1.13، معادلته النموذجية

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad ; \quad a > 0, b > 0, c > 0$$

تسمى الأعداد  $a, b, c$  أنصاف أقطار مجسم القطع الناقص.

كما هو واضح، فإن هذا المجسم متناظر بالنسبة لنقطة الأصل.



الشكل 1.13

٢ - مجسم الكرة: وهي حالة خاصة من مجسم القطع الناقص، وذلك عندما تتساوى أنصاف أقطاره. معادلتها النموذجية:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

وتعرف الكرة بأنها المحل الهندسي لمجموعة نقاط الفضاء التي تبعد بعداً ثابتاً، يسمى نصف القطر، عن نقطة ثابتة، تسمى مركز الكرة. فإذا كان مركز الكرة النقطة  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  ونصف قطرها  $a$ ، فإن المعادلة العامة للكرة:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = a^2$$

٣ - مجسم القطع الزائد وحيد الفرع (وحيد الجوف): هو سطح لانهائي، يُمثل بالمعادلة النموذجية

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad ; \quad a > 0, b > 0, c > 0$$

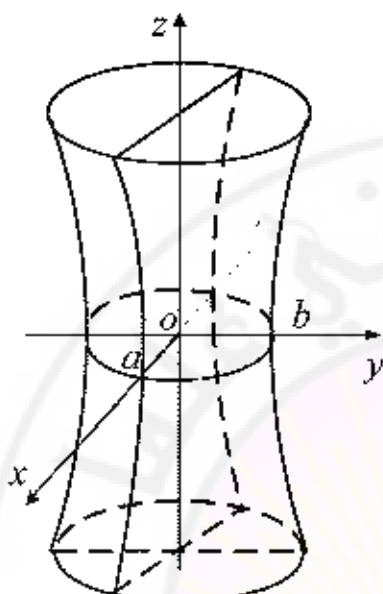
يمكن التحقق بسهولة، أن هذا الجسم متناظر بالنسبة لنقطة الأصل ويمثل المحاور  $OZ$  محور تناظر له، الشكل 1.14.

٤ - مجسم القطع الزائد ثنائي الفرع (ثنائي الجوف):

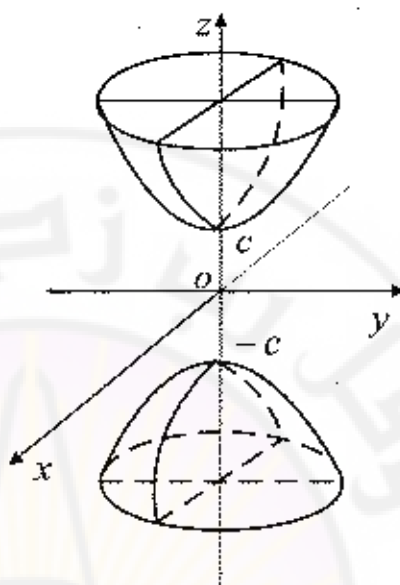
هو سطح لانهائي، يُمثل بالمعادلة النموذجية

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \quad ; \quad a > 0, b > 0, c > 0$$

يمكن التحقق بسهولة، أن هذا الجسم متناظر بالنسبة لنقطة الأصل، ويمثل المحور  $OZ$  محور تناظر له، الشكل 1.15.



الشكل 1.14



الشكل 1.15

٥ - مجسم المخروط: هو سطح لانهاضي، يُمثل بالمعادلة النموذجية:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad ; \quad a > 0, b > 0, c > 0$$

ويمكن التحقق بسهولة، أن هذا الجسم متناظر بالنسبة لنقطة الأصل، ويمثل المحور  $OZ$  محور تناظر له، الشكل 1.16. تسمى ذروة المخروط، و  $OZ$  محوره.

ويتميز هذا السطح، بأنه إذا وقعت النقطة  $P(x, y, z)$  عليه، فإن كل نقاط المستقيم المار بـ  $P$  وبنقطة الأصل، تقع على هذا السطح.

وعليه، يمكن تعريف المخروط على أنه مجموعة كل المستقيمات المارة من نقطة ثابتة (نقطة الأصل هنا) وتستند إلى منحنى فراغي ثابت لا تنتمي ذروة المخروط إليه، وهو هنا قطع ناقص. وتسمى هذه المستقيمات مولدات المخروط، والنقطة الثابتة ذروته، والمنحنى الثابت دليله.

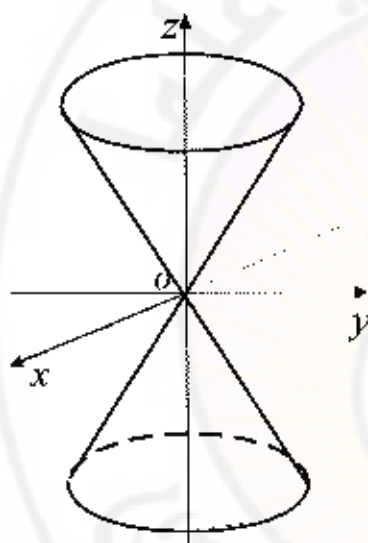
ويمكن أن نبرهن، أن الشرط اللازم والكافي كي تمثل المعادلة (1.5) مخروطاً، رأسه نقطة الأصل، هو انعدام المقادير  $c_1, c_2, c_3, d$ .

#### ٦ - مجسم القطع المكافئ الناقص:

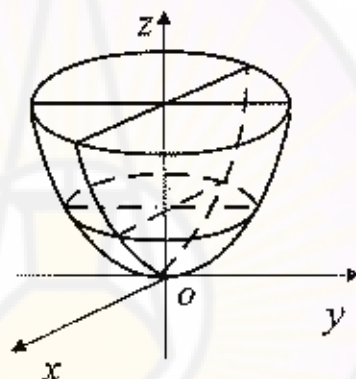
هو سطح لانهائي، يُمثل بالمعادلة النموذجية

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z \quad ; \quad a > 0, \quad b > 0$$

يمكن التحقق بسهولة أن هذا المجسم متناظر بالنسبة للمحور  $OZ$ . الشكل 1.17. تسمى نقطة الأصل ذروة المجسم وهي أخفض نقطة فيه.



الشكل 1.16



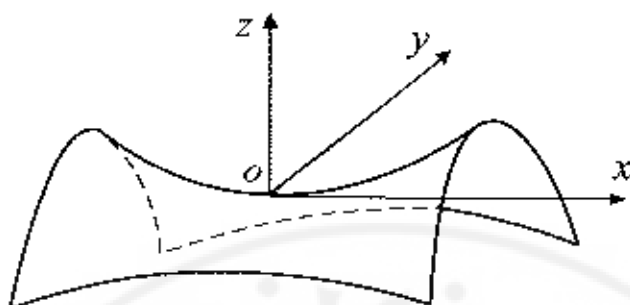
الشكل 1.17

#### ٧ - مجسم القطع المكافئ الزائدي: هو سطح لانهائي، يُمثل بالمعادلة النموذجية

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z \quad ; \quad a > 0, \quad b > 0$$

يمكن التحقق بسهولة أن هذا المجسم متناظر بالنسبة للمحور  $OZ$ . الشكل 1.18. يسمى هذا المجسم أيضاً، مجسم السرج، لأنه يشبه سرج الحصان.





الشكل 1.18

٨- الأسطوانة: هي سطح لانهاثي، يُمثل بالمعادلة النموذجية

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 ; a > 0, b > 0$$

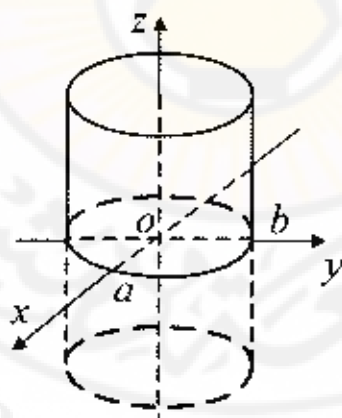
ويمكن التحقق بسهولة، أن هذه الأسطوانة متناظرة بالنسبة إلى المحور  $oz$ ، الشكل 1.19.

إذا كان  $a = b$  في معادلة الاسطوانة، فإن هذه الأسطوانة تسمى أسطوانة دورانية قائمة:

$$x^2 + y^2 = a^2$$

وتُعرف الأسطوانة على أنها السطح الناتج من تحرك مستقيم، يسمى مولد الأسطوانة، بحيث

يبقى موازياً لنفسه ويستند إلى منحنى ثابت، يسمى دليل الأسطوانة.



الشكل 1.19

وقد درسنا في البند 1.3.4 الحالة العامة للسطح الأسطواني.

ملاحظة 1.3: يمكن الانتقال من المعادلات الديكارتية لهذه السطوح إلى المعادلات الكروية والمعادلات الأسطوانية، باستخدام العلاقات بين الإحداثيات الديكارتية والكروية والعلاقات بين الإحداثيات الديكارتية والأسطوانية.

مثال 1.7: أوجد المعادلة الكروية والمعادلة الأسطوانية للكرة

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4z = 0$$

الحل: من العلاقات بين الإحداثيات الديكارتية والكروية، نجد المعادلة الكروية للكرة:

$$r^2 - 4r \cos \theta = 0$$

ومن العلاقات بين الإحداثيات الديكارتية والأسطوانية، نجد المعادلة الأسطوانية للكرة:

$$\rho^2 + z^2 - 4z = 0$$

مثال 1.8: أوجد المعادلة الكروية والأسطوانية للمستوى  $y = 1$  والمستوى  $z = 0$ .

الحل: من العلاقات بين الإحداثيات الديكارتية والكروية، نجد المعادلة الكروية للمستوى  $y = 1$ :

$$r = \frac{1}{\sin \theta \cos \phi}$$

والمعادلة الكروية للمستوى  $z = 0$  هي  $\theta = \frac{\pi}{2}$ .

ومن العلاقات بين الإحداثيات الديكارتية والأسطوانية، نجد المعادلة الأسطوانية للمستوى  $y = 1$ :

$$\rho = \frac{1}{\sin \phi}$$

والمعادلة الأسطوانية للمستوى  $z = 0$  هي  $z = 0$ .

مثال 1.9: بين ماذا تمثل المعادلة  $r = 4 \cos \phi$ .

الحل: من العلاقات بين الإحداثيات الديكارتية والكروية، نجد:

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{4z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 4z$$

وهي معادلة كرة مركزها النقطة  $(0, 0, 2)$  ونصف قطرها  $a = 2$ .

## 1.7 المجموعات النقطية في الفضاء الإقليدي $\mathbb{R}^n$ :

جوار نقطة: لتكن  $S$  مجموعة جزئية من  $\mathbb{R}^n$ ، ولتكن

$$P_0 = (x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}) \in S$$

إن جوار النقطة  $P_0$  هو مجموعة النقاط  $P$ ، المحققة للشرط:

$$\exists \delta > 0: \|P - P_0\| < \delta \quad ; \quad P \in \mathbb{R}^n$$

حيث إن الرمز  $\|P - P_0\|$  يعني المسافة بين النقطتين  $P$  و  $P_0$ .

وإذا كان الشرط السابق محققاً من أجل  $\delta < \|P - P_0\| < \delta$ ، فإن الجوار يسمى جواراً مثقوباً للنقطة  $P_0$ ، عند  $P_0$ ، واختصاراً جواراً مثقوباً للنقطة  $P_0$ ، أي أن  $P_0$  ليست من هذا الجوار.

فمثلاً: جوار النقطة  $P_0 = x_0 \in \mathbb{R}$  هو أي مجال مقترح يحوي هذه النقطة.

وجوار النقطة  $P_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ ، هو أي قرص دائري مركزه هذه النقطة:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2$$

أو هو مجموعة النقاط الواقعة داخل المستطيل:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2: |x - x_0| < \delta_1, |y - y_0| < \delta_2 \quad ; \quad \delta_1, \delta_2 > 0\}$$

نقول عن نقطة  $P_0 \in S$ ، إنها نقطة داخلية للمجموعة  $S$ ، إذا وجد جوار للنقطة  $P_0$ ، تنتمي كل نقاطه إلى المجموعة  $S$ .

نقول عن نقطة  $P_0$ ، إنها نقطة محيطية للمجموعة  $S$ ، إذا حوى كل جوار للنقطة  $P_0$  نقاطاً تنتمي إلى المجموعة  $S$ ، ونقاطاً لا تنتمي إلى المجموعة  $S$ . وتشكل مجموعة النقاط المحيطية لمجموعة  $S$ ، محيط المجموعة.

إن النقطة المحيطية لمجموعة قد تنتمي للمجموعة وقد لا تنتمي لها.

نقول عن نقطة  $P_0$ ، إنها نقطة نهاية (تجمع أو تراكم) لمجموعة  $S$ ، إذا حوى كل جوار منقوب للنقطة  $P_0$ ، نقاطاً من  $S$ .

نقول عن مجموعة  $S$ ، إنها مفتوحة، إذا كانت كل نقطة منها داخلية.

نقول عن مجموعة  $S$ ، إنها مغلقة إذا حوت جميع نقاط النهاية فيها.

ملاحظة 1.4: ليست بالضرورة أن تكون المجموعة إما مفتوحة وإما مغلقة، فالمجال نصف المفتوح في  $\mathbb{R}$ ، هو مجموعة ليست مفتوحة وليست مغلقة في  $\mathbb{R}$ .

نقول عن مجموعة  $S$ ، إنها مترابطة، إذا أمكن وصل أي نقطتين فيها بمنحنى مستمر تنتمي جميع نقاطه لهذه المجموعة.

نسمي المجموعة المفتوحة والمترابطة منطقة مفتوحة، واختصاراً منطقة. ونسمي مجموعة نقاط منطقة ومحيطها منطقة مغلقة.

المنطقة بسيطة الاتصال هي منطقة لا تحوي ثقب.

نقول عن مجموعة  $S$ ، إنها محدودة إذا وُجد قرص يحويها بالكامل. أي إذا وُجد عدد موجب  $M$ ، بحيث يكون

$$\|P\| < M : \forall P \in S$$

قطر مجموعة محدود  $S$ ، هو العدد

$$dia(S) = \sup \{ \|P_1 - P_2\| : P_1, P_2 \in S \}$$

حيث  $\sup$  هو أصغر حد أعلى.

## تمارين الفصل الأول

1. أوجد مركبات متجه  $\vec{a}$  طول  $\sqrt{2}$  ويصنع مع المحور  $ox$  زاوية  $\frac{\pi}{4}$  ومع المحور  $oz$  زاوية  $\frac{3\pi}{4}$ .

2. إذا كانت الزاوية بين متجهين  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  هي  $\frac{\pi}{3}$ ، وكان  $|\vec{a}| = 3$  و  $|\vec{b}| = 4$ ، أوجد:

$$2\vec{a} \cdot \vec{b} \quad , \quad |2\vec{b} - 3\vec{a}| \quad , \quad |\vec{a} + 3\vec{b}| \quad , \quad |\vec{a} \times \vec{b}|$$

3. أوجد متجهاً  $\vec{a}$ ، مرتبط خطياً مع المتجه  $\vec{b} = (2, 1, -1)$ ، يحقق العلاقة  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$ .

4. أوجد مساحة متوازي أضلاع قطراه المتجهين  $\vec{a} = (3, 1, -2)$  و  $\vec{b} = (1, -3, 4)$ .

5. أوجد حجم رباعي وجوه رؤوسه النقاط

$$(0, 0, 0) \quad , \quad (1, 2, 1) \quad , \quad (3, 1, -6) \quad , \quad (2, 7, 4)$$

6. إذا كان  $\vec{a} = (1, 0, -1)$  و  $\vec{b} = (1, -3, 5)$ ، أوجد

$$|\vec{a} \times 2\vec{b}| \quad , \quad (\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b}) \quad , \quad (\vec{a} \times 2\vec{b}) \times (\vec{b} + \vec{a})$$

7. أثبت أن المتجهات  $\vec{a} = (3, -2, 1)$  و  $\vec{b} = (1, -3, 5)$  و  $\vec{c} = (2, 1, -4)$  تشكل أضلاع مثلث قائم الزاوية.

8. أثبت أن قطري المعين متعامدان. وأن إرتفاعات المثلث تتلاقى بنقطة واحدة.

9. أثبت أن قطري متوازي الأضلاع متناصفان.

10. أحسب زوايا مثلث رؤوسه النقاط  $(3, 1, 0)$ ،  $(1, 3, 0)$ ،  $(1, 1, 0)$ ، ثم احسب مساحته.

11. أثبت صحة العلاقات:

$$(\vec{a} - \vec{b}, \vec{b} - \vec{c}, \vec{c} - \vec{a}) = 0$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 + |\vec{a} \cdot \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) = \vec{b}(\vec{a}, \vec{c}, \vec{d}) - \vec{a}(\vec{b}, \vec{c}, \vec{d})$$

$$[(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}] \cdot \vec{d} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d})$$

12. أثبت أنه إذا كان  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ ، فإن

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a}$$

13. إذا كانت  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  متجهات واحديه وتحقق العلاقة  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ ، أوجد قيمة المقدار

$$\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}$$

14. عين الأشكال الهندسية الممثلة للمعادلات:

$$\{xy = 2, z = 1\}, \quad \{\rho^2 = 4 - z^2, \rho = -z\}$$

$$\left\{ \rho = \cos \theta, \varphi = \frac{\pi}{2} \right\}, \quad \left\{ \theta = \frac{\pi}{4}, \varphi = \frac{\pi}{4} \right\}$$

$$\left\{ r \sin \theta = 2, \theta = \frac{\pi}{6} \right\},$$

15. عين قيمة  $\alpha$  حتى يكون المستقيم المار بالنقطتين  $(0,0,1)$ ،  $(0,1,2)$  مماساً للكرة:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4y - 2z + \alpha = 0$$

16. عين قيمة  $\alpha$  حتى يقع المنحني

$$\left\{ x = \cos^3 t, y = \sin^3 t, z = \frac{\sqrt{3}}{4} \cos 2t \right\}$$

على السطح  $x^2 + y^2 - 4z^2 = \alpha$

17. بين نوع السطح الممثل بالمعادلة:

$$x^2 + y^2 - z^2 + 2x - 4y = 0, \quad \theta = \frac{\pi}{6}, \quad z = r \sin \theta$$

$$xy + xz + yz = 0, \quad \rho = 1, \quad \rho^2 = 2z^2$$

$$xy = 2, \quad \varphi = \frac{\pi}{4}, \quad \rho = 2 \cos \varphi$$

18. عين قيمة  $\alpha$  حتى يمس المستوي  $3y - 4z + 5 = 0$  الكرة

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 2z + \alpha = 0, \quad \text{أوجد إحداثيات نقطة التماس.}$$

19. عن قيمة  $\alpha$  حتى يكون المنحني الناتج من تقاطع المستوي  $x + \alpha z - 1 = 0$  مع السطح  $x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0$  قطعاً ناقصاً أو قطعاً زائداً.

20. عيّن قيمة  $\alpha$  حتى يمسس المستوي  $x - 2y - 2z + \alpha = 0$  السطح  $\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{36} + \frac{z^2}{9} = 1$ .

21. عين نوع وعناصر المنحني الناتج من تقاطع السطحين:

$$3x - y + z = 0 \quad \text{و} \quad x^2 + 3y^2 + z^2 - 1 = 0$$

22. أوجد معادلة المستقيم الناتج من تقاطع المستوي  $2x - 12y - z = -16$  مع السطح  $x^2 - 4y^2 = 2z$ .

23. أوجد معادلات المستويات التي تقطع مجسم القطع الناقص  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 1$  بدوائر. عين معادلات هذه الدوائر.

24. برهن أن أي نقطة من المستقيمت  $x + 1 = \alpha y = -(\alpha + 1)z$  تقع على السطح  $xy + xz + yz + y + z = 0$ .

25. أوجد المعادلة الديكارتية للسطح المعطى وسيطياً بالعلاقات:

$$z = \frac{c}{u^2 - v^2}, \quad y = \frac{buv}{u^2 - v^2}, \quad x = \frac{a(u^2 + v^2)}{u^2 - v^2}$$

26. أثبت أن المعادلات الوسيطة التالية تمثل مجسم القطع الناقص

$$x = a \cos u \cos v, \quad y = b \sin u \cos v, \quad z = c \sin v.$$

27. أثبت أن المعادلات الوسيطة التالية تمثل القطع الزائد وحيد الفرع

$$z = c \frac{uv - 1}{u + v}, \quad y = b \frac{u - v}{u + v}, \quad x = a \frac{uv + 1}{u + v}$$

28. أثبت أن المعادلات الوسيطة التالية تمثل مجسم القطع الزائد ثنائي الفرع

$$x = a \cos u \tan v, \quad y = b \sin u \tan v, \quad z = \frac{c}{\cos v}$$

29. أثبت أن المعادلات التالية، تمثل مخروط دوراني قائم، محوره  $OZ$  ورأسه  $O$  ونصف زاوية

رأسه  $\alpha$ :

$$x = u \cos \alpha \tan v, \quad y = u \tan \alpha \sin u, \quad z = u$$

30. أثبت أن المعادلات التالية تمثل مجسم قطع مكافئ زائدي

$$x = a(u+v), \quad y = b(u-v), \quad z = 2uv$$

31. أوجد معادلة المستوي المار بالنقاط  $(1,1,0)$ ,  $(3,0,2)$ ,  $(1,-2,\alpha)$ , ثم عين قيمة  $\alpha$  حتى يمر المستوي بنقطة الأصل.

32. أوجد إحداثيات مسقط نقطة  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  على المستوي

$$px + qy + rz + h = 0$$

33. عين قيمتي  $\alpha$  و  $\beta$  حتى يقع المستقيم

$$\{2x + y - z + 1 = 0, \quad x - \beta y + 3z + \alpha = 0\}$$

في المستوي  $4x + 5y - z + 7 = 0$ .



## الفصل الثاني

### الحساب التفاضلي للدوال بمتغيرين فأكثر

- 2.1 الدالة وساحة تعريفها
  - 2.2 نهاية دالة
  - 2.3 الاستمرار
  - 2.4 المشتقات الجزئية
  - 2.5 مفهوم الدالة الفضولة
  - 2.6 مشتقات الدوال المركبة وتفاضلاتها - قاعدة السلسلة
  - 2.7 التفاضل التام
  - 2.8 المستوي المماس والمستقيم التانم لسطح فراغي
  - 2.9 المشتقات الجزئية من المرتبة الثانية ومن مراتب عليا
  - 2.10 التفاضل التام من مراتب عليا
  - 2.11 الدوال الضمنية
  - 2.12 نشر تايلور للدوال بمتغيرين القيم القصوى (النهايات الحدية)
  - 2.13 القيم القصوى (النهايات الحدية)
- تمارين الفصل الثاني



## الحساب التفاضلي للدوال بمتغيرين فأكثر

### 2.1 الدالة ومساحة تعريفها

نصادف في المسائل العملية، علاقات بين قيم متغيرة، بحيث أن قيمة أحدها متعلقة بقيم بقية المتغيرات. فمثلاً، درجة حرارة جسم في لحظة معينة  $t$ ، يمكن أن تتغير من نقطة لأخرى. وكل نقطة من الجسم تُعرّف بثلاثة إحداثيات  $x$  و  $y$  و  $z$ ، لذا فإن درجة حرارة الجسم متعلقة بثلاثة متغيرات  $x$  و  $y$  و  $z$ ، وإذا أضفنا في الحسابان علاقة درجة الحرارة بالزمن المُقاسة به  $t$ ، تكون درجة الحرارة متعلقة بأربعة متغيرات  $x$  و  $y$  و  $z$  و  $t$ . وكذلك، فإن مساحة المستطيل متعلقة بالمتغيرين  $x$  و  $y$ ، حيث إن  $x$  و  $y$  أبعاد المستطيل. إن هذا يقودنا إلى تعريف الدالة بعدة متغيرات.

تعريف 2.1: لنكن  $X$  و  $Y$  و  $Z$  مجموعات عددية. نعرّف الدالة بمتغيرين، بأنها مجموعة  $f$  من الثلاثيات المرتبة  $(x, y, z)$ ، بحيث  $x \in X$  و  $y \in Y$  و  $z \in Z$ ، وكل زوج مرتب من الأعداد  $(x, y)$  يدخل في ثلاثية واحدة وواحدة فقط من هذه المجموعة، وكل عدد  $z$  يدخل على الأقل في ثلاثية واحدة.

ونقول عندها إن الزوج المرتب  $(x, y)$  يقابل العدد  $z$ ، ونكتب  $f(x, y) = z$ . ونسمي  $z$  قيمة الدالة  $f$  عند النقطة  $(x, y)$ . ونسمي  $x$  و  $y$  المتغيرين المستقلين، والمجموعة  $D = \{(x, y)\}$  مساحة تعريف الدالة  $f$ ، والمجموعة  $Z$  مجموعة قيم الدالة أو المدى.

يُمثّل الزوج المرتب  $(x, y)$  بنقطة وحيدة  $P$  في المستوي الديكارتي  $oxy$ ، وبالعكس، كل نقطة  $P$  من المستوي الديكارتي  $oxy$  تُقابل زوج مرتب وحيد  $(x, y)$ . لذا، فإن الدالة بمتغيرين تُعد دالة في النقطة  $P$ ، وبدلاً من الرمز  $f(x, y) = z$  نكتب  $f(P) = z$ ، وتكون مساحة تعريف هذه الدالة هي مجموعة النقاط  $\{P\}$  من المستوي الديكارتي  $oxy$ . وعموماً تكون مساحة تعريف الدالة بمتغيرين المستوي الديكارتي  $\mathbb{R}^2$  أو جزء منه.

فمثلاً، مساحة تعريف الدالة  $z = x^2 + y^2$  هي كل المستوي  $\mathbb{R}^2$ ، ومجموعة قيمها  $Z = [0; \infty[$ .

وساحة تعريف الدالة  $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$  هي القرص الدائري  $x^2 + y^2 \leq 4$ ،  
ومجموعة قيمها  $Z = [0; 2]$ .

نعلم من الهندسة التحليلية، أن مجموعة الثلاثيات  $(x, y, z)$  تمثل الفضاء الديكارتي ثلاثي الأبعاد  $xyz$ . أي أن كل ثلاثية  $(x, y, z)$  تُقابل نقطة من الفضاء الديكارتي، وبالعكس. وإذا أخذنا بدلاً من  $\{P\}$  مجموعة نقاط في المستوى، مجموعة نقاط في الفضاء، فإنه يمكن بأسلوب مماثل، تعريف الدالة بثلاثة متغيرات  $u = f(x, y, z)$  أو  $u = f(P)$ ، وتكون مساحة تعريفها الفضاء الديكارتي  $\mathbb{R}^3$  أو جزء منه.

فمثلاً، مساحة تعريف الدالة  $u = \ln(xyz)$  هي أجزاء الفضاء التي يكون من أجلها  $xyz > 0$ ، ومجموعة قيمها  $]-\infty; \infty[$ .

وساحة تعريف الدالة  $u = x^2 + y^2 + z^2$  هي كل الفضاء الديكارتي  $\mathbb{R}^3$ ، ومجموعة قيمها  $[0; \infty[$ .

ويمكن بأسلوب مماثل، تعريف الدالة بأربعة متغيرات فأكثر، غير أن مجموعة تعريف هذه الدوال، لا يمكن التعبير عنها هندسياً.

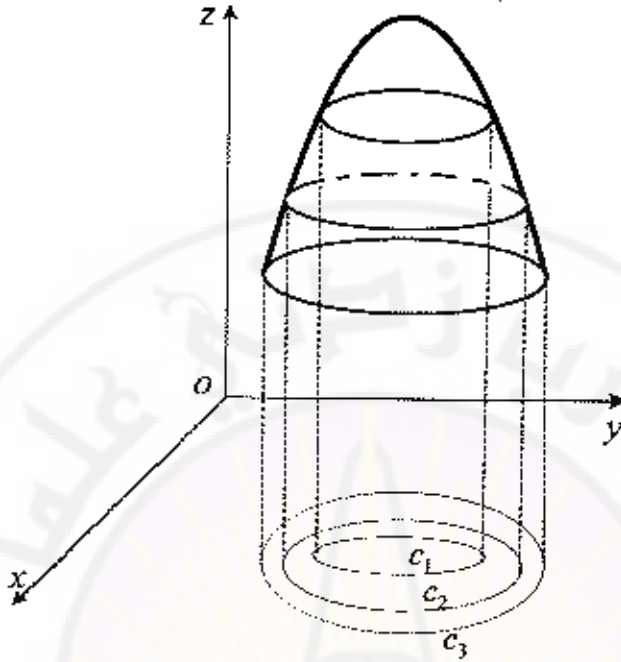
نعلم أن الدالة بمتغير واحد  $y = f(x)$  تمثل هندسياً بمنحنى في المستوى  $oxy$ ، بينما الدالة بمتغيرين  $z = f(x, y)$  تمثل بسطح في الفضاء  $xyz$ ، ولا يمكن تمثيل الدوال بثلاثة متغيرات فأكثر هندسياً.

ولما كان رسم بيان الدالة بمتغيرين  $z = f(x, y)$  صعب في الحالة العامة، فإننا نرسم تقاطع هذا البيان (سطح في الفضاء) مع المستوي  $z = c$ ، حيث  $c$  أي عدد ثابت، أي التقاطع مع مستويات توازي المستوي  $oxy$ . نسمي مجموعة نقاط المستوي  $oxy$ ، التي تُقابل قيمة وحيدة فقط  $c$ ، خط سوية. واضح أنه كلما تغيرت  $c$  نحصل على خط سوية جديد.

بأخذ جميع الأعداد  $c_1, c_2, \dots, c_n$  الممثلة لمتالية حسابية أساسها  $h$ ، نحصل على مجموعة خطوط السوية، التي تُعطي تصوراً لشكل السطح  $z = f(x, y)$ . الشكل 2.1.

إن مصطلح خطوط السوية، يُصادف في الخرائط الجغرافية، حيث يمثل ارتفاع نقاط الكرة

الأرضية عن سطح البحر (خط السوية الثابت).



الشكل 2.1

ملاحظة 2.1: نعطي في هذا الفصل، المفاهيم والمبرهنات من أجل الدوال بمتغيرين، ولن نذكر التعميم من أجل الدوال بثلاثة متغيرات فأكثر، إلا عندما يكون ذلك ضرورياً.

## 2.2 نهاية دالة

نرمز لمتتالية النقاط  $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), \dots, P_n(x_n, y_n), \dots$  اختصاراً، بالرمز  $\{P_n(x_n, y_n)\}$ .

تعريف 2.2: نقول عن متتالية النقاط  $\{P_n(x_n, y_n)\}$ ، إنها متقاربة من النقطة  $P_0(x_0, y_0)$ ، إذا وجد عدد  $N$  مقابل أي عدد  $\varepsilon$ ، بحيث أنه من أجل  $n > N$  يتحقق الشرط  $\|P_n - P_0\| < \varepsilon$ . نسمي عندها  $P_0(x_0, y_0)$  نهاية المتتالية  $\{P_n(x_n, y_n)\}$ . ونرمز لذلك بـ  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P_0$ .

واضح أن هذا التعريف هو تعميم لتعريف تقارب متتالية عددية. لأنه إذا كانت  $\{P_n\}$  متتالية

من نقاط المحاور الحقيقي، فإنها تكافئ المتتالية العددية  $\{x_n\}$ ، والمترابحة  $\|P_n - P_0\| < \varepsilon$  تكافئ المترابحة  $|x_n - x_0| < \varepsilon$ .

نُعطى، الآن، تعريف نهاية دالة بمتغيرين.

لتكن  $z = f(x, y)$  دالة معرفة على الساحة  $D$ ، ولتكن  $P_0(x_0, y_0)$  نقطة نهاية لـ  $D$ .  
تعريف 2.3: نقول عن العدد  $A$ ، إنه نهاية الدالة  $z = f(x, y)$ ، عندما تسعى النقطة  $P(x, y)$  إلى النقطة  $P_0(x_0, y_0)$ ، ونكتب  $\lim_{P \rightarrow P_0} f(x, y) = A$ ، إذا كان من أجل أي متتالية  $\{P_n(x_n, y_n)\}$  من  $D$ ، بحيث  $P_n \neq P_0$ ،  $\forall n$ ، متقاربة من  $P_0(x_0, y_0)$ ، تكون متتالية القيم  $\{f(P_n)\}$  متقاربة من العدد  $A$ .

فمثلاً الدالة  $f(x, y) = x^2 + y^2$  معرفة على  $\mathbb{R}^2$ . نوجد نهايتها عند النقطة  $P_0(1, 3)$ .

مهما تكن المتتالية  $\{P_n(x_n, y_n)\}$  المتقاربة من  $P_0(1, 3)$ ، فإن

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n^2 + y_n^2) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^2 + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n^2 = 1^2 + 3^2 = 10 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (x^2 + y^2) = 10$$

مثال 2.1: ليس للدالة  $f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$  نهاية عند النقطة  $O$ .

الحل: الدالة معرفة في المستوي باستثناء نقاط المستقيم  $x + y = 0$ . نختار متتاليتين من النقاط

تسعى كل منها إلى  $O$ :  $\left\{P_n\left(\frac{1}{n}, 0\right)\right\}$  و  $\left\{P'_n\left(0, \frac{1}{n}\right)\right\}$ . وعليه، فإن

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(P_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} - 0}{\frac{1}{n} + 0} = 1 \quad , \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(P'_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{0 - \frac{1}{n}}{0 + \frac{1}{n}} = -1$$

أي ليس للدالة نهاية عند النقطة  $O$ ، لأن قيمة النهاية اختلفت باختلاف المتتالية المتقاربة من  $O$ .

يمكن إعطاء تعريف نهاية دالة بأسلوب آخر:

تعريف 2.4: نقول عن العدد  $A$ ، إنه نهاية الدالة  $z = f(x, y)$ ، المعرفة على الساحة  $D$ ،

عندما تسعى النقطة  $P(x, y)$  إلى النقطة  $P_0(x_0, y_0)$ ، ونكتب  $\lim_{P \rightarrow P_0} f(x, y) = A$ ، إذا

تحقق الشرط:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : 0 < (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2 \Rightarrow |f(x, y) - A| < \varepsilon$$

أي أنه يمكن جعل المسافة بين العددين  $A$  و  $f(x, y)$  صغيرة بقدر ما نشاء، وذلك يجعل المسافة بين النقطتين  $P$  و  $P_0$  صغيرة بقدر كافٍ، ولكن ليس صفرًا.

ملاحظة 2.2: إن قولنا، إن  $x$  تسعى إلى  $x_0$ ، في الدوال بمتغير واحد، تعني وجود طريقتين لسعي النقطة  $x$  إلى  $x_0$ ، وهما من اليمين ( $x \rightarrow x_0^+$ ) ومن اليسار ( $x \rightarrow x_0^-$ ). بينما في الدوال بمتغيرين فأكثر، يوجد عدة طرق لسعي النقطة  $P$  إلى  $P_0$ ، وتكون النهاية موجودة بغض النظر عن الطريق المسلك لسعي  $P$  إلى  $P_0$ ، وإذا كانت النقطة  $P_0$  من محيط ساحة تعريف الدالة، فإن سعي  $P$  إلى  $P_0$  يجب أن يتم على طرق تقع كلها داخل هذه الساحة.

وعليه، فإذا تغيرت قيمة النهاية عندما يتغير الطريق الذي تسلكه النقطة  $P$  في سعيها إلى النقطة  $P_0$ ، فإن نهاية الدالة غير موجودة عند النقطة  $P_0$ ، أي ليس للدالة نهاية عند النقطة  $P_0$ . مثال 2.2: إذا كان

$$f(x, y) = (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^4 + y^2} \quad \text{و} \quad g(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

أثبت أن  $\lim_{P \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$ ، وأنه ليس للدالة  $g$  نهاية عند النقطة  $(0,0)$ .

الحل: نعوض في التعريف 2.2 قيم الدالة  $f$  والنقطة  $P_0$  والنهية:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : 0 < x^2 + y^2 < \delta^2 \Rightarrow \left| (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^4 + y^2} - 0 \right| < \varepsilon$$

أي أنه إذا اخترنا  $\delta = \sqrt{\varepsilon}$ ، فإن الشرط السابق يكون محققاً، أي أن  $\lim_{P \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$ . من أجل الدالة  $g$ ، نجعل النقطة  $P(x, y)$  تتحرك في سعيها إلى النقطة  $O$ ، على المستقيم  $y = x$ :

$$\lim_{P \rightarrow O} g(x, y) = \lim_{(x,0) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{x^2 + x^2} = \frac{1}{2}$$

وبالمثل، نجعل النقطة  $P(x, y)$  تتحرك في سعيها إلى النقطة  $O$ ، على المستقيم  $y = -x$ :

$$\lim_{P \rightarrow O} g(x, y) = \lim_{(x,0) \rightarrow (0,0)} \frac{-x^2}{x^2 + x^2} = -\frac{1}{2}$$

وعليه، فإنه ليس للدالة  $g$  نهاية عند النقطة  $(0,0)$ ، لتغير قيمة النهاية عندما يتغير الطريق

الذي تسلكه النقطة  $P$  في سعيها النقطة  $O$ .

### خواص النهايات

تتمتع نهايات الدوال بمتغيرين فأكثر بالخواص نفسها التي تتمتع بها نهايات الدوال بمتغير واحد، مع مراعاة الفروق بينها. فنهاية مجموع عدة دوال تساوي مجموع نهاياتها، ونهاية جداء عدة دوال تساوي جداء نهاياتها ونهاية حاصل قسمة دالتين تساوي حاصل قسمة نهايتيهما، شرط عدم انعدام المقام، مع مراعاة حالات عدم التعيين.

تعريف 2.5: نسمي الدالة  $z = f(x, y)$  لامتناه في الصغر عند النقطة  $P_0$  (أو عندما تسعى النقطة  $P$  إلى النقطة  $P_0$ )، إذا كان  $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = 0$ .

وإذا كان للدالة  $z = f(x, y)$  نهاية  $A$  عند النقطة  $P_0$ ، فإن  $\alpha(P) = f(P) - A$  لامتناه في الصغر عند النقطة  $P_0$ ، لأن

$$\lim_{P \rightarrow P_0} \alpha(P) = \lim_{P \rightarrow P_0} [f(P) - A] = 0$$

وهكذا، إذا كان  $A$  نهاية الدالة  $z = f(x, y)$  عند النقطة  $P_0$ ، فإن

$$\lim_{P \rightarrow P_0} \alpha(P) = 0 \text{، حيث } f(P) = A + \alpha(P)$$

ونقول إنه في جوار النقطة  $P_0$  تختلف الدالة  $z = f(x, y)$  عن  $A$  بمقدار لامتناه في الصغر. تُقارن الدوال بمتغيرين اللامتناهية في الصغر، تماماً كما الدوال بمتغير واحد اللامتناهية في الصغر. ونرمز بـ  $o(\beta)$  للدالة اللامتناهية في الصغر عند النقطة  $P_0$  من مرتبة أعلى في الصغر للدالة  $\beta$  اللامتناهية في الصغر عند النقطة  $P_0$ ، ويكون عندها

$$\lim_{P \rightarrow P_0} \frac{o(\beta)}{\beta} = 0$$

### 2.3 الاستمرار

نعلم أنه إذا كان التغير البسيط في المتغير المستقل  $x$ ، في جوار النقطة  $x_0$ ، يؤدي إلى تغير بسيط في الدالة  $y$ ، فإن هذا يعني أن الدالة لا مستمرة عند النقطة  $x_0$ . أما إذا كان التغير البسيط في المتغير المستقل  $x$  يؤدي إلى تغير كبير في الدالة  $y$ ، فإن الدالة لا غير مستمرة عند  $x_0$ .



تعريف 2.6: نقول إن الدالة  $z = f(x, y)$  مستمرة عند النقطة  $P_0(x_0, y_0)$ ، إذا تحققت الشروط:

1 - الدالة  $f(x, y)$  معرفة على جوارٍ للنقطة  $P_0$ .

$$2 - \lim_{P \rightarrow P_0} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

إذا اختلف أحد هذين الشرطين، فإن الدالة  $f$  غير مستمرة عند النقطة  $P_0$ .  
فمثلاً، الدالة

$$f(x, y) = \begin{cases} x - y & ; \quad x + y \neq 0 \\ x + y & ; \quad x + y = 0 \end{cases}$$

غير مستمرة عند النقطة  $(0, 0)$ ، لأن النهاية  $\lim_{P \rightarrow 0} f(x, y)$  غير موجودة.  
والدالة

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & ; \quad x \neq 1 \vee y \neq 3 \\ 0 & ; \quad x = 1 \wedge y = 3 \end{cases}$$

غير مستمرة عند النقطة  $P_0(1, 3)$ ، لأن

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(x, y) = 10 \neq f(1, 3) = 0$$

نُعطي، الآن، تعريفاً آخر للاستمرار:

تعريف 2.7: نقول إن الدالة  $z = f(x, y)$  مستمرة عند النقطة  $P_0(x_0, y_0)$ ، إذا تحقق الشرط:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : (\forall P \in D, \rho(P, P_0) < \delta) \Rightarrow |f(P) - f(P_0)| < \varepsilon$$

تماماً، كما في الدوال بمتغير واحد، باستخدام هذا التعريف ومبرهنات النهايات، يمكن إثبات أن العمليات الحسابية على الدوال المستمرة وتركيب الدوال المستمرة هو دالة مستمرة.

ويمكن إعطاء تعريفاً آخر للاستمرار، باستخدام مفهوم التغير:

نسمي الدالة  $\Delta z = f(P) - f(P_0)$  التغير الكلي للدالة  $z = f(P)$  عند النقطة  $P_0$ ،

حيث  $P_0(x_0, y_0)$ ،  $P(x, y) \in D(f)$ ، وإذا كان  $\Delta x = x - x_0$  و  $\Delta y = y - y_0$ ،

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

تعريف 2.8: نقول عن الدالة  $z = f(P)$  إنها مستمرة عند النقطة  $P_0$ ، إذا كان تغيرها الكلي عند هذه النقطة هو لا متناه في الصغر عندما تسعى  $P$  إلى  $P_0$ ، أي

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \Delta z = 0 \quad \text{أو} \quad \lim_{P \rightarrow P_0} \Delta z = \lim_{P \rightarrow P_0} [f(P) - f(P_0)] = 0$$

وهذا الشرط يكافئ الشرط  $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = f(P_0)$  في التعريف 2.7.

مثال 2.3: الدالة  $z = x^2 + y^2$  مستمرة في أي نقطة  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

الحل: إن التغير الكلي لهذه الدالة عند النقطة  $P$ :

$$\Delta z = (x + \Delta x)^2 + (y + \Delta y)^2 - x^2 - y^2 = 2x\Delta x + 2y\Delta y + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$$

واضح أن  $\Delta z \rightarrow 0$ ، عندما  $\Delta x \rightarrow 0$  و  $\Delta y \rightarrow 0$ ، أي أن الدالة مستمرة عند النقطة  $P$ .

إذا كانت الدالة  $f$  مستمرة عند كل نقطة من نقاط مساحة  $D$ ، فإننا نقول إن الدالة  $f$  مستمرة

على المساحة  $D$ ، ونكتب  $f \in cl(D)$ .

فمثلاً، الدالة  $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$  معرفة ومستمرة على القرص الدائري  $x^2 + y^2 \leq 4$ ،

لأن دالة الجذر التربيعي معرفة ومستمرة على مساحة تعريفها.

### بخواص الدوال المستمرة

تتمتع الدوال المستمرة بعدة متغيرات، بخواص الدوال المستمرة بمتغير واحد نفسها، مع مراعاة الفروق بينهما:

- مجموع دوال مستمرة هو دالة مستمرة، وكذلك حاصل جداء دوال مستمرة هو دالة مستمرة، وحاصل قسمة دالتين مستمرتين هو دالة مستمرة، شرط عدم انعدام المقام.

-- إذا كانت الدالة  $z = f(x, y)$  مستمرة عند النقطة  $P_0(x_0, y_0)$  وكانت الدالة

$h = \varphi(t)$  مستمرة عند النقطة  $t_0 = f(x_0, y_0)$ ، فإن الدالة المركبة  $\varphi[f(x, y)]$  مستمرة عند النقطة  $P_0$ .

-- إذا كانت الدالة  $z = f(x, y)$  مستمرة عند النقطة  $P_0$ ، فإن الدالة  $\varphi(x) = f(x, y_0)$

مستمرة عند النقطة  $x_0$ ، والدالة  $\varphi(y) = f(x_0, y)$  مستمرة عند النقطة  $y_0$ .  
 - إذا كانت الدالة  $z = f(x, y)$  مستمرة على ساحة مغلقة، فإنها تكون محدودة عليها، أي يوجد عدد موجب  $K$ ، بحيث

$$|f(P)| \leq K \quad : \quad \forall P \in D$$

- إذا كانت الدالة  $z = f(x, y)$  مستمرة على ساحة مغلقة، فإنها تبلغ في هذه الساحة قيمتها العظمى والصغرى.

ويستج من ذلك، أنه إذا كان  $f(P_1) < 0$  و  $f(P_2) > 0$ ، فإنه توجد نقطة  $P_0 \in D$ ، بحيث يكون  $f(P_0) = 0$ .

- إذا كانت الدالة  $z = f(x, y)$  مستمرة على ساحة مغلقة  $D$ ، فإنها تكون مستمرة بانتظام عليها، أي يتحقق الشرط:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : (\forall P_1, P_2 \in D, \|P_1 - P_2\| < \delta) \Rightarrow |f(P_1) - f(P_2)| < \varepsilon$$

مثال 2.4: ادرس استمرار الدالة  $z = \ln(x^2 + y^2 - 2)$

الحل: لما كانت الدالة  $\varphi(t) = \ln t$  مستمرة على ساحة تعريفها، أي من أجل  $t > 0$ ، والدالة  $z = x^2 + y^2 - 2$  مستمرة على  $\mathbb{R}^2$ ، فإن الدالة  $\varphi[f(x, y)] = \ln(x^2 + y^2 - 2)$  مستمرة على الساحة  $x^2 + y^2 > 2$ .

## 2.4 المشتقات الجزئية

لتكن  $z = f(x, y)$  دالة معرفة على الساحة  $D$ ، ولتكن  $P(x, y)$  نقطة داخلية من  $D$ . نثبت  $y$ ، أي نفرض  $y = c$ ، ونعطي المتغير  $x$  تغيراً  $\Delta x$ ، أي أن النقطة  $P(x, y)$  تنتقل إلى النقطة  $P_1(x + \Delta x, y)$  في المستوي  $y = c$ ، بحيث تبقى النقطة  $P_1(x + \Delta x, y)$  في  $D$ . عندئذ، يكون التغير للدالة  $f$  هو  $\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$ ، والذي يسمى التغير الجزئي للدالة  $f$ ، بالنسبة إلى المتغير  $x$ .

ونعرف، بأسلوب مماثل، التغير الجزئي للدالة  $f$ ، بالنسبة إلى المتغير  $y$ :

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

فإذا وُجِدَت النهاية  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}$  (أو  $\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}$ )، فإننا نسميها المشتق الجزئي من المرتبة الأولى للدالة  $z = f(x, y)$  بالنسبة إلى المتغير  $x$  (أو بالنسبة إلى المتغير  $y$ ). ونرمز بالرمز:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = z'_x = f'_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = z'_y = f'_y = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

وعليه، لإيجاد المشتق  $f'_x$ ، نفرض  $y$  ثابتاً في الدالة  $f(x, y)$ ، ونشتقها بالنسبة إلى المتغير  $x$  اشتقاقاً عادياً. ولإيجاد المشتق  $f'_y$ ، نفرض  $x$  ثابتاً في الدالة  $f(x, y)$ ، ونشتقها بالنسبة إلى المتغير  $y$  اشتقاقاً عادياً.

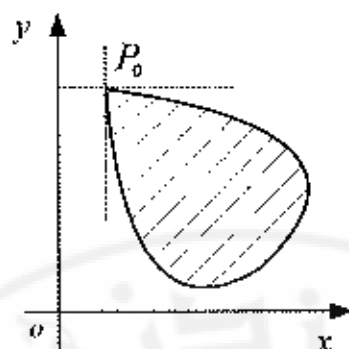
مثال 2.5: أوجد المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى للدالة  $z = x^y$ .  
الحل:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = z'_y = (\ln x) x^y \quad \text{و} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = z'_x = y x^{y-1}$$

ملاحظة 2.3: عند إعطاء تعريف المشتق الجزئي عند النقطة  $P$ ، ذكرنا أن النقطة  $P$  داخلية في  $D$ . أما إذا كانت  $P$  نقطة محيطية لـ  $D$ ، فإن التغير الجزئي  $\Delta_x z$  (أو  $\Delta_y z$ ) يمكن أن يكون غير موجود، لأن النقطة  $P_1(x + \Delta x, y)$  (أو  $P_2(x, y + \Delta y)$ ) يمكن ألا تنتمي إلى الساحة  $D$ ، أيًا يكن  $\Delta x \neq 0$  (أو  $\Delta y \neq 0$ ). يُعطي الشكل 2.2، مثال على نقطة كهذه. في هذه الحالة، إذا وجد المشتق الجزئي  $z'_y$  في نقطة داخلية  $P$  من  $D$ ، وُجِدَت النهاية  $\lim_{P \rightarrow P_0} z'_x(P)$ ، فإن

$$z'_y(P_0) = \lim_{P \rightarrow P_0} z'_x(P)$$

وكذلك نعرّف المشتق  $z'_y(P_0)$ .



الشكل 2.2

## 2.5 مفهوم الدالة الفضولة

نعرف التغير الكلي للدالة  $z = f(P)$  عند النقطة  $P(x, y)$ ، عندما تتغير  $x$  بالمقدار  $\Delta x$  وتتغير  $y$  بالمقدار  $\Delta y$ ، بأنه الدالة

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

تعريف 2.9: نقول عن الدالة  $z = f(P)$  إنها فضولة عند النقطة  $P(x, y)$ ، إذا أمكن التعبير عن تغيرها الكلي عند هذه النقطة بالعلاقة:

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\Delta y \quad (2.1)$$

حيث  $A$  و  $B$  أعداد غير متعلقة بـ  $\Delta x$  و  $\Delta y$ ، و  $\alpha(\Delta x, \Delta y)$  و  $\beta(\Delta x, \Delta y)$  لامتناهيان في الصغر، عندما  $\Delta x \rightarrow 0$  و  $\Delta y \rightarrow 0$ .

ملاحظة 2.4: نعلم أنه إذا كانت الدالة بمتغير واحد  $f(x)$  فضولة عند نقطة، فإنها تكون مستمرة عندها، ويكون كان المشتق  $f'(x)$  موجوداً عندها، ومن وجود المشتق  $f'(x)$  عند نقطة ينتج أن هذه الدالة فضولة عند هذه النقطة. نبين فيما يلي العلاقة بين هذه المفاهيم بالنسبة إلى الدوال بمتغيرين  $f(x, y)$ .

### 2.5.1 الشروط اللازمة كي تكون الدالة فضولة

مبرهنة 2.1: الدالة الفضولة عند نقطة، تكون مستمرة عندها.

الإثبات: إذا كانت الدالة  $z = f(P)$  فضولة عند النقطة  $P(x, y)$ ، فإنه من العلاقة (2.1)، نجد  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0} \Delta z = 0$ ، وهذا يعني أن الدالة  $z = f(P)$  مستمرة عند النقطة  $P$ .

مبرهنة 2.2: إذا كانت الدالة  $z = f(P)$  فضولة عند النقطة  $P(x, y)$ ، فإن المشتقان الجزئيان من المرتبة الأولى  $f'_x(x, y)$  و  $f'_y(x, y)$  موجودان ويكون  $f'_x(x, y) = A$  و  $f'_y(x, y) = B$ .

الإثبات: لما كانت الدالة  $z = f(P)$  فضولة عند النقطة  $P(x, y)$ ، فإن العلاقة (2.1) محققة. بفرض  $\Delta y = 0$ ، فإن  $\Delta z = A\Delta x + \alpha(\Delta x, 0)\Delta x$ ، حيث  $\alpha(\Delta x, 0)$  لا يتناو في الصفر، عندما  $\Delta x \rightarrow 0$ . نقسم الطرفين على  $\Delta x$ ، ونجعل  $\Delta x \rightarrow 0$ ، فنجد:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [A + \alpha(\Delta x, 0)]$$

وعليه، فإن المشتق الجزئي للدالة  $f$  بالنسبة إلى  $x$  عند النقطة  $P(x, y)$  موجود ويكون  $f'_x(x, y) = A$ ، ونجد، بالأسلوب ذاته،  $f'_y(x, y) = B$ .

ملاحظة 2.5: إن عكس المبرهنتين 2.1 و 2.2 غير صحيح بالضرورة، أي أنه من استمرار الدالة  $z = f(P)$  عند النقطة  $P(x, y)$ ، أو من وجود المشتقان الجزئيان من المرتبة الأولى  $f'_x$  و  $f'_y$  عند هذه النقطة، لا ينتج بالضرورة أن هذه الدالة فضولة عند النقطة  $P$ .

فمثلاً، الدالة  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$  مستمرة عند النقطة  $O(0, 0)$ ، غير أنه ليس لها مشتقان جزئيان من المرتبة الأولى عند  $O$ ، لأن

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$$

وهذه النهاية غير موجودة، أي أن  $f'_x(0, 0)$  غير موجود. ونجد، بالأسلوب ذاته، أن  $f'_y(0, 0)$  غير موجود. وعليه، فإن هذه الدالة غير فضولة عند  $O$ .

مثال 2.6: أثبت أن للدالة

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & : x \neq 0 \wedge y \neq 0 \\ 0 & : x = 0 \vee y = 0 \end{cases}$$

مشتقان جزئيان من المرتبة الأولى عند النقطة  $(0,0)$  . غير أن هذه الدالة غير مستمرة عندها .  
 الحل : لما كان  $f(x,0)=0$  و  $f(0,y)=0$  ، فإن  $f'_x(0,0)=0$  و  $f'_y(0,0)=0$  .  
 إذا كان  $x=y$  ، فإن  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)=1$  ، بينما  $f(0,0)=0$  ، وهذا يعني أن هذه الدالة غير مستمرة عند النقطة  $(0,0)$  .

مثال 2.7: أثبت أن الدالة  $f(x,y)=\sqrt{|x| \cdot |y|}$  مستمرة عند النقطة  $(0,0)$  ، ثم أوجد المشتقان الجزئيان من المرتبة الأولى عند  $(0,0)$  ، غير أن هذه الدالة غير فضولة عندها .  
 الحل : واضح أن هذه الدالة مستمرة في كل المستوي ، لأنها جداء دالتين مستمرتين في كل المستوي . كما لها مشتقان جزئيان من المرتبة الأولى عند  $(0,0)$  :

$$f'_y(0,0)=\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\sqrt{|\Delta y| \cdot 0} - 0}{\Delta y} = 0 \quad \text{و} \quad f'_x(0,0)=\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{|\Delta x| \cdot 0} - 0}{\Delta x} = 0$$

غير أن هذه الدالة غير فضولة عند النقطة  $(0,0)$  ، لأنه لو كانت الدالة فضولة عند النقطة  $(0,0)$  ، فإنه ينتج من العلاقة (2.1) ومن المبرهنة 2.2 ، أن

$$\Delta f = 0 \cdot |\Delta x| + 0 \cdot |\Delta y| + \alpha(\Delta x, \Delta y) \cdot \Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y) \cdot \Delta y$$

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \alpha(\Delta x, \Delta y) = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \beta(\Delta x, \Delta y) = 0$$

ومن العلاقة

$$\alpha(\Delta x, \Delta y) \cdot \Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y) \cdot \Delta y = \left( \frac{\alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y}{\rho} \right) \rho = \delta \rho$$

حيث إن  $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$  ، نجد أن  $\lim_{\rho \rightarrow 0} \delta = 0$  ،

$$\delta = \frac{\sqrt{|\Delta x| \cdot |\Delta y|}}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{فإن} \quad \Delta x = \Delta y$$

أي أن  $\delta$  ليست دالة لامتناهية في الصفر ، عندما  $\rho \rightarrow 0$  .

وعليه ، فإن الدالة  $f$  مستمرة عند النقطة  $(0,0)$  ، ولها مشتقان جزئيان من المرتبة الأولى عند  $(0,0)$  ، ولكنها ليست فضولة عندها .

## 2.5.2 الشروط الكافية كي تكون الدالة فضولة

مبرهنة 2.3: إذا كان للدالة  $z = f(P)$  مشتقات جزئية من المرتبة الأولى في جوارٍ للنقطة  $P$ ، وكانت هذه المشتقات مستمرة في هذا الجوار، فإن هذه الدالة فضولة عند النقطة  $P$ .

الإثبات: نعطي  $x$  و  $y$  تغييرين صغيرين  $\Delta x$  و  $\Delta y$ ، بالترتيب، بحيث تبقى النقطة  $P_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$  داخل الجوار للنقطة  $P$ . ويكون التغير الكلي

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) =$$

$$= [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)] + [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)] \quad (2.2)$$

يمكن التعبير عن المقدار  $[f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)]$  كتغير جزئي للدالة  $f(x, y + \Delta y)$ ، بالنسبة إلى المتغير  $x$ ، عندما يكون المقدار  $y + \Delta y$  ثابتاً. ولما كان للدالة  $f$

مشتق جزئي  $f'_x(x, y + \Delta y)$ ، فإننا نجد، من مبرهنة لاغرانج:

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) = f'_x(x + \theta_1 \Delta x, y + \Delta y) \cdot \Delta x; 0 < \theta_1 < 1$$

و نجد بأسلوب مشابه:

$$f(x, y + \Delta y) - f(x, y) = f'_y(x, y + \theta_2 \Delta y) \cdot \Delta y; 0 < \theta_2 < 1$$

ولما كان المشتقان الجزئيان  $f'_x$  و  $f'_y$  مستمرين عند النقطة  $P(x, y)$ ، فإن

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} f'_x(x + \theta_1 \Delta x, y + \Delta y) = f'_x(x, y)$$

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} f'_y(x, y + \theta_2 \Delta y) = f'_y(x, y)$$

يتبع من ذلك أن

$$f'_x(x + \theta_1 \Delta x, y + \Delta y) = f'_x(x, y) + \alpha(\Delta x, \Delta y)$$

$$f'_y(x, y + \theta_2 \Delta y) = f'_y(x, y) + \beta(\Delta x, \Delta y)$$

حيث  $\alpha(\Delta x, \Delta y)$  و  $\beta(\Delta x, \Delta y)$  لامتناهيات في الصغر، عندما  $\Delta x \rightarrow 0$  و  $\Delta y \rightarrow 0$ .

نضع هذا في (2.2)، فنجد

$$\Delta z = f'_x(x, y) \Delta x + \alpha(\Delta x, \Delta y) \Delta x + f'_y(x, y) \Delta y + \beta(\Delta x, \Delta y) \Delta y$$

وهذا يعني أن الدالة فضولة عند النقطة  $P$ .



نتيجة 2.1: من استمرار المشتقات الجزئية للدالة  $f$ ، ونكتب عندها  $f \in C^1$ ، ينتج استمرار الدالة  $f$  نفسها.

إن للمبرهنة 2.3، أهمية كبرى في إثبات أن الدالة فضولة، لأن التحقق من كون الدالة فضولة باستخدام التعريف، غالباً ما يكون صعباً. بينما إثبات أن المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى مستمرة أسهل.

إن مفهوم قابلية المفاضلة للدوال بثلاثة متغيرات فأكثر، يعطى بأسلوب مشابه تماماً لما ذكر أعلاه.

مثال 2.8: أوجد المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى للدالة

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & ; (x, y) = (0, 0) \\ 0 & ; (x, y) \neq (0, 0) \end{cases}$$

الحل:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = g'_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(0 + \Delta x, 0) - g(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{\Delta x} = 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = g'_y(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{g(0, 0 + \Delta y) - g(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{\Delta y} = 0$$

أي أن المشتقين الجزئيين، عند النقطة  $(0, 0)$ ، موجودان. غير أن هذه الدالة غير مستمرة عند هذه النقطة، لأنه ليس لها نهاية عندها، المثال 2.1.

مثال 2.9: إذا كان  $F(t) = \int_{u_1(t)}^{u_2(t)} f(x, t) dx$ ، حيث  $t \in [a, b]$  و

$u_1(t), u_2(t) \in C^1([a, b])$  و  $f(x, t)$  و  $\frac{\partial f}{\partial t}$  مستمرتين بالنسبة إلى  $t$  و  $x$  في ساحة

محتواة في المستطيل  $\{u_1 \leq x \leq u_2, a \leq t \leq b\}$ ، فإن

$$\frac{dF}{dt} = \int_{u_1(t)}^{u_2(t)} \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} dx + f[u_2(t), t] \frac{du_2}{dt} - f[u_1(t), t] \frac{du_1}{dt}$$

الحل: نحسب تغير  $F(t)$ :

$$\begin{aligned}
\Delta F &= F(t + \Delta t) - F(t) = \int_{u_1(t+\Delta t)}^{u_2(t+\Delta t)} f(x, t + \Delta t) dx - \int_{u_1(t)}^{u_2(t)} f(x, t) dx = \\
&= \int_{u_1(t+\Delta t)}^{u_1(t)} f(x, t + \Delta t) dx + \int_{u_1(t)}^{u_2(t)} f(x, t + \Delta t) dx + \\
&\quad + \int_{u_2(t)}^{u_2(t+\Delta t)} f(x, t + \Delta t) dx - \int_{u_1(t)}^{u_2(t)} f(x, t) dx = \\
&= \int_{u_1(t)}^{u_2(t)} [f(x, t + \Delta t) - f(x, t)] dx + \int_{u_2(t)}^{u_2(t+\Delta t)} f(x, t + \Delta t) dx - \int_{u_1(t+\Delta t)}^{u_1(t)} f(x, t + \Delta t) dx
\end{aligned}$$

ومن مبرهنة لاغرانج، توجد نقطة  $\xi \in ]t, t + \Delta t[$  بحيث يكون:

$$\int_{u_1(t)}^{u_2(t)} [f(x, t + \Delta t) - f(x, t)] dx = \Delta t \int_{u_1(t)}^{u_2(t)} \frac{\partial f(x, \xi)}{\partial t} dx$$

وتوجد نقطة  $\xi_1 \in ]u_1(t), u_1(t + \Delta t)[$  بحيث يكون:

$$\int_{u_1(t+\Delta t)}^{u_1(t)} f(x, t + \Delta t) dx = f(\xi_1, t + \Delta t) [u_1(t + \Delta t) - u_1(t)]$$

وتوجد نقطة  $\xi_2 \in ]u_2(t), u_2(t + \Delta t)[$  بحيث يكون:

$$\int_{u_2(t)}^{u_2(t+\Delta t)} f(x, t + \Delta t) dx = f(\xi_2, t + \Delta t) [u_2(t + \Delta t) - u_2(t)]$$

وعليه، فإن

$$\frac{\Delta F}{\Delta t} = \int_{u_1(t)}^{u_2(t)} \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} dx + f[\xi_2, t + \Delta t] \frac{\Delta u_2(t)}{\Delta t} - f[\xi_1, t + \Delta t] \frac{\Delta u_1(t)}{\Delta t}$$

وبأخذ نهاية الطرفين عندما  $\Delta t \rightarrow 0$ ، نجد المطلوب:

$$\frac{dF}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta t} = \int_{u_1(t)}^{u_2(t)} \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} dx + f[u_2(t), t] \frac{du_2}{dt} - f[u_1(t), t] \frac{du_1}{dt}$$

تطبيق: احسب التكامل  $I = \int_0^1 \frac{x-1}{\ln x} dx$

نرمز به  $F(t) = \int_0^t \frac{x' - 1}{\ln x} dx$  ، حيث  $t > 0$  ، وعليه، فإن

$$F'(t) = \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{x' - 1}{\ln x} \right) dx = \int_0^t \frac{x' \ln x}{\ln x} dx = \int_0^t x' dx = \frac{1}{t+1}$$

نكامل الطرفين بالنسبة إلى  $t$  ، نجد

$$\int F'(t) dt = \int \frac{dt}{t+1} = \ln(t+1) + c$$

ولما كان  $c = 0$  ، فإن  $F(0) = 0$  ، وعليه، فإن  $I = F(1) = \ln 2$

## 2.6 مشتقات الدوال المركبة وتفاضلاتها - قاعدة السلسلة

مبرهنة 2.4: نعلم أنه إذا كانت الدالتان  $x = x(t)$  و  $y = y(t)$  فضولتين عند  $t$  ، والدالة

$z = f(x, y)$  فضولة عند النقطة  $P[x(t), y(t)]$  ، عندئذٍ، فإن الدالة المركبة

$z = f[x(t), y(t)]$  فضولة عند  $t$  ، ويعطى مشتق الدالة المركبة بالصيغة:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

الإثبات: ليكن  $\Delta t$  تغير اختياري للمتغير  $t$  . عندئذٍ، يكون  $\Delta x$  و  $\Delta y$  تغيري الدالتين  $x$  و

$y$  . وعليه، فإن تغير الدالة المركبة  $z = f[x(t), y(t)]$  ، يعطى بالعلاقة

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

ولما كانت الدالة  $f$  فضولة عند النقطة  $P(x, y)$  ، فإن

$$\Delta z = f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\Delta y$$

حيث  $\alpha(\Delta x, \Delta y)$  و  $\beta(\Delta x, \Delta y)$  لامتناهيتان في الصفر، عندما  $\Delta x \rightarrow 0$  و

$\Delta y \rightarrow 0$  .

نفرض أن  $\alpha(0,0) = 0$  و  $\beta(0,0) = 0$  . نقسم طرفي التغير  $\Delta z$  على  $\Delta t$  ، ونحسب

النهاية، عندما  $\Delta t \rightarrow 0$  :

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = f'_x(x, y) \frac{\Delta x}{\Delta t} + f'_y(x, y) \frac{\Delta y}{\Delta t} + \alpha(\Delta x, \Delta y) \frac{\Delta x}{\Delta t} + \beta(\Delta x, \Delta y) \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} = f'_x(x, y) \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} + f'_y(x, y) \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \alpha(\Delta x, \Delta y) \frac{\Delta x}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \beta(\Delta x, \Delta y) \frac{\Delta y}{\Delta t} \quad (2.3)$$

ولما كان  $\frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$  و  $\frac{dy}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}$  وكانت الدالتان  $x = x(t)$  و  $y = y(t)$  فضولتين عند  $t$ ، فإنهما مستمرتان عندها. وعليه، فإن  $\Delta x \rightarrow 0$  و  $\Delta y \rightarrow 0$  عندما  $\Delta t \rightarrow 0$ ، ومنه، فإن

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \beta(\Delta x, \Delta y) \frac{\Delta y}{\Delta t} = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \alpha(\Delta x, \Delta y) \frac{\Delta x}{\Delta t} = 0$$

وهكذا، يمكن كتابة (2.3):

$$\frac{dz}{dt} = f'_x(x, y) \frac{dx}{dt} + f'_y(x, y) \frac{dy}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

مثال 2.10: إذا كان  $x = t^3 - 5$  و  $y = t^2 + 8$ ، أوجد مشتق الدالة  $z = f[x(t), y(t)]$

$$\text{الحل: لما كان } x' = 3t^2 \text{ و } y' = 2t \text{، فإن } \frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} 3t^2 + \frac{\partial z}{\partial y} 2t$$

حالة خاصة: إذا كان  $z = f[x(t), y(t)]$  وكان  $y = \varphi(x)$ ، فإن  $z = f[x, \varphi(x)]$  دالة مركبة في  $x$ . واستناداً إلى العلاقة (2.3)، فإن:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dx}$$

ويتم، بأسلوب مشابه، تعريف مشتق دالة بثلاثة متغيرات فأكثر. فمثلاً، إذا كانت

$$u = f(x, y, z) \quad \text{و} \quad x = x(t) \quad \text{و} \quad y = y(t) \quad \text{و} \quad z = z(t) \quad \text{دوال فضولة، فإن:}$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

قاعدة السلسلة: إذا كانت  $z = f(x, y)$  دالة بمتغيرين، وكان  $x = x(u, v)$  و

$y = y(u, v)$ ، عندئذ، فإن الدالة المركبة  $z = f[x(u, v), y(u, v)]$  تتبع للمتغيرين

المستقلين  $u$  و  $v$  . وإذا كانت الدالتان  $x$  و  $y$  فضولتين عند النقطة  $P'(u, v)$  ، فإن الدالة  $z = f(x, y)$  فضولة عند النقطة  $P(x, y)$  ، ويكون:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} \quad \text{و} \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}$$

مثال 2.11: إذا كان  $z = f(x, y)$  ، حيث  $x = u^2 - v^2$  و  $y = u^2 + v^2$  دالتان فضولتان، أثبت صحة العلاقة :

$$y \frac{\partial f}{\partial x} + x \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

الحل: نوجد مشتقات الدالة  $f$  من المرتبة الأولى:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = 2x \frac{\partial f}{\partial u} - 2x \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = -2y \frac{\partial f}{\partial u} + 2y \frac{\partial f}{\partial v} \end{aligned}$$

نعوض في العلاقة المعطاة، فنجد المطلوب:

$$y \frac{\partial f}{\partial x} + x \frac{\partial f}{\partial y} = y(2x \frac{\partial f}{\partial u} - 2x \frac{\partial f}{\partial v}) + x(-2y \frac{\partial f}{\partial u} + 2y \frac{\partial f}{\partial v}) = 0$$

تعميم قاعدة السلسلة: يمكن تعميم هذه القاعدة من أجل الدوال بثلاثة متغيرات فأكثر، فإذا

كان  $w = f(x, y, z)$  و  $x = x(u, v)$  و  $y = y(u, v)$  و  $z = z(u, v)$  دوال فضولة،

فإن

$$\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial v}$$

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial u}$$

وإذا كانت  $f$  دالة بالمتغيرات  $x_1, x_2, \dots, x_n$  وكانت كل من هذه المتغيرات دوالاً

قابلة للاشتقاق، للمتغيرات المستقلة  $t_1, t_2, \dots, t_m$  ، فإن:

$$\frac{\partial f}{\partial t_i} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_i} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t_i} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial x_n}{\partial t_i} ; i=1,2,\dots,m$$

## 2.7 التفاضل التام

تعريف 2.10: لتكن  $z = f(P)$  دالة فضولة عند النقطة  $P(x, y)$ . نعرّف التفاضل التام لهذه الدالة عند هذه النقطة، بأنه الجزء الخطي، بالنسبة إلى  $\Delta x$  و  $\Delta y$ ، من عبارة التغير الكلي لها، العلاقة (2.1)، ونرمز له بالرمز  $dz$ . أي

$$dz = A\Delta x + B\Delta y$$

و نجد من المبرهنة 2.2:

$$dz = f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y$$

نسمي تفاضل المتغيرين المستقلين  $x$  و  $y$  تغير هذين المتغيرين:  $\Delta x = dx$  و  $\Delta y = dy$ . يكتب، عندها التفاضل التام:

$$dz = f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy$$

وعليه، فإن الفرق بين التفاضل التام والتغير الكلي للدالة  $z = f(P)$ ، هو

$$\Delta z - dz = \alpha(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\Delta y$$

وهو لا متناه في الصفر، عندما  $\Delta x \rightarrow 0$  و  $\Delta y \rightarrow 0$ ، من مرتبة أعلى من مرتبة اللامتناه في

الصفر  $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ ، حيث  $\rho$  المسافة بين النقطتين  $P(x, y)$  و  $P_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$  لأن

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\Delta z - dz}{\rho} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \left[ \alpha(\Delta x, \Delta y) \frac{\Delta x}{\rho} + \beta(\Delta x, \Delta y) \frac{\Delta y}{\rho} \right] = 0$$

وحيث إن  $\alpha(\Delta x, \Delta y)$  و  $\beta(\Delta x, \Delta y)$  لا متناهيان في الصفر، عندما  $\Delta x \rightarrow 0$  و

$\Delta y \rightarrow 0$ ، و  $\frac{\Delta x}{\rho}$  و  $\frac{\Delta y}{\rho}$  دوال محدودة:  $\left| \frac{\Delta x}{\rho} \right| \leq 1$  و  $\left| \frac{\Delta y}{\rho} \right| \leq 1$ . ومنه، فإن

$\Delta z - dz = o(\rho)$ ، أي أن

$$\Delta z = dz + o\left(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\right) \quad (2.4)$$

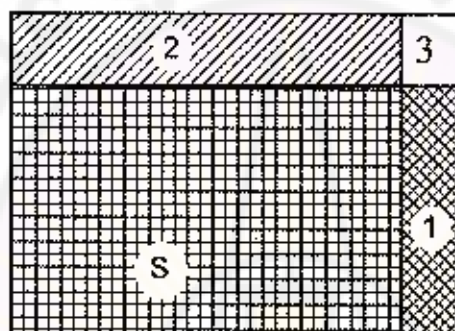
وعليه، فإن  $\Delta z \approx dz$ .

أي أنه إذا كانت التغيرات في  $x$  و  $y$  صغيرة جداً، أي  $\Delta x \approx dx$  و  $\Delta y \approx dy$ ، فإن التغير الكلي يساوي تقريباً التفاضل التام للدالة  $z = f(P)$ .

مثال 2.12: أوجد التغير الحقيقي والتقريبي في حساب مساحة قطعة معدنية مستطيلة، عند تعرضها لدرجة حرارة.

الحل: نفرض أن أبعاد هذه القطعة  $x$  و  $y$ ، فتكون مساحتها  $S = x \cdot y$ .

نفرض أن  $x$  ازدادت بمقدار  $\Delta x$  و  $y$  ازدادت بمقدار  $\Delta y$ . عندئذ تكون الزيادة في المساحة باتجاه  $x$ ، مساحة الشريط (2) - الشكل 2.3.



الشكل 2.3

$$\Delta_x S = (x + \Delta x)y - xy = y\Delta x$$

والزيادة في المساحة باتجاه  $y$ ، مساحة الشريط (1) - الشكل 2.3.

$$\Delta_y S = (y + \Delta y)x - xy = x\Delta y$$

والزيادة الكلية، التغير الكلي، في المساحة:

$$\Delta S = (x + \Delta x)(y + \Delta y) - xy = xy + x\Delta y + y\Delta x + (\Delta x)(\Delta y) - xy$$

$$\Delta S = x\Delta y + y\Delta x + (\Delta x)(\Delta y) = \Delta_x S + \Delta_y S + (\Delta x)(\Delta y)$$

بيننا التفاضل التام للدالة  $S$  هو:

$$dS = \frac{\partial S}{\partial x} dx + \frac{\partial S}{\partial y} dy = ydx + xdy$$

إذا كانت الزيادات في  $x$  و  $y$  صغيرة جداً، أي  $\Delta x \approx dx$  و  $\Delta y \approx dy$ ، فإن:

$$\Delta S = dS + dx \cdot dy \Rightarrow \Delta S - dS = dx \cdot dy$$

ملاحظة 2.6: يمكن بسهولة تعميم التفاضل التام من أجل دوال بثلاثة متغيرات فأكثر، فمثلاً،

إذا كانت  $u = f(x, y, z)$ ، فإن:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$$

## 2.8 المستوي المماس والمستقيم الناظم لسطح في الفضاء

تماماً، كما كان تفاضل دالة بمتغير واحد، يُمثل تغير عينات (توازيات) المستقيم المماس للمنحني الذي يمثل بيان هذه الدالة، فإن التفاضل التام للدالة بمتغيرين يمثل تغير صادات (رواقم) المستوي المماس للسطح الذي يمثل بيان هذه الدالة.

نعطي، الآن، مفهوم المستوي المماس لسطح فراغي عند نقطة منه.

نسمي المستوي المماس من النقطة  $P_0(x_0, y_0)$ ، على السطح  $S$ ، مستوياً مماساً لهذا السطح عند هذه النقطة، إذا كانت الزاوية بين المستقيم المماس من  $P_0$  و  $P$ ، أي نقطة من هذا السطح، وهذا المستوي، تسعى إلى الصفر عندما تقترب النقطة  $P$  من  $P_0$ . وبعبارة أخرى، إذا كانت  $P_0$  هي النقطة الوحيدة المشتركة بين المستوي والسطح.

و نسمي المستقيم العمودي على المستوي المماس للسطح  $S$ ، عند نقطة التماس، المستقيم الناظم لهذا السطح عند هذه النقطة.

ليكن  $K$  سطحاً فراغياً يمثل بيان الدالة  $z = f(x, y)$ ، الفضولة عند النقطة  $P_0(x_0, y_0)$ . نثبت فيما يلي، أن المستوي المماس للسطح عند النقطة  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ ، حيث  $z_0 = f(x_0, y_0)$ ، يعطى بالعلاقة:

$$z - z_0 = (x - x_0)f'_x(x_0, y_0) + (y - y_0)f'_y(x_0, y_0) \quad (2.5)$$

ومعادلات المستقيم الناظم لهذا السطح، عند النقطة  $M_0$ ، تُعطى بالعلاقة:

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{1} \quad (2.6)$$



نعلم من الفصل الأول، أن المعادلة (2.5)، تمثل مستويًا ماراً بالنقطة  $M_0$  ومنتجه الناطم عليه  $\vec{n} = (f'_x, f'_y, -1)$ . ولإثبات أن هذا المستوي مماساً للسطح عند هذه النقطة، يكفي إثبات أن الزاوية  $\alpha$ ، بين الناطم  $\vec{n}$  والمنتجه  $\overline{MM_0}$ ، قائمة، حيث إن  $M(x, y, z)$  نقطة اختيارية من السطح تسمى إلى  $M_0$ .

نجد من علاقة الزاوية بين متجهين:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{n} \cdot \overline{MM_0}}{|\vec{n}| |\overline{MM_0}|} = \frac{(x-x_0)f'_x + (y-y_0)f'_y - (z-z_0)}{\sqrt{f'^2_x + f'^2_y + 1} \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}}$$

وباستخدام العلاقة (2.4)، نجد  $(x-x_0)f'_x + (y-y_0)f'_y - z + z_0 = o(\rho)$ ، حيث  $\rho = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$ ، لذا، فإن

$$|\cos \alpha| \leq \frac{|o(\rho)|}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} = \frac{|o(\rho)|}{\rho} \rightarrow 0 \quad ; \quad \rho \rightarrow 0$$

ومنه، فإن  $\lim_{M \rightarrow M_0} \alpha = \frac{\pi}{2}$ .

نسمي المنتجه  $\vec{n} = (f'_x, f'_y, -1)$ ، العمودي على المستوي المماس للسطح  $z = f(x, y)$ ، ناظماً لهذا السطح. وبفرض  $\Delta x = x - x_0$  و  $\Delta y = y - y_0$  و  $\Delta z = z - z_0$ ، نجد، من العلاقة (2.5)، أن التغير  $\Delta z$  هو تغير صادات المستوي المماس:

$$\Delta z = f'_x(x_0, y_0) \Delta x + f'_y(x_0, y_0) \Delta y$$

أي أنه يتطابق مع التفاضل التام  $dz$  للدالة  $z = f(x, y)$ .

كما هو واضح، فإن معادلات المستقيم الناطم للسطح  $S$  عند النقطة  $M_0$  هي معادلات مستقيم يمر من هذه النقطة ومنتجه  $\vec{n}$ ، وتُعطى بالعلاقة (2.6).

## 2.9 المشتقات الجزئية من المرتبة الثانية ومن مراتب عليا

ليكن المشتقان الجزئيان  $f'_x$  و  $f'_y$ ، للدالة  $z = f(P)$ ، معرفين في جوارٍ للنقطة  $P$ . أي أنهما دالتان بالمتغيرين  $x$  و  $y$ ، نسمي مشتقاهما بالنسبة إلى  $x$  و بالنسبة إلى  $y$ ، المشتقات الجزئية للدالة  $z = f(P)$  من المرتبة الثانية، ونرمز لها كما يلي:

$$f''_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'_x(x + \Delta x, y) - f'_x(x, y)}{\Delta x}$$

$$f''_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f'_y(x, y + \Delta y) - f'_y(x, y)}{\Delta y}$$

$$f''_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'_y(x + \Delta x, y) - f'_y(x, y)}{\Delta x}$$

$$f''_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f'_x(x, y + \Delta y) - f'_x(x, y)}{\Delta y}$$

ونسمي المشتقين  $f''_{xy}$  و  $f''_{yx}$  المشتقان المختلطان للدالة  $f$  وهما غير متساويان بالضرورة.

مثال 2.13: أوجد المشتقات من المرتبة الثانية للدالة  $z = x^y$ .

الحل: وجدنا في المثال 2.5، المشتقان من المرتبة الأولى. نشق الآن، هذين المشتقين بالنسبة إلى  $x$

و  $y$ :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} (yx^{y-1}) = y(y-1)x^{y-2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} (x^y \ln x) = (\ln^2 x) x^y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} (x^y \ln x) = x^{y-1} + yx^{y-1} \ln x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} (yx^{y-1}) = x^{y-1} + yx^{y-1} \ln x$$

مثال 2.14: إذا كان

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} ; f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} ; (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 ; (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

أوجد المشتقان من المرتبة الأولى للدالة  $f$  عند النقطة  $(0,0)$ . ومن ثم أثبت أن المشتقين المختلطين غير متساويين عند هذه النقطة.

الحل: نوجد المشتقين من المرتبة الأولى عند النقطة  $(0,0)$ :

$$f'_x(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0+\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x} = 0$$

$$f'_y(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0,0+\Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta y} = 0$$

لإيجاد المشتقان المختلطان للدالة  $f$ ، نوجد المشتقين من المرتبة الأولى من أجل  $(x,y) \neq (0,0)$ :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = f'_x(x,y) = y \left[ \frac{x^4 + 4x^2 - y^4}{(x^2 + y^2)^2} \right]$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f'_y(x,y) = x \left[ \frac{x^4 - 4x^2 y^2 - y^4}{(x^2 + y^2)^2} \right]$$

وعليه، فإن:

$$f''_{yx}(0,0) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) (0,0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'_y(0+\Delta x, 0) - f'_y(0,0)}{\Delta x} = +1$$

$$f''_{xy}(0,0) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) (0,0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f'_x(0,0+\Delta y) - f'_x(0,0)}{\Delta y} = -1$$

أي أن  $f''_{yx}(0,0) \neq f''_{xy}(0,0)$ .

مبرهنة 2.5 (مبرهنة كليرو): إذا كان المشتقان المختلطان  $f''_{yx}$  و  $f''_{xy}$  موجودين ومستمرين في جوار النقطة  $P(x,y)$  عندئذ، فإن هذين المشتقين متساويان عند هذه النقطة.

الإثبات: ليكن  $\Delta x$  و  $\Delta y$  تغيرين صغيرين، بحيث تبقى النقطة  $P_1(x+\Delta x, y+\Delta y)$  في الجوار المذكور للنقطة  $P$ . وليكن

<sup>1</sup> أليكس كلود كليرو (1713-1765) عالم رياضيات فرنسي.

$A = [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y)] - [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)]$   
 لترمز بـ  $\varphi(x) = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$  أي أن العبارة  $A$  هي تغير الدالة  $\varphi(x)$  على المجال  $[x, x + \Delta x]$ ، أي

$$A = \Delta\varphi = \varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)$$

لذا، فإنه وفق مبرهنة لاغرانج، يكون

$$\begin{aligned} A &= \Delta\varphi = \varphi'(x + \xi_1 \Delta x) \Delta x = \\ &= [f'_x(x + \xi_1 \Delta x, y + \Delta y) - f'_x(x + \xi_1 \Delta x, y)] \Delta x ; 0 < \xi_1 < 1 \\ \text{إن العبارة بين القوسين [ ] تمثل تغير الدالة } f'_x(x + \xi_1 \Delta x, y) \text{ في المجال } [y, y + \Delta y]. \\ \text{باستخدام مبرهنة لاغرانج مرة أخرى، نجد} \end{aligned}$$

$$A = f''_{xy}(x + \xi_1 \Delta x, y + \xi_2 \Delta y) \Delta x \Delta y ; 0 < \xi_1, \xi_2 < 1 \quad (2.7)$$

من جهة أخرى، نعرف الدالة

$$\psi(y) = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$$

فنجدد بأسلوب مماثل:

$$A = f''_{yx}(x + \xi_4 \Delta x, y + \xi_3 \Delta y) \Delta y \Delta x ; 0 < \xi_3, \xi_4 < 1$$

بمقارنة هذه العلاقة مع (2.7)، نجد

$$\begin{aligned} f''_{xy}(x + \xi_1 \Delta x, y + \xi_2 \Delta y) &= f''_{yx}(x + \xi_4 \Delta x, y + \xi_3 \Delta y) \\ \text{نحسب نهاية هذا الفرق، عندما } \Delta x \rightarrow 0 \text{ و } \Delta y \rightarrow 0 \text{، وبالأخذ بالحسبان أن الدالتين } f''_{xy} \text{ و } f''_{yx} \text{ مستمرتان عند النقطة } P(x, y) \text{، نجد} \end{aligned}$$

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} f''_{xy}(x + \xi_1 \Delta x, y + \xi_2 \Delta y) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} f''_{yx}(x + \xi_4 \Delta x, y + \xi_3 \Delta y)$$

$$\text{أي أن } f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y)$$

ملاحظة 2.7: يمكن بأسلوب مشابه، إيجاد المشتقات من أي مرتبة للدالة  $f$  بعدة متغيرات، وإذا كانت الدالة  $f$  بمتغيرين حقيقيين، فإن عدد المشتقات من المرتبة  $n$  هو  $2^n$ ، وعدد المشتقات من المرتبة  $n$  للدالة بثلاثة متغيرات هو  $3^n$  وهكذا...

## 2.10 التفاضل التام من مراتب عليا

عرفنا في 2.7، التفاضل التام للدالة  $z = f(x, y)$  بالعلاقة:

$$dz = f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy$$

سنسمي  $dz$  التفاضل التام من المرتبة الأولى لهذه الدالة. كما هو واضح، فإن  $dz$  هو دالة في المتغيرين  $x$  و  $y$ ، بالنظر إلى  $dx$  و  $dy$  كثابتين. وعليه، نوجد التفاضل التام للدالة  $dz$ :

$$\begin{aligned} d(dz) &= d[f'_x dx + f'_y dy] = \frac{\partial}{\partial x} [f'_x dx + f'_y dy] dx + \frac{\partial}{\partial y} [f'_x dx + f'_y dy] dy = \\ &= f''_{xx}(dx)^2 + f''_{xy}(dx)(dy) + f''_{yx}(dy)(dx) + f''_{yy}(dy)^2 \end{aligned}$$

نسمي هذه العبارة تفاضل تفاضل التفاضل التام للدالة  $z = f(x, y)$ ، أو التفاضل التام من المرتبة الثانية لهذه الدالة، ونرمز له بالرمز  $d^2 z$ . وإذا كان المشتقان المختلطان مستمرين، فإنها يكونان متساويين، وعليه، فإن

$$d^2 z = f''_{xx}(dx)^2 + 2f''_{xy}(dx)(dy) + f''_{yy}(dy)^2$$

أو

$$d^2 z = \left( \frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^2 f(x, y)$$

ونجد بالأسلوب ذاته، التفاضل التام من مراتب عليا للدالة  $z = f(x, y)$ :

$$d^n z = \left( \frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^n f(x, y)$$

وإذا كانت الدالة بثلاثة متغيرات  $u = f(x, y, z)$ ، فإن التفاضل التام من المرتبة  $n$ ، يُعطى بالعلاقة:

$$d^n u = \left( \frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy + \frac{\partial}{\partial z} dz \right)^n f(x, y, z)$$

مثال 2.15: أوجد  $d^3 z$ ، حيث  $z = \cos x \sin y$

الحل: نوجد المشتقات الجزئية:

$$\begin{aligned}
f'_x &= -\sin x \sin y & ; & & f'_y &= \cos x \cos y \\
f''_{x^2} &= -\cos x \sin y & ; & & f''_{y^2} &= -\cos x \sin y \\
f''_{xy} &= -\sin x \cos y & ; & & f''_{yx} &= \sin x \sin y \\
f'''_{x^3} &= -\cos x \cos y & ; & & f'''_{x^2y} &= -\cos x \cos y \\
f'''_{xy^2} &= \sin x \sin y & ; & & &
\end{aligned}$$

وعليه، فإن:

$$\begin{aligned}
d^3z &= (\sin x \sin y)(dx)^3 - 3(\cos x \cos y)(dx)^2(dy) + \\
&+ 3(\sin x \sin y)(dx)(dy)^2 - (\cos x \cos y)(dy)^3
\end{aligned}$$

2.11 الدوال الضمنية

لتكن  $F(x, y)$  دالة حقيقية معرفة على الساحة  $\mathbb{R}^2 \supseteq D$ . ننظر في النقاط  $P(x, y)$  المحققة للمعادلة:

$$F(x, y) = 0 \quad (2.8)$$

إذا قابل كل قيمة للمتغير  $x$  من مجال ما  $I$ ، قيمة واحدة فقط للمتغير  $y$ ، بحيث تحقق النقطة  $P(x, y) \in D$  المعادلة (2.8)، فإنه يكون لدينا دالة:

$$f: I \rightarrow \mathbb{R} \quad ; \quad y = f(x)$$

تتحقق:

$$F(x, f(x)) = 0 \quad ; \quad \forall x \in I$$

وإذا قابل  $x$ ، من  $I$ ، أكثر من قيمة لـ  $y$ ، فإننا نقول إن المعادلة (2.8) تُعرّف أكثر من دالة  $y$  في  $x$  وقد لا تُعرّف هذه المعادلة أي دالة.

فمثلاً، تُعرّف المعادلة  $F(x, y) = x^2 + 2y^2 - 1 = 0$  دالتين معرفتين على المجال  $[-1; 1]$  هما

$$y_1 = f_1(x) = \sqrt{\frac{1-x^2}{2}} \quad \text{و} \quad y_2 = f_2(x) = -\sqrt{\frac{1-x^2}{2}}$$

وكلتاها تحقق المعادلة المعطاة.

بينما لا تُعرّف المعادلة  $F(x, y) = x^2 + y^4 + 2 = 0$  أي دالة.

تسمى الدالة  $y = f(x)$  ضمنية، إذا كانت معطاة بالمعادلة (2.8) وهذه المعادلة غير محلولة بالنسبة إلى  $y$ .

ونسمى الدالة  $y = f(x)$  صريحة، إذا استطعنا التعبير عن  $y$  مباشرة بدلالة  $x$ ، وذلك بحل المعادلة (2.8) بالنسبة إلى  $y$ .

ويصعب في الأمثلة، أحياناً، إيجاد  $y$  مباشرة بدلالة  $x$  من المعادلة (2.8)، غير أن ما يهمنا وجود الدالة  $f(x)$  على مجال ما، بحيث تصبح المعادلة (2.8) مطابقة.

تعريف 2.11: نقول إن المعادلة (2.8) تُعرف دالة ضمنية  $y = f(x)$  على المستطيل:

$$A = \{(x, y) : |x - x_0| < \delta_1, |y - y_0| < \delta_2\} \quad (2.9)$$

إذا قبل كل نقطة  $x$  من المجال  $I_1 = ]x_0 - \delta_1; x_0 + \delta_1[$  جذراً واحداً  $y = f(x)$  للمعادلة (2.8) في المجال  $I_2 = ]y_0 - \delta_2; y_0 + \delta_2[$ .

ملاحظة 2.8: واضح أنه عند تحقق الشروط السابقة، فإن المعادلتين  $y = f(x)$  و

$$F(x, y) = 0$$
 متكافئتان في المستطيل  $A$ .

مبرهنة 2.6: مبرهنة الدالة الضمنية بمتغير واحد

لتكن  $F(x, y)$  دالة حقيقية معرفة على الساحة  $\mathbb{R}^2 \supseteq D$  وتحقق مايلي:

أ - يوجد للدالة  $F$  مشتقان جزئيان، من المرتبة الأولى، مستمران على جوار ما للنقطة

$$P_0(x_0, y_0) \text{ من } D$$

$$\text{ب - } F(x_0, y_0) = 0$$

$$\text{ج - } \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$$

عندئذ، فإنه:

1 - يوجد مستطيل  $A$ ، معرف بالعلاقة (2.9)، بحيث يقابل كل نقطة  $x$  من المجال

$I_1 = ]x_0 - \delta_1; x_0 + \delta_1[$  حلٌ وحيد  $y = f(x)$ ، للمعادلة  $F(x, y) = 0$  في المجال

$$I_2 = ]y_0 - \delta_2; y_0 + \delta_2[$$

$$y_0 = f(x_0) - 2$$

3- الدالة  $f(x)$  مستمرة على المجال  $I_1$ .

4- يوجد للدالة  $f(x)$  مشتق مستمر على المجال  $I_1$ ، أي  $f \in C^1(I_1)$  ويمكن إيجاد المشتق، باشتقاق طرفي المعادلة (2.8):

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow y' = f'(x) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y)}$$

مثال 2.16: هل نحدد المعادلة  $F(x, y) = e^x y^8 + 3y \sin^2 x - 1 = 0$  دالة ضمنية  $y$ ، في

$x$ ، على جوارٍ للنقطة  $P_0(0, 1)$ ؟

إذا كان الجواب بالإيجاب، أوجد المشتق  $y'$  عند هذه النقطة.

الحل: كما هو واضح، فإن للدالة  $F$  مشتقين جزئيين، من المرتبة الأولى، مستمرين على جوارٍ للنقطة  $P_0(0, 1)$ :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = e^x y^8 + 6y \sin x \cos x \quad \text{و} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 8e^x y^7 + 3 \sin^2 x$$

$$\text{كذلك، فإن } F(0, 1) = 0 \text{ و } \frac{\partial F}{\partial y}(0, 1) = 8 \neq 0$$

وعليه، فإنه وفق مبرهنة الدالة الضمنية 2.6، تُعرّف المعادلة المعطاة دالة ضمنية  $y = f(x)$  معرفة ومستمرة على  $\mathbb{R}$ ، وبحيث يكون  $1 = f(0)$ ، ومشتق هذه الدالة، عند النقطة  $x_0 = 0$  هو:

$$y'_0 = f'(0) = -\frac{1}{8}$$

مبرهنة 2.7: مبرهنة الدالة الضمنية بعدة متغيرات

لتكن  $F(\vec{x}, y) = F(x_1, x_2, \dots, x_n, y)$  دالة معرفة على الساحة  $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ ، وتحقق الشروط:

أ- المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى للدالة  $F$  موجودة ومستمرة على جوارٍ ما لنقطة  $P_0(\vec{x}_0, y_0)$  من الساحة  $D$ .



$$F(\bar{x}_0, y_0) = 0 \quad \text{ب -}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(\bar{x}_0, y_0) \neq 0 \quad \text{ج -}$$

عندئذ، فإنه:

$$1 - \text{يوجد مستطيل } D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$$

$$A = \{(x_1, x_2, \dots, x_n, y) \in D : |x_i - x_{0i}| < \delta, |y - y_0| < \delta'\}$$

بحيث يقابل كل نقطة  $\bar{x}$  من المستطيل

$$B = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : |x_i - x_{0i}| < \delta\}$$

حلٌ وحيد  $y = f(x)$  للمعادلة  $F(\bar{x}, y) = 0$ ، يحقق المتراجحة  $|y - y_0| < \delta'$ .

$$y_0 = f(\bar{x}_0) \quad 2 -$$

3 - الدالة  $f$  مستمرة عند كل نقطة  $\bar{x}$  من المستطيل  $B$ .

4 - يوجد للدالة  $f$  مشتقات جزئية من المرتبة الأولى، مستمرة على المستطيل  $B$ ، أي

$$f \in C^1(B)$$

ويمكن إيجاد المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى للدالة  $f$  بالنسبة إلى متغيراتها  $x_i$ ، باستقار

طرفي المعادلة  $F(\bar{x}, y) = 0$  وفق قاعدة السلسلة:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(P) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(P)}{\frac{\partial F}{\partial y}(P)} \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, n$$

ملاحظة 2.9: إن شروط المبرهنتين السابقتين شروط كافية وليست لازمة، أي أنه قد يحتل أحد

هذه الشروط وتكون الدالة الضمنية موجودة.

فمثلاً، الدالة  $F(x, y) = x - y^3$  لا تحقق الشرط ب من شروط المبرهنة 2.6، عند النقطة

$(0, 0)$ ، لأن  $\frac{\partial F}{\partial y}(0, 0) = 0$ ، مع أن الدالة الضمنية موجودة وهي  $y = f(x) = \sqrt[3]{x}$ ،

ولكن مشتق هذه الدالة عند الصفر غير موجود.

مثال 2.17: أوجد معادلة المماس للقطع الناقص  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  عند النقطة (1,2).  
الحل: إن معادلة المستقيم المماس للقطع في النقطة المعطاة هي:

$$y - 2 = y'(1,2) \cdot (x - 1)$$

نوجد  $y'(1,2)$  من المبرهنة 2.6، حيث إن الدالة  $F(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$  تحقق شروط هذه المبرهنة:

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{\partial F / \partial x}{\partial F / \partial y} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$$

وعليه، فإن  $y'(1,2) = -\frac{b^2}{2a^2}$ ، أي أن معادلة المستقيم المماس هي:

$$y - 2 = -\frac{b^2}{2a^2}(x - 1)$$

#### 2.1.1.1 جملة الدوال الضمنية

يمكن أن تُعرّف المعادلة  $F(x, y, u, v) = 0$  دالة  $v$ ، مثلاً، في ثلاثة متغيرات  $u$  و  $y$  و  $x$ . وإذا كان بالإضافة لهذه المعادلة، معادلة أخرى  $G(x, y, u, v) = 0$ ، فإن هاتين المعادلتين تعرفان، ضمن شروط معينة، دالتين  $u$  و  $v$  في المتغيرين  $y$  و  $x$ :

$$u = f(x, y) \quad \text{و} \quad v = g(x, y)$$

ولإيجاد مشتقاتها الجزئية بالنسبة إلى  $x$ ، نشق كلا من  $u$  و  $v$ ، بالنسبة إلى  $x$ :

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

وبحل هاتين المعادلتين بالنسبة إلى المجهولين  $\frac{\partial u}{\partial x}$  و  $\frac{\partial v}{\partial x}$ ، نجد:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = - \frac{\begin{vmatrix} F'_u & F'_x \\ G'_u & G'_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F'_u & F'_v \\ G'_u & G'_v \end{vmatrix}} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial x} = - \frac{\begin{vmatrix} F'_x & F'_v \\ G'_x & G'_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F'_u & F'_v \\ G'_u & G'_v \end{vmatrix}}$$

ونجد، بأسلوب مماثل مشتقي الدالتين  $u$  و  $v$ ، بالنسبة إلى  $y$ .  
نرمز، للاختصار:

$$J = \frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} F'_u & F'_v \\ G'_u & G'_v \end{vmatrix}$$

ويسمى يعقوبي الدالتين  $F$  و  $G$ ، بالنسبة إلى  $u$  و  $v$ .

وعليه، فإن مشتقات الدالتين  $u$  و  $v$  بالنسبة إلى المتغيرين  $x$  و  $y$  تكتب اختصاراً:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} &= - \frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}} & , & \quad \frac{\partial u}{\partial x} = - \frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}} \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= - \frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}} & , & \quad \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}} \end{aligned}$$

ويمكن، بالأسلوب ذاته، تعريف يعقوبي  $m$  دالة في  $m$  متغير.

## 2.11.2 خواص اليعقوبيات

إن لليعقوبيات خواصاً مشابهة لخواص مشتقات الدوال بمتغير واحد، وإثبات صحة هذه الخواص يعتمد على خواص المحددات. فمثلاً، إذا كان لدينا الدالتان  $u = f(x,y)$  و  $v = g(x,y)$ ، وكان المتغيران  $x$  و  $y$  يتبعان للمتغيرين  $s$  و  $t$ ، وكان  $x, y, u, v \in \mathbb{R}^1$  وكانت اليعقوبيات الواردة لا تنعدم، فإن

<sup>1</sup> كارل غوستاف يعقوب يعقوبي (١٨٥١-١٨٠٤) عالم رياضيات ألماني.

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(r,s)} = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \cdot \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,s)}$$

وباستبدال  $r$  بـ  $u$  و  $s$  بـ  $v$ ، يكون

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \frac{1}{\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}}$$

وهي تشبه قاعدة اشتقاق الدالة العكسية بمتغير واحد.

وعموماً، يمكن أن تعرف جملة المعادلات

$$F_i(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m) = 0 \quad ; i = 1, 2, \dots, m \quad (2.10)$$

وضمن شروطاً معينة، جملة دوال عددها  $m$  في  $n$  متغير:

$$u_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad ; i = 1, 2, \dots, m \quad (2.11)$$

ونورد فيما يلي، بدون إثبات، مبرهنة وجود جملة الدوال الضمنية واستمرارها واشتقاقها:

مبرهنة 2.8: إذا حققت جملة الدوال

$$F_i : D^{n+m} \rightarrow D : F_i(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m) = 0 \quad ; i = 1, 2, \dots, m$$

الشروط:

أ-  $F_i(P_0) = 0$  في نقطة ما  $P_0 \in D^{n+m}$ ، مهما يكن  $i = 1, 2, \dots, m$ .

ب-  $F_i \in cl^1(I)$ ، حيث  $I$  جوار للنقطة  $P_0$ .

ج-  $J = \frac{\partial(F_1, F_2, \dots, F_m)}{\partial(u_1, u_2, \dots, u_m)} \neq 0$ ، في الجوار  $I$ .

فإن جملة المعادلات (2.10) تعرف في الجوار  $I$  للنقطة  $P_0$ ، جملة الدوال الضمنية (2.11)،

حيث إن  $u_1, u_2, \dots, u_m$  دوال مستمرة وقابلة للاشتقاق في  $I$ ، وتُعطى مشتقاتها بالعلاقات:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_1} = - \frac{\frac{\partial(F_1, F_2, \dots, F_m)}{\partial(x_1, u_2, \dots, u_m)}}{\frac{\partial(F_1, F_2, \dots, F_m)}{\partial(u_1, u_2, \dots, u_m)}}, \dots, \frac{\partial u_i}{\partial x_m} = - \frac{\frac{\partial(F_1, F_2, \dots, F_m)}{\partial(x_m, u_2, \dots, u_m)}}{\frac{\partial(F_1, F_2, \dots, F_m)}{\partial(u_1, u_2, \dots, u_m)}}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_1} = - \frac{\frac{\partial(F_1, F_2, \dots, F_m)}{\partial(u_1, x_1, \dots, u_m)}}{\frac{\partial(F_1, F_2, \dots, F_m)}{\partial(u_1, u_2, \dots, u_m)}} \dots$$

مثال 2.18: أثبت أن المعادلتين

$$F(x, y, u, v) \equiv x^2 + ux + v^2 + 8y = 0$$

$$G(x, y, u, v) \equiv x^3 y - 2ux + v^2 + 4 = 0$$

تعرفان دالتين ضمنييتين  $u$  و  $v$  في المتغيرين المستقلين  $x$  و  $y$ ، وهاتان الدالتان مستمرتان

وقابلتان للاشتقاق في ساحة يطلب تعيينها. ثم أوجد  $\frac{\partial u}{\partial x}$  و  $\frac{\partial v}{\partial y}$ .

الحل: لما كان عدد المتغيرات في المعادلتين أربعة، وعدد المتغيرات الدالية، الدوال الضمنية المفروضة  $u$  و  $v$ ، مساوي لعدد المعادلات، فإن المتغيران المتبقيان  $x$  و  $y$  مستقلان، والشروط الواردة في المبرهنة 2.8 محققة، لأن:

أ-  $F = 0$  و  $G = 0$ ، أيًا تكن  $x$  و  $y$  و  $u$  و  $v$  فرضاً.

ب-  $F, G \in C^1$ ، أيًا تكن  $x$  و  $y$  و  $u$  و  $v$ ، لأن  $F$  و  $G$  حدوديتان.

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} x & 2v \\ -2x & 2v \end{vmatrix} = 6xv \neq 0 \quad \text{ج-}$$

وعليه، فإن المعادلتين  $F = 0$  و  $G = 0$  تعرفان دالتين ضمنييتين  $u$  و  $v$  في المتغيرين المستقلين  $x$  و  $y$ ، بحيث  $xv \neq 0$ ، وهاتان الدالتان مستمرتان وقابلتان للاشتقاق، أيًا تكن  $x$  و  $y$  و  $u$  و  $v$ ، من أجل  $xv \neq 0$ . ويكون:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)}}{\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)}} = - \frac{1}{6xv} \begin{vmatrix} 8 & 2v \\ x^3 & 2v \end{vmatrix} = - \frac{16v - 2x^4}{6xv}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}} = -\frac{1}{6xv} \left| \begin{array}{cc} x & 2x \\ -2x & 3yx^2 - 2u \end{array} \right| = -\frac{3x^2y - 2u + 4x}{6v}$$

### 2.11.3 استخدام اليعقوبيات في اختبار ارتباط الدوال

لتكن لدينا جملة الدوال

$$u_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, m$$

حيث إن  $u_i \in C^1(D)$  و  $D$  مساحة من مجموعة تعريف الدوال  $u_i$ .

نقول إن جملة الدوال مرتبطة دالياً (غير مستقلة)، إذا كانت إحداها على الأقل دالة مستمرة المشتقات في الدوال المتبقية. ونقول إن جملة الدوال مستقلة، إذا لم يكن بالإمكان التعبير عن أي منها كدالة في الدوال المتبقية.

نورد، دون إثبات، طريقة اختبار الارتباط الدالي لجملة دوال:

١- إذا كان عدد الدوال أكبر من عدد المتغيرات ( $m > n$ )، فإن الجملة مرتبطة دالياً، دوماً.

٢- إذا كان عدد الدوال مساوياً لعدد المتغيرات ( $m = n$ )، فإن شرط الارتباط هو

$$\frac{\partial(u_1, u_2, \dots, u_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)} \equiv 0$$

٣- إذا كان عدد الدوال أصغر من عدد المتغيرات ( $m < n$ )، فإن شرط الارتباط هو انعدام

جميع الصغائر من المرتبة  $m$  للمصفوفة:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial u_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial u_m}{\partial x_1} & \frac{\partial u_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial u_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

### 2.12 نشر تايلور للدوال بمتغيرين

نعمم، الآن نشر تايلور من أجل الدوال بمتغيرين:

مبرهنة 2.9: مبرهنة تايلور في النشر المنتهي

لتكن  $z = f(x, y)$  دالة معرفة ومستمرة على الساحة  $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ، وليكن  $\Omega$  جواراً للنقطة  $P_0(x_0, y_0)$  من  $D$ ، وليكن  $f \in C^N(\Omega)$ . يمكن عندئذٍ كتابة هذه الدالة كما يلي:

$$f(x, y) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{n!} \left[ (x - x_0) \frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0) \frac{\partial}{\partial y} \right]^n f(x_0, y_0) + R_N$$

حيث إن  $R_N$  باقي تايلور للدالة  $f$  في جوار النقطة  $P_0$ ، معطى بالعلاقة:

$$R_N = \frac{1}{N!} \left[ (x - x_0) \frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0) \frac{\partial}{\partial y} \right]^N f(X, Y)$$

حيث  $X = x_0 + \theta(x - x_0)$  و  $Y = y_0 + \theta(y - y_0)$  و  $0 < \theta < 1$ .

ويمثل الخطأ المرتكب عند استبدال الدالة  $f$  بالمتسلسلة السابقة.

ملاحظة 2.9: إذا وضعنا  $x = x_0 + \Delta x$  و  $y = y_0 + \Delta y$  في المتسلسلة السابقة، نجد:

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) =$$

$$= f(x_0, y_0) + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n!} \left[ \Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y} \right]^n f(x_0, y_0) + R_N$$

أي أن:

$$\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) =$$

$$= \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n!} \left[ \Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y} \right]^n f(x_0, y_0) + R_N \quad (2.12)$$

وهو التغير الذي يطرأ على الدالة  $f$ ، عندما تتغير  $x$  بالمقدار  $\Delta x$  و  $y$  بالمقدار  $\Delta y$ .

مبرهنة 2.10: مبرهنة تايلور في النشر غير المنتهي

إذا كانت الدالة  $f(x, y)$  معرفة ومستمرة على الساحة  $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ، ولتكن لها مشتقات جزئية، عدداً غير منته من المرات، مستمرة على جوار  $\Omega$  للنقطة  $P_0(x_0, y_0)$  من  $D$ ، وليكن

$$\lim_{N \rightarrow \infty} R_N = 0 \text{ في هذا الجوار. عندئذٍ، فإن:}$$

$$f(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[ (x - x_0) \frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0) \frac{\partial}{\partial y} \right]^n f(x_0, y_0)$$

وتسمى هذه المتسلسلة متسلسلة تايلور غير المنتهية للدالة  $f(x, y)$  في الجوار  $\Omega$ . ونسمي الجوار  $\Omega$  جوار النشر.

ويمكن بسهولة إثبات أن هذا النشر وحيد في الجوار  $\Omega$ . ويمكن اشتقاق ومكاملة المتسلسلات، غير المنتهية الناتجة، حداً لحصول على مشتق أو تكامل الدالة المنشورة، بالترتيب.

حالة خاصة: إذا كان النشر بجوار النقطة  $(0, 0)$ ، فإن النشر يسمى نشر ماكلوران.

مثال 2.19: أوجد منشور تايلور للدالة  $f(x, y) = y^2 + \cos xy$  في جوار للنقطة  $P_0(\frac{1}{2}\pi, 1)$  مكافئاً بحدود الدرجة الثانية.

الحل: راضح أن الدالة  $f$  معرفة ومستمرة هي ومشتقاتها من جميع المراتب، على جوار للنقطة  $P_0$ :

$$f(\frac{1}{2}\pi, 1) = 1 + \cos \frac{1}{2}\pi = 1$$

$$f'_x(x, y) = -y \sin xy \quad ; \quad f'_x(\frac{1}{2}\pi, 1) = -1$$

$$f'_y(x, y) = 2y - x \sin xy \quad ; \quad f'_y(\frac{1}{2}\pi, 1) = 2 - \frac{1}{2}\pi$$

$$f''_{xx}(x, y) = -y^2 \cos xy \quad ; \quad f''_{xx}(\frac{1}{2}\pi, 1) = 0$$

$$f''_{yy}(x, y) = 2 - x^2 \cos xy \quad ; \quad f''_{yy}(\frac{1}{2}\pi, 1) = 2$$

$$f''_{xy}(x, y) = -\sin xy - xy \cos xy \quad ; \quad f''_{xy}(\frac{1}{2}\pi, 1) = -1$$

$$f''_{yx}(x, y) = -\sin xy - xy \cos xy \quad ; \quad f''_{yx}(\frac{1}{2}\pi, 1) = -1$$

وعليه، فإن:

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + (x - x_0)f'_x + (y - y_0)f'_y + \\ + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''_{xx} + \frac{(y - y_0)^2}{2!} f''_{yy} + 2 \frac{(x - x_0)(y - y_0)}{2!} f''_{xy} + R_3$$



$$\begin{aligned}
y^2 + \cos xy &= 1 + (x - \frac{1}{2}\pi)(-1) + (y-1)(2 - \frac{1}{2}\pi) + \\
&+ \frac{(2 - \frac{1}{2}\pi)^2}{2}(0) + \frac{(y-1)^2}{2}(-1) + 2 \frac{2 - \frac{1}{2}\pi(y-1)}{2}(-1) + R_3 \\
f(x, y) &= 1 - (x - \frac{1}{2}\pi) + (2 - \frac{1}{2}\pi)(y-1) - \frac{(y-1)^2}{2} - \\
f(x, y) &= 1 - (x - \frac{1}{2}\pi) + (2 - \frac{1}{2}\pi)(y-1) - \frac{(y-1)^2}{2} - (x - \frac{1}{2}\pi)(y-1) + R_3
\end{aligned}$$

2.13 القيم القصوى (النهايات الحدية)

### 2.13.1 القيم القصوى الموضعية

لتكن  $f$  دالة معرفة على الساحة  $\mathbb{R}^n \supseteq D$ .

تعريف 2.12: نقول عن النقطة  $P_0(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$  من  $D$ ، إنها نقطة قيمة عظمى موضعية (محلية، نسبية) للدالة  $f$ ، إذا وُجدَ جوار  $\Omega$  للنقطة  $P_0$ ، محتوى في  $D$ ، بحيث يكون:

$$f(P) \leq f(P_0) \quad ; \quad \forall P \in \Omega$$

ونسمي العدد  $f_{\max} = f(P_0)$  القيمة العظمى الموضعية للدالة  $f$ ، في الجوار  $\Omega$ .

تعريف 2.13: نقول عن النقطة  $P_0(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$  من  $D$ ، إنها نقطة قيمة صغرى موضعية (محلية، نسبية) للدالة  $f$ ، إذا وُجدَ جوار  $\Omega$  للنقطة  $P_0$ ، محتوى في  $D$ ، بحيث يكون:

$$f(P) \geq f(P_0) \quad ; \quad \forall P \in \Omega$$

ونسمي العدد  $f_{\min} = f(P_0)$  القيمة الصغرى الموضعية للدالة  $f$ ، في الجوار  $\Omega$ .

ينتج من هذين التعريفين أن  $P_0$  نقطة داخلية في  $D$ .

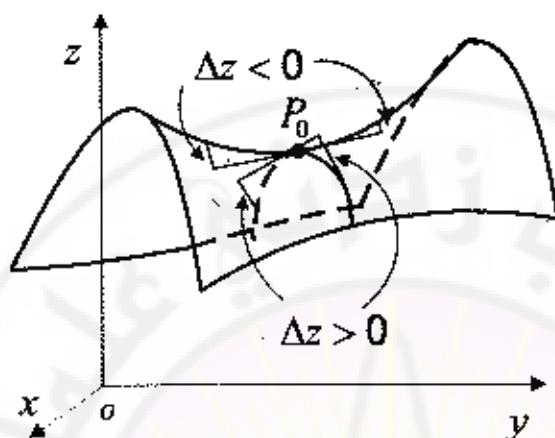
ملاحظة 2.10: يمكن بالاستفادة من العلاقة (2.12) والتعريفين السابقين، تعريف نقطة القيمة العظمى الموضعية والقيمة الصغرى الموضعية كما يلي:

... تكون  $P_0$  نقطة قيمة عظمى موضعية للدالة  $f$ ، إذا كان  $\Delta f(P_0) \leq 0$ .

-وتكون  $P_0$  نقطة قيمة صغرى موضعية للدالة  $f$ ، إذا كان  $\Delta f(P_0) \geq 0$ .

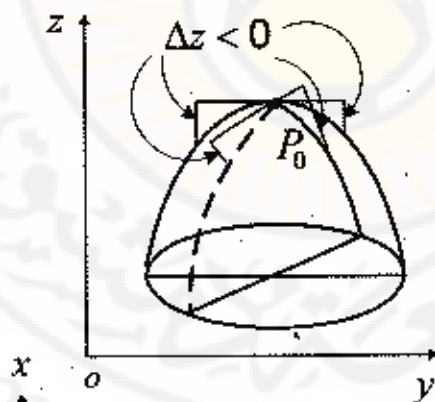
أما إذا تغيرت إشارة  $\Delta f$  في جوار النقطة  $P_0$ ، أي يوجد منحن واقع على السطح  $z = f(x, y)$ ، تكون النقطة  $P_0$  نقطة قيمة صغرى موضعية عليه، وهناك منحن آخر واقع

على السطح  $z = f(x, y)$  تكون النقطة  $P_0$  نقطة قيمة عظمى موضعية عليه، فإن هذه النقطة ليست نقطة قيمة قصوى موضعية (عظمى أو صغرى) وتسمى في هذه الحالة  $P_0$  نقطة تسرج، الشكل 2.4، وهي تقابل نقطة الانعطاف للدوال بمتغير واحد.



الشكل 2.4

ملاحظة 2.11: إذا كانت النقطة  $P_0(x_0, y_0)$  نقطة قيمة عظمى موضعية للدالة  $z = f(x, y)$ ، فإن ذلك يعني، هندسياً وجود تماس للسطح  $z = f(x, y)$  عند النقطة  $P_0$  تكون جميع النقاط المجاورة للنقطة  $P_0$  على السطح  $z$  تقع تحت المستوي المماس، الشكل 2.5.



الشكل 2.5

وبالمثل، إذا كانت  $P_0$  نقطة قيمة صغرى موضعية للدالة  $f$ ، فإن جميع النقاط المجاورة للنقطة  $P_0$  على السطح  $z$  تقع فوق المستوي المماس لهذا السطح عند النقطة  $P_0$ .

مبرهنة 2.11 (مبرهنة اللزوم): إذا كانت  $P_0$  نقطة قيمة قصوى موضعية (عظمى أو صغرى) للدالة  $f$ ، وكانت المشتقات الجزئية الأولى للدالة  $f$  موجودة عند هذه النقطة، عندئذ يكون:

$$\frac{\partial f(P_0)}{\partial x_i} = 0 \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.13)$$

الإثبات: نثبت، للسهولة، صحة المبرهنة من أجل الدالة بمتغيرين  $f(x, y)$ . ننظر للنقاط المحققة للمساواة  $y = y_0$ ، في جوار النقطة  $P_0$ . نحصل على الدالة بمتغير واحد  $f(x, y_0)$ ، والتي لها في عند النقطة  $x = x_0$ ، قيمة قصوى موضعية ولها مشتق عند هذه النقطة. أي أنه يتحقق في هذه النقطة  $x = x_0$ ، شرط وجود قيمة قصوى موضعية للدالة بمتغير واحد:  $f'_x(x_0, y_0) = 0$ .

و نتحقق بالأسلوب ذاته، من صحة المساواة  $f'_y(x_0, y_0) = 0$ .

ملاحظة 2.12: إن الشرط (2.13) هو شرط لازم وغير كافٍ، فقد تحقق النقطة  $P_0$  هذا

الشرط، ولا تكون نقطة قيمة قصوى موضعية. أي أن  $P_0$  نقطة تسرج للدالة  $f$ .

تعريف 2.14: نسمي النقاط المحققة للعلاقة (2.13) نقاطاً حرجية للدالة  $f$ .

كما هو واضح، فإن النقاط الحرجية للدالة هي نقاط القيم القصوى الموضعية ونقاط التسرج لها.

مثال 2.20: أوجد النقاط الحرجية للدالة  $f(x, y) = x \cdot y$  وبين نوعها.

الحل: نجد من الشرط (2.13):

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y = 0 \quad \text{و} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x = 0$$

أي أن النقطة الحرجية الوحيدة للدالة  $f$  هي النقطة  $P_0(0, 0)$ . ولكن هذه النقطة ليست نقطة

قيمة قصوى موضعية، لأنه في أي جوار للنقطة  $P_0$  يحوي النقطتان  $A(\varepsilon, \varepsilon)$  و  $B(-\varepsilon, \varepsilon)$ ،

حيث  $\varepsilon > 0$ . يكون:

$$f(B) = -\varepsilon^2 < 0 = f(0, 0) \quad \text{و} \quad f(A) = \varepsilon^2 > 0 = f(0, 0)$$

أي أن  $P_0$  نقطة تسرج للدالة  $f(x, y)$ .

ملاحظة 2.13: إن استخدام التعريفين 2.12 و 2.13، لتحديد نوع النقطة الحرجة غير ممكن دوماً، لذا نلجأ إلى المبرهنة:

مبرهنة 2.12 (مبرهنة الكفاية): لتكن  $z = f(x, y)$  دالة معرفة على الساحة  $\mathbb{R}^2 \supseteq D$ ، وليكن  $f \in C^2(\Omega)$ ، حيث  $\Omega$  جوار للنقطة الحرجة  $P_0(x_0, y_0)$ . لنرمز بـ:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{vmatrix} = f''_{xx}f''_{yy} - (f''_{xy})^2 \quad \text{و} \quad \Delta_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

ونميز الحالات:

- أ - إذا كان  $\Delta_2(P_0) > 0$ ، فإن النقطة الحرجة  $P_0$  نقطة قيمة قصوى موضعية، وإذا كان  $\Delta_1(P_0) > 0$ ، فإن النقطة  $P_0$  نقطة قيمة صغرى موضعية، أما إذا كان  $\Delta_1(P_0) < 0$ ، فإن النقطة  $P_0$  نقطة قيمة عظمى موضعية.
- ب - إذا كان  $\Delta_2(P_0) < 0$ ، فإن النقطة  $P_0$  نقطة تسرج للدالة  $f$ .
- ج - إذا كان  $\Delta_2(P_0) = 0$ ، فإننا لا نستطيع الحكم على نوع النقطة  $P_0$  إلا باستخدام التعريفين 2.12 و 2.13.

الإثبات: نعطي الإثبات للحالة الأولى، ويتم إثبات بقية الحالات بأسلوب مماثل.

لنمكن  $\Delta_2(P_0) > 0$ . نرمز بـ  $A = f''_{xx}(x_0, y_0)$  و  $B = f''_{xy}(x_0, y_0)$  و  $C = f''_{yy}(x_0, y_0)$ . لما كان  $f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$ ، فإن  $A > 0$  (أو  $A < 0$ ). من مبرهنة تايلور 2.9، وبفرض  $n = 1$ ، نحصل على التغير الكلي للدالة  $f$  عند النقطة  $P_0$ :

$$\Delta f = \frac{1}{2!} [A'(\Delta x)^2 + 2B'(\Delta x)(\Delta y) + C'(\Delta y)^2] \quad (2.14)$$

حيث  $A' = f''_{xx}(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)$  و  $B' = f''_{xy}(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)$  و  $C' = f''_{yy}(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)$  و  $0 < \theta < 1$ .

ولما كانت المشتقات الجزئية من المرتبة الثانية مستمرة عند  $P_0$ ، نجد

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} A' = f''_{xx}(x_0, y_0) = A > 0 \quad ((A < 0) \text{ أو})$$

وكذلك

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} (A'C' - B'^2) = f''_{xx}(x_0, y_0)f''_{yy}(x_0, y_0) - [f''_{xy}(x_0, y_0)]^2 = \Delta_2 > 0$$

ومن أجل قيم صغيرة للمتغيرات  $\Delta x$  و  $\Delta y$ ، نجد

$$A'C' - B'^2 > 0 \quad \text{و} \quad (A' < 0 \text{ أو } A' > 0)$$

ولما كان  $A' \neq 0$ ، فإنه يمكن كتابة العلاقة (2.14)، كما يلي

$$\begin{aligned} \Delta f &= \frac{1}{2!} \frac{1}{A'} [A'^2 (\Delta x)^2 + 2A'B'(\Delta x)(\Delta y) + A'C'(\Delta y)^2] = \\ &= \frac{1}{2!} \frac{1}{A'} [(A'\Delta x + B'\Delta x\Delta y)^2 + (A'C' - B'^2)(\Delta y)^2] \end{aligned}$$

إن العبارة بين القوسين [ ]، غير سالبة، لهذا، إذا كان  $A' > 0$ ، أي

للدالة  $f$ ، أما إذا كان  $A' < 0$ ، أي  $A' = f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$ ، فإن  $\Delta f \geq 0$ ، وعليه، فإن  $P_0$  نقطة قيمة صغرى موضعية

للدالة  $f$ ، أما إذا كان  $A' < 0$ ، أي  $A' = f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$ ، فإن  $\Delta f \leq 0$ ،

وعليه، فإن  $P_0$  نقطة قيمة عظمى موضعية للدالة  $f$ .

مثال 2.21: أوجد النقاط الحرجة للدالة  $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$  مبيناً نوعها.

الحل: نجد، من الشرط (2.13):

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 3x = 0 \quad \text{و} \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y = 0$$

ويحل هاتين المعادلتين نجد النقطتين الحرجتين  $P_0(0,0)$  و  $P_1(1,1)$  لبيان نوع كل من هاتين

النقطتين نوجد  $\Delta_1$  و  $\Delta_2$ :

$$\Delta_2 = \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) - \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2 = 36xy - 9 \quad \text{و} \quad \Delta_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x$$

لما كان  $\Delta_2(P_0) = -9 < 0$ ، فإن النقطة  $P_0$  نقطة تسرج.

ولما كان  $\Delta_2(P_1) = 36 - 9 > 0$  و  $\Delta_1(P_1) = 6 > 0$ ، فإن النقطة  $P_1$  نقطة قيمة صفري

موضعية للدالة  $f$ ، قيمتها  $f_{\min} = f(P_1) = -1$ .

مثال 2.22: أوجد النقاط الحرجة للدالة  $f(x, y) = -x^2$  مبيناً نوعها.

الحل: نجد، من الشرط (2.13):

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2x = 0 \quad \text{و} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

أي أن النقاط الحرجة للدالة  $f$  هي النقاط  $P(0, y)$ ، وهي تمثل محاور العينات. لتبيان نوع هذه

النقاط نوجد  $\Delta_1$  و  $\Delta_2$  عندها:

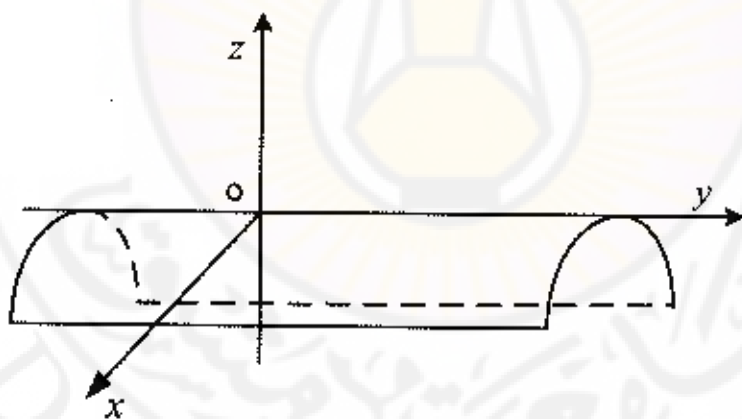
$$\Delta_2 = 0 \quad \text{و} \quad \Delta_1 = -2$$

أي أن مبرهنة الكفاية لا تحدد نوع النقاط الحرجة لذا نلجأ لتعريف نقطة القيمة القصوى.

واضح أنه في أي جوار للنقطة  $P(0, y)$  يكون:

$$f(x, y) = -x^2 \leq 0 = f(0, y)$$

أي أن هذه النقاط (نقاط محاور العينات) هي نقاط قيمة عظمى موضعية للدالة  $f$ ، الشكل 2.6.



الشكل 2.6

مثال 2.23: نريد صنع خزان ماء على شكل مشوازي مستطيلات دون غطاء، بحيث تكون

مساحة الصفائح المستخدمة ثابتة  $12 \text{ m}^2$ . ما أبعاد هذا الخزان، حتى يتسع لأكبر كمية ممكنة.

الحل: نفرض أن  $x$  و  $y$  و  $z$  أبعاد هذا الخزان عندئذ، فإن حجمه يعطى بالعلاقة  $V = xyz$ ،  
و تُعطى مساحته بدون الغطاء بالعلاقة:

$$12 = 2xy + 2yz + xz$$

نحسب من هذه العلاقة  $z$  ونعوض في علاقة الحجم

$$V = \frac{xy(12 - 2xy)}{x + 2y}$$

نوجد القيمة العظمى للدالة الحجم، فنجد  $y = 1$  و  $x = 2$  و  $z = 2$ .

تعميم مبرهنة الكفاية: لتكن  $f$  دالة معرفة على الساحة  $\mathbb{R}^n \supseteq D$  ولتكن  $f \in C^2(\Omega)$  حيث  $\Omega$  جوار للنقطة الحرجة  $P_0$ . نرمز بـ

$$A_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \quad \text{و} \quad \Delta_m = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mm} \end{vmatrix} ; \quad m = 1, 2, \dots, n$$

عندئذ:

أ - إذا كانت جميع المحددات  $\Delta_m$  موجبة عند النقطة  $P_0$ ، فإن نقطة قيمة صفري موضعية.

ب - إذا كانت المحددات  $\Delta_m$  متناوبة الإشارة عند  $P_0$ ، شرط أن يكون  $\Delta_1(P_0) < 0$ ، فإن نقطة قيمة عظمى موضعية.

ج - إذا لم يتحقق أحد الشرطين السابقين وكان أحد المحددات ذات الدليل الفردي موجباً أو كان أحد المحددات ذات الدليل الزوجي سالباً، عند النقطة  $P_0$ ، فإن هذه النقطة نقطة تسرج.

د - إذا كان أحد المحددات  $\Delta_m$  معدوماً عند النقطة  $P_0$ ، فإن المبرهنة تتحقق في تحديد نوع النقطة  $P_0$ .

### 2.13.2 القيم القصوى المقيدة - طريقة لاغرانج

رأينا في المثال 2.22، أن إيجاد القيمة العظمى للدالة  $V$  كان خاضعاً لشرط، هو أن مساحة

الخزان ثابتة، وهذه المسألة هي مسألة القيم الحدية المقيدة.

فإذا كان المطلوب إيجاد القيم القصوى لدالة بثلاثة متغيرات  $f(x, y, z)$ ، مقيدة بالشرط  $g(x, y, z) = 0$ ، فإنه يمكن الحصول على أحد المتغيرات وليكن  $z$  مثلاً، من معادلة القيد ونعوضها بالدالة المطلوب إيجاد القيم القصوى لها  $f(x, y, z)$  فنحصل على دالة بمتغيرين فقط  $x$  و  $y$  ونحسب القيم القصوى لهذه الدالة. فتكون هي القيم القصوى للدالة  $f$  المقيدة بالشرط  $g = 0$ ، أما إذا تعذر ذلك فإننا نلجأ لطريقة لاغرانج:

طريقة لاغرانج:

لتكن  $u = f(P)$  دالة معرفة على الساحة  $\mathbb{R}^n \supseteq D$  ترتبط متغيراتها بـ  $m$  قيد، حيث  $1 \leq m < n$ ، معطاة بالعلاقات:

$$g_i(P) = 0 \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, m$$

وليكن  $f, g \in C^1(D)$ ، نشكل دالة لاغرانج:

$$F(P; \lambda) = f(P) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(P)$$

حيث  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  ثوابت يُطلب تعيينها، تسمى مضاريب لاغرانج.

نوجد النقاط الحرجة للدالة  $F$  وذلك بالتعويض في العلاقة (2.13) لنجد  $m+n$  معادلة، فيها  $m+n$  مجهول، هي  $x_1, x_2, \dots, x_m$  و  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ . يحلها نوجد النقاط الحرجة المقابلة لمضاريب لاغرانج.

نطبق بعد ذلك مبرهنة الكفاية على كل دالة من دوال لاغرانج  $F(P; \lambda^*)$  من أجل قيم معينة لمضاريب لاغرانج  $\lambda^*$  تقابل النقطة الحرجة  $P_0$ .

مثال 2.24: أوجد القيم القصوى للدالة  $f(x, y) = x^2 + y^2$ ، المقيدة بالشرط

$$x + y = 1$$

الحل: نشكل دالة غرانج

$$F(x, y; \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(x + y - 1)$$

نوجد النقاط الحرجة لهذه الدالة:



$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = x + y - 1 = 0 \quad \text{و} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y + \lambda = 0 \quad \text{و} \quad \frac{\partial F}{\partial x} = 2x + \lambda = 0$$

أي أن النقطة الحرجة الوحيدة لهذه الدالة  $P_0\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ، تقابل القيمة  $\lambda = -1$ . نتحقق من نوع هذه النقطة الحرجة للدالة:

$$F(x, y, -1) = x^2 + y^2 - x - y + 1$$

نوجد  $\Delta_1$  و  $\Delta_2$ :

$$\Delta_2 = (2)(2) - 0 = 4 > 0 \quad \text{و} \quad \Delta_1 = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2 > 0$$

أي أن النقطة  $P_0\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$  نقطة قيمة صغرى للدالة  $f(x, y)$  مقيدة بالشرط  $x + y = 1$ .

### 2.13.3 القيم القصوى المطلقة (الشاملة)

القيمة الصغرى المطلقة لدالة  $f$  هي أصغر قيم هذه الدالة.

والقيمة العظمى المطلقة لدالة  $f$  هي أكبر قيم هذه الدالة.

ذكرنا في 2.3، أن الدالة المستمرة على ساحة مغلقة تبلغ قيمتها العظمى والصغرى على هذه الساحة. وعليه، لإيجاد القيمة العظمى المطلقة والقيمة الصغرى المطلقة للدالة  $f$  على الساحة المغلقة  $\bar{D}$ ، نوجد قيم الدالة  $f$  عند النقاط الحرجة لهذه الدالة داخل  $D$ ، ثم نوجد القيم القصوى للدالة  $f$  على محيط الساحة  $D$ ، وتكون القيمة الصغرى المطلقة للدالة  $f$  هي أصغر هذه القيم، وتكون القيمة العظمى المطلقة للدالة  $f$  هي أكبر هذه القيم.

مثال 2.25: أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة  $z = x^2 + y^2$  على المربع:

$$\bar{D} = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$$

الحل: نبحث عن النقاط الحرجة الواقعة داخل  $D$  أو على محيطها فقط:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x = 0 \quad \text{و} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y = 0$$

أي أن النقطة  $P_0(0, 0)$  النقطة الحرجة الوحيدة.

نبين نوع هذه النقطة: نوجد  $\Delta_1$  و  $\Delta_2$  :

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2 > 0 \quad \text{و} \quad \Delta_2 = (2)(2) - 0 = 4 > 0$$

أي أن  $P_0$  نقطة قيمة صغرى موضعية للدالة  $f(x, y)$  ، وقيمتها  $z_{\min} = z(P_0) = 0$  ،

نوجد الآن، القيم الأكبر والأصغر للدالة  $z$  على محيط المربع:

على الضلع  $L_1 = \{(x, y) : x = 1, -1 \leq y \leq 1\}$  يكون:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2y = 0 \quad \text{و} \quad z_1 = 1 + y^2$$

أي أن النقطة  $y = 0$  هي نقطة حرجية للدالة  $z_1$  . ولما كان  $\frac{d^2 z_1}{dy^2} = 2 > 0$  ، فإن هذه

النقطة هي نقطة قيمة صغرى، قيمتها  $(z_1)_{\min} = 1$  .

وعند نهايتي الضلع  $L_1$  ، أي عند النقطتين  $P_1(1, -1)$  و  $P_2(1, 1)$  نجد:

$$z_2(1, 1) = z_1(1, -1) = 2$$

نكرر هذه العملية على بقية أضلاع المربع:

$$L_2 = \{(x, y) : y = 1, -1 \leq x \leq 1\}$$

$$L_3 = \{(x, y) : x = -1, -1 \leq y \leq 1\}$$

$$L_4 = \{(x, y) : y = -1, -1 \leq x \leq 1\}$$

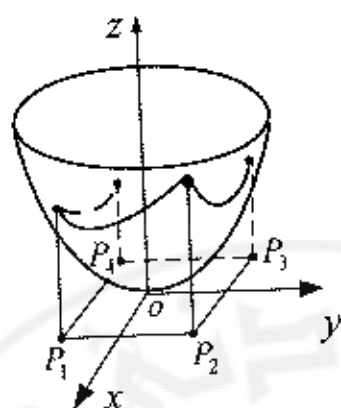
وهكذا، فإن القيمة الصغرى المطلقة للدالة  $z$  على المربع  $\bar{D}$  هي القيمة

$$z_{\min} = z(P_0) = 0$$

والقيمة العظمى المطلقة على المربع  $\bar{D}$  هي القيمة

$$z_{\max} = 2$$

تبلغها الدالة  $z$  عند رؤوس المربع  $\bar{D}$  ، الشكل 2.7.



الشكل 2.7



## تمارين الفصل الثاني

1. أوجد مجموعة تعريف كل من الدوال:

$$f(x, y) = \sqrt{x-2y} \quad \cdot \quad f(x, y, z) = x \sin(y+z)$$

$$f(x, y) = x^2 + 1 \quad \cdot \quad f(x, y) = \ln x + \ln(\sin y)$$

$$f(x, y) = \sqrt[3]{y-3x} \quad \cdot \quad f(x, y) = \operatorname{arccot}(y/x)$$

$$f(x, y) = \ln[(4-x^2-y^2)(x^2+y^2-2)]$$

2. أوجد ساحة استمرار كل من الدوال:

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + 2y & ; (x, y) \neq (1, 2) \\ 0 & ; (x, y) = (1, 2) \end{cases}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{3x^2y}{x^2+y^2} & ; (x, y) \neq (0, 0) \\ 17 & ; (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

3. أثبت أن  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2y}{x^2+y^2} = 0$ .

4. أوجد قيمة كل من النهايات:

$$\lim_{P \rightarrow (1,2)} \frac{xy - y}{x^2 - x + 2xy - 2y}$$

$$\cdot \quad \lim_{P \rightarrow (2,3,1)} \frac{y^2 - 4y + 3}{x^2 z (y - 3)}$$

$$\lim_{P \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}$$

$$\cdot \quad \lim_{P \rightarrow (2,1,2)} \frac{x^2 - z^2}{x^3 - z^3}$$

$$\lim_{P \rightarrow (0,0)} \frac{3x^3 - 2x^2y + 3xy^2 - 2y^3}{x^2 + y^2}$$

$$\cdot \quad \lim_{P \rightarrow (0,0)} \frac{x \sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$$

5. أثبت عدم وجود النهايات:

$$\lim_{P \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y}{x^4 + y^2}$$

$$\cdot \quad \lim_{P \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

$$\begin{aligned} \lim_{P \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \quad , \quad \lim_{P \rightarrow (0,0)} \frac{2x^2 + 3y^2 + z^2}{x^2 + y^2 + z^2} \\ \lim_{P \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2 y^3}{2y^5 - 2x^5} & \quad , \quad \lim_{P \rightarrow (0,0,0)} \frac{x^3 + y^3 + z^3}{xyz} \\ \lim_{P \rightarrow (2,1,0)} \frac{(x+y+z-3)^5}{z^3(x-2)(y-1)} & \quad , \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{x^2 - 2xy + 5y^2 - 4}{3x^2 + 4y^2 - 7} \end{aligned}$$

6. إذا كان:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y + xy^2}{x^2 + y^2} \sin(x - y) & ; (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & ; (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

أثبت أن  $f''_{xy}(0, 0) \neq f''_{yx}(0, 0)$

7. إذا كان

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} & ; (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & ; (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

أوجد  $f'_x(0, 0)$  و  $f'_y(0, 0)$  وادرس استمرار  $f$  عند النقطة  $(0, 0)$ .

8. إذا كان

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \left( \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right) & ; (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & ; (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

أوجد  $f''_{xy}(0, 0)$  و  $f''_{yx}(0, 0)$  وأثبت أن  $f''_{xy}(0, 0) \neq f''_{yx}(0, 0)$ .

9. أوجد  $F'(t)$  في الحالتين

$$F(t) = \int_0^t \arctan \frac{x}{t} dx \quad \text{و} \quad F(t) = \int_{\sqrt{t}}^{1/t} \cos tx^2 dx$$

10. أثبت أن  $\int_0^{\pi} \frac{dx}{(5-3\cos x)^3} = \frac{59}{2048}\pi$

11. إذا كان  $z^3 - xz - y = 0$ ، أثبت أن  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{3z^2 + x}{(3z^2 - x)^3}$

12. إذا كان  $z = x^3 y$  و  $x^2 + y^3 = t^2$ ، أوجد  $\frac{dz}{dt}$

13. أثبت أن الدالة  $u(x, y) = xf(x+y) + yg(x+y)$  تحقق المعادلة  $u_{xx}'' - 2u_{xy}'' + u_{yy}'' = 0$  حيث  $f$  و  $g$  دوال قابلة للمفاضلة حتى المرتبة الثانية.

14. أثبت أن الدالة  $u(x, y) = f(x+ay) + g(x-ay)$  حيث  $f$  و  $g$  دوال قابلة للمفاضلة حتى المرتبة الثانية، تحقق المعادلة  $u_{xx}'' = a^2 u_{yy}''$

15. أثبت أن الدالة الفضولة  $z = f(x-y)$  تحقق المعادلة  $z'_x + z'_y = 0$

16. إذا كانت  $z = f(x, y)$  دالة قابلة للمفاضلة حتى المرتبة الثانية وكان

$x = s+t$  و  $y = s-t$ ، أثبت أن  $(z'_s)^2 - (z'_t)^2 = z'_s \cdot z'_t$

17. إذا كانت الدالة  $f$  قابلة للمفاضلة، أثبت أن الدالة  $z = y + f(x^2 - y^2)$  تحقق المعادلة  $yz'_x + xz'_y = x$

18. أثبت أن الدالة الفضولة  $z = f\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$  تحقق معادلة لابلاس  $z''_{xx} + z''_{yy} = 0$

19. أثبت أن الدالة الفضولة  $z = x^n f\left(\frac{y}{x^2}\right)$  حيث  $n \in \mathbb{R}$ ، تحقق المعادلة  $xz'_x + xy'_y = xz$

20. إذا كان  $u = z \sin \frac{x^3}{y}$  و  $x = r^2 + 2s$  و  $y = 4r + 2s^3$  و  $z = 3r^2 + 4s^2$ ، أوجد  $\frac{\partial u}{\partial s}$  و  $\frac{\partial u}{\partial r}$

21. أوجد تفاضل التفاضل التام للدالة  $z = f(u, v)$  حيث  $u = x + y$  و

$$v = x - y$$

22. أوجد القيم القصوى للدوال الآتية:

$$f(x, y) = e^{x^2 + y^2} \quad , \quad f(x, y) = y\sqrt{x} - x - y^2 + 6y$$

$$f(x, y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2} \quad , \quad f(x, y) = xy e^{x^2 - y^2}$$

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2 + y^2} \quad , \quad f(x, y, z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$$

$$f(x, y) = x \sin y \quad , \quad f(x, y) = x^2 + y^2$$

$$f(x, y) = y^2 \quad , \quad f(x, y) = \frac{(x + y + 1)^2}{x^2 + y^2 + 1}$$

$$f(x, y) = \sin x + \sin y + \sin(x + y); 0 \leq x \leq 2\pi, 0 \leq y \leq 2\pi$$

$$f(x, y) = \sin x + \sin y + \cos(x + y); 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{4}$$

23. أوجد القيم القصوى للدوال الآتية مع القيد أو القيود المبينة بجوارها:

$$f(x, y) = x^2 - y^2 \quad ; \quad x^2 + y^2 = 1$$

$$f(x, y) = 2x + y \quad ; \quad x^2 + 4y^2 = 1$$

$$f(x, y) = xy \quad ; \quad 9x^2 + y^2 = 4$$

$$f(x, y) = x + 3y + 5 \quad ; \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

$$f(x, y, z) = x + 2y \quad ; \quad x^2 + y^2 = 4 \text{ و } x + y + z = 1$$

$$f(x, y, z) = xy + yz \quad ; \quad y^2 + z^2 = 1 \text{ و } xy = 1$$

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \quad ; \quad x^4 + y^4 + z^4 = 1$$

$$f(x, y) = x^2 + y \quad ; \quad x^2 + y^2 = 1$$

24. أوجد أقصر مسافة بين النقطة  $P(1, 0, -2)$  والمستوي  $x + 2y + z = 1$ .

25. أوجد نقطة على السطح  $z^3 = xy + 1$  تكون أقرب ما يمكن لنقطة الأصل  $O$ .



26. يتقاطع المستوي  $x + y + z = 24$  مع مجسم القطع المكافئ الدوراني  $x^2 + y^2 = z$  بقطع ناقص، أوجد أعلى نقطة وأخفض نقطة من هذا القطع.

27. عين قيمة  $a$  و  $b$  كي تكون مساحة القطع الناقص  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  الذي يحوي الدائرة  $x^2 + y^2 = 2y$  أصغرية.

28. أوجد ثلاثة أعداد موجبة جداولها 8، بحيث تكون مجموع مربعاتها أصغر ما يمكن.

29. أوجد أربعة أعداد موجبة مجموعها 100، بحيث يكون جداولها أعظم ما يمكن.

30. أوجد أبعاد مستطيل طول محيطه 60، ومساحته أكبر ما يمكن.

31. أوجد أبعاد مستطيل مساحته 36، بحيث يكون محيطه أقل ما يمكن.

32. أوجد أقرب نقطة من نقطة الأصل، تقع على المستقيم

$$\{x + 3y - 2z = 11, 2x - y + z = 3\}$$

33. أوجد القيم القصوى للدالة  $F = x^2 + y^2 + z^2$  ، المقيدة بالشروطين

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} + \frac{z^2}{25} = 1 \text{ و } x + y = z. \text{ اعطِ تفسيراً هندسياً للنتيجة.}$$

34. أوجد القيم القصوى للمقدار  $z$  على السطح

$$35 = 2x^2 + 3y^2 + z^2 - 12xy + 4xz$$

35. ما أبعاد متوازي السطوح الذي يمكن رسمه داخل المجسم

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{36} = 1$$



### الفصل الثالث

#### الحقل المتجهي

- 3.1 الحقل السلمي والحقل المتجهي
  - 3.2 المشتق الموجه ومتجه التدرج
  - 3.3 تفرق ودوران حقل متجهي
  - 3.4 الحقل الكموي
  - 3.5 الحقل اللولبي
  - 3.6 العمليات على الحقول في الإحداثيات المنحنية المتعامدة
- تمارين الفصل الثالث



## الحقل المتجهي

### 3.1 الحقل السلمي والحقل المتجهي

يظهر مفهوم الحقل كثيراً في الفيزياء الحديثة. ولما كانت دراسة نظرية الحقول ليست ضمن نطاق هذا الكتاب، فإننا سنعرض باختصار لبعض مفاهيمها.

نقول في الحالة العامة، إنه في منطقة فراغية  $V$  معطى حقلاً للقيمة  $f$ ، إذا كان في كل نقطة من هذه المنطقة مُعطى مقداراً لهذه القيمة. فمثلاً، عند دراسة تدفق غاز تظهر عدة حقول: حقل الحرارة (في كل نقطة لدرجة الحرارة قيمة معينة)، وحقل الضغط وحقل السرعة وغيرها.

نسمي حقل القيمة  $f$  حقلاً مستقرًا، إذا كانت القيمة  $f$  غير مرتبطة بالزمن. وفي الحالة المعاكسة - يسمى الحقل حقلاً غير مستقر. وعليه، فإن القيمة  $f$  هي دالة في النقطة  $P$  في الزمن  $t$ .

ندرس، للسهولة، حقولاً مستقرة فقط.

وتظهر في المسائل الفيزيائية، قيم سلمية (عددية) وقيم متجهية (شعاعية). وعليه، توجد حقول سلمية وحقول متجهية.

#### 3.1.1 الحقل السلمي

لتكن  $V$  منطقة ما (فراغية أو مستوية). إذا عرفنا في كل نقطة  $P$  من المنطقة  $V$  قيمة عددية  $f$ ، فإننا نقول إنه معطى في المنطقة  $V$  حقل سلمي.

إن مفهوم الحقل السلمي والدالة المعرفة على المنطقة  $V$  متطابقان. ونقول، عادةً، يُعطى الحقل السلمي بالدالة  $f(P)$ ، وتسمى  $f$  دالة سلمية (عددية).

ومثالاً على الحقل السلمي، حقل درجات حرارة الهواء في مكان ما. فإذا نظرنا لدرجة الحرارة كدالة متعلقة بموضع النقطة، ففي النقاط الواقعة قرب منبع الحرارة تكون درجة الحرارة أعلى منها عند النقاط التي تقع أبعد عن المنبع. وإذا كانت درجة الحرارة متساوية في كل نقطة من نقاط منطقة، فإننا نقول إن الحقل ثابت في هذه المنطقة.

لما كان موضع النقطة  $P$  يتعين في الفضاء بثلاثة إحداثيات، فإن  $f$  دالة بثلاثة متغيرات:

مستقلة، وتكتب في الجملة الديكارتية:  $f = f(x, y, z)$ .

إذا كانت  $f \in C^1(V)$  وكانت هذه المشتقات لا تنعدم في أي معاً، فإن المعادلة  $f(x, y, z) = c$ ، حيث  $c$  ثابت، تعرف سطحاً أملساً يسمى سطح سوية للدالة  $f$  عند النقطة  $P(x, y, z)$ . كما هو واضح، فإن هذا السطح وحيد، لأنه إذا مر سطحاً سوية من نقطة  $P$ ، فإن للدالة  $f$  قيمتان مختلفتان عندها، وهذا يناقض تعريف الدالة. وعليه، فإن سطح السوية لدالة  $f$  لا تقاطع فيما بينها.

مثالاً على ذلك، سطح تساوي درجات الحرارة في جسم ساخن.

وكذلك، فإن الإحداثي الكروي  $r$  هو حقل أو دالة سلمية:  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ، سطح سوية لها كرات مركزها نقطة الأصل  $O$  ونصف قطرها  $c$ ، معادلاتها  $x^2 + y^2 + z^2 = c^2$ .

### 3.1.1 الحقل المتجهي

يُعرف الحقل المتجهي، بأسلوب مماثل للحقل السلمي. فإذا عرّفنا في كل نقطة  $P$  من منطقة  $V$ ، المتجه  $\vec{F}(P)$ ، فإننا نقول إنه مُعطى في  $V$  حقلاً متجهياً، ونسُمي  $\vec{F}(P)$  دالة متجهية معرفة على  $V$ .

و مثالاً على ذلك، حقل السرعة وحقل القوة وغيرها.

إذا كان  $t \in V \subseteq \mathbb{R}$ ، وكان  $\vec{F}$  مُعطى في الفضاء الديكاري  $xyz$ ، فإنه يكتب كما يلي:

$$\vec{F} : V \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3; \vec{F}(t) = F_1(t)\hat{i} + F_2(t)\hat{j} + F_3(t)\hat{k}$$

حيث  $F_1(t)$  و  $F_2(t)$  و  $F_3(t)$  مركبات المتجه  $\vec{F}(t)$  على المحاور الإحداثية. ونقول إن الحقل المتجهي  $\vec{F}(P)$  دالة متجهية في المتغير الحقيقي  $t$ ، معرفة على  $V$ .

نعمم هذا التعريف، فإذا كان  $P(x, y) \in V \subseteq \mathbb{R}^2$  وكان  $\vec{F}(P)$  مُعطى في الفضاء الديكاري  $xyz$ ، فإنه يكتب كما يلي:

$$\vec{F} : V \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3; \vec{F}(x, y) = F_1(x, y)\hat{i} + F_2(x, y)\hat{j} + F_3(x, y)\hat{k}$$

وإذا كان  $P(x, y, z) \in V \subseteq \mathbb{R}^3$  وكان  $\vec{F}(P)$  مُعطى في الفضاء الديكاري  $xyz$ ، فإنه يكتب كما يلي:

$$\vec{F} : V \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3; \vec{F}(x, y, z) = F_1(x, y, z)\hat{i} + F_2(x, y, z)\hat{j} + F_3(x, y, z)\hat{k}$$

إذا كانت  $\{x = x(t), y = y(t), z = z(t)\}$  المعادلات الوسيطة لمنحنٍ في الفضاء، فإن المعادلة المتجهية لهذا المنحنى تُعطى بواسطة متجه الموضع، لأي نقطة  $P(x, y, z)$  من نقاطه:

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$$

تكون الدالة المتجهية  $\vec{r}(P)$  مستمرة على المنطقة  $V$ ، إذا كانت الدوال السلمية  $F_1(t)$  و  $F_2(t)$  و  $F_3(t)$  مستمرة عليها.

#### مشتقات الدالة المتجهية:

نعرف المشتق العادي للمتجه  $\vec{r}(P)$  عند نقطة  $t \in V \subseteq \mathbb{R}$ ، تماماً كما عرفنا مشتق الدالة العددية بمتغير واحد، فإذا وُجدت النهاية:

$$\vec{r}'(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

فإنها تسمى مشتق المتجه  $\vec{r}$ ، وعليه، فإن مشتق الدالة المتجهية  $\vec{r}(t)$  يمكن أن يُكتب بدلالة المركبات:

$$\vec{r}'(t) = \frac{dF_1}{dt}\hat{i} + \frac{dF_2}{dt}\hat{j} + \frac{dF_3}{dt}\hat{k}$$

ويمكن بالطريقة ذاتها، تعريف المشتقات من مراتب أعلى.

نعرف، بأسلوب مشابه، المشتقات الجزئية للدوال المتجهية بمتغيرين فأكثر.

وعليه، فإن قواعد اشتقاق الدوال العددية مشابه قواعد اشتقاق الدوال المتجهية:

فإذا كانت  $\vec{F}$  و  $\vec{G}$  و  $\vec{H}$  دوال متجهية في المتغير  $t$ ، وكانت  $f$  دالة عددية في  $t$ ، فإن:

$$\frac{d}{dt}(f\vec{F}) = f \frac{d\vec{F}}{dt} + \vec{F} \frac{df}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{F} \cdot \vec{G}) = \frac{d\vec{F}}{dt} \cdot \vec{G} + \vec{F} \cdot \frac{d\vec{G}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{F} \times \vec{G}) = \frac{d\vec{F}}{dt} \times \vec{G} + \vec{F} \times \frac{d\vec{G}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{F}, \vec{G}, \vec{H}) = \left( \frac{d\vec{F}}{dt}, \vec{G}, \vec{H} \right) + \left( \vec{F}, \frac{d\vec{G}}{dt}, \vec{H} \right) + \left( \vec{F}, \vec{G}, \frac{d\vec{H}}{dt} \right)$$

وإذا كانت  $\vec{F}$  و  $\vec{G}$  و  $\vec{H}$  دوال متجهية بمتغيرين فأكثر، فإن المشتقات الجزئية بالنسبة إلى  $x$ ،  
مثلاً:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\vec{F} \cdot \vec{G}) = \frac{\partial \vec{F}}{\partial x} \cdot \vec{G} + \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{G}}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\vec{F}, \vec{G}, \vec{H}) = \left( \frac{\partial \vec{F}}{\partial x}, \vec{G}, \vec{H} \right) + \left( \vec{F}, \frac{\partial \vec{G}}{\partial x}, \vec{H} \right) + \left( \vec{F}, \vec{G}, \frac{\partial \vec{H}}{\partial x} \right)$$

ملحوظة 3.1: إذا كانت طولية الدالة المتجهية  $\vec{F}(t)$  ثابتة،  $|\vec{F}(t)| = c$ ، فإن المتجهين  $\vec{F}(t)$  و  $\vec{F}'(t)$  متعامدان:

$$\vec{F}(t) \cdot \vec{F}'(t) = \left| \vec{F}(t) \right|^2 \Rightarrow \vec{F} \cdot \vec{F}' + \vec{F}' \cdot \vec{F} = 0$$

$$2\vec{F}' \cdot \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{F}' \perp \vec{F}$$

مثال 3.1: إذا كانت  $P$  نقطة مادية تتحرك على المنحني:

$$\{x = 3 \sin t, y = 3 \cos t, z = e^{-t}\}$$

احسب سرعة وتسارع هذه النقطة في اللحظة  $t = 0$ .

الحل: إن متجه الموضع للنقطة  $P$  هو:

$$\vec{r} = (3 \sin t)\hat{i} + (3 \cos t)\hat{j} + e^{-t}\hat{k}$$

وعليه، فإن متجه السرعة، الذي يُمثل مشتق متجه الموضع، يُعطى بالعلاقة:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = (3 \cos t)\hat{i} + (-3 \sin t)\hat{j} - e^{-t}\hat{k} \Rightarrow v|_{t=0} = 3\hat{i} - \hat{k}$$

ومتجه التسارع، الذي يُمثل مشتق متجه السرعة، يُعطى بالعلاقة:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = (-3 \sin t)\hat{i} + (-3 \cos t)\hat{j} + e^{-t}\hat{k} \Rightarrow a|_{t=0} = -3\hat{j} + \hat{k}$$

التكامل العادي للدالة المتجهية بمتغير واحد:

إذا كانت  $\vec{F}$  و  $\vec{G}$  دالتان متجهيتان تحققان العلاقة:  $d\vec{G}(t) = \vec{F}(t)dt$ ، فإن:

$$\vec{G}(t) = \int \vec{F}(t)dt + c$$

حيث  $c$  متجه ثابت.



مثال 3.2: إذا كان  $\vec{F} = 2t^2\hat{i} + 6t\hat{k}$  و  $\vec{G} = t\hat{i} - t^2\hat{j} + (t-1)\hat{k}$ ، احسب

$$\int_0^2 (\vec{F} \times \vec{G}) dt, \quad \int_0^2 (\vec{F} \cdot \vec{G}) dt$$

الحل: لما كان

$$\vec{F} \times \vec{G} = 6t^3\hat{i} + (8t^2 - 2t^3)\hat{j} - 2t^4\hat{k} \quad , \quad \vec{F} \cdot \vec{G} = 2t^3 + 6t(t-1)$$

فإن

$$\begin{aligned} \int_0^2 (\vec{F} \cdot \vec{G}) dt &= \int_0^2 (2t^3 + 6t^2 - 6t) dt = \left[ \frac{1}{2}t^4 + 2t^3 - 3t^2 \right]_0^2 = 12 \\ \int_0^2 (\vec{F} \times \vec{G}) dt &= \int_0^2 [6t^3\hat{i} + (8t^2 - 2t^3)\hat{j} - 2t^4\hat{k}] dt = \\ &= \left[ \frac{3}{2}t^4\hat{i} + \left( \frac{8}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^4 \right)\hat{j} - \frac{2}{5}t^5\hat{k} \right]_0^2 = 24\hat{i} + \frac{40}{3}\hat{j} - \frac{64}{5}\hat{k} \end{aligned}$$

3.2 المشتق الموجه ومتجه التدرج

لتكن  $f = f(x, y, z)$  دالة سلمية معرفة على منطقة فراغية  $V$ ، بحيث  $f \in C^1(V)$ . وليكن  $f(P) = c_1$  سطح سوية مار بالنقطة  $P(x, y, z)$  و  $f(Q) = f + \Delta f = c_2$  سطح سوية آخر يمر بالنقطة  $Q(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ ، القريبة من النقطة  $P(x, y, z)$ .

نرمز بـ  $\ell$  للوسيط الذي يُعبر عن المسافة على المستقيم المار بالنقطتين  $P$  و  $Q$ ، وليكن  $\vec{\ell}$  متجهاً يوازي المستقيم المذكور، الشكل 3.1.

ولتكن  $\cos \alpha$  و  $\cos \beta$  و  $\cos \gamma$  جيبوس تمام توجيه هذا المتجه. عندئذٍ، فإن:

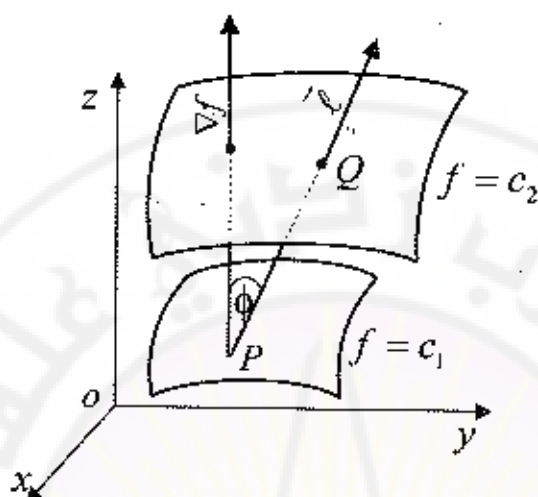
$$\Delta x = \Delta \ell \cos \alpha \quad \text{و} \quad \Delta y = \Delta \ell \cos \beta \quad \text{و} \quad \Delta z = \Delta \ell \cos \gamma$$

نعرف مشتق الدالة  $f$ ، الموجه وفق اتجاه المتجه  $\vec{\ell}$ ، عند النقطة  $P$ ، بأنه سرعة تغير الدالة  $f$  عند

هذه النقطة، وفق اتجاه المتجه  $\vec{\ell}$ . ونرمز له بالرمز  $\frac{\partial f}{\partial \ell}(P)$ . أي أن

$$\frac{\partial f}{\partial \ell}(P) = \lim_{\Delta \ell \rightarrow 0} \frac{f(P) - f(Q)}{\Delta \ell}$$

إن  $\Delta t \rightarrow 0$  تعني أن النقطة  $Q$  تسمى إلى النقطة  $P$ ، على المستقيم المار من النقطتين  $P$  و  $Q$ .



الشكل 3.1

واضح من تعريف المشتق الموجه أنه مستقل عن الجملية الإحداثية. إن العلاقة الأخيرة تشبه علاقة تعريف مشتق دالة بمتغير واحد  $f$ ، وبلاستفادة من علاقة اشتقاق الدالة المركبة، نجد:

$$\frac{\partial f}{\partial t}(P) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} \quad (3.1)$$

ولما كان  $\frac{dx}{dt} = \cos \alpha$  و  $\frac{dy}{dt} = \cos \beta$  و  $\frac{dz}{dt} = \cos \gamma$ ، فإن العلاقة (3.1)، نكتب كما يلي:

$$\frac{\partial f}{\partial t}(P) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \cos \beta + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \cos \gamma$$

ويمكن كتابة الطرف الأيمن هذه العلاقة كمجاء داخلي لتجهين:

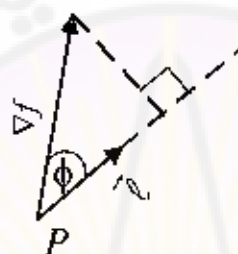
$$\frac{\partial f}{\partial t}(P) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \cdot (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) \quad (3.2)$$

نسمي المتجه  $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$  متجه التدرج للدالة  $f$ ، ونرمز له بالرمز  $\text{grad } f$ ، أو بالرمز  $\nabla f$ .

وعليه، فإن العلاقة (3.2) تُكتب كما يلي:

$$\frac{\partial f}{\partial \ell}(P) = \nabla f \cdot \hat{\ell}$$

تدل هذه العلاقة، على أن المشتق الموجه  $\frac{\partial f}{\partial \ell}(P)$  هو مركبة لمتجه التدرج  $\nabla f$  على المتجه  $\hat{\ell}$ .  
الشكل 3.2.



الشكل 3.2

في الحالة الخاصة، إذا كان  $\hat{\ell} = \hat{i}$ ، فإن

$$\nabla f \cdot \hat{i} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) \cdot (1, 0, 0) = \frac{\partial f}{\partial x}$$

أي أن المشتقات الجزئية التي مرت معنا في الفصل السابق، هي حالات خاصة من المشتقات الموجهة.

كما أن المشتق الموجه مستقل عن الجملة الإحداثية، فإن التدرج أيضاً، مستقل عن الجملة الإحداثية.

ولما كان  $f \in C^1(V)$ ، فإن التدرج  $\nabla f$  موجود في كل نقطة من نقاط  $V$ ، ونقول إن  $\nabla f$  تدرج الدالة  $f$  على  $V$ .

<sup>1</sup> من الكلمة اللاتينية gradient

### 3.2.1 العلاقة بين تفاضل دالة وتدرجها

من تعريف التفاضل التام للدالة  $f$ ، نجد

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \cdot (dx, dy, dz)$$

$$df = \nabla f \cdot d\vec{r} \quad ; \quad d\vec{r} = (dx, dy, dz)$$

حيث  $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$  متجه الموضع للنقطة  $P$ .

إذا كان  $f(x, y, z) = c$  سطح سوية مار بالنقطة  $P$ ، فإن  $df = 0$ ، وعليه، فإن:

$$\nabla f \cdot d\vec{r} = 0$$

وهذا يعني أن المتجه  $\nabla f$  يُعَامِد المتجه  $d\vec{r}$ . وهذا المتجه يقع في المستوي المماس لسطح السوية

المر بالنقطة  $P$ . أي أن متجه التدرج  $\nabla f$  يعامد سطح السوية عند النقطة  $P$ .

وهكذا، فإن التدرج  $\nabla f$  هو مشتق موجه للدالة  $f$ . وإذا كان  $\nabla f \neq \vec{0}$ ، فإن التدرج موجه

وفق توجيه ناظم السطح  $f$  عند النقطة  $P$ . أما إذا كان  $\nabla f = \vec{0}$ ، فإن المشتق

الموجه للدالة  $f$ ، عند النقطة  $P$  في أي اتجاه، مساو للصفر.

ولما كان

$$\frac{\partial f}{\partial \ell}(P) = \nabla f \cdot \hat{\ell} = |\nabla f| \cdot |\hat{\ell}| \cos \phi = |\nabla f| \cos \phi$$

حيث  $\phi$  الزاوية بين المتجهين  $\nabla f$  و  $\hat{\ell}$ ، و  $|\cos \phi| \leq 1$ ، فإن  $\left| \frac{\partial f}{\partial \ell} \right| \leq |\nabla f|$

أي أن طول متجه التدرج عند النقطة  $P$ ، هو القيمة الأعظم للمشتق الموجه للدالة  $f$  وفق أي

اتجاه ممكن عند النقطة  $P$ . ويبلغ قيمته العظمى، عندما يكون  $\phi = 0$ ، أي عندما يكون  $\nabla f$

موازٍ للمتجه  $\hat{\ell}$ .

ينتج مما سبق أن

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial \vec{n}} \cdot \hat{n} = \hat{i} \frac{\partial f}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial f}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial f}{\partial z}$$

أي أن

$$\nabla \equiv \hat{n} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \equiv \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

يسمى  $\nabla$  (ويقرأ *nabla* أو مؤثر هاميلتون) مؤثر اشتقاقي موجه، أي يشتق ويوجه وفق اتجاه الناظم، في آن معاً. وينطبق عليه ما ينطبق على المتجهات من عمليات حسابية كالجمع والضرب... فالجداء  $\nabla \cdot \vec{a}$  هو الجداء الداخلي للمتجهين  $\nabla$  و  $\vec{a}$ ، والجداء  $\vec{a} \cdot \nabla$  هو مؤثر اشتقاقي موجه وفق توجيه المتجه  $\vec{a}$ . فمثلاً، إن  $\frac{\partial \vec{a}}{\partial x}$  هو مشتق المتجه  $\vec{a}$  وفق توجيه المتجه  $\hat{i}$ ، لأن

$$(\hat{i} \cdot \nabla) \vec{a} = \frac{\partial \vec{a}}{\partial x}$$

كما أن قواعد التدرج هي نفسها قواعد الاشتقاق. فمثلاً، إذا كانت  $f$  و  $g$  دالتين سلميتين، فإن

$$\nabla(\alpha f + \beta g) = \alpha \nabla f + \beta \nabla g ; \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$\nabla f g = g \nabla f + f \nabla g$$

$$\nabla \frac{f}{g} = \frac{g \nabla f - f \nabla g}{g^2}$$

### 3.2.2 تأثير المؤثر $\nabla$ على دالة تنبع للإحداثي الكروي $r$ فقط

ليكن  $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$  متجه الموضع للنقطة  $P$ . ولتكن  $f = f(r)$  دالة سلمية في المتغير  $r$ ، يحافظ مشتقها على إشارته. إن سطوح السوية لهذه الدالة هي كرات مركزها  $O$  ونصف قطرها  $r$ . إن اتجاه متجه التدرج في كل نقطة من نقاط هذا السطح يكون منطبقاً على  $\vec{r}$  أو عكسه بالاتجاه، حسب ما يكون  $f'(r) > 0$  أو  $f'(r) < 0$ . وعليه، فإن

$$\nabla f(r) = \vec{r} \frac{df}{dr} = f'(r) \frac{\vec{r}}{r}$$

ملحوظة 3.2: إن وجود مشتق موجه لدالة عند نقطة ما في اتجاه ما، لا يعني أن هذه الدالة فضولة عند هذه النقطة. فمثلاً، الدالة

<sup>1</sup> وليام رويان هاميلتون (١٨٠٥-١٨٦٥) عالم رياضيات وفلكي إيرلندي.

$$f(x, y) = \begin{cases} 2 & : y = x \wedge x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & : y \neq x \vee x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

غير مستمرة عند النقطة  $(0,0)$ ، لأن

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 2 \neq f(0,0) = 0$$

أي أن الدالة  $f$  غير فضولة عند النقطة  $(0,0)$ . مع أن هذه الدالة مشتقاً موجهاً، وفق اتجاه أي متجه  $\vec{\ell} \neq 0$  يوازي مستقيماً ماراً من النقطة  $(0,0)$ ، وهذا المشتق يساوي الصفر، أي

$$\frac{\partial f}{\partial \ell}(0,0) = 0$$

مثال 3.3: أوجد متجه واحدة الناظم، عند النقطة  $P_0(1, -1, 4)$ ، على السطح

$$f(x, y, z) = xy + yz + xz = 1$$

الحل: إن متجه الناظم  $\vec{n}$  على السطح المعطى عند النقطة  $P_0$ ، هو متجه التدرج للدالة  $f$ ، عند هذه النقطة. ولما كانت الدالة  $f$  حدودية، فإن  $f \in C^1$  في الفضاء، فالتدرج موجود:

$$\begin{aligned} \nabla f &= \nabla(xy + yz + xz) = (y + z)\hat{i} + (x + z)\hat{j} + (x + y)\hat{k} \\ \nabla f|_{P_0} &= 3\hat{i} + 5\hat{j} = \vec{n} \end{aligned}$$

وعليه، فإن متجه واحدة الناظم على السطح المعطى، عند النقطة  $P_0$ ، هو

$$\hat{n} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{1}{\sqrt{34}}(3\hat{i} + 5\hat{j})$$

مثال 3.4: أوجد المشتق الموجه للدالة  $f(x, y, z) = x^3y + 2xyz$ ، وفق اتجاه المتجه  $\vec{a} = 2\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ ، عند النقطة  $P_0(2, 1, 0)$ . وأوجد أعظم قيمة للمشتق الموجه للدالة  $f$  عند هذه النقطة.

الحل: لما كانت الدالة  $f$  حدودية، فإن  $f \in C^1(\mathbb{R}^3)$ ، فالتدرج موجود:

$$\begin{aligned} \nabla f &= \nabla(x^3y + 2xyz) = (3x^2y + 2yz)\hat{i} + (x^3 + 2xz)\hat{j} + (2xy)\hat{k} \\ \nabla f|_{P_0} &= 12\hat{i} + 8\hat{j} + 4\hat{k} = \vec{n} \end{aligned}$$

ولما كان  $\vec{a} = \frac{1}{3}(2\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k})$ ، فإن المشتق الموجه للدالة  $f$  وفق اتجاه المتجه  $\vec{a}$ ،

عند النقطة  $P_0$  ، هو

$$\nabla f|_{P_0} \cdot \hat{a} = (12\hat{i} + 8\hat{j} + 4\hat{k}) \cdot \left(\frac{2}{3}\hat{i} - \frac{2}{3}\hat{j} + \frac{1}{3}\hat{k}\right) = 4$$

وتكون القيمة الأعظم للمشتق الموجه للدالة  $f$  ، عند النقطة  $P_0$  ، هي قيمة متجه التدرج:

$$|\nabla f|_{P_0}| = \sqrt{144 + 64 + 16} = \sqrt{224}$$

### 3.3 تفرق ودوران حقل متجهي

ليكن  $\vec{F} = \vec{F}(P)$  حقلاً متجهياً على المنطقة  $V$  ، بحيث  $\vec{F} \in C^1(V)$  .

نسمي الجداء الداخلي  $\nabla \cdot \vec{F}$  تفرق أو تباعد الحقل  $\vec{F}$  على المنطقة  $V$  ، ونرمز له بالرمز

$$\nabla \cdot \vec{F} = \text{div} \vec{F}$$

ونسمي الجداء الخارجي  $\nabla \times \vec{F}$  دوران أو إعصار الحقل  $\vec{F}$  على المنطقة  $V$  ، ونرمز له بالرمز

$$\nabla \times \vec{F} = \text{rot} \vec{F}$$

واضح من هذين التعريفين، أن التفرق والدوران مستقلين عن الجملة الإحداثية.

ويكون في الجملة الديكارتية  $\vec{F}(P) = (F_1, F_2, F_3)$  . ومنه، فإن

$$\nabla \cdot \vec{F} = \text{div} \vec{F} = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (F_1, F_2, F_3) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

$$\nabla \times \vec{F} = \text{rot} \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \hat{i} \left( \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) + \hat{j} \left( \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) + \hat{k} \left( \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$$

ويعطى تفرق التدرج للحقل السلمي  $f = f(P)$  :

$$\nabla \cdot (\nabla f) = (\nabla \cdot \nabla) f = \nabla^2 f$$

حيث  $\nabla \cdot \nabla \equiv \nabla^2 \equiv \text{lap}$  ، مؤثر اشتقاق غير موجه، يسمى مؤثر لابلاس<sup>1</sup> ، وهو أيضاً،

<sup>1</sup> بيير سيمون لابلاس (١٧٤٩-١٨٢٧) عالم رياضيات وفيزياء فرنسي.

مستقل عن الجملة الإحداثية. ويُعطى في الجملة الديكارتية، كما يلي:

$$\nabla \cdot \nabla \equiv \nabla^2 \equiv \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

ومكثداً، فإن

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2 \vec{F} = \frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial z^2}$$

مثال 3.5: إذا كان  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$  متجهاً ثابتاً، أثبت أن

$$\nabla \times (\vec{a} \times \vec{r}) = 2\vec{a}$$

الحل:

$$\begin{aligned} \nabla \times (\vec{a} \times \vec{r}) &= \nabla \times \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = \\ &= \nabla \times [(za_2 - ya_3)\hat{i} + (xa_3 - za_1)\hat{j} + (za_1 - xa_3)\hat{k}] = \\ &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (za_2 - ya_3) & (xa_3 - za_1) & (ya_1 - xa_2) \end{vmatrix} = 2(a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}) = 2\vec{a} \end{aligned}$$

#### قواعد الاشتقاق الموجه

يمكن، من تعريف التدرج والتفرق والدوران، استنتاج قواعد الاشتقاق الموجه:

لتكن  $f$  و  $g$  دالتين سلميتين، و  $\vec{F}$  و  $\vec{G}$  دالتين متجهيتين، فإن:

$$\nabla \cdot (\alpha \vec{F} + \beta \vec{G}) = \alpha \nabla \cdot \vec{F} + \beta \nabla \cdot \vec{G} ; \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$\nabla \times (\alpha \vec{F} + \beta \vec{G}) = \alpha \nabla \times \vec{F} + \beta \nabla \times \vec{G}$$

$$\nabla \cdot (f\vec{F}) = (\nabla f) \cdot \vec{F} + f(\nabla \cdot \vec{F})$$

$$\nabla \times (f\vec{F}) = (\nabla f) \times \vec{F} + f(\nabla \times \vec{F})$$



$$\begin{aligned}
\nabla(\vec{F} \cdot \vec{G}) &= (\vec{F} \cdot \nabla)\vec{G} + (\vec{G} \cdot \nabla)\vec{F} \\
\nabla \cdot (\vec{F} \times \vec{G}) &= (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{G} - (\nabla \times \vec{G}) \cdot \vec{F} \\
\nabla \times (\vec{F} \times \vec{G}) &= \vec{F}(\nabla \cdot \vec{G}) - \vec{G}(\nabla \cdot \vec{F}) + (\vec{G} \cdot \nabla)\vec{F} - (\vec{F} \cdot \nabla)\vec{G} \\
\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) &= \text{div}(\text{rot}\vec{F}) = 0 \\
\nabla \times (\nabla f) &= \text{rot}(\text{grad } f) = \vec{0} \\
\nabla \times (\nabla \times \vec{F}) &= \text{rot}(\text{rot}\vec{F}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{F}) - \nabla^2 \vec{F}
\end{aligned}$$

### 3.4 الحقل الكمون

ليكن  $f = f(P)$  حقلاً سلمياً على المنطقة الفراغية  $V$ . إذا أمكن إيجاد متجه التدرج  $\nabla f$  في كل نقطة من نقاط  $V$ ، فإن الحقل المتجهي الناتج يسمى كمونياً (محافظاً). ونسمي الحقل السلمي  $f$  الكمون السلمي للحقل المتجهي الكموني  $\nabla f$ . وبعبارة أخرى، نقول عن الحقل المتجهي  $\vec{F}(P)$ ، إنه كمونياً على  $V$ ، إذا وُجدت دالة سلمية  $f$  بحيث يكون

$$\vec{F}(P) = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{k}$$

واضح من هذا التعريف، أنه إذا كان  $\vec{F}(P)$  حقلاً كمونياً، وكان  $\vec{F} \in C^1(V)$ ، فإن دورانه معدوماً. أي

$$\nabla \times \vec{F} = \nabla \times (\nabla f) = \vec{0}$$

وبالعكس، إذا كان  $\nabla \times \vec{F} = \vec{0}$ ، وكان  $\vec{F} \in C^1(V)$ ، فإن الحقل  $\vec{F}(P)$  كموني على  $V$ .

مبرهنة 3.1: الشرط اللازم والكافي كي تكون العبارة التفاضلية  $F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$  تفاضلاً تاماً، هو أن يكون الحقل  $\vec{F}$  كمونياً، أي  $\nabla \times \vec{F} = \vec{0}$ ، حيث  $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ .  
 الإثبات: نفرض أن العبارة التفاضلية هي تفاضلي تام لدالة  $f(x, y, z)$ ، أي:

$$F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz = df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

وهذا يعني أن:

$$F_1 = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad F_2 = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad F_3 = \frac{\partial f}{\partial z}$$

وعليه، فإن:

$$\vec{F} = F_1\hat{i} + F_2\hat{j} + F_3\hat{k} = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k} = \nabla f$$

ومنه، فإن:

$$\nabla \times \vec{F} = \nabla \times \nabla f = \vec{0}$$

وبالعكس، إذا كان  $\nabla \times \vec{F} = \vec{0}$ ، فإن  $\vec{F} = \nabla f$ . وعليه، فإن:

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = \nabla f \cdot d\vec{r} = df$$

أي أن  $F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz = df$ ، هذا يعني أن العبارة التفاضلية هي تفاضل تام للدالة  $f(x, y, z)$ .

ملحوظة 3.3: وتوجد الدالة  $f(x, y, z)$  من عبارة تفاضليها التام، استخدام الخوارزمية التالية: من المطابقة

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$$

نجد

$$\frac{\partial f}{\partial x} = F_1, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = F_2, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = F_3$$

نكامل الأولى بالنسبة إلى  $x$ ، ونكامل الثانية بالنسبة إلى  $y$ ، ونكامل الثالثة بالنسبة إلى  $z$ ، فنجد:

$$f(x, y, z) = \int F_1(x, y, z) dx + g_1(y, z)$$

$$f(x, y, z) = \int F_2(x, y, z) dy + g_2(x, z)$$

$$f(x, y, z) = \int F_3(x, y, z) dz + g_3(x, y)$$

حيث  $g_1(x, z)$  و  $g_2(x, z)$  و  $g_3(x, y)$  دوال اختيارية، نختارهما بحيث تتطابق الحدود الأولى في العلاقات السابقة.

مثال 3.6: أثبت أن العبارة التفاضلية التالية تفاضل تام للدالة  $f(x, y, z)$ ، ثم أوجد هذه الدالة:

$$(y^2 z^3 \cos x - 4x^3 z) dx + (2z^3 y \sin x) dy + (3y^2 z^2 \sin x - x^4) dz$$

الحل: يمكن، بسهولة، التحقق أن  $\nabla \times \vec{F} = \vec{0}$ ، حيث

$$\vec{F} = (y^2 z^3 \cos x - 4x^3 z) \hat{i} + (2z^3 y \sin x) \hat{j} + (3y^2 z^2 \sin x - x^4) \hat{k}$$

فإن العبارة التفاضلية هي تفاضل تام للدالة  $f(x, y, z)$ ، أي أن:

$$\begin{aligned} (y^2 z^3 \cos x - 4x^3 z) dx + (2z^3 y \sin x) dy + (3y^2 z^2 \sin x - x^4) dz &= \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \end{aligned}$$

أي أن:

$$y^2 z^3 \cos x - 4x^3 z = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad 2z^3 y \sin x = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad 3y^2 z^2 \sin x - x^4 = \frac{\partial f}{\partial z}$$

نكامل كل من هذه العلاقات:

$$f = y^2 z^3 \sin x - x^4 z + g_1(y, z)$$

$$f = z^3 y^2 \sin x + g_2(x, z)$$

$$f = y^2 z^3 \sin x - x^4 z + g_3(x, y)$$

وعليه، يجب اختيار  $g_2(x, z) = -x^4 z + c$  و  $g_1(y, z) = g_3(x, y) = c$  ثابت اختياري. وهكذا، فإن:

$$f = y^2 z^3 \sin x - x^4 z + c$$

ملحوظة 3.4: إذا كان الكمون السلمي  $f$  للحقل الكموني  $\vec{F}(P)$  على  $V$  توافقياً، أي

$$\nabla^2 f = 0, \quad \text{فإن تفرق الحقل الكموني معدوم، لأن}$$

$$\nabla \cdot \vec{F} = \nabla \cdot (\nabla f) = \nabla^2 f = 0$$

ملحوظة 3.5: إن الكمون السلمي  $f$  للحقل الكموني  $\vec{F}(P)$  على  $V$  ليس وحيداً، فإذا كان

$c$  ثابت ما، فإن الدالة  $(f + c)$  هي أيضاً كمون سلمي للحقل  $\vec{F}(P)$  على  $V$ ، لأن

$$\vec{F} = \nabla(f + c) = \nabla f$$

مثال 3.7: إذا وضعنا في النقطة  $O$  الكتلة  $m$ ، فإن هذه الكتلة تولد حقل جاذبية. تؤثر في كل

نقطة منه  $P$  قوة  $\vec{F}(P)$  تُعطى، من قانون نيوتن، بالعلاقة

$$\vec{F}(P) = -\frac{km}{r^2} \hat{r} = -\frac{km}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} = -\frac{km}{r^3} \vec{r}$$

ولما كان  $\nabla \frac{c}{r} = \frac{c}{r^2} \vec{F}$ ، حيث  $c$  ثابت، فإن

$$\vec{F} = \nabla \frac{km}{r}$$

أي أن حقل الجاذبية المذكور هو حقل كموني، كمونه السلمي  $f = \frac{km}{r}$ .

مثال 3.8: لتكن لدينا الدالة  $u = r^4$ ، حيث  $r$  الإحداثي الكروي. المطلوب:

١- أوجد تدرج الدالة  $u$ ، ثم احسب قيمة مشتق هذه الدالة وفق متجه الموضع  $\vec{r}$ .

٢- أثبت أن الحقل  $\vec{F} = r^4 \vec{r}$  كموني، أوجد كمونه السلمي  $f$ ، ثم احسب  $\nabla^2 f$ .

الحل:

١- لما كانت الدالة  $u$  تتبع فقط للإحداثي الكروي  $r$ ، فإن سطوح السوية كرات مركزها  $O$ ، وهي سطوح ملساء، أي أن التدرج موجود دوماً. نحسب التدرج:

$$\nabla u = \hat{r} \frac{d}{dr}(r^4) = \hat{r}(4r^3) = 4r^2(r\hat{r}) = 4r^2\vec{r}$$

ويكون مشتق الدالة  $u$  الموجه، وفق المتجه  $\vec{r}$  هو

$$(\vec{r} \cdot \nabla)r^4 = \vec{r} \cdot (\nabla r^4) = \vec{r} \cdot (4r^2\vec{r}) = (4r^2\vec{r}) \cdot (r^3\hat{r}) = 4r^4$$

٢- حتى يكون الحقل  $\vec{F}$  كمونياً، يجب أن يكون دورانه معدوماً:

$$\nabla \times \vec{F} = \nabla \times (r^4\vec{r}) = (\nabla r^4) \times \vec{r} + r^4(\nabla \times \vec{r}) = (4r^2\vec{r}) \times \vec{r} + r^4(\nabla \times \vec{r})$$

ولما كان

$$\vec{r} \times \vec{r} = \vec{0} \quad \text{و} \quad \nabla \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = \vec{0}$$

فإن

$$\nabla \times \vec{F} = (4r^2)(\vec{0}) + r^4(\vec{0}) = \vec{0}$$

وعليه، فإن الحقل  $\vec{F}$  كمونياً. ومنه، توجد دالة سلمية  $f$ ، بحيث يكون  $\vec{F} = \nabla f$ .

ومنه، فإن

$$\vec{F} = r^4\vec{r} = \hat{r} \frac{df}{dr} \Rightarrow \frac{df}{dr} = r^5 \Rightarrow f = \frac{1}{6}r^6 + c$$

حيث  $c$  ثابت اختياري.

$$\nabla^2 f = \nabla \cdot (\nabla f) = \nabla \cdot \vec{F} = \nabla(r^4 \vec{r}) = (\nabla r^4) \cdot \vec{r} + r^4 (\nabla \cdot \vec{r})$$

ولما كان

$$\nabla \cdot \vec{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$$

فإن

$$\nabla^2 f = (4r^2 \vec{r}) \cdot \vec{r} + 3r^4 = 7r^4$$

### 3.5 الحقل اللولبي

ليكن  $\vec{A} = \vec{A}(P)$  حقلاً متجهياً على المنطقة الفراغية  $V$ . إذا أمكن إيجاد متجه الدوران  $\nabla \times \vec{A}$  في كل نقطة من نقاط  $V$ ، فإن الحقل المتجهي الناتج يسمى حقلاً لولبياً. نسمي، عندئذٍ، الحقل المتجهي  $\vec{A}$  كموناً متجهياً للحقل المتجهي اللولبي  $\nabla \times \vec{A}$ .  
بعبارة أخرى، نقول عن الحقل المتجهي  $\vec{F}(P)$  إنه لولبي على  $V$ ، إذا وُجدت دالة متجهية  $\vec{A}$  على  $V$ ، بحيث يكون  $\vec{F} = \nabla \times \vec{A}$ .  
واضح، من هذا التعريف، أنه إذا كان  $\vec{F}$  حقلاً لولبياً على  $V$ ، وكان  $\vec{F} \in C^1(V)$ ، فإن تفرقه معدوم. أي أن

$$\nabla \cdot \vec{F} = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$$

وبالعكس، إذا كان  $\nabla \cdot \vec{F} = 0$  وكان  $\vec{F} \in C^1(V)$ ، فإن الحقل  $\vec{F}$  لولبي على  $V$ .  
ملحوظة 3.6: إذا كان الحقل المتجهي  $\vec{F}(P)$  كمونياً ولولبياً في آنٍ معاً، على  $V$ ، أي  $\vec{F} = \nabla f$  و  $\nabla \cdot \vec{F} = 0$ ، فإنه يكون تدرجاً لدالة سلمية توافقية  $f$  على  $V$ ، لأن

$$\nabla \cdot \vec{F} = \nabla \cdot (\nabla f) = \nabla^2 f = 0$$

ملحوظة 3.7: إن الكمون المتجهي للحقل اللولبي  $\vec{F}(P)$  على  $V$  ليس وحيداً، فإذا كانت  $f$  دالة سلمية اختيارية على  $V$ ، وكان  $\vec{A}$  كموناً للحقل اللولبي  $\vec{F}(P)$ ، فإن الدالة  $(\vec{A} + \nabla f)$  هي أيضاً كمون متجهي للحقل  $\vec{F}(P)$  على  $V$ ، لأن

$$\vec{F} = \nabla \times (\vec{A} + \nabla f) = \nabla \times \vec{A} + \nabla \times (\nabla f) = \nabla \times \vec{A}$$

مثال 3.9: إذا كان  $\vec{F}$  حقلاً كمونياً على  $V$ ، أثبت أن  $\vec{F} \times \vec{F}$  حقلاً لولياً على  $V$ .

الحل: لما كان

$$\vec{F} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ F_1 & F_2 & F_3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = (zF_2 - yF_3)\hat{i} + (xF_3 - zF_1)\hat{j} + (yF_1 - xF_2)\hat{k}$$

فإن

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\vec{F} \times \vec{F}) &= \frac{\partial}{\partial x}(zF_2 - yF_3) + \frac{\partial}{\partial y}(xF_3 - zF_1) + \frac{\partial}{\partial z}(yF_1 - xF_2) = \\ &= z \frac{\partial F_2}{\partial x} - y \frac{\partial F_3}{\partial x} + x \frac{\partial F_3}{\partial y} - z \frac{\partial F_1}{\partial y} + y \frac{\partial F_1}{\partial z} - x \frac{\partial F_2}{\partial z} = \\ &= x \left( \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) + y \left( \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) + z \left( \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) = \\ &= (x, y, z) \cdot \left[ \left( \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right), \left( \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right), \left( \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \right] = \\ &= \vec{F} \cdot (\nabla \times \vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{0} = 0 \end{aligned}$$

لأن  $\nabla \times \vec{F} = \vec{0}$ ، وعليه، فإن  $\vec{F} \times \vec{F}$  حقلاً لولياً على  $V$ .

### 3.6 العمليات على الحقول في الإحداثيات المنحنية المتعامدة

نُحل كثير من مسائل الحساب التفاضلي والحساب التكاملي العملية، بطريقة أسهل في الإحداثيات المنحنية، منها في الإحداثيات الديكارتية. ونستخدم، غالباً، نوعين من الإحداثيات المنحنية الفراغية المتعامدة، وهي الإحداثيات الأسطوانية والإحداثيات الكروية.

#### 3.6.1 الإحداثيات المنحنية المتعامدة

ليكن لدينا التطبيق

$$\{u = u(x, y, z), v = v(x, y, z), w = w(x, y, z)\} \quad (3.3)$$

لمجموعة نقطية مفتوحة  $V$ ، من الفضاء الديكارتى  $(x, y, z)$ ، إلى مجموعة النقطية الموافقة لها  $V_1$  من الفضاء  $uvw$ .

إذا كان  $u, v, w \in C^1(V)$ ، فإننا نقول إن هذا التطبيق مستمر المشتقات. وإذا كانت  $V$  منطقة، فإن صورتها  $V_1$  أيضاً منطقة. وتكون صورة المجموعة الجزئية المحدودة من  $V$  هي أيضاً مجموعة جزئية محدودة من  $V_1$ .

نسمي اليعقوبي  $J = \frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)}$  يعقوبي التطبيق مستمر المشتقات.

ويُعد الشرط  $J \neq 0$  شرطاً كافياً، كي يصبح التطبيق مستمر المشتقات تقابلاً مستمر المشتقات بين المنطقتين  $V$  و  $V_1$ .

إذا كان التطبيق (3.3) تقابلاً مستمر المشتقات بين المنطقتين  $V$  و  $V_1$ ، فإن التطبيق العكسي له، موجود، ويكون أيضاً تقابلاً مستمر المشتقات. ويُعطى بالعلاقات

$$\{x = x(u, v, w), y = y(u, v, w), z = z(u, v, w)\}$$

حيث  $J_1 = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \neq 0$  في  $V_1$ .

ويكون في هذا التقابل بين المنطقتين  $V$  و  $V_1$  صورة المنحني الأملس (أو الأملس جزئياً) في  $V$  هو منحني أملس (أو أملس جزئياً) في  $V_1$ ، وبالعكس.

نسمي النقاط من  $V$  التي ينعدم عندها  $J$ ، النقاط الخرجة للتطبيق، وقد لا تكون الجملة العكسية، عندئذ، موجودة. وفي حالة وجودها، فإن التطبيق العكسي غير قابل للاشتقاق عند النقاط الخرجة.

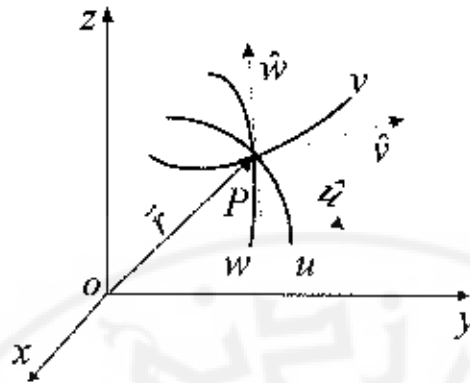
تمثل المعادلات

$$u = u(x, y, z) \text{ و } v = v(x, y, z) \text{ و } w = w(x, y, z)$$

سطوح إحداثية منحنية، وهي تقابل مستويات توازي المستويات الإحداثية الديكارتية.

نسمي المنحني الناتج عن تقاطع سطحين إحداثيين منحنيين منحنياً إحداثياً يتغير عليه فقط إحداثي واحد. فمنحن الإحداثي  $u$ ، مثلاً، ينتج عن تقاطع السطحين الإحداثيين المنحنيين  $\{v = c_2, w = c_3\}$ .

وتتقاطع المنحنيات الإحداثية الثلاثة بالنقطة  $P(u, v, w)$ ، الشكل 3.3.



الشكل 3.3

إن هذه الإحداثيات موجهة، وتكون الجهة الموجبة عليها، هي جهة تزايد الإحداثي الموافق، وتتغير بتغير النقطة.

يُكتب هذا التبديل بالعلاقة المتجهية:

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} = x(u, v, w)\hat{i} + y(u, v, w)\hat{j} + z(u, v, w)\hat{k}$$

وُستُخدم، عملياً، جمل الإحداثيات المنحنية المتعامدة، أي التي تكون فيها المنحنيات الإحداثية المتقاطعة في نقطة، متعامدة متنى متنى (المماسات عند نقطة التقاطع متعامدة)، وخصوصاً، الجملة الأسطوانية والجملة الكروية.

### 3.6.2 ثوابت لامي'

نختار على أحد المنحنيات الإحداثية، وليكن  $u$ ، مثلاً، نقطتين متجاورتين  $P$  و  $Q$ ، ونوجد نهاية نسبة طول القوس إلى تغير المتغير  $\Delta u$ ، عندما يسعى هذا التغير إلى الصفر:

$$h_u = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{PQ}{\Delta u}$$

فإذا كانت هذه النهاية موجودة، فإنها تسمى ثابت لامي للإحداثي  $u$ .

ونعرف بالأسلوب ذاته، ثابتي لامي للإحداثيين  $v$  و  $w$ .

وبالمقابل، فإن ثوابت لامي في الإحداثيات الديكارتية مساوية للموحد، لأن

<sup>1</sup> غابريل لامي (١٧٩٥-١٨٧٠) عالم رياضيات ومهندس فرنسي.



$$h_x = \lim_{w \rightarrow 0} \frac{PQ}{\Delta x} = \lim_{w \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1, \quad h_y = 1, \quad h_z = 1$$

ولما كان متجه مماس المنحني الإحداثي  $u$  عند النقطة  $P$  هو  $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}$ ، فإن متجه توجيهه  $\hat{u}$  هو

$$\hat{u} = \frac{\partial \vec{r} / \partial u}{|\partial \vec{r} / \partial u|} = \frac{1}{h_u} \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \Rightarrow \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = h_u \hat{u}$$

ونجد، بالأسلوب ذاته

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial w} = h_w \hat{w}, \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = h_v \hat{v}$$

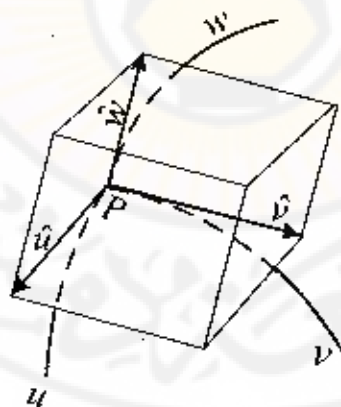
وبتعويض هذه القيم في  $d\vec{r}$ ، نجد

$$d\vec{r} = h_u \hat{u} du + h_v \hat{v} dv + h_w \hat{w} dw$$

ملحوظة 3.8: إن التوجيهات  $\hat{u}$  و  $\hat{v}$  و  $\hat{w}$  متغيرة بتغير النقطة  $P$ ، بينما التوجيهات  $\hat{i}$  و  $\hat{j}$  و  $\hat{k}$  للمحاور الإحداثية الديكارتية هي توجيهات ثابتة.

نتيجة 3.1: من تعريف ثوابت لامييه، نجد أن عنصر الطول على المنحني الإحداثي  $u$ ، يُعطى بالعلاقة:

$$dl_u = h_u du$$



الشكل 3.4

ويعطى عنصر المساحة على السطح الإحداثي  $\{v = c_2, w = c_3\}$  ، كما هو واضح من الشكل 3.4 ، بالعلاقة :

$$dA_u = |h_v \hat{v} dv \times h_w \hat{w} dw| = h_v h_w dv dw |\hat{v} \times \hat{w}| = h_v h_w dv dw$$

ويعطى عنصر الحجم ، كما هو واضح من الشكل 3.4 ، بالعلاقة

$$dV = |h_u \hat{u} du \cdot (h_v \hat{v} dv \times h_w \hat{w} dw)| = h_u h_v h_w du dv dw$$

وبالمقارنة مع يعقوبي الانتقال بين الجملتين  $oxyz$  و  $O_1uvw$  :

$$\begin{aligned} J_1 = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} &= \begin{vmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \\ x'_w & y'_w & z'_w \end{vmatrix} = (x'_u \hat{i} + y'_u \hat{j} + z'_u \hat{k}) \cdot \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x'_v & y'_v & z'_v \\ x'_w & y'_w & z'_w \end{vmatrix} = \\ &= (x'_u \hat{i} + y'_u \hat{j} + z'_u \hat{k}) \cdot [(x'_v \hat{i} + y'_v \hat{j} + z'_v \hat{k}) \times (x'_w \hat{i} + y'_w \hat{j} + z'_w \hat{k})] = \\ &= \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \cdot \left( \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial w} \right) = h_u \hat{u} \cdot (h_v \hat{v} \times h_w \hat{w}) = h_u h_v h_w [\hat{u} \cdot (\hat{v} \times \hat{w})] \end{aligned}$$

نجد

$$dV = |J_1| du dv dw$$

### 3.6.3 التدرج والتفرق والدوران واللابلاسي في الإحداثيات المنحنية

ليكن  $f = f(P)$  حقلاً سلمياً على المنطقة  $V$  من الفضاء  $oxyz$  ، بحيث  $f \in cl^2(V)$  .

وليكن  $\bar{F} = \bar{F}(P)$  حقلاً متجهياً على  $V$  ، بحيث  $\bar{F} \in cl^2(V)$  ، وليكن  $h_u h_v h_w \neq 0$  .

عندئذ يكون :

$$\nabla f = \frac{\hat{u}}{h_u} \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\hat{v}}{h_v} \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\hat{w}}{h_w} \frac{\partial f}{\partial w} \quad (3.4)$$

$$\nabla \times \bar{F} = \frac{1}{h_u h_v h_w} \begin{vmatrix} h_u \hat{u} & h_v \hat{v} & h_w \hat{w} \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ h_u F_u & h_v F_v & h_w F_w \end{vmatrix}$$

$$\nabla \cdot \bar{F} = \frac{1}{h_u h_v h_w} \left[ \frac{\partial}{\partial u} (h_v h_w F_u) + \frac{\partial}{\partial v} (h_u h_w F_v) + \frac{\partial}{\partial w} (h_u h_v F_w) \right]$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{h_u h_v h_w} \left[ \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{h_v h_w}{h_u} \frac{\partial f}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{h_u h_w}{h_v} \frac{\partial f}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial w} \left( \frac{h_u h_v}{h_w} \frac{\partial f}{\partial w} \right) \right]$$

حيث  $F_u, F_v, F_w$  مركبات المتجه  $\vec{F}$  في الإحداثيات المنحنية.

الإثبات: نثبت صحة (3.4)، ويتم إثبات صحة العلاقات الأخرى بالأسلوب ذاته.

نعلم أن

$$df = \nabla f \cdot d\vec{r} \quad \text{و} \quad df = \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv + \frac{\partial f}{\partial w} dw \quad (3.5)$$

نفرض أن

$$\nabla f = \lambda_u \hat{u} + \lambda_v \hat{v} + \lambda_w \hat{w} \quad (3.6)$$

ونوجد القيم  $\lambda_u$  و  $\lambda_v$  و  $\lambda_w$ . نعوض في (3.5):

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv + \frac{\partial f}{\partial w} dw = \\ &= (\lambda_u \hat{u} + \lambda_v \hat{v} + \lambda_w \hat{w}) \cdot (\hat{u} h_u du + \hat{v} h_v dv + \hat{w} h_w dw) = \\ &= \lambda_u h_u du + \lambda_v h_v dv + \lambda_w h_w dw \end{aligned}$$

بالمطابقة بين الطرفين، نجد

$$\lambda_u = \frac{1}{h_u} \frac{\partial f}{\partial u} \quad \text{و} \quad \lambda_v = \frac{1}{h_v} \frac{\partial f}{\partial v} \quad \text{و} \quad \lambda_w = \frac{1}{h_w} \frac{\partial f}{\partial w}$$

وبالتعويض في (3.6)، نجد صحة (3.4).

وهكذا، فإن

$$\nabla = \frac{\hat{u}}{h_u} \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\hat{v}}{h_v} \frac{\partial}{\partial v} + \frac{\hat{w}}{h_w} \frac{\partial}{\partial w}$$

وعليه، فإن

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \frac{\hat{u}}{h_u} \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\hat{v}}{h_v} \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\hat{w}}{h_w} \frac{\partial}{\partial w} \\ F_u & F_v & F_w \end{vmatrix} = \frac{1}{h_u h_v h_w} \begin{vmatrix} h_u \hat{u} \frac{\partial}{\partial u} & h_v \hat{v} \frac{\partial}{\partial v} & h_w \hat{w} \frac{\partial}{\partial w} \\ h_u F_u & h_v F_v & h_w F_w \end{vmatrix}$$

ملحوظة 3.9: إذا وضعنا  $\lambda_u = \lambda_v = \lambda_w = 1$ ، و  $\hat{i}$  و  $\hat{j}$  و  $\hat{k}$  مكان  $\hat{u}$  و  $\hat{v}$  و  $\hat{w}$ ، في

علاقات التدرج والتفرق والدوران واللابلاسي السابقة، نحصل على التدرج والتفرق

والدوران واللابلاسي في الإحداثيات الديكارتية.

#### 3.6.4 حالات خاصة

##### ١- الإحداثيات الأسطوانية

إن السطوح الإحداثية في الجملة الأسطوانية هي:

أ-  $\rho = c_1$  أسطوانة دورانية قائمة محورها  $OZ$ ، ونصف قطرها  $c_1$ .

ب-  $\varphi = c_2$  نصف مستوي محدد بالمحور  $OZ$ ، ويصنع مع المستوي  $OXZ$  زاوية مقدارها  $c_2$ .

ج-  $z = c_3$  مستوي يوازي المستوي  $oxy$  ويبعد عنه بالمقدار  $|c_3|$ .

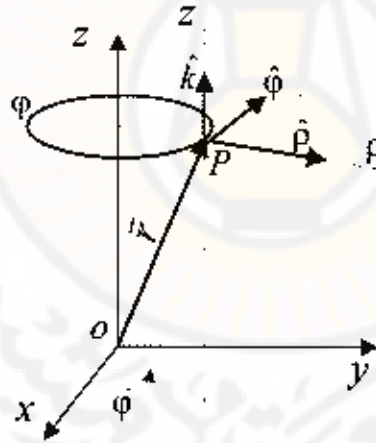
وعليه، فإن المنحنيات الإحداثية الأسطوانية هي:

أ- مستقيم يوازي  $OZ$ ، محدد بالمعادلتين  $\{\rho = c_1, \varphi = c_2\}$ .

ب- دائرة مركزها يقع على  $OZ$ ، وتقع في المستوي  $z = c_1$ ، محدة  $\{\rho = c_1, z = c_3\}$ .

ج- نصف مستقيم منبعث من  $OZ$  ويقع في المستوي  $z = c_1$ ، محدد  $\{\varphi = c_2, z = c_3\}$ .

تقاطع هذه المنحنيات بالنقطة  $P(\rho, \varphi, z)$ ، الشكل 3.5.



الشكل 3.5

تعطي العلاقات (التقابل) بين الإحداثيات الديكارتية والأسطوانية:

$$x = \rho \cos \varphi \quad y = \rho \sin \varphi \quad z = z$$

ويكون يعقوبي هذا التقابل

$$J_1 = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \varphi, z)} = \rho$$

ونمثل نقاط المحور  $oz$ ، المحققة للمعادلة  $J_1 = \rho = 0$ ، النقاط الخارجة لهذا التقابل. وعليه، فإن

$$\vec{r} = (\rho \cos \varphi) \hat{i} + (\rho \sin \varphi) \hat{j} + z \hat{k}$$

نرمز به  $u = \rho$  و  $v = \varphi$  و  $w = z$ ، فتكون متجهات التوجيه  $\hat{u} = \hat{\rho}$  و  $\hat{v} = \hat{\varphi}$  و  $\hat{w} = \hat{k}$ ، وهي متجهات تمس المنحنيات الإحداثية، وموجهه باتجاه تزايد قيم الوسيط. ويكون

$$h_\rho = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} \right| = |(\cos \varphi) \hat{i} + (\sin \varphi) \hat{j}| = 1$$

$$h_\varphi = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \right| = |(-\rho \sin \varphi) \hat{i} + (\rho \cos \varphi) \hat{j}| = \rho$$

$$h_z = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} \right| = |\hat{k}| = 1$$

وعليه، فإن متجهات الواحدة في الجملة الأسطوانية تُعطى بالعلاقات

$$\hat{u} = \hat{\rho} = \frac{1}{h_\rho} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} = (\cos \varphi) \hat{i} + (\sin \varphi) \hat{j}$$

$$\hat{v} = \hat{\varphi} = \frac{1}{h_\varphi} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = (-\sin \varphi) \hat{i} + (\cos \varphi) \hat{j}$$

$$\hat{w} = \hat{k}$$

يمكن، بسهولة، التحقق أن هذه المتجهات متعامدة، أي

$$\hat{\rho} \cdot \hat{\varphi} = \hat{\varphi} \cdot \hat{k} = \hat{k} \cdot \hat{\rho} = 0$$

وهكذا، فإن التدرج والتفرق والدوران واللابلاسي، في الإحداثيات الأسطوانية، تُعطى بالعلاقات:

$$\nabla f = \hat{\rho} \frac{\partial f}{\partial \rho} + \frac{\hat{\varphi}}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \varphi} + \hat{k} \frac{\partial f}{\partial z}$$

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho F_\rho) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (F_\varphi) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho F_z) \right]$$

$$\nabla \times \vec{F} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho \hat{\phi} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_{\rho} & \rho F_{\phi} & F_z \end{vmatrix}$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

حيث  $F_{\rho}, F_{\phi}, F_z$  مركبات المتجه  $\vec{F}$  في الإحداثيات الأسطوانية.

ويعطى عنصر الطول في هذه الجملة بالعلاقات:

$$dl_z = h_z dz = dz \quad \text{و} \quad dl_{\phi} = h_{\phi} d\phi = \rho d\phi \quad \text{و} \quad dl_{\rho} = h_{\rho} d\rho = d\rho$$

ويعطى عنصر الحجم بالعلاقة:

$$dv = h_{\rho} h_{\phi} h_z d\rho d\phi dz = \rho d\rho d\phi dz$$

### ١- الإحداثيات الكروية

إن السطوح الإحداثية في الجملة الكروية هي:

أ-  $r = c_1$  كرة مركزها  $O$ ، ونصف قطرها  $c_1$ .

ب-  $\theta = c_2$  مخروط دوراني قائم محوره  $OZ$  ورأسه  $O$  ونصف زاوية رأسه  $c_2$ .

ج-  $\phi = c_3$  نصف مستوي محدد بالمحور  $OZ$  ويصنع مع المستوي  $OXZ$  زاوية مقدارها  $c_3$ .

وعليه، فإن المنحنيات الإحداثية الكروية هي:

أ- نصف دائرة شاقولية (خط طول) مركزها يقع على  $OZ$ ، محددة بالمعادلتين  $\{r = c_1, \theta = c_2\}$ .

ب- دائرة أفقية (خط عرض) مركزها يقع على  $OZ$ ، محددة  $\{r = c_1, \phi = c_3\}$ .

ج- نصف مستقيم منبعث من  $O$ ، محدد  $\{\theta = c_2, \phi = c_3\}$ .

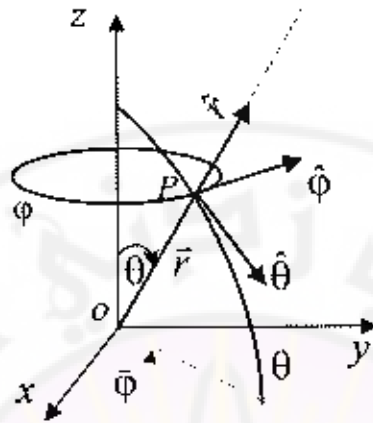
تتقاطع هذه المنحنيات بالنقطة  $P(r, \theta, \phi)$ ، الشكل 3.6.

تعطى العلاقات (التقابل) بين الإحداثيات الديكارتية والكروية:

$$x = r \sin \theta \cos \phi \quad \text{و} \quad y = r \sin \theta \sin \phi \quad \text{و} \quad z = r \cos \theta$$

ويكون يعقوبي هذا التقابل

$$J_1 = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \varphi)} = r^2 \sin \theta$$



الشكل 3.6

وتمثل نقاط المحور  $oz$ ، أي النقاط المحققة للمعادلة  $J_1 = r^2 \sin \theta = 0$ ، النقاط الحرجة لهذا التقابل.

وعليه، فإن

$$\vec{r} = (r \sin \theta \cos \varphi) \hat{i} + (r \sin \theta \sin \varphi) \hat{j} + (r \cos \theta) \hat{k}$$

نرمز بـ  $u = r$  و  $v = \theta$  و  $w = \varphi$ ، فتكون متجهات التوجيه  $\hat{u} = \hat{r}$  و  $\hat{v} = \hat{\theta}$  و  $\hat{w} = \hat{\varphi}$  وهي متجهات تمس المنحنيات الإحداثية، وموجهه باتجاه تزايد قيم الوسيط. ويكون

$$h_r = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \right| = \left| (\sin \theta \cos \varphi) \hat{i} + (\sin \theta \sin \varphi) \hat{j} + (\cos \theta) \hat{k} \right| = 1$$

$$h_\theta = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \right| = \left| (r \cos \theta \cos \varphi) \hat{i} + (r \cos \theta \sin \varphi) \hat{j} + (-r \sin \theta) \hat{k} \right| = r$$

$$h_\varphi = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \right| = \left| (-r \sin \theta \sin \varphi) \hat{i} + (r \sin \theta \cos \varphi) \hat{j} \right| = r \sin \theta$$

وعليه، فإن متجهات الواحدة في الجملة الكروية، تعطى بالعلاقات

$$\hat{u} = \hat{r} = \frac{1}{h_r} \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = (\sin \theta \cos \varphi) \hat{i} + (\sin \theta \sin \varphi) \hat{j} + (\cos \theta) \hat{k}$$

$$\hat{v} = \hat{\theta} = \frac{1}{h_\theta} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = (\cos \theta \cos \varphi) \hat{i} + (\cos \theta \sin \varphi) \hat{j} + (-\sin \theta) \hat{k}$$

$$\hat{w} = \hat{\phi} = \frac{1}{h_\varphi} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = (-\sin \varphi) \hat{i} + (\cos \varphi) \hat{j}$$

يمكن، بسهولة، التحقق أن هذه المتجهات متعامدة، أي

$$\hat{r} \cdot \hat{\theta} = \hat{\theta} \cdot \hat{\phi} = \hat{\phi} \cdot \hat{r} = 0$$

وهكذا، فإن التدرج والتفرق والدوران واللابلاسي، في الإحداثيات الكروية، تُعطى

بالعلاقات:

$$\nabla f = \hat{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\hat{\theta}}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{\hat{\phi}}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi}$$

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 F_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta F_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} (F_\varphi)$$

$$\nabla \times \vec{F} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\theta} & r\sin\theta\hat{\phi} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ F_r & rF_\theta & r\sin\theta F_\varphi \end{vmatrix}$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

حيث  $F_r, F_\theta, F_\varphi$  مركبات المتجه  $\vec{F}$  في الإحداثيات الكروية.

ويُعطى عنصر الطول في هذه الجملة بالعلاقات:

$$dl_r = h_r dr = dr \quad \text{و} \quad dl_\theta = h_\theta d\theta = r d\theta \quad \text{و} \quad dl_\varphi = h_\varphi d\varphi = r \sin \theta d\varphi$$

ويُعطى عنصر الحجم بالعلاقة:

$$dv = h_r h_\theta h_\varphi dr d\theta d\varphi = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$$



### تمارين الفصل الثالث

1. احسب  $\int_0^2 \vec{F} \cdot (\vec{G} \times \vec{H}) dt$  ،  $\int_0^2 (\vec{F} \times \vec{G} \times \vec{H}) dt$  إذا كان  $\vec{F} = 3t\hat{i} + t\hat{j} - \hat{k}$  و  $\vec{H} = t\hat{i} - 3\hat{j} + 2t\hat{k}$  ،  $\vec{G} = t\hat{i} - 2\hat{j} + (t-1)\hat{k}$

2. احسب  $\int_2^3 \vec{F} \cdot \frac{d\vec{F}}{dt} dt$  إذا كان  $\vec{F}(2) = 4\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$  و  $\vec{F}(3) = 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$

3. عين سطوح السوية للحقل  $f(x, y, z) = \frac{x^2 + z^2}{y}$  في منطقة لا تحوي نقطة الأصل، ثم احسب تدرج هذا الحقل عند النقطة  $P_0(0, 1, 2)$ .

4. احسب تدرج الحقل  $f = r^2$ ، ثم احسب قيمة المشتق الموجه وفق اتجاه  $\vec{F}$ .

5. احسب تفرق ودوران الحقل  $\vec{F} = r^3 \hat{r}$ . هل هذا الحقل كموني؟

6. أثبت أن الحقل  $\vec{F} = x^2\hat{i} + y^2\hat{j} + z^2\hat{k}$  كموني، احسب كمونه السلمي.

7. أثبت أن الحقل

$$\vec{F} = (y^2 \cos x + z^3)\hat{i} + (2y \sin x - 4)\hat{j} + (3xz^2 + 2)\hat{k}$$

كموني، احسب كمونه السلمي.

8. أثبت أن كل عبارة من العبارات التفاضلية التالية تفاضل تام لدالة  $f(x, y, z)$ ، ثم أوجد هذه الدالة في كل حالة:

$$(2x \cos y + z \sin y)dx + (xz \cos y - x^2 \sin y)dy + (x \sin y)dz$$

$$(e^{-x} + 3x^2 y^2)dx + (2x^3 y - xe^{-x})dy + (\sin z)dz$$

$$(z - e^{-x} \sin y)dx + (1 + 2e^{-x} \cos y)dy + (x - 8z)dz$$

9. أثبت أن الحقل  $f = (r + \frac{1}{r^2}) \cos \theta$  توافقي في أي منطقة لا تحوي المحور  $oz$ ، ثم احسب  $\nabla \times (\nabla f)$  و  $\nabla^2 f$ .

10. أثبت أن الحقل السلمي  $f = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$  توافقي في أي منطقة لا تحوي نقطة الأصل، ثم احسب  $\nabla \times (\nabla f)$  و  $\nabla^2 f$ .

11. احسب تدرج الحقل السلمي  $f = p(\sin \varphi - \cos \varphi) + \sqrt{p^2 + z^2}$  في أي منطقة لا تحوي المحور  $oz$ .

12. عين قيمة الثوابت  $a$  و  $b$  و  $c$  كي يكون الحقل

$$\vec{F} = (2x + 2y + az)\hat{i} + (bx - 3y - z)\hat{j} + (4x + cy + 2z)\hat{k}$$

كموئي، ثم أوجد كمونه السلمي.

13. أوجد دوران الحقل  $\vec{F} = xz^3\hat{i} - 2x^2yz\hat{j} + 2yz^4\hat{k}$  عند النقطة  $P_0(1, -1, 1)$ .

14. احسب تفرق ودوران الحقل  $\vec{F} = (\hat{i}\vec{r})\vec{r}$ ، ثم احسب  $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F})$  و  $\nabla \cdot (\nabla \cdot \vec{F})$  و  $\nabla \times (\nabla \times \vec{F})$ .

15. إذا كان  $f = 2yz^2 - xy^2$  و  $g = x^2z + e^{y/x}$ ، احسب، عند النقطة  $P_0(1, 0, -2)$  القيم:

$$\nabla(f+g) \text{ و } \nabla(fg) \text{ و } \nabla[(\nabla f) \cdot (\nabla g)] \text{ و } \nabla[(\nabla f) \times (\nabla g)] \text{ و } \nabla \times [(\nabla f) \times (\nabla g)]$$

16. إذا كان  $f = 3x^2 - xyz$  و  $\vec{F} = 3xy^2z\hat{i} + 3xy^3\hat{j} - 4x^2yz^2\hat{k}$

احسب، عند النقطة  $P_0(1, -1, 1)$ ، كل مما يلي:

$$\nabla \cdot (\nabla f) \text{ و } \nabla \cdot [(\nabla f) \times \vec{F}] \text{ و } \vec{F} \times \nabla f \text{ و } \vec{F} \cdot \nabla f \text{ و } \nabla(f\vec{F})$$

17. عين قيمة الثابت  $a$  كي يكون الحقل التالي لوليباً:

$$\vec{F} = (x + 3y)\hat{i} + (y - 2z)\hat{j} + (x + az)\hat{k}$$

18. أثبت أن الحقل

$$\vec{F} = (2x^2 + 8xy^2z)\hat{i} + (3x^3y - 3xy)\hat{j} - (4y^2z^2 + 2x^3z)\hat{k}$$

ليس لوليباً، بينما الحقل  $\vec{G} = xyz^2\vec{F}$  لوليباً.

19. أثبت أنه إذا كانت الدالة  $f(x, y, z)$  حل لمعادلة لابلاس  $\nabla^2 f = 0$ ، فإن الحقل المتجهي  $\nabla f$  لوليباً وكمونياً.

20. احسب ما يلي:

$$\begin{aligned} \nabla f'' & , \quad \nabla^2 f'' & , \quad \nabla^2 (\rho^2 \cos \varphi) \\ \nabla^2 \ln r & , \quad \nabla \times \hat{\phi} & , \quad \nabla \cdot [\nabla \times (\vec{r} \ln r)] \\ \nabla \left[ \nabla \cdot \left( \frac{\vec{r}}{r^2} \right) \right] & , \quad \nabla \cdot \left[ r \nabla \left( \frac{1}{r} \right) \right] & , \quad \nabla \left[ \nabla \cdot \left( \frac{\vec{r}}{r} \right) \right] \end{aligned}$$

21. أوجد الزاوية الحادة بين السطحين  $3x^2 - y^2 + 2z = 1$  و  $xy^2z = z^2 + 3x$  عند النقطة  $P_0(1, -2, 1)$ .

22. أوجد، عند النقطة  $P_0(1, -1, 2)$ ، معادلة المستوي المماس والمستقيم الناظم للسطح  $2xz^2 - 3xy - 4x = 7$ .

23. في أي اتجاه، من النقطة  $P_0(2, 1, -1)$ ، يكون المشتق الموجه للدالة  $f = x^2yz^2$  أكبر ما يمكن؟

24. أوجد الزاوية بين السطحين  $z = x^2 + y^2 - 3$  و  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$  عند النقطة  $P_0(2, -1, 2)$ .

25. أعطِ العلاقات بين المتجهات  $\hat{k}, \hat{j}, \hat{i}$  و  $\hat{k}, \hat{\phi}, \hat{\rho}$ ، ثم أثبت أن المتجهات  $\hat{k}, \hat{\phi}, \hat{\rho}$ ، وكذلك المتجهات  $\hat{\phi}, \hat{\theta}, \hat{r}$ ، متعامدة.

26. أثبت أن الشرط اللازم والكافي لكي تكون للسودال  $u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z)$  مرتبطة بالمعادلة  $F(u, v, w) = 0$  هو  $J = \nabla u \cdot [\nabla v \times \nabla w]$ .



## الفصل الرابع

### التكامل الثنائي

4.1 تعريف التكامل الثنائي وشروط وجوده

4.2 التفسير الهندسي للتكامل الثنائي

4.3 خواص التكامل الثنائي

4.4 حساب التكامل الثنائي

4.5 التكاملات الثنائية الشاذة

تمارين الفصل الرابع



## التكامل الثنائي

### 4.1 تعريف التكامل الثنائي وشروط وجوده

عرفنا، في التحليل الرياضي ١، التكامل المحدد على أنه نهاية مجموع، وذلك عند إيجاد مساحة  
ساحة مستوية  $S$ ، تقع تحت منحنى الدالة  $y = f(x)$  وفوق محور السينات وبين المستقيمين  
 $x = a$  و  $x = b$ ،  $a < b$ . حيث جزئنا هذا السطح إلى شرائح شاقولية بتجزئة القطعة  
المستقيمة  $[a, b]$  إلى  $n$  جزء بالنقاط  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ :

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

وتكون قاعدة هذه الشرائح هي المجالات الجزئية  $[x_{i-1}, x_i]$ ، ومن ثم استبدلنا كل شريحة  
بمستطيل له القاعدة نفسها وارتفاعه القيمة  $f(\xi_i)$ ، حيث  $\xi_i$  نقطة اختيارية من  
 $[x_{i-1}, x_i]$ . وتكون مساحة كل مستطيل جزئي  $f(\xi_i) \Delta x_i$ ، حيث  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ .  
وعليه، فإن المساحة التقريبية للمساحة المطلوبة هي مجموع مساحات هذه المستطيلات:

$$S \approx S_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

وعندما نزيد عدد هذه الشرائح إلى اللانهاية، يسمى طول كل مجال جزئي إلى الصفر، ينتهي  
الخطأ المرتكب باستبدال الشريحة بالمستطيل، إلى الصفر. وتصبح المساحة الفعلية المطلوبة  
مساوية للنهاية:

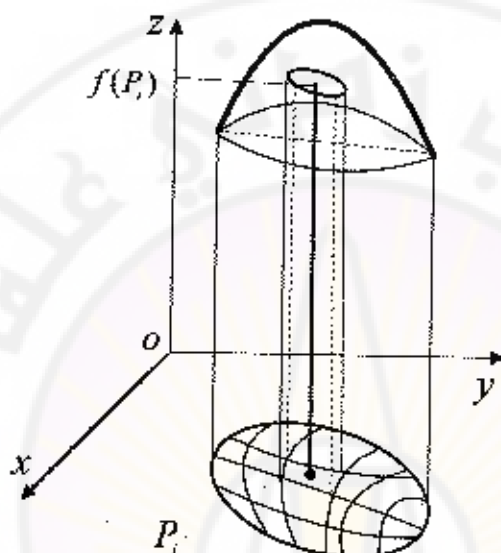
$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

حيث نسمي هذه النهاية التكامل المحدد للدالة  $f(x)$  على المجال  $[a, b]$ ، ونرمز لها بالرمز

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

نشع الآن، الطريقة ذاتها لتعريف التكامل الثنائي، وذلك عن طريق ارتباط مسألة الحجم  
بالتكامل الثنائي. فلإيجاد  $V$  حجم مجسم أسطواني مولداته توازي المحور  $OZ$  ومحدد من الأعلى  
بالسطح  $z = f(x, y)$  ومن الأسفل بالمساحة المغلقة  $D$  من المستوي  $OXY$ . نجزي

الساحة  $D$  إلى ساحات جزئية  $D_1, D_2, \dots, D_n$ ، لا تشترك بنقاط داخلية، مساحتها  $\Delta A_1, \Delta A_2, \dots, \Delta A_n$ ، بالترتيب. ننظر لكل ساحة جزئية منها، على أنها قاعدة أسطوانة ارتفاعها  $f(P_i)$ ، حيث  $P_i$  نقطة اختيارية من قاعدتها، الشكل 4.1، يكون، عندئذٍ، حجم الأسطوانة التقريبي هو  $f(P_i)\Delta A_i$ .



الشكل 4.1

وعليه، فإن الحجم المطلوب يساوي تقريباً مجموع هذه الأسطوانات:

$$V \approx V_n = \sum_{i=1}^n f(P_i)\Delta A_i$$

واضح أنه كلما زدنا  $n$ ، تصغر المساحات الجزئية  $\Delta A_i$ ، وتصبح القيمة التقريبية للحجم أكثر دقة. وفي النهاية يكون

$$V \approx \lim_{n \rightarrow \infty} V_n = \lim_{\Delta A_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(P_i)\Delta A_i$$

نسمي هذه النهاية التكامل الثنائي للدالة  $f(x, y)$  على الساحة  $D$ ، ونكتب

$$\iint_D f(x, y) dA = \lim_{\Delta A_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(P_i)\Delta A_i$$



إن وجود هذه النهاية، أي التكامل الثنائي، واضح لأنها مساوية لقيمة الحجم  $V$  الموجود أصلاً. يفرد هذا المثال الهندسي، إلى تعريف عام للتكامل الثنائي.

لتكن  $D$  مساحة من المستوي  $oxy$ ، مغلقة ومحددة، محيطها منحنى أملس أو أملس جزئياً، مساحتها  $A$ . ولتكن  $f(x, y)$  دالة معرفة ومحددة على  $D$ . نجزي، اختياريًا، بواسطة منحنيات ملساء، المساحة  $D$  إلى  $n$  جزء  $D_1, D_2, \dots, D_n$ ، بحيث لا تشترك هذه المساحات الجزئية بنقاط داخلية، ولتكن مساحتها  $\Delta A_1, \Delta A_2, \dots, \Delta A_n$ ، بالترتيب. ولتكن  $\lambda$  أكبر أقطار هذه المساحات. نختار من كل مساحة جزئية نقطة اختيارية  $P_i(\xi_i, \eta_i)$ ، الشكل 4.2.

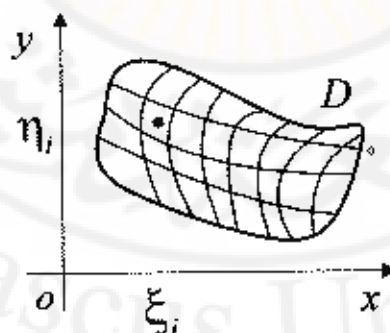
نشكل المجموع

$$\sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta A_i \quad (4.1)$$

والذي يسمى المجموع التكاملي للدالة  $f(x, y)$  على المساحة  $D$ . نأخذ نهاية المجموع التكاملي (4.1)، عندما تزداد  $n$  إلى اللانهاية، أي عندما يسمى  $\lambda$  إلى الصفر. فإذا كانت هذه النهاية موجودة ومحدودة، أيًا كانت طريقة تجزئة المساحة  $D$ ، وأياً كان موضع النقطة  $P_i(\xi_i, \eta_i)$  في المساحة الجزئية  $D_i$ ، فإننا نسميها التكامل الثنائي للدالة  $f(x, y)$  على المساحة  $D$ ، ونكتب

$$\iint_D f(x, y) dA = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta A_i$$

ونقول عندها إن الدالة  $f(x, y)$  كمولة على المساحة  $D$ . ونسمي الدالة المكاملة  $D$  مساحة المكاملة، و  $dA$  عنصر مساحة في  $D$ .



الشكل 4.2

ملحوظة 4.1: افترضنا عند تعريف التكامل الثنائي، أن الدالة  $f(x, y)$  محدودة على  $D$ ، وهذا الشرط لازم وغير كافٍ، كي تكون هذه الدالة كمولة على  $D$ . فمثلاً، دالة ديرنغلي<sup>١</sup>:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & ; (x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \\ 0 & ; (x, y) \notin \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \end{cases}$$

محدودة على المربع  $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ ، لكنها غير كمولة عليه. ويتم التحقق من ذلك مباشرة من تعريف التكامل الثنائي.

مبرهنة 4.1: تكون الدالة  $f(x, y)$  كمولة على الساحة المغلقة والمحدودة  $D$ ، إذا كانت هذه الدالة مستمرة على  $D$ ، أو مستمرة جزئياً عليها، أي يوجد لهذه الدالة نقاط انقطاع تشكل عدداً محدوداً من منحنيات ملساء تقع داخل  $D$ .

نفرض فيما يلي، أن ساحة المكاملة هي ساحة مستوية محددة ومحاطة بمنحنى أملس أو أملس جزئياً، وأن الدوال المكاملة معرّفة ومحددة ومستمرة أو مستمرة جزئياً عليها. أما إذا كانت الدالة المكاملة غير محددة على  $D$ ، أو أن الساحة  $D$  غير محددة، فإننا نحصل على تكاملات ثنائية شاذة (معتلة)، نعالجها في البند 4.5.

## 4.2 التفسير الهندسي للتكامل الثنائي

إذا كان  $f(x, y) \geq 0$  على  $D$ ، فإن التكامل الثنائي يُمثل حجم مجسم أسطواني، مولداته توازي المحور  $oz$ ، محدود من الأعلى بالسطح البسيط  $z = f(x, y)$ ، ومن الأسفل بالساحة المستوية  $D$  الواقعة في المستوى  $oxy$ .

إذا كان  $f(x, y) \equiv 1$  على  $D$ ، فإن

$$\iint_D 1 dA = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n 1 \Delta A_i = \lim_{\lambda \rightarrow 0} A = A$$

أي أن التكامل الثنائي  $\iint_D dA$  يُمثل مساحة الساحة  $D$ .

## 4.3 خواص التكامل الثنائي

إن الخواص الأساسية للتكامل الثنائي هي نفسها خواص التكامل المحدد. لذا، نعرض لهذه

<sup>١</sup> بيتر غوستاف ديرنغلي (١٨٥٩-١٨٠٥) رياضي ألماني.

الخواص دون التطرق لإثباتها، الذي ينتج مباشرة من تعريف التكامل الثنائي.

١- إذا كانت الدالتان  $f(x, y)$  و  $g(x, y)$  كمولتين على الساحة  $D$ ، وكان  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  فإن الدالة  $[\alpha f(x, y) \mp \beta g(x, y)]$  كمولة على  $D$ ، ويكون:

$$\iint_D [\alpha f(x, y) \mp \beta g(x, y)] dA = \alpha \iint_D f(x, y) dA \mp \beta \iint_D g(x, y) dA$$

٢- إذا كانت الدالة  $f(x, y)$  كمولة على الساحتين  $D_1$  و  $D_2$ ، فإنها تكون كمولة على  $D = D_1 \cup D_2$ ؛ أضف إلى ذلك، أنه إذا لم تشترك الساحتين  $D_1$  و  $D_2$  بنقاط داخلية، فإن:

$$\iint_D f(x, y) dA = \iint_{D_1} f(x, y) dA + \iint_{D_2} f(x, y) dA$$

٣- إذا كان  $f(x, y) \geq g(x, y)$  على الساحة  $D$ ، وكانت الدالتان  $f(x, y)$  و  $g(x, y)$  كمولتين على  $D$ ، فإن:

$$\iint_D f(x, y) dA \geq \iint_D g(x, y) dA$$

وخصوصاً، إذا كان  $f(x, y) \geq 0$  على  $D$ ، فإن:

$$\iint_D f(x, y) dA \geq 0$$

٤- مبرهنة القيمة الوسطى: إذا كانت الدالة  $f(x, y)$  كمولة على الساحة  $D$ ، وكانت  $A$  مساحة  $D$ ، وكان  $m$  و  $M$  ثابتان يحققان العلاقة  $m \leq f(x, y) \leq M$  على  $D$ ، فإن:

$$mA \leq \iint_D f(x, y) dA \leq MA$$

وعليه، يوجد عدد  $\mu$ ، بحيث يكون  $\iint_D f(x, y) dA = \mu A$

وتسمى  $\mu$  القيمة الوسطى للدالة  $f(x, y)$  على  $D$ .

٥- إذا كانت الدالة  $f(x, y)$  كمولة على الساحة  $D$ ، فإن الدالة  $|f(x, y)|$  كمولة على  $D$ ، ويكون:

$$\left| \iint_D f(x, y) dA \right| \leq \iint_D |f(x, y)| dA$$

#### 4.4 حساب التكامل الثنائي

إن حساب التكامل الثنائي يعتمد أولاً، على كيفية تجزئة المساحة  $D$ ، وعلى أسلوب جمع حاصل ضرب كل مساحة جزئية بقيمة الدالة عند نقطة داخلها.

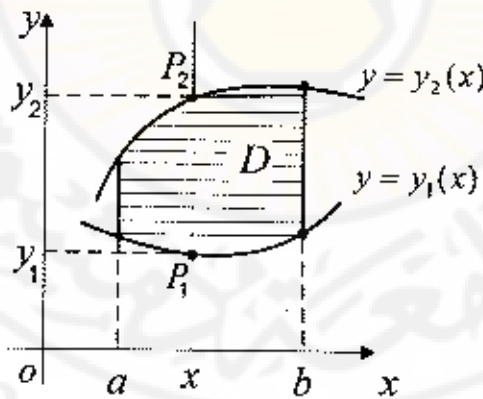
##### 4.4.1 التجزئة القائمة

نجزئ المساحة  $D$ ، بواسطة مستقيمتان توازي المحاورين الإحداثيتين. فتكون المساحات الجزئية  $\Delta A$  مستطيلات أضلاعها  $\Delta x$  و  $\Delta y$ . وعليه، فإن عنصر المساحة هو  $da = dx dy$ . ويكتب التكامل الثنائي كما يلي:

$$I = \iint_D f(x, y) dx dy \quad (4.2)$$

نبدأ في حساب هذا التكامل على مساحة بسيطة باتجاه أحد المحاور الإحداثية، ثم نعمم على مساحات غير بسيطة.

تعريف 4.1: نقول عن مساحة  $D$ ، إنها بسيطة (نظامية) باتجاه المحور  $(x)$ ، واختصاراً باتجاه  $x$ ، إذا كانت محاطة بالمستقيمين  $x = a$  و  $x = b$  وبالمنحنين  $y = y_1(x)$  و  $y = y_2(x)$ ، حيث  $y_1 \leq y_2$  على المجال  $[a, b]$ ، والمشتقان  $y_1'(x)$  و  $y_2'(x)$  مستمرين على هذا المجال، الشكل 4.3.



الشكل 4.3

ويكتب هذه المساحة بدلالة عناصرها  $y_1(x)$  و  $y_2(x)$  و  $x = a$  و  $x = b$ ، كما يلي:

$$D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x); y_1, y_2 \in C^1([a, b])\}$$

كما هو واضح، فإن أي مستقيم يوازي المحور  $oy$ ، ويمر من نقطة داخلية من  $D$ ، يقطع محيطها بنقطتين  $P_1(x, y_1)$  (نقطة دخول) و  $P_2(x, y_2)$  (نقطة خروج). عندما يتحرك هذا المستقيم، بحيث يمسح كامل الساحة  $D$ ، ويبقى موازياً للمحور  $oy$ ، فإن نقطة الدخول ترسم منحن يسمى منحن الدخول  $y = y_1(x)$ ، وترسم نقطة الخروج منحن يسمى منحن الخروج  $y = y_2(x)$ ، وهذان المنحنيان أملسان، لأن  $y_1, y_2 \in C^1([a, b])$ ، و  $y_1 \leq y_2$ ،  $\forall x \in [a, b]$ .

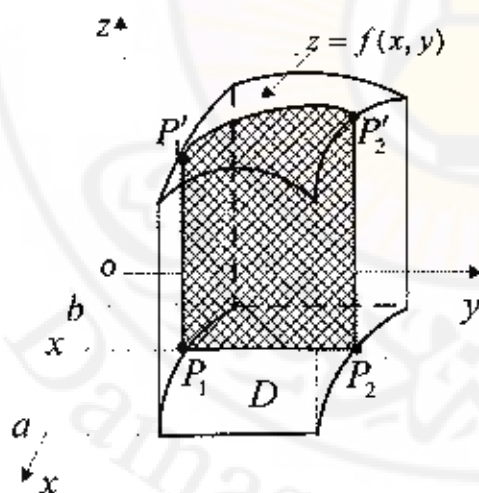
نُعرف بالأسلوب ذاته، الساحة البسيطة باتجاه  $x$ :

$$D = \{(x, y) : \alpha \leq y \leq \beta, x_1(y) \leq x \leq x_2(y); x_1, x_2 \in C^1([\alpha, \beta])\}$$

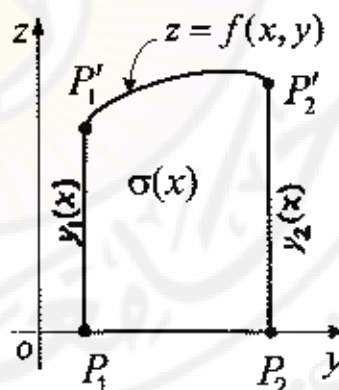
ونقول إن الساحة بسيطة إذا كانت بسيطة بالاتجاهين.

#### حساب التكامل الثنائي في التجزئة القائمة

نبدأ، للسهولة بالحالة  $f(x, y) \geq 0$  على الساحة  $D$ ، البسيطة باتجاه  $y$ . عندئذ، فإن التكامل الثنائي (4.2) يمثل حجم مجسم اسطوانتي مولداته توازي المحور  $oz$ ، ومحدد من الأعلى بالسطح  $z = f(x, y)$  ومن الأسفل بالساحة  $D$  من المستوى  $oxy$ .



الشكل 4.4-A



الشكل 4.4-B

لتكن  $\sigma(x)$  مساحة مقطع من هذا الجسم الأسطواني بالمستوي  $P_1P_2P_2'P_1'$  العمودي على المحور  $ox$  عند النقطة  $x \in [a, b]$ ، الشكل 4.4-A، عندها فإن الحجم المطلوب يُعطى بالتكامل المحدد

$$I = \int_a^b \sigma(x) dx$$

لحساب المساحة  $\sigma(x)$ ، نسقط المقطع  $P_1P_2P_2'P_1'$  على المستوي  $oyz$ ، الشكل 4.4-B، وتكون مساحته

$$\sigma(x) = \int_{y=y_1(x)}^{y=y_2(x)} f(x, y) dy$$

(مع التذكير، هنا، أن  $x$  ثابت). وعليه، فإن

$$I = \int_a^b \left[ \int_{y=y_1(x)}^{y=y_2(x)} f(x, y) dy \right] dx$$

وهو، حسب تعريف التكامل الثنائي، مساوٍ للتكامل الثنائي للدالة  $f(x, y)$  على الساحة  $D$ . وغالباً ما نكتب هذا التكامل بالشكل

$$I = \iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{y=y_1(x)}^{y=y_2(x)} f(x, y) dy \quad (4.3)$$

حيث تكامل أولاً، بالنسبة إلى  $y$ ، بالنظر إلى  $x$  كنابت، بين الحدين  $y = y_1(x)$  و  $y = y_2(x)$ ، ويكون ناتج المكاملة دالة في  $x$  فقط، ثم تكامل الناتج بالنسبة إلى  $x$ ، بين الحدين  $a$  و  $b$ .

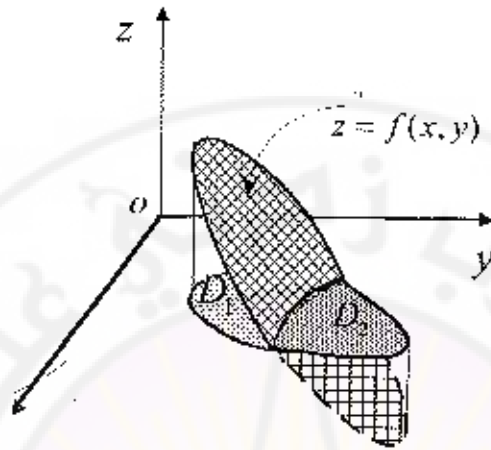
إن العلاقة (4.3) صحيحة من أجل أي دالة مستمرة  $f(x, y)$  على الساحة  $D$ ، وليس بالضرورة أن يكون  $f(x, y) \geq 0$  على  $D$ . فإذا غيرت الدالة  $f(x, y)$  إشارتها على  $D$ ، أي

$$f(x, y) < 0 ; \forall (x, y) \in D_2 \text{ و } f(x, y) \geq 0 ; \forall (x, y) \in D_1$$

حيث إن  $D = D_1 \cup D_2$ ، فإن التكامل الثنائي يساوي المجموع الجبري للحجمين  $V_1$  و  $V_2$  للمجسمين الأسطوانيين المنشأين على القاعدتين  $D_1$  و  $D_2$ ، الشكل 4.5. أي

$$\iint_D f(x, y) dx dy = V_1 - V_2$$

وتكون العلاقة (4.3) صحيحة، أيضاً، في هذه الحالة.



الشكل 4.5

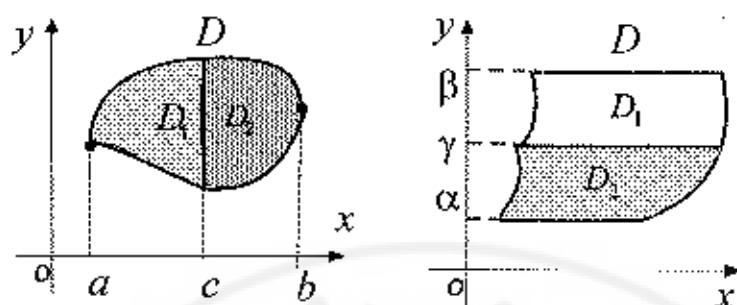
إذا كانت الساحة  $D$  بسيطة باتجاه  $x$ ، فإن التكامل الثنائي (4.2)، يكتب كما يلي:

$$I = \iint_D f(x, y) dx dy = \int_{\alpha}^{\beta} dy \int_{x=x_1(y)}^{x=x_2(y)} f(x, y) dx \quad (4.4)$$

حيث تكامل، أولاً، بالنسبة إلى  $x$ ، بالنظر إلى  $y$  كثابت، بين الحدين  $x = x_1(y)$  و  $x = x_2(y)$ ، ويكون ناتج المكاملة دالة في  $y$  فقط، ثم تكامل الناتج بالنسبة إلى  $y$  بين الحدين  $\alpha$  و  $\beta$ .

ملحوظة 4.2: إذا كانت الساحة  $D$  بسيطة بالاتجاهين، فإن التكامل الثنائي (4.2) يُحسب بإحدى العلاقتين (4.3) أو (4.4) وتكون النتيجة، بالطبع، ذاتها.

وإذا لم تكن الساحة  $D$  بسيطة بأي من الاتجاهين، فإننا نقسمها إلى ساحات بسيطة باتجاه معين، بحيث لا تشترك هذه الساحات بنقاط داخلية وبحيث يشكل اتحادها الساحة الأصلية  $D$ ، الشكل 4.6. ثم نحسب التكامل الثنائي على كل منها، ثم نجمع النواتج.



الشكل 4.6

ملحوظة 4.3: إذا كانت الساحة  $D$  مستطيل أضلاعه توازي المحورين الإحداثيين:

$$D = \{ (x, y) : a \leq x \leq b, \alpha \leq y \leq \beta \}$$

فإن التكامل الثنائي (4.2) يُكتب كما يلي:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{x=a}^{x=b} \int_{y=\alpha}^{y=\beta} f(x, y) dy = \int_{y=\alpha}^{y=\beta} \int_{x=a}^{x=b} f(x, y) dx$$

وإذا كان  $f(x, y) = g(x)h(y)$  على هذا المستطيل، فإن

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{x=a}^{x=b} g(x) dx \int_{y=\alpha}^{y=\beta} h(y) dy$$

حيث إن كل من هذين التكاملين المحددين مستقل عن الآخر.

ملحوظة 4.4: إذا كانت الدالة  $f(x, y)$  زوجية بالنسبة إلى  $x$ ، وكانت ساحة المكاملة  $D$

متناظرة بالنسبة إلى المحور  $oy$ ، فإن قيمة التكامل الثنائي (4.2) تساوي

ضعف قيمته على إحدى نصفي الساحة  $D$ ، يمين أو يسار المحور  $oy$ .

أما إذا كانت الدالة  $f(x, y)$  فردية بالنسبة إلى  $x$ ، وكانت ساحة المكاملة  $D$  متناظرة بالنسبة

إلى المحور  $oy$ ، فإن قيمة التكامل الثنائي (4.2) تساوي الصفر.

ويمكن، بأسلوب مماثل، صياغة ما سبق إذا كانت الدالة  $f(x, y)$  زوجية أو فردية بالنسبة إلى

$y$ ، وكانت الساحة  $D$  متناظرة بالنسبة إلى المحور  $ox$ .

مثال 4.1: احسب قيمة التكامل الثنائي  $I = \iint_D y \cos xy \, dx dy$ ، حيث



$$D = \left\{ (x, y) : (x, y) \in [0, 3] \times \left[0, \frac{\pi}{3}\right] \right\}$$

الحل: واضح أن مساحة المكاملة  $D$ ، محدودة ومحاطة بمنحنى أملس جزئياً، والدالة المكاملة مستمرة عليها. فالتكامل موجود. ولما كانت المساحة  $D$  بسيطة، فإن

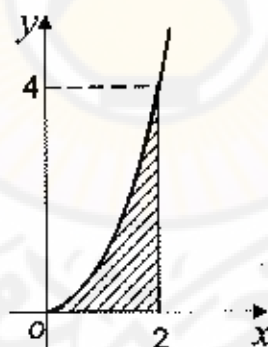
$$I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} y dy \int_{x=0}^{x=3} \cos xy dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} [\sin xy]_0^3 dy = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin 3y dy = \frac{2}{3}$$

ملحوظة 4.5: لما كانت منطقة المكاملة بسيطة، فإنه بالإمكان المكاملة، أولاً، بالنسبة إلى  $y$  ومن ثم بالنسبة إلى  $x$ ، ولكن عندها، تتعقد عملية المكاملة. لذا فإنه عند حساب التكامل الثاني، يجب اختيار ترتيب المكاملة، بحيث يؤدي إلى تكاملات بسيطة.

$$\text{مثال 4.2: احسب قيمة التكامل } I = \int_0^4 dy \int_{x=\sqrt{y}}^{x=2} \sqrt{x^3+1} dx$$

الحل: إن شروط وجود التكامل محققة، أي أن التكامل موجود. ولكن لا يمكن المكاملة بالترتيب المعطى، لذا نغير ترتيب المكاملة، مع ملاحظة أن المساحة  $D$  بسيطة باتجاه  $y$ ، الشكل 4.7:

$$D = \left\{ (x, y) : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq x^2 \right\}$$



الشكل 4.7

$$I = \int_0^2 \sqrt{x^3+1} dx \int_{y=0}^{y=x^2} dy = \int_0^2 x^2 \sqrt{x^3+1} dx = 18$$

مثال 4.3: احسب مساحة المساحة  $D$  ، الواقعة في الربع الأول، المحاطة بالمنحنيات:

$$xy=1 \text{ , } y=x^2 \text{ , } y=2 \text{ , } x=0$$

الحل: إن المساحة  $D$  محدودة ومحاطة بمنحنى أملس جزئياً، الشكل 4.8، لذا فإن مساحتها تُعطى

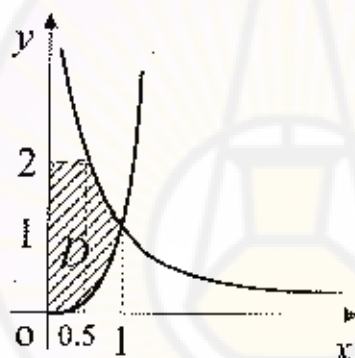
بالتكامل الثنائي:

$$I = \iint_D dx dy$$

لما كانت  $D$  غير بسيطة بالاتجاهين، نقسمها إلى ناحيتين بسيطتين باتجاه  $y$ ،  $D = D_1 \cup D_2$ ،  
بالمستقيم  $x = 0.5$ :

$$D_1 = \left\{ (x, y) : 0 \leq x \leq 0.5 , x^2 \leq y \leq 2 \right\}$$

$$D_2 = \left\{ (x, y) : 0.5 \leq x \leq 1 , x^2 \leq y \leq \frac{1}{x} \right\}$$



الشكل 4.8

وعليه، فإن

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{0.5} dx \int_{y=x^2}^{y=2} dy + \int_{0.5}^1 dx \int_{y=x^2}^{y=1/x} dy = \int_0^{0.5} (2 - x^2) dx + \int_{0.5}^1 \left( \frac{1}{x} - x^2 \right) dx = \\ &= \left[ 2x - \frac{x^3}{3} \right]_0^{0.5} + \left[ \ln x - \frac{x^3}{3} \right]_{0.5}^1 = \frac{2}{3} + \ln 2 \end{aligned}$$

مثال 4.4: احسب حجم المنطقة الواقعة في الثمن الموجب من الفضاء الثلاثي، والمحاطة

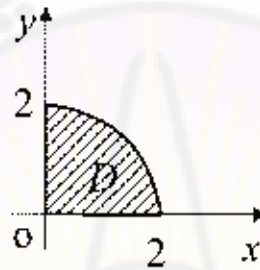
بالمستويات الإحداثية وبالسطحين  $x^2 + y^2 = 4$  و  $z = xy$ .

الحل: إن المنطقة المطلوب حساب حجمها، هي منطقة أسطوانية مولداتها توازي المحاور  $ox$ ، محدودة من الأسفل بالساحة:

$$D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$$

ومن الأعلى بالسطح البسيط  $z = xy$ ، حيث  $z > 0$  على  $D$ ، الشكل 4.9. لذا فإن حجمها  $V$  يعطى بالتكامل الثنائي:

$$V = \iint_D xy \, dx \, dy$$



الشكل 4.9

ولما كانت الساحة  $D$  بسيطة، فإن

$$\begin{aligned} V &= \int_0^2 x \, dx \int_{y=0}^{y=\sqrt{4-x^2}} y \, dy = \int_0^2 x \left[ \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=\sqrt{4-x^2}} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 x(4-x^2) \, dx = \left[ x^2 - \frac{x^4}{8} \right]_0^2 = 2 \quad \text{وحدة حجم} \end{aligned}$$

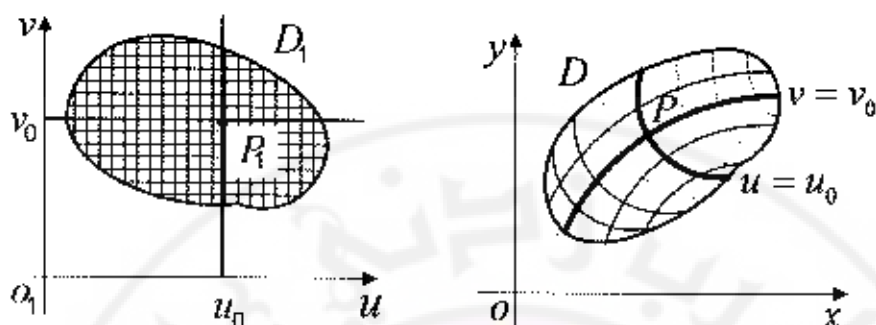
#### 4.4.2 التجزئة المنحنية (تغيير المتغيرات في التكامل الثنائي)

الإحداثيات المنحنية: لنكن لدينا الدالتان

$$\{x = x(u, v), y = y(u, v)\} \quad (4.5)$$

المعرفتان والمستمرتان على الساحة  $D_1$ ، من المستوي  $oxy$ ، ولهما مشتقان مستمران عليهما. إن هذه الدوال تقابل كل نقطة داخلية  $P_1(u, v)$  من  $D_1$  بنقطة وحيدة  $P(x, y)$  في المستوي  $oxy$ . وتقابل كل النقاط الداخلية للساحة  $D_1$  بنقاط داخلية لساحة  $D$  من المستوي  $oxy$ .

الشكل 4.10. ونقول إن الدالتين (4.5) تعرفان تطبيقاً مستمر المشتقات، للساحة  $D_1$  من المستوى  $uv$  على الساحة  $D$  من المستوى  $oxy$ ، باستثناء، ربما محيطيها.



الشكل 4.10

إذا أمكن، بشكلٍ وحيد، إيجاد  $u$  و  $v$ ، بدلالة  $x$  و  $y$ ، من العلاقات (4.5):

$$\{u = u(x, y), v = v(x, y)\}$$

فإننا نقول إن هذا التطبيق تقابل مستمر المشتقات بين الساحتين  $D$  و  $D_1$ ، وعندها يقابل أي منحنٍ مستمر  $L_1$  في  $D_1$  منحنٍ مستمر  $L$  من  $D$ ، وبالعكس.

بإعطاء المتغيرين  $u$  و  $v$  قيمتين ثابتتين  $u_0$  و  $v_0$  في  $D_1$ ، فإننا نحصل على النقطة  $P_1(u_0, v_0)$  والتي تقابلها النقطة  $P(x_0, y_0)$  في  $D$ ، حيث  $x_0 = x(u_0, v_0)$  و  $y_0 = y(u_0, v_0)$ . وهذا يعني أن العددين  $u$  و  $v$  يعرفان إحداثيات جديدة للنقطة  $P$  في المستوى  $oxy$ . تسمى الإحداثيات المنحنية للنقطة  $P$ .

إذا وضعنا  $u = u_0$  في الجملة (4.5)، وهي معادلة مستقيم في  $D_1$ ، نحصل على المعادلات الوسيطة لمنحنٍ في  $D$  (الوسيط  $v$ ):

$$\{x = x(u_0, v), y = y(u_0, v)\} \quad (4.6)$$

نضع، مرة جديدة،  $v = v_0$  في (4.5)، وهي معادلة مستقيم في  $D_1$ ، نحصل على المعادلات الوسيطة لمنحنٍ في  $D$  (الوسيط  $u$ ):

$$\{x = x(u, v_0), y = y(u, v_0)\} \quad (4.7)$$

وهكذا، فإنه يقابل كل مستقيمين متعامدين  $u = u_0$  و  $v = v_0$  في المستوى  $oxy$  منحنيين إحداثيان متقاطعان في المستوى  $oxy$ . وعليه، فإن صورة النقطة الداخلية  $P_1(u_0, v_0)$  الناتجة من تقاطع المستقيمين المتعامدين  $u = u_0$  و  $v = v_0$  في  $D_1$  هي نقطة داخلية  $P(x_0, y_0)$  في  $D$ ، ناتجة من تقاطع المنحني المعطى بالجملة (4.6) مع المنحني المعطى بالجملة (4.7). نسمي هذين المنحنيين المنحنيين الإحداثيان للنقطة  $P$ . وعندما يكون هذان المنحنيان متعامدين في كل نقطة من  $D$ ، تكون هذه هي الإحداثيات المنحنية المتعامدة لتلك النقطة.

وبإعطاء المتغير  $u$  قيمة ثابتة مختلفة، نحصل على جملة منحنيات إحداثية في المستوى  $oxy$ ، وهذه المنحنيات لا تتقاطع لوجود تقابل بين الساحتين  $D$  و  $D_1$ . كما أنه يمر من أية نقطة داخلية من  $D$  منحني إحداثي واحد فقط من هذه المنحنيات. وبأسلوب مشابه، نحصل على جملة منحنيات إحداثية أخرى لها نفس الصفات، وذلك عندما نعطي المتغير  $v$  قيمة ثابتة مختلفة.

وعليه، فإن شبكة الإحداثيات المنحنية في المستوى  $oxy$  هي صورة لشبكة إحداثيات متعامدة في المستوى  $oxy$ ، الشكل 4.10.

ملاحظة 4.3: يمكن البرهان أنه إذا كان

$$J_1 = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix} \neq 0$$

في  $D$ ، فإنه في جوار موضعي لكل نقطة من نقاط  $D$  يوجد تقابل مستمر المشتقات. ولكن يمكن ألا يكون التطبيق في  $D$  تقابلاً، مع أن  $J_1 \neq 0$ . فمثلاً، إذا كان التطبيق معطى بجملة الدالتين:

$$\{ x = e^u \cos v, y = e^u \sin v : u, v \in \mathbb{R} \}$$

فإن

$$J_1 = e^u \neq 0 \quad ; \quad \forall u$$

ومع ذلك، فإن صورة النقطتين  $P_1(u=0, v=0)$  و  $P_1(u=0, v=2\pi)$  وفق هذا التطبيق هو النقطة  $P(x=1, y=0)$ ، أي أن هذا التطبيق ليس تقابلاً. من جهة أخرى، إذا كان  $J_1 = 0$  في بعض النقاط، فإن التطبيق يمكن أن يكون تقابلاً في جوار

لهذه النقطة. فمثلاً، جملة الدالتين

$$\{x=u^3, y=v^3; u, v \in \mathbb{R}\}$$

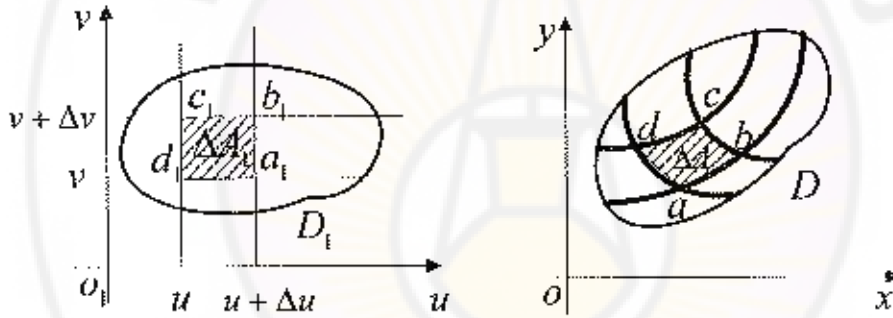
حيث  $J_1 = 9u^2v^2$ ، وهو ينعدم من أجل  $u=0$  أو  $v=0$ . ولكن يبقى هذا التطبيق تقابل. ويُعطى التطبيق العكسي له بالحملية:

$$\{u=\sqrt[3]{x}, v=\sqrt[3]{y}; x, y \in \mathbb{R}\}$$

ونكون صورة النقطة  $P(x=0, y=0)$  وفقه هي النقطة  $P_1(u=0, v=0)$ ، وبالعكس.

#### عنصر المساحة في الإحداثيات المنحنية

نفرض أن الساحة  $D_1$  مجزأة تجزئة منحنية، بحيث تكون صورها  $D$ ، وفق التقابل (4.5)، مجزأة تجزئة قائمة. ولتكن صورة المستطيل الجزئي  $a_1b_1c_1d_1$  ذي الأبعاد  $\Delta u$  و  $\Delta v$ ، من الساحة  $D_1$  في المستوى  $uv$ ، هي رباعي وجوه  $abcd$  أضلاعه منحنيات، الشكل 4.11.



الشكل 4.11

واضح أن إحداثيات رؤوس المستطيل  $a_1b_1c_1d_1$  هي:

$$a_1(u, v), b_1(u + \Delta u, v), c_1(u + \Delta u, v + \Delta v), d_1(u, v + \Delta v)$$

وتكون إحداثيات رؤوس صورته:

$$a[x(u, v), y(u, v)], b[x(u + \Delta u, v), y(u + \Delta u, v)],$$

$$c[x(u + \Delta u, v + \Delta v), y(u + \Delta u, v + \Delta v)], d[x(u, v + \Delta v), y(u, v + \Delta v)]$$

وباستخدام صيغة تايلور لنشر الدوال بمتغيرين، مع الاحتفاظ فقط بحدود الدرجة الأولى

بالنسبة إلى  $\Delta u$  و  $\Delta v$ ، تكتب إحداثيات هذه النقاط كما يلي:

$$a[x(u,v), y(u,v)], b\left[x + \frac{\partial x}{\partial u} \Delta u, y + \frac{\partial y}{\partial u} \Delta u\right] \\ c\left[x + \frac{\partial x}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial x}{\partial v} \Delta v, y + \frac{\partial y}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial y}{\partial v} \Delta v\right], d\left[x + \frac{\partial x}{\partial v} \Delta v, y + \frac{\partial y}{\partial v} \Delta v\right]$$

حيث إن  $x$  و  $y$  ومشتقاتها مأخوذة عند النقطة  $(u, v)$ .

تسمح هذه الإحداثيات، باعتبار الشكل  $abcd$  متوازي أضلاع تقريباً، بإهمال مقادير صغيرة، لأن:

$$\overrightarrow{ad} = \overrightarrow{bc} = \frac{\partial x}{\partial v} (\Delta v) \hat{i} + \frac{\partial y}{\partial v} (\Delta v) \hat{j} \quad \text{و} \quad \overrightarrow{ab} = \overrightarrow{cd} = \frac{\partial x}{\partial u} (\Delta u) \hat{i} + \frac{\partial y}{\partial u} (\Delta u) \hat{j}$$

وتعطي مساحة الشكل  $abcd$ ، من الجداء المتجهي هذين المتجهين

$$\Delta A \approx |\overrightarrow{ab} \times \overrightarrow{ad}| = \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix} (\Delta u)(\Delta v) = |J_1| (\Delta u)(\Delta v)$$

وهكذا، فإن  $\Delta A \approx |J_1| \Delta A_1$ . ومنه، فإن  $\frac{\Delta A}{\Delta A_1} \approx |J_1|$ ، حيث تزداد هذه المساواة التقريبية دقةً، كلما صغرت المساحات الجزئية  $\Delta A$  و  $\Delta A_1$ . وتصبح المساواة دقيقة، عندما يسعى قطر الشكل  $abcd$  إلى الصفر. ويسعى عندها، قطر المستطيل  $a_1 b_1 c_1 d_1$  إلى الصفر، لأن جملة الدوال (4.5) مستمرة.

وهكذا، فإن المساحة  $\Delta A$  تصبح عنصر مساحة  $dA$ ، وتصبح مساوية تماماً لمساحة متوازي الأضلاع المنشئ على المتجهين  $\overrightarrow{ab}$  و  $\overrightarrow{ad}$ :

$$dx dy = |J_1| du dv \quad \text{أو} \quad dA = |J_1| dA_1 \quad (4.8)$$

حيث  $dA_1$  عنصر مساحة في  $D_1$ .

تمثل المساواة (4.8) العلاقة بين عناصر المساحة في  $D$  و  $D_1$ ، ولكنها لا تربط بين المساحتين  $A$  و  $A_1$ .

#### حساب التكامل الثنائي في التجزئة المنحنية:

إذا كان حساب التكامل الثنائي (4.2) معقداً أو مستحيلاً، عند تجزئة الساحة  $D$  تجزئة قائمة، فإننا نبدل الإحداثيات الديكارتية بالإحداثيات المنحنية، بحيث تجزئ الساحة  $D$  تجزئة منحنية

وتكون صورتها  $D_1$  وفق التقابل مستمر المشتقات (4.5)، مجزأة تجزئة قائمة، شرط أن يكون العنقوبي مغايراً للصفر في  $D_1$ ، ويكون:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f_1(u, v) |J_1| du dv \quad (4.9)$$

حيث  $f_1(u, v) = f[G(u, v), H(u, v)]$ .

ملحوظة 5.5: إن التكامل على المساحة  $D_1$  موجود، لأن التكامل على المساحة  $D$  موجود أصلاً.

تبقى العلاقة (4.9) صحيحة، حتى إذا كان  $J_1 = 0$  في نقاط تقع على عدد محدد من المنحنيات المماس، في  $D_1$ .

ملحوظة 5.6: تعطى مساحة المساحة  $D$  في الإحداثيات المنحنية بالعلاقة

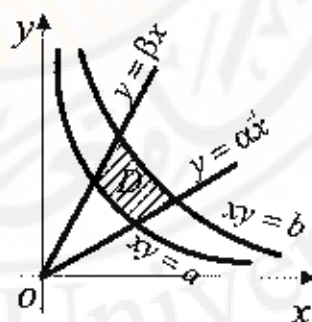
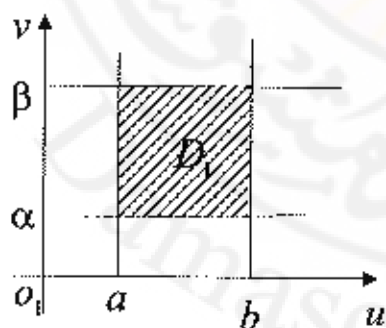
$$A = \iint_{D_1} |J_1| dA_1 = \iint_{D_1} |J_1| du dv$$

ولكن ليس بالضرورة أن تكون المساحة  $A$  مساوية للمقدار  $|J_1| A_1$ .

مثال 4.5: احسب مساحة المساحة الواقعة في الربع الأول من المستوي  $oxy$ ، والمحاطة بالمنحنيات

$$y = \alpha x, y = \beta x; (0 < \alpha < \beta), xy = a, xy = b; (0 < a < b)$$

الحل: إن المساحة المطلوب حساب مساحتها محدة ومحاطة بمنحنى أملس جزئياً، ولكنها غير بسيطة، الشكل 4.12.



الشكل 4.12



نجري تبديلاً في المتغيرات بالعلاقات:  $xy = u$  و  $\frac{y}{x} = v$ ، فتصبح صورة الساحة  $D$  وفق هذا التقابل، هي الساحة:

$$D_1 = \{(u, v) : a \leq u \leq b, \alpha \leq v \leq \beta\}$$

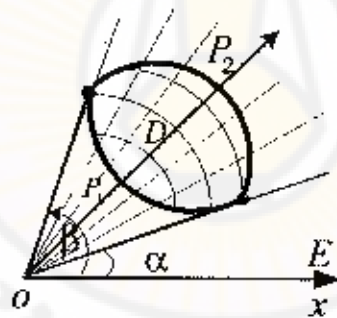
وهي ساحة بسيطة. ويكون  $J_1 = \frac{1}{2v} \neq 0$  على  $D_1$ . وعليه، فإن المساحة المطلوبة:

$$\begin{aligned} A &= \iint_D dx dy = \iint_{D_1} |J_1| du dv = \frac{1}{2} \int_a^b du \int_\alpha^\beta \frac{dv}{v} = \\ &= \frac{1}{2} [u]_a^b [\ln v]_\alpha^\beta = \frac{1}{2} (b-a) \ln \frac{\beta}{\alpha} \end{aligned}$$

وحدة مساحة

#### 4.4.3 حساب التكامل الثنائي في التجزئة القطبية

إن الإحداثيات القطبية حالة خاصة من الإحداثيات المنحنية المتعامدة، حيث  $u = \rho$  و  $v = \varphi$ . وعليه، فإن الساحة  $D$  تُجزئ في هذه الإحداثيات بدوائر، مركزها القطب:  $\rho = k_i$ ، حيث  $k_i$  ثوابت، وأنصاف مستقيمت منبعدة من القطب:  $\varphi = h_i$ ، حيث  $h_i$  ثوابت، الشكل 4.13.



الشكل 4.13

من العلاقة (التقابل) بين الإحداثيات الديكارتية والقطبية:

$$x = \rho \cos \varphi \quad \text{و} \quad y = \rho \sin \varphi$$

نجد يعقوبي هذا التقابل

$$J_1 = \frac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \varphi)} = \rho$$

وعليه، فإن عنصر المساحة يُعطى في هذه التجزئة، استناداً للعلاقة (4.8)، بالعلاقة:

$$dxdy = \rho d\rho d\varphi$$

وهكذا، فإن التكامل الثنائي (4.2) يكتب كما يلي:

$$\iint_D f(x, y) dxdy = \iint_{D_1} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho d\varphi$$

حيث  $D_1$  صورة  $D$  في التجزئة القطبية.

ملحوظة 4.7: نستخدم، عادةً، التجزئة القطبية إذا كانت معادلات محيط مساحة المكاملة، أو الدالة المكاملة تحوي العبارة  $(x^2 + y^2)$ .

لا نضطر في هذه التجزئة إلى رسم المساحة  $D_1$  في الجملة الجديدة  $(\rho, \varphi)$ ، كسي نحدد عناصرها، لأنه غالباً، يمكن تحديد عناصر  $D_1$  مباشرة من  $D$ ، وذلك حسب كونها بسيطة باتجاه  $\rho$  أو  $\varphi$ .

#### المساحة البسيطة باتجاه $\rho$

نقول عن المساحة  $D$ ، المحددة بنصفي المستقيمين  $\varphi = \alpha$  و  $\varphi = \beta$ ، إنها بسيطة باتجاه  $\rho$ ، إذا قطع أي نصف مستقيم منبعث من القطب  $O$  ومار من نقطة داخلية من  $D$ ، معادلته  $\varphi = c$ ، حيث  $\alpha \leq c \leq \beta$ ، حدودها بنقطتين  $P_1(\rho_1, c)$  (نقطة دخول) و  $P_2(\rho_2, c)$  (نقطة خروج)، الشكل 4.13. عندما تتغير  $c$ ، بحيث يمسح نصف المستقيم هذا كامل المساحة  $D$ ، فإن نقطة الدخول ترسم منحني دخول  $\rho = \rho_1(\varphi)$ ، بينما ترسم نقطة الخروج منحني خروج  $\rho = \rho_2(\varphi)$ . حيث إن هذين المنحنيين أملسان على المجال  $[\alpha, \beta]$ . وتكتب هذه المساحة بدلالة عناصرها كما يلي:

$$D_1 = \{(\rho, \varphi) : \alpha \leq \varphi \leq \beta, \rho_1(\varphi) \leq \rho \leq \rho_2(\varphi)\}$$

ويكتب التكامل الثنائي (4.2)، كما يلي:

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho$$

ملحوظة 4.8: إذا كان القطب  $O$  نقطة داخلية في  $D$ ، فإن منحنى الدخول هو  $\rho_1 = 0$  ويكون  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ .

### الساحة البسيطة باتجاه $\varphi$

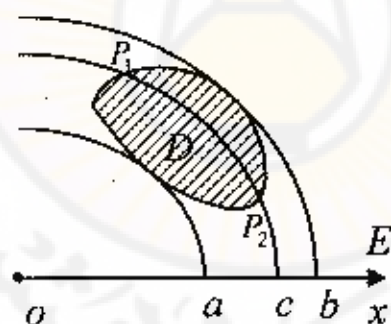
نقول عن الساحة  $D$ ، المحددة بالدائرتين  $\rho = a$  و  $\rho = b$ ، إنها بسيطة باتجاه  $\varphi$ ، إذا قطعت أي دائرة مركزها القطب  $O$  وصارة من نقطة داخلية من  $D$ ، معادلتها  $\rho = c$ ، حيث  $a \leq c \leq b$ ، حدودها بتقطعتين  $P_1(c, \varphi_1)$  (نقطة دخول) و  $P_2(c, \varphi_2)$  (نقطة خروج)، الشكل 4.14. عندما تتغير  $c$ ، بحيث تمسح هذه الدائرة كامل الساحة  $D$ ، فإن نقطة الدخول ترسم منحني دخول  $\varphi = \varphi_1(\rho)$ ، بينما ترسم نقطة الخروج منحني خروج  $\varphi = \varphi_2(\rho)$ . حيث إن هذين المنحنيين أملسان على المجال  $[a, b]$ . وتكتب هذه الساحة بدلالة عناصرها، كما يلي:

$$D_1 = \{(\rho, \varphi) : a \leq \rho \leq b, \varphi_1(\rho) \leq \varphi \leq \varphi_2(\rho)\}$$

ويكتب التكامل الثنائي (4.2)، كما يلي:

$$I = \int_a^b \rho d\rho \int_{\varphi_1(\rho)}^{\varphi_2(\rho)} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) d\varphi$$

إن هذه الحالة نادرة الحدوث، لأن معادلات المنحنيات تُعطى في الإحداثيات القطبية، عادةً، كدالة في المتغير  $\varphi$ .



الشكل 4.14

مثال 4.6: احسب قيمة التكامل  $I = \iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$ ، حيث

$$D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$$

الحل: إن الساحة  $D$  محددة ومحاطة بمستحن أملس جزئياً، الربع الموجب من قوس دائرة الواحدة. كما أن الدالة المكاملة مستمرة عليها، فالتكامل موجود. لكن لا يمكن إجراء المكاملة في التجزئة الديكارتية، لذا تنتقل إلى الإحداثيات القطبية، وتصبح عناصر الساحة  $D$ ، البسيطة باتجاه  $\rho$ ، في الإحداثيات القطبية

$$D_1 = \left\{ (\rho, \varphi) : 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \rho \leq 1 \right\}$$

وعليه، فإن

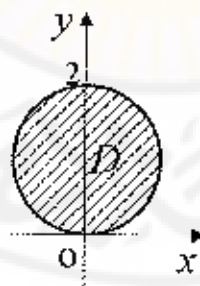
$$I = \iint_{D_1} \frac{\rho d\rho d\varphi}{\sqrt{1+\rho^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 \frac{\rho d\rho}{\sqrt{1+\rho^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \sqrt{1+\rho^2} \right]_0^1 d\varphi = \frac{\pi}{2} (\sqrt{2} - 1)$$

مثال 4.7: أوجد حجم جزء من الاسطوانة  $x^2 + y^2 = 2y$ ، الواقع فوق المستوي  $oxy$  والمحدد من الأعلى بالمستوي  $x + y + z = 2$ .

الحل: لما كانت المنطقة المطلوب حساب حجمها اسطوانية، مولداتها توازي المحور  $oz$ ، محدودة من الأسفل بالساحة:  $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 2y\}$ ، ومن الأعلى بالسطح البسيط  $z = 2 - x - y$ ، حيث  $z > 0$  على  $D$ . لذا، فإن حجمها  $V$  يُعطى بالتكامل الثنائي

$$V = \iint_D (2 - x - y) dx dy$$

لحساب هذا التكامل تنتقل إلى الإحداثيات القطبية، وتصبح عناصر الساحة  $D$ ، البسيطة باتجاه  $\rho$ ، الشكل 4.15، في الإحداثيات القطبية:



الشكل 4.15

$$D_1 = \{(\rho, \varphi) : 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \rho \leq 2 \sin \varphi\}$$

وعليه، فإن

$$\begin{aligned}
 V &= \int_0^\pi d\varphi \int_0^{2\sin\varphi} (2 - \rho \cos \varphi - \rho \sin \varphi) \rho d\rho = \\
 &= \int_0^\pi \left[ \rho^2 - \frac{\rho^3}{3} \cos \varphi - \frac{\rho^3}{3} \sin \varphi \right]_0^{2\sin\varphi} d\varphi = \\
 &= \int_0^\pi \left( 4\sin^2 \varphi - \frac{8}{3} \sin^3 \varphi \cos \varphi - \frac{8}{3} \sin^4 \varphi \right) d\varphi = \pi \quad \text{وحدة حجم}
 \end{aligned}$$

مثال 4.8: احسب قيمة التكامل  $I = \iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{16 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}$ ، حيث  $D$  الساحة المحصورة

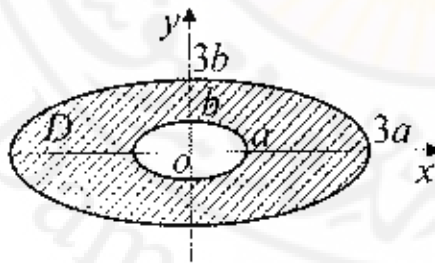
بين المنحنيين  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 9$  و  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > 0, b > 0$ ).

الحل: إن الساحة  $D$  محددة ومحاطة بمنحن أملس جزئياً، الشكل 4.16-A. كما أن الدالة المكاملة مستمرة عليها، فالتكامل موجود. لتبسيط عملية المكاملة، نجري تبديلاً في المتغيرات،

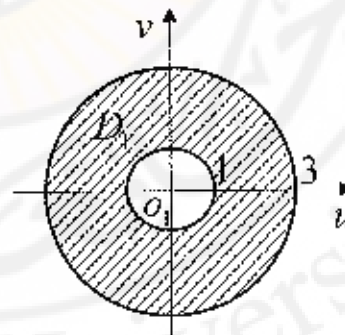
مستمر المشتقات:  $u = \frac{x}{a}$  و  $v = \frac{y}{b}$ ، ويكون

$$J_1 = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = ab \neq 0$$

وتصبح ساحة المكاملة  $D_1$  هي الحلقة الدائرية  $1 \leq u^2 + v^2 \leq 9$ ، الشكل 4.16-B.



الشكل 4.16-A



الشكل 4.16-B

ويُكتب التكامل كما يلي:

$$I = ab \iint_{D_1} \frac{du dv}{\sqrt{16 - u^2 - v^2}}$$

نتقل إلى الإحداثيات القطبية:  $u = \rho \cos \varphi$  و  $v = \rho \sin \varphi$ ، وتصبح عناصر الساحة  $D_1$ ، البسيطة باتجاه  $\rho$ ، في الإحداثيات القطبية:

$$D_1 = \{(\rho, \varphi) : 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 1 \leq \rho \leq 3\}$$

وعليه، فإن

$$I = ab \int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^3 \frac{\rho d\rho}{\sqrt{16 - \rho^2}} = \frac{2}{3} \pi ab (\sqrt{15} - \sqrt{7})$$

ملحوظة 4.9: يمكن دمج التبدلين (من  $x$  و  $y$  إلى  $u$  و  $v$ ، ومن ثم إلى  $\rho$  و  $\varphi$ ) بتحويل واحد يسمى الإحداثيات القطبية المعممة:  $x = a\rho \cos \varphi$  و  $y = b\rho \sin \varphi$ ، حيث  $J_1 = ab\rho$ .

#### 4.5 التكاملات الثنائية الشاذة

عندما عرضنا تعريف التكامل الثنائي  $I = \iint_D f(x, y) dx dy$  افترضنا أن الدالة  $f(x, y)$  محددة على الساحة المحددة  $D$ ، غير أنه يمكن تعميم هذا التعريف ليشمل الدوال غير المحدودة عند نقطة أو أكثر، أو الساحات غير المحددة. وفي الحالتين نحصل على تكاملات ثنائية شاذة. نعرض هذه التكاملات، باختصار.

##### 4.5.1 ساحة المكاملة محددة والدالة المكاملة مستمرة عليها باستثناء نقطة واحدة

لتكن  $D$  محددة ومحاطة بمنحن أملس أو أملس جزئياً، ولتكن الدالة  $f(x, y)$  مستمرة عليها، باستثناء نقطة واحدة  $P_0(x_0, y_0)$  (داخلية أو محيطية لـ  $D$ ). أي أن الدالة  $f(x, y)$  غير محدودة عندها. نسمي هذه النقطة نقطة شاذة للتكامل الثنائي، ونقول إن هذا التكامل شاذ. نحيط النقطة الشاذة  $P_0$  بساحة صغيرة  $B$  محددة ومحاطة بمنحن أملس، قطرها  $\varepsilon > 0$ . عندئذ، تكون الدالة  $f(x, y)$  مستمرة على الساحة المحددة  $D \setminus B$ ، أي أن هذه الدالة كمولة على هذه الساحة. فإذا سعت قيمة التكامل

$$I_\varepsilon = \iint_{D \setminus B} f(x, y) dx dy$$

إلى نهاية محددة، عندما تقلص الساحة  $B$  إلى النقطة  $P_0$ ، بأسلوب مستقل عن الكيفية التي تتم بها عملية التقلص، أي عندما يسعى  $\varepsilon$  قطر هذه الساحة إلى الصفر، فإننا نقول إن التكامل الشاذ متقارب، وقيمته تساوي قيمة هذه النهاية:

$$I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{D \setminus B} f(x, y) dx dy$$

أما إذا كانت هذه النهاية غير موجودة أو غير محدودة، فإننا نقول إن التكامل الشاذ متباعد. ملحوظة 4.10: إذا كانت الدالة المكاملة غير مستمرة عند عدة نقاط من  $D$ ، فإننا نجزي  $D$  إلى عدد محدد من الساحات تحوي كل منها نقطة شاذة وحيدة للتكامل. وندرس تقارب وتباعد التكاملات الشاذة للدالة  $f(x, y)$  على كل ساحة جزئية، كما فعلنا أعلاه. فإذا كانت جميع هذه التكاملات متقاربة، قلنا إن التكامل الشاذ المعطى متقارب، وقيمته تساوي مجموع قيم التكاملات المتقاربة، أما إذا كان أحدها على الأقل متباعد قلنا إن التكامل المعطى متباعد.

#### 4.5.2 الدالة المكاملة مستمرة على الساحة غير المحددة

لتكن الدالة  $f(x, y)$  مستمرة على الساحة غير المحددة  $D$ ، ولتكن  $B$  ساحة محددة، قطرها  $\delta > 0$ ، ومحاطة بمنحن أملس وتحوي داخلها نقطة ثابتة من المستوي، ولتكن نقطة الأصل  $O$ ، وبحيث يكون  $D \cap B \neq \emptyset$ . عندئذ، فإن الدالة  $f(x, y)$  كمولة على الساحة المحددة  $D \cap B$ . فإذا سعت قيمة التكامل

$$I_\delta = \iint_{D \cap B} f(x, y) dx dy$$

إلى نهاية محددة، عندما تتمدد الساحة  $B$  إلى اللانهاية، بشكل مستقل عن الكيفية التي تتم بها عملية التمدد، أي عندما يسعى  $\delta$  قطر هذه الساحة، إلى  $\infty$ ، فإننا نقول إن التكامل الشاذ متقارب، وقيمته تساوي قيمة هذه النهاية:

$$I = \lim_{\delta \rightarrow \infty} I_\delta = \lim_{\delta \rightarrow \infty} \iint_{D \cap B} f(x, y) dx dy$$

أما إذا كانت هذه النهاية غير موجودة أو غير محدودة، فإننا نقول إن التكامل الشاذ متباعد.

ملحوظة 4.11: يُفضل في التجزئة القائمة، أن تكون الساحة  $B$ ، ساحة مربعة مركزها النقطة الشاذة  $P_0$  في النوع الأول، ونقطة الأصل  $O$  في النوع الثاني، أضلاعها توازي المحورين الإحداثيين وقطرها  $\varepsilon > 0$ . أما في التجزئة القطبية، فيفضل أن تكون قرص دائري، مركزه النقطة الشاذة  $P_0$  في النوع الأول، والقطب  $O$  في النوع الثاني، وقطره  $\delta > 0$ .

مثال 4.9: ادرس تقارب التكامل  $I = \iint_D \cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right) dx dy$ ، حيث

$$D = \{(x, y) : x = 0, y = 0, x + y = 1\}$$

الحل: الساحة  $D$  محددة ومحاطة بمنحن أملس جزئياً (أضلاع المثلث) والدالة المكاملة مستمرة عليها، باستثناء نقطة الأصل  $O$ ، فالتكامل شاذ. نلاحظ أنه لا يمكن حل هذا التكامل في التجزئة القائمة، لذا نجري تبديلاً في المتغيرات:  $x - y = u$  و  $x + y = v$ . وعليه، فإن

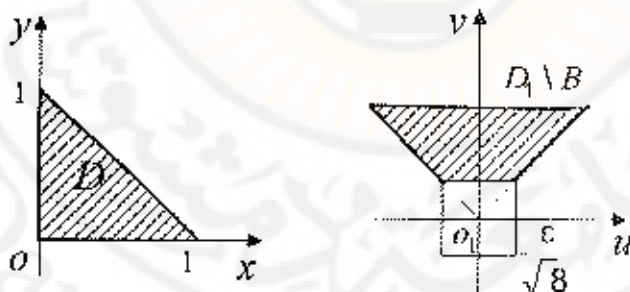
$$J_1 = \frac{1}{2} \text{، وتكون } D_1 \text{، صورة } D \text{ في الإحداثيات الجديدة، الشكل 4.17:}$$

$$D_1 = \{(u, v) : -v \leq u \leq v, 0 \leq v \leq 1\}$$

ويكتب التكامل كما يلي:

$$I = \frac{1}{2} \iint_{D_1} \cos\left(\frac{u}{v}\right) du dv$$

وهو شاذ عند النقطة  $O$ .



الشكل 4.17

نختار  $B$  ساحة مربعة مركزها النقطة الشاذة  $O$ ، وأضلاعها توازي المحورين الإحداثيين وقطرها  $0 < \varepsilon < \sqrt{2}$ . نكامل على الساحة  $D_1 \setminus B$ ، وهي ساحة بسيطة باتجاه  $u$ :



$$I_\varepsilon = \frac{1}{2} \iint_{D_\varepsilon} \cos\left(\frac{u}{v}\right) du dv = \frac{1}{2} \int_{\frac{\varepsilon}{2\sqrt{2}}}^1 dv \int_{u=v}^v \cos\left(\frac{u}{v}\right) du =$$

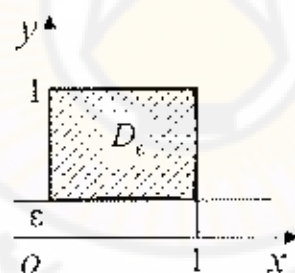
$$= \frac{1}{2} \int_{\frac{\varepsilon}{2\sqrt{2}}}^1 \left[ v \sin\left(\frac{u}{v}\right) \right]_v^v dv = (\sin 1) \left[ \frac{v^2}{2} \right]_{\frac{\varepsilon}{2\sqrt{2}}}^1 = \frac{\sin 1}{2} \left( 1 - \frac{\varepsilon^2}{8} \right)$$

$$I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon = \frac{\sin 1}{2}$$

فالتكامل الشاذ متقارب، وقيمته تساوي  $\frac{\sin 1}{2}$ .

مثال 4.10: أدرس تقارب التكامل  $I = \iint_D \frac{x dx dy}{\sqrt{y}}$ ، حيث  $D$  ساحة مربعة محاطة بالمستقيقات  $x=0$ ،  $x=1$ ،  $y=0$ ،  $y=1$ .

الحل: الساحة  $D$  محددة ومحاطة بمنحن أملس جزئياً (أضلاع المربع) والدالة المكاملة غير مستمرة على الضلع في  $D$ . فالتكامل شاذ. لذا نبتعد عن هذا الضلع بشرط أفقي يبعد عن المحور  $OX$  بانقذار  $0 < \varepsilon < 1$ ، الشكل 4.18، ونكامل على الساحة المستطيلة  $D_\varepsilon$  المحددة بالمستقيقات  $x=0$ ،  $x=1$ ،  $y=\varepsilon$ ،  $y=1$ .



الشكل 4.18

ويكون عندها

$$I_\varepsilon = \iint_{D_\varepsilon} \frac{x dx dy}{\sqrt{y}} = \int_0^1 x dx \int_\varepsilon^1 \frac{dy}{\sqrt{y}} = 1 - \varepsilon \Rightarrow I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon = 1$$

فالتكامل الشاذ متقارب، وقيمته تساوي 1.

مثال 4.11: ناقش حسب قيم  $\alpha$  ،  $(\alpha \in \mathbb{R})$  ، تقارب وتباعسد التكامل

$$I = \iint_D \frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^\alpha}$$

الحل: التكامل شاذ، لأن ساحة المكاملة غير محددة. نتقل إلى الإحداثيات القطبية. نختار

الساحة  $B$  قرص دائري مركزه القطب  $O$  ونصف قطره  $\infty > \delta > 0$ ، ونكامل على الساحة المحددة والبسيطة

$$D \cap B = \{(p, \varphi) : 0 \leq \varphi \leq 2\pi , 0 \leq p \leq \delta < \infty\}$$

$$I_\delta = \iint_{D \cap B} \frac{\rho d\rho d\varphi}{(1+\rho^2)^\alpha} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\delta \frac{\rho d\rho}{(1+\rho^2)^\alpha} = \begin{cases} \frac{\pi}{1-\alpha} \left[ (1+\delta^2)^{1-\alpha} - 1 \right] ; \alpha \neq 1 \\ \pi \ln(1+\delta^2) ; \alpha = 1 \end{cases}$$

ونميز الحالات:

إذا كان  $\alpha = 1$  ، فإن  $I = \lim_{\delta \rightarrow \infty} I_\delta = \infty$  ، أي أن التكامل  $I$  متباعده.

إذا كان  $\alpha < 1$  ، فإن  $I = \lim_{\delta \rightarrow \infty} I_\delta = \infty$  ، أي أن التكامل  $I$  متباعده.

وإذا كان  $\alpha > 1$  ، فإن  $I = \lim_{\delta \rightarrow \infty} I_\delta = \frac{\pi}{1-\alpha}$  ، أي أن التكامل  $I$  متقارب، وقيمه تساوي

$$\frac{\pi}{1-\alpha}$$

مثال 4.12: احسب قيمة التكامل  $I = \iint_D e^{-1(x^2+y^2)} dxdy$  ، حيث  $D$  كل المستوي  $oxy$ .

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

الحل: التكامل شاذ، لأن ساحة المكاملة غير محددة. نتقل إلى الإحداثيات القطبية. نختار

الساحة  $B$  قرص دائري مركزه القطب  $O$  ونصف قطره  $\infty > \delta > 0$ ، ونكامل على الساحة

المحددة والبسيطة:

$$D \cap B = \{(p, \varphi) : 0 \leq \varphi \leq 2\pi , 0 \leq p \leq \delta < \infty\}$$

$$I_\delta = \iint_{D \cap B} e^{-\rho^2} \rho d\rho d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\delta e^{-\rho^2} \rho d\rho = -\pi(e^{-\delta^2} - 1)$$

$$I = \lim_{\delta \rightarrow \infty} I_\delta = -\pi \lim_{\delta \rightarrow \infty} (e^{-\delta^2} - 1) = \pi$$

أي أن التكامل الشاذ متقارب، وقيمتة تساوي  $\pi$ .

ولما كان

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \left[ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right]^2 = \pi$$

فإن

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

## تمارين الفصل الرابع

1. احسب قيمة كل من التكاملات التالية على الساحة  $D$  المبينة بجوارها :

$$I = \iint_D (3x + 4y^2) dx dy \quad ; D : \{x^2 + y^2 \geq 1, x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$$

$$I = \iint_D (x^2 + y^2 + 9) dx dy \quad ; D : \{x^2 + y^2 \leq 1\}$$

$$I = \iint_D \cos \sqrt{x^2 + y^2} dx dy \quad ; D : \left\{ \frac{\pi^2}{4} \leq x^2 + y^2 \leq 4\pi^2 \right\}$$

$$I = \iint_D \frac{\ln(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} dx dy \quad ; D : \{1 \leq x^2 + y^2 \leq e\}$$

$$I = \iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}} \quad ; D : \{x^2 + y^2 \leq 16, x^2 + y^2 \geq 9\}$$

$$I = \iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{2x - x^2}} \quad ; D : \{x = 0, y^2 = 4 - 2x\}$$

$$I = \iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{(x - y)^2}} \quad ; D : \{|x| \leq 1, |y| \leq 1\}$$

$$I = \iint_D y dx dy \quad ; D : \{x^2 + y^2 < 4x, x^2 + y^2 > 2x\}$$

$$I = \iint_D \left( \sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} \right)^2 dx dy \quad ; D : \left\{ \sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 1, x = 0, y = 0 \right\}$$

$$I = \iint_D xy dx dy \quad ; D : \{y^2 = 2x + 6, y - x = 1\}$$

$$I = \iint_D \sqrt{\frac{1 - x^2 - y^2}{1 + x^2 + y^2}} dx dy \quad ; D : \{x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$$

$$I = \iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad ; D : \{y = \sqrt{2x - x^2}, x = y, y = 0\}$$

$$I = \iint_D \frac{y}{x^2} dx dy \quad ; D : \left\{ x^2 + y^2 = 4, y = x, y = 0, (x-1)^2 + (y-1)^2 = 2 \right\}$$

$$I = \iint_D (x^2 + y^2) dx dy \quad ; \quad D : \begin{cases} x^2 + y^2 = 9, xy = 2, \\ x^2 - y^2 = 4, xy = 4 \end{cases}$$

$$I = \iint_D (x+y)^3 dx dy \quad ; \quad D : \{x+y=1, y=5x, x+y=3, y=10x\}$$

$$I = \iint_D \exp\left(\frac{y}{x+y}\right) dx dy \quad ; \quad D : \{x+y=1, y=x, x+y=2, y=2x\}$$

$$I = \iint_D \frac{dx dy}{x^2 + y^2} \quad ; \quad D : \{x^2 + y^2 = 1, y = x^2, y = 0\}$$

$$I = \iint_D \exp(x+y) dx dy \quad ; \quad D : \{|x| + |y| \leq 1\}$$

$$I_2 = \iint_D \frac{x^2 \sin xy}{y} dx dy \quad ; \quad D : \begin{cases} x^2 = 3y, y^2 = 2x, \\ x^2 = 5y, y^2 = x \end{cases}$$

$$I_1 = \iint_D xy dx dy \quad ; \quad D : \{\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1, x=0, y=0\}$$

$$I_2 = \iint_D (\sqrt{x} + \sqrt{y})^4 dx dy \quad ; \quad D : \{\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1, x=0, y=0\}$$

$$I_3 = \iint_D \sqrt{\sqrt{x} + \sqrt{y}} dx dy \quad ; \quad D : \{\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1, x=0, y=0\}$$

إرشاد: لحل التكاملات الثلاثة الأخيرة، استخدم التبدل

$$\left\{ x = \rho \cos^4 t, y = \rho \sin^4 t : 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \rho \leq 1 \right\}$$

2. احسب قيمة كل من التكاملين :

$$I = \iint_D \exp\left(\frac{x+y}{x-y}\right) dx dy, \text{ حيث } D \text{ رباعي أضلاع رؤوسه النقاط:}$$

$$\{(1,0), (2,0), (0,-1), (0,-2)\}$$

$$I = \iint_D \sqrt{x^2 - y^2} dx dy, \text{ حيث } D \text{ مثلث رؤوسه النقاط:}$$

$$\{(0,0), (1,1), (10,1)\}$$

3. احسب قيمة كل من التكاملات التالية:

$$\begin{array}{ll}
 \int_{-1}^{1} \int_{x^3}^{x+1} (3x+2y) dx dy & , \quad \int_0^1 \int_s^{1-s} \sin y^2 dx dy \\
 \int_0^1 \int_{3y}^3 \exp(x^2) dx dy & , \quad \int_0^1 \int_0^{1-x} \exp\left(\frac{y}{x+y}\right) dx dy \\
 \int_1^2 \int_{x^2}^x \exp\left(\frac{y}{x}\right) dx dy & , \quad \int_0^3 \int_1^{\sqrt{4-y}} \cos\left(\frac{\pi y}{4+2x}\right) dx dy \\
 \int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 \sqrt{x^3+1} dx dy & , \quad \int_0^{3/4} \int_{0.5}^{\sqrt{1-y}} \cos\left(\frac{\pi y}{2+2x}\right) dx dy \\
 \int_0^3 \int_{y^2}^9 y \cos x^2 dx dy & , \quad \int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 y \cos^5 x dx dy \\
 \int_0^1 \int_{x^2}^1 x^3 \sin y^3 dx dy & , \quad \int_0^1 \int_{\arcsin y}^{\pi/2} \sqrt{1+\cos^2 x} \cos x dx dy
 \end{array}$$

4. غير ترتيب المكاملة في التكاملات:

$$\begin{array}{ll}
 \int_{\pi \sin y}^{2x \ln y} \int_{\pi \sin y}^x f(x, y) dx dy & , \quad \int_0^4 \int_{\sqrt{4x-x^2}}^{2\sqrt{x}} f(x, y) dx dy \\
 \int_0^1 \int_{2y-y^2}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx dy & , \quad \int_{1/2}^2 \int_y^x f(x, y) dx dy
 \end{array}$$

5. اكتب حاصل الجمع كتكامل ثنائي:

$$\begin{array}{l}
 \int_{0.5}^1 \int_{1/y}^2 f(x, y) dx dy + \int_{1/y}^2 \int_{0.5}^2 f(x, y) dx dy \\
 \int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x, y) dx dy + \int_{1/y}^4 \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x, y) dx dy \\
 \int_{1/y}^2 \int_y^2 f(x, y) dx dy + \int_0^1 \int_{y^2/2}^{1-\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx dy + \int_0^1 \int_{1-\sqrt{1-y^2}}^2 f(x, y) dx dy
 \end{array}$$

6. احسب قيمة التكامل:

$$\int_1^2 \int_{\sqrt{y}}^x \sin \frac{\pi x}{2y} dx dy + \int_2^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \sin \frac{\pi x}{2y} dx dy$$

7. ادرس تقارب التكاملات:

$$I_1 = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{dx dy}{(x^2+y^2)^m} \quad \text{و} \quad I_2 = \iint_{x^2+y^2 \geq 1} \frac{dx dy}{(x^2+y^2)^m}$$

$$I_3 = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{dx dy}{(1-x^2-y^2)^m} \quad \text{حيث } m > 0$$

8. احسب مساحة الساحة المحصورة بالمنحنيات:

- 1)  $\{y^2 = 4 - 2x, x = 0\}$
- 2)  $\{2y = 16 - x^2, x + 2y = 4\}$
- 3)  $\{xy^3 = 15, xy^3 = 5, xy = 8, xy = 4\}$
- 4)  $\{x = 4y^3, x = y^3, y = 4x^3, y = x^3\}$
- 5)  $\{y^2 = e^2 x, y^2 = ex, xy = 1, xy = 4\}$
- 6)  $\{3x - 2y = 0, x - 6y = 0, xy = 6\}$
- 7)  $\{y = 4 - x^2, y = -\sqrt{4 - x^2}\}$
- 8)  $\{y^2 = x^3, x = 2 - y^2\}$
- 9)  $\{x^2 + y^2 = 4, y^2 = 3x\}$
- 10)  $\{\sqrt{x^2 + y^2} = 2, 4y = -\sqrt{x^2 + y^2}\}$
- 11)  $\{(x^2 + y^2)^2 = 2a^2 xy, x^2 + y^2 = a^2\}$
- 12)  $\{y = \cos x, y = \sin x, x \geq 0\}$
- 13)  $\{\rho^2 = a^2 \sin 2\varphi\}$
- 14)  $\{\rho = a(1 + \cos \varphi), \rho \geq a > 0\}$
- 15)  $\{(x^2 + y^2)^4 = x^2 y\}$ , (افرض  $x = \rho \cos^2 \varphi, y = \rho \sin^2 \varphi$ )

9. احسب حجم المنطقة المحصورة بالسطوح:

- 1)  $\{x^2 + y^2 = 1 - z, z = 0\}$
- 2)  $\{x + 2y + z = 2, 2y = x, x = 0, z = 0\}$
- 3)  $\{x^2 + y^2 = 2x, x^2 + y^2 = z, z = 0\}$

- 4)  $\{x^2 + y^2 = 2x, xy = z, y = 0\}$
- 5)  $\{x^2 + y^2 = 9, x = z, z = 0\}$
- 6)  $\{x^2 + y^2 = 1, x^2 + y^2 + 4 = z, z = 0\}$
- 7)  $\{25 - x^2 - y^2 = z, x = 2, x = -2, y = 3, y = -3, z = 0\}$
- 8)  $\{x = 2, x = 0, y = 0, y = 3, x^2 + y^2 = z\}$
- 9)  $\{xy = z, (x^2 + y^2)^2 = 8xy, z = 0\}$
- 10)  $\{x^2 - y^2 = z, (x^2 + y^2)^2 = 4(x^2 - y^2), z = 0\}$
- 11)  $\left\{ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)^2 = 4 \left( \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) \right\}$



## الفصل الخامس

### التكامل الثلاثي

5.1 تعريف التكامل الثلاثي وشروط وجوده

5.2 التفسير الهندسي للتكامل الثلاثي

5.3 خواص التكامل الثلاثي

5.4 حساب التكامل الثلاثي

تمارين الفصل الخامس



## التكامل الثلاثي

### 5.1 تعريف التكامل الثلاثي وشروط وجوده

ليكن  $R$  مجسماً مادياً في الفضاء  $oxyz$ . ولنفرض أن هذا الجسم غير متجانس، تُعطى كثافته بالدالة المستمرة  $f(x, y, z)$ . لإيجاد كتلة هذا الجسم، نقسم الجسم إلى  $n$  جزء  $R_1, R_2, \dots, R_n$ ، حجوماتها  $\Delta v_1, \Delta v_2, \dots, \Delta v_n$ ، بالترتيب. ولما كان الجزء  $R_i$  صغيراً، ودالة الكثافة مستمرة، فإنه يمكن افتراض أن كتلته هي  $m_i \approx f(P_i) \Delta v_i$ . وعليه، فإن كتلة الجسم  $R$  تعطى بالعلاقة التقريبية:

$$m \approx \sum_{i=1}^n m_i = \sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta v_i$$

حيث تزداد هذه المساواة التقريبية دقة، كلما صغرت الأجزاء  $R_i$ ، أي كلما ازداد عددها وسعى حجمها إلى الصفر، وذلك إذا سعى أكبر أقطارها إلى الصفر. وفي النهاية يكون

$$m \approx \lim_{\substack{\Delta v_i \rightarrow 0 \\ (n \rightarrow \infty)}} \sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta v_i$$

وكما هو واضح، فإن هذه النهاية موجودة لأنها تساوي كتلة الجسم الموجود أصلاً.

نسمي مثل هذه النهاية، التكامل الثلاثي للدالة  $f$  على المنطقة  $R$  من الفضاء ثلاثي الأبعاد.

يقود هذا المثال إلى تعريف عام للتكامل الثلاثي، على غرار تعريف التكامل الثنائي. حيث إن التكامل الثلاثي يُعد تعميماً للتكامل الثنائي، وذلك حيث إن الدالة المكاملة  $f(x, y, z)$  في التكامل الثنائي، تقابل الدالة  $f(x, y, z)$  في التكامل الثلاثي، والمساحة المستوية  $D$  تقابل المنطقة  $R$  من الفضاء ثلاثي الأبعاد.

تعريف 5.1: لتكن  $R$  منطقة من الفضاء  $oxyz$ ، مغلقة ومحددة، محاطة بسطح أملس أو أملس جزئياً، حجمها  $V$ . ولتكن  $f(x, y, z)$  دالة معرفة ومحددة على  $R$ . نجزي المنطقة  $R$  اختيارياً، بواسطة سطوح ملساء، إلى  $n$  جزء  $R_1, R_2, \dots, R_n$ ، بحيث لا تشترك هذه المناطق الجزئية بنقاط داخلية، ولتكن حجوماتها  $\Delta v_1, \Delta v_2, \dots, \Delta v_n$ ، بالترتيب. ولتكن  $\lambda$  أكبر أقطار هذه المناطق. نختار من كل منطقة جزئية  $R_i$  نقطة اختيارية  $P_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ .

## شكل المجموع

$$\sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta v_i \quad (5.1)$$

والذي يسمى المجموع التكاملي للدالة  $f(x, y, z)$  على المنطقة  $R$  من الفضاء. نأخذ نهاية المجموع التكاملي (5.1) عندما تزداد  $n$  إلى اللانهاية، أي عندما يسعى  $\lambda$  إلى الصفر. فإذا كانت هذه النهاية موجودة ومحدودة، أي كانت طريقة تجزئة المنطقة  $R$ ، وأياً كان موضع النقطة  $P_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$  في المنطقة الجزئية  $R_i$ ، فإننا نسميها التكامل الثلاثي للدالة  $f(x, y, z)$  على المنطقة  $R$  من الفضاء، ونكتب

$$I = \iiint_R f(x, y, z) dv = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta v_i$$

ونقول عندها، إن الدالة  $f(x, y, z)$  كمولة على المنطقة  $R$  من الفضاء. ونسمي  $f(x, y, z)$  الدالة المكاملة، و  $R$  منطقة المكاملة، و  $dv$  عنصر حجم في  $R$ .  
مبرهنة 5.1: تكون الدالة  $f(x, y, z)$  كمولة على المنطقة المغلقة والمحدودة  $R$ ، إذا كانت هذه الدالة مستمرة على  $R$  أو مستمرة جزئياً عليها، أي يوجد لهذه الدالة نقاط انقطاع تشكل عدد محدود من سطوح أو منحنيات ملساء تقع داخل  $R$ .

نفرض فيما يلي، أن منطقة المكاملة هي منطقة فراغية محددة ومحاطة بسطح أملس أو أملس جزئياً، وأن الدوال المكاملة معرّفة ومحددة ومستمرة أو مستمرة جزئياً عليها. أما إذا كانت الدالة المكاملة غير محدودة على  $R$ ، أو أن المنطقة  $R$  غير محدودة، فإننا نحصل على تكاملات ثلاثية شاذة، نعالجها تماماً كما عالجنا التكاملات الثنائية الشاذة، في البند 4.5.

## 5.2 التفسير الهندسي للتكامل الثلاثي

إذا كان  $f(x, y, z) \equiv 1$  على  $R$ ، فإن

$$\iiint_R 1 dv = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta v_i = \lim_{\lambda \rightarrow 0} v = V$$

أي أن التكامل الثلاثي  $\iiint_R f/dV$  يُمثل حجم المنطقة  $R$ . وهو يمثل القانون العام لحساب حجم المناطق في الفضاء.

### 5.3 خواص التكامل الثلاثي

إن للتكامل الثلاثي خواص التكامل الثنائي نفسها، مع مراعاة الفروق بينها، فيما يخص عدد المتغيرات في الدالة المكاملة، وفي منطقة أو مساحة المكاملة.

### 5.4 حساب التكامل الثلاثي

إن حساب التكامل الثلاثي يعتمد أولاً، على كيفية تجزئة المنطقة  $R$ ، وعلى أسلوب جمع حاصل ضرب كل حجم جزئي بقيمة الدالة عند نقطة داخله.

#### 5.4.1 التجزئة القائمة

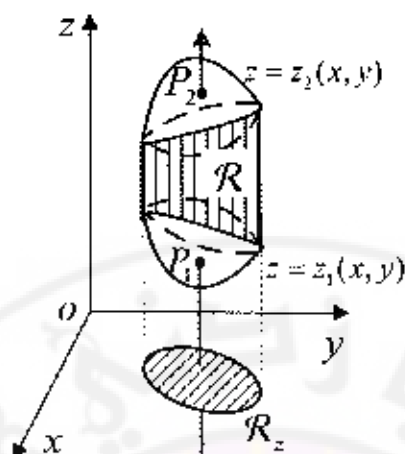
نجزئ المنطقة  $R$ ، بواسطة مستويات توازي المستويات الإحداثية. فتكون المناطق الجزئية  $\Delta V$  متوازيات مستطيلات أضلاعها  $\Delta x$  و  $\Delta y$  و  $\Delta z$ ، وعليه، فإن عنصر الحجم هو  $dV = dx dy dz$ . ويكتب التكامل الثلاثي كما يلي:

$$I = \iiint_R f(x, y, z) dx dy dz \quad (5.2)$$

نبدأ في حساب هذا التكامل على منطقة بسيطة باتجاه أحد المحاور الإحداثية، ثم نعمم على مناطق غير بسيطة.

تعريف 5.2: لنكن  $R$  منطقة في الفضاء  $Oxyz$ ، نرمز بـ  $R_2$  لمسقط هذه المنطقة على المستوي  $Oxy$ .

نفرض أن أي مستقيم يوازي المحور  $Oz$ ، ويمر من نقطة داخلية من الساحة المستوية  $R_2$ ، يقطع حدودها بنقطتين  $P_1(x, y, z_1)$  (نقطة دخول) و  $P_2(x, y, z_2)$  (نقطة خروج). عندما يتحرك هذا المستقيم، بحيث يمسح كامل المنطقة  $R$ ، ويبقى موازياً للمحور  $Oz$ ، فإن نقطة الدخول ترسم سطحاً  $z = z_1(x, y)$  يسمى سطح الدخول، وترسم نقطة الخروج سطحاً  $z = z_2(x, y)$  يسمى سطح الخروج. فإذا كان هذان السطحان أملسين، فإن المنطقة  $R$  من الفضاء، تسمى منطقة بسيطة (نظامية) باتجاه  $Oz$ ، اختصاراً باتجاه  $z$ ، الشكل 5.1.



الشكل 5.1

ينتج من هذا التعريف، أن الدالتين  $z_1(x, y)$  و  $z_2(x, y)$  معرفتين ومستمرتين على  $\mathcal{R}_z$ ، و  $z_1, z_2 \in C^1(\mathcal{R}_z)$ ، كذلك فإن  $z_1(x, y) \leq z_2(x, y)$  على  $\mathcal{R}_z$ . كما أن المنطقة  $\mathcal{R}$ ، في الحالة العامة، محاطة بأسطوانة قائمة مولداتها توازي المحور  $Oz$ . ويمكن أن تكون مولدات هذه الأسطوانة معدومة. وتكتب هذه المنطقة بدلالة عناصرها، كما يلي:

$$\mathcal{R} = \left\{ (x, y, z) : (x, y) \in \mathcal{R}_z, z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y); z_1, z_2 \in C^1(\mathcal{R}_z) \right\}$$

نعرف بالأسلوب ذاته، المنطقة البسيطة باتجاه  $x$  و باتجاه  $y$ . ونقول إن المنطقة بسيطة، إذا كانت بسيطة بالاتجاهات الثلاثة.

#### حساب التكامل الثلاثي في التجزئة القائمة

لتكن المنطقة  $\mathcal{R}$ ، بسيطة باتجاه  $z$ . عندئذ، يمكن البرهان، تماماً كما فعلنا في التكامل الثنائي، أن حساب التكامل الثلاثي (5.2) يؤدي إلى حساب تكاملين، الأول محدد للدالة  $f(x, y, z)$  بين الحدين المتغيرين  $z_1(x, y)$  و  $z_2(x, y)$ ، أما الثاني فهو تكامل ثنائي على الساحة المستوية  $\mathcal{R}_z$ :

$$\iiint_{\mathcal{R}} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{\mathcal{R}_z} \left[ \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dx dy$$

وغالباً، نكتب هذا التكامل كما يلي:

$$\iiint_{\mathcal{R}} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{\mathcal{R}_c} dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \quad (5.3)$$

حيث تكامل أولاً، بالنسبة إلى  $z$ ، بالنظر إلى  $x$  و  $y$  كشائنين، بين الحدين  $z_1(x, y)$  و  $z_2(x, y)$ ، ويكون ناتج التكامل دالة في  $x$  و  $y$  فقط، ثم نحسب التكامل الثنائي الناتج. نحسب، بأسلوب مماثل التكامل الثلاثي (5.2) إذا كانت المنطقة  $\mathcal{R}$  بسيطة باتجاه  $x$  أو باتجاه  $y$ .

ملحوظة 5.1: إذا لم تكن المنطقة  $\mathcal{R}$  بسيطة بأي اتجاه، فإننا نقسمها إلى مناطق بسيطة باتجاه معين، بحيث لا تشترك هذه المناطق بنقاط داخلية وبحيث يشكل اتحادها المنطقة الأصلية  $\mathcal{R}$ . ثم نحسب التكامل الثلاثي على كل منها، ثم نجمع النتائج.

ملحوظة 5.2: إذا كانت المنطقة  $\mathcal{R}$  متوازي مستطيلات وجوهه توازي المستويات الإحداثية، أي:

$$\mathcal{R} = \{ (x, y, z) : a_1 \leq x \leq b_1, a_2 \leq y \leq b_2, a_3 \leq z \leq b_3 \}$$

فإن التكامل الثلاثي (5.2) يُكتب كما يلي:

$$\iiint_{\mathcal{R}} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{a_1}^{b_1} dx \int_{a_2}^{b_2} dy \int_{a_3}^{b_3} f(x, y, z) dz$$

وإذا كان  $f(x, y, z) = g(x)h(y)k(z)$  على هذه المنطقة، فإن

$$\iiint_{\mathcal{R}} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{a_1}^{b_1} g(x) dx \int_{a_2}^{b_2} h(y) dy \int_{a_3}^{b_3} k(z) dz$$

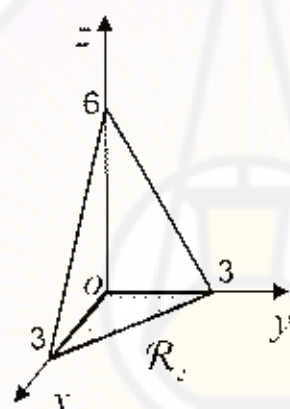
حيث إن كل من هذه التكاملات المحددة مستقلة عن بعضها البعض.

ملحوظة 5.3: إذا كانت الدالة  $f(x, y, z)$  زوجية بالنسبة إلى  $z$ ، وكانت منطقة التكامل  $\mathcal{R}$  متناظرة بالنسبة إلى المستوي  $oxy$ ، فإن قيمة التكامل الثلاثي (5.3) تساوي ضعف قيمته على إحدى نصفي المنطقة  $\mathcal{R}$ ، أعلى أو أسفل المستوي  $oxy$ :

$$\iiint_{\mathcal{R}} f(x, y, z) dx dy dz = 2 \iint_{\mathcal{R}_+} dx dy \int_0^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz$$

أما إذا كانت الدالة  $f(x, y, z)$  فردية بالنسبة إلى  $z$ ، وكانت منطقة المكاملة  $\mathcal{R}$  متناظرة بالنسبة إلى المستوى  $oxy$ ، فإن قيمة التكامل الثلاثي (5.3) تساوي الصفر. ويمكن، بأسلوب مماثل، صياغة ما سبق إذا كانت الدالة  $f(x, y, z)$  زوجية أو فردية بالنسبة إلى  $x$  أو بالنسبة إلى  $y$ ، بحيث أن المنطقة  $\mathcal{R}$  متناظرة بالنسبة إلى المستوى  $oxy$  أو المستوى  $oyz$ .

مثال 5.1: احسب قيمة التكامل الثلاثي  $I = \iiint_{\mathcal{R}} 4x \, dx \, dy \, dz$ ، حيث إن  $\mathcal{R}$  هي المنطقة المحاطة بالمستويات الإحداثية وبالمستوي  $2x + 2y + z = 6$ .  
الحل: واضح أن منطقة المكاملة  $\mathcal{R}$ ، محددة ومحاطة بسطح أملس جزئياً، الشكل 5.2، والدالة المكاملة مستمرة عليها، فالتكامل موجود.



الشكل 5.2

لما كانت المنطقة  $\mathcal{R}$  بسيطة، فيمكن كتابتها كما يلي:

$$\mathcal{R} = \{(x, y, z) : (x, y) \in \mathcal{R}_z, 0 \leq z \leq 6 - 2x - 2y\}$$

وعليه، فإن

$$I = 4 \iiint_{\mathcal{R}} x \, dx \, dy \, dz = 4 \int_{\mathcal{R}_z} x \, dx \, dy \int_0^{6-2x-2y} dz = 4 \iint_{\mathcal{R}_z} x(6-2x-2y) \, dx \, dy$$

ولما كانت الساحة  $\mathcal{R}_z$  بسيطة، فيمكن كتابتها كما يلي:

$$\mathcal{R}_z = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 3 - x\}$$



وعليه، فإن

$$I = 4 \int_0^2 x dx \int_0^{3-x} (6-2x-2y) dy = 4 \int_0^2 x(9-6x+x^2) dx = 27$$

مثال 5.2: احسب حجم المنطقة المحصورة داخل السطحين:

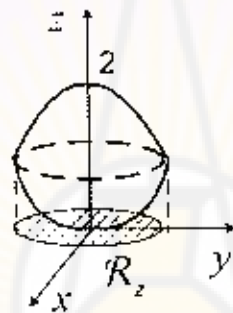
$$x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1 \quad \text{و} \quad x^2 + y^2 = 2 - z$$

الحل: يُعطى حجم المنطقة المطلوبة  $\mathcal{R}$ ، بالتكامل الثلاثي:

$$V = \iiint_{\mathcal{R}} dV$$

حيث  $\mathcal{R}$  منطقة محدودة ومحاطة من الأعلى بالسطح الأمامي  $z = 2 - x^2 - y^2$ ، ومن

الأسفل بالسطح  $z = 1 - \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ ، الشكل 5.3. وهي بسيطة باتجاه  $z$ .



الشكل 5.3

وعليه، فإن

$$V = \iint_{\mathcal{R}_z} dx dy \int_{1-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{2-x^2-y^2} dz = \iint_{\mathcal{R}_z} [1 - x^2 - y^2 + \sqrt{1 - x^2 - y^2}] dx dy$$

حيث  $\mathcal{R}_z = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ ، وهي ساحة بسيطة باتجاه  $\rho$ ، ومنه، فإن التكامل الثنائي يُكتب كما يلي:

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (1 - \rho^2 + \sqrt{1 - \rho^2}) \rho d\rho = \frac{7}{6} \pi \quad \text{وحدة حجم}$$

#### 5.4.2 حساب التكامل الثلاثي في التجزئة المنحنية (تبديل المتغيرات):

إذا كان حساب التكامل الثلاثي (5.2) معقداً أو مستحيلاً، عند تجزئة المنطقة  $\mathcal{R}$  تجزئة قائمة، فإننا نبدل الإحداثيات الديكارتية بالإحداثيات المنحنية، بحيث تُجزئ المنطقة  $\mathcal{R}$  تجزئة منحنية، وتكون صورتها  $\mathcal{R}_1$  وفق تقابل مستمر المشتقات، مجزأة تجزئة قائمة. ولما كان التكامل الثلاثي تعميم للتكامل الثنائي، فإن نقاشاً مماثلاً لما عرضناه في البند 4.4.2 يقودنا إلى البرهنة:   
 مبرهنة 5.2: ليكن لدينا تطبيقاً بين المنطقتين  $\mathcal{R}$  من الفضاء  $xyz$ ، و  $\mathcal{R}_1$  من الفضاء  $uvw$  معطى بالجملة

$$\{x = x(u, v, w), y = y(u, v, w), z = z(u, v, w)\}$$

المعرفة والمستمرة على  $\mathcal{R}_1$ ، وبحيث  $x, y, z \in C^1(\mathcal{R}_1)$  وتحقق في  $\mathcal{R}_1$

$$J_1 = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \\ x'_w & y'_w & z'_w \end{vmatrix} \neq 0$$

عندهذا، فإن هذا التطبيق تقابل مستمر المشتقات بين النقاط الداخلية في  $\mathcal{R}_1$  و  $\mathcal{R}$ . ويعطى

عنصر الحجم  $dV$  في  $\mathcal{R}$ ، بدلالة عنصر الحجم  $dV_1$  في  $\mathcal{R}_1$  بالعلاقة

$$dV = |J_1| dV_1 \Rightarrow dx dy dz = |J_1| du dv dw \quad (5.4)$$

ويكون

$$\iiint_{\mathcal{R}} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\mathcal{R}_1} f_1(u, v, w) |J_1| du dv dw \quad (5.5)$$

حيث  $f_1(u, v, w) = f[x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)]$

ملحوظة 5.4: إن التكامل على المنطقة  $\mathcal{R}_1$  موجود، لأن التكامل على المنطقة  $\mathcal{R}$  موجود أصلاً.

وتبنى العلاقة (5.5) صحيحة، حتى إذا كان  $J_1 = 0$  في نقاط تقع على عديم محدود من المنحنيات الملساء، أو على عديم محدود من السطوح الملساء في  $\mathcal{R}_1$ .

ملحوظة 5.5: يُعطى حجم المنطقة  $\mathcal{R}$ ، في الإحداثيات المنحنية بالعلاقة

$$V = \iiint_{R_1} |J_1| dV_1 = \iiint_{R_1} |J_1| du dv dw$$

ولكن ليس بالضرورة أن يكون حجم  $R$  مساوياً للمقدار  $|J_1|V_1$ .

مثال 5.3: احسب حجم متوازي السطوح  $R$  المحدد بالمستويات

$$x - y + 2z = \mp 3, \quad 2x + 3y - z = \mp 1, \quad -x + 2y + 2z = \mp 2$$

الحل: إن المنطقة المطلوب حساب حجمها محدودة ومحاطة بسطح أملس جزئياً، فيعطى حجمها بالتكامل الثلاثي:

$$V = \iiint_R dx dy dz$$

لما كانت هذه المنطقة غير بسيطة، نجري تبديلاً في المتغيرات بالعلاقات:

$$u = x - y + 2z, \quad v = 2x + 3y - z, \quad w = -x + 2y + 2z$$

فتصبح صورة المنطقة  $R$  وفق هذا التقابل، هي المنطقة

$$R_1 = \{(u, v, w) : -3 \leq u \leq 3, -1 \leq v \leq 1, -2 \leq w \leq 2\}$$

وهي منطقة بسيطة. ويكون  $J_1 = \frac{1}{25}$  في  $R_1$ . وعليه، فإن الحجم المطلوب:

$$V = \iiint_R dx dy dz = \frac{1}{25} \int_{-3}^3 du \int_{-1}^1 dv \int_{-2}^2 dw = \frac{48}{25} \quad \text{وحدة حجم}$$

5.4.3 حالات خاصة

١- حساب التكامل الثلاثي في التجزئة الأسطوانية

إن الإحداثيات الأسطوانية حالة خاصة من الإحداثيات المنحنية المتعامدة، حيث  $u = \rho$  و

$v = \phi$  و  $w = z$ . وعليه، فإن المنطقة  $R$  تُجزئ في هذه الإحداثيات بالسطوح الإحداثية:

أ-  $\rho = k_1$  أسطوانات دورانية قائمة محورها  $Oz$ ، وأنصاف أقطارها  $k_1$ .

ب-  $\phi = h_1$  أنصاف مستويات فصلها المشترك  $Oz$  وتصنع مع المستوي  $Oxy$  زاوية مقدارها  $h_1$ .

ج-  $z = c_1$  مستويات توازي المستوي  $Oxy$ ، وتبعد عنه بالمقدار  $|c_1|$ .

من العلاقات (التقابل) بين الإحداثيات الديكارتية والأسطوانية:

$$x = \rho \cos \varphi \quad y = \rho \sin \varphi \quad z = z$$

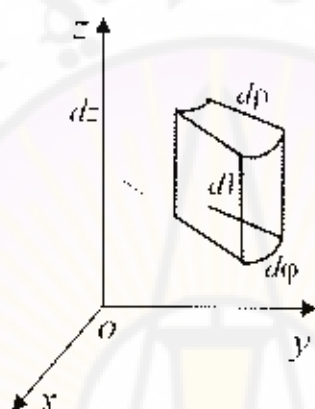
نجد يعقوبي هذا التحويل

$$J_1 = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \varphi, z)} = \rho$$

وعليه، فإن عنصر الحجم يُعطى في هذه التجزئة، استناداً للعلاقة (5.4)، بالعلاقة:

$$dv = \rho d\rho d\varphi dz$$

يمثل الشكل 5.4 عنصر الحجم في الجملة الأسطوانية.



الشكل 5.4

وهكذا، فإن التكامل الثلاثي (5.5) يكتب كما يلي:

$$\iiint_{\mathcal{R}} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\mathcal{R}_1} f_1(\rho, \varphi, z) \rho d\rho d\varphi dz$$

حيث  $f_1(\rho, \varphi, z) = f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z)$ ، و  $\mathcal{R}_1$  صورة  $\mathcal{R}$  في الجملة الأسطوانية.

ملحوظة 5.6: نستخدم، عادةً، التجزئة الأسطوانية إذا كانت منطقة المكاملة متناظرة بالنسبة إلى محور.

لا نضطر في هذه التجزئة إلى رسم المنطقة  $\mathcal{R}_1$  في الجملة الجديدة  $(\rho, \varphi, z)$ ، كسي نحدد عناصرها، لأنه غالباً، يمكن تحديد عناصر  $\mathcal{R}_1$  مباشرة من  $\mathcal{R}$ .

فإذا كانت المنطقة  $\mathcal{R}$  بسيطة باتجاه  $z$ ، فإننا ننظر إلى المستوي  $Oxy$  على أنه مستوى قطبي، وإذا

كان، إضافةً إلى ذلك،  $\mathcal{R}_2$  بسيطة باتجاه  $\rho$ ، فإن هذه المنطقة تُكتب بدلالة عناصرها كما يلي:

$$\mathcal{R}_1 = \{(\rho, \varphi, z) : \alpha \leq \varphi \leq \beta, \rho_1(\varphi) \leq \rho \leq \rho_2(\varphi), z_1(\rho, \varphi) \leq z \leq z_2(\rho, \varphi)\}$$

وهكذا، فإن التكامل الثلاثي (5.5) يكتب كما يلي:

$$\iiint_{\mathcal{R}} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} \rho d\rho \int_{z_1(\rho, \varphi)}^{z_2(\rho, \varphi)} f_1(\rho, \varphi, z) dz$$

وتُعَدُّ هذه الحالة، هي الأكثر وروداً في المسائل العملية.

يمكن تغيير ترتيب المكاملة، فإذا كانت المساحة  $\mathcal{R}_2$  بسيطة باتجاه  $\varphi$ ، فإن التكامل الثلاثي (5.5) يكتب كما يلي:

$$\iiint_{\mathcal{R}} f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \rho d\rho \int_{\varphi_1(\rho)}^{\varphi_2(\rho)} d\varphi \int_{z_1(\rho, \varphi)}^{z_2(\rho, \varphi)} f_1(\rho, \varphi, z) dz$$

ونورد فيما يلي تعريفاً للمنطقة البسيطة باتجاه  $\rho$  و باتجاه  $\varphi$ .

#### المنطقة البسيطة باتجاه $\rho$ :

نفرض أن أي نصف مستقيم منبعث من المحور  $OZ$  ويسوازي المستوي  $oxy$ ، ومار من نقطة داخلية من  $\mathcal{R}$ ، يقطع حدودها بنقطتين فقط، الأولى  $P_1(\rho_1, \varphi, z)$ ، نقطة دخول، والثانية  $P_2(\rho_2, \varphi, z)$ ، نقطة خروج، أي أن  $\rho$  تتغير على القطعة المستقيمة  $\overline{P_1 P_2}$ ، مع بقاء  $\varphi$  و  $z$  ثابتين. (وهذا ما يفسر، لاحقاً، إجراء المكاملة بالنسبة إلى  $\rho$ ، أولاً، مع بقاء  $\varphi$  و  $z$  ثابتين). نجعل نصف المستقيم هذا يتحرك، بحيث يبقى موازياً للمستوي  $oxy$  وماراً من نقطة داخلية في  $\mathcal{R}$ ، حتى تمسح القطعة  $\overline{P_1 P_2}$  مقطعاً داخل المنطقة  $\mathcal{R}$ ، تتغير عليه  $\varphi$  من  $\varphi = \varphi_1(z)$  إلى  $\varphi = \varphi_2(z)$ . (وهذا ما يفسر، لاحقاً، إجراء المكاملة الثانية بالنسبة إلى  $\varphi$  مع بقاء  $z$  ثابتة). ثم نجعل هذا المقطع يتحرك من أخفض نقطة في  $\mathcal{R}$  :  $z = a$ ، إلى أعلى نقطة فيها  $z = b$ ، ليمسح كامل المنطقة  $\mathcal{R}$ . وأثناء هاتين الحركتين، ترسم نقطة الدخول سطح دخول  $\rho = \rho_1(\varphi, z)$ ، بينما ترسم نقطة الخروج سطح خروج  $\rho = \rho_2(\varphi, z)$ . وإذا كان، إضافةً إلى ذلك، المنحنيان  $\varphi = \varphi_1(z)$  و  $\varphi = \varphi_2(z)$  أملسين، فإن التكامل الثلاثي (5.5) يكتب

كما يلي:

$$\iiint_{\mathcal{R}} f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dz \int_{\varphi_1(z)}^{\varphi_2(z)} d\varphi \int_{\rho_1(\varphi, z)}^{\rho_2(\varphi, z)} f_1(\rho, \varphi, z) \rho d\rho$$

ويمكن تغيير ترتيب المكاملة من  $\rho$  ثم  $z$  ثم  $\varphi$ ، بأسلوب مشابه.

المنطقة البسيطة باتجاه  $\varphi$ :

نفرض أن أي دائرة مركزها يقع من المحور  $OZ$  وتقع في مستوي يوازي المستوي  $OXY$ ، ومارة من نقطة داخلية من  $\mathcal{R}$ ، تقطع حدودها بنقطتين فقط، الأولى  $P_1(\varphi_1, z, \rho)$ ، نقطة دخول، والثانية  $P_2(\varphi_2, z, \rho)$ ، نقطة خروج، أي أن  $\varphi$  تتغير على القوس الدائري من  $P_1$  إلى  $P_2$  الواقع داخل المنطقة  $\mathcal{R}$ . مع بقاء  $\rho$  و  $z$  ثابتين (وهذا ما يفترض لاحقاً، إجراء المكاملة بالنسبة إلى  $\varphi$ ، أولاً، مع بقاء  $\rho$  و  $z$  ثابتين). نجعل هذه الدائرة تتحرك، بحيث تبقى موازية للمستوي  $OXY$ ، ومارة من نقطة داخلية في  $\mathcal{R}$ ، حتى يمسح القوس الدائري  $P_1 P_2$  مقطعاً اسطوانياً داخل المنطقة  $\mathcal{R}$ ، تتغير عليه  $z$  من  $z = z_1(\rho)$  إلى  $z = z_2(\rho)$  (وهذا ما يفترض لاحقاً، إجراء المكاملة الثانية بالنسبة إلى  $\rho$  مع بقاء  $z$  ثابتة). نجعل هذا المقطع يتحرك من الأسطوانة  $\rho = a$ ، إلى الأسطوانة  $\rho = b$ ، حيث  $a < b$ ، ليمسح كامل المنطقة  $\mathcal{R}$ . وفي أثناء هاتين الحركتين، ترسم نقطة الدخول سطح دخول  $\varphi = \varphi_1(z, \rho)$ ، بينما ترسم نقطة الخروج سطح خروج  $\varphi = \varphi_2(z, \rho)$ . فإذا كان هذان السطحان أملسين، قلنا إن المنطقة  $\mathcal{R}$  بسيطة باتجاه  $\varphi$ ، وإذا كان، إضافة إلى ذلك، المنحنيان  $z = z_1(\rho)$  و  $z = z_2(\rho)$  أملسين، فإن التكامل الثلاثي (5.5) يكتب كما يلي:

$$\iiint_{\mathcal{R}} f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \rho d\rho \int_{z_1(\rho)}^{z_2(\rho)} dz \int_{\varphi_1(z, \rho)}^{\varphi_2(z, \rho)} f_1(\rho, \varphi, z) d\varphi$$

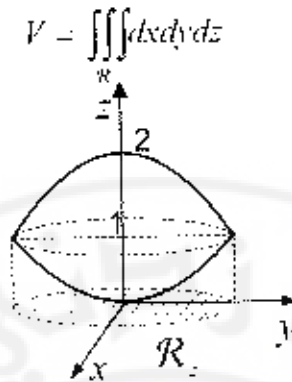
ويمكن، بأسلوب مشابه، تغيير ترتيب المكاملة من  $\varphi$  ثم  $\rho$  ثم  $z$ .

مثال 5.4: احسب حجم المنطقة  $\mathcal{R}$  المحاطة بالسطوح:

$$z = x^2 + y^2, \quad z = 2 - x^2 - y^2$$

الحل: إن المنطقة المطلوب حساب حجمها محددة ومحاطة بسطح أملس جزئياً، الشكل 5.5.

فيعطى حجمها بالتكامل الثلاثي:



الشكل 5.5

ننتقل إلى الإحداثيات الأسطوانية، حيث إن المنطقة  $R$  بسيطة باتجاه  $z$ ، سطح الدخول  $\sigma_1 = p^2$ ، و سطح الخروج  $\sigma_2 = 2 - p^2$ ، ومسقطها على المستوى  $Oxy$  هو القرص الدائري  $p \leq 1$  أي أن

$$R = \{(p, \varphi, z) : 0 \leq \varphi < 2\pi, 0 \leq p \leq 1, p^2 \leq z \leq 2 - p^2\}$$

وعليه، فإن الحجم المطلوب:

$$\begin{aligned} V &= \iiint_R p \, dp \, d\varphi \, dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 p \, dp \int_{p^2}^{2-p^2} dz = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 p(2 - 2p^2) \, dp = \pi \quad \text{وحدة حجم} \end{aligned}$$

## ٢- حساب التكامل الثلاثي في التجزئة الكروية

إن الإحداثيات الكروية هي، أيضاً، حالة خاصة من الإحداثيات المتعظمة، حيث  $u = r$  و  $v = \theta$  و  $w = \varphi$ . وعليه، فإن المنطقة  $R$  تُجزئ في هذه الإحداثيات بالسطوح الإحداثية:

أ-  $r = k_1$  كرات مركزها  $O$ ، وأنصاف أقطارها  $k_1$ .

ب-  $\theta = c_1$  محاور ط دورانية قائمة محاورها  $Oz$  ورأسها  $O$  ونصف زاوية رأسها  $c_1$ .

ج -  $h_1 - \varphi$  أنصاف مستويات فصلها المشترك  $OC$  وتصبح مع المستوي  $Oxz$  زاوية مقدارها  $h_1$ .

من العلاقات (التقابل) بين الإحداثيات الديكارتية والكروية:

$$x = r \sin \theta \cos \varphi \quad y = r \sin \theta \sin \varphi \quad z = r \cos \theta$$

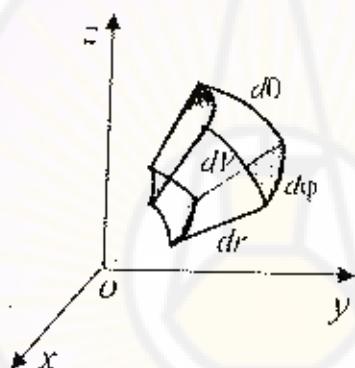
نجد يعقوبي هذا التقابل

$$J_1 = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \varphi)} = r^2 \sin \theta$$

وعليه، فإن عنصر الحجم يُعطى في هذه التجزئة، استناداً للعلاقة (5.4)، بالعلاقة:

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$$

يمثل الشكل 5.6 عنصر الحجم في الجُملة الكروية.



الشكل 5.6

وهكذا، فإن التكامل الثلاثي (5.5) يكتب كما يلي:

$$\iiint_R f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{R_1} f_1(r, \theta, \varphi) r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$$

حيث  $f_1(r, \theta, \varphi) = f(r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta)$ ، و  $R_1$  صورة  $R$  في التجزئة الكروية.

ملحوظة 5.7: نستخدم، عادةً، التجزئة الكروية إذا كانت منطقة المكاملة متناظرة بالنسبة إلى نقطة.



لا نضطر في هذه التجزئة إلى رسم المنطقة  $\mathcal{R}_1$  في الجملة الجديدة  $(r, \theta, \varphi)$ ، كي نحدد عناصرها، لأنه غالباً، يمكن تحديد عناصر  $\mathcal{R}_1$  مباشرة من  $\mathcal{R}$ .

#### المنطقة البسيطة باتجاه $r$

نفرض أن أي نصف مستقيم منبعث من القطب  $O$ ، ومار من نقطة داخلية من  $\mathcal{R}$ ، يقطع حدود المنطقة  $\mathcal{R}$  بتقطعتين فقط، الأولى  $P_1(r_1, \theta, \varphi)$ ، نقطة دخول، والثانية  $P_2(r_2, \theta, \varphi)$ ، نقطة خروج، أي أن  $r$  تتغير على القطعة المستقيمة  $\overline{P_1 P_2}$ ، مع بقاء  $\varphi$  و  $\theta$  ثابتين. (وهذا ما يفسر، لاحقاً، إجراء المكاملة بالنسبة إلى  $r$ ، أولاً، مع بقاء  $\varphi$  و  $\theta$  ثابتين). نجعل نصف المستقيم هذا يتحرك، بحيث يبقى منبعثاً من القطب  $O$ ، وماراً من نقطة داخلية في  $\mathcal{R}$ ، ويقع في نصف المستوي  $\varphi = c$ ، حتى تمسح القطعة  $\overline{P_1 P_2}$  مقطعاً داخل المنطقة  $\mathcal{R}$ ، تتغير عليه  $\theta$  من  $\theta_1(\varphi)$  إلى  $\theta_2(\varphi)$ . (وهذا ما يفسر، لاحقاً، إجراء المكاملة الثانية بالنسبة إلى  $\theta$  مع بقاء  $\varphi$  ثابتة). ثم نجعل هذا المقطع يتحرك بين أصغر وأكبر قيمة يمكن أن تأخذها  $\varphi$ :  $\alpha \leq \varphi \leq \beta$ ، ليمسح كامل المنطقة  $\mathcal{R}$ . وفي أثناء هاتين الحركتين، ترسم نقطة الدخول سطح دخول  $r = r_1(\theta, \varphi)$ ، بينما ترسم نقطة الخروج سطح خروج  $r = r_2(\theta, \varphi)$ . فإذا كان هذان السطحان أملسين، قلنا إن المنطقة  $\mathcal{R}$  بسيطة باتجاه  $r$ ، وإذا كان، إضافة إلى ذلك، المنحنيان  $\theta = \theta_1(\varphi)$  و  $\theta = \theta_2(\varphi)$  أملسين، فإن هذه المنطقة تكتب بدلالة عناصرها كما يلي:

$$\mathcal{R} = \{ (r, \theta, \varphi) : \alpha \leq \varphi \leq \beta, \theta_1(\varphi) \leq \theta \leq \theta_2(\varphi), r_1(\theta, \varphi) \leq r \leq r_2(\theta, \varphi) \}$$

وعليه، فإن التكامل الثلاثي (5.5) يكتب كما يلي:

$$\iiint_{\mathcal{R}} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{\theta_1(\varphi)}^{\theta_2(\varphi)} \sin \theta d\theta \int_{r_1(\theta, \varphi)}^{r_2(\theta, \varphi)} f(r, \theta, \varphi) r^2 dr$$

وتعد هذه الحالة، هي الأكثر وروداً في المسائل العملية.

ويمكن، بأسلوب مشابه، تغيير ترتيب المكاملة من  $r$  ثم  $\varphi$  ثم  $\theta$ .

ملحوظة 5.8: إذا كان القطب نقطة داخلية في  $\mathcal{R}$ ، فإن سطح الدخول  $r_1 = 0$ ، و  $0 \leq \theta \leq \pi$  و  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ .

يمكن إعطاء تعاريف مناسبة، للمنطقة البسيطة باتجاه  $\varphi$ ، وباتجاه  $\theta$ ، واختيار ترتيب مناسب، في كل حالة، لعمليات المكاملة.

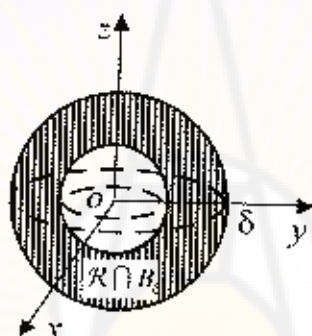
مثال 5.5: احسب قيمة التكامل:

$$I = \iiint_{x^2+y^2+z^2 \geq 1} \exp\left[-(x^2+y^2+z^2)^{3/2}\right] dx dy dz$$

الحل: إن المنطقة  $\mathcal{R}$  غير محدودة فالتكامل شاذ، ولما كانت الدالة المكاملة مستمرة عليها، فإنه يجب إيجاد قيمة النهاية:

$$\lim_{\delta \rightarrow \infty} I_\delta = \lim_{\delta \rightarrow \infty} \iiint_{\mathcal{R} \cap B_\delta} \exp\left[-(x^2+y^2+z^2)^{3/2}\right] dx dy dz$$

حيث  $B_\delta$  كرة مركزها  $O$  ونصف قطرها  $\delta$ ،  $1 \leq \delta < \infty$ ، الشكل 5.7.



الشكل 5.7

ننتقل إلى الإحداثيات الكروية، فيكون:

$$\mathcal{R} \cap B_\delta = \{(r, \theta, \varphi) : 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \pi, 1 \leq r \leq \delta\}$$

كما هو واضح، فإن هذه المنطقة بسيطة باتجاه  $r$ ، وعليه، فإن

$$I_\delta = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_1^\delta r^2 e^{-r^3} dr = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{e} - \frac{1}{e^{\delta^3}} \right) \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta = \frac{4}{3} \pi \left( \frac{1}{e} - \frac{1}{e^{\delta^3}} \right)$$

وعليه، فإن

$$I = \lim_{\delta \rightarrow \infty} I_\delta = \lim_{\delta \rightarrow \infty} \frac{4}{3} \pi \left( \frac{1}{e} - \frac{1}{e^{\delta^3}} \right) = \frac{4}{3e} \pi$$

أي أن التكامل الشاذ متقارب.

مثال 5.6: احسب قيمة التكامل  $I = \iiint_{\mathcal{R}} \frac{dx dy dz}{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 1}$  حيث

$$\mathcal{R} = \left\{ (x, y, z) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 : z \geq 0 \right\}$$

الحل: لما كانت المنطقة  $\mathcal{R}$  محدودة ومحاطة بسطح أملس جزئياً، والدالة المكاملة محدودة عليها، فإن التكامل  $I$  موجود.

لحساب التكامل نبذل الإحداثيات الديكارتية بالإحداثيات المنحنية، وفق التقابل مستمر المشتقات:

$$\frac{x}{a} = u, \quad \frac{y}{b} = v, \quad \frac{z}{c} = w \quad : \quad J_1 = abc$$

وعليه، فإن التكامل يكتب كما يلي:

$$I = \iiint_{\mathcal{R}_1} \frac{du dv dw}{u^2 + v^2 + w^2 + 1}$$

حيث  $\mathcal{R}_1$  صورة  $\mathcal{R}$  وفق هذا التقابل، هي عبارة عن المنطقة المحصورة داخل النصف العلوي لكرة الوحدة:

$$\mathcal{R}_1 = \left\{ (u, v, w) : u^2 + v^2 + w^2 \leq 1 : w \geq 0 \right\}$$

نتقل، الآن، إلى الإحداثيات الكروية، حيث إن المنطقة  $\mathcal{R}_1$  بسيطة باتجاه  $r$ :

$$I = abc \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta \int_1^{\sqrt{1-r^2}} \frac{r^2}{r^2 + 1} dr =$$

$$= abc \left[ \varphi \right]_0^{2\pi} \left[ -\cos \theta \right]_0^{\pi/2} \left[ r - \arctan r \right]_1^{\sqrt{1-r^2}} = 2\pi abc \left( 1 - \frac{\pi}{4} \right)$$

ملحوظة 5.9: يمكن دمج التبدلين (من  $x$  و  $y$  و  $z$  إلى  $u$  و  $v$  و  $w$ ، ومن ثم إلى  $r$  و  $\theta$  و  $\varphi$ ) بتبديل واحد يسمى الإحداثيات الكروية المعممة:

$$x = ar \sin \theta \cos \varphi \quad \text{و} \quad y = br \sin \theta \sin \varphi \quad \text{و} \quad z = cr \cos \theta$$

$$\text{حيث } J_1 = abc r^2 \sin \theta$$

## تمارين الفصل الخامس

1. احسب قيمة كل من التكاملات التالية على المنطقة  $\mathcal{R}$  المبينة بجوارها :

$$I = \iiint_{\mathcal{R}} (x^2 + y^2 + z^2)^2 dx dy dz \quad ; \quad \mathcal{R} : \{x^2 + y^2 = 4, z = 0, z = 2\}$$

$$I = \iiint_{\mathcal{R}} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz \quad ; \quad \mathcal{R} : \{x^2 + z^2 = 1, y = 0, y = 2\}$$

$$I = \iiint_{\mathcal{R}} (x^2 + y^2 + z^2)^4 dx dy dz \quad ; \quad \mathcal{R} : \begin{cases} x + y + z = 1, \\ x = 0, y = 0, z = 0 \end{cases}$$

$$I = \iiint_{\mathcal{R}} \frac{dx dy dz}{(4x + 3y + z - 2)^6} \quad ; \quad \mathcal{R} : \{z = x^2 + y^2, z = 4\}$$

$$I = \iiint_{\mathcal{R}} \frac{dx dy dz}{(x^2 + y^2 + z^2 + 1)^2} \quad ; \quad \mathcal{R} : \{x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$$

$$I = \iiint_{\mathcal{R}} \frac{xy}{z} dx dy dz \quad ; \quad \mathcal{R} : \begin{cases} x^2 = y, x^2 = 2y, y^2 = x, \\ y^2 = 3x, y^2 = 2z, y^2 = 4z \end{cases}$$

$$I = \iiint_{\mathcal{R}} xz dx dy dz \quad ; \quad \mathcal{R} : \begin{cases} 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x, \\ 0 \leq z \leq 1 - x - y \end{cases}$$

$$I = \iiint_{\mathcal{R}} xyz dx dy dz \quad ; \quad \mathcal{R} : \begin{cases} y = x^2, x = y^2, \\ z = xy, z = 0 \end{cases}$$

$$I = \iiint_{\mathcal{R}} \frac{z dx dy dz}{x^2 + y^2 + 1} \quad ; \quad \mathcal{R} : \begin{cases} x^2 + y^2 = 4, z = 0, \\ z = 4, x \geq 0 \end{cases}$$

$$I = \iiint_{\mathcal{R}} \frac{dx dy dz}{x^2 + y^2 + z^2 + 1} \quad ; \quad \mathcal{R} : \{x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, y \geq 0\}$$

$$I = \iiint_{\mathcal{R}} \frac{dx dy dz}{x^2 + y^2 + z^2} \quad ; \quad \mathcal{R} : \{1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, y \geq 0\}$$

$$I = \iiint_{\mathcal{R}} \frac{z}{(y^2 + z^2)} dx dy dz \quad ; \quad \mathcal{R} : \{3 \leq x \leq 4, 1 \leq y^2 + z^2 \leq 4\}$$

$$I = \iiint_{\mathcal{R}} x^2 y^2 z dx dy dz \quad ; \quad \mathcal{R} : \{x^2 + z^2 = y^2, y = 0, y = 2\}$$

$$I = \iiint_{\mathcal{R}} [(x+y)^2 - z] dx dy dz \quad ; \quad \mathcal{R} : \{x^2 + y^2 = (z-1)^2, z=0\}$$

$$I = \iiint_{\mathcal{R}} z^2 dx dy dz \quad ; \quad \mathcal{R} : \begin{cases} z = \sqrt{x^2 + y^2} \\ z = \sqrt{2 - x^2 - y^2} \end{cases}$$

$$I = \iiint_{\mathcal{R}} \frac{dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad ; \quad \mathcal{R} : \{x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

$$I = \iiint_{\mathcal{R}} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz \quad ; \quad \mathcal{R} : \{x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

$$I = \iiint_{\mathcal{R}} \frac{dx dy dz}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}} \quad ; \quad \mathcal{R} : \{x^2 + y^2 + z^2 \geq 1\}$$

$$I = \iiint_{\mathcal{R}} xy\sqrt{z} dx dy dz \quad ; \quad \mathcal{R} : \{y = x^2, y=1, y=z, z=0\}$$

$$I = \iiint_{\mathcal{R}} z dx dy dz \quad ; \quad \mathcal{R} : \begin{cases} 1 \leq x^2 + y^2 + (z-1)^2 \leq 4 \\ x^2 + y^2 = (z-1)^2 \end{cases}$$

$$I = \iiint_{\mathcal{R}} (x^2 + y^2) dx dy dz \quad ; \quad \mathcal{R} : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z \\ \frac{1}{3}z \leq x^2 + y^2 \leq 3z^2 \end{cases}$$

$$I = \iiint_{\mathcal{R}} (x^2 + 3z^2) dx dy dz \quad ; \quad \mathcal{R} : \{x^2 + y^2 = 4, z = x^2 + y^2, z=0\}$$

$$I = \iiint_{\mathcal{R}} e^x \sqrt{y^2 + z^2} dx dy dz \quad ; \quad \mathcal{R} : \{4 \leq y^2 + z^2 \leq 9, 1 \leq x \leq 2\}$$

$$I = \iiint_{\mathcal{R}} \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right)^3 dx dy dz \quad ; \quad \mathcal{R} : \left\{ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}$$

$$I = \iiint_{\mathcal{R}} \left( \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{4z^2}{c^2} \right) dx dy dz \quad ; \quad \mathcal{R} : \left\{ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}$$

$$I = \iiint_{\mathcal{R}} (x+y+z) dx dy dz \quad ; \quad \mathcal{R} : \{x+y=1, x=0, y=0, z=0, z=5\}$$

$$I = \iiint_{\mathcal{R}} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz \quad ; \quad \mathcal{R} : \{x^2 + (y-0.5)^2 + z^2 \leq 0.25\}$$

$$\mathcal{R}: \{x^2 + y^2 = 2x, z = 4x, z \geq 0\} \text{ حيث } I = \iiint_{\mathcal{R}} (x^2 + y^2) dx dy dz$$

$$\mathcal{R}: \{x^2 + y^2 + z^2 \geq 1\} \text{ حيث } I = \iiint_{\mathcal{R}} \exp[-(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}] dx dy dz$$

$$\mathcal{R}: \{x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\} \text{ حيث } I = \iiint_{\mathcal{R}} \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3} dx dy dz$$

$$\text{حيث } I = \iiint_{\mathcal{R}} (6x + 8y + 4z + 5) dx dy dz$$

$$\mathcal{R}: \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$$

$$\text{حيث } I = \iiint_{\mathcal{R}} (xyz - 1) dx dy dz$$

$$\mathcal{R}: \{x^2 + y^2 + z^2 = 4, x^2 + y^2 + z^2 = 4z, x, y, z \geq 0\}$$

$$\text{حيث } I = \iiint_{\mathcal{R}} x \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$$

$$\mathcal{R}: \{x^2 + y^2 + z^2 = 1, x^2 + y^2 = 0.5\}$$

$$\text{حيث } I = \iiint_{\mathcal{R}} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$$

$$\mathcal{R}: \{x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, y^2 + z^2 \leq x^2, x \geq 0\}$$

$$\text{حيث } I = \iiint_{\mathcal{R}} (x + y + z) dx dy dz$$

$$\mathcal{R}: \{x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x^2 + y^2 \leq 4z\}$$

2. احسب حجم المنطقة المحصورة بالسطوح:

(1) مجسم القطع الناقص.

$$2) \{x^2 + (y-1)^2 = 1, z = \sqrt{x^2 + y^2}, z = 0\}$$

$$3) \{z = x^2 + y^2, z = 2x\}$$

$$4) \{z = 4 - x^2 - y^2, z = 0\}$$

$$5) \{z = x^2 + y^2, z = \sqrt{x^2 + y^2}\}$$

$$6) \{xz = 4, xz = 36, xy = 1, xy = 1, xy = 9, yz = 25, yz = 49\}$$

$$7) \{x + 2y + z = 2, 2y = x, x = 0, z = 0\}$$

- 8)  $\left\{ 4z = x^2 + y^2, z = \sqrt{5 - x^2 - y^2} \right\}$   
 9)  $\left\{ z = \sqrt{x^2 + y^2}, z = \sqrt{2 - x^2 - y^2} \right\}$   
 10)  $\left\{ x^2 + y^2 = 2x, x^2 + y^2 = z, z = 0 \right\}$   
 11)  $\left\{ x^2 + y^2 = 2x, xy = z, y = 0 \right\}$   
 12)  $\left\{ z = \sqrt{1 - z^2}, x = y, z = 0, x = 0 \right\}$   
 13)  $\left\{ x^2 + y^2 = 9, x = z, z = 0 \right\}$   
 14)  $\left\{ z = \sqrt{x^2 + y^2}, z = 6 - x^2 - y^2 \right\}$   
 15)  $\left\{ z = x^2 + y^2, y^2 = x, x = 1, z = 0 \right\}$   
 16)  $\left\{ x^2 + y^2 = 1, x^2 + y^2 + 4 = z, z = 0 \right\}$   
 17)  $\left\{ 25 - x^2 - y^2 = z, x = 2, x = -2, y = 3, y = -3, z = 0 \right\}$   
 18)  $\left\{ x = 2, x = 0, y = 0, y = 3, x^2 + y^2 = z \right\}$   
 19)  $\left\{ z = y^2, z = 2y^2, xy = 1, xy = 4, x = 1, x = 3 \right\}$   
 20)  $\left\{ xy = z, (x^2 + y^2)^2 - 8xy, z = 0 \right\}$   
 21)  $\left\{ x^2 - y^2 = z, (x^2 + y^2)^2 = 4(x^2 - y^2), z = 0 \right\}$







الفصل السادس  
التكاملات الخطية

- 6.1 المنحني في الفضاء
- 6.2 التكامل الخطي من النوع الأول
- 6.3 التكامل الخطي من النوع الثاني
- تمارين الفصل السادس



## التكاملات الخطية

### 6.1 المنحني في الفضاء

المنحني في الفضاء الثلاثي، هو المحل الهندسي لنقاط تقاطع سطحين في الفضاء. وعليه، فإن المنحني في الفضاء يعطى ديكارتياً بالمعادلتين:

$$\{f(x, y, z) = 0, g(x, y, z) = 0\} \quad (6.1)$$

إذا كانت معادلتا السطحين جبريتين من الدرجتين  $m$  و  $n$ ، فإن المنحني في الفضاء هو منحن جبري من الدرجة  $m \times n$ .

فمثلاً، يتقاطع سطحاً الدرجة الأولى (المستويان) بمنحن من الدرجة الأولى (مستقيم). ويتقاطع سطح درجة أولى و سطح درجة ثانية بمنحن من الدرجة الثانية يقع في مستوى التقاطع.

ولما كانت النقطة الواقعة على المنحني في الفضاء لها درجة حرية واحدة فقط، فإنه يمكن التعبير عن معادلات المنحني في الفضاء بدلالة وسيط واحد  $t$ .

وهكذا، فإن المنحني في الفضاء  $\Gamma$ ، الواصل بين النقطتين  $A$  و  $B$ ، يعطى وسيطياً بالمعادلات:

$$\Gamma: \{x = x(t), y = y(t), z = z(t) : t_A \leq t \leq t_B\} \quad (6.2)$$

حيث  $x$  و  $y$  و  $z$  دوال مستمرة على المجال  $[t_A: t_B]$ .

ويمكن الانتقال من الشكل الديكارتي (6.1) إلى الشكل الوسيط (6.2) باختيار أحد

المتغيرات  $x$  أو  $y$  أو  $z$  وسيطاً، واستنتاج المتغيرين الباقيين بدلالة هذا الوسيط.

ويمكن أن يعطى المنحني  $\Gamma$ ، بدلالة متجه الموضع لنقطة اختيارية منه  $P$ :

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} : t_A \leq t \leq t_B$$

وتسمى هذه العلاقة المعادلة المتجهية للمنحني  $\Gamma$ .

#### 6.1.1 المنحني الأمس (الصفيق - المنتظم)

نقول عن منحن إنه بسيط، إذا كان مستمراً ولا يقطع نفسه.

ونقول عن نقطة  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  من المنحني، إنها نقطة شاذة للمنحني، إذا كان أحد

المشتقات  $x'$  أو  $y'$  أو  $z'$  على الأقل، غير موجودة عندها، أو أنها جميعاً معدومة عند هذه النقطة.

ونقول عن المنحني  $\Gamma$ ، إنه أملس، إذا كان له مماس وحيد في كل نقطة من نقاطه، بحيث يدور هذا المماس باستمرار عند تغير نقطة التماس. أي هو منحني بسيط، لا توجد عليه نقاط شاذة. وعليه، يكون المنحني  $\Gamma$  أملساً، إذا كان:

$$\{t_1 \neq t_2 \Leftrightarrow r'(t_1) \neq r'(t_2)\} \text{ و } \vec{r}' \neq 0 \text{ و } \vec{r} \in C^1([t_A; t_B])$$

إذا كان المنحني  $\Gamma$  معطى ديكارياً بالمعادلات (6.1)، فإنه يمكن اختيار أحد المتغيرات الديكارتية، وليكن  $x$  مثلاً، بمثابة الوسيط  $t$ . ويكون عندئذ المنحني أملساً، إذا كان عبارة عن تقاطع سطحين بسيطين باتجاه  $y$  وباتجاه  $z$ ، أي

$$\Gamma : \{y = y(x), z = z(x) : y, z \in C^1([x_A; x_B])\} \quad (6.3)$$

وهذا يكفي، بالاستناد إلى المبرهنة 2.8، قولنا إنه يكون المنحني  $\Gamma$  المعطى ديكارياً بالمعادلات (6.1)، أملساً، إذا كان:

$$J = \frac{\partial(f, g)}{\partial(y, z)} \neq 0 : f, g \in C^1([x_A; x_B])$$

ونقول عن المنحني إنه أملس جزئياً (إطار)، إذا كان هذا المنحني مستمراً، ويتكون من عدد محدود من المنحنيات الملساء.

## 6.1.2 تغير الوسيط في معادلة المنحني

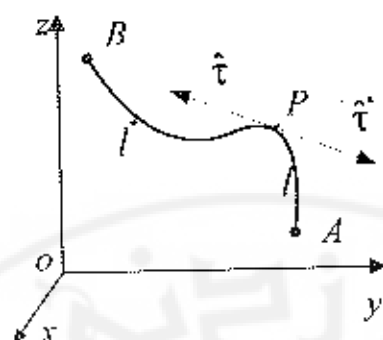
يكون من المناسب أحياناً، استبدال الوسيط العام  $t$  بوسيط أكثر ملائمة، هو طول القوس  $s$ ، حيث  $AP = s$ ، الشكل (6.1)، باستخدام التبديل:

$$t = \psi(s) : \psi \in C^1, \frac{dt}{ds} \neq 0$$

إذا كان  $\frac{dt}{ds} > 0$ ، فإن  $t$  تزايد من 0 إلى  $t_B = L$ ، عندما تزايد  $s$  من  $t_A$  إلى  $t_B$ . ونقول إن المنحني  $\Gamma$  موجه من  $A$  إلى  $B$ .

وإذا كان  $\frac{dt}{ds} < 0$ ، فإن  $t$  تناقص من  $t_B = L$  إلى 0، عندما تزايد  $s$  من  $t_A$  إلى  $t_B$ . ونقول

إن المنحني  $\Gamma$  موجه من  $B$  إلى  $A$ .



الشكل 6.1

وهكذا، يعطي المنحني  $\Gamma$  بدلالة متجه الموضع لنقطة اختيارية منه  $P$ ، بدلالة الوسيط  $l$ :

$$\vec{r}(l) = x(l)\hat{i} + y(l)\hat{j} + z(l)\hat{k} ; 0 \leq l \leq l_B = L$$

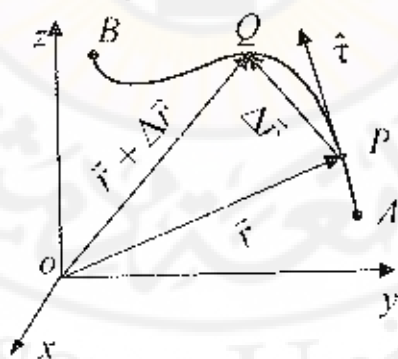
مبرهنة 6.1: إن متجه واحدة المماس للمنحني  $\Gamma$ ، عند نقطة عادية منه  $P(x, y, z)$ ، هو المتجه:

$$\hat{t} = \frac{d\vec{r}}{dl} = \vec{r}'(l) = x'(l)\hat{i} + y'(l)\hat{j} + z'(l)\hat{k}$$

وهو موجه وفق اتجاه تزايد  $l$ .

الإثبات: نقرض أن  $l$  تزايدت بالمقدار  $\Delta l$ ، عندئذ تنتقل النقطة  $P(x, y, z)$  إلى النقطة

$Q(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$  على  $\Gamma$ ، الشكل 6.2.



الشكل 6.2

ويكون متجه الموضع عند  $Q$ :

$$\vec{OQ} = \vec{r} + \Delta\vec{r} = (x + \Delta x)\hat{i} + (y + \Delta y)\hat{j} + (z + \Delta z)\hat{k}$$

حيث

$$\vec{PQ} = \Delta\vec{r} = (\Delta x)\hat{i} + (\Delta y)\hat{j} + (\Delta z)\hat{k}$$

وعليه، فإن

$$\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta l} = \left( \frac{\Delta x}{\Delta l} \right)\hat{i} + \left( \frac{\Delta y}{\Delta l} \right)\hat{j} + \left( \frac{\Delta z}{\Delta l} \right)\hat{k}$$

واضح أن هذا المتجه منطبق على  $\vec{PQ}$ ، وطوله يساوي نسبة طول الوتر  $PQ$  إلى طول القوس  $\Delta l = PQ$ .

عندما يسمى  $\Delta l$  إلى الصفر، فإن المتجه  $\vec{PQ}$  يصبح مماساً للمنحني  $\Gamma$ ، عند النقطة  $P$ .  
وعليه، فإن المتجه

$$\lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta l} = \frac{d\vec{r}}{dl} = \vec{r}'(l) = \frac{dx}{dl}\hat{i} + \frac{dy}{dl}\hat{j} + \frac{dz}{dl}\hat{k} = \hat{t}$$

يصبح مماساً للمنحني  $\Gamma$ ، عند النقطة  $P$ ، وموجه وفق اتجاه تزايد  $l$  وطوله يساوي الواحد.

أي أن المتجه  $\vec{PQ}$  هو متجه واحدة المماس للمنحني  $\Gamma$ ، عند النقطة  $P$ ، حيث  $|\hat{t}| = 1$ .

نتيجة 6.1: لما كان  $\hat{t} = \frac{d\vec{r}}{dl}$ ، فإن  $d\vec{r} = \hat{t} dl$ .

وإذا رمزنا بـ  $\cos \alpha$  و  $\cos \beta$  و  $\cos \gamma$  لجيوب تمام توجيه مماس المنحني  $\Gamma$ ، عند النقطة  $P$ ،  
فإن:

$$\hat{t} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) = \left( \frac{dx}{dl}, \frac{dy}{dl}, \frac{dz}{dl} \right)$$

أي أن

$$dx = \cos \alpha dl, \quad dy = \cos \beta dl, \quad dz = \cos \gamma dl \quad (6.4)$$

## 6.2 التكامل الخطي من النوع الأول

### 6.2.1 تعريف التكامل الخطي من النوع الأول وشروط وجوده

تعريف 6.1: ليكن  $\Gamma$  منحنياً فراغياً يصل بين النقطتين  $A$  و  $B$ ، معطى وسيطياً بالمعادلات

(6.2)، محدوداً و أملياً أو أملياً جزئياً، طوله  $L$ . ولتكن  $f(x, y, z)$  دالة معرفة ومحدودة على  $\Gamma$ .

نجزئ المنحنى  $\Gamma$ ، اختيارياً، إلى  $n$  جزء، بواسطة النقاط  $A = P_0, P_1, \dots, P_n = B$  بحيث لا تشترك هذه المنحنيات الجزئية  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$  بنقاط داخلية، ولتكن أطوالها  $\Delta L_1, \Delta L_2, \dots, \Delta L_n$ ، بالترتيب. ولتكن  $\lambda$  أكبر أطوال هذه المنحنيات الجزئية. نختار على كل منحن جزئي  $\Gamma_i$  نقطة اختيارية  $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ . تشكل المجموع

$$\sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta L_i \quad (6.5)$$

والذي يسمى المجموع التكاملي للدالة  $f(x, y, z)$  على المنحنى في الفضاء  $\Gamma$ . نأخذ نهاية المجموع التكاملي (6.5)، عندما تزداد  $n$  إلى اللانهاية، أي عندما يسعي  $\lambda$  إلى الصفر. فإذا كانت هذه النهاية موجودة ومحدودة، أي كانت طريقة تجزئة المنحنى  $\Gamma$ ، وأياً كان موضع النقطة  $M_i$  على المنحنى الجزئي  $\Gamma_i$ ، فإننا نسميها التكامل الخطي من النوع الأول للدالة  $f(x, y, z)$  على المنحنى  $\Gamma$ ، ونكتب

$$I = \int_{\Gamma} f(x, y, z) dl = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta L_i$$

ونقول عندها إن الدالة  $f(x, y, z)$  كمولة على المنحنى  $\Gamma$ . ونسمي  $f(x, y, z)$  الدالة المكاملة، والمنحنى  $\Gamma$  منحنى المكاملة، و  $dl$  عنصر طول على المنحنى  $\Gamma$ . إذا كان المنحنى  $\Gamma$  مغلقاً، فإننا نرمز للتكامل الخطي من النوع الأول بالرمز

$$I = \oint_{\Gamma} f(x, y, z) dl$$

نقبل دون إثبات:

مبرهنة 6.2: تكون الدالة  $f(x, y, z)$  كمولة على المنحنى  $\Gamma$ ، إذا كانت هذه الدالة مستمرة على  $\Gamma$  أو مستمرة جزئياً عليه.

ملحوظة 6.1: لما كانت الدالة  $f(x, y, z)$  معرفة على المنحنى  $\Gamma$ ، فإن المتغيرات  $x$  و  $y$  و  $z$  غير مستقلة، أي أنها مرتبطة بمعادلة المنحنى. وعليه، فإن الدالة  $f$  تتبع فعلياً لمتغير حقيقي

واحد فقط. ومنه، فإن التكامل الخطي من النوع الأول، يكتب كما يلي:

$$I = \int_0^l f[x(t), y(t), z(t)] dt = \int_0^l f_1(t) dt$$

حيث  $f[x(t), y(t), z(t)] = f_1(t)$

ملحوظة 6.2: إذا كانت الدالة المكاملة غير محدودة على المنحني  $\Gamma$ ، أو أن المنحني  $\Gamma$  غير محدود، فإننا نحصل على تكاملات خطية شاذة، نعالجها تماماً كما عالجنا التكاملات المحددة الشاذة.

## 6.2.2 التفسير الهندسي والفيزيائي للتكامل الخطي من النوع الأول

١- إذا كان  $f(x, y, z) \equiv 1$  على المنحني  $\Gamma$ ، فإن

$$\int_{\Gamma} 1 dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \Delta L_i = L$$

أي أن التكامل الخطي من النوع الأول  $\int_{\Gamma} 1 dt = L$  يُمثل طول المنحني  $\Gamma$ ، وهو يمثل

القانون العام لحساب طول المنحني في الفضاء  $\Gamma$ .

٢- إذا كان المنحني  $\Gamma$  منحنياً مستوياً، يقع في المستوى  $oxy$ ، وكان  $f(x, y) \geq 0$  على  $\Gamma$ ،

فإن التكامل الخطي من النوع الأول  $\int_{\Gamma} f(x, y) dt = S$ ، يُمثل مساحة أسطوانة قائمة،

مولداتها توازي المحور  $oz$  ودليلها في المستوى  $oxy$  هو المنحني  $\Gamma$ ، وارتفاعها المتغير هو الدالة

$$z = f(x, y)$$

٣- إذا كان المنحني  $\Gamma$  منحنياً مادياً غير منجانس، كثافته مُعطاة بالدالة المستمرة

$\mu = f(x, y, z)$ ، فإن المقدار  $f(M_i) \Delta L_i$  يُمثل تقريباً، كتلة الجزء  $\Gamma_i$  من المنحني  $\Gamma$ .

وعليه، فإن المجموع التكاملي (6.5) يُمثل، تقريباً، كتلة المنحني  $\Gamma$ . ومنه، فإن  $m$ ، كتلة هذا

المنحني، تُعطى بالتكامل الخطي من النوع الأول:

$$m = \int_{\Gamma} f(x, y, z) dt$$



### 6.2.3 خواص التكامل الخطي من النوع الأول

إن للتكامل الخطي من النوع الأول، خواص التكامل المحدد نفسها، باستثناء خاصية عكس الاتجاه، أي أن

$$\int_{AB} f(x, y, z) dl = \int_{BA} f(x, y, z) dl$$

الإثبات: نرمز بـ  $l^*$  لطول قوس المنحني  $\Gamma$ ، الموجه من  $B$  إلى  $A$ ، الشكل 6.1. واضح أن

$$l^* = L - l \Rightarrow dl^* = -dl$$

ولما كان  $l = L - l^*$ ، فإنه يمكن كتابة المعادلة المتجهية للمنحني  $\Gamma$ ، الموجه من  $B$  إلى  $A$ ، بدلالة الوسيط  $l^*$ :

$$\vec{r}(L - l^*) = x(L - l^*)\hat{i} + y(L - l^*)\hat{j} + z(L - l^*)\hat{k}$$

حيث  $0 \leq l^* \leq l_A = L$ .

لذا، فإن:

$$\begin{aligned} \int_{B,A} f(x, y, z) dl^* &= \int_{l^*=0}^{l^*=L} f[x(L - l^*), y(L - l^*), z(L - l^*)] dl^* = \\ &= - \int_{l=L}^{l=0} f[x(l), y(l), z(l)] dl = \int_0^L f[x(l), y(l), z(l)] dl = \int_{AB} f(x, y, z) dl \end{aligned}$$

### 6.2.3 حساب التكامل الخطي من النوع الأول

نبين فيما يلي، كيفية حساب التكامل الخطي من النوع الأول

$$I = \int_{\Gamma} f(x, y, z) dl \quad (6.6)$$

حيث  $f(x, y, z)$  دالة مستمرة أو مستمرة جزئياً على المنحني  $\Gamma$ ، ثم نعمم بعد ذلك، إلى الحالة التي يكون فيها المنحني  $\Gamma$  أملس جزئياً.

عنصر الطول:

نجد، من المبرهنة 6.1، أنه يمكن إيجاد عنصر الطول على المنحني  $\Gamma$ ، من العلاقة:

$$|\vec{r}| = \left| \frac{d\vec{r}}{dl} \right| = \left( \frac{dx}{dl} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dl} \right)^2 + \left( \frac{dz}{dl} \right)^2 = 1$$

وعليه، فإن

$$dl = \pm \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$$

وإذا كان المنحني الأملس  $\Gamma$ ، مُعطى ديكارتياً بالمعادلات (6.3)، فإن عنصر الطول:

$$dl = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} |dx|$$

وإذا كان المنحني الأملس  $\Gamma$ ، مُعطى وسيطياً بالمعادلات (6.2)، فإن عنصر الطول:

$$dl = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} |dt|$$

إذ نختار الإشارة الموجبة، عندما تزايد  $t$  مع تزايد  $t$ . ونختار الإشارة السالبة، عندما تنقص  $t$  مع تزايد  $t$ .

وهكذا، لحساب التكامل الخطي من النوع الأول (6.6)، نعوض العلاقات (6.2) أو (6.3)، مع عنصر الطول الموافق، فنحصل على التكامل المحدد:

$$\int_{\Gamma} f(x, y, z) dl = \int_{t_1}^{t_2} f[x(t), y(t), z(t)] \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} |dt| = \int_{t_1}^{t_2} f_1(t) dt$$

حيث إن الدالة  $f_1(t)$  مستمرة أو مستمرة جزئياً على المجال  $[t_1; t_2]$ .  
أو التكامل المحدد:

$$\int_{\Gamma} f(x, y, z) dl = \int_{x_1}^{x_2} f[x, y(x), z(x)] \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} |dx| = \int_{x_1}^{x_2} f_1(x) dx$$

حيث إن الدالة  $f_1(x)$  مستمرة أو مستمرة جزئياً على المجال  $[x_1; x_2]$ .

نحسب، بالأسلوب نفسه، التكامل الخطي من النوع الأول (6.6)، إذا كان المنحني  $\Gamma$  معطى ديكارتياً بدلالة الوسيط  $y$  أو  $z$ .

ملحوظة 6.3: يعطى طول المنحني  $\Gamma$  بالعلاقة:

$$L = \int_{\Gamma} dl = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} |dt|$$

أو بالعلاقة:

$$L = \int_{\Gamma} dl = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} |dx|$$

ملحوظة 6.4: إذا كان المنحني  $\Gamma$  أملس جزئياً، نقسمه إلى عدد محدود من المنحنيات الملساء

$\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$ . ونحسب التكامل الخطي من النوع الأول (6.6)، كما يلي:

$$\int_{\Gamma} f(x, y, z) dl = \int_{\Gamma_1} f_1 dl_1 + \int_{\Gamma_2} f_2 dl_2 + \dots + \int_{\Gamma_n} f_n dl_n$$

حيث  $f_1, f_2, \dots, f_n$  قسيم الدالة  $f(x, y, z)$  على المنحنيات  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$  و  $dl_1, dl_2, \dots, dl_n$  عناصر الطول عليها، بالترتيب.

مثال 6.1: احسب قيمة التكامل الخطي من النوع الأول  $I = \int_{\Gamma} (x + z) dl$

حيث إن  $\Gamma$  هي جزء من المنحني  $\left\{ x = t - \frac{t^3}{3}, y = t^2, z = t + \frac{t^3}{3} \right\}$

الواصل بين النقطتين المقابلتين للقيمتين  $t = 0$  و  $t = 1$ .

الحل: واضح أن المنحني  $\Gamma$  محدود، والدالة المكاملة مستمرة عليه، فالتكامل موجود.

لما كان المنحني  $\Gamma$  أملس و  $I$  تتزايد مع تزايد  $t$ ، فإن:

$$dl = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} dt = \sqrt{2(1 + t^2)} dt$$

ومنه، فإن:

$$I = \int_{\Gamma} (x + z) dl = 2 \int_0^1 \sqrt{2(1 + t^2)} t dt = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

مثال 6.2: احسب مساحة جزء من سطح الأسطوانة  $x^2 + y^2 = 4$  المحدود من الأعلى

بالسطح  $xy' = 4z$ ، والواقع في الثمن الموجب.

الحل: إن السطح  $S$  المطلوب حساب مساحته، محدود وأسطواني، مولداته توازي المحور  $Oz$ .

ودليله في المستوى  $Oxy$  هو المنحني:

$$\Gamma: \{x^2 + y^2 = 4 : x \geq 0, y \geq 0\}$$

وارتفاعها المتغير هو الدالة  $z = f(x, y) = \frac{xy}{4} \geq 0$ . وعليه، فإن المساحة تُعطى بالتكامل

الخطي من النوع الأول:

$$s = \int_1^{xy} f(x, y) dl = \int_1^{xy} \frac{xy}{4} dl$$

إن المنحنى  $\Gamma$  هو ربع الدائرة المعطاة وسيطياً بالعلاقات:

$$x = 2 \cos t, \quad y = 2 \sin t; \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

لما كان المنحنى  $\Gamma$  أملس و  $t$  تتزايد مع تزايد  $t$ ، فإن:

$$dl = +\sqrt{x'^2 + y'^2} dt = 2 dt$$

ومنه، فإن:

$$s = \int_1^{xy} \frac{xy}{4} dl = \int_0^{\pi/2} 2 \cos t \sin t dt = 1 \text{ وحدة مساحة}$$

مثال 6.3: احسب قيمة التكامل الخطي من النوع الأول  $I = \int_1^{x+y+2z} (x+y+2z) dl$ ، حيث إن

$\Gamma$  هي محيط المثلث ذي الرؤوس  $A(1,0,0)$ ،  $B(0,1,0)$ ،  $C(0,0,1)$ .

الحل: واضح أن المنحنى  $\Gamma$ ، محدود، والدالة المكاملة مستمرة عليه. فالتكامل موجود.

لما كان المنحنى  $\Gamma$  أملس جزئياً (يتألف من ثلاث قطع مستقيمة)، نجزمه لثلاثة منحنيات

ملساء:

$$\Gamma_1 = \overline{AB}, \quad \Gamma_2 = \overline{BC}, \quad \Gamma_3 = \overline{CA}$$

وعليه، فإن:

$$I = \int_{\Gamma_1} (x+y+2z) dl_1 + \int_{\Gamma_2} (x+y+2z) dl_2 + \int_{\Gamma_3} (x+y+2z) dl_3$$

حيث:

$$\Gamma_1: \{y=1-x, z=0; 0 \leq x \leq 1\} \quad \text{و} \quad dl_1 = \sqrt{1+y'^2+z'^2} dx = \sqrt{2} dx$$

$$\Gamma_2: \{z=1-y, x=0; 0 \leq y \leq 1\} \quad \text{و} \quad dl_2 = \sqrt{1+x'^2+z'^2} dy = \sqrt{2} dy$$

$$\Gamma_3: \{z=1-x, y=0; 0 \leq x \leq 1\} \quad \text{و} \quad dl_3 = \sqrt{1+y'^2+z'^2} dx = \sqrt{2} dx$$

ومنه، فإن

$$I = \int_{x=0}^{x=1} \sqrt{2} dx + \int_{y=0}^{y=1} \sqrt{2}(2-y) dy + \int_{x=0}^{x=1} \sqrt{2}(2-x) dx = 4\sqrt{2}$$

### 6.3 التكامل الخطي من النوع الثاني

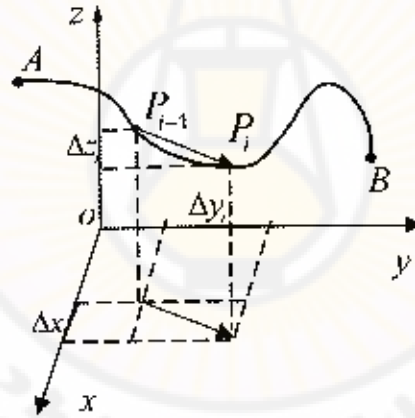
نصادف، كثيراً، في المسائل الهندسية، وخصوصاً في نظرية الحقول، تكاملات من النمط:

$$\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\Gamma} F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$$

حيث  $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$  و  $d\vec{r} = (dx, dy, dz)$ . وهذا ما يسمى التكامل الخطي من النوع الثاني. وهو يمثل، في بعض الحالات، عمل قوة  $\vec{F}$  تؤثر في جسم يتحرك على منحن  $\Gamma$ .

#### 6.3.1 تعريف وحساب التكامل الخطي من النوع الثاني

تعريف 6.2: ليكن  $\Gamma$  منحنياً فراغياً يصل بين النقطتين  $A$  و  $B$ ، معطى وسيطياً بالمعادلات (6.2)، محدوداً وأملساً أو أملساً جزئياً. ولتكن  $F_1(x, y, z)$  و  $F_2(x, y, z)$  و  $F_3(x, y, z)$  دوال معرفة ومحدودة على  $\Gamma$ .



الشكل 6.3

نجزئ المنحنى  $\Gamma$ ، اختيارياً، إلى  $n$  جزء، بواسطة النقاط  $A = P_0, P_1, \dots, P_n = B$ ، بحيث لا تشترك هذه المنحنيات الجزئية  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$  بنقاط داخلية، ولتكن  $\lambda$  أكبر أطول هذه المنحنيات الجزئية. نرمز بـ  $\Delta x_i$  و  $\Delta y_i$  و  $\Delta z_i$  لأطوال مساقط المتجه  $\overrightarrow{P_{i-1}P_i}$  على المحاور الإحداثية، الشكل 6.3.

نختار على كل منحن جزئي  $\Gamma_i$  نقطة اختيارية  $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ . نشكل المجموع التكاملي للدالة  $F_1(x, y, z)$ :

$$\sum_{i=1}^n F_1(M_i) \Delta x_i$$

نأخذ نهاية هذا المجموع التكاملي، عندما تزداد  $n$  إلى اللانهاية، أي عندما يسمى  $\lambda$  إلى الصفر. فإذا كانت هذه النهاية موجودة ومحدودة، أيًا كانت طريقة تجزئة المنحني  $\Gamma$ ، وأيًا كان موضع النقطة  $M_i$  على المنحني الجزئي  $\Gamma_i$ ، فإننا نسميها التكامل الخطي من النوع الثاني للدالة  $F_1(x, y, z)$  على المنحني  $\Gamma$ ، ونكتب

$$\int_{\Gamma} F_1(x, y, z) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n F_1(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta x_i$$

ونشكل، بأسلوب مماثل، المجموع التكاملي للدالة  $F_2(x, y, z)$  (والدالة  $F_3(x, y, z)$ ):

$$\sum_{i=1}^n F_2(M_i) \Delta y_i \left( \sum_{j=1}^n F_3(M_j) \Delta z_j \right)$$

إذا كانت النهاية

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n F_2(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta y_i \left( \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{j=1}^n F_3(\xi_j, \eta_j, \zeta_j) \Delta z_j \right)$$

موجودة ومحدودة، أيًا كانت طريقة تجزئة المنحني  $\Gamma$ ، وأيًا كان موضع النقطة  $M_i$  على المنحني الجزئي  $\Gamma_i$ ، فإننا نسميها التكامل الخطي من النوع الثاني للدالة  $F_2(x, y, z)$  (للدالة  $F_3(x, y, z)$ ) على المنحني  $\Gamma$ ، ونكتب

$$\int_{\Gamma} F_2(x, y, z) dy = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n F_2(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta y_i \left( \int_{\Gamma} F_3(x, y, z) dz = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{j=1}^n F_3(\xi_j, \eta_j, \zeta_j) \Delta z_j \right)$$

نسمي المجموع

$$I = \int_{\Gamma} F_1(x, y, z) dx + \int_{\Gamma} F_2(x, y, z) dy + \int_{\Gamma} F_3(x, y, z) dz$$

التكامل الخطي العام من النوع الثاني، ونرمز له اختصاراً بالرمز:

$$I = \int_{\Gamma} F_1(x, y, z)dx + F_2(x, y, z)dy + F_3(x, y, z)dz \quad (6.7)$$

أو

$$I = \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

حيث  $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$  و  $d\vec{r} = (dx, dy, dz)$ . ويسمى أيضاً جولان الحقل  $\vec{F}$  حول المنحني  $\Gamma$ .

يمكن، بسهولة، ردة هذا التكامل إلى تكامل محدد، تماماً كما فعلنا من أجل التكامل الخطي من النوع الأول.

فإذا كان المنحني الأمس  $\Gamma$ ، مُعطى وسيطياً بالمعادلات (6.2)، فإن:

$$\int_{\Gamma} F_1(x, y, z)dx = \int_{t_1}^{t_2} F_1[x(t), y(t), z(t)]x'(t)dt$$

$$\int_{\Gamma} F_2(x, y, z)dy = \int_{t_1}^{t_2} F_2[x(t), y(t), z(t)]y'(t)dt$$

$$\int_{\Gamma} F_3(x, y, z)dz = \int_{t_1}^{t_2} F_3[x(t), y(t), z(t)]z'(t)dt$$

وعليه، فإن التكامل الخطي العام من النوع الثاني، يُكتب كما يلي:

$$\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\Gamma} F_1dx + F_2dy + F_3dz = \int_{t_1}^{t_2} (F_1x' + F_2y' + F_3z')dt$$

وهي العلاقات التي نحسب بواسطتها التكامل الخطي من النوع الثاني.

إن للتكامل الخطي من النوع الثاني، نفس خواص التكامل المحدد.

6.3.2 العلاقة بين التكامل الخطي من النوع الأول ومن النوع الثاني

يمكن، بالاستفادة من العلاقة (6.4)، كتابة التكامل الخطي العام من النوع الثاني (6.7) كما يلي:

$$\int_{\Gamma} F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz = \int_{\Gamma} (F_1 \cos \alpha + F_2 \cos \beta + F_3 \cos \gamma) dl$$

أو

$$\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\Gamma} (\vec{F} \cdot \hat{\tau}) dl$$

وهي العلاقة بين نوعي التكامل الخطي .

حيث إن  $\vec{F} \cdot \hat{\tau} = F_1 \cos \alpha + F_2 \cos \beta + F_3 \cos \gamma$

ملحوظة 6.6: عند حساب التكامل الخطي من النوع الأول، كان توجيه المنحني  $\Gamma$  غير مهم، لأن  $\Delta L_i$  طول المنحني الجزئي  $\Gamma_i$ ، غير متعلق بتوجيه المنحني. بينما عند حساب التكامل الخطي من النوع الثاني، فإن مسقط المتجه  $\vec{P}_{i-1} \vec{P}_i$  (وتر القوس  $\Gamma_i$ ) على المحاور الإحداثية، متعلق بتوجيه المنحني  $\Gamma$ ، ويغير إشارته عند تغيير الاتجاه. وعليه، فإن:

$$\int_{AB} F_1 dx = - \int_{BA} F_1 dx, \quad \int_{AB} F_2 dy = - \int_{BA} F_2 dy, \quad \int_{AB} F_3 dz = - \int_{BA} F_3 dz$$

أي أن

$$\int_{AB} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_{BA} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

ويمكن بسهولة إثبات صحة هذه الخاصية، تحليلياً، فإذا رمزنا بـ  $l' = L - l$  و  $\hat{\tau}'$  لمتجه واحدة المماس للمنحني  $BA$ ، الشكل 6.1، فإن

$$\hat{\tau}' = \frac{d\vec{r}}{dl'} = \frac{d\vec{r}}{dl} \frac{dl}{dl'} = \frac{d\vec{r}}{dl} = -\hat{\tau} \quad ; \quad \frac{dl}{dl'} = -1$$

وعليه، فإنه من خاصة عكس الاتجاه في التكامل الخطي من النوع الأول، نجد

$$\int_{AB} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{AB} (\vec{F} \cdot \hat{\tau}') dl' = \int_{BA} (\vec{F} \cdot \hat{\tau}) dl$$

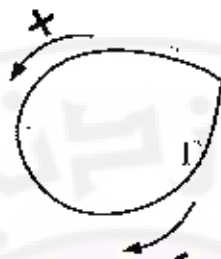
ومنه، فإن

$$\int_{AB} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{BA} (\vec{F} \cdot \hat{\tau}') dl = - \int_{BA} (\vec{F} \cdot \hat{\tau}) dl = - \int_{BA} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

وهكذا، عند حساب التكامل الخطي من النوع الثاني، يجب بدايةً تحديد توجيه المنحني  $\Gamma$ ، أي تحديد نقطة البداية ونقطة النهاية عليه.



وإذا كان المنحني  $\Gamma$  مغلقاً، أي أن بدايته منطبقه على نهايته، فلنأخذ اختياراً أحد التوجيهين الممكنين، ويسمى الاتجاه المعاكس لدوران عقارب الساعة، التوجيه الموجب. ونسمى الاتجاه المعاكس، التوجيه السالب، الشكل 6.4.



الشكل 6.4

مثال 6.4: احسب العمل الذي تبذله القوة

$$\vec{F} = (2x - y + z)\hat{i} + (x + y - z^2)\hat{j} + (3x - 2y + 4z)\hat{k}$$

لتحريك جسم حول دائرة  $\Gamma$  في المستوى  $oxy$  مركزها  $O$  ونصف قطرها 3.

الحل: لما كانت الدائرة  $\Gamma$  تقع في المستوى  $oxy$ ، فإن  $z = 0$ ،  $d\vec{r} = dx\hat{i} + dy\hat{j}$  و

$$\vec{F} = (2x - y)\hat{i} + (x + y)\hat{j} + (3x - 2y)\hat{k}$$

وعليه، فإن العمل، كما ذكرنا سابقاً، هو قيمة التكامل المنحني من النوع الثاني:

$$\begin{aligned} I &= \oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_{\Gamma} [(2x - y)\hat{i} + (x + y)\hat{j} + (3x - 2y)\hat{k}] \cdot (dx\hat{i} + dy\hat{j}) \\ &= \oint_{\Gamma} (2x - y)dx + (x + y)dy \end{aligned}$$

وباستخدام المعادلات الوسيطة للدائرة

$$\Gamma: \{x = 3\cos t, y = 3\sin t; 0 \leq t \leq 2\pi\}$$

نجد:

$$I = \int_0^{2\pi} [2(3\cos t) - 3\sin t](-3\sin t dt) + (3\cos t + 3\sin t)(3\cos t dt) =$$

$$= \int_0^{2\pi} (9 - 9 \cos t \sin t) dt = 18\pi$$

مثال 6.5: احسب قيمة التكامل الخطي من النوع الثاني  $I = \int_C xz dx + x dy - yz dz$

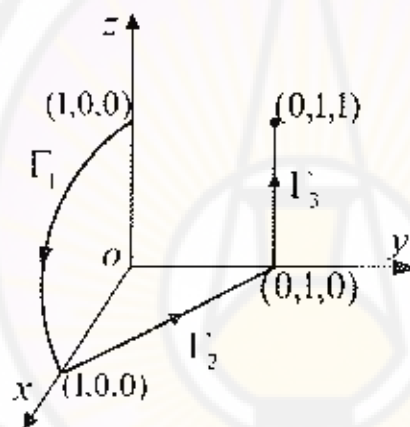
حيث إن  $C$  هو المنحني الموجه، المكون من اتحاد المنحنيات:

$\Gamma_1$ : ربع الدائرة  $x^2 + z^2 = 1$ ، حيث  $x \geq 0$  و  $z \geq 0$

$\Gamma_2$ : القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين  $(1,0,0)$  و  $(0,1,0)$

$\Gamma_3$ : القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين  $(0,1,0)$  و  $(0,1,1)$ .

الحل: واضح أن التكامل موجود. لما كان المنحني  $C$  أملياً جزئياً، الشكل 6.5، فإننا نحسب التكامل  $I$ ، على كل جزء من أجزاء هذا المنحني، ثم نجمع النتائج.



الشكل 6.5

$$\Gamma_1: z = \sqrt{1-x^2}, y=0, 0 \leq x \leq 1, dy=0 \Rightarrow$$

$$\int_{\Gamma_1} xz dx + x dy - yz dz = \int_{\Gamma_1} x\sqrt{1-x^2} dx + x \cdot 0 - 0 \cdot dz = \int_0^1 x\sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{3}$$

$$\Gamma_2: x=1-y, z=0, 0 \leq y \leq 1, dz=0 \Rightarrow$$

$$\int_{\Gamma_2} xz dx + x dy - yz dz = \int_{\Gamma_2} 0 \cdot dx + x dy - 0 = \int_0^1 (1-y) dy = \frac{1}{2}$$

$$\Gamma_3: x=0, y=1, dx=0, dy=0 \Rightarrow$$

$$\int_{\Gamma_3} xzdx + ydy - yzdz = \int_0^1 0 + 0 \cdot dy - zdz = \int_0^1 -zdz = -\frac{1}{2}$$

وعليه، فإن

$$I = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

مثال 6.6: احسب قيمة التكامل الخطي العام من النوع الثاني

$$I = \int_{\Gamma} 3x^2 y/x + (x^3 + 1)dy$$

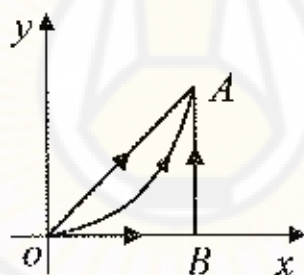
في الحالات: ١-  $\Gamma$  هو القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين  $A(1,1)$  و  $O$ .

٢-  $\Gamma$  هو جزء من القطع المكافئ  $y = x^2$  المحدد بالنقطتين  $O$  و  $A$ .

٣-  $\Gamma$  هو منحنى مكون من القطعتين المستقيمتين: الأولى تصل بين النقطتين  $O$  و

$B(1,0)$ ، والثانية تصل بين النقطتين  $B$  و  $A$ .

الحل: واضح أن التكامل موجود في الحالات الثلاثة. نعين التوجيه الموجب للمنحني  $\Gamma$ ، كما في الشكل 6.6. ومن ثم نحسب التكاملات:



الشكل 6.6

$$I = \int_0^1 (4x^3 + 1)dx = 2 \quad -١$$

$$I = \int_0^1 (5x^4 + 2x)dx = 2 \quad -٢$$

$$I = \int_0^1 3x^2 \cdot 0dx + \int_0^1 (1+1)dy = 2 \quad -٣$$

### 6.3.3 علاقة غرين<sup>١</sup>

تربط علاقة غرين بين التكامل الخطي من النوع الثاني، على منحني مغلق مع التكامل الثنائي على ساحة محاطة بهذا المنحني. وفيما استخدامات عديدة في التحليل الرياضي.

مبرهنة 6.3: لتكن  $D$  ساحة بسيطة محاطة بالمنحني  $\Gamma$ . وليتكن  $F_1(x, y)$  و  $F_2(x, y)$  دالتان معرفتان على  $D$ ، بحيث  $F_1, F_2 \in C^1(D)$ . عندئذ، يكون

$$\oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D (\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{k} dx dy$$

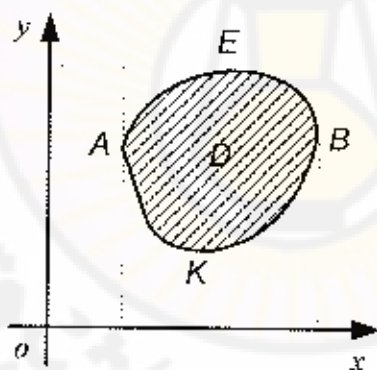
أي

$$\oint_{\Gamma} F_1 dx + F_2 dy = \iint_D \left( \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy, \quad (6.8)$$

تسمى هذه العلاقة علاقة غرين.

الإنبات: لما كانت الساحة  $D$  بسيطة بالاتجاهين، فإنه يمكن تعريفها بالعلاقات:

$$D: \{(x, y): y_1 = y(x), y_2 = y(x), y_1(x) \leq y_2(x); a \leq x \leq b\}$$



الشكل 6.7

نحسب، أولاً، التكامل الثنائي:

$$\iint_D \frac{\partial F_1}{\partial y} dx dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial F_1}{\partial y} dy = \int_a^b [F_1(x, y_2(x)) - F_1(x, y_1(x))] dx =$$

<sup>١</sup> جورج غرين (١٧٩٣-١٨٤١) رياضي وفيزيائي إنكليزي.

$$= \int_a^b F_1(x, y_2(x)) dx - \int_a^b F_1(x, y_1(x)) dx$$

إن كل من التكاملين المحددين هو تكامل منحني من النوع الثاني على المنحني الموافق، الشكل 6.7، أي:

$$\int_a^b F_1(x, y_2(x)) dx = \int_{\overline{ATB}} F_1(x, y) dx = - \int_{\overline{BTA}} F_1(x, y) dx$$

$$\int_a^b F_1(x, y_1(x)) dx = \int_{\overline{AKB}} F_1(x, y) dx$$

وعليه، فإن:

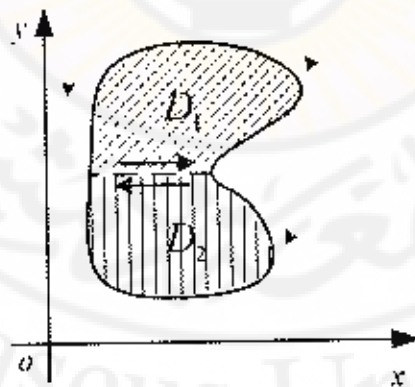
$$\iint_D \frac{\partial F_1}{\partial y} dx dy = - \left[ \int_{\overline{BTA}} F_1(x, y) dx + \int_{\overline{AKB}} F_1(x, y) dx \right] = - \oint_{\Gamma} F_1(x, y) dx$$

ونجد، بأسلوب مشابه:

$$\iint_D \frac{\partial F_2}{\partial x} dx dy = \oint_{\Gamma} F_2(x, y) dy$$

بطرح العلاقتين الأخيرتين من بعضهما بعضاً، نجد صحة علاقة غرين.

ملحوظة 6.6: تبقى علاقة غرين صحيحة عندما تكون الساحة  $D$  غير بسيطة، ولكن يمكن تجزئتها إلى ساحات بسيطة باتجاه معين.



الشكل 6.8

فإذا كانت  $D$  مساحة معطاة بالشكل 6.8، محاطة بالمنحني  $\Gamma$ ، نجزئها إلى الساحتين  $D_1$  و  $D_2$  وتكون علاقة غرين محققة على كلٍ منها. نكتب علاقة غرين على الساحة  $D_1$  وعلى الساحة  $D_2$  ونجمع الأطراف المتقابلة بعضها إلى بعض، فيكون الطرف الأيسر التكامل الثنائي على  $D$ ، والطرف الأيمن التكامل المنحني على  $\Gamma$ ، حيث إن التكامل على القطعة المستقيمة التي تفصل  $D_1$  عن  $D_2$  محسوب مرتين، وباتجاهين مختلفين، أي أن قيمته على هذه القطعة تساوي الصفر.

مثال 6.7: احسب، باستخدام علاقة غرين، قيمة التكامل الخطي العام من النوع الثاني

$$\oint_{\Gamma} (x - y) dx + (x + y) dy \quad \text{حيث } \Gamma \text{ هو الدائرة } x^2 + y^2 = R^2.$$

الحل: إن الدوال  $F_1 = x - y$  و  $F_2 = x + y$  و  $\frac{\partial F_1}{\partial x} = 1$  و  $\frac{\partial F_2}{\partial y} = 1$  مستمرة على

القرص  $D: x^2 + y^2 \leq R^2$ . نعوض في علاقة غرين:

$$\oint_{\Gamma} (x - y) dx + (x + y) dy = \iint_D [1 - (-1)] dx dy = 2 \iint_D dx dy = 2\pi R^2$$

6.3.4 شرط استقلال التكامل المنحني عن المسار

توجد بعض التكاملات المنحنية قيمتها مستقلة عن الطريق (المسار) الواصل بين نقطتي البداية والنهاية، المثال 6.6. نوضح، الآن، شروط استقلال التكامل المنحني عن المسار، وذلك بالاستفادة من علاقة غرين.

مبرهنة 6.4: لتكن  $F_1, F_2 \in C^1(D)$ ، حيث  $D$  مساحة بسيطة الترابط من المستوي  $OXY$ . عندئذ، تكون الشروط الأربعة التالية متكافئة، أي أن تحقق أحدها يؤدي إلى تحقق الثلاثة المتبقية:

$$1- \text{أياً يكن المنحني الأملس جزئياً } \Gamma \text{ الواقع في } D, \text{ فإن } \oint_{\Gamma} F_1 dx + F_2 dy = 0$$

$$2- \text{أياً تكن النقطتان } A \text{ و } B \text{ في } D, \text{ فإن قيمة التكامل}$$

$$\int_{AB} F_1 dx + F_2 dy \quad (6.10)$$

مستقلة عن الطريق الواصل بين النقطتين  $A$  و  $B$ ، والواقع بالكامل داخل  $D$ .

٣- تمثل العبارة التفاضلية  $F_1 dx + F_2 dy$  تفاضلاً تاماً لدالة ما  $f(x, y)$  معرفة على  $D$ ، أي

$$df = F_1 dx + F_2 dy \quad (6.11)$$

٤- نتحقق في  $D$  العلاقة:

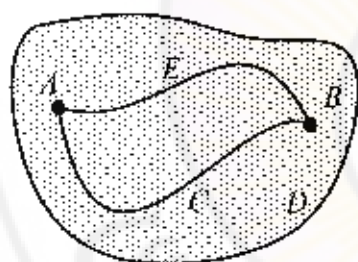
$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y} \quad (6.12)$$

الإثبات: نثبت صحة المبرهنة وفقاً للمخطط التالي:

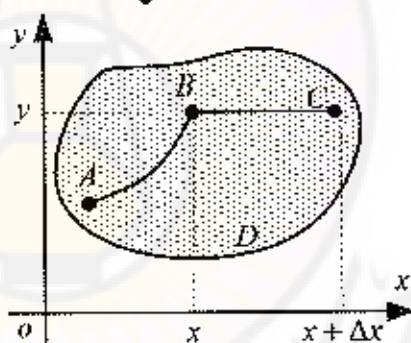
$$1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 1$$

الخطوة الأولى: (من الشرط الأول نجد الشرط الثاني)

ليكن  $\overline{ACB}$  و  $\overline{AEB}$  منحنين أملسين جزئياً يصلان بين النقطتين  $A$  و  $B$  ويقعان بالكامل داخل  $D$ ، الشكل 6.9-A. ويكون المنحني المغلق  $\Gamma = \overline{ACB} \cup \overline{AEB}$  واقعاً بالكامل داخل  $D$ .



الشكل 6.9-A



الشكل 6.9-B

ولما كان الشرط الأول محققاً، فإن:

$$\begin{aligned} 0 = \oint_{\Gamma} F_1 dx + F_2 dy &= \int_{\overline{ACB}} F_1 dx + F_2 dy + \int_{\overline{BEA}} F_1 dx + F_2 dy = \\ &= \int_{\overline{ACB}} F_1 dx + F_2 dy - \int_{\overline{AEB}} F_1 dx + F_2 dy \end{aligned}$$

وعليه، فإن

$$\int_{\overline{ACB}} F_1 dx + F_2 dy = \int_{\overline{AEB}} F_1 dx + F_2 dy$$

وهو الشرط الثاني.

الخطوة الثانية: (من الشرط الثاني نجد الشرط الثالث)

نفرض أن التكامل (6.10) مستقل عن المسار، ومرتب فقط بالنقطتين  $A$  و  $B$ .

نثبت النقطة  $A(x_0, y_0)$ ، عندئذ تكون قيمة التكامل (6.10) دالة في المتغيرين  $x$  و  $y$ ،  
إحداثيي النقطة  $B$ :

$$f(x, y) = \int_{\overline{AB}} F_1 dx + F_2 dy$$

نثبت أن هذه الدالة فضولة وتحقق العلاقة (6.11). يكفي لذلك، إثبات أنه في كل نقطة  $B$  من  
الساحة  $D$ ، يكون المشتقان  $f'_x$  و  $f'_y$  موجودان، ويكون كذلك:

$$F_1 = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad F_2 = \frac{\partial f}{\partial y} \quad (6.13)$$

لما كان  $F_1, F_2 \in C^1(D)$ ، فإنه يتبع من (6.13) أن الدالة  $f$  فضولة وتحقق (6.11).  
لإثبات وجود المشتق  $f'_x$  وتحقق المساواة الأولى في (6.13)، نوجد التغير الجزئي للدالة  $f$ ،  
بالنسبة إلى  $x$ ، عند النقطة  $B(x, y)$ :

$$\begin{aligned} \Delta_x f &= f(x + \Delta x, y) - f(x, y) = \\ &= \int_{\overline{AC}} F_1 dx + F_2 dy - \int_{\overline{AB}} F_1 dx + F_2 dy = \int_{\overline{BC}} F_1 dx + F_2 dy \end{aligned}$$

حيث  $C = C(x + \Delta x, y)$ ، الشكل 6.9-B. ولما كان التكامل الأخير مستقل عن المسار،  
نأخذ الطريق بين النقطتين  $B$  و  $C$  قطعة مستقيمة. عندئذ، فإن

$$\Delta_x f = \int_{\overline{BC}} F_1 dx + F_2 dy = \int_{\overline{BC}} F_1 dx = \int_x^{x+\Delta x} F_1(x, y) dx$$

وبتطبيق مبرهنة القيمة الوسطى على التكامل الأخير، نجد:

$$\Delta_x f = F_1(x + \theta \Delta x, y) \Delta x \quad ; \quad 0 < \theta < 1$$

ومنه، فإن



$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} F_1(x + \theta \Delta x, y) = F_1(x, y)$$

لأن  $F_1$  دالة مستمرة.

ونجد، بأسلوب مشابه،  $F_2 = f'_y$ . وعليه، فإن الشرط الثالث محقق.

الخطوة الثالثة: (من الشرط الثالث نجد الشرط الرابع)

نفرض أن الدالة  $f$  معرفة على  $D$  وتحقق العلاقة (6.11). عندئذ يكون

$$F_1 = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad F_2 = \frac{\partial f}{\partial y}$$

وباشتقاق  $F_1$  بالنسبة إلى  $x$  و  $F_2$  بالنسبة إلى  $y$ ، يكون

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$$

أي أن العلاقة (6.12) محققة.

الخطوة الرابعة: (من الشرط الرابع نجد الشرط الأول)

ليكن  $\Gamma$  منحنياً مغلقاً وأملس جزئياً، يقع بالكامل داخل  $D$ ، ويحصر الساحة  $D^*$ . عندئذ، باستخدام علاقة غرين على الساحة  $D^*$ ، نجد:

$$\oint_{\Gamma} F_1 dx + F_2 dy = \iint_{D^*} \left( \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy$$

ونجد، من الشرط الرابع، أن قيمة التكامل الثنائي تساوي الصفر. وعليه، فإن الشرط الأول محقق، أيًا يكن المنحني المغلق  $\Gamma$  الواقع بالكامل داخل الساحة  $D$ .

ملحوظة 6.7: تسمح هذه المبرهنة، بسهولة التحقق من أن التكامل مستقل أو مرتبط بالمسار.

فمثلاً، التكامل  $\int_{AB} e^x dx - y dx$  غير مستقل عن المسار، لأن

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = e^x \neq 0 = \frac{\partial F_2}{\partial x}$$

كما تجدر الإشارة، إلى أن جميع شروط المبرهنة ضرورية. فمثلاً، من أجل التكامل

$$I = \oint_{\Gamma} \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

حيث  $\Gamma$  هو الدائرة  $x^2 + y^2 = R^2$ ، نجد:

$$F_1 = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad F_2 = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

ونلاحظ أن شرط استقلال التكامل عن المسار محقق، غير أن التكامل على الدائرة  $\Gamma$  لا يساوي الصفر. لأنه إذا عوضنا المعادلات الوسيطة للدائرة في التكامل، نجد:

$$I = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

ولا يوجد تناقض هنا، لأن أحد شروط البرهنة لم يتحقق، وهو أن الدالتين  $F_1$  و  $F_2$  غير معرفتان عند النقطة  $O$ . والساحة الواقعة داخل الدائرة  $\Gamma$  ليست بسيطة الترابط. ملحوظة 6.8: يمكن، بسهولة، تعميم هذه النتائج، من أجل منحني  $\Gamma$  من الفضاء، ودوال لثلاثة متغيرات، فالتكامل المنحني

$$\int_{\Gamma} F_1(x, y, z)dx + F_2(x, y, z)dy + F_3(x, y, z)dz$$

يكون مستقلاً عن المسار، إذا كانت العبارة التفاضلية

$$\int_{\Gamma} F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$$

تمثل تفاضلاً تاماً. ويكون الشرط اللازم كي تمثل هذه العبارة تفاضلاً تاماً، هو تحقق العلاقات:

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}, \quad \frac{\partial F_3}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial z}, \quad \frac{\partial F_3}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial z}$$

وبعبارة أخرى، فإن الشرط اللازم والكافي كي يكون التكامل  $\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$  مستقلاً عن المسارين

النقطتين  $A$  و  $B$ ، في منطقة ما  $\mathcal{R}$  من الفراغ  $Oxyz$ ، هو أن يكون  $\nabla \times \vec{F} = \vec{0}$ ، حيث

$\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ ، أي إذا كان الحقل  $\vec{F}$  كمونياً، البرهنة 3.1. وعليه، فإن:

$$\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\Gamma} (\nabla f) \cdot d\vec{r} = \int_{AB} df = f(B) - f(A)$$

وكذلك، فإن الشرط اللازم والكافي كي يكون التكامل  $\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$  مستقلاً عن المسارين

التقطعتين  $A$  و  $B$ ، في منطقة ما  $R$  من الفراغ  $xyz$ ، هو  $\oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ ، حيث  $\Gamma$  أي مسار مغلق في  $R$ .

### 6.3.5 تكامل التفاضل التام

نستطيع إيجاد تكامل التفاضل التام، من شروط استقلال التكامل المنحني، من النوع الثاني، عن المسار.

فقد أثبتنا أنه إذا كان  $F_1, F_2 \in C^1(D)$ ، فإن العبارة التفاضلية  $F_1 dx + F_2 dy$  هي تفاضل تام لدالة  $f(x, y)$  في الساحة  $D$ ، إذا كانت العلاقة (6.12) محققة.

ثم أثبتنا أنه إذا كانت هذه المساواة محققة، فإن الدالة

$$f(x, y) = \int_{AB} F_1 dx + F_2 dy = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} F_1 dx + F_2 dy \quad (6.14)$$

تحقق العلاقة (6.11).

نفرض أن العبارة التفاضلية:  $F_1 dx + F_2 dy$  هي تفاضل تام لدالة  $\Phi(x, y)$  في الساحة  $D$ . عندئذ، فإن:

$$F_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad F_2 = \frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

ويكون:

$$\Phi(x, y) = f(x, y) + c$$

حيث  $c$  ثابت اختياري.

نعوض  $x = x_0$  و  $y = y_0$  في (6.14)، فنجد:  $f(x_0, y_0) = 0$ ، نعوض في العلاقة الأخيرة، فنجد  $\Phi(x_0, y_0) = c$ . وعليه، فإن:

$$f(x, y) = \Phi(x, y) - \Phi(x_0, y_0)$$

ومنه، فإن (6.14) تُكتب كما يلي:

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} F_1 dx + F_2 dy = \Phi(x, y) - \Phi(x_0, y_0)$$

نعوض، الآن،  $x = x_1$  و  $y = y_1$ ، فنجد:

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} F_1 dx + F_2 dy = \Phi(x_1, y_1) - \Phi(x_0, y_0) = \Phi(x, y) \quad (6.15)$$

وهكذا، يمكن إعطاء طريقة إيجاد الدالة  $f(x, y)$  والتي تفاضلها التام هو العبارة التفاضلية:

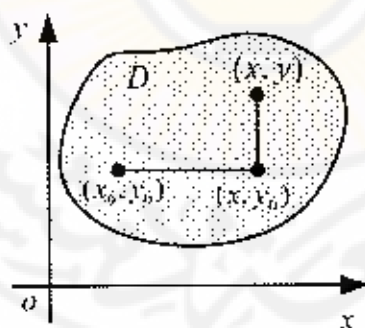
$F_1 dx + F_2 dy$ ، حيث:

$$f(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} F_1 dx + F_2 dy + c \quad (6.16)$$

و  $(x_0, y_0)$  نقطة مثبتة و  $c$  ثابت اختياري. ونُعطي، هذه العلاقة، إمكانية إيجاد جميع الدوال التي تمثل العبارة المكاملة فيها، تفاضل تام.

لإيجاد  $f(x, y)$  من الصيغة (6.16)، يكفي اختيار النقطة  $(x_0, y_0)$  من  $D$ ، وحساب التكامل المنحني من النوع الثاني، على أي منحني يصل بين النقطتين  $(x_0, y_0)$  و  $(x, y)$ .

ولما كان التكامل المنحني، مستقل عن المسار، في العلاقة (6.16)، فإنه من الأنسب اختيار هذا المسار كمجموع القطعتين الموازييتين للمحاور الإحداثية، الشكل 6.10.



الشكل 6.10

يكون عندئذ:

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} F_1 dx + F_2 dy = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y_0)} F_1 dx + F_2 dy + \int_{(x, y_0)}^{(x, y)} F_1 dx + F_2 dy$$

ولما كان  $y = y_0$ ، فإن  $dy = 0$  في التكامل الأول. كذلك، فإن  $dx = 0$  في التكامل الثاني. وعليه، فإن (6.16) تُكتب كما يلي:

$$f(x, y) = \int_{x_0}^x F_1(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y F_2(x, y) dy + c$$

حيث إن أول تكامل محدد يُحسب عندما تكون  $y$  ثابتة (تساوي  $y_0$ )، والثاني عندما تكون  $x$  ثابتة.

ونجد، بأسلوبٍ مشابه، أن

$$f(x, y) = \int_{x_0}^x F_1(x, y) dx + \int_{y_0}^y F_2(x_0, y) dy + c$$

مثال 6.8: تحقق فيما إذا كانت العبارة

$$(x^2 + 2xy - y^2)dx + (x^2 - 2xy - y^2)dy$$

تفاضلاً تاماً لدالة ما  $f(x, y)$ . وإذا كانت كذلك، أوجد هذه الدالة.

الحل: واضح أن الدوال:

$$F_1 = x^2 + 2xy - y^2, \quad F_2 = x^2 - 2xy - y^2$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = 2x - 2y, \quad \frac{\partial F_2}{\partial x} = 2x - 2y$$

مستمرة وأن  $\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$ . وعليه، فإن العبارة التفاضلية هي تفاضل تام لدالة  $f(x, y)$ .

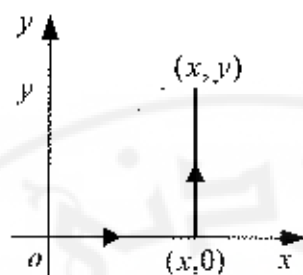
لإيجاد هذه الدالة نستخدم العلاقة (6.14)، حيث نختار النقطة  $O$  هي النقطة المثبتة.

لما كان التكامل

$$\int_{(0,0)}^{(x,y)} (x^2 + 2xy - y^2)dx + (x^2 - 2xy - y^2)dy$$

مستقل عن المسار، فإننا نختار الطريق الواصل بين النقطتين  $O$  و  $(x, y)$  هو الخط المكون من

القطعتين المستقيمتين: الأولى من النقطة  $O$  إلى النقطة  $(x, 0)$ ، والثانية من النقطة  $(x, 0)$  إلى النقطة  $(x, y)$  الشكل 6.11.



الشكل 6.11

وعليه، فإن:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int_{(0,0)}^{(x,y)} (x^2 + 2xy - y^2)dx + (x^2 - 2xy - y^2)dy + c = \\ &= \int_0^x x^2 dx + \int_0^y (x^2 - 2xy - y^2)dy + c \end{aligned}$$

أي أن

$$f(x, y) = \frac{x^3}{3} + x^2y - xy^2 - \frac{y^3}{3} + c$$

حيث  $c$  ثابت اختياري.

ملحوظة 6.9: من الممكن إيجاد الدالة  $f(x, y)$  من عبارة تفاضلها التام، استناداً إلى الملحوظة 3.3.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x^2 + 2xy - y^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - 2xy - y^2$$

نكامل الأولى بالنسبة إلى  $x$ ، ونكامل الثانية بالنسبة إلى  $y$ ، فنجد:

$$f(x, y) = \int (x^2 + 2xy - y^2)dx + g_1(y) = \frac{x^3}{3} + x^2y - xy^2 + g_1(y)$$

$$f(x, y) = \int (x^2 - 2xy - y^2)dy + g_2(x) = x^2y - xy^2 - \frac{y^3}{3} + g_2(x)$$

حيث  $g_1(y)$  و  $g_2(x)$  دالتان اختياريتان، وبالمقارنة بين العلاقتين السابقتين، نجد:

$$g_1(y) = -\frac{y^3}{3} + c_1, \quad g_2(x) = \frac{x^3}{3} + c_2$$

أي أن

$$f(x, y) = \frac{x^3}{3} + x^2y - xy^2 - \frac{y^3}{3} + c$$

$$I = \int_{(-1,2)}^{(2,3)} ydx + xdy \quad \text{مثال 6.9: احسب قيمة التكامل}$$

الحل: واضح أن الدوال:

$$F_1 = y, \quad F_2 = x, \quad \frac{\partial F_1}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial F_2}{\partial x} = 1$$

مستمرة وأن  $\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$ ، وعليه، فإن العبارة التفاضلية  $ydx + xdy$  هي تفاضل تام

لدالة  $f(x, y)$ ، وعليه، فإن التكامل  $I$  مستقل عن المسار.

نوجد الدالة  $f$ ، كما فعلنا في المثال السابق:

$$f(x, y) = \int ydx + f_1(y) = xy + g_1(y)$$

$$f(x, y) = \int xdy + f_2(x) = xy + g_2(x)$$

أي أن  $f(x, y) = xy + c$  وباستخدام العلاقة  $(6, 15)$ ، نجد:

$$I = xy \Big|_{(-1,2)}^{(2,3)} = 6 + 2 = 8$$

ملحوظة 6.10: يمكن حساب التكامل السابق مباشرة، فإذا أخذنا الطريق عبارة عن الخط المكون من القطعتين المستقيمتين: الأولى من النقطة  $(-1, 2)$  إلى النقطة  $(2, 2)$ ، والثانية من النقطة  $(2, 2)$  إلى النقطة  $(2, 3)$ .

6.3.6 حساب مساحة مساحة مستوية باستخدام التكامل المنحني

لتكن  $D$  مساحة محاطة بالمنحني  $\Gamma$  ولتكن  $S$  مساحتها. نعلم، من البند 4.2، أن هذه المساحة

تعطى بالتكامل الثنائي  $S = \iint_D dx dy$ . لذا، نختار في علاقة غرين، الدالتان  $F_1$  و  $F_2$ ،

بحيث يكون  $\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 1$ . عندئذ، فإن مساحة الساحة  $D$ ، تعطى بالعلاقة:

$$S = \iint_D dx dy = \oint_{\Gamma} F_1 dx + F_2 dy$$

إذا فرضنا  $F_2(x, y) = x$  و  $F_1(x, y) = 0$ ، فإن  $\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 1$  و  $S = \oint_{\Gamma} x dy$

وإذا فرضنا  $F_2(x, y) = 0$  و  $F_1(x, y) = -y$ ، فإن  $\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 1$

$$S = -\oint_{\Gamma} y dx$$

وإذا فرضنا  $F_2(x, y) = \frac{x}{2}$  و  $F_1(x, y) = -\frac{y}{2}$ ، فإن  $\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 1$

$$S = \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} x dy - y dx$$

وهكذا نكون قد وجدنا ثلاث صيغ لإيجاد مساحة ساحة مستوية باستخدام التكامل المنحني من النوع الثاني. وبلاستفادة من العلاقة بين نوعي التكامل المنحني، نجد أن هذه المساحة تعطى بالعلاقة:

$$S = \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} (x \sin \alpha - y \cos \alpha) dt \quad : \quad \cos \beta = \sin \alpha$$

مثال 6.10: احسب مساحة الساحة المحصورة داخل القطع الناقص.

الحل: نجد، من المعادلات الوسيطة للقطع الناقص:

$$x = a \cos t \quad , \quad y = b \sin t \quad : \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$dx = -a \sin t dt \quad , \quad dy = b \cos t dt$$

وعليه، فإن

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} x dy - y dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (a \cos t \cdot b \cos t + a \sin t \cdot b \sin t) dt = \\ &= \frac{ab}{2} \int_0^{2\pi} dt = ab\pi \quad \text{وحدة مساحة} \end{aligned}$$



## تمارين الفصل السادس

1. احسب قيمة كل من التكاملات التالية، على المنحني  $\Gamma$  المبين بجوارها :

$$I = \int_{\Gamma} xyz \, dt \quad ; \quad \Gamma : \left\{ x = \sin^2 t, y = \cos^2 t, z = t ; 0 \leq t \leq \frac{\pi}{4} \right\}$$

$$I = \int_{\Gamma} \frac{y'}{x} \, dt \quad ; \quad \Gamma : \left\{ y = \frac{x^2}{2} ; 1 \leq x \leq 2 \right\}$$

$$I = \int_{\Gamma} xyz^2 \, dt \quad ; \quad \Gamma : \left\{ x = t, y = \frac{t^2}{2}, z = \frac{\sqrt{8}t^3}{3} ; 0 \leq t \leq 1 \right\}$$

$$I = \int_{\Gamma} xy \, dt \quad ; \quad \Gamma : \left\{ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, x \geq 0, y \geq 0 \right\}$$

$$I = \int_{\Gamma} (x^{1/3} + y^{1/3}) \, dt \quad ; \quad \Gamma : \left\{ x = a \sin^3 t, y = a \cos^3 t \right\}$$

$$I = \int_{\Gamma} \frac{\cos^2 x}{\sqrt{1 + \cos^2 x}} \, dt \quad ; \quad \Gamma : \left\{ y = \sin x, 0 \leq x \leq \pi \right\}$$

$$I = \int_{\Gamma} \frac{\sin^5 x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}} \, dt \quad ; \quad \Gamma : \left\{ y = \cos x, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$

$$I = \int_{\Gamma} \sqrt{1 + \cos^2 x} \, dt \quad ; \quad \Gamma : \left\{ y = \tan x, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \right\}$$

$$I = \int_{\Gamma} \sin^4 x \cos x \, dt \quad ; \quad \Gamma : \left\{ y = \ln \sin x, \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{3} \right\}$$

$$I = \int_{\Gamma} z^2 \, dt \quad ; \quad \Gamma : \left\{ x = \sin^3 t, y = \cos^3 t, z = -\frac{\sqrt{3}}{4} \cos 2t ; \frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{\pi}{3} \right\}$$

$$I = \int_{\Gamma} ye^{-x} \, dt \quad ; \quad \Gamma : \left\{ x = \ln(1+t^2), y = 2 \arctan t - t, ; 0 \leq t \leq 1 \right\}$$

$$I = \int_{\Gamma} \frac{dt}{x^2 + y^2 + z^2} \quad ; \quad \Gamma : \left\{ x = a \cos t, y = a \sin t, z = ht ; 0 \leq t \leq \pi \right\}$$

$$I = \int_{\Gamma} \sqrt{x^2 + y^2} \left( \arccos \cot \frac{y}{x} \right)^2 \, dt \quad ; \quad \Gamma : \left\{ (x^2 + y^2)^2 = 2a^2 xy \right\}$$

و  $I = \int_1^{\sqrt{e}} \frac{x^3}{y^2} dl$  حيث  $\Gamma$  جزء من المنحني  $xy = 1$  الواصل بين النقطتين  $A(1,1)$  و  $B(2,0.5)$ .

و  $I = \int_1^{\sqrt{e}} \sqrt{1+x^6} dl$  حيث  $\Gamma$  جزء من المنحني  $4y = x^4$  الواصل بين النقطتين  $O(0,0)$  و  $B(1,0.25)$ .

و  $I = \int_1^{\sqrt{e}} (xy + z) dl$  حيث  $\Gamma$  محيط الثلاث ذي الرؤوس  $A(1,0,0)$  و  $B(0,3,0)$  و  $C(0,0,-2)$ .

2. احسب طول قوس من كل من المنحنيات التالية:

$y^2 = x$  بين النقطتين  $O(0,0)$  و  $B(3,9)$ .

$\Gamma : \{x = ae^t \cos t, y = ae^t \sin t, z = be^t\}$  بين النقطتين  $O(0,0,0)$  و  $B(a,0,a)$ .

3. احسب التكاملات:

$I = \int_1^{\sqrt{e}} \frac{x dx}{y} + \frac{dy}{y-a}$  :  $\Gamma : \left\{ x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t); \frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{\pi}{3} \right\}$

$I = \int_1^{\sqrt{e}} \frac{x dy}{x^2 + 2xy + 2y^2} - \frac{y^2 dx}{x^2 + 2xy + 2y^2}$  :  $\Gamma : \{x^2 + y^2 = 4\}$

$I = \int_1^{\sqrt{e}} y^2 dx - x^2 dy$  :  $\Gamma : \{x^2 + y^2 = 1\}$

$I = \int_1^{\sqrt{e}} y^4 dx - x^3 dy$  :  $\Gamma : \{(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1\}$

$I = \int_1^{\sqrt{e}} \frac{x^2 dy - y^2 dx}{x^5/3 + y^5/3}$  :  $\Gamma : \left\{ x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t; 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \right\}$

4. احسب العمل الذي تبذله القوة  $\vec{F}$  لتحريك جسم على المنحني  $\Gamma$  في كل من الحالات:

حيث  $\vec{F} = (3x^2 + 6y)\hat{i} - 14yz\hat{j} + 20xz^2\hat{k}$

$\Gamma : \{x = t, y = t^2, z = t^3; 0 \leq t \leq 1\}$

حيث  $\vec{F} = 3xy\hat{i} - 5z\hat{j} + 10xz\hat{k}$

$\Gamma : \{x = t^2 + 1, y = 2t^2, z = t^3; 1 \leq t \leq 2\}$

حيث  $\vec{F} = (2xy + z^3)\hat{i} + x^2\hat{j} + 3xz^2\hat{k}$  ،  $\Gamma$  القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين  $A(1, -2, 1)$  و  $B(3, 1, 4)$  .

5. احسب، اعتماداً على علاقة غرين، مساحة كل من الساحات المحصورة بالمنحنيات التالية:

$$\begin{aligned} & \{x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t; 0 \leq t \leq 2\pi\} \\ & \{x = a(2 \cos t - \cos 2t), y = a(2 \sin t - \sin 2t); 0 \leq t \leq 2\pi\} \\ & \{x^3 + y^3 = 3axy\} \end{aligned}$$

6. أثبت أن قيمة التكامل  $\oint_{\Gamma} (x^2 + y^2)(x dx + y dy)$  تساوي الصفر، أيًا يكن المنحني المغلق  $\Gamma$ ، في المستوي  $oxy$ .

7. تحقق فيما إذا كانت العبارات التالية تفاضلاً تاماً لدالة ما. وإذا كانت كذلك، أوجد هذه الدالة، في كل حالة:

$$\begin{aligned} & (4x^3y^3 - 3y^2 + 5)dx + (3x^4y^2 - 6xy - 4)dy \\ & [(x + y + 1)e^x - e^x]dx + [e^x - (x + y + 1)e^x]dy \\ & (yz \cos xy)dx + (xz \cos xy)dy + (\sin xy + 2z)dz \\ & z\left(\frac{1}{x^2y} - \frac{1}{x^2 + z^2}\right)dx + \frac{z}{xy^2}dy + \left(\frac{z}{x^2 + z^2} - \frac{1}{xy}\right)dz \\ & (y^2z^3 \cos x - 4x^3z)dx + (2z^3y \sin x)dy + (3x^2y^2 \sin x - 4x^4)dz \end{aligned}$$



الفصل السابع  
التكاملات السطحية

- 7.1 السطح الأملس
- 7.2 السطح الموجه
- 7.3 التكامل السطحي من النوع الأول
- 7.4 التكامل السطحي من النوع الثاني
- 7.5 تكامل غاوس والزوايا المجسمة
- تمارين الفصل السابع



## التكاملات السطحية

### 7.1 السطح الأملس (الصقيل - المنتظم)

نقول عن نقطة  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  من السطح  $S$ ، الممثل بالمعادلة

$$F(x, y, z) = 0 \quad (7.1)$$

إنها نقطة عادية لهذا السطح، إذا كانت المشتقات الجزئية الأولى  $F'_x$  و  $F'_y$  و  $F'_z$  عند هذه النقطة موجودة ومستمرة وأحدها على الأقل غير معدوم. أي إذا كان:

$$F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z > 0 \quad \text{و} \quad F' \in C^1$$

وإذا كانت جميع هذه المشتقات الجزئية معدومة عند النقطة  $P_0$ ، أو كان أحدها على الأقل غير موجود عند  $P_0$ ، فإن النقطة  $P_0$  عندئذ، تسمى نقطة شاذة للسطح  $S$ .

ونقول عن سطح إنه أملس، إذا كانت كل نقطة من نقاطه عادية.

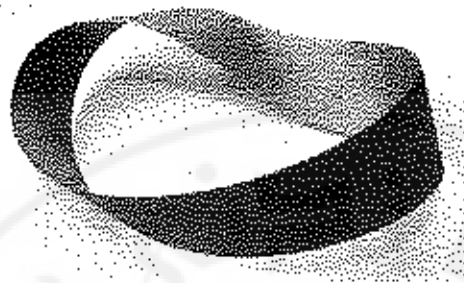
ونقول إن السطح أملس جزئياً، إذا أمكن تقسيمه لعدد محدود من السطوح الملساء.

..

### 7.2 السطح الموجه

ليكن  $S$  سطحاً أملساً، مفتوحاً أو مغلقاً، وإذا كان مفتوحاً فإنه ذو حافة  $L$  ملساء أو ملساء جزئياً. وعليه، فإن لهذا السطح عند كل نقطة من نقاطه مستوياً مماسياً يتغير باستمرار عند تغير نقطة التماس. ولكن  $P_0$  نقطة عادية مثبتة على هذا السطح. نرسم من  $P_0$  نائظاً للسطح، نائظاً للمستوي المماس للسطح عند النقطة  $P_0$ ، ونحدد عليه اتجاه، من أحد الاتجاهين الممكنين. نرسم على هذا السطح منحنياً مغلقاً يمر من  $P_0$  ولا يتقاطع مع حافة هذا السطح. ولتكن  $P$  نقطة متغيرة على هذا المنحني، ونرسم عندها نائظاً للسطح متفقاً مع اتجاه النائظ عند  $P_0$ . نجعل النقطة  $P$  تتحرك على المنحني حتى تعود إلى موضع البدء نفسه. فإذا لم يُغَيَّر النائظ من اتجاهه أثناء هذه الحركة، أيًا يكن موضع النقطة المثبتة  $P_0$  على هذا السطح، وأيًا يكن المنحني المغلق المار بهذه النقطة دون أن يتقاطع مع الحافة  $L$ ، فإن هذا السطح يسمى سطحاً ذو وجهين. كسطح الكرة، مثلاً. أما إذا غيّر النائظ من اتجاهه عندما يتغير موضع النقطة  $P$  على المنحني المار بالنقطة  $P_0$ ، أيًا يكن هذا المنحني الواقع على السطح، وأيًا تكن النقطة المثبتة  $P_0$  عليه، فإن هذا

السطح يسمى سطحاً ذو وجه واحد. وكمثال على هذا النوع من السطوح وريقة مبيوس<sup>١</sup>، الشكل 7.1.



الشكل 7.1

ونحصل على هذا السطح بأخذ قصاصة ورقية  $ABCD$ ، ثم نثنيتها بحيث تنطبق النقطة  $A$  على النقطة  $D$  والنقطة  $B$  على النقطة  $C$ ، الشكل 7.2.



الشكل 7.2

نسمي جميع نقاط السطح الذي يكون للنظام عندها اتجاه واحد، جهة أو وجهة السطح. لذا، فإن السطح ذو الوجهين يسمى سطحاً موجهاً، والسطح ذو الوجه الواحد يسمى سطحاً غير موجه.

نقتصر في دراستنا، فقط، على سطوح ذات وجهين، أي السطوح الموجهة.

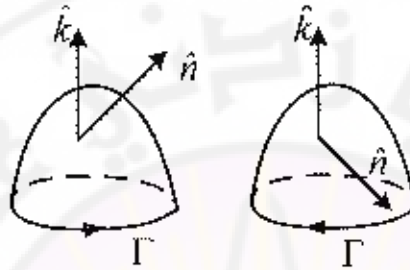
#### توجيه الناظم

إن اتجاه السطح الموجه، مرتبط بتوجيه حافته. فالمنحني الموجه وفقاً لاتجاه مماسه  $\vec{t}$ ، يُقابل به سطحاً موجهاً وفقاً لاتجاه ناظمه  $\vec{n}$ .

<sup>١</sup> أوغسطس فريدريش موبس (١٧٩٠-١٨٦٨) عالم رياضيات ألماني.



ليكن  $S$ ، سطحاً مرجهاً، مفتوحاً وأملساً وبسيطاً باتجاه  $\sigma$ ، حافته  $\Gamma$  مستحن مغلق وأملس أو أملس جزئياً. وهو سطح ذو وجهين بالنسبة إلى اتجاه الناظم عليه، لأنه في أية نقطة من السطح يمكن أن نوجه الناظم  $\hat{n}$  بحيث يصنع زاوية حادة أو زاوية منفرجة مع  $\hat{k}$ ، الشكل 7.3. نسمي اتجاه تقدم بُزَال، بدور وفق طريقة توجيه المنحني  $\Gamma$ ، الاتجاه الموجب للناظم  $\hat{n}$ ، الشكل 7.3.



الشكل 7.3

أي هو الاتجاه من قدم إلى رأس راصد يتحرك على المنحني  $\Gamma$ ، بحيث يبقى السطح دائماً على يساره. ونسمي الاتجاه المعاكس الاتجاه السالب. إذا كان السطح أملس جزئياً، وذو حافة ملساء جزئياً، فإنه يمكن بالطريقة ذاتها تعيين اتجاه الناظم  $\hat{n}$  على كل جزء أملس من هذا السطح. أما إذا كان السطح مغلقاً، أي يحده منطقة فراغية، فإنه اصطلاح على أن يكون الاتجاه الموجب للناظم، هو الاتجاه نحو خارج السطح دوماً. إذا كان الناظم  $\hat{n}$  في كل نقطة من نقاط السطح  $S$  موجهماً بالاتجاه الموجب، فإننا نقول إن هذا الوجه من السطح  $S$  هو الوجه العلوي أو الموجب له، ونرمز له بالرمز  $S^+$ . إما إذا كان  $\hat{n}$  في كل نقطة من نقاط السطح  $S$  موجهماً بالاتجاه السالب، فإننا نقول إن هذا الوجه من السطح  $S$  هو الوجه السفلي أو السالب له، ونرمز له بالرمز  $S^-$ . ونقصد دائماً بالسطح الموجه  $S$ ، الوجه الموجب للسطح  $S$ ، دون أن نكتب  $S^+$ ، ما لم نذكر خلاف ذلك. ويكون عنصر المساحة الموجه على السطح الموجه  $S$  هو  $d\vec{s} = \hat{n}ds$ .

### 7.3 التكامل السطحي من النوع الأول

تعريف 7.1: ليكن  $S$  سطحاً من الفراغ  $xyz$ ، محدوداً و أملس أو أملس جزئياً، مغلقاً أو مفتوحاً، وإذا كان مفتوحاً، فيجب أن تكون حافته منحني أملس أو أملس جزئياً، مساحته  $S$ . ولتكن  $f(x, y, z)$  دالة معرفة ومحدودة على  $S$ . نجزي السطح  $S$ ، اختيارياً، بوساطة منحنيات ملساء، إلى  $n$  جزء  $S_1, S_2, \dots, S_n$ ، بحيث لا تشترك هذه السطوح الجزئية بنقاط داخلية، ولتكن مساحاتها  $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$ ، بالترتيب. ولتكن  $\lambda$  أكبر أقطار هذه السطوح الجزئية. نختار من كل سطح جزئي  $S_i$  نقطة اختيارية  $P_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ . نشكل المجموع:

$$\sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta S_i \quad (7.2)$$

والذي يسمى المجموع التكاملي للدالة  $f(x, y, z)$  على السطح الفراغي  $S$ . نأخذ نهاية المجموع التكاملي (7.2) عندما تزداد  $n$  إلى اللانهاية، أي عندما يسمى  $\lambda$  إلى الصفر. فإذا كانت هذه النهاية موجودة ومحدودة، أيًا كانت طريقة تجزئة السطح  $S$ ، وأياً كان موضع النقطة  $P_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$  على السطح الجزئي  $S_i$ ، فإننا نسميها التكامل السطحي من النوع الأول للدالة  $f(x, y, z)$  على السطح  $S$ ، ونكتب

$$\iint_S f(x, y, z) ds = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i$$

ونقول عندها إن الدالة  $f(x, y, z)$  كمولة على السطح  $S$ . ونسمي  $f(x, y, z)$  الدالة المكاملة، و  $S$  سطح المكاملة، و  $ds$  عنصر سطح على  $S$ .

إذا كان السطح  $S$  مغلقاً، فإننا نرمز للتكامل السطحي من النوع الأول عليه بالرمز

$$\oiint_S f(x, y, z) ds$$

مبرهنة 7.1: تكون الدالة  $f(x, y, z)$  كمولة على السطح المحدود  $S$ ، إذا كانت هذه الدالة مستمرة على  $S$  أو مستمرة جزئياً عليه، أي يوجد لهذه الدالة عدم محدود من نقاط الانقطاع، أو أن نقاط الانقطاع تشكل عدد محدود من منحنيات ملساء تقع على  $S$ .

نفرض فيما يلي، أن سطح المكاملة هو سطح فراغي محدود أملس أو أملس جزئياً، وأن الدوال المكاملة معرفة ومحدودة ومستمرة أو مستمرة جزئياً عليها. أما إذا كانت الدالة المكاملة غير محدودة على  $S$ ، أو أن السطح  $S$  غير محدودة، فإننا نحصل على تكاملات سطحية شاذة، نعالجها تماماً كما عالجنا التكاملات الثنائية الشاذة، في البند 4.5.

ملحوظة 7.1: لما كانت الدالة  $f(x, y, z)$  معرفة على السطح  $S$ ، فإن المتغيرات  $x$  و  $y$  و  $z$  غير مستقلة، أي أنها مرتبطة بمعادلة السطح. وعليه، فإن الدالة  $f$  تتبع فعلياً لتغيرين مستقلين اثنين فقط.

### 7.3.1 التفسير الهندسي والفيزيائي للتكامل السطحي من النوع الأول

إذا كان  $f(x, y, z) \equiv 1$  على  $S$ ، فإن

$$\iint_S ds = \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta s_i = s$$

أي أن التكامل السطحي من النوع الأول  $\iint_S ds$  يُمثل مساحة السطح  $S$ . وهو يمثل القانون العام لحساب مساحة السطح الفراغي  $S$ .

وإذا كان السطح  $S$  سطحاً مادياً غير متجانس، كثافته تعطى بالدالة المستمرة  $\mu = f(x, y, z)$ ، عندئذ، فإن المقدار  $f(P_i) \Delta s_i$  يُمثل تقريباً، كتلة الجزء  $S_i$  من السطح  $S$ . وعليه، فإن المجموع التكاملي (7.2) يُمثل، تقريباً، كتلة السطح  $S$ . ومنه، فإن كتلة هذا السطح  $m$  تُعطى بالتكامل السطحي من النوع الأول:

$$m = \iint_S f(x, y, z) ds$$

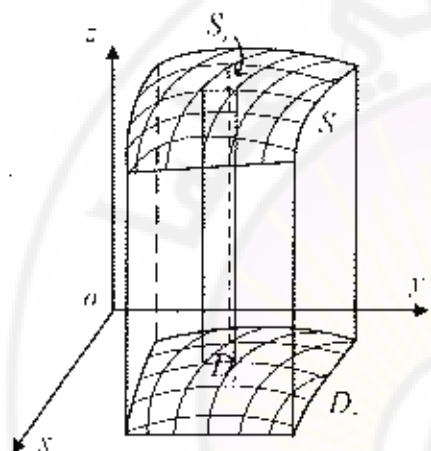
### 7.3.2 خواص التكامل السطحي من النوع الأول

إن للتكامل السطحي من النوع الأول نفس خواص التكامل الثنائي، مع مراعاة الفروق بينها، فيما يخص منطقة المكاملة.

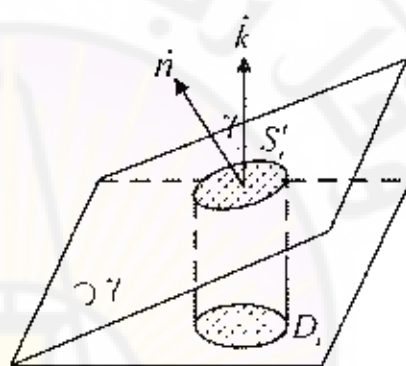
### 7.3.3 حساب التكامل السطحي من النوع الأول

ليكن  $S$  سطحاً من الفراغ  $xyz$ ، أملساً وبسيطاً باتجاه  $z$ ، مثلاً، معادلته  $z = z(x, y)$ ،

بحيث  $z \in C^1(D_2)$ ، و  $D_2$  مسقط السطح  $S$  على المستوي  $oxy$ ، ولتكن حافته منحني أملس أو أملس جزئياً. ولتكن  $f(x, y, z)$  دالة مستمرة على  $S$ ، أي أن  $f$  كمواً على  $S$ .  
 نجزي الساحة المستوية  $D_2$ ، بواسطة منحنيات ملساء، إلى  $n$  جزء  $D_1, D_2, \dots, D_n$ ، بحيث لا تشترك هذه الساحات الجزئية بنقاط داخلية، مساحاتها  $\Delta A_1, \Delta A_2, \dots, \Delta A_n$ ، بالترتيب. وعليه، فإن السطح  $S$  يُجزئ إلى  $n$  جزء  $S_1, S_2, \dots, S_n$ ، مساحاتها  $\Delta s_1, \Delta s_2, \dots, \Delta s_n$ ، بالترتيب، الشكل 7.4-A. ولتكن  $\lambda$  أكبر أقطار هذه السطوح.



الشكل 7.4-A



الشكل 7.4-B

لتكن  $P_i(\xi_i, \eta_i, z_i)$  نقطة اختيارية من الساحة  $D_i$ ، نُقابلها النقطة  $P_i'(\xi_i, \eta_i, z_i)$  على السطح المقابل  $S_i$ . لنفرض أن جزء من المستوي المماس للسطح  $S$ ، عند النقطة  $P_i'$ ، الذي يحدد الاسطوانة التي قاعدتها  $D_i$  في المستوي  $oxy$ ، الشكل 7.4-B. ولتكن  $\Delta s_i'$  مساحة السطح  $S_i'$ . عندئذ، فإن

$$\Delta s_i' \equiv \Delta s_i \quad (7.3)$$

وكما هو واضح، من الشكل 7.4-B، فإن العلاقة بين المساحتين الجزئيتين  $\Delta s_i'$  و  $\Delta A_i$  هي:

$$\Delta s_i' = \frac{\Delta A_i}{\cos \gamma} \quad (7.4)$$

حيث  $\gamma$  الزاوية بين المتجه  $\vec{n} = [x_i'(\xi_i, \eta_i), y_i'(\xi_i, \eta_i), -1]$  والمتجه  $\vec{k} = (0, 0, 1)$

ناظم المستوي  $S'$ ، أي ناظم السطح الجزئي  $S_i$ ، عند النقطة  $P_i$ ، (نأخذ القيمة المطلقة لأن المساحات موجبة):

$$|\cos \gamma_i| = \frac{|\hat{n}_i \cdot \hat{k}|}{|\hat{n}_i| |\hat{k}|} = \frac{1}{\sqrt{z'_x{}^2(\xi_i, \eta_i) + z'_y{}^2(\xi_i, \eta_i) + 1}}$$

نعرض هذه العلاقة في (7.4)، ثم نعوض الناتج في (7.3)، فنجد

$$\Delta s_i \cong \Delta s'_i = \sqrt{z'_x{}^2(\xi_i, \eta_i) + z'_y{}^2(\xi_i, \eta_i) + 1} \Delta A_i \quad (7.5)$$

نعوض هذه القيمة في المجموع (7.2)، فنجد:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta s_i &\cong \\ &\cong \sum_{i=1}^n f[\xi_i, \eta_i, z(\xi_i, \eta_i)] \sqrt{z'_x{}^2(\xi_i, \eta_i) + z'_y{}^2(\xi_i, \eta_i) + 1} \Delta A_i \end{aligned}$$

ونأخذ نهاية الطرفين، عندما يسمى  $\lambda$  إلى الصفر، فتصبح هذه المساواة التقريبية مساواة حقيقية، وينتهي الطرف الأيسر إلى تكامل سطحي للدالة  $f(x, y, z)$  على السطح  $S$ ، والطرف الأيمن للتكامل الثنائي لهذه الدالة على الساحة المستوية  $D_2$ . وهكذا نحصل على العلاقة بين التكامل السطحي من النوع الأول والتكامل الثنائي:

$$\iiint_V f(x, y, z) ds = \iint_{D_2} f[x, y, z(x, y)] \sqrt{z'_x{}^2 + z'_y{}^2 + 1} dA_2$$

حيث  $dA_2$  عنصر المساحة في  $D_2$ .

وعندما تكون التجزئة قائمة للمساحة  $D_2$ ، فإن  $dA_2 = dx dy$ .

ملحوظة 7.2: نستنتج من العلاقة (7.5)، عندما يسمى  $\lambda$  إلى الصفر، العلاقة بين عنصري المساحة  $ds$  و  $dA_2$ :

$$ds = \frac{dA_2}{|\cos \gamma|} = \frac{dA_2}{|\hat{n} \cdot \hat{k}|} = \sqrt{z'_x{}^2 + z'_y{}^2 + 1} dx dy$$

وعليه، فإن مساحة السطح  $S$ ، تُعطى بدلالة التكامل الثنائي:

$$s = \iint_S ds = \iint_{D_x} \sqrt{z_x'^2 + z_y'^2 + 1} dx dy$$

ملحوظة 7.3: إذا كان السطح  $S$  أملساً وبسيطاً باتجاه  $x$  (أو باتجاه  $y$ )، فإنه وبالأسلوب ذاته يُردّ التكامل السطحي إلى تكامل ثنائي على الساحة المستوية  $D_x$  (أو  $D_y$ ).

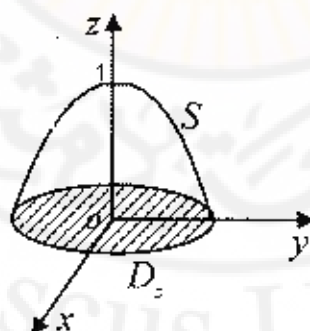
ملحوظة 7.4: إذا كان السطح  $S$  أملساً ولكنه غير بسيط باتجاه أي محور إحداثي، فإننا نقسم هذا السطح إلى عدد محدود من السطوح الملساء والبسيطة باتجاه أحد المحاور، بحيث لا تشترك الأجزاء بنقاط داخلية، ويكون التكامل السطحي من النوع الأول، للدالة  $f(x, y, z)$  على السطح  $S$ ، عبارة عن مجموع تكاملات سطحية، من النوع الأول، للدالة نفسها على السطوح الجزئية.

أما إذا كان السطح  $S$  بسيطاً باتجاه أحد المحاور ولكنه غير أملس، فإننا نقسم هذا السطح إلى عدد محدود من السطوح الملساء والبسيطة باتجاه أحد المحاور، بحيث لا تشترك الأجزاء بنقاط داخلية، ويكون التكامل السطحي من النوع الأول للدالة  $f(x, y, z)$  على السطح  $S$ ، عبارة عن مجموع تكاملات سطحية، من النوع الأول، للدالة نفسها على السطوح الجزئية.

مثال 7.1: احسب قيمة التكامل السطحي من النوع الأول

$$I = \iint_S \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} ds$$

حيث إن  $S$  هي الجزء المحدود من السطح  $z = 1 - x^2 - y^2$  المقطوع بالمستوي  $z = 0$ .  
الحل: واضح أن السطح  $S$  محدود، والدالة المكاملة مستمرة عليه، التكامل موجود.



الشكل 7.5

ولما كانت السطح  $S$  أملساً وبسيطاً باتجاه  $z$ ، الشكل 7.5، حيث  $z = 1 - x^2 - y^2$ ، فإن

$$ds = \sqrt{z_x'^2 + z_y'^2 + 1} dx dy = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} dx dy$$

وعليه، فإن

$$I = \iint_{D_1} \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} dx dy = \iint_{D_1} (4x^2 + 4y^2 + 1) dx dy$$

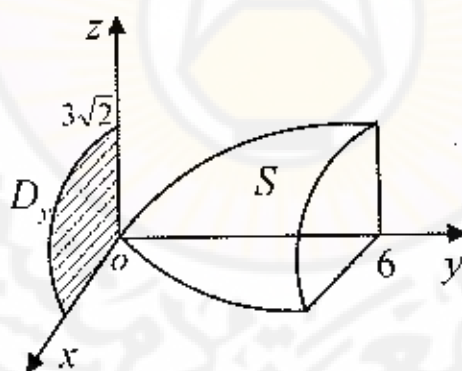
حيث  $D_1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$  مسقط السطح  $S$  على المستوي  $oxy$ . ولما كانت هذه الساحة بسيطة باتجاه  $\rho$ ، فإن

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (1 + 4\rho^2) \rho d\rho = 3\pi$$

مثال 7.2: احسب مساحة جزء من السطح  $3y = x^2 + z^2$  المحدد بالمستوي  $y = 6$ ، والواقع في الثمن الموجب.

الحل: إن السطح  $S$  المطلوب حساب مساحته محدود وحافته منحني أملس جزئياً، الشكل 7.6، فله مساحة تُعطى بالتكامل السطحي من النوع الأول:

$$s = \iint_S ds$$



الشكل 7.6

ولما كان السطح  $S$  أملساً وبسيطاً باتجاه  $y$ ، فإن:

$$ds = \sqrt{z_x'^2 + z_z'^2 + 1} dx dz = \frac{1}{3} \sqrt{9 + 4(x^2 + z^2)} dx dz$$

ومنه، فإن:

$$s = \frac{1}{3} \iint_{D_p} \sqrt{9 + 4(x^2 + z^2)} dx dz$$

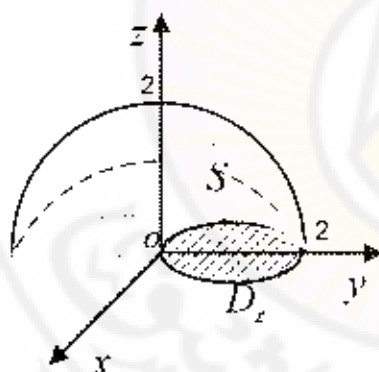
حيث  $D_p = \{(x, z): x^2 + z^2 \leq 18, x \geq 0, z \geq 0\}$  مسقط السطح  $S$  على المستوي  $oxz$ . وهي ساحة بسيطة باتجاه  $p$ . وعليه، فإن:

$$I = \frac{1}{3} \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{3\sqrt{2}} \sqrt{9 + 4\rho^2} \rho d\rho = \frac{39}{4} \pi \quad \text{وحدة مساحة}$$

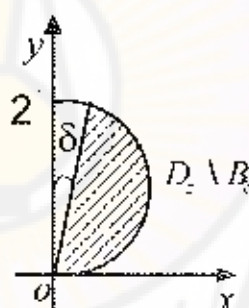
مثال 7.3: احسب مساحة الجزء الذي تقطعه الأسطوانة  $x^2 + y^2 = 2y$  من النصف العلوي للكرة  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ .

الحل: إن السطح  $S$  المطلوب حساب مساحته محدود، وحافته منحني أملس، الشكل 7.7-4، فله مساحة تُعطى بالتكامل السطحي من النوع الأول:

$$s = \iint_S ds$$



الشكل 7.7-4



الشكل 7.7-5

لما كان السطح  $S$  أملساً وبسيطاً باتجاه  $z$ ، حيث  $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ ، فإن

$$ds = \sqrt{z_x'^2 + z_y'^2 + 1} dx dy = \frac{2}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}} dx dy$$

ومنه، فإن:



$$s = 2 \iint_{D_2} \frac{dx dy}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$$

حيث  $D_2 = \{(x, y) : x^2 + (y-1)^2 \leq 1\}$  مسقط السطح  $S$  على المستوي  $oxy$ .  
 إن هذا التكامل الثنائي شاذ عند النقطة  $(0, 2)$ . تكامل، للسهولة، على نصف الساحة  $D_2$ ،  
 المحققة للشرط  $x \geq 0$ . نستثني النقطة الشاذة بالقطاع الزاوي  $B_\delta$ ، حيث  $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$ ،  
 الشكل 7.7-B. إن التكامل على الساحة  $D_2 \setminus B_\delta$  موجود، لأن هذه الساحة محدودة ومحاطة  
 بمنحن أملس جزئياً، والدالة المكاملة مستمرة عليها. وعليه، فإن:

$$s_\delta = 4 \iint_{D_2 \setminus B_\delta} \frac{dx dy}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$$

إن الساحة  $D_2 \setminus B_\delta$  بسيطة باتجاه  $p$ . وعليه، فإن:

$$s_\delta = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}-\delta} d\varphi \int_0^{2 \sin \varphi} \frac{p dp}{\sqrt{4 - p^2}} = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}-\delta} (1 - \cos \varphi) d\varphi = 8 \left[ \frac{\pi}{2} - \delta - \sin \left( \frac{\pi}{2} - \delta \right) \right]$$

ومنه، فإن:

$$s = \lim_{\delta \rightarrow 0} s_\delta = 4(\pi - 2) \quad \text{وحدة مساحة}$$

#### 7.4. التكامل السطحي من النوع الثاني

ليكن  $S$  سطحاً من الفراغ  $oxy$ ، موحهاً ومحدوداً وأملساً وبسيطاً، باتجاه  $z$ ، معطى بالمعادلة  
 $z = z(x, y)$ . ولتكن  $F_3(x, y, z)$  دالة معرفة ومحدودة على  $S$ .

تعريف 7.2: نجزئ السطح الموجه  $S$ ، اختيارياً، بواسطة منحنيات ملساء، إلى  $n$  جزء  
 $S_1, S_2, \dots, S_n$ ، بحيث لا تشترك هذه السطوح الجزئية بنقاط داخلية، ولتكن  $\lambda$  أكبر  
 أقطار هذه السطوح الجزئية. ولتكن  $\Delta A_i$  مساحة مسقط السطح الجزئي  $S_i$  على المستوي  $oxy$ .

نختار من كل سطح جزئي  $S_i$  نقطة اختيارية  $P_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ . ونشكل المجموع

$$\sum_{i=1}^n F_3(P_i) \Delta A_i \quad (7.6)$$

والذي يسمى المجموع التكاملي للدالة  $F_3(x, y, z)$  على السطح الفراغي الموجه  $S$ ، نختار

لهذا المجموع الإشارة (-) إذا اخترنا الوجه السفلي من السطح  $S$ .

نأخذ نهاية المجموع التكاملي (7.6) عندما تزداد  $n$  إلى اللانهاية، أي عندما يسعى  $\lambda$  إلى الصفر. فإذا كانت هذه النهاية موجودة ومحدودة، أيًا كانت طريقة تجزئة السطح  $S$ ، وأيضاً كان موضع النقطة  $P_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$  على السطح الجزئي  $S_i$ ، فإننا نسميها التكامل السطحي من النوع الثاني للدالة  $F_3(x, y, z)$  على السطح  $S$ ، بالنسبة إلى المتغيرين  $x$  و  $y$ ، ونرمز لها بالرمز:

$$\iint_S F_3(x, y, z) dx dy, \text{ واختصاراً، } \iint_{S'} F_3(x, y, z) dx dy$$

ونعرف، بأسلوب مماثل، التكامل السطحي من النوع الثاني للدالة  $F_2(x, y, z)$  (أو للدالة  $F_1(x, y, z)$ ) على السطح الموجه  $S$ ، بالنسبة إلى المتغيرين  $y$  و  $z$  (أو بالنسبة إلى المتغيرين  $x$  و  $z$ )، ونرمز بالرمز:

$$\iint_S F_1(x, y, z) dy dz \quad (\text{أو } \iint_S F_2(x, y, z) dx dz)$$

نسمي المجموع

$$\iint_S F_1(x, y, z) dy dz + \iint_S F_2(x, y, z) dx dz + \iint_S F_3(x, y, z) dx dy$$

التكامل السطحي العام من النوع الثاني، ونرمز له اختصاراً، بالرمز:

$$\iint_S F_1(x, y, z) dy dz + F_2(x, y, z) dx dz + F_3(x, y, z) dx dy \quad (7.7)$$

ويسمى هذا التكامل، تدفق الدالة، أو الحقل،  $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$  عبر السطح  $S$ .

إن للتكامل السطحي من النوع الثاني، خواص التكامل السطحي نفسها من النوع الأول، باستثناء أنه عند تغيير توجيه السطح، فإن إشارة التكامل تتغير.

#### 7.4.1 حساب التكامل السطحي من النوع الثاني

ليكن  $S$  سطحاً من الفراغ  $xyz$ ، موجهاً ومحدوداً وأملساً وبسيطاً، باتجاه  $z$  مثلاً. معادلته  $z = z(x, y)$ ، بحيث  $z \in C^1(D_z)$ ، و  $D_z$  مسقط السطح  $S$  على المستوى  $oxy$ . ولتكن  $F_3(x, y, z)$  دالة مستمرة على  $S$ .

نجزئ السطح  $S$ ، اختيارياً، بواسطة منحنيات ملساء، إلى  $n$  جزء  $S_1, S_2, \dots, S_n$ ، بحيث لا تشترك هذه السطوح الجزئية بنقاط داخلية، ولتكن  $\lambda$  أكبر أقطار هذه السطوح الجزئية. ولتكن  $\Delta A_i$  مساحة مسقط السطح الجزئي  $S_i$  على المستوى  $OXY$ . نختار من كل سطح جزئي  $S_i$  نقطة اختيارية  $P_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$  ونشكل المجموع

$$\sum_{i=1}^n F_3(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta A_i = \sum_{i=1}^n F_3[\xi_i, \eta_i, z(\xi_i, \eta_i)] \Delta A_i$$

يمثل الطرف الأيمن من هذه المساواة تكامل ثنائي لدالة  $F_3[x, y, z(x, y)]$  مستمرة على الساحة  $D_3$ .

نأخذ نهاية هذا المجموع التكاملي، عندما يسعى  $\lambda$  إلى الصفر، نجد

$$\iint_S F_3(x, y, z) dx dy = \iint_{D_3} F_3[x, y, z(x, y)] dx dy \quad (7.8)$$

وتعتبر هذه العلاقة، عن التكامل السطحي من النوع الثاني على السطح الموجه  $S$ ، بالنسبة إلى المتغيرين  $x$  و  $y$  بدلالة تكامل ثنائي. عدا عن ذلك، فإن هذه العلاقة تثبت وجود التكامل السطحي للدالة  $F_3(x, y, z)$  المستمرة على السطح  $S$ .

إذا اخترنا الوجه السفلي للسطح  $S$ ، فإنه تظهر في الدالة المكاملة في العلاقة (7.8)، الإشارة السالبة.

و نحصل، بأسلوب مشابه، على العلاقات:

$$\begin{aligned} \iint_S F_1(x, y, z) dy dz &= \iint_{D_1} F_1[x(y, z), y, z] dy dz \\ \iint_S F_2(x, y, z) dx dz &= \iint_{D_2} F_2[x, y(x, z), z] dx dz \end{aligned}$$

حيث إن معادلة السطح  $S$  معطاة، بالترتيب، بالمعادلات:  $x = x(y, z)$  و  $y = y(x, z)$ ، و  $D_1$  و  $D_2$  مسقطي السطح  $S$ ، على المستوي  $OYZ$  و على المستوي  $OXZ$ ، بالترتيب. لحساب التكامل السطحي العام من النوع الثاني، نحسب كل حد من حدوده، بما يناسبه من العلاقات السابقة.

ملحوظة 7.5: إذا لم يحقق السطح  $S$  الشروط المذكورة، الملائمة والبساطة باتجاه أحد المحاور،

فإننا نقسم هذا السطح إلى عددٍ من السطوح الملائمة والبسيطة باتجاه أحد المحاور، بحيث لا تشترك الأجزاء بنقاط داخلية، وتكامل على كل منها ونجمع النتائج.

مثال 7.4: احسب قيمة التكامل السطحي من النوع الثاني

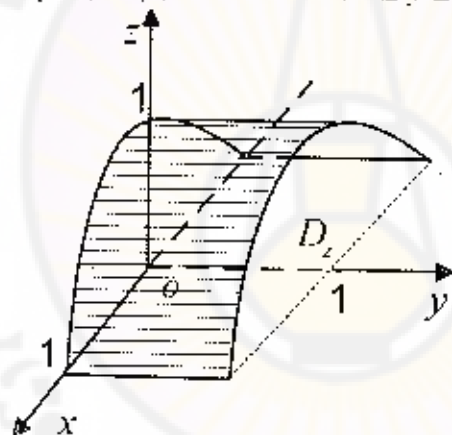
$$I = \iint_S (y^2 + z^2) dx dy$$

حيث إن  $S$  هي الوجه الخارجي للسطح  $z = \sqrt{1-x^2}$  المحدد بالمستويين  $y=0$  و  $y=1$ .

الحل: واضح أن السطح  $S$  محدود، والدالة المكاملة مستمرة عليه، فالتكامل موجود.

إن  $D_z$  مسقط السطح  $S$ ، على المستوي  $(Oxy)$ ، الشكل 7.8، هو المستطيل

$$D_z = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$$



الشكل 7.8

ومنه، فإن:

$$\begin{aligned} I &= \iint_S (y^2 + z^2) dx dy = \iint_{D_z} [y^2 + (1-x^2)] dx dy = \\ &= \int_{-1}^1 dx \int_0^1 [y^2 + (1-x^2)] dy = 2 \end{aligned}$$

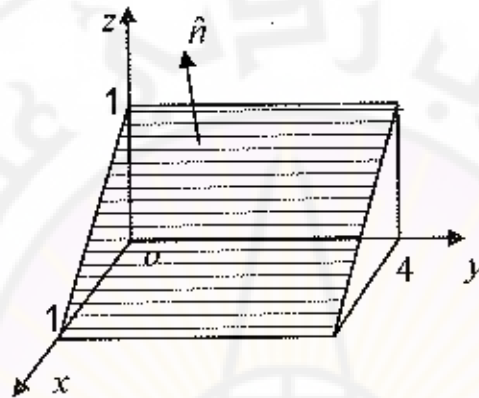
مثال 7.5: احسب قيمة التكامل السطحي العام من النوع الثاني:

$$I = \iint_S x dy dz + y dz dx + z dx dy$$

حيث إن  $S$  هي الوجه الخارجي للمستوي  $x + z - 1 = 0$  المقطوع بالمستويين  $y = 0$  و  $y = 4$ .

الحل: واضح أن التكامل موجود. ومن تعريف التكامل السطحي العام من النوع الثاني، نجد:

$$I = \iint_S x dy dz + \iint_S y dz dx + \iint_S z dx dy$$



الشكل 7.9

إن  $\iint_S y dz dx = 0$ ، لأن المستوي  $S$  يوازي المحور  $oy$ ، الشكل 7.9. نرمز بـ  $D_x$  و  $D_z$

لمسقطي المستوي  $S$  على المستوي  $oxy$  وعلى المستوي  $oyz$  بالترتيب. ومنه، فإن:

$$\iint_S z dx dy = \iint_{D_z} (1-x) dx dy = \int_0^4 dy \int_0^1 (1-x) dx = 2$$

$$\iint_S x dz dy = \iint_{D_x} (1-z) dy dz = \int_0^4 dy \int_0^1 (1-z) dz = 2$$

وعليه، فإن

$$I = 2 + 0 + 2 = 4$$

7.4.2 العلاقة بين التكامل السطحي من النوع الأول ومن النوع الثاني

يمكن الانتقال من التكامل السطحي من النوع الثاني إلى تكامل سطحي من النوع الأول،

ويكون للدالة المكاملة شكل معين.

لتكن  $\alpha, \beta, \gamma$  زوايا توجيه متجه واحدة الناظم  $\hat{n}$  على السطح الموجه  $S$ ، عند أي نقطة منه. أي أن  $\hat{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ ، ومنه، فإن:

$$\cos \gamma = \hat{n} \cdot \hat{k} \quad \text{و} \quad \cos \beta = \hat{n} \cdot \hat{j} \quad \text{و} \quad \cos \alpha = \hat{n} \cdot \hat{i}$$

وعليه، فإن عنصر المساحة على السطح الموجه  $S$ ، وفق التوجيه الموجب، يمكن أن نعبر عنه بإحدى العلاقات:

$$dx dy = \cos \gamma ds \quad \text{و} \quad dz dx = \cos \beta ds \quad \text{و} \quad dy dz = \cos \alpha ds$$

وهكذا، فإن التكامل السطحي العام من النوع الثاني (7.7)، يكتب كما يلي:

$$\iint_S F_1 dy dz + F_2 dx dz + F_3 dx dy = \iint_S (F_1 \cos \alpha + F_2 \cos \beta + F_3 \cos \gamma) ds$$

ولما كان:

$$\vec{F} \cdot \hat{n} = F_1 \cos \alpha + F_2 \cos \beta + F_3 \cos \gamma$$

فإن:

$$\iint_S (\vec{F} \cdot \hat{n}) ds = \iint_{S'} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

وهي العلاقة بين نوعي التكامل السطحي. حيث إن التكامل الأيسر هو التكامل من النوع الأول، والتكامل الأيمن هو التكامل من النوع الثاني، ولذا ذكرنا، هنا، الرمز  $S^+$ .

ملحوظة 7.6: إذا اخترنا وجه آخر للسطح  $S$ ، أي أن الناظم  $(-\hat{n})$ ، فإن الزاوية بين  $\hat{n}$  و  $\hat{k}$  متفرجة، وعليه، فإن التكامل السطحي من النوع الثاني على الوجه  $S^-$  هو:

$$\iint_{S^-} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint_S \vec{F} \cdot (-\hat{n}) ds = - \iint_S (\vec{F} \cdot \hat{n}) ds = - \iint_{S'} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

أي أن

$$\iint_{S^-} \vec{F} \cdot d\vec{s} = - \iint_{S'} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

أي أن تغيير التوجيه على السطح  $S$  يغير إشارة التكامل السطحي من النوع الثاني.

مثال 7.6: احسب التكامل  $\iint_S z \cos \gamma ds$ ، حيث  $S$  الوجه الخارجي لنصف الكرة

$x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ، الواقع فوق المستوي  $oxy$ ، و  $\gamma$  الزاوية التي يصنعها الناقص على السطح  $S$ ، مع المحور  $oz$ .

الحل: من العلاقة بين نوعي التكامل السطحي، نجد:

$$I = \iint_S z \cos \gamma ds = \iint_{S'} z dx dy$$

ليكن  $D_z$  مسقط السطح  $S$  على المستوي  $oxy$ ، وهي القرص  $x^2 + y^2 \leq 1$ ، من الصيغة (7.8)، نجد:

$$I = \iint_S z dx dy = \iint_{D_z} \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1-\rho^2} \rho d\rho = \frac{2}{3} \pi$$

### 7.4.3 علاقة غاوص - أسترودرادسكي

تربط علاقة غاوص - أسترودرادسكي بين التكامل السطحي على سطح مغلق مع التكامل الثلاثي على منطقة فراغية محصورة داخل هذا السطح. وتشبه هذه العلاقة، علاقة غرين التي تربط بين التكامل المنحني على منحن مغلق مع التكامل الثنائي على ساحة مستوية، محاطة بهذا المنحني.

مبرهنة 7.2 (مبرهنة التفريق): لنكن  $\mathcal{R}$  منطقة مغلقة وبسيطة ومحاطة بالسطح المغلق  $S$ . ولنكن

$\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$  دالة، بحيث  $\vec{F} \in C^1(\mathcal{R})$ . عندئذ، يكون

$$\iiint_{\mathcal{R}} \left( \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \right) dx dy dz = \iint_S F_1 dy dz + F_2 dz dx + F_3 dx dy$$

وتسمى هذه العلاقة، اختصاراً، علاقة غاوص في التفريق.

الإثبات: لنكن  $D_z$  مسقط السطح  $S$  (أو المنطقة  $\mathcal{R}$ ) على المستوي  $oxy$ ، الشكل 7.10.

ولنكن  $z = z_1(x, y)$  و  $z = z_2(x, y)$  معادلتا جزئي السطح  $S$ ، الجزء السفلي  $S_1$  والجزء العلوي  $S_2$ ، بالترتيب. نكتب التكامل الثلاثي

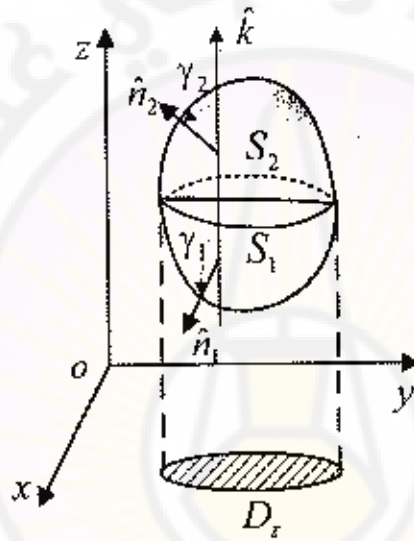
$$\iiint_{\mathcal{R}} \frac{\partial F_3}{\partial z} dx dy dz$$

<sup>1</sup> ماثيل فاسيليفيتش أسترودرادسكي (١٨٠١-١٨٦٦) رياضياتي روسي.

بدلالة تكامل سطحي، كما يلي:

$$\begin{aligned} \iiint_R \frac{\partial F_3}{\partial z} dx dy dz &= \iint_{D_z} dx dy \int_{z=z_1(x,y)}^{z=z_2(x,y)} \frac{\partial F_3}{\partial z} dz = \\ &= \iint_{D_2} F_3[x, y, z_2(x, y)] dx dy - \iint_{D_1} F_3[x, y, z_1(x, y)] dx dy \end{aligned}$$

ليكن  $\hat{n}_1$  و  $\hat{n}_2$  ناظمي السطحين  $S_1$  و  $S_2$ ، بالترتيب. ولتكن  $\gamma_1$  الزاوية بين  $\hat{n}_1$  و  $\hat{k}$ ، و  $\gamma_2$  الزاوية بين  $\hat{n}_2$  و  $\hat{k}$ ، الشكل 7.10.



الشكل 7.10

إن عنصر المساحة الموجهة على السطح  $S_2$  هو:  $d\vec{s} = \hat{n}_2 ds$ ، ولما كانت الزاوية  $\gamma_2$  حادة، فإن:

$$dA_2 = \cos \gamma_2 ds = (\hat{k} \cdot \hat{n}_2) ds = \hat{k} \cdot d\vec{s}$$

أي أن

$$dxdy = \hat{k} \cdot d\vec{s}$$

و عنصر المساحة الموجهة على السطح  $S_1$  هو:  $d\vec{s} = \hat{n}_1 ds$ ، ولما كانت الزاوية  $\gamma_1$  منفرجة، فإن:



$$dA_z = (-\cos \gamma_1) ds = -(\hat{k} \cdot \hat{n}_1) ds = -\hat{k} \cdot d\vec{s}$$

أي أن

$$dxdy = -\hat{k} \cdot d\vec{s}$$

ولما كانت الساحة  $D_2$ ، مسقط السطحين  $S_1$  و  $S_2$ ، فإنه يمكن استبدال التكاملين الثنائيين السابقين بتكاملين سطحيين على السطحين  $S_1$  و  $S_2$ :

$$\begin{aligned} \iiint_{\mathcal{R}} \frac{\partial F_3}{\partial z} dxdydz &= \iint_{S_2} F_3(\hat{k} \cdot d\vec{s}) + \iint_{S_1} F_3(\hat{k} \cdot d\vec{s}) = \\ &= \oiint_S F_3(\hat{k} \cdot d\vec{s}) = \oiint_S F_3(x, y, z) dxdy \end{aligned} \quad (7.9)$$

ونجد، بأسلوب مشابه، العلاقات:

$$\iiint_{\mathcal{R}} \frac{\partial F_1}{\partial x} dydz = \oiint_S F_1(\hat{i} \cdot d\vec{s}) = \oiint_S F_1 dydz \quad (7.10)$$

$$\iiint_{\mathcal{R}} \frac{\partial F_2}{\partial y} dzdx = \oiint_S F_2(\hat{j} \cdot d\vec{s}) = \oiint_S F_2 dzdx \quad (7.11)$$

بجمع العلاقات (7.9) و (7.10) و (7.11)، نجد صحة علاقة غاوص.

ويمكن كتابة هذه العلاقة بالصيغة المتجهة:

$$\iiint_{\mathcal{R}} (\nabla \cdot \vec{F}) dV = \oiint_S (F_1 \hat{i} + F_2 \hat{j} + F_3 \hat{k}) \cdot d\vec{s} = \oiint_S \vec{F} \cdot d\vec{s} \quad (7.12)$$

ملحوظة 7.6: إن علاقة غاوص صحيحة، من أجل أي منطقة فراغية مغلقة  $\mathcal{R}$ ، يمكن تجزئتها إلى عددٍ متناهٍ من المناطق البسيطة. حيث نطبق العلاقة (7.12) على كل منطقة جزئية ثم نجمع هذه النتائج، فنحصل على علاقة طرفها الأيسر تكامل ثلاثي على كامل المنطقة الفراغية  $\mathcal{R}$ ، وطرفها الأيمن تكامل سطحي على السطح  $S$ ، حيث إن التكاملات السطحية، على السطوح المساعدة، محسوبة مرتين، على كل جهة من جهتي هذه السطوح، وعند جمعها يتم اختصارها. تُسهل علاقة غاوص، حساب التكامل السطحي، على سطح مغلق.

نتيجة 7.1: إذا وضعنا  $F_1 = F_2 = F_3 = f(x, y, z)$ ، في العلاقات (7.9) و (7.10) و (7.11)، ثم ضربنا (7.9) بـ  $\hat{i}$  و (7.10) بـ  $\hat{j}$  و (7.11) بـ  $\hat{k}$ ، وجعنا الأطراف

بعضها إلى بعض، في هذه العلاقات، نجد:

$$\begin{aligned} \iiint_R \left( \frac{\partial f}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{k} \right) dV &= \\ &= \iiint_S [f\hat{i}(\hat{i} \cdot \hat{n}) + f\hat{j}(\hat{j} \cdot \hat{n}) + f\hat{k}(\hat{k} \cdot \hat{n})] \cdot d\vec{s} = \iiint_S f\hat{n}ds = \iiint_S f d\vec{s} \end{aligned}$$

أي أن

$$\iiint_R \nabla f dV = \iiint_S f d\vec{s}$$

مثال 7.7: احسب التكامل  $I = \iiint_S x dy dz + y dz dx + z dx dy$

حيث  $S$  الوجه الخارجي للهرم المحدد بالمستويات:

$$x + y + z = 1, x = 0, y = 0, z = 0$$

الحل: باستخدام علاقة غاوص (7.12)، نجد:

$$\begin{aligned} I &= \iiint_S x dy dz + y dz dx + z dx dy = \iiint_R (1 + 1 + 1) dx dy dz = \\ &= 3 \iiint_R dx dy dz = 3 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

مثال 7.8: احسب التكامل  $I = \iiint_S x^3 dy dz + y^3 dz dx + z^3 dx dy$  حيث  $S$  الوجه

الخارجي للكرة  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .

الحل: باستخدام علاقة غاوص (7.12)، نجد:

$$\begin{aligned} I &= \iiint_S x^3 dy dz + y^3 dz dx + z^3 dx dy = 3 \iiint_R (x^2 + y^2 + z^2) x dx dy dz = \\ &= 3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \int_0^1 r^4 dr = \frac{12}{5} \pi \end{aligned}$$

ملحوظة 7.7: إن علاقة غاوص تُعطي حجم منطقة فراغية، بدلالة تكامل سطحي على سطح

مغلق  $S$  يحده المنطقة.

فإذا اخترنا الدالة  $\vec{F}$ ، بحيث يكون  $\nabla \cdot \vec{F} \equiv 1$ ، نجد:

$$V = \iiint_R dx dy dz = \oint_S \vec{F} \cdot d\vec{s} = \oint_S F_1 dy dz + F_2 dz dx + F_3 dx dy$$

حيث  $V$  حجم المنطقة المحصورة داخل السطح  $S$ .

وخصوصاً، إذا فرضنا  $F_1 = \frac{x}{3}$  و  $F_2 = \frac{y}{3}$  و  $F_3 = \frac{z}{3}$ ، نجد علاقة الحجم:

$$V = \iiint_R dx dy dz = \frac{1}{3} \oint_S x dy dz + y dz dx + z dx dy$$

#### 7.4.4 علاقة ستوكس<sup>1</sup>

تُعطي علاقة ستوكس العلاقة بين التكامل السطحي والتكامل المنحني، ولها تطبيقات واسعة. ليكن  $S$  سطحاً مفتوحاً وموجهاً وبسيطاً باتجاه  $z$ ، معطى بالمعادلة  $z = z(x, y)$ ، حيث  $z \in C^1(D_z)$ ، ولتكن  $\Gamma$  حافة السطح  $S$ ، و  $L$  حافة  $D_z$  في المستوى  $oxy$ .

مبرهنة 7.3: لتكن  $F_1(x, y, z)$  دالة معرفة على السطح  $S$ ، بحيث  $F_1 \in C^1(S)$ ، عندها يكون:

$$\oint_{\Gamma} F_1(x, y, z) dx = \iint_S \left( \frac{\partial F_1}{\partial z} \cos \beta - \frac{\partial F_1}{\partial y} \cos \gamma \right) ds \quad (7.13)$$

الإثبات: نكتب التكامل المنحني بدلالة تكامل سطحي على السطح  $S$ ، وفق المخطط:

$$\oint_{\Gamma} \rightarrow \oint_L \rightarrow \iint_D \rightarrow \iint_S$$

لما كان المنحني  $\Gamma$  يقع على السطح  $S$ ، فإن إحداثيات أي نقطة منه تحقق المعادلة  $z = z(x, y)$ . لذا، فإن قيم الدالة  $F_1(x, y, z)$  عند نقاط المنحني  $\Gamma$  تساوي قيم الدالة  $F_1(x, y, z(x, y))$  في النقاط المقابلة على المنحني  $L$ . وتكون أيضاً، الأجزاء المتقابلة لتجزئة  $\Gamma$  و  $L$  على المحور  $ox$  متطابقة.

لذا، فإن المجموعين التكاملين للتكامل المنحني من النوع الثاني للدالة  $F_1$  على المنحنيين  $\Gamma$  و  $L$  متساويين، أي أن:

$$\oint_{\Gamma} F_1(x, y, z) dx = \oint_L F_1(x, y, z(x, y)) dx$$

<sup>1</sup> جورج غابرييل ستوكس (١٨١٩-١٩٠٣) رياضي وفيزيائي إنكليزي.

وبالاستفادة من علاقة غرين (6.8)، حيث  $F_2 \equiv 0$ ، نجد

$$\oint_L F_1(x, y, z(x, y)) dx = - \iint_{D_1} \left( \frac{\partial F_1}{\partial y} + \frac{\partial F_1}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \right) dx dy$$

حيث إن الدالة المكاملة، في التكامل الثنائي، تمثل المشتق الجزئي للدالة المركبة  $F_1(x, y, z(x, y))$ ، بالنسبة إلى  $y$ .

ولما كان  $S$  الوجه الخارجي للسطح، أي أن  $\cos \gamma > 0$ ، الزاوية الحادة بين الناظم والمحور  $z$ . ولما كانت جيوب تمام توجيه الناظم للسطح  $S$  متناسبة مع مركبات الناظم عليه  $(-z'_x, -z'_y, 1)$ ، فإن:

$$\frac{\cos \beta}{\cos \gamma} = \frac{-z'_y}{1} = -z'_y$$

وعليه، فإن:

$$- \iint_{D_1} \left( \frac{\partial F_1}{\partial y} + \frac{\partial F_1}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \right) dx dy = - \iint_{D_1} \left( \frac{\partial F_1}{\partial y} + \frac{\partial F_1}{\partial z} \cdot \frac{\cos \beta}{\cos \gamma} \right) dx dy$$

وبالاستفادة من العلاقة بين نوعي التكامل السطحي، نجد:

$$- \iint_{D_1} \left( \frac{\partial F_1}{\partial y} + \frac{\partial F_1}{\partial z} \cdot \frac{\cos \beta}{\cos \gamma} \right) dx dy = - \iint_S \left( \frac{\partial F_1}{\partial y} \cos \gamma + \frac{\partial F_1}{\partial z} \cos \beta \right) ds$$

وعليه، فإن:

$$\oint_L F_1(x, y, z) dx = \iint_S \left( \frac{\partial F_1}{\partial z} \cos \beta + \frac{\partial F_1}{\partial y} \cos \gamma \right) ds$$

وهو المطلوب.

ونجد، بأسلوب مماثل، العلاقات:

$$\oint_L F_2(x, y, z) dy = \iint_S \left( \frac{\partial F_2}{\partial x} \cos \gamma + \frac{\partial F_2}{\partial z} \cos \alpha \right) ds$$

$$\oint_L F_3(x, y, z) dz = \iint_S \left( \frac{\partial F_3}{\partial y} \cos \gamma + \frac{\partial F_3}{\partial x} \cos \beta \right) ds$$

وبجمع العلاقات الثلاث الأخيرة، نجد

$$\oint_{\Gamma} F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz =$$

$$= \iint_S \left[ \left( \frac{\partial F_3}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \cos \gamma + \left( \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) \cos \beta + \left( \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) \cos \alpha \right] ds$$

وبالاستفادة من العلاقة بين نوعي التكامل السطحي، نجد:

$$\oint_{\Gamma} F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz =$$

$$= \iint_S \left( \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy + \left( \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) dy dz + \left( \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) dx dz$$

أو

$$\oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{n} ds = \iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{s}$$

وتسمى هذه العلاقة علاقة ستوكس، وتعني أن تدفق دوران الحقل  $\vec{F}$  عبر السطح  $S$  يساوي جولان الحقل  $\vec{F}$  حول المنحني  $\Gamma$ .

ملحوظة 7.8: إذا كان السطح  $S$  سطحاً مستوياً، يقع في المستوى  $oxy$  مثلاً، ومحاطاً بالمنحني  $\Gamma$ ، فإن علاقة ستوكس تصبح هي نفسها علاقة غرين (6.8).  
نتيجة 7.2: إذا كان

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_3}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial z}$$

فإن التكامل المنحني على أي منحنٍ فراغي مغلق  $\Gamma$  يساوي الصفر. أي:

$$\oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

أي أن هذا التكامل مستقل عن المسار. وكنا قد وجدنا هذا الشرط في الفصل السابق.

نتيجة 7.3: إذا كان  $S_1$  و  $S_2$  سطحين موجّهين ومفتوحين يحدّهما المنحني الفراغي الموجه  $\Gamma$  ويقعان في جهة واحدة بالنسبة إلى  $\Gamma$ ، الشكل 7.11-A، ويقعان في منطقة بسيطة الترابط، فإن:

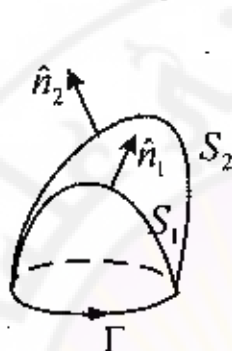
$$\iint_{S_1} (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{s}_1 = \iint_{S_2} (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{s}_2 = \oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

وإذا كان  $S_1$  و  $S_2$  يقعان في جهتين مختلفتين بالنسبة إلى  $\Gamma$ ، الشكل 7.11-B، فإن:

$$\iint_{S_1} (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{s}_1 = - \iint_{S_2} (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{s}_2$$

حيث يجب توجيه الحافة  $\Gamma$  للسطح  $S_1$  بعكس طريقة توجيه الحافة  $\Gamma$  للسطح  $S_2$ ، ويبقى في هذه الحالة ناظم السطح المغلق  $S = S_1 \cup S_2$  موجهاً نحو الخارج. وعليه، فإن:

$$\iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{s} = 0$$



الشكل 7.11-A



الشكل 7.11-B

مثال 7.9: احسب، باستخدام علاقة ستوكس، التكامل

$$I = \oint_{\Gamma} x^2 y^3 dx + dy + z dz$$

حيث  $\Gamma$  هو حافة السطح الموجه  $S: \{z = \sqrt{1-x^2-y^2}\}$

الحل: لما كان:

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = -3x^2 y^2, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} = 0$$

فإننا نجد، من علاقة ستوكس:

$$I = \oint_{\Gamma} x^2 y^3 dx + dy + z dz = -3 \iint_S x^2 y^2 dx dy = -\frac{\pi}{8}$$

7.5 تكامل غاوص والزوايا المجسمة

مبرهنة 7.4: ليكن  $S$  سطحاً مغلقاً يحد المنطقة الفراغية  $\mathcal{R}$ . عندئذ، فإن:

$$\text{أ-} \quad \iint_S \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}}{r^3} ds = 0 \quad \text{إذا كانت النقطة } O \text{ خارج المنطقة الفراغية } R.$$

$$\text{ب-} \quad \iint_S \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}}{r^3} ds = 4\pi \quad \text{إذا كانت النقطة } O \text{ داخل المنطقة الفراغية } R.$$

الإثبات:

أ- من مبرهنة التفريق 7.2، نجد:

$$\oiint_S \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot d\vec{s} = \oiint_S \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}}{r^3} ds = \iiint_R \nabla \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} dv$$

ولكن  $\nabla \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} = 0$  داخل  $R$  حيث  $\vec{r} \neq \vec{0}$ ، لأن  $O$  خارج المنطقة  $R$ . إذن:

$$\oiint_S \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}}{r^3} ds = 0$$

ب- إذا كانت النقطة  $O$  داخل المنطقة الفراغية  $R$ ، نحيط  $O$  بكرة  $S_1$  مركزها  $O$  ونصف قطرها  $a$ . ولتكن  $R_1$  المنطقة المحصورة بين  $S$  و  $S_1$ ، يكون عندئذ:

$$\oiint_{S \cup S_1} \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}}{r^3} ds = \oiint_S \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}}{r^3} ds + \oiint_{S_1} \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}}{r^3} ds = \iiint_{R_1} \nabla \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} dv = 0$$

حيث  $\vec{r} \neq \vec{0}$  في  $R_1$  ومنه، نجد:

$$\oiint_S \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}}{r^3} ds = - \oiint_{S_1} \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}}{r^3} ds$$

ولكن على  $S_1$  يكون:  $r = a$  و  $\vec{n} = -\frac{\vec{r}}{a}$  و

$$\frac{\vec{n} \cdot \vec{r}}{r^3} = \frac{1}{a^3} \left( -\frac{\vec{r}}{a} \right) \cdot \vec{r} = -\frac{\vec{r} \cdot \vec{r}}{a^4} = -\frac{a^2}{a^4} = -\frac{1}{a^2}$$

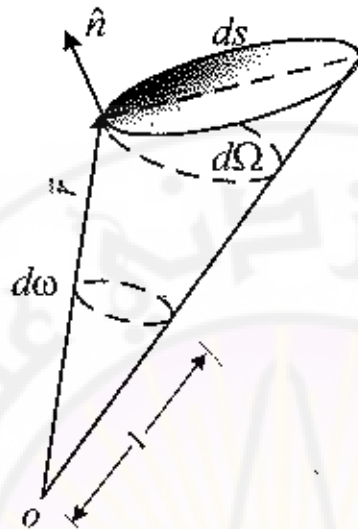
وعليه، فإن:

$$\oiint_S \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}}{r^3} ds = - \oiint_{S_1} \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}}{r^3} ds = - \oiint_{S_1} \frac{1}{a^2} ds = \frac{4\pi a^2}{a^2} = 4\pi$$

التفسير الهندسي الهندسي لتكامل غاوص - الزوايا المجسمة:

ليكن  $ds$  عنصر المساحة على السطح المغلق والموجه  $S$ ، نصل جميع نقاط محيط  $ds$  إلى النقطة

، فيتشكل مخروط كامل ذروته  $O$ ، إذا كانت  $O$  تقع داخل  $\mathcal{R}$  . ويتشكل نصف مخروط ذروته  $O$ ، إذا كانت  $O$  خارج  $\mathcal{R}$ ، الشكل 7.12.



الشكل 7.12

ليكن  $d\Omega$  المساحة التي يقطعها هذا المخروط من كرة مركزها  $O$  ونصف قطرها  $r$ . نعرف

الزاوية المجسمة  $d\omega$  التي يُرى بها العنصر  $ds$  من  $O$ ، بأنها  $d\omega = \frac{d\Omega}{r^2}$

وتساوي عددياً مساحة الجزء من سطح كرة الواحدة المقطوع بالمخروط المذكور. ونُقاس بالراديان المُجسم. إذا كان  $\hat{n}$  متجه واحدة الناظم على  $ds$ ، وكانت  $\theta$  الزاوية بين  $\hat{n}$  و  $\vec{r}$ ،

فإن  $\cos\theta = \pm \frac{\hat{r} \cdot \hat{n}}{r^2}$ ، وعليه، فإن:

$$d\Omega = \pm ds \cos\theta = \pm \frac{\hat{r} \cdot \hat{n}}{r} ds \Rightarrow d\omega = \pm \frac{\hat{r} \cdot \hat{n}}{r^3} ds$$

نختار الإشارة (+) إذا كانت الزاوية  $\theta$  حادة، والإشارة (-) إذا كانت الزاوية  $\theta$  منفرجة.

إذا كانت  $O$  تقع داخل  $\mathcal{R}$ ، أي في الوضع 1 و 2، يكون  $d\omega = + \frac{\hat{r} \cdot \hat{n}}{r^3} ds$

وعليه، فلإيجاد الزاوية الكلية  $\omega$  التي يُرى بها السطح  $S$  من النقطة  $O$ ، أي عند حساب

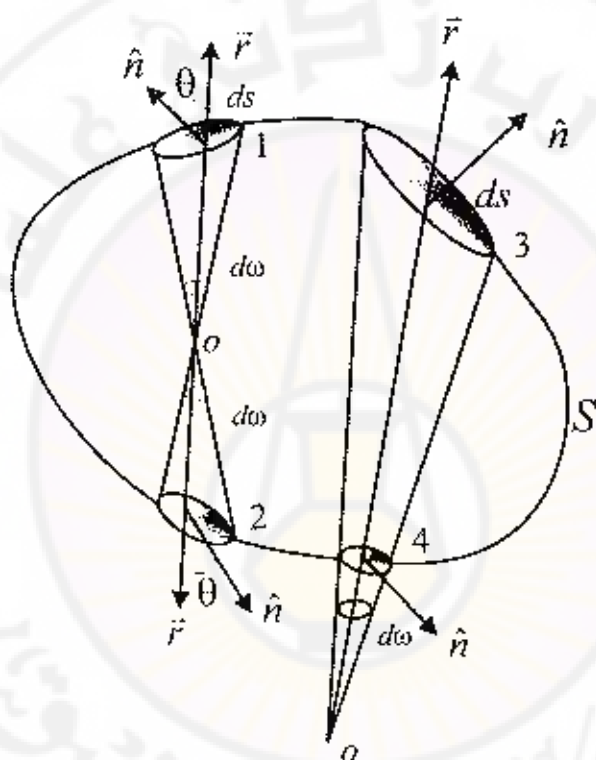


$$\omega = \oiint_S \frac{\vec{r} \cdot \hat{n}}{r^3} ds$$

نجمع المقدارين في الوضعين 1 و 2، فنجد

$$\omega = \oiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} \frac{\vec{r} \cdot \hat{n}}{r^3} ds = 4\pi$$

وكما هو واضح من الشكل 7.13، تصبح الزاوية المجسمة الكلية  $\omega$  تساوي مساحة سطح الكرة  $\omega = 4\pi$ .



الشكل 7.13

أما إذا كانت  $O$  تقع خارج  $R$ ، أي في الوضع 3، يكون  $d\omega = + \frac{\vec{r} \cdot \hat{n}}{r^3} ds$ .

وفي الوضع 4، يكون  $d\omega = - \frac{\vec{r} \cdot \hat{n}}{r^3} ds$ .

ولإيجاد الزاوية الكلية  $\omega$  التي يُرى بها السطح  $S$  من النقطة  $O$ ، نجمع المقدارين، فنجد  $\omega = 0$ .

وإذا كانت النقطة  $O$  على السطح  $S$ ، فإن  $\omega = 2\pi$ ، حيث يتم إسقاط السطح على نصف الكرة المذكورة.



## تمارين الفصل السابع

1. احسب قيمة كل من التكاملات السطحية التالية على السطح  $S$  المبين بجوارها :

$$I = \iint_S (x^2 + y^2) z ds \quad ; \quad S: \{x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \geq 0\}$$

$$I = \iint_S z ds \quad ; \quad S: \{z = \sqrt{x^2 + y^2}, 1 \leq z \leq 2\}$$

$$I = \iint_S (x^2 + y^2) ds \quad ; \quad S: \{x^2 + y^2 = 2z, z \leq 1\}$$

$$I = \iint_S (z^2 + y^2) ds \quad ; \quad S: \{\sqrt{1-x^2} = z, 0 \leq y \leq 1\}$$

$$I = \iint_S (x^2 + y^2 + z^2) ds \quad ; \quad S: \{y = \sqrt{4-x^2-z^2}\}$$

$$I = \iint_S z(x+y) ds \quad ; \quad S: \{z = \sqrt{4-x^2}; 0 \leq y \leq 5\}$$

$$I = \iint_S \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}} ds \quad ; \quad S: \left\{ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}$$

$$I = \iint_S (x^2 + y^2 + z - 2) ds \quad ; \quad S: \{2z = 9 - x^2 - y^2, z = 0\}$$

$I = \iint_S (x^2 + y^2) z ds$ ، حيث  $S$  جزء من الأسطوانة  $x^2 + z^2 = 4$  المقطوع بالأسطوانة  $x^2 + y^2 = 4$  والواقع في الثمن الموجب.

$I = \iint_S xyz ds$ ، حيث  $S$  جزء من الكرة  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  الواقع داخل السطح  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

$I = \iint_S (x^2 - 2y + z) ds$ ، حيث  $S$  جزء من المستوي  $4x + y = 8$  المحدد بالمستويات الإحداثية والمستوي  $z = 8$ .

$I = \iint_S \sqrt{1 + 4x^2 + 4z^2} ds$ ، حيث  $S$  جزء من السطح  $y = 2xz$  المقطوع بالسطح  $(x^2 + z^2)^2 = 8xz$  و  $x \geq 0, z \geq 0$ .

2. احسب مساحة السطوح التالية:

الجزء الذي تقطعه الأسطوانة  $(x-1)^2 + y^2 = 1$  من الكرة  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ .

- الجزء الذي تقطعه الأسطوانة  $x^2 + y^2 = 1$  من السطح  $z = xy$ .

- الجزء الذي تقطعه الأسطوانة  $x^2 + y^2 = 4$  من السطح  $z = x^2 + y^2$ .

- جزء من السطح  $z^2 = 3x^2 + 3y^2$  المقطوع بالسطح  $z = x^2 + y^2$ .

- جزء من السطح  $2z = x^2 - y^2$  والذي مسقطه على مستوي الأفق هو العقدة اليمنى

لنحن اليمينسكات  $\rho^2 = \cos 2\varphi$ .

- سطح الكرة و سطح مجسم القطع الناقص.

3. احسب قيمة كل من التكاملات السطحية التالية:

$$I = \iint_S (x^2 + y^2) dx dy, \text{ حيث } S \text{ هي الوجه السفلي للقرص } x^2 + y^2 \leq 4.$$

$$I = \iint_S x^2 y^2 z dx dy, \text{ حيث } S \text{ هي الوجه العلوي للسطح } x^2 + y^2 + z^2 = 9.$$

$$I = \iint_S x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy, \text{ حيث } S \text{ هي الوجه العلوي للسطح } (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 1.$$

$$I_1 = \iint_S dx dy, \quad I_2 = \iint_S z dx dy, \quad I_3 = \iint_S z^2 dx dy$$

$$I_4 = \iint_S x^3 dy dz, \quad I_5 = \iint_S yz dz dx, \quad I_6 = \iint_S \frac{dy dz}{x} + \frac{dz dx}{y} + \frac{dx dy}{z}$$

$$\text{حيث } S \text{ هي الوجه العلوي للسطح } x^2 + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1.$$

4. احسب تدفق الحقل  $\vec{F}$  عبر السطح الموجه  $S$  المبين بجوارها:

$$\vec{F} = (xy, -x^2, x+z), \text{ حيث } S \text{ الجزء الواقع في النصف الموجب من المستوي}$$

$$2x + 2y + z = 6.$$

$$\vec{F} = (x^2 y, x y^3, z^2), \text{ حيث } S \text{ السطح المغلق المحاط بالمستويات}$$

$$2x + z = 4, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad y = 2$$

$$\vec{F} = (x y^2, x^2 y, y), \text{ حيث } S \text{ الأسطوانة المغلقة } x^2 + y^2 = 1, -1 \leq z \leq 1.$$

مع قاعدتيها.

-  $\vec{F} = (y, 2x, -z)$  ، حيث  $S$  جزء من السطح  $y^2 = x$  الواقع في الثمن الموجب والمحصور بالمستويين  $y = 1$  و  $z = 3$ .

-  $\vec{F} = (4xz, -y^2, yz)$  ، حيث  $S$  سطح المكعب

$\{x=0, y=0, z=0, x=1, y=1, z=1\}$   
 -  $\vec{F} = (x^3, y^3, z^2)$  ، حيث  $S$  السطح المغلق  $\{z=0, z=1-x^2-y^2\}$   
 -  $\vec{F} = r\vec{r}$  حيث  $S$  السطح المغلق  $x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 1$   
 -  $\vec{F} = \vec{r}$  حيث  $S$  السطح المغلق  $\{z=4-x^2-y^2, z=0\}$   
 -  $\vec{F} = (z, 0, yz)$  ، حيث  $S$  السطح المعطى وبسيطاً بالمعادلات:

$$x = u^2 + v^2, y = uv, z = v; 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1$$

-  $\vec{F} = (z, x, -3y^2z)$  ، حيث  $S$  الأسطوانة المغلقة  $x^2 + y^2 = 16; 0 \leq z \leq 1$

مع قاعدتيها.

5. احسب تدفق دوران الحقل

$$\vec{F} = (2y^3 + z, -x^2y, xy^2z^2) + \nabla f$$

حيث  $f$  دالة عددية اختيارية، مشتقاتها الجزئية من المرتبة الثانية مستمرة، عبر السطح المسنوي الموجه  $x^2 + y^2 \leq 1$ .

6. إذا كان  $f = \rho(\sin \phi - \cos \phi) + \sqrt{\rho^2 + z^2}$  و

$\{(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1, z=0, z=1\}$  أثبت صحة المساواة:

$$\iint_S d\vec{s} \times \nabla f = \vec{0}$$

7. احسب التكامل  $I = \iiint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{s}$  في الحالات:

-  $\vec{F} = (-y, x, z)$  و  $S$  النصف العلوي من الكرة  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

-  $\vec{F} = (x + 2y, -z, x)$  و  $S$  جزء من المستوي  $x + y + z = 1$  الموجود في الثمن الموجب.

الثنى الموجب.  $\vec{F} = (2x^2 - 3z, -2xy, -4x)$  و  $S$  جزء من المستوى  $2x + 2y + z = 4$  الموجود في

$$\vec{F} = \left(\frac{r^2+1}{r}\right)\hat{r} + (r\cos\theta)\hat{\theta} + \left(\frac{\cos\phi}{r}\right)\hat{\phi} \text{ و } S \text{ السطح}$$

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 0.25$$

$\vec{F} = (x-z, x^3 + yz, -3xy^2)$  و  $S$  جزء من السطح  $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$  من أجل  $z \geq 0$ .

8. حقق مبرهنة ستوكس في الحالات التالية:

- الدالة  $\vec{F} = (x^2y^3, 1, z)$  و  $S$  النصف العلوي للكرة  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$  و المنحني  $\Gamma$  حافة هذا السطح.

- الدالة  $\vec{F} = (2x - y, -yz^2, -y^2z)$  و  $S$  النصف العلوي للكرة  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  و المنحني  $\Gamma$  حافة هذا السطح.

- الدالة  $\vec{F} = (y, z, x)$  و  $S$  القرص المحصور داخل المنحني:

$$\Gamma : \{x = \cos^2 t, y = \sqrt{2} \sin t \cos t, z = \sin^2 t ; 0 \leq t \leq \pi\}$$

- الدالة  $\vec{F} = (y^2 + z^2, z^2 + x^2, x^2 + y^2)$  و  $S$  جزء من النصف العلوي للكرة  $x^2 + y^2 + z^2 = 4x$  المقطوع بالأسطوانة  $x^2 + y^2 = 2x$ .

- الدالة  $\vec{F} = (3y, -xz, yz^2)$  و  $S$  الجزء المحدد من السطح  $2z = x^2 + y^2$  المقطوع بالمستوي  $z = 2$  و المنحني  $\Gamma$  حافة هذا السطح.

9. ليكن  $S$  سطحاً موجهاً ومغلقاً ومحدوداً وأملس جزئياً، مساحته  $S$  يحيط بمنطقة فراغية  $\mathcal{R}$ ،

لا تشمل  $0$ ، حجمها  $V$ ، ولتكن  $f$  دالة متجهة، بحيث  $f \in C^1(\mathcal{R})$  و  $g = \frac{1}{r}$  و  $\vec{n}$  متجه واحدة الناظم على السطح  $S$ . أثبت صحة ما يلي:

$$\oint_S d\vec{s} \times (f \cdot \nabla f) = \vec{0}, \quad s = \iiint_{\mathcal{R}} (\nabla \cdot \vec{n}) dV, \quad \mathcal{W} = \oint_S \vec{r} \cdot d\vec{s}$$

$$\oint_S \frac{\partial g}{\partial n} d\vec{s}, \quad \oint_S x \vec{r} \cdot d\vec{s} = \iiint_{\mathcal{R}} 4x dV, \quad \oint_S f d\vec{s} = \iiint_{\mathcal{R}} \nabla f dV$$

10. ليكن  $S$  سطحاً موجهاً ومغلقاً ومحدوداً وأملساً، يحيط بمنطقة فراغية  $\mathcal{R}$ . وليكن  $f$  دالة توافقية، بحيث  $f \in C^2(\mathcal{R})$ . أثبت أن:

$$\iint_S d\vec{s} = \vec{0} \quad , \quad \iint_S \nabla f \cdot d\vec{s} = 0 \quad , \quad \iint_S d\vec{s} \times \nabla f = \vec{0}$$

11. ليكن  $S$  سطحاً موجهاً ومغلقاً ومحدوداً وأملساً، يحيط بمنطقة فراغية  $\mathcal{R}$ . وليكن  $f$  و  $g$  دالتين معرفتين على  $\mathcal{R}$ ، بحيث  $f, g \in C^2(\mathcal{R})$ . أثبت أن:

$$\iint_S (f \nabla g - g \nabla f) \cdot d\vec{s} = \iiint_{\mathcal{R}} (f \nabla^2 g - g \nabla^2 f) dV$$





## الفصل الثامن

### مفاهيم أساسية في المعادلات التفاضلية العادية

- 8.1 تعريف المعادلة التفاضلية
  - 8.2 تصنيف المعادلات التفاضلية
  - 8.3 حل المعادلة التفاضلية العادية
  - 8.4 تكوين المعادلات التفاضلية العادية
- تمارين الفصل الثامن



## مفاهيم أساسية في المعادلات التفاضلية العادية

### 8.1 تعريف المعادلة التفاضلية

نسمي معادلة تفاضلية عادية، كل معادلة تحوي متغيراً مستقلاً واحداً  $x$ ، ودالة مجهولة  $y(x)$  ومشتقات هذه الدالة بالنسبة للمتغير، و عليه، فإن المعادلة التفاضلية تكتب كما يلي:

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad ; \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

نورد فيما يلي، بعض الأمثلة على المعادلات التفاضلية العادية:

$$(i) \quad (3x^2 + 2y)dx + (ye^x \sin y)dy = 0$$

$$(ii) \quad y'(3x^2 - xy) = 0$$

$$(iii) \quad xy^3 + y'^2 = 3 \cos x$$

$$(iv) \quad x(y'')^2 + 2x^2 y''' + y'^4 \ln x = ye^x$$

$$(v) \quad e^x \cos y'' + xe^{x''} \ln y = x$$

### 8.2 تصنيف المعادلات التفاضلية

إن مرتبة المعادلة التفاضلية، هي أعلى مرتبة اشتقاق تحويها المعادلة. وعليه، فإن المعادلات (i) و (ii) و (iii) من المرتبة الأولى، والمعادلة (iv) من المرتبة الثالثة، والمعادلة (v) من المرتبة الثانية.

إذا أمكن كتابة المعادلة التفاضلية كحدودية في المشتقات  $y', y'', y''', \dots$ ، فإن أعلى درجة لأعلى مرتبة اشتقاق تحويها المعادلة تسمى درجة المعادلة التفاضلية. وعليه، فإن المعادلات (i) و (ii) و (iv) من الدرجة الأولى، والمعادلة (iii) من الدرجة الثانية، بينما درجة المعادلة (v) غير معروفة، لأنه لا يمكن التعبير عن  $e^{x''}$  كحدودية منتهية في  $y''$ .

### 8.3 حل المعادلة التفاضلية العادية

نسمي حل المعادلة التفاضلية العادية من المرتبة  $n$ ، على المجال  $I \subseteq \mathbb{R}$ ، الدالة  $y(x)$  القابلة للاشتقاق  $n$  مرة متتالية، على المجال  $I$ ، والتي تحقق هذه المعادلة من أجل جميع قيم المتغير  $x$  على هذا المجال، أي يحول المعادلة التفاضلية إلى مطابقة في  $I$ .

وهناك عدة أنواع من الحلول للمعادلة التفاضلية:

#### ١- الحل العام:

هو حل للمعادلة التفاضلية، يحوي بالإضافة إلى المتغير المستقل، عدداً من الثوابت الاختيارية المستقلة يساوي مرتبة المعادلة التفاضلية.

وإذا كان الحل العام للمعادلة التفاضلية معطى ضمناً:

$$\Phi(x, y, c_1, c_2, \dots, c_n) = 0$$

فإنه يسمى تكاملاً عاماً للمعادلة التفاضلية. وهو يمثل حزمة منحنيات في المستوى  $xOy$ ، تسمى المنحنيات المتكاملة للمعادلة التفاضلية.

ملاحظة 8.1: سنرمز، دائماً، في هذا الباب، للثوابت الاختيارية التي تنتج عن عمليات التكاملة المختلفة بالرموز  $c, c_1, c_2, \dots$ ، لذا، لن نذكر، للاختصار، بعد كل عملية مكاملة أن  $c$  أو  $c_1$  أو  $c_2 \dots$  إلخ، ثابت اختياري.

#### ٢- الحل الخاص:

هو حل للمعادلة التفاضلية، ينتج عن الحل العام لهذه المعادلة بإعطاء قيم معينة للثوابت الاختيارية. وسنرمز له بالرمز  $y_p$ . وهو يمثل، في المستوى  $xOy$ ، منحنياً تكاملياً للمعادلة التفاضلية.

من الواضح أنه يوجد عدد غير منته من الحلول الخاصة تنتج كلها من الحل العام الوحيد.

## ٢- الحل الشاذ:

هو حل للمعادلة التفاضلية لا يمكن استنتاجه من الحل العام. أي هو دالة تحقق المعادلة التفاضلية، ولكن لا يمكن الحصول عليها بإعطاء قيم معينة للشوابت الاختيارية الواردة في عبارة الحل العام. وسندرس الحلول الشاذة بالتفصيل في الفقرة 2.3.3.

نسمي عملية الحصول على جميع حلول المعادلة التفاضلية مكاملة المعادلة التفاضلية.

مثال 8.1: أثبت أن الدالة:

$$y_c = x + (x + c)^3 ; \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

تمثل حلاً عاماً للمعادلة التفاضلية:

$$y' - 1 = 3(y - x)^{2/3}$$

وأوجد حلاً خاصاً  $y_p$  لهذه المعادلة يحقق الشرط  $y = 8$ ، عندما  $x = 0$ ، ومن ثم أثبت أن الدالة  $y = x$  تمثل حلاً شاذاً لهذه المعادلة التفاضلية.

الحل: لما كانت المعادلة التفاضلية المعطاة من المرتبة الأولى والدالة المعطاة  $y$  تحوي ثابتاً اختيارياً واحداً، فإنه يكفي أن نثبت أن هذه الدالة تحقق المعادلة التفاضلية:

$$\left[1 + 3(x + c)^2\right] - 1 = 3\left[x + (x + c)^3 - x\right]^{2/3}$$

$$3(x + c)^2 = 3(x + c)^2$$

وهي صحيحة مهما تكن  $x$ . إذن، فالدالة المعطاة  $y$  تمثل حلاً عاماً للمعادلة التفاضلية.

لإيجاد الحل الخاص  $y_p$ ، الموافق للشرط المعطى، نعوض في عبارة الحل العام  $y = 8$  و  $x = 0$ ، فنجد أن  $c = 2$ . وعليه، فالحل الخاص المطلوب هو:

$$y_p = x + (x + 2)^3$$

ولإثبات أن الدالة  $y = x$  تمثل حلاً شاذاً للمعادلة التفاضلية نعوض  $y = x$ ، أي  $y' = 1$ ،

في المعادلة التفاضلية، فنجد أنها محققة، إذن  $y = x$  تمثل حلاً للمعادلة التفاضلية. ولإثبات أن هذا الحل شاذ، نفرض جديلاً أنه يتبع عن الحل العام  $y = x + c$  من أجل قيمة معينة للثابت  $c$ .

نعرض  $y = x$  في  $y'$ ، فنجد:

$$x + c = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -c$$

وهذا مرفوض، لأن  $c$  ثابت، وغير تابع لـ  $x$ . إذن، الفرض الجدي مغلوط، والدالة  $y = x$  تمثل حلاً شاذاً للمعادلة التفاضلية.

مثال 8.2: أوجد، مع الرسم، المنحنيات التكاملية للمعادلة التفاضلية:

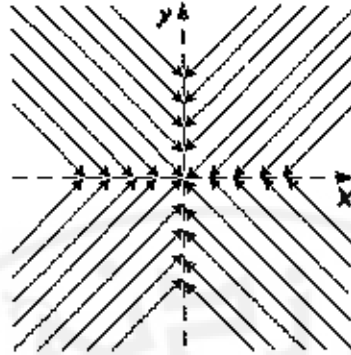
$$\frac{dy}{dx} = \frac{|xy|}{xy}$$

الحل: إن هذه المعادلة التفاضلية معرفة على كل المستوي  $xOy$  باستثناء نقاط المستقيمين  $x = 0$  و  $y = 0$ . ويمكن كتابة هذه المعادلة في ساحة تعريفها كما يلي:

$$\frac{dy}{dx} = \begin{cases} +1 & ; \quad x \cdot y > 0 \\ -1 & ; \quad x \cdot y < 0 \end{cases}$$

واضح أن الحل العام لهذه المعادلة في الربعين الأول والثالث  $(x \cdot y > 0)$ ، يعطى بالعلاقة  $y = x + c$  لأنه يحقق المعادلة  $y' = 1$ . وعليه، فالمنحنيات التكاملية لهذه المعادلة في هذين الربعين هي المستقيمات المعطاة بالمعادلة  $y = x + c$ .

وبأسلوب مشابه، فالمنحنيات التكاملية للمعادلة التفاضلية في الربعين الثاني والرابع  $(x \cdot y < 0)$ ، هي المستقيمات المعطاة بالمعادلة  $y = -x + c$ ، الشكل 8.1.



الشكل 8.1

#### 8.4 تكوين المعادلات التفاضلية العادية

تُرد كثير من المسائل الهندسية أو الميكانيكية الكهربائية أو الفيزيائية أو الكيميائية أو التقنية إلى معادلات تفاضلية. وندرس، الآن كيف تتكون بعض المعادلات التفاضلية العادية حسب منشؤها، ونعرض في الفقرات 9.4 و 10.6 و 11.6 لمسائل أخرى تُرد إلى معادلات تفاضلية عادية.

##### 8.4.1 معادلات تفاضلية منشؤها خواص هندسية

يمكن التعبير عن كثير من الخواص الهندسية لمنحنٍ بمعادلة تفاضلية، وذلك باستخدام خواص المماس أو الناقص وغيرها. فكيف هو معلوم، إن ميل المماس لمنحنٍ مستوي  $y = y(x)$  في نقطة ما منه  $P(y, x)$  هو  $y' = \frac{dy}{dx}$ ، وميل الناقص في النقطة نفسها هو  $-\frac{1}{y'}$ . مثال 8.3: أوجد معادلة المنحنى  $y = y(x)$  المار بالنقطة  $(0,1)$  ويحقق الخاصية التالية: ميل المماس في كل نقطة يساوي ضعف جداء إحداثيي تلك النقطة.

الحل: لتكن  $P(y, x)$  نقطة ما من المنحنى المطلوب. عندئذٍ، من شرط المسألة نجد:

$$y' = 2xy$$

ويمكن بسهولة، التأكد أن الدالة  $y = ce^{x^2}$  تمثل حلاً لهذه المعادلة التفاضلية، حيث  $c$  ثابت

اختياري. ولما كان المنحني يمر بالنقطة (0,1)، فإنه، وبعد التعويض في حل المعادلة نجد قيمة الثابت، وهي  $c = 1$ . وعليه، فإن معادلة المنحني المطلوب هي:

$$y = ce^{x^2}$$

#### 8.4.2 معادلات تفاضلية منشؤها ميكانيكي .

نعلم، من أبحاث الحركة، أن السرعة تعطى بمشتق دالة المسافة بالنسبة إلى الزمن، والتسارع بالمشتق الثاني. ومن أبحاث التحريك، يُعطى قانون التحريك الأساسي بالعلاقة  $\vec{F} = m\vec{a}$ ، حيث  $\vec{F}$  القوة،  $\vec{a}$  التسارع و  $m$  الكتلة.

مثال 8.4: تتحرك نقطة مادية ثقيلة، كتلتها  $m$  بحركة مستقيمة بالقوة  $F_1$ . مع العلم أن  $F_1$  تتناسب مع الزمن  $t$  الذي تقطعه النقطة من لحظة بدء الحركة. ولتكن  $F_2$  قوة مقاومة الوسط، وهي تتناسب مع سرعة الحركة  $v$ . أوجد علاقة سرعة الحركة مع الزمن.

الحل: من شروط المسألة واضح أن  $F_1 = k_1 \cdot t$  و  $F_2 = -k_2 \cdot v$ . حيث إن  $k_1$  و  $k_2$  ثابتين.

وحسب قانون التحريك الأساسي، فإن مجموع القوى  $F$ ، المؤثرة على النقطة، تساوي جداء كتلة النقطة بالتسارع:

$$F = F_1 + F_2 = k_1 \cdot t - k_2 \cdot v = m \frac{dv}{dt} \Rightarrow$$

$$m \frac{dv}{dt} = k_1 \cdot t - k_2 \cdot v$$

وهي معادلة تفاضلية عادية تحوي المتغير المستقل  $t$  والدالة المجهولة  $v$  ومشتقها.

#### 8.4.3 معادلات تفاضلية منشؤها فيزيائي

مثال 8.5: أوجد  $T$  نصف عمر تحلل مادة مشعة، الزمن اللازم لتحلل نصف الكمية.

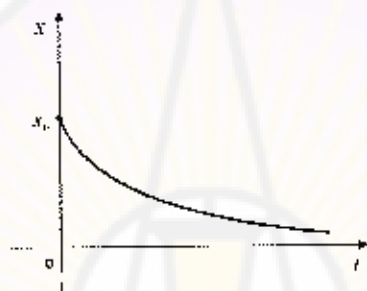


علماً أن سرعة تحليل مادة مشعة تتناسب مع كمية المادة المتحللة. ما هي نسبة تحليل المادة بعد 100 سنة إذا كان  $T = 1600$  سنة.

الحل: لنكن  $x = x(t)$  كمية المادة المشعة المتحللة في اللحظة  $t$ . ولنكن  $x(0) = x_0$  الكمية الابتدائية للمادة. لما كانت سرعة التحلل تتناسب مع كمية المادة المتحللة، فإن:

$$\frac{dx}{dt} = -k \cdot x \quad (i)$$

حيث  $k > 0$  ثابت التناسب، والإشارة سالبة لأن كتلة المادة المشعة تناقص مع تزايد الزمن، الشكل 8.2.



الشكل 8.2

ويمكن، بسهولة، التأكد أن الدالة  $x = ce^{-kt}$  تمثل حلاً للمعادلة (i).

ولما كان  $x(0) = x_0$ ، فإن قانون تغير الكمية مع الزمن هو

$$x(t) = x_0 e^{-kt} \quad (ii)$$

ومنه، فالزمن  $T$  اللازم لتحلل نصف الكمية، حيث  $x = \frac{x_0}{2}$ ، عندما  $t = T$ ، يعطى بالعلاقة:

$$\frac{x_0}{2} = x_0 e^{-kT} \Rightarrow T = \frac{\ln 2}{k}$$

وأضح أن هذا الزمن لا يتعلق بالكمية الابتدائية للمادة. ويكون ثابت التناسب  $k = \frac{\ln 2}{T}$ .

نعوض قيمة  $k$  في (ii) فنجد:

$$x(t) = x_0 e^{\left(\frac{\ln 2}{T}\right)t} = x_0 2^{-\left(\frac{t}{T}\right)}$$

$$\frac{x(100)}{x_0} = e^{-0.043} = 0.958 \text{ أي أن } x(100) = x_0 e^{-\frac{100}{1600}}$$

أي أنه بعد 100 سنة يتحلل 4.2% من الكمية الابتدائية للمادة.

#### 8.4.4 معادلات تفاضلية تنشأ عن حذف الثوابت الاختيارية (الوسطاء)

إذا وجدت علاقة بين متغير مستقل ودالة في هذا المتغير و  $n$  من الثوابت الاختيارية المستقلة:

$$\phi(x_1, y, c_1, c_2, \dots, c_n) = 0 \quad (*)$$

فإنه يمكن تكوين معادلة تفاضلية عادية من المرتبة  $n$ ، تكون الدالة  $y = g(x)$  المعرفة بالعلاقة (\*) حلاً عاماً لها. وذلك كما يلي: نشق العلاقة (\*) مرة متتالية بالنسبة إلى المتغير المستقل  $x$ ، فنحصل، بالإضافة للعلاقة (\*)، على  $(n+1)$  علاقة، تحتوي الثوابت والمتغير ومشتقات الدالة حتى المرتبة  $n$ . نوجد قيم الثوابت، بحل  $n$  من هذه العلاقات بالنسبة إلى المتغير والدالة ومشتقاتها. ثم نعوض الناتج في العلاقة المتبقية، فنحصل على معادلة تفاضلية عادية من المرتبة  $n$ .

مثال 8.6: أوجد معادلة تفاضلية تكون الدالة التالية حلاً لها:

$$y = Ae^{-x} + Be^{2x}$$

الحل: نشق عبارة  $y$  مرتين متتاليتين بالنسبة إلى المتغير المستقل  $x$ ، نجد:

$$y' = -Ae^{-x} + 2Be^{2x} \text{ و } y'' = Ae^{-x} + 4Be^{2x}$$

نحل جملة المعادلتين الجبريتين الأخيرتين بالنسبة إلى الثابتين  $A$  و  $B$  فنجد:

$$B = \frac{e^{-2x}}{6} (y' + y'') \text{ و } A = \frac{e^{-x}}{3} (y'' - 2y')$$

نعوض قيم  $A$  و  $B$  في عبارة  $y$ ، فنحصل بعد الترتيب على المعادلة:

$$2y = y'' - y'$$

وهي المعادلة التفاضلية المطلوبة.



### تمارين الفصل الثامن

1. أوجد المعادلة التفاضلية للدوائر التي نصف قطرها يساوي الواحد ويقع مركزها على المستقيم  $y = 2x$ .
2. أوجد المعادلة التفاضلية للقطع المكافئ، والتي محاورها متوازي محور السينات وتمس في وقت واحد، المستقيمتين  $y = x$  و  $y = 0$ .
3. أوجد المعادلة التفاضلية لمجموعة الدوائر في المستوى  $xOy$  والتي تمس محور السينات في مبدأ الإحداثيات.
4. ليكن  $a$  ثابت اختياري، أوجد المعادلة التفاضلية لمجموعة المنحنيات المعطاة وسيطياً:  

$$\{x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)\}$$
5. أوجد المعادلة التفاضلية لمجموعة منحنيات القلب (الكارديويد):  $\rho = a(1 + \cos \phi)$ ، حيث  $a$  ثابت اختياري.
6. تحقق من أن الدالة  $y$  هي حل للمعادلة التفاضلية المذكورة بجانبها:

- 1)  $y = x \int_0^x \sin t^2 dt$  ;  $xy' - y = x^2 \sin x^2$
- 2)  $y = \arctan(x + y) + c$  ;  $(\forall c \in R)$  ;  $(x + y)^2 y' = 1$
- 3)  $y = Ae^{Bx}$  ;  $(\forall A, B \in R)$  ;  $yy'' = (y')^2$
- 4)  $y' = x + c\sqrt{1 + x^2}$  ;  $(\forall x \in R)$  ;  $(xy + 1)dx - (x^2 + 1)dy = 0$

7. أوجد، مع الرسم، المنحنيات التكاملية للمعادلات التفاضلية:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x + |x|}{y + |y|} ; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x - y}{|x - y|} ; \quad \frac{dy}{dx} = \begin{cases} 0 & ; y \neq x \\ 1 & ; y = x \end{cases}$$

8. عين الحل العام والخاص والشاذ (إن وُجد) للمعادلة التفاضلية  
 $(y')^2 - yy' + 4e^x = 0$  من بين الدوال:

1)  $y = 2(e^x + 1)$

3)  $y = \pm 4e^{x/2}$

2)  $y = ce^{2x} + 2c$

4)  $y = ce^x + \frac{4}{c}$

9. عين الحل العام والخاص والشاذ (إن وُجد) للمعادلة التفاضلية:

$$3xy'^2 - 6yy' + x + 2y = 0$$

من بين الدوال:

1)  $y' = \frac{3ex + x^2 + e^2}{3e}$

3)  $y = x^2 + 1$

2)  $y = -\frac{x}{3}$

4)  $y = \frac{x^2 + 1}{3} + x$

10. برهن أنه إذا كان  $a$  و  $b$  ثابتين اختياريين، فإن للمعادلتين التفاضليتين:

$$y + y' = 2ae^x \quad \text{و} \quad y - y' = 2be^{-x}$$

حل عام مشترك.



## الفصل التاسع

### المعادلات التفاضلية العادية من المرتبة الأولى

9.1 المعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى المحلولة بالنسبة إلى المشتق

9.2 المعادلات التفاضلية غير المحلولة بالنسبة للمشتق

9.3 مسألة القيمة الابتدائية - مبرهنات الوجود والوحدانية

9.4 بعض التطبيقات المعادلات التفاضلية العادية من المرتبة الأولى

تمارين الفصل التاسع





## المعادلات التفاضلية العادية من المرتبة الأولى

تكتب المعادلة التفاضلية العادية من المرتبة الأولى، كما يلي:

$$F(x, y, y') = 0$$

حيث  $F$  علاقة بين المتغير المستقل  $x$ ، ودالة في هذا المتغير  $y(x)$ ، ومشتق هذه الدالة بالنسبة إلى المتغير.

إذا أمكن حل هذه المعادلة بالنسبة إلى  $y'$ ، أي أمكن عزل  $y'$  من المعادلة، فإنها تسمى معادلة تفاضلية محلولة بالنسبة إلى المشتق، أما إذا تعذر ذلك، فإنها تسمى معادلة غير محلولة بالنسبة إلى المشتق.

### 9.1 المعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى المحلولة بالنسبة إلى المشتق

هي المعادلة من النمط:

$$y' = f(x, y) \quad (9.1)$$

وتعطى أحياناً كما يلي:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (9.2)$$

ولما كان  $y' = \frac{dy}{dx}$ ، فإنه يمكن كتابة المعادلة (9.1) كما يلي:

$$x' = g(x, y) \quad ; \quad g(x, y) = \frac{1}{f(x, y)}, \quad x' = \frac{dx}{dy}$$

ويكون، في هذه الحالة،  $y$  المتغير و  $x$  الدالة. لذا، ليس من الضروري أن نذكر في المعادلة (9.1) المتغير أو الدالة، وسنفترض أن  $x$  و  $y$  متغيران. وعليه، فإن أي معادلة تفاضلية من المرتبة الأولى تحوي متغيرين.

ندرس، الآن، أربع حالات خاصة يمكن فيها إيجاد الحل العام للمعادلة التفاضلية العادية من المرتبة الأولى المحلولة بالنسبة إلى المشتق.

### 9.1.1 المعادلات التفاضلية منفصلة المتغيرات

نقول عن المعادلة التفاضلية العادية إنها منفصلة المتغيرات، إذا أمكن كتابتها كما يلي:

$$f(x)dx + g(y)dy = 0$$

ونحصل على الحل العام لها بالمكاملة مباشرة:

$$\int f(x)dx + \int g(y)dy = c$$

حيث  $c$  ثابت اختياري (ثابت المكاملة).

يمكن رد المعادلات التفاضلية من النمط:

$$f_1(x) \cdot g_1(y)dx + f_2(x) \cdot g_2(y)dy = 0$$

إلى معادلة منفصلة المتغيرات، وذلك بضرب طرفيها بالمقدار  $\mu = 1/[f_1(x) \cdot g_2(y)]$ ، والذي سنسميه، لاحقاً، عامل تكميل. مع الملاحظة أنه عند ضرب طرفي هذه المعادلة بالمقدار  $\mu$ ، فإنه يمكن أن، نفقد أو نكسب بعض الحلول، وهي الجذور الحقيقية للمعادلة  $f_1(x) \cdot g_2(y) = 0$  أو نقاط انقطاع  $\mu$ ، فإذا كانت هذه الحلول موجودة في عبارة الحل العام، من أجل قيم معينة للثابت الاختياري  $c$ ، فإنها حلول خاصة، أما إذا كانت هذه الحلول غير متضمنة في عبارة الحل العام، مهما تكن قيمة الثابت الاختياري  $c$ ، فإنها حلول شاذة.

- كما يمكن رد المعادلات التفاضلية من النمط:

$$y' = f(ax + by + c)$$

إلى معادلة منفصلة المتغيرات، باستخدام التحويل  $z = ax + by + c$ .

- وكذلك، ترد المعادلات التفاضلية من النمط:

$$xf(x \cdot y)dx + yg(x \cdot y)dy = 0$$

إلى معادلة منفصلة المتغيرات باستخدام التحويل  $z = x \cdot y$ .

مثال 9.1: أوجد الحل العام للمعادلة:  $(x+1)dx + (y-2)dy = 0$ .

الحل: واضح أن المعادلة منفصلة المتغيرات، لذا نكامل مباشرة للحصول على الحل العام:

$$\frac{(x+1)^2}{2} + \frac{(y-2)^2}{2} = c_1 \Rightarrow (x+1)^2 + (y-2)^2 = c$$

مثال 9.2: أوجد الحل العام للمعادلة:  $x^2(y+1)dx + (x^3-1)(y-1)dy = 0$ .

الحل: نضرب طرفي المعادلة بالمقدار  $\mu = 1/[(x^3-1)(y+1)]$ ، فنحصل على المعادلة

$$\frac{x^2}{x^3-1}dx + \frac{y-1}{y+1}dy = 0 \quad ; \quad (x^3-1) \cdot (y+1) \neq 0$$

وبالمكاملة نجد

$$\frac{1}{3} \ln|x^3-1| + y - 2 \ln|y+1| = c$$

وفي الحالة  $(x^3-1)(y+1) = 0$ ، نجد  $y = -1$  وهو حل خاص ينتج عن الحل العام بإعطاء قيم معينة للثابت  $c$ .

مثال 9.3: أوجد الحل العام للمعادلة:  $y' = \frac{1}{2x+y+5} - 2$ .

الحل: نفرض  $z = 2x + y + 5$ ، ومنه  $z' = z' - 2$ ، نعوض في المعادلة:

$$z' - 2 = \frac{1}{z} - 2 \Rightarrow z dz = dx$$

وبالمكاملة نحصل على التكامل العام:

$$x + c = \frac{z^2}{2} \Rightarrow 2(x+c) = (2x+y+5)^2$$

مثال 9.4: أوجد الحل العام للمعادلة:  $(1-xy+x^2y^2)dx + (x^3y-x^2)dy = 0$ .

الحل: نكتب المعادلة كما يلي:

$$y(1 - xy + x^2 y^2) dx + x(x^2 y^2 - xy) dy = 0$$

نعرض  $z = x \cdot y$  في المعادلة، فنجد:

$$\frac{z}{x}(1 - z + z^2)dx + x(z^2 - z) \frac{x dz - z dx}{x^2} = 0$$

وبعد الاصطلاح نحصل على المعادلة:

$$(z - 1) dz + \frac{dx}{x} = 0$$

وبالمكاملة نحصل على التكامل العام:

$$\ln|x| = z - \frac{z^2}{2} + c \quad \Rightarrow \quad \ln|x| = xy - \frac{x^2 y^2}{2} + c$$

### 9.1.2 المعادلات التفاضلية المتجانسة

نقول إن الدالة  $F(x, y)$  متجانسة من الدرجة  $k$ ، إذا تحققت المساواة:

$$F(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k F(x, y) \quad ; \quad \forall \lambda$$

فمثلاً، الدوال  $\frac{x^2 + xy}{x - y}$  و  $\frac{x - y}{x + y}$  و  $x^{k-1}y + y^k$  هي دوال متجانسة من الدرجات

0 و 1 و  $k$ ، بالترتيب.

إذا كانت الدالة  $f(x, y)$  متجانسة من الدرجة صفر، فإنها تكتب كما يلي:

$$f(x, y) = f\left(1, \frac{y}{x}\right) = g\left(\frac{y}{x}\right)$$

وذلك، بأخذ  $\lambda = 1/x$ .

نسمي المعادلة التفاضلية (9.2) متجانسة، إذا كانت الدالة  $f(x, y)$  متجانسة من الدرجة صفر. أي إذا كانت المعادلة من النمط:

$$y' = g\left(\frac{y}{x}\right)$$

وتكون المعادلة التفاضلية (9.2) متجانسة، إذا كانت الدالتان  $M(x, y)$  و  $N(x, y)$  متجانستين من الدرجة نفسها.

وتصبح المعادلة المتجانسة منفصلة المتغيرات باستخدام التحويل  $y = x \cdot z$  حيث  $z$  دالة جديدة في  $x$ . وباشتقاق عبارة التحويل، بالنسبة إلى  $x$ ، نجد:

$$\frac{dy}{dx} = z + x \frac{dz}{dx}$$

نعوض في المعادلة التفاضلية:

$$z + x \frac{dz}{dx} = g(z) \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{x} = \frac{dz}{g(z) - z}$$

وهي معادلة منفصلة المتغيرات، يعطى التكامل العام لها بالعلاقة:

$$x = c \cdot e^{\int \frac{dz}{g(z) - z}} = c \cdot \exp \left[ \int \frac{dz}{g(z) - z} \right]$$

كذلك، من الممكن أن تُرد المعادلة من النمط:

$$y' = F\left(\frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}\right) \quad (9.3)$$

إلى معادلة متجانسة، باستخدام التحويل الخطي  $x = X + x_0$  و  $y = Y + y_0$  حيث  $(x_0, y_0)$  نقطة تقاطع المستقيمين:

$$ax + by + c = 0 \quad \text{و} \quad a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

ويعني هذا التحويل هندسياً - سحب المحاور الإحداثية إلى النقطة  $(x_0, y_0)$ .

أما إذا كان المستقيمان متوازيين، أي أن  $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} \neq \frac{c}{c_1}$ ، فإن التحويل

$z = ax + by + c$  يرد المعادلة (9.3) إلى معادلة منفصلة المتغيرات.

مثال 9.5: أوجد الحل العام للمعادلة:  $y' = \frac{y + \sqrt{x^2 - y^2}}{x}$

الحل: واضح أن المعادلة المعطاة متجانسة، نستخدم التحويل  $y = x \cdot z$ ، فنجد

$$z + x \frac{dz}{dx} = z + \frac{|x|}{x} \sqrt{1 - z^2} \Rightarrow x \frac{dz}{dx} = (\text{sign } x) \cdot \sqrt{1 - z^2}$$

واضح أن الدالة  $z = \pm 1$  هي حلول للمعادلة المعطاة، أما الحلول الأخرى فنحصل عليها من العلاقة:

$$\frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} = \frac{\text{sign } x}{x} dx$$

وبالمكاملة نجد:  $\arcsin z = (\text{sign } x) \ln|x| + c$

أي أن حلول المعادلة التفاضلية تعطى بالعلاقات:

$$\arcsin \frac{y}{x} = (\text{sign } x) \ln|x| + c$$

$z = \pm 1$  حلول شاذة تقابل  $y = -x$  و  $y = x$

مثال 9.6: أوجد الحل العام للمعادلة:  $y' = 2 \left( \frac{y+1}{x+y-2} \right)^2$

الحل: لما كانت  $(3, -1)$  نقطة تقاطع المستقيمين:

$$y+1=0 \quad \text{و} \quad x+y-2=0$$

لذا نستخدم التحويل  $y = Y - 1$  و  $x = X + 3$ ، فنجد:

$$\frac{dY}{dX} = 2 \frac{2Y^2}{(X+Y)^2}$$

وهي معادلة متجانسة، لحلها نفرض  $Y = u \cdot X$ ، حيث  $u$  دالة في  $X$ :

$$X \frac{du}{dX} + u = \frac{2u^2}{(1+u)^2} \Rightarrow X \frac{du}{dX} + \frac{u+u^3}{(1+u)^2} = 0$$

بالإصلاح والمكاملة نجد:

$$\ln|u| + 2 \arctan u + \ln|X| = \ln c$$

أي أن

$$uX = c \cdot \exp[-2 \arctan u]$$

وعليه، فإن التكامل العام يُعطى بالعلاقة:

$$y+1 = c \cdot \exp\left[-2 \arctan\left(\frac{y+1}{x-3}\right)\right]$$

$$\text{مثال 9.7: أوجد الحل العام للمعادلة: } 3y' = \left(\frac{3x-9y+1}{x-3y} - 3\right)^{-1/2}$$

الحل: واضح أن المستقيمين  $3x-9y+1=0$  و  $x-3y=0$  متوازيان. لذا نفرض أن  $z = x-3y$ ، ومنه  $z' = 1-3y'$ . نعوض في المعادلة المعطاة، فنجد:

$$1-z' = \left(\frac{3z+1}{z} - 3\right)^{-1/2} \Rightarrow 1-z' = \sqrt{z} \Rightarrow dx = \frac{dz}{1-\sqrt{z}}$$

وهي معادلة منفصلة المتغيرات. لحلها نفرض  $z = t^2$ ، وبالتعويض والمكاملة نجد:

$$-\frac{x}{2} + c = t + \ln|1-t| \Rightarrow -\frac{x}{2} + c = \sqrt{x-3y} - \ln|1-\sqrt{x-3y}|$$

ملحوظة 9.1: يمكن رد بعض المعادلات التفاضلية إلى معادلات متجانسة بواسطة التحويل  $y = z^m$ ، حيث  $z$  دالة في  $x$ ، ويكون  $m$  مجهول غالباً. ولتعيينه نعوض هذا التحويل في المعادلة التفاضلية، وباشتراط أن تكون المعادلة متجانسة نعين قيمة  $m$ ، إن كان ذلك ممكناً.

ويكون التحويل  $y = t \cdot x^m$  مناسباً لردّها لمعادلة منفصلة المتغيرات، حيث  $t$  دالة في  $x$ . أما إن لم يكن ذلك ممكناً، فإن المعادلة لا يمكن تحويلها إلى معادلة متجانسة بهذه الطريقة.

مثال 9.8: هل يمكن رد المعادلة التالية، لمعادلة تفاضلية متجانسة، بهذه الطريقة؟

ومن ثم أوجد الحل العام لها، إن كان ذلك ممكناً.

$$y' = \frac{4x^6 - y^4}{2x^4 y}$$

الحل: نعوض  $y = z^m$  في المعادلة المعطاة، فنجد

$$2mx^4 \cdot z^{2m-1} \cdot z' = 4z^6 - z^{4m}$$

وتكون هذه المعادلة متجانسة في حالة تساوي درجات كل حدودها، أي عند تحقق المتساويات

$$4 + (2m - 1) = 4m = 6$$

وهي صحيحة من أجل  $m = 3/2$ . وعليه، يمكن جعل المعادلة التفاضلية المعطاة متجانسة باستخدام التحويل  $y = z^{3/2}$ ، ومباشرة باستخدام التحويل  $y = t \cdot x^{3/2}$  لتصبح المعادلة منفصلة المتغيرات:

$$\frac{dt}{dx} x^{3/2} + \frac{3}{2} t x^{1/2} = \frac{4x^6 - t^4 x^6}{2x^4 t x^{3/2}}$$

وأصبح أن  $t = \pm 1$  حلول لهذه المعادلة، نوجد باقي الحلول من المعادلة:

$$\frac{2t dt}{(t^2 + 4)(t^2 - 1)} + \frac{dx}{x} = 0$$

وبالتكامل نجد:

$$\ln \left| \frac{t^2 - 1}{t^2 + 4} \right| + 5 \ln |x| = \ln c \Rightarrow \frac{t^2 - 1}{t^2 + 4} x^5 = c$$

ولما كان  $y = t \cdot x^{3/2}$ ، فإن التكامل العام للمعادلة المعطاة:



$$\frac{y^3 - x^4}{y^2 + 4x^3} x^5 = c$$

ويقابل العبارة  $t = \pm 1$ ، الحلول  $y = \pm x^{3/2}$  وهي حلول خاصة.

### 9.1.3 المعادلات التفاضلية التامة - عوامل التكميل

نقول عن المعادلة (9.2) إنها تامة، إذا كان طرفها الأيسر عبارة عن تفاضل تام أو كلي لدالة  $u(x, y)$ ، أي إذا كان:

$$du(x, y) = M(x, y)dx + N(x, y)dy$$

وعليه، تكتب المعادلة (9.2) كما يلي  $du(x, y) = 0$ .

ومنه، فإن التكامل العام للمعادلة التامة هو  $u(x, y) = c$ ، حيث  $c$  ثابت اختياري.

فمثلاً، المعادلة  $ydx + xdy = 0$  معادلة تامة، لأنه يمكن أن نكتب كما يلي  $du(x, y) = 0$  ومنه، فالتكامل العام لها هو  $x \cdot y = c$ .

مبرهنة 9.1: يلزم ويكفي لكي تكون المعادلة (9.2) تامة، هو أن يتحقق الشرط:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad (9.4)$$

حيث  $M$  و  $N$  و  $\frac{\partial M}{\partial y}$  و  $\frac{\partial N}{\partial x}$  دوال مستمرة.

الإثبات:

لنزوم الشرط: بفرض أن المعادلة (9.2) تامة، عندئذ توجد الدالة  $u(x, y)$  بحيث:

$$du(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = Mdx + Ndy$$

أي أن:

$$M = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (i) \quad \text{و} \quad N = \frac{\partial u}{\partial y} \quad (ii)$$

وباشتقاق المعادلة (i) بالنسبة إلى  $x$  والمعادلة (ii) بالنسبة إلى  $y$ ، نجد:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial M}{\partial y} \quad \text{و} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

ولما كانت الدالتان  $\frac{\partial M}{\partial y}$  و  $\frac{\partial N}{\partial x}$  مستمرتين، فإن الدالتين  $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$  و  $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$  مستمرتان أيضاً، أي أنهما متساويتين. وعليه، فالشرط (9.4) محقق.

كفاية الشرط: لنفرض أن الشرط (9.4) محقق. ولنبحث عن الدالة  $u(x, y)$  بحيث يكون تفاضلها التام مساوياً للطرف الأيسر من المعادلة (9.2) أي، المحققة للعلاقين (i) و (ii).

نكامل المعادلة (i) بالنسبة إلى  $x$ :

$$u(x, y) = \int M(x, y) dx + c$$

حيث  $c$ ، عموماً، دالة في  $y$ . أي أن  $c = c(y)$ . لنبين، الآن أنه من الممكن دائماً اختيار  $c(y)$  بحيث تكون المعادلة (ii) محققة.

نعوض قيمة  $u$  التي حصلنا عليها في المعادلة (ii):

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[ \int M(x, y) dx + c(y) \right] = N(x, y)$$

أي أن:

$$c'(y) = N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) dx$$

إذن، يمكن إيجاد  $c(y)$  إذا كان الطرف الأيمن في العلاقة الأخيرة يتعلق فقط بـ  $y$ . أي عندما يكون

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) dx \right] = 0 \quad (9.5)$$

أو

$$\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) dx \right] = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \int M(x, y) dx \right] = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}$$

ويستج من ذلك، أن العلاقة (9.5) تتحقق فقط عندما تتحقق العلاقة (9.4)، وهو المطلوب.

إن طريقة إثبات كفاية الشرط تبين كيفية إيجاد الحل العام للمعادلة التفاضلية التامة.

مثال 9.9: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$(y \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} y) dx + (x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x) dy = 0$$

الحل: واضح أن هذه المعادلة تامة، لأن:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (y \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} y) = \operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x) = \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x$$

وهما متساويان، فالطرف الأيسر للمعادلة التفاضلية، عبارة عن تفاضل تام لدالة  $u(x, y)$ .

وعليه، فإن

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M = y \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} y \quad (i)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N = x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \quad (ii)$$

تكامل (i) بالنسبة إلى  $x$ ، فنجد

$$u(x, y) = \int (y \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} y) dx + \varphi(y) = y \operatorname{sh} x + x \operatorname{sh} y + \varphi(y)$$

نعوض في (ii):

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x \cosh y + \sinh x = \frac{\partial}{\partial y} [y \sinh x + x \cosh y + \varphi(y)] = \sinh x + x \cosh y + \varphi'(y)$$

ومنه، فإن  $\varphi'(y) = 0$ ، أي  $\varphi(y) = c_1$ ، وعليه، فإن

$$u(x, y) = y \sinh x + x \cosh y + c_1 = c_2$$

فالتكامل العام للمعادلة المفروضة هو:

$$y \sinh x + x \cosh y = c$$

### عامل التكامل

نقول عن الدالة  $\mu(x, y)$ ، إنها عامل تكامل للمعادلة التفاضلية (9.2)، إذا كانت المعادلة التفاضلية، الناتجة عنها بضرب طرفيها بهذه الدالة، تامة.

ولما كانت المعادلة الناتجة بعد الضرب بعامل التكامل  $\mu(x, y)$ :

$$(\mu M)dx + (\mu N)dy = 0 \quad (9.6)$$

تامة، فإن

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$$

أي أن

$$\frac{1}{\mu} \left( M \frac{\partial \mu}{\partial y} - N \frac{\partial \mu}{\partial x} \right) = \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \quad (9.7)$$

أو

$$M \frac{\partial \ln|\mu|}{\partial y} - N \frac{\partial \ln|\mu|}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \quad (9.8)$$

وهكذا، نكون قد حصلنا على معادلة تفاضلية جزئية في التابع المجهول  $\mu$  وحلها ليس أسهل أبداً من حل المعادلة التفاضلية الأصلية. وهذا يعني أن إيجاد عامل التكامل، في الحالة العامة،

ليست عملية سهلة أو ممكنة دوماً. لذا نبحث عن حل خاص  $\mu$  للمعادلة (9.8)، بحيث تكون  $\mu$  دالة بسيطة لمضمون وحيد.

١- عامل التكميل دالة في المتغير  $x$  فقط:  $\mu = \mu(x)$

لما كان  $\mu$  دالة في  $x$  فقط، فإن المعادلة (9.8) تكتب كما يلي:

$$\frac{d \ln|\mu|}{dx} = \frac{M'_x - N'_x}{N}$$

ولما كان الطرف الأيسر دالة في المتغير  $x$  فقط، فإن الطرف الأيمن يجب أن يكون كذلك. ولنرمز له بالرمز  $f(x)$ ، أي أن:

$$\frac{d \ln|\mu|}{dx} = f(x)$$

ومنه، فإن

$$\mu(x) = \exp\left[\int f(x)dx\right] \quad (9.9)$$

٢- عامل التكميل دالة في المتغير  $y$  فقط:  $\mu = \mu(y)$

لما كان  $\mu$  دالة في  $y$  فقط، فإن المعادلة (9.8) تكتب كما يلي:

$$\frac{d \ln|\mu|}{dy} = \frac{N'_x - M'_x}{M}$$

ولما كان الطرف الأيسر دالة في المتغير  $y$  فقط، فإن الطرف الأيمن كذلك، ولنرمز له بالرمز  $g(y)$ ، أي أن

$$\frac{d \ln|\mu|}{dy} = g(y)$$

ومنه، فإن

$$\mu(y) = \exp\left[\int g(y)dy\right] \quad (9.10)$$

٢- عامل التكميل دالة في  $z: \mu = \mu(z)$  ، حيث  $\Sigma = \Sigma(x, y)$  دالة معلومة في  $x$  و  $y$ .  
 لما كان  $\mu = \mu(z) = \mu(x, y)$  فإن

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{\partial \mu}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \quad \text{و} \quad \frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}$$

نعوض في المعادلة (9.7) ، فنجد:

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial z} \left( M \frac{\partial z}{\partial y} - N \frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}$$

أي

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial z} = \frac{N'_x - M'_y}{M \cdot z'_y - N \cdot z'_x}$$

فإذا كان الطرف الأيمن دالة في المتغير  $z$  فقط، فإن الطرف الأيسر كذلك. وعليه، فإن للمعادلة (9.2) عامل تكميل يُعطى بالعلاقة:

$$\mu(z) = \exp \left[ \int \frac{N'_x - M'_y}{M \cdot z'_y - N \cdot z'_x} dz \right]$$

إذن، لإيجاد عامل تكميل للمعادلة التفاضلية غير التامة، يجب أن نفترض، أولاً، شكلاً معيناً للدالة  $z$ ، كأن نفرض  $z = x$  أو  $z = y$  أو  $z = x + y$  أو  $z = x \cdot y$  أو  $z = x/y$ ... إلخ.  
 وباستثناء الحالات التي يكون فيها للدالة  $z$  شكل بسيط، فقد لا نصل لنتيجة.

فإذا كان  $z = x$  نحصل على (9.9)، وإذا كان  $z = y$  نحصل على (9.10)، أما إذا كان  $z = x + y$  فإن عامل التكميل هو:

$$\mu(z) = \exp \left[ \int \frac{N'_x - M'_y}{M - N} dz \right]$$

وإذا كان  $z = x \cdot y$  فإن عامل التكميل هو:

$$\mu(z) = \exp \left[ \int \frac{N'_x - M'_y}{x \cdot M - y \cdot N} dz \right]$$

ملحوظة 9.2: يمكن إهمال ثابت التكامل الاختياري لدى حساب عامل التكميل، لأنه يكافئ ضرب المعادلة التفاضلية بثابت موجب.

ملحوظة 9.3: إن ضرب طرفي المعادلة (9.2) بعامل التكميل  $\mu(x, y)$  قد يفقدها أو يكسبها بعض الحلول، عندما يكون  $\mu = 0$  أو  $1/\mu = 0$ ، أي أن مجموعتا حلول المعادلتين (9.2) و (9.6) ليستا، بالضرورة، متطابقتين.

ملحوظة 9.4: إذا وُجد للمعادلة التفاضلية عامل تكميل  $\mu$  و  $\lambda$  مستقلين خطياً، فإن الحل العام لهذه المعادلة التفاضلية يُعطى بالعلاقة  $\lambda = c \cdot \mu$ ، حيث  $c$  ثابت اختياري.

فمثلاً، المعادلة  $y dx + x dy = 0$  تامة، أي أن  $\lambda = 1$  عامل تكميل لها. والمعادلة  $\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = 0$  تامة، وهي تنتج من المعادلة السابقة بضرب طرفيها بالمقدار  $\mu = 1/xy$ . إذن،  $\mu = 1/xy$  عامل تكميل آخر للمعادلة الأصلية ولما كان  $\mu$  و  $\lambda$  مستقلين خطياً، فإن الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة يعطى بالعلاقة:

$$\frac{c}{xy} = 1 \Rightarrow y = \frac{c}{x}$$

ملحوظة 9.5: إن للمعادلة التفاضلية عدد غير منته من عوامل التكميل. وهذا واضح لأنه إذا كان  $\mu$  عامل تكميل للمعادلة التفاضلية، وكان  $u = c$  التكامل العام لهذه المعادلة، فإنه، وفقاً للملاحظة السابقة، يكون للمعادلة التفاضلية عامل تكميل من النمط  $\lambda = \mu \cdot f(u)$ ، حيث  $f$  دالة اختيارية في  $u$ .

ملحوظة 9.6: إذا كانت المعادلة (9.2) متجانسة وكان  $x \cdot M - y \cdot N \neq 0$ ، فإن  $\mu = \frac{1}{x \cdot M - y \cdot N}$  عامل تكميل لهذه المعادلة.

مثال 9.10: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$(3x^2 \cos y - \sin y) \cos y \, dx - x \, dy = 0$$

الحل: نحسب الفرق:

$$M'_y - N'_x = -2(3x^2 \cos y - \sin y) \sin y$$

ولما كانت هذه العبارة لا تساوي الصفر، فالمعادلة التفاضلية غير تامة، ولكن نلاحظ أن

$$\frac{N'_x - M'_y}{M} = 2 \tan y$$

أي أن للمعادلة عامل تكميل يتبع  $\frac{1}{M}$  فقط، يعطى بالعلاقة:

$$\mu(y) = \exp\left[\int 2 \tan y \, dy\right] = \exp[-2 \ln|\cos y|] = \frac{1}{\cos^2 y}$$

نضرب طرفي المعادلة المعطاة بعامل التكميل هذا، فتصبح:

$$(3x^2 - \tan y) \, dx - \frac{x}{\cos^2 y} \, dy = 0$$

وهي معادلة تامة، ويكون الطرف الأيسر تفاضلاً تاماً لدالة  $u(x, y)$ ، بحيث يكون

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - \tan y \quad (i) \quad \text{و} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{\cos^2 y} \quad (ii)$$

تكامل المعادلة (i) بالنسبة إلى  $x$ :

$$u(x, y) = -x \int \frac{dy}{\cos^2 y} = -x \tan y + \phi(x)$$

نعوض في المعادلة (ii):

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = 3x^2 - \tan y = -\tan y + \phi'(x)$$

أي أن  $\phi'(x) = 3x^2$ ، ومنه  $\phi(x) = x^3 + c_1$ .



وعليه، فإن:

$$u(x, y) = x^3 - x \tan y + c_1 = c_2$$

ويكون التكامل العام للمعادلة المفروضة هو:

$$x^3 - x \tan y = c$$

مثال 9.11: أوجد الحل العام للمعادلة:  $\left(1 - \frac{x}{y}\right)dx + \left(2xy + \frac{x}{y} + \frac{x^2}{y^2}\right)dy = 0$

الحل: واضح أن المعادلة غير تامة، لأن  $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ ، ولكن

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{-\left(2y + \frac{1}{y} + \frac{x}{y^2}\right)}{2xy + \frac{x}{y} + \frac{x^2}{y^2}} = -\frac{1}{x}$$

أي أن عامل التكامل يتبع فقط للمتغير  $x$ ، ويعطى بالعلاقة

$$\mu(x) = \exp\left[\int -\frac{1}{x} dx\right] = \exp[-\ln|x|] = \frac{1}{x}$$

نضرب طرفي المعادلة المعطاة بعامل التكامل، فنحصل على المعادلة التامة:

$$\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)dx + \left(2y + \frac{1}{y} + \frac{x}{y^2}\right)dy = 0$$

ونكتبها كما يلي:

$$\frac{dx}{x} + \left(\frac{1}{y} + 2y\right)dy - \frac{xdy - ydx}{y^2} = 0$$

أي أن

$$d\left(\ln|x| + \ln|y| + y^2 - \frac{x}{y}\right) = 0$$

وعليه، فالحل العام للمعادلة:

$$\ln|x| + \ln|y| + y^2 - \frac{x}{y} = c$$

مثال 9.12: أوجد الحل العام للمعادلة:

$$(xy^3 + 2x^2y^2 - y^2)dx + (x^2y^2 + 2x^3y - 2x^2)dy = 0$$

الحل: نحسب الفرق

$$M'_y - N'_x = xy^2 - 2x^2y - 2y + 4x$$

فالمعادلة غير تامة، ولما كان

$$\frac{M'_y - N'_x}{x \cdot M - y \cdot N} = 1 - \frac{2}{xy}$$

إذن، للمعادلة عامل تكميل يتبع للمقدار  $z = x \cdot y$ :

$$\mu(z) = \exp\left[\int\left(1 - \frac{2}{z}\right)dz\right] = \frac{e^z}{z^2}$$

$$e^{\frac{xy}{x^2y^2}} = \frac{e^{xy}}{x^2y^2} \text{، ويكون التكامل العام لها هو: } c = e^{\frac{xy}{x^2y^2}} \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{y}\right)$$

مثال 9.13: أوجد الحل العام للمعادلة:  $(x^4 + y^4)dx - xy^3dy = 0$

الحل: لما كانت المعادلة متجانسة، وكان  $\frac{1}{x \cdot M + y \cdot N} = \frac{1}{x^5} \neq 0$ ، فإن  $\mu$  عامل

تكميل لها. بضرب طرفي المعادلة بالمقدار  $\mu$ ، تصبح المعادلة التفاضلية تامة:

$$\left(\frac{1}{x} - \frac{y^4}{x^5}\right)dx - \frac{y^3}{x^4}dy = 0$$

ويكون التكامل العام لها هو:  $y^4 = 4x^4 \ln|x| + cx^4$ .

#### 9.1.4 المعادلات التفاضلية الخطية من المرتبة الأولى

هي المعادلة الخطية بالنسبة إلى الدالة  $y$  ومشتقها  $y'$ ، وهي من النمط:

$$y' + P(x)y = q(x) \quad (9.11)$$

حيث  $P(x)$  و  $q(x)$  دالتان مستمرتان على الساحة التي يطلب حل المعادلة التفاضلية فيها. هناك عدة طرائق لحل المعادلة التفاضلية الخطية، منها طريقة عامل التكميل (أولر)، وطريقة بيرنولي، وطريقة تحويل الثابت (لأغرانج) والتي سنعرضها في الفصل الثالث من أجل معادلات تفاضلية خطية من مرتبة أكبر أو تساوي الواحد.

##### ١- طريقة عامل التكميل (أولر - Euler):

نكتب المعادلة (9.11) كما يلي:

$$[P(x)y - q(x)]dx + dy = 0 \quad (9.12)$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = P(x) \text{ فإن } \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

فالمعادلة (9.12) ليست تامة، إلا في الحالة الخاصة  $P(x) = 0$ .

ولما كان  $\frac{M'_x - N'_x}{N} = P(x)$ ، فإن للمعادلة عامل تكميل يتبع للمتغير  $x$  فقط، يُعطى بالعلاقة:

$$\mu(x) = \exp\left[\int P(x)dx\right]$$

نضرب طرفي المعادلة (9.12) بعامل التكميل، فينتج بعد الترتيب:

$$P(x) \cdot \exp\left[\int P(x)dx\right] + \left(\frac{dy}{dx}\right) \cdot \exp\left[\int P(x)dx\right] = q(x) \cdot \exp\left[\int P(x)dx\right]$$

<sup>١</sup> ليونارد أولر (١٧٠٧-١٧٨٣) رياضي وفيزيائي سويسري.

أي أن:

$$\frac{d}{dx} \{y \cdot \exp[\int P(x)dx]\} = q(x) \cdot \exp[\int P(x)dx]$$

وبالكاملة نجد:

$$y \cdot \exp[\int P(x)dx] = \int \{q(x) \cdot \exp[\int P(x)dx]\} dx + c$$

أو

$$y = \exp[-\int P(x)dx] \cdot \{q(x) \cdot \exp[\int P(x)dx] + c\} \quad (9.13)$$

وهو الحل العام للمعادلة (9.11).

مثال 9.14: أوجد الحل العام للمعادلة:  $y' \sin 2x = 2(y + \cos x)$ .

الحل: نرتب المعادلة كما يلي:

$$y' - \frac{2y}{\sin 2x} = \frac{2 \cos x}{\sin 2x}$$

وهي معادلة خطية، فيها  $P(x) = \frac{-2}{\sin 2x}$  و  $q(x) = \frac{2 \cos x}{\sin 2x}$ . وعليه، فإن عامل التكميل لها هو:

$$\mu = \exp[\int P(x)dx] = \exp\left[\int \frac{-2dx}{\sin 2x}\right] = \cot x$$

وعليه، فالحل العام للمعادلة المفروضة يُعطى استناداً للعلاقة (9.13):

$$y \cot x = \int 2 \frac{\cos x}{\sin 2x} \cot x dx = -\frac{1}{\sin x} + c \Rightarrow$$

$$y = c \cdot \tan x - \frac{1}{\cos x}$$

## ٢- طريقة بيرنولي-Bernoulli:

نبحث عن حل للمعادلة (9.11) من النمط  $y = u(x) \cdot v(x)$ ، حيث  $u(x)$  و  $v(x)$  دالتان في  $x$  يُطلب تعيينهما. نعوض في المعادلة (9.11):

$$u'v + v'u + P(x)u \cdot v = q(x)$$

أو:

$$uv' + v[u' + P(x)u] = q(x) \quad (9.14)$$

نختار الدالة  $u(x)$  أحد الحلول غير الصفريّة للمعادلة منفصلة المتغيرات:

$$u' + P(x)u = 0$$

$$u = \exp\left[-\int p(x) dx\right]$$

نعوض  $u(x)$  في المعادلة (9.14):

$$v' \cdot \exp\left[-\int p(x) dx\right] = q(x)$$

وبالمكاملة نجد:

$$v = \int \left\{ q(x) \cdot \exp\left[\int p(x) dx\right] dx \right\} + c$$

وعليه، فالحل العام للمعادلة (9.11):

$$y = u \cdot v = e^{\left[-\int p(x) dx\right]} \left\{ \int q(x) \cdot e^{\left[\int p(x) dx\right]} dx \right\} + c \cdot e^{\left[-\int p(x) dx\right]}$$

مثال 9.15: أوجد الحل العام للمعادلة:  $y' \sin x - y \cos x = \frac{-\sin^2 x}{x^2}$

الحل: نفرض أن المعادلة  $y = u(x) \cdot v(x)$  حلاً للمعادلة المقروضة. أي أن

<sup>1</sup> يوهان بيرنولي (١٦٦٧-١٧٤٨) عالم رياضيات سويسري، أحد أبناء عائلة بيرنولي الشهيرة في علم الرياضيات.

$$u' v \sin x + u v' \sin x - u \cdot v \cos x = -\frac{\sin^2 x}{x^2} \quad (*)$$

نختار  $u(x)$  أحد الحلول غير الصفري للمعادلة منفصلة المتغيرات.

$$u' \sin x - u \cos x = 0$$

وليكن  $u = \sin x$ . نعوض  $u(x)$  في المعادلة (\*):

$$v \sin^2 x = -\frac{\sin^2 x}{x^2}$$

بالترتيب والمكاملة نجد:

$$v(x) = c + \frac{1}{x}$$

ومنه، فالحل العام للمعادلة المعطاة هو:

$$y = c \cdot \sin x + \frac{\sin x}{x}$$

### ٣- معادلات يمكن ردها إلى معادلات خطية

أ- تكون بعض المعادلات خطية إذا اعتبرنا  $x$  الدالة و  $y$  المتغير المستقل. وهكذا، فالمعادلة غير الخطية:

$$\alpha(y) + [\beta(y)x - \gamma(y)] \frac{dy}{dx} = 0$$

تُحل بأسلوب مشابه لحل المعادلة (9.11)، إذا أعدنا كتابتها كما يلي:

$$\frac{dx}{dy} + P(y)x = q(y)$$

$$\text{حيث } P(y) = \frac{\beta(y)}{\alpha(y)} \text{ و } q(y) = \frac{\gamma(y)}{\alpha(y)}$$

مثال 9.16: أوجد الحل العام للمعادلة:  $y' = (2x + y^3)y$ .

الحل: واضح أن المعادلة ليست خطية في  $y$  و  $y'$ ، ولكن بإعادة ترتيبها تصبح كما يلي:

$$\frac{dx}{dy} - \frac{2}{y} \cdot x = y^2$$

وهي خطية في  $x$  و  $x'$ ، فيها  $P(y) = -\frac{2}{y}$  و  $q(y) = y^2$  ويكون عامل التكميل لها هو:

$$\mu = \exp\left[\int P(y)dy\right] = \exp\left[\int -\frac{2}{y} dy\right] = \frac{1}{y^2}$$

وعليه، فإن:

$$x \cdot \frac{1}{y^2} = \int y^2 \cdot \frac{1}{y^2} dy = y + c$$

والحل العام يعطى بالعلاقة  $x = y^3 + c \cdot y^2$ .

ب - معادلة بيرنولي: وهي المعادلة من النمط:

$$y' + P(x)y = q(x)y^n \quad ; \quad (n \neq 0, 1) \quad (9.15)$$

والتي تكتب كما يلي:

$$y^{1-n} \cdot y' + P(x)y^{1-n} = q(x)$$

وباختيار التحويل  $z = y^{1-n}$  تصبح المعادلة (9.15) خطية في الدالة المجهولة  $z$  ومشتقها  $z'$ .

وعموماً، يمكن رد المعادلات من النمط:

$$f'(y)y' + f(y)P(x) = q(x)$$

إلى معادلة خطية، باختيار التحويل  $z = f(y)$ .

مثال 9.17: أوجد الحل العام للمعادلة:  $y' x^3 \sin y + 2y = x y'$ .

الحل: نكتب المعادلة كما يلي:

$$2y \cdot \frac{dx}{dy} - x = -x^3 \sin y$$

وهي معادلة بيرنولي، الدالة المجهولة فيها  $x$  والمتغير المستقل  $y$ . نعوض  $z = x^2$ ، فنجد

$$y \frac{dz}{dy} + z = \sin y$$

وهي معادلة خطية الدالة المجهولة  $z$  والمتغير المستقل  $y$ ، حلها نفرض  $z = u(y) \cdot v(y)$  ونعوض في المعادلة:

$$y \frac{du}{dy} v + y u \frac{dv}{dy} + uv = \sin y$$

نختار  $u(y)$  حل غير صفري للمعادلة منفصلة المتغيرات:

$$y \frac{du}{dy} + u = 0$$

ليكن هذا الحل هو  $u = 1/y$ . عندئذ، نوجد الدالة  $v(y)$  من المعادلة:

$$\frac{dv}{dy} = \sin y \quad \Rightarrow \quad v(y) = -\cos y + c$$

$$\text{ومنه، فإن } z = \frac{c - \cos y}{y} \text{ أو } y = (c - \cos y)x^2$$

نلاحظ أن  $y = 0$ ، أيضاً حل للمعادلة المفروضة.

جـ- معادلة ريكاتي <sup>1</sup> *Riccati*: وهي المعادلة من النمط:

$$y' + P(x)y + q(x)y^2 = R(x)$$

إن حل معادلة ريكاتي يتطلب، عموماً معرفة أحد حلولها الخاصة، وليكن  $y_p$  وباستخدام

$$\text{التحويل } y = y_p + \frac{1}{z} \text{ تُرَدُّ معادلة ريكاتي إلى معادلة خطية في } z \text{ و } z'$$

<sup>1</sup> جاكوبو فرانسيسكو ريكاتي (١٦٧٦ - ١٧٥٤) عالم رياضيات إيطالي.



$$z' - [P(x) + 2q(x)y_p(x)]z = q(x)$$

ملحوظة 9.7: يمكن اختيار الحل الخاص  $y_p$ ، انطلاقاً من شكل الحد الحر  $R(x)$ .

فمثلاً، يُصبح في الطرف الأيسر للمعادلة  $x^2 - 2x = y' + y^2$  حدود مشابهة لحدود طرفها الأيمن إذا اخترنا  $y_p = ax + b$ ، بالتعويض في المعادلة والمطابقة بين الطرفين نعين  $a$  و  $b$ :

$$a + (ax + b)^2 = x^2 - 2x \Rightarrow a + b = 0, 2ab = -2, a^2 = 1$$

أي أن  $a = -1$  و  $b = 1$ .

ومنه، فالحل الخاص هو  $y_p = 1 - x$ .

مثال 9.18: أوجد الحل العام للمعادلة:  $y' + y^2 = \frac{2}{x^2}$ .

الحل: يدفعنا المنطق السابق نفسه، لاختيار الحل الخاص من النمط  $y_p = \frac{a}{x}$ .  
نعوض في المعادلة:

$$-\frac{a}{x^2} + \frac{a^2}{x^2} = \frac{2}{x^2}$$

بالمطابقة بين البسطين، نجد قيمتان لـ  $a$  هما  $-1$  و  $2$ . أي أن هناك حلان خاصان:

$$(y_p)_2 = \frac{2}{x} \text{ و } (y_p)_1 = \frac{-1}{x}$$

نختار التحويل  $y = \frac{1}{z} - \frac{1}{x}$  والذي يرد المعادلة إلى معادلة تفاضلية خطية:

$$z' + \frac{2}{x}z = 1$$

ونحلها، كما فعلنا سابقاً، فنجد:

$$z = \frac{x^3 + c}{3x^2}$$

ومنه، فالحل العام هو:  $y = \frac{3x^2}{x^3 + c} - \frac{1}{x}$

ملحوظة 9.8: يمكن، بإجراء بعض التحويلات، رد عدد كبير من المعادلات التفاضلية إلى معادلات تفاضلية خطية. فمثلاً، المعادلة  $y' \sin y = \cos y(1 - x \cos y)$ ، يمكن أن تكتب كما يلي:

$$\frac{\sin y}{\cos^2 y} y' - \frac{1}{\cos y} = -x$$

وبفرض  $z = \frac{1}{\cos y}$  تصبح المعادلة:

$$z' - z = -x$$

وهي معادلة تفاضلية خطية في الدالة المجهولة  $z$ .

وكذلك، فالمعادلة  $y' \sin y = \cos x(2 \cos y - \sin^2 x)$  تصبح خطية، بفرض  $z = \cos y$

$$z' + 2z \cos x = \sin^2 x \cos x$$

## 9.2 المعادلات التفاضلية غير المحلولة بالنسبة إلى المشتق

المعادلة التي لا يمكن فيها عزل المشتق  $y'$  في طرف وما تبقى منها في طرف آخر، وهذه المعادلة، عادةً، إما ليس لها درجة أو أن درجتها تزيد على الواحد، ونكتب هذه المعادلة كما يلي:

$$F(x, y, y') = 0 \quad (9.16)$$

ويكون، عادةً، في هذه الحالة، الميل  $y'$  للمنحني البياني للدالة  $y(x)$  في النقطة  $(x_0, y_0)$  غير وحيد، مما يؤدي إلى وجود أكثر من حل للمعادلة غير المحلولة بالنسبة إلى المشتق يمر بالنقطة نفسها. ونناقش مسألة وجود الحل ووحدانيته في 9.3. أما حل المعادلة، فيمكن إيجاده في عدة حالات تعتمد على شكل المعادلة نفسها.

### 9.2.1 الاختزال إلى معادلات محلولة بالنسبة إلى المشتق

لنفرض أنه يمكن كتابة المعادلة غير المحلولة بالنسبة إلى المشتق (9.16)، كحدودية في  $y'$  من الدرجة  $n$ ، أي كما يلي

$$A_0(x, y)(y')^n + A_1(x, y)(y')^{n-1} + \dots + A_{n-1}(x, y) + A_n(x, y) = 0 \quad (9.17)$$

ولنفرض، أيضاً، أنه يمكن تحليل هذه الحدودية إلى جداء  $n$  عاملاً من الدرجة الأولى في المشتق  $y'$  كما يلي:

$$[y' - f_1(x, y)] \cdot [y' - f_2(x, y)] \cdot \dots \cdot [y' - f_n(x, y)] = 0$$

وتتحقق هذه المعادلة، إذا تحققت إحدى المعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى والدرجة الأولى التالية:

$$y' = f_i(x, y) \quad : \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (9.18)$$

فإذا استطعنا إيجاد الحلول العامة لهذه المعادلات:

$$\phi_i(x, y, c_i) = 0 \quad : \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (9.19)$$

حيث  $c_i$  ثوابت اختيارية،  $i = 1, 2, \dots, n$ . لما كانت كل دالة من الدوال (9.19) تحقق المعادلة (9.17)، فإن كل من هذه الدوال تمثل حلولاً للمعادلة (9.17). ولما كانت العلاقات (9.19) تكافئ العلاقة:

$$\phi_1(x, y, c_1) \cdot \phi_2(x, y, c_2) \cdot \dots \cdot \phi_n(x, y, c_n) = 0$$

لما كانت المعادلة من المرتبة الأولى، فإن حلها العام يجب أن يحوي ثابتاً اختيارياً واحداً، لذا، نختار  $c = c_i$ ،  $i = 1, 2, \dots, n$ ، ونعوض في العلاقة الأخيرة، فنحصل على الحل العام (التكامل العام) للمعادلة (9.17).

$$\phi_1(x, y, c) \cdot \phi_2(x, y, c) \cdot \dots \cdot \phi_n(x, y, c) = 0 \quad (9.20)$$

ملحوظة 9.9: يُفضل كتابة الحل العام للمعادلة (9.17) وفق الصيغة (9.20) بدلاً من الصيغ (2.19). وذلك لأن الصيغة (2.20) تُمكننا من تعيين منحنيات تكاملية (حلول)

للمعادلة التفاضلية (9.17) تمثل تركيباً لمجموعة من المنحنيات التكاملية، يحقق كل منها المعادلة (9.17) في مجال معين، بحيث يكون لهذه المنحنيات مماسات مشتركة في النقط التي تلتحم فيها هذه المنحنيات التكاملية. وهذا ما سندرسه في 9.3.3.

### حالة خاصة

إذا كانت المعادلة غير المحلولة بالنسبة إلى المشتق تحوي فقط  $y'$ ، أي هي من النمط:

$$F(y') = 0 \quad (9.21)$$

وكان  $y' = k$  جذراً حقيقياً لهذه المعادلة، فإنه بالمكاملة نجد  $y = kx + c$ ،  $c$  ثابت اختياري.

$$\text{أي أن } k = \frac{y-c}{x}.$$

ولما كان  $F(k) = 0$ ، فإن الحل العام للمعادلة (9.21) يُعطى بالعلاقة

$$F\left(\frac{y-c}{x}\right) = 0$$

مثال 9.19: أوجد الحل العام للمعادلة:  $y'^3 - 2xy'^2 + y' = 2x$ .

الحل: لما كان

$$y'^3 - 2xy'^2 + y' - 2x = (y' - 2x)(y'^2 + 1)$$

فإن المعادلة المعطاة، تكافئ المعادلة:

$$y' - 2x = 0$$

وبالمكاملة، نجد الحل العام لها، وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة:

$$y = x^2 + c$$

مثال 9.20: أوجد الحل العام للمعادلة:  $y'^4 - 5y'^3 + 2y' = 3$ .

الحل: لما كانت هذه المعادلة، لا تحوي سوى  $y'$ ، فإن الحل العام لها يعطى بالعلاقة:

$$\left(\frac{y-c}{x}\right)^4 - 5\left(\frac{y-c}{x}\right)^3 + 2\left(\frac{y-c}{x}\right) = 3$$

## 9.2.2 التمثيل الوسيط

عندما يتعذر علينا حل المعادلة التفاضلية (9.16) بالنسبة إلى المشتق، أو عندما نخفق في حل المعادلات المحلولة بالنسبة إلى المشتق (9.18)، فإننا نضطر، عادةً، لحل المعادلة (9.16) وسيطياً.

نستبدل بالمعادلة (9.16) الأشكال الوسيطة التالية:

$$x = f(u, v) \quad \text{و} \quad y = g(u, v) \quad \text{و} \quad y' = h(u, v)$$

وباستخدام العلاقة  $dy = y'dx$ ، نجد:

$$\frac{\partial g}{\partial u} du + \frac{\partial g}{\partial v} dv = h(u, v) \left[ \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv \right]$$

وبحل هذه المعادلة بالنسبة للمشتق  $\frac{dv}{du}$ ، نحصل على المعادلة:

$$\frac{dv}{du} = \frac{h(u, v)f'_u - g'_u}{g'_v - h(u, v)f'_v}$$

وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الأولى محلولة بالنسبة للمشتق  $\frac{dv}{du}$  نُحل كما درسنا سابقاً.

### حالات خاصة:

١- المعادلة (9.16) لا تحوي المتغير المستقل  $x$ : أي أن المعادلة من النمط:

$$F(y, y') = 0 \quad (9.22)$$

إذا كان من الصعب حل هذه المعادلة بالنسبة إلى المشتق  $y'$ ، فإننا ندخل وسيطاً  $t$ ، كما يلي:

$$y' = \psi(t) \quad \text{و} \quad y = \varphi(t)$$

$$\text{ولما كان } dy = y' dx, \text{ فإن } dx = \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)} dt.$$

ويعطى الحل العام للمعادلة (9.22) وسيطياً، بالعلاقين:

$$y = \varphi(t) \quad \text{و} \quad x = \int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)} dt + c$$

وبخذف  $t$  من عبارة  $x$  و  $y$ ، نحصل على عبارة الحل العام ديكارتياً.

ملحوظة 2.10: إذا أمكن حل المعادلة (9.22) بالنسبة إلى  $y$ ، فإنه يمكن اعتبار  $y'$  هو الوسيط  $t$ .

ملحوظة 9.11: يمكن أن يكون للمعادلة (9.22) حل شاذ من النمط  $y' = b$ ، حيث إن  $b$  يُعطى من المعادلة  $F(b, 0) = 0$ .

مثال 9.21: أوجد الحل العام للمعادلة:  $y^{2/3} + (y')^{2/3} = 1$ .

الحل: واضح أن المعادلة لا تحوي  $x$  صراحةً، ندخل الوسيط  $t$  كما يلي:

$$y' = \sin^3 t \quad \text{و} \quad y = \cos^3 t$$

$$\text{ومنه } dx = \frac{dy}{y'} = -3 \frac{\cos^2 t}{\sin^3 t} dt \text{ وبالمكاملة نجد:}$$

$$x = 3t + 3 \cos t + c$$

ويعطى الحل العام للمعادلة المعطاة، وسيطياً، بالعلاقين:

$$y = \cos^3 t \quad \text{و} \quad x = 3t + 3 \cos t + c$$

٢- المعادلة (9.16) لا تحوي الدالة  $y$ : أي أن المعادلة من النمط:

$$F(x, y') = 0 \quad (9.23)$$

إذا كان من الصعب حلها بالنسبة للمشتق  $y'$ ، فإننا ندخل وسيطاً  $t$  كما يلي:

$$y' = \psi(t) \quad \text{و} \quad x = \varphi(t)$$

ولما كان  $dy = y' dx$ ، فإن  $dy = \psi(t) \cdot \varphi'(t) dt$ .

ويعطى الحل العام للمعادلة (9.23)، وسيطياً، كما يلي:

$$y = \int \psi(t) \cdot \varphi'(t) dt + c \quad \text{و} \quad x = \varphi(t)$$

ويحذف  $t$  من عبارة  $x$  و  $y$  نحصل على عبارة الحل العام ديكارتياً.

ملحوظة 9.12: إذا وُجد العدد  $a$ ، بحيث يكون:

$$\lim_{y' \rightarrow +\infty} F(a, y') = 0$$

فإن  $x = a$  حل، للمعادلة (9.23)، قد يكون شاذاً.

مثال 9.24: أوجد الحل العام للمعادلة:  $x^2 = y'^2 (4 - x^2)$ .

الحل: واضح أن المعادلة لا تحوي  $y$  صراحة، ندخل الوسيط  $t$  كما يلي:

$$y' = \tan t \quad \text{و} \quad x = 2 \sin t; \quad |t| < \frac{\pi}{2}$$

ومنه، فإن

$$dy = (\tan t) 2 \cos t dt = 2 \sin t dt$$

وبالمكاملة نجد:

$$y = c - 2 \cos t$$

ويعطى الحل العام للمعادلة المعطاة، وسيطياً، بالعلاقين:

$$y - c = -2 \cos t \quad \text{و} \quad x = 2 \sin t$$

ويحذف الوسيط  $t$  من هاتين العلاقتين نحصل على عبارة الحل العام ديكارتياً:

$$x^2 + (y - c)^2 = 4$$

٣- المعادلة (9.16) محلولة بالنسبة إلى  $x$ : أي أنها من النمط:

$$x = f(y, y') \quad (9.24)$$

فإننا نجعل  $y'$  المتغير المستقل و  $x$  الدالة المجهولة، وندخل وسيطاً جديداً  $p$ ، بحيث  $y' = p$ . وعليه، نكتب المعادلة (9.24)، كما يلي:

$$x = f(y, p)$$

ويعطى التفاضل التام لها بالعلاقة:

$$dx = \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial p} dp$$

ولما كان  $dy' = y'' dx$ ، أي  $dy' = p dx$ ، فإن

$$dy' = p \left[ \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial p} dp \right] \Rightarrow \frac{1}{p} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial p} \cdot \frac{dp}{dy}$$

وهي معادلة تفاضلية عادية من المرتبة الأولى محلولة بالنسبة إلى المشتق  $\frac{dp}{dy}$ . فإذا تمكنا من مكاملتها والحصول على تكاملها العام  $\phi(y, p, c) = 0$ ، فإن الحل العام للمعادلة (9.24) يعطى، وبسيطاً، بالعلاقين:

$$\phi(y, p, c) = 0 \quad \text{و} \quad x = f(y, p)$$

ويحذف الوسيط  $p$  من هاتين العلاقتين، نحصل على عبارة الحل العام ديكارتياً.

مثال 9.23: أوجد الحل العام للمعادلة:  $\ln y' + \sin y' - x = 0$ .

الحل: بفرض  $y' = p$  تصبح المعادلة كما يلي:

$$\ln p + \sin p = x$$

وبالمفاضلة نجد:

$$dx = \left( \frac{1}{p} + \cos p \right) dp \Rightarrow \frac{dy}{p} = \left( \frac{1}{p} + \cos p \right) dp$$



لأن:

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{dy}{p}$$

وبالإصلاح والمكاملة نجد:

$$y = p + \cos p + p \sin p + c$$

ويعطى الحل العام، وسيطياً، للمعادلة المعطاة بالعلاقين:

$$y = p + \cos p + p \sin p + c \quad \text{و} \quad x = \ln p + \sin p$$

٤- المعادلة (9.16) محلولة بالنسبة إلى  $y'$  أي أنها تكتب كما يلي:

$$y = f(x, y')$$

يفرض  $y' = p$  تكتب هذه المعادلة كما يلي:

$$dy = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial p} dp \Rightarrow p = \frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p} \cdot \frac{dp}{dx}$$

وهي معادلة تفاضلية محلولة بالنسبة إلى المشتق  $\frac{dp}{dx}$ . فإذا تمكنا من مكاملتها والحصول على التكامل العام لها  $\phi(x, p, c) = 0$ ، فإن جملة المعادلتين:

$$\phi(x, p, c) = 0 \quad \text{و} \quad y = f(x, p)$$

تمثلان الحل العام وسيطياً. بحذف الوسيط  $p$ ، من هاتين العلاقتين، نحصل على عبارة الحل العام ديكارتياً. تُعد معادلة لاغرانج ومعادلة كليرو من أهم المعادلات التي تحل بهذه الطريقة.

معادلة لاغرانج - Lagrange:

هي المعادلة من النمط:

$$y = xf(y') + g(y') \quad (9.25)$$

<sup>١</sup> جوزيف لويس لاغرانج (١٧٣٦ - ١٨١٣) عالم رياضيات وفلك فرنسي.

حلها ندخل الوسيط  $y' = p$  فتصبح المعادلة كما يلي:

$$y = xf(p) + g(p)$$

نشتق هذه المعادلة بالنسبة إلى  $x$ ، فنجد:

$$p = \frac{dy}{dx} = f(p) + xf'(p) \frac{dp}{dx} + g'(p) \frac{dp}{dx}$$

وبالقسمة على  $\frac{dp}{dx}$ ، بشرط  $\frac{dp}{dx} \neq 0$ ، والترتيب نجد:

$$[p - f(p)] \frac{dx}{dp} = xf'(p) + g'(p) \quad (9.26)$$

وهي معادلة تفاضلية خطية في الدالة  $x$  ومشتقها  $\frac{dx}{dp}$ ، حيث نعتبر  $x$  الدالة و  $p$  المتغير المستقل، ويكون حلها العام دالة خطية في ثابت اختياري:

$$x = \varphi(p) + \psi(p)$$

وبإضافة هذه المعادلة إلى المعادلة (9.25)، نحصل على الحل العام وبسيطاً.

ندرس الآن الحالة المستثناة،  $\frac{dp}{dx} = 0$ ، أي  $p$  ثابت. نعوض في المعادلة (9.26)، نحصل على العلاقة  $p - f(p) = 0$ .

وهكذا، فإن كان للمعادلة  $p - f(p) = 0$  جذوراً حقيقية  $p = p_j$ ، فإننا نحصل على جملة المعادلات الخطية  $y = xf(p_j) + g(p_j)$ ، وهي تمثل مستقيماً في المستوي  $xOy$ ، وهي تحقق المعادلة التفاضلية المعطاة. ولكنها لا تنتج من الحل العام، أي أنها تمثل حلولاً شاذة لمعادلة لاغرانج.

مثال 9.24: أوجد جميع حلول المعادلة:  $y' = xy'^2 - y'$ .

الحل: نفرض  $y' = p$ ، فتصبح المعادلة كما يلي:

$$y = xp^2 - p \quad (i)$$

نشتق هذه المعادلة بالنسبة إلى  $x$ :

$$p = \frac{dy}{dx} = p^2 + 2px \frac{dp}{dx} - \frac{dp}{dx}$$

نقسم الطرفين على  $\frac{dp}{dx}$ ، بشرط  $\frac{dp}{dx} \neq 0$ ، ونرتب المعادلة الناتجة، فنجد:

$$(p - p^2) \frac{dx}{dp} - 2px = 1$$

وهي معادلة تفاضلية خطية في الدالة  $x$  ومشتقها  $\frac{dx}{dp}$ . يحلها نجد:

$$x = \frac{p - \ln p + c}{(p - 1)^2} \quad (ii)$$

ويحذف الوسيط من المعادلتين (i) و (ii) نحصل على الحل العام للمعادلة المعطاة.

تبقى، لدينا، الحالة المستثناة  $\frac{dp}{dx} = 0$ ، وهي تكافئ  $p = p_0$ ، حيث إن الثوابت  $p_0$  هي الجذور الحقيقية للمعادلة  $p - f(p) = 0$ ، أي  $p - p^2 = 0$ ، ومنه، فإن  $p = 0$  و  $p = 1$ . بتعويض  $p = 0$  في المعادلة (i)، نجد أن  $y = 0$  تمثل حلاً شاذاً. وكذلك من أجل  $p = 1$ ، نجد  $y = x - 1$  هو أيضاً، حل شاذ لمعادلة لاغرانج المعطاة.

### معادلة كلير و- Clairaut:

هي المعادلة من النمط:

$$y = xy' + g(y')$$

واضح أن هذه المعادلة هي حالة خاصة من معادلة لاغرانج، حيث  $f(y') = y'$ . لذا تتبع الخطوات السابقة نفسها. فنفرض  $y' = p$ ، فتصبح معادلة كلير و كما يلي:

$$y = xp + g(p) \quad (9.27)$$

نشتق الطرفين بالنسبة إلى  $x$ ، فنجد:

$$p = \frac{dy}{dx} = p + x \frac{dp}{dx} + g'(p) \cdot \frac{dp}{dx} \Rightarrow [x + g'(p)] \frac{dp}{dx} = 0$$

وهذا يعني، أنه، إما  $\frac{dp}{dx} = 0$  أو  $x + g'(p) = 0$ .

في الحالة الأولى، نجد أن  $p = c$ ، حيث  $c$  ثابت اختياري، نعوض في المعادلة (9.27) فنحصل على الحل العام لمعادلة كليرو.

$$y = xc + g(c) \quad (9.28)$$

وفي الحالة الثانية، يتعين حل المعادلتين الوسيطيتين.

$$x + g'(p) = 0 \quad \text{و} \quad y = xp + g(p)$$

وهذا الحل لمعادلة كليرو لا ينتج عن الحل العام، أي أنه حل شاذ لها.

مثال 9.25: أوجد جميع حلول المعادلة:  $\sqrt{y'^2 + 1} + xy' - y = 0$ .

الحل: بفرض  $p = y'$ ، نكتب المعادلة كما يلي:

$$y = \sqrt{p^2 + 1} + xp$$

وهي معادلة كليرو، حلها العام يعطى، استناداً للعلاقة (9.28)، بالعلاقة:

$$y = cx + \sqrt{c^2 + 1}$$

أما الحل الشاذ لها، فينتج بحذف الوسيط  $p$  من المعادلتين:

$$x + (\sqrt{p^2 + 1})' = 0 \quad \text{و} \quad y = xp + \sqrt{p^2 + 1}$$

وعليه، فإن الدالة  $y = \sqrt{1 - x^2}$  تمثل حلاً شاذاً للمعادلة المعطاة.

### 9.3 مسألة القيمة الابتدائية - مبرهنات الوجود والوحدانية

إن مسألة القيمة الابتدائية، والتي تسمى مسألة كوشي - 'Cauchy'، تعني إيجاد منحني تكاملي

للمعادلة التفاضلية مار بالنقطة  $(x_0, y_0)$  في المستوي  $oxy$ .

يكون في كثير من المسائل التطبيقية، الحصول على الحل العام للمعادلة التفاضلية أمراً صعباً إن لم يكن مستحيلاً، بوساطة الطرائق العادية التي درسناها سابقاً. لذا نشأ علم حل المعادلات التفاضلية بالطرائق العددية التقريبية، والتي لن نتعرض لها في هذا الكتاب، ولكن سنعطي فكرة موجزة عن إحداها، وهي طريقة التقريبات المتتالية (طريقة بيكار). ولكن قبل ذلك يجب التحقق من وجود الحل لمسألة كوشي ومن وحدانية هذا الحل.

#### 9.3.1 المعادلة التفاضلية المحلولة بالنسبة إلى المشتق

نعطي، هنا، الشروط الكافية لوجود ووحدانية حل مسألة كوشي التالية:

$$y' = f(x, y) \quad ; \quad y(x_0) = y_0 \quad (9.29)$$

في الساحة المغلقة  $R$  (مستطيل) المعرفة، كما يلي:

$$R = \{ |x - x_0| \leq a \quad ; \quad |y - y_0| \leq b \} \quad ; \quad a \text{ و } b \text{ ثابتان موجبان}$$

شرط ليبشيتز - 'Lipschitz':

نقول إن الدالة  $f(x, y)$  تحقق، في  $R$ ، شرط ليبشيتز بالنسبة إلى المتغير  $y$ ، إذا وُجد عدد ثابت موجب  $L$ ، بحيث تتحقق المترابطة:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L |y_1 - y_2| \quad ; \quad \forall (x, y_1), (x, y_2) \in R$$

ويُبرهن، بسهولة، أنه إذا كانت الدالتان  $f(x, y)$  و  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$  مستمرتين على  $R$ ، فإن الدالة  $f(x, y)$  تحقق شرط ليبشيتز، في  $R$ ، بالنسبة إلى  $y$ .

<sup>1</sup> أوغستين لويس كوشي (١٧٨٩ - ١٨٥٧) عالم رياضيات فرنسي.  
<sup>2</sup> رودولف أوتو سيغيزموند ليبشيتز (١٨٣٢ - ١٩٠٣) عالم رياضيات ألماني.

نقبل دون برهان:

مبرهنة 9.2 (بيكارـ Picard): إذا كانت الدالة  $f(x, y)$  مستمرة بالنسبة إلى  $x$  و  $y$  في  $R$ ، وتحقق شرط ليبشترز في  $R$ ، بالنسبة إلى  $y$ ، فإن لمسألة كوشي (9.29) حل وحيد  $y(x)$  معرف وقابل للاشتقاق بالنسبة إلى  $x$ ، على المجال  $|x - x_0| \leq h$ ، حيث

$$h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right) \quad , \quad M = \max\{|f(x, y)| : \forall (x, y) \in R\}$$

يكفي لوجود حل مسألة كوشي (9.29) في المجال  $|x - x_0| \leq h$ ، أن تكون الدالة  $f(x, y)$  مستمرة في الساحة المغلقة  $R$  (مبرهنة بيانو - Peano).

يمكن إيجاد حل مسألة كوشي (9.29)، عند تحقق شروط مبرهنة بيكار، كنهاية متتالية دوال  $\{y_n(x)\}$  متقاربة بانتظام، عندما تسعى  $n$  إلى اللانهاية، معرفة بالعلاقة التكرارية:

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_n(t)) dt ; y_0 = y(x_0) , n = 0, 1, 2, \dots \quad (9.30)$$

والتي تسمى دستور التقريبات المتتالية. وتُعطي دقة الخطأ، عند تبديل الحل الدقيق  $y(x)$  بالحل التقريبي  $y_n(x)$ ، بالمترابحة:

$$|y(x) - y_n(x)| \leq \frac{ML^{n-1}}{n!} h^n$$

مثال 9.26: استخدم دستور التقريبات المتتالية لإيجاد حل مسألة كوشي التالية:

$$y' = y \quad \text{و} \quad y(0) = 1$$

الحل: نعوض في دستور التقريبات المتتالية (9.30):

$$f(x, y) = y ; y_0 = 1 , x_0 = 0$$

<sup>1</sup> شارل فيميل بيكار (١٨٥٦ - ١٩٤١) عالم رياضيات فرنسي.  
<sup>2</sup> جوزيف بولوا (١٨٥٨ - ١٩٣٢) عالم رياضيات إيطالي.

$$y_1 = 1 + \int_0^x y_0 dx = 1 + \int_0^x 1 dt = 1 + x$$

$$y_2 = 1 + \int_0^x y_1 dt = 1 + \int_0^x (1+t) dt = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

$$y_n = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$$

نأخذ نهاية الطرفين، عندما تسعى  $n$  إلى اللانهاية، فنجد:

$$y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$$

إذن، فالمتتالية  $\{y_n(x)\}$  متقاربة من الدالة  $y(x) = e^x$ . ومن السهل التحقق أن هذه النهاية تحقق المعادلة التفاضلية المفروضة.

### 9.3.2 المعادلة التفاضلية غير محلولة بالنسبة إلى المشتق

نفرض أن المعادلة التفاضلية غير المحلولة بالنسبة إلى المشتق (9.16) تحقق الشرط الابتدائي:

$$y_0 = y(x_0) \quad (9.31)$$

إن حل هذه المسألة يختلف عن حل مسألة كوشي (9.29)، حيث إنه يمكن أن يمر أكثر من حل من النقطة  $(x_0, y_0)$ ، يحقق شروط مبرهنة بيكار. وعليه، يوجد لكل من هذه المعادلات  $y' = f(x, y)$ ، حل وحيد يحقق الشرط (9.31). لذا نحتاج إلى معرفة شرط آخر، وهو ميل مماس منحنى الحل المطلوب في النقطة  $x_0$ .

وعليه، فإن خاصية وحدانية الحل تُفهم، عادةً، في المعنى التالي: وهو أنه لا يوجد سوى منحني تكاملي واحد للمعادلة التفاضلية يمر بالنقطة  $(x_0, y_0)$  وفي اتجاه معين. فمثلاً، إن خاصية الوحداية لحل المعادلة  $y'^2 - 1 = 0$  محققة دائماً، لأنه يمر في كل نقطة من نقاط المستوى

متحنيان تكامليان لها  $y = c + x$  و  $y = c - x$  ولكل منها ميل مختلف عن الآخر.

نقبل دون برهان:

مبرهنة 9.3: إذا كانت الدالة  $F(x, y, y')$  مستمرة بالنسبة إلى  $x$  على جوار للنقطة  $P_0(x_0, y_0, y'_0)$ ، حيث  $y'_0$  أحد جذور المعادلة الجبرية:

$$P(\lambda) \equiv F(x_0, y_0, \lambda) = 0$$

وكانت هذه الدالة قابلة للاشتقاق باستمرار بالنسبة إلى  $y$  و  $y'$ ، وكان المشتق بالنسبة إلى  $y'$  غير معدوم عند النقطة  $P_0$ ، أي:

$$\left. \frac{\partial F}{\partial y'} \right|_{P_0} \neq 0$$

عندئذ، يوجد حل وحيد  $y = y(x)$  للمساواة (9.16) و (9.31) معرف على جوار صغير بشكل كاف، للنقطة  $x_0$ ، بحيث يكون  $y'_0 = y'(x_0)$ .

ملحوظة 9.12: إن شروط المبرهنتين 9.2 و 9.3 هي شروط كافية وغير لازمة، أي أنه إذا اختلف أحد الشروط، فإن هذا لا يعني أن الحل غير موجود، أو غير وحيد.

9.3.4 حل مسألة كوشي باستخدام متسلسلات القوى الصحيحة

نقدم، أخيراً، لمحة عن حل مسألة كوشي (9.29) باستخدام متسلسلات القوى الصحيحة.

نقبل دون برهان:

مبرهنة 9.4: إذا كانت الدالة  $f(x, y)$  قابلة للنشر وفق قوى  $(x - x_0)$  و  $(y - y_0)$ ، فإن حل مسألة كوشي (9.29) يكون، أيضاً، دالة قابلة للنشر وفق قوى  $(x - x_0)$ ، ويعطى بالعلاقة:

$$y(x) = y_0 + \frac{y'_0}{1!} (x - x_0) + \frac{y''_0}{2!} (x - x_0)^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y_0^{(n)}}{n!} (x - x_0)^n \quad (9.32)$$



حيث:

$$y_0^{(n)} = y^{(n)}(x_0) \quad ; \quad n = 1, 2, \dots$$

والحد  $y_0$  معطى من شروط البدء.

نجد المعامل  $y_0'$  من المعادلة التفاضلية نفسها:

$$y_0' = f(x_0, y_0)$$

ولإيجاد المعامل  $y_0''$  نشتق المعادلة التفاضلية بالنسبة إلى  $x$ ، ويكون:

$$y'' = \frac{df}{dx}(x, y) \Rightarrow y_0'' = \left. \frac{df(x, y)}{dx} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0 \\ y'=y_0'}}$$

ونتابع هكذا لإيجاد بقية المعاملات في العلاقة (9.32).

مثال 9.27: عين، في صورة متسلسلة قوى صحيحة، حل المسألة:

$$y' = xy + y^2 \quad ; \quad y(0) = 1$$

الحل: لما كانت الدالة  $f(x, y) = xy + y^2$  حدودية في  $x$  و  $y$ ، فإنها قابلة للتسلسل في كل المستوي، عندئذ، يمكن التعبير عن حل مسألة كوشي المعطاة، في صورة متسلسلة قوى صحيحة من النمط (9.32):

$$y_0 = y(0) = 1 \quad \text{و} \quad y_0' = y'(0) = f(0, 1) = 1$$

$$y'' = \frac{df(x, y)}{dx} = y + xy' + 2yy' \Rightarrow y_0'' = 3$$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = y' + y' + xy'' + 2y'^2 + 2yy'' \Rightarrow y_0''' = 10$$

ونتابع هكذا، فنجد:

$$y(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{3}{2!}x^2 + \frac{10}{3!}x^3 + \dots$$

#### 9.4 بعض التطبيقات المعادلات التفاضلية العادية من المرتبة الأولى

تطبيق 1: دراسة دائرة كهربائية بوجود تحريض ذاتي

نعلم أنه إذا مر تيار كهربائي متغير  $I(t)$  في وشيعة عامل تحريضها الذاتي  $L$ ، فإنه يتولد في

الوشيعة قوة محرّكة كهربائية  $e = -L \frac{dI}{dt}$ ، وتكون هذه القوة المحركة عكسية من أجل

أي أن فرق الكمون بين طرفي الوشيعة هو:

$$V_A - V_B = RI + L \frac{dI}{dt} \quad (9.33)$$

حيث إن  $R$  مقاومة الوشيعة.

مثال 9.28: تشمل دائرة كهربائية مولداً كهربائياً قوته المحركة الكهربائية  $E$  ثابتة ووشيعة مقاومتها الأومية  $R$  وعامل تحريضها الذاتي  $L$ . نغلق الدارة في اللحظة  $t = 0$ . أوجد المعادلة التفاضلية التي يحققها  $I(t)$  ثم حل المعادلة الناتجة، بين أن شدة التيار تثبت عملياً بعد زمن

قصير جداً، علماً أن  $\frac{R}{L} = 1000$ .

الحل: نكتب المعادلة (9.33) كما يلي:

$$E = RI + L \frac{dI}{dt} \Rightarrow \frac{dI}{dt} + \frac{R}{L} I = \frac{E}{L}$$

وهي معادلة تفاضلية خطية. بالمكاملة نجد:

$$\frac{1}{R} \ln \frac{RI - E}{C} = -\frac{t}{L} \Rightarrow RI - E = c e^{-\frac{R}{L}t}$$

ونعين ثابت المكاملة  $c$  من شروط البدء  $I(0) = 0$ ، لحظة إغلاق الدارة. فيكون  $c = -E$ ، وعليه تتعين شدة التيار من العلاقة:

$$I = \frac{E}{R} \left( 1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right) \quad (9.34)$$

وبملاحظة أن  $\frac{R}{L} = 1000$ ، نجد:  $\exp\left(-\frac{R}{4}t\right) = \exp(-(1000)t)$

وهذا العدد يتقارب كثيراً من الصفر بعد زمن قصير جداً. وهذا يعني، من العلاقة (9.34)،

أن شدة التيار تثبت عملياً بعد زمن قصير جداً وتساوي  $I = E/R$ .

تطبيق 2: يسقط مظلي بسرعة  $v_0 = 55 \text{ m/s}$  عندما تفتح مظلته. فإذا كانت مقاومة الهواء

$\left(\frac{w \cdot v^2}{25}\right)$ ، حيث  $w$  الوزن الكلي للمظلي والمظلة، و  $V$  سرعة المظلي في اللحظة  $t$ .

أوجد سرعة المظلي  $v$  كدالة في الزمن، بعد انفتاح المظلة.

الحل: القوة المحصلة المؤثرة على المجموعة، تساوي وزن المجموعة مطروحاً منه مقاومة الهواء.  
أي

$$w \cdot \frac{dv}{dt} = w - \frac{w \cdot v^2}{25} \Rightarrow \frac{dv}{v^2/25} = -\frac{9.8}{25} dt$$

وهي معادلة تفاضلية منفصلة المتغيرات، نحلها بالمكاملة فنجد:

$$\frac{1}{10} \ln \left| \frac{v-5}{v+5} \right| = -\frac{9.8}{25} t + c$$

ولحساب  $c$  نعوض  $t=0$  و  $v=55$ ، فنجد  $c = \frac{1}{10} \ln \frac{5}{6}$  وعليه، فإن

$$v = 5 \frac{6 + 5e^{-4t}}{6 - 5e^{-4t}}$$

ونلاحظ أن المظلي يصل سريعاً إلى سرعة ثابتة تقريباً وهي السرعة النهائية  $5 \text{ m/s}$ .

## تمارين الفصل التاسع

1. أوجد الحل العام لكلٍ من المعادلات التفاضلية التالية:

- 1)  $x(1+y^2) + y(1+x^2)y' = 0$ ;
- 2)  $y' = \cos(y-x)$ ;
- 3)  $y' = xy^2 + 2xy$ ;
- 4)  $x^2y^2y' + 1 = y$
- 5)  $y' = y \ln y$

2. أوجد الحل العام لكلٍ من المعادلات التفاضلية التالية:

- 1)  $y' = \frac{y+2}{x+1} + \tan\left(\frac{y+2}{x+1}\right)$
- 2)  $\left(x - y \cos \frac{y}{x}\right) dx + \left(x \cos \frac{y}{x}\right) dy = 0$
- 3)  $(2x - 4y + 6) dx + (x + y - 3) dy = 0$
- 4)  $xy' = y \cos\left(\ln \frac{y}{x}\right)$
- 5)  $(3x - 7y - 3)y' + 7x - 3y - 7 = 0$
- 6)  $(x - y) dx + (x + y) dy = 0$
- 7)  $(y + \sqrt{xy}) dx = x dy$
- 8)  $xy' - y = x \tan \frac{y}{x}$
- 9)  $(2xy + 3y^2) dx + (x^2 + 6xy - 3y^2) dy = 0$
- 10)  $\left[\frac{1}{x} - \frac{y^2}{(x-y)^2}\right] dx + \left[\frac{x^2}{(x-y)^2} - \frac{1}{y}\right] dy = 0$
- 11)  $(x^2 + y^2 + x) dx + y dy = 0$  ;  $\mu(x)$
- 12)  $xy^2(xy' + y) = 1$  ;  $\mu(x)$

- 13)  $(y + xy^2) dx = x dy$  :  $\mu(y)$   
 14)  $(2x + 3y) dx + (2y - 3x) dy = 0$  :  $\mu(x^2 + y^2)$   
 15)  $(x^2 - y^2) dx + (x^2 - y^2 + 1) dy = 0$  :  $\mu(x + y)$   
 16)  $(x^2 + 2x + y) dx + (1 + 2yx^2 + 2y^2) dy = 0$  :  $\mu(x + y^2)$   
 17)  $y dx + (x + x^2 y^2) dy = 0$  :  $\mu(x, y)$   
 18)  $y(2xy + 1) dx + x(1 + 2xy - x^3 y^3) dy = 0$  :  $\mu(x \cdot y)$   
 19)  $(xy' - 1) \ln x = 2y$   
 20)  $(\sin^2 y + x \cot y) y' = 1$   
 21)  $y' + y \cos x = e^{-\sin x}$

3. حوّل، باستخدام تحويلات مناسبة، المعادلات التالية إلى معادلات تفاضلية خطية، ثم حلها:

- 1)  $(x + 1)(y' + y^2) = -y$   
 2)  $(x^2 + 3 \ln y) y' dx = x dy$   
 3)  $x dx = (x^2 - 2y + 1) dy$   
 4)  $(x + 1)(yy' - 1) = y^2$   
 5)  $x(e^y - y') = 2$   
 6)  $(x^2 - 1)y' \sin y + 2x \cos y = 2x - 2x^3$   
 7)  $(1 + x^2)y' - 2xy = 4\sqrt{y(1 + x^2)} \arctan x$   
 8)  $x(\ln y + 2 \ln x - 1) dy = 2y dx$

4. أوجد الحل العام لكل من المعادلات:

- 1)  $3y' + y^2 + \frac{2}{x^2} = 0$

- 2)  $y' + 2y = e^x y^2$   
 3)  $y' - 2xy + y^2 = 5 - x^2$   
 4)  $(x-2)y' - xy - x(x^2-1)y^4 = 0$   
 5)  $y'(1 - \sin x \cos x) + y^2 \cos x - y + \sin x = 0$ ;  
 (حل خاص  $y_1 = \cos x$ )

6)  $y' = \frac{y^2 - x^2 y - 2x}{1 - x^2}$

(يمكن أن يكون لها حل خاص من أحد الشكلين  $(y = \alpha x^n$  أو  $y = \alpha x + b)$ )

5. أوجد الحل العام لكل من المعادلات:

- |                                                |                               |
|------------------------------------------------|-------------------------------|
| 1) $y' \sin y' + \cos y' = y$                  | 2) $y = y'^2 e^{y'}$          |
| 3) $y'^2 + (x-a)y' - y = 0 ; a \in \mathbb{R}$ | 4) $xy' = y + x\sqrt{1+y'^2}$ |
| 5) $y' + \sin y' = x$                          | 6) $y'^2 - y^2 = 0$           |
| 7) $x^4 y'^2 - xy' - y = 0$                    | 8) $yy'^2 + 2xy' - y' = 0$    |
| 9) $2xy' - y = y' \ln(xy')$                    | 10) $(y'+1)^3 = (y'-y)^2$     |

6. أوجد الحل العام والشاذ (إن وُجد) لكل من المعادلات التالية:

- |                                       |                                                |
|---------------------------------------|------------------------------------------------|
| 1) $4(1-y) = (3y-2)^2 y'^2$           | 2) $x = \frac{y}{y'} + y'^2$                   |
| 3) $xy'^2 - 2yy' + 4x = 0$            | 4) $y = 5xy' + 15y^4 y'^2$                     |
| 5) $4y'^2 (x-2) = 1$                  | 6) $y = \frac{x}{x+1} y' + \frac{x+1}{y'} e^x$ |
| 7) $y'^3 - 2xyy' + 4y^2 = 0$          | 8) $y'^2 + y^2 - 1 = 0$                        |
| 9) $y^2 y'^2 - a^2 + y^2 = 0 , a > 0$ | 10) $y' = 1 + \frac{3}{2}(y-x)^{1/3}$          |

|                                                |                                |
|------------------------------------------------|--------------------------------|
| 11) $y'^2 + x^3 y' - 2x^2 y = 0$               | 12) $y' - y y' + e^x = 0$      |
| 13) $x y'^2 - 3 y y' + 9 x^2 = 0$ , $x > 0$    | 14) $4 y' - 9 x = 0$           |
| 15) $3 x^4 y'^2 - x y' - y = 0$                | 16) $8 y'^3 - 12 y'^2 - y = 0$ |
| 17) $x y'^2 + (y - 1 - x^2) y' - x(y - 1) = 0$ | 18) $y = x + 2 y' - y'^2$      |

7. أوجد، باستخدام دستور التقريبات المتتالية، حل كل من مسائل كوشي التالية:

- 1)  $y' = x \cdot y$  :  $y(0) = 1$
- 2)  $y' = y + e^x$  :  $y(0) = 1$
- 3)  $y' = x + y$  :  $y(0) = 1$
- 4)  $y' = 1 + x \sin y$  :  $y(\pi) = 2\pi$

8. أوجد التقريبات  $y_2(x)$  ،  $y_1(x)$  ،  $y_0(x)$  للمسألة:

$$y' = 1 - (1 + x)y + y^2 ; \quad y(0) = 1$$

ومن ثم أوجد دقة الخطأ الناتج من استبدال الحل الدقيق  $y(x)$  ، بالحل التقريبي  $y_2(x)$  من أجل  $|x| \leq \frac{1}{4}$ .

9. عين، في صورة سلسلة قوى، حل كل من مسائل كوشي التالية:

|                                               |                                        |
|-----------------------------------------------|----------------------------------------|
| 1) $y' = y^2 - x$ : $y(0) = 1$                | 4) $y' = x^2 + y$ : $y(0) = y_0$       |
| 2) $y' = y + x e^y$ : $y(0) = 0$              | 5) $y' = 2x \cos y$ : $y(0) = 0$       |
| 3) $y' = \frac{2x - y}{1 - x}$ : $y(0) = y_0$ | 6) $y' = x + \frac{1}{y}$ : $y(0) = 1$ |





## الفصل العاشر

### المعادلات التفاضلية العادية من مراتب عليا

10.1 تعاريف ومفاهيم أولية

10.2 المعادلات القابلة لتخفيض المرتبة

10.3 المعادلات التفاضلية الخطية من مراتب عليا

10.4 المعادلات التفاضلية الخطية ذات الأمثال الثابتة

10.5 حل المعادلات التفاضلية الخطية بطريقة متسلسلات القوى الصحيح

10.6 تطبيق على المعادلات التفاضلية العادية من المرتبة الثانية

تمارين الفصل العاشر



## المعادلات التفاضلية العادية من مراتب عليا

### 10.1 تعاريف ومفاهيم أولية

المعادلة التفاضلية العادية من المرتبة  $n$ ، في الدالة المجهولة  $y$  والمتغير المستقل  $x$ ، هي المعادلة من النمط:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (10.1)$$

حيث  $y^{(n)}$  المشتق من المرتبة  $n$  للدالة  $y$  بالنسبة إلى المتغير  $x$  و  $F$  دالة، تتبع في الحالة العامة إلى  $y^{(n)}$ ، معرفة ومستمرة على ساحة  $\mathbb{R}^{n+2} \supseteq G$ ، حيث  $n \geq 1$ .

تسمى المعادلة التفاضلية من المرتبة  $n$ ، محلولة بالنسبة إلى المشتق  $y^{(n)}$ ، إذا أمكن كتابتها كما يلي:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (10.2)$$

حيث  $f$  دالة معرفة ومستمرة على ساحة  $\mathbb{R}^{n+1} \supseteq G$ ، حيث  $n \geq 1$ .

ولقد أعطينا في الفقرة 8.3 تعريفاً لحل المعادلة التفاضلية العادية ولأنواع هذه الحلول.

فالحل العام للمعادلة (10.1) أو (10.2) هو الدالة  $\varphi(x, y, c_1, \dots, c_n)$  المعرفة والمستمرة والقابلة للاشتقاق باستمرار على مجال  $\mathbb{R} \supseteq I$ ، وتحول المعادلة التفاضلية إلى مطابقة على هذا المجال. وهو يمثل هندسياً، حزمة منحنيات تكاملية، في المستوي  $oxy$ ، تتعلق بـ  $n$  وسيط (ثابت اختياري)  $c_1, c_2, \dots, c_n$ .

إن مسألة كوشي للمعادلة (10.2)، وتعرف بأسلوب مشابه، مسألة كوشي من أجل المعادلة (10.1)، تعني إيجاد حل  $y = y(x)$  لهذه المعادلة يحقق الشروط:

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \quad (10.3)$$

حيث إن  $x_0 \in I$  و  $y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$  أعداد معطاة.

### 10.1.1 مبرهنة الوجود والوحدانية

إذا كانت الدالة  $F$  مستمرة على الساحة  $G$ ، ولها مشتقات جزئية مستمرة بالنسبة إلى

$y, y', \dots, y^{(n-1)}$  عندها، من أجل أي نقطة  $(x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n)}) \in G$  تحقق:

$$F(x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n)}) = 0 \quad \text{و} \quad \frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}(x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n)}) \neq 0$$

يوجد حل وحيد للمعادلة (10.1) معرف على جوار للنقطة  $x_0 \in I$ ، يحقق الشروط (10.3).

تعطى مبرهنة الوجود والوحدانية لمسألة كوشي (10.2) و (10.3) بأسلوب مشابه.

نعطي الآن، بعض أنواع المعادلات التفاضلية من المرتبة  $n$ ، والتي يمكن حلها، ونعطي طرائق حلها، لنتنقل بعد ذلك إلى دراسة المعادلات التفاضلية الخطية من المرتبة  $n$ .

#### حالات خاصة

١- المعادلة التفاضلية تحوي المشتق من المرتبة  $n$  فقط، بالإضافة إلى المتغير المستقل  $x$ :

أي أنها من النمط:

$$F(x, y^{(n)}) = 0 \quad (10.4)$$

نستخدم التمثيل الوسيطى لحل هذه المعادلة، فندخل وسيطاً  $t$ ، بحيث:

$$x = \varphi(t) \quad \text{و} \quad y = \psi(t)$$

حيث إن  $\varphi(t)$  دالة قابلة للمفاضلة.

لما كان  $dy^{(n-1)} = y^{(n)} dx$ ، أي:  $dy^{(n-1)} = \psi'(t) \cdot \varphi'(t) dt$ ، فإن:

$$y^{(n-1)} = \int \psi'(t) \cdot \varphi'(t) dt + c_1 = \psi_1(t, c_1)$$

و نحصل بأسلوب مشابه، على المشتق  $y^{(n-2)}$ ، وهكذا، حتى نحصل على الحل العام

$y = \psi_n(t, c_1, \dots, c_n)$  . وعليه، تعطي الجملة

$$\{y = \psi_n(t, c_1, c_2, \dots, c_n) \text{ , } x = \varphi(t)\}$$

الحل العام للمعادلة (10.4) وسيطياً.

وإذا كانت المعادلة (10.4) من النمط :

$$x = g(y^{(n)})$$

فإنه يمكن اعتبار الوسيط في هذه الحالة، هو  $y^{(n)} = t$ ، ويكون عندها  $x = g(t)$ ، ونتابع كما فعلنا سابقاً.

أما إذا كانت المعادلة (10.4) من النمط :

$$y^{(n)} = f(x)$$

حيث  $f(x)$  دالة معرفة ومستمرة على المجال  $\mathbb{R} \supseteq I$ ، فإننا نختار  $x \in I$  وسيطاً، ويعطى الحل العام لهذه المعادلة بالمكاملة  $n$  مرة متتالية:

$$y = \int \int \dots \int f(x) dx dx \dots dx + c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \dots + c_{n-1} x + c_n$$

٢- إذا كانت المعادلة التفاضلية من النمط :

$$F(y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0 \quad (10.5)$$

نستخدم، أيضاً، التمثيل الوسيطي، فندخل وسيطاً  $t$ ، بحيث  $y^{(n-1)} = \psi(t)$  و  $y^{(n)} = \varphi(t)$  دالة قابلة للمفاضلة.

لما كان  $dy^{(n-1)} = y^{(n)} dx$ ، فإن :

$$dx = \frac{dy^{(n-1)}}{y^{(n)}} = \frac{\psi'(t) dt}{\varphi(t)} \Rightarrow x = \int \frac{\psi'(t)}{\varphi(t)} dt + c_1 = \xi(t, c_1)$$

ولما كان  $dy^{(n-2)} = y^{(n-1)} dx$ ، فإن :

$$dy^{(n-2)} = \frac{\psi(t) \cdot \psi'(t)}{\varphi(t)} dt \Rightarrow y^{(n-2)} = \int \frac{\psi(t) \cdot \psi'(t)}{\varphi(t)} dt + c_2$$

وبالأسلوب نفسه، نحسب  $y^{(n-3)}$ ، من العلاقة  $dy^{(n-3)} = y^{(n-2)} dx$ ، وهكذا حتى نصل إلى  $y$ ، بواسطة العلاقة  $dy = y' dx$ ، أي:

$$y = \int y' dx + c_n = \eta(t, c_1, c_2, \dots, c_n)$$

وعليه، فإن الحل العام للمعادلة (10.5)، يُعطى وسيطياً بالجملة:

$$\{y = \eta(t, c_1, c_2, \dots, c_n), x = \xi(t, c_1)\}$$

وإذا كانت المعادلة (10.5) من النمط:

$$y^{(n)} = f(y^{(n-1)})$$

نُدخل دالة جديدة  $u = y^{(n-1)}$ ، فتصبح المعادلة كما يلي:

$$u' = f(u)$$

ويعطى التكامل العام لها بالعلاقة:

$$x + c_1 = \int \frac{du}{f(u)} : f(u) \neq 0$$

وإذا كان هذا التكامل محلولاً بالنسبة إلى  $u$ ، أي:

$$u = \psi(x, c_1) \Rightarrow y^{(n-1)} = \psi(x, c_1)$$

وهذه المعادلة دُرست في الحالة السابقة، ويعطى الحل العام لها بالعلاقة:

$$y = \int \int \dots \int \psi(x, c_1) dx dx \dots dx + c_2 x^{n-2} + c_3 x^{n-3} + \dots + c_{n-1} x + c_n$$

٣- المعادلة من النمط:

$$F(y^{(n-2)}, y^{(n)}) = 0 \quad (10.6)$$

باستخدام التحويل  $y^{(n-2)} = u$ ، تصبح المعادلة كما يلي:

$$F(u, u'') = 0$$

ولنفرض أن هذه المعادلة محلولة بالنسبة إلى  $u''$  :

$$u'' = f(u)$$

وبضرب طرفي هذه المعادلة بعامل التكامل  $\mu = 2u'$  ، نجد :

$$2u'u'' = 2f(u)u' \Rightarrow u'^2 = 2 \int f(u)du + c_1$$

وعليه، فإن :

$$dx = \frac{du}{\pm \sqrt{2 \int f(u)du + c_1}} ; \quad 2 \int f(u)du + c_2 \neq 0$$

ونجد، بالمكاملة :

$$x + c_2 = \pm \int \frac{du}{\sqrt{2 \int f(u)du + c_1}}$$

وبتعويض قيمة  $u$  ، في هذا التكامل، نحصل على تكامل جزئي للمعادلة (10.6) :

$$\psi(x, y^{(n-2)}, c_1, c_2) = 0$$

وهي معادلة تفاضلية من المرتبة  $(n-2)$  ، من النمط (10.4) .

كما يمكن حل المعادلة (10.6) وسيطياً، باستخدام الوسيط  $t$  :  $y^{(n-2)} = \psi(t)$  ،  $y^{(n)} = \varphi(t)$  .

من العلاقة  $dy^{(n-1)} = y^{(n)}dx$  و  $dy^{(n-2)} = y^{(n-1)}dx$  ، نجد :

$$y^{(n)} \cdot dy^{(n-1)} = \varphi(t) \cdot \psi'(t)dt \Rightarrow$$

$$y^{(n-1)} = \pm \sqrt{2 \int \varphi(t) \cdot \psi'(t)dt + c_1} = \xi(t, c_1)$$

وهكذا نكون قد حصلنا على  $y^{(n)}$  و  $y^{(n-1)}$  وسيطياً، بدلالة  $t$  :

$$y^{(n-1)} = \varphi(t) \quad , \quad y^{(n-1)} = \xi(t, c_1)$$

أي انتقلنا للمعادلة من النمط (10.5).

مثال 3.1: حل المعادلة  $y'' = xe^x$ .

الحل: نكامل المعادلة مرتين متتاليتين لنجد الحل العام:

$$y' = (x-1)e^x + c_1 \Rightarrow y = (x-2)e^x + c_1x + c_2$$

مثال 10.2: حل المعادلة  $y''^2 = x + e^{x^2}$ .

الحل: نفرض  $y'' = t$ ، حيث  $t$  وسيط، فنجد  $x = e^t - t^2$ .

ولما كان  $dy' = y''dx$ ، فإن  $dy' = t(e^t - 2t)dt$ ، ونجد بالمكاملة:

$$y' = (t-1)e^t - \frac{2}{3}t^3 + c_1$$

ولما كان  $dy = y'dx$ ، فإن

$$dy = \left[ e^t(t-1) - \frac{2}{3}t^3 + c_1 \right] (e^t - 2t)dt$$

و نجد بالمكاملة:

$$y = \left( \frac{t}{2} - \frac{3}{4} \right) e^{2t} - \left( \frac{2}{3}t^3 - 2t + 2 - c_1 \right) e^t + \frac{4}{15}t^5 - c_1t^2 + c_2$$

هذه المعادلة مع عبارة  $x$  تُعطي الحل العام وسيطياً.

مثال 10.3: حل المعادلة  $y''' = \sqrt{1 + y''^2}$ .

الحل: إن الطرف الأيمن من المعادلة  $f(x, y, y', y'') = \sqrt{1 + y''^2}$  هو دالة مستمرة ولها مشتقات جزئية مستمرة:



$$f'_{y''} = \frac{y''}{\sqrt{1+y''^2}} \quad \text{و} \quad f'_{y'} = f'_{y''} = 0$$

لذا، هناك حل وحيد لهذه المعادلة مع أي شروط ابتدائية  $(x_0, y_0, y'_0, y''_0)$ .

لحلها نفرض  $y'' = u$ ، فتصبح المعادلة من النمط:

$$u' = \sqrt{1+u^2} \Rightarrow dx = \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} \Rightarrow \int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = x + c_1$$

$$\operatorname{arsh} u = x + c_1 \Rightarrow u = \operatorname{sh}(x + c_1) \Rightarrow$$

$$y'' = \operatorname{sh}(x + c_1)$$

وبالكاملة مرتين متتاليتين، نجد الحل العام للمعادلة المعطاة:

$$y' = \operatorname{ch}(x + c_1) + c_2 \Rightarrow y = \operatorname{sh}(x + c_1) + c_2 x + c_3$$

مثال 10.4: حل مسألة كوشي التالية:

$$y'' = \frac{1}{4\sqrt{y}} : \quad y(0) = 1, y'(0) = -1$$

الحل: نضرب طرفي المعادلة بعامل التكميل  $(y, y') = 2y'$ ، فتصبح المعادلة كما يلي:

$$2y'y'' = \frac{y'}{2\sqrt{y}} \Rightarrow (y'^2)' = \frac{y'}{2\sqrt{y}}$$

$$y'^2 = \int \frac{dy'}{2\sqrt{y}} + c_1 \Rightarrow y'^2 = \sqrt{y} + c_1$$

لحساب الثابت  $c_1$ ، نعوض في المعادلة الأخيرة القيم:  $x=0, y=1, y'=-1$ ، فنجد أن

$c_1 = 0$ . ولما كان  $y'(0) = 1$ ، فتصبح المعادلة كما يلي:

$$y' = -\sqrt{y}$$

ومنه، فإن:

$$\frac{dy}{\sqrt[4]{y}} = -dx \Rightarrow \frac{4}{3} y^{3/4} = -x + c_2$$

لحساب الثابت  $c_2$ ، نعوض شروط البدء في هذه المعادلة، فنجد  $c_2 = 4/3$ .

$$y = \left(1 - \frac{3}{4}x\right)^{4/3}$$

وعليه، فحل مسألة كوشي هو:

## 10.2 المعادلات القابلة لتخفيض المرتبة

10.2.1 المعادلة التفاضلية لا تحوي الدالة المجهولة  $y$  ولا تحوي مشتقاتها حتى المرتبة  $k = 1$  أي أنها من النمط:

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0 \quad ; \quad 1 \leq k < n$$

نستخدم التحويل  $z = y^{(k)}$ ، حيث  $z$  دالة مجهولة جديدة، فنحصل على معادلة تفاضلية جديدة من المرتبة  $(n-k)$ :

$$F(x, z, z', \dots, z^{(n-k)}) = 0$$

إذا تمكنا من حل هذه المعادلة والحصول على الدالة  $z = \varphi(x, c_1, c_2, \dots, c_{n-k})$ ، فإن الحصول على  $y$  يتم بحل المعادلة التفاضلية:

$$y^{(k)} = \varphi(x, c_1, c_2, \dots, c_{n-k})$$

مثال 10.5: أوجد حلول مسألة كوشي:

$$y''^2 = 4(y' - 1) \quad ; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2$$

الحل: نفرض  $z = y'$ ، فتصبح المعادلة كما يلي:

$$z'^2 = 4(z - 1) \Rightarrow dx = \frac{dz}{\pm 2\sqrt{z-1}} \quad ; \quad \sqrt{z-1} \neq 0$$

وبالمكاملة نجد:

$$\pm \sqrt{z-1} = x + c_1 \Rightarrow z = 1 + (x + c_1)^2$$

ومنه:

$$y' = 1 + (x + c_1)^2 \Rightarrow y = x + \frac{1}{3}(x + c_1)^3 + c_2$$

وهو يمثل عبارة الحل العام للمعادلة المعطاة، حيث  $c_1$  و  $c_2$  ثابتان اختياريان.

في الحالة  $\sqrt{z-1} = 0$ ، يكون  $z = 1$ ، أي  $y' = 1$ .

وعليه، فإن  $y = x + c$ ، وهو يمثل الحلول الشاذة للمعادلة المعطاة، حيث  $c$  ثابت اختياري.

لإيجاد حلول مسألة كوشي نعوض في الحل العام، القيم  $y' = 2$ ،  $y = 0$ ،  $x = 0$ ، فنجد:

$c_1 = \pm 1$  و  $c_2 = \pm 1/3$ . نعوض في الحل العام، فنحصل على حلان لمسألة كوشي:

$$y_2 = x + \frac{1}{3}(x-1)^3 + \frac{1}{3} \quad \text{و} \quad y_1 = x + \frac{1}{3}(x+1)^3 - \frac{1}{3}$$

واضح أنه لا يوجد حلول أخرى لمسألة كوشي المفروضة، لأن الحلول الشاذة لا تحقق الشروط الابتدائية.

## 10.2.2 المعادلة التفاضلية لا تحوي المتغير المستقل:

أي أن المعادلة من النمط:

$$F(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

نستطيع تخفيض مرتبة المعادلة مرة واحدة باستخدام التحويل  $y' = z$ ، حيث  $z$  دالة جديدة في

المتغير المستقل الجديد  $y$ ، ويكون:

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot z$$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{dy''}{dy} \cdot z = \left[ \frac{d^2 z}{dy^2} z + \left( \frac{dz}{dy} \right)^2 \right] z$$

ونتابع هكذا، للحصول على المشتق  $y^{(n)}$ ، بدلالة  $z$  ومشتقاتها بالنسبة إلى  $y$ .

مثال 10.6: حل المعادلة:  $2yy'' = y'^2 + 1$ .

الحل: نفرض  $z = y'$ ، فيكون  $y'' = \frac{dz}{dy}$ . نعوض في المعادلة المعطاة:

$$2yz \frac{dz}{dy} = z^2 + 1$$

وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الأولى، الدالة المجهولة  $z$  والمتغير المستقل  $y$ . بحلها نجد:

$$z = \pm \sqrt{c_1 y - 1} \Rightarrow y' = \pm \sqrt{c_1 y - 1}$$

وبحل هذه المعادلة، نحصل على الحل العام للمعادلة المعطاة:

$$4(c_1 y - 1) = c_1^2 (x + c_2)$$

حيث  $c_1$  و  $c_2$  ثابتان اختياريان.

10.2.3 المعادلة التفاضلية متجانسة بالنسبة إلى الدالة  $y$  ومشتقاتها

أي أن المعادلة تحقق العلاقة:

$$F(x, \lambda y, \lambda y', \dots, \lambda y^{(n)}) = \lambda^n F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) : \lambda \neq 0$$

نستطيع تخفيض مرتبة المعادلة مرة واحدة، باستخدام التحويل  $y' = yz$ ، حيث إن  $z$  دالة مجهولة في المتغير المستقل  $x$ . ويكون:

$$y'' = y'z + yz' = y(z^2 + z')$$

$$y''' = y(z^3 + 3zz' + z'')$$

ونتابع هكذا للحصول على  $y^{(n)}$ .

مثال 10.7: حل المعادلة  $x^2 y y'' - (y - x y')^2 = 0$ .

الحل: المعادلة متجانسة، لحلها نفرض  $y' = zy$ ، ويكون  $y'' = y(z^2 + z')$ .

نعرض في المعادلة المفروضة، فنجد بعد الترتيب:

$$y^2[x^2(z^2 + z') - (1 - xz)^2] = 0$$

واضح أن  $y = 0$  حل للمعادلة.

عندما يكون  $y \neq 0$ ، نحصل على المعادلة:

$$x^2(z^2 + z') - (1 - xz)^2 = 0 \Rightarrow z' + \frac{2}{x}z = \frac{1}{x^2}$$

وهي معادلة خطية من المرتبة الأولى، دالتها المجهولة  $z$ . ويكون حلها العام:

$$z = e^{-\int \frac{2}{x} dx} \left[ c_1 + \int \frac{1}{x^2} e^{\int \frac{2}{x} dx} dx \right] = \frac{c_1}{x^2} + \frac{1}{x}$$

ولما كان  $y' = yz$ ، فإن  $y = c_2 e^{\int z dx}$  ونجد بالمكاملة:

$$y = c_2 x e^{-c_1/x}$$

وهو الحل العام للمعادلة المعطاة.

والحل  $y \equiv 0$  هو حلٌ خاص، يوافق القيمة  $c_2 = 0$ .

10.2.4 الطرف الأيسر من المعادلة (10.1) عبارة عن مشتق لعبارة تفاضلية من المرتبة  $(n-1)$ : أي أن:

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = \frac{d}{dx} \phi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

ويكون:  $\phi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = c_1$

وهي معادلة تفاضلية جديدة من المرتبة  $(n-1)$ .

إذا لم يكن الطرف الأيسر في المعادلة (10.1) مشتق لعبارة تفاضلية، فإنه يمكن أحياناً، اختيار دالة  $\mu = \mu(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$  عامل تكميل، بحيث إنه، بعد ضرب طرفي المعادلة بها،

يصبح الطرف الأيسر في المعادلة الجديدة مشتقاً لعبارة تفاضلية من المرتبة  $(n-1)$ .

ملحوظة 10.1: عند ضرب طرفي المعادلة بعامل التكامل  $\mu$ ، يمكن أن تضاف أو تضاع بعض الحلول الإضافية، وهي حلول المعادلة  $\mu = 0$ ، أو نقاط انقطاع الدالة  $\mu$ .

مثال 10.8: أوجد حل لمسألة كوشي التالية:

$$xy'' - y' - x^2yy' = 0 \quad ; \quad y(1) = 0 \quad , \quad y'(1) = 2$$

الحل: نضرب طرفي المعادلة بالدالة  $\mu = \frac{1}{x^2}$ ، فتصبح كما يلي:

$$\frac{xy''}{x^2} - \frac{y'}{x^2} - yy' = 0 \Rightarrow \left( \frac{y'}{x} - \frac{y^2}{2} \right)' = 0$$

ومنه، فإن:

$$\frac{y'}{x} - \frac{y^2}{2} = c_1 \quad (i)$$

نعوض في شروط البدء، لحساب قيمة الثابت  $c_1$ :

$$c_1 = \frac{2}{1} - \frac{1}{2} \cdot 0 = 2$$

نعوض في المعادلة (i):

$$\frac{y'}{x} = \frac{y^2}{2} + 2 \Rightarrow \frac{dy}{y^2 + 4} = \frac{x}{2} dx$$

بالمكاملة والإصلاح نجد:

$$\arctan \frac{y}{2} = \frac{x^2}{2} + c_2 \quad (ii)$$

نعوض شروط البدء، في المعادلة (ii)، لحساب قيمة الثابت  $c_2$ ، فنجد:

$$c_2 = \arctan \frac{0}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

نعوض في (ii)، فنجد حل مسألة كوشي المطلوب:

$$y = 2 \tan \frac{x^2 - 1}{2}$$

ملحوظة 10.2: عند حل مسألة كوشي من مراتب عليا، بطريقة تخفيض المرتبة، نوجد قيم الثوابت الاختيارية بعد كل عملية تكامل.

### 10.3 المعادلات التفاضلية الخطية من مراتب عليا

المعادلة التفاضلية الخطية غير المتجانسة من المرتبة  $n$ ، هي المعادلة من النمط:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x) \quad (10.7)$$

إذا كان  $f(x) \equiv 0$ ، فإن المعادلة (10.7) تسمى معادلة خطية متجانسة من المرتبة  $n$ :

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0 \quad (10.8)$$

إذا كانت  $f(x), p_1(x), \dots, p_n(x)$  دوال مستمرة على المجال  $I$ ، فإن للمعادلة (10.7) حل وحيد  $y = y(x)$  معرف على هذا المجال، ويحقق الشروط الابتدائية:

$$y_0 = y(x_0), y'_0 = y'(x_0), \dots, y_0^{(n-1)} = y^{(n-1)}(x_0)$$

حيث إنه يمكن إعطاء القيم الابتدائية  $y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$  اختيارياً، و  $x_0 \in I$ .

إن حل المعادلة غير المتجانسة (10.7)، يتم من خلال المعادلة المتجانسة الموافقة لها (10.8).

#### 10.3.1 المعادلات الخطية المتجانسة

إن للمعادلة الخطية المتجانسة (10.8)، دائماً الحل الصفري (الثافه)  $y \equiv 0$ ، وهو يحقق الشروط الابتدائية الصفيرية:

$$y(x_0) = 0, y'(x_0) = 0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = 0$$

حيث إنه لا توجد حلول أخرى، للمعادلة المتجانسة (10.8)، تحقق هذه الشروط الابتدائية الصغرية.

يمكن، بسهولة، إثبات أنه إذا كانت الدالتان  $y_1(x)$  و  $y_2(x)$  حلين خاصين للمعادلة الخطية المتجانسة (10.8)، فإن الدالة  $ay_1(x) + by_2(x)$ ، أيضاً، حل للمعادلة (10.8)، حيث  $a$  و  $b$  ثابتان.

لإيجاد الحل العام للمعادلة الخطية المتجانسة (10.8)، يكفي معرفة  $n$  حلاً خاصاً لها  $y_1, \dots, y_n$ ، مستقلاً خطياً، على المجال  $\mathbb{R} \supseteq I$ . أي الحلول التي تكون من أجلها المطابقة:

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_n y_n = 0, \quad \forall x \in I$$

(حيث  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  ثوابت) محققة، فقط في الحالة

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$$

تسمى مجموعة الحلول الخاصة، هذه، جملة الحلول الأساسية للمعادلة (10.8).

مبرهنة 10.1: يلزم ويكفي لكي تكون جملة الحلول  $y_1, y_2, \dots, y_n$  للمعادلة (10.8)

أساسية هو أن يكون  $w(x)$  معين رونسكي  $Wronskian$  لها، مخالفاً للصفر، على الأقل

في نقطة من نقاط المجال  $I$ :

$$w(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

مثال 10.9: بفرض أن الدوال  $e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \dots, e^{\lambda_n x}$  تمثل حلولاً خاصة للمعادلة التفاضلية

(10.8). ادرس الاستقلال والارتباط الخطي لها.

<sup>1</sup> جوزيف ماري رونسكي (١٧٧٦-١٨٥٣) رياضي بولوني.



الحل: نكتب معين رونسكي هذه الجملة من الدوال:

$$W(e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \dots, e^{\lambda_n x}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} e^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)x}$$

واضح، أنه يكون معين رونسكي معدوماً، إذا تساوت قيمتان على الأقل من قيم  $\lambda_i$ ، لأن ذلك يعني تطابق عمودين في هذا المعين. وعليه، تكون جملة الدوال مرتبطة خطياً.

أما إذا كانت قيم  $\lambda_i$  مختلفة فيما بينها، فإن المعين لا يساوي الصفر، والجملة تكون مستقلة خطياً.

ملحوظة 10.3: إذا كانت الدوال  $p_1(x), p_2(x), \dots, p_n(x)$ ، في المعادلة (10.8)، مستمرة فإنه يوجد عدد غير منته من مجموعات الحلول الأساسية للمعادلة (10.8).

نتيجة 10.1: إذا كانت الدوال  $y_1, y_2, \dots, y_n$  تشكل جملة حلول أساسية للمعادلة التفاضلية المتجانسة (10.8) وكانت  $c_1, c_2, \dots, c_n$  ثوابت اختيارية، فإن الحل العام لهذه المعادلة، يعطى بالعلاقة:

$$y_c = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n = \sum_{i=1}^n c_i y_i$$

وينتج من ذلك أن عدد الحلول الخاصة للمعادلة الخطية المتجانسة (10.8) والمستقلة خطياً على مجال معين، لا يمكن أن يتجاوز مرتبة المعادلة التفاضلية. وإن كل حل خاص للمعادلة المتجانسة (10.8) يمكن أن يكتب كعبارة خطية بدلالة جملة حلول أساسية لها.

### 10.3.2 المعادلات الخطية غير المتجانسة

مبرهنة 10.2: إن الحل العام  $y$ ، للمعادلة الخطية غير المتجانسة (10.7)، هو مجموع حلين: الأول  $y_p$  حل خاص لهذه المعادلة، والثاني حل عام للمعادلة المتجانسة الموافقة لها (10.8).

أي أن:

$$y = y_c + y_p \quad (10.9)$$

الإثبات: إذا كان  $y_p$  حل خاص للمعادلة (10.7) فإنه يحققها، أي:

$$y_p^{(n)} + p_1(x)y_p^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y_p = f(x) \quad (10.10)$$

ولنبرهن أن أي حل  $z(x)$  للمعادلة غير المتجانسة (10.7)، ينتج من العلاقة (10.9)، من أجل قيم معين ووحيدة للثوابت الاختيارية  $c_1, c_2, \dots, c_n$ .

لما كان  $z(x)$  حل للمعادلة (10.7) فإنه يحققها:

$$z^{(n)} + p_1(x)z^{(n-1)} + \dots + p_n(x)z = f(x)$$

وبطرح هذه المعادلة من المعادلة (10.10)، وبعد الترتيب، نجد:

$$(z - y_p)^{(n)} + p_1(x)(z - y_p)^{(n-1)} + \dots + p_n(x)(z - y_p) = 0$$

وهذا يعني أن الدالة  $(z - y_p)$  تمثل حلاً للمعادلة المتجانسة الموافقة (10.8)، وهذا الحل ينتج عن الحل  $y_c$  من أجل قيم معينة للثوابت الاختيارية. ومنه، فإن:

$$z - y_p = y_c \Rightarrow z = y_c + y_p$$

نسمي الحل  $y_c$  الدالة المكتملة للمعادلة التفاضلية (10.7). وهو المطلوب.

إن عملية إيجاد حل خاص للمعادلة غير المتجانسة (10.7) ليست سهلة، في الحالة العامة، باستثناء الحالة، عندما تكون المعادلة الخطية غير المتجانسة ذات أمثال ثابتة. لذا، نستخدم، عادة، لإيجاد الحل العام للمعادلة الخطية غير المتجانسة، طريقة تحويل الثوابت (طريقة لاغرانج) وذلك إذا علمت جملة الحلول الأساسية للمعادلة المتجانسة الموافقة (10.8).

طريقة تحويل الثوابت (طريقة لاغرانج):

إذا كان الحل العام للمعادلة المتجانسة (10.8)، من النمط  $y_c = \sum_{i=1}^n c_i(x) \cdot y_i$ ، فإننا

نبحث عن الحل العام للمعادلة غير المتجانسة (10.7)، من النمط:

$$y = \sum_{i=1}^n c_i(x) \cdot y_i \quad (10.11)$$

حيث إن  $c_1(x), c_2(x), \dots, c_n(x)$  دوال قابلة للاشتقاق باستمرار، تُعرّف من جملة المعادلات التالية:

$$\sum_{i=1}^n c'_i y_i = 0, \quad \sum_{i=1}^n c'_i y'_i = 0, \quad \dots, \quad \sum_{i=1}^n c'_i y_i^{(n-2)} = 0$$

$$\sum_{i=1}^n c'_i y_i^{(n-1)} = f(x) \quad (10.12)$$

وهي جملة  $n$  معادلة خطية جبرية، غير متجانسة بالنسبة إلى  $c'_i(x)$ ، حيث  $i = 1, 2, \dots, n$ . ولما كان المعين الرئيسي لأمثال هذه الجملة، معين رونسكي، غير معدوم، فإن للجملة (10.12) حل وحيد:

$$c'_i(x) = \varphi_i(x) \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, n$$

ونجد بالكامل:

$$c_i(x) = \int \varphi_i(x) dx + \alpha_i \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, n$$

حيث إن جميع  $\alpha_i$  ثوابت اختيارية. نعوض قيمة  $c_i$  التي حصلنا عليها في (10.11)، فنحصل على الحل العام للمعادلة غير المتجانسة (10.7):

$$y = \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i + \sum_{i=1}^n y_i \int \varphi_i(x) dx = y_c + y_p$$

مثال 10.10: أوجد حلاً خاصاً للمعادلة:

$$y''' - \frac{3}{x} y'' + \frac{6}{x^2} y' - \frac{6}{x^3} y = \sqrt{x}.$$

الحل: لما كانت الدوال  $x, x^2, x^3$  مستقلة خطياً، فإنها تشكل جملة حلول أساسية للمعادلة

المتجانسة الموافقة:

$$y''' - \frac{3}{x}y'' + \frac{6}{x^2}y' - \frac{6}{x^3}y = 0 \quad (i)$$

وعليه، فالحل العام للمعادلة المتجانسة (i) هو:

$$y_c = c_1 + c_2x^2 + c_3x^3$$

نبحث الآن، عن الحل العام للمعادلة غير المتجانسة المعطاة، بطريقة لاغرانج، من النمط:

$$y = c_1(x)x + c_2(x)x^2 + c_3(x)x^3 \quad (ii)$$

حيث إن الدوال  $c_1(x), c_2(x), c_3(x)$  تُعرَّف من جملة المعادلات:

$$c_1'(x)x + c_2'(x)x^2 + c_3'(x)x^3 = 0$$

$$c_1'(x) + c_2'(x)2x + c_3'(x)3x^2 = 0$$

$$c_1'(x) + 2c_2'(x) + 6c_3'(x)x = \sqrt{x}$$

بحل هذه المعادلات الجبرية بالنسبة إلى  $c_1', c_2', c_3'$ ، نجد:

$$c_1'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x^3}, \quad c_2'(x) = -\sqrt{x}, \quad c_3'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

ونجد بالمكاملة:

$$c_1(x) = \frac{1}{5}\sqrt{x^5} + \alpha_1, \quad c_2(x) = -\frac{2}{3}\sqrt{x^3} + \alpha_2, \quad c_3(x) = \sqrt{x} + \alpha_3$$

حيث إن  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  ثوابت اختيارية. نعوض في (ii)، فنحصل على عبارة الحل العام للمعادلة غير المتجانسة المعطاة:

$$y = \alpha_1x + \alpha_2x + \alpha_3x + \frac{1}{5}x\sqrt{x^5} - \frac{2}{3}x^2\sqrt{x^3} + x^3\sqrt{x}$$

$$y = \alpha_1x + \alpha_2x + \alpha_3x + \frac{8}{15}\sqrt{x^7}$$

#### 10.4 المعادلات التفاضلية الخطية ذات الأمثال الثابتة

##### 10.4.1 المعادلة الخطية المتجانسة

تكتب المعادلة الخطية المتجانسة، من المرتبة  $n$  ذات الأمثال الثابتة، كما يلي:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \quad (10.13)$$

حيث إن الأمثال  $a_1, a_2, \dots, a_n$  أعداد حقيقية ثابتة:

وإذا رمزنا للمشتق من المرتبة  $i$  للدالة  $y$ ، بالنسبة إلى  $x$ ، بالرمز  $D^i$ :

$$\frac{d^i y}{dx^i} = D^i y \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, n$$

فيمكن كتابة المعادلة (10.13)، كما يلي:

$$(D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1} D + a_n) y = 0$$

واختصاراً:

$$L(D)y = 0 \quad (10.14)$$

حيث إن:

$$L(D) \equiv D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1} D + a_n$$

نسمي  $L(D)$  مؤثراً تفاضلياً خطياً بأمثال ثابتة. وهو حدودية في  $D$  من الدرجة  $n$ ، وهو خطي لأنه يحقق العلاقة:

$$L(D)(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha L(D)y_1 + \beta L(D)y_2$$

حيث  $\alpha, \beta$  ثوابت و  $y_1, y_2$  دوال في  $x$ .

يمكن التحقق بسهولة، من أن المؤثر التفاضلي الخطي بأمثال ثابتة  $L(D)$ ، يحقق الخواص

التالية:

بفرض  $\alpha$  عدد ثابت،  $v(x)$  دالة ما في  $x$ :

$$1. L(D)e^{\alpha x} = L(\alpha)e^{\alpha x}$$

$$2. L(D^2)\sin \alpha x = L(-\alpha^2)\sin \alpha x$$

$$3. L(D^2)\cos \alpha x = L(-\alpha^2)\cos \alpha x$$

$$4. L(D)e^{\alpha x} \cdot v(x) = e^{\alpha x} L(D + \alpha)v(x)$$

وتعرف عمليتي الجمع والضرب على مجموعة المؤثرات التفاضلية الخطية، ذات الأمثال الثابتة، كما يلي:

بفرض  $L_1(D)$  ,  $L_2(D)$  ,  $L_3(D)$  مؤثرات تفاضلية خطية بأمثال ثابتة.

إن مجموع المؤثرين التفاضليين  $L_1(D)$  ,  $L_2(D)$  هو المؤثر التفاضلي الخطي بأمثال ثابتة  $L_1(D) + L_2(D)$  حيث إن:

$$[L_1(D) + L_2(D)]y = L_1(D)y + L_2(D)y$$

وتتصف هذه العملية بالخاصة التبادلية والتجميعية:

$$L_1(D) + L_2(D) = L_2(D) + L_1(D)$$

$$[L_1(D) + L_2(D)] + L_3(D) = L_1(D) + [L_2(D) + L_3(D)]$$

وحاصل ضرب المؤثر  $L_1(D)$  في المؤثر  $L_2(D)$ ، هو المؤثر  $L_1(D) \cdot L_2(D)$  حيث إن:

$$[L_1(D) \cdot L_2(D)]v = L_1(D)[L_2(D)v]$$

وتتصف هذه العملية بالخاصة التبادلية والتجميعية:

$$L_1(D) \cdot L_2(D) = L_2(D) \cdot L_1(D)$$

$$L_1(D)[L_2(D) \cdot L_3(D)] = [L_1(D) \cdot L_2(D)]L_3(D)$$

كما أن عملية الضرب توزيعية على الجمع:

$$L_1(D) \cdot [L_2(D) + L_3(D)] = L_1(D) \cdot L_2(D) + L_1(D) \cdot L_3(D)$$

نستنتج من هذه الخواص، أن المؤثرات التفاضلية الخطية ذات الأمثال الثابتة، لا تختلف في عملياتها عن عمليات الحدوديات. وعليه، يمكن أن نطبق ما يجوز تطبيقه على الحدوديات من عمليات، وخصوصاً، يمكن تحليل المؤثر التفاضلي  $L(D)$  إلى عوامل، بأسلوب مشابه لقواعد الجبر الأساسية. فإذا كانت  $\alpha, \beta$  ثوابت، فإن:

$$[(D - \alpha)(D - \beta)]y = [D^2 - (\alpha + \beta)D + \alpha\beta]y$$

وتفيد هذه الخاصية، في تخفيض مرتبة المعادلة التفاضلية، كما يلي:

إذا أمكن كتابة المعادلة التفاضلية (10.14)، كما يلي:

$$(D - \alpha)F(D)y = 0 \quad (10.15)$$

حيث  $\alpha$  و  $F(D)$  مؤثر تفاضلي خطي بأمثال ثابتة، من مرتبة أقل بواحد من مرتبة  $L(D)$ . وباستخدام التحويل  $z = (D - \alpha)y$ ، نكتب المعادلة (10.15) كما يلي:

$$F(D)z = 0$$

وهي معادلة تفاضلية ذات أمثال ثابتة من مرتبة أقل بواحد من مرتبة المعادلة (10.13).

مثال 10.11: أوجد الحل العام للمعادلة  $2y'' - y' + 2y = 2x + 3$ .

الحل: نكتب المعادلة بدلالة المؤثر التفاضلي:

$$(D - 2)(D + 1)y = 2x + 3$$

بفرض  $(D + 1)y = z$ ، تصبح المعادلة كما يلي:  $(D - 2)z = 2x + 3$  وهي معادلة تفاضلية خطية من المرتبة الأولى ذاتها المجهولة  $z$ ، وحلها العام يعطى بالعلاقة:

$$z = -(x + 2) + c_1 e^{-2x}$$

نعوض  $z$  بقيمتها في التحويل:

$$(D + 1)y = -(x + 2) + c_1 e^{-2x}$$

وهي معادلة تفاضلية خطية من المرتبة الأولى ذاتها المجهولة  $y$ ، وحلها العام يعطى بالعلاقة:

$$y = -(x+2) + (c_1 + 1) + c_2 e^{-x}$$

وهو الحل العام للمعادلة المعطاة. حيث  $c_1$  و  $c_2$  ثابتان اختياريان.

كما ذكرنا في 10.3.1، يوجد للمعادلة (10.14) جملة حلول أساسية  $y_1, y_2, \dots, y_n$  معرفة

مهما تكن  $x$ ، وأن الحل العام لهذه المعادلة  $y = \sum_{i=1}^n c_i y_i$ ، حيث  $c_i$  ثوابت اختيارية.

ولنبحث عن جملة الحلول الأساسية للمعادلة (10.14)، نكتب هذه المعادلة كما يلي:

$$L(D)y = (D - \lambda_1)(D - \lambda_2) \dots (D - \lambda_n)y = 0 \quad (10.16)$$

واضح أن حل أي من المعادلات الخطية التالية:

$$(D - \lambda_1)y = 0, (D - \lambda_2)y = 0, \dots, (D - \lambda_n)y = 0$$

هو حل للمعادلة (10.16)، وتكون حلول جملة المعادلات الخطية السابقة هي:

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, y_2 = e^{\lambda_2 x}, \dots, y_n = e^{\lambda_n x}$$

وهكذا، فإننا سنبحث عن قيم  $\lambda$  التي تجعل الدالة  $y = e^{\lambda x}$  حلاً للمعادلة (10.16).

نعوض قيمة هذه الدالة في المعادلة (10.14)، فنجد:

$$L(D)e^{\lambda x} = e^{\lambda x} L(\lambda) = 0$$

ولما كان  $e^{\lambda x} \neq 0$ ، فإن قيم  $\lambda$  تحقق المعادلة:

$$L(\lambda) = 0 \quad (10.17)$$

نسمي هذه المعادلة الجبرية، المعادلة المميزة للمعادلة التفاضلية (10.14) وهي تمثل حدودية

من الدرجة  $n$  في  $\lambda$ ، وعليه، فإن لها  $n$  جذر، ويوافق كل جذر من جذور هذه المعادلة حلاً

للمعادلة (10.14).

إذن، فإن طبيعة جملة الحلول الأساسية. وعليه، فالحل العام للمعادلة (10.14)، يتعلق

بجذور المعادلة المميزة (10.17) ونميز الحالتين:



## ١- جميع جذور المعادلة المميزة بسيطة (غير مكررة):

لتكن الجذور هي  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  ومنه، فإن الدوال

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, y_2 = e^{\lambda_2 x}, \dots, y_n = e^{\lambda_n x}$$

تمثل حلولاً للمعادلة (10.14) وهي مستقلة خطياً، مثال 10.9، فهي تشكل جملة حلول أساسية للمعادلة (10.13)، أي الحل العام للمعادلة (10.14)، يعطى بالعلاقة:

$$y_c = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + c_n e^{\lambda_n x}$$

وإذا كان بعض (أو كل) الجذور البسيطة عقدية، ليكن مثلاً  $\lambda_1 = \alpha + i\beta$  جذراً عقدياً بسيطاً للمعادلة المميزة (10.17)، فإن مرافقه  $\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = \alpha - i\beta$ ، أيضاً، جذر عقدى بسيط للمعادلة المميزة (10.17). ويكون للمعادلة التفاضلية (10.14) الحلان الخاصان:

$$y_1 = e^{(\alpha + i\beta)x}, \quad y_2 = e^{(\alpha - i\beta)x}$$

ولما كان:

$$e^{(\alpha \pm i\beta)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{\pm i\beta x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x \pm i \sin \beta x)$$

فيمكن الاستعاضة عن الحلين الخاصين العقديين  $y_1$  و  $y_2$  بحلين خاصين حقيقيين:

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x \quad \text{و} \quad y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$$

ويكون هذان الحلان الخاصان  $y_1$  و  $y_2$  مع باقي الحلول الخاصة، المقابلة للجذور الحقيقية البسيطة، مستقلة خطياً. ويقابل الجذران العقديان المترافقان  $\alpha \pm i\beta$ ، في عبارة الحل العام للمعادلة (10.14)، العبارة:

$$e^{\alpha x} (A \cos \beta x + B \sin \beta x)$$

حيث  $A$  و  $B$  ثوابت اختيارية.

## ٢- للمعادلة المميزة جذوراً مكررة:

ليكن مثلاً،  $\lambda_1$  جذراً مكرراً  $k$  مرة. عندئذ، تُكتب المعادلة (10.14)، كما يلي:

$$(D - \lambda_n)(D - \lambda_{n-1}) \dots (D - \lambda_{n-k})(D - \lambda_1)^k y = 0$$

ولنبحث عن حل عام للمعادلة:

$$(D - \lambda_1)^k y = 0 \quad (10.18)$$

واضح أن الدالة  $e^{\lambda_1 x}$  حل لهذه المعادلة. ولنفرض أن لها الحل  $y = v \cdot e^{\lambda_1 x}$ ، حيث إن  $v(x)$  دالة يطلب تعيينها. نعوض  $y$  في (10.18):

$$(D - \lambda_1)^k v e^{\lambda_1 x} = e^{\lambda_1 x} D^k v = 0$$

وتكون محققة إذا كان  $D^k v = 0$ ، أي أن  $v(x)$  حدودية في  $x$ ، من الدرجة  $(k-1)$ :

$$v(x) = c_1 + c_2 x + \dots + c_k x^{k-1}$$

وعليه، فإنه يُقابل المعامل  $(D - \lambda_1)^k$  في عبارة الحل العام للمعادلة (10.14) العبارة:

$$e^{\lambda_1 x} (c_1 + c_2 x + \dots + c_k x^{k-1})$$

وتكون الحلول الخاصة  $e^{\lambda_1 x}, x e^{\lambda_1 x}, \dots, x^{k-1} e^{\lambda_1 x}$  مع بقية الحلول الخاصة، المقابلة للجذور البسيطة، مستقلة خطياً.

إذا كان  $\lambda_1 = \alpha + i\beta$  جذراً عقدياً، مكرراً  $k$  مرة، للمعادلة المميزة (10.17)، فإن مرافقه  $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1 = \alpha - i\beta$  أيضاً جذر عقدي، مكرر  $k$  مرة، للمعادلة المميزة. عندئذ، يقابل هذا الجذران  $2k$  حلاً خاصاً للمعادلة (10.14)، مستقلة خطياً من النمط:

$$e^{\alpha x} \cos \beta x, x e^{\alpha x} \cos \beta x, \dots, x^{k-1} e^{\alpha x} \cos \beta x$$

$$e^{\alpha x} \sin \beta x, x e^{\alpha x} \sin \beta x, \dots, x^{k-1} e^{\alpha x} \sin \beta x$$

ويقابل هذان الجذران، في عبارة الحل العام للمعادلة (10.14)، العبارة:

$$e^{\alpha x} [(c_1 + c_2 x + \dots + c_k x^{k-1}) \cos \beta x + (c_{k+1} + c_{k+2} x + \dots + c_{2k} x^{k-1}) \sin \beta x]$$

مثال 10.12: حل المعادلة:  $y''' + 3y'' + 9y' - 13y = 0$

الحل: نكتب المعادلة المميزة لها:  $\lambda^3 + 3\lambda^2 + 9\lambda - 13 = 0$ ، والتي لها الجذور البسيطة:

$$\lambda_1 = 1, \lambda_{2,3} = -2 \pm 3i$$

ومنه، فالحل العام للمعادلة المعطاة هو:

$$y = c_1 e^x + e^{-2x} (c_2 \cos 3x + c_3 \sin 3x)$$

حيث  $c_1$  و  $c_2$  و  $c_3$  ثوابت اختيارية.

مثال 10.13: حل المعادلة  $y^{(6)} - 4y^{(5)} + 8y^{(4)} + 4y''' = 0$ .

الحل: إن المعادلة المميزة لها هي:  $\lambda^6 - 4\lambda^5 - 8\lambda^4 - 8\lambda^3 + 4\lambda^2 = 0$

والتي لها الجذور:  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = \lambda_4 = 1 + i, \lambda_5 = \lambda_6 = 1 - i$

ويكون الحل العام للمعادلة المعطاة:

$$y = c_1 + c_2 x + e^x (c_3 \cos x + c_4 \sin x + c_5 x \cos x + c_6 x \sin x)$$

حيث  $c_1, \dots, c_6$  ثوابت اختيارية.

## 10.4.2 المعادلة الخطية غير المتجانسة

المعادلة الخطية غير المتجانسة، من المرتبة  $n$  بأمثال ثابتة، هي المعادلة:

$$L(D)y = f(x) \quad (10.19)$$

حيث إن  $L(D)$  مؤثر تفاضلي خطي، من المرتبة  $n$  بأمثال ثابتة.

إن الحل العام لهذه المعادلة، كما ذكرنا في 10.3.2، يعطى بالعلاقة  $y = y_c + y_p$ ، حيث  $y_c$

(الدالة المتتممة) الحل العام للمعادلة المتجانسة الموافقة (10.13) و  $y_p$  حل خاص للمعادلة

غير المتجانسة (10.19). ولقد بينا، في 10.4.1، كيفية تعيين الدالة المتتممة  $y_c$ ، أما  $y_p$

فيمكن تعيينه بطريقة، تغيير الثوابت (طريقة لاغرانج) المعروضة، في 10.3.2، ونعرض الآن

لطريقتين خاصيتين لإيجاد حلاً خاصاً  $y_p$ .

ولكن قبل ذلك نقبل، بدون برهان:

مبرهنة 10.3: إذا كان الطرف الأيمن في المعادلة (10.19) من النمط:

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_m(x)$$

وكان  $(y_p)_i$ ، حيث  $i = 1, 2, \dots, m$ ، حلاً خاصاً للمعادلة:

$$L(D)y = f_i(x) \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, m$$

فإن الدالة  $y_p = (y_p)_1 + (y_p)_2 + \dots + (y_p)_m$  هي حل خاص للمعادلة (10.19).

أولاً: طريقة الأمثال غير المعينة:

وتستخدم عندما يكون للطرف الأيمن في المعادلة (10.19)، أي للدالة  $f(x)$ ، شكلاً خاصاً.

١-  $f(x)$  حدودية في  $x$  من الدرجة  $m$ :

إذا لم يكن الصفر جذراً للمعادلة المميزة (10.17)، فإنه يمكن إيجاد حل خاص للمعادلة (10.19)، من النمط  $y_p = Q(x)$ . أما إذا كان الصفر جذراً للمعادلة المميزة (10.17)، مكرراً  $k$  مرة، فإن الحل الخاص من النمط  $y_p = x^k \cdot Q(x)$ ، حيث إن  $Q(x)$  حدودية في  $x$  من الدرجة  $m$ ، بأمثال غير معينة، تُعين هذه الأمثال بالاشتقاق والتعويض في المعادلة (10.19) ومطابقة الطرفين فيها.

٢-  $f(x) = P(x)e^{ax}$ ، حيث إن  $P(x)$  حدودية في  $x$  من الدرجة  $m$ :

إذا لم يكن  $a$  جذراً للمعادلة المميزة (10.17)، مكرراً  $k$  مرة، حيث  $1 \leq k \leq m$ ، فإن الحل الخاص من النمط  $y_p = x^k Q(x)e^{ax}$ ، حيث إن  $Q(x)$  حدودية في  $x$  من الدرجة  $m$ ، بأمثال غير معينة، تُعين هذه الأمثال بالاشتقاق والتعويض في المعادلة (10.19) ومطابقة الطرفين فيها.

٣-  $f(x) = e^{ax} [P_1(x) \cos bx + P_2(x) \sin bx]$ ، حيث إن  $P_1(x)$  و  $P_2(x)$

حدوديتان في  $x$ ، من الدرجتين  $m_1$  و  $m_2$ ، بالترتيب.

إذا لم يكن العدد  $(a + ib)$  جذراً للمعادلة المميزة (10.17)، فإن الحل الخاص للمعادلة من

النمط:

$$y_p = e^{ax} [Q_1(x) \cos bx + Q_2(x) \sin bx]$$

أما إذا كان العدد  $(a + ib)$  جذراً للمعادلة المميزة (10.17)، مكرراً  $k$  مرة، فإن الحل الخاص للمعادلة من النمط

$$y_p = e^{ax} \cdot x^k [Q_1(x) \cos bx + Q_2(x) \sin bx]$$

حيث إن  $Q_1(x)$  و  $Q_2(x)$  حدوديتان في  $x$  من الدرجة  $m$ ، حيث إن  $m$  أكبر العددين  $m_1$  و  $m_2$ ، بأمثال غير معينة، تُعين بالاشتقاق والتعويض في المعادلة (10.19) ومطابقة الطرفين فيها.

مثال 10.14: حل المعادلة  $y'' - y' = e^{2x} + e^x + x$ .

الحل: نكتب المعادلة المميزة للمعادلة المتجانسة الموافقة:  $\lambda^2 - \lambda = 0$  والتي لها الجذران  $\lambda_1 = 0$  و  $\lambda_2 = 1$ .

ومنه، فالحل العام للمعادلة المتجانسة الموافقة  $y_c = c_1 + c_2 e^x$ .

نبحث الآن، عن حل خاص للمعادلة غير المتجانسة المعطاة، وذلك بإيجاد حلول خاصة للمعادلات:

$$y'' - y' = e^{2x} \quad (i)$$

$$y'' - y' = e^x \quad (ii)$$

$$y'' - y' = x \quad (iii)$$

إن الحل الخاص للمعادلة (i)، من النمط  $y_p = Ae^{2x}$ ، لأن  $a = 2$  ليس جذراً للمعادلة المميزة. نشق هذا الحل ونعوض في المعادلة (i)، فنجد:  $2Ae^{2x} = e^{2x}$ . وعليه، فإن

$$A = \frac{1}{2} \Rightarrow y_{p1} = \frac{1}{2} e^{2x}$$

أما الحل الخاص للمعادلة (ii)، فهو من النمط  $y_{p2} = Bxe^x$ ، لأن  $a = 1$  جذراً بسيطاً للمعادلة المميزة. نشق ونعوض في (ii)، فنحصل على المعادلة:

$$Be^x = e^x \text{، وعليه، فإن}$$

$$B = 1 \Rightarrow y_{p2} = xe^x$$

إن الحل الخاص للمعادلة (iii)، من النمط  $y_{p3} = x(Kx + H)$ ، لأن  $a = 1$  جذر للمعادلة المميزة. نشق ونعوض في (iii)، فنحصل على المعادلة:

$$2Kx - H + 2K = x$$

و نجد بالمطابقة

$$H = -1, K = -\frac{1}{2} \Rightarrow y_{p3} = -x\left(\frac{1}{2}x + 1\right)$$

فالحل العام للمعادلة المعطاة هو:

$$y = xe^x + \frac{1}{2}e^{2x} - x\left(\frac{1}{2}x + 1\right) + c_1 + c_2e^x$$

حيث  $c_1$  و  $c_2$  ثابتان اختياريان.

ملحوظة 10.4: يمكن تخفيض مرتبة المعادلة المعطاة مرة واحدة باستخدام التحويل  $z = y'$ ، لأنها لا تحوي الدالة  $y$ ، فتصبح المعادلة من المرتبة الأولى:

$$z' - z = e^{2x} + e^x + x$$

مثال 10.15: حل المعادلة  $y''' + y = \sin x + \cos 2x$

الحل: نكتب المعادلة المميزة للمعادلة المتجانسة الموافقة، وهي  $\lambda^2 + 1 = 0$  والتي لها الجذران  $\lambda_{1,2} = \pm i$ ، ومنه فالحل العام للمعادلة المتجانسة الموافقة:

$$y_c = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

نبحث الآن، عن حل خاص للمعادلة غير المتجانسة، وذلك بإيجاد حل خاص لكل من المعادلتين:

$$y'' + y = \sin x \quad (i)$$

$$y'' + y = \cos 2x \quad (ii)$$

إن الحل الخاص للمعادلة (i)، من النمط  $y_{p1} = x(A \cos x + B \sin x)$ ، لأن العدد  $i$  جذر للمعادلة المميزة. نشتق ونعوض في (i)، فنحصل على المعادلة:

$$-2A \sin x + 2B \cos x = \sin x$$

ونجد بالمطابقة:

$$A = -\frac{1}{2}, B = 0 \Rightarrow y_{p1} = -\frac{1}{2}x \cos x$$

ويكون الحل الخاص للمعادلة (ii)، من النمط:  $y_{p2} = K \cos 2x + H \sin 2x$

لأن العدد  $2i$  ليس جذراً للمعادلة المميزة. نشتق ونعوض في المعادلة (ii) ونطبق، فنجد

$$A = -\frac{1}{3}, H = 0 \Rightarrow y_{p2} = -\frac{1}{3} \cos 2x$$

وعليه، فالحل العام للمعادلة المعطاة:

$$y_c = -\frac{1}{2}x \cos x - \frac{1}{3} \cos 2x + c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

حيث  $c_1$  و  $c_2$  ثابتان اختياريان.

ثانياً: طريقة المؤثر التفاضلي المعاكس (المؤثر التكاملي):

نعرف المؤثر التفاضلي المعاكس  $L^{-1}(D) \equiv \frac{1}{L(D)}$ ، بأنه المؤثر الذي يكون نتيجة تأثيره في

دالة ما  $f(x)$ ، مستمرة، هو حل خاص  $y_p = \frac{1}{L(D)} f(x)$  للمعادلة التفاضلية  $L(D)y = f(x)$ .

نستنتج من ذلك، أنه من أجل أي دالة مستمرة  $f(x)$  يكون:

$$L^{-1}(D)[L(D)f(x)] = L(D)[L^{-1}(D)f(x)] = f(x)$$

وعليه، يمكن أن تكون الدالة  $L^{-1}(D)f(x)$  حل للمعادلة (10.19).

وخصوصاً، فإن الدالة  $D^{-1}f(x)$  تمثل تكامل الدالة  $f(x)$ ، أي أن:

$$D^{-1}f(x) = \frac{1}{D}f(x) = \int f(x)dx$$

لأن  $D^{-1}f(x)$  هو حل للمعادلة التفاضلية  $Dy = \frac{dy}{dx} = f(x)$ .

لذا فإن المؤثر التفاضلي المعاكس، يسمى مؤثراً تكاملياً.

يمكن، باستخدام خواص المؤثرات التفاضلية الخطية بأمثال ثابتة، إثبات صحة خواص المؤثر التكامل التاملي التالية:

بفرض  $L(D)$  و  $L_1(D)$  و  $L_2(D)$  مؤثرات تفاضلية خطية بأمثال ثابتة و  $f(x)$  و  $g(x)$  دالتان في  $x$  و  $\alpha$  و  $\beta$  أعداد ثابتة:

1.  $L^{-1}(D)[\alpha f(x) + \beta g(x)] = \alpha L^{-1}(D)f(x) + \beta L^{-1}(D)g(x)$
2.  $[\alpha L_1^{-1}(D) + \beta L_2^{-1}(D)]f(x) = \alpha L_1^{-1}(D)f(x) + \beta L_2^{-1}(D)f(x)$
3.  $L_1^{-1}(D)[L_2^{-1}(D)f(x)] = L_2^{-1}(D)[L_1^{-1}(D)f(x)] = [L_1^{-1}(D) \cdot L_2^{-1}(D)]f(x)$
4.  $L_1^{-1}(D)[L_2(D)f(x)] = L_2(D)[L_1^{-1}(D)f(x)] = [L_1^{-1}(D)L_2(D)]f(x)$

إذن، فالمؤثر التكامل هو أيضاً مؤثر خطي، وهو كسر جبري عاذي في  $D$ ، يعامل كالكسور الجبرية العادية من حيث الجمع والضرب والقسمة وتحليل المقام إلى عوامل وغير ذلك.

فإذا فرقنا  $L(D)$  إلى أقواس بسيطة، فإن:

$$L^{-1}(D)f(x) = \frac{1}{L(D)}f(x) = \frac{1}{(D - \alpha_1)(D - \alpha_2) \dots (D - \alpha_n)}f(x)$$



وبتفريق الكسر  $L^{-1}(D)$  إلى كسور بسيطة، نجد:

$$L^{-1}(D)f(x) = \frac{1}{L(D)} f(x) = \left[ \frac{A_1}{(D-\alpha_1)} + \frac{A_2}{(D-\alpha_2)} + \dots + \frac{A_n}{(D-\alpha_n)} \right] f(x)$$

وعليه، تؤول مسألة إيجاد حل خاص للمعادلة (10.19)، أي إيجاد  $L^{-1}(D)f(x)$  إلى معرفة قيمة  $\frac{1}{(D-\alpha)} f(x)$ ، والتي تعطى بالقاعدة الأساسية التالية:

$$\frac{1}{D-\alpha} f(x) = e^{\alpha x} \int e^{-\alpha x} f(x) dx$$

ويتم التحقق من صحة هذه القاعدة، بحل المعادلة التفاضلية الخطية من المرتبة الأولى:

$$(D-\alpha)y = f(x) \Rightarrow y' - \alpha y = f(x) \quad (10.20)$$

ويعطى حلها العام، كما يلي:

$$y = e^{\alpha x} \left[ \int e^{-\alpha x} f(x) dx + c \right] = y_p + y_c$$

حيث إن  $y_c = ce^{\alpha x}$  هو الحل العام للمعادلة المتجانسة الموافقة، و  $y_p$  هو حل خاص للمعادلة غير المتجانسة (10.20). أي أن:

$$y_p = \frac{1}{D-\alpha} f(x) = e^{\alpha x} \int e^{-\alpha x} f(x) dx$$

ولما كنا نستخدم المؤثر التكاملي لإيجاد حل خاص للمعادلة التفاضلية، فإننا نكتفي بأبسط شكل ممكن للتكامل، مع إهمال ثابت التكامل الاختياري.

مثال 10.16: أوجد حلاً خاصاً للمعادلة  $y'' - y = 2e^x$ .

الحل: نكتب المعادلة بدلالة المؤثر التفاضلي:

$$(D^2 - 1)y = 2e^x$$

ومنه، فالحل الخاص يعطى بالعلاقة:  $y_p = \frac{1}{D^2 - 1} (2e^x)$ ، أي:

$$y_p = \frac{1}{(D-1)(D+1)} (2e^x) = 2 \frac{1}{(D+1)} \left[ \frac{1}{(D-1)} e^x \right]$$

وباستخدام القاعدة الأساسية مرتين متتاليتين نجد:

$$y_p = 2 \frac{1}{D+1} \left[ e^x \int e^{-x} \cdot e^x dx \right] = 2 \frac{1}{D+1} (xe^x) =$$

$$y_p = 2 \frac{1}{D+1} \left[ e^x \int e^{-x} \cdot e^x dx \right] = \frac{2}{D+1} (xe^x) = 2e^{-x} \int e^x x e^x dx = (x - \frac{1}{2})e^x$$

ملحوظة 10.5: يمكن إيجاد الحل الخاص هذا بتفريق الكسر  $\frac{2}{D^2-1}$ :

$$\begin{aligned} y_p &= \frac{2}{D^2-1} e^x = \left[ \frac{1}{(D-1)} - \frac{1}{(D+1)} \right] e^x = \frac{1}{(D-1)} e^x - \frac{1}{(D+1)} e^x = \\ &= e^x \int e^{-x} e^x dx - e^x \int e^{-x} e^x dx = xe^x - \frac{e^x}{2} \end{aligned}$$

نوجد فيما يلي قيمة  $L^{-1}(D)f(x)$  من أجل بعض الأنماط الخاصة للدالة  $f(x)$ :

نفرض  $\alpha$  ثابت و  $v(x)$  دالة في  $x$

- 1)  $\frac{1}{L(D)} e^{\alpha x} = \frac{e^{\alpha x}}{L(\alpha)} \quad ; \quad L(\alpha) \neq 0$
- 2)  $\frac{1}{L(D^2)} \sin \alpha x = \frac{\sin \alpha x}{L(-\alpha^2)} \quad ; \quad L(-\alpha^2) \neq 0$
- 3)  $\frac{1}{L(D^2)} \cos \alpha x = \frac{\cos \alpha x}{L(-\alpha^2)} \quad ; \quad L(-\alpha^2) \neq 0$
- 4)  $\frac{1}{L(D)} [e^{\alpha x} \cdot v(x)] = e^{\alpha x} \frac{1}{L(D+\alpha)} v(x)$
- 5)  $\frac{1}{L(D)} P_m(x) = F(D) P_m(x)$

حيث  $P_m(x)$  جدودية من الدرجة  $m$  و  $F(D)$  منشور المقدار  $L^{-1}(D)$  بجوار الصفر، مأخوذاً حتى الحد من الدرجة  $m$ ، وهو ينتج، بسهولة، بتقسيم الواحد على  $L(D)$  بعد ترتيب الحدودية  $L(D)$  حسب قوى  $D$  التصاعدية.

$$6) \frac{1}{(D-\alpha)^k} e^{\alpha x} = \frac{x^k}{k!} e^{\alpha x} \quad ; \quad k \in \mathbb{N}$$

$$7) \frac{1}{(D^2 + \alpha^2)} \sin \alpha x = \frac{-x}{2\alpha} \cos \alpha x$$

$$8) \frac{1}{(D^2 + \alpha^2)} \cos \alpha x = \frac{x}{2\alpha} \sin \alpha x$$

$$9) \frac{1}{L(D)} [x \cdot v(x)] = x \frac{1}{L(D)} v(x) - \frac{L'(D)}{L^2(D)} v(x)$$

إن إثبات صحة هذه العلاقات، ينتج مباشرة باستخدام خواص المؤثر التفاضلي الخطي. فمثلاً، من أجل الحالة الأولى نطبق المؤثر  $L^{-1}(D)$  في طرفي العلاقة:  $L(D)e^{\alpha x} = L(\alpha)e^{\alpha x}$ ، فنجد:

$$e^{\alpha x} = \frac{1}{L(D)} [L(\alpha)e^{\alpha x}] = L(\alpha) \left[ \frac{1}{L(D)} e^{\alpha x} \right]$$

فإذا كان  $L(\alpha) \neq 0$ ، فإننا نحصل على العلاقة المطلوبة بقسمة الطرفين على العدد  $L(\alpha)$ . يمكن بالاستناد إلى هذه العلاقات، إيجاد حل خاص للمعادلة (10.19)، بطريقة أسهل وأسرع من طريقة استخدام القاعدة الأساسية.

مثال 10.17: أوجد حلاً خاصاً للمعادلة:

$$(D^3 - 2D^2 + 1)y = e^{2x} + 3e^x + \cos x$$

الحل: نوجد، أولاً، الحل الخاص  $y_{p1}$  للمعادلة:  $(D^3 - 2D^2 + 1)y = e^{2x}$

$$y_{p_1} = \frac{1}{D^3 - 2D^2 + 1} e^{2x} = \frac{e^{2x}}{2^3 - 2(2^2) + 1} = e^{2x}$$

نوجد الآن، الحل الخاص  $y_{p_2}$  للمعادلة:  $(D^3 - 2D^2 + 1)y = 3e^x$

$$\begin{aligned} y_{p_2} &= \frac{1}{D^3 - 2D^2 + 1} 3e^x = 3 \frac{1}{(D-1)(D^2 - D - 1)} e^x = \\ &= 3 \frac{1}{(D-1)} \left[ \frac{1}{(D^2 - D - 1)} e^x \right] = 3 \frac{1}{(D-1)} \cdot \frac{e^x}{1-1-1} = 3xe^x \end{aligned}$$

وأخيراً، نوجد الحل الخاص  $y_{p_3}$  للمعادلة:  $(D^3 - 2D^2 + 1)y = \cos x$

$$\begin{aligned} y_{p_3} &= \frac{1}{D^3 - 2D^2 + 1} \cos x = \frac{1}{D(-1) - 2(-1) + 1} \cos x = \frac{1}{3-D} \cos x = \\ &= \frac{3+D}{(3-D)(3+D)} \cos x = (3+D) \frac{1}{9-D^2} = \frac{1}{10} (3+D) \cos x = \\ &= \frac{1}{10} (3 \cos x - \sin x) \end{aligned}$$

ومنه، فالحل الخاص للمعادلة المعطاة:

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2} + y_{p_3} = e^{2x} + 3xe^x + \frac{1}{10} (3 \cos x - \sin x)$$

مثال 10.18: أوجد حلاً خاصاً للمعادلة:

$$(D^2 - 6D + 9)y = (x^3 + 1)e^{3x}$$

الحل:

$$\begin{aligned} y_p &= \frac{1}{D^2 - 6D + 9} (x^3 + 1)e^{3x} = \frac{1}{(D-3)^2} (x^3 + 1)e^{3x} = \\ &= e^{3x} \frac{1}{(D+3-3)^2} (x^3 + 1) = e^{3x} \frac{1}{D^2} (x^3 + 1) = \end{aligned}$$

$$= e^{3x} \left[ \frac{1}{D^2} x^3 + \frac{1}{D^2} 1 \right] = e^{3x} \left( \frac{x^3}{20} + \frac{x^2}{2} \right)$$

مثال 10.19: أوجد حلاً خاصاً للمعادلة:

$$(D^2 + 1)y = (x^2 - 2) + \sin x + (x + 1) \cos 2x$$

الحل: نوجد، أولاً، الحل الخاص  $y_{p_1}$  للمعادلة:  $(D^2 + 1)y = x^2 - 2$

$$y_{p_1} = \frac{1}{D^2 + 1} (x^2 - 2) = (1 - D^2 + \dots)(x^2 - 2) = x^2 - 4$$

نوجد، الآن، الحل الخاص  $y_{p_2}$  للمعادلة:  $(D^2 + 1)y = \sin x$

$$y_{p_2} = \frac{1}{D^2 + 1} \sin x = -\frac{x}{2} \cos x$$

وأخيراً، نوجد الحل الخاص  $y_{p_3}$  للمعادلة:  $(D^2 + 1)y = (x + 1) \cos 2x$

$$\begin{aligned} y_{p_3} &= \frac{1}{D^2 + 1} (x + 1) \cos 2x = \\ &= \left[ x \frac{1}{D^2 + 1} \cos 2x - \frac{2D}{(D^2 + 1)^2} \cos 2x \right] + \frac{1}{D^2 + 1} \cos 2x = \\ &= -\frac{x}{3} \cos 2x + \frac{4}{9} \sin 2x - \frac{1}{3} \cos 2x \end{aligned}$$

ومنه، فالحل الخاص للمعادلة المعطاة:

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2} + y_{p_3} = (x^2 - 4) - \frac{x}{2} \cos x - \frac{x+1}{3} \cos 2x + \frac{4}{9} \sin 2x$$

ملحوظة 10.5: يمكن، بالاستفادة من علاقة أولر

$$e^{i\lambda} = \cos \lambda + i \sin \lambda \quad ; \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

تعيين  $L^{-1}(D)[v(x) \cos \alpha x]$  و  $L^{-1}(D)[v(x) \sin \alpha x]$  وذلك بالاستفادة من

القاعدة الرابعة، حيث إن  $\operatorname{Re}(e^{i\lambda}) = \cos \lambda$  و  $\operatorname{Im}(e^{i\lambda}) = \sin \lambda$

$$\frac{1}{L(D)}[v(x) \cos \alpha x] = \frac{1}{L(D)}[v(x) \operatorname{Re}(e^{i\alpha x})] =$$

$$= \operatorname{Re} \frac{1}{L(D)}[v(x) e^{i\alpha x}] = \operatorname{Re} \left[ e^{i\alpha x} \frac{1}{(D + i\alpha)} v(x) \right]$$

و نجد، بأسلوب مشابه:

$$\frac{1}{L(D)}[v(x) \sin \alpha x] = \operatorname{Im} \left[ e^{i\alpha x} \frac{1}{L(D + i\alpha)} v(x) \right]$$

وبهذا الأسلوب نستطيع تعيين  $L^{-1}(D^2) \cos \alpha x$  و  $L^{-1}(D^2) \sin \alpha x$  في الحالة  $L(-\alpha^2) = 0$ ، حيث نرد هذه الحالات إلى القاعدة السادسة.

مثال 10.20: أوجد حلاً خاصاً للمعادلة:

$$(D^2 - 5D + 22)y = 4e^{3x} \cos 4x$$

الحل:

$$\begin{aligned} y_p &= \frac{1}{D^2 - 5D + 22} 4e^{3x} \cos 4x = 4 \frac{1}{D^2 - 5D + 22} e^{3x} \operatorname{Re}(e^{4xi}) \\ &= 4 \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{D^2 - 5D + 22} e^{(3+4i)x} \right] = 4 \operatorname{Re} \left[ e^{(3+4i)x} \frac{1}{(3+4i)^2 - 5(3+4i) + 22} \right] \\ &= 4 \operatorname{Re} \left[ \frac{e^{(3+4i)x}}{4i} \right] = \operatorname{Re} \left[ e^{(3+4i)x} \cdot e^{-\frac{\pi}{2}i} \right] = e^{3x} \operatorname{Re} \left[ e^{(4x - \frac{\pi}{2})i} \right] \\ &= e^{3x} \cos(4x - \frac{1}{2}\pi) \end{aligned}$$

أو، نكتب الحل الخاص، كما يلي:

$$y_p = 4 \operatorname{Re} \left[ \frac{e^{(3+4i)x}}{4i} \right] = e^{3x} \operatorname{Re} \left[ \frac{e^{4ix}}{i} \right] = e^{3x} \sin 4x$$

مثال 10.20: أوجد حلاً خاصاً للمعادلة:

$$(D^2 + 1)^2 y = \sin x$$

الحل:

$$\begin{aligned} y_p &= \frac{1}{(D^2 + 1)^2} \sin x = \frac{1}{(D^2 + 1)^2} \operatorname{Im} e^{xi} \\ &= \operatorname{Im} \left[ \frac{1}{(D^2 + 1)^2} e^{xi} \cdot 1 \right] = \operatorname{Im} \left[ e^{xi} \frac{1}{[(D + i)^2 + 1]^2} 1 \right] \\ &= \operatorname{Im} \left[ e^{xi} \frac{1}{D^2 (D + 2i)^2} 1 \right] = \operatorname{Im} \left[ e^{xi} \frac{1}{D^2 (D^2 + 4iD - 4)} 1 \right] \\ y_p &= \operatorname{Im} \left[ e^{ix} \frac{1}{D^2} \left( -\frac{1}{4} - \frac{Di}{4} + \dots \right) 1 \right] = \operatorname{Im} \left[ e^{ix} \frac{1}{D^2} \left( -\frac{1}{4} \right) \right] = \\ &= \operatorname{Im} \left[ e^{ix} \left( -\frac{x^2}{8} \right) \right] = -\frac{x^2}{8} \sin x \end{aligned}$$

10.4.3 معادلات تفاضلية خطية تُرد إلى معادلات تفاضلية خطية بأمثال ثابتة

تتصف المعادلة التفاضلية الخطية بخاصية، أنها تحافظ على شكلها عند إجراء أي تغيير في المتغير المستقل، وكذلك تبقى متجانسة إن كانت بالأصل متجانسة. نستفيد من هذه الخاصية في محاولة رد المعادلة التفاضلية إلى معادلة ذات أمثال ثابتة. وقد تبين أنه يمكن رد المعادلة:

$$y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + \dots + P_{n-1}(x)y' + P_n(x)y = f(x)$$

إلى معادلة ذات أمثال ثابتة بطريقة تغيير المتغير فقط بالصيغة:

$$t = c \int \sqrt{P_n(x)} dx \quad (10.21)$$

(تترك إثبات ذلك كتتمرين للقارئ).

ومن أبسط الأمثلة على ذلك معادلة أولر:

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x y' + a_n y = f(x)$$

ونجد، باستخدام التحويل (10.21)، أن  $x = -e'$ ، وهذا ينقلنا إلى حل عام للمعادلة من نفس النمط السابق، بتغيير  $x$  بـ  $-x$ . لذا يكفي إيجاد الحل العام، من أجل  $x > 0$ ، ومن ثم نستبدل  $x$  بـ  $|x|$ .

مثال 10.21: حل المعادلة:

$$x^2 y'' - 4xy' - 6y = x$$

الحل: نفرض  $x = e^t$ . ونحسب قيمة المشتقين  $y'$  و  $y''$  بالنسبة إلى  $t$ :

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = y'_t e^{-t}$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d}{dx} (y'_t e^{-t}) = \frac{d}{dt} (y'_t e^{-t}) \frac{dt}{dx} = (y''_t - y'_t) e^{-2t}$$

نعوض في المعادلة المعطاة:

$$y''_t - 5y'_t + 6y = e^t$$

وهي معادلة خطية غير متجانسة ذات أمثال ثابتة.

الحل العام للمعادلة المتجانسة الموافقة لها، هو:  $y_c = c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t}$

والحل الخاص للمعادلة غير المتجانسة:

$$y_p = \frac{1}{D^2 - 5D + 6} e^t = e^t \frac{1}{1 - 5 + 6} = \frac{e^t}{2}$$

ومنه:  $y = c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t} + \frac{e^t}{2}$ . وبالعودة إلى التحويل نجد عبارة الحل العام:



$$y = c_1 x^2 + c_2 x^3 + \frac{x}{2}$$

10.5 حل المعادلات التفاضلية الخطية بطريقة متسلسلات القوى الصحيحة

نقدم، الآن، تعميماً للمبرهنة 9.5

لتكن لدينا المعادلة التفاضلية الخطية:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (10.22)$$

مع شروط البدء:

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \quad (10.23)$$

إذا كانت الدالة  $f$  قابلة للنشر في جوار للنقطة  $(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)})$ ، فإن حل المعادلة (10.22)، مع شروط البدء (10.23)، يكون أيضاً دالة قابلة للنشر، في جوار للنقطة  $x_0$ ، يُعطى بالعلاقة:

$$\begin{aligned} y(x) &= y_0 + y'_0 \frac{(x-x_0)}{1!} + y''_0 \frac{(x-x_0)^2}{2!} + \dots + y_0^{(n)} \frac{(x-x_0)^n}{n!} + \dots = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} y_0^{(n)} \frac{(x-x_0)^n}{n!} \end{aligned} \quad (10.24)$$

إن المعاملات  $y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$  معطاة من شروط المسألة، أما المعامل  $y_0^{(n)}$ ، فنجده من المعادلة التفاضلية نفسها:

$$y_0^{(n)} = f(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)})$$

ولإيجاد المعامل  $y_0^{(n+1)}$  نشتق المعادلة التفاضلية المعطاة (10.22):

$$y^{(n+1)} = \frac{d}{dx} f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

ومن ثم نعوض  $x, y, y', \dots, y^{(n)}$  بالقيم  $x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n)}$  فنجد القيمة  $y_0^{(n+1)}$  ونتابع هكذا لإيجاد بقية المعاملات في العلاقة (10.24).

إذا كانت المعادلة التفاضلية من النمط:

$$P_0(x)y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + \dots + P_{n-1}(x)y' + P_n(x)y = 0 \quad (10.25)$$

وكانت الدوال  $P_0(x), P_1(x), \dots, P_n(x)$  قابلة للنشر، في جوار للنقطة  $x_0$ ، وكان  $P_0(x_0) \neq 0$ ، فإن حل هذه المعادلة، أيضاً، هو دالة قابلة للنشر في جوار للنقطة  $x_0$  وهو من النمط:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

وياشتاق هذه الدالة، والتعويض في المعادلة (10.25) والمطابقة بين الطرفين، نحصل على قيم الثوابت  $a_i$ ، حيث  $i \geq n$ ، بدلالة الثوابت  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$   $y_0' = a_0, y_0^{(n-1)} = a_{n-1}$  المعطاة من شروط المسألة الابتدائية.

أي نحصل على المتسلسلة التي تمثل الحل، بعد دراسة تقارب هذه المتسلسلة والحصول على مجال تقاربها، يكون هذا المجال هو المجال الذي نستطيع فيه حل المعادلة التفاضلية (10.25).

مثال 10.22: عين في صورة متسلسلة قوى، حل مسألة كوشي التالية:

$$y'' = y \quad ; \quad y(0) = y'(0) = 1$$

الحل: واضح أن الدالة  $y = f$  قابلة للنشر دوماً، لأنها حدودية. وعليه، فإن حل هذه المعادلة يُعطى بالعلاقة (10.24). ونعين، الآن، المعاملات في العلاقة (10.24):

$$y_0 = y(0) = 1, \quad y_0' = y'(0) = 1$$

$$y_0'' = y''(0) = y(0) = 1$$

لإيجاد  $y_0'''$ ، نشتق المعادلة المعطاة، فنجد:  $y_0''' = y'$ ، ومنه فإن:  $y_0''' = y_0' = 1$ .

وهكذا، نجد:  $y_0^{(n)} = 1$ ، مهما تكن  $n$ .

$$y = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

مثال 10.23: عين في صورة متسلسلة قوى، حل المعادلة:

$$(x-1)(x-2)y'' + (x-3)y' - y = 0$$

المحقق للشروط:  $y(0) = y'(0) = 1$ .

الحل: الدالتان  $(x-1)(x-2)$  و  $(x-3)$  قابلتان للنشر، في جوار للنقطة  $x_0 = 0$ . إذن، يُعطى حل المسألة بالعلاقة (10.24). نعين، الآن، المعاملات في العلاقة (10.24):

$$a_1 = y'(0) = 1, \quad a_0 = y(0) = 1$$

بالاشتقاق والتعويض في المعادلة، والمطابقة بين قوى  $x$  المختلفة، نجد:

$$4a_2 = 4, \quad 6a_3 = 6, \quad \dots, \quad 2na_n = (3n-3)a_{n-1} - (n-3)a_{n-2}$$

$$\text{ومنه: } a_2 = a_3 = \dots = a_n = 1.$$

وعليه، فإن:

$$y = 1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{1}{1-x}$$

10.6 تطبيق على المعادلات التفاضلية العادية من المرتبة الثانية

### مسألة السرعة الكونية:

ما هي أصغر سرعة، يجب أن يُقذف بها جسم رأسياً نحو الأعلى، بحيث لا يعود إلى الأرض، مع إهمال مقاومة الهواء، وجاذبية الكواكب الأخرى.

الحل: نرمز لكتلة الأرض بـ  $M$  وكتلة الجسم المقذوف  $m$ . تعطى، حسب قانون نيوتن، قوة جاذبية الأرض  $f$ ، المؤثرة على الجسم  $m$ ، بالعلاقة:

$$f = k \cdot \frac{mM}{x^2}$$

حيث  $x$  هي المسافة بين مركز الأرض ومركز ثقل الجسم المقذوف، و  $k$  ثابت الجاذبية، وحسب

قانون التحريك الأساسي، تكون المعادلة التفاضلية لحركة الجسم:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -k \frac{mM}{x^2} \Rightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} = -k \frac{M}{x^2} \quad (i)$$

(الإشارة سالبة، لأن التسارع سالب في هذه الحالة). وهذه المعادلة هي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية دالتها المجهولة  $x$  ومتحوها المستقل  $t$ . نخفض مرتبة هذه المعادلة، بإدخال الرمز:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx} \quad \text{و} \quad v = \frac{dx}{dt}$$

حيث  $v$  سرعة الحركة. تصبح، عندئذ، المعادلة (i)، كما يلي:

$$v \frac{dv}{dx} = -k \frac{M}{x^2} \Rightarrow v dv = -kM \frac{dx}{x^2}$$

وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الأولى، دالتها المجهولة  $v$  ومتحوها المستقل  $x$ ، وهي منفصلة المتغيرات. بالمكاملة نجد:

$$\frac{v^2}{2} = k \frac{M}{x} + c$$

نعين ثابت المكاملة  $c$  من شروط البدء، حيث في لحظة البدء  $t = 0$ ، يكون  $R = x$  نصف قطر الأرض و  $v = v_0$  سرعة القذف.

$$\frac{v_0^2}{2} = k \frac{M}{R} + C \Rightarrow C = -k \frac{M}{R} + \frac{v_0^2}{2}$$

ومنه، فإن:

$$\frac{v^2}{2} = k \frac{M}{x} - k \frac{M}{R} + \frac{v_0^2}{2} = k \frac{M}{x} + \left( \frac{v_0^2}{2} - k \frac{M}{R} \right)$$

ولكن من شروط المسألة، يجب أن تكون السرعة موجبة دوماً، وعليه، فإن  $\frac{v^2}{2} > 0$ . واضح

أنه كلما ازدادت المسافة  $x$  ازدياداً غير محدود، فإن المقدار  $k \frac{M}{x}$  يصبح صغيراً للغاية، فالشرط  $\frac{v^2}{2} > 0$  يتحقق (مهما تكن قيمة المسافة  $x$ ) فقط، في الحالة:

$$\frac{v_0^2}{2} - k \frac{M}{R} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad v_0 \geq \sqrt{\frac{2kM}{R}}$$

وعليه، فإن أقل سرعة يقذف بها الجسم ولا يعود إلى الأرض تتعين بالمساواة:

$$v_0 = \sqrt{\frac{2kM}{R}} \quad (ii)$$

حيث  $k = 6.66 \times 10^{-18} \text{ cm}^3 / \text{g.s}^2$  و  $R = 63 \times 10^7 \text{ cm}$  ويكون تسارع الجاذبية على سطح الأرض، أي عندما يكون  $R = x$ ، هو  $G = 981 \text{ cm/s}^2$ .

ونحصل من (i) على العلاقة:

$$G = \frac{kM}{R^2} \quad \Rightarrow \quad M = G \frac{R^2}{k}$$

نعوض في العلاقة (ii)، فنجد:

$$v_0 = \sqrt{2GR} = \sqrt{2 \times 981 \times 63 \times 10^7} \approx 11.2 \times 10^5 \text{ cm/s} = 11.2 \text{ km/s}$$

## تمارين الفصل العاشر

1. أوجد الحل العام لكل من المعادلات:

$$1) y''' = \cos x$$

$$3) y'' + 2y' = e^x y'^2$$

$$5) x - \sin y'' + 2y'' = 0$$

$$7) x\sqrt{1 + y'^2} = y''$$

$$9) y'' = (1 + y'^2)^{3/2}$$

$$11) \frac{y'''}{y''} - \frac{3y'y''}{(1 + y'^2)} = 0$$

$$13) \frac{y''}{y'} + e^{y'} \cdot y'' = 1$$

$$15) y'y''' - 3y'^2 = 0$$

$$17) y'^2 - 2y'' - x = 0$$

$$19) y''' \cdot y'' - \sqrt{1 + y'^2} = 0$$

$$21) (y''')^2 + 2xy''y^{(4)} + \frac{y'''}{x} - \frac{y''}{x^2} + \sin x = 0$$

$$2) y'' - xy'' + y'^2 = 0$$

$$4) 2y'y'' - y'^2 - 1 = 0$$

$$6) x^2 y'' = y'^2 - 2xy' + 2x^2$$

$$8) y(y-1)y'' + y'^2 = 0$$

$$10) xy'' - xy'^2 + yy' = 0$$

$$12) xyy'' + xy'^2 = 3yy'$$

$$14) y''(1 + x^2) - xy' = 0$$

$$16) xy^{(4)} - 2y''' = x^3$$

$$18) y^{(n)} - 2y^{(n-1)} = e^x$$

$$20) yy'' - y'^2 = y^2 \ln y$$

2. أوجد حل كل من مسائل كوشي التالية:

$$1) y'' - x^2 = 1 \quad ; \quad y(x) = 0, y'(0) = 1$$

$$2) 2yy'' + y'^2 + (y')^4 = 0 \quad ; \quad y(0) = 1, y'(0) = 1$$

$$3) 4y' + y'^2 = 4xy'' \quad ; \quad y(0), y'(0) = 1$$

$$4) y'' = 2\sqrt{y'} \quad ; \quad y(0) = y'(0) = 1$$

$$5) \quad y' = xy'' - \frac{1}{2}y''^2 \quad ; \quad y(1) = 0, y'(1) = 1/2$$

$$6) \quad y'' + 2xy' + 2y = 1 \quad ; \quad y(0) = y'(0) = 0$$

3. تحقق من أن الدالة  $\xi(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ ، حيث  $\alpha, \beta, \gamma$  ثوابت، تمثل حلاً شاذاً

$$\text{للمعادلة } y^{(4)} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{y'''}.$$

4. أثبت صحة ما يلي:

$$1) \quad \frac{1}{aD^2 + bD + c} \sin \alpha x = \frac{(c - a\alpha^2) \sin \alpha x - b\alpha \cos \alpha x}{(c - a\alpha^2)^2 + b^2\alpha^2}$$

$$2) \quad \frac{1}{aD^2 + bD + c} \cos \alpha x = \frac{(c - a\alpha^2) \cos \alpha x - b\alpha \sin \alpha x}{(c - a\alpha^2)^2 + b^2\alpha^2}$$

حيث  $(c - a\alpha^2)^2 + b^2\alpha^2 \neq 0$

$$3) \quad \frac{1}{L(D^2)} \operatorname{ch} \alpha x = \frac{1}{L(\alpha^2)} \operatorname{ch} \alpha x$$

$$4) \quad \frac{1}{L(D^2)} \operatorname{sh} \alpha x = \frac{1}{L(\alpha^2)} \operatorname{sh} \alpha x$$

حيث  $L(\alpha^2) \neq 0$

5. بفرض  $g(-\lambda^2) \neq 0$ ، أوجد حلاً خاصاً للمعادلة:

$$[f(D^2) + Dg(D^2)]y = \alpha \cos \lambda x + \beta \sin \lambda x + \beta \sin \lambda x$$

6. أوجد الحل العام لكل من المعادلات التالية:

$$1) \quad y'' - y = \frac{e^x}{e^x + 1}$$

$$2) \quad y'' + 4y = 4 \tan 2x$$

$$3) \quad y'' + y = \frac{1}{x}$$

$$4) \quad y'' + 4y = \frac{4}{\cos^2 2x}$$

$$5) \quad y'' + y' = \frac{1}{\sin 2x \sqrt{\sin 2x}}$$

$$7) \quad y'' + 4y' = \frac{1}{\cos 2x}$$

$$9) \quad y'' + y' = \frac{2}{\sin^3 x}$$

$$11) \quad y'' - 4y' = \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 1}$$

$$6) \quad y'' - 4y' + 3y = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

$$8) \quad y'' + 2y' + 2y = \frac{e^{-x}}{\sin x}$$

$$10) \quad y''' + y' = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

$$12) \quad y'' - y = 4\sqrt{x} + \frac{1}{x\sqrt{x}}$$

7. أوجد الحل العام لكل من المعادلات التالية:

$$(D^2 - 6D + 9)y = \frac{e^{3x}}{x^2 + x \cos 3x}$$

$$(D^2 + D)y = x \sin x + \cos x$$

$$(D^3 - D)y = e^x \sin x + 2x^2 + 1$$

$$(D^2 + 9)y = \cos 2x \cdot \cos 3x$$

$$(D^2 - 1)y = (x^2 - x + 1) + 3e^{2x}$$

$$(D^4 - 4D^3 + 8D^2 - 8D + 4)y = e^x (x \cos x + \sin x)$$

$$(D^4 - 4D^3 + 5D^2)y = x^2 \cos 2x + xe^x \sin 2x + 3e^x \sin x$$

$$(D^{10} + D^6)y = 120x^2$$

$$(D^2 + 2D + 2)y = x^2 + \sin x$$

$$(D^2 - 6D + 9)^2 y = e^{3x} - 5x$$

$$(D^3 - 3D - 2)y = 540x^3 e^{-x}$$

$$(D^5 + 2D^4 + 3D + 2)y = 2 + \cos x$$

8. أوجد الحل العام لكل من المعادلات التالية:

$$1) \quad x^2 y'' + xy' + y = 2 \sin(\ln x)$$

$$2) \quad y''' - \frac{9}{x} y'' + \frac{3}{x^2} y' - \frac{4}{x^3} y = \frac{5 \ln x + \ln^2 x}{x^3}$$

$$3) \quad (x+2)^3 y''' + 9(x+2)y'' + 18(x+2)y' + 6y = \ln(x+2)$$

$$4) \quad (x+1)^2 y'' - (x+1)y' + y = x$$



$$5) (x+1)^2 y'' - (x+1)y' - y = x-1 + \ln(x+1)^2$$

$$6) x^3 y''' + 3x^2 y'' + xy' + 8y = 65 \cos(\ln |x|)$$

$$7) x^{\alpha+1} y'' - (2\alpha-1)x\alpha y' + \alpha^2 x^{\alpha-1} y = 1$$

$$8) (1+x^2)^2 y'' + 2x(1+x^2)y' + 4y = 0$$

9. عين، في صورة متسلسلة قوى، حل كل من مسائل كوشي التالية:

$$1) y'' + y = 0 \quad ; \quad y(0) = 0, y'(0) = 1$$

$$2) (x^2 - 1)y'' + 3xy' + xy = 0 ; \quad ; \quad y(0) = 4, y'(0) = 0$$

$$3) (1-x^2)y'' - xy' = 0 ; \quad ; \quad y(0) = 1, y'(0) = 0$$

$$4) (x-1)(x-k)y'' + (x-2k+1)y' - y = 0 \quad ; \quad y(0) = y'(0) = 1$$



## الفصل الحادي عشر

### جمل المعادلات التفاضلية

- 11.1 تعاريف ومفاهيم أولية
  - 11.2 طرائق حل المعادلات التفاضلية النظامية
  - 11.3 جمل المعادلات التفاضلية الخطية
  - 11.4 الجمل التفاضلية الخطية بأمثال ثابتة
  - 11.5 الجمل التفاضلية الخطية غير النظامية بأمثال الثابتة
  - 11.6 تطبيق على جمل المعادلات التفاضلية في دراسة الاهتزازات الكهربائية
- تمارين الفصل الحادي عشر



## جمل المعادلات التفاضلية

### 11.1 تعاريف ومفاهيم أولية

نسمي جملة تفاضلية نظامية، مجموعة المعادلات التفاضلية من النمط:

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (11.1)$$

حيث إن  $y_1, y_2, \dots, y_n$  دوال مجهولة في المتغير المستقل  $x$ ، بينما  $f_1, f_2, \dots, f_n$  دوال

معلومة في  $x, y_1, y_2, \dots, y_n$  وهي مستمرة على جوارها.

نسمي العدد  $n$  مرتبة الجملة التفاضلية النظامية (11.1).

ويمكن كتابة الجملة التفاضلية بالشكل المتناظر:

$$\frac{dy_1}{f_1} = \frac{dy_2}{f_2} = \dots = \frac{dy_n}{f_n} = \frac{dx}{1} \quad (11.2)$$

ونقول عن الجملة التفاضلية (11.1)، إنها خطية، إذا كانت جميع الدوال  $f_i$ ، خطية بالنسبة إلى

$y_1, y_2, \dots, y_n$ ، وهي تكتب كما يلي:

$$\frac{dy_i}{dx} = P_{i1}(x)y_1 + P_{i2}(x)y_2 + \dots + P_{in}(x)y_n + f_i(x)$$

حيث  $i = 1, 2, \dots, n$ .

إن حل الجملة التفاضلية (11.1) على المجال  $\mathbb{R} \supseteq I$  هو مجموعة الدوال:

$$y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x), \dots, y_n = y_n(x)$$

القابلة للاشتقاق باستمرار على المجال  $I$  والتي تحول معادلات الجملة التفاضلية المعطاة إلى

مطابقات صحيحة، مهما تكن  $x$  من المجال  $I$ .

نسمي المعادلة التفاضلية، الناتجة من جملة المعادلات التفاضلية (11.1) بعمليات جبرية،

تركيباً قابلاً للمكاملة، إذا كانت هذه المعادلة عبارة عن تفاضل تام لدالة

$$\phi(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \text{ ، أي:}$$

$$d\phi(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0$$

وبمكاملة الطرفين، نجد:

$$\phi(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = c \quad (11.3)$$

حيث  $c$  ثابت اختياري، نسمي هذه المعادلة تكاملاً أولياً للجملة المعادلات التفاضلية (11.1).

إذا علمنا  $n$  تكاملاً أولياً مستقلاً للجملة التفاضلية من المرتبة  $n$  (11.1):

$$\phi_1(x, y_1, \dots, y_n), \phi_2(x, y_1, \dots, y_n), \dots, \phi_n(x, y_1, \dots, y_n)$$

فإن مجموعة المعادلات:

$$\phi_i(x, y_1, \dots, y_n) = c_i \quad ; i = 1, 2, \dots, n \quad (11.4)$$

تمثل التكامل العام للجملة (11.1).

ويمكن من التكامل العام الحصول عملياً، على أي حل لهذه الجملة وذلك بحل المعادلات

$$(11.4) \text{ بالنسبة إلى } y_n, y_{n-1}, \dots, y_1.$$

إذا علمنا تكاملاً أولياً، لا يطابق الثابت للجملة التفاضلية (11.1)، فإنه بحل المعادلة

$$(11.3) \text{ بالنسبة إلى أحد متغيراتها } y_n, y_{n-1}, \dots, y_1, \text{ وليكن مثلاً } y_n:$$

$$y_n = \psi(x, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, c) \quad (11.5)$$

وبتعويض (11.5) في أول  $(n-1)$  معادلة، من معادلات الجملة (11.1)، نحصل على جملة

معادلات تفاضلية جديدة من المرتبة  $(n-1)$ .

## 11.2 طرق حل المعادلات التفاضلية النظامية

### 11.2.1 طريقة التكاملات المتتالية

إذا كانت الجملة التفاضلية، مؤلفة من  $n$  معادلة من المرتبة الأولى، وكل معادلة تحوي دالة

مجهولة واحدة، أي أن الجملة من النمط:

$$\frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1), \frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_2), \dots, \frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_n)$$

فإن حل هذه الجملة، يؤول إلى حل كل معادلة من هذه المعادلات على حدة.

وإذا كانت الجملة من النمط:

$$\frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1), \frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2), \dots,$$

$$\frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$$

فإن تكاملها يتم بالتتالي، حيث تكامل المعادلة الأولى، ونعوض الحل العام الناتج في المعادلة الثانية، ونكاملها، ونتابع هكذا...

$$\text{مثال 11.1: أوجد الحل العام للجملة: } \left\{ \frac{dy}{dx} = y \sin x, \frac{dz}{dx} = y e^{\cos x} \right\}$$

الحل: نحل المعادلة الأولى، بغض النظر عن المعادلة الثانية:

$$\frac{dy}{y} = \sin x dx \Rightarrow y = c_1 e^{-\cos x}$$

نعوض هذه القيمة في المعادلة الثانية من معادلات الجملة:

$$\frac{dz}{dx} = c_1 e^{-\cos x} \cdot e^{\cos x} = c_1 \Rightarrow z = c_1 x + c_2$$

وعليه، فإن الحل العام للجملة المعطاة:

$$\left\{ y = c_1 e^{-\cos x}, z = c_1 x + c_2 \right\}$$

حيث  $c_1$  و  $c_2$  ثابتان اختياريان.

## 11.2.2 طريقة الحذف

يمكن حل كثير من الجمل النظامية، بترتيب الجملة من المرتبة  $n$  إلى معادلة تفاضلية من المرتبة  $n$  بدالة مجهولة واحدة، أو إلى عدة معادلات تفاضلية مجموع مرتباتها تساوي  $n$ . ويتم ذلك عن طريق التفاضل لمتتالي لمعادلة واحدة من معادلات الجملة وحذف جميع الدوال المجهولة باستثناء أحدها. ويتكامل المعادلة الناتجة نحصل على دالة من الدوال المجهولة، ونعين الدوال المجهولة الباقية من معادلات الجمل التفاضلية الأصلية ومن المعادلات الناتجة من تفاضلها.

مثال 11.2: أوجد حل للجملة:  $\left\{ \frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{z}, \frac{dz}{dx} = \frac{1}{y-x} \right\}$

المحقق للشروط:  $y(0) = -1, z(0) = 1$ .

الحل: نوجد الحل العام للجملة بطريقة الحذف، نفاضل طرفي المعادلة الثانية:

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = -\frac{1}{(y-x)^2} \left( \frac{dy}{dx} - 1 \right)$$

نحذف  $y'$  و  $y$  من المعادلة الناتجة، وذلك بتعويض قيمة  $\left( \frac{dy}{dx} - 1 \right)$  و  $\frac{1}{y-x}$  من قيمهما من معادلات الجملة، نجد:

$$z'' = \frac{z'^2}{z}$$

وعليه، فإن:

$$\frac{z''}{z'} = \frac{z'}{z} \Rightarrow z' = c_1 z \Rightarrow z = c_2 e^{c_1 x}$$

لإيجاد  $y$ ، نعوض قيمة  $z$  التي حصلنا عليها، في المعادلة الثانية من معادلات الجملة، فنجد:

$$y - x = \frac{1}{z'} \Rightarrow y = x + \frac{1}{c_1 c_2} e^{-c_1 x}$$

وعليه، فإن عبارة الحل العام للجملة:

$$\left\{ y = x + \frac{1}{c_1 c_2} e^{-c_1 x}, z = c_2 e^{c_1 x} \right\}$$

حيث  $c_1$  و  $c_2$  ثابتان اختياريان.

لإيجاد حل مسألة كوشي المطلوب، نعوض في عبارة الحل العام:  $x = 0$  و  $y = -1$  و  $z = 1$ ,



ف نجد أن  $c_1 = -1$  و  $c_2 = 1$  . وعليه، فإن الحل المطلوب:

$$\{v = x - e^x, z = e^{-x}\}$$

### 11.2.3 طريقة التكاملات الأولية

نقول تركيب قابل للمكاملة لكل معادلة تفاضلية تنتج عن جملة معادلات تفاضلية بعملية جبرية، وبحيث تكون هذه المعادلة التفاضلية قابلة للمكاملة مباشرة، أي تمثل تفاضلاً تاماً للدالة  $\psi(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ .

أي أن التركيب القابل للمكاملة، يكتب كما يلي:

$$d\psi(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0$$

وبالمكاملة، نحصل على التكامل الأولي  $\psi(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = c$ .

وإذا أمكن إيجاد تكامل أولي واحد، فإننا نستطيع تخفيض مرتبة الجملة التفاضلية مرة واحدة، وهكذا، إذا استطعنا إيجاد، من أجل جملة مؤلفة من  $n$  معادلة،  $n$  تكاملاً أولياً مستقلة خطياً، فإن هذا يعني أننا وجدنا التكامل العام لهذه الجملة.

ويكون من المفيد أحياناً كتابة الجملة المعطاة بالشكل المتناظر، لتسهيل إيجاد التركيب القابلة للمكاملة، وذلك باستخدام إحدى الطرائق التالية:

1. المكاملة المباشرة لـ  $n$  من هذه النسب المتساوية، والتي عددها  $n + 1$ .
2. حساب تكامل أول من هذه النسب، ومن ثم نعوض هذا التكامل في النسب الأخرى لحساب تكامل ثان، وهكذا للحصول على  $n$  تكامل أولي.
3. طريقة الأمثال غير المعينة، وذلك بالاستفادة من خواص التناسب:

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{f_1} = \frac{dy_2}{f_2} = \dots = \frac{dy_n}{f_n} = \frac{dx}{1} &= \\ &= \frac{\alpha_1 dy_1 + \alpha_2 dy_2 + \dots + \alpha_n dy_n + \beta dx}{\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \dots + \alpha_n f_n + \beta} \end{aligned}$$

حيث:  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta$  أمثال غير معينة، يتم اختيارها، بحيث يصبح البسط تفاضلاً تاماً للمقام في الطرف الأيمن، أو بحيث ينعدم المقام ويكون البسط عبارة عن تفاضل تام لدالة ما.

$$\text{مثال 11.3: أوجد الحل العام للجملّة: } \left\{ \frac{dy}{dx} = z, \frac{dz}{dx} = -y \right\}$$

الحل: لإيجاد تركيب قابل للمكاملة من هذه الجملّة نضرب الأولى بـ  $y$  والثانية بـ  $z$  ونجمع:

$$y \frac{dy}{dx} + z \frac{dz}{dx} = 0$$

ومنه، فإن

$$y^2 + z^2 = c_1^2 \Rightarrow z = \sqrt{c_1^2 - y^2}$$

وهو يمثل تكاملاً أولياً للجملّة. نختار القيمة الموجبة لـ  $z$ ، حيث إن الإشارة السالبة تُعطي

نفس النتيجة، ونعالج بأسلوب مشابه.

نعوض قيمة  $z$  في المعادلة الأولى من معادلات الجملّة، فنحصل على معادلة تفاضلية من المرتبة الأولى:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{c_1^2 - y^2} \Rightarrow \arcsin \frac{y}{c_1} = x + c_2$$

وهو تكامل أولي آخر للجملّة المعطاة، والتكاملان الأوليان مستقلان خطياً. وعليه، فإن الحل العام للجملّة:

$$\left\{ z = \sqrt{c_1^2 - y^2}, \arcsin \frac{y}{c_1} = x + c_2 \right\}$$

حيث  $c_1$  و  $c_2$  ثابتان اختياريان.

ملحوظة 11.1: يمكن حل هذا التمرين بطريقة الحذف، وذلك بتعويض  $z$  من المعادلة الأولى في الثانية، فنجد:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + y = 0$$

وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية بأمثال ثابتة، حلها العام:

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

$$\text{مثال 1.4.1: أوجد الحل العام للجملة: } \frac{dx}{z-y} = \frac{dy}{x-z} = \frac{dz}{y-x}$$

الحل: نشكل تركيبان قابلان للمكاملة، باستخدام خواص النسب:

$$\frac{dx}{z-y} = \frac{dy}{x-z} = \frac{dz}{y-x} = \frac{dx+dy+dz}{0}$$

ومنه، فإن:

$$dx + dy + dz = 0$$

أي أن

$$d(x+y+z) = 0 \Rightarrow x+y+z = c_1$$

وهو تكامل أول للجملة، ولحساب التكامل الأولي الآخر نضرب البسط والمقام في الجملة المعطاة بـ  $2x, 2y, 2z$ ، بالترتيب، ومن ثم نجمع:

$$\frac{2x dx}{2x(z-y)} = \frac{2y dy}{2y(x-z)} = \frac{2z dz}{2z(y-x)} = \frac{d(x^2 + y^2 + z^2)}{0}$$

ومنه، فالتكامل الأولي الآخر:

$$x^2 + y^2 + z^2 = c_2^2$$

ولما كان التكاملان الأوليان مستقلان خطياً، فإن الحل العام للجملة:

$$\{x^2 + y^2 + z^2 = c_2^2, x+y+z = c_1\}$$

حيث  $c_1$  و  $c_2$  ثابتان اختياريان.

### 11.3 حل المعادلات التفاضلية الخطية

الجملة التفاضلية الخطية غير المتجانسة هي الجمل التفاضلية من النمط:

$$\frac{dy_k}{dx} = \sum_{i=1}^n P_{ki}(x)y_i + f_k(x) \quad ; \quad k=1,2,\dots, n \quad (11.6)$$

إذا كان  $f_k(x) = 0$ ، حيث  $k, i = 1, 2, \dots, n$ ، من أجل جميع قيم  $x$ ، فإن الجملة التفاضلية (11.6) تسمى جملة تفاضلية خطية متجانسة.

نفرض أن جميع الدوال  $P_{ki}, f_k(x)$ ، معرفة ومستمرة على المجال  $R \supseteq I$ ، يكون عندها للجملة (11.6) حل وحيد:

$$y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x), \dots, y_n = y_n(x)$$

معرفة على المجال  $I$ ، وتحقق الشروط الابتدائية:

$$y_1 = y_1^{(0)}, y_2 = y_2^{(0)}, \dots, y_n = y_n^{(0)}, \quad x = x_0$$

حيث إنه يمكن إعطاء المعطيات الابتدائية بشكل اختياري و  $x_0$  من المجال  $I$ .

واضح أن الجملة التفاضلية الخطية هي جملة تفاضلية نظامية، لذا، يمكن حلها بالطرائق نفسها التي مرت معنا في البند 11.2، ولكن يوجد طريقة خاصة لحل الجمل التفاضلية الخطية تعتمد على خواص هذه الجملة وخواص حلولها.

نبدأ، أولاً، بدراسة الجملة التفاضلية الخطية المتجانسة الموافقة لها:

$$\frac{dy_k}{dx} = \sum_{i=1}^n P_{ki}(x)y_i \quad , \quad k=1,2,\dots, n \quad (11.7)$$

#### 11.3.1 الجملة التفاضلية الخطية المتجانسة

يوجد للجملة التفاضلية الخطية المتجانسة (11.7) دائماً الحل الصفري (الثافه):

$$y_1 = 0, y_2 = 0, \dots, y_n = 0$$

وهو الحل الوحيد الذي يحقق الشروط الابتدائية الصفرية:

$$y_1 = 0, y_2 = 0, \dots, y_n = 0, x = x_0$$

ولا يوجد حلول أخرى تحقق شرط البدء الصفري.

للإنشاء الخل العام للجملة الخطية المتجانسة (11.7)، يكفي معرفة  $n$  حل خاص، غير صفري، مستقل خطياً على المجال  $F$ :

$$\begin{aligned} y_1 &= (y_{11}, y_{12}, \dots, y_{1n}) \\ y_2 &= (y_{21}, y_{22}, \dots, y_{2n}) \\ &\vdots \\ y_n &= (y_{n1}, y_{n2}, \dots, y_{nn}) \end{aligned} \quad (11.8)$$

وتكون هذه الحلول مستقلة خطياً على المجال  $I$ ، إذا تحققت المطابقة:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_{ik} y_{ik} = 0 \quad : \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad x \in I$$

حيث إن  $\alpha_{j1}, \alpha_{j2}, \dots, \alpha_{jn}$  ثوابت، فقط عندما يكون  $\alpha_{j1} = 0, \alpha_{j2} = 0, \dots, \alpha_{jn} = 0$

نسمي جملة الحلول (11.8) المستقلة خطياً على المجال  $\mathbb{F}$ ، جملة حلول أساسية للجملة التفاضلية الخطية المتجانسة (11.7).

ويمكن التحقق من أن الشرط اللازم والكافي كي تكون جملة الحلول (11.8)، للجملة التفاضلية الخطية المتجانسة (11.7)، جملة حلول أساسية، هو أن يكون محدد رونسكي لها:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{n1} & y_{n2} & \dots & y_{nn} \end{vmatrix}$$

مخالفاً للصفر، على الأقل في نقطة من المجال  $I$ .

إذا علمت جملة حلول أساسية (11.8)، فإن تركيبها الخطي:

$$y_k = \sum_{i=1}^n c_{ik} y_{ik} \quad ; \quad k=1,2,\dots,n \quad (11.9)$$

حيث  $c_{1k}, c_{2k}, \dots, c_{nk}$  ثوابت اختيارية، يُمثل حلاً عاماً للجملة النظامية المتجانسة (11.7) في الساحة:

$$D = \{x \in I : |y_1| < +\infty, |y_2| < +\infty, \dots, |y_n| < +\infty\} \quad (11.10)$$

بقي أن نشير إلى أن كل حلول الجملة الخطية المتجانسة (11.7) محتواة في الصيغة (11.9).

### 11.3.2 الجملة التفاضلية الخطية غير المتجانسة

لإيجاد الحل العام للجملة غير المتجانسة (11.6) يكفي معرفة حل عام للجملة الخطية المتجانسة الموافقة (11.7) من الشكل (11.9)، وحل خاص للجملة الخطية غير المتجانسة (11.6) من النمط:  $[(y_p)_1, (y_p)_2, \dots, (y_p)_n]$

ويعطى الحل العام للجملة الخطية غير المتجانسة (11.6)، في الساحة  $D$ ، كما يلي:

$$y_k = (y_p)_k + \sum_{i=1}^n c_{ik} y_{ik} \quad ; \quad k=1,2,\dots,n \quad (11.11)$$

وتكون كل حلول الجملة (11.6) محتواة في الصيغة (11.11).

يمكن إيجاد الحل العام للجملة (11.6) باستخدام طريقة تحويل الثوابت (طريقة لاغرانج) وذلك انطلاقاً من جملة الحلول الأساسية للجملة الخطية المتجانسة الموافقة (11.7).

#### طريقة تحويل الثوابت (طريقة لاغرانج)

نبحث عن حل خاص للجملة الخطية غير المتجانسة (11.7) من النمط:

$$(y_p)_k = \sum_{i=1}^n c_i(x) y_{ik} \quad ; \quad k=1,2,\dots,n \quad (11.12)$$

حيث إن  $c_1(x), c_2(x), \dots, c_n(x)$  دوال في  $x$ ، قابلة للاشتقاق باستمرار على  $I$ . تحدد هذه الدوال من جملة المعادلات:

$$\sum_{i=1}^n c'_i(x) y_{ik} = f_k(x) \quad ; \quad k=1,2,\dots, n$$

ويكون لهذه الجملة الجبرية في المجاهيل  $c'_1(x), c'_2(x), \dots, c'_n(x)$  حل وحيد، لأن معين الأمثال لها لا يساوي الصفر، وهو معين رونسكي لجملة الحلول (11.8)، وبحلها نجد:

$$c'_i(x) = \varphi_i(x) \quad ; \quad i=1,2,\dots, n$$

وعليه، فإن:

$$c_i(x) = \int \varphi_i(x) dx \quad ; \quad i=1,2,\dots, n$$

مع إهمال ثوابت التكامل لأننا نبحث عنه حل خاص.

نعوض هذه القيم في الصيغة (11.12)، فنحصل على حل خاص للجملة (11.6) في الساحة  $D$ .

وبالتعويض في (11.11) نحصل على الحل العام للجملة الخطية غير المتجانسة (11.6):

$$y_k = \sum_{i=1}^n y_{ik} \int \varphi_i(x) dx + \sum_{i=1}^n \bar{c}_i y_{ik} \quad ; \quad k=1,2,\dots, n$$

مثال 4.5: أوجد الحل العام للجملة التفاضلية الخطية:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dy}{dx} - y \sin x &= e^{-\cos x} \\ \frac{dz}{dx} - ye^{\cos x} &= 2x^2 + 1 \end{aligned} \right\}$$

الحل: إن الحل العام للمعادلة المتجانسة الموافقة، مثال 11.1، يعطى بالعلاقات:

$$y = c_1 e^{\cos x}, \quad z = c_1 x + c_2$$

نقرض، الآن، أن الحل الخاص للجملة المعطاة يعطى بالعلاقات:

$$y = c_1(x) e^{-\cos x}, \quad z = c_1(x) x + c_2(x) \quad (i)$$

نشتق هذه الحلول ونعوض في الجملة التفاضلية المعطاة، فنحصل على المعادلات:

$$c_1'(x)e^{-\cos x} = e^{-\cos x}, \quad c_1'(x)x + c_2'(x) = 2x^2 + 1 \quad (ii)$$

من المعادلة الأولى: نجد  $c_1' = 1$ ، وعليه، فإن  $c_1 = x$ .

نعوض قيمة  $c_1$  في المعادلة الثانية من معادلات (ii)، فنجد:

$$c_2' = 2x + \frac{1}{x} \Rightarrow c_2 = x^2 + \ln|x|$$

نعوض في (i)، فنحصل على الحل الخاص للجملّة المعطاة. وهكذا، فإن الحل العام المطلوب هو:

$$\{v = (x + c_1)e^{-\cos x}, \quad z = (x + c_1)x + x^2 + \ln|x| + c_2\}$$

حيث  $c_1$  و  $c_2$  ثابتان اختياريان.

11.4 الجملّ التفاضلية الخطية بأمثال ثابتة

$$\frac{dy_k}{dx} = \sum_{i=1}^n a_{ki} y_i + f_i(x) \quad ; \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (11.13)$$

حيث إن المعاملات  $a_{ki}$  ثوابت حقيقية، وذلك بالطرائق التي مرت معنا سابقاً، كما يوجد

طرائق أخرى لحلها، كطريقة دالامبير وطريقة المعينات، التي سنناقشها في الحالة العامة في البند

11.5. ونشير قبل ذلك، إلى أن حل جملة المعادلات غير المتجانسة (11.13)، يقتضي حل جملة

المعادلات التفاضلية المتجانسة الموافقة لها:

$$\frac{dy_k}{dx} = \sum_{i=1}^n a_{ki} y_i \quad ; \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (11.14)$$

11.4.1 حل الجملة التفاضلية الخطية المتجانسة بأمثال ثابتة - طريقة أولر

وهي طريقة مشابهة للطريقة المتبعة في حل المعادلات التفاضلية العادية الخطية بأمثال ثابتة في

البند 10.4.1. نبحث عن حل للجملة (11.14) من النمط:

$$Y = (y_1 = \gamma_1 e^{\lambda x}, y_2 = \gamma_2 e^{\lambda x}, \dots, y_n = \gamma_n e^{\lambda x}) \quad (11.15)$$





$$Y_2 = (\gamma_{21}e^{\lambda_{21}x}, \gamma_{22}e^{\lambda_{22}x}, \dots, \gamma_{2n}e^{\lambda_{2n}x})$$

$$Y_n = (\gamma_{n1}e^{\lambda_{n1}x}, \gamma_{n2}e^{\lambda_{n2}x}, \dots, \gamma_{nn}e^{\lambda_{nn}x})$$

وعليه، فإن الحل العام للجملة التفاضلية المتجانسة (11.14) هو:

$$Y_k = \sum_{i=1}^n c_i \gamma_{ik} e^{\lambda_{ik}x} ; (k=1,2,\dots, n)$$

حيث  $c_1, c_2, \dots, c_n$  ثوابت اختيارية.

إذا كانت بعض الجذور البسيطة عقدية، ليكن مثلاً،  $\lambda_1 = \alpha + i\beta$  جذراً عقدياً للمعادلة المميزة (11.17). عندئذ، فإن مرافقه  $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1 = \alpha - i\beta$  هو أيضاً جذر لهذه المعادلة، تشكل حلاً للجملة التفاضلية المتجانسة (11.14) من النمط (11.15) يقابل الجذر  $\lambda_1$ :

$$Y_1 = (y_{11} = \gamma_{11}e^{(\alpha+i\beta)x}, y_{12} = \gamma_{12}e^{(\alpha+i\beta)x}, \dots, y_{1n} = \gamma_{1n}e^{(\alpha+i\beta)x})$$

نعزل من هذا الحل، الجزء الحقيقي والجزء التخيلي، بالاستفادة من علاقة أولر  $e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x)$ ، وبذلك نحصل على حلين خاصين حقيقيين مستقلين خطياً، للجملة المتجانسة (11.14)، يقابلان الجذران العقديان المترافقان  $\lambda_1, \lambda_2 = \bar{\lambda}_1$ .

نشئ الحلول الخاصة، المقابلة لجميع أزواج الجذور العقدية المترافقة، وجميع الجذور الحقيقية، إن وجدت، ونأخذ التركيب الخطي للحلول الخاصة المستقلة خطياً التي أوجدناها، مع ثوابت اختيارية، فنحصل على الحل العام للجملة (11.14).

### ثانياً: بعض الجذور مكررة:

ليكن مثلاً  $\lambda_1$  جذراً حقيقياً مكرراً  $k$  مرة للمعادلة المميزة (11.17). ويمكن بسهولة البرهان أنه يقابل هذا الجذر حل خاص من النمط:

$$y_{11} = P_1(x)e^{\lambda_1 x}, y_{12} = P_2(x)e^{\lambda_1 x}, \dots, y_{1n} = P_n(x)e^{\lambda_1 x} \quad (11.18)$$

حيث  $P_1(x), P_2(x), \dots, P_n(x)$  حدوديات من الدرجة  $(k-1)$  على الأكثر، وبحيث أنه هناك  $k$  ثابتاً اختيارياً من بين أمثال هذه الحدوديات مستقلة خطياً، وباقي الأمثال تنتج من هذه الثوابت الاختيارية المستقلة.

نفرض بالتالي، أن أحد هذه الثوابت مساوٍ للواحد، والبقية مساوية للصفر، وهكذا نحصل على  $k$  حل خاص مستقلة خطياً مقابلة للجذر  $\lambda_1$ .

إذا كان  $\lambda_1 = \alpha + i\beta$  جذراً عقدياً مكرراً  $k$  مرة للمعادلة المميزة (11.17)، فإن مرافقه  $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1 = \alpha - i\beta$ ، كذلك جذر مكرراً  $k$  مرة. توجد، كما فعلنا أعلاه  $k$  حلاً عقدياً خاصاً مستقلة خطياً، تقابل الجذر  $\lambda_1$ ، وهي من النمط (11.18).

نعزل الجزء الحقيقي والجزء التخيلي منها، فنحصل على  $2k$  حلاً خاصاً حقيقياً مستقلة خطياً، تقابل الجذرين  $\lambda_1, \lambda_2 = \bar{\lambda}_1$ .

إذا كان هناك حلولاً أخرى غير  $\lambda_1$  (بسيطة أو مكررة)، فإنه بإنشاء  $n$  حلاً خاصاً حقيقياً مستقلة خطية، تقابل الجذور كلها، وبأخذ تركيبها الخطي مع ثوابت اختيارية، نحصل على الحل العام للجملة المتجانسة (11.14).

$$\text{مثال 11.6: أوجد الحل العام للجملة } \left\{ \begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = -y - 2z \\ \frac{dz}{dx} = 3y + 4z \end{array} \right\}$$

الحل: نبحث عن الحل العام للجملة من النمط:

$$\{ y = \gamma_1 e^{\lambda x}, \quad z = \gamma_2 e^{\lambda x} \} \quad (*)$$

نكتب المعادلة المميزة المقابلة للجملة:

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -2 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

والجذور هي:  $\lambda_1 = 1$  و  $\lambda_2 = 2$ . ننشئ الحل الخاص، من النمط (\*) المقابل للجذر  $\lambda_1$ . من العلاقة (11.18)، نبحث عن العددين  $\gamma_1$  و  $\gamma_2$  من الجملة الخطية:

$$-2\gamma_1 - 2\gamma_2 = 0, \quad 3\gamma_1 + 3\gamma_2 = 0$$

والتي توافق معادلة واحدة، هي  $\gamma_1 + \gamma_2 = 0$ .

أي يجب اختيار أحد العددين  $\gamma_1$  أو  $\gamma_2$  اختياريًا. لنفرض  $\gamma_1 = 1$ ، ويكون  $\gamma_2 = -1$ . وعليه، فإن الحل المقابل للجذر  $\lambda_1$  هو  $\{v_1 = e^x, \quad z_1 = -e^x\}$ .

وبأسلوب مشابه، نوجد الحل الخاص المقابل للجذر  $\lambda_2$ :

$$\{v_2 = 2e^{2x}, \quad z_2 = -3e^{2x}\}$$

والحل العام للجملة المعطاة هو:

$$\{v = c_1 e^x + 2c_2 e^{2x}, \quad z = -c_1 e^x - 3c_2 e^{2x}\}$$

حيث  $c_1$  و  $c_2$  ثابتان اختياريان مستقلان.

$$\text{مثال 11.7: أوجد الحل العام للجملة: } \left\{ \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 2y - z \\ \frac{dz}{dx} &= y + 2z \end{aligned} \right\}$$

الحل: نكتب المعادلة المميزة للجملة:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$$

وجذراها  $\lambda_{1,2} = 2 \pm i$ ، ننشئ الحلول العقدية المقابلة للجذر  $(2+i)$  من النمط:

$$\{v = \gamma_1 e^{(2+i)x}, \quad z = \gamma_2 e^{(2+i)x}\}$$

ونحصل على العددين  $\gamma_1$  و  $\gamma_2$  من المعادلة  $-i\gamma_1 - \gamma_2 = 0$ . بفرض  $\gamma_1 = 1$  نجد  $\gamma_2 = -i$ ، ومنه:

$$y = e^{(2+i)x} = e^{2x} (\cos x + i \sin x)$$

$$z = -ie^{(2+i)x} = e^{2x} (\sin x - i \cos x)$$

وبعزل الجزء الحقيقي عن الجزء التخيلي، نحصل على حلين حقيقيين مستقلين خطياً:

$$y_1 = e^{2x} \cos x, y_2 = e^{2x} \sin x, z_1 = e^{2x} \sin x, z_2 = -e^{2x} \cos x$$

والحل العام للجملة المعطاة:

$$\{y = e^{2x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x), z = e^{2x}(c_1 \sin x - c_2 \cos x)\}$$

حيث  $c_1$  و  $c_2$  ثابتان اختياريان مستقلان.

مثال 11.8: أوجد الحل العام للجملة:

$$\left\{ \frac{dx}{dt} = -4x + 2y + 5z, \frac{dy}{dt} = 6x - y - 6z, \frac{dz}{dt} = -8x + 3y + 9z \right\}$$

الحل: نكتب المعادلة المميزة للجملة:

$$\begin{vmatrix} -4-\lambda & 2 & 5 \\ 6 & -1-\lambda & -6 \\ -8 & 3 & 9-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = 0$$

وجذورها  $\lambda_1 = 2$  و  $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ .

نوجد أولاً، الحل الخاص المقابل للجذر  $\lambda_1$ :

$$\{x = \gamma_1 e^{2t}, y = \gamma_2 e^{2t}, z = \gamma_3 e^{2t}\}$$

نوجد الأعداد  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  من جملة المعادلات:

$$-6\gamma_1 + 2\gamma_2 + 5\gamma_3 = 0$$

$$6\gamma_1 - 3\gamma_2 - 6\gamma_3 = 0$$

$$-8\gamma_1 + 3\gamma_2 + 7\gamma_3 = 0$$

بحل هذه المعادلات نجد:  $\gamma_1 = 1$  و  $\gamma_2 = -2$  و  $\gamma_3 = 2$ ، ويكون الحل الخاص:

$$\{x_1 = e^{2t}, y_1 = -2e^{2t}, z_1 = 2e^{2t}\}$$

ننسخ الآن، حلان خاصان مستقلان خطياً، يُقابلان الجذر  $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ ، وهما من النمط (11.18):

$$x = (A_1 t + A_2) e^t, \quad y = (B_1 t + B_2) e^t, \quad z = (C_1 t + C_2) e^t$$

حيث إن  $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$  ثوابت، نوجد ما من تعويض العلاقات السابقة في معادلات الجملة:

$$A_1 t + A_1 + A_2 = (-4A_1 + 2B_1 + 5C_1)t - 4A_2 + 2B_2 + 5C_2$$

$$B_1 t + B_1 + B_2 = (6A_1 - B_1 - 6C_1)t + 6A_2 - B_2 - 6C_2$$

$$C_1 t + C_1 + C_2 = (-8A_1 + 3B_1 + 9C_1)t - 8A_2 + 3B_2 + 9C_2$$

وبالمطابقة بين الأطراف وحل الجملة الجبرية الناتجة نجد:

$$B_2 = 3C_1, \quad A_2 = C_1 + C_2, \quad B_1 = 0, \quad A_1 = C_1$$

حيث  $C_1$  و  $C_2$  ثابتان اختياريان.

ويكون حل الجملة المعطاة:

$$\{x = (C_1 t + C_1 + C_2) e^t, \quad y = 3C_1 e^t, \quad z = (C_1 t + C_2) e^t\}$$

ويمكن، بمثابة حلان مستقلان خطياً، مقابلين للجذر  $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ ، اختيار:

$$\{x_2 = (t+1)e^t, \quad y_2 = 3e^t, \quad z_2 = te^t\}$$

$$\{x_3 = e^t, \quad y_3 = 0, \quad z_3 = e^t\}$$

والحل العام للجملة المعطاة:

$$x = C_1 e^{2t} + (C_2 t + C_2 + C_3) e^t$$

$$y = -2C_1 e^{2t} + 3C_2 e^t$$

$$z = 2C_1 e^{2t} + (C_2 t + C_3) e^t$$

حيث  $C_1$  و  $C_2$  و  $C_3$  ثوابت اختيارية مستقلة.

#### 11.4.2 حل الجملة التفاضلية الخطية غير المتجانسة بأمثال الثابتة

يمكن إيجاد حل الجملة غير المتجانسة (11.6) بطريقة تحويل الثوابت، البند 11.3.2 ، كما يمكن إيجاد الحل بطريقة التكاملات الأولية والتي تسمى طريقة دالامبير.

طريقة دالامبير<sup>1</sup>: نعرض هذه الطريقة من أجل جملة مؤلفة من معادلتين:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= a_{11}y + a_{12}z + f_1(x) \\ \frac{dz}{dx} &= a_{21}y + a_{22}z + f_2(x) \end{aligned} \right\} \quad (11.19)$$

نوجد تركيب قابل للمكاملة للجملة (11.19)، كما يلي:

نضرب المعادلة الثانية بالعدد  $k$  ونجمع مع المعادلة الأولى:

$$\begin{aligned} \frac{d(y + kz)}{dx} &= (a_{11} + ka_{21})y + (a_{12} + ka_{22})z + f_1(x) + kf_2(x) \\ &= (a_{11} + ka_{21}) \left( y + \frac{a_{12} + ka_{22}}{a_{11} + ka_{21}} z \right) + f_1(x) + kf_2(x) \end{aligned} \quad (11.20)$$

نختار العدد  $k$  بحيث يكون الطرف الأيمن في المعادلة (11.20) دالة خطية في  $y + kz$ .

نضع:

$$k = \frac{a_{12} + ka_{22}}{a_{11} + ka_{21}} \quad (11.21)$$

فنجد:

$$\frac{d(y + kz)}{dx} = (a_{11} + ka_{21})(y + kz) + f_1(x) + kf_2(x)$$

نكامل هذه المعادلة الخطية، بالنسبة إلى المقدار  $(y + kz)$ ، فنحصل على:

<sup>1</sup> جان لي روند دالامبير (١٧١٧ - ١٧٨٣) رياضي وفيلسوف فرنسي.

$$y + kz = e^{(a_{11} + ka_{21})x} \left\{ e + \int [f_1(x) + kf_2(x)] e^{-(a_{11} + ka_{21})x} dx \right\} \quad (11.22)$$

إذا كان للمعادلة (11.21) جذوراً حقيقية بسيطة  $k_1$  و  $k_2$ ، فإننا نحصل، من (11.22)، على تكاملين أوليين للجملة (11.19).

يمكن تعميم طريقة دالامبير من أجل جمل خطية ذات أمثال ثابتة مؤلفة من أكثر من معادلتين تفاضليتين.

مثال 11.9: أوجد الحل العام للجملة:

$$\left\{ \frac{dy}{dx} = y - 2z + 3, \quad \frac{dz}{dx} = y - z + 1 \right\}$$

الحل: نوجد، أولاً، الحل العام للجملة المتجانسة الموافقة:

$$\left\{ \frac{dy}{dx} = y - 2z, \quad \frac{dz}{dx} = y - z \right\}$$

المعادلة المميزة لها:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 1 = 0$$

وجذورها  $\lambda_1 = i$  و  $\lambda_2 = -i$ . يقابل الجذر  $\lambda_1$  الحل العقدي:

$$y = 2e^{ix}, \quad z = (1-i)e^{ix}$$

ومنه، فإن:

$$\{y_1 = 2 \cos x, \quad z_1 = \cos x + \sin x\}$$

$$\{y_2 = 2 \sin x, \quad z_2 = \sin x - \cos x\}$$

وعليه، فإن الحل العام للجملة المتجانسة:

$$\{y = 2c_1 \cos x + 2c_2 \sin x, \quad z = (c_1 - c_2) \cos x + (c_1 + c_2) \sin x\}$$



حيث  $c_1$  و  $c_2$  ثابتان اختياريان مستقلان.

نتقل الآن، لإيجاد الحل العام للجملة غير المتجانسة المعطاة. نلاحظ في هذا المثال، أنه ليس من الضروري الحل وفق طريقة تحويل الثوابت، حيث إنه يمكن ببساطة إنشاء حل خاص للجملة. كما يلي:

نبحث عن الحل من النمط  $y = b$  ,  $z = c$  , فنجد أن  $\{z = 2, y = 1\}$  تمثل حلاً خاصاً للجملة المعطاة. ومنه فالحل العام لها هو:

مثال 11.10: أوجد الحل العام للجملة:

$$\{y = 1 + 2c_1 \cos x + 2c_2 \sin x, z = 2 + (c_1 - c_2) \cos x + (c_1 + c_2) \sin x\}$$

$$\left\{ \frac{dy}{dx} = -y - 2z + 2e^{-x}, \frac{dz}{dx} = 3y + 4z + e^{-x} \right\}$$

الحل: نوجد الحل العام بطريقة تحويل الثوابت:

وجدنا سابقاً، المثال 11.6، الحل العام للمعادلة المتجانسة الموافقة. لذا نبحث عن الحل العام للجملة غير المتجانسة المعطاة من النمط:

$$y = c_1(x)e^x + 2c_2(x)e^{2x}, z = -c_1(x)e^x - 3c_2(x)e^{2x}$$

ونوجد  $c_1(x)$  و  $c_2(x)$  من الجملة:

$$c_1'(x)e^x + 2c_2'(x)e^{2x} = 2e^{-x}, -c_1'(x)e^x - 3c_2'(x)e^{2x} = e^{-4}$$

فنجد:

$$c_1'(x) = 8e^{-2x}, c_2'(x) = -3e^{-3x}$$

ومنه، فإن:

$$c_1(x) = -4e^{-2x} + c_1, c_2(x) = e^{-3x} + c_2$$

وعليه، فإن الحل العام للجملة المعطاة:

$$\{y = -2e^{-x} + c_1 e^x + 2c_2 e^{2x}, z = e^{-x} - c_1 e^x - 3c_2 e^{2x}\}$$

حيث  $c_1$  و  $c_2$  ثابتان اختياريان مستقلان.

ملحوظة 11.2: كان من الممكن، كما فعلنا في المثال السابق، عدم اللجوء إلى هذه الطريقة،

وذلك بالبحث عن حل خاص للجملة المعطاة من النمط  $y = ae^{-x}$ ،  $z = be^{-x}$ .

ونجد، بطريقة الأمثال غير المعينة:  $\{y_1 = -2e^{-x}, z_1 = e^{-x}\}$ .

مثال 11.1: أوجد الحل العام للجملة:

$$\left\{ \frac{dy}{dx} = 5y + 4z + e^x, \frac{dz}{dx} = 4y + 5z + 1 \right\}$$

الحل: نوجد الحل العام بطريقة دالامبير، نضرب المعادلة الثانية من معادلات الجملة بـ  $k$

ونجمع مع المعادلة الأولى، فنحصل على التركيب:

$$\begin{aligned} \frac{d(y + kz)}{dx} &= (5 + 4k)y + (4 + 5k)z + (e^x + k) \\ &= (5 + 4k) \left( y + \frac{4 + 5k}{5 + 4k} z \right) + e^x + k \end{aligned}$$

نضع:

$$k = \frac{4 + 5k}{5 + 4k}$$

أي  $k^2 - 1 = 0$ . ومنه، فإن  $k = \pm 1$ .

إذن، نحصل على تكاملين أوليين للجملة، بتعويض قيم  $k$ ، في العلاقة (11.22):

$$y + z = e^{9x} \left[ c_1 + \int (e^x + 1) e^{-9x} dx \right] = c_1 e^{9x} - \frac{1}{8} e^x - \frac{1}{9} \quad (i)$$

$$y - z = e^x \left[ c_2 + \int (e^x - 1) e^{-x} dx \right] = c_2 e^x + x e^x + 1 \quad (ii)$$

وعليه، فإن التكاملين الأوليين (i) و (ii)، يمثلان الحل العام للجملة المعطاة.

### 11.5 الجمل التفاضلية الخطية غير النظامية بأمثال الثابتة

نسمي جملة تفاضلية خطية غير نظامية بأمثال ثابتة، مجموعة المعادلات التفاضلية:

$$f_{i1}(D)y_1 + f_{i2}(D)y_2 + \dots + f_{in}(D)y_n = F_i(x) ; (i=1,2,\dots, n)$$

حيث إن جميع المعاملات  $f_{ik}(D)$  حدوديات تفاضلية في  $D = \frac{d}{dx}$  بأمثال ثابتة.

إن المرتبة  $m$  لجملة تفاضلية، هي مجموع مراتب المعادلات التفاضلية في هذه الجملة، فمثلاً الجملة:

$$\{(D^2 + 3D + 1)y + (D^3 - 1)z = \sin x , (D^4 + 2D)y - 2Dz = \ln x\}$$

هي جملة تفاضلية خطية غير نظامية بأمثال ثابتة، في الدالتين المجهولتين  $y$  و  $z$ ، ومرتبه هذه الجملة  $m = 7$ ، لأن المعادلة الأولى من المرتبة الثالثة والمعادلة الثانية من المرتبة الرابعة.

إن طريقة حل جملة  $n$  معادلة تفاضلية، في  $n$  دالة مجهولة، تشبه طريقة حل الجملة الجبرية الخطية التي يتساوى فيها عدد المعادلات مع عدد المجهول. إذ نستخدم المعينات وقاعدة كرامر للحصول على  $n$  معادلة تفاضلية خطية، تحتوي كل منها على دالة مجهولة واحدة.

نوضح هذه الطريقة، في حالة جملة تفاضلية غير نظامية مؤلفة من معادلتين:

$$\{f_1(D)y + g_1(D)z = F_1(x) , f_2(D)y + g_2(D)z = F_2(x)\} \quad (11.23)$$

حيث إن  $f_1, f_2, g_1, g_2$  حدوديات في  $D$  ذات أمثال ثابتة.

يكون للجملة (11.23) حل وحيد، إذا كان معين هذه الجملة  $\Delta(D) \neq 0$ :

$$\Delta(D) = \begin{vmatrix} f_1(D) & g_1(D) \\ f_2(D) & g_2(D) \end{vmatrix}$$

ويتم نشر المعين  $\Delta(D)$  كما تُنشر المعينات العددية، وهو يمثل حدودية في  $D$  من الدرجة  $r$ ، حيث  $0 \leq r \leq m$ .

نقبل دون إثبات:

مبرهنة 11.1: إذا كان  $\Delta(D) \neq 0$ ، فإن العدد الكلي للثوابت الاختيارية المستقلة، في الحل العام للجملة (11.23)، مساوٍ لدرجة المعين كحدودية في  $D$ .

وفي الحالة الخاصة، عندما يكون  $\Delta(D) \equiv 0$ ، يمكن ألا يكون للجملة (11.23) حل أو من الممكن أن يكون لها حلولاً تحوي أي عدد من الثوابت المستقلة.

يعطى حل الجملة (11.23)، حسب كرامر، من حل كل من المعادلتين التفاضليتين الخطيتين بأمثال ثابتة، من المرتبة  $r$ :

$$\Delta(D)y = \Delta_r, \Delta(D) = \Delta_z \quad (11.24)$$

حيث

$$\Delta y = \begin{vmatrix} F_1(x) & g_1(D) \\ F_2(x) & g_2(D) \end{vmatrix}, \Delta_z = \begin{vmatrix} f_1(D) & F_1(x) \\ f_2(D) & F_2(x) \end{vmatrix}$$

نحرص على نشر المعينين  $\Delta_r$  و  $\Delta_z$  وفق عناصر العمود الحاوي على تركيب في  $D$ .

إن عدد الثوابت الاختيارية في الحل العام لكل من المعادلتين (11.24) هو  $r$ ، فيكون عدد الثوابت الاختيارية الكلي  $2r$ ، غير أن الحل العام لكل من المعادلتين (11.24) يجب أن يحقق الجملة (11.23)، أي توجد علاقات تربط بين الثوابت التي عددها  $2r$ ، بحيث يمكن تخفيض عدد الثوابت إلى  $r$ ، المبرهنة 11.1. لإيجاد العلاقات بين الثوابت الاختيارية، نعوض الحل العام لكل من المعادلتين (11.24)، في معادلات الجملة (11.23)، فنحصل على علاقات الارتباط. ونحصل، في كثير من المسائل، على العلاقات بين الثوابت الاختيارية من خلال تعويض الحل العام للمعادلتين (11.24) في معادلة واحدة فقط من معادلات الجملة (11.23).

إذا كان  $\Delta(D) \equiv 0$  وكان أحد المعينين  $\Delta_r$  أو  $\Delta_z$  على الأقل، مخالفاً للصفر، فلا يمكن أن تتحقق المعادلات (11.24)، وعليه، لا يوجد حل للجملة (11.23).

أما إذا كان  $\Delta(D) \equiv 0$  وكان المعينان  $\Delta_y$  و  $\Delta_z$  مطابقين للصفر، فإن معادلات الجملة (11.23) مرتبطة، أي أن الحل يحوي عدد من الثوابت المستقلة. ولن ندرس هذه الحالة. مثال 11.12: أوجد الحل العام للجملة:

$$\{y'' + z' - y - z = 1, z'' + y'' + y + z = x\}$$

الحل: نكتب الجملة كما يلي:

$$\{(D^2 - 1)y + (D - 1)z = 1, (D + 1)y + (D^2 + 1)z = x\}$$

إن معين هذه الجملة هو:

$$\Delta(D) = \begin{vmatrix} D^2 - 1 & D - 1 \\ D + 1 & D^2 + 1 \end{vmatrix} = D^2(D^2 - 1)$$

لما كان  $\Delta(D) \neq 0$ ، فإن للجملة حل وحيد، وعدد الثوابت الاختيارية المستقلة أربعة، ويعطى الحل، حسب العلاقات (11.24)، من المعادلات:

$$\Delta(D)y = \begin{vmatrix} 1 & D - 1 \\ x & D^2 + 1 \end{vmatrix}, \quad \Delta(D)z = \begin{vmatrix} D^2 - 1 & 1 \\ D + 1 & x \end{vmatrix}$$

أو:

$$D^2(D^2 - 1)y = x \quad (i)$$

$$D^2(D^2 - 1)z = -(x + 1) \quad (ii)$$

إن الحل العام لكل من هاتين المعادلتين هو:

$$y = a_1 + a_2x + a_3e^x + a_4e^{-x} - \frac{x^2}{6}$$

$$z = b_1 + b_2x + b_3e^x + b_4e^{-x} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$$

حيث  $a_1, \dots, a_4, b_1, \dots, b_4$  ثوابت اختيارية.

وللحصول على العلاقة بين الثوابت الاختيارية هذه، نعوض في الجملة الأصلية، فنجد:

$$(b_2 - a_1 - b_1 - 1) - (a_2 + b_2)x - 2b_4e^{-x} \equiv 0$$

$$(a_1 + a_2 + b_1 + 1) + (a_2 + b_2)x + (a_3 + b_3)e^x + 2b_4e^{-x} \equiv 0$$

وتتحقق هاتان المطابقتان، إذا كانت المعاملات جميعها أصفاراً. ومنه، نجد:

$$b_1 = -(a_1 + a_2 + 1), b_2 = -a_2, b_3 = -a_3, b_4 = 0$$

ويكون الحل العام للجملة المعطاة هو:

$$y = a_1 + a_2x + a_3e^x + a_4e^{-x} - \frac{x^2}{6}$$

$$z = -(a_1 + a_2 + 1) - a_2x - a_3e^x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$$

حيث  $a_1, a_2, a_3, a_4$  ثوابت اختيارية مستقلة.

ملحوظة 11.3: كان من الممكن الحصول على الحل العام  $z$  للمعادلة (ii)، مباشرة بعد الحصول على الحل العام  $y$  للمعادلة (i)، وذلك بأن نعوض قيمة  $y$  في المعادلة الثانية من معادلات الجملة، فنحصل على  $z$ ، وهذه الدالة هي الحل العام للمعادلة (ii). وهي تحوي الثوابت الاختيارية المستقلة  $a_1, a_2, a_3, a_4$ . تجنبنا هذه الطريقة، البحث عن العلاقات بين الثوابت الاختيارية المرتبطة  $a_1, \dots, a_4, b_1, \dots, b_4$ .

#### 11.6 تطبيق على جمل المعادلات التفاضلية في دراسة الاهتزازات الكهربائية

لنكن لدينا دارتان موصولتان مغناطيسياً، أي أن التيار المار بإحدى هاتين الدارتين، يولد حقلاً مغناطيسياً، يجرّض في الدارة الثانية قوة محرّكة كهربائية. فإذا كانت  $I_1, I_2$  شدتي التيار في الدارتين، عندئذ تكون القوة المحركة الكهربائية في الدارة الأولى  $M \frac{dI_2}{dt}$ ، وفي الدارة الثانية  $M \frac{dI_1}{dt}$ ، حيث إن  $M$  ثابت التحريض المتبادل. نفرض عدم وجود أي منبع كهربائي في أي من الدارتين، عندئذ يكون:

$$L_1 \frac{d^2 I_1}{dt^2} + R_1 \frac{dI_1}{dt} + \frac{I_1}{C_1} + M \frac{d^2 I_2}{dt^2} = 0 \quad (11.25)$$

$$L_2 \frac{d^2 I_2}{dt^2} + R_2 \frac{dI_2}{dt} + \frac{I_2}{C_2} + M \frac{d^2 I_1}{dt^2} = 0 \quad (11.26)$$

حيث إن  $C_1, R_1, L_1$  بالترتيب، عامل التحريض الذاتي للدائرة الأولى ومقاومتها وسعتها، و  $C_2, R_2, L_2$  بالترتيب، عامل التحريض الذاتي للدائرة الثانية ومقاومتها وسعتها.

نحل هاتين المعادلتين، بطريقة الحذف، نحسب  $\frac{d^2 I_2}{dt^2}$  من (11.26)، ونعوض الناتج في (11.25)، فنحصل على المعادلة التفاضلية:

$$(L_1 L_2 - M^2) \frac{d^2 I_1}{dt^2} + L_2 R_1 \frac{dI_1}{dt} + \frac{L_2}{C_1} I_1 - R_2 M \frac{dI_2}{dt} - \frac{M}{C_2} I_2 = 0$$

نشتق هذه المعادلة ونبدل بـ  $M \frac{d^2 I_2}{dt^2}$  العبارة:

$$M \frac{d^2 I_2}{dt^2} = -L_1 \frac{d^2 I_1}{dt^2} - R_1 \frac{dI_1}{dt} - \frac{I_1}{C_1} \quad (11.27)$$

التي نحصل عليها من (11.25)، فنجد:

$$(L_1 L_2 - M^2) \frac{d^2 I_1}{dt^2} + (L_1 R_2 + L_2 R_1) \frac{d^2 I_1}{dt^2} + \left( \frac{L_2}{C_1} + R_1 R_2 \right) \frac{dI_1}{dt} + \frac{R_2}{C_1} I_1 - \frac{M}{C_2} \frac{dI_2}{dt} = 0$$

نشتق هذه المعادلة ثانية، ونبدل  $M \frac{d^2 I_2}{dt^2}$  من العبارة (11.27)، فنحصل على المعادلة:

$$(L_1 L_2 - M^2) \frac{d^3 I_1}{dt^3} + (L_1 R_2 + L_2 R_1) \frac{d^3 I_1}{dt^3} +$$

$$+\left(\frac{L_1}{C_2}+\frac{L_2}{C_1}+R_1R_2\right)\frac{d^2I_1}{dt^2}+\left(\frac{R_1}{C_2}+\frac{R_2}{C_1}\right)\frac{dI_1}{dt}+\frac{I_1}{C_1C_2}=0$$

وهي معادلة تفاضلية عادية من المرتبة الرابعة بأمثال ثابتة، تابعها المجهول  $I_1$  ومتغيرها المستقل  $t$ . معادلتها المميزة:

$$(1-k^2)\lambda^4+2(\alpha_1+\alpha_2)\lambda^3+(\beta_1^2+\beta_2^2+4\alpha_1\alpha_2)\lambda^2+2(\alpha_1\beta_2^2\alpha_2\beta_1^2)\lambda+\beta_1^2\beta_2^2=0 \quad (11.28)$$

حيث رمزنا اختصاراً:

$$k=\frac{M}{\sqrt{L_1L_2}}, \quad \alpha_1=-\frac{1}{\sqrt{L_1C_1}}, \quad \alpha_2=-\frac{1}{\sqrt{L_2C_2}}, \quad \beta_1=\frac{R_1}{2L_1}, \quad \beta_2=\frac{R_2}{2L_2}$$

ويمكن كتابة المعادلة (11.28) كما يلي:

$$(\lambda^2+2\alpha_1\lambda+\beta_1^2)(\lambda^2+2\alpha_2\lambda+\beta_2^2)-k^2\lambda^4=0 \quad (11.29)$$

وفي الحالة التي لا يوجد فيها وصل مغناطيسي بين الدائرتين، يكون  $M=0$  في المعادلتين (11.25) و (11.26)، ونحصل على معادلتين منفصلتين، تعينان لنا كيف يتم تفريغ الشحنة الكهربائية:

$$\frac{d^2I_1}{dt^2}+2\alpha_1\frac{dI_1}{dt}+\beta_1^2I_1=0, \quad \frac{d^2I_2}{dt^2}+2\alpha_2\frac{dI_2}{dt}+\beta_2^2I_2=0 \quad (11.30)$$

وتكون، عادة، الدائرتان اهتزازيتين، أي يكون للمعادلتين المميزتين الموافقتين للمعادلتين (11.30):

$$\lambda^2+2\alpha_1\lambda+\beta_1^2=0, \quad \lambda^2+2\alpha_2\lambda+\beta_2^2=0$$

حلولاً عقدية، أي أن:  $\alpha_1^2-\beta_1^2 < 0$  و  $\alpha_2^2-\beta_2^2 < 0$ ، إذن:

$$\frac{R_2}{2L_2} < \frac{1}{\sqrt{L_2C_2}} \quad \text{و} \quad \frac{R_1}{2L_1} < \frac{1}{\sqrt{L_1C_1}}$$



أو:

$$\frac{R_2}{2} < \sqrt{\frac{L_2}{C_2}} \quad \text{و} \quad \frac{R_1}{2} < \sqrt{\frac{L_1}{C_1}}$$

فالمعادلة (11.29) تعطينا، من أجل  $k = 0$ ، زوجين من الجذور العقدية المترافقة.

أما إذا كانت  $M$  صغيرة، وهو ما يحدث عملياً فإن للمعادلة (11.29)، زوجين من الجذور العقدية المترافقة  $\lambda_{1,2} = -m \pm in$ ،  $\lambda_{3,4} = -\alpha \pm ib$ ، بأجزاء حقيقية سالبة.

وتعطي  $I_1$  كما يلي:

$$I_1 = e^{-at} (c_1 \cos bt + c_2 \sin bt) + e^{-mt} (c_3 \cos nt + c_4 \sin nt)$$

وللحصول على  $I_2$ ، نعوض قيمة  $I_1$  هذه، في المعادلة (11.25)، فنحصل على حل يشبه الحل السابق، بثوابت جديدة.

أما إذا أهملنا المقاومات، أي إذا جعلنا  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ ، وفرضنا إضافة إلى ذلك، أن الدائرتين مضبوطتان على التواتر نفسه، أي  $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ ، عندئذ، تُكتب المعادلة (11.29) كما يلي:

$$(1 - k^2)\lambda^4 + 2\beta^2\lambda^2 + \beta^4 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = -\frac{\beta^2}{1 \pm k}$$

وعليه، فإن

$$\lambda_{1,2} = \pm \frac{\beta i}{\sqrt{1+k}}, \quad \lambda_{3,4} = \pm \frac{\beta i}{\sqrt{1-k}}$$

والحل الموافق لهذه الجذور التخيلية الصرفة ذو شكل مثلثي، أي إذا افترضنا وجود وصل مغناطيسي للدائرتين متفقتين بالتواتر، ينشأ عندئذ، اهتزازات يرتبط تواترهما بالتواتر المشترك  $\beta$

للدائرتين وثابت  $k$  للوصل المغناطيسي، وفق العلاقتين:  $\beta' = \frac{\beta}{\sqrt{1+k}}$ ،  $\beta'' = \frac{\beta}{\sqrt{1-k}}$

## تارين الفصل الحادي عشر .

1. أوجد الحل العام لكل من الجمل التفاضلية التالية:

$$\begin{aligned} & \left\{ y' = y \sin x, z' = ye^{\cos x} \right\}, \left\{ y' = z, z' = y, u' = y + z + u \right\} \\ & \left\{ y' = ay + z, z' = -y + az \right\}, \left\{ y' = u - z, z' = u, u' = u - y \right\} \\ & \left\{ y' = 1 - \frac{1}{z}, z' = \frac{1}{y - x} \right\}, \left\{ y' = yz, z' = \frac{z}{x} - yz^2 \right\} \\ & \left\{ y' = -\frac{z}{x}, z' = -\frac{y}{x}; (x > 0) \right\}, \left\{ y' = z + (1 - y^2 - z^2)y, \right. \\ & \left. z' = -y + (1 - y^2 - z^2)z \right\} \\ & \left\{ y' = z - u, z' = y^2 + z, u' = y^2 + u \right\} \end{aligned}$$

2. أوجد الحل العام للجمل التفاضلية التالية:

$$\begin{aligned} & \frac{dx}{2z - y} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}, \quad \frac{dx}{x(y - z)} = \frac{dy}{y(z - x)} = \frac{dz}{z(x - y)} \\ & \frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz} = \frac{dz}{xy}, \quad \frac{dx}{x + y - xy^2} = \frac{dy}{x^2y - x - y} = \frac{dz}{y^2 - x^2} \\ & \frac{dx}{x + y} = \frac{dy}{x + z} = \frac{dz}{x + y}, \quad \frac{dx}{2xy} = \frac{dy}{y^2 - x^2 - z^2} = \frac{dz}{2yz} \end{aligned}$$

3. أوجد الحل العام لكل من الجمل التفاضلية:

$$\begin{aligned} & \{y' = 5y + 2z, z' = -4y - z\} \\ & \{y' = 3y + z, z' = -y + z\} \\ & \{y' = 3y + 2z, z' = -y - z\} \\ & \{y' = 4y - z, z' = 3y + z - u, u' = y + u\} \\ & \{y' = 2y + 2u - z, z' = y + 2u, u' = z - 2y - u\} \end{aligned}$$

4. أوجد الحل العام لكل من الجمل التفاضلية التالية (بطريقة تحويل الثوابت):

$$\begin{aligned} & \{y' = y + z - x^2 + x - 2, z' = -2y + 4z + 2x^2 - 4x - 7\} \\ & \{y' = -2y + z - e^{2x}, z' = -3y + 2z + 6e^{2x}\} \end{aligned}$$

$$\{y' = 2y - z + e^{2x}, z' = +3y - 2z + 4e^x\}$$

$$\{y' = 2y + 4z + \cos x, z' = -y - 2z + \sin x\}$$

$$\{y' = y - z + 4 \cos 2x, z' = 3y - 2z + 8 \cos 2x + 5 \sin 2x\}$$

5. أوجد الحل العام لكل من الجمل التالية:

$$\{(D-1)y + (D+1)u = 3e^x$$

$$\{(D-1)y + (D+2)z = 1 + e^x$$

$$\{(D+2)z + (D+1)u = 2 + e^x$$

$$\{(D^2 + 16)y - 6Dz = 0, \quad 6Dy + (D^2 + 16)z = 0\}$$

$$\{(D^2 + 4)y + z = \sin^2 x, \quad (D^2 + 1)z - 2y = \cos^2 x\}$$

$$\begin{cases} (2D^2 + 3D - 9)y + (D^2 + 7D - 14)z = 4 \\ (D+1)y + (D+2)z = -8e^{2x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (9D^2 + 8)y + (3D^2 + 4)z = 0 \\ (2D^2 + 1)y + (D^2 + 2)z = 120 \cos 3x \end{cases}$$

$$\begin{cases} (D+5)y + (D+3)z = e^{-x} \\ (2D+1)y + (D+1)z = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (2D+3)y + (D+4)z = -\cos x \\ (D+1)y + (D+2)z = 2 \sin x \end{cases}$$

$$\begin{cases} Dy + (D-1)z + (D+2)u = 2e^x \\ (D-1)y + Dz + (D-2)u = ae^x \\ (D+1)y + (D-2)z + (D+6)u = e^x \end{cases}$$

$$\begin{cases} (D+1)y + (D+5)z + (2D+5)u = 15e^x \\ (2D+1)y + (D+2)z + (3D+2)u = 10e^x \\ (D+3)y + (3D+4)z + (4D+6)u = 21e^x \end{cases}$$

$$\{(D^2-1)y+(D-1)z=1, \quad (D+1)y+(D^2+1)z=x\}$$

$$\{y'=y+z+x, \quad z'=-2y-z+e^x\}$$

$$\{(D-1)y-z=x, \quad 2y+(D+1)z=e^x\}$$

$$\{(D-1)y+5z=e^x, \quad -2y+(D-1)z=e^{2x}-2x\}$$

$$\{(D^2-1)y+Dz=e^x, \quad Dy+(D^2+1)z=0\}$$

$$\{(D^3+3D^2+5D-1)y+(-3D^2-4D+2)z=0$$

$$\{2(D-1)y+(D^2-D+2)z=e^{-x}$$

$$\{(D^2+1)y+z=5x+4\cos x, \quad -4y+(D^2-3)z=-3e^x\}$$

## الفصل الثاني عشر

### المعادلات التفاضلية الجزئية

12.1 تعاريف ومفاهيم أولية

12.2 معادلات تفاضلية جزئية تكامل مباشرة

12.3 المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية من المرتبة الأولى

12.4 المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية من مراتب عليا بتابع لتغيرين  
مستقلين ذات أمثال ثابتة

12.5 تطبيق على المعادلات التفاضلية الجزئية

تمارين الفصل الثاني عشر



## المعادلات التفاضلية الجزئية

### 12.1 تعاريف ومفاهيم أولية

نسمي معادلة تفاضلية جزئية، كل معادلة تحتوي على دالة مجهولة بعدة متغيرات مستقلة، وعلى المشتقات الجزئية لهذه الدالة، بالنسبة إلى متغيراتها المستقلة.

ونقول عنها إنها خطية، إذا كانت من الدرجة الأولى في الدالة ومشتقاتها الجزئية.

وتُعرف مرتبة ودرجة المعادلة التفاضلية الجزئية، كما عرفناها من أجل المعادلة التفاضلية العادية في البند 8.1.

إن حل المعادلة التفاضلية الجزئية هو دالة لها تلك المشتقات الجزئية التي تظهر في المعادلة، والتي نحولها إلى مطابقة بعد التعويض.

إذا حوت المعادلة التفاضلية الجزئية، الدالة المجهولة في المتغيرين المستقلين  $x$  و  $y$ ، فإن حلها  $z = z(x, y)$  يقابل سطحاً في الفراغ  $xyz$ ، ويسمى هذا السطح سطحاً تكاملياً للمعادلة التفاضلية الجزئية. وعليه، فإن المعادلة التفاضلية الجزئية ليست إلا تعبيراً عن صفة هندسية معينة يتمتع بها هذا السطح التكاملي.

مثال 12.1: تُعدّ الدالة  $z = x^2 + y^2$ ، حلاً للمعادلة التفاضلية الجزئية من المرتبة الأولى:  $x \frac{\partial z}{\partial y} - y \frac{\partial z}{\partial x} = 0$ ، لها معها تكن  $x$  و  $y$  (تحقق من ذلك!) ويمثل هذا الحل، هندسياً، مجسم قطع مكافئ دوراني محوره  $oz$ . كما أن كل الدوال من النمط  $z = F(x^2 + y^2)$ ، حيث إن  $F$  أي دالة قابلة للمفاضلة باستمرار، تُعدّ حلولاً للمعادلة التفاضلية الجزئية المعطاة، وهي تمثل، هندسياً، مجموعة سطوح متناظرة محورياً، محورها  $oz$ .

مثال 12.2: إن حل المعادلة التفاضلية الجزئية من المرتبة الأولى:  $\frac{\partial z(x, y)}{\partial y} = 0$

هو الدالة  $z = f(x)$ ، وذلك بمكاملة المعادلة التفاضلية الجزئية مباشرة، بالنسبة إلى  $y$ ، حيث

إن  $f(x)$  دالة اختيارية في  $x$ ، وهو يقابل الثابت الاختياري، عند مكاملة معادلة تفاضلية عادية. ويمثل، هندسياً، جميع الأسطوانات، في الفراغ  $xyz$ ، والتي مولداتها توازي المحور  $oy$ .

مثال 12.3: يمكن أن نكتب المعادلة التفاضلية الجزئية من المرتبة الثانية:  $\frac{\partial^2 z(x, y)}{\partial x \partial y} = 1$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial z(x, y)}{\partial y} \right] = 1$$

وبالمكاملة، أولاً، بالنسبة إلى  $x$ ، نجد:

$$\frac{\partial z(x, y)}{\partial y} = x + f(y)$$

حيث إن  $f(y)$  دالة اختيارية في  $y$ .

نكامل، الآن، بالنسبة إلى  $y$ ، فتحصل على حل المعادلة المعطاة:

$$z = xy + \int f(y) dy + g(x)$$

حيث  $g(x)$  دالة اختيارية في  $x$ .

وهكذا، نلاحظ أن الحل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية من المرتبة الأولى يحوي دالة اختيارية واحدة، والحل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية من المرتبة الثانية يحوي دالتين اختياريتين.

وعموماً، فإن الحل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية، من المرتبة  $n$ ، يحوي  $n$  دالة اختيارية وليس فقط ثوابت اختيارية، كما في المعادلات التفاضلية العادية.

نقدم، الآن، بعض الأنماط الخاصة لمعادلات تفاضلية جزئية تكامل مباشرة، مع الإشارة إلى أننا سنقتصر في دراستنا، لاحقاً، على نوعين من المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية.

المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية من المرتبة الأولى، وكحالة خاصة، معادلة لاغرانج الخطية؛

المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية من مراتب عليا بدالة لمتغيرين مستقلين وذات أمثال ثابتة.



## 12.2 معادلات تفاضلية جزئية تكامل مباشرة

مثال 12.4: أوجد الحل العام للمعادلة:  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial z}{\partial x}$ ، حيث  $z = z(x, y)$ .

الحل: نكتب المعادلة كما يلي:  $\frac{\partial^2 z / \partial x^2}{\partial z / \partial x} = 1$

وبالمكاملة بالنسبة إلى  $x$ ، نجد:

$$\ln\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = x + \varphi(y) \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = f(y)e^x$$

تكامل ثانية بالنسبة إلى  $x$ ، فتحصل على الحل العام للمعادلة المعطاة:

$$z = f(y)e^x + g(y)$$

حيث إن  $f(y)$  و  $g(y)$  دالتان اختياريتان في  $y$ .

مثال 12.5: أوجد الحل العام للمعادلة التالية:

$$y \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial z}{\partial x} = \cos(x+y) - y \sin(x-y) \quad ; \quad z = z(x, y)$$

الحل: نكتب المعادلة كما يلي:  $\frac{\partial}{\partial y}\left(y \frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}[y \cos(x+y)]$

وبالمكاملة بالنسبة إلى  $y$ ، نجد:  $y \frac{\partial z}{\partial x} = y \cos(x+y) + f(x)$

نقسم الطرفين على  $y$ ، ونكامل بالنسبة إلى  $x$ ، فنجد:

$$z = \sin(x+y) + \frac{1}{y} \int f(x) dx + g(y) \Rightarrow z = \sin(x+y) + \frac{F(x)}{y} + g(y)$$

حيث إن  $F(x)$  و  $g(y)$  دالتان اختياريتان.

مثال 12.6: أوجد الحل العام للمعادلة:  $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)^2 - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)^2 y - 6y^2 = 0$ ، حيث

$$z = z(x, y)$$

الحل: نكتب المعادلة كما يلي:

$$\left( \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 3y \right) \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2y \right) = 0$$

ومنه: إما  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2y = 0$ ، وحلها العام  $z = -x^2 y + x f(y) + g(y)$ ،

أو  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 3y = 0$ ، وحلها العام  $z = \frac{3}{2} x^2 y + x f(y) + g(y)$

ويكون الحل العام للمعادلة المعطاة، هو اجتماع مجموعتي الحلول السابقتين، ويمكن أن نكتبه كما يلي:

$$\left[ -x^2 + x f(y) + g(y) \right] \left[ \frac{3}{2} x^2 y + x f(y) + g(y) \right] = 0$$

حيث إن  $f(y)$  و  $g(y)$  دالتان اختياريتان.

مثال 12.7: أوجد الحل العام للمعادلة:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 5y \frac{\partial z}{\partial x} + 6y^2 z = 12y^3 ; \quad z = z(x, y)$$

الحل: نفرض، مؤقتاً،  $y$  وسيطاً في المعادلة، فتصبح معادلة تفاضلية عادية من المرتبة الثانية دالتها المجهولة  $z$  ومتغيرها المستقل  $x$ . معادلتها المميزة  $\lambda^2 - 5\lambda y + 6y^2 = 0$  وجذورها  $\lambda = 3y$  و  $\lambda = 2y$ ، فالحل العام للمعادلة بدون طرف ثاني هو:

$$z_c = f(y)e^{3xy} + g(y)e^{2xy}$$

ونحصل بسهولة، على حل خاص للمعادلة مع طرف ثاني، وليكن  $z_p = 2y$ .

وعليه، فإن الحل العام للمعادلة المعطاة هو:

$$z = z_p + z_c = f(y)e^{3xy} + g(y)e^{2xy} + 2y$$

### 12.3 المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية من المرتبة الأولى

هي المعادلات كما يلي:

$$F_1(x_1, x_2, \dots, x_n, z) \frac{\partial z}{\partial x_1} + F_2(x_1, x_2, \dots, x_n, z) \frac{\partial z}{\partial x_2} + \dots + F_n(x_1, x_2, \dots, x_n, z) \frac{\partial z}{\partial x_n} = R(x_1, x_2, \dots, x_n, z) \quad (12.1)$$

حيث إن  $z$  دالة مجهولة، في المتغيرات المستقلة  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ، و  $F_1, F_2, \dots, F_n, R$  دوال معطاة.

إذا كان  $R(x_1, x_2, \dots, x_n, z) \equiv 0$ ، وكانت الدوال  $F_1, F_2, \dots, F_n$  لا تحوي الدالة  $z$ ، فإننا نقول إن المعادلة التفاضلية الجزئية الخطية متجانسة، وفيما عدا ذلك - خطية غير متجانسة.

#### 12.3.1 مسألة كوشي

تُعد مسألة كوشي، أي مسألة إيجاد حل يحقق شروط ابتدائية مفروضة، من أهم المسائل المدروسة في الفصول السابقة، من أجل المعادلات التفاضلية العادية، وهي كذلك من أجل المعادلات التفاضلية الجزئية. وتعني مسألة كوشي، بالنسبة إلى المعادلة (12.1)، إيجاد من بين جميع حلول المعادلة، الحل  $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  المحقق للشرط الابتدائي:

$$z = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) ; x_n = x_{0n}$$

حيث إن  $\varphi$  دالة مُعطاة قابلة للمفاضلة باستمرار بالنسبة إلى جميع متغيراتها.

وفي الحالة الخاصة، معادلة لاغرانج الخطية، أي المعادلة:

$$P(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial x} + Q(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial y} = R(x, y, z) \quad (12.2)$$

إن مسألة كوشي، تعني إيجاد الحل  $z = f(x, y)$  المحقق للشرط الابتدائي:

$$z = \varphi(y) ; x = x_0$$

### 12.3.2 حل المعادلة التفاضلية الجزئية الخطية من المرتبة الأولى

نبدأ، للمسهولة، بمعادلة لاغرانج الخطية (12.2).

ليكن  $z = f(x, y)$  سطحاً تكاملياً، للمعادلة التفاضلية الجزئية (12.2) في الفراغ  $xyz$ .

عندئذ، تكون أمثال توجيه الناظم على هذا السطح هي  $\vec{n} \left( \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, -1 \right)$ . وهذا يعني، من المعادلة (12.2)، أن الناظم  $\vec{n}$  عمودياً على متجه معين  $\vec{F}(P, Q, R)$ ، لأنه يُمكن كتابتها متجهياً، كما يلي  $\vec{n} \cdot \vec{F} = 0$ . أي أن المتجه  $\vec{F}$  يقع في المستوي المماس عند كل نقطة من السطح التكاملي. لتكن  $M(x, y, z)$  نقطة على السطح التكاملي  $z = f(x, y)$ ، تتحرك دائماً باتجاه المتجه  $\vec{F}$ ، فهي ترسم منحنياً، تُعطى معادلته من علاقة الارتباط الخطي بين المتجه  $\vec{F}$  وهي:

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R} \quad (12.3)$$

إذن، فالمنحني الناتج ليس إلا منحنياً تكاملياً لجملة المعادلات التفاضلية العادية هذه، والتي نسميها الجملة التفاضلية المميزة للمعادلة (12.2). ولما كان المتجه  $\vec{F}$  وحيداً التحديد، فإن هذا المنحني التكاملي المار بالنقطة  $M$  وحيد. ولما كان المتجه  $\vec{F}$  يقع، دوماً، في المستوي المماس عند كل نقطة من السطح، فإنه يبقى أثناء الحركة ملازماً للسطح، أي أن هذا المنحني التكاملي يقع على السطح الممثل بالمعادلة  $z = f(x, y)$ . أي أن كل سطح تكاملي للمعادلة التفاضلية الجزئية (12.2) يتولد بمنحنيات تكاملية للجملة التفاضلية العادية (12.3).

وبالعكس، فإذا كان السطح  $z = f(x, y)$  يتولد بمنحنيات تكاملية للجملة التفاضلية العادية (12.3)، فإن الناظم على هذا السطح، أي المتجه  $\vec{n} \left( \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, -1 \right)$  عمودي على المماس للمنحني المولد بتلك النقطة، والذي أمثاله توجيهه هو المتجه  $\vec{F}$ ، أي أن  $\vec{n} \cdot \vec{F} = 0$ ، ونعبر عن ذلك، تحليلياً، بالعلاقة:

$$P \frac{\partial z}{\partial x} + Q \frac{\partial z}{\partial y} - R = 0$$

أي أن هذا الشرط هو المعادلة التفاضلية الجزئية (12.2)، وهذا يعني، أن السطح  $z = f(x, y)$  هو سطح تكاملي للمعادلة (12.2).

وبذا نكون قد برهنا، أن أي سطح تكاملي للمعادلة التفاضلية الجزئية (12.2) يولد بمنحنيات تكاملية للجملة التفاضلية العادية (12.3)، وبالعكس.

نسمي الجملة التفاضلية العادية (12.3)، للمعادلة التفاضلية الجزئية (12.2)، الجملة التفاضلية المميرة.

نفرض أن جملة المعادلتين:

$$\varphi_1(x, y, z) = c_1, \quad \varphi_2(x, y, z) = c_2 \quad (12.4)$$

تمثل المنحنيات التكاملية للجملة (12.3). عندئذ، فإن أي منحنى لا ينتمي إلى هذه الجملة، يقع على سطح مولد بمنحنيات من هذه الجملة، يتعين بتقاطع السطحين:

$$f(x, y, z) = 0, \quad g(x, y, z) = 0$$

وهو يقطع، حتماً، المنحنى المولد للسطح. ويتعين شرط التقاطع هذا من حذف  $x$  و  $y$  و  $z$  بين المعادلات الأربع:

$$\varphi_1(x, y, z) = c_1, \quad \varphi_2(x, y, z) = c_2, \quad f(x, y, z) = 0, \quad g(x, y, z) = 0$$

ويصبح هذا الشرط كما يلي:

$$\Phi(c_1, c_2) = 0$$

وعله، فإن معادلة السطح المولد بالمنحنيات (12.4) ويحقق الشرط السابق، هي كما يلي:

$$\Phi(\varphi_1, \varphi_2) = 0 \quad (12.5)$$

وهكذا، نكون قد برهنا:

مبرهنة 12.1: إن الحل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية (12.2)، هو الدالة (12.5)، حيث  $\Phi$  دالة اختيارية، في الدالتين  $\varphi_1$  و  $\varphi_2$ ، القابلة للمفاضلة باستمرار، وحيث إن:

$$\varphi_2 = (x, y, z) = c_2, \quad \varphi_1(x, y, z) = c_1$$

تكاملاً أولياً مستقلاً، للجملتين التفاضليتين المميزة (12.3).

تعميم: إن الحل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية (12.1) هو الدالة:

$$\Phi(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n) = 0$$

حيث إن  $\Phi$  دالة اختيارية، في الدوال  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  قابلة للمفاضلة باستمرار، وحيث إن

$$\varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n, z) = c_1, \dots, \varphi_n(x_1, x_2, \dots, x_n, z) = c_n$$

تكاملات أولية للجملتين التفاضليتين المميزة:

$$\frac{dx_1}{F_1} = \frac{dx_2}{F_2} = \dots = \frac{dx_n}{F_n} = \frac{dz}{R}$$

مثال 12.8: أوجد حلاً عاماً للمعادلة التفاضلية الجزئية:

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + (y + x^2) \frac{\partial z}{\partial y} = z \quad ; \quad z = z(x, y)$$

ومن ثم أوجد حلاً خاصاً يحقق الشرط الابتدائي:  $x = 2, z = y - 4$

الحل: نكتب الجملتين التفاضليتين المميزة للمعادلة المعطاة:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{x^2 + y} = \frac{dz}{z}$$

ولإيجاد حلولها المستقلة، نكامل، أولاً، النسبتين الأولى والثانية، فنجد:

$$y = x(c_1 + x) \Rightarrow \frac{y - x^2}{x} = c_1 \Rightarrow \varphi_1 = \frac{y - x^2}{x}$$

وهو تكامل أولي. ولإيجاد تكامل أولي آخر، نكامل النسبة الأولى والثالثة، فنجد:

$$\frac{z}{x} = c_2 \Rightarrow \varphi_2 = \frac{z}{x}$$

ويكون الحل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية المعطاة هو:

$$\Phi\left(\frac{y-x^2}{x}, \frac{z}{x}\right) = 0 \Rightarrow z = xf\left(\frac{y-x^2}{x}\right)$$

حيث إن  $f$  دالة اختيارية في  $\frac{y-x^2}{x}$ .

نوجد، الآن، الحل المقابل للشرط الابتدائي المعطى، أي السطح التكاملي المار بالمنحنى:

$$\Gamma: \{z = y - 4, x = 2\}$$

نعوض في التكاملين  $\varphi_1$  و  $\varphi_2$ ، فنجد:

$$\left\{\varphi_1 = \frac{y-4}{2}, \frac{z}{2} = \varphi_2\right\} \Rightarrow \{y = 2\varphi_1 + 4, z = 2\varphi_2\}$$

نعوض قيم  $y$  و  $z$ ، في الشرط الابتدائي، للحصول على علاقة ارتباط بين  $\varphi_1$  و  $\varphi_2$ ، فنجد:

$$\varphi_1 = \varphi_2$$

وللحصول على السطح التكاملي المار بالمنحنى  $\Gamma$ ، نعوض قيمة التكاملين الأوليين  $\varphi_1$  و  $\varphi_2$  في علاقة الارتباط، فنجد:

$$z = y - x^2$$

مثال 12.9: أوجد الحل العام للمعادلة:

$$(z + y + u) \frac{\partial u}{\partial x} + (x + z + u) \frac{\partial u}{\partial y} + (x + y + u) \frac{\partial u}{\partial z} = x + y + z$$

حيث  $u = u(x, y, z)$ .

الحل: نكتب الجملة التفاضلية المميزة:

$$\frac{dx}{y+z+u} = \frac{dy}{x+z+u} = \frac{dz}{x+y+u} = \frac{du}{x+y+z}$$

ولحل هذه الجملة، نطرح النسب من النسبة الأولى، كل على حدى، ومن ثم نطرح النسبة الرابعة من النسبة الثالثة، وأخيراً، نجعل كل ذلك مساوياً لمجموع هذه النسب مع بعضها البعض، أي:

$$\frac{dx+dy+dz+du}{2(x+y+z+u)} = \frac{dx-dy}{y-x} = \frac{dx-dz}{z-x} = \frac{dx-du}{u-x} = \frac{dz-du}{u-z}$$

باستخدام النسبة الأولى مع كل النسب الباقية، نحصل على أربعة تكاملات أولية مستقلة خطياً:

$$(x+y+z+u)(y-x)^2 = c_1$$

$$(x+y+z+u)(z-x)^2 = c_2$$

$$(x+y+z+u)(u-x)^2 = c_3$$

$$(x+y+z+u)(u-z)^2 = c_4$$

وعليه، فإن الحل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية المعطاة هو:

$$\Phi(c_1, c_2, c_3, c_4) = 0$$

12.4 المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية من مراتب عليا بدالة لتغيرين مستقلين ذات أمثال ثابتة:

نرمز بـ  $D_x \equiv \frac{\partial}{\partial x}$  و  $D_y \equiv \frac{\partial}{\partial y}$ ، وندرس المعادلة:

$$L(D_x, D_y) = f(x, y) \quad (12.6)$$

حيث إن  $L(D_x, D_y)$  مؤثر تفاضلي متجانس، من الدرجة  $n$ ، في  $D_x$  و  $D_y$ ، وبأمثال ثابتة، أي:

$$L(D_x, D_y) \equiv D_x^n + a_1 D_x^{n-1} D_y + a_2 D_x^{n-2} D_y^2 + \dots + a_n D_y^n$$

و  $a_1, a_2, \dots, a_n$  ثوابت عددية.



من الواضح أن  $L(D_x, D_y)$  مؤثر خطي، أي أنه إذا كانت  $g$  و  $h$  دالتان في  $x$  و  $y$ ، وكان  $\alpha$  و  $\beta$  عددين، فإن:

$$L(D_x, D_y)(\alpha g + \beta h) = \alpha L(D_x, D_y)g + \beta L(D_x, D_y)h$$

ومنه، إذا كان  $z_2(x, y)$  و  $z_1(x, y)$  حلين للمعادلة المتجانسة  $Lz = 0$ ، أي أن  $Lz_1 = 0$  و  $Lz_2 = 0$ ، فإن كل تركيب خطي في هذين الحلين، هو حل لها أيضاً، لأن:

$$L(D_x, D_y)(\alpha z_1 + \beta z_2) = \alpha L(D_x, D_y)z_1 + \beta L(D_x, D_y)z_2 = 0$$

وإذا كان  $z_p = (x, y)$  حلاً خاصاً للمعادلة (12.6)، أي كان  $Lz_p = f(x, y)$ ، وأجرينا التحويل  $z = z_p + z_c$  في المعادلة (12.6)، لوجدنا:

$$L(D_x, D_y)z = L(D_x, D_y)(z_p + z_c) = Lz_p + Lz_c = f(x, y)$$

وعليه، فإن  $L(D_x, D_y)z_c = 0$ ، أي أن  $z_c$  هو حل للمعادلة التفاضلية المتجانسة الموافقة، بدون طرف ثا، أي للمعادلة:

$$L(D_x, D_y)z = 0 \quad (12.7)$$

وعليه، فإن الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية غير المتجانسة (12.6) عبارة عن مجموع حلين، الأول  $z_c$ ، الحل العام للمعادلة المتجانسة الموافقة (12.7)، ويُسمى الدالة المكتملة والثاني  $z_p$  حل خاص للمعادلة غير المتجانسة (12.6). أي:

$$z = z_p + z_c$$

#### 12.4.1 المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية المتجانسة بأمثال ثابتة

بفرض أنه يمكن أن نكتب المعادلة (12.7)، كما يلي:

$$(D_x - \lambda_1 D_y)(D_x - \lambda_2 D_y) \dots (D_x - \lambda_n D_y)z = 0 \quad (12.8)$$

واضح أن حل أي من المعادلات:

$$(D_x - \lambda_i D_y)z = 0 \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, n$$

هو حل للمعادلة (12.8). لذا نبدأ بهذا النوع من المعادلات، أي:

$$(D_x - \lambda D_y)z = 0 \quad (12.9)$$

وتكون الجملة التفاضلية المميزة لها:

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{-\lambda}, \quad dz = 0$$

والتكاملين الأوليين المستقلين لهذه الجملة هما:  $y + \lambda x = c_2$ ,  $z = c_1$

والحل العام للمعادلة (12.9) هو:

$$\phi(z, y + \lambda x) = 0 \Rightarrow z = \Phi(y + \lambda x)$$

حيث إن  $\Phi$  دالة اختيارية في  $y + \lambda x$ .

وهكذا، فإننا سنبحث عن قيم  $\lambda$ ، التي تجعل الدالة  $z = \Phi(y + \lambda x)$  حلاً للمعادلة (12.8).

لنضع  $t = y + \lambda x$ ، ونعوض  $z = \Phi(t)$  في المعادلة (12.8)، فنجد:

$$\frac{d^n \Phi}{dt^n} (\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n) = 0$$

وهذا يعني، أنه لكي تكون الدالة  $z = \Phi(y + \lambda x)$  حلاً للمعادلة (12.7)، يلزم ويكفي أن يكون  $\lambda$  جذراً للمعادلة المميزة:

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0 \quad (12.10)$$

التي تنتج من المعادلة  $L(D_x, D_y)z = 0$ ، بتقسيم طرفيها على  $D_y^n$ ، ثم استخدام الرمز

$$\frac{D_x}{D_y} = \lambda \quad \text{ونميز الحالتين:}$$

### ١- جميع جذور المعادلة المميزة بسيطة (غير مكررة):

لتكن هذه الجذور هي  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ . وعليه، فإن الدوال  $z_i = \Phi_i(y + \lambda_i x)$ ، حيث  $i = 1, 2, \dots, n$ ، هي حلول للمعادلة (12.8)، ويكون الحل العام لها هو:

$$z = \Phi_1(y + \lambda_1 x) + \Phi_2(y + \lambda_2 x) + \dots + \Phi_n(y + \lambda_n x)$$

### ٢- بعض (أو كل) جذور المعادلة المميزة مكررة:

لنبدأ بالمعادلة:

$$(D_x - \lambda D_y)^2 z = 0 \quad (12.11)$$

نفرض  $t = (D_x - \lambda D_y)z$ ، فتكتب هذه المعادلة كما يلي:

$$(D_x - \lambda D_y)t = 0$$

والحل العام لها هو  $t = \Phi_1(y + \lambda x)$ ، وبالتعويض في عبارة  $t$ ، نجد:

$$(D_x - \lambda D_y)z = \Phi_1(y + \lambda x)$$

وهي معادلة لاغرانج الخطية، الجملة التفاضلية المميزة لها:

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{-\lambda} = \frac{dz}{\Phi_1(y + \lambda x)}$$

من النسبتين الأولى والثانية، نجد تكامل أول  $y + \lambda x = c_1$ . نعوض الناتج في النسبة الثالثة، فنجد من هذه النسبة والنسبة الأولى، التكامل الأولي  $z = x\Phi_1(c_1) + c_2$  ويكون الحل العام للمعادلة (12.11):

$$z = x\Phi_1(y + \lambda x) + \Phi_2(y + \lambda x)$$

حيث إن  $\Phi_1$  و  $\Phi_2$  دالتان اختياريتان في  $y + \lambda x$ .

وبتكرار المحاكمة السابقة، من أجل المعادلة:

$$(D_x - \lambda D_y)^k z = 0 ; k > 2$$

نجد أن الحل العام لها هو:

$$z = x^{k-1} \Phi_1 + x^{k-2} \Phi_2 + \dots + x \Phi_{k-1} + \Phi_k$$

حيث إن  $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_k$  دوال اختيارية في  $y + \lambda x$ .

يتبع، مما سبق، أنه إذا كان للمعادلة المميزة (12.10) جذراً  $\lambda$ ، مكرراً  $k$  مرة، وكان هناك  $r$  جذراً بسيطاً لها، فإن المعادلة (12.8)، تكتب كما يلي:

$$(D_x - \lambda D_y)^k (D_x - \lambda_1 D_y) \dots (D_x - \lambda_r D_y) z = 0$$

وحلها العام هو:

$$z = x^{k-1} \Phi_1(y + \lambda x) + x^{k-2} \Phi_2(y + \lambda x) + \dots + x \Phi_{k-1}(y + \lambda x) + \Phi_k(y + \lambda x) + G_1(y + \lambda_1 x) + G_2(y + \lambda_2 x) + \dots + G_r(y + \lambda_r x)$$

حيث إن  $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_k, G_1, G_2, \dots, G_r$  دوال اختيارية.

## 12.4.2 المعادلة التفاضلية الجزئية الخطية غير المتجانسة بأمثال ثابتة

نبحث، الآن، في إيجاد حل خاص للمعادلة غير المتجانسة (12.6).

إذا كان  $z_p$  حلاً خاصاً لها، أي أن  $Lz_p = f(x, y)$ ، فإننا نكتب ذلك كما يلي:

$$z_p = \frac{1}{L(D_x, D_y)} f(x, y) = L^{-1}(D_x, D_y) f(x, y)$$

ويمكن التعامل مع المؤثر التفاضلي المعاكس  $L^{-1}(D_x, D_y)$ ، كما تم التعامل معه في المعادلات التفاضلية العادية. إذ يمكن تحليل المؤثر  $L^{-1}(D_x, D_y)$  إلى عوامل أو تفريقه إلى كسور أولية، أو نشره في متسلسلة قوى متنتية... إلخ.

فإذا أمكن تحليل المؤثر  $L$ ، كما يلي:

$$L(D_x, D_y) \equiv (D_x - \lambda_1 D_y)(D_x - \lambda_2 D_y) \dots (D_x - \lambda_n D_y)$$

فإن إيجاد حل خاص للمعادلة (12.6)، يعني إيجاد القيمة:

$$z_p = \frac{1}{(D_x - \lambda_1 D_y)(D_x - \lambda_2 D_y) \dots (D_x - \lambda_n D_y)} f(x, y)$$

وبذا، نؤول مسألة إيجاد الحل الخاص  $z_p$ ، إلى إيجاد القيمة:

$$z = \frac{1}{(D_x - \lambda D_y)} f(x, y)$$

أي إيجاد حل خاص للمعادلة  $(D_x - \lambda D_y)z = f(x, y)$ ، وهي معادلة لاغرانج الخطية.

نستفيد من التكامل الأولي  $y + \lambda x = c_1$  للجملة التفاضلية المميزة لها:

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{-\lambda} = \frac{dz}{f(x, y)}$$

في إيجاد عبارة  $z$ ، من النسبتين الأولى والثالثة:

$$z = \int f(x, c_1 - \lambda x) dx$$

مع إهمال ثابت التكامل، هنا، لأننا نبحث عن حل خاص.

وبعد إجراء المكاملة نستبدل  $c_1$  بـ  $y + \lambda x$ . وعليه، يمكن أن نأخذ دائماً:

$$z = \frac{1}{(D_x - \lambda D_y)} f(x, y) = \int f(x, y - \lambda x) dx \quad (12.12)$$

على أن نستبدل  $c$  بقيمتها بعد المكاملة. ويمكن إعادة هذه العملية مرة تلو الأخرى.

مثال 12.10: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 4 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 3 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x + 2y \quad ; \quad z = z(x, y)$$

الحل: نكتب هذه المعادلة كما يلي:

$$(D_x^2 - 4D_x D_y + 3D_y^2)z = x + 2y \Rightarrow (D_x - D_y)(D_x - 3D_y)z = x + 2y.$$

لما كانت جذور المعادلة المميزة الموافقة، هي  $\lambda = 1$  و  $\lambda = 3$  وهي بسيطة، فإن الحل العام للمعادلة المتجانسة الموافقة هو:

$$z_c = \Phi_1(x+y) + \Phi_2(3x+y)$$

حيث إن  $\Phi_1$  و  $\Phi_2$  دالتان اختياريتان.

ونجد الحل الخاص للمعادلة المعطاة من العلاقة:

$$z_p = \frac{1}{(D_x - 3D_y)(D_x - D_y)}(x + 2y) =$$

$$= \frac{1}{(D_x - 3D_y)} \left[ \frac{1}{(D_x - D_y)}(x + 2y) \right]$$

$$z_1 = \frac{1}{(D_x - D_y)}(x + 2y), \text{ نوجد، أولاً،}$$

من العلاقة (12.12)، نجد:

$$z_1 = \int [x + 2(c - x)] dx = -\frac{x^2}{2} + 2cx = \frac{3}{2}x^2 + 2xy$$

ومنه، أصبح من الممكن إيجاد حل خاص  $z_p$ ، من العلاقة:

$$z_p = \frac{1}{(D_x - 3D_y)} \left( \frac{3}{2}x^2 + 2xy \right)$$

وحسب (12.12)، مرة أخرى، نجد:

$$z_p = \int \left[ \frac{3}{2}x^2 + 2x(c - 3x) \right] dx = -\frac{3}{2}x^3 + x^2c = -\frac{1}{2}x^3 + 3x^2y$$

ويكون الحل العام للمعادلة المعطاة:

$$z = z_p + z_c = -\frac{1}{2}x^3 + 3x^2y + \Phi_1(x+y) + \Phi_2(3x+y)$$

مثال 12.11 : أوجد الحل العام للمعادلة:

$$(D_x + D_y)^3 z = 2 \cos y - x \sin y \quad ; \quad z = z(x, y)$$

الحل: لما كان للمعادلة المميزية الموافقة جذر  $\lambda = -1$  مكرر مرتين، أي  $k = 2$ ، فإن الحل العام للمعادلة المتجانسة، بدون طرف ثان، يُعطى بالعلاقة:

$$z_c = x\Phi_1(y-x) + \Phi_2(y-x)$$

حيث إن  $\Phi_1$  و  $\Phi_2$  دالتان اختياريتان.

ونجد الحل الخاص للمعادلة المعطاة من العلاقة:

$$z_p = \frac{1}{(D_x + D_y)^2} (2 \cos y - x \sin y)$$

$$z_1 = \frac{1}{(D_x + D_y)} (2 \cos y - x \sin y), \text{ أولاً، نوجد،}$$

من العلاقة (12.12)، نجد:

$$z_1 = \int [2 \cos(c+x) - x \sin(c+x)] dx =$$

$$= \sin(c+x) + x \cos(c+x) = \sin y + x \cos y$$

ومنهُ، أصبح من الممكن إيجاد  $z_p$  من العلاقة:

$$z_p = \frac{1}{(D_x + D_y)} (\sin y + x \cos y)$$

وحسب (12.12)، مرة أخرى، نجد:

$$z_p = \int [\sin(c+x) + x \cos(c+x)] dx = x \sin(x+c) = x \sin y$$

ويكون الحل العام للمعادلة المعطاة هو:

$$z = z_p + z_c = x \sin y + x \Phi_1(y-x) + \Phi_2(y-x)$$

ملاحظة 12.1: إن المؤثر التفاضلي الجزئي المعاكس، هو مؤثر خطي يتصف بتلك الصفات التي اتصف بها المؤثر التفاضلي العادي المعاكس، في البند 10.4.2. وتدرس تأثير هذا المؤثر في بعض الأشكال الخاصة للدالة  $f(x, y)$ :

$$1) L^{-1}(D_x, D_y) e^{ax+by} = L^{-1}(a, b) e^{ax+by} ; L(a, b) \neq 0$$

وإذا كان  $L(a, b) = 0$ ، أي أن  $(a, b)$  جذر مكرر  $k$  مرة، للمعادلة  $L(D_x, D_y) = 0$  ومنه، فإن:

$$L(D_x, D_y) = \left( D_x - \frac{a}{b} D_y \right)^k \cdot G(D_x, D_y) ; G(a, b) \neq 0$$

وعليه، فإن:

$$\begin{aligned} L^{-1}(D_x, D_y) e^{ax+by} &= \left[ \left( D_x - \frac{a}{b} D_y \right)^k \cdot G(D_x, D_y) \right]^{-1} e^{ax+by} = \\ &= G^{-1}(a, b) \cdot \frac{x^k}{k!} e^{ax+by} \end{aligned}$$

$$2) L^{-1}(D_x^2, D_x D_y, D_y^2) \sin(ax+by) = L^{-1}(-a^2, ab, -b^2) \sin(ax+by)$$

$$L^{-1}(D_x^2, D_x D_y, D_y^2) \sin(ax+by) = L^{-1}(-a^2, ab, -b^2) \cos(ax+by) .$$

بشرط:  $L(-a^2, ab, -b^2) \neq 0$

$$3) L^{-1}(D_x, D_y) [e^{ax+by} \cdot v(x, y)] = e^{ax+by} \cdot L^{-1}(D_x + a, D_y + b) v(x, y)$$

٤- إذا كان  $f(x, y)$  حدودية في  $x$  و  $y$ ، فإن:

$$L^{-1}(D_x, D_y) f(x, y) = D_x^{-n} P(D_x, D_y) f(x, y)$$

حيث إن  $P(D_x, D_y)$  هو حاصل قسمة الواحد على  $L(D_x, D_y)$ ، بعد إخراج  $D_x^n$  خارج



قوسين، وبعد ترتيب حدوده تصاعدياً وفق قوى  $D_y$ ، بحيث يصبح أول حد في المقام هو الواحد.

مثال 12.12: أوجد حلاً خاصاً للمعادلة:

$$(D_x^2 - 2D_x D_y + D_y^2)z = 12xy + e^{2x+y} + 9 \cos 3x$$

الحل: نكتب المعادلة كما يلي:  $(D_x - D_y)^2 z = 12xy + e^{2x+y} + 9 \cos 3x$

ويكون الحل الخاص لها عبارة عن مجموع ثلاثة حلول خاصة:

$$z_{p_1} = (D_x - D_y)^{-2}(12xy) = D_x^{-2} \left(1 - \frac{D_y}{D_x}\right)^{-2} (12xy) =$$

$$= D_x^{-2} \left(1 + 2\frac{D_y}{D_x} + 3\frac{D_y^2}{D_x^2} + \dots\right) (12xy) =$$

$$= D_x^{-2}(12xy) + 2D_x^{-3}(12x) = 2x^3y + x^4$$

$$z_{p_2} = (D_x - D_y)^{-2} e^{2x+y} = (2-1)^{-2} e^{2x+y} = e^{2x+y}$$

$$z_{p_3} = (D_x^2 - 2D_x D_y + D_y^2)^{-1} (9 \cos 3x) = (-9 - 0 - 0^2)^{-2} (9 \cos 3x) =$$

$$= -\cos 3x$$

والحل الخاص للمعادلة المعطاة هو:

$$z_p = z_{p_1} + z_{p_2} + z_{p_3} = 2x^3y + e^{2x+y} - \cos 3x$$

12.5 تطبيق على المعادلات التفاضلية الجزئية

### معادلة انتشار الحرارة

ندرس قضيباً متجانساً طوله  $l$ ، معزول حرارياً من الجوانب، ولتكن درجتي الحرارة عند طرفي القضيب ثابتين  $u_1$  و  $u_2$ . وتسري الحرارة من الطرف الأكثر سخونة إلى الطرف الأقل سخونة

وتعطى كمية الحرارة السارية خلال مقطع القضيب، الذي مساحته  $S$ ، في وحدة الزمن،  
بالقانون التجريبي:

$$Q = -k \frac{u_2 - u_1}{l} S = -k \frac{\partial u}{\partial x} S \quad (12.13)$$

حيث إن  $k$  ثابت الانتشار الحراري، مُعامل التوصيل، وهو يعتمد على مادة القضيب.

ويعد مقدار التدفق الحراري موجباً، إذا كانت الحرارة تسري من جهة تزايد  $x$ .

ندرس عملية انتشار الحرارة في القضيب. ونوصف هذه العملية بالدالة  $u(x, t)$  المعبّرة عن درجة الحرارة في المقطع  $x$ ، في اللحظة  $t$ . نُعيّن المعادلة التي يجب أن تحققها الدالة  $u(x, t)$ . لذا نُصيغ القوانين الفيزيائية التي تحدد العمليات المرتبطة بانتشار الحرارة:

١ - قانون فورييه: إذا كانت درجة حرارة القضيب غير منتظمة، فإنه ينشأ فيه دفوق حرارية متجهة من الأماكن ذات درجات الحرارة الأعلى إلى الأدنى. وكمية الحرارة السارية في المقطع  $x$  خلال الزمن  $dt$  هي:  $dQ = qSdt$ ، حيث  $q = -k(x) \frac{\partial u}{\partial x}$  هي كثافة التدفق الحراري المساوية لكمية الحرارة السارية في وحدة الزمن، خلال مساحة قدرها  $1 \text{ cm}^2$ ، وهو تعميم للقانون (12.13). إذا كان القضيب غير متجانس، فإن  $k$  تكون دالة في  $x$ .

٢ - كمية الحرارة التي يجب إكسابها للقضيب المتجانس، لرفع درجة حرارته بمقدار  $\Delta u$  تساوي  $Q = cm\Delta u = c\rho V\Delta u$ ، حيث  $c$  السعة الحرارية النوعية و  $m$  كتلة القضيب و  $\rho$  كثافته، و  $V$  حجمه.

٣ - داخل القضيب يمكن أن تنشأ أو تختص الحرارة. مثلاً، عند مرور تيار، أو نتيجة تفاعلات كيميائية.... ويمكن تمييز انبعاث الحرارة بكثافة المصادر الحرارية  $F(x, t)$  عند النقطة  $x$ ، في اللحظة  $t$ ، مثلاً، الأجهزة الكهربائية العاملة في مركبة فضائية، يمكن النظر إليها كمصدر حراري. ونتيجة لتأثير هذه المصادر تنبعث على منطقة من القضيب  $dx$ ، خلال الزمن  $dt$ ، كمية حرارة تساوي  $dQ = SF(x, t)dxdt$ .

وللمحصل على معادلة انتشار الحرارة نفرض أن للدالة  $u(x, t)$  مشتقان مستمران  $\frac{\partial u}{\partial t}$  و  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ، ونحسب توازن الحرارة في جزء ما  $[x_1, x_2]$ ، من خلال فترة زمنية  $[t_1, t_2]$ ، وبتطبيق قانون حفظ الطاقة والاستعانة بمبرهنة القيمة الوسطى، نجد:

$$\left[ k \frac{\partial u}{\partial x}(x, \tau) \right]_{x=x_2} - k \frac{\partial u}{\partial x}(x, \tau) \Big|_{x=x_1} \Delta t + F(x_4, t_4) \Delta x \Delta t = \\ = \{cp[u(\xi, t_2) - u(\xi, t_1)]\}_{\xi=x_1} \Delta x$$

والتي يمكن كتابتها، باستخدام مبرهنة التزايدات المحددة، كما يلي:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ k \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right]_{x=x_2}^{x=x_1} \Delta x \Delta t + F(x_4, t_4) \Delta x \Delta t = \left[ cp \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \right]_{t=t_2}^{t=t_1} \Delta x \Delta t$$

حيث  $x_3, x_4, x_5, t_3, t_4, t_5$  نقاط داخل المجالين  $[x_1, x_2]$  و  $[t_1, t_2]$ ، نختصر على  $\Delta x \Delta t$ ، فنجد:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_{x=x_2}^{x=x_1} + F(x, t) \Big|_{t=t_4}^{t=t_3} = cp \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{x=x_3}^{t=t_5}$$

كل هذه التحليلات تتعلق بمجالين اختياريين  $[x_1, x_2]$  و  $[t_1, t_2]$ ، وبالاتصال إلى اللانهاية، عندما  $x \rightarrow x_1, x_2$  و  $t \rightarrow t_1, t_2$  نحصل على معادلة انتشار الحرارة:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial u}{\partial x} \right) + F(x, t) = cp \frac{\partial u}{\partial t}$$

إذا كان القضيبي متجانساً، فإنه يمكن النظر إلى  $k, c, p$  كثوابت، وتكتب المعادلة كما يلي:

$$u'_t = a^2 u''_{xx} + f(x, t); \quad f(x, t) = \frac{F(x, t)}{cp}$$

ويسمى الثابت  $a^2$  معامل انتشار الحرارة.

وإذا انعدمت مصادر الحرارة، أي كان  $F(x, t) = 0$ ، فإن معادلة انتشار الحرارة تكتب، كما يلي:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (12.14)$$

نحل هذه المعادلة ضمن بعض الشروط:

.. الشرط الابتدائي:

$$u(x, 0) = \varphi(x) ; 0 < x < l \quad (12.15)$$

ولنفرض أيضاً، أن درجة حرارة طرفي القضيب  $x = l$  و  $x = 0$  ثابتة، وتساوي درجة حرارة الوسط المحيط. ولنفرض أنها تساوي الصفر، أي أنه لدينا أيضاً الشروط الحدية:

$$u(0, t) = 0 , u(l, t) = 0 ; \forall t \geq 0 \quad (12.16)$$

ضمن هذه المعطيات، يجب إيجاد توزيع درجات الحرارة  $u = u(x, t)$ ، في القضيب في لحظة ميا  $t \geq 0$ .

نبحث عن حل للمعادلة (12.14)، بطريقة خاصة، تسمى طريقة فورييه أو طريقة فصل المتغيرات، بأن نفرض أن الحل  $u$  من النمط:

$$u = X(x)T(t) \quad (12.17)$$

حيث إن  $X$  دالة في  $x$  فقط، و  $T$  دالة في  $t$  فقط. ولما كان

$$\frac{\partial u}{\partial t} = XT' \quad \text{و} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''T$$

نعوض في (12.14)، فنحصل على المعادلة:

$$XT' = a^2 X''T \Rightarrow \frac{X''}{X} = \frac{T'}{a^2 T}$$

حيث إن الطرف الأيسر في المطابقة دالة في  $x$  فقط، والأيمن في  $t$  فقط، ولما كان  $x$  و  $t$  مستقلين خطياً، فإن طرفي هذه المطابقة تساوي ثابت، وليكن  $-\lambda^2$ .

يمكن التحقق، بسهولة من أن الإشارة الموجبة لهذا الثابت، لن تؤدي بنا للحلول المطلوبة،  
ومنه، فإن:

$$\frac{X''}{X} = -\lambda^2, \quad \frac{T'}{a^2 T} = -\lambda^2 \Rightarrow X'' + \lambda^2 X = 0, \quad T' + a^2 \lambda^2 T = 0$$

وبحل هاتين المعادلتين الخطيتين، نجد:

$$X(x) = \alpha \sin \lambda x + \beta \cos \lambda x, \quad T(t) = ce^{-a^2 \lambda^2 t}$$

حيث  $\alpha, \beta, c$  ثوابت اختيارية.

عندئذ، يكتب (12.17)، كما يلي:

$$u = ce^{-a^2 \lambda^2 t} (\alpha \sin \lambda x + \beta \cos \lambda x)$$

واضح أن هذه الدالة، تحقق المعادلة (12.14)، مهما تكن  $\alpha, \beta, \lambda$ . نعوض في هذه الدالة الشروط الحدية (12.16):

نضع  $x = 0$ ، فنجد  $0 = e^{-a^2 \lambda^2 t}$ . ومنه، فإن  $\beta = 0$ ، وعليه:

$$u = \alpha e^{-a^2 \lambda^2 t} \sin \lambda x$$

ونضع  $x = l$ ، فنجد من الشروط الحدية (12.16):

$$0 = \alpha e^{-a^2 \lambda^2 t} \sin \lambda l \Rightarrow \alpha \neq 0$$

لأنه في الحالة المعاكسة، نحصل على الحل الصفري  $u = 0$ . لذا، فإن:

$$\sin \lambda l = 0 \Rightarrow \lambda l = n\pi; \quad n \in \mathbb{Z}$$

أو

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{l}; \quad n \in \mathbb{Z}$$

والتي تسمى أعداد مميزة للمسألة، ومجموعها يساوي طيف المسألة.

يقابل كل عدد مميز حل خاص لمعادلة انتشار الحرارة.

$$u_n = \alpha_n e^{-b^2 n^2 t} \sin \frac{n}{l} \pi x ; b = \frac{a}{l} \pi \quad (12.18)$$

وهكذا، فإن هذه الصيغة، تُعطي كل الحلول الخاصة المستقلة خطياً للمعادلة (12.14)، وتحقق الشروط الحدية.

فيزيائياً، تُعد الدوال  $u_n$  موجات حرارية، يبانها متخامدة، عندما  $t \rightarrow \infty$ .

لما كانت المعادلة (12.14) خطية، فإن مجموع كل الحلول (12.18)، يُعد أيضاً، حل لها:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^{-b^2 n^2 t} \sin \frac{n}{l} \pi x$$

إذا كانت هذه المتسلسلة متقاربة، فإننا نعوض  $t = 0$ ، في هذه الصيغة، وبلاستفادة من الشرط الابتدائي، نجد:

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin \frac{n}{l} \pi x \quad (12.19)$$

تمثل هذه المتسلسلة نشر فورييه للدالة  $\varphi(x)$ ، في المجال  $[0, l]$ ، وتُعين الثوابت من العلاقة:

$$\alpha_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n}{l} \pi x dx ; n \in \mathbb{N}^*$$

ويُبرهن، على أنه إذا كان منحن الدالة  $\varphi(x)$  أملساً، في المجال  $[0, l]$ ، فإن المتسلسلة (12.19)، تكون متقاربة، ومجموعها يساوي  $u(x, t)$ ، المحقق للمعادلة (12.14)، والشرط الابتدائي (12.15) والشروط الحدية (12.16).

## تمارين الفصل الثاني عشر

1. تحقق فيما إذا كانت الدوال:

$$1) u(x, y, z) = \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2}, \quad 2) u(x, y, z) = xyz, \quad 3) u(x, y, z) = \frac{y}{x} e^{xz/y^2}$$

تمثل حلاً للمعادلة التفاضلية:  $xu'_x + yu'_y + zu'_z = 0$  حيث  $x > 0, y > 0, z > 0$

$$2. \text{ هل تمثل الدالة: } u = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot f \left( \operatorname{arccot} \frac{y}{x} + \ln \sqrt{x^2 + y^2} \right)$$

حلاً للمعادلة التفاضلية:  $(x+y)u'_x - (x-y)u'_y = u$  حيث  $f$  دالة ما، قابل للمفاضلة باستمرار

3. أوجد الحل العام لكل من المعادلات التالية:

$$1) \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = 6x + y + 12x^2 y^2$$

$$2) z'_x - z'_y = 1$$

$$3) \frac{1}{\cos x} u'_x + u'_y = u \cot y$$

$$4) x^2 u'_x + y^2 u'_y + z^2 u'_z = u$$

$$5) yu'_x + xu'_y = x^2 + y^2$$

$$5) (\sin^2 x) z'_x + (\tan x) z'_y = \cos^2 z$$

$$6) \frac{1}{x} u'_x + \frac{1}{y} u'_y = \frac{u}{y^2}$$

$$7) 2xz'_x + (y-x)z'_y - x^2 = 0$$

$$8) yzz'_x - xzz'_y = e^z$$

$$9) u'_x + u'_y + (1 + \sqrt{u-x-y-z})u'_z = 3$$

$$10) u'_x + 2u'_y + u'_z = xyz$$

$$11) y^2 u'_x + x^2 u'_y = x^2 y^2 (x^3 + y^3)$$

$$12) z'_x - 3z'_y = 5z + \tan(y-3x)$$

4. أوجد الحل الخاص لكل من المعادلات التالية والمحقق لشروط البدء الموافقة:

$$1) yu'_x - xu'_y = 0$$

$$; \quad u(0, y) = Py^2$$

- 2)  $xz'_y = z$  ;  $z(1, y) = \sin y$
- 3)  $xu'_x + yu'_y + zu'_z = 0$  ;  $u(1, y, z) = y^2 + z^2$
- 4)  $u'_x + u'_y + u'_z = xyz$  ;  $u(0, y, z) = y - z$
- 5)  $xu'_x + yu'_y + xy = 0$  ;  $u(x, \frac{1}{x}) = 1$  ,  $u|_{x=y=1} = 1$
- 6)  $xu'_x + yu'_y = u - x^2 - y^2$  ;  $u(x, -2) = x - x^2$
- 7)  $xu'_x + 2yu'_y + 3zu'_z = 4u$  ;  $u(x, x, z) = z$
- 8)  $xz'_x - yz'_y = z^2(x - 3y)$  ;  $x = 1, yz + 1 = 0$
- 9)  $(x - z)z'_x + (y - z)z'_y = 2z$  ;  $x - y = 2, z + 2x = 1$
- 10)  $\sqrt{x}u'_x + \sqrt{y}u'_y + \sqrt{z}u'_z = 0$  ;  $u(1, y, z) = y - z$
- 11)  $(1 + \sqrt{z - y - x})z'_x + z'_y = 2$  ;  $z(x, 0) = x$
- 12)  $xu'_x + yzu'_z = 0$  ;  $u(x, y, 1) = x^4$
- 13)  $\sin x \sin y u'_x + \cos x \cos y u'_y = 0$  ;  $x + y = \frac{\pi}{2}, u = \cos 2y$
- 14)  $(y + 2z^2)z'_x - 2x^2 z z'_y = x^2$  ;  $z(x, x^2) = x$

5. أوجد الحل العام لكل من المعادلات التالية:

- 1)  $(D_x^2 + D_y^2)z = x^2 y^2$
- 2)  $(D_x^3 - 3D_x^2 D_y - 4D_x D_y^2 + 12D_y^3)z = \sin(y + 2x)$
- 3)  $(D_x^2 - 6D_x D_y + 9D_y^2)^2 z = 12x^2 + 36xy$
- 4)  $(D_x^2 - D_x D_y - 2D_y^2)z = (2x^2 + xy - y^2) \sin xy - \cos xy$
- 5)  $(D_x^3 - 4D_x^2 D_y + 4D_x D_y^2)z = 4 \sin(2x + y) + \cos(2x + 3y)$



$$6) (D_x^2 D_y + D_x^3 - D_x D_y^2 - D_y^3)z = e^x \cos 2y$$

$$7) (D_x^3 - 7D_x D_y^2 - 6D_y^3)z = \cos(x-y) + x^2 + xy^2 + y^3$$

$$8) (D_x^2 + 2D_x D_y + 8D_y^2)z = \sqrt{2x+3y}$$

$$9) (D_x - 2D_y)^2 \cdot (D_x + 2D_y)z = e^{2x+y}$$

$$10) (D_x^2 + D_y^2)z = x^2 y^2$$

$$11) (D_x^2 - D_x D_y - D_y^2)z = (y-1)e^x$$

$$12) (D_x^3 - 3D_x^2 D_y - 4D_x D_y^2 + 12D_y^3)z = \sin(y+2x)$$

$$13) (D_x^2 + 5D_x D_y + 5D_y^2)z = x \sin(3x-2y)$$



## المصطلحات العلمية

A

|                        |                  |
|------------------------|------------------|
| Abscissa of a point    | فاصلة نقطة       |
| Absolute               | قيمة مطلقة       |
| Angle                  | زاوية            |
| Right ~                | زاوية قائمة      |
| Anticlockwise          | عكس عقارب الساعة |
| Area                   | مساحة            |
| Axis                   | محور             |
| Ball                   | كرة              |
| Bijjective             | تقابل            |
| Boundary conditions    | شروط حدية        |
| Bounded                | محدود            |
| Branch                 | فرع              |
| Cauchy problem         | مسألة كوشي       |
| Chain rule             | قاعدة السلسلة    |
| Circulation            | جولان            |
| Clockwise              | مع عقارب الساعة  |
| Complex number         | عدد عقدي         |
| Composition of mapping | تركيب التطبيقات  |

|                         |                   |
|-------------------------|-------------------|
| Cone                    | مخروط             |
| Circulator ~            | مخروط دوراني      |
| Indicator ~             | دليل المخروط      |
| Generator of ~          | مولد المخروط      |
| Constant of integration | ثابت التكاملة     |
| Continues               | مستمر             |
| Convergent              | متقارب            |
| Coordinate              | إحداثي            |
| ~ axis                  | محور إحداثي       |
| ~ system                | جملّة إحداثية     |
| Cartesian ~             | إحداثيات ديكارتية |
| Cylindrical ~           | إحداثيات أسطوانية |
| Curvilinear ~           | إحداثيات منحنية   |
| Polar ~                 | إحداثيات قطبية    |
| Spherical ~             | إحداثيات كروية    |
| Curve                   | منحن              |
| Oriented ~              | منحن موجه         |
| <b>D</b>                |                   |
| Degree                  | درجة              |
| Dependent               | مرتبط - غير مستقل |
| Derivative              | مشتق              |
| Partial ~               | مشتق جزئي         |

|                       |                      |
|-----------------------|----------------------|
| Determinate           | معين                 |
| Diameter of point set | قطر مجموعة نقطية     |
| Differential          | تفاضل                |
| ~ operator            | مؤثر تفاضلي          |
| Exact ~               | تفاضل تام            |
| Discontinuity         | انقطاع               |
| Distance              | مسافة                |
| Divergence            | تفرق                 |
| E                     |                      |
| Ellipsoid             | مجسم قطع ناقص        |
| Equation              | معادلة               |
| Differential ~        | معادلة تفاضلية       |
| Discriminate ~        | معادلة مميزة         |
| Homogeneous ~         | معادلة متجانسة       |
| Linear ~              | معادلة خطية          |
| Partial differential  | معادلة تفاضلية جزئية |
| Euclidean space       | فضاء اقليدي          |
| Even                  | زوجي                 |
| Exact                 | تام                  |
| Expand                | منشور                |
| F                     |                      |
| Factor                | عامل - معامل         |

|                 |                           |
|-----------------|---------------------------|
| Finite set      | مجموعة منتهية             |
| flux            | تدفق                      |
| Function        | دالة                      |
| Implicit ~      | دالة ضمنية                |
| Odd ~           | دالة فردية                |
| Triangular ~    | دالة مثلثية               |
| Fundamental     | أساسي                     |
|                 | H                         |
| Homogeneous     | متجانس                    |
| Hyperboloid     | مجسم قطع زائد             |
| ~ of one sheet  | مجسم قطع زائد وحيد الفرع  |
| ~ of two sheets | مجسم قطع زائد ثنائي الفرع |
|                 | I                         |
| Identity        | متطابقة                   |
| Image           | صورة                      |
| Imaginary       | تخيلي                     |
| Improper        | معطل (شاذ)                |
| Indefinite      | غير محدد                  |
| Independent     | مستقل                     |
| Infinite        | لامنته                    |
| Initial         | ابتدائي                   |
| Integrable      | قابل للمكاملة (كمول)      |

|                       |              |
|-----------------------|--------------|
| Integral              | تكاملي       |
| Double ~              | تكاملي ثنائي |
| Line ~                | تكاملي خطي   |
| Surface ~             | تكاملي سطحي  |
| Triple ~              | تكاملي ثلاثي |
| Inverse               | عكسي         |
| Jacobian              | يعقوبي       |
| Level Surface         | سطح سوية     |
| Limit                 | نهاية        |
| Limits of an integral | حدود التكامل |
| Line                  | خط           |
| Linear correlation    | ارتباط خطي   |
| Local                 | محلي - موضعي |
| Main                  | رئيسي        |
| Map                   | تطبيق        |
| Maximum               | قيمة عظمى    |
| Minimum               | قيمة صغرى    |
| Neighborhood          | جوار         |
| Normal                | ناظم         |

Number

عدد

O

Operator

مؤثر

~ Laplacian

مؤثر لابلاس

Opposite

متقابل

Order

مرتبة

Ordinary

عادي

Orientation

توجيه

Origin

نقطة الأصل (المبدأ)

Orthogonal

متعامد

P

Paraboloid – elliptic

مجسم قطع مكافئ - ناقصي

Paraboloid – hyperbolic

مجسم قطع مكافئ - زائدي

Parameter

وسيط

Pencil

حزمة

Perpendicular

عمودي

Plane

مستو

Plumb

شاقولي

Point

نقطة

Boundary ~

نقطة محيطية

End ~

نقطة نهاية

Interior ~

نقطة داخلية



|                    |               |
|--------------------|---------------|
| Multiple ~         | نقطة مضاعفة   |
| Saddle ~           | نقطة تسرج     |
| Polar angle        | زاوية قطبية   |
| Polar axis         | محور قطبي     |
| Pole               | قطب           |
| Primary            | أولي          |
| Product            | جداء          |
| Inner ~            | جداء داخلي    |
| Outer ~            | جداء خارجي    |
| Mixed ~            | جداء مختلط    |
| Vector ~           | جداء متجهي    |
| Radius             | نصف قطر       |
| Range              | مدى           |
| Reduction of order | تخفيض المرتبة |
| Region             | منطقة         |
| Closed ~           | منطقة مغلقة   |
| Simple ~           | منطقة بسيطة   |
| Removable          | قابل للإزالة  |
| Revolution         | دوران         |
| Ring               | حلقة          |
| Root               | جذر           |

Double ~

جذر مضاعف

Simple ~

جذر بسيط

## S

Scalar potential

كمون سلمي

Sectionally continuous

مستمر جزئياً

Sectionally smooth

أملس جزئياً

Sense

منحى

Separation of variables

فصل المتغيرات

Series

متسلسلة

Divergent ~

متسلسلة متباعدة

Convergent ~

متسلسلة متقاربة

Infinite ~

متسلسلة لا منتهية

Power ~

متسلسلة قوى

Single

وحيد

Singular point

نقطة مفردة

Size

حجم

Slope

ميل

Smooth

أملس

Solenoidal

لولبي

Solid

مجسم

Solution

حل

General ~

حل عام

|                           |                 |
|---------------------------|-----------------|
| Particular ~              | حل خاص          |
| Singular ~                | حل شاذ          |
| Trivial ~                 | حل تافه         |
| Uniqueness ~              | حل وحيد         |
| Solvable                  | قابل للحل       |
| Sphere                    | كرة             |
| Straight line             | خط مستقيم       |
| Subset                    | مجموعة جزئية    |
| Successive approximations | تقريبات متتالية |
| Surface                   | سطح             |
| Symmetric                 | متناظر          |
| <b>T</b>                  |                 |
| Tacpoint                  | نقطة تماس       |
| Tangent                   | ماس             |
| Terminating               | منته            |
| Ternary                   | ثلاثي           |
| Theorem                   | مبرهنة          |
| Tow valued                | ثنائي القيمة    |
| Type                      | نمط             |
| <b>U</b>                  |                 |
| Uniform continuity        | استمرار منتظم   |
| Unique                    | وحيد            |

|                 |              |
|-----------------|--------------|
| Unisolvent      | وحيد الحل    |
| Unit            | الواحدة      |
| ~ vector        | متجه الواحدة |
|                 | V            |
| Variable        | متغير        |
| Vector          | متجه (شعاع)  |
| ~ function      | دالة متجهية  |
| ~ potential     | كمون متجهي   |
| Components of ~ | مركبات متجه  |
| Position ~      | متجه الموضع  |
| Vertex          | رأس          |
| Volume          | حجم          |
| Zone            | نطاق         |
|                 | Z            |

## المراجع باللغة العربية

- ١- د. أحمد الدرويش - المعادلات التفاضلية / ٢ - جامعة دمشق - ١٩٩٣.
- ٢- ن. بيسكونوف - التفاضل والتكامل - الجزء الثاني . مترجم - دار مير - موسكو - ١٩٧٧.
- ٣- أ. نيكونوف، أ. سمارسكي - معادلات الرياضيات الفيزيائية / ١ . مترجم - دار مير - موسكو - ١٩٨٤.
- ٤- د. حسن سلوطة - الرياضيات / ٣ - جامعة دمشق - ١٩٩٢.
- ٥- د. حسن نقار - الرياضيات / ٣ - التحليل الرياضي - جامعة حلب - ١٩٩٠.
- ٦- د. خضر الأحمد - الأسس المعاصرة للهندسة التحليلية - جامعة دمشق - ١٩٧٣.
- ٧- د. فوزي دنان - الرياضيات للمهندسين / ٢ و ٥ و ٦ - جامعة دمشق - ١٩٩٦.
- ٨- د. قيصر فيازمنسكي - المعادلات التفاضلية ج ١ و ج ٢ - المركز العربي للتعريب والترجمة والنشر - دمشق - ١٩٩٥.
- ٩- ف. ي. سميرنوف - دروس في الرياضيات العالية - الجزء الثاني، القسم الأول والثاني - مترجم - وزارة التعليم العالي - ١٩٦٩.
- ١٠- د. محمد غشيم، د. محمد وليد البين - الرياضيات / ٤ - التحليل الرياضي - جامعة حلب - ٢٠٠٢.
- ١١- د. محمد سعيد البرني - المعادلات التفاضلية ج ١ و ج ٢ - جامعة دمشق - ١٩٨١.
- ١٢- د. محي الدين البعلي - المعادلات التفاضلية / ١ - جامعة دمشق - ١٩٩٠.
- ١٣- موراي ر. شبيجل - التفاضل والتكامل المتقدم - سلسلة ملخصات شوم - دار ماكجروهيل للنشر - ١٩٧٤.
- ١٤- موراي ر. شبيجل - تحليل المتجهات - سلسلة ملخصات شوم - دار ماكجروهيل للنشر - ١٩٧٧.

١٥- د. هاشم عبد الي، د. محمد عصام عقاد- الرياضيات / ٣ / - جامعة حلب - ١٩٩٠.

١٦- وجيه القدسي - موجز الهندسة التحليلية - جامعة دمشق - ١٩٨٢.



## المراجع الأجنبية

1-Выноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А. Задачи и упражнения по математическому анализу. Книга 1 и 2, Москва. Высшая школа-2000.

2-Гусак А.А. Задачи и упражнения по Высшей математике. Высшая школа, Минск-1973.

3- Каплан И.А. Практические занятия по Высшей математике. Часть IV. Харьков-1966.

4-Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики (Издание седьмое). Москва, Наука-1989.

5-Самойленко А.М., Кивошя С.А., Петестюк Н.А. Дифференциальные уравнения. Примеры и задачи. Москва, Высшая школа-1989.

6-Шибачев В.С. Высшая математика Москва, Высшая школа-1990.

7-Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. Москва, Наука-1992.

8- Фихтенгольц Т.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. III. Москва, Наука-1969.

9- Kracnov M., Kiselev A., Makarenko G., Shikin E. Mathematical analysis for engineers- Volume 2. Mir- Moscow-1990.

10-Jordan D.W., Smith P.S. Mathematical Techniques. Third Edition. Oxford university press-2002.

11- Wolfram Research - [www.mathworld.wolfram.com](http://www.mathworld.wolfram.com)





المدقق اللغوي

كلية الآداب / جامعة دمشق

د. أسامة اختيار

حقوق الطبع والترجمة والنشر محفوظة لمديرية الكتب والمطبوعات

جامعة دمشق  
Damascus University

